

Universidade Federal de Ouro Preto

Escola de Minas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PROPEC

Tese

Análise Inelástica e de Segunda Ordem de Estruturas com Restrições Bilaterais e Unilaterais de Contato

Jéssica Lorrany e Silva

Ouro Preto
2021



UFOP

Universidade Federal de Ouro Preto - Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**ANÁLISE INELÁSTICA E DE SEGUNDA
ORDEM DE ESTRUTURAS COM
RESTRICÇÕES BILATERAIS E UNILATERAIS
DE CONTATO**

Jéssica Lorrany e Silva

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Prof. Dr. Ígor José Mendes Lemes

Campus Morro do Cruzeiro

Ouro Preto, MG - Brasil

Abril, 2021

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

L876a Lorrany e Silva, Jéssica .
Análise inelástica e de segunda ordem de estruturas com restrições bilaterais e unilaterais de contato. [manuscrito] / Jéssica Lorrany e Silva. - 2021.
162 f.: il.: color., tab..

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.
Coorientador: Prof. Dr. Ígor José Mendes Lemes.
Tese (Doutorado). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.
Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Análise estrutural (Engenharia) - Análise Avançada. 2. Deformações e tensões - Método de Compatibilidade. 3. Análise estrutural (Engenharia) . 4. Deformações e tensões. I. Lemes, Ígor José Mendes. II. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 624.01

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1718



FOLHA DE APROVAÇÃO

Jéssica Lorrany e Silva

Análise Inelástica e de Segunda Ordem de Estruturas com Restrições Bilaterais e Unilaterais de Contato

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Engenharia Civil

Aprovada em 30 de abril de 2021

Membros da banca

- D.Sc. Ricardo Azoubel da Mota Silveira - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
- D.Sc. Ígor José Mendes Lemes - Coorientador (Universidade Federal de Lavras)
- D.Sc. Christianne de Lyra Nogueira (Universidade Federal de Ouro Preto)
- Dr. Eng. Francisco Célio de Araújo (Universidade Federal de Ouro Preto)
- D.Sc. Paulo Batista Gonçalves (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro)
- D.Sc. Walnório Graça Ferreira (Universidade Federal do Espírito Santo)

Ricardo Azoubel da Mota Silveira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 24/05/2021



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Azoubel da Mota Silveira, COORDENADOR(A) DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**, em 24/05/2021, às 15:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0174326** e o código CRC **2534D0DC**.

À minha família e aos meus orientadores.

Agradecimentos

A Deus por sempre estar ao meu lado, acalmando meu coração. Iluminando e guiando meus passos.

Aos meus pais, meu porto seguro, onde sempre encontro forças para seguir em frente e por torcerem tanto pelo meu sucesso. Vocês são a minha essência. Ao meu irmão Matheus, pelo carinho e momentos de descontração.

Ao Renan pelo incentivo e por sempre acreditar em mim, mesmo quando eu mesma não acreditava. Nos momentos mais difíceis você estava segurando minha mão, meu companheiro de vida.

Aos meus orientadores, professor Ricardo e professor Ígor, pela motivação, amizade, conhecimentos transmitidos e confiança no meu trabalho. Vocês contribuíram muito para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil (PROPEC) pelos valiosos ensinamentos.

Aos amigos da pós-graduação, Iara, Rharã, Everton, Marcela, Rafael, Dalilah e Marko Rupert, pela amizade, ajuda e momentos de descontração.

À FAPEMIG e à UFOP, pela ajuda financeira.

A todos, que de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

“A grandeza não é onde permanecemos, mas em qual direção estamos nos movendo. Devemos navegar algumas vezes com o vento e outras vezes contra ele, mas devemos navegar, e não ficar à deriva, e nem ancorados.”

OLIVER WENDELL HOLMES

“A vida sem ciência é uma espécie de morte.”

SÓCRATES

Resumo do texto apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Engenharia Civil

ANÁLISE INELÁSTICA E DE SEGUNDA ORDEM DE ESTRUTURAS COM RESTRIÇÕES BILATERAIS E UNILATERAIS DE CONTATO

Jéssica Lorrany e Silva

Abril, 2021

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Prof. Dr. Ígor José Mendes Lemes

Este trabalho apresenta uma metodologia numérica com base em uma formulação em deslocamento para simular o comportamento não linear 2D de elementos estruturais em aço, de concreto e mistas de aço e concreto. São abordadas fontes de não linearidades, como: os efeitos de segunda ordem e a inelasticidade. Vale ressaltar a adoção do referencial corrotacional na formulação não linear geométrica de elementos finitos, baseadas na separação explícita entre movimentos de corpo rígido e os que causam deformação. A inelasticidade é modelada considerando a plasticidade concentrada nos nós dos elementos finitos. Assim, a simulação do comportamento não linear dos materiais, incluindo a determinação da capacidade resistente das seções é abordada através do Método de Compatibilidade de Deformações, onde as relações constitutivas dos materiais são utilizadas explicitamente. Além disso, a presente abordagem numérica não se limita a uma tipologia transversal específica e pode ser usada para análise de diferentes seções transversais. Em conjunto é realizado um estudo da resposta não linear de sistemas envolvendo a interação solo-estrutura (solo/rocha), com o intuito de fornecer uma modelagem numérica mais realística do problema de engenharia (estrutural/geotécnico). Essa interação pode ser considerada de duas formas diferentes em função da resposta do meio geológico, como: bilateral e unilateral. Finalmente, apresentam-se análises numéricas avançadas de estruturas de aço, de concreto e mistos de aço e concreto, para diferentes seções transversais; e análises de sistemas mecânicos com interação solo-estrutura. Os resultados obtidos são comparados com respostas numéricas e experimentais presentes na literatura. Verificou-se nos exemplos simulados que a formulação numérica proposta é estável com boa concordância com dados numéricos e experimentais da literatura.

Palavras-Chave: Análise Avançada, Contato Bilateral, Contato Unilateral, Método de Compatibilidade das Deformações, Formulação Corrotacional.

Abstract of Thesis presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Civil Engineering

INELASTIC AND SECOND ORDER ANALYSIS OF STRUCTURES WITH BILATERAL AND UNILATERAL CONTACT RESTRICTIONS

Jéssica Lorrany e Silva

April, 2021

Advisors: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Prof. Dr. Ígor José Mendes Lemes

This work presents a numerical methodology based on displacement to simulate the 2D nonlinear behavior of steel, concrete and steel-concrete composite. Non-linearities sources are addressed, such as: second-order effects and inelasticity. It is worth mentioning the adoption of the corrotational framework in geometric nonlinear formulations of finite elements, based on the explicit separation between rigid body movements and those that cause deformation. This formulation considers the plasticity concentrated in the finite element nodes. Thus, the simulation of the nonlinear behavior of the materials, including the determination the strength of sections is approached through the Strain Compatibility Method, where the constitutive relationships of the materials are used explicitly. In addition, the present approach is not limited to a specific cross-typology and can be used to analyze different cross-sections. Together, a study of the non-linear response of systems involving the soil-structure interaction (soil / rock) is carried out, always looking for the most realistic numerical modeling of the engineering problem (structural/ geotechnical). This interaction can be considered in two different according to the response of the geological environment as: bilateral and unilateral. Finally, advanced numerical analyzes of steel, concrete and steel-concrete composite structures are presented, for different cross sections; and analysis of structural systems with soil-structure iteration. The results obtained are compared with numerical and experimental responses found in the literature. It has been found in the simulated examples the proposed numerical formulation is stable with good agreement to numerical and experimental data of the literature.

Palavras-Chave: Advanced Numerical, Bilateral Contact, Unilateral Contact, Strain Compatibility Method, Corrotacional formulations.

Lista de publicações provenientes das pesquisas desenvolvidas ao longo do curso de Doutorado em Engenharia Civil

Publicações em revistas científicas

- SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; DEUS, L. R. R. M.; SILVEIRA, R. A. M., 2021. Plastic analysis of steel arches and framed structures with various cross sections. *Steel and Composite Structures*, 38(3), 257-270. DOI: 10.12989/scs.2021.38.3.257
- DEUS, L. R. R. M.; SILVEIRA, R. A. M.; LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**, 2020. Second-order inelastic analysis of shallow and non-shallow steel arches. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 17(3), e265. DOI: 10.1590/1679-78255941.
- GONÇALVES, G. A.; SILVEIRA, R. A. M.; **SILVA, J. L.**; SILVA, A. R. D., 2018. Inelastic second-order analysis of steel columns under minor-axis bending. *REM-International Engineering Journal*, 72(3), 405-414. DOI: 10.1590/0370-4467218720046.
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D.; ROCHA, P. A. S., 2021. Nonlinear formulation for stability analysis of semi-rigid steel and steel-concrete composite frames. (Em produção).
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; BATELO, E. A. P.; SILVEIRA, R. A. M., 2016. Influência dos modelos de tensões residuais prescritos em códigos normativos no comportamento de perfis I. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 2, p. 299-317.
- SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D., 2016. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 2, p. 119-138.

Publicações em eventos científicos

- SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M.; LEMES, Í. J. M., 2019. Numerical simulation of the nonlinear soil-structure interaction problem. In: XL CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Natal, Rio Grande do Norte.
- DEUS, L. R. R. M.; **SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M.; LEMES, Í. J. M., 2019. Análise inelástica de segunda ordem de arcos metálicos com seção I. In: XL CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Natal, Rio Grande do Norte.
- DEUS, L. R. R. M.; **SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M., 2018. Advanced inelastic analysis of steel arches with tubular cross sections. In: XXXIX CILAMCE, Paris and Compiègne, France. XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. v. 1. p. 491-494.
- SILVA, L. M. C; SEGUNDO, J. S. R; SILVEIRA, R. A. M.; **SILVA, J. L.**, 2018. ESTUDO DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA VIA MASTAN2. In: Simpósio de Mecânica Computacional - SIMMEC, 2018. Mecânica das Estruturas, Vitória, Espírito Santo.
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M.; ROCHA, P. A. S., 2017. Numerical study of steel plane frames considering the semi-rigid connections and concentrated plasticity effects. EMI International Conference.
- SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R., 2017. Análise inelástica de segunda ordem de estruturas com seções transversais duplamente simétricas. In: XXXVIII CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianopolis, Santa Catarina.

- DEUS, L. R. R. M.; LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M., 2017. Advanced nonlinear analysis of shallow and non-shallow steel arches. In: XXXVIII CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianopolis, Santa Catarina.
- LEMES, Í. J. M.; BARROS, C. R.; **SILVA, J. L.**; BATELO E. A. P; SILVEIRA, R. A. M., 2017. Formulação numérica para simulação do comportamento de estruturas de concreto armado. In: XXXVIII CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianopolis, Santa Catarina. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2017-0667
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R.; ROCHA, P. A. S., 2017. Análise numérica de pórticos mistos de aço e concreto com ligações semirrígidas. In: XXXVIII CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianopolis, Santa Catarina. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2017-0671
- SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R., 2016. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. In: XXXVII CILAMCE Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, DF, Brazil.
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; BATELO E. A. P; SILVEIRA, R. A. M., 2016. Influência dos modelos de tensões residuais prescritos em códigos normativos no comportamento de perfis i. In: XXXVII CILAMCE Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, DF, Brazil.

Sumário

Lista de Figuras.....	xiv
Lista de Tabelas.....	xviii
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais.....	1
1.2 Objetivo e Justificativa.....	6
1.3 Estado da Arte.....	8
1.3.1 Análise avançada de estruturas elemento.....	8
1.3.2 Problema de interação solo-estrutura.....	10
1.4 Sistema Computacional CS-ASA.....	15
1.5 Organização do Trabalho.....	21
2 Análises Avançadas de Estruturas	23
2.1 Considerações Iniciais.....	23
2.2 Elemento Corrotacional.....	24
2.2.1 Relações cinemáticas do elemento.....	25
2.2.2 Formulação do elemento.....	27
2.2.3 Matriz de rigidez – \mathbf{K}_{lc}	28
2.2.4 Simulação da plasticidade concentrada.....	30
2.2.5 Return mapping.....	33
2.3 Análise da Seção Transversal.....	34
2.3.1 Relação tensão-deformação.....	36
2.3.1.1 Comportamento uniaxial do aço dos perfis.....	36
2.3.1.2 Comportamento uniaxial do aço das armaduras.....	38
2.3.1.3 Comportamento uniaxial do concreto.....	38
2.3.2 Relação momento-curvatura.....	42
2.3.3 Curvas de interação N x M	46
2.3.4 Rigidezes generalizadas.....	49
2.4 Solução do Problema Não Linear.....	50

2.4.1	Solução incremental predita.....	53
2.4.2	Ciclo de iterações.....	54
3	Problemas de Interação Solo-Estrutura.....	59
3.1	Considerações Iniciais.....	59
3.2	Modelagem do Problema de Interação Solo-Estrutura.....	61
3.3	Tratamento do Problema de Contato Unilateral.....	66
3.3.1	Método de Penalidades.....	68
3.4	Modelos de Bases Elásticas.....	71
3.4.1	Modelo de molas discretas.....	72
3.4.2	Modelo contínuo de Winkler.....	75
2.4.2.1	Winkler linear.....	77
2.4.2.1	Winkler não linear.....	79
3.4.3	Modelo Pasternak.....	81
4	Aplicações Numéricas – Análise Avançada.....	85
4.1	Análise Avançada.....	85
4.2	Estruturas de Aço.....	86
4.2.1	Pilar engastado-livre: flexão em torno do eixo de menor inércia.....	86
4.2.2	Pilar com seção tubular vazada e aço de alta resistência.....	87
4.2.3	Pórtico: flexão em torno do eixo de menor inércia.....	92
4.2.4	Pórtico com seção circular.....	93
4.2.5	Arcos com seções tubulares vazadas e seção retangular cheia.....	95
4.2.6	Pórtico de quatro andares.....	101
4.3	Estruturas de Concreto Armado.....	103
4.4	Estruturas Mistas de Aço e Concreto Armado.....	106
5	Aplicações Numéricas – Interação Solo-Estrutura.....	109
5.1	Introdução.....	109
5.2	Vigas.....	110
5.2.1	Viga biengastada com restrições bilaterais de contato.....	110
5.2.2	Viga biapoiada com restrições bilaterais de contato.....	112
5.3	Pilares.....	113
5.3.1	Viga-Coluna com restrição de contato.....	113
5.3.2	Pilares com restrição unilaterais de contato.....	116
5.4	Arcos.....	119

5.4.1	Arco circular com restrições unilaterais de contato.....	119
5.4.2	Arco abatido com restrições bilaterais de contato.....	124
5.4.3	Arco circular com restrições unilaterais de contato após flambagem.....	127
5.5	Anéis.....	131
5.5.1	Anel com restrições unilaterais de contato.....	131
5.5.2	Anel sobre base rígida.....	135
6	Considerações Finais.....	138
6.1	Conclusões.....	138
6.2	Sugestões para Pesquisas Futuras.....	141
	Referências Bibliográficas.....	143
	APÊNDICE A.....	161

Lista de Figuras

1.1 - Exemplos de estruturas em contato com o solo.....	4
1.2 - Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados.....	20
2.1 - Deslocamentos no sistema global de coordenadas.....	25
2.2 - Elemento finito corrotacional.....	30
2.3 - Violação da curva de interação para plastificação total.....	34
2.4 - Campo de deformações para um problema plano.....	35
2.5 - Discretização da seção transversal em fibra.....	35
2.6 - Relação constitutiva do aço.....	37
2.7 - Modelo de tensões residuais.....	37
2.8 - Modelo constitutivo para o aço das armaduras.....	38
2.9 - Modelos constitutivos para o concreto sob compressão.....	39
2.10 - Modelos constitutivos para o concreto sob compressão.....	41
2.11 - Curva de interação $N \times M$	47
2.12 - Construção da relação $M \times \Phi$ para o cálculo das rigidezes generalizadas.....	51
3.1 - Relação força-deslocamento da fundação.....	60
3.2 - Tipos de restrições de contato.....	61

3.3 - Modelo numérico via MEF e configurações de equilíbrio do problema.....	62
3.4 - Domínio de validade das restrições de contato unilateral.....	65
3.5 - Modelo de molas discretas representando o solo.....	73
3.6 - Molas discretas conectadas a um ponto i da estrutura.....	74
3.7 - Modelo de Winkler representando a região de contato.....	75
3.8 - Modelo de Pasternak representando a região de contato.....	82
4.1 - Pilar engastado-livre e sua discretização em elementos finitos.....	86
4.2 - Trajetória de equilíbrio do pilar engastado-livre.....	87
4.3 - Relação $EIt/EIt,i$ (%) nos pontos nodais.....	88
4.4 - Pilar biapoiado com seção transversal tubular vazada.....	88
4.5 - Trajetória de equilíbrio do pilar biapoiado.....	89
4.6 - Trajetória de equilíbrio do pilar biapoiado.....	90
4.7 - Trajetória de equilíbrio do pilar biapoiado para diferentes valores de t_f	90
4.8 - Trajetória de equilíbrio do pilar biapoiado para diferentes valores de b_f	91
4.9 - Condições de contorno adotados.....	91
4.10 - Trajetória de equilíbrio para diferentes condições de contorno.....	92
4.11 - Pórtico de dois andares: geometria e carregamento.....	93
4.12 - Trajetórias de equilíbrio do pórtico de dois andares.....	93
4.13 - Pórtico de William.....	94
4.14 - Trajetória de equilíbrio do Pórtico de William.....	94
4.15 - Trajetória de equilíbrio para diferentes valores de h	95
4.16 - Trajetória de equilíbrio para diferentes condições de contorno.....	96

4.17 - Arcos circulares biapoiados: (a) Parâmetros geométricos; (b) Casos de carga; (c) Tipos de seção transversal.....	96
4.18 - Trajetórias de equilíbrio do arco com perfil SCV: (a) Arco pouco abatido; (b) Arco abatido.....	98
4.19 - Trajetória de equilíbrio de arcos pouco abatidos com seções vazadas.....	99
4.20 - Trajetória de equilíbrio do arco circular abatido biengastado com SRC.....	101
4.21 - Pórtico de quatro andares: geometria e carregamento.....	102
4.22 - Trajetória de equilíbrio do pórtico de quatro andares.....	103
4.23 - Pórtico de Vecchio e Emara: geometria, seção transversal e carregamento.....	104
4.24 - Trajetória de equilíbrio do pórtico de Vecchio e Emara.....	105
4.25 - Pórtico simples: geometria, discretização adotada e seções transversais.....	107
4.26 - Trajetória de equilíbrio do pórtico simples.....	108
5.1 - Viga bi engastada com carga concentrada.....	110
5.2 - Viga bi engastada com carga distribuída.....	111
5.3 - Trajetória de equilíbrio da viga com carga distribuída.....	111
5.4 - Trajetória de equilíbrio da viga com carga distribuída.....	112
5.5 - Viga biapoiada com carga concentrada.....	113
5.6 - Trajetória de equilíbrio da viga biapoiada.....	114
5.7 - Viga-coluna com restrições de contato.....	114
5.8 - Trajetória de equilíbrio com contato unilateral e bilateral.....	116
5.9 - Trajetória de equilíbrio com contato unilateral.....	117
5.10 - Pilar com restrições unilaterais de contato.....	118
5.11 - Trajetória de equilíbrio com contato unilateral.....	118
5.12 - Deformada da estrutura.....	119

5.13 - Arco acima da base elástica.....	120
5.14 - Arco abaixo da base elástica.....	121
5.15 - Trajetória de equilíbrio para o arco acima da base.....	123
5.16 - Trajetória de equilíbrio para o arco abaixo da base.....	124
5.17 - Arco abatido em contato com base elástica.....	125
5.18 - Trajetória de equilíbrio do arco abatido com $k = 10$ kPa.....	126
5.19 - Trajetória de equilíbrio do arco abatido com $k = 1000$ kPa.....	126
5.20 - Trajetória de equilíbrio elástica e inelástica.....	127
5.21 - Arco circular com restrições de contato.....	128
5.22 - Curva carga x deslocamento do arco sem restrições de contato.....	129
5.23 - Curva carga x deslocamento – <i>Snap-through</i>	131
5.24 - Curva carga x deslocamento – Bifurcação.....	132
5.25 - Anel com restrições radiais de contato.....	133
5.26 - Curva carga x deslocamento.....	134
5.27 - Anel sobre superfície rígida.....	135
5.28 - Trajetória de equilíbrio elástica e inelástica do anel.....	136
5.29 - Configurações Deformadas.....	137

Lista de Tabelas

2.1 - Coeficientes da Equação (3.33).....	34
2.2 - Estratégia numérica para a construção da curva de interação.....	48
2.3 - Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear.....	58
3.1 - Dados Estratégia numérica para análise estática não linear considerando problemas de contato.....	70
4.1 - Dados dos materiais da viga de concreto armado (em kN/m).....	105
4.2 - Dados dos materiais componentes da estrutura.....	107
5.1 - Comparação do parâmetro de carga crítica.....	134

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Na elaboração do projeto estrutural busca-se dimensionar os elementos atendendo às condições de segurança e de utilização previstas para a construção. Esse dimensionamento é feito com base nas respostas obtidas na análise estrutural, na qual são determinados os esforços internos, deslocamentos, tensões e deformações da estrutura sob determinadas condições de contorno e carregamento (GONÇALVES, 2013). Destaca-se nesse campo a análise avançada, que pode ser definida como um método capaz de avaliar simultaneamente a resistência e a estabilidade da estrutura, sem a necessidade da verificação individual da capacidade dos membros (CHEN e TOMA, 1994).

A concepção de projetos estruturais utilizando análises avançadas, com o objetivo de avaliar o comportamento real da estrutura, emprega recursos computacionais avançados e são utilizadas formulações numéricas adequadas para simular o comportamento não linear de uma estrutura. Considera-se que a busca

por formulações cada vez mais precisas e metodologias de solução rápidas é um processo contínuo e necessário.

O conhecimento dos chamados efeitos não lineares, sejam provenientes do processo de deformação da estrutura, da plastificação ou fissuração dos materiais e do comportamento das ligações entre os elementos da estrutura, é de fundamental importância para que a estrutura exerça satisfatoriamente a função para a qual foi projetada. Nesse sentido, a busca de formulações numéricas generalizadas e eficientes induziu o uso de métodos de análise de plasticidade distribuída. Embora seja considerado mais preciso, esses métodos requerem um esforço computacional intenso (CHEN e KIM, 1997). Para obter uma boa precisão nos resultados computacionais, especialmente na análise de grandes edifícios, métodos de plasticidade concentrada considerando a plasticidade em um comprimento específico perto dos pontos nodais (SCOTT e FENVES, 2006; NGO-HUU e KIM, 2012) ou exclusivamente nos nós (LIEW *et al.*, 2001; LEMES *et al.*, 2017a; LEMES, 2018) têm sido utilizados. Esta segunda abordagem é comumente chamada de Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) (CHAN e CHUI, 2000).

Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca como uma ferramenta eficiente na simulação numérica de problemas estruturais. Já consolidado na análise avançada de estruturas de aço, o CS-ASA - *Computational System for Advanced Structural Analysis* (SILVA, 2009) - utiliza formulações do MEF baseadas no MRPR. Baseado na teoria da plasticidade concentrada, esse método tem se mostrado prático e preciso na avaliação do comportamento inelástico até o colapso da estrutura.

Na consideração da não linearidade geométrica, vale enfatizar o Referencial Corrotacional (RCR), para descrição do movimento dos corpos sólidos. O RCR é baseado na separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e

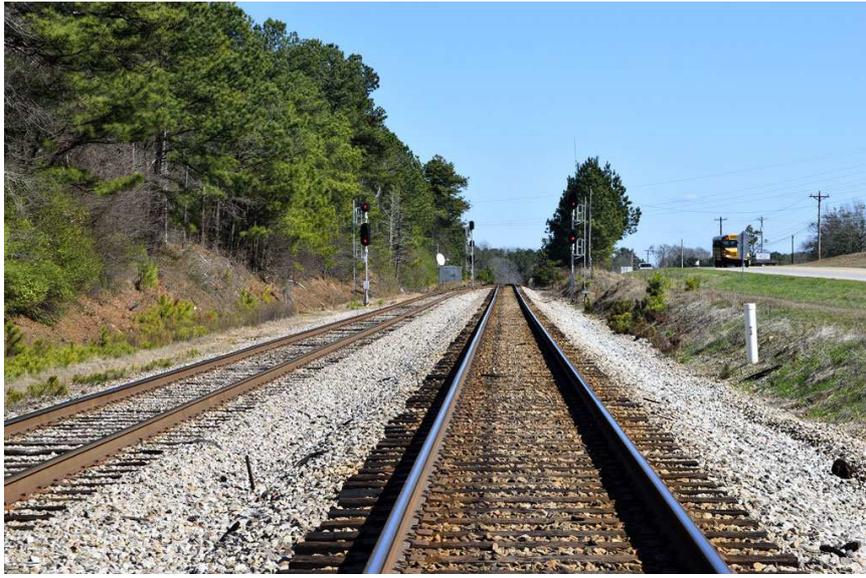
deformacionais, e na utilização de funções de interpolação consistentes com a teoria de deformação não linear.

Para atingir um equilíbrio entre segurança, tempo (elaboração e execução da obra) e economia, há uma gama de materiais e métodos disponíveis no mercado. De forma isolada, dentre os materiais mais usados na construção civil, destacam-se o concreto e o aço.

De modo a facilitar os cálculos do projetista, normas de projeto apresentam procedimentos simplificados para a determinação da capacidade resistente desses elementos (EC 4, 2004; NBR 8800, 2008). Diante da dificuldade em obter uma resposta com maior grau de precisão, o AISC LRFD (2016) fornece metodologias simplificadas para o estudo da seção transversal. A norma americana AISC LRFD (2016) sugere para resolução desse problema o uso do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). Além de uma descrição mais realista do comportamento de seções transversais de concreto e mistas de aço e concreto, a norma americana cita que sua utilização também é aplicável na determinação da capacidade resistente nominal de seções irregulares. Nas situações em que o aço utilizado não apresenta comportamento elastoplástico perfeito, a AISC LRFD (2016) também é adequada. O MCD determina a capacidade resistente das seções transversais e faz a avaliação das rigidezes axial e à flexão da seção transversal, onde é necessário fazer uma discretização da seção transversal (CHIOREAN, 2013; CALDAS, 2004; LEMES *et al.*, 2015; LEMES *et al.*, 2017b).

Em muitas situações práticas, os elementos estruturais encontram-se apoiados em outros corpos ou meios que oferecem restrições aos seus movimentos apenas em certas direções. Problemas onde a estrutura pode entrar ou perder o contato com outros corpos, ou mesmo deslizar sobre o seu suporte são, usualmente, encontrados na literatura com a denominação “Problemas de Contato” (BARBOSA, 1986; SILVEIRA, 1995; SILVA, 1998; ABREU, 2016).

Dentre os problemas de engenharia onde é possível encontrar essa interação estrutura-meio, destacam-se: trilhos apoiados em dormentes numa ferrovia, pavimentos, tubulações enterradas, estacas-coluna de fundação, viga mista com contato entre perfil-laje, e o problema de contato entre as chapas (alma e mesa) que compõem um perfil metálico (Figura 1.1).



a) Trilhos de ferrovias
<https://www.portosenavios.com.br>



b) Tubulações enterradas
<http://www.grupoestrutural.com.br>

Figura 1.1. Exemplos de estruturas em contato com o solo



c) Túnel
<https://creci-rj.gov.br>

Figura 1.1. Exemplos de estruturas em contato com o solo (Continuação)

Problemas de contato solo-estrutura podem ser caracterizados como unilateral ou bilateral. O contato bilateral considera que o meio de contato reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão. Uma modelagem mais realista do solo pode ser obtida considerando na sua formulação a reação apenas às solicitações de compressão, o que caracteriza o contato como unilateral.

Interações de contato entre dois corpos deformáveis, onde um deles é considerado como uma base elástica, são, usualmente, modeladas por meio de condições de contorno bilaterais, ou seja, através de deslocamentos e/ou forças prescritas em alguma região do corpo. Tais modelos são satisfatórios para algumas aplicações de engenharia, mas deixam de ser confiáveis quando o comportamento dos corpos na região de contato é assunto de principal interesse e quando há variação da região de contato entre eles. Geralmente, nesses casos, é necessário estabelecer condições de contorno unilaterais (impenetrabilidade entre os corpos, por exemplo) como parte da solução, uma vez que não se conhece a verdadeira área de contato.

O estudo do comportamento mecânico de estruturas em contato com o solo é naturalmente complexo. No entanto, podem ser desenvolvidos modelos simplificados para aproximar seu comportamento. Esses modelos, apesar de não representarem com exatidão o comportamento do meio, podem oferecer respostas suficientemente satisfatórias para a solução de diversos problemas da engenharia (ABREU, 2016).

A análise de problemas de contato unilateral é mais complexa, pois esses problemas apresentam um comportamento não linear mesmo quando se consideram pequenas deformações e material elástico linear. Essa não linearidade é oriunda das condições de contorno impostas, que são dadas em forma de restrições de desigualdades, correspondendo à condição cinemática de não penetração entre os corpos e à condição estática da pressão de contato ser apenas compressiva. Tais restrições são expressas na forma complementar de Kuhn-Tucker (LUENBERGER, 1973; SILVEIRA, 1995). Assim, o problema de contato unilateral pode ser formulado como um problema de otimização com restrições impostas por outros corpos ou meios. As condições de ótimo do problema de otimização com restrições são obtidas resolvendo-se as equações de equilíbrio em conjunto com as restrições e com a condição de complementaridade do contato.

1.2 Objetivo e Justificativa

O objetivo geral deste trabalho pode ser definido como o estudo da resposta não linear de sistemas envolvendo a interação solo-estrutura (solo/rocha), procurando sempre a modelagem numérica mais realística do problema de engenharia (estrutural/geotécnico). Serão abordadas as mais diversas formas de não linearidades e outros efeitos que a tipologia estrutural abordada proporciona: efeitos de segunda ordem, plasticidade, imperfeições (geométricas e tensões residuais), formulação do elemento finito não linear, curvas de interação, e

algoritmos para tratamento do problema não linear, além da análise de problemas com restrições unilaterais e bilaterais de contato.

Genericamente, pretende-se estudar, analisar e desenvolver metodologias de solução numérica para sistema de suporte (solo-estrutura) com restrições bilaterais e unilaterais de contato. Além disso, visa-se dar continuidade a pesquisa sobre análise avançada de estruturas. Assim, será possível realizar análises numéricas avançadas de estruturas (viga, colunas, arcos, anéis e pórticos) de aço, de concreto e mistas de aço e concreto com restrições de contato.

Com relação a análise das estruturas, será utilizada uma formulação numérica generalizada baseada na plasticidade concentrada aplicável no estudo de estruturas de aço, de concreto e mistas de aço e concreto. Um elemento finito Corrotacional 2D foi utilizado e associado a funções de interpolação para evitar o enrijecimento espúrio da estrutura durante a análise. Associado a este elemento, o MCD foi utilizado para inserir o comportamento dos materiais nos nós do modelo numérico, viabilizando a análise de elementos constituídos por concreto, e também de diferentes seções transversais.

A análise de sistemas estruturais considerando o conjunto dessas não linearidades exige o desenvolvimento de formulações e estratégias numéricas bastantes sofisticadas. Isto talvez possa explicar o pequeno número de referências envolvendo o tema. Encontra-se uma vasta literatura tratando separadamente os problemas de equilíbrio de corpos deformáveis com contato, os problemas de estabilidade e comportamento não linear de elementos estruturais e o comportamento não linear dos materiais. Os trabalhos que abordam esses assuntos de forma conjunta são pouco encontrados. Além disso, a maioria dos trabalhos disponíveis limita-se em fornecer soluções bastantes particulares. Esse fato, juntamente com a importância prática desse tipo de problema, motivaram a adoção deste tema para a tese de doutorado.

A presente tese pretende dar continuidade às pesquisas relacionadas ao tema Problemas de Contato (MACIEL, 2012; SILVEIRA *et al.*, 2013) e à análise avançada de estruturas de aço, de concreto e mistas de aço e concreto (SILVA, 2009; SILVA, 2016; LEMES, 2018). Esses assuntos estão inseridos nas linhas de pesquisa de *Mecânica Computacional e Comportamento e Dimensionamento de Estruturas* do PROPEC/Deciv/EM/UFOP.

1.3 Estado da Arte

Nesta seção são citados trabalhos que fundamentam e contextualizam a importância do tema em estudo.

1.3.1 Análise avançada de estruturas

Pesquisas experimentais e numéricas, no contexto da análise numérica avançada de estruturas, têm possibilitado o desenvolvimento de avaliações de segurança estrutural cada vez mais realistas. O MEF se destaca como ferramenta eficiente com relação a este tema. O programa CS-ASA (SILVA, 2009) vem sendo desenvolvido ao longo dos últimos anos visando o estudo de diversas fontes de não linearidade, tanto no âmbito da análise estática quanto dinâmica de estruturas de aço. Mais recentemente, Lemes (2015) incluiu uma metodologia generalizada para avaliação da capacidade resistente da seção transversal e proporcionou ao CS-ASA condições para a realização de análises inelásticas de segunda ordem de estruturas de concreto e mistas.

Encontram-se na literatura diversos trabalhos nesta linha de pesquisa (CALDAS, 2004; BRATINA *et al.*, 2004; MUNIZ, 2005; CHIOREAN, 2013; GONÇALVES e CARVALHO, 2014; SILVA *et al.*, 2021). A busca pela generalização e eficiência das formulações induz a utilização de métodos de análise

da plasticidade de forma distribuída, como é comumente chamado o Método da Zona Plástica (MZP).

Caldas (2004) implementou procedimentos de análise de elementos estruturais reticulados mistos de aço e concreto com seções arbitrárias, baseado no MEF. Nesse trabalho foi realizada análise avançada através do MZP. Dando continuidade ao trabalho de Caldas (2004), Muniz (2005) generalizou o comportamento dos materiais. Na referida pesquisa, o autor implementou elementos referidos ao sistema Corrotacional, onde apenas os deslocamentos que realmente causam deformação são avaliados.

Chen e Kim (1997) definiram o MZP como “exato”, já que não se faz necessário verificar a capacidade resistente de cada membro isoladamente. Isso porque os efeitos não lineares físicos e geométricos e as tensões residuais foram consideradas explicitamente. Assim, Gonçalves (2013) ressaltou que a aplicação do MZP é restrita à simulação de estruturas simples para comparação com resultados experimentais e/ou como calibração de novas metodologias de análise.

O MRPR surge como alternativa para se obter boa precisão nos resultados de forma mais viável computacionalmente. Usualmente, o MRPR está associado à análise de estruturas de aço (CHAN e CHUI, 2000; SILVA, 2009) e mistas (FONG e CHAN, 2012; LEMES, 2015). Nessas abordagens, a degradação da rigidez da seção transversal foi feita por meio de elementos de mola fictícios, inseridos nas extremidades dos elementos finitos de viga-pilar. Porém, em qualquer análise com o MRPR, sempre haverá um trecho onde o comportamento dos materiais presentes na seção será linear-elástico. Dessa forma, a modelagem de elementos de concreto armado não é precisa (LEMES, 2018).

Lemes (2018) propôs uma abordagem onde as molas rotacionais fictícias, usualmente empregadas para simular a inelasticidade dos materiais no MRPR (CHAN e CHUI, 2000), não eram necessárias. Visou-se o acoplamento da

metodologia do MRPR ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) (CALDAS, 2004; CHIOREAN, 2013) para a avaliação tanto da capacidade resistente da seção transversal, quanto das rigidezes axial e à flexão. Assim, a plasticidade foi avaliada de forma nodal através dos parâmetros generalizados de rigidez, gerando uma nova metodologia denominada Método da Rótula Plástica Refinado Modificado (MRPRM).

Formulações não lineares estáticas e dinâmicas tridimensionais baseadas no MEF para avaliar o comportamento de pilares e pórticos mistos foram utilizadas por Denavit (2012). O autor validou sua metodologia comparando-a com ensaios experimentais desenvolvidos também no mesmo trabalho. Foram avaliadas seções preenchidas e seções envolvidas com concreto. No mesmo ano, Ngo-Huu e Kim (2012) estudaram uma metodologia mista entre o MRPR e o MZP para a avaliação de estruturas mistas. Os autores fizeram a discretização da seção transversal em fibras e avaliaram o módulo de elasticidade tangente dos materiais por meio das respectivas deformações.

Em um trabalho sem as pseudo-molas, Kostic *et al.* (2016) estudaram especificamente a resposta inelástica concentrada de pilares mistos preenchidos. O modelo utilizado no referido trabalho para a degradação da rigidez foi proposto por Lubliner *et al.* (1993). Porém, nessa pesquisa os autores consideraram a rigidez à flexão homogeneizada até que o limite elástico fosse atingido (HAJJAR e GOURLEY, 1996). Já Scott e Fenves (2006) limitaram a plasticidade a regiões com comprimento específico nas extremidades dos elementos finitos.

1.3.2 Problema de interação solo-estrutura

É crescente o interesse na avaliação do comportamento das estruturas com restrições de contatos nos últimos anos. Em 1964, Kerr (1964) apresentou equações matemáticas que descreviam o comportamento de vários modelos de

fundação, tais como: Winkler, Pasternak, Reissner, Vlasov, entre outros. Posteriormente, Kerr *et al.* (1976) apresentou métodos variacionais, desenvolvidos a partir do princípio dos trabalhos da energia potencial total estacionária, para formular o problema de contato de vigas apoiadas continuamente em bases elásticas.

Chandra *et al.* (1987) propôs um polinômio com um termo não linear cúbico para representar a reação da fundação elástica, levando-se em conta o comportamento não linear do solo. Tal abordagem foi usada por Shen (1995) para análise estática de placas imperfeitas, e, mais posteriormente, o mesmo autor utilizou esse modelo na análise do comportamento termomecânico de placas em contato com o solo (SHEN, 2000).

Nogueira *et al.* (1990) propuseram uma solução numérica baseada no MEF para o problema de contato unilateral entre vigas e bases elásticas do tipo Winkler. Foram usados o elemento isoparamétrico com quatro pontos nodais para modelar a viga e o elemento finito não linear de treliça para representar o comportamento da base elástica. O método de Newton–Raphson foi adotado na solução do sistema de equações não lineares. Kaschiev e Mikhajlov (1995) também usaram o MEF e o método de Newton para resolver o problema de contato de uma viga sobre uma fundação do tipo Winkler que reagia somente às solicitações de compressão.

Silveira (1995), em sua tese de doutorado, desenvolveu uma metodologia de solução numérica não linear para resolver problemas de instabilidade de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato. Em Silva (1998) e Silva *et al.* (2001) estão os fundamentos da solução numérica, via MEF, para problemas de equilíbrio de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato, mas considerando pequenos deslocamentos e deformações e material elástico linear. Já em Pereira (2003) e Silveira *et al.* (2008a,b) podem ser

encontradas duas formulações capazes de resolver o problema de contato unilateral entre uma estrutura esbelta e uma fundação elástica. Em uma primeira abordagem, que é mais geral, o MEF foi usado tanto para discretizar a estrutura quanto a base e técnicas de programação matemática foram adotadas na solução do problema de otimização (PEREIRA, 2003; SILVEIRA *et al.*, 2008b). Na segunda abordagem foi usado o Método de Ritz para a redução espacial e o método de Newton-Raphson para a solução das equações não lineares (SILVEIRA *et al.*, 2008a).

O problema de uma estaca parcialmente enterrada em um meio elástico (ou solo) é encontrado como um “estudo de caso” em Aljanabi *et al.* (1990). Os autores desenvolveram um elemento finito de contato para a base que inclui além da rigidez transversal do solo (ou normal), k_n , a sua rigidez cisalhante, k_s , (atrito estrutura-solo). Posteriormente, Badie e Salmon (1996) resolveram o mesmo problema, mas utilizando elemento de contato de ordem quadrática para a base com dois parâmetros k_n e k_s , e mais a interação entre as molas, aproximando do modelo de Pasternak. A importância de se considerar o segundo parâmetro da base na modelagem do solo, mais especificamente, as implicações de se adotar o modelo do tipo de Pasternak para representar a fundação, foi explorada por Shirima e Giger (1992). Posteriormente, Mullapudi e Ayoub (2010) analisaram uma viga em contato com uma argila arenosa, utilizando uma formulação mista para um elemento finito inelástico. Este mesmo elemento pode ser adotado na modelagem de problemas de vigas em contato com fundações elásticas do tipo Pasternak. Shirima e Giger (1992) resolveram esse problema através do MEF, baseado na teoria de viga de Timoshenko.

O estudo da estabilidade elástica de colunas com restrições impostas por bases elásticas do tipo Pasternak também é encontrado nos trabalhos de Naidu e Rao (1995), Kien (2004) e Shen (2011). Já a análise do comportamento de uma

viga com grandes deslocamentos em contato com uma base do tipo Pasternak (ou Filonenko-Borodich) foi feita por Horibe e Asano (2001) através do Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Landenberger e EI-Zafrany (1999) desenvolveram uma técnica para análise de problemas de contato considerando o acoplamento de sub-regiões através do MEF e MEC. Em 2011, Guo Xiaoming *et al.* (2011) apresentaram uma formulação incluindo desigualdade variacional para análise de problemas de contato elastoplástico. A solução numérica foi obtida através de técnicas de programação matemática.

Uma metodologia geral de solução modal para análise não linear de vigas com restrições unilaterais de contato foi proposta por Pereira *et al.* (2002). Nesse trabalho, uma fundação do tipo Winkler reagindo somente às solicitações de compressão foi considerada e a técnica iterativa de Newton–Raphson foi usada para resolver o sistema de equações não lineares.

Kargarnovin *et al.* (2005) estudaram a resposta de vigas suportadas por fundação viscoelástica não linear submetido a movimentação harmônica de cargas. As equações foram resolvidas usando o método de perturbação em conjunto com a transformação complexa de Fourier.

Avramidis e Morfidis (2006) resolveram analiticamente uma viga Timoshenko em contato com uma base de três parâmetros. Fizeram também uma comparação entre bases de um, dois e três parâmetros através de elementos finitos, concluindo que a fundação do tipo Kerr fornece um melhor resultado. Para estimar os parâmetros do solo, propuseram um procedimento analítico baseado no modelo de Vlasov modificado.

Um estudo sobre vigas de concreto armado sobre uma fundação do tipo Winkler foi realizado por Al-Azzawi *et al.* (2010). A pesquisa foi realizada através

de elementos finitos, utilizando o *software* ANSYS, e considera as não linearidades do material, geométrica e da fundação elástica.

As respostas estáticas de uma viga sobre uma fundação não linear considerando contato unilateral submetidos a cargas estáticas concentradas e distribuídas foi estudado por Bhattiprolu *et al.* (2012). Considerou-se a restrição de contato como unilateral, uma função de contato auxiliar foi introduzida e a solução do modelo foi sob a forma de uma soma de modos do problema linear. As equações de amplitude nodais envolvem as coordenadas dos pontos de perda de contato desconhecidos, e a solução foi obtida por meio de uma técnica iterativa. Os pontos de perda de contato desconhecidos, formando uma parte do esquema de solução, foram obtidos empregando o método de bissecção em cada iteração. Vigas com contato unilateral também foram estudadas por Torbacki (2008), que realizou análise estática utilizando um modelo representativo do solo de dois parâmetros, através do MEF.

Sun e Natori (1996) apresentaram um estudo numérico de problemas de estabilidade de vigas com grandes deformações, bem como o comportamento pós-flambagem, associados a restrições de contato unilateral. As condições de contato são introduzidas por meio do método de penalidade. Problemas de contato unilaterais também foram estudados em Simo *et al.* (1986). Este artigo apresentou uma solução numérica de problemas estruturais de grande deflexão, sujeitas a restrições de contato unilaterais, e exibindo uma resposta inelástica constitutiva. Utilizou-se o método de penalidade para a solução do problema de contato.

Holanda (2000) estudou o equilíbrio e a estabilidade de placas apoiadas em fundações elásticas lineares e não lineares, considerando ainda a não linearidade geométrica da estrutura. Tsiatas (2010) também utilizou esse método para modelar o solo e realizar a análise não linear, mas aplicado a vigas de seção não uniforme.

Sapountzakis e Kampitsis (2010) desenvolveram um MEC para a análise não linear geométrica de vigas-colunas deformáveis por cisalhamento, de seção transversal duplamente simétrica. As vigas eram suportadas em uma fundação do Winkler bilaterais e unilaterais, sofrendo grandes deflexões sob condições gerais de contorno. Em 2014, eles propuseram uma análise inelástica e geometricamente não linear, sobre restrições de contorno bilaterais considerando uma fundação de Winkler inelástica (SAPOUNTZAKIS e KAMPITSIS, 2014).

Silveira *et al.* (2013) realizaram um estudo envolvendo arcos e anéis com restrições unilaterais de contato; nesse mesmo artigo pode ser encontrada uma ampla pesquisa bibliográfica sobre análises estáticas e dinâmicas de problemas envolvendo barras, placas, anéis e cascas cilíndricas com restrições de contato. Maciel (2012) e Silveira *et al.* (2015) desenvolveram uma pesquisa sobre o equilíbrio e estabilidade de barras em contato bilateral, via MEF, considerando os efeitos da não linearidade geométrica da estrutura.

Haldar e Basu (2015) propuseram uma análise baseada em vigas contínuas considerando a teoria de Euler-Bernoulli em contato com solos que explicitamente leva em conta a resposta não linear da tensão-deformação do solo. As equações diferenciais que descreve os deslocamentos na viga e do solo são derivadas usando o Princípio do Trabalho Virtual (PTV). Essas equações são resolvidas usando o MEF unidimensionais e o Método das Diferenças Finitas (MDF).

1.4 Sistema Computacional CS-ASA

Como parte da tese de doutorado do orientador desta pesquisa (SILVEIRA, 1995), foi desenvolvido um programa computacional para a análise da estabilidade elástica de colunas, arcos e anéis esbeltos com restrições unilaterais de contato impostas por bases elásticas (solo ou rocha). O produto dessa tese foi então dividido em dois sistemas computacionais: um para análise de problemas

de contato solo-estrutura; e outro mais específico para análise/projeto de estruturas de aço.

As primeiras intervenções no módulo de análise/projeto de estruturas de aço aconteceram através de Galvão (2000) e Rocha (2000). Foram desenvolvidas várias formulações de segunda ordem e estratégias numéricas visando a continuidade do traçado das trajetórias de equilíbrio. Manzi (2001) implementou elementos finitos curvos para modelagem de arcos e anéis; e Pinheiro (2003) contribuiu com formulações de elementos finitos semirrígidos para simulação de pórticos planos com ligações flexíveis.

No contexto da análise dinâmica, Galvão (2001, 2004) tornou possível a análise de vibração em treliças planas, pórticos planos e espaciais e implementou métodos de integração numérica, explícitos e implícitos, para análise de pórticos planos considerando o efeito da flexibilidade da conexão. Além disso, estratégias adaptativas que permitem o controle automático dos intervalos de tempo no processo de integração das equações diferenciais de movimento foram acrescentadas.

A inclusão de formulações inelásticas aconteceu com Machado (2005) através do Método da Rótula Plástica (MRP), com a plasticidade concentrada. Rocha (2006) e Santos (2007) utilizaram um elemento finito híbrido de pórtico plano na modelagem de efeitos não lineares acoplados.

Silva (2009) unificou os desenvolvimentos supracitados e gerou o sistema CS-ASA, que realiza análises numéricas avançadas estáticas e dinâmicas de estruturas reticuladas planas, baseadas no MEF.

Essa expansão, inclusive, vem acontecendo com o desenvolvimento e conclusão de algumas dissertações e teses no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFOP (PROPEC/UFOP). Por exemplo, Pires (2012) propôs que uma condição de perpendicularidade — técnica do fluxo normal — fosse

satisfeita ao longo do processo iterativo de solução não linear para superar certas inconsistências da estratégia iterativa do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995). Também em 2012, Prado (2012) desenvolveu um pré-processador gráfico para o CS-ASA. Gonçalves (2013) implementou uma nova equação para o módulo tangente sugerida por Ziemian e McGuire (2002) com o intuito de verificar como a degradação da rigidez da seção varia em função do esforço normal e do momento fletor em torno do eixo de menor inércia. Gonçalves (2013) também adicionou as curvas de interação que avaliam de maneira adequada a interação entre esforço normal e momento fletor no eixo de menor inércia.

Posteriormente, Batelo (2014) desenvolveu um modelo para avaliar o comportamento não linear de estruturas de aço sob a ação de excitações dinâmicas extremas. Explorou a capacidade de amortecimento hysterético da estrutura, em decorrência da energia absorvida durante o processo de deformação plástica de seus membros estruturais.

Lemes (2015) desenvolveu o módulo para análise avançada de estruturas de concreto e mistas. Mais especificamente, ele definiu, baseado no Método dos Elementos de Finitos (MEF), as propriedades geométricas da seção transversal mista. Para isso, introduziu ao CS-ASA o conceito de rigidez generalizada para a análise não linear e cálculo da resistência da seção, considerando ou não a tração no concreto. Lemes (2015) implementou as curvas de interação esforço normal-momento fletor para o início do escoamento e plastificação e simulou a perda gradual de rigidez nodal utilizando o MRPR, para análise inelástica de estruturas mistas de aço e concreto.

Paralelamente, Silva (2016) introduziu formulações Corrotacionais 2D para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas. Barros (2016) iniciou o processo de expansão do CS-ASA para a análise de estruturas de aço em situação de incêndio. Pires (2018) possibilitou a ferramenta computacional a realizar

análises avançadas de estruturas de aço e de concreto armado em situação de incêndio através do desenvolvimento de um sistema computacional. Expandiu o CS-ASA com a implementação de dois novos módulos capazes de reproduzir o comportamento estrutural sob altas temperaturas. Lemes (2018) apresentou um estudo numérico avançado de estruturas de aço, concreto e mistas abordando várias fontes de não linearidades, como os efeitos de segunda ordem, a inelasticidade, as ligações semirrígidas e a interação parcial em vigas mistas. Mais recentemente, Barros (2021) desenvolveu o módulo de avaliação numérica do desempenho de estruturas mistas de aço-concreto em situação de incêndio.

As pesquisas envolvendo sistemas com interação solo-estrutura tiveram como ponto de partida o trabalho de doutorado de Silveira (1995), já citado anteriormente. A partir desse trabalho, diversos outros estudos foram realizados no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) da UFOP. Inicialmente, Silva (1998) apresentou um trabalho direcionado ao estudo das placas em contato bilateral e unilateral com bases elásticas. A autora desenvolveu uma metodologia numérica de solução para resolver problemas de equilíbrio não lineares de placas esbeltas e espessas com restrições unilaterais de contato. Na sequência, Pereira (2003) realizou um estudo sobre o comportamento de vigas com restrições de contato imposta pelo solo ou rocha e empregou o método de Rayleigh-Ritz na solução de casos particulares de vigas com restrições unilaterais de contato. Numa formulação numérica mais geral, o MEF foi considerado na discretização do sistema estrutural e o problema de interação solo-estrutura foi resolvido através de técnicas de otimização.

Maciel (2012) estendeu os trabalhos e desenvolveu um estudo envolvendo o equilíbrio e estabilidade elástica de elementos estruturais, como vigas e colunas, em contato bilateral com bases elásticas. As bases que foram representadas através de modelos de molas discretos e contínuos (modelos de Winkler e

Pasternak). Então, o autor desenvolveu um novo módulo do CS-ASA para análise da estabilidade elástica de colunas com restrições bilaterais de contato. Para realização das intervenções computacionais no CS-ASA, relacionadas com a inclusão dos modelos de bases elásticas no sistema e com as alterações na estrutura de leitura e impressão de dados, chegou-se a um novo módulo do programa denominado de CS-ASA/BC.

Muñoz (2015) realizou análises dinâmicas não lineares de sistemas estruturais reticulados planos considerando a interação solo-estrutura. O autor considerou, em suas análises, o comportamento não linear do solo através de molas rotacionais e a não linearidade geométrica da estrutura também foi considerada.

Dando continuidade, Rosas (2016) trouxe para o sistema computacional CS-ASA as análises dinâmicas não lineares de sistemas estruturais reticulados planos com a interação solo-estrutura. Essas análises foram realizadas com a utilização dos modelos de molas discretas e contínuas para representação do solo (modelos de Winkler linear e não linear, e Pasternak). Foram incluídos os efeitos oriundos da não linearidade geométrica da estrutura, e o problema transiente não linear foi resolvido através do método de integração de Newmark em combinação com a estratégia incremental e iterativa de Newton-Raphson. Mais recentemente, Batelo (2018) desenvolveu uma ferramenta computacional para uma análise dinâmicas mais realista de edificações estruturadas em aço considerando a interação solo-estrutura. O autor propôs uma versão do sistema CS-ASA que contempla a metodologia numérica para análise do problema de contato solo-estrutura, acoplado aos efeitos da não linearidade geométrica, inelasticidade do material aço e ligações semirrígidas (viga-pilar e pilar-base) na estrutura.

O processo de simulação numérica com o CS-ASA e o módulo CS-ASA/BC segue basicamente as três etapas de qualquer programa de elementos finitos, isto é: pré-processamento, análise e pós-processamento. Essas etapas normalmente são

tratadas de formas independentes (Figura 1.2). O pré-processamento (entrada de dados) é feita em dois arquivos de texto (análises estáticas). No primeiro são fornecidas as informações referentes ao tipo de análise, da estrutura (geometria e condições de contorno), dos materiais, das seções, dos carregamentos e, se for o caso, os dados referentes ao número e tipo de modelos de base. No segundo arquivo são definidos a formulação não linear a ser utilizada, as estratégias de incremento de carga e iteração, o incremento inicial do parâmetro de carga, o método de Newton-Raphson (padrão ou modificado) e o critério de convergência. Após o processamento (análise do problema estrutural), a saída e impressão dos resultados também são feitas em formato de arquivos de texto.

Por ter o sistema CS-ASA todo escrito em linguagem *Fortran* (CHAPMAN, 2003), vale mencionar que a atual versão é organizada de forma modular, com módulos independentes, que proporciona aumento na produtividade da programação, além de facilitar a expansão do sistema com novas funcionalidades.

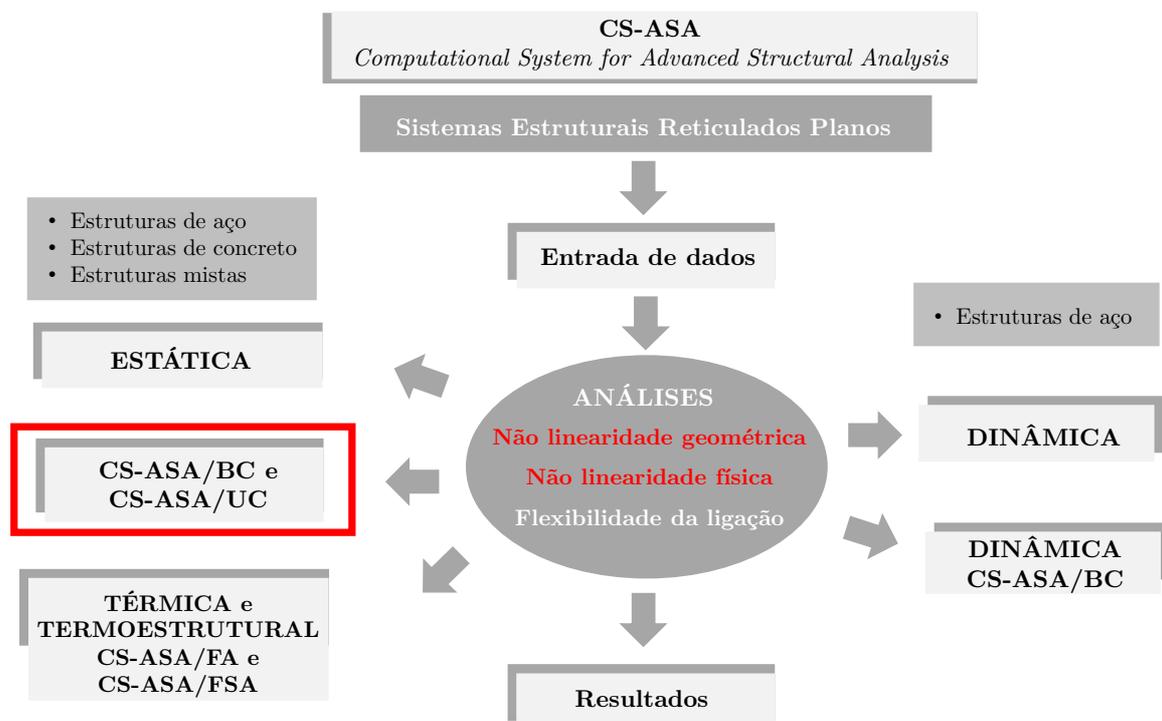


Figura 1.2. Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados

1.5 Organização do Trabalho

O presente trabalho está dividido em 6 capítulos. São apresentados ao longo do texto os fundamentos teóricos necessários para um melhor entendimento e desenvolvimento do trabalho em si, bem como os resultados obtidos nos exemplos para validação e para a verificação da eficiência das implementações.

Inicialmente, no Capítulo 2 será apresentada uma metodologia generalizada para análise de estruturas no contexto da plasticidade concentrada. Serão detalhadas as obtenções da formulação do elemento finito não linear, da curva de interação entre o esforço normal e o momento fletor, e das rigidezes axial e à flexão via MCD. Na sequência são apresentadas a solução do problema não linear e as estratégias de incremento de carga e iteração.

Em seguida, no Capítulo 3, é apresentada a formulação de elementos finitos para o tratamento do problema de interação solo-estrutura em que restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por fundações elásticas são consideradas. Na sequência, apresenta-se o tratamento do problema de contato unilateral, com o método de penalidades através de esquemas de pivoteamento. Nesse capítulo também serão abordadas as formulações do modelo discreto e dos modelos contínuos de Winkler e Pasternak.

A validação dos procedimentos numéricos apresentados nos Capítulos 2 será feita por meio de análises de sistemas estruturais, com diferentes seções transversais, sendo os resultados encontrados e discutidos no Capítulo 4. Como parâmetros de comparação, as respostas da literatura, tanto no contexto experimental quanto numérico, serão utilizadas.

No Capítulo 5 tem-se as análises realizadas de sistemas com interação solo-estrutura, bilaterais e unilaterais. Esses exemplos validam as formulações implementadas, onde resultados são comparados com soluções numéricas encontradas na literatura e pelo software Mastan2.

O Capítulo 6 traz algumas observações e conclusões referentes à pesquisa e uma pequena discussão dos resultados obtidos. Com o objetivo de continuar este trabalho e expandir o sistema computacional, alguns temas importantes são sugeridos.

CAPÍTULO 2

Análises Avançadas de Estruturas

2.1 Considerações Iniciais

Para prever o comportamento da estrutura de maneira precisa, é necessária uma boa interação entre as etapas de análise e projeto. Nesse campo, destaca-se a análise avançada, que pode ser definida como um método capaz de avaliar simultaneamente a capacidade resistente e a estabilidade da estrutura (CHEN e TOMA, 1994).

A concepção de projetos estruturais utilizando análises avançadas, que tem o objetivo de avaliar o comportamento real da estrutura, deve ser realizado considerando algumas fontes de não linearidade. Assim, exige-se uma descrição precisa do comportamento dos materiais que as compõem. Além disso, as metodologias numéricas empregadas devem ser efetivas, ou seja, precisas na resposta e rápidas na execução.

Tem-se como objetivo, neste capítulo, a obtenção de uma metodologia numérica que seja capaz de atender aos requisitos anteriormente citados. Serão consideradas as não linearidades geométrica e dos materiais, aliadas a estratégias

de solução já validadas e presentes na plataforma CS-ASA-*Computational System for Advanced Structural Analysis* (SILVA, 2009).

A seguir, apresentam-se a formulação numérica via Método da Rótula Plástica Refinado Modificado (MRPRM) acoplado ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), para estruturas de aço, concreto e mistas de aço e concreto e as estratégias de solução do problema estático não linear.

2.2 Elemento Corrotacional

A não linearidade do material será simulada através da relação momento-curvatura na metodologia denominada MRPRM, onde é aplicada a plasticidade concentrada nos pontos nodais. É importante destacar algumas considerações envolvendo a formulação de elementos finitos adotada neste capítulo, isto é:

- todos os elementos são inicialmente retos e prismáticos, e a seção transversal permanece plana após a deformação;
- são desprezados os efeitos de instabilidade locais, como a flambagem nas chapas componentes dos perfis de aço; assim a seção pode desenvolver sua capacidade total de rotação plástica (seções compactas);
- os efeitos de instabilidade globais que podem acontecer em problemas tridimensionais, como a flambagem lateral, torcional e distorcional, são ignorados pois considera-se um sistema de travamento no eixo z;
- grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos;
- as deformações originadas pelo cisalhamento são ignoradas;
- no caso da análise de estruturas mistas, considera-se a interação total entre os elementos de aço e concreto;
- as análises serão feitas em estruturas 2D.

2.2.1 Relações cinemáticas do elemento

A cinemática do elemento é apresentada na Figura 2.1, juntamente com a nomenclatura dos movimentos (translações e rotações) utilizadas. Se o elemento estrutural apresenta grandes deslocamentos e rotações, os graus de liberdade globais contêm o movimento de corpo rígido e a também a parte de deformação pura. A utilização do referencial corrotacional para descrição do movimento dos corpos sólidos, tem como objetivo separar essas partes.

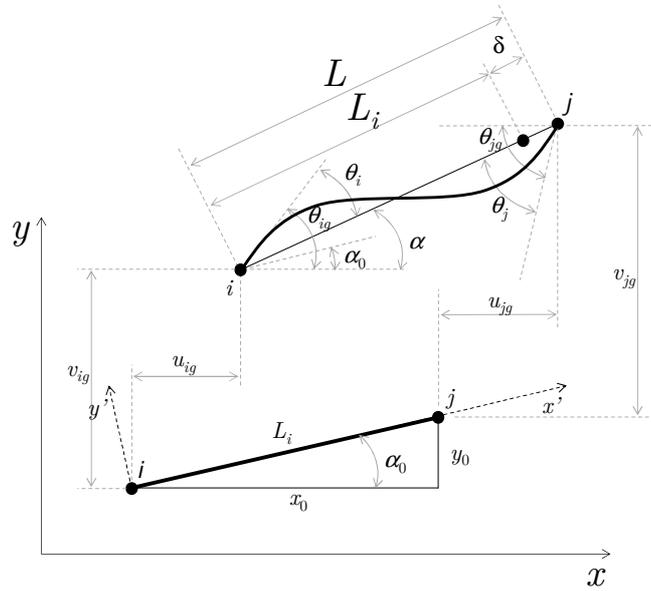


Figura 2.1. Deslocamentos no sistema global de coordenadas

Chhang *et al.* (2017) descreveram que o movimento de corpo rígido é definido pelos deslocamentos globais (translações u_{ig} e v_{ig} , e rotação $\alpha - \alpha_0$). Isso define um sistema de coordenadas locais (x' ; y') que se move continuamente com o elemento. O sistema local é usado para descrever a parte do movimento que realmente causa deformação no elemento.

Os graus de liberdade globais, indicados com o subscrito g , são descritos por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{ig} & v_{ig} & \theta_{ig} & u_{jg} & v_{jg} & \theta_{jg} \end{bmatrix}^T \quad (2.1)$$

em que u , v e θ são a translação horizontal, a translação vertical e a rotação, respectivamente, e os subscritos i e j definem os nós.

Os graus de liberdade locais na forma reduzida são dados por:

$$\mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} \delta & \theta_i & \theta_j \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

sendo δ , θ_i e θ_j são funções dos graus de liberdade globais, tal como definido a seguir:

$$\delta = L_f - L \quad (2.3a)$$

$$\delta = \sqrt{(x_0 + u_{jg} - u_{ij})^2 + (y_0 + v_{jg} + v_{ig})^2} - \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (2.3b)$$

$$\theta_i = \theta_i - \alpha_0 = \theta_i - \tan^{-1} \left(\frac{y_0 + v_{jg} - v_{ig}}{x_0 + u_{jg} - u_{ig}} \right) \quad (2.3c)$$

$$\theta_j = \theta_j - \alpha_0 = \theta_j - \tan^{-1} \left(\frac{y_0 + v_{jg} - v_{ig}}{x_0 + u_{jg} - u_{ig}} \right) \quad (2.3d)$$

A diferenciação das Equações (2.3b) à (2.3d) em relação aos graus de liberdade globais fornece o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/l_f & c/l_f & 1 & s/l_f & -c/l_f & 0 \\ -s/l_f & c/l_f & 0 & s/l_f & -c/l_f & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{ig} \\ \Delta v_{ig} \\ \Delta \theta_{ig} \\ \Delta u_{jg} \\ \Delta v_{jg} \\ \Delta \theta_{jg} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

ou na sua forma compacta:

$$\Delta \mathbf{u}_c = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_g \quad (2.5)$$

em que s é o $\text{sen } \alpha$, c é o $\text{cos } \alpha$, $\Delta \mathbf{u}_c$ e $\Delta \mathbf{u}_g$ são os deslocamentos incrementais totais no sistema local e global, respectivamente, e a matriz \mathbf{B} é responsável pela transformação dos deslocamentos do sistema global para o local e vice-versa.

2.2.2 Formulação do elemento

A abordagem corrotacional é conveniente para estabilizar a relação entre as variáveis locais e globais (ALHASAWI *et al.*, 2017). Partindo do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), é possível descrever a relação entre as forças nos dois sistemas referenciais da seguinte forma:

$$\delta V = \Delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{f}_g = \Delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{f}_c = \Delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}_c \quad (2.6)$$

em que se faz uso da Equação (2.5).

Da Equação (2.6), pode-se definir a relação entre os vetores de forças globais, \mathbf{f}_g , e locais, \mathbf{f}_c , como:

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_c \quad (2.7)$$

Pela diferenciação da Equação (2.7) em relação ao vetor de deslocamentos globais, $\Delta \mathbf{u}_g$, obtém-se a matriz de rigidez global, que é definida por (CHHANG *et al.*, 2017):

$$\mathbf{K}_g = \frac{\Delta \mathbf{f}_g}{\Delta \mathbf{u}_g} = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{lc} \mathbf{B} + \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L_f} N + \frac{1}{L_f^2} [\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T] (M_i + M_j) \quad (2.8)$$

sendo \mathbf{K}_{lc} a matriz de rigidez do elemento no sistema local, descrita na próxima seção; N , M_i e M_j as forças internas referentes aos graus de liberdade locais; e:

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \quad (2.9)$$

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T \quad (2.10)$$

Para os sistemas onde avalia-se a interação entre o solo e a estrutura, a matriz de rigidez da estrutura deve ser somada à matriz de rigidez da fundação (solo), \mathbf{K}_b , e o mesmo deve ser feito com o vetor de forças internas. Portanto:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_{lc} + \mathbf{K}_b \quad (2.11)$$

$$\mathbf{K}_g = \frac{\Delta \mathbf{f}_g}{\Delta \mathbf{u}_g} = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_s \mathbf{B} + \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L_f} N + \frac{1}{L_f^2} [\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T] (M_i + M_j) \quad (2.12)$$

nas quais \mathbf{K}_{lc} é a matriz de rigidez do sistema descrita na próxima seção. A obtenção da matriz \mathbf{K}_b será descrita no Capítulo 3.

2.2.3 Matriz de rigidez - \mathbf{K}_{lc}

Nas formulações numéricas via Método dos Elementos Finitos (MEF) baseadas no método dos deslocamentos, podem aparecer problemas de travamento (*locking phenomena*). A utilização funções de interpolação tradicionais de baixa ordem estão associadas ao aumento espúrio de rigidez na estrutura durante a análise e conseqüentemente aos problemas de travamento. Tang *et al.* (2015) destacaram que o *membrane locking* surge quando é usada uma função de interpolação de baixa ordem para o deslocamento axial do elemento de viga-pilar na análise não linear geométrica (NLG). Usando a forma degenerada do tensor de Green, onde o gradiente de rotação é considerado pequeno, de modo que a deformação específica de segunda ordem pode ser desprezada; e a curvatura baseada na teoria de Euler-Bernoulli, as deformações axiais e curvaturas são descritas como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (2.13)$$

$$\Phi = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.14)$$

Assumindo que o deslocamento axial total pode ser dividido em uma parte referente a força normal (extensional) e uma outra induzida pela flexão, de acordo com Tang *et al.* (2015) e Silva (2016), as funções de interpolações para os deslocamentos transversal (v) e axial (u) que eliminam o *membrane locking* são dadas por:

$$v = x \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 \theta_i + \frac{x^2}{L} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \theta_j \quad (2.15)$$

$$u(x) = \underbrace{\frac{x}{L} \delta}_{axial} + \underbrace{\frac{x}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx}_{flexão} \quad (2.16)$$

Da Equação (2.16), a deformação axial pode ser escrita como função do deslocamento e das rotações como segue (SILVA, 2016):

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} + \frac{2\theta_i^2 - \theta_i \theta_j + 2\theta_j^2}{30} \quad (2.17)$$

Considerando aqui o material com comportamento elástico e sendo as ações aplicadas nos pontos nodais e conservativas (trabalho realizado pelos esforços internos e externos é independente do caminho percorrido pela estrutura ao passar da condição de equilíbrio inicial para outra configuração qualquer), a energia potencial total do sistema, Π , é expressa pela energia de deformação U e pelo trabalho externo realizado W , ou seja:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} EA \int_0^L \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^L \Phi^2 dx - \sum_{i=1}^3 f_{c,i} u_{c,i} \quad (2.18)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material, A e I são as propriedades geométricas da seção área e inércia, respectivamente. Usando as Equações (2.14)

e (2.17) na Equação (2.18), a energia potencial total é agora expressa em função dos graus de liberdade do elemento. Pelo princípio da energia potencial estacionária, a primeira variação na função implica nas equações de equilíbrio, assim:

$$\Delta \Pi = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_c} - \mathbf{f}_c \right) \Delta \mathbf{u}_c = 0 \quad (2.19)$$

sendo que a primeira variação da energia de deformação, U , resulta no vetor de forças internas, \mathbf{f}_c , ou seja:

$$\mathbf{f}_c = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_c} \quad (2.20)$$

e a matriz de rigidez tangente como a segunda variação da energia de deformação, ou primeira derivada do vetor de forças internas:

$$\mathbf{K}_{lc} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}_c^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial \mathbf{u}_c} \quad (2.21)$$

em que os termos da matriz de rigidez são explicitamente mostrados no Apêndice A.

2.2.4 Simulação da plasticidade concentrada

Na modelagem do sistema estrutural via MEF, utiliza-se o elemento finito de viga-pilar delimitado pelos pontos nodais i e j , como mostrado na Figura 2.2. As relações momento-curvatura serão utilizadas para a simulação da degradação das rigidezes (MRPRM).

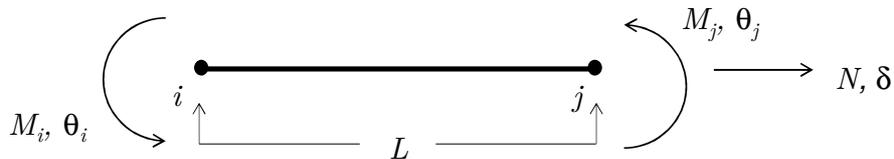


Figura 2.2. Elemento finito corrotacional

Assim, o equilíbrio dos elementos finitos, na forma incremental, é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{lc(1,1)} & k_{lc(1,2)} & k_{lc(1,3)} \\ k_{lc(2,1)} & k_{lc(2,2)} & k_{lc(2,3)} \\ k_{lc(3,1)} & k_{lc(3,2)} & k_{lc(3,3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

ou na sua forma compacta:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_{lc} \Delta \mathbf{u}_c \quad (2.23)$$

na qual, ΔP , ΔM_i , e ΔM_j são os incrementos de força axial e de momentos fletores e $\Delta \delta$, $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ são os incrementos de deslocamento axial e rotações nodais, respectivamente.

Os termos apresentados na Equação (2.22) referentes à flexão, considerando a não linearidade dos materiais, são obtidos por meio de uma abordagem análoga à proposta por Ziemian e McGuire (2002). Os termos de flexão são calculados considerando a tangente à relação momento-curvatura ($M \times \Phi$) variando linearmente ao longo do comprimento do elemento, para evitar processos de integração na matriz de rigidez durante a análise. Esse processo é similar ao caso de um gradiente linear do momento (ZIEMIAN e MCGUIRE, 2002). Assim:

$$EI(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) EI_{T,i} + \frac{x}{L} EI_{T,j} \right] \quad (2.24)$$

em que $EI_{T,i}$ e $EI_{T,j}$ são as rigidezes à flexão, nos pontos nodais i e j , respectivamente, e L é o comprimento do elemento finito. A matriz de rigidez reduzida com apenas os termos referentes à flexão é definida utilizando a derivada segunda das funções de interpolação de Hermite, apresentadas na Equação (2.14), descrito em \mathbf{N} , ou seja (MCGUIRE *et al.*, 2000):

$$\mathbf{k}^* = \int_0^L \mathbf{N}^T EI_T(x) \mathbf{N} dx \quad (2.25)$$

onde:

$$\mathbf{N} = \left[N_1 = \frac{2}{L} \left(2 - \frac{3x}{L} \right) \quad N_2 = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{3x}{L} \right) \right] \quad (2.26)$$

sendo cada uma das duas funções de interpolação descritas em relação aos graus de liberdade de rotação.

Desenvolvendo a Expressão (2.25) chega-se em:

$$\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} \int_0^L N_1^2 EI_T(x) dx & \int_0^L N_1 N_2 EI_T(x) dx \\ \int_0^L N_1 N_2 EI_T(x) dx & \int_0^L N_2^2 EI_T(x) dx \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

que resulta em:

$$k_{11}^* = \int_0^L (N_1)^2 EI_T(x) dx \quad (2.28)$$

$$k_{12}^* = k_{21}^* = \int_0^L N_1 N_2 EI_T(x) dx \quad (2.29)$$

$$k_{22}^* = \int_0^L (N_2)^2 EI_T(x) dx \quad (2.30)$$

Resolvendo-se as integrais das Equações (3.28) – (3.30), chega-se a:

$$\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{3EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} & \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \\ \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} & \frac{EI_{T,i} + 3EI_{T,j}}{L} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Considerando que a rigidez axial no elemento é dada pela média das rigidezes nos pontos nodais i e j , tem-se as seguintes expressões para os coeficientes da matriz de rigidez do elemento corrotacional, \mathbf{K}_{lc} :

$$EA^* = \frac{EA_{T,i} + EA_{T,j}}{2} \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{EI_1}{L}\right)^* = \frac{3EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{EI_2}{L}\right)^* = \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{EI_3}{L}\right)^* = \frac{EI_{T,i} + 3EI_{T,j}}{L} \quad (2.35)$$

em que EA_T é a rigidez axial tangente à relação momento-curvatura que será discutida na Seção 2.3.4, como a rigidez à flexão.

2.2.5 Return mapping

Em uma seção plastificada, em que a combinação de esforços N e M está sobre a curva de plastificação, numericamente o aumento da força axial externa resulta no desequilíbrio do sistema. Isto é, as ações atuantes naquela seção ultrapassam o limite de resistência da mesma. Isso é contornado na formulação adotando-se a estratégia denominada *return mapping*. Essa estratégia envolve a alteração na relação força-deslocamento do elemento (Equação 2.22) de modo que a capacidade resistente última da seção não seja violada. Assim a Equação (2.22) é reescrita da seguinte forma (SILVA, 2009):

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & c_1 K_{22} & 0 \\ k_{31} & 0 & c_2 K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathcal{D} \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho_i \\ \rho_j \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

que, na forma compacta fica:

$$\Delta \mathbf{f}_l = \mathbf{K}_{lh} \Delta \mathbf{u}_l + \Delta \mathbf{f}_{ps} \quad (2.37)$$

sendo $K_{22} = k_{22} - k_{23}k_{32}/k_{33}$ e $K_{33} = k_{33} - k_{23}k_{32}/k_{22}$, em que k_{mn} é o termo que corresponde à linha m e à coluna n na matriz de rigidez \mathbf{K}_{lc} (Equação 2.22). O

linear, como ilustrado na Figura 2.4. Além disso, a seção permanece plana após a deformação, como ilustrado no plano nessa mesma figura.

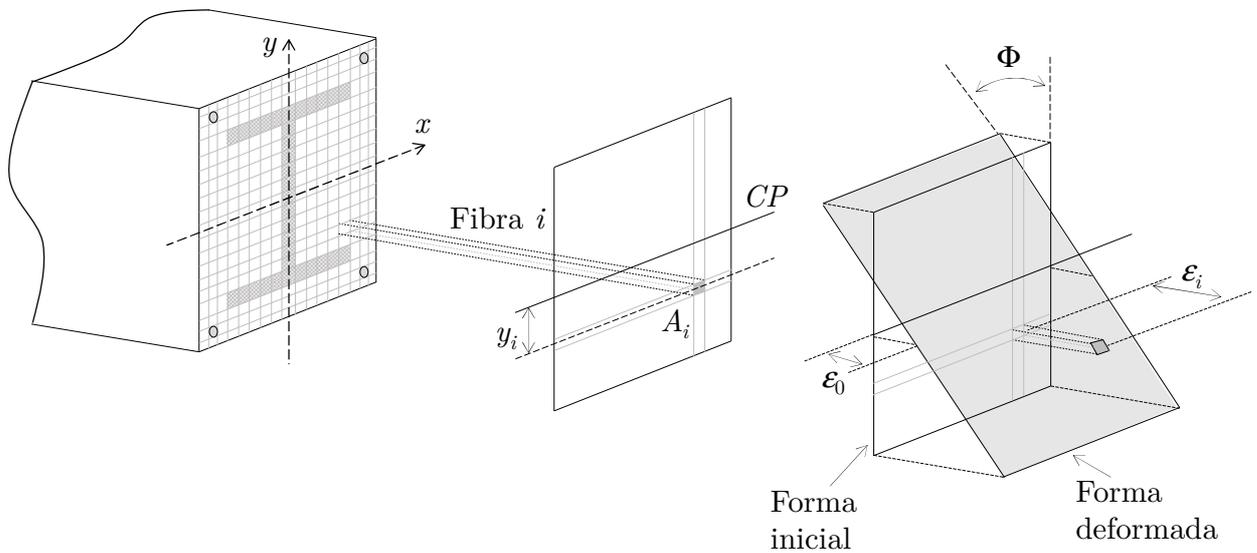


Figura 2.4. Campo de deformações para um problema plano

A seção transversal deve ser discretizada para analisar a condição deformada da seção e obter os parâmetros de capacidade de resistente e rigidez. No estudo de estruturas planas, a discretização em camadas é satisfatória (Lemes *et al.* 2017a), no entanto, este estudo introduz explicitamente tensões residuais na seção de aço. Assim, a discretização será feita em ambas as direções x e y , em fibras, conforme ilustrado na Figura 2.5.

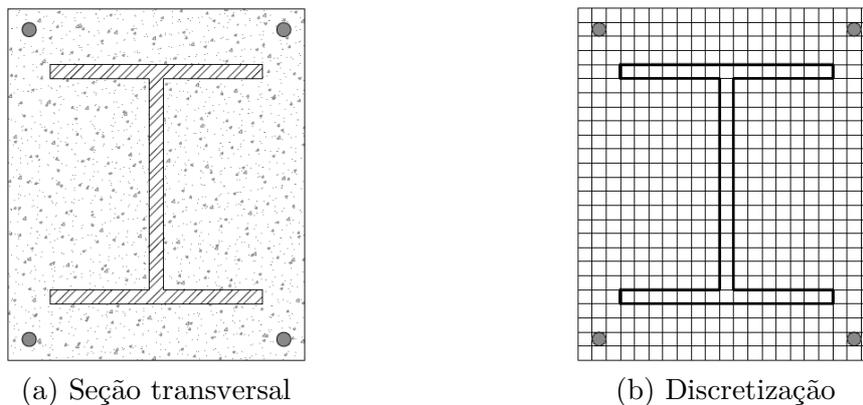


Figura 2.5. Discretização da seção transversal em fibra

Utiliza-se então o conceito de sub-regiões. A seção transversal é dividida em regiões menores, sendo aplicado um gerador de malha estruturada, o gerador

é aplicável a diversos tipos de seções mistas, de aço e de concreto armado (LEMES *et al.*, 2017b).

O objetivo principal dessa metodologia é gerar uma malha de fibras com tamanhos aproximadamente iguais em toda a seção transversal, e assim minimizar o erro para a obtenção da rigidez à flexão da seção. Para isso, a discretização tem como parâmetro inicial o número de divisões nas duas direções, fornecidos como dados de entrada. Após a obtenção das sub-regiões, é feita uma busca visando encontrar trechos que apresentam áreas maiores.

2.3.1 Relação tensão-deformação

2.3.1.1 Comportamento uniaxial do aço dos perfis

O modelo constitutivo bilinear ilustrado na Figura 2.6 descreve o comportamento da seção de aço. O aço dos perfis é um material isotrópico, assim suas propriedades mecânicas e térmicas são as mesmas em todas as direções. Na Figura 2.6 é mostrado apenas o trecho referente ao primeiro quadrante da relação constitutiva. O comportamento do aço é descrito da seguinte forma:

$$\sigma = \begin{cases} -f_y, & \text{se } -\varepsilon_u \geq \varepsilon > -\varepsilon_y \\ E_s \varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_y < \varepsilon < -\varepsilon_u \\ f_y, & \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon > \varepsilon_u \end{cases} \quad (2.38)$$

em que f_y é a resistência de escoamento, ε_y é a deformação de escoamento e ε_u é a deformação última.

Após o processo de fabricação, o elemento de aço sofre um resfriamento desigual originando as tensões residuais. Assim, considera-se que ocorram deformações prescritas na seção. Neste estudo, a distribuição das tensões residuais segue os modelos ilustrados nas Figuras 2.7(a, b) com base no ECCS (1983) para seções de aço I. No caso de seções tubulares retangulares, a distribuição utilizada

por Mathur (2011), que é baseada em Salmon *et al.* (2009) é aplicada. Este comportamento do aço é ilustrado nas Figuras 2.7(c, d).

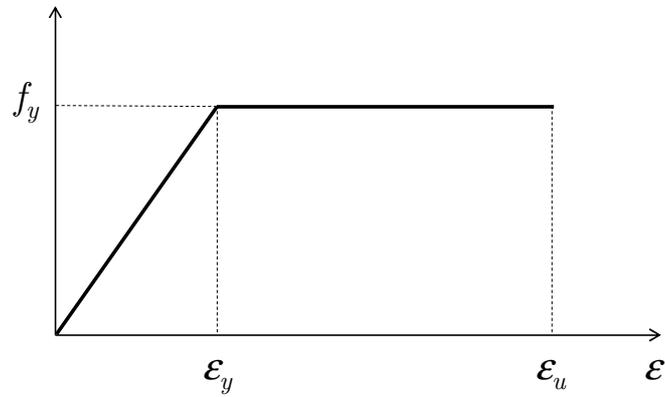


Figura 2.6. Relação constitutiva do aço

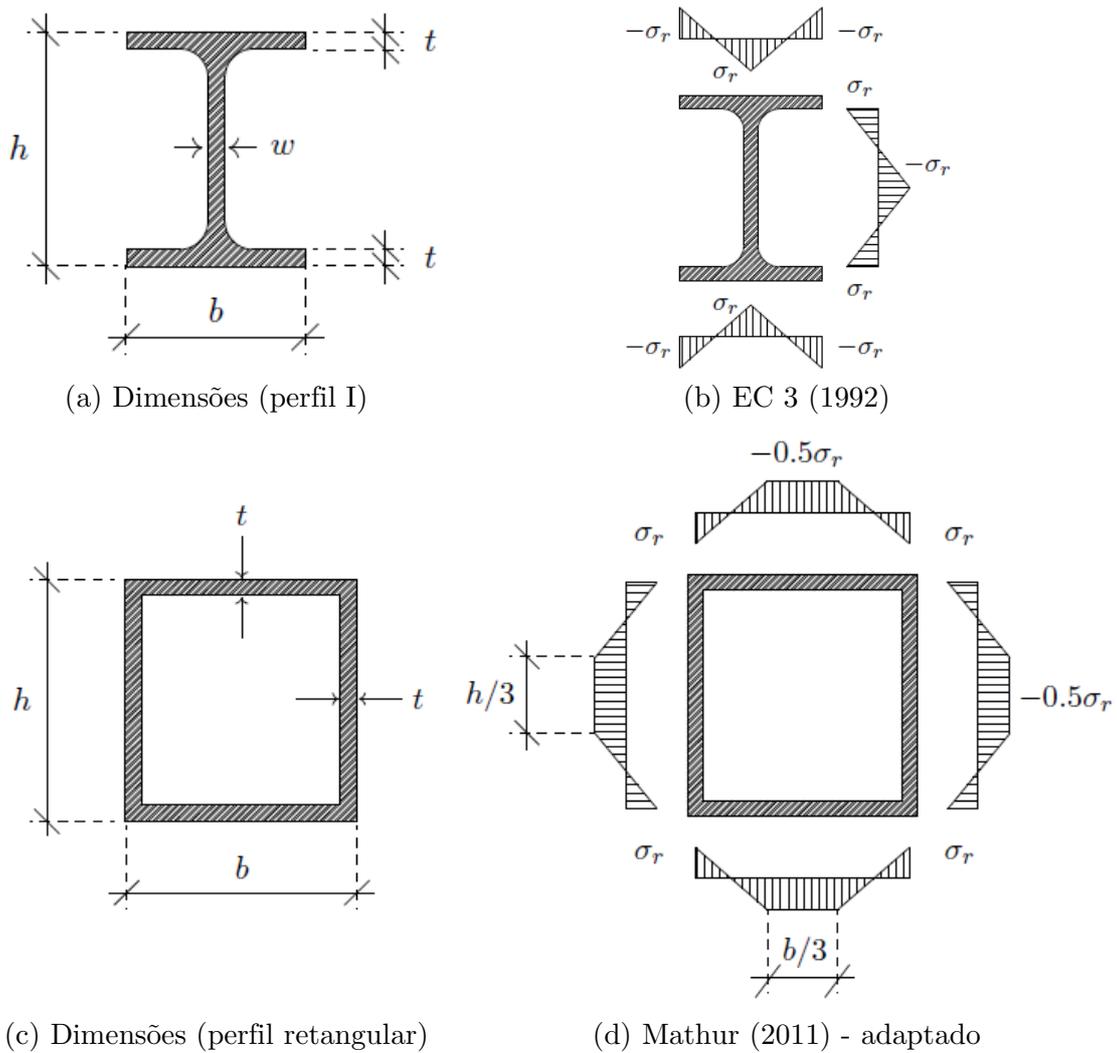


Figura 2.7. Modelo de tensões residuais

2.3.1.2 Comportamento uniaxial do aço das armaduras

A modelagem do comportamento das armaduras longitudinais é realizada por meio da relação constitutiva bilinear tanto na tração quanto na compressão, ilustrada na Figura 2.8. No modelo da relação constitutiva para compressão o efeito do encruamento é desprezado. Dessa forma, escreve-se:

$$\sigma = \begin{cases} -f_{pyd}, & \text{se } -\varepsilon_{ud} \geq \varepsilon > -\varepsilon_{pyd} \\ E_s \varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_{pyd} < \varepsilon < -\varepsilon_{pyd} \\ f_{pyd} + E_{s2} (\varepsilon - \varepsilon_{pyd}), & \text{se } \varepsilon_{pyd} \leq \varepsilon > \varepsilon_{pud} \end{cases} \quad (2.39)$$

sendo f_{pyd} a máxima tensão de compressão resistente do aço das armaduras; E_s e E_{s2} são os módulos de elasticidade, na fase elástica e de encruamento respectivamente; o parâmetro ε_{pyd} refere-se à deformação limite do regime elástico, e ε_{ud} e ε_{pud} definem as deformações últimas do material quando sob compressão (limitada pelo comportamento do concreto) e tração, respectivamente.

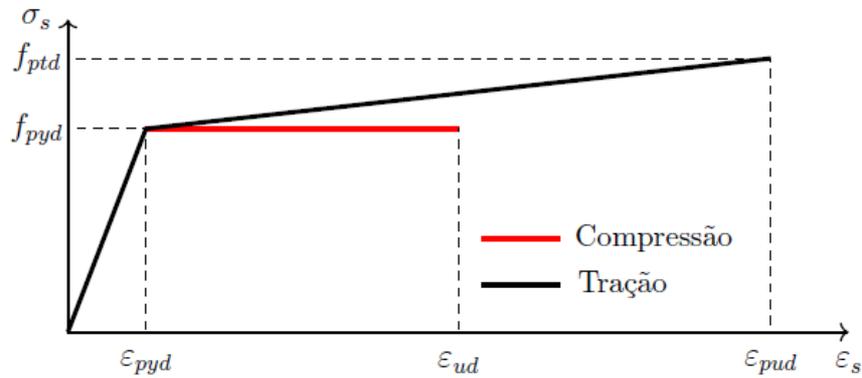


Figura 2.8. Modelo constitutivo para o aço das armaduras

2.3.1.3 Comportamento uniaxial do concreto

O EC 2 (2004) define algumas relações constitutivas para o concreto. A primeira delas refere-se a análise não linear estrutural global e é mostrada na Figura 2.9, que é definida pela seguinte equação:

$$\sigma_c = f_c \left[\frac{o\eta - \eta^2}{1 + \eta(o - 2)} \right] \quad (2.40)$$

em que f_c é a máxima tensão de compressão do concreto, η é dado pela relação entre a deformação de compressão atuante e a deformação ε_{ci} ; e o parâmetro o e definido como:

$$o = 1,05 E_{cm} \frac{|\varepsilon_{ci}|}{f_c} \quad (2.41)$$

sendo E_{cm} o módulo de elasticidade secante do concreto referente a tensão $0,4f_c$.

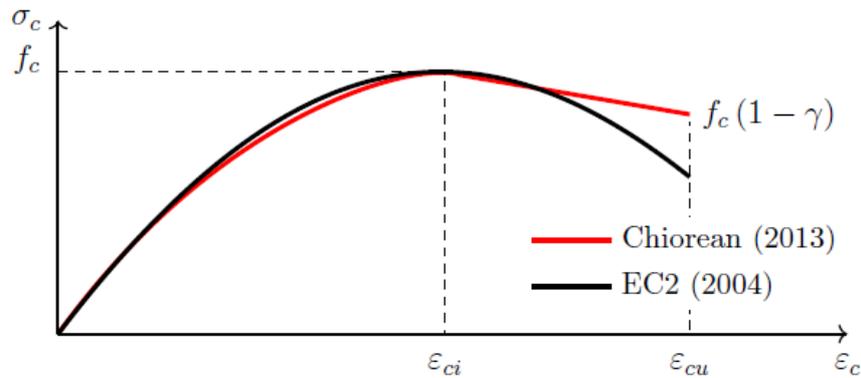


Figura 2.9. Modelos constitutivos para o concreto sob compressão

Vale ressaltar que a norma europeia (EC 2, 2004) permite o uso de outras relações constitutivas, desde que as mesmas representem adequadamente o comportamento do concreto utilizado.

Para a avaliação da capacidade resistente das seções transversais de concreto armado, três metodologias são propostas na norma europeia: o diagrama parábola-retângulo como o dado por Chiorean (2013) (Figura 2.9, fazendo $\gamma = 0$); de forma mais conservadora, o EC 2 (2004) também permite a utilização da relação constitutiva bilinear semelhante ao modelo elastoplástico perfeito do aço (desprezando a resistência à tração do concreto); por último, a análise pelo bloco de tensão equivalente também pode ser utilizada.

A relação constitutiva usada por Chiorean (2013) e adaptada da NBR 6118 (2014), ilustrada na Figura 2.9, também pode ser utilizada para descrever o comportamento do concreto à compressão. A norma brasileira considera o diagrama parábola-retângulo sem o efeito do amolecimento do concreto, após a deformação limite do trecho parabólico, ε_{ci} .

Como opção para o usuário, tal efeito pode ser simulado através do parâmetro γ , ou seja:

$$\sigma_c = \begin{cases} f_c \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 \right], & \text{se } \varepsilon_{ci} < \varepsilon \leq 0 \\ f_c \left[1 - \gamma \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{ci}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{ci}} \right) \right], & \text{se } \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ci} \end{cases} \quad (2.42)$$

em que f_c e ε_{cu} são, respectivamente, os valores máximos de resistência e deformação do concreto sob compressão.

O concreto tem propriedades mecânicas distintas na tração e na compressão. Quando tracionado, esse material apresenta resistência máxima f_{cr} (Figura 2.10). Destaca-se, também, que ao atingir a resistência f_{cr} inicia-se o processo de fissuração. Para deformações superiores a ε_{cr} o concreto perde resistência. Assim, diversos pesquisadores e até mesmo as normas de projeto desconsideram sua contribuição quando tracionado. O modelo proposto por Bazant e Oh (1983), presente neste trabalho, considera a máxima deformação de tração limitada em 0,07% (BRATINA *et al.*, 2004), ilustrado na Figura 2.10. Dessa forma, tem-se:

$$\sigma_c = \begin{cases} E_{tr} \varepsilon, & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} + E_{tr,2} (\varepsilon - \varepsilon_{cr}), & \text{se } \varepsilon < \varepsilon_{cr} < 0,07\% \end{cases} \quad (2.43)$$

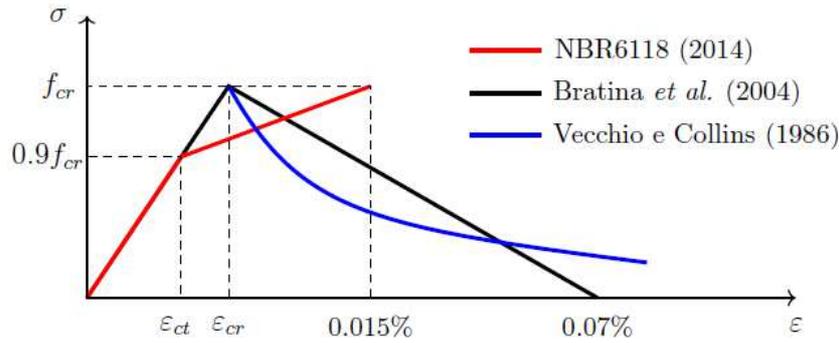


Figura 2.10. Modelos constitutivos para o concreto sob tração

sendo ε_{cr} a deformação de início de fissuração; f_{cr} é a resistência à fissuração do concreto; e E_{tr} e $E_{tr,2}$ são os módulos de elasticidade do concreto à tração antes e depois da fissuração, respectivamente.

A norma brasileira (NBR 6118, 2014) permite a consideração da resistência à tração do concreto através de uma relação bilinear ilustrada na Figura 2.10. Note que, diferentemente do comportamento mostrado nas outras curvas não há um decaimento gradual da resistência à tração do concreto. Assim, o comportamento é descrito como:

$$\sigma_c = \begin{cases} E_{tr} \varepsilon, & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ct} \\ 0,9f_{cr} + E_{tr,2} (\varepsilon - \varepsilon_{ct}), & \text{se } \varepsilon_{ct} < \varepsilon < 0,015\% \end{cases} \quad (2.44)$$

em que $E_{tr,2}$ agora é positivo e pode ser facilmente determinado como o coeficiente angular do trecho linear entre ε_{ct} e 0,015%.

Por fim, outro modelo bastante abordado na literatura (STRAMANDINOLI e ROVERE, 2008; CHIOREAN, 2013) foi o proposto por Vecchio e Collins (1986), Figura 2.10. Nesse modelo, após o início do processo de fissuração, o concreto apresenta uma redução de resistência não linear que tende a uma assíntota horizontal para valores grandes de deformação de tração. Para essa relação tensão-deformação, tem-se:

$$\sigma_c = \begin{cases} E_{tr} \varepsilon, & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 + \sqrt{500\varepsilon}}, & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (2.45)$$

em que ε_{cr} é a deformação de fissuração do concreto, f_{cr} é a resistência à fissuração do concreto, igual a $1,4(f_c/10)^{2/3}$, α_1 é o fator que considera a interação das barras longitudinais com o concreto, e α_2 é o fator que considera os efeitos de duração da carga e cargas cíclicas.

2.3.2 Relação momento-curvatura

O método iterativo de Newton-Raphson foi adotado para a obtenção da relação momento-curvatura. Assim, para um valor fixo de esforço axial, N , são dados incrementos no momento fletor solicitante, M , até que o momento último resistente seja atingido. Foi então utilizada uma estratégia de incrementos mista, relacionando diretamente o momento como função da curvatura, tal como (ZUBYDAN, 2013):

$$M_{j+1} = M_j + \Phi EI \quad (2.46)$$

em que o índice j refere-se ao incremento anterior, $\Phi = 0,001$ incremento para curvatura e EI é a rigidez à flexão da seção transversal.

O propósito da divisão da seção em fatias é captar a deformação axial, ε , no centroide plástico, CP, de cada fibra e então, através das relações constitutivas dos materiais, obter as respectivas tensões e os módulos de elasticidade tangentes em cada fibra. Duas variáveis são substanciais para empregar essa metodologia: a área das fibras e sua respectiva posição. Essa segunda é referenciada ao CP da seção, já que alguns pesquisadores, como Caldas (2004), Chen *et al.* (2001) e Sfakianakis (2002), apontaram que dessa forma, tanto para o método de Newton-Raphson quanto para os métodos *quasi-Newton*, os problemas de convergência são minimizados.

Segundo Roik e Bergmann (1990), a posição do CP da seção é dada por:

$$x_{CP} = \frac{x_c A_c \alpha f_c + x_a A_a f_a + x_b A_b f_{pyd}}{A_c \alpha f_c + A_a f_y + A_b f_{pyd}} \quad (2.47)$$

$$x_{CP} = \frac{y_c A_c \alpha f_c + y_a A_a f_a + y_b A_b f_{pyd}}{A_c \alpha f_c + A_a f_y + A_b f_{pyd}} \quad (2.48)$$

com A_c , A_a e A_b sendo as áreas de concreto, do perfil de aço e da armadura longitudinal; α é um coeficiente que indica se o concreto está confinado ($\alpha = 1,0$) ou não ($\alpha = 0,85$); y_c , y_a e y_b são as coordenadas do centroide, das respectivas áreas, no eixo das ordenadas, em relação a um sistema de referência; e f_c , f_y e f_{pyd} são a resistência do concreto, as resistências de escoamento dos aços do perfil e das armaduras, respectivamente. Liu *et al.* (2012) e Chen *et al.* (2001) utilizaram as Equações (2.47) e (2.48), porém com α igual a 1 para qualquer situação.

A Figura 2.4 ilustra a distribuição de deformações na seção mista para uma combinação de esforços axial e de momento fletor. Observando a Figura 2.4, a deformação axial na i -ésima fibra, ε_i é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_{ri} + \Phi y_i \quad (2.49)$$

em que y_i é a distância entre os centroides plásticos (CP) da fibra analisada e da seção transversal, ε_0 é a deformação axial no CP da seção e Φ a respectiva curvatura. Note que o termo ε_{ri} só é necessário quando a fibra for correspondente a um perfil de aço, de tal forma que essa variável retrata a deformação residual (Figura 2.7) na i -ésima fibra.

Na notação matricial que segue, as variáveis ε_0 e Φ serão termos do vetor de deformações $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \ \Phi]^T$. Numericamente, pode-se dizer que o equilíbrio da seção é obtido quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong \mathbf{0} \quad (2.50)$$

em que o vetor de forças externas \mathbf{f}_{ext} é dado pelo esforço axial, N , e de momento fletor, M , ou seja:

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Já o vetor de forças internas é dado por expressões integrais clássicas para o esforço axial, N_{int} , e momento fletor, M_{int} . Uma vez conhecidas as áreas, A_i , e as posições, y_i , de cada fibra, a integral passa a ser o somatório descrito como:

$$\mathbf{f}_{int} = \begin{Bmatrix} N_{int} = \int_A \sigma[(\boldsymbol{\varepsilon}_0, \Phi)] dA \\ M_{int} = \int_A \sigma[(\boldsymbol{\varepsilon}_0, \Phi)] y dA \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} N_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_0, \Phi)] A_i \\ M_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\varepsilon}_0, \Phi)] y_i A_i \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

na qual, n_{fib} é o número de fibras geradas pela discretização da seção.

Na obtenção da flexão axial e rigidez à flexão, Chiorean (2013) apontou que, ao adotar $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ na primeira iteração, a convergência é alcançada rapidamente, e a configuração indeformada da seção transversal evita problemas de convergência relacionados ao equilíbrio entre as forças externas e internas. Embora seja eficiente iniciar o processo dessa forma, a convergência só é atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. Faz-se então a expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem da Equação de equilíbrio (2.50), ou seja:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} (\delta\mathbf{X}) \quad (2.53)$$

Partindo do suposto equilíbrio no ponto $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}$, ou seja, $\mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, e sabendo que $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k$ tem-se:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k) \quad (2.54)$$

Assim, pode-se isolar o termo \mathbf{X}^{k+1} na Equação (2.54) e, conseqüentemente, determinar a configuração deformada da seção transversal na iteração $k + 1$ conhecendo as informações da interação k , tal como segue:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (2.55)$$

Note que a função de equilíbrio $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, dada na Equação (2.50), é dependente dos termos f_{ext} e f_{int} sendo que apenas o segundo termo é função de \mathbf{X} , ou seja, a derivada de $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ em relação a \mathbf{X} é negativa. Pode-se ainda reescrever a Equação (2.55) como:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (2.56)$$

na qual \mathbf{F}' é a matriz constitutiva da seção transversal ou matriz Jacobiana do problema não linear expresso na Equação (2.50), isto é:

$$\mathbf{F}' = \left(- \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \epsilon_0} & f_{12} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \Phi} \\ f_{21} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \epsilon_0} & f_{22} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

O termo f_{11} pode ser determinado como segue:

$$f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \epsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_0} \left[\int_A \sigma(\epsilon(\epsilon_0, \Phi)) dA \right] = \frac{\partial}{\partial \epsilon_0} \left[\int_A \sigma(\epsilon_0 + \Phi y_i + \epsilon_{ri}) dA \right] \quad (2.58)$$

em que se torna necessário o uso da Regra da Cadeia para solução da Equação (2.58). Ou seja:

$$f_{11} = \int_A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_0} \right) dA = \int_A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial (\epsilon_0 + \Phi y_i + \epsilon_{ri})}{\partial \epsilon_0} \right) dA = \int_A \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} dA \quad (2.59)$$

A derivada da tensão, σ , em relação a deformação, ϵ , resulta no módulo de elasticidade tangente, E_T . Dessa forma, pode-se escrever:

$$f_{11} = \int_A E_T dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i \quad (2.60)$$

Analogamente ao desenvolvimento de f_{11} , os demais termos de \mathbf{F}' são dados por:

$$\begin{aligned} f_{12} &= \frac{\partial N_{int}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) dA \right] = \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) y dA \right] = \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) y dA \right] = \int_A E_T y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{aligned} \quad (2.61)$$

O critério de convergência adotado neste trabalho foi proposto por Chiorean (2013) e é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F} , e do vetor de forças externas, \mathbf{f}_{ext} . Assim, escreve-se:

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}_{ext}\|} \leq Tol \quad (2.62)$$

com Tol sendo a tolerância, que é assumida aqui 10^{-5} .

2.3.3 Curvas de interação $N \times M$

Para obtenção da curva de interação $N \times M$, é feita uma análise com diversos valores de esforços axiais fixos, para cada valor de esforço axial são realizados incrementos para o valor do momento fletor. Assim, para um dado esforço axial, o valor do momento fletor é incrementado até atingir o momento máximo da relação momento-curvatura, esse posto representa a plastificação total da seção. Define-se, que esse par de esforços encontrado é um ponto da curva de interação $N \times M$. Nas análises globais com o uso das rigidezes generalizadas, abordadas a seguir, usa-se apenas essa curva, sem a necessidade de uma curva de início de plastificação.

As curvas de interação esforço normal-momento fletor são obtidas antes do início da análise estrutural (fora do ciclo incremental-iterativo). A construção da relação momento-curvatura até o momento de plastificação em cada ponto nodal da estrutura durante o ciclo incremental-iterativo global demanda um esforço computacional elevado. Essa estratégia é adotada com a finalidade de reduzir o tempo de execução das simulações numéricas. Dessa forma, a construção da relação momento-curvatura é feita para cada incremento de momento fletor até que a matriz Jacobiana, dada na Equação (2.57), fique singular.

Em contrapartida, torna-se necessário simplificar a curva de interação. Assim, a curva é construída através de uma série de pares ordenados $N \times M$. Uma vez iniciada a análise estrutural é necessário saber o valor do momento de plastificação reduzido, M_{pr} , para um dado valor de esforço normal, N . Assim, qualquer ponto na curva de interação, mostrada na Figura 2.11 é construída seguindo o algoritmo descrito na Tabela 2.2, pode ser obtido por interpolação linear, tal como dado a seguir:

$$M_{pre} = \left(\frac{M_{j+1} - M_j}{N_{j+1} - N_j} \right) (N - N_j) + M_j \quad (2.63)$$

sendo j e $j + 1$ os pontos que apresentam esforço normal N_j e N_{j+1} imediatamente menor e maior, respectivamente, que o valor de N .

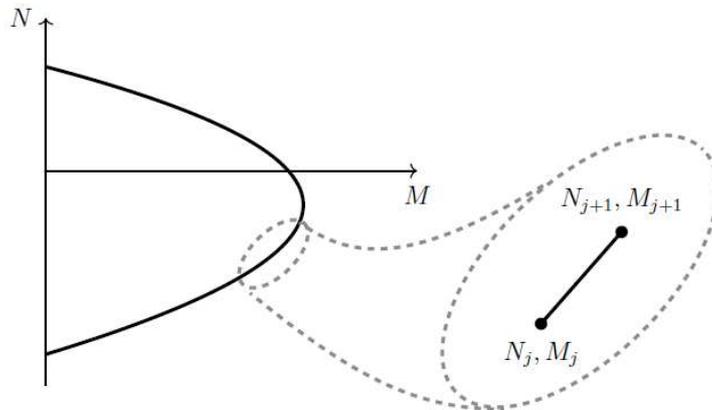


Figura 2.11. Curva de interação $N \times M$

Tabela 2.2 - Estratégia numérica para a construção da curva de interação

1. Ler os dados da seção transversal e dos materiais
 2. Discretizar a seção transversal
 3. Obter o centroide plástico CP de cada fibra (Equações 2.47 e 2.48)
 4. Transladar o Sistema de referência \rightarrow CP
 5. Determinar: esforços máximos axiais (tração $N_{t,max}$ e compressão $N_{c,max}$)
 6. Determinar: incremento do esforço normal $\Delta N = (N_{t,max} - N_{c,max})/100$
 7. Primeiro valor do esforço normal $N = N_{c,max}$
 8. **para** cada incremento de esforço normal, N , **faça**
 9. Iniciar processo: $\mathbf{X} = \mathbf{0}$
 10. **para** cada incremento de momento fletor, M , (Equação 2.46) **faça**
 11. Montar: \mathbf{f}_{ext}
 12. **para** $k \leftarrow 1, nmax$ **faça**
 13. Determinar: ε (Equação 3.44)
 14. Montar: \mathbf{f}_{int} (Equação 3.46)
 15. Calcular: $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ (Eq. 3.45)
 16. **se** $\|\mathbf{F}\| \div \|\mathbf{f}_{ext}\| \leq Tol$ **então**
 17. PARE \rightarrow **Seguir para** linha 26
 18. **fim se**
 19. Montar: matriz de rigidez tangente da seção \mathbf{F}' (Equação 2.57)
 20. Verificar a singularidade de \mathbf{F}'
 21. **se** \mathbf{F}' é singular **então**
 22. Definir: $M \rightarrow$ momento último resistente
 23. Armazenar M e N como um ponto da curva de interação –
 24. **seguir para** linha 29
 25. **fim se**
 26. Atualizar o vetor de deformações \mathbf{X} (Equação 2.56)
 27. **fim para**
 28. **fim para**
 29. $N = N + \Delta N$
 30. **Fim para**
-

2.3.4 Rigidezes generalizadas

A análise da seção transversal inicia-se com o centroide plástico (CP) fixo na posição dada através das Equações 2.47 e 2.48. Porém, à medida que as forças internas variam, a configuração deformada da seção passa a apresentar deformações axiais cada vez maiores e conseqüentemente o CP muda de posição. Dessa forma, avalia-se a posição do CP como:

$$y_{CP} = \frac{\int_A E_T y dA}{\int_A E_T dA} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} A_i} \quad (2.64)$$

A rigidez à flexão tangente, deve ser calculada em relação à posição atualizada do CP, y_{CP} . Assim, a rigidez EI_T é dada por:

$$EI_T = \int_A (y - y_{CP})^2 E_T dA = \int_A y^2 E_T dA - \int_A 2(y)(y_{CP}) E_T dA + \int_A y_{CP}^2 E_T dA \quad (2.65)$$

Sendo o sistema discretizado em fibras, as integrais da Equação (2.65) se tornam somatórios, ou seja:

$$EI_T = \sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} y_i^2 A_i - 2 \sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} y_i A_i \sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} y_{CP} A_i + \sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} y_{CP}^2 A_i \quad (2.66)$$

Substituindo o valor de y_p , dado pela Equação (2.64), na Expressão (2.66), chega-se em:

$$EI_T = \sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} y_i^2 A_i - 2 \sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} y_i A_i \frac{\sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} A_i} + \sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} A_i \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n_{fb}} E_{T,i} A_i} \right)^2 \quad (2.67)$$

que pode ser reduzida à:

$$EI_T = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i - \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \frac{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i} \quad (2.68)$$

Correlacionando as Equações (2.64) e (2.65) com (2.68), nota-se que EI_T pode ser descrito em função da matriz constitutiva da seção transversal. Assim, tem-se:

$$EI_T = f_{22} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{11}} \quad (2.69)$$

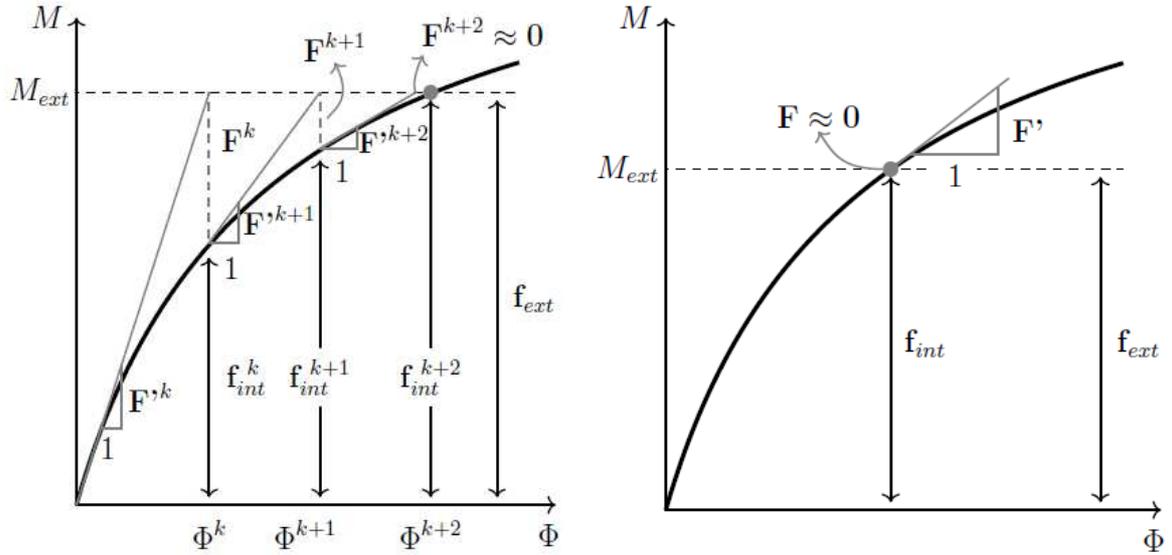
Seguindo o mesmo desenvolvimento apresentado anteriormente para a obtenção da rigidez a flexão, obtém-se para a rigidez axial, EA_T (CHIOREAN, 2013):

$$EA_T = f_{11} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{22}} \quad (2.70)$$

Graficamente, a resposta encontrada refere-se à rigidez tangente à relação momento-curvatura ($M \times \Phi$), descrita na Seção 2.3.2. Isto é, dado um par de esforços externos N e M , ao se atingir a configuração deformada da seção responsável pelos esforços internos que equilibrem o sistema, monta-se a matriz constitutiva e calculam as rigidezes generalizadas. Tal procedimento é ilustrado na Figura 2.12.

2.4 Solução do Problema Não Linear

De uma forma geral, as equações diferenciais que representam os problemas de engenharia estrutural não apresentam soluções analíticas, devido à sua complexidade ao se considerar os efeitos não lineares. Um dos métodos de maior destaque para resolução dessas equações, utilizado no presente trabalho, é o MEF devido a sua eficiência e aplicabilidade.



(a) Processo iterativo

(b) Ponto de equilíbrio

Figura 2.12. Construção da relação $M \times \Phi$ para o cálculo das rigidezes generalizadas

A matriz de rigidez deve ser atualizada constantemente para que o estado de equilíbrio do sistema seja capturado com as alterações na sua geometria e a não linearidade dos materiais (SILVA, 2009). Quando esses dois fatores são considerados, os mesmos são introduzidos na matriz de rigidez, \mathbf{K} , como:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \quad (2.71)$$

em que \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{P} são as forças internas (força axial e momento fletor), e E_T é o parâmetro que se refere ao módulo de elasticidade tangente dos materiais.

O processo de solução de problemas estáticos não lineares, por uma estratégia incremental e iterativa, pode ser dividido em duas fases: fase predita e fase corretiva. A etapa designada como fase predita, engloba a solução dos deslocamentos incrementais, devido a um acréscimo de carregamento, através das equações de equilíbrio da estrutura. A fase corretiva, por sua vez, tem como objetivo a correção das forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos na fase predita, pela utilização de um processo iterativo. Essas forças internas corrigidas são comparadas com o carregamento externo, de forma

que se tem uma quantificação do desequilíbrio existente entre forças internas e externas. A etapa corretiva é realizada até que a estrutura esteja em equilíbrio, de acordo com um critério de convergência, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \cong {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_e, \text{ ou } {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \cong {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r \quad (2.72)$$

sendo ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$ o vetor das forças internas que é função dos deslocamentos, \mathbf{U} , nos pontos nodais da estrutura, e das forças internas, \mathbf{P} ; ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_e$ é o vetor de forças externas; λ é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de \mathbf{F}_r , que é o vetor forças de referência, em que apenas a sua direção é relevante.

Métodos eficientes de solução de sistemas não lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio (primário ou secundário) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos críticos (pontos limites de carga e de deslocamento e/ou pontos de bifurcação que possam existir (SILVEIRA, 1995)).

Alguns dos passos principais da metodologia numérica de análise não linear adotada neste trabalho são apresentados adiante. Antes, porém, é necessário fazer algumas observações relacionadas à notação a ser empregada:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura no passo de carga t , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio no passo de carga $t + \Delta t$;
- k se refere ao contador do número de iterações. Para $k=0$, tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo de Newton-Raphson;
- λ e \mathbf{U} definem o parâmetro de carga e deslocamentos nodais totais, respectivamente;
- $\Delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{U}$ caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais medidos a partir da última configuração de equilíbrio; e

- $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{U}$ denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, respectivamente, obtidos durante o processo iterativo.

2.4.1 Solução incremental predita

Nesta etapa do processo de solução considera-se que todas as variáveis do problema estrutural sejam conhecidas na configuração t , podendo assim ser montada a matriz de rigidez tangente, \mathbf{K} . O vetor de deslocamentos nodais tangenciais, $\delta\mathbf{U}_r$, é então obtido através da expressão:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r \quad (2.73)$$

A determinação do incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, deve ser feita através de estratégias de incremento de carga, melhores detalhes podem ser vistos em Silva (2016). Para o primeiro passo de carga, entretanto, o usuário deve fornecer o valor de $\Delta\lambda^0$.

Com a definição de $\Delta\lambda^0$, os deslocamentos nodais incrementais tangenciais, $\Delta\mathbf{U}^0$, são obtidos escalonando-se $\delta\mathbf{U}_r$, ou seja:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (2.74)$$

Uma vez conhecida a solução predita, faz-se a atualização do parâmetro de carga total e do vetor de deslocamentos nodais totais:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (2.75)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (2.76)$$

em que ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{U}$ definem o ponto de equilíbrio do sistema no último passo de carga.

Como as equações anteriores nem sempre estabelecem o equilíbrio da estrutura, iterações serão necessárias com o objetivo de restaurar esse equilíbrio. Será descrito a seguir como é realizado o ciclo de iterações.

2.4.2 Ciclo de iterações

A maioria dos métodos de resolução de problemas estruturais não lineares são baseado no método de Newton-Raphson (Crisfield, 1991), que tem como objetivo determinar as raízes (ou zeros) de uma equação não linear. Nesse método, supõe-se que, dada uma estimativa inicial para a raiz, o problema consiste em determinar uma sequência de correções, até que seja atingida a solução com uma precisão desejada.

No método de Newton-Raphson padrão, a cada iteração, a inclinação da reta tangente é modificada, para um sistema com um grau de liberdade. Esse método converge quadraticamente se a solução inicial ${}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$ estiver próxima o suficiente da solução do sistema de Equações (2.71). Além disso, a inversa da matriz de rigidez, \mathbf{K} , deve existir em todas as iterações necessárias até a convergência ser atingida. Já no método de Newton-Raphson modificado, acontece uma alteração da técnica padrão original, onde a inclinação da reta tangente obtida na primeira iteração é mantida constante. No contexto da análise estrutural, a matriz de rigidez permanece inalterada. Dessa forma, o número de iterações necessárias quando se utiliza o método modificado deve ser maior que o da técnica padrão.

As equações de equilíbrio (2.71) podem ser reescritas, para dar início ao desenvolvimento das iterações de Newton-Raphson, da seguinte forma:

$$\mathbf{g} = \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \quad (2.77)$$

sendo \mathbf{g} o vetor de forças residuais, que indica o desequilíbrio de forças do sistema estrutural. Esse vetor deve se anular para um novo ponto de equilíbrio do sistema.

No método de Newton-Raphson tradicional, o parâmetro de carga λ é usualmente mantido como constante, durante todo o ciclo iterativo. Contudo, caso se pretenda acompanhar todo o traçado da trajetória de equilíbrio, com

possíveis passagens pelos pontos críticos, é necessário que o parâmetro de carga varie a cada iteração. Dessa forma, recomenda-se seguir a teoria proposta por Batoz e Dhatt (1979), onde é permitido que o parâmetro de carga seja variado. Dessa forma, a mudança nos deslocamentos nodais é dada pela equação seguinte:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (2.78)$$

em que o vetor gradiente \mathbf{g} fica definido em função dos deslocamentos nodais totais, $\mathbf{U}^{(k-1)}$, que foram calculados na última iteração, e do valor do parâmetro de carga total corrente, $\delta\lambda^k$, que agora também é uma incógnita. Esse parâmetro é calculado de acordo com:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (2.79)$$

na qual $\delta\lambda^k$ é a correção definida por meio de uma estratégia de iteração (equação adicional imposta ao problema), mais detalhes podem ser vistos em Silva (2016).

Substituindo a Equação (2.78) em (2.79), tem-se:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\left[\mathbf{F}_i^{(k-1)} - \left(\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k\right)\mathbf{F}_r\right] = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k\mathbf{F}_r \quad (2.80)$$

sendo \mathbf{F}_i o vetor das forças internas, ${}^{(k-1)}\mathbf{F}_r$ representa o vetor total das forças externas que atuaram na última iteração e os termos k e $k-1$ são, respectivamente, às iterações corrente e anterior.

Observe que o vetor de deslocamentos nodais iterativos, $\delta\mathbf{U}^k$, expresso na equação anterior, pode ser escrito como a soma de duas parcelas, isto é:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.81)$$

em que:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)} \quad (2.82)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r \quad (2.83)$$

Note que o vetor de deslocamento iterativos, $\delta\mathbf{U}_r^k$, será igual ao vetor de deslocamento tangenciais $\delta\mathbf{U}_r$, calculado pela Equação (2.73), se iterações de Newton-Raphson modificado forem usadas, em que a matriz de rigidez é mantida constante ao longo do processo iterativo, como mencionado anteriormente.

Após a obtenção das correções $\delta\lambda^k$ e $\delta\mathbf{U}^k$, faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema, ou seja:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (2.84)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.85)$$

Por fim, o parâmetro de carga total e os deslocamentos nodais totais são também atualizados:

$${}^{t+\Delta t}\lambda^k = {}^t\lambda^k + \Delta\lambda^k \quad (2.86)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U}^k + \Delta\mathbf{U}^k \quad (2.87)$$

Em um processo iterativo, a solução numérica encontrada nunca é exata. Deve-se então adotar um critério de convergência para que o processo termine numa solução próxima da exata. Para que o equilíbrio seja considerado aceitável, um dos dois, ou os dois critérios de convergência contidos na plataforma CS-ASA devem ser respeitados. Um dos critérios presentes no CS-ASA é baseado no equilíbrio das forças do sistema, e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior. Esse critério é definido a seguir:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (2.88)$$

sendo representado pela razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas e do vetor de incremento de carregamento externo, e ζ é o fator de tolerância aplicável fornecido pelo usuário na entrada de dados.

O outro critério de convergência obedece às relações de deslocamento, e definido como:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (2.89)$$

sendo o numerador a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos; e o denominador é a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo, e ζ segue a mesma definição do critério de convergência anterior.

A Tabela 2.3 descreve, sequencialmente, os procedimentos descritos nesta seção.

Tabela 2.3. Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear

-
1. Leitura dos dados relevantes na análise, como: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros referentes ao tipo de análise
 2. Montagem do vetor de cargas nodais de referência, \mathbf{F}_r , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado.
 3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida, t : ${}^t\mathbf{U}$ e λ
 4. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:** $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$
 - 4a. Monta-se a matriz de rigidez tangente: $\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T)$ (Equação 2.10)
 - 4b. Define estimativa inicial para os incrementos de deslocamentos: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$
 - 4c. Define o parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$. Utiliza-se o valor de $\Delta\lambda^0$ informado pelo usuário quando $t=1$ (primeiro passo de carga), e para os demais determina-se usando uma estratégia de incremento de carga
 - 4d. Determina: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r$
 - 4e. Atualiza as variáveis na configuração $t + \Delta t$
 ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
 5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:** $k = 1, 2, 3, \dots$
 - 5a. Avalia o vetor de forças internas: ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
 - 5b. Calcula o vetor de forças residuais:
 $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$
 - 5c. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças (Equação 2.88) ou em forças e deslocamentos conjuntamente (Equação 2.89)

SE SIM (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
 - 5d. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}
 - 5e. Obtém a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$, usando uma estratégia de iteração
 - 5f. Determina o vetor dos sub-incrementos dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$, com
 $\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)}$ e $\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r$
 - 5g. Atualiza o parâmetro de carga e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :
 - a) *Incremental:* $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
 - b) *Total:* ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
 - 5h. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SE SIM (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*

SE SIM (Critério de força e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6, apenas se houve a convergência no item 5c*
 - 5i. Retorna ao passo 5 (o processo segue até que o equilíbrio do sistema seja atingido, ou até que um número máximo de iterações seja alcançado)
 6. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4**
-

CAPÍTULO 3

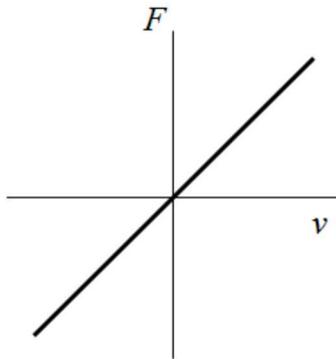
Problemas de Interação Solo- Estrutura

3.1 Considerações Iniciais

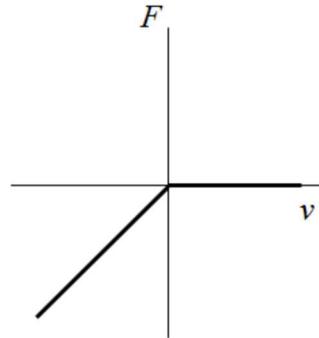
Na engenharia estrutural e geotécnica é bastante comum encontrar vigas, pilares e lajes em contato (ou mesmo apoiados) com um meio elástico ou com restrições de deslocamentos pontuais. Dentre os problemas de engenharia, onde é possível encontrar essa interação solo-estrutura, destacam-se: trilhos apoiados em dormentes numa ferrovia, tubulações enterradas, estacas-coluna de fundação e contravento lateral de pilares em edificações.

A interação entre solo e estrutura pode ser tratada como bilateral ou unilateral. No caso em que o solo reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão, o contato é denominado como bilateral (PCB), e no caso onde o solo reage apenas às solicitações de compressão, o contato é denominado unilateral (PCU) (SILVA, 1998). A diferença entre os dois casos pode ser compreendida através da Figura 3.1. Na Figura 3.1(a), nota-se que a fundação oferece reação às solicitações de tração e compressão e, ainda, a relação constitutiva força F x deslocamento, v , é linear, indicando que a rigidez do solo permanece constante. Já na Figura 3.1(c), tem-se o caso bilateral onde o solo tem comportamento não

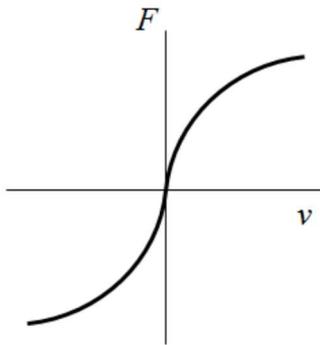
linear. Em 3.1(b) e 3.1(d) tem-se o contato unilateral – reação do meio apenas aos esforços de compressão – e o comportamento linear e não linear para o solo, respectivamente.



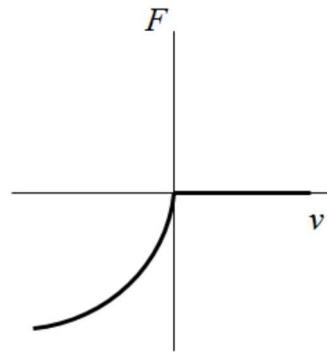
(a) Comportamento linear bilateral



(b) Comportamento linear unilateral



(c) Comportamento não linear bilateral



(d) Comportamento não linear unilateral

Figura 3.1. Relação força-deslocamento da fundação

Nos problemas de contato bilateral (Figura 3.2a), admite-se que o meio de contato trabalha integralmente com a estrutura, ou seja, a região de contato entre os corpos é conhecida à priori, uma vez que não acontecerá a perda de contato. Já no caso unilateral (Figura 3.2b), zonas de descolamento entre estrutura e base poderão aparecer. A definição da região de contato entre os corpos vai depender da configuração deformada da estrutura, para uma determinada solitação. Sendo assim, mesmo considerando a hipótese de pequenos deslocamentos e material elástico, no caso unilateral o problema será não linear associado às condições de contorno.

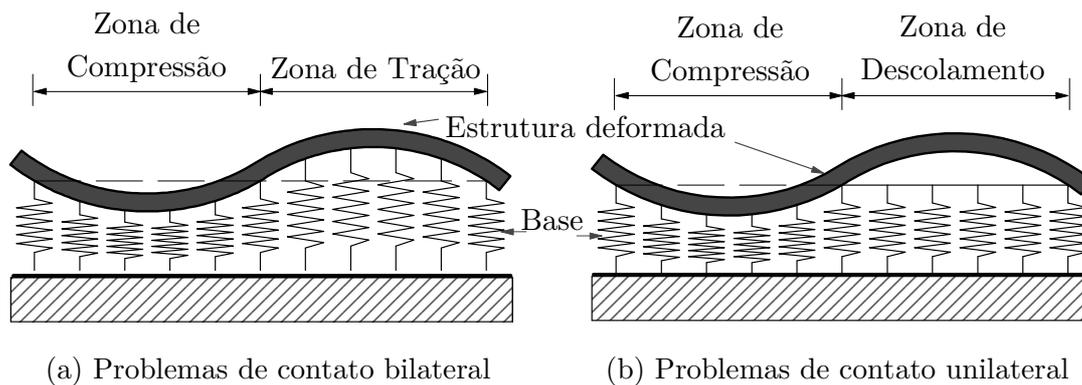


Figura 3.2. Tipos de restrições de contato

3.2 Modelagem do Problema de Interação Solo-Estrutura

Para apresentar a formulação geral do problema de contato, a Figura 3.3(a) mostra um dos problemas de contato de interesse desta tese, um arco em contato com o solo. Já a Figura 3.3(b) ilustra a configuração indeformada do sistema de suporte estrutura-base, com sua discretização através do Método dos Elementos Finitos (MEF), onde o solo é representado por molas discretas. Com a aplicação do MEF, será possível conhecer os deslocamentos da estrutura e da base nos pontos nodais dessa malha para os dois tipos de problema de contato a serem analisados, sendo contato bilateral representado na Figuras 3.3(c), e o contato unilateral na Figura 3.3(d). O carregamento aplicado no arco é representado genericamente por λF , onde λ é o parâmetro que controla a intensidade da carga aplicada. Sendo assim, ${}^0\lambda$ e ${}^t\lambda$ representam a intensidade de F nas configurações de equilíbrio 0 e t , respectivamente.

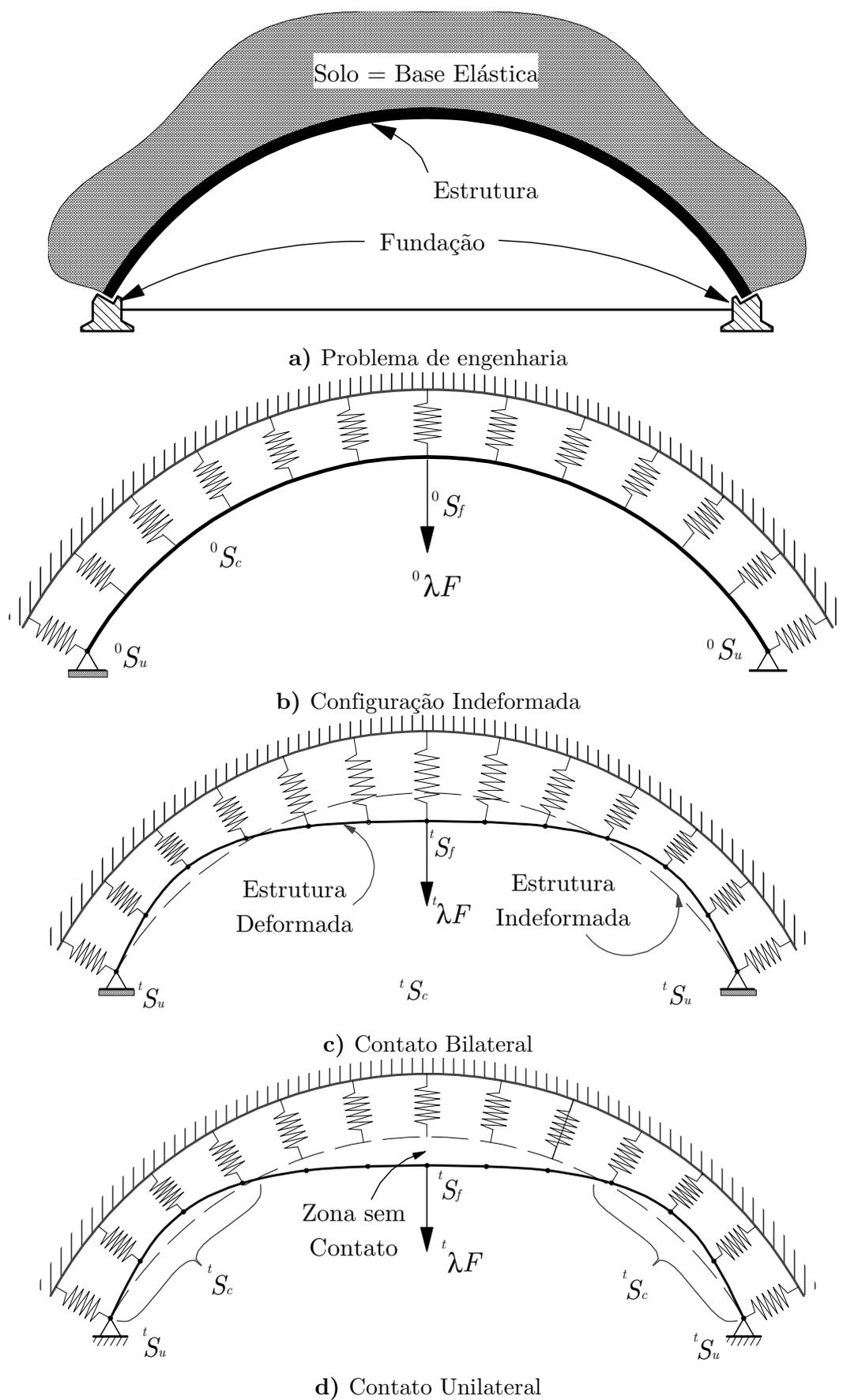


Figura 3.3. Modelo numérico via MEF e configurações de equilíbrio do problema

A estrutura pode ser definida como um sólido elástico contínuo de domínio V (Figura 3.3), com o contorno delimitado por três superfícies distintas supostas regulares: S_u , S_f e S_c . Como nos problemas estruturais usuais, S_u define a região do sólido onde os deslocamentos são prescritos e S_f é a região do sólido onde as forças externas são prescritas. A superfície denominada S_c define a região de contato entre os corpos.

Para a estrutura, as equações de equilíbrio interno, as relações cinemáticas e as relações constitutivas são dadas, respectivamente, por:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{em } V \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^t \mathbf{u} \quad \text{em } V \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{em } V \quad (3.3)$$

Observa-se, através da Equação (3.1), que as forças de corpo foram desprezadas da análise e que se faz uso da notação indicial com a convenção usual de somatório. Ainda nas Equações (3.1) à (3.3), $\boldsymbol{\sigma}$ representa as componentes cartesianas do tensor de Cauchy, $\boldsymbol{\varepsilon}$ caracteriza as componentes de deformação infinitesimal e \mathbf{u} as componentes dos deslocamentos. Por fim, \mathbf{D} define o tensor das propriedades elásticas da estrutura. Como nesta etapa do trabalho visa-se a resposta da fundação apenas na região de contato entre os corpos, é possível representá-la com modelos matemáticos simples, mas que apresentam precisão satisfatória. Dessa forma, a reação da base pode ser descrita genericamente através da seguinte equação:

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{C}_b \mathbf{u}_b \quad (3.4)$$

em que \mathbf{u}_b e \mathbf{r}_b são o deslocamento e a reação à compressão da base elástica, respectivamente, e \mathbf{C}_b caracteriza as propriedades mecânicas da base elástica.

Para o sistema estrutural analisado, as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$u = u \quad \text{em } S_u \quad (3.5)$$

$$F = \sigma n \quad \text{em } S_f \quad (3.6)$$

com a Equação (3.5) representando a condição de contorno essencial do problema, sendo u o valor prescrito do deslocamento em S_u . Já a Equação (3.6) caracteriza o equilíbrio das forças que deve existir em S_f . Para a caracterização dos PCB e PCU a serem resolvidos, necessita-se ainda de uma equação adicional que indica a condição de compatibilidade que deve ser satisfeita em S_c . Fisicamente, essa equação representa a condição de impenetrabilidade entre os corpos. Para o caso do PCB, tem-se a seguinte expressão para a distância entre os dois corpos, φ :

$$\varphi = u_b - u_i = 0 \quad \text{em } S_c \quad (3.7)$$

a qual deve ser nula em S_c . Ou seja, os deslocamentos da estrutura e da base elástica são iguais na região de contato. Essa condição é típica da situação de contato bilateral entre corpos.

Para o caso do PCU, a condição de compatibilidade que deve ser satisfeita em S_c é descrita através da inequação em termos da distância entre os dois corpos:

$$\varphi = u_b - u_i \geq 0 \quad \text{em } S_c \quad (3.8)$$

Essa expressão indica a condição de impenetrabilidade entre a estrutura e o meio. Assim, ao se analisar o comportamento de um ponto genérico em S_c , uma das seguintes situações pode ser observada:

- i. caso ocorra o contato entre os corpos (base e estrutura), escreve-se:

$$\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_b > 0 \quad (3.9)$$

ii. no caso de separação entre os corpos, ou seja, existe o descolamento entre a base e a estrutura, tem-se, então:

$$\varphi > 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_b = 0 \quad (3.10)$$

A partir dessas considerações, pode-se concluir que as condições que definem de forma completa o contato como sendo unilateral são dadas pela Inequação (3.8), ou ainda, em termos da reação da base como:

$$\mathbf{r}_b \geq 0 \quad (3.11)$$

e através da relação de complementaridade entre φ e \mathbf{r}_b , ou seja:

$$\int_{S_c} \mathbf{r}_b \varphi dS_c \quad (3.12)$$

A Figura 3.4 fornece o domínio de validade dessas três relações e ainda o gráfico de validade da lei de contato.

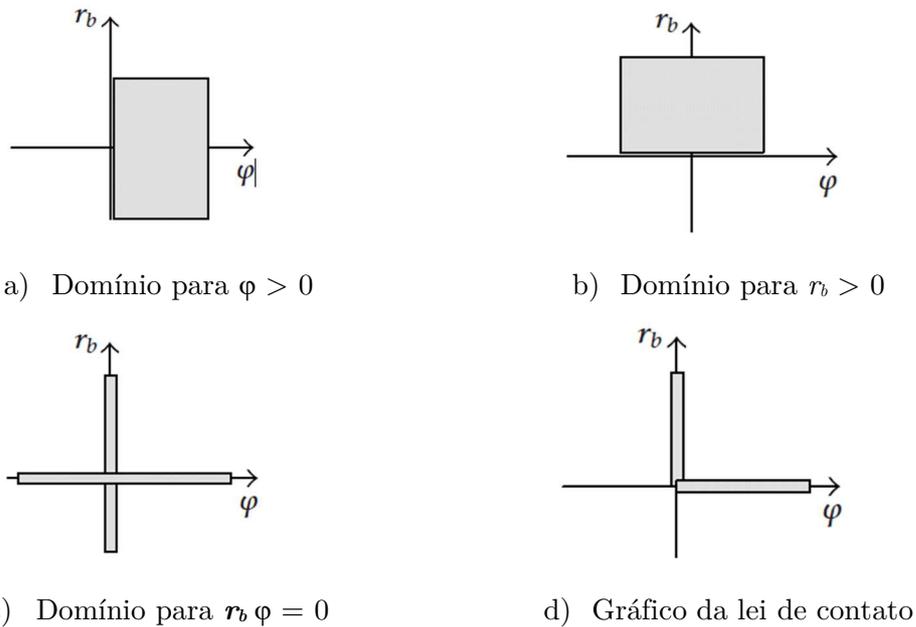


Figura 3.4. Domínio de validade das restrições de contato unilateral

Observa-se, então, que a solução do PCU pode ser obtida através da Equação (3.1), com o auxílio das Equações (3.2) e (3.3), respeitando-se as condições de contorno (3.5) e (3.6), as Inequações (3.8) e (3.11) e a condição de

complementaridade (3.12). Entretanto, a não linearidade decorrente das condições de contorno em S_c torna a solução direta do problema uma tarefa bastante difícil. Assim, será necessário formular um problema de minimização equivalente para que seja possível utilizar uma estratégia numérica conveniente para a sua solução. É demonstrado em Silveira (1995), o problema de otimização:

$$\text{Min } \Pi(u, u_b) \quad (3.13)$$

$$\text{Sujeito a: } -\varphi \leq 0, \text{ em } S_c \quad (3.14)$$

em que:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV + \frac{1}{2} \int_{S_c} \mathbf{r}_b u_b dS_c - \int_{S_f} F u dS_f \quad (3.15)$$

é equivalente à solução das equações e restrições impostas na formulação apresentada.

3.3 Tratamento do Problema de Contato Unilateral

Em muitas análises de problemas referentes a interação entre solo/rocha e estrutura, considera-se que a base reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão, o que caracteriza um problema de contato como bilateral. Entretanto, para muitos tipos de fundações essa hipótese é irreal, sendo necessário, então, considerar o problema de contato unilateral, ou seja, considerar que a base elástica reage apenas às solicitações de compressão.

O problema de contato unilateral é não linear, uma vez que não se conhece, a priori, a região de contato entre os corpos. Essa não linearidade é oriunda das condições de contorno impostas, que são dadas em forma de restrições de desigualdades, correspondendo à condição cinemática de não penetração entre os

corpos e à condição estática da pressão de contato ser compressiva. Tais restrições são expressas na forma complementar de Kuhn-Tucker (LUENBERGER, 1973).

Assim, o problema de contato unilateral pode ser formulado como um problema de otimização com restrições impostas por outros corpos ou meios, onde as condições de ótimo do problema são obtidas resolvendo as equações de equilíbrio em conjunto com as restrições e com a condição de complementaridade do contato.

Trabalhos recentes que possibilitam o tratamento da restrição unilateral imposta à análise seguem uma das seguintes estratégias:

i. Adaptações usuais da mecânica estrutural (funcionais diferenciáveis e restrições bilaterais) ao caso do contato envolvendo restrições unilaterais. Essa estratégia, de natureza incremental-iterativa, se destaca por não introduzir conceitos novos, adaptação de códigos já existentes para análises não-lineares, tratamento de problema de contato como um tipo particular de problema não-linear, e a economia de tempo computacional se nenhuma mudança na região de contato acontece entre um passo e outro de carga. Porém, essa classe de procedimentos não tem garantias de convergências. Como descrito em Silveira (1995), os trabalhos de Chan e Tuba (1971) e Francavilla e Zienkiewicz (1975) destacam-se nesse contexto. Stein e Wriggers (1984) realizaram uma análise da estabilidade de barras esbeltas usando o MEF com uma formulação Lagrangiana atualizada, aproximando-se simultaneamente a não-linearidade geométrica e a não-linearidade resultante das restrições unilaterais;

ii. Transformação do problema de contato em um problema de minimização sem restrições, através do método de Penalidades (ASCIONE e OLIVITO, 1985; KANTO e YAGAWA, 1990; FERREIRA e ROEHL, 1997) ou o uso de Multiplicadores de Lagrange (BATHE e CHAUDHARY, 1985). Na

maioria dos casos, introduz-se elementos especiais projetados para simular as condições de impenetrabilidade das superfícies; e

iii. Emprego de métodos de programação matemática para transformação do problema de contato em um problema de minimização com restrições (ASCIONE e GRIMALDI, 1984; BARBOSA, 1986; SILVEIRA, 1995; HOLANDA, 2000). Essa alternativa permite obter a solução do problema de contato sem que as restrições unilaterais sejam eliminadas explicitamente da análise, mantendo a filosofia original do problema.

Será descrita na próxima seção a estratégia numérica adotada para a solução do problema de otimização com restrições unilaterais de contato, transformando o problema de contato em um problema de minimização sem restrições, através do Método de Penalidades.

3.3.1 Método de Penalidades

Após a discretização do sistema, o problema de minimização equivalente definido pela Equação (3.13) e restrição (3.14), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\text{Min } \Pi(\mathbf{U}, \mathbf{U}_b) \quad (3.16)$$

$$\text{Sujeito a: } -\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_b) \leq 0 \quad (3.17)$$

em que se considera agora os vetores \mathbf{U} como os deslocamentos nodais da estrutura e \mathbf{U}_b os deslocamentos nodais da base.

Com o Método de Penalidades, a região de contato S_c é inicialmente aproximada e, na sequência, utiliza-se o método de Newton-Raphson para corrigi-la. Com isso, consegue-se quantificar a participação da base elástica na obtenção de outras incógnitas do problema. Aqui, como as restrições de contato não são

consideradas de uma forma direta, define-se o seguinte problema de otimização sem restrições a ser resolvido:

$$\mathbf{g} = [\mathbf{K}_{lc} + \mathbf{K}_b] \mathbf{U} - \mathbf{F}_e \neq 0 \quad (3.18)$$

sendo \mathbf{K}_{lc} a matriz de rigidez do sistema descrita na Seção 2.2.3., e \mathbf{g} o vetor gradiente, ou forças desequilibradas do sistema base-estrutura, que deve se anular ao longo do processo iterativo de Newton-Raphson. A cada iteração, através de uma nova avaliação de S_c , corrige-se a participação da base elástica, ou seja, a matriz de rigidez \mathbf{K}_b . Esse processo iterativo é concluído, indicando que a solução do PCU foi atingida, quando determinado critério de convergência for satisfeito.

Nesta estratégia de solução, o carregamento que pode causar a separação entre os corpos, deve ser aplicado de forma incremental, onde em cada passo deve-se procurar anular o vetor gradiente dado pela Equação (3.18). Vale salientar que a matriz de rigidez da base \mathbf{K}_b será aproximada através de monitoramento do deslocamento do sistema, obtidos através da resolução do sistema a seguir:

$$[\mathbf{K}_{lc} + \mathbf{K}_b] \mathbf{U} = \mathbf{F}_e \quad (3.19)$$

Note que \mathbf{K}_b é montada, usando o MEF, a partir das equações diferenciais que regem o comportamento do modelo adotado (Seção 3.4).

Resumindo, a matriz \mathbf{K}_b será aproximada a partir do monitoramento do deslocamento da estrutura em cada passo de carga/iteração de acordo com o sinal do deslocamento obtido em cada ponto nodal da malha de elementos finitos. Essa aproximação é corrigida através das iterações do tipo Newton-Raphson.

No algoritmo apresentado na Tabela 3.1, o vetor de forças externas nodais incrementais, $\Delta \mathbf{F}_e$, é definido através do produto de $\Delta \lambda$ e \mathbf{F}_r , que são, respectivamente, o parâmetro de controle do incremento de carga e o vetor de forças de referência. Neste trabalho, $\Delta \lambda$ utiliza-se diversas estratégias de incremento de carga.

Tabela 3.1 Estratégia numérica para análise estática não linear considerando problemas de contato

-
1. Leitura dos dados relevantes na análise, como: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros referentes ao tipo de análise
 2. Montagem do vetor de cargas nodais de referência, \mathbf{F}_r , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado.
 3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida, t : ${}^t\mathbf{U}$, ${}^t\lambda$ e S_c
 4. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:** $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$
 - 4a. **SE:** problema de contato determinar \mathbf{K}_b (aos elementos que estão em contato com a base), **SE NÃO:** $\mathbf{K}_b = 0$
 - 4b. Monta-se a matriz de rigidez tangente: $\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) = \mathbf{K}_{lc} + \mathbf{K}_b$ (Equação 3.18)
 - 4c. Define estimativa inicial para os incrementos de deslocamentos: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$
 - 4d. Define o parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$. Utiliza-se o valor de $\Delta\lambda^0$ informado pelo usuário quando $t = 1$ (1° passo de carga), e para os demais determina-se usando uma estratégia de incremento de carga
 - 4e. Determina: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r$
 - 4f. Atualiza as variáveis na configuração $t + \Delta t$: ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
 5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:** $k = 1, 2, 3, \dots$
 - 5a. Avalia o vetor de forças internas: ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
 - 5b. Calcula o vetor de forças residuais:
$$\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$$
 - 5c. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças (Equação 2.88) ou em forças e deslocamentos conjuntamente (Equação 2.89)

SE SIM (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
 - 5d. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}
 - 5e. **SE:** Problema de Contato Unilateral

Avaliam-se os deslocamentos e regiões de contato entre os corpos. Define a nova região de contato - S_c . Siga para o item 5f

SE NÃO: Siga para o item 5f
 - 5f. Obtém a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$, usando uma estratégia de iteração
 - 5g. Determina o vetor dos sub-incrementos dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$, com:
$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r$$
 - 5h. Atualiza o parâmetro de carga, e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :
 - a) *Incremental:* $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
 - b) *Total:* ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = \lambda^t + \lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
 - 5i. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SE SIM (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*

SE SIM (Critério de força e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6, apenas se houve a convergência no item 5c*
 - 5j. Retorna ao passo 5 (o processo segue até que o equilíbrio do sistema seja atingido, ou até que um número máximo de iterações seja alcançado)
 6. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4**
-

3.4 Modelos de Bases Elásticas

Em problemas estruturais não lineares com restrições de contato, o caminho não linear de equilíbrio do sistema pode ser fortemente influenciado pelas propriedades e características do meio elástico que impõe essas restrições de deslocamentos. Ou seja, a solução do problema pode depender do modelo matemático utilizado para representar o meio elástico ou fundação. Intuitivamente, para se analisar o comportamento desse meio, espera-se que, com a escolha de um modelo mais rigoroso do ponto de vista mecânico, se encontre melhores resultados. Porém, as dificuldades em se determinar os parâmetros elásticos ou mesmo plásticos envolvidos em tais modelos podem resultar em divergências nos resultados a serem alcançados. Adicionalmente, como em muitas situações práticas, o interesse na resposta da fundação elástica limita-se à obtenção das forças na região de contato, e não no estado de tensões ou campo de deslocamentos que se desenvolvem no seu interior. É possível o emprego de modelos matemáticos relativamente simples para descrever com razoável precisão o comportamento da base na região de contato (SILVEIRA, 1995; SILVA, 1998).

Os modelos considerados mais simples são os que apresentam apenas um parâmetro definindo as propriedades do material da fundação elástica. Dentre esses modelos, destacam-se o de molas discretas dispostas ao longo da região de contato (SILVEIRA, 1995; SILVA, 1998; PEREIRA, 2003; MACIEL, 2012) e o modelo de Winkler (HETÉNYI, 1946; SILVA, 1998; MACIEL, 2012). O modelo de Winkler corresponde a uma camada formada por molas estreitamente espaçadas e independentes entre si. Ambos não consideram a interação entre as molas, o que significa que, se uma base é submetida a uma carga distribuída em sua superfície, as molas localizadas fora da região carregada não serão afetadas. Por esse motivo, esses modelos não representam precisamente as características de alguns tipos de fundações, pois o solo é, na realidade, um corpo contínuo e,

portanto, deve existir uma curva de deflexão contínua. O modelo com dois parâmetros definindo o comportamento do solo, como o de Pasternak, já considera as interações entre as molas, o que melhora o modelo proposto por Winkler.

Nas próximas subseções são apresentados os modelos matemáticos para as bases elásticas adotados neste trabalho. São modelos que podem ser definidos com um ou dois parâmetros elásticos. No caso dos modelos com um parâmetro, apresenta-se inicialmente o modelo discreto formado por molas que são ligadas, no contexto do MEF, aos pontos nodais da estrutura, e depois o modelo contínuo de Winkler. Na sequência, é apresentado o modelo contínuo de Pasternak, que utiliza dois parâmetros. Informações adicionais sobre esses e vários outros modelos de bases elásticas podem ser encontradas nos trabalhos de Kerr (1964), Silveira (1995), Silva (1998), Holanda (2000), Pereira (2003), Mullapudi e Ayoub (2010) e Shen (2011).

3.4.1 Modelo de molas discretas

Esse modelo representativo do solo é constituído por molas discretas dispostas ao longo da região de contato. As molas são independentes entre si e, portanto, não é considerada qualquer interação entre elas.

Na discretização via MEF, a malha deve ser escolhida de forma que os nós coincidam com o posicionamento das molas. Para a reação da base elástica, tem-se a seguinte expressão:

$$r_b = k_b v_b \Big|_{(x_i, y_i)} \quad (3.20)$$

onde r_b e v_b são, respectivamente, a reação e o deslocamento da base elástica, k_b é o parâmetro de rigidez da mola, dado em unidade de força por comprimento, e (x_i, y_i) representa a posição dos nós da estrutura e da base elástica que estão em contato. A Figura 3.5 ilustra uma viga sobre uma fundação desse modelo.

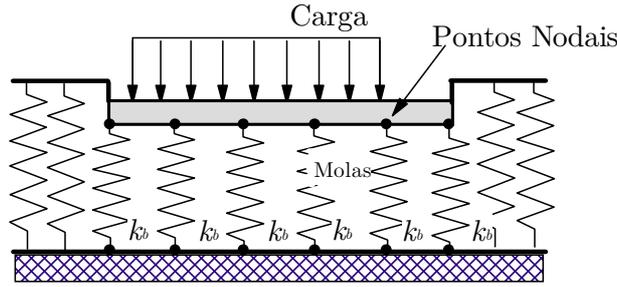


Figura 3.5. Modelo de molas discretas representando o solo

Esse modelo é representado por molas discretas e independentes, ligadas aos pontos nodais da malha de elementos finitos da estrutura. Por esse motivo, a discretização tem grande importância nas análises feitas com esse modelo, pois quanto mais refinada for a malha de elementos finitos, melhor será a precisão dos resultados.

A intensidade da reação da mola é diretamente proporcional ao deslocamento, ou rotação, da mola no ponto nodal i do modelo (Figura 3.6), como segue:

$$r_{xi} = k_{xi} u_i \quad (3.21)$$

$$r_{yi} = k_{yi} v_i \quad (3.22)$$

$$M_{\theta i} = k_{\theta i} \theta_i \quad (3.23)$$

em que r_{xi} , r_{yi} e $M_{\theta i}$ são as reações; u_i , v_i e θ_i são os deslocamentos nodais da estrutura no ponto nodal i , e k_{xi} , k_{yi} e $k_{\theta i}$ são os parâmetros de rigidez das molas conectadas a esse ponto.

Considerando as Equações (3.21) a (3.23), pode-se escrever a energia interna de deformação armazenada pela base:

$$U_{bi} = \frac{1}{2} k_{xi} u_i^2 + \frac{1}{2} k_{yi} v_i^2 + \frac{1}{2} k_{\theta i} \theta_i^2 \quad (3.24)$$

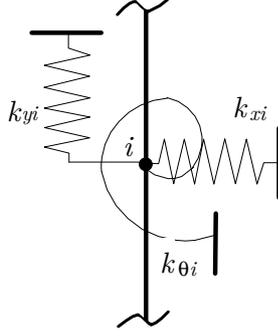


Figura 3.6. Molas discretas conectadas a um ponto i da estrutura

As componentes da matriz de rigidez da base elástica podem ser obtidas diretamente da energia de deformação, considerando os deslocamentos nodais no sistema global de coordenadas:

$$k_{b(m,n)} = \frac{\partial^2 U_b}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n} \quad (3.25)$$

A matriz de rigidez da fundação elástica, segundo o modelo de molas discretas, fica organizada da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{bi} = \begin{bmatrix} k_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta i} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Nessa equação, \mathbf{K}_{bi} é a matriz de rigidez da fundação elástica associada ao ponto nodal i . Finalmente, para obter a matriz de rigidez global, diagonal, da base elástica deve-se considerar a contribuição de todos os m pontos nodais em contato com a fundação, ou seja:

$$\mathbf{K}_b = \sum_m \mathbf{K}_{bi} \quad (3.27)$$

Essa matriz será somada à matriz de rigidez da estrutura, formando a matriz de rigidez do sistema. As componentes diagonais nulas que podem estar

presentes nessa matriz estão associadas às deslocabilidades dos pontos nodais onde não há restrições impostas pelas molas, ou não há contato com o solo.

Para esse modelo de fundação, o vetor de forças internas nodais incrementais é dado por:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib} = \mathbf{K}_b \Delta \mathbf{U} \quad (3.28)$$

3.4.2 Modelo contínuo de Winkler

O modelo de Winkler (1867) representa a região de contato através de um sistema de molas estreitamente espaçadas e independentes entre si (Figura 3.7). Nesse modelo, a reação exercida em um dado ponto da região de contato é assumida como proporcional ao deslocamento vertical da estrutura nesse mesmo ponto, independente dos deslocamentos em outras partes da estrutura em contato, e pode ser expressa por:

$$r_b = k_1 v_b \quad (3.29)$$

onde r_b e v_b são, respectivamente, a reação da base e o deslocamento, k_1 é o parâmetro de rigidez da mola, dado em unidade de força por área.

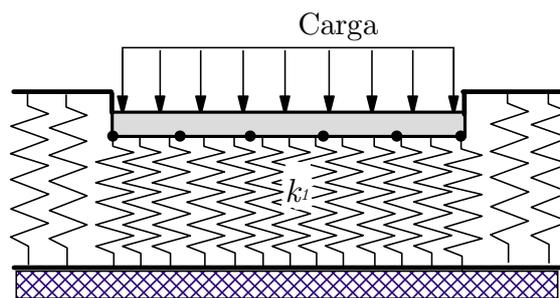


Figura 3.7. Modelo de Winkler representando a região de contato

A maior dificuldade em aplicar o modelo de Winkler é quantificar o valor do parâmetro de rigidez do solo. Em termos práticos, o valor de k_1 é determinado através de ensaios de carregamento de placas *in-situ* (*plate load tests*), onde é aplicado um carregamento vertical e perpendicular à placa e medido seu

deslocamento. Assume-se que a reação da base é proporcional ao deslocamento da estrutura em um determinado ponto, e considera-se o solo como um material elástico que obedece à Lei de Hooke. A partir do ensaio obtém-se a curva carga-deslocamento, e o valor de k_1 é o módulo secante do gráfico (KAMESWARA RAO, 2011). Há certa dificuldade em determinar o valor de k_1 , pois seu valor não depende só das características de deformação do solo, mas também do tamanho da placa utilizada, conforme visto em Chandra et al. (1987).

A partir do valor do parâmetro de rigidez de Winkler, k_t , obtém-se o valor do parâmetro de rigidez para o modelo discreto, k_b , através da seguinte transformação:

$$k_b = \frac{k_t L}{n_{ef}} \quad (3.30)$$

onde L é o comprimento da estrutura que está em contato com o solo, e n_{ef} é o número de elementos finitos que a compõem. Essa equação é válida para estruturas com apoios em suas extremidades.

Existe a possibilidade de considerar o comportamento não linear do solo através do modelo de Winkler. Um polinômio com um termo não linear cúbico foi proposto por Chandra *et al.* (1987) para representar a reação da fundação elástica, incluindo um parâmetro k_3 . A Figura 3.1 ilustra a diferença entre os casos de fundação linear e não linear. Nesse modelo, a reação da fundação é dada por:

$$r_b = k_1 v_b \pm k_3 v_b^3 \quad (3.31)$$

em que k_3 é o segundo parâmetro de rigidez da parcela não linear. O sinal positivo, ou negativo, está relacionado a uma fundação com ganho ou perda de rigidez, respectivamente.

3.4.2.1 Winkler linear

O modelo contínuo de Winkler assume que o solo pode ser representado através de um conjunto de molas independentes, estreitamente espaçadas.

A energia interna de deformação para esse modelo é dada por:

$$U_b = \frac{k_1}{2} \int_0^L \Delta u_b^2 dx \quad (3.32)$$

sendo L o comprimento do elemento.

O incremento de deslocamento, Δu_b , pode ser relacionado com os valores nodais desse elemento, $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b$, como segue:

$$\Delta u_b = \mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.33)$$

na qual \mathbf{B}_b é a matriz que contém as funções de interpolação de Hermite, organizadas da seguinte forma:

$$H_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.34)$$

$$H_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.35)$$

$$H_3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.36)$$

$$H_4 = \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{B}_b^T = \begin{bmatrix} 0 & H_1 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Ao substituir a Equação (3.33) em (3.32), e sabendo que $\mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b = \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{B}_b^T$, obtém-se a forma discreta da energia de deformação:

$$U_b = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_b^e \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.39)$$

na qual \mathbf{K}_b^e é a matriz de rigidez da fundação elástica para o elemento considerado, cuja expressão é dada por:

$$\mathbf{K}_b^e = \mathbf{C}_b \int_0^L \mathbf{B}_b^T \mathbf{B}_b dx \quad (3.40)$$

onde L é o comprimento do elemento finito, e \mathbf{C}_b é a matriz constitutiva do solo, em que, para o caso de Winkler linear, $\mathbf{C}_b = k_t$.

Ao substituir a Equação (3.38) na Equação (3.40), obtém-se as componentes da matriz de rigidez da fundação elástica do elemento, simétrica, como segue:

$$k_{b(2,2)} = k_{b(5,5)} = \frac{13C_b L}{35}$$

$$k_{b(2,3)} = -k_{b(5,6)} = \frac{11C_b L^2}{210}$$

$$k_{b(2,5)} = \frac{9C_b L}{70}$$

(3.41)

$$k_{b(2,6)} = -k_{b(3,5)} = -\frac{13C_b L^2}{420}$$

$$k_{b(3,3)} = k_{b(6,6)} = \frac{C_b L^3}{105}$$

$$k_{b(3,6)} = -\frac{C_b L^3}{140}$$

Finalmente, para obter a matriz de rigidez global, da fundação elástica deve-se considerar a contribuição de todos os m elementos na região de contato, chegando a:

$$\mathbf{K}_b = \sum_m \mathbf{K}_b^e \quad (3.42)$$

Ao considerar o modelo de Winkler, verifica-se a contribuição da fundação elástica para as forças internas incrementais. Para o elemento, pode-se reescrever da seguinte forma:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e = \mathbf{K}_b^e \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.43)$$

sendo $\Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e$ o vetor de forças internas incrementais da base, para o elemento considerado.

Por fim, deve-se somar a contribuição de todos os elementos da região de contato, transformando do sistema local para o sistema global através da matriz de rotação, \mathbf{R}^e , da seguinte forma:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib} = \sum_m \left(\mathbf{R}^{eT} \Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e \right) \quad (3.44)$$

3.4.2.2 Winkler não linear

Alguns materiais, como o solo, não podem ser verdadeiramente representados por um conjunto de molas lineares. Por isso, Chandra *et al.* (1987) propôs um polinômio com um termo não linear cúbico para representar a reação da fundação elástica, levando-se em conta o comportamento não linear do solo. Nesse modelo, presume-se que as não linearidades não são de ordem superior. O modelo foi testado através de ensaios de placa, onde os autores concluíram que é capaz de representar o comportamento não linear do solo com bastante precisão. Mais recentemente, esse modelo foi utilizado por Shen (1995 e 2000), Holanda (2000) e Tsiatas (2010).

Na Equação (3.31), o sinal positivo corresponde a uma fundação com ganho de rigidez (ou *hardening foundation*), e o sinal negativo está relacionado a uma fundação com perda de rigidez (ou *softening foundation*).

Como apresentado para o modelo de Winkler linear, em uma análise não linear por elementos finitos, é necessário calcular o vetor de forças internas e a matriz de rigidez. O vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{F}_{ib} = \int_V \mathbf{B}_b^T r_b dV \quad (3.45)$$

em que \mathbf{F}_{ib} é o vetor de forças internas da base, e \mathbf{B}_b é a matriz contendo as funções de interpolação (Equação 3.38).

A matriz de rigidez é dada pela derivada da força interna em relação ao vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{u} . Sendo assim, tem-se:

$$\mathbf{K}_b^e = \frac{\delta \mathbf{F}_{ib}}{\delta \mathbf{u}} = \int_0^L \mathbf{B}_b^T \frac{\delta r_b}{\delta \mathbf{u}} dx \quad (3.45)$$

Aplicando-se a regra da cadeia para resolver a derivada, chega-se à expressão final da matriz de rigidez da fundação:

$$\mathbf{K}_b^e = \int_0^L \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b dx \quad (3.46)$$

Nota-se que a Equação (3.46) é igual a Equação (3.40). No caso do modelo de Winkler não linear, a matriz constitutiva \mathbf{C}_b é dada por:

$$\mathbf{C}_b = k_1 \pm 3k_3 w^2 \quad (3.47)$$

sendo w corresponde ao deslocamento no ponto central do elemento.

Para obter o valor de w , os deslocamentos nodais, $\hat{\mathbf{u}}$, foram aproximados através das funções de interpolação apresentadas nas Equações (3.34) a (3.37). Substituindo nessas equações o valor de $x = L/2$, chega-se a:

$$\mathbf{B}_a^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Portanto, o deslocamento no ponto central do elemento é dado por:

$$w = \mathbf{B}_a^T \hat{\mathbf{u}} \quad (3.49)$$

Em uma análise não linear, o valor de w é atualizado a cada incremento, obtendo-se um novo valor para \mathbf{C}_b . Portanto, é necessário recalculer a matriz de rigidez da base elástica a cada incremento de carga, t , pois ela não é constante no modelo de Winkler não linear. O vetor de forças internas para esse caso é o mesmo do modelo de Winkler linear, Equação (3.43).

3.4.3 Modelo Pasternak

O modelo de Pasternak (1954) considera que as molas são conectadas por uma camada incompressível, que se deforma apenas sob tensões de cisalhamento, como mostra a Figura 3.8. Esse modelo procura estabelecer certa interação entre as molas usadas no modelo de Winkler. Tem-se:

$$r_b = k_1 v_b - G \nabla^2 v_b \quad (3.50)$$

onde G representa o parâmetro de rigidez cisalhante da camada.

Esse modelo procura estabelecer certa interação entre as molas, melhorando o modelo de Winkler linear através da introdução de um parâmetro de rigidez adicional. Como já mencionado, o modelo de Pasternak assume que as molas são conectadas por uma camada que se deforma apenas sob tensões de cisalhamento. A relação incremental de força deslocamento é dada por:

$$\Delta r_b = k_1 \Delta u_b - k_2 \nabla^2 u_b \quad (3.51)$$

onde k_1 é o parâmetro de rigidez elástico transversal, igual ao modelo de Winkler, k_2 corresponde ao parâmetro de rigidez cisalhante da camada.

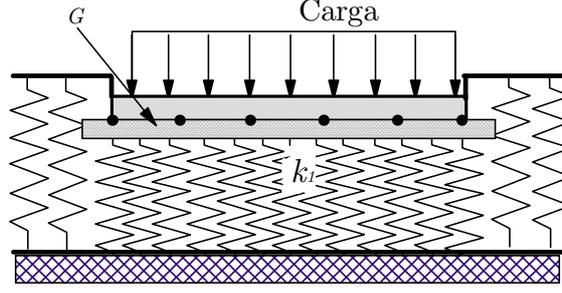


Figura 3.8. Modelo de Pasternak representando a região de contato

A energia interna de deformação para esse modelo é dada por:

$$U_b = \frac{k_1}{2} \int_0^L \Delta u_b^2 dx + \frac{k_2}{2} \int_0^L \left(\frac{d\Delta u_b}{dx} \right)^2 dx \quad (3.52)$$

De forma análoga à apresentada na Seção 3.4.2.1, considera-se que o incremento de deslocamento Δu_b pode se relacionar com os valores nodais desse elemento, $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b$, através das funções de forma, e sabendo que $\mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b = \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{B}_b^T$, tem-se:

$$\frac{d\Delta u_b}{dx} = \frac{d\mathbf{B}_b}{dx} \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.53)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{B}_b}{dx} \right) \Delta \hat{\mathbf{u}}_b = \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \left(\frac{d\mathbf{B}_b}{dx} \right)^T \quad (3.54)$$

Portanto, a energia interna de deformação da fundação elástica será:

$$U_b = \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_{b1}^e \Delta \hat{\mathbf{u}}_b + \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_{b2}^e \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.55)$$

sendo \mathbf{K}_{b1}^e a matriz de rigidez do modelo de Winkler, calculada pela Equação (3.40), e \mathbf{K}_{b2}^e é dada por:

$$\mathbf{K}_{b2}^e = k_2 \int_0^L \mathbf{B}_{b,x}^T \mathbf{B}_{b,x} dx \quad (3.56)$$

com $\mathbf{B}_{b,x}$ sendo a derivada de \mathbf{B}_b em relação a x .

Assim, efetuando-se as derivações e integrações necessárias, obtém-se as componentes da matriz \mathbf{K}_{b2}^e simétrica:

$$k_{b2(2,2)} = k_{b2(5,5)} = \frac{6k_2}{5L}$$

$$k_{b2(2,3)} = -k_{b2(5,6)} = \frac{k_2}{10}$$

$$k_{b2(2,5)} = -\frac{6k_2}{5L}$$
(3.57)

$$k_{b2(2,6)} = -k_{b2(3,5)} = -\frac{k_2}{10}$$

$$k_{b2(3,3)} = k_{b2(6,6)} = \frac{2k_2L}{15}$$

$$k_{b2(3,6)} = -\frac{k_2L}{30}$$

Finalmente, para obter a matriz de rigidez global da fundação elástica deve-se considerar a contribuição de todos os m elementos na região de contato, chegando a:

$$\mathbf{K}_b = \sum_m (\mathbf{K}_{b1}^e + \mathbf{K}_{b2}^e)$$
(3.58)

Portanto, para esses modelos, o vetor de forças internas nodais incrementais é dado por:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e = (\mathbf{K}_{b1}^e + \mathbf{K}_{b2}^e) \Delta \hat{\mathbf{u}}_b$$
(3.59)

Como nos modelos anteriores, deve-se considerar a contribuição de todos os m elementos finitos na região de contato, transformando o vetor de forças

internas para o sistema global de coordenadas através da matriz de rotação, \mathbf{R}^e , da seguinte forma:

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_{ib} = \sum_m \left(\mathbf{R}^{eT} {}^{\Delta t}\mathbf{F}_{ib}^T \right) \quad (3.60)$$

CAPÍTULO 4

Aplicações Numéricas –

Análise Avançada

4.1 Introdução

Essa seção tem o propósito de validar a metodologia numérica, baseada em deslocamento e na teoria de Euler-Bernoulli, para simular o comportamento não linear 2D do aço, concreto e estruturas mistas de aço e concreto, apresentadas no Capítulo 2. Foram realizadas análises inelásticas de segunda ordem, atestando que a presente abordagem não se limita a uma tipologia específica, e pode ser usada para o estudo de diferentes seções transversais. Destaca-se que os resultados encontrados são comparados com os apresentados na literatura, obtidos de forma numérica e/ou experimental.

Na Seção 4.2 são feitas análises inelásticas de segunda ordem de sistemas estruturais de aço com diferentes seções transversais. Já na Seção 4.3 tem-se estudo de estruturas de concreto. Na Seção 4.4 apresenta-se uma análise de um sistema estrutural misto de aço e concreto.

4.2 Estruturas de Aço

4.2.1 Pilar engastado-livre: flexão em torno do eixo de menor inércia

Geralmente, nos projetos estruturais, a flexão em torno do eixo de menor inércia está relacionada com os pilares da estrutura. O conhecimento do comportamento deste membro estrutural nessa situação é de fundamental importância. Este exemplo tem como objetivo validar a estratégia proposta neste trabalho através da análise inelástica de um pilar engastado livre que atua de maneira isolada, sendo a seção transversal um perfil laminado I.

O pilar engastado-livre está submetido a uma carga vertical permanente P , e uma carga horizontal incremental, H . A carga H está aplicada no plano da seção transversal, perpendicularmente ao eixo de menor inércia, conforme ilustra a Figura 4.1. Esse exemplo também foi estudado por Zubydan (2011) para validar suas formulações numéricas. Na Figura 4.1 são mostrados também os dados referentes ao material e à geometria do pilar, além da discretização em elementos finitos. Investigou-se o comportamento do pilar para três níveis do carregamento permanente P : 20%, 40% e 60% da carga axial de escoamento, P_y .

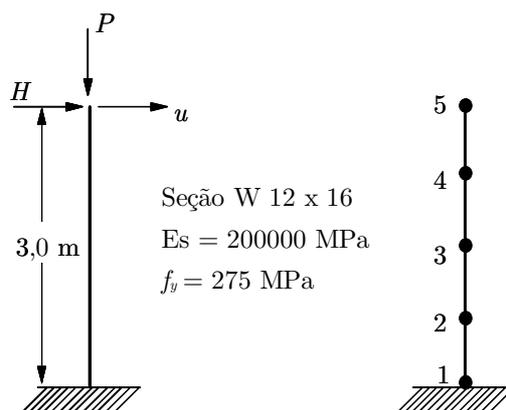


Figura 4.1. Pilar engastado-livre e sua discretização em elementos finitos

Através do controle do deslocamento horizontal, u , no topo da coluna chegou-se nas trajetórias de equilíbrio ilustradas na Figura 4.2. Os resultados encontrados nesse trabalho são comparados aos valores obtidos por Zubydan

(2011), que analisou a não linearidade física de forma distribuída com o Métodos da Zona Plástica (MZP). Observa-se que para os três níveis de carregamento aplicado os resultados são coincidentes, comprovando a eficiência da formulação usada.

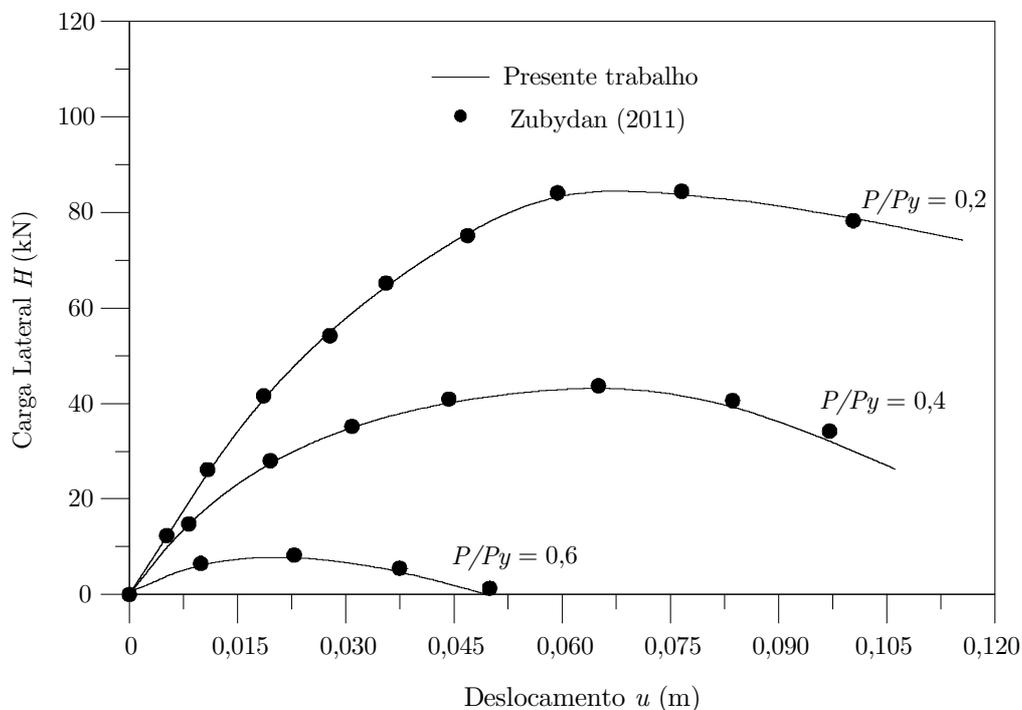


Figura 4.2. Trajetória de equilíbrio do pilar engastado-livre

Na sequência, faz-se um estudo do índice de degradação da seção transversal (plastificação) do pilar nos pontos nodais do modelo para as 3 relações de carregamento consideradas. Esses resultados são apresentados na Figura 4.3. Os valores dos índices de degradação foram captados ao final de cada análise, ou seja, quando o deslocamento atingiu para a carga de $P/P_y = 0,2$ o valor de $u = 0,115$ m, para $P/P_y = 0,4$ o deslocamento de $u = 0,106$ m e para $P/P_y = 0,6$ o valor de $u = 0,049$ m.

4.2.2 Pilar com seção tubular vazada e aço de alta resistência

Este exemplo aborda, como ilustrado na Figura 4.4, um pilar biapoiado de seção transversal tubular retangular vazado (caixa) com aço de alta resistência, submetido a uma carga axial. Essa estrutura foi testada experimentalmente por

Wang *et al.* (2014) e analisada numericamente por Li *et al.* (2015). A geometria e as dimensões do pilar-caixa são apresentadas na Figura 4.4. A tensão de escoamento foi tomada como 505,8 MPa e o módulo de elasticidade como 207,8 GPa. As imperfeições geométricas utilizadas foram retiradas de Wang *et al.* (2014), que consideraram uma pequena carga excêntrica nas extremidades ($M = 0,019 P$) e um eixo curvo inicial com flexa central de 3 mm. O modelo de tensões residuais utilizado é uma adaptação da distribuição utilizada por Mathur (2011), que usou a proposta de Salmon *et al.* (2009), como apresentado em Figura 2.7 (d).

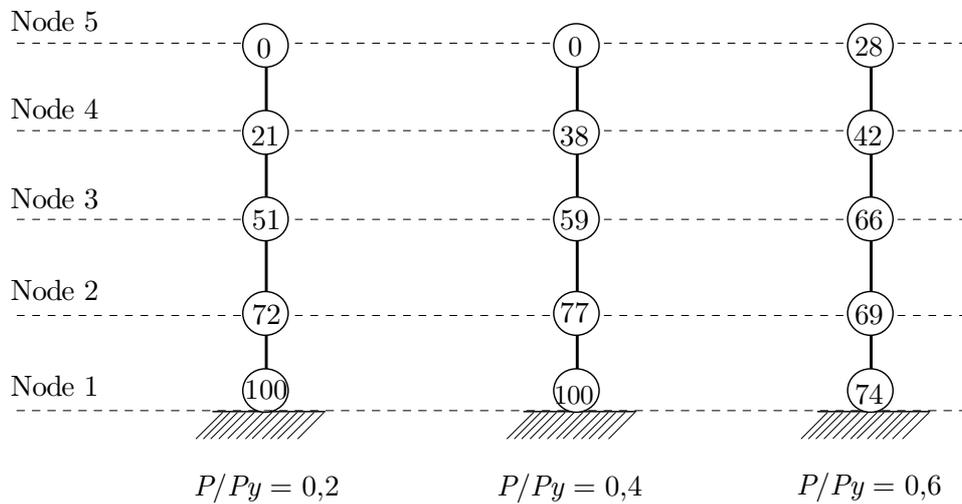


Figura 4.3. Relação EIt/EIt_i (%) nos pontos nodais

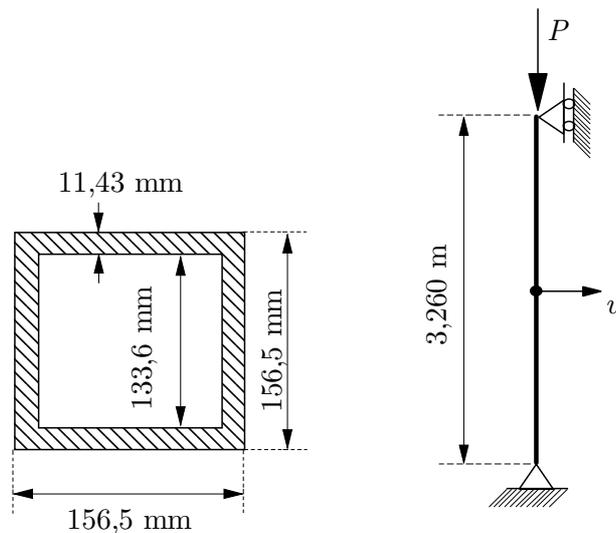


Figura 4.4. Pilar biapoiado com seção transversal tubular vazada

A Figura 4.5 ilustra a trajetória de equilíbrio obtida via CS-ASA e os resultados do teste de Wang *et al.* (2014). A capacidade final do pilar obtida através da abordagem numérica proposta foi 2702 kN, que é relativamente próxima do valor experimental de 2591 kN.

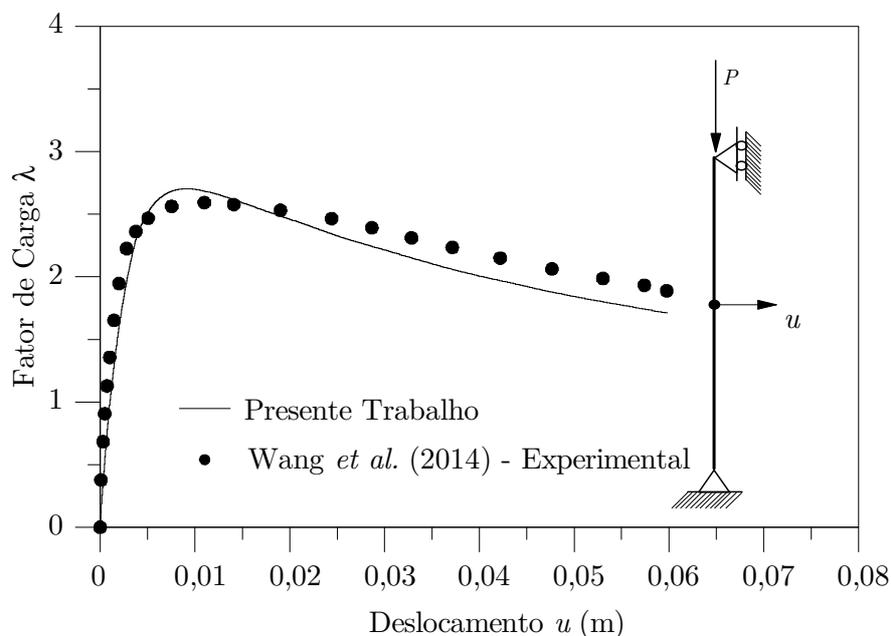


Figura 4.5. Trajetória de equilíbrio do pilar biapoiado

Na Figura 4.6 é destacada a curva de interação esforço normal-momento fletor (NM) para a seção transversal tubular retangular vazada do pilar, bem como os valores retirados de Li *et al.* (2015). Percebe-se, mais uma vez, uma boa concordância entre os resultados obtidos e os da literatura. Nesta mesma figura, pode ser vista a variação das forças internas dentro do domínio resistente até se atingir a plastificação total da seção.

Para este mesmo caso estudou-se o comportamento do elemento estrutural variando algumas características geométricas e também as condições de contorno. A Figura 4.7 mostra a trajetória de equilíbrio controlando o deslocamento horizontal u , quando fez-se a variação da espessura (t_f) da seção retangular vazada. Percebe-se que t_f tem grande influência no comportamento do pilar. Variou-se t_f de 0,9 cm até 2,0 cm.

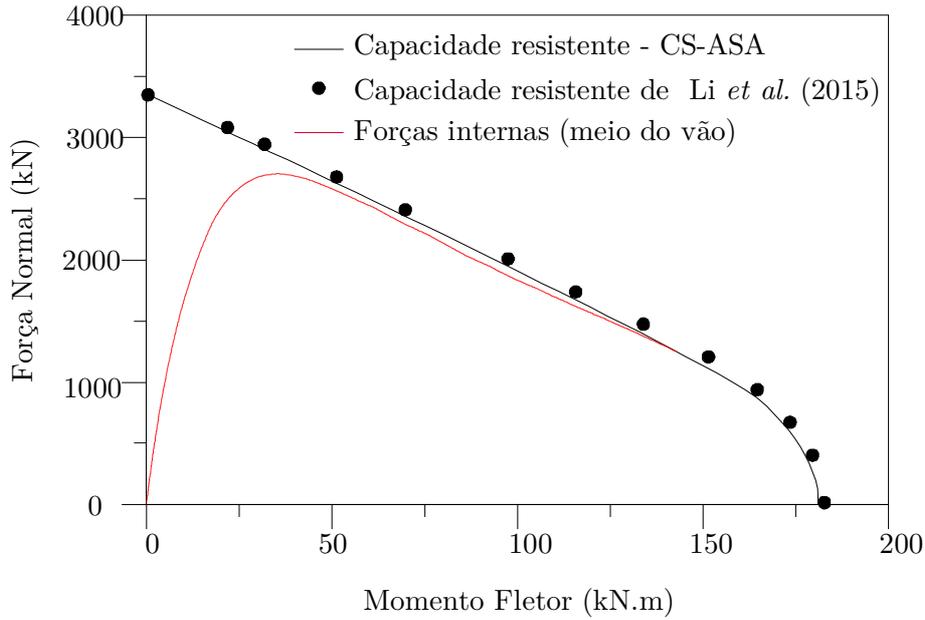


Figura 4.6. Trajetória de equilíbrio do pilar biapoiado

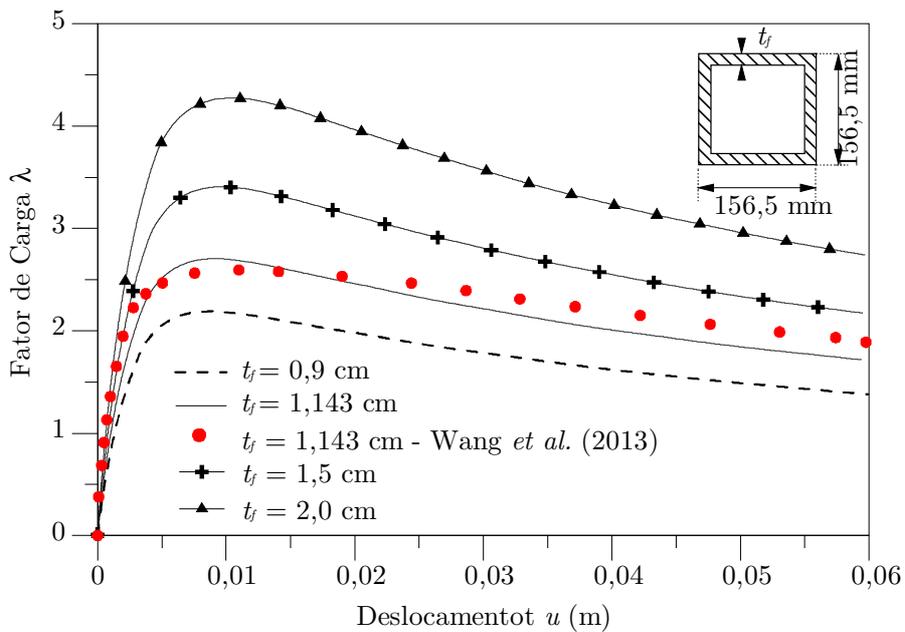


Figura 4.7. Trajetória de equilíbrio do pilar biapoiado para diferentes valores de t_f

Na sequência, analisou-se o comportamento do pilar com diferentes valores de b_f , indicados na Figura 4.8. Observa-se a influência dessa característica geométrica no percentual do fator de carga, onde tem-se o maior valor de b_f , maior será a carga limite atingida. Com relação às condições de contorno do pilar, considerou-se quatro tipos mostradas na Figura 4.9. Utilizou-se nessa análise a mesma geometria da seção transversal encontrado no trabalho de Wang *et al.*

(2014). As variações do deslocamento horizontal do centro do pilar com relação ao fator de carga são apresentadas na Figura 4.10. Percebe-se que à medida que o pilar se torna mais rígido devido as restrições de movimento dos diferentes apoios empregados, atinge-se um fator de carga maior.

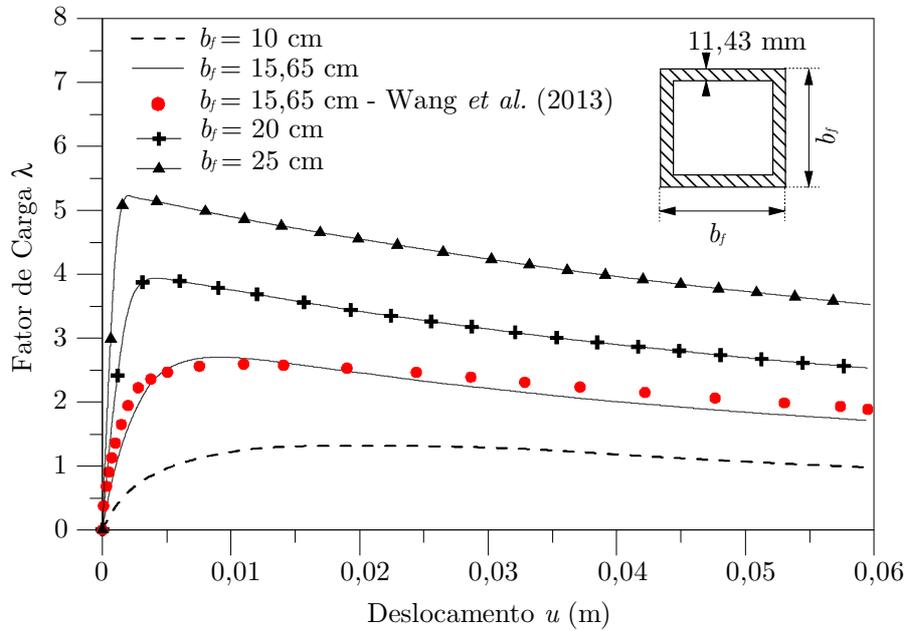


Figura 4.8. Trajetória de equilíbrio do pilar biapoiado para diferentes valores de b_f

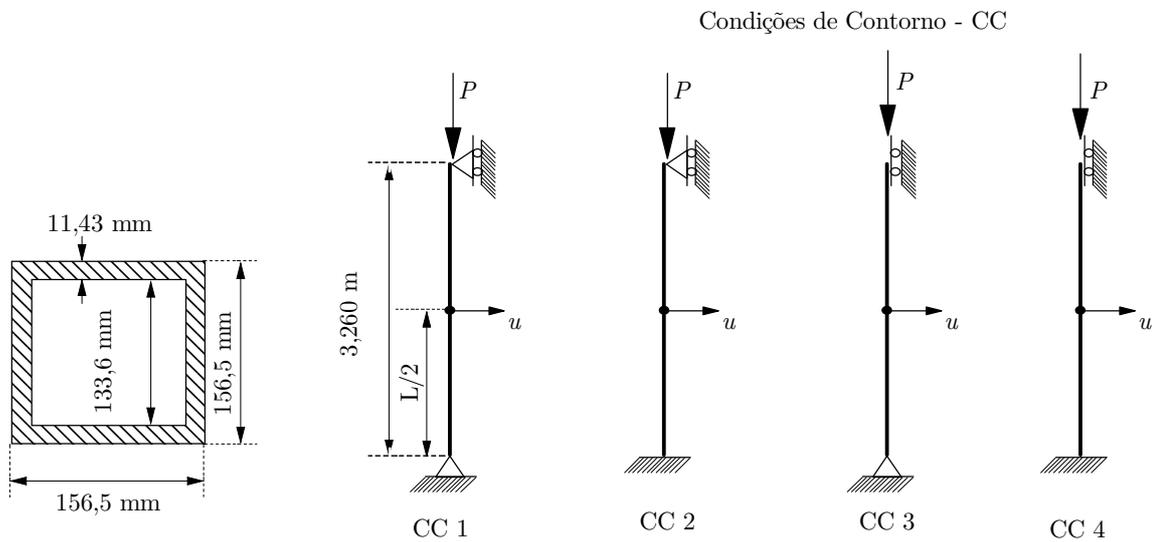


Figura 4.9. - Condições de contorno adotadas

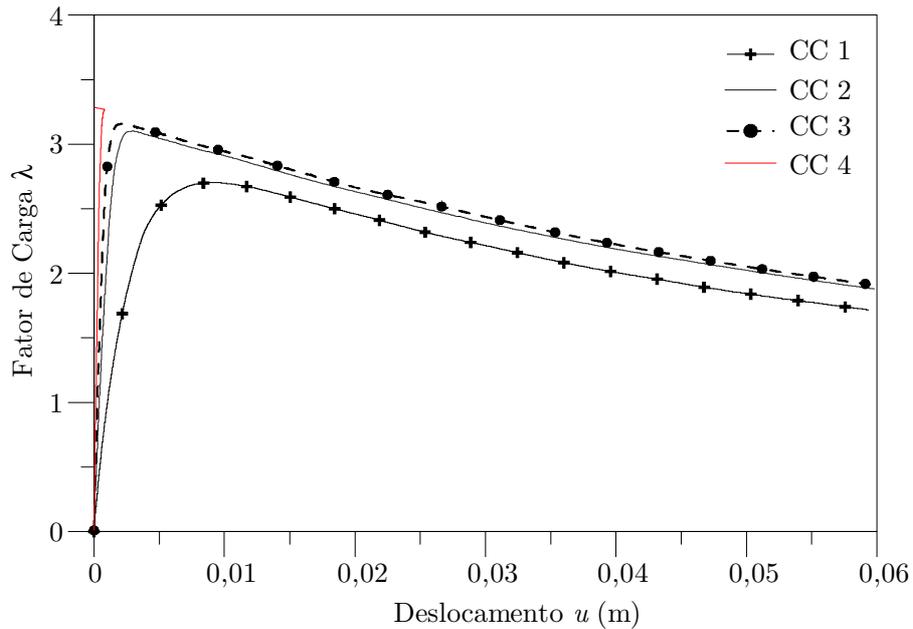


Figura 4.10. Trajetória de equilíbrio para diferentes condições de contorno

4.2.3 Pórtico: flexão em torno do eixo de menor inércia

A geometria do pórtico de dois andares estudado nessa seção foi proposta originalmente por Iffland e Birnstiel (1982). Posteriormente, Ziemian e Miller (1997) orientaram os pilares desse pórtico de forma que a flexão ocorresse em torno do eixo de menor inércia, e realizaram análises inelásticas baseadas nos Métodos da Rótula Plástica (MRP) e MZP. Como pode ser visto na Figura 4.11, o pórtico está submetido a cargas uniformemente distribuídas que atuam nas vigas. Informações sobre a geometria, o material e os perfis utilizados também são fornecidos na figura indicada. Adotaram-se quatro elementos finitos em cada membro estrutural.

Na Figura 4.12 mostra-se a variação do deslocamento horizontal u no topo da terceira coluna à direita com o carregamento. A comparação é feita com os resultados obtidos por Ziemian e Miller (1997) com o programa NIFA (CLARKE, 1994). Ressalta-se, mais uma vez, a eficiência da formulação empregada na simulação do comportamento inelástico do pórtico de dois andares, produzindo resultados bastante próximos daqueles obtidos com o MZP.

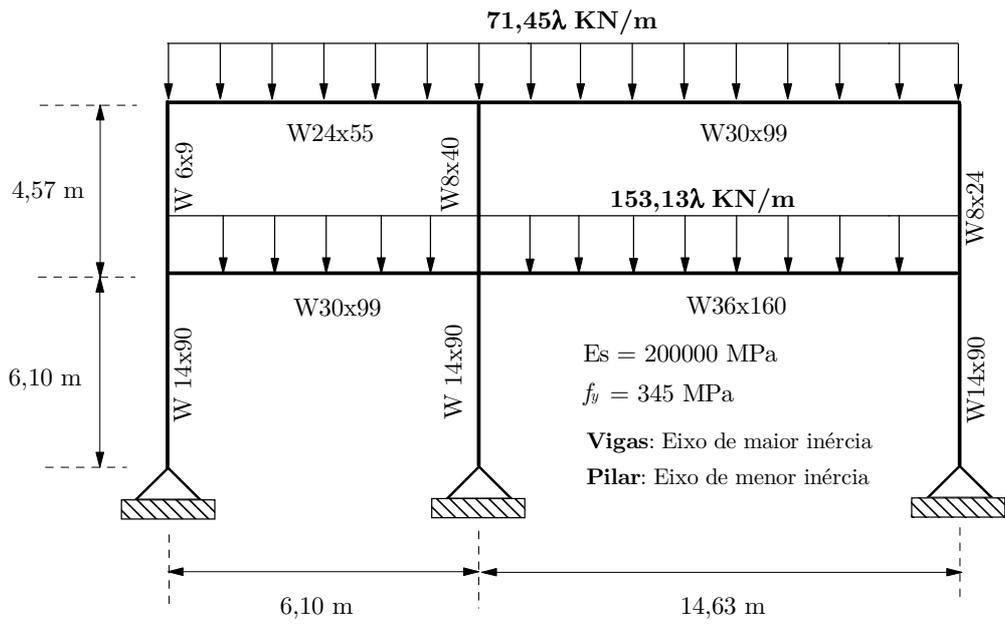


Figura 4.11 - Pórtico de dois andares: geometria e carregamento

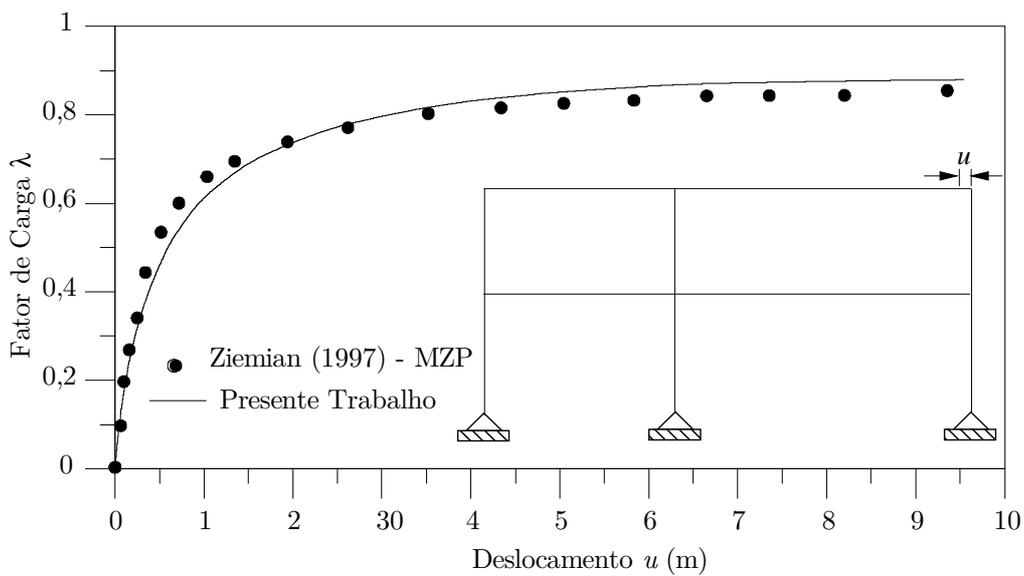


Figura 4.12 - Trajetórias de equilíbrio do pórtico de dois andares

4.2.4 Pórtico com seção circular

Este exemplo trata-se de um elemento estrutural com a seção transversal circular com diâmetro de 0,721 cm, como apresentado na Figura 4.13. O pórtico de William também foi analisado como inelástico por Chan (1988), usando dois valores fictícios para a tensão de escoamento.

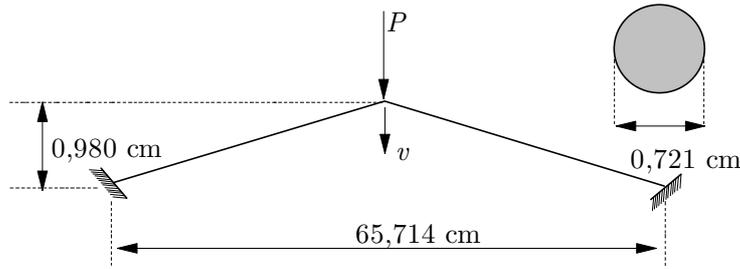


Figura 4.13. Pórtico de William

A Figura 4.14 apresenta a trajetória de equilíbrio controlando o deslocamento vertical no centro do pórtico de William obtido pela formulação proposta no presente trabalho, comparando-o com os resultados obtidos por Chan (1988). Foram adicionados na mesma figura os gráficos das análises com as tensões de escoamento de 165,47 MPa e 124,10 MPa. Com a equivalência dos resultados pode-se comprovar a eficiência da formulação proposta em retratar o comportamento dos elementos estruturais para diferentes seções transversais.

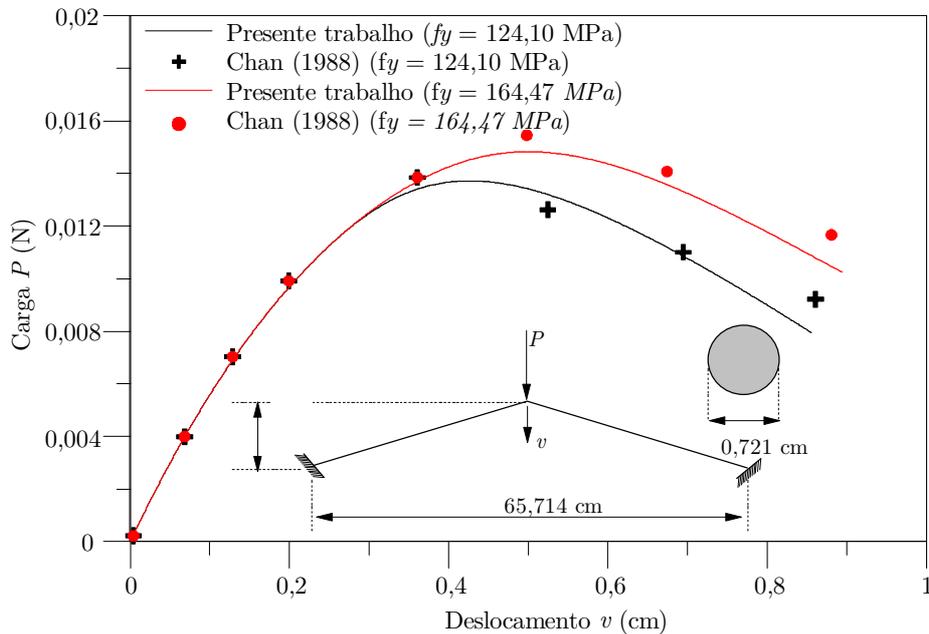


Figura 4.14. Trajetória de equilíbrio do Pórtico de William

Em seguida estudou-se este pórtico para diferentes alturas (h) e condições de contorno. A Figura 4.15 mostra a variação do deslocamento vertical com relação ao fator de carga para diferentes valores de h . A carga limite atingida é mais alta quando se tem o valor de h maior, independentemente do valor da tensão de

escoamento adotada. O mesmo comportamento acontece quando varia-se as condições de contorno, Figura 4.16. Quando se estudou o pórtico com as condições de contorno mais rígidas, elemento biengastado como apresentado por Chan (1988), obteve-se a carga limite com o valor mais alto comparado com as demais condições de contorno utilizadas.

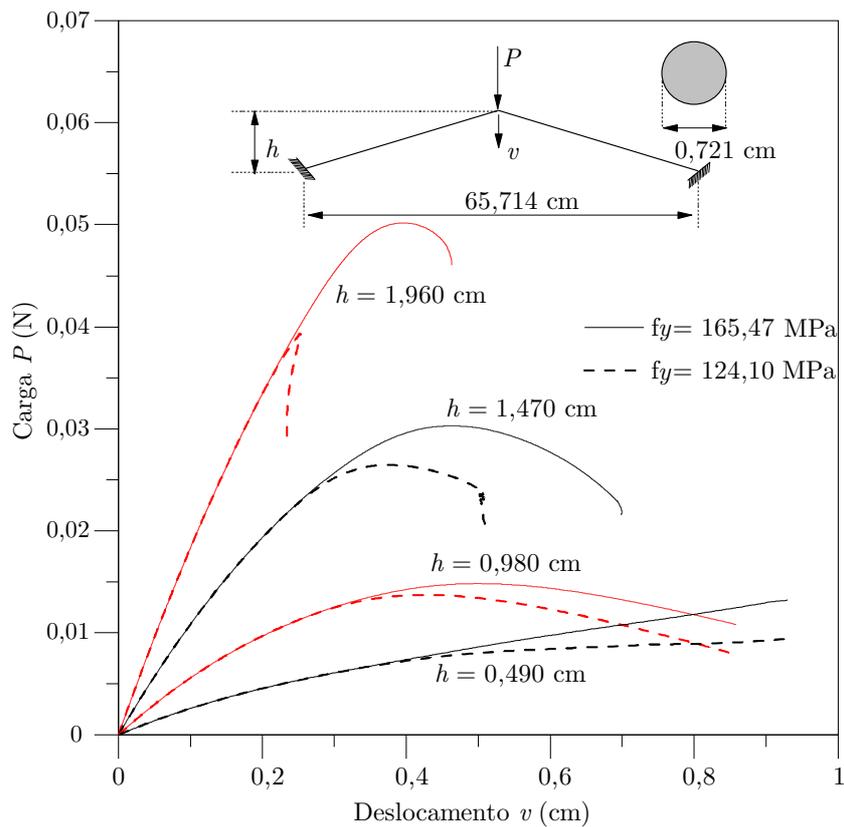


Figura 4.15. Trajetória de equilíbrio para diferentes valores de h

4.2.5 Arcos com seções tubulares vazadas e seção retangular cheia

São abordados nesta seção arcos circulares biapoiados sujeitos à carga distribuída e carga concentrada (Figuras. 4.17a e 4.17b). Quatro tipos de seção transversal são estudados: circular vazada (SCV), retangular vazada (SRV), quadrada vazada (SQV) e retangular cheia (SRC), como mostra a Figura 4.17(c). O aumento do emprego de estruturas com seções transversais tubulares retangulares e circulares (vazadas e cheias) enfatiza a necessidade de se encontrar

formulações numéricas avançadas para o estudo da resistência desses tipos de perfis, justificando as análises realizadas nessa seção.

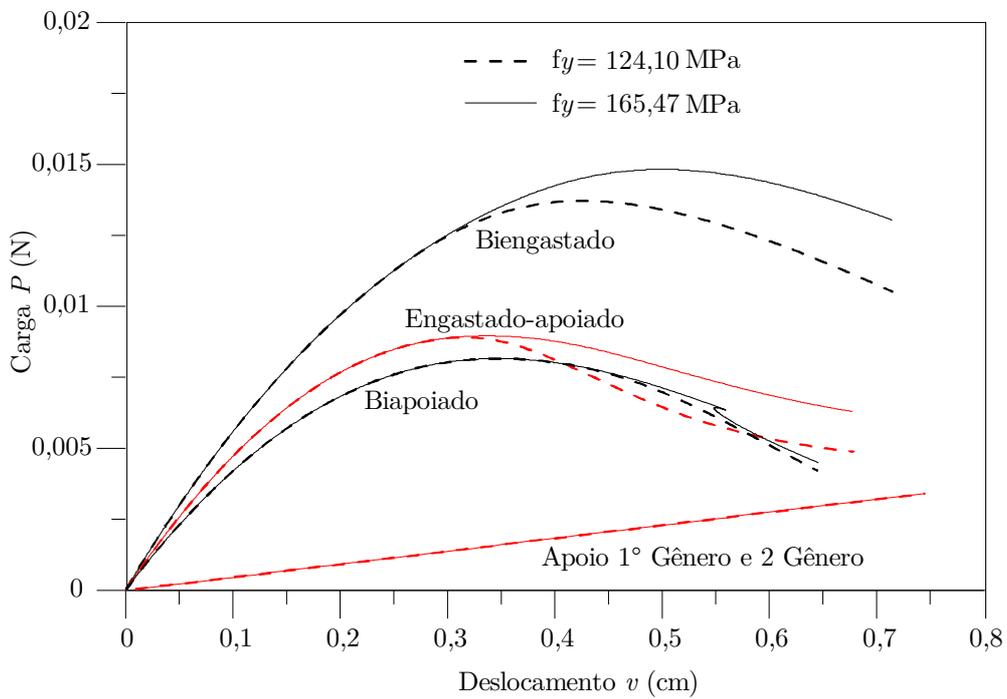


Figura 4.16. Trajetória de equilíbrio para diferentes condições de contorno

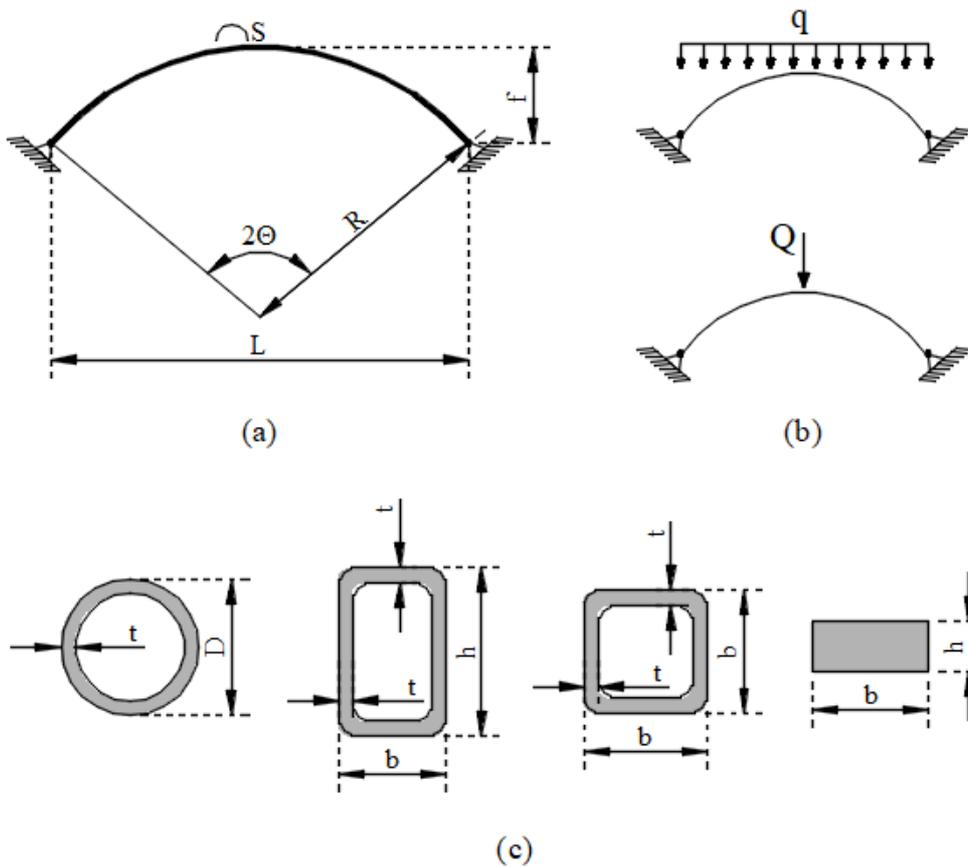


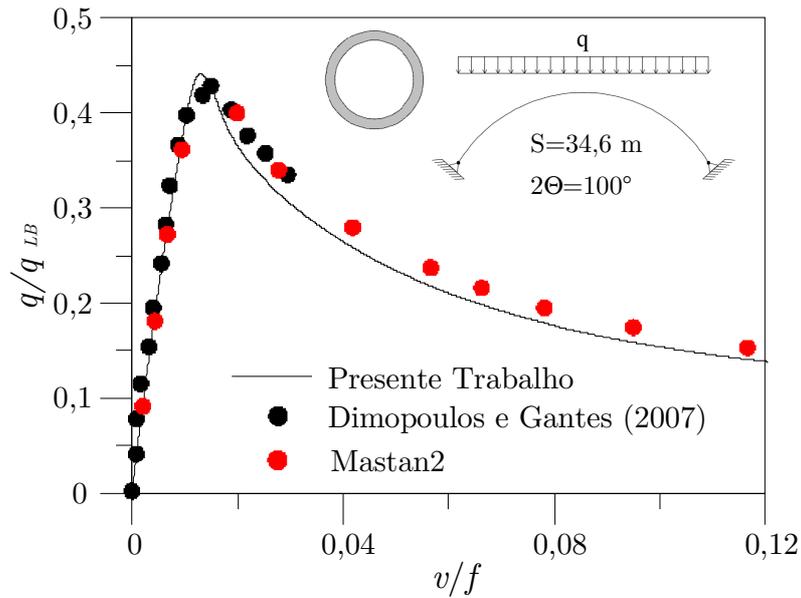
Figura 4.17. Arcos circulares biapoiados: (a) Parâmetros geométricos; (b) Casos de carga; (c) Tipos de seção transversal

O aço utilizado nas seções tubulares vazadas é o S275, que tem módulo de elasticidade $E_s = 210 \text{ GPa}$ e resistência de escoamento $f_y = 275 \text{ MPa}$; já o aço da seção retangular cheia tem módulo de elasticidade $E_s = 68,95 \text{ GPa}$ e resistência de escoamento $f_y = 138 \text{ MPa}$. Admite-se ainda que as SCV e SRC não possuem tensão residual. Já as seções retangular e quadrada vazadas (SRV e SQV) seguem a distribuição de tensões residuais de Mathur (2011) (Figura 2.7d).

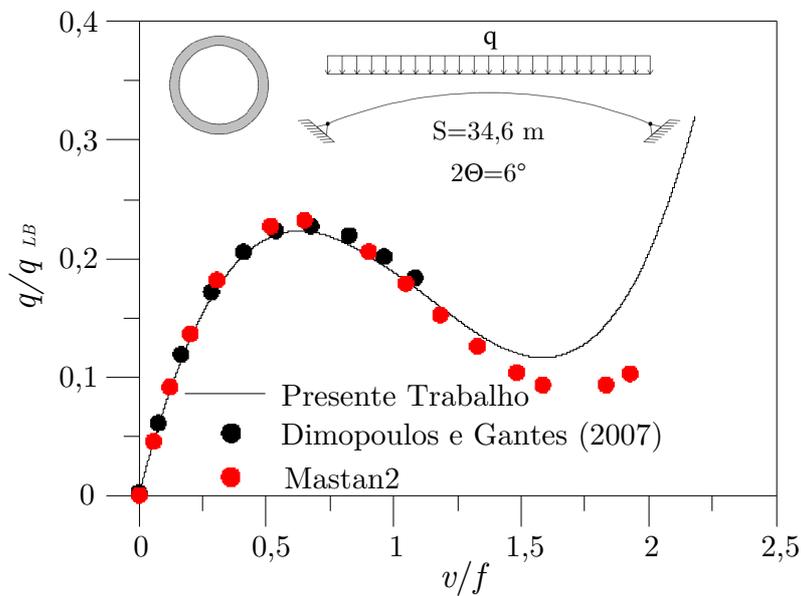
Os dois primeiros arcos a serem analisados têm perfil metálico SCV, com diâmetro $D = 508 \text{ mm}$ e espessura $t = 20 \text{ mm}$, e estão submetidos a uma carga uniformemente distribuída. A primeira estrutura é pouco abatida, com ângulo interno $2\Theta = 100^\circ$ e comprimento de arco $S = 34,6 \text{ m}$, e é modelada com 20 elementos finitos e 20 divisões na seção transversal. O segundo arco é muito abatido, com ângulo interno $2\Theta = 6^\circ$ e comprimento $S = 34,6 \text{ m}$, e modelo numérico que possui 40 elementos finitos e 20 divisões na seção transversal.

As trajetórias de equilíbrio dessas duas estruturas são exibidas na Figura 4.18. Note que a carga q , no eixo vertical, é adimensionalizada através da carga q_{LB} , que representa a carga de flambagem do arco. Pode ser observado também que os resultados obtidos via CS-ASA apresentam boa concordância com daqueles do Mastan2 e Dimopoulos e Gantes (2008), o que valida o emprego da formulação inelástica apresentada no Capítulo 2 para estruturas com seções transversais circulares vazadas.

São analisados agora arcos circulares sob carga concentrada e com as seguintes seções transversais: SRV ($h = 500 \text{ mm}$, $b = 300 \text{ mm}$ e $t = 20 \text{ mm}$); SQV ($b = 400 \text{ mm}$ e $t = 20 \text{ mm}$); SCV ($D = 508 \text{ mm}$ e $t = 20 \text{ mm}$); e SRC ($b = 25,4 \text{ mm}$ e $h = 4,7625 \text{ mm}$). Esses arcos são pouco abatidos, com ângulo interno $2\Theta = 100^\circ$ e comprimento de $S = 34,6 \text{ m}$, e são modelados com 20 elementos finitos e 20 divisões na seção transversal.



(a) Arco pouco abatido

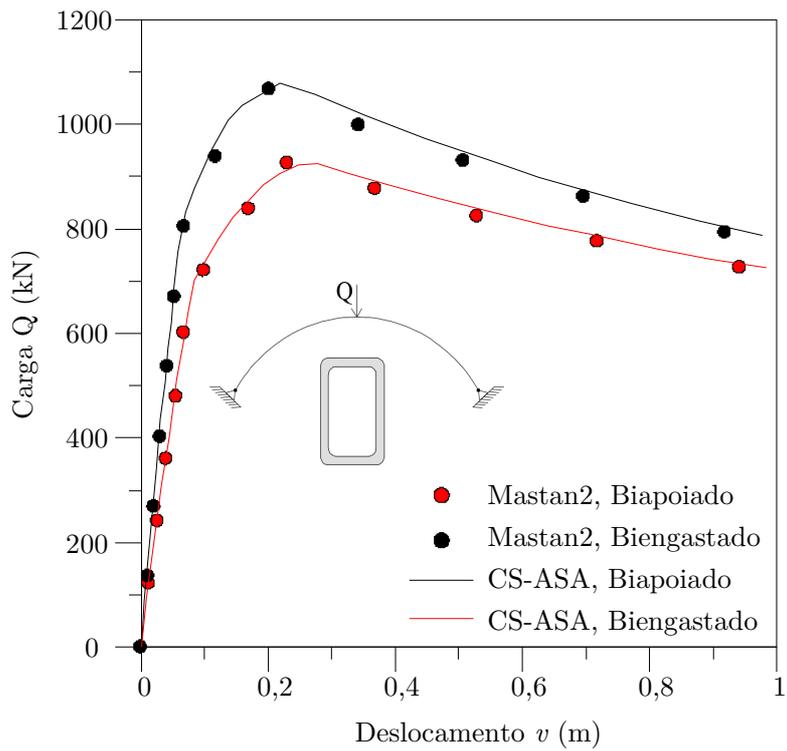


(b) Arco abatido

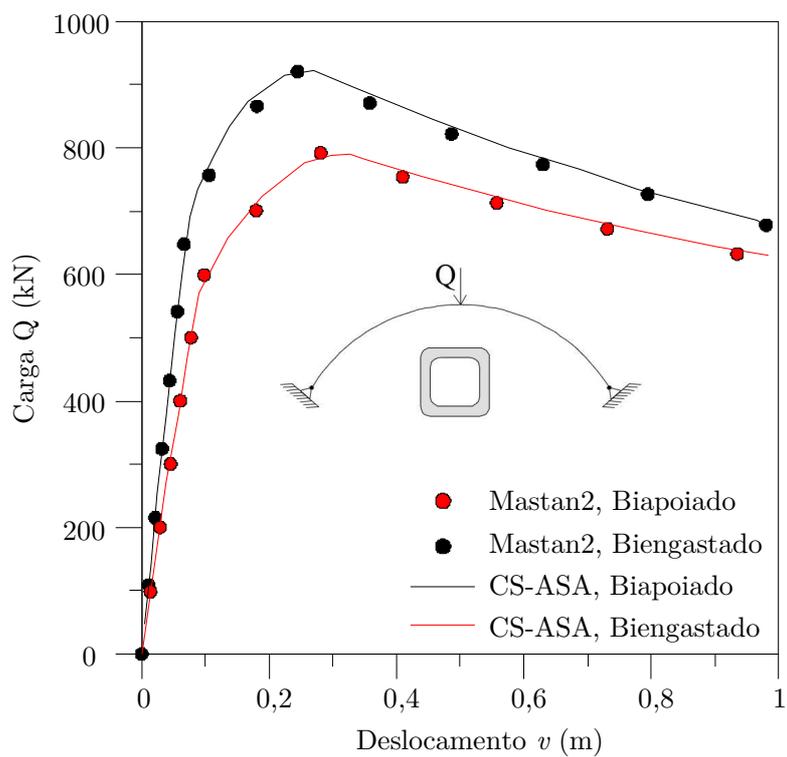
Figura 4.18 - Trajetórias de equilíbrio do arco com perfil SCV

As Figuras 4.19(a), (b) e (c) apresentam a trajetória de equilíbrio dos Arcos SRV, SQV e SCV, respectivamente. Os resultados obtidos são comparados àqueles do Mastan2 para duas condições de contorno: arco biapoiado e arco biengastado.

O arco circular abatido biengastado com seção transversal retangular cheia (SRC) tem raio $R = 3,38$ m e ângulo interno $2\Theta = 14,67^\circ$, foi inicialmente analisado experimentalmente por Belytschko e Glaum (1979) e depois de forma analítica por Pi e Trahair (1996).

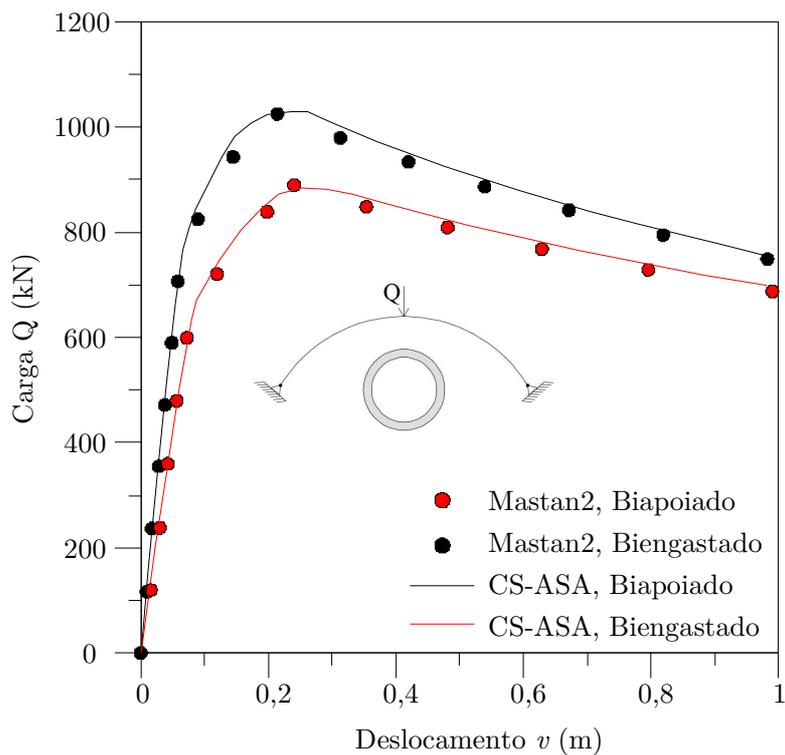


(a) Seção retangular vazada - SRV



(b) Seção quadrada vazada - SQV

Figura 4.19. Trajetória de equilíbrio de arcos pouco abatidos com seções vazadas



(c) Seção circular vazada - SCV

Figura 4.19. Trajetória de equilíbrio de arcos pouco abatidos com seções vazadas (Continuação)

A Figura 4.20 fornece a trajetória de equilíbrio do arco SRC, onde utilizou-se 80 elementos finitos na discretização do arco e 15 divisões da seção transversal. São utilizados os resultados da literatura para comparação, e observa-se uma boa concordância em relação aos de Belytschko e Glaum (1979), principalmente no momento da formação da primeira rótula plástica, que ocorre próximo à carga limite de 2,5 kN. Verifica-se também uma aproximação razoável, nesse ponto, com o modelo de Pi e Trahair (1996). Essas análises foram realizadas para validar os resultados obtidos via CS-ASA.

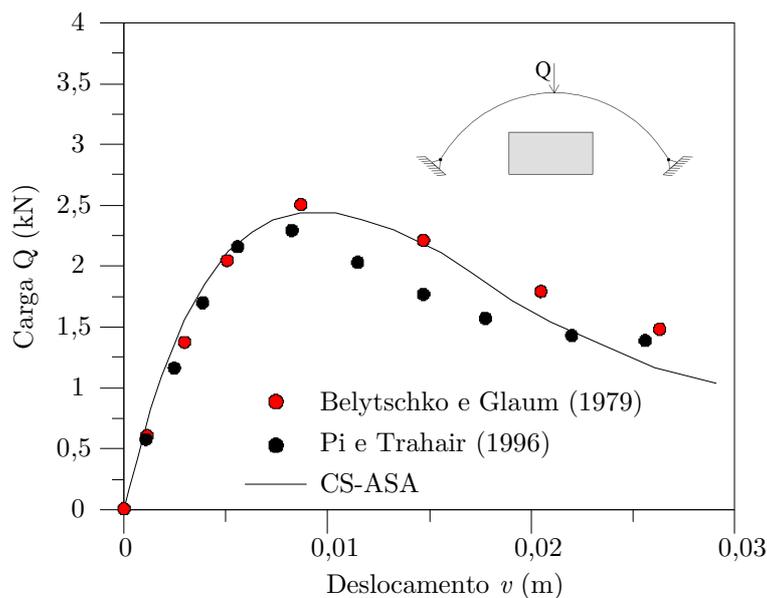


Figura 4.20. Trajetória de equilíbrio do arco circular abatido biengastado com SRC

4.2.6 Pórtico de quatro andares

O pórtico apresentado na Figura 4.21 foi inicialmente estudado por Kassimali (1983) e posteriormente por Yoo e Choi (2008) e Silva (2009) para validarem as formulações por eles propostas. Kassimali (1983) utilizou o método da rótula elastoplástica. Já Yoo e Choi (2008) propuseram um método de análise de flambagem inelástica para determinar a carga crítica de estruturas metálicas. Nesse método, a carga crítica é determinada através da análise de um problema de autovalor, e a teoria do módulo tangente e a curva de resistência para colunas do AISC LRFD (AISC, 1986) são utilizados. Além desse método, eles utilizaram também, para fins de comparação, o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR).

Silva (2009) desenvolveu um sistema computacional para análise numérica avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas baseado no Método dos Elementos Finitos. Visando estabelecer uma modelagem computacional mais verdadeira do comportamento estrutural, os efeitos não lineares são considerados conjuntamente, eliminando a necessidade de processar a análise estrutural e o

projeto em fases distintas. Silva (2009) utilizou o MRPR, associado à vinculação de molas fictícias nas extremidades do elemento finito de viga-pilar, para a simulação da degradação da rigidez à flexão da seção transversal.

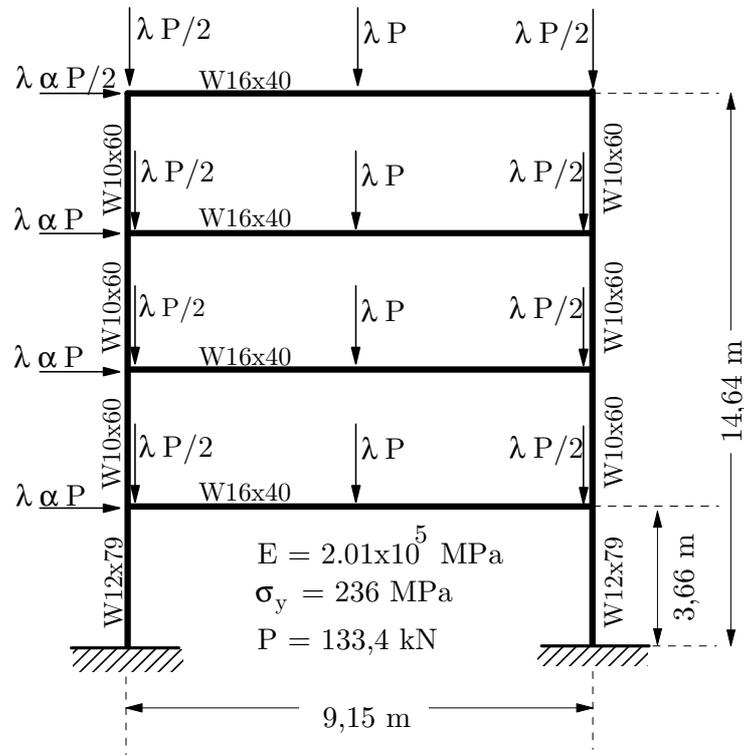


Figura 4.21. Pórtico de quatro andares: geometria e carregamento

Trata-se de um pórtico de quatro andares submetido a cargas horizontais e verticais concentradas nas vigas e colunas como mostra a Figura 4.21. Os valores adotados para o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento são, respectivamente, 201 GPa e 236 MPa. Nas vigas são aplicadas cargas verticais, de intensidades P e $P/2$, no centro do vão e nas ligações entre vigas e colunas, respectivamente. No topo das colunas, tem-se as cargas horizontais, αP , onde α é um coeficiente adimensional. As colunas do primeiro pavimento são constituídas por perfil W12x79 e as demais, por perfil W10x60. Já nas vigas, é utilizado o perfil W16x40. O valor considerado para a carga P é 133,4 kN. As vigas são discretizadas com quatro elementos, e em cada coluna usa-se dois elementos finitos, totalizando 32 elementos. Durante a análise, essas cargas são incrementadas pelo parâmetro λ até que se atinja a carga limite.

A Figura 4.22 apresenta a trajetória de equilíbrio do sistema, onde tem-se a variação do deslocamento horizontal, u , do quarto pavimento durante o processo de carregamento. São apresentadas as respostas para $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,24$ e $\alpha = 0,5$; juntamente com os resultados numéricos obtidos por Yoo e Choi (2008) e de Silva (2009). Observa-se que as respostas obtidas utilizando a metodologia proposta estão em bom acordo com aquelas encontradas na literatura.

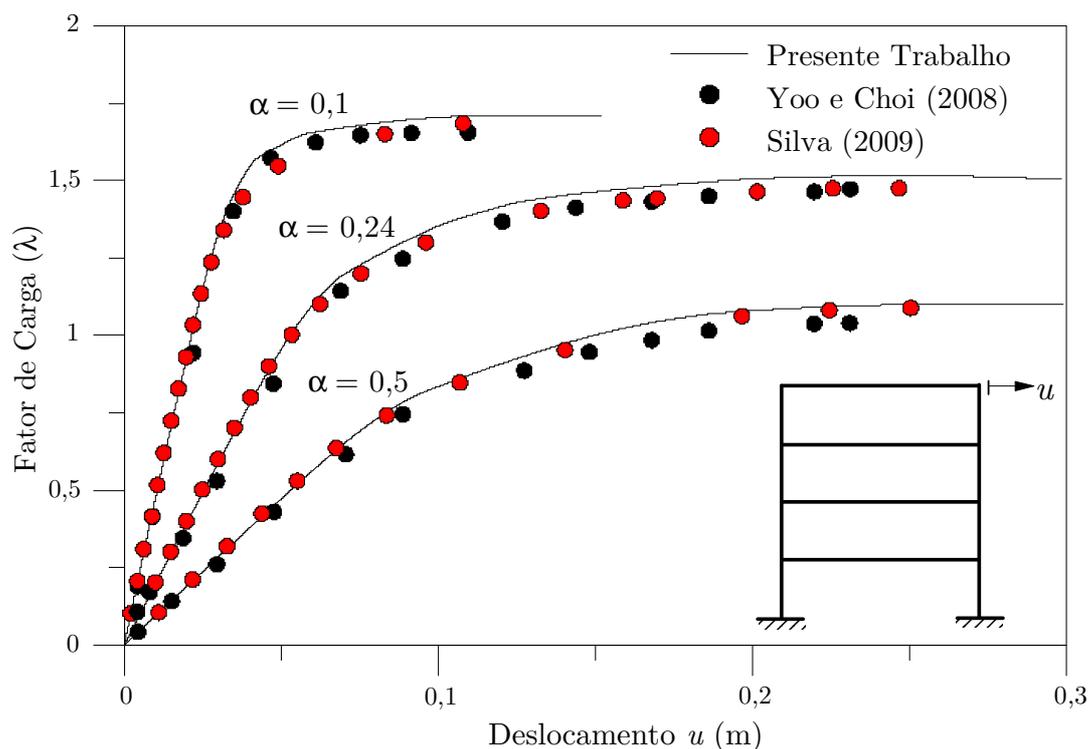


Figura 4.22. Trajetória de equilíbrio do pórtico de quatro andares

4.3 Estrutura de Concreto Armado

O pórtico ilustrado na Figura 4.23 é estudado nesta seção. Estão disponíveis na literatura resultados experimentais (VECCHIO e EMARA, 1992) e numéricos (STRAMANDINOLI, 2007; SHARIFF e MENON, 2016). Vecchio e Emara (1992) realizaram um ensaio de um pórtico plano de concreto armado em escala real, de um vão e dois pavimentos, biengastado. O objetivo dessa análise foi de estudar as deformações por cisalhamento em pórticos. Este pórtico foi ensaiado para o caso de cargas axiais constantes aplicadas nos pilares e carga

lateral monotonicamente crescente. A geometria, carregamento e armação utilizada nos modelos estão mostrados na Figura 4.23.

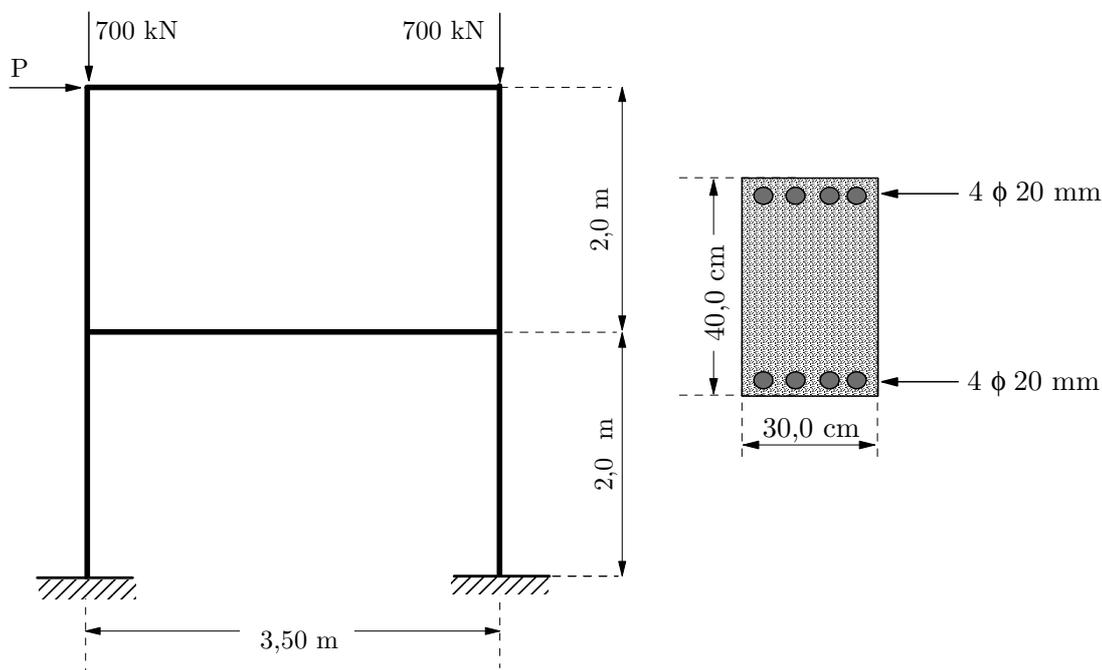


Figura 4.23. Pórtico de Vecchio e Emara: geometria, seção transversal e carregamento

Posteriormente, Stramandinoli (2007) e Shariff e Menon (2016) validaram suas formulações numéricas comparando seus resultados com os obtidos em laboratório. Stramandinoli (2007) desenvolveu e estudou a aplicabilidade de modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado. Um novo modelo constitutivo foi proposto para representar o comportamento do concreto tracionado, e assim considerar a contribuição do concreto entre as fissuras.

Shariff e Menon (2016) desenvolveu um programa de análise não linear capaz de rastrear a resposta carga-deflexão completa de vigas, pórticos e grades de concreto armado, controlado pelo deslocamento. O programa considera a não linearidade geométrica usando uma matriz de rigidez geométrica em conjunto com uma matriz de rigidez primária que é constantemente atualizada iterativamente. A não linearidade do material foi explicada pelo uso de formulações de momento-curvatura prescritas. A degradação da rigidez devido à fissuração do concreto,

escoamento do aço, *tension stiffening*, amolecimento e efeitos P- Δ foram incorporados.

Para essa análise a seção transversal foi dividida em 20 fibras, os pilares foram discretizados com 4 elementos cada e as vigas com 6 elementos cada. As propriedades dos materiais estão apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1. Dados dos materiais da viga de concreto armado (em kN/m)

Concreto			Aço		
f_c	ϵ_{ci}	ϵ_{cu}	f_{pyd}	E_s	ϵ_{pud}
$30 \cdot 10^3$	0,002	0,004	$418 \cdot 10^3$	$1,9525 \cdot 10^8$	0,016

O comportamento do sistema é avaliado através da trajetória de equilíbrio, controlando o deslocamento horizontal no topo do pórtico u . Os resultados obtidos através do CS-ASA são apresentados na Figura 4.24 e comparados com os experimentais de Vecchio e Emara (1992) e os numéricos de Stramandinoli (2007) e Shariff e Menon (2016). Percebe-se boa proximidade entre o comportamento da estrutura obtido de forma numérica. A diferença encontrada entre o resultado numérico e o encontrado em laboratório pode ser devido à exclusão da degradação da rigidez de cisalhamento na análise.

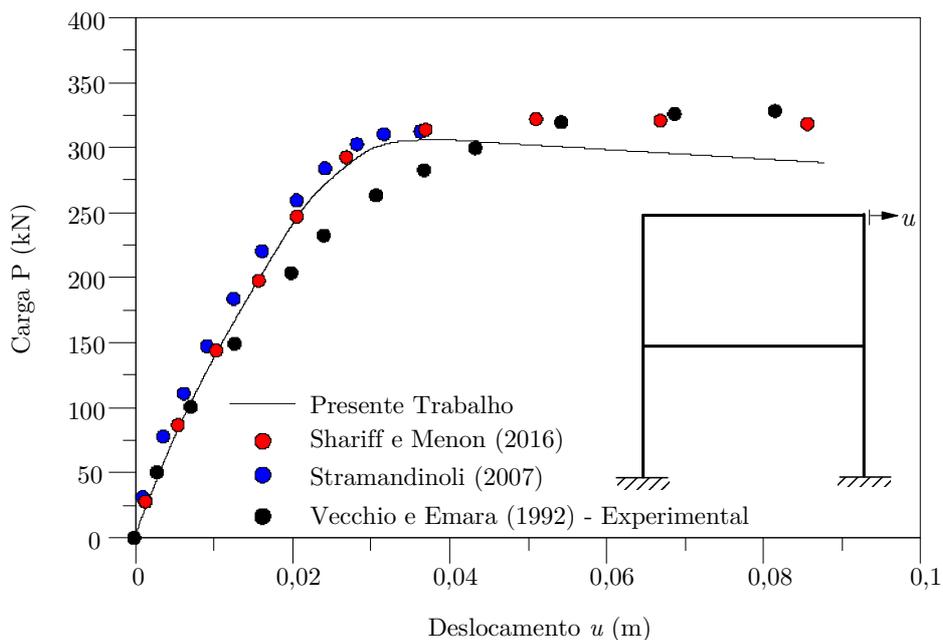


Figura 4.24. Trajetória de equilíbrio do pórtico de Vecchio e Emara

4.4 Estruturas Mistas de Aço e Concreto

Nesta seção o pórtico ilustrado na Figura 4.25 é estudado. Essa estrutura foi inicialmente proposta por Liew *et al.* (2001) em um estudo de sistemas estruturais de aço com vigas mistas, onde analisou-se o ganho de rigidez e capacidade resistente proporcionado pela inclusão da laje de concreto na viga em relação a um sistema puramente de aço. Já Iu *et al.* (2009) propuseram revestir totalmente os pilares com concreto. Em seguida, Chiorean (2013) e Lemes (2015) validaram suas formulações comparando as curvas carga-deslocamento obtidas por eles com as curvas presentes na literatura.

A estrutura estudada é um pórtico simples de altura e vão iguais a 5 m, com pilares constituídos com perfis W12x50 e a viga com perfil W12x27. Quando considerado o efeito da laje de concreto, a mesma apresenta altura igual a 102 mm e largura de 1219 mm. Os pilares são totalmente revestidos em uma segunda análise, apresentando seção mista quadrada de base igual a 400 mm. São aplicadas cargas incrementais verticais no topo dos pilares, e horizontal no topo do pilar esquerdo. É considerado que o pórtico não apresenta imperfeições geométricas iniciais.

Serão realizadas duas análises: estrutura com pilares de aço e viga mista (Caso 1) e o sistema estrutural totalmente misto (Caso 2). As trajetórias de equilíbrio para esses sistemas são definidas através da variação da carga incremental em relação ao deslocamento no topo do pilar direito. Os dados dos materiais componentes da estrutura estão na Tabela 4.2.

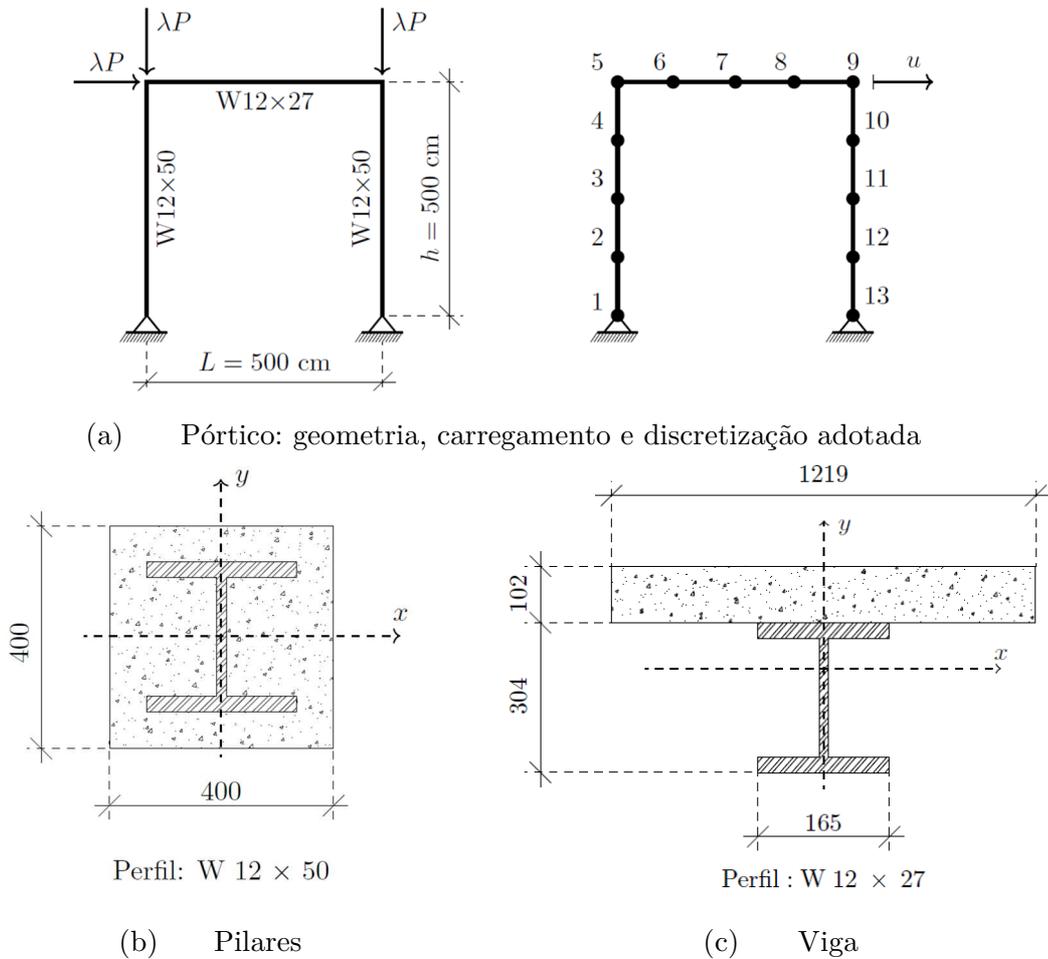


Figura 4.25. Pórtico simples: geometria, discretização adotada e seções transversais

Tabela 4.2. Dados dos materiais componentes da estrutura

Concreto			Aço	
f_c	ε_{ci}	ε_{cu}	E_s	f_y
1,6 kN/cm ²	-0,002	-0,0035	20000 kN/cm ²	20000 kN/cm ²

Na Figura 4.26 são apresentadas as curvas carga-deslocamento para os dois casos descritos. Observando essa mesma figura, pode-se concluir que a presente formulação se apresenta condizente com os resultados obtidos por Iu *et al.* (2009), que utiliza o MRPR com elementos de molas fictícios.

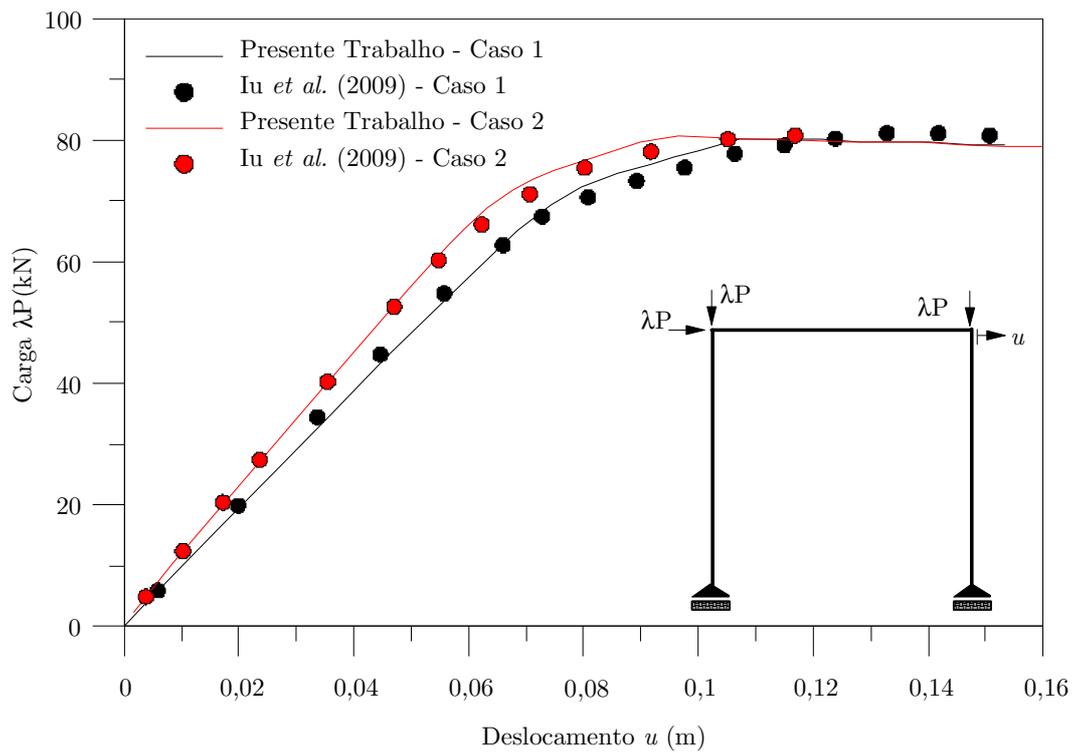


Figura 4.26 - Trajetória de equilíbrio do pórtico simples

CAPÍTULO 5

Aplicações Numéricas: Interação Solo-Estrutura

5.1 Introdução

Nesta seção, as estratégias numéricas apresentadas nos capítulos anteriores são utilizadas para realização das análises não lineares elástica e inelástica de sistemas estruturais com restrições bilaterais e unilaterais de contato, e assim validar a metodologia proposta. Destaca-se que os resultados encontrados são comparados com os apresentados na literatura e obtidos pelo software Mastan2.

A solução do problema não linear de estruturas é obtida utilizando a estratégia de incremento de carga e de iteração do deslocamento generalizado. Assim, é possível ultrapassar os pontos limites que possam vir a existir nas trajetórias de equilíbrio.

Na Seção 5.2 são feitas análises não lineares em vigas biengastada e uma viga biapoiada com restrições de contato bilaterais. Já na Seção 5.3 tem-se o estudo de pilares com restrições de contato bilaterais e unilaterais. Os três arcos com contato bilateral e unilateral analisados são apresentados na Seção 5.4. Por fim, os anéis com restrições unilaterais de contato estão na Seção 5.5.

5.2 Vigas

5.2.1 Viga biengastada com restrições bilaterais de contato

Sapountzakis e Kampitsis (2013) analisaram uma viga biengastada apoiada em uma fundação bilateral do tipo Pasternak. Eles desenvolveram uma estratégia numérica baseada no Método de Elementos de Contorno (MEC) para análise elástica e inelástica de estruturas em contato com base elástica e também elastoplásticas de tipo Pasternak.

No presente trabalho, considera-se essa viga em contato bilateral com uma base elástica e realiza-se análises elásticas e inelásticas de segunda ordem. O modelo de base utilizado é o de Pasternak com parâmetro de rigidez $k_1 = 20$ MPa e $k_2 = 5000$ kN. O primeiro problema trata-se de uma viga submetida a uma carga concentrada aplicada à 4 m da extremidade, em $2L/3$ (Figura 5.1); e no segundo sistema (Figura 5.2) a viga está submetida a um carregamento transversal distribuído. A tensão de escoamento do material é considerada como $f_y = 20$ MPa e módulo de elasticidade tomado como $E_s = 32318,4$ MPa. A seção transversal é retangular ($h = 0,60$ m, $b = 0,30$ m) e comprimento $L = 6,0$ m. O sistema foi discretizado com 30 elementos e 31 pontos nodais. Para a análise inelástica considerou-se a seção transversal discretizada em 36 fibras.

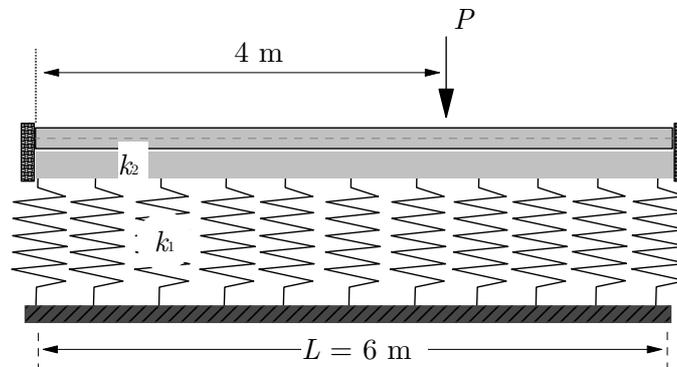


Figura 5.1. Viga biengastada com carga concentrada

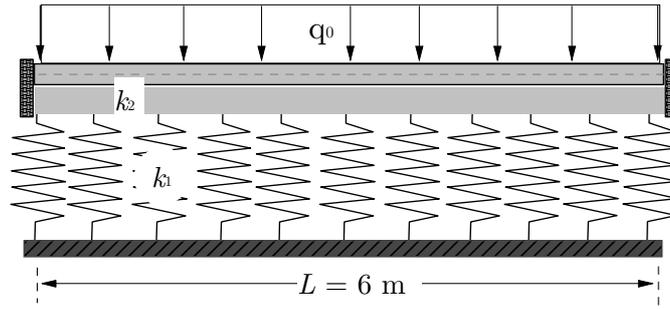


Figura 5.2. Viga biengastada com carga distribuída

As Figura 5.3 e 5.4 fornecem a trajetória de equilíbrio para a análise elástica e inelástica obtida pelo CS-ASA dos dois sistemas estudados. São utilizados os resultados da literatura para comparação, e observa-se uma concordância em relação aos de Sapountzakis e Kampitsis (2013). Verificou-se que as trajetórias de equilíbrio, para as análises elástica e inelástica, se iniciam com a mesma rigidez. Nas análises inelásticas os sistemas perdem rigidez à medida que o valor da carga aplicada aumenta, onde inicia-se a mudança no comportamento com relação a análise elástica.

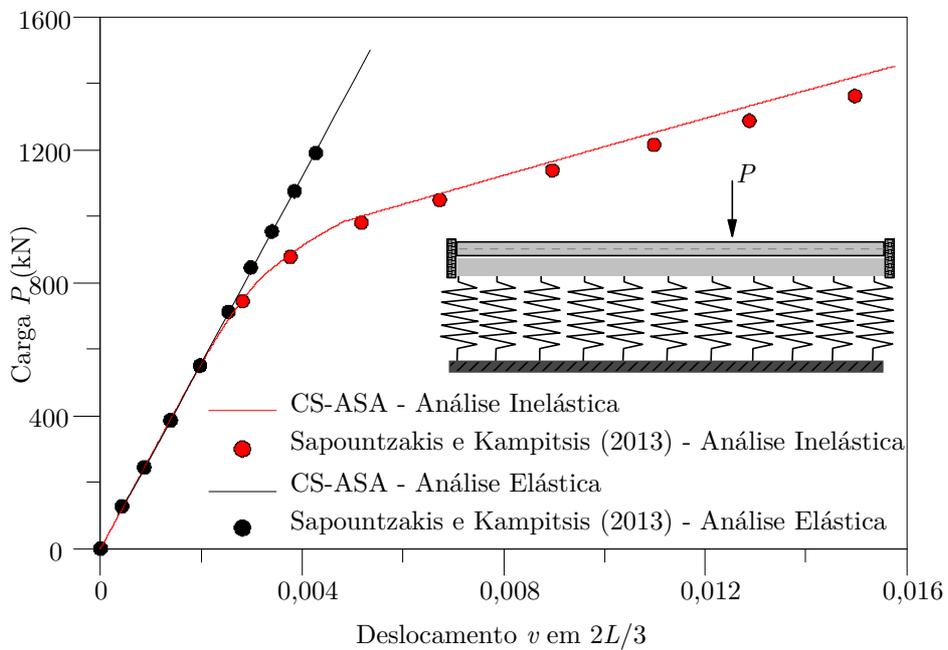


Figura 5.3. Trajetória de equilíbrio da viga com carga distribuída

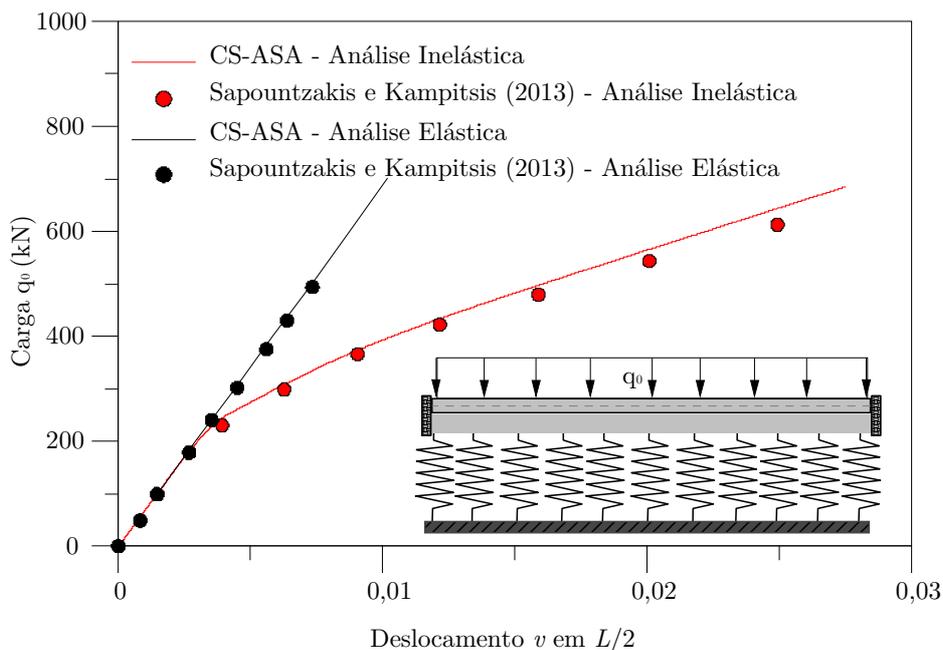


Figura 5.4. Trajetória de equilíbrio da viga com carga distribuída

5.2.2 Viga biapoiada com restrições bilaterais de contato

No mesmo trabalho, Sapountzakis e Kampitsis (2013) apresentaram uma viga biapoiada com restrições de contato bilaterais, para análise inelástica de estruturas em contato com base elastoplásticas de tipo Winkler. Ayoub (2003) também estudou esse sistema. Nesse trabalho, ele propôs um elemento inelástico para a análise de vigas em fundações, capaz de capturar o comportamento não linear da viga e da fundação. O elemento foi derivado de uma formulação mista de dois campos: forças e deslocamentos, com aproximação independente.

A viga é simplesmente apoiada de comprimento $L = 7,62$ m, de seção transversal quadrada de $0,159004$ m de lado, submetido a uma carga concentrada no meio do vão, como apresentado na Figura 5.5. A tensão de escoamento do material é considerada como $f_y = 2068,43$ MPa e módulo de elasticidade tomado como $E_s = 199,95$ MPa. No presente trabalho considerou-se o modelo de base elástico de Winkler linear (WL) não linear (WNL) com perda de rigidez (*softening foundation*). O parâmetro de rigidez utilizado foi $k_1 = 3,45$ MPa e $k_3 = 0,0345$ MPa (WNL), para aproximar do comportamento inelástico considerado na

literatura citado anteriormente. Utilizou-se uma malha de 20 elementos. Para a análise inelástica a seção transversal foi discretizada em 36 fibras.

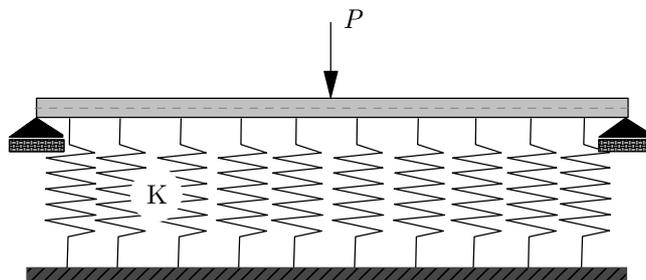


Figura 5.5. Viga biapoiada com carga concentrada

Os resultados obtidos através do CS-ASA são apresentados na Figura 5.6, juntamente com os de Sapountzakis e Kampitsis (2013). Na Figura 5.6 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio do sistema em questão, considerando a estrutura elástica e inelástica utilizando dois modelos de base, WL e WNL. Em uma análise da estrutura inelástica, a mesma perde rigidez à medida que se tem incrementos de carga, diferentemente da análise elástica. Pode-se observar, que utilizando a base elástica não linear (WNL), tem-se uma maior perda de rigidez comparando-o ao comportamento da base utilizando o modelo WL. Observa-se essa diferença na degradação da rigidez do sistema quando a análise da estrutura é elástica.

Encontra-se o comportamento mais próximo dos resultados da literatura, a curva obtida pelo CS-ASA considerando a análise inelástica da estrutura com o modelo de base elástico não linear (WNL).

5.3 Pilares

5.3.1 Viga-Coluna com restrições de contato

A viga-coluna ilustrada na Figura 5.7 é estudada nesta seção. Trata-se de um problema de estabilidade com restrições unilaterais e bilaterais de contato, sob um aumento da carga axial de compressão P e momentos de flexão constantes

nos apoios. Os momentos fletores (M) nos apoios têm um pequeno valor constante e atuam como imperfeições de carga inicial, gerando, no caso de contato unilateral, uma região sem contato. Assim, esta análise visa verificar a resposta não linear e mudanças nas regiões de contato e não contato com o incremento da carga P .

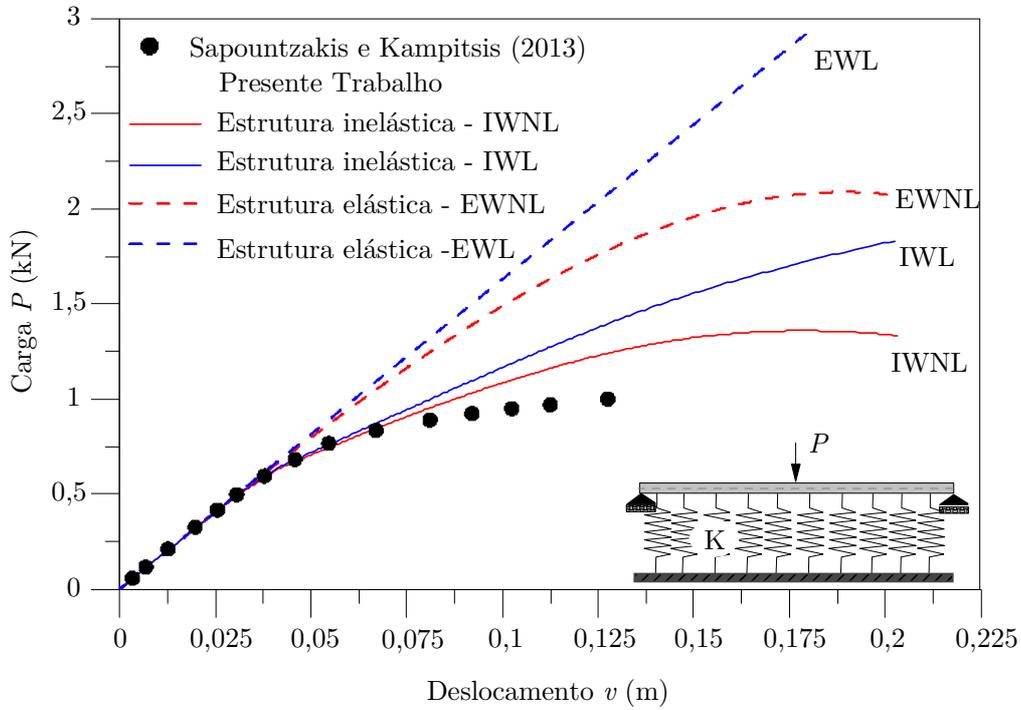


Figura 5.6. Trajetória de equilíbrio da viga biapoiada

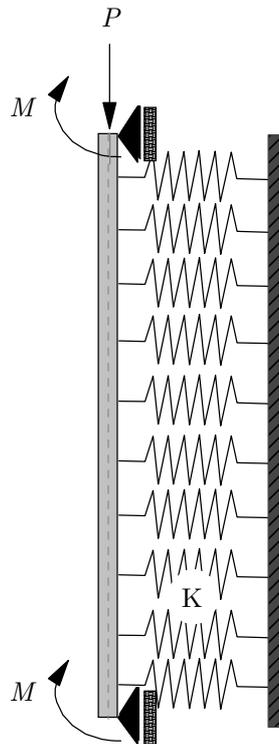


Figura 5.7. Viga-coluna com restrições de contato

Essa viga-coluna foi inicialmente proposta por Silveira (1995), que utilizou o método de programação matemática para resolução do problema de contato sem eliminar as restrições unilaterais. Ele utilizou o Método dos Elementos Finitos (MEF) junto com a formulação Lagrangiana atualizada. Já Silveira *et al.* (2008a) desenvolveu uma metodologia semi-analítica, utilizando uma abordagem do tipo Ritz, para o equilíbrio elástico e análise de instabilidade de vigas, pilares e arcos apoiados em uma base elástica tipo Winkler.

Para as análises que seguem, considera-se os seguintes dados: $L = 5$; $EI = 10^3$; $EA = 12 \cdot 10^6$ e $M = 1$ (unidades compatíveis). A representação do solo é feita através do modelo discreto considerando o contato unilateral e bilateral. Os parâmetros de rigidez $k = KL^4/EI$ utilizados foram: 6,25; 625 e 6250. Esses valores caracterizam uma base elástica flexível, com rigidez intermediária e rígida, respectivamente.

A Figura 5.8 fornece as trajetórias de equilíbrio considerando o modelo de base unilateral e bilateral, com $k = 625$. Já na Figura 5.9 tem-se apenas o modelo de base unilateral. Mostra-se nessas trajetórias a variação da deflexão lateral u em $x/L = 0,85$ e em função do parâmetro de carga adimensional P / P_e , sendo P_e a carga crítica elástica de Euler.

Os momentos aplicados na extremidade da barra geram uma região de contato e uma perda de contato entre os corpos, que só se verifica na análise com restrições unilaterais de contato. Destaca-se a importância de considerar o modelo de fundação apropriado na análise, pois o emprego do modelo incorreto pode resultar em um erro considerável. Isso pode ser observado na Figura 5.8, onde apresenta-se as análises do mesmo sistema com o mesmo valor de rigidez da base, porém considerando diferentes restrições de contato.

A influência da rigidez da fundação é ilustrada na Figura 5.9, onde tem-se trajetórias para diferentes valores de k , com modelo de base unilateral. Os

resultados apresentados na Figura 5.8 e 5.9 são comparados com os valores fornecido na literatura (Silveira *et al.*, 2008). Percebe-se que há uma concordância entre os resultados da análise, comprovando a eficiência da metodologia utilizada no presente trabalho.

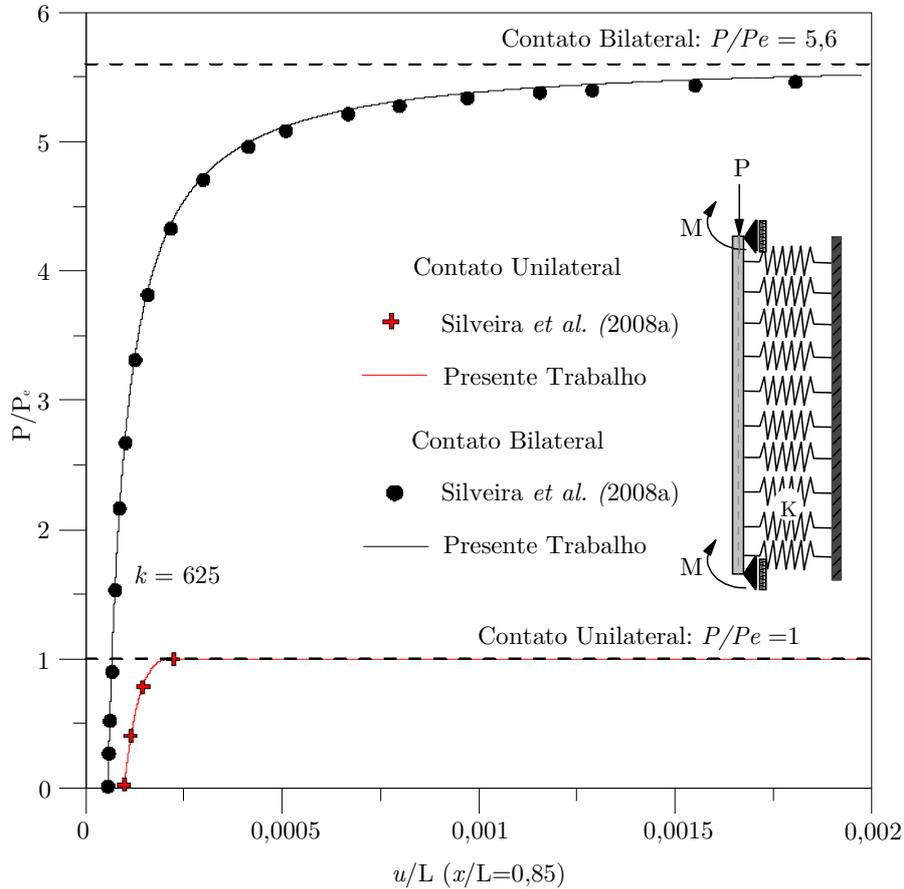


Figura 5.8. Trajetória de equilíbrio com contato unilateral e bilateral

5.3.2 Pilares com restrições unilaterais de contato

A última análise sobre pilares trata-se de uma estrutura em contato unilateral com o meio, a base elástica responde apenas às solicitações de compressão. A Figura 5.10 apresenta o problema de engenharia. Para as análises que seguem, considerou-se: $L = 5$, $EI = 1000$, $EA = 10^5$ (unidades compatíveis), uma imperfeição geométrica inicial senoidal de $n = 2$ e amplitude $U = 10^{-4}$. Considerou-se a rigidez da base discreta $k_x = 50$. O sistema foi discretizado em 12 elementos finitos.

Esse sistema estrutural foi inicialmente proposto por Santos (2016), em um estudo numérico, via ANSYS do equilíbrio não linear e estabilidade elástica de estruturas com restrições de contato, com base no Método dos Elementos Finitos (MEF). Onde consideram-se as restrições unilaterais de contato, e os efeitos da não linearidade geométrica da estrutura.

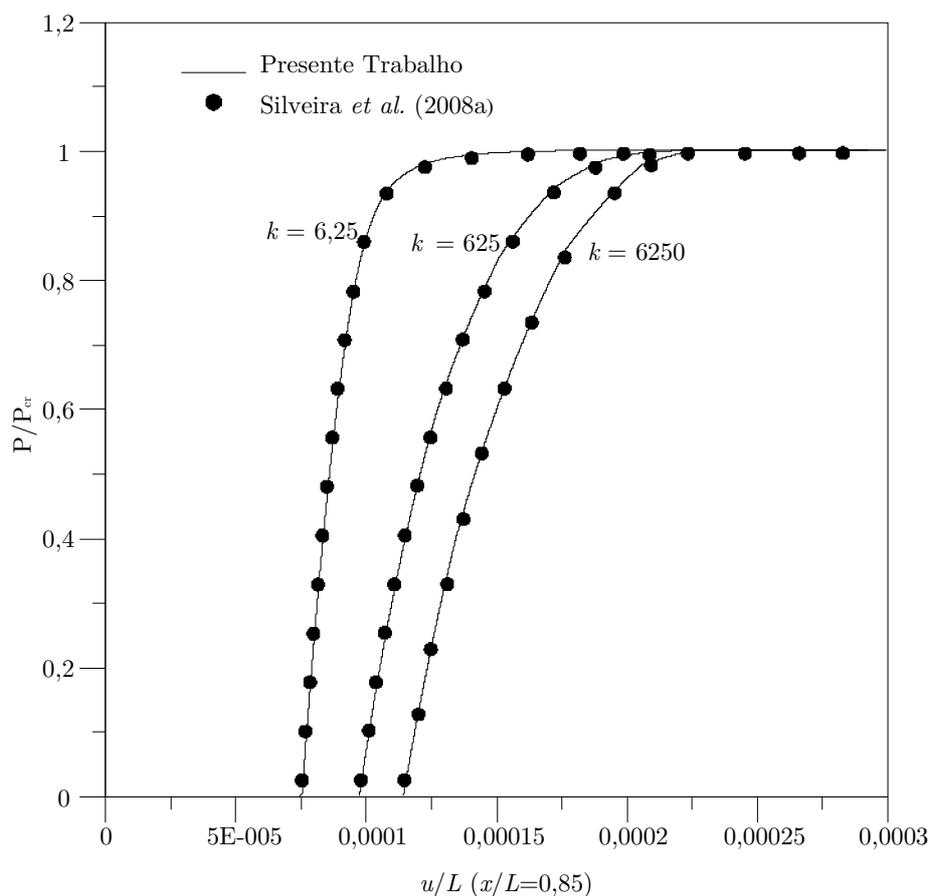


Figura 5.9. Trajetória de equilíbrio com contato unilateral

A Figura 5.11 apresenta a trajetória de equilíbrio do pilar até atingir o valor da carga crítica, obtidos pelo CS-ASA e os resultados encontrados em Santos (2016). Mostra-se nessa trajetória a variação da deflexão lateral u , em $y = L/4$, em função da carga P . Percebe-se uma boa aproximação com as curvas da literatura comprovando a eficiência da formulação implementada.

As deformadas da estrutura são mostradas na Figura 5.12 para cargas P próximas ao valor da carga crítica. Percebe-se que o comportamento estrutural se manteve próximo ao imposto pela deformação inicial de $n = 2$ e $U = 10^{-4}$. Após

atingir o valor da carga crítica em $P_{cr} = 186,9$, há um aumento significativo das deformações, que pode ser observado na Figura 5.12.

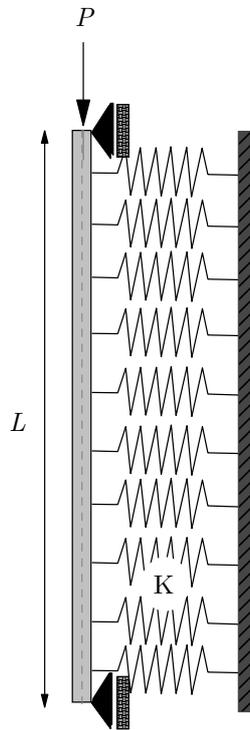


Figura 5.10. Pilar com restrições unilaterais de contato

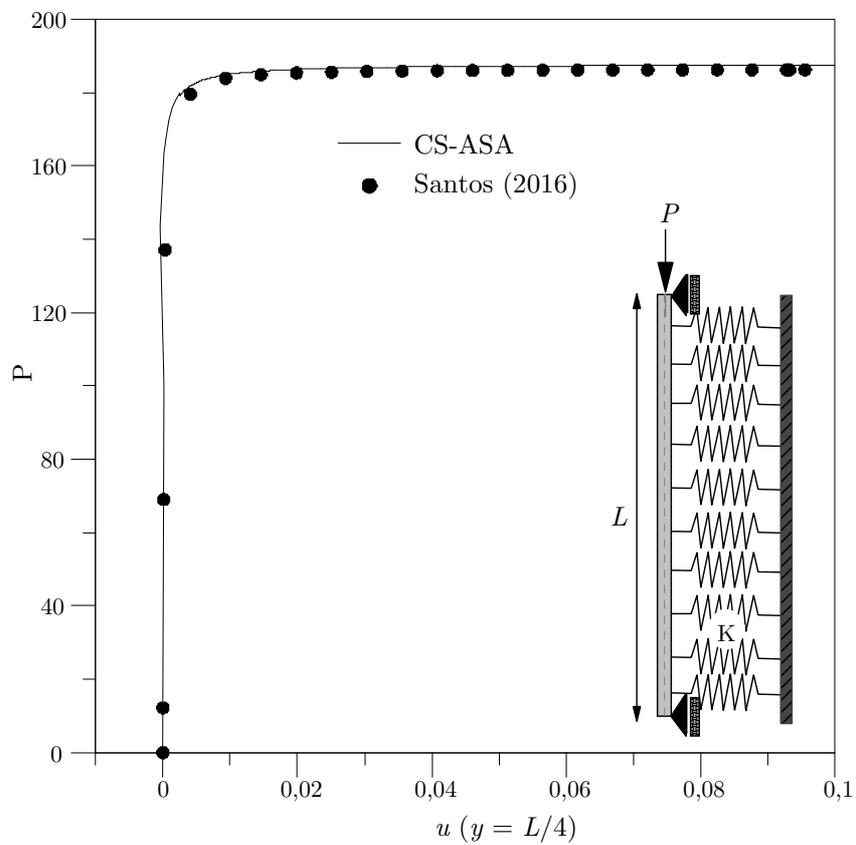


Figura 5.11. Trajetória de equilíbrio com contato unilateral

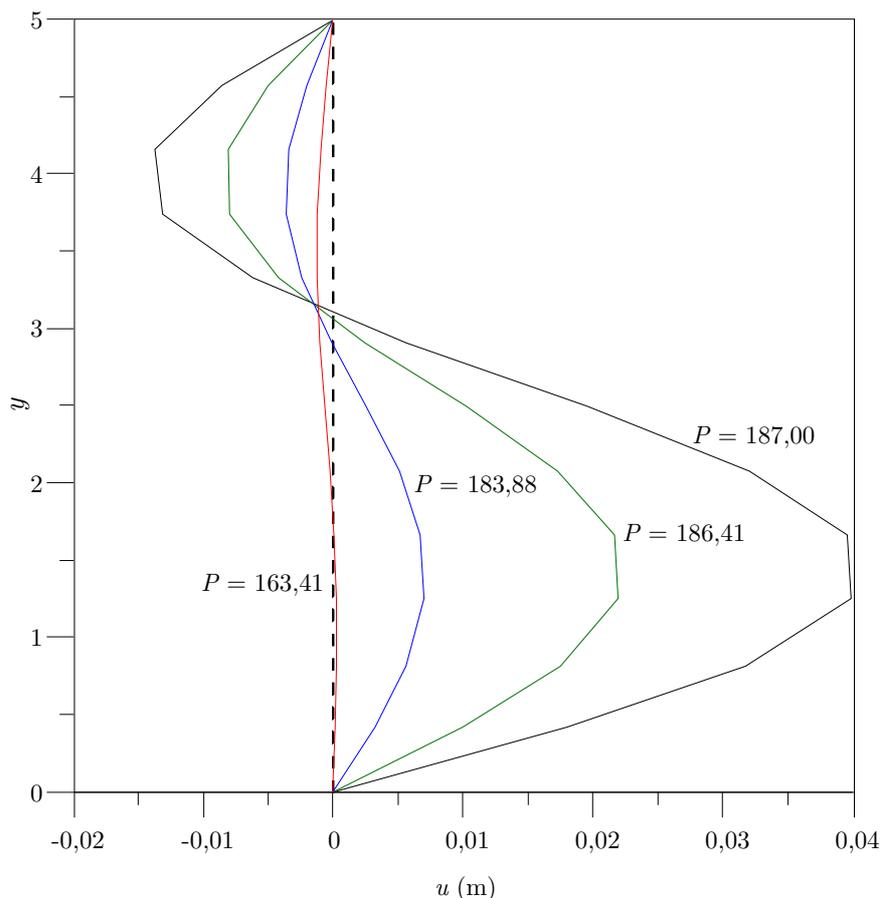


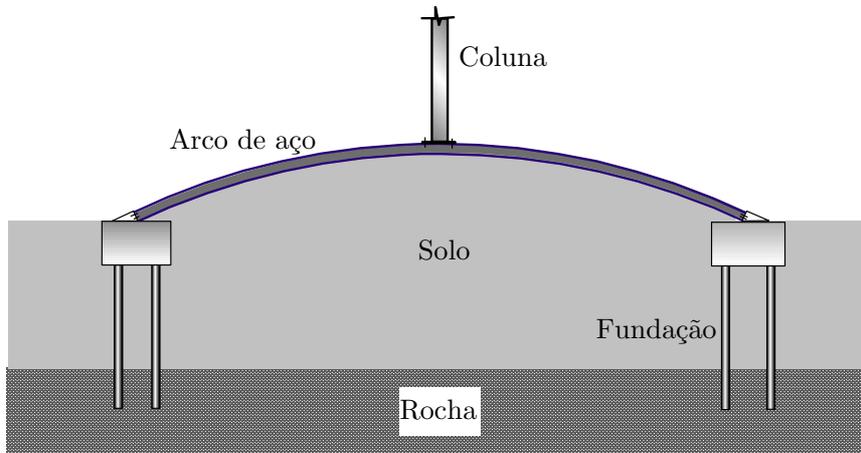
Figura 5.12. Deformada da estrutura

5.4 Arcos

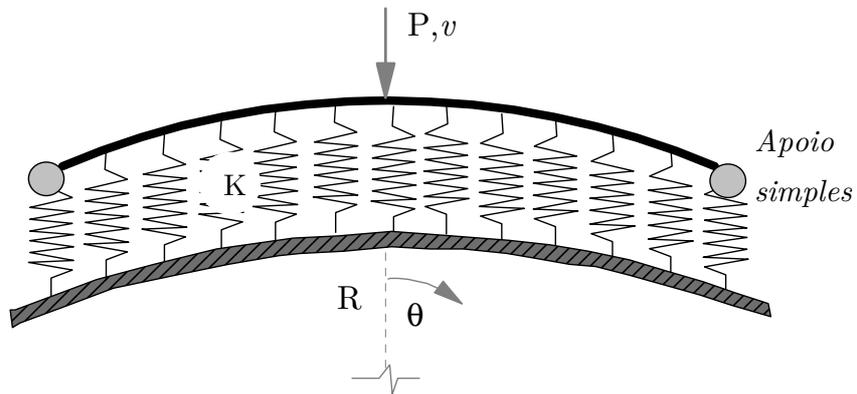
5.4.1 Arco circular com restrições unilaterais de contato

As Figuras 5.13 e 5.14 tratam-se de um arco esbelto circular biapoiado, submetido a uma carga concentrada P em $\theta = 0^\circ$. Este elemento estrutural encontra-se em contato com uma base elástica do tipo discreta que só oferece reação às solicitações de compressão, caracterizando assim, o contato unilateral. As propriedades geométricas são: $R = 100$, $\theta = 10^\circ$, $EI = 1,40$ e $EA = 420$ (unidades compatíveis). Na modelagem numérica, devido a simetria do problema, discretizou-se apenas metade do arco e da base elástica. A Figura 5.13 mostra o arco acima da base elástica e a Figura 5.14 e o arco encontra-se abaixo da base elástica, respectivamente. Nas duas figuras tem-se, o problema de engenharia (a), modelo de elementos finitos utilizado na análise (b), e o padrão de deformação

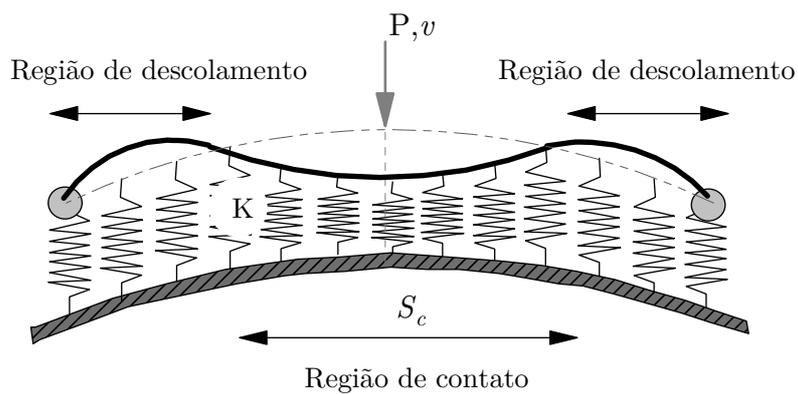
esperado (c). Para o arco acima da base elástica, adotou-se 69 elementos finitos. Para o arco abaixo da base elástica, fez-se a discretização em 40 elementos.



a) Problema de engenharia

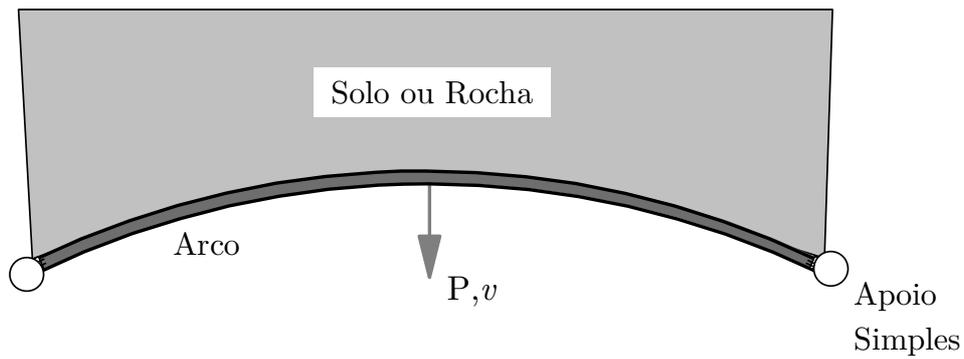


b) Modelo de elementos finitos

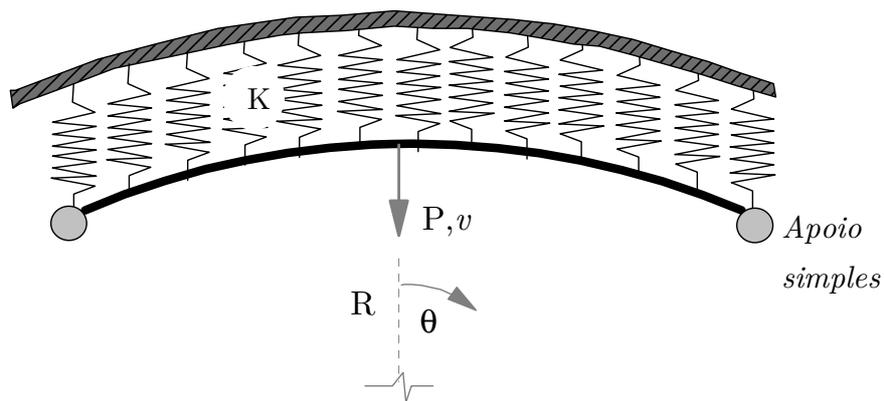


c) Padrão de Deformação

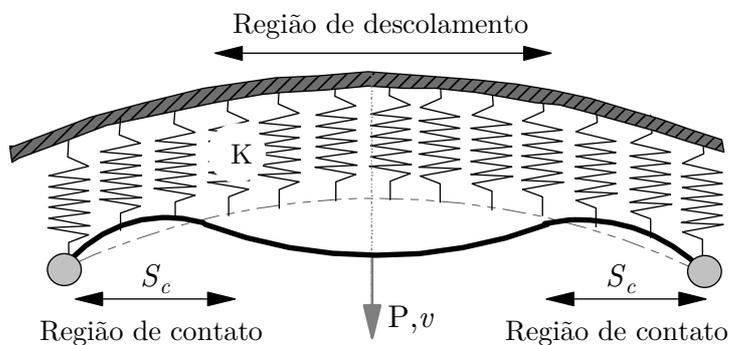
Figura 5.13. Arco acima da base elástica (SILVEIRA *et al.*, 1995)



a) Arco abaixo da base elástica-- Problema de engenharia



b) Arco abaixo da base elástica- Modelo de elementos finitos



c) Arco abaixo da base elástica - Padrão de Deformação (SILVEIRA *et al.*, 1995)

Figura 5.14. Arco abaixo da base elástica

Este exemplo tem como objetivo a validação das formulações desenvolvidas nesse trabalho para solução do problema de contato. Porém, a finalidade principal é ressaltar a influência da posição da base elástica e sua rigidez no comportamento não linear de estruturas curvas.

A análise de arcos com restrições de contato unilaterais com o meio adjacente é objeto recorrente de estudo de pesquisadores das áreas de estruturas e geotecnia. O estudo realizado por Silveira *et al.* (2013) abordou uma solução numérica para a análise do equilíbrio e estabilidade de estruturas esbeltas, em contato unilateral com o meio, onde encontra-se esse sistema estrutural em análise. Este arco também foi avaliado por Santos (2016), em um estudo numérico via ANSYS do equilíbrio não linear e estabilidade elástica de estruturas com restrições de contato.

A estabilidade do arco será estudada para duas situações práticas mostradas na Figura 5.13 e 5.14. O problema de contato, mostrado em 5.13(a), trata-se de um arco que irá se deformar gerando duas regiões de descolamento entre os corpos e uma região central em que a base elástica sofre compressão. Esse comportamento pode ser visto na Figura 5.13(c). Já no problema da Figura 5.14(a), à medida que se aplica um carregamento concentrado no centro desse arco, surgem duas regiões de compressão da base elástica e uma região central de descolamento entre os corpos (Figura 5.14c). Essa possibilidade de descolamento é característica das restrições de contato unilaterais, ou seja, a base elástica só reage às solicitações de compressão e a região de contato não é conhecida previamente.

A análise do problema onde o arco se encontra acima da base é apresentado na Figura 5.15. Tem-se as trajetórias de equilíbrio, caracterizados pela variação do deslocamento v do arco no ponto de aplicação da carga, para diversos valores do parâmetro de rigidez elástico K da base. Os valores de desse parâmetro $k = KR^4/EI$, representa os diferentes graus de rigidez da base elástica. Foram incluídas nessa análise bases elásticas mais flexíveis ($k = 10^4$) até as semirrígidas ($k = 10^7$). Observando essa mesma figura, pode-se concluir os resultados obtidos

nesse trabalho se apresentam condizentes com os resultados obtidos por Santos (2016), comprovando a eficiência da formulação.

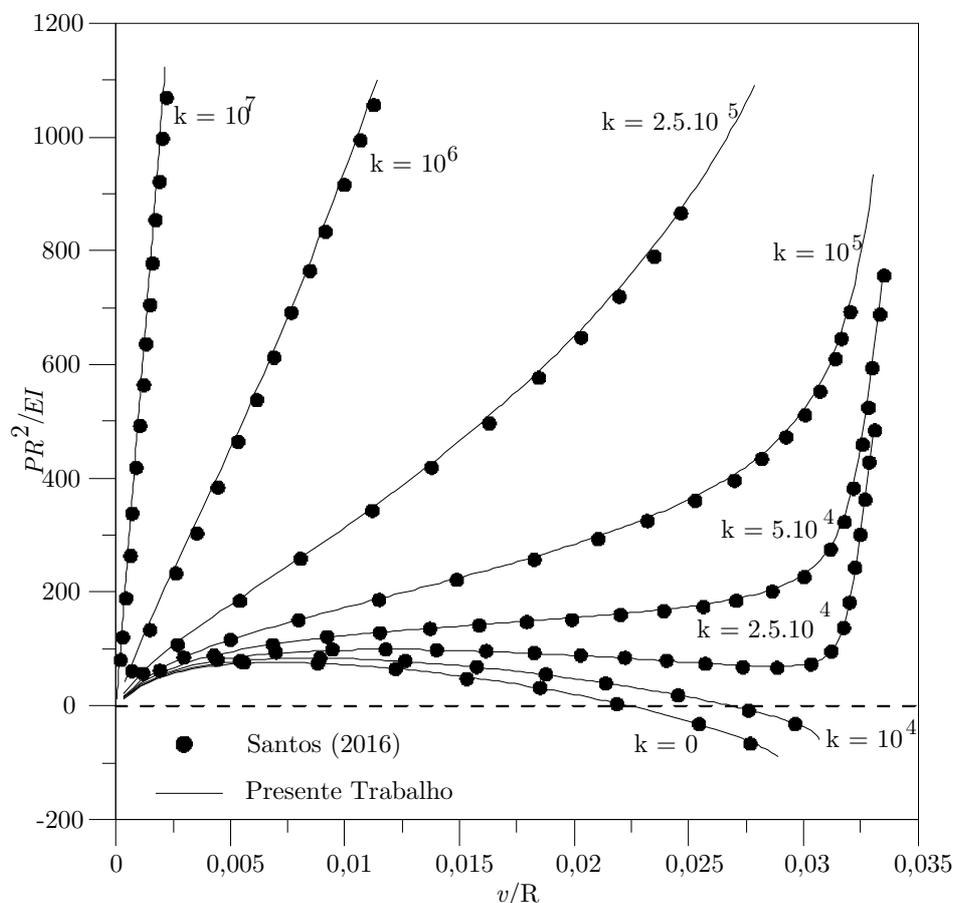


Figura 5.15. Trajetória de equilíbrio para o arco acima da base

Percebe-se também na Figura 5.15, que para valor de $k = 10^4$ não ocorrem mudanças no comportamento pré e pós-flambagem do arco, seguindo basicamente o que acontece no sistema sem fundação ($k = 0$). Ainda assim, a carga limite máxima sofre uma elevação ao se introduzir a base elástica flexível. E para rigidez da base elástica k com valores superiores a 10^5 , não foram observados quaisquer pontos críticos ao longo da trajetória de equilíbrio, que passou a ter comportamento próximo do linear.

A Figura 5.16 apresenta as análises quando esse arco encontra-se abaixo da base elástica, suportando essa base. Tem-se nessa figura as trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de k : 0, 10^5 , 10^7 e 10^9 . Esses valores caracterizam os diversos graus de rigidez da base elástica, inexistente ($k = 0$), flexível,

semirrígida e rígida. Verifica-se uma concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho com os apresentados por Santos (2016). Pode-se observar uma pequena diferença no comportamento da análise da base rígida ($k = 10^9$). A metodologia utilizada para tratar o problema de contato unilateral, método da penalidade, pode perder a precisão à medida que o valor da rigidez da base aumenta. Isso explica essa leve discrepância obtida na análise quando aumenta-se o valor da rigidez. Para as curvas em que foram utilizados valores menores de k os resultados foram coincidentes com os da literatura.

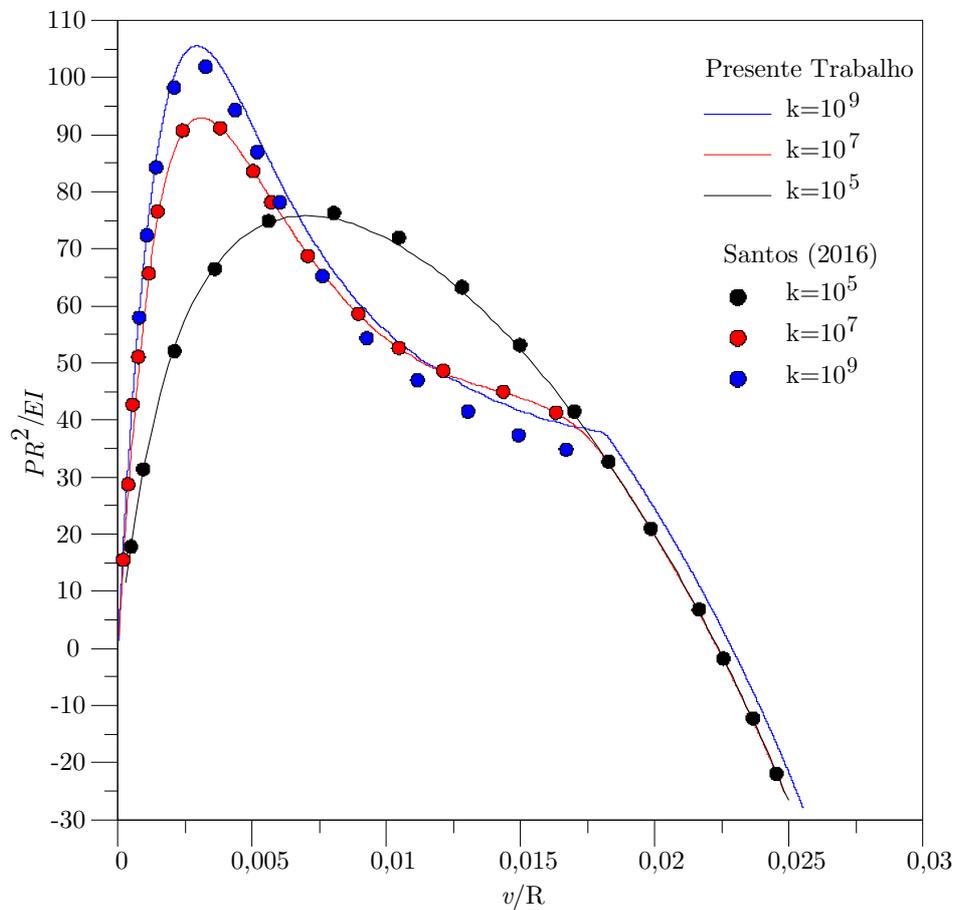


Figura 5.16. Trajetória de equilíbrio para o arco abaixo da base

5.4.2 Arco abatido com restrições bilaterais de contato

Esta subseção traz a análise elástica e inelástica de segunda ordem de um arco abatido apoiado em uma fundação elástica do tipo Winkler. O problema envolve um arco abatido biapoiado, submetido a uma carga concentrada aplicada no meio do vão com restrições bilaterais de contato. A Figura 5.17 apresenta os

parâmetros geométricos do arco metálico abatido com seção transversal em perfil I HE - 300A. Utilizou-se como parâmetro de rigidez da base o $k_1 = 10$ kPa e $k_1 = 1000$ kPa. A tensão de escoamento do aço é considerada como $f_y = 235$ MPa e módulo de elasticidade tomado como $E_s = 200$ GPa. Os resultados obtidos via CS-ASA são validados com os valores obtidos através do *software* MASTAN2 (Ziemian e Mcguire, 2002).

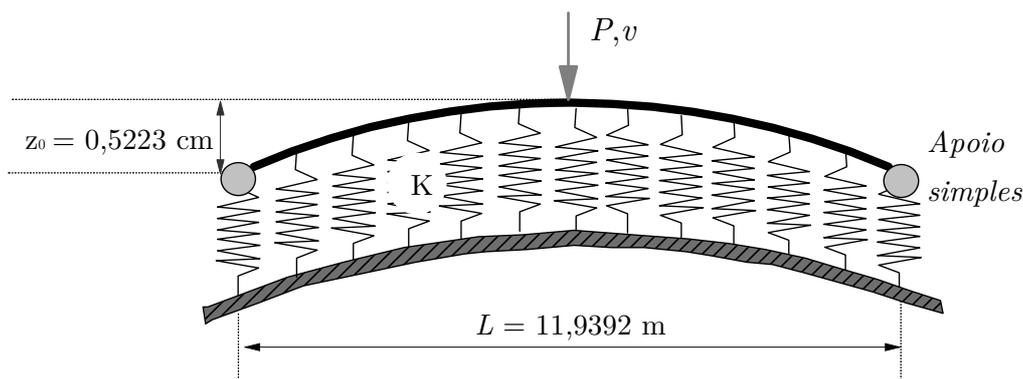


Figura 5.17. Arco abatido em contato com base elástica

As Figuras 5.18 e 5.19 apresentam as análises elásticas e inelásticas do arco abatido para os dois parâmetros de rigidez obtidas pelo CS-ASA, os resultados são comparados àqueles do MASTAN2. Observa-se que os resultados encontrados através do CS-ASA e MASTAN2 sempre se mostraram semelhantes e consistentes. Percebe-se para os dois valores de rigidez da base, que o comportamento para as análises elástica e inelástica se iniciam com a mesma rigidez. Na análise inelástica o arco perde rigidez à medida que o valor da carga aplicada aumenta, onde acontece a mudança de comportamento com relação a análise elástica. É válido lembrar que em todas as análises a não linearidade geométrica é considerada.

Na Figura 5.20 tem-se a comparação das análises elásticas e inelástica para os dois parâmetros de rigidez, mostrando claramente a influência da rigidez da base elástica no comportamento do sistema, impedindo o deslocamento conforme diminui a flexibilidade do solo.

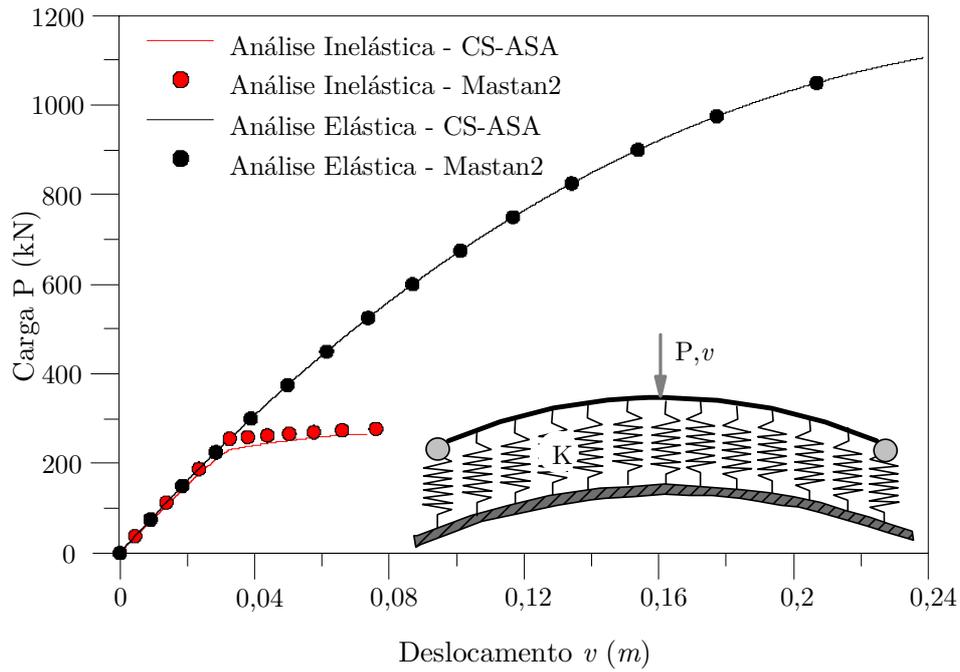


Figura 5.18. Trajetória de equilíbrio do arco abatido com $k_1 = 10$ kPa

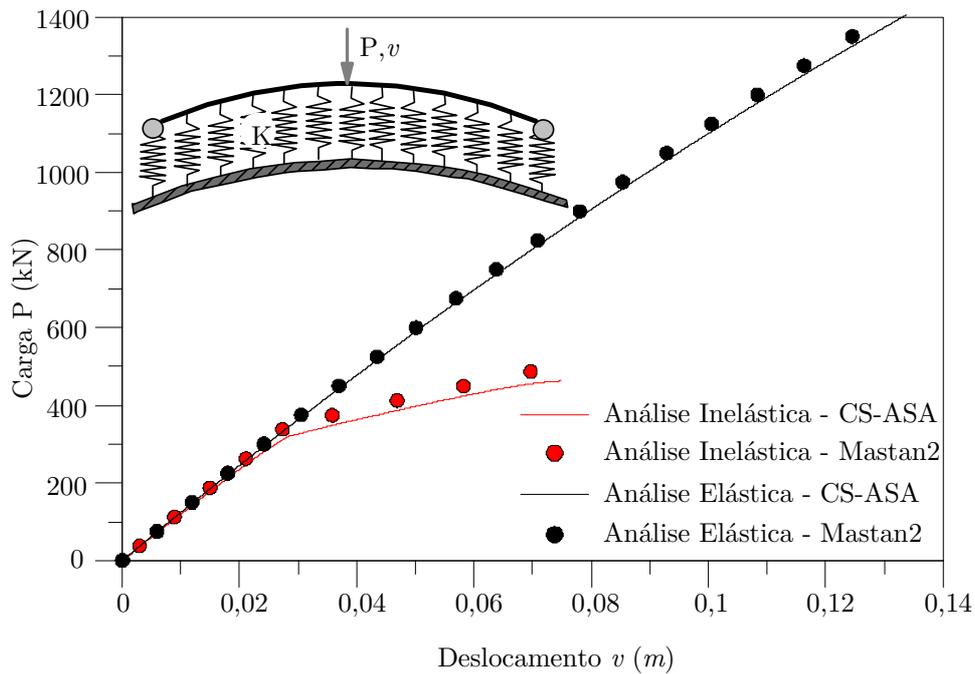


Figura 5.19. Trajetória de equilíbrio do arco abatido com $k_1 = 1000$ kPa

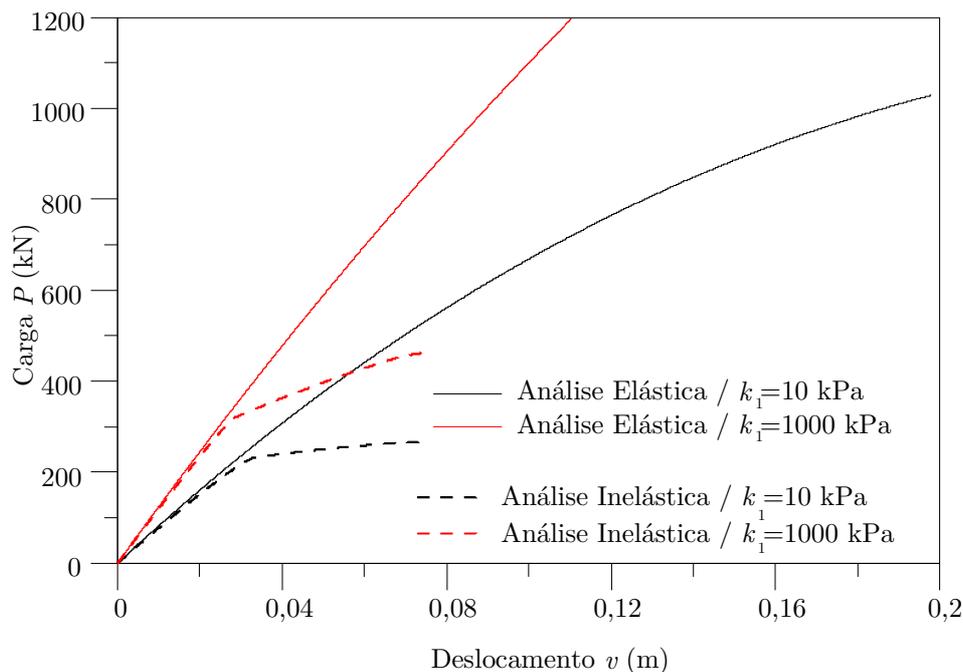


Figura 5.20. Trajetória de equilíbrio elástica e inelástica

5.4.3 Arco circular com restrições unilaterais de contato após flambagem

Este exemplo, mostrado na Figura 5.21, considera o comportamento não linear de um arco circular delgado sob pressão radial uniforme. Ele mostra a influência das restrições de contato sobre o comportamento *snap-through* e bifurcação do arco circular.

O modelo de elementos finitos adotado para resolver este problema é dado na Figura 5.21(a), juntamente com as características geométricas adotadas. Devido à simetria do problema, apenas metade do arco foi discretizada em 30 elementos (Figura 5.21b). A superfície plana rígida é descrita por molas discretas com um alto valor de rigidez. De acordo com a distância a que a fundação está localizada sob o topo do arco, são realizadas as análises de contato unilaterais com os comportamentos *snap-through* e bifurcação.

A análise de flambagem associada ao modo de bifurcação é artificialmente induzida pela aplicação de uma carga de perturbação muito pequena na direção oposta à pressão uniforme no nó 10.

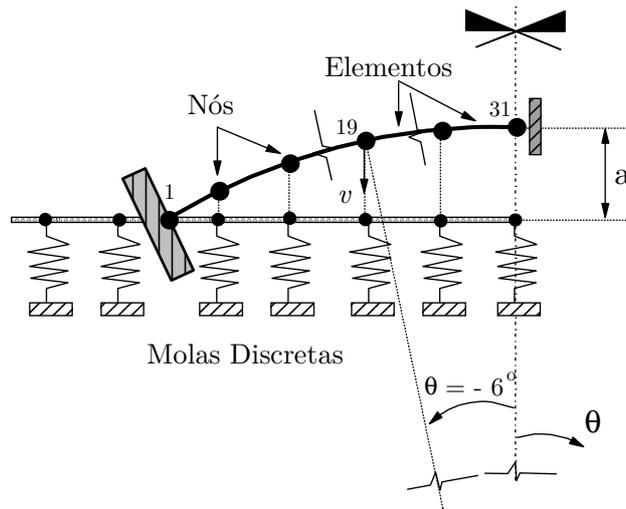
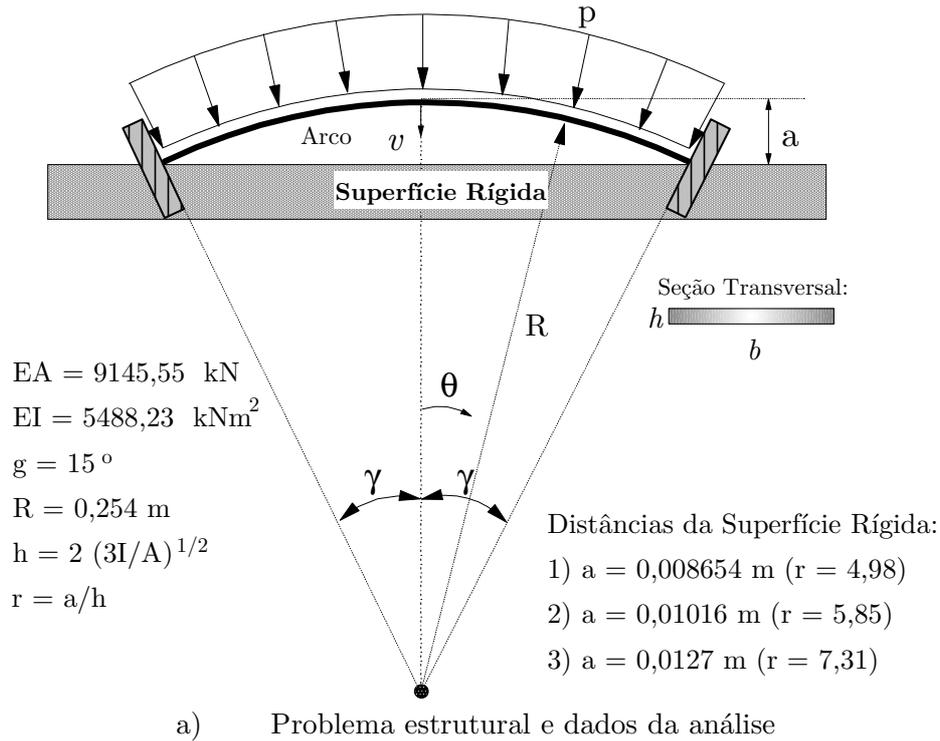


Figura 5.21. Arco circular com restrições de contato (SILVEIRA *et al.*, 1995)

Os pesquisadores frequentemente estudam este sistema estrutural para obter respostas a flambagem e pós-flambagem deste arco sem restrições de contato para testar formulações geometricamente não lineares (Alves, 1995; Kerr e Soifer, 1969; Carnoy, 1980). A Figura 5.22 mostra os caminhos de equilíbrio do arco sem restrições de contato, caracterizados pela variação do deslocamento v do arco no

ponto central do mesmo. Os resultados obtidos pelo CS-ASA são comparados aos de Sun e Natori (1996), observar-se uma concordância entre os resultados.

Nesta análise, o modo de flambagem associado à menor carga crítica encontrada (Figura 5.22) é um tipo de flambagem de bifurcação assimétrica. Se apenas a deformação simétrica for considerada, a mesma produz a carga de flambagem correspondente a um *snap-through*, carga crítica um pouco maior que a de bifurcação.

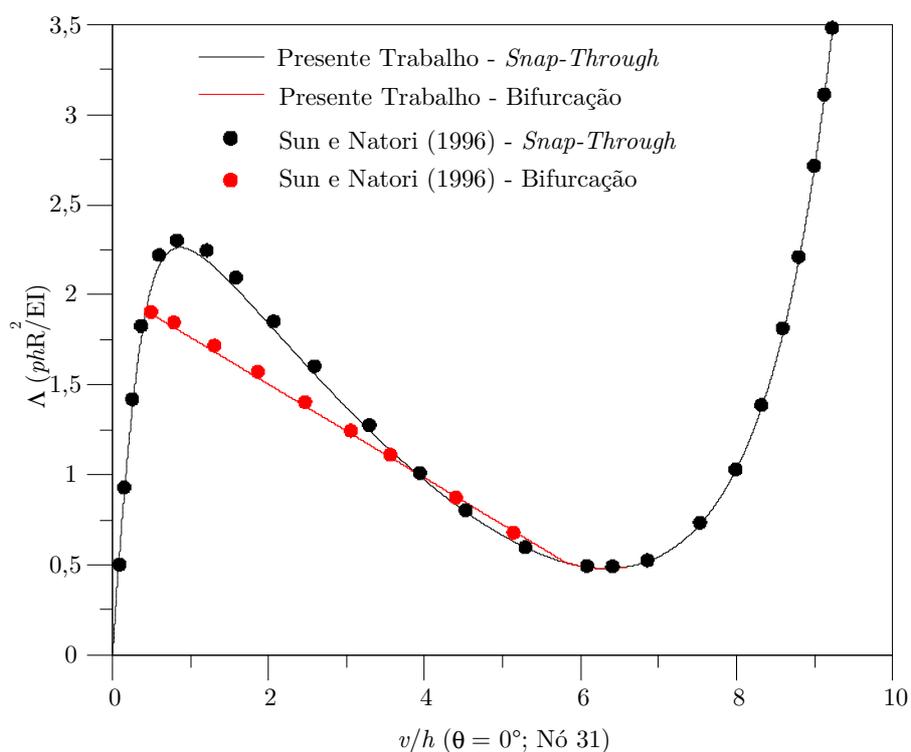


Figura 5.22. Curva carga x deslocamento do arco sem restrições de contato

Sun e Natori (1996) introduziram a análise as restrições de contato unilateral usando uma superfície plana rígida colocado de tal forma que o contato só ocorra no período pós-crítico. Seus elementos finitos resultam em um arco perfeito (deformação simétrica) que são usados aqui para validar a formulação numérica proposta. A superfície plana de contato rígido foi escolhida de tal forma que o contato apenas aparece na faixa pós-crítica e as condições de contato são introduzidas por meio de um método de função de penalidade. Este trabalho

tratou-se de um estudo numérico de grandes deslocamentos e problemas de estabilidade, bem como o comportamento pós-flambagem. A partir dessas condições, eles obtiveram um Problema Complementar Linear (PCL) resultante da variação da formulação de desigualdade.

Silveira *et al.* (2013) também analisaram este sistema estrutural, onde propuseram uma metodologia numérica para a análise geometricamente não linear de sistemas estruturais sob restrições de contato unilateral. O problema não linear envolveu dois tipos diferentes de variáveis: o campo de deslocamento e comprimento e a posição das regiões de contato. Para modelar a estrutura, foi utilizado um elemento de viga-coluna não linear junto a um leito de molas, usado para modelar o meio geológico. Para descrição do movimento dos corpos sólidos adotou-se a formulação Lagrangiana atualizada. O trabalho propôs uma estratégia de solução de iteração de dois níveis em cada etapa de carregamento. O primeiro resolve o problema de contato como um problema complementar linear usando o algoritmo de Lemke e o segundo atualiza o campo de deslocamento.

As trajetórias de equilíbrio que caracterizam a resposta estrutural não linear do sistema são mostradas na Figura 5.23 e 5.24. A variação do deslocamento vertical v do nó 19 ($\theta = 6^\circ$) é traçado em função do parâmetro de carga não dimensional, $\Lambda = phR^2 / EI$. A distância adotada entre a estrutura e fundação rígida (a / h) são 4,98; 5,85 e 7,31. Em todos os casos, há concordância entre os resultados presentes e aqueles obtidos pela Sun e Natori (1996) e Silveira *et al.* (2013), confirmando a precisão e eficiência da presente metodologia.

Observando a Figura 5.23, os pontos A – D para o problema de contato $a/h = 4,95$, tem-se uma indicação para transições entre os estágios de resposta. A primeira parte da curva de equilíbrio (A-B) segue o caminho não linear familiar de um arco perfeito sob compressão sem contato. O contato ocorre na posição C ($\Lambda \approx 0,67$), no período pós-crítico. Após este ponto (C-D), conforme a carga

aumenta, o contato na região aumenta com o padrão de deformação do arco exibindo uma região central plana.

Pode-se observar que o enrijecimento do sistema pelo suporte plano rígido não afeta os fenômenos de *snap-through* e bifurcação na faixa pós-flambagem. Por fim, conclui-se que a resposta do sistema com restrições de contato usando uma superfície plana rígida é consideravelmente mais rígida do que a livre.

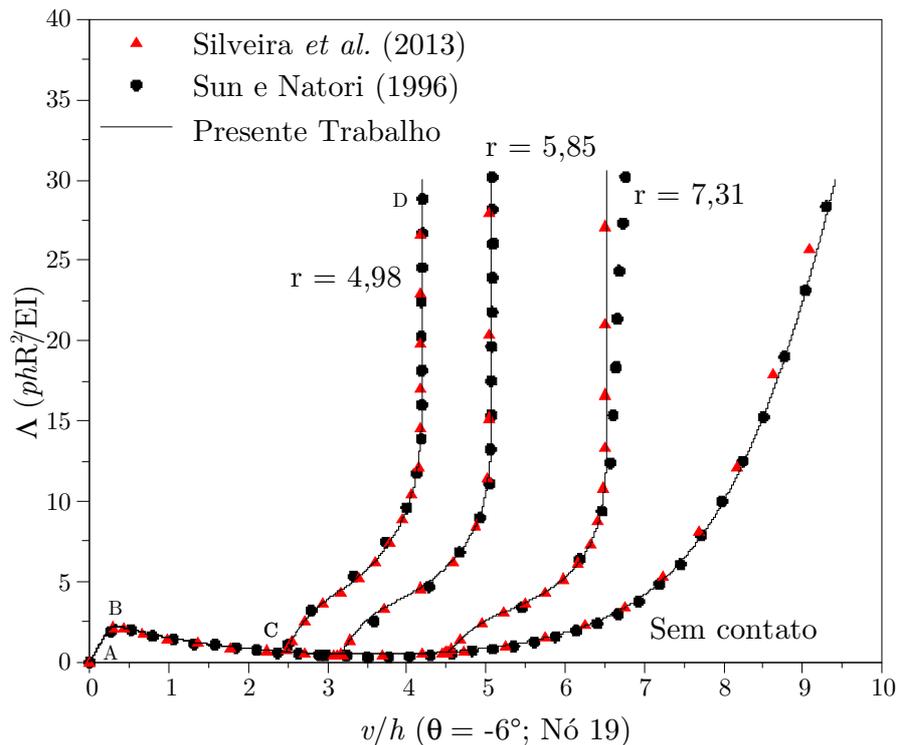


Figura 5.23. Curva carga x deslocamento – *Snap-through*

5.5 Anéis

5.5.1 Anel com restrições unilaterais de contato

Na Figura 5.25 é apresentado o problema de contato unilateral a ser resolvidos nessa seção. Consiste em um anel circular com restrição radial de seção transversal retangular sob aplicação de um carregamento estático descendente distribuído p . O meio circundante é considerado uma fundação rígida, de modo que o anel só pode deformar para dentro. Limita-se a essa análise o modo de deformação simétrico em relação ao eixo vertical. Os parâmetros geométricos e

físicos usados na análise são: $EI = 30.10^3 \text{ kNcm}^2$, $EA = 36.10^6 \text{ kN}$, $R = 10 \text{ cm}$ e $t = 0,1 \text{ cm}$. Devido à simetria, apenas metade do anel foi discretizada em 50 elementos, como mostrado na Figura 5.25(b). A base rígida é modelada por molas discretas, também ilustradas na Figura 5.25(b). O anel deforma localmente para dentro e está sujeito à instabilidade do ponto limite quando o comprimento da região de contato atinge um valor crítico. Sobre do carregamento descendente distribuído, a parte superior do anel vai se separar do limite rígido enquanto a parte inferior permanece em contato. Ressalta-se que a não linearidade geométrica é considerada nessa análise.

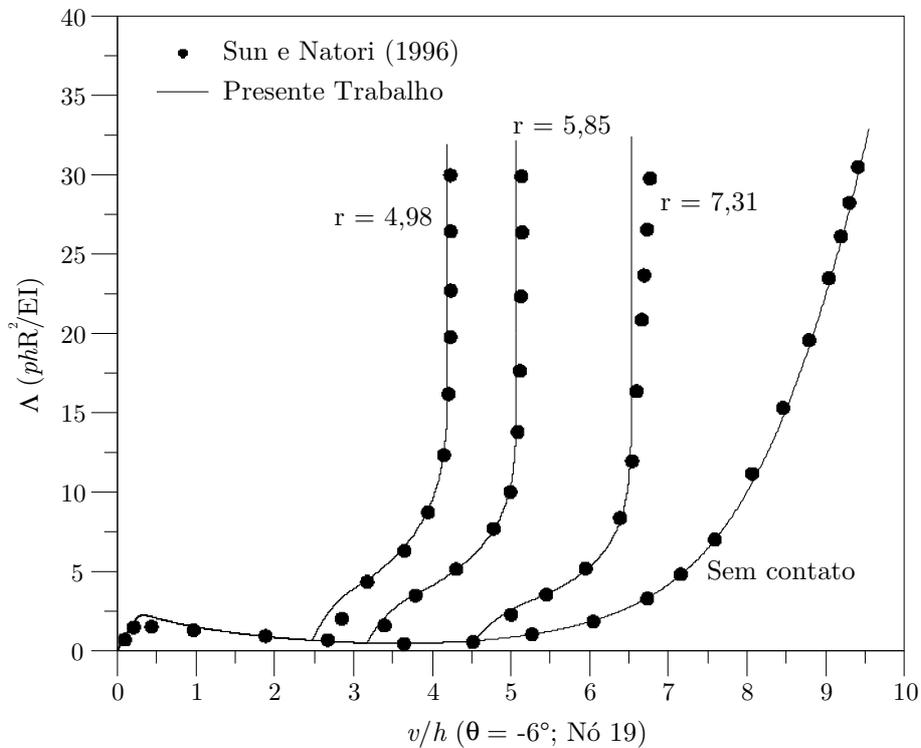
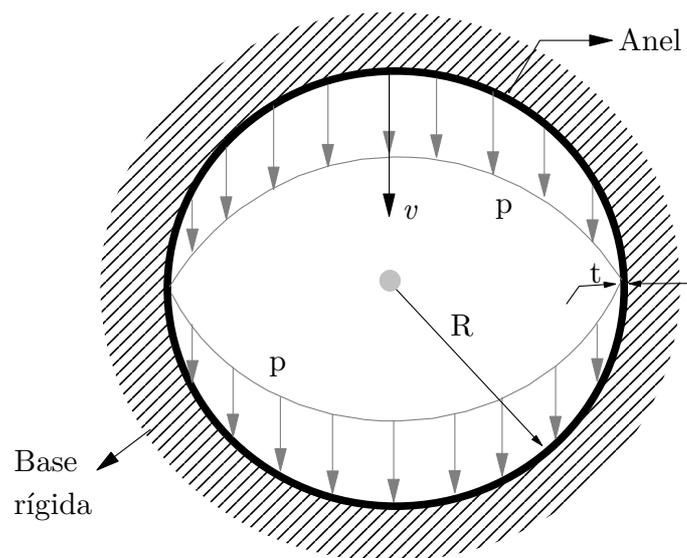


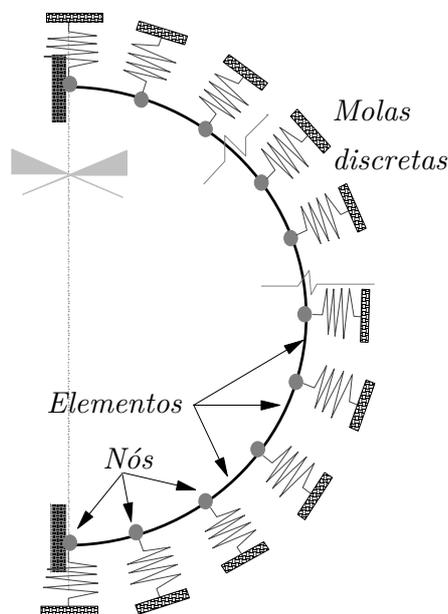
Figura 5.24. Curva carga x deslocamento – Bifurcação

Esse problema foi analisado anteriormente por Pian e Bucciarelli (1967) usando uma formulação de diferenças finitas e por Stein e Wriggers (1984), que obtiveram o método não linear de equilíbrio até a carga crítica, usando o método dos elementos finitos. Kodikara e Moore (1992) também estudaram o mesmo anel, consideraram, para a análise 48 elementos cúbicos isoparamétricos para metade do anel, em uma abordagem de elementos finitos não linear. Posteriormente,

Silveira *et al.* (2013) apresentaram uma metodologia numérica para a análise geometricamente não linear de sistemas estruturais sob restrições de contato unilateral, como citado anteriormente. A fim de investigar a influência da rigidez da fundação na resposta não linear e na estabilidade do anel, Silveira *et al.* (2013) analisaram o sistema considerando valores crescentes para o parâmetro adimensional de rigidez elástica da fundação $k = KR^3 / EI$ (molas discretas).



a) Problema estrutural



b) Modelo de elementos finitos adotado

Figura 5.25. Anel com restrições radiais de contato (SILVEIRA, 1995)

Os resultados obtidos no presente trabalho são apresentados na Figura 5.26 e comparados com os valores obtidos pelos pesquisadores citados anteriormente. As curvas mostram a variação do parâmetro de carga adimensional $\Lambda = pR^3 / EI$ com a deflexão do ponto situado no eixo vertical de simetria, v , dividido por R . Observa-se no resultado do presente trabalho uma instabilidade no começo da análise, na sequência a curva atinge a carga limite (ponto crítico) próxima dos resultados da literatura. Os valores do parâmetro de carga crítica são apresentados na Tabela 5.1, sendo que o resultado do presente trabalho se compara bem com aqueles encontrados na literatura. Este é um problema típico de métodos de tipo de penalidade, onde, deve-se tomar cuidado ao escolher o valor da rigidez da fundação para representar uma fundação rígida.

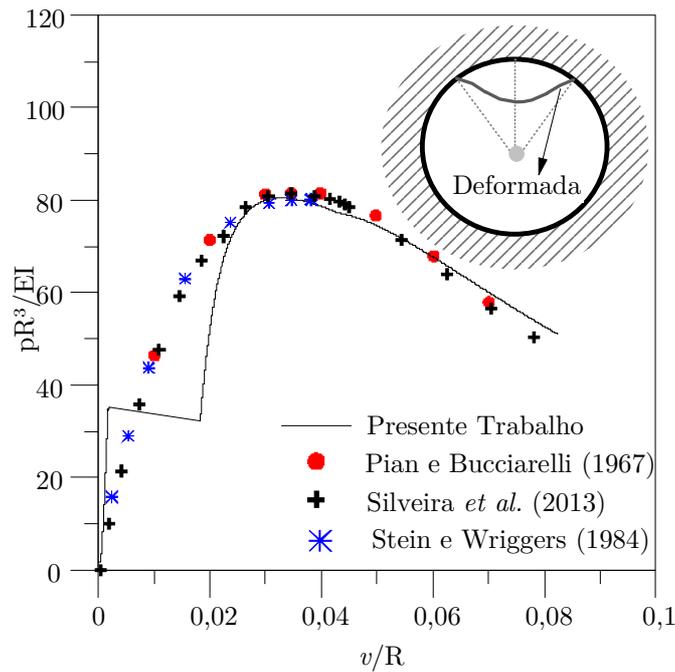


Figura 5.26. Curva carga x deslocamento

Tabela 5.1. Comparação do parâmetro de carga crítica

	Pian e Bucciarelli (1967)	Stein e Wriggers (1984)	Kodikara e Moore (1992)	Silveira <i>et</i> <i>al.</i> (2013)	Presente Trabalho
$\Lambda = pR^3 / EI$	81,5	79,9	81,7	81,5	80,44

Foram feitos testes para diversos valores de rigidez e observou-se a sensibilidade do método na análise do exemplo em questão. O valor da rigidez adotado, principalmente o valor na direção vertical (k_y), altera o comportamento da curva carga x deslocamento. Importante ressaltar também, a vulnerabilidade com relação ao incremento inicial do parâmetro de carga. Para o resultado mostrado na Figura 5.16 utilizou-se o valor de incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda_1^0 = 50$ e para rigidez da fundação adotou-se $k_y = 3,3912 \cdot 10^6$ e $k_x = 10^9$.

5.5.2 Anel sobre base rígida

O último exemplo trata-se de um anel circular que é pressionado contra uma base rígida, com restrições de contato unilaterais, por uma carga pontual aplicada no topo do anel, Figura 5.27. Este anel foi inicialmente proposto por Simo *et al.* (1986), que se atentou a solução numérica de problemas estruturais de grande deflexão, sujeitas a restrições de contato e condições de contorno unilaterais, exibindo o comportamento inelástico. A resposta inelástica foi caracterizada por meio de equações constitutivas elastoviscoplastico, formuladas diretamente em termos de tensões resultantes. Para o tratamento de contato e restrições unilaterais Simo *et al.* (1986) empregaram um procedimento de penalidade, que utiliza o método de programação matemática para resolução do problema de contato sem eliminar as restrições unilaterais.

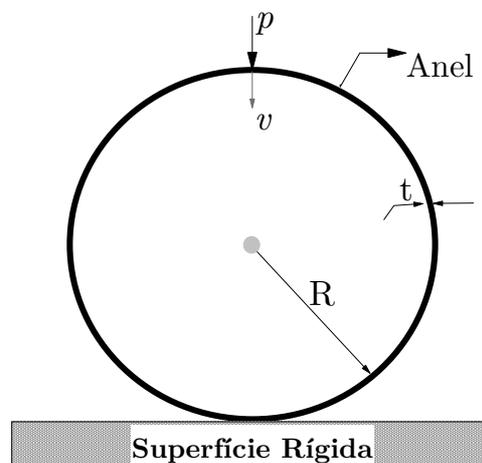


Figura 5.27. Anel sobre superfície rígida

Para as análises que seguem, considera-se os seguintes dados: raio $R = 100$; módulo de elasticidade $E_s = 10^9$; tensão de escoamento do material $f_y = 365,18 \cdot 10^2$; inércia $I = 10^{-6}$ e área $A = 0,1$ (unidades compatíveis). Por razões de simetria, apenas metade do anel foi discretizada, usando 50 elementos finitos. A seção transversal retangular foi dividida em 10 fibras. A base plana rígida foi descrita por molas discretas com um alto valor de rigidez ($k_y = 1200$).

Fez-se o estudo desse sistema considerando o material elástico linear e o comportamento inelástico, e comparou com os resultados de Simo *et al.* (1986), Figura 5.28. Percebe-se uma boa aproximação com as curvas da literatura, principalmente na comparação com a curva de comportamento elástico.

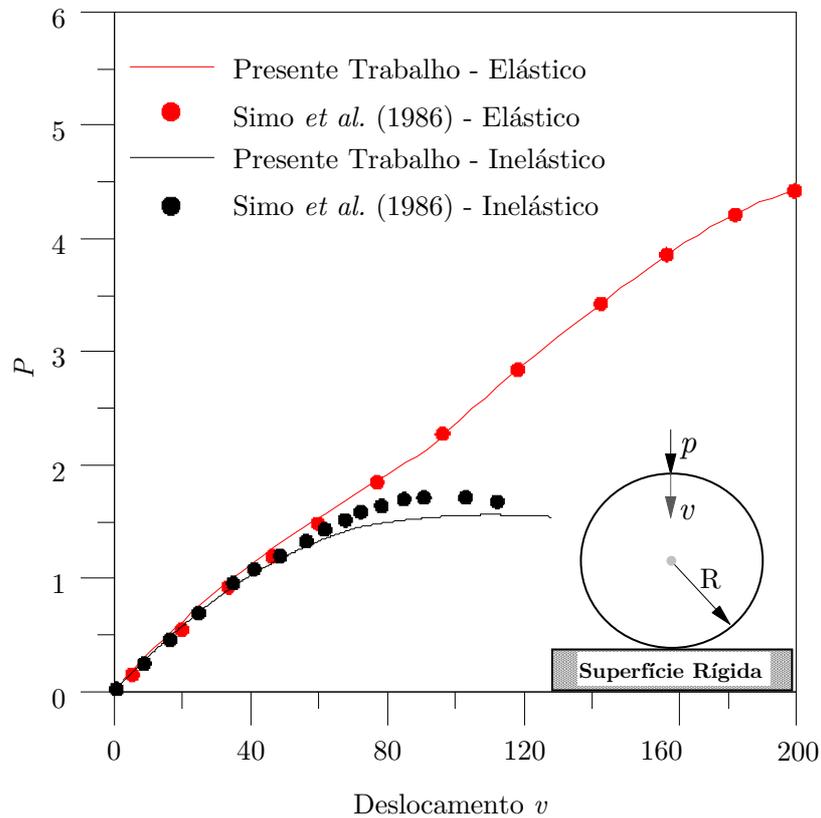


Figura 5.28. Trajetória de equilíbrio elástica e inelástica do anel

Vale ressaltar que na trajetória de equilíbrio considerando o comportamento do material inelástico, apresenta uma leve diferença com relação ao resultado da literatura, que pode ser vista no final do trecho não linear da curva carga x deslocamento (Figura 5.28). Essa leve diferença pode ser explicada

pela diferença na forma de obter a resposta inelástica do material utilizado na literatura e no presente trabalho.

As deformadas correspondentes à solução elástica e inelástica são mostradas na Figura 5.29, juntamente com a configuração deformada apresentada em Simo *et al.* (1986). Através dessa figura é possível observar o comportamento elástico e inelástico do anel, que há uma concordância entre os resultados obtidos na análise realizada no CS-ASA e o fornecido na literatura.

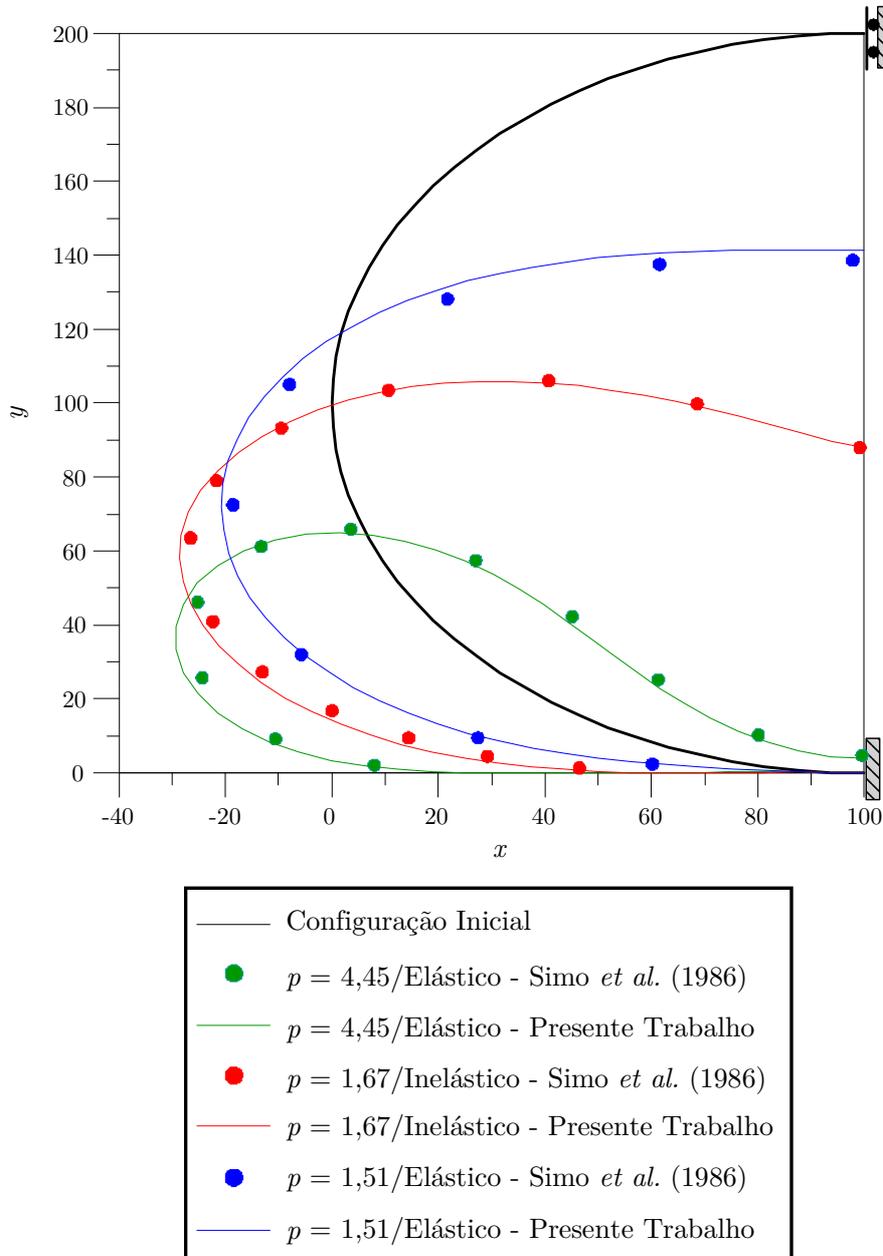


Figura 5.29. Configurações Deformadas

CAPÍTULO 6

Considerações Finais

6.1 Conclusões

No presente trabalho foi proposto uma abordagem para o estudo avançado de sistemas estruturais de aço, concreto armado e mistos de aço e concreto, levando em consideração as mais diversas formas de não linearidades e outros efeitos que a tipologia estrutural abordada proporciona: efeitos de segunda ordem, imperfeições (geométricas e tensões residuais), plasticidade, formulação do elemento finito não linear, curvas de interação, e algoritmos para tratamento do problema não linear, além da análise de problemas com restrições unilaterais e bilaterais de contato.

A não linearidade geométrica foi considerada por meio de uma formulação corrotacional, para descrição do movimento dos corpos sólidos, que usavam funções de interpolação consistentes com a teoria de deformação não linear. Esse referencial tem como objetivo separar o movimento de corpo rígido e a parte de deformação pura. Baseou-se no Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), para a avaliação tanto da capacidade resistente da seção transversal,

quanto das rigidezes axial e à flexão, viabilizando a análise de diferentes seções transversais.

Os problemas de interação solo-estrutura foram tratados como bilaterais e unilaterais. Utilizou-se modelos de molas discretas e de Winkler, modelos de um parâmetro, e o modelo de Pasternak, como modelo de base de dois parâmetros, para obter a resposta da base elástica voltado para a região de contato entre os corpos. O problema de contato unilateral, onde não se conhece a priori a região de contato, foi transformado em um problema de minimização sem restrições, através do método da penalidade.

A base computacional utilizada nesta tese foi o programa CS-ASA-*Computational System for Advanced Structural Analysis* (SILVA, 2009), inicialmente desenvolvido para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas e posteriormente expandido para análise de estruturas mistas de aço e concreto. As alterações na plataforma possibilitaram a realização de análises avançadas elásticas e inelásticas de segunda ordem para problemas de contato bilateral e unilateral, que foram discutidas ao longo dos capítulos do presente trabalho.

Nos exemplos apresentados no Capítulo 4, verifica-se que o acoplamento proposto representa eficientemente o comportamento inelástico de segunda ordem das estruturas. A comparação com os resultados numéricos e experimentais presentes na literatura valida a formulação implementada e enfatiza sua precisão. Vale ressaltar os bons resultados obtidos ao considerar a flexão em torno o eixo menor inércia, para diferentes níveis de carregamento permanentes. Analisou-se sistemas com diversas seções transversais diferentes como: tubular retangular e quadrada vazada, seção circular cheia e seção vazada, perfil I. Em todas as análises os resultados foram condizentes com a literatura. A contribuição do presente trabalho é a capacidade de retratar o comportamento inelástico de

segunda ordem de elementos de aço, de concreto e mistos de aço e concreto, com diferentes seções transversais, como testado nos exemplos. Vale ressaltar a formulação geométrica não linear utilizada, sendo a mesma considerada muito precisa.

As análises de sistemas envolvendo a interação estrutura-meio (solo-rocha) são retratados no Capítulo 5. Nos exemplos apresentados, vê-se que a metodologia proposta representa de forma eficiente o comportamento elástico e inelástico de segunda ordem dos problemas de interação solo-estrutura, bilaterais e unilaterais. A comparação com resultados presentes na literatura e com as análises via MASTAN2, valida a formulação implementada e destaca sua precisão perante o comportamento real de estruturas. A metodologia proposta também se mostrou eficiente em análise com restrições de contato sobre o comportamento *snap-through* e bifurcação.

No exemplo da Seção 5.2.2 utilizou-se o modelo de base de Winkler linear (WL) e não linear (WNL), comparou-se o resultado com os da literatura onde tem-se a base inelástica. Observou-se que utilizando a base elástica não linear (WNL), tem-se uma maior perda de rigidez se comparando ao comportamento da base utilizando o modelo WL. Assim o comportamento do sistema utilizando o modelo WNL foram mais próximo dos resultados de uma base inelástica.

Destaca-se a importância de considerar o modelo de fundação apropriado na análise (modelo bilateral ou unilateral), pois o emprego do modelo incorreto pode resultar em um erro considerável. Quando tem-se uma região de perda de contato entre os corpos, o modelo de base bilateral não capta essa perda, evidenciando a importância na escolha do modelo a ser utilizado.

Vale ressaltar também a influência da posição da base elástica (acima ou abaixo da estrutura) e sua rigidez no comportamento não linear de estruturas curvas (arcos), em problemas unilaterais. Com o aumento do valor da rigidez da

base pode-se ter uma perda de precisão dos valores obtidos na análise, devido a metodologia utilizada para tratar o problema de contato unilateral, o método da penalidade. Essa instabilidade acontece, principalmente, quando tem-se uma fundação rígida, onde deve-se tomar cuidado ao escolher o valor da rigidez da fundação.

Portanto, os engenheiros podem usar a metodologia proposta para o projeto de vários problemas de interação solo-estrutura. Concluindo que as implementações desenvolvidas foram bem sucedidas, proporcionando ao CS-ASA uma nova funcionalidade.

6.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

São descritas, a seguir, possíveis pesquisas futuras que podem ser desenvolvidas a partir da base apresentada nesta tese:

- Consideração da teoria de viga de Timoshenko para a consideração da deformação por cisalhamento no elemento;
- Incluir na formulação desenvolvida a possibilidade de se analisar problemas decorrentes das forças de atrito entre os corpos;
- Emprego de métodos de programação matemática para transformação do problema de contato unilateral em um problema de minimização com restrições, técnicas de solução para o problema de complementaridade linear (ASCIONE e GRIMALDI, 1984; BARBOSA, 1986; SILVEIRA, 1995; HOLANDA, 2000);
- Implementação de um modelo constitutivo de fundação, de forma a facilitar a representação de dados experimentais;
- Implementar outros modelos de bases elásticas, como as de dois parâmetros (Vlasov) e o semi-espaço infinito (KERR, 1964; CHEUNG e ZIENKIEWICZ, 1965);

- Consideração de modelos mais sofisticados de fundações não lineares (SHEN, 1995);
- Extensão da metodologia numérica proposta para o estudo de placas e cascas com restrições de contato;
- Continuidade ao desenvolvimento de pré e pós-processador gráfico para o sistema computacional CS-ASA (PRADO, 2012).

Referências Bibliográficas

- ABREU, J. F. A. C., 2016. *Estudo computacional via ANSYS de vigas, arcos e anéis com restrições de contato impostas por bases elásticas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- AISC LRFD, 1986. Load and resistance factor design specification for structural steel buildings. *American Institute of Steel Construction*, Chicago, USA.
- AISC LRFD, 2016. Specification for structural steel buildings. *American Institute of Steel Construction*, Chicago, IL.
- AL-AZZAWI, A. A.; MAHDY, A. H.; FARHAN, O. S., 2010. *Finite element analysis of deep beams on nonlinear elastic foundations*. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics, v.4, pp. 13-42.
- ALJANABI, A. I. M., FARID, B. J. M., e MOHAMAD AII, A. A. A., 1990. *The interaction of plane frames with elastic foundation having normal and shear moduli of subgrade reactions*. Comput. Struct. v. Xi, pp. 1047-1056.
- ALHASAWI, A.; HENG, P.; HJIAJ, M.; GUEZOULLI, S.; BATTINI, J.-M., 2017. *Co-rotational planar beam element with generalized elasto-plastic hinges*. Engineering Structures, v. 151, p. 188-205.

- ALVES, R. V., 1995. *Non-Linear Elastic Instability of Space Frames*. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ-COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- ASCIONE, L. e GRIMALDI, A. (1984). *Unilateral contact between a plate and an elastic foundation*”, *Meccanica*, Vol. 19, pp. 223–233, Springer.
- ASCIONE, L. e OLIVITO, R. S., 1985. *Unbonded contact of a mindlin plate on an elastic half-space*, *Meccanica*, Vol. 20, pp. 49-58, Springer.
- AVRAMIDIS, I. E. e MORFIDIS, K., 2006. *Bending of beams on three-parameter elastic foundation*. *International Journal of Solids and Structures*, v.43, pp. 357-375.
- AYOUB, A., 2003. Mixed formulation of nonlinear beam on foundation elements. *Computers and Structures*, vol. 81, pp. 411-421.
- AZIZINAMINI, A.; BRADBURN, J. H.; RADZIMINISKI, J. B., 1985. *Static and cyclic behavior of semi-rigid steel beam-column*. [S.l.].
- BADIE, S.S., e SALMON, D.C., 1996. *A quadratic order elastic foundation finite element*. *Comput Struct*, v.58(3), pp.435–443.
- BARBOSA, H. J. C., 1986. *Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade*, Tese de Doutorado, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE/UFRJ), RJ.
- BARROS, R. C., 2016. *Avaliação Numérica Avançada do Desempenho de Estruturas de Aço Sob Temperaturas Elevadas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- BARROS, R. C., 2021. *Avaliação numérica do comportamento não linear e resistência de estruturas mistas de aço e concreto em situação de incêndio*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

- BATELO, E. A. P., 2014. *Análise dinâmica avançada de estruturas de aço sob cargas extremas*. Dissertação (Mestrado) | Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2014.
- BATELO, E. A. P., 2018. *Análise Dinâmica Avançada de Estruturas de Aço com Ligações Semirrígidas e Interação com o Solo*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- BATHE, K. J. e CHAUDHARY, A., 1985. A solution method for planar and axisymmetric contact problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol 21, pp. 65-88.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G., 1979. *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 1262-1267.
- BAŽANT, Z. P. e O H, B. H., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*.
- BELYTSCHKO, T., GLAUM, L. W., 1979. Application of higher order rotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. *Computers and Structures*, v.10, p. 175-182.
- BHATTIPROLU, U.; BAJAJ, A. K.; DAVIES, P., 2012. *An efficient solution methodology to study the response of a beam on viscoelastic and nonlinear unilateral foundation: Static response*. *International Journal of Solids and Structures*, v.50, pp. 2328-2339.
- BRATINA, S.; SAJE, M.; PLANINC, I., 2004. *On material and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames*. *International Journal of Solids and Structures*, v. 41, p. 7181-7207.

- CALDAS, R.B., 2004. *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*.
Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- CARNOY, E., 1980. Postbuckling analysis of elastic structures by the finite
element method. *Computer Method in Applied and Mechanic Engineering*,
23(2), 149-174.
- CHAN, S. K. e TUBA, I. S., 1971. A finite element method for contact problems
of solids bodies – Part I. Theory and Validation. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol
13, pp.615-625.
- CHAN, S. L., 1988. *Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns
and frames using the minimum residual displacement method*.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 26, p. 2657-
2669.
- CHAN, S. L. e CHUI, P., 2000. *Non-linear static a cyclic analysis of steel frames
with semi-rigid connections*. Oxford: Elsevier.
- CHANDRA, S., MADHAV, M.R. e IYENGAR, N.G.R., 1987. *A New Model for
Nonlinear Subgrades*. *Mathematical Modelling*, v.8, pp. 513-518.
- CHAPMAN, S. J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-
Hill, 2nd ed.
- CHEN, W. e KIM, S., 1997. *LRFD Steel Design using Advanced Analysis*. Boca
Raton, Florida, EUA: CRC Press.
- CHEN, W. F.; TOMA, S., 1994. *Advanced analysis of steel frames - Theory
software and applications*. Boca Raton: CRC Press.
- CHEN, S.; TENG, J. G.; CHAN, S. L., 2001. *Design of biaxially loaded short
composite columns of arbitrary section*. *Journal of Structural Engineering*,
v. 127, n. 6, p. 678-685.

- CHEUNG, Y. K e ZIENKIEWICZ, O. C., 1965. Plates and tanks on elastic foundations – An application of Finite Element Method. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 1, pp. 451-461.
- CHHANG, S.; BATTINI, J.-M.; HJIAJ, M., 2017. *Energy-momentum method for co-rotational plane beams: A comparative study of shear exible formulations*. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 134, p. 41-54.
- CHIOREAN, C. G., 2013. *A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D composite steel-concrete frame structures*. *Engineering Structures*, v. 57, p. 125-152.
- CLARKE, M.J., 1994. *Plastic zone analysis of frames*. In Chen W.F., e Toma S., eds, *Advanced analysis of steel frames: Theory, software, and applications*. CRC Press, Boca Raton, pp. 259–319.
- CRISFIELD, M. A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. USA: John Wiley & Sons Inc., v. 1.
- DIMOPOULOS, C.A. e GANTES, C.J., 2008. *Design of circular steel arches with hollow circular cross-sections according to EC3*. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 64, p. 1077-1085.
- DENAVIT, M., 2012. *Characterization of behavior of steel-concrete composite members and frames with applications for design*. 2012. Tese de Doutorado, Graduate College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America.
- EC 2, 2004. *Design of concrete structures - part 1-1: General rules and rules for buildings*. Comite Européen de Normalisation, CEN prEN.
- EC 3, 1992. *CEN EUROCODE 3 design of steel structures. vol. part 1*. European Committee for Standardization.
- ECCS, 1983. *Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints. European Convention for Constructional Steelwork*, Pub. no. 33.

- ESPION, B., 1993. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs. In: TC 114 RILEM. E&FN Spon. [S.l.: s.n.].
- FERREIRA, K. e ROEHL, D., 1997. *Análise não-linear do problema de contato tridimensional baseada no método da penalidade*. Anais do XVIII Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia (XVIII CILAMCE), Vol. IV, pp. 1605-1612.
- FONG, M. e CHAN, S. L., 2012. *Advanced analysis of steel-concrete composite beam-columns by refined plastic-hinge method*. International Journal of Structural Stability and Dynamics.
- FRANCAVILLA, A. e ZIENKIEWICZ, O. C., 1975. A note on numerical computation of elastic contact problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 9, pp. 913-924.
- GALVÃO, A. S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- GALVÃO, A.S., 2001. *Análise Linear de Estruturas Reticuladas Planas e Espaciais*, trabalho da disciplina Estudo Orientado do programa de pós-graduação da PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ.
- GALVÃO, A.S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, RJ, Brasil.
- GONÇALVES, G.A., 2013. *Modelagem do comportamento inelástico de estruturas de aço: membros sob flexão em torno do eixo de menor inércia*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

- GONÇALVES, R. e CARVALHO, J., 2014. An efficient geometrically exact beam element for composite columns and its application to concrete encased steel I-sections. *Engineering Structures*, v. 75, p. 213-224.
- GUO XIAO-MING e ZONG, Z., 2011. *Nonlinear buckling analysis of structure based on contact synergy*. *Engineering Mechanics*, Vol. Vol.28 (6), pp 40-44.
- HAJJAR, J. F. e GOURLEY, B. C., 1996. *Representation of concrete-filled steel tube cross section strength*. *Journal of Structural Engineering*, v. 122, p. 1327-1336.
- HALDAR, S. e BASU, D.C., 2015. *Response of Beams on Nonlinear Foundation*. IFCEE, ASCE.
- HETÉNYI, M., 1946. *Beams on Elastic Foundation*. University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., USA.
- HOLANDA, A.S., 2000. *Análise do equilíbrio e estabilidade de placas com restrições de contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- HORIBE, T., e ASANO, N., 2001. *Large deflection analysis of beams on two-parameter elastic foundation using the boundary integral equation method*. *JSME International Journal*. v.44(2), pp.231–236.
- IFFLAND, J.S.B., e BIRNSTIEL, C., 1982. *Stability design procedures for building frameworks*. American Institute for Steel Construction Project No. 21.62, AISC, Chicago.
- IU, C., BRADFORD, M., e CHEN, W., 2009. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. *Engineering Structures*, v. 31, p. 799-813.
- KAMESWARA RAO, N.S.V., 2011. *Foundation design – theory and practice*. John Wiley & Sons. Singapura.

- KANTO, Y. e YAGAWA, G., 1990. A dynamic contact buckling analysis by the penalty finite element method. *Int. J. Number. Methods Eng.*, Vol, 29, pp. 755-774.
- KARGARNOVIN, M., YOUNESIAN, D., e THOMPSON, D., JONES, C., 2005. *Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads*. *Computers and Structures* 83, 1865–1877.
- KASCHIEV, M. e MIKHAJLOV, K., 1995. *A beam resting on a tensionless Winkler foundation*, *Comput. Struct.*, 55(2), 261-264.
- KASSIMALI, A., 1983. Large deformation analysis of elastic-plastic frames. *Journal of Structural Engineering*, vol. 109(8), pp. 1869–1886.
- KERR, A.D., 1964. *Elastic and Viscoelastic Foundation Models*, *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 31, pp. 491-498.
- KERR, L. M., DUNDURS, J. e TSAI, 1976. *Problems Involving a Recending Contact Between a Layer and a Half Space*, *Journal of Applied Mechanics*, pp. 1115-1120.
- KERR, A. D. e SOIFER, M. J., 1969. The linearization of the prebuckling state and its effect on the determined instability loads. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, pp. 775-783.
- KIEN, N.D., 2004. *Post buckling behavior of beams on two-parameter elastic foundation*, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. v.4, pp. 21-43.
- KODIKARA, J. K. e MOORE, L. D., 1992. Nonlinear interaction o solids with rigid surfaces. *Computers and Structures*, Vol. 43(1), pp. 85-91
- KOSTIC, S. M., FILIPPOU, F. C., e DERETIC-STOJANOVIC, B, 2016. *General plastic model for inelastic RCFT column response*. *Computers and Structures*, v. 168, p. 56-67.

- KRENK, S., 1995. *An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 38, p. 823-839.
- LANDENBERGER A, e EL-ZAFRANY A, 1999. *Boundary element analysis of elastic contact problems using gap finite elements*. Computers and Structures; Vol. 71, pp. 651–661.
- LEMES, Í. J. M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- LEMES, Í. J. M., SILVA, A. R. D., SILVEIRA, R. A. M., e ROCHA, P., 2015. *Acoplamento MCD/MRPR para análise de estruturas metálicas, de concreto e mistas*. In: XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. [S.l.: s.n.].
- LEMES, Í. J. M.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M.; e ROCHA, P. A. S., 2017a. *Determinação da capacidade resistente de elementos estruturais mistos através do método da rótula plástica refinado*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, v. 33, n. 1-2, p. 24-34.
- LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D.; ROCHA, P. A. S., 2017b. *Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel concrete structures via coupling SCM/RPHM*. Engineering Structures, v. 147, p. 12-26.
- LEMES, I. J. M., 2018. *Estudo Numérico Avançado de Estruturas de Aço, Concreto e Mistas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

- LI, T. J., LIU, S. W. e CHAN, S. L., 2015. *Direct analysis for high-strength steel frames with explicit model of residual stresses*, Engineering Structures, Vol. 100, pp. 342-355.
- LIEW J. Y. R., CHEN H., e SHANMUGAN N. E., 2001. *Inelastic analysis of steel frames with composite beams*, J Struct Eng, Vol. 127 (2), pp. 194-202.
- LIU, S. W., LIU, Y. P., e CHAN, S. L., 2012. *Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames part 1: Cross-section analysis technique and second-order analysis*. Journal of Constructional Steel Research, v. 70, p. 326-336.
- LUBLINER J., TAYLOR R. L. e AURICCHIO F., 1993. *A new model of generalized plastic and its numerical implementation*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 30 (22), pp. 3171-3184.4
- LUENBERGER, D.G., 1973. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- MACIEL, F. V., 2012. *Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais Impostas por Bases Elásticas*, Dissertação de Mestrado, EM/UFOP, Ouro Preto-MG.
- MACHADO, F. C. S., 2005. *Análise Inelástica de Segunda-ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- MANZI, E. N., 2001. *Formulações para elementos finitos curvos para análise de arcos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- MATHUR, K., 2011. *Effect of residual stresses and initial imperfections on earthquake response of steel moment frames*. Tese de Doutorado. Graduate

College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America.

McGUIRE, W., GALLAGHER, R. H., e ZIEMIAN, R. D., 2000. *Matrix Structural Analysis*. 2nd. ed., Faculty Books. 7.

MULLAPUDI, R., e AYOUB, A.N., 2010. *Nonlinear finite element modeling of beams on two parameter foundations*. Computers and Geotechnics. v.37, pp.334–342.

MUNIZ, C. F. D. G., 2005. Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

MUNÕZ, L.F.P., 2015. *Análise Dinâmica Não Linear de Pórticos Sob Excitação de Base Considerando Interação Solo-Estrutura*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

NAIDU, N.R., e RAO, G.V., 1995. *Stability behaviour of uniform columns on a class of two parameter elastic foundation*. Computers and Structures. v.57, pp. 551-553.

NBR 6118, 2014. *Projeto de estruturas de concreto - procedimento*. Associação Brasileira de Normas Técnicas.

NGO-HUU, C.; KIM, S., 2012. Practical nonlinear analysis of steel concrete composite frames using fiber hinge method. Journal of Constructional Steel Research, v. 74, p. 90-97.

NOGUEIRA, C.L., CARVALHO, M.T.M., e SILVEIRA, R.A.M., 1990. Modelagem de Vigas sobre Base Elástica, trabalho da disciplina Método dos Elementos Finitos na Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica–RJ.

- PASTERNAK, P. L., 1954. *On a New Method Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants*. Gousuedarstvennoe Izadatesvo Literaturi po Stroitelstvuri Arkhitekture.
- PEREIRA, W.L.A.; MUCCI, A.C., SILVEIRA, R.A.M. e GONÇALVES, P.B., 2002. *A Modal Solution for Beams under Unilateral Contact Constraints*, V SIMMEC, p.187-194, Juiz de Fora.
- PEREIRA, A.R., 2003. *Modelagem Numérica Não Linear Física via MEF de Estruturas de Solos Reforçados*, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG.
- PI, Y.-L., e TRAHAIR, N. S., 1996. *In-plane inelastic buckling and strengths of steel arches*. Journal of Structural Engineering, v.122, p. 734-747.
- PIAN, T. H. H. e BUCCIARELLI JR., L. L., 1967. Buckling of a radially constrained circular ring under distributed loading. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 3(5), pp. 715–730.
- PINHEIRO, L., 2003. *Análises Não-lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semirrígidos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- PIRES, D., 2012. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- PIRES, D., 2018. *Análise Numérica Avançada de Estruturas de Aço e de Concreto Armado em Situação de Incêndio*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

- PRADO, I. M., 2012. *CS-ASA Preprocessor: Sistema Gráfico Interativo de Pré-processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- ROCHA, G., 2000. *Estratégias numéricas para análise de elementos estruturais esbeltos metálicos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- ROCHA, P. A. S., 2006. *Análise inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semirrígidas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- ROIK, K.; BERGMANN, R., 1990. *Design method for composite columns with unsymmetrical cross-sections*. Journal of Constructional Steel Research, v. 15, p. 153-168.
- ROSAS, L. R. B., 2016. *Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Reticulados com Restrições de Contato*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SALMON, C. G.; JOHNSON, J. E.; MALHAS, F., 2009. *Steel Structures: Design and Behavior*. 5. ed. Nova Iorque: Prentice Hall.
- SANTOS, L. C., 2016. *Análise numérica via Ansys do equilíbrio não linear e estabilidade elástica de estruturas com restrições de contato*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SANTOS, M.N., 2007. *Emprego de Elemento Finito Híbrido na Análise Não-linear de Estruturas Metálicas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-

Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

- SAPOUNTZAKIS, E. J. e KAMPITSIS, A. E., 2010. Nonlinear analysis of shear deformable beam-columns partially supported on tensionless Winkler foundation. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, Vol. 2 (4), pp. 31-53.
- SAPOUNTZAKIS, E. J. e KAMPITSIS, A. E., 2013. Inelastic analysis of beams on two-parameter tensionless elastoplastic foundation. *Engineering Structures*, Vol. 48, pp. 389-40.
- SAPOUNTZAKIS, E. J. e KAMPITSIS, A. E., 2014. Geometrically nonlinear inelastic analysis of Timoshenko beams on inelastic foundation. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 103(6), pp. 367-409.
- SCOTT M. H. and FENVES G. L., 2006. *Plastic hinge integration method for force based beam-column elements*, J Struct Eng, Vol. 132 (2), pp. 244-252.
- SFAKIANAKIS M. G., 2002. *Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete section of arbitrary shape by fiber model and computer graphics*, Adv Eng Softw, Vol. 33 (4), pp. 227-242.
- SHARIFF, M. N. e MENON, D., (2016). Displacement-controlled nonlinear analysis of RC frames and grids. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 42(5), pp. 393-404.
- SHEN, H., 1995. *Post buckling analysis of orthotropic rectangular plates on nonlinear elastic foundations*. Engineering Structures, v.17, pp. 407-412.
- SHEN, H., 2000. *Thermomechanical post buckling of imperfect shear deformable laminated plates on elastic foundations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.189, pp. 761-784.

- SHEN, H., 2011. *A novel technique for nonlinear analysis of beams on two-parameter elastic foundations*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, v.11 n6, pp. 999-1014.
- SHIRIMA, L.M., GIGER, M.W., 1992. *Timoshenko beam element resting on two-parameter elastic foundation*. J Eng Mech. v.118(2), pp. 280–295.
- SILVA, A.R.D., 1998. *Análise de Placas com Restrições de Contato*, Dissertação de Mestrado, PROPEC/Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil
- SILVA, A. R. D., 2009. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SILVA, A. R. D., SILVEIRA, R. A. M. e GONÇALVES, P. B., 2001. *Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations*, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 38. pp. 2083–2100, Elsevier.
- SILVA, J. L., 2016. *Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SILVA, J.L., LEMES, Í.J.M., DEUS, L.R.R.M., SILVEIRA, R.A.M., 2021. *Plastic analysis of steel arches and framed structures with various cross sections*. Steel and Composite Structures, 38(3), 257-270. DOI: 10.12989/scs.2021.38.3.257
- SILVEIRA, R. A. M., 1995. *Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SILVEIRA, R.A.M., PEREIRA, W.L.A., e GONÇALVES, P.B., 2008a. *Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact*

- constraints by a Ritz type approach. International Journal of Solids and Structures*, v.45, pp. 2629-2650.
- SILVEIRA, R.A.M., PEREIRA, W.L.A., e GONÇALVES, P.B., 2008b. *Constrained and unconstrained optimization formulations for structural elements in unilateral contact with an elastic foundation. Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1-15.
- SILVEIRA, R.A.M., NOGUEIRA, C.L., e GONÇALVES, P. B., 2013. *A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender arches and rings under contact constraints. International Journal of Solids and Structures*, v. 50, p. 147-159.
- SILVEIRA, R.A.M., MACIEL, F.V., SILVA, A.R.D., MACHADO, F.C.S., e NOGUEIRA, C.L., 2015. *Nonlinear Equilibrium and Stability Analysis of Axially Loaded Piles Under Bilateral Contact Constraints. Latin American Journal of Solids and Structures*, v.12, pp. 250-270.
- SIMO, J. C., WRIGGERS, P., SCHWEIZERHOF, K. H. e TAYLOR, R. L., 1986. Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp.779-800.
- STEIN, E. e WRIGGERS, P., 1984. Stability of rods with unilateral constraints, a finite element solution. *Computers & Structures*, Vol. 19(1-2), pp.205-211.
- STRAMANDINOLI, R.S., 2007. *Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.*

- STRAMANDINOLI, R.S., e ROVERE, H. L.L., 2008. An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members. *Engineering Structures*, v. 30, p. 2069-2080.
- SUN, S. M. e NATORI, M. C., 1996. Numerical solution of large deformation problems involving stability and unilateral constraints. *Computers & Structures*, Vol. 58(6), pp. 1245-1260.
- TANG, Y. Q.; ZHOU, Z. H.; CHAN, S. L., 2015. *Nonlinear beam-column element under consistent deformation*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, v. 15, n. 5, p. 1450068/1-24.
- TORBACKI, W., 2008. *Numerical analysis of beams on unilateral elastic foundation*. Achieves of Materials Science and Engineering, v.29, pp. 109-112.
- TSIATAS, G.C., 2010 Nonlinear analysis of non-uniform beams on nonlinear elastic foundation. *Acta Mechanic*, v. 209, pp. 141–152.
- VECCHIO, F. J. e COLLINS, M. P., 1982. *The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses*. Publication 82-03 - University of Toronto, Toronto, Canadá.
- VECCHIO, F. J. e EMARA, M. B., 1992. Shear deformations in reinforced concrete frames. *ACI Structural Journal*, Vol. 89(1), pp. 46-56.
- WANG Y. B, LI G. Q., CHEN, S.W. e SUN F. F., 2014. *Experimental and numerical study on the behavior of axially compressed high steel box-columns*, Engineering Structures, Vol. 58, pp. 79-91.
- WINKLER, E., 1867. *Die Lehre Von der Elasticitaet und Festigkeit*. Prag, Dominucus.
- YOO, H. e CHOI, D., 2008. New method of inelastic buckling analysis for steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 64, pp. 1152–1164

- ZIEMIAN R.D. e MILLER A.R., 1997. Inelastic analysis and design: frames with members in minor-axis bending”, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 123(2), 151–156.
- ZIEMIAN, R. D.; MCGUIRE, W., 2002. *Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis*. *Journal of Structural Engineering*, v.128, p. 1301-1307.
- ZUBYDAN, A.H., 2011. Inelastic second order analysis of steel frame elements flexed about minor axis, *Engineering Structures*, v.33, pp. 1240-1250.
- ZUBYDAN, A. H., 2013. *Inelastic large deflection analysis of space steel frames including H-shaped cross-section members*. *Engineering Structures*, v. 48, p. 155-165.

APÊNDICE A

Matriz de Rigidez do Elemento Corrotacional

A.1 Termos da Matriz de Rigidez

Para evitar os fenômenos de travamento (*locking phenomena*), aumento espúrio de rigidez na estrutura durante a análise, deve-se ter um ajuste das funções de interpolação. No presente trabalho, a sugestão de Tang *et al.* (2015) foi considerada, com o uso de uma função de interpolação de ordem elevada (quinta ordem) para a interpolação dos deslocamentos axiais.

Os termos da matriz de rigidez do elemento corrotacional, \mathbf{K}_{lc} , considerando a não linearidade dos materiais, são dados por:

$$k_{lc(1,1)} = \frac{\partial N}{\partial \delta} = \frac{(EA)^*}{L}$$
$$k_{lc(1,2)} = \frac{\partial N}{\partial \theta_i} = \frac{(EA)^*}{30} (4\theta_i - \theta_j)$$
(A.1)

$$\begin{aligned}
k_{lc(1,3)} &= \frac{\partial N}{\partial \theta_j} = \frac{(EA)^*}{30} (-\theta_i + 4\theta_j) \\
k_{lc(2,1)} &= \frac{\partial M_i}{\partial \delta} = \frac{(EA)^*}{30} (4\theta_i - \theta_j) \\
k_{lc(2,2)} &= \frac{\partial M_i}{\partial \theta_i} = \left(\frac{EI_1}{L} \right)^* + \frac{4(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{900} (24\theta_i^2 - 12\theta_i \theta_j + 9\theta_j^2) \\
k_{lc(2,3)} &= \frac{\partial M_i}{\partial \theta_j} = \left(\frac{EI_2}{L} \right)^* + \frac{(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{450} (-3\theta_i^2 + 9\theta_i \theta_j - 3\theta_j^2) \\
k_{lc(3,3)} &= \frac{\partial M_j}{\partial \delta} = \frac{(EA)^*}{30} (-\theta_i + 4\theta_j) \\
k_{lc(3,2)} &= \frac{\partial M_j}{\partial \theta_i} = \left(\frac{EI_2}{L} \right)^* + \frac{(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{450} (-3\theta_i^2 + 9\theta_i \theta_j - 3\theta_j^2) \\
k_{lc(3,3)} &= \frac{\partial M_j}{\partial \theta_j} = \left(\frac{EI_3}{L} \right)^* + \frac{4(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{900} (9\theta_i^2 - 12\theta_i \theta_j + 24\theta_j^2)
\end{aligned} \tag{A.1}$$

em que EA e EI são as rigidezes axial e à flexão da seção do elemento de comprimento L , constante durante a análise para consideração do comportamento elástico. δ , θ_i e θ_j são os graus de liberdade no sistema local referentes ao deslocamento axial, a rotação no nó i e no nó j , respectivamente. Os termos $(EA)^*$ e $(EI_i/L)^*$, com $(i = 1, 2, 3)$, são definidos na Seção 3.2.4, quando considera-se a não linearidade dos materiais.

A modificação das funções de interpolação para o deslocamento axial altera os termos da matriz de rigidez. Porém, a dedução apresentada nessa seção, toma como condição o comportamento elástico do material. Tal consideração é modificada na Seção 2.2.4.

Lista de publicações provenientes das pesquisas desenvolvidas ao longo do curso de Doutorado em Engenharia Civil

Publicações em revistas científicas

- SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; DEUS, L. R. R. M.; SILVEIRA, R. A. M., 2021. Plastic analysis of steel arches and framed structures with various cross sections. *Steel and Composite Structures*, 38(3), 257-270. DOI: 10.12989/scs.2021.38.3.257
- DEUS, L. R. R. M.; SILVEIRA, R. A. M.; LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**, 2020. Second-order inelastic analysis of shallow and non-shallow steel arches. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 17(3), e265. DOI: 10.1590/1679-78255941.
- GONÇALVES, G. A.; SILVEIRA, R. A. M.; **SILVA, J. L.**; SILVA, A. R. D., 2018. Inelastic second-order analysis of steel columns under minor-axis bending. *REM-International Engineering Journal*, 72(3), 405-414. DOI: 10.1590/0370-4467218720046.
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D.; ROCHA, P. A. S., 2021. Nonlinear formulation for stability analysis of semi-rigid steel and steel-concrete composite frames. (Em produção).
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; BATELO, E. A. P.; SILVEIRA, R. A. M., 2016 . Influência dos modelos de tensões residuais prescritos em códigos normativos no comportamento de perfis I. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 2, p. 299-317.
- SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D., 2016. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 2, p. 119-138.

Publicações em eventos científicos

- SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M.; LEMES, Í. J. M., 2019. Numerical simulation of the nonlinear soil-structure interaction problem. In: XL CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Natal, Rio Grande do Norte.
- DEUS, L. R. R. M.; **SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M.; LEMES, Í. J. M., 2019. Análise inelástica de segunda ordem de arcos metálicos com seção I. In: XL CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Natal, Rio Grande do Norte.
- DEUS, L. R. R. M.; **SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M., 2018. Advanced inelastic analysis of steel arches with tubular cross sections. In: XXXIX CILAMCE, Paris and Compiègne, France. XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. v. 1. p. 491-494.
- SILVA, L. M. C; SEGUNDO, J. S. R; SILVEIRA, R. A. M.; **SILVA, J. L.**, 2018. ESTUDO DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA VIA MASTAN2. In: Simpósio de Mecânica Computacional - SIMMEC, 2018. Mecânica das Estruturas, Vitória, Espírito Santo.
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M.; ROCHA, P. A. S., 2017. Numerical study of steel plane frames considering the semi-rigid connections and concentrated plasticity effects. EMI International Conference.
- SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R., 2017. Análise inelástica de segunda ordem de estruturas com seções transversais duplamente simétricas. In: XXXVIII CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianopolis, Santa Catarina.

- DEUS, L. R. R. M.; LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M., 2017. Advanced nonlinear analysis of shallow and non-shallow steel arches. In: XXXVIII CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianopolis, Santa Catarina.
- LEMES, Í. J. M.; BARROS, C. R.; **SILVA, J. L.**; BATELO E. A. P; SILVEIRA, R. A. M., 2017. Formulação numérica para simulação do comportamento de estruturas de concreto armado. In: XXXVIII CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianopolis, Santa Catarina. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2017-0667
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R.; ROCHA, P. A. S., 2017. Análise numérica de pórticos mistos de aço e concreto com ligações semirrígidas. In: XXXVIII CILAMCE Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianopolis, Santa Catarina. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2017-0671
- SILVA, J. L.**; LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R., 2016. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. In: XXXVII CILAMCE Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, DF, Brazil.
- LEMES, Í. J. M.; **SILVA, J. L.**; BATELO E. A. P; SILVEIRA, R. A. M., 2016. Influência dos modelos de tensões residuais prescritos em códigos normativos no comportamento de perfis i. In: XXXVII CILAMCE Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, DF, Brazil.

