

**Universidade Federal de Ouro Preto**

Escola de Minas  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
PROPEC

---

Dissertação

---

**Aplicação do Método Dos  
Elementos de Contorno (MEC)  
para a Avaliação de Tensões em  
Problemas 3D a partir de Campos  
de Deslocamentos Medidos  
Fotogrametricamente via  
Metodologia de ‘Structure from  
Motion’ (SfM)**

*Marcela Nicolato Genelhu*

Ouro Preto  
2021



**UFOP**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC) PARA A  
AVALIAÇÃO DE TENSÕES EM PROBLEMAS 3D A PARTIR DE CAMPOS DE  
DESLOCAMENTOS MEDIDOS FOTOGAMETRICAMENTE VIA  
METODOLOGIA DE ‘STRUCTURE FROM MOTION’ (SFM)**

**Marcela Nicolato Genelhu**

ORIENTADOR: Prof. Francisco Célio de Araújo, Dr.– Ing.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Ouro Preto, 12 de fevereiro de 2021.

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

G326a Genelhu, Marcela Nicolato .

Aplicação do Método Dos Elementos de Contorno (MEC) para a Avaliação de Tensões em Problemas 3D a partir de Campos de Deslocamentos Medidos Fotogrametricamente via Metodologia de 'Structure from Motion' (SfM). [manuscrito] / Marcela Nicolato Genelhu. - 2021.

114 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo.

Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Fotogrametria. 3. Mecânica Computacional. I. Araújo, Francisco Célio de. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 624.01

Bibliotecário(a) Responsável: Ângela Maria Raimundo - CRB6 1583



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
REITORIA  
ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Marcela Nicolato Genelhu**

**Aplicação do Método dos  
Elementos de Contorno (Mec) para a Avaliação de Tensões em Problemas 3d a Partir de  
Campos de Deslocamentos Medidos Fotogrametricamente Via Metodologia de 'Structure  
From Motion' (Sfm)**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Aprovada em 12 de fevereiro de 2021

### Membros da banca

Dr.-Ing. - Francisco Célio de Araújo - Orientador(a) - Universidade Federal de Ouro Preto  
D.Sc. - Marcilio Sousa da Rocha Freitas - Universidade Federal de Ouro Preto  
D.Sc. - Delfim Soares Junior - Universidade Federal de Juiz de Fora

Francisco Célio de Araújo, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 12/02/2021



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Celio de Araujo, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 12/02/2021, às 17:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0135393** e o código CRC **D3E62BCC**.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família pelo amor e apoio incondicional ao longo dos anos, que foi fundamental para a realização deste trabalho. Mãe, sua força sempre me inspirou a seguir em frente, pai, obrigada pelas palavras que sempre trazem tranquilidade e às minhas irmãs, Camila e Renata, que são inspiração e meu alicerce na vida. Amo vocês.

Ao meu orientador, Célio, por ser exemplo e referência de trabalho para mim. Mais do que os ensinamentos técnicos, certamente levo aprendizados de vida e a amizade dessa pessoa que tanto admiro.

Aos meus colegas e amigos de trabalho. Pillon, Enderson, Otávio e Bruno por todos os momentos, com vocês a jornada foi bem mais leve. Maicon, obrigada por todo o suporte e dedicação ao longo da caminhada.

Aos amigos que mesmo de longe apoiaram e fizeram a diferença. Virginie, Carlos e Camila obrigada estarem presentes e por me impulsionarem sempre.

Aos professores do PROPEC, por todo o aprendizado.

Às companhias: CAPES e CNPq. À CPFL e ANEEL pelo apoio e suporte financeiro no projeto de Pesquisa e Desenvolvimento que tive o prazer de fazer parte.

## RESUMO

Estruturas de engenharia de grande porte, como taludes e barragens, requerem constante monitoramento a fim de garantir a segurança de pessoas e do meio ambiente em torno delas. Este trabalho apresenta uma alternativa para o cálculo de distribuições de tensões em tempo real a partir da obtenção de campos de deslocamentos da superfície de sólidos ou estruturas utilizando-se da fotogrametria. À medida que a superfície da estrutura se deforma, o campo de deslocamentos é determinado a partir da captura de uma série de imagens. A técnica se baseia na utilização da metodologia Structure-from-Motion (SfM) para gerar uma nuvem de pontos tridimensional e em seguida aplica-se o método de Poisson para a reconstrução das superfícies 3D. Subsequentemente a superfície é tratada para aumentar o desempenho do modelo e reduzir a quantidade de memória necessária para armazenamento de dados. Com a malha triangular gerada e os campos de deslocamentos medidos fotogrametricamente, aplica-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para o cálculo dos valores de tensões e deslocamentos ao longo do modelo. No caso de forças de contorno desconhecidas, estas devem ser também calculadas. São apresentadas algumas análises a fim de comprovar a efetividade e o potencial da aplicação da metodologia proposta para o cálculo de distribuições de tensões e deslocamentos em tempo real em estruturas de grande porte.

## ABSTRACT

Large engineering structures such as embankments and dams require constant monitoring in order to guarantee the safety of people and the environment around these structures. This work presents an alternative for the calculation of stress distributions in real time from obtaining displacement fields from the surface of solids or structures using photogrammetry. As the surface of the structure deforms, a series of images is captured to determine the displacement field. The technique is based on the use of the Structure from Motion (SfM) methodology to generate the three-dimensional point cloud and then the Poisson method for the reconstruction of 3D surfaces is applied. Subsequently the surface is treated to increase the model's performance and reduce the amount of memory required for data storage. With the triangular mesh generated and the displacement fields measured photogrammetrically, the Boundary Element Method (BEM) is applied to calculate the stress values along the model. In the case of unknown contour forces, these must also be calculated. Some analyzes are presented in order to prove the effectiveness and the potential of the application of the proposed methodology for the calculation of stress distributions in real time in large structures.

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO .....	1
2.	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	5
2.1	Introdução .....	5
2.2	Formulação Integral do M.E.C .....	5
2.3	Implementação Numérica .....	10
2.4	Integração Numérica.....	15
2.4.1	Transformação de coordenadas polares triangulares .....	16
2.4.2	Transformação cúbica de Telles .....	19
2.4.3	Processo Combinado – Combinação da Transformação de Coordenadas Polares Triangulares e Transformação Cúbica de Telles .....	20
2.5	Solver iterativo e Acoplamento ec/ec .....	21
2.6	Consideração das forças de volume.....	25
2.6.1	Tensão em pontos internos .....	28
3.	MONITORAMENTO DE ESTRUTURAS 3D ATRAVÉS DA METODOLOGIA STRUCTURE FROM MOTION “SfM” E MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	31
3.1	Introdução .....	31
3.2	Metodologia Structure-from-Motion .....	31
3.2.1	Aquisição/pré-processamento de dados .....	32
3.2.1.1	Estereoscopia.....	33
3.2.1.2	Princípios da metodologia SfM.....	35
3.2.1.3	Pré-processamento de dados .....	35
3.2.2	Reconstrução 3D .....	36
3.2.2.1	Poisson .....	36
3.2.2.2	Grid Projection .....	37
3.2.2.3	Greedy Projection Triangulation.....	38



3.2.3	Tratamento do modelo 3D .....	40
3.3	Aplicação do MEC para o Cálculo de Tensões .....	42
3.3.1	Formulação do MEC.....	43
4.	APLICAÇÕES.....	46
4.1	Introdução .....	46
4.2	Aplicação 1: Viga Ensaída.....	46
4.3	Aplicação 2 - Talude Submetido a Deslocamento Prescrito.....	63
4.4	Aplicação 3 – Barragem de Enrocamento com Face de Concreto .....	83
4.5	Aplicação 4 – Barragem de Concreto .....	90
5.	CONCLUSÕES .....	97
5.1	Conclusões.....	97
5.2	Aspectos Futuros .....	98
6.	REFERÊNCIAS .....	99

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 2

Figura 2.1 - Representação do problema de valor de contorno .....	6
Figura 2.2 - Condições de contorno .....	8
Figura 2.3 - Elemento contínuo linear de três nós .....	10
Figura 2.4 - Elemento contínuo linear de quatro nós .....	11
Figura 2.5 - Elemento contínuo quadrático de oito nós.....	11
Figura 2.6 - Elemento descontínuo linear de três nós.....	12
Figura 2.7 - Elemento descontínuo linear de quatro nós .....	12
Figura 2.8 - Elemento descontínuo quadrático de oito nós .....	12
Figura 2.9 - Divisão dos elementos de contorno em subelementos triangulares.....	17
Figura 2.10 - Sequência de mapeamentos em coordenadas polares triangulares e coordenadas naturais .....	18
Figura 2.11 - Posição dos pontos de integração após a transformação de coordenadas polares triangulares .....	18
Figura 2.12 - Posição dos pontos de integração após a transformação cúbica de Telles .....	20
Figura 2.13 - Posição dos pontos de integração após o processo combinado .....	21
Figura 2.14 - Processo de subdivisão .....	22
Figura 2.15 - Matriz global do sistema acoplado .....	23
Figura 2.16 - Fluxograma do Algoritmo BE-SBS.....	25

### CAPÍTULO 3

Figura 3.1 – Correspondências pela limitação das linhas epipolares .....	33
Figura 3.2 – Caso geral de estereoscopia .....	34
Figura 3.3 – Exemplo de reconstrução 2D pelo método de Poisson .....	37
Figura 3.4 – Teste de visibilidade pelo método Greedy Projection Triangulation para o ponto R .....	39
Figura 3.5 – Exemplo de contração de aresta.....	40
Figura 3.6 – Exemplo de contração de vértices.....	41
Figura 3.7 Condições de contorno.....	44

## CAPÍTULO 4

Figura 4.1 - Viga ensaiada.....	47
Figura 4.2 - Região fotografada.....	47
Figura 4.3 - Malha – elementos de contorno .....	48
Figura 4.4 - Deslocamentos em z (mm) – contorno .....	53
Figura 4.5 - Deslocamentos em x (mm) – contorno .....	53
Figura 4.6 - Tensões normais em x (MPa) – contorno .....	53
Figura 4.7 - Deslocamentos em z (mm) – plano interno .....	54
Figura 4.8 - Deslocamentos em x (mm) – plano interno .....	54
Figura 4.9 - Tensões normais em x (MPa) – plano interno .....	54
Figura 4.10 - Deslocamentos em z (mm) – contorno .....	55
Figura 4.11 - Deslocamentos em x (mm) – contorno .....	55
Figura 4.12 - Tensões normais em x (MPa) – contorno .....	56
Figura 4.13 - Deslocamentos em z (mm) – plano interno .....	56
Figura 4.14 - Deslocamentos em x (mm) – plano interno .....	56
Figura 4.15 - Tensões normais em x (MPa) - plano interno.....	57
Figura 4.16 - Deslocamentos em z (mm) – contorno – Ansys .....	57
Figura 4.17 - Deslocamentos em x (mm) – contorno – Ansys.....	57
Figura 4.18 - Tensões normais em x (MPa) – contorno – Ansys .....	58
Figura 4.19 - Deslocamentos em z (mm) – plano interno – Ansys .....	58
Figura 4.20 - Deslocamentos em x (mm) – plano interno – Ansys.....	58
Figura 4.21 - Tensões normais em x (MPa) - plano interno – Ansys.....	59
Figura 4.22 - Regiões em análise .....	59
Figura 4.23 - Tensões no contorno - Região 1 .....	60
Figura 4.24 - Tensões no contorno - Região 2 .....	60
Figura 4.25 - Tensões no contorno Região 3.....	61
Figura 4.26 - Tensões no plano interno - Região 1 .....	61
Figura 4.27 - Tensões no plano interno Região 2.....	62
Figura 4.28 - Tensões no plano interno - Região 3 .....	62
Figura 4.29 - Malha – elementos de contorno .....	63
Figura 4.30 - Malha – elementos de contorno e ‘enclosing’ .....	64
Figura 4.31 - Região de aplicação dos deslocamentos fictícios .....	65

Figura 4.32 - Deslocamentos em x (cm) - contorno.....	65
Figura 4.33 - Deslocamentos em x (cm) – corte .....	66
Figura 4.34 - Deslocamentos em y (cm) – contorno .....	66
Figura 4.35 - Deslocamentos em y (cm) –corte .....	67
Figura 4.36 - Deslocamentos em z (cm) – contorno .....	67
Figura 4.37 - Deslocamentos em z (cm) – corte.....	68
Figura 4.38 - Tensões normais em x (N/cm <sup>2</sup> ) – contorno.....	68
Figura 4.39 - Tensões normais em x (N/cm <sup>2</sup> ) – plano interno.....	69
Figura 4.40 - Tensões normais em y (N/cm <sup>2</sup> ) – contorno.....	69
Figura 4.41 - Tensões normais em y (N/cm <sup>2</sup> ) – plano interno.....	70
Figura 4.42 - Tensões normais em z (N/cm <sup>2</sup> ) – contorno.....	70
Figura 4.43 - Tensões normais em z (N/cm <sup>2</sup> ) – plano interno.....	71
Figura 4.44 - Tensões cisalhantes $\tau_{xy}$ (N/cm <sup>2</sup> ) – contorno .....	71
Figura 4.45 - Tensões cisalhantes $\tau_{xy}$ (N/cm <sup>2</sup> ) – corte .....	72
Figura 4.46 - Tensões cisalhantes $\tau_{xz}$ (N/cm <sup>2</sup> ) – contorno .....	72
Figura 4.47- Tensões cisalhantes $\tau_{xz}$ (N/cm <sup>2</sup> ) – corte.....	73
Figura 4.49 - Tensões cisalhantes $\tau_{yz}$ (N/cm <sup>2</sup> ) – corte.....	74
Figura 4.50 - Malha – elementos finitos.....	75
Figura 4.51 - Deslocamentos em x (cm) - contorno.....	76
Figura 4.52 - Deslocamentos em y (cm) - contorno .....	76
Figura 4.53 - Deslocamentos em z (cm) - contorno .....	77
Figura 4.54 – Deslocamentos em pontos internos (x) .....	79
Figura 4.55 – Deslocamentos em pontos internos (y) .....	79
Figura 4.56 – Deslocamentos em pontos internos (z) .....	80
Figura 4.57 – Tensões normais em pontos internos (x).....	80
Figura 4.58 – Tensões normais em pontos internos (y).....	81
Figura 4.59 – Tensões normais em pontos internos (z).....	81
Figura 4.60 – Tensões cisalhantes em pontos internos (xy).....	82
Figura 4.61 – Tensões cisalhantes em pontos internos (xz) .....	82
Figura 4.62 – Tensões cisalhantes em pontos internos (yz) .....	83
Figura 4.63 – Seção transversal BEFC.....	84
Figura 4.64 – Malha elementos de contorno .....	85
Figura 4.65 – Deslocamentos em z (mm) - NAESY .....	86

Figura 4.66 – Deslocamentos em z (mm) – ANSYS 18.1.....	86
Figura 4.67 – Regiões de verificação de tensões.....	87
Figura 4.68–Tensões normais $\sigma_{zz}$ .....	87
Figura 4.69 – Deslocamentos em z.....	88
Figura 4.70 – Tensões normais $\sigma_{xx}$ .....	88
Figura 4.71 – Tensões normais $\sigma_{yy}$ .....	89
Figura 4.72 – Tensões normais $\sigma_{zz}$ .....	89
Figura 4.73 - Aspecto geral da barragem .....	90
Figura 4.74 – Malhas de elementos de contorno dos segmentos (sub-regiões) .....	91
Figura 4.75 – Malha elementos de contorno .....	92
Figura 4.76 – Deformada.....	92
Figura 4.77 – Deslocamentos em x (m).....	93
Figura 4.78 – Deslocamentos em y (m).....	93
Figura 4.79 – Deslocamentos em z (m).....	94
Figura 4.80 – Deslocamentos em x (m).....	94
Figura 4.81 – Deslocamentos em z (m).....	95
Figura 4.82 – Utilização de memória RAM (Mbytes) .....	95
Figura 4.83 – Tempo de processamento (s).....	96

## LISTA DE TABELAS

### CAPÍTULO 4

Tabela 4.1 - Propriedades do material .....	47
Tabela 4.2 - Deslocamentos medidos fotogrametricamente.....	48
Tabela 4.3 - Propriedades do solo .....	64
Tabela 4.4 – Coordenadas pontos internos.....	77

# 1. INTRODUÇÃO

---

O risco potencial de estruturas de engenharia de grande porte, como barragens e taludes, em termos de vidas humanas, impactos ambientais e econômicos exige o monitoramento constante de sua estabilidade. Ao longo das duas últimas décadas, o cálculo da estabilidade de estruturas geotécnicas tem sofrido modificações consideráveis devido ao aumento da disponibilidade de recursos computacionais e da evolução de pesquisas na área de métodos numéricos aplicados à análise de problemas de engenharia. Nesse contexto, o desenvolvimento contínuo de pesquisas voltadas para a simulação computacional acurada nas diversas classes de problemas de engenharia tem proporcionado segurança e economia nas etapas de construção e manutenção das estruturas.

Em problemas estruturais especificamente, esses métodos numéricos possibilitam, em geral o cálculo de respostas em termos de deslocamentos e tensões em pontos quaisquer do contorno ou do domínio de definição da estrutura em análise, possibilitando, portanto, o seu projeto seguro em termos tanto de colapso (ruptura) como de serviço. Dentre os métodos numéricos mais populares na comunidade de engenharia, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) (Cook, Malkus e Plesha, 1989; Zienkiewicz, e Taylor, 1989; Bathe, 2014) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia, Telles e Wrobel, 1984; Brebbia e Dominguez, 1987; Beer e Watson, 1992; Chen e Zhou, 1992; Banerjee, 1994; Becker, 1992; Bonnet, 1999), que são métodos de aplicabilidade geral na análise de sólidos e estruturas e que, essencialmente, se fundamentam na discretização de modelos contínuos com um número finito de graus de liberdade.

Apesar de mais utilizado, o Método dos Elementos Finitos apresenta algumas limitações (Becker, 1992). Dentre estas limitações, destaca-se a dificuldade de descrever regiões infinitas, de modo que, para a discretização de modelos de interação solo-estrutura, sobretudo em problemas tridimensionais, seria necessário um número muito elevado de graus de liberdade para descrever o domínio de interesse, gerando sistemas de equações de ordem muito elevada e um grande custo computacional em processamento e memória. Na verdade, em problemas envolvendo domínios que se estendem ao infinito, como e.g. o solo, as condições de regularidade, que se relacionam com a resposta nos pontos muito distantes ("far field") não são

convenientemente descritas via métodos que se baseiem no truncamento necessário do modelo, mesmo que nos modelos construídos o contorno seja considerado a uma distância significativamente grande. Nestes casos, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) apresenta-se como uma ótima alternativa, tendo como principais vantagens a redução de uma dimensão espacial do problema, a alta precisão e o fato de que as condições de regularidade em domínios abertos, mencionadas acima, são atendidas (Araújo, 2003; Araújo F. C., Dors C., Martins C. J., Mansur W. J., 2004).

A redução de uma dimensão espacial, no modelo contínuo, resulta da representação da resposta do problema em termos de valores de contorno, o que se reflete na necessidade de discretização apenas do contorno, diminuindo significativamente a ordem do sistema de equações algébricas (Brebbia, Telles e Wrobel, 1984; Brebbia e Dominguez, 1987; Beer e Watson, 1992; Chen e Zhou, 1992; Banerjee, 1994; Araújo et al., 2006). No entanto, a necessidade de técnicas especiais para a integração dos núcleos fundamentais singulares e quasi-singulares e para a resolução dos sistemas de equações algébricas resultantes não-simétricos aumentam, sobremaneira, a dificuldade de implementação eficiente do método.

Dado que o MEC é um método misto, que descreve, portanto, resposta em termos de deslocamentos e forças, e é baseado em soluções fundamentais para regiões homogêneas, ressalta-se que as correspondentes implementações devem também considerar as dificuldades inerentes à simulação de descontinuidades no campo de forças de contorno em problemas acoplados, como tipicamente ocorre na simulação de compósitos (essencialmente heterogêneos) e em demais problemas que envolvam interação de sistemas físicos. Neste caso, a utilização de elementos de contorno contínuos não possibilita a geração amigável de modelos de análise em situações práticas, onde normalmente as subestruturas apresentam detalhes geométricos complexos do tipo arestas e cantos. Desse modo, implementações convenientes do MEC devem incluir bibliotecas com elementos de contorno descontínuos e um processo automático de imposição das condições de acoplamento. Sem essas opções de análise, as vantagens mencionadas anteriormente do MEC podem ser completamente anuladas. Por outro lado, sendo os elementos de contorno descontínuos gerados a partir dos deslocamentos dos nós do correspondente elemento contínuo para seu interior, integrais quasi-singulares ocorrem, as quais também demandam algoritmos especiais de integração. Essas ideias têm sido implementadas no programa computacional 'NAESY' (acrônimo para Numerical Analysis of Engineering Systems), cujas bases foram iniciadas em Araújo (1994).



O principal objetivo deste trabalho é a adequação do Método dos Elementos de Contorno 3D para a avaliação de tensões em estruturas tridimensionais de grandes dimensões, típicas em problemas de interação solo-estrutura, a partir do campo de deslocamentos medido através de um processo fotogramétrico denominado *Structure-from-Motion* (SfM). Desse modo, apresenta-se uma alternativa de monitoramento de estruturas 3D através da associação entre o uso da fotogrametria para a determinação de deslocamentos no contorno das estruturas, e do Método dos Elementos de Contorno, que utiliza os deslocamentos obtidos fotogrametricamente para determinar tensões e deslocamentos em pontos internos da estrutura tridimensional.

Resumidamente, após determinada a resposta a partir de registros fotográficos, em termos de campos de deslocamentos, aplica-se o Método dos Elementos de Contorno para o cálculo das demais grandezas de interesse, tensões inclusive. Neste processo, utiliza-se a técnica de acoplamento genérico de subregião-por-subregião proposto em de Araujo; Gray (2008), de Araujo; d'Azevedo; Gray (2010), e de Araujo; d'Azevedo; Gray (2013), que possibilita acoplar um número qualquer de modelos de elementos de contorno (BE SBS technique). Esta técnica se baseia na utilização de "solvers" iterativos de Krylov do tipo gradiente biconjugado (BiCG) e gradiente biconjugado estabilizado (BiCGstab-m) preconditionados.

A dificuldade de acesso a lugares remotos torna o levantamento topográfico através de processos fotogramétricos, uma atividade que demanda alto investimento e considerável custo logístico (Westoby et al, 2012). A tecnologia *Structure-from-Motion* baseia-se nos princípios da estereoscopia, em que uma estrutura 3D pode ser reconstruída a partir de uma superposição de fotografias capturadas de posições diferentes. Seu diferencial se dá no fato de que o método utiliza um sensor em movimento para captação de imagens e a posição e orientação relativa das câmeras é obtida automaticamente, sem a necessidade da pré-determinação da posição de um conjunto de pontos 3D. Assim, a metodologia SfM se apresenta como um método fotogramétrico interessante para o levantamento topográfico de baixo custo e alta resolução, em regiões remotas de difícil acesso, já que pode ser implementada com o uso de "drones". Neste trabalho, associam-se as vantagens do Método dos Elementos de Contorno para problemas de engenharia do tipo solo-estrutura tridimensionais, definidos em domínios abertos com a metodologia *Structure-from-Motion* (SfM).

De forma sucinta, esta dissertação encontra-se estruturada conforme descreve-se a seguir.

- No capítulo 2, apresentam-se a formulação padrão, direta do M.E.C. para a análise de problemas de elasticidade 3D, que inclui a descrição dos tipos elementos de contorno disponíveis no programa, bem como as técnicas correlatas adotadas em todo o processo de algebrização da equação integral de contorno. Dentre essas técnicas, destacam-se a discussão acerca das estratégias especiais de integração para os tipos de elementos específicos considerados, a técnica de acoplamento para um número genérico de modelos de elementos de contorno e o processo de inclusão de forças de volume a partir de integrais de contorno.
- No capítulo 3, apresenta-se o método de monitoramento de estruturas 3D através da associação entre a metodologia Structure-from-Motion e do Método dos Elementos de Contorno;
- No capítulo 4, apresenta-se uma série de exemplos analisados via programa computacional desenvolvido (NAESY) visando validar e avaliar as estratégias implementadas;
- E finalmente, no capítulo 5, apresentam-se as conclusões da pesquisa realizada e sugerem-se alguns tópicos importantes para trabalhos futuros.

## **2. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

---

### **2.1 INTRODUÇÃO**

Dentre os diversos métodos numéricos para equações diferenciais parciais em problemas de engenharia, o Método dos Elementos de Contorno assumiu um papel importante ao longo das últimas décadas. O MEC se destaca por utilizar uma discretização numérica em dimensão espacial reduzida, apenas na superfície de contorno, em contraste com os métodos numéricos baseados em discretização de domínio, como o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas (MDF). Esse aspecto resulta em sistemas lineares de menor dimensão, o que, em geral, reflete-se em aumento de eficiência computacional. Isso se torna ainda mais evidente em casos de problemas definidos em domínios abertos, para os quais, no MEF e no MDF, é necessário truncar o domínio.

Este capítulo apresenta a formulação do Método dos Elementos de Contorno para problemas de elastostática tridimensionais, em cuja abordagem descrevem-se os aspectos analíticos relacionados à derivação da formulação integral de contorno para problemas de elasticidade, bem como as estratégias numéricas relacionadas com a sua algebrização. Neste contexto, apresentam-se as técnicas básicas voltadas para a implementação computacional do MEC, que envolvem, por exemplo, os algoritmos de integração numérica, estratégias para a inclusão de forças de volume, o acoplamento genérico de modelos de elementos de contorno (subregiões) e o processo de resolução dos sistemas algébricos resultantes.

### **2.2 FORMULAÇÃO INTEGRAL DO M.E.C**

Em problemas de elastostática, objetiva-se determinar, em um sólido sob atuação de um agente externo solicitante, a resposta em termos dos campos de deslocamentos, deformações e tensões, em um ponto qualquer deste sólido, a qual deve satisfazer às condições de contorno prescritas em  $\Gamma$  e às equações de equilíbrio no interior do sólido. Em caso de sólidos constituídos de material isotrópico linear-elástico, utilizando-se a relação constitutiva do material, essas equações de equilíbrio, estabelecidas inicialmente em termos de tensões, podem ser descritas em termos do campo de deslocamentos. Obtêm-se assim as chamadas equações diferenciais de Navier, dadas por

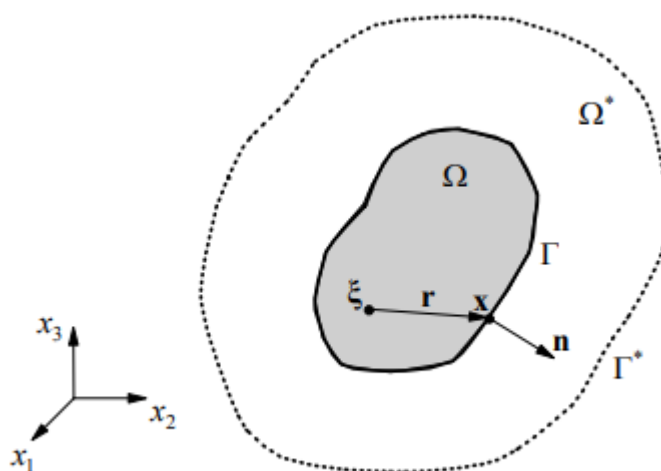
$$Gu_{i,jj} + \left(\frac{G}{1-2\nu}\right)u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (2.1)$$

Também com base nas relações constitutivas em função dos deslocamentos, expressam-se as forças no contorno como:

$$p_i = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu}\right)u_{m,m}n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i})n_j \quad (2.2)$$

Nas equações (2.1) e (2.2),  $G$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal e coeficiente de Poisson.  $b_i$  e  $n_i$  são, respectivamente, as componentes na direção  $i$  do vetor das forças de volume e vetor unitário normal ao contorno que aponta para fora do domínio, conforme apresentado na Figura 2.1.

**Figura 2.1 - Representação do problema de valor de contorno**



Estes problemas de elasticidade podem ser formulados por equações integrais aplicando-se teoremas de reciprocidade. Neste caso, utiliza-se o teorema de Betti-Rayleigh para a obtenção da respectiva formulação integral de contorno, que serve como ponto de partida para a derivação do Método dos Elementos de Contorno.

Para isso, é imprescindível a obtenção das soluções fundamentais em um domínio  $\Omega^*$  com contorno  $\Gamma^*$ , as quais podem ser usadas como um de estados elastoestáticos conhecidos na

relação de reciprocidade de Betti-Rayleigh. Aqui, adota-se uma solução fundamental obtida para um domínio elástico linear infinito sob a atuação de uma força de corpo dada por

$$b^*(x) = \delta(x, \xi) e_k \quad (2.3)$$

Nesta expressão,  $x$  é o ponto de campo,  $\xi$  é o ponto fonte,  $e_k$  é um vetor unitário na direção do eixo coordenado  $x_k$ , com  $k=1,2,3$  (caso 3D), resultando na equação diferencial a seguir:

$$G u_{ik,jj}^* + \left( \frac{G}{1-2\nu} \right) u_{jk,ji}^* + \delta(x, \xi) \delta_{ik} = 0 \quad (2.4)$$

O índice  $k$  foi adicionado e indica a direção em que a carga atua, o termo  $\delta_{ik}$  é o delta de Kronecker e  $\delta(x, \xi)$  é a função delta de Dirac. Em problemas elastostáticos tridimensionais, tem-se a seguinte solução (Kelvin):

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}] \quad (2.5)$$

Substituindo-se (2.5) em (2.2), obtém-se as tensões fundamentais de contorno para problemas 3D:

$$p_{ij}^*(x, \xi) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}] r_{,n} + (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \} \quad (2.6)$$

Nas expressões (2.5) e (2.6) anteriores,  $r$  é o módulo do vetor raio,  $r_{,i}$  é a derivada de  $r$  na direção  $i$  e  $r_{,n}$  é a derivada de  $r$  segundo à direção normal.

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r}$$

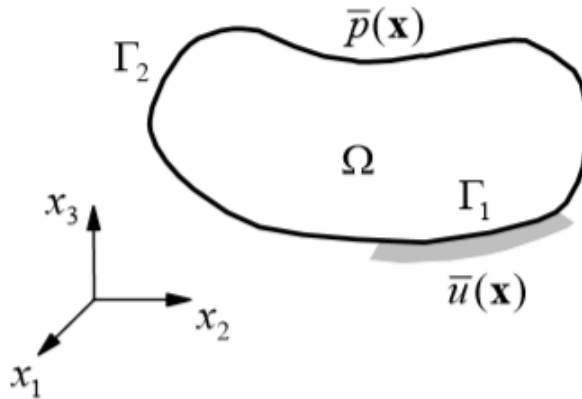
$$r_{,n} = r_{,i} n_i$$

Com as soluções fundamentais  $u_{ij}^*$  e as tensões de contorno fundamentais  $p_{ij}^*$  determinadas em um ponto qualquer, obtém-se então da relação de reciprocidade de Betti-Rayleigh a seguinte representação integral do campo de deslocamentos em  $\xi$  do sólido:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (2.7)$$

Como se vê dessa expressão é necessário que se conheçam os valores de contorno  $p(x)$  e  $u(x)$  em todo o contorno  $\Gamma$  do sólido para que se possa obter a solução do problema em um ponto  $\xi$  qualquer. Para isso, considera-se primeiramente  $\xi$  sobre  $\Gamma$ , de modo que se possa determinar os valores de contorno incógnitos – deslocamentos no contorno  $\Gamma_2$  e forças de contorno no contorno  $\Gamma_1$  (Figura 2.2).

**Figura 2.2 - Condições de contorno**



Eis que, neste caso,  $\xi$  localiza-se sobre o caminho e surgem integrais impróprias, havendo algumas delas que não convergem no sentido normal de integração (Riemanniano), devendo ser tomadas no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando o ponto fonte  $\xi$  localiza-se sobre o contorno  $\Gamma$ , a equação integral de contorno é genericamente escrita por

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (2.8)$$

Nesta equação, os valores de  $c_{ij}(\xi)$  são dados por

$$c_{ij}(\xi) = \delta_{ij} - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3\varepsilon_{,i}\varepsilon_{,j}] d\bar{\Gamma}_\varepsilon \right\} \quad (2.9)$$

sendo as integrais que envolvem  $p_{ij}^*$  são tomadas no sentido de valor principal de Cauchy e as demais integrais existem no sentido normal de integração.

É importante salientar que para a solução de problemas infinitos e semi-infinitos a equação integral de contorno atende às condições de regularidade para o comportamento das variáveis no campo infinito, valendo a relação

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_\rho} u_{ij}^*(x-\xi) p_i(x) d\Gamma - \int_{\Gamma_\rho} p_{ij}^*(x-\xi) u_i(x) d\Gamma \right\} = 0 \quad (2.10)$$

De posse da resposta no contorno  $\Gamma$ , é possível definir a resposta em qualquer ponto  $\xi$  no domínio  $\Omega$ , utilizando-se a expressão (2.7). Em problemas elastostáticos, o termo  $c_{ij}(\xi)$  é igual a  $\delta_{ij}$  para pontos internos. Desta forma, a integral de contorno para deslocamentos em pontos internos é dada por:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x, \xi) p_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(x, \xi) u_i(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(x, \xi) b_i(x) d\Omega \quad (2.11)$$

Derivando-se a equação (2.11) em relação às coordenadas cartesianas de  $\xi$ , obtém-se o tensor de deformações, e com a aplicação da Lei de Hooke obtém-se a expressão para o cálculo de tensões em pontos internos:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{lij}^*(x, \xi) p_l(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lij}^*(x, \xi) u_l(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lij}^*(x, \xi) b_l(x) d\Omega \quad (2.12)$$

sendo

$$u_{ij}^*(x, \xi) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,i} + \delta_{li}r_{,j} - \delta_{ij}r_{,l}) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,l}] \quad (2.13)$$

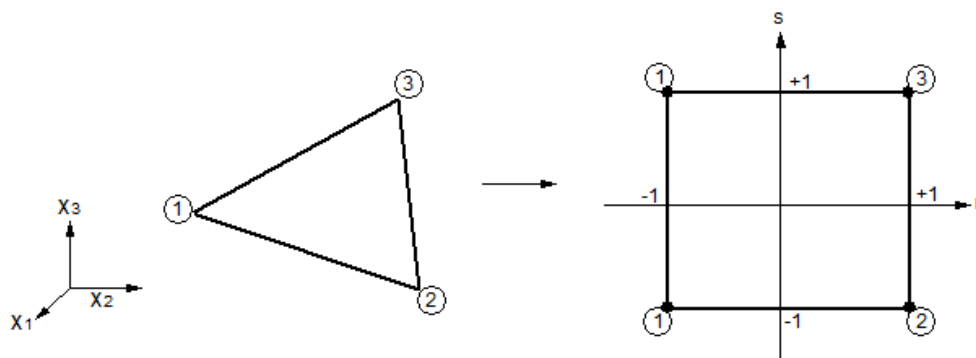
$$p_{ij}^*(x, \xi) = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3} \{3r_{,m} [v(\delta_{li}r_{,j} + \delta_{lj}r_{,i}) + (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,l} - 5r_{,i}r_{,j}r_{,l}] + 3v(r_{,l}r_{,j}n_i + r_{,l}r_{,i}n_j) + (1-2\nu)(3r_{,i}r_{,j}n_l + \delta_{li}n_j + \delta_{lj}n_i) - (1-4\nu)(\delta_{ij}n_l)\} \quad (2.14)$$

### 2.3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A equação integral de contorno para problemas elastostáticos apresentada em (2.7) é bastante complexa e para casos com diversas condições de contorno e geometrias variadas, sua solução analítica torna-se impraticável. Desta forma, é necessária a aplicação de métodos de discretização numéricos a fim de transformar o sistema de equações integrais em um sistema de finitos graus de liberdade, descritos por equações algébricas. Deve-se, portanto, discretizar o contorno em uma série de  $n$  elementos de contorno finitos isoparamétricos, com suas variáveis de campo e de geometria interpoladas a partir de seus valores nodais utilizando-se as mesmas funções de forma.

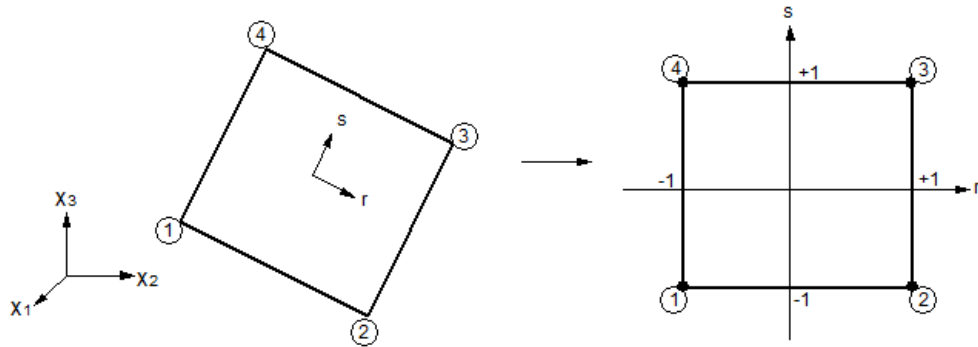
Neste trabalho, foram utilizados elementos lineares de três e quatro nós e elementos quadráticos de oito nós apresentados nas Figuras 2.3 a 2.5.

**Figura 2.3 - Elemento contínuo linear de três nós**

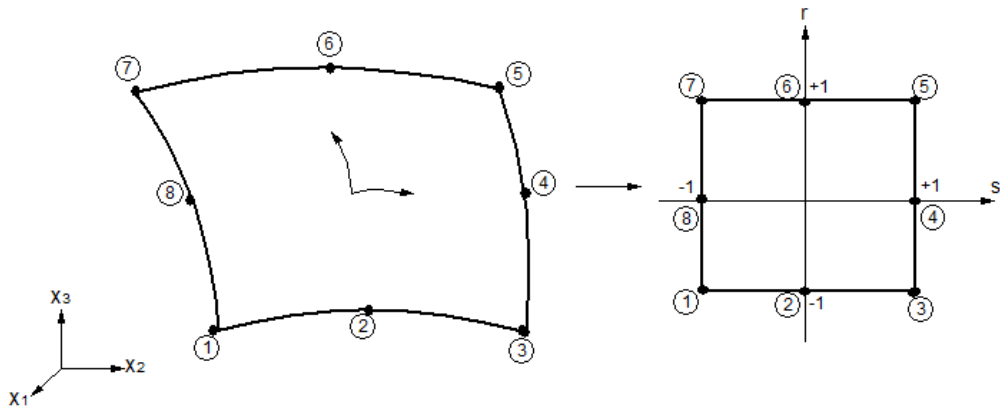




**Figura 2.4 - Elemento contínuo linear de quatro nós**



**Figura 2.5 - Elemento contínuo quadrático de oito nós**

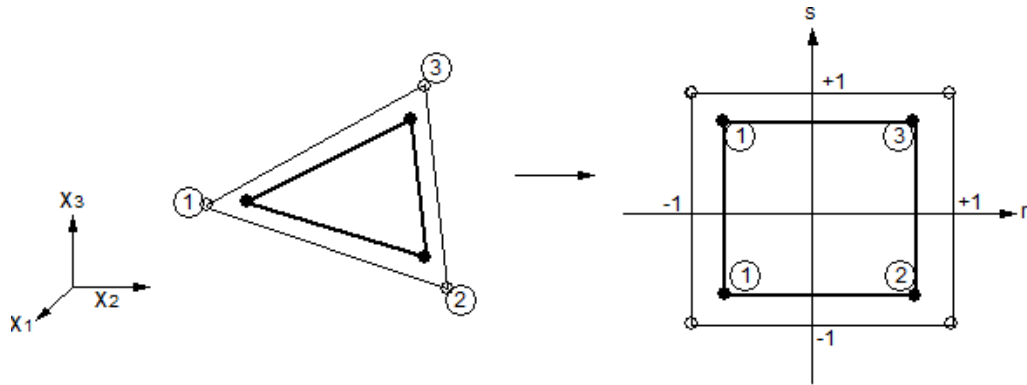


No caso dos elementos triangulares de três nós, as funções de forma são obtidas a partir das funções de forma do elemento quadrangular de quatro nós, colapsando-se os nós 1 e 4.

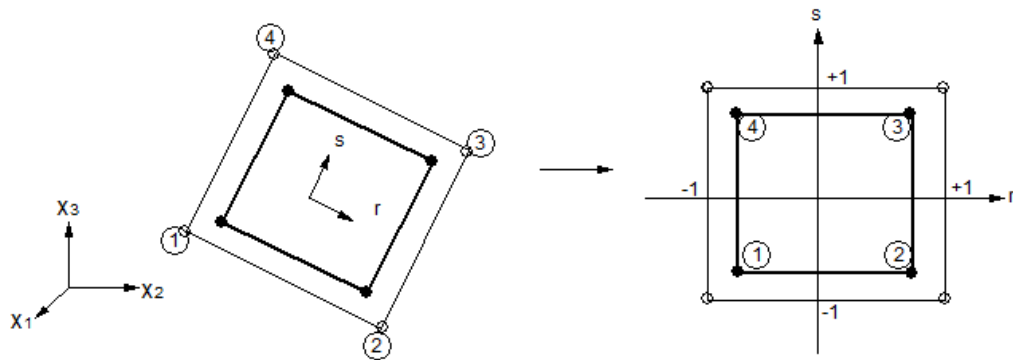
Além dos elementos contínuos, tem-se como opção a utilização de elementos descontínuos, que apresentam vantagens na simulação da descontinuidade de forças, facilitando a implementação de estratégias de acoplamento de modelos de elementos de contorno. Eles também serão úteis na simulação de forças e apoios concentrados. Ressalta-se que a geração dos elementos descontínuos é automática, simplesmente deslocando-se os nós dos elementos contínuos de uma distância “ $dde$ ”, em coordenadas naturais, para dentro do elemento. Dessa forma, obtêm-se novas coordenadas para os nós funcionais dos elementos descontínuos, e as respectivas funções de forma descontínuas, que serão usadas para a interpolação das variáveis de campo (deslocamento e força) sobre esses elementos. Note-se que a geometria desses elementos

continua a ser descrita pelas funções de forma do elemento contínuo (funções de forma dos nós não deslocados). A biblioteca de elementos descontínuos é apresentada nas Figuras 2.6 a 2.8.

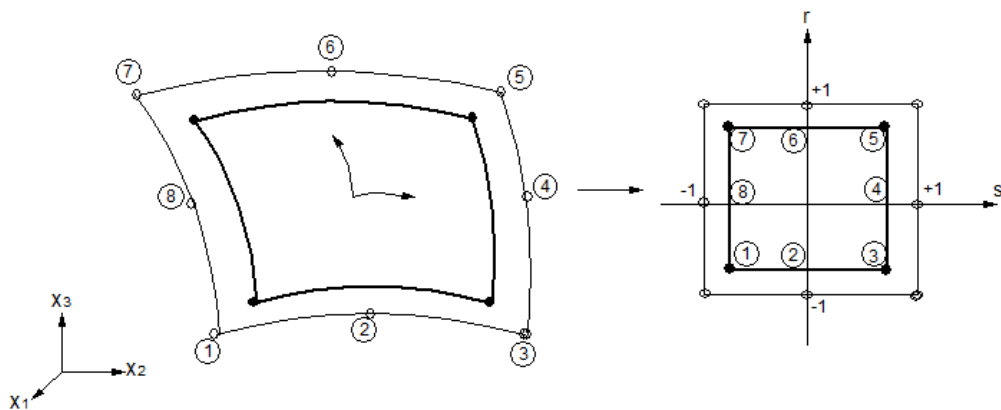
**Figura 2.6 - Elemento descontínuo linear de três nós**



**Figura 2.7 - Elemento descontínuo linear de quatro nós**



**Figura 2.8 - Elemento descontínuo quadrático de oito nós**



Com base nos elementos contínuos e descontínuos apresentados, a interpolação das variáveis de campo do contorno se dá a partir das relações:

Para elemento contínuo:

$$\begin{cases} u_i^{(n)}(x) = \sum_{q=1}^Q h_q u_{iq}^{(n)} \\ p_i^{(n)}(x) = \sum_{q=1}^Q h_q p_{iq}^{(n)} \end{cases} \quad (2.15)$$

Para elemento descontínuo:

$$\begin{cases} u_i^{(n)}(x) = \sum_{q=1}^Q h_q^d u_{iq}^{(n)} \\ p_i^{(n)}(x) = \sum_{q=1}^Q h_q^d p_{iq}^{(n)} \end{cases} \quad (2.16)$$

Obtém-se a equação de contorno discretizada substituindo-se a equação (2.15) na expressão (2.7):

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi) = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} u_{ij}^*(x, \xi) \sum_{q=1}^Q h_q p_{iq}^{(n)} d\Gamma_n - \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} p_{ij}^*(x, \xi) \sum_{q=1}^Q h_q u_{iq}^{(n)} d\Gamma_n \quad (2.17)$$

em que  $u_{iq}^{(n)}$  e  $p_{iq}^{(n)}$  são a  $i$ -ésima componente de deslocamento e forças de superfície no nó  $q$ , respectivamente,  $h_q$  é a função de forma referente ao nó  $q$  escrita em coordenadas naturais e  $Q$  é o número total de nós por elemento de contorno. É importante salientar que quando da utilização de elementos descontínuos, as funções de forma  $h_q$  na expressão (2.17) devem ser convenientemente substituídas pelas funções de forma dos elementos descontínuos  $h_q^d$ .

Na forma matricial, tem-se para todos os  $\xi$  sobre o contorno  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c(\xi_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c(\xi_2) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c(\xi_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Colocando em evidência o vetor de deslocamentos, chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} h_{11} + c(\xi_1) & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} + c(\xi_2) & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} + c(\xi_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

em que os coeficientes  $h_{ij}$  e  $g_{ij}$  das submatrizes são dados por:

$$g_{j,3(q-1)+1} = \int_{\Gamma_n} u_{ij}^*(x, \xi) h_q d\Gamma_n \tag{2.20}$$

$$h_{j,3(q-1)+1} = \int_{\Gamma_n} p_{ij}^*(x, \xi) h_q d\Gamma_n \tag{2.21}$$

No sistema de equações em (2.18) e (2.19), os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  são, respectivamente, os vetores de deslocamentos e forças no contorno  $\Gamma$ , e os coeficientes  $h_{ij}$  e  $g_{ij}$  são os coeficientes que resultam da integração dos núcleos fundamentais  $p_{ij}^*$  e  $u_{ij}^*$  sobre os elementos de contorno.

Sabe-se que inicialmente os valores de deslocamentos em  $\Gamma_2$  e de forças em  $\Gamma_1$  são desconhecidos e, portanto, deve-se realizar uma troca de colunas entre as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  para que todas as incógnitas fiquem do lado esquerdo da equação e todos os valores de contorno prescritos fiquem no lado direito. Surge assim o vetor  $\mathbf{y}$  (termo independente), obtendo-se um sistema de equações algébricas da forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{2.22}$$

em que  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de deslocamentos e forças de contorno desconhecidas,  $\mathbf{A}$  é a matriz que contém os coeficientes de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ .

Finalmente, resolvendo-se o sistema de equações em (2.22), obtém-se todos os valores de deslocamentos e forças no contorno  $\Gamma$ , e é possível calcular as respostas em pontos internos quaisquer do domínio.

## **2.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA**

Na formulação do M.E.C. tem-se, em geral, integrais não-singulares, quasi-singulares e singulares. Para o cálculo das integrais não-singulares (quando o ponto fonte  $\xi$  não pertence ao elemento sobre o qual se integra) utiliza-se a quadratura de Gauss–Legendre, que fornece resultados de forma eficiente. As integrais quasi-singulares acontecem quando o ponto fonte  $\xi$  não pertence ao elemento, mas aproxima-se bastante do contorno, ou seja,  $r$  assume valores muito pequenos. Isto ocorre normalmente em modelos com a utilização de elementos descontínuos ou na modelagem de domínios esbeltos. Neste caso, são necessários procedimentos especiais de integração para melhoria dos resultados e aumento da eficiência do algoritmo de integração (Araújo e Gray, 2008).

Quando o ponto fonte,  $\xi$ , está localizado sobre o elemento a ser integrado, tem-se núcleos fortemente singulares da ordem  $O(r^{-2})$  associados às forças fundamentais  $p_{ik}^*$ . Tais integrais existem apenas no sentido do valor principal de Cauchy e não é possível obtê-las através da aplicação direta da quadratura de Gauss-Legendre. Uma forma de determiná-las implicitamente é aplicando-se o critério de deslocamento de corpo rígido na equação 2.23:

$$c_{ii} + \mathbf{H}_{ii} = \begin{cases} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N h_{ij} \rightarrow \text{região finita} \\ \mathbf{I} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N h_{ij} \rightarrow \text{região infinita} \end{cases} \quad (2.23)$$

No programa computacional há 4 opções de processos de integração que podem ser escolhidos de acordo com a análise. São eles:

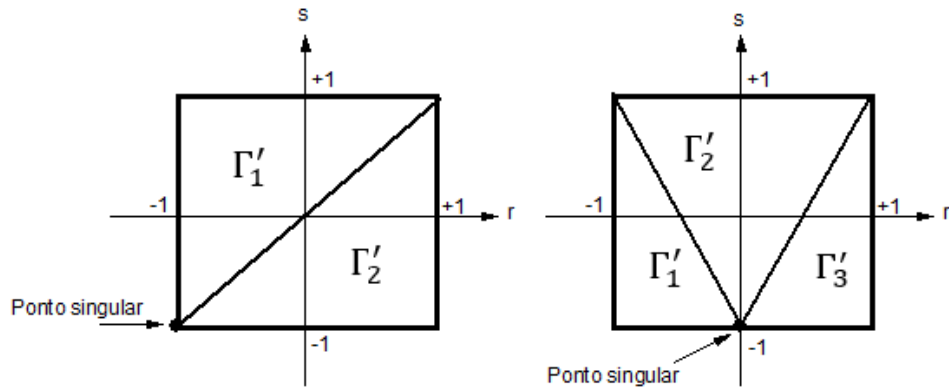
1. Quadratura de Gauss padrão;
2. Transformação de coordenadas polares triangulares;
3. Transformação cúbica de Telles;
4. Processo combinado (combinação entre a transformação de coordenadas polares triangulares e a transformação cúbica de Telles).

Os procedimentos 2, 3 e 4 são baseados na quadratura de Gauss e proporcionam melhorias na precisão da integração. Estes processos são descritos sucintamente nos itens a seguir.

#### **2.4.1 Transformação de coordenadas polares triangulares**

Através de uma sequência de mapeamentos de coordenadas, o procedimento busca aumentar a concentração de pontos de integração em torno do ponto singular, tornando seu cálculo mais eficaz. Inicia-se com a subdivisão do elemento de contorno mapeado em coordenadas naturais  $r$  e  $s$  em dois ou três subdomínios de integração triangulares, sendo a definição da quantidade de subdomínios definida de acordo com a posição do ponto singular. Esta subdivisão pode ser observada na Figura 2.9.

**Figura 2.9 - Divisão dos elementos de contorno em subelementos triangulares**



Após este processo, os subelementos triangulares são mapeados em quadrados de lado unitário utilizando-se coordenadas polares triangulares segundo a expressão:

$$r_i(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{q=1}^3 h_q^* \hat{r}_{iq} \quad (2.24)$$

em que  $r_i$  descreve as coordenadas naturais ( $r_1 = r$ ;  $r_2 = s$ ),  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são as coordenadas polares triangulares,  $\hat{r}_{iq}$  é a componente  $i$  do vetor de coordenadas do  $q$ -ésimo nó do elemento e  $h_q^*$  são as funções de forma da transformação, descritas pelas seguintes expressões:

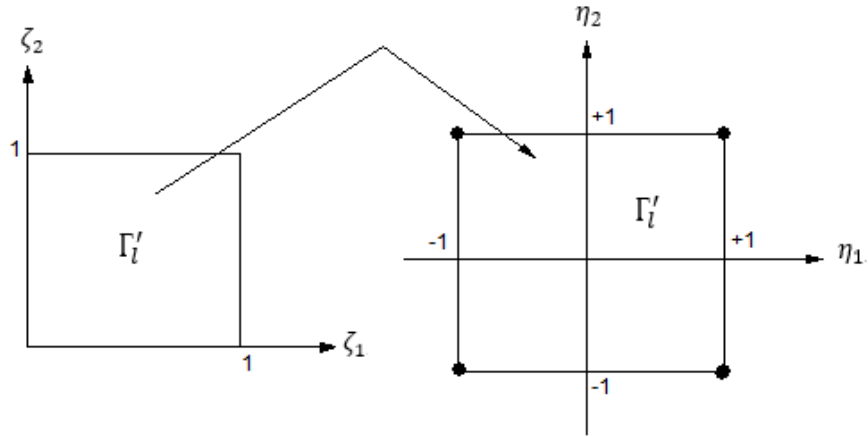
$$h_1^*(\zeta_1, \zeta_2) = (1 - \zeta_1)$$

$$h_2^*(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1(1 - \zeta_2)$$

$$h_3^*(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1\zeta_2$$

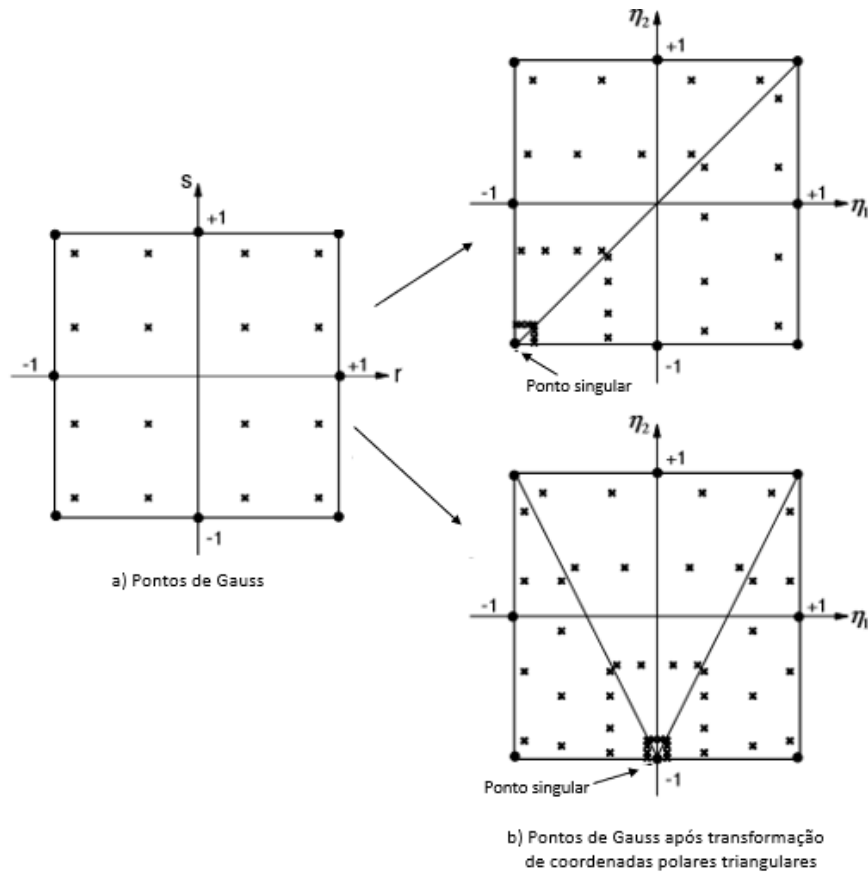
Então, o quadrado unitário é mapeado novamente em um espaço de coordenadas naturais  $\eta_1, \eta_2$  (Figura 2.10), e a quadratura de Gauss padrão pode ser aplicada.

**Figura 2.10 - Sequência de mapeamentos em coordenadas polares triangulares e coordenadas naturais**



Dessa forma, os pontos de Gauss são distribuídos de forma mais eficiente, conforme ilustrado na Figura 2.11.

**Figura 2.11 - Posição dos pontos de integração após a transformação de coordenadas polares triangulares**





### 2.4.2 Transformação cúbica de Telles

Trata-se de uma transformação polinomial do 3º grau que tem como objetivo uma maior eficiência na avaliação de integrais singulares e quasi-singulares. Este método proporciona uma redistribuição dos pontos de integração, aproximando-os do ponto singular.

Seja uma integral  $I$  (equação 2.25) singular em  $\bar{\eta}$ , a transformação cúbica de Telles consiste em descrever a variável  $\eta$  como um polinômio do 3º grau apresentado na equação 2.26:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (2.25)$$

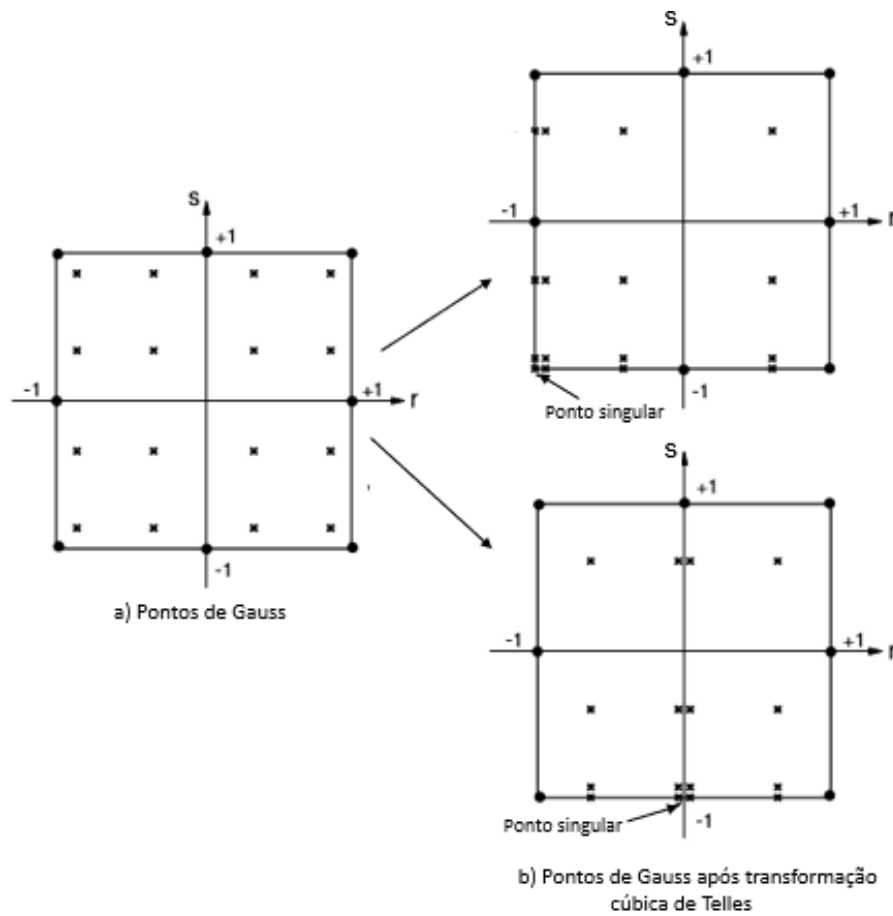
$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (2.26)$$

em que os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$  são obtidos sob a consideração das seguintes condições:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} \right|_{\bar{\eta}} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2} \right|_{\bar{\eta}} &= 0 \\ \eta(1) &= 1 \\ \eta(-1) &= -1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para uma integração de ordem 4x4, a distribuição dos pontos de integração após a transformação cúbica de Telles é apresentada na Figura 2.12.

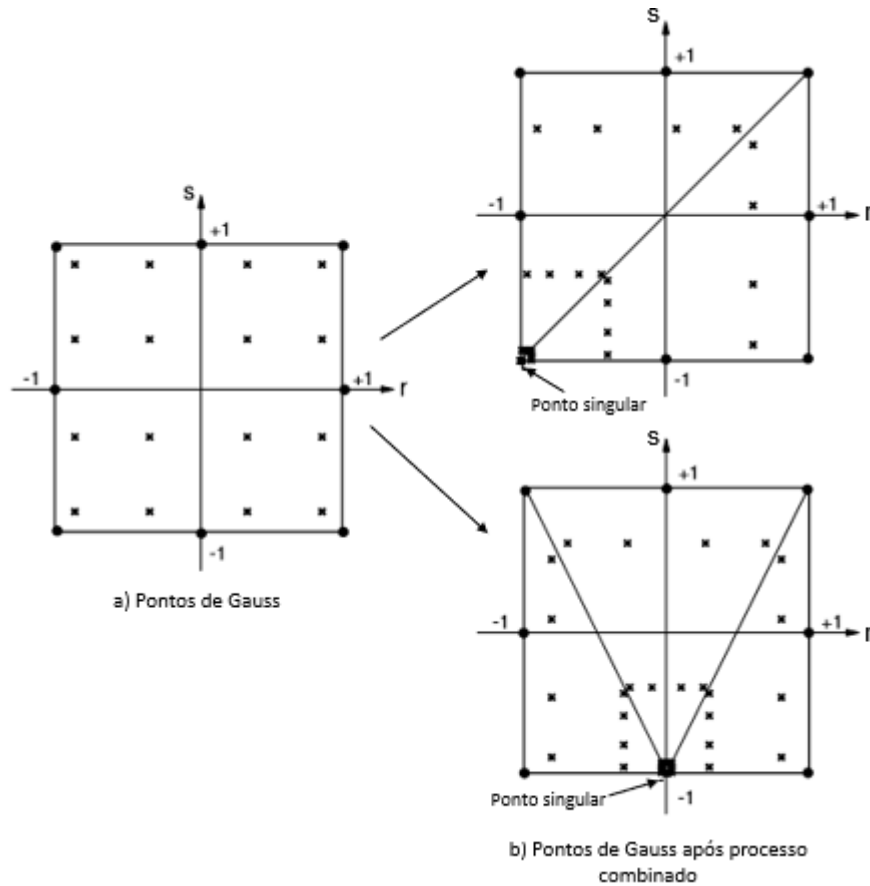
**Figura 2.12 - Posição dos pontos de integração após a transformação cúbica de Telles**



### 2.4.3 Processo Combinado – Combinação da Transformação de Coordenadas Polares Triangulares e Transformação Cúbica de Telles

O processo combinado surgiu da aplicação concomitante da transformação de coordenadas polares triangulares e da transformação cúbica de Telles. Assim, após a primeira transformação, a transformação de Telles é aplicada na direção  $\eta_1$ , ou seja, na direção da singularidade, obtendo-se como resultado a distribuição apresentada na figura 2.13.

Figura 2.13 - Posição dos pontos de integração após o processo combinado



## 2.5 SOLVER ITERATIVO E ACOPLAMENTO EC/EC

Em problemas de engenharia resolvidos através do Método dos Elementos de Contorno, subdividir o domínio do problema em sub-regiões pode ser necessário devido à complexidade do modelo, envolvendo fissuras, camadas etc., ou simplesmente devido a razões computacionais, para utilização de processamento paralelo (Araújo, Gray C&S 2010; Araújo et al., 2013). Esta subdivisão é feita transformando o modelo em diversas sub-regiões modeladas por elementos de contorno. Assim, para que o sistema seja corretamente solucionado, deve-se inserir as condições de interface entre as sub-regiões além das condições de contorno. Neste trabalho, adota-se a estratégia de acoplamento genérico EC/EC, que utiliza *solvers* iterativos em conjunto com elementos descontínuos, o que permite a resolução do sistema de equações

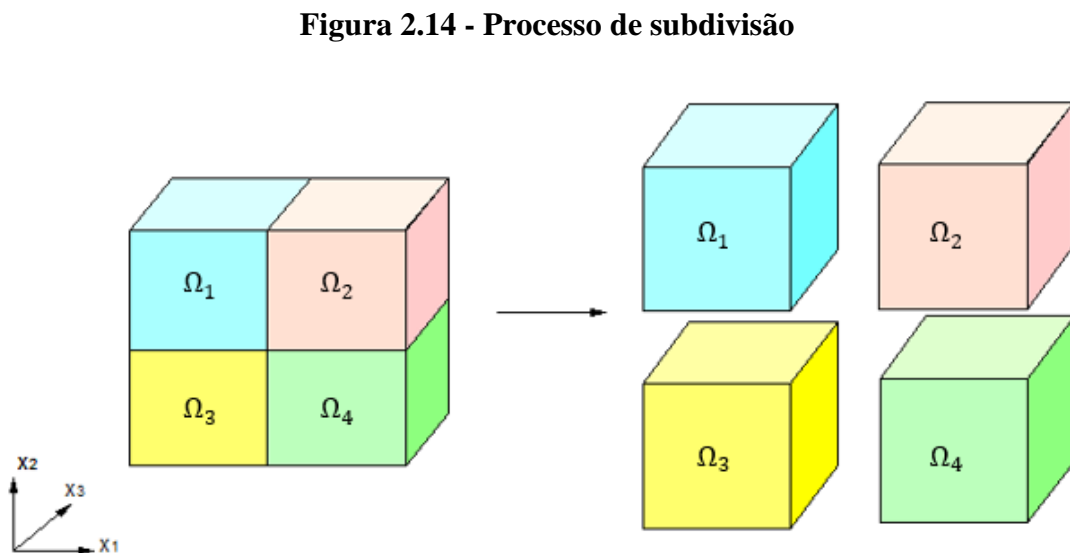
sem sua montagem, reduzindo consideravelmente a memória necessária pois despreza os blocos de coeficientes nulos da matriz.

Neste item, apresenta-se de forma sucinta a formulação de acoplamento subregion-by-subregion (BE-SBS) de subdivisão para o MEC adotada descrita em (Araújo et al., 2006) em conjunto com a descrição do funcionamento do *solver* iterativo Jacobi pré-condicionado Gradiente Bi-conjugado, denominado J-BiCG, utilizado - maiores detalhes em (Araújo, 1989; Araújo e Martins, 2001; Araújo et al., 2001 e Araújo et al., 2004).

Em um domínio subdividido em sub-regiões (Figura 2.14), conhecendo-se as condições de acoplamento, a técnica BE-SBS consiste em considerar cada sub-região do domínio separadamente, tratando-as como subsistemas independentes do ponto de vista numérico (Equação 2.28):

$$\mathbf{H}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{p}_i \quad (2.28)$$

em que  $\mathbf{H}_i$  e  $\mathbf{G}_i$  são as matrizes para a  $i$ -ésima sub-região e  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{p}_i$  são os vetores deslocamento e força de cada sub-região.



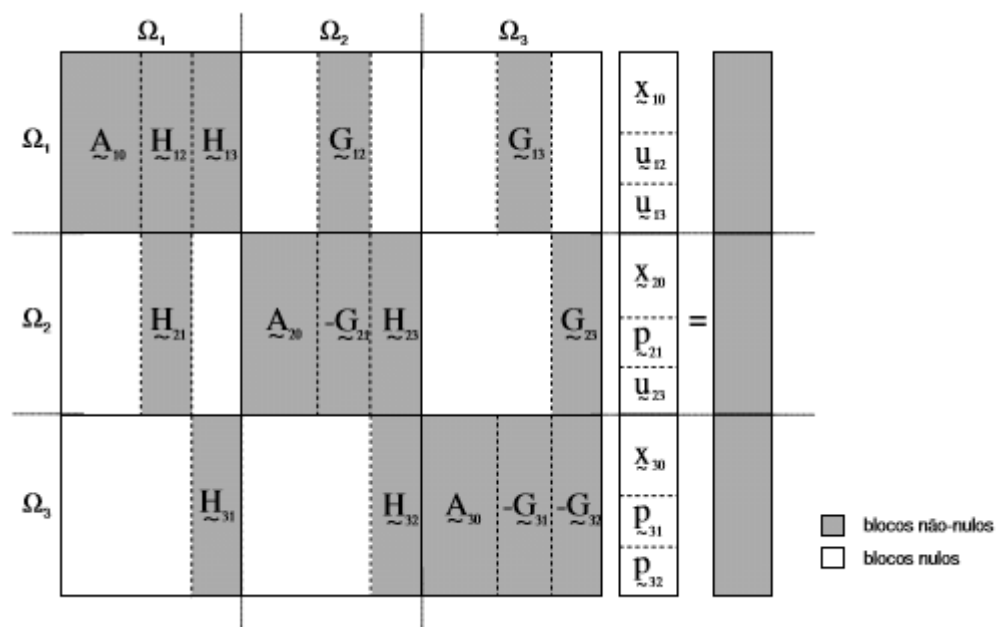
As condições de acoplamento envolvem as condições de compatibilidade e de equilíbrio, segundo as quais, em um nó de interface, impõem-se, respectivamente, deslocamentos iguais e forças opostas (acoplamento linear, ou seja, sem deslizamento entre interfaces acopladas). Estas condições são apresentadas nas equações 2.29 e 2.30:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j \quad (\text{compatibilidade}) \quad (2.29)$$

$$\mathbf{p}_i = -\mathbf{p}_j \quad (\text{equilíbrio}) \quad (2.30)$$

Assim, com os subsistemas da equação 2.26 e as condições de contorno e de compatibilidade, obtém-se a matriz do sistema acoplado. Por exemplo, para 3 sub-regiões, este sistema acoplado tem a o aspecto mostrado na Figura 2.15.

**Figura 2.15 - Matriz global do sistema acoplado**



Observa-se na matriz do sistema acoplado uma grande quantidade de blocos nulos. Desse modo, ressalta-se a relevância da utilização de *solvers* iterativos com alta taxa de convergência, que podem, além de promover um armazenamento eficiente dos coeficientes da matriz, reduzir o tempo de processamento pelo não realização de operações com os blocos de zeros da matriz (Araújo et al., 2006). Em problemas com muitas subregiões, com esparsidade normalmente elevada, o aumento de eficiência pode ser muito significativo.

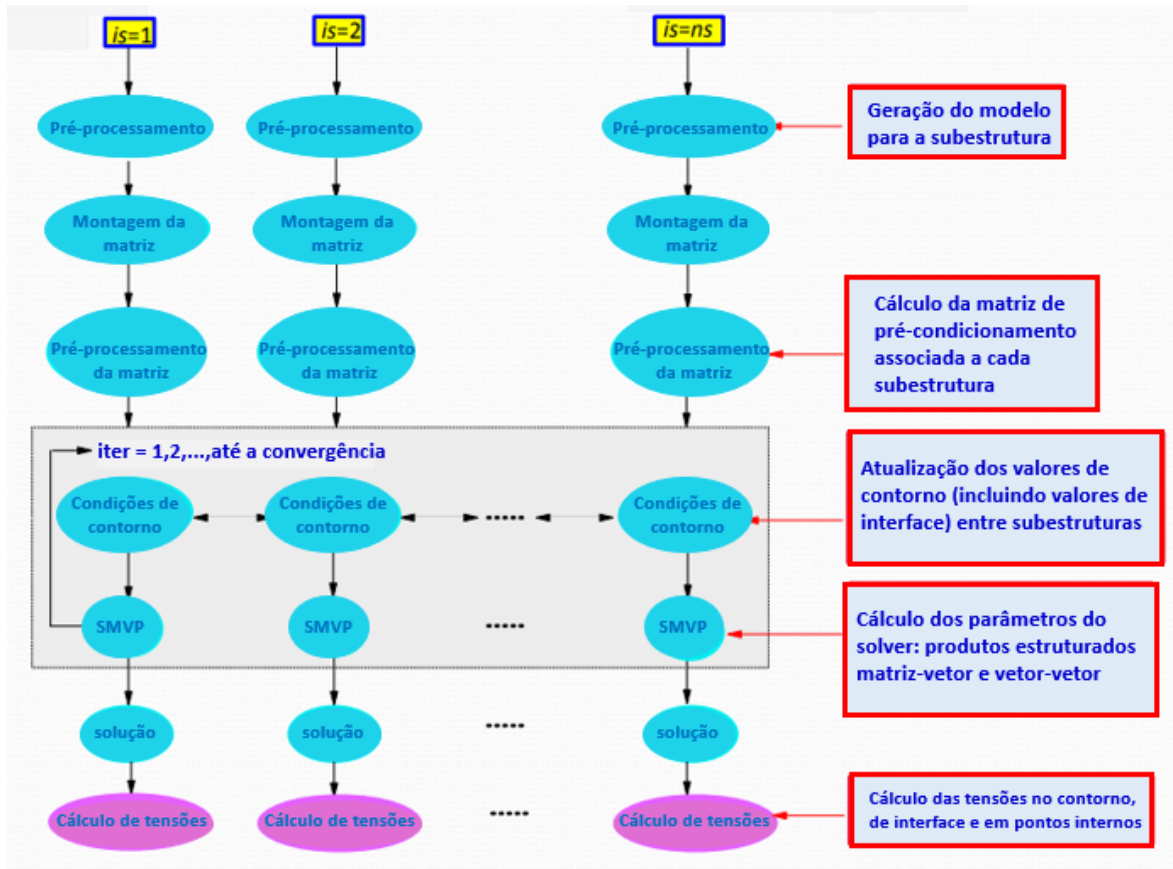
No programa computacional, utilizam-se os *solvers* iterativos de Krylov de gradiente biconjugado (BiCG) em que se emprega o preconditionador padrão de Jacobi (baseado na diagonal da matriz de coeficientes) para o aumento da eficiência do procedimento de solução.

Estes solvers não realizam transformações de matrizes, operam apenas produtos matriz-vetor e vetor-vetor e a convergência é verificada a partir de uma tolerância pré-determinada.

Além de tratar de forma ótima o problema de esparsidade da matriz do sistema acoplado, o algoritmo BE-SBS é dotado da estratégia da utilização de elementos descontínuos, muito úteis para simular a descontinuidade de forças em pontos situados em cantos e arestas de interfaces, simplificando assim, sobremaneira, o processo de acoplamento. Como apresentado anteriormente no item 2.3, apenas quando necessário, elementos descontínuos são gerados deslocando-se os nós funcionais de uma distância “ $dde$ ” para dentro do elemento, convenientemente simulando a descontinuidade de forças. Este deslocamento resulta em integrais quasi-singulares, devido à proximidade entre nós funcionais e elementos de contorno, entretanto, os procedimentos especiais de integração apresentados no item 2.5 são utilizados eficientemente na solução destas integrais.

Para visualização global das demais etapas do módulo computacional que estima a avaliação de tensões na estrutura em análise, apresenta-se, na Figura 2.16, o fluxograma completo do algoritmo BE-SBS.

Figura 2.16 - Fluxograma do Algoritmo BE-SBS



## 2.6 CONSIDERAÇÃO DAS FORÇAS DE VOLUME

Para a inclusão de forças de volume em formulações do Método dos Elementos de Contorno, é necessária a avaliação da integral de domínio:

$$\int_{\Omega} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) b_i(\mathbf{x}) d\Omega \quad (2.31)$$

Particularmente, nos casos de forças de volume constantes, como solicitação térmica estacionária, forças centrífugas devidas a uma velocidade angular constante em torno de eixo fixo e peso próprio de um corpo com densidade de massa uniforme, a integral de volume em (2.31) pode ser oportunamente transformada em uma integral de contorno, conforme apresenta-se abaixo. Para isso, toma-se a relação entre o tensor de Galerkin,  $G_{ij}^*$ , e a solução fundamental elastostática,  $u_{ij}^*$ , a qual para o caso 3D, é dada por:

$$u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) = G_{ki,mm}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{km,mi}^* \quad (2.32)$$

$$G_{ki}^* = \frac{1}{8\pi G} r \delta_{ik} \quad (2.33)$$

Fazendo a derivação, tem-se:

$$G_{ki,m}^* = \frac{1}{8\pi G} r_{,m} \delta_{ik} \quad (2.34)$$

$$G_{ki,mm}^* = \frac{1}{8\pi G} r_{,mm} \delta_{ik} \quad (2.35)$$

$$G_{km,m}^* = \frac{1}{8\pi G} r_{,m} \delta_{km} = \frac{1}{8\pi G} r_{,k} \quad (2.36)$$

$$G_{km,mi}^* = \frac{1}{8\pi G} r_{,ki} \quad (2.37)$$

em que:

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r} \Rightarrow r_{,ik} = \frac{r_{i,k}r - r_i r_{,k}}{r^2} \Rightarrow r_{,ik} = \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{r_i r_{,k}}{r} \quad (2.38)$$

De (2.38) tem-se particularmente:

$$r_{,mm} = \frac{\delta_{mm}}{r} - \frac{r_{,m}r_{,m}}{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \quad (2.39)$$

logo, tem-se:

$$G_{ki,mm}^* = \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{2}{r} \right) \delta_{ik} \quad (2.40)$$

$$G_{km,mi}^* = \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{r_i r_{,k}}{r} \right) \quad (2.41)$$



Substituindo-se (2.40) e (2.41) em (2.32) obtém-se a solução fundamental para o caso 3D:

$$u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \{(3-4\nu)\delta_{ik} + r_i r_j\} \quad (2.42)$$

De (2.31), tem-se para  $b_i(\mathbf{x})$  constante:

$$B_k = b_i \int_{\Omega} \left[ G_{ki,mm}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{km,mi}^* \right] d\Omega$$

$$B_k = b_i \int_{\Omega} \left[ G_{ki,m}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{km,i}^* \right]_{,m} d\Omega \quad (2.43)$$

Aplicando-se o teorema da divergência,  $\int_{\Omega} f_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} f_i n_i d\Gamma$ , resulta então:

$$B_k = b_i \int_{\Gamma} \left[ G_{ki,m}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{km,i}^* \right] n_m d\Gamma \quad (2.44)$$

Substituindo (2.34) em (2.44), tem-se:

$$B_k = \int_{\Gamma} \frac{1}{8\pi G} \left[ b_k r_{,n} - \frac{1}{2(1-\nu)} b_m r_{,m} n_k \right] d\Gamma \quad (2.45)$$

Para pontos  $\xi$  sobre o contorno  $\Gamma$ , esta parcela é adicionada ao vetor  $\mathbf{y}$  do sistema de equações em (2.28).

No cálculo de deslocamentos em pontos internos, considera-se o ponto  $\xi$  dentro do domínio  $\Omega$  e a integração se dá ao longo do contorno com a expressão (2.45). No caso de domínios abertos, há a necessidade da utilização de uma malha de *'enclosing elements'* para delimitar o volume de atuação do peso próprio do problema, pois por se tratar de uma força de volume, para volumes infinitos, essa força seria infinita. Portanto, delimita-se a priori, o volume de influência do peso próprio no modelo.

### 2.6.1 Tensão em pontos internos

Para a determinação de tensões em pontos internos com a consideração das forças de volume, é necessário avaliar a integral de domínio, conforme equação (2.10):

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(x, \xi) b_l(x) d\Omega \quad (2.46)$$

com

$$u_{ij}^*(x, \xi) = \left( \frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) u_{im,m}^* \delta_{ij} + G(u_{ii,j}^* + u_{ij,i}^*) \quad (2.47)$$

A partir da solução fundamental elastostática  $u_{ij}^*$  em (2.32), tem-se:

$$u_{ii,j}^*(x, \xi) = G_{il,mmj}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,mlj}^* \quad (2.48)$$

Assim,  $u_{ij}^*$  fica em função do tensor de Galerkin:

$$u_{ij}^*(x, \xi) = \left( \frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) \left[ G_{ml,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{mk,kl}^* \right]_{,m} \delta_{ij} + G \left\{ (G_{il,mj}^* + G_{jl,mi}^*) - \frac{1}{2(1-\nu)} (G_{im,lj}^* + G_{jm,li}^*) \right\}_{,m} \quad (2.49)$$

Para o caso de peso próprio com densidade de massa constante, tem-se da expressão (2.46) que  $b_l(x)$  é constante e, portanto, a integral torna-se:

$$b_l \int_{\Omega} u_{ij}^*(x, \xi) d\Omega \quad (2.50)$$

Substituindo (2.49) em (2.50), tem-se:

$$b_l \left\{ \left( \frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) \delta_{ij} \int_{\Omega} \left[ G_{ml,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{mk,kl}^* \right]_{,m} d\Omega \right. \\ \left. + G \int_{\Omega} \left[ (G_{il,mj}^* + G_{jl,mi}^*) - \frac{1}{2(1-\nu)} (G_{im,lj}^* + G_{jm,li}^*) \right]_{,m} d\Omega \right\} \quad (2.51)$$

E pelo teorema da divergência, tem-se:

$$b_l \int_{\Omega} u_{lij}^*(x, \xi) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{S}_{ij} d\Gamma \quad (2.52)$$

e então, a integral de contorno para o cálculo de tensões em pontos internos se dá por:

$$\int_{\Gamma} \bar{S}_{ij} d\Gamma = b_l \left\{ \left( \frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) \delta_{ij} \int_{\Gamma} \left[ G_{ml,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{mk,kl}^* \right] n_m d\Gamma \right. \\ \left. + G \int_{\Gamma} \left[ (G_{il,mj}^* + G_{jl,mi}^*) - \frac{1}{2(1-\nu)} (G_{im,lj}^* + G_{jm,li}^*) \right] n_m d\Gamma \right\} \quad (2.53)$$

Para o caso 3D, o tensor de Galerkin é dado pela expressão (2.33) e sua derivada segunda pode ser escrita como:

$$G_{ki,ml}^* = \frac{1}{8\pi Gr} (\delta_{ml} \delta_{ik} - r_{,m} r_{,l} \delta_{ik}) \quad (2.54)$$

segue então para o primeiro termo da integral de contorno (2.53):

$$\left( \frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) \delta_{ij} b_l \left[ G_{ml,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{mk,kl}^* \right] n_m = \\ \frac{1}{8\pi r} \left\{ \left( \frac{\nu(3-4\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)} \right) \delta_{ij} b_l n_l - \left( \frac{\nu}{(1-2\nu)(1-\nu)} \right) r_{,l} r_{,n} \delta_{ij} b_l \right\} \quad (2.55)$$

e para o segundo termo:

$$\begin{aligned}
Gb_l \left[ (G_{il,mj}^* + G_{jl,mi}^*) - \frac{1}{2(1-\nu)} (G_{im,lj}^* + G_{jm,li}^*) \right] n_m = \\
\frac{b_l}{8\pi r} \left\{ \left[ \frac{(3-2\nu)\delta_{li} - r_{,l}r_{,i}}{2(1-\nu)} n_j \right] + \left[ \frac{(3-2\nu)\delta_{lj} - r_{,l}r_{,j}}{2(1-\nu)} n_i \right] - (r_{,j}\delta_{li} - r_{,i}\delta_{lj})r_{,n} \right\}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Finalmente, a parcela da força de volume para o cálculo de tensões em pontos internos é dada por:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{ij} = \frac{b_l}{8\pi r} \left\{ \frac{\nu\delta_{ij}}{(1-2\nu)(1-\nu)} [(3-4\nu)n_l - r_{,l}r_{,n}] + \left[ \frac{(3-2\nu)\delta_{li} - r_{,l}r_{,i}}{2(1-\nu)} n_j \right] \right. \\
\left. + \left[ \frac{(3-2\nu)\delta_{lj} - r_{,l}r_{,j}}{2(1-\nu)} n_i \right] - (r_{,j}\delta_{li} - r_{,i}\delta_{lj})r_{,n} \right\}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

### **3. MONITORAMENTO DE ESTRUTURAS 3D ATRAVÉS DA METODOLOGIA STRUCTURE FROM MOTION “SfM” E MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

---

#### **3.1 INTRODUÇÃO**

O monitoramento de estruturas de engenharia tridimensionais como barragens é uma preocupação contínua para instituições governamentais devido ao risco potencial que apresenta em termos de vidas humanas, impactos ambientais e econômicos (Eletrobrás, 2003). Devido a esta importância, investimentos em sistemas de inspeção e monitoramento de obras de engenharia, especialmente barragens, têm crescido nos últimos anos.

Dentre as metodologias para monitoramento destas estruturas, há diversos procedimentos para a obtenção dos deslocamentos absolutos e relativos, respectivamente, pelos métodos geodésicos e geotécnicos. Entretanto, muitas vezes é difícil a interpretação destes deslocamentos na análise da estabilidade das estruturas. Assim, neste capítulo, apresenta-se o método de monitoramento de estruturas 3D através da associação entre a metodologia Structure-from-Motion, que calcula os deslocamentos no contorno das estruturas através de fotogrametria, e do Método dos Elementos de Contorno, que utiliza os deslocamentos medidos para determinar tensões e deslocamentos em pontos internos da estrutura tridimensional.

Vale ressaltar que a proposta deste trabalho é a criação de uma plataforma computacional integrada que utiliza a metodologia SfM para a geração de malhas de contorno e determinação de campos de deslocamentos em estruturas e, a partir dos dados obtidos pela SfM, usa a formulação do MEC para o cálculo de tensões em estruturas tridimensionais de grande porte. Dessa forma, trata-se de uma proposta multidisciplinar em que a parte de aplicação do MEC para o cálculo de tensões foi desenvolvida no âmbito deste trabalho, enquanto a estratégia SfM foi desenvolvida por outro grupo e será brevemente descrita neste capítulo.

## **3.2 METODOLOGIA STRUCTURE-FROM-MOTION**

O levantamento topográfico de alta resolução é normalmente associado a uma logística de alto custo e investimento de grande capital. A dificuldade de acesso a locais remotos com grandes equipamentos é o principal contribuinte para o alto custo no levantamento de dados.

A tecnologia ‘Structure-from-Motion’ (SfM) surgiu como uma alternativa fotogramétrica revolucionária e de baixo custo para o levantamento topográfico, que se diferencia dos métodos tradicionais por não necessitar do conhecimento prévio da localização 3D e pose da(s) câmera(s) ou da posição de pontos de controle de campo para facilitar a triangulação e reconstrução da cena (Westoby et al., 2012). Deste modo, a metodologia SfM reconhece a geometria da cena e a posição da câmera automaticamente e simultaneamente através da superposição de diversas fotografias tiradas de posições e ângulos diferentes.

Neste capítulo, a técnica ‘Structure-from-Motion’ é descrita sucintamente, sendo dividida em 3 etapas: aquisição/pré-processamento de dados com a utilização de câmeras estereoscópicas; o processamento da nuvem de pontos 3D (resultado da primeira etapa) para a reconstrução 3D do modelo e, finalmente, a etapa de tratamento do modelo 3D.

### **3.2.1 Aquisição/pré-processamento de dados**

A obtenção da localização 3D de pontos de correspondências em múltiplas fotografias, tiradas em posições e ângulos diferentes, é o principal problema abordado pela metodologia ‘Structure-from-Motion’ (Westoby *et al.*, 2012).

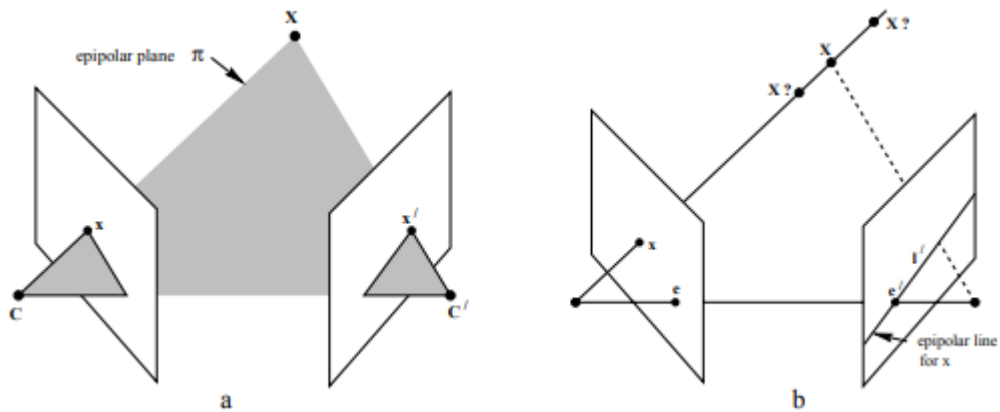
Com o objetivo de solucionar este problema, a aquisição de dados para a geração da nuvem de pontos 3D é feita com a consideração de princípios básicos da triangulação de imagens bidimensionais, também conhecida por estereoscopia. Nesta seção, apresenta-se uma descrição sucinta dos fundamentos da estereoscopia, noções da SfM e detalhes do pré-processamento de dados.

### 3.2.1.1 Estereoscopia

A sensação de profundidade em nossos cérebros é obtida a partir da superposição de duas ou mais imagens de uma mesma cena capturadas de posições e ângulos diferentes. Sendo este o princípio da estereoscopia, a técnica conta com dois problemas principais, o problema da correspondência e da reconstrução 3D.

A correspondência consiste em encontrar correlações entre pontos em duas ou mais imagens e na cena, assumindo-se que as fotografias foram tiradas com uma pequena variação de posição entre as câmeras. Esta suposição produz diversas falsas correspondências, tornando-se necessária a inclusão da limitação epipolar, suposição que determina que um ponto em uma imagem só pode estar relacionado com um ponto localizado na linha epipolar de outra imagem. Esta limitação pode ser exemplificada na Figura 3.1.

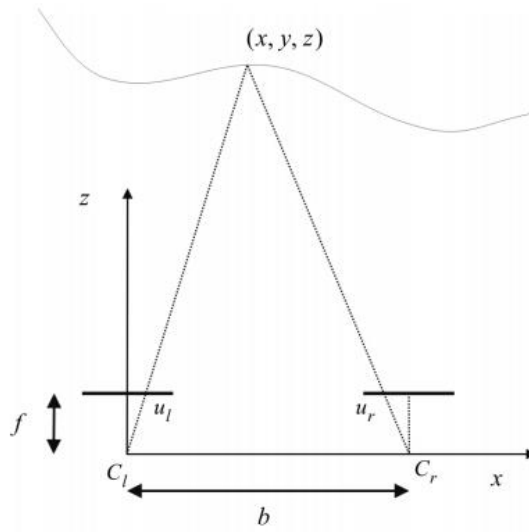
**Figura 3.1 – Correspondências pela limitação das linhas epipolares**



Fonte: Hartley R. e Zisserman A. (2003)

Para a visualização da estereoscopia, apresenta-se um caso simplificado na Figura 3.2.

**Figura 3.2 – Caso geral de estereoscopia**



Fonte: Siegwart *et al*(2011)

Para este caso simplificado, tem-se duas câmeras  $C_l$  e  $C_r$ , com eixos óticos paralelos, mesma orientação e separadas pela distância  $b$ – baseline. Na cena que se deseja reconstruir, há um ponto de coordenadas  $(x,y,z)$ , as medidas  $u_l$  e  $u_r$  indicam as coordenadas da imagem do ponto  $(x,y,z)$  de cada câmera, e  $f$  é a distância focal. A partir destas medidas e de relações trigonométricas, obtém-se as seguintes expressões:

$$\frac{f}{z} = \frac{u_l}{x} \tag{3.1}$$

$$\frac{f}{z} = \frac{-u_r}{b - x} \tag{3.2}$$

E então, a profundidade  $z$  pode ser calculada por:

$$z = b \frac{f}{u_l - u_r} \tag{3.3}$$

Pode-se perceber que de posse da distância focal  $f$ , da baseline  $b$  e da diferença de coordenadas da imagem  $u_l - u_r$ , chamada de disparidade, é possível determinar a profundidade de um ponto



qualquer da cena. Sendo esta última medida de extrema importância para a técnica de estereoscopia.

### **3.2.1.2 Princípios da metodologia SfM**

A metodologia SfM é mais adequada para levantamentos feitos por um sensor em movimento, que conseguem capturar a estrutura 3D de diversos pontos de vista, gerando uma grande superposição de imagens (Westoby *et al.*, 2012). Neste caso, com a utilização de drones.

De posse de múltiplas imagens da cena, a posição relativa das câmeras e a reconstrução da estrutura são obtidas automaticamente através do rastreamento de características correspondentes imagem por imagem. Faz-se uma estimativa inicial das posições da câmera e coordenadas da cena, que serão refinadas usando a minimização não-linear pelo método dos mínimos quadrados.

Como mencionado anteriormente, esta estratégia não conta com o conhecimento prévio de coordenadas de pontos na cena. Deste modo, a nuvem de pontos 3D é gerada em um sistema de coordenadas relativo que deve ser transformado para coordenadas reais. Para isso, após a obtenção dos dados, pode-se identificar características claramente visíveis na cena e na nuvem de pontos e fazer o levantamento das coordenadas reais destes pontos, denominados pontos de controle de campo, através de GPS ou outras técnicas. No entanto, pode ser mais conveniente demarcar, utilizando alto contraste, pontos na cena com coordenadas determinadas e centroide bem definido, simplificando a transformação de coordenadas.

### **3.2.1.3 Pré-processamento de dados**

Esta etapa consiste na remoção de distorções e ruídos das imagens capturadas. As câmeras produzem distorções resultantes do sistema ótico utilizado, sendo elas radiais e tangenciais. O tipo de lente e problemas no polimento podem ter como consequência os efeitos conhecidos como “olho-de-peixe” ou “barril”, que representam as distorções radiais. Por outro lado, as distorções tangenciais ocorrem por falhas no alinhamento entre as lentes e o plano do sensor. Há também dois tipos de ruídos que são mais comuns em imagens: ruídos do tipo Salt and Pepper e o ruído Gaussiano. O primeiro tem origem na transmissão de dados, onde algum pixel pode ser corrompido havendo alteração dos tons de cinza dos pixels vizinhos, enquanto o ruído

Gaussiano se deve a problemas de iluminação, altas temperaturas ou falhas na transmissão da imagem.

Para solucionar estes problemas, utiliza-se uma técnica de calibração do sistema através da obtenção de imagens de um tabuleiro de xadrez de diversas posições e ângulos diferentes para resolver os erros de natureza sistema. Para a remoção dos ruídos, utiliza-se um filtro de suavização não linear, denominado filtro adaptativo de Kuwahara (Papari, Petkov e Campisi, 2007).

### **3.2.2 Reconstrução 3D**

Para a reconstrução 3D da cena a partir da nuvem de pontos gerada na etapa anterior, deve-se estimar um vetor normal para cada ponto da nuvem, apontando na direção perpendicular à superfície aproximada do ponto. Todas as normais devem apontar no sentido para fora ou para dentro da superfície, para gerar uma boa reconstrução. Neste caso, utiliza-se o Normal Estimation, método em que se aproxima o ponto para um plano tangente da superfície com base na técnica dos mínimos quadrados.

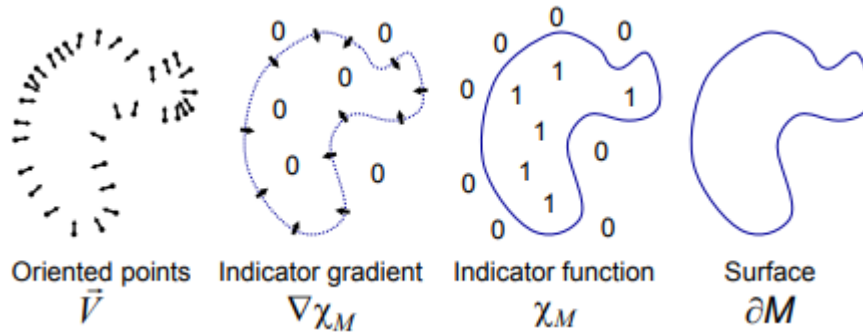
De posse da nuvem de pontos 3D e as respectivas normais, é possível reconstruir a cena fazendo-se interpolações dos pontos tridimensionais e gerando malhas poligonais. Nesta seção serão apresentados alguns dos algoritmos de código aberto mais referenciados na literatura: Poisson, Grid Projection e Greedy Projection Triangulation.

#### **3.2.2.1 Poisson**

A formulação de Reconstrução de Superfícies de Poisson de Kazhdan *et al.* (2006) oferece muitas vantagens. Este método considera todos os dados conjuntamente, sem segmentar em regiões para uma análise local e, portanto, a reconstrução de Poisson cria superfícies muito suaves, que aproximam robustamente dados com ruídos.

A reconstrução de superfícies por este método é expressa pela solução da equação de Poisson, que tem como base a relação integral entre os pontos orientados da superfície do modelo e a função indicadora do modelo. Basicamente, tem-se que o gradiente da função indicadora é um vetor de campo que se iguala a zero em quase todos os lugares, exceto quando próximo à superfície do modelo, onde é equivalente ao vetor normal à superfície.

**Figura 3.3 – Exemplo de reconstrução 2D pelo método de Poisson**



Fonte: Kazhdan *et al* (2006)

Dado um sólido  $M$ , com contorno  $\partial M$ , o problema se reduz a encontrar a função escalar  $\chi$  a qual se aproxima do vetor de campo  $\vec{V}$  definido pelo modelo, isto é  $\min_{\chi} \|\nabla\chi - \vec{V}\|$ . Aplicando-se o gradiente, este problema variacional se transforma em um problema padrão de Poisson: cálculo da função escalar  $\chi$  cujo Laplaciano é equivalente à divergência do vetor de campo  $\vec{V}$  conforme descrito na expressão (3.4).

$$\Delta\chi \equiv \nabla \cdot \nabla\chi = \nabla \cdot \vec{V} = b \frac{f}{u_l - u_r} \quad (3.4)$$

### 3.2.2.2 Grid Projection

Este método utiliza o conceito de *extremal surfaces* que, diferentemente das isosuperfícies, podem ser superfícies abertas e sem orientação. A Poligonização de Superfícies Extremas de Li *et al.* (2010) apresenta um algoritmo para reconstrução de superfícies extremas de simples implementação, aplicável a grids uniformes e adaptáveis, além de preservar propriedades estruturais do modelo.

Considera-se  $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escalar e  $n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}P^{d-1}$  uma função vetor não-orientada, ambas definidas sobre o domínio  $D \in \mathbb{R}^d$ . As superfícies extremas são definidas por:

$$S = \left\{ x \mid x \in \text{arglocalmin}_{y \in l(x, n(x))} s(y) \right\} \quad (3.5)$$

Em que  $l(x, n(x))$  descreve a linha que passa por  $x$  com a direção  $n(x)$ . Intuitivamente, tem-se que  $S$  é formada por todos os pontos  $x$  cuja função escalar é mínima ao longo da direção em  $x$ .

Inicia-se com a consideração da superfície crítica, formada pelos pontos críticos de  $s$  (pontos em que a derivada é igual a zero), restringida à linha  $l(x, n(x))$ . Nota-se que estes pontos podem ser máximos locais, pontos de inflexão ou pontos mínimos locais (localizados na superfície extrema). Desta forma, a superfície extrema é parte da superfície crítica.

Tomando-se uma vizinhança suficientemente pequena de  $x$ , onde  $n$  é uma função contínua não-orientada, tem-se que  $n(x)$  é bem definida e que a variação nas direções representadas por  $n$  tornam-se pequenas o bastante. Sendo  $\nabla s(x)$  o vetor gradiente de  $s$ , então a superfície crítica é dada pelo conjunto de pontos em que a equação (3.6) vale zero.

$$g(x) = \vec{n}(x) \cdot \nabla s(x) \quad (3.6)$$

A partir da equação (3.6), define-se que, dada uma função suave escalar  $s$  em  $\mathbb{R}^d$ , a superfície extrema é uma superfície com contorno aberto, em que suas extremidades se dão na descontinuidade de  $n$ , ou nos pontos de inflexão de  $s$  restringidos às linhas  $l(x, n(x))$ .

### 3.2.2.3 Greedy Projection Triangulation

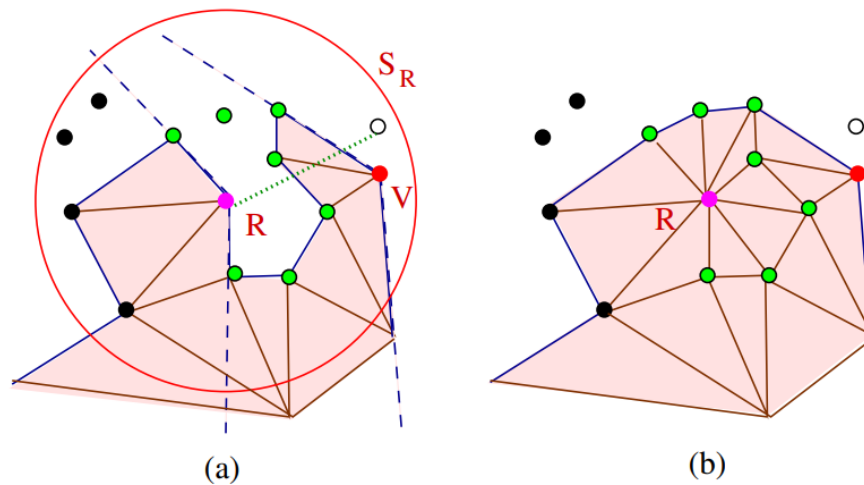
Esta técnica se baseia no princípio da construção incremental da superfície. A ideia é construir diretamente, a partir das propriedades de orientação da superfície de pontos dados, a superfície interpolada ou aproximada da nuvem de pontos 3D. Como exemplo deste método, dado um conjunto de pontos  $P$ , inicia-se com um bordo da superfície, conectando-se dois de seus pontos localizados na vizinhança da superfície. Então o bordo é sucessivamente estendido através da conexão iterativa de triângulos nas bordas da superfície emergente (Mencle Muller, 1997).

Neste caso, será utilizado o algoritmo desenvolvido por Zoltan *et al.* (2009). Este método utiliza uma técnica para distinguir duas camadas de superfície por um critério de distância. Inicia-se com a consideração dos vértices de um triângulo e conecta novos triângulos até que todos os pontos sejam considerados ou até que não haja mais triângulos válidos a serem conectados. No

segundo caso, o algoritmo escolhe um novo triângulo entre os pontos não conectados e reinicia-se a triangulação. Uma descrição sucinta do algoritmo é apresentada a seguir:

- i) Para um ponto  $p$ , seleciona-se uma vizinhança  $k$  através da procura dos pontos vizinhos dentro de uma esfera de raio  $r = \mu d_0$ , em que  $\mu$  é uma constante definida pelo usuário,  $d_0$  é distância do ponto  $p$  até o ponto mais próximo da vizinhança  $k$  e, portanto o raio  $r$  adapta-se de acordo com a densidade de pontos da vizinhança  $k$ ;
- ii) A vizinhança é projetada em um plano aproximadamente tangencial à superfície formada pela vizinhança e o ponto  $p$ ;
- iii) Então os pontos são selecionados pela visibilidade (conforme Figura 3.4) e conectados a  $p$  e pontos consecutivos por arestas, formando triângulos utilizando critérios de ângulo mínimo ótimo e ângulo máximo.

**Figura 3.4 – Teste de visibilidade pelo método Greedy Projection Triangulation para o ponto R**



Fonte: Gopi e Krishnan (2002)

Na Figura 3.4(a) há um exemplo de teste de visibilidade para o ponto R, em que os pontos pretos estão atrás das arestas de borda de R, os pontos brancos são ocultados por arestas, o ponto V não se conecta a R pois está atrás de suas arestas limite. Na Figura 3.4(b) pode-se verificar a malha resultante do método para o ponto R dentro da esfera de vizinhança  $S_R$ .

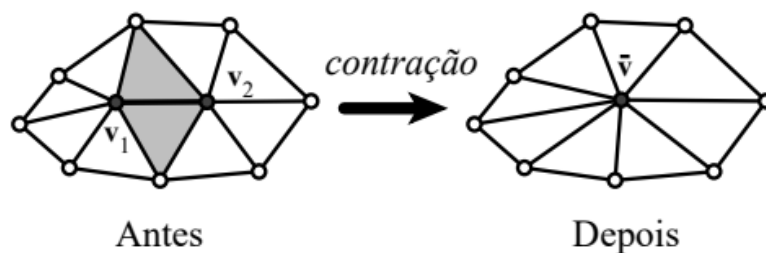
### 3.2.3 Tratamento do modelo 3D

Esta etapa é de importância fundamental para aumentar o desempenho do modelo e reduzir a quantidade de memória necessária para armazenamento de dados. Tendo em vista que a fase de aquisição de dados se dá em um ambiente não controlado, torna-se necessária a utilização de técnicas para eliminação de ruídos, objetos posicionados indevidamente na cena etc. Além disso, o sensor responsável pela geração da nuvem de pontos 3D não é capaz de distinguir áreas muito detalhadas de áreas planas, utilizando a mesma quantidade de pontos para descrever ambas. Dessa forma, geram-se dados desnecessários para a reconstrução 3D do modelo e consequentemente, há uma perda na eficiência no processamento e armazenamento de dados.

Existem métodos para a simplificação de superfícies que reduzem a quantidade de faces e pontos utilizados para descrever a superfície do modelo 3D. Estes métodos, classificam-se em algumas categorias: mesclagem de faces coplanares, re-tiling, otimização da função energia, vertex clustering e a decimação controlada de vértices/faces/arestas.

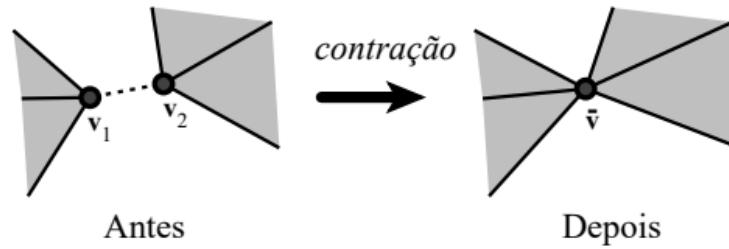
Com base na pesquisa desenvolvida por Cignoni et al (1998), o algoritmo *Quadric error metrics simplification* desenvolvido por Garland e Heckbert (1997) se destaca pelo menor tempo de processamento e melhores erros médios. Neste método, a simplificação de superfícies se dá a partir da contração iterativa de pares de vértices que pode ser visualizada nas Figuras 3.5 e 3.6.

**Figura 3.5 – Exemplo de contração de aresta**



Fonte: Garland e Heckbert (1997)

**Figura 3.6 – Exemplo de contração de vértices**



Fonte: Garland e Heckbert (1997)

Seja um par de vértices  $v_1$  e  $v_2$ , sua contração pode ser escrita por  $(v_1, v_2) \rightarrow \bar{v}$ , em que  $v_1$  e  $v_2$  são deslocados para a nova posição  $\bar{v}$  e todas as conexões de  $v_1$  e  $v_2$  passam a conectar-se ao vértice  $\bar{v}$ , eliminando-se as arestas degeneradas.

A determinação de pares de vértices válidos deve ser feita no início do algoritmo, assumindo-se que os pares são válidos se:

- i.  $\|v_1 - v_2\| < t$ , sendo  $t$  um parâmetro de limite pré-definido, ou
- ii.  $(v_1, v_2)$  é uma aresta.

Após essa verificação, o algoritmo utiliza uma função de custo para a determinação das contrações a serem realizadas. Para isso, associa-se uma matriz simétrica  $Q_{4 \times 4}$  a cada vértice  $v = [v_x v_y v_z 1]^T$ , cujo erro quadrático se dá pela expressão (3.7):

$$\Delta(v) = v^T Q v \quad (3.7)$$

Dessa forma, para cada contração, o erro quadrático será a soma dos erros do par de vértices  $v_1$  e  $v_2$ :

$$\bar{Q} = Q_1 + Q_2 \quad (3.8)$$

Outro passo importante do algoritmo é a determinação da posição do novo vértice  $\bar{v}$ . Seria conveniente selecionar um dos vértices ( $v_1$  ou  $v_2$ ) ou o ponto médio entre eles. No entanto, tendo em vista que a função  $\Delta$  é quadrática, a determinação de seu mínimo se dá a partir de um

problema linear e pode-se determinar a posição ótica de  $\bar{v}$  que minimiza o erro  $\Delta(\bar{v})$ . Desta forma, obtém-se  $\bar{v}$  resolvendo-se a expressão (3.9):

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\partial \Delta}{\partial y} = \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

Finalmente, deve-se obter a matriz  $Q$  inicial, a partir da qual se deriva o erro  $\Delta$ . Para obter-se o erro quadrático, foi selecionada a heurística dada por Ronfard e Rossignac (1996), em que cada vértice é a solução da interseção dos planos dos triângulos que se conectam a este vértice. Dessa forma, o erro deste ponto será dado pela soma do quadrado das distâncias para este conjunto de planos:

$$\Delta(v) = \Delta\left([v_x v_y v_z 1]^T\right) = \sum_{p \in \text{planes}(v)} (p^T v)^2 \quad (3.10)$$

Sendo  $p = [a \ b \ c \ d]^T$  a representação de um plano definido pela equação  $ax + by + cz + d = 0$ , em que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Dessa forma, a equação (3.10) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Delta(v) &= \sum_{p \in \text{planes}(v)} (v^T p)(p^T v) \\ \Delta(v) &= \sum_{p \in \text{planes}(v)} v^T (pp^T) v \\ \Delta(v) &= v^T \left( \sum_{p \in \text{planes}(v)} K_p \right) v \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sendo  $K_p$  a matriz simétrica 4x4 dada por:

$$K_p = pp^T = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$



A partir da *quadratura de erro fundamental*  $K_p$ , pode-se obter a o quadrado da distância de qualquer vértice  $v$  até o plano  $p$ . E finalmente, a matriz  $Q$  representa o conjunto de planos conectados ao vértice  $v$ , através da soma das quadraturas de erro fundamentais  $K_p$ .

### **3.3 APLICAÇÃO DO MEC PARA O CÁLCULO DE TENSÕES**

Com a utilização da metodologia Structure-from-Motion descrita no item 3.2, uma malha 3D de contorno é gerada utilizando-se elementos triangulares de três nós. Esta malha define a configuração inicial da estrutura tridimensional. A partir de então, o monitoramento é feito a partir de novas medidas fotogramétricas da estrutura, em que a nova configuração da estrutura é determinada e calculam-se os campos de deslocamentos fazendo-se a diferença entre as coordenadas dos nós da nova configuração e da configuração inicial. Ou seja:

$$u_{ik} = \text{coord}_{ik}^2 - \text{coord}_{ik}^1 \quad (3.13)$$

Em que  $u_{ik}$  é o deslocamento medido do nó  $i$  na  $k$ -ésima direção ( $k=1,2,3$ ),  $\text{coord}_{ik}^2$  é a nova coordenada do nó  $i$  e  $\text{coord}_{ik}^1$  é a coordenada inicial do nó  $i$  na  $k$ -ésima direção.

Alguns desafios são encontrados para a determinação da correspondência entre pontos da nova configuração e da configuração inicial. Várias tecnologias têm sido desenvolvidas no intuito de contornar estas dificuldades e permitir a comparação entre nuvens de pontos capturadas em diferentes tempos (Melo et al, 2020; Biundini et al, 2021).

Assim, tem-se uma nova condição de contorno, diferente das citadas anteriormente na formulação do Método dos Elementos de Contorno, em que se conhecem as respostas em termos de deslocamentos (medidos fotogrametricamente) e forças de contorno (prescritas) nos nós de contorno e, portanto, não é necessário o cálculo destas respostas.

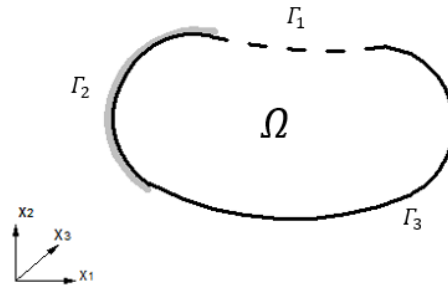
#### **3.3.1 Formulação do MEC**

Para a inclusão da consideração de respostas medidas fotogrametricamente em formulações do Método dos Elementos de Contorno, para um domínio  $\Omega$ , tem-se as seguintes condições de contorno no contorno  $\Gamma$ :

- (i)  $\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1$  – Deslocamentos prescritos em  $\Gamma_1$ ;
- (ii)  $\mathbf{p}_2 = \bar{\mathbf{p}}_2$  – Forças prescritas em  $\Gamma_2$ ;
- (iii)  $\mathbf{u}_3 = \bar{\mathbf{u}}_3$  e  $\mathbf{p}_3 = \bar{\mathbf{p}}_3$  – campo de deslocamentos medidos (fotogrametricamente) e forças prescritas em  $\Gamma_3$ ;

onde  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  conforme apresentado na Figura 3.7.

**Figura 3.7 Condições de contorno**



Deste modo, sabe-se a resposta completa (em termos de deslocamentos e forças de contorno) ao longo de  $\Gamma_3$  e, portanto, para o cálculo de deslocamentos e tensões em pontos internos, faz-se necessário determinar apenas  $\mathbf{p}_1$  em  $\Gamma_1$  e  $\mathbf{u}_2$  em  $\Gamma_2$ . Tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \bar{\mathbf{u}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{23} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{32} & \mathbf{G}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \bar{\mathbf{p}}_2 \\ \bar{\mathbf{p}}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Assim, o sistema de equações em (3.13) pode ser reduzido para

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \bar{\mathbf{u}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \bar{\mathbf{p}}_2 \\ \bar{\mathbf{p}}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_{11}\bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{H}_{12}\mathbf{u}_2 + \mathbf{H}_{13}\bar{\mathbf{u}}_3 + \mathbf{H}_{21}\bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{H}_{22}\mathbf{u}_2 + \mathbf{H}_{23}\bar{\mathbf{u}}_3 \\ & = \mathbf{G}_{11}\mathbf{p}_1 + \mathbf{G}_{12}\bar{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{G}_{13}\bar{\mathbf{p}}_3 + \mathbf{G}_{21}\mathbf{p}_1 + \mathbf{G}_{22}\bar{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{G}_{23}\bar{\mathbf{p}}_3 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

e após a troca de colunas, tem-se

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}_{12}\mathbf{u}_2 + \mathbf{H}_{22}\mathbf{u}_2 - \mathbf{G}_{11}\mathbf{p}_1 - \mathbf{G}_{21}\mathbf{p}_1 \\
& = -\mathbf{H}_{11}\bar{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{H}_{13}\bar{\mathbf{u}}_3 - \mathbf{H}_{21}\bar{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{H}_{23}\bar{\mathbf{u}}_3 + \mathbf{G}_{12}\bar{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{G}_{13}\bar{\mathbf{p}}_3 + \mathbf{G}_{22}\bar{\mathbf{p}}_2 \\
& + \mathbf{G}_{23}\bar{\mathbf{p}}_3 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2
\end{aligned}$$

finalmente, na forma matricial (equação 3.14).

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{G}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ -\mathbf{G}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} \\ -\mathbf{H}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \bar{\mathbf{p}}_2 \\ \bar{\mathbf{p}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{23} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_3 + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Vê-se que após a troca de colunas, tem-se todas as incógnitas do lado esquerdo da equação, e do lado direito surge o vetor  $\mathbf{y}$ , que compreende todos os valores prescritos de deslocamentos e forças, além dos deslocamentos medidos fotogrametricamente. Obtém-se um sistema de equações de ordem reduzida da forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (3.15)$$

em que  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de deslocamentos e forças de contorno desconhecidas,  $\mathbf{A}$  é a matriz que contém os coeficientes de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{y}$  é o vetor obtido a partir dos coeficientes de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  e dos valores prescritos no contorno.

Finalmente, resolvendo-se o sistema de equações, obtém-se todos os valores de deslocamentos e forças no contorno  $\Gamma$  e é possível calcular as respostas em pontos internos do domínio  $\Omega$ .

## 4. APLICAÇÕES

---

### 4.1 INTRODUÇÃO

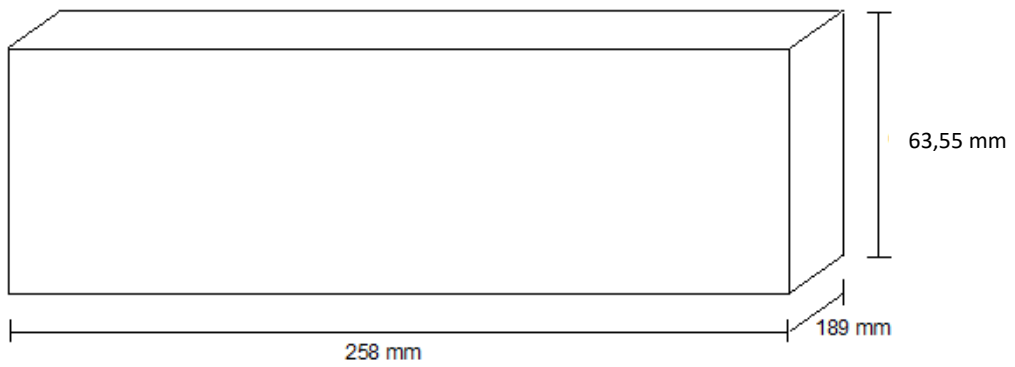
Com o objetivo de validar as formulações descritas nos capítulos anteriores, apresentam-se algumas aplicações. São feitas comparações entre os resultados obtidos com a utilização do Método dos Elementos de Contorno no programa computacional NAESY e os resultados obtidos por meio do software comercial ANSYS 18.1 via Método dos Elementos Finitos. As análises dividem-se em duas partes: na primeira (Aplicações 1 e 2) são apresentados os resultados obtidos com a aplicação da metodologia descrita no Capítulo 3 com o intuito de comprovar o potencial do método proposto. A segunda parte tem o propósito de apresentar as estratégias robustas contidas no programa computacional NAESY que possibilitam a análise de estruturas complexas de grande porte através do Método dos Elementos de Contorno.

Resumidamente, as malhas das duas primeiras análises foram geradas fotogrametricamente via metodologia Structure from Motion, sendo a primeira análise um experimento em laboratório de uma viga submetida à flexão e a segunda um talude real. A terceira e quarta análises são barragens fictícias, respectivamente uma barragem de enrocamento e uma barragem de concreto simuladas via MEC. Para a visualização das respostas para as análises via MEC-NAESY, foi utilizado o software open-source VisIt 2000-2019 (<https://wci.llnl.gov/simulation/computer-codes/visit>) desenvolvido pelo Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL).

### 4.2 APLICAÇÃO 1: VIGA ENSAIADA

Esta aplicação trata de um ensaio à flexão, realizado no laboratório de Materiais da Escola de Minas – UFOP, feito em uma viga de alumínio 6351-T6, com propriedades mostradas na Tabela 4.1 e com dimensões mostradas na Figura 4.1. Para a realização da análise numérica, foi considerada a aplicação de uma carga de 20 kN para baixo no centro da viga, um deslocamento horizontal de 0,18 mm no sentido positivo de x no apoio da direita, um deslocamento de 0,04 mm para baixo em ambos os apoios, a atuação do peso próprio da viga (na verdade não significativo nesta aplicação) e a utilização das respostas medidas fotogrametricamente (valores apresentados na Tabela 4.2). A região fotografada é mostrada na Figura 4.2 e a malha de contorno, apresentada na Figura 4.3.

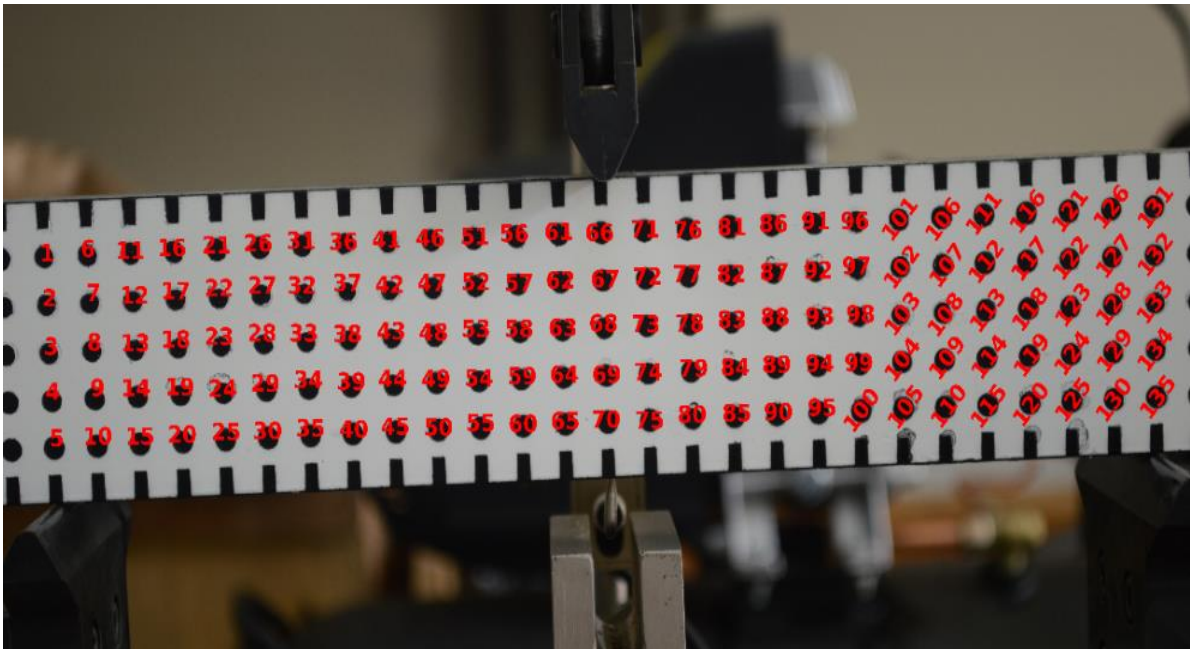
**Figura 4.1 - Viga ensaiada**



**Tabela 4.1 - Propriedades do material**

$\nu$	0,321
$E$	70 GPa
$\rho$	2710,0 kg/m <sup>3</sup>

**Figura 4.2 - Região fotografada**





270	0,06835	0,00000	-0,32600
271	0,06819	0,00000	-0,33421
272	0,07900	0,00000	-0,31720
273	0,07618	0,00000	-0,33470
276	0,08611	0,00000	-0,32537
277	0,08362	0,00000	-0,33346
278	0,06231	0,00000	-0,34542
279	0,06486	0,00000	-0,35353
280	0,06814	0,00000	-0,34118
281	0,06819	0,00000	-0,34692
282	0,06831	0,00000	-0,35144
283	0,06848	0,00000	-0,35476
284	0,07388	0,00000	-0,34725
285	0,07193	0,00000	-0,35491
286	0,08127	0,00000	-0,34032
287	0,07904	0,00000	-0,34594
288	0,07691	0,00000	-0,35034
290	0,06746	0,00000	-0,35684
291	0,06995	0,00000	-0,35543
292	0,06868	0,00000	-0,35687
293	0,06888	0,00000	-0,35779
294	0,06907	0,00000	-0,35753
295	0,06921	0,00000	-0,35610
296	0,07014	0,00000	-0,35777
297	0,06832	0,00000	-0,35589
299	0,07089	0,00000	-0,35630
300	0,06892	0,00000	-0,35591
301	0,06694	0,00000	-0,35433
302	0,07213	0,00000	-0,34937
303	0,07382	0,00000	-0,33873
304	0,06929	0,00000	-0,35350
305	0,06928	0,00000	-0,34975

306	0,06917	0,00000	-0,34485
307	0,06892	0,00000	-0,33881
308	0,06631	0,00000	-0,34934
309	0,06391	0,00000	-0,33820
310	0,06493	0,00000	-0,35159
311	0,06285	0,00000	-0,34768
312	0,06069	0,00000	-0,34263
313	0,05843	0,00000	-0,33643
314	0,07484	0,00000	-0,32359
316	0,06852	0,00000	-0,33164
317	0,06795	0,00000	-0,32336
318	0,06717	0,00000	-0,31396
320	0,06094	0,00000	-0,32254
322	0,05603	0,00000	-0,32911
323	0,05349	0,00000	-0,32066
324	0,05077	0,00000	-0,31109
623	0,08317	0,00000	-0,31465
624	0,08198	0,00000	-0,32369
625	0,08056	0,00000	-0,33162
626	0,07894	0,00000	-0,33843
639	0,07714	0,00000	-0,34411
640	0,07518	0,00000	-0,34867
641	0,07309	0,00000	-0,35208
642	0,07088	0,00000	-0,35434
655	0,06859	0,00000	-0,35544
656	0,06623	0,00000	-0,35537
657	0,06382	0,00000	-0,35412
658	0,06140	0,00000	-0,35169
671	0,05897	0,00000	-0,34805
672	0,05657	0,00000	-0,34322
673	0,05422	0,00000	-0,33716
674	0,05193	0,00000	-0,32989



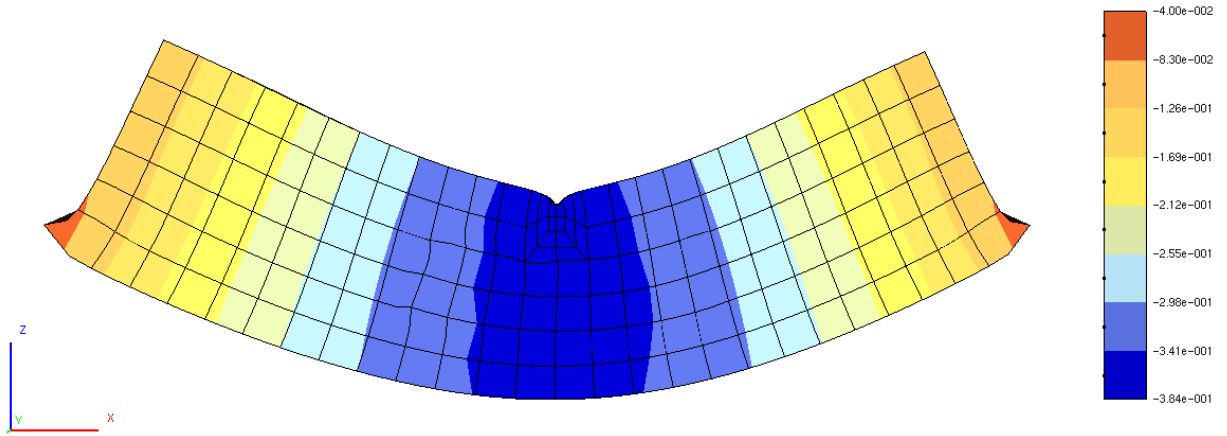
687	0,04974	0,00000	-0,32138
688	0,04766	0,00000	-0,31163
689	0,04572	0,00000	-0,30064
807	0,07484	0,00000	-0,32359
808	0,07382	0,00000	-0,33873
809	0,06717	0,00000	-0,31396
810	0,06795	0,00000	-0,32336
811	0,06852	0,00000	-0,33164
812	0,06892	0,00000	-0,33881
813	0,06094	0,00000	-0,32254
814	0,06391	0,00000	-0,33820
815	0,05077	0,00000	-0,31109
816	0,05349	0,00000	-0,32066
817	0,05603	0,00000	-0,32911
818	0,05843	0,00000	-0,33643
819	0,07213	0,00000	-0,34937
820	0,06995	0,00000	-0,35543
821	0,06917	0,00000	-0,34485
822	0,06928	0,00000	-0,34975
823	0,06929	0,00000	-0,35350
824	0,06921	0,00000	-0,35610
825	0,06631	0,00000	-0,34934
826	0,06832	0,00000	-0,35589
827	0,06069	0,00000	-0,34263
828	0,06285	0,00000	-0,34768
829	0,06493	0,00000	-0,35159
830	0,06694	0,00000	-0,35433
831	0,06746	0,00000	-0,35684
832	0,06486	0,00000	-0,35353
833	0,06907	0,00000	-0,35753
834	0,06888	0,00000	-0,35779
835	0,06868	0,00000	-0,35687

836	0,06848	0,00000	-0,35476
837	0,07014	0,00000	-0,35777
838	0,07193	0,00000	-0,35491
839	0,06892	0,00000	-0,35591
840	0,07089	0,00000	-0,35630
843	0,06231	0,00000	-0,34542
844	0,05999	0,00000	-0,33245
845	0,06831	0,00000	-0,35144
846	0,06819	0,00000	-0,34692
847	0,06814	0,00000	-0,34118
848	0,06819	0,00000	-0,33421
849	0,07388	0,00000	-0,34725
850	0,07618	0,00000	-0,33470
851	0,07691	0,00000	-0,35034
852	0,07904	0,00000	-0,34594
853	0,08127	0,00000	-0,34032
854	0,08362	0,00000	-0,33346
855	0,05810	0,00000	-0,31454
857	0,06835	0,00000	-0,32600
858	0,06866	0,00000	-0,31655
859	0,06913	0,00000	-0,30585
861	0,07900	0,00000	-0,31720
863	0,08611	0,00000	-0,32537
864	0,08877	0,00000	-0,31602

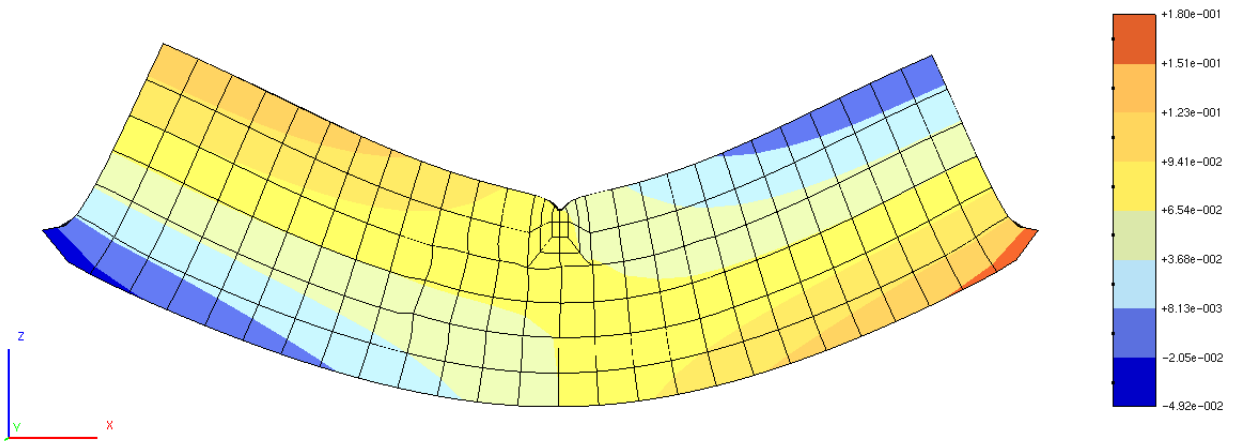
---

A partir da utilização dos deslocamentos medidos fotogrametricamente, as respostas no restante do contorno foram calculadas via MEC (NAESY) e são apresentadas em termos de deslocamentos na direção z, deslocamentos na direção x, tensões normais em x no contorno nas Figuras 4.4 a 4.6 e no plano interno nas Figuras 4.7 a 4.9.

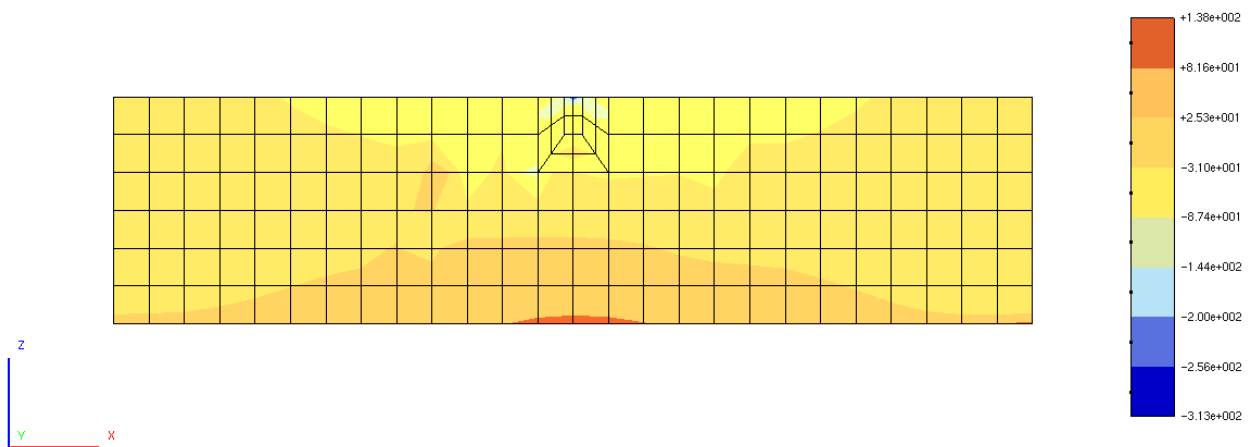
**Figura 4.4 - Deslocamentos em z (mm) – contorno**



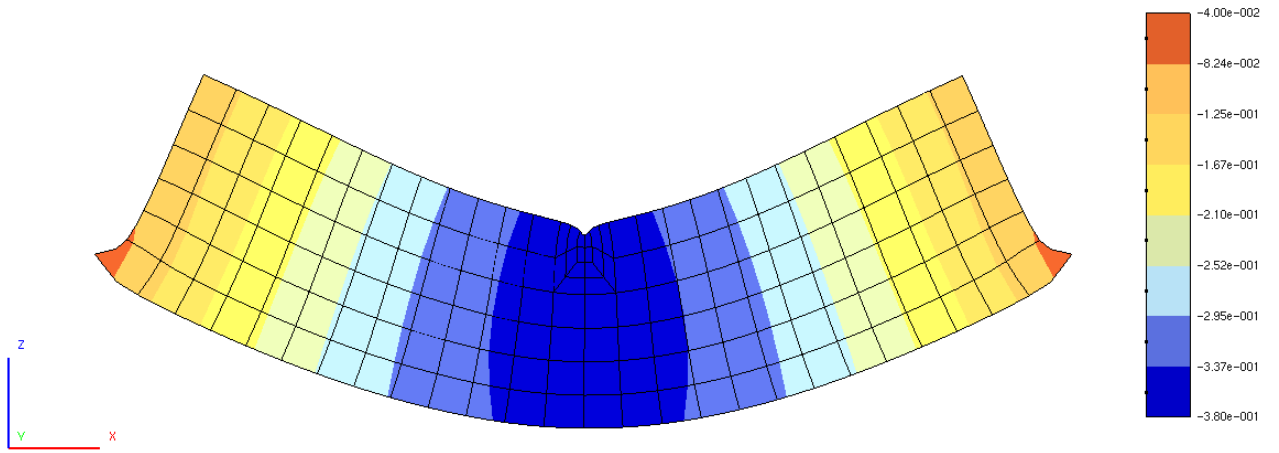
**Figura 4.5 - Deslocamentos em x (mm) – contorno**



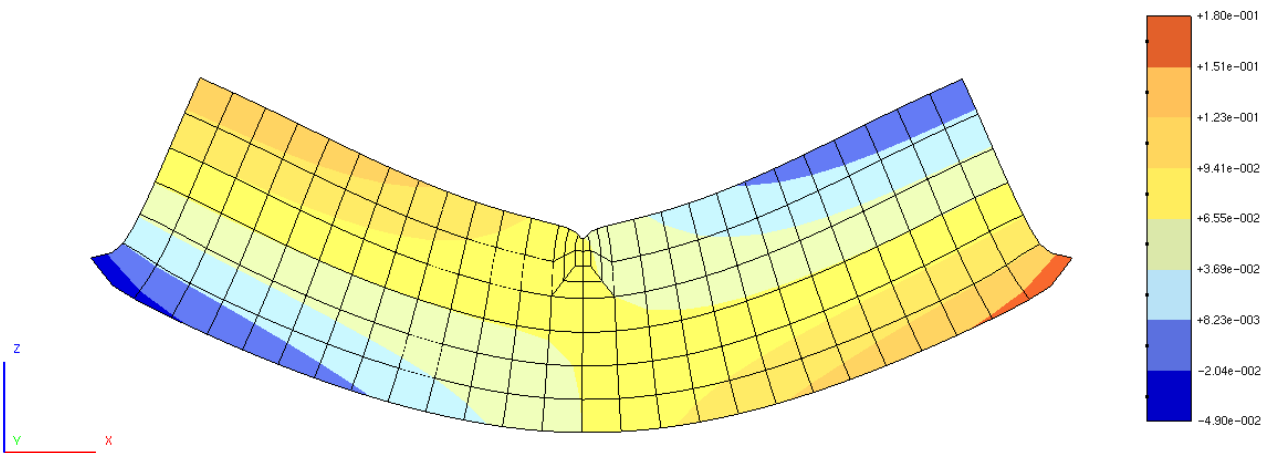
**Figura 4.6 - Tensões normais em x (MPa) – contorno**



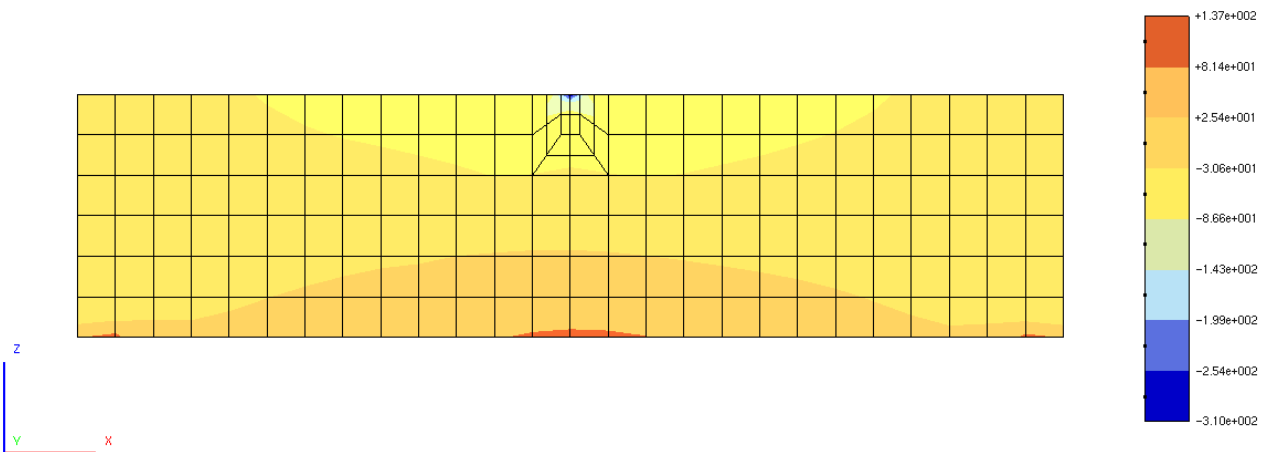
**Figura 4.7 - Deslocamentos em z (mm) – plano interno**



**Figura 4.8 - Deslocamentos em x (mm) – plano interno**

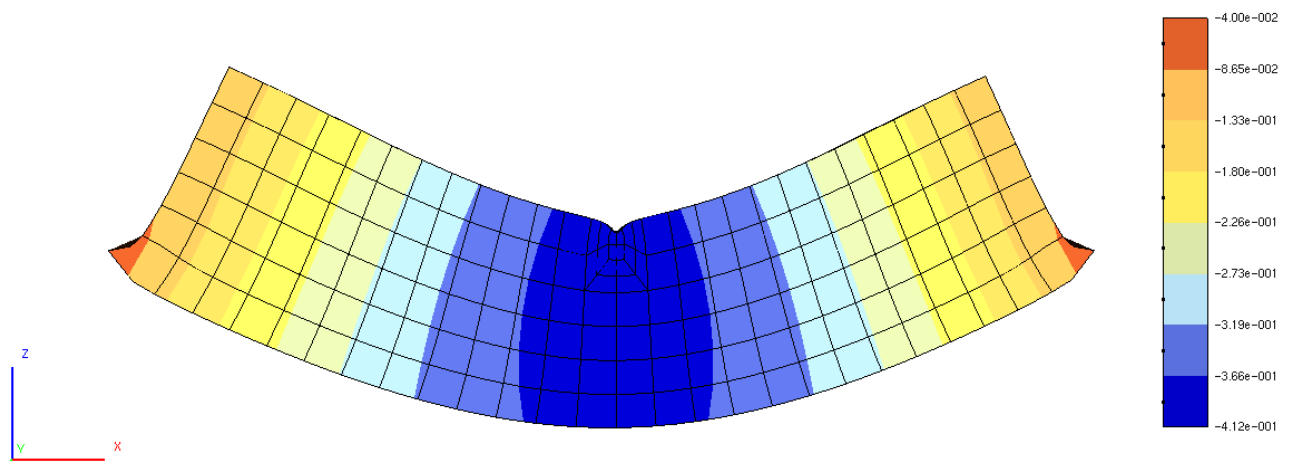


**Figura 4.9 - Tensões normais em x (MPa) – plano interno**

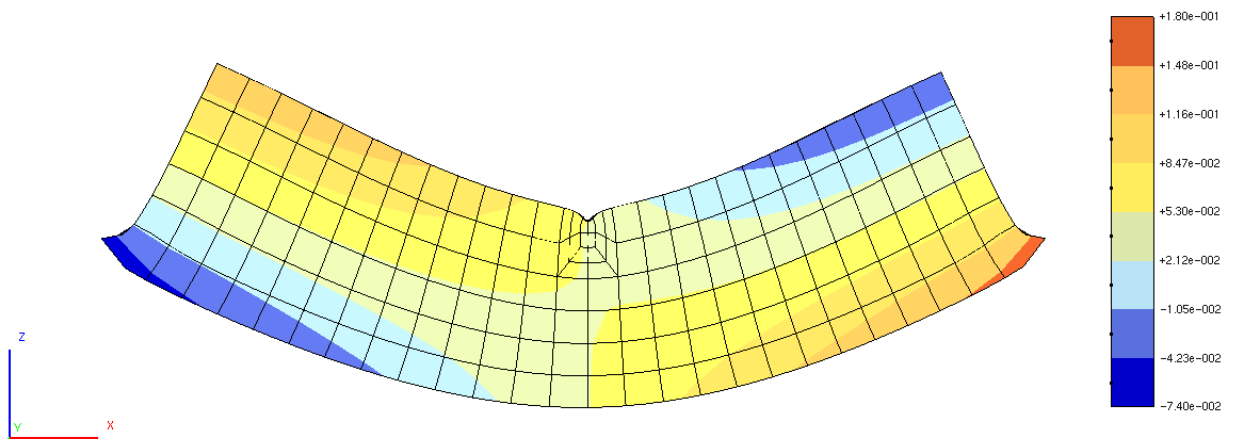


As respostas no contorno e no plano interno obtidas numericamente sem a consideração das respostas medidas fotogrametricamente, são apresentadas nas Figuras 4.10 a 4.15 para comparação dos resultados. Adicionalmente, apresenta-se os resultados obtidos em análise via Método dos Elementos Finitos – Ansys nas Figuras 4.16 a 4.21.

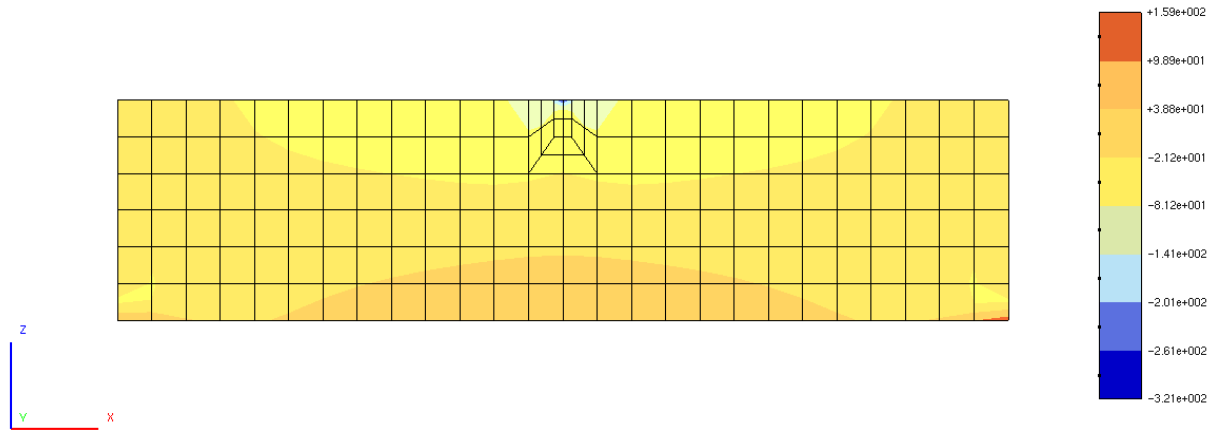
**Figura 4.10 - Deslocamentos em z (mm) – contorno**



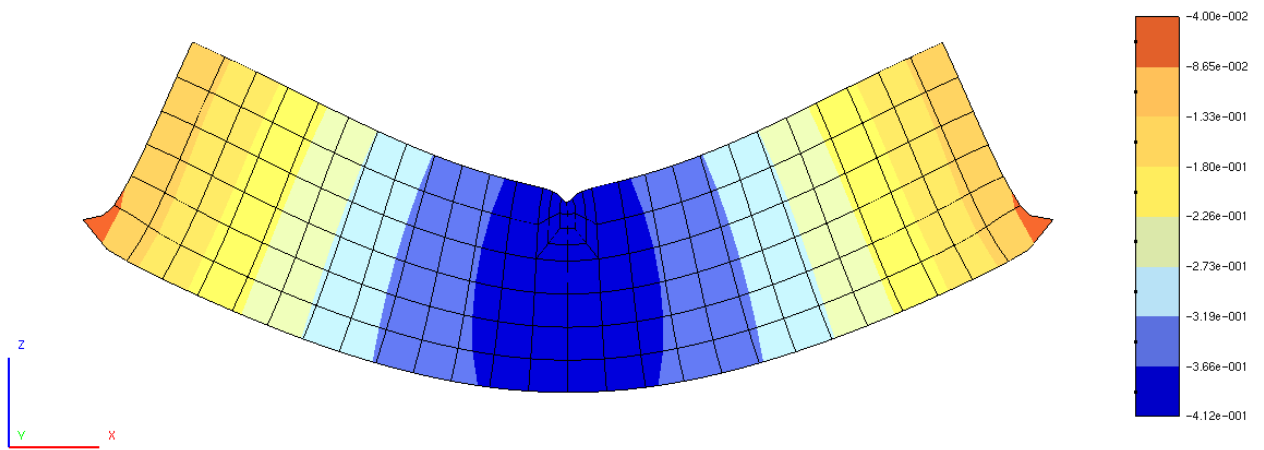
**Figura 4.11 - Deslocamentos em x (mm) – contorno**



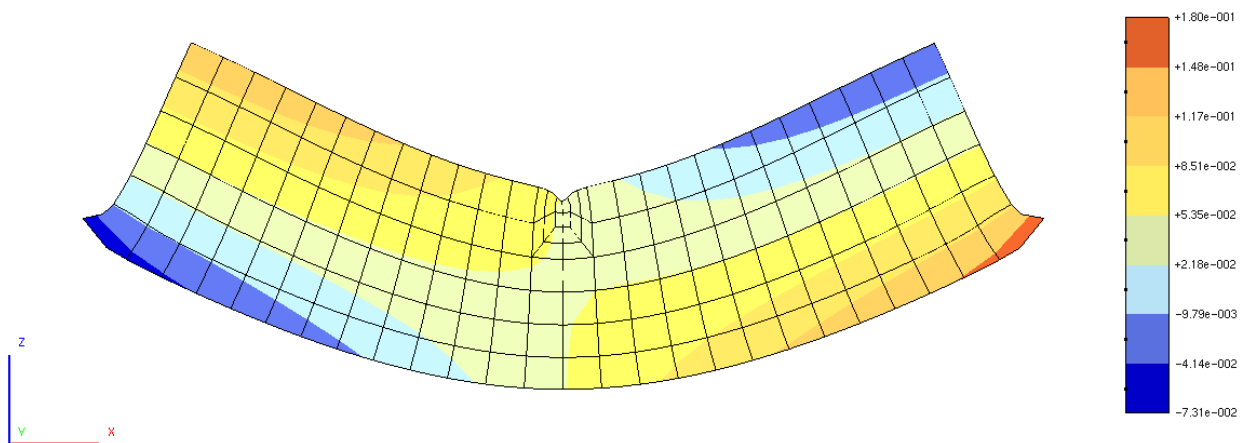
**Figura 4.12 - Tensões normais em x (MPa) – contorno**



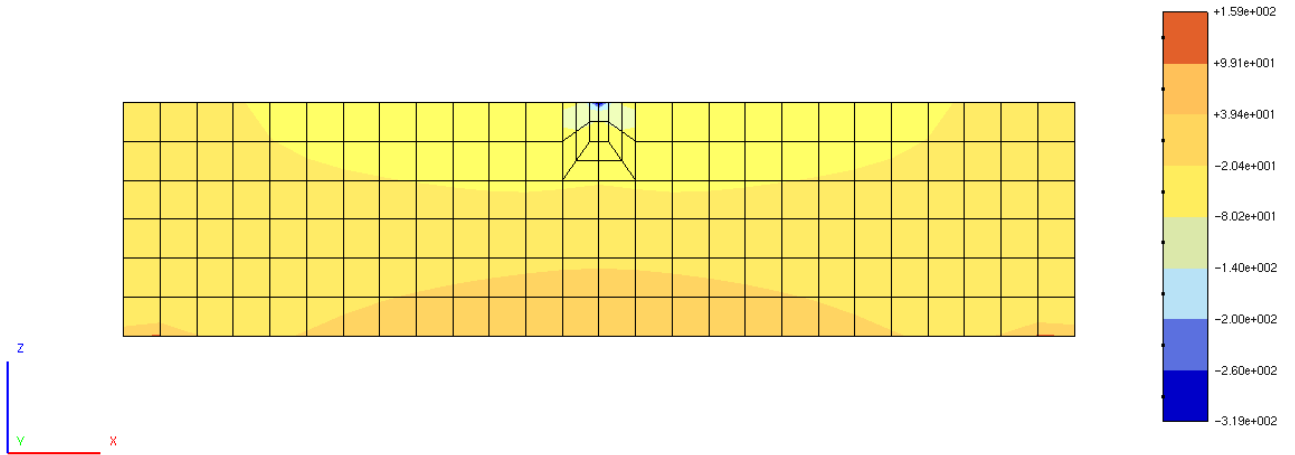
**Figura 4.13 - Deslocamentos em z (mm) – plano interno**



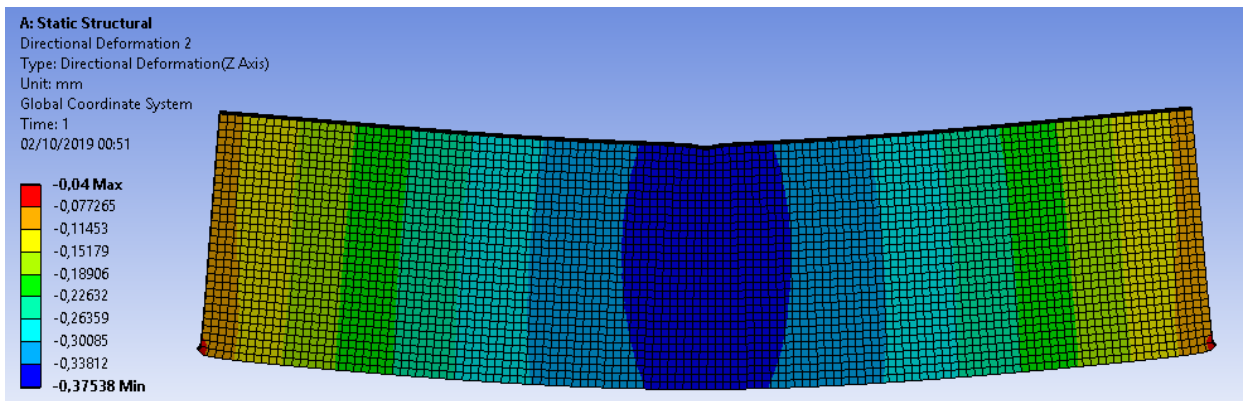
**Figura 4.14 - Deslocamentos em x (mm) – plano interno**



**Figura 4.15 - Tensões normais em x (MPa) - plano interno**



**Figura 4.16 - Deslocamentos em z (mm) – contorno – Ansys**



**Figura 4.17 - Deslocamentos em x (mm) – contorno – Ansys**

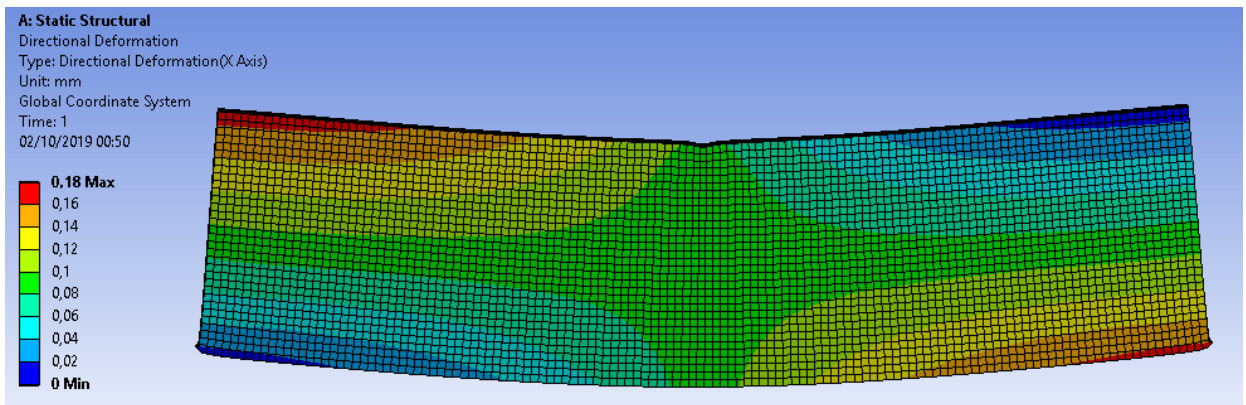


Figura 4.18 - Tensões normais em x (MPa) – contorno – Ansys

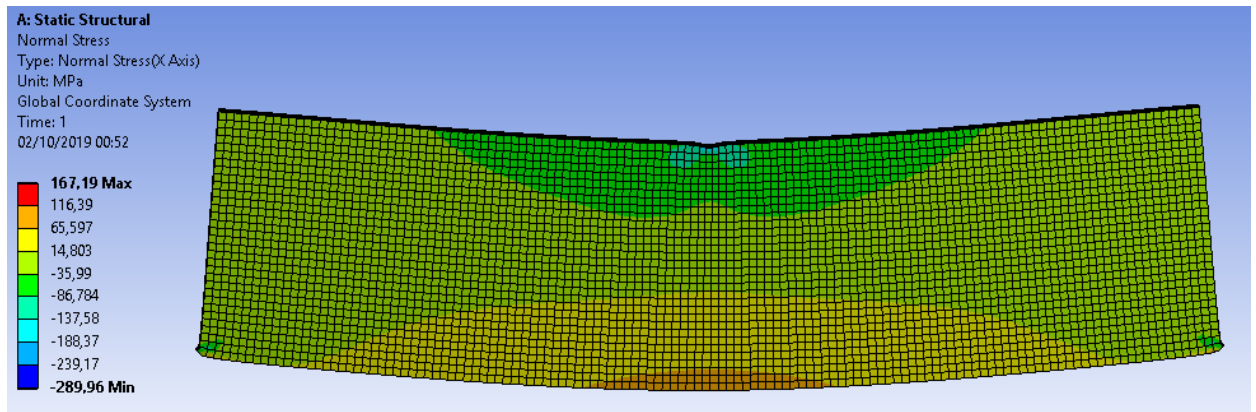


Figura 4.19 - Deslocamentos em z (mm) – plano interno – Ansys

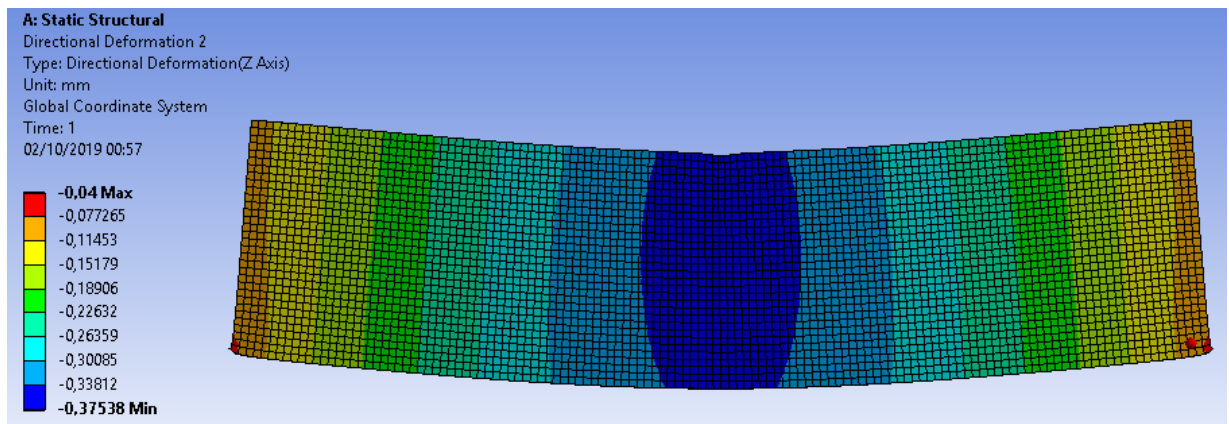
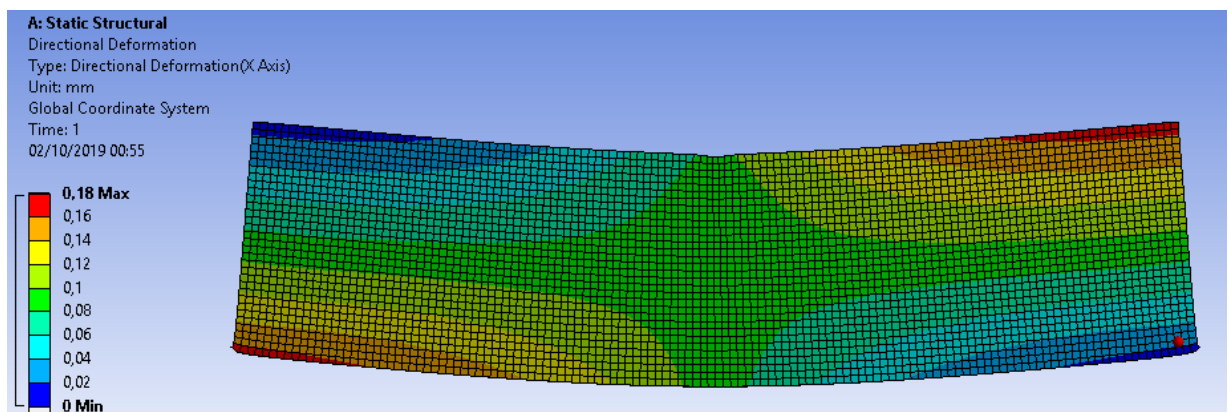
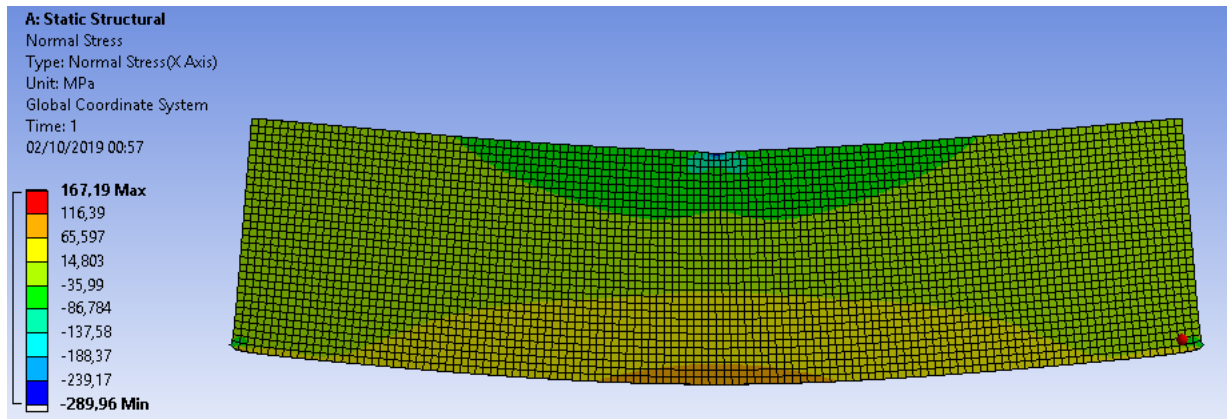


Figura 4.20 - Deslocamentos em x (mm) – plano interno – Ansys



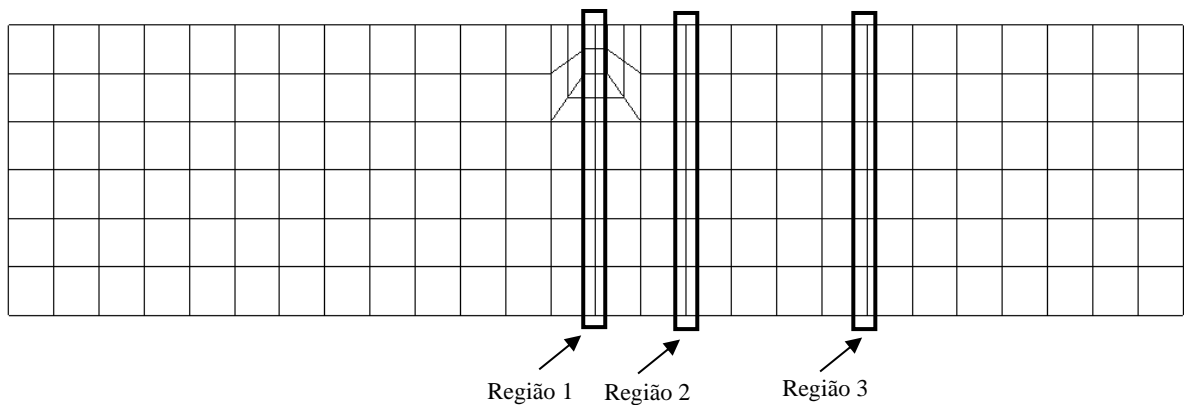


**Figura 4.21 - Tensões normais em x (MPa) - plano interno – Ansys**

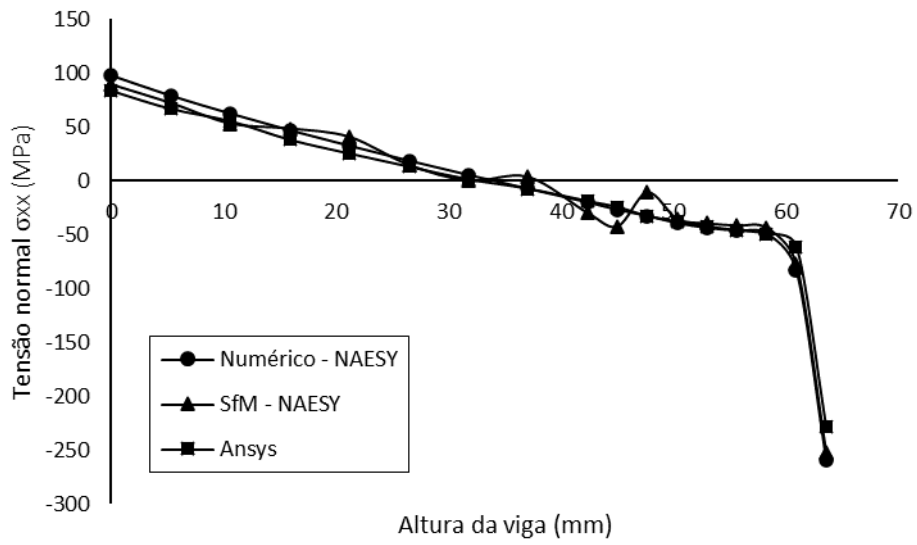


Para melhor visualização das respostas em termos de tensões, foram plotados gráficos para comparação entre as tensões obtidas na análise puramente numérica versus os resultados obtidos com a utilização dos deslocamentos medidos fotogrametricamente, no contorno e no plano interno via NAESY (MEC). Para validação das respostas, foram plotados os valores de tensões obtidos na análise via MEF com a utilização do programa comercial Ansys. A Figura 4.22 indica as regiões em análise. Os gráficos são apresentados nas Figuras 4.23 a 4.28.

**Figura 4.22 - Regiões em análise**



**Figura 4.23 - Tensões no contorno - Região 1**



**Figura 4.24 - Tensões no contorno - Região 2**

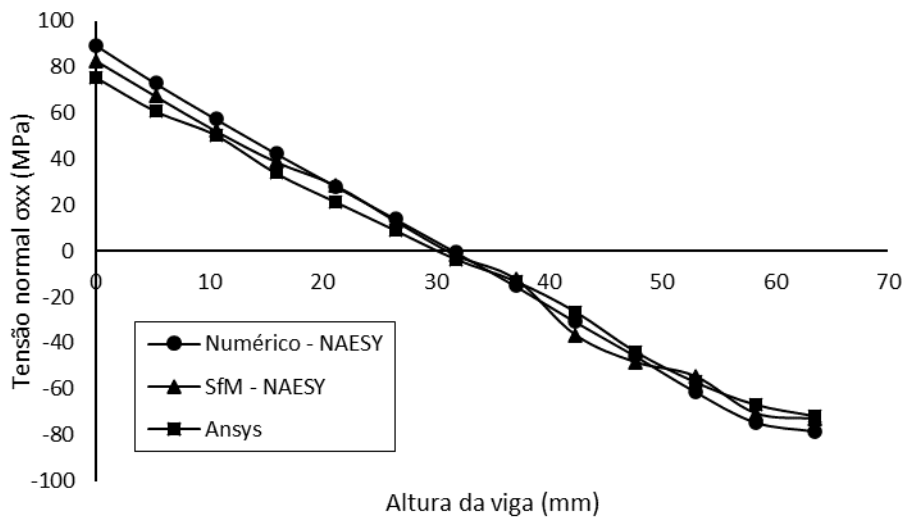


Figura 4.25 - Tensões no contorno Região 3

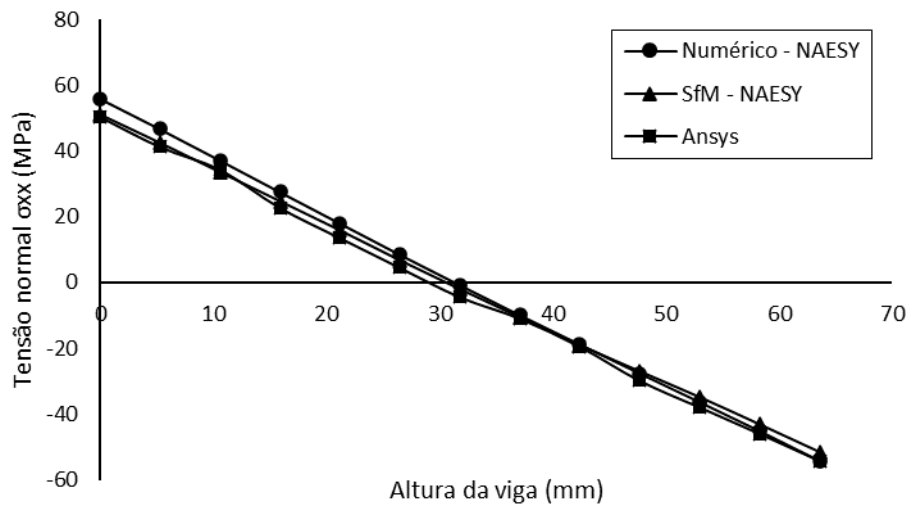
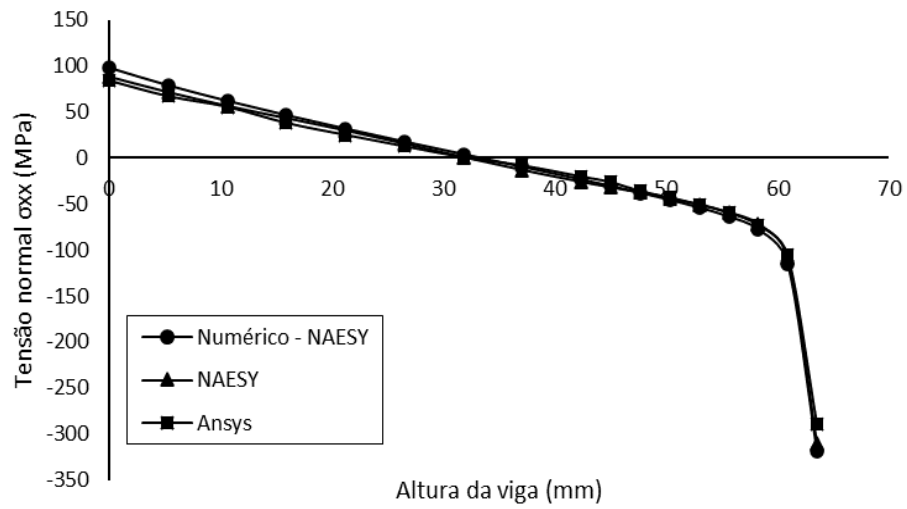
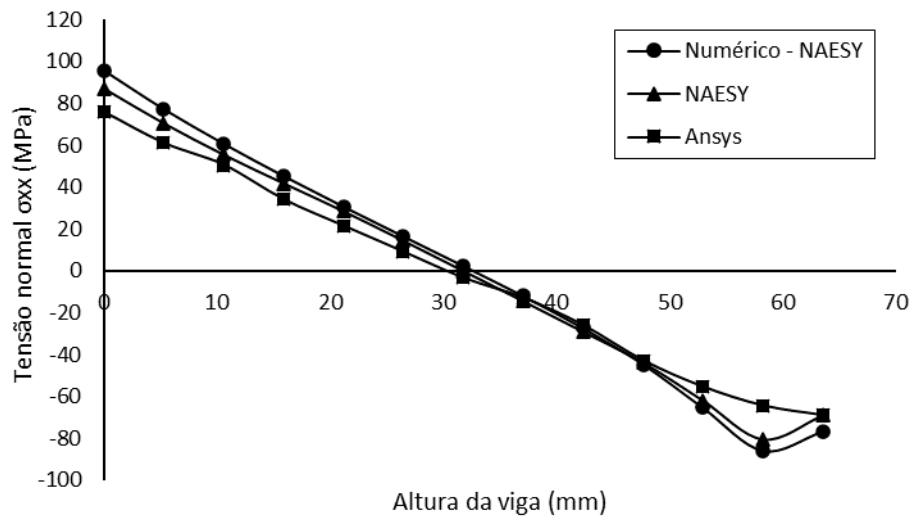


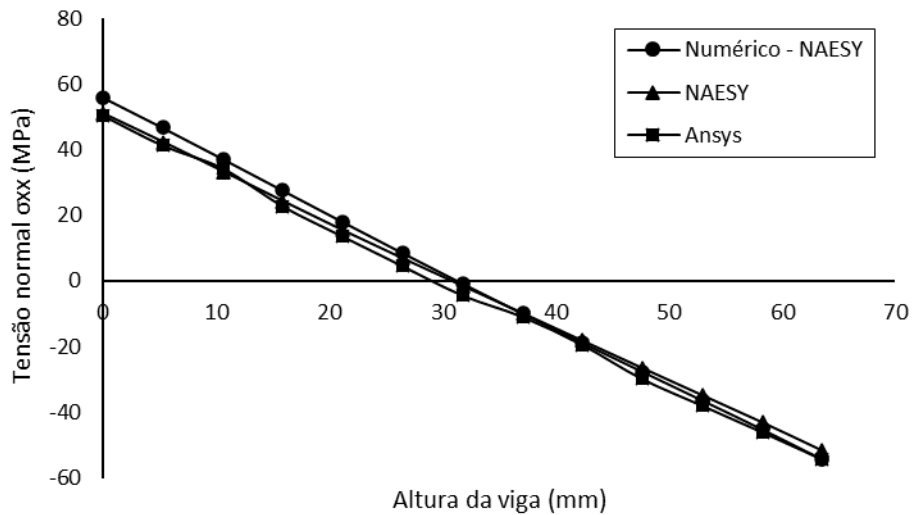
Figura 4.26 - Tensões no plano interno - Região 1



**Figura 4.27 - Tensões no plano interno Região 2**



**Figura 4.28 - Tensões no plano interno - Região 3**



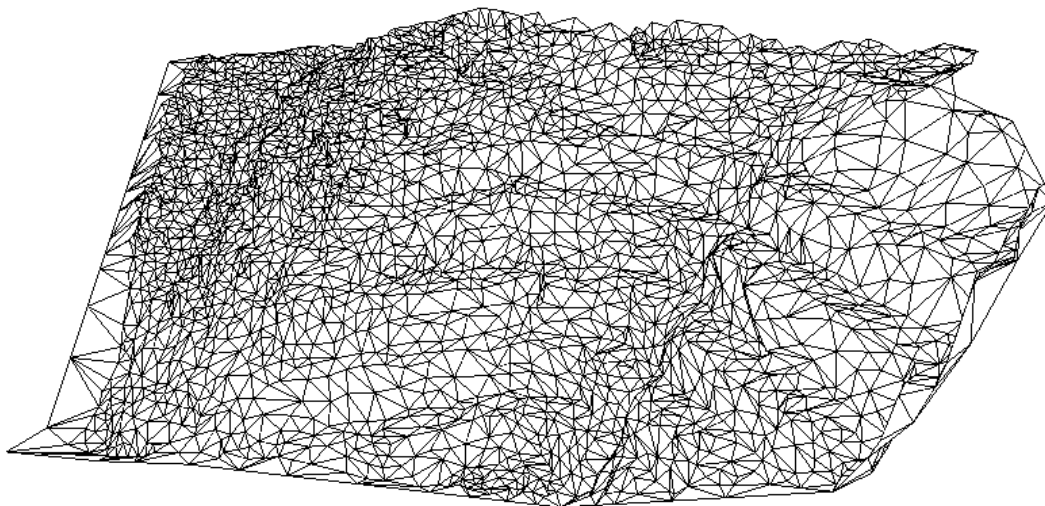
A partir da visualização dos gráficos das Figuras 4.23 a 4.28, pode-se perceber que tanto os resultados no contorno quanto os resultados em pontos interno aproximaram-se bastante dos resultados puramente numéricos e apresentam comportamento semelhante e boa concordância quando comparados com as respostas obtidas via MEF-Ansys.

Vale ressaltar que a malha utilizada no NAESY (MEC) consiste em 1826 nós e 608 elementos, com um total de 5478 graus de liberdade. Enquanto a malha utilizada na análise via MEF é composta por 184085 nós, 41630 elementos. Além disso, com a utilização das respostas medidas fotogrametricamente de 141 nós do modelo, a malha foi reduzida para 1685 nós e 5055 graus de liberdade.

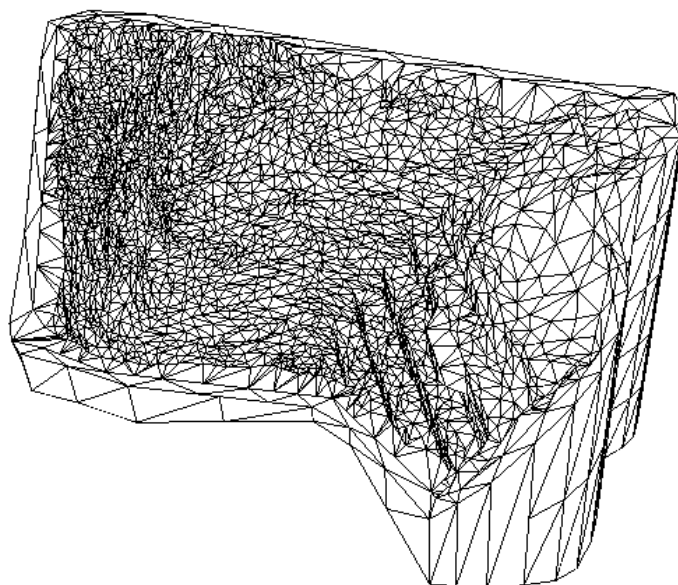
### **4.3 APLICAÇÃO 2 - TALUDE SUBMETIDO A DESLOCAMENTO PRESCRITO**

Nesta análise foi utilizada a malha gerada fotogrametricamente via metodologia SfM apresentada na Figura 4.29, formada por elementos triangulares de 3 nós, com um total de 5232 elementos e 2659 nós. Foram utilizados elementos ‘enclosing’ que são apresentados juntamente com a malha de contorno na Figura 4.30. As propriedades consideradas para o material são mostradas na Tabela 4.3.

**Figura 4.29 - Malha – elementos de contorno**



**Figura 4.30 - Malha – elementos de contorno e ‘enclosing’**



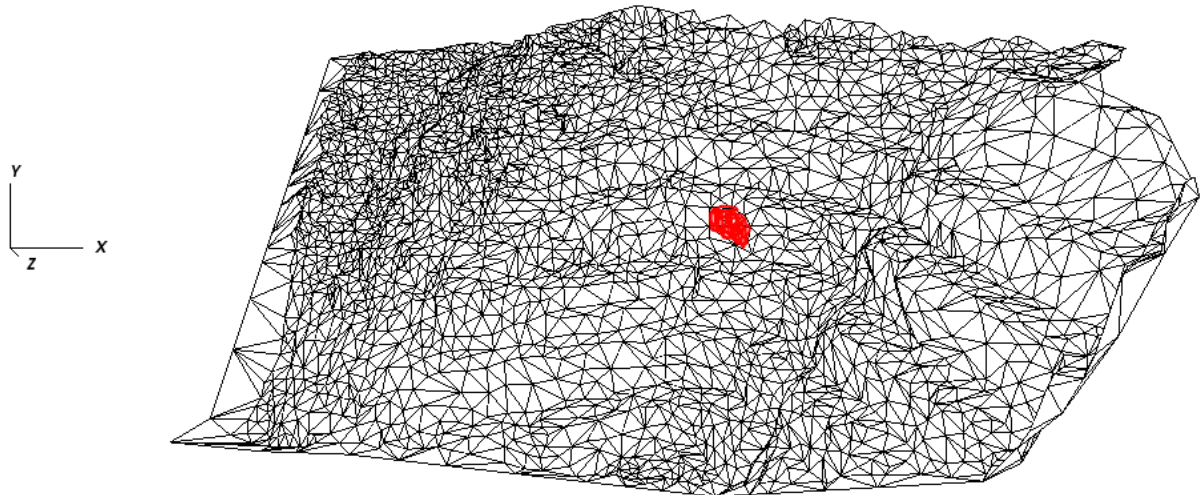
**Tabela 4.3 - Propriedades do solo**

$\nu$	0,35
$E$	200 MPa
$\rho$	1800,0 kg/m <sup>3</sup>

#### **4.1.1 Deslocamentos fictícios**

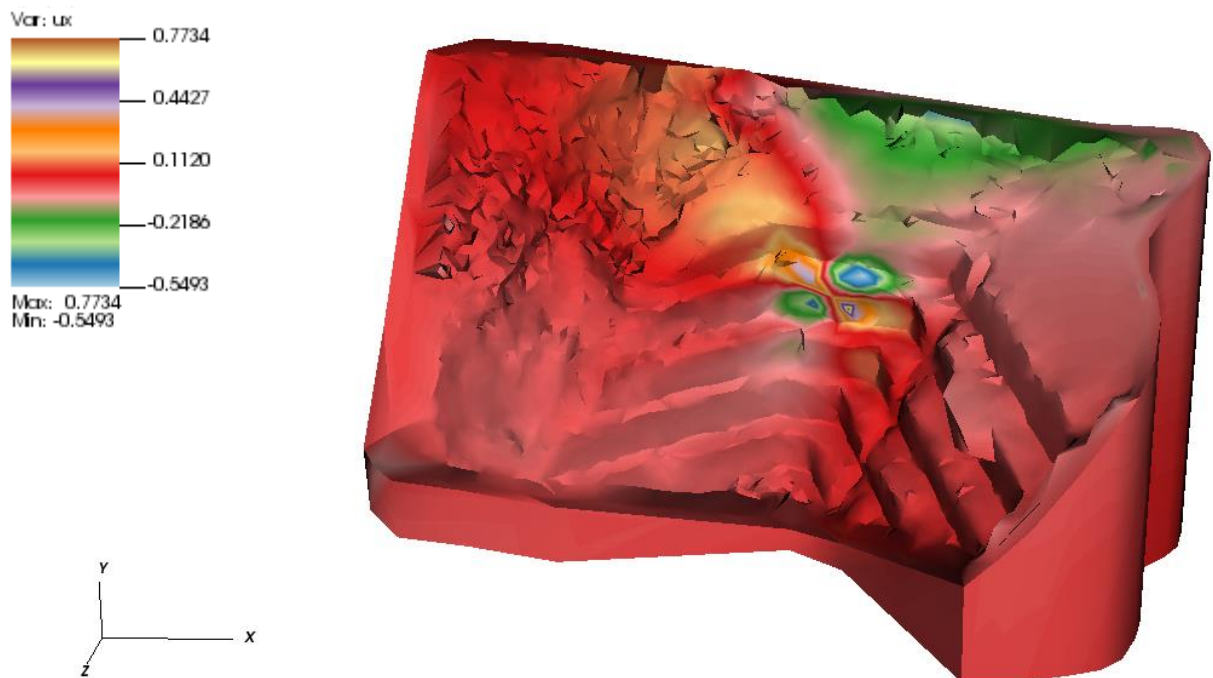
Foi feita a consideração de respostas fictícias em termos de deslocamentos na região destacada em vermelho na Figura 4.31. Para todos os elementos foi considerado um campo de deslocamentos constante de 5 cm no sentido negativo de  $y$ , além da consideração de forças nulas na superfície do talude. Os deslocamentos e tensões em pontos internos foram calculados em uma malha tridimensional e são apresentados através de um corte na posição  $x = 200$ . As respostas em termos de deslocamentos e tensões são apresentadas no contorno e no corte nas Figuras 4.32 a 4.49.

**Figura 4.31 - Região de aplicação dos deslocamentos fictícios**

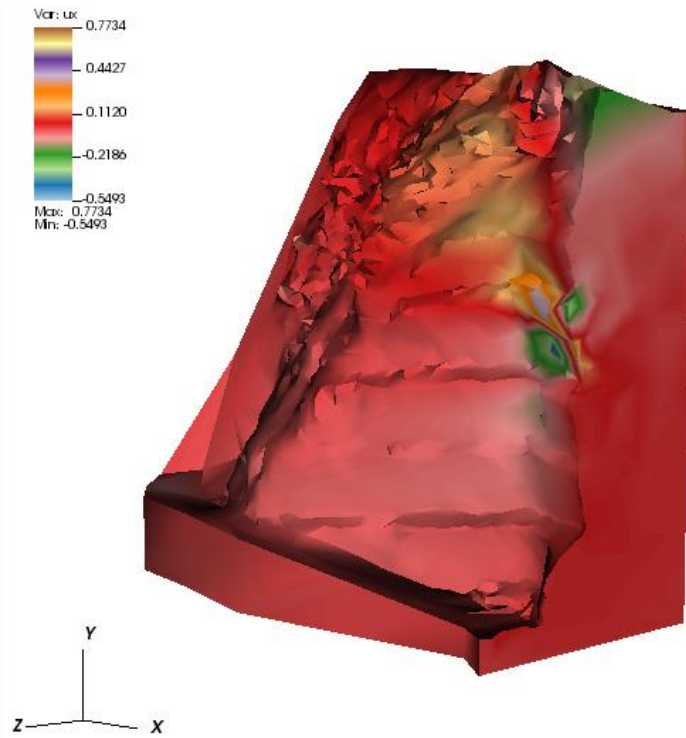


#### 4.1.2 Resultados em termos de deslocamentos

**Figura 4.32 - Deslocamentos em x (cm) - contorno**



**Figura 4.33 - Deslocamentos em x (cm) – corte**



**Figura 4.34 - Deslocamentos em y (cm) – contorno**

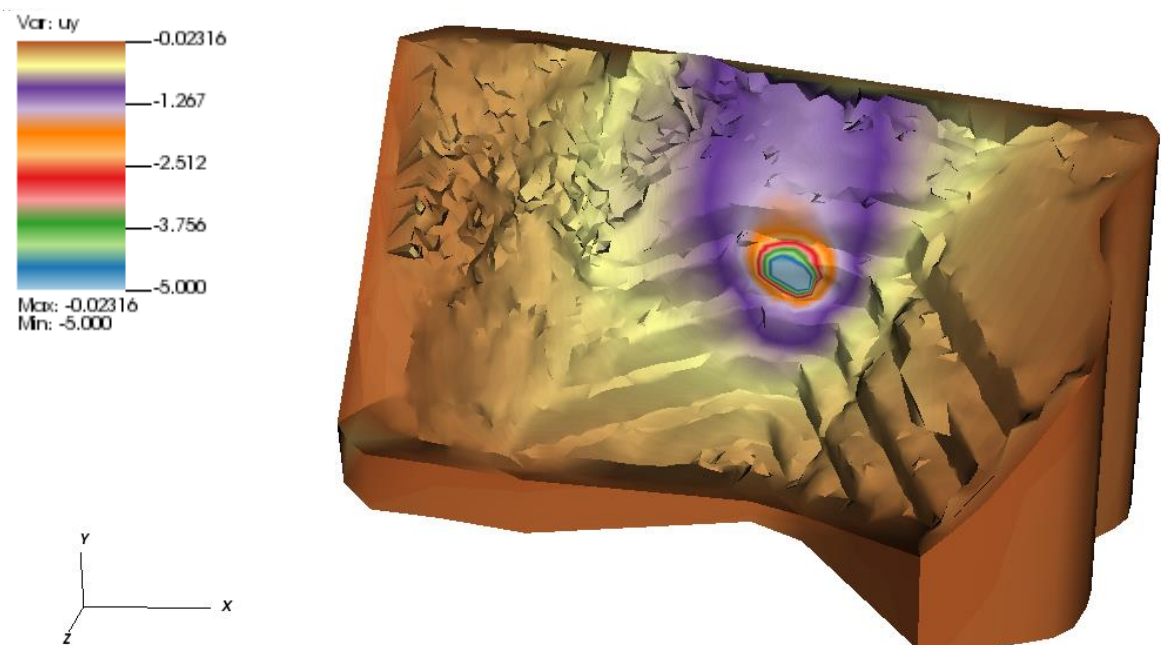




Figura 4.35 - Deslocamentos em y (cm) – corte

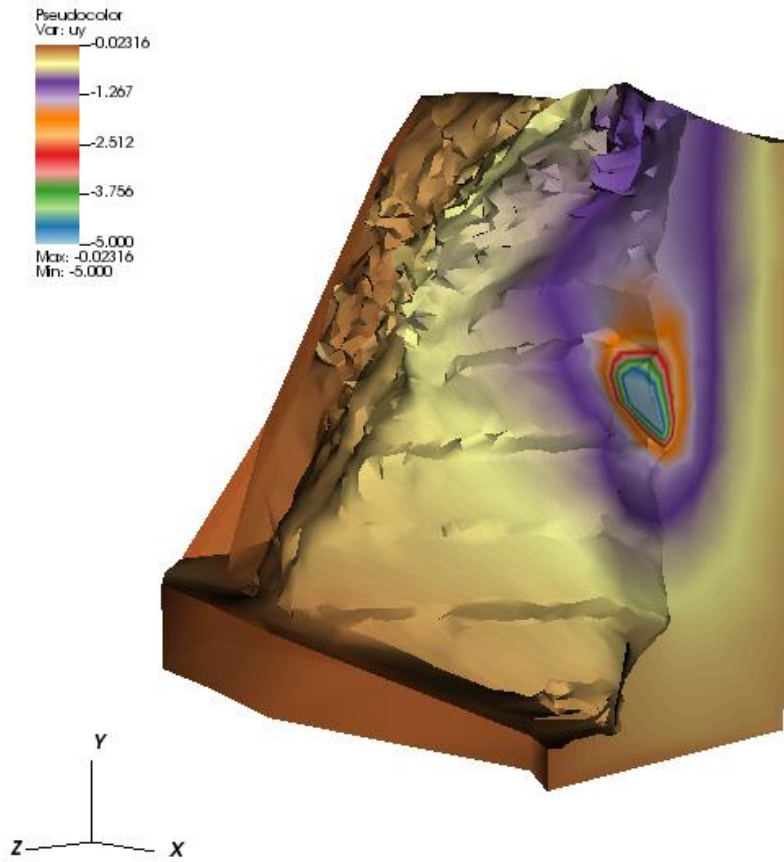
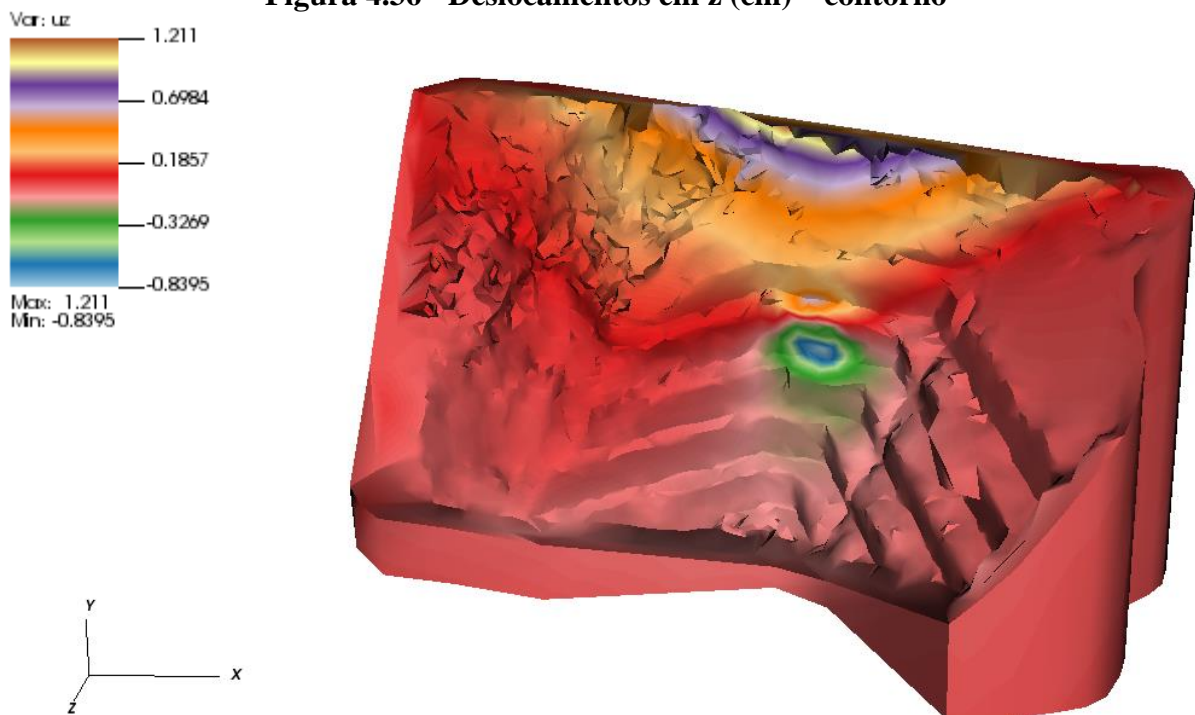
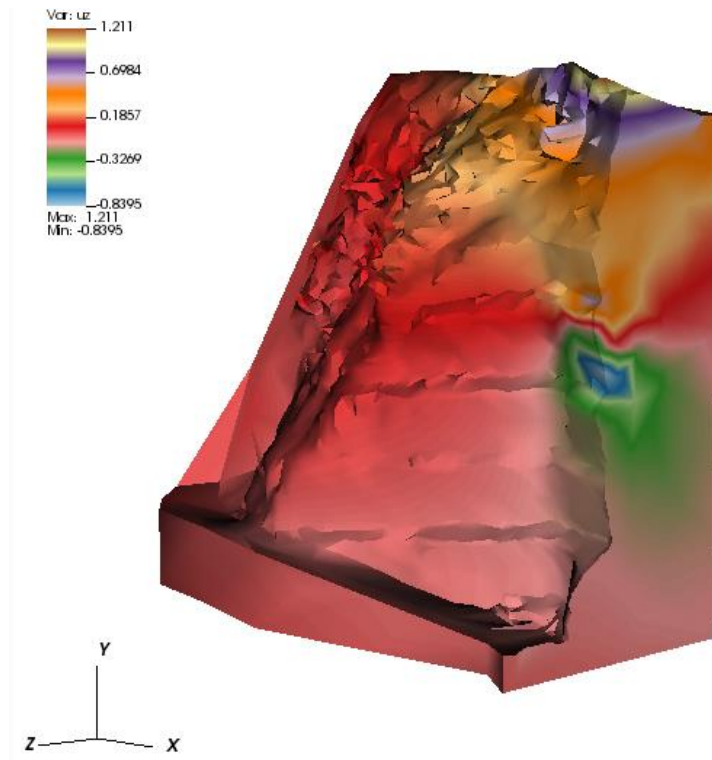


Figura 4.36 - Deslocamentos em z (cm) – contorno

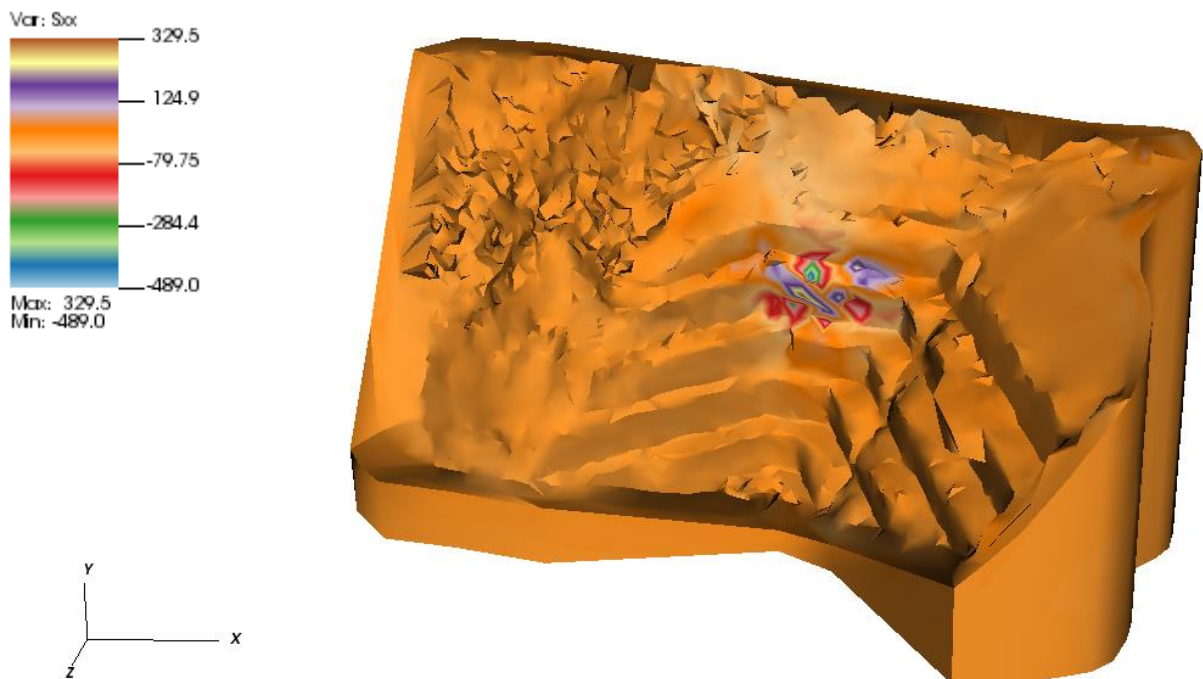


**Figura 4.37 - Deslocamentos em z (cm) – corte**

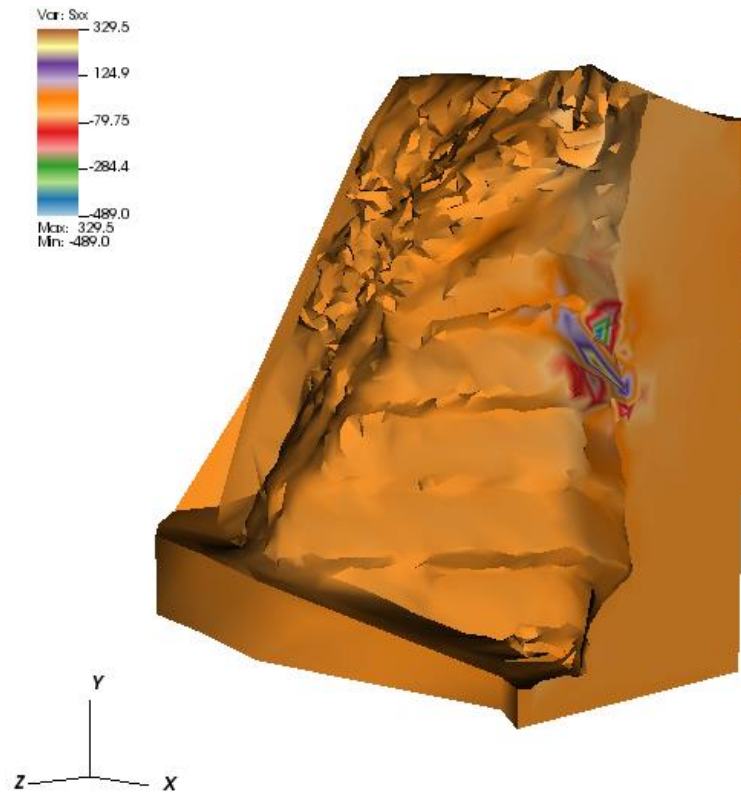


### 4.1.3 Resultados em termos de tensões

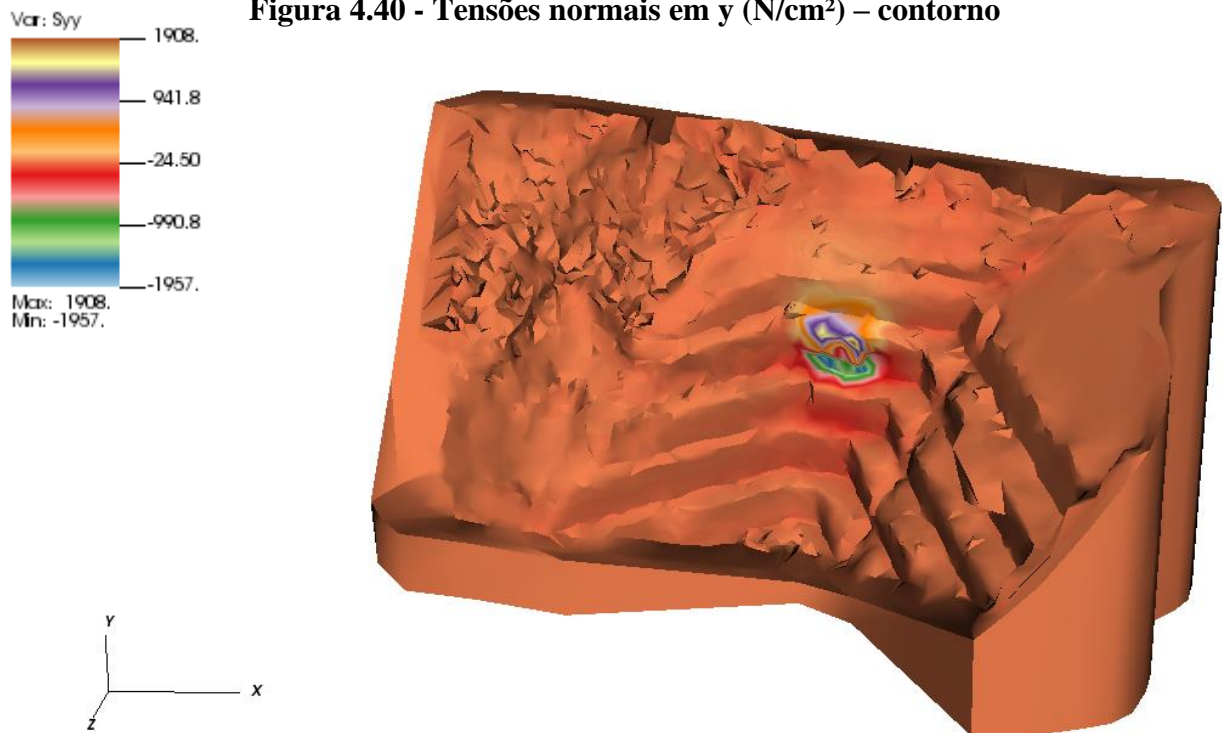
**Figura 4.38 - Tensões normais em x ( $N/cm^2$ ) – contorno**



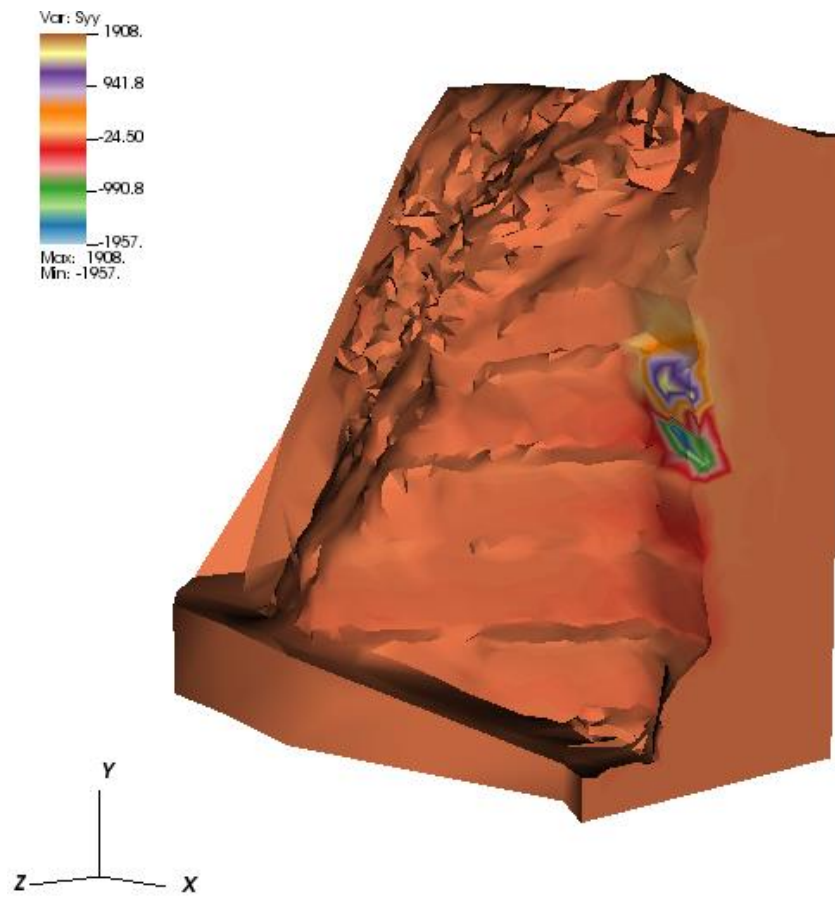
**Figura 4.39 - Tensões normais em x (N/cm<sup>2</sup>) – plano interno**



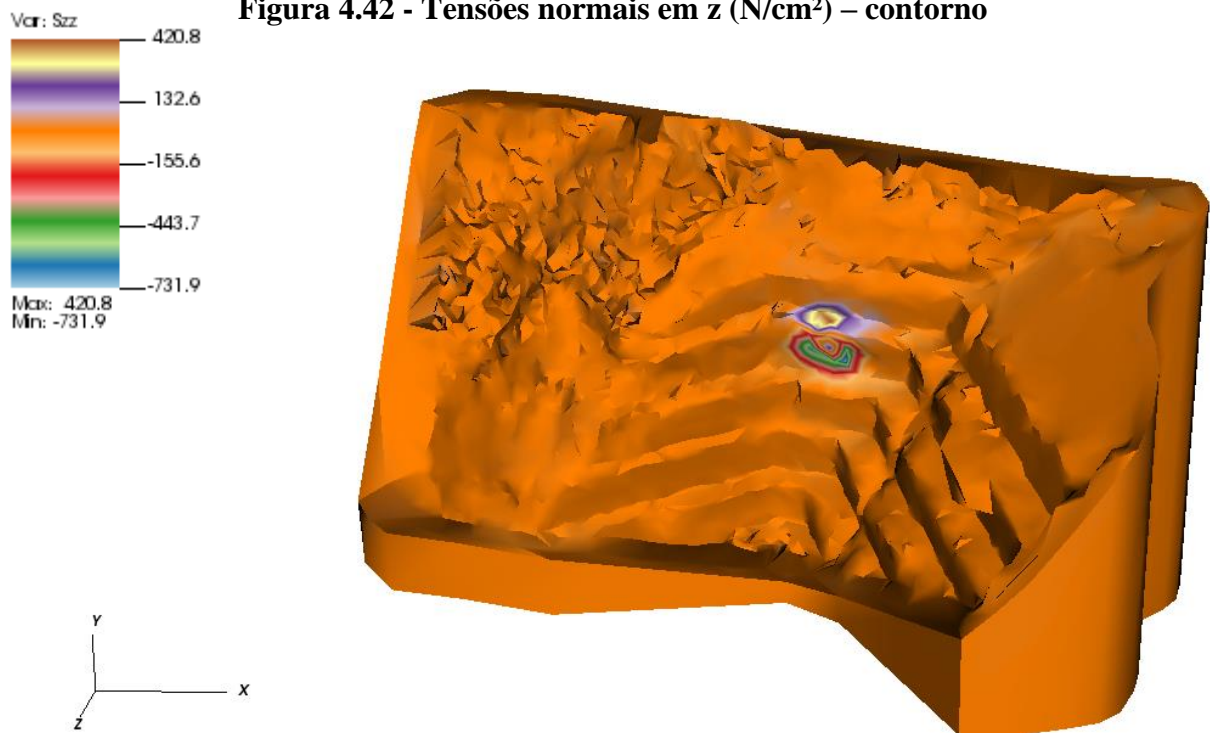
**Figura 4.40 - Tensões normais em y (N/cm<sup>2</sup>) – contorno**



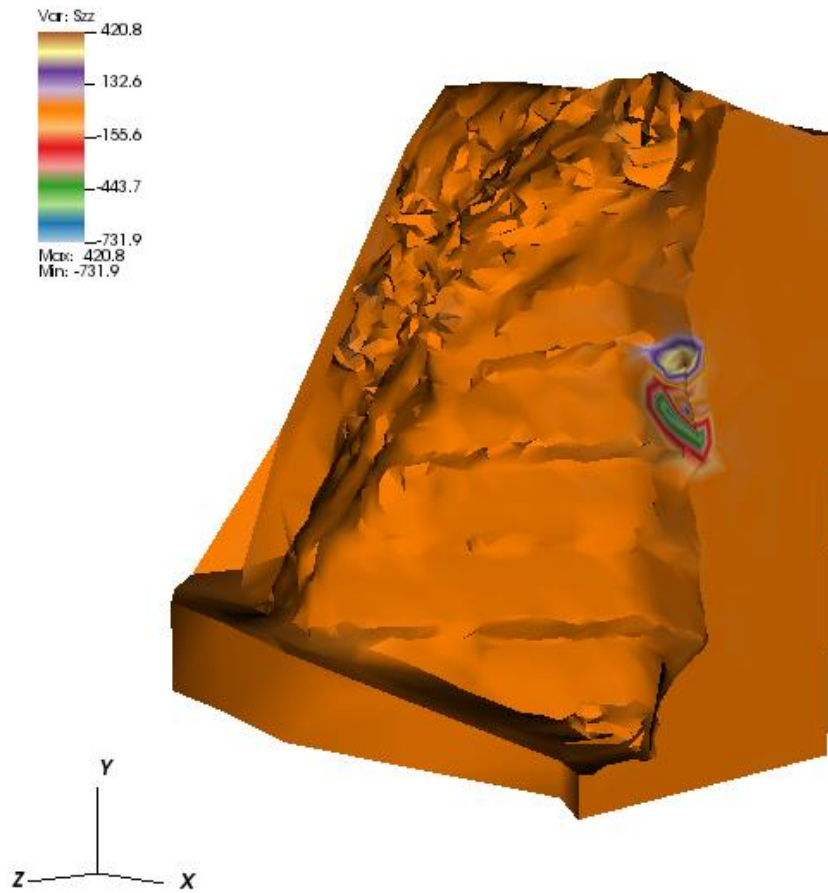
**Figura 4.41 - Tensões normais em y (N/cm<sup>2</sup>) – plano interno**



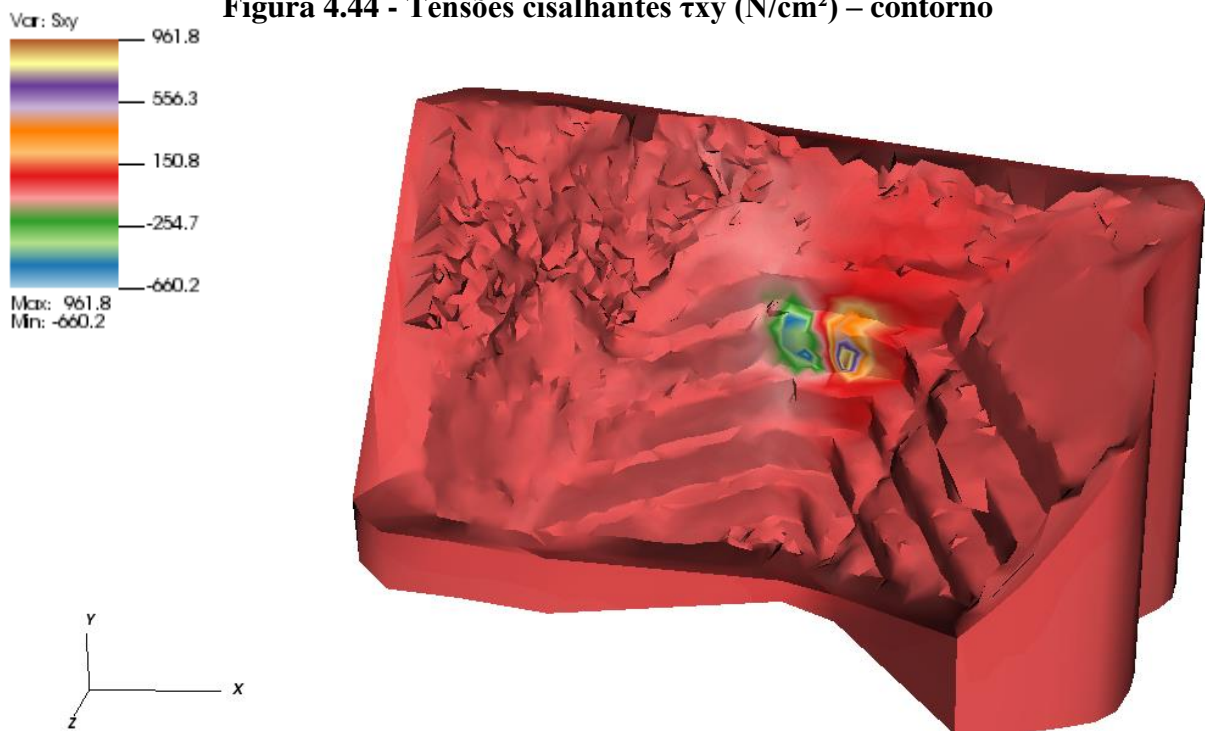
**Figura 4.42 - Tensões normais em z (N/cm<sup>2</sup>) – contorno**



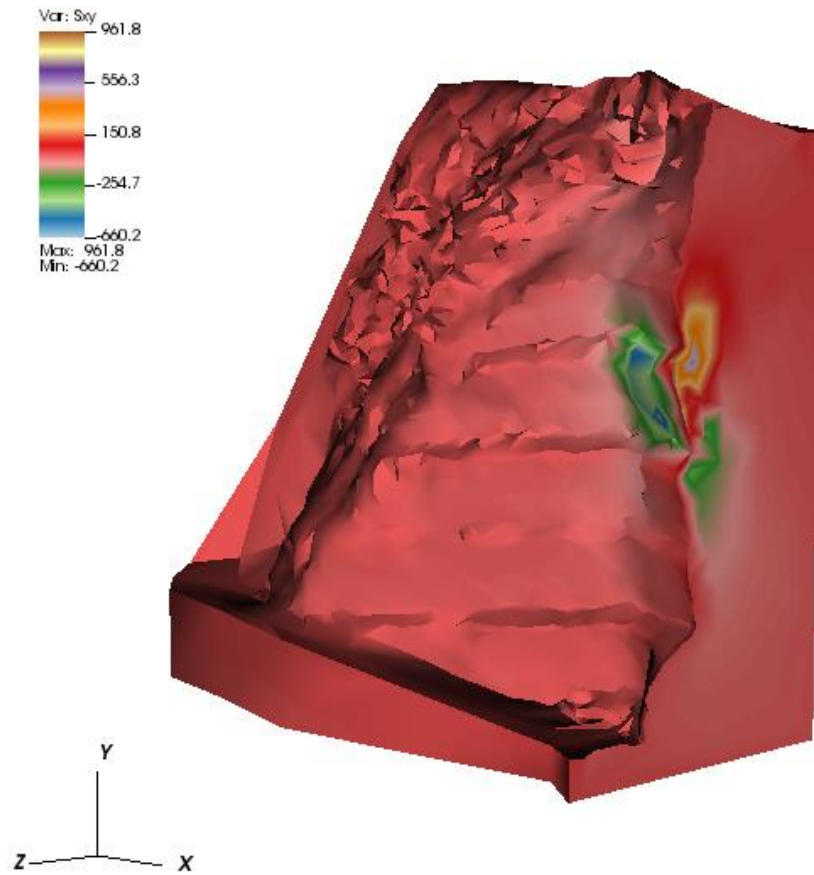
**Figura 4.43 - Tensões normais em z (N/cm<sup>2</sup>) – plano interno**



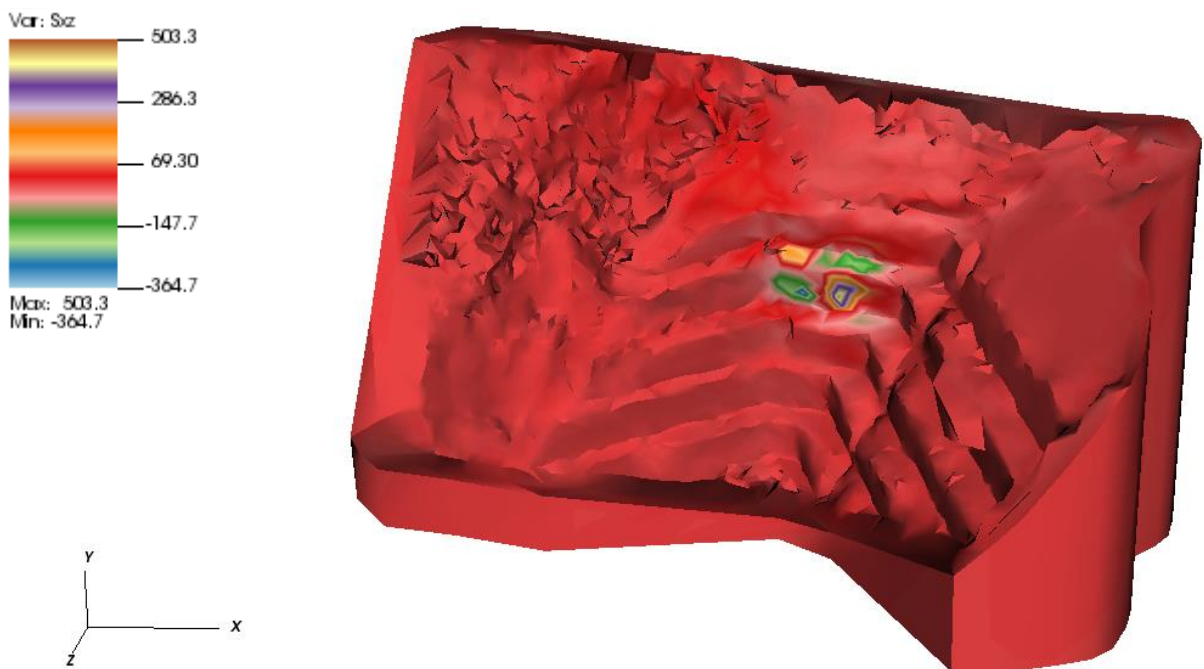
**Figura 4.44 - Tensões cisalhantes  $\tau_{xy}$  (N/cm<sup>2</sup>) – contorno**



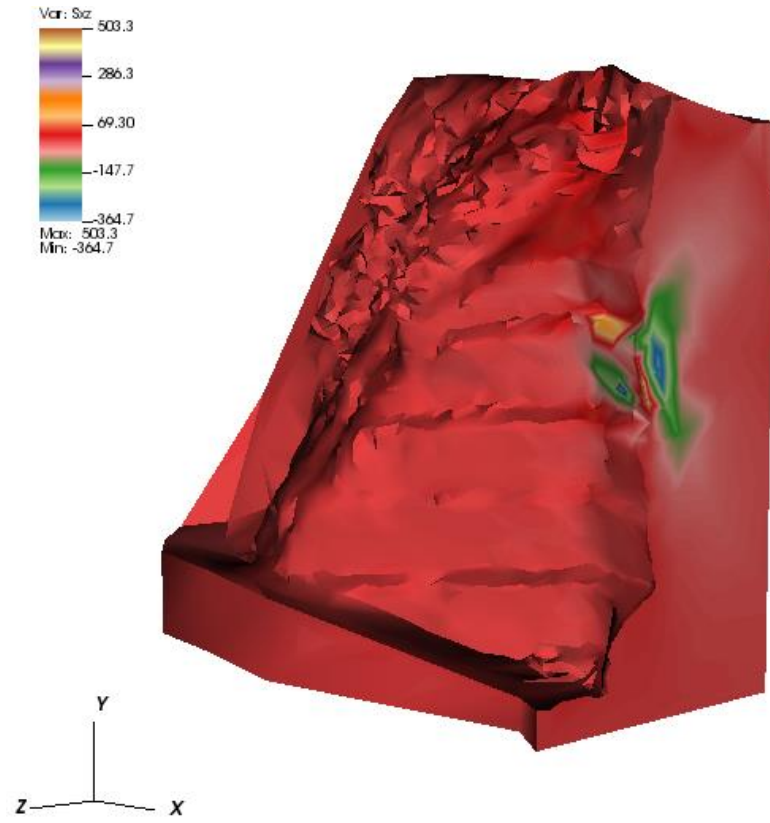
**Figura 4.45 - Tensões cisalhantes  $\tau_{xy}$  (N/cm<sup>2</sup>) – corte**



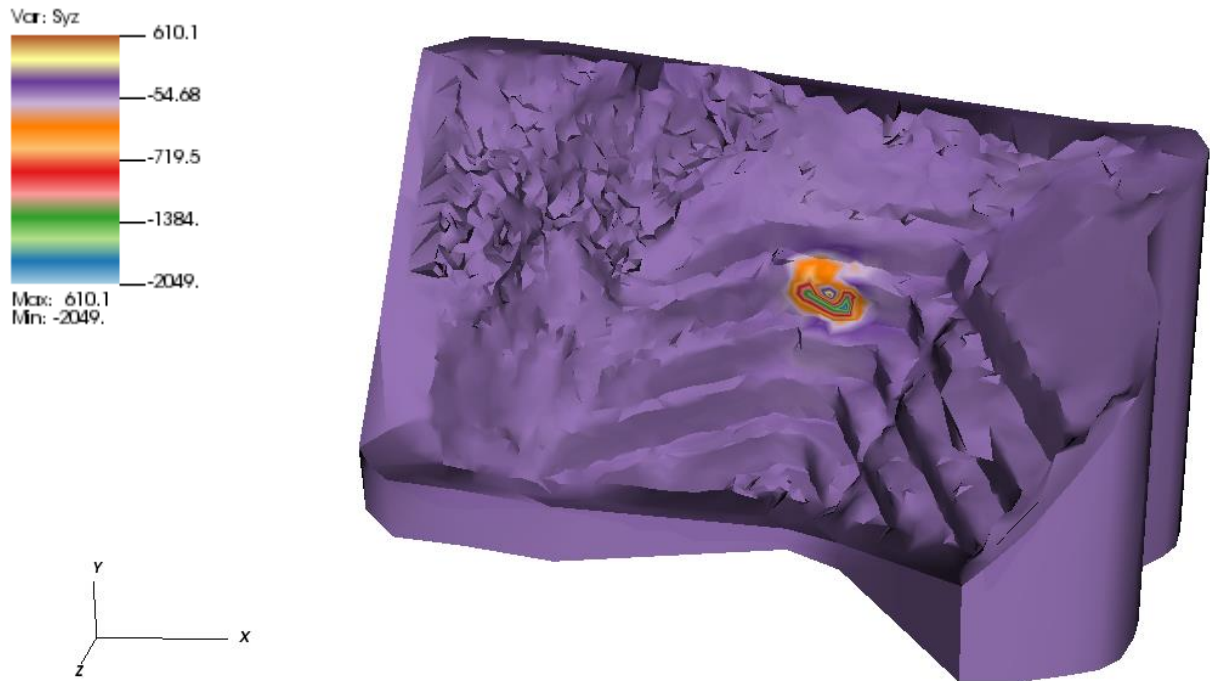
**Figura 4.46 - Tensões cisalhantes  $\tau_{xz}$  (N/cm<sup>2</sup>) – contorno**



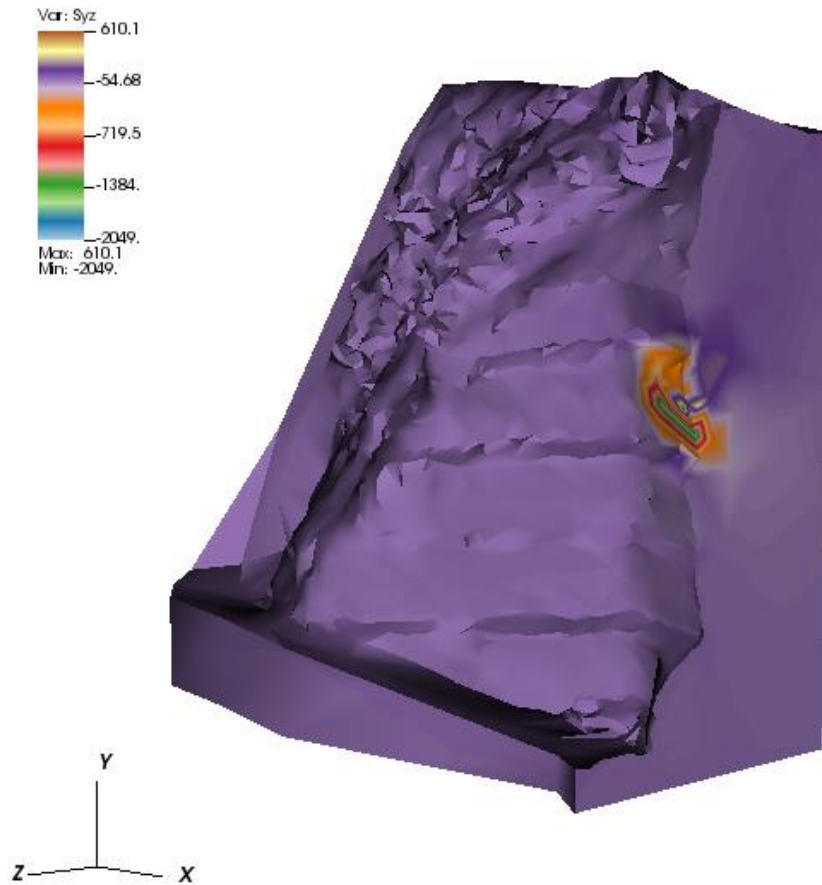
**Figura 4.47- Tensões cisalhantes  $\tau_{xz}$  (N/cm<sup>2</sup>) – corte**



**Figura 4.48 - Tensões cisalhantes  $\tau_{yz}$  (N/cm<sup>2</sup>) – contorno**



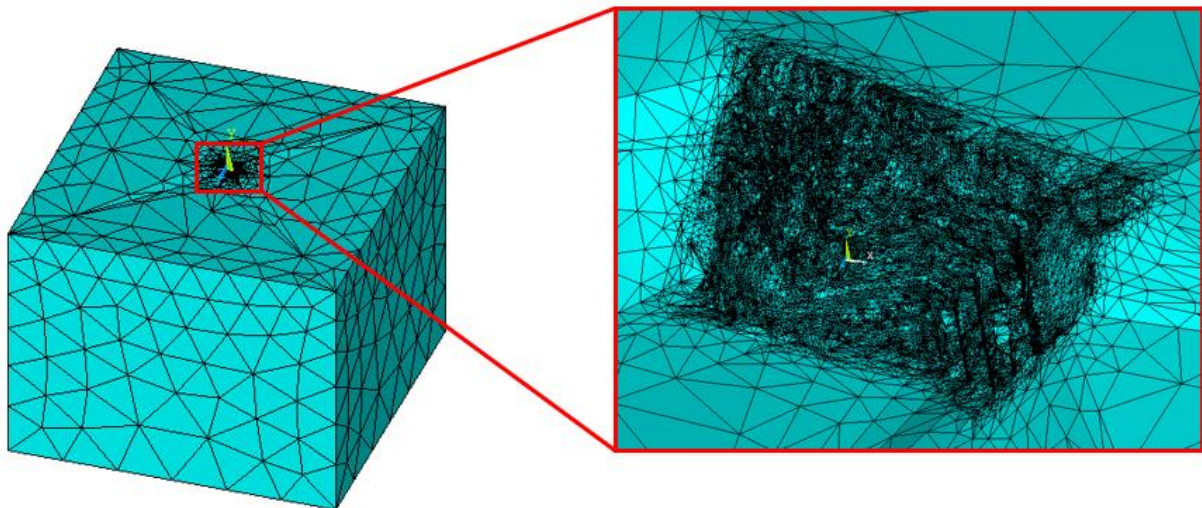
**Figura 4.48 - Tensões cisalhantes  $\tau_{yz}$  (N/cm<sup>2</sup>) – corte**





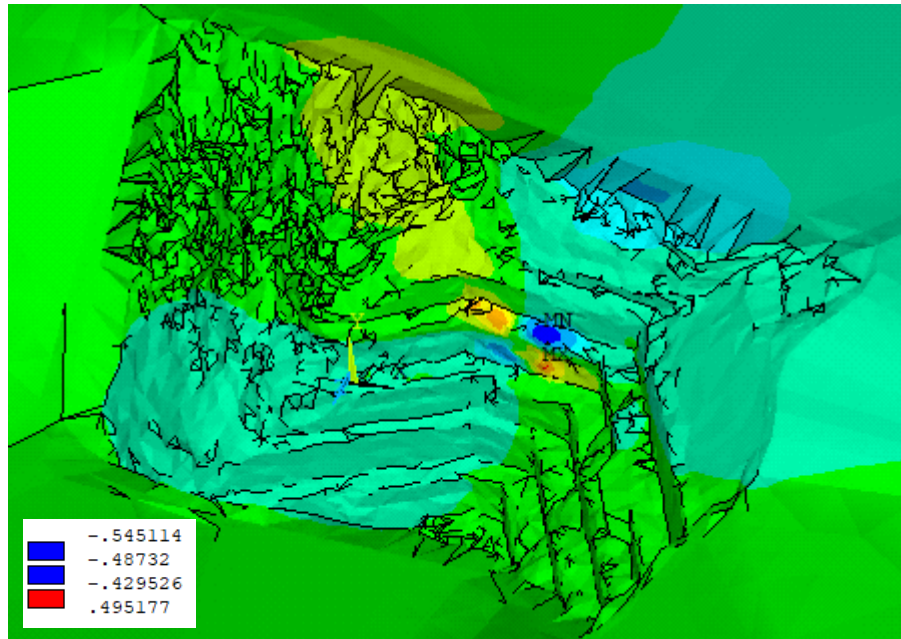
Para validação dos resultados obtidos via MEC (Naesy), foi feita uma análise similar com o MEF no programa comercial Ansys. Tendo em vista que a análise feita no Método dos Elementos de Contorno considera o domínio semi-infinito e o Método dos Elementos Finitos considera apenas o domínio finito, foi necessária a geração de um modelo que simulasse o domínio semi-infinito aumentando consideravelmente as dimensões do sólido. A malha do MEF – Ansys é composta por 674.356 elementos do tipo SOLID187 (elemento tridimensional de 10 nós) e 952.348 nós, totalizando 2.857.044 graus de liberdade – apresentada na Figura 4.50.

**Figura 4.49 - Malha – elementos finitos**

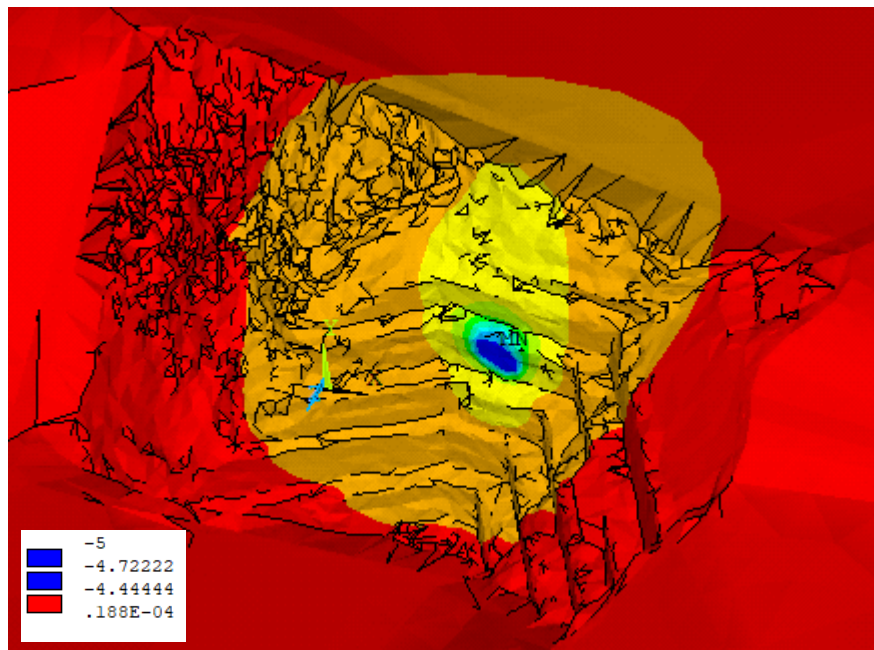


Os resultados obtidos em termos de deslocamentos no contorno nesta análise são mostrados nas figuras 4.51 a 4.53.

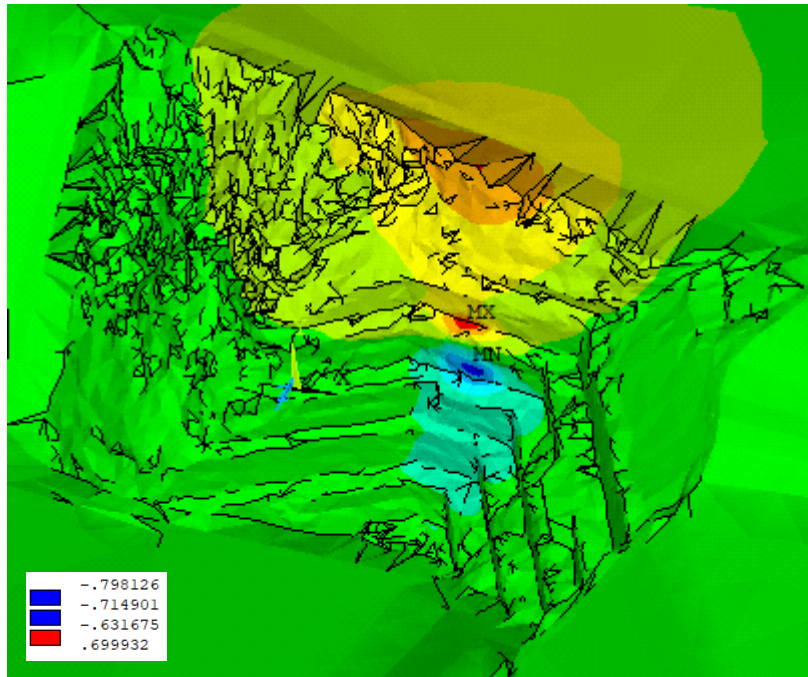
**Figura 4.50 - Deslocamentos em x (cm) - contorno**



**Figura 4.51 - Deslocamentos em y (cm) - contorno**



**Figura 4.52 - Deslocamentos em z (cm) - contorno**



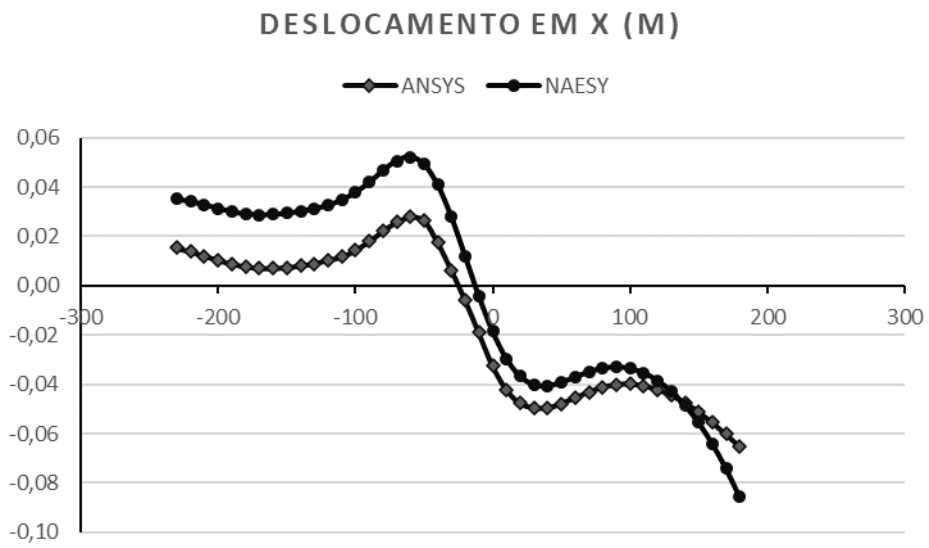
A fim de avaliar as respostas em pontos internos, apresentam-se gráficos com os valores de deslocamentos e tensões obtidos no Naesy – MEC e no Ansys – MEF ao longo de uma linha de pontos internos nas Figuras 4.54 a 4.62. A linha é composta por 42 pontos com as coordenadas indicadas na tabela 4.4.

**Tabela 4.4 – Coordenadas pontos internos**

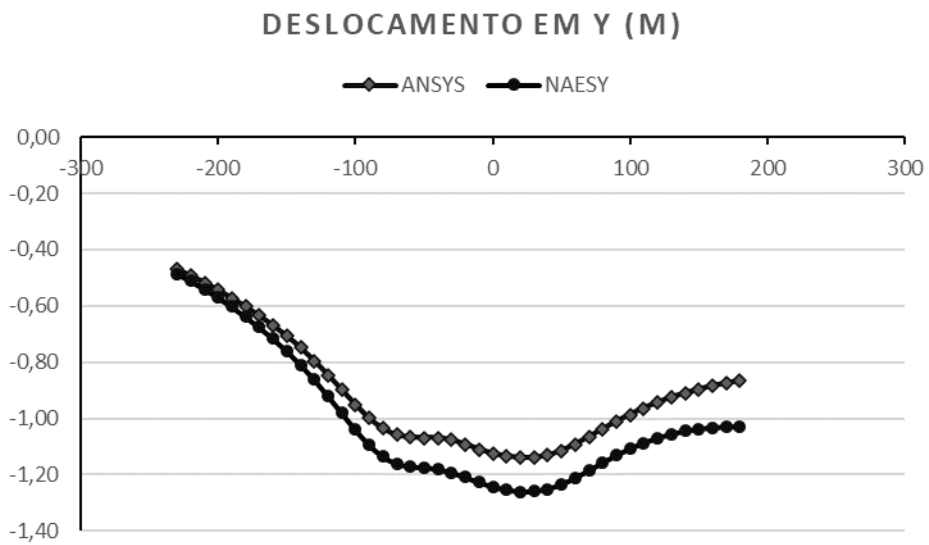
<b>Nó</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>
<b>1</b>	200	180	-250
<b>2</b>	200	170	-250
<b>3</b>	200	160	-250
<b>4</b>	200	150	-250
<b>5</b>	200	140	-250
<b>6</b>	200	130	-250
<b>7</b>	200	120	-250
<b>8</b>	200	110	-250
<b>9</b>	200	100	-250
<b>10</b>	200	90	-250
<b>11</b>	200	80	-250
<b>12</b>	200	70	-250

<b>13</b>	200	60	-250
<b>14</b>	200	50	-250
<b>15</b>	200	40	-250
<b>16</b>	200	30	-250
<b>17</b>	200	20	-250
<b>18</b>	200	10	-250
<b>19</b>	200	0	-250
<b>20</b>	200	-10	-250
<b>21</b>	200	-20	-250
<b>22</b>	200	-30	-250
<b>23</b>	200	-40	-250
<b>24</b>	200	-50	-250
<b>25</b>	200	-60	-250
<b>26</b>	200	-70	-250
<b>27</b>	200	-80	-250
<b>28</b>	200	-90	-250
<b>29</b>	200	-100	-250
<b>30</b>	200	-110	-250
<b>31</b>	200	-120	-250
<b>32</b>	200	-130	-250
<b>33</b>	200	-140	-250
<b>34</b>	200	-150	-250
<b>35</b>	200	-160	-250
<b>36</b>	200	-170	-250
<b>37</b>	200	-180	-250
<b>38</b>	200	-190	-250
<b>39</b>	200	-200	-250
<b>40</b>	200	-210	-250
<b>41</b>	200	-220	-250
<b>42</b>	200	-230	-250

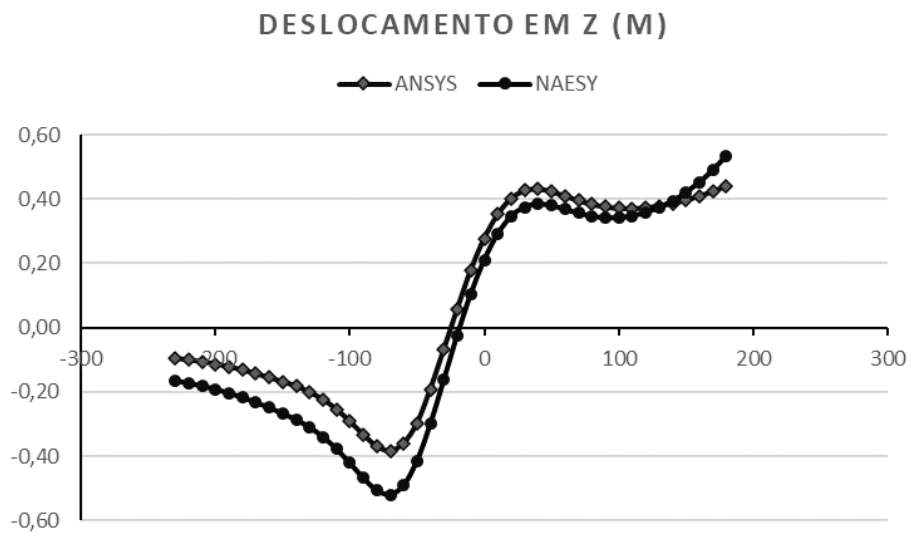
**Figura 4.53 – Deslocamentos em pontos internos (x)**



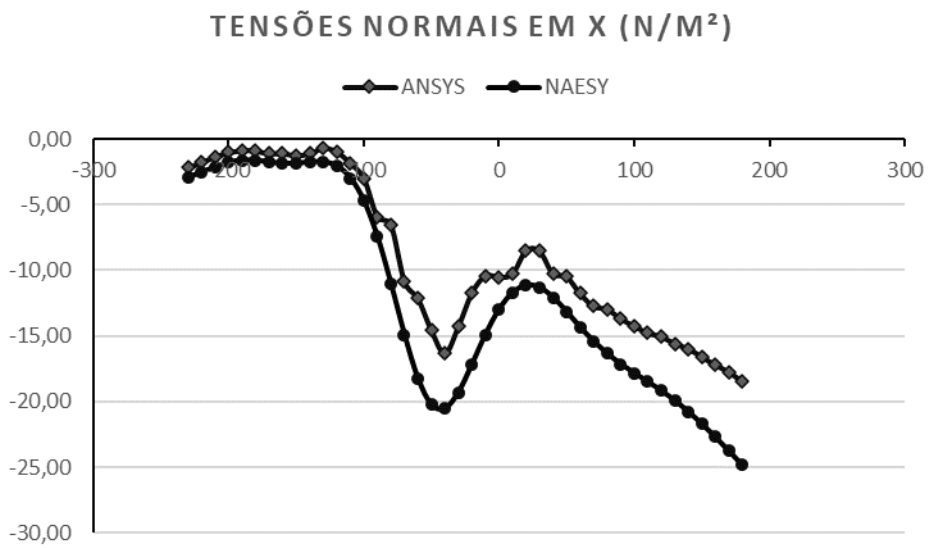
**Figura 4.54 – Deslocamentos em pontos internos (y)**



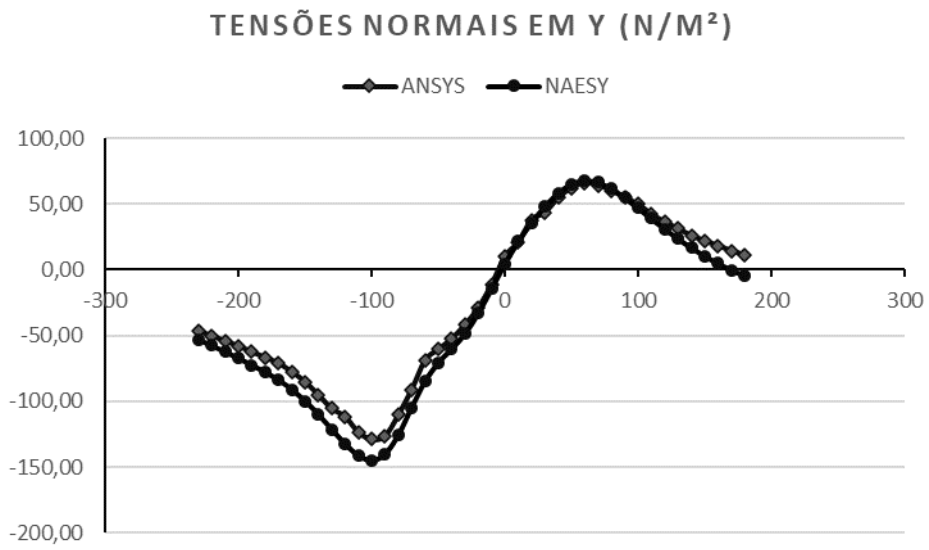
**Figura 4.55 – Deslocamentos em pontos internos (z)**



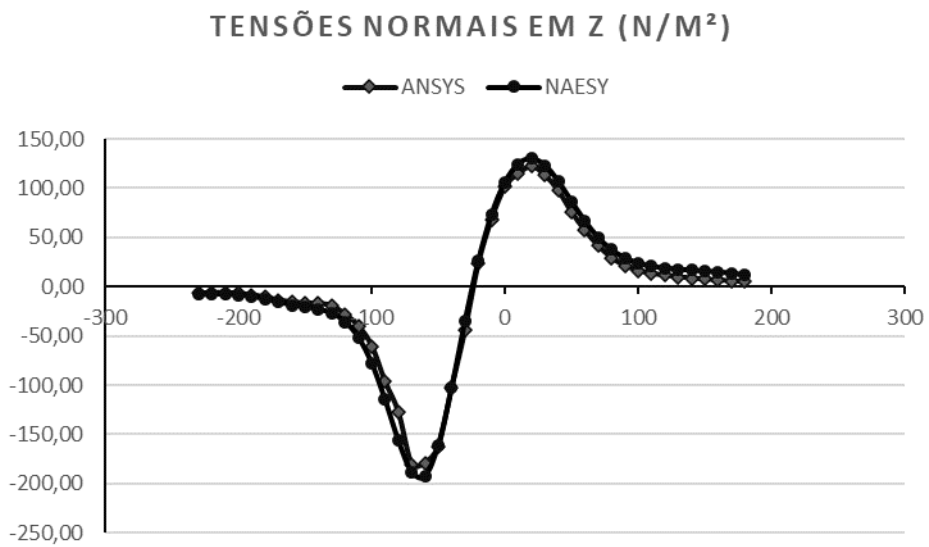
**Figura 4.56 – Tensões normais em pontos internos (x)**



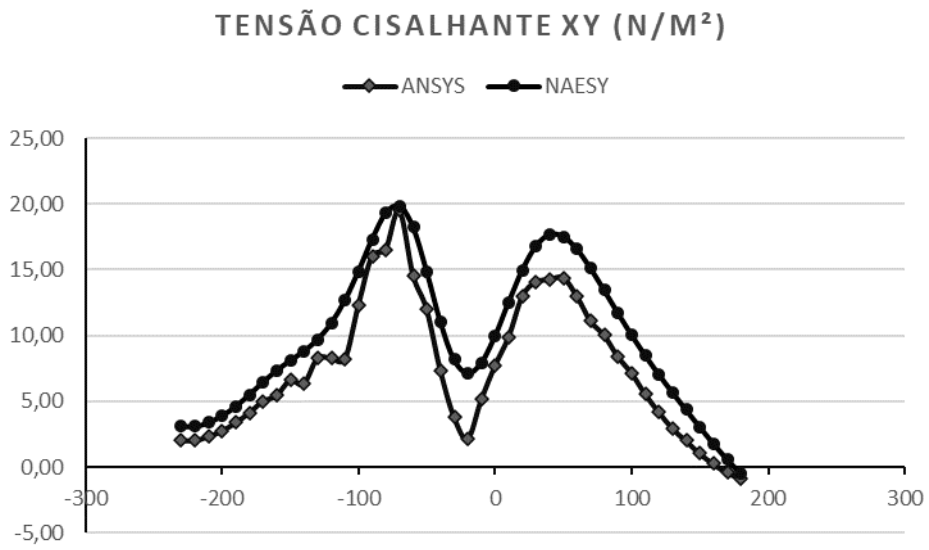
**Figura 4.57 – Tensões normais em pontos internos (y)**



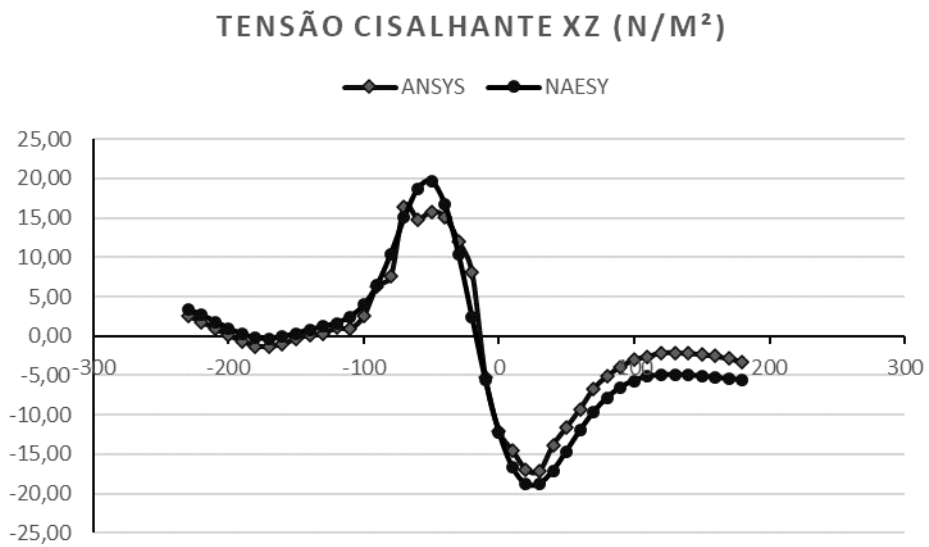
**Figura 4.58 – Tensões normais em pontos internos (z)**



**Figura 4.59 – Tensões cisalhantes em pontos internos (xy)**

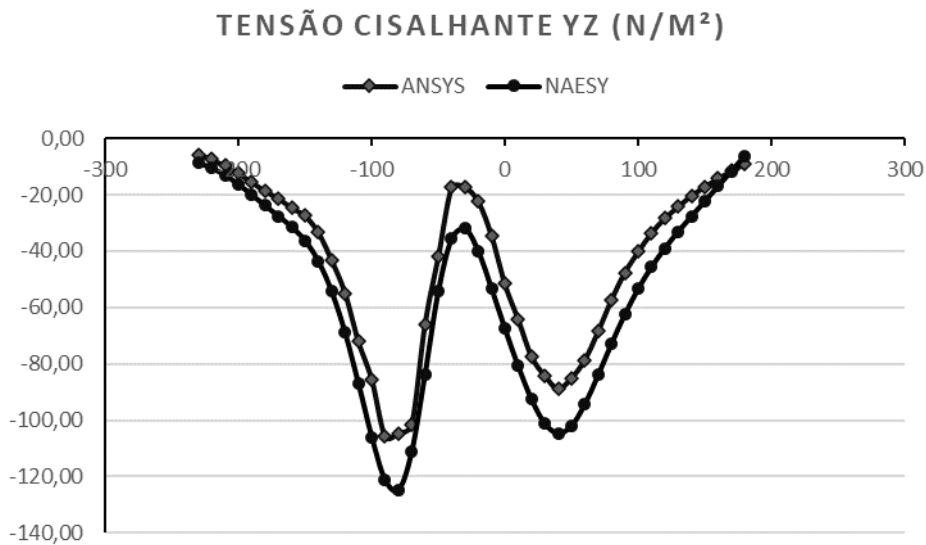


**Figura 4.60 – Tensões cisalhantes em pontos internos (xz)**





**Figura 4.61 – Tensões cisalhantes em pontos internos (yz)**



A partir da visualização dos gráficos das Figuras 4.54 a 4.62, pode-se perceber que tanto os resultados no contorno quanto os resultados em pontos interno apresentam comportamento semelhante e boa concordância quando comparados com as respostas obtidas via MEF-Ansys.

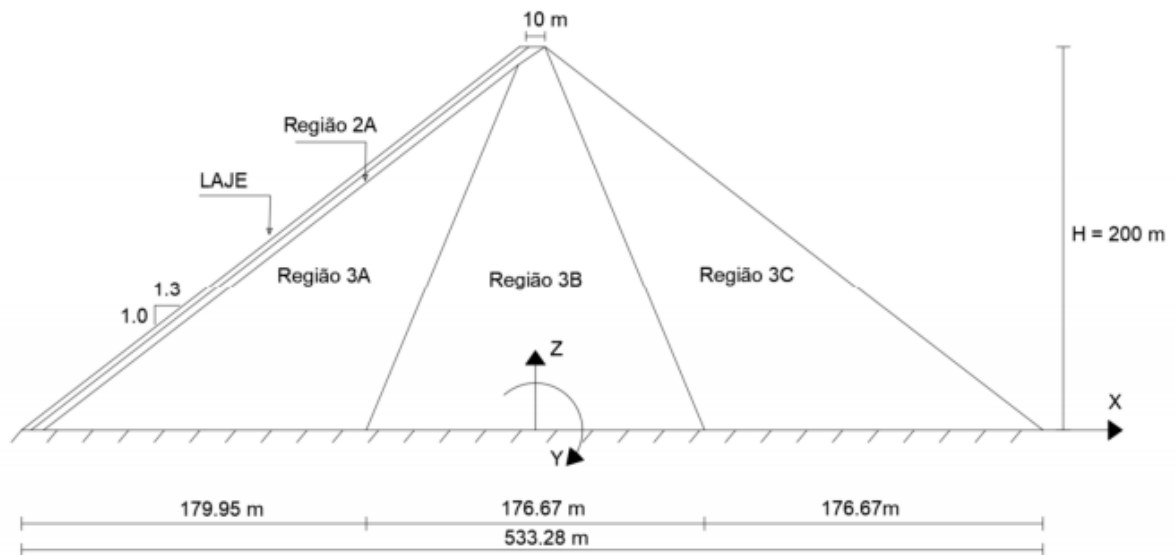
Observa-se que a malha utilizada no NAESY (MEC) consiste em 2.653 nós e 5.232 elementos, com um total de 7.959 graus de liberdade. Enquanto a malha utilizada na análise via MEF é composta por 952.348 nós, 674.356 elementos totalizando 2.857.044 graus de liberdade e assim apresentando ordem de cerca de 350 vezes maior do que o problema solucionado via MEC – NAESY.

#### **4.4 APLICAÇÃO 3 – BARRAGEM DE ENROCAMENTO COM FACE DE CONCRETO**

Visando estudar o comportamento de barragens de enrocamento com face de concreto (BEFCs), modelou-se um segmento de 400m de comprimento de uma BEFC, com diferentes zonas de enrocamento, estudada por Basso (2007). A barragem possui 200m de altura e laje com espessura de 1m. A distribuição das zonas (regiões) é mostrada na Figura 4.63. As propriedades elásticas dos materiais são dadas por:  $E = 20\text{GPa}$  para a laje de concreto,  $E = 80\text{MPa}$  para Região 2A,  $E = 60\text{MPa}$  para a Região 3A,  $E = 40\text{MPa}$  para a Região 3B e  $E = 20\text{MPa}$  para a Região 3C. O coeficiente de Poisson e a massa específica são de  $\nu = 0.3$  e  $2039.35\text{kg/m}^3$  respectivamente para todas as sub-regiões. Em uma primeira análise da BEFC, sua base é considerada como fixa

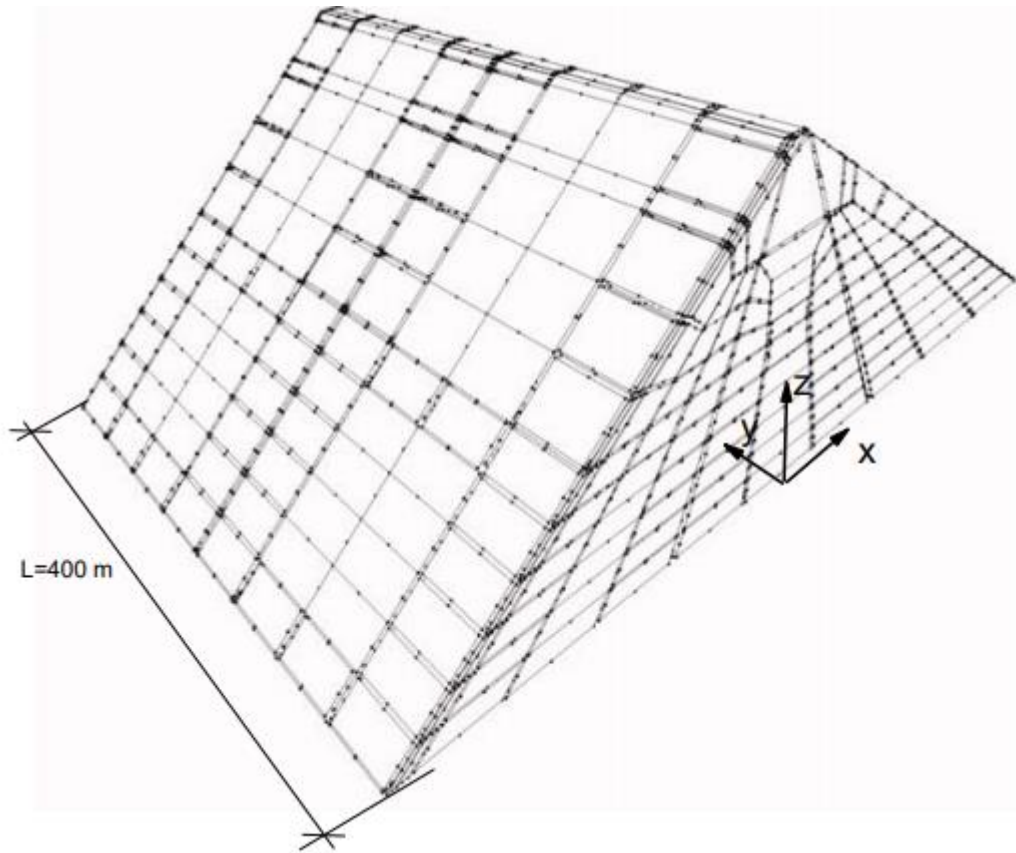
nas três direções, e nas laterais, impõe-se restrição dos deslocamentos longitudinais (na direção  $y$ ). Como carregamento, é considerado apenas o peso próprio da barragem (cenário em que se simula a barragem com o reservatório vazio).

**Figura 4.62 – Seção transversal BEFC**



O modelo de elementos de contorno adotado na análise é aquele apresentado na Figura 4.64. Este modelo é bastante complexo e constitui-se de 20 subdomínios (sub-regiões), contendo ao todo 1.928 elementos de contorno quadráticos de 8 nós (elemento Q8) e 11.610 nós, resultando em um total de 34.830 graus de liberdade para o modelo completo.

**Figura 4.63 – Malha elementos de contorno**



A resposta em termos de deslocamentos é mostrada no gráfico de cores da Figura 4.65, determinados usando-se o programa computacional NAESY. Na Figura 4.66, apresenta-se o correspondente gráfico obtido com o software (ANSYS inc., 1994), com o objetivo de aferir a presente implementação. Com relação aos deslocamentos, verifica-se grande concordância, com uma divergência entre os deslocamentos máximos da ordem de 0.276%.

Para o cálculo de tensões, consideram-se pontos amostrais situados na seção da barragem de posição  $y = 100 \text{ m}$  a partir de sua face direita, ao longo de uma linha vertical no centro da seção e ao longo de outra linha no contorno da BEFC (linhas em vermelho indicadas na Figura 4.67). Para os pontos ao longo do contorno do enrocamento (na linha vermelha inclinada à direita na Figura 4.67), obtêm-se as tensões mostradas na Figura 4.68.

Figura 4.64 – Deslocamentos em z (mm) - NAESY

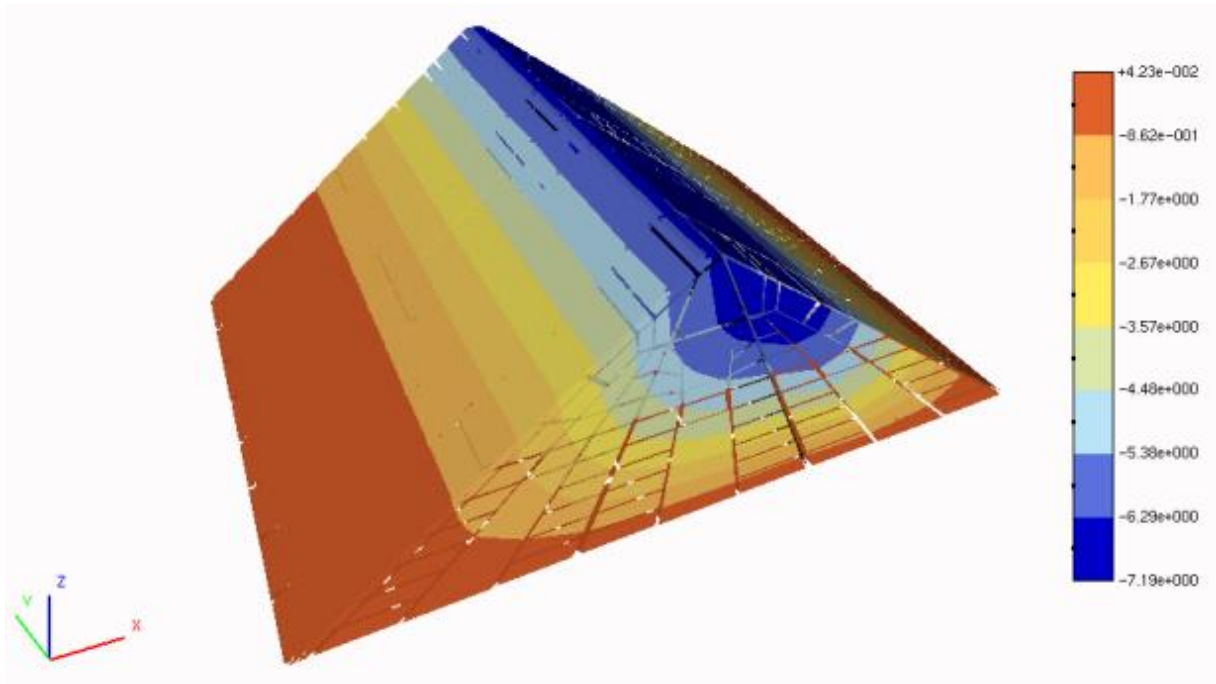
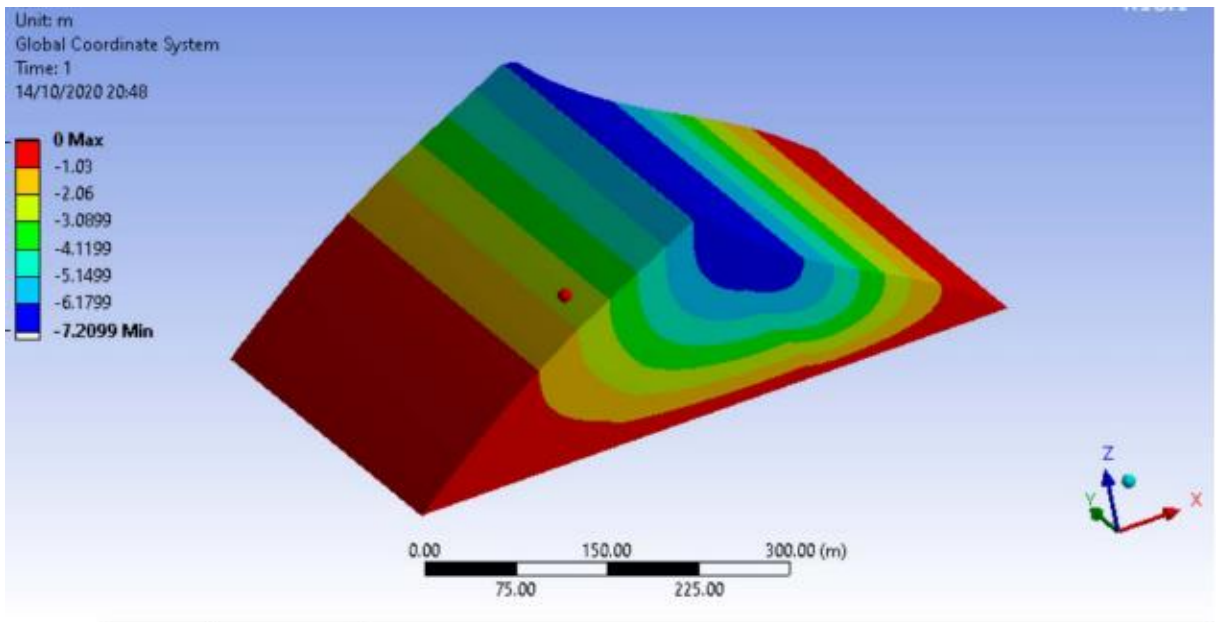
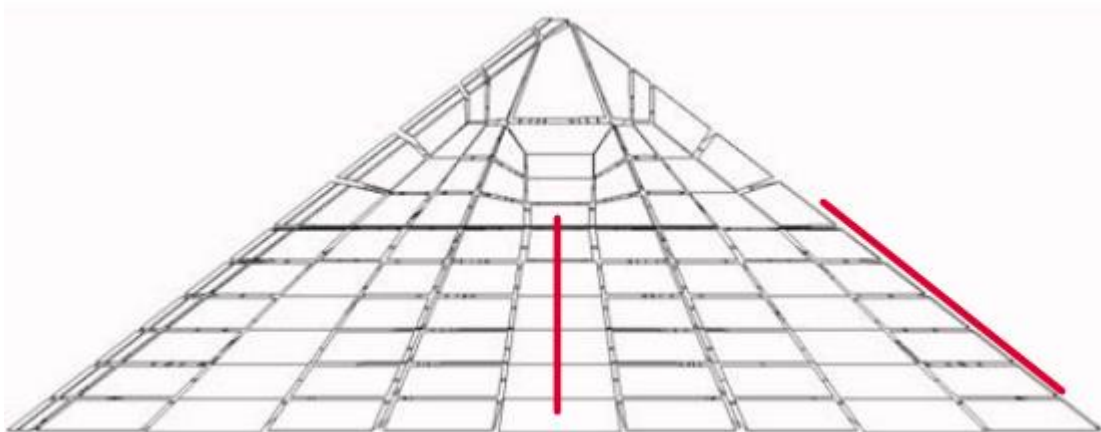


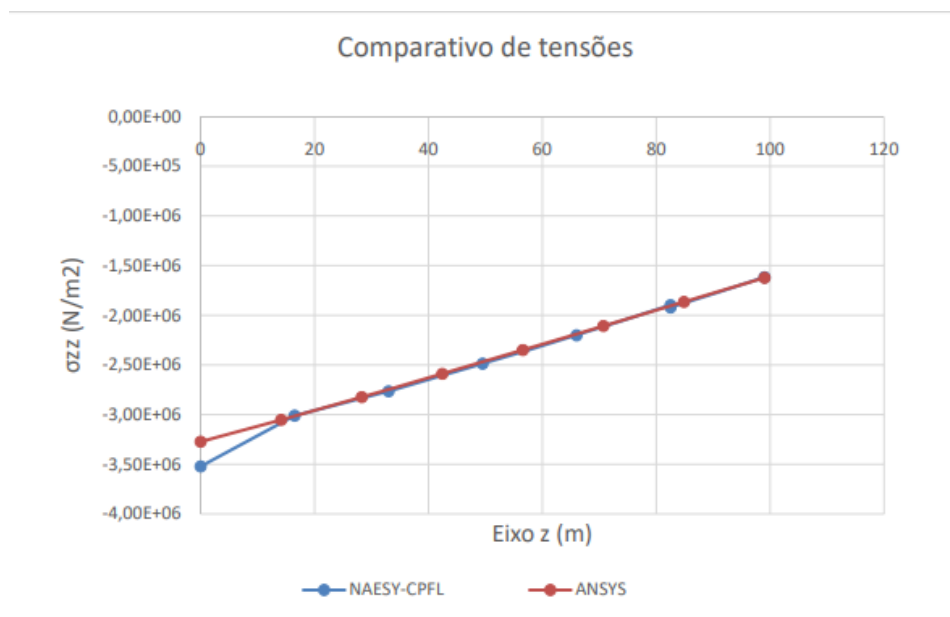
Figura 4.65 – Deslocamentos em z (mm) – ANSYS 18.1



**Figura 4.66 – Regiões de verificação de tensões**



**Figura 4.67 – Tensões normais  $\sigma_{zz}$**



Já os comparativos de resposta nos pontos internos (ao longo da linha vertical vermelha mostrada na Figura 4.67), são dados em termos dos deslocamentos verticais (Figura 4.69) e das tensões normais  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$  mostradas nas Figuras 4.70, 4.71 e 4.72, respectivamente. Como se vê das curvas das respostas obtidas, as respostas calculadas com o MEC são bastante satisfatórias.

Figura 4.68 – Deslocamentos em z

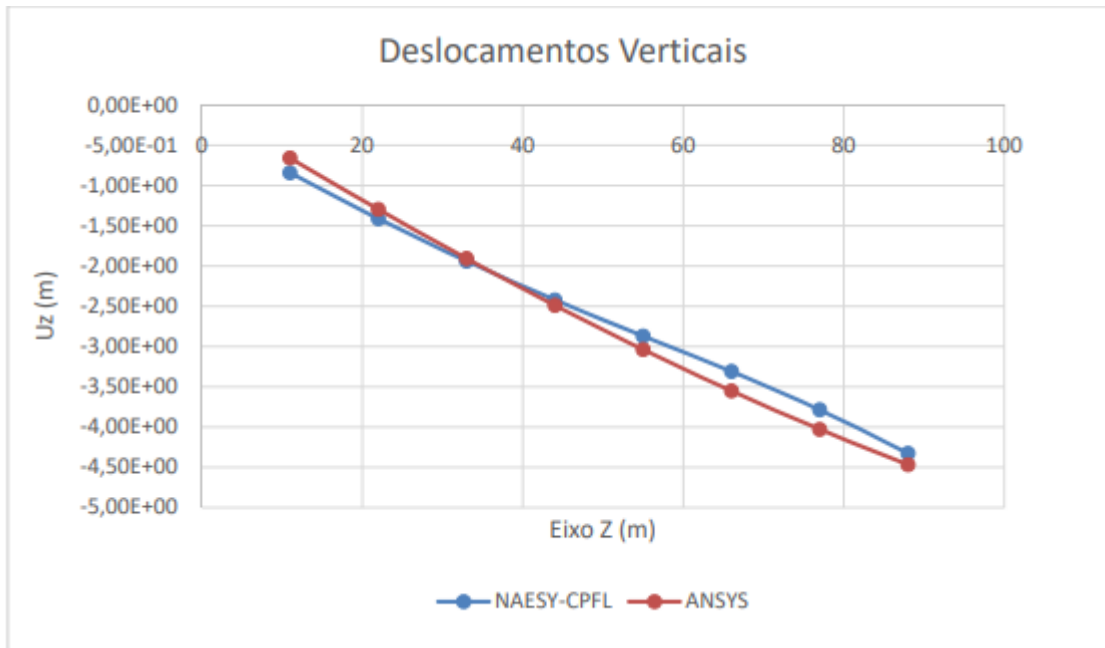


Figura 4.69 – Tensões normais  $\sigma_{xx}$

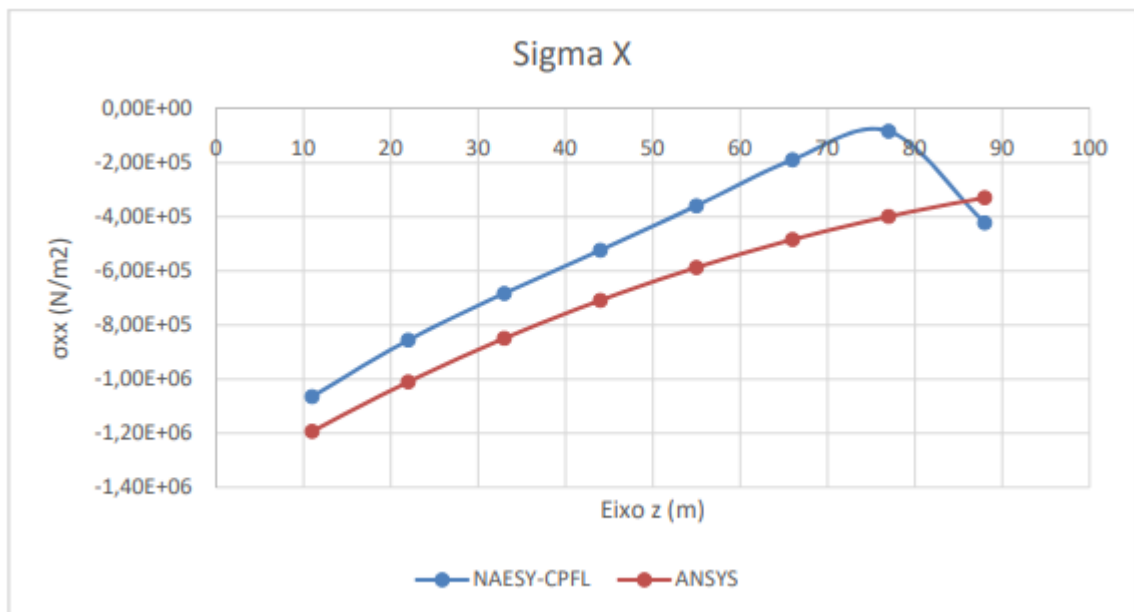


Figura 4.70 – Tensões normais  $\sigma_{yy}$

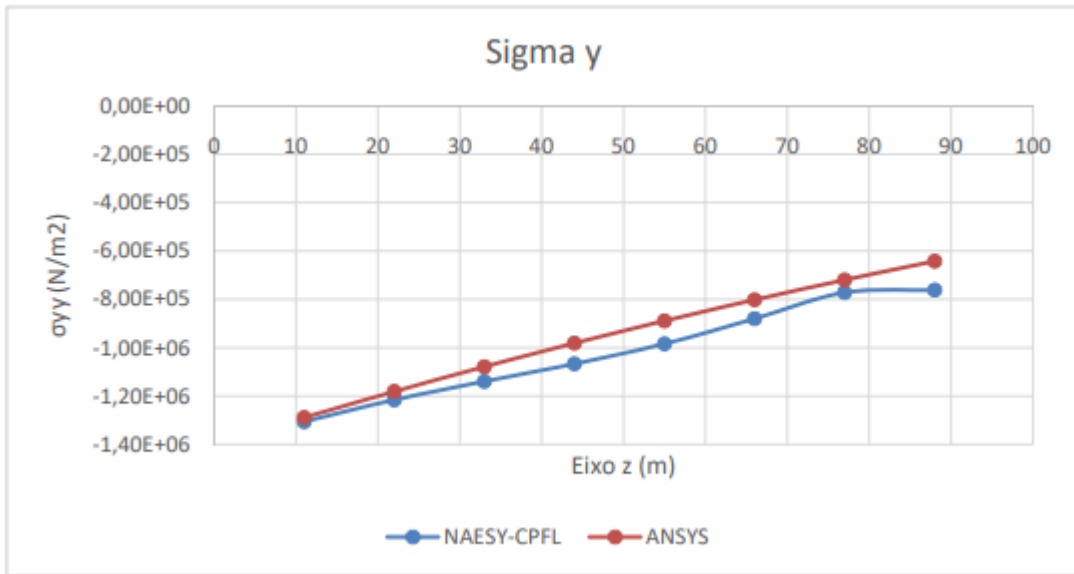
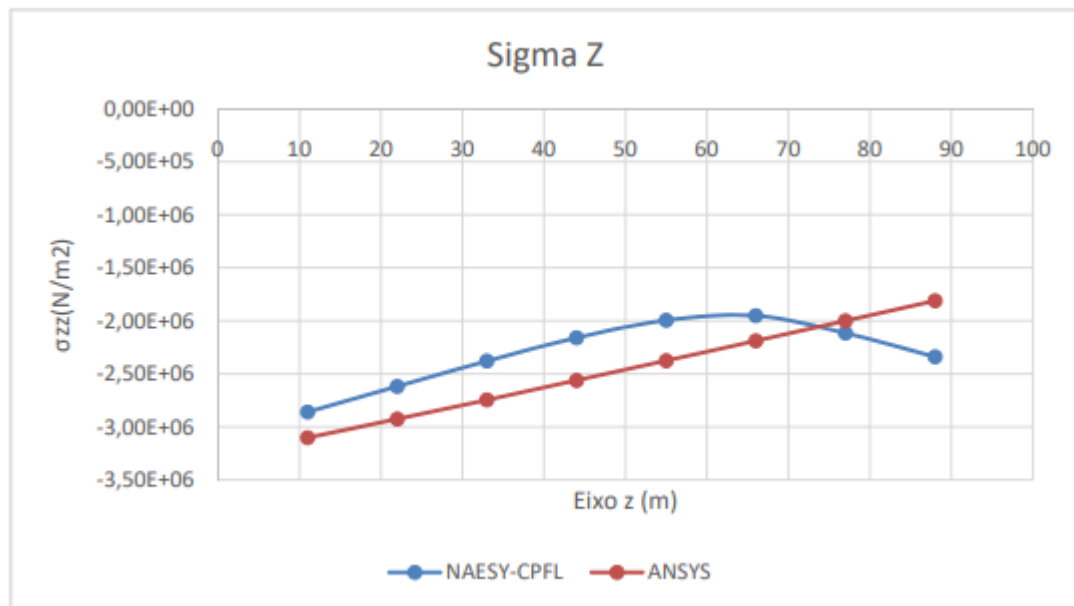


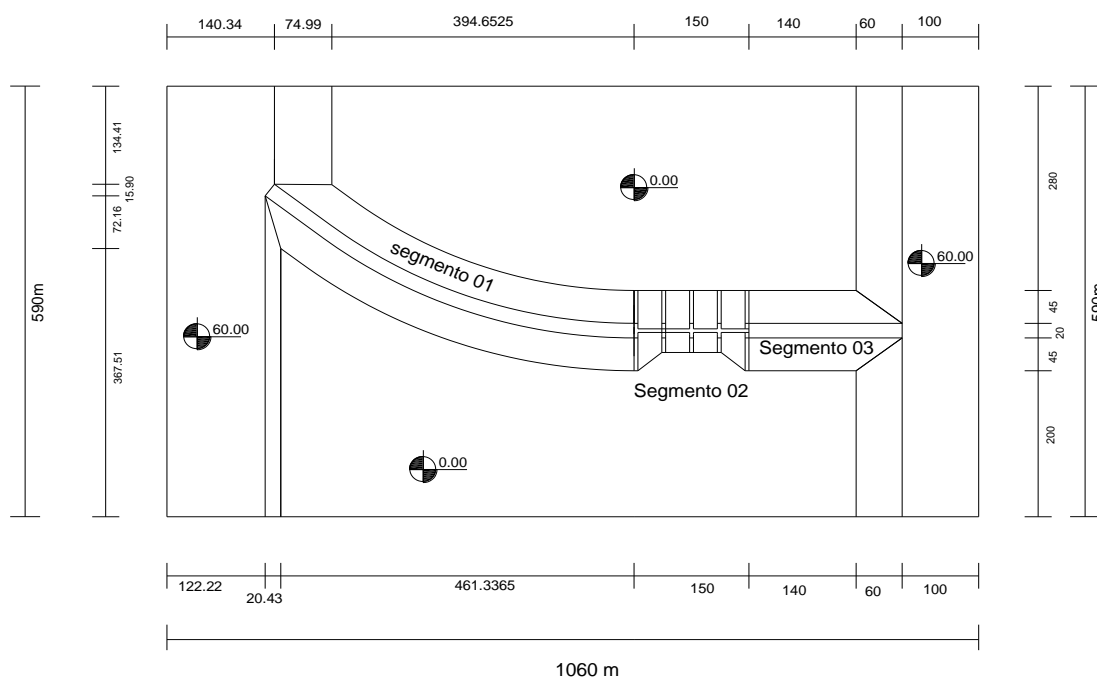
Figura 4.71 – Tensões normais  $\sigma_{zz}$



#### 4.5 APLICAÇÃO 4 – BARRAGEM DE CONCRETO

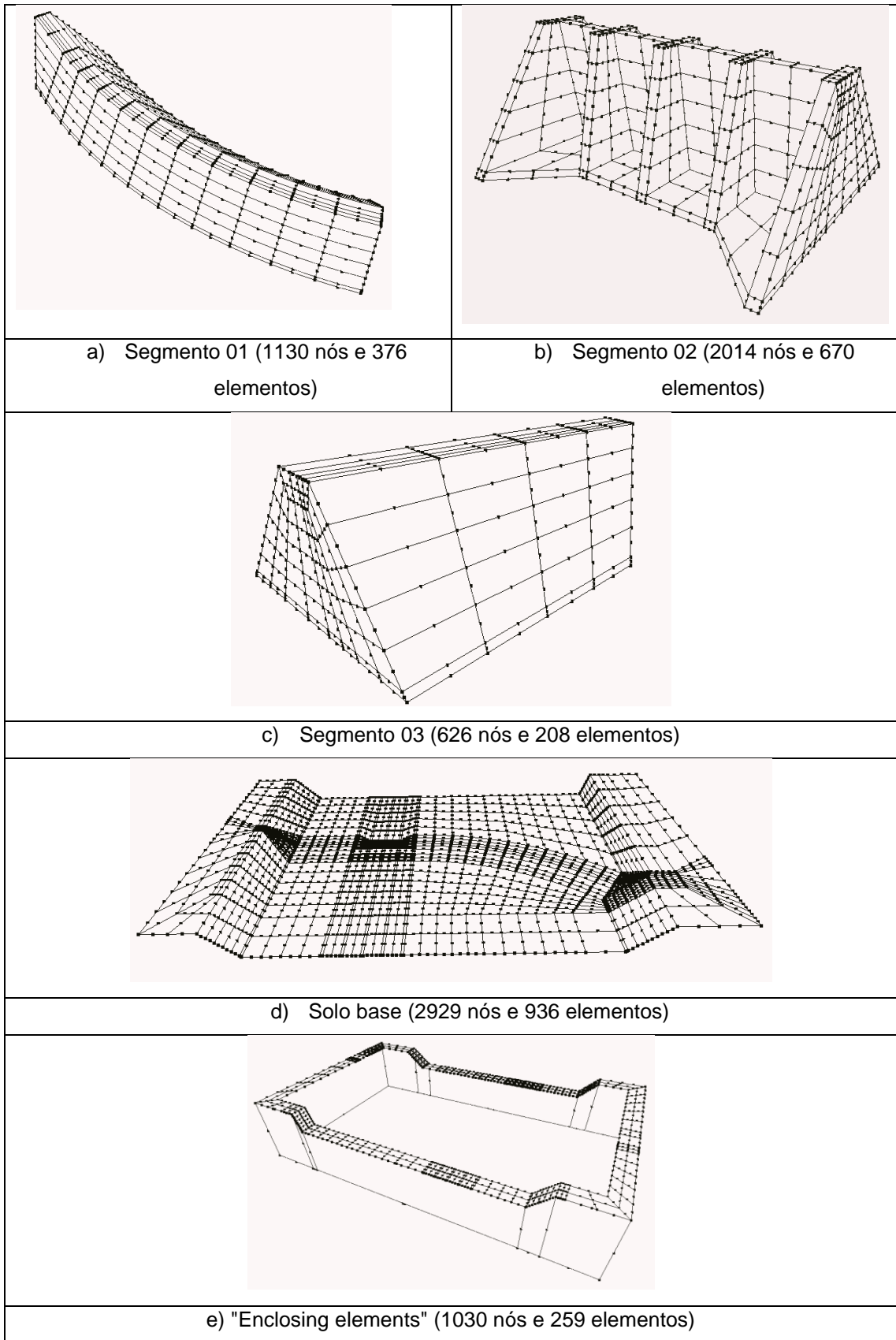
Trata-se de uma barragem fictícia constituída de três segmentos (veja Figura 4.73), sendo dois deles em terra e um ao centro em concreto. Na análise considerou-se o efeito da interação solo-estrutura, onde o solo foi analisado como domínio semi-infinito aproveitando-se das condições de irradiação das soluções fundamentais do MEC. Em relação às propriedades constitutivas dos materiais empregados, considera-se que os segmentos 01 e 03 tenha módulo de elasticidade longitudinal  $E=40\text{MPa}$ ,  $\nu=0,3$  e  $\rho=1800\text{kg/m}^3$ , o solo de base,  $E=60\text{MPa}$  e  $\nu=0,2$ , e o concreto,  $E=30\text{GPa}$ ,  $\nu=0,2$  e  $\rho=2400\text{kg/m}^3$ . Nas análises, levou-se em conta o peso próprio da barragem apenas, sem considerar o peso próprio do solo base. As malhas de elementos de contorno são mostradas na Figura 4.74.

**Figura 4.72 - Aspecto geral da barragem**



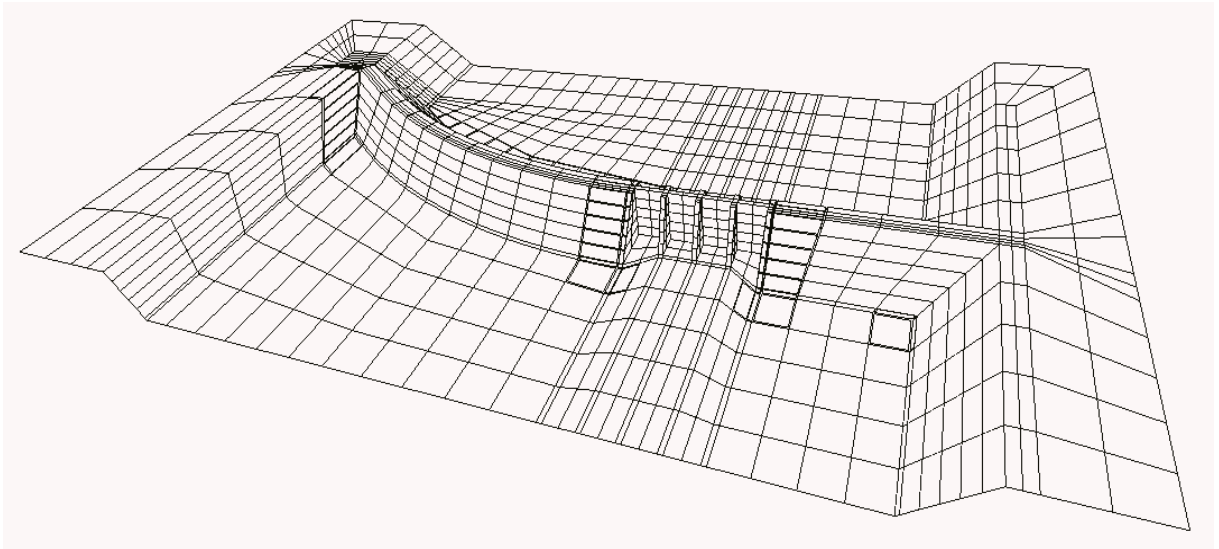


**Figura 4.73 – Malhas de elementos de contorno dos segmentos (sub-regiões)**



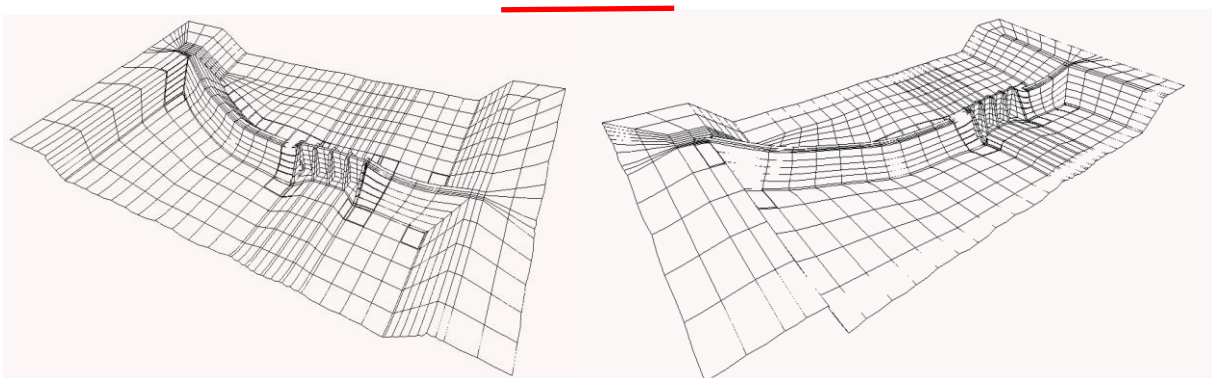
O modelo tridimensional completo de elementos de contorno (com os 3 segmentos acoplados) é apresentado na Figura 4.75, possuindo ao todo 8.249 nós, resultando em um modelo com 24.747 graus de liberdade.

**Figura 4.74 – Malha elementos de contorno**

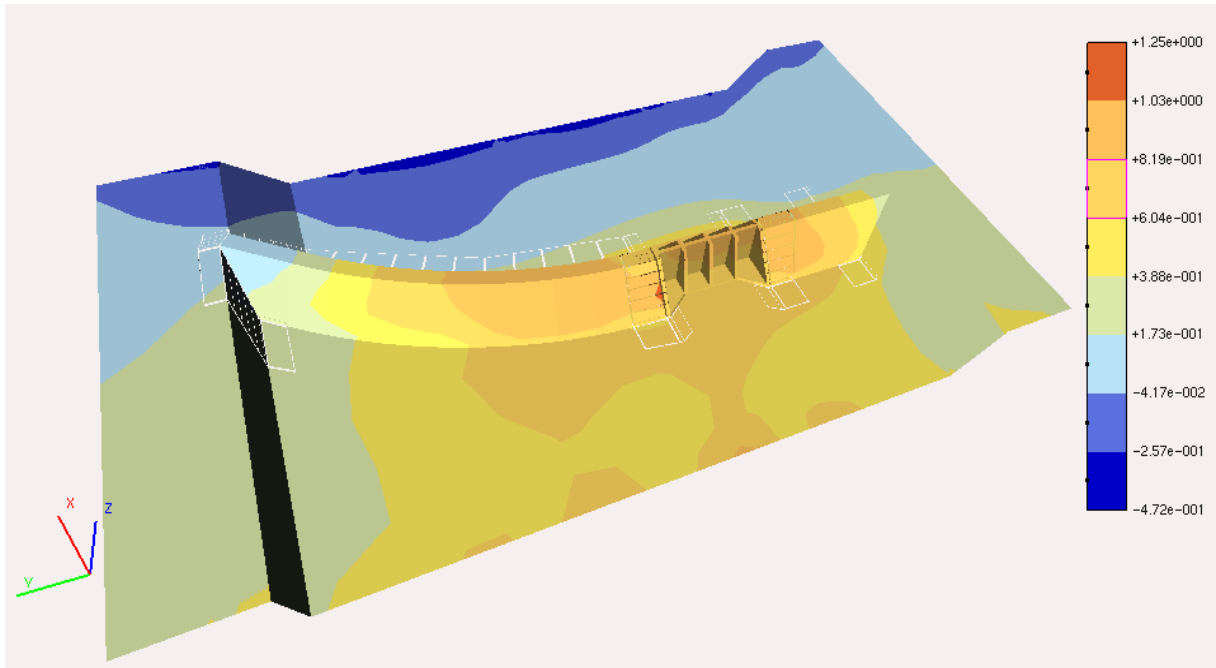


O aspecto da deformada da barragem é mostrado na Figura 4.76. As magnitudes dos deslocamentos, em metros, são mostradas nos diagramas em cores nas Figuras 4.77 (direção horizontal X), 4.78 (direção horizontal Y) e 4.79 (direção vertical Z).

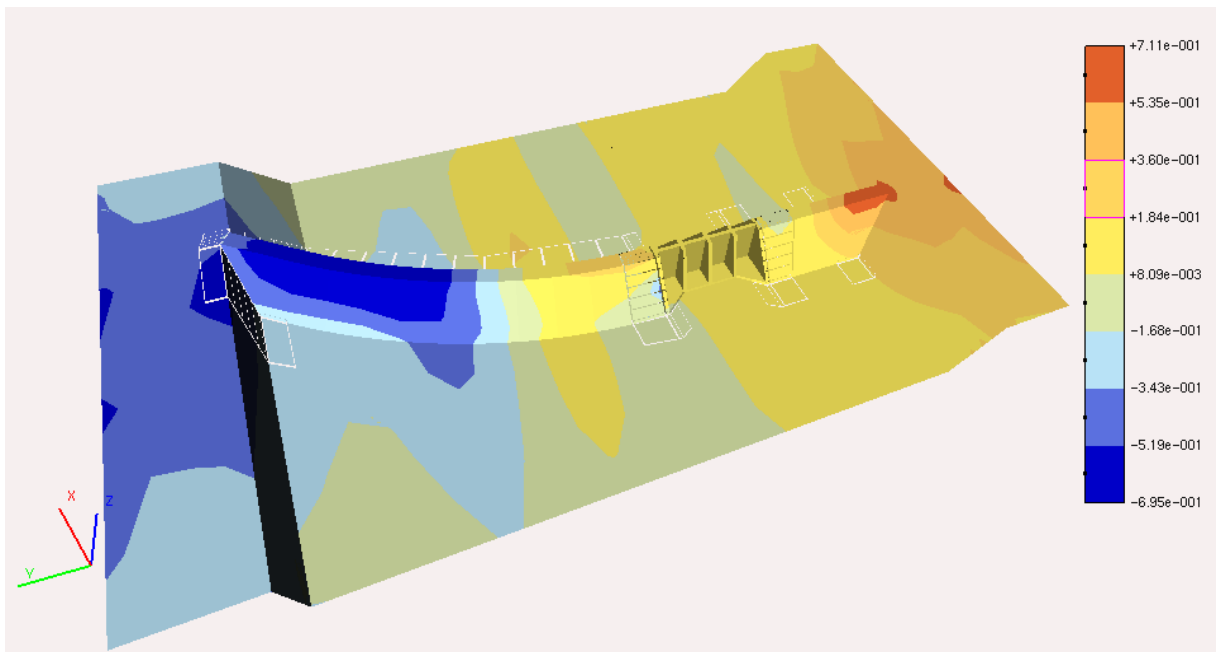
**Figura 4.75 – Deformada**



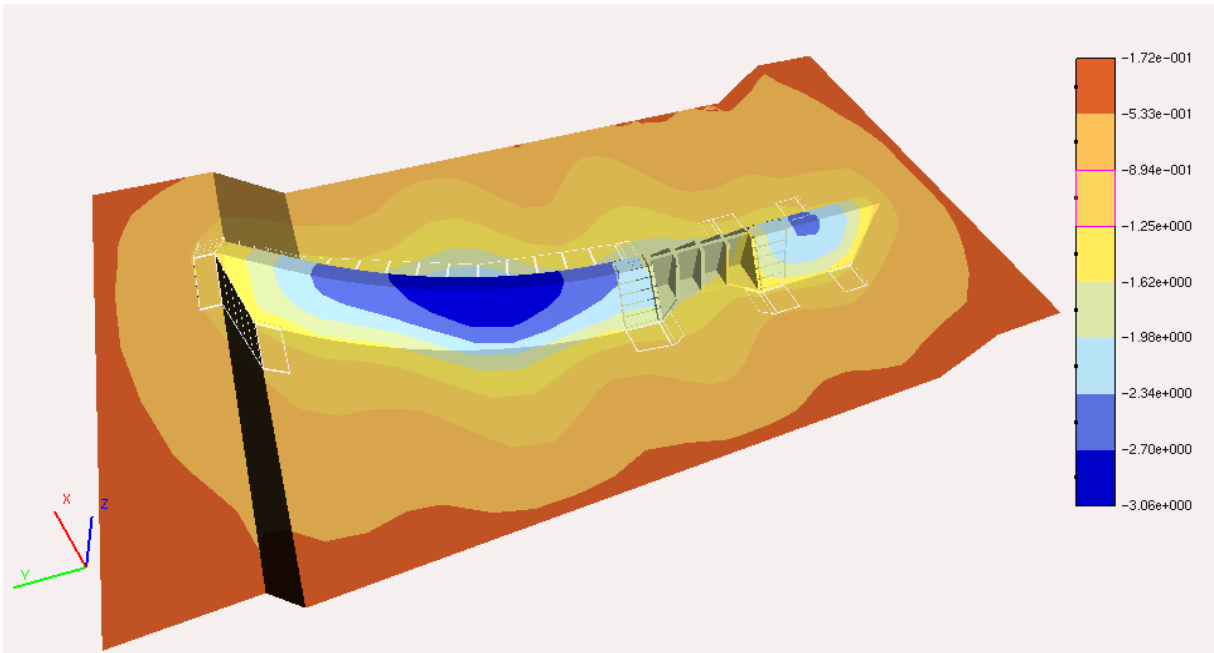
**Figura 4.76 – Deslocamentos em x (m)**



**Figura 4.77 – Deslocamentos em y (m)**

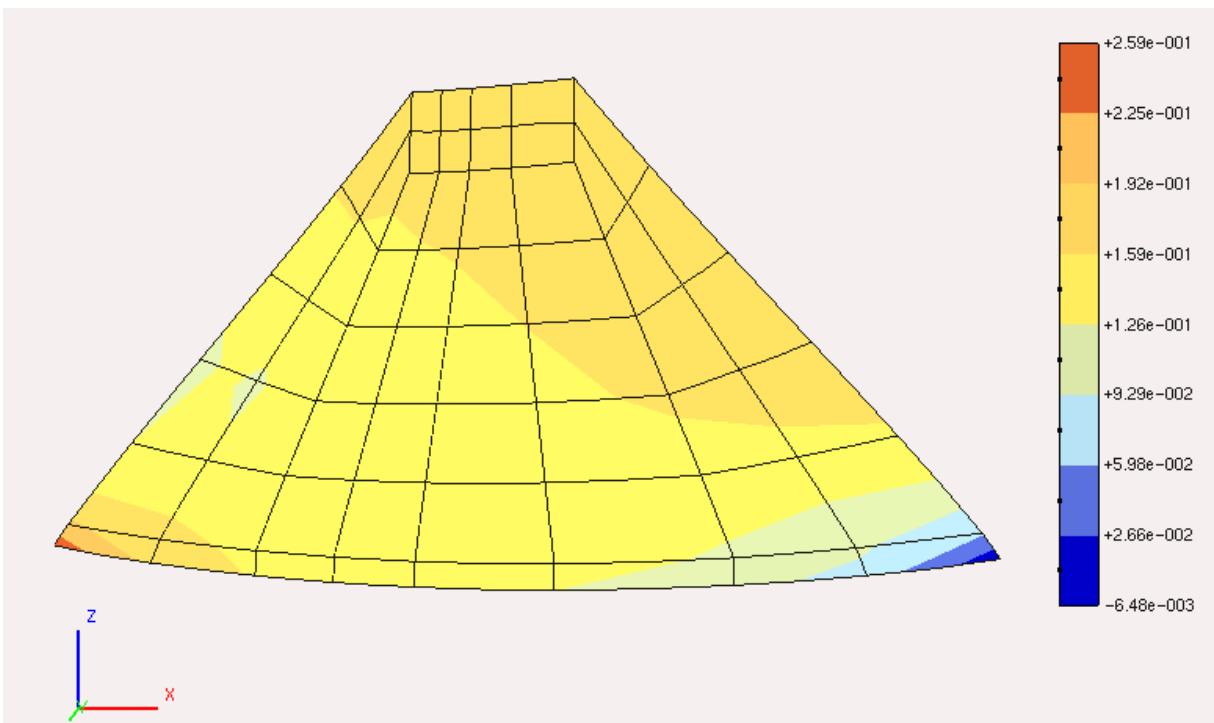


**Figura 4.78 – Deslocamentos em z (m)**

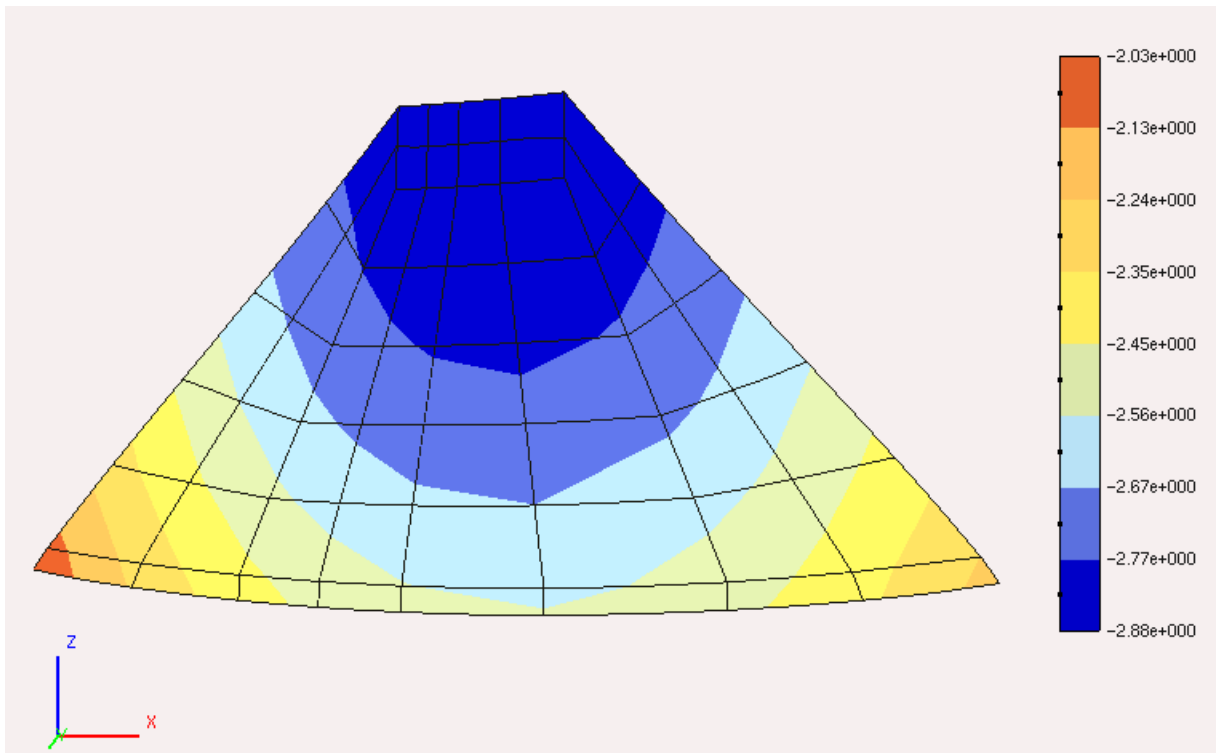


As Figura 4.80 e 4.81 mostram a magnitude dos deslocamentos através dos gradientes em cores para os deslocamentos horizontal (direção X) e vertical (direção Z), respectivamente, em um plano interno cortando o centro longitudinal da barragem.

**Figura 4.79 – Deslocamentos em x (m)**

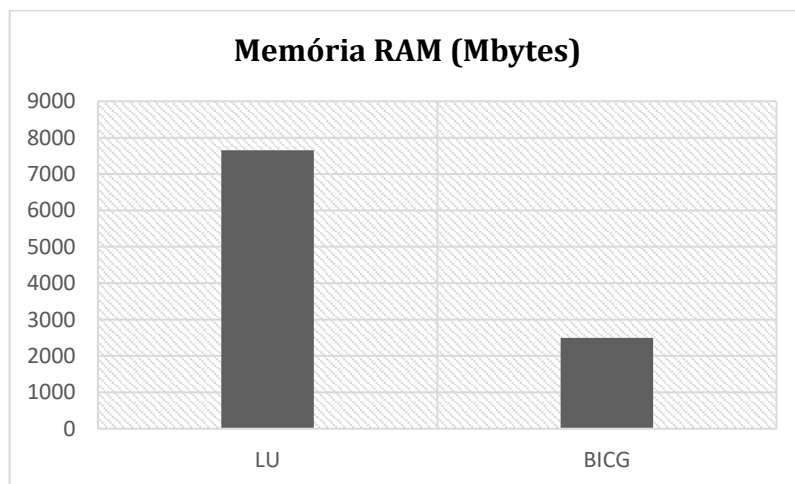


**Figura 4.80 – Deslocamentos em z (m)**



Para ilustrar as vantagens de se utilizar "solvers" iterativos, na Figura 4.82 faz-se a comparação de memória RAM (MBytes) usada quando da utilização do "solver" direto baseado na decomposição LU e a utilização do "solver" iterativos BD-SBS-BiCG.

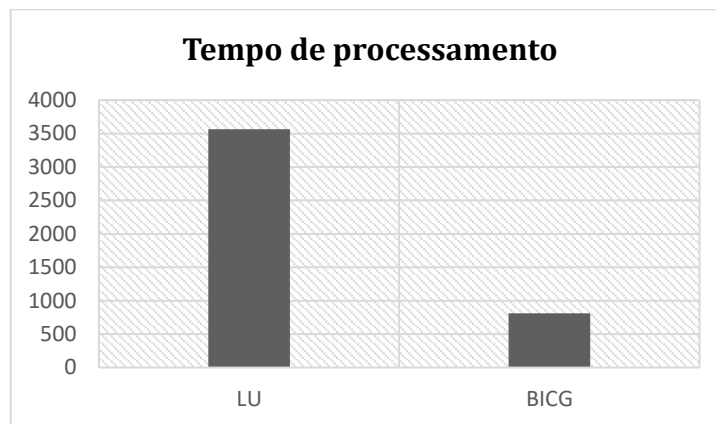
**Figura 4.81 – Utilização de memória RAM (Mbytes)**



Essa diferença no consumo de memória é decorrente do fato de o "solver" iterativo resolver o sistema de equações sem a montagem explícita da matriz global acoplada. Para esse problema

em particular, a matriz possui elevada esparsidade (da ordem de 55%). Na Figura 4.83 apresenta-se a comparação entre os tempos de processamentos (CPU times) utilizando-se os "solvers" diretos (decomposição LU) e iterativos (BD-SBS-BiCG). Para a barragem em questão, não houve modificações de desempenho em razão da semi-largura de banda ( $hbw$ ), de modo que se apresenta apenas o resultado de "CPU time" para o preconditionador com  $hbw = 0,01$ .

**Figura 4.82 – Tempo de processamento (s)**



## 5. CONCLUSÕES

---

### 5.1 Conclusões

Este trabalho propôs um método inovador e robusto para estimar distribuições de tensões em estruturas tridimensionais de grande porte como uma alternativa para o monitoramento de estabilidade de barragens e taludes, através da obtenção dos campos de deslocamento na superfície de um sólido por meio da metodologia Structure-from-Motion e a utilização destes campos de resposta como uma nova condição de contorno no Método dos Elementos de Contorno.

Nesta dissertação foram apresentados os resultados obtidos em um experimento de laboratório, empregando a técnica apresentada para calcular os deslocamentos e tensões em uma viga de alumínio biapoiada submetida à flexão. Conforme apresentado, em contraste com o cálculo puramente numérico, a estratégia combinada do MEC com a SfM foi capaz de determinar de forma eficiente as tensões em pontos do contorno e do interior da barra de alumínio.

Adicionalmente, foi feita uma análise em um talude real que teve a nuvem de pontos obtida a partir do levantamento fotogramétrico via metodologia Structure-from-Motion e sua malha gerada pelo método de Poisson submetida a um deslocamento fictício prescrito. Pode-se observar que os resultados obtidos por meio do Método dos Elementos de Contorno (NAESY) em termos de deslocamentos e tensões em pontos internos foram bastante satisfatórios quando comparados com os resultados obtidos através do Método dos Elementos Finitos no programa comercial ANSYS 18.1. Ainda, além de obter resultados satisfatórios, a análise via MEC apresenta vantagens em termos de dimensões da malha utilizada.

A terceira aplicação se trata de uma barragem de enrocamento com face de concreto fictícia (Basso, 2006) e tem o intuito de apresentar a capacidade de resolução de problemas complexos de engenharia do programa computacional NAESY. Por meio da estratégia de acoplamento de sub-região por sub-região (SBS), desenvolvida em trabalhos anteriores (Araújo, Alberto e Dors, 2003; Araújo, Dors, Martins e Mansur, 2004; Araújo, Silva e Telles, 2006; Araújo e Gray, 2008; Araújo, d'Azevedo e Gray, 2010 e 2011), e dos mecanismos robustos de integração empregados,

o programa computacional se mostra como uma alternativa viável e interessante para a análise de estruturas de grande porte de engenharia.

Finalmente, a última análise se trata de uma barragem de concreto de grandes dimensões apoiada em solo – neste caso utilizando-se de uma das vantagens do MEC que é a possibilidade de simular meios infinitos e semi-infinitos – que tem o objetivo de apresentar as vantagens da utilização de “solvers” iterativos em termos de utilização de memória e tempo de processamento.

Dessa forma, pode-se afirmar que a estratégia aqui apresentada é uma técnica promissora que pode ser convenientemente utilizada no monitoramento da distribuição de tensões em estruturas de grande porte.

## **5.2 Aspectos Futuros**

Como tópicos a serem abordados em trabalhos futuros, podem ser citados:

- Mecanismos para captura dos campos de deslocamentos em estruturas de maior porte para o desenvolvimento de ferramentas computacionais eficientes para fornecer distribuição de tensões em tempo real;
- Implementação de técnicas de integração direta dos valores principais para evitar a discretização usando ‘enclosing elements’ em modelos de domínios semi-infinitos;
- Implementação de técnicas para análise não-linear, relevante em problemas envolvendo interação solo-estrutura;
- Implementação de mecanismos para a consideração da presença e efeitos da água em solos.



## 6. REFERÊNCIAS

---

Araújo, F. C., 1994. “Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE-Methode” (in german), Ph.D Thesis, Technische Universität Braunschweig, Germany.

Araújo F. C., D.R. Alberto, Dors C., 2002. Analysis of 3D time-dependent acoustic problems via a generic BE substructuring algorithm based on iterative solvers. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, 705–716.

Araújo F. C., d'Azevedo E. F., Gray L. J., 2010. Boundary-element parallel-computing algorithm for the microstructural analysis of general composites. *Computers & Structures*, 88, 773-784.

Araújo F. C., d'Azevedo E. F., Gray L. J., 2011. Constructing efficient substructure-based preconditioners for BEM systems of equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35, 517–526.

Araújo F. C., Dors C., Martins C. J., Mansur W. J., 2004. New developments on BE/BE multi-zone algorithms based on Krylov solvers - applications to 3D frequency-dependent problems. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, 26, 231-248.

Araújo F. C., Gray L. J., 2008. Analysis of thin-walled structural elements via 3D standard BEM with generic substructuring. *Computational Mechanics*.

Araújo F. C., Gray L. J., 2008. Evaluation of effective material parameters of CNT reinforced composites via 3D BEM. *CompModEngSci*, 24(2), 103–21.

Araújo F. C., Silva K. I., Telles J. C. F., 2006. Generic domain decomposition and iterative solvers for 3D BEM problems. *Int. J. Numer. Methods Eng rg.*, 68, 448-472.

Banerjee P. K., 1994. *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill, London.

Basso, RV, 2007. Estudo tensão-deformação de um enrocamento visando barragens de enrocamento com face de concreto, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

Bathe, K.-J, 2014. Finite Element Procedures. 2<sup>a</sup>. ed. Watertown: Prentice Hall.

Becker A. A., 1992. The Boundary Element Method in Engineering. A complete course. McGraw-Hill International (UK) Limited.

Beer G., Watson J. O., 1992. Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers. J. Wiley.

Biundini, Iago Z.; Pinto, Milena F.; Melo, Aurelio G.; Marcato, Andre L. M.; Honório, Leonardo M.; Aguiar, Maria J. R., 2021. A Framework for Coverage Path Planning Optimization Based on Point Cloud for Structural Inspection. SENSORS, v. 21, p. 570.

Bonnet, M., 1999. Boundary Integral Equation Methods for Fluids and Solids. Nova Iorque: John Wiley & Sons.

Brebbia C. A., Dominguez, 1987. Boundary Elements – an introduction course. McGraw Hill Book Company.

Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C., 1984. Boundary Element Techniques. Springer Verlag, Berlin.

Cignoni P., Montani C. e Scopigno R., 1998. A comparison of mesh simplification algorithms. Computers & Graphics, 22(1):37–54.

Chen G., Zhou J., 1992. Boundary Element Methods. Academic Press Limited.

Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., 1989. Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Terceira Edição, John Wiley and Sons.

Eletrobrás. Centrais Elétricas Brasileiras. Critérios de Projeto Civil de Usinas Hidrelétricas. Rio de Janeiro: 2003. Obtido em: <<https://eletrobras.com/pt/AreasdeAtuacao/geracao/Manuais%20para%20Estudos%20e%20Projetos%20de%20Gera%C3%A7%C3%A3o%20de%20Energia/Crit%C3%A9rios%20de%20Projetos.pdf>>. Acesso em: 08/06/2020.

Gopi M. e Krishnan S., 2002. A fast and efficient projection-based approach for surface reconstruction. In *Computer Graphics and Image Processing, 2002. Proceedings. XV Brazilian Symposium on*, pages 179–186. IEEE.

Garland M. e Heckbert P. S., 1997. Surface simplification using quadric error metrics. In *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 209–216. ACM Press/Addison Wesley Publishing Co.

Hartley R. e Zisserman A., 2003. *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge university press.

Kazhdan M. e Hoppe H., 2013. Screened poisson surface reconstruction. *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, 32(3):29.

Kazhdan M., Bolitho M. e Hoppe H., 2006. Poisson surface reconstruction. In *Proceedings of the Fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing, SGP '06*, pages 61–70, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland. Eurographics Association.

Li R., Liu L., Phan L., Abeysinghe S., Grimm C. e Ju T., 2010. Polygonizing extremal surfaces with manifold guarantees. In *Proceedings of the 14th ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, pages 189–194. ACM.

Marton Z. C., Rusu R. B. e Beetz M., 2009. On fast surface reconstruction methods for large and noisy point clouds. In *Robotics and Automation, 2009. ICRA'09. IEEE International Conference on*, pages 3218–3223. IEEE.

Melo, Aurelio G.; Pinto, Milena F.; Honorio, Leonardo M.; Dias, Felipe M.; Masson, Juliano E. N., 2020. 3D Correspondence and Point Projection Method for Structures Deformation Analysis. *IEEE Access*, v. 1, p. 1-1.

- Mencel R. e Muller H., 1997. Interpolation and approximation of surfaces from three-dimensional scattered data points. In Scientific Visualization Conference, 1997, pages 223–223. IEEE.
- Papari, G.; Petkov, N.; Campisi, P. Artistic Edge and Corner Enhancing Smoothing. IEEE Transactions on Image Processing, v. 16, n. 10, p. 2449–2462, 2007.
- Ronfard R. e Rossignac J., 1996. Full-Range approximation of triangulated polyhedral. Computer Graphics Forum, 15(3). Proc. Eurographics '96.
- Siegwart R., Nourbakhsh I. R. e Scaramuzza D., 2011. Introduction to autonomous mobile robots. MIT press.
- Westoby, M. J., Brasington J., Glasser, N. F., Hambrey, M. J., & Reynolds, J. M., 2012. 'Structure-from-Motion' photogrammetry: A low-cost, effective tool for geoscience applications. Geomorphology, 179, 300-314. <https://doi.org/10/1016/j.geomorph.2012.08.021>
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 1989. The Finite Element Method – Volume 1 Basic Formulation and Linear Problems, Quarta Edição, McGraw-Hill.

