

**Universidade Federal de Ouro Preto**

Escola de Minas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PROPEC

---

Dissertação

---

**Influência do  
contraventamento na  
estabilidade e resistência de  
estruturas em aço**

*Iara Santana de Azevedo*

Ouro Preto  
2021



**UFOP**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

---



**Iara Santana de Azevedo**

**Influência do contraventamento na estabilidade e resistência  
de estruturas em aço**

Ouro Preto

2021

Iara Santana de Azevedo

Influência do contraventamento na estabilidade e resistência de estruturas em aço

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Data da aprovação: 19/11/2021

Área de concentração: Estruturas e Construção

Linha de Pesquisa: Mecânica Computacional e Comportamento e Dimensionamento de Estruturas

Orientador: Prof<sup>a</sup>. D.Sc. Andréa Regina Dias da Silva – UFOP

Co-orientador: Prof. D.Sc. Ricardo Azoubel da Mota Silveira – UFOP

Ouro Preto

2021

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

A994i Azevedo, Iara Santana de.  
Influência do contraventamento na estabilidade e resistência de estruturas em aço. [manuscrito] / Iara Santana de Azevedo. - 2021.  
77 f.: il.: , gráf., tab..

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva.  
Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira .  
Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Aço - Estruturas. 2. Estruturas reticuladas. 3. Estabilidade - Sistemas de contraventamento. 4. Análise numérica. 5. Método dos elementos finitos. I. Silva, Andréa Regina Dias da . II. Silveira , Ricardo Azoubel da Mota . III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 624.014.2

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Iara Santana de Azevedo**

### **Influência do contraventamento na estabilidade e resistência de estruturas em aço**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovada em 19 de novembro de 2021.

#### Membros da banca

D.Sc. Andréa Regina Dias da Silva - Orientadora (Universidade Federal de Ouro Preto)  
D.Sc. Ricardo Azoubel da Mota Silveira - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)  
D.Sc. Everton André Pimentel Batelo - (Universidade Federal do Mato Grosso)  
D.Sc. Francisco de Assis das Neves - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Andréa Regina Dias da Silva, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 01/12/2021.



Documento assinado eletronicamente por **Andrea Regina Dias da Silva, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 01/12/2021, às 08:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0248315** e o código CRC **CBED0889**.

*"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."*

*Albert Einstein*

*Dedico este trabalho aos meus familiares e orientadores.*

## **Agradecimentos**

À Deus e à Nossa Senhora, por iluminarem meus caminhos e guiarem meus passos.

Aos meus pais, Rose e Heliomar, pelo amor e pela enorme dedicação, incentivo e ensinamentos passados ao longo de toda minha vida.

Ao meu irmão Lucas, pela amizade, amor e incentivos.

À toda minha família, em especial, minhas avós, por serem exemplo de força e fé.

Ao Ronan por todo amor, paciência e apoio.

Aos meus orientadores, profa. Andréa Silva e prof. Ricardo Silveira, pela oportunidade, motivação, dedicação e amizade ao longo destes anos de trabalho. Muito obrigada pela confiança, paciência e orientação.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) pelos ensinamentos. À Sílvia pela atenção e trabalho na secretaria do PROPEC.

Aos pesquisadores William McGuire, Richard Gallagher e Ronald Ziemian por disponibilizarem o programa computacional e livro usado neste trabalho.

As minhas amigas da República Hipnose, que mesmo a distância se fizeram presentes.

Aos colegas, Rogério, Jackson e Matheus pela troca de conhecimentos.

À CAPES, FAPEMIG, CNPq, UFOP e Fundação Gorceix pelo auxílio financeiro.

## **Resumo**

O crescimento populacional em grandes centros urbanos, juntamente com a falta de espaço físico, tem levado à construção de edifícios cada vez mais altos e esbeltos. Estruturas com múltiplos pavimentos trazem grandes desafios à Engenharia Civil exigindo condições específicas de projeto, de construção e de uso. Mais diretamente relacionado à análise estrutural, o aumento do número de pavimentos acarreta em um acréscimo dos efeitos decorrentes das ações horizontais. Nessas estruturas, por estarem susceptíveis a grandes deslocabilidades devido a tais ações, adota-se comumente componentes estruturais de contraventamento, cuja principal função é fornecer estabilidade ao sistema. Além disso, com o uso de materiais mais resistentes e novas técnicas construtivas surge-se a necessidade de aperfeiçoamento das metodologias adotadas na análise estrutural, buscando oferecer aos profissionais da área condições para que realizem projetos mais seguros e econômicos com maior rapidez e eficiência. Nesse sentido, neste trabalho realizam-se análises numéricas de estruturas reticuladas planas em aço com o objetivo de avaliar sua estabilidade e resistência ao inserir sistemas de contraventamento. Durante o estudo, investiga-se a influência de alguns parâmetros dos sistemas de contraventamento tais como: o tipo de ligação com os outros membros da estrutura, as propriedades da seção transversal, a posição e a disposição das barras, além da sua eficácia quanto à variação na intensidade das cargas laterais. Análises estáticas serão realizadas via programa MASTAN2. Formulações não lineares de elementos finitos que consideram duas fontes de não linearidades, geométrica e física, são adotadas. Através dos estudos realizados, observou-se que os sistemas de contraventamento exerceram influência significativa em todas as estruturas analisadas, proporcionando um aumento na rigidez, e conseqüente, redução da deslocabilidade lateral. Outras conclusões e observações referentes ao comportamento estrutural de cada estrutura investigada e diretamente relacionadas às análises efetuadas serão estabelecidas.

Palavras-chaves: Estruturas reticuladas, sistemas de contraventamento, análise numérica, Método dos Elementos Finitos, não linearidade física, não linearidade geométrica, estabilidade.

## **Abstract**

The growing population in large urban centers, together with the lack of physical space, has led to the construction of taller and slender buildings. Structures with multiple floors bring great challenges to Civil Engineering, requiring specific conditions of design, construction and use. More directly related to structural analysis, the increase in the number of floors leads to an increase in the horizontal actions' effects. In these structures, as they are susceptible to large displacements due to such actions, a bracing scheme is commonly adopted, whose main function is to provide stability to the structural system. In addition, with the use of more resistant materials and new construction techniques, there is a need to improve the methodologies adopted in structural analysis, seeking to offer professionals in the field conditions to carry out safer and more economical projects with greater speed and efficiency. In this sense, this work presents the numerical analyzes of steel frames structures in order to evaluate their stability and strength when bracing systems are considered. During the study, the influence of some parameters of the reinforcement systems is investigated, such as: the type of connection with the other members of the structure, the properties of the cross section, the position and arrangement of the bars, in addition to their effectiveness in terms of variation in the intensity of lateral loads. Static analyses are performed via MASTAN2 software. Nonlinear finite element formulations that consider two nonlinearity sources, geometric and physical, are adopted. Through the studies carried out, it was observed that the bracing systems had a significant influence on all analyzed structures, providing an increase in stiffness and, consequently, a reduction in lateral dislocation. Other conclusions and observations regarding the structural behavior of each investigated structure and directly related to the performed analyzes are established as well.

**Keywords:** Reticulated structures, bracing systems, numerical analysis, Finite Element Method, physical nonlinearity, geometric nonlinearity, stability.

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Classificação dos pórticos.....	8
Figura 2.2 – Contraventamentos horizontais.....	9
Figura 2.3 – Contraventamentos verticais.....	9
Figura 2.4 – Sistemas de contraventamentos concêntricos.....	10
Figura 2.5 – Sistemas de contraventamentos excêntricos.....	11
Figura 2.6 – Sistemas de contraventamentos treliçados em grande escala.....	11
Figura 2.7 – Efeitos de segunda ordem: $P-\Delta$ (deslocamento lateral) e $P-\delta$ (curvatura)..	13
Figura 2.8 – Relação tensão x deformação do material.....	14
Figura 2.9 – Distribuição de deformações e tensões na seção transversal.....	15
Figura 2.10 – Funcionalidades do programa MASTAN2.....	17
Figura 3.1– Esquema de iterações.....	21
Figura 3.2 – Estratégia de iteração: Comprimento de arco.....	29
Figura 3.3 – Deformação do elemento finito.....	30
Figura 3.4 – Superfície de escoamento.....	33
Figura 4.1 – Pórtico de Lee.....	37
Figura 4.2 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de Lee.....	39
Figura 4.3 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de Lee com contraventamento.....	40
Figura 4.4 – Pórtico de Roorda.....	41
Figura 4.5 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de Roorda.....	43
Figura 4.6 – Trajetória de equilíbrio para diferentes posições do contraventamento.....	44
Figura 4.7 – Respostas considerando o contraventamento com diferentes propriedades geométricas.....	45
Figura 4.8 – Pórtico simples.....	46
Figura 4.9 – Trajetória de equilíbrio na análise inelástica.....	47
Figura 4.10 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com contraventamento diagonal.....	48

Figura 4.11- Pórtico de dois pavimentos.....	49
Figura 4.12 – Trajetórias de equilíbrio para pórtico de dois pavimentos.....	50
Figura 4.13 – Trajetórias de equilíbrio para pórtico com barras de contraventamento.....	51
Figura 4.14 – Pórtico de quatro pavimentos.....	52
Figura 4.15 – Resultado da análise inelástica do pórtico de quatro pavimentos.....	53
Figura 4.16 – Comparação entre os diferentes sistemas de contraventamento.....	54
Figura 4.17 – Configurações deformadas da estrutura.....	56
Figura 4.18 – Resultado da análise inelástica do pórtico com contraventamento V invertido.....	57
Figura 4.19 – Pórtico de 6 pavimentos, geometria e carregamento..	58
Figura 4.20 – Trajetória de equilíbrio para o pórtico seis pavimentos.....	59
Figura 4.21 – Características dos contraventamentos no pórtico de seis pavimentos.....	60
Figura 4.22 – Análise inelástica para o pórtico de seis pavimentos contraventado. ....	61
Figura 4.23 – Pórtico de sete pavimentos.....	62
Figura 4.24 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com sete pavimentos. ....	63
Figura 4.25 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com contraventamentos.....	64
Figura 4.26 – Configuração deformada para o pórtico de sete pavimentos. ....	66

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Estratégia numérica para análise estática não linear .....	24
Tabela 4.1 – Propriedades dos perfis usados no contraventamento. ....	50
Tabela 4.2 – Carga limite no pórtico com diferentes perfis nas barras de contraventamento.. .....	51
Tabela 4.3 – Fator de carga limite e número de rótulas plásticas para $\alpha= 0.5$ . ....	55
Tabela 4.4 – Propriedades geométricas dos perfis. ....	58
Tabela 4.5 – Propriedades geométricas dos perfis das vigas e colunas. ....	62
Tabela 4.6 – Fator de carga limite encontrado na análise elástica. ....	65
Tabela 4.7 – Fator de carga limite encontrado na análise inelástica. ....	65
Tabela 4.8 – Deslocamento lateral encontrado na análise elástica, para $\lambda=5$ .. ....	65
Tabela 4.9 – F Deslocamento lateral encontrado na análise inelástica, para $\lambda=1$ .....	66

## Sumário

Lista de Figuras .....	viii
Lista de Tabelas.....	x
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica .....	2
1.3 Organização do Trabalho.....	6
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	7
2.1 Sistemas de Contraventamentos .....	7
2.2 Efeitos Não Lineares em uma Análise Estrutural.....	12
2.3 Sistema Computacional MASTAN2 .....	16
3 METODOLOGIA PARA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR .....	18
3.1 Solução do Problema Estático Não Linear .....	18
3.1.1 Solução incremental predita.....	20
3.1.2 Ciclo de iterações .....	21
3.2 Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração.....	25
3.2.1 Estratégia de incremento de carga .....	25
3.2.2 Estratégias de iteração .....	27
3.3 Formulação de Elementos Finitos .....	29
3.3.1 Módulo de elasticidade tangente.....	34
4 MODELAGENS COMPUTACIONAIS .....	36
4.1 Pórtico de Lee.....	37
4.2 Pórtico de Roorda.....	40

4.3	Pórtico Simples.....	45
4.4	Pórtico de Dois Pavimentos.....	48
4.5	Pórtico de Quatro Pavimentos .....	52
4.6	Pórtico de Seis Pavimentos .....	57
4.7	Pórtico de Sete Pavimentos .....	61
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	67
5.1	Conclusões.....	67
5.2	Sugestões para Futuras Pesquisas.....	69
	REFERÊNCIAS .....	70

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Iniciais e Objetivos

As estruturas em aço estão sendo cada vez mais utilizadas na construção civil e isso se dá pelo fato de serem mais leves, permitirem alcançar grandes vãos, facilitarem a execução e a organização da obra, além da produtividade elevada quando comparadas com as estruturas em concreto armado. Elementos estruturais em aço possuem alta ductilidade, que se refere à capacidade de sofrerem grandes deformações antes do rompimento. Além disso, para sistemas estaticamente indeterminados, a redistribuição de esforços quando se atinge a resistência limite de alguns membros estruturais acontece. A ductilidade do aço também favorece a absorção de energia, que é extremamente importante em estruturas submetidas a excitações de natureza sísmica (LUI, 1999).

Para que o dimensionamento seja eficiente, econômico e seguro é necessário que a análise retrate o comportamento da estrutura mais próximo do real. Dessa maneira, engenheiros vêm buscando aperfeiçoar seus projetos estruturais, com a consideração de efeitos não lineares nas análises. Tais efeitos são associados à deformação da estrutura e à relação constitutiva não linear do material utilizado nos membros estruturais.

Edifícios de múltiplos andares são compostos pela junção de elementos estruturais como pilares, vigas, lajes e, também, sistemas de contraventamento. A escolha do arranjo ideal dos elementos deve estar relacionada a sua capacidade de resistir aos esforços horizontais e verticais, tais como forças gravitacionais, laterais e cargas de uso e de ocupação (CHAVES, 2009).

Os contraventamentos são subestruturas constituídas por barras adicionadas à estrutura com o objetivo de impedir ou reduzir os deslocamentos laterais e/ou vibrações, sendo a sua principal função fornecer estabilidade à estrutura que sofre ação do vento ou outras ações laterais. Assim, essas subestruturas contribuem para aumentar a rigidez estrutural.

Nos edifícios projetados em aço considerados de grande porte, ou seja, com diversos andares, os contraventamentos devem ser considerados primordialmente no projeto devido à carga de vento, que pode ser muito expressiva ao longo da vida útil da estrutura. Já nos edifícios de pequeno porte, o contraventamento deve ser avaliado se estiverem submetidos a

cargas laterais ou se possuírem uma grande esbeltez (MATOS, 2014; PEREIRA, RIBEIRO E BARBOSA, 2020).

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é realizar análises numéricas de estruturas planas reticuladas avaliando a influência de diferentes sistemas de contraventamento na estabilidade global do sistema. No estudo, sistemas estruturais em aço com diferentes números de pavimentos, além de pórticos bastante esbeltos e conhecidos na literatura, serão usados para investigar os efeitos advindos da adoção de sistemas de contraventamentos. Será verificada a influência de alguns parâmetros desses sistemas na resposta estrutural, tais como: o tipo de ligação com os outros membros da estrutura, as propriedades da seção transversal, a posição e a disposição das barras, além da sua eficácia quanto há variação na intensidade das cargas laterais.

A base computacional MASTAN2 (MCGUIRE, GALLAGHER E ZIEMIAN, 2014) será usada para efetuar as análises elásticas e inelásticas. Esse programa se baseia no Método dos Elementos Finitos para a discretização do problema. Duas fontes de não linearidade serão consideradas na formulação de elementos finitos adotada, a não linearidade geométrica e a não linearidade física. Para solução do problema não linear adota-se o método de Newton-Raphson acoplado a técnicas de continuação.

Por fim, destaca-se que esta dissertação vai ao encontro dos objetivos do PROPEC/Deciv/EM/UFOP e está relacionada com as seguintes linhas de pesquisa:

1. *Mecânica Computacional*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
2. *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas*: que visa o estudo isolado ou em conjunto do comportamento (resistência e estabilidade) das diversas partes de uma estrutura.

## **1.2 Revisão Bibliográfica**

Pesquisas envolvendo os assuntos diretamente relacionados ao tema proposto podem ser encontrados na literatura, e alguns deles serão discutidos aqui. Muitos estudos que se referem à análise inelástica se baseiam ou no método da zona plástica (MZP) ou no método da rótula plástica (MRP). Nguyen e Kim (2016), Chiorean (2017), Silva *et al.* (2018) e Viana *et al.* (2020) apresentaram um método computacional baseado no modelo de plasticidade

distribuída (MZP), onde o comportamento elastoplástico do material é modelado levando em consideração a propagação do efeito da plasticidade nas seções e ao longo do elemento. Para a solução do problema não linear, Nguyen e Kim (2016) e Viana *et al.* (2020) utilizaram um algoritmo iterativo de Newton Raphson.

Por outro lado, o método da rótula plástica supõe que os efeitos da plasticidade são concentrados em alguns pontos do sistema estrutural (ou pontos nodais dos elementos finitos), podendo ser classificado em método da rótula elastoplástica e método da rótula plástica refinado (SILVA, 2009). Thai *et al.* (2016) apresentaram um procedimento numérico para avaliar a confiabilidade de pórticos de aço com ligações semirrígidas. Os autores utilizaram o método a rótula de plástica refinado (MRPR) e um modelo de potência de três parâmetros para simular o comportamento da ligação semirrígida para prever com eficácia a capacidade máxima de carga das estruturas. Lemes *et al.* (2017) apresentaram uma metodologia baseada no método da compatibilidade de deformações para avaliar a capacidade de carga axial e a rigidez à flexão de estruturas de aço, concreto e mistas aço-concreto. Essa metodologia foi implementada no programa computacional CS-ASA (SILVA, 2009) acoplada com o método da rótula plástica refinado para simular a plasticidade concentrada nas extremidades dos elementos finitos. De maneira similar, Barros *et al.* (2018) também utilizaram uma formulação com base no método da compatibilidade de deformações e do MRPR para realizar uma análise termomecânica completa de pórticos em aço.

Com o surgimento de edificações cada vez mais altas e mais susceptíveis às cargas e deformações laterais, os sistemas de contraventamento se tornaram uma alternativa interessante para projetistas, e dessa forma, vários estudos relacionados ao assunto foram também desenvolvidos.

Sarno e Elnashaib (2009) citaram que os sistemas mais frequentemente usados são os pórticos apoiados concêntrica — com barras dispostas em V, V invertido, K, X e diagonais —, apoiados excentricamente e as mãos francesas.

Rai e Goel (2003) estudaram o desempenho de contraventamentos concêntricos, do tipo V invertido, submetidos a cargas sísmicas. Mostrou-se que os contraventamentos não dúcteis podem ser mais eficazes para o caso de barras com seção tubulares se forem preenchidos por concreto. Dessa maneira é possível retardar a fratura das travas de reforço. Outra solução para evitar a instabilidade e formação de rótulas plásticas na estrutura analisada foi mudar a

disposição das travas, posicionando-as em X. No entanto, as armações em V invertido são sistemas de resistência laterais muito populares, muitas vezes optados para os edifícios de aço devido à sua funcionalidade arquitetônica aprimorada e ao custo reduzido de fabricação e montagem. (COSTANZO, D'ANIELLO E LANDOLFO, 2018).

Lan, Ma e Li, (2015) realizaram análises teóricas e experimentais em paredes estruturais mistas de aço e concreto com barras em diagonal. Ao adicionar duas barras na diagonal, em X, a estrutura foi capaz de suportar uma maior força de cisalhamento. Além disso, apresentou menor degradação da rigidez e uma maior dissipação de energia.

Archana e Kumar (2016) estudaram o comportamento de torres de transmissão. Essas estruturas devem resistir a todas as forças da natureza, principalmente ao vento. O principal objetivo do projeto foi determinar o contraventamento mais econômico e eficiente. Foi analisado contraventamento em X, K e W, e concluiu-se que a torre com suporte em W apresentou um melhor custo benefício. Comparou-se também a seção transversal dos elementos da torre, analisando uma seção angular, tubular e em U. Ao adotar a seção angular, a estrutura apresentou menor deslocamento lateral, por ficar mais rígida. Assim, foi considerada a seção mais econômica e eficaz em comparação com as demais.

Elias (2018) realizou análises teóricas e experimentais de painéis contraventados de sistemas de armazenagem. Foi avaliada a influência dos contraventamentos nos painéis quando comparados às colunas isoladas. Percebeu-se que o comprimento total da coluna e o comprimento destravado dado pela posição dos contraventamentos são fatores que influenciam diretamente nos modos de flambagem.

Qian, Weng e Li (2019) e Lee *et al.* (2020) investigaram a capacidade de carga de estruturas, comparando casos com e sem contraventamentos através de ensaios experimentais. Observaram que esses membros adicionais são essenciais para aumentar a capacidade de carga da estrutura. Notou-se a influência das condições de contorno, que interferiram no equilíbrio da estrutura, indicaram que a carga suportada pelo sistema foi significativamente mais afetada pela resistência à flambagem do que pela resistência ao escoamento dos membros verticais (LEE *et al.*, 2020).

Kanishkavya e Velumani (2019) analisaram pórticos sujeitos a cargas laterais e sísmicas, e entre os casos analisados as travas dispostas em forma de X e em diagonal foram as que contribuíram mais e menos, respectivamente, para a rigidez estrutural. O sistema Chevron (V

invertido) foi o que apresentou maior dissipação e absorção de energia, o que indica a alta ductilidade desse sistema que se opõe à rigidez dos outros.

Maheri e Akbari (2003), Shokouhian, Sadeghi e Ozbakkaloglu (2012), Joseph e James (2017) e Fahiminia e Zahrai (2020) realizaram pesquisas sobre as mãos francesas. Observaram que esse sistema tem uma boa eficácia em estruturas submetidas a cargas de vento e terremotos. Os três primeiros trabalhos citados acima estudaram esse sistema combinado com barra na diagonal, uma ou duas (dispostas em X). A localização e, conseqüentemente, o comprimento das mãos francesas desempenham um papel importante na dissipação de energia. Se o membro de contraventamento for curto, cederá por cisalhamento. Por outro lado, se for mais longo, cederá por flexão (SHOKOUHIAN, SADEGHI E OZBAKKALOGLU, 2012). Esse tipo de sistema pode ser uma alternativa para aplicar ‘retrofit’ em estruturas de concreto armado. Retrofit é a reparação da estrutura após a falha de algum membro. Assim, quando a edificação é submetida a uma carga sísmica possivelmente o contraventamento entrará em colapso, mas ajudará os outros membros se manterem estáveis. Além disso, essas barras são relativamente econômicas, não adicionam peso estrutural significativa e fácil substituição.

Mais recentemente, Barbagallo *et al.* (2021) propuseram um novo método de dimensionamento com objetivo de melhorar a ductilidade global do sistema. Os aspectos inovadores estão relacionados principalmente à estimativa dos momentos fletores em pilares e à formulação de rigidez das vigas e pilares contraventados. Esse método pode ser aplicado para pórticos com contraventamentos concêntricos submetidos a cargas sísmicas. A flambagem de colunas e o escoamento de vigas reforçadas são evitados quando trabalham no estado limite de dano significativo e no estado limite de quase colapso. Na última configuração citada, o método possui algumas limitações para aplicação. O estado limite de dano significativo é aquele alcançado para PGAs (*peak ground acceleration* – picos de aceleração do solo) maiores do que o valor do projeto, correspondendo a uma probabilidade de se exceder de 10% em 50 anos. Já o estado limite de quase colapso é alcançado para PGAs que estão na faixa daquele correspondente a uma probabilidade de se exceder de 2% a 5% em 50 anos.

### **1.3 Organização do Trabalho**

Este trabalho é constituído por cinco capítulos. Inicialmente, neste primeiro capítulo, uma introdução foi apresentada juntamente com os objetivos a serem alcançados pela pesquisa. Uma breve revisão bibliográfica sobre os temas diretamente relacionados ao deste trabalho também foi feita.

No Capítulo 2, os fundamentos teóricos são discutidos. É feita a descrição das propriedades dos sistemas de contraventamentos, dos efeitos não lineares que afetam diretamente o comportamento estrutural, e do programa computacional utilizado para efetuar as análises numéricas.

Já o Capítulo 3 expõe a metodologia utilizada para a análise estática não linear das estruturas modeladas nesta dissertação, descrevendo as estratégias de incremento e interação e, também, apresentando a formulação de elementos finitos adotada.

O Capítulo 4 traz as análises numéricas, elástica e inelástica, realizadas com diferentes sistemas estruturais para verificar a influência dos sistemas de contraventamento.

Finalizando, no Capítulo 5, têm-se algumas considerações e conclusões gerais referentes ao trabalho realizado. Sugestões para pesquisas futuras relacionadas ao tema são apresentadas.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, atenção será dada a uma breve discussão de assuntos relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. Inicia-se o capítulo destacando os sistemas de contraventamento. A definição, juntamente com a classificação dos diferentes tipos utilizados na prática, além de uma breve revisão bibliográfica de trabalhos envolvendo os sistemas usados neste trabalho serão apresentadas.

Logo depois, as causas das não linearidades que alteram o processo de análise estrutural são apresentadas e, posteriormente, os métodos utilizados para introduzi-las nas análises são descritos.

Por fim, atenção será dada ao programa computacional adotado neste trabalho para realizar as análises numéricas elásticas e inelásticas de segunda ordem. As funcionalidades de tal programa são descritas.

### 2.1 Sistemas de Contraventamentos

A norma brasileira, NBR 8800:2008, define os contraventamentos como subestruturas, que devido à sua grande rigidez resistem à maior parte das ações horizontais. Essas subestruturas podem ser pórticos em forma de treliça, paredes de cisalhamento, incluindo aquelas que delimitam os núcleos de serviço do edifício, e pórticos nos quais a estabilidade é assegurada pela rigidez à flexão das barras e pela capacidade de transmissão de momentos nas suas ligações.

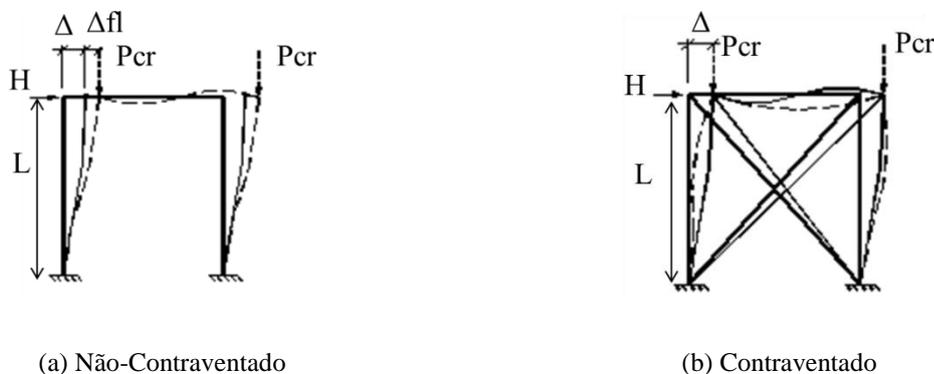
Barros (2010) classifica um pórtico não-contraventado (Figura 2.1a), ou pórtico deslocável, como sendo aquele no qual a sua estabilidade lateral depende da rigidez à flexão de vigas e pilares rigidamente ligados entre si. Quando o carregamento vertical atuante atinge o valor crítico, ocorre o deslocamento lateral devido à instabilidade, denotado por  $\Delta_{fl}$  na figura. O deslocamento lateral considerado estável devido ao carregamento horizontal,  $\Delta$ , é, relativamente grande. Sendo assim, surge um momento de segunda ordem P- $\Delta$  que deverá ser suportado pela estrutura.

Um pórtico contraventado no qual a estabilidade lateral é garantida por sistemas adequados de contraventamentos diagonais é apresentado na Figura 2.1b. Quando os contraventamentos possuem rigidez suficiente para resistir aos carregamentos laterais

atuantes, o comportamento do sistema é próximo ao de um pórtico indeslocável. O deslocamento lateral devido à instabilidade,  $\Delta_{fl}$ , presente na Figura 2.1a é impedido. Nesse caso, os valores dos deslocamentos laterais estáveis oriundos do carregamento lateral atuante, indicado por  $\Delta$  na mesma figura, são pequenos, de tal forma que os momentos de 2ª ordem provenientes do efeito P- $\Delta$  possam ser desprezados (BARROS, 2010).

De uma forma geral, os sistemas de contraventamento são utilizados, principalmente, para fornecer estabilidade às estruturas perante a ação do vento, e podem ser classificados como vertical ou horizontal. O contraventamento horizontal, apesar de ser assim denominado, na maioria das vezes não está contido nesse plano. Normalmente, são encontrados como treliças nos planos superiores de coberturas, como mostrado na Figura 2.2. Já os contraventamentos verticais, exibidos na Figura 2.3, são aqueles utilizados para travar vigas e pilares. Importante destacar que, no estudo desenvolvido neste trabalho, serão considerados apenas os contraventamentos verticais.

**Figura 2.1 Classificação dos pórticos.**



**Fonte: Barros, 2010.**

Segundo Smith e Coull (1991), os sistemas de contraventamentos verticais mais eficientes são aqueles cujas barras formam treliças com triângulos ‘totais’ envolvendo toda a estrutura. Os autores os definem como concêntricos. Alguns tipos utilizados na prática estão ilustrados na Figura 2.4. Tem-se barras dispostas em diagonal (Figuras 2.4a, barras dispostas todas na mesma direção, e 2.4b, barras dispostas em direções alternadas), X (Figura 2. 4c), V (Figura 2.4d) e V invertido (Figura 2.4e).

**Figura 2.2** Contraventamentos horizontais.



(a) Contraventamento horizontal em poliesportivo.



(b) Detalhe de contraventamento horizontal

**Fonte: CBCA.**

**Figura 2.3** Contraventamentos verticais.



(a) Contraventamento vertical em X.

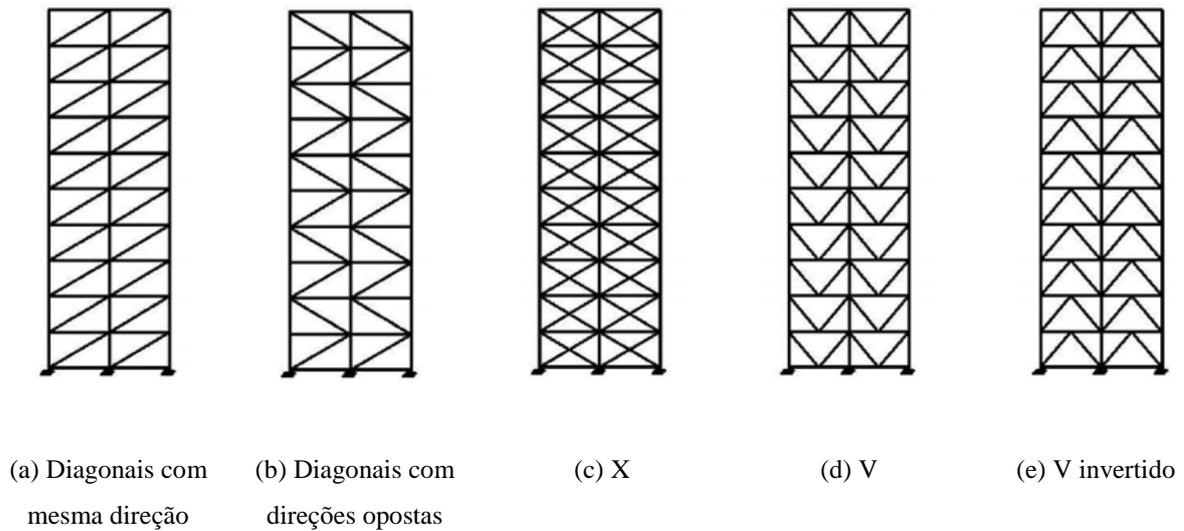


(b) Contraventamento vertical em V invertido

**Fonte: CBCA.**

Franca (2003) observou que uma vantagem na utilização dos tipos de painéis descritos anteriormente é o momento fletor e o esforço cortante nas vigas e lajes não serem influenciados significativamente pela solicitação lateral atuante na estrutura. No entanto, dependendo da arquitetura da edificação, esses sistemas não podem ser usados, pois obstruem vãos. Nesse caso, os autores recomendam o seu uso em locais onde não há necessidade de aberturas, como paredes laterais de elevadores e escadas.

**Figura 2.4** Sistemas de contraventamentos concêntricos.

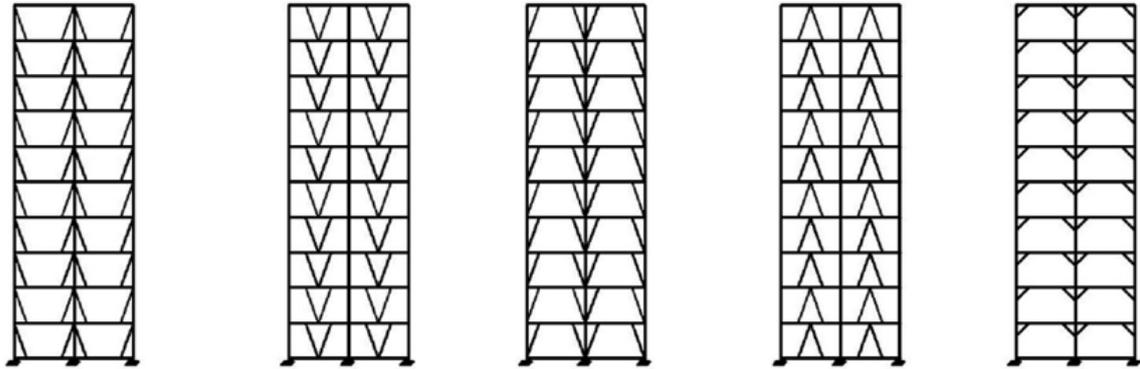


**Fonte: Chaves, 2009.**

Uma solução para diminuir a obstrução de vãos é adotar o uso de contraventamentos excêntricos como mostra a Figura 2.5 a seguir. Trata-se de disposições que não formam triângulos completos com todas as barras da estrutura. As ligações das barras diagonais são, propositalmente, afastadas das ligações entre vigas e colunas. Isso gera, normalmente, contraventamentos menos rígidos e, portanto, menos eficientes que os demais (CHAVES, 2009). De acordo com Franca (2003), tais formas de contraventamento, podem ser usadas para se obter estruturas dúcteis, que são mais interessantes em regiões sujeitas a abalos sísmicos. Ainda nessa ilustração, mais especificamente na Figura 2.5e, é apresentado um sistema excêntrico muito usual, conhecido como mãos francesas. Observe que as barras adicionadas estão situadas no canto das vigas e das colunas dos pórticos.

Existe também a possibilidade de dispor as barras de contraventamentos englobando dois ou mais andares ou vãos da edificação, como mostrado na Figura 2.6. Esse tipo de sistema é considerado contraventamento em larga escala. Quando se utiliza essa configuração obtém-se um efeito mais homogêneo dos esforços horizontais e gravitacionais atuantes na estrutura, sendo seu uso eficiente em edifícios de altura elevada (CHAVES, 2009).

**Figura 2.5 Sistemas de contraventamentos excêntricos.**



(a) Diagonal viga-  
coluna excêntrica

(b) V excêntrico

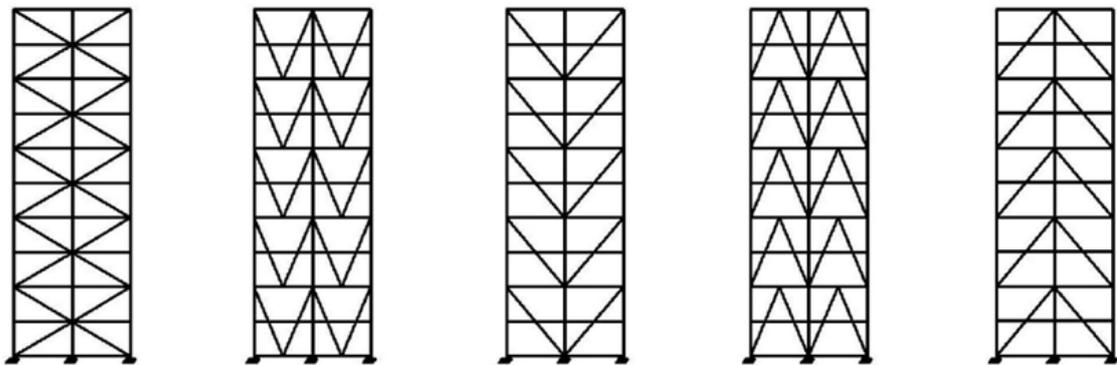
(c) Diagonal  
coluna-viga  
excêntrica

(d) V invertido  
excêntrico

(e) Mãos francesas

**Fonte: Chaves, 2009.**

**Figura 2.6 Sistemas de contraventamentos treliçados em grande escala.**



(a) X englobando  
dois vãos e dois  
andares

(b) V englobando  
dois andares

(c) V englobando  
dois vãos e dois  
andares

(d) V invertido  
englobando dois  
andares

(e) V invertido  
englobando dois  
vãos e dois andares

**Fonte: Chaves, 2009.**

Nesta pesquisa, optou-se por investigar o comportamento de pórticos com contraventamentos dispostos em diagonais, em X, V invertido e mãos francesas. Sendo assim,

estudos envolvendo tais sistemas de contraventamento encontrados na literatura foram usados nesta dissertação, e uma breve descrição de dois deles será feita a seguir.

Joseph e James (2017) realizaram uma pesquisa em um edifício de múltiplos andares para investigar a influência dos contraventamentos. Foram inseridos dois tipos distintos simultaneamente. Instalaram mãos francesas no canto das vigas e das colunas e também barras dispostas em X. As barras em diagonal foram ligadas no meio das barras das mãos francesas. Esse sistema demonstrou um bom desempenho quando submetido a cargas sísmicas e de vento, pois conseguiu combinar a rigidez dos contraventamentos em diagonal com o comportamento dúctil das mãos francesas.

Anunciação *et al.* (2021) estudaram os efeitos de alguns desses contraventamentos em galpões. As análises realizadas foram bidimensionais considerando a estrutura sem e com três diferentes tipos de contraventamentos: barras em diagonal simples – barras instaladas em todos os andares na mesma direção -, diagonal dupla no qual as barras são dispostas em direções alternadas e V invertido. Ficou evidente a importância desses sistemas em estruturas metálicas submetidas à ação do vento, diminuindo drasticamente o deslocamento lateral dos pórticos. Na maioria das situações, as barras dispostas em diagonais simples e duplas forneceram comportamentos semelhantes. Isso mostra que o arranjo de barras alternadas não trouxe melhoria significativa quanto à estabilidade da estrutura. O melhor desempenho foi verificado com barras dispostas em V invertido, pois apresentou um menor deslocamento em quase todas as comparações feitas durante os experimentos.

## **2.2 Efeitos Não Lineares em uma Análise Estrutural**

A análise estrutural é a fase de um projeto estrutural onde se faz a idealização do comportamento da estrutura. Esse comportamento pode ser expresso por diversos parâmetros, tais como, campos de tensões, deformações e deslocamentos da estrutura. De uma maneira geral, tem-se como objetivo a determinação de esforços internos e externos (cargas e reações de apoio), de tensões, bem como a determinação dos deslocamentos e das deformações da estrutura que está sendo projetada (MARTHA, 2010).

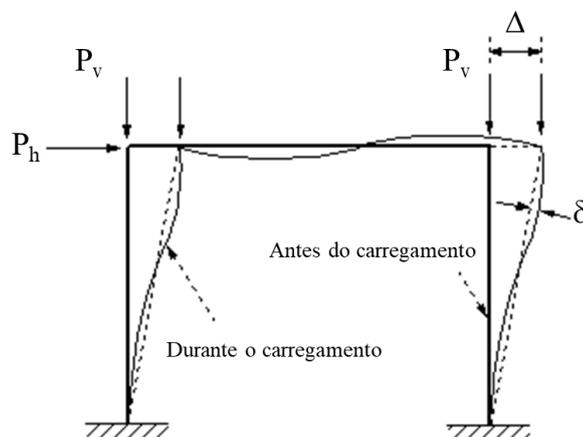
Os projetos são, em grande maioria, desenvolvidos considerando a estrutura perfeita e utilizando uma análise elástica linear. Nessa análise, o material da estrutura é considerado

com comportamento elástico e suas propriedades invariáveis. Sendo assim, as equações de equilíbrio são formuladas baseando-se na configuração inicial indeformada da estrutura e assume-se que as deformações são pequenas, tais que seus efeitos sobre o equilíbrio e resposta do sistema são insignificantes (SILVA, 2009).

Ressaltando a afirmação de Silva (2009), com o desenvolvimento das indústrias civil, naval, oceânica e aeronáutica, e o surgimento de materiais mais resistentes e novas técnicas construtivas, em diversos problemas da mecânica estrutural o comportamento não linear das estruturas passa a ser relevante e deve ser considerado nas análises. Procura-se assim, com a análise não linear, melhorar a simulação do comportamento de uma estrutura.

O comportamento não linear de uma estrutura sob ação de um carregamento qualquer pode ser classificado de acordo com seus efeitos. Dentre as várias fontes de não linearidade, destacam-se duas: a não linearidade geométrica e a não linearidade física. A não linearidade geométrica ou efeitos de segunda ordem aparece quando as mudanças de geometria, provocadas pela ação do carregamento sobre a estrutura, são significativas e interferem na rigidez do sistema. Isso faz com que a configuração inicial e indeformada não possa ser considerada para a definição das equações de equilíbrio e de compatibilidade. Essa análise é responsável por considerar os efeitos  $P-\Delta$  (global) e  $P-\delta$  (local, a nível de elemento), que são os efeitos oriundos das deformações da estrutura à medida que é carregada como mostra a Figura 2.7 (SILVA, 2009).

**Figura 2.7 Efeitos de segunda ordem:  $P-\Delta$  (deslocamento lateral) e  $P-\delta$  (curvatura).**

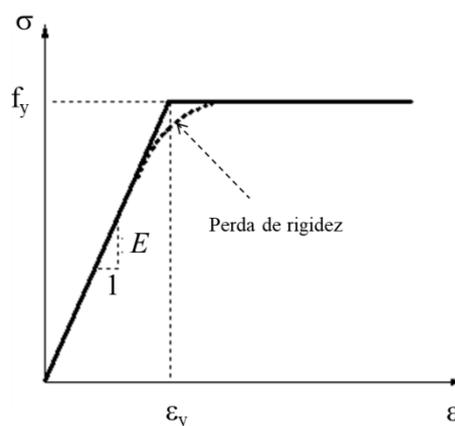


**Fonte: Silva, 2009.**

Já a não linearidade física decorre de o material não apresentar uma relação tensão deformação linear, ou seja, o comportamento do material não é elástico linear. A lei de Hooke não é obedecida, como pode ser visto pela Figura 2.8. A perda de resistência do material durante a história de carregamento da estrutura é considerada. A Figura 2.9 ilustra a evolução das deformações e tensões de uma seção à medida que o carregamento aumenta, considerando o material com comportamento elastoplástico.

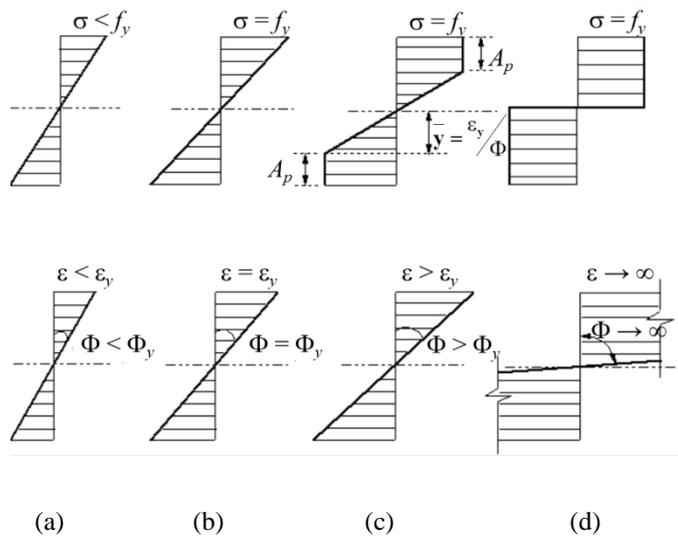
Inicialmente, as fibras da seção estão no regime elástico ( $\varepsilon < \varepsilon_y$  e  $\sigma < f_y$ ) como indicado na Figura 2.9a. Ao atingirem a tensão de escoamento ( $\sigma = f_y = E \varepsilon_y$ ), Figura 2.9b, as fibras mais externas apresentam o comportamento plástico, enquanto as demais se mantêm no regime elástico. As fibras que escoaram continuam a suportar uma tensão constante que não pode ser superior à tensão de escoamento, entretanto, com deformação maior que  $\varepsilon_y$ . As outras fibras, porém, recebem uma tensão adicional induzida pelo aumento no momento. Com o acréscimo do carregamento, outras fibras se plastificam (Figura 2.9c). Essa região onde existe material em escoamento, indicada na figura pelo símbolo  $A_p$ , é denominada zona plástica. Esse processo continua até que toda a seção tenha sido plastificada (Figura 2.9d). Nas figuras,  $\Phi$  é a curvatura da seção,  $\varepsilon_y$  é a deformação quando a seção sofre escoamento, e  $f_y$  refere-se à resistência ao escoamento. Estabelecido esses limites, é possível determinar se a seção está trabalhando no regime elástico, elastoplástico ou plástico.

**Figura 2.8 Relação tensão x deformação do material.**



**Fonte: Silva, 2009.**

**Figura 2.9** Distribuição de deformações e tensões na seção transversal.



**Fonte: Silva, 2009.**

No contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), para considerar a não linearidade do material nas análises, duas abordagens são normalmente utilizadas para sistemas estruturais reticulados planos ou espaciais que se baseiam no método da zona plástica (MZP) ou no método da rótula plástica (MRP). A diferença básica entre essas está no grau de refinamento usado para representar a plastificação da seção. Lemes (2015) explicou que o primeiro método monitora os efeitos da não linearidade dos materiais ao longo do comprimento do elemento finito, sendo assim caracterizado como método da plasticidade distribuída. Além da discretização dos membros estruturais (vigas e colunas), faz-se necessária a discretização da seção transversal.

Já o método da rótula plástica considera os efeitos não lineares do material somente nos nós do sistema estrutural discretizado, sendo considerado como método de plasticidade concentrada. Há duas abordagens distintas para essa técnica: a primeira considera que a seção permanece em regime elástico, até que seja atingida a capacidade resistente da seção. Trata-se de uma análise elástica-perfeitamente plástica. Esse comportamento difere da realidade, já que a transição do regime elástico para o plástico acontece de forma gradual. A segunda metodologia, denominada Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) (LEMES, 2015) monitora a degradação da rigidez da seção transversal ao longo do processo de análise. Uma das formas de controlar a rigidez da seção é através do uso do módulo de elasticidade

tangente representado através de curvas de plastificação (FONG, 2012) ou pela relação entre o momento e a curvatura da seção (CHIOREAN, 2013).

### **2.3 Sistema Computacional MASTAN2**

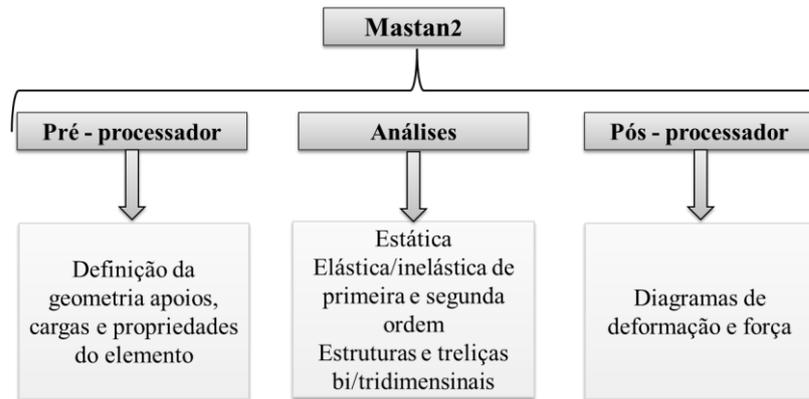
No âmbito da Engenharia de Estruturas, um dos métodos usados para discretização de um problema contínuo e a partir daí a obtenção de soluções numéricas aproximadas é o Método dos Elementos Finitos, devido a sua eficiência e aplicabilidade. Com essa técnica procura-se discretizar (dividir) o meio contínuo em subdomínios, referidos como elementos, que são interligados através dos pontos nodais onde são definidos os graus de liberdade a serem determinados (SILVA, 2009).

Para cada região (elemento) se estabelece um comportamento local aproximado, de tal forma que as incógnitas do problema possam ser definidas em função das mesmas incógnitas nos pontos nodais. Avaliando a energia potencial total, e somando as contribuições de cada elemento, chega-se a um sistema total de equações, cuja solução permite conhecer os valores das incógnitas nos pontos nodais.

Para as análises estruturais que serão realizadas neste trabalho, será utilizado programa computacional MASTAN2 (MCGUIRE, GALLAGHER E ZIEMIAN, 2014), que é baseado no MEF. Esse sistema computacional pode ser descrito como um programa para análise avançada de estruturas reticuladas planas e espaciais com capacidades de pré-processamento, análise e pós-processamento. A Figura 2.10 traz um esquema de suas funcionalidades. As opções do pré-processador incluem a definição da geometria da estrutura, condições de contorno, definição de cargas e propriedades dos elementos. As rotinas de análise fornecem várias opções, incluindo a elástica e inelástica de primeira ou segunda ordem. Já o pós-processador inclui a possibilidade de interpretação do comportamento da estrutura através da visualização dos diagramas de deformação e esforços internos, impressão de resultados em arquivos com formato texto, e desenhos das trajetórias de equilíbrio (PRADO, 2012; SANTANA, 2015).

O programa foi desenvolvido em MATLAB, e as rotinas implementadas são baseadas na teoria e nas formulações numéricas apresentadas no livro *Matrix Structural Analysis* (MCGUIRE, GALLAGHER E ZIEMIAN, 2014).

**Figura 2.10 Funcionalidades do programa MASTAN2**



### 3 METODOLOGIA PARA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

A análise elástica linear tem sido incapaz de retratar o comportamento real de estruturas, como visto anteriormente. Isso porque, após a fase elástica e anterior ao colapso, a maioria das estruturas apresenta um comportamento não linear (SEGUNDO, 2019).

Por essa razão, normas baseadas no conceito do modelo de resistência última têm incorporado certas metodologias para que os engenheiros estruturais considerem a não linearidade, utilizando técnicas de análise exatas ou aproximadas (EUROCODE 2, 2004; ABNT NBR 8800, 2008; ABNT NBR 6118, 2014; AISC LRFD, 2016). Como já destacado no capítulo anterior, dentre os efeitos não lineares destacam-se os geométricos e do material.

Na solução de equações não lineares que aparecem no estudo numérico da estabilidade elástica ou inelástica de uma estrutura, os processos incrementais e iterativos são alternativas eficientes. As etapas desse processo serão explicadas neste capítulo. Na Seção 3.1 detalha-se a metodologia de solução do problema estrutural não linear, explanando sobre as duas etapas do processo: fase incremental predita e ciclo iterativo. Na Seção 3.2 são apresentadas as estratégias de incremento de carga e iteração usadas no presente trabalho, e por fim, na Seção 3.3 apresenta-se, de uma forma generalizada, a formulação para o elemento finito de viga-coluna usado na modelagem dos sistemas estruturais contraventados abordados no próximo capítulo.

#### 3.1 Solução do Problema Estático Não Linear

Um sistema estrutural é chamado conservativo quando o trabalho realizado pelos esforços internos e externos é independente do caminho percorrido pela estrutura ao passar da condição de equilíbrio inicial ou de referência para outra configuração qualquer. Essa nova configuração, para ser considerada admissível, deve satisfazer as relações de compatibilidade e condições de contorno essenciais do sistema (SILVA, 2009). Para esse tipo de configuração, pode-se escrever a energia potencial total do sistema,  $\pi$ , como sendo:

$$\pi = U + \Omega \quad (3.1)$$

na qual  $U$  é energia interna de deformação e  $\Omega$  é a energia potencial das cargas aplicadas.

A configuração de equilíbrio de um sistema estrutural pode ser obtida através do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária. Aplicando-o, a energia potencial total assume um valor estacionário representado em termos variacionais como  $\delta\pi = 0$ .

Aplicando o Método dos Elementos Finitos (MEF), ou seja, dividindo o meio contínuo em subdomínios, que são interligados através dos pontos nodais onde são definidos os graus de liberdade a serem determinados, avaliando a energia potencial total (Equação (3.1)), e somando as contribuições de cada elemento, é possível chegar à condição de equilíbrio estrutural. De acordo com o estudo realizado neste trabalho, tal condição pode ser expressa de uma forma generalizada como:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \Psi) = \mathbf{F}_e \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \Psi) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.2)$$

em que  $\mathbf{F}_i$  refere-se ao vetor de forças internas, que é uma função não linear dos deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ , dos esforços internos nos membros,  $\mathbf{P}$ , e dos efeitos da inelasticidade do material,  $\Psi$ ;  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas. Esse último pode ser expresso pelo produto entre o parâmetro de carga  $\lambda$  e o vetor de forças externas de referência,  $\mathbf{F}_r$ , que define a direção da solitação externa atuante.

Ao considerar as fontes de não linearidades nas análises, a matriz de rigidez e o vetor das forças internas do sistema estrutural devem ser atualizados constantemente para se capturar o estado de equilíbrio devido às alterações na geometria e aos efeitos do escoamento do material. Torna-se necessário, então, realizar uma análise de maneira incremental e iterativa.

Para cada incremento do parâmetro de controle da solução não linear — entre esses carga, deslocamento, comprimento de arco, trabalho — pode-se definir duas fases distintas. Na primeira delas, denominada fase predita, é feita a seleção de um incremento de carga definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga e denotado por  $\Delta\lambda^0$ , procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção de  $\Delta\lambda^0$ , é possível determinar o incremento inicial dos deslocamentos nodais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ . A segunda fase, denominada corretiva, tem por objetivo a correção das forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos pela utilização de um processo iterativo, no qual o método de Newton-Raphson é usado. As forças internas são, então, comparadas com o carregamento externo, obtendo-se daí a quantificação do desequilíbrio existente entre forças internas e

externas. O processo corretivo é feito até que se satisfaça algum critério de convergência, onde a estrutura se encontre em equilíbrio.

### 3.1.1 Solução incremental predita

Através da Figura 3.1 demonstra-se o esquema iterativo de Newton Raphson. A primeira etapa para a obtenção da solução incremental predita ou solução incremental inicial tangente ( $\Delta\lambda^0$ ,  $\Delta\mathbf{U}^0$ ) consiste na montagem da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  usando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura. A partir daí, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{U}_r$ , através da expressão:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{(-1)}\mathbf{F}_r \quad (3.3)$$

A estratégia de incremento de carga utilizada neste trabalho será discutida na próxima seção. Após a definição de  $\Delta\lambda^0$ , é possível determinar o deslocamento tangencial  $\Delta\mathbf{U}^0$ , escalonando  $\delta\mathbf{U}_r$ , ou seja:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r \quad (3.4)$$

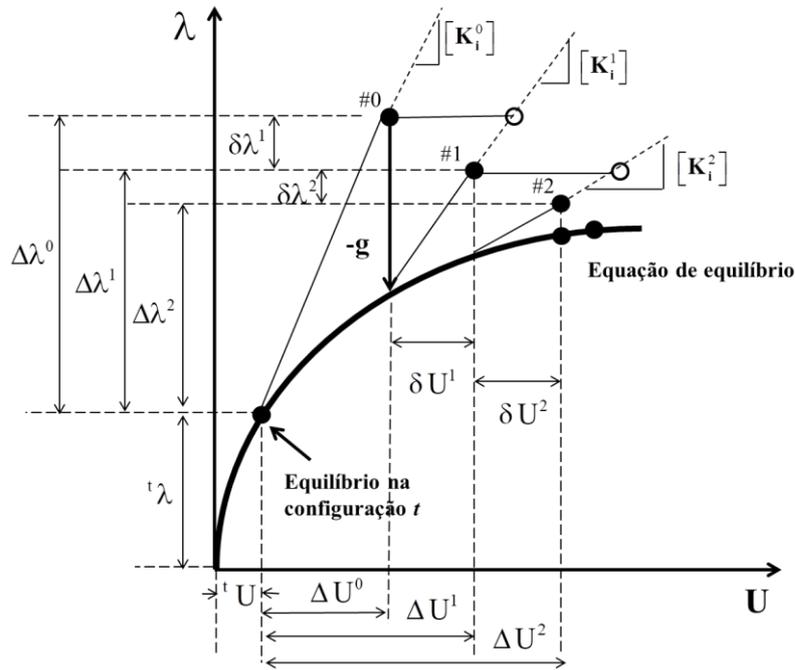
Assim, o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais podem ser atualizados através das seguintes relações:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.5a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.5b)$$

onde  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{U}$  caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga, como indicado na Figura 3.1. Como as Equações (3.5a) e (3.5b) nem sempre satisfazem a condição de equilíbrio do sistema, iterações são necessárias para que se possa restaurar o equilíbrio.

Figura 3.1 Esquema de iterações.



Fonte: McGuire, Gallagher e Ziemian, 2014.

### 3.1.2 Ciclo de iterações

Quando o método de Newton-Raphson é adotado para solução de problemas não lineares, o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante durante o ciclo iterativo. Porém, caso se pretenda obter o caminho de equilíbrio de forma completa, com possíveis passagens por pontos críticos (pontos limites e/ou pontos de bifurcação), é necessário que se permita a variação de tal parâmetro em cada iteração. Batoz e Dhatt (1979) propuseram uma técnica onde a variação desse parâmetro é permitida. Pode-se considerar que a mudança nos deslocamentos nodais é governada pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), k \geq 1 \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{g}$ , chamado de vetor gradiente, representa o vetor de forças desequilibradas, cujo valor é nulo quando se tem o equilíbrio estrutural. Destaca-se que  $\mathbf{g}$  é função dos deslocamentos nodais totais,  $\mathbf{U}^{(k-1)}$ , calculados na última iteração, e do valor corrente do parâmetro de carga total,  $\lambda^k$ , que é escrita como:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.7)$$

sendo  $\delta\lambda^k$  a correção do parâmetro de carga na iteração corrente.

Com a substituição da Equação (3.7) em (3.6), e realizando manipulações algébricas matriciais, chega-se à seguinte equação procurada para trabalhar durante o ciclo iterativo:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.8)$$

Usando a equação anterior, uma expressão para os deslocamentos nodais iterativos,  $\delta\mathbf{U}^k$ , pode ser escrita como:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.9)$$

com:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.10)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (3.11)$$

nas quais,  $\delta\mathbf{U}_g$  é a correção que seria obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia convencional de incremento do parâmetro de carga constante; e  $\delta\mathbf{U}_r$  é o vetor de deslocamentos iterativos resultante da aplicação de  $\mathbf{F}_r$ .

Uma vez obtida a solução iterativa,  $\delta\lambda^k$  e  $\delta\mathbf{U}^k$ , é necessária a atualização das variáveis incrementais do problema.

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.12)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.13)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais têm-se:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (3.14)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (3.15)$$

Como em qualquer processo numérico, a solução calculada é apenas uma aproximação da solução exata. Assim, é necessário estabelecer limites para que o processo iterativo se encerre. Isso acontece quando um ou dois critérios de convergência são satisfeitos. O primeiro critério de convergência, calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior, é baseado em relações de forças e definido como:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (3.16)$$

onde o numerador representa a norma Euclidiana do vetor das forças desequilibradas, que é calculada usando-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior; o denominador é a norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo, e  $\zeta$  é um fator de tolerância, geralmente da ordem de  $10^{-2}$  a  $10^{-6}$ , dependendo da precisão desejada.

O segundo critério de convergência, baseado na relação entre deslocamentos, é sempre verificado ao final da iteração corrente. A equação que o define é:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^{(k)}\|}{\|\Delta\mathbf{U}^{(k)}\|} \leq \zeta \quad (3.17)$$

sendo o numerador a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos e o denominador a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, ambos da iteração corrente.

A Tabela 3.1 ilustra os procedimentos descritos nesta seção.

**Tabela 3.1 - Estratégia numérica para análise estática não linear.**

---



---

1. Dados gerais: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros particulares referentes ao tipo de análise.
2. Define o vetor de cargas nodais de referência,  $\mathbf{F}_r$ , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado.
3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida,  $t$ :  ${}^t\mathbf{U}$  e  ${}^t\lambda$
4. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:**  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$ 
  - 4a. Monta-se a matriz de rigidez tangente:  $\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \Psi)$
  - 4b. Resolve:  $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
  - 4c. Define  $\Delta\lambda^0$ : Nesse trabalho esse parâmetro é mantido constante
  - 4d. Determina:  $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$
  - 4e. Atualiza as variáveis na configuração  $t + \Delta t$ :  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:**  $k = 1, 2, 3, \dots$ 
  - 5a. Avalia o vetor de forças internas:  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
  - 5b. Calcula o vetor de forças residuais:  $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$
  - 5c. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças ou em forças e deslocamentos conjuntamente (Silva, 2009)
    - SIM** (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
  - 5d. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$
  - 5e. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais:  $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\mathbf{U}_r^k$ , com:
$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$$
  - 5f. Atualiza o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ :
    - a) *Incremental:*  $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
    - b) *Total:*  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
  - 5g. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente
    - SIM** (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
    - SIM** (Critério de força e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6, apenas se houve a convergência no item 5c*
  - 5h. Retorna ao passo 5
6. Atualiza a variável  $\Psi$  e outras que forem necessárias
7. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4**

---



---

Fonte: Silva, 2009.

## 3.2 Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração

A seção anterior destacou que a definição da solução incremental predita tem fundamental importância na determinação do parâmetro inicial de carga,  $\Delta\lambda^0$ . A seleção automática da magnitude do incremento desse parâmetro é importante, e deve retratar o grau de não linearidade do sistema. A estratégia é tida como eficiente, se for capaz de fornecer grandes incrementos quando a resposta do sistema for linear. Por outro lado, é necessário que forneça pequenos incrementos, quando a resposta for não linear. A definição correta do sinal desse incremento é imprescindível para que se possam ultrapassar os pontos limites, máximos e mínimos, ao longo da trajetória de equilíbrio. Nas duas próximas subseções serão descritas as estratégias de incremento de carga e de iteração disponíveis no MASTAN2 (MCGUIRE, GALLAGHER E ZIEMIAN, 2014) e usadas neste trabalho.

### 3.2.1 Estratégia de incremento de carga

Yang e Kuo (1994) propuseram uma equação de restrição que deveria ser respeitada nas duas etapas de solução não linear (solução predita e ciclo de iterações):

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k + k_1 \delta \lambda^k = H_k \quad (3.20)$$

na qual  $\mathbf{C}$  é uma matriz cujos elementos são constantes;  $k_1$  também é constante; e  $H$  é um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco). Após a escolha dessas variáveis é possível obter diferentes estratégias de incremento de carga e iteração.

A restrição imposta pela equação anterior, juntamente com seguinte expressão:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = \delta \lambda^k \mathbf{F}_r - \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.21)$$

formam um sistema de equações com  $N+1$  incógnitas, onde  $N$  se refere à dimensão do vetor de deslocamentos e a unidade, ao parâmetro de carga  $\lambda$ . Essas duas relações podem ser combinadas de forma que, após manipulações algébricas e matriciais, obtém-se o parâmetro de carga (YANG E KUO, 1994):

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_r^k + k_1} \left( H_k - \mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (3.22)$$

Yang e Shieh (1990) propuseram como valores de C e  $k_1$ :

$$\mathbf{C} = {}^t\delta\mathbf{U}_r \Delta\lambda^0 \quad (3.23)$$

$$k_1 = 0 \quad (3.24)$$

sendo  ${}^t\delta\mathbf{U}_r$  o vetor de deslocamentos nodais tangenciais do passo de carga anterior.

Usando (3.23) e (3.24) na Equação (3.22) é possível escrever uma nova expressão para a correção do parâmetro de carga:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^0 ({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r^k} \left( H_k - \Delta\lambda^0 ({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_g^k \right) \quad (3.25)$$

Para obter a solução incremental predita, basta considerar na equação anterior,  $k = 0$ ;  $\delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0$ ;  $\delta\mathbf{U}_g^0 = 0$ ; e  $\delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r$ . Assim, tem-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{H_0}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r}} \quad (3.26)$$

O valor do parâmetro incremental  $H_0$  (no caso, deslocamento generalizado) pode ser definido usando a Equação (3.26) e considerando que, no primeiro passo de carga, se conhece o valor de  $\Delta\lambda^0$  (valor introduzido pelo usuário). Sendo assim:

$$H_0 = (\Delta\lambda_1^0)^2 ({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) ({}^1\delta\mathbf{U}_r) \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.26), obtém-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) {}^1\delta\mathbf{U}_r}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r}} \quad (3.28)$$

A partir daí, pode-se então definir o parâmetro de rigidez generalizado do sistema (Generalized Stiffness Parameter, GSP) como:

$$\text{GSP} = \frac{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T)^1\delta\mathbf{U}_r}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T)\delta\mathbf{U}_r} \quad (3.29)$$

Substituindo esse parâmetro na Equação (3.28), chega-se a:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0\sqrt{|\text{GSP}|} \quad (3.30)$$

Vale destacar que o valor para o primeiro incremento de carga,  $\Delta\lambda_1^0$ , é prescrito e  $\text{GSP} = 1$ .

### 3.2.2 Estratégias de iteração

A determinação do parâmetro de carga iterativo,  $\delta\lambda$ , é função de uma dada estratégia de iteração ou equação de restrição imposta ao problema. É importante destacar que não se pode esperar de nenhuma estratégia a resolução de problemas fortemente não lineares com igual eficiência. O programa MASTAN2 tem algumas estratégias de solução implementadas. No entanto, para as análises numéricas realizadas no presente trabalho, utilizou apenas a opção de solução ‘*Predictor-Corretor*’. Portanto, a metodologia adotada nesse caso será descrita nesta seção. Trata-se de um procedimento iterativo cuja restrição é baseada no comprimento de arco.

Como proposto em Crisfield (1991), na definição do incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente. Sendo assim:

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

em que  $\Delta l_{p,a}$  e  $\Delta l$  representam os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior (valor conhecido) e no corrente (incógnita), respectivamente;  $I_d$  é o número de iterações desejadas para convergência do processo iterativo corrente, determinado pelo usuário do programa, e  $I_{p,a}$  é o número de iterações que foram necessárias para que o passo de carga anterior convergisse.

Riks (1972; 1979) utilizou a seguinte equação para restrição de comprimento de arco constante apenas para a obtenção do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ :

$$\Delta\mathbf{U}^{0T} \Delta\mathbf{U}^0 + (\Delta\lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (3.32)$$

Na etapa iterativa subsequente ( $k \geq 1$ ), a equação de restrição usada para calcular  $\delta\lambda$  é obtida fazendo com que a solução iterativa ( $\delta\mathbf{U}^k, \delta\lambda\mathbf{F}_r$ ) seja ortogonal à solução incremental predita ( $\Delta\mathbf{U}^0, \Delta\lambda^0\mathbf{F}_r$ ). Sendo assim, a seguinte equação é definida:

$$\Delta\mathbf{U}^{kT} \Delta\mathbf{U}^0 + \delta\lambda^k \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (3.33)$$

A substituição da Equação (3.9) em (3.33) fornece a expressão procurada para determinar a correção do parâmetro de carga:

$$\delta\lambda^k = - \frac{(\Delta\mathbf{U}^0)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{\left( (\Delta\mathbf{U}^0)^T \delta\mathbf{U}_r^k + \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \right)} \quad (3.34)$$

McGuire, Gallagher e Ziemian (2014) consideraram que a relação  $\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r$  tem valor unitário. Nesse sentido, a relação para determinar a correção do parâmetro de carga na estratégia adotada pode ser escrita como:

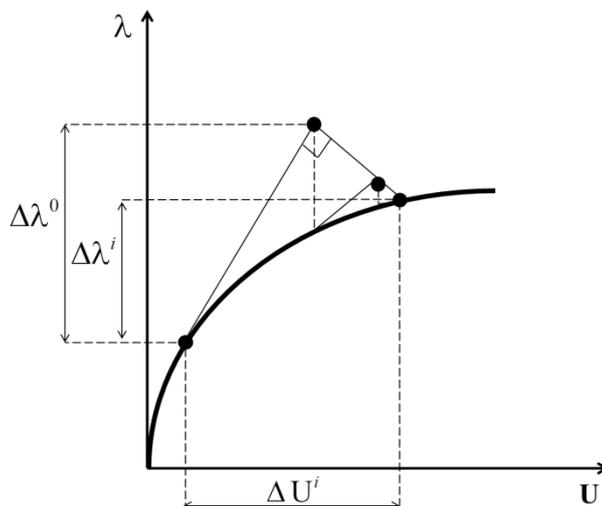
$$\delta\lambda^k = - \frac{(\Delta\mathbf{U}^0)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{\left( (\Delta\mathbf{U}^0)^T \delta\mathbf{U}_r^k + \Delta\lambda^0 \right)} \quad (3.35)$$

A Figura 3.2 ilustra a estratégia supracitada e, conforme afirma Silveira (1995), do ponto de vista geométrico, o esquema proposto por Riks (1972; 1979) pode ser visto como iterações em planos normais à linha tangente varrida por  $(\Delta\mathbf{U}^0, \Delta\lambda^0\mathbf{F}_r)$ .

De acordo com Crisfield (1991), os procedimentos numéricos baseados no comprimento de arco são eficientes para resolver problemas que não apenas exibem comportamento de ponto limite, mas são capazes de ultrapassá-los mesmo com a ocorrência dos fenômenos *snap-through* e *snap-back*. Rodrigues (2000) ainda destacou que a versão linearizada de iteração a comprimento de arco constante é de fácil implementação, entretanto não é tão

robusta quanto a versão não linear (ou quadrática), que é mais estável e converge mais facilmente.

**Figura 3.2 Estratégia de iteração: Comprimento de arco.**



**Fonte: Riks, 1972; 1979.**

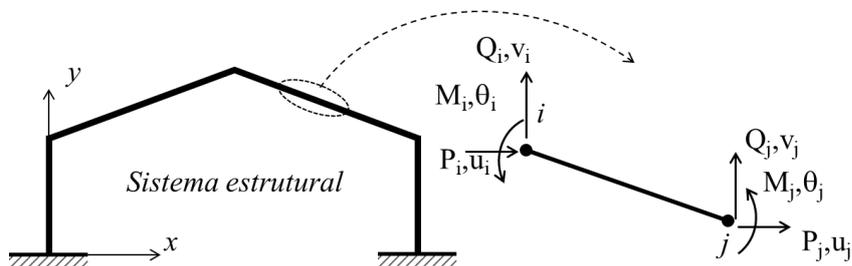
### 3.3 Formulação de Elementos Finitos

Elementos estruturais com seções transversais mais eficientes, os quais oferecem economia e alto desempenho em termos de peso mínimo para uma dada resistência, têm sido bastante estudados (ARCHANA E KUMAR, 2016; COSTANZO, D'ANIELLO E LANDOLFO, 2018). Contudo, é suficientemente conhecido que tais elementos com peso menor apresentam um comportamento estrutural complexo e, particularmente, são bastante susceptíveis à flambagem. Assim, torna-se necessária a utilização de uma teoria consistente que possibilite o conhecimento preciso dos esforços adicionais causados pelos efeitos de segunda ordem. Nesta seção, a formulação de elementos finitos que permite considerar os efeitos da inelasticidade do material e da não linearidade geométrica é apresentada.

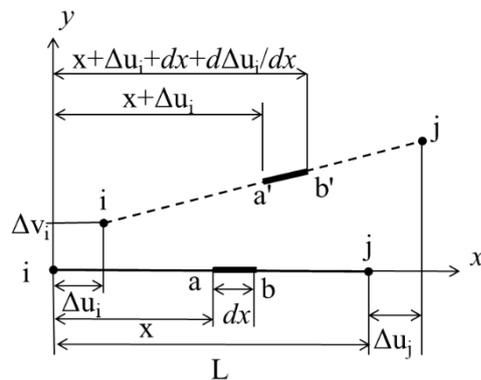
Foi visto que a inelasticidade ou plastificação do aço é o processo de escoamento das fibras causando alterações na distribuição de tensões da seção transversal quando as forças nela atuantes aumentam. Por simplificação, o aço é idealizado como um material elástico perfeitamente plástico.

Para o desenvolvimento da formulação, foi considerado o elemento finito ilustrado na Figura 3.3. O comportamento inelástico será restrito às extremidades do elemento que simularão a formação de rótulas plásticas. A deformação do elemento na extremidade do elemento estrutural será constituída apenas por rotação inelástica. E, uma vez formada a rótula plástica, as forças internas na seção transversal deverão se mover mantendo-se sobre a sua superfície de resistência plástica da mesma.

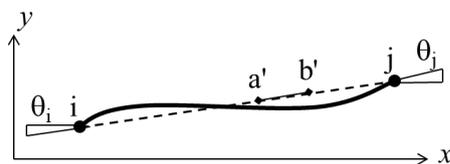
**Figura 3.3 Deformação do elemento finito.**



(a) Elemento Finito



(b) Alongamento e rotação de corpo rígido



(c) Flexão

Segundo McGuire, Gallagher e Ziemian (2014), para a análise inelástica de segunda ordem são consideradas tanto a não linearidade geométrica quanto a não linearidade do material para a definição da equação de equilíbrio. A equação que rege o equilíbrio do elemento finito na configuração deformada é dada por:

$$\Delta \mathbf{f} = [\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_m] \Delta \mathbf{u} \quad (3.36)$$

em que  $\Delta \mathbf{u}$  é o vetor com os incrementos de deslocamentos e rotações nodais,  $\mathbf{k}_e$  é a matriz de rigidez linear elástica,  $\mathbf{k}_g$  é a matriz de rigidez geométrica,  $\mathbf{k}_m$  é a matriz que considera a degradação da resistência do material e  $\Delta \mathbf{f}$  é o vetor de forças internas incrementais.

Para incluir os efeitos geométricos na matriz, considera-se o elemento finito mostrado pela Figura 3.3a. Assume-se que o elemento é reto e livre de deformações na configuração de referência. Essa formulação é baseada na teoria de vigas Euler-Bernoulli. Utiliza-se o referencial Lagrangiano atualizado e o tensor de deformação de Green-Lagrange. Dessa maneira, considerando a representação no sistema global de coordenadas após aplicação do esforço axial e rotação do corpo rígido, Figura 3.3b, é possível escrever o tensor de deformação.

Para incluir os efeitos da flexão na matriz de rigidez geométrica, a deformação sofrida pelo elemento (Figura. 3.3c) deve ser adicionada ao tensor de deformações. Nessa situação, os efeitos da rotação e do alongamento são desconsiderados.

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, pode-se escrever a variação da energia interna de deformação,  $\mathbf{U}$ , que é função da deformação axial e rotações do elemento, do módulo de elasticidade e do tensor de deformações. As integrais obtidas dessa relação fornecem a matriz de rigidez elástica linear e a matriz de rigidez geométrica. Tem-se que a matriz de rigidez elástica linear é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{k}_e = \int_{vol} \mathbf{N}' E \mathbf{N}' d(vol) \quad (3.37)$$

sendo  $\mathbf{N}'$  a matriz que contém as função de forma e suas derivadas, e  $E$  é o módulo de elasticidade do material.

Já a matriz de rigidez geométrica obedece a seguinte relação:

$$\mathbf{k}_g = P \int_0^L [\mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_u' + \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v'] dx \quad (3.38)$$

sendo  $\mathbf{N}_u'$  e  $\mathbf{N}_v'$  funções de forma para as respectivas coordenadas de deslocamento e  $P$  a força axial atuante no elemento. Adota-se para análise de um elemento submetido à flexão simples, funções de interpolação linear para o deslocamento horizontal,  $u$ , e quadrática para o deslocamento vertical,  $v$ , e assim é possível escrever a matriz de rigidez geométrica como:

$$\mathbf{k}_g = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{Sim.} & & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Para introduzir os efeitos da degradação da rigidez no material nas análises é necessário escrever a matriz  $\mathbf{k}_m$ , como mostrado pela Equação (3.36). Seguindo a Teoria da Plasticidade, é preciso incluir o conceito de uma superfície de escoamento resultante da tensão aplicada, que, para o elemento adotado, é considerado uma função convexa contínua entre a força axial e momento fletor na seção transversal. Simbolicamente, pode ser representada como:

$$\Phi \left( \frac{P}{P_y}, \frac{M}{M_y} \right) = 1 \quad (3.40)$$

nas quais  $P$  e  $M$  são a força axial calculada e o momento máximo na barra, respectivamente; e  $P_y$  e  $M_y$  são a carga axial de escoamento e momento plástico da seção, respectivamente. Segundo as disposições de projeto da especificação AISC (1989), os membros estruturais planos de edifícios de aço submetidos à força axial combinada com momento de flexão devem satisfazer as seguintes relações:

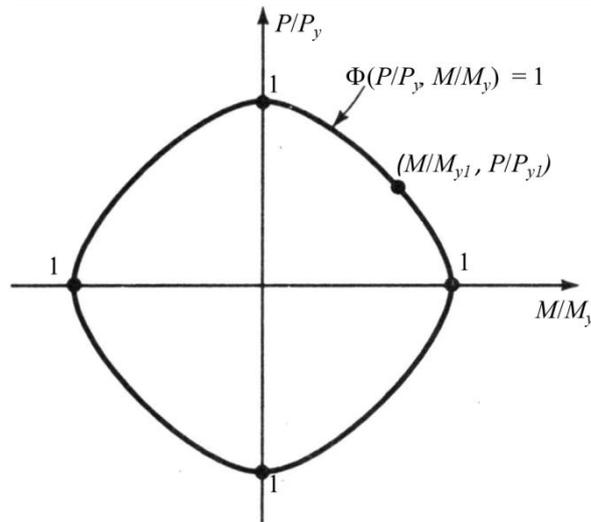
$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m M}{\left(1 - \frac{P}{P_e}\right) M_m} \leq 1.0 \quad (3.41)$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{1.18 M_y} \leq 1.0, \quad M \leq M_y \quad (3.42)$$

A Equação (3.41) contém coeficientes e termos definidos na especificação AISC e tem a função de estabilizar os membros. Já a Equação (3.42) define a formação de rótula plástica.

A Figura 3.4 mostra a curva de interação da função da superfície de escoamento. A partir daí é possível determinar em qual regime a seção está trabalhando. As seções se encontram no regime elástico e plástico caso os pontos de força estejam situados, respectivamente, dentro e sobre a curva. Pontos fora da superfície não são admissíveis devido ao pressuposto do material ser perfeitamente elastoplástico.

**Figura 3.4 Superfície de escoamento.**



**Fonte: McGuire, Gallagher e Ziemian, 2014.**

Supõe-se que o deslocamento incremental resultante em uma extremidade plastificada,  $\Delta \mathbf{u}_{i,j}$ , pode ser tratado como a soma da contribuição elástica,  $\Delta \mathbf{u}_e$  e plástica,  $\Delta \mathbf{u}_p$ , como mostra a equação a seguir:

$$\Delta \mathbf{u}_{i,j} = \Delta \mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_p \quad (3.43)$$

Na extremidade plastificada aplica-se o critério de normalidade, podendo escrever:

$$\Delta \mathbf{u}_{p(i,j)} = \omega_{i,j} \mathbf{G}_{i,j} \quad (3.44)$$

em que  $\mathbf{G}_{i,j}$  é o gradiente da superfície de interação, exposto pela figura anterior, para a ponto analisado (da extremidade plastificada), dado por:

$$\mathbf{G}_{i,j} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial P_{i,j}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial M_{i,j}} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

e  $\omega_{i,j}$  é a magnitude da deformação plástica do nó analisado. Os componentes diferentes de zero na matriz,  $\mathbf{G}$ , estão nas extremidades do elemento plastificado. Nesses pontos as resistências axiais e rotacionais reduzem. É possível garantir também que a contribuição de deformação elástica seja tangente à superfície de escoamento.

A partir das relações anteriores e admitindo a ortogonalidade das deformações plásticas é calculado o vetor de forças incrementais. Sendo  $\omega_{i,j}$  arbitrário, é possível obter a matriz de redução plástica do elemento,  $\mathbf{k}_m$ , representada pela Equação (3.46), ou seja:

$$\mathbf{k}_m = -\mathbf{k}_e \mathbf{G} \left[ \mathbf{G}^T \mathbf{k}_e \mathbf{G} \right]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{k}_e \quad (3.46)$$

### 3.3.1 Módulo de elasticidade tangente

O método do módulo tangente é uma aproximação da redução da resistência da seção transversal em função do acréscimo de forças internas do elemento. O conceito de módulo tangente tem como fundamento básico a suposição de que, durante o processo de flambagem inelástica, as tensões resultantes ao longo da seção transversal atingem o nível de escoamento do material (LUI E CHEN, 1986). Assim, o comportamento tensão-deformação das fibras que compõem a seção é alterado, sendo governado, a partir desse instante, pela variação do módulo tangente  $E_t$ . Nesse método, atribuído inicialmente a Engesser (1889) e descrito primeiramente em Gaylord e Gaylord (1972), o módulo de elasticidade é substituído por um módulo tangente. Esse parâmetro é função do esforço axial atuante no elemento. Essa técnica

foi utilizada por Orbison (1982), White, Liew e Chen (1993) e Liew, White e Chen (1993) para melhorar a precisão da análise elastoplástica através de rótulas plásticas em estruturas nas quais os membros estão sujeitos a grandes esforços axiais.

McGuire, Gallagher e Ziemian (2014), baseando-se nas as equações de resistência para colunas propostas pelo CRC (Galambos, 1998), apresentaram a expressão a seguir para o módulo tangente:

$$E_t = 4 \frac{P}{P_y} \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right) \quad (3.47)$$

em que  $P$  é o esforço normal atuante e  $P_y$  é o esforço normal de escoamento.

Pela equação anterior, o módulo tangente é função apenas do esforço normal atuante no elemento. Ziemian e McGuire (2002) propuseram uma modificação da Eq. (3.47) com o intuito de melhorar os resultados de sistemas estruturais com colunas que poderiam fletir em torno do eixo de menor inércia, ou seja:

$$E_t = \tau E, \text{ em que } \tau = \min \left( \begin{array}{c} 1.0 \\ (1+2p) \left[ 1 - (p + \beta m_y) \right] \end{array} \right) \quad (3.48)$$

sendo:

$$p = \max \left( \frac{P}{P_y}, \frac{(0.5 - \beta m_y)}{2} \right) \quad (3.49)$$

$$m_y = \frac{M_y}{M_{Py}} \quad (3.50)$$

Nas Equações (3.48) a (3.50), o termo  $\beta$  é um valor empírico, e para análises inelásticas de segunda ordem é nulo para o eixo  $x$  (maior inércia) e é igual a 0.65 para o eixo  $y$  (menor inércia) (ZIEMIAN E MCGUIRE, 2002). Em (3.50),  $M_y$  e  $M_{Py}$  são, respectivamente, o momento de flexão e o momento plástico de flexão, ambos em relação ao eixo  $y$ .

## 4 MODELAGENS COMPUTACIONAIS

O objetivo deste capítulo é estudar os efeitos oriundos da adoção de sistemas de contraventamento na estabilidade de estruturas. Para isso, análises estáticas serão realizadas em sete diferentes sistemas estruturais. Como já destacado, as análises numéricas, nas quais se considerarão os efeitos da não linearidade geométrica e do material, serão realizadas via programa computacional MASTAN2 (MCGUIRE, GALLAGHER E ZIEMIAN, 2014), e as respostas encontradas, para alguma condição específica, serão comparadas com soluções analíticas ou numéricas disponíveis na literatura.

Inicialmente, nas Seções 4.1 e 4.2, serão investigados os comportamentos de estruturas bastante esbeltas considerando apenas os efeitos da não linearidade geométrica. Vale ressaltar que a perda de estabilidade sem que as cargas aplicadas sejam suficientes para causar a degradação do material é comum em tais estruturas. Sendo assim, será assumido que o material permanece no regime elástico linear durante a análise. Com esses problemas será possível verificar a eficiência dos sistemas de contraventamento ao permitir alcançar maior capacidade de carga, e uma efetiva redução na deslocabilidade lateral da estrutura.

Nas seções seguintes, além dos efeitos da não linearidade geométrica, será considerada também a degradação de rigidez do material através da análise inelástica. Conforme descreve Silva (2009), a análise plástica de estruturas de aço traz vários benefícios em relação à elástica, pois, uma das mais importantes características do aço, a ductilidade, é totalmente considerada. Avaliar-se-á a influência dos sistemas de contraventamento no comportamento de estruturas com números distintos de pavimentos. Será verificada a influência de alguns parâmetros dos sistemas de contraventamento na resposta, tais como: o tipo de ligação com os outros membros da estrutura, as propriedades da seção transversal, a posição e a disposição das barras, além da sua eficácia quanto à variação na intensidade das cargas laterais. Ressalta-se que atenção especial será dada à resposta expressa em termos da variação dos deslocamentos estruturais com a intensidade da solicitação atuante.

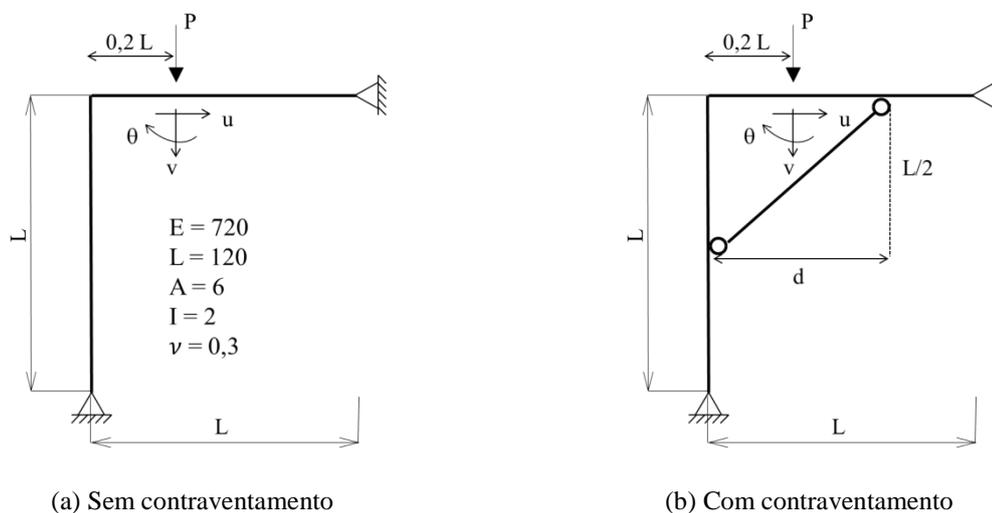
Deve-se mencionar que, ao adicionar sistemas de contraventamentos nas estruturas estudadas, as travas inseridas serão discretizadas como um elemento finito único.

## 4.1 Pórtico de Lee

Pórticos com disposição das barras em forma de L são conhecidos na literatura como L-Frames. Se essa estrutura for esbelta, apresentará forte não linearidade no comportamento pós-crítico. Por essa razão, são comumente usadas para testar a eficiência de formulações não lineares de elementos finitos, além do desempenho computacional de estratégias para solução de sistemas de equações não lineares.

Nesta seção será analisado o pórtico em L clássico ilustrado na Figura 4.1, que é conhecido como Pórtico de Lee. Lee, Manuel, e Rossow (1968) foram os primeiros autores a trabalhar com tal estrutura. Posteriormente, outros pesquisadores, tais como Schweizerhof e Wriggers (1986), Simo e Vu-Quoc (1986), Lee (1988), Coulter e Miller (1988), Chen e Blandford (1993), Pacoste e Eriksson (1997), Galvão (2004) e Silva (2009) usaram a estrutura nas investigações numéricas. Destaca-se que esses autores consideraram o material com comportamento elástico. Por outro lado, Cichon (1984), Hsiao, Hou e Spiliopoulos (1988), Park e Lee (1996) e Battini (2002) admitiram o material com comportamento elastoplástico nas análises realizadas com a mesma estrutura.

Figura 4.1 Pórtico de Lee.



O pórtico de Lee é um sistema composto por uma viga e uma coluna, com propriedades físicas e geométricas idênticas, conectadas rigidamente entre si e com translações impedidas nas seções das extremidades. A viga é submetida a uma carga vertical concentrada de intensidade  $P$ . Neste trabalho, a carga está deslocada de uma distância correspondente a  $0,2L$

da ligação entre as barras, como mostrado na Figura 4.1. As propriedades físicas do material e as características geométricas das seções transversais, as quais possuem unidades compatíveis, também estão indicadas nessa figura. Destaca-se que o índice de esbeltez da coluna é igual a 207,85, caracterizando um elemento estrutural que não pode ser utilizado na prática da construção civil devido à alta susceptibilidade à flambagem. Mas como já mencionado, em decorrência da forte influência dos efeitos de segunda ordem nessa estrutura, que é extremamente esbelta, a eficiência do sistema de contraventamento será investigada.

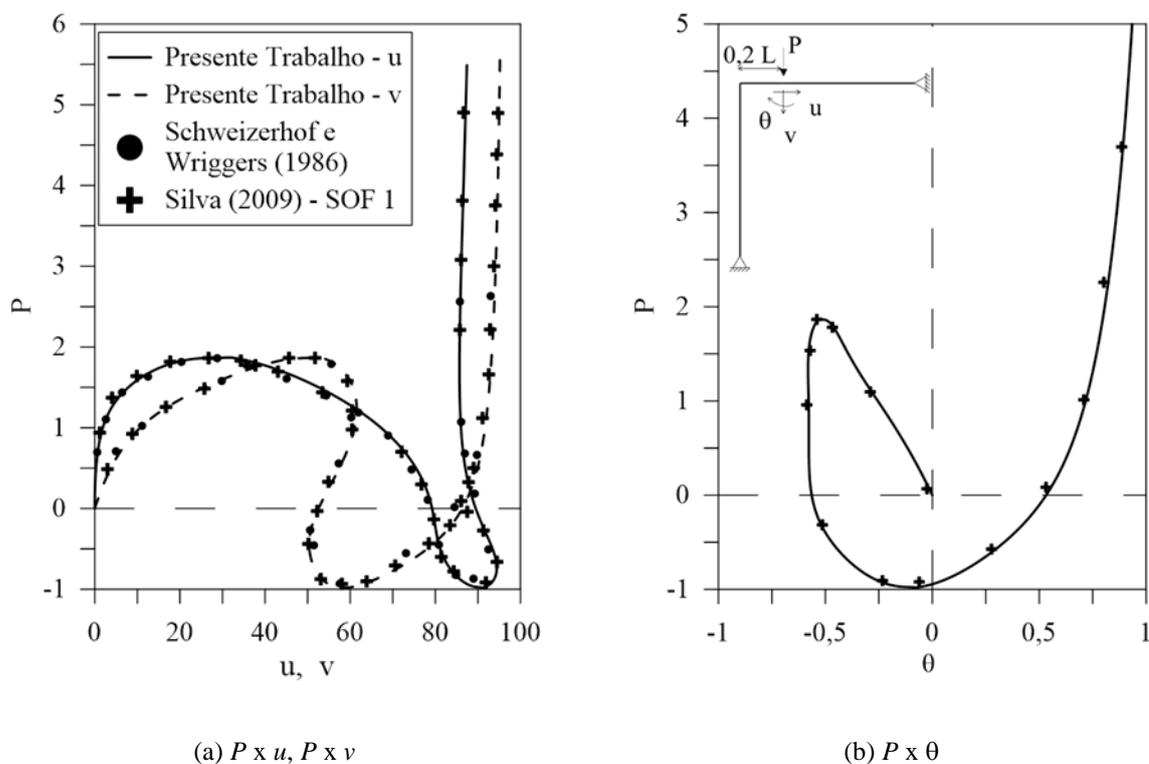
Inicialmente, foi realizada a análise elástica não linear da estrutura ilustrada na Figura 4.1a discretizando tanto as vigas quanto as colunas com dez elementos finitos. Controlou-se os graus de liberdade da seção transversal na qual está aplicada a carga. Na Figura 4.2a é exibida a variação dos deslocamentos horizontal e vertical dessa seção, e na Figura 4.2b, tem-se a curva carga-rotação. Importante mencionar que para análises não lineares, o programa MASTAN2 requer informações sobre a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga aplicada. Os valores usados foram, respectivamente: 0,01; 10000 e 10000.

É possível observar que essas trajetórias de equilíbrio estão em acordo com aquelas encontradas por Schweizerhof e Wriggers (1986) e Silva (2009). Nas curvas são identificados pontos limites de carga (*snap-through*) e de deslocamento (*snap-back*). O ponto limite de carga é um ponto de máximo ou mínimo no caminho de equilíbrio, cuja tangente à curva é horizontal. O ponto limite de deslocamento é um ponto da trajetória com tangente à curva carga-deslocamento vertical. Quando a estrutura atinge os pontos limites, pode se tornar instável e, por isso, a identificação de tais pontos é de grande importância para um projeto de engenharia.

Para estudar os efeitos gerados por um esquema de contraventamento, foi adicionada uma barra na estrutura, disposta como mão francesa e localizada em diferentes posições. Na Figura 4.1b mostra-se a disposição dessa barra. A projeção horizontal do contraventamento,  $d$ , foi admitida igual a  $0,1L$ ,  $0,2L$  e  $0,5L$ . Já a projeção vertical foi assumida igual a  $L/2$ , sendo  $L$  é o comprimento tanto da viga quanto da coluna. Considerou-se para essa nova barra as mesmas propriedades geométricas e físicas dos demais membros. Para essas diferentes situações, realizaram-se análises elásticas não lineares e foram obtidas as trajetórias de equilíbrio exibidas na Figura 4.3. Aqui, a intensidade do incremento de carga para  $d = 0,1L$  necessitou ser reduzido para 0,001 para que fosse possível obter a trajetória de equilíbrio. Os demais

parâmetros foram mantidos.

Figura 4.2 Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de Lee.

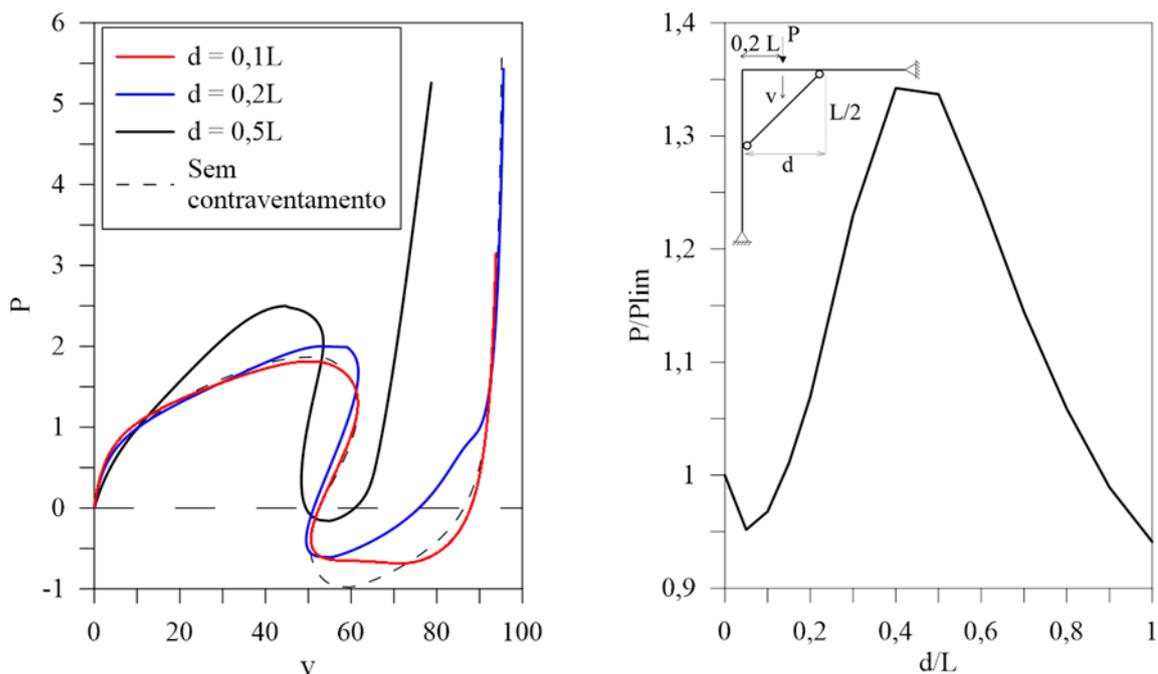


Pode-se notar através da Figura 4.3a que a variação do deslocamento vertical na seção onde a carga está aplicada com o nível de carga mostra uma resposta fortemente não linear e semelhante em todas as situações. Ao posicionar o contraventamento em  $d = 0,5L$ , verificou-se uma alteração mais significativa nas intensidades da carga e correspondente deslocamento associado aos pontos limites de carga e de deslocamento.

Estabeleceu-se, por fim, uma relação entre a carga máxima suportada pela estrutura e a disposição  $d$  da mão francesa, como exibido a Figura 4.3b mostrada anteriormente. Adotou-se uma barra com projeção vertical constante igual a  $L/2$ , variou-se  $d$  e foi avaliado o valor do carregamento referente ao primeiro ponto limite de carga da estrutura. Na figura esse valor está adimensionalizado pela intensidade do carregamento no primeiro ponto limite de carga da estrutura sem contraventamento. Ao observar o gráfico, tem-se que o melhor posicionamento da barra corresponde ao valor de  $d$  entre  $0,4L$  e  $0,5L$ . Sendo assim, pode-se

concluir que uma barra de contraventamento de comprimento maior não garante um melhor desempenho da estrutura em termos de capacidade de carga.

**Figura 4.3 Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de Lee com contraventamento.**



(a)  $P \times v$

(b) Variação da carga máxima com o parâmetro  $d$

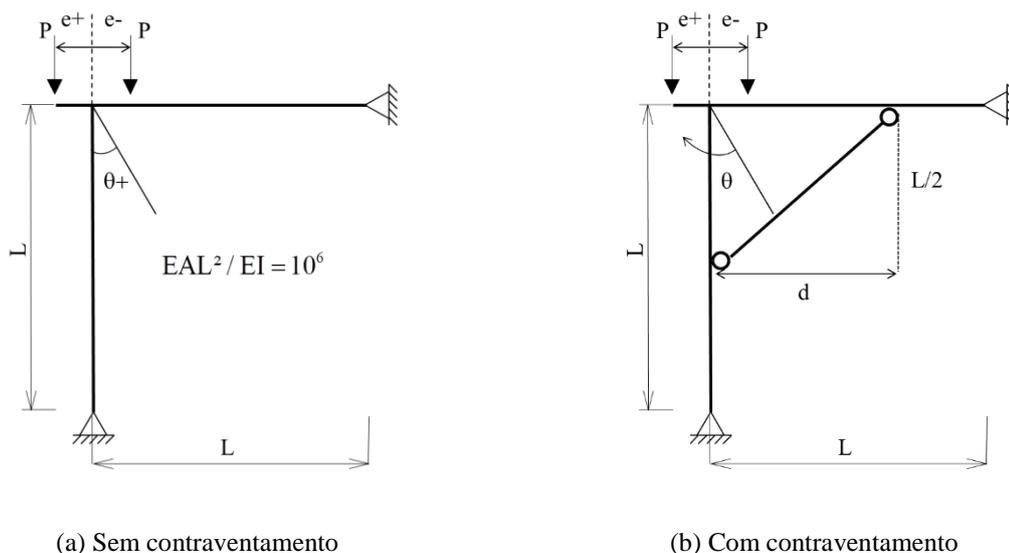
## 4.2 Pórtico de Roorda

O sistema estrutural a ser analisado nesta seção está ilustrado na Figura 4.4a e é conhecido na literatura como o pórtico de Roorda (ROORDA, 1965). Trata-se de mais uma estrutura com formato em L e que apresenta bifurcação assimétrica. Koiter (1967) mostrou que pórticos com essa característica possui comportamento pós-crítico afetado pelas imperfeições. Desde então, a resposta desse tipo de estrutura tem sido bastante investigada. Nesse contexto alguns trabalhos podem ser citados: Roorda e Chilve (1970), Bazant e Cedolin (1991), Galvão (2004) e Sombroek *et al.* (2018).

Para modelagem computacional foram usados vinte elementos finitos para discretizar cada um dos membros estruturais. Além disso, foi alterada a posição de atuação da carga considerando-a distante de uma intensidade  $e = L/10000$  do ponto de ligação entre a viga e a

coluna em duas situações: à esquerda e à direita. A partir daí a rotação da seção que interliga viga e coluna foi avaliada. Rotações negativas ( $\theta^-$ : sentido de giro horário) foram encontradas para a carga inserida à direita da ligação entre as barras; e rotações positivas ( $\theta^+$ ) para a carga aplicada à esquerda.

**Figura 4.4 Pórtico de Roorda.**



Seguindo a modelagem de Roorda (1965), as propriedades físicas e geométricas da viga e da coluna obedecem a relação indicada na Figura 4.4a. Considerou-se módulo de elasticidade, inércia, área e comprimento das barras com intensidades iguais a, respectivamente, 720, 8, 555,56 e 120, e com unidades compatíveis. A partir desses valores, o índice de esbeltez da coluna é 1000. Assim como no problema anterior, trata-se de um elemento estrutural que não pode ser utilizado na prática da construção civil devido à alta susceptibilidade à flambagem. Aqui também, pela forte influência dos efeitos de segunda ordem, a eficiência do sistema de contraventamento nessa estrutura será investigada. Ressalta-se que o comportamento elástico do material será admitido.

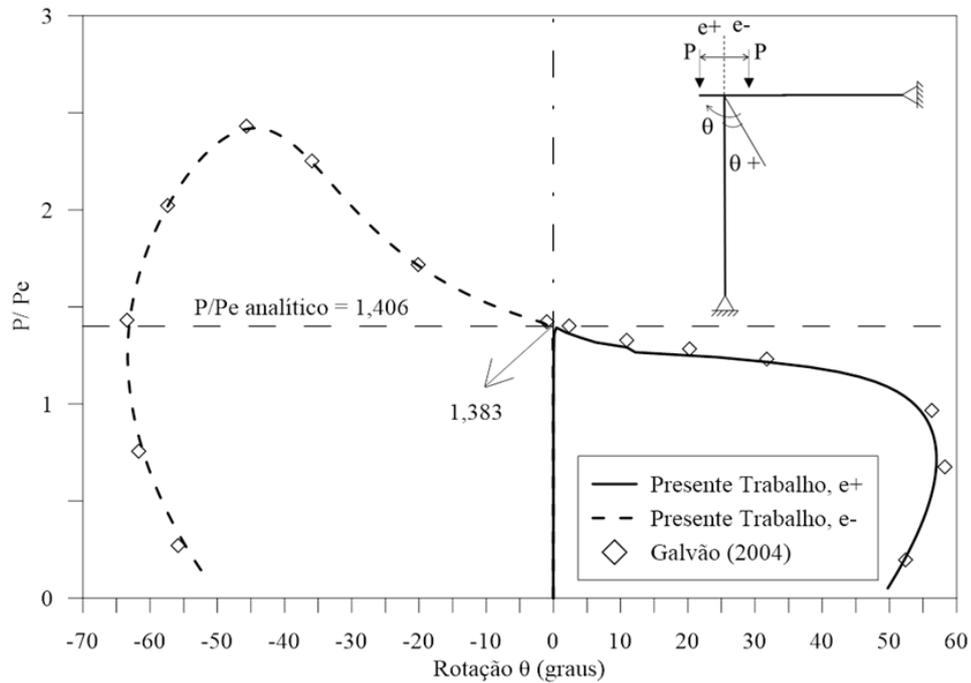
A intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e máxima taxa de carga aplicada foram, respectivamente: 0,1; 10000 e 10000.

A Figura 4.5 traz a trajetória de equilíbrio, que fornece a variação da carga  $P$ , adimensionalizada pela carga de Euler ( $Pe = \pi^2 EI/L^2$ ), com a rotação  $\theta$  da seção que interliga

as barras do pórtico. É possível notar que há boa concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e o fornecido por Galvão (2004). A relação crítica  $P/P_e$  para o ponto de bifurcação foi encontrada igual a 1,393. Esse valor está bem próximo da resposta analítica disponível na literatura que é 1,406, com uma diferença percentual de 0,92% -  $(1,406 - 1,393)/1,406 * 100$ .

Conforme pode ser observado na Figura 4.5, o pórtico apresenta bifurcação assimétrica. De acordo com Galvão (2004), isso distingue o comportamento dos pórticos, em geral, daquele das colunas, que exibem uma bifurcação simétrica estável. Esse comportamento acontece devido à influência do incremento das forças cisalhantes e encurtamento axial das barras em função dos seus respectivos deslocamentos. Assim, quando a coluna flamba para a direita ( $\theta+$ ), um incremento de força cisalhante é produzido na viga fazendo com que as forças axiais de compressão na coluna sejam maiores que a carga aplicada, e assim a resistência do sistema diminui com o incremento da deformação do sistema. Nesse caso, então, a resposta pós-crítica é instável. Se o pórtico se desloca para esquerda ( $\theta-$ ), uma força de tração secundária é induzida na coluna. Como consequência, a carga externa que a estrutura pode suportar cresce com o incremento da deformação do sistema. Nesse caso, a configuração pós-crítica é estável e a inclinação da trajetória cresce até um ponto limite associado a grandes deslocamentos, após o qual esse segmento da trajetória pós-crítica também se torna instável.

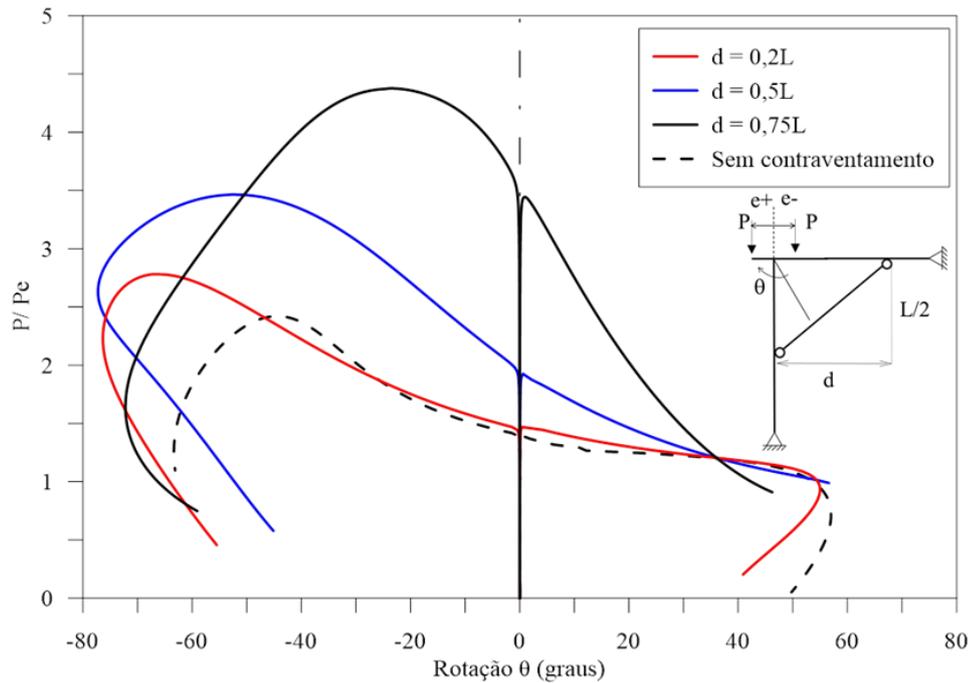
**Figura 4.5** Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de Roorda.



De maneira similar ao estudo com o Pórtico de Lee, estudou-se os efeitos do contraventamento nesse pórtico. Para isso, foi adicionada na estrutura uma barra, disposta como mão francesa conforme ilustrado na Figura 4.4b. A projeção horizontal da barra, indicada por  $d$ , foi variada de acordo com as intensidades  $0,2L$ ;  $0,5L$  e  $0,75L$ , e a projeção vertical do contraventamento foi mantida igual a  $0,5L$ . As mesmas propriedades geométricas e físicas dos outros membros foram assumidas para a barra de contraventamento.

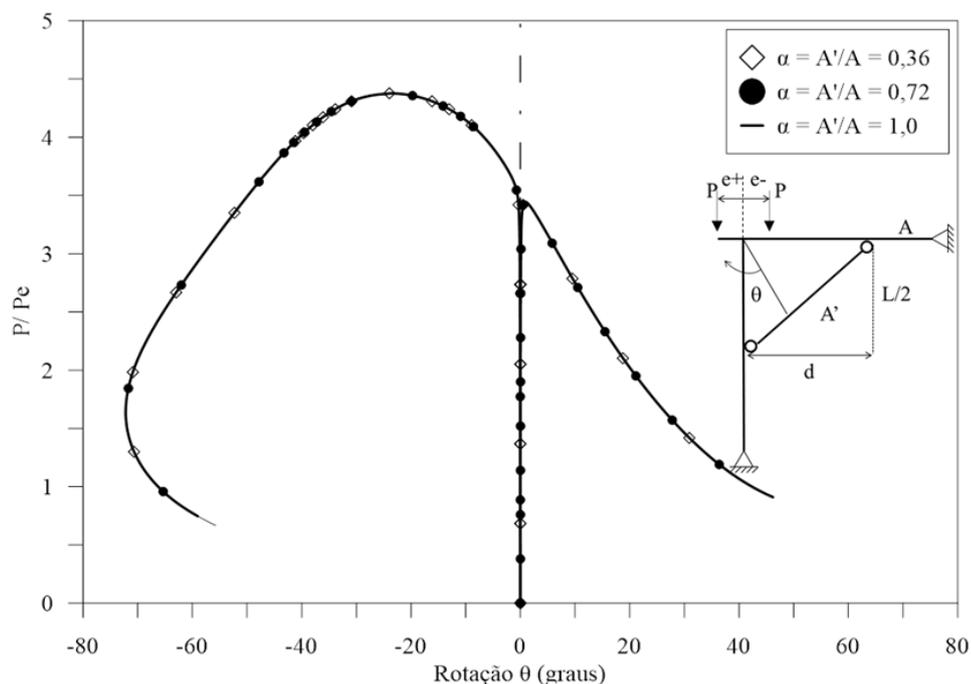
Nesse sentido, para cada disposição  $d$  da barra de contraventamento, foram realizadas análises elásticas não lineares da estrutura, e obtiveram-se as trajetórias de equilíbrio controlando a rotação da seção que interliga viga e coluna. Assim como no estudo sem contraventamento, a carga foi aplicada à esquerda e à direita da ligação viga-coluna. Os resultados encontrados podem ser vistos na Figura 4.6 a seguir. Observando as trajetórias, é possível perceber que o uso do contraventamento com  $d$  igual a  $0,75L$  permitiu que a estrutura alcançasse um maior ponto limite de carga, representado por uma maior relação  $P/Pe$  correspondente ao ponto de bifurcação.

Figura 4.6 Trajetória de equilíbrio para diferentes posições do contraventamento.



Para estudar a influência dos dados geométricos, variou-se a área do perfil das barras de contraventamento, usando o mesmo momento de inércia adotado anteriormente. As vigas e as colunas se mantiveram com as propriedades definidas inicialmente. Esse estudo foi realizado com a mão francesa na disposição  $d$  igual a  $0,75L$ , e projeção vertical considerada como  $0,5L$ . Foram usadas três proporções distintas entre a área da barra de contraventamento ( $A'$ ) e a área da seção dos demais membros ( $A$ ), representadas pelo parâmetro  $\alpha$  ( $A'/A$ ) igual a  $0,36$ ,  $0,72$  e  $1,00$ . Avaliando também a rotação da seção que une a viga à coluna, para a carga aplicada à esquerda e à direita dessa seção, a resposta da análise elástica não linear (Figura 4.7) mostra que a mudança da área da barra de contraventamento não acarretou em alteração significativa na trajetória de equilíbrio, ou seja, o nível de deslocabilidade e a capacidade de carga permanecem inalterados.

Figura 4.7 Respostas considerando o contraventamento com diferentes propriedades geométricas.



### 4.3 Pórtico Simples

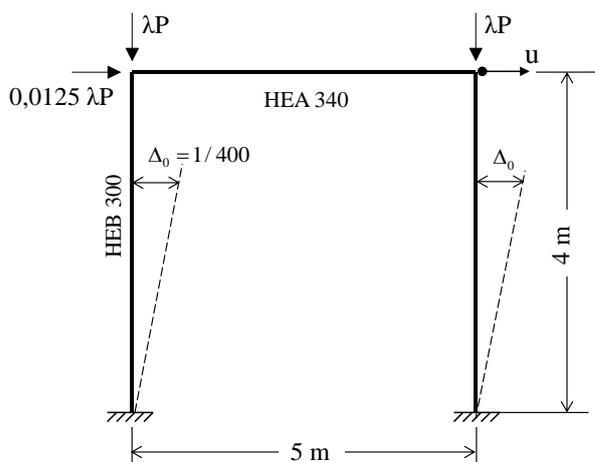
A Figura 4.8a ilustra um pórtico de um andar que teve comportamento inelástico investigado por Vogel (1985) e Ziemian (1990) através do método da zona plástica e, posteriormente, por Chen, Goto, e Liew (1996) usando o método da rótula plástica refinado. As colunas são constituídas por perfis HEB300 dispostas de modo que a flexão ocorra em torno do eixo de menor inércia. O índice de esbeltez dessas barras é 28,57, sendo classificada como um membro robusto, pouco esbelto. A viga é formada pelo perfil HEA340 com flexão em torno de seu eixo de maior inércia. As propriedades dos perfis estão indicadas na Figura 4.8b.

Considerou-se uma imperfeição inicial  $\Delta_0$  nas colunas de intensidade 1/400. O módulo de elasticidade e a tensão de escoamento foram assumidos iguais a 205000 MPa e 235 MPa, respectivamente. O portal é submetido a cargas verticais e horizontal variáveis com a carga  $P$  cuja intensidade é 2800kN dispostas como mostra a Figura 4.8a. As seções das extremidades são consideradas engastadas.

Na discretização por elementos finitos do sistema estrutural foram adotados quatro e dois elementos nas vigas e colunas, respectivamente. Análises inelásticas foram feitas

considerando o módulo de elasticidade tangente como parâmetro controlador da degradação da rigidez do material. A intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga aplicada usados na análise elástica foram, respectivamente: 0,1; 100000 e 100000. Já para análise inelástica, tais parâmetros foram: 0,01; 10000 e 10000.

Figura 4.8 Pórtico simples.



(a) Geometria e carregamento

Perfil	Área (cm <sup>2</sup> )	Inércia (cm <sup>4</sup> )	Módulo plástico (cm <sup>3</sup> )
HEA340	133,5	27260	1850
HEB300	149,1	8563	870,1

(b) Propriedades geométricas dos perfis

Para traçar as trajetórias de equilíbrio resultantes da análise inelástica, controlou-se o deslocamento lateral,  $u$ , sofrido pela seção localizada no topo da coluna à direita. Os resultados obtidos estão exibidos na Figura 4.9, que mostra a variação desse deslocamento — adimensionalizado pelo comprimento da viga e multiplicado por  $10^3$  para melhorar a representação — com o fator de carga aplicado. Os resultados obtidos foram validados ao serem comparados com aqueles fornecidos por Vogel (1985) e Chen, Goto, e Liew (1996). Uma boa aproximação das respostas pode ser percebida.

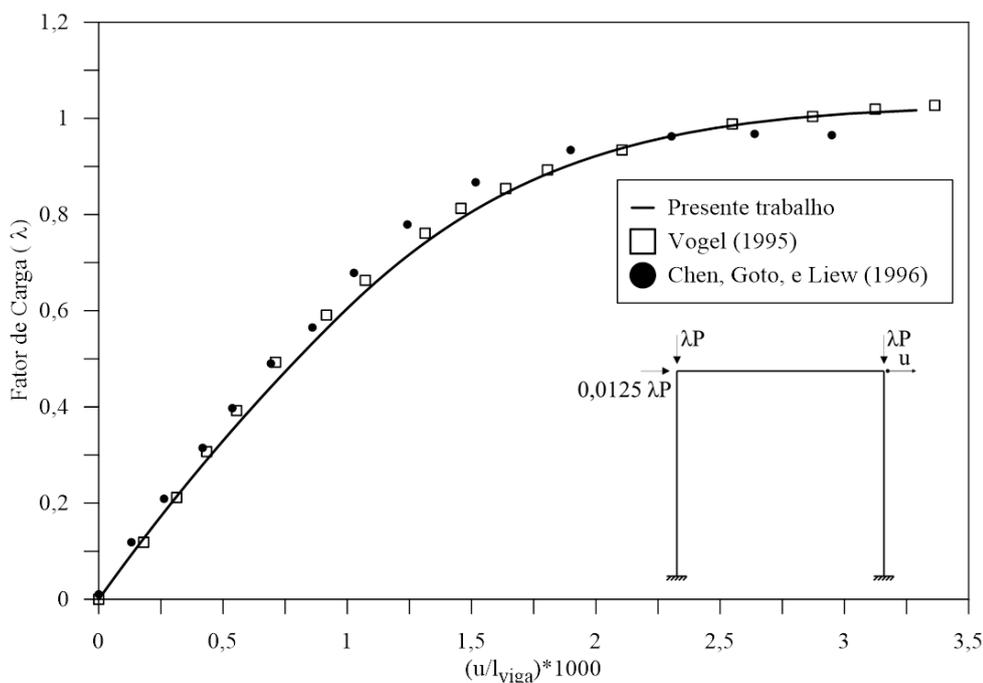
Mais uma vez, visando estudar o efeito do sistema de contraventamento na estrutura, introduziu-se uma barra de contraventamento diagonal no pórtico, formada pelo perfil em aço L 76x76x12,5 com as seguintes propriedades: área - 17,58 cm<sup>2</sup>, inércia - 92,4 cm<sup>4</sup>, e módulo plástico - 31,3 cm<sup>3</sup>.

Aqui, o objetivo inicial foi investigar a influência da forma de ligação, rígida ou rotulada,

da barra de contraventamento com outros membros estruturais nas análises elástica e inelástica do pórtico. Observou-se que a flexibilidade dessa ligação não tem influência significativa na capacidade da carga e nível de deslocabilidade lateral da estrutura, como pode ser visto pelas trajetórias de equilíbrio ilustradas nas Figuras 4.10a e 4.10b, respectivamente, para as análises elástica e inelástica.

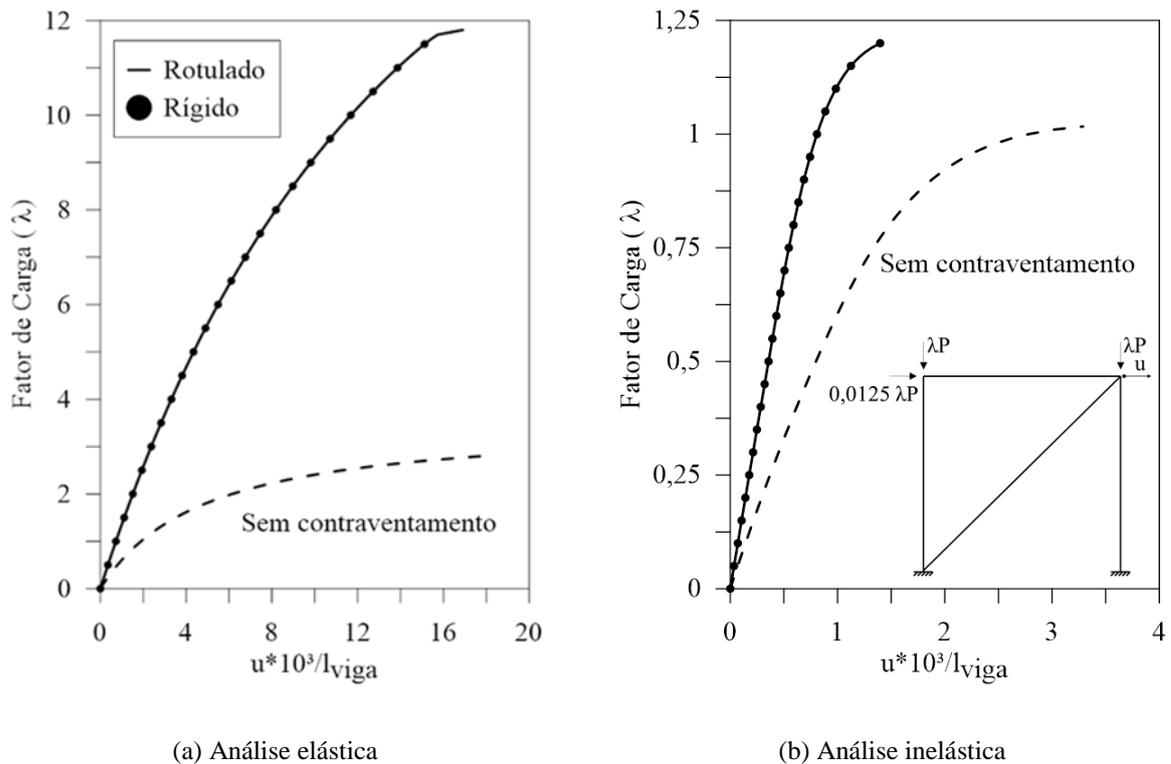
A partir de tais respostas, decidiu-se então adotar a barra de contraventamento interligada aos membros estruturais mediante uma ligação rotulada. Dessa maneira, o contraventamento estará submetido apenas a esforço axial.

**Figura 4.9** Trajetória de equilíbrio na análise inelástica.



Além do que foi observado no parágrafo anterior, através das Figuras 4.10a,b vê-se que inclusão da barra de contraventamento permite reduzir de forma considerável o deslocamento lateral para um mesmo nível de carga. Além disso, alcança-se uma carga limite superior. Nota-se que a diferença é maior na análise elástica. Ao considerar o comportamento não linear do material, a carga limite alcançada não é tão maior, porém, melhoria na contenção lateral pode ser observada.

**Figura 4.10** Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com contraventamento diagonal.



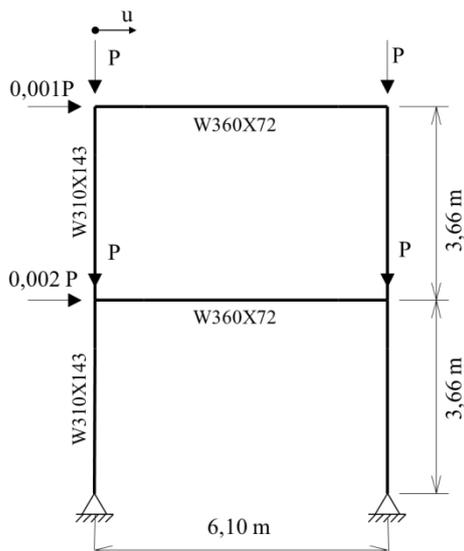
#### 4.4 Pórtico de Dois Pavimentos

Nesta seção será analisado o pórtico de dois pavimentos ilustrado na Figura 4.11a. Cargas verticais de intensidade unitária  $P$  aplicadas nas extremidades da viga solicitam a estrutura, e forças horizontais de pequena intensidade e variáveis com  $P$  simulam imperfeições geométricas. Destaca-se que essa estrutura foi estudada por Chan e Chui (2000) e Silva (2009) que avaliaram a capacidade de carga do sistema ao considerar as ligações entre as vigas e as colunas como semirrígidas. Os autores analisaram também o comportamento do sistema com duas condições de apoios, engastados e rotulados. As propriedades geométricas dos membros estruturais estão na Figura 4.11b. As colunas desse pórtico são classificadas membros robustos (pouco esbeltos), por apresentarem índice de esbeltez igual a 26,17.

Realizou-se então a análise elástica e inelástica da estrutura, e para apresentação da resposta, foi controlado o deslocamento lateral da seção localizada no topo da coluna à esquerda para cada intensidade de carga. Importante dizer que as vigas e as colunas foram discretizadas com dois e um elementos finitos, respectivamente. Considerou-se para a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de

carga aplicada na análise elástica e inelástica, respectivamente, os valores: (10, 10000 e 100000) e (10, 10000 e 10000). O material usado tem módulo de elasticidade e igual a 200000 MPa e tensão de escoamento 235MPa.

**Figura 4.11 Pórtico de dois pavimentos.**



(a) Geometria e carregamento

Perfil	Área (cm <sup>2</sup> )	Inércia (cm <sup>4</sup> )	Módulo plástico (cm <sup>3</sup> )
W310X143	182,5	34812	2422,2
W360X72	91,6	20169	1285,9

(b) Propriedades dos perfis em vigas e colunas

Pelas trajetórias de equilíbrio, Figuras 4.12a e 4.12b, é possível notar que os resultados encontrados estão em acordo com os fornecidos por Chan e Chui (2000). Vale ressaltar que a carga e os deslocamentos foram normalizados, respectivamente, pela relação do módulo de elasticidade do material multiplicada pela área do perfil da coluna, e pelo comprimento das vigas.

Visando melhorar o desempenho estrutural, foi introduzido no sistema barras de contraventamento dispostas em forma de V invertido. A finalidade do estudo agora é avaliar a influência da variação nas propriedades geométricas das seções usadas nessas barras. Três perfis de aço distintos para as travas foram usados: L89x89x12,5, L76x76x12,5 e L64x64x12,5. As propriedades de cada um deles estão indicadas na Tabela 4.1 a seguir.

Figura 4.12 Trajetórias de equilíbrio para pórtico de dois pavimentos.

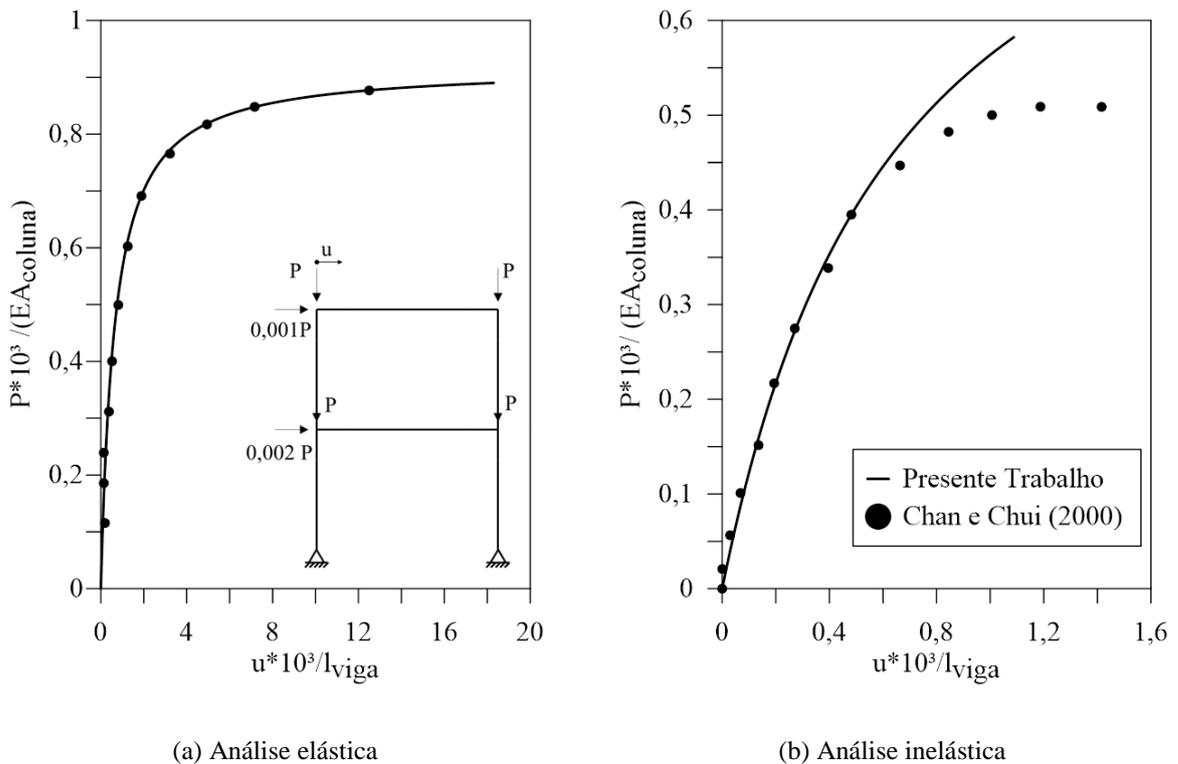


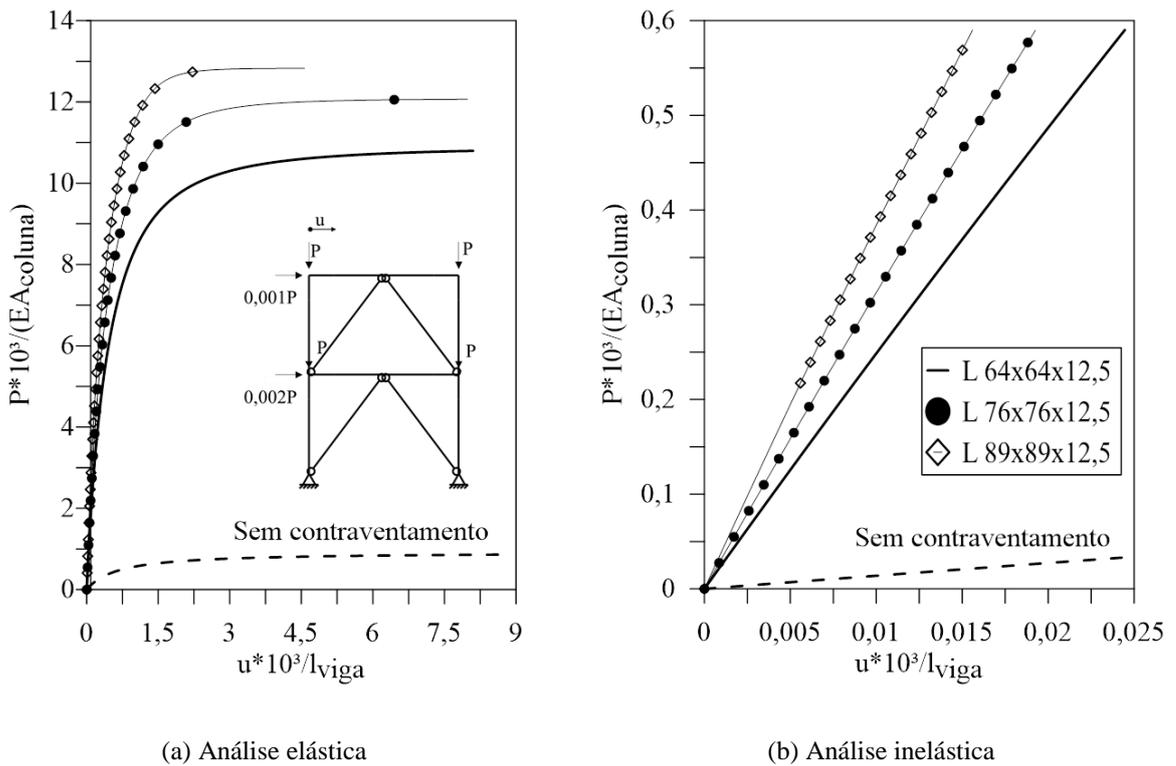
Tabela 4.1 Propriedades dos perfis usados no contraventamento.

Perfil	Área (cm <sup>2</sup> )	Inércia (cm <sup>4</sup> )	Módulo plástico (cm <sup>3</sup> )
L 64X64X12,5	14,52	51,2	21,14
L 76X76X12,5	17,58	92,4	31,3
L 89X89X12,5	21	151,5	43,59

Análises elásticas e inelásticas foram realizadas e os resultados encontrados estão ilustrados na Figura 4.13 que mostra as trajetórias de equilíbrio, e na Tabelas 4.2 que apresenta os valores das cargas limites nesses dois tipos de análises. Verifica-se para a análise elástica que, ao utilizar o perfil L 89x89x12,5 nas barras de contraventamento, a estrutura adquire uma maior rigidez, suportando uma maior carga e sofrendo um menor deslocamento, seguido pelo perfil L76x76x12,5 e L 64x64x12,5, respectivamente. Já ao considerar o comportamento não linear do material, independente do perfil utilizado, a carga limite alcançada foi a mesma. Porém, para pequenos incrementos de carga já se percebe, para um mesmo nível de carga, que a estrutura sofre menor deslocamento lateral ao adotar o perfil L

89x89x12,5, seguido, respectivamente, pelos perfis L 76x76x12,5 e L64x64x12,5. Logo, conclui-se que a rigidez do sistema está diretamente relacionada com a área do perfil do contraventamento. As trajetórias de equilíbrio foram construídas avaliando o deslocamento lateral no topo da estrutura com a solicitação atuante.

**Figura 4.13 Trajetórias de equilíbrio para pórtico com barras de contraventamento.**



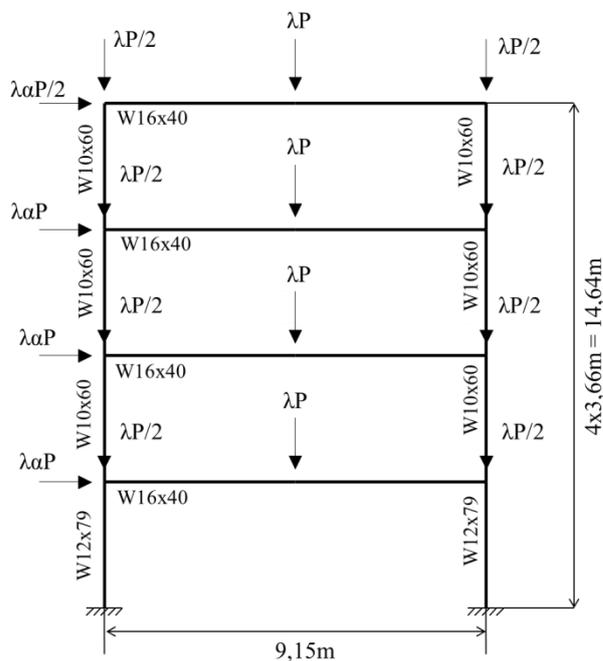
**Tabela 4.2 Carga limite no pórtico com diferentes perfis nas barras de contraventamento.**

Perfil	Análise elástica	Análise inelástica
L 64x64x12,5	39720 kN	2160 kN
L 76x76x12,5	44080 kN	2160 kN
L 89x89x12,5	46820 kN	2160 kN

#### 4.5 Pórtico de Quatro Pavimentos

A estrutura exibida na Figura 4.14a trata-se do pórtico de quatro andares usado no estudo desta seção. Kassimali (1983), Yoo e Choi (2008) e Silva (2009) analisaram essa estrutura para validarem as formulações não lineares. Kassimali (1983) propôs uma solução baseada no método da rótula elasto-plástica. Yoo e Choi (2008) discutiram um novo método de análise de flambagem inelástica para determinar a carga crítica de estruturas metálicas através da análise de um problema de autovalor, utilizando a teoria do módulo tangente e a curva de resistência para colunas do AISC-LRFD (AISC, 1986). Além desse método, é utilizado também, para fins de comparação, o método da rótula plástica refinado. Já Silva (2009) apresentou duas abordagens distintas para análise inelástica de segunda ordem: uma que se baseia na proposta de Liew, White e Chen (1993) utilizando o conceito de módulo tangente  $E_t$ , e uma outra formulação que segue os conceitos da formulação desenvolvida por Chan e Chui (2000).

Figura 4.14 Pórtico de quatro pavimentos.



(a) Geometria e carregamento

Perfil	Área (cm <sup>2</sup> )	Inércia (cm <sup>4</sup> )	Módulo plástico (cm <sup>3</sup> )
W 10x60	114,1	14260	1226
W 12X79	149,7	27510	1949
W 16X40	75,79	21707	1201,5

(b) Propriedades das vigas e das colunas

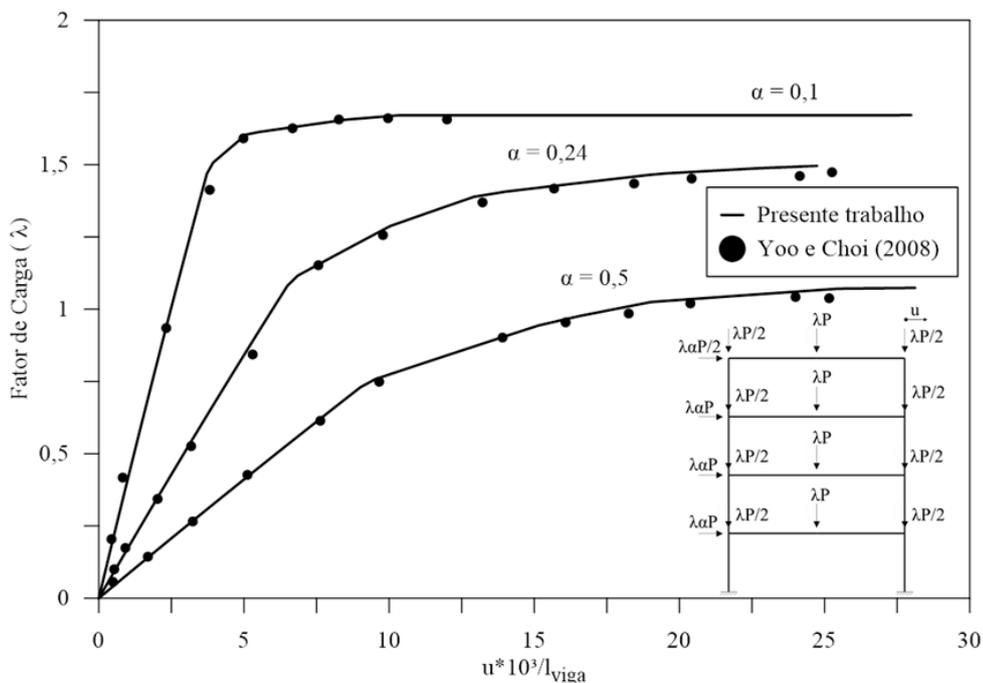
As propriedades geométricas de cada um dos perfis estão indicadas na Figura 4.14b. O

módulo de elasticidade e a tensão de escoamento foram assumidos iguais a 201000 MPa e 236 MPa, respectivamente.

Referente à solicitação, como pode ser visualizado na Figura 4.14a, nas vigas aplicam-se cargas verticais variáveis de intensidades  $P$  no centro do vão e  $P/2$  nas extremidades, com  $P$  igual a 133,4 kN. Já as colunas são submetidas a cargas horizontais também variáveis com  $P$ ,  $\alpha P$ . Três diferentes valores para o coeficiente  $\alpha$  foram adotados: 0,1; 0,24 e 0,5. Nas análises, essas cargas foram incrementadas através do parâmetro  $\lambda$  até atingir a carga de colapso. Adotou-se na discretização do pórtico um e dois elementos finitos nas colunas e nas vigas, respectivamente. Para realizar a análise inelástica foram adotados para a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga os valores: 0,01, 10000 e 10000.

A Figura 4.15 mostra a variação do deslocamento horizontal,  $u$ , do quarto pavimento durante o processo de carregamento. São mostrados também os resultados numéricos obtidos por Yoo e Choi (2008), onde é possível notar uma concordância nas respostas.

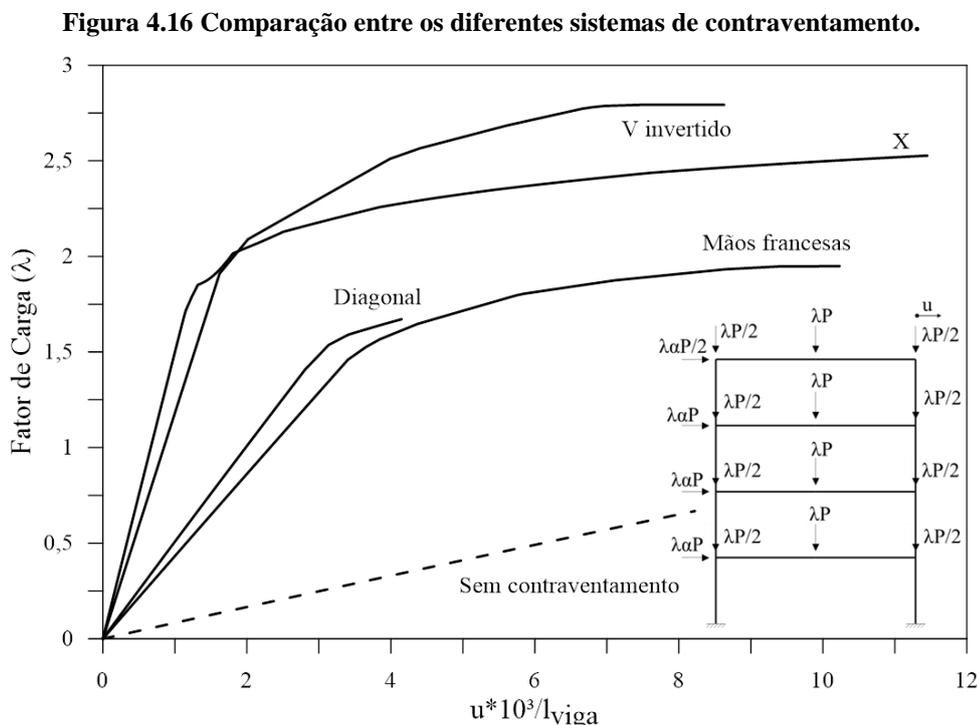
**Figura 4.15 Resultado da análise inelástica do pórtico de quatro pavimentos.**



Buscando melhorar o comportamento estrutural do pórtico, os efeitos de diferentes

sistemas de contraventamento foram investigados. Como já mencionado anteriormente, Sarno e Elnashaib (2009) destacaram os sistemas mais frequentemente usados, são eles: pórticos apoiados concêntricamente (CBFs) — barras de contraventamento dispostas em V, V invertido, K, X e diagonais —, apoiados excêntricamente (EBFs) e as mãos francesas (KBFs). Neste trabalho, optou-se por introduzir contraventamentos através de barras dispostas em diagonal; em mãos francesas, nas quais as barras foram posicionadas com as extremidades situadas no meio das vigas e das colunas; V invertido, e em X. Considerou-se tais barras formadas pelo perfil L 76x76x12,5, cujas propriedades podem ser encontradas na Tabela 4.1 mostrada na seção anterior, e ligadas de forma articulada aos outros membros da estrutura.

As análises inelásticas do pórtico, agora com as barras de contraventamento, foram estabelecidas adotando o parâmetro  $\alpha$ , que define a intensidade da solicitação lateral, igual a 0,5. Pelas trajetórias de equilíbrio ilustradas na Figura 4.16, onde se controla o deslocamento do topo da coluna do pórtico para os diferentes sistemas de contraventamento, destaca-se a relevância desses sistemas.



Verifica-se a possibilidade de diminuir o deslocamento lateral e, também, de aumentar, consideravelmente, a carga limite da estrutura com adoção das barras de contraventamento.

Pode-se perceber também que, adotando a disposição das barras em V invertido, a estrutura suporta uma maior intensidade de carga. Esse contraventamento mais que dobrou a capacidade de carga. Por outro lado, para barras de contraventamento dispostas em diagonal, o pórtico perdeu estabilidade após um fator de carga de intensidade 1,678. Essa foi a situação mais desfavorável em termos de carga limite. Os valores atingidos para a carga limite em cada uma das condições analisadas estão indicados na Tabela 4.3 que mostra também o acréscimo alcançado nesse parâmetro ao adicionar o contraventamento.

Além disso, para um fator de carga  $\lambda < 2,0$ , a deslocabilidade lateral da estrutura é próxima ao considerar o contraventamento em X ou em V invertido. Da mesma forma, para valores de  $\lambda < 1,5$ , o nível de deslocamento do pórtico com mãos francesas e em diagonal não sofre muita alteração.

**Tabela 4.3 Fator de carga limite e número de rótulas plásticas para  $\alpha=0.5$ .**

Sem contraventamento	Diagonal	Mãos francesas	V invertido	X
1,081	1,678	1,951	2,797	2,664
<b>Acréscimo (%)</b>	55,2	80,5	158,7	146,4
Número de rótulas plásticas				
9	9	10	13	29

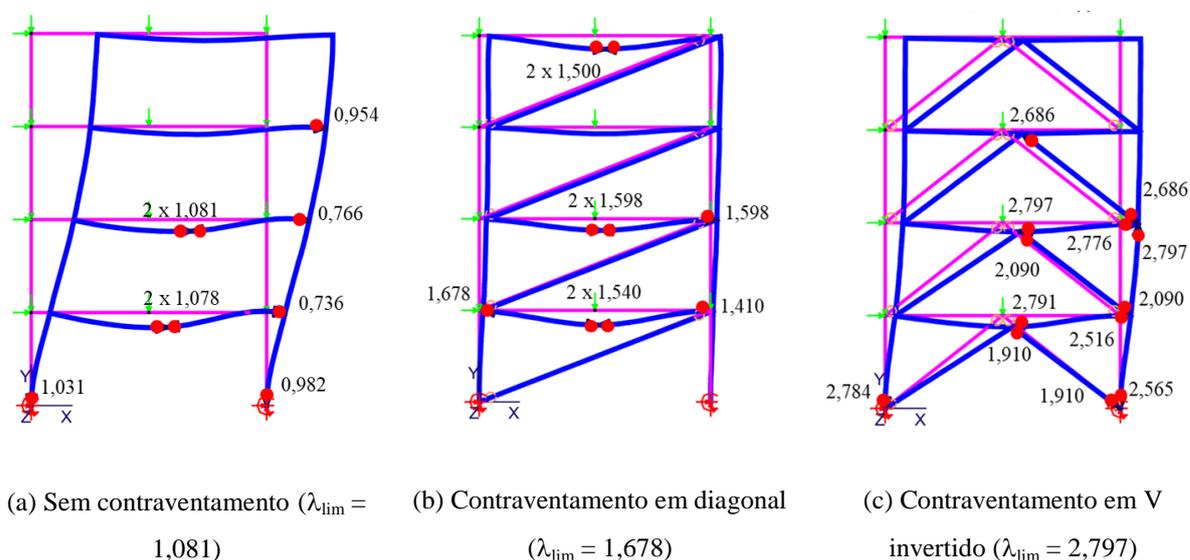
As Figuras 4.17a,b,c trazem as configurações deformadas da estrutura sem contraventamento, com contraventamento em diagonal, e em V invertido, respectivamente. Cabe destacar que no traçado dessas configurações foi usado um fator de escala para facilitar a visualização. Os locais e os fatores de carga onde se formou rótula plástica estão indicados.

Na Figura 4.17a as rótulas aconteceram com maior frequência nas vigas, pois elas recebem acréscimos de forças axiais de compressão. Ao introduzir barras de contraventamentos dispostas em diagonal, Figura 4.17b, o deslocamento lateral diminuiu, e as rótulas se formaram para uma intensidade de carga maior. No entanto, os locais de ocorrência se mantiveram predominantemente nos membros estruturais dispostos na horizontal. Diferentemente, ao inserir barras posicionadas formando um V invertido, apenas quatro rótulas situaram nas vigas, apesar de uma maior quantidade, treze no total. Isso pode ser

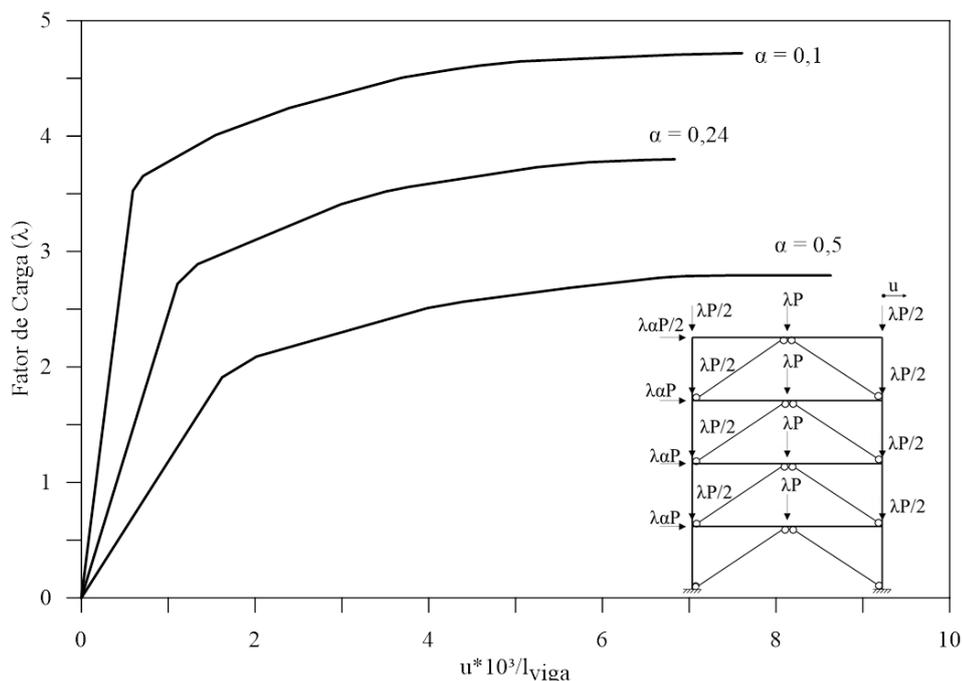
verificado na Figura 4.17c. As rótulas formadas nas barras de contraventamento não interferiram na estabilidade da estrutura. Vale repetir que essa disposição foi a melhor dentre as estudadas, permitindo que o sistema alcançasse maior capacidade de carga. Portanto, é de suma importância analisar o comportamento do pórtico sem contraventamento, para que se possa definir o melhor sistema de contraventamento. Normalmente, o mais eficiente é o que mais reduz os deslocamentos laterais que desestabilizam a estrutura.

Após a definição da melhor disposição do sistema de contraventamento, investigou-se a estrutura sofre influência da intensidade da carga lateral aplicada, avaliando o comportamento da estrutura com contraventamento em V invertido. Adotou-se diferentes valores para o parâmetro  $\alpha$  (0,1; 0,24 e 0,5). A trajetória, ilustrada na Figura 4.18, mostra que a resposta encontrada ao introduzir as barras de contraventamento se manteve semelhante àquela encontrada para a estrutura sem o contraventamento (Figura 4.15). Para  $\alpha$  com intensidade 0,1 atingiu-se um maior fator de carga e, para um mesmo nível de sollicitação lateral ( $\lambda$ ), um menor deslocamento lateral.

**Figura 4.17 Configurações deformadas da estrutura.**



**Figura 4.18 Resultado da análise inelástica do pórtico com contraventamento V invertido.**



#### 4.6 Pórtico de Seis Pavimentos

O pórtico de seis andares com quadro duplo simétrico ilustrado na Figura 4.19 será estudado nesta seção. Tal pórtico é conhecido na literatura como o pórtico de Vogel por ter sido proposto por Vogel (1985) para calibração de formulações inelásticas.

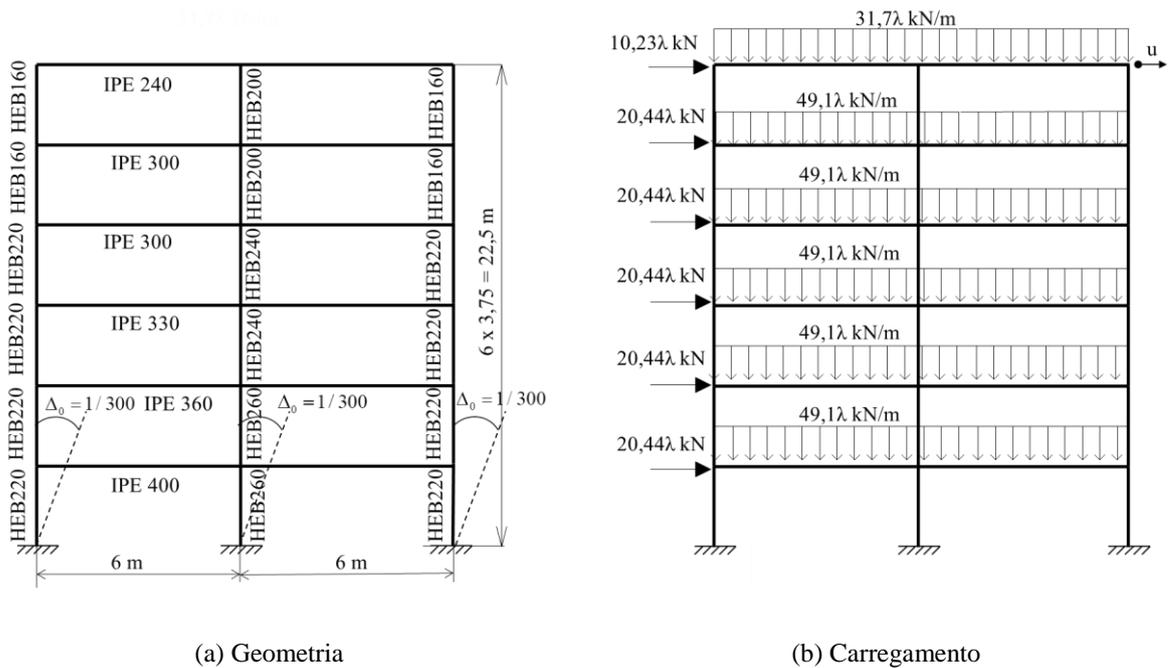
As vigas são formadas por perfis IPE 240, IPE 300, IPE 330, IPE 360 e IPE 400, e nas colunas foram usados os perfis HEB 160, HEB 200, HEB 220, HEB 240 e HEB260, todos dispostos de forma que a flexão ocorra em torno do eixo de maior inércia. Uma imperfeição inicial  $\Delta_0$  (pequena inclinação das colunas) é considerada. O material adotado possui módulo de elasticidade igual a 205000 MPa e tensão de escoamento 235 MPa. A estrutura está submetida a cargas variáveis nas colunas e nas vigas, sendo  $\lambda$  o parâmetro que sofre alteração e que, cabe lembrar, é automaticamente atualizado pelo programa MASTAN2. Apenas seu valor inicial é necessário informar.

Considerou-se para a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga aplicada nas análises elástica e inelástica, respectivamente, os valores: (0,1, 100000 e 100000) e (0,01, 10000 e 10000).

Inicialmente realizou-se a análise elástica não linear da estrutura. O pórtico foi

discretizado em cada vão das vigas e colunas, com sete e dois elementos, respectivamente. Pela trajetória de equilíbrio encontrada, Figura 4.20a, é possível verificar a eficiência do programa utilizado. Resultados em acordo com aqueles da literatura fornecidos por Vogel (1985) e Chan e Chui (2000) foram obtidos.

**Figura 4.19 Pórtico de 6 pavimentos, geometria e carregamento.**



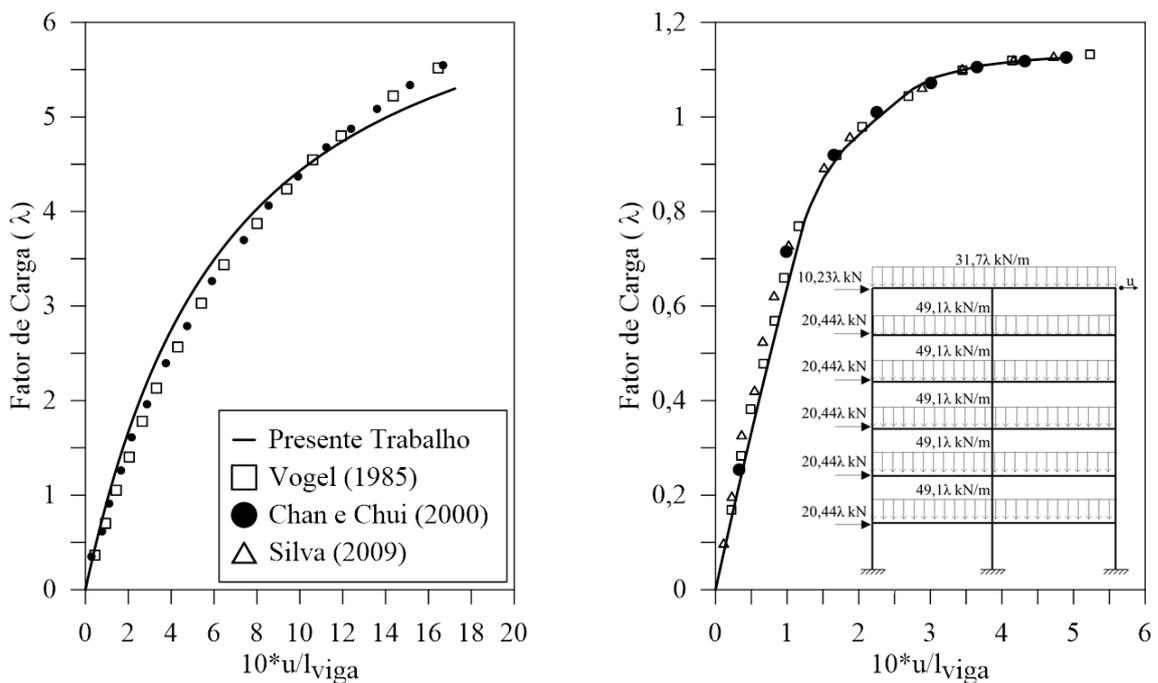
**Tabela 4.4 Propriedades geométricas dos perfis.**

Perfil	Área (cm <sup>2</sup> )	Inércia (cm <sup>4</sup> )	Módulo plástico (cm <sup>3</sup> )
IPE 240	39,1	3892	366,76
IPE 300	53,8	8356	628,51
IPE 330	63,3	11908	814,22
IPE 360	72,7	16270	1019
IPE 400	84,5	23130	1307
HEB 160	54,3	2492	354
HEB 200	78,1	5696	642,5
HEB 220	91	8091	827
HEB 240	106	11260	1053
HEB 260	118,4	14920	1283

Posteriormente estudou o comportamento da estrutura, considerando a degradação da rigidez do material nas análises. Utilizou-se uma malha de elementos finitos menos refinada para diminuir o custo computacional, visto que as respostas obtidas apresentaram uma boa precisão nos resultados. Usaram-se então quatro e dois elementos, em cada vão das vigas e colunas, respectivamente. A Figura 4.20b mostra a trajetória de equilíbrio obtida. Comparando com a Figura 4.20a nota-se que o comportamento não linear do material exerce influência significativa na resposta, reduzindo bastante a capacidade de carga da estrutura.

Considerando ainda o comportamento não linear do material através da análise inelástica, foram investigados os efeitos da posição dos sistemas de contraventamentos na resposta. Introduziu-se, então, barras dispostas em V invertido interligadas de forma articulada com os demais membros. As barras foram constituídas pelo perfil de aço L76x76x12,5 e colocadas em cinco posições distintas, como mostra a Figura 4.21.

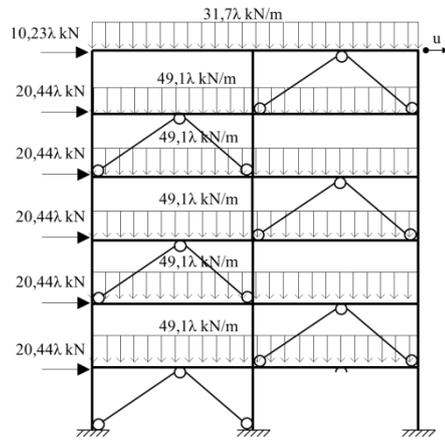
**Figura 4.20 Trajetória de equilíbrio para o pórtico seis pavimentos.**



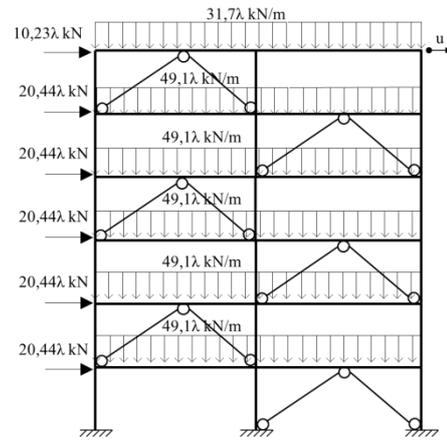
(a) Análise elástica

(b) Análise inelástica

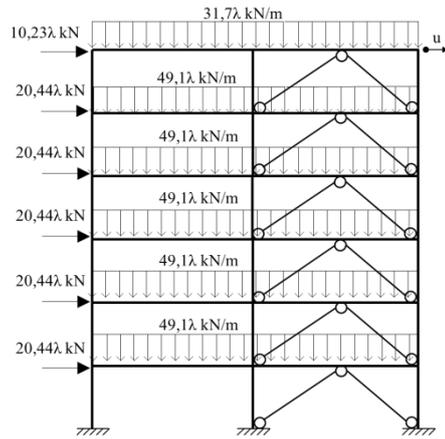
**Figura 4.21 Características dos contraventamentos no pórtico de seis pavimentos.**



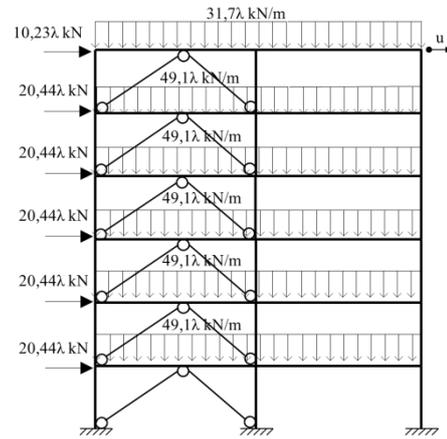
(a) Caso 1



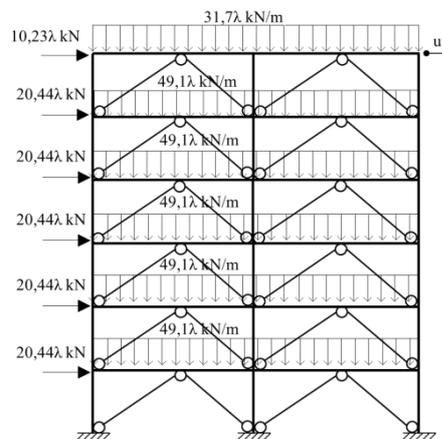
(b) Caso 2



(c) Caso 3



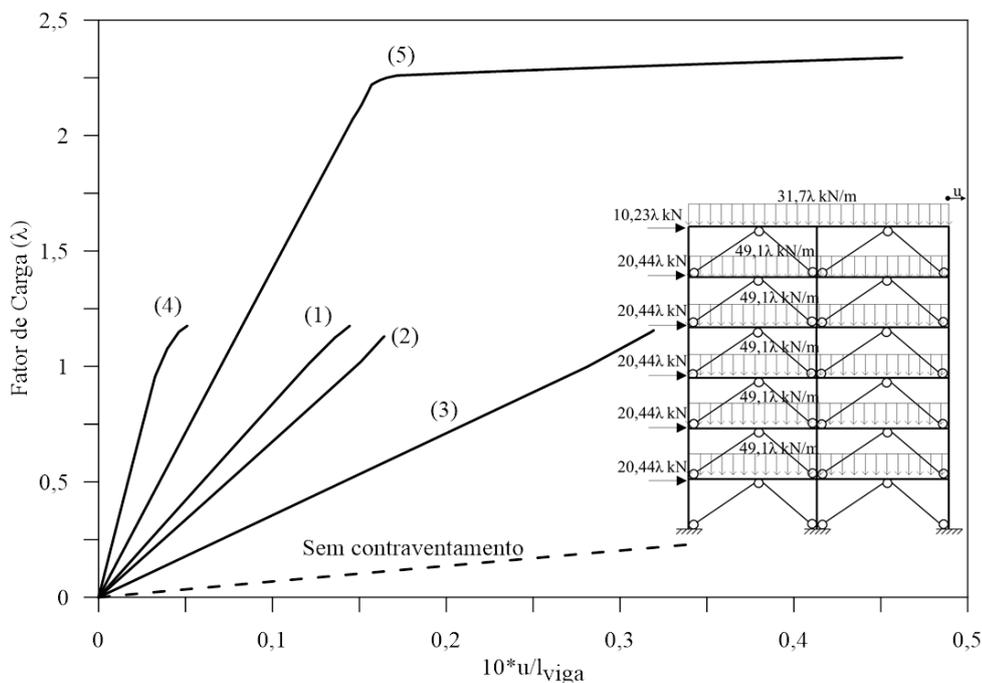
(d) Caso 4



(e) Caso 5

Ao analisar as trajetórias de equilíbrio exibidas nas Figuras 4.22, conclui-se que, no Caso 5 ao inserir o contraventamento interligando todas as extremidades inferiores das colunas ao centro das vigas, a estrutura fica mais rígida e, portanto, alcança um maior fator de carga. Todas as configurações adotadas diminuíram consideravelmente o deslocamento lateral sofrido pela estrutura. Vale destacar que, dependendo da solicitação à qual a estrutura estará submetida, dispondo os sistemas de contraventamento apenas nos vãos da esquerda (Caso 4), pode ser possível obter um comportamento mais otimizado e econômico que aquele utilizando as disposições dos Casos 1, 2 3 e 5. Observa-se que as barras dispostas como no Caso 4 impedem mais o deslocamento lateral sofrido pelo topo do pórtico.

**Figura 4.22 Análise inelástica para o pórtico de seis pavimentos contraventado.**

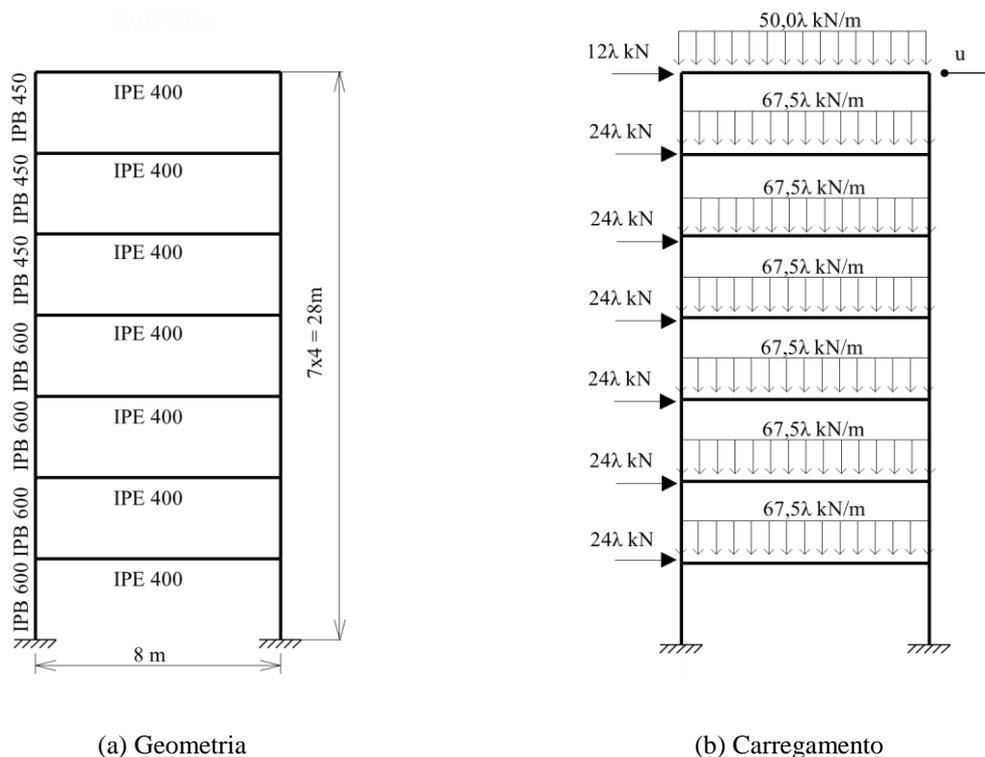


#### 4.7 Pórtico de Sete Pavimentos

O pórtico de sete pavimentos ilustrado na Figura 4.23 é estudado nesta seção. Cada pavimento possui 4 metros de altura, e as vigas têm vãos com 8 metros. As vigas são formadas pelo perfil IPE 400, e as colunas pelos perfis IPB 450 e IPB 600, com flexão em torno do eixo de maior inércia e cujas propriedades são resumidas na Tabela 4.5. O material possui módulo de elasticidade igual a 210000 MPa e tensão de escoamento 235 MPa. A estrutura está submetida a carregamento horizontal variável nas colunas, de intensidades  $12\lambda$

kN e  $24\lambda$  kN, e cargas distribuídas verticalmente nas vigas com intensidades  $50\lambda$  kN/m e  $67,5\lambda$  kN/m, nas quais  $\lambda$  é um parâmetro escalar que sofre variação ao longo do processo incremental da análise não linear.

**Figura 4.23 Pórtico de sete pavimentos.**



(a) Geometria

(b) Carregamento

**Tabela 4.5 Propriedades geométricas dos perfis das vigas e colunas.**

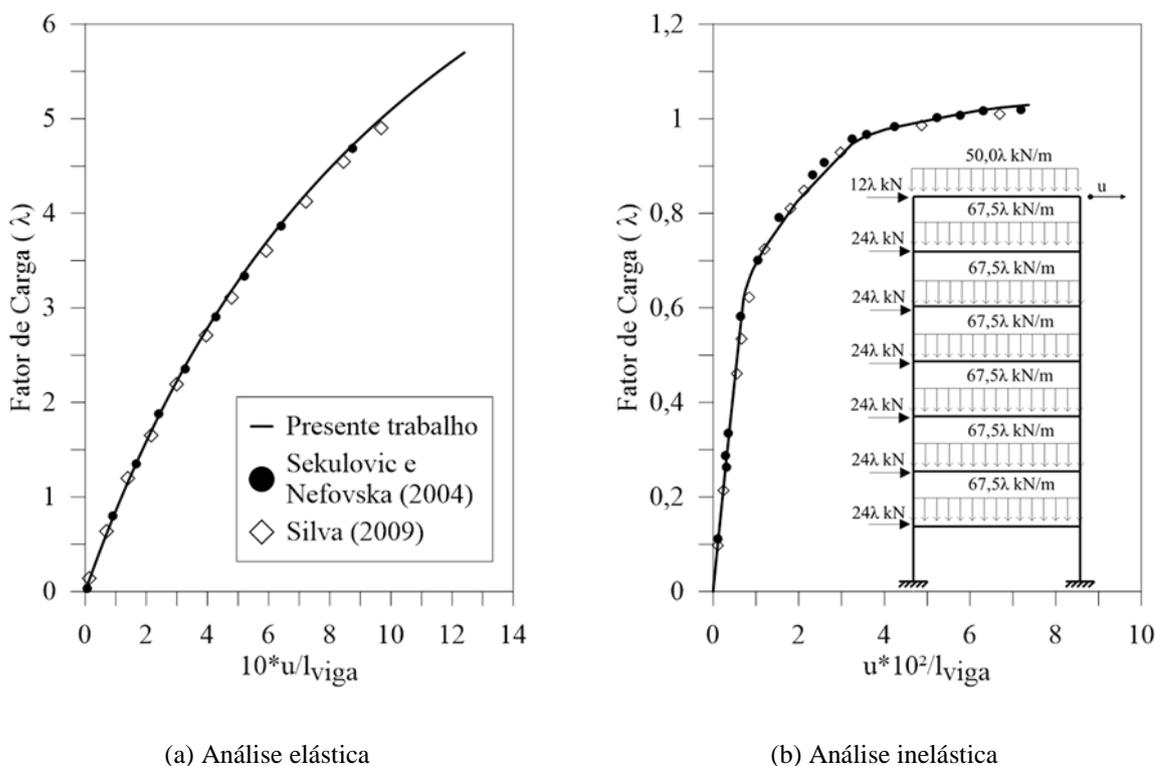
Perfil	Área (cm <sup>2</sup> )	Inércia (cm <sup>4</sup> )	Módulo plástico (cm <sup>3</sup> )
IPE 400	84,1	23015	1301,19
IPB 450	218	91609	1197,66
IPB 600	270	171040	6426,09

Considerou-se para a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga aplicada na análise elástica e inelástica, respectivamente, os valores: (0,1, 100000 e 10000) e (0,01, 1000 e 1000).

Para a discretização do pórtico adotou-se uma malha com quatro elementos para as vigas

e um elemento finito para as colunas. Nas análises, para avaliar o nível de deslocabilidade lateral do pórtico, controlou-se o deslocamento lateral da seção localizada no topo da coluna à direita. Tanto na análise elástica quanto na inelástica, Figuras 4.24a e 4.24b, as respostas obtidas estão em concordância com aquelas fornecida por Sekulovic e Nefovska (2004) e Silva (2009). Ao comparar as trajetórias de equilíbrio, nota-se a influência da degradação da rigidez do material, com a redução da capacidade de carga da estrutura em decorrência da perda de rigidez estrutural causada pela plastificação dos membros.

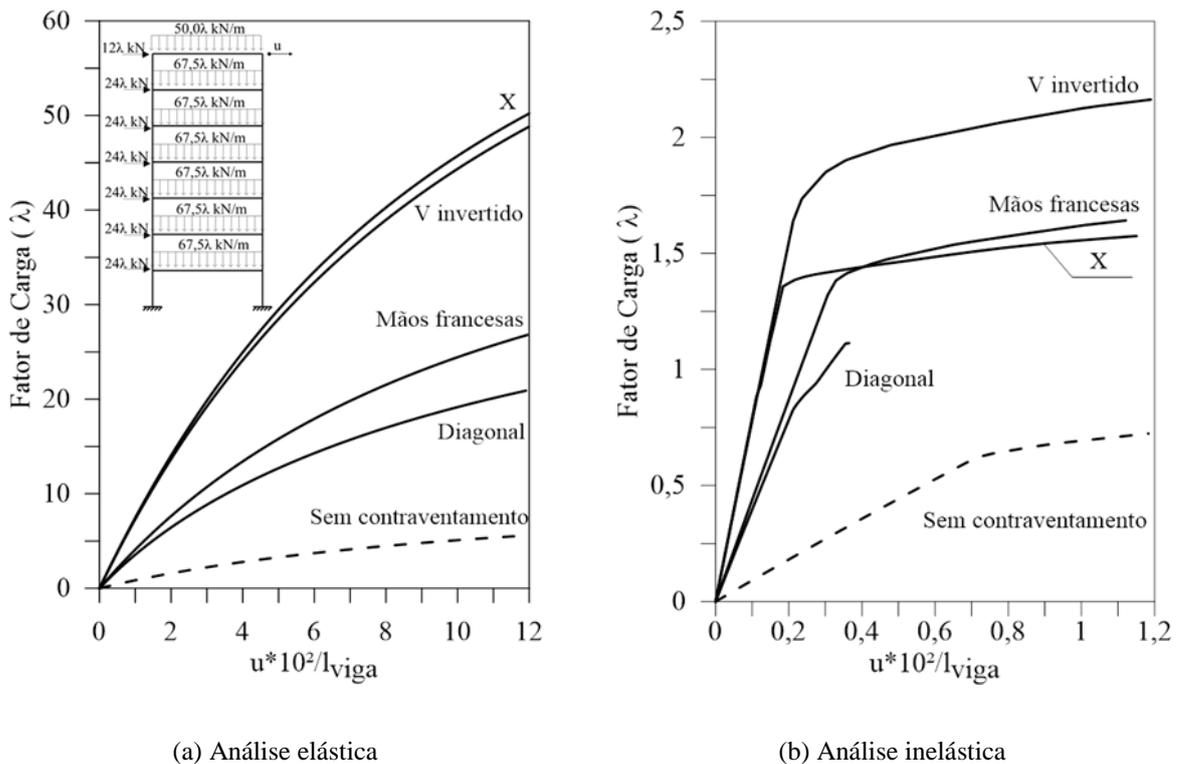
**Figura 4.24 Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com sete pavimentos.**



Assim como para o pórtico de quatro pavimentos, buscando ainda estudar os tipos de contraventamento, quatro diferentes sistemas foram inseridos no sistema estrutural: barras dispostas em diagonal, em V invertido, em X e mãos francesas. No caso das mãos francesas, as extremidades das barras foram conectadas nas seções centrais das vigas e das colunas. A ligação de todos esses sistemas com os outros membros do pórtico foi mantida como rotulada. O perfil usado nas barras de contraventamento foi L76x76x12,5 cujas propriedades geométricas podem ser encontradas na Tabela 4.1 mostrada anteriormente.

As Figuras 4.25a e 4.25b mostram, respectivamente, as trajetórias de equilíbrio encontradas ao realizar as análises elástica e inelástica da estrutura com travas. Indica-se a variação do deslocamento lateral sofrido pela seção localizada topo da coluna à direita com a intensidade de carga. Os valores obtidos para os fatores limite de carga alcançados em todas as análises efetuadas são mostrados na Tabela 4.6 (análise elástica) e na Tabela 4.7 (análise inelástica). A partir dos resultados indicados nessas figuras e tabelas, nota-se na análise elástica, que o melhor desempenho aconteceu com adição de barras em forma de X, permitindo que o pórtico atingisse maior capacidade de carga. Porém, destaca-se também o bom resultado alcançado com o contraventamento em V invertido nesse tipo de análise.

**Figura 4.25 Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com contraventamentos.**



Já ao considerar a degradação de rigidez do material, a melhor situação foi encontrada com as travas em V invertido. Isso pode ter ocorrido, pois a estrutura sem contraventamento apresenta formação de rótulas plásticas predominantemente nas vigas como mostra a Figura 4.26a. Ao adicionar contraventamentos V invertido e mãos francesas as vigas ficam com mais um ponto de apoio, o que faz com que a formação de rótulas nesses locais diminua como pode

ser observado na Figura 4.26b. Por esse motivo também, a partir de um fator de carga em torno de 1,45, o pórtico com mãos francesas apresenta um melhor comportamento que aquele com as barras de contraventamento em X.

A partir das Tabelas 4.8 e 4.9 verifica-se a eficiência dos contraventamentos para ambas as análises com redução considerável do deslocamento lateral sofrido pela estrutura quando submetida a um fator de carga comum. Para análise elástica, comparou-se o deslocamento para um  $\lambda = 5$ , obtendo uma redução acima de 80%. Já para análise inelástica, avaliando o deslocamento para um  $\lambda = 1$  os contraventamentos forneceram uma redução de deslocamento lateral superior a 90%.

**Tabela 4.6 Fator de carga limite encontrado na análise elástica.**

Sem contraventamento	Diagonal	Mãos francesas	V invertido	X
11,8	29,9	42,3	75,6	77,8
Acréscimo (%)	153,4	258,5	540,7	559,3

**Tabela 4.7 Fator de carga limite encontrado na análise inelástica.**

Sem contraventamento	Diagonal	Mãos francesas	V invertido	X
1,029	1,114	1,786	2,296	1,952
Acréscimo (%)	8,2	73,6	123,1	89,7
Número de rótulas plásticas				
23	16	29	35	48

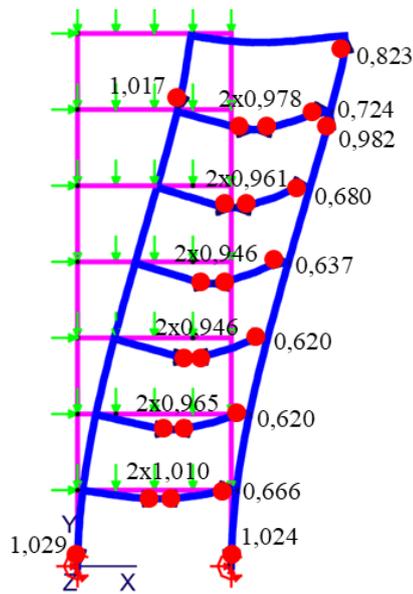
**Tabela 4.8 Deslocamento lateral encontrado na análise elástica, para  $\lambda=5$ .**

Sem contraventamento	Diagonal	Mãos francesas	V invertido	X
77,40 cm	11,83 cm	9,94 cm	5,35 cm	5,24 cm
Redução (%)	84,71	87,15	93,09	93,23

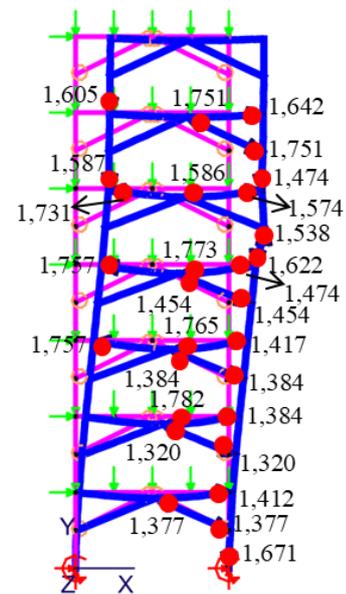
Tabela 4.9 Deslocamento lateral encontrado na análise inelástica, para  $\lambda=1$ .

Sem contraventamento	Diagonal	Mãos francesas	V invertido	X
426,16 mm	24,47 mm	18,46 mm	10,29 mm	10,70 mm
Redução (%)	94,26	95,67	97,59	97,48

Figura 4.26 Configuração deformada para o pórtico de sete pavimentos.



(a) Sem contraventamento ( $\lambda_{lim} = 1,029$ )



(b) Com contraventamento ( $\lambda_{lim} = 1,786$ )

## **5 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

No presente trabalho, algumas estruturas de aço foram analisadas para se avaliar a influência de diferentes sistemas de contraventamento na estabilidade global do sistema. Adotou-se pórticos com números de pavimentos distintos e pórticos clássicos esbeltos em forma de L. A influência de diferentes parâmetros dos sistemas de contraventamento na resposta estrutural foi investigada, entre os quais citam-se: o tipo de ligação com os outros membros da estrutura, as propriedades da seção transversal, a posição e a disposição das barras, além da sua eficácia quanto à variação na intensidade das cargas laterais.

As análises foram realizadas via MASTAN2 (MCGUIRE, GALLAGHER E ZIEMIAN, 2014) que é um programa para análise avançada estática baseado no Método dos Elementos Finitos. Com esse programa foi possível obter uma resposta mais realística do comportamento das estruturas ao considerar duas fontes de não linearidades: a não linearidade geométrica ou efeitos de segunda ordem e a não linearidade física.

Importante destacar que análises como as realizadas neste trabalho vêm trazer um melhor entendimento com relação à introdução das barras de contraventamento em estruturas, auxiliando engenheiros na elaboração de projetos eficientes, econômicos e, principalmente, seguros.

Nas próximas seções serão apresentadas algumas conclusões obtidas com base no estudo desenvolvido e, também, sugestões para futuras pesquisas.

### **5.1 Conclusões**

Os resultados das análises não lineares realizadas nos sete sistemas estruturais estudados, os quais apresentavam diferentes geometrias e condições de carregamento, foram comparados com as soluções disponíveis na literatura. A boa concordância entre todas as respostas permite afirmar que o programa utilizado é eficiente para avaliar o comportamento estático de estruturas reticuladas planas.

Para os pórticos em L, que são estruturas bastante esbeltas, considerou-se apenas os efeitos da não linearidade geométrica no estudo. Ao introduzir uma barra de contraventamento no sistema, o comportamento fortemente não linear das curvas que exibem a variação dos deslocamentos com o nível de carga foi mantido. Porém, foi possível alcançar

maiores limites de carga e menores limites de deslocamento. Ao variar as propriedades geométricas da barra de contraventamento no pórtico de Roorda, notou-se que o uso de um perfil com maior área não contribuiu para a melhoria na estabilidade da estrutura.

A influência da forma de ligação da barra de contraventamento com os outros membros da estrutura foi estudada em um portal simples. Apenas os casos mais comumente utilizados por projetistas foram adotados: ligação sendo perfeitamente rígida ou idealmente rotulada. As respostas obtidas mostraram que esse parâmetro não teve influência nas trajetórias de equilíbrio elástica e inelástica. No entanto, foi possível alcançar uma carga limite superior com a adição do contraventamento. Percebeu-se uma maior diferença entre as cargas na análise elástica.

Foi possível comprovar que a rigidez de um sistema estrutural com colunas robustas está diretamente relacionada com a área do perfil do contraventamento com análise do pórtico de dois andares. Reduziu-se bastante o deslocamento lateral da estrutura para um mesmo nível de carga ao considerar os efeitos da não linearidade geométrica e do material. Já a capacidade de carga aumentou, de maneira significativa, apenas para análise elástica.

Buscando estudar diferentes sistemas de contraventamentos utilizados no mercado, introduziu-se contraventamentos através de barras dispostas em diagonal; em mãos francesas, V invertido, e em X em uma estrutura de quatro e de sete pavimentos. Ao realizar as análises inelásticas, o deslocamento lateral diminuiu independente da disposição das barras. Por outro lado, a carga limite da estrutura aumentou significativamente com adoção da maioria dos arranjos. A disposição mais eficiente foi com barras dispostas em V invertido. O contraventamento nesta posição conseguiu reduzir os deslocamentos laterais que desestabilizaram a estrutura, pois forneceram um ponto de apoio no centro das vigas, locais que sofreram maiores deformações quando não se dispunha de contraventamento. A adoção desse contraventamento contribuiu para redução da formação de rótulas plásticas neste local, fornecendo maior rigidez para o sistema estrutural.

No estudo da estrutura de seis pavimentos, verificou-se a resposta inelástica do pórtico com contraventamentos em V invertido em diferentes disposições. Todas as configurações adotadas diminuíram o deslocamento lateral sofrido pela estrutura. Observou-se a importância de escolher um arranjo seguro, otimizado e econômico, de acordo com a solicitação atuante.

Para as estruturas nas quais foram realizadas tanto a análise elástica quanto inelástica, foi

possível perceber a influência do efeito da não linearidade do material na resposta, com a redução significativa da capacidade de carga da estrutura quando comparada à obtida considerando o material elástico.

Por fim, ao introduzir as barras de contraventamento, em todos os pórticos aqui estudados houve a redução da deslocabilidade lateral, quando comparados ao sistema sem contraventamento, tanto para análise elástica quanto para a análise inelástica. Já a capacidade de carga da estrutura não foi muito alterada em todos os sistemas analisados, o que indica que tal parâmetro depende da estrutura (geometria), do tipo e disposição do contraventamento, além das fontes de não linearidade consideradas.

## 5.2 Sugestões para Futuras Pesquisas

Algumas sugestões para futuras pesquisas serão destacadas nesta seção. Em algumas delas, citam-se também as referências que podem ser consultadas:

- Análises estáticas de estruturas com contraventamentos horizontais.
- Análises de pórticos espaciais com contraventamentos.
- Investigar o comportamento não linear de estruturas mistas (aço-concreto) e de concreto com contraventamentos (RAI E GOEL, 2003).
- Proposição de novas formas de disposição e arranjos estruturais para os contraventamentos, como estudado por Sarnoa e Elnashaib (2009) e Archana e Kumar (2016). Podendo investigar também contraventamentos excêntricos e treliçados em grande escala.
- Verificar a resposta estrutural ao adicionar sistemas de contraventamentos com diferentes perfis (ARCHANA E KUMAR, 2016).
- Avaliar estruturas com contraventamentos, considerando ligações semirrígidas entre vigas e pilares e/ou ligações semirrígidas entre o contraventamento e os outros membros da estrutura (THAI *et al.*, 2016).
- Análise dinâmica de estruturas com contraventamentos submetidas a cargas sísmicas. Avaliar a viabilidade de aplicar ‘retrofit’ nas estruturas (RAI E GOEL, 2003; JOSEPH E JAMES, 2017; QIAN, WENG E LI, 2019; KANISHKAVYA E VELUMANI, 2019).

## REFERÊNCIAS

- AISC, 1986. *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. 1st edn., American Institute of Steel Construction, AISC, Chicago, IL.
- AISC, 1989. *Manual of Steel Construction - Allowable Stress Design*. Chicago.
- AISC LRFD, 2016. *Specification for structural steel buildings*. American Institute of Steel Construction, AISC, Chicago, IL.
- Anunciação, J.N.C., Souza, L.G.Q., Pereira, A.A., Ribeiro, C.B., e Barboza, M.D. S., 2021. Comparative Analysis of Bracing Systems in a Steel Structure Shed. *14th World Congress in Computational Mechanics*.
- Archana, R., e Kumar, A.S., 2016. Analysis and Design of Four Legged Transmission Tower. *International Journal of Science and Research (USR)*, vol. 5, pp. 1026 – 1030.
- Barbagallo, F., Bosco, M., Marino, E.M., e Rossi, P.P., 2021. Proposal and validation of a design procedure for concentrically braced frames in the chevron configuration. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol.50, pp. 3041–3063.
- Barros, A., 2010. *Um estudo da estabilidade de pórticos considerando o fator do comprimento efetivo e as forças nocionais*. Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-graduação em Engenharia de estruturas, UFMG, Belo Horizonte/MG, Brasil.
- Barros, R.C., Pires, D., Silveira, R.A.M., Lemes, Í.J.M., e Rocha, P.A.S., 2018. Advanced inelastic analysis of steel structures at elevated temperatures by SCM/RPHM coupling. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 145, pp. 368-385.
- Batoz, J.L., e Dhatt, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262-1267.
- Battini, J.M., 2002. *Co-rotational beam elements in instability problems*. Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology - Department of Mechanics, Stockholm / Sweden.
- Bazant, Z.P., e Cedolin, L., 1991, *Stability of Structures*. Oxford Press, Oxford, UK.
- CBCA, Centro Brasileiro de Construção em Aço. *Dimensionamento de Estruturas em Aço, Módulo 3, Parte 1*.

- Chan, S.L., e Chui, P.P.T., 2000. *Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford.
- Chaves, J.R.F., 2009. *Análise dinâmica de pórticos metálicos contraventados*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília/DF, Brasil.
- Chen, H., e Blandford, G.E., 1993. Work-increment-control method for nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 909-930.
- Chen, W.F., Goto, Y., e Liew, J.Y.R., 1996. *Stability Design of Semi-rigid Frames*. John Wiley & Sons Inc., USA.
- Chiorean, C.G., 2013. A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3d composite steel-concrete frame structures. *Engineering Structures*, vol. 57, pp. 125-152.
- Chiorean, C.G., 2017. Second-order flexibility-based model for nonlinear inelastic analysis of 3D semi-rigid steel frameworks. *Engineering Structures*, vol. 136, pp. 547-579.
- Cichon, C., 1984. Large displacements in-plane analysis of elastic-plastic frames. *Computers & Structures*, vol. 19, pp. 737-745.
- Costanzo, S., D’Aniello, M., e Landolfo, R., 2018. The influence of moment resisting beam-to-column connections on seismic behavior of chevron concentrically braced frames. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 113, pp. 136-147.
- Coulter, B.A., e Miller, R.E., 1988. Numerical analysis of a generalized plane elastica with non-linear material behavior. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 617-630.
- Crisfield, M.A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. vol. 1, John Wiley & Sons Inc., USA.
- Elias, G.C., 2018. *Análise de painéis contraventados de sistemas de armazenagem industriais*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Engesser, F., 1889. Ueber die knickfestigkeit gerader stäbe. *Zeitschrift für Architecture and Ingenieurwesen*, vol. 35, 445 p.

Eurocode 2, 2004. *Design of concrete structures Part 1-1: General rules and rules for buildings*. Comité Européen de Normalisation (CEN), Brussels, Belgium.

Fahiminia, M., e Zahrai, S.M., 2020. Seismic performance of simple steel frames with buckling-restrained knee braces & SMA to reduce residual displacement. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 137, 106268.

Fong, M., 2012. *Second-order analysis of imperfect light-weight and composite structures*. Tese de Doutorado. The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong.

Franca, M.P.A., 2003. *Estudo da Eficiência dos Contraventamentos Treliçados em Edifícios em Estruturas de Aço*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFPE, Recife/PE, Brasil.

Galambos, T.V., 1998. *Guide to Stability Design Criteria for metal structures*. Structural Stability Research Council, 4th edn., John Wiley & Sons, Inc., New York.

Galvão, A.S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.

Gaylord, E.H., e Gaylord, C.N., 1972. *Design of Steel Structures*. 2nd edn., New York, McGraw-Hill.

Hsiao, K.M., Hou, F.Y., e Spiliopoulos, K.V., 1988. Large displacement analysis of elastoplastic frames. *Computers & Structures*, vol. 28, pp. 627-633.

Joseph, N., e James, J., 2017. Steel frames with knee braces based on pushover analysis. *International Research Journal of Engineering and Technology*, vol. 5, pp. 1407 – 1412.

Kanishkavy, K., e Velumani, D. S. M., 2019. Analysis of Frames with and Without Knee Bracing for Lateral Loads Using Steel Structures. *International Research Journal of Multidisciplinary*, vol. 6; pp. 486-489.

Kassimali, A., 1983. Large deformation analysis of elastic-plastic frames. *Journal of Structural Engineering*, vol. 109(8), pp. 1869–1886.

Koiter, W.T., 1967. *Post-buckling analysis of simple two-bar frame*. Recent Progresses in Applied Mechanics, Broberg. Ed. Almqvist and Wiksell, Sweden.

- Lan, M., Ma, J., e Li, B., 2015. Seismic performance of steel–concrete composite structural walls with internal bracings. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 110, pp 76-89.
- Lee, H.D., Won, J-H., Jang, N-G., Mha, H-S., Jeong S-c., e Kim, S., 2020. Experimental Study on Load Carrying Capacity Enhancement of System Supports Considering Full Installation of Bracing Members. *International Journal of Steel Structures*, vol. 20, pp. 2051-2067.
- Lee, J.D., 1988. Finite element procedures for large strain elastic-plastic theories. *Computers & Structures*, vol. 28(3), pp. 395-406.
- Lee, S., Manuel, F.S., e Rossow, E.C., 1968. Large deflections and stability of elastic frames. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, EM2, pp. 521-547.
- Lemes, Í.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Lemes, Í.J.M., Silveira, R.A.M., Silva, A.R.D., e Rocha, P.A.S., 2017. Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM. *Engineering Structures*, vol. 147, pp. 12-26.
- Liew, J.Y.R., White, D.W., e Chen, W.F., 1993a. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 1. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3196-3216.
- Liew, J.Y.R., White, D.W., e Chen, W.F., 1993b. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3217-3237.
- Lui, E.M, 1999. *Structural Steel Design*. In *Structural Engineering Handbook*, Ed. W.F. Chen, CRC Press LLC.
- Lui, E.M., e Chen, W.F., 1986. Analysis and behavior of flexible-jointed frames. *Engineering Structures*, vol. 8(2), pp. 107-118.
- Maheri, M. R., e Akbari, R., 2003. Seismic behaviour factor, R, for steel X-braced and knee-braced RC buildings. *Engineering Structures*, vol. 25, pp. 1505–1513.
- Martha, L.F., 2010. *Métodos básicos da análise de estruturas*. Departamento de Engenharia Civil. PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil

- Matos, R.C.B., 2014. *Sistemas de Contraventamentos em Edifícios de Estrutura Metálica*. Trabalho de Conclusão de Curso. Centro Universitário de Brasília, Brasília/DF, Brasil.
- McGuire, W., Gallagher, R.H., e Ziemian, R.D., 2014. *Matrix Structural Analysis*. 2nd Editio. Copyright by Ronald D. Ziemian.
- NBR 6118, 2014. *Projeto de estruturas de concreto - procedimento*. ABNT, Rio de Janeiro.
- NBR 8800, 2008. *Projeto de estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro.
- Nguyen, P-C., e Kim, S-E., 2016. Advanced analysis for planar steel frames with semi-rigid connections using plastic-zone method. *Steel and Composite Structures*, vol. 21, pp. 1121-1144.
- Orbison, J.G., 1982. *Nonlinear Static Analysis of Three-Dimensional Steel Frames*. Report No. 82-6, Ithaca, NY: Department of Structural Engineering, Cornell University.
- Pacoste, C., e Eriksson, A., 1997. Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 144, pp. 163-197.
- Park, M.S., e Lee, B.C., 1996. Geometrically non-linear and elastoplastic threedimensional shear flexible beam element of Von-Mises-type hardening material. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39(3), pp. 383-408.
- Pereira, A.A, Ribeiro, C.B., e Barboza, M.D.S., 2020. Análise comparativa de siste'mas de contraventamentos em galpão metálico através do SAP2000. *Revista Interdisciplinar De Pesquisa Em Engenharia*, vol. 5(2), pp. 1-17.
- Prado, Í.M., 2012. *CS-ASA Preprocessor: Sistema Gráfico Interativo de Pré-processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Qian, K.; Weng, Y-H., e Li, B., 2019. Improving Behavior of Reinforced Concrete Frames to Resist Progressive Collapse through Steel Bracings. *Journal of Structural Engineering*, vol. 145, 04018248.
- Rai, D.C., e Goel, S. C., 2003. Seismic evaluation and upgrading of chevron braced frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 59, pp. 971-994.

- Riks, E., 1972. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, pp. 1060-1066.
- Riks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, pp. 529-551.
- Rodrigues, P.F.N., 2000. *Ferramentas Numéricas para a Análise Não-linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de Petróleo Offshore*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Roorda, J., 1965. *The instability of imperfect elastic structures*. Ph. D. University College London, England.
- Roorda, J., e. Chilver, A.H., 1970, Frame Buckling: An Illustration of the Perturbation Technique. *Intl. J. Non-Linear Mech.*, vol.5, pp. 235-246.
- Santana, M.V.B., 2015. *Desenvolvimento de Sistema Computacional via MATLAB/GUI (Graphical User Interface) para Análise Geometricamente Não Linear de Estruturas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Sarno L.D., e Elnashaib A.S., 2009. Bracing systems for seismic retrofitting of steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 65, pp. 452–465.
- Schweizerhof, K.H., e Wriggers, P., 1986. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, pp. 269-279.
- Segundo, J.S.R., 2019. *Estratégias Numéricas para Otimização da Solução Não Linear de Problemas Estruturais*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Sekulovic, M., e Nefovska, M., 2004. Static inelastic analysis of steel frames with flexible connections. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 31(2), pp. 101-134.
- Shokouhian, M., Sadeghi, R., e Ozbakkaloglu, T., 2012. The Buckling Behaviour of Knee Braced Frames (KBF). *Australasian Structural Engineering Conference 2012: The past, present and future of Structural Engineering*, pp. 74-81.

- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Silva, R.G.L., Lavall, A.C.C., Costa, R.S., e Viana, H.F., 2018. Formulation for second-order inelastic analysis of steel frames including shear deformation effect. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 151, pp. 216-227.
- Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Simo, J.C., e Vu-Quoc, L., 1986. A three-dimensional finite strain rod model: Part 2: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, pp. 79-116.
- Smith, B.S., e Coull A., 1991. *Tall Building Structure: Analysis and Design*. Nova York: John Wiley & Sons.
- Sombroek, C.S.M., Tiso, P., Renson, T., e Kerschen, G., 2018. Numerical computation of nonlinear normal modes in a modal derivative subspace. *Computers and Structures*, vol. 195, pp. 34-46.
- Thai, U-T., Uy, B., Kang, W-E., e Hicks, S., 2016. System reliability evaluation of steel frames with semi-rigid connections. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 121, pp. 29-39.
- Viana, H.F., Silva, R.G.L., Costa, R.S., e Lavall, A.C.C., 2020. Formulation for nonlinear dynamic analysis of steel frames considering the plastic zone method. *Engineering Structures*, vol. 223, 111197.
- Vogel, U., 1985. *Calibrating Frames*. *Stahlbau*, vol. 54, pp. 295-311.
- White, D.W., Liew, J.Y.R., e Chen, W.F., 1993. Toward advanced analysis in LRFD. *In Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames—An Assessment of The State-Of-The-Art*, Structural Stability Research Council, Lehigh University, Bethlehem, PA, pp. 95-173.
- Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.

Yang, Y.B., e Shieh, M.S., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 28(12), pp. 2110-2116.

Yoo, H., e Choi, D-H., 2008. New method of inelastic buckling analysis for steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 64, pp. 1152-1164.

Ziemian, R.D., 1990. *Advanced Methods of Inelastic Analysis in the Limit States Design of Steel Structures*. Ph.D. dissertation, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY.

Ziemian, R.D., e McGuire, W., 2002. Modified Tangent Modulus Approach, A Contribution to Plastic Hinge Analysis. *Journal of Structural Engineering*, vol. 128(10), pp. 1301-1307.

