

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

# **Formulações Numéricas para Análise de Vigas em Contato com Bases Elásticas**

**AUTOR: WELLINGTON LUÍS ASSIS PEREIRA**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas Metálicas.

Ouro Preto, junho de 2003

*Tenho dezenove anos. Podia ter dezessete. Podia ter vinte e um. Sou indignado, sou alegre, sou puro, sou malicioso, gosto da vida, amo uma garota, amo todas as garotas, odeio as guerras, sou moralista, sou juiz, sou advogado de defesa e de acusação, sou religioso, sou agnóstico, sou um insatisfeito, sou realizado, sou irrealizado, sou um poço de contradição, gesticulo, discuto, provo por  $A + B$  que  $A$  é  $B$  e que  $B$  é  $A$ , não raciocino, penso, às vezes raciocino demais e fundo a cuca, grito, falo em silêncio, sou um vulcão de amor e não sei o que quero, mas sei que quero alguma coisa de melhor para mim e para o mundo.*

*Sou indispensável, meus pais me idolatram, meus pais se frustraram comigo, idolatro meus pais e me frustro com eles, faço falta e, às vezes, incomodo quem me ama, agrido os que vivem por mim e chego a me empolgar pelos que não querem nada comigo. Sou basicamente um tolo, como o são todos os adultos de minha vida. O homem é isso mesmo.*

*Tenho muitas idéias que penso que são minhas e descubro que são dos outros. Plagio-me a mim mesmo e me engano nas minhas certezas, mas muitas vezes acerto em cheio nos meus erros.*

*Sou uma parábola e um evangelho, quando lido por entre linhas. Deus é muito paciente comigo porque só Ele entende que estou buscando aquilo que me espera: A DIGNIDADE DE HOMEM E DE FILHO DE DEUS.*

*Sou o cara mais confuso do mundo, mas sou também o cara mais realista que já passou pela face da terra.*

*Quem não quiser prestar atenção ao que eu digo, pode ficar tranqüilo que um dia terá que passar pelo que estou passando.*

*Acho que sou um resumo de todas as contradições da humanidade e um mostruário de todas as virtudes da mesma. Um adulto é um jovem que cresceu. É uma verdade elementar muito profunda que os homens não entenderam ainda.*

*Você que me viu, ou me vê passando por sua porta, poderá perceber que meu passo é o de alguém que vai a caminho de algum lugar. Não imagine o pior. Pode ser que eu esteja indo conversar com Deus e até mesmo pedir por você.*

*Se alguém quiser saber quem sou, não fique muito confuso: diga simplesmente que você não me conhece muito bem porque sou um pouco de tudo, e que no fundo sou bom e quero ajudar o mundo a ser melhor.*

**DIGA AO MUNDO QUE SOU JOVEM. APENAS ISSO.**

Pe. Zezinho. Diga ao Mundo que Sou Jovem

**A todas as pessoas de bem e também  
Àquelas que acreditam em um mundo melhor**

## Agradecimentos

---

*Certa vez, assistindo a uma reportagem com Paulo Coelho sobre o lançamento de seu mais novo livro, Onze minutos, perguntas vai... respostas vem, e num momento culminante desse programa, o repórter que realizará a entrevista fez a seguinte colocação:*

*–Paulo Coelho, você em sua vida já conseguiu muitas coisas...inclusive entrar para Academia de letras, que por sinal muito contestado em função de seu estilo. Paulo Coelho, não lhe falta mais nada em sua carreira, ou você ainda têm algum sonho que não conseguiu realizar?*

*–A única coisa que eu não quero fazer é **morrer vivo**, respondeu Paulo Coelho, e explicou sua resposta – Enquanto eu estiver vivo lutarei pelo meus sonhos, não desistirei de nenhum...porque o quê nos mantém vivo são nossos sonhos. Na verdade, a palavra sonho quer dizer: uma vontade do coração. Se você tem um sonho, quer seja ser uma pessoa bem sucedida nos negócios, ou simplesmente visitar sua mãe, que há anos não a vê. Acredite, você pode, cê é capaz, cê tem todas as condições do mundo para ir atrás, pois se não fosse assim, você não teria a vontade imensa que existe dentro de você, o de ser feliz...acredite...*

- ➔ A Deus, pela força, pela saúde, pelo entendimento, pela sabedoria, por fim pela missão cumprida;
- ➔ À minha família, pelo encorajamento e apoio nessa fase de minha vida;
- ➔ Ao meu orientador, Profº Ricardo Azoubel, pelos seus ensinamentos, amizade, oportunidade e confiança que colocou em minha pessoa no desenvolvimento desse trabalho;
- ➔ A todos os professores, sei que não são poucos, que me ajudaram em minha formação e passagem pela UFOP nesses dois anos que estive em Ouro Preto;
- ➔ À todos os amigos e colegas que fiz em Minas Gerais, e que não cito nomes pelo fato das poucas linhas que me restam e pelo fato de ser injusto com alguém;
- ➔ À Fundação Gorceix e a USIMINAS pela ajuda financeira.

# Resumo

---

Este trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de duas metodologias capazes de resolver o problema de equilíbrio de vigas com restrições de contato. Essas restrições de contato são impostas aqui por bases elásticas modeladas com um parâmetro de rigidez (modelo de Winkler ou molas discretas), e duas situações de contato são consideradas, a saber: bilateral e unilateral. No caso de contato unilateral, a fundação elástica reage somente às solicitações de compressão; já na situação de contato bilateral, a base reage às solicitações de tração e compressão.

Na primeira parte do trabalho, uma metodologia geral de solução baseada no emprego do método de Rayleigh–Ritz é proposta e usada em seguida para resolver três problemas particulares de vigas com restrições unilaterais de contato. Uma estratégia de solução iterativa, baseada no método de Newton–Raphson, é usada para resolver o sistema de equações não-lineares resultante da formulação do problema.

Na segunda parte da pesquisa, o método dos elementos finitos é usado para discretizar a viga e a fundação elástica, e o problema de contato é tratado diretamente como um problema de minimização, envolvendo somente as variáveis originais do problema, sujeitas às restrições de desigualdade e à condição de complementaridade. Duas formulações são então desenvolvidas (primal e dual) onde as equações relevantes para a solução do problema de contato são escritas na forma de um problema de complementaridade linear (PCL) e resolvidas através do algoritmo de Lemke.

As duas metodologias propostas são analisadas e testadas através de vários exemplos e as respostas obtidas através das implementações computacionais realizadas são comparadas com os resultados encontrados na literatura. Por fim, algumas conclusões sobre as metodologias e as formulações desenvolvidas e implementadas, e sobre as aproximações dos resultados são apresentadas no final do trabalho.

# **Abstract**

---

Two numerical methodologies capable of solving equilibrium problems of beams with contact restraints are presented in this work. These contact constraints are imposed by one parameter elastic foundations model (Winkle's model and discrete spring model) and two contact conditions are considered, i.e.: bilateral and unilateral. In the formulation, special attention is given to the case in which the elastic foundation reacts in compression only, characterizing the contact as unilateral.

In the first part, a general Rayleigh–Ritz type methodology with moveable boundaries is proposed and used here to solve three particular problems of beams under unilateral contact constraint. An iterative solution strategy, based on the Newton–Raphson method, is used to solve the non-linear equation system obtained in the problem formulation.

In the second part, the finite element method is used to model the beam and foundation, and the contact problem is dealt with directly as a minimization problem, involving only the original variables, subjected to inequality constraints and complementarity condition. The relevant equations are presented for two alternative linear complementarity problems (LCP) and solved by Lemke's algorithm. In the first formulation, named primal, the LCP variables are the beam displacements and the elastic foundation reaction, while in the second formulation (dual), the LCP is derived in terms of the elastic foundation reaction only.

The methodologies are illustrated and analyzed by many examples and the results are compared with existing numerical results found in the literature. Some conclusions about the precision of the results, implemented formulations and computational efficiency of these methodologies are presented at the end of the work.

# Sumário

---

<b>Resumo</b> .....	V
<b>Abstract</b> .....	VI
<b>Lista de Figuras</b> .....	X
<b>Lista de Tabelas</b> .....	XIV
<b>Lista de Símbolos</b> .....	XVI
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.2 – OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	3
1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
<b>2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH–RITZ NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO</b> .....	<b>9</b>
2.1 – INTRODUÇÃO.....	9
2.2 – O MÉTODO DE RAYLEIGH–RITZ.....	10
2.3 – MODELO DA BASE ELÁSTICA.....	12
2.3.1 – Modelo de Molas Discretas.....	13
2.3.2 – Modelo Winkler.....	14
2.4 – FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE CONTATO.....	14
2.4.1 – Problema Particular 1: uma região com contato e uma sem contato.....	18
2.4.2 – Problema Particular 2: uma região com contato e duas sem contato.....	24
2.4.3 – Problema Particular 3: duas regiões com contato e uma sem contato.....	31

<b>3</b>	<b> APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO</b>	<b>36</b>
	3.1 – INTRODUÇÃO. ....	36
	3.2 – TEORIA DA VIGA DE TIMOSHENKO. ....	37
	3.3 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA SEM CONTATO. ....	39
	3.4 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO BILATERAL. ....	48
	3.5 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO UNILATERAL. ....	51
	3.5.1 – Formulação Primal. ....	56
	3.5.2 – Formulação Dual. ....	60
<b>4</b>	<b> PROGRAMAS COMPUTACIONAIS</b>	<b>62</b>
	4.1 – INTRODUÇÃO. ....	62
	4.2 – PROGRAMA COMPUTACIONAL 1: MÉTODO DE RAYLEIGH–RITZ. ....	63
	4.2.1 – Sub-rotina SOLLINEAR. ....	64
	4.2.2 – Sub-rotina SOLNLINEAR. ....	65
	4.3 – PROGRAMA COMPUTACIONAL 2: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. ....	68
	4.3.1 – Sub-rotina SOLPC. ....	72
	4.3.2 – Sub-rotina SOLPCU. ....	73
<b>5</b>	<b> EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO</b>	<b>76</b>
	5.1 – INTRODUÇÃO. ....	76
	5.2 – CONSIDERAÇÕES GERAIS. ....	78
	5.3 – PROBLEMA DE CONTATO 1: Viga isostática com uma região de contato e uma sem contato. ....	80
	5.4 – PROBLEMA DE CONTATO 2: Viga isostática com uma região de contato e duas sem contato. ....	90
	5.5 – PROBLEMA DE CONTATO 3: Viga isostática com duas regiões de contato e uma sem contato. ....	99

5.6 – PROBLEMA DE CONTATO 4:	
Viga hiperestática com uma região de contato e uma sem contato. . . . .	107
5.7 – PROBLEMA DE CONTATO 5:	
Viga hiperestática com uma região de contato e duas sem contato. . . . .	111
5.8 – PROBLEMA DE CONTATO 6:	
Viga em contato apenas com uma base elástica e sujeita a uma carga concentrada. . . . .	115
5.9 – PROBLEMA DE CONTATO 7:	
Viga em contato apenas com uma base elástica e sujeita a uma carga uniformemente distribuída. . . . .	125
<b>6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS</b>	<b>131</b>
6.1 – CONCLUSÕES. . . . .	131
6.2 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS. . . . .	134
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>135</b>
<b>Apêndice A</b>	<b>139</b>
A.1 – INTRODUÇÃO. . . . .	139
A.2 – O MÉTODO DE LEMKE. . . . .	141

# **Lista de Figuras**

---

## **Capítulo 2**

Figura 2.1 – Modelo de molas discretas (Silva, 1998). . . . .	13
Figura 2.2 – Modelo de Winkler (Hetényi, 1946). . . . .	14
Figura 2.3 – Sistema estrutural com restrição de contato. . . . .	15
Figura 2.4 – Estratégia de solução não-linear. . . . .	15
Figura 2.5 – Primeiro problema particular de contato unilateral: (a) sistema estrutural; (b) forma da deformada. . . . .	18
Figura 2.6 – Segundo problema particular de contato unilateral: (a) primeira proposta do sistema estrutural; (b) Segunda proposta do sistema estrutural; (c) forma da deformada. . . . .	24
Figura 2.7 – Terceiro problema particular de contato unilateral: (a) primeira proposta do sistema estrutural; (b) Segunda proposta do sistema estrutural; (c) forma da deformada. . . . .	31

## **Capítulo 3**

Figura 3.1 – Deformação da seção transversal da viga: (a) Teoria de viga esbelta; (b) Teoria de viga espessa. . . . .	38
Figura 3.2 – Elementos isoparamétricos usados neste trabalho na modelagem das vigas. . . . .	41
Figura 3.3 – Problema de contato bilateral entre uma viga e uma base elástica. . . . .	49
Figura 3.4 – Problema de contato unilateral entre uma viga e uma base elástica. . . . .	52
Figura 3.5 – Domínio de validade das restrições de contato. . . . .	55

## **Capítulo 4**

Figura 4.1 – Fluxograma do programa principal: solução modal. . . . .	63
Figura 4.2 – Procedimentos adotados no processo de Newton–Raphson. . . . .	66

Figura 4.3 – Exemplo de um arquivo de dados para a solução do problema de contato unilateral. . . . .	68
Figura 4.4 – Fluxograma do programa principal: solução via MEF. . . . .	69
Figura 4.5 – Esquema simplificado do programa. . . . .	71
Figura 4.6 – Definição da matriz de rigidez usada na análise. . . . .	72
Figura 4.7 – Exemplo de arquivo de entrada de dados: solução via MEF. . . . .	75

## Capítulo 5

Figura 5.1 – Problemas de contato analisados neste capítulo. . . . .	77
Figura 5.2 – Primeiro problema de contato. . . . .	80
Figura 5.3 – Viga em contato bilateral com uma base elástica do tipo Winkler com momento aplicado no apoio extremo A. . . . .	82
Figura 5.4 – Deflexão lateral da viga para o Problema 1: PCB. . . . .	85
Figura 5.5 – Deflexão lateral da viga para o Problema 1: PCB. . . . .	85
Figura 5.6 – Deflexão lateral $w$ da viga, Problema 1–PCU. . . . .	87
Figura 5.7 – Rotação $\theta$ da viga, Problema 1–PCU. . . . .	87
Figura 5.8 – Reação $R_b$ da base elástica, Problema 1–PCU. . . . .	88
Figura 5.9 – Comparação dos problemas de contato, Problema 1. . . . .	88
Figura 5.10 – Formulação primal x Formulação dual–Problema 1. . . . .	89
Figura 5.11 – Segundo problema de contato unilateral. . . . .	90
Figura 5.12 – Viga em contato bilateral com uma base elástica do tipo Winkler com momentos fletores nos apoios e carga concentrada no centro. . . . .	92
Figura 5.13 – Deflexão lateral $w$ da viga, Problema 2. . . . .	96
Figura 5.14 – Rotação $\theta$ da viga, Problema 2. . . . .	96
Figura 5.15 – Momento fletor $M$ da viga, Problema 2. . . . .	97
Figura 5.16 – Reação $R_b$ da base elástica, Problema 2. . . . .	97
Figura 5.17 – Formulações dual x Formulação primal, Problema 2. . . . .	98
Figura 5.18 – Comparação dos problemas de contato, Problema 2. . . . .	98
Figura 5.19 – Terceiro problema de contato unilateral. . . . .	99
Figura 5.20 – Configurações deformadas da viga para a situação de contato bilateral. . . . .	102

Figura 5.21 – Deflexão lateral $w$ da viga, Problema 3. ....	103
Figura 5.22 – Rotação $\theta$ da viga, Problema 3. ....	104
Figura 5.23 – Momento fletor $M$ da viga, Problema 3. ....	104
Figura 5.24 – Reação da base elástica $R_b$ , Problema 3. ....	105
Figura 5.25 – Formulação primal x formulações dual, Problema 3. ....	105
Figura 5.26 – Comparação dos problemas de contato, Problema 3. ....	106
Figura 5.27 – Viga contínua, com dois tramos, em contato com uma base elástica do tipo Winkler: (a) sistema estrutural considerado; (b) forma da deformada do sistema. ....	107
Figura 5.28 – Deflexão lateral $w$ da viga, Problema 4. ....	109
Figura 5.29 – Rotação $\theta$ da viga, Problema 4. ....	109
Figura 5.30 – Momento fletor $M$ da viga, Problema 4. ....	110
Figura 5.31 – Reação $R_b$ da base elástica, Problema 4. ....	110
Figura 5.32 – Viga contínua, com três tramos, em contato com uma base elástica do tipo Winkler. ....	111
Figura 5.33 – Deflexão lateral $w$ da viga, Problema 5. ....	113
Figura 5.34 – Rotação $\theta$ da viga, Problema 5. ....	113
Figura 5.35 – Momento fletor $M$ da viga, Problema 5. ....	114
Figura 5.36 – Reação $R_b$ da base elástica, Problema 5. ....	114
Figura 5.37 – Viga em contato apenas com uma base elástica e sujeita a uma carga concentrada no centro. ....	115
Figura 5.38 – Modelo numérico proposto por Nogueira <i>et al.</i> (1990) ....	116
Figura 5.39 – Relação não-linear tensão-deformação adotado por Nogueira <i>et al.</i> (1990) para o elemento de treliça. ....	116
Figura 5.40 – Exemplo da discretização adotada para a viga de comprimento genérico. ....	118
Figura 5.41 – Deflexão lateral $w$ da viga de 12 m, PCB. ....	119
Figura 5.42 – Deflexão lateral $w$ da viga de 12 m, PCU. ....	119
Figura 5.43 – Reação $R_b$ da base elástica para viga de 12 m, PCB x PCU. ....	120
Figura 5.44 – Deflexão lateral $w$ da viga de 6 m, PCB. ....	121
Figura 5.45 – Deflexão lateral $w$ da viga de 6 m, PCU. ....	122

Figura 5.46 – Rotação $\theta$ da viga de 6 m, PCB x PCU. . . . .	122
Figura 5.47 – Reação $R_b$ da base elástica para viga de 6 m, PCB x PCU. . . . .	123
Figura 5.48 – Deflexão lateral $w$ da viga de 3 m. . . . .	124
Figura 5.49 – Deflexão lateral $w$ da viga de 1.5 m. . . . .	124
Figura 5.50 – Viga em contato apenas com uma base elástica e sujeita a uma carga uniformemente distribuída no centro. . . . .	125
Figura 5.51 – Viga de comprimento “infinito” em contato com uma base elástica do tipo Winkler e sujeita a carregamento uniformemente distribuído. . .	126
Figura 5.52 – Viga de comprimento finito em contato com uma base elástica do tipo Winkler e sujeita a carregamento uniformemente distribuído $q$ . . . . .	127
Figura 5.53 – Deflexão lateral $w$ da viga de 12 m, PCB. . . . .	128
Figura 5.54 – Deflexão lateral $w$ da viga de 12 m, PCU. . . . .	129
Figura 5.55 – Reação $R_b$ da base elástica para viga de 12 m, PCB x PCU. . . . .	129
Figura 5.56 – Deflexão lateral $w$ da viga de 3 m, carga uniformemente distribuída $q$ . . . . .	130

## **Apêndice A**

Figura A.1 – Algoritmo de Lemke. . . . .	148
Figura A.2 – Significado mecânico do algoritmo de Lemke. . . . .	149

# Lista de Tabelas

---

## Capítulo 3

Tabela 3.1 – Quadratura de Gauss-Legendre para $-1 \leq \xi \leq +1$ . . . . .	47
--	----

## Capítulo 4

Tabela 4.1 – Variáveis presentes no arquivo de dados. . . . .	67
Tabela 4.2 – Declaração dos macro-comandos. . . . .	70

## Capítulo 5

Tabela 5.1 – Valores para os coeficientes de empenamento $\alpha$ . . . . .	79
Tabela 5.2 – Análise de convergência do PSC: MRR. . . . .	81
Tabela 5.3 – Análise de convergência do PSC: MEF – Elemento 1. . . . .	81
Tabela 5.4 – Análise de convergência do PSC: MEF – Elemento 2. . . . .	82
Tabela 5.5 – Análise de convergência do PSC: MEF – Elemento 3. . . . .	82
Tabela 5.6 – Solução analítica para vários valores do parâmetro de rigidez elástico adimensional da base elástica ( $k = KL^4/EI$ ). . . . .	83
Tabela 5.7 – Análise de convergência do PCB, MRR. . . . .	84
Tabela 5.8 – Análise de convergência do PCB, MEF – Elemento 1. . . . .	84
Tabela 5.9 – Análise de convergência do PCB, MEF – Elemento 2. . . . .	84
Tabela 5.10 – Análise de convergência do PCB, MEF – Elemento 3. . . . .	84
Tabela 5.11 – Análise de convergência do PSC, MRR. . . . .	91
Tabela 5.12 – Análise de convergência do PSC, MEF: Elementos 1, 2 e 3. . . . .	91
Tabela 5.13 – Solução analítica para vários valores do parâmetro de rigidez elástico adimensional $k$ da base elástica ( $k = KL^4/EI$ ). . . . .	93
Tabela 5.14 – Análise de convergência, MRR. . . . .	93
Tabela 5.15 – Análise de convergência, MEF: Elemento 1. . . . .	94
Tabela 5.16 – Análise de convergência, MEF: Elemento 2. . . . .	94
Tabela 5.17 – Análise de convergência, MEF: Elemento 3. . . . .	94
Tabela 5.18 – Modelagens adotadas para solução numérica do PCB. . . . .	94

Tabela 5.19 – Resultados do problema sem contato (PSC) . . . . .	100
Tabela 5.20 – Solução analítica para vários valores do parâmetro de rigidez elástico adimensional $k$ da base elástica ( $k = KL^4/EI$ ) . . . . .	100
Tabela 5.21 – Valores de $N$ e NELEM adotados na modelagem do problema de contato bilateral (PCB) . . . . .	100
Tabela 5.22 – Análise de convergência do PCB, MRR. . . . .	101
Tabela 5.23 – Análise de convergência do PCB, MEF: Elemento 1. . . . .	101
Tabela 5.24 – Análise de convergência do PCB, MEF: Elemento 2. . . . .	101
Tabela 5.25 – Análise de convergência do PCB, MEF: Elemento 3. . . . .	101
Tabela 5.26 – Valores de $N$ e NELEM adotados na modelagem do problema de contato unilateral (PCU) . . . . .	103
Tabela 5.27 – Valores do parâmetro NELEM adotados na modelagem do problema de contato bilateral (PCB) . . . . .	108
Tabela 5.28 – Valores do parâmetro NELEM adotados na modelagem do problema de contato unilateral (PCU) . . . . .	108
Tabela 5.29 – Valores do parâmetro NELEM adotados na modelagem do problema de contato bilateral (PCB) . . . . .	112
Tabela 5.30 – Valores do parâmetro NELEM adotados na modelagem do problema de contato unilateral (PCU) . . . . .	112
Tabela 5.31 – Modelos de elementos finitos adotados, carga concentrada. . . . .	118
Tabela 5.32 – Modelos de elementos finitos adotados, carga distribuída. . . . .	128

## **Apêndice A**

Tabela A.1 – Inicialização do processo . . . . .	144
Tabela A.2 – Resultados obtidos através da operação do pivoteamento. . . . .	144

# Lista de Símbolos

---

## SÍMBOLOS ARÁBICOS

<b>A</b>	vetor que contém as variáveis desconhecidas da região de contato
A	área da seção transversal
a, b, c, x'	distância
<b>B</b>	matriz que relaciona as componentes de deformação com os deslocamentos nodais do elemento
<b>C</b>	matriz de acoplamento entre a fundação e a estrutura
C	tensão de compressão
$C_b$	propriedade física da fundação
$D_b$	flexibilidade, $D_b = 1 / C_b$
<b>D</b>	matriz constitutiva do material
dy	variável que define a condição de contorno à translação
E	módulo de elasticidade longitudinal
e	base do logaritmo leperiano ou natural (= 2,71828183...)
e	letra usada para indicar um elemento genérico
EI	rigidez à flexão da viga
el	número de elementos
Elemento 1	elemento finito isoparamétrico com dois pontos nodais
Elemento 2	elemento finito isoparamétrico com três pontos nodais
Elemento 3	elemento finito isoparamétrico com quatro pontos nodais
Erro	erro calculado em percentagem (%) dado pela diferença existente entre a solução analítica e a numérica
<b>F</b>	vetor das forças nodais total da estrutura
$\mathbf{F}_e$	vetor das forças externas
$\mathbf{F}_i$	vetor das forças internas
$F_i$	carga pontual ( $P_i$ ; $M_i$ )
$\ \mathbf{F}_e\ $	norma Euclidiana do vetor do carregamento externo
G	módulo de elasticidade transversal

$\mathbf{g}$	vetor gradiente, $\mathbf{g} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e$
$\ \mathbf{g}^{(k-1)}\ $	norma Euclidiana do vetor das forças desequilibradas
$\mathbf{H}$	matriz hessiana
$I$	momento de inércia em relação ao eixo de flexão
imp	parâmetro de controle de impressão
$J$	operador jacobiano
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez global do sistema estrutural
$K$	parâmetro de rigidez da base elástica ou fundação
$k$	parâmetro de rigidez adimensional da base elástica, $k = KL^4/EI$
$\mathbf{K}_E$	matriz de rigidez da estrutura
$\mathbf{K}_B$	matriz de rigidez da base elástica
$\mathbf{K}_b^e$	matriz de rigidez da base elástica para um elemento genérico
$\mathbf{K}^e$	matriz de rigidez da viga para um elemento genérico
$K_i$	parâmetro de rigidez elástico da mola em contato com o nó $i$
$L$	comprimento longitudinal da viga
$l_e$	comprimento do elemento genérico
$lx$	distância entre dois pontos consecutivos do elemento finito
LLDEF	número que define a dimensão da matriz que contém os graus de liberdade usado no algoritmo de Lemke (0: primal; 1: dual)
$M_1, M_2, M_0, M$	momento fletor
$n$	número de semi-ondas; número de pontos nodais
$nc$	número de ponto da estrutura em contato com a base elástica
$ncase$	número de casos de cargas
$ncd$	número de elemento com carga distribuída
$ndime$	número da dimensão do problema
$ndofn$	número de graus de liberdade por nó
NELEM 1	número de elementos associado ao Elemento 1
NELEM 2	número de elementos associado ao Elemento 2
NELEM 3	número de elementos associado ao Elemento 3
$ne$	número total de elementos usados na modelagem
$nedge$	número que define a leitura de cargas distribuídas

$n_{elem}$	número de elementos
$N_i$	componente da matriz que contém as funções de interpolação
$N_r$	matriz que contém as funções de interpolação associada à $r_b$
$N_w, N_\theta$	matriz que contém as funções de interpolação associada ao deslocamento nodal
$ng$	número que define a geração automática
$ngaus$	número de pontos de Gauss para integração numérica
$ngelm$	número de grupos de elementos
$nimax$	número máximo de iterações usados no processo de Newton–Raphson
$nmats$	número de materiais
$nnode$	número de pontos nodais por elemento
$no$	número de pontos nodais
$np$	número de pontos para deflexão a ser impresso
$npload$	número que define a leitura de cargas concentradas
$nplot$	indicador de plotagem
$npmat$	número de parâmetro para materiais
$npsec$	número de parâmetro para seções
$npi$	número total de pontos de integração
$npoin$	número de pontos nodais
$nsecs$	número de seções
$ntype$	variável que define o tipo de análise do problema de contato para o caso do método de Rayleigh–Ritz e dos elementos finitos
$P$	carga concentrada
$q$	carga uniformemente distribuída
$q^e$	força nodal equivalente
$r_b$	reação exercida pela base elástica
$r_b^e$	vetor que contém a reação à compressão da base elástica relacionada ao valor nodal
$S$	matriz que contém as coordenadas que definem a região de contato
$S$	rigidez cisalhante, $S = GA/\alpha$

<b>S<sub>c</sub></b>	vetor que contém as coordenadas que definem a região de contato
S <sub>c</sub>	região de contato
S <sub>f</sub>	contorno onde as forças são prescritas
S <sub>u</sub>	região da estrutura onde os deslocamentos são prescritos
<b>T</b>	matriz de flexibilidade
T	tensão de tração
t, t <sub>i</sub> , t <sub>f</sub>	coordenada que define a região de contato entre a viga e a fundação
título	título do exemplo processado
theta	variável que define a condição de contorno à rotação
told	tolerância do processo iterativo, critério dos deslocamentos
tolf	tolerância do processo iterativo, critério das forças
<b>U</b>	vetor de deslocamento total da estrutura
U	energia interna de deformação
U <sub>b</sub>	energia interna de deformação devido a contribuição da fundação
<b>u<sup>e</sup></b>	vetor deslocamento nodal do elemento genérico
u	função estacionária do funcional Π <sub>p</sub>
u <sub>e</sub>	solução exata do problema
u <sub>i</sub>	deslocamento pontual (w <sub>i</sub> ; θ <sub>j</sub> )
x, y	coordenada cartesiana ou distância
<b>w</b>	vetor de deslocamento
w	deflexão lateral da viga
w <sub>b</sub>	deslocamento da base elástica
w <sub>c</sub>	deflexão lateral da viga em um ponto arbitrário C
w <sub>0</sub>	deflexão lateral do ponto no meio da viga
$\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{M}, \bar{V}$	deslocamento, rotação, momento fletor e força cortante prescritos

## SÍMBOLOS GREGOS

<b>α</b> , alpha	fator de empenamento
<b>α<sub>ij</sub><sup>e</sup></b>	parcela de contribuição de energia da estrutura
<b>α<sub>i</sub>, W<sub>i</sub>, W<sub>j</sub></b>	parâmetro ajustável ou variável arbitrária
<b>α<sub>ij</sub><sup>b</sup>, α<sub>ij</sub><sup>f1</sup>, α<sub>ij</sub><sup>f2</sup>, α<sub>ij</sub><sup>f3</sup></b>	parcela de contribuição de energia da fundação

$\alpha_{ij}^{M_1}, \alpha_{ij}^{M_2}, \alpha_i^P, \alpha_i^Q$	parcela de contribuição de energia do carregamento externo
$\delta\alpha_i$	variação arbitrária do parâmetro ajustável $\alpha_i$
$\delta\Pi_p$	variação do funcional de energia potencial total $\Pi_p$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vetor de deformação, $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \quad \gamma_{xy}\}$
$\varepsilon$	deformação
$\varepsilon_x$	deformação específica na direção x
$\phi$	ângulo de rotação adicional devido ao cisalhamento
$\Phi_i$	função de aproximação
$\gamma_{xy}$	deformação de cisalhamento no plano xy
$\varphi$	distância relativa entre a viga e a fundação, $\varphi = w_b - w$
$\lambda$	parâmetro da fundação, $\lambda^4 = K / 4EI$
$\Pi_p, \Pi$	funcional de energia potencial total
$\pi$	constante trigonométrica (= 3,14159265...)
$\theta$	ângulo de rotação dos eixos da viga, $\theta = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi$
$\boldsymbol{\sigma}$	vetor de tensão, $\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \quad \tau_{xy}\}$
$\sigma$	tensão normal
$\sigma_x$	tensão normal no plano perpendicular ao eixo x
$\tau_{xy}$	tensão de cisalhamento perpendicular ao eixo y e paralela ao eixo x
$\xi$	coordenada natural; fator de tolerância fornecido pelo usuário
$\xi_i$	coordenada do ponto de integração
$\xi_1$	fator de tolerância adotado no critério de convergência
$\Omega$	energia potencial das forças externas
$\omega_i$	peso associado ao ponto de integração
$\frac{\partial w}{\partial x}$	ângulo de rotação em relação a linha neutra

# Capítulo 1

---

## INTRODUÇÃO

### 1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Na prática, elementos estruturais como vigas, arcos, placas e cascas encontram-se ligados entre si e/ou apoiados em outros corpos ou meios que oferecem resistência ao movimento em certas direções ou impedem tal movimento. Os problemas onde a estrutura pode entrar ou perder contato com outros corpos, ou mesmo deslizar sobre o seu apoio, são usualmente encontrados na literatura sob a denominação “*Problemas de Contato Unilateral*” (Barbosa, 1986; Silveira, 1995; Silva, 1998).

Como já destacado em Silveira (1995), nas engenharias civil e mecânica existem inúmeros problemas estruturais onde a inclusão das restrições unilaterais de contato na análise é de fundamental importância na identificação e descrição de diversos fenômenos. Merece destaque, por exemplo, a análise do comportamento de elementos estruturais usados como:

- estruturas de fundação;
- trilhos de ferrovias;
- tubulações enterradas;
- tubulações (pipeline) em contato com o fundo do mar;
- pavimentos;
- estruturas flutuantes;
- peças de materiais compósitos;
- cascas de proteção em ambientes agressivos (usinas nucleares);
- articulações com folgas;
- apoios unidirecionais.

Nesta dissertação, atenção especial será dada à modelagem das duas primeiras classes de problemas citados, que normalmente interessa a engenheiros estruturais e geotécnicos.

Em geral, o primeiro passo para a obtenção da solução numérica de problemas de contato consiste em reformulá-los em espaços de aproximação. Para isto recorre-se geralmente ao método dos elementos finitos (MEF) ou ao método dos elementos de contorno (MEC), que são as técnicas de discretização normalmente empregada na análise de problemas estruturais complexos.

Após a discretização, a atenção é voltada para a seleção e escolha de metodologias que possibilitem o tratamento, de forma adequada, das restrições unilaterais de contato impostas à análise, e que normalmente requerem que o problema tenha dimensão finita. Entre as alternativas encontradas na literatura, pode-se destacar:

(i) a adaptação de formulações usuais da mecânica estrutural — funcionais diferenciáveis e restrições bilaterais — ao caso do contato envolvendo restrições unilaterais. Os procedimentos resultantes, que são forçosamente de natureza iterativa, ou incremental-iterativa, freqüentemente não têm garantias de convergência. Essa classe de procedimentos tem como atrativos: não introduzir conceitos novos; a adaptação de códigos já existentes para análises não-lineares; o tratamento de problema de contato como um tipo particular de problema não-linear; e a economia de tempo computacional se nenhuma mudança na região de contato acontece entre um passo e outro de carga, isso no caso de procedimento incremental-iterativo (Francavilla e Zienkiewicz, 1975; Stein e Wriggers, 1984; Nogueira *et al.*, 1990; Pereira *et al.*, 2002);

(ii) a transformação do problema de contato em um problema de minimização sem restrição. Essa transformação depende diretamente da aplicação de métodos como multiplicadores de Lagrange, Lagrangiano aumentado e penalidades. O emprego desses métodos consiste, na maioria dos casos, em introduzir elementos especiais projetados para simular as condições de impenetrabilidade das superfícies (Simo *et al.*, 1985; Simo *et al.*, 1986; Wriggers e Inhof, 1993; Maker e Laursen, 1994);

(iii) o emprego de métodos de programação matemática (PM). Essa última abordagem permite obter a solução do problema de contato sem que as restrições unilaterais sejam eliminadas explicitamente da análise, sendo assim mantida a filosofia

original do problema (Ascione e Grimaldi, 1984; Barbosa, 1986; Joo e Kwak, 1986; Johnson e Quigley, 1989; Silveira, 1995; Silva, 1998; Silva *et al.*, 2001; Silveira e Gonçalves, 2001).

A primeira e terceira alternativas serão adotadas neste trabalho para o tratamento das restrições de contato impostas à análise.

## 1.2 – OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação tem como objetivos principais o desenvolvimento e a implementação computacional de duas metodologias para solução do problema de equilíbrio de vigas com restrições de contato. Essas restrições de contato são impostas por bases elásticas. Nas metodologias de solução propostas, atenção especial será dada ao caso em que a fundação elástica reage somente às solicitações de compressão, caracterizando assim o contato como *unilateral*. No caso em que a fundação reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão, o contato será denominado *bilateral*. Nas análises a serem realizadas, os efeitos das forças de atrito, decorrente do contato entre os corpos são desconsiderados, haja visto que nos problemas dessa natureza essas forças não são tão importantes.

Os tópicos necessários para o entendimento e a validação das metodologias propostas serão apresentados nos demais capítulos que compõem este trabalho.

A primeira proposta de solução do problema de contato unilateral entre uma viga e uma base elástica é descrita no Capítulo 2. Destaca-se, inicialmente, que essa metodologia de solução é baseada na aplicação do método de Rayleigh–Ritz (MRR) juntamente com a técnica iterativa de Newton–Raphson. Trata-se da adoção da primeira alternativa descrita na seção anterior para modelagem numérica das restrições de contato. Nesse mesmo capítulo são apresentados os fundamentos do MRR e os modelos de bases elásticas considerados.

No Capítulo 3 é apresentada a outra metodologia de solução para a classe do problema de contato em estudo, que é baseada no emprego do método dos elementos finitos (MEF) e técnicas de programação matemática. A Teoria de Timoshenko é usada para a viga e são apresentados os elementos finitos isoparamétricos implementados na

discretização do sistema estrutural (viga e base elástica). Nas duas últimas seções desse capítulo são descritas as formulações que visam transformar o problema de minimização com restrições de contato em um problema de complementaridade linear (PCL).

Um resumo dos procedimentos adotados na implementação computacional das metodologias propostas nos Capítulos 2 e 3 pode ser encontrado no Capítulo 4.

No Capítulo 5 são analisados sete problemas de contato, que tem como objetivo validar as metodologias propostas neste trabalho.

No Capítulo 6, finalmente, são apresentadas as conclusões e também algumas sugestões para futuras pesquisas.

Vale informar que esta dissertação está inserida na linha de pesquisa *Mecânica Computacional*, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC/Deciv/EM/UFOP), que tem por objetivo a aplicação de métodos numéricos, como o MEF e o MEC, na obtenção das respostas de sistemas estruturais em engenharia (Silva, 1998; Martins, 2000; Manzi, 2001; Dors, 2002; Alberto, 2002; Pinheiro, 2003); e ainda, é importante destacar que ela é parte integrante de um amplo projeto denominado *Modelagem Computacional do Problema de Contato*, que tem como coordenador o orientador desta pesquisa.

Por fim, pode-se considerar o presente trabalho uma continuação direta de outras pesquisas, a saber: Silveira (1995), Silva (1998), Andrade (2001) e Pereira *et al.* (2002). O primeiro trabalho citado teve como objetivo o desenvolvimento de uma metodologia de solução numérica capaz de resolver problemas bidimensionais de equilíbrio e estabilidade envolvendo elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato; Silva (1998) estudou o comportamento de placas espessas e delgadas com restrições de contato; e em Andrade (2001) e Pereira *et al.* (2002) podem ser encontrados os fundamentos da solução modal (MRR) apresentada no Capítulo 2 desta dissertação.

### 1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção tem o propósito de complementar e atualizar pesquisas bibliográficas já realizadas nos trabalhos de Silveira (1995) e Silva (1998). No primeiro trabalho citado, uma ampla revisão bibliográfica foi realizada e organizada de acordo com as estratégias de solução do problema de contato; já em Silva (1998), ênfase foi dada aos trabalhos envolvendo placas com restrições de contato.

Em 1964, Kerr (1964) apresentou um artigo contendo vários modelos de fundação, tais como: Winkler, Pasternak, Reissner, Vlasov, entre outros. Nesse trabalho, ele definiu as equações matemáticas que regem o comportamento desses modelos de fundação.

Weitsman (1970), em seus estudos, assumiu que as tensões de tração não eram transmitidas entre os corpos elásticos em contato (vigas ou placas e fundação elástica). No modelo proposto, uma força concentrada foi aplicada no sistema estrutural e os modelos de base elástica do tipo Winkler e do tipo Reissner foram considerados.

Uma metodologia de solução foi apresentada por Johnson e Kouskoulas (1973) para o problema de uma viga sobre fundação bi-linear e sobre base elástica que não oferecesse resistência à tração, onde se considerou para a viga finita a teoria de Euler–Bernoulli e condições de carregamento transversal arbitrário.

O emprego de métodos variacionais para formular o problema de contato de vigas apoiadas continuamente em bases elásticas foi proposto por Kerr (1976). As equações diferenciais apresentadas foram obtidas através do princípio da energia potencial total estacionária.

A análise de uma viga tipo Euler–Bernoulli “infinitamente” longa repousando sobre uma fundação do tipo Winkler foi apresentada por Choros e Adams (1979). A solução desse problema foi obtida analisando-se o rebaixamento do sistema estrutural causado por uma carga móvel concentrada atuando com velocidade constante. Um estudo para se determinar a carga crítica de separação entre a viga e a fundação foi também apresentado.

Em 1980, Celep (1980), continuando a investigação inicialmente elaborada por Smith e Hermann (1972), estudou a influência de uma fundação elástica do tipo Winkler na estabilidade de uma viga em balanço, sujeita a um carregamento atuante não-

conservativo, Celep considerou em suas análises os módulos da fundação transversal e rotacional, e uma solução aproximada foi obtida usando o método de Galerkin.

Maceri *et al.* (1980) fizeram um estudo sobre vigas apoiadas em uma fundação do tipo Pasternak considerando o contato entre os corpos como unilateral. Nesse trabalho, o problema não-linear foi descrito através do contato da viga com um certo trecho da base elástica, e considerando a ação de forças externas como momentos fletores, forças concentradas e/ou distribuída.

Uma estratégia numérica foi proposta por Westbrook (1981), baseada no emprego do MEF e restrições de desigualdade, capaz de resolver problemas de contato de vigas em presença de obstáculos rígidos.

Malaika e Abu-Hussein (1988) apresentaram um estudo de vigas elásticas repousando sobre uma fundação do tipo Winkler, que reagiam apenas aos esforços de compressão, sujeitas à carregamentos externos dependentes do tempo. A equação diferencial não-linear de movimento foi obtida através da utilização do método de Galerkin.

Nogueira *et al.* (1990) propuseram uma solução numérica baseada no MEF para o problema de contato unilateral entre vigas e bases elásticas do tipo Winkler. Foram usados o elemento isoparamétrico com quatro pontos nodais para modelar a viga e o elemento finito não-linear de treliça para representar o comportamento da base elástica; o método de Newton–Raphson foi adotado na solução do sistema de equações não-lineares.

Em 1993, Kaschiev e Mikhajlov (1993) também usaram o MEF e o método de Newton para resolver o problema de contato de uma viga sobre uma fundação do tipo Winkler, que reagia somente às solicitações de compressão.

Como já comentado, uma solução numérica para resolver problemas de equilíbrio e estabilidade de elementos estruturais esbeltos com restrições de contato, impostas por bases elásticas, foi apresentada por Silveira (1995). Na metodologia de solução proposta foram utilizados o MEF e as técnicas de programação matemática. Como consequência desse trabalho, vários artigos foram publicados em seguida, ou seja: Silveira e Gonçalves (1997, 2000, 2001).

Também em 1995, Shen (1995) apresentou uma análise do comportamento pós-flambagem de uma placa retangular ortotrópica e simplesmente apoiada. Em seguida,

atenção foi dada à análise não-linear de placas laminadas compósitas apoiadas em uma fundação elástica (Shen e Williams, 1995). E, finalmente, foi elaborado um estudo por Shen (1996) sobre a flambagem termodinâmica de placas moderadamente espessas apoiadas em uma fundação elástica não-linear.

Barp (1996) apresentou uma estratégia de solução incremental-iterativa para placas submetidas a grandes deslocamentos com restrições unilaterais; o efeito da força de atrito foi considerado e um elemento finito de nove pontos nodais foi desenvolvido.

Dando continuidade à pesquisa inicialmente desenvolvida por Silveira, Silva (1998) propôs uma metodologia numérica para análise de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato que são impostas por bases elásticas. O efeito decorrente da força de atrito entre a placa e a base elástica foi desprezado. O MEF foi usado para discretizar a placa e a base elástica, e o problema de contato unilateral foi tratado diretamente como um problema de minimização. Como consequência dessa dissertação destaca-se a seguinte publicação: Silva *et al.* (2001).

Em sua pesquisa de doutoramento, Martins (1998) estudou o problema de vibração forçada amortecida de vigas sobre fundação elástica, sendo adotados para esta última os modelos de Winkler e Pasternak. O caso de vibração de vigas sobre apoios pontuais foi também analisado.

Landenberger e EI-Zafrany (1998) desenvolveram uma técnica para análise de problemas de contato considerando o acoplamento de sub-regiões através do MEF e MEC.

Um estudo da interação solo-estrutura foi apresentado por Pereira (1999), com aplicação voltada às estacas usadas na fundação de plataformas marítimas.

Em 2000, os pesquisadores Guo Xiaoming *et al.* (2000) apresentaram uma formulação incluindo desigualdade variacional para análise de problemas de contato elastoplástico. A solução numérica foi obtida através de técnicas de programação matemática. Nesse mesmo ano, von Estorff e Firuziaan (2000) investigaram a interação dinâmica solo-estrutura como uma formulação acoplada do MEC/MEF. Eles aplicaram essa investigação em respostas transientes inelásticas de estruturas em contato a um semi-espaço.

Holanda (2000), em sua tese de doutorado, desenvolveu uma metodologia baseada no MEF para estudar o equilíbrio e a estabilidade de placas perfeitas e

inicialmente imperfeitas apoiadas em fundações elásticas. A formulação utilizada pode ser empregada nas análises linear e não-linear (deslocamentos moderadamente grandes) de placas isotrópicas ou ortotrópicas.

Em 2001, Bandeira (2001) desenvolveu, se baseando no MEF e em algoritmos de programação matemática, um estudo sobre problemas de contato em 3D, onde foram incluídas as forças de atrito.

Estudos mais recentes foram realizados por Luciano *et al.* (2002), que utilizaram o MEC na modelagem de solos reforçados 2D. Adicionalmente, foram utilizados elementos de barras esbeltas para representar o reforço (fibras) reagindo apenas aos esforços normais, sendo o campo de deslocamento assumido constante ao longo da seção transversal da fibra. Nesse mesmo ano, uma metodologia geral de solução modal para análise não-linear de vigas com restrições unilaterais de contato foi proposta por Pereira *et al.* (2002). Nesse trabalho, uma fundação do tipo Winkler reagindo somente às solicitações de compressão foi considerada e a técnica iterativa de Newton–Raphson foi usada para resolver o sistema de equações não-lineares.

Por fim, Pereira (2003), em dissertação desenvolvida e concluída recentemente no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFOP, resolveu o problema de contato envolvendo solos reforçados através de um modelo computacional baseado no MEF. No modelo proposto, a representação do comportamento do solo foi feita com a utilização do elemento plano (Q8), para o reforço foram usados os elementos unidimensionais de treliça, e para a interface adotou-se o elemento de interface com espessura nula.

## Capítulo 2

---

### APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH–RITZ NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO

#### 2.1 – INTRODUÇÃO

A determinação da resposta de uma viga carregada sobre o solo é um problema clássico na engenharia civil. Modelos simplificados da fundação são usualmente adotados para modelar o solo, ou seja, considerando o comportamento da fundação elástica idêntico tanto às solicitações de tração quanto às de compressão. Entretanto, uma modelagem mais realística do solo seria obtida caso os modelos não considerassem na sua formulação a reação às solicitações de tração, o que caracterizaria o contato entre a viga e o solo como unilateral.

Para resolver essa classe de problema, apresenta-se neste capítulo o desenvolvimento de uma metodologia geral de solução através do emprego do método de Rayleigh–Ritz. Atenção será dada aos problemas de equilíbrio de barras sujeitas à restrições unilaterais de contato, onde desprezam-se os efeitos decorrentes do atrito existente entre uma viga e a base elástica.

Na Seção 2.2 encontra-se os fundamentos do método de Rayleigh–Ritz, enquanto que na Seção 2.3 são mostrados os modelos de bases elásticas que serão utilizados na análise do problema de contato.

A Seção 2.4 apresenta os detalhes da metodologia geral de solução do problema de contato proposta. Partindo-se do indicador variacional do sistema estrutural e em seguida requerendo-se que o funcional seja estacionário em relação às variáveis primárias do problema, chega-se num conjunto de equações algébricas não-lineares. A técnica iterativa de Newton–Raphson é usada aqui para solução desse sistema de equações não-lineares.

Finalmente, nas Subseções 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3 são apresentados três problemas particulares de contato usando o método de solução proposta.

## 2.2 – O MÉTODO DE RAYLEIGH–RITZ

O método de Rayleigh–Ritz é assim chamado pelo fato de ter sido desenvolvido pelo Lorde Rayleigh, em 1877, para resolver problemas de vibração. O físico suíço Walter Ritz, em 1908, refinou e generalizou o método desenvolvido por Rayleigh, fazendo aplicações para uma grande variedade de problemas, inclusive análise de vigas.

Sabe-se do cálculo variacional, que as funções que satisfazem as condições de contorno e são continuamente diferenciáveis, até a ordem necessária para que o funcional seja definido no seu domínio de validade, são chamadas *funções admissíveis*. O método de Rayleigh–Ritz, conforme encontrado na literatura, opera apenas com um subconjunto de funções admissíveis, determinando qual é a função do subconjunto mais próxima da solução exata do problema (Brebbia e Ferrante, 1978). Assim, não se obtém o mínimo ou máximo real e sim um valor aproximado, cuja precisão irá depender das funções escolhidas.

Para ilustrar o método, considere o problema da determinação de uma função  $u(x)$  que corresponde ao valor estacionário do funcional, ou seja, que faz com que a energia potencial total abaixo

$$\Pi_p = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u_e, u_{e,x}) , \quad (2.1)$$

onde  $u_e$  é considerada a solução exata do problema, tenha um valor mínimo; considere ainda que as condições de contorno sejam dadas por:

$$u_e(x_1) = u_e(x_2) = 0 \quad (2.2)$$

Assume-se, então, que a solução do problema possa ser aproximada por uma série de funções, mas com certos parâmetros  $\alpha_i$ , indeterminados, presentes na sua definição, isto é:

$$u_e \cong u = \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \dots + \alpha_n \Phi_n \quad (2.3)$$

onde as funções  $\Phi_i$ , além de serem linearmente independentes, cada uma individualmente deve satisfazer as condições de contorno representada pela Equação (2.2), ou seja:

$$\Phi_i(x_1) = \Phi_i(x_2) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Observando o funcional  $\Pi_p$  (Equação 2.1), nota-se que as funções  $\Phi_i$  devem ser contínuas, mas suas primeiras derivadas podem ser descontínuas. Substituindo  $u_e$  por  $u$  na Equação (2.2), e fazendo com que este funcional seja estacionário em relação às variáveis arbitrárias do problema, ou seja, em relação aos parâmetros ajustáveis  $\alpha_i$ , chega-se a:

$$\delta\Pi_p = \frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_1} \delta\alpha_1 + \frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_2} \delta\alpha_2 + \dots + \frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_n} \delta\alpha_n = 0 \quad (2.5)$$

e como  $\delta\alpha_i$  são variações arbitrárias, a equação anterior para ser sempre satisfeita, implica em considerar que:

$$\frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_i} = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

que correspondem às equações de equilíbrio do problema e devem ser resolvidas para obtenção dos parâmetros  $\alpha_i$ .

Esse método apresenta as seguintes condições de convergência:

1. As funções aproximadas devem ser contínuas, assim como suas derivadas, até uma ordem inferior à maior derivada que aparece no funcional;
2. As funções aproximadas devem satisfazer, individualmente, as condições de contorno essenciais (ou condições cinemáticas) do problema;
3. A seqüência de funções deve ser completa, ou seja, o erro quadrático médio destas funções deve se anular quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} \left( u - \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i \right)^2 dx = 0 \quad (2.7)$$

Em se tratando de análise estrutural, pode-se aproximar os deslocamentos ou forças da estrutura através de uma função de forma que contenha um ou mais parâmetros indeterminados. Em seguida, utilizando-se o princípio da energia potencial estacionária, deriva-se a energia em relação a cada um dos parâmetros ajustáveis e iguala-se a zero. Desse modo, obtém-se um número de equações que é igual ao número de parâmetros ajustáveis desconhecidos. De posse desses parâmetros, chega-se na função usada para descrever o comportamento estrutural.

Nas análises em que a função é escolhida de forma apropriada, ou seja, nos casos onde a função obedece as condições de contorno geométricas da estrutura, os resultados finais tendem para o valor exato e, além disso, quanto mais parâmetros ajustáveis se admitir para a função, mais precisos serão os resultados obtidos.

Uma grande vantagem do método é que, por basear-se no princípio da energia potencial estacionária, é aplicável tanto a estruturas estaticamente determinadas quanto às estaticamente indeterminadas.

### 2.3 – MODELO DA BASE ELÁSTICA

O principal objetivo deste trabalho é a investigação de problemas de contato entre dois corpos, dos quais um deles é considerado como uma base elástica deformável. Esse tipo de problema, na prática, é resolvido considerando-se vários modelos matemáticos simplificados.

A dificuldade encontrada na representação mais realística dessa categoria de problema, fez surgir a necessidade de modelos matemáticos relativamente simples para descrever, com razoável precisão, o comportamento da base elástica na região de contato.

Os modelos matemáticos considerados mais simples são aqueles que apresentam apenas um parâmetro definindo as propriedades do material que compõe a fundação

elástica. Assim, dentre esses modelos, destacam-se o sistema de molas discretas dispostas ao longo da região de contato (Nogueira *et al.*, 1990; Silveira, 1995; Silva, 1998) e o modelo proposto por Winkler (Hetényi, 1946). Esse último modelo é equivalente a uma camada formada por molas estreitamente espaçadas e independentes entre si. Esses modelos não consideram a interação entre as molas, portanto, não representam de forma adequada algumas das características de muitas fundações.

A seguir, são apresentados os modelos de base elástica citados no parágrafo anterior, pois serão empregados no presente trabalho na descrição da metodologia proposta para solução dessa classe de problema de contato.

### 2.3.1 – Modelo de Molas Discretas

Este modelo de fundação é representado por um sistema de apoios discretos constituídos por molas, como mostrado na Figura 2.1, sendo a reação da base elástica dada por:

$$r_b = Kw_b \Big|_{x=x_i} \quad (2.8)$$

onde  $r_b$  e  $w_b$  são, respectivamente, a reação e o deslocamento da base elástica,  $K$  representa o parâmetro de rigidez da mola na posição  $x = x_i$ , que caracteriza o ponto da estrutura e da base elástica que estão em contato.

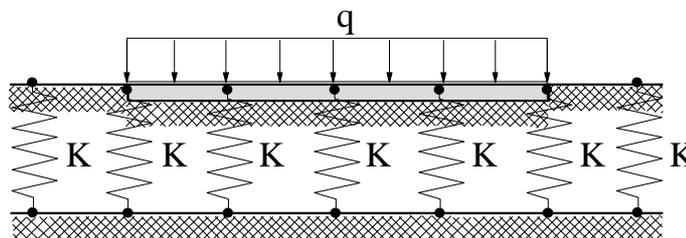


Figura 2.1 – Modelo de molas discretas (Silva, 1998).

### 2.3.2 – Modelo de Winkler

A Figura 2.2 ilustra o modelo de Winkler usado para representar a fundação, sendo assumido que a intensidade da reação normal  $r_b$  exercida em um dado ponto da base elástica é diretamente proporcional à deflexão  $w_b$  que ocorre nesse ponto, ou seja,

$$r_b = Kw_b \quad (2.9)$$

onde  $K$  é o parâmetro de rigidez da fundação. Esse tipo de modelo é usado com mais frequência para representar as bases elásticas.

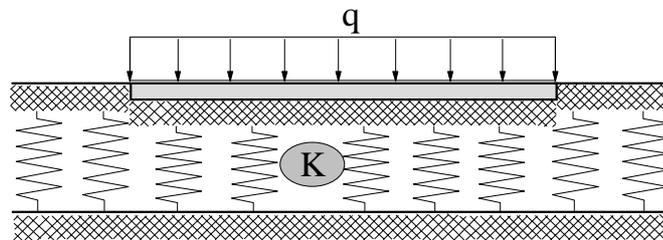


Figura 2.2 – Modelo de Winkler (Hetényi, 1946).

## 2.4 – FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE CONTATO

Considere, inicialmente, como mostrado na Figura 2.3, um elemento estrutural em contato com uma base elástica do tipo Winkler, e submetida à carregamento conservativo. Para o sistema estrutural em estudo, considerando ainda que essa base elástica só reage às solicitações de compressão, o funcional de energia (indicador variacional) pode ser escrita como:

$$\Pi(\mathbf{w}, \mathbf{S}_c) = U(\mathbf{w}, \mathbf{S}_c) - \mathbf{F}_e^T \mathbf{w} \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{F}_e$  é o vetor das forças externas e  $U$  é a energia interna de deformação, que é função do vetor deslocamento  $\mathbf{w}$  e do vetor  $\mathbf{S}c$  que contém as coordenadas que definem a extensão da região de contato ( $s_k$ ). Essas coordenadas são consideradas incógnitas adicionais do problema, pois não se conhece *a priori* a região de contato.

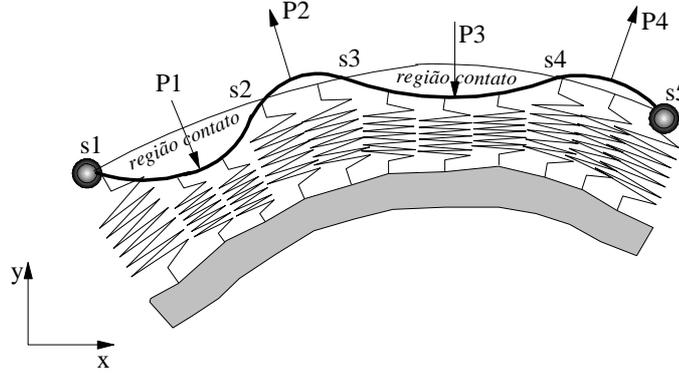


Figura 2.3 – Sistema estrutural com restrição de contato.

Uma pequena variação na energia potencial,  $\delta\Pi$ , pode ser avaliada através da expansão em serie de Taylor, ou seja,

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{w}} \delta\mathbf{w} + \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{S}c} \delta\mathbf{S}c + \frac{1}{2} \left[ \delta\mathbf{w}^T \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{w}^2} \delta\mathbf{w} + 2\delta\mathbf{w}^T \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{w}\partial\mathbf{S}c} \delta\mathbf{S}c + \delta\mathbf{S}c^T \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{S}c^2} \delta\mathbf{S}c \right] + O(\delta\mathbf{w}^3, \mathbf{S}c^3) \quad (2.11)$$

ou, usando uma notação matricial mais compacta:

$$\delta\Pi = \mathbf{g}^T \delta\mathbf{A} + \frac{1}{2} (\delta\mathbf{A}^T \mathbf{H} \delta\mathbf{A}) + O(\delta\mathbf{A}^3) \quad (2.12)$$

onde o vetor  $\mathbf{A}$  contém as variáveis primárias desconhecidas do problema ( $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{S}c$ ),  $\mathbf{g}$  é o vetor gradiente (vetor das forças desequilibradas) e  $\mathbf{H}$  representa a matriz Hessiana do sistema estrutural, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{w}^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{w} \partial \mathbf{Sc}} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{Sc} \partial \mathbf{w}} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{Sc}^2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

que é obtida derivando-se a parcela da energia interna de deformação dada pela Equação (2.10), em relação à  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{Sc}$ .

Para o equilíbrio do sistema, a primeira variação da Equação (2.12) deve ser estacionária com relação à  $\delta \mathbf{A}$ , portanto:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{g}^T = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{w}} & \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Sc}} \end{matrix} \right\} = \{ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \} \quad (2.14)$$

que pode ser rescrita de acordo com:

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

sendo  $\mathbf{F}_i$  e  $\mathbf{F}_e$  os vetores das forças internas e externas, respectivamente. A equação anterior representa o sistema de equações algébricas não-lineares que deve ser resolvido.

O vetor das forças externas  $\mathbf{F}_e$  é obtido derivando-se a parcela da energia potencial das forças externas (Equação 2.10) em relação à  $\mathbf{w}$ , enquanto que, para obter o vetor das forças internas, deriva-se a parcela da energia interna de deformação em relação à  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{Sc}$ .

A Figura 2.4 fornece o algoritmo de solução adotado, que é baseado na técnica iterativa de Newton–Raphson (Bathe, 1982), para resolver a Equação (2.15). Observe que são necessárias duas fases para obtenção da solução do problema, a saber: (1) a fase predita, onde faz-se a inicialização de  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{Sc}$  ( $\mathbf{A}^0$ ); (2) a fase corretiva, onde essas aproximações são corrigidas com o intuito de satisfazer as equações de equilíbrio do sistema estrutural. O critério de convergência é baseado na norma Euclidiana dos vetores de forças  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{F}_e$ , e no Capítulo 4 são fornecidos os detalhes da implementação computacional envolvendo o algoritmo da Figura 2.4.

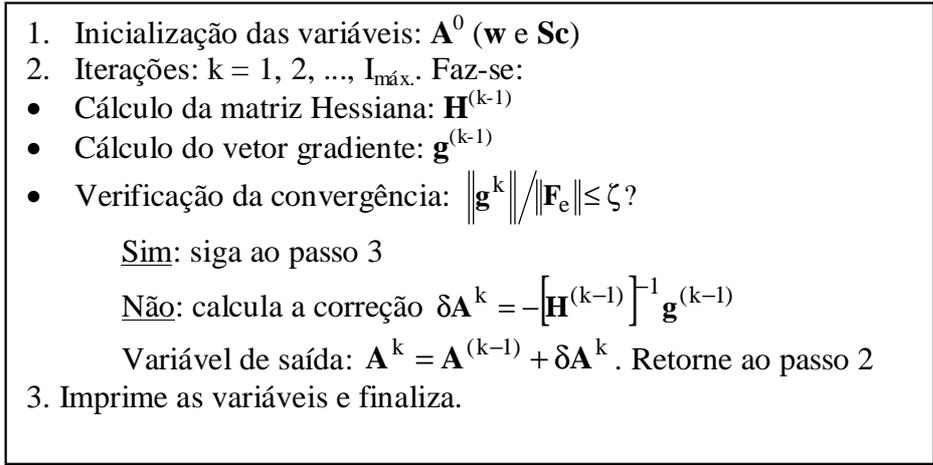


Figura 2.4 – Estratégia de solução não-linear.

Os procedimentos estabelecidos nesta seção serão empregados a seguir na solução de três problemas particulares de contato unilateral.

### 2.4.1 – Problema Particular 1: uma região com contato e uma sem contato

Seja a viga de comprimento longitudinal  $L$  e rigidez à flexão  $EI$ , conforme mostrado na Figura 2.5a, perfeitamente reta, simplesmente apoiada e carregada por momentos fletores  $M_1$  e  $M_2$  aplicados nos apoios extremos. Caso se considere uma fundação elástica do tipo Winkler que só reage à compressão, então, para essa situação de carregamento, observa-se que a barra se deformará de acordo com a Figura 2.5b.

Para esse primeiro problema, a expressão que define a energia potencial do sistema, é dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t Kw^2 dx - M_1 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} - M_2 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} \quad (2.16)$$

onde o limite de integração  $t$  presente na parcela da energia interna da fundação é uma incógnita adicional do problema, pois não se conhece *a priori* a extensão da região de contato viga-fundação.

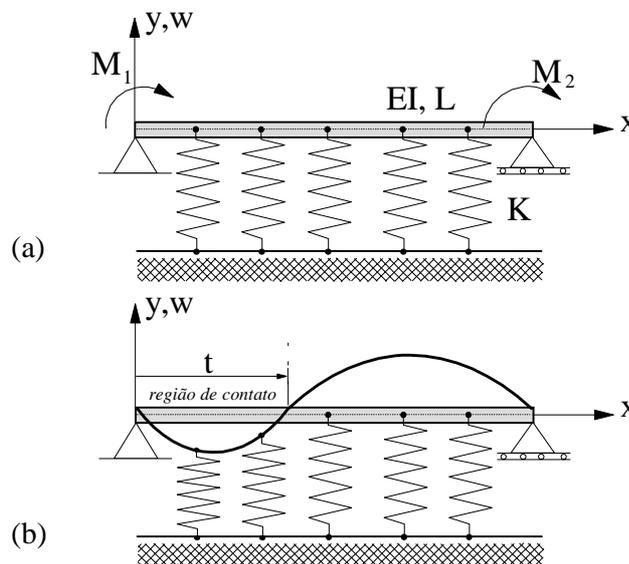


Figura 2.5 – Primeiro problema particular de contato unilateral.

Para se obter a solução modal do problema, recorre-se ao método de Rayleigh–Ritz. Como já mencionado, a aplicação desse método está vinculada às considerações e princípios variacionais. Semelhante a outras técnicas numéricas, o método de Rayleigh–Ritz caracteriza-se por “reduzir” o contínuo a um sistema finito de graus de liberdade.

Inicialmente, aproxima-se a deflexão lateral  $w$  da viga usando-se a seguinte combinação linear de funções harmônicas:

$$w = \sum_i^n W_i \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.17)$$

onde  $i$  é o número de meias ondas longitudinais e  $W_i$  são os parâmetros ajustáveis que passam a ser as incógnitas do problema. Observa-se que as funções harmônicas satisfazem individualmente as condições de contorno cinemáticas de uma viga bi-apoiada.

De acordo com a Equação (2.16) e a aproximação anterior pode-se escrever que:

$$w^2 = \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) = \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[(i-j)\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] - \cos\left[(i+j)\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] \right\} \quad (2.18a)$$

$$\frac{dw}{dx} = \sum_i^n W_i \frac{i\pi}{L} \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.18b)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\sum_i^n W_i \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.18c)$$

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 = \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \left(\frac{ij\pi^2}{L^2}\right)^2 \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[(i-j)\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] - \cos\left[(i+j)\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] \right\} \quad (2.18d)$$

Substituindo-se então as expressões definidas em (2.17) e (2.18) no indicador variacional (2.16), e em seguida fazendo-se a integração necessária, chega-se numa forma aproximada para  $\Pi$ , função dos parâmetros  $W_i$  e da variável  $t$ , dada por:

$$\Pi = \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^e + \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^b - \sum_i^n M_1 W_i \alpha_i^{M_1} \Big|_{x=0} - \sum_i^n M_2 W_i \alpha_i^{M_2} \Big|_{x=L} \quad (2.19)$$

onde  $\alpha_{ij}^e$ ,  $\alpha_{ij}^b$ ,  $\alpha_i^{M_1}$  e  $\alpha_i^{M_2}$  são as contribuições obtidas das parcelas de energia da estrutura, fundação e carregamento externo, respectivamente, e são expressas por:

$$\alpha_{ij}^e = \frac{EIi^2j^2\pi^3}{4L^3} \left\{ \frac{1}{(i-j)} \text{sen}[(i-j)\pi] - \frac{1}{(i+j)} \text{sen}[(i+j)\pi] \right\} \quad (2.20a)$$

$$\alpha_{ij}^b = \frac{KL}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(i-j)} \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t}{L} \right] - \frac{1}{(i+j)} \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t}{L} \right] \right\} \quad (2.20b)$$

$$\alpha_i^{M_1} = \frac{i\pi}{L} \quad (2.20c)$$

$$\alpha_i^{M_2} = \frac{i\pi}{L} \cos(i\pi) \quad (2.20d)$$

Do princípio da energia potencial estacionária, sabe-se que a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial W_1} \delta W_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial W_2} \delta W_2 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial W_n} \delta W_n = 0 \quad (2.21)$$

Como as variações de  $\delta W_i$  são arbitrárias, a igualdade anterior será sempre verdadeira se:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial W_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

Observe que a equação anterior representa um sistema de n equações algébricas não-lineares, cuja solução ainda não pode ser obtida, pois existem n+1 incógnitas. A incógnita de ordem n+1 é representada pela extensão da região de contato t entre a viga e a fundação. Note, entretanto, que uma equação adicional pode ser obtida requerendo-

se que o indicador variacional do sistema seja estacionário também em relação a variável  $t$ , ou seja:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

que fornece:

$$\sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^f = 0 \quad (2.24)$$

onde:

$$\alpha_{ij}^f = \frac{\partial \alpha_{ij}^b}{\partial t} = \frac{K}{4} \left\{ \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t}{L} \right] - \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t}{L} \right] \right\} \quad (2.25)$$

Desse modo consegue-se obter um sistema de  $n+1$  equações não-lineares que pode agora ser resolvido através da técnica iterativa de Newton–Raphson, conforme ilustrado na Figura 2.4.

No algoritmo apresentado na Figura 2.4, as variáveis usadas podem ser descritas matricialmente de acordo com as expressões abaixo:

$$\mathbf{A}^T = \{W_1 \quad \dots \quad W_i \quad \dots \quad W_n \quad t\} \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial W_n} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j \partial W_n} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j \partial t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial t} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial W_n} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \end{bmatrix}, \quad (2.26b)$$

sendo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial W_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j \partial W_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.26c)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j \partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial t} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \end{bmatrix} \quad (2.26d)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \mathbf{g}^T = \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial W_i} \quad \dots \quad \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right\} = \{ \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \} \quad \text{ou} \quad \mathbf{g} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \quad (2.26e)$$

$\mathbf{F}_i$  e  $\mathbf{F}_e$ , como já definidos, são os vetores das forças internas e externas.

Os termos da matriz Hessiana  $\mathbf{H}$  ( $H_{ij}$ ) são obtidos de acordo com:

- Se  $i = j$ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i^2} = \frac{EI}{2} \frac{i^4 \pi^4}{L^3} + \frac{KL}{2\pi} \left[ \frac{\pi t}{L} - \frac{1}{2i} \operatorname{sen} \left( \frac{2i\pi t}{L} \right) \right] \quad (2.27a)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial W_i} = \frac{K}{2} W_j \left[ 1 - \cos \left( \frac{2i\pi t}{L} \right) \right] \quad (2.27b)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{K}{2} W_i^2 \frac{i\pi}{L} \operatorname{sen} \left( \frac{2i\pi t}{L} \right) \quad (2.27c)$$

- Se  $i \neq j$ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial W_j} = \frac{KL}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(i-j)} \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t}{L} \right] - \frac{1}{(i+j)} \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t}{L} \right] \right\} \quad (2.27d)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial W_i} = \frac{K}{2} \sum_j W_j \left\{ \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t}{L} \right] - \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t}{L} \right] \right\} \quad (2.27e)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \frac{\pi}{L} \left\{ -(i-j) \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t}{L} \right] + (i+j) \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t}{L} \right] \right\} \quad (2.27f)$$

As componentes do vetor das forças internas  $\mathbf{F}_i$  são dadas pelas expressões:

- Se  $i = j$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_i} = \frac{EI}{2} W_i \frac{i^4 \pi^4}{L^3} + \frac{K}{2} W_i \frac{L}{\pi} \left[ \frac{\pi t}{L} - \frac{1}{2i} \text{sen} \left( \frac{2i\pi t}{L} \right) \right] \quad (2.27g)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{K}{2} W_i^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2i\pi t}{L} \right) \right] \quad (2.27h)$$

- Se  $i \neq j$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_i} = \frac{K}{2} \sum_j W_j \frac{L}{\pi} \left\{ \frac{1}{(i-j)} \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t}{L} \right] - \frac{1}{(i+j)} \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t}{L} \right] \right\} \quad (2.27i)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \left\{ \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t}{L} \right] - \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t}{L} \right] \right\} \quad (2.27j)$$

Finalmente, a componente  $i$  do vetor das forças externas  $\mathbf{F}_e$  é obtida fazendo-se:

$$F_e(i) = \frac{\partial \Pi}{\partial W_i} = M_1 \frac{i\pi}{L} + M_2 \frac{i\pi}{L} \cos(i\pi) \quad (2.27k)$$

### 2.4.2 – Problema Particular 2: uma região com contato e duas sem contato

A Figura 2.6a mostra uma viga simplesmente apoiada de comprimento  $L$  e rigidez à flexão  $EI$  com uma carga concentrada  $P$  aplicada no centro e momentos fletores  $M_1$  e  $M_2$  nos apoios extremos. Considere ainda que a viga esteja em contato com uma base elástica do tipo Winkler, que só reage quando comprimida. A Figura 2.6b fornece a mesma viga, porém agora com carga distribuída  $q$  em combinação com os momentos. Para essas situações, dependendo das magnitudes de  $P$ ,  $q$ ,  $M_1$  e  $M_2$ , pode-se obter a deformada da viga representada pela Figura 2.6c. Note nessa figura uma região central em contato definida pelos valores das variáveis  $t_i$  e  $t_f$ , e duas regiões com perda de contato.

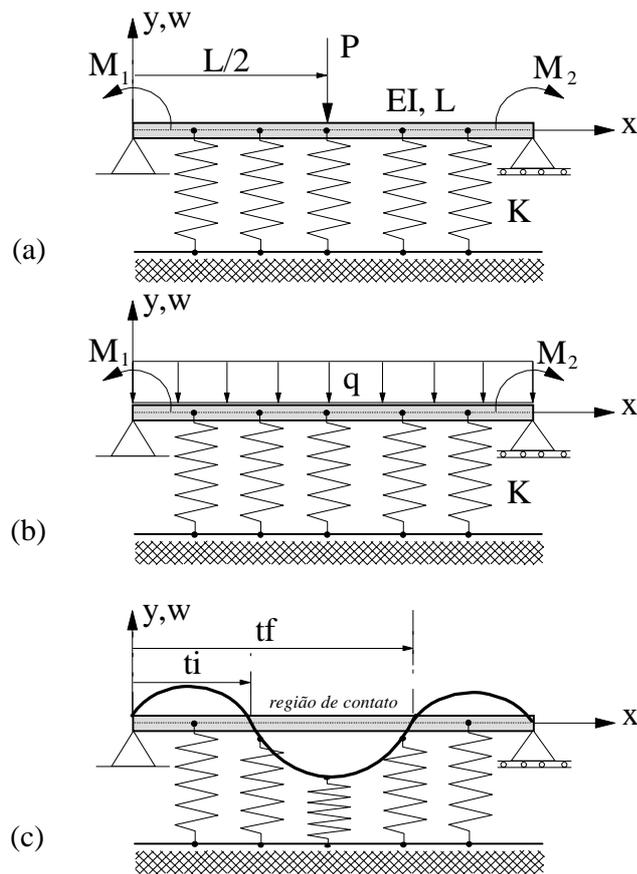


Figura 2.6 – Segundo problema particular de contato unilateral.

Para o sistema estrutural em estudo, a expressão que define a energia potencial total do sistema é dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} K w^2 dx - P w \Big|_{x=L/2} - M_1 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} - M_2 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} \quad (2.28)$$

ou, considerando a contribuição da carga distribuída ao invés da concentrada, tem-se:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} K w^2 dx - \int_0^L q w dx - M_1 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} - M_2 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} \quad (2.29)$$

A mesma combinação linear de funções harmônicas dada pela Equação (2.17) pode ser utilizada para aproximar o comportamento da deflexão lateral da barra. Assim, substituindo-se essa equação e as expressões (2.18) em (2.28), chega-se a uma forma aproximada para  $\Pi$ , função dos parâmetros  $W_i$ ,  $t_i$  e  $t_f$ , dada por:

$$\Pi = \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^e + \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^{f1} - \sum_i^n P W_i \alpha_i^P \Big|_{x=L/2} - \sum_i^n M_1 W_i \alpha_i^{M1} \Big|_{x=0} - \sum_i^n M_2 W_i \alpha_i^{M2} \Big|_{x=L} \quad (2.30)$$

ou, substituindo em (2.29), chega-se a:

$$\Pi = \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^e + \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^{f1} - \sum_i^n q W_i \alpha_i^q - \sum_i^n M_1 W_i \alpha_i^{M1} \Big|_{x=0} - \sum_i^n M_2 W_i \alpha_i^{M2} \Big|_{x=L} \quad (2.31)$$

onde  $\alpha_{ij}^e$ ,  $\alpha_i^{M1}$  e  $\alpha_i^{M2}$  são dados pelas Equações (2.20a,c,d), respectivamente. As parcelas de contribuição da fundação, da carga concentrada  $P$  e da carga distribuída  $q$  são representadas por:

$$\alpha_{ij}^{f1} = \frac{KL}{4\pi} \left[ \frac{1}{(i-j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} - \frac{1}{(i+j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \right] \quad (2.32a)$$

$$\alpha_i^P = \text{sen}\left(\frac{i\pi}{2}\right) \quad (2.32b)$$

$$\alpha_i^Q = \frac{L}{i\pi} [1 - \cos(i\pi)] \quad (2.32c)$$

Do princípio da energia potencial estacionária, sabe-se que a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial W_1} \delta W_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial W_2} \delta W_2 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial W_n} \delta W_n = 0 \quad (2.33)$$

e como as variações de  $\delta W_i$  são arbitrárias, tem-se que a condição dada pela Equação (2.22) também será satisfeita para esse problema, ou seja,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial W_i} = 0 \quad \text{para } i=1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

Mais uma vez, observa-se um sistema não-linear com  $n$  equações algébricas cuja solução não pode ser ainda obtida, pois existem  $n+2$  incógnitas. As incógnitas de ordem  $n+1$  e  $n+2$  são representadas pela extensão da região de contato  $t_i$  a  $t_f$  entre a viga e a fundação. Note, conforme procedimento adotado na seção anterior que duas equações adicionais podem ser obtidas requerendo-se que o indicador variacional do sistema seja estacionário também em relação às variáveis  $t_i$  e  $t_f$ , ou seja:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t_i} = 0 \quad (2.35a)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t_f} = 0 \quad (2.35b)$$

que fornecem:

$$\sum_i^n \sum_j^n W_i W_j (\alpha_{ij}^{f1})_{t_i} = 0 \quad (2.36a)$$

$$\sum_i^n \sum_j^n W_i W_j (\alpha_{ij}^{f1})_{t_f} = 0 \quad (2.36b)$$

onde:

$$(\alpha_{ij}^{f1})_{t_i} = \frac{\partial \alpha_{ij}^{f1}}{\partial t_i} = \frac{K}{4} \left\{ -\cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] + \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \quad (2.37a)$$

$$(\alpha_{ij}^{f1})_{t_f} = \frac{\partial \alpha_{ij}^{f1}}{\partial t_f} = \frac{K}{4} \left\{ \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} \quad (2.37b)$$

Desse modo, chega-se num sistema de n+2 equações não-lineares que também poderá ser resolvido através da técnica iterativa de Newton–Raphson, isto é, seguindo os mesmos passos descrito na Figura 2.4. As variáveis usadas nesse algoritmo de solução não-linear podem ser escritas matricialmente de acordo com as expressões abaixo:

$$\mathbf{A}^T = \{W_1 \quad \dots \quad W_i \quad \dots \quad W_n \quad t_i \quad t_f\}; \quad (2.38a)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial W_n} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial t_i} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial t_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_2 \partial W_n} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_2 \partial t_i} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_2 \partial t_f} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial W_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial t_i} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial t_f} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial W_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial W_n} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial t_f} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial W_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial W_n} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial t_i} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f^2} \end{bmatrix}, \quad (2.38b)$$

sendo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial W_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial W_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_j \partial W_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial W_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial W_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.38c)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial t_i} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_1 \partial t_f} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_2 \partial t_i} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_2 \partial t_f} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial t_i} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_n \partial t_f} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial t_f} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial t_i} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f^2} \end{bmatrix} \quad (2.38d)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \mathbf{g}^T = \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial W_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \Pi}{\partial t_i} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial t_f} \right\} = \{ \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \} \quad \text{ou} \quad \mathbf{g} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \quad (2.38e)$$

Os termos da matriz Hessiana  $\mathbf{H}$  ( $H_{ij}$ ) são dados pelas expressões mostradas a seguir:

- Se  $i = j$ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i^2} = \frac{EI}{2} i^4 \frac{\pi^4}{L^3} + \frac{KL}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{L} (t_f - t_i) - \frac{1}{2i} \left[ \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) - \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) \right] \right\} \quad (2.39a)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t_i} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial W_i} = \frac{K}{2} W_j \left[ -1 + \cos \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) \right] \quad (2.39b)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t_f} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial W_i} = \frac{K}{2} W_j \left[ 1 - \cos \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) \right] \quad (2.39c)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i^2} = -\frac{K}{2} W_i^2 \frac{i\pi}{L} \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) \quad (2.39d)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f^2} = \frac{K}{2} W_i^2 \frac{i\pi}{L} \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) \quad (2.39e)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial t_f} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial t_i} = 0 \quad (2.39f)$$

- Se  $i \neq j$ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial W_j} = \frac{KL}{2\pi} \left[ \frac{1}{(i-j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} - \frac{1}{(i+j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \right] \quad (2.39g)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t_i} = \frac{K}{2} \sum_j W_j \left\{ -\cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] + \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \quad (2.39h)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t_f} = \frac{K}{2} \sum_j W_j \left\{ \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} \quad (2.39i)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i^2} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \frac{\pi}{L} \left\{ (i-j) \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] - (i+j) \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \quad (2.39j)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f^2} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \frac{\pi}{L} \left\{ -(i-j) \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] + (i+j) \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} \quad (2.39k)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial t_f} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial t_i} = 0 \quad (2.39l)$$

Os termos do vetor de forças internas  $\mathbf{F}_i$  são definidos segundo:

- Se  $i = j$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_i} = \frac{EI}{2} W_i \frac{i^4 \pi^4}{L^3} + \frac{K}{2} W_i \frac{L}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{L} (t_f - t_i) - \frac{1}{2i} \left[ \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) - \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) \right] \right\} \quad (2.39m)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t_i} = \frac{K}{4} W_i^2 \left[ -1 + \cos \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) \right] \quad (2.39n)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t_f} = \frac{K}{4} W_i^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) \right] \quad (2.39o)$$

- Se  $i \neq j$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_i} = \frac{K}{2} \sum_j W_j \frac{L}{\pi} \left[ \frac{1}{(i-j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} - \frac{1}{(i+j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \right] \quad (2.39p)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t_i} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \left\{ -\cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] + \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \quad (2.39q)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t_f} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \left\{ \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} \quad (2.39r)$$

Já a componente  $i$  do vetor das forças externas  $\mathbf{F}_e$ , que deverá ser usado também para o próximo problema particular de contato, que é obtida considerando a ação de todas as cargas envolvidas na análise, ou seja:

$$F_e(i) = M_1 \frac{i\pi}{L} + M_2 \frac{i\pi}{L} \cos(i\pi) + P \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi}{2} \right) + \frac{qL}{i\pi} [1 - \cos(i\pi)] \quad (2.39s)$$

### 2.4.3 – Problema Particular 3: duas regiões com contato e uma sem contato

O terceiro e último problema particular a ser analisado neste capítulo é mostrado na Figura 2.7a, onde uma viga de comprimento longitudinal  $L$  e simplesmente apoiada é carregada com uma carga concentrada  $P$  (ou carga distribuída  $q$ , Figura 2.7b) aplicada no centro da barra e momentos fletores nos apoios extremos. Como a fundação do tipo Winkler só reage à compressão, trata-se basicamente do mesmo sistema estrutural mostrado na subseção anterior, porém com alteração no sentido do carregamento. Para certos valores dessas cargas, a barra poderá se deformar de acordo com a Figura 2.7c, gerando assim, duas regiões de contato e uma região com perda de contato.

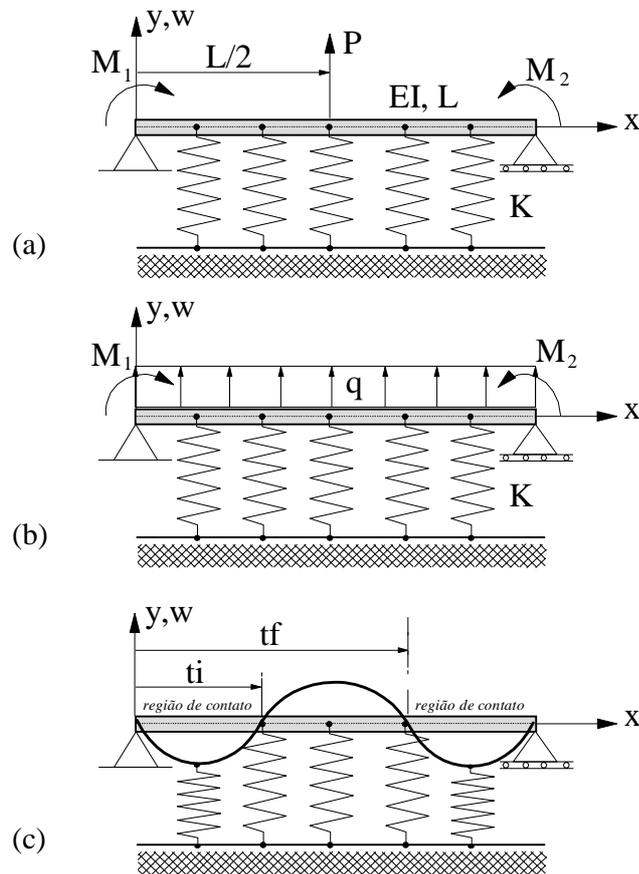


Figura 2.7 – Terceiro problema particular de contato unilateral.

O funcional  $\Pi$  para esse problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{t_i} Kw^2 dx + \frac{1}{2} \int_{t_f}^L Kw^2 dx - Pw \Big|_{x=L/2} - M_1 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} - M_2 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} \quad (2.40)$$

ou, se for considerada a carga distribuída  $q$  ao invés de  $P$ ,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{t_i} Kw^2 dx + \frac{1}{2} \int_{t_f}^L Kw^2 dx - \int_0^L q w dx - M_1 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} - M_2 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} \quad (2.41)$$

onde, novamente os limites de integração  $t_i$  e  $t_f$  presentes na parcela da energia interna da fundação também são variáveis adicionais do problema, pois não se conhece *a priori*, a extensão da região de contato entre a viga e a fundação.

Conforme os dois casos anteriores, usa-se a mesma combinação linear de funções harmônicas senoidais dada pela Equação (2.17), para aproximar o comportamento da deflexão lateral da viga. Substituindo-se essa aproximação e as expressões (2.18) em (2.40), chega-se a uma forma aproximada para  $\Pi$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^e + \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^{f2} + \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^{f3} - \sum_i^n P W_i \alpha_i^P \Big|_{x=L/2} \\ & - \sum_i^n M_1 W_i \alpha_i^{M1} \Big|_{x=0} - \sum_i^n M_2 W_i \alpha_i^{M2} \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (2.42)$$

ou, usando-se (2.41), escreve-se:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^e + \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^{f2} + \sum_i^n \sum_j^n W_i W_j \alpha_{ij}^{f3} - \sum_i^n q W_i \alpha_i^q \\ & - \sum_i^n M_1 W_i \alpha_i^{M1} \Big|_{x=0} - \sum_i^n M_2 W_i \alpha_i^{M2} \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (2.43)$$

com os parâmetros  $\alpha_{ij}^e$ ,  $\alpha_i^{M1}$ ,  $\alpha_i^{M2}$ ,  $\alpha_i^P$  e  $\alpha_i^q$  sendo representados pelas Equações (2.20a,c,d) e (2.32b,c), respectivamente; já as parcelas da fundação são definidas agora de acordo com:

$$\left(\alpha_{ij}^{f2}\right)_{t_i} = \frac{KL}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(i-j)} \operatorname{sen}\left[(i-j)\frac{\pi t_i}{L}\right] - \frac{1}{(i+j)} \operatorname{sen}\left[(i+j)\frac{\pi t_i}{L}\right] \right\} \quad (2.44)$$

$$\left(\alpha_{ij}^{f3}\right)_{t_f} = \frac{KL}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(i-j)} \left[ \operatorname{sen}[(i-j)\pi] - \operatorname{sen}\left[(i-j)\frac{\pi t_f}{L}\right] \right] - \frac{1}{(i+j)} \left[ \operatorname{sen}[(i+j)\pi] - \operatorname{sen}\left[(i+j)\frac{\pi t_f}{L}\right] \right] \right\} \quad (2.45)$$

Do princípio da energia potencial estacionária, sabe-se que:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial W_1} \delta W_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial W_2} \delta W_2 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial W_n} \delta W_n + \frac{\partial\Pi}{\partial t_i} \delta t_i + \frac{\partial\Pi}{\partial t_f} \delta t_f = 0 \quad (2.46)$$

onde já estão incluídas as parcelas das variáveis adicionais do problema ( $t_i$  e  $t_f$ ). Como as variações  $\delta W_i$ ,  $\delta t_i$  e  $\delta t_f$  são arbitrárias, a igualdade acima será sempre verdadeira se:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial W_i} = 0 \quad \text{para } i=1, 2, \dots, n \quad (2.47a)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t_i} = 0 \quad (2.47b)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t_f} = 0 \quad (2.47c)$$

que representam um sistema de  $n+2$  equações não-lineares, que pode então ser resolvido através do algoritmo fornecido na Figura 2.4. As Equações (2.47b) e (2.47c) podem ser definidas segundo:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j \left(\alpha_{ij}^{f2}\right)_{t_i} = 0 \quad (2.48a)$$

$$\sum_i^n \sum_j^n W_i W_j (\alpha_{ij}^{f3})_{t_f} = 0 \quad (2.48b)$$

onde:

$$(\alpha_{ij}^{f2})_{t_i} = \frac{\partial \alpha_{ij}^{f2}}{\partial t_i} = \frac{K}{4} \left\{ \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] - \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \quad (2.49a)$$

$$(\alpha_{ij}^{f3})_{t_f} = \frac{\partial \alpha_{ij}^{f3}}{\partial t_f} = \frac{K}{4} \left\{ -\cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] + \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} \quad (2.49b)$$

Assim, os termos da matriz Hessiana  $\mathbf{H}$  ( $H_{ij}$ ) para o problema em estudo são:

- Se  $i = j$ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i^2} = \frac{EI}{2} i^4 \frac{\pi^4}{L^3} + \frac{KL}{2\pi} \left\{ \pi + \frac{\pi}{L} (t_i - t_f) - \frac{1}{2i} \left[ \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) - \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) \right] \right\} \quad (2.50a)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t_i} = \frac{K}{2} W_j \left[ 1 - \cos \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) \right] \quad (2.50b)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t_f} = \frac{K}{2} W_j \left[ -1 + \cos \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) \right] \quad (2.50c)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i^2} = \frac{K}{2} W_i^2 \frac{i\pi}{L} \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) \quad (2.50d)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f^2} = -\frac{K}{2} W_i^2 \frac{i\pi}{L} \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) \quad (2.50e)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial t_f} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial t_i} = 0 \quad (2.50f)$$

- Se  $i \neq j$ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial W_j} = \frac{KL}{2\pi} \left[ \frac{1}{(i-j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} + \frac{1}{(i+j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \right] \quad (2.50g)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t_i} = \frac{K}{2} \sum_j W_j \left\{ \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] - \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \quad (2.50h)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial W_i \partial t_f} = \frac{K}{2} \sum_j W_j \left\{ \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} \quad (2.50i)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i^2} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \frac{\pi}{L} \left\{ (i+j) \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] - (i-j) \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \quad (2.50j)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f^2} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \frac{\pi}{L} \left\{ (i-j) \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - (i+j) \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} \quad (2.50k)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_i \partial t_f} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t_f \partial t_i} = 0 \quad (2.50l)$$

E finalmente as componentes do vetor de forças internas  $\mathbf{F}_i$  são representados pelas expressões:

- Se  $i = j$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_i} = \frac{EI}{2} W_i \frac{i^4 \pi^4}{L^3} + \frac{K}{2} W_i \frac{L}{\pi} \left\{ \pi + \frac{\pi}{L} (t_i - t_f) - \frac{1}{2i} \left[ \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) - \text{sen} \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) \right] \right\} \quad (2.50m)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t_i} = \frac{K}{4} W_i^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2i\pi t_i}{L} \right) \right] \quad (2.50n)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t_f} = \frac{K}{4} W_i^2 \left[ -1 + \cos \left( \frac{2i\pi t_f}{L} \right) \right] \quad (2.50o)$$

- Se  $i \neq j$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_i} = \frac{K}{2} \sum_j W_j \frac{L}{\pi} \left[ \frac{1}{(i-j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} + \frac{1}{(i+j)} \left\{ \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \text{sen} \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \right] \quad (2.50p)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t_i} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \left\{ \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_i}{L} \right] - \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_i}{L} \right] \right\} \quad (2.50q)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t_f} = \frac{K}{4} \sum_i \sum_j W_i W_j \left\{ \cos \left[ (i+j) \frac{\pi t_f}{L} \right] - \cos \left[ (i-j) \frac{\pi t_f}{L} \right] \right\} \quad (2.50r)$$

## Capítulo 3

---

# APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO

### 3.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar uma metodologia de solução, baseada no emprego do método dos elementos finitos (MEF), para o problema de equilíbrio de vigas com restrições de contato impostas por uma fundação elástica.

Como no capítulo anterior, apenas o modelo de Winkler (ou molas discretas) será usado na definição da fundação.

Na Seção 3.2 são apresentados os fundamentos da Teoria de Timoshenko para vigas, que serão usados na definição dos elementos finitos isoparamétricos implementados. O emprego dessa teoria permite a análise tanto de vigas espessas como esbeltas. A Seção 3.3 é responsável pela apresentação desses elementos finitos isoparamétricos.

Na Seção 3.4, com a introdução da contribuição da base elástica, formula-se o problema de contato bilateral.

Por fim, na Seção 3.5, considera-se o contato entre a viga e base elástica como sendo unilateral, onde são apresentadas duas formulações para solução do problema, a saber: uma envolvendo todas as variáveis primárias do problema, chamada de formulação **Primal**; a segunda formulação é considerada um caso particular da primeira, e é definida como **Dual**. Em ambas formulações, chega-se num problema de complementaridade linear (PCL) que pode ser resolvido através de técnicas de programação matemática.

### 3.2 – TEORIA DA VIGA DE TIMOSHENKO

Uma viga é uma estrutura linear caracterizada por apresentar uma de suas dimensões maior do que as outras duas. Quando essa dimensão, geralmente o comprimento longitudinal, é muito maior que a base e a altura da seção transversal, esse elemento linear é encontrado na literatura sob a denominação de viga esbelta. Caso contrário, define-se a viga como espessa (Shames e Dym, 1985).

Nesta seção, a Teoria da viga de Timoshenko é empregada na formulação de elementos finitos isoparamétricos para modelagem de vigas espessas e esbeltas.

As principais hipóteses adotadas na análise de vigas são tomadas com base no comportamento da sua seção transversal. A teoria clássica de vigas (vigas esbeltas) é caracterizada por apresentar apenas deformação de flexão provocada por carregamentos transversais. As hipóteses consideradas por essa teoria são:

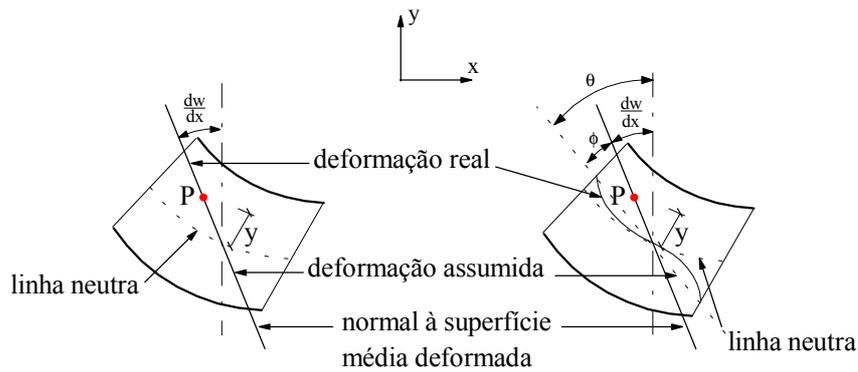
- (i) as normais à superfície média indeformada permanecem normais à superfície média após a deformação da viga;
- (ii) os deslocamentos da viga (deflexão e rotação) são pequenos.

Na Figura 3.1a é mostrado o comportamento de uma seção transversal genérica para o caso de viga esbelta. Para as vigas espessas, como ilustrado na Figura 3.1b, observe que após a deformação, a seção transversal pode ser representada por uma linha reta inclinada de um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $x$ , dado por:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \quad (3.1)$$

onde  $\partial w / \partial x$  é a rotação em relação a linha neutra e  $\phi$  é uma rotação adicional devido ao efeito da deformação cisalhante.

A Equação (3.1) é usada para aproximar a rotação da seção transversal, e é a base da Teoria de Timoshenko para vigas (Hinton e Owen, 1989).



(a) Teoria de viga esbelta                      (b) Teoria de viga espessa

Figura 3.1 – Deformação da seção transversal da viga.

Observando, ainda, a deformação da seção transversal da viga na Figura 3.1, tem-se que o campo de deslocamentos para um ponto qualquer da seção, pode ser escrito como:

$$u = -y\theta \tag{3.2a}$$

$$v = 0 \tag{3.2b}$$

$$w = w \tag{3.2c}$$

sendo  $u$  e  $w$  os deslocamentos axial e transversal, respectivamente.

Considerando as relações anteriores, escreve-se então as relações cinemáticas da seguinte forma:

$$\epsilon_x = -y \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{3.3a}$$

$$\gamma_{xy} = -\phi \tag{3.3b}$$

sendo  $\epsilon_x$  e  $\gamma_{xy}$  as deformações axial e cisalhante, respectivamente; e a rotação da seção é dada pela Equação (3.1).

Considerando a lei de Hooke para material homogêneo e isotrópico, escrevem-se então as seguintes relações constitutivas para a viga:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -yE \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.4a)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -G\phi \quad (3.4b)$$

onde  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  são as tensões axial e cisalhante, respectivamente; E e G são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material, respectivamente.

Esses conceitos serão importantes para as formulações dos problemas apresentadas nas próximas seções.

### 3.3 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA SEM CONTATO

Esta seção tem o objetivo de apresentar a formulação da matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes para um elemento finito de viga que adota a Teoria de Timoshenko. Não se considerará, inicialmente, a influência da base elástica na formulação dessa matriz de rigidez.

A energia potencial total para o sistema estrutural em estudo é dada por:

$$\Pi = U + \Omega \quad (3.5)$$

onde

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.6)$$

$$\Omega = - \int_1 q w dx - \sum_{i=1}^m F_i u_i \quad (3.7)$$

sendo U a energia interna de deformação da viga;  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são os vetores das tensões e das deformações, respectivamente;  $\Omega$  é a energia potencial das forças externas, com q representando o carregamento distribuído e  $F_i$  uma carga pontual, que pode ser força ou

momento concentrado relacionado a translação ou a rotação, respectivamente, em um determinado ponto da viga.

No caso da Teoria de Timoshenko, tem-se que as variáveis presentes nas equações anteriores podem ser definidas como:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left\{ \sigma_x \quad \tau_{xy} \right\} \quad (3.8a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left\{ \varepsilon_x \quad \gamma_{xy} \right\} \quad (3.8b)$$

$$F_i = P_i \text{ ou } M_i \quad (3.8c)$$

$$u_i = w_i \text{ ou } \theta_i \quad (3.8d)$$

Dessa forma, rescreve-se a Equação (3.5) segundo:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV + \frac{1}{2} \int_V \tau_{xy} \gamma_{xy} dV - \int_1 q w dx - \sum_{i=1}^{r_i} P_i w_i - \sum_{j=1}^{r_j} M_j \theta_j \quad (3.9)$$

Substituindo-se então as Equações (3.3a,b) e (3.4a,b) em (3.9), e realizando-se as integrações necessárias, chega-se a:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_1 EI \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_1 S \phi^2 dx - \int_1 q w dx - \sum_{i=1}^{r_i} P_i w_i - \sum_{j=1}^{r_j} M_j \theta_j \quad (3.10)$$

onde o produto EI representa a rigidez à flexão da seção e S define a rigidez cisalhante, ou seja,  $S = GA / \alpha$ , onde A é a área da seção transversal e  $\alpha$  um fator de empenamento que depende da forma da seção. Organizando-se matricialmente as parcelas da energia interna de deformação da equação anterior, chega-se a:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_1 \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \phi \right\} \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} dx - \int_1 q w dx - \sum_{i=1}^{r_i} P_i w_i - \sum_{j=1}^{r_j} M_j \theta_j \quad (3.11)$$

ou ainda,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_1 \Phi^T \mathbf{D} \Phi dx - \int_1 q w dx - \sum_{i=1}^n P_i w_i - \sum_{j=1}^n M_j \theta_j \quad (3.12)$$

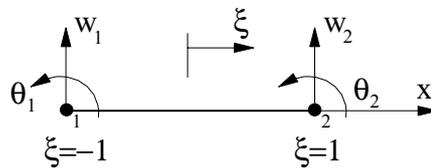
onde:

$$\Phi^T = \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \phi \right\} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

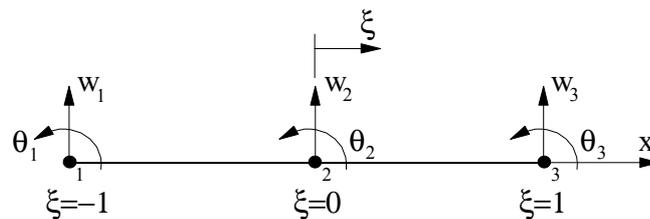
Para modelagem da viga optou-se pelos elementos finitos isoparamétricos unidimensionais, que caracterizam-se por adotarem as mesmas funções de interpolações para a geometria e os deslocamentos (deflexão e rotação). A formulação dos elementos isoparamétricos, segundo Irons (1966), permite gerar elementos curvos que são mais adequados na modelagem de contornos irregulares.

A Figura 3.2 mostra os elementos isoparamétricos usados neste trabalho para modelagem das vigas, e que deverão seguir as hipóteses da Teoria de Timoshenko em sua formulação.

- Elemento 1:



- Elemento 2:



- Elemento 3:

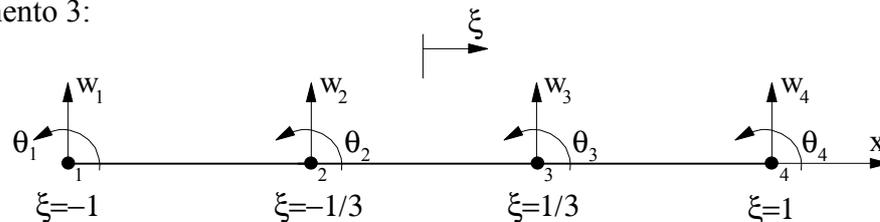


Figura 3.2 – Elementos isoparamétricos usados neste trabalho na modelagem das vigas.

São atribuídas duas coordenadas na formulação dos elementos, a saber: a coordenada global  $x$  e a coordenada natural  $\xi$ . Essa coordenada natural  $\xi$ , também chamada adimensional ou homogênea, é fixada no elemento e assim permanece, independentemente da orientação que o elemento venha a ter em relação à coordenada global  $x$ .

O campo de deslocamentos para o elemento de viga de Timoshenko é definido de acordo com a teoria empregada, ou seja, através de uma deflexão  $w$  e uma rotação  $\theta$ . A deflexão  $w$  em qualquer ponto do elemento pode ser aproximada da seguinte forma:

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) w_i \quad (3.14)$$

sendo  $n$  o número de pontos nodais do elemento,  $N_i$  a função de interpolação e  $w_i$  a deflexão associadas ao ponto nodal  $i$ . Pode-se escrever ainda a relação anterior da seguinte forma:

$$w = \mathbf{N}_w \mathbf{u}^e \quad (3.15)$$

com

$$\mathbf{N}_w = [N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad \cdots \quad N_n \quad 0] \quad (3.16)$$

$$\mathbf{u}^{eT} = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad w_n \quad \theta_n\} \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{u}^e$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento e  $\mathbf{N}_w$  corresponde a matriz que contém as funções de interpolação associadas ao grau de liberdade  $w$ .

De forma análoga, aproxima-se a rotação  $\theta$ , em qualquer ponto interno do elemento, da seguinte forma:

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \theta_i \quad (3.18)$$

sendo  $\theta_i$  os valores nodais da rotação. Escreve-se então a equação anterior na forma matricial, ou seja:

$$\theta = \mathbf{N}_\theta \mathbf{u}^e \quad (3.19)$$

onde agora:

$$\mathbf{N}_\theta = [0 \quad N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad \dots \quad 0 \quad N_n] \quad (3.20)$$

é matriz que contém as funções de interpolação para as rotações nodais.

As funções de interpolação  $N_i$ , para os elementos mostrados na Figura 3.2, podem ser encontradas em Bathe (1995) e são definidas a seguir:

- Elemento 1:

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}(\xi - 1) \quad (3.21a)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad (3.21b)$$

- Elemento 2:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (3.22a)$$

$$N_2(\xi) = -(\xi - 1)(\xi + 1) \quad (3.22b)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (3.22c)$$

- Elemento 3:

$$N_1(\xi) = -\frac{9}{16}\left(\xi + \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1) \quad (3.23a)$$

$$N_2(\xi) = \frac{27}{16}(\xi + 1)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1) \quad (3.23b)$$

$$N_3(\xi) = -\frac{27}{16}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)(\xi - 1) \quad (3.23c)$$

$$N_4(\xi) = \frac{9}{16}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{1}{3}\right) \quad (3.23d)$$

Observe que para o elemento de dois nós as funções de interpolação são lineares, enquanto que para os elementos de três e quatro pontos nodais, as funções  $N_i$  variam de forma quadrática e cúbica, respectivamente.

Como os elementos são isoparamétricos, utiliza-se as mesmas funções  $N_i$  para definir a coordenada  $x$  em qualquer ponto do elemento, isto é:

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi)x_i \quad (3.24)$$

As definições anteriores permitem então escrever as componentes de deformação da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \phi = -\frac{\partial w}{\partial x} + \theta \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{n,x} \\ -N_{1,x} & N_1 & \cdots & -N_{n,x} & N_n \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_n \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

ou, de uma forma mais compacta,

$$\Phi = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (3.26)$$

sendo  $\mathbf{B}$  a matriz que relaciona as componentes de deformação com os deslocamentos nodais do elemento.

Observe que as derivadas das funções de forma  $N_i$  em relação à coordenada  $x$ , presentes na matriz  $\mathbf{B}$ , devem ser calculadas usando-se a regra da cadeia, isto é:

$$N_{i,x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3.27)$$

sendo a derivada  $\partial \xi / \partial x$  calculada facilmente através da inversa do Jacobiano, que é definido de acordo com:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad (3.28)$$

Note que  $J$  pode ser entendido como um operador que transforma as coordenadas do sistema local  $\xi$  para o sistema global  $x$ .

Considerando que a Equação (3.12), que representa a expressão da energia potencial da viga, pode ser associada a um elemento finito genérico usado na modelagem, parte-se então para a definição da matriz de rigidez do elemento. O ponto de partida para se chegar nessa matriz é a parcela da energia interna de deformação do indicador variacional do problema. Assim, através da substituição de (3.26) em (3.12), define-se  $U_e$  da seguinte forma:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{l_e} \mathbf{u}^e \mathbf{T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^e dx \quad (3.29)$$

onde  $l_e$  é o comprimento do elemento. De maneira mais compacta, rescreve-se a equação anterior como:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^e \mathbf{T} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (3.30)$$

onde  $\mathbf{K}^e$  é a matriz de rigidez para o elemento genérico considerado, e é definida por:

$$\mathbf{K}^e = \int_{l_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \quad (3.31)$$

De acordo com a Equação (3.28),  $dx = J d\xi$ , e dessa forma rescreve-se a matriz  $\mathbf{K}^e$  em termos das coordenadas naturais através da expressão:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det J d\xi \quad (3.32)$$

O cálculo desse tipo de integral pode ser feito de forma explícita, usando alguma técnica de integração numérica, como por exemplo, a quadratura de Gauss (Assan, 1999). Assim, a avaliação de uma componente genérica da matriz de rigidez dada pela Equação (3.32), caso se utilize a fórmula unidimensional da quadratura de Gauss, é feita através da expressão:

$$K^e(i, j) = \sum_{i=1}^{npi} g(\xi_i) \omega_i \quad (3.33)$$

onde  $npi$  corresponde ao número total de pontos de integração;  $\xi_i$  representa a coordenada do ponto de integração e  $\omega_i$  é o peso associado.

Deve-se salientar que a integração numérica tem um papel muito importante na aplicação do método dos elementos finitos. A quantidade de pontos de integração a ser adotado está relacionada diretamente com o tipo de elemento finito utilizado para discretizar o sistema estrutural, conforme pode ser encontrado na literatura (Hinton e Owen, 1977; Bathe, 1995; Cook *et al.*, 1989). De acordo com Cook *et al.* (1989), no caso da viga de Timoshenko, a relação ótima entre o número de graus de liberdade adicionais e o número de pontos de integração é igual a dois ( $r = 2/1$ ). Portanto, o número de pontos de integração ideal a ser adotado quando se utiliza numa malha os Elementos 1, 2 e 3 aqui implementados é, respectivamente, um, dois e três.

Na quadratura de Gauss–Legendre, por exemplo, os pontos de integração são localizados simetricamente em relação ao centro do intervalo de integração, e esses pares simétricos têm o mesmo peso. A Tabela 3.1 fornece a posição desses pontos e os pesos associados.

Finalmente, tem-se que a matriz de rigidez global da estrutura, no caso a viga, é obtida somando-se a contribuição de cada elemento finito, ou seja,

$$K_E = \sum_{e=1}^{ne} K^e \quad (3.34)$$

sendo  $ne$  o número de elementos utilizados para discretizar a viga.

Tabela 3.1 – Quadratura de Gauss-Legendre para  $-1 \leq \xi \leq +1$ .

<b>n</b>	<b>i</b>	$\xi_i$	$\omega_i$
1	1	0	2
2	1	0,577350269	1
	2	-0,577350269	1
3	1	0,774596669	5/9
	2	0,000000000	8/9
	3	-0,774596669	5/9
4	1	0,861136311	0,347854845
	2	0,339981043	0,652145154
	3	-0,339981043	0,652145154
	4	-0,861136311	0,347854845

Numa análise estrutural através do método dos elementos finitos, a única forma de carregamento possível é através de forças ou momentos aplicados nos pontos nodais. Assim, para carregamentos distribuídos agindo ao longo do elemento, este deve ser transformado em cargas nodais equivalentes (Silva, 1998; Assan, 1999).

De acordo com a Equação (3.7), os tipos de solicitações consideradas são: cargas concentradas (força vertical e/ou momento) e cargas uniformemente distribuídas na superfície do elemento. No presente trabalho, considera-se as cargas concentradas aplicadas diretamente nos pontos nodais do elemento; já para as cargas uniformemente distribuídas, tem-se que as forças nodais equivalentes, de acordo com as Equações (3.12), (3.15) e (3.28), e para um elemento genérico  $e$ , podem ser calculadas segundo:

$$\mathbf{q}^e = \int_{\mathcal{I}_e} \mathbf{N}_w^T \mathbf{q} dx = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}_w^T \mathbf{q} \det J d\xi \quad (3.35)$$

Como no caso da matriz de rigidez, pode-se utilizar a integração numérica para avaliar as componentes desse vetor.

Portanto, o vetor de forças nodais atuante no sistema estrutural é obtido somando-se as contribuições em cada elemento, ou seja,

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \sum_{e=1}^{ncd} \mathbf{q}^e \quad (3.36)$$

com  $\mathbf{f}$  definindo o vetor de cargas aplicadas diretamente nos pontos nodais e  $ncd$  o número de elementos com cargas distribuídas.

Com a obtenção de  $\mathbf{K}_E$  e  $\mathbf{F}$ , chega-se, através da condição de estacionaridade da energia potencial  $\Pi$ , na seguinte equação de equilíbrio do sistema estrutural:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.37)$$

onde  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais de toda estrutura.

### 3.4 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO BILATERAL

No Capítulo 2 foram apresentados os dois modelos de base elástica que são considerados neste trabalho. No caso de aplicação do MEF e seguindo a hipótese de contato bilateral entre a viga e base elástica, define-se o problema estrutural a ser resolvido como convencional, onde o desafio agora passa a ser então o cálculo da matriz de rigidez da base elástica. Essa matriz deve ser somada à da viga para se obter a rigidez total do sistema estrutural.

Considere uma viga de comprimento longitudinal  $L$  em contato bilateral com uma base elástica, como mostrado na Figura 3.3. Para os problemas estruturais usuais,

$S_u$  define a região da barra onde os deslocamentos são prescritos;  $S_c$  é a região de contato entre os corpos e  $S_f$  é a parte do contorno onde as forças de superfície estão aplicadas. Como já definido, no caso de contato bilateral, a fundação reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão e nesse caso  $S_c$  coincide com o comprimento da viga  $L$ .

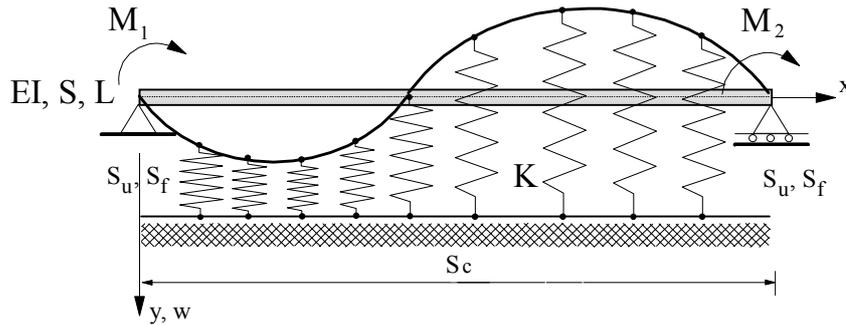


Figura 3.3 – Problema de contato bilateral entre uma viga e uma base elástica.

Assim, para o caso da fundação elástica representada por molas discretas (Seção 2.3.1), tem-se que o acréscimo na energia interna de deformação  $U$ , definida pela Equação (3.6), é dado por:

$$U_b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nc} K w^2 \Big|_{x_i} \quad (3.38)$$

onde  $K$  é o parâmetro de rigidez da base,  $x_i$  caracteriza a posição do ponto e  $nc$  indica o número de pontos da estrutura em contato com a base. Num contexto computacional, a matriz de rigidez da base elástica, de acordo com a expressão anterior, pode ser definida já no sistema global de coordenada da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} K_i & & & \\ & 0 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & K_n \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

sendo  $K_i$  o parâmetro de rigidez elástica da mola em contato com o ponto nodal  $i$ .

Para o modelo de fundação que obedece às hipóteses de Winkler (Seção 2.3.2), o acréscimo da energia interna de deformação é definido como:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{l_e} K w^2 dx \quad (3.40)$$

onde  $l_e$  representa o comprimento do elemento finito genérico  $e$  da viga em contato com a base elástica.

De acordo com a aproximação da deflexão lateral  $w$  dada pela Equação (3.15), pode-se rescrever a contribuição da energia interna da base elástica como:

$$U_b = \frac{1}{2} \mathbf{u}^e \mathbf{T} \mathbf{K}_b^e \mathbf{u}^e \quad (3.41)$$

onde  $\mathbf{K}_b^e$  é a matriz de rigidez da base elástica para o elemento genérico considerado, cuja expressão, já empregando-se as coordenadas naturais  $\xi$ , é dada por:

$$\mathbf{K}_b^e = K \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w \det J d\xi \quad (3.42)$$

com a matriz  $\mathbf{N}_w$  definida de acordo com a Equação (3.16). Observe que o parâmetro de rigidez  $K$  é assumido constante.

As componentes de  $\mathbf{K}_b^e$  podem ser avaliadas usando a mesma técnica de integração numérica mencionada. Assim, somando-se as contribuições de todos os elementos finitos, chega-se na expressão global da matriz de rigidez da base elástica, ou seja,

$$\mathbf{K}_B = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}_b^e \quad (3.43)$$

Finalmente, com a definição de  $\mathbf{K}_B$ , escreve-se agora o sistema (3.37) como sendo:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_B)\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.44)$$

### 3.5 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO UNILATERAL

Nesta seção, atenção será dada ao problema de equilíbrio de vigas com restrições unilaterais de contato impostas por bases elásticas modeladas com um parâmetro.

Inicialmente, serão introduzidas as equações básicas que governam o problema e as condições de contorno que precisam ser atendidas. Em seguida serão apresentados os procedimentos necessários para obtenção da solução numérica deste problema, sendo então desenvolvidas duas formulações baseadas no emprego do MEF e recursos de programação matemática (PM).

Destaca-se que essas formulações foram primeiramente propostas por Ascione e Grimaldi (1984) e Silveira (1995); em seguida elas foram implementadas e testadas com sucesso por Silva (1998) e Silva *et al.* (2001) no estudo das placas em contato com bases elásticas do tipo Winkler e semi-espaco infinito.

Considere então o sistema estrutural formado por uma viga em contato com uma fundação elástica, como ilustrado na Figura 3.4. Considere, ainda, que essa fundação só ofereça resistência às solicitações de compressão e que os efeitos decorrentes das forças de atrito entre os corpos sejam desprezíveis. Torna-se, portanto, possível subdividir o contorno da viga, como mostrado na Figura 3.4 em três partes distintas:  $S_u$ ,  $S_f$  e  $S_c$ . Como nos problemas estruturais usuais,  $S_u$  define a parte do contorno onde os deslocamentos são conhecidos ou prescritos e  $S_f$  é a parte do contorno onde as forças de superfície são prescritas. A parte do contorno denominada  $S_c$  é aquela região em que geralmente as condições de contorno são “ambíguas”, isto é, os pontos de  $S_c$  de um dado corpo, após a aplicação das cargas, podem entrar ou não em contato, permanecer em contato ou separar-se do outro corpo.

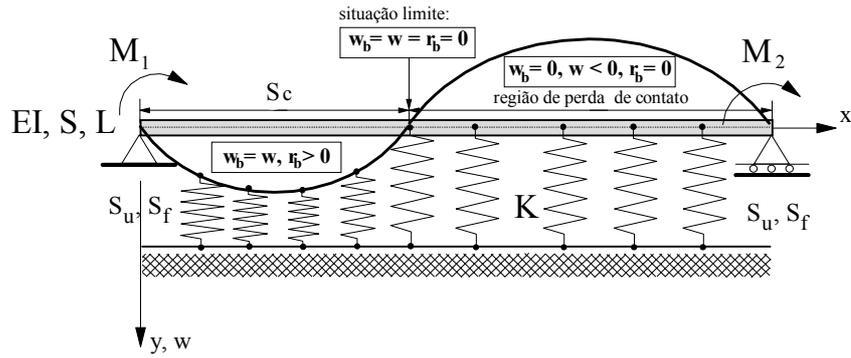


Figura 3.4 – Problema de contato unilateral entre uma viga e uma base elástica.

As observações feitas no final do parágrafo anterior caracterizam a natureza não-linear do problema de contato unilateral, mesmo quando têm-se corpos elásticos em regime de deformações e deslocamentos infinitesimais.

De acordo com a Teoria de Timoshenko para vigas, as equações de equilíbrio interno, relações cinemáticas e constitutivas para a estrutura em análise podem ser expressas segundo:

- Equações de equilíbrio:

$$-EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{GA}{\alpha} \left( \theta - \frac{dw}{dx} \right) = 0; \quad \frac{GA}{\alpha} \left( \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \right) = q - r_b \quad (3.45)$$

- Relações cinemáticas:

$$\epsilon_x = -y \frac{d\theta}{dx}; \quad \gamma_{xy} = \phi \quad (3.46)$$

- Relações constitutivas:

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx}; \quad V = \frac{GA}{\alpha} \phi \quad (3.47)$$

onde é assumido para  $EI$ ,  $G$ ,  $A$  e  $\alpha$  valores constantes;  $K$  é o parâmetro de rigidez elástico da base, e é também assumido constante. Note que a contribuição da base

elástica presente na Equação (3.45), através de  $r_b$ , só deve ser considerada nas regiões de contato entre os corpos.

Para bases elásticas modeladas com apenas um parâmetro, pode-se escrever, genericamente, a seguinte relação constitutiva:

$$r_b = K w_b \quad (3.48)$$

onde, por conveniência, é introduzida a variável  $w_b$ , que representa a deflexão lateral da base elástica;  $r_b$ , como já definido, é a reação à compressão da fundação.

Através da Figura 3.4, que fornece genericamente o comportamento do eixo neutro da barra para um dado carregamento, observa-se que as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$w = \bar{w} \text{ e/ou } \theta = \bar{\theta} \text{ em } S_u \quad (3.49a)$$

$$-EI \frac{d\theta}{dx} = \bar{M} \text{ e/ou } \frac{GA}{\alpha} \phi = \bar{V} \text{ em } S_f \quad (3.49b)$$

$$\phi = w_b - w \geq 0 \text{ em } S_c \quad (3.49c)$$

com  $\bar{w}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{M}$  e  $\bar{V}$  sendo os valores prescritos da deflexão, rotação, momento fletor e esforço cortante, respectivamente. As Equações (3.49a) e (3.49b) representam as condições de contorno essencial e natural do problema, respectivamente; a Inequação (3.49c) caracteriza a restrição de contorno em  $S_c$ , com  $\phi$  definindo a distância relativa entre os dois corpos após a deformação. Essa inequação representa a condição de compatibilidade que deve ser satisfeita em  $S_c$  e indica fisicamente a condição de impenetrabilidade entre os corpos.

Ao se analisar o comportamento de um ponto genérico em  $S_c$ , após a deformação da estrutura, uma das seguintes situações pode ser observada:

(i) o ponto está em contato com outro ponto material do sistema estrutural. Para esse estado escreve-se:

$$\phi = 0 \text{ e } r_b \geq 0 \quad (3.50)$$

(ii) o ponto não coincide com qualquer outro ponto material do sistema. Para essa situação tem-se que:

$$\varphi \geq 0 \quad \text{e} \quad r_b = 0 \quad (3.51)$$

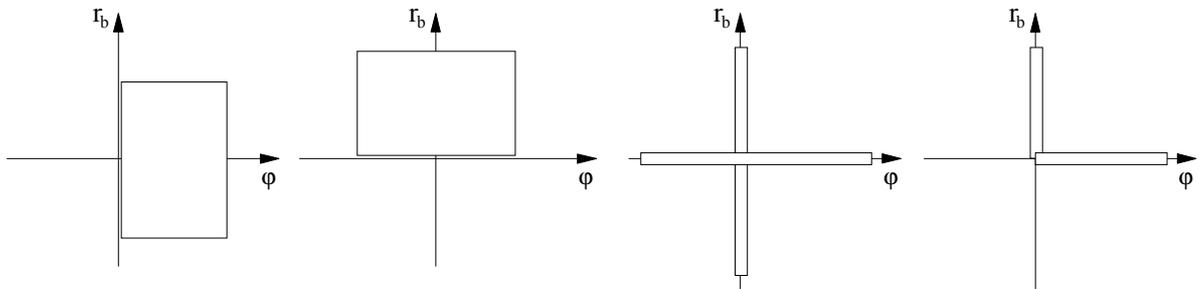
A partir das observações presentes nos parágrafos anteriores, pode-se concluir que as condições que definem de forma completa o contato como sendo unilateral são dadas pela Inequação (3.49c), pela Inequação:

$$r_b \geq 0 \quad (3.52)$$

e através da relação de complementaridade entre  $\varphi$  e  $r_b$ , isto é:

$$\int_{S_c} r_b \varphi dS_c = 0 \quad (3.53)$$

A Figura 3.5 fornece o domínio de validade dessas três relações e ainda o gráfico de validade da lei de contato.



a) Domínio para  $\varphi \geq 0$  b) Domínio para  $r_b \geq 0$  c) Domínio para  $r_b \varphi = 0$  d) Lei de contato

Figura 3.5 – Domínio de validade das restrições de contato.

Observe então que, para um dado sistema estrutural (no caso, viga e fundação elástica), a solução do problema de contato unilateral pode ser conhecida através da resolução das Equações (3.45), com o auxílio das Equações (3.46), (3.47) e (3.48), levando-se em consideração as condições de contorno (3.49a) e (3.49b), as Inequações (3.49c) e (3.52) e a condição de complementaridade (3.53).

Entretanto, a não-linearidade decorrente das condições de contato unilateral torna a solução direta do problema uma tarefa bastante difícil. Dessa forma, é formulado um problema de minimização equivalente para que uma análise numérica possa ser convenientemente empregada na sua solução. Em Joo e Kwak (1986) ou Silveira (1995) é demonstrado que o problema de minimização:

$$\text{Min } \Pi (w, \theta, w_b) \quad (3.54)$$

$$\text{Sujeito a: } -\varphi \leq 0, \text{ em } S_c \quad (3.55)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_1 EI \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_1 S \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{S_c} K w_b^2 dS_c \\ & - \int_1 q w dx - \sum_{i=1}^{r_i} P_i w_i - \sum_{j=1}^{r_j} M_j \theta_j \end{aligned} \quad (3.56)$$

é equivalente à solução das equações e restrições impostas na formulação do problema unilateral de contato anterior.

Serão apresentadas a seguir duas formulações matemáticas para o problema de contato unilateral entre os corpos. Na primeira formulação, têm-se como incógnitas principais os deslocamentos da estrutura e a reação da base elástica; na segunda formulação, a incógnita principal é a reação da base. A eficiência computacional dessas formulações será verificada através de vários exemplos analisados no Capítulo 5.

### 3.5.1 – Formulação Primal

Como já foi destacado em Silveira (1995) e Silva (1998), esta primeira formulação segue as idéias inicialmente propostas por Ascione e Grimaldi (1984), que estudaram o problema de contato unilateral entre uma placa e uma base elástica modelada segundo as hipóteses de Winkler ou semi-espaço infinito. De acordo com

esses pesquisadores, as três restrições (3.49c), (3.52) e (3.53), envolvendo  $r_b$  e  $\varphi$ , podem ser substituídas pela inequação variacional:

$$\int_{S_c} \sigma \varphi dS_c \geq 0 \quad (3.57)$$

onde  $\sigma$  pertence ao cone  $\bar{K}$ , no qual estão incluídos os valores admissíveis para  $r_b$ , que é representado por:

$$\bar{K} = \left\{ r_b \in Y', \int_{S_c} r_b h dS_c \geq 0, \forall h \in Y, h \geq 0 \right\} \quad (3.58)$$

onde  $Y'$  e  $Y$  são os espaços vetoriais que contêm, respectivamente, as soluções de  $r_b$  e  $\varphi$  do problema de contato analisado; quando  $\sigma = r_b$ , a relação de complementaridade dada pela Equação (3.53) é verificada.

A partir daí, elimina-se a restrição (3.55) da análise escrevendo-se o funcional aumentado (ou função Lagrangiana):

$$\Pi_1(w, \theta, w_b, r_b) = \Pi - \int_{S_c} r_b \varphi dS_c \quad (3.59)$$

sendo a energia potencial total do sistema  $\Pi$  dada pela expressão (3.56). Na terminologia da programação matemática,  $r_b$  pode ser chamado de multiplicador de Lagrange.

Após a eliminação de  $w_b$  na equação anterior através da relação (3.49c) e o cálculo da primeira variação de  $\Pi_1$ , chega-se a seguinte equação variacional:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_1 = & \int_1 EI \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dx + \int_1 S \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \int_{S_c} K(\varphi + w) \delta w dS_c + \\ & \int_{S_c} [K(\varphi + w) - r_b] \delta\varphi dS_c - \int_{S_c} \varphi \delta r_b dS_c - \int_1 q \delta w dx - \sum_{i=1}^{n_i} P_i \delta w_i - \sum_{j=1}^{n_j} M_j \delta\theta_j = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Através da análise da equação anterior chega-se às condições que caracterizam o equilíbrio do sistema estrutural. Note que ao tentar eliminar  $\varphi$  de (3.60) através de (3.49c) e usando a relação constitutiva (3.48), chega-se numa equação função apenas dos deslocamentos da viga ( $w$  e  $\theta$ ) e reação da base elástica ( $r_b$ ). Essa mesma equação seria obtida se fosse estabelecida a primeira variação do indicador variacional:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \frac{1}{2} \int_1 EI \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_1 S \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{S_c} D_b r_b^2 dS_c \\ & + \int_{S_c} r_b w dS_c - \int_1 q w dx - \sum_{i=1}^{n_i} P_i w_i - \sum_{j=1}^{n_j} M_j \theta_j \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde considerou-se  $D_b = 1/K$ . O objetivo passa, então, a ser a obtenção das variáveis  $w$ ,  $\theta$  e  $r_b$ , de tal forma que a minimização de (3.61) seja obtida.

A utilização de técnicas de programação matemática requer, em geral, que o problema possua dimensão finita. Assim, recorre-se ao MEF, cuja aplicação permite que se discretize o domínio de solução em pequenas regiões e se aproxime o comportamento das variáveis incógnitas do problema nestas regiões. Portanto, para um elemento genérico da estrutura (viga) as relações (3.15), (3.19) e (3.26), estabelecidas na seção anterior, permanecem válidas. Para um elemento genérico da base elástica, escreve-se que a reação está relacionada aos seus valores nodais segundo:

$$r_b = \mathbf{N}_r \mathbf{r}_b^e \quad (3.62)$$

onde  $\mathbf{N}_r$  é uma matriz que contém as funções de interpolação que definem o comportamento da reação à compressão da base elástica.

Substituindo então as Equações (3.15), (3.19), (3.26) e (3.62) em (3.61), e levando-se em consideração a contribuição de cada elemento finito que compõe a viga e a fundação, chega-se ao funcional do problema na forma global, ou seja:

$$\Pi_1(\mathbf{U}, \mathbf{r}_b) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_b^T \mathbf{T} \mathbf{r}_b + \mathbf{r}_b^T \mathbf{C} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (3.63)$$

onde as matrizes e os vetores presentes na equação anterior são definidos a seguir:

1.  $\mathbf{U}$  é o vetor que contém os deslocamentos nodais da estrutura;
2.  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura definida em (3.34), Seção 3.3;
3.  $\mathbf{F}$  é o vetor das forças nodais equivalentes da estrutura, conforme Equação (3.36);
4.  $\mathbf{T}$  é a matriz de flexibilidade da base elástica:

$$\mathbf{T} = \sum_{m_c} D_b \int_{S_c} \mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r dS_c \quad (3.64)$$

onde  $m_c$  indica o número de elementos que definem a região de contato.

5.  $\mathbf{C}$  é a matriz de acoplamento entre a estrutura e a fundação elástica:

$$\mathbf{C} = \sum_{m_c} \int_{S_c} \mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_w dS_c \quad (3.65)$$

Estabelecendo a minimização do funcional (3.63) em relação às variáveis  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{r}_b$ , chega-se a:

$$\delta \Pi_1(\mathbf{U}, \mathbf{r}_b) = \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{C}^T \mathbf{r}_b - \mathbf{F}) + \delta \mathbf{r}_b^T (\mathbf{C} \mathbf{U} - \mathbf{T} \mathbf{r}_b) = 0 \quad (3.66)$$

onde, procurando-se atender as condições de ótimo de primeira ordem, conhecidas como as condições de Kuhn-Tucker (Arora, 1989; Herskovits, 1995), chega-se ao seguinte problema de complementaridade linear (PCL):

$$\mathbf{KU} + \mathbf{C}^T \mathbf{r}_b - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{CU} - \mathbf{Tr}_b \leq \mathbf{0} \quad (3.68a)$$

$$\mathbf{r}_b \geq \mathbf{0} \quad (3.68b)$$

$$(\mathbf{CU} - \mathbf{Tr}_b)^T \mathbf{r}_b = \mathbf{0} \quad (3.68c)$$

onde a Equação (3.67), que define o equilíbrio do sistema mecânico em estudo, deve ser resolvida respeitando-se as restrições (3.68a,b,c), que caracterizam o contato como sendo unilateral. A primeira restrição equivale, fisicamente, à condição de impenetrabilidade entre os corpos; a segunda fornece a condição de positividade da reação da base e a terceira caracteriza a complementaridade entre a ausência de contato e a existência de reações.

A solução da Equação (3.67), considerando as restrições (3.68), pode ser obtida por algoritmos de programação matemática, em particular, técnicas de pivoteamento desenvolvidas para o PCL (Lemke, 1968; Cottle e Dantzig, 1968). Porém, antes do emprego desses algoritmos, é necessário reduzir as relações anteriores a uma forma padrão, através das seguintes definições:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^+ + \mathbf{U}^- \quad (3.69a)$$

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{Tr}_b - \mathbf{CU} \quad (3.69b)$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{KU} + \mathbf{C}^T \mathbf{r}_b - \mathbf{F} \quad (3.69c)$$

$$\mathbf{z}_3 = -\mathbf{z}_2 \quad (3.69d)$$

onde  $\mathbf{U}^+ \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{U}^- \geq \mathbf{0}$  são explicitamente incluídos na análise descrevendo a parte positiva e negativa do vetor  $\mathbf{U}$  (Fletcher, 1981).

Dessa forma, é possível rescrever (3.67) e as restrições (3.68) como segue:

$$\mathbf{y} = \mathbf{q} + \mathbf{Mx} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3.71a)$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad (3.71b)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.71c)$$

que representa um problema de complementaridade linear **padrão**. As variáveis presentes nas relações anteriores são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ -\mathbf{K} & \mathbf{K} & -\mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{T} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^+ \\ \mathbf{U}^- \\ \mathbf{r}_b \end{bmatrix}; \quad \text{e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

### 3.5.2 – Formulação Dual

Analisando a Equação (3.67), observa-se que se a matriz de rigidez da estrutura for positiva definida, é possível estabelecer a seguinte relação entre  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{r}_b$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{C}^T \mathbf{r}_b) \quad (3.73)$$

Substituindo então (3.73) em (3.63), chega-se a um indicador variacional função apenas da variável  $\mathbf{r}_b$ , ou seja:

$$\Pi_2(\mathbf{r}_b) = -\frac{1}{2} \mathbf{r}_b^T \mathbf{P} \mathbf{r}_b + \mathbf{r}_b^T \mathbf{L} - s \quad (3.74)$$

onde:

1.  $\mathbf{P}$  é uma matriz simétrica e positiva definida, representada por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{T} \quad (3.75)$$

2.  $\mathbf{L}$  é um vetor definido como:

$$\mathbf{L} = \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.76)$$

3.  $s$  é uma constante dada por:

$$s = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.77)$$

Note que a Equação (3.74), com a restrição da condição de positividade da reação  $\mathbf{r}_b$ , define um problema de programação quadrática (PPQ). Usando as condições de Kuhn–Tucker para problemas de maximização com restrições de desigualdade, chega-se às condições de otimalidade da Equação (3.74). Essas condições podem ser escritas de acordo com:

$$\mathbf{c} = -\mathbf{L} + \mathbf{P}\mathbf{r}_b \quad (3.78)$$

sujeito às restrições:

$$\mathbf{r}_b \geq \mathbf{0} \quad (3.79a)$$

$$\mathbf{c} \geq \mathbf{0} \quad (3.79b)$$

$$\mathbf{r}_b^T \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (3.79c)$$

que representa um PCL padrão; o vetor  $\mathbf{c}$  é introduzido na análise como o multiplicador de Lagrange, que agora representa fisicamente a condição de impenetrabilidade entre os corpos.

O sistema anterior pode ser resolvido através de algoritmos de otimização como a técnica de pivoteamento de Lemke (ver Apêndice A). Note que após o cálculo das reações  $\mathbf{r}_b$ , o valor dos deslocamentos nodais da estrutura,  $\mathbf{U}$ , pode ser obtido através da Equação (3.73).

# Capítulo 4

---

## PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

### 4.1 – INTRODUÇÃO

Nesse capítulo são introduzidos os procedimentos adotados na implementação computacional das metodologias de solução propostas nos Capítulos 2 e 3.

Os programas computacionais desenvolvidos foram escritos em linguagem de programação FORTRAN 4.0 (1994–1995). O Capítulo 5 a seguir fornecerá, através de vários exemplos, algumas análises sobre as implementações realizadas.

Na Seção 4.2 são descritos os procedimentos adotados para a implementação da solução do problema de contato, conforme apresentado no Capítulo 2, onde o método de Raleygh–Ritz é empregado. Nas Subseções 4.2.1 e 4.2.2 são descritas as duas sub-rotinas usadas para gerenciar esse tipo de análise, sendo em seguida apresentado um exemplo do arquivo de entrada de dados para a análise não-linear.

No Capítulo 3 foi apresentado o método dos elementos finitos para resolver a mesma classe de problema, onde, no caso de contato unilateral, o problema é escrito na forma de um problema de complementaridade linear (PCL), que é resolvido através de técnicas de programação matemática, conforme será visto na Seção 4.3. A estrutura do programa principal é apresentada através de um fluxograma, sendo considerado na análise do problema de contato unilateral as formulações **Primal** e **Dual** (Subseções 3.5.1 e 3.5.2, respectivamente). Mais adiante, nas Subseções 4.3.1 e 4.3.2, é feita uma descrição das sub-rotinas consideradas importantes nesse programa computacional. Por fim, é apresentado um arquivo de entrada de dados, referenciado ao mesmo exemplo usado na Seção 4.2.

## 4.2 – PROGRAMA COMPUTACIONAL 1: MÉTODO DE RAYLEIGH–RITZ

Esta seção tem como objetivo apresentar as implementações computacionais realizadas neste trabalho, usando o método de Rayleigh–Ritz, para solução dos três problemas de contato apresentados no Capítulo 2 (Subseções 2.4.1–2.4.3). A validação dessa estratégia de solução é apresentada detalhadamente no Capítulo 5.

A Figura 4.1 apresenta o fluxograma geral do programa principal usado na implementação computacional dos problemas propostos.

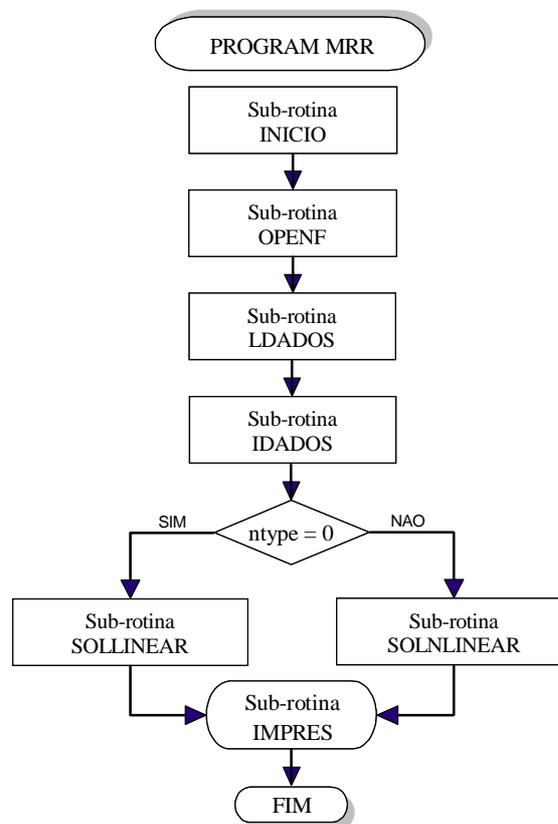


Figura 4.1 – Fluxograma do programa principal: solução modal.

A seguir são descritas sucintamente algumas sub-rotinas presentes no programa principal, conforme apresentado na Figura 4.1:

- **Sub-rotina INICIO:** apresenta informações gerais do programa implementado, tais como: versão, tipo de problema analisado, metodologia empregada, autor, orientador, última atualização e algumas características particulares (linearidade física e geométrica, e alocação dinâmica). Essas informações são fornecidas diretamente no monitor;
- **Sub-rotina OPENF:** realiza a abertura dos arquivos de entrada e saída;
- **Sub-rotina LDADOS:** faz a leitura dos dados de entrada do problema, tais como:
  - ✓ tipo de análise;
  - ✓ número de semi-ondas longitudinais;
  - ✓ propriedades físicas e geométricas da viga;
  - ✓ parâmetro de rigidez da base elástica;
  - ✓ tipos de carregamentos considerados na análise;
  - ✓ parâmetros de impressão.

Para a análise não-linear, são também lidos:

  - ✓ o valor da amplitude adotada para inicializar o processo iterativo de Newton–Raphson para resolver o problema de contato unilateral (veja Figura 2.4);
  - ✓ as coordenadas que definem a aproximação da região de contato, conforme descrito no Capítulo 2;
  - ✓ número total de iterações;
  - ✓ fator de tolerância empregado no critério de convergência do processo iterativo.

Na Subseção 4.2.2 é explicado com mais detalhes esse critério de convergência adotado.
- **Sub-rotina IDADOS:** imprime todos os dados lidos no arquivo de saída.
 

As sub-rotinas consideradas mais importantes para esse tipo de análise serão apresentadas com detalhe a seguir.

#### 4.2.1 – Sub-rotina SOLLINEAR

Nesta sub-rotina é realizada a análise linear dos problemas estruturais em estudo, ou seja, os casos de contato bilateral e sem contato. Essa distinção entre os casos citados

está na consideração do parâmetro de rigidez da fundação, isto é, se esse parâmetro for igual a zero, analisa-se o problema sem contato, caso contrário, o problema bilateral é considerado. Como ilustrado na Figura 4.1, nota-se que a escolha dessa sub-rotina esta relacionada também com o valor zero atribuída a variável **ntype**.

Os passos básicos envolvidos na implementação dessa sub-rotina são mostrados a seguir:

1. Monta-se a matriz de rigidez da estrutura **K**;
2. Monta-se o vetor das forças externas **F<sub>e</sub>**;
3. Resolve-se o sistema de equações: **KU = F<sub>e</sub>**;
4. Imprime-se, em arquivo de saída:
  - problema sem contato: os deslocamentos, momento fletor e força cortante.
  - problema de contato bilateral: os deslocamentos, momento fletor e força cortante e a reação da base elástica.
5. Retorna-se ao programa principal.

#### 4.2.2 – Sub-rotina SOLNLINEAR

Essa sub-rotina resolve o problema de contato unilateral entre a viga e a fundação elástica do tipo Winkler, através de uma análise não-linear. A solução desse problema é feita através da técnica iterativa de Newton–Raphson, como mostrado na Figura 2.4.

Através da Figura 4.1, mostrada anteriormente, verifica-se que a utilização dessa sub-rotina é definida para valores da variável **ntype** diferente de zero.

O critério de convergência adotado é baseado em relações de forças e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior, sendo definido como:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{F}_e\|} \leq \zeta \quad (4.1)$$

onde  $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|$  é igual à norma Euclidiana do vetor das forças desequilibradas, que é calculado através da Equação (2.15);  $\|\mathbf{F}_e\|$  é a norma Euclidiana do carregamento externo, e  $\zeta$  é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como um dado de entrada.

O processo iterativo descrito na Figura 4.2 termina quando o critério de convergência for atendido. Se houver convergência, o processo é concluído e as respostas são impressas em arquivos de saída; caso contrário, faz-se a atualização do vetor  $\mathbf{A}$ , que será usado na próxima iteração.

- 
1. Inicialização das variáveis: vetor das amplitudes  $\mathbf{w}$  (Amp) e a coordenada da região de contato  $\mathbf{S}_c$  ( $t_i$  e  $t_f$ )
  2. Cálculo do vetor das forças externas  $\mathbf{F}_e$
  3. Iterações:  $k = 1, 2, \dots, \text{nimáx}$ 
    - Cálculo da matriz Hessiana e do vetor das forças internas, onde:
      - ✓ Se **ntype** = 1, monta-se a matriz Hessiana  $\mathbf{H}$  e o vetor das forças internas  $\mathbf{F}_i$  para o Problema 1;
      - ✓ Se **ntype** = 2, monta-se a matriz Hessiana  $\mathbf{H}$  e o vetor das forças internas  $\mathbf{F}_i$  para o Problema 2;
      - ✓ Se **ntype** = 3, monta-se a matriz Hessiana  $\mathbf{H}$  e o vetor das forças internas  $\mathbf{F}_i$  para o Problema 3.
    - Cálculo do vetor gradiente  $\mathbf{g}$ :  $\mathbf{g} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e$
    - Verificação da convergência:  $\zeta_1 \leq \zeta$ 
      - ✓ Sim: siga ao passo 4
      - ✓ Não: Cálculo da correção:  $\delta\mathbf{A}^k = -[\mathbf{H}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}$ 
        - Atualização das variáveis:  $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{(k-1)} + \delta\mathbf{A}^k$ , retorne ao passo 3
  4. Impressão dos resultados
  5. Retorna ao programa principal

---

Figura 4.2 – Procedimentos adotados no processo de Newton–Raphson.

A Tabela 4.1 fornece as variáveis usadas na leitura de um arquivo de dados do problema de contato apresentado na Figura 4.3, onde as unidades das grandezas envolvidas devem ser compatíveis.

Tabela 4.1 – Variáveis presentes no arquivo de dados.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
ntype	Tipo de análise (linear ou não-linear)
n	Número de semi-onda
L	Comprimento longitudinal da viga
EI	Rigidez à flexão da viga
K	Parâmetro de rigidez da base elástica
M <sub>1</sub>	Momento fletor aplicado na extremidade, $x = 0$
M <sub>2</sub>	Momento fletor aplicado na extremidade, $x = L$
q	Carga uniformemente distribuída
P	Carga concentrada aplicada em $x = L/2$
np	Número de pontos da deflexão para impressão
imp	Parâmetro de controle de impressão
amp	Vetor de inicialização usado no processo de NR*
t <sub>i</sub>	Incógnita da região de contato, coordenada 1
t <sub>f</sub>	Incógnita da região de contato, coordenada 2
nimax	Número máximo de iterações usado no processo de NR
tolf	Tolerância do processo iterativo – forças
told	Tolerância do processo iterativo – deslocamentos

\*NR: método de Newton–Raphson.

A Figura 4.3 apresenta o arquivo de dados para análise não-linear do problema estrutural em detalhe. A análise desse problema é parte integrante do Capítulo 5.

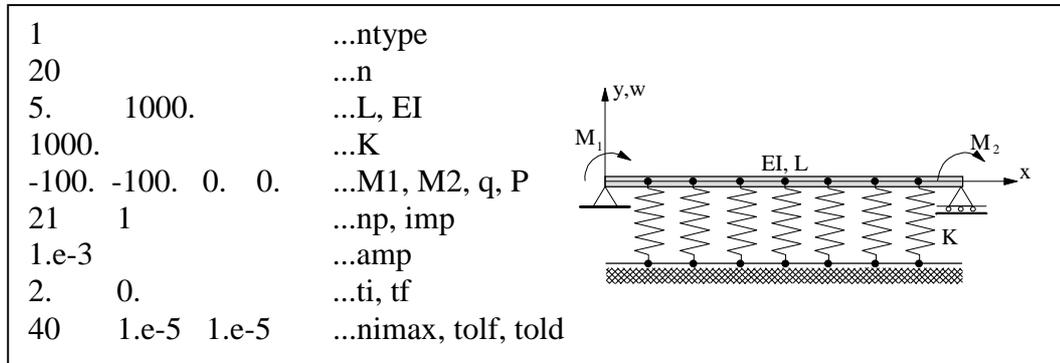


Figura 4.3 – Exemplo de um arquivo de dados para a solução do problema de contato unilateral.

### 4.3 – PROGRAMA COMPUTACIONAL 2: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção são apresentados os procedimentos adotados para a implementação computacional da metodologia proposta baseada no emprego do MEF, onde os elementos de viga isoparamétricos com dois, três e quatro pontos nodais podem ser usados para modelar a viga e a fundação elástica. De acordo com a teoria empregada, os efeitos da deformação cisalhante transversal são consideradas na formulação do problema. Técnicas de programação matemática, como o algoritmo de Lemke (ver Apêndice A), são usados para resolver o PCL resultante da formulação do problema de contato unilateral.

A organização do programa principal é indicada na Figura 4.4, que apresenta as sub-rotinas implementadas.

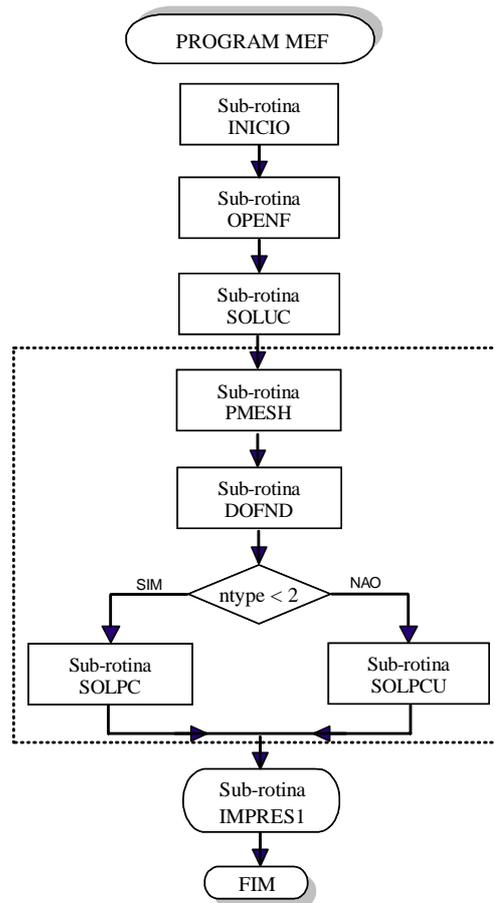


Figura 4.4 – Fluxograma do programa principal: solução via MEF.

As **sub-rotinas INICIO** e **OPENF** apresentadas nesta seção realizam basicamente as mesmas tarefas daquelas citadas na seção anterior. O gerenciamento da análise do problema é realizado pela **sub-rotina SOLUC**, onde uma variável é introduzida para definir o tipo do problema a ser analisado. De acordo com a Figura 4.4 nessa sub-rotina são definidas:

- o título do exemplo processado;
- tipo de análise (problema sem contato, contato bilateral ou contato unilateral);
- número de pontos nodais, número de elementos, número da dimensão do problema, número de pontos nodais por elemento, número de graus de liberdade por nó, número de pontos de Gauss para integração numérica, número de casos de cargas (carga concentrada e/ou distribuída), número de materiais, número de parâmetro para materiais, número de seções, número de parâmetro para seções e indicador de plotagem;

- coordenadas do sistema estrutural (sub-rotina Pmesh);
- incidência dos elementos (sub-rotina Pmesh);
- propriedades físicas do material que compõe a estrutura, tais como os módulos de elasticidade longitudinal e transversal (sub-rotina Pmesh);
- propriedades geométricas da seção transversal, tais como: área; momento de inércia e o fator de empenamento da seção transversal (sub-rotina Pmesh);
- condições de contorno (sub-rotina Dofnd);
- propriedade física da base elástica (sub-rotina Pmesh);
- carregamento externo (sub-rotina Pmesh).

A **sub-rotina SOLUC** gerencia inicialmente a **sub-rotina PMESH**, sendo esta responsável pela introdução de alguns dados de entrada, onde são usados *macro-comandos* no arquivo de leitura, conforme apresentado na Tabela 4.2. A Figura 4.5 ilustra o funcionamento da **sub-rotina Pmesh**. Em seguida faz-se o cálculo do número de graus de liberdade do sistema, através da **sub-rotina DOFND**. Após o cálculo do número de graus de liberdade é realizada a análise do problema.

Tabela 4.2 – Declaração dos macro-comandos.

<b>Macro-Comando</b>	<b>Descrição</b>
<b>COORD</b>	Dados para coordenadas
<b>ELEM</b>	Dados para elementos
<b>MATER</b>	Dados para material
<b>SECAO</b>	Dados para seção transversal
<b>BOUND</b>	Dados para condições de contorno
<b>PLOT</b>	Dados para plotagem (pós-processador)
<b>PGAUS</b>	Dados para integração numérica
<b>FUND</b>	Parâmetro da base elástica
<b>END</b>	Finaliza a entrada de dados para modelagem

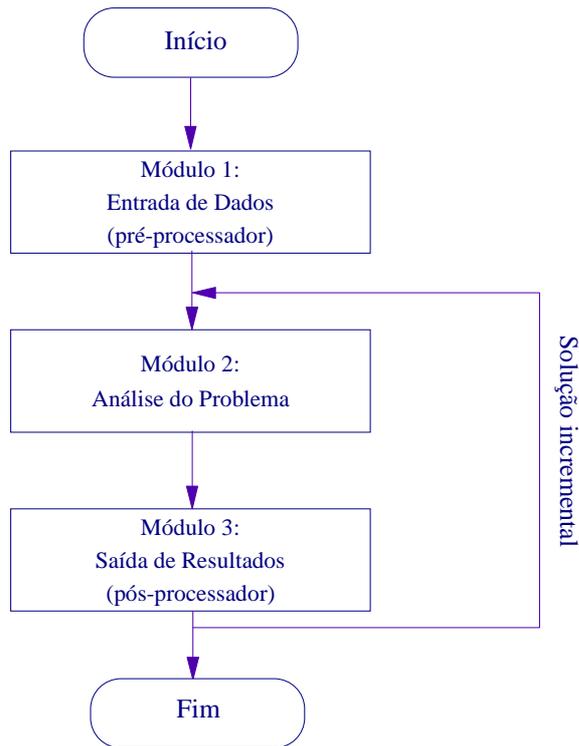


Figura 4.5 – Esquema simplificado do programa.

Conforme o tipo de análise, uma das sub-rotinas **SOLPC** ou **SOLPCU** deverá ser executada. Na **sub-rotina SOLPC** é realizada a análise linear para o problema padrão (sem contato) ou contato bilateral. Enquanto que na **sub-rotina SOLPCU** é feita a análise do problema de contato unilateral entre uma viga e a fundação elástica, onde desprezam-se a influência do atrito existente entre os corpos.

A última etapa do programa principal tem como objetivo realizar a impressão dos resultados obtidos na solução do problema.

Seja uma descrição sucinta sobre as sub-rotinas descritas anteriormente, ou seja, uma aplicação prática. Quando uma estrutura está sob a influência de cargas externas, por exemplo, vigas de pavimentos superpostos de uma construção, a análise mais adequada seria através da **sub-rotina SOLPC** utilizando a opção para o problema sem contato. Se essa estrutura for totalmente ou parcialmente apoiada sobre o solo, por exemplo, uma fundação tipo alicerce corrido, pode-se aplicar a mesma sub-rotina para análise do problema de contato, caso se considere o contato entre os corpos como sendo bilateral. Caso se deseje um comportamento mais realístico da base elástica, isto é,

considerando que esta não reaja às solicitações de tração, deve-se então chamar a **sub-rotina SOLPCU** para resolver o problema.

A seguir é feita uma melhor descrição das sub-rotinas consideradas mais importantes nesta seção.

#### 4.3.1 – Sub-rotina SOLPC

Os passos básicos envolvidos na implementação dessa sub-rotina são mostrados a seguir:

1. Monta-se a matriz de rigidez seguindo os procedimentos descritos na Figura 4.6;

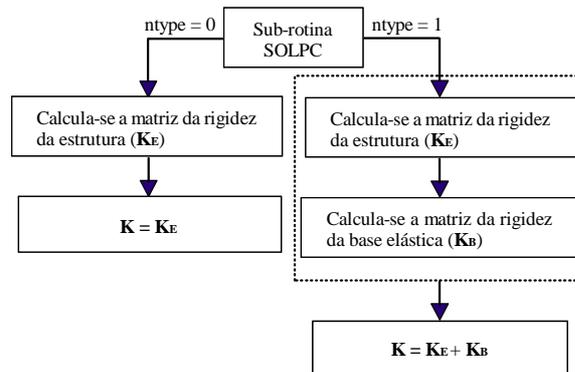


Figura 4.6 – Definição da matriz de rigidez usada na análise.

2. Monta-se o vetor de forças nodais equivalente total  $\mathbf{F}$ ;
3. Resolve-se o sistema de equações  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ ;
4. Calcula-se os resultados secundários: momento fletor e esforço cortante em cada elemento;
5. Imprime-se os resultados;
6. Retorna-se a **sub-rotina SOLUC**.

### 4.3.2 – Sub-rotina SOLPCU

O objetivo desta sub-rotina é resolver o problema de contato com restrições unilaterais usando uma das formulações apresentadas no Capítulo 3. Como visto, essas formulações geram um problema de complementaridade linear que é resolvido através da técnica de pivoteamento sugerida por Lemke (Lemke, 1968; ver detalhes no Apêndice A).

A seguir, são apresentados os procedimentos a serem seguidos, para o caso das formulações descritas no Capítulo 3 (Seção 3.5):

1. Monta-se a matriz de rigidez da estrutura  $\mathbf{K}_E$  (Equação 3.34);
2. Monta-se a matriz de flexibilidade  $\mathbf{T}$  (Equação 3.64);
3. Monta-se a matriz de acoplamento  $\mathbf{C}$  (Equação 3.65);
4. Monta-se o vetor de forças nodais equivalente total  $\mathbf{F}$  (Equação 3.36);
5. Para as formulações:
  - **Formulação Primal:** obtêm-se a matriz  $\mathbf{M}$  e o vetor  $\mathbf{q}$ , utilizando as expressões dadas pela Equação (3.72), ou seja:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ -\mathbf{K} & \mathbf{K} & -\mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{T} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

- **Formulação Dual:** calculam-se a matriz  $\mathbf{M}$  e o vetor  $\mathbf{q}$ , através das Equações (3.75) e (3.76), sendo dadas respectivamente por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{T}; \quad \mathbf{L} = \mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$$

6. Utiliza-se o algoritmo de Lemke para resolver o PCL, para o caso da:
  - **Formulação Primal:** são obtidos os deslocamentos nodais da estrutura e a reação da base elástica;
  - **Formulação Dual:** é obtida a reação da base elástica.
7. Determina-se outras incógnitas, ou seja:

- **Formulação Primal:** calculam-se os deslocamentos da base elástica;
- **Formulação Dual:** calculam-se os deslocamentos da estrutura através da Equação (3.73), escrita como a seguir:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{C}^T \mathbf{r}_b)$$

8. Imprime-se, nos arquivos de saída e neutro, os deslocamentos e as reações nodais;
9. Calcula-se os esforços solicitantes na estrutura-tensão e deformação avaliadas nos pontos de Gauss;
10. Imprime-se, em arquivo neutro, os esforços solicitantes na estrutura em cada ponto de Gauss;
11. Utiliza-se rotinas gráficas para visualização da deformada na tela do monitor;
12. Finaliza-se a sub-rotina e retorna-se ao programa principal.

Na Figura 4.7, é apresentado o arquivo de entrada de dados para o problema mostrado na Figura 4.3, considerando a metodologia proposta nesta seção.

EXEMPLO	...título
3	...ntype
21 20 2 2 2 2 1	...npoin, nelelem, ndime, nnode, ndofn, ngaus, ncase
1 2 1 3 1	...nmats, npmat, nsecs, npsec, nplot
coord	...MACRO-COMANDO
ppor	...MACRO-COMANDO
1 1 0. 0.	...no, ng, x, y
21 0 5. 0.	
elem	...MACRO-COMANDO
1 1 2 1	...el, noi, noj, lx
20 20 21 0	
mater	...MACRO-COMANDO
1000. 12000.	...E, G
1	...ngelm
1 20	...kel1, kel2
secao	...MACRO-COMANDO
2. 1. 1.2	...A, I, alpha
1	...ngelm
1 20	...kel1, kel2
bound	...MACRO-COMANDO
1 1 1 0	...no, ng, dy, theta
21 0 1 0	
plot	...MACRO-COMANDO
'mesh' 40. 0.	...lci, ct(1), ct(2)
pgaus	...MACRO-COMANDO
fund	...MACRO-COMANDO
1000.	...K
end	...MACRO-COMANDO
1	...LLDEF
1 0	...npload, nedge
1 0. -100.	...no, P, M
21 0. -100.	

Figura 4.7 – Exemplo de arquivo de entrada de dados: solução via MEF.

# Capítulo 5

---

## EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

### 5.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo validar as formulações apresentadas nos Capítulos 2 e 3 para solução do problema de contato entre vigas e bases elásticas do tipo Winkler. No Capítulo 2, a formulação proposta é baseada na aplicação do método de Rayleigh–Ritz (MRR) junto com a técnica iterativa de Newton–Raphson. No Capítulo 3, a metodologia de solução proposta é fundamentada no emprego do método dos elementos finitos (MEF) e técnicas de programação matemática para resolver essa classe de problema.

Na Seção 5.2 são feitas considerações gerais sobre as modelagens dos exemplos que serão analisados neste capítulo.

Nas seções seguintes são apresentados sete problemas de vigas com restrições de contato. Esses problemas estruturais estão ilustrados inicialmente nas Figuras 5.1(a)-(g), onde são fornecidas também as configurações deformadas das vigas para a situação de contato unilateral. Observe que os três primeiros exemplos caracterizam os problemas de contato apresentados no Capítulo 2 e têm como principal objetivo validar a formulação modal proposta.

Nas Seções 5.6 e 5.7 são apresentadas duas análises envolvendo vigas hiperestáticas com restrições bilaterais e unilaterais de contato (Figuras 5.1(d) e (e)).

Nas duas últimas seções estão as análises de vigas prismáticas apoiadas apenas em uma base elástica do tipo Winkler, como pode ser visto nas Figuras 5.1(f) e (g).

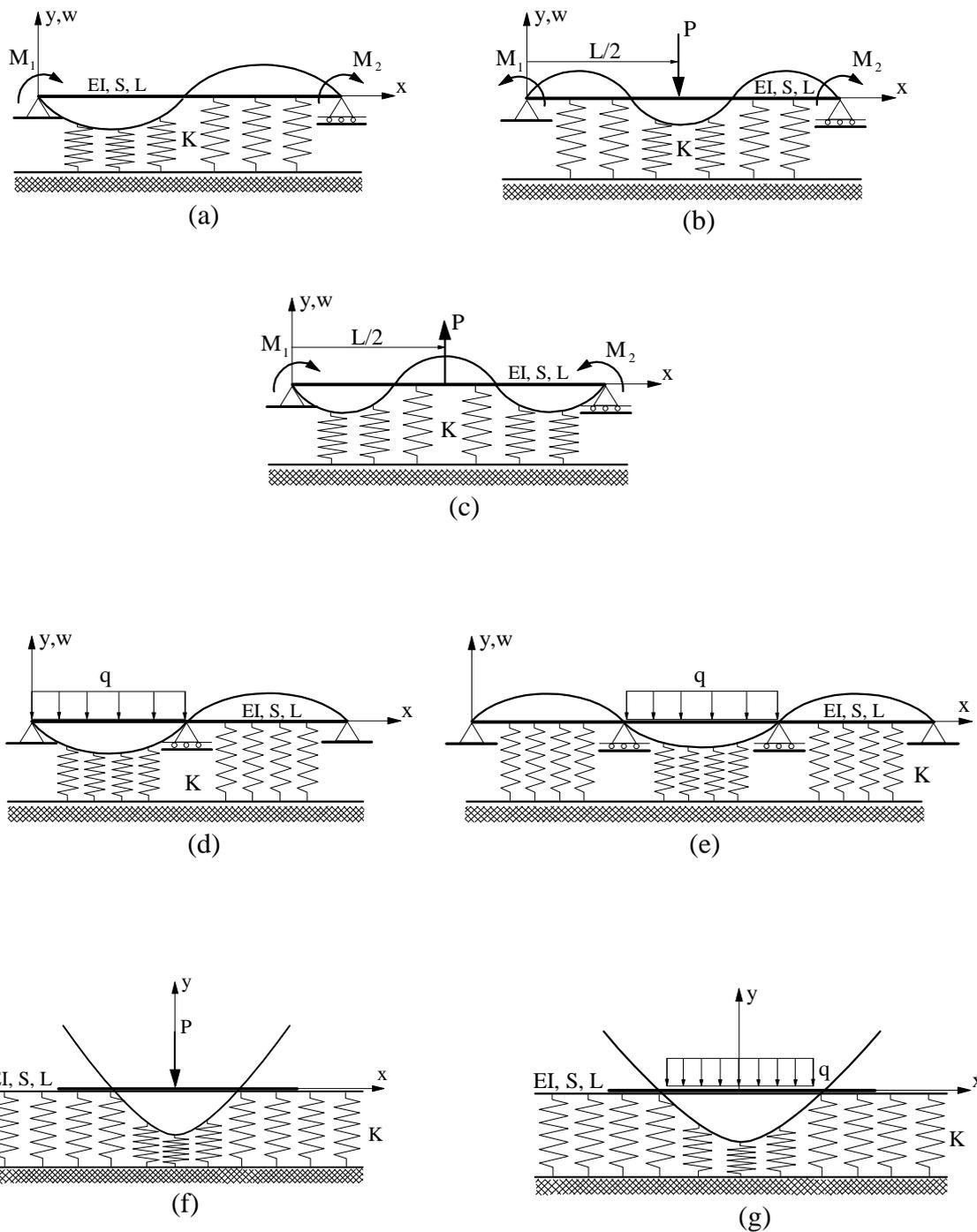


Figura 5.1 – Problemas de contato analisados neste capítulo.

## 5.2 – CONSIDERAÇÕES GERAIS

No estudo dos três primeiros exemplos apresentados na Figura 5.1 através do método de Rayleigh–Ritz (MRR), considera-se como uma das principais variáveis na modelagem do problema o número de semi-ondas (N) usado para aproximar o comportamento da deflexão lateral da viga.

Já na aplicação do método dos elementos finitos (MEF), que utiliza os elementos isoparamétricos de viga, o número de elementos (NELEM) tem papel de destaque. Os elementos isoparamétricos implementados com dois, três e quatro pontos nodais, são denominados Elementos 1, 2 e 3, respectivamente, conforme já estabelecido no Capítulo 3. Visando uma maior precisão nos resultados, emprega-se na integração numérica dois pontos de Gauss para os Elementos 1 e 2, e três pontos de Gauss para o Elemento 3 (Hinton e Owen, 1977; Bathe, 1995). Ainda em relação às análises feitas através MEF, vale informar que as solicitações internas (momento fletor e esforço cortante) são avaliadas nos pontos de Gauss.

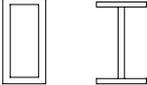
Na Tabela 5.1 são apresentados os valores do coeficiente de empenamento também conhecido como fator de forma que podem ser encontrados na literatura para alguns tipos de seções transversais de viga (Timoshenko e Gere, 1982). Destaca-se que apenas a seção retangular será utilizada nas análises realizadas neste trabalho.

As soluções numéricas obtidas através dos programas computacionais desenvolvidos (MRR e MEF) serão comparadas, sempre que possível, com resultados analíticos e numéricos existentes na literatura. Dessa forma, o erro será avaliado segundo a expressão:

$$\text{Erro}(\%) = 100 \frac{\text{resultado teórico} - \text{resultado numérico}}{\text{resultado teórico}} \quad (5.1)$$

Por fim, vale mencionar que os resultados das análises numéricas que serão apresentadas neste capítulo foram obtidos usando um microcomputador com a seguinte configuração: 1 GHz de CPU, 256 MB de memória RAM e sistema operacional Windows 98.

Tabela 5.1 – Valores para os coeficientes de empenamento  $\alpha$ .

	Seção	$\alpha$
	Retângulo	$\frac{6}{5}$
	Círculo	$\frac{10}{9}$
	Tubo fino	2
	Perfil caixa ou I	$\frac{A}{A_{\text{alma}}}$

### 5.3 – PROBLEMA DE CONTATO 1:

#### Viga isostática com uma região de contato e uma sem contato

Neste primeiro exemplo, considere o caso de uma viga simplesmente apoiada com momentos fletores concentrados aplicados nas duas extremidades A e B, conforme ilustrado na Figura 5.2. A viga possui seção retangular uniforme e por conseguinte coeficiente de empenamento  $\alpha = 6/5$ . Os principais dados considerados na análise desse sistema estrutural são:  $L = 5$ ,  $EI = 10^3$ ,  $S = 2 \times 10^4$  e  $M_1 = M_2 = -10^2$ .

Inicialmente, com o intuito de validar as implementações realizadas e de obter uma maior sensibilidade na modelagem do problema em questão, será estudada a situação onde se despreza a influência da base elástica ( $K = 0$ ), ou seja, o problema sem contato (PSC). Logo em seguida, atenção é direcionada ao problema clássico de contato entre a viga e a base elástica do tipo Winkler, onde modela-se a base com o mesmo comportamento à tração e à compressão; trata-se então do problema de contato bilateral (PCB). Finalmente, considera-se a fundação reagindo apenas às solicitações de compressão, caracterizando assim o problema de contato unilateral (PCU).

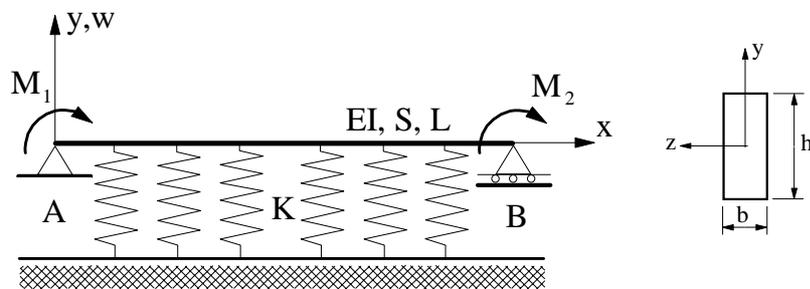


Figura 5.2 – Primeiro problema de contato.

No caso do problema sem contato (PSC), as soluções analíticas para a deflexão lateral  $w$ , rotação  $\theta$  e momento fletor  $M$  são facilmente encontradas na literatura (Beer e Johnston, 1995), ou seja:

$$w(x) = -\frac{M_1}{6EIL}(-2x^3 + 3Lx^2 - L^2x) \quad (5.2a)$$

$$\theta(x) = -\frac{M_1}{6EIL}(-6x^2 + 6Lx - L^2) \quad (5.2b)$$

$$M(x) = -M_1\left(1 - \frac{2x}{L}\right) \quad (5.2c)$$

As Tabelas 5.2–5.5 apresentam os erros encontrados quando se comparam as respostas numéricas (MRR e MEF) e analíticas. Nessas tabelas a deflexão lateral da viga  $w$  e o momento fletor são avaliados na posição  $x = L/4$ , e a rotação  $\theta$  é medida na extremidade A (ou B).

A Tabela 5.2 indica, como esperado, que com apenas 2 semi-ondas ( $N = 2$ ), obtém-se uma boa aproximação para a deflexão lateral da viga. Já para a rotação e o momento fletor, que são obtidos através da diferenciação de  $w$ , são necessárias 30 semi-ondas ( $N = 30$ ) para se chegar a um erro menor que 5%. A Tabela 5.3 mostra o fraco desempenho computacional do Elemento 1; nota-se que só com 44 elementos chega-se a uma boa aproximação para a deflexão lateral  $w$ . Através da Tabelas 5.4 e 5.5 pode-se observar a boa performance dos Elementos 2 e 3; os resultados encontrados para esses elementos foram idênticos.

Tabela 5.2 – Análise de convergência do PSC: MRR.

N	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
2	-0.040314	3.20	-0.050661	39.21	63.66	27.32
4	-0.040314	3.20	-0.063326	24.01	63.66	27.32
6	-0.038821	0.62	-0.068955	17.25	42.44	15.12
10	-0.039144	0.21	-0.074147	11.02	55.17	10.34
20	-0.039082	0.05	-0.078512	5.79	53.15	6.30
30	-0.039058	0.01	-0.080066	3.92	48.02	3.96
Sol. anal. (Beer e Johnston, 1995): $w = -0.039063$ ; $\theta_A = \theta_B = -0.083333$ ; $M = 50$ .						

Tabela 5.3 – Análise de convergência do PSC: MEF – Elemento 1.

NELEM	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
4	-0.010838	72.26	-0.023676	71.59	6.94	86.13
8	-0.023659	39.43	-0.051685	37.98	22.71	54.57
44	-0.038241	2.11	-0.083535	0.24	46.72	6.56
100	-0.038901	0.42	-0.084979	1.98	48.79	2.41
200	-0.039022	0.10	-0.085245	2.29	49.44	1.10
240	-0.039034	0.07	-0.085272	2.33	49.54	0.91
244	-0.039035	0.07	-0.085274	2.33	49.55	0.89
Sol. anal. (Beer e Johnston, 1995): $w = -0.039063$ ; $\theta_A = \theta_B = -0.083333$ ; $M = 50$ .						

Tabela 5.4 – Análise de convergência do PSC: MEF – Elemento 2.

NELEM	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
2	-0.039062	0.00	-0.085333	2.40	50.00	0.00
4	-0.039063	0.00	-0.085333	2.40	50.00	0.00
6	-0.039063	0.00	-0.085333	2.40	50.00	0.00
8	-0.039062	0.00	-0.085333	2.40	50.00	0.00
Sol. anal. (Beer e Johnston, 1995): $w = -0.039063$ ; $\theta_A = \theta_B = -0.083333$ ; $M = 50$ .						

Tabela 5.5 – Análise de convergência do PSC: MEF – Elemento 3.

NELEM	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
2	-0.039062	0.00	-0.085333	2.40	50.00	0.00
4	-0.039062	0.00	-0.085333	2.40	50.00	0.00
6	-0.039062	0.00	-0.085333	2.40	50.00	0.00
8	-0.039062	0.00	-0.085333	2.40	50.00	0.00
Sol. anal. (Beer e Johnston, 1995): $w = -0.039063$ ; $\theta_A = \theta_B = -0.083333$ ; $M = 50$ .						

Para o caso de contato bilateral entre a viga e a base elástica do tipo Winkler (PCB), a solução analítica para o sistema estrutural mostrado na Figura 5.3 pode ser encontrado em Hetényi (1946), onde são utilizadas as hipóteses da teoria de viga de Euler–Bernouly, e é fornecida a seguir através das Equações 5.3(a)-(c). Usando-se o princípio da superposição dos efeitos, chega-se nas respostas teóricas para  $w$ ,  $\theta$  e  $M$  do problema original de contato em questão (Figura 5.2). Essas respostas são apresentadas na Tabela 5.6 para vários valores do parâmetro de rigidez adimensional da base elástica  $k = KL^4/EI$  e serão utilizadas a seguir para validar as implementações computacionais realizadas. Novamente, a deflexão  $w$  e o momento fletor são avaliados em  $x = L/4$  e a rotação  $\theta$  é medida no apoio A.

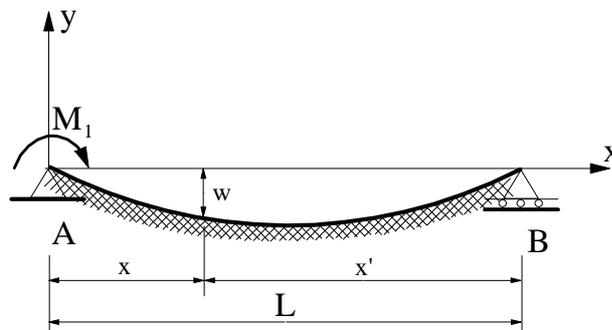


Figura 5.3 – Viga em contato bilateral com uma base elástica do tipo Winkler com momento aplicado no apoio extremo A.

$$w(x) = \frac{2M_1\lambda^2}{K} \frac{\beta_1}{\beta} \quad (5.3a)$$

$$\theta(x) = \frac{2M_1\lambda^3}{K} \frac{\beta_2}{\beta} \quad (5.3b)$$

$$M(x) = M_1 \frac{\beta_3}{\beta} \quad (5.3c)$$

$$\beta = \cosh^2 \lambda L - \cos^2 \lambda L; \quad \beta_1 = \cosh \lambda L \sinh \lambda x' \sin \lambda x - \cos \lambda L \sinh \lambda x \sin \lambda x';$$

$$\beta_2 = \cosh \lambda L (\cos \lambda x \sinh \lambda x' - \sin \lambda x \cosh \lambda x') - \cos \lambda L (\cosh \lambda x \sin \lambda x' - \sinh \lambda x \cos \lambda x');$$

$$\beta_3 = \cosh \lambda L \cos \lambda x \cosh \lambda x' - \cos \lambda L \cosh \lambda x \cos \lambda x'.$$

sendo,

$$\lambda^4 = \frac{K}{4EI} \quad (5.4)$$

Tabela 5.6 – Solução analítica para vários valores do parâmetro de rigidez elástico adimensional da base elástica ( $k = KL^4/EI$ ).

k	w	$\theta$	M
6.25	-0.038902	-0.083127	49.75
62.5	-0.037509	-0.081345	47.56
625	-0.027530	-0.068488	31.88
6250	-0.006863	-0.039911	-0.20
62500	-0.000206	-0.022361	-5.74

As Tabelas 5.7–5.10 e a Figura 5.4 fornecem os resultados do estudo comparativo entre as soluções numéricas (MRR e MEF) e as respostas analíticas. Nota-se, através da Tabela 5.7, a boa precisão das respostas obtidas através da solução modal (MRR), independente do valor de  $k$ . Foram utilizadas em média 30 semi-ondas ( $N = 30$ ) para aproximar a deflexão da viga nessas análises. As Tabelas 5.8-5.10 indicam que as soluções obtidas através do MEF, para o contato bilateral, são dependentes do valor do parâmetro de rigidez da base  $k$ , mesmo empregando-se malhas bem refinadas para os três tipos de elementos implementados. Observe que até o valor de  $k = 625$ , a

convergência dos resultados é bastante razoável; para a base elástica mais rígida, isto é, com valor de k elevado ( $k = 62500$ ) a solução numérica diverge da analítica.

Por fim, as Figuras 5.4 e 5.5 fornecem a variação da deflexão lateral  $w$  para diversos valores do parâmetro de rigidez adimensional da base elástica  $k$ . Mais uma vez pode-se notar a boa concordância dos resultados obtidos através da solução modal com aqueles da solução analítica.

Tabela 5.7 – Análise de convergência do PCB, MRR.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
6.25	-0.038899	0.01	-0.080657	2.97	48.16	3.20
62.5	-0.037504	0.01	-0.078078	4.02	45.57	4.18
625	-0.027526	0.01	-0.065221	4.77	29.89	6.24
6250	-0.006858	0.07	-0.036644	8.19	-2.01	9925.00
62500	-0.000203	1.46	-0.019891	11.05	-7.32	27.58

Tabela 5.8 – Análise de convergência do PCB, MEF – Elemento 1.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
6.25	-0.038871	0.08	-0.085087	2.36	49.72	0.05
62.5	-0.037375	0.36	-0.083312	2.42	47.54	0.04
625	-0.026881	2.36	-0.070748	3.30	32.26	1.20
6250	-0.006430	6.31	-0.044325	11.06	3.03	15268.03
62500	-0.000300	45.63	-0.029626	32.49	-2.53	55.88

Tabela 5.9 – Análise de convergência do PCB, MEF – Elemento 2.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
6.25	-0.038889	0.03	-0.085128	2.41	49.75	0.00
62.5	-0.037393	0.31	-0.083352	2.47	47.59	0.08
625	-0.026900	2.29	-0.070812	3.39	32.38	1.58
6250	-0.006427	6.35	-0.044482	11.45	3.06	15408.3
62500	-0.000298	44.66	-0.030000	34.16	-2.46	57.17

Tabela 5.10 – Análise de convergência do PCB, MEF – Elemento 3.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
6.25	-0.038889	0.03	-0.085128	2.41	49.75	0.00
62.5	-0.037392	0.31	-0.083351	2.47	47.59	0.07
625	-0.026899	2.29	-0.070811	3.39	32.34	1.45
6250	-0.006427	6.35	-0.044482	11.45	3.13	15755.00
62500	-0.000300	45.63	-0.030000	34.16	-2.46	57.20

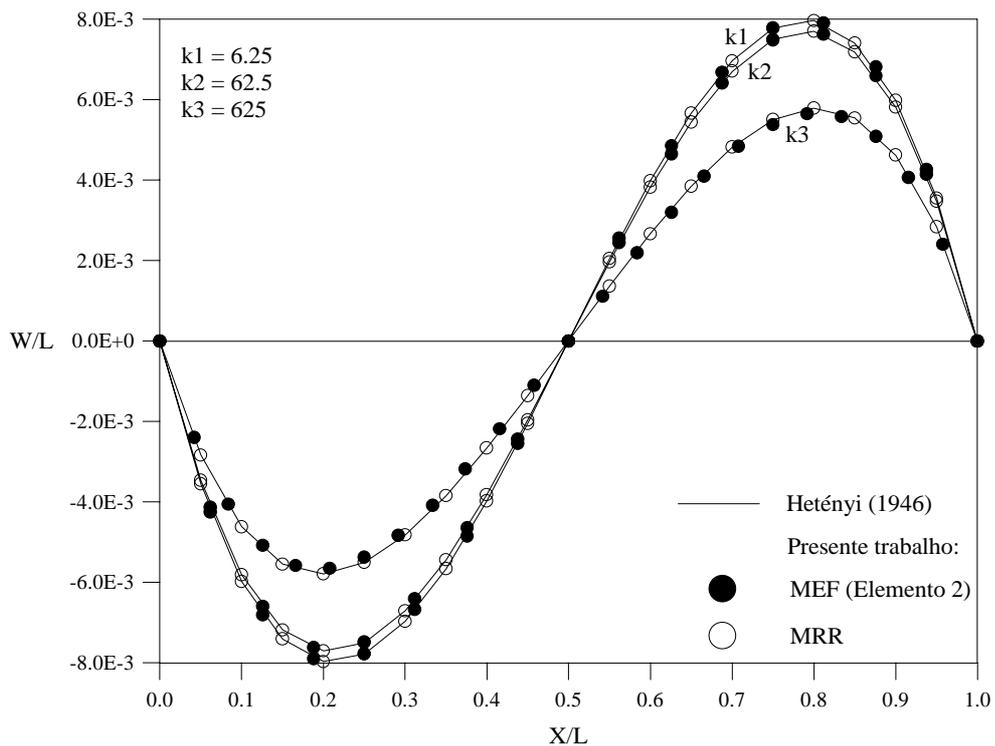


Figura 5.4 – Deflexão lateral da viga para o Problema 1: PCB.

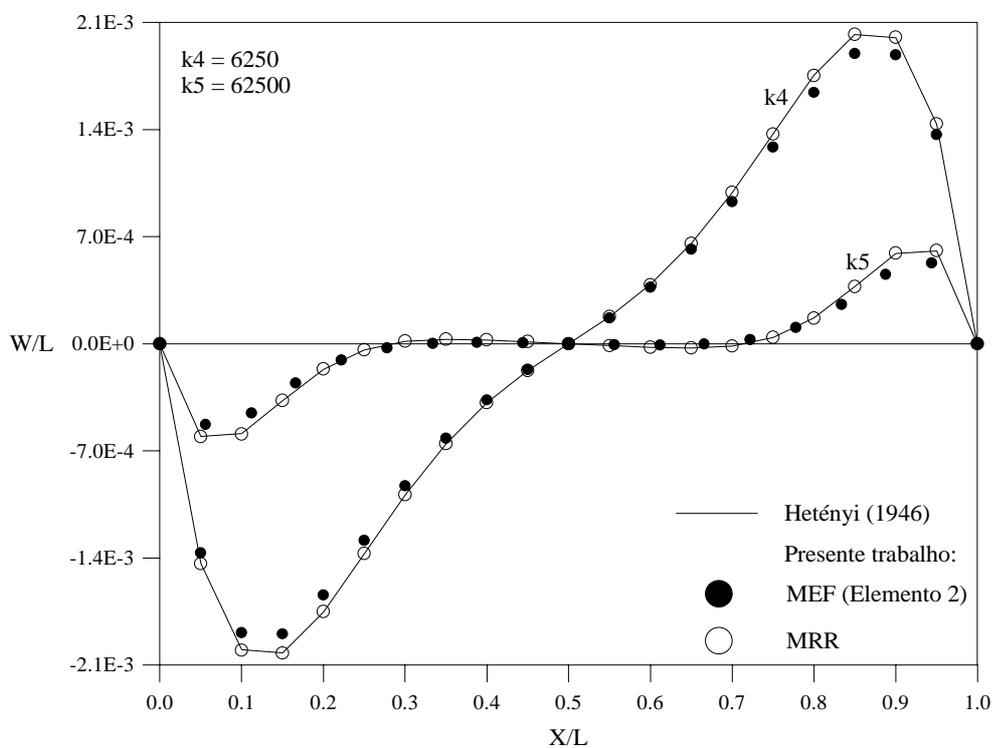


Figura 5.5 – Deflexão lateral da viga para o Problema 1: PCB.

Parte-se agora para a análise do problema de contato unilateral (PCU) entre a viga e a base elástica. Os resultados apresentados nas figuras a seguir têm o intuito de comparar e de verificar a eficiência computacional das formulações propostas nos Capítulos 2 e 3. Para a solução modal considerou-se 20 semi-ondas ( $N = 20$ ) para aproximar o comportamento da deflexão da viga. Para este problema, o número de iterações necessárias à convergência do problema são 12, e dependendo do valor inicial estabelecido pelo operador, para a região de contato, a resposta pode convergir para uma solução errada do problema. No caso do MEF, adotou-se inicialmente a *formulação dual*, onde a variável primária é a reação da base, para a inclusão das restrições unilaterais de contato e obtenção do problema de complementaridade linear (PCL). O algoritmo de Lemke foi usado na solução do PCL (ver Apêndice A). Quando o Elemento 1 foi empregado, adotou-se 120 elementos na modelagem do problema; no caso do Elemento 2, o número de elementos variou de 8 a 40, de acordo com o parâmetro de rigidez da base; a mesma observação é válida para o Elemento 3, porém a variação aconteceu entre 4 e 20 elementos.

Nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8, onde são mostradas as variações da deflexão lateral  $w$  e da rotação  $\theta$  da viga e a variação da reação da base elástica  $R_b$ , fica evidenciada a influência do parâmetro de rigidez adimensional  $k$  no comportamento do sistema estrutural em análise para o caso de contato unilateral. Através da Figura 5.6, nota-se claramente que a região de contato entre os corpos fica pequena a medida que o valor da rigidez da base elástica  $k$  aumenta. Como esperado, a Figura 5.8 apresenta a reação da base apenas na região de contato entre os corpos. Nas Figuras 5.6 e 5.7 destaca-se também a boa concordância dos resultados obtidos através dos MRR e MEF.

A Figura 5.9 tem o propósito de verificar, para uma base elástica de parâmetro de rigidez intermediário  $k = 625$ , a diferença entre a consideração do contato bilateral (PCB) e contato unilateral (PCU) entre os corpos. É ilustrada também nesta figura a variação da deflexão lateral da viga para o caso onde se despreza a influência da base (PSC,  $K = 0$ ). Conclui-se a consideração das restrições unilaterais de contato na análise, que introduz significativas mudanças no comportamento do sistema estrutural em estudo.

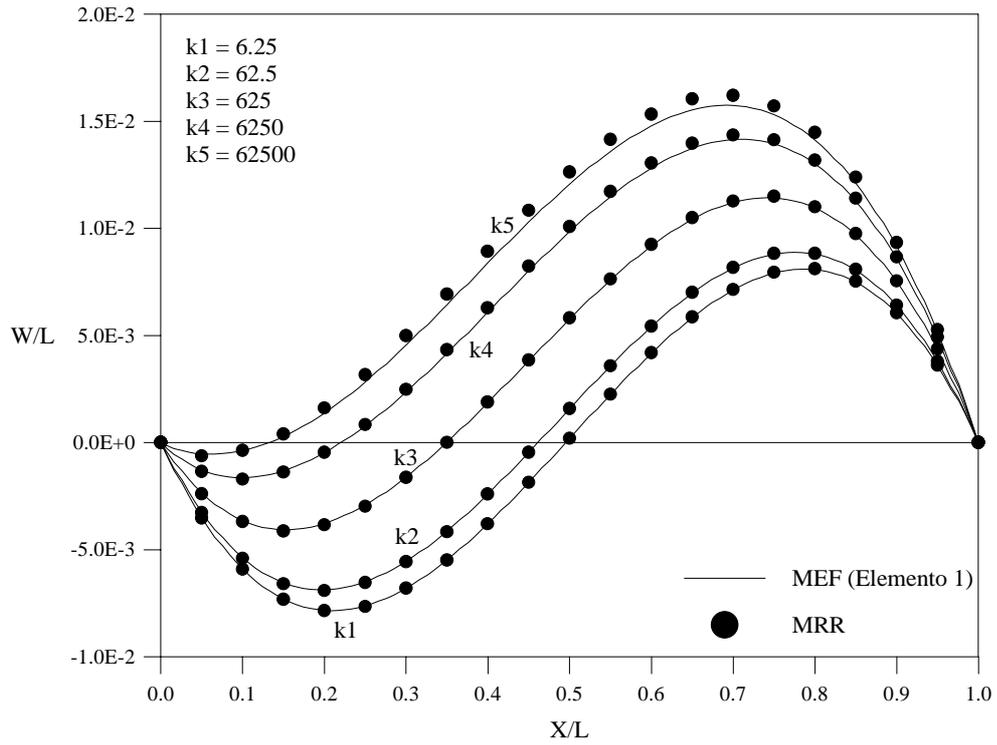


Figura 5.6 – Deflexão lateral  $w$  da viga, Problema 1-PCU.

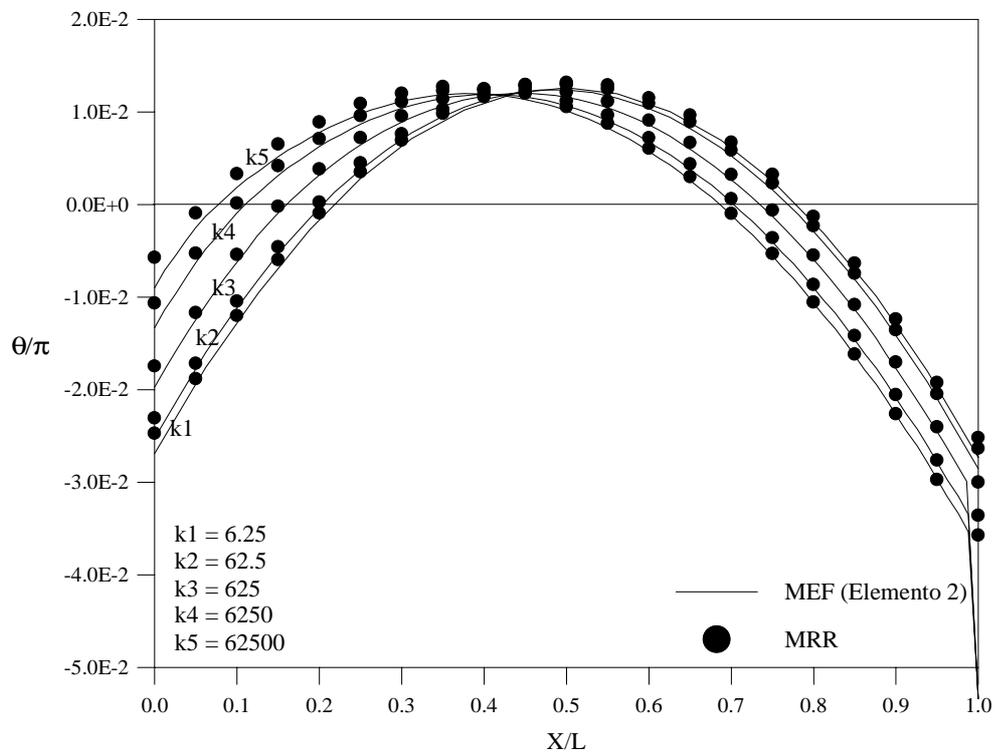


Figura 5.7 – Rotação  $\theta$  da viga, Problema 1-PCU.

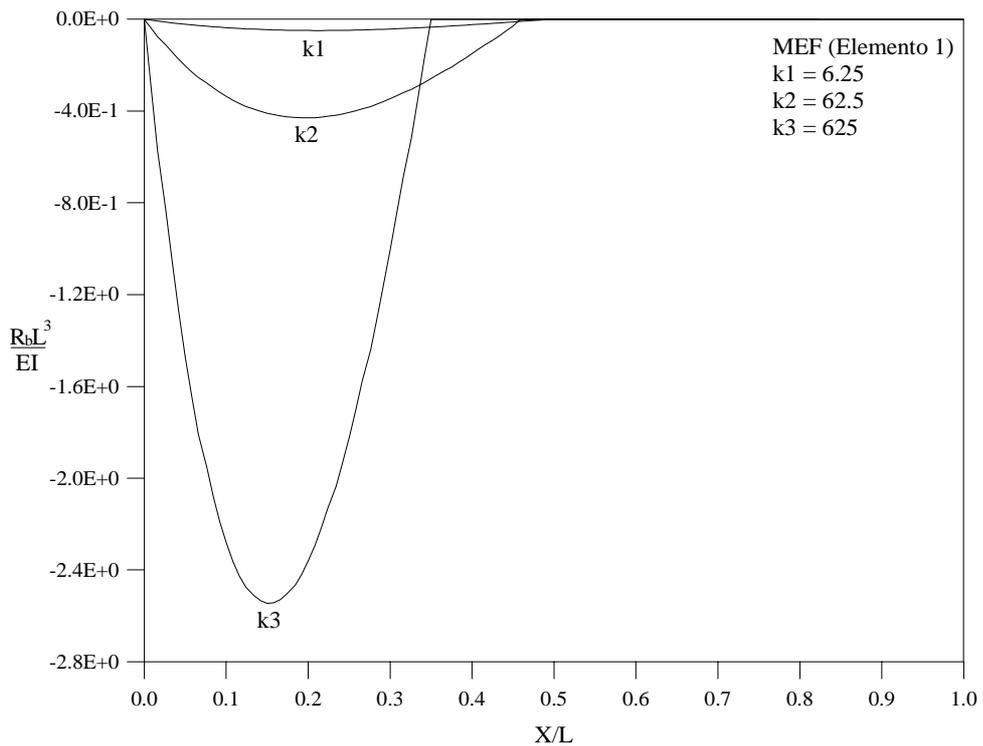


Figura 5.8 – Reação  $R_b$  da base elástica, Problema 1-PCU.

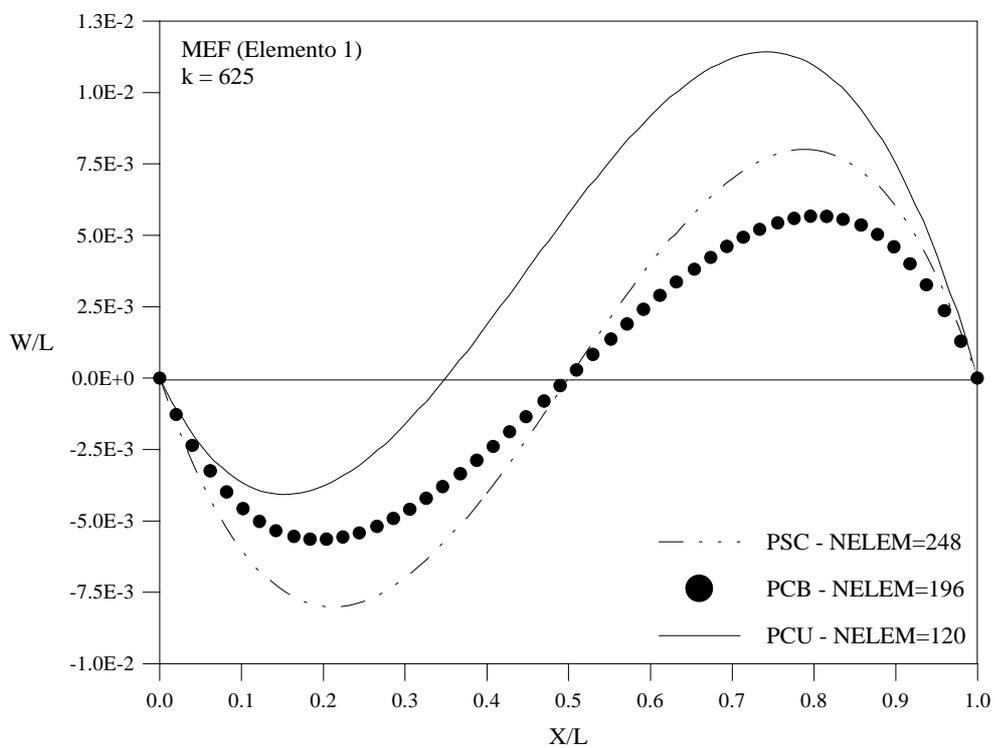


Figura 5.9 – Comparação dos problemas de contato, Problema 1.

Conclui-se esta seção fazendo-se um estudo comparativo dos resultados numéricos obtidos, via MEF, através das formulações primal e dual. Na Figura 5.10 pode ser visto, que para vários valores do parâmetro de rigidez elástica adimensional  $k$  da fundação, a variação da deflexão lateral  $w$  da viga obtida através dessas duas formulações. Como esperado, existe uma coincidência dos resultados, embora, de um modo geral, vale enfatizar que a formulação dual tenha se mostrado mais eficiente computacionalmente em relação à estabilidade e tempo de processamento. Por fim, destaca-se o melhor desempenho do Elemento 3, em relação aos demais elementos implementados, na modelagem do problema para obtenção dos resultados através dessas formulações, principalmente em relação à formulação primal.

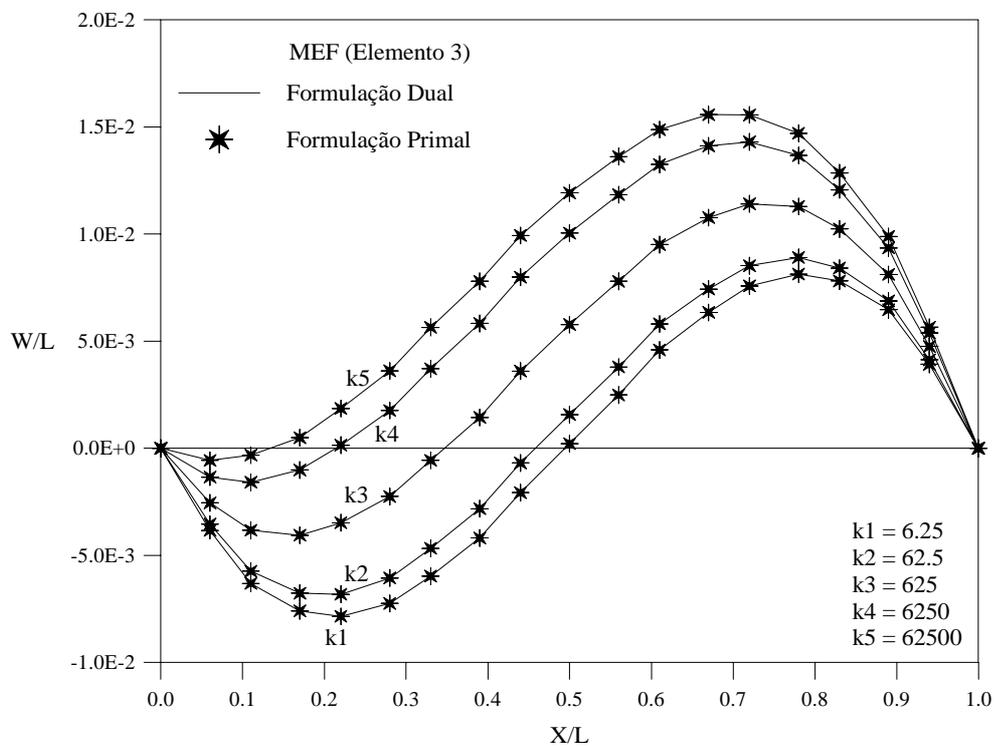


Figura 5.10 – Formulação primal x Formulação dual–Problema 1.

## 5.4 – PROBLEMA DE CONTATO 2:

### Viga isostática com uma região de contato e duas sem contato

A Figura 5.11 fornece o segundo problema de contato a ser analisado. Trata-se de uma viga simplesmente apoiada com momentos fletores de mesma intensidade aplicados nas extremidades A e B, e uma carga vertical no centro. Observe que, dependendo da magnitude desse carregamento e com a hipótese de contato unilateral, podem surgir uma região central de contato entre a viga e a base elástica e duas regiões com perda de contato nas extremidades. Para o estudo deste sistema estrutural são considerados os seguintes parâmetros:  $L = 10$ ,  $EI = 10^3$ ,  $S = 2 \times 10^4$ ,  $M_1 = -M_2 = 10^2$  e  $P = -150$ .

Com o mesmo propósito da seção anterior será analisado inicialmente o problema sem contato (PSC) e em seguida a situação de contato bilateral entre os corpos.

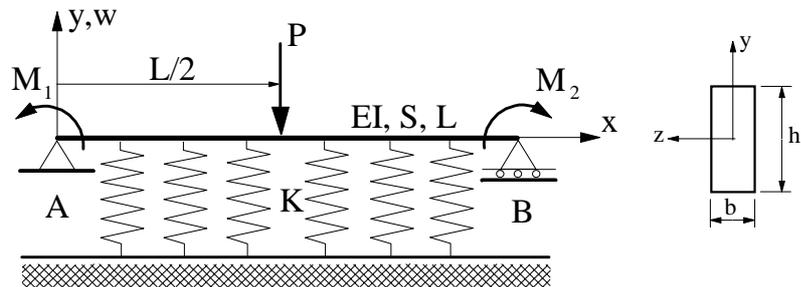


Figura 5.11 – Segundo problema de contato unilateral.

Quando se despreza a contribuição da base ( $K = 0$ ), tem-se que as soluções analíticas para  $w$ ,  $\theta$  e  $M$  podem ser facilmente encontradas em livros clássicos como Beer e Johnston (1995) e Timoshenko e Gere (1984), ou seja:

$$w(x) = \frac{M_1}{6EIL}(2L^2x - 3Lx^2 + x^3) + \frac{P}{48EI}(3L^2x - 4x^3) - \frac{M_2}{6EIL}(L^2x - x^3) \quad (5.5a)$$

$$\theta(x) = \frac{M_1}{6EIL}(2L^2 - 6Lx + 3x^2) + \frac{P}{48EI}(3L^2 - 12x^2) - \frac{M_2}{6EIL}(L^2 - 3x^2) \quad (5.5b)$$

$$M(x) = - \left[ M_1 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + \frac{P}{2} x + \frac{M_2}{L} x \right] \quad (5.5c)$$

Nas Tabelas 5.11 e 5.12 estão apresentados os resultados obtidos através dos MRR e MEF, onde agora a deflexão  $w$  e o momento fletor são avaliados em  $x = L/2$  e a rotação  $\theta$  no apoio da viga. Note que para o MRR, no caso da deflexão lateral  $w$ , obtém-se resultados satisfatórios para  $N = 5$ ; já para a rotação e o momento fletor foram necessários 20 semi-ondas para se chegar a um erro abaixo dos 2.5%. Na Tabela 5.12 fica evidenciado o melhor desempenho computacional dos Elementos 2 e 3 em relação ao Elemento 1 (dois pontos nodais). Os resultados apresentados nessa tabela foram obtidos usando-se malhas com  $NELEM = 700, 2$  e  $2$ , respectivamente, para os Elementos 1, 2 e 3.

Tabela 5.11 – Análise de convergência do PSC, MRR.

N	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
2	-1.789733	4.55	-0.562261	28.52	176.60	35.78
5	-1.870143	0.26	-0.472924	8.10	239.50	12.91
10	-1.873886	0.06	-0.458155	4.72	253.30	7.89
18	-1.874804	0.01	-0.448828	2.59	263.00	4.36
20	-1.875016	0.00	-0.447564	2.30	270.60	1.60
30	-1.874957	0.00	-0.444270	1.55	267.80	2.62
Sol. anal. (Beer e Johnston, 1995; Timoshenko e Gere, 1984): $w = -1.8750$ ; $\theta_B = -\theta_A = -0.43750$ ; $M = 275$ .						

Tabela 5.12 – Análise de convergência do PSC, MEF: Elementos 1, 2 e 3.

MEF	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
ELEM. 1	-1.893106	0.97	-0.437351	0.03	274.37	0.23
ELEM. 2	-1.89375	1.00	-0.437500	0.00	265.09	3.60
ELEM. 3	-1.89375	1.00	-0.437500	0.00	266.55	3.07
Sol. anal. (Beer e Johnston, 1995; Timoshenko e Gere, 1984): $w = -1.8750$ ; $\theta_B = -\theta_A = -0.43750$ ; $M = 275$ .						

Através do princípio da superposição dos efeitos, chega-se, usando-se como referência o livro Hetényi (1946), à solução analítica do problema de contato bilateral (PCB) entre a viga em questão e uma base elástica do tipo Winkler. As expressões

analíticas para  $w$ ,  $\theta$  e  $M$  são fornecidas a seguir, onde devem ser empregadas as variáveis mostradas na Figura 5.12.

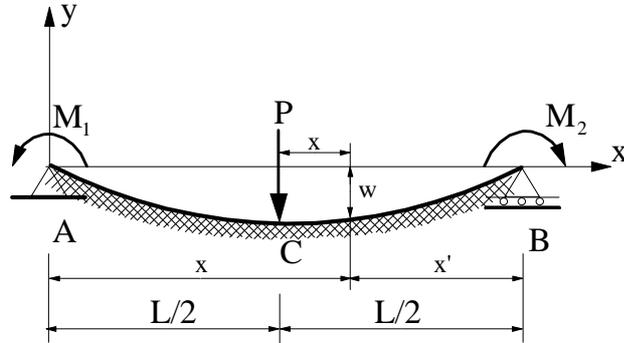


Figura 5.12 – Viga em contato bilateral com uma base elástica do tipo Winkler com momentos fletores nos apoios e carga concentrada no centro.

$$w(x) = - \left[ \left( \frac{2M_2 \lambda^2}{K} \frac{\chi_1}{\beta} \right) - \left( \frac{P \lambda}{2K} \frac{\zeta_1}{\beta} \right) \right] \quad (5.6a)$$

$$\theta(x) = - \left[ \left( - \frac{2P \lambda^2}{K} \frac{\zeta_2}{\beta} \right) - \left( \frac{2M_2 \lambda^3}{K} \frac{\chi_2}{\beta} \right) \right] \quad (5.6b)$$

$$M(x) = - \left[ \left( \frac{P}{4\lambda} \frac{\zeta_3}{\beta} \right) - \left( M_2 \frac{\chi_3}{\beta} \right) \right] \quad (5.6c)$$

sendo,

$$\beta = \cosh \lambda L + \cos \lambda L;$$

$$\zeta_1 = \cos \lambda x \sinh \lambda(L-x) - \cosh \lambda x \sin \lambda(L-x) + \sin \lambda x \cosh \lambda(L-x) - \sinh \lambda x \cos \lambda(L-x);$$

$$\chi_1 = \sinh \lambda x' \sin \lambda x + \sinh \lambda x \sin \lambda x';$$

$$\zeta_2 = \sinh \lambda x \sin \lambda(L-x) + \sin \lambda x \sinh \lambda(L-x);$$

$$\chi_2 = \cosh \lambda x \sin \lambda x' - \sinh \lambda x \cos \lambda x' - \cosh \lambda x' \sin \lambda x + \sinh \lambda x' \cos \lambda x;$$

$$\zeta_3 = \cosh \lambda x \sin \lambda(L-x) - \sinh \lambda x \cos \lambda(L-x) + \cos \lambda x \sinh \lambda(L-x) - \sin \lambda x \cosh \lambda(L-x);$$

$$\chi_3 = \cosh \lambda x \cos \lambda x' + \cosh \lambda x' \cos \lambda x.$$

Através das expressões anteriores constrói-se a Tabela 5.13, onde, para vários valores do parâmetro de rigidez elástico adimensional  $k$  da fundação, são calculadas a deflexão lateral e o momento fletor em  $x = L/2$  e a rotação na extremidade da viga. Esses resultados são usados nas análises de convergência das soluções modal e MEF, e estão mostradas nas Tabelas 5.14–5.17.

Na Tabela 5.14 são apresentados os resultados obtidos usando-se o MRR. Note que uma boa convergência é obtida para a deflexão lateral  $w$ , a rotação  $\theta$  e o momento fletor  $M$ , independente do aumento do parâmetro de rigidez da base. No caso da aplicação do MEF (Tabelas 5.15–5.17), é observado que o erro no cálculo dessas três variáveis vai crescendo à medida que o valor de  $k$  aumenta, independente do tipo de elemento empregado. Para a deflexão e a rotação, as respostas apresentaram boa precisão até o valor de  $k = 10^4$ . Como na seção anterior a resposta numérica diverge bastante da analítica no caso da base rígida. A Tabela 5.18 fornece a modelagem adotada nessas análises para solução modal e os Elementos 1, 2 e 3.

Tabela 5.13 – Solução analítica para vários valores do parâmetro de rigidez elástico adimensional  $k$  da base elástica ( $k = KL^4/EI$ ).

$k$	$w$	$\theta$	$M$
$10^2$	-0.967322	-0.153711	184.58
$10^3$	-0.234544	0.065563	105.59
$10^4$	-0.055138	0.072385	58.41
$10^5$	-0.009430	0.039763	29.45
$10^6$	-0.001677	0.022361	16.77

Tabela 5.14 – Análise de convergência, MRR.

$k$	$w$	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	$M$	Erro(%)
$10^2$	-0.967279	0.00	-0.160481	4.40	177.40	3.89
$10^3$	-0.234545	0.00	0.062188	5.15	104.10	1.41
$10^4$	-0.055139	0.00	0.069011	4.66	56.94	2.52
$10^5$	-0.009430	0.00	0.037737	5.09	28.57	2.98
$10^6$	-0.001677	0.00	0.020335	9.06	15.89	5.25

Tabela 5.15 – Análise de convergência, MEF: Elemento 1.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
$10^2$	-0.975905	0.89	-0.152023	1.10	183.44	0.62
$10^3$	-0.238080	1.51	0.067399	2.80	103.91	1.59
$10^4$	-0.056747	2.92	0.074594	3.05	56.08	3.98
$10^5$	-0.010513	11.48	0.044032	10.74	25.49	13.43
$10^6$	-0.002237	33.39	0.029641	32.56	11.50	31.40

Tabela 5.16 – Análise de convergência, MEF: Elemento 2.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
$10^2$	-0.976088	0.91	-0.152027	1.10	172.82	6.37
$10^3$	-0.238148	1.54	0.067484	2.93	95.09	9.94
$10^4$	-0.056794	3.00	0.074748	3.26	48.28	17.34
$10^5$	-0.010536	11.73	0.044348	11.53	19.58	33.50
$10^6$	-0.002250	34.17	0.030000	34.16	3.90	76.73

Tabela 5.17 – Análise de convergência, MEF: Elemento 3.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
$10^2$	-0.976082	0.91	-0.152027	1.10	170.10	7.84
$10^3$	-0.238144	1.53	0.067482	2.93	91.10	13.72
$10^4$	-0.056791	3.00	0.074745	3.26	47.64	18.44
$10^5$	-0.010538	11.75	0.044349	11.53	18.92	35.74
$10^6$	-0.002250	34.17	0.030000	34.16	6.84	59.16

Tabela 5.18 – Modelagens adotadas para solução numérica do PCB.

k	N	NELEM 1	NELEM 2	NELEM 3
$10^2$	30	700	14	6
$10^3$	60	460	16	6
$10^4$	60	250	16	8
$10^5$	100	130	16	8
$10^6$	100	98	8	8

A última e mais importante análise desta seção é feita considerando o problema de contato unilateral entre os corpos (viga e base elástica). Os resultados dessa análise podem ser vistos inicialmente através das Figuras 5.13–5.16, onde para diversas magnitudes do valor de k, são mostrados o comportamento da deflexão lateral w, da rotação  $\theta$  e do momento fletor M da viga e a variação da reação da base elástica, respectivamente. Mais uma vez, os resultados obtidos através do MRR, considerando o número de semi-ondas  $N = 20$ , são coincidentes com aqueles obtidos do MEF, onde

foram usados a formulação dual para se chegar no problema de complementaridade linear (PCL) e o algoritmo de Lemke para solução desse problema. O Elemento 2 foi adotado nessa modelagem, sendo que, para melhor convergência dos resultados variou-se o número de elementos de acordo com valor de  $k$  (veja a Figura 5.13).

As Figuras 5.13 e 5.16 mostram que à medida que  $k$  aumenta a região de contato entre a viga e a base elástica diminui. No caso da base flexível,  $k_1 = 10^2$ , tem-se o contato completo entre os corpos.

Na modelagem do problema através do MRR observou-se uma grande sensibilidade da resposta não-linear aos valores das coordenadas  $t_i$  e  $t_f$  que definem uma aproximação inicial das regiões de contato. Vale lembrar que essas variáveis são fornecidas pelo analista no arquivo de dados para dar início ao processo iterativo de Newton–Raphson.

Na modelagem do problema através do MEF, mais uma vez a formulação dual mostrou-se mais eficiente computacionalmente do que a formulação primal, apesar da coincidência dos resultados (ver Figura 5.17) e do tempo de processamento para realização das tarefas (montagem das matrizes e vetores, e solução do PCL) ter sido desprezível para as malhas adotadas. Neste problema de contato, essa eficiência computacional está relacionada com a estabilidade da convergência dos resultados obtidos com os elementos isoparamétricos implementados e diferentes malhas adotadas nas análises.

Por fim, verifica-se, usando-se como referência a Figura 5.18, que a consideração da base elástica reagindo apenas à solicitação de compressão introduz mudanças significativas no comportamento da viga para certos valores do parâmetro de rigidez  $k$  e carregamento atuante.

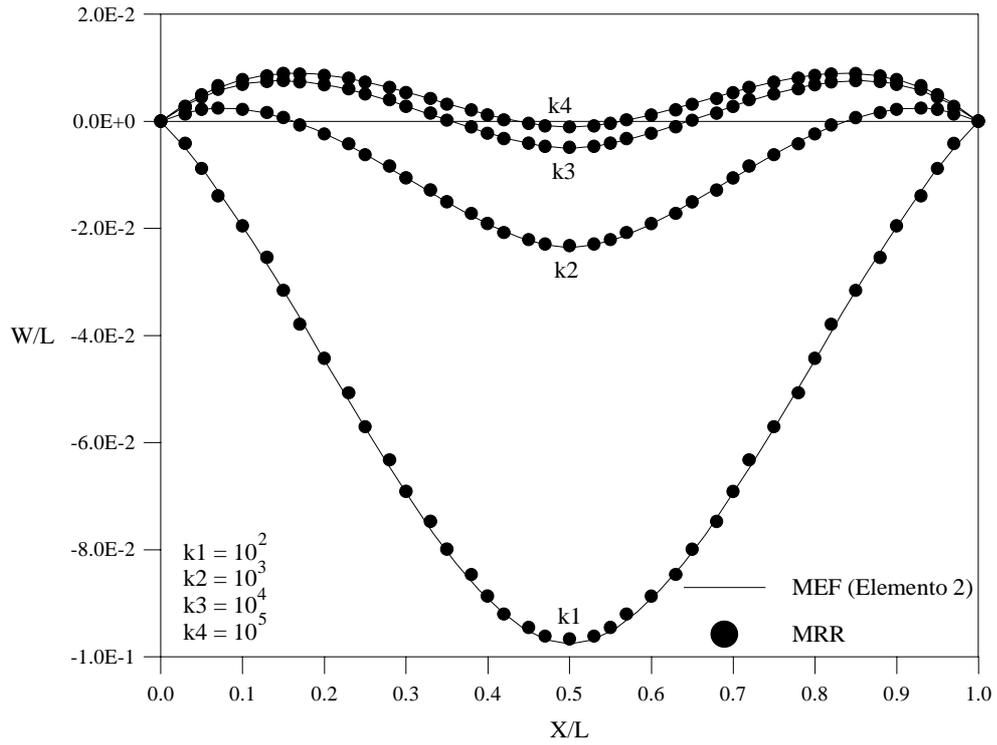


Figura 5.13 – Deflexão lateral  $w$  da viga, Problema 2.

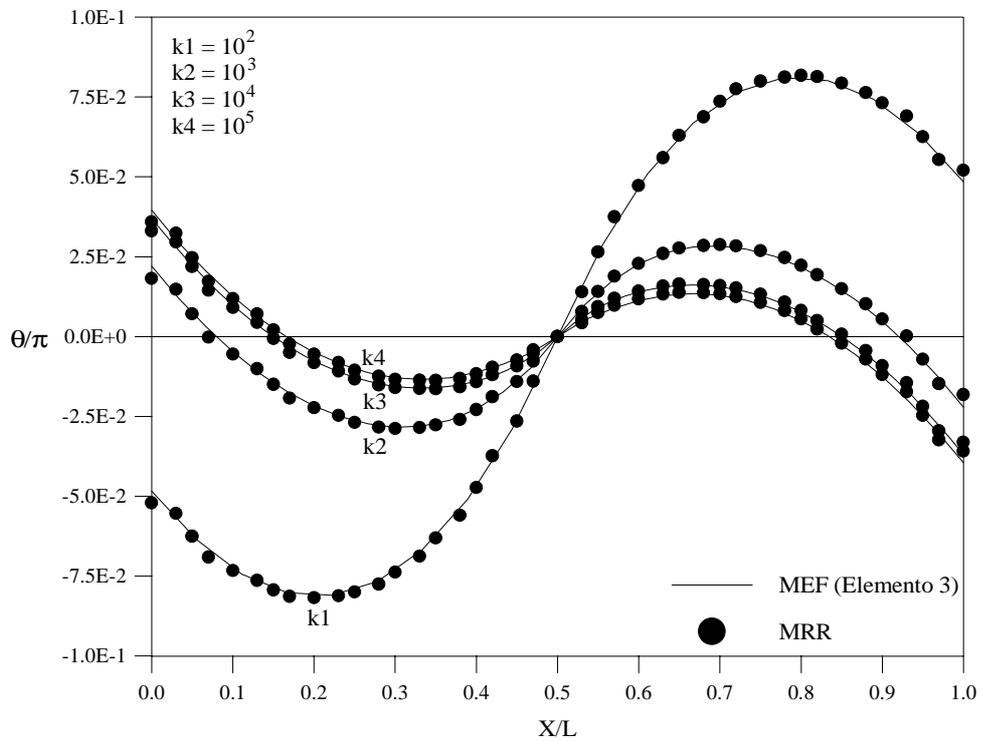


Figura 5.14 – Rotação  $\theta$  da viga, Problema 2.

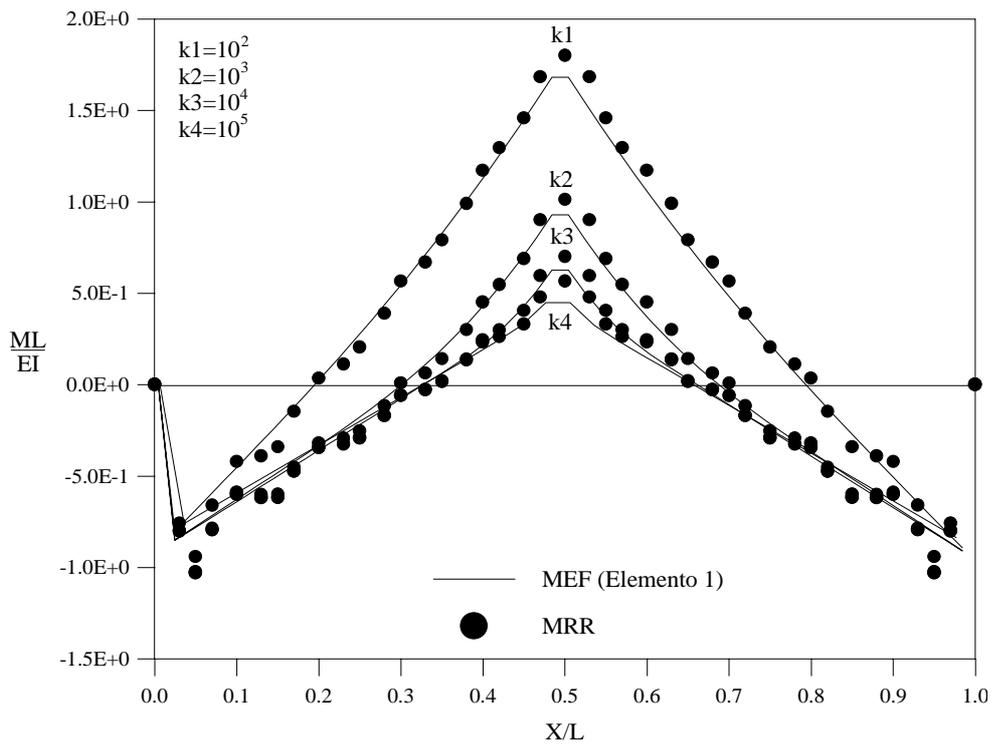


Figura 5.15 – Momento fletor M da viga, Problema 2.

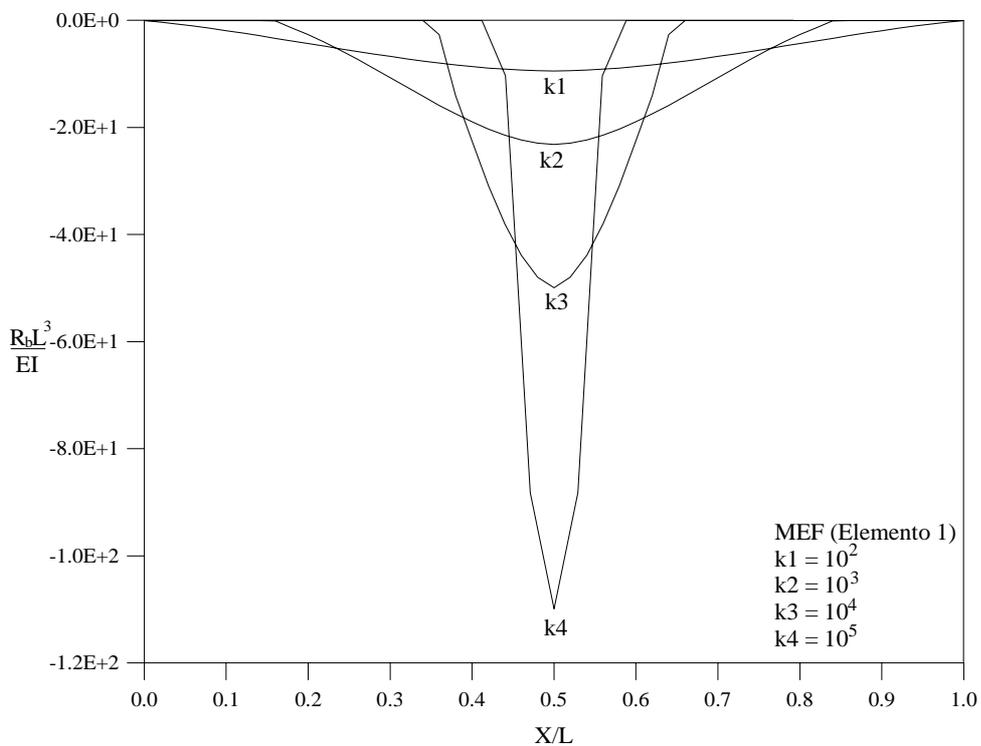


Figura 5.16 – Reação  $R_b$  da base elástica, Problema 2.

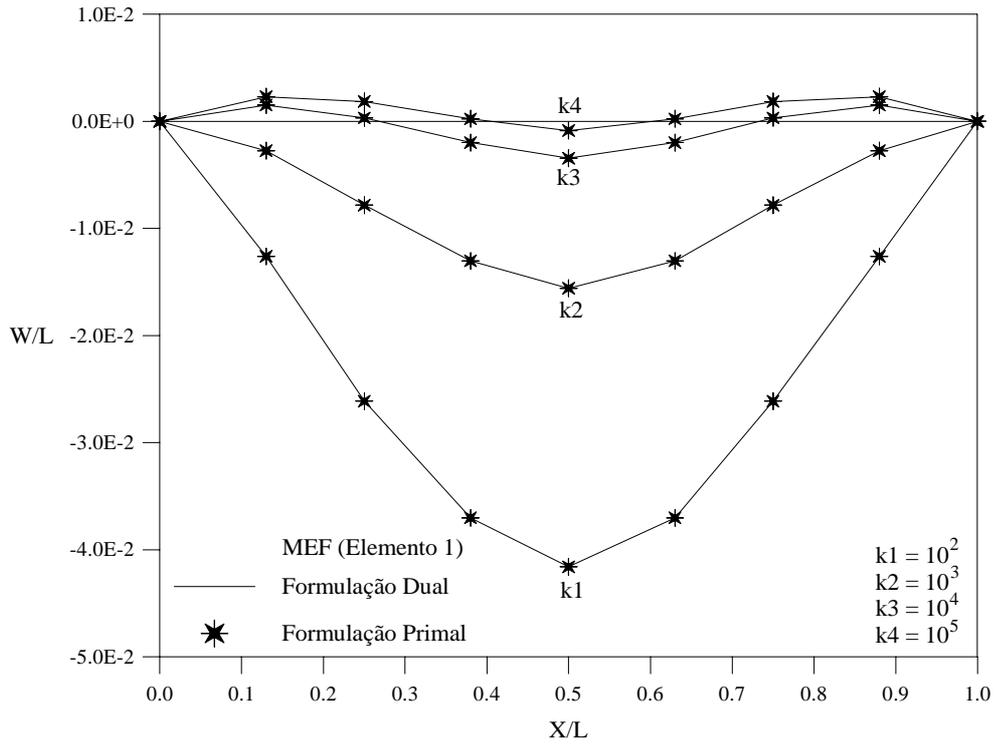


Figura 5.17 – Formulações dual x Formulação primal, Problema 2.

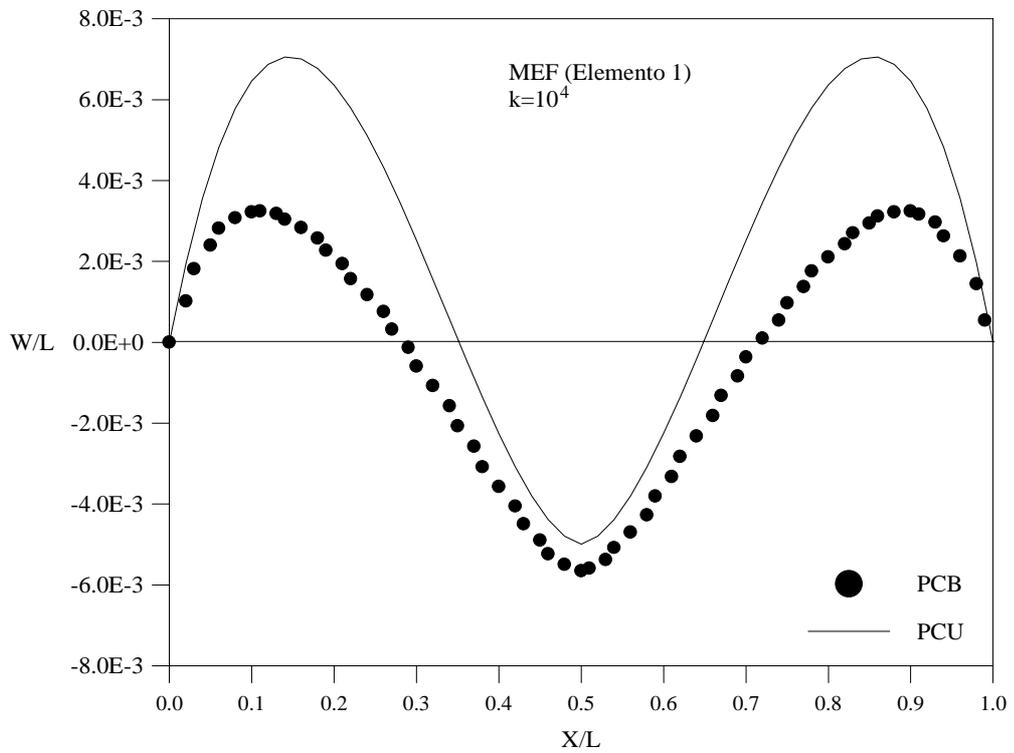


Figura 5.18 – Comparação dos problemas de contato, Problema 2.

## 5.5 – PROBLEMA DE CONTATO 3:

### Viga isostática com duas regiões de contato e uma sem contato

Na Figura 5.19 encontra-se o sistema estrutural a ser analisado nesta seção. Trata-se do mesmo problema da seção anterior, porém observe que o sentido do carregamento atuante ( $P$ ,  $M_1$  e  $M_2$ ) foi modificado. Note que, caso seja considerada a hipótese de contato unilateral entre os corpos, dependendo das intensidades de  $P$ ,  $M_1$  e  $M_2$  podem surgir duas regiões de contato e uma sem contato. Este problema compreende o último caso particular de contato unilateral no qual o MRR é empregado na análise. Os dados relacionados ao estudo do presente problema são:  $L = 10$ ,  $EI = 10^3$ ,  $S = 2 \times 10^4$  e  $M_1 = -M_2 = -10^2$  e  $P = 50$ .

As Equações 5.5 e 5.6, que definem a solução analítica dos problemas sem contato (PSC) e contato bilateral (PCB), respectivamente, podem ser usadas também nesta seção. As Tabelas 5.19 e 5.22–5.25 fornecem os resultados obtidos através do MRR e MEF para esses dois tipos problemas. Novamente, a deflexão lateral  $w$  e o momento fletor  $M$  são avaliados em  $x = L/2$  e a rotação  $\theta$  em um dos apoios. Nas modelagens do PSC, observe na Tabela 5.19, que os resultados relacionados com os MRR e MEF apresentaram boa convergência para  $w$ ,  $\theta$  e  $M$  para os valores adotados de  $N$  e NELEM, respectivamente.

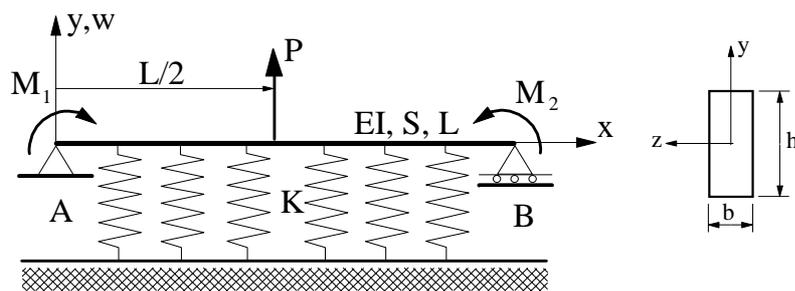


Figura 5.19 – Terceiro problema de contato unilateral.

As soluções analíticas para  $w$ ,  $\theta$  e  $M$ , nos pontos já citados, quando se considera o problema de contato bilateral, são mostradas na Tabela 5.20 para vários valores do parâmetro de rigidez elástico adimensional  $k$  da fundação do tipo Winkler. Os

resultados dessa análise, com as aplicações dos MRR e MEF, empregando-se os valores de N e NELEM (para os elementos implementados) fornecidos na Tabela 5.21, são apresentados nas Tabelas 5.22–5.25. De um modo geral os erros obtidos para  $w$  e  $\theta$ , em todas as modelagens, foram pequenos até o valor de  $k = 10^4$ ; a partir desse valor de  $k$ , com a base tornando-se mais rígida, certa divergência nos resultados é encontrada, principalmente na discretização pelo MEF.

A análise do problema de contato bilateral é concluída através da Figura 5.20, onde são apresentadas as configurações deformadas da viga para os valores de  $k$  selecionados. Mais uma vez, destaca-se a semelhança dos resultados obtidos através do MRR e da solução analítica, para qualquer valor de  $k$ .

Tabela 5.19 – Resultados do problema sem contato (PSC).

	MRR		ELEMENTO 1		ELEMENTO 2		ELEMENTO 3	
	N=40	Erro(%)	NELEM=700	Erro(%)	NELEM=2	Erro(%)	NELEM=2	Erro(%)
w	-0.208326	0.00	-0.202015	3.03	-0.202083	3.00	-0.202083	3.00
$\theta$	-0.182438	2.69	-0.187436	0.03	-0.187500	0.00	-0.187500	0.00
M	-25.32	1.28	-24.81	0.75	-23.24	7.04	-23.59	5.64
Sol. Anal. (Beer e Jhonston, 1995; Timoshenko e Gere, 1984): $w = -0.208333$ ; $\theta_B = -\theta_A = -0.187500$ ; $M = -25$ .								

Tabela 5.20 – Solução analítica para vários valores do parâmetro de rigidez elástica adimensional  $k$  da base elástica ( $k = KL^4/EI$ ).

k	w	$\theta$	M
$10^2$	-0.075617	-0.144832	-37.53
$10^3$	0.025068	-0.105398	-42.93
$10^4$	0.019868	-0.071269	-23.06
$10^5$	0.003143	-0.039763	-9.57
$10^6$	0.000559	-0.022361	-5.59

Tabela 5.21 – Valores de N e NELEM adotados na modelagem do problema de contato bilateral (PCB).

k	N	NELEM 1	NELEM 2	NELEM 3
$10^2$	40	692	10	8
$10^3$	40	456	16	12
$10^4$	40	240	18	12
$10^5$	20	120	22	12
$10^6$	30	60	22	12

Tabela 5.22 – Análise de convergência do PCB, MRR.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
$10^2$	-0.075609	0.01	-0.139769	3.50	-37.85	0.85
$10^3$	0.025076	0.03	-0.100335	4.80	-43.25	0.75
$10^4$	0.019875	0.04	-0.066207	7.10	-23.38	1.39
$10^5$	0.003201	1.85	-0.029672	25.38	-10.20	6.58
$10^6$	0.000530	5.19	-0.015620	30.15	-1.81	67.58

Tabela 5.23 – Análise de convergência do PCB, MEF: Elemento 1.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
$10^2$	-0.071652	5.24	-0.145691	0.59	-37.04	1.31
$10^3$	0.026448	5.51	-0.107081	1.60	-42.02	2.11
$10^4$	0.020180	1.57	-0.073632	3.32	-22.19	3.74
$10^5$	0.003519	11.96	-0.043966	10.57	-8.23	14.00
$10^6$	0.000739	32.20	-0.029068	29.99	-3.21	42.45

Tabela 5.24 – Análise de convergência do PCB, MEF: Elemento 2.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
$10^2$	-0.071646	5.25	-0.145733	0.62	-31.94	14.90
$10^3$	0.026486	5.66	-0.107157	1.67	-39.05	9.03
$10^4$	0.020203	1.69	-0.073793	3.54	-19.95	13.47
$10^5$	0.003527	12.22	-0.044337	11.50	-7.07	26.11
$10^6$	0.000750	34.17	-0.030000	34.16	-3.01	46.21

Tabela 5.25 – Análise de convergência do PCB, MEF: Elemento 3.

k	w	Erro(%)	$\theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
$10^2$	-0.071655	5.24	-0.145735	0.62	-33.70	10.19
$10^3$	0.026481	5.64	-0.107157	1.67	-39.99	6.84
$10^4$	0.020202	1.68	-0.073793	3.54	-20.48	11.18
$10^5$	0.003528	12.25	-0.044337	11.50	-7.10	25.83
$10^6$	0.000750	34.17	-0.030000	34.16	-2.99	46.41

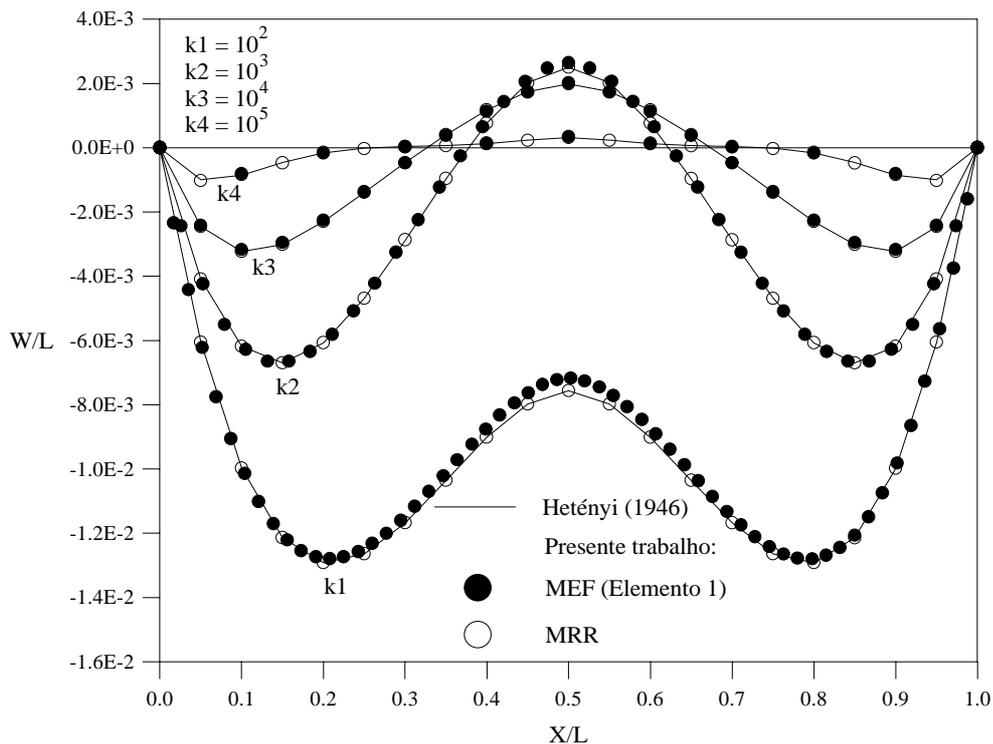


Figura 5.20 – Configurações deformadas da viga para a situação de contato bilateral.

Seguindo o mesmo procedimento adotado nas seções anteriores, parte-se agora para a análise do problema de contato unilateral entre a viga e a base elástica. Usando os valores de  $N$  e  $NELEM$  apresentados na Tabela 5.26 para a modelagem do problema, chega-se nos resultados mostrados nas Figuras 5.21–5.26. Nos três primeiros gráficos, Figuras 5.21–5.23, estão apresentadas as variações de  $w$ ,  $\theta$  e  $M$  para os valores do parâmetro de rigidez elástico adimensional  $k$  selecionados, onde são comparados os resultados obtidos através dos MRR e MEF.

Através da Figura 5.21 nota-se que para a base elástica mais flexível,  $k = 10^2$ , não existe separação entre os corpos; a medida que  $k$  aumenta a extensão da região central de perda de contato também aumenta, chegando-se a uma quase separação entre a viga e a base para  $k = 10^6$ . A Figura 5.24, onde para  $k = 10^2, 10^3$  e  $10^4$  estão ilustradas as variações da reação da base, enfatiza esse comportamento do sistema estrutural.

Mais uma vez, os resultados apresentados usando o MEF foram obtidos resolvendo-se o problema de complementaridade linear (PCL) resultante da formulação dual, que se apresentou mais estável computacionalmente para os modelos adotados. Na

Figura 5.25 é mostrado, entretanto, que é possível obter os mesmos resultados adotando-se a formulação primal.

Por fim, destaca-se a influência do tipo das restrições de contato entre a viga e a base elástica do tipo Winkler através da Figura 5.26, onde para  $k = 10^4$ , compara-se o comportamento da viga, através da sua deflexão lateral  $w$ , considerando os problemas de contato bilateral e unilateral. Para o carregamento considerado, observe que se as restrições unilaterais de contato são consideradas, ocorre um acréscimo acentuado da deflexão da viga na sua região central.

Tabela 5.26 – Valores de N e NELEM adotados na modelagem do problema de contato unilateral (PCU).

k	N	NELEM 1	NELEM 2	NELEM 3
$10^2$	30	50	18	8
$10^3$	20	50	14	8
$10^4$	20	50	10	10
$10^5$	20	50	16	16
$10^6$	30	50	20	16

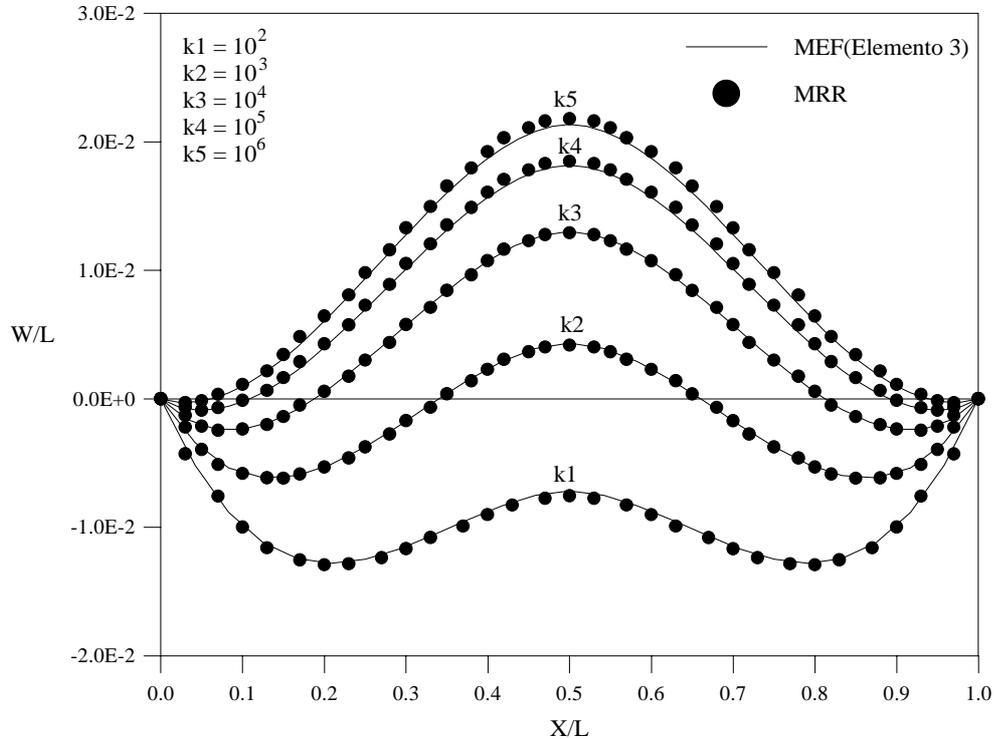


Figura 5.21 – Deflexão lateral  $w$  da viga, Problema 3.

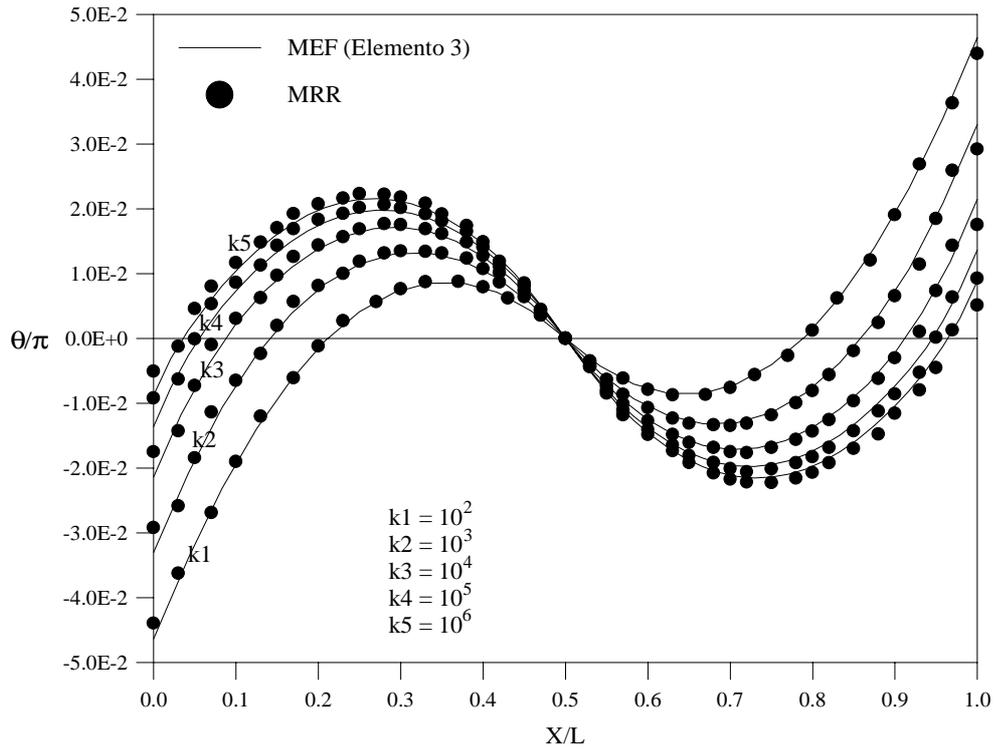


Figura 5.22 – Rotação  $\theta$  da viga, Problema 3.

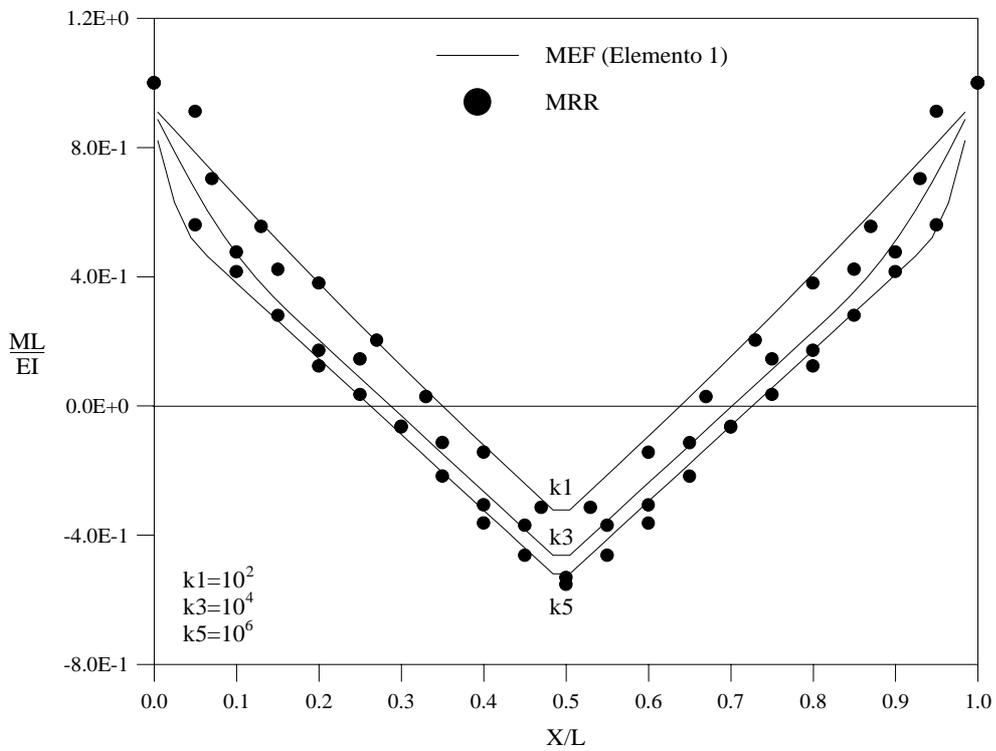


Figura 5.23 – Momento fletor M da viga, Problema 3.

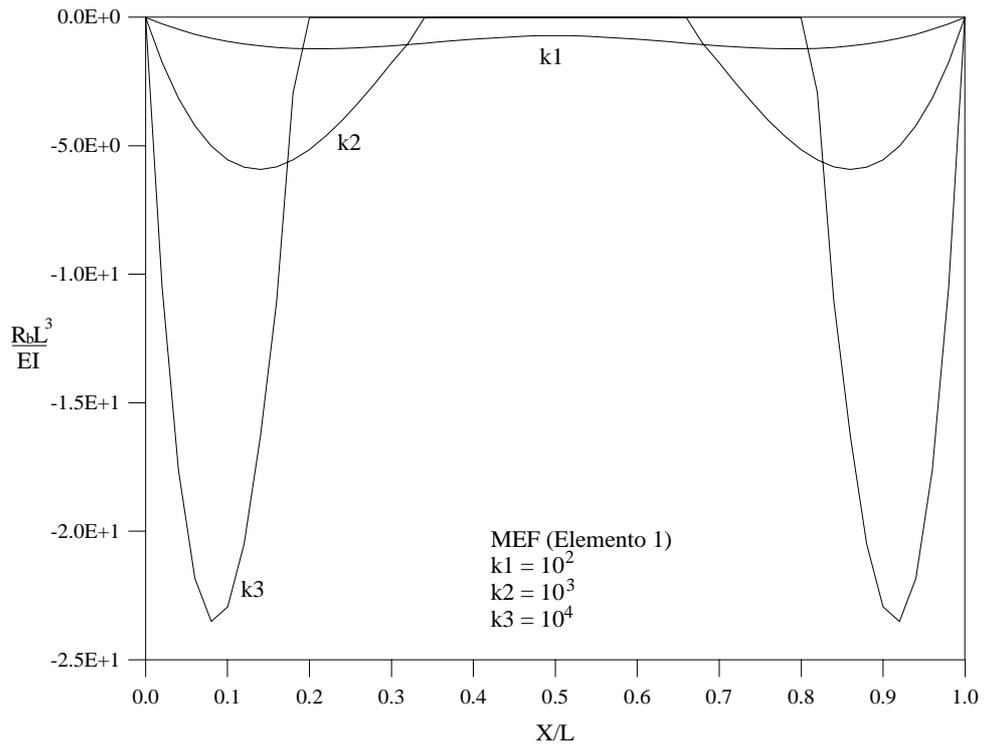


Figura 5.24 – Reação da base elástica  $R_b$ , Problema 3.

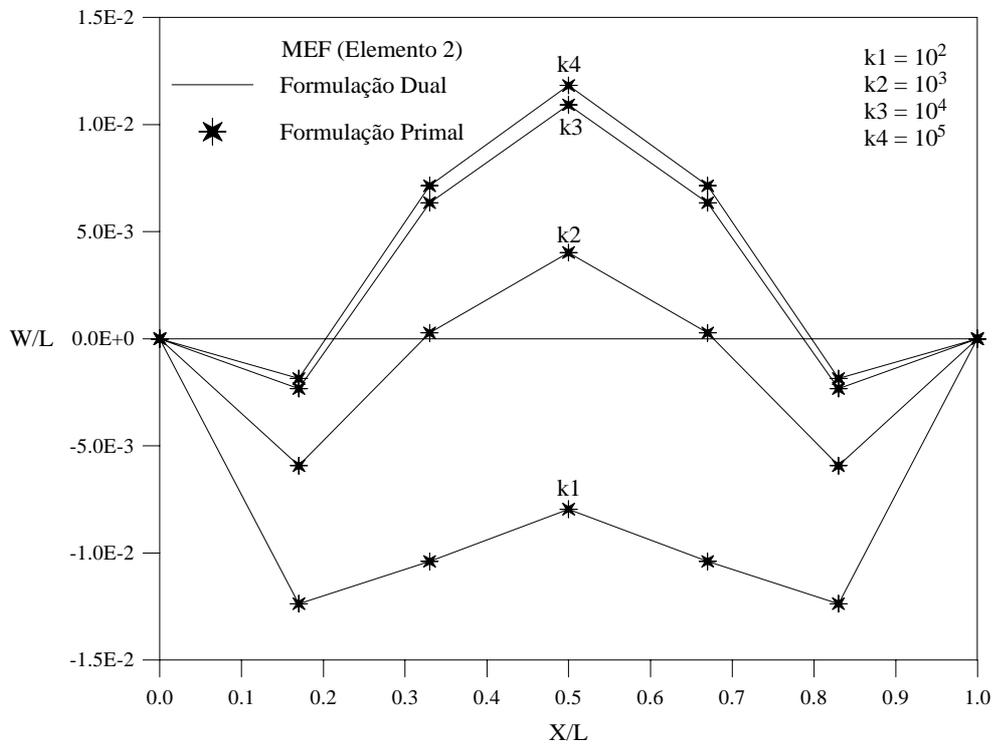


Figura 5.25 – Formulação primal x formulações dual, Problema 3.

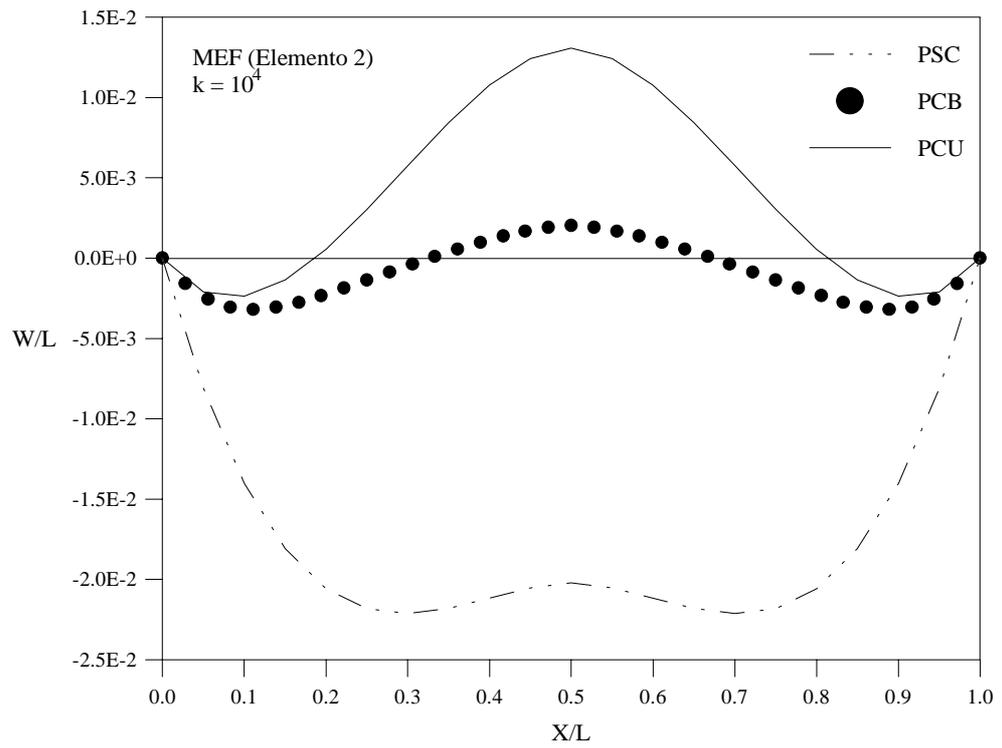


Figura 5.26 – Comparação dos problemas de contato, Problema 3.

## 5.6 – PROBLEMA DE CONTATO 4:

### Viga hiperestática com uma região de contato e uma sem contato

Considere uma viga contínua, com dois vãos iguais a  $L$ , em contato com uma base elástica do tipo Winkler e submetida a uma carga uniformemente distribuída de acordo com a Figura 5.27(a). Nessa mesma figura estão os dados para a análise do sistema estrutural proposto. Na Figura 5.27(b) é mostrada a configuração deformada da viga para a situação de contato unilateral entre os corpos.

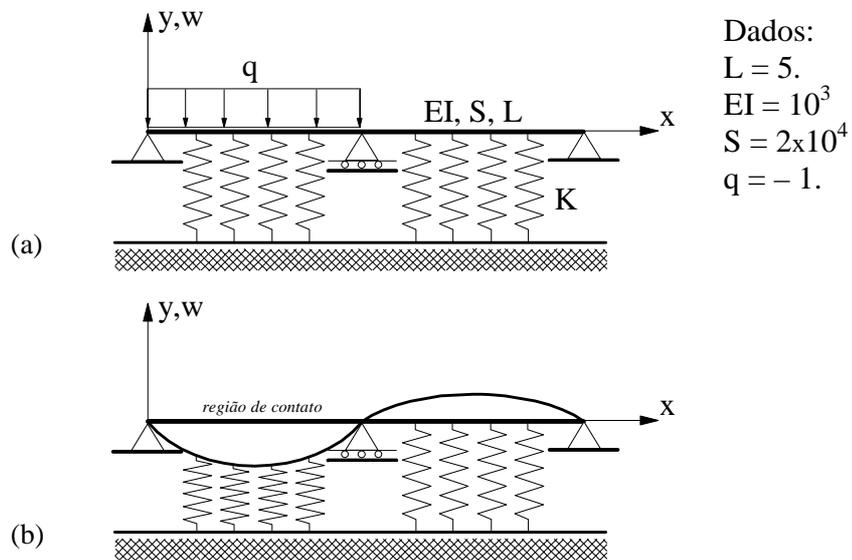


Figura 5.27 – Viga contínua, com dois tramos, em contato com uma base elástica do tipo Winkler.

Este problema de contato foi analisado utilizando o MEF e os modelos numéricos apresentados nas Tabelas 5.27 e 5.28, considerando várias magnitudes do parâmetro de rigidez  $k$ , para as situações de contato bilateral e unilateral entre a viga e a base elástica. Nas Figuras 5.28–5.31 estão os resultados da modelagem através do Elemento 2, onde são apresentadas, como nas seções anteriores, as variações da deflexão lateral  $w$ , a rotação  $\theta$ , momento fletor  $M$  e reação da base elástica  $R_b$ , respectivamente.

No sistema estrutural em estudo fica evidenciado, mais uma vez, a diferença de comportamento da viga e da base elástica, caso a hipótese de contato unilateral for

introduzida na análise. No caso da viga, observe que a deflexão lateral no tramo do lado direito ficam mais pronunciadas (veja a Figura 5.28); com o levantamento da viga neste tramo, ou seja, com a perda de contato entre os corpos, deixa de existir a reação da fundação, como destacado na Figura 5.31.

Finalmente, vale informar que os resultados mostrados nessas figuras foram obtidos com a solução através do algoritmo de Lemke do problema de complementaridade linear resultante da formulação dual, que mais uma vez se mostrou mais eficiente computacionalmente.

Tabela 5.27 – Valores do parâmetro NELEM adotados na modelagem do problema de contato bilateral (PCB).

k	NELEM 1	NELEM 2	NELEM 3
$10^2$	264	16	4
$10^3$	192	14	4
$10^4$	132	10	8
$10^5$	48	8	8
$10^6$	36	8	8

Tabela 5.28 – Valores do parâmetro NELEM adotados na modelagem do problema de contato unilateral (PCU).

k	NELEM 1	NELEM 2	NELEM 3
$10^2$	-	16	8
$10^3$	-	10	8
$10^4$	108	12	8
$10^5$	108	6	8
$10^6$	30	6	4

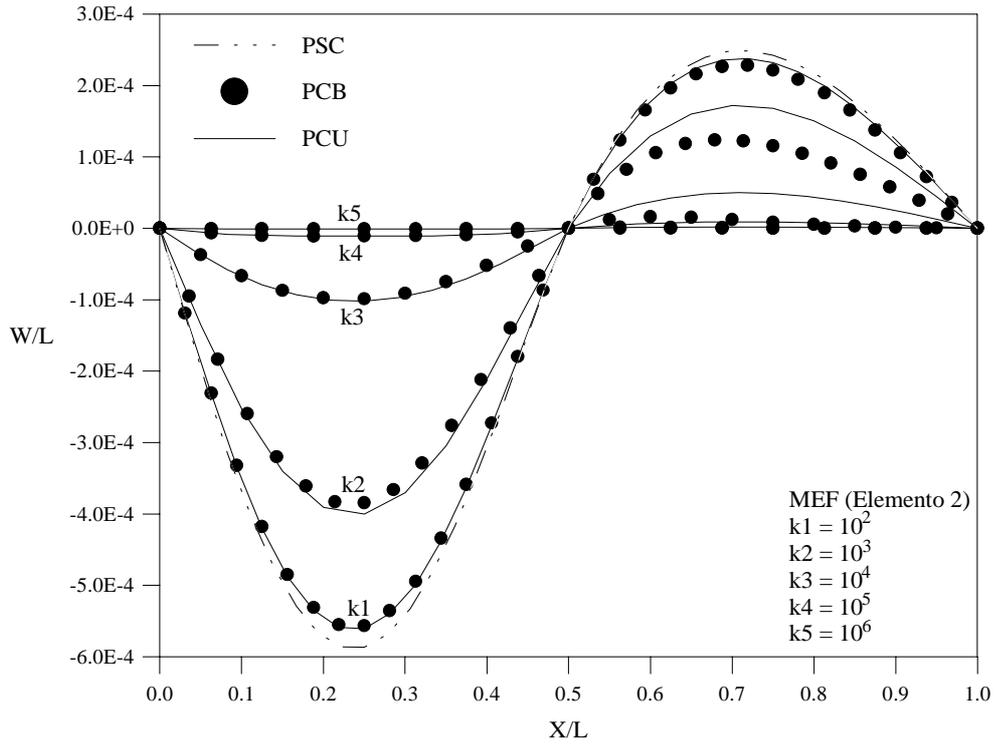


Figura 5.28 – Deflexão lateral  $w$  da viga, Problema 4.

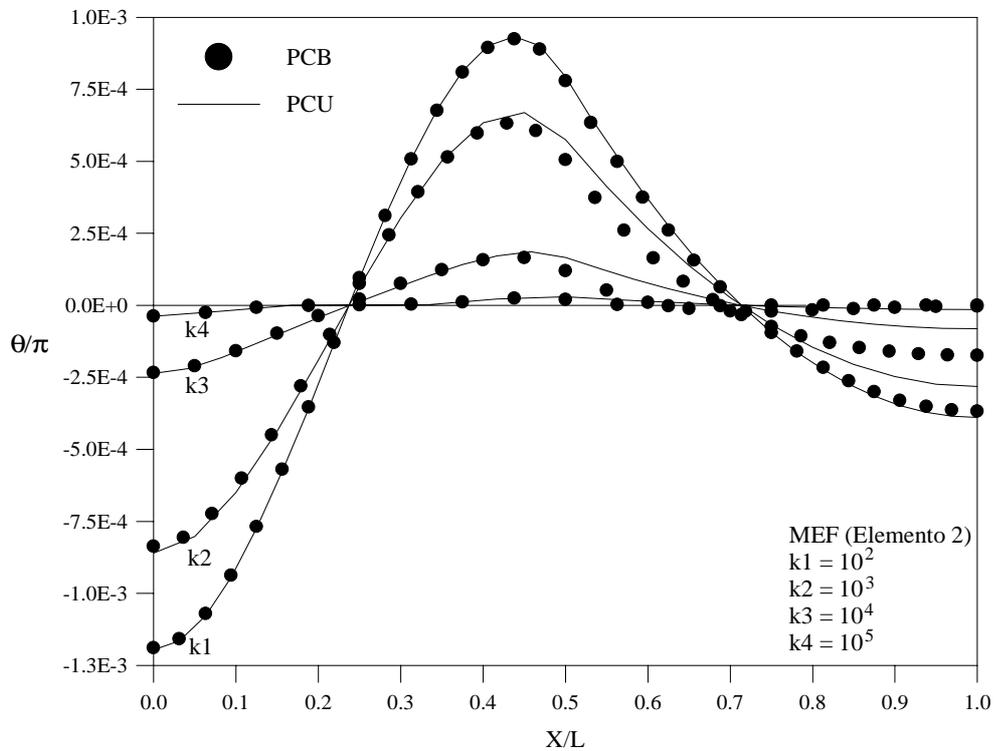


Figura 5.29 – Rotação  $\theta$  da viga, Problema 4.

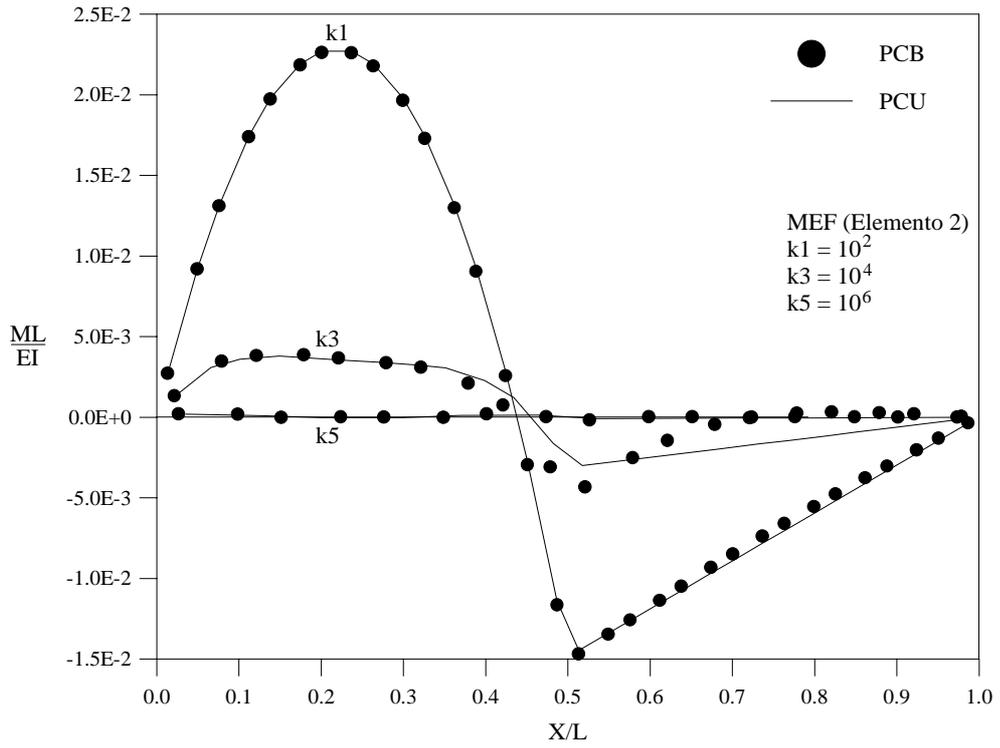


Figura 5.30 – Momento fletor M da viga, Problema 4.

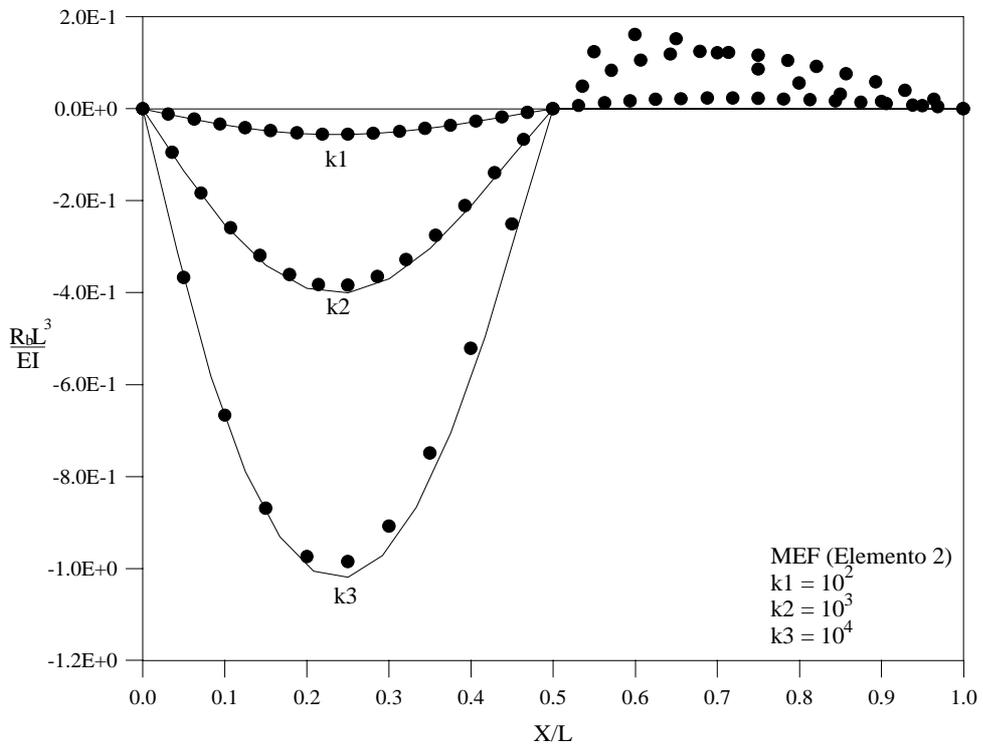


Figura 5.31 – Reação  $R_b$  da base elástica, Problema 4.

## 5.7 – PROBLEMA DE CONTATO 5:

### Viga hiperestática com uma região de contato e duas sem contato

Como no exemplo anterior, esta seção tem o propósito de destacar, através da análise do sistema estrutural ilustrado na Figura 5.32(a) para uma viga com três vãos iguais a  $L$ , como o comportamento de uma viga hiperestática pode ser alterado caso sejam consideradas as restrições unilaterais de contato. Observe na Figura 5.32(b) que, no caso de contato unilateral entre os corpos, o carregamento atuante propicia o surgimento de uma região de contato no vão central e perda de contato nos tramos laterais adjacentes.

Os resultados dessa análise podem ser vistos nas Figuras 5.33–5.36, onde são mostradas novamente as variações de  $w$ ,  $\theta$ ,  $M$  e  $R_b$ , para os vários valores do parâmetro de rigidez da base  $k$  escolhidos e situações de contato bilateral e unilateral entre a viga e a fundação elástica. Considerou-se na análise deste sistema estrutural os modelos de elementos finitos apresentados na Tabelas 5.29 e 5.30, porém os resultados apresentados nas referidas figuras estão associados com o Elemento 2 e à solução do PCL resultante da formulação dual.

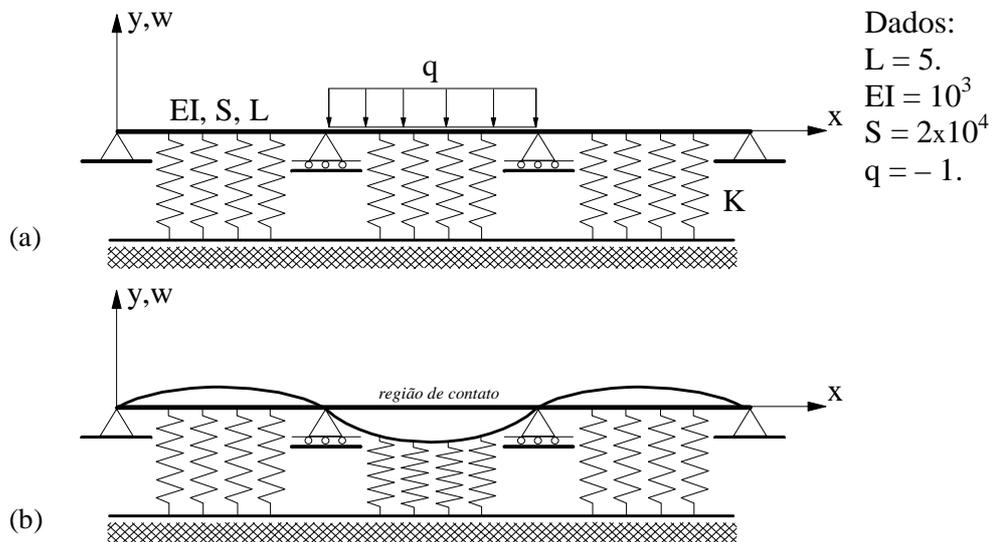


Figura 5.32 – Viga contínua, com três tramos, em contato com uma base elástica do tipo Winkler.

Como esperado, a medida que a base elástica torna-se mais rígida os deslocamentos da viga vão ficando menores. Como mostrado nas Figuras 5.33 e 5.36, caso a base só reaja às solicitações de compressão, verifica-se, como também esperado, que a deflexão da viga na região de perda de contato torna-se mais elevada com a reação da base  $R_b$  se anulando nessa região.

Tabela 5.29 – Valores do parâmetro NELEM adotados na modelagem do problema de contato bilateral (PCB).

k	NELEM 1	NELEM 2	NELEM 3
506.25	264	18	6
5062.5	228	18	6
50625	132	18	6
506250	42	12	12
5062500	18	12	12

Tabela 5.30 – Valores do parâmetro NELEM adotados na modelagem do problema de contato unilateral (PCU).

k	NELEM 1	NELEM 2	NELEM 3
506.25	150	18	6
5062.5	138	15	6
50625	132	15	9
506250	102	9	9
5062500	102	12	6

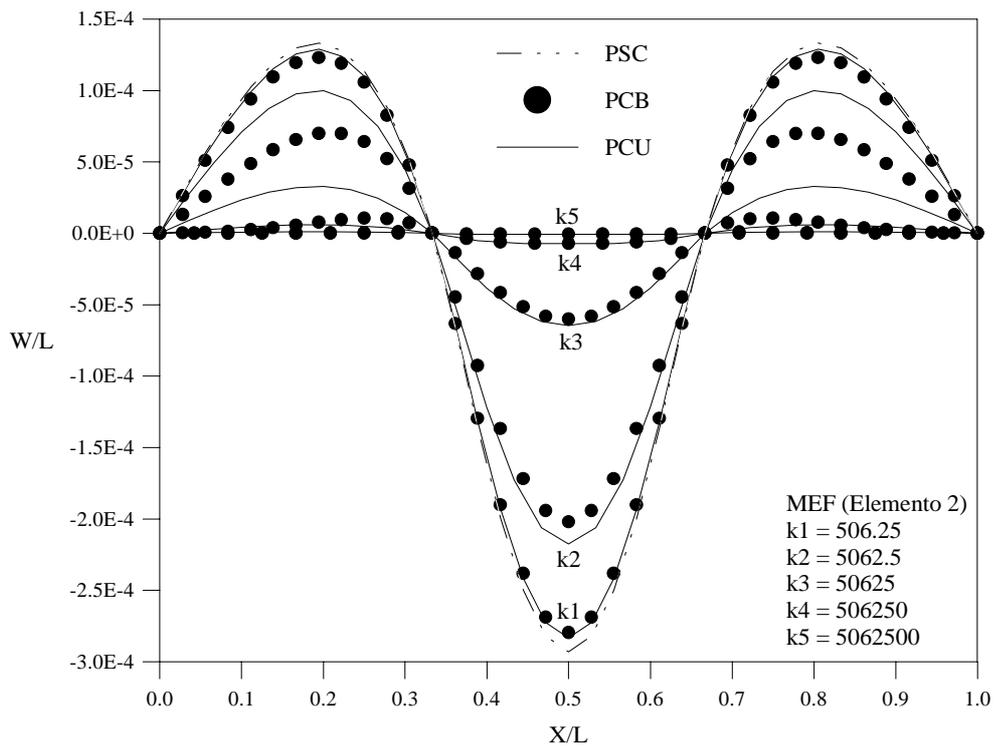


Figura 5.33 – Deflexão lateral  $w$  da viga, Problema 5.

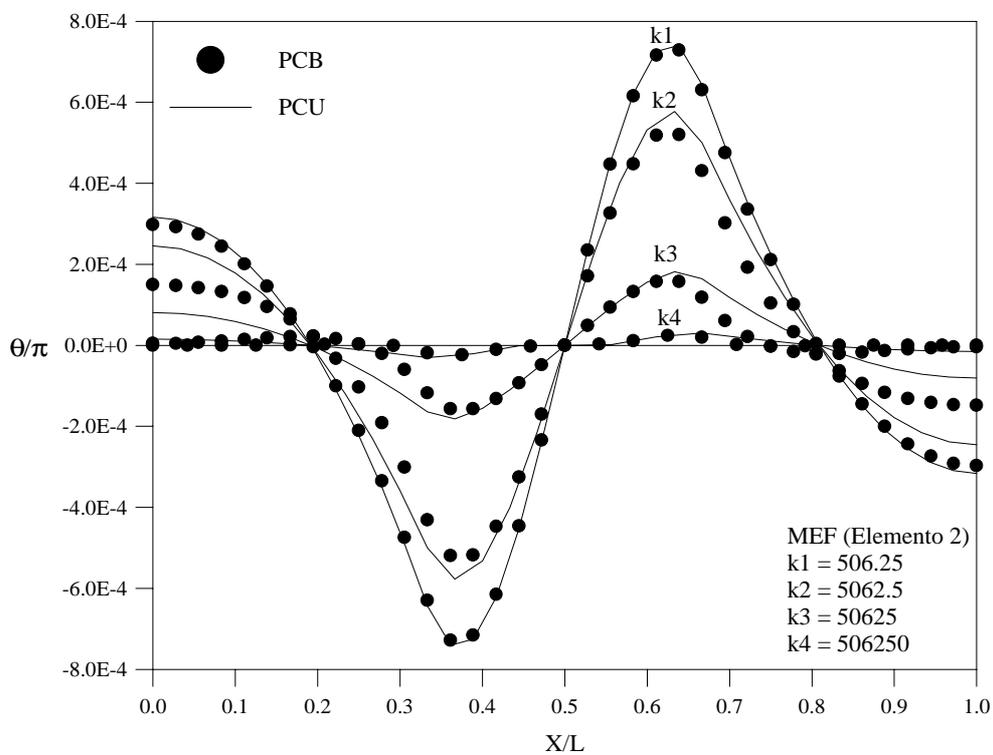


Figura 5.34 – Rotação  $\theta$  da viga, Problema 5.

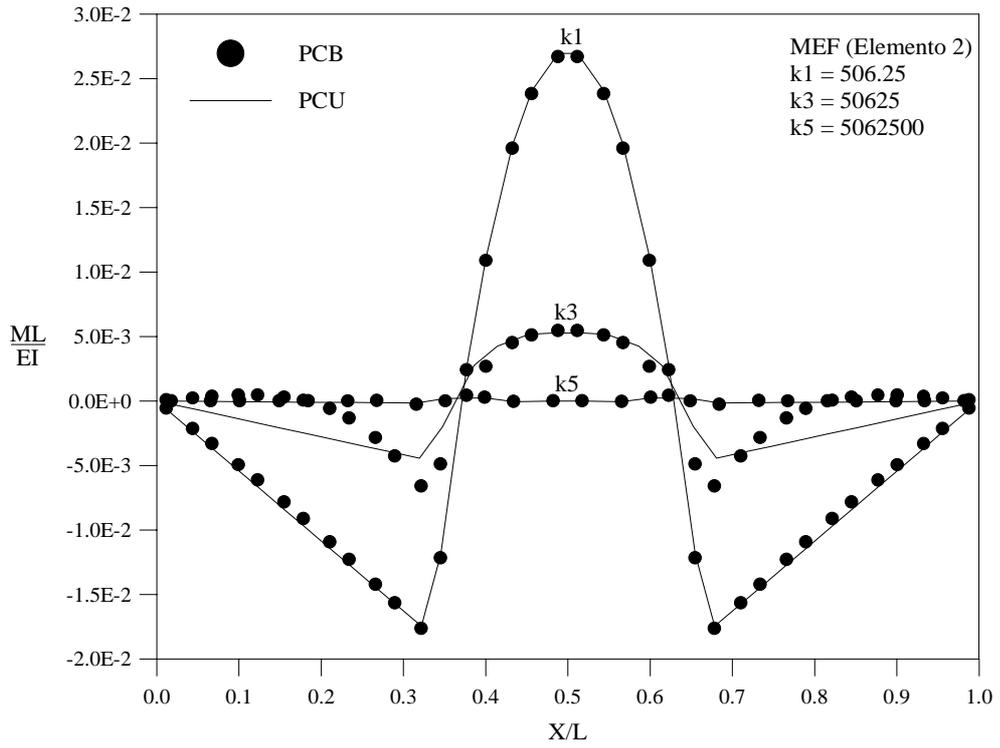


Figura 5.35 – Momento fletor M da viga, Problema 5.

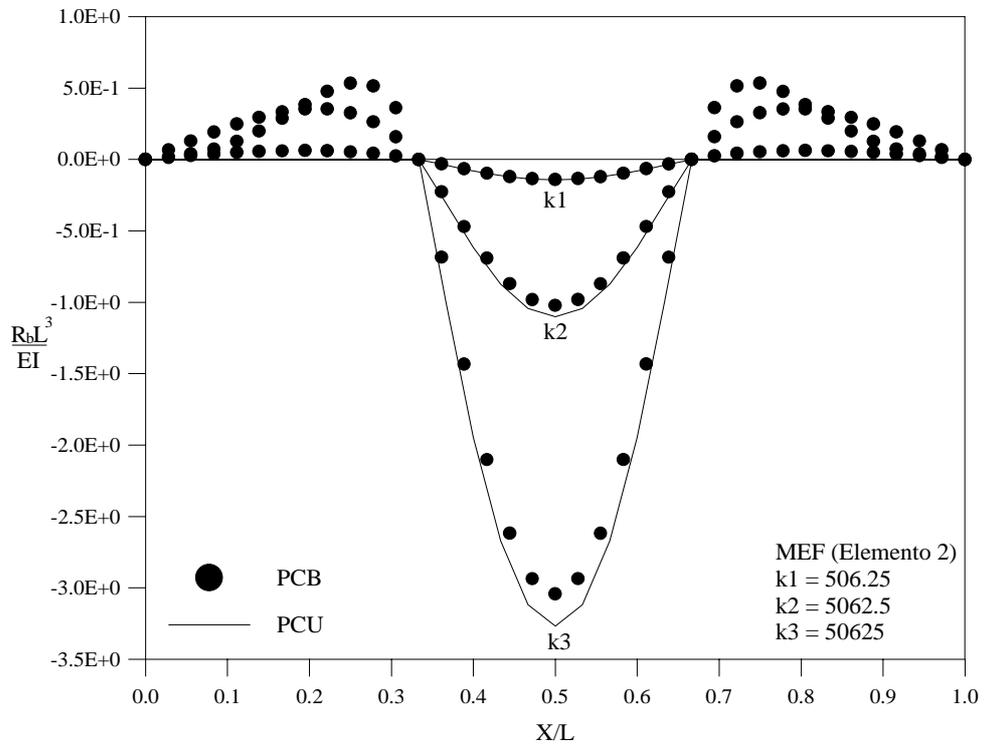


Figura 5.36 – Reação  $R_b$  da base elástica, Problema 5.

## 5.8 – PROBLEMA DE CONTATO 6:

### Viga em contato apenas com uma base elástica e sujeita a uma carga concentrada

Na Figura 5.37 encontra-se o problema de contato a ser analisado nesta seção. Trata-se de uma viga prismática apoiada, em todo seu comprimento, numa base elástica contínua do tipo Winkler e submetida a uma carga concentrada no centro. Os dados para modelagem deste sistema estrutural estão fornecidos na figura. Observe que o comprimento  $L$  da viga não foi definido pois tem-se como principal objetivo agora verificar sua influência no comportamento no sistema em estudo segundo as hipóteses de contato bilateral e unilateral entre os corpos.

Este problema foi inicialmente estudado por Nogueira *et al.* (1990). Esses autores propuseram uma solução numérica baseada no MEF, onde foram usados o elemento isoparamétrico unidimensional com quatro pontos nodais para modelar a viga (ou seja, o Elemento 3 implementado neste trabalho) e o elemento de treliça para representar a base elástica. A Figura 5.38 fornece os detalhes da modelagem empregada. Vale destacar que, para representar o comportamento não-linear da fundação (reação apenas às solicitações de compressão) foi adotado para o elemento de treliça a relação tensão-deformação fornecido na Figura 5.39.

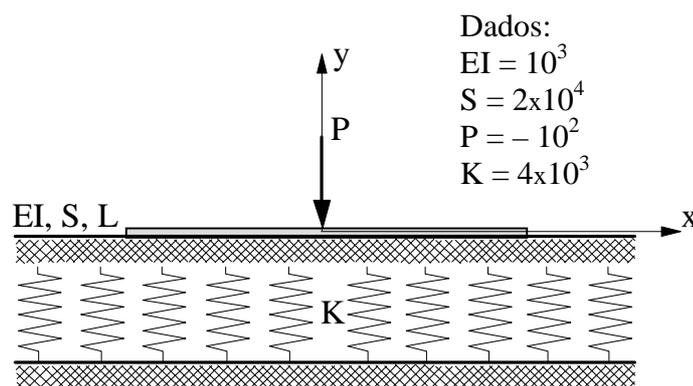


Figura 5.37 – Viga em contato apenas com uma base elástica e sujeita a uma carga concentrada no centro.

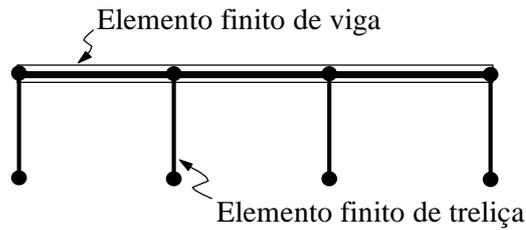


Figura 5.38 – Modelo numérico proposto por Nogueira *et al.* (1990).

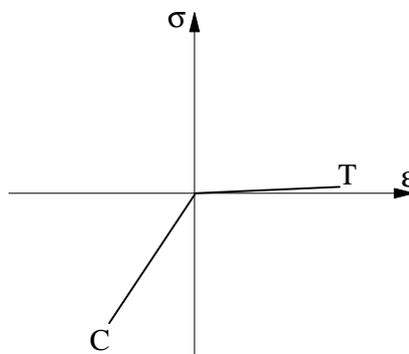


Figura 5.39 – Relação não-linear tensão-deformação adotado por Nogueira *et al.* (1990) para o elemento de treliça.

As soluções analíticas deste problema de contato bilateral para a viga de comprimento  $L$  finito e para a viga de comprimento  $L$  “infinito” são encontradas em Hetényi (1946). No caso da viga de comprimento  $L$  “infinito”, têm-se que as expressões para  $w$  e  $\theta$  são dadas por:

$$w = -\frac{P\lambda}{2K} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sen \lambda x) \quad (5.7a)$$

$$\theta = \frac{P\lambda^2}{K} e^{-\lambda x} \sen \lambda x \quad (5.7b)$$

onde  $K$  é o parâmetro de rigidez elástica da base e  $\lambda$  é definido pela Equação (5.4).

No caso da viga de comprimento  $L$  finito, as expressões para  $w$  e  $\theta$  são definidas a seguir:

$$w = -\frac{P\lambda}{2K} \frac{1}{\sinh \lambda L + \sin \lambda L} [\cosh \lambda x \cos \lambda(L-x) + \cos \lambda x \cosh \lambda(L-x) - \sinh \lambda x \sin \lambda(L-x) + \sin \lambda x \sinh \lambda(L-x) + 2 \cosh \lambda x \cos \lambda x] \quad (5.8a)$$

$$\theta = -\frac{P\lambda^2}{K} \frac{1}{\sinh \lambda L + \sin \lambda L} \{ \sinh \lambda x [\cos \lambda x + \cos \lambda(L-x)] - \sin \lambda x [\cosh \lambda x + \cosh \lambda(L-x)] \} \quad (5.8b)$$

Caso se queira avaliar a deflexão lateral no centro da viga, tem-se:

$$w = -\frac{P\lambda}{2K} \frac{\cosh \lambda L + \cos \lambda L + 2}{\sinh \lambda L + \sin \lambda L} \quad (5.9)$$

Com o intuito de se comparar os resultados obtidos através desta dissertação com aqueles fornecidos em Nogueira *et al.* (1990), escolheu-se para análise os seguintes comprimentos  $L$  da viga: 12, 6, 3 e 1.5 m. A Tabela 5.31 fornece, para cada um desses valores de  $L$ , os modelos adotados no presente trabalho usando-se os elementos finitos isoparamétricos implementados. Note que, em função da simetria do problema, apenas metade da viga foi modelada, como mostrado na Figura 5.40 para a viga de comprimento genérico. Destaca-se adicionalmente os resultados apresentados a seguir, para a situação de contato unilateral, foram obtidos resolvendo-se o PCL resultante da formulação primal, já que para esse problema em particular a formulação dual não pode ser empregada pois a matriz de rigidez da viga não é positiva definida.

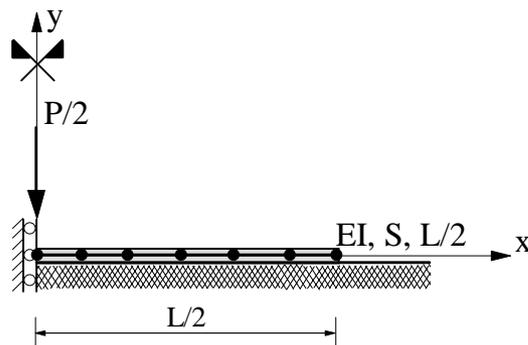


Figura 5.40 – Exemplo da discretização adotada para a viga de comprimento genérico.

Tabela 5.31 – Modelos de elementos finitos adotados, carga concentrada.

L(m)	ELEMENTO 1	ELEMENTO 2	ELEMENTO 3
12	10x0.20 + 2x2.00	4x0.50 + 2x2.00	2x0.75 + 3x1.50
6	8x0.20 + 2x0.70	4x0.50 + 1x1.00	4x0.75
3	4x0.20 + 2x0.35	3x0.50	1x0.60 + 1x0.90
1.5	3x0.20 + 1x0.15	1x0.50 + 1x0.25	1x0.75

Nas Figuras 5.41–5.43 são apresentados os resultados obtidos para a viga de comprimento  $L = 12$  m, sendo as discretizações feitas com o Elemento 1 e 2. A Figura 5.41 caracteriza o comportamento da viga em relação ao problema de contato bilateral (PCB); observe a semelhança dos resultados obtidos pelo presente trabalho com aqueles fornecidos em Nogueira *et al.* (1990) e Hetényi (1946) para as vigas de comprimento finito e “infinito”. Aliás, para essa dimensão de viga não existe diferença entre as soluções analíticas apresentadas.

A Figura 5.42 é mostrada a deflexão lateral da viga para a situação de contato unilateral (PCU). Para esse caso de carregamento e comprimento  $L$  da barra, note que apenas uma pequena região da viga próxima à carga concentrada fica em contato com a fundação. Destaca-se, novamente, a semelhança dos resultados obtidos aqui com a resposta numérica extraída de Nogueira *et al.* (1990).

Por fim, através da Figura 5.43, enfatiza-se a diferença de comportamento da base elástica, através da variação da reação  $R_b$ , para as situações de contato em estudo.

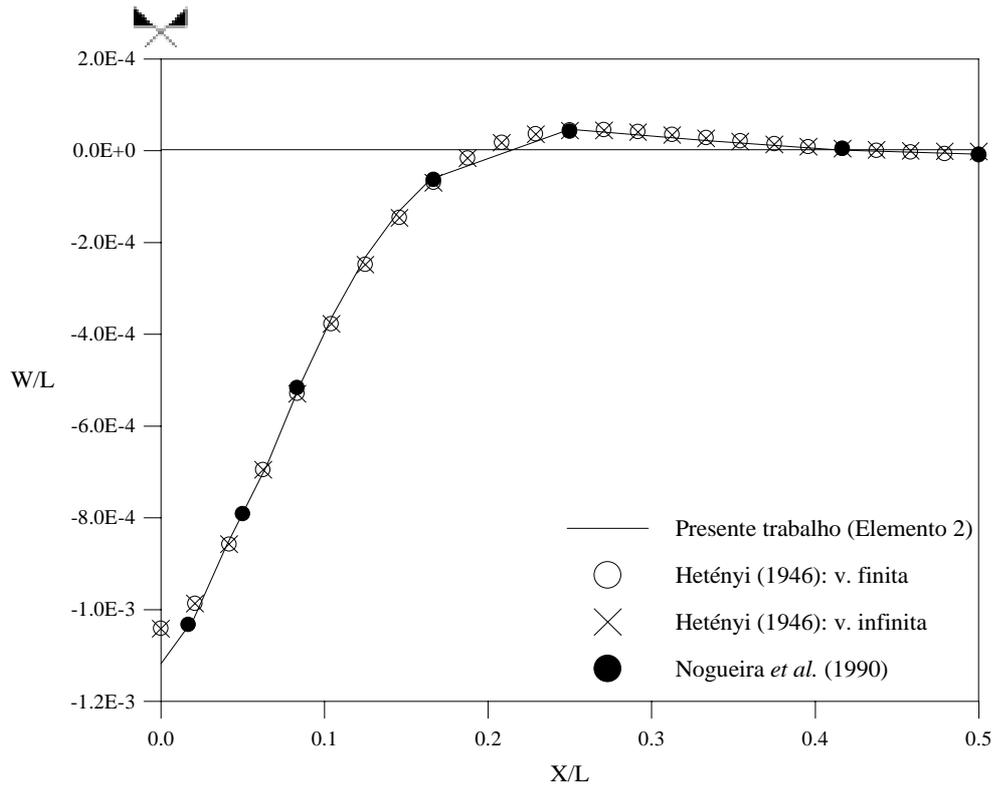


Figura 5.41 – Deflexão lateral  $w$  da viga de 12 m, PCB.

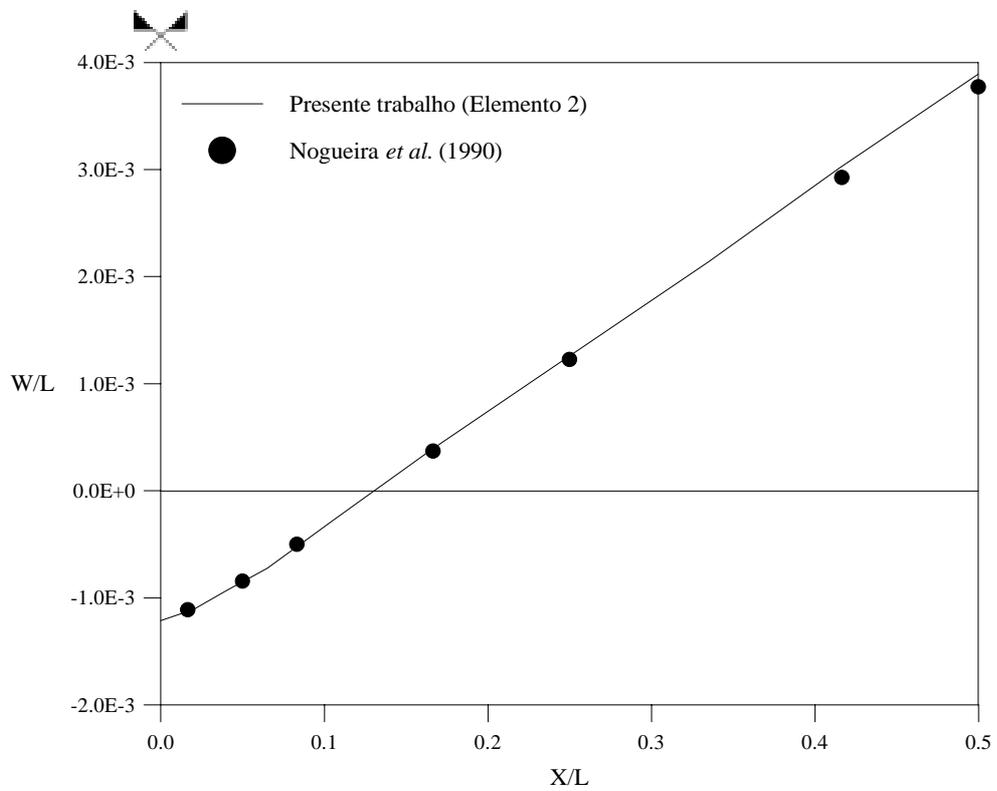


Figura 5.42 – Deflexão lateral  $w$  da viga de 12 m, PCU.

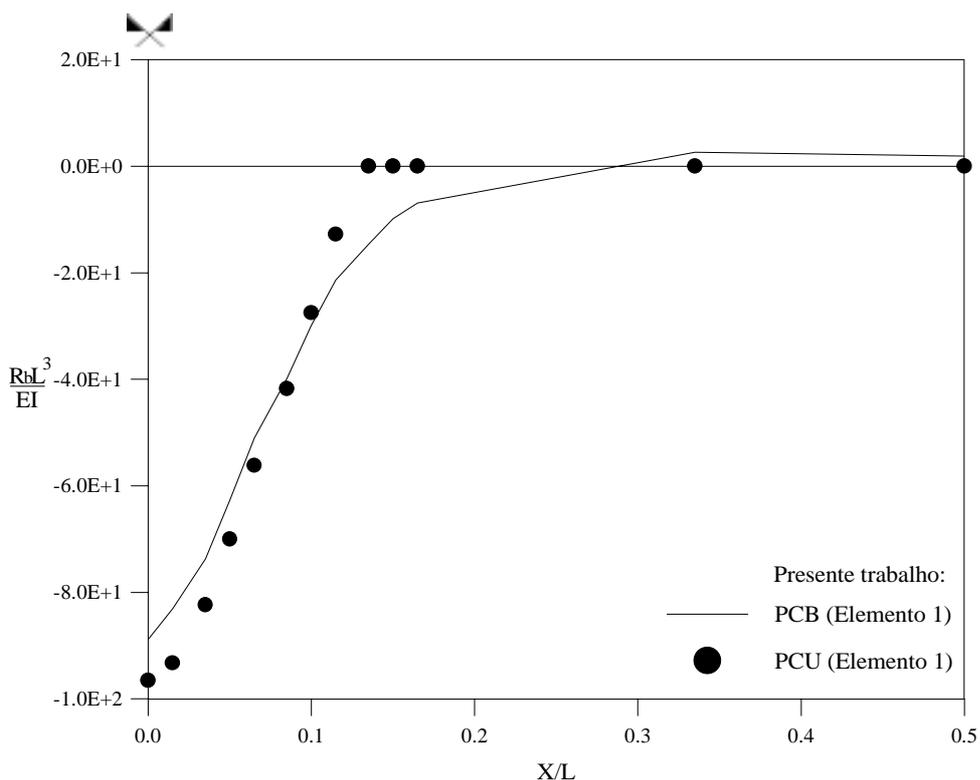


Figura 5.43 –Reação  $R_b$  da base elástica para viga de 12 m, PCB x PCU.

Nas Figuras 5.44–5.47 estão os resultados obtidos para a viga de  $L = 6$  m. Através da Figura 5.44, quando se analisa o PCB, já é possível perceber uma pequena diferença entre as soluções analíticas para as vigas de comprimento finito e “infinito”, principalmente para as deflexões laterais dos pontos nodais da malha localizados próximos à extremidade da viga. Os resultados obtidos pelo presente trabalho, usando-se na modelagem o Elemento 1, aproxima-se bastante daqueles resultados analíticos da barra de comprimento finito.

Caso as restrições unilaterais de contato sejam consideradas, observa-se através da Figura 5.45 uma certa proporcionalidade entre a região de contato e a região de perda de contato entre os corpos. Os resultados obtidos nesta dissertação mais uma vez convergem para os da solução não-linear apresentados por Nogueira *et al.* (1990).

Na Figura 5.46 destaca-se, novamente, quando se estuda a variação da rotação  $\theta$  da viga, as semelhanças dos resultados obtidos aqui com aqueles analíticos (PCB) e não-lineares (PCU) fornecidos pelos autores já mencionados. Finalmente, através do

estudo da variação da reação  $R_b$  mostrada na Figura 5.47, verifica-se mais uma vez a diferença de comportamento da base elástica para as situações de contato analisadas.

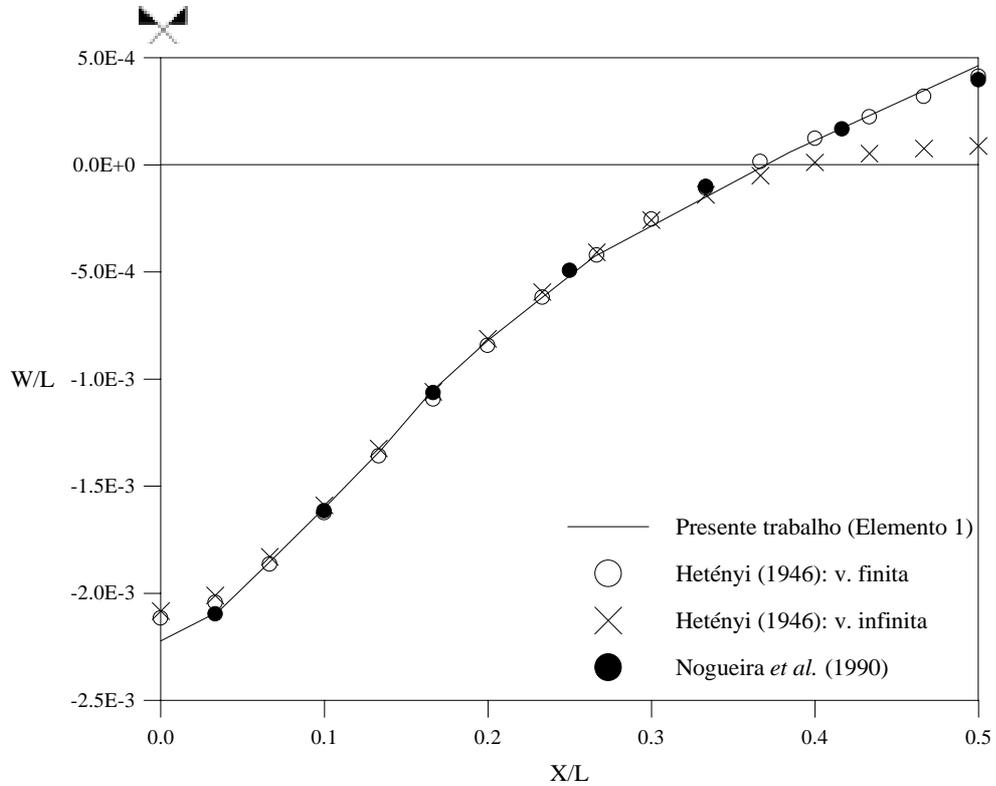


Figura 5.44 – Deflexão lateral  $w$  da viga de 6 m, PCB.

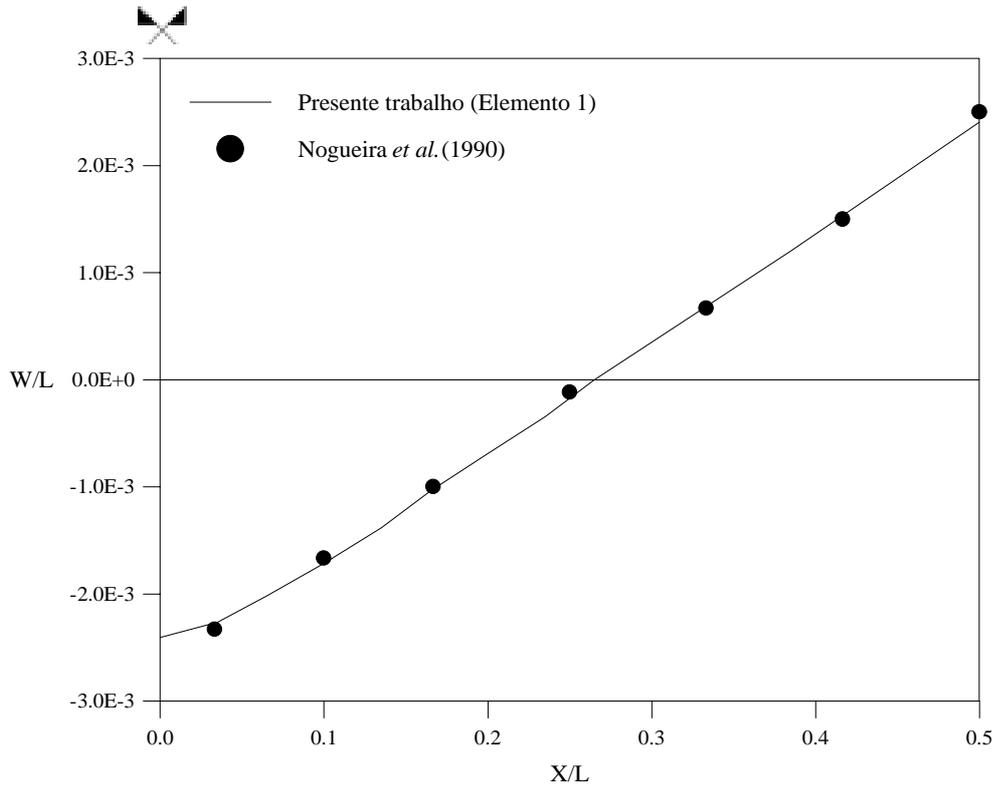


Figura 5.45 – Deflexão lateral  $w$  da viga de 6 m, PCU.

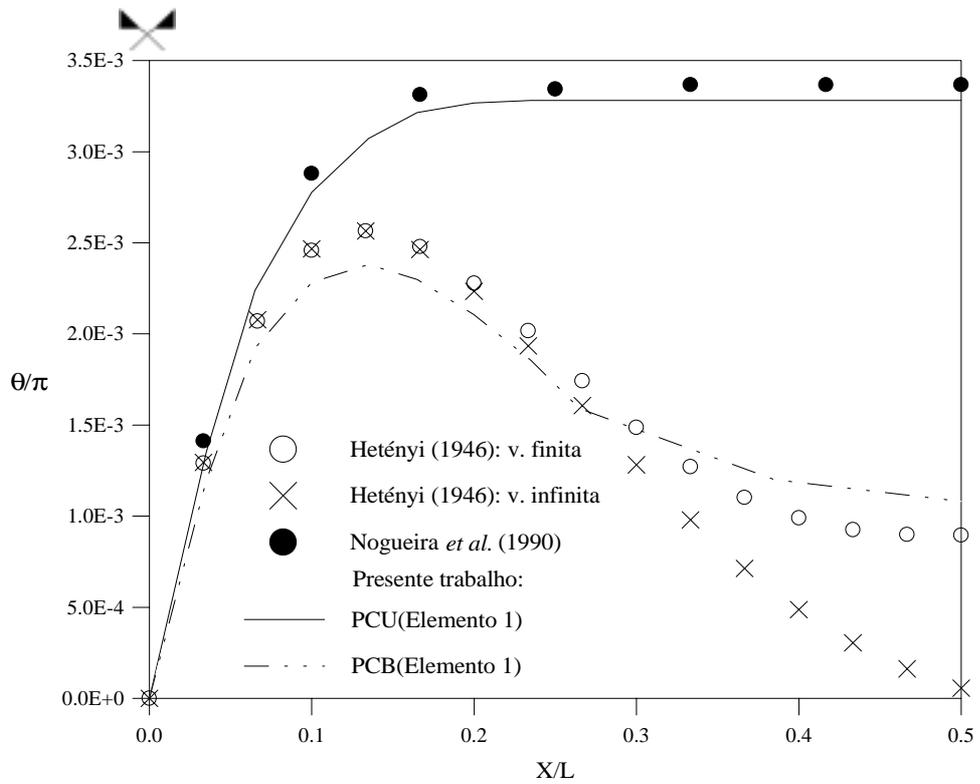


Figura 5.46 – Rotação  $\theta$  da viga de 6 m, PCB x PCU.

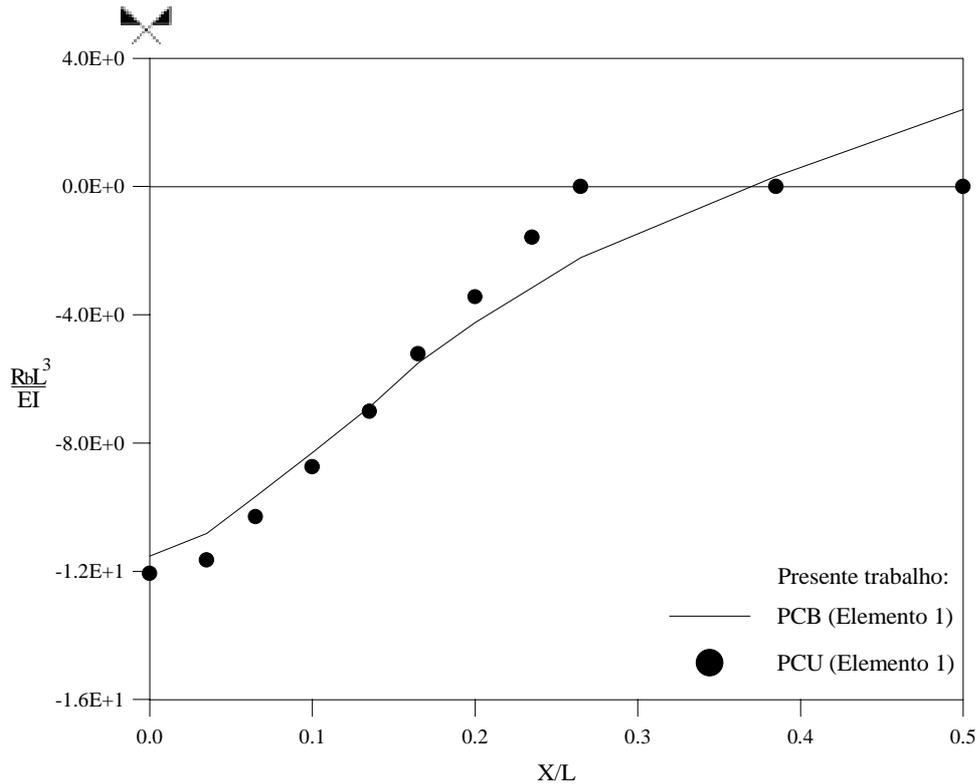


Figura 5.47 – Reação  $R_b$  da base elástica para viga de 6 m, PCB x PCU.

As Figuras 5.48 e 5.49 mostram para as barras de comprimento  $L = 3$  m e  $L = 1.5$  m, respectivamente, através da análise da deflexão lateral  $w$ , que não existe separação (ou descolamento) entre os corpos elásticos em estudo. Mais uma vez, os resultados obtidos com o programa computacional desenvolvido são comparados com aqueles fornecidos por Nogueira *et al.* (1990) e Hetényi (1946).

Para essas dimensões da viga observe que as soluções analíticas são divergentes e que as soluções numéricas apresentadas se aproximam, como esperado, dos resultados analíticos fornecidos para a viga de comprimento finito.

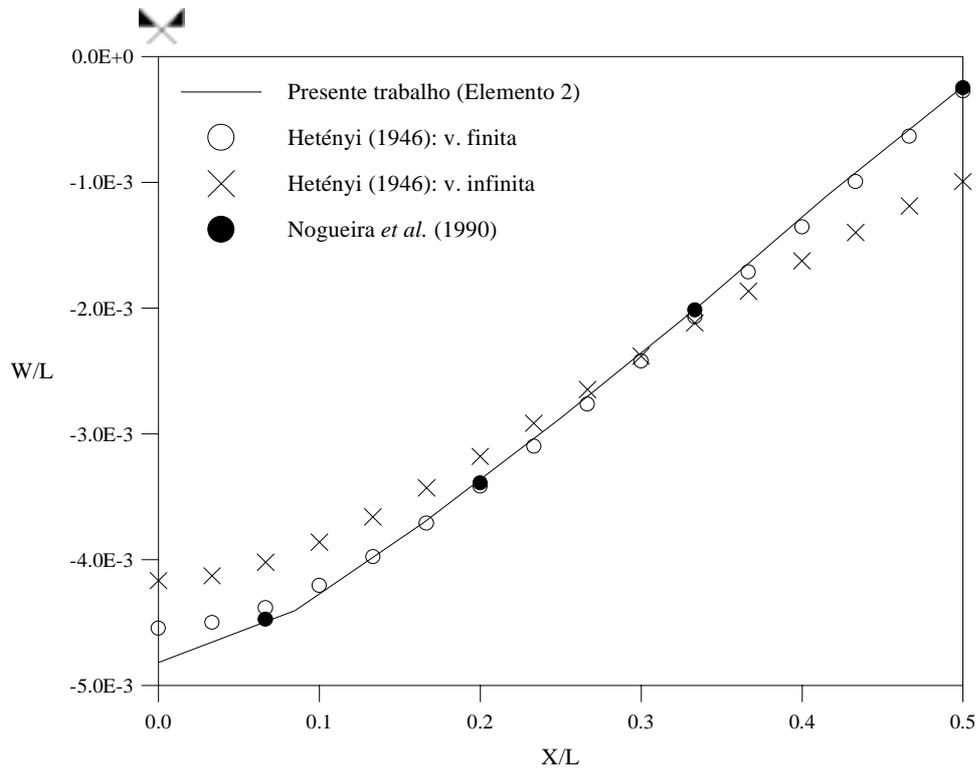


Figura 5.48 – Deflexão lateral  $w$  da viga de 3 m.

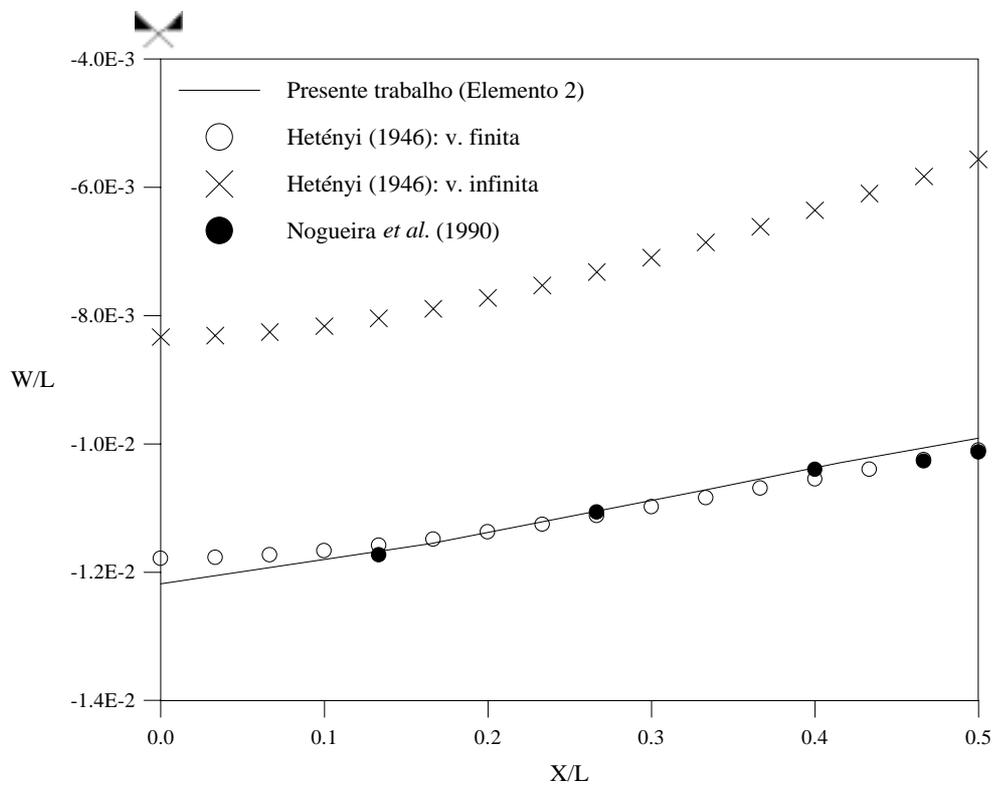


Figura 5.49 – Deflexão lateral  $w$  da viga de 1.5 m.

## 5.9 – PROBLEMA DE CONTATO 7:

### Viga em contato apenas com uma base elástica e sujeita a uma carga uniformemente distribuída

O último problema de contato a ser analisado neste capítulo é apresentado na Figura 5.50. Trata-se de uma barra em contato com uma base elástica do tipo Winkler, com as mesmas propriedades físicas e geométricas elástica estudada na seção anterior, porém agora sujeita a uma carga uniformemente distribuída  $q$  aplicada num certo trecho central da viga.

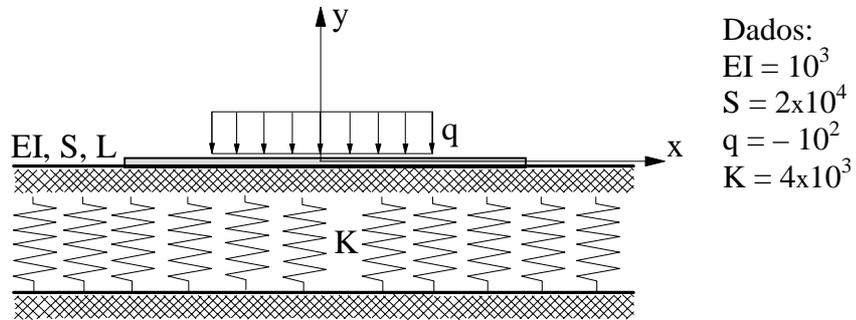


Figura 5.50 – Viga em contato apenas com uma base elástica e sujeita a uma carga uniformemente distribuída no centro.

Como na seção anterior, a solução analítica deste problema é fornecida por Hetényi (1946) tanto para as vigas longas (comprimento “infinito”) como para as vigas curtas (comprimento finito). Através das Figuras 5.51 (a), (b) e (c), define-se a deflexão lateral  $w$  em uma viga de comprimento “infinito”, em um ponto arbitrário  $C$ , da seguinte forma:

a) O ponto  $C$  sobre o carregamento:

$$w_c = -\frac{q}{2K} [(1 - e^{-\lambda a} \cos \lambda a) + (1 - e^{-\lambda b} \cos \lambda b)] \quad (5.10)$$

b) O ponto  $C$  à direita do carregamento:

$$w_c = \frac{q}{2K} (e^{-\lambda a} \cos \lambda a - e^{-\lambda b} \cos \lambda b) \quad (5.11)$$

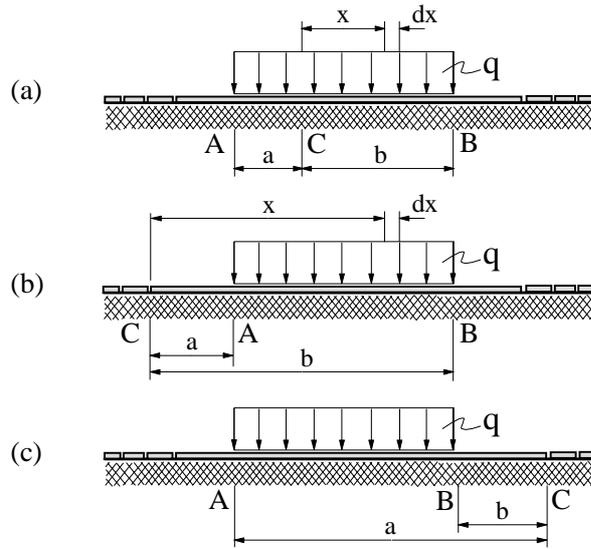


Figura 5.51 – Viga de comprimento “infinito” em contato com uma base elástica do tipo Winkler e sujeita a carregamento uniformemente distribuído.

sendo  $K$  o parâmetro de rigidez da base e  $\lambda$  segue a mesma definição da Equação 5.4.

Para o caso de uma viga de comprimento finito, como ilustrado na Figura 5.52, têm-se as seguintes expressões definindo a deflexão lateral  $w$ :

a) Trecho A–C:

$$w = -\frac{q}{K} \frac{1}{\sinh \lambda L + \sin \lambda L} \left\{ \cosh \lambda x \cos \lambda x [\cosh \lambda a \sin \lambda (L - a) - \sinh \lambda a \cos \lambda (L - a)] + \cos \lambda a \sinh \lambda (L - a) - \sin \lambda a \cosh \lambda (L - a) \right\} + (\cosh \lambda x \sin \lambda x + \sinh \lambda x \cos \lambda x) [\sin \lambda a \sinh \lambda (L - a) - \sinh \lambda a \sin \lambda (L - a)] \quad (5.12)$$

b) Trecho C–D:

$$w = [w_{c-d}]_{x>0} - \frac{q}{K} [1 - \cosh \lambda (L - a) \cos \lambda (L - a)] \quad (5.13)$$

Para a deflexão lateral do ponto no meio da viga, escreve-se:

$$w_o = -\frac{q}{K} \left[ 1 - \frac{2 \left( \sinh \lambda a \cos \lambda c \cosh \lambda \frac{L}{2} + \sin \lambda a \cosh \lambda c \cos \lambda \frac{L}{2} \right)}{\sinh \lambda L + \sin \lambda L} \right] \quad (5.14)$$

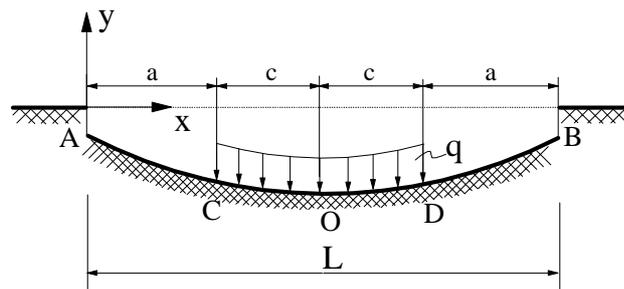


Figura 5.52 – Viga de comprimento finito em contato com uma base elástica do tipo Winkler e sujeita a carregamento uniformemente distribuído  $q$ .

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos neste trabalho com aqueles fornecidos em Nogueira *et al.* (1990), analisar-se-á o comportamento desse sistema estrutural para dois comprimentos da viga, a saber:  $L = 12$  m e  $L = 3$  m; e a carga uniformemente distribuída  $q$  será aplicada em uma faixa de 1.50 m da viga, de forma simétrica.

Nogueira *et al.* (1990) resolveram numericamente esse problema via MEF seguindo o mesmo procedimento já descrito anteriormente, isto é, utilizando o elemento isoparamétrico unidimensional com 4 pontos nodais para modelar a viga e o elemento de treliça para representar a base elástica seguindo a relação não-linear tensão-deformação descrita na Figura 5.39.

Os resultados apresentados a seguir através das Figuras 5.53–5.56 foram obtidos neste trabalho adotando-se os modelos de elementos finitos apresentados na Tabela 5.32. Observe que para a viga de 12 m e situação de contato bilateral (Figura 5.53), existe uma boa convergência entre as soluções numéricas e analíticas. Quando a hipótese de restrição unilateral de contato é considerada, pode-se verificar, através da Figura 5.54, uma aproximação entre os resultados aqui obtidos com a solução do PCL e aqueles fornecidos por Nogueira *et al.* (1990). Observe que existe uma grande região de perda de contato entre os corpos. Na Figura 5.55 destaca-se o comportamento da base elástica, através da sua reação  $R_b$ , para as duas situações de contato em estudo.

Por fim, observa-se através da Figura 5.56 que para a viga de comprimento  $L = 3$  m não ocorre, como esperado, a perda de contato entre os corpos em análise. Mais uma vez, para esse comprimento as soluções numéricas coincidem com a resposta da solução analítica da viga finita.

Tabela 5.32 – Modelos de elementos finitos adotados, carga distribuída.

L(m)	ELEMENTO 1	ELEMENTO 2	ELEMENTO 3
12	10x0.15 + 3x1.50	1x0.75 + 4x1.3125	1x0.75 + 4x1.3125
3	6x0.15 + 2x0.30	1x0.75 + 2x0.3750	2x0.75

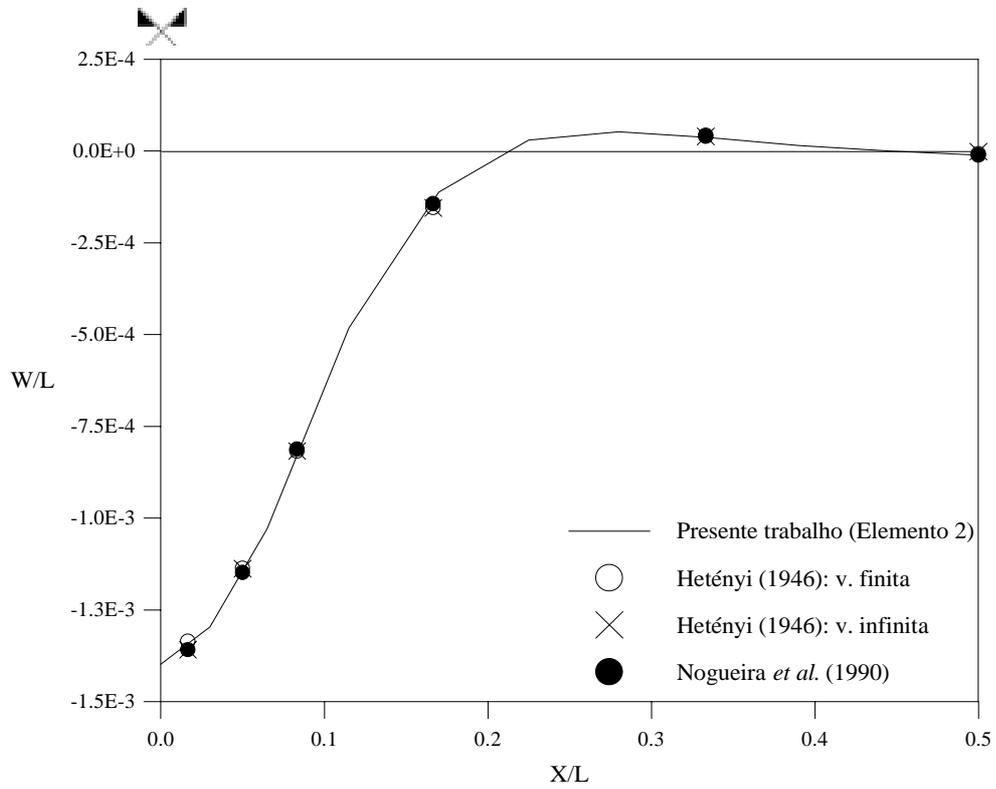


Figura 5.53 – Deflexão lateral  $w$  da viga de 12 m, PCB.

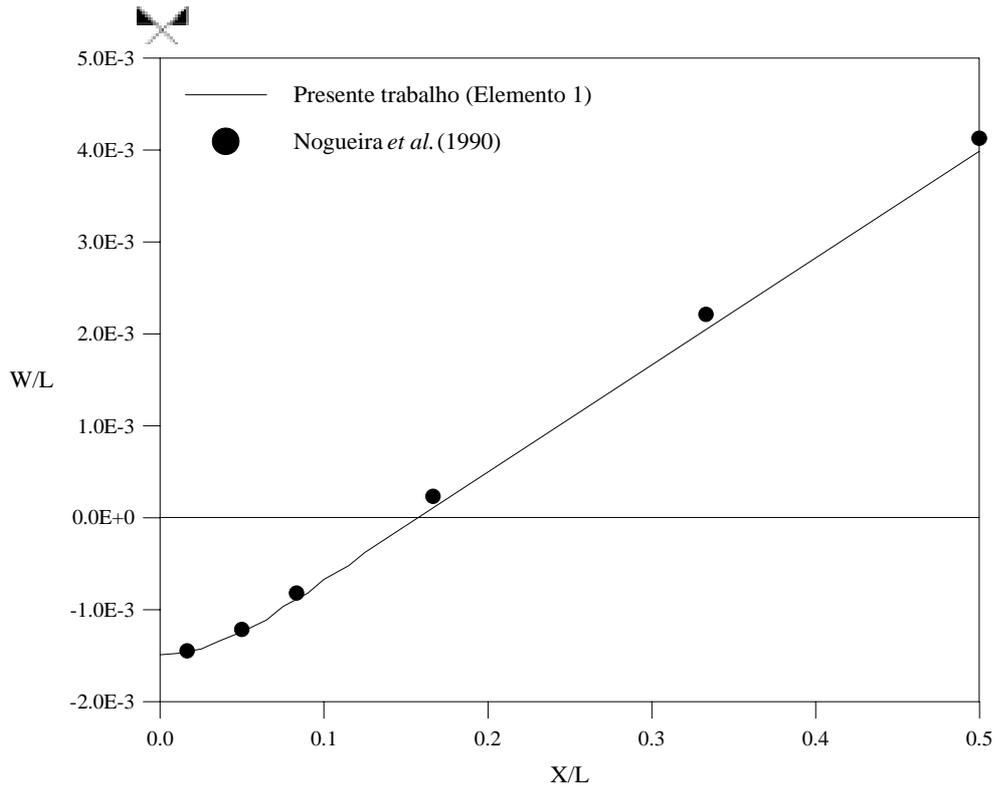


Figura 5.54 – Deflexão lateral  $w$  da viga de 12 m, PCU.

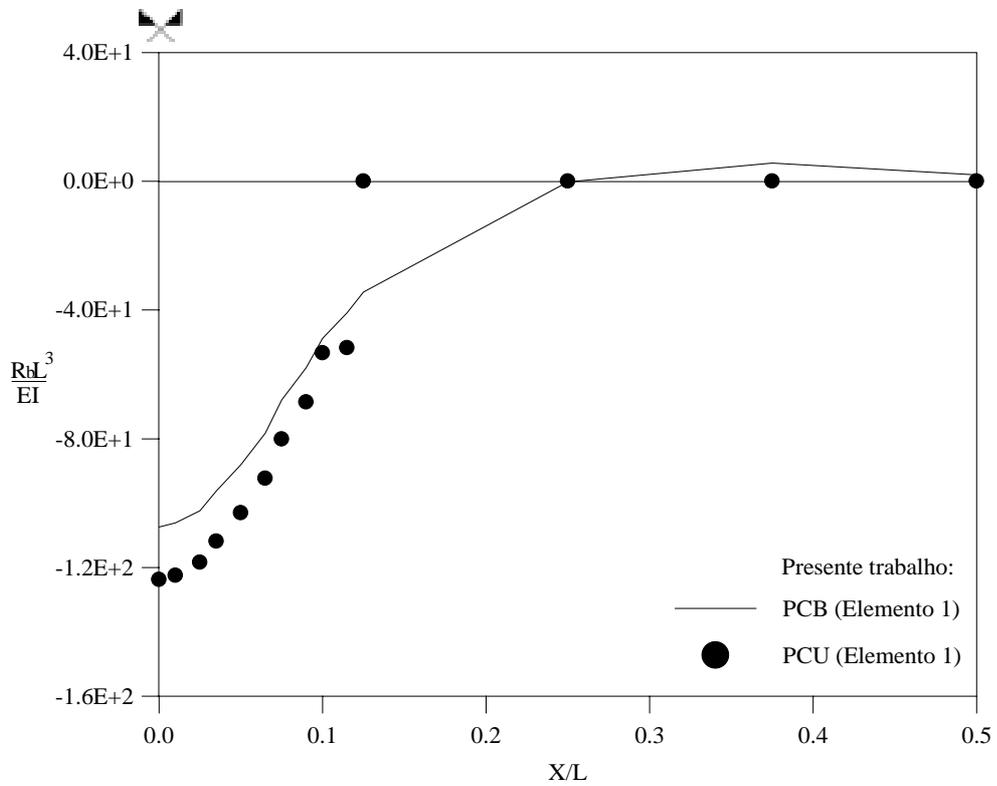


Figura 5.55 – Reação  $R_b$  da base elástica para viga de 12 m, PCB x PCU.

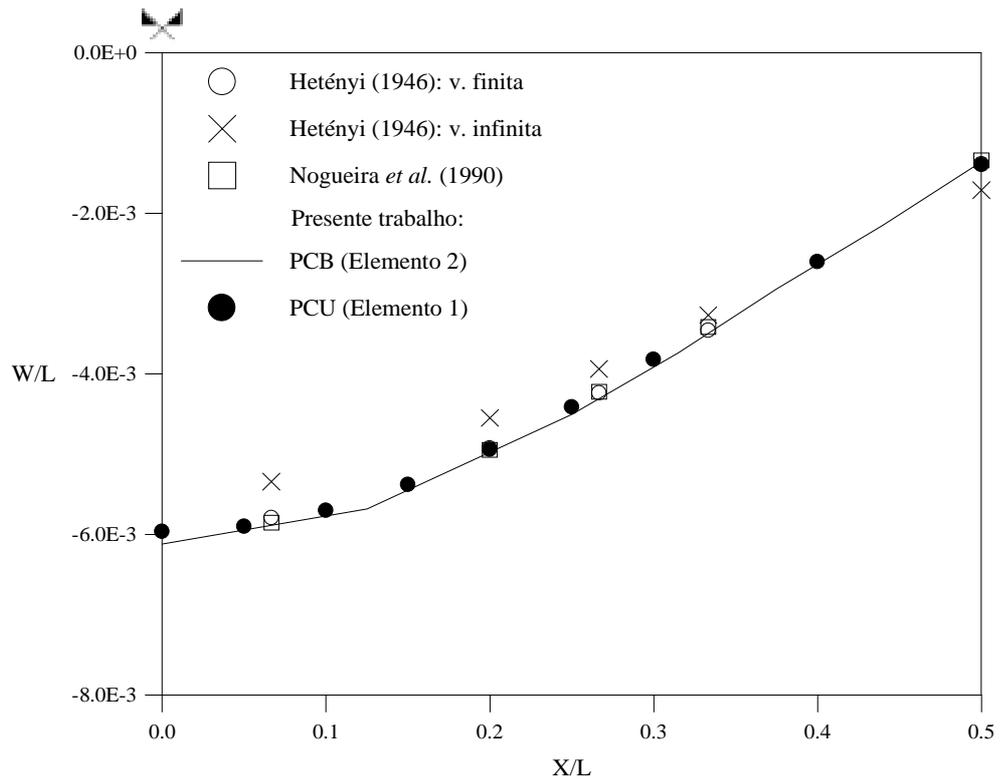


Figura 5.56 – Deflexão lateral  $w$  da viga de 3 m, carga uniformemente distribuída  $q$ .

# Capítulo 6

---

## CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

### 6.1 – CONCLUSÕES

Este trabalho teve como principal objetivo a análise do equilíbrio de vigas em contato com uma fundação elástica do tipo Winkler. Duas situações de contato entre os corpos foram estudadas: bilateral e unilateral. Para inclusão das restrições unilaterais de contato, duas metodologias de solução foram propostas. A primeira metodologia foi descrita detalhadamente no Capítulo 2 e baseou-se na aplicação do método de Rayleigh–Ritz (MRR); a outra metodologia encontra-se no Capítulo 3 e fundamentou-se no emprego do método dos elementos finitos (MEF) e recursos da programação matemática para resolver o problema de contato em estudo.

Pode-se afirmar, inicialmente, que os exemplos numéricos estudados no capítulo anterior validam as implementações computacionais (resumidas no Capítulo 4) das duas metodologias propostas. Os resultados apresentados no Capítulo 5 permitiram que algumas conclusões já fossem apresentadas. Este capítulo se destina, por conseguinte, a organizar essas conclusões e adicionalmente fazer comentários que visam destacar alguns pontos importantes.

Em relação à estratégia de solução modal (MRR), pode-se ainda fazer as seguintes considerações:

- primeiramente, pode-se afirmar que trata-se de uma estratégia de solução bastante simples e de fácil implementação computacional;
- é considerada adequada para resolver problemas particulares de contato unilateral, como os apresentados no Capítulo 2, onde não se conhece *a priori* as coordenadas que definem as regiões de contato;

- pode ser empregada para validar formulações mais gerais (que adotam o MEF ou MEC) usadas para resolver problemas de contato unilateral;
- como observado no capítulo anterior através de algumas análises, a solução apresentada por esta metodologia se aproxima da solução analítica à medida que o número de semi-ondas  $N$  aumenta;
- no caso de contato unilateral um sistema de equações fortemente não-lineares sempre é gerado ao se empregar esta metodologia. O sucesso da solução desse sistema de equações mostrou-se dependente de algumas variáveis fornecidas pelo usuário do programa, como as amplitudes iniciais ( $W_i$ ) e as aproximações iniciais das coordenadas que definem a região (ou regiões) de contato e sem contato ( $t$ ;  $t_i$  e  $t_f$ );
- um estudo paramétrico foi realizado afim de se obter um valor adequado para inicializar as amplitudes ( $W_i$ ) no processo iterativo de Newton–Raphson; observou-se uma estabilidade da resposta, através de vários exemplos analisados, para valores iniciais de  $W_i$  igual ou maior que  $10^{-3}$ ;
- vale enfatizar, mais uma vez, a grande sensibilidade da resposta em relação aos valores iniciais, fornecidas pelo usuário do programa, das coordenadas da região de contato ( $t$ ;  $t_i$  e  $t_f$ ). Em algumas modelagens do problema de contato unilateral, a solução convergiu para a situação sem contato (PSC) ou contato completo entre os corpos (PCB);
- por fim, destaca-se que, em geral, a convergência para a resposta correta do problema de contato unilateral, no processo de Newton–Raphson, aconteceu entre 10 a 15 iterações.

Para a metodologia baseada no emprego do método dos elementos finitos (MEF) na solução do problema de contato, pode-se ainda escrever:

- capítulo anterior mostrou que uma grande variedade de problemas envolvendo vigas em contato com bases elásticas do tipo Winkler poderia ser analisado através da combinação do MEF e técnicas de programação matemática;

- elemento isoparamétrico de viga com dois pontos nodais (Elemento 1) apresentou fraco desempenho computacional em quase todas as análises realizadas;
- destaca-se a equivalência, em termos de desempenho computacional, dos outros dois elementos isoparamétricos de viga (Elementos 2 e 3);
- como já mencionado, observou-se uma maior estabilidade na resposta do problema de complementaridade linear (PCL) resultante da formulação dual do que da formulação primal;
- em alguns exemplos e modelagens observou-se uma diferença significativa do tempo de processamento (montagem das matrizes e solução do PCL) na solução do problema de contato por essas duas formulações (Silva, 1998; Silva *et al.*, 2001);
- apesar da parametrização, a solução do PCL através do algoritmo de Lemke (Apêndice A) mostrou-se dependente de algumas variáveis importantes, tais como: número e dimensão dos elementos, e intensidade da carga;
- em cada problema de contato unilateral analisado, observou-se que a solução do PCL obtida através do algoritmo de Lemke sempre indicava que:
  1. havia região de contato, ou seja, a solução viável básica complementar do problema aumentado, após as operações de pivoteamento, era igual à solução viável complementar do problema original (ver Apêndice A); ou
  2. o ponto  $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{q}, \mathbf{0})$  era solução trivial do PCL original; ou
  3. que não existia solução para o problema.
- finalmente, vale comentar que, apesar de não ser eficiente computacionalmente (ordem das matrizes, instabilidade numérica e tempo de processamento), a formulação primal pode ser usada sem restrições para diversos problemas de vigas em contato com bases elásticas; o emprego da formulação dual restringe-se aos sistemas estruturais em que a matriz de rigidez da viga é positiva definida.

## 6.2 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Para desenvolvimento de futuras pesquisas, recomenda-se:

- implementar e testar outros algoritmos de solução do PCL;
- estender a solução modal (ou semi-analítica) apresentada no Capítulo 2 a outros sistemas estruturais, como arcos, placas ou cascas em contato unilateral com uma base elástica;
- dar continuidade a esta dissertação e à desenvolvida por Silva (1998), isto é, usando o MEF e os recursos da programação matemática à análise de cascas cilíndricas com restrições unilaterais de contato (tubulações enterradas);
- implementar outros modelos de fundação, como as bases elásticas com dois parâmetros e o semi-espaço infinito (Kerr, 1964; Cheung e Zienkiewicz, 1965), e adicionalmente considerar modelos de fundações não-lineares (Shen, 1995; Holanda, 2000).

# **Referências Bibliográficas**

---

Arora, J. S. (1989). Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill.

Ascione, L. e Grimaldi, A. (1984). Unilateral Contact Between a Plate and an Elastic Foundation, *Meccanica*, v.19, p.223-233.

Assan, A. E. (1999). Método dos Elementos Finitos: primeiros passos, Editora da UNICAMP, Campinas-SP.

Andrade, A. C. T. (2001). Análise de Vigas em Contato Bilateral e Unilateral com uma Base Elástica, Relatório Final do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica-PIBIC/CNPq, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG.

Brebbia, C. A. e Ferrante, A. J. (1978). Computational Methods for Solution of Engineering Problems.

Bathe, K. J. (1982). Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Barbosa, H. J. C. (1986). Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade, Tese de Doutorado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE/UFRJ), RJ.

Beer, F. P. e Johnston Jr. , E. R. (1995). Resistência dos Materiais, 3ªed., Makron Books, São Paulo.

Cheung, Y. K. e Zienkiewicz, O. C. (1965). Plates and Tanks on Elastic Foundations – An Application of Finite Element Method, *Int. J. Sol. Struct.*, v.1, p.451-461

- Cook, R. D.; Malkus, D. S. e Plesha, M. E. (1989). Concepts and Applications of Finite Element Analysis, third edition, John Wiley & Sons.
- Cottle, R. W. e Dantzig, G. B. (1968). Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming, *Linear Algebra Appl.*, v.1, p.103-125.
- Eboli, C. B. (1989). Dimensionamento Ótimo de Seções de Concreto Armado, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica–RJ.
- Fletcher, R. (1981). Practical Methods of Optimization, John Wiley & Sons, v.2, USA.
- Herskovits, J. (1995). A View on NonLinear Optmization, *Advances in Structural Optimization*, p.71-116.
- Hetényi, M. (1946). Beams on Elastic Foundation, University of Michigan Press, Mich.
- Hinton, E. e Owen, D. R. J. (1989). Finite Element Programming, Acad. Press Limited.
- Holanda, A. S. (2000). Análise do Equilíbrio e Estabilidade de Placas com Restrições de Contato, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica–RJ.
- Joo, J. W. e Kwak, B. M. (1986). Analysis and Applications of Elasto-Plastic Contact Problems considering Large Deformation, *Comp. & Struct.*, v.24, p.953-961.
- Johnson, A. R. e Quingley, C. J. (1989). Frictionless Geometrically Non-Linear Contact using Quadratic Programming, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, v.28, p.127-144.
- Kerr, A. D. (1964). Elastic and Viscoelastic Foundation Models, *J. Appl. Mech.*, ASME, v.31, p.491-498.
- Lemke, C. E. (1968). On Complementary Pivot Theory, *Mathematics of Decision Sciences*, Edts. Dantzig, G. B. e Yenott, A. F., p.95-114.

Nogueira, C. L.; Carvalho, M. T. M. e Silveira, R. A. M. (1990). Modelagem de Vigas sobre Base Elástica, trabalho da disciplina Método dos Elementos Finitos na Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica–RJ.

Maker, B. N. e Laursen, T. A. (1994). A Finite Element Formulation for Rod/Continuum Interactions: The One-dimensional Slideline, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.37, p.1-18.

Martins, J. F. (1998). Influência da Inércia de Rotação e da Força Cortante nas Frequências Naturais e na Resposta Dinâmica de Estrutura de barras, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos–USP, SP.

Pereira, A. R. (2003). Modelagem Numérica Não Linear Física via MEF de Estruturas de Solos Reforçados, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG.

Pereira, W. L. A.; Mucci, A. C., Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B. (2002). A Modal Solution for Beams under Unilateral Contact Constraints, *V SIMMEC*, p.187-194, Juiz de Fora.

Ravindran, A. (1972). A Computer Routine for Quadratic and Linear Programming Problems, *Commun ACM*, v.15, nº9, p.818-820.

Ravindran, A. e Lee, H. (1981). Computer Experiments on Quadratic Programming Problems Algorithms, *Eur. J. Oper. Res.*, v.8, nº2, p.166-174.

Shames, I. H. e Dym, C. L. (1985). *Energy and Finite Element Method in Structural Mechanics*, McGraw-Hill.

Shen, H. (1995). Postbuckling Analysis of Orthotropic Rectangular Plates on Nonlinear Elastic Foundations, *Engng. Struct.*, v.17, p.407-412.

Shen, H. e Williams, F. W. (1995). Postbuckling Analysis of Imperfect Composite Laminated Plates on Nonlinear Elastic Foundations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, v.30, p.651-659.

Shen, H. (1996). Thermomechanical Postbuckling of Imperfect Moderately Thick Plates on Nonlinear Elastic Foundations, *Mech. Struct. & Mach.*, v.24(4), p.513-530.

Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B. (1994). Formulações Variacionais para o Problema de Contato Unilateral, *XV CILAMCE*, v.2, p.1812-1821, BH-MG.

Silveira, R. A. M. (1995). Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica-RJ.

Silva, A. R. D. (1998). Análise de Placas com Restrições de Contato, Ouro Preto, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG.

Silva, A. R. D.; Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B. (2001). Numerical Methods for Analysis of Plates on Tensionless Elastic Foundation, *Int. J. of Sol. Struct.*, Elsevier Sci. Ltd., v.38, p.2083-2100.

Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B. (1997). Stability of Arches and Beams under Unilateral Constraints, *Comput. Mech. Inc.*, UK.

Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B. (2000). A Modal Solution fo the NonLinear Analysis of Arches and Beams under Unilateral Constraints, *Int. Conf. on Comput. Engng. & Sci.-ICES2K*, Los Angeles-USA.

Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B. (2001). Analysis of Slender Structural Elements under Unilateral Contact Constraints, *Struct. Eng. Mech., An Int. J.*, v. 12, p.35-50.

Timoshenko, S. P. e Gere, J. E. (1982). *Mecânica dos Sólidos*, v.2, LTC-Livros Técnicos e Científicos, RJ.

# Apêndice A

---

## A.1 – INTRODUÇÃO

Nessa seção são introduzidos os fundamentos da programação matemática (PM) utilizados para resolver o problema com restrições unilaterais de contato formulado no Capítulo 3, Seção 3.5. Sob o enfoque da PM, a análise do problema de contato é equivalente à solução do seguinte problema de otimização (veja as Equações 3.54 e 3.55):

$$\text{Min } \Pi (w, wb) \tag{A.1}$$

$$\text{Sujeito a: } -\varphi \leq 0 \tag{A.2}$$

onde a função objetivo  $\Pi$  e a condição de impenetrabilidade entre os corpos  $\varphi$  são definidas em função dos deslocamentos nodais incrementais da estrutura e fundação elástica.

Em Eboli (1989), é comentado que a metodologia de solução de um problema de PQ com restrições de desigualdades pode seguir basicamente dois caminhos: o emprego de métodos de solução de PQ com restrições de igualdade, desde que se adote uma estratégia de determinação do conjunto ativo de restrições ( $\varphi = 0$ ); ou através de esquemas de pivoteamento, utilizados especificamente na solução de problemas de complementaridade linear (PCL). Esse trabalho segue a segunda abordagem.

Nas Subseções 3.5.1 e 3.5.2, através de formulações desenvolvidas especificamente para o problema de contato unilateral, pode-se transformar o problema de minimização declarado anteriormente, com  $\Pi$  quadrática, num problema de determinação da solução não-negativa do sistema de equações escrito genericamente da seguinte forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz} \tag{A.3}$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \tag{A.4a}$$

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0} \tag{A.4b}$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{A.4c}$$

onde  $\mathbf{M}$  é uma matriz quadrada  $p \times p$ , e  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{q}$  são vetores de dimensão  $p$ . Note que nesta formulação não existe função objetivo a ser minimizada ou maximizada; o objetivo é a obtenção dos vetores  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{z}$  que satisfaçam às condições (A.3) e (A.4). A condição (A.3) representa um sistema de equações lineares; a condição (A.4a) e (A.4b) requerem que a solução de (A.3) seja não-negativa; e a condição (A.4c) implica em:  $w_i z_i = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, p$ , desde que  $w_i, z_i \geq 0$ .

Um problema caracterizado pela Equação (A.3) e restrições (A.4a,b,c) é encontrado na literatura com a denominação problema de complementaridade linear (PCL). Em Fletcher (1981), são apresentados os métodos de PM usualmente empregados na solução de um PCL. Como já comentado no Capítulo 3, merecem destaque: o método de Lemke (1968) usado neste trabalho; e o método de Dantzig (Cottle e Dantzig, 1968). Estes métodos são baseados em esquemas de pivoteamento e podem ser considerados extensões do Método Simplex de programação linear.

O método de Dantzig, conhecido também como o *método de pivoteamento principal*, foi usado por Ascione e Grimaldi (1984) na solução do problema de contato entre uma placa e uma fundação elástica. Uma implementação computacional do método de Lemke é fornecida por Ravindran (1972). Em Ravindran e Lee (1981), é feito um estudo mostrando a superioridade do algoritmo de Lemke em relação às outras técnicas na solução de problemas lineares e quadráticos complementares. Como exemplos de aplicação do método de Lemke ao problema de contato são citados novamente: Barbosa (1986); Silveira e Gonçalves (1994 e 1995).

Na seção seguinte são apresentados os fundamentos do método de Lemke, que, como já destacado, foi o esquema de pivoteamento adotado nesse trabalho para solução de (A.3) e (A.4).

## A.2 – O MÉTODO DE LEMKE

Procurando facilitar a compreensão dos passos básicos envolvendo o método de Lemke, bem como os procedimentos adotados na sua implementação computacional, dividiu-se esta seção nos seguintes tópicos: definições e observações; passo inicial; passo principal; finalização; implementação computacional; e significado mecânico do método. A seguir são apresentados cada um desses tópicos:

### 1. Definições e Observações

- O ponto  $(\mathbf{w}, \mathbf{z})$  é dito solução, se satisfaz (A.3).
- Se essa solução é não-negativa, ou seja, se satisfaz (A.4a,b), ela é chamada de **solução viável** do problema complementar.
- Uma solução viável é chamada **solução complementar** se pelo menos uma variável de cada par  $(w_i, z_i)$  é nula – satisfaz a condição de complementaridade  $\mathbf{w}^T \mathbf{z} = \mathbf{0}$ ;  $(w_i, z_i)$  é dito par complementar, sendo  $w_i$  e  $z_i$  complementos mútuos.
- Uma solução é chamada **trivial** se os elementos do vetor  $\mathbf{q}$  são não-negativos:  $\mathbf{w} = \mathbf{q}$  e  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Não interessa, para este caso, empregar o esquema de pivoteamento de Lemke.
- O problema de complementaridade é não-trivial se pelo menos um elemento de  $\mathbf{q}$  é negativo. Isto significa que a solução inicial dada por  $\mathbf{w} = \mathbf{q}$  e  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  é inviável, mesmo que ela satisfaça a condição de complementaridade.
- Se o problema complementar é não-trivial, um vetor de componentes positivas  $\mathbf{e}$ , e uma variável artificial escalar  $z_0$  são introduzidos na análise. O objetivo é aumentar o sistema de equações original (Equação A.3). Esse sistema aumentado, composto de  $p$  equações e  $p+1$  incógnitas, é descrito como segue:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz} + \mathbf{e}z_0 \tag{A.5}$$

com as variáveis  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{z}$  e  $z_0$  devendo satisfazer às condições:

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (\text{A.6a})$$

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0}, z_0 \geq 0 \quad (\text{A.6b})$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = 0 \quad (\text{A.6c})$$

Verifica-se que o objetivo passa a ser agora a determinação do ponto  $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$  que obedeça à relação (A.5) e às restrições (A.6a,b,c).

- $L$  é o conjunto de soluções de (A.5). Esse conjunto é um sub-espço de dimensão  $p$ , no espaço  $p+(p+1)$ .

- O conjunto  $K$  de soluções viáveis é um poliedro convexo, interseção dos semi-espços (Eboli, 1989).

- Fazendo-se:  $z_0 = \text{mínimo}\{q_i, 1 \leq i \leq p\}$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ , e  $\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{e} z_0$ , obtém-se um ponto de partida para solução do sistema anterior (veja o item a seguir). Através de uma seqüência de pivoteamentos, a ser especificada depois, que satisfaz (A.5) e (A.6a,b,c), tenta-se guiar a variável artificial  $z_0$  até zero e, assim, obter a solução do problema de complementaridade original.

- Uma solução  $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$  do sistema (A.5) e (A.6) é chamada **solução viável básica complementar** se:

(i)  $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$  é solução viável básica de (A.6a,b);

(ii) nem  $w_s$ , nem  $z_s$ , são básicas para algum  $s \in \{1, 2, \dots, p\}$ ;

(iii)  $z_0$  é básica, e uma variável do par complementar  $(w_i, z_i)$  é básica, para  $i = 1, 2, \dots, p$ , e  $i \neq s$ .

- Da solução viável básica complementar  $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$ , onde  $w_s$  e  $z_s$  são ambas não-básicas, obtém-se uma solução viável básica complementar **adjacente**  $(\bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{z}_0)$ , caso seja introduzido  $w_s$  ou  $z_s$  na base no lugar de uma variável que não seja  $z_0$ .

- Cada solução viável básica complementar tem, pelo menos, duas soluções viáveis básicas complementares *adjacentes*. Se o aumento de  $w_s$  ou  $z_s$  ocasionar a retirada de  $z_0$  da base ou numa "terminação em raio" (ver o item sobre a finalização do

método), tem-se, então, menos de duas soluções viáveis básicas complementares adjacentes.

## 2. Passo Inicial

Existem, inicialmente, duas possibilidades de obtenção da solução do PCL:

(i) se o vetor  $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ , implica que o ponto  $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{q}, \mathbf{0})$  é solução do PCL original – solução trivial do problema;

(ii) se o vetor  $\mathbf{q}$  tem alguma componente negativa, o esquema de solução proposto por Lemke deve ser iniciado. Toma-se como ponto de partida a solução inviável  $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{q}, \mathbf{0})$ ; a variável artificial  $z_0$  é, então, aumentada de zero em (A.5),  $\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{e} z_0$ , até que uma última componente  $w_s$  se anula, tornando-se não-básica. Substitui-se em seguida o valor de  $z_0$  em todas as outras equações, completando, assim, a operação de pivoteamento. Essa primeira operação fica definida pelo par  $(w_s, z_0)$ , onde:

$$s = \min \left\{ \frac{q_i}{e_i}, i = 1, 2, \dots, p, \text{ para } q_i < 0 \right\} \quad (\text{A.7})$$

A obtenção dessa primeira solução viável básica complementar é melhor entendida se o sistema (A.5) for organizado de acordo com a Tabela A.1. A variável artificial  $z_0$  é, então, conduzida para a base, substituindo  $w_s$ , que é a variável básica de maior valor negativo. Fazendo-se as operações de pivoteamento necessárias, ou seja:

$$q'_s = -q_s, \text{ e } q'_i = q_i - q_s, \text{ para } i \neq s \quad (\text{A.8a})$$

$$m'_{sj} = \frac{-m_{sj}}{-1} = m_{sj}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, p \quad (\text{A.8b})$$

$$m'_{ij} = -m_{ij} + m_{sj}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, p \text{ e } i \neq s \quad (\text{A.8c})$$

chega-se à forma dada na Tabela A.2.

Tabela A.1 – Inicialização do processo.

Base	$w_1$	...	$w_s$	...	$w_p$	$z_1$	...	$z_s$	...	$z_p$	$z_0$	$q$
$w_1$	1		0		0	$-m_{11}$		$-m_{1s}$		$-m_{1p}$	-1	$q_1$
:												
$w_s$	0		1		0	$-m_{s1}$		$-m_{ss}$		$-m_{sp}$	-1	$q_s$
:												
$w_p$	0		0		1	$-m_{p1}$		$-m_{ps}$		$-m_{pp}$	-1	$q_p$

Tabela A.2 – Resultados obtidos através da operação de pivoteamento.

Base	$w_1$	...	$w_s$	...	$w_p$	$z_1$	...	$z_s$	...	$z_p$	$z_0$	$q$
$w_1$	1		-1		0	$m'_{11}$		$m'_{1s}$		$m'_{1p}$	0	$q'_1$
:												
$z_0$	0		-1		0	$m'_{s1}$		$m'_{ss}$		$m'_{sp}$	1	$q'_s$
:												
$w_p$	0		-1		1	$m'_{p1}$		$m'_{ps}$		$m'_{pp}$	0	$q'_p$

Após esses procedimentos iniciais, tem-se que:

(i)  $q'_i \geq 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, p$ ;

(ii) a solução básica  $w_1 = q'_1$ ,  $w_2 = q'_2, \dots, w_{s-1} = q'_{s-1}$ ,  $z_0 = q'_s$ ,  $w_{s+1} = q'_{s+1}, \dots, w_p = q'_p$  e todas as outras variáveis inicialmente nulas formam uma solução viável básica complementar;

(iii) a solução viável básica complementar torna-se uma solução viável complementar do problema original quando o valor de  $z_0$  for reduzido a zero.

### 3. Passo Principal

O esquema de solução proposto por Lemke prossegue obtendo-se uma seqüência de soluções viáveis básicas complementares, até  $z_0$  tornar-se zero. Na determinação de cada solução viável básica complementar, entretanto, a mudança de base é feita de tal forma que as seguintes condições devem ser atendidas:

(i) a condição de complementaridade entre as variáveis deve ser mantida (isto é,  $w_i z_i = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, p$ ); e

(ii) a solução básica deve permanecer não-negativa (isto é, as constantes do lado direito em todas as tabelas devem ser não-negativas).

A condição (i) é satisfeita selecionando de forma adequada a variável não-básica a entrar na base da próxima tabela. Após o passo inicial do método, as variáveis  $w_s$  e  $z_s$  são ambas não-básicas. Se  $w_s$  ou  $z_s$  for tomada como básica, a condição de complementaridade entre  $w$  e  $z$  é ainda mantida. Utilizando, então, a *regra de complementaridade* – a variável a ser escolhida para entrar na base é sempre o complemento daquela variável que acabou de deixar a base na última tabela – seleciona-se a variável  $z_s$  a entrar na base.

A condição (ii) é satisfeita selecionando de forma adequada a variável básica a ser substituída por  $z_s$ . A seleção dessa variável básica é feita através do *teste da razão mínima*, similar àquele empregado no Método Simplex de programação linear. Desta forma, para determinar a variável que vai deixar a base, fazem-se os seguintes cálculos:

$$\frac{q_i}{m_{is}}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \text{para } m_{is} > 0 \quad (\text{A.9})$$

Tomando-se:

$$\frac{q_j}{m_{js}} = \min_{m_{is} > 0} \left( \frac{q_i}{m_{is}} \right) \quad (\text{A.10})$$

implica que a variável básica  $w_j$  deve ser substituída por  $z_s$ . Tem-se, assim, que uma nova tabela é obtida fazendo-se a operação de pivoteamento (A.8a,b,c), considerando agora  $m'_{js}$  como o elemento pivô.

Como a variável  $w_j$  acabou de sair da base, a variável  $z_j$  é escolhida automaticamente, de acordo com a *regra de complementaridade*, para entrar na base; aplicando-se em seguida o *teste da razão mínima*, define-se a variável básica a ser substituída por  $z_j$ . Após as operações de pivoteamento, chega-se a uma nova tabela.

#### 4. Finalização

O esquema de solução descrito no item anterior termina quando:

(i) o *teste da razão mínima* indicar que a variável básica da linha  $s$  deve deixar a base; ou seja,  $z_0$  deve deixar a base. Tem-se então que a solução viável básica complementar do problema aumentado, após a operação de pivoteamento, é igual a solução viável complementar do problema original; ou

(ii) o *teste da razão mínima* falhar. Isto acontece quando não for encontrado nenhum coeficiente positivo na coluna pivô. Nesse caso, não existe solução para o PCL; e diz-se que o problema de complementaridade tem uma "terminação em raio". Geometricamente, isto significa que a variável não-básica selecionada para entrar na base define uma linha básica que corresponde a um bordo ilimitado de  $K$ .

#### 5. Implementação Computacional

Na Figura A.1 mostrada a seguir são descritos os passos que foram adotados na implementação computacional do algoritmo de Lemke.

### 1. Inicialização:

(i) faz-se:  $k = 1$ ;

(ii) considera-se  $\mathbf{w}$  o vetor inicial das variáveis básicas;

(iii) determina-se o índice  $s^k$ , tal que  $q_{s^k} = \{\min q_i : i = 1, 2, \dots, p\}$ ;

(iv) testa-se o valor de  $q_{s^k}$ :

(iv-1) se  $q_{s^k} < 0$ , siga para o passo 2.;

(iv-2) se  $q_{s^k} \geq 0$ , o algoritmo termina assumindo  $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{q}, \mathbf{0})$  como

solução do PCL.

2. Introdução da variável  $z_0$ : retira-se do vetor das variáveis básicas a variável correspondente ao índice  $s^k$  e introduz-se  $z_0$  em sua posição. Consegue-se realizar essa mudança dirigindo-se diretamente ao passo 4..

### 3. Alteração complementar no vetor das variáveis básicas:

(i) faz-se:  $k = k + 1$ ;

(ii) através da *regra de complementaridade* (ver item sobre o passo principal), define-se a variável não-básica que deve ser introduzida na base. Faz-se  $r$  ser a coluna dessa variável não-básica;

(iii) determina-se a variável básica a ser retirada da base testando-se os valores de  $m'_{jr}$ . Utiliza-se para isto o *teste da razão mínima* (veja as Equações A.9 e A.10); e faz-se  $s^k$  o índice que identifica a linha dessa variável básica, ou seja:

(iii-1) se  $m'_{jr} \leq 0$ , para todos os  $j = 1, 2, \dots, p$ , o algoritmo é incapaz de introduzir a variável não-básica no vetor básico sem violar a restrição de não-negatividade; siga, então, para o passo 6.;

(iii-2) caso contrário, tomando-se  $\frac{q_{s^k}}{m_{s^k r}} = \min_{m_{jr} > 0} \left( \frac{q_j}{m_{jr}} \right)$ , siga para o passo 4.

– o objetivo é retirar do vetor básico a variável que corresponde ao índice  $s^k$  e introduzir em sua posição a variável não-básica que corresponde à coluna  $r$ .

4. Aplica-se o esquema de eliminação pivotado semelhante ao de Gauss–Jordan (veja as Equações (A.8a,b,c), considerando a linha de índice  $s^k$  como a linha pivô e a coluna  $r$  (respectivamente, a coluna  $(2p+1)$ ) como a coluna pivô se  $k > 1$  (respectivamente, se  $k = 1$ ).

5. Critério de parada:

(i) se  $z_0$  for retirada do vetor das variáveis básicas (isto é,  $z_0 = 0$ ), siga para o passo 7.;

(ii) caso contrário, o algoritmo continua com o passo 3..

6. "Terminação em raio": o esquema de pivoteamento termina com  $z_0 > 0$ , ou seja, o PCL não tem solução.

7. Terminação normal: o esquema de pivoteamento termina com  $z_0 = 0$ , ou seja, o vetor das variáveis básicas contém a solução do PCL original.

Figura A.1 - Algoritmo de Lemke.

## 6. Significado Mecânico

Considere o PCL formulado na Subseção 3.5.2 – reações nodais da base elástica como incógnitas principais – escrito na forma aumentada (A.5) e (A.6):

$$\varphi = -\mathbf{H} + \mathbf{P}\Delta\mathbf{r}_b + z_0\mathbf{e} \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta\mathbf{r}_b, z_0 \geq \mathbf{0} \quad (\text{A.12a})$$

$$\varphi \geq \mathbf{0} \quad (\text{A.12b})$$

$$\Delta\mathbf{r}_b^T \varphi = \mathbf{0} \quad (\text{A.12c})$$

Para essa formulação, observe que a variável artificial  $z_0$  significa uma abertura adicional que é aplicada à interface de contato unilateral entre a estrutura e a base elástica, com o objetivo de achar a compatibilidade de deslocamento em cada passo do algoritmo.

O primeiro valor de  $z_0$ ,  $z_0^{(1)}$  (passo inicial do método), corresponde a uma abertura inicial requerida para separar todos os possíveis nós da estrutura e da base elástica que possam vir a entrar em contato, exceto um par de nós que tem abertura inicial igual a zero, como ilustrado na Figura A.2. Os passos subseqüentes do algoritmo reduz gradualmente a abertura artificial  $z_0$  de  $z_0^{(1)}$  até zero, considerando um por um os pares de nós que venham a entrar em contato.

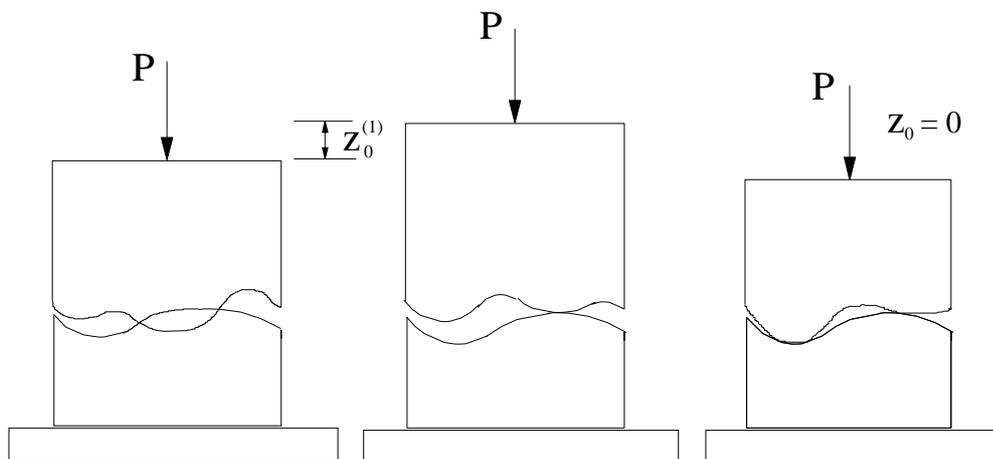


Figura A.2 – Significado mecânico do método de Lemke.