

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Análises Não-Lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-Rígidos

AUTOR: LEONARDO PINHEIRO

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas Metálicas.

Ouro Preto, fevereiro de 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Análises Não-Lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-Rígidos

AUTOR: LEONARDO PINHEIRO

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas Metálicas.

Ouro Preto, fevereiro de 2003

*“Lá está o porto; as velas, içadas.
Lá estão os grandes mares, tenebrosos.
Parceiros, que comigo trabalharam,
Lutaram e sofreram – acolhendo,
Com o mesmo brio o trovão e o sol –
Envelhecemos, todos! Mas a idade
Tem a sua honra, a sua missão;
A morte encerra tudo; antes do fim,
Porém, alguma façanha notável
Pode ser realizada, digna de homens
Que desafiam os deuses. Nos rochedos
As luzes começam a cintilar;
O longo dia chega ao fim, e surge
A lua; os lamentos, tantas vozes,
São ouvidos. Amigos, vinde, pois,
Não é tarde p’ra buscar um novo mundo.
Partamos, que o mar sinta a nossa força;
Meu destino é ir além do pôr-do-sol,
É seguir as estrelas até a morte.
(...)”*

*Se não dispomos da força que outrora
Movia céu e terra, o que somos, somos:
Um grupo coeso, corações heróicos,
Fracos no tempo e na vida, mas prontos:
Lutar, buscar, chegar, jamais ceder.”*

“Ulisses”, de Tennyson

À minha querida mãe (in memoriam)
Ao meu orientador

| AGRADECIMENTOS

“O homem que acredita que os segredos do mundo permanecem ocultos para sempre vive em mistério e medo. A superstição o derruba. A chuva vai corroer os atos que ele realizou na vida. Mas o homem que se propõe a encontrar o fio condutor da tapeçaria, só com a decisão, em si, assumirá o comando do mundo, e só por meio desse comando ele descobrirá a maneira de ditar os termos do seu próprio destino.”

Cormac McCarthy, escritor norte-americano, em “Meridiano de Sangue”

❖ À minha mãe (*in memoriam*), por ter sido a força inspiradora que me impulsionou, por ter se eternizado em minha mente e em meu coração, por ter lutado por mim, pelos nossos ideais, pelo nosso amor e pela vida até o fim;

❖ Ao meu orientador, Prof.º Ricardo Azoubel, pela incomparável amizade, ajuda, companheirismo, ensinamentos e apoio ao longo dessa caminhada;

❖ Aos meus grandes amigos Marlon e Wellington, por jamais terem me abandonado nos instantes de dúvidas, incertezas, dificuldades, tristezas e alegrias;

❖ Aos meus queridos amigos Adriana (e família), Cassius, Célio, Fernanda, Hélder, Laila, Luciana (e Carlinhos), Rildo e Simone, pelo privilégio que foi ter convivido com todos vocês nestes últimos dois anos;

❖ A Alexandre Galvão, pelo companheirismo, amizade e contribuição na realização deste trabalho;

❖ Aos professores João Batista e Marcílio Freitas, pela inestimável ajuda em alguns momentos difíceis, e a todos os demais professores e funcionários do DECIV e da Escola de Minas;

❖ A todos os demais amigos que fiz em Ouro Preto, cuja quantidade e sentimentos de amizade são grandes demais para caberem dentro destas páginas;

❖ À USIMINAS pela ajuda financeira.

| RESUMO

O presente trabalho tem como primeiro objetivo o estudo e a implementação computacional de formulações geometricamente não-lineares de elementos de treliças planas e espaciais, que são sistemas reticulados cujas barras resistem a esforços de tração ou compressão e possuem ambas as extremidades rotuladas. Além disso, este trabalho teve como segundo objetivo a análise estática não-linear, por meio de implementações computacionais, de pórticos planos com ligações semi-rígidas. Para o caso de elementos de treliça, as expressões para a matriz de rigidez e do vetor de forças internas para cada uma das formulações utilizadas são apresentadas, bem como o processo de obtenção das mesmas. Para elementos de pórtico com ligações semi-rígidas, além da matriz de rigidez, são também apresentados métodos para modelar o comportamento não-linear das conexões. Logo depois, é feito um estudo do ambiente computacional e da metodologia utilizada para implementação das formulações estudadas. São realizadas em seguida análises computacionais de sistemas estruturais rotulados e com ligações semi-rígidas, cujos resultados são interpretados e comparados com os valores encontrados na literatura. Algumas conclusões referentes à precisão dos resultados, comparação entre as formulações e eficiência computacional são apresentadas no final da dissertação.

| **ABSTRACT**

The first objective of this work is the study and the computational implementation of non-linear geometrically formulation of plane and spatial truss elements, i.e., reticuled systems in which the bars have only axial forces and the ends are pinned. The second objective of this work is the non-linear static analysis, by computational implementations, of the plane frames with semi-rigid connections. To the truss element, the stiffness matrix and the internal forces vector expressions are presented for the formulations used. To the semi-rigid plane frame elements, what is more, it is also presented methods for connections non-linear behavior modeling. After that, a study of the computational environment and the methodology used is made for implementation of the formulations studied. Next, computational analyses are performed for pinned and semi-rigid structural systems, in which the results are compared with the values found in papers. Some conclusions about the results precision, formulations implemented and computational efficiency are presented at the end of the dissertation.

|SUMÁRIO

Resumo.....	V
Abstract.....	VI
Lista de Figuras.....	XII
Lista de Tabelas	XVII
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....	1
1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2 – OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO.....	4
1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR	8
2.1 – INTRODUÇÃO	8
2.2 – REFERENCIAIS LAGRANGEANOS	8
2.3 – PROCEDIMENTOS GERAIS PARA SOLUÇÃO NÃO-LINEAR DE SISTEMAS ESTRUTURAIS.....	11
2.3.1 – Solução Incremental Predita	13
2.3.2 – Ciclo de Iterações.....	15
CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE SISTEMAS ESTRUTURAIS ROTULADOS.....	19
3.1 – INTRODUÇÃO	19
3.2 – FORMULAÇÃO PROPOSTA POR YANG e KUO (1994).....	20
3.2.1 – Generalização para o Caso Tridimensional	40
3.3 – FORMULAÇÃO PROPOSTA POR CRISFIELD (1991)	44

3.3.1 – A Utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais	45
3.3.2 – Formulação Utilizando o Tensor de Deformações de Green.....	46
3.3.2.1 – Vetor de Forças Internas	50
3.3.2.2 – Matriz de Rigidez.....	51
3.3.3 – Formulação Alternativa Utilizando o Tensor de Engenharia	53
3.3.3.1 – Vetor de Forças Internas	54
3.3.3.2 – Matriz de Rigidez.....	55
3.3.4 – Elementos de Treliça Espacial	57
3.3.4.1 – Vetor de Forças Internas	58
3.3.4.2 – Matriz de Rigidez.....	59

CAPÍTULO 4 - FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE	
SISTEMAS ESTRUTURAIS SEMI-RÍGIDOS	62
4.1 – INTRODUÇÃO	62
4.2 – COMPORTAMENTO E MODELO DE LIGAÇÕES	63
4.2.1 – Classificação dos Modelos de Ligações	66
4.2.1.1 – Modelos Analíticos	67
4.2.1.2 – Modelos Matemáticos.....	67
4.2.1.3 – Modelos Mistos.....	68
4.2.2 - Formulações de Modelos de Ligações	69
4.2.2.1 – Modelo Linear.....	70
4.2.2.2 – Modelos Exponenciais	72
4.2.2.3 – Modelo de Richard-Abbott	75
4.3 - ELEMENTO SEMI-RÍGIDO PROPOSTO POR CHAN e CHUI (2000).....	77
4.3.1 – Modificação da Matriz de Rigidez para a Consideração de Ligações	
Semi-Rígidas	79
4.3.2 – Modificação da Formulação para Análise Não-Linear de Pórticos	
Semi-Rígidos.....	87
4.3.2.1 – Modificação da Formulação Proposta por Torkamani et al. (1997)	88
4.3.2.2 – Modificação da Formulação Proposta por Yang e Kuo (1994)	92
4.4 – ELEMENTO SEMI-RÍGIDO PROPOSTO POR	
SEKULOVIC e SALATIC (2001)	94

4.4.1 – Equações de Rigidez para um Elemento com Conexões Flexíveis Excêntricas.	94
4.4.2 – Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Nodais Equivalentes	102
4.5 – ELEMENTO SEMI-RÍGIDO PROPOSTO POR CHEN e LUI (1991).....	106

CAPÍTULO 5 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL..... 112

5.1 – INTRODUÇÃO	112
5.2 – CARACTERÍSTICAS GERAIS DO PROGRAMA	113
5.3 – SOLUÇÃO LINEAR.....	114
5.3.1 – Sub-rotina SEMIRIGID	117
5.3.2 – Sub-rotina STIFK0	117
5.3.2.1 – Sub-rotina BRKEL2	118
5.3.2.2 – Sub-rotina BRKEL3	119
5.3.2.2 – Sub-rotina BRKEL4	120
5.4 – SOLUÇÃO NÃO-LINEAR.....	121
5.4.1 – Sub-rotinas MATRIG2T e MATRIG3T.....	126
5.4.2 – Sub-rotinas VETFI2T e VETFI3T.....	128
5.4.3 – Sub-rotina MATRIGTC.....	129
5.4.4 – Sub-rotina VETFITC	130
5.4.5 – Sub-rotina MATRIG.....	131
5.4.6 – Sub-rotina LOPIN.....	132
5.4.7 – Sub-rotina NEXINC	132

CAPÍTULO 6 – EXEMPLOS NUMÉRICOS 134

6.1 – INTRODUÇÃO	134
6.2 – EXEMPLOS DE SISTEMAS ESTRUTURAIS ROTULADOS	136
6.2.1 – Treliça Plana Composta de Duas Barras.....	137
6.2.2 – Treliças Planas Compostas por Duas Barras com Variação de Altura.....	139
6.2.3 – Treliça Assimétrica Plana em Forma de Arco	144
6.2.4 – Treliça Composta por duas Barras com Análise de Bifurcação	148
6.2.5 – Treliça Espacial de 24 Elementos.....	150
6.2.6 – Treliça Espacial Formada por 12 Barras.....	156
6.2.7 – Domo Reticulado de 168 Elementos	161

6.2.8 – Treliça Espacial em Forma de Arco	165
6.3 – EXEMPLOS DE SISTEMAS ESTRUTURAIS SEMI-RÍGIDOS	170
6.3.1 – Análise Linear de um Pórtico Simples Semi-Rígido	171
6.3.2 – Análise Não-Linear de Pórticos de Quadros Simples com Variação de Altura	174
6.3.3 – Pórticos de Quadros Simples com Ligações Semi-Rígidamente Não-Lineares	180
6.3.4 – Pórtico de Quadro Duplo com Seis Pavimentos (Pórtico de Vogel)	184
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS	193
7.1 – INTRODUÇÃO	193
7.2 – CONCLUSÕES	193
7.3 – SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	198
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	199
APÊNDICE A.....	212
A.1 – INTRODUÇÃO	212
A.2 – ESTRATÉGIA BASEADA NO PARÂMETRO DE RIGIDEZ GSP (DESLOCAMENTO GENERALIZADO).....	212
A.3 – ESTRATÉGIA DO COMPRIMENTO DE ARCO	215
A.4 – CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA ADOTADOS	220
APÊNDICE B	222
B.1 – INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE TRELIÇA	222
B.2 – FORÇAS NO ELEMENTO DEVIDO À ROTAÇÃO DE CORPO RÍGIDO....	226
APÊNDICE C.....	229
C.1 – EXEMPLOS DE FORMULAÇÕES UTILIZADAS NA MODELAGEM DE LIGAÇÕES	229
C.1.1 – Modelos Multi-lineares	229
C.1.2 – Modelo Polinomial.....	230

C.1.3 – Modelo B-Spline Cúbico.....	233
C.1.4 – Modelo de Potências	234
C.1.5 – Modelo Bounding-Line	237
C.1.6 – Modelo de Ramberg-Osgood	238
APÊNDICE D.....	241
D.1 – VERIFICAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE PÓRTICO SEMI-RÍGIDO EM CONDIÇÕES EXTREMAS	241

| LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

FIGURA 2.1 – Referencial Lagrangeano atualizado.....	10
FIGURA 2.2 – Referencial Lagrangeano total	11
FIGURA 2.3 – Solução incremental-iterativa com restrição do comprimento de arco..	14
FIGURA 2.4 – Passos básicos da metodologia de solução não-linear	18
FIGURA 2.5 – Fluxograma da metodologia de solução não-linear	18

CAPÍTULO 3

FIGURA 3.1 – Elemento de treliça plana referido aos eixos globais e locais.....	22
FIGURA 3.2 – Graus de liberdade para um elemento plano de treliça	24
FIGURA 3.3 – Graus de liberdade para um elemento 3D de treliça	41
FIGURA 3.4 – Deformação de um elemento geral de treliça	47

CAPÍTULO 4

FIGURA 4.1 – Tipos de ligações viga-coluna.....	64
FIGURA 4.2 – Deformação rotacional de uma conexão.....	65
FIGURA 4.3 – Curvas momento-rotação típicas de algumas das ligações mais comuns	65
FIGURA 4.4 – Fator de rigidez γ	71
FIGURA 4.5 – Modelo linear	72
FIGURA 4.6 – Propriedades de ligações representadas pelo modelo exponencial de Chen e Lui: (a) curvas momento-rotação; (b) curvas rigidez-rotação...	75
FIGURA 4.7 – Forma típica do modelo de Richard-Abbott	76
FIGURA 4.8 – Elemento de mola simulando uma conexão.....	77
FIGURA 4.9 – Modelo do elemento de pórtico semi-rígido idealizado	77
FIGURA 4.10 – Elemento de viga-coluna com molas de conexão adicionadas	81

FIGURA 4.11 – Rotações e deflexões laterais de uma elemento deformado com molas nas extremidades simulando conexões flexíveis	82
FIGURA 4.12 – Notações para deslocamentos e forças nodais do elemento de pórtico plano com ligações semi-rígidas	84
FIGURA 4.13 – Elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas.....	87
FIGURA 4.14 – Elemento de viga com conexões flexíveis e excêntricas	95
FIGURA 4.15 – Elemento híbrido de viga-coluna	107

CAPÍTULO 5

FIGURA 5.1 – Divisão geral do programa computacional	113
FIGURA 5.2 – Estrutura do programa principal para análises estáticas	114
FIGURA 5.3 – Fluxograma geral da solução linear	115
FIGURA 5.4 – Exemplo de um arquivo de entrada de dados para o pórtico semi-rígido mostrado em detalhe	116
FIGURA 5.5 – Fluxograma geral da solução não-linear	121
FIGURA 5.6 – Exemplo do arquivo 1 de entrada de dados para um pórtico com ligações semi-rígidas representadas pelo modelo exponencial	123
FIGURA 5.7 – Ilustração apenas da entrada de dados das ligações representadas pelo modelo exponencial modificado.....	124
FIGURA 5.8 – Ilustração apenas da entrada de dados de ligações representadas pelo modelo de Richard-Abbott	125
FIGURA 5.9 – Segundo arquivo de entrada de dados, utilizado para solução não-linear.....	125

CAPÍTULO 6

FIGURA 6.1 – Treliças analisadas no presente trabalho.....	136
FIGURA 6.2 – Treliça plana composta por duas barras.....	137
FIGURA 6.3 – Trajetórias de equilíbrio da treliça composta por duas barras	138
FIGURA 6.4 – Modelo geral de uma treliça composta por duas barras e sua forma deformada	139
FIGURA 6.5 – Curvas carga-deflexão para treliça composta por duas barras ($\alpha = 5^\circ$)	140

FIGURA 6.6 – Curvas carga-deflexão para a treliça composta por duas barras ($\alpha = 30^\circ$)	142
FIGURA 6.7 – Curvas carga-deflexão para a treliça composta por duas barras ($\alpha = 60^\circ$)	143
FIGURA 6.8 – Comparação entre as formulações apresentadas para treliça com $\alpha = 60^\circ$	144
FIGURA 6.9 – Treliça assimétrica em forma de arco	145
FIGURA 6.10 – Trajetórias de equilíbrio para nos pontos nodais 8 e 13 da treliça plana assimétrica.....	146
FIGURA 6.11 – Trajetórias de equilíbrio para a treliça assimétrica utilizando a formulação Lagrangeana total	147
FIGURA 6.12 – Configurações de equilíbrio para a treliça plana assimétrica: (a) indeformada; (b) no primeiro ponto limite de carga; (c) no primeiro ponto limite de deslocamento (escala utilizada para os deslocamentos: 1/1)	147
FIGURA 6.13 – Treliça de von Mises	148
FIGURA 6.14 – Trajetórias de equilíbrio para treliça de von Mises: (a) para estrutura perfeita e imperfeita e (b) com imperfeição inicial	149
FIGURA 6.15 – Domo tridimensional formado por 24 elementos e 13 nós submetido a uma carga vertical	151
FIGURA 6.16 – Trajetória de equilíbrio para a treliça espacial de 24 elementos: (a) em referencial Lagrangeano atualizado (YLA); (b) em referencial Lagrangeano total (CTE)	152
FIGURA 6.17 – Domo tridimensional de 24 elementos submetido a sete cargas verticais	154
FIGURA 6.18 – Curva carga-deslocamento para a treliça espacial de 24 elementos e 7 cargas nodais: (a) utilizando a estratégia do deslocamento generalizado; (b) utilizando a estratégia do comprimento de arco	155
FIGURA 6.19 – Treliça espacial formada por 12 barras	156
FIGURA 6.20 – Trajetórias de equilíbrio para a treliça espacial de 12 barras (nó 1) ..	158
FIGURA 6.21 – Trajetórias de equilíbrio para a treliça espacial de 12 barras (nó 2) ..	159

FIGURA 6.22 – Formas deformadas da treliça espacial de 12 barras.....	160
FIGURA 6.23 – Domo reticulado formado por 168 elementos	162
FIGURA 6.24 – Caminhos de equilíbrios o domo de 168 elementos (nó 1).....	163
FIGURA 6.25 – Caminhos de equilíbrio para o domo espacial de 168 elementos (nó 2)	164
FIGURA 6.26 – Treliça espacial em forma de arco: (a) vista tridimensional e (b) vista frontal	165
FIGURA 6.27a – Trajetórias de equilíbrio da treliça espacial em forma de arco, com ponto de bifurcação obtido para estrutura perfeita.....	166
FIGURA 6.27b – Trajetórias de equilíbrio da treliça espacial em forma de arco, com pontos de bifurcação obtidos para estrutura imperfeita.....	167
FIGURA 6.28 – Resposta estrutural da treliça espacial em forma de arco com e sem imperfeição inicial: carga versus deslocamento horizontal em x no topo	168
FIGURA 6.29 – Resposta estrutural da treliça espacial em forma de arco com imperfeição inicial: carga versus deslocamento horizontal em y no topo	169
FIGURA 6.30 – Pórticos semi-rígidos analisados no presente trabalho	170
FIGURA 6.31 – Pórtico de um pavimento	172
FIGURA 6.32 – Modelo estrutural idealizado para o pórtico de um pavimento.....	173
FIGURA 6.33 – Discretização utilizada para o pórtico de um pavimento	173
FIGURA 6.34 – Pórtico de quadro simples de um pavimento	175
FIGURA 6.35 – Influência da flexibilidade da ligação no momento fletor da base	177
FIGURA 6.36 – Influência da flexibilidade da ligação no deslocamento horizontal do nó 3	177
FIGURA 6.37 – Pórtico de quadro simples de dois pavimentos	178
FIGURA 6.38 – Influência da flexibilidade da conexão no valor de carga crítica.....	179
FIGURA 6.39 – Pórticos de quadro simples de dois pavimentos com diferentes condições de suporte: (a) rotulado; (b) semi-rígido; (c) engastado ...	181
FIGURA 6.40 – Curvas carga-deflexão obtidas para o pórtico com apoios rotulados	182
FIGURA 6.41 – Curvas carga-deflexão obtidas para o pórtico com apoios elásticos..	183

FIGURA 6.42 – Curvas carga-deflexão obtidas para o pórtico com apoios Engastados	183
FIGURA 6.43 – Pórtico de Vogel	186
FIGURA 6.44 – Discretização utilizada e carregamentos nodais equivalentes para o pórtico de Vogel	187
FIGURA 6.45 – Análise do pórtico de Vogel para vários tipos de conexões lineares	191
FIGURA 6.46 – Análise do pórtico de Vogel para vários tipos de conexões não-lineares.....	191
FIGURA 6.47 – Comparação entre os resultados obtidos para conexões lineares e não-lineares.....	192

APÊNDICE A

FIGURA A.1 – Estratégia de solução não-linear baseada no deslocamento Generalizado	215
FIGURA A.2 – Estratégia de solução não-linear baseada no comprimento de arco....	220

APÊNDICE B

FIGURA B.1 – Alongamento de um elemento de treliça: forças devido a \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_2	223
FIGURA B.2 – Alongamento de um elemento de treliça: forças devido a \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_3	224
FIGURA B.3 – Alongamento de um elemento de treliça: forças devido a ${}^t\mathbf{F}$ e \mathbf{K}_g	225

APÊNDICE C

FIGURA C.1 – Modelos linearizados.....	230
FIGURA C.2 – Tipos de conexões e seus respectivos parâmetros de padronização utilizados no modelo polinomial de Frye e Morris.....	231
FIGURA C.3 – Forma típica do modelo de potências de Colson-Louveau	235
FIGURA C.4 – Forma típica do modelo Bounding-line	238
FIGURA C.5 – Forma típica do modelo de Ramberg-Osgood	240

| LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 4

TABELA 4.1 – Parâmetros do modelo exponencial de Chen-Lui utilizados para algumas ligações	74
--	----

CAPÍTULO 6

TABELA 6.1 – Resumo das formulações analisadas	135
TABELA 6.2 – Valores de carga crítica e deslocamento vertical nos pontos nodais 8 e 13 da treliça assimétrica em forma de arco	148
TABELA 6.3 – Valores de carga crítica e deslocamento vertical para o domo espacial submetido a sete cargas nodais considerando-se duas estratégias diferentes de solução não-linear.....	154
TABELA 6.4 – Comparação dos valores de momento fletor obtidos para o pórtico de um pavimento (valores absolutos)	174
TABELA 6.5 – Valores de deslocamento horizontal do nó 3 para o pórtico de um pavimento, obtidos nas análises de primeira e segunda ordem (P = 450 kN, H = 0,005P)	175
TABELA 6.6 – Valores de momento fletor do nó 1 para o pórtico de um pavimento, obtidos nas análises de primeira e segunda ordem (P = 450 kN, H = 0,005P)	176
TABELA 6.7 – Valores do deslocamento horizontal do nó 5 para o pórtico de dois pavimentos, obtidos nas análises de primeira e segunda ordem (P = 100 kN, H = 0,005P)	180
TABELA 6.8 – Valores do momento fletor do nó 1 para o pórtico de dois pavimentos, obtidos nas análises de primeira e segunda ordem (P = 100 kN, H = 0,005P)	180

TABELA 6.9 – Cargas limites de estabilidade para o pórtico de 2 pavimentos para diferentes tipos de apoio	184
TABELA 6.10 – Propriedades e dimensões dos perfis utilizados no pórtico de Vogel	186
TABELA 6.11 – Resultados de momentos fletores para as vigas obtidos através da análise linear para o pórtico de Vogel (valores absolutos, em kNm)	188
TABELA 6.12 – Resultados de momentos fletores para as colunas obtidos através da solução linear para o pórtico de Vogel (valores absolutos, em kNm)	189

APÊNDICE C

TABELA C.1 – Constantes de padronização e ajuste de curvas para o modelo polinomial de Frye e Morris (valores em polegadas)	232
TABELA C.2 – Constantes de padronização e de ajuste de curvas utilizados no modelo de potências de Ang e Morris	240

1. INTRODUÇÃO

1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A proposta da análise estrutural é determinar as tensões, deformações, forças atuantes, solicitações resultantes e deslocamentos para uma dada estrutura sob determinadas condições de contorno e de carregamento. Baseados nos resultados dessa análise, engenheiros estruturais estão aptos a verificar se um projeto proposto possui os requisitos de adequada resistência e deslocabilidade para uma combinação de condições de carregamento e, se necessário, revê-lo até que todas as exigências estejam atendidas. No momento atual, análises lineares restam como a matéria-prima para os projetistas, no sentido que os resultados obtidos de tais análises têm sido utilizados primordialmente como a base para o cálculo de ações, solicitações e tensões e para o dimensionamento de elementos estruturais.

Uma desvantagem da análise elástica linear tem sido sua incapacidade de refletir o comportamento real de estruturas sob condições não usuais de carregamento ou de carregamento limite, uma vez que quase todas as estruturas comportam-se de forma não-linear antes de atingir seus limites de resistência. Por essa razão, a maioria das modernas normas baseadas no conceito do modelo de resistência última tem incorporado certas medidas para que os engenheiros estruturais considerem a não-linearidade, ou os efeitos de segunda ordem, utilizando técnicas de análise ou exatas ou aproximadas. A consideração básica aqui é a de que uma avaliação mais realista da resistência das estruturas contra as condições de falha pode ser alcançada apenas pelas análises que levam em consideração os vários efeitos não-lineares. No projeto de tipos peculiares de estruturas, ou de especial importância, é comumente recomendado que

análises não-lineares sejam conduzidas para investigar o comportamento de estruturas sob condições não usuais de carregamento.

Outro fator que clama pela necessidade de análises não-lineares pode ser atribuído ao desenvolvimento de materiais de alta resistência em várias áreas da engenharia, tais como engenharia aeroespacial, engenharia mecânica e em prédios de altíssimo porte, onde o peso das estruturas está mais concentrado. A aplicação de tais materiais nessas áreas, embora permita que os engenheiros estruturais obtenham uma estrutura mais leve, normalmente introduzirá certos graus de não-linearidade na resposta estrutural. É de responsabilidade dos engenheiros estruturais garantir que todas as funções operacionais da estrutura projetada não sejam depreciadas por tais efeitos não-lineares sob condições de carregamento extremo ou de trabalho. Obviamente, o papel da análise não-linear tem se tornado cada vez mais importante devido ao aumento do uso de materiais leves e de alta resistência na indústria. Deverá ser observado que, em adição às estritas exigências de projeto, o avanço nos métodos de solução, a expansão da memória computacional e, mais diretamente, o drástico declínio dos custos de computação são outros fatores que dão lugar à análise não-linear.

Duas diferentes classes de não-linearidade são normalmente identificadas. A primeira classe consiste na não-linearidade do material, que origina-se das mudanças na resposta física de um material às tensões e aparece sob a forma de leis constitutivas variáveis e dependentes da trajetória. O principal problema computacional na análise de problemas envolvendo não-linearidade do material (não-linearidade física) é que as equações de equilíbrio devem ser escritas para a estrutura utilizando propriedades do material que dependem das deformações, as quais, no entanto, não são conhecidas antecipadamente. A segunda classe consiste na não-linearidade geométrica, também referida como efeitos de segunda ordem, os quais são produzidos por deformações finitas acompanhadas de modificações na rigidez de uma estrutura sob um certo carregamento aplicado. Neste trabalho, apenas a não-linearidade do tipo geométrica será considerada, enquanto a não-linearidade física e problemas dependentes do tempo serão inteiramente excluídos.

Outro fato recorrente em projetos e análises estruturais convencionais é a consideração de que as ligações entre viga e pilar sejam perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas. A primeira hipótese implica que o ângulo entre elementos

adjacentes permanece imutável, o que leva à suposição de que a rigidez relativa à conexão entre tais elementos é muito alta. Já a segunda hipótese leva à condição de que nenhum momento é transmitido de viga para pilar, de onde se conjectura que a rigidez da ligação é muito pequena se comparada à dos elementos conectados. No entanto, tais hipóteses são praticamente irrealizáveis. Diversos experimentos demonstraram que, em verdade, as conexões se localizam num estágio intermediário entre as condições extremas de totalmente rígido e idealmente rotulado, significando que as mesmas possuem um grau finito de flexibilidade. Portanto, conexões são, na prática, semi-rígidas. Além disso, possuem um comportamento não-linear que pode ser uma das maiores e mais significantes fontes de não-linearidade no comportamento estrutural de pórticos em aço sob carregamento estático ou dinâmico. Recentemente, a influência de conexões semi-rígidas numa resposta estrutural mais realista tem sido reconhecida e providenciada em várias normas que tratam de estruturas em aço, tais como a American Load and Resistance Factored Design (LRFD) (2000), British Standard BS5950 (1990), Eurocode 3 (1992), entre outros.

No presente trabalho, três categorias de estruturas reticuladas serão analisadas: treliças planas, treliças espaciais e pórticos planos com ligações semi-rígidas. Cada uma dessas categorias representa uma classe de estruturas com características específicas. No presente trabalho, por motivos de simplicidade de notação, denotar-se-á por pórticos rígidos aquelas estruturas que contenham todas as ligações viga-coluna perfeitamente rígidas. Outrossim, serão chamados de pórticos semi-rígidos aqueles que contenham uma ou mais ligações de comportamento semi-rígido.

Nos últimos tempos, vários pesquisadores têm desenvolvido formulações ou proposições geometricamente não-lineares para elementos finitos com a finalidade de se examinar o comportamento não-linear tanto de treliças planas e espaciais (Crisfield, 1991; Yang e Kuo, 1994) quanto para pórticos com ligações semi-rígidas (Chen e Lui, 1991; Chan e Chui, 2000; Sekulovic e Salatic, 2001).

As considerações anteriormente expostas, aliadas à existência de uma base computacional de solução de problemas não-lineares implementada por Silveira (1995) e Rocha (2000), bem como de análise não-linear de pórticos rígidos descrita no trabalho de Galvão (2000), foram os fatores que motivaram a escolha desta linha de pesquisa para a presente dissertação de mestrado.

1.2 – OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é parte integrante das seguintes linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC), com ênfase em Estruturas Metálicas (Deciv/EM/UFOP):

- *Mecânica Computacional*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
- *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas Metálicas*: visa estudar isoladamente ou em conjunto o comportamento das diversas partes de uma estrutura metálica.

Deve-se salientar que o principal objetivo deste trabalho é o estudo e a implementação computacional de formulações geometricamente não-lineares de elementos reticulados de treliça plana e espacial e de pórtico semi-rígido plano através de uma abordagem via MEF. Tais formulações serão integradas à metodologia de solução numérica implementada inicialmente por Silveira (1995) e expandida por Rocha (2000) e Galvão (2000; 2001), que, por sua vez, tem como finalidade primordial a análise de sistemas estruturais metálicos esbeltos.

A seguir, na seção (1.3), é apresentada uma revisão bibliográfica, com enfoque voltado para os trabalhos que tratam de formulações não-lineares de análise de sistemas estruturais rotulados planos e espaciais e de pórtico semi-rígido.

O capítulo 2 apresenta uma explanação geral sobre os procedimentos de análise não-linear, além da apresentação dos tipos de referenciais que podem ser utilizados nesse tipo de solução.

No capítulo 3 encontram-se descritos os desenvolvimentos teóricos das formulações propostas por Yang e Kuo (1994) e Crisfield (1991), utilizadas para análise não-linear de sistemas estruturais rotulados planos e espaciais. Tais desenvolvimentos incluem a obtenção da equação de equilíbrio, o tipo de elemento finito utilizado, bem como as funções de interpolação e as relações deformação-deslocamento para o elemento de treliça e, por fim, a dedução da matriz de rigidez e do vetor de forças internas para este último.

Já o capítulo 4 será dedicado ao estudo de alguns métodos utilizados para modelar o comportamento de ligações semi-rígidas. Além disso, serão apresentados os

elementos de pórtico semi-rígido propostos por Chen e Lui (1991), Chan e Chui (2000) e Sekulovic e Salatic (2001), com os respectivos procedimentos adotados por tais autores, necessários à obtenção da matriz de rigidez modificada.

O capítulo 5 apresenta, com base no que foi apresentado nos capítulos 3 e 4, as implementações realizadas para inserir, na base computacional existente, a possibilidade de análise de sistemas estruturais semi-rígidos e rotulados, dando-se ênfase às sub-rotinas criadas para tal fim e à modificação do arquivo de entrada de dados.

As formulações e metodologias apresentadas nos capítulos 3 e 4 e a implementação computacional mostrada no capítulo 5 são analisadas no capítulo 6, que apresenta exemplos de problemas estruturais encontrados na literatura. A seção (6.2) apresenta exemplos clássicos de treliças planas e espaciais que, em função de possuírem soluções analíticas (exatas) e/ou numéricas confiáveis, terão seus resultados utilizados para avaliar a qualidade tanto das formulações propostas quanto das implementações computacionais realizadas. O mesmo critério foi utilizado na seção (6.3), onde se encontram exemplos de sistemas estruturais semi-rígidos com resultados encontrados na literatura.

Por fim, no capítulo 7, são apresentadas as conclusões sobre o emprego das diversas formulações e metodologias analisadas nos exemplos do capítulo 6, bem como algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nas últimas décadas, vem ganhando dado cada vez mais destaque métodos e procedimentos de análise não-linear, em especial de sistemas estruturais reticulados planos, devido ao fato de oferecerem uma análise rápida e eficaz de muitas estruturas reais.

Esse tipo de solução vem se expandindo desde a década de 60, quando várias formulações geometricamente não-lineares foram introduzidas com soluções diretas e/ou incrementais (Galvão, 2000). Um amplo histórico da evolução das metodologias e estratégias de análise não-linear pode ser encontrado no trabalho de Rocha (2000), que teve como objetivo principal o estudo e a implementação computacional de algumas

estratégias de incremento de carga e de iteração encontradas na literatura para análise do equilíbrio e da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos.

No que se refere a sistemas reticulados do tipo treliça, deve-se destacar os trabalhos de Yang e Kuo (1994), que propõem uma análise não-linear baseada principalmente em um referencial Lagrangeano atualizado, e de Crisfield (1991; 1997), que, por sua vez, promove um estudo com ênfase em um referencial Lagrangeano total.

No entanto, alguns trabalhos anteriores aos supracitados merecem destaque e serviram como base para verificação da eficiência das formulações propostas por aqueles autores. Papadrakakis (1981) e Powell e Simons (1981) investigaram técnicas de estratégias de solução não-linear para análise de pós-flambagem de estruturas treliçadas planas e espaciais. Bathe e Dvorkin (1983) apresentaram equações não-lineares de elementos finitos para solução de estruturas reticuladas e de seções transversais axissimétricas. Além disso, estudos de metodologias e estratégias para solução não-linear de sistemas estruturais reticulados, incluindo aí os do tipo rotulado, podem ser encontrados nos trabalhos de Forde e Stierner (1987), Krenk e Hededal (1993; 1995), Krishnamoorthy et al. (1996), e Widjaja (1998).

Além disso, Chan (1993) propôs um método numérico não-linear para determinação de pontos limites e de bifurcação, enquanto Yang e Shieh (1990) investigaram uma metodologia para solução de problemas não-lineares com múltiplos pontos críticos, o que também é abordado nos trabalhos de Yang e Kuo (1994; 1995). A análise de pontos críticos e de caminhos de bifurcação na análise de estabilidade estrutural não-linear também foi realizada por Shi (1996), sendo em vários momentos abordada no livro de Crisfield (1997). Deve-se destacar também o trabalho de Oñate e Matias (1996), que igualmente trata da análise de instabilidade de treliças planas e espaciais.

Já para o estudo da modelagem de ligações semi-rígidas realizado neste trabalho, pôde-se aproveitar em grande parte as implementações realizadas por Galvão (2000; 2001) para estruturas reticuladas planas, cujo trabalho apresenta um extenso panorama dos principais trabalhos referentes ao estudo de análises não-lineares de pórticos rígidos, bem como de algumas técnicas de solução não-linear. Além disso, no livro de Chan e Chui (2000) há um vasto apanhado dos estudos realizados sobre

ligações semi-rígidas no que se refere a comportamento, modelagem e análise não-linear.

Amplos estudos de estruturas semi-rígidas encontram-se principalmente nos livros de Chen e Lui (1991), Chen e Toma (1994), Chen e Sohal (1995) e Chan e Chui (2000), que serviram de base para grande parte das considerações acerca de sistemas estruturais semi-rígidos. Não obstante, nos últimos tempos vários estudos sobre este tema vêm sendo realizados por pesquisadores brasileiros, onde pode-se citar, entre vários outros, os trabalhos de Campos Júnior (1991), Saldanha (1997), Ribeiro (1998), Santos (1998), Romano (2001) e Soares Filho (2002).

Entre os principais trabalhos surgidos nos últimos anos que tratam da análise não-linear estática de pórticos semi-rígidos destaca-se o de Sekulovic e Salatic (2001), que propuseram um elemento semi-rígido em que há a consideração da excentricidade da conexão entre viga e pilar. Além disso, Sekulovic et al. (2002) fazem um estudo de análise não-linear dinâmica de sistemas estruturais com ligações semi-rígidas também considerando a excentricidade do elemento de conexão em relação ao pilar. Esses dois últimos trabalhos estão intimamente relacionados ao de Sekulovic e Malcevic (1994), que trata da análise de segunda ordem de pórticos rígidos. Outros trabalhos que apresentam métodos de análise não-linear de pórticos semi-rígidos são o de Lui e Chen (1988), King (1994), Simões (1996), Chui e Chan (1997) e Xu (2001).

Vários outros trabalhos tratam da predição do comportamento não-linear de conexões semi-rígidas, seja através da modelagem por elementos finitos (Lima et al. 2002) ou através de banco de dados contendo os valores de momento e rotação oriundos de ensaios experimentais (Chen e Kishi, 1989; Abdalla e Chen, 1995).

Nas últimas décadas, vários pesquisadores propuseram formas de se aproximar o comportamento momento-rotação de ligações semi-rígidas através de modelos analíticos, matemáticos ou mistos. Entre os principais trabalhos, encontram-se os de Richard e Abbott (1975), Frye e Morris (1975), Ang e Morris (1984) (baseado no trabalho de Ramberg e Osgood, 1943), Lui e Chen (1986, 1988), Kishi e Chen (1986a, 1986b), Al-Bermani et al. (1994) e Zhu et al. (1995), entre outros.

2.

FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR

2.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo apresentar a metodologia de solução de equações não-lineares utilizada nesta dissertação para a análise de sistemas estruturais rotulados e semi-rígidos.

De início, a seção (2.2) apresenta o conceito de referencial Lagrangeano e de suas variações, além de uma explanação geral dos fatores que motivam seu emprego na análise incremental não-linear de estruturas.

A seguir, na seção (2.3), encontra-se a descrição do processo de cálculo incremental-iterativo presente na resolução de sistemas de equações não-lineares.

2.2. – REFERENCIAIS LAGRANGEANOS

A análise da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos através do método de elementos finitos (MEF) envolve, invariavelmente, a solução de um sistema de equações algébricas não-lineares. Pretende-se utilizar aqui os métodos que procuram resolver essas equações não-lineares passo a passo, em particular os esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos, atualmente considerados os mais eficientes.

Em análise não-linear, todos os procedimentos numéricos têm início a partir de princípios mecânicos básicos. Daí, as equações mecânicas fundamentais para um corpo

sólido são obtidas e então dispostas sob uma metodologia de análise de elementos finitos não-lineares.

Duas formulações têm sido propostas para descrever o movimento de corpos sólidos: as do tipo Euleriana e Lagrangeana. Na formulação Euleriana, as coordenadas espaciais, isto é, aquelas associadas ao corpo deformado, são empregadas como as coordenadas de referência. Já na formulação Lagrangeana, as coordenadas materiais, ou seja, aquelas associadas ao corpo antes de sua deformação, são utilizadas como as coordenadas de referência.

A formulação Lagrangeana é particularmente apropriada para análises não-lineares do tipo passo-a-passo de corpos sólidos, onde o interesse está centrado na história de deformação de cada ponto do corpo durante o processo de carregamento. Já a formulação Euleriana, segundo Yang e Kuo (1994), tem sido amplamente adotada na análise de problemas de mecânica dos fluidos, onde a atenção está focada no movimento do material ao longo de um volume específico de controle. Posto isso, o presente trabalho restringir-se-á fundamentalmente a formulações do tipo Lagrangeana, tendo-se em vista ainda que a maioria das formulações de elementos finitos com não-linearidade geométrica encontradas na literatura baseiam-se nesse tipo de referencial.

Com a abordagem Lagrangeana, a formulação de metodologias incrementais para análise não-linear começa com a divisão do caminho de carregamento de um corpo sólido em um certo número de configurações de equilíbrio. Três tipos de configurações para o corpo podem ser concebidos em termos de um sistema estacionário de coordenadas Cartesianas: a configuração inicial, a última configuração deformada t e a configuração deformada corrente $t + \Delta t$. Por hipótese, assume-se que todas as variáveis de estado, tais como tensões, deformações e deslocamentos, juntamente com a história de carregamento, são conhecidas na configuração t . A partir daí, a questão principal passa a ser a formulação de um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração $t + \Delta t$, considerando que o carregamento externo atuando na configuração t tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de t para $t + \Delta t$ é tipicamente referido como um passo incremental.

Dependendo de qual configuração anterior é selecionada como referência para a obtenção do estado de equilíbrio do corpo na configuração deformada corrente $t + \Delta t$,

dois tipos de referenciais Lagrangeanos podem ser identificados: o referencial Lagrangeano atualizado, onde a última configuração t de equilíbrio é selecionada como o estado de referência, e o referencial Lagrangeano total, que utiliza a configuração inicial indeformada para o mesmo propósito.

Para a formulação atualizada, os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga, conforme ilustrado na figura (2.1).

Já na formulação total, os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial indeformada, como mostra o esquema da figura (2.2).

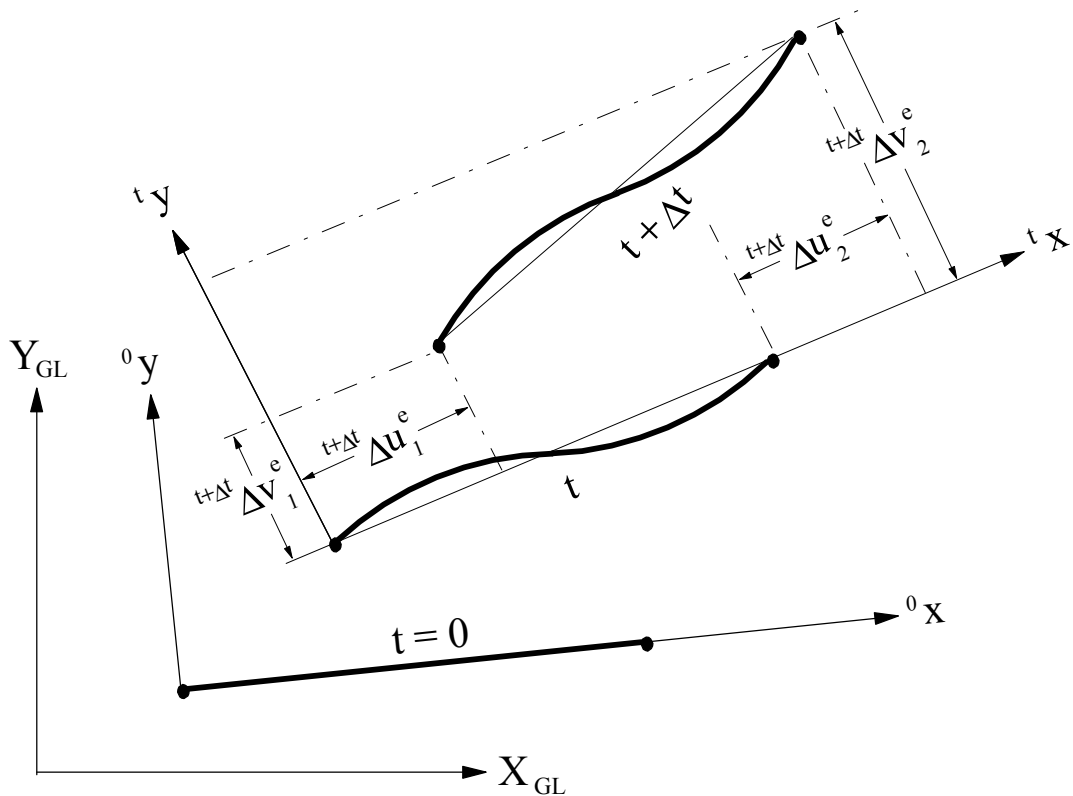


Figura 2.1 – Referencial Lagrangeano atualizado (Galvão, 2000).

Uma questão relevante observada no trabalho de Galvão (2000) mostrou que devido aos eventuais deslocamentos de corpo rígido ocorridos durante o processo incremental, cujas influências não são perfeitamente consideradas, bem como devido à utilização de funções de interpolação simplificadas, a tendência é que os resultados

obtidos em referencial total se afastem do comportamento real à medida que a configuração deformada distancia-se da configuração original.

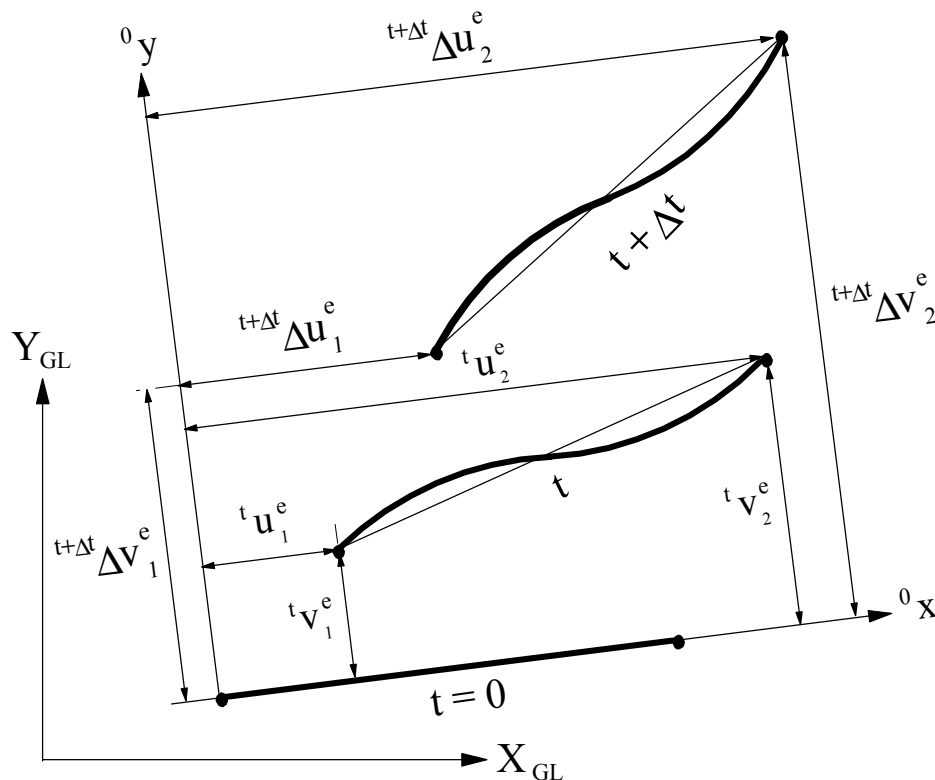


Figura 2.2 – Referencial Lagrangeano total (Galvão, 2000).

2.3 – PROCEDIMENTOS GERAIS PARA SOLUÇÃO NÃO-LINEAR DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

Em uma análise incremental não-linear que incorpore procedimentos iterativos em cada passo incremental para obtenção do equilíbrio de estruturas, duas diferentes fases podem ser identificadas. A primeira delas, denominada de fase predita, envolve a solução dos deslocamentos incrementais, obtidos das equações de equilíbrio da estrutura a partir de um determinado acréscimo de carregamento. A segunda fase, denominada de corretiva, tem por objetivo a correção das forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos pela utilização de um processo iterativo. Tais forças internas são então comparadas com o carregamento externo, obtendo-se daí a

quantificação do desequilíbrio existente entre forças internas e externas. O processo corretivo é feito até que, por intermédio de um critério de convergência, a estrutura esteja em equilíbrio, ou seja, até que se encontre

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_e, \text{ ou ainda } \mathbf{F}_i(\mathbf{d}) = \lambda \mathbf{F}_r, \quad (2.1)$$

onde o vetor das forças internas \mathbf{F}_i é função dos deslocamentos \mathbf{d} nos pontos nodais da estrutura, \mathbf{F}_e é o vetor de forças externas e λ é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de \mathbf{F}_r , que é um vetor de referência cuja magnitude é arbitrária, ou seja, apenas a sua direção é importante.

Metodologias eficientes de solução de sistemas não-lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio (primário e secundário) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos (pontos limites de carga e de deslocamento e/ou pontos de bifurcação) que possam existir.

A metodologia utilizada no presente trabalho baseia-se primordialmente na solução da equação (2.1) de forma incremental-iterativa, ou seja, para uma seqüência de incrementos $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3, \dots, \Delta\lambda_{NINC}$ do parâmetro de carga, onde NINC denota o número desejado de passos de carga, são calculadas as respectivas seqüências $\Delta\mathbf{d}_1, \Delta\mathbf{d}_2, \Delta\mathbf{d}_3, \dots, \Delta\mathbf{d}_{NINC}$ de incrementos de deslocamentos nodais. No entanto, como \mathbf{F}_i é uma função não-linear dos deslocamentos, a solução do problema $(\Delta\lambda, \Delta\mathbf{d})$ não satisfaz, *a priori*, a equação (2.1). Num contexto computacional, para um dado passo de carga, esse processo pode ser resumido em duas etapas:

1) A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é selecionado um incremento de carga, definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga — $\Delta\lambda^0$ —, procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{d}^0$. As aproximações $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{d}^0$ caracterizam a chamada ***solução incremental predita***;

2) Na segunda etapa de solução, procura-se, através de uma dada estratégia de iteração, corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura o mais eficientemente possível. Se as

iterações realizadas envolvem não só os deslocamentos nodais \mathbf{d} , mas também o parâmetro de carga λ , então uma equação adicional de restrição é requerida. A forma desta equação de restrição é o que distingue as várias estratégias de iteração. O apêndice A, com base nos trabalhos de Silveira (1995), Rocha (2000) e Galvão (2000), fornece algumas estratégias de iteração utilizadas neste trabalho. Outras estratégias, com suas características e peculiaridades, encontram-se descritas nas mesmas referências.

Alguns dos passos principais da metodologia de análise de não-linear são apresentados adiante. Antes, porém, é necessário fazer algumas observações relacionadas à notação a ser adotada:

- considere que são conhecidos o campo de deslocamento e estado de tensão da estrutura para o passo de carga t , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga $t + \Delta t$;
- k é referido como um contador do número de iterações;
- para $k = 0$, tem-se a solução incremental predita;
- para $k = 1, 2, \dots$ tem-se o ciclo iterativo de Newton-Raphson;
- λ e \mathbf{d} definem o parâmetro de carga e deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{d}$ caracterizam os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{d}$ são as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

A seguir, serão descritas com mais detalhes as duas etapas mais importantes do processo de solução não-linear descrito acima.

2.3.1 - Solução incremental predita

O primeiro passo para a obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente — $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{d}^0$ — consiste na montagem, usando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura, da matriz de rigidez tangente \mathbf{K} . A partir daí, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais através da expressão

$$\delta \mathbf{d}_t = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (2.2)$$

As estratégias de incremento de carga, que foram amplamente discutidas no trabalho de Rocha (2000), permitem que se faça uma seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta \lambda^0$. No apêndice A são descritos dois procedimentos para avaliar esse parâmetro. O primeiro, por exemplo, impõe a equação de restrição adicional ao problema como mostrado na figura (2.3), onde é utilizado o comprimento de arco representado pela equação (A.18) (Crisfield, 1991).

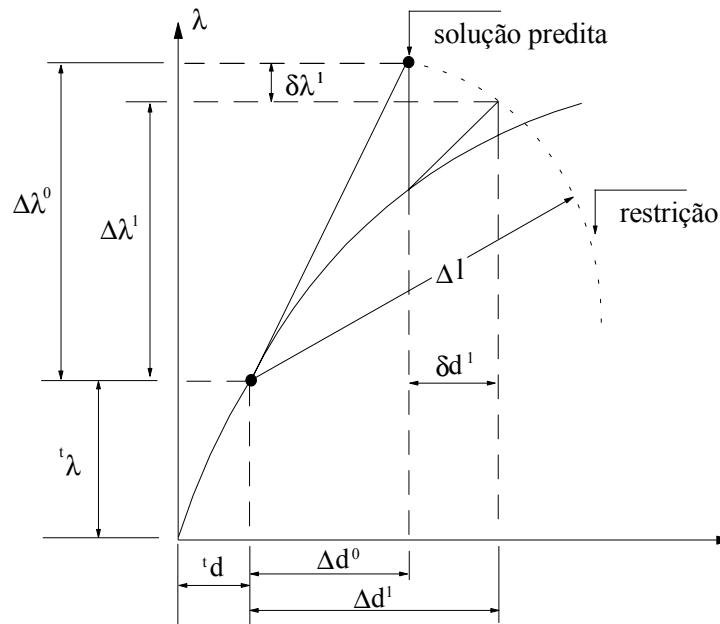


Figura 2.3 - Solução incremental-iterativa com restrição do comprimento de arco
(Rocha, 2000).

Com a definição de $\Delta \lambda^0$, calculam-se os deslocamentos nodais incrementais tangenciais escalonando-se $\delta \mathbf{d}_t$, ou seja,

$$\Delta \mathbf{d}^0 = \Delta \lambda^0 \delta \mathbf{d}_t. \quad (2.3)$$

Nesse estágio, o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais são atualizados através do seguinte procedimento:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0, \quad (2.4a)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{d} = {}^t\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}^0, \quad (2.4b)$$

onde ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{d}$ caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga, como indicado na figura (2.3).

As soluções (2.4a) e (2.4b) raramente satisfazem a condição de equilíbrio do sistema, de forma que iterações subsequentes são necessárias para que se possa restaurar o equilíbrio. Os procedimentos numéricos envolvendo estratégias de iterações que permitem variações do parâmetro de carga são encontrados no trabalho de Rocha (2000), enquanto no apêndice A do presente trabalho encontram-se alguns exemplos dos procedimentos mais utilizados nas análises desta dissertação.

2.3.2 - Ciclo de Iterações

No esquema tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga λ é mantido constante durante o ciclo iterativo. Porém, caso se pretenda acompanhar todo o traçado da trajetória de equilíbrio, com possíveis passagens pelos pontos limites e/ou pontos de bifurcação, é necessário que seja permitida a variação de λ a cada iteração.

Por conseguinte, seguindo-se a técnica geral de solução inicialmente proposta por Batoz e Dhatt (1979), em que é permitida a variação do parâmetro de carga, pode ser escrito que a mudança nos deslocamentos nodais é governada pela equação de equilíbrio

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta\mathbf{d}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (2.5)$$

onde \mathbf{g} representa, na terminologia da programação matemática, o vetor gradiente que deve se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando assim que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido. Na equação (2.5), nota-se que \mathbf{g} é função dos

deslocamentos nodais totais $\mathbf{d}^{(k-1)}$, calculados na última iteração, e do valor corrente do parâmetro de carga total λ^k , que agora também é incógnita e pode ser escrito como sendo

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k, \quad (2.6)$$

onde $\delta\lambda^k$ é a correção do parâmetro de carga. Substituindo (2.6) em (2.5), chega-se a

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta\mathbf{d}^k = -[\mathbf{F}_i^{(k-1)} - (\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r], \quad (2.7)$$

onde $\mathbf{F}_i^{(k-1)}$ representa o vetor das forças internas. Em (2.7), o produto $\delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r$ caracteriza o vetor das forças externas total atuante na última iteração. A equação anterior pode ainda ser rescrita como sendo

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta\mathbf{d}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r, \quad (2.8)$$

que é a equação procurada para se trabalhar durante o ciclo iterativo. Da última equação, tem-se que os deslocamentos nodais iterativos podem ser decompostos em duas parcelas, obtendo-se

$$\delta\mathbf{d}^k = \delta\mathbf{d}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{d}_r^k, \quad (2.9)$$

sendo que

$$\delta\mathbf{d}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (2.10a)$$

$$\delta\mathbf{d}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r. \quad (2.10b)$$

Aqui, $\delta\mathbf{d}_g^k$ é a correção que seria obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia convencional de incremento do parâmetro de carga constante

e $\delta \mathbf{d}_r^k$ é o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de \mathbf{F}_r . Caso seja adotado o método de Newton-Raphson modificado, $\delta \mathbf{d}_r^k$ será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais $\delta \mathbf{d}_t$ calculado na seção anterior através da equação (2.2) e não se modifica durante as iterações, visto que \mathbf{K} permanece inalterada. Já a correção do parâmetro de carga, $\delta \lambda^k$ — única incógnita da equação (2.9) —, é determinada seguindo uma das estratégias de iteração apresentadas no apêndice A, onde será introduzida uma equação de restrição que deverá ser respeitada a cada iteração. Com a determinação de $\delta \lambda^k$, retorna-se à equação (2.9) para a obtenção da correção dos deslocamentos.

Com a obtenção da solução iterativa $\delta \lambda^k$ e $\delta \mathbf{d}^k$, faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema através das expressões

$$\Delta \lambda^k = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k, \quad (2.11a)$$

$$\Delta \mathbf{d}^k = \Delta \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta \mathbf{d}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{d}_r^k. \quad (2.11b)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais têm-se que

$${}^{t+\Delta t} \lambda^k = {}^t \lambda + \Delta \lambda^k, \quad (2.12a)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{d}^k = {}^t \mathbf{d} + \Delta \mathbf{d}^k. \quad (2.12b)$$

Os procedimentos descritos nessa seção são repetidos até que um dado critério de convergência seja atendido (ver Rocha, 2000).

Um resumo dos procedimentos descritos nesta seção e na anterior é apresentado na figura (2.4) e no fluxograma da figura (2.5).

1. Configuração inicial: ${}^t\mathbf{d}$ e ${}^t\lambda$
2. Definição da solução predita: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{d}^0$
3. Iterações: $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$
4. Verifica a convergência: $\zeta_1 = \|\mathbf{g}^{(k-1)}\| / \|\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\| \leq \zeta$?
Sim: pare o ciclo de iterações, siga para o passo 7
Não: calcule $\delta\mathbf{d}^k = \delta\mathbf{d}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{d}_r^k$
5. Atualização das variáveis:
 - i. incrementais: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{d}^k = \Delta\mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}^k$
 - ii. totais: ${}^{t+\Delta t}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{d}^k = {}^t\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}^k$
6. Retorne ao passo 3
7. Faça novo incremento de carga e recomece o processo

Figura 2.4 – Passos básicos da metodologia de solução não-linear (Rocha, 2000).

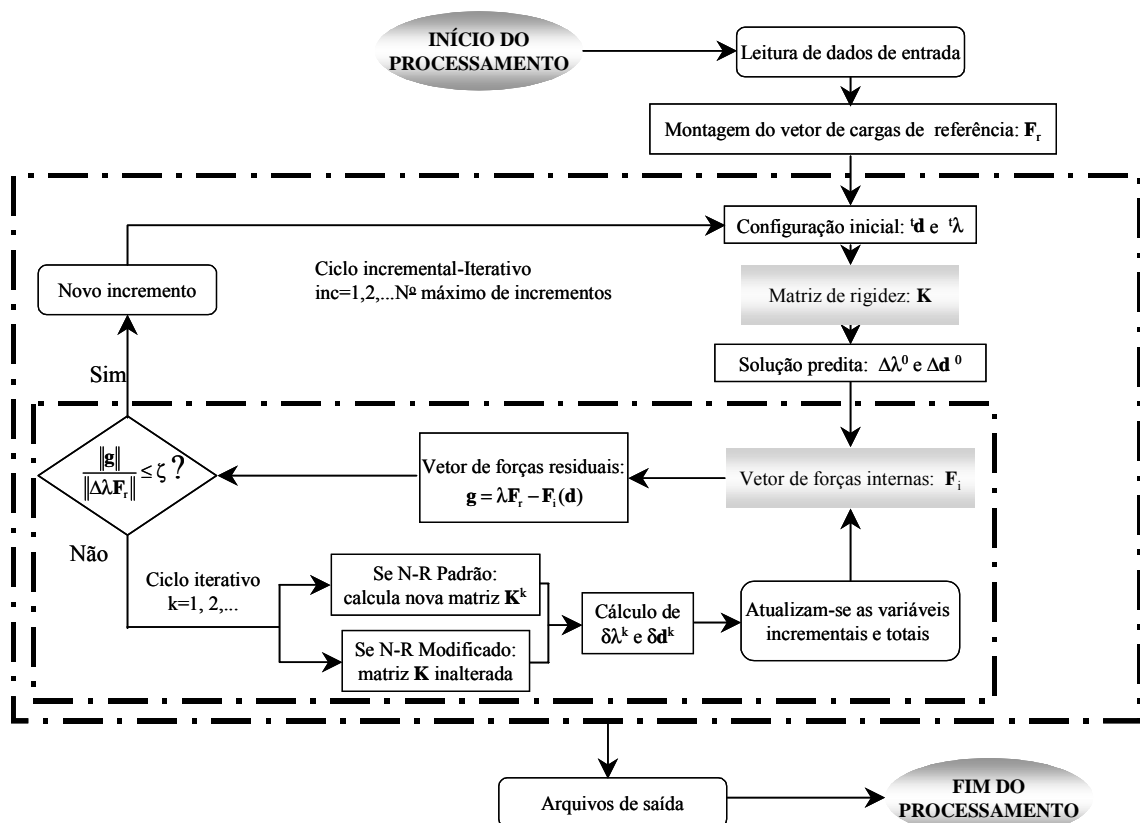


Figura 2.5 - Fluxograma da metodologia de solução não-linear (Rocha, 2000; Galvão, 2000).

3.

FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE SISTEMAS ESTRUTURAIS ROTULADOS

3.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as formulações não-lineares de elementos finitos de sistemas estruturais rotulados (treliças) baseadas nos trabalhos de Yang e Kuo (1994) e Crisfield (1991).

Inicialmente, na seção (3.2), apresenta-se a equação incremental de equilíbrio, baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais. Logo depois, são apresentadas as relações deformação-deslocamento não-lineares utilizadas na formulação de Yang e Kuo (1994), baseadas no tensor de Green-Lagrange e adaptadas para o elemento de treliça. Em seguida, são apresentadas as deduções das matrizes que compõem a matriz de rigidez do elemento rotulado. Como a formulação foi idealizada em referencial Lagrangeano atualizado, fez-se necessário o cálculo das deformações e deslocamentos baseado na última configuração de equilíbrio. Na seção (3.2.1) é apresentada uma generalização para o caso tridimensional, baseado nos conceitos e procedimentos apresentados para o caso bidimensional.

Duas das formulações não-lineares propostas por Crisfield (1991) para elementos rotulados são apresentadas na seção (3.3): uma baseada no tensor de Green; outra baseada no tensor de Engenharia. De início, na seção (3.3.1), o Princípio dos Trabalhos Virtuais é reapresentado sob uma nova roupagem, com o objetivo de se adequar aos procedimentos propostos pelo autor. Na Seção (3.3.2), o tensor de deformações de Green-Lagrange é utilizado como base para obtenção das equações de elementos finitos

não-lineares. Já em (3.3.3), o tensor de Engenharia é utilizado para obtenção de novas equações. Por fim, na seção (3.3.4), é apresentada uma generalização para o elemento de treliça espacial, sendo obtidas novas expressões de vetores e matrizes para utilização nos procedimentos de análise do caso tridimensional.

3.2 – FORMULAÇÃO PROPOSTA POR YANG e KUO (1994)

A formulação proposta por Yang e Kuo (1994) é obtida a partir da expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Utilizando uma formulação Lagrangeana atualizada, a equação de equilíbrio dos trabalhos virtuais pode ser escrita para o corpo, numa forma incremental, da seguinte forma:

$$\int_{^tV} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} d^tV + \int_{^tV} {}^t\tau_{ij} \delta \eta_{ij} d^tV = {}^{t+\Delta t}R - {}^tR, \quad (3.1)$$

onde C_{ijkl} denota os coeficientes constitutivos incrementais, ${}^t\tau_{ij}$ as tensões (iniciais) de Cauchy, ε_{ij} o incremento de deformações de Green e η_{ij} a componente não-linear do incremento de deformações de ε_{ij} . Todos esses valores estão referidos em relação à última configuração de equilíbrio t . Além disso, ${}^{t+\Delta t}R$ e tR denotam o trabalho virtual realizado pelas cargas externas atuando no corpo nas configurações $t + \Delta t$ e t , respectivamente.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais, de acordo com a definição dada por Timoshenko (1982), diz que quando a uma estrutura deformável, em equilíbrio, sob a ação de um sistema de cargas, é dada uma pequena deformação virtual, o trabalho realizado pelas forças externas (ou cargas) é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças internas (ou tensões resultantes), ou, numa notação matemática,

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}, \quad (3.2)$$

onde W_{ext} denota o trabalho realizado pelas forças externas e W_{int} o trabalho realizado pelas forças internas. Esse princípio é obtido a partir da definição de deslocamento virtual. Quando, sobre uma partícula, ou sobre um corpo rígido, atua um conjunto de forças em equilíbrio estático, pode-se dar a esta partícula um deslocamento virtual consistindo na translação da partícula em qualquer direção. O uso da expressão virtual significa que tal deslocamento é puramente imaginário, arbitrariamente imposto sobre o sistema estrutural. Durante esse deslocamento virtual, o trabalho virtual realizado pelas forças deve ser igual a zero porque as mesmas estão em equilíbrio. Tal afirmação é conhecida como o Princípio dos Deslocamentos Virtuais.

Pela decomposição do incremento de deformações ϵ_{ij} numa componente linear e numa outra não-linear, isto é,

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij}, \quad (3.3)$$

obtém-se da equação (3.1) uma equação incremental de equilíbrio para o corpo na configuração $t + \Delta t$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_{tV} C_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta \epsilon_{ij} d^tV + \int_{tV} C_{ijkl} \eta_{kl} \delta \epsilon_{ij} d^tV + \int_{tV} C_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta \eta_{ij} d^tV + \int_{tV} C_{ijkl} \eta_{kl} \delta \eta_{ij} d^tV \\ & + \int_{tV} {}^t\tau_{ij} \delta \eta_{ij} d^tV + {}^tR = {}^{t+\Delta t}R, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde o termo tR foi realocado para o lado esquerdo da equação (3.4) para significar que o mesmo representa parte do efeito das tensões iniciais.

Para um elemento de treliça, pode-se considerar apenas as componente axial dos tensores de tensões e deformações. A partir disto, denota-se as tensões iniciais por ${}^1\tau_{xx}$, o incremento de deformação axial por ϵ_{xx} ($= e_{xx} + \eta_{xx}$) e o incremento de tensão axial por S_{xx} , o qual pode ser agora descrito pela expressão

$$S_{xx} = E \epsilon_{xx}, \quad (3.5)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material. Logo, para o caso atual, a equação (3.4) transformar-se-á na expressão

$$\int_{tV} E \epsilon_{xx} \delta \epsilon_{xx} d^tV + \int_{tV} E \eta_{xx} \delta \epsilon_{xx} d^tV + \int_{tV} E \epsilon_{xx} \delta \eta_{xx} d^tV + \int_{tV} E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} d^tV + \int_{tV} \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d^tV + {}^tR = {}^{t+\Delta t}R. \quad (3.6)$$

Considere o elemento de treliça da figura (3.1) cujo comprimento na configuração t de equilíbrio vale L , que terá o sobrescrito esquerdo t omitido por questões de clareza. Sejam A e B as extremidades do elemento e (u, v) os deslocamentos axial e transversal do elemento numa seção genérica x , gerados durante um passo incremental de t para $t + \Delta t$. Os deslocamentos (u, v) podem ser interpolados por funções lineares com as que se seguem:

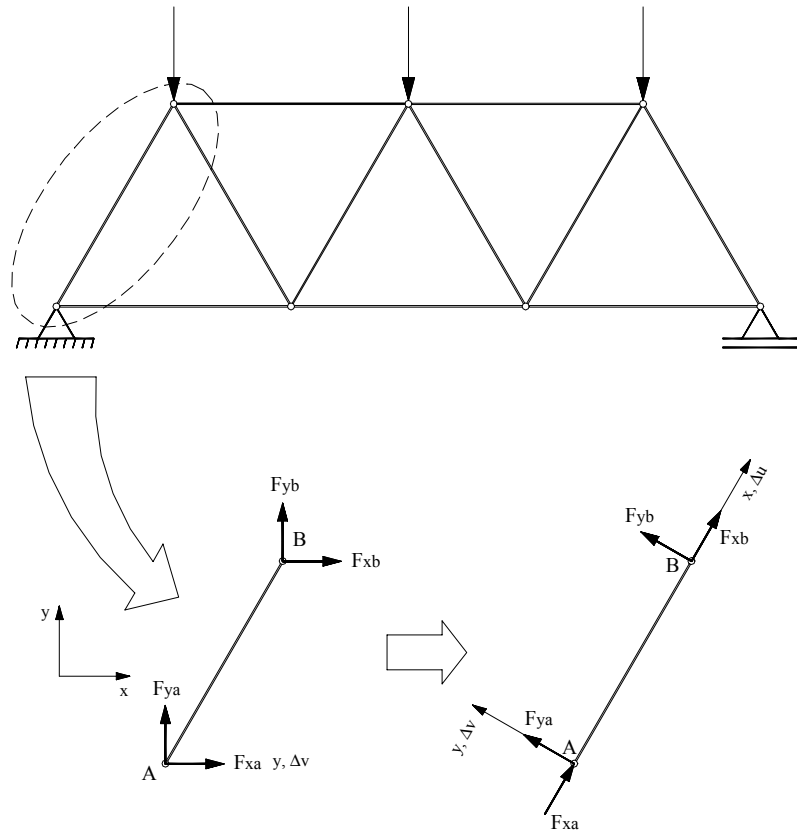


Figura 3.1 – Elemento de treliça plana referido aos eixos globais e locais.

$$u = u_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_b \frac{x}{L}, \quad (3.7a)$$

$$v = v_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + v_b \frac{x}{L}, \quad (3.7b)$$

onde (u_a, v_a) e (u_b, v_b) representam os deslocamentos nas duas extremidades do elemento. Utilizando a expressão (3.3) em sua forma incremental atualizada, cuja componente linear vale

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial^t x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^t x_i} \right) \quad (3.8a)$$

e a componente não-linear vale

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial^t x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^t x_j} \right), \quad (3.8b)$$

encontra-se, a partir da consideração apenas da componente axial dos tensores de tensão e deformação, uma nova expressão para o tensor de incremento de deformação de Green-Lagrange atualizado, simplificado para o caso de um elemento de treliça, que poderá ser expresso para as parcelas linear e não-linear através das expressões

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta u}{L}, \quad (3.9a)$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} \right), \quad (3.9b)$$

onde

$$\Delta u = u_b - u_a \text{ e } \Delta v = v_b - v_a. \quad (3.10)$$

Como mostrado na figura (3.2), o vetor de deslocamentos nodais para o elemento de treliça é

$$\mathbf{d}^T = \{u_a \ v_a \ u_b \ v_b\}. \quad (3.11)$$

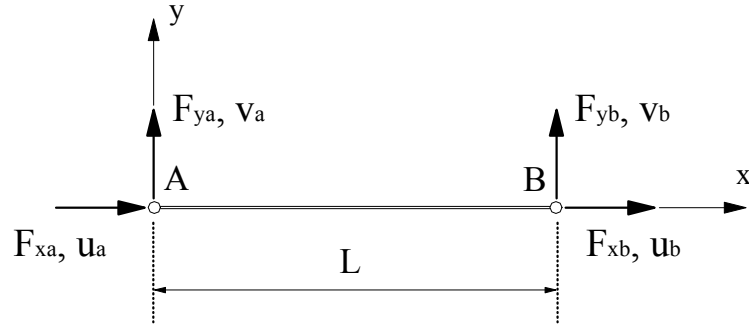


Figura 3.2 – Graus de liberdade para um elemento plano de treliça.

De forma correspondente, os vetores de forças do elemento nas configurações t e $t + \Delta t$ são, respectivamente,

$${}^t\mathbf{F}^T = \{{}^tF_{xa} \ {}^tF_{ya} \ {}^tF_{xb} \ {}^tF_{yb}\}, \quad (3.12a)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^T = \{{}^{t+\Delta t}F_{xa} \ {}^{t+\Delta t}F_{ya} \ {}^{t+\Delta t}F_{xb} \ {}^{t+\Delta t}F_{yb}\}, \quad (3.12b)$$

onde deverá ser observado que para um elemento em equilíbrio na configuração t , as forças cisalhantes ${}^tF_{ya}$ e ${}^tF_{yb}$ são identicamente iguais a zero e as forças axiais atuando nas duas extremidades do elemento são iguais em magnitude mas opostas em direção, isto é, ${}^tF_{yb} = -{}^tF_{ya}$. Além disso, a força axial inicial tF_x pode ser relacionada às tensões iniciais pela expressão

$${}^tF_x = \int_A {}^t\tau_{xx} \, dA, \quad (3.13)$$

onde A denota a área da seção transversal do elemento.

Por questões de simplicidade, assumir-se-á que apenas carregamentos do tipo concentrado atuando nas duas extremidades do elemento de treliça são possíveis, enquanto carregamentos do tipo distribuído serão considerados apenas quando os mesmos puderem ser substituídos por cargas nodais estaticamente equivalentes. Portanto, cada um dos termos na equação (3.6), quando discretizados, formam as seguintes equações matriciais:

$$\int_{t_V} E e_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \int_{t_V} E \frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) d^t V = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}, \quad (3.14a)$$

$$\int_{t_V} E \eta_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \int_{t_V} \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} \right) \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) d^t V = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{d}, \quad (3.14b)$$

$$\int_{t_V} E e_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \int_{t_V} E \frac{\Delta u}{L} \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) \right] d^t V = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{d}, \quad (3.14c)$$

$$\int_{t_V} E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \int_{t_V} \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} \right) \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) \right] d^t V = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_3 \mathbf{d}, \quad (3.14d)$$

$$\int_{t_V} {}^t \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \int_0^L {}^t F_x \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) \right] dx = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_g \mathbf{d}, \quad (3.14e)$$

$${}^t \mathbf{R} = \int_{t_S} {}^t t_i \delta u_i d^t S = (\delta \mathbf{d}^T) ({}^t \mathbf{F}), \quad (3.14f)$$

onde \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez elástica, \mathbf{K}_g a matriz de rigidez geométrica, e \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 e \mathbf{K}_3 as matrizes de rigidez de ordem superior.

Para se obter tais matrizes, têm-se como ponto de partida as definições expostas em (3.10), utilizando, no entanto, uma linguagem matricial. Por conseguinte, as definições contidas em (3.10) apresentar-se-ão como

$$\Delta u = u_b - u_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{bmatrix} \text{ e } \Delta v = v_b - v_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Voltando agora à equação (3.14a), de onde se originará a matriz de rigidez elástica, pode-se substituir a expressão $\int_{tV} d^t V$, que fornece o volume do elemento de treliça, por $A \times L$, onde A é a área da seção transversal do mesmo e L o seu comprimento na configuração t de equilíbrio. Desse modo, a equação (3.14a) passará a ser

$$\int_{tV} E e_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \int_{tV} E \frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) d^t V = \frac{E(AL)}{L^2} \Delta u \delta(\Delta u). \quad (3.16)$$

Pode-se agora aproveitar a linguagem matricial utilizada em (3.15) na equação anterior para se encontrar a expressão

$$\int_{tV} E e_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{bmatrix} \delta \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{bmatrix} \right). \quad (3.17)$$

Reagrupando-se os termos da última equação para se efetuar uma adequada multiplicação matricial e realizando-se o produto entre os vetores, a equação anterior pode ser rescrita tal como se segue:

$$\int_{tV} E e_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \frac{EA}{L} \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.18)$$

onde, na última igualdade, chega-se à matriz de rigidez elástica \mathbf{K}_e , ou seja,

$$\mathbf{K}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

o que leva, finalmente, de volta à expressão exibida em (3.14a).

Para se obter a matriz de rigidez geométrica, deve-se partir de (3.14e) utilizando-se a linguagem matricial apresentada em (3.15). A resolução da integral $\int_0^L dx$ fornecerá o comprimento L do elemento de treliça. Desse modo, a equação (3.14e) passará a ser

$$\int_{t_V}^t \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \int_0^L {}^t F_x \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) \right] dx, \quad (3.20)$$

ou seja,

$$\int_{t_V}^t \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \frac{{}^t F_{xb}(L)}{L^2} [\Delta u \delta(\Delta u) + \Delta v \delta(\Delta v)]. \quad (3.21)$$

Com o uso de (3.15) e a realocação dos termos referentes às primeiras variações de Δu e Δv , para que seja possível o produto entre as matrizes, chega-se à expressão

$$\int_{t_V}^t \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \frac{{}^t F_{xb}}{L} \left\{ \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{d} + \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ -1 \ 0 \ 1] \mathbf{d} \right\}, \quad (3.22)$$

que, após a efetuação das multiplicações matriciais, resultará em

$$\int_{t_V}^t \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \frac{{}^t F_{xb}}{L} \delta \mathbf{d}^T \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{d}, \quad (3.23)$$

cujo somatório final vale

$$\int_{\mathbf{V}} \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d\mathbf{V} = \delta \mathbf{d}^T \frac{{}^t\mathbf{F}_{xb}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.24)$$

Dessa última expressão, tem-se a matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g , isto é,

$$\mathbf{K}_g = \frac{{}^t\mathbf{F}_{xb}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

o que demonstra o que foi postulado na equação (3.14e).

Para a obtenção da matriz de ordem superior \mathbf{K}_1 , deve-se seguir o mesmo método de cálculo apresentado para \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_g . Tomando-se inicialmente (3.14b) e resolvendo-se a integral $\int_{\mathbf{V}} d\mathbf{V}$, ter-se-á

$$\int_{\mathbf{V}} E \eta_{xx} \delta e_{xx} d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} \right) \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) d\mathbf{V} = \frac{E(AL)}{2L^3} (\Delta u^2 + \Delta v^2) \delta(\Delta u). \quad (3.26)$$

Os termos quadráticos Δu^2 e Δv^2 devem ser reagrupados para que a multiplicação entre os vetores seja possível. Isso levará a expressão anterior a se apresentar sob a forma

$$\int_{\mathbf{V}} E \eta_{xx} \delta e_{xx} d\mathbf{V} = \frac{EA}{2L^2} (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \mathbf{v}^T \Delta \mathbf{v}) \delta(\Delta \mathbf{u}). \quad (3.27)$$

Substituindo (3.15) na última equação e reagrupando-se a disposição dos vetores com a colocação do vetor de deslocamentos \mathbf{d} em evidência, a expressão (3.27) tornar-se-á

$$\int_{t_V} E \eta_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \delta \mathbf{d}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{d}. \quad (3.28)$$

Com a multiplicação dos termos matriciais e efetuando-se o somatório, a equação (3.28) resultará em

$$\int_{t_V} E \eta_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \delta \mathbf{d}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ [u_a - u_b \quad v_a - v_b \quad u_b - u_a \quad v_b - v_a] \right\} \mathbf{d}, \quad (3.29)$$

cujo resultado do produto entre os vetores será então

$$\int_{t_V} E \eta_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \delta \mathbf{d}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} u_b - u_a & v_b - v_a & -(u_b - u_a) & -(v_b - v_a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(u_b - u_a) & -(v_b - v_a) & u_b - u_a & v_b - v_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.30)$$

Mas, tendo-se em vista que $\Delta u = u_b - u_a$ e $\Delta v = v_b - v_a$, a equação anterior passará a ser

$$\int_{t_V} E \eta_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \delta \mathbf{d}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & -\Delta u & -\Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u & -\Delta v & \Delta u & \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.31)$$

de onde advém a matriz de ordem superior \mathbf{K}_I , a saber,

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & -\Delta u & -\Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u & -\Delta v & \Delta u & \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

resultando então na expressão (3.14b).

Para a obtenção da matriz de ordem superior \mathbf{K}_2 , deve-se tomar inicialmente (3.14c) resolvendo-se a integral $\int_{t_V} d^t V$, ou seja,

$$\int_{t_V} E e_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \int_{t_V} E \frac{\Delta u}{L} \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) \right] d^t V, \quad (3.33)$$

o que resultará em

$$\int_{t_V} E e_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \frac{E(AL)}{L^3} \Delta u [\Delta u \delta(\Delta u) + \Delta v \delta(\Delta v)]. \quad (3.34)$$

Dividindo-se e multiplicando-se por 2 a última igualdade e reorganizando-se os vetores, a expressão anterior apresentar-se-á como sendo

$$\int_{t_V} E e_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \frac{EA}{2L^2} [2\Delta u \Delta u \delta(\Delta u) + 2\Delta u \Delta v \delta(\Delta v)], \quad (3.35)$$

cujas organização final será

$$\int_{t_V} E e_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \frac{EA}{2L^2} \left[\underbrace{2\Delta u \Delta u \delta(\Delta u)}_{1^\circ \text{ Termo}} + \underbrace{\Delta v \Delta u \delta(\Delta v)}_{2^\circ \text{ Termo}} + \underbrace{\Delta u \Delta v \delta(\Delta v)}_{3^\circ \text{ Termo}} \right]. \quad (3.36)$$

Resolvendo-se separadamente cada um dos 3 termos da equação (3.36) e utilizando-se de (3.15), chega-se a:

- 1º Termo:

$$2\Delta u \Delta u \delta(\Delta u) = 2 \left\{ \mathbf{d} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{d} \right\} \delta \{ [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{d} \}. \quad (3.37)$$

Reorganizando-se (3.37) e efetuando-se as multiplicações matriciais na mesma equação, lembrando-se ainda que $\Delta u = u_b - u_a$, ter-se-á

$$2\Delta u \Delta u \delta(\Delta u) = 2\delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u_a - u_b \ 0 \ u_b - u_a \ 0] \mathbf{d}, \quad (3.38)$$

o que resultará em

$$2\Delta u \Delta u \delta(\Delta u) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & -2\Delta u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\Delta u & 0 & 2\Delta u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.39)$$

- 2º Termo:

$$\Delta v \Delta u \delta(\Delta v) = \left\{ \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{d} \right\} \delta \left\{ [0 \ -1 \ 0 \ 1] \mathbf{d} \right\}. \quad (3.40)$$

Reorganizando-se (3.40), efetuando-se as multiplicações matriciais na equação anterior e tendo-se em vista que $\Delta v = v_b - v_a$, obter-se-á

$$\Delta v \Delta u \delta(\Delta v) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a - v_b & 0 & v_b - v_a & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.41)$$

cujo produto matricial resultará em

$$\Delta v \Delta u \delta(\Delta v) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta v & 0 & -\Delta v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta v & 0 & \Delta v & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.42)$$

• 3º Termo:

$$\Delta u \Delta v \delta(\Delta v) = \left\{ \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\} \delta \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\}. \quad (3.43)$$

Reorganizando-se (3.43), efetuando-se as multiplicações matriciais na equação anterior e lembrando-se ainda que $\Delta u = u_b - u_a$, ter-se-á

$$\Delta u \Delta v \delta(\Delta v) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta u & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.44)$$

o que resultará em

$$\Delta v \Delta u \delta(\Delta v) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta u & 0 & -\Delta u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta u & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.45)$$

Fazendo-se agora a soma entre os 3 termos que compõem a equação (3.36), ou seja, somando-se (3.39), (3.42) e (3.45), a seguinte expressão será obtida:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{V}} E e_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V &= \frac{EA}{2L^2} \delta \mathbf{d}^T \left\{ \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & -2\Delta u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\Delta u & 0 & 2\Delta u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta v & 0 & -\Delta v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta v & 0 & \Delta v & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta u & 0 & -\Delta u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta u & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \right\} \mathbf{d}, \quad (3.46) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbf{V}} E e_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \delta \mathbf{d}^T \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & -2\Delta u & 0 \\ \Delta v & \Delta u & -\Delta v & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 2\Delta u & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & \Delta v & \Delta u \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.47)$$

de onde pode-se deduzir a matriz de ordem superior \mathbf{K}_2 , a saber,

$$\mathbf{K}_2 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & -2\Delta u & 0 \\ \Delta v & \Delta u & -\Delta v & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 2\Delta u & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & \Delta v & \Delta u \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

alcançando-se assim a expressão descrita em (3.14c).

Para a obtenção da matriz de ordem superior \mathbf{K}_3 , deve-se tomar inicialmente (3.14d) resolvendo-se a integral $\int_V d^t V$, ou seja,

$$\int_V E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \frac{E(AL)}{2L^4} (\Delta u^2 + \Delta v^2) [\Delta u \delta(\Delta u) + \Delta v \delta(\Delta v)]. \quad (3.49)$$

Dividindo-se e multiplicando-se por 3 a última igualdade e reorganizando-se os vetores, ter-se-á

$$\begin{aligned} \int_V E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \frac{1}{3} \frac{EA}{2L^3} 3 \left\{ \underbrace{\Delta u^2 [\Delta u \delta(\Delta u)]}_{1^\circ \text{ Termo}} + \underbrace{\Delta u^2 \Delta v \delta(\Delta v)}_{2^\circ \text{ Termo}} + \underbrace{\Delta v^2 [\Delta u \delta(\Delta u)]}_{3^\circ \text{ Termo}} \right. \\ \left. + \underbrace{\Delta v^2 \Delta v \delta(\Delta v)}_{4^\circ \text{ Termo}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Resolvendo-se separadamente cada um dos 4 termos presentes na equação (3.50), chega-se a:

- 1º Termo:

$$3 \Delta u^2 [\Delta u \delta(\Delta u)] = 3 \Delta u^2 \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\} \delta \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\}. \quad (3.51)$$

Reorganizando-se (3.51) e efetuando-se as multiplicações matriciais da equação anterior, a seguinte expressão será gerada:

$$3 \Delta u^2 [\Delta u \delta(\Delta u)] = 3 \Delta u^2 \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.52)$$

cujo resultado final será

$$3 \Delta u^2 [\Delta u \delta(\Delta u)] = \delta \mathbf{d}^T 3 \Delta u^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 3 \Delta u^2 & 0 & -3 \Delta u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 \Delta u^2 & 0 & 3 \Delta u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.53)$$

• 2º Termo:

Através de uma reorganização matricial, a forma geral para o 2º termo da expressão (3.50) será dada por

$$3 \Delta u^2 \Delta v \delta(\Delta v) = 2 \Delta u^2 \Delta v \delta(\Delta v) + \Delta u^2 \Delta v \delta(\Delta v) = \underbrace{2 \Delta u \Delta v \Delta u \delta(\Delta v)}_{(1)} + \underbrace{\Delta u^2 \Delta v \delta(\Delta v)}_{(2)}. \quad (3.54)$$

Resolvendo-se separadamente o somatório anterior, tem-se:

$$(1) - 2 \Delta u \Delta v \Delta u \delta(\Delta v) = 2 \Delta u \Delta v \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\} \delta \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\}, \quad (3.55)$$

que, após o adequado reagrupamento de seus termos e a efetuação da multiplicação matricial, transformar-se-á em

$$2 \Delta u \Delta v \Delta u \delta(\Delta v) = 2 \Delta u \Delta v \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T 2 \Delta u \Delta v \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.56)$$

cujo resultado final leva a

$$2 \Delta u \Delta v \Delta u \delta(\Delta v) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \Delta u \Delta v & 0 & -2 \Delta u \Delta v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \Delta u \Delta v & 0 & 2 \Delta u \Delta v & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.57)$$

Para o termo (2) do somatório apresentado em (3.54), o procedimento de cálculo será o mesmo, ou seja,

$$(2) - \Delta u^2 \Delta v \delta(\Delta v) = \Delta u^2 \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta u^2 & 0 & -\Delta u^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta u^2 & 0 & \Delta u^2 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.58)$$

onde o produto $\Delta v \delta(\Delta v)$ foi descrito em deduções anteriores.

Portanto, o resultado final de (3.54) será dado pela soma da expressão (3.57) com a expressão (3.58), ou seja,

$$3 \Delta u^2 \Delta v \delta(\Delta v) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \Delta u \Delta v & 0 & -2 \Delta u \Delta v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \Delta u \Delta v & 0 & 2 \Delta u \Delta v & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} + \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta u^2 & 0 & -\Delta u^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta u^2 & 0 & \Delta u^2 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.59)$$

cujo resultado final vale

$$3 \Delta u^2 \Delta v \delta(\Delta v) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \Delta u \Delta v & \Delta u^2 & -2 \Delta u \Delta v & -\Delta u^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \Delta u \Delta v & -\Delta u^2 & 2 \Delta u \Delta v & \Delta u^2 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.60)$$

- 3º Termo:

Através de um adequado rearranjo matricial, a organização geral para o 3º termo da expressão (3.50) será dada por

$$3\Delta v^2 \Delta u \delta(\Delta u) = 2\Delta v^2 \Delta u \delta(\Delta u) + \Delta v^2 \Delta u \delta(\Delta u) = \underbrace{2\Delta u \Delta v \Delta v \delta(\Delta u)}_{(1)} + \underbrace{\Delta v^2 \Delta u \delta(\Delta u)}_{(2)}. \quad (3.61)$$

Deve-se agora resolver o somatório anterior separadamente. Portanto, começando pelo primeiro termo, tem-se:

$$(1) - 2 \Delta u \Delta v [\Delta v \delta(\Delta u)] = 2 \Delta u \Delta v \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\} \delta \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\}, \quad (3.62)$$

cuja expressão final, após o reagrupamento dos termos e a efetuação da multiplicação matricial, será

$$2 \Delta u \Delta v [\Delta v \delta(\Delta u)] = \delta \mathbf{d}^T 2 \Delta u \Delta v \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.63)$$

ou ainda,

$$2 \Delta u \Delta v [\Delta v \delta(\Delta u)] = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 2 \Delta u \Delta v & 0 & -2 \Delta u \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \Delta u \Delta v & 0 & 2 \Delta u \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.64)$$

$$(2) - \Delta v^2 \Delta u \delta(\Delta u) = \Delta v^2 \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} \Delta v^2 & 0 & -\Delta v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta v^2 & 0 & \Delta v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.65)$$

onde o produto $\Delta u \delta(\Delta u)$ foi descrito em deduções anteriores.

Portanto, o resultado final de (3.61) será dado pela soma da expressão (3.64) com a expressão (3.65), ou seja,

$$3 \Delta v^2 \Delta u \delta(\Delta u) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 2 \Delta u \Delta v & 0 & -2 \Delta u \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \Delta u \Delta v & 0 & 2 \Delta u \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} + \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} \Delta v^2 & 0 & -\Delta v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta v^2 & 0 & \Delta v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}, \quad (3.66)$$

cujo somatório vale

$$3 \Delta v^2 \Delta u \delta(\Delta u) = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} \Delta v^2 & 2 \Delta u \Delta v & -\Delta v^2 & -2 \Delta u \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta v^2 & -2 \Delta u \Delta v & \Delta v^2 & 2 \Delta u \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.67)$$

• 4º Termo:

$$3 \Delta v^2 [\Delta v \delta(\Delta v)] = 3 \Delta v^2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\} \delta \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} \right\}. \quad (3.68)$$

Reorganizando-se (3.68) e efetuando-se as multiplicações matriciais da equação anterior, encontrar-se-á

$$3 \Delta v^2 [\Delta v \delta(\Delta v)] = 3 \Delta v^2 \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \Delta v^2 & 0 & -3 \Delta v^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \Delta v^2 & 0 & 3 \Delta v^2 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (3.69)$$

Fazendo-se agora a soma entre os 4 termos que compõem a equação (3.50), ou seja, somando-se (3.53), (3.60), (3.67) e (3.69), o seguinte resultado será formado:

$$\begin{aligned}
\int_{t_V} E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \frac{EA}{6L^3} \delta \mathbf{d}^T & \left\{ \begin{bmatrix} 3 \Delta u^2 & 0 & -3 \Delta u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 \Delta u^2 & 0 & 3 \Delta u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \Delta u \Delta v & \Delta u^2 & -2 \Delta u \Delta v & -\Delta u^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \Delta u \Delta v & -\Delta u^2 & 2 \Delta u \Delta v & \Delta u^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta v^2 & 2 \Delta u \Delta v & -\Delta v^2 & -2 \Delta u \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta v^2 & -2 \Delta u \Delta v & \Delta v^2 & 2 \Delta u \Delta v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \Delta v^2 & 0 & -3 \Delta v^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \Delta v^2 & 0 & 3 \Delta v^2 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{d}, \quad (3.70)
\end{aligned}$$

cuja expressão final será igual a

$$\begin{aligned}
\int_{t_V} E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \\
\delta \mathbf{d}^T \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} 3 \Delta u^2 + \Delta v^2 & 2 \Delta u \Delta v & -3 \Delta u^2 - \Delta v^2 & -2 \Delta u \Delta v \\ 2 \Delta u \Delta v & 3 \Delta v^2 + \Delta u^2 & -2 \Delta u \Delta v & -3 \Delta v^2 - \Delta u^2 \\ -3 \Delta u^2 - \Delta v^2 & -2 \Delta u \Delta v & 3 \Delta u^2 + \Delta v^2 & 2 \Delta u \Delta v \\ -2 \Delta u \Delta v & -3 \Delta v^2 - \Delta u^2 & 2 \Delta u \Delta v & 3 \Delta v^2 + \Delta u^2 \end{bmatrix} \mathbf{d} \quad (3.71)
\end{aligned}$$

De (3.71), advém a matriz de ordem superior \mathbf{K}_3 , a saber,

$$\mathbf{K}_3 = \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} 3 \Delta u^2 + \Delta v^2 & 2 \Delta u \Delta v & -3 \Delta u^2 - \Delta v^2 & -2 \Delta u \Delta v \\ 2 \Delta u \Delta v & 3 \Delta v^2 + \Delta u^2 & -2 \Delta u \Delta v & -3 \Delta v^2 - \Delta u^2 \\ -3 \Delta u^2 - \Delta v^2 & -2 \Delta u \Delta v & 3 \Delta u^2 + \Delta v^2 & 2 \Delta u \Delta v \\ -2 \Delta u \Delta v & -3 \Delta v^2 - \Delta u^2 & 2 \Delta u \Delta v & 3 \Delta v^2 + \Delta u^2 \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

o que resulta na expressão (3.14d)

O uso de três matrizes distintas \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 e \mathbf{K}_3 , em adição às matrizes \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_g , torna possível analisar o alongamento e características de corpo rígido de elementos de

treliça. Fazendo-se uso das expressões (3.14a) a (3.14e) e admitindo-se a natureza arbitrária dos deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{d}$, pode-se derivar, a partir de (3.6), a equação de rigidez incremental para o elemento bidimensional de treliça como sendo

$$(\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3)\mathbf{d} + {}^t\mathbf{F} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}, \quad (3.73)$$

onde o termo ${}^t\mathbf{F}$ no lado esquerdo da equação representa, na metodologia de análise não-linear, as forças iniciais atuando no elemento na configuração de equilíbrio t ; o termo ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ no lado direito da mesma equação representa as forças totais atuando no elemento na iteração corrente, enquanto os termos restantes no lado esquerdo denotam as forças incrementais geradas pela resistência do elemento contra os incrementos de forças externas, isto é, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{F}$.

3.2.1 Generalização para o caso tridimensional

Os procedimentos apresentados na seção anterior restringiram-se ao caso do elemento de treliça plana. Esses procedimentos podem ser facilmente estendidos ao caso tridimensional se for necessário considerar a contribuição de uma terceira dimensão.

Primeiramente, para o elemento tridimensional de treliça mostrado na figura (3.3), os deslocamentos (u, v, w) de uma seção transversal genérica x podem ser relacionados aos deslocamentos (u_a, v_a, w_a) e (u_b, v_b, w_b) das duas extremidades do elemento através de funções de interpolação linear, a saber,

$$u = u_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_b \left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.74a)$$

$$v = v_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + v_b \left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.74b)$$

$$w = w_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + w_b \left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.74c)$$

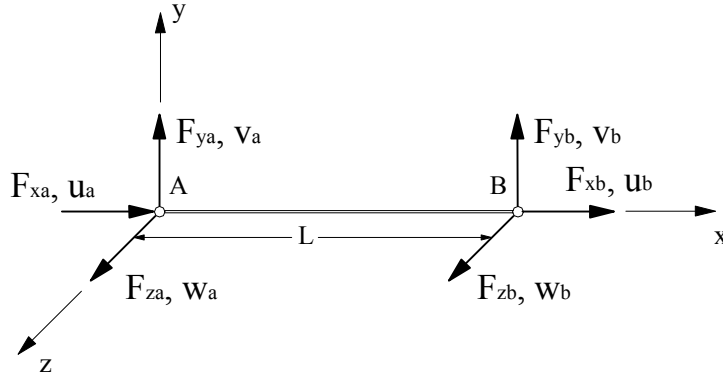


Figura 3.3 – Graus de liberdade para um elemento 3D de treliça.

Segundo Yang e Kuo (1994), as componentes linear e não-linear da deformação axial ϵ_{xx} , isto é, e_{xx} e η_{xx} , respectivamente, podem ser escritas agora da seguinte forma:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta u}{L}, \quad (3.75a)$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right), \quad (3.75b)$$

onde

$$\Delta u = u_b - u_a, \quad \Delta v = v_b - v_a \quad \text{e} \quad \Delta w = w_b - w_a. \quad (3.76)$$

Para o elemento espacial de treliça mostrado na figura (3.3), o vetor de deslocamentos nodais consiste de três graus translacionais de liberdade em cada nó (ou extremidade), isto é,

$$\mathbf{d}^T = \{u_a \quad v_a \quad w_a \quad u_b \quad v_b \quad w_b\}. \quad (3.77)$$

Correspondentemente, o vetor de forças internas nas configurações t e $t + \Delta t$ consistirão de três forças em cada um dos extremos da barra, isto é,

$${}^t\mathbf{F}^T = \left\{ {}^tF_{xa} \quad {}^tF_{ya} \quad {}^tF_{za} \quad {}^tF_{xb} \quad {}^tF_{yb} \quad {}^tF_{zb} \right\}, \quad (3.78a)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^T = \left\{ {}^{t+\Delta t}F_{xa} \quad {}^{t+\Delta t}F_{ya} \quad {}^{t+\Delta t}F_{za} \quad {}^{t+\Delta t}F_{xb} \quad {}^{t+\Delta t}F_{yb} \quad {}^{t+\Delta t}F_{zb} \right\}. \quad (3.78b)$$

Para um elemento de treliça em equilíbrio na configuração t , todas as forças cisalhantes desaparecem, isto é, ${}^tF_{ya} = {}^tF_{za} = {}^tF_{yb} = {}^tF_{zb} = 0$, sendo que as forças axiais nas extremidades da barra são iguais em magnitude mas opostas em sinal, o que leva a ${}^tF_{xb} = -{}^tF_{xa}$.

Para o atual caso tridimensional, cada um dos termos da equação (3.6) pode ser derivado da forma a seguir:

$$\int_{{}^tV} E e_{xx} \delta e_{xx} d^tV = \int_{{}^tV} E \frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) d^tV = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}, \quad (3.79a)$$

$$\int_{{}^tV} E \eta_{xx} \delta e_{xx} d^tV = \int_{{}^tV} \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) d^tV = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{d}, \quad (3.79b)$$

$$\int_{{}^tV} E e_{xx} \delta \eta_{xx} d^tV = \int_{{}^tV} E \frac{\Delta u}{L} \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left(\frac{\Delta w}{L} \right) \right] d^tV = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{d}, \quad (3.79c)$$

$$\begin{aligned} \int_{{}^tV} E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} d^tV &= \int_{{}^tV} \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left(\frac{\Delta w}{L} \right) \right] d^tV \\ &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_3 \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (3.79d)$$

$$\int_{{}^tV} {}^t\tau_{xx} \delta \eta_{xx} d^tV = \int_0^L {}^tF_x \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left(\frac{\Delta w}{L} \right) \right] dx = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_g \mathbf{d}, \quad (3.79e)$$

$${}^tR = \int_{{}^tS} t_i \delta u_i d^tS = (\delta \mathbf{d}^T) ({}^t\mathbf{F}), \quad (3.79f)$$

onde as matrizes \mathbf{K}_e , \mathbf{K}_g , \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 e \mathbf{K}_3 são conhecidas por ter dimensão de 6 x 6 para o elemento de treliça espacial. Cada uma dessas matrizes de rigidez pode ser obtida de modo análogo às do caso bidimensional. A matriz de rigidez elástica \mathbf{K}_e tem a forma

$$\mathbf{K}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

enquanto a matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g possui a forma

$$\mathbf{K}_g = \frac{{}^tF_{xb}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Já as matrizes de ordem superior \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 e \mathbf{K}_3 se apresentam da seguinte maneira:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w & -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w & \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.82)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & 0 & -2\Delta u & 0 & 0 \\ \Delta v & \Delta u & 0 & -\Delta v & -\Delta u & 0 \\ \Delta w & 0 & \Delta u & -\Delta w & 0 & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 0 & 2\Delta u & 0 & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & 0 & \Delta v & \Delta u & 0 \\ -\Delta w & 0 & -\Delta u & \Delta w & 0 & \Delta u \end{bmatrix}; \quad (3.83)$$

$$\mathbf{K}_3 = \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} [h] & -[h] \\ -[h] & [h] \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

onde

$$[h] = \begin{bmatrix} 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta u\Delta v & 2\Delta u\Delta w \\ 2\Delta u\Delta v & 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta v\Delta w \\ 2\Delta u\Delta w & 2\Delta v\Delta w & 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Novamente, fazendo uso das expressões (3.79a) a (3.79f) e admitindo a natureza arbitrária dos deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{d}$, é possível derivar, a partir da equação (3.6), a equação incremental de equilíbrio para o elemento espacial de treliça, que possui forma idêntica àquela apresentada em (3.73) para o caso bidimensional.

3.3 – FORMULAÇÃO PROPOSTA POR CRISFIELD (1991)

Os desenvolvimentos apresentados na seção (3.2) foram baseados nas equações de deformação-deslocamento de Green-Lagrange. Já Crisfield (1991), em seus trabalhos, obtém as equações para o elemento não-linear de treliça utilizando vários tipos de tensores de deformações. Esse procedimento é justificado não devido à importância intrínseca do elemento de treliça, mas porque introduz de uma forma simples alguns dos conceitos que o autor utiliza no estudo, por exemplo, de meios contínuos, vigas e cascas. Os tensores de deformação utilizados por Crisfield (1991) para a obtenção de formulações não-lineares de elementos de treliça foram: a) Green-Lagrange (ou simplesmente Green), b) de Engenharia, c) Logarítmico, d) Logarítmico com mudança de volume. O presente estudo se aterá às formulações baseadas nos dois primeiros, que serão discutidos com detalhes nesta seção. Antes, porém, será reapresentado o Princípio dos Trabalhos Virtuais, para que se possa, a partir do mesmo, obter as formulações propostas pelo autor.

3.3.1 – A utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais, apresentado no início da seção (3.2), será novamente utilizado para se obter a formulação proposta por Crisfield (1991). Partindo-se da condição de equilíbrio que estabelece a representação de que o trabalho realizado pelas forças externas deve ser igual ao trabalho realizado pelas forças internas, pode-se rescrever a equação (3.2) sob a forma

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}}, \quad (3.86)$$

em que W_{int} representa o trabalho total realizado pelas forças internas de uma partícula e W_{ext} o trabalho total realizado pelas forças externas. Claramente, para que a equação anterior seja válida, chegando-se assim à equação (3.2), o valor de W deve ser igual a zero.

Logo, para um elemento de treliça sujeito a deslocamentos nodais \mathbf{d} , onde

$$\mathbf{d}^T = \{u_a \quad v_a \quad u_b \quad v_b\}, \quad (3.87)$$

pode-se rescrever (3.86), já substituindo as expressões de W_{int} e W_{ext} e levando-se em consideração a utilização de uma formulação Lagrangeana total, em que o sistema de referência é o inicial, da seguinte forma:

$$W = \int_{^0V} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} d^0V - \mathbf{R}^T \delta \mathbf{d}, \quad (3.88)$$

onde \mathbf{R} representa as forças externas atuando no elemento. O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que W seja zero para qualquer deslocamento virtual $\delta \mathbf{d}_v$, onde o subscrito ‘v’ significa ‘virtual’. Pode-se então rescrever a equação anterior sob a forma

$$W = \int_{^0V} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_v d^0V - \mathbf{R}^T \delta \mathbf{d}_v = (\mathbf{F}_i - \mathbf{R})^T \delta \mathbf{d}_v = \mathbf{g}^T \delta \mathbf{d}_v, \quad (3.89)$$

onde \mathbf{F}_i é o vetor de forças internas. Nitidamente, a matriz de rigidez tangente \mathbf{K} pode ser obtida a partir da última equação através da diferenciação de \mathbf{g} , ou seja,

$$\delta W = \delta \mathbf{d}_v^T \delta \mathbf{g} = \delta \mathbf{d}_v^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}_v^T \mathbf{K} \delta \mathbf{d}, \quad (3.90)$$

de onde se conclui que

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}}. \quad (3.91)$$

A seguir, será apresentada a formulação para um elemento de treliça utilizando-se as expressões e os conceitos definidos de (3.86) a (3.91) considerando dois tipos de tensores de deformações: primeiramente o de Green e, posteriormente, o de Engenharia.

3.3.2 – Formulação utilizando o tensor de deformações de Green

Seja um elemento de treliça $P_0 Q_0$ em sua configuração inicial e o ponto A_0 localizado entre P_0 e Q_0 , como mostra a figura (3.4). Com a deformação do elemento, o ponto A_0 e o ponto adjacente B_0 movem-se para A_n e B_n , respectivamente. Ao longo deste processo, o vetor de posição \mathbf{r}_0 do ponto A_0 torna-se o vetor de posição \mathbf{r}_n de A_n , onde

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}, \quad (3.92)$$

sendo que

$$\mathbf{r}^T = \{x \quad y\} \text{ e } \mathbf{u}^T = \{u \quad v\}. \quad (3.93)$$

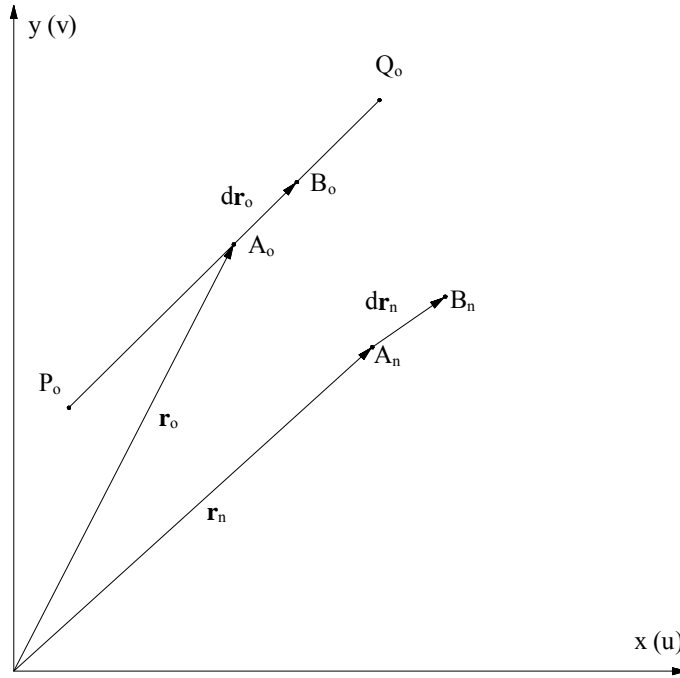


Figura 3.4 – Deformação de um elemento geral de treliça.

O vetor de coordenadas nodais equivalentes poderá ser escrito através da expressão

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_o + \mathbf{d} = \mathbf{p} + \mathbf{d} , \quad (3.94)$$

onde as coordenadas iniciais $\mathbf{p} = \mathbf{p}_o$ e o vetor de coordenadas nodais na nova configuração de equilíbrio \mathbf{p}_n valem

$$\mathbf{p}^T = \{x_a \quad y_a \quad x_b \quad y_b\} , \quad (3.95a)$$

$$\mathbf{p}_n^T = \{x_a + u_a \quad y_a + v_a \quad x_b + u_b \quad y_b + v_b\} , \quad (3.95a)$$

sendo o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{d} o mesmo descrito pela equação (3.87).

Utilizando-se o Teorema de Pitágoras, o comprimento original do elemento valerá

$$L_o^2 = 4\alpha_o^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \mathbf{x}_{ba}^T \mathbf{x}_{ba} , \quad (3.96)$$

onde

$$\mathbf{x}_{ba}^T = \{\Delta x \quad \Delta y\}, \quad (3.97)$$

sendo

$$\Delta x = x_b - x_a \text{ e } \Delta y = y_b - y_a. \quad (3.98)$$

Em (3.96) foi introduzido o parâmetro de comprimento original α_o , que vale metade do comprimento original L_o . Para o novo comprimento L_n , a equação equivalente a (3.96) será

$$L_n^2 = 4\alpha_o^2 = (\Delta x + \Delta u)^2 + (\Delta y + \Delta v)^2 = (\mathbf{x}_{ba} + \mathbf{d}_{ba})^T (\mathbf{x}_{ba} + \mathbf{d}_{ba}), \quad (3.99)$$

onde, tal qual (3.97) e (3.98), escreve-se

$$\mathbf{d}_{ba}^T = \{\Delta u \quad \Delta v\}, \quad (3.100)$$

$$\Delta u = u_b - u_a \text{ e } \Delta v = v_b - v_a. \quad (3.101)$$

Substituindo-se esses valores no tensor de Green, que, por definição, vale

$$\epsilon = \frac{L_n^2 - L_o^2}{2L_o^2}, \quad (3.102)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{(\mathbf{x}_{ba} + \mathbf{d}_{ba})^T (\mathbf{x}_{ba} + \mathbf{d}_{ba}) - \mathbf{x}_{ba}^T \mathbf{x}_{ba}}{2L_o^2} = \frac{\mathbf{x}_{ba}^T \mathbf{x}_{ba} + 2\mathbf{x}_{ba}^T \mathbf{d}_{ba} + \mathbf{d}_{ba}^T \mathbf{d}_{ba} - \mathbf{x}_{ba}^T \mathbf{x}_{ba}}{2L_o^2} \therefore \\ \epsilon &= \frac{2\mathbf{x}_{ba}^T \mathbf{d}_{ba} + \mathbf{d}_{ba}^T \mathbf{d}_{ba}}{2L_o^2} = \frac{1}{2(2\alpha_o)^2} (2\mathbf{x}_{ba}^T \mathbf{d}_{ba} + \mathbf{d}_{ba}^T \mathbf{d}_{ba}) = \frac{1}{4\alpha_o^2} \left(\mathbf{x}_{ba}^T \mathbf{d}_{ba} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{ba}^T \mathbf{d}_{ba} \right), \end{aligned} \quad (3.103)$$

ou ainda,

$$\varepsilon = \mathbf{b}_1^T \mathbf{d} + \frac{1}{2\alpha_o^2} \mathbf{d}^T \mathbf{A} \mathbf{d}, \quad (3.104)$$

onde, fazendo-se a utilização de (3.95), chega-se a

$$\mathbf{b}_1^T = \frac{1}{4\alpha_o^2} \{-\Delta x \quad -\Delta y \quad \Delta x \quad \Delta y\} = \frac{1}{\alpha_o^2} \mathbf{A} \mathbf{p}^T = \frac{1}{4\alpha_o^2} \mathbf{c}^T(\mathbf{p}), \quad (3.105)$$

sendo \mathbf{A} uma matriz cujos coeficientes valem

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

Utilizando-se agora o Tensor de Green em sua forma incremental (causada por um incremento de deslocamento $\Delta \mathbf{d}$) e seguindo-se o mesmo procedimento de (3.103) a (3.106), obter-se-á a expressão

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{4\alpha_o^2} \left(\mathbf{x}_{ba}^T \Delta \mathbf{d}_{ba} + \mathbf{d}_{ba}^T \Delta \mathbf{d}_{ba} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}_{ba}^T \Delta \mathbf{d}_{ba} \right), \quad (3.107)$$

ou, de acordo com (3.103) e (3.104),

$$\Delta \varepsilon = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2(\mathbf{d}))^T \Delta \mathbf{d} + \frac{1}{2\alpha_o^2} \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{b}(\mathbf{d})^T \Delta \mathbf{d} + \frac{1}{2\alpha_o^2} \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{d}, \quad (3.108)$$

onde

$$\mathbf{b}_2^T(\mathbf{d}) = \frac{1}{4\alpha_o^2} (-\Delta u \quad -\Delta v \quad \Delta u \quad \Delta v) = \frac{1}{\alpha_o^2} \mathbf{A} \mathbf{d}^T = \frac{1}{4\alpha_o^2} \mathbf{c}(\mathbf{d})^T. \quad (3.109)$$

Comparando a equação (3.108) com uma expansão em série de Taylor para $\Delta \varepsilon$, ou seja,

$$\Delta \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{d} \partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{b}(\mathbf{d})^T \Delta \mathbf{d} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d}, \quad (3.110)$$

pode-se observar que $(1/\alpha_o)\mathbf{A}$ é a segunda derivada parcial de ε com respeito aos deslocamentos \mathbf{d} , ou a primeira derivada parcial de \mathbf{b} com respeito a \mathbf{d} . Para um pequeno deslocamento virtual, com $\delta \mathbf{d}_v$ ao invés de $\Delta \mathbf{d}$, o último termo em (3.110) torna-se negligenciável e ter-se-á então

$$\delta \varepsilon_v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d}_v = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2(\mathbf{d}))^T \delta \mathbf{d}_v = \mathbf{b}(\mathbf{d})^T \delta \mathbf{d}_v. \quad (3.111)$$

3.3.2.1 – Vetor de forças internas

O Princípio dos Trabalhos Virtuais pode agora ser utilizado para se encontrar o vetor de forças internas. Daí, ter-se-á

$$\sum_e \delta \mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_i = \sum_e \int_{V_0} \sigma_G \delta \varepsilon_v d^0 V = \sum_e \delta \mathbf{p}_v^T \int_{V_0} \sigma_G \mathbf{b} d^0 V \quad (3.112)$$

onde o termo \sum_e envolve um somatório sobre o número de elementos. A equação (3.112) deve se manter válida para um valor arbitrário de $\delta \mathbf{p}_v$. Logo, utilizando-se as equações (3.105), (3.109) e (3.112), chega-se ao vetor de forças internas para um elemento, definido como

$$\mathbf{F}_i = \int_{V_0} \sigma_G \mathbf{b} d^0 V = L_o A_o \sigma_G \mathbf{b} = 2\alpha_o A_o \sigma_G (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2(\mathbf{d})) = \frac{\sigma_G A_o}{2\alpha_o} (\mathbf{c}(\mathbf{p}) + \mathbf{c}(\mathbf{d})) \therefore$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{q}_{i1} + \mathbf{q}_{i2}, \quad (3.113a)$$

cujo somatório matricial resultará em

$$\mathbf{F}_i = \frac{\sigma_G A_o}{L_o} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_a \\ y_a \\ x_b \\ y_b \end{Bmatrix} + \frac{\sigma_G A_o}{L_o} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{Bmatrix} \therefore$$

$$\mathbf{F}_i = \frac{\sigma_G A_o}{L_o} \begin{Bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \end{Bmatrix}. \quad (3.113b)$$

A equação (3.113b) fornece, portanto, o vetor de forças internas para um elemento plano de treliça a partir da utilização do tensor de deformações de Green.

3.3.2.2 – Matriz de rigidez

De acordo com a equação (3.91), a matriz de rigidez \mathbf{K} é obtida pela expressão

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{d}} = 2\alpha_o A_o \mathbf{b} \frac{\partial \sigma_G}{\partial \mathbf{d}} + 2\alpha_o A_o \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{d}} \sigma_G = \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_{t\sigma}. \quad (3.114)$$

Utilizando-se a equação (3.114) e a forma não-virtual de (3.111), chega-se a

$$\frac{\partial \sigma_G}{\partial \mathbf{d}} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{d}} = E \{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2(\mathbf{d})\}^T = E \mathbf{b}(\mathbf{d})^T. \quad (3.115)$$

A partir das duas últimas equações, o termo \mathbf{K}_t de (3.114) pode ser rescrito como sendo

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_t &= 2\alpha_o A_o \mathbf{b} \frac{\partial \sigma_G}{\partial \mathbf{d}} = 2E\alpha_o A_o \mathbf{b} \mathbf{b}^T = 2E\alpha_o A_o (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)^T \therefore \\ \mathbf{K}_t &= 2E\alpha_o A_o (\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^T + \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1^T + \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^T) = \mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{t2},\end{aligned}\quad (3.116)$$

onde

$$\mathbf{K}_{t1} = 2E\alpha_o A_o \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T = 2E\alpha_o A_o \left(\frac{1}{4\alpha_o^2} \mathbf{c}(\mathbf{p}) \right) \left(\frac{1}{4\alpha_o^2} \mathbf{c}(\mathbf{p})^T \right) = \frac{EA_o}{8\alpha_o^3} \mathbf{c}(\mathbf{p}) \mathbf{c}(\mathbf{p})^T, \quad (3.117a)$$

$$\mathbf{K}_{t2} = 2E\alpha_o A_o (\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^T + \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1^T + \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^T) = \mathbf{K}_{t2a} + \mathbf{K}_{t2a}^T + \mathbf{K}_{t2b}. \quad (3.117b)$$

A equação (3.117a) fornece a matriz de rigidez elástica linear padrão, enquanto a equação (3.117b) fornece a matriz de rigidez de ‘deslocamentos iniciais’. A matriz de rigidez geométrica (ou de tensões iniciais) é oriunda do termo $\mathbf{K}_{t\sigma}$ da equação (3.114). Observando-se os vetores constituintes de \mathbf{b} , verifica-se que apenas \mathbf{b}_2 é função de \mathbf{d} e, assim, a partir das expressões (3.109) e (3.114), pode-se concluir que

$$\mathbf{K}_{t\sigma} = 2\alpha_o A_o \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{d}} \sigma_G = 2\alpha_o A_o \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \mathbf{d}} \sigma_G = 2\alpha_o A_o \sigma_G \left(\frac{1}{\alpha_o^2} \mathbf{A} \right) = \frac{2A_o \sigma_G}{\alpha_o} \mathbf{A}. \quad (3.118)$$

Os valores das componentes de \mathbf{K}_{t1} , \mathbf{K}_{t2a} , \mathbf{K}_{t2b} e $\mathbf{K}_{t\sigma}$ podem ser expandidos de modo que as seguintes matrizes serão encontradas para um elemento plano de treliça:

$$\mathbf{K}_{t1} = \frac{EA}{8\alpha_o^3} \begin{bmatrix} \Delta x^2 & \Delta x \Delta y & -\Delta x^2 & -\Delta x \Delta y \\ \Delta y \Delta x & \Delta y^2 & -\Delta y \Delta x & -\Delta y^2 \\ -\Delta x^2 & -\Delta x \Delta y & \Delta x^2 & \Delta x \Delta y \\ -\Delta y \Delta x & -\Delta y^2 & \Delta y \Delta x & \Delta y^2 \end{bmatrix}, \quad (3.119)$$

$$\mathbf{K}_{t2a} = \frac{EA}{8\alpha_o^3} \begin{bmatrix} \Delta x \Delta u & \Delta x \Delta v & -\Delta x \Delta u & -\Delta x \Delta v \\ \Delta y \Delta u & \Delta y \Delta v & -\Delta y \Delta u & -\Delta y \Delta v \\ -\Delta x \Delta u & -\Delta x \Delta v & \Delta x \Delta u & \Delta x \Delta v \\ -\Delta y \Delta u & -\Delta y \Delta v & \Delta y \Delta u & \Delta y \Delta v \end{bmatrix}, \quad (3.120)$$

$$\mathbf{K}_{t2b} = \frac{EA}{8\alpha_o^3} \begin{bmatrix} \Delta u^2 & \Delta u \Delta v & -\Delta u^2 & -\Delta u \Delta v \\ \Delta v \Delta u & \Delta v^2 & -\Delta v \Delta u & -\Delta v^2 \\ -\Delta u^2 & -\Delta u \Delta v & \Delta u^2 & \Delta u \Delta v \\ -\Delta v \Delta u & -\Delta v^2 & \Delta v \Delta u & \Delta v^2 \end{bmatrix}, \quad (3.121)$$

$$\mathbf{K}_{t\sigma} = \frac{\sigma_G A_o}{2\alpha_o} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.122)$$

Por fim, escreve-se para a matriz de rigidez tangente a seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{t2a} + \mathbf{K}_{t2a}^T + \mathbf{K}_{t2b} + \mathbf{K}_{t\sigma}. \quad (3.123)$$

3.3.3 – Formulação alternativa utilizando o tensor de engenharia

O tensor de deformação de engenharia é obtido na direção do eixo axial da barra e é dado pela expressão

$$\varepsilon = \frac{dr_n - dr_o}{dr_o} = \frac{\alpha_n - \alpha_o}{\alpha_o}. \quad (3.124)$$

Com a utilização de (3.106), o valor de α_n da expressão (3.99) pode ser reestruturado da seguinte forma:

$$\alpha_n^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{d})^T \mathbf{A}(\mathbf{p} + \mathbf{d}) = \mathbf{p}'^T \mathbf{A} \mathbf{p}'. \quad (3.125)$$

A partir das equações (3.111), (3.124) e (3.125), obtém-se

$$\mathbf{b} = \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \mathbf{d}} = \frac{1}{\alpha_o} \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \left(\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{d})^T \mathbf{A} (\mathbf{p} + \mathbf{d})} \right) = \frac{1}{\alpha_o} \frac{2\mathbf{A}(\mathbf{p} + \mathbf{d})}{2\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{d})^T \mathbf{A} (\mathbf{p} + \mathbf{d})}}, \quad (3.126a)$$

que, tendo-se em vista (3.125), levará a

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\alpha_o} \frac{\mathbf{A}(\mathbf{p} + \mathbf{d})}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_o \alpha_n} \mathbf{A} \mathbf{p}' = \frac{1}{4\alpha_o \alpha_n} \mathbf{c}(\mathbf{p}'), \quad (3.126b)$$

onde, similarmente à equação (3.105), chega-se a

$$\mathbf{c}(\mathbf{p}') = 4\mathbf{A} \mathbf{p}'. \quad (3.127)$$

3.3.3.1 – Vetor de forças internas

Do Princípio dos Trabalhos Virtuais, tem-se para o vetor de força internas a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= \int_{\text{o}_V} \sigma \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \mathbf{d}} d^0 V = L_o A_o \sigma \mathbf{b} = 2\alpha_o A_o \sigma \left(\frac{1}{4\alpha_o \alpha_n} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \right) = \frac{\sigma A_o}{2\alpha_n} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \therefore \\ \mathbf{F}_i &= \lambda \frac{\sigma A_o}{2\alpha_o} \mathbf{c}(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (3.128)$$

onde

$$\lambda = \frac{\alpha_o}{\alpha_n}. \quad (3.129)$$

Expandindo-se matricialmente a equação (3.128), encontrar-se-á a expressão

$$\mathbf{F}_i = \frac{\lambda \sigma_G A_o}{L_o} \begin{Bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \end{Bmatrix}, \quad (3.130)$$

que é a forma do vetor de forças internas para o elemento plano de treliça obtido a partir do tensor de deformações de Engenharia e que difere apenas de um fator λ da equação (3.113b), obtida para o tensor de Green.

3.3.3.2 – Matriz de rigidez

Para se obter a matriz de rigidez tangente, deve-se diferenciar (3.128) do modo como se segue:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{d}} = \frac{A_o}{2\alpha_n} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \frac{\partial \sigma^T}{\partial \mathbf{d}} + \frac{\sigma A_o}{2\alpha_n} \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{d}} - \frac{\sigma A_o}{2\alpha_n^2} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \frac{\partial \alpha_n}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{t\sigma 1} + \mathbf{K}_{t\sigma 2}. \quad (3.131)$$

Sabendo-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{d}} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{d}} = \frac{E}{4\alpha_o \alpha_n} \mathbf{c}(\mathbf{p}')^T = E \mathbf{b}^T, \quad (3.132)$$

pode-se obter o termo \mathbf{K}_{t1} de (3.131), que valerá

$$\mathbf{K}_{t1} = \frac{EA_o}{8\alpha_n^2 \alpha_o} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \mathbf{c}(\mathbf{p}')^T = \frac{EA_o \lambda^2}{8\alpha_o^3} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \mathbf{c}(\mathbf{p}')^T, \quad (3.133a)$$

que, sob uma forma matricial, apresentar-se-á como

$$\mathbf{K}_{t1} = \frac{EA_o \lambda^2}{8\alpha_o^3} \begin{Bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta x - \Delta u & -\Delta y - \Delta v & \Delta x + \Delta u & \Delta y + \Delta v \end{Bmatrix}. \quad (3.133b)$$

Além disso, a partir de (3.127) escreve-se

$$\frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{d}} = 4\mathbf{A}, \quad (3.134)$$

cujos valor é utilizado para obtenção do termo $\mathbf{K}_{t\sigma 1}$ da equação (3.131). Logo, substituindo (3.134) em (3.131), ter-se-á

$$\mathbf{K}_{t\sigma 1} = \frac{2\sigma A_o}{\alpha_n} \mathbf{A} = \frac{2\sigma A_o \lambda}{\alpha_o} \mathbf{A}, \quad (3.135a)$$

que numa forma matricial será dada por

$$\mathbf{K}_{t\sigma 1} = \frac{\sigma A_o \lambda}{2\alpha_o} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.135b)$$

cujas expressão difere de um fator λ da matriz de tensões iniciais descrita em (3.118) e apresentada em (3.122). Finalmente, com o suporte de (3.126), pode-se obter o termo $\mathbf{K}_{t\sigma 2}$ de (3.131), expresso da forma que se segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{t\sigma 2} &= -\frac{\sigma A_o}{2\alpha_n^2} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \frac{\partial \alpha_n}{\partial \mathbf{d}} = -\frac{\sigma A_o}{2\alpha_n^2} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \frac{\mathbf{c}(\mathbf{p}')^T}{4\alpha_n} = -\frac{\sigma A_o}{8\alpha_n^3} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \mathbf{c}(\mathbf{p}')^T \therefore \\ \mathbf{K}_{t\sigma 2} &= -\frac{\sigma A_o \lambda^3}{8\alpha_o^3} \mathbf{c}(\mathbf{p}') \mathbf{c}(\mathbf{p}')^T, \end{aligned} \quad (3.136a)$$

ou ainda,

$$\mathbf{K}_{\text{t}\sigma 2} = -\frac{\sigma A_o \lambda^3}{8\alpha_o^3} \begin{bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta x - \Delta u & -\Delta y - \Delta v & \Delta x + \Delta u & \Delta y + \Delta v \end{bmatrix}. \quad (3.136b)$$

Com a obtenção de $\mathbf{K}_{\text{t}1}$, $\mathbf{K}_{\text{t}\sigma 1}$ e $\mathbf{K}_{\text{t}\sigma 2}$ a partir das equações (3.133), (3.135) e (3.136), respectivamente, pode-se encontrar a expressão final para a matriz de rigidez \mathbf{K} somando-se as três matrizes supracitadas.

3.3.4 – Elementos de treliça espacial

Os procedimentos apresentados até aqui estão relacionados com os elementos planos de treliça. No entanto, a teoria pode ser facilmente estendida para elementos espaciais de treliça. Nesta circunstância, os vetores \mathbf{r} e \mathbf{u} , descritos em (3.92) e (3.93), respectivamente, tornar-se-ão

$$\mathbf{r}^T = \{x \quad y \quad z\} \text{ e } \mathbf{u}^T = \{u \quad v \quad w\}. \quad (3.137)$$

enquanto os vetores nodais \mathbf{p} e \mathbf{d} , definidos para o caso bidimensional em (3.95) e (3.87), respectivamente, valem agora

$$\mathbf{x}^T = \{x_a \quad y_a \quad z_a \quad x_b \quad y_b \quad z_b\}, \quad \mathbf{d}^T = \{u_a \quad v_a \quad w_a \quad u_b \quad v_b \quad w_b\}. \quad (3.138)$$

Levando-se em consideração essas novas definições, grande parte da formulação apresentada na seção (3.3.2) permanece válida, com a diferença que a matriz \mathbf{A} , descrita em (3.106), tornar-se-á

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.139)$$

Para a formulação utilizando o tensor de deformações de Green, a equação (3.113), que fornece o vetor de forças internas, permanece válida, enquanto (3.118) ainda se aplica para a matriz de rigidez geométrica, devendo-se agora utilizar a matriz \mathbf{A} expressa em (3.139). Na obtenção das demais matrizes, obtidas de (3.116) e (3.117), o vetor $\mathbf{c}(\mathbf{p})$ deve ser estendido para

$$\mathbf{c}(\mathbf{p})^T = \{-\Delta x \quad -\Delta y \quad -\Delta z \quad \Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z\}. \quad (3.140)$$

Para a formulação utilizando o tensor de deformações de Engenharia, o vetor $\mathbf{c}(\mathbf{p}')$ deverá ser apresentado como

$$\mathbf{c}(\mathbf{p}')^T = \{-\Delta x - \Delta u \quad -\Delta y - \Delta v \quad -\Delta z - \Delta w \quad \Delta x + \Delta u \quad \Delta y + \Delta v \quad \Delta z + \Delta w\}, \quad (3.140)$$

onde a relação $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{d}$ permanece válida para o caso tridimensional.

3.3.4.1 – Vetor de forças internas

Para o tensor de Green, a expressão do vetor de forças internas para o elemento de treliça espacial será a mesma que aquela exibida pela equação (3.113a). Logo, com as ressalvas de (3.138) a (3.140), ter-se-á

$$\mathbf{F}_i = \frac{\sigma_G A_o}{L_o} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ u_b \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix} \right\} = \frac{\sigma_G A_o}{L_o} \begin{bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ -\Delta z - \Delta w \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \\ \Delta z + \Delta w \end{bmatrix}. \quad (3.141)$$

Já para o tensor de Engenharia, a expressão do vetor de forças internas para o elemento de treliça espacial será a mesma que aquela exibida pela equação (3.128). Portanto, com as mesmas ressalvas de (3.138) a (3.140) apresentadas anteriormente, pode-se obter

$$\mathbf{F}_i = \lambda \frac{\sigma A_o}{2\alpha_o} \mathbf{c}(\mathbf{p}') = \frac{\lambda \sigma A_o}{L_o} \begin{bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ -\Delta z - \Delta w \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \\ \Delta z + \Delta w \end{bmatrix}, \quad (3.142)$$

cuja expressão, assim como no caso bidimensional, difere apenas de um fator λ da equação (3.141b) obtida para o tensor de Green.

3.3.4.2 – Matriz de rigidez

Para o estudo de treliças tridimensionais com a utilização do tensor de Green, as expressões (3.114) a (3.118), obtidas para o caso bidimensional, permanecem válidas. As expressões das matrizes de rigidez podem ser alcançadas de modo análogo àquelas apresentadas pelas expressões (3.119) a (3.122), bastando para isso considerar a contribuição de uma terceira coordenada dimensional. Por conseguinte, as formas matriciais de \mathbf{K}_{t1} , \mathbf{K}_{t2a} , \mathbf{K}_{t2b} e $\mathbf{K}_{t\sigma}$ serão:

$$\mathbf{K}_{t1} = \frac{EA}{8\alpha_o^3} \begin{bmatrix} \Delta x^2 & \Delta x\Delta y & \Delta x\Delta z & -\Delta x^2 & -\Delta x\Delta y & -\Delta x\Delta z \\ \Delta y\Delta x & \Delta y^2 & \Delta y\Delta z & -\Delta y\Delta x & -\Delta y^2 & -\Delta y\Delta z \\ \Delta z\Delta x & \Delta z\Delta y & \Delta z^2 & -\Delta z\Delta x & -\Delta z\Delta y & -\Delta z^2 \\ -\Delta x^2 & -\Delta x\Delta y & -\Delta x\Delta z & \Delta x^2 & \Delta x\Delta y & \Delta x\Delta z \\ -\Delta y\Delta x & -\Delta y^2 & -\Delta y\Delta z & \Delta y\Delta x & \Delta y^2 & \Delta y\Delta z \\ -\Delta z\Delta x & -\Delta z\Delta y & -\Delta z^2 & \Delta z\Delta x & \Delta z\Delta y & \Delta z^2 \end{bmatrix}, \quad (3.143)$$

$$\mathbf{K}_{t2a} = \frac{EA}{8\alpha_o^3} \begin{bmatrix} \Delta x\Delta u & \Delta x\Delta v & \Delta x\Delta w & -\Delta x\Delta u & -\Delta x\Delta v & -\Delta x\Delta w \\ \Delta y\Delta u & \Delta y\Delta v & \Delta y\Delta w & -\Delta y\Delta u & -\Delta y\Delta v & -\Delta y\Delta w \\ \Delta z\Delta u & \Delta z\Delta v & \Delta z\Delta w & -\Delta z\Delta u & -\Delta z\Delta v & -\Delta z\Delta w \\ -\Delta x\Delta u & -\Delta x\Delta v & -\Delta x\Delta w & \Delta x\Delta u & \Delta x\Delta v & \Delta x\Delta w \\ -\Delta y\Delta u & -\Delta y\Delta v & -\Delta y\Delta w & \Delta y\Delta u & \Delta y\Delta v & \Delta y\Delta w \\ -\Delta z\Delta u & -\Delta z\Delta v & -\Delta z\Delta w & \Delta z\Delta u & \Delta z\Delta v & \Delta z\Delta w \end{bmatrix}, \quad (3.144)$$

$$\mathbf{K}_{t2b} = \frac{EA}{8\alpha_o^3} \begin{bmatrix} \Delta u^2 & \Delta u\Delta v & \Delta u\Delta w & -\Delta u^2 & -\Delta u\Delta v & -\Delta u\Delta w \\ \Delta v\Delta u & \Delta v^2 & \Delta v\Delta w & -\Delta v\Delta u & -\Delta v^2 & -\Delta v\Delta w \\ \Delta w\Delta u & \Delta w\Delta v & \Delta w^2 & -\Delta w\Delta u & -\Delta w\Delta v & -\Delta w^2 \\ -\Delta u^2 & -\Delta u\Delta v & -\Delta u\Delta w & \Delta u^2 & \Delta u\Delta v & \Delta u\Delta w \\ -\Delta v\Delta u & -\Delta v^2 & -\Delta v\Delta w & \Delta v\Delta u & \Delta v^2 & \Delta v\Delta w \\ -\Delta w\Delta u & -\Delta w\Delta v & -\Delta w^2 & \Delta w\Delta u & \Delta w\Delta v & \Delta w^2 \end{bmatrix}, \quad (3.145)$$

$$\mathbf{K}_{t\sigma} = \frac{\sigma_G A_o}{2\alpha_o} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.146)$$

Por fim, escreve-se para a matriz de rigidez tangente, tal qual (3.123), a seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{t2a} + \mathbf{K}_{t2a}^T + \mathbf{K}_{t2b} + \mathbf{K}_{\sigma}. \quad (3.147)$$

Já para o estudo de treliças tridimensionais com a utilização do tensor de Engenharia, as expressões (3.131) a (3.136), obtidas para o caso bidimensional, também permanecem válidas. As expressões das matrizes de rigidez podem ser alcançadas de

modo análogo àquelas apresentadas na seção (3.3.3.2), bastando para isso considerar a contribuição de uma terceira coordenada dimensional. Por conseguinte, as formas matriciais de \mathbf{K}_{t1} , $\mathbf{K}_{t\sigma 1}$ e $\mathbf{K}_{t\sigma 2}$ serão:

$$\mathbf{K}_{t1} = \frac{EA_o \lambda^2}{8\alpha_o^3} \begin{Bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ -\Delta z - \Delta w \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \\ \Delta z + \Delta w \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ -\Delta z - \Delta w \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \\ \Delta z + \Delta w \end{Bmatrix}^T, \quad (3.148)$$

$$\mathbf{K}_{t\sigma 1} = \frac{\sigma A_o \lambda}{2\alpha_o} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.149)$$

$$\mathbf{K}_{t\sigma 2} = -\frac{\sigma A_o \lambda^3}{8\alpha_o^3} \begin{Bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ -\Delta z - \Delta w \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \\ \Delta z + \Delta w \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\Delta x - \Delta u \\ -\Delta y - \Delta v \\ -\Delta z - \Delta w \\ \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \\ \Delta z + \Delta w \end{Bmatrix}^T. \quad (3.150)$$

Com a obtenção de \mathbf{K}_{t1} , $\mathbf{K}_{t\sigma 1}$ e $\mathbf{K}_{t\sigma 2}$ em (3.148), (3.149) e (3.150), respectivamente, pode-se então encontrar a expressão final para a matriz de rigidez \mathbf{K} obtida a partir do tensor de Engenharia somando-se as três matrizes supracitadas.

4.

FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE SISTEMAS ESTRUTURAIS SEMI-RÍGIDOS

4.1 – INTRODUÇÃO

Uma análise mais realística e um projeto possivelmente mais econômico de pórticos planos passa necessariamente por um estudo mais profundo do comportamento das ligações, além da influência das mesmas no comportamento estrutural geral. Este capítulo, por conseguinte, terá o objetivo de lançar bases para as análises qualitativa e quantitativa da influência da presença de ligações semi-rígidas em um sistema estrutural.

De início, na seção (4.2), será dado enfoque ao comportamento dos vários tipos de ligações. Logo depois, serão mostrados os quatro tipos de modelos utilizados para descrever a variação do momento fletor e da rigidez com a rotação para conexões semi-rígidas que, por motivos expostos na seção (4.2.2), foram escolhidos para implementação computacional: o modelo linear, o de Richard-Abbott, o exponencial e o exponencial modificado. Esses modelos são importantes, pois na análise estrutural a perda de rigidez das ligações é um fator de não-linearidade que pode mostrar grande influência no resultado final. Computacionalmente, à medida que se avança nos estágios de carregamentos, a rigidez das ligações é atualizada seguindo-se algum dos modelos supracitados.

A seção (4.3) será dedicada à apresentação de como a matriz de rigidez do elemento com conexões semi-rígidas é modificada, utilizando-se como base os procedimentos descritos no trabalho de Chan e Chui (2000). Depois, será deduzida a formulação não-linear para o elemento de pórtico plano semi-rígido, baseada na

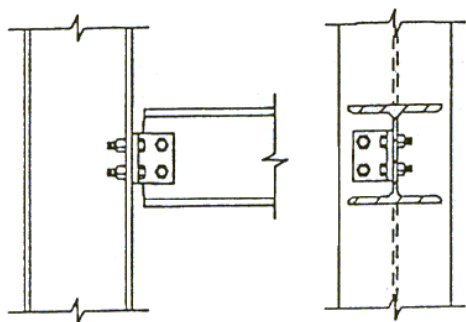
modificação de duas das formulações implementadas e descritas por Galvão (2000): Torkamani et al. (1997) e Yang e Kuo linearizada (1994).

A seguir, na seção (4.4), será demonstrado o procedimento para a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes utilizando-se agora o procedimento descrito por Sekulovic e Salatic (2001). Essa formulação, ao contrário da utilizada por Chan e Chui (2000), leva em consideração a excentricidade da conexão semi-rígida em relação ao pilar.

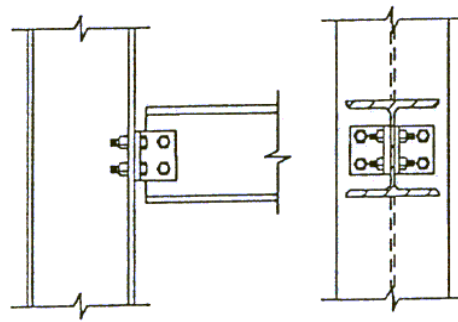
Por fim, na seção (4.5), será demonstrada a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes baseados na formulação proposta por Chen e Lui (1991), considerada desde já clássica e que serviu de base para a implementação das duas formulações anteriormente citadas.

4.2 – COMPORTAMENTO E MODELOS DE LIGAÇÕES

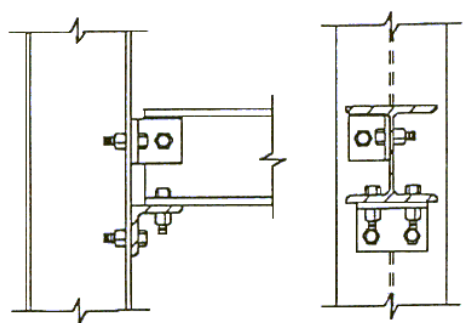
Na construção de edifícios em aço, as conexões de viga-coluna são amplamente utilizadas. A figura (4.1) apresenta alguns exemplos de ligações que estão entre as de uso mais comum. Estritamente falando, as hipóteses extensamente utilizadas de conexões viga-coluna perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas são praticamente irrealizáveis. Numerosos experimentos têm mostrado que, na prática, as ligações se comportam de forma não-linear devido à plastificação gradual de seus componentes, tais como placas, parafusos, etc. As propriedades das ligações são complexas e incertezas em seu comportamento são comuns. Os efeitos da não-linearidade da estrutura tornam estas questões ainda mais complexas. As virtuais causas desta complexidade incluem imperfeições geométricas, tensões residuais devido à soldagem, concentração de tensões e efeitos locais secundários. Para a maioria das conexões, no entanto, as deformações axiais e cisalhantes são, em geral, pequenas se comparadas às deformações decorrentes do efeito de flexão. Por questões de simplicidade, apenas o comportamento rotacional das conexões, devido à ação de flexão, será considerado. A figura (4.2) mostra a deformação rotacional de uma ligação.



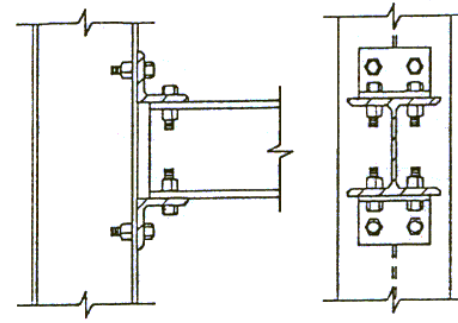
a) Cantoneira de Alma Simples



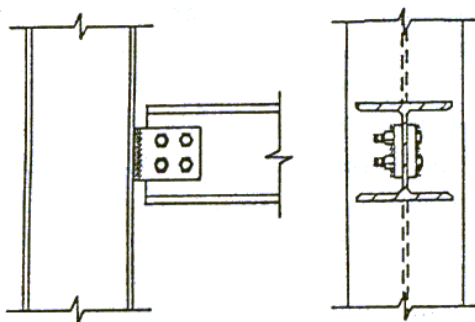
b) Cantoneira Dupla de Alma



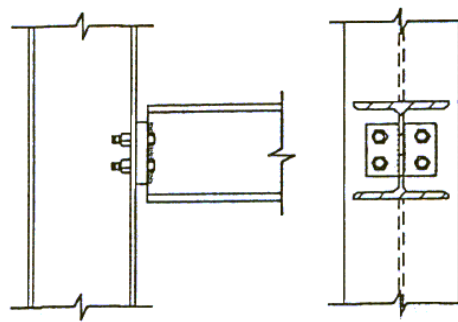
c) Cantoneira de Alma e Assento



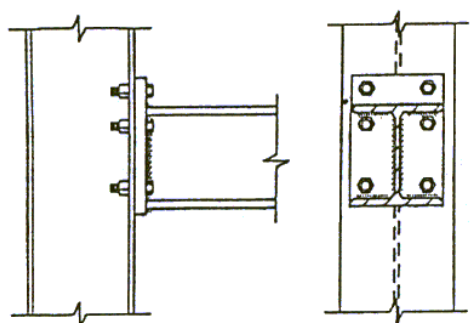
d) Cantoneira de Topo e Assento



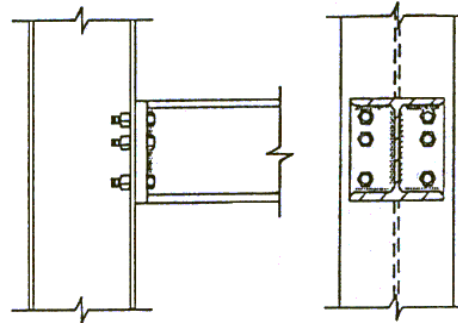
d) Chapa de Extremidade



f) Chapa Soldada à Alma da Viga



g) Ligação com Chapa de Topo Estendida



h) Ligação com Chapa de Topo

Figura 4.1 – Tipos de ligações viga-coluna (Chan e Chui, 2000).

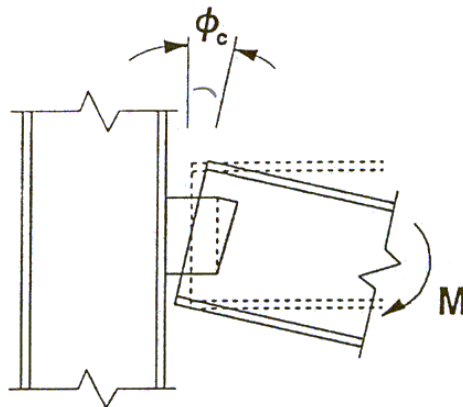


Figura 4.2 – Deformação rotacional de uma conexão (Chan e Chui, 2000).

O comportamento não-linear de uma ligação é usualmente representado por uma curva momento-rotação ($M-\phi_c$), que, em geral, pode ser obtida de resultados experimentais. Curvas $M-\phi_c$ típicas de alguns tipos de ligações são mostradas na figura (4.3).

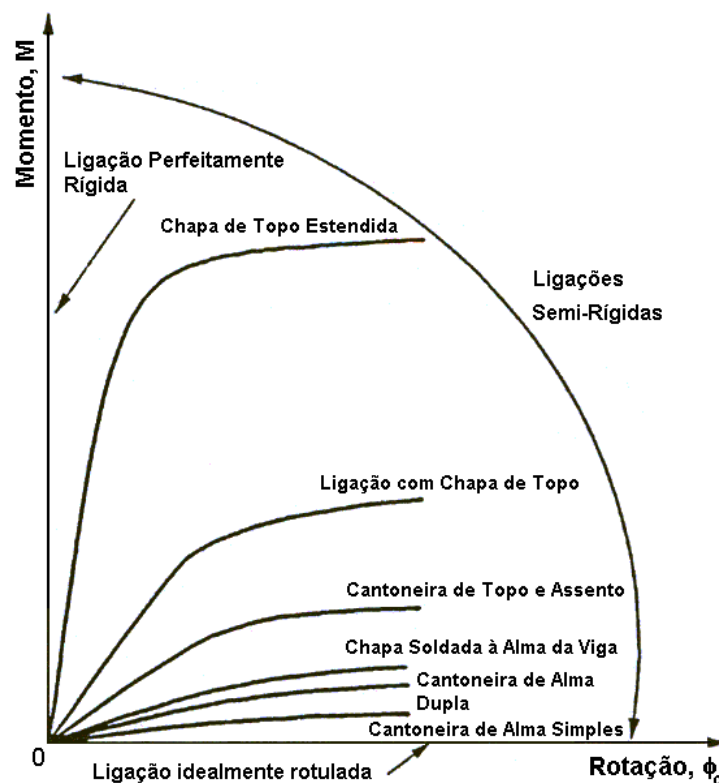


Figura 4.3 – Curvas momento-rotação típicas de algumas das ligações mais comuns (Chan e Chui, 2000)

Com o objetivo de incorporar as curvas $M-\phi_c$ de forma mais sistemática e eficiente em uma análise computacional de estruturas reticuladas, as relações momento versus rotação são usualmente modeladas por uma função matemática. Uma boa função matemática deve ser simples, de poucos parâmetros, de fácil determinação desses parâmetros, fisicamente plausível, numericamente estável, não possuir primeiras derivadas negativas e capaz de representar uma grande quantidade de tipos de ligações.

4.2.1 – Classificação dos modelos de ligações

Genericamente falando, o comportamento de uma conexão pode ser simplificado por um conjunto de relações momento versus rotação. Matematicamente, essas relações podem ser expressas na forma geral

$$M = f(\phi_c), \quad (4.1a)$$

ou, inversamente,

$$\phi_c = g(M), \quad (4.1b)$$

em que $f(\phi_c)$ e $g(M)$ são funções matemáticas; M é o momento na conexão e ϕ_c é a rotação da mesma, igual à diferença entre as rotações das duas extremidades da ligação.

Basicamente, a classificação das relações momento-rotação de ligações pode ser, de um modo geral, dividida em três tipos principais: os modelos analíticos, matemáticos e mistos. Nos modelos analíticos, a relação $M-\phi_c$ é baseada nas características físicas de uma conexão. Nos modelos matemáticos, por outro lado, a relação é expressa por uma função matemática em que os parâmetros são determinados por uma curva ajustada a resultados experimentais. Por último, os modelos mistos combinam os modelos analítico e matemático. Esses três tipos de modelos são descritos na sequência.

4.2.1.1 – Modelos Analíticos

Modelos analíticos são utilizados para prever a rigidez da ligação com base nas propriedades geométricas e na disposição dos componentes da conexão. Com as hipóteses no mecanismo de deformação dos componentes da ligação, o comportamento mecânico da conexão pode ser predito através de métodos numéricos como o dos elementos finitos. Daí, a deformação das componentes e o momento resistente da ligação podem ser determinados e a relação momento-rotação para a de conexão pode ser obtida. Em geral, estudos paramétricos são conduzidos considerando os efeitos de diversas variáveis geométricas relacionadas às componentes das conexões. Valores práticos dessas variáveis são então analisados para produzir dados para a análise. No entanto, o custo e o tempo envolvidos são quase sempre insatisfatórios para aplicações práticas, pois cada tipo de ligação ou de configuração dos componentes da conexão requer uma nova formulação para a relação $M-\phi_c$ (Chan e Chui, 2000). Além disso, incertezas inerentes às ligações podem afetar significativamente a rigidez da articulação computada pelos modelos. Há ainda o fato de que procedimentos adicionais de manuseio dos dados são necessários para incorporar os resultados analíticos dentro da análise de pórticos semi-rígidos. Exemplos de adoção de modelos analíticos incluem Youssef-Agha e Aktan (1989) para ligação do tipo cantoneira de topo e assento e Shi et al. (1996) para ligação do tipo chapa de topo.

4.2.1.2 - Modelos Matemáticos

Atualmente, o método mais comumente utilizado para se determinar a relação momento-rotação de ligações é aproximar uma curva a dados experimentais utilizando expressões simples. Essas expressões são chamadas de modelos matemáticos, que relacionam diretamente o momento e a rotação das articulações mediante funções matemáticas, como aquelas das equações (4.1a) ou (4.1b), pelo uso de algumas constantes de ajuste de curvas. Quando essas constantes de ajuste são determinadas

através dos dados experimentais, a relação $M-\phi_c$ pode ser explicitamente expressa e diretamente utilizada numa análise estrutural. Os modelos matemáticos são, portanto, mais simples do que os modelos analíticos anteriormente mencionados. Exemplos de modelos matemáticos incluem o modelo de Richard-Abbott (Richard e Abbott, 1975), o modelo exponencial de Chen-Lui (Lui e Chen, 1986) e o modelo bounding-line (Al-Bermani et al., 1994). Uma vez que extensivos testes em vários tipos de ligações vêm sendo conduzidos nas últimas décadas, muitos dados, para vários tipos de conexões, estão acessíveis para a obtenção de parâmetros ou constantes necessários aos modelos matemáticos. Um bom modelo matemático deverá ser simples, com significado físico e necessitando de poucos parâmetros. Além disso, deverá sempre garantir a geração de uma curva suave, com primeiras derivadas positivas e abranger uma grande quantidade de tipos de ligações (Chan e Chui, 2000).

4.2.1.3 – Modelos Mistos

Modelos mistos são combinações dos modelos analítico e matemático. Na formulação dos modelos mistos, as funções $M-\phi_c$ são expressas em termos tanto das constantes de ajuste de curvas quanto dos parâmetros geométricos. Com o objetivo de desenvolver uma expressão geral para todas as conexões com disposição similar de componentes, normalmente as funções são, por conveniência, padronizadas. As constantes de ajuste de curvas são determinadas pelas técnicas de aproximação de curvas enquanto os parâmetros geométricos são baseados na geometria dos componentes da articulação. Os modelos mistos requerem poucos parâmetros quando comparados aos modelos matemáticos e, além disso, similarmente aos modelos analíticos, mantêm os parâmetros geométricos que estabelecem relação com as características físicas da ligação. Essa característica não é encontrada nos modelos matemáticos de ajuste de curvas. Em geral, os modelos mistos podem ser utilizados para calcular a rigidez inicial de tipos particulares de conexões e prever o comportamento não-linear das mesmas. O modelo polinomial (Frye e Morris, 1975) e o de Ramberg-Osgood (Ang e Morris, 1984) são exemplos de modelos mistos.

4.2.2 – Formulações de Modelos de Ligações

Há muitos modelos matemáticos e mistos comumente utilizados para representar as curvas $M-\phi_c$ de conexões. Entre esses modelos, estão o linear (Arbabi, 1982; Kawashima e Fujimoto, 1984; Chan, 1994), o bilinear (Sivakumaran, 1988; Youssef-Agha, 1989), o trilinear (Stelmack et al., 1986; Gerstle, 1988), o modelo polinomial (Frye e Morris, 1975), o modelo B-spline cúbico (Cox, 1972; Jones et al., 1980), o modelo bounding-line (Al-Bermani et al., 1994; Zhu et al., 1995), o modelo de potências (Batho e Lash, 1936; Krishnamurthy et al., 1979; Colson e Louveau, 1983; Kishi e Chen, 1987a; King e Chen, 1993), o modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg e Osgood, 1943; Shi e Atluri, 1989), o modelo de Richard-Abbott (Richard e Abbott, 1975; Gao e Haldar, 1995), o modelo exponencial de Chen-Lui (Lui e Chen, 1988), entre outros.

Neste trabalho, em face da quantidade de modelos existentes, foram implementadas três funções para descrever o comportamento não-linear de ligações semi-rígidas, a saber: exponencial, exponencial modificado e de Richard-Abbott. O fato de estarem entre as funções mais populares, de possuírem, segundo a literatura existente, boa eficiência computacional, primeiras derivadas sempre positivas e boa precisão estão entre as razões que motivaram suas escolhas. Há ainda o fato destes modelos se ajustarem de forma bastante razoável a dados obtidos experimentalmente (Chan e Chui, 2000). Além desses, foi implementado ainda o modelo linear, principalmente para utilização em análises lineares, em casos onde há recomendação de norma para o uso apenas da rigidez inicial em análises estruturais e para estudos de vibrações e pequenas deflexões. As principais características dos modelos implementados serão abordadas a seguir.

No apêndice C, outros exemplos de modelos que com frequência são citados na literatura especializada serão examinados, abordando-se algumas de suas características, vantagens e limitações.

4.2.2.1 – Modelo Linear

Este é o modelo mais simples e necessita de apenas um parâmetro para definir a rigidez de uma conexão. Em virtude de sua simplicidade, o modelo linear tem sido amplamente utilizado nos estágios iniciais de desenvolvimento de métodos de análise para articulações semi-rígidas (Batho e co-autores, 1931, 1934, 1936; Rathbun, 1936; Baker, 1934; Monforton e Wu, 1963) e na análise de vibração e bifurcação de pórticos semi-rígidos (Chan, 1994; Chan e Chui, 2000). A função momento-rotação pode ser escrita como sendo

$$M = S_c^o \phi_c, \quad (4.2)$$

em que S_c^o é constante e igual ao valor da rigidez inicial da conexão, que pode ser obtida de experimentos. Matematicamente, uma função simples de S_c^o pode ser expressa em termos da rigidez da viga. Lightfoot e LeMessurier (1974) assumiram a rigidez da ligação como sendo

$$S_c^o = \rho \frac{4EI}{L}, \quad (4.3)$$

onde EI e L são a rigidez à flexão e o comprimento da viga, respectivamente, e ρ é o índice de rigidez, proposto para indicar o grau de flexibilidade da conexão. O valor de ρ varia de zero, para o caso de uma articulação idealmente rotulada, até o infinito, para o caso de uma articulação idealmente rígida.

Alternativamente, a equação (4.3) pode ainda ser modificada pela adoção de um fator fixo η , sugerido primeiramente por Romstad e Subramanian (1970) e Yu e Shanmugam (1986), o que levará à expressão

$$S_c^o = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{4EI}{L}. \quad (4.4)$$

O fator η é igual a zero para ligações rotuladas. Para o caso de ligações rígidas, possui valor unitário. Em Simões (1996) e Sekulovic e Salatic (2001), há uma variação da equação (4.4), adaptada para a situação em que a conexão é idealizada como sendo uma mola e sua rigidez à rotação representaria a rigidez à esforços de flexão da ligação. Para este caso, utiliza-se um fator γ que possui o mesmo princípio do fator η na equação (4.4), que, de acordo com a figura (4.4), tornar-se-á

$$S_c^o = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{3EI}{L}. \quad (4.5)$$

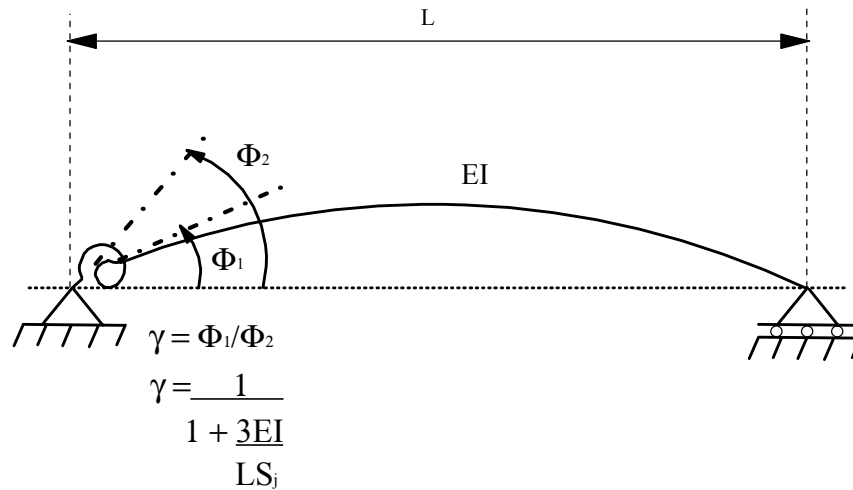


Figura 4.4 – Fator de rigidez γ .

O modelo linear é simples de ser utilizado porque a rigidez inicial das ligações é facilmente obtida de experimentos e permanece constante ao longo da análise, sem a necessidade de ser atualizada. No entanto, como ilustrado na figura (4.5), o modelo linear não é muito preciso em casos de grandes deflexões e sua utilização é mais apropriada nas análises linear, de vibração e de bifurcação, onde as deflexões são pequenas.

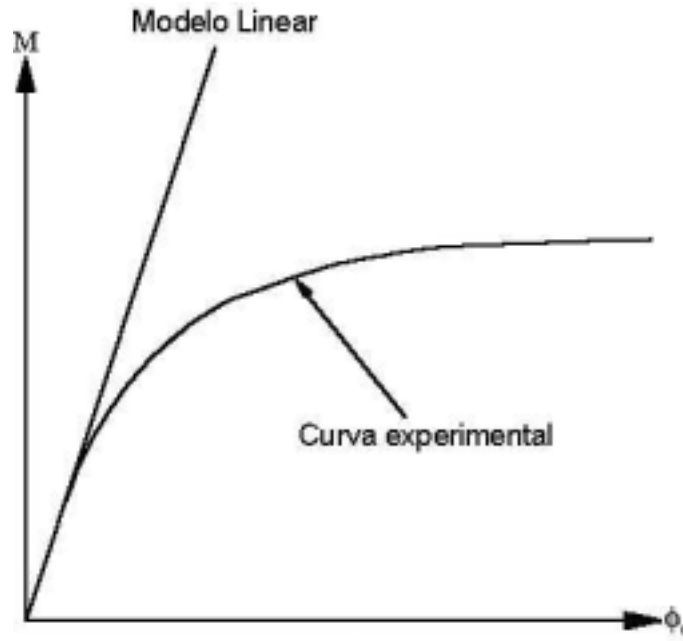


Figura 4.5 – Modelo linear.

4.2.2.2 – Modelos exponenciais

Lui e Chen (1986, 1988) propuseram um modelo exponencial para descrever a relação momento-rotação sob a forma

$$M = M_o + \sum_{j=1}^n C_j \left[1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) \right] + R_{kf} |\phi_c|, \quad (4.6a)$$

enquanto o valor de sua rigidez tangente é dada por

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{2j\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) + R_{kf}, \quad (4.6b)$$

sendo que a rigidez inicial valerá

$$S_c^o = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=0} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{2j\alpha} + R_{kf}, \quad (4.6c)$$

onde M é o valor do momento na conexão; $|\phi_c|$ o módulo da deformação rotacional da conexão; M_o é o momento inicial; R_{kf} é a rigidez devido ao encruamento da ligação; α é um fator de escala; n é o número de termos considerados e C_j é o coeficiente de ajustamento da curva. Baseados em resultados experimentais anteriores, Lui e Chen (1988) determinaram os valores dos parâmetros de ajustamento de curvas do modelo exponencial para quatro tipos de conexões: cantoneira simples de alma, cantoneira de topo e assento, ligação com chapa de topo e ligação com chapa de topo estendida. Os valores estão sumarizados na tabela (4.1), enquanto as propriedades de cada conexão, derivadas da função exponencial, estão apresentadas na figura (4.6). Em geral, o modelo exponencial de Chen-Lui fornece uma boa representação do comportamento não-linear da ligação e sua precisão é comparável ao modelo B-spline cúbico (Chan e Chui, 2000). No entanto, o modelo de Chen-Lui requer um grande número de parâmetros para ajuste da curva. Além disto, se houver uma mudança abrupta na declividade da curva $M-\phi_c$, este modelo pode não representá-la corretamente. Por conseguinte, Kishi e Chen refinaram o modelo exponencial para que este pudesse acomodar qualquer mudança acentuada na curva $M-\phi_c$. Sob condições de carregamento, a função proposta por esses pesquisadores é escrita como sendo

$$M = M_o + \sum_{j=1}^m C_j \left[1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) \right] + \sum_{k=1}^n D_k (|\phi_c| - |\phi_k|) H[|\phi_c| - |\phi_k|], \quad (4.7a)$$

enquanto a rigidez tangente da conexão possui a forma

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{2j\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) + \sum_{k=1}^n D_k H[|\phi_c| - |\phi_k|] \quad (4.7b)$$

e a rigidez inicial é igual a

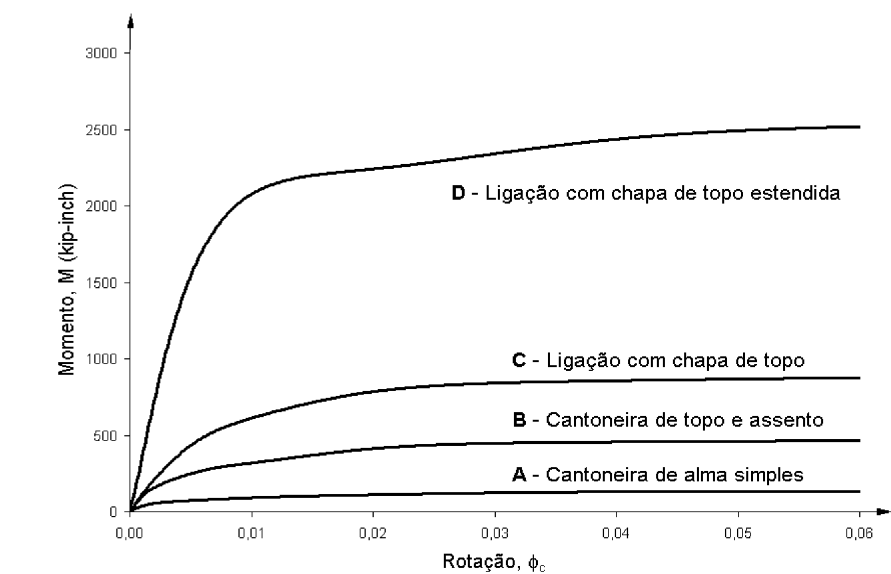
$$S_c^o = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=0} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{2j\alpha} + D_k H[\phi_c]_{k=1}, \quad (4.7c)$$

Tabela 4.1 – Parâmetros do modelo exponencial de Chen-Lui utilizados para algumas ligações (Chen e Lui, 1988)

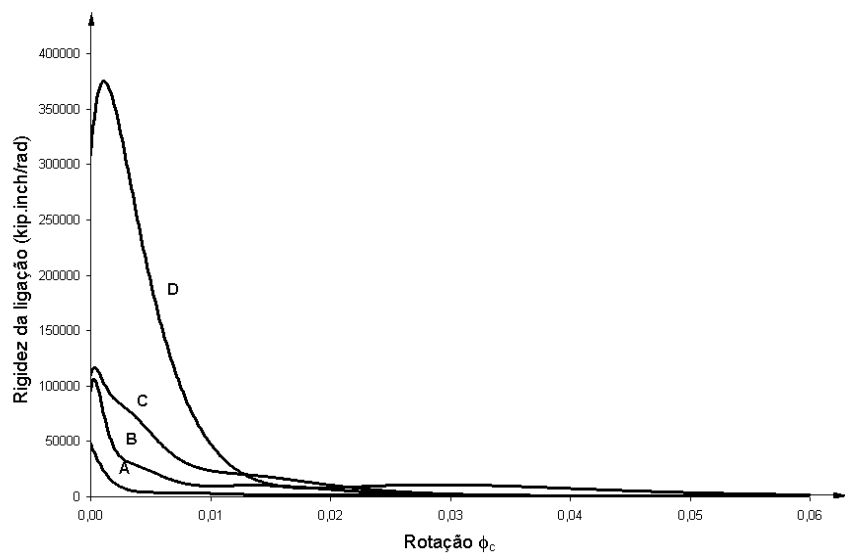
Tipos de conexão (kip–inch)				
	A	B	C	D
	Cantoneira de alma simples (Richard et al., 1982)	Cantoneira de topo e Assento (Azizinamini et al., 1985)	Ligação com chapa de topo (Ostrander, 1970)	Ligação com chapa de topo estendida (Johnson e Walpole, 1981)
M_o	0	0	0	0
R_{kf}	$0,47104 \times 10^2$	$0,43169 \times 10^2$	$0,96415 \times 10^2$	$0,41193 \times 10^3$
α	$0,51167 \times 10^{-3}$	$0,31425 \times 10^{-3}$	$0,31783 \times 10^{-3}$	$0,67083 \times 10^{-3}$
C_1	$-0,43300 \times 10^2$	$-0,34515 \times 10^3$	$-0,25038 \times 10^3$	$-0,67824 \times 10^3$
C_2	$0,12139 \times 10^4$	$0,52345 \times 10^4$	$0,50736 \times 10^4$	$0,27084 \times 10^4$
C_3	$-0,58583 \times 10^4$	$-0,26762 \times 10^5$	$-0,30396 \times 10^5$	$-0,21389 \times 10^5$
C_4	$0,12971 \times 10^5$	$0,61920 \times 10^5$	$0,75338 \times 10^5$	$0,78563 \times 10^5$
C_5	$-0,13374 \times 10^5$	$-0,65114 \times 10^5$	$-0,82873 \times 10^5$	$-0,99740 \times 10^5$
C_6	$0,52224 \times 10^4$	$0,25506 \times 10^5$	$0,33927 \times 10^5$	$0,43042 \times 10^5$
S_c^o	$0,48000 \times 10^5$	$0,95219 \times 10^5$	$0,11000 \times 10^6$	$0,30800 \times 10^6$

onde os valores M_o , α e C_j são iguais àqueles definidos nas equações (4.6a) e (4.6b), ϕ_k são as rotações iniciais das componentes lineares, D_k um coeficiente de ajustamento para a porção linear da curva e $H[\phi]$ é a função de Heaviside, definida como sendo

$$\begin{aligned} H[\phi] &= 1 && \text{quando } \phi \geq 0, \\ H[\phi] &= 0 && \text{quando } \phi < 0. \end{aligned} \quad (4.7d)$$



(a)



(b)

Figura 4.6 – Propriedades de ligações representadas pelo modelo exponencial de Chen e Lui: (a) curvas momento-rotação; (b) curvas rigidez-rotação.

4.2.2.3 – Modelo de Richard-Abbott

Este modelo, que requer quatro parâmetros, foi originalmente proposto por Richard e Abbott (1975). Na trajetória de equilíbrio, o comportamento momento-rotação é descrito pela expressão

$$M = \frac{(k - k_p)|\phi_c|}{\left[1 + \left|\frac{(k - k_p)|\phi_c|}{M_o}\right|^n\right]^{1/n}} + k_p|\phi_c|, \quad (4.8a)$$

enquanto a correspondente rigidez valerá

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \Big|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \frac{(k - k_p)}{\left[1 + \left|\frac{(k - k_p)|\phi_c|}{M_o}\right|^n\right]^{(n+1)/n}} + k_p, \quad (4.8b)$$

sendo k a rigidez inicial, k_p a rigidez devido ao encruamento, n é um parâmetro definindo a curvatura do diagrama e M_o é o momento de referência. A figura (4.7) mostra a forma típica de uma curva obtida pelo modelo de Richard-Abbott.

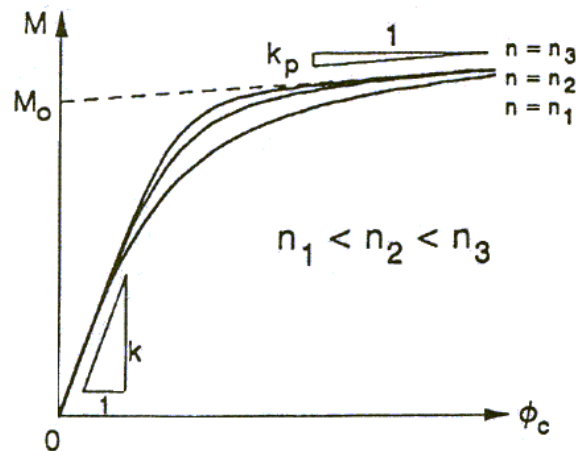


Figura 4.7 – Forma típica do modelo de Richard-Abbott (Chan e Chui, 2000).

Como precisa de apenas quatro parâmetros para definir a curva $M-\phi_c$ e o resultado sempre fornece uma rigidez positiva, este modelo possui boa eficiência computacional e é um dos mais utilizados para representação de ligações semi-rígidas.

4.3 – ELEMENTO SEMI-RÍGIDO PROPOSTO POR CHAN e CHUI (2000)

Uma ligação semi-rígida pode ser modelada como um elemento de mola inserido no ponto de interseção entre a viga e a coluna, tal qual exemplificam as figuras (4.8) e (4.9). Para a grande maioria das estruturas em aço, os efeitos das forças axial e cisalhante na deformação da conexão são pequenos se comparados com aqueles provocados pelo momento fletor. Por essa razão, apenas a deformação rotacional do elemento de mola é considerada em análises práticas. Por simplicidade de cálculo, o elemento de mola da conexão possui, por hipótese, tamanho desprezível, como mostrado pela figura (4.9).

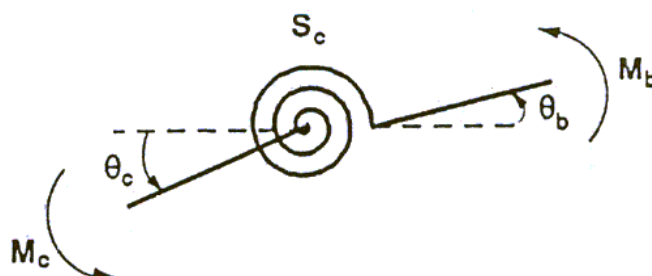


Figura 4.8 – Elemento de mola simulando uma conexão (Chan e Chui, 2000).

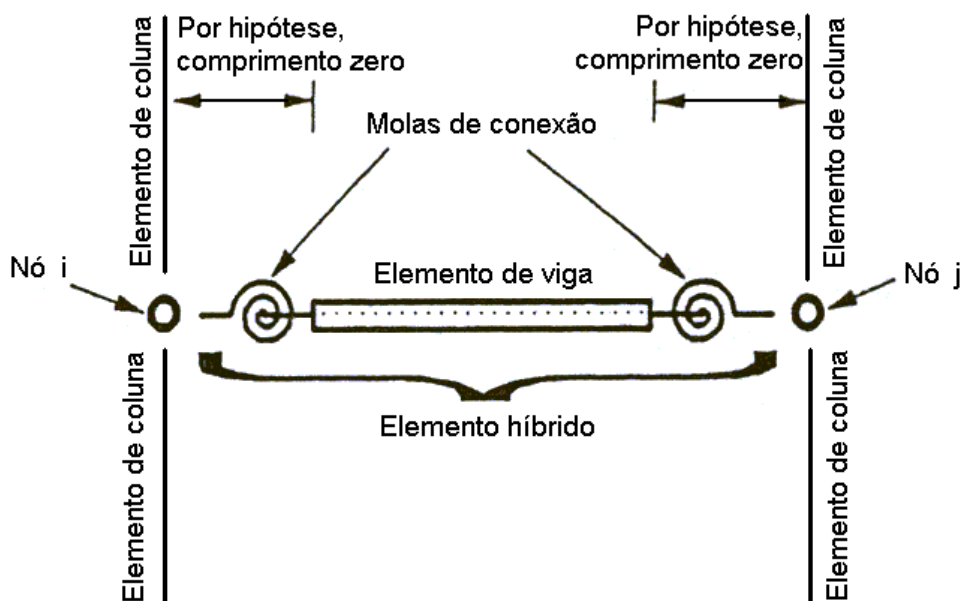


Figura 4.9 – Modelo do elemento de pórtico semi-rígido idealizado (Chan e Chui, 2000).

Devido à flexibilidade de uma ligação semi-rígida, as rotações da extremidade da articulação conectada ao pilar e da extremidade conectada à viga são, em geral, diferentes e serão nomeadas como a rotação da conexão e a rotação da viga, θ_c e θ_b , respectivamente. Considerando a condição de equilíbrio dos momentos na conexão, obtém-se

$$M_c + M_b = 0, \quad (4.9)$$

onde

$$M_c = S_c(\theta_c - \theta_b), \quad (4.10a)$$

$$M_b = -M_c = S_c(\theta_b - \theta_c), \quad (4.10b)$$

em que M_c e M_b são os momentos na conexão e na viga, respectivamente, atuando no elemento de mola e S_c é a rigidez da conexão. As equações (4.18a) e (4.18b) podem ser rearranjadas sob uma forma incremental matricial, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_c \\ \Delta M_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c \\ -S_c & S_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_c \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix}, \quad (4.11)$$

sendo ΔM_c e ΔM_b os momentos nodais incrementais na conexão e na viga, respectivamente, $\Delta \theta_c$ e $\Delta \theta_b$ as rotações nodais incrementais correspondentes àqueles momentos e S_c a rigidez tangente da conexão, obtida fazendo-se

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c}, \quad (4.12)$$

onde M é o momento atuando na ligação e ϕ_c o ângulo de defasagem (isto é, a rotação da mola ou deformação rotacional), definido como sendo

$$\phi_c = \theta_c - \theta_b. \quad (4.13)$$

Da equação (4.11), a matriz de rigidez tangente do elemento de mola pode ser descrita através da matriz

$$\mathbf{K}_{s_c} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c \\ -S_c & S_c \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Essa matriz de rigidez da conexão pode ser combinada com um elemento convencional de viga-coluna para formar uma nova matriz de rigidez, agora com a consideração da flexibilidade da conexão devido à semi-rigidez nas duas extremidades do elemento. Este é o procedimento que será descrito na seção subsequente.

4.3.1 – Modificação da matriz de rigidez para a consideração de ligações semi-rígidas

Nos procedimentos apresentados por Chan e Chui (2000), a mola de conexão e o elemento de viga-coluna são combinados de modo a formar um elemento híbrido, conforme apresentado na figura (4.10). Um lado do elemento de mola está conectado ao elemento de viga-coluna enquanto o outro lado está conectado ao nó global (ou ao pilar). A configuração deformada do elemento híbrido com molas nas extremidades é mostrada na figura (4.10a). A barra está inicialmente reta em sua configuração indeformada e, então, se deforma para uma configuração curvilínea por movimentos de translação e rotação. Os detalhes das forças internas e deformações na mola de conexão são ilustrados na figura (4.14b). A rotação da ligação é definida como a diferença entre os ângulos de rotação do lado conectado ao nó global e o lado conectado ao elemento de viga-coluna, como mostrado matematicamente pela equação (4.13).

Com as molas de conexão, adicionadas às extremidades da viga-coluna, a matriz de rigidez convencional do elemento deverá ser modificada de tal modo a levar em

consideração o efeito das ligações semi-rígidas. A matriz de rigidez resultante poderá, então, ser utilizada nas análises posteriores.

Considerando as seções internas da viga-coluna conectada às molas, a relação de rigidez do elemento será dada por

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix}, \quad (4.15)$$

sendo os subscritos ‘i’ e ‘j’ referidos aos nós extremos i e j do elemento de viga-coluna. Os termos K_{ij} são as componentes de rigidez à flexão desse mesmo elemento, cujos valores são, para uma análise de primeira ordem, $4EI/L$ para K_{ii} e K_{jj} e $2EI/L$ para K_{ij} e K_{ji} . No caso de uma solução não-linear, tais valores dependerão da formulação utilizada. Esta última abordagem será verificada nas seções seguintes.

Combinando a equação (4.15) com as componentes de rigidez das molas das duas extremidades do elemento, encontrar-se-á

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} & 0 \\ 0 & K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix}, \quad (4.16)$$

onde S_{ci} e S_{cj} são as componentes de rigidez tangentes das molas de conexão e $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ são, de acordo com a figura (4.11), as rotações incrementais das duas extremidades do elemento tomando-se como base um eixo paralelo ao último sistema de referência, ou seja, na última configuração de equilíbrio. Efetuando-se a multiplicação matricial, assumindo-se que as cargas são aplicadas apenas nos nós globais e que tanto ΔM_{bi} quanto ΔM_{bj} sejam iguais a zero, chega-se a

$$(S_{ci} + K_{ii})\Delta \theta_{bi} + K_{ij}\Delta \theta_{bj} = S_{ci}\Delta \theta_{ci}, \quad (4.17a)$$

$$K_{ji}\Delta \theta_{bi} + (S_{cj} + K_{jj})\Delta \theta_{bj} = S_{cj}\Delta \theta_{cj}, \quad (4.17b)$$

enquanto as equações restantes, resultantes da multiplicação matricial de (4.16), serão

$$\Delta M_{ci} = S_{ci} \Delta \theta_{ci} - S_{ci} \Delta \theta_{bi}, \quad (4.18a)$$

$$\Delta M_{cj} = S_{cj} \Delta \theta_{cj} - S_{cj} \Delta \theta_{bj}. \quad (4.18b)$$

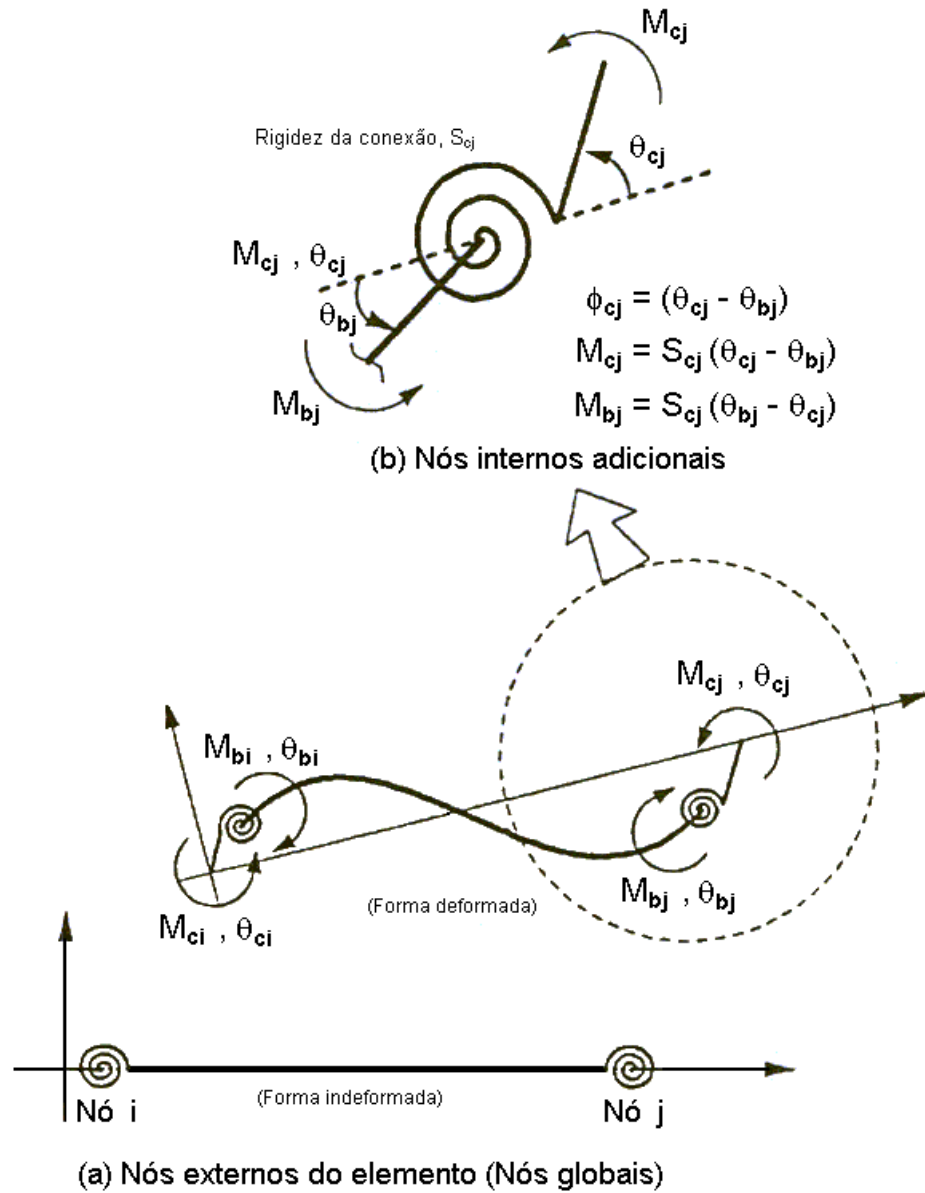


Figura 4.10 – Elemento de viga-coluna com molas de conexão adicionadas (Chan e Chui, 2000).

Rescrevendo-se (4.17) numa linguagem matricial, ter-se-á

$$\begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix}, \quad (4.19)$$

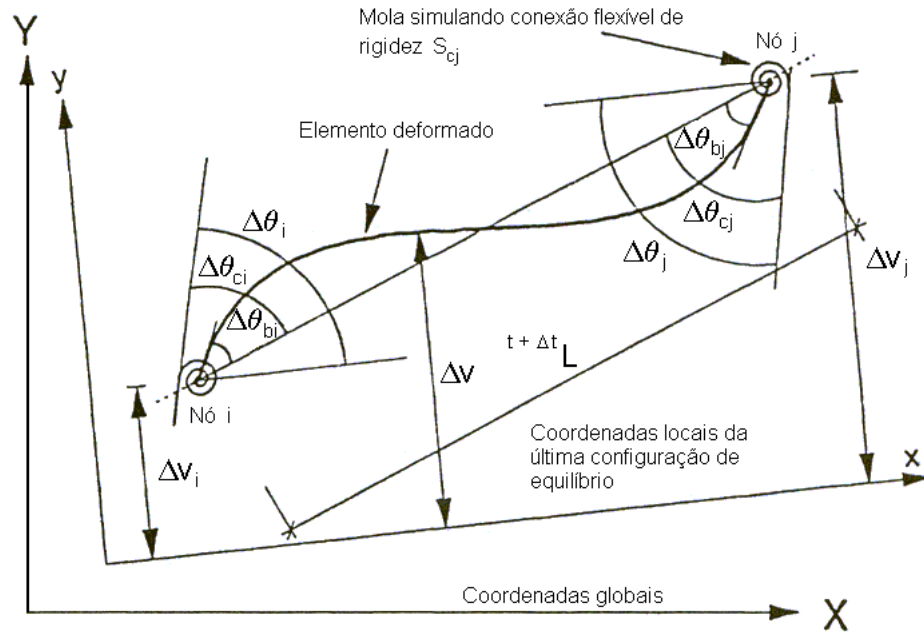


Figura 4.11 – Rotações e deflexões laterais de uma elemento deformado com molas nas extremidades simulando conexões flexíveis.

enquanto a expressão matricial para (4.18) será dada por

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix}. \quad (4.20)$$

O vetor que contém os valores de $\Delta\theta_{bi}$ e $\Delta\theta_{bj}$ pode ser obtido a partir de (4.19) através da expressão

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix}. \quad (4.21)$$

Substituindo-se então (4.21) em (4.20), encontrar-se-á

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix}, \quad (4.22a)$$

ou ainda,

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{jj} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & S_{ci} + K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix}, \quad (4.22b)$$

onde $\beta = (S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji}K_{ij}$. Para um elemento de viga-coluna, pode-se ainda determinar algumas relações entre os esforços cisalhantes e os momentos incrementais. Essas relações, de acordo com a figura (4.12), valem

$$\Delta M_i = \Delta M_{ci}, \quad (4.23a)$$

$$\Delta Q_i = \frac{\Delta M_{ci} + \Delta M_{cj}}{L}, \quad (4.23b)$$

$$\Delta M_j = \Delta M_{cj}, \quad (4.23c)$$

$$\Delta Q_j = -\frac{(\Delta M_{ci} + \Delta M_{cj})}{L}, \quad (4.23d)$$

em que ΔM_i e ΔM_j são os momentos incrementais, ΔQ_i e ΔQ_j são as forças cisalhantes incrementais nos nós do elemento híbrido e L é o comprimento do elemento de viga-coluna na configuração t de equilíbrio utilizada como referência, cujo sobrescrito esquerdo t foi omitido por questões de clareza. Utilizando-se a forma matricial, a expressão (4.23) será dada por

$$\begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

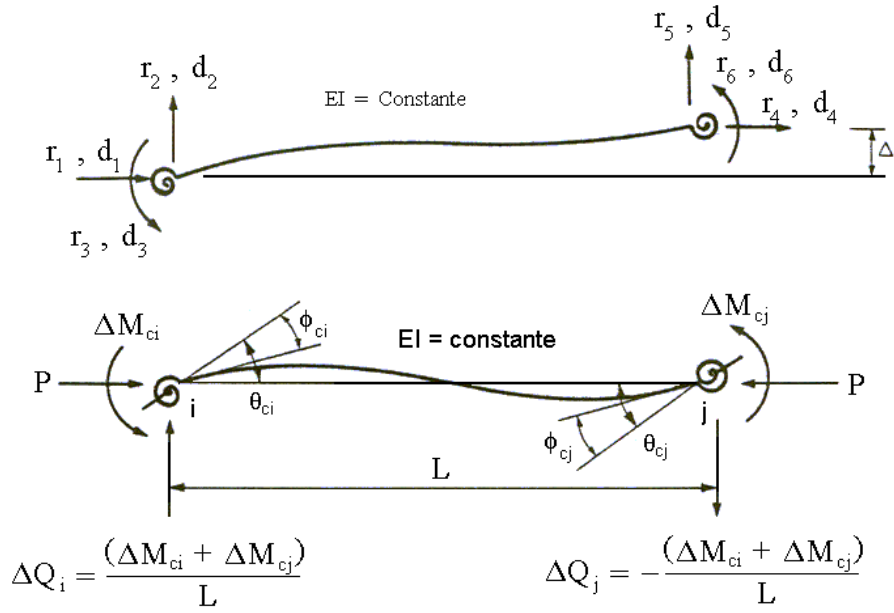


Figura 4.12 – Notações para deslocamentos e forças nodais do elemento de pórtico plano com ligações semi-rígidas.

Substituindo a expressão (4.22b) na equação (4.24), encontra-se

$$\begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{jj} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & S_{ci} + K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Da figura (4.11), pode-se ainda obter as relações entre os incrementos de rotação da conexão em relação aos eixos locais e os incrementos de rotação obtidos em relação ao último sistema de coordenadas, relações estas que serão

$$\Delta \theta_{ci} = \Delta \theta_i + \frac{\Delta v_i - \Delta v_j}{L}, \quad (4.26a)$$

$$\Delta\theta_{cj} = \Delta\theta_j + \frac{\Delta v_i - \Delta v_j}{L}, \quad (4.26a)$$

onde Δv_i e Δv_j são os deslocamentos laterais incrementais projetados sobre a última configuração de equilíbrio de ambos os nós do elemento e L o comprimento do mesmo. A equação (4.26) possuirá a forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix}. \quad (4.27)$$

De posse de (4.27), pode-se agora obter a matriz de rigidez elástica para o elemento híbrido de viga-coluna substituindo-se a equação anterior em (4.25), o que fornecerá

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{jj} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & S_{ci} + K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix}, \quad (4.28)$$

cuja expressão final será

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Ke_{1,1} & Ke_{1,2} & Ke_{1,3} & Ke_{1,4} \\ Ke_{2,1} & Ke_{2,2} & Ke_{2,3} & Ke_{2,4} \\ Ke_{3,1} & Ke_{3,2} & Ke_{3,3} & Ke_{3,4} \\ Ke_{4,1} & Ke_{4,2} & Ke_{4,3} & Ke_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix}, \quad (4.29)$$

onde

$$Ke_{1,1} = S_{ci} - \frac{S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta}, \quad (4.30a)$$

$$Ke_{1,2} = -Ke_{1,4} = \frac{S_{ci}}{L} + \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj} - S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta L}, \quad (4.30b)$$

$$Ke_{1,3} = \frac{S_{ci}K_{ji}S_{cj}}{\beta}, \quad (4.30c)$$

$$Ke_{2,1} = -Ke_{4,1} = \frac{S_{ci}}{L} + \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci} - S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta L}, \quad (4.30d)$$

$$Ke_{2,2} = Ke_{4,4} = \frac{S_{ci} + S_{cj}}{L^2} + \frac{S_{cj}S_{ci}(K_{ji} + K_{jj}) - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii}) - S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta L^2}, \quad (4.30e)$$

$$Ke_{2,3} = -Ke_{4,3} = \frac{S_{cj}}{L} + \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj} - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta L}, \quad (4.30f)$$

$$Ke_{2,4} = Ke_{4,2} = \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii}) + S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj}) - S_{cj}S_{ci}(K_{ji} + K_{jj})}{\beta L^2} - \frac{(S_{ci} + S_{cj})}{L^2}, \quad (4.30g)$$

$$Ke_{3,1} = \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci}}{\beta}, \quad (4.30h)$$

$$Ke_{3,2} = -Ke_{3,4} = \frac{S_{cj}}{L} + \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci} - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta L}, \quad (4.30i)$$

$$Ke_{3,3} = S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta}. \quad (4.30j)$$

Tendo-se ainda que $K_{ii} = K_{jj} = 4EI/L$ e $K_{ij} = K_{ji} = 2EI/L$ para a solução linear, a matriz de rigidez da equação (4.37) possuirá forma simétrica. Além disso, reagrupando-se esta última na matriz de rigidez completa do elemento, que possui dimensão 6, obter-se-á

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta P_j \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & Ke_{2,2} & Ke_{2,1} & 0 & Ke_{2,4} & Ke_{2,3} \\ 0 & Ke_{1,2} & Ke_{1,1} & 0 & Ke_{1,4} & Ke_{1,3} \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & Ke_{4,2} & Ke_{4,1} & 0 & Ke_{4,4} & Ke_{4,3} \\ 0 & Ke_{3,2} & Ke_{3,1} & 0 & Ke_{3,4} & Ke_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

4.3.2 – Modificação da formulação para análise não-linear de pórticos semi-rígidos

Numa análise não-linear, a presença de ligações semi-rígidas torna necessária a modificação das equações de equilíbrio para levar em consideração o efeito da flexibilidade da conexão. A influência dessa flexibilidade pode ser considerada analisando o comportamento de um elemento de pórtico. Considere inicialmente um elemento típico de viga-coluna com conexões semi-rígidas em ambas as extremidades, tal qual é mostrado na figura (4.13), sujeito a uma força axial P e a momentos (M_i e M_j) em ambos os nós. Essas conexões são modeladas através de molas com rigidez à rotação e a presença destas últimas introduzirá rotações relativas de valores ϕ_{ci} e ϕ_{cj} nos nós i e j do elemento, respectivamente. A partir dessas ponderações básicas, as equações que descrevem o comportamento não-linear de um sistema estrutural idealmente rígido serão modificadas. Tendo-se como referência o trabalho realizado por Galvão (2000), serão analisadas modificações em duas formulações não-lineares: a descrita por Torkamani et al. (1997) e a descrita por Yang e Kuo (1994), em sua forma linearizada.

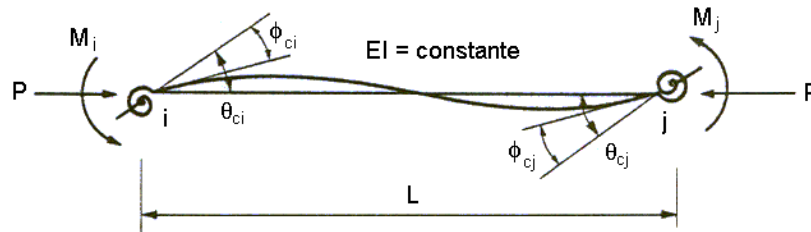


Figura 4.13 – Elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas (Chen e Toma, 1994).

4.3.2.1 – Modificação da formulação proposta por Torkamani et al. (1997)

Habitualmente, procedimentos padrões de análise não-linear para pórticos são baseados na hipótese de que as conexões nodais são ideais. Daí, duas idealizações extremas para as ligações são utilizadas: perfeitamente rígidas ou rotuladas. Modelos com conexões ideais simplificam o procedimento de análise, mas freqüentemente não representam o comportamento estrutural real. Em geral, conexões nodais de pórticos planos estão sujeitas à influência de momentos fletores e forças axiais e cisalhantes. Os efeitos destas últimas podem, em geral, ser negligenciados, de modo que apenas os momentos fletores são de interesse prático. A relação constitutiva momento-rotação da ligação poderá ser aproximada por algum dos modelos apresentados na seção (4.2.2) ou no apêndice C.

Há muitas maneiras de como incorporar a flexibilidade da conexão nodal na análise discreta não-linear de pórticos. Um dos modos mais simples é a obtenção das matrizes de rigidez tomando-se como base a relação final de força-deslocamento do elemento de viga-coluna no sistema de coordenadas locais. Essa observação é particularmente importante, pois utilizar-se-á como base para a modificação das matrizes dos elementos com ligações semi-rígidas o trabalho desenvolvido por Galvão (2000), que disserta sobre vários tipos de formulações não-lineares para análise de pórticos rígidos com base sempre em um sistema Lagrangeano atualizado.

Com base no que foi demonstrado na seção (4.3.1), pode-se obter a relação final de força-deslocamento já levando-se em consideração o efeito da semi-rigidez presente nas conexões nodais, que pode ser formulada como sendo

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & K_{ii}^* & K_{ij}^* \\ 0 & K_{ji}^* & K_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix}, \quad (4.32)$$

onde os termos ΔP , ΔM_i e ΔM_j denotam a força axial incremental e os momentos nodais incrementais, respectivamente. Além disso, ΔL , $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ mensuram o incremento de

deformação axial e as rotações nodais incrementais, respectivamente. Os termos presentes na matriz de rigidez são definidos como

$$K_{ii}^* = S_{ci} - \frac{S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta}, \quad (4.33a)$$

$$K_{ij}^* = \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj}}{\beta}, \quad (4.33b)$$

$$K_{ji}^* = \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci}}{\beta}, \quad (4.33c)$$

$$K_{jj}^* = S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta}, \quad (4.33d)$$

onde $\beta = (S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji}K_{ij}$, sendo S_{ci} e S_{cj} os valores de semi-rigidez de ambas as conexões, que numa análise incremental-iterativa podem ser atualizados utilizando-se um dos modelos representativos mostrados ou na seção (4.2.2) ou no apêndice C. Já K_{ii} , K_{ij} , K_{ji} e K_{jj} representam os termos da formulação não-linear utilizada, cujos valores serão

$$K_{ii} = K_{jj} = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15}, \quad (4.34a)$$

$$K_{ij} = K_{ji} = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30}, \quad (4.34b)$$

onde P é a força axial atuando na última configuração de equilíbrio. As expressões (4.34a) e (4.34b) são obtidas da formulação não-linear proposta por Torkamani et al. (1997), analisada por Galvão (2000) e utilizada nos procedimentos de Chan e Chui (2000).

A equação (4.32) pode ser transformada para um elemento de pórtico plano de seis graus de liberdade através das relações de equilíbrio entre as forças nodais referentes a cada um dos seis graus de liberdade e as forças básicas do elemento. Pela figura (4.12), tem-se

$$r_1 = -\Delta P_i, \quad (4.35a)$$

$$r_2 = \frac{\Delta M_i - \Delta M_j}{L}, \quad (4.35b)$$

$$r_3 = \Delta M_i, \quad (4.35c)$$

$$r_4 = \Delta P_j, \quad (4.35d)$$

$$r_5 = -\frac{(\Delta M_i - \Delta M_j)}{L}, \quad (4.35e)$$

$$r_6 = \Delta M_j, \quad (4.35f)$$

ou, utilizando-se uma organização matricial,

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1/L \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix}. \quad (4.36)$$

De modo similar, os deslocamentos básicos (ou deslocamentos naturais) do elemento, ou seja, ΔL , $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$, podem ser relacionados aos deslocamentos referentes a cada um dos seis graus de liberdade mostrados na figura (4.12) através das relações cinemáticas

$$\Delta L = (d_4 - d_1), \quad (4.37a)$$

$$\Delta \theta_i = d_3 + \left(\frac{d_5 - d_2}{L} \right), \quad (4.37b)$$

$$\Delta \theta_j = d_6 + \left(\frac{d_5 - d_2}{L} \right), \quad (4.37c)$$

ou, em uma linguagem matricial,

$$\begin{Bmatrix} \Delta L \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}. \quad (4.38)$$

Substituindo agora a expressão (4.38) em (4.32) e esta última em (4.36), encontrar-se-á

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}, \quad (4.39)$$

cujas multiplicações matriciais resultarão em

$$K_{22} = K_{55} = -K_{25} = -K_{52} = \frac{(K_{ii}^* + K_{ij}^* + K_{ji}^* + K_{jj}^*)}{L^2}, \quad (4.40a)$$

$$K_{23} = K_{32} = K_{26} = K_{62} = -K_{56} = -K_{65} = -K_{35} = -K_{53} = \frac{(K_{ii}^* + K_{ij}^*)}{L}, \quad (4.40b)$$

$$K_{33} = K_{66} = K_{ii}^*, \quad (4.40c)$$

$$K_{36} = K_{63} = K_{ij}^*. \quad (4.40d)$$

A expressão (4.39) denota, portanto, a matriz de rigidez para o elemento de viga-coluna com a consideração da influência das conexões semi-rígidas.

4.3.2.2 - Modificação da formulação proposta por Yang e Kuo (1994)

As formulações adotadas por Yang e Kuo (1994) para análise de elementos de pórticos rígidos encontram-se detalhadas e analisadas no trabalho de Galvão (2000), que será utilizado como base para implementação do elemento de viga-coluna semi-rígido.

Para esta formulação, a relação final de força-deslocamento já levando-se em consideração o efeito da semi-rigidez presente nas conexões nodais pode ser representada em sua forma matricial como sendo

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L + P/L & M_i/L & M_j/L \\ M_i/L & K_{ii}^* & K_{ij}^* \\ M_j/L & K_{ji}^* & K_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix}, \quad (4.41)$$

onde os termos ΔP , ΔM_i e ΔM_j denotam a força axial incremental e os momentos nodais incrementais, respectivamente. Além disso, ΔL , $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ mensuram o incremento de deformação axial e as rotações nodais incrementais, respectivamente. Os valores de P , M_i e M_j denotam a força axial e os momentos nodais na última configuração de equilíbrio, respectivamente. Os demais termos presentes na matriz de rigidez são os mesmos que aqueles utilizados na equação (4.32), com a diferença que os valores de K_{ii} , K_{ij} , K_{ji} e K_{jj} serão agora

$$K_{ii} = K_{jj} = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} + \frac{4P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right), \quad (4.42a)$$

$$K_{ij} = K_{ji} = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} + \frac{2P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right). \quad (4.42b)$$

As relações de equilíbrio descritas pelas equação (4.35) permanecem válidas, assim como as relações cinemáticas mostradas em (4.38). Portanto, combinando-se as equações (4.41) com as equações (4.35) e (4.37), mas levando-se em consideração (4.42), obter-se-á

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}, \quad (4.43)$$

cujos termos valem

$$K_{11} = K_{44} = -K_{14} = -K_{41} = \frac{EA}{L} + \frac{P}{L}, \quad (4.44a)$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{24} = K_{42} = -K_{15} = -K_{51} = -K_{45} = -K_{54} = -\frac{(M_i + M_j)}{L^2}, \quad (4.44b)$$

$$K_{34} = K_{43} = -K_{13} = -K_{31} = \frac{M_i}{L}, \quad (4.44c)$$

$$K_{46} = K_{64} = -K_{16} = -K_{61} = \frac{M_j}{L}, \quad (4.44d)$$

$$K_{22} = K_{55} = -K_{25} = -K_{52} = \frac{(K_{ii}^* + K_{ij}^* + K_{ji}^* + K_{jj}^*)}{L^2}, \quad (4.44e)$$

$$K_{23} = K_{32} = K_{26} = K_{62} = -K_{56} = -K_{65} = -K_{35} = -K_{53} = \frac{(K_{ii}^* + K_{ij}^*)}{L}, \quad (4.44f)$$

$$K_{33} = K_{66} = K_{ii}^*, \quad (4.44g)$$

$$K_{36} = K_{63} = K_{ij}^*. \quad (4.44h)$$

Após os procedimentos apresentados nas seções (4.3.2.1) e (4.3.2.2), o apêndice D desta dissertação mostra a verificação da matriz de rigidez do elemento híbrido para ambas as formulações a partir da hipótese de que os valores de semi-rigidez são muito grandes, o que simularia uma ligação idealmente rígida.

4.4 – ELEMENTO SEMI-RÍGIDO PROPOSTO POR SEKULOVIC e SALATIC (2001)

O trabalho de Sekulovic e Salatic (2001) trata da análise não-linear de pórticos com ligações semi-rígidas, considerando ainda a excentricidade da conexão. Tal qual o proposto por Chan e Chui (2000), aqueles autores modelam o elemento de conexão como uma mola com rigidez à rotação. Essa rigidez, em uma análise de segunda ordem, pode ser atualizada a cada estágio de carregamento por algum dos métodos expostos na seção (4.2.2) e no apêndice C. Para uma análise linear, no entanto, bastaria o valor inicial da semi-rigidez da ligação.

4.4.1 – Equações de rigidez para um elemento com conexões flexíveis excêntricas

As equações que expressam as relações força-deslocamento para elementos de viga-coluna podem se apresentar de várias formas diferentes. No entanto, numa análise discreta, é conveniente expressar tais relações sob a forma (Sekulovic e Salatic, 2001)

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 12\phi_1 & 6L\phi_2 & -12\phi_1 & 6L\phi_2 \\ 6L\phi_2 & 4L^2\phi_3 & -6L\phi_2 & 2L^2\phi_4 \\ -12\phi_1 & -6L\phi_2 & 12\phi_1 & -6L\phi_2 \\ 6L\phi_2 & 2L^2\phi_4 & -6L\phi_2 & 4L^2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \quad (4.45)$$

onde ϕ_i , $i = 1, \dots, 4$, são referidas como as funções de estabilidade. Tais funções são trigonométricas ou hiperbólicas, dependendo se a força axial é de compressão ou de tração, respectivamente. Quando a força axial é nula, todas estas funções ϕ_i , $i = 1, \dots, 4$, reduzem-se a 1 e a matriz de rigidez torna-se a mesma da análise linear. Expressões analíticas para as funções ϕ_i e expansões apropriadas em forma de série de potências, convenientes para análises numéricas, podem ser encontradas nos trabalhos de Goto e Chen (1987) e Chen e Lui (1991).

A convenção para a direção positiva das forças e dos deslocamentos nodais é mostrada na figura (4.12). Deve-se enfatizar que as relações entre forças e

deslocamentos na extremidade da viga são não-lineares, já que as funções ϕ_i dependem da força axial, que também é função dos deslocamentos nodais e das rotações. No caso de uma análise de segunda ordem linearizada, a matriz de rigidez possui a forma geral

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma, \quad (4.46)$$

onde \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_σ são as matrizes de rigidez linear elástica e geométrica, respectivamente. A matriz \mathbf{K} mostrada em (4.46) pode ser obtida se funções polinomiais de interpolação forem utilizadas ao invés das funções de estabilidade sob suas formas trigonométrica e hiperbólica (Chen e Lui, 1991).

A figura (4.14) mostra um elemento de viga com conexões nodais flexíveis, com excentricidades e_i e e_j em relação aos nós i e j , respectivamente. As relações entre as rotações da viga (θ_{bi}) e do nó (θ_{ci}), de acordo com a mesma figura, podem ser descritas como

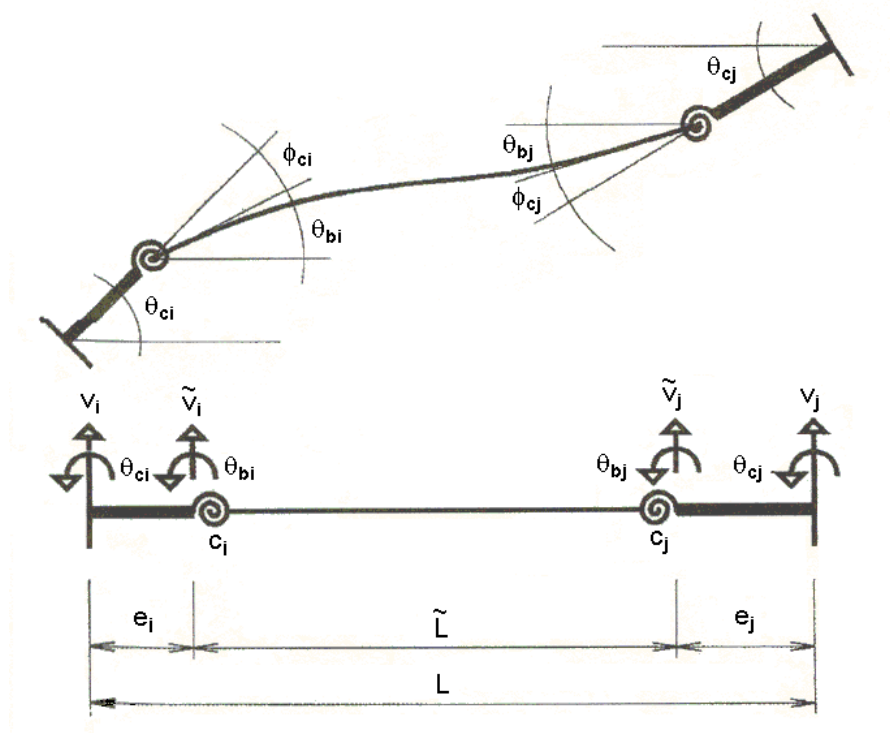


Figura 4.14 – Elemento de viga com conexões flexíveis e excêntricas (Sekulovic e Salatic, 2001).

$$\phi_{ci} = \theta_{ci} - \theta_{bi}, \quad (4.47a)$$

$$\phi_{cj} = \theta_{cj} - \theta_{bj}, \quad (4.47b)$$

onde ϕ_{ci} e ϕ_{cj} são as rotações relativas devido à flexibilidade das conexões, que são modeladas como elementos de mola com rigidez rotacional. Estas rotações relativas dependem das rigidezes das molas e dos momentos fletores atuando nas extremidades da viga, ou seja,

$$\phi_{ci} = \frac{M_{ci}}{S_{ci}}, \quad (4.48a)$$

$$\phi_{cj} = \frac{M_{cj}}{S_{cj}}, \quad (4.48b)$$

sendo M_{ci} , M_{cj} , S_{ci} , S_{cj} os momentos e as rigidezes das conexões nos nós i e j , respectivamente. Os momentos M_{ci} e M_{cj} podem ser calculados a partir da expressão

$$\begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4L\phi_3 & -6\phi_2 & 2L\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2L\phi_4 & -6\phi_2 & 4L\phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_{bi} \\ \tilde{v}_j \\ \theta_{bj} \end{Bmatrix}, \quad (4.49)$$

que, tendo-se em vista (4.47), transformar-se-á em

$$\begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4L\phi_3 & -6\phi_2 & 2L\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2L\phi_4 & -6\phi_2 & 4L\phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_{ci} - \phi_{ci} \\ \tilde{v}_j \\ \theta_{cj} - \phi_{cj} \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\phi}), \quad (4.50)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{d}}^T = \{\tilde{v}_i \quad \theta_{ci} \quad \tilde{v}_j \quad \theta_{cj}\}, \quad (4.51a)$$

$$\boldsymbol{\phi}^T = \{0 \quad \phi_{ci} \quad 0 \quad \phi_{cj}\}. \quad (4.51b)$$

A substituição da equação (4.48) na equação (4.50) levará a

$$\begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4L\phi_3 & -6\phi_2 & 2L\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2L\phi_4 & -6\phi_2 & 4L\phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_{ci} \\ \tilde{v}_j \\ \theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_{ci} \\ 0 \\ \phi_{cj} \end{Bmatrix} \therefore \quad (4.52a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4L\phi_3 & -6\phi_2 & 2L\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2L\phi_4 & -6\phi_2 & 4L\phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_{ci} \\ \tilde{v}_j \\ \theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/S_{ci} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix}. \quad (4.52b)$$

Fazendo-se agora

$$\mathbf{K}_{S_c} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1/S_{ci} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/S_{cj} \end{Bmatrix}, \quad (4.53)$$

a expressão (4.52b) poderá ser rescrita como sendo

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{K}_{S_c} \mathbf{M}) \therefore \quad (4.54a)$$

$$\mathbf{M} + \mathbf{H}\mathbf{K}_{S_c} \mathbf{M} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{d}} \therefore \quad (4.54b)$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{K}_{S_c})\mathbf{M} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{d}} \therefore \quad (4.54c)$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{K}_{S_c})^{-1} \mathbf{H}\tilde{\mathbf{d}}, \quad (4.54d)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade de ordem 2. Substituindo novamente as matrizes de volta na última equação, obter-se-á

$$\mathbf{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4L\phi_3 & -6\phi_2 & 2L\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2L\phi_4 & -6\phi_2 & 4L\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/S_{ci} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/S_{cj} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \times \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4L\phi_3 & -6\phi_2 & 2L\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2L\phi_4 & -6\phi_2 & 4L\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_{ci} \\ \tilde{v}_j \\ \theta_{cj} \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

o que fornecerá

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{\Delta L^2} \begin{bmatrix} 1+4g_j\phi_3 & -2g_j\phi_4 \\ -2g_i\phi_4 & 1+4g_i\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4L\phi_3 & -6\phi_2 & 2L\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2L\phi_4 & -6\phi_2 & 4L\phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_{ci} \\ \tilde{v}_j \\ \theta_{cj} \end{Bmatrix}, \quad (4.56)$$

onde

$$\Delta = (1+4g_i\phi_3)(1+4g_j\phi_3) - 4g_i g_j \phi_4^2, \quad (4.57a)$$

$$g_i = \frac{EI}{LS_{ci}} \text{ e } g_j = \frac{EI}{LS_{cj}} \quad (4.57b)$$

Substituindo agora (4.48) e (4.56) em (4.51b), o vetor ϕ de rotações relativas poderá ser expresso através do vetor $\tilde{\mathbf{d}}$ de deslocamentos nodais, ou seja,

$$\phi = \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_{ci} \\ 0 \\ \phi_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/S_{ci} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix} \therefore \quad (4.58a)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/S_{ci} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/S_{cj} \end{bmatrix} \frac{EI}{\Delta L^2} \begin{bmatrix} 1+4g_j\phi_3 & -2g_j\phi_4 \\ -2g_i\phi_4 & 1+4g_i\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4L\phi_3 & -6\phi_2 & 2L\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2L\phi_4 & -6\phi_2 & 4L\phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_{ci} \\ \tilde{v}_j \\ \theta_{cj} \end{Bmatrix}, \quad (4.58b)$$

sendo que o produto entre as matrizes será

$$\Phi = \tilde{S} \tilde{d}, \quad (4.59)$$

que, sob uma forma matricial, tornar-se-á

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_{ci} \\ \tilde{v}_j \\ \theta_{cj} \end{Bmatrix}, \quad (4.60)$$

cujos termos diferentes de zero valem

$$s_{21} = -s_{23} = \frac{6}{L} [g_1 + 2g_1g_2(2\phi_3 - \phi_4)]\phi_2, \quad (4.61a)$$

$$s_{22} = 4[g_1\phi_3 + g_1g_2(4\phi_3^2 - \phi_4^2)], \quad (4.61b)$$

$$s_{24} = 2g_1\phi_4, \quad (4.61c)$$

$$s_{41} = -s_{43} = \frac{6}{L} [g_2 + 2g_1g_2(2\phi_3 - \phi_4)]\phi_2, \quad (4.61d)$$

$$s_{42} = 2g_2\phi_4, \quad (4.61e)$$

$$s_{44} = 4[g_2\phi_3 + g_1g_2(4\phi_3^2 - \phi_4^2)]. \quad (4.61f)$$

A função que descreve o deslocamento lateral $v(x)$ para o elemento com conexões flexíveis pode ser escrita utilizando-se funções polinomiais de interpolação de Hermite (Sekulovic e Malcevic, 1994) e o vetor de deslocamentos nodais, ou seja,

$$v(x) = \mathbf{N}(x)(\tilde{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{N}(x)(\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{S}\tilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{N}(x)(\mathbf{I} - \mathbf{S})\tilde{\mathbf{d}}, \quad (4.62)$$

onde

$$\mathbf{N}(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \quad (4.63)$$

denota a matriz de funções de interpolação de Hermite, cujos termos serão

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}, \quad (4.64a)$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \quad (4.64b)$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, \quad (4.64c)$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}. \quad (4.64d)$$

O efeito da excentricidade da conexão, devido principalmente ao tamanho do elemento de ligação, é, em geral, negligenciado na análise e projeto de pórticos planos. No entanto, sua presença pode influenciar o comportamento estrutural. Na figura (4.14), a excentricidade é modelada por elementos curtos e infinitamente rígidos, cujos comprimentos são e_i e e_j . No caso de pequenas rotações, a relação entre os deslocamentos verticais das extremidades da viga \tilde{v}_i e \tilde{v}_j e os deslocamentos verticais nodais v_i e v_j pode ser expressa pela equação matricial

$$\tilde{\mathbf{d}} = (\mathbf{I} + \mathbf{E})\mathbf{d}, \quad (4.65)$$

onde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.66a)$$

$$\mathbf{d}^T = \{v_i \quad \theta_{ci} \quad v_j \quad \theta_{cj}\}. \quad (4.66b)$$

A substituição da equação (4.65) na equação (4.62) leva a

$$v(x) = \mathbf{N}(x)(\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} + \mathbf{E})\mathbf{d} = \mathbf{N}(x)(\mathbf{I} - \mathbf{S} + \mathbf{E} - \mathbf{SE})\mathbf{d} = \mathbf{N}(x)(\mathbf{I} + \mathbf{G})\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{N}}(x)\mathbf{d}, \quad (4.67)$$

onde

$$\mathbf{G} = (-\mathbf{S} + \mathbf{E} - \mathbf{SE}) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & \Delta \mathbf{e}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} & \mathbf{g}_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_{41} & \mathbf{g}_{42} & \mathbf{g}_{43} & \mathbf{g}_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

com os elementos da matriz \mathbf{G} definidos da seguinte forma:

$$s_{21} = -s_{23} = -\frac{6}{L} [\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2(2\phi_3 - \phi_4)]\phi_2, \quad (4.69a)$$

$$s_{22} = -\frac{6\mathbf{e}_1}{L} [\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2(2\phi_3 - \phi_4)]\phi_2 - 4[\mathbf{g}_1\phi_3 + \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2(4\phi_3^2 - \phi_4^2)], \quad (4.69b)$$

$$s_{24} = -\frac{6\mathbf{e}_2}{L} [\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2(2\phi_3 - \phi_4)]\phi_2 - 2\mathbf{g}_1\phi_4, \quad (4.69c)$$

$$s_{41} = -s_{43} = -\frac{6}{L} [\mathbf{g}_2 + 2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2(2\phi_3 - \phi_4)]\phi_2, \quad (4.69d)$$

$$s_{42} = -\frac{6\mathbf{e}_1}{L} [\mathbf{g}_2 + 2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2(2\phi_3 - \phi_4)]\phi_2 - 2\mathbf{g}_2\phi_4, \quad (4.69e)$$

$$s_{44} = -\frac{6\mathbf{e}_2}{L} [\mathbf{g}_2 + 2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2(2\phi_3 - \phi_4)]\phi_2 - 4[\mathbf{g}_2\phi_3 + \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2(4\phi_3^2 - \phi_4^2)]. \quad (4.69f)$$

A equação (4.67) trata dos deslocamentos laterais $v(x)$ do elemento para o caso com conexões flexíveis da mesma forma que o elemento com conexões rígidas. A única diferença está na matriz de funções de interpolação, que para o caso semi-rígido é obtida pela modificação da matriz de funções de interpolação para elementos com conexões rígidas. A matriz de correção \mathbf{G} , definida em (4.68), contém os efeitos da flexibilidade e excentricidade da conexão separadamente (o primeiro e segundo termos) e acoplados (terceiro termo). Se, na equação (4.68), \mathbf{S} e \mathbf{E} são substituídos por matrizes nulas, ter-se-á que $\mathbf{G} = 0$ e a equação (4.67) reduz-se à já conhecida equação para o elemento com conexões rígidas.

4.4.2 – Matriz de rigidez e vetor de forças nodais equivalentes

A matriz de rigidez para o elemento com conexões flexíveis pode ser obtida através da energia interna de deformação, que pode ser escrita como sendo

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EA\varepsilon^2 + EI\kappa^2) dx + \sum_{i=1}^2 c_i \alpha_i^2. \quad (4.70)$$

O primeiro termo na equação anterior é a energia interna do elemento de viga-coluna e o somatório subsequente refere-se à energia interna das molas. Tendo-se em vista que (Sekulovic e Salatic, 2000)

$$\kappa = -\frac{d^2 v}{dx^2}, \quad (4.71a)$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{I}{A} k^2, \quad (4.71b)$$

que representam a deformação devido à flexão e à força axial, respectivamente, e considerando ainda que o termo k^2 da última equação pode ser descrito como

$$k^2 = \frac{A}{I} \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right], \quad (4.71c)$$

pode-se rescrever a equação (4.70), que agora será

$$U = \frac{EI^2}{2A} k^4 \int_0^L dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^2 c_i \alpha_i^2 \therefore$$

$$U = U_a + U_f + U_s, \quad (4.72)$$

onde

$$U_a = \frac{EI^2}{2A} k^4 L, \quad (4.73a)$$

$$U_f = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (4.73b)$$

$$U_s = \sum_{i=1}^2 c_i \alpha_i^2, \quad (4.73c)$$

cujos termos significam as energias de deformação da viga, axial (U_a) e à flexão (U_f), e a energia potencial das molas (U_s).

As parcelas de energia devido à deformação axial (U_a) e à curvatura da viga (U_f) estão acopladas, uma vez que o termo k^2 , de acordo com a equação (4.71c), inclui as derivadas tanto dos deslocamentos axiais quanto dos deslocamentos laterais. Com a hipótese de que $k^2 = \text{constante}$ (Sekulovic e Salatic, 2001), essas parcelas podem ser expressas de forma independente. Daí, após a substituição da equação (4.67) na equação (4.73b), obtém-se

$$U_f = \frac{EI}{2} \int_0^L (\tilde{\mathbf{N}}''(x) \mathbf{d})^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L (\mathbf{N}''(x) (\mathbf{I} + \mathbf{G}) \mathbf{d})^2 dx \therefore \quad (4.74a)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{I} + \mathbf{G})^T \left\{ \int_0^L EI [\mathbf{N}''(x)^T \mathbf{N}''(x)] dx \right\} (\mathbf{I} + \mathbf{G}) \mathbf{d} \therefore \quad (4.74b)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{I} + \mathbf{G})^T \mathbf{k}_{II} (\mathbf{I} + \mathbf{G}) \mathbf{d} \therefore \quad (4.74c)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{k}_{II} + \mathbf{G}^T \mathbf{k}_{II} + \mathbf{k}_{II} \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{k}_{II} \mathbf{G}) \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{k}_{II} + \mathbf{k}_{ef}) \mathbf{d} , \quad (4.74d)$$

onde as matrizes \mathbf{k}_{II} e \mathbf{k}_{ef} denotam as matrizes de rigidez para o elemento de viga-coluna com conexões rígidas e de correção que inclui os efeitos da flexibilidade e da excentricidade da conexão, respectivamente, e são definidas como sendo

$$\mathbf{k}_{II} = \int_0^L EI [\mathbf{N}''(x)^T \mathbf{N}''(x)] dx , \quad (4.75a)$$

$$\mathbf{k}_{ef} = \mathbf{G}^T \mathbf{k}_{II} + \mathbf{k}_{II} \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{k}_{II} \mathbf{G} . \quad (4.75b)$$

A energia interna de deformação das molas, descrita pela equação (4.73c), pode ser expressa sob a forma

$$U_s = \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi} , \quad (4.76)$$

onde a matriz \mathbf{C} é descrita como sendo

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{cj} \end{bmatrix} . \quad (4.77)$$

Substituindo a equação (4.59) na equação (4.76) e considerando (4.65), ter-se-á

$$U_s = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{d}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{I} + \mathbf{E})^T \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{S}^T + \mathbf{E}^T \mathbf{S}^T) \mathbf{C} (\mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{E}) \mathbf{d} \therefore (4.78a)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_s \mathbf{d}. \quad (4.78b)$$

Das equações (4.78a) e (4.78b), pode-se deduzir que

$$\mathbf{k}_s = \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{G}}, \quad (4.79a)$$

sendo a matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ definida por

$$\tilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{E}) = -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.79b)$$

Das expressões (4.74d) e (4.78b), a energia interna total devido à flexão de um elemento de viga-coluna com conexões semi-rígidas pode agora ser escrita como sendo

$$U = U_f + U_s = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (\mathbf{k}_{II} + \mathbf{k}_{ef} + \mathbf{k}_s) \mathbf{q}, \quad (4.80)$$

de onde se conclui que a matriz de rigidez é expressa segundo

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_{II} + \mathbf{k}_{ef} + \mathbf{k}_s. \quad (4.81)$$

O vetor de forças nodais equivalentes devido a cargas $q(x)$ distribuídas ao longo da viga é obtido da maneira usual, ou seja,

$$\mathbf{Q} = \int_0^L q(x) \tilde{\mathbf{N}}^T(x) dx = (\mathbf{I} + \mathbf{G})^T \int_0^L q(x) \mathbf{N}^T(x) dx. \quad (4.82)$$

4.5 – ELEMENTO SEMI-RÍGIDO PROPOSTO POR CHEN e LUI (1991)

Nesta seção, a matriz de rigidez de um elemento com conexões flexíveis em suas extremidades será obtida através dos procedimentos propostos por Chen e Lui (1991).

Para incorporar o efeito da flexibilidade da conexão nas relações de rigidez do elemento, tal qual os métodos utilizados por Chan e Chui (2000) e Sekulovic e Salatic (2001), utilizar-se-á molas com relações momento-rotação descritas por algum dos modelos fornecidos na seção (4.2.2) ou no apêndice C para representar a ligação semi-rígida. Essas molas são fisicamente conectadas à viga pelas imposições de equilíbrio e de compatibilidade em suas junções. De acordo com a figura (4.15a), em que um elemento de viga com seis graus de liberdade e dois elementos de mola (A e B) com dois graus de liberdade cada um são mostrados como três elementos separados, as relações momento-rotação para as conexões A e B podem ser expressas como sendo

$$\begin{Bmatrix} M_{1ci} \\ M_{2ci} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1ci} \\ d_{2ci} \end{Bmatrix} \quad (4.83a)$$

para o primeiro nó e

$$\begin{Bmatrix} M_{1cj} \\ M_{2cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1cj} \\ d_{2cj} \end{Bmatrix} \quad (4.83b)$$

para o segundo nó.

Nas duas equações anteriores, os parâmetros M_{1ci} , M_{2ci} , M_{1cj} e M_{2cj} denotam os momentos nas conexões e os parâmetros d estão relacionados às rotações das respectivas conexões através das igualdades $\phi_{ci} = d_{1ci} - d_{2ci}$ e $\phi_{cj} = d_{1cj} - d_{2cj}$. Além disto, S_{ci} e S_{cj} são os valores da rigidez das ligações.

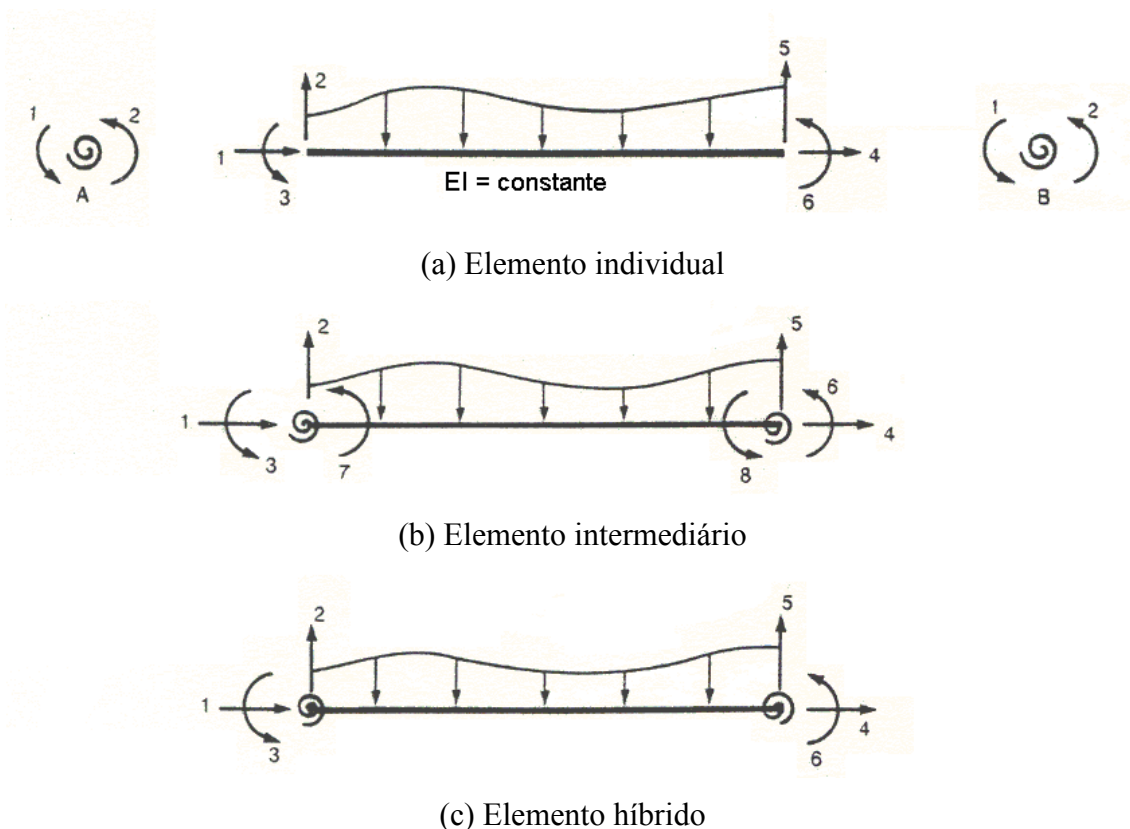


Figura 4.15 – Elemento híbrido de viga-coluna (Chen e Lui, 1991).

Simbolicamente, as relações de rigidez de uma viga com carregamento distribuído podem ser representadas como sendo

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}\mathbf{d} + \mathbf{r}_F, \quad (4.84)$$

onde \mathbf{r} é o vetor de forças do elemento, \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{K} é a matriz de rigidez do elemento, definida assim como na equação (4.45).

Para anexar as conexões à viga e formar um elemento híbrido, é conveniente considerar um elemento intermediário, como mostrado na figura (4.15b). A relação de equilíbrio para este elemento pode ser facilmente obtida pela técnica matricial padrão. O processo é executado primeiro escrevendo-se as relações momento-rotação e de rigidez para os três elementos mostrados na figura (4.15a) numa forma maior, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} M_{1ci} \\ M_{2ci} \\ \mathbf{r} \\ M_{1cj} \\ M_{2cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & & & \\ -S_{ci} & S_{ci} & & & \\ & & \mathbf{K} & & \\ & & & S_{cj} & -S_{cj} \\ & & & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1ci} \\ d_{2ci} \\ \mathbf{d} \\ d_{1cj} \\ d_{2cj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{r}_F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.85)$$

expressão esta que pode ser rescrita como sendo

$$\underset{10 \times 1}{\mathbf{r}_a} = (\underset{10 \times 10}{\mathbf{K}_a} \underset{10 \times 1}{\mathbf{d}_a}) + \underset{10 \times 1}{\mathbf{r}_{Fa}}. \quad (4.86)$$

Considerando agora as relações cinemáticas para pequenos deslocamentos entre os graus de liberdade dos três elementos mostrados na figura (4.15a), pode-se escrever que

$$\begin{Bmatrix} d_{1ci} \\ d_{2ci} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_{1cj} \\ d_{2cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1int} \\ d_{2int} \\ d_{3int} \\ d_{4int} \\ d_{5int} \\ d_{6int} \\ d_{7int} \\ d_{8int} \end{Bmatrix}. \quad (4.87)$$

Simbolicamente, as relações cinemáticas anteriores podem ser escritas como sendo

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{T} \mathbf{d}_{int}. \quad (4.88)$$

Pela lei do contragradiente, as relações de equilíbrio, assumindo-se pequenos deslocamentos, são dadas por

$$\mathbf{r}_{\text{int}} = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_a, \quad (4.89)$$

onde \mathbf{r}_{int} e \mathbf{r}_a são os vetores de forças atuando nos graus de liberdade das figuras (4.15a) e (4.15b), respectivamente. Combinando-se as equações (4.86), (4.88) e (4.89), obter-se-á

$$\mathbf{r}_{\text{int}} = \mathbf{T}^T (\mathbf{K}_a \mathbf{d}_a + \mathbf{r}_{Fa}) = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_a \mathbf{T} \mathbf{d}_{\text{int}} + \mathbf{T}^T \mathbf{r}_{Fa}, \quad (4.90)$$

ou ainda,

$$\underset{8 \times 1}{\mathbf{r}_{\text{int}}} = \underset{8 \times 8}{\mathbf{K}_{\text{int}}} \underset{8 \times 1}{\mathbf{d}_{\text{int}}} + \underset{8 \times 1}{\mathbf{r}_{F\text{int}}}, \quad (4.91)$$

onde

$$\mathbf{K}_{\text{int}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_a \mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccccc|cc} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 & K_{13} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & 0 & K_{24} & K_{25} & 0 & K_{23} & K_{26} \\ 0 & 0 & S_{ci} & 0 & 0 & 0 & -S_{ci} & 0 \\ K_{14} & K_{24} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 & K_{34} & K_{46} \\ K_{15} & K_{25} & 0 & K_{45} & K_{55} & 0 & K_{35} & K_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{cj} & 0 & -K_{cj} \\ \hline K_{13} & K_{23} & -S_{ci} & K_{34} & K_{35} & 0 & S_{ci} + K_{33} & K_{36} \\ K_{16} & K_{26} & 0 & K_{46} & K_{56} & -S_{cj} & K_{36} & S_{cj} + K_{66} \end{array} \right], \quad (4.92)$$

em que os termos K_{ij} , $i = 1, \dots, 6$ e $j = 1, \dots, 6$, referem-se àqueles contidos na matriz de rigidez expressa pela equação (4.45) e, além disso,

$$\mathbf{r}_{F\text{int}}^T = \{r_{F1} \quad r_{F2} \quad 0 \quad r_{F4} \quad r_{F5} \quad 0 \quad r_{F3} \quad r_{F6}\}, \quad (4.93)$$

em que os termos r_{Fi} , $i = 1, \dots, 6$, referem-se àqueles do vetor de forças nodais da viga, descritos pela figura (4.15c).

Tendo-se desenvolvido a relação força-deslocamento, ou de rigidez, para o elemento de viga-coluna híbrido intermediário da figura (4.15b), a relação para o elemento híbrido final da figura (4.15a) pode ser obtida condensando-se estaticamente os graus de liberdade sete e oito. Para executar esta tarefa, a matriz definida pela equação (4.92) é particionada em quatro sub-matrizes. O mesmo ocorre com os vetores \mathbf{d}_{int} e \mathbf{r}_{int} , subdivididos em dois sub-vetores cada um. Daí, visualmente, ter-se-á

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{\text{int A}} \\ \mathbf{r}_{\text{int B}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{int AA}} & \mathbf{K}_{\text{int AB}} \\ \mathbf{K}_{\text{int BA}} & \mathbf{K}_{\text{int BB}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{\text{int A}} \\ \mathbf{d}_{\text{int B}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{\text{Fint A}} \\ \mathbf{r}_{\text{Fint B}} \end{Bmatrix}. \quad (4.94)$$

Sabendo-se que

$$\mathbf{r}_{\text{int B}} = 0 = \mathbf{K}_{\text{int BA}} \mathbf{d}_{\text{int A}} + \mathbf{K}_{\text{int BB}} \mathbf{d}_{\text{int B}} + \mathbf{r}_{\text{Fint B}}, \quad (4.95)$$

obter-se-á

$$\mathbf{d}_{\text{int B}} = -\mathbf{K}_{\text{int BB}}^{-1} (\mathbf{K}_{\text{int BA}} \mathbf{d}_{\text{int A}} + \mathbf{r}_{\text{Fint B}}). \quad (4.96)$$

Substituindo-se então a equação (4.96) em (4.94), encontrar-se-á

$$\mathbf{r}_{\text{int A}} = \mathbf{K}_{\text{int AA}} \mathbf{d}_{\text{int A}} + \mathbf{K}_{\text{int AB}} \mathbf{d}_{\text{int B}} + \mathbf{r}_{\text{Fint A}} \therefore \quad (4.97a)$$

$$= \mathbf{K}_{\text{int AA}} \mathbf{d}_{\text{int A}} - \mathbf{K}_{\text{int AB}} \mathbf{K}_{\text{int BB}}^{-1} (\mathbf{K}_{\text{int BA}} \mathbf{d}_{\text{int A}} + \mathbf{r}_{\text{Fint B}}) + \mathbf{r}_{\text{Fint A}} \therefore \quad (4.97b)$$

$$= (\mathbf{K}_{\text{int AA}} - \mathbf{K}_{\text{int AB}} \mathbf{K}_{\text{int BB}}^{-1} \mathbf{K}_{\text{int BA}}) \mathbf{d}_{\text{int A}} + (\mathbf{r}_{\text{Fint A}} - \mathbf{K}_{\text{int AB}} \mathbf{K}_{\text{int BB}}^{-1} \mathbf{r}_{\text{Fint B}}), \quad (4.97c)$$

ou, de outra forma,

$$\mathbf{r}_{\text{hib}} = \mathbf{K}_{\text{hib}} \mathbf{d}_{\text{hib}} + \mathbf{r}_{\text{Fhib}}, \quad (4.98)$$

de onde deduz-se que

$$\mathbf{r}_{\text{hib}} = \mathbf{r}_{\text{int A}} , \quad (4.99a)$$

$$\mathbf{d}_{\text{hib}} = \mathbf{d}_{\text{int A}} , \quad (4.99b)$$

$$\mathbf{K}_{\text{hib}} = \mathbf{K}_{\text{int AA}} - \mathbf{K}_{\text{int AB}} \mathbf{K}_{\text{int BB}}^{-1} \mathbf{K}_{\text{int BA}} , \quad (4.99c)$$

$$\mathbf{r}_{\text{Fhib}} = \mathbf{r}_{\text{Fint A}} - \mathbf{K}_{\text{int AB}} \mathbf{K}_{\text{int BB}}^{-1} \mathbf{r}_{\text{Fint B}} . \quad (4.99d)$$

Deverá ser observado que a matriz de rigidez expressa na equação (4.99c) e o vetor de forças nodais expresso na equação (4.99d) para o elemento de viga híbrido levam em consideração tanto o efeito da força axial quanto o efeito da flexibilidade da conexão no elemento. Além disso, as rigidezes das conexões nas extremidades da viga não precisam ser iguais. Em outras palavras, esta formulação, tal qual as outras duas mostradas anteriormente, permitem a consideração de casos em que a força axial no elemento é apreciável e as ligações se comportam de forma diferente.

Numa análise não-linear, a equação (4.96) é, em geral, expressa sob uma forma incremental. Os vetores de força e deslocamento representam os incrementos de carga e deslocamento, respectivamente, preferivelmente a seus valores totais. A análise é executada em pequenos passos lineares utilizando-se, por exemplo, alguma das técnicas descritas no apêndice A. A matriz de rigidez, que agora é função da força axial e das rigidezes das conexões, é atualizada constantemente ao longo de toda a análise.

5.

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

5.1 – INTRODUÇÃO

Após as definições, análises e procedimentos matemáticos apresentados nos capítulos 3 e 4, faz-se necessário uma explanação geral sobre quais os procedimentos computacionais adotados com o objetivo de se realizar análises de sistemas estruturais rotulados (2D e 3D) e semi-rígidos.

Em vista disto, na seção (5.2) serão apresentadas algumas das características principais do programa computacional, idealizado em sua gênese por Silveira (1995), em seu trabalho de doutorado, e elaborado utilizando a linguagem FORTRAN 4.0 (1994-1995).

A seguir, na seção (5.3), será dada uma visão geral da metodologia de solução linear de pórticos semi-rígidos, possível após modificações no procedimento já existente para sistemas estruturais perfeitamente rígidos. A natureza dessas modificações é analisada logo depois, bem como algumas novas inserções que se fizeram necessárias, tais como na sub-rotina de leitura de dados, que teve de ser adaptada de modo a abranger os dados de caracterização dos elementos semi-rígidos.

Finalmente, na seção (5.4), é apresentada a metodologia de solução não-linear empregada para analisar sistemas estruturais semi-rígidos planos e estruturas rotuladas planas e espaciais. Em seguida, dar-se-á ênfase às modificações ocorridas em sub-rotinas já existentes e às novas implementações realizadas, de modo a possibilitar as análises ambicionadas no escopo deste trabalho.

5.2 – CARACTERÍSTICAS GERAIS DO PROGRAMA

Para a implementação dos elementos não-lineares de treliça e de pórtico semi-rígido, foi utilizado o programa computacional desenvolvido, em linguagem FORTRAN 4.0 (1994-1995), por Silveira (1995), como parte integrante de sua Tese de Doutorado, e, posteriormente, expandido por Rocha (2000) e Galvão (2000; 2001). O esquema geral do programa computacional encontra-se na figura (5.1) e mostra os dois tipos principais de análises que podem ser realizadas: problemas estáticos ou dinâmicos, estes últimos ainda em fase de implementação. Já a figura (5.2) apresenta o fluxograma do programa principal na parte concernente à análise estática, que, por sua vez, se divide em soluções lineares e não-lineares. Os objetos destacados indicam os novos tipos de sistemas estruturais passíveis de análise, ou seja, treliças planas e espaciais e pórticos semi-rígidos, enquanto os demais objetos indicam análises já implementadas. A seguir, serão abordados alguns pontos relevantes às soluções linear e não-linear, bem como as modificações e novas implementações concluídas.

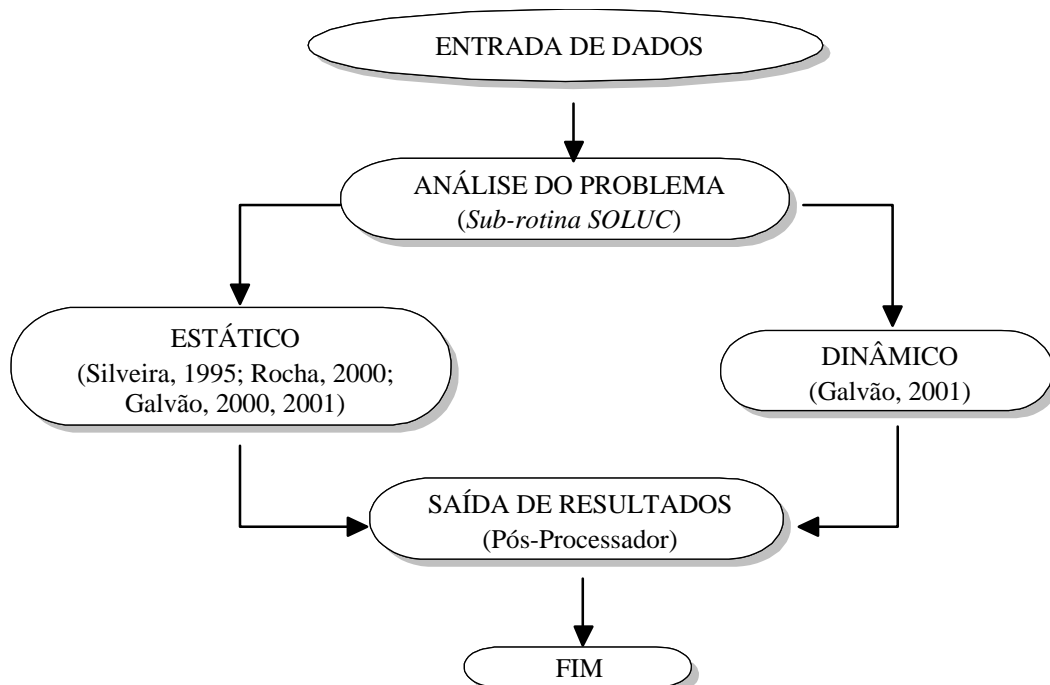


Figura 5.1 – Divisão geral do programa computacional.

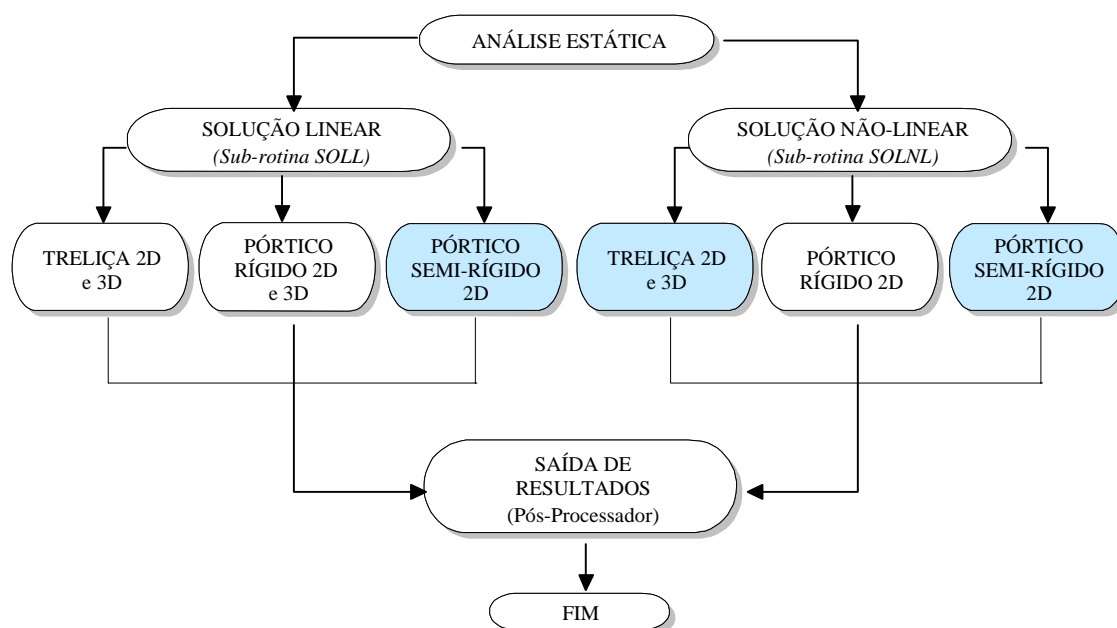


Figura 5.2 – Estrutura do programa principal para análises estáticas.

5.3 – SOLUÇÃO LINEAR

A figura (5.3) apresenta o fluxograma geral de funcionamento da solução linear, modificada para atender à análise de pórticos semi-rígidos. Caso se deseje fazer tal análise, o primeiro procedimento a ser realizado pelo programa computacional é a leitura do arquivo de entrada de dados, que foi modificado para além de conter dados sobre a geometria do modelo estrutural, propriedades físicas dos materiais que compõem a estrutura, carregamento externo atuante, etc., também conter dados referentes às conexões semi-rígidas. A figura (5.4) apresenta um exemplo de uma modelagem de um pórtico com ligações semi-rígidas.

Neste arquivo de entrada de dados, os valores das variáveis que se referem aos dados de semi-rigidez são os seguintes:

a) SEMI: define se haverá ou não a leitura dos dados dos elementos semi-rígidos, além de indicar o comportamento da ligação. Se for igual a 1, os valores de semi-rigidez do elemento híbrido são mantidos constantes, o que vale tanto para a solução linear quanto para a não-linear. Se for igual a 2, indica que as conexões se

comportam de forma não-linear, o que é utilizado apenas na solução de mesmo tipo. Além destes, SEMI pode assumir apenas valor zero, o que indica a ausência de conexões semi-rígidas. Deve-se salientar que sendo SEMI igual a 1 ou 2 será acionada a leitura do macro-comando STIF, que tem por finalidade identificar o início da leitura dos dados relacionados à modelagem e à caracterização de um sistema estrutural com conexões semi-rígidas. Além disso, se SEMI receber valor zero, o macro-comando STIF não será identificado e a solução requerida, seja ela linear ou não-linear, restringir-se-á àquela com ligações idealmente rígidas.

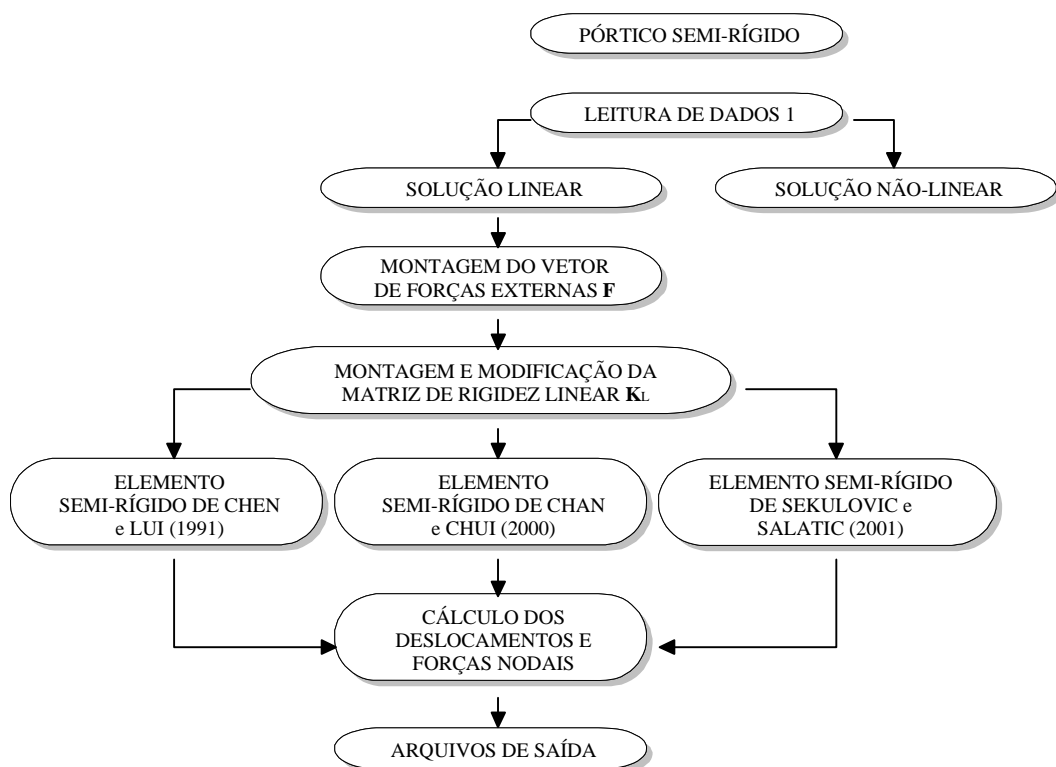


Figura 5.3 – Fluxograma geral da solução linear.

b) SRFOR: indica que procedimento de modificação da matriz de rigidez linear será adotado. Essa variável interna pode ser 1, o que leva à seqüência de cálculos de Chen e Lui (1991); de valor 2, levando ao procedimento de Chan e Chui (2000), ou 3, sinalizando a utilização dos cálculos de Sekulovic e Salatic (2001);

c) NCTYPE: mensura a quantidade de grupos de elementos com diferentes valores de semi-rigidez;

d) STIFI, STIFJ: correspondem aos valores dos fatores de rigidez (*fixity factors*) de ambos os nós do elemento. O fator de rigidez varia de zero, para o caso idealmente rotulado, a 1, para o caso perfeitamente rígido;

e) EI, EJ: indicam as excentricidades de ambas as ligações no elemento de viga-coluna. Estes valores somente serão utilizados caso SRFOR seja igual a três;

f) NGELM: indica o número de grupos de elementos com os mesmos valores de STIFI, STIFJ, EI e EJ;

```

CL160 - WordPad
Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ajuda

Exemplo de Chan e Chui (2000, pg. 168) - Análise Não-linear ...title
31 30 2 1 2 1 2 ...npoin,nelen,ndime,nnets,npnat,npsse,npsec
1 1 1 2 3 1 0 ...ncase,nstype,nplot,nnode,ndofn,semi,npar
ccor ...MACRO-COMANDO
ppor ...MACRO-COMANDO
31
1 1 0.0000 0.0000 ...no,ng,x,y
11 1 0.0000 3.5240
21 1 3.5240 3.5240
31 1 3.5240 0.0000
boun ...MACRO-COMANDO
1 1 1 1 0 ...no,ng,dx,dy,mz
31 1 1 1 0
elem ...MACRO-COMANDO
1 1 2 1 ...ei,nei,mej,lx
30 30 31 1
mate ...MACRO-COMANDO
2.05e8 0.78925e8 ...E,G
1 ...ngelm
1 30 ...kell,kel2
seca ...MACRO-COMANDO
5890.e-6 2.7e-5 ...a, I
1 ...ngelm
1 30 ...kell,kel2
plot ...MACRO-COMANDO
'mesh' 1.0 0.0 ...lci,ct(1),ct(2)
graf ...MACRO-COMANDO
11 11 ...npl,ndl
stif ...MACRO-COMANDO
3 2 ...srfor,nctype
0.25 1.0 0.0 0.0 ...stifi,stifj,ei,ej
1 ...ngelm
11 11 ...kell,kel2
1.0 0.25 0.0 0.0 ...stifi,stifj,ei,ej
1 ...ngelm
20 20 ...kell,kel2
load ...MACRO-COMANDO
1 0 ...iplod,iedge
11 0.001 -1.0 0.0 ...no,px,py,mz
21 0.0 -1.0 0.0
31 0.0 0.0 0.0
end

```

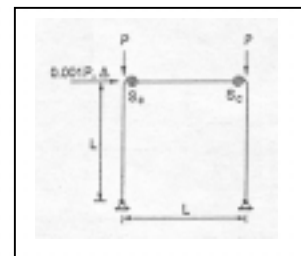


Figura 5.4 – Exemplo de um arquivo de entrada de dados para o pórtico semi-rígido mostrado em detalhe.

A seguir, serão apresentadas de forma mais detalhada algumas sub-rotinas onde modificações e/ou novas inserções foram realizadas, para que no procedimento padrão de solução linear de pórticos também houvesse a consideração de elementos semi-rígidos.

5.3.1 – Sub-rotina SEMIRIGID

No estudo da análise de pórticos com ligações semi-rígidas, antes de qualquer implementação referente às matrizes de rigidez ou ao cálculo do vetor de forças internas, foi necessária a inserção de uma sub-rotina que pudesse ler e armazenar os dados concernentes à semi-rigidez dos elementos de conexão. Na base computacional existente, a sub-rotina responsável pela leitura dos dados gerais da estrutura, tais como geometria, carregamento, condições de contorno, etc., é denominada de PMESH. Por conseqüência, intercalou-se uma sub-rotina denominada de SEMIRIGID, que também é acionada na solução não-linear, em PMESH, para que fosse possível a leitura dos novos dados no primeiro arquivo de entrada. Os valores a serem lidos para a solução linear constam na figura (5.4) e já foram definidos anteriormente, enquanto os dados necessários à análise não-linear serão analisados na seção (5.4).

5.3.2 – Sub-rotina STIFK0

Esta sub-rotina é responsável pela montagem da matriz de rigidez global de pórticos na análise do problema linear estático, tendo sido implementada por Galvão (2000). No trabalho atual, tal sub-rotina é modificada de tal modo que possa levar em consideração valores intermediários de rigidez. Portanto, para cada elemento do pórtico são executados os seguintes passos:

- 1) cálculo da matriz de rotação;
- 2) cálculo da matriz de rigidez para o tipo de problema analisado. Se o sistema estrutural alvo de análise for rígido, executar-se-á a sub-rotina BRKEL, que já havia

sido implementada anteriormente. Caso contrário, se a estrutura for semi-rígida, a matriz de rigidez será calculada a partir da formulação de elemento semi-rígido selecionada no arquivo de entrada de dados. Daí, o programa direcionar-se-á para uma das seguintes sub-rotinas:

2.1) BRKEL2: A matriz de rigidez linear \mathbf{K}_L se modificará pelo elemento semi-rígido proposto por Chen e Lui (1991);

2.2) BRKEL3: Nesta situação, a modificação dar-se-á pelo elemento proposto por Chan e Chui (2000);

2.3) BRKEL4: Finalmente, nesta sub-rotina, a nova matriz será obtida pelo proposto por Sekulovic e Salatic (2001).

3) Após o cálculo de \mathbf{K}_L , havendo ou não elementos semi-rígidos, a matriz será levada ao sistema global;

4) Por fim, já descrita em relação ao sistema global, a matriz de rigidez do elemento será armazenada na matriz de rigidez global da estrutura.

Ao final desses procedimentos, a sequência de cálculos da análise linear de estruturas semi-rígidas não se modifica, ou seja, permanece igual àquela já implementada para pórticos rígidos por Galvão (2000). A seguir, descrever-se-á os procedimentos de cada sub-rotina, e, por consequência, de cada elemento híbrido alvitado, utilizados na modificação da matriz linear.

5.3.2.1 – Sub-rotina BRKEL2

Nesta sub-rotina, a seguinte sequência de cálculos foi implementada visando à obtenção, para cada elemento híbrido, da matriz de rigidez modificada pelo procedimento de Chen e Lui (1991):

1) formação da matriz \mathbf{K}_a (de ordem 10) contendo, separadamente, tanto os termos elásticos lineares quanto os de semi-rigidez do elemento (ver equação (4.85));

2) formação da matriz de transformação \mathbf{T} , de dimensão 10x8 (ver equação (4.87));

- 3) cálculo da matriz \mathbf{K}_{int} , que representará o elemento híbrido intermediário e possuirá ordem 8, através do produto triplo $\mathbf{T}^T \mathbf{K}_a \mathbf{T}$ (ver equação (4.92));
- 4) obtenção das matrizes $\mathbf{K}_{\text{int AA}}$ (6x6), $\mathbf{K}_{\text{int AB}}$ (6x2), $\mathbf{K}_{\text{int BA}}$ (2x6) e $\mathbf{K}_{\text{int BB}}$ (2x2), extraídas de \mathbf{K}_{int} (8x8) (ver equação (4.94));
- 5) cálculo da inversa de $\mathbf{K}_{\text{int BB}}$ ($\mathbf{K}_{\text{int BB}}^{-1}$);
- 6) e, por fim, cálculo da matriz de rigidez híbrida através da operação matricial $\mathbf{K}_{\text{hib}} = \mathbf{K}_{\text{int AA}} - \mathbf{K}_{\text{int AB}} \mathbf{K}_{\text{int BB}}^{-1} \mathbf{K}_{\text{int BA}}$.

5.3.2.2 – Sub-rotina BRKEL3

Neste local do programa computacional, a modificação da matriz de rigidez é realizada através das seqüências de cálculos propostas por Chan e Chui (2000) a partir de um elemento híbrido de viga-coluna. Tal modificação foi implementada computacionalmente utilizando-se os seguintes procedimentos:

- 1) formação da matriz de ordem 2 com os valores de semi-rigidez do elemento (denotada simplesmente por \mathbf{S} no programa computacional);
- 2) formação da matriz de rigidez à flexão do elemento (que recebeu, na implementação, a notação **kea**), cuja ordem também é igual a 2;
- 3) cálculo da inversa de $\mathbf{kea} + \mathbf{S}$ (denominada **keai**);
- 4) obtenção da matriz de rigidez híbrida reduzida (computacionalmente nomeada **keai1**), contendo modificações apenas nos termos de flexão, matematicamente igual a $\mathbf{S} - \mathbf{S}^T \mathbf{keai} \mathbf{S}$ (ver equação (4.22b));
- 5) formação da matriz de transformação \mathbf{T}_{vg} para um elemento de viga-coluna, obtida de acordo com a equação (4.23);
- 6) obtenção da matriz de rigidez híbrida de ordem 4 (ainda sem a consideração dos termos axiais, que não se modificam), fazendo-se $\mathbf{T}_{\text{vg}}^T \mathbf{keai1} \mathbf{T}_{\text{vg}}$ (ver equação (4.28));
- 7) por fim, armazenamento da última matriz obtida na matriz de rigidez completa do elemento, de ordem 6, já incluídos os termos axiais (ver equação (4.31)).

5.3.2.3 – Subrotina BRKEL4

Já nesta sub-rotina, a matriz de rigidez elástica será modificada utilizando-se o processo descrito por Sekulovic e Salatic (2001). Para tal, seguiram-se os seguintes passos:

- 1) obtenção da matriz de rigidez linear usual \mathbf{k}_{II} , sem os termos axiais;
- 2) obtenção da matriz \mathbf{K}_{s_c} , contendo os inversos dos termos de semi-rigidez (ver equação (4.53));
- 3) formação da matriz de rigidez \mathbf{H} , contendo apenas os termos à flexão;
- 4) cálculo da matriz \mathbf{S} , de ordem 4, através da expressão $\mathbf{S} = \mathbf{K}_{s_c} (\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{K}_{s_c})^{-1} \mathbf{H}$ (ver equações (4.54) a (4.60))
- 5) obtenção da matriz \mathbf{E} , que conterá os valores de excentricidade das conexões do elemento híbrido (ver equação (4.66a));
- 6) cálculo da matriz \mathbf{G} , através da expressão $\mathbf{G} = \mathbf{E} - \mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{E}$, que conterá os efeitos da flexibilidade e da excentricidade da conexão de forma separada (primeiro e segundo termos) e acoplada (terceiro termo) (ver equação (4.68));
- 7) cálculo da matriz de correção \mathbf{k}_{ef} , que incorpora os efeitos da flexibilidade e da excentricidade da conexão, através da expressão $\mathbf{k}_{ef} = \mathbf{G}^T \mathbf{k}_{II} + \mathbf{k}_{II} \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{k}_{II} \mathbf{G}$ (ver equações (4.74) e (4.75));
- 8) obtenção da matriz \mathbf{C} , portadora dos termos de semi-rigidez e descrita pela equação (4.77);
- 9) cálculo da matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ através da expressão $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{E}$ (ver equações (4.78) e (4.79b));
- 10) avaliação da matriz \mathbf{k}_s através da expressão $\mathbf{k}_s = \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{G}}$ (ver equação (4.79a));
- 11) cálculo da matriz de rigidez do elemento híbrido (ainda sem os termos de deformação axial) através da soma $\mathbf{k}_{II} + \mathbf{k}_{ef} + \mathbf{k}_s$ (ver equação (4.81));
- 12) por fim, armazenamento de $\mathbf{k}_{II} + \mathbf{k}_{ef} + \mathbf{k}_s$ numa matriz de ordem 6, agora incluídos os termos de deformação axial, que não se modificam.

5.4 - SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

A figura (5.5) apresenta o fluxograma geral de funcionamento da solução não-linear de pórticos semi-rígidos. A análise de treliças percorre exatamente os mesmos caminhos, com a diferença que a montagem da matriz de rigidez **K** ocorre nas sub-rotinas MATRIG2T (caso 2D) ou MATRIG3T (caso 3D), as quais serão abordadas na seção (5.4.1), e não há necessidade de se atualizar valores de semi-rigidez em NEXINC.

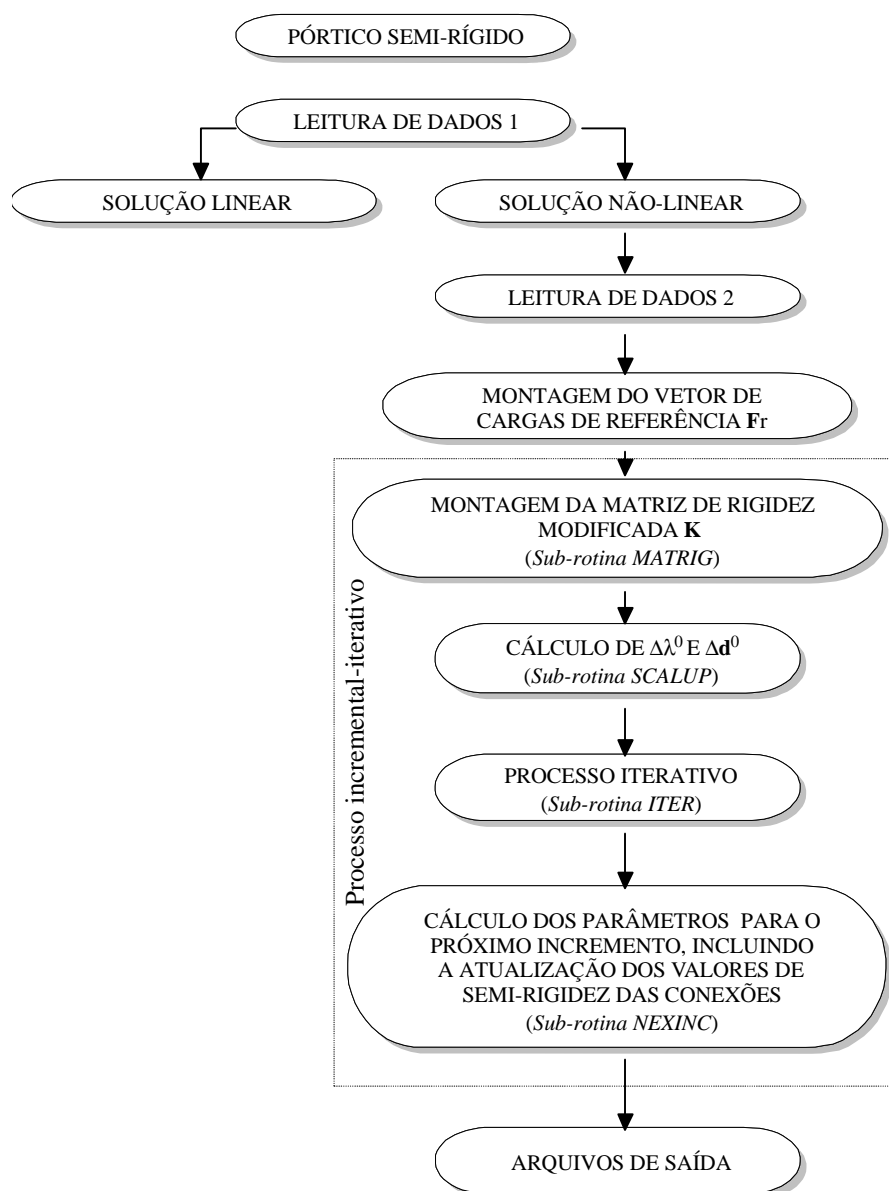


Figura 5.5 – Fluxograma geral da solução não-linear.

O primeiro procedimento a ser realizado pelo programa para a solução não-linear é a leitura do arquivo de entrada de dados 1, que possui exatamente a mesma configuração daquele mostrado pela figura (5.4) para solução linear. A figura (5.6) apresenta um exemplo de modelagem para um pórtico semi-rígido que apresenta conexões não-lineares, cujos dados pertinentes às mesmas são os seguintes:

a) NPAR: denota o número total máximo de parâmetros necessários à análise do comportamento não-linear da ligação. É utilizado apenas para os modelos exponenciais.

b) NMODEL: indica o número de modelos de representação da não-linearidade das conexões semi-rígidas utilizados para análise. Essa variável permite que haja associações entre os modelos implementados e assume valores de 1 a 3;

c) CTYPE: indica o tipo de modelo a ser empregado na análise, assumindo valor igual a 1 para a utilização do modelo exponencial de Chen-Lui, igual a 2 para o modelo exponencial modificado ou igual 3 para o modelo de Richard-Abbott;

d) NGELM: mensura a quantidade de ligações diferentes, isto é, com comportamentos distintos, representadas pelo modelo escolhido em CTYPE;

e) NG: representa o número de grupos de elementos que possuem os mesmos parâmetros de modelagem;

f) NOSR: indica qual nó possui variação de rigidez. Se NOSR for igual a 1, apenas a rigidez do nó i possuirá comportamento não-linear. Se for igual a 2, ocorrerá o contrário, ou seja, apenas o valor da rigidez da conexão situada no nó j será atualizado com base no modelo escolhido. Além disso, se NOSR for igual a 3 ambas as rigidezes serão atualizadas a partir do modelo e dos parâmetros utilizados. No entanto, se ambos os valores de rigidez do elemento híbrido possuem parâmetros diferentes, deve-se primeiramente, para os mesmos elementos, entrar com os dados referentes ao nó i , com NOSR assumindo valor 41, e depois entrar com os dados referentes ao nó j , com NOSR igual a 42;

g) KEL1, KEL2: delimita a seqüência de elementos que possuem os mesmos parâmetros de modelagem.

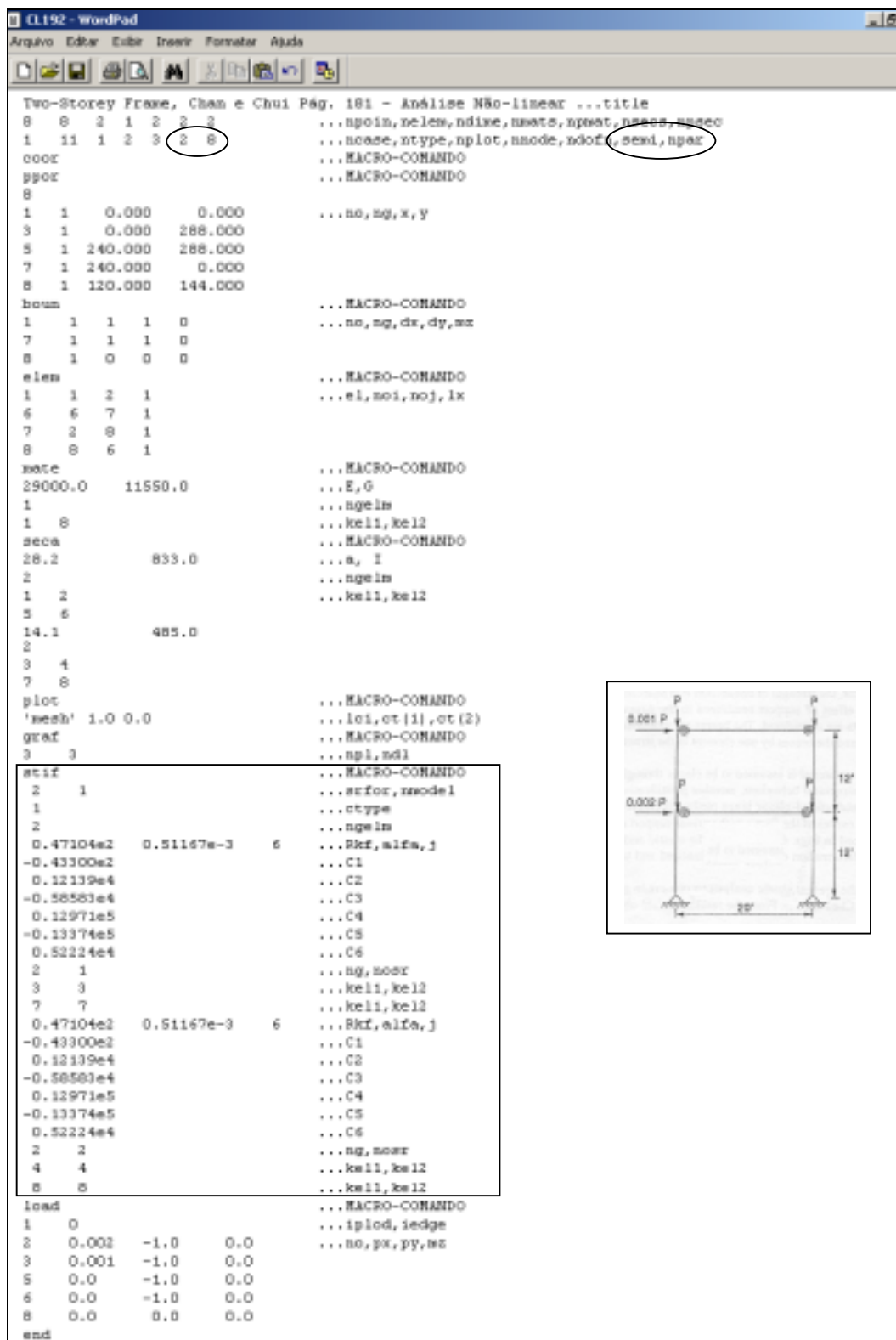


Figura 5.6 - Exemplo do arquivo 1 de entrada de dados para um pórtico com ligações semi-rígidas representadas pelo modelo exponencial (Chan e Chui, 2000).

Caso CTYPE seja igual a 1, como no exemplo mostrado pela figura (5.6), deverão constar os parâmetros necessários à representação do modelo exponencial de Chen-Lui, que, por ordem de entrada, são: a rigidez RKF devido ao encruamento da ligação; o fator de escala ALFA e o número J de coeficientes de ajustamento da curva do modelo exponencial. Após estes dados, deverão ser inseridos os respectivos coeficientes CJ de ajustamento da mesma curva, cuja quantidade é definida pelo valor de J.

Se o modelo utilizado na análise for o exponencial modificado, caso de CTYPE igual a 2, após os mesmos dados necessários à expressão de Chen-Lui deve-se inserir também o valor de M, definindo o número de termos das componentes lineares, e logo abaixo os M valores de DK e PHIK, que são as constantes de ajuste de curvas e as rotações iniciais das componentes lineares, respectivamente. A figura (5.7) mostra como ficariam apenas os dados de semi-rigidez no arquivo de entrada de dados para esta última situação, caso as ligações do pórtico mostrado na figura (5.6) fossem modeladas pela função exponencial modificada. Neste caso, NPAR seria igual a 10, o que representaria a soma dos seis parâmetros CJ, dos dois parâmetros M, de RKF e ALFA.

```

stif      ...MACRO-COMANDO
2  1      ...xrf, nmodel
2         ...ctype
2         ...ngelm
0.00000e0 0.394994e0 6  ...Rkf, alfa, j
-0.30968749e2      ...C1
0.62361139e3      ...C2
-0.50361980e4      ...C3
0.20637821e5      ...C4
-0.20637821e5      ...C5
0.93013973e4      ...C6
1         ...n
0.20517930e1 24.70  ...D1, Phi1
2  1      ...ng, nosr
3  3      ...ke11, ke12
7  7      ...ke11, ke12
0.00000e0 0.394994e0 6  ...Rkf, alfa, j
-0.30968749e2      ...C1
0.62361139e3      ...C2
-0.50361980e4      ...C3
0.20637821e5      ...C4
-0.20637821e5      ...C5
0.93013973e4      ...C6
1         ...n
0.20517930e1 24.70  ...D1, Phi1
2  2      ...ng, nosr
4  4      ...ke11, ke12
8  8      ...ke11, ke12

```

Figura 5.7 – Ilustração apenas da entrada de dados das ligações representadas pelo modelo exponencial modificado (Chen e Toma, 1994).

Por fim, caso se queira utilizar o modelo de Richard-Abbott, através de CTYPE igual a 3, em lugar dos parâmetros dos modelos exponenciais deve-se inserir, pela

ordem, os valores de K, KP, M0 e N, que indicam a rigidez inicial, a rigidez devido ao encruamento da ligação, o momento de referência e o parâmetro definidor da suavidade da curva, respectivamente. A figura (5.8) apresenta a disposição dos dados referentes às ligações do exemplo da figura (5.6) caso fosse utilizado o modelo de Richard-Abbott para representá-las.

```

stif      |
2 1      | ...MACRO-COMANDO
          | ...sfior, nmodel
3        | ...etype
2        | ...ngelm
0.95401e6 0.0 0.17730e4 0.800e0 | ...k, kp, Mo, n
2 1      | ...ng, nosr
3 3      | ...kel1, kel2
7 7      | ...kel1, kel2
0.20592e6 0.0 0.81400e3 0.157e1 | ...k, kp, Mo, n
2 2      | ...ng, nosr
4 4      | ...kel1, kel2
8 8      | ...kel1, kel2

```

Figura 5.8 – Ilustração apenas da entrada de dados de ligações representadas pelo modelo de Richard-Abbott (Chen e Toma, 1994).

Após a leitura dos dados gerais do sistema estrutural, o próximo passo é a leitura do arquivo 2 de entrada de dados, onde estão as informações referentes à estratégia de solução não-linear, tais como o tipo de formulação não-linear do elemento a ser empregada, as estratégias de incremento e de iteração, o número máximo de iterações por incremento, o critério de convergência, entre outros parâmetros relativos à estratégia de solução escolhida. A figura (5.9) apresenta um exemplo desse arquivo de entrada de dados. Maiores detalhes sobre a elaboração desse arquivo podem ser encontrados nas dissertações de Rocha (2000) e Galvão (2000).

```

D:\des d - WordPad
Arquivo Editar Editar Inserir Formatar Ajuda
$PRINCIPAL
12 3 81 0.01 22500 161 1 1 1.e-3 ...form, Einc, Eite, faci, ninc, nitmax, iterty, cconv, betok
$CONTINC
10 0.75 0.001 0.16 1.5 0.001 ...ides, fmx, fmn, dldes, dldax, dldan
$RENAL
0 ...ires
$RELATO
0 ...rel
$SCREEN
500 0 ...kwinc, kplot
$END

```

Figura 5.9 – Segundo arquivo de entrada de dados, utilizado para solução não-linear.

A seguir, serão mostradas as principais inserções e modificações realizadas no programa original de modo a adaptá-lo à solução não-linear de sistemas estruturais rotulados e semi-rígidos.

5.4.1 – Sub-rotinas MATRIG2T e MATRIG3T

Estas duas sub-rotinas foram implementadas especialmente para a análise não-linear de sistemas estruturais rotulados planos (MATRIG2T) e espaciais (MATRIG3T). A seqüência dos cálculos foi introduzida tomando-se como base o trabalho de Yang e Kuo (1994). Deve-se observar que tal seqüência de cálculo é absolutamente idêntica para ambas as sub-rotinas, com a única diferença que em MATRIG3T há uma coordenada geométrica a mais que em MATRIG2T, visto que o caso tridimensional, assim como descrito na seção (3.2), é obtido através de uma extensão do caso bidimensional. Portanto, o procedimento mostrado adiante permanece válido para ambas as implementações, sendo executado, para cada elemento de treliça, através dos seguintes passos:

- 1) identificação dos deslocamentos incrementais do elemento de treliça no sistema global de referência;
- 2) cálculo da matriz de transformação inicial **Trn**;
- 3) obtenção do vetor de deslocamentos incrementais nodais no sistema local;
- 4) cálculo das variações de deslocamentos Δu , Δv e Δw utilizando-se a equação (3.76), sendo este último termo apenas para o caso tridimensional;
- 5) identificação do valor do esforço normal atuando no elemento;
- 6) cálculo das matrizes \mathbf{K}_e (linear elástica), \mathbf{K}_g (geométrica), \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 e \mathbf{K}_3 (de termos de ordem superior) (ver equações (3.19), (3.25), (3.32), (3.48), (3.72) para o caso 2D e equações (3.80) a (3.85) para caso 3D);
- 7) obtenção da matriz de rigidez final **K** do elemento, descrita no sistema local, através da soma de $\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3$;

8) obtenção da matriz de rigidez no sistema global através da equação $\mathbf{Trn}^T \mathbf{K} \mathbf{Trn}$;

9) armazenamento na matriz de rigidez global da estrutura.

É necessário ressaltar que tal procedimento foi implementado tendo-se em vista uma formulação Lagrangeana atualizada, que toma como sistema de referência sempre a última configuração de equilíbrio. Com o objetivo de se ampliar as opções de análise, três metodologias diferentes de investigação não-linear, baseadas no trabalho de Yang e Kuo (1994), foram implementadas para sistemas estruturais rotulados, a saber:

a) realizando-se o cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K} e do vetor de forças internas \mathbf{F}_i de forma incremental, através de uma formulação Lagrangeana atualizada;

b) realizando-se o cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K} de forma incremental e do vetor de forças internas \mathbf{F}_i de forma não-incremental, através de uma formulação Lagrangeana total;

c) realizando-se o cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K} e do vetor de forças internas \mathbf{F}_i de forma não-incremental, através de uma formulação Lagrangeana total;

Tais procedimentos são acionados pela variável FORM, contida no arquivo 2 entrada de dados apresentado na figura (5.9), cujos dados são responsáveis pelo controle da análise não-linear. Se FORM for igual a 11, tem-se a opção (a); caso seja igual a 12, ter-se-á a opção (b); se de valor 13, aciona-se a opção (c).

Os procedimentos baseados na formulação Lagrangeana total para obtenção da matriz de rigidez seguem os mesmos passos de (1) a (9), descritos anteriormente para a formulação Lagrangeana atualizada. No entanto, algumas ressalvas são necessárias. Primeiramente, os deslocamentos obtidos no passo (3) serão os totais do elemento, e não mais os incrementais. Outrossim, du , dv e dw , calculados no passo (4), representarão os acréscimos totais de deslocamentos. Além disso, a matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g será nula, visto que o sistema de referência será sempre a configuração indeformada e o valor da força interna atuando no elemento será igual a zero. Como

consequência, a matriz de rigidez \mathbf{K} será o resultado da soma das matrizes restantes, ou seja, $\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3$.

5.4.2 – Sub-rotinas VETFI2T e VETFI3T

Além da implementação de uma sub-rotina que calculasse a matriz de rigidez do elemento de treliça, fez-se necessário ainda a inserção de uma outra para o cálculo do vetor de forças internas. Por conseguinte, concomitantemente a MATRIG2T e MATRIG3T, foi necessário criar VETFI2T (caso 2D) e VETFI3T (caso 3D), respectivamente. Para uma formulação Lagrangeana atualizada, as implementações dessas duas sub-rotinas possuem, para cada elemento de treliça, os seguintes passos:

- 1) cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K} no sistema local, utilizando-se deslocamentos incrementais e seguindo-se os mesmos passos utilizados em MATRIG2T ou MATRIG3T, dependendo do caso em estudo;
- 2) cálculo do vetor de forças internas incrementais no sistema local através da equação $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{d}$, sendo \mathbf{d} o vetor de deslocamentos incrementais descrito no sistema local;
- 3) obtenção do vetor de forças internas totais ainda descrito em relação ao último sistema de equilíbrio fazendo-se a soma entre os valores incrementais e acumulados, ou seja, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = \Delta \mathbf{F} + {}^t \mathbf{F}$;
- 4) transformação do vetor de forças internas totais do sistema local para o sistema global;
- 5) armazenamento do vetor de forças internas totais do elemento no vetor de forças internas globais da estrutura.

Tendo-se em vista os três tipos de análises utilizadas para treliças e expostas na subseção anterior, o vetor de forças internas também pode ser obtido através da forma não-incremental. A sequência de cálculos é similar à utilizada numa formulação Lagrangeana atualizada. A primeira diferença reside no fato de que a matriz de rigidez

K do elemento é obtida através da utilização dos deslocamentos totais, algo já exposto na subseção anterior. Além disto, o vetor de forças internas obtido pela equação $\mathbf{K} \mathbf{d}$, onde **d** denota agora o vetor de deslocamentos nodais totais, já contém as forças internas totais, descritas no sistema local. Por fim, os valores deste vetor são transformados para o sistema global, onde serão armazenados no vetor de forças internas globais da estrutura.

5.4.3 – Sub-rotina MATRIGTC

Esta sub-rotina, assim como ocorreu em MATRIG2T e MATRIG3T, também foi implementada especialmente para a análise de sistemas estruturais rotulados planos e espaciais. A formulação utilizada aqui é a proposta por Crisfield (1991). Assim como nas sub-rotinas criadas para a formulação de Yang e Kuo (1994), o caso bidimensional pode ser facilmente estendido para o caso tridimensional, unicamente com o acréscimo de uma terceira coordenada nas equações. Logo, as operações matemáticas utilizadas para ambos os casos são idênticas e possuem, para cada elemento, as seguintes seqüências:

- 1) obtenção das componentes dos deslocamentos nodais totais;
- 2) cálculo dos acréscimos de deslocamentos nos pontos nodais;
- 3) obtenção dos comprimentos original (L_0) e atualizado (L_n) do elemento;
- 4) obtenção do vetor $\mathbf{c}(\mathbf{p}')$, de dimensão 4x1 (equação (3.127), caso 2D) ou 6x1 (caso 3D), que contém as diferenças entre as coordenadas dos nós do elemento nas configurações deformada e inicial;
- 5) cálculo da matriz de rigidez através da equação $\mathbf{K} = \mu(\mathbf{c}\mathbf{c}^T) + \mathbf{K}_{\text{iso}}$, onde μ é um escalar e vale

$$\mu = \frac{1}{L_n^2 L_0} \left[EA - F \frac{L_0}{L_n} \right] \quad (5.1)$$

onde A denota o módulo de elasticidade, E o módulo de elasticidade e F a força total atuando na barra; \mathbf{K}_{isl} é a matriz de tensões iniciais, calculada de acordo com a equação (3.134);

- 6) armazenamento na matriz de rigidez global do sistema.

5.4.4 – Sub-rotina VETFITC

Esta sub-rotina executa a mesma função desempenhada por VETFI2T e VETFI3T e calcula as forças internas de um elemento de treliça através do procedimento adotado por Crisfield (1991). Para os casos 2D e 3D, os seguintes passos foram adotados: para cada elemento de treliça:

- 1) cálculo das componentes do vetor de deslocamentos nodais totais para o elemento de treliça;
- 2) cálculo dos acréscimos de deslocamentos nos pontos nodais;
- 3) obtenção dos comprimentos original (L_o) e atualizado (L_n) da barra;
- 4) cálculo das parcelas linear e não-linear do tensor de Green, computacionalmente denominado de EGR;
- 5) cálculo da deformação específica do tensor de engenharia através da equação

$$\varepsilon = \frac{2L_o}{L_n + L_o} \text{EGR} ; \quad (5.2)$$

- 6) cálculo da força interna total na barra pela expressão $F = EA\varepsilon$;
- 7) obtenção do vetor de forças internas totais do elemento no sistema global;
- 8) armazenamento no vetor de forças internas totais da estrutura no sistema global.

5.4.5 – Sub-rotina MATRIG

De início, esta sub-rotina prestava-se apenas ao cálculo da matriz de rigidez do elemento de pórtico rígido sob análise não-linear, cuja implementação foi examinada no trabalho de Galvão (2000). Já a metodologia empregada para análise de estruturas semi-rígidas é praticamente a mesma da que consta no trabalho deste autor. Para a intercalação desta nova análise, criou-se uma divisão no local das chamadas das sub-rotinas que calculam a matriz de rigidez pela formulação de Yang e Kuo linearizada (1994) (denominadas BRK0 e BRKSYG), de tal modo que para pórticos rígidos serão utilizadas estas mesmas sub-rotinas, enquanto para pórticos semi-rígidos será utilizada uma outra, denominada SRMATRIG. A identificação do tipo de estrutura investigada faz-se por meio da variável SEMI, contida no arquivo 1 de entrada de dados. Caso SEMI seja igual a 0, será realizada a análise já implementada por Galvão (2000). Se este valor for diferente de zero, a sub-rotina SRMATRIG será acionada e a matriz de rigidez do elemento híbrido calculada. Os demais procedimentos concernentes a uma investigação não-linear foram examinados por Rocha (2000) e Galvão (2000) e mantiveram-se inalterados. Na modificação dos termos da matriz de rigidez, foi utilizado como suporte a formulação proposta por Yang e Kuo em seu modo linearizado (1994). Alguns testes também foram realizados utilizando-se a formulação de Torkamani (1997). No entanto, com base no estudo do trabalho de Galvão (2000), houve a manutenção apenas da primeira no programa computacional. Diante do exposto, examinar-se-á apenas o modo como se dá a formação da matriz de rigidez híbrida em SRMATRIG, resultante das seguintes passagens:

- 1) formação da matriz reduzida, de ordem 3, contendo as relações finais de força-deslocamento do elemento de viga-coluna, já levando em consideração o efeito da semi-rigidez presente nas conexões nodais (ver equação (4.41));
- 2) obtenção das matrizes de transformação oriundas das relações cinemáticas e de equilíbrio do elemento híbrido (ver equações (4.35) e (4.37));
- 3) cálculo da matriz rigidez completa (ordem 6, equação (4.43)) contendo todas as relações de força-deslocamento da barra semi-rígida através da multiplicação entre as matrizes de transformação e de rigidez reduzida;

5.4.6 – Sub-rotina LOPIN

Esta sub-rotina é a responsável pelo cálculo do vetor de forças internas para os diferentes tipos de formulações não-lineares empregadas no estudo de pórticos rígidos realizado por Galvão (2000). Na nova implementação, tendo-se em vista o exposto na subseção (5.4.5), fez-se necessária a obtenção do vetor de forças internas para o elemento híbrido tendo-se como base a formulação linearizada proposta por Yang e Kuo (1994). A seqüência de cálculos a ser realizada para a obtenção do vetor de forças internas é a seguinte:

- 1) obtenção do vetor de deslocamentos naturais incrementais;
- 2) cálculo da matriz de rigidez modificada do elemento híbrido, seguindo-se os passos 1 a 3 expostos no procedimento da subseção (5.4.5);
- 3) obtenção do vetor de forças internas incrementais fazendo-se a multiplicação entre a matriz de rigidez do elemento híbrido e o vetor de deslocamentos naturais incrementais;
- 4) identificação das forças internas que causam deformação no elemento, ou seja, momentos nodais e força axial;
- 5) cálculo do vetor de forças internas totais através da soma dos valores acumulados até a configuração de referência com os valores incrementais.

5.4.7 – Sub-rotina NEXINC

Em estruturas em que a rigidez da ligação também possui um comportamento não-linear, torna-se necessário, a cada estágio de carregamento, a atualização deste valor. Portanto, foi preciso interceder na sub-rotina NEXINC para efetuar tal processo. Em Rocha (2000) e Galvão (2000), esta sub-rotina encontra-se detalhadamente delineada, de tal modo que nesta seção se dará enfoque apenas ao modo como é processada a modificação dos termos de semi-rigidez do elemento híbrido, que segue os seguintes passos:

- 1) identificação dos elementos com semi-rigidez variável;
- 2) cálculo do incremento de rotação relativa ocorrido durante o último passo de carga através da divisão do momento incremental no nó da conexão pelo valor de semi-rigidez vigente na configuração de referência;
- 3) cálculo do valor total de rotação relativa através da soma do valor incremental com o acumulado até a configuração de referência;
- 4) montagem da equação que descreve o comportamento não-linear da conexão através da matriz que armazena os dados do modelo escolhido para formulação de tal comportamento, que pode ser idealizado pelos modelos exponencial de Chen e Lui, exponencial modificado ou de Richard-Abbott;
- 5) obtenção do valor atualizado de semi-rigidez pela substituição da rotação relativa total na expressão obtida no passo anterior.

O novo valor de semi-rigidez proveniente do passo 5 do procedimento anterior é então utilizado na montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças internas do próximo estágio de carregamento. Além disto, a rotação relativa acumulada é atualizada para ser utilizada novamente no passo de carga seguinte, onde os procedimentos de 1 a 5 repetir-se-ão.

6.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como principal objetivo verificar, com base em análises encontradas na literatura, a eficiência das formulações para análise não-linear de sistemas estruturais rotulados e semi-rígidos abordadas neste trabalho, bem como as implementações computacionais realizadas para essas metodologias.

De início, é apresentado na tabela (6.1) um resumo sobre as formulações lineares e não-lineares averiguadas, com a apresentação de algumas de suas principais características e das abreviaturas que serão utilizadas para representá-las ao longo deste capítulo.

Na seção (6.2) serão examinados exemplos clássicos de estruturas rotuladas planas e espaciais encontradas na literatura, com o objetivo primordial de averiguar a eficiência das implementações computacionais realizadas, bem como a qualidade dos resultados oriundos destas. Além disso, com o intuito de se observar a eficácia das formulações estudadas neste trabalho para estruturas mais complexas, serão analisados exemplos com trajetórias de equilíbrio fortemente não-lineares, cujas respectivas soluções numéricas foram obtidas anteriormente por outros pesquisadores.

Por fim, na seção (6.3) serão analisados sistemas estruturais semi-rígidos com soluções analíticas e numéricas encontradas na literatura, para que se possa balizar os valores obtidos através das formulações apresentadas no capítulo 4 com tais resultados, além de avaliar a eficiência das implementações computacionais realizadas no presente estudo.

Tabela 6.1 – Resumo das formulações analisadas:

(a) Sistemas estruturais rotulados.

TRABALHOS	FORM. CARACTERÍSTICAS
Yang e Kuo (1994) – Análise não-linear de treliças planas e espaciais; – utilização do tensor de Green.	YLA – Matriz de rigidez e vetor de forças internas calculados de forma incremental, com a utilização de um referencial Lagrangeano atualizado. YNI – Matriz de rigidez calculada de forma incremental, com base em um referencial atualizado, e forças internas calculadas de forma não-incremental, com base em um referencial Lagrangeano total. YLT – Matriz de rigidez e vetor de forças internas calculados de forma não-incremental, com a utilização de um referencial Lagrangeano total.
Crisfield (1991) – Análise de não-linear de treliças planas e espaciais; – utilização dos tensores de engenharia ou de Green.	CTE – Matriz de rigidez e vetor de forças internas calculados de forma não-incremental, com a utilização de um referencial Lagrangeano total e o tensor de deformações de engenharia. CTG – Idem a CTE, com a diferença que agora se utiliza o tensor de deformações de Green.

(b) Sistemas estruturais semi-rígidos

TRABALHOS	FORM. CARACTERÍSTICAS
Chan e Chui (2000) – Análise linear e não-linear de pórticos semi-rígidos planos.	CHC – Análise linear em que a matriz de rigidez modificada é obtida com o uso direto das relações cinemáticas e de equilíbrio para um elemento híbrido. CCY – Análise não-linear onde a matriz de rigidez é obtida através da modificação da formulação proposta por Yang e Kuo (1994) e analisada por Galvão (2000). CCT – Análise não-linear onde a matriz de rigidez é obtida através da modificação da formulação proposta por Torkamani (1997) e analisada por Galvão (2000).
Sekulovic e Salatic (2001) – Análise linear de pórticos semi-rígidos planos.	SES – Leva em consideração a excentricidade da conexão semi-rígida. A matriz de rigidez é obtida fazendo-se a soma da matriz original com a dos termos de modificação de rigidez.
Chen e Lui (1994) – Análise linear de pórticos semi-rígidos planos.	CHL – Matriz de rigidez obtida a partir da matriz do elemento híbrido intermediário de oito graus de liberdade.

6.2 – EXEMPLOS DE SISTEMAS ESTRUTURAIS ROTULADOS

O objetivo desta seção é validar as formulações apresentadas no capítulo 3 e implementadas neste trabalho para análise não-linear de treliças planas e espaciais. A fim de se alcançar tal objetivo, serão abordados exemplos clássicos de problemas de equilíbrio e estabilidade que possuem resultados analíticos e/ou numéricos encontrados na literatura. A figura (6.1) traz um resumo das treliças que serão abordadas nesta seção.

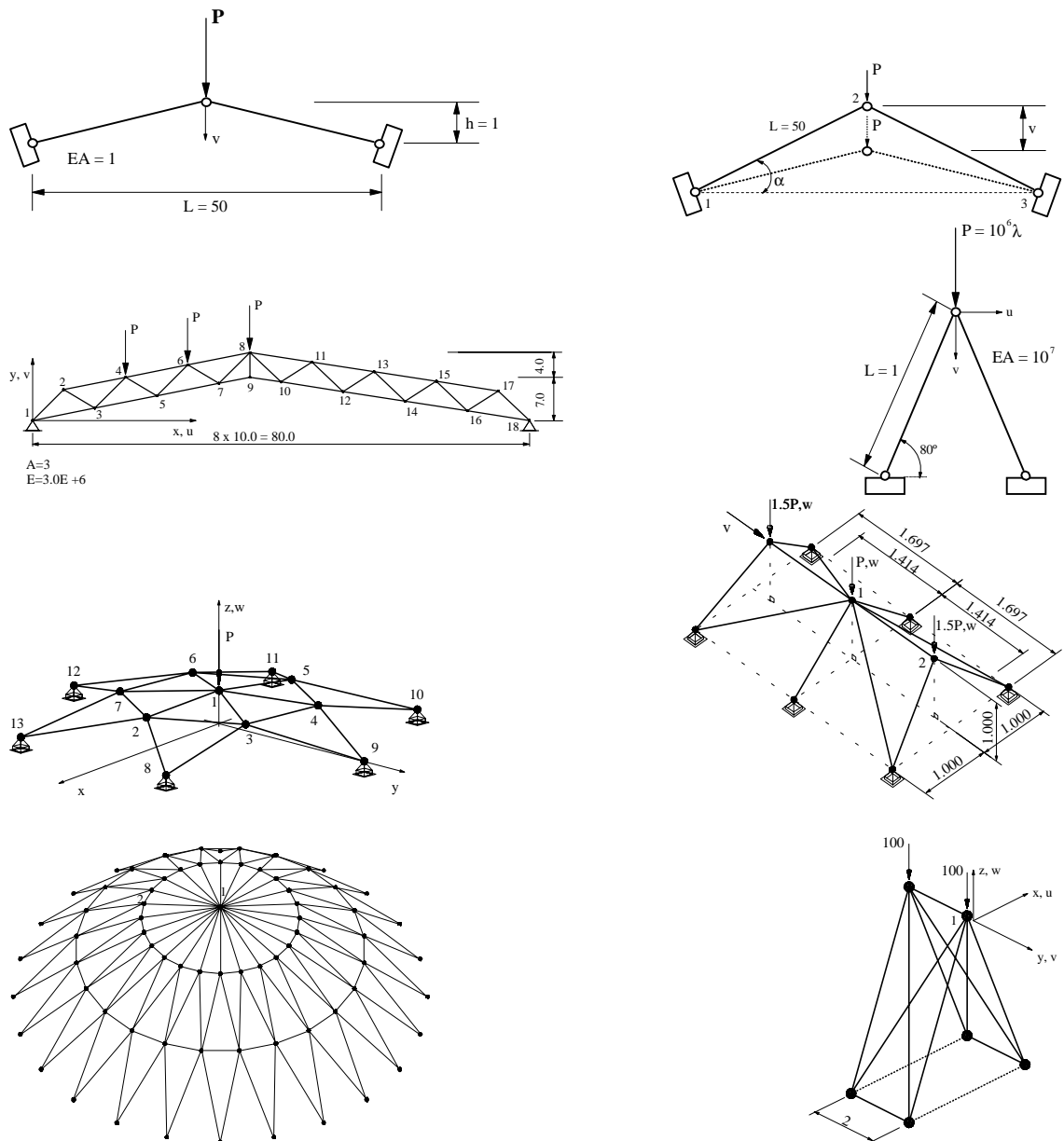


Figura 6.1 – Treliças analisadas no presente trabalho.

6.2.1 – Treliça plana composta de duas barras

O primeiro exemplo alvo de análise é uma treliça plana composta por duas barras submetida a uma carga concentrada P , conforme apresenta a figura (6.2). Cada um dos elementos dessa estrutura possui a mesma área A de seção transversal e o mesmo módulo de elasticidade E e as unidades são adimensionais.

Este problema é freqüentemente utilizado para validar formulações de análise não-linear de sistemas estruturais planos rotulados (Papadrakakis, 1981; Yang e Kuo, 1994; Oñate e Matias, 1996). Além disso, foram apresentados resultados analíticos tanto para o referencial Lagrangeano total quanto para o referencial Lagrangeano atualizado por Yang e Kuo (1994) para a obtenção da carga crítica em estruturas com esta geometria.

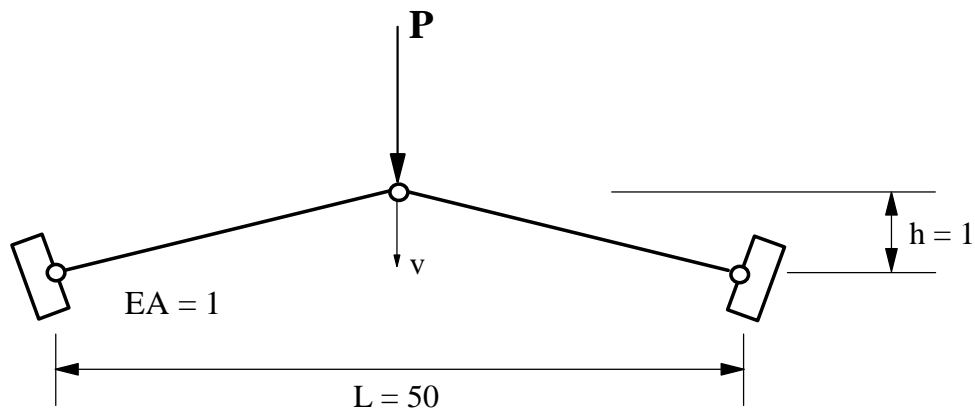


Figura 6.2 – Treliça plana composta por duas barras.

Tendo-se como base o trabalho de Rocha (2000), para a obtenção da trajetória de equilíbrio deste sistema estrutural, obtida através da formulação YLA e ilustrada pela figura (6.3), foram utilizadas como estratégias de incremento de carga e de iteração o comprimento de arco e a norma mínima dos deslocamentos residuais, respectivamente. Para esta última estratégia, foi aplicado o método de Newton-Raphson modificado e a tolerância adotada foi $\zeta = 10^{-6}$.

Neste exemplo, o valor do primeiro ponto limite de carga obtido pela solução analítica proposta por Yang e Kuo (1994) para um referencial atualizado (de valor igual a $2,4594 \times 10^{-5}$), é ligeiramente superior àquele obtido a partir da solução analítica para

um referencial Lagrangeano total ($2,4574 \times 10^{-5}$). Essa tendência se manteve nos testes numéricos realizados, onde, para os mesmos dados de solução não-linear apresentados no parágrafo anterior, a formulação YLA, com um erro de 0,0041% em relação à solução analítica, correspondente a um valor de carga crítica de $2,4595 \times 10^{-5}$, levou a um valor de carga limite um pouco acima dos obtidos pelas formulações YLT ($2,4575 \times 10^{-5}$, erro de 0,0041% em relação à solução analítica), CTG ($2,4575 \times 10^{-5}$, erro de 0,0041%) e CTE ($2,4581 \times 10^{-5}$, erro de 0,0285%). Portanto, no problema analisado, as diferentes formulações praticamente se equivalem. No entanto, para estruturas sujeitas a maiores deslocamentos, as diferenças entre as soluções se acentuam decisivamente. Os detalhes referentes à esta última questão são pormenorizados no exemplo seguinte.

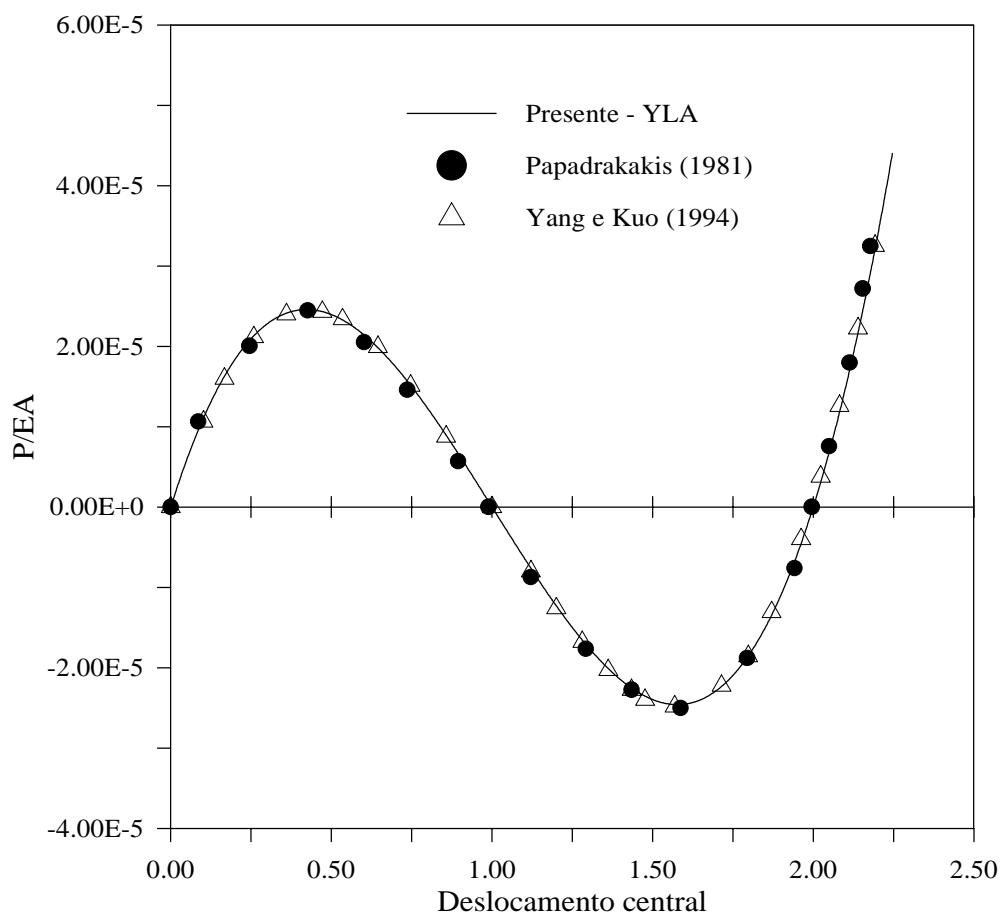


Figura 6.3 – Trajetórias de equilíbrio da treliça composta por duas barras.

6.2.2 – Treliças planas compostas por duas barras com variação de altura

Na análise do exemplo anterior, as diferentes formulações examinadas levaram a resultados finais similares. Agora, com o objetivo de se examinar possíveis disparidades oriundas do tipo de referencial Lagrangeano utilizado, investigar-se-ão três modelos da treliça do último exemplo. Nesses modelos, o comprimento das barras permanecerá constante e igual a 50, mas o ângulo α de inclinação das mesmas assumirá valores diferentes, de 5, 30 e 60 graus. A figura (6.4) mostra a forma genérica da estrutura sob análise.

Considerou-se nas três variações da geometria da treliça em estudo, para fins de comparação, os mesmos valores para o módulo de elasticidade e para a área da seção transversal das barras, sendo o valor de EA igual a 1.

Para a primeira estrutura, cujas barras possuem uma inclinação de 5 graus, os resultados não se diferenciaram muito dos obtidos na seção (6.2.1). As formulações total e atualizada de Yang e Kuo (1994) produziram resultados idênticos, como demonstra a figura (6.5a). Neste caso, utilizou-se a estratégia de incremento de carga do comprimento de arco aliada à estratégia de iteração do arco cilíndrico, com o método de Newton-Raphson padrão. As formulações propostas por Crisfield (1991), que utilizam os tensores de Engenharia e de Green, também apresentaram respostas similares entre si, o que pode ser visualizado pela figura (6.5b). Para estas duas últimas, a estratégia de solução não-linear utilizada foi a mesma de YLA e YLT.

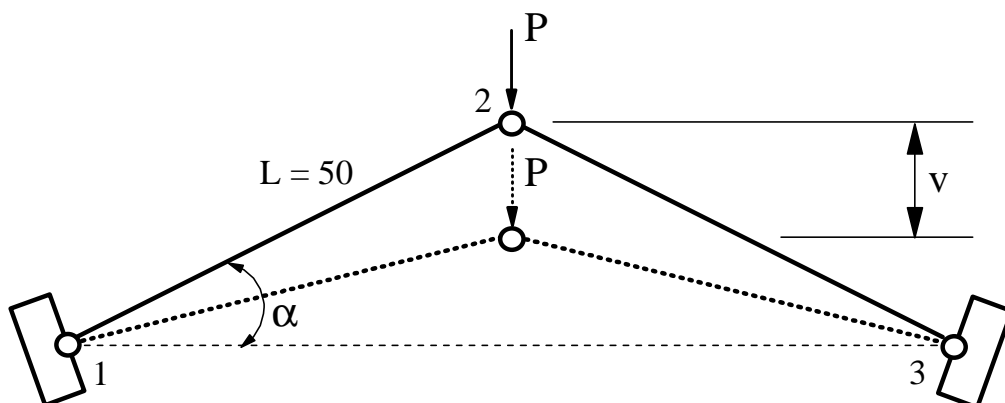
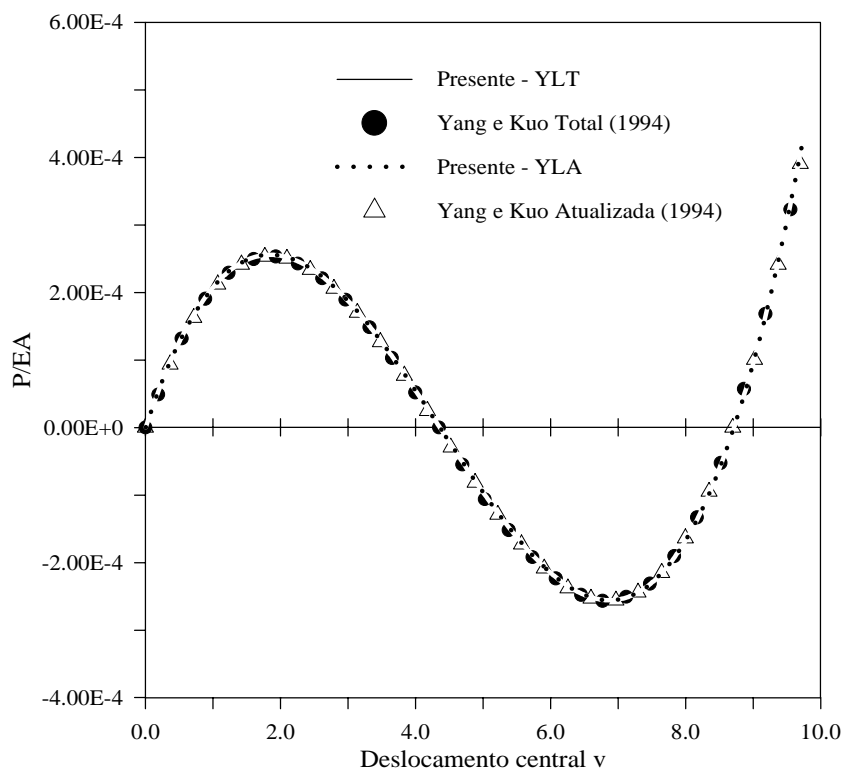
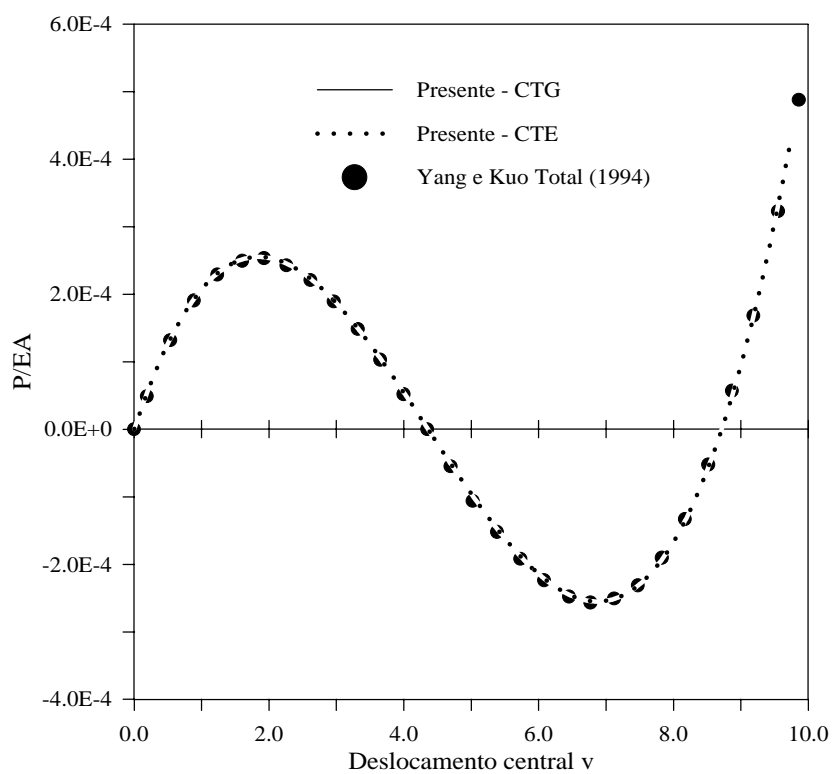


Figura 6.4 – Modelo geral de uma treliça composta por duas barras e sua forma deformada.



(a)



(b)

Figura 6.5 – Curvas carga-deflexão para treliça composta por duas barras ($\alpha = 5^\circ$).

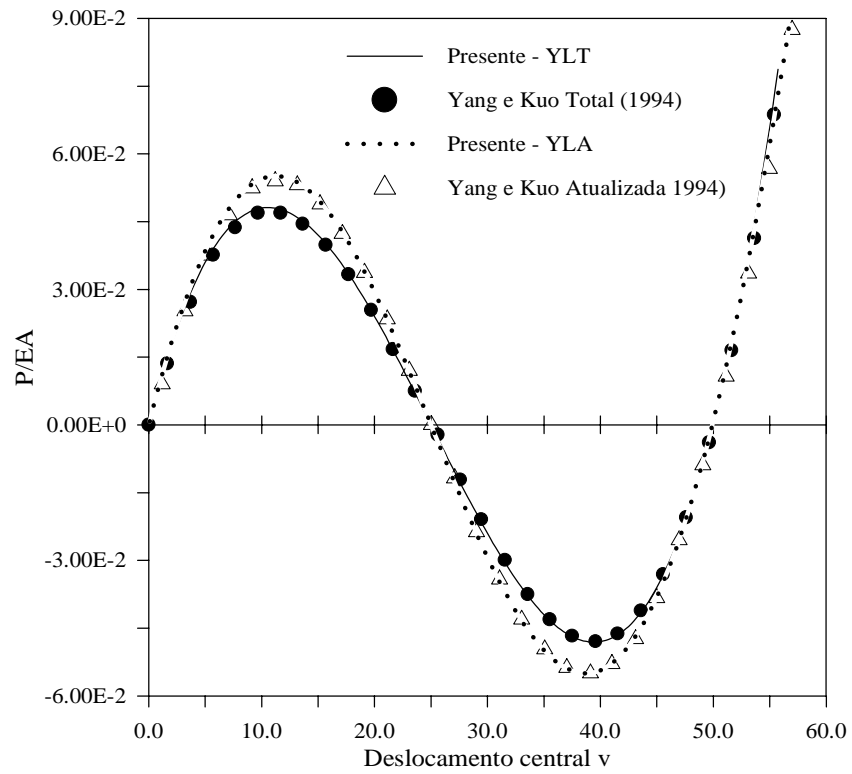
No entanto, para a segunda estrutura, onde a inclinação das barras vale 30 graus, pode-se observar através da figura (6.6a) que a formulação YLA produz valores de carga superiores aos da formulação YLT. Para ambas, foram mantidas as mesmas estratégias de iteração e incremento de carga. Além disso, pela figura (6.6b), nota-se que a formulação CTE também produz resultados acima dos obtidos por CTG, mesmo mantendo-se inalterados os tipos de estratégias de solução não-linear utilizados.

Já para $\alpha = 60^\circ$, as figuras (6.7a) e (6.7b) mostram que as soluções obtidas tanto para YLA e YLT quanto para CTG e CTE se tornam ainda mais díspares. Esta evolução ocorre porque à medida que o ângulo α torna-se maior, a análise aproxima-se da de uma estrutura sujeita a grandes deslocamentos. Para tais estruturas, o efeito da utilização de diferentes configurações de referência torna-se um fator que não pode ser, na prática, negligenciado.

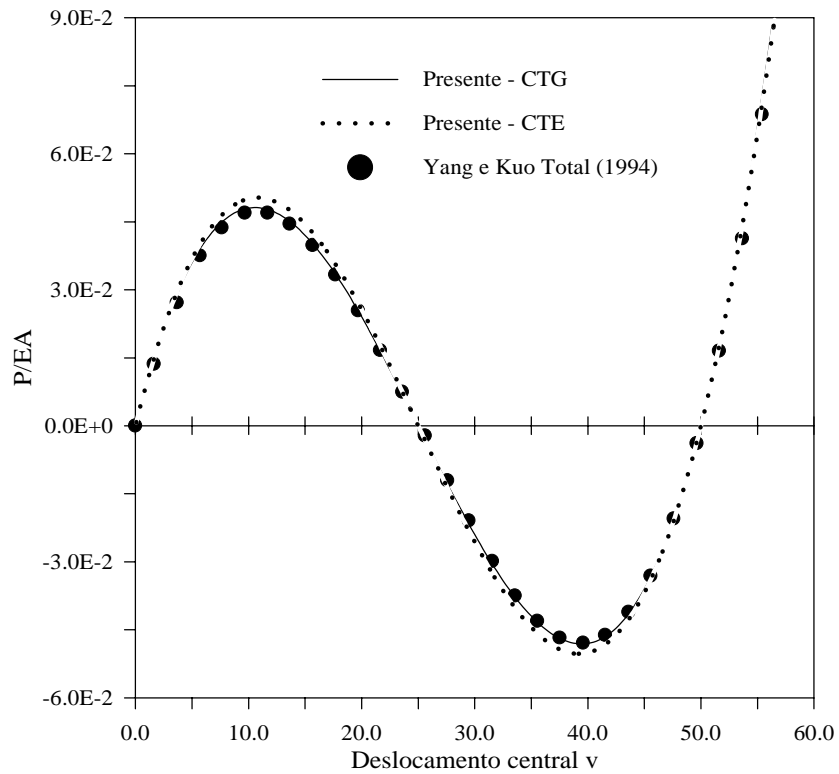
Através da figura (6.7b), pode-se observar também que a utilização do tensor de engenharia na metodologia descrita por Crisfield (1991) leva a valores de cargas mais elevados que os fornecidos pelo tensor de Green.

Deve-se salientar que para $\alpha = 60^\circ$ houve a necessidade de se modificar a estratégia de incremento de carga. Como a trajetória de equilíbrio não possui pontos limites de deslocamento, foi possível utilizar as estratégias de controle de deslocamento vertical e iteração a deslocamento constante, com a adoção do método de Newton-Raphson padrão. Esta mudança na metodologia de solução não-linear deveu-se ao fato de que o método do comprimento de arco, no Lagrangeano total, perdia estabilidade após ultrapassar o primeiro ponto limite de carga e não conseguia avançar no traçado da trajetória.

Por fim, a figura (6.8) mostra, ainda para $\alpha = 60^\circ$, uma comparação entre as formulações utilizadas. Pode-se observar, nesta mesma figura, que a formulação YLA produz uma carga limite superior à CTE, que por sua vez leva a valores mais altos que YLT, sendo esta última equivalente à CTG.

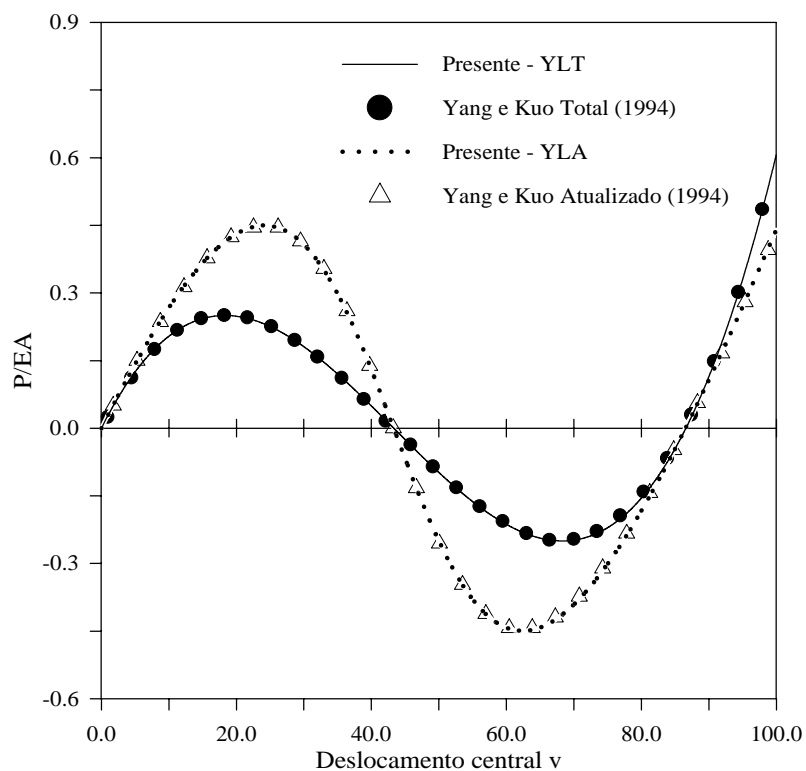


(a)

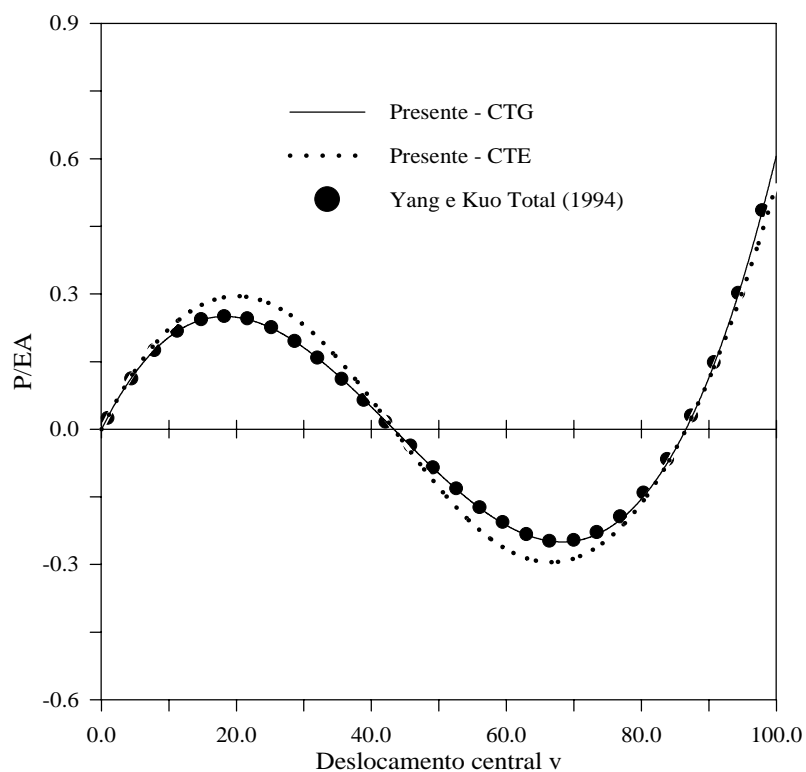


(b)

Figura 6.6 – Curvas carga-deflexão para a treliça composta por duas barras ($\alpha = 30^\circ$).



(a)



(b)

Figura 6.7 – Curvas carga-deflexão para a treliça composta por duas barras ($\alpha = 60^\circ$).

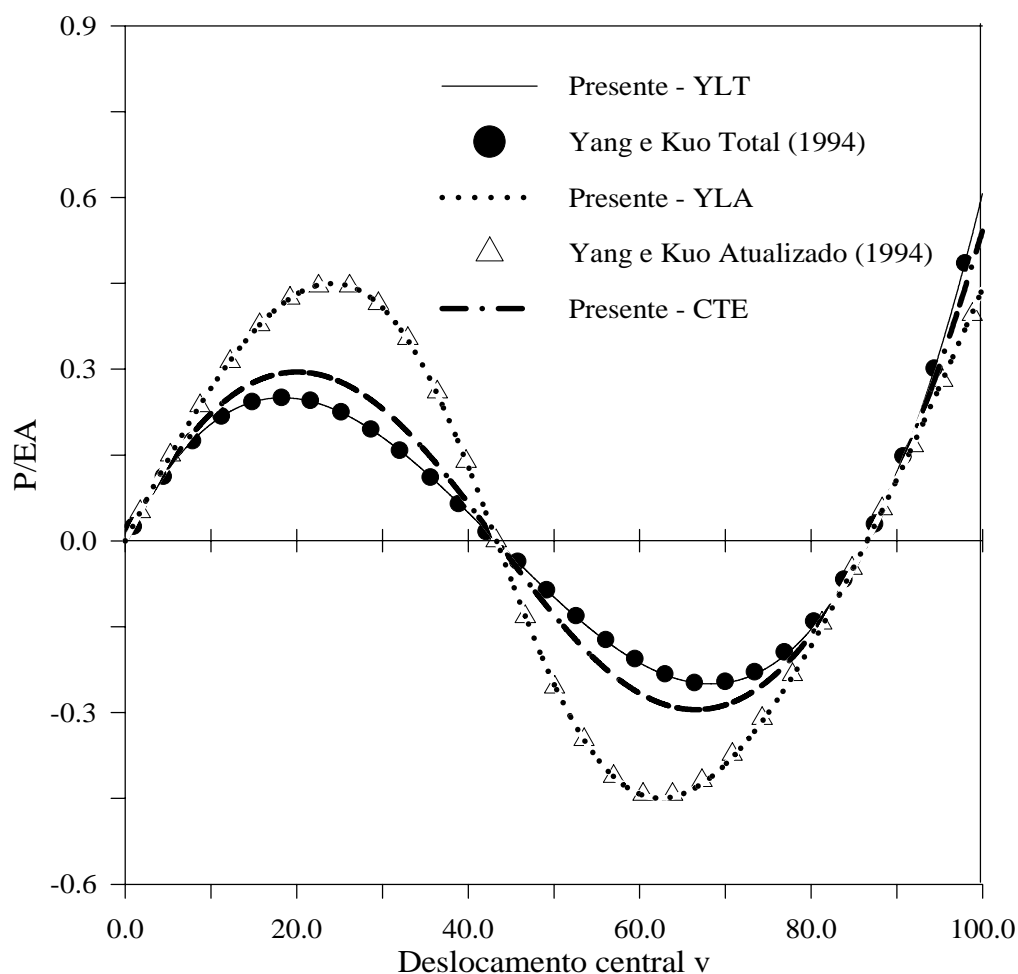


Figura 6.8 – Comparação entre as formulações apresentadas para treliça com $\alpha = 60^\circ$.

6.2.3 – Treliça assimétrica plana em forma de arco

A figura (6.9) mostra um sistema estrutural treliçado assimétrico em forma arco. Este exemplo é de particular interesse pois sua trajetória de equilíbrio exibe pontos limites tanto de carga quanto de deslocamento. Os detalhes referentes à geometria e às propriedades das barras encontram-se na mesma figura.

A figura (6.10) mostra o traçado da trajetória de equilíbrio para os pontos nodais 8 e 13 indicados na figura (6.9). Para o primeiro ponto, a curva apresenta cinco pontos limites, sendo três de carga e dois de deslocamento. Para o segundo ponto, o gráfico mostra a presença apenas de três pontos limites de carga.

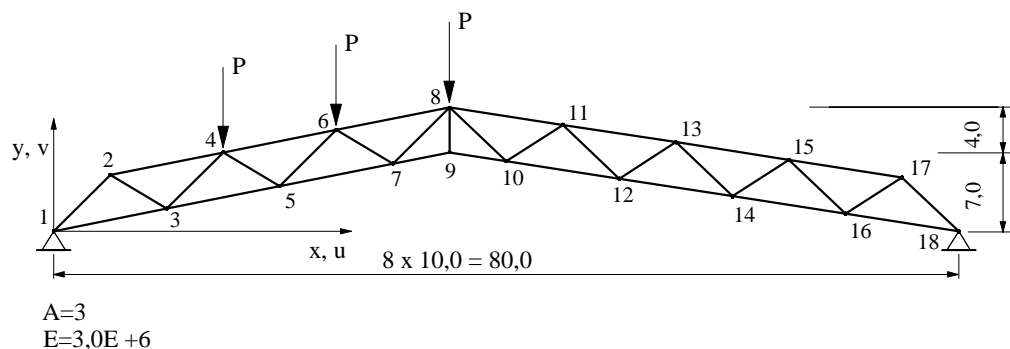
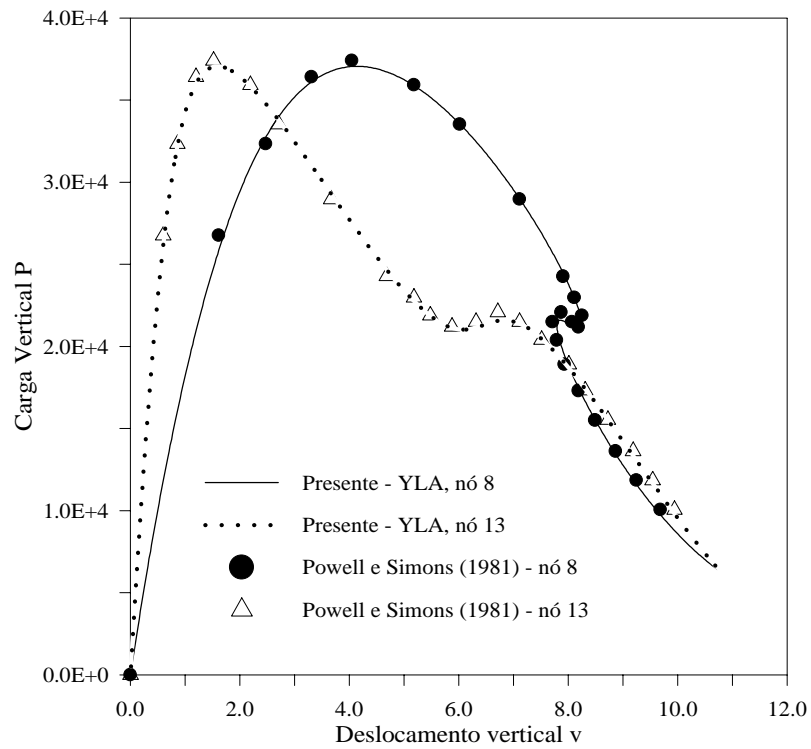


Figura 6.9 – Treliça assimétrica em forma de arco.

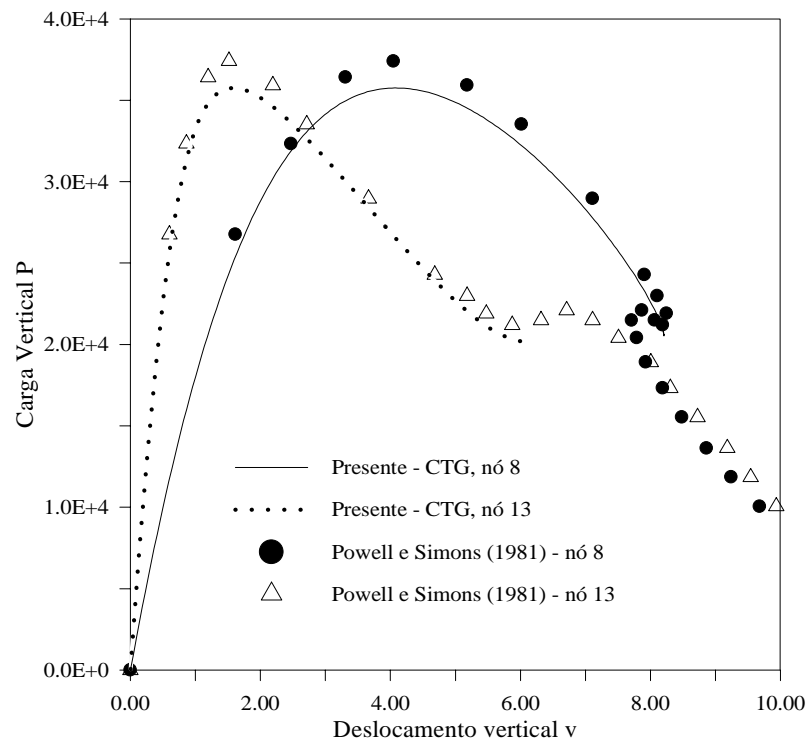
Na estratégia de solução não-linear, foi utilizado o método do deslocamento generalizado aliado ao método de Newton-Raphson padrão, com o valor inicial do parâmetro de carga λ igual a 500 e tolerância $\zeta = 10^{-3}$. Esta estratégia foi a que melhor se adequou à solução do problema e forneceu um ótimo resultado em referencial Lagrangeano atualizado, o que pode ser visualizado pela figura (6.10a). A estratégia de incremento de carga do comprimento de arco produziu melhores resultados quando aliada à estratégia de iteração a resíduo ortogonal. No entanto, mesmo nessa situação havia uma perda de eficiência após a passagem pelo terceiro ponto limite de carga.

Outro detalhe importante reporta-se à utilização do referencial Lagrangeano total para solução deste problema. Nessa situação, havia uma grande perda de eficiência quando da aproximação do primeiro ponto limite de deslocamento, fato que foi observado tanto para a formulação YLT quanto para CTG e CTE, mesmo tendo-se utilizado o método do deslocamento generalizado como estratégia de solução não-linear. Isso vem demonstrar, para algumas estruturas, a grande vantagem do emprego de um referencial atualizado no traçado completo da curva de equilíbrio. As figuras (6.10b) e (6.11) ilustram esse comportamento para CTG e YLT, respectivamente.

Além disso, o primeiro ponto limite de carga, segundo os dados obtidos por Powell e Simons (1981), foi de 37412,9, enquanto os respectivos deslocamentos nos nós 8 e 13 foram de 4,044 e 1,554. Os valores encontrados para as formulações testadas mostram uma nítida diferença entre si, como atestam as figuras (6.10) e (6.11) e a tabela (6.2). Já a figura (6.12) apresenta as configurações deformadas da estrutura sob análise no primeiro ponto limite de carga e no primeiro ponto limite de deslocamento a partir dos resultados fornecidos por YLA.



(a)



(b)

Figura 6.10 – Trajetórias de equilíbrio para nos pontos nodais 8 e 13 da treliça plana assimétrica.

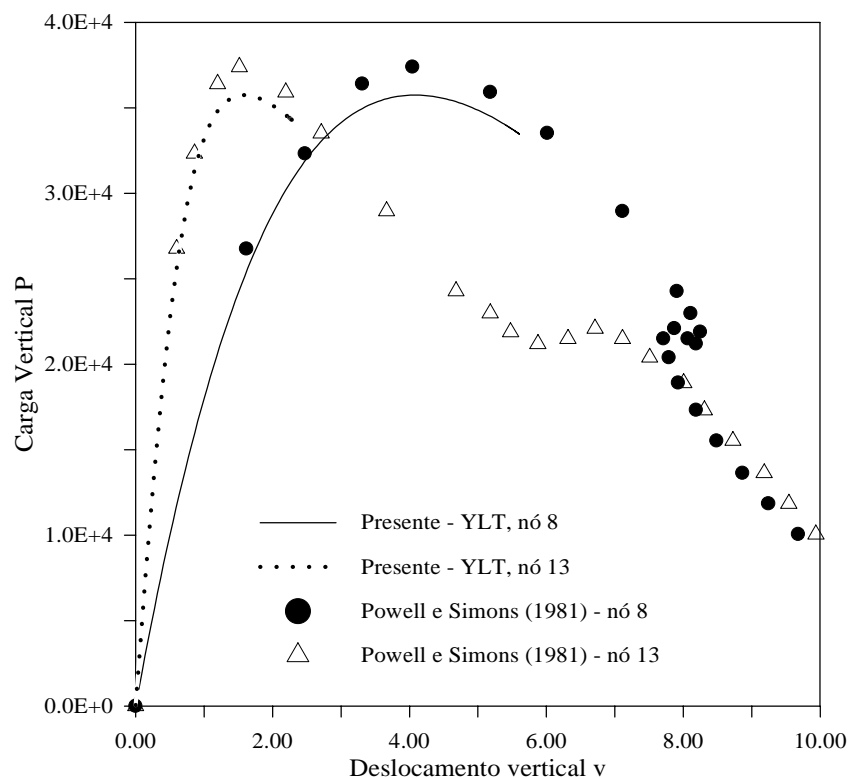


Figura 6.11 – Trajetórias de equilíbrio para a treliça assimétrica utilizando a formulação Lagrangeana total.

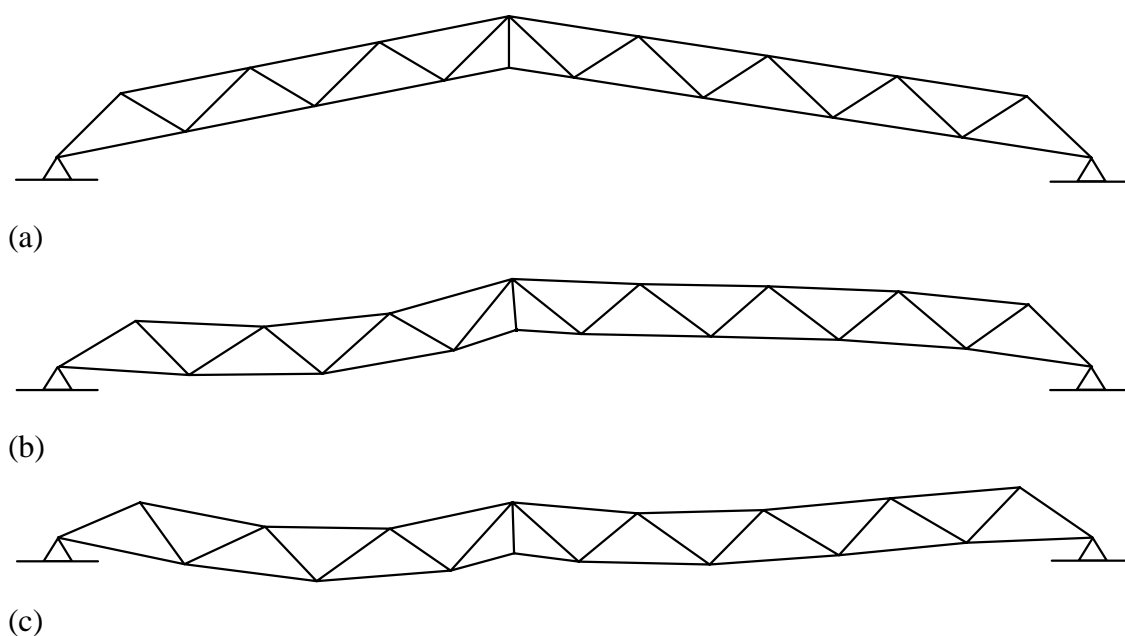


Figura 6.12 – Configurações de equilíbrio para a treliça plana assimétrica:
(a) indeformada; (b) no primeiro ponto limite de carga; (c) no primeiro ponto limite de deslocamento (escala utilizada para os deslocamentos: 1/1).

Tabela 6.2 – Valores de carga crítica e deslocamento vertical nos pontos nodais 8 e 13 da treliça assimétrica em forma de arco.

Formulação	P_{cr}	Erro	Desl. v (nó 8)	Erro	Desl. v (nó 13)	Erro
YLT	35760,0	4,42%	4,106	1,533%	1,581	1,737%
YLA	37064,9	0,93%	4,134	2,226%	1,626	4,633%
CTG	35760,3	4,42%	4,069	0,618%	1,593	2,510%

6.2.4 – Treliça composta por duas barras com análise de bifurcação

A geometria e os dados concernentes a este exemplo encontram-se na figura (6.13), que tem por objetivo principal a análise do problema de bifurcação assimétrica. Para a realização de tal averiguação, impôs-se uma pequena imperfeição inicial à estrutura de modo a gerar uma assimetria na mesma. A partir daí, pôde-se verificar o caminho de bifurcação existente para tal sistema estrutural.

Este caminho, que se encontra traçado nos gráficos exibidos pelas figuras (6.14a) e (6.14b), foi obtido utilizando-se a formulação CTE. Tal resultado, por sua vez, foi similar ao encontrado pela utilização de CTG, o que demonstra a convergência entre as duas formulações na análise do problema de bifurcação desta estrutura.

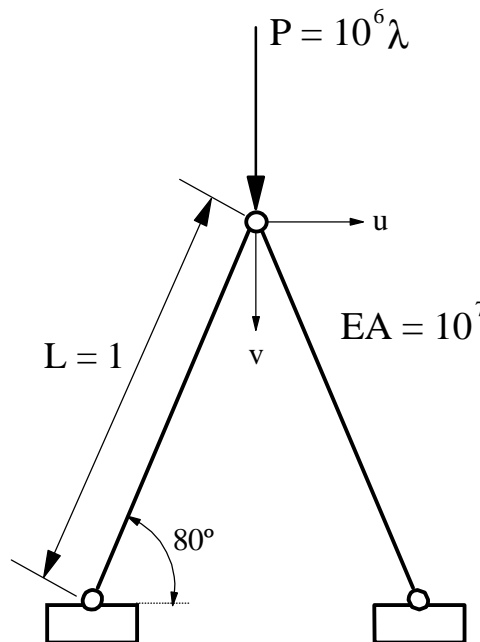
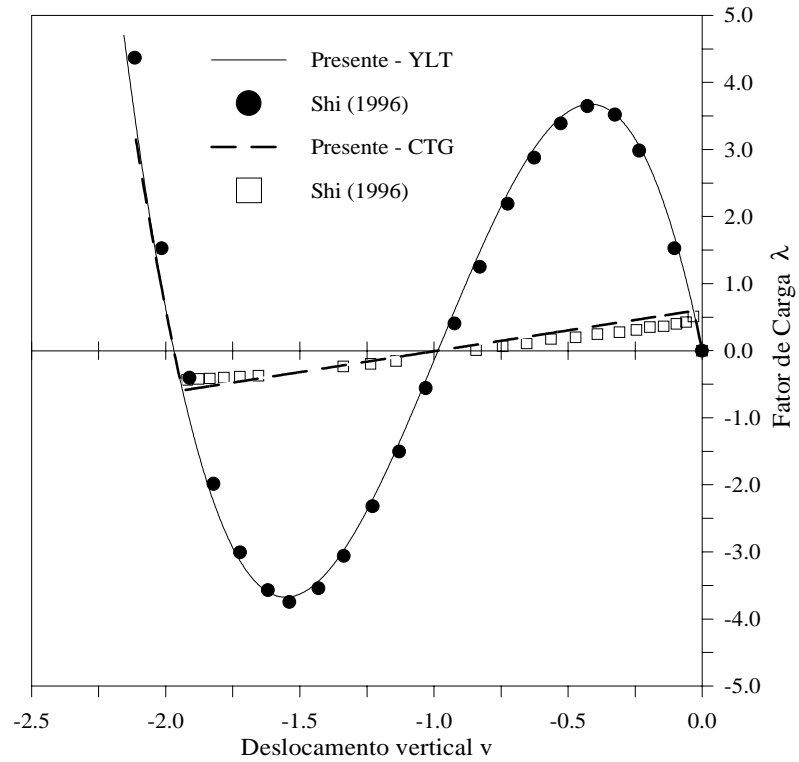
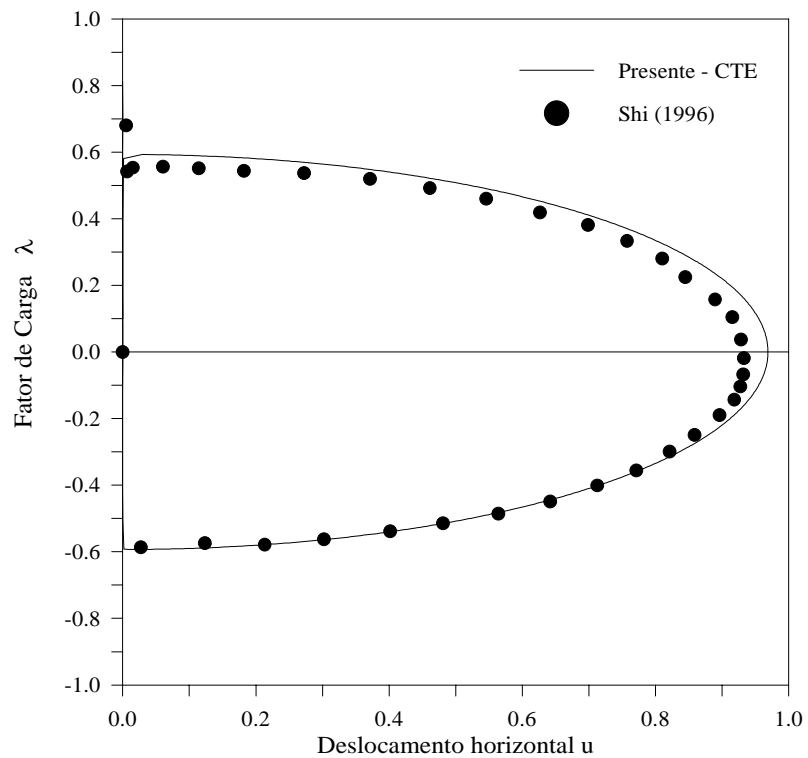


Figura 6.13 – Treliça de von Mises.



(a)



(b)

Figura 6.14 – Trajetórias de equilíbrio para treliça de von Mises: (a) para estrutura perfeita e imperfeita e (b) com imperfeição inicial.

Como estratégia de solução não-linear, utilizou-se o método do deslocamento generalizado, juntamente com a técnica de Newton-Raphson modificado. O valor inicial do parâmetro de carga λ foi de 0,1 e a tolerância $\zeta = 10^{-3}$. Para simular uma estrutura ligeiramente assimétrica, adicionou-se o valor de 4×10^{-6} à coordenada x do segundo apoio, o que já demonstrou ser suficiente para a interceptação do ponto de bifurcação.

Uma observação que se faz necessária é que, nesta análise, a estrutura possuirá além do deslocamento vertical, exibido pela figura (6.14a), deslocamento horizontal, como atesta o gráfico da figura (6.14b).

6.2.5 – Treliça espacial de 24 elementos.

A treliça espacial formada por 24 elementos apresentada na figura (6.15) tem sido utilizada com frequência como exemplo para testar a eficiência de várias formulações, algoritmos propostos e implementações computacionais (Papadrakakis, 1981; Yang e Kuo, 1994; Oñate e Matias, 1996; Krishnamoorthy et al., 1996). É com essa finalidade que a mesma será analisada nesta seção. A estrutura possui, por hipótese, $EA = 10^4$. Todos os dados geométricos encontram-se descritos na figura (6.15).

Para este exemplo, como os resultados obtidos para as formulações em estudo praticamente foram equivalentes, apenas os valores alcançados via YLA e CTE serão apresentados e comparados com aqueles obtidos por Oñate e Matias (1996). A estratégia de solução não-linear utilizada foi a do comprimento de arco.

Neste exemplo em particular, Oñate e Matias (1996) forneceram os valores considerados exatos para o primeiro ponto limite de carga e seu respectivo deslocamento vertical: 3,157 e 0,761, respectivamente. Para a formulação YLA, foram encontrados os valores 3,1565 (erro de 0,016%) para carga crítica e 0,763 para o deslocamento vertical (erro de 0,263%). Já para a formulação CTE, os valores foram praticamente os mesmos: 3,1561 (erro de 0,286%) para o ponto limite de carga e 0,763 (erro de 0,263%) para a deflexão vertical. Tais resultados mostram que, para esta estrutura, quase não há diferença sobre a escolha entre os referenciais Lagrangeanos total e atualizado, o que pode ser observado nas figuras (6.16a) e (6.16b).

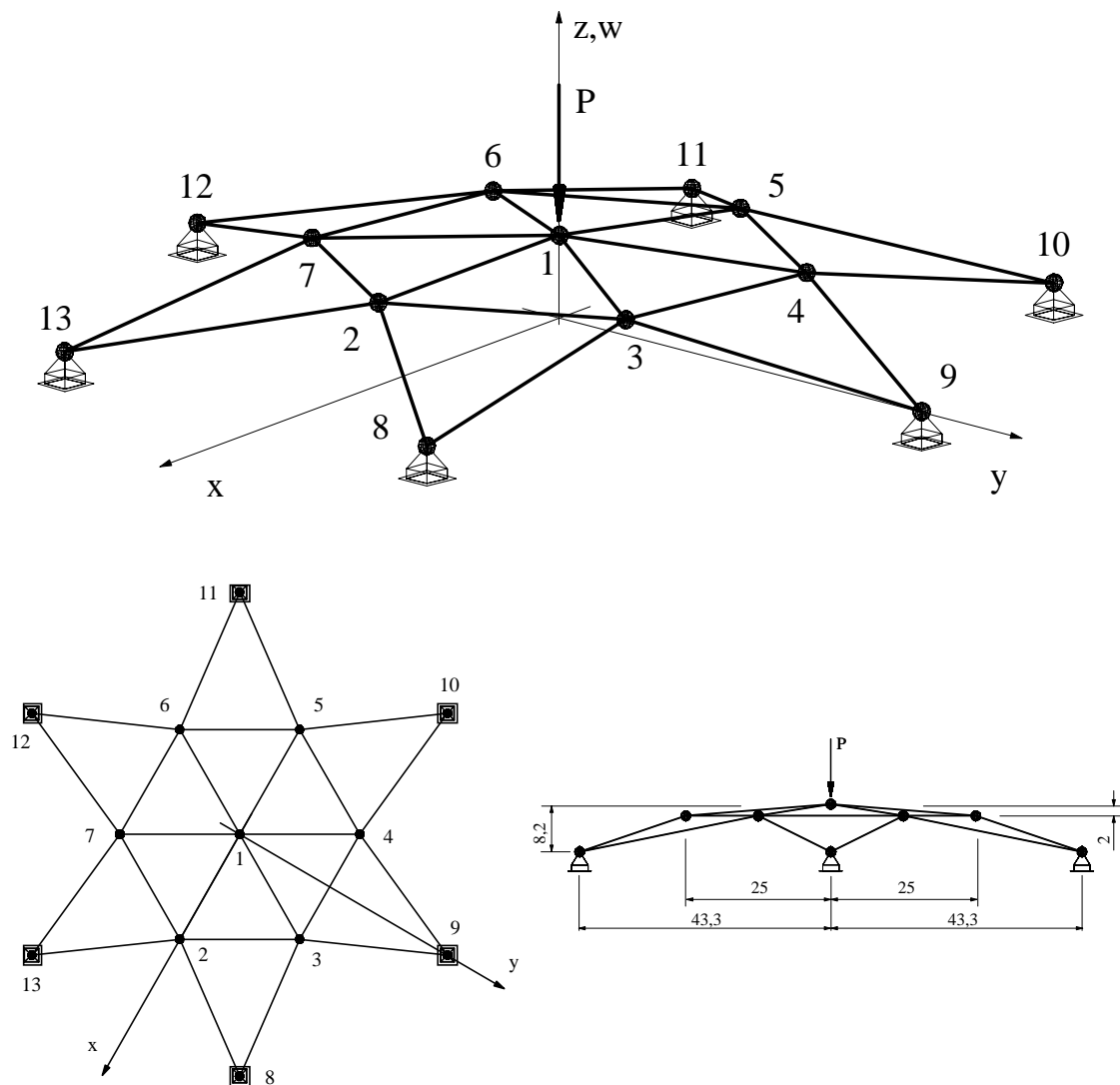
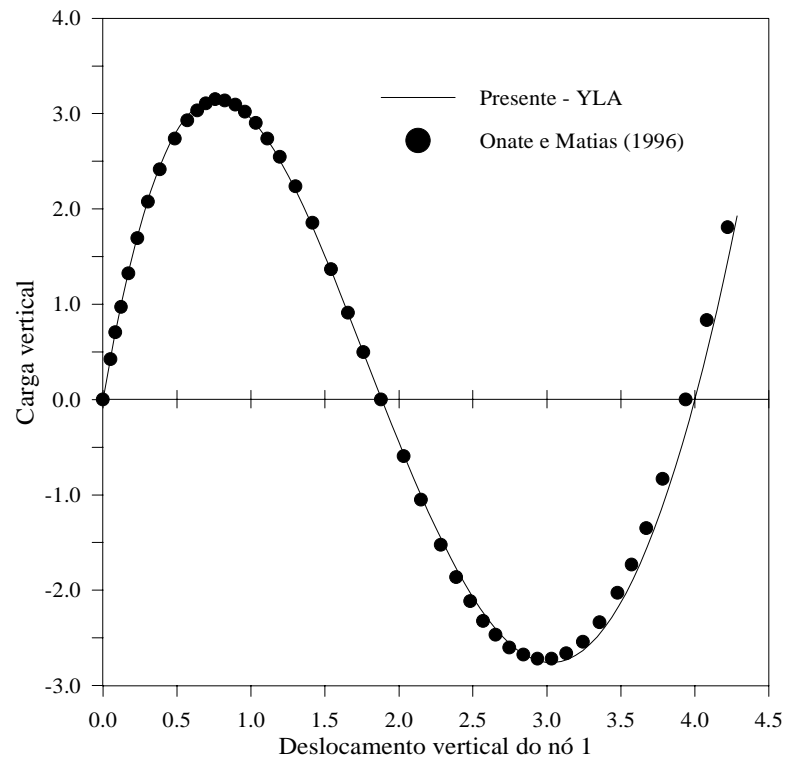
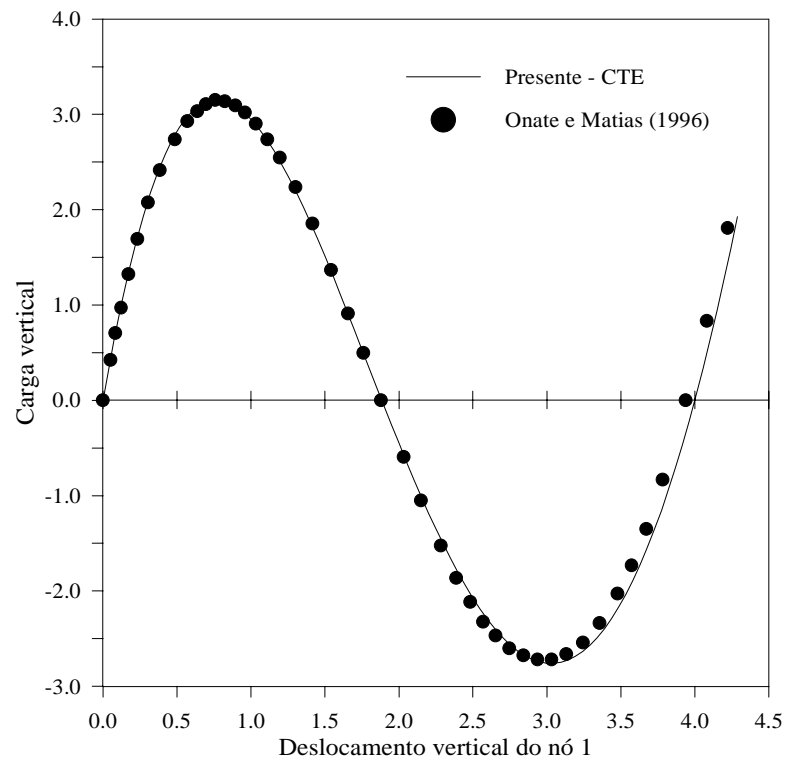


Figura 6.15 – Domo tridimensional formado por 24 elementos e 13 nós submetido a uma carga vertical.



(a)



(b)

Figura 6.16 – Trajetória de equilíbrio para a treliça espacial de 24 elementos: (a) em referencial Lagrangeano atualizado (YLA); (b) em referencial Lagrangeano total (CTE).

Uma variação deste exemplo encontra-se na figura (6.17), em que além da carga concentrada P atuando no centro da estrutura, há a presença de outras seis cargas nodais. A presença dessas novas cargas faz com que a trajetória de equilíbrio da estrutura passe a ter não apenas dois, mas três pontos limites de carga. Além disso, a análise estrutural passou a ser mais sensível ao tipo de solução não-linear utilizado. As figuras (6.18a) e (6.18b) ilustram a ocorrência deste fato. Inicialmente, decidiu-se pela manutenção da estratégia do comprimento de arco. No entanto, assim como ilustrado pela figura (6.18b), havia uma perda de estabilidade no processo incremental-iterativo assim que a análise atingia o terceiro ponto limite de carga, possivelmente devido à obtenção de raízes não reais para os parâmetros de carga $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$ (ver apêndice A). O traçado completo da curva, ilustrado pela figura (6.18a), foi possível a partir da mudança da estratégia de solução para o método do deslocamento generalizado, que, neste caso, mostrou ter uma eficiência geral extremamente satisfatória.

Outro fato a ser observado é que agora o sistema utilizado como referência passa a ter influência decisiva no traçado completo da trajetória de equilíbrio. As formulações baseadas num referencial Lagrangeano total não mostraram avanços após o primeiro ponto limite de carregamento, de modo que os demais pontos limites de carga só puderam ser alcançados através do estabelecimento de um referencial Lagrangeano atualizado. Mesmo com a mudança na estratégia de solução não-linear, as formulações totais (YLT, CTE e CTG) não foram capazes de ultrapassar com mais facilidade o primeiro valor limite do caminho de equilíbrio, o que pode ser verificado através da figura (6.18a).

O valor considerado exato para o primeiro ponto limite de carga vale 7,81 (Oñate e Matias, 1996), sendo o deslocamento relativo a este nível de carregamento igual a 0,882 (Oñate e Matias, 1996). Nas verificações realizadas, os valores encontrados estão descritos na tabela (6.3).

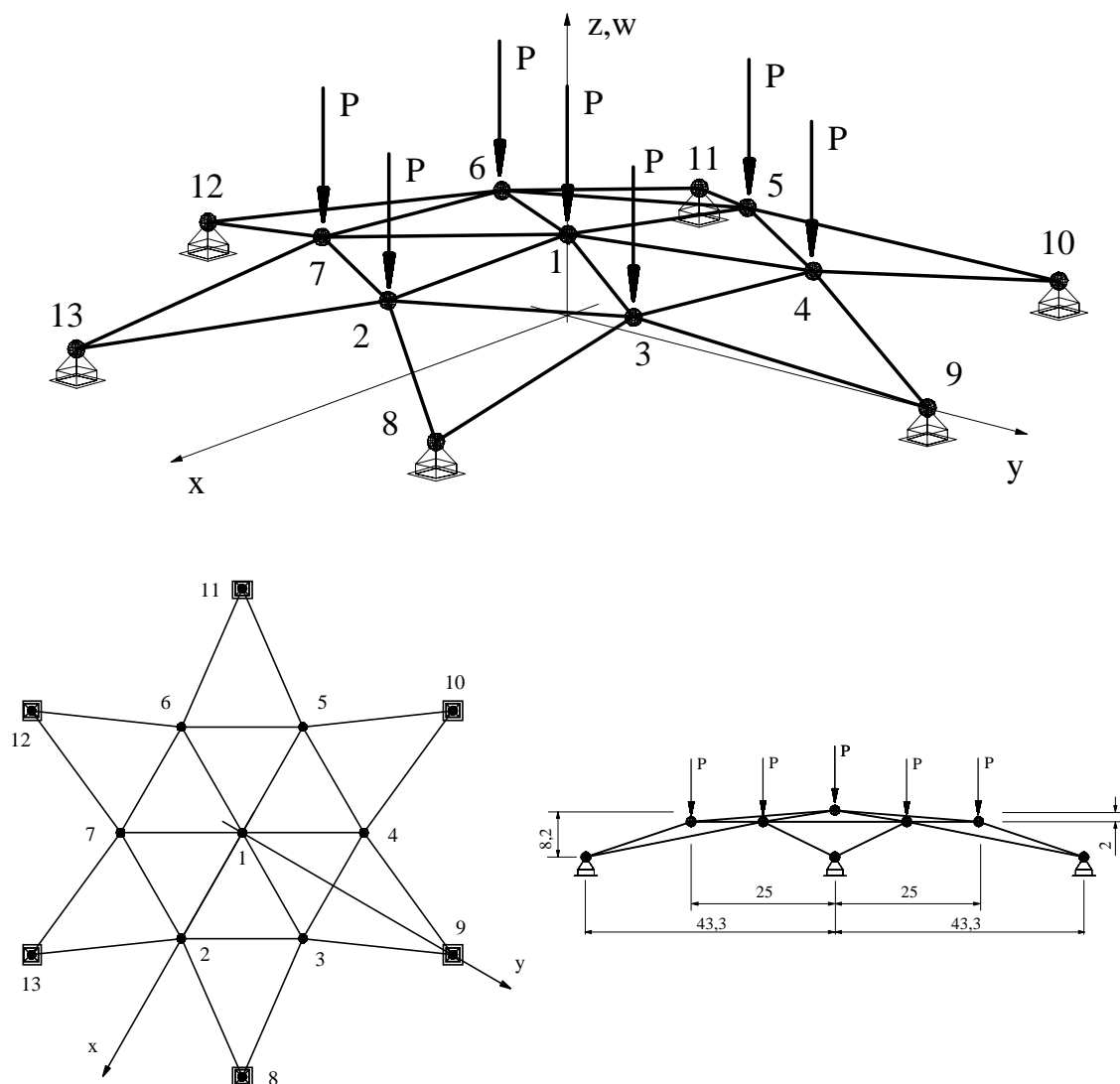
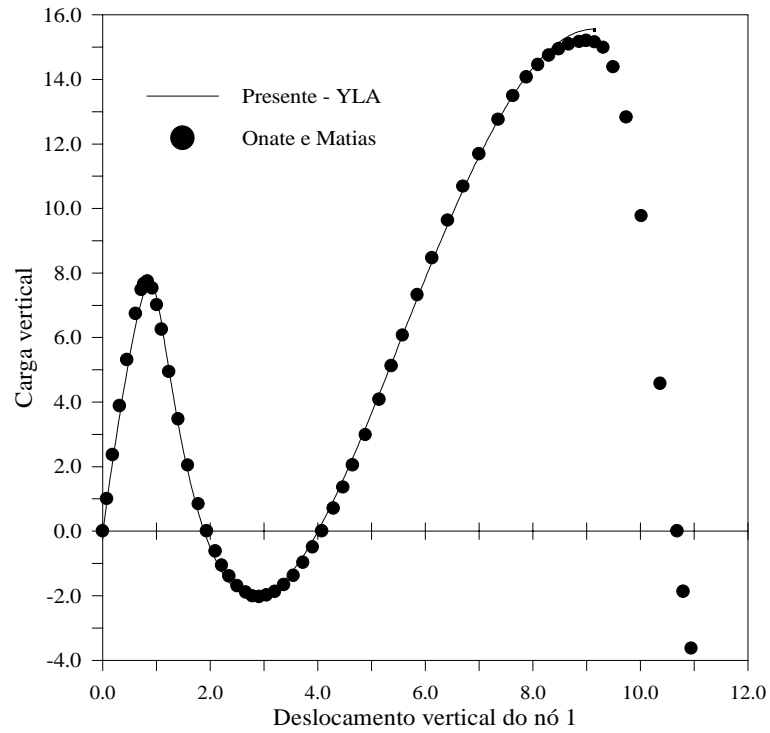


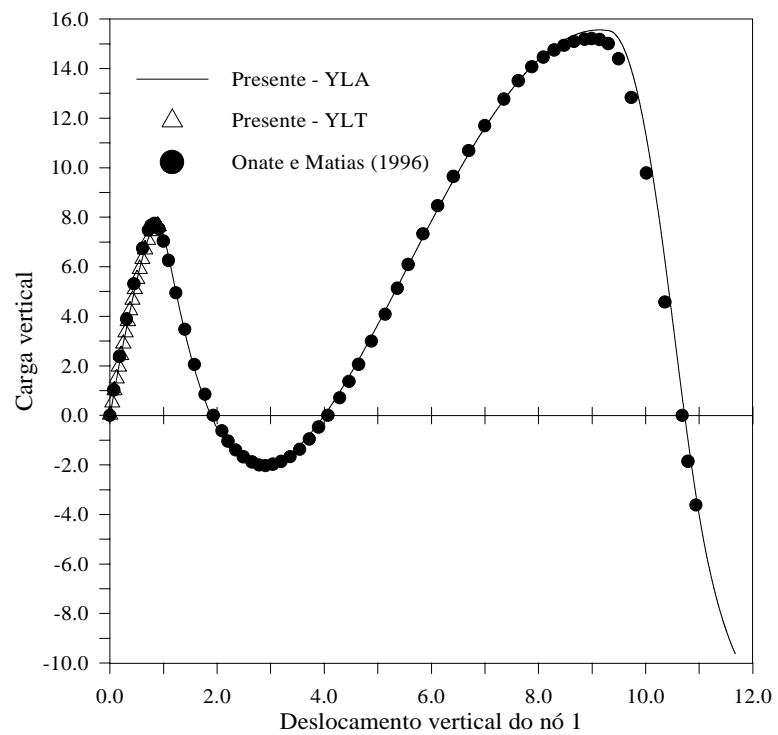
Figura 6.17 – Domo tridimensional de 24 elementos submetido a sete cargas verticais.

Tabela 6.3 – Valores de carga crítica e deslocamento vertical para o domo espacial submetido a sete cargas nodais considerando-se duas estratégias diferentes de solução não-linear.

Formulação	Comprimento de Arco				Deslocamento Generalizado			
	P_{cr}	Erro	Desl. v	Erro	P_{cr}	Erro	Desl. v	Erro
YLT	7,650	2,05%	0,874	0,91%	7,650	2,05%	0,873	1,02%
YLA	7,670	1,79%	0,852	3,40%	7,686	1,59%	0,878	0,45%
CTE	7,662	1,90%	0,875	0,79%	7,662	1,90%	0,875	0,79%



(a)



(b)

Figura 6.18 – Curva carga-deslocamento para a treliça espacial de 24 elementos e 7 cargas nodais: (a) utilizando a estratégia do deslocamento generalizado; (b) utilizando a estratégia do comprimento de arco.

6.2.6 – Treliça espacial formada por 12 barras

O exemplo analisado a seguir refere-se a uma treliça espacial formada por 12 barras e três nós livres, que possui uma trajetória de equilíbrio fortemente não-linear, com múltiplos pontos limites tanto de carga quanto de deslocamento. Yang e Kuo (1994) apresentam resultados parciais para a solução não-linear desta estrutura. No entanto, Krenk e Hededal (1993; 1995) obtiveram o traçado completo dessa trajetória. É com base nos valores fornecidos por estes últimos pesquisadores que os obtidos pelas implementações computacionais realizadas neste trabalho serão comparados.

A figura (6.19) apresenta a geometria e as dimensões do sistema estrutural, bem como o carregamento atuante. Para todas as barras, adotou-se $EA = 1$.

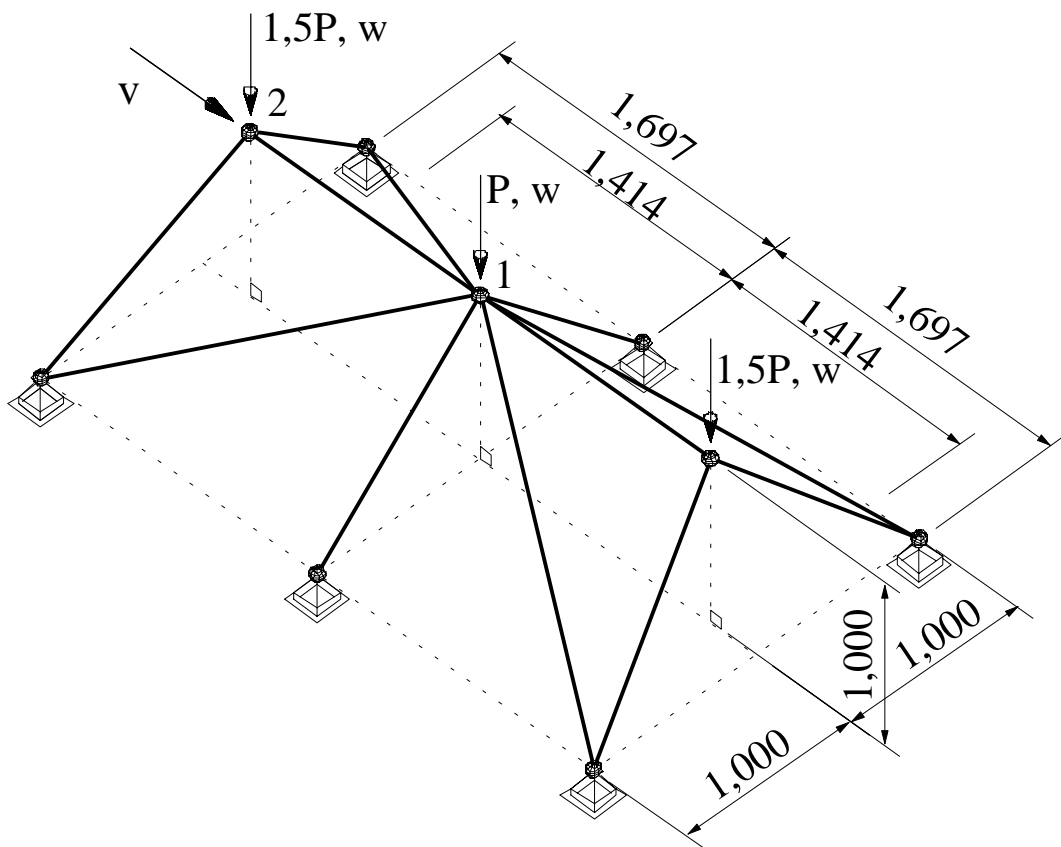


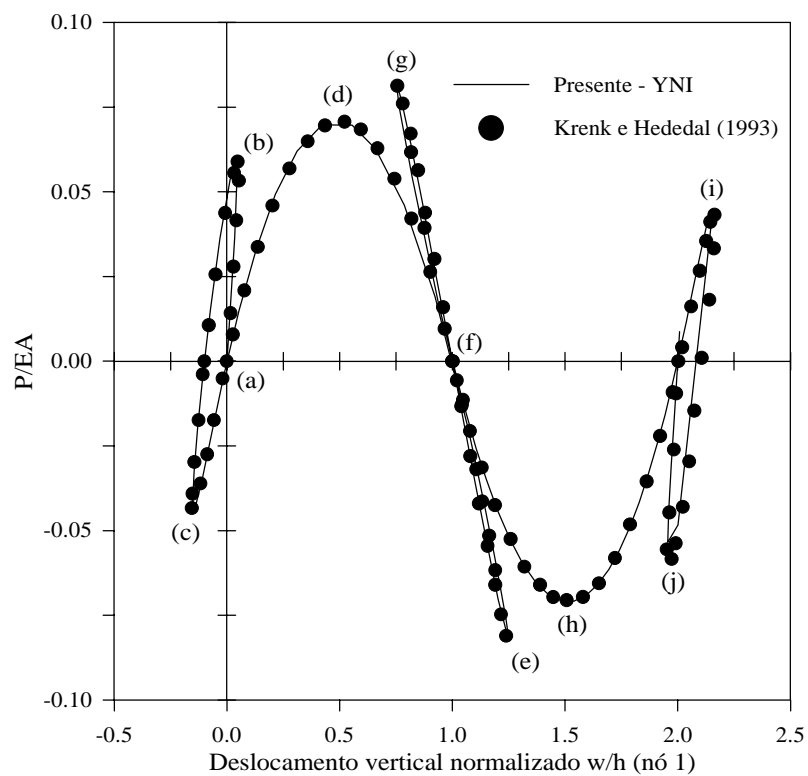
Figura 6.19 – Treliça espacial formada por 12 barras.

A estratégia de solução não-linear que demonstrou ter a melhor eficiência computacional para este exemplo foi obtida utilizando-se como estratégia de incremento

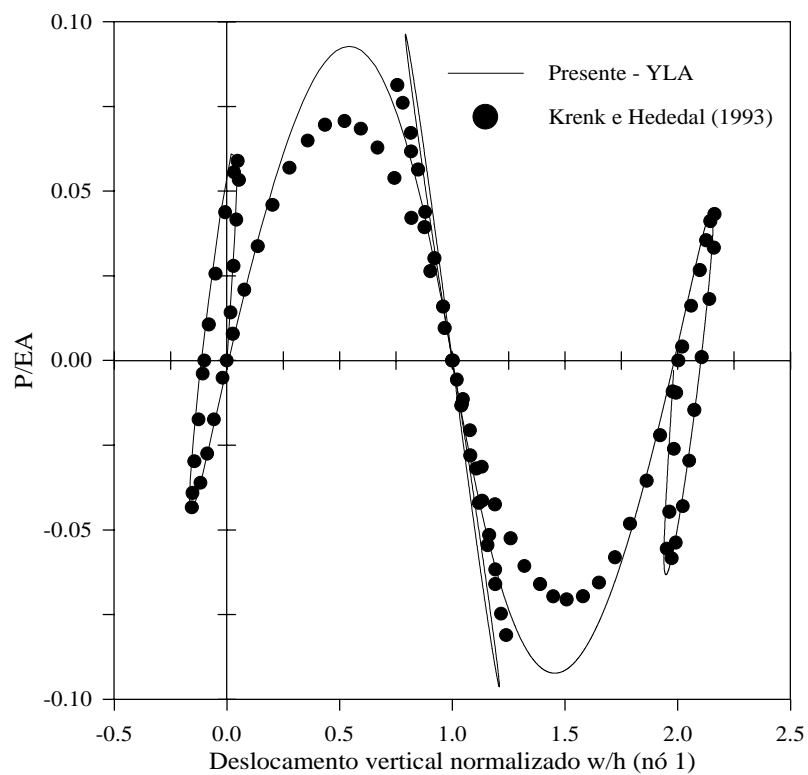
de carga o comprimento de arco e a estratégia de iteração baseada no resíduo ortogonal, tendo sido adotado o método de Newton-Raphson padrão. Entre as formulações testadas, os melhores resultados foram obtidos por YNI, que, de acordo com a figura (6.20a), concordou quase que completamente com os valores de Krenk e Hededal (1993; 1995). Já YLA demonstrou ser capaz de vencer com maior facilidade os vários pontos limites da curva carga-deslocamento. No entanto, para esta última formulação, os valores de carga obtidos tendiam a se desviar dos fornecidos pelos mesmos autores, o que pode ser observado pela figura (6.20b). Uma explicação plausível para esse comportamento deve-se, provavelmente, ao fato de que para estruturas suscetíveis a maiores deslocamentos a formulação Lagrangeana atualizada tende a majorar os valores de carga na trajetória de equilíbrio, fato este que foi demonstrado no exemplo (6.2.2). Essa tendência foi também observada em Yang e Kuo (1994), que, entretanto, não exibiram a trajetória completa para o exemplo em análise. Mesmo assim, os resultados alcançados no início e no final do mesmo gráfico demonstraram ótima concordância com os encontrados por Krenk e Hededal (1993; 1995). As figuras (6.21a) e (6.21b) também mostram boa precisão dos valores encontrados para o nó 2 com os fornecidos por estes últimos autores.

Além disso, a estratégia de solução não-linear utilizada teve uma influência ainda mais acentuada no traçado da curva de equilíbrio, em especial quando se utilizou a formulação YNI. O gráfico mostrado pela figura (6.20a) só foi alcançado com a estratégia de iteração a resíduo ortogonal de 1 condição. Mesmo quando se utilizou YLA, a escolha dos dados adequados de solução não-linear foi imprescindível para a obtenção de bons resultados. O gráfico mostrado pela figura (6.20b) foi obtido quando se utilizou o método do comprimento de arco aliado à estratégia de iteração a resíduo ortogonal de 2 condições com o método de Newton-Raphson modificado.

Por fim, a figura (6.22) apresenta algumas configurações deformadas para o exemplo em estudo. Tais configurações encontram-se denominadas de (a) a (j) e podem ser localizadas nas figuras (6.20a), (6.21a) e (6.21b). Os deslocamentos sofridos pela estrutura estão na mesma ordem de grandeza da geometria apresentada na figura (6.19).

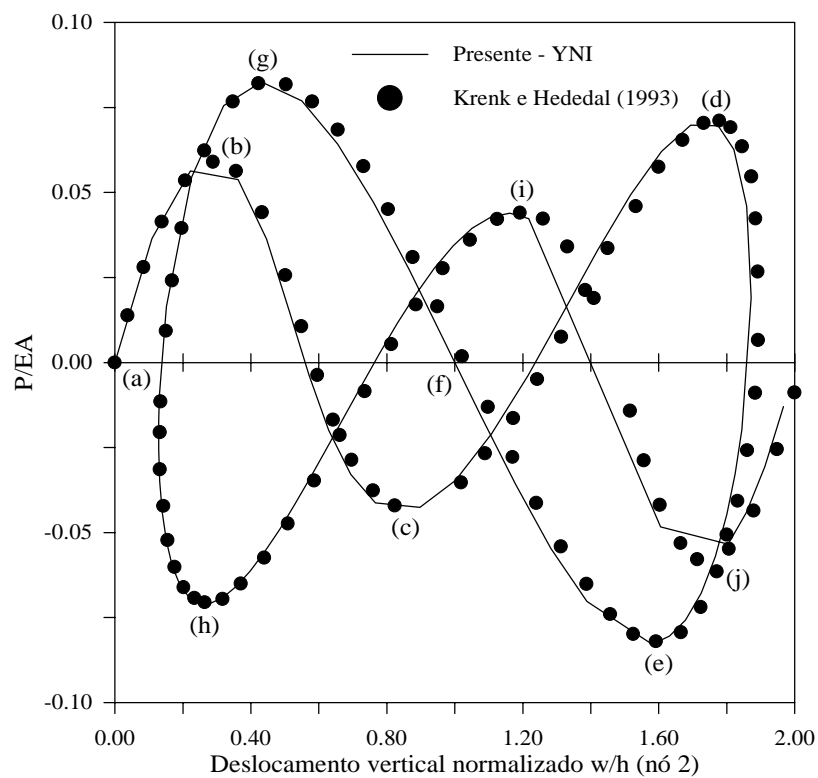


(a)

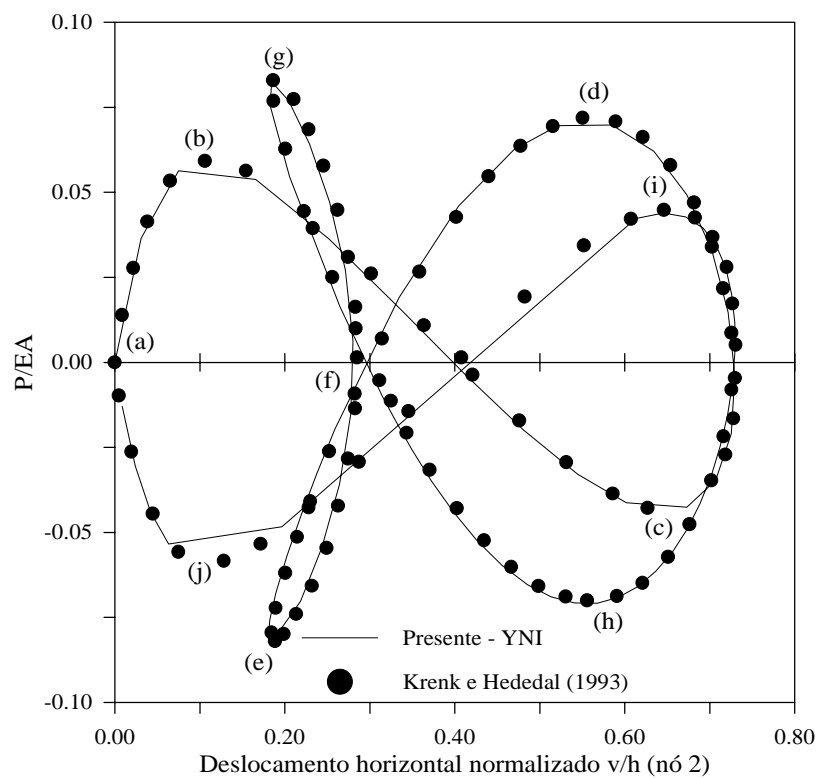


(b)

Figura 6.20 – Trajetórias de equilíbrio para a treliça espacial de 12 barras (nó 1).



(a)



(b)

Figura 6.21 – Trajetórias de equilíbrio para a treliça espacial de 12 barras (nó 2).

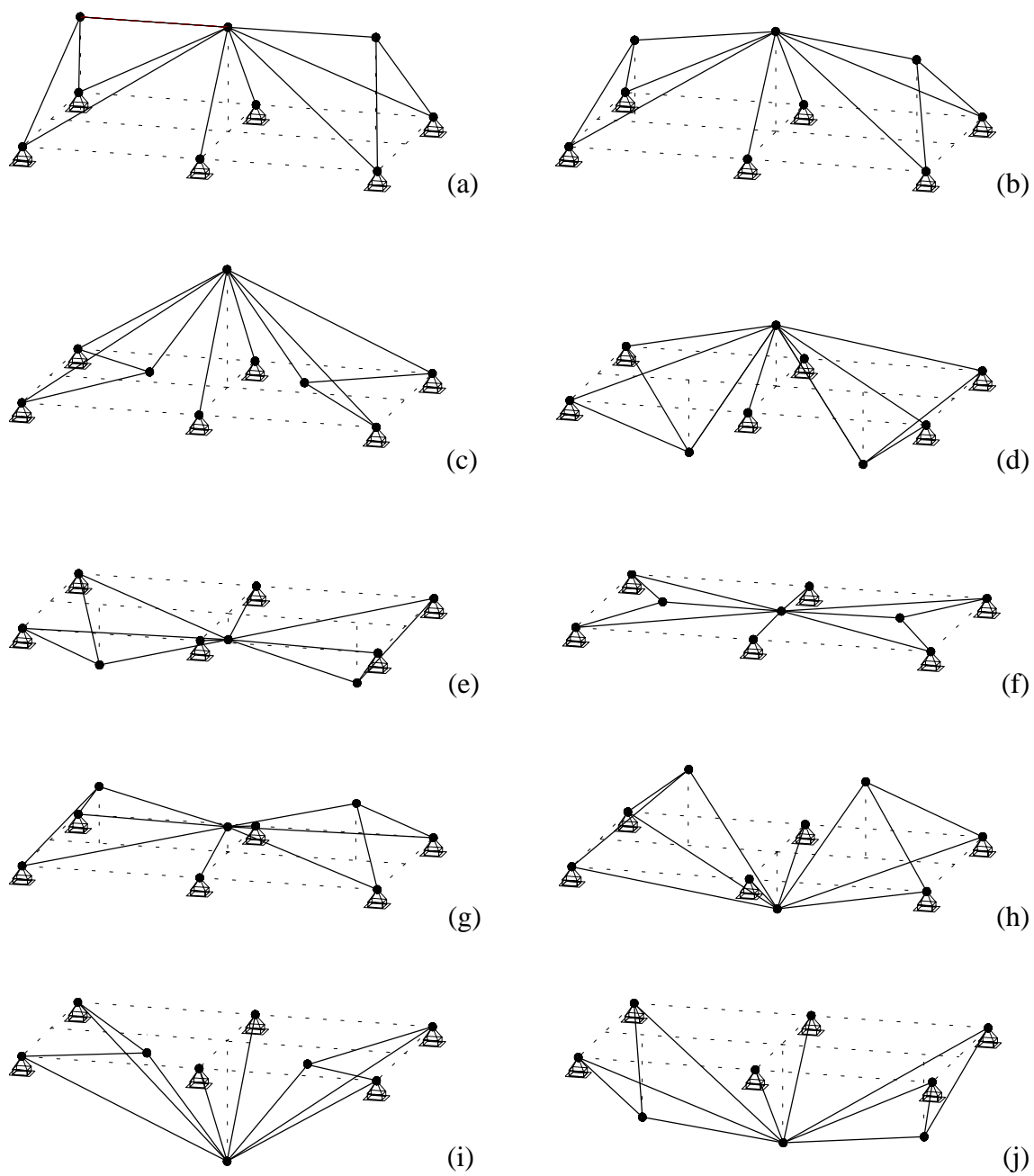


Figura 6.22 – Formas deformadas da treliça espacial de 12 barras.

6.2.7 – Domo reticulado de 168 elementos

Neste exemplo, conforme ilustrado na figura (6.23), será analisado um domo reticulado composto por 168 elementos, submetida a uma carga concentrada no nó 1, localizado no topo da estrutura, e já examinado anteriormente por Papadrakakis (1981) e Forde e Stiemer (1987). Para esta estrutura, adotou-se $EA = 1$. Os demais dados concernentes à geometria do sistema estrutural encontram-se na mesma figura.

Na análise dos resultados encontrados para este domo, apenas as formulações YLA e YNI demonstraram boa eficiência computacional para a obtenção das trajetórias de equilíbrio de forma completa para os nós 1 e 2 avaliados. As figuras (6.24a), (6.25a) e (6.25b) demonstram que os resultados obtidos para YLA possuem boa concordância com aqueles fornecidos pelos autores supracitados. Apesar dos valores de carga crítica não diferirem muito de uma formulação para outra, sempre que houve a utilização de um referencial Lagrangeano total a eficiência geral do processo de solução foi menor. A figura (6.24b) ilustra uma comparação entre os melhores resultados alcançados para cada formulação, mostrando que a formulação proposta por Crisfield (1991) perdia muito de sua eficiência após o primeiro ponto limite de carga. O mesmo ocorria com a forma proposta por Yang e Kuo (1994) para o referencial Lagrangeano total, que, no entanto, com a utilização da estratégia de solução não-linear baseada no deslocamento generalizado, ainda conseguiu ultrapassar o segundo ponto limite de carga.

Deve-se observar ainda que, para cada uma das formulações implementadas, várias estratégias de solução não-linear foram testadas para análise desta estrutura. Para YLA, o resultados apresentados adiante, assim como para YNI, foram alcançados utilizando-se o método do comprimento de arco. Já para CTE, os valores encontrados na figura (6.24b) foram obtidos com o uso da estratégia de incremento de carga do deslocamento generalizado aliado à estratégia de iteração da norma mínima dos deslocamentos residuais, cujas características encontram-se delineadas em Rocha (2000).

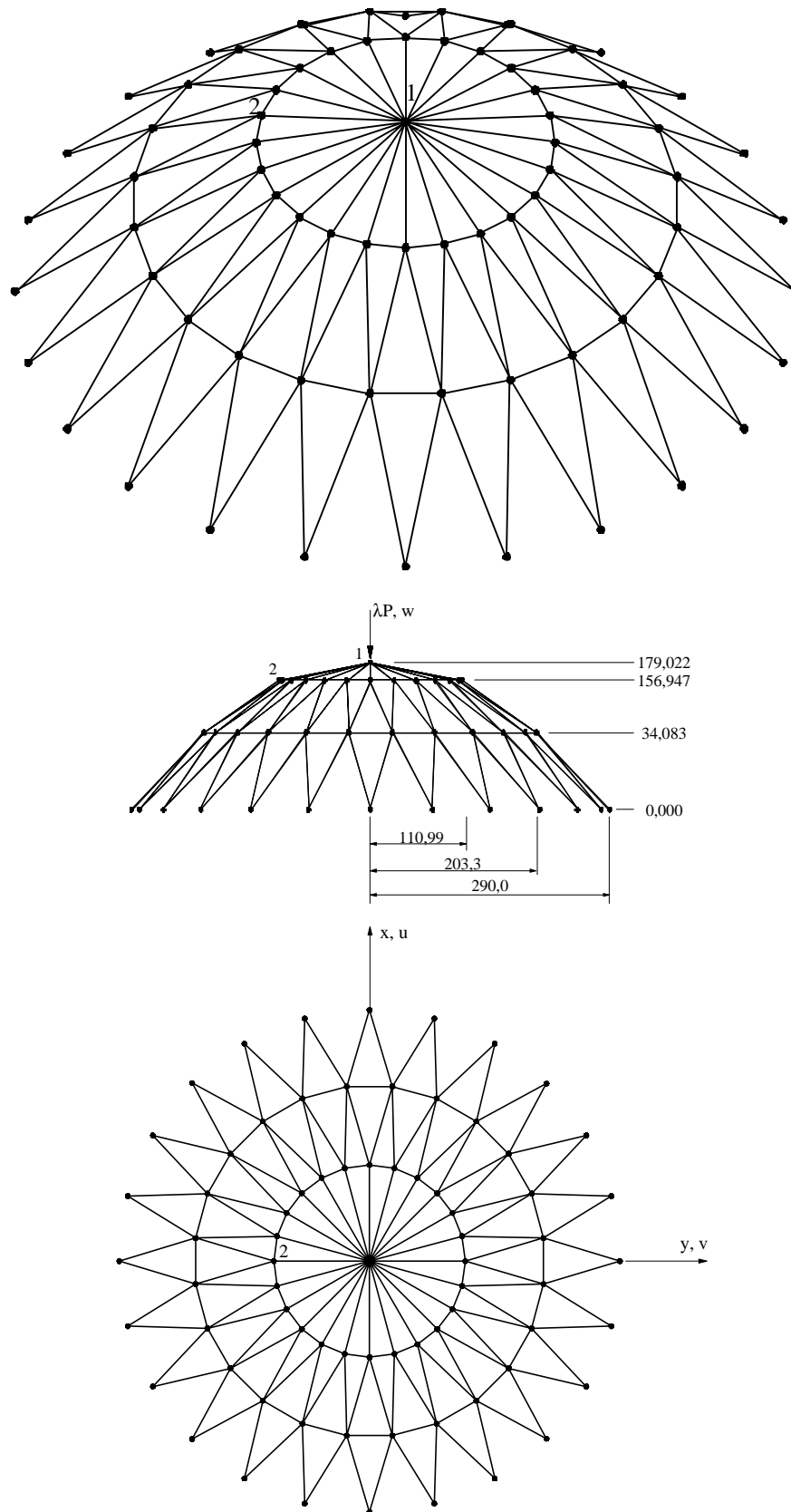
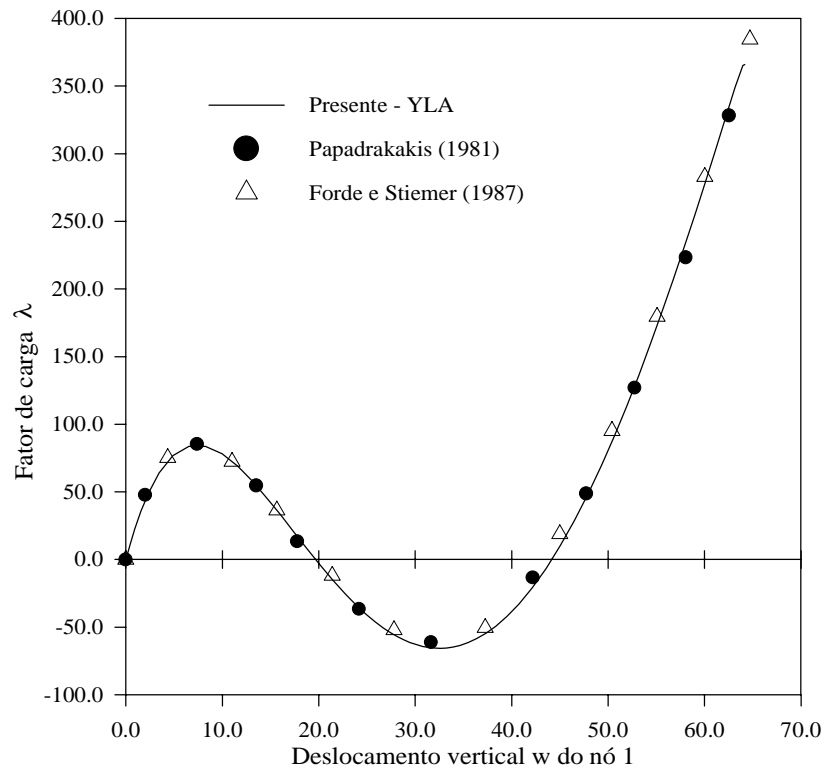
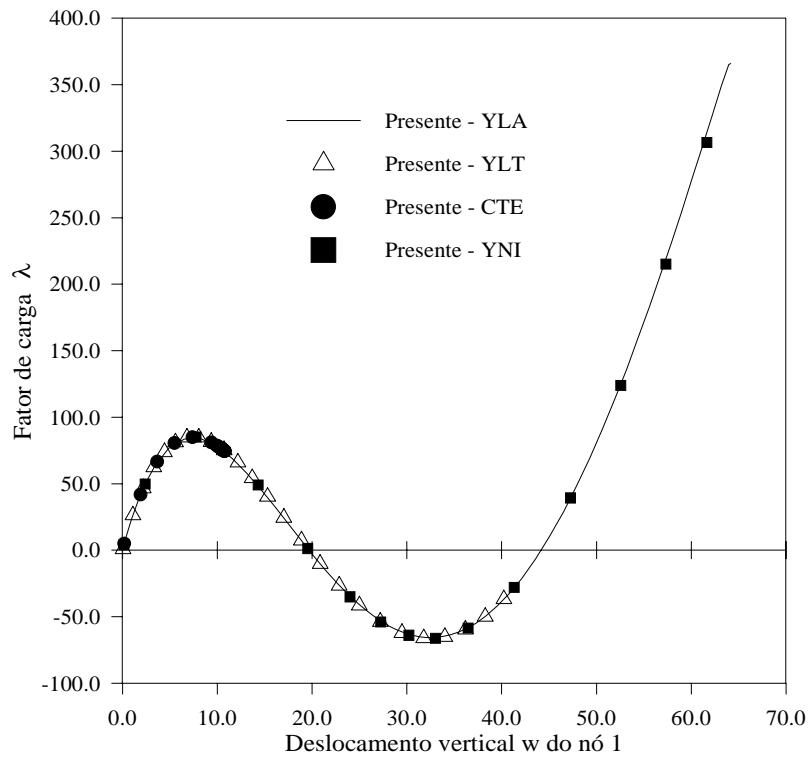


Figura 6.23 – Domo reticulado formado por 168 elementos.

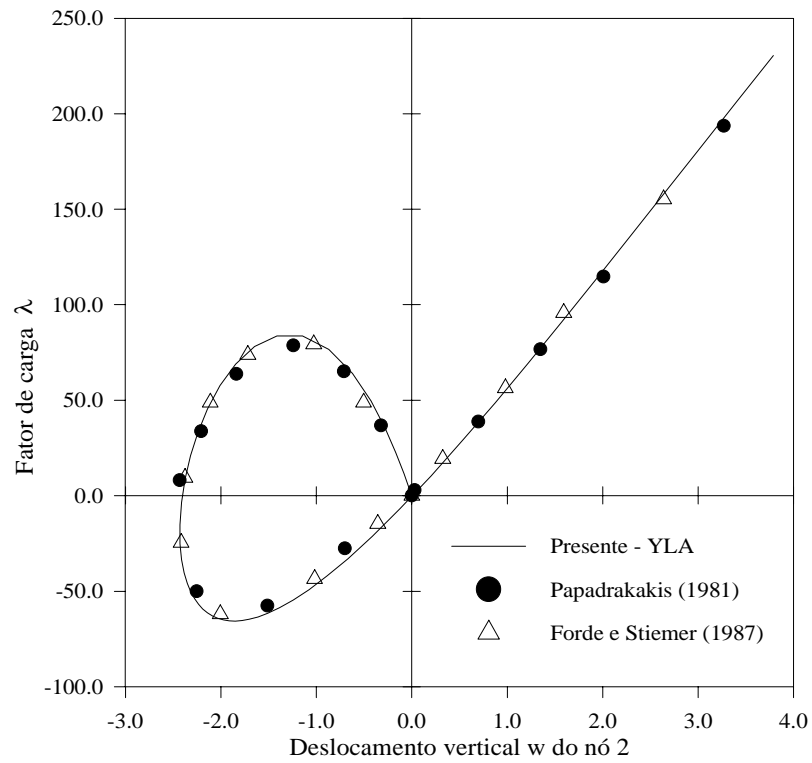


(a)

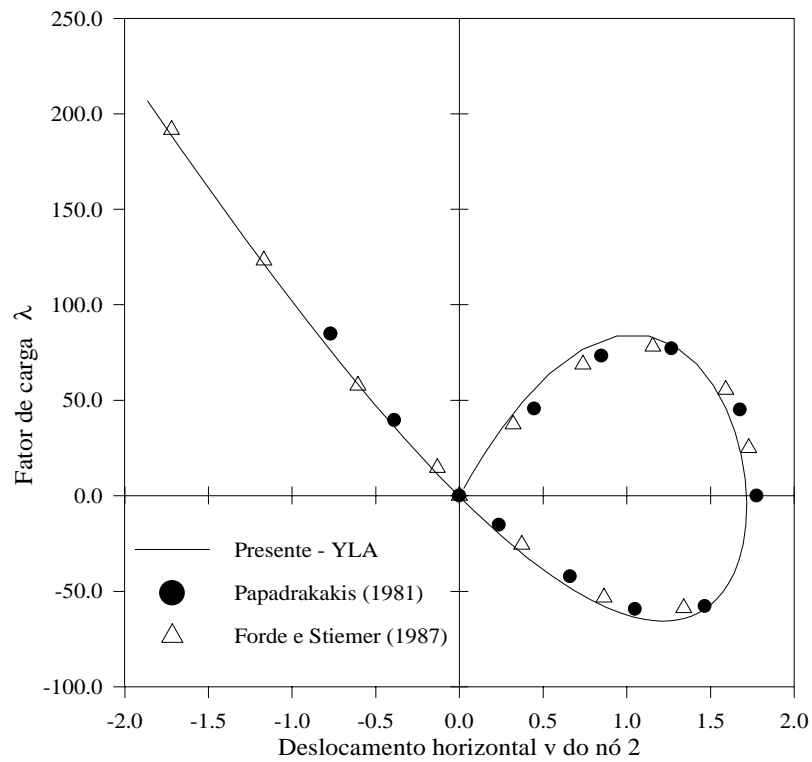


(b)

Figura 6.24 – Caminhos de equilíbrios o domo de 168 elementos (nó 1).



(a)



(b)

Figura 6.25 – Caminhos de equilíbrio para o domo espacial de 168 elementos (nó 2).

6.2.8 – Treliça espacial em forma de arco

Este exemplo tem por objetivo testar as implementações realizadas para estruturas espaciais treliçadas com pontos de bifurcação na(s) trajetória(s) de equilíbrio. A treliça espacial em forma de arco é formada por 11 barras e possui apenas dois nós livres, tal qual mostrado na figura (6.26), onde constam também as características geométricas e físicas da estrutura.

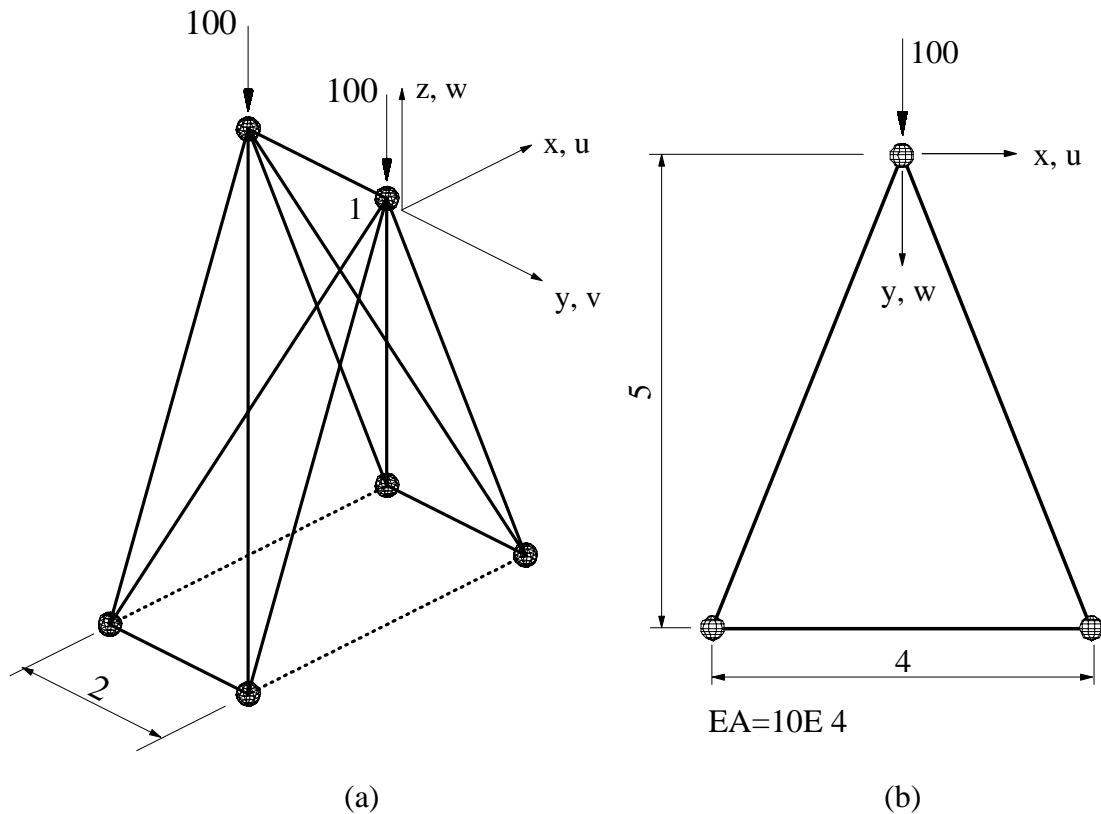


Figura 6.26 – Treliça espacial em forma de arco: (a) vista tridimensional e (b) vista frontal.

Resultados para essa treliça foram obtidos por Shi (1996) e Crisfield (1997), sendo uma estrutura de particular interesse por conter quatro trajetórias com pontos de bifurcação. Tais trajetórias constam nos trabalhos desses autores e serão comparadas com as obtidas pelas implementações realizadas neste trabalho através das figuras (6.27), (6.28) e (6.29). Para melhor compreensão, convencionar-se-á chamar os caminhos simplesmente de bifurcação 1, 2, 3 ou 4.

De início, foi obtida a curva de equilíbrio para a estrutura sem nenhuma imperfeição. Para isto, utilizou-se a formulação YLA com a estratégia de solução não-linear baseada no método do deslocamento generalizado. A figura (6.27a) mostra a variação do deslocamento vertical w para o nó 1 indicado na figura (6.26a), enquanto a figura (6.28) fornece o comportamento do deslocamento horizontal v , isto é, na direção do eixo y , no mesmo ponto. Devido a questões de simetria geométrica e de carregamento, não há deslocamento horizontal u , isto é, ao longo do eixo x na estrutura perfeita.

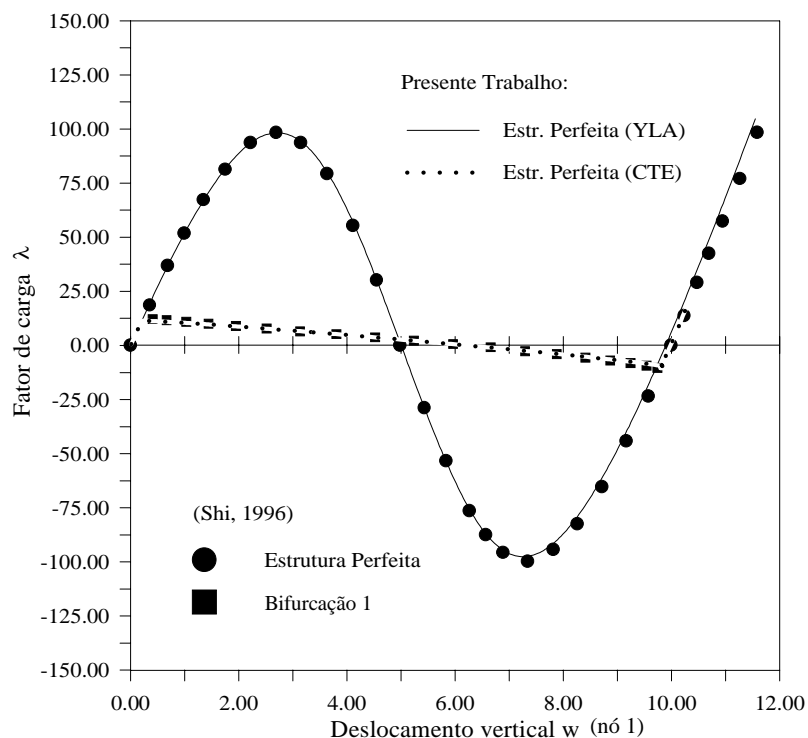


Figura 6.27a – Trajetórias de equilíbrio da treliça espacial em forma de arco, com ponto de bifurcação obtido para estrutura perfeita.

Já para a obtenção dos caminhos mostrando os pontos de bifurcação, foi preciso criar, exceção feita ao primeiro, uma pequena assimetria na geometria da treliça. Assim, para se obter as trajetórias de bifurcação 2 e 3, apresentadas nas figuras (6.27b) e (6.28), foi dada uma imperfeição inicial em um dos nós livres no valor de 0,001 na direção do eixo x . A estratégia de solução não-linear escolhida, para melhor comparação, foi a mesma utilizada para a estrutura perfeita. Segundo Shi (1996) e Crisfield (1997), os

pontos de bifurcação 2 e 3 ocorrem em $P = 69,13$ e $P = 91,05$. No presente trabalho, tais pontos se deram nos valores de carga iguais a 68,15 e 86,47, respectivamente. Os respectivos erros encontrados foram de 1,42% e 5,03%.

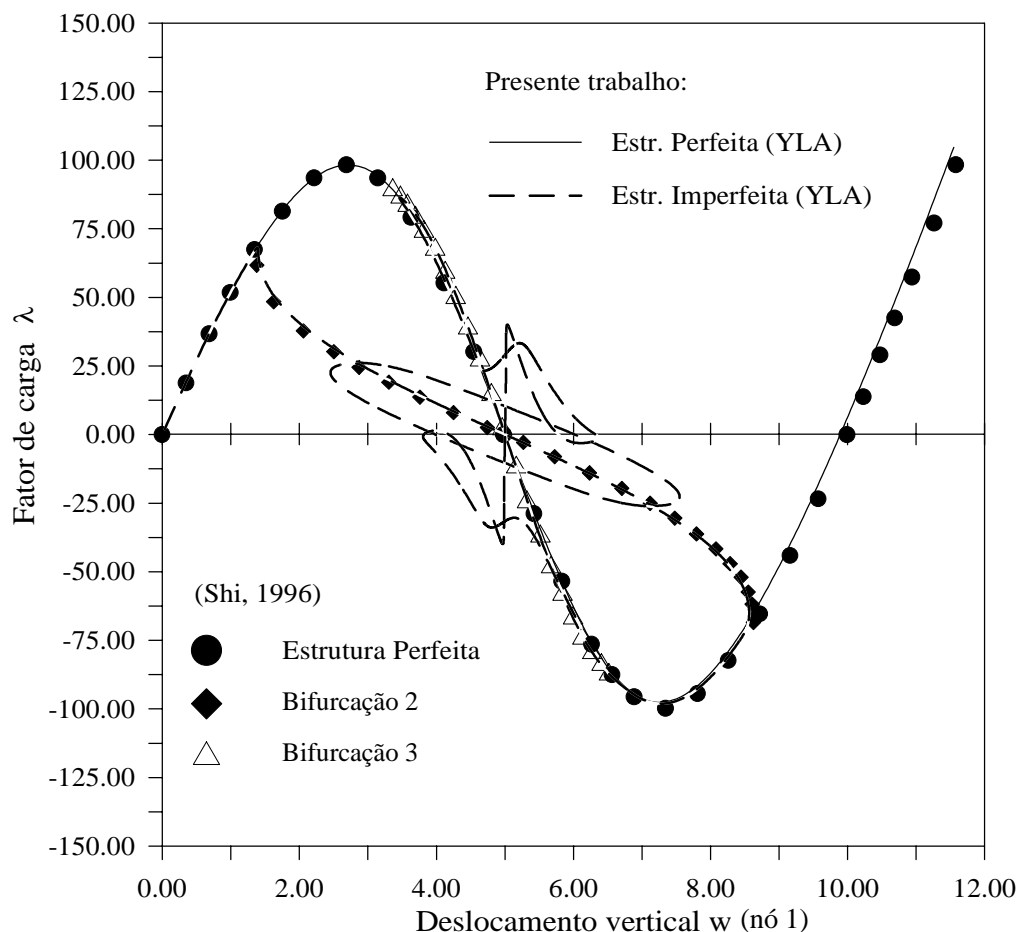


Figura 6.27b – Trajetórias de equilíbrio da treliça espacial em forma de arco, com pontos de bifurcação obtidos para estrutura imperfeita.

Um fato a ser destacado é que o caminho de bifurcação 1 foi obtido utilizando-se a formulação CTE, que percorreu este caminho de equilíbrio mesmo estando a estrutura sem qualquer imperfeição inicial. Para este caso, a estratégia de solução não-linear do comprimento de arco foi utilizada. Ainda segundo Shi (1996) e Crisfield (1997), o primeiro ponto de bifurcação acontece em $P = 12,28$. Na análise realizada, encontrou-se para o mesmo o valor de carga igual a 11,41, ou seja, com um erro estimado de 7,08%.

Por fim, o quarto ponto de bifurcação, de acordo com autores supracitados, se dá em $P = 22,94$. No processo de solução efetuado, encontrou-se um desvio na trajetória de equilíbrio da estrutura no estágio de carregamento igual a 23,247 (erro de 1,34%). Esse desvio pode ser observado com mais nitidez pela figura (6.27b) e é correspondente ao ponto de bifurcação 4, encontrando-se no mesmo traçado da curva de bifurcação 3.

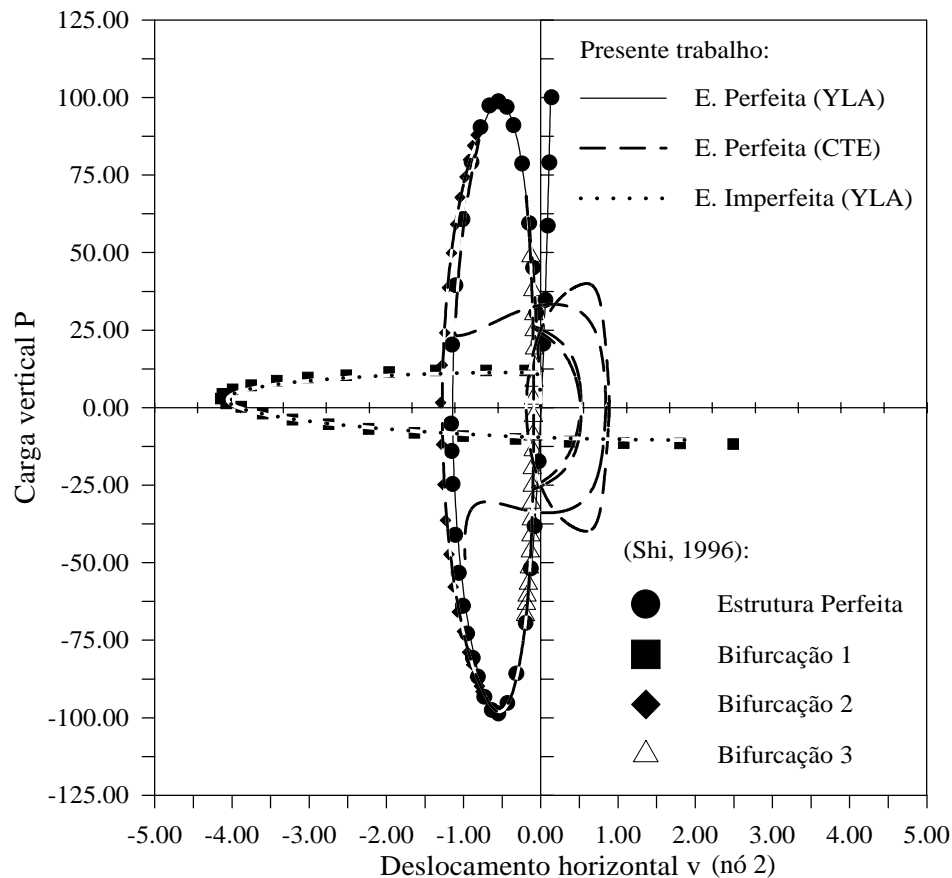


Figura 6.28 – Resposta estrutural da treliça espacial em forma de arco com e sem imperfeição inicial: carga versus deslocamento horizontal em x no topo.

Entre as características deste sistema estrutural, tem-se que no primeiro ponto de bifurcação ($P = 11,41$) a estrutura movimenta-se no plano yz sem deslocamentos na direção x (figura (6.29)). Já nos segundo e terceiro pontos, ou seja, em $P = 68,15$ e $P = 86,47$, a treliça movimenta-se no plano xz (figura (6.28)) de tal modo que os deslocamentos em y são simétricos nos nós superiores.

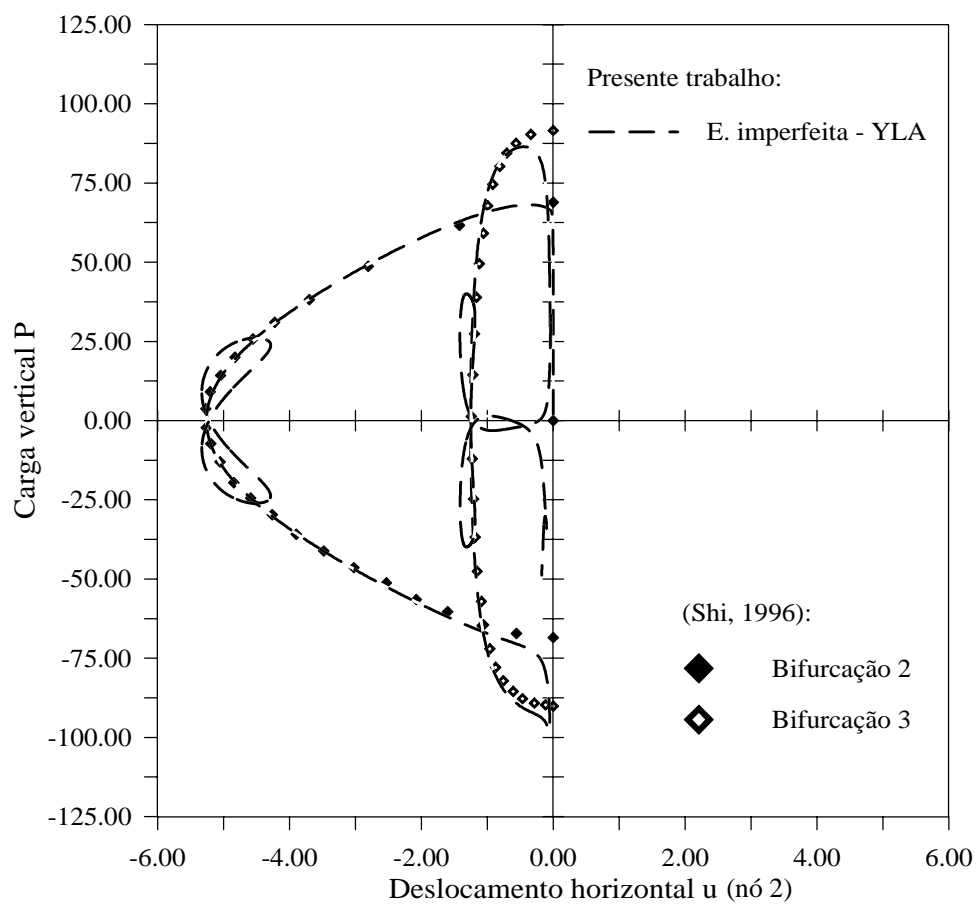


Figura 6.29 – Resposta estrutural da treliça espacial em forma de arco com imperfeição inicial: carga versus deslocamento horizontal em y no topo.

6.3 – EXEMPLOS DE SISTEMAS ESTRUTURAIS SEMI-RÍGIDOS

O objetivo desta seção é validar as formulações apresentadas no capítulo 4, e implementadas neste trabalho, para análise linear e não-linear de pórticos planos semi-rígidos. A fim de se alcançar tal objetivo, serão abordados exemplos clássicos de problemas de equilíbrio e estabilidade que possuem resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura. A figura (6.30) traz os pórticos abordados nesta seção.

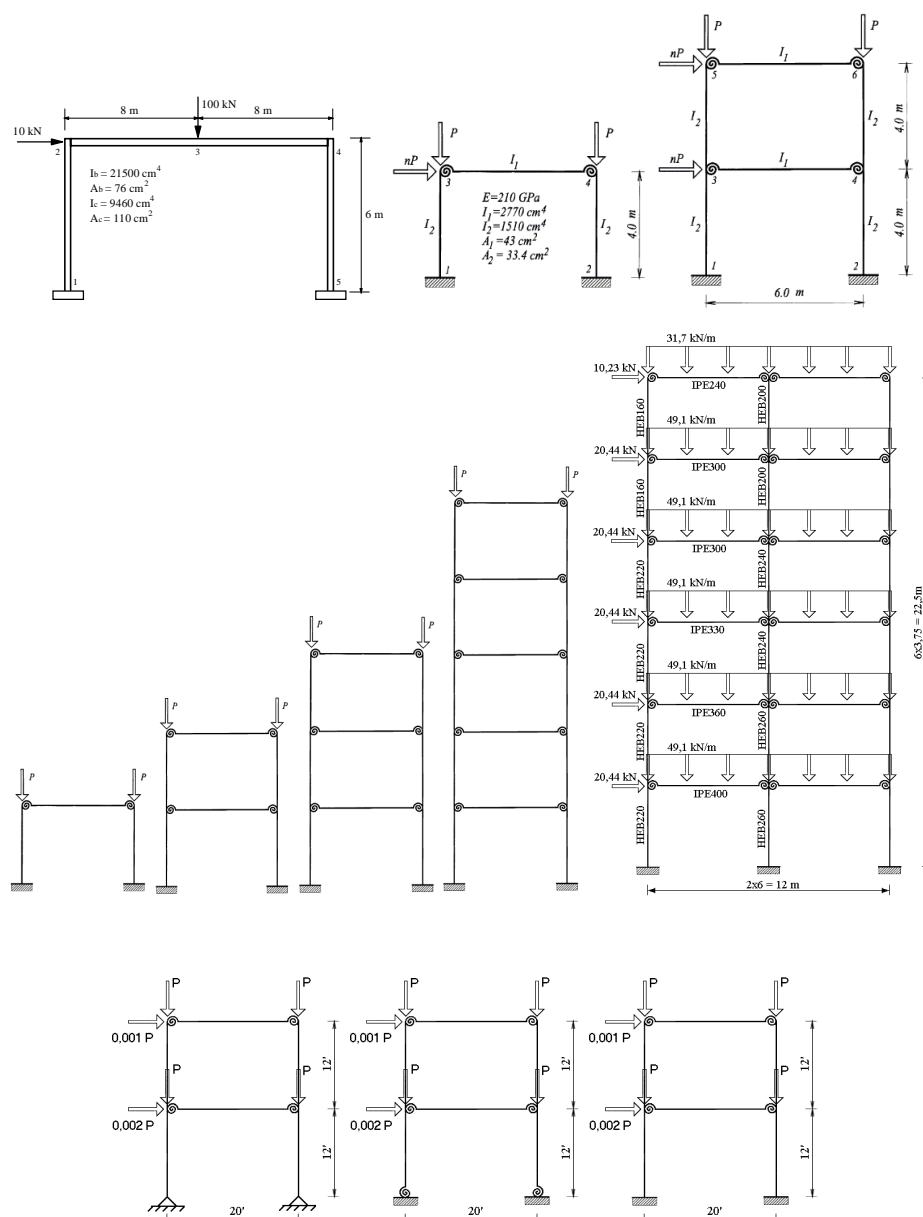


Figura 6.30 – Pórticos semi-rígidos analisados no presente trabalho.

Primeiramente, serão avaliados os resultados obtidos ao se fazer uma análise linear de um pórtico de quadro simples. Em seguida, investigar-se-á os resultados obtidos através de soluções não-lineares de pórticos com diferentes números de pavimentos, para ligações semi-rígidas lineares e não-lineares. Deve-se ressaltar que em virtude dos resultados fornecidos pela literatura, a estratégia de solução não-linear utilizada foi a do incremento direto do parâmetro de carga, com iteração a carga constante, o que mostrou ser de grande eficiência computacional. Além disso, possibilitou a obtenção do valor de carga crítica, que, em geral, é o principal foco de interesse de grande parte dos exemplos de estruturas com ligações semi-rígidas encontradas na literatura, além da influência da semi-rigidez na resposta global, ou seja, nos deslocamentos da estrutura.

6.3.1 – Análise linear de um pórtico simples semi-rígido

Um pórtico com 16 metros de comprimento e oito metros de altura, sob uma carga vertical de 100 kN no ponto central da viga e uma carga horizontal de 10 kN no topo da primeira coluna, tal como mostra a figura (6.31), é o primeiro exemplo a ser analisado para verificação das formulações apresentadas no capítulo 4. Este exemplo possui resultados de primeira ordem fornecidos por Chan e Chui (2000) e sua análise tem por objetivo verificar a implementação linear realizada neste trabalho para cálculo de pórticos com conexões semi-rígidas.

A estrutura sob análise será idealizada com diferentes valores para as rigidezes de suas ligações. A figura (6.32) mostra o modelo estrutural idealizado para este pórtico, já com as molas representando os elementos de conexão. Neste modelo, K_b representa a rigidez da ligação viga-pilar, enquanto K_c representa a da ligação pilar-fundação. A rigidez da articulação entre viga e pilar poderia ser idealizada como rígida, no caso de uma ligação fortemente soldada, rotulada, se fosse utilizada cantoneira simples de alma, ou semi-rígida, para a presença de cantoneira de topo e assento, o que pode ser visualizado pela figura (4.3). Por simplicidade, a rigidez para a conexão semi-rígida será

relacionada à rigidez da viga através do valor $4EI_b/L_b$, onde I_b e L_b denotam a inércia e o comprimento relativos à viga, respectivamente.

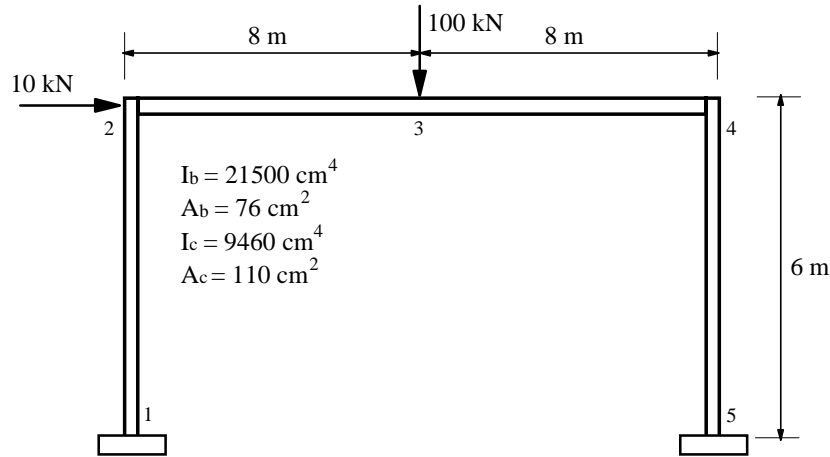


Figura 6.31 – Pórtico de um pavimento.

Para a base da estrutura, considerar-se-á também um valor intermediário de rigidez, que será relacionado à rigidez do pilar e igual a EI_c/L_c , onde I_c e L_c são a inércia e o comprimento relativos ao pilar, respectivamente.

A fim de se facilitar a análise dos resultados, a figura (6.33) apresenta a discretização utilizada para este exemplo. A partir daí, comparar-se-ão os valores obtidos para quatro hipóteses consideradas, a saber:

- 1) $K_b = \infty$ e $K_c = \infty$;
- 2) $K_b = 0$ e $K_c = \infty$;
- 3) $K_b = 4EI_b/L_b$ e $K_c = \infty$;
- 4) $K_b = 4EI_b/L_b$ e $K_c = EI_c/L_c$.

A tabela (6.4) apresenta uma comparação entre os valores de momento fletor obtidos para a estrutura em estudo utilizando-se as quatro hipóteses de rigidez apresentadas acima, testadas para cada uma das formulações expostas no capítulo 4.

Através dos resultados expostos na tabela supracitada, pode-se observar que os valores de momento fornecidos pelas formulações são praticamente equivalentes. Além

disso, deve-se salientar que os valores de rigidez expostos pelas hipóteses 1 a 4 foram transformados, no arquivo de entrada de dados, no fator de rigidez γ , cujo valor é dado pela equação (4.5). Logo, para o caso rígido teve-se $\gamma = 1$, representando uma rigidez infinita, e para o caso rotulado teve-se $\gamma = 0$, representando uma rigidez nula. No caso dos valores considerados semi-rígidos, também fez-se a transformação para o fator de rigidez γ , onde, de acordo com dados apresentados pela figura (6.31), obteve-se $\gamma = 0,032258064$ para $K_c = EI_c / L_c$ e $\gamma = 0,117647058$ para $K_b = 4EI_b / L_b$.



Figura 6.32 – Modelo estrutural idealizado para o pórtico de um pavimento.

Algo importante a ser levado em consideração é que com a discretização da viga ou da coluna em mais de um elemento finito, o valor de L presente na equação (4.5) passa a ser o valor do comprimento dos elementos utilizados na discretização, e não mais da viga ou da coluna por inteiro.

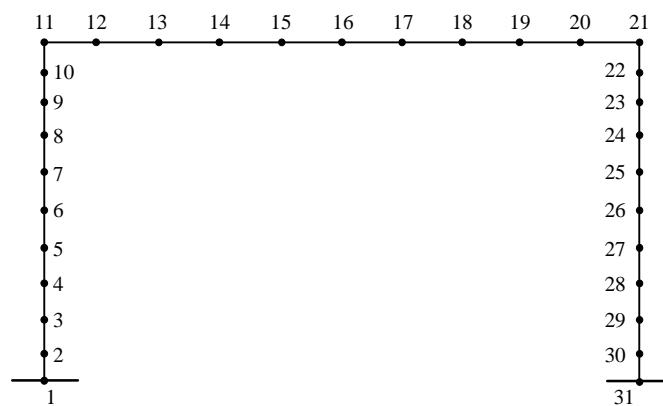


Figura 6.33 – Discretização utilizada para o pórtico de um pavimento.

Tabela 6.4 – Comparação dos valores de momento fletor obtidos para o pórtico de um pavimento (valores absolutos)*.

Hipótese 1: $K_b = \infty$ e $K_c = \infty$

Nó	Teórico**	CHL	Erro	CHC	Erro	SES	Erro
1	52,2	51,1090	2,09%	52,2144	0,03%	52,2340	0,07%
11	127,5	125,1699	1,83%	127,5176	0,01%	127,4958	0,003%
16	260,0	258,5483	0,56%	259,9576	0,02%	259,9591	0,02%
21	152,6	150,3043	1,50%	152,5672	0,02%	152,5860	0,01%
31	87,1	85,9746	1,29%	87,1648	0,07%	87,1438	0,05%

Hipótese 2: $K_b = 0$ e $K_c = \infty$

Nó	Teórico**	CHL	Erro	CHC	Erro	SES	Erro
1	30,0	30,0414	0,14%	30,0414	0,14%	30,0414	0,14%
11	0,0	0,0000	–	0,0000	–	0,0000	–
16	400,0	398,3603	0,41%	400,0000	0,00%	400,0000	0,00%
21	0,0	0,0000	–	0,0000	–	0,0000	–
31	30,0	29,9586	0,14%	29,9586	0,14%	29,9586	0,14%

Hipótese 3: $K_b = 4EI_b/L_b$ e $K_c = \infty$

Nó	Teórico**	CHL	Erro	CHC	Erro	SES	Erro
1	31,7	31,4473	0,80%	31,6815	0,06%	31,6781	0,07%
11	93,6	93,4116	0,20%	93,6478	0,05%	93,6477	0,05%
16	296,3	295,8391	0,16%	296,2762	0,01%	296,2786	0,01%
21	113,8	113,4078	0,34%	113,7997	0,0003%	113,7951	0,004%
31	71,5	71,4511	0,07%	71,5296	0,04%	71,5307	0,04%

Hipótese 4: $K_b = 4EI_b/L_b$ e $K_c = EI_c/L_c$

Nó	Teórico**	CHL	Erro	CHC	Erro	SES	Erro
1	0,3	0,2977	0,77%	0,3241	8,03%	0,3222	7,40%
11	80,3	80,0819	0,27%	80,2534	0,06%	80,2522	0,06%
16	301,7	301,1859	0,17%	301,6659	0,01%	301,6684	0,01%
21	116,4	116,0119	0,33%	116,4147	0,01%	116,4110	0,01%
31	24,2	24,0615	0,57%	24,1628	0,15%	24,1635	0,15%

* Siglas identificadas na tabela (6.1).

** Resultados fornecidos por Chan e Chui (2000).

6.3.2 – Análise não-linear de pórticos de quadros simples com variação de altura

Para ilustrar as observações teóricas apresentadas no capítulo 4 concernentes à solução não-linear de estruturas semi-rígidas, serão realizadas agora análises numéricas de pórticos de quadros simples com diferentes números de pavimentos. A figura (6.34) mostra o primeiro exemplo, referente a um pórtico de quadro simples de um pavimento. Os dados geométricos da estrutura, bem como as propriedades de seus elementos

constitutivos encontram-se na mesma figura. Serão analisados e comparados resultados obtidos através de dois casos típicos: conexões ideais (rígidas e rotuladas) e semi-rígidas. Para este último tipo, dois tipos de ligações foram considerados, a saber, dupla cantoneira de alma (DWA) e cantoneira de topo e assento com dupla cantoneira de alma (TSDWA). Os dados referentes à essas duas conexões foram obtidos com base nos trabalhos de Sekulovic e Salatic (2001) e Chen e Kishi (1989).

Os valores característicos para o deslocamento horizontal na parte superior deste pórtico referentes às análises de primeira e segunda ordem, obtidos para as ligações ideais e semi-rígidas, encontram-se na tabela (6.5). Além disso, os valores de momento fletor na base do sistema estrutural para as análises linear e não-linear, bem como as cargas críticas, obtidas seguindo-se o procedimento de solução não-linear de pórticos semi-rígidos proposto por Chan e Chui (2000), são mostrados na tabela (6.6).

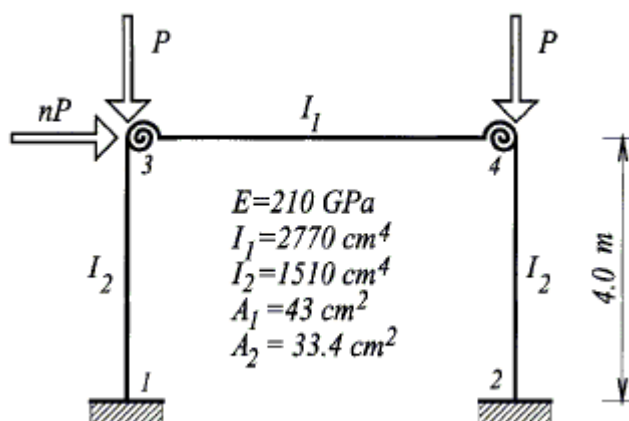


Figura 6.34 – Pórtico de quadro simples de um pavimento (Sekulovic e Salatic, 2001).

Tabela 6.5 – Valores de deslocamento horizontal do nó 3 para o pórtico de um pavimento, obtidos nas análises de primeira e segunda ordem ($P = 450 \text{ kN}$, $H = 0,005P$).

Tipo de Ligação	Deslocamento horizontal do nó 3 ($\times 10^{-4} \text{ m}$)					
	1ª Ordem			2ª Ordem		
Rígido	Teórico*	CHC	Erro	Teórico*	CHC	Erro
TSDWA	25,79	25,788	0,01%	36,38	36,335	0,12%
DWA	28,70	28,693	0,02%	42,34	42,298	0,10%
Rotulado	30,95	30,971	0,07%	47,41	47,440	0,06%
	75,73	75,723	0,01%	868,69	923,792	6,34%

* Resultados teóricos fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001)

Tabela 6.6 – Valores de momento fletor do nó 1 para o pórtico de um pavimento, obtidos nas análises de primeira e segunda ordem ($P = 450 \text{ kN}$, $H = 0,005P$).

Tipo de Ligação	Momento fletor do nó 1 (kN m)						Carga Crítica (kN)		
	1ª Ordem			2ª Ordem					
	Teórico*	CHC	Erro	Teórico*	CHC	Erro	Teórico*	CHC	Erro
Rígido	2,524	2,5238	0,01%	3,377	3,3720	0,15%	1530	1533	0,20%
TSDWA	2,639	2,6388	0,01%	3,665	3,6588	0,17%	1395	1385	0,72%
DWA	2,728	2,7291	0,04%	3,910	3,9062	0,10%	1289	1283	0,47%
Rotulado	4,503	4,5022	0,02%	43,591	46,0665	5,68%	489	489	0,00%

* Resultados teóricos fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001)

Das duas últimas tabelas, está claro que há uma significativa diferença entre os resultados obtidos para os pórticos com ligações ideais para aqueles com conexões semi-rígidas (DWA e TSDWA). Além disso, a influência da teoria de segunda ordem pode ser vista através da diferença entre os resultados obtidos utilizando-se as análises linear e não-linear. É preciso salientar que nessas análises, os valores de rigidez das ligações DWA e TSDWA foram transformados em valores do fator de rigidez γ , os quais foram fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001). Além disso, no que se refere à solução não-linear, pode-se observar a eficiência da metodologia proposta por Chan e Chui (2000) e da implementação computacional efetuada neste trabalho, produzindo resultados bastante próximos aos fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001).

Já as figuras (6.35) e (6.36) mostram o deslocamento horizontal do nó 3 e o momento fletor no nó 1 como uma função dos fatores de rigidez γ entre viga e pilar para diferentes níveis de carga. Esses deslocamentos e momentos são normalizados pela divisão de seus valores por aqueles correspondentes aos obtidos para o pórtico com ligações rotuladas. Destas figuras pode-se concluir que os dois efeitos possuem a mesma característica, ou seja, apresentam valores mais baixos para maiores fatores de rigidez. No caso da análise linear, os resultados decrescem independentemente do nível de carga, enquanto no caso de uma análise não-linear o decréscimo é maior para níveis de carga maiores.

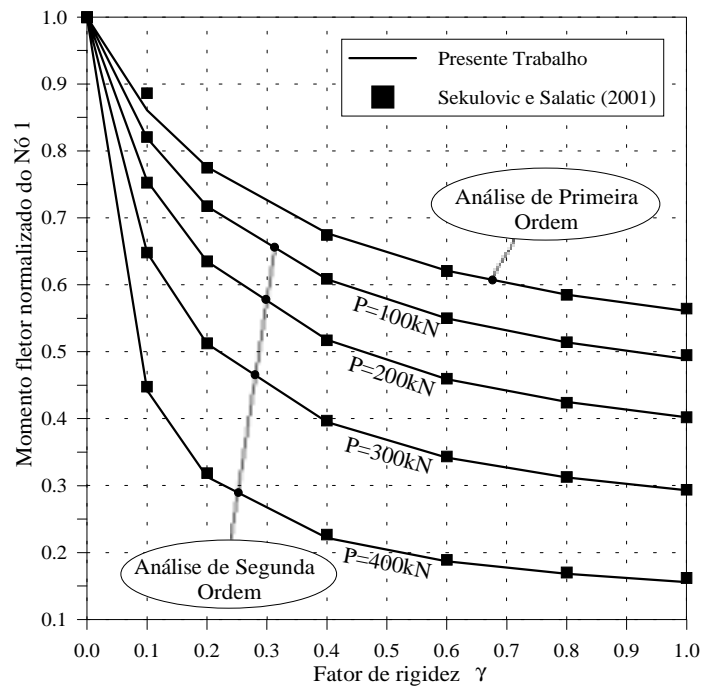


Figura 6.35 – Influência da flexibilidade da ligação no momento fletor da base.

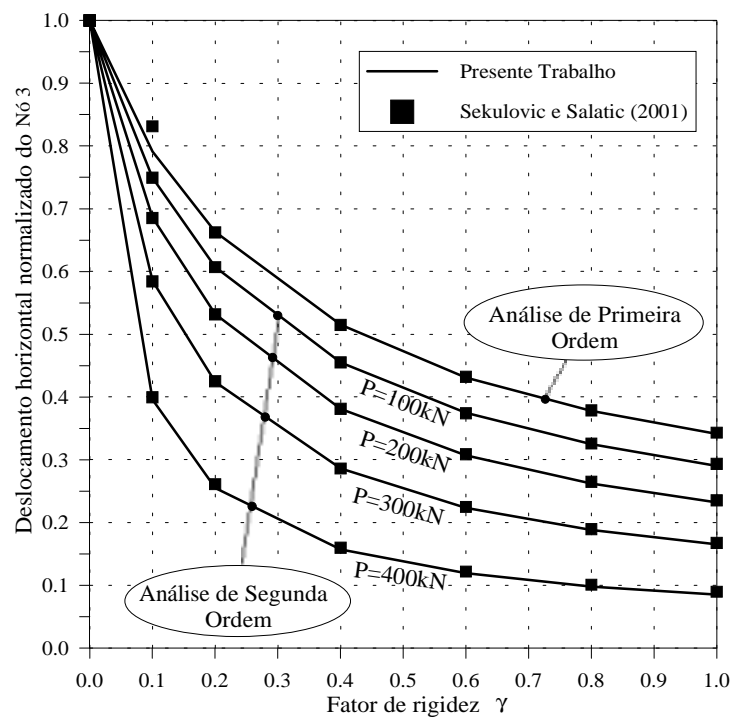


Figura 6.36 – Influência da flexibilidade da ligação no deslocamento horizontal do nó 3.

Uma variação deste exemplo apresenta-se na figura (6.37), onde é mostrado um pórtico de quadro simples de 2 pavimentos de altura. As dimensões deste sistema estrutural encontram-se na mesma figura, bem como as propriedades de seus elementos. As tabelas (6.7) e (6.8) exibem os resultados das análises linear e não-linear, obtidos neste pórtico para os casos ideais (rígido e rotulado) e semi-rígido, utilizando-se os mesmos tipos de conexões do pórtico de um pavimento. As duas tabelas citadas anteriormente mostram a diferença entre os resultados obtidos para as soluções de primeira e segunda ordem. Pode-se observar também que a metodologia de Chan e Chui (2000) utilizada na análise não-linear produziu, para quase todos os casos examinados, resultados similares aos fornecidos pela literatura.

Por fim, a figura (6.38) exhibe o valor de carga crítica para pórticos semi-rígidos com diferentes números de pavimentos em função do fator de rigidez. O valor de carga crítica de cada um dos pórticos semi-rígidos é normalizado através de sua divisão pelo resultado obtido para o caso com conexões idealmente rígidas. Pode-se concluir, como esperado, que o valor de carga crítica diminui com o decréscimo do fator de rigidez quase que linearmente, em especial para os pórticos c e d.

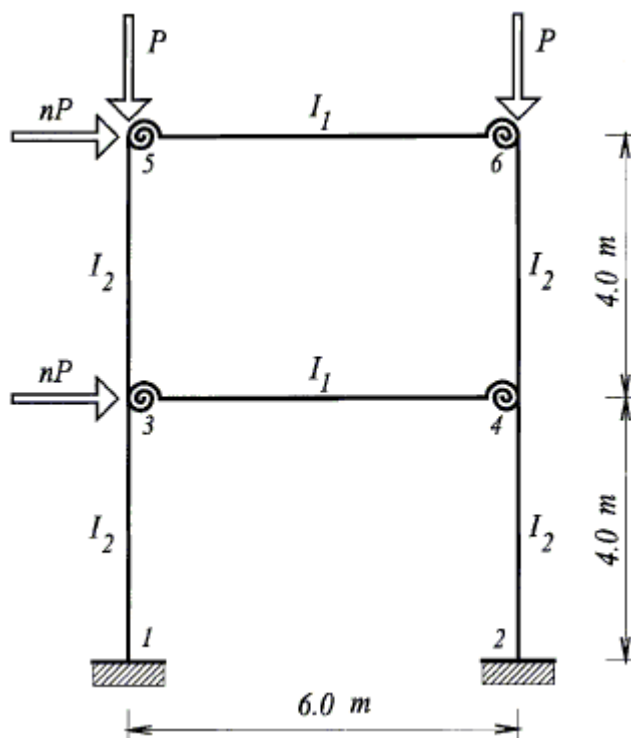


Figura 6.37 – Pórtico de quadro simples de dois pavimentos (Sekulovic e Salatic, 2001).

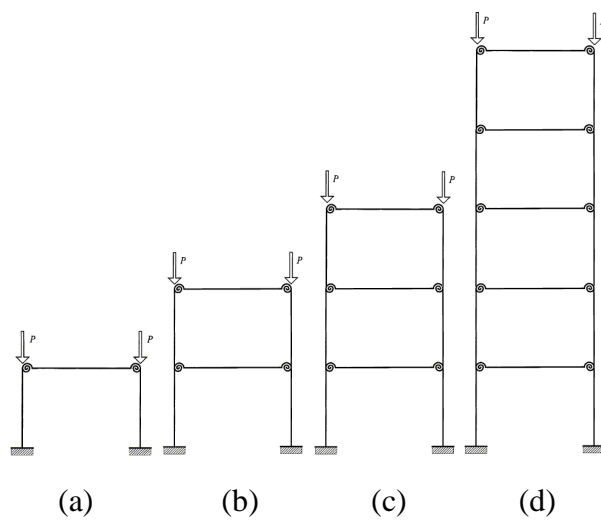
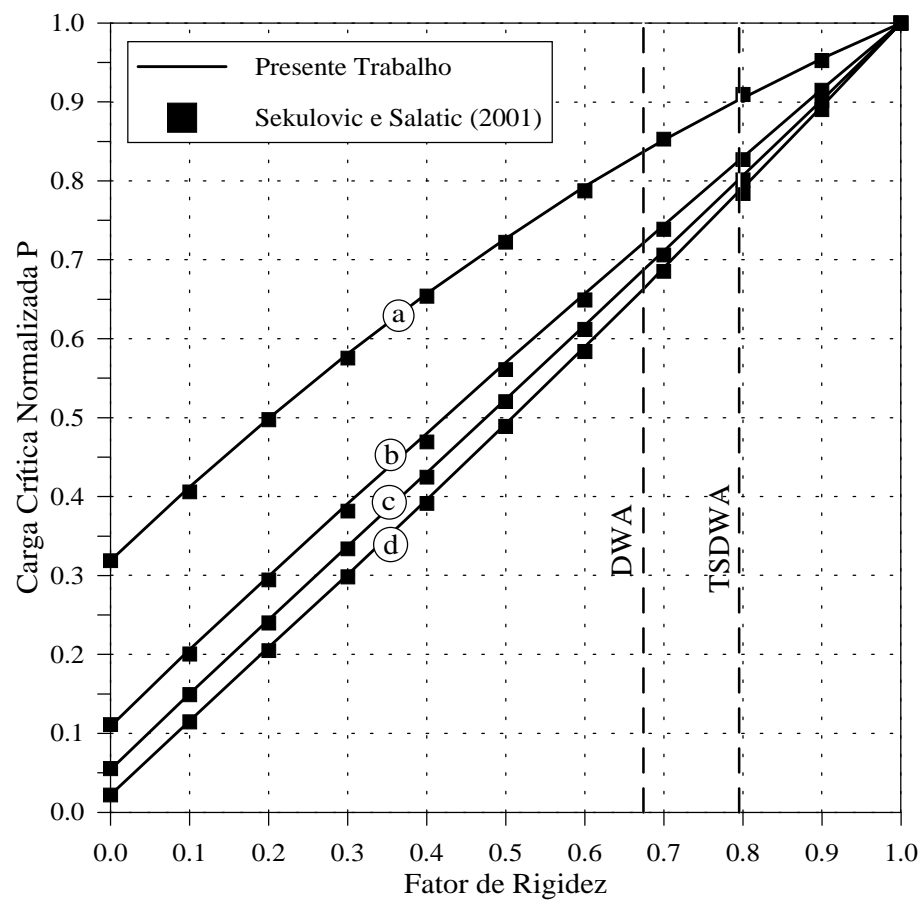


Figura 6.38 – Influência da flexibilidade da conexão no valor de carga crítica.

Tabela 6.7 – Valores do deslocamento horizontal do nó 5 para o pórtico de dois pavimentos, obtidos nas análises de primeira e segunda ordem ($P = 100 \text{ kN}$, $H = 0,005P$).

Tipo de Ligação	Deslocamento horizontal do nó 5 ($\times 10^{-4} \text{ m}$)					
	1ª Ordem			2ª Ordem		
	Teórico*	CHC	Erro	Teórico*	CHC	Erro
Rígido	23,35	23,258	0,39%	25,45	25,429	0,08%
TSDWA	27,85	27,867	0,06%	31,10	31,101	0,002%
DWA	31,51	31,575	0,21%	35,78	35,834	0,15%
Rotulado	176,61	176,609	0,001%	925,41	946,002	2,23%

*Resultados teóricos fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001)

Tabela 6.8 – Valores do momento fletor do nó 1 para o pórtico de dois pavimentos, obtidos nas análises de primeira e segunda ordem ($P = 100 \text{ kN}$, $H = 0,005P$).

Tipo de Ligação	Momento fletor do nó 1 (kN m)						Carga Crítica (kN)		
	1ª Ordem			2ª Ordem					
	Teórico*	CHC	Erro	Teórico*	CHC	Erro	Teórico*	CHC	Erro
Rígido	1,171	1,1709	0,01%	1,248	1,2468	0,10%	1115	1115	0,00%
TSDWA	1,239	1,2392	0,02%	1,335	1,3346	0,03%	921	921	0,00%
DWA	1,292	1,2923	0,02%	1,405	1,4051	0,01%	806	804	0,25%
Rotulado	3,001	3,0007	0,01%	12,457	12,4600	0,02%	122	122	0,00%

*Resultados teóricos fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001)

6.3.3 – Pórticos de quadros simples com ligações semi-rígidas não-lineares

A estrutura alvo de análise será agora um pórtico de quadro simples de 2 pavimentos, com ligações semi-rígidas não-lineares e diferentes condições de suporte. As figuras (6.39a), (6.39b) e (6.39c) mostram as três situações consideradas para os apoios. Para o caso (b), foi considerado um apoio elástico modelado por uma mola de comportamento linear, cujo valor constante de semi-rigidez é igual a $0,1(EI/L)_c$, onde o subscrito 'c' refere-se à coluna. Esse valor corresponde, na discretização efetuada, a um fator de rigidez igual a 0,032258064. As vigas são perfis W14×48 e foram modeladas com dois elementos finitos enquanto as colunas são perfis W12×96 e foram modeladas por um elemento no modelo estrutural. Tal qual no exemplo anterior, pequenas forças laterais foram aplicadas ao pórtico para induzir uma imperfeição à

estrutura. As magnitudes dessas forças laterais valem $0,001P$ no topo do segundo pavimento e $0,002P$ na parte superior do primeiro pavimento.

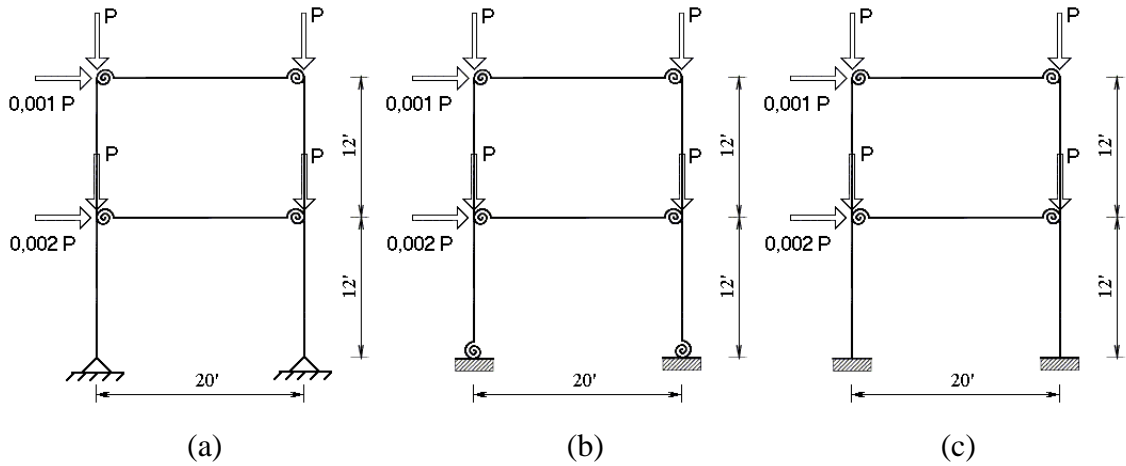


Figura 6.39 – Pórticos de quadro simples de dois pavimentos com diferentes condições de suporte: (a) rotulado; (b) semi-rígido; (c) engastado.

Neste exemplo, uma representação mais realística do comportamento das conexões foi utilizada. Para tal, quatro tipos de ligações foram modelados seguindo-se o modelo exponencial de Chen-Lui, cujos respectivos parâmetros, baseados em ensaios experimentais (Chen e Lui, 1988), encontram-se relacionados no capítulo 4, na tabela (4.1). Além disso, as curvas que descrevem a variação da rigidez com a rotação para cada uma das conexões encontram-se traçadas na figura (4.6). Por comodidade, os tipos de conexões analisadas serão denotadas por A, B, C e D, representando as ligações de cantoneira simples de alma, cantoneira de topo e assento, chapa de topo e chapa de topo estendida, respectivamente. Segundo Chen e Lui (1988) e Chan e Chui (2000), a conexão A foi testada por Richard et al. (1982), enquanto B foi ensaiada por Azizinamini et al. (1985). Já as ligações C e D, de acordo com os mesmos autores, foram testadas por Ostrander (1970) e Johnson e Walpole (1981), respectivamente. Além desses quatro modelos de conexões, também serão apresentados os resultados obtidos para um quinto tipo, o idealmente rígido.

As figuras (6.40), (6.41) e (6.42) exibem os resultados obtidos para o pórtico com apoios rotulados, elásticos (ou semi-rígidos) e rígidos, respectivamente, utilizando-se cada um dos modelos de ligações citados anteriormente. Nesses gráficos, os valores do

presente trabalho foram obtidos a partir da implementação computacional realizada com base no procedimento de solução não-linear de estruturas semi-rígidas proposto por Chan e Chui (2000). Portanto, tais valores foram comparados com os fornecidos por estes autores, exceção feita ao exemplo da figura (6.39b), que consta no trabalho de Chen e Lui (1988) e cujos resultados estão expostos na figura (6.41). Deve-se observar que os resultados apresentados foram convertidos para o Sistema Internacional de unidades.

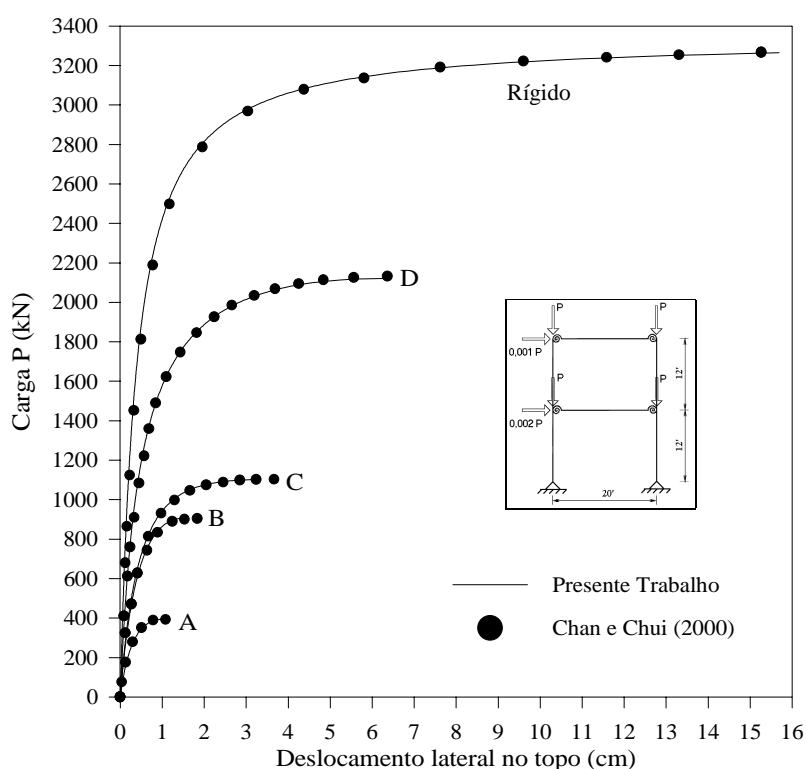


Figura 6.40 – Curvas carga-deflexão obtidas para o pórtico com apoios rotulados.

Dos gráficos supracitados, pode-se concluir, como o esperado, que os valores de carga limite são menores para as ligações mais flexíveis. A tabela (6.9) apresenta um resumo dos resultados obtidos, mostrando também o erro relativo entre os resultados alcançados pelo presente estudo com os fornecidos pela literatura. Além disso, os tipos de apoios desempenham um papel importante no comportamento estrutural. Nota-se que o emprego de um suporte rígido eleva consideravelmente o valor de carga crítica. Logo, para essa situação, suportes fixos e conexões mais rígidas seriam uma forma de se aumentar o valor de carga limite e diminuir a deflexão lateral de pórticos.

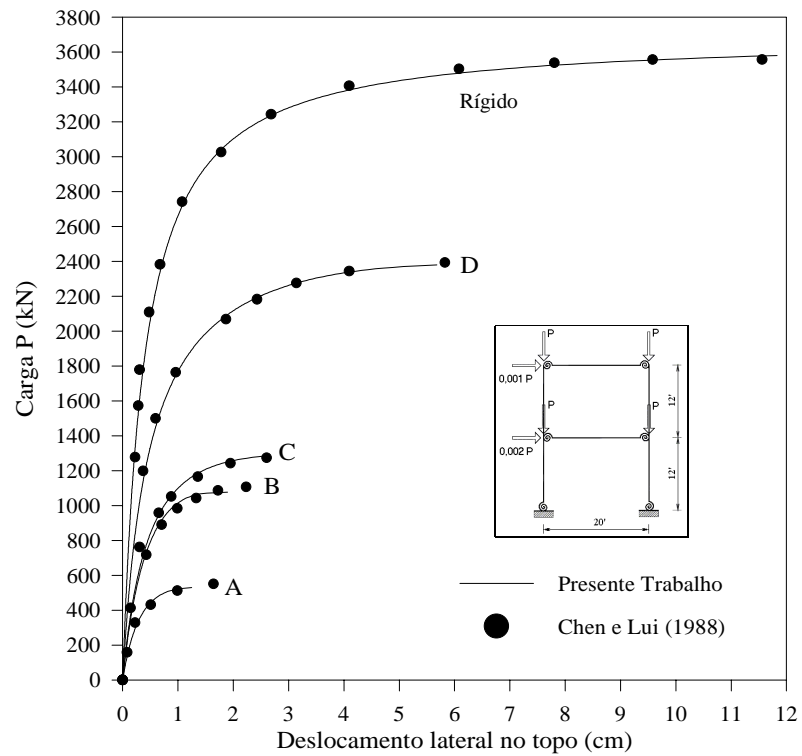


Figura 6.41 - Curvas carga-deflexão obtidas para o pórtico com apoios elásticos.

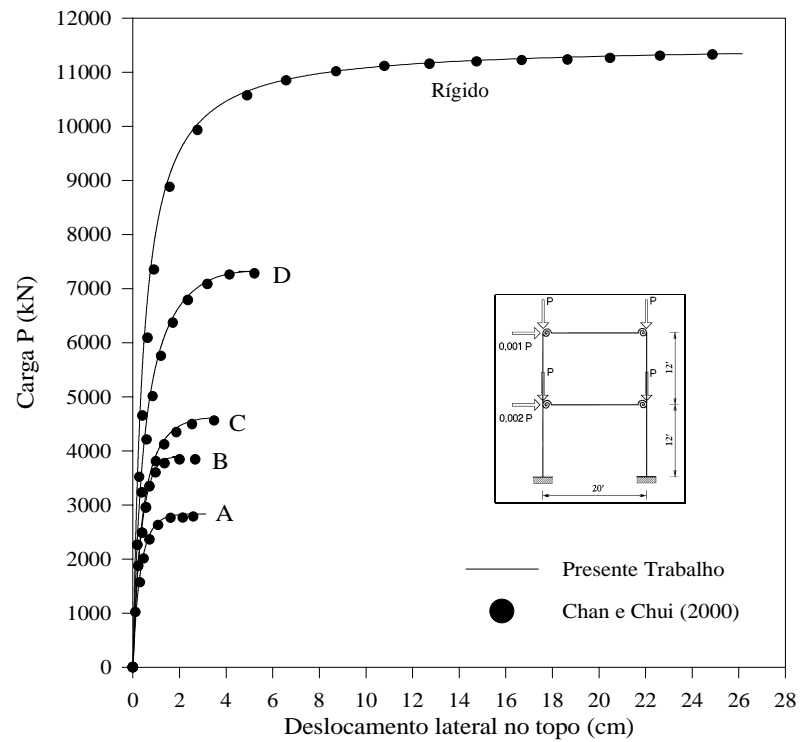


Figura 6.42 - Curvas carga-deflexão obtidas para o pórtico com apoios engastados.

Tabela 6.9 – Cargas limites de estabilidade para o pórtico de 2 pavimentos para diferentes tipos de apoio (unidades indicadas na tabela).

Apoios Rotulados							
Tipo de	Chen/Lui (1988)		Chan/Chui (2000)		Presente		Erro
Conexão	kip	kN	kip	kN	kip	kN	Chen/Lui (1988) Chan/Chui (2000)
A	90	400,3	89	395,9	89	395,9	1,111% 0,000%
B	205	911,9	204	907,4	204	907,4	0,488% 0,000%
C	242	1076,5	249	1107,6	248	1103,2	2,479% 0,402%
D	475	2112,9	477	2121,8	478	2126,3	0,632% 0,210%
Rígida	725	3225,0	746	3318,4	739	3287,2	1,931% 0,938%

Apoios Elásticos							
Tipo de	Chen/Lui (1988)		Chan/Chui (2000)*		Presente		Erro
Conexão	kip	kN	kip	kN	kip	kN	Chen/Lui (1988) Chan/Chui (2000)
A	125	556,0	-	-	119	529,3	4,800% -
B	250	1112,1	-	-	242	1076,5	3,200% -
C	286	1272,2	-	-	292	1298,9	2,098% -
D	540	2402,0	-	-	535	2379,8	0,926% -
Rígida	800	3558,6	-	-	809	3598,6	1,125% -

Apoios Rígidos							
Tipo de	Chen/Lui (1988)		Chan/Chui (2000)		Presente		Erro
Conexão	kip	kN	kip	kN	kip	kN	Chen/Lui (1988) Chan/Chui (2000)
A	630	2802,4	638	2838,0	637	2833,5	1,111% 0,157%
B	860	3825,5	875	3892,2	872	3878,8	1,395% 0,343%
C	1030	4581,7	1038	4617,3	1040	4626,2	0,971% 0,193%
D	1625	7228,4	1648	7330,7	1644	7312,9	1,169% 0,243%
Rígida	2530	11254,0	2560	11387,4	2573	11445,3	1,700% 0,508%

* Resultados de carga limite não foram fornecidos pelos autores.

6.3.4 – Pórtico de quadro duplo com seis pavimentos (pórtico de Vogel)

O pórtico de seis pavimentos com ligações rígidas mostrado na figura (6.43) foi proposto por Vogel (1985) como um exemplo de calibração para se verificar a precisão de análises e formulações. Aqui, este pórtico será inicialmente utilizado para comparar os resultados obtidos entre as considerações de ligações rígidas e semi-rígidas numa solução linear. Logo depois, comparar-se-á as soluções não-lineares obtidas para os mesmos tipos de conexões utilizadas no exemplo anterior, havendo ainda a investigação para as situações de semi-rigidez constante e variável ao longo da análise.

A altura total do pórtico é de 22,5 m, sendo sua largura total igual a 12 m. Os perfis utilizados estão apresentados na figura (6.43) e suas propriedades encontram-se

na tabela (6.10). A carga uniformemente distribuída foi modelada como um conjunto de cargas nodais equivalentes. Quatro elementos finitos foram utilizados para modelar cada viga e um elemento foi utilizado para cada coluna. A figura (6.44) mostra essa discretização, incluindo a numeração dos nós e o carregamento nodal equivalente, cujos dados são utilizados tanto na solução linear quanto na solução não-linear.

Na análise linear da estrutura semi-rígida, a rigidezes de todas as conexões foram consideradas iguais e de valor 12430,0 kN/m, o que pode ser aproximadamente considerado como a rigidez inicial de uma ligação de chapa de topo usual (Chan e Chui, 2000). Além disso, foi considerado o valor de 205000 MPa para o módulo de elasticidade em todas as seções. Deve-se ressaltar que apenas as ligações entre viga e pilar foram consideradas semi-rígidas.

Os momentos fletores atuando na estrutura para os casos rígido e semi-rígido são apresentados nas tabelas (6.11) e (6.12). A discrepância entre os dois tipos é significativa. Pode-se observar que com as ligações semi-rígidas o momento na parte central das vigas é maior que o do caso com conexões idealmente rígidas. No entanto, os momentos da extremidade podem ser menores e, além disso, mais econômicos, desde que parte do valor dos mesmos foi redistribuído para a parte central da viga. No entanto, a deflexão lateral no último pavimento observada para o caso idealmente rígido foi de $0,713775 \times 10^{-01}$ m, o que corresponde a uma relação de 1/315 com a altura do pórtico, enquanto o valor encontrado para a situação semi-rígida foi de 0,148138 m, ou 1/151 da altura da estrutura. Os valores fornecidos por Chan e Chui (2000) para esses dois casos foram de 1/308 e 1/150, respectivamente, o que mostra a boa aproximação dos resultados obtidos. Um fato a ser comentado é que no caso de ligações idealmente rígidas, os valores descritos nas tabelas (6.11) e (6.12) foram obtidos fazendo-se o fator de rigidez igual a 1. A partir da equação (4.5), nota-se que para se obter valores iguais de rigidez para vigas com propriedades diferentes faz-se necessária a adoção de valores diferentes para o fator de rigidez γ , de modo que o produto final seja o mesmo. Logo, como foram utilizadas seções diferentes para a maioria das vigas e estas possuem conexões de mesma rigidez, foi necessária a adoção de valores desiguais para o fator γ . Em face disto, a tabela (6.11) também traz a relação dos fatores empregados para o exemplo vigente.

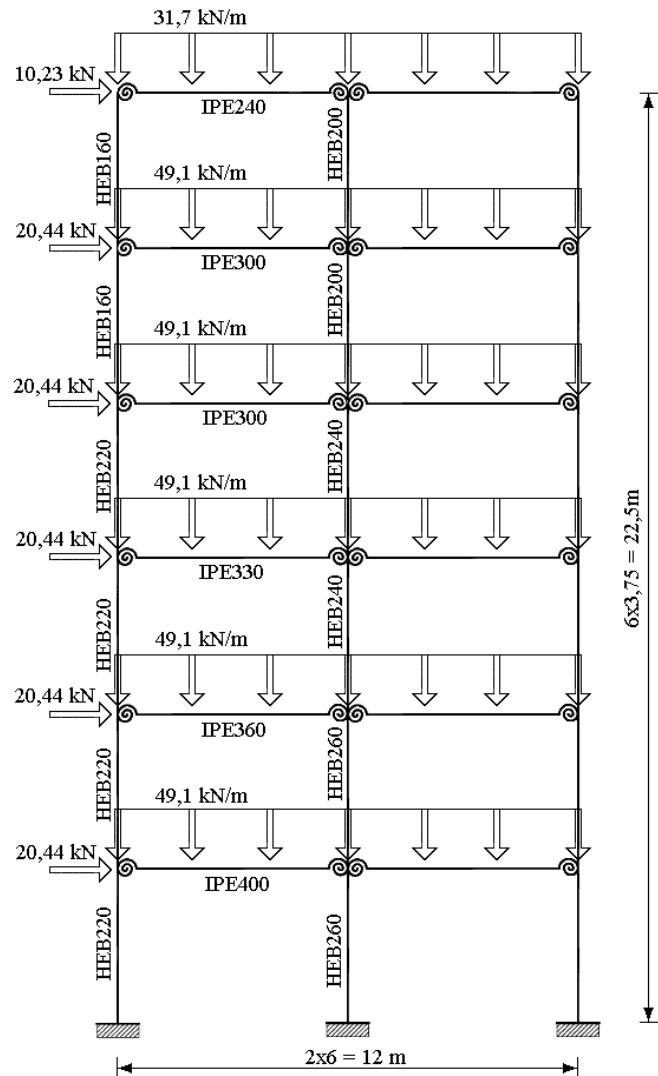


Figura 6.43 – Pórtico de Vogel.

Tabela 6.10 – Propriedades e dimensões dos perfis utilizados no pórtico de Vogel (Kim e Lee, 2001).

Perfil	d (mm)	b (mm)	t_w (mm)	t_f (mm)	k (mm)	A (cm ²)	I_x (cm ⁴)	I_y (cm ⁴)	Z_x (cm ³)
IPE240	240	120	6,2	9,8	15	39,1	3892	284	367
IPE300	300	150	7,1	9,8	15	53,8	8356	604	628
IPE330	330	160	7,5	10,7	18	62,6	11770	788	804
IPE360	360	170	8,0	11,5	18	72,7	16270	1043	1019
IPE400	400	180	8,6	12,7	21	84,5	23130	1318	1307
HEB160	160	160	8,0	13,5	15	54,3	2492	889	354
HEB200	200	200	9,0	15,0	18	78,1	5692	2003	643
HEB220	220	220	9,5	16,0	18	91,0	8091	2843	827
HEB240	240	240	10,0	17,0	21	106,0	11260	3923	1053
HEB260	260	260	10,0	17,5	24	118,0	14920	5135	1283

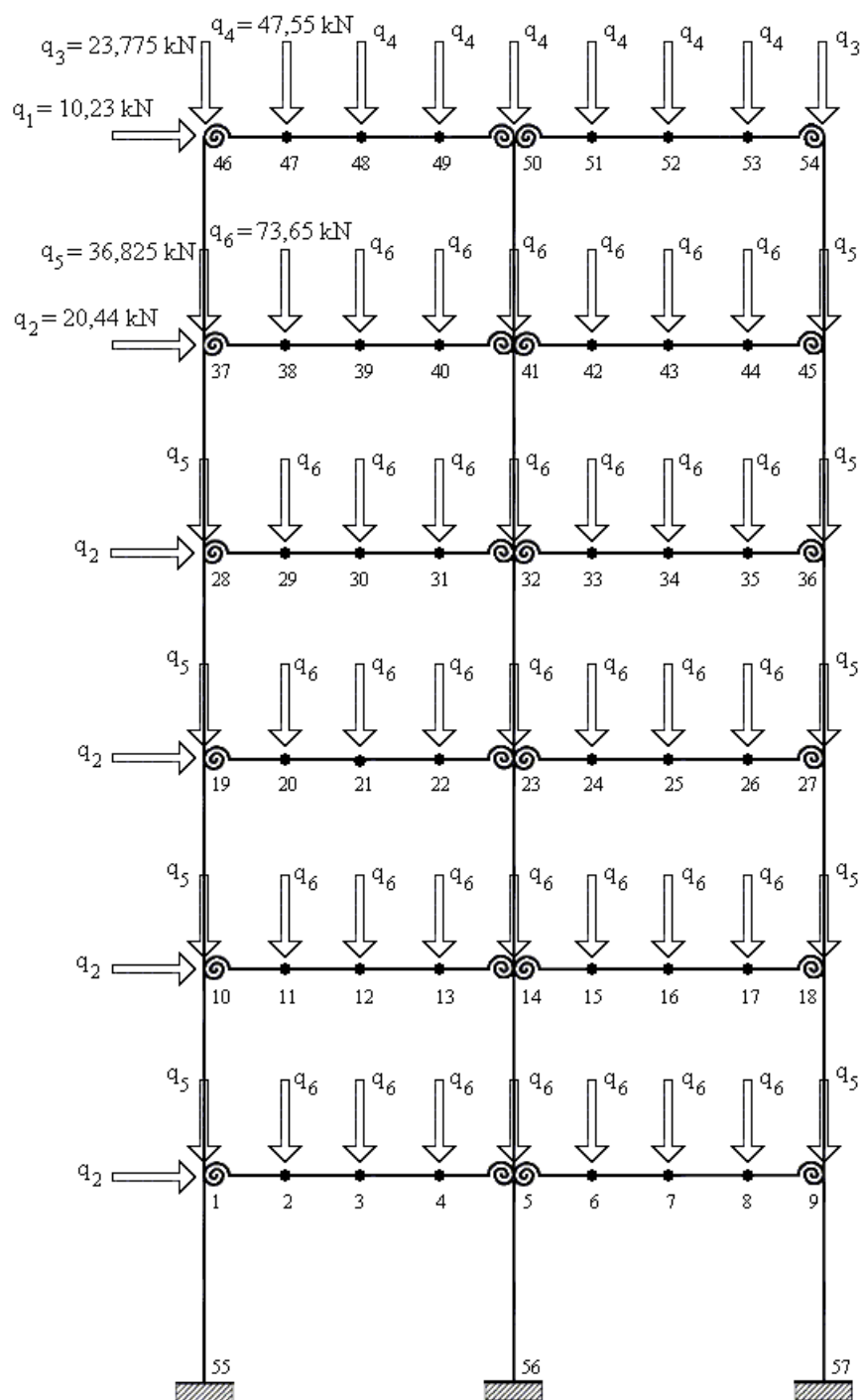


Figura 6.44 – Discretização utilizada e carregamentos nodais equivalentes para o pórtico de Vogel.

Tabela 6.11 – Resultados de momentos fletores para as vigas obtidos através da análise linear para o pórtico de Vogel (valores absolutos, em kNm).

Dados dos Elementos			Ligações Rígidas			Ligações Semi-Rígidas		
Viga	Fator de Rigidez	Ponto Nodal	Teórico*	CHC	Erro	Teórico*	CHC	Erro
IPE400	0,1158834	1	4,2	4,2273	0,650%	16,6	16,8833	1,707%
		3	99,0	98,9888	0,011%	163,8	164,5636	0,466%
		5 Esq.	248,1	248,1496	0,020%	130,9	129,6561	0,950%
IPE400	0,1158834	5 Dir.	71,1	71,0501	0,070%	7,3	7,8962	8,167%
		7	97,4	97,3480	0,053%	163,2	163,9627	0,467%
		9	176,1	176,1539	0,031%	122,8	121,8707	0,757%
IPE360	0,1570694	10	28,5	28,5043	0,015%	4,2	4,6798	11,424%
		12	95,4	95,4183	0,019%	151,8	152,5313	0,482%
		14 Esq.	222,5	222,5590	0,027%	142,5	141,5171	0,690%
IPE360	0,1570694	14 Dir.	74,8	74,7519	0,064%	3,64	2,8787	20,915%
		16	92,5	92,4499	0,054%	150,2	150,9763	0,517%
		18	182,2	182,2484	0,027%	137,9	137,0687	0,603%
IPE330	0,2048215	19	59,6	59,6285	0,048%	22,7	22,0323	2,941%
		21	92,8	92,8545	0,059%	140,7	141,3962	0,495%
		23 Esq.	196,7	196,5624	0,070%	137,9	137,0754	0,598%
IPE330	0,2048215	23 Dir.	87,5	87,4346	0,075%	28,5	27,6847	2,861%
		25	89,1	89,1548	0,062%	138,3	139,0557	0,546%
		27	176,2	176,1558	0,025%	136,8	136,1038	0,509%
IPE300	0,2662263	28	72,1	72,1029	0,004%	44,3	43,7505	1,240%
		30	93,0	92,9757	0,026%	131,3	132,0055	0,537%
		32 Esq.	183,8	183,8456	0,025%	134,9	134,1384	0,565%
IPE300	0,2662263	32 Dir.	109,8	109,7604	0,036%	56,9	56,0073	1,569%
		34	92,0	92,0298	0,032%	130,3	131,0079	0,543%
		36	148,1	148,0799	0,014%	124,4	123,8769	0,420%
IPE300	0,2662263	37	68,9	68,9256	0,037%	54,6	54,1801	0,769%
		39	97,8	97,7689	0,032%	133,9	134,5022	0,450%
		41 Esq.	177,4	177,4366	0,021%	119,6	118,7154	0,740%
IPE300	0,2662263	41 Dir.	136,5	136,5370	0,027%	77,2	76,2535	1,226%
		43	98,8	98,7745	0,026%	134,7	135,3587	0,489%
		45	107,8	107,8139	0,013%	95,3	94,9291	0,389%
IPE240	0,4378734	46	49,6	49,6477	0,096%	44,2	44,0762	0,280%
		48	63,4	63,4689	0,109%	76,8	77,1030	0,395%
		50 Esq.	108,8	108,7145	0,079%	87,4	87,0179	0,437%
IPE240	0,4378734	50 Dir.	97,7	97,6531	0,048%	73,5	73,0677	0,588%
		52	63,5	63,5458	0,072%	76,9	77,1891	0,376%
		54	60,6	60,5552	0,074%	57,9	57,8541	0,079%

* Valores teóricos fornecidos por Chan e Chui (2000)

Tabela 6.12 – Resultados de momentos fletores para as colunas obtidos através da solução linear para o pórtico de Vogel (valores absolutos, em kNm).

Dados/Elemento		Ligações Rígidas			Ligações Rígidas		
Coluna	Ponto Nodal	Teórico*	CHC	Erro	Teórico*	CHC	Erro
HEB220	55	45,7	45,6937	0,014%	74,7	75,3035	0,808%
	1	11,1	11,1381	0,343%	2,41	2,2152	8,083%
HEB220	1	6,9	6,9108	0,157%	14,2	14,6681	3,296%
	10	11,6	11,6395	0,341%	6,3	6,5437	3,868%
HEB220	10	16,9	16,8648	0,208%	2,1	1,8639	11,243%
	19	18,7	18,7242	0,129%	4,7	5,1300	9,149%
HEB220	19	40,9	40,9043	0,011%	27,4	27,1622	0,868%
	28	50,5	50,4492	0,101%	27,1	26,6336	1,721%
HEB160	28	21,7	21,6537	0,213%	17,2	17,1169	0,483%
	37	23,9	23,9121	0,051%	14,1	14,1584	0,414%
HEB160	37	45,0	45,0135	0,030%	40,2	40,0217	0,444%
	46	49,6	49,6477	0,096%	44,2	44,0762	0,280%
HEB260	56	117,6	117,5580	0,036%	158,4	159,2186	0,517%
	5	87,1	87,1496	0,057%	45,9	45,0441	1,865%
HEB260	5	89,9	89,9500	0,056%	92,3	92,5081	0,225%
	14	84,8	84,8049	0,006%	81,9	81,7568	0,175%
HEB240	14	63,0	63,0023	0,004%	57,0	56,8816	0,208%
	23	63,0	62,9970	0,005%	69,4	69,4875	0,126%
HEB240	23	46,1	46,1307	0,067%	40,0	39,9031	0,242%
	32	46,1	46,1330	0,072%	54,5	54,6785	0,328%
HEB200	32	28,0	27,9522	0,171%	23,6	23,4526	0,625%
	41	33,2	33,2381	0,115%	38,0	38,1466	0,386%
HEB200	41	7,65	7,6614	0,149%	4,4	4,3153	1,925%
	50	11,1	11,0614	0,348%	13,9	13,9502	0,361%
HEB220	57	80,2	80,1672	0,041%	95,7	96,0510	0,367%
	9	79,9	79,9059	0,007%	44,5	43,7800	1,618%
HEB220	9	96,3	96,2480	0,054%	78,3	78,0907	0,267%
	18	92,5	92,5099	0,011%	71,8	71,3951	0,564%
HEB220	18	89,7	89,7385	0,043%	66,1	65,6736	0,645%
	27	88,2	88,1637	0,041%	73,2	73,0037	0,268%
HEB220	27	88,0	87,9922	0,009%	63,6	63,1001	0,786%
	36	102,7	102,7601	0,059%	88,1	87,7767	0,367%
HEB160	36	45,3	45,3197	0,043%	36,3	36,1002	0,550%
	45	54,1	54,0683	0,059%	48,7	48,5883	0,229%
HEB160	45	53,7	53,7456	0,085%	46,5	46,3408	0,342%
	54	60,6	60,5552	0,074%	57,9	57,8541	0,079%

* Valores teóricos fornecidos por Chan e Chui (2000)

Após a análise linear desta estrutura, foi obtida também a solução não-linear considerando três situações para as ligações: idealmente rígidas e com semi-rigidez linear e não-linear. A modelagem utilizada para o pórtico nessa análise foi a mesma que aquela empregada na solução linear. Além disso, com o objetivo de se obter um comportamento mais realístico dessa estrutura, considerar-se-á quatro tipos diferentes de ligações semi-rígidas, iguais às aquelas denotadas por A, B, C e D no exemplo anterior. Nessa análise, o modelo exponencial de Chen-Lui foi utilizado para representar o comportamento não-linear de tais conexões, cujos detalhes e características encontram-se no capítulo 4, na tabela (4.1) e na figura (4.6). Na hipótese da conexão ter comportamento linear, apenas o valor inicial da rigidez, obtido pelo mesmo modelo de Chen-Lui através da equação (4.6c), é levado em consideração. Ressaltar-se-á que a solução não-linear providenciada para esse sistema estrutural foi executada seguindo-se o procedimento adotado por Chan e Chui (2000).

A figura (6.45) mostra as curvas carga-deslocamento para o pórtico de Vogel para as hipóteses de conexões rígidas e semi-rígidas lineares. Como esperado, para mesmos valores de carga, o pórtico com ligações rígidas possui menores deslocamentos do que com conexões semi-rígidas. Já a figura (6.46) mostra as trajetórias de equilíbrio para a mesma estrutura, mas considerando agora a semi-rigidez das ligações variando não-linearmente segundo o modelo exponencial. Para melhor comparação dos resultados obtidos, a figura (6.47) exhibe todas as trajetórias encontradas pela implementação computacional realizada, considerando as três hipóteses iniciais de rigidez das conexões. Daí, nota-se que na análise elástica o comportamento deste pórtico é controlado pelo efeito de flexibilidade da ligação. No caso da conexão D, o início da curva de carga-deslocamento é idêntico para ambos os casos linear e não-linear. No entanto, o efeito da não-linearidade faz com que tal ligação alcance valores de carregamento muito inferiores à situação de semi-rigidez constante.

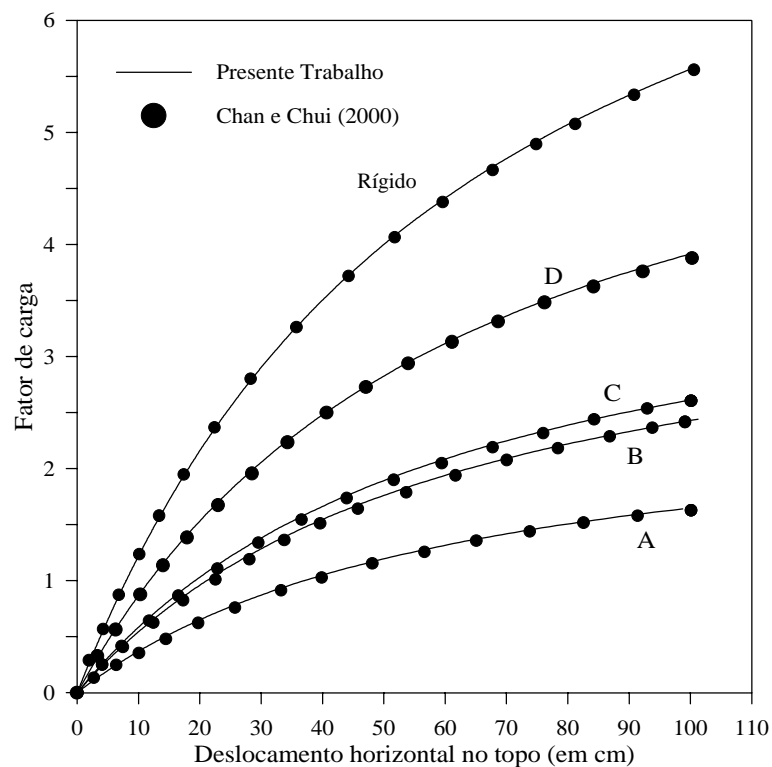


Figura 6.45 – Análise do pórtico de Vogel para vários tipos de conexões lineares.

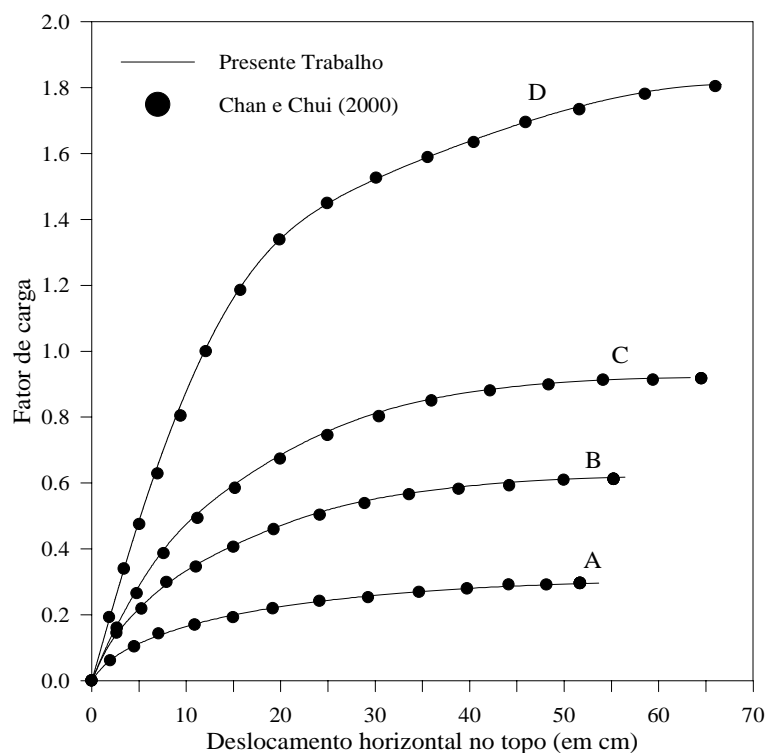


Figura 6.46 - Análise do pórtico de Vogel para vários tipos de conexões não-lineares.

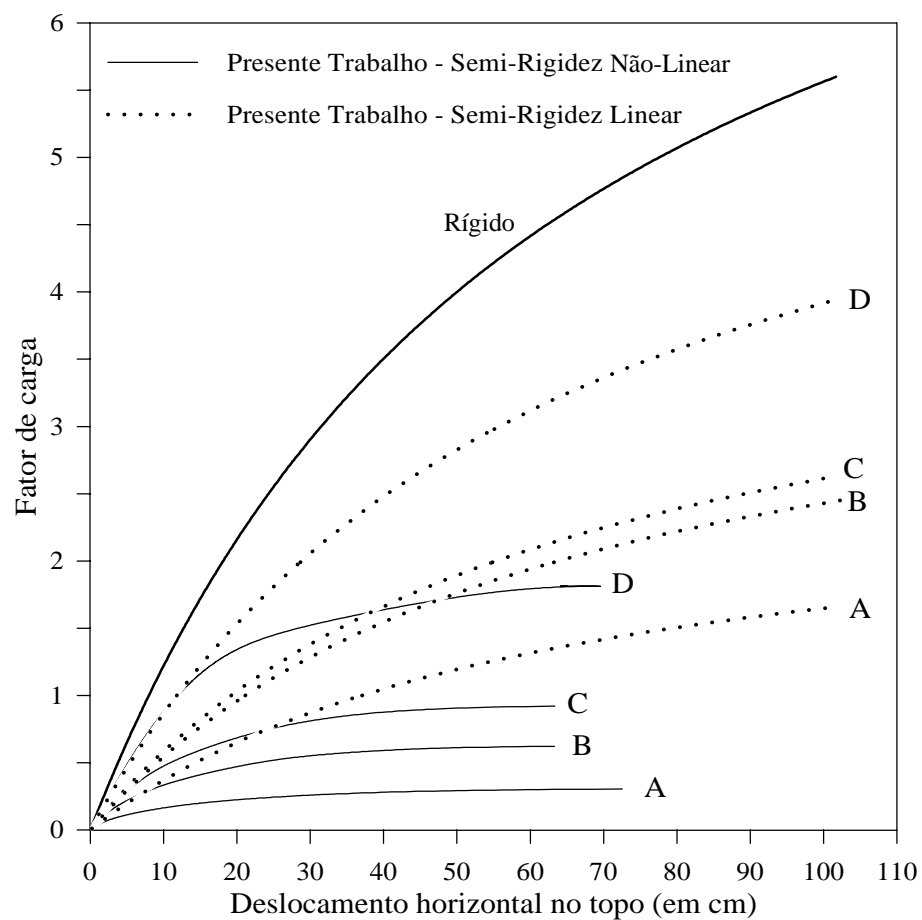


Figura 6.47 – Comparação entre os resultados obtidos para conexões lineares e não-lineares.

7. CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

7.1 – INTRODUÇÃO

Após as análises realizadas no capítulo 6 para sistemas estruturais rotulados e semi-rígidos, serão apresentadas na seção (7.2) algumas conclusões gerais a respeito dos resultados obtidos nas seções (6.2) e (6.3) para as metodologias apresentadas nos capítulos 3 e 4, referentes à análise de treliças planas e espaciais e de pórticos semi-rígidos, respectivamente.

Visando a continuidade deste trabalho, serão fornecidas na seção (7.3) algumas sugestões para futuras pesquisas.

7.2 - CONCLUSÕES

As formulações não-lineares de análise de sistemas estruturais rotulados fornecidas por Yang e Kuo (1994) e Crisfield (1991) foram implementadas com sucesso na metodologia de solução de sistemas de equações não-lineares proposta inicialmente por Silveira (1995). O mesmo pode-se dizer do procedimento de análise não-linear de pórticos semi-rígidos proposto por Chan e Chui (2000), além das análises lineares implementadas para as metodologias de modificação da matriz de rigidez fornecidas por Chen e Lui (1991), Chan e Chui (2000) e Sekulovic e Salatic (2001).

Com o objetivo de validar essas implementações e avaliar a eficiência computacional dessas formulações, foram estudados no capítulo 6 vários exemplos de

problemas estruturais com resultados numéricos e/ou analíticos já consagrados pela literatura.

Diante dos resultados fornecidos por essas análises, algumas conclusões e comentários se fazem necessários. No caso de sistemas estruturais rotulados planos e espaciais, se sobressaem as seguintes considerações:

1) pode-se observar nos resultados encontrados para o exemplo (6.2.1), que analisa uma treliça plana formada por duas barras, que os valores obtidos para os pontos limites de carga alcançados pelas formulações YLA (Yang e Kuo em referencial Lagrangeano atualizado), YLT (Yang e Kuo em referencial Lagrangeano total), CTE (Crisfield utilizando o tensor de engenharia) e CTG (Crisfield utilizando o tensor de Green) são praticamente equivalentes em sistemas estruturais rotulados sujeitos a pequenos deslocamentos;

2) através da variação geométrica do exemplo anterior, fazendo-o passar da condição de estrutura sujeita a pequenos deslocamentos para a de estrutura sujeita a grandes deslocamentos, nota-se claramente que as formulações propostas levam a resultados desiguais. Como já observado por Yang e Kuo (1994), a formulação YLA fornece valores de carga cada vez maiores do que aqueles obtidos por YLT à medida que o ângulo de inclinação dos elementos da treliça aumenta, levando a mesma a maiores deslocamentos. Além disso, como já exposto por Crisfield (1991), percebe-se que o uso do tensor de engenharia, sob as mesmas condições de variação de geometria, majora os valores do fator de carga obtidos com o uso do tensor de Green. Portanto, conclui-se que o uso do tensor de Green leva a uma resposta estrutural mais flexível do que o uso do tensor de engenharia. Além disso, nota-se que as formulações YLT e CTG possuem resultados idênticos, o que seria de se esperar visto que ambas utilizam um referencial Lagrangeano total e o mesmo tensor de deformações;

3) observa-se através do exemplo (6.2.3), referente a uma treliça plana assimétrica em forma de arco, que para estruturas mais complexas as formulações YLT e CTG perdem muito de sua eficiência, principalmente após pontos limites de carga. Para esse tipo de problema, mesmo levando a valores de carregamento ligeiramente superiores, a formulação YLA possuiu nitidamente uma eficiência maior que as formulações totais, ultrapassando com facilidade todos os pontos limites existentes;

4) a tendência de YLA e CTE de majorar os valores de carregamento obtidos por YLT e CTG, respectivamente, se mantém na treliça plana de dois elementos retratada no exemplo (6.2.4), cuja inclinação da barras é de 80 graus. No entanto, o fato mais relevante a ser observado refere-se à influência das imperfeições iniciais na trajetória de equilíbrio de uma estrutura. Mesmo um pequeno valor, de 4×10^{-6} , já foi suficiente para diminuir substancialmente o valor de carga limite e capturar uma trajetória de bifurcação. Para estruturas espaciais, a influência dessas imperfeições, como demonstra o exemplo (6.2.8) concernente a um arco treliçado tridimensional, se mantém, podendo, como nesse último caso, levar a vários caminhos de bifurcação, dependendo da direção em que se dá a imperfeição no sistema estrutural;

5) no exemplo (6.2.5), que analisou uma treliça espacial composta por 24 elementos, as formulações totais mostraram quase a mesma eficiência das formulações atualizadas quando a estrutura estava submetida apenas à carga aplicada no nó 1. No entanto, quando o número de cargas aumentou e a trajetória de equilíbrio tornou-se mais fortemente não-linear, tanto CTG quanto CTE e YLT tiveram seriíssimos problemas para percorrer todo o caminho de equilíbrio, que foi obtido com mais eficiência através de YLA. Esta última situação, com a estrutura submetida a sete cargas nodais, demonstra a importância da correta escolha da estratégia de solução não-linear. Neste caso, o método do comprimento de arco, apesar da eficiência em traçar a maior parte da trajetória de equilíbrio, perdia convergência logo após atingir o terceiro ponto limite de carga enquanto o método do deslocamento generalizado apresentou resultados extremamente satisfatórios, percorrendo todo o trajeto da curva carga-deslocamento;

6) a estratégia de solução não-linear adquire maior importância à medida que a trajetória de equilíbrio torna-se mais fortemente não-linear. O exemplo (6.2.6), referente a uma estrutura rotulada espacial formada por 12 elementos, ilustra esse fato, onde os valores da curva carga-deslocamento fornecida pela literatura só foram encontrados para a formulação YNI através da utilização da estratégia de incremento de carga baseada no comprimento de arco aliada à estratégia de iteração a resíduo ortogonal. A formulação YLA produziu bons resultados com uma eficiência, em dados momentos, até maior que YNI, mas, por motivos já mencionados anteriormente, levou a maiores resultados de carga.

Para o caso de pórticos semi-rígidos, algumas considerações gerais podem ser feitas:

1) na análise linear efetuada para o exemplo (6.3.1), concernente a um pórtico de quadro simples, os procedimentos propostos por Chen e Lui (1991) (CHL), Chan e Chui (2000) (CHC) e Sekulovic e Salatic (2001) (SES) para modificação da matriz de rigidez do elemento semi-rígido levam a resultados equivalentes, com erros praticamente desprezíveis quando comparados com resultados fornecidos pela literatura;

2) os procedimentos de modificação da matriz de rigidez de um elemento semi-rígido sujeito à análise não-linear proposto por Chan e Chui (2000) produziu resultados extremamente precisos, como atestam os exemplos (6.3.2), (6.3.3) e (6.3.4). Tais exemplos demonstram não só a validade dos procedimentos sugeridos pelos autores supracitados como também da implementação computacional realizada, tanto para conexões com comportamentos lineares quanto para aquelas que se comportam de forma não-linear;

3) através das figuras (6.31) e (6.32), que demonstram a influência da flexibilidade da ligação no momento fletor da base e no deslocamento horizontal na parte superior de um pórtico de quadro simples retratado no exemplo (6.3.2), respectivamente, nota-se que, em uma análise linear, as solicitações supracitadas decrescem sempre na mesma proporção à medida que se aumenta o fator de rigidez, o que vale para quaisquer valores de carregamento. Já em uma análise não-linear, para maiores níveis de carga há uma clara tendência de que os valores de momento e deslocamento sejam maiores;

4) outro fato de particular interesse refere-se à variação da carga crítica com o fator de rigidez. Observa-se, pela figura (6.34), que mostra a influência da flexibilidade da conexão no valor de carga crítica, que para pórticos com maior número de pavimentos o valor de carga crítica varia quase que linearmente com o aumento do fator de rigidez, fato que deixa de ocorrer no momento em que o número de pavimentos diminui.

5) uma observação relevante diz respeito à proximidade entre os valores obtidos pelo procedimento de análise não-linear sugerido por Chan e Chui (2000), e implementado neste trabalho, com aqueles alcançados pelo procedimento proposto por Sekulovic e Salatic (2001), fato que pode ser notado nas comparações realizadas no

exemplo (6.3.2) e que demonstra não só a boa qualidade da implementação computacional realizada, mas também a convergência entre as respostas obtidas por ambas as metodologias.

6) os exemplos (6.3.3) e (6.3.4), referentes a um pórtico de dois pavimentos com variação das condições de apoio e ao pórtico de Vogel, respectivamente, demonstram de forma conclusiva que a consideração de um fator de rigidez constante ao longo do processo de solução não-linear, o que representaria a rigidez inicial da ligação, leva a menores resultados de deslocamentos para um mesmo estágio de carregamento, além de maiores valores de carga crítica, que a suposição de comportamento não-linear da conexão. Esta última hipótese, em pórticos sem contraventamento, transforma-se numa grande fonte de não-linearidade e passa a ser um dos fatores determinantes do comportamento estrutural em uma análise não-linear elástica. Nota-se ainda que para pequenos deslocamentos as considerações de rigidez linear e não-linear, principalmente para ligações mais rígidas, são quase que indistinguíveis.

Por fim, nas análises realizadas neste trabalho, os aspectos que se mostraram de maior relevância na precisão dos resultados obtidos pelas diversas formulações testadas foram:

- i) o sistema referencial adotado, se Lagrangeano total ou atualizado, fato que se mostrou crucial nas análises empreendidas na seção (6.2);
- ii) a estratégia de solução não-linear adotada em problemas com trajetórias de equilíbrio fortemente não-lineares;
- iii) a consideração do tipo de semi-rigidez da conexão entre viga e pilar, se de comportamento linear ou não-linear;
- iv) a forma de se atualizar, durante o processo incremental, o valor da rigidez de ligações com comportamento não-linear, sendo que o procedimento que se mostrou mais adequado encontra-se descrito na seção (5.4.7).

7.3 – SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

A base computacional existente, que começou a tomar forma através de Silveira (1995), foi expandida e adaptada ao longo dos últimos anos por Rocha (2000) e Galvão (2000; 2001) com a finalidade de se analisar uma variedade maior de sistemas estruturais. Além disso, deve-se ter em mente que um dos objetivos deste trabalho foi exatamente o de colaborar nesta expansão e possibilitar que esta base ampliasse seu leque de opções de análises.

Diante da variedade de problemas estruturais que necessitam de melhor compreensão, serão apresentadas aqui algumas sugestões para futuras pesquisas que podem usufruir dessa base computacional, dando continuidade ao trabalho de expandi-la de modo que se possa examinar uma diversidade cada vez maior de problemas estruturais. Posto isso, pode-se sugerir para futuras pesquisas:

- a análise não-linear de sistemas estruturais levando em consideração a plastificação da seção transversal, ou seja, com a inclusão da não-linearidade física no comportamento do elemento;
- a análise dinâmica não-linear de sistemas estruturais com ligações semi-rígidas;
- a análise não-linear de pórticos espaciais;
- a análise de estruturas sob condições de incêndio;
- a implementação computacional de outras estratégias de solução não-linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdalla, K.M. e Chen, W.F. (1995). Expanded Database of Semi-rigid Steel Connections, *Comp. Struct.*, v. 56(4), p. 553-564.

Al-Bermani, F. G. A. et al. (1994), Cyclic and Seismic Response of Flexibly Jointed Frames, *Eng. Struct.*, v. 16(4), p. 249-255.

American Institute of Steel Construction (2000): LRFD Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings, AISC, Chicago.

Ang, K. M. e Morris, G. A. (1984), Analysis of Three-dimensional Frames with Flexible Beam-column Connections. *Can. J. Civil Eng.*, v. 11, p. 245-254.

Arbabi, F. (1982), Drift of Flexibly Connected Frames, *Comp. Struct.*, v. 15(2), p. 102-108.

Azizinamini, A., Bradburn, J. H. e Radziminski, J. B. (1985), Static and Cyclic Behavior of Semi-rigid Steel Beam-Column Connections, Technical Report, Dept. of Civil Engineering, Univ. of South Carolina, Columbia, SC.

Baker, J.F.(1934), A Note on the Effective Length of a Pillar Forming Part of a Continuous Member in a Building Frame, 2nd Report, Steel Structures Res. Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research, HMSO, London, p. 13-34.

Bathe, K. J. (1982), Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Bathe, K. J. e Dvorkin, E. N. (1983), On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations, *Comp. Struct.*, vol. 17(5-6), p. 871-879.

Batho, C. (1931), Investigation on Beam and Stanchion Connections, 1st Report, Steel Structures Res. Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research, HMSO, London, v. 1-2, p. 61-137.

Batho, C. e Lash, S. D. (1936), Further Investigations on Beam and Stanchion Connections Encased in Concrete, Together with Lab. Investigation on Full Scale Steel Frame, Final Report, Steel Structures Research Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research, HMSO, London, p. 92.

Batho, C. e Rowan, H. C. (1934),), Investigation on Beam and Stanchion Connections, 2nd Report, Steel Structures Res. Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research, HMSO, London, v. 1-2, p. 61-137.

Batoz, J. L. e Dhett, G. (1979), Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 14, p. 1262-1267.

Brandes, J. L. e Mains, R. M. (1944), Report of Tests of Top Plate and Seat Building Connections, *Br. Weld. J.*, v. 23(3).

British Standard Institution (1990): BS5950: Part I: Structural Use of Steelwork in Building, BSI, London, England.

Campos Júnior, R. A. (1991), Análise do Comportamento de Estruturas Reticuladas de Aço com Ligações Semi-rígidas, Rio de Janeiro, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica – RJ.

Chan, S. L. (1993), A Non-linear Numerical Method for Accurate Determination of Limit and Bifurcation Points, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v. 36, p. 2779-2790.

Chan, S. L. (1994), Vibration and Modal Analysis of Steel Frames with Semi-rigid Connections, Eng. Struct., v. 16(1), p. 25-31.

Chan, S. L. e Chui, P. P. T., (2000), Non-Linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections, Elsevier, Oxford.

Chen, W. F. e Kishi, N. (1989), Semirigid Steel Beam-to-Column Connections: Data Base and Modeling, J. Struct. Div. ASCE, v. 115(1), p. 105-119.

Chen W. F. e Lui, E. M. (1991), Stability Design Of Steel Frames, CRC Press, Boca Raton, Flórida.

Chen, W. F. e Sohal, I. (1995), Plastic Design and Second-order Analysis of Steel Frames, Springer-Verlag, New York.

Chen, W. F. e Toma, S. (1994), Advanced Analysis of Steel Frames, CRC Press, Boca Raton, Flórida.

Chui, P. P. T. e Chan, S. L. (1997), Vibration and Deflection Characteristics of Semi-rigid Jointed Frames, Eng. Struct., v. 19(12), p. 1001-1010.

Colson, A. e Louveau, J. M. (1983), Connections Incidence on the Inelastic Behavior os Steel Structural, Eng. Struct., v. 16(1), p. 25-31.

Cox, M. G. (1972), The Numerical Evaluation of B-splines, J. Inst. Math. Applic., v. 10, p. 134-139.

Crisfield, M. A. (1980), Alternative Methods Derived from the BFGS Formula, Int. J. Numer. Methods Eng., v. 15, p. 1419-1420.

Crisfield, M. A. (1981), A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles (Snap-Through), Comp. Struct, v. 13, p. 52-62.

Crisfield, M.A. (1991). Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, vol. 1, John Wiley & Sons.

Crisfield, M.A. (1997). Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, vol. 2, John Wiley & Sons.

Douty, R. T. (1964), Strength Characteristics of High Strength Bolted Connections with Particular Application to the Plastic Design of Steel Structures, Ph.D Thesis, Cornell Univ., Ithaca, NY.

Eurocode 3 (1992): Eurocode 3, Design of Steel Structures: Part 1.1, general Rules and Rules for Buildings, DD ENV 1993-1-1

Forde, B. W. R. e Stiemer, S. F. (1987), Improved Arc Length Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis, Comp. Struct., v. 27(5), p. 625-630.

Frye, M. J. e Morris, G. A. (1975), Analysis of Flexibly Connected Steel Frames, Can. J. Civil Eng., v. 2(3), p. 280-291.

Galvão, A. S., (2000), Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos, Ouro Preto, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto.

Galvão, A. S., (2001), Análise Linear de Estruturas Reticuladas Planas e Espaciais, trabalho da disciplina Estudo Orientado do programa de pós-graduação da PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ.

Gao, L. e Haldar, A. (1995), Nonlinear Seismic Analysis of Space Structures with Partially Restrained Connections, Microcomput. Civil Eng. v. 10, p. 27-37.

Gerstle, K. H. (1988), Effect of Connections on Frames, *J. Construct. Steel Res.*, v. 10, p. 241-267.

Goldberg, J. E. e Richard, R. M. (1963), Analysis of Nonlinear Structures, *J. Struct. Div. ASCE*, v. 89(ST4).

Goto, Y. e Chen, W. (1987), Second-Order Elastic Analysis for Frame Design, *J. Struct. Engng*, v. 113(7), p. 1500-1519.

Hechtman, R. A. e Johnston, B. G. (1947), Riveted Semi-rigid Beam-to-column Building Connections, Committee of Steel Structures Research, AISC, Progress Report No. 1, November.

Jin, Y. e Hai-rong, F (1995), Forward Displacement Analysis of the Decahedral Variable Geometry Truss Manipulator, *Robotic and Autonomous Systems*, v. 15, p. 173-178.

Johnson, L. G., Cannon, J. C. e Spooner, L. A. (1960), High Tensile Preloaded Bolted Joints, *Br. Weld. J.*, v. 7(9).

Johnson, N. D. e Walpole, W. R. (1981), Bolted End-plate Beam-to-column Connections Under Earthquake Type Loading, Research Report 81-7, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Canterbury, Christchurch, New Zealand.

Jones, S. W., Kirby, P. A. e Nethercot, D. A. (1980), Effect of Semi-rigid Connections on Steel Column Strength, *J. Construct. Steel Res.*, v. 1, p. 38-46.

Kawashima, S. e Fujimoto, T. (1984), Vibration Analysis of Frames with Semi-rigid Connections, *Comp. Struct.*, v. 19, p. 85-92.

Kim, S. E. e Lee, J. (2001), Improved Refined Plastic-hinge Analysis Accounting for Local Buckling, *Eng. Struct.*, v. 23(8), p. 1031-1042.

King, W. S. (1994). The Limit Loads of Steel Semi-rigid Frames Analyzed with Different Methods. *Comp. Struct.*, v. 51(5), p. 475-487.

King, W. S. e Chen, W. F. (1993), A LRFD-Based Analysis Method for Semi-rigid Frame Design, Structural Engineering Report No. CE-STR-93-15, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.

Kishi, N. e Chen, W. F. (1986a), Data Base of Steel Beam-to-column Connections, Structural Engineering Report No. CE-STR-93-15, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.

Kishi, N. e Chen, W. F. (1986b), Steel Connection data Bank Program, Structural Engineering Report No. CE-STR-86-18, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.

Kishi, N. e Chen, W. F. (1987a), Moment-rotation Relation of Top and Seat Angle Connections, Structural Engineering Report No. CE-STR-87-4, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.

Kishi, N. e Chen, W. F. (1987b), Moment-rotation Relation of Semi-rigid Connections, Structural Engineering Report No. CE-STR-87-29, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.

Kishi, N. et al. (1996), Behavior of Tall Buildings with Mixed Use of Rigid and Semi-rigid Connections, *Comp. Struct.*, v. 61(6), p. 1193-1206.

Krenk, S. (1995), An Orthogonal Residual Procedure for Non-Linear Finite Element Equations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 38, p. 823-839.

Krenk, S. e Hededal, O. (1993), Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations. Engineering Mechanics, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg Universitetscenter, Denmark, N^o. 12, p. 01-18.

Krenk, S. e Hededal, O. (1995), A Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, v. 123, p. 95-107.

Krishnamoorthy, C. S. et al (1996), Post-buckling Analysis of Structures by Three-parameter Constrained Solution Techniques, Finite Elements in Analysis and Design, v. 22, p. 109-142.

Krishnamurthy, N. et al. (1979), Analytical M- ϕ Curves for End-plate Connections, J. Struct. Div. ASCE, v. 105(ST1), p. 133-145.

Lewitt, C. W., Chesson, E. J. e Munse, W. H. (1966), Restraint Characteristics of Flexible Riveted and Bolted Beam-to-column Connections, Structural Research Series No. 296, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Illinois, Urbana, IL.

Lightfoot, F. e LeMessurier, A. P. (1974), Elastic Analysis of Frameworks with Elastic Connections, J. Struct. Div. ASCE, v. 100(ST6), p. 1297-1309.

Lima, L. R. O. et al. (2002), Experimental and Mechanical Model for Predicting the Behaviour of Minor Axis Beam-to-column Semi-rigid Joints, Int. J. Mech. Sciences, v. 44, p. 1047-1065.

Lipson, S. L. (1968), Single-angle and Single Plate Beam Framing Connections, First Canadian Structural Engineering Conference.

Lui, E. M. e Chen, W. F. (1986), Analysis and Behavior of Flexible-Jointed Frames, Eng. Struct., v. 8, p. 1007-118.

Lui, E. M. e Chen, W. F. (1988), Behavior of Braced and Unbraced Semi-rigid Frames, Int. J. Solids Structures, v. 24(9), p. 893-913.

Masarira, A. (2002), The Effect of Joints on the Stability Behavior of Steel Frame Beams, J. Construct. Steel Research, v. 58, p. 2002)

Meek, J. L. e Tan, H. S. (1984), Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., v. 47, p. 261-282.

Monforton, A. R. e Wu, T. S. (1963), Matrix Analysis of Semi-rigid Connected Frames, J. Struct. Div. ASCE, v. 89(ST6), p. 13-42.

Munse, W. H., Bell, W. G. e Chesson, E. J. (1959), Behavior of Beam-to-column Connections, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Illinois, Urbana, IL.

Oñate, E. e Matias, W. T. (1996), A Critical Displacement Approach for Predicting Structural Instability, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, v. 134, p. 135-161.

Ostrander, J. R. (1970), An Experimental Investigation of End-Plate Connections, Master's Thesis, Univ. of Saskatchewan, Saskatoon, SK, Canadá.

Papadrakakis, M. (1981), Post-buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Iteration Methods, Comput. Struct., v. 14(5-6), p. 393-402.

Powell, G. e Simons, J. (1981), Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures, Int. J. Num. Meth. Engng, v. 17, p. 1455-1467.

Ramberg, W. e Osgood, W. R. (1943), Description of Stress-Strain Curves by Three parameters, Technical Report N° 902, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, DC.

Ramm, E. (1981), Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer-Verlag, Berlim, p. 63-89.

Rathbun, J. C. (1936), Elastic Properties of Riveted Connections, ASCE Trans., v. 101(1933), p. 524-563.

Ribeiro, L. F. L. (1998), Estudo do Comportamento das Ligações Parafusadas Viga-coluna com Chapa de Topo: Análise Teórico-experimental, São Carlos, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Richard, R. M. (1961), A Study of Structural Systems Having Conservative Nonlinearity, Ph.D Thesis, Purdue Univ., West Lafayette, IN.

Richard, R. M. e Abbott, B. J. (1975), Versatile Elastic-plastic Stress-strain Formula, J. Eng. Mech. Div. ASCE, v. 101(4), p. 511-515.

Richard, R. M. et al. (1982), Design of Single Plate Framing Connections with A307 Bolts, Eng. J. AISC, v. 19(4), p. 209-213.

Riks, E. (1972), The Application of Newton's Methods to the Problems Elastic Stability, Int. J. Solids Struct., ASME Journal of Applied Mechanics, v. 39, p. 1060-1066.

Rocha, G. (2000), Estratégias Numéricas para Análise de Elementos Estruturais Esbeltos Metálicos, Ouro Preto, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto.

Romano, V. P. (2001), Dimensionamento de Ligações Viga-coluna com Chapa de Topo: Modelo do Eurocode 3, Ouro Preto, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto.

Romstad, K. M. e Subramanian, C. V. (1970), Analysis of Frames with Partial Connection Rigidity, J. Struct. Div. ASCE, v. 96(ST11), p. 2283-2300.

Saldanha, A. C. (1997), Análise Não-Linear do Comportamento de Pórticos Metálicos com Ligações Semi-Rígidas, Ouro Preto, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto.

Santos, L. B. (1998), Influência da Rigidez das Ligações em Estruturas de Aço, São Carlos, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Sekulovic, M. e Malcevic, I. (1994), Second-order Analysis of Frame Structures, Theoretical and Applied Mechanics, v. 20, p 209-234.

Sekulovic, M. e Salatic, R. (2001), Nonlinear Analysis of Frames with Flexible Connections, Computers & Structures, v. 79(11), p. 1097-1107.

Sekulovic, M., Salatic, R. e Nefovska, M. (2002), Dynamic Analysis of Steel Flexible Connections, Comp. Struct., v.80(11), p. 935-955.

Sherbourne, A. N. (1948), Bolted Beam-to-column Connections, Struct. Eng., v. 27.

Sherbourne, A. N. (1961), Bolted Beam-to-column Connections, Struct. Engineer., v. 39(6), p. 203-210.

Shi, G. e Atluri, S. N. (1989), Static and Dynamic Analysis of Space Frames with Nonlinear Flexible Connections, Int. J. Num. Methods Eng., v. 28, p. 2635-2650.

Shi, J. (1996), Computing Critical Points and Secondary Paths in Nonlinear Structural Stability Analysis by the Finite Element Method, Comp. Struct., v. 58(1), p. 203-230.

Shi, J., Chan, S. L. e Wong, Y. L. (1996), Modeling for Moment-rotation Characteristics for End-plate Connections, J. Struct. Eng. ASCE, v. 112(11), p. 1300-1306.

Shi, J. e Crisfield, M. A. (1992), A Simple Indicator and Branch Switching Technique for Hidden Unstable Equilibrium Paths, Finite Elements in Analysis & Design, v. 12, p. 303-312.

Silveira, R. A. M., (1995). Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato, Rio de Janeiro, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica – RJ.

Simões, L. M. C. (1996), Optimization of Frames with Semi-rigid Connections, Comp. Struct., v. 60(4), p. 531-539.

Sivakumaran, K. S. (1988), Seismic Response of Multi-storey Steel Buildings with Flexible Connections, Eng. Struct., v. 10, p. 239-248.

Soares Filho, M. (2002), Análise Dinâmica de Pórticos Elastoplásticos com Conexões Semi-rígidas Utilizando Programação Matemática, Brasília, Projeto de Tese e Qualificação Para Doutorado em Estruturas, Universidade de Brasília.

Sommer, W. H. (1969), Behavior of Welded Header Plate Connections, Master's Thesis, Univ. of Toronto, ON, Canadá.

Stelmack, T. W., Marley, M. J. e Gerstle, K. H. (1986), Analysis and Tests of Flexibly Connected Steel Frames, J. Struct. Eng. ASCE, v. 112(7), 1573-1588.

Timoshenko, S. P. e Gere, J. E. (1963), Theory of Elastic Stability, Mechanical Engineering Series, Tokyo, McGraw-Hill.

Timoshenko, S. P. e Gere, J. E. (1982), *Mecânica dos Sólidos*, v.1, Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos.

Timoshenko, S. P. e Gere, J. E. (1982), *Mecânica dos Sólidos*, v.2, Rio de Janeiro, LTC – Livros Técnicos e Científicos.

Torkamani, M. A. M., Sonmez, M. e Cao, J. (1997). Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method. *J. Struct. Engineering*, v. 12(9) p. 1225-1235.

Vogel, U. (1985), Calibrating Frames, *Stahlbau*, v. 54(outubro), p. 295-311.

Widjaja, B. R. (1998), Path-following Technique Based on Residual Energy Suppression for Nonlinear Finite Element Analysis, *Comp. Struct.*, v. 66(2-3), p. 201-209.

Xu, L (2001), Second-order Analysis for Semirigid Steel Frame Design, *Can. J. Civ. Eng.*, v. 28, p. 59-76.

Xu, L. e Liu, Y. (2002), Story Stability of Semi-braced Steel Frames, *J. Const. Steel Research*, v. 58, p. 467-491.

Yang, Y. B. e Kuo, S. R. (1994), *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*, Prentice Hall.

Yang, Y. B. e Kuo, S. R. (1995), Tracing Postbuckling Paths of Structures Containing Multi-loops, *Int. J. Num. Meth. Engng*, v. 38, p. 4053-4075.

Yang, Y. B. e Shieh, M. S. (1990), Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, V. 28(12), p. 2110-2116.

Youssef-Agha, W. e Aktan, H. M., (1989), Seismic Response of Low-rise Steel Frames, Struct. Div. ASCE, v. 115(3), p. 594-607.

Yu, C. H., Shanmugan, N. E. (1986), Stability of Frames with Semi-rigid Joints, Comp. Struct., v. 23(5), p. 639-648.

Zienkiewicz, O. C. (1971), The Finite Element in Engineering Science, McGraw-Hill, London.

Zhu, K. et al. (1995), Dynamic Response of Flexibility Jointed Frames, J. Struct. Div. ASCE, v. 17(8), p. 575-580.

| APÊNDICE A

A.1 – INTRODUÇÃO

Esta seção tem por objetivo apresentar duas das estratégias de solução não-linear mais utilizadas nas análises apresentadas neste trabalho. Na seção (A.2) será apresentada a estratégia baseada no parâmetro de rigidez GSP, ou deslocamento generalizado. Já a seção (A.3) abordará a estratégia do comprimento de arco. Finalmente, serão apresentados na seção (A.4) os critérios de convergência possíveis de serem adotados para a solução não-linear. Deve-se enfatizar que a implementação computacional dessas estratégias foi realizada por Silveira (1995) e Rocha (2000). Além disso, mais informações sobre outras estratégias de solução não-linear utilizadas em alguns exemplos do capítulo 6 podem ser encontradas com mais detalhes no trabalho de Rocha (2000).

A.2 – ESTRATÉGIA BASEADA NO PARÂMETRO DE RIGIDEZ GSP (DESLOCAMENTO GENERALIZADO)

No trabalho de Rocha (2000), demonstrou-se que dependendo da forma da restrição imposta diferentes expressões para obtenção do incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$ podem ser obtidas. Yang e Kuo (1994) propuseram que a equação de restrição

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{d}^k + k_1 \delta \lambda^k = H_k \quad (\text{A.1})$$

deveria ser respeitada nas duas etapas de solução não-linear (solução predita e ciclo de iterações), onde \mathbf{C} e k_1 são constantes e H um parâmetro incremental (deslocamento,

comprimento de arco, trabalho externo). Em função de valores selecionados para essas variáveis, chega-se a diferentes estratégias de incremento de carga e de iteração.

A equação de restrição anterior, juntamente com a equação (2.8), expressa pela relação

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{d}^k = \delta \lambda^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (\text{A.2})$$

formam um sistema de equações com $N + 1$ incógnitas. Essas duas equações podem ser combinadas de forma que, após manipulações algébricas e matriciais, chega-se à seguinte expressão para o parâmetro de carga (Yang e Kuo, 1994):

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta \mathbf{d}_t^k + k_1} (\mathbf{H}_k - \mathbf{C}^T \delta \mathbf{d}_g^k). \quad (\text{A.3})$$

Seguindo a sugestão de Yang e Shieh (1990) para os valores de \mathbf{C} e k_1 , ou seja,

$$\mathbf{C} = \Delta \lambda^0 {}^t \delta \mathbf{d}_t \quad \text{e} \quad k_1 = 0, \quad (\text{A.4})$$

onde ${}^t \delta \mathbf{d}_t$ é o vetor de deslocamentos nodais tangenciais do passo de carga anterior (ver equação (2.1), seção (2.3.1)), chega-se a uma nova expressão para $\delta \lambda^k$, que valerá

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\Delta \lambda^0 {}^t \delta \mathbf{d}_t^T \delta \mathbf{d}_t^k} (\mathbf{H}_k - \Delta \lambda^0 {}^t \delta \mathbf{d}_t^T \delta \mathbf{d}_g^k). \quad (\text{A.5})$$

A solução incremental predita $\Delta \lambda^0$ é, então, obtida fazendo-se, na equação anterior, $k = 0$, $\delta \lambda^0 = \Delta \lambda^0$, $\delta \mathbf{d}_g^0 = 0$ e $\delta \mathbf{d}_t^0 = \delta \mathbf{d}_t$, o que originará

$$\Delta \lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{H}_0}{{}^t \delta \mathbf{d}_t^T \delta \mathbf{d}_t}}. \quad (\text{A.6})$$

O valor do parâmetro incremental H_0 (no caso, *deslocamento generalizado*) pode ser definido utilizando-se a equação anterior e assumindo-se que, no primeiro passo de carga, se conhece o valor de $\Delta\lambda^0$ (valor fornecido pelo analista). Assim, ter-se-á que

$$H_0 = (\Delta\lambda_1^0)^2 {}^1\delta\mathbf{d}_t^T {}^1\delta\mathbf{d}_t. \quad (\text{A.7})$$

Observe que, com a substituição de (A.7) em (A.6), chega-se a

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{{}^1\delta\mathbf{d}_t^T {}^1\delta\mathbf{d}_t}{{}^t\delta\mathbf{d}_t^T {}^t\delta\mathbf{d}_t}}. \quad (\text{A.8})$$

Adicionalmente, a consideração do *parâmetro de rigidez generalizado* do sistema (GSP – Generalized Stiffness Parameter) na forma

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta\mathbf{d}_t^T {}^1\delta\mathbf{d}_t}{{}^t\delta\mathbf{d}_t^T {}^t\delta\mathbf{d}_t} \quad (\text{A.9})$$

permite rescrever (A.8) como sendo

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|}, \quad (\text{A.10})$$

onde o critério utilizado para escolher o sinal correto na expressão anterior é baseando no sinal do parâmetro GSP, cujo procedimento encontra-se descrito no trabalho de Rocha (2000). Como já destacado, para o primeiro incremento, $\Delta\lambda^0$ é um valor prescrito, ou seja, $\text{GSP} = 1$.

Durante o ciclo iterativo, é assumido que o parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, isto é, $H_k = 0$, para $k > 0$. Dessa forma, pode-se rescrever (A.5) como sendo

$$\delta\lambda^k = - \frac{{}^t\delta\mathbf{d}_r^T \delta\mathbf{d}_g^k}{{}^t\delta\mathbf{d}_r^T \delta\mathbf{d}_r^k}, \quad (\text{A.11})$$

que é a expressão procurada para correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

O emprego de (A.11), em conjunto com a equação (A.10) para cálculo de $\Delta\lambda^0$, é apresentado na figura (A.1).

Incremento de carga: $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Preditada:

$$\begin{cases} \Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_l^0 |\text{GSP}|^{1/2} \\ \Delta\mathbf{d}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \end{cases}$$

Ciclo de iterações: $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \delta\lambda^k = - \frac{{}^t\delta\mathbf{d}_r^T \delta\mathbf{d}_g^k}{{}^t\delta\mathbf{d}_r^T \delta\mathbf{d}_r^k} \\ \delta\mathbf{d}^k = \delta\mathbf{d}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{d}_r^k \end{cases}$$

Pare o ciclo iterativo quando: $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta\lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare o incremento de carga quando: $i = n_{\text{máx}}$

Figura A.1 – Estratégia de solução não-linear baseada no deslocamento generalizado.

A.3 - ESTRATÉGIA DO COMPRIMENTO DE ARCO

Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982) sugeriram estratégias de incremento automático de carga e de outros parâmetros (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo) baseados na relação

$$\left(\frac{I_d}{{}^tI} \right)^\alpha, \quad (\text{A.12})$$

onde I_d é o número de iterações desejadas para convergência do processo iterativo corrente, que é especificado pelo usuário do programa; tI é o número de iterações que foram necessárias para convergir no passo de carga anterior e α é um expoente cujo valor encontra-se usualmente entre 0,5 e 2,0.

Utilizando um esquema de solução incremental juntamente com o método convencional de Newton-Raphson, Crisfield (1981) adotou a expressão

$$\Delta\lambda^0 = {}^t\Delta\lambda^0 \left(\frac{I_d}{{}^tI} \right) \quad (A.13)$$

para calcular o parâmetro de carga inicial, onde ${}^t\Delta\lambda^0$ e $\Delta\lambda^0$ caracterizam os incrementos iniciais nos passos de carga anterior e corrente, respectivamente. Deve-se observar que foi adotado para α o valor unitário. Em Crisfield (1991), seguindo sugestão de Ramm (1982), passou-se a adotar $\alpha = 0,5$.

Se for utilizado uma estratégia de iteração que permita a variação do parâmetro de carga λ , então a seguinte expressão deve ser utilizada para o incremento automático do parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda^0 = \pm {}^t\Delta\lambda^0 \left(\frac{I_d}{{}^tI} \right)^{1/2}, \quad (A.14)$$

estando descritos no trabalho de Rocha (2000) os critérios para escolha do sinal correto para a expressão anterior.

Como proposto em Crisfield (1991), a equação (A.12) pode ser empregada na definição do incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente através da expressão

$$\Delta l = {}^t\Delta l \left(\frac{I_d}{{}^tI} \right)^{1/2}, \quad (A.15)$$

onde ${}^1\Delta l$ e Δl representam os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior (valor conhecido) e no passo de carga corrente (incógnita), respectivamente.

Através da equação (A.15) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial, ou seja,

$$(\Delta \mathbf{d}^0)^T \Delta \mathbf{d}^0 = \Delta l^2, \quad (\text{A.16})$$

chega-se facilmente, utilizando-se a equação (2.3) em (A.16), à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga, que valerá

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{d}_t^T \delta \mathbf{d}_t}}. \quad (\text{A.17})$$

Caso a equação de restrição proposta por Riks (1972) seja imposta à solução incremental predita, ou seja,

$$(\Delta \mathbf{d}^0)^T \Delta \mathbf{d}^0 + (\Delta \lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2, \quad (\text{A.18})$$

obtém-se

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{d}_r^T \delta \mathbf{d}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}}. \quad (\text{A.19})$$

Embora muitas vezes não se tenha a idéia do incremento do parâmetro de carga no primeiro passo de carga para uma dada análise, a partir da especificação de ${}^1\Delta \lambda^0$ a técnica fornecida em (A.14) pode levar a um cálculo automático dos incrementos iniciais nos passos de carga seguintes.

Entretanto, em geral o usuário não tem idéia da magnitude que deve considerar para o incremento de partida do comprimento de arco ${}^1\Delta l$. Para resolver esse problema, na implementação desenvolvida por Rocha (2000), o usuário deve especificar ${}^1\Delta \lambda^0$

como dado de entrada, sendo este valor usado em seguida para calcular ${}^1\Delta\mathbf{d}^0$ através da equação (2.3). Substituindo-se, então, $\Delta\mathbf{d}^0$ na equação (A.16) ou (A.18), chega-se a ${}^1\Delta l$. Para os passos de carga seguintes, calcula-se automaticamente Δl através de (A.15). No trabalho de Rocha (2000) são descritos os critérios para escolha do sinal correto para as expressões representadas em (A.17) e (A.19).

Para o ciclo de iterações, Crisfield (1981) inicialmente sugeriu, baseado na equação (A.18), que a condição

$$(\Delta\mathbf{d}^k)^T \Delta\mathbf{d}^k + (\Delta\lambda^k)^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2, \quad (\text{A.20})$$

onde, $\Delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{d}^k$ representam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais na iteração corrente, deveria ser respeitada a cada iteração do processo. No entanto, o mesmo autor supracitado e Ramm (1981 e 1982) observaram, através de vários exemplos numéricos, que, em problemas práticos com elevado número de variáveis, o "termo de carga" da equação (A.20) tinha pequeno efeito. Crisfield (1981) propôs então que a cada iteração a equação

$$(\Delta\mathbf{d}^k)^T \Delta\mathbf{d}^k = \Delta l^2 \quad (\text{A.21})$$

fosse satisfeita.

Substituindo a equação (2.11b) na equação anterior, chega-se a uma equação quadrática em $\delta\lambda$, ou seja,

$$A(\delta\lambda^k)^2 + B\delta\lambda^k + C = 0, \quad (\text{A.22})$$

onde os coeficientes A, B e C possuem a seguinte forma:

$$A = (\delta\mathbf{d}_r^k)^T \delta\mathbf{d}_r^k; \quad (\text{A.23a})$$

$$B = 2(\delta\mathbf{d}_r^k)^T (\Delta\mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}_g^k); \quad (\text{A.23b})$$

$$C = (\Delta \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta \mathbf{d}_g^k)^T (\Delta \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta \mathbf{d}_g^k) - \Delta l^2. \quad (\text{A.23c})$$

Com a resolução de (A.22), chega-se a dois valores de $\delta \lambda$, $\delta \lambda_1$ e $\delta \lambda_2$, de forma que se deve escolher entre as soluções

$$\Delta \mathbf{d}_1^k = \Delta \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta \mathbf{d}_g^k + \delta \lambda_1^k \delta \mathbf{d}_r^k, \quad (\text{A.24a})$$

$$\Delta \mathbf{d}_2^k = \Delta \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta \mathbf{d}_g^k + \delta \lambda_2^k \delta \mathbf{d}_r^k, \quad (\text{A.24b})$$

aquela que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior, $\Delta \mathbf{d}^{(k-1)}$. Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado. Um procedimento bastante simples a ser seguido consiste em se encontrar o menor ângulo entre $\Delta \mathbf{d}^k$ e $\Delta \mathbf{d}^{(k-1)}$. Isto equivale a obter o máximo cosseno do ângulo entre os vetores, o que pode ser obtido através da expressão

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{\Delta \mathbf{d}^{(k-1)T} \Delta \mathbf{d}^k}{\Delta l^2} = \frac{\Delta \mathbf{d}^{(k-1)T} (\Delta \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta \mathbf{d}_g^k)}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2}^k \frac{\Delta \mathbf{d}^{(k-1)T} \delta \mathbf{d}_r^k}{\Delta l^2}. \quad (\text{A.25})$$

Como a equação (A.22) é quadrática, a mesma poderá ter raízes imaginárias se o termo “ $B^2 - 4AC$ ” for menor que zero. Essa situação pode existir quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto (Meek e Tan, 1984).

Incremento de carga: $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Predita:

$$\begin{cases} (\Delta \mathbf{d}^0)^T \Delta \mathbf{d}^0 + (\Delta \lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2, \text{ ou} \\ (\Delta \mathbf{d}^0)^T \Delta \mathbf{d}^0 = \Delta l^2 \Rightarrow \\ \Delta \mathbf{d}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{d}_t^T \delta \mathbf{d}_t + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \\ \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{d}_t^T \delta \mathbf{d}_t}} \end{cases}$$

Ciclo de iterações: $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{d} = \Delta l^2 \Rightarrow \\ \delta \mathbf{d}^k = \delta \mathbf{d}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{d}_r^k \end{cases} \quad \{A(\delta \lambda^k)^2 + B\delta \lambda^k + C = 0$$

Pare o ciclo iterativo quando: $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta \lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare o incremento de carga quando: $i = n_{\text{máx}}$

Figura A.2 – Estratégia de solução não-linear baseada no comprimento de arco.

A.4 - CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA ADOTADOS

O processo iterativo descrito no capítulo 2 é finalizado, indicando assim uma nova posição de equilíbrio para o sistema estrutural em análise, quando um dos dois critérios de convergência apresentados a seguir, ou ambos, forem atendidos:

1) O primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior, sendo definido pela expressão

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\|} \leq \zeta, \quad (\text{A.26})$$

onde $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|$ é igual à norma Euclidiana do vetor das forças desequilibradas, calculada utilizando-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior; $\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|$ é a norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo e ζ é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada;

2) O segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos e é sempre verificado ao final da iteração corrente, sendo definido através da expressão

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{d}^k\|}{\|\Delta\mathbf{d}^k\|} \leq \zeta, \quad (\text{A.27})$$

onde $\|\delta\mathbf{d}^k\|$ é a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos (residuais); $\|\Delta\mathbf{d}^k\|$ é a norma euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo e ζ segue a mesma definição apresentada no critério anterior.

| APÊNDICE B

B.1 – Interpretação física das matrizes de rigidez do elemento de treliça

As cinco matrizes que aparecem na equação (3.73) representam cinco tipos de ações geradas pelo elemento submetido a deslocamentos incrementais \mathbf{d} de uma configuração t para uma configuração $t + \Delta t$. As equações seguintes representam uma lista das ações associadas com cada uma das cinco matrizes de rigidez:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{d} = \left\{ -F_{xl} \quad 0 \quad F_{xl} \quad 0 \right\}^T, \quad (\text{B.1a})$$

$$\mathbf{K}_g \mathbf{d} = \left\{ -{}^tF_{xb} \frac{\Delta u}{{}^tL} \quad -{}^tF_{xb} \frac{\Delta v}{{}^tL} \quad {}^tF_{xb} \frac{\Delta u}{{}^tL} \quad {}^tF_{xb} \frac{\Delta v}{{}^tL} \right\}^T, \quad (\text{B.1b})$$

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{d} = \left\{ -F_{xn} \quad 0 \quad F_{xn} \quad 0 \right\}^T, \quad (\text{B.1c})$$

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{d} = \left\{ -{}^tF_{xl} \frac{\Delta u}{{}^tL} \quad -{}^tF_{xl} \frac{\Delta v}{{}^tL} \quad {}^tF_{xl} \frac{\Delta u}{{}^tL} \quad {}^tF_{xl} \frac{\Delta v}{{}^tL} \right\}^T, \quad (\text{B.1d})$$

$$\mathbf{K}_3 \mathbf{d} = \left\{ -{}^tF_{xn} \frac{\Delta u}{{}^tL} \quad -{}^tF_{xn} \frac{\Delta v}{{}^tL} \quad {}^tF_{xn} \frac{\Delta u}{{}^tL} \quad {}^tF_{xn} \frac{\Delta v}{{}^tL} \right\}^T, \quad (\text{B.1e})$$

onde F_{xl} e F_{xn} denotam, respectivamente, as componentes linear e não-linear dos incrementos de força gerados durante o passo incremental, ou seja,

$$F_{xl} = EAe_{xx} = EA \frac{\Delta u}{{}^tL}, \quad (\text{B.2a})$$

$$F_{xn} = EA\eta_{xx} = \frac{1}{2} EA \left[\left(\frac{\Delta u}{{}^tL} \right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{{}^tL} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.2b})$$

Os termos descritos de (B.1a) a (B.1e) interagem entre si e representam os efeitos de alongamento (ou encurtamento) e rotação de corpo rígido para um elemento de treliça durante o movimento de t para $t + \Delta t$. As forças internas geradas pela matriz \mathbf{K}_2 têm o objetivo de transformar a força incremental F_{xl} gerada pela matriz \mathbf{K}_e da configuração t para a configuração $t + \Delta t$, assim como é mostrado pela figura (B.1). De forma conjunta, as forças geradas pelas matrizes \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_2 podem ser representadas por uma força simples direcionada ao longo do elemento na configuração $t + \Delta t$, seja,

$${}^{t+\Delta t}F_{xl} = \sqrt{\left({}^tF_{xl} \frac{\Delta v}{{}^tL}\right)^2 + \left[{}^tF_{xl} \left(1 + \frac{\Delta u}{{}^tL}\right)\right]^2} = \frac{{}^tF_{xl}}{{}^tL} \sqrt{(\Delta v)^2 + ({}^tL + \Delta u)^2} = {}^tF_{xl} \frac{{}^{t+\Delta t}L}{{}^tL}. \quad (B.3)$$

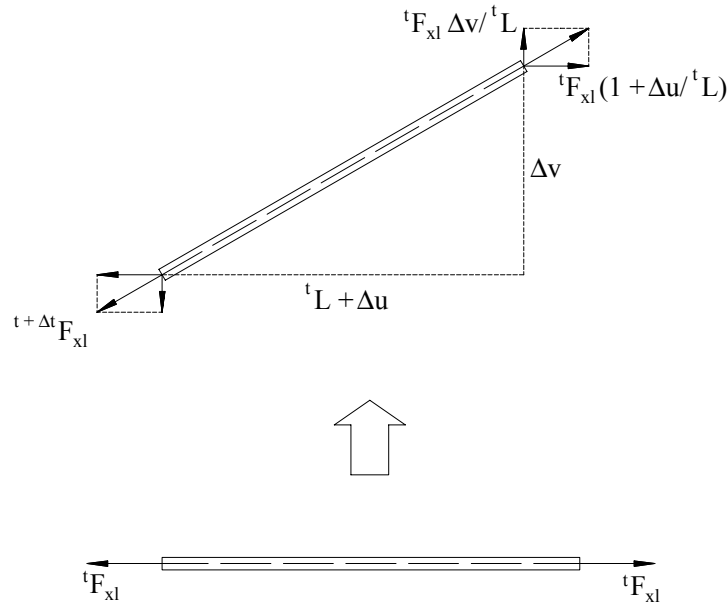


Figura B.1 – Alongamento de um elemento de treliça: forças devido a \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_2 .

A equação anterior pode ainda ser rescrita da seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}F_{xl} = {}^tF_{xl} \left(\frac{{}^{t+\Delta t}L + {}^tL - {}^tL}{{}^tL} \right) = {}^tF_{xl} (1 + {}^{t+\Delta t}e) = EA \frac{\Delta u}{{}^tL} (1 + {}^{t+\Delta t}e), \quad (B.4)$$

onde a deformação relativa ${}^{t+\Delta t}e$ vale

$${}^{t+\Delta t}e = \frac{{}^{t+\Delta t}L - {}^tL}{{}^tL}, \quad (B.5)$$

sendo ${}^{t+\Delta t}L$ o comprimento do elemento na nova configuração de equilíbrio $t + \Delta t$, ou seja,

$${}^{t+\Delta t}L = \sqrt{(\Delta v)^2 + ({}^tL + \Delta u)^2}. \quad (B.6)$$

Similarmente, as forças geradas pela matriz \mathbf{K}_3 têm o objetivo de transformar a força incremental F_{xn} gerada pela matriz \mathbf{K}_1 da configuração inicial t para a nova configuração $t + \Delta t$, o que pode ser visualizado pela figura (B.2). O resultado combinado também pode ser representado por uma força simples atuando ao longo do eixo do elemento na configuração $t + \Delta t$, como se demonstra a seguir:

$${}^{t+\Delta t}F_{xn} = \sqrt{\left({}^tF_{xn} \frac{\Delta v}{{}^tL}\right)^2 + \left[{}^tF_{xn} \left(1 + \frac{\Delta u}{{}^tL}\right)\right]^2} = \frac{{}^tF_{xn}}{{}^tL} \sqrt{(\Delta v)^2 + ({}^tL + \Delta u)^2} = {}^tF_{xn} \frac{{}^{t+\Delta t}L}{{}^tL}. \quad (B.7)$$

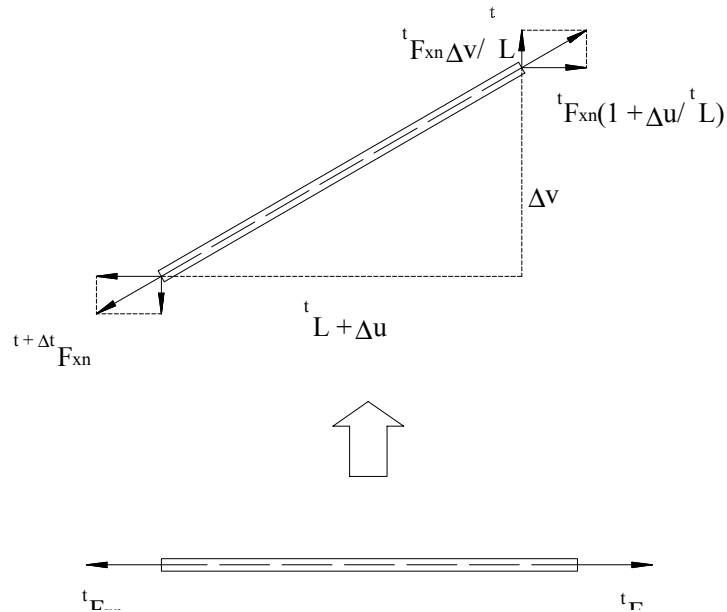


Figura B.2 – Alongamento de um elemento de treliça: forças devido a \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_3 .

A última equação pode ainda ser rescrita sob a forma

$${}^{t+\Delta t}F_{xn} = {}^tF_{xn} \left(\frac{{}^{t+\Delta t}L + {}^tL - {}^tL}{{}^tL} \right) = {}^tF_{xn} (1 + {}^{t+\Delta t}e) = \frac{1}{2} EA \left[\left(\frac{\Delta u}{{}^tL} \right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{{}^tL} \right)^2 \right] (1 + {}^{t+\Delta t}e), \quad (B.8)$$

onde o valor de ${}^{t+\Delta t}e$ foi definido na equação (B.5).

Finalmente, a matriz \mathbf{K}_g tem o objetivo de transformar as forças iniciais no vetor ${}^t\mathbf{F}$ da configuração inicial t para a nova configuração deformada $t + \Delta t$, assim como mostra a figura (B.3). A força resultante atuando ao longo do eixo do elemento nesta nova configuração vale

$${}^{t+\Delta t}F_{xb} = \sqrt{\left({}^tF_{xb} \frac{\Delta v}{{}^tL} \right)^2 + \left[{}^tF_{xb} \left(1 + \frac{\Delta u}{{}^tL} \right) \right]^2} = \frac{{}^tF_{xb}}{{}^tL} \sqrt{(\Delta v)^2 + ({}^tL + \Delta u)^2} = {}^tF_{xb} \frac{{}^{t+\Delta t}L}{{}^tL} \quad (B.9)$$

ou ainda,

$${}^{t+\Delta t}F_{xb} = {}^tF_{xb} (1 + {}^{t+\Delta t}e). \quad (B.10)$$

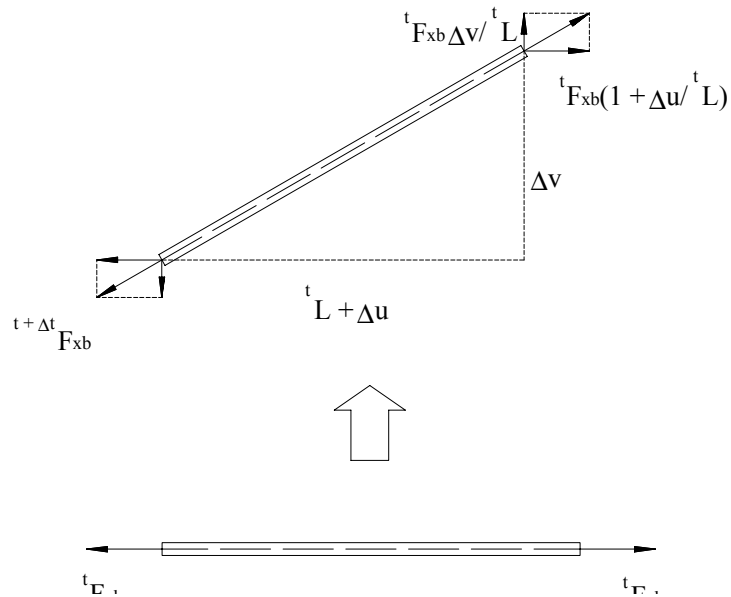


Figura B.3 – Alongamento de um elemento de treliça: forças devido a ${}^t\mathbf{F}$ e \mathbf{K}_g .

Somando-se as contribuições dos três efeitos anteriormente mencionados, obtém-se a força total atuando ao longo do eixo do elemento em $t + \Delta t$, isto é,

$${}^{t+\Delta t}F_x = {}^{t+\Delta t}F_{xl} + {}^{t+\Delta t}F_{xn} + {}^{t+\Delta t}F_{xb} = ({}^tF_{xl} + {}^tF_{xn} + {}^tF_{xb})(1 + {}^{t+\Delta t}e), \quad (B.11)$$

ou ainda,

$${}^{t+\Delta t}F_x = \left\{ EA \left[\frac{\Delta u}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} \right) \right] + {}^tF_{xb} \right\} (1 + {}^{t+\Delta t}e), \quad (B.12)$$

que é exatamente o valor obtido a partir da equação incremental de rigidez descrita em (3.73). A dedução acima demonstrou que os termos $\mathbf{K}_2\mathbf{d}$, $\mathbf{K}_3\mathbf{d}$ e $\mathbf{K}_g\mathbf{d}$ interagem com os termos $\mathbf{K}_e\mathbf{d}$, $\mathbf{K}_l\mathbf{d}$ e ${}^t\mathbf{F}$, respectivamente, na consideração do efeito de alongamento (ou encurtamento) de várias ordens para o elemento de treliça.

B.2 – Forças no elemento devido à rotação de corpo rígido

O efeito da rotação de corpo rígido também pode ser investigado utilizando-se as mesmas matrizes de rigidez do elemento apresentadas em (3.73). Por exemplo, considere o caso em que a barra é rotacionada sobre sua extremidade esquerda como um corpo rígido de $\pi/2$ radianos, no sentido anti-horário. Para esse caso, em especial, o vetor de deslocamentos \mathbf{d} do elemento valerá

$$\mathbf{d}_R^T = \{0 \quad 0 \quad -L \quad L\}^T. \quad (B.13)$$

Por definição, tem-se que $\Delta u = u_b - u_a = -L$ e $\Delta v = v_b - v_a = L$. Logo, de acordo com as equações (B.2a) e (B.2b), as componentes incrementais de força linear e não-linear reduzir-se-ão a $F_{xl} = -EA$ e $F_{xn} = EA$, respectivamente. Substituindo esses valores nas equações (B.1a) a (B.1e), as seguintes expressões serão obtidas:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{d} = \{EA \ 0 \ -EA \ 0\}^T, \quad (\text{B.14a})$$

$$\mathbf{K}_g \mathbf{d} = \{^tF_{xb} \ -^tF_{xb} \ -^tF_{xb} \ ^tF_{xb}\}^T, \quad (\text{B.14b})$$

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{d} = \{-EA \ 0 \ EA \ 0\}^T, \quad (\text{B.14c})$$

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{d} = \{-EA \ EA \ EA \ -EA\}^T, \quad (\text{B.14d})$$

$$\mathbf{K}_3 \mathbf{d} = \{EA \ -EA \ -EA \ EA\}^T. \quad (\text{B.14e})$$

Como pode ser visto nas equações anteriores, as forças geradas pelas matrizes \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_1 se contrabalançam entre si durante o movimento de corpo rígido \mathbf{d}_R . Similarmente, as forças geradas pela matriz \mathbf{K}_2 também se contrabalançam com aquelas geradas pela matriz \mathbf{K}_3 . Deve-se observar que tais relações permanecem válidas independentemente da magnitude do ângulo de rotação. Por outro lado, na adição das forças geradas pelo produto $\mathbf{K}_g \mathbf{d}$ às forças iniciais $^t\mathbf{F}$, observa-se que a força axial $^tF_{xb}$, que já estava atuando no elemento na configuração t , será rotacionada seguindo a rotação de corpo rígido. Um resultado geral dos três efeitos anteriormente mencionados é que as forças iniciais foram direcionadas ao longo do eixo rotacionado da barra, enquanto suas magnitudes permaneceram imutáveis, o que implica na preservação do equilíbrio do elemento após a rotação de corpo rígido.

De fato, se \mathbf{d}_R representa qualquer movimento de corpo rígido, é possível mostrar que o incremento de deformação ϵ_{xx} permanecerá igual a zero. Daí, ter-se-á $\epsilon_{xx} = 0$, ou ainda,

$$e_{xx} = -\eta_{xx}. \quad (\text{B.15})$$

Das equações (B.2a) e (B.2b), encontra-se que

$$F_{xl} = -F_{xn}, \text{ ou } F_{xl} + F_{xn} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Substituindo a expressão anterior na equação (B.11), obter-se-á

$${}^{t+\Delta t}F_x = {}^tF_{xb} \left(1 + {}^{t+\Delta t}e \right) = {}^tF_{xb} . \quad (B.17)$$

onde assume-se que ${}^{t+\Delta t}e$, descrito em (B.5), seja igual a zero para uma barra sujeita a rotações de corpo rígido. Portanto, para um elemento de treliça sujeito a qualquer rotação de corpo rígido, a força axial inicial ${}^tF_{xb}$ atuando no elemento sempre será direcionada ao longo do eixo rotacionado da barra sem mudança na magnitude da força atuante.

É importante enfatizar que a matriz \mathbf{K}_g possui um importante papel no comportamento de corpo rígido de elementos de treliça sob a ação de forças iniciais. Em qualquer caso, essa matriz, ou os efeitos que representa, sempre deverão ser incluídos nos procedimentos para cálculo das forças internas numa análise não-linear incremental-iterativa. Além disso, com o objetivo de não se introduzir quaisquer forças fictícias em movimentos de corpo rígido, ambas as matrizes \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_1 deverão aparecer juntas ou serem ambas omitidas no procedimento de cálculo. O mesmo é válido para as matrizes \mathbf{K}_2 e \mathbf{K}_3 .

| APÊNDICE C

C.1 – Exemplos de formulações utilizadas na modelagem de ligações

Nesta seção, serão apresentados outros modelos utilizados para representação da curva $M-\phi_c$ que com frequência são citados na literatura. Abordar-se-á algumas das características desses modelos, tais como forma típica, parâmetros necessários, vantagens e limitações. É importante ressaltar, assim como o fez Santos (1998), que a aplicação dos vários modelos na descrição do comportamento das ligações em estruturas brasileiras deve ser feita com cuidados, visto que muitos deles são estrangeiros e foram propostos a partir de ensaios em perfis norte-americanos e europeus, o que pode exigir algumas adaptações ou mesmo reformulações para se adequarem a situações diferentes daquelas a que foram propostos.

C.1.1 – Modelos multi-lineares

No modelo linear descrito no capítulo 4, a hipótese linear é conveniente para valores pequenos de carregamentos. No entanto, em análises de grandes deflexões, a degradação da rigidez das ligações deverá ser levada em consideração. O modelo bi-linear e o modelo multi-linear foram propostos por diversos autores ao longo das últimas décadas para aperfeiçoar a precisão da análise. Como mostrado na figura (C.1), tanto o modelo bi-linear quanto o multi-linear possuem uma aproximação melhor que o modelo linear. No entanto, os modelos multi-lineares possuem a deficiência de descontinuidade na mudança de declividade, algo indesejável em modelagem e análise numérica.

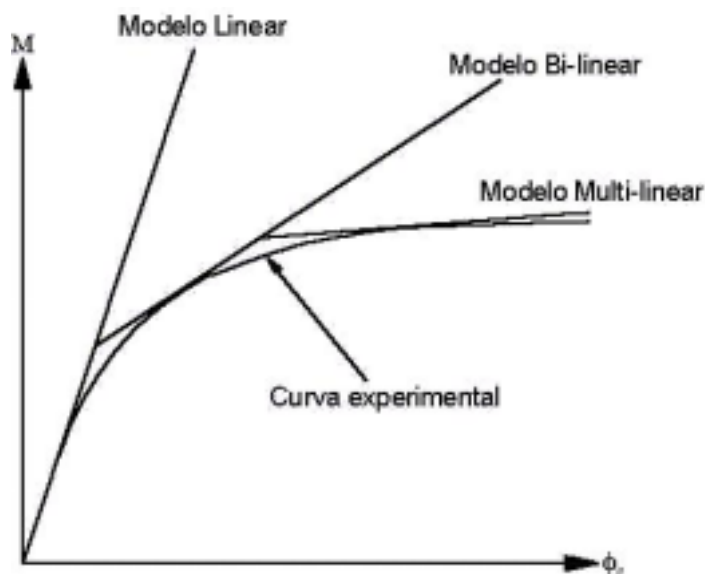


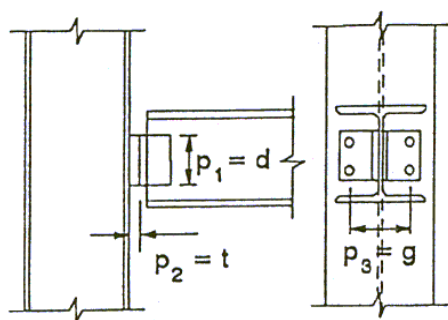
Figura C.1 – Modelos linearizados.

C.1.2 – Modelo polinomial

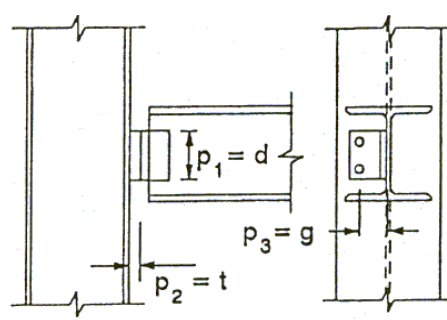
Para a obtenção de uma curva momento-rotação mais suave, Frye e Morris (1975) propuseram uma função polinomial de potências ímpares, que foi baseado em procedimento desenvolvido por Sommer (1969). Essa função possui a forma

$$\phi_c = C_1 (KM)^1 + C_2 (KM)^3 + C_3 (KM)^5, \quad (C.1a)$$

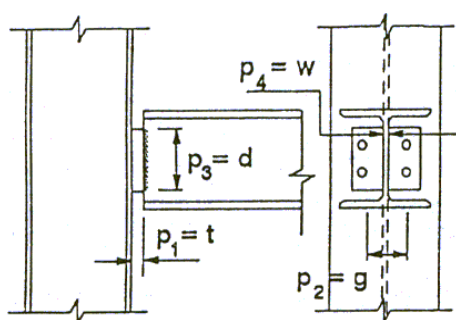
onde K é um parâmetro de padronização, função de parâmetros geométricos significantes tais como altura do elemento de ligação, espessura da placa, etc., enquanto C_1 , C_2 e C_3 são constantes de ajuste de curva. A tabela (C.1) traz as expressões para a obtenção do valor de K para alguns tipos de ligações, enquanto que os parâmetros geométricos necessários à obtenção do mesmo, para as respectivas conexões, encontram-se na figura (C.2). A declividade da curva, ou seja, a rigidez tangente S_c , é, portanto, dada por



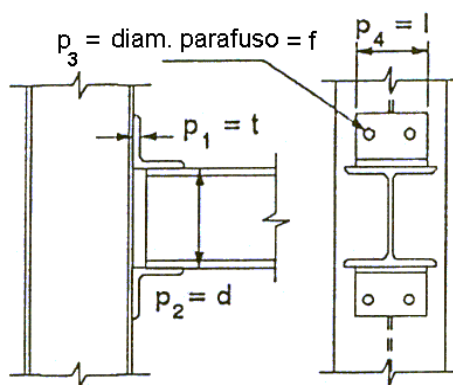
Cantoneira Dupla de Alma



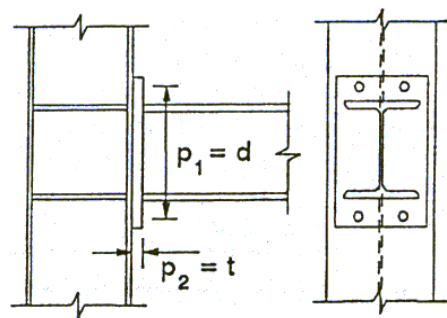
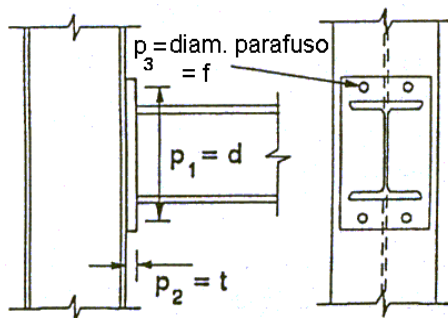
Cantoneira de Alma Simples



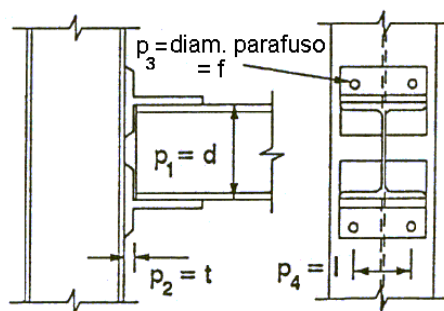
Chapa soldada à alma da viga



Cantoneira de topo e assento



Chapa de topo s/ enrijecedores de coluna Chapa de topo c/ enrijecedores de coluna



Ligação T-Stub

Figura C.2 – Tipos de conexões e seus respectivos parâmetros de padronização utilizados no modelo polinomial de Frye e Morris (Chan e Chui, 2000).

Tabela C.1 – Constantes de padronização e ajuste de curvas para o modelo polinomial de Frye e Morris (valores em polegadas) (Chan e Chui, 2000; Chen e Toma, 1994).

Tipo de conexão	Constantes de ajuste de curvas	Constantes de padronização	Testes
Cantoneira de alma simples	$C_1 = 4,28 \times 10^{-3}$ $C_2 = 1,45 \times 10^{-9}$ $C_3 = 1,51 \times 10^{-16}$	$K = d^{-2,4} t^{-1,81} g^{0,15}$	Lipson (1968)
Cantoneira dupla de alma	$C_1 = 3,66 \times 10^{-4}$ $C_2 = 1,15 \times 10^{-6}$ $C_3 = 4,57 \times 10^{-8}$	$K = d^{-2,4} t^{-1,81} g^{0,15}$	Munse et al. (1959) Sommer (1969)
Cantoneira de topo e assento	$C_1 = 2,23 \times 10^{-5}$ $C_2 = 1,85 \times 10^{-8}$ $C_3 = 3,19 \times 10^{-12}$	$K = d^{-1,5} t^{-0,5} l^{-0,7} f^{-1,1}$	Rathbun (1936) Hechtman e Johnston (1947) Brandes e Mains (1944)
Ligação de chapa de topo sem enrijecedores de coluna	$C_1 = 1,83 \times 10^{-3}$ $C_2 = -1,04 \times 10^{-4}$ $C_3 = 6,38 \times 10^{-6}$	$K = d^{-2,4} t^{-0,4} g^{-1,1}$	Sherbourne (1948) Ostrander (1970)
Ligação de chapa de topo com enrijecedores de coluna	$C_1 = 1,79 \times 10^{-3}$ $C_2 = -1,76 \times 10^{-4}$ $C_3 = 2,04 \times 10^{-4}$	$K = d^{-2,4} t^{-0,6}$	Sherbourne (1948) Johnson et al. (1960) Ostrander (1970)
Conexão T-stub	$C_1 = 2,10 \times 10^{-4}$ $C_2 = 6,20 \times 10^{-6}$ $C_3 = -7,60 \times 10^{-9}$	$K = d^{-1,5} t^{-0,5} f^{-1,1} l^{-0,7}$	Rathbun (1936) Douty (1964)
Ligação com chapa soldada à alma da viga	$C_1 = 5,10 \times 10^{-5}$ $C_2 = 6,20 \times 10^{-10}$ $C_3 = 2,40 \times 10^{-13}$	$K = t^{-1,6} g^{1,6} d^{-2,3} w^{0,5}$	Sommer (1969)

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} = \frac{1}{KC_1 + 3KC_2(KM)^2 + 5KC_3(KM)^4}, \quad (C.1b)$$

com a rigidez inicial sendo então igual a

$$S_c^o = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{M=0} = \frac{1}{KC_1}. \quad (C.1c)$$

O valor de K pode ser determinado por um estudo paramétrico e tem a forma geral

$$K = \prod_{j=1}^m p_j^{a_j}, \quad (C.1d)$$

onde p_j é o j-ésimo parâmetro geométrico da conexão, a_j é um expoente adimensional que indica a influência do j-ésimo parâmetro geométrico na rigidez da ligação e m é o número de parâmetros geométricos.

O método dos mínimos quadrados é utilizado para a determinação das constantes do modelo polinomial. Uma desvantagem fundamental desse modelo é que a rigidez da conexão (isto é, a primeira derivada da função, ou sua declividade) pode ter descontinuidades e ser negativa, ocorrência indesejável dos pontos de vista físico e numérico.

C.1.3 – Modelo B-spline cúbico

Jones et al. (1980) empregou a técnica de ajustamento de curvas B-spline (Cox, 1972) e propôs um modelo B-spline cúbico para representar a curva momento-rotação não-linear de elementos de ligação. A idéia básica do modelo B-spline cúbico é dividir a curva $M-\phi_c$ dos resultados experimentais em um certo número de segmentos. Os dados que se localizarem dentro de cada segmento são então ajustados por um polinômio cúbico. Para manter a suavidade da curva $M-\phi_c$, a continuidade da primeira e segunda derivadas de cada segmento é imposta. Se os dados experimentais são divididos em m intervalos, o modelo B-spline cúbico pode ser apresentado como sendo

$$\phi_c = \sum_{k=0}^3 a_k M^k + \sum_{k=1}^m b_k (M - M_k)^3, \quad (C.2a)$$

onde

$$(M - M_k) = \begin{cases} M - M_k & \text{para } (M - M_k) \geq 0, \\ 0 & \text{para } (M - M_k) < 0, \end{cases} \quad (\text{C.2b})$$

em que M_k é momento do limite inferior no k -ésimo intervalo da curva e a_k e b_k são os coeficientes obtidos pelo procedimento de ajustamento de curvas dos mínimos quadrados. A rigidez inicial da conexão é dada por

$$S_c^o = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{M=0} = \frac{1}{a_1}. \quad (\text{C.2c})$$

Embora estudos numéricos tenham mostrado que o modelo B-spline cúbico representa um excelente ajuste para dados experimentais (Chan e Chui, 2000), este método requer um grande número de dados amostrais no processo de ajustamento. É, portanto, raramente empregado na prática mas, em geral, é tomado como referência para outros modelos mais simples.

C.1.4 – Modelo de potências

Muitos modelos de potências têm sido desenvolvidos para diferentes tipos de ligações. Na maioria desses modelos, dois ou três parâmetros são necessários para representação da função M - ϕ_c .

Um modelo de potências de dois parâmetros (Batho e Lash, 1936; Krishnamurthy et al., 1979) tem a forma

$$\phi_c = a M^b, \quad (\text{C.3a})$$

onde a rigidez da conexão é dada por

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} = \frac{1}{abM^{b-1}}, \quad (\text{C.3b})$$

sendo a e b os parâmetros de ajuste de curva, com as condições $a > 0$ e $b > 1$.

Colson e Louveau (1983) introduziram um modelo de potências com três parâmetros (Richard, 1961; Goldberg e Richard, 1963) cuja função encontra-se representada em sua forma típica na figura (C.3) e possui a forma

$$\phi_c = \frac{|M|}{K_i} \frac{1}{1 - |M/M_u|^n}, \quad (C.4a)$$

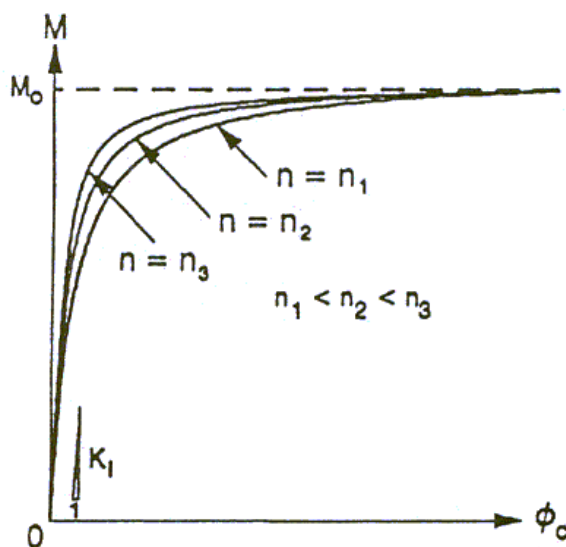


Figura C.3 – Forma típica do modelo de potências de Colson-Louveau.

com a rigidez tangente sendo dada por

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} = \frac{K_i [1 - (M/M_u)^n]^2}{1 + (n-1)(M/M_u)^n}, \quad (C.4b)$$

onde K_i é a rigidez inicial da ligação; n é o parâmetro de forma da curva M - ϕ_c e M_u é a capacidade última de momento da conexão.

Um modelo similar foi também adotado por Kishi e Chen (1987a, 1987b) como sendo

$$\phi_c = \frac{M}{K_i [1 - (M/M_u)^n]^{1/n}}, \quad (C.5a)$$

com a correlativa rigidez tangente valendo

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} = K_i \left[1 - \left(\frac{M}{M_u} \right)^n \right]^{(n+1)/n}, \quad (C.5b)$$

onde os parâmetros K_i , n e M_u são definidos de forma similar àqueles mostrados pela equação (C.4).

Além disso, King e Chen (1993) propuseram um modelo de potências de três parâmetros baseado na declividade da curva M - ϕ_c , ou seja, na rigidez da conexão, cuja expressão possui a forma

$$S_c = K_i \left[1 - \left(\frac{M}{M_u} \right)^n \right], \quad (C.6a)$$

onde a rigidez inicial vale

$$S_c^o = K_i, \quad (C.6b)$$

sendo os parâmetros K_i , n e M_u iguais àqueles definidos pela equação (C.4).

Há muitas vantagens no emprego desses modelos para descrever a não-linearidade das curvas M - ϕ_c de ligações. Primeiramente, os mesmos sempre podem garantir uma derivada primeira positiva (isto é, um valor de rigidez positivo), algo particularmente importante para prevenir a ocorrência de indesejáveis rigidezes negativas, fisicamente inaceitáveis. Além disto, esses modelos também proporcionam curvas suaves sem mudança abrupta da declividade ou pontos angulosos. Em segundo lugar, requerem um pequeno número de parâmetros nas expressões de tal modo que o procedimento para ajustamento da curva e o cálculo da rigidez serão mais simples e convenientes. E, por

último, esses modelos promovem, em geral, um bom ajuste para as curvas $M-\phi_c$ de dados experimentais (Chan e Chui, 2000).

C.1.5 – Modelo bounding-line

Este modelo, inicialmente proposto por Al-Bermani et al. (1994) e Zhu et al. (1995), requer quatro parâmetros para definição da relação $M-\phi_c$, cujo conceito baseia-se na divisão dessa curva em três segmentos. O primeiro e o terceiro segmentos são os intervalos lineares elástico e plástico do gráfico $M-\phi_c$, respectivamente. Entre esses dois segmentos, uma curva de transição suave é ajustada. Como a curva $M-\phi_c$ completa é obtida pela junção das três partes, o valor do momento não pode ser escrito como uma função simples da rotação da conexão. Portanto, o momento é obtido pelo acúmulo de momentos incrementais. A figura (C.4) exhibe a representação típica de uma curva aproximada pelo modelo bounding-line, cuja forma geral é dada por

$$M = \sum dM, \quad (C.7a)$$

sendo

$$dM = S_c d\phi_c. \quad (C.7b)$$

A rigidez tangente nos diferentes segmentos é dada por

$$\begin{aligned} S_c &= k_o && \text{quando } |M| < m_1, \\ S_c &= k_o + \frac{|M| - m_1}{M_C - M_Y} (k_p - k_o) && \text{quando } m_1 \leq |M| < m_2, \\ S_c &= k_p && \text{quando } |M| \geq m_2, \end{aligned} \quad (C.7c)$$

onde

$$\begin{aligned} m_1 &= M_Y + k_p \phi_c, \\ m_2 &= M_C + k_p \phi_c, \end{aligned} \quad (C.7d)$$

definindo-se k_o como a rigidez inicial, k_p como o limite inferior de rigidez e M_Y e M_C como os momentos de escoamento e de delimitação do início do segundo trecho linear, respectivamente.

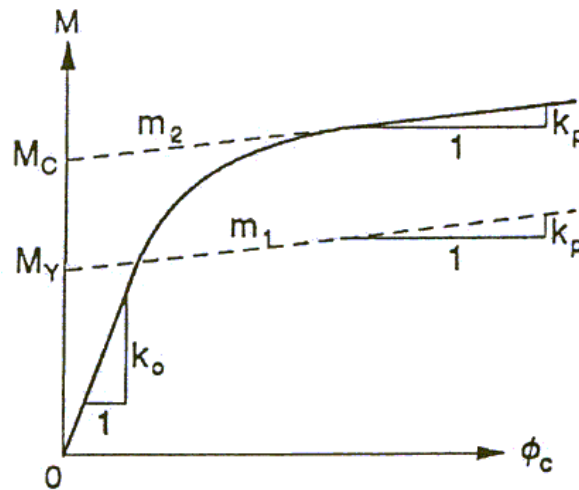


Figura C.4 – Forma típica do modelo Bounding-line.

Como o modelo Bounding-line não é representado por uma única função que possa descrever toda a trajetória $M-\phi_c$, o mesmo requer um procedimento adicional para verificar em que segmento se situa o valor do momento. No entanto, o modelo necessita de poucos parâmetros e sempre fornece uma rigidez positiva para a ligação.

C.1.6 – Modelo de Ramberg-Osgood

O modelo de Ramberg-Osgood foi originalmente proposto para relações tensão-deformação não-lineares por Ramberg e Osgood (1943) e então padronizado por Ang e Morris (1984). A curva momento-rotação do modelo é expressa por

$$\frac{\phi_c}{\phi_o} = \frac{|KM|}{(KM)_o} \left[1 + \left(\frac{|KM|}{(KM)_o} \right)^{n-1} \right], \quad (C.8a)$$

com a rigidez da conexão sendo dada por

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} = \frac{(KM)_o / \phi_o}{1 + n \left[\frac{|KM|}{(KM)_o} \right]^{n-1}}, \quad (C.8b)$$

onde $(KM)_o$ e ϕ_o são constantes definindo a posição do ponto A de interseção, o qual, de acordo com a figura (C.5), deverá estar contido em uma família de curvas Ramberg-Osgood; n é um parâmetro definindo a curvatura do gráfico e K é um fator adimensional dependente do tipo de conexão e de sua geometria e que a possui a forma

$$K = \prod_{j=1}^m q_j^{a_j}, \quad (C.8c)$$

sendo q_j o valor numérico do j -ésimo parâmetro, a_j um expoente adimensional que indica o efeito do j -ésimo parâmetro na curva de momento-rotação e, por fim, m é o número de parâmetros para um tipo particular de ligação. Para o cálculo da rigidez inicial da conexão deve-se fazer o valor do momento igual a zero na expressão (C.8b). Por conseguinte, obter-se-á

$$S_c^o = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{M=0} = \frac{(KM)_o}{\phi_o}. \quad (C.8d)$$

Utilizando-se de técnicas de ajustamento de curvas e resultados experimentais, Ang e Morris (1984) apresentaram, tal qual é mostrado na tabela (C.2), funções momento-rotação de Ramberg-Osgood padronizadas para cinco tipos de conexões. Este modelo requer apenas três parâmetros, pode representar bem uma curva $M-\phi_c$ suave e

não-linear e é largamente utilizado para a descrição do comportamento da rigidez de ligações semi-rígidas.

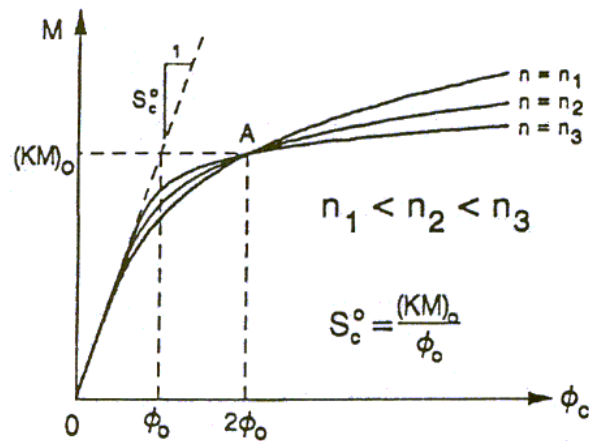


Figura C.5 – Forma típica do modelo de Ramberg-Osgood.

Tabela C.2 – Constantes de padronização e de ajuste de curvas utilizados no modelo de potências de Ang e Morris (Chen e Lui, 1991)

Tipo de conexão	Fator adimensional	Parâmetros de ajuste de curvas	Testes
Cantoneira de alma simples	$K = d^{-2,09} t^{-1,64} g^{2,06}$	$\phi_o = 1,03 \times 10^{-2}$ $(KM)_o = 32,75$ $n = 3,93$	Lipson (1968)
Cantoneira dupla de alma	$K = d^{-2,2} t^{0,08} g^{-0,28}$	$\phi_o = 3,98 \times 10^{-3}$ $(KM)_o = 0,63$ $n = 4,94$	Batho e Rowan (1934) Lewitt et al. (1966)
Chapa soldada à alma da viga	$K = d^{-2,41} t^{-1,54} g^{2,12} w^{-0,45}$	$\phi_o = 7,04 \times 10^{-3}$ $(KM)_o = 186,77$ $n = 4,32$	Sommer (1969)
Cantoneira de topo e assento	$K = d^{-1,06} t^{-0,54} l^{0,85} f^{-1,28}$	$\phi_o = 5,17 \times 10^{-3}$ $(KM)_o = 745,94$ $n = 5,61$	Hechtman e Johnston (1947)

APÊNDICE D

D.1 – Verificação da matriz de rigidez do elemento de pórtico semi-rígido em condições extremas

A matriz de rigidez do elemento híbrido de pórtico semi-rígido será verificada para condições extremas a partir da idealização da hipótese de que os valores de semi-rigidez são muito grandes (simulando uma ligação rígida). Analisar-se-á agora cada uma das duas formulações em separado para simular tal hipótese.

a) Matriz de rigidez híbrida baseada na formulação Torkamani et al. (1997)

Partindo-se inicialmente da equação (4.40) e das definições descritas em (4.33) e (4.34), pode-se obter os termos da matriz de rigidez de um elemento de viga-coluna para o caso de pórtico rígido fazendo-se o limite de S_{ci} e S_{cj} quando estes valores tendem ao infinito, ou seja,

$$K_{22}^e = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \frac{(K_{ii}^* + K_{ij}^* + K_{ji}^* + K_{jj}^*)}{L^2}, \quad (D.1a)$$

$$= \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \left[S_{ci} + S_{cj} + \frac{S_{cj} K_{ji} S_{ci} + S_{ci} K_{ij} S_{cj} - S_{ci}^2 (S_{cj} + K_{jj}) - S_{cj}^2 (S_{ci} + K_{ii})}{(S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji} K_{ij}} \right] \frac{1}{L^2}, \quad (D.1b)$$

$$= \frac{12EI}{L^3} + \frac{P}{5L}; \quad (D.1c)$$

$$K_{23}^e = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \frac{(K_{ii}^* + K_{jj}^*)}{L} = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \left[S_{ci} + S_{cj} - \frac{S_{ci}^2 (S_{cj} + K_{jj}) + S_{cj}^2 (S_{ci} + K_{ii})}{(S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji} K_{ij}} \right] \frac{1}{L}, \quad (D.2a)$$

$$= \frac{6EI}{L^2} + \frac{P}{10}; \quad (D.2b)$$

$$K_{33}^e = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} K_{ii}^* = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \left[S_{ci} - \frac{S_{ci}^2 (S_{cj} + K_{jj})}{(S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji} K_{ij}} \right] = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15}; \quad (D.3)$$

$$K_{36}^e = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} K_{ij}^* = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \left[\frac{S_{ci} K_{ij} S_{cj}}{(S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji} K_{ij}} \right] = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30}. \quad (D.4)$$

Observando-se as igualdades descritas nas equações (D.1) a (D.4) e separando-se os termos referentes à matriz de rigidez elástica da matriz de rigidez geométrica, obter-se-á a expressão

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma - \mathbf{K}_p, \quad (D.5)$$

cujos termos representam as matrizes de rigidez elástica, geométrica e do efeito P-Δ, respectivamente, que, por sua vez, apresentar-se-ão como sendo

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}, \quad (D.6)$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6P/5L & P/10 & 0 & -6P/5L & P/10 \\ 0 & P/10 & 2PL/15 & 0 & -P/10 & -PL/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6P/5L & -P/10 & 0 & 6P/5L & -P/10 \\ 0 & P/10 & -PL/30 & 0 & -P/10 & 2PL/15 \end{bmatrix}, \quad (D.7)$$

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P/L & 0 & 0 & -P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P/L & 0 & 0 & P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (D.8)$$

b) Matriz de rigidez híbrida baseada na formulação Yang e Kuo (1994)

Utilizando-se do mesmo procedimento realizado para a formulação Torkamani et al. (1997), para a obtenção das matrizes de rigidez propostas por Yang e Kuo (1994) deve-se partir inicialmente da equação (4.44) e das definições descritas em (4.33) e (4.42). Logo, pode-se obter os termos da matriz de rigidez de um elemento de viga-coluna para o caso de pórtico rígido fazendo-se o limite de S_{ci} e S_{cj} quando esses valores tendem ao infinito, ou seja,

$$K_{22}^e = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \frac{(K_{ii}^* + K_{ij}^* + K_{ji}^* + K_{jj}^*)}{L^2}, \quad (D.9a)$$

$$= \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \left[S_{ci} + S_{cj} + \frac{S_{cj} K_{ji} S_{ci} + S_{ci} K_{ij} S_{cj} - S_{ci}^2 (S_{cj} + K_{jj}) - S_{cj}^2 (S_{ci} + K_{ii})}{(S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji} K_{ij}} \right] \frac{1}{L^2}, \quad (D.9b)$$

$$= \frac{12EI}{L^3} + \frac{P}{5L} + \frac{12P}{L^3} \left(\frac{EI}{EA} \right); \quad (D.9c)$$

$$K_{23}^e = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \frac{(K_{ii}^* + K_{jj}^*)}{L} = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \left[S_{ci} + S_{cj} - \frac{S_{ci}^2 (S_{cj} + K_{jj}) + S_{cj}^2 (S_{ci} + K_{ii})}{(S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji} K_{ij}} \right] \frac{1}{L}, \quad (D.10a)$$

$$= \frac{6EI}{L^2} + \frac{P}{10} + \frac{6P}{L^2} \left(\frac{EI}{EA} \right); \quad (D.10b)$$

$$K_{33}^e = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} K_{ii}^* = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \left[S_{ci} - \frac{S_{ci}^2 (S_{cj} + K_{jj})}{(S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji} K_{ij}} \right], \quad (D.11a)$$

$$= \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} + \frac{4P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right); \quad (D.11b)$$

$$K_{36}^e = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} K_{ij}^* = \lim_{\substack{S_{ci} \rightarrow \infty \\ S_{cj} \rightarrow \infty}} \left[\frac{S_{ci} K_{ij} S_{cj}}{(S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji} K_{ij}} \right] = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} + \frac{2P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right). \quad (D.12)$$

Observando-se as igualdades descritas nas equações (D.9) a (D.12) e separando-se os termos referentes à matriz de rigidez elástica da matriz de rigidez geométrica, obter-se-á a expressão matricial

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma - \mathbf{K}_{re}, \quad (\text{D.13})$$

onde cada matriz possui a seguinte configuração:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ \text{Simétrica} & & & & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ & & & & & 4EI/L \end{bmatrix}, \quad (\text{D.14})$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} K_{\sigma(1,1)} & K_{\sigma(1,2)} & K_{\sigma(1,3)} & K_{\sigma(1,4)} & K_{\sigma(1,5)} & K_{\sigma(1,6)} \\ & K_{\sigma(2,2)} & K_{\sigma(2,3)} & K_{\sigma(2,4)} & K_{\sigma(2,5)} & K_{\sigma(2,6)} \\ & & K_{\sigma(3,3)} & K_{\sigma(3,4)} & K_{\sigma(3,5)} & K_{\sigma(3,6)} \\ & & & K_{\sigma(4,4)} & K_{\sigma(4,5)} & K_{\sigma(4,6)} \\ \text{Simétrica} & & & & K_{\sigma(5,5)} & K_{\sigma(5,6)} \\ & & & & & K_{\sigma(6,6)} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.15})$$

sendo

$$K_{\sigma(1,1)} = K_{\sigma(4,4)} = -K_{\sigma(1,4)} = \frac{P}{L}, \quad (\text{D.16a})$$

$$K_{\sigma(1,2)} = K_{\sigma(1,5)} = K_{\sigma(2,4)} = K_{\sigma(4,5)} = 0, \quad (\text{D.16b})$$

$$K_{\sigma(1,3)} = -K_{\sigma(3,4)} = -\frac{M_i}{L}, \quad (\text{D.16c})$$

$$K_{\sigma(1,6)} = -K_{\sigma(4,6)} = -\frac{M_j}{L}, \quad (\text{D.16d})$$

$$K_{\sigma(2,2)} = K_{\sigma(5,5)} = -K_{\sigma(2,5)} = \frac{6P}{5L} + \frac{12P}{L^3} \left(\frac{EI}{EA} \right), \quad (\text{D.16e})$$

$$K_{\sigma(2,3)} = K_{\sigma(2,6)} = -K_{\sigma(3,5)} = -K_{\sigma(5,6)} = \frac{P}{10} + \frac{6P}{L^2} \left(\frac{EI}{EA} \right), \quad (\text{D.16f})$$

$$K_{\sigma(3,3)} = K_{\sigma(6,6)} = \frac{2PL}{10} + \frac{4P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right), \quad (\text{D.16g})$$

$$K_{\sigma(3,6)} = -\frac{PL}{30} + \frac{2P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right) \quad (D.16h)$$

e, por fim,

$$K_{re} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 \\ \frac{M_i + M_j}{L^2} & P/L & 0 & -\frac{M_i + M_j}{L^2} & -P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 & 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 \\ -\frac{M_i + M_j}{L^2} & -P/L & 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (D.17)$$

cujo termo, assim como analisado por Galvão (2000), representa a matriz de rigidez externa e leva em consideração os efeitos de corpo rígido.