

**Universidade Federal de Ouro Preto**

Escola de Minas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PROPEC

---

Dissertação

---

**Análise e Projeto de  
Estruturas de Concreto  
Armado com Seções  
Genéricas Sujeitas à Torção**

*Laís Ferreira das Graças Souza*

Ouro Preto  
2019



UFOP

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **ANÁLISE E PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÕES GENÉRICAS SUJEITAS À TORÇÃO**

**Laís Ferreira das Graças Souza**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

Campus Morro do Cruzeiro  
Ouro Preto, MG - Brasil  
Outubro, 2019

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

S729a Souza, Laís Ferreira das Graças .  
Análise e projeto de estruturas de concreto armado com seções genéricas  
sujeitas à torção. [manuscrito] / Laís Ferreira das Graças Souza. - 2019.  
71 f.: il.: color., tab..

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha.  
Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto.  
Departamento de Engenharia Civil. Programa de Engenharia Civil.  
Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Vigas de concreto - Torção. 3. Polinômios - Interpolação de Lagrange. 4.  
Análise numérica - Quadratura de Gauss-Legendre. 5. Método dos Elementos  
Finitos. 6. Concreto armado . 7. Engenharia de estruturas. 8. Vigas de concreto -  
Seções genéricas. I. Souza, Laís Ferreira das Graças . II. Rocha, Paulo Anderson  
Santana. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 624.01

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB: 1716

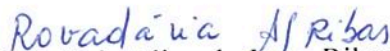
# ANÁLISE E PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÕES GENÉRICAS SUJEITAS À TORÇÃO

**AUTORA: LAÍS FERREIRA DAS GRAÇAS SOUZA**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 02 de setembro de 2019, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Paulo Anderson Santana Rocha, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Profª. Rovadavia Aline de Jesus Ribas, D. Sc. – UFOP



Prof. Alexandre da Silva Galvão, D. Sc. – UFSJ

*À minha família e ao meu orientador.*

# Agradecimentos

Meu agradecimento diário a Deus, por cada oportunidade a mim concedida e por sempre colocar pessoas maravilhosas em meu caminho, das quais sem elas, eu nada seria.

Às minhas amigas: Luciana, Nayane, Verônica e Yara, obrigada por me acompanharem por toda esta trajetória. Vocês fazem a minha vida mais leve.

Agradeço a toda minha família, que mesmo distante, sempre se mostrou presente com palavras de incentivo e admiração. Em especial, à minha MÃE, minha maior fonte de inspiração, força e amor.

À minha filha Beatriz, amiga e companheira de todas as horas, obrigada pela compreensão, pelo carinho, pela maturidade e por ser a melhor filha que eu poderia sonhar em ter. Te amo mil milhões!

Ao meu marido João Paulo, meu eterno obrigada pelo apoio, paciência nas horas difíceis e pela constante motivação. Sem você ao meu lado, o caminho seria muito mais árduo!

Sou grata a todos os professores do PROPEC, que contribuíram com a minha trajetória acadêmica e pessoal, especialmente ao meu professor e orientador Paulo Rocha, a quem eu manifesto aqui minha gratidão pela confiança e por me conduzir nesta jornada se mostrando sempre disposto a compartilhar sua sabedoria, o seu tempo e sua experiência.

Agradeço aos órgãos fomentadores FAPEMIG e CAPES pelo auxílio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

Por fim e não menos importante, a todos os amigos do mestrado, pela receptividade e acolhimento, pelos incansáveis momentos de estudos, mas principalmente pelos momentos de descontração em meio ao caos. Ao eterno grupo TAEM I, que nossa amizade perdure por toda a vida. Sucesso a todos!

*“Se eu vi mais longe, foi por  
estar de pé sobre ombros de  
gigantes”*

**Isaac Newton**

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil

## **ANÁLISE E PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÕES GENÉRICAS SUJEITAS À TORÇÃO**

**Laís Ferreira das Graças Souza**

Outubro/2019

*Orientador:* Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

O presente trabalho tem como objetivo principal a realização da análise e projeto de estruturas de concreto armado submetidas à torção. Como exemplo, podem ser citadas as grelhas, as vigas-balcão, as vigas de marquises e os elementos que compõem os tabuleiros de pontes (longarinas e transversinas). Dessa forma, implementou-se um código computacional destinado à análise linear elástica de grelhas com seções transversais regulares e não regulares (genéricas). Assim sendo, para a obtenção das áreas e momentos de inércia, as seções foram discretizadas ao longo do domínio com o auxílio de elementos finitos bidimensionais, a saber: o CST (*Constant Strain Triangle*) ou triangular com três nós. Para a determinação dos perímetros das seções, utilizou-se o Polinômio de Interpolação de Lagrange, uma vez que as funções que representam esses contornos são desconhecidas e estas informações foram inseridas na expressão correspondente ao Método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss). Em seguida, para a definição da posição da linha neutra das seções regulares e genéricas, empregou-se o Método da Iteração Linear. Após verificar a eficiência do programa computacional desenvolvido em linguagem FORTRAN 90, realizou-se o projeto completo da viga principal de seção genérica de uma grelha hiperestática sujeita à torção de equilíbrio. Por fim, ressalta-se que a mesma foi dimensionada ao momento de torção, momento fletor e esforço cortante.

**Palavras-chave:** Torção, Seções genéricas, Polinômio de Interpolação de Lagrange, Quadratura de Gauss-Legendre, Método dos Elementos Finitos.



Abstract of the Dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering

## **ANALYSIS AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES WITH GENERAL SECTIONS SUBJECTED TO TORSION**

**Laís Ferreira das Graças Souza**

October/2019

*Advisor:* Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

This research aims the analysis and design of reinforced concrete structures subjected to torsion, such as: grids, balcony beams, canopy beams and elements that make up the bridge deck. So, a computational code was implemented for the linear elastic analysis of grids with regular and non-regular (generic) cross sections. Thus, to obtain the areas and area moments of inertia, the sections were discretized along the domain with the aid of two-dimensional finite elements, namely: CST (Constant Strain Triangle) or triangular with three nodes. For the determination of the perimeters of the sections, the Lagrange Interpolation Polynomial was used, since the functions that represent these contours are unknown and this information was entered in the expression corresponding to the Gauss-Legendre Method (Gauss Quadrature). Then, to define the neutral axial position of the regular and generic sections, the Linear Iteration Method was used. After verifying the efficiency of the computer program developed in FORTRAN 90 language, the complete design of the main beam of generic section of a hyperstatic grid subjected to the equilibrium torsion was performed. Finally, it is noteworthy that it was dimensioned at the torque, bending moment and shear force.

**Keywords:** Torsion, Generic sections, Lagrange Interpolation Polynomial, Gauss-Legendre quadrature, Finite Element Method.

# Sumário

<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas .....</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Símbolos .....</b>	<b>xv</b>
<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	1
1.2. OBJETIVO .....	4
1.3. MOTIVAÇÃO.....	5
1.4. PESQUISA BIBLIOGRÁFICA .....	5
<b>CAPÍTULO 2 - ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA DE GRELHAS VIA MEF.....</b>	<b>9</b>
2.1. INTRODUÇÃO.....	9
2.2. FORMULAÇÃO MATRICIAL DE GRELHAS.....	9
2.3. MOMENTO DE INÉRCIA CALCULADO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	12
2.4. CÁLCULO DOS PERÍMETROS DAS SEÇÕES GENÉRICAS VIA POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE E MÉTODO DE GAUSS-LEGENDRE .....	14
2.5. MÉTODO DA ITERAÇÃO LINEAR.....	17
<b>CAPÍTULO 3 - TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO.....</b>	<b>18</b>
3.1. INTRODUÇÃO.....	18
3.2. CONSIDERAÇÕES DA NBR 6118 (ABNT, 2014) PARA O PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO.....	19
3.3. TORÇÃO PURA .....	19
3.3.1. Metodologia de cálculo para solicitação à torção .....	20
3.3.2. Resistência dos elementos estruturais .....	20
3.3.3. Cálculo das armaduras da seção .....	21
3.3.4. Geometria da seção resistente .....	22
3.4. FLEXÃO .....	23
3.4.1. Metodologia de cálculo para solicitação à flexão .....	23

3.5. ESFORÇO CORTANTE.....	27
3.5.1. Metodologia de cálculo para solicitação ao esforço cortante.....	27
<b>CAPÍTULO 4 - PROGRAMA COMPUTACIONAL .....</b>	<b>31</b>
4.1. INTRODUÇÃO.....	31
4.2. DESCRIÇÃO DOS PROCESSOS .....	32
<b>CAPÍTULO 5 - APLICAÇÕES .....</b>	<b>33</b>
5.1. INTRODUÇÃO.....	33
5.2. PROPRIEDADES DAS SEÇÕES.....	33
5.2.1. Aplicação 1: Momentos de inércia via Método dos Elementos Finitos .....	33
5.2.2. Aplicação 2: Perímetro via Método dos Elementos Finitos .....	39
5.2.3. Aplicação 3: Espessura equivalente .....	40
5.2.4. Aplicação 4: Área equivalente .....	40
5.3. ESFORÇOS DAS ESTRUTURAS DE GRELHA .....	41
5.4. DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES.....	49
5.5. ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DA ESTRUTURA .....	53
5.5.1. Análise elástica linear da estrutura.....	54
5.5.2. Dimensionamento da seção genérica .....	56
<b>CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>62</b>
6.1. INTRODUÇÃO.....	62
6.2. CONCLUSÕES.....	62
6.3. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	64
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>65</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>68</b>

# Lista de Figuras

Figura 1. 1 - Exemplo de torção de equilíbrio.....	1
Figura 1. 2 - Exemplo de momento de torção nulo .....	2
Figura 1. 3 - Torção em viga devido a engastamento de laje em balanço .....	3
Figura 1. 4 - Viga contínua sob torção por efeito de laje em balanço .....	3
Figura 1. 5 - Estrutura de grelha.....	4
Figura 2. 1 - Cargas atuantes e eixos de referência global .....	9
Figura 2. 2 - Deslocamentos na extremidade do elemento (Sistema Global).....	10
Figura 2. 3 - Deslocamentos na extremidade do elemento (Sistema Local) .....	10
Figura 3. 1 - Treliça espacial generalizada .....	18
Figura 3. 2 - Geometria generalizada .....	22
Figura 3. 3 - Espessura da parede e área equivalentes .....	23
Figura 3. 4 - Diagrama de deformações e diagramas de tensões parábola-retângulo e retangular da seção transversal de uma viga.....	25
Figura 4. 1 - Fluxograma do Programa Grelha.....	31
Figura 5. 1 - Seção retangular de 3 elementos.....	34
Figura 5. 2 - Seção triangular de 3 elementos .....	34
Figura 5. 3 - Seção retangular com furo de 193 elementos .....	35
Figura 5. 4 - Seção elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm de 1064 elementos .....	35
Figura 5. 5 - Seção genérica Caso 1 .....	35
Figura 5. 6 - Seção genérica Caso 2 .....	36

Figura 5. 7 - Seção genérica Caso 3 .....	36
Figura 5. 8 - Seção genérica Caso 4 .....	36
Figura 5. 9 - Malhas de elementos finitos das seções arbitrárias .....	37
Figura 5. 10 - Estrutura da Grelha (Grelha 1).....	41
Figura 5. 11 - Numeração da Grelha (Grelha 1).....	42
Figura 5. 12 - Estrutura da Grelha (Grelha 2) .....	44
Figura 5. 13 - Numeração da Grelha (Grelha 2).....	44
Figura 5. 14 - Estrutura da Grelha (Grelha 3).....	45
Figura 5. 15 - Numeração da Grelha (Grelha 3).....	45
Figura 5. 16 - Estrutura da Grelha (Grelha 4).....	46
Figura 5. 17 - Numeração da Grelha (Grelha 4).....	47
Figura 5. 18 - Estrutura da Grelha (Grelha 5).....	48
Figura 5. 19 - Numeração da Grelha (Grelha 5) .....	48
Figura 5. 20 - Geometria e dados da Seção Retangular .....	49
Figura 5. 21 - Detalhamento das armaduras de flexão (Seção Retangular).....	50
Figura 5. 22 - Detalhamento da armadura transversal (Seção Retangular) .....	51
Figura 5. 23 - Detalhamento das armaduras de torção (Seção Retangular) .....	52
Figura 5. 24 - Detalhamento final das armaduras (Seção Retangular) .....	53
Figura 5. 25 - Seções transversais da estrutura de grelha (Grelha 6) .....	53
Figura 5. 26 - Estrutura da Grelha (Grelha 6) .....	54
Figura 5. 27 - Numeração da Grelha (Grelha 6) .....	54

Figura 5. 28 - Geometria e dados da Seção Genérica 2 .....	57
Figura 5. 29 - Detalhamento da armadura de flexão (Seção Genérica 2) .....	59
Figura 5. 30 - Detalhamento da armadura transversal (Seção Genérica 2) .....	59
Figura 5. 31 - Detalhamento das armaduras de torção (Seção Genérica 2) .....	60
Figura 5. 32 - Detalhamento final das armaduras (Seção Genérica 2) .....	61

# Lista de Tabelas

Tabela 5. 1 - Seção Retangular com 3 elementos finitos.....	37
Tabela 5. 2 - Seção triangular com 3 elementos finitos.....	38
Tabela 5. 3 - Seção retangular com furo com 48 elementos finitos .....	38
Tabela 5. 4 - Seção retangular com furo com 193 elementos finitos .....	38
Tabela 5. 5 - Seção Elíptica com 1064 elementos.....	38
Tabela 5. 6 - Caso 1 com 586 elementos.....	39
Tabela 5. 7 - Caso 2 com 120 elementos.....	39
Tabela 5. 8 - Caso 3 com 486 elementos.....	39
Tabela 5. 9 - Caso 4 com 608 elementos.....	39
Tabela 5. 10 - Valores dos perímetros das seções genéricas.....	40
Tabela 5. 11 - Cálculo dos valores da espessura equivalente.....	40
Tabela 5. 12 - Cálculo das áreas e perímetros equivalentes .....	41
Tabela 5. 13 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 1) .....	42
Tabela 5. 14 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 1) .....	42
Tabela 5. 15 - Ações nas extremidades do Elemento 3 (Grelha 1) .....	43
Tabela 5. 16 - Ações nas extremidades do Elemento 4 (Grelha 1) .....	43
Tabela 5. 17 - Ações nas extremidades do Elemento 5 (Grelha 1) .....	43
Tabela 5. 18 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 2) .....	44
Tabela 5. 19 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 2) .....	45
Tabela 5. 20 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 3) .....	46

Tabela 5. 21 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 3) .....	46
Tabela 5. 22 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 4) .....	47
Tabela 5. 23 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 4) .....	47
Tabela 5. 24 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 5) .....	48
Tabela 5. 25 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 5) .....	49
Tabela 5. 26 - Dimensionamento à flexão de seção retangular .....	50
Tabela 5. 27 - Dimensionamento ao Cortante de seção retangular .....	51
Tabela 5. 28 - Dimensionamento à Torção de seção retangular.....	52
Tabela 5. 29 - Dimensionamento Completo da seção retangular .....	52
Tabela 5. 30 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 6) .....	55
Tabela 5. 31 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 6) .....	55
Tabela 5. 32 - Ações nas extremidades do Elemento 3 (Grelha 6) .....	55
Tabela 5. 33 - Ações nas extremidades do Elemento 4 (Grelha 6) .....	56
Tabela 5. 34 - Ações nas extremidades do Elemento 5 (Grelha 6) .....	56
Tabela 5. 35 - Variação dos resultados referentes ao grau do polinômio da equação de Ac ...	58
Tabela 5. 36 - Dimensionamento à Flexão da seção genérica do Caso 2.....	58
Tabela 5. 37 - Dimensionamento ao Cortante da seção genérica do Caso 2.....	59
Tabela 5. 38 - Dimensionamento à Torção da seção genérica Caso 2 .....	60
Tabela 5. 39 - Dimensionamento Completo da Seção Genérica Caso.....	61



# Lista de Símbolos

$L$	Comprimento de barra
$\gamma$	Ângulo de rotação
$G$	Módulo de elasticidade transversal do material
$J_t$	Momento de inércia à torção da seção de abscissa $x$
$E$	Módulo de elasticidade do material
$I_y$	Momento de inércia no eixo $y$
$I_x$	Momento de inércia no eixo $x$
$A$	Área da seção
$N$	Função de forma
$\xi$	Coordenada natural Ksi
$\eta$	Coordenada natural Eta
$P_n(x)$	Polinômio de Interpolação de Lagrange
$L_i(x)$	Polinômio da base de Lagrange
$w_i$	Pesos de Gauss-Legendre
$\xi_i$	Pontos de Gauss-Legendre
$\rho_{sl}$	Taxa mínima de armadura longitudinal
$\rho_{sw}$	Taxa mínima de armadura transversal
$A_{sl}$	Soma das áreas das seções das barras longitudinais de torção
$h_e$	Espessura de parede real para seções vazadas ou equivalente para seções cheias
$u_e$	Perímetro de $A_e$
$A_{sw}$	Área da seção transversal dos estribos de força cortante
$b_w$	Largura da alma de uma viga
$s$	Espaçamento entre eixos dos estribos
$f_{ctm}$	$0,3 f_{ck}^{2/3}$
$f_{ck}$	Resistência característica do concreto à compressão
$f_{ywk}$	Resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal
$T_{Rd2}$	Momento resistente de cálculo à torção, que representa o limite de resistência das diagonais comprimidas de concreto
$\theta$	Ângulo de inclinação das diagonais de concreto

$f_{cd}$	Resistência de cálculo à compressão do concreto
$T_{Rd3}$	Momento resistente de cálculo à torção, que representa o limite para a parcela resistida pelos estribos normais ao eixo da peça
$A_{s,90}$	Área da seção transversal do número total de ramos de um estribo perpendicular ao eixo da peça, contidos na parede equivalente
$T_{Rd4}$	Momento resistente de cálculo à torção, que representa o limite para a parcela resistida pelas barras longitudinais
$A_e$	Área limitada pela linha média da parede da seção vazada, real ou equivalente, incluindo a parte vazada
$T_{sd}$	Momento torçor solicitante de cálculo
$u$	Perímetro da seção cheia
$c_1$	Distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento estrutural
$h$	Altura da seção transversal
$d$	Altura útil da seção transversal
$d'$	Distância entre a borda mais tracionada do concreto e o centro de gravidade da armadura de tração
$x$	Altura da linha neutra da seção transversal
$y$	Altura da linha neutra convencional
$z$	Braço de alavanca
$f_{yk}$	Resistência característica do aço à tração
$f_{yd}$	Resistência de cálculo ao escoamento do aço
$\gamma_c$	Coefficiente de ponderação da resistência do concreto
$\epsilon_c$	Deformação do concreto comprimido
$\epsilon_s$	Deformação do aço tracionado
$\sigma_{sd}$	Tensão de escoamento do aço
$M_{Rd}$	Momento fletor resistente de cálculo
$M_{sd}$	Momento fletor solicitante de cálculo
$A_s$	Área de aço
$\beta_x$	Relação entre a altura da linha neutra da seção transversal e a sua altura útil
$F_s$	Força resultante de tração na armadura
$V_{sd}$	Força cortante solicitante de cálculo

$V_{Rd2}$	Força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto
$\alpha$	Inclinação dos estribos
$V_{Rd3}$	Força cortante resistente de cálculo, relativa à ruptura por tração diagonal
$V_c$	Parcela da força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça
$V_{sw}$	Parcela da força cortante resistida pela armadura transversal
$f_{ctd}$	Resistência de cálculo à tração do concreto
$J$	Momento de inércia polar
$P$	Força aplicada
$\gamma_f$	Coefficiente de ponderação das ações
$\gamma_s$	Coefficiente de ponderação da resistência do aço
$T_k$	Momento torçor solicitante
$M_k$	Momento fletor solicitante
$V_k$	Esforço cortante solicitante
$A_c$	Área de concreto da seção

# CAPÍTULO 1

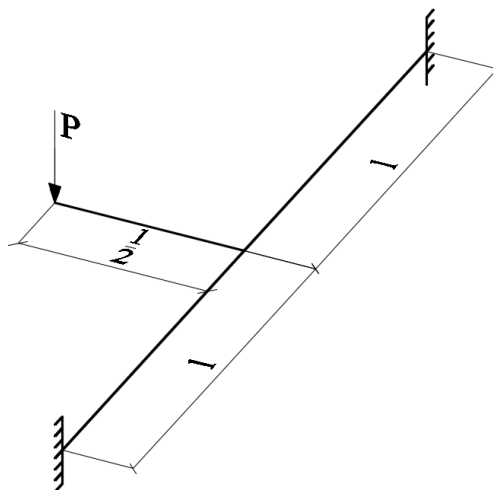
## INTRODUÇÃO

### 1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O concreto armado é considerado o material estrutural mais conveniente para as circunstâncias brasileiras, em vista da segurança, de ser relativamente barato e de ser pouco exigente quanto à mão-de-obra. Além disso, o concreto dá margem a experimentações formais e estruturais, que colaboram para o desenvolvimento da internacionalmente conhecida “escola brasileira do concreto armado” e “arquitetura do Movimento Moderno no Brasil” (SANTOS, 2008).

No projeto de edifícios de concreto armado, é comum o surgimento de esforços internos de torção. No estudo desse fenômeno e no projeto das estruturas é importante determinar qual o tipo de torção que surge na estrutura, podendo-se ter a torção de equilíbrio e/ou a torção de compatibilidade. Se a torção é necessária para manter o equilíbrio da estrutura, a mesma é denominada torção de equilíbrio. Um exemplo deste tipo de esforço é demonstrado na Figura 1. 1. Nessa situação, o momento torsor não pode ser reduzido, pois ele é fundamental para satisfazer as condições de equilíbrio.

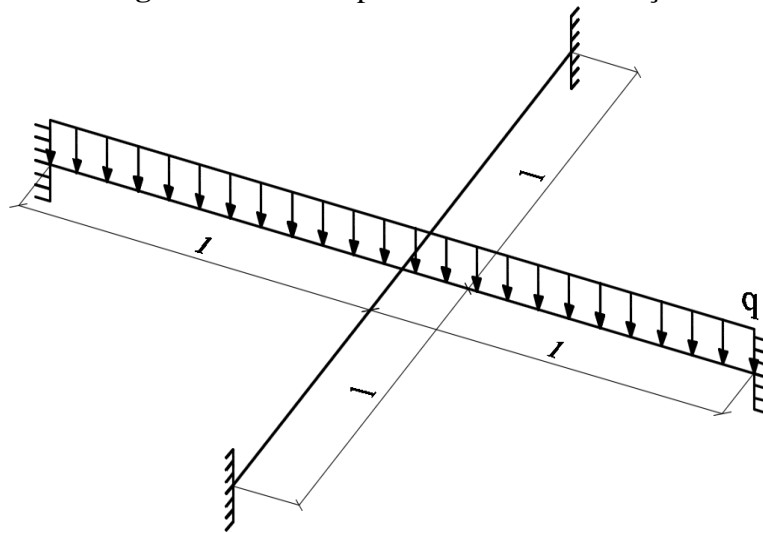
**Figura 1. 1** - Exemplo de torção de equilíbrio



Fonte: Própria.

Quando esse esforço está relacionado com a compatibilização entre as deformações do elemento estudado e as deformações das estruturas vizinhas, ele é denominado torção de compatibilidade (Figura 1. 2). Nesse caso, a torção na viga depende da rotação nesse elemento, e conseqüentemente de sua rigidez (SILVA; HOROWITZ, 2014).

**Figura 1. 2** - Exemplo de momento de torção nulo

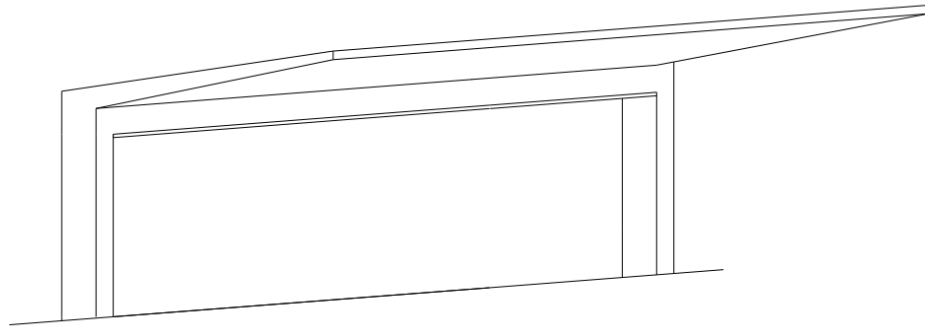


Fonte: Própria.

Quanto ao dimensionamento, a norma NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece que, sempre que a torção for necessária ao equilíbrio do elemento estrutural (torção de equilíbrio), deve-se adicionar armadura destinada a resistir aos esforços de tração oriundos da torção. Essa armadura deve ser constituída por estribos verticais normais ao eixo do elemento estrutural e barras longitudinais distribuídas ao longo do perímetro da seção resistente, calculadas de acordo com as prescrições contidas na norma. Por conseguinte, quando houver somente o caso da torção de compatibilidade, é possível desprezá-la, contando que o elemento estrutural tenha a adequada capacidade de adaptação plástica e que todos os outros esforços sejam calculados sem considerar os efeitos por ela provocados.

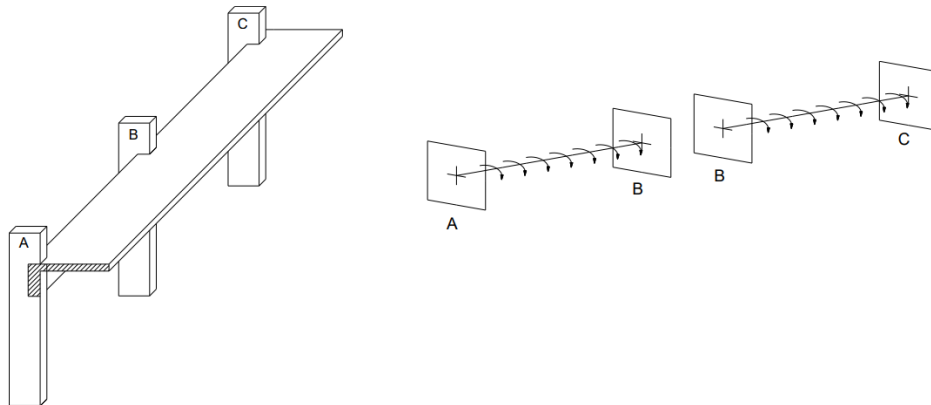
Algumas estruturas de concreto armado se mostram mais propensas a efeitos de torção, como exemplo tem-se as vigas-balcão, tabuleiros de pontes e as grelhas. Segundo Bastos (2015), o caso mais comum de torção ocorre com lajes em balanço, engastadas em vigas de apoio, como, por exemplo, lajes (marquises) para proteção de porta de entrada de barracões, lojas, galpões etc. (Figura 1. 3 e Figura 1. 4).

**Figura 1.3 - Torção em viga devido a engastamento de laje em balanço**



Fonte: BASTOS, 2015.

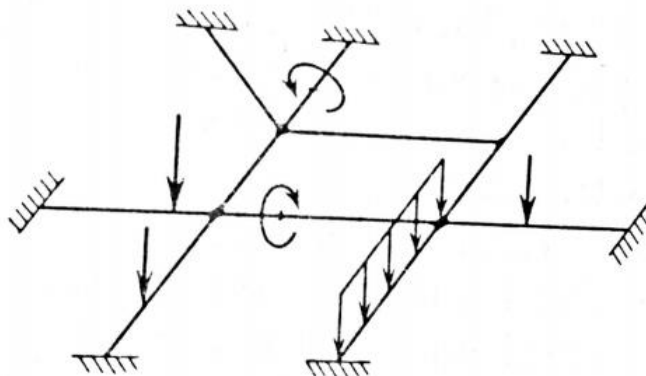
**Figura 1.4 - Viga contínua sob torção por efeito de laje em balanço**



Fonte: BASTOS, 2015.

Neste trabalho, são realizados em específico, análises e projetos de algumas estruturas reticuladas de grelhas com seções genéricas. Gere e Weaver (1981) trazem a definição de grelha como uma estrutura plana composta de membros contínuos que se interceptam ou se cruzam mutuamente (Figura 1.5). No último caso, muitas vezes as ligações entre os membros são consideradas como articuladas, ao passo que, no primeiro caso, as ligações são consideradas rígidas. Enquanto que num pórtico plano todas as forças aplicadas existem no plano da estrutura, no caso de uma grelha todas as forças são normais ao plano da estrutura e todos os binários têm seus valores nos planos da grelha. Estas orientações do carregamento podem como resultar em torção, bem como, flexão em alguns de seus membros.

**Figura 1.5** - Estrutura de grelha



Fonte: GERE; WEAVER, 1981.

## 1.2. OBJETIVO

A presente pesquisa tem como principal objetivo a realização da análise e projeto de estruturas de concreto armado submetidas à torção. Para tanto, é implementada computacionalmente uma formulação matemática, baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), que realiza a análise linear de estruturas de grelha, possibilitando assim a obtenção dos esforços solicitantes na mesma.

É importante ressaltar que essas estruturas apresentam seções transversais não regulares (genéricas) e para a obtenção das áreas e momentos de inércia, as seções são discretizadas ao longo do domínio com elementos finitos bidimensionais. Para isto, é utilizado o CST (Constant Strain Triangle) ou elemento triangular com três nós, sendo cada nó composto por três graus de liberdade.

Para a obtenção dos perímetros das seções, utiliza-se o Polinômio de Interpolação de Lagrange, uma vez que, as funções que representam esses contornos são desconhecidas e essas informações são inseridas na expressão correspondente ao método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss).

Por fim, o dimensionamento das seções é realizado seguindo as prescrições exigidas pela norma NBR 6118 (ABNT, 2014) e adotando-se processos de iterações para definição da linha neutra na seção. Os cálculos são automatizados utilizando a linguagem computacional FORTRAN 90 e, ao final, todos os resultados são comparados com a literatura para a validação do trabalho.

### 1.3. MOTIVAÇÃO

Devido às diversas vantagens do concreto armado, tais como flexibilidade na moldagem, alta durabilidade, boa resistência à maioria dos tipos de solicitação, dentre outras, esse material é amplamente empregado nas obras de múltiplos pavimentos e tabuleiros de pontes no Brasil.

À vista disso, as estruturas de grelhas estão cada vez mais presentes nas construções, pois as mesmas proporcionam maiores vãos entre os apoios se mostrando de grande utilidade. Para tanto, o correto dimensionamento e análise dos esforços atuantes nessas estruturas é de extrema importância e por isso é o foco deste trabalho.

Outro aspecto pertinente a ser analisado neste estudo é a implementação computacional de um programa capaz de analisar estruturas de grelha com diversas formas de seção transversal, otimizando e agregando assim ao processo manual de cálculo.

### 1.4. PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

A análise e dimensionamento de estruturas de concreto armado submetidos à torção tem sido objeto de estudo desde os séculos XVIII e XIX. Diversos pesquisadores se dedicaram à compreensão dos tipos de torção, à análise da distribuição das tensões cisalhantes e finalmente, à proposição de verificações que permitissem estimar resistências para as peças e impossibilitar seu colapso. Neste tópico encontram-se, resumidamente, variados estudos relacionados aos processos que são analisados neste trabalho.

Segundo Silva Filho (2007), em 1904, Mörsch conduziu nos laboratórios de Stuttgart, Alemanha, os primeiros ensaios à torção em corpos-de-prova de concreto armado cilíndricos, maciços e ocos, para analisar o comportamento desse material quando solicitado à torção. Em Silva Filho (2007) é possível, ainda, verificar toda a evolução das teorias para dimensionamento à torção de vigas de concreto armado até aquele momento onde foi notado pelo autor que os principais estudos desse tema foram desenvolvidos ao longo do século XX.

Em 1961, Kemp, Sozen e Siess reforçaram que a necessidade de entender os efeitos da torção havia se tornado uma questão crítica, visto que houve progressos consideráveis na solução de muitos problemas relacionados à flexão combinada, cisalhamento e carga axial em membros de concreto armado. Visto isso, os autores realizaram um levantamento dos principais trabalhos



analíticos e experimentais existentes até então sobre estruturas de concreto armado submetidas à torção e reavaliaram os mesmos em função do conhecimento contido naquela data.

Vaz (1973) formulou um exemplo de grelha e criou um programa automático baseado no método dos elementos finitos com formas, condições de contorno, e carregamentos os mais variados possíveis onde se obtiveram resultados numéricos para alguns exemplos de aplicação, e verificou boa aproximação entre as respostas consideradas exatas com os elementos utilizados por ele.

Gere e Weaver (1981) descreveram as formulações matriciais necessárias para a análise de uma estrutura reticulada de grelha onde as etapas são minuciosamente relatadas de modo que pudessem ser mais facilmente programadas computacionalmente. Os autores apresentaram por fim fluxogramas dos programas de cálculo para análise de tais estruturas utilizando o método da rigidez anteriormente apresentado pelos mesmos e a aplicação de dois exemplos numéricos contemplando esta análise.

Cavalcanti (2005) descreveu uma breve revisão do comportamento de vigas de concreto armado submetidas à torção e analisou resultados dos ensaios de dezesseis vigas de concreto armado, de resistência normal e de alta resistência, solicitadas à torção pura, analisadas anteriormente por Fang e Shiau (2004). Esses resultados são então confrontados com a formulação adotada pela autora, calculando-se por meio de análise estatística um coeficiente de adaptação e um expoente para um dos termos da fórmula proposta.

Lima, Guarda e Pinheiro (2007) apresentaram uma síntese dos conceitos que fundamentam os critérios de dimensionamento à torção, relacionados às disposições da revisão da norma NBR 6118 (ABNT, 2000) e constataram através de um exemplo, que a utilização do modelo de treliça espacial generalizada é a principal mudança introduzida na norma, o que permite, a partir de então, que se trabalhe com a mesma inclinação da biela (de 30° a 45°) tanto na torção quanto no cisalhamento. Os autores também puderam verificar que as novas prescrições normativas estão mais criteriosas em relação às da versão anterior.

Chiovato e Cunha (2009) analisaram as características do comportamento estático de estruturas de vigas balcão e de grelhas e fizeram a modelagem das mesmas no programa Ansys, que usa o Método dos Elementos Finitos. Após calcularem os esforços gerados pelos carregamentos pré-definidos e variando-se a geometria, os autores criaram equações gerais que permitiram o

seu pré-dimensionamento e posteriormente criaram um programa computacional que informava as dimensões das seções transversais das estruturas.

Araújo (2013) comparou os métodos de dimensionamento de vigas de concreto armado sujeitas à torção contidos nas principais normas e para tanto, realizou exemplos numéricos para cinquenta e oito vigas de seções retangulares maciças. Ao fim, Araújo observou uma significativa discrepância entre os métodos de projeto avaliados, porém a confiabilidade de todos foi verificada a partir da comparação com os resultados experimentais disponíveis.

Silva e Horowitz (2014) realizaram a simulação de estruturas submetidas a torções de equilíbrio e de compatibilidade no software de projeto CAD/TQS a fim de demonstrar a influência que a rigidez à torção apresenta, não só sobre o momento de torção, mas também, em relação aos deslocamentos da estrutura e aos outros esforços internos.

Avancini (2015) desenvolveu uma formulação do Método dos Elementos Finitos, baseado no princípio de conservação da energia, para realização da análise do comportamento estrutural de grelhas submetidas a diferentes carregamentos. O autor elaborou, para isto, um programa computacional em linguagem FORTRAN e realizou alguns exemplos para a verificação da eficiência e coerência dos resultados alcançados através do software em comparação com os demais resultados obtidos analiticamente ou por meio de programas já reconhecidos no âmbito da análise estrutural.

Em Bastos (2015) é possível encontrar diversas informações teóricas necessárias ao estudo da análise de torção em estruturas de concreto armado assim como a descrição detalhada das prescrições da norma NBR 6118 (ABNT, 2014) para elementos sujeitos à torção. Por último, Bastos (2015) apresenta três exemplos numéricos de aplicação completos, contendo todos os cálculos necessários ao dimensionamento de vigas de concreto armado submetidas à torção. Os cálculos abrangem também os dimensionamentos à flexão, à força cortante, ancoragem nos apoios e “cobrimento” do diagrama de momentos fletores.

Melo (2016) realizou um estudo comparativo entre métodos analíticos clássicos e numéricos (MEF) para o cálculo de tabuleiro de pontes em grelhas. Ele utilizou os métodos analíticos de Engesser-Courbon, Leonhardt e Guyon-Massonnet, e o Método Numérico dos Elementos Finitos (MEF) através do programa SAP2000. Como resultado, notou-se que quanto mais rígida for a estrutura em função dos números de elementos (barras) presentes no tabuleiro, mais

próximos os resultados analíticos se encontram das respostas obtidas com o auxílio do método numérico desenvolvido.

## CAPÍTULO 2

# ANÁLISE ELÁSTICA LINEAR DE GRELHAS VIA MEF

### 2.1. INTRODUÇÃO

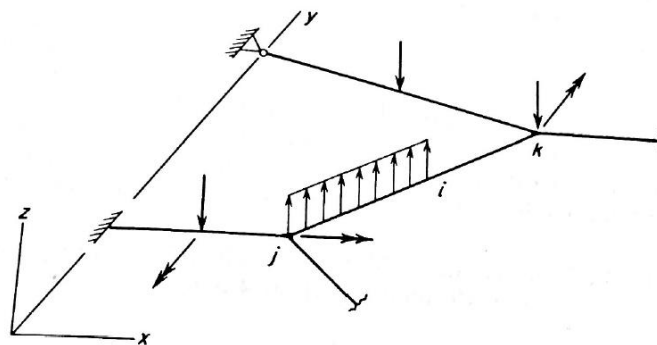
O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um procedimento numérico que permite a determinação aproximada da solução exata do problema baseando-se na discretização da estrutura em partes menores, denominadas elementos finitos. O método é amparado solidamente por teorias matemáticas e vem se mostrando de grande eficiência e solidez.

Neste capítulo são descritas as formulações de elementos finitos bidimensionais utilizadas para o cálculo das análises das estruturas reticuladas de grelhas usadas neste trabalho.

### 2.2. FORMULAÇÃO MATRICIAL DE GRELHAS

Na Figura 2. 1 apresenta-se uma estrutura de grelha e seus respectivos eixos, que são tomados como referência nessa análise. Nota-se que os elementos da estrutura se situam no plano  $x$ - $y$ , juntamente com as cargas de binários, enquanto as forças são aplicadas no eixo  $z$ .

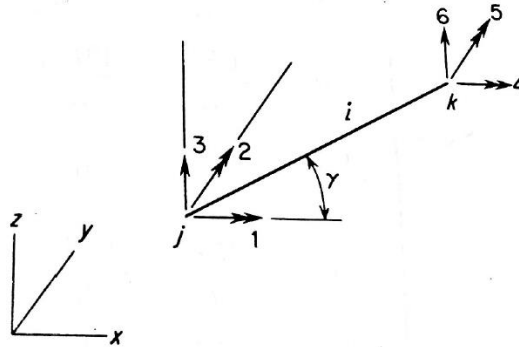
**Figura 2. 1** - Cargas atuantes e eixos de referência global



Fonte: GERE; WEAVER, 1981.

Na Figura 2. 1 apresenta-se também um membro típico  $i$  ligado pelos nós  $j$  e  $k$ , e os seis possíveis deslocamentos em sua extremidade são apresentados na Figura 2. 2. A numeração adotada para cada nó é explicitada nessa figura onde, primeiramente, enumeram-se os giros em  $x$  e  $y$  respectivamente (Momentos de Torção e Flexão) e, posteriormente, as translações em  $z$  para cada nó (Esforço Cortante).

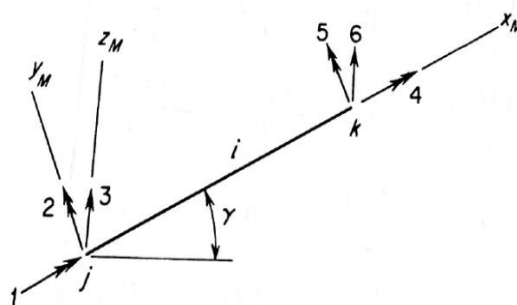
**Figura 2. 2** - Deslocamentos na extremidade do elemento (Sistema Global)



Fonte: GERE; WEAVER, 1981.

Nota-se, porém, com a Figura 2. 3 que o membro  $i$  possui um conjunto de eixos locais denominados  $x_M$ ,  $y_M$  e  $z_M$ , que apresentam uma rotação de  $\gamma$  em torno de  $z_M$  em relação ao eixo da estrutura. Os deslocamentos nas extremidades nas direções dos eixos dos elementos também são demonstrados na figura.

**Figura 2. 3** - Deslocamentos na extremidade do elemento (Sistema Local)



Fonte: GERE; WEAVER, 1981.

Para a formação da matriz de rigidez do elemento no sistema local ( $\mathbf{K}_L$ ), basta provocar deslocamentos unitários destes seis tipos nas extremidades do membro, um de cada vez. A matriz resultante possui ordem  $(6 \times 6)$  e é apresentada na Equação 2. 1.

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \frac{G J_t}{L} & 0 & 0 & -\frac{G J_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4 E I_y}{L} & -\frac{6 E I_y}{L^2} & 0 & \frac{2 E I_y}{L} & \frac{6 E I_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 E I_y}{L^2} & \frac{12 E I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6 E I_y}{L^2} & -\frac{12 E I_y}{L^3} \\ -\frac{G J_t}{L} & 0 & 0 & \frac{G J_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 E I_y}{L} & \frac{2 E I_y}{L} & 0 & \frac{4 E I_y}{L} & \frac{6 E I_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6 E I_y}{L^2} & -\frac{12 E I_y}{L^3} & 0 & \frac{6 E I_y}{L^2} & \frac{12 E I_y}{L^3} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A transformação da matriz de rigidez do elemento do eixo local para a dos eixos da estrutura segue a Equação 2. 2 chegando-se assim à matriz de rigidez global do elemento ( $\mathbf{K}_G$ ).

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{R}' \mathbf{K}_L \mathbf{R} \quad (2.2)$$

Onde a matriz  $\mathbf{R}$  é a matriz de transformação de rotação montada a partir dos cossenos diretores do membro  $i$  e mostrada na Equação 2. 3 e  $\mathbf{R}'$  é dada pela transposição da matriz  $\mathbf{R}$ .

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Seguindo o Método da Rigidez, obtém-se o vetor deslocamento global da estrutura através da Equação 2. 4:

$$\mathbf{U}_G = \mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{F}_G \quad (2.4)$$

Onde  $\mathbf{U}_G$  é o vetor de deslocamentos globais da estrutura e  $\mathbf{F}_G$  é o vetor de forças globais que atua na mesma.

Por fim, para a obtenção dos esforços internos atuantes nas extremidades das barras ( $\mathbf{S}$ ), utiliza-se a Equação 2.5.

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_L \quad (2.5)$$

Sendo  $\mathbf{U}_L$  e  $\mathbf{F}_L$  os vetores correspondentes ao deslocamento e forças nodais equivalentes, ambos no sistema local. Após encontrados esses vetores citados, a análise pode ser considerada completa.

### 2.3. MOMENTO DE INÉRCIA CALCULADO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para o cálculo dos momentos de inércia atuantes nas seções da estrutura foram empregados métodos numéricos a fim de uma aproximação da solução exata do problema. Reporta-se que foram utilizados para tanto, elementos triangulares de três nós, denominados CST (*Constant Strain Triangle*). O modelo tem se apresentado de grande eficácia na solução de problemas práticos via MEF e é explicitado a seguir.

O cálculo do momento de inércia no eixo  $x$  de uma determinada seção é dado por:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (2.6)$$

A coordenada  $y$  em um elemento triangular é representada pelas Equações 2.7 e 2.8.

$$y = \sum_{i=1}^3 N_i y_i \quad (2.7)$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \quad (2.8)$$

Sendo as funções de forma representadas como  $N_1 = \xi$ ,  $N_2 = \eta$  e  $N_3 = 1 - \xi - \eta$ . Em que  $\xi$  e  $\eta$  são as coordenadas naturais:

$$y = \mathbf{N} y_e \quad (2.9)$$

Assim:

$$y^T = y_e^T \mathbf{N}^T = [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Então, fazendo-se:

$$I = \int y^T y \, dA \quad (2.11)$$

Sendo  $dA = \det \mathbf{J} \, d\eta \, d\xi$ , tem-se:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \det \mathbf{J} \, d\eta \, d\xi \quad (2.12)$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{bmatrix} [\xi \ \eta \ 1-\xi-\eta] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \det \mathbf{J} \, d\eta \, d\xi \quad (2.13)$$

Ao desenvolver a integral dupla, chega-se à equação necessária para o cálculo do momento de inércia de uma seção genérica via MEF:

$$I = [y_1 \ y_2 \ y_3] \det \mathbf{J} \begin{bmatrix} 1/12 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/12 & 1/24 \\ 1/24 & 1/24 & 1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Lembrando que o Jacobiano é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Para a determinação do momento de inércia em relação aos eixos baricêntricos de uma dada seção transversal, utiliza-se a expressão:

$$I = I_{\text{bar}} = I - \sum_{i=1}^{\text{nel}} (y_i - y_{\text{bar}})^2 A_i \quad (2.16)$$



onde  $I_{\text{bar}}$  é o momento de inércia no eixo baricêntrico,  $y_{\text{bar}}$  a coordenada do centroide da seção no baricentro e  $A_i$  é a área de cada elemento.

## 2.4. CÁLCULO DOS PERÍMETROS DAS SEÇÕES GENÉRICAS VIA POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE E MÉTODO DE GAUSS-LEGENDRE

Neste trabalho, foi utilizado o Polinômio de Interpolação de Lagrange, a fim de se encontrar as funções que representam os contornos das seções não convencionais e posteriormente estas funções foram inseridas na expressão correspondente ao Método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss) que fornece respostas confiáveis para a obtenção dos perímetros das seções.

Sendo o polinômio de Interpolação de Lagrange representado por:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} y_i \quad (2.17)$$

em que:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (2.18)$$

Adotando-se três pontos para cada elemento, representados como  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$ , podem-se obter as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  tais que:

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i \quad (2.19)$$

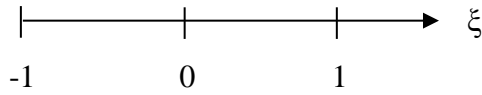
$$y = \sum_{i=1}^3 N_i y_i \quad (2.20)$$

ou seja:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad (2.21)$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \quad (2.22)$$

As funções de forma são obtidas como funções das coordenadas naturais e para três pontos dados, são utilizadas funções parabólicas:



$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad (2.23)$$

Sendo  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$  e  $\xi_3 = 1$ , vem:

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 0)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \quad (2.24)$$

$$N_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = (1 - \xi^2) \quad (2.25)$$

$$N_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \quad (2.26)$$

Substituindo-se  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  nas Equações 2. 21 e Equação 2. 22, vem:

$$x = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} x_1 + (1 - \xi^2) x_2 + \frac{\xi(\xi + 1)}{2} x_3 \quad (2.27)$$

$$y = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} y_1 + (1 - \xi^2) y_2 + \frac{\xi(\xi + 1)}{2} y_3 \quad (2.28)$$

Derivando-se  $x$  e  $y$  em relação a  $\xi$ , tem-se:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{(2\xi - 1)}{2} x_1 + (-2\xi) x_2 + \frac{(2\xi + 1)}{2} x_3 = \xi(x_1 - 2x_2 + x_3) + 0,5(x_3 - x_1) \quad (2.29)$$

$$dx = [\xi(x_1 - 2x_2 + x_3) + 0,5(x_3 - x_1)] d\xi \quad (2.30)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \xi (y_1 - 2y_2 + y_3) + 0,5(y_3 - y_1) \quad (2.31)$$

$$dy = [\xi (y_1 - 2y_2 + y_3) + 0,5 (y_3 - y_1)] d\xi \quad (2.32)$$

Portanto, sabendo-se que:

$$dL^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2.33)$$

$$dL^2 = [\xi (x_1 - 2x_2 + x_3) + 0,5(x_3 - x_1)]^2 d\xi^2 + [\xi (y_1 - 2y_2 + y_3) + 0,5(y_3 - y_1)]^2 d\xi^2 \quad (2.34)$$

$$dL = \sqrt{[\xi (x_1 - 2x_2 + x_3) + 0,5(x_3 - x_1)]^2 + [\xi (y_1 - 2y_2 + y_3) + 0,5 (y_3 - y_1)]^2} d\xi \quad (2.35)$$

Por fim, integrando-se os dois lados da equação, chega-se à equação do perímetro:

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{[\xi (x_1 - 2x_2 + x_3) + 0,5(x_3 - x_1)]^2 + [\xi (y_1 - 2y_2 + y_3) + 0,5(y_3 - y_1)]^2} d\xi \quad (2.36)$$

Desta forma, considerando-se o problema de avaliar numericamente uma integral unidimensional na forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (2.37)$$

Utiliza-se o Método de Gauss-Legendre para a resolução da mesma, sendo a técnica da Quadratura de Gauss representada em termos de coordenadas naturais como:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (2.38)$$

em que  $w_i$  são pesos e  $\xi_i$  são os pontos de Gauss-Legendre.

## 2.5. MÉTODO DA ITERAÇÃO LINEAR

Apesar do presente método não se mostrar de completa eficiência, ele se constitui de um algoritmo simples e que permite a introdução de vários conceitos fundamentais dentro desse assunto. Daí, tem-se que:

Seja a Equação 2. 39:

$$f(x) = 0 \quad (2. 39)$$

E seja  $r$  uma raiz real, a partir de um artifício algébrico é sempre possível transformá-la na Equação (2. 40).

$$x = F(x) \quad (2. 40)$$

onde  $F(x)$  será uma função de iteração.

Como em geral,  $x_0 \neq r$ , tem-se portanto  $F(x_0) \neq x_0$ .

Seja  $x_1 = F(x_0)$ , então o valor de  $x_1$  é uma aproximação de  $r$  obtida em uma primeira iteração e que se espera estar mais próxima de  $r$ . Adotando-se reiteradamente este procedimento, tem-se a sequência de aproximações:

$$x_2 = F(x_1)$$

$$x_3 = F(x_2)$$

$$x_4 = F(x_3)$$

$$\vdots$$

$$x_n = F(x_{n-1})$$

É de grande importância lembrar que, para que ocorra a convergência para a função de  $F(x)$ , as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- $F(x)$  deve ser contínua no intervalo  $[a, b]$ ;
- $\forall x \in \text{ao intervalo } I \leftrightarrow F(x) \in I = [a, b]$ ;
- Condição de Lipchitz:  $|F'(x)| \leq L, L < 1, \forall x \in [a, b]$ .

## CAPÍTULO 3

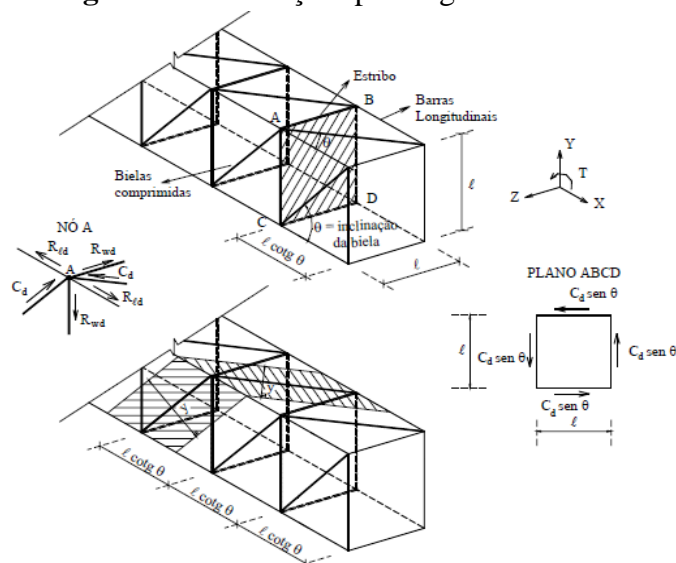
# TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

### 3.1. INTRODUÇÃO

Momento de torção, momento torsor ou torque é o esforço que tende a torcer uma peça, fazendo-a girar sobre o seu próprio eixo. O caso mais comum de torção ocorre em eixos de transmissão. A torção simples, também conhecida como torção pura, é um efeito que não atua de forma simultânea com o momento fletor e o esforço cortante, e na prática essa torção acontece raramente. A torção ocorre, portanto, geralmente combinada com os demais esforços, mesmos que os mesmos sejam causados apenas pelo peso próprio do elemento estrutural. De modo aproximado, os princípios de dimensionamento para a torção simples são aplicados às vigas com atuação simultânea de momento fletor e esforço cortante.

No dimensionamento das vigas ao esforço de torção, faz-se uma analogia com uma treliça espacial denominada de Treliça Generalizada (Figura 3. 1).

**Figura 3. 1 - Treliça espacial generalizada**



Fonte: LIMA, GUARDA E PINHEIRO, 2007.

Segundo Bastos (2015), nas décadas de 60 e 70 a treliça clássica foi generalizada por LAMPERT, THÜRLIMANN e outros, com a admissão de ângulos variáveis ( $\theta$ ) para a inclinação das bielas. O modelo de treliça generalizada é o atualmente adotado pelas principais normas internacionais, como ACI 318/11 e MC-90 do CEB (1990).

A partir de numerosos estudos experimentais, com vigas de concreto armado sob torção simples, concluiu-se que os resultados justificaram o dimensionamento simplificado à torção considerando:

- Vigas com seção vazada (oca) e de parede fina, segundo as equações clássicas da Resistência dos Materiais, formuladas por Bredt.
- Tensões de compressão absorvidas pelo concreto.
- Tensões de tração absorvidas pelo aço na forma de duas diferentes armaduras: uma armadura longitudinal e outra transversal (estribos).

### 3.2. CONSIDERAÇÕES DA NBR 6118 (ABNT, 2014) PARA O PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Para o dimensionamento das estruturas estudadas neste trabalho, são utilizadas as prescrições descritas pela norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2014). Essa norma fixa os requisitos básicos exigíveis para projeto de estruturas de concreto armado e estabelece os requisitos gerais a serem atendidos pelo projeto como um todo. Neste capítulo são apresentados os fundamentos de verificação de elementos lineares sujeitos à torção, flexão e esforço cortante por meio do estado-limite último contidos na mesma.

### 3.3. TORÇÃO PURA

A norma NBR 6118 (ABNT, 2014) mantém suas condições fixadas em um modelo resistente constituído por uma treliça espacial, definida a partir de um elemento estrutural de seção vazada equivalente ao elemento estrutural a dimensionar.

A treliça é formada por bielas de compressão, estribos verticais e barras longitudinais. Em geral, admite-se que as bielas de compressão possuam uma inclinação de  $45^\circ$  em relação ao eixo da viga (ARAÚJO, 2013).

### 3.3.1. Metodologia de cálculo para solicitação à torção

Para as torções ditas necessárias ao equilíbrio da estrutura, a norma NBR 6118 (ABNT, 2014) traz a determinação das armaduras destinadas a resistir aos esforços de tração, provenientes da torção, sendo estas formadas por estribos verticais periféricos normais ao eixo do elemento estrutural e barras longitudinais distribuídas ao longo do perímetro da seção resistente.

As taxas geométricas mínimas para estas armaduras são dadas por:

$$\rho_{sl} = \rho_{sw} = \frac{A_{sl}}{h_e u_e} = \frac{A_{sw}}{b_w s} \geq 0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}}, \text{ com } f_{ywk} \leq 500 \text{ MPa} \quad (3.1)$$

em que  $\rho_{sl}$  é a taxa mínima de armadura longitudinal e  $\rho_{sw}$  é a taxa mínima de armadura transversal.

### 3.3.2. Resistência dos elementos estruturais

Os modos de ruptura de uma estrutura submetida à torção são apresentados a seguir, e cada um desses modos corresponde a um momento torçor de cálculo resistente.

#### • Ruptura por esmagamento das bielas

O momento torçor resistente  $T_{Rd2}$  correspondente ao limite de resistência das diagonais comprimidas do concreto, é dado por:

$$T_{Rd2} = 0,5 \alpha_{v2} f_{cd} A_e h_e \text{ sen}2\theta \quad (3.2)$$

em que

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (3.3)$$

$\theta$  é o ângulo de inclinação das diagonais de concreto, arbitrado no intervalo  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ;

$A_e$  é a área limitada pela linha média da parede da seção vazada, real ou equivalente, incluindo a parte vazada;

$h_e$  é a espessura equivalente da parede da seção vazada, real ou equivalente, no ponto considerado.

• **Ruptura por escoamento dos estribos**

O momento torçor resistente  $T_{Rd3}$ , correspondente ao escoamento dos estribos, é dado por:

$$T_{Rd3} = \left( \frac{A_{s,90}}{s} \right) f_{ywd} 2 A_e \cot\theta \quad (3.4)$$

em que  $f_{ywd}$  é o valor de cálculo da resistência ao escoamento do aço da armadura passiva, limitada a 435 MPa;

• **Ruptura por escoamento das barras longitudinais**

O momento torçor resistente  $T_{Rd4}$ , correspondente ao escoamento da armadura longitudinal, é dado por:

$$T_{Rd4} = 2 \left( \frac{A_{sl}}{u_e} \right) A_e f_{ywd} \operatorname{tg}\theta \quad (3.5)$$

em que

$A_{sl}$  é a soma das áreas das seções das barras longitudinais;

$u_e$  é o perímetro de  $A_e$ .

Após a verificação simultânea das expressões a seguir, pode-se então admitir que a resistência do elemento estrutural satisfeita.

$$\begin{aligned} T_{Sd} &\leq T_{Rd2} \\ T_{Sd} &\leq T_{Rd3} \\ T_{Sd} &\leq T_{Rd4} \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.3.3. Cálculo das armaduras da seção

No processo de dimensionamento, os esforços resistentes são igualados ao momento torçor solicitante de cálculo  $T_{Sd}$ , assim da Equação 3.4 e Equação 3.5, obtêm-se as taxas de armaduras.

Taxa de Armadura transversal:



$$\left(\frac{A_{s,90}}{s}\right) = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \operatorname{tg}\theta \quad (3.7)$$

Taxa de Armadura longitudinal:

$$\left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right) = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \operatorname{cotg}\theta \quad (3.8)$$

### 3.3.4. Geometria da seção resistente

A seção vazada equivalente se define a partir da seção cheia com espessura da parede equivalente  $h_e$  dada por:

$$h_e \leq \frac{A}{u} \quad (3.9)$$

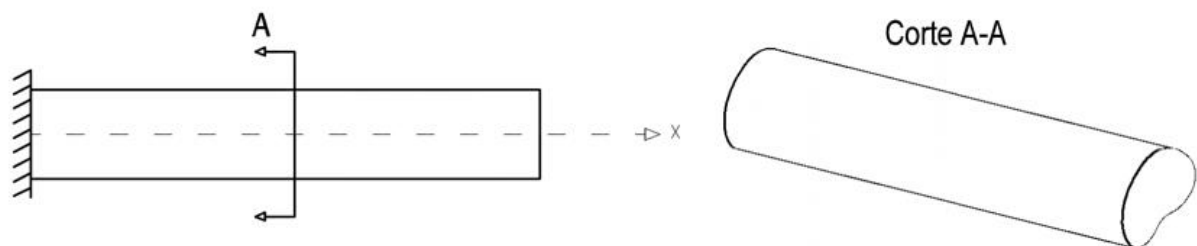
$$h_e \geq 2c_1 \quad (3.10)$$

Onde  $A$  é a área da seção cheia,  $u$  é o perímetro da seção cheia e  $c_1$  é a distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento estrutural.

Caso  $A/u$  resulte menor que  $2c_1$ , pode-se adotar  $h_e = A/u \leq b_w - 2c_1$ . A superfície média da seção celular equivalente  $A_e$  definida pelos eixos das armaduras do canto (respeitando o cobrimento exigido nos estribos).

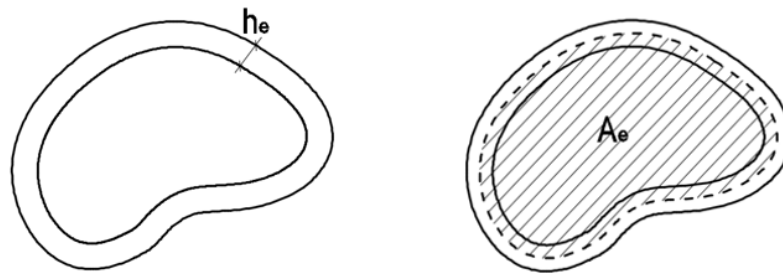
Seja a seção transversal dada por uma forma genérica como exemplificado na Figura 3. 2. Sua seção vazada equivalente e sua área interna equivalente são definidas como mostrado na Figura 3. 3, sendo a área  $A_e$  delimitada pela linha média da parede da seção equivalente.

**Figura 3. 2 - Geometria generalizada**



Fonte: Própria.

**Figura 3.3** - Espessura da parede e área equivalentes



Fonte: Própria.

### 3.4. FLEXÃO

A norma NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece que, nos elementos estruturais submetidos à torção e à flexão simples ou composta, as verificações podem ser efetuadas separadamente para a torção e para as solicitações normais. Na zona tracionada pela flexão, a armadura de torção deve ser acrescentada à armadura necessária para solicitações normais, considerando-se que, em cada seção, os esforços que agem concomitantemente.

#### 3.4.1. Metodologia de cálculo para solicitação à flexão

Em Marques (2019), tem-se que, para realizar o dimensionamento à flexão, é necessário apresentar alguns conceitos e definições empregados na NBR 6118 (ABNT, 2014). São eles:

$h$  = altura da seção transversal.

$b_w$  = largura da seção transversal.

$d$  = altura útil da seção transversal. É definida pela distância entre a borda mais comprimida de concreto e o centro de gravidade da armadura de tração.

$d'$  = é definido pela distância entre a borda mais tracionada do concreto e o centro de gravidade da armadura de tração.

$x$  = altura da linha neutra da seção transversal. É definida pela distância entre a borda mais comprimida do concreto e o ponto de tensões e deformações nulas.

$y$  = altura da linha neutra convencional. É definida pela altura do diagrama retangular tensão-deformação da seção transversal. Para concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa, o valor dessa altura é dado por  $y = 0,8x$ .

$z$  = braço de alavanca. É definido pela distância entre o ponto de aplicação da resultante das tensões normais de compressão no concreto ( $F_c$ ) até o ponto de aplicação da resultante das tensões normais de tração no aço ( $F_s$ ).

$f_{ck}$  = resistência característica do concreto à compressão.

$f_{yk}$  = resistência característica do aço à tração.

$f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto. Para combinação normal no estado limite último, é dada por  $f_{cd} = f_{ck}/1,4$ .

$f_{yd}$  = resistência de cálculo ao escoamento do aço. Para combinação normal no estado limite último, é dada por  $f_{yd} = f_{yk}/1,15$ .

$\varepsilon_c$  = deformação do concreto comprimido.

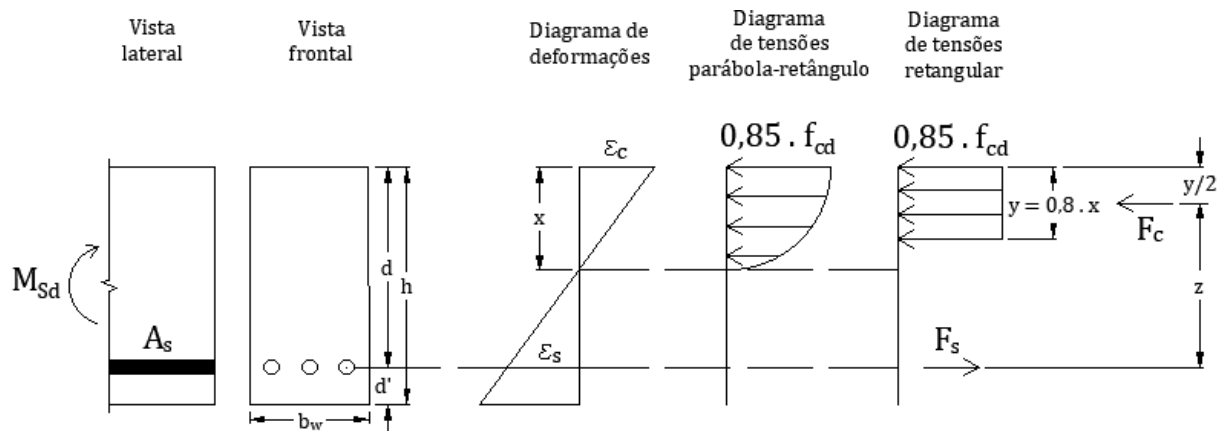
$\varepsilon_s$  = deformação do aço tracionado.

$\sigma_{sd}$  = tensão de escoamento do aço.

Pela norma NBR 6118 (ABNT, 2014), a distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com um diagrama parábola-retângulo, com tensão máxima igual a  $0,85f_{cd}$ . Esse diagrama pode ser substituído por um diagrama retangular com mesma tensão máxima e altura  $y = 0,8x$ .

Na Figura 3. 4 estão representados os conceitos citados anteriormente, além dos diagramas de deformações e tensões parábola-retângulo e retangular da seção transversal de uma viga.

**Figura 3.4** - Diagrama de deformações e diagramas de tensões parábola-retângulo e retangular da seção transversal de uma viga



Fonte: Adaptado de CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2007.

A altura útil da viga ( $d$ ) é dada pela Equação 3. 11.

$$d = h - d' \quad (3. 11)$$

O valor de  $d'$  é determinado pelo somatório do cobrimento da viga, o diâmetro da armadura transversal e o raio da armadura longitudinal. O cobrimento mínimo da viga pode ser obtido pela norma NBR 6118 (ABNT, 2014), de acordo com a classe de agressividade do ambiente.

O dimensionamento na flexão simples deve ser realizado considerando que o momento fletor solicitante de cálculo não supere a resistência de cálculo da seção, dada pela Equação 3. 12. Para tanto, deve-se considerar o estado limite último de ruína da seção transversal, que determina que a ruína pode ocorrer por ruptura do concreto comprimido ou pela deformação excessiva da armadura tracionada.

$$M_{Rd} = 0,85 f_{cd} b_w y z \quad (3. 12)$$

Substituindo-se  $y = 0,8x$  e  $z = d - \frac{y}{2} = d - 0,4x$ , obtém-se a Equação 3. 13.

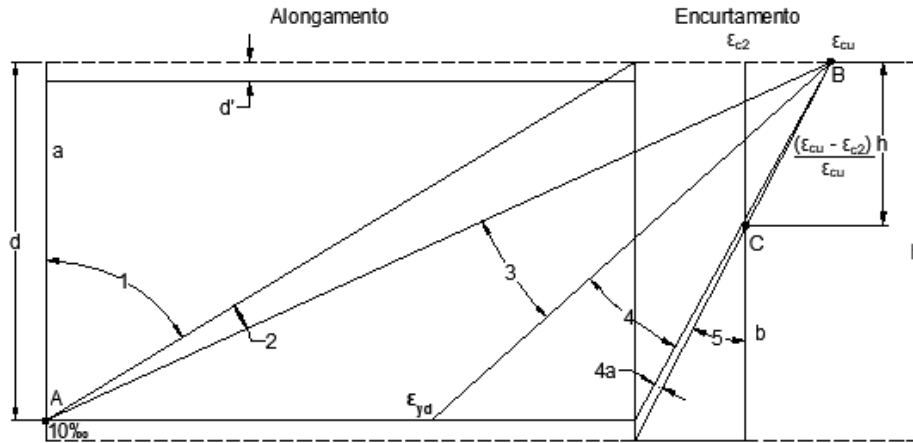
$$M_{Rd} = 0,85 f_{cd} b_w 0,8x (d - 0,4x) \quad (3. 13)$$

Assim, chamando-se de  $\beta_x$  a relação entre a altura da linha neutra da seção transversal ( $x$ ) e a sua altura útil ( $d$ ), pode-se escrever a Equação 3. 14 para a obtenção do momento fletor resistente de cálculo.

$$M_{Rd} = 0,85 f_{cd} b_w 0,8\beta_x d^2 (1 - 0,4\beta_x) \quad (3. 14)$$

O valor de  $\beta_x$  é determinado pela norma NBR 6118 (ABNT, 2014), de acordo com os domínios de deformação da seção transversal. Esses domínios, apresentados na Figura 3. 5, representam as diversas possibilidades de ruína da seção transversal.

**Figura 3. 5** - Domínios de estado limite último de uma seção transversal



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 6118, 2014.

Para concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa, tem-se que os valores limites de  $\beta_x$  para cada domínio são:

Domínio 2:  $0 < \beta_x < 0,2593$

Domínio 3:  $0,2593 < \beta_x < 0,6284$

Domínio 4:  $0,6284 < \beta_x < 1$

Quando o dimensionamento é realizado no domínio 2 ou 3, pode-se considerar que  $\sigma_{sd} = f_{yd}$ . Caso contrário é necessário calcular o valor de  $\sigma_{sd}$  de acordo com o diagrama tensão-deformação do aço.

O cálculo da área de aço necessária é realizado a partir da Equação 3. 15.

$$M_{Rd} = F_s \cdot z \quad (3. 15)$$

A força resultante de tração na armadura ( $F_s$ ) é dada pelo produto entre a tensão de escoamento do aço ( $\sigma_{sd}$ ) e a área de aço ( $A_s$ ). Assim, chega-se à Equação 3. 16 para o cálculo da área de aço na seção transversal.

$$M_{Rd} = \sigma_{sd} A_s (d - 0,4 \beta_x d) \quad (3. 16)$$

A partir da área de aço obtida é possível calcular a quantidade de barras necessárias e o espaçamento entre elas. A norma NBR 6118 (ABNT, 2014) define uma área mínima de aço para armaduras longitudinais, correspondente a 0,15% da área de concreto.

### 3.5. ESFORÇO CORTANTE

Na combinação de torção com força cortante, o projeto deve prever ângulos de inclinação das bielas de concreto  $\theta$  coincidentes para os dois esforços. A resistência à compressão diagonal do concreto deve ser satisfeita atendendo-se à expressão da Equação 3. 17.

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{sd}}{T_{Rd2}} \leq 1 \quad (3. 17)$$

Em que  $V_{sd}$  e  $T_{sd}$  são os esforços cortante e torçor de cálculo que agem simultaneamente na seção.

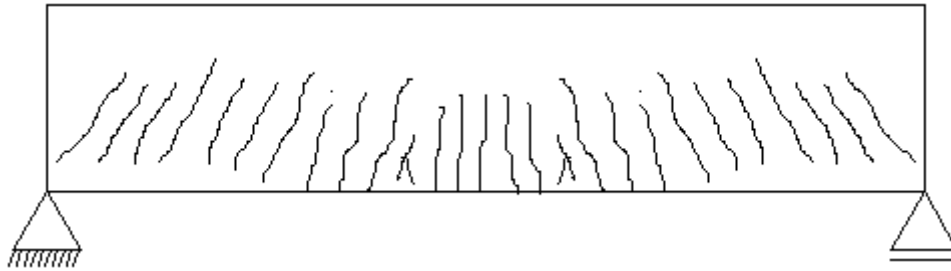
Por fim, a armadura transversal pode ser calculada pela soma das armaduras calculadas separadamente para  $V_{sd}$  e  $T_{sd}$ .

#### 3.5.1. Metodologia de cálculo para solicitação ao esforço cortante

A norma NBR 6118 (ABNT, 2014) descreve os procedimentos necessários para realizar o dimensionamento da armadura transversal em vigas. Para isso, é tomada como base a teoria da treliça de Morsch, que propõe uma analogia entre os mecanismos resistentes da viga e uma treliça. Criada por W. Ritter e E. Morsch, essa teoria determina a armadura de cisalhamento em uma viga de concreto armado, considerando que as armaduras e o concreto realizam, conjuntamente, o equilíbrio do esforço cortante (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2007).

Para realizar a criação do modelo de treliça, Morsch considerou uma viga biapoiada de concreto armado, com estado de fissuração próximo à ruptura, como dado na Figura 3. 6. Nesse estado de fissuração, a viga apresenta fissuras inclinadas na região em que o cisalhamento é predominante e, entre elas, o concreto se encontra comprimido (bielas comprimidas) (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2007).

**Figura 3. 6 -** Viga com estado de fissuração próximo à ruptura

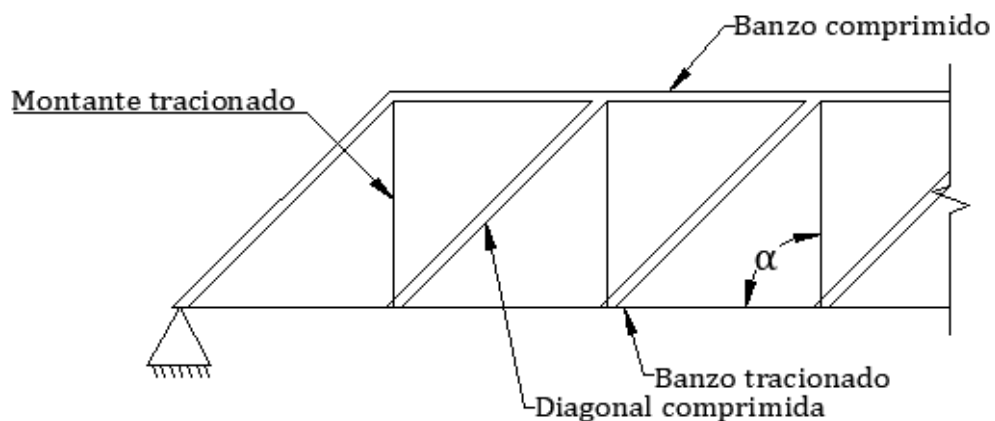


Fonte: MARQUES, 2019.

Na Figura 3. 7 apresenta-se a treliça análoga de Morsch, com a representação dos elementos resistentes de uma viga. Carvalho e Figueiredo Filho (2007) apresentam as seguintes definições dos elementos constituintes da treliça:

- Banzo superior comprimido: representa a região comprimida do concreto, acima da linha neutra.
- Banzo inferior tracionado: representa as barras da armadura longitudinal de tração.
- Montantes ou diagonais tracionadas: representam a armadura transversal da viga, que cruza certa fissura. Podem ser constituídos por estribos, que apresentam inclinação  $\alpha = 90^\circ$ , ou barras inclinadas, que apresentam inclinação  $\alpha = 45^\circ$ .
- Diagonais comprimidas: representam a região entre fissuras, constituída por concreto comprimido (bielas comprimidas). No modelo clássico de treliça de Morsch, as diagonais têm inclinação  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo da peça. Entretanto, com o desenvolvimento de pesquisas experimentais, verificou-se que essa inclinação é menor que  $45^\circ$ , resultando na chamada treliça generalizada de Morsch.

**Figura 3. 7 -** Treliça análoga de Morsch para o caso de viga biapoiada armada com estribos verticais



Fonte: MARQUES, 2019.

A partir do equilíbrio de forças na treliça de Morsch é possível obter as diversas equações apresentadas na norma vigente para o dimensionamento de elementos sujeitos a esforços cortantes.

Pela norma NBR 6118 (ABNT, 2014), devem ser verificadas duas condições para que a resistência da viga seja considerada satisfatória. A primeira análise, dada pela condição da Equação 3. 18, realiza a verificação relativa à ruína das bielas comprimidas. A segunda análise, dada pela condição da Equação 3. 19, realiza a verificação relativa à ruptura por tração diagonal.

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (3. 18)$$

$$V_{Sd} \leq (V_{Rd3} = V_c + V_{sw}) \quad (3. 19)$$

em que:

$V_{Sd}$  = força cortante solicitante de cálculo.

$V_{Rd2}$  = força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das bielas comprimidas.

$(V_{Rd3} = V_c + V_{sw})$  = força cortante resistente de cálculo, relativa à ruptura por tração diagonal.

$V_c$  é a parcela da força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça e  $V_{sw}$  é a parcela resistida pela armadura transversal.

A norma NBR 6118 (ABNT, 2014) admite dois modelos para a obtenção das forças resistentes de cálculo. O Modelo I tem como base a treliça clássica de Morsch, considerando a inclinação ( $\theta$ ) das diagonais comprimidas igual a  $45^\circ$  e admitindo que a parcela  $V_c$  tenha valor constante e independente de  $V_{Sd}$ . O Modelo II tem como base a treliça generalizada de Morsch, considerando a inclinação ( $\theta$ ) das diagonais comprimidas entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$  e admitindo que a parcela  $V_c$  sofra redução com o aumento de  $V_{Sd}$ .

Segundo a norma NBR 6118 (ABNT, 2014), a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das bielas comprimidas, para o Modelo I, é dada pela Equação 3. 20.

$$V_{Rd2} = 0,27 \alpha_{v2} f_{cd} b_w d \quad (3. 20)$$

onde:

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250}, \text{ sendo } f_{ck} \text{ em MPa.}$$



$f_{cd} = f_{ck}/1,4$ , sendo  $f_{ck}$  em  $\text{kN/m}^2$ .

$b_w$  é a largura da seção transversal (m).

$d$  é a altura útil da seção transversal (m).

A força cortante resistente de cálculo, relativa à ruptura por tração diagonal, é dada pela Equação 3. 21.

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (3. 21)$$

onde:

$$V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} 0,9 d f_{ywd} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$V_c = V_{co} = 0,6 f_{ctd} b_w d$  na flexão simples.

onde:

$A_{sw}$  é a área da seção transversal dos estribos;

$s$  é o espaçamento entre os estribos;

$f_{ywd}$  é a tensão de cálculo na armadura transversal passiva, sendo igual a  $f_{yd}$  no caso de estribos;

$f_{ctd}$  é a resistência de cálculo à tração do concreto.

A Equação 3. 22 apresenta a taxa de armadura mínima, constituída por estribos, para vigas submetidas a esforços cortantes.

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w s \sin \alpha} \geq 0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (3. 22)$$

em que  $f_{ctm}$  é a resistência média à tração do concreto, dada por  $f_{ctm} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$  e  $f_{ywk}$  é a resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal.

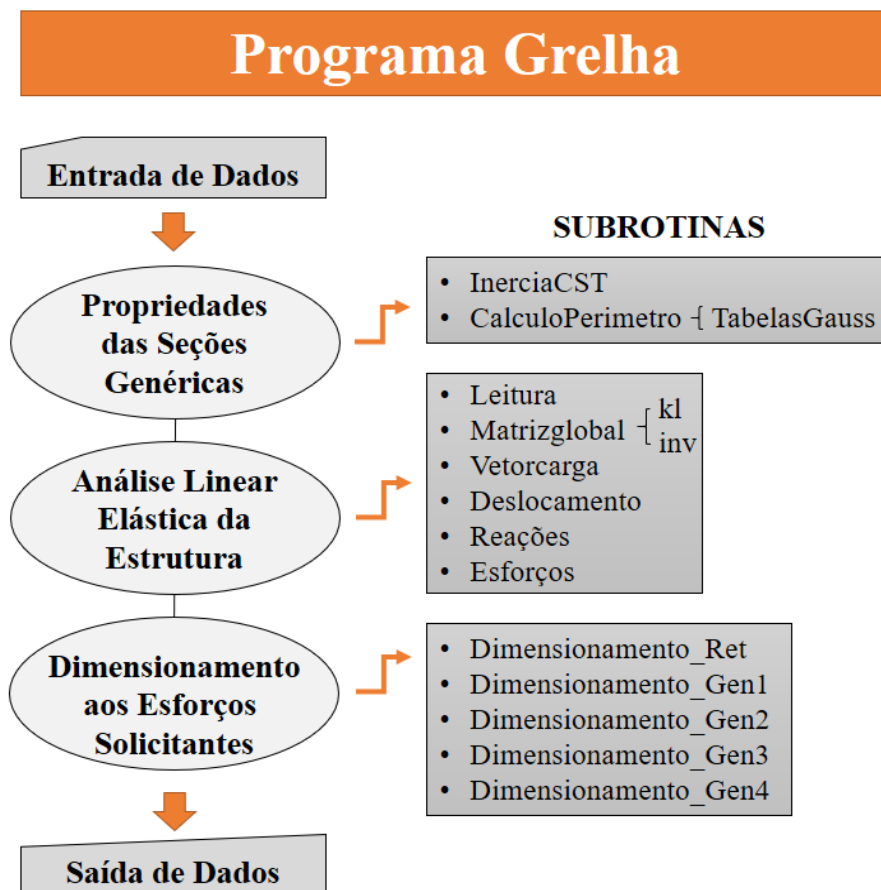
# CAPÍTULO 4

## PROGRAMA COMPUTACIONAL

### 4.1. INTRODUÇÃO

O programa computacional Grelha foi desenvolvido no presente trabalho com o intuito de otimizar os cálculos das análises e dimensionamentos de estruturas sujeitas à torção de equilíbrio. Os procedimentos numéricos, realizados via Método dos Elementos Finitos, foram implementados em linguagem FORTRAN 90 e um fluxograma do programa em questão é mostrado na Figura 4. 1.

Figura 4. 1 - Fluxograma do Programa Grelha



Fonte: Própria.

A saber, foi utilizado um módulo denominado **variaveis** para a declaração de todas as variáveis inteiras ou reais, além de vetores e matrizes, necessárias para a execução do programa. Os arquivos de entrada de dados (input) e saída de dados (output) são documentos no formato txt.

## 4.2. DESCRIÇÃO DOS PROCESSOS

Uma breve descrição das sub-rotinas utilizadas no programa é apontada a seguir:

- **InerciaCST**: Cálculo das propriedades das seções transversais dos elementos (**I<sub>x</sub>**, **I<sub>y</sub>** e **J**).
- **CalculoPerimetro**: Cálculo do perímetro das seções genéricas (**u**).
- **TabelaGauss**: Contém os pontos e pesos de Gauss utilizados no cálculo do perímetro.
- **Leitura**: Leitura e armazenamento dos dados de entrada básicos fornecidos pelo usuário.
- **Matrizglobal**: Montagem da matriz de rigidez global da estrutura analisada (**Kg**).
- **KI**: Montagem da matriz de rigidez global de cada elemento da estrutura (**KI**).
- **inv**: Inversão da matriz global Kg através do método de decomposição **LU**.
- **Vetorcarga**: Montagem do vetor de cargas globais da estrutura.
- **Deslocamentos**: Cálculo dos deslocamentos globais da estrutura.
- **Reações**: Cálculo das reações de apoio em cada nó restringido da estrutura.
- **Esforços**: Cálculos dos esforços atuantes em cada nó dos elementos da estrutura.
- **Dimensionamento\_Ret**: Cálculo das áreas de aço necessárias para combater os esforços solicitantes à Flexão, Cortante e Torção de seções retangulares na estrutura.
- **Dimensionamento\_Gen1**: Cálculo das áreas de aço necessárias para resistir aos esforços solicitantes à Torção da seção genérica do Caso 1.
- **Dimensionamento\_Gen2**: Cálculo das áreas de aço necessárias para resistir aos solicitantes à Flexão, Cortante e Torção da seção genérica do Caso 2.
- **Dimensionamento\_Gen3**: Cálculo das áreas de aço necessárias para resistir aos esforços solicitantes à Torção da seção genérica do Caso 3.
- **Dimensionamento\_Gen4**: Cálculo das áreas de aço necessárias para resistir aos esforços solicitantes à Torção da seção genérica do Caso 4.

# CAPÍTULO 5

## APLICAÇÕES

### 5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são demonstradas as aplicações gerais deste trabalho. Os resultados obtidos foram divididos em três subitens: a princípio, as propriedades das seções convencionais e genéricas foram resolvidas de forma numérica e comparadas com os resultados analíticos. Na sequência, foram realizados os cálculos dos esforços solicitantes referentes às diferentes estruturas de grelha, verificando assim a eficiência do programa computacional desenvolvido. Por fim, efetuou-se o projeto de uma seção convencional (retangular) sujeita à flexão, esforço cortante e momento torçor comparando-se os valores obtidos por meio do programa com valores analíticos seguindo as prescrições da norma NBR 6118 (ABNT, 2014). Para concluir, um exemplo completo foi desenvolvido realizando a análise e o dimensionamento de uma estrutura de grelha com viga principal de seção genérica.

### 5.2. PROPRIEDADES DAS SEÇÕES

Para o dimensionamento das estruturas de concreto armado, conforme recomendações da norma NBR 6118 (ABNT, 2014), é necessário obter primeiramente, as propriedades geométricas das seções transversais do elemento trabalhado. Seguem, portanto, algumas destas propriedades obtidas de forma numérica por meio do presente trabalho, no qual os valores puderam ser comparados com os valores exatos, mostrando-se assim a eficiência dos métodos utilizados.

#### **5.2.1. Aplicação 1: Momentos de inércia via Método dos Elementos Finitos**

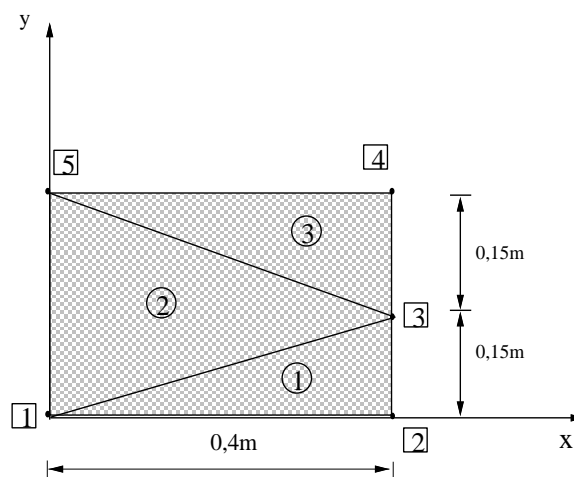
Neste item são apresentados os cálculos das propriedades geométricas de oito diferentes seções, dentre elas, quatro são regulares (Figura 5. 1 a Figura 5. 4) e quatro seções são genéricas (Figura 5. 5 a Figura 5. 8). Os momentos de inércia em relação aos eixos baricêntricos  $x$  e  $y$  e

o momento de inércia polar foram obtidos via método dos elementos finitos (MEF). Nas aplicações, utiliza-se o elemento finito triangular com três nós (CST).

As seções foram discretizadas com diferentes malhas de elementos finitos e são apresentadas, para seções convencionais e genéricas, como:

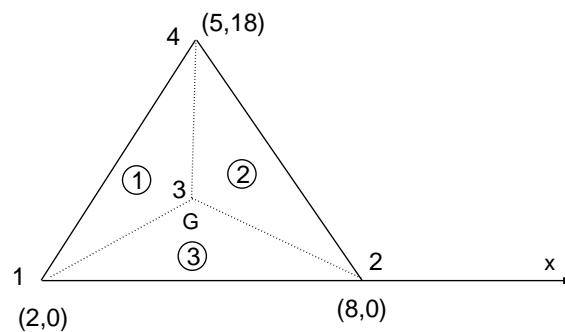
- **Seções Convencionais**

**Figura 5.1** - Seção retangular de 3 elementos



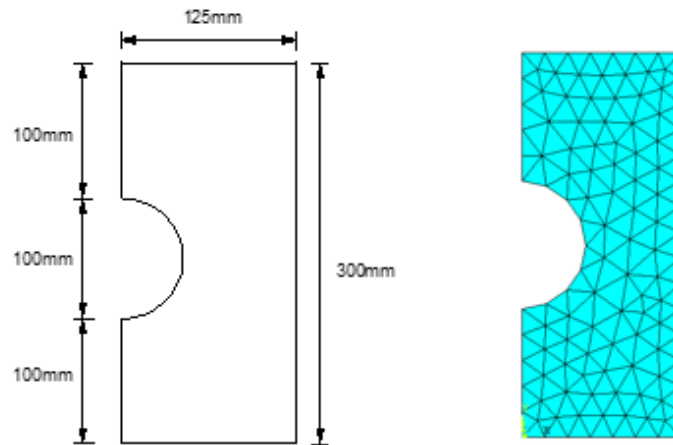
Fonte: FARIA, 2018.

**Figura 5.2** - Seção triangular de 3 elementos



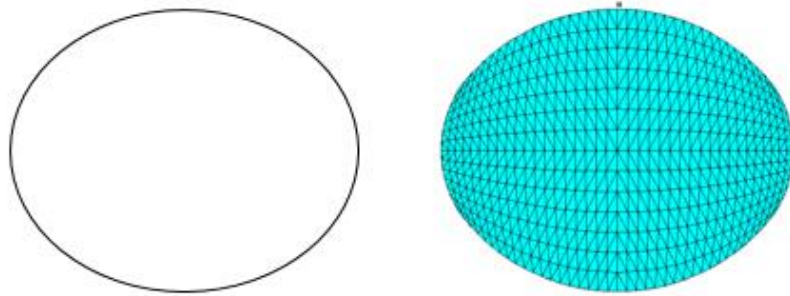
Fonte: FARIA, 2018.

**Figura 5.3** - Seção retangular com furo de 193 elementos



Fonte: FARIA, 2018.

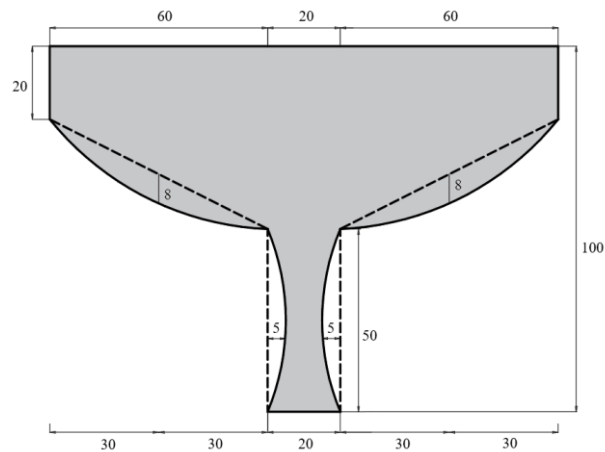
**Figura 5.4** - Seção elíptica com  $a=10$  cm e  $b=8$  cm de 1064 elementos



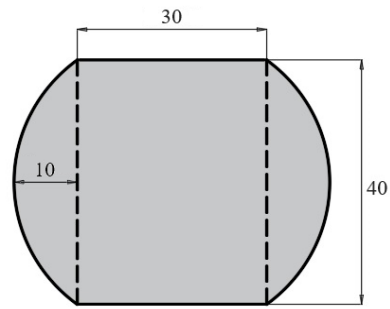
Fonte: FARIA, 2018.

- **Seções Genéricas**

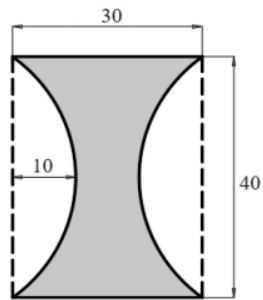
**Figura 5.5** - Seção genérica Caso 1



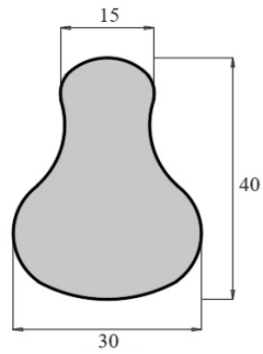
Fonte: FARIA, 2018.

**Figura 5. 6 - Seção genérica Caso 2**

Fonte: FARIA, 2018.

**Figura 5. 7 - Seção genérica Caso 3**

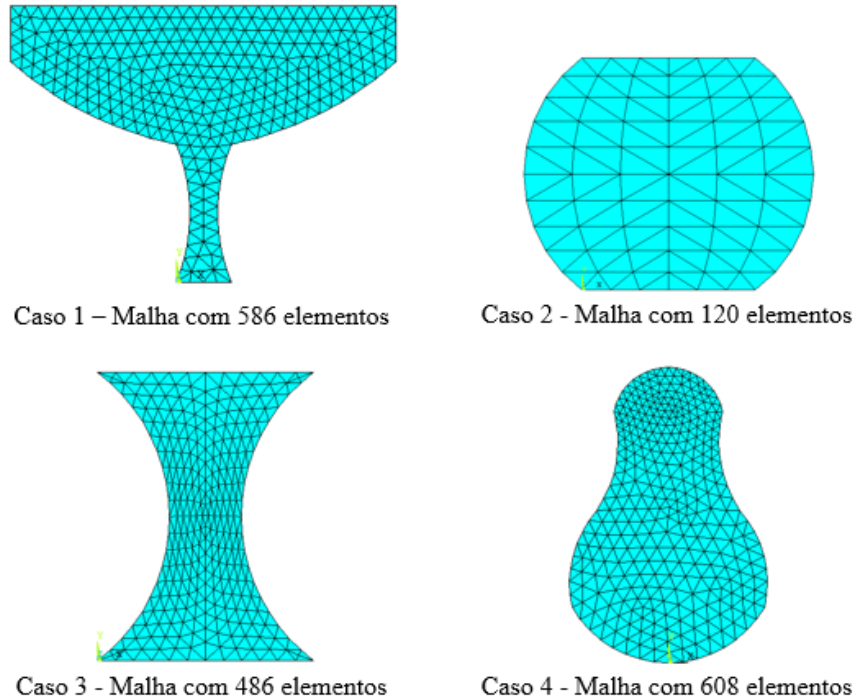
Fonte: FARIA, 2018.

**Figura 5. 8 - Seção genérica Caso 4**

Fonte: FARIA, 2018.

As malhas de elementos finitos foram geradas por meio do software ANSYS 17 e, para as seções genéricas, são mostradas na Figura 5. 9.

**Figura 5. 9 - Malhas de elementos finitos das seções arbitrárias**



Fonte: FARIA, 2018.

## Resultados obtidos por meio do CST

- **Seções Convencionais**

Para as seções convencionais, os resultados deste trabalho, obtidos via MEF, foram comparados com os resultados analíticos e registrados na Tabela 5. 1, Tabela 5. 2, Tabela 5. 3, Tabela 5. 4 e Tabela 5. 5.

**Tabela 5. 1 - Seção Retangular com 3 elementos finitos**

Propriedades (m <sup>4</sup> )	Presente Trabalho	Analítico	Presente Trabalho/Analítico
I <sub>x</sub>	9 x 10 <sup>-4</sup>	9 x 10 <sup>-4</sup>	1,0000
I <sub>y</sub>	1,6 x 10 <sup>-3</sup>	1,6 x 10 <sup>-3</sup>	1,0000
J	2,5 x 10 <sup>-3</sup>	2,5 x 10 <sup>-3</sup>	1,0000



**Tabela 5. 2 - Seção triangular com 3 elementos finitos**

<b>Propriedades</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Analítico</b>	<b>Presente Trabalho/Analítico</b>
I <sub>x</sub>	972	972	1,0000
I <sub>y</sub>	81	81	1,0000
J	1053	1053	1,0000

**Tabela 5. 3 - Seção retangular com furo com 48 elementos finitos**

<b>Propriedades (m<sup>4</sup>)</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Analítico</b>	<b>Presente Trabalho/Analítico</b>
I <sub>x</sub>	$2,7893 \times 10^{-4}$	$2,7879 \times 10^{-4}$	1,0005
I <sub>y</sub>	$4,0637 \times 10^{-5}$	$3,9680 \times 10^{-5}$	1,0241
J	$3,1957 \times 10^{-4}$	$3,1847 \times 10^{-4}$	1,0035

**Tabela 5. 4 - Seção retangular com furo com 193 elementos finitos**

<b>Propriedades (m<sup>4</sup>)</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Analítico</b>	<b>Presente Trabalho/Analítico</b>
I <sub>x</sub>	$2,7892 \times 10^{-4}$	$2,7879 \times 10^{-4}$	1,0005
I <sub>y</sub>	$4,0818 \times 10^{-5}$	$3,9680 \times 10^{-5}$	1,0287
J	$3,1974 \times 10^{-4}$	$3,1847 \times 10^{-4}$	1,0040

**Tabela 5. 5 - Seção Elíptica com 1064 elementos**

<b>Propriedades (cm<sup>4</sup>)</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Analítico</b>	<b>Presente Trabalho/Analítico</b>
I <sub>x</sub>	$3,9148 \times 10^3$	$4,0210 \times 10^3$	0,9736
I <sub>y</sub>	$6,1681 \times 10^3$	$6,283 \times 10^3$	0,9817
J	$1,0304 \times 10^4$	$1,008 \times 10^4$	0,9785

- **Seções Genéricas**

Para as seções genéricas, na Tabela 5. 6, Tabela 5. 7, Tabela 5. 8 e na Tabela 5. 9, os resultados numéricos obtidos com auxílio do código computacional desenvolvido, são comparados com os valores das propriedades retirados do programa AutoCAD.

**Tabela 5. 6** - Caso 1 com 586 elementos

<b>Propriedades (cm<sup>4</sup>)</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>AutoCAD</b>	<b>Presente Trabalho/ AutoCAD</b>
I <sub>x</sub>	2,8503 x 10 <sup>6</sup>	2,8434 x 10 <sup>6</sup>	1,0024
I <sub>y</sub>	7,3249 x 10 <sup>6</sup>	7,3289 x 10 <sup>6</sup>	0,9994
J	1,0175 x 10 <sup>7</sup>	1,0172 x 10 <sup>7</sup>	1,0003

**Tabela 5. 7** - Caso 2 com 120 elementos

<b>Propriedades (cm<sup>4</sup>)</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>AutoCAD</b>	<b>Presente Trabalho/ AutoCAD</b>
I <sub>x</sub>	2,0637 x 10 <sup>5</sup>	2,0730 x 10 <sup>5</sup>	0,9955
I <sub>y</sub>	2,9422 x 10 <sup>5</sup>	2,9736 x 10 <sup>5</sup>	0,9895
J	5,0059 x 10 <sup>5</sup>	5,0466 x 10 <sup>5</sup>	0,9919

**Tabela 5. 8** - Caso 3 com 486 elementos

<b>Propriedades (cm<sup>4</sup>)</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>AutoCAD</b>	<b>Presente Trabalho/ AutoCAD</b>
I <sub>x</sub>	1,1289 x 10 <sup>5</sup>	1,1264 x 10 <sup>5</sup>	1,0022
I <sub>y</sub>	1,9564 x 10 <sup>4</sup>	1,9430 x 10 <sup>4</sup>	1,0069
J	1,3245 x 10 <sup>5</sup>	1,3207 x 10 <sup>5</sup>	1,0029

**Tabela 5. 9** - Caso 4 com 608 elementos

<b>Propriedades (cm<sup>4</sup>)</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>AutoCAD</b>	<b>Presente Trabalho/ AutoCAD</b>
I <sub>x</sub>	7,8156 x 10 <sup>4</sup>	7,8552 x 10 <sup>4</sup>	0,9950
I <sub>y</sub>	2,6895 x 10 <sup>4</sup>	2,6648 x 10 <sup>4</sup>	1,0093
J	1,0505 x 10 <sup>5</sup>	1,0520 x 10 <sup>5</sup>	0,9986

### 5.2.2. Aplicação 2: Perímetro via Método dos Elementos Finitos

Previamente, para o cálculo dos perímetros das seções não convencionais, desenvolveu-se, via Polinômio de Lagrange, uma equação que represente de forma genérica esse parâmetro (Equação 2. 36). Após essa definição, apresentam-se para as geometrias da Figura 5. 9, os

valores de seus perímetros utilizando-se o programa computacional implementado, no qual se empregou o Método de Gauss-Legendre para a solução de sua integral.

Na Tabela 5. 10 apresentam-se os valores dos perímetros das seções e a comparação com os resultados extraídos do programa AutoCAD. Ressalta-se que foram usados 60 pontos de Gauss em cada aplicação.

**Tabela 5. 10** - Valores dos perímetros das seções genéricas

<b>Perímetro (u) (cm)</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>AutoCAD</b>	<b>Presente Trabalho/ AutoCAD</b>
Caso 1	438,4134	438,4081	1,0000
Caso 2	152,7277	152,7295	1,0000
Caso 3	152,7294	152,7295	1,0000
Caso 4	108,0671	108,0675	1,0000

### 5.2.3. Aplicação 3: Espessura equivalente

Para as seções genéricas, a espessura da parede equivalente  $h_e$  foi calculada através das Equações 3. 9 e 3. 10, considerando o valor de  $c_1 = 4$  cm. Assim, apresentam-se na Tabela 5. 11 os resultados obtidos.

**Tabela 5. 11** - Cálculo dos valores da espessura equivalente

<b>Seções</b>	<b>Área (A) (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>Perímetro (u) (cm)</b>	<b>A/u</b>	<b>2c<sub>1</sub></b>	<b>h<sub>e</sub></b>
<b>Caso 1</b>	6267,9854	438,4134	14,3	8,0	8,0
<b>Caso 2</b>	1752,4853	152,7277	11,5	8,0	8,0
<b>Caso 3</b>	642,5411	152,7294	4,2	8,0	4,2
<b>Caso 4</b>	730,8395	108,0671	6,8	8,0	6,8

### 5.2.4. Aplicação 4: Área equivalente

As áreas e os perímetros equivalentes das seções genéricas foram obtidos com o auxílio do programa AutoCAD a partir da área limitada pela linha média da parede da seção vazada equivalente e seus valores são mostrados na Tabela 5. 12.

**Tabela 5. 12** - Cálculo das áreas e perímetros equivalentes

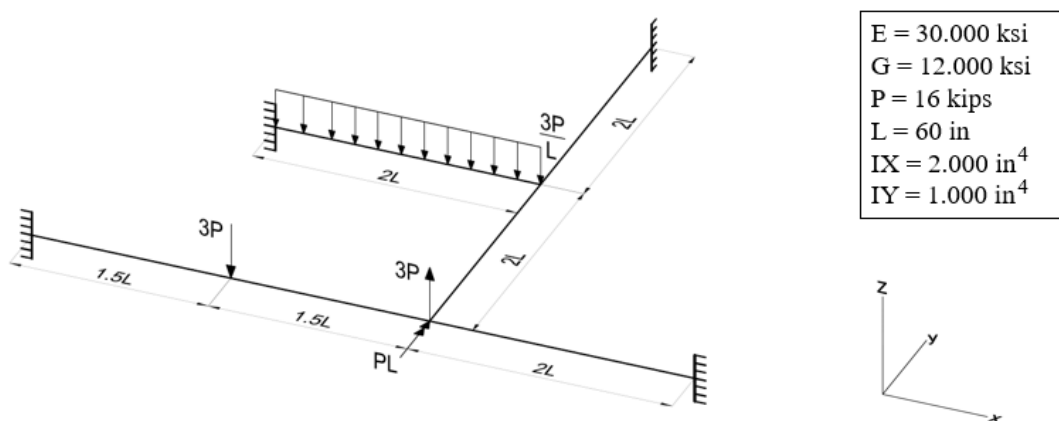
Seções genéricas	Área equivalente (cm <sup>2</sup> )	Perímetro equivalente (cm)
<b>Caso 1</b>	4585,7500	402,5448
<b>Caso 2</b>	1199,2786	127,1708
<b>Caso 3</b>	359,8144	116,8234
<b>Caso 4</b>	400,9580	86,6081

### 5.3. ESFORÇOS DAS ESTRUTURAS DE GRELHA

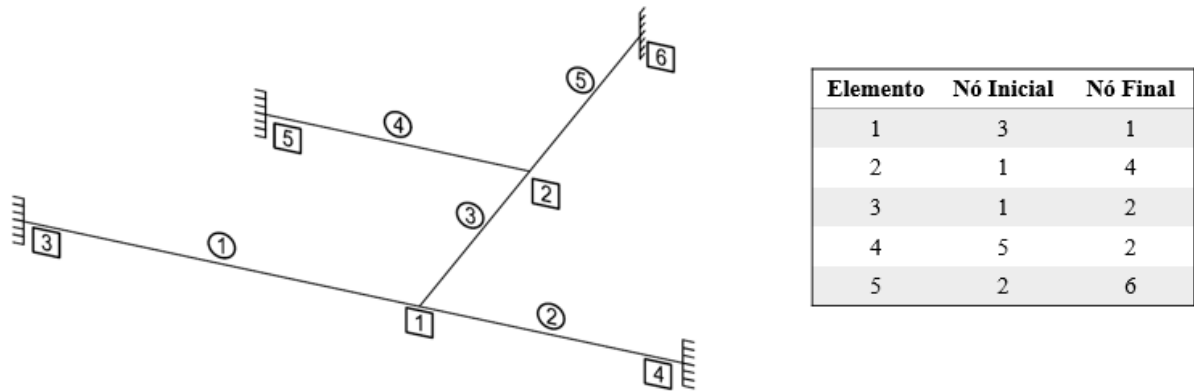
Para calibragem do programa computacional criado em linguagem FORTRAN, foram reproduzidos cinco exemplos de análises de estruturas de grelha já conhecidos na literatura. As estruturas e os dados utilizados no programa são apresentados na Figura 5. 10, Figura 5. 12, Figura 5. 14, Figura 5. 16 e Figura 5 .18. Na Figura 5. 11, Figura 5. 13, Figura 5. 15, Figura 5. 17 e Figura 5 .19, mostram-se as numerações utilizadas para os elementos e nós e suas respectivas incidências.

#### a) Grelha 1

O primeiro exemplo analisado foi apresentado por Gere e Weaver (1981).

**Figura 5. 10** - Estrutura da Grelha (Grelha 1)

Fonte: Adaptado de GERE; WEAVER, 1981.

**Figura 5. 11 - Numeração da Grelha (Grelha 1)**

Fonte: Própria.

Após o cálculo dos esforços nos nós, os resultados obtidos neste estudo foram comparados aos de Gere e Weaver, sendo apresentados na Tabela 5. 13 até a Tabela 5. 17. Os valores dos graus de liberdade referentes aos momentos de torção e momentos fletores se encontram em Kip.in, já os valores referentes aos esforços cortantes nas barras são expressos em Kip.

**Tabela 5. 13 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 1)**

Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Gere e Weaver (1981)	Presente Trabalho/Gere e Weaver
1	91,1346	91,1300	1,0001
2	-1565,6847	-1565,7000	1,0000
3	29,9290	29,9300	1,0000
4	-91,1346	-91,1300	1,0001
5	498,4700	498,5000	0,9999
6	18,0710	18,0700	1,0001

**Tabela 5. 14 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 1)**

Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Gere e Weaver (1981)	Presente Trabalho/Gere e Weaver
1	-136,7019	-136,7000	1,0000
2	589,6023	589,6000	1,0000
3	-11,0248	-11,0200	1,0004
4	136,7019	136,7000	1,0000
5	733,3703	733,4000	1,0000
6	11,0248	11,0200	1,0004

**Tabela 5. 15** - Ações nas extremidades do Elemento 3 (Grelha 1)

<b>Numeração dos Graus de Liberdade</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Gere e Weaver (1981)</b>	<b>Presente Trabalho/Gere e Weaver</b>
1	-128,0723	-128,0700	1,0000
2	-227,8364	-227,8000	1,0002
3	8,9537	8,9500	1,0002
4	128,0723	128,0700	1,0001
5	-846,6124	-846,6000	1,0000
6	-8,9537	-8,9500	1,0004

**Tabela 5. 16** - Ações nas extremidades do Elemento 4 (Grelha 1)

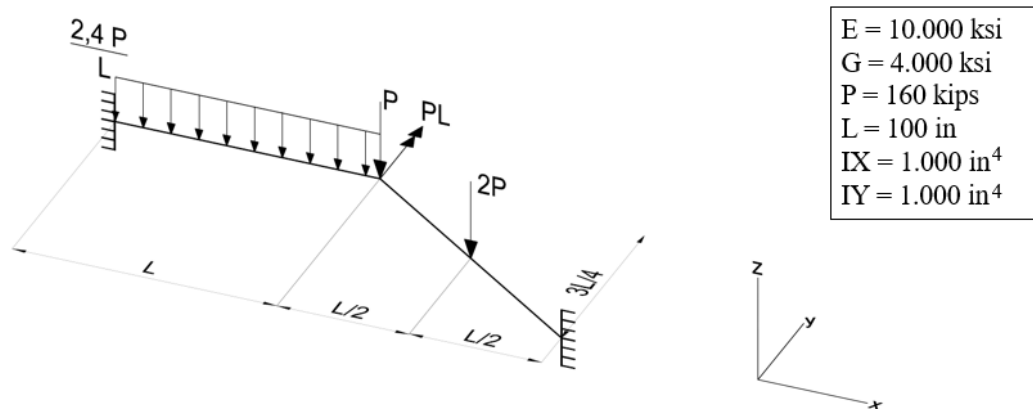
<b>Numeração dos Graus de Liberdade</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Gere e Weaver (1981)</b>	<b>Presente Trabalho/Gere e Weaver</b>
1	-110,8085	-110,8100	1,0000
2	-2295,0505	-2295,1000	1,0000
3	68,7807	68,7800	1,0000
4	110,8085	110,8100	1,0000
5	-198,6377	-198,6000	1,0002
6	27,2193	27,2200	1,0000

**Tabela 5. 17** - Ações nas extremidades do Elemento 5 (Grelha 1)

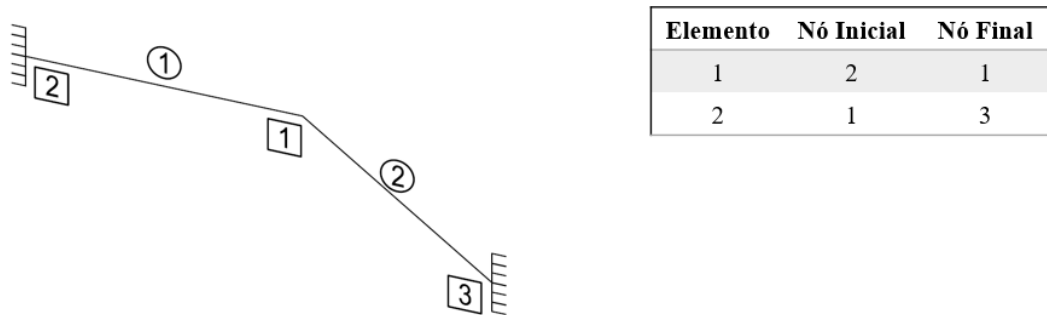
<b>Numeração dos Graus de Liberdade</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Gere e Weaver (1981)</b>	<b>Presente Trabalho/Gere e Weaver</b>
1	70,5651	70,5600	1,0001
2	957,4210	957,4000	1,0000
3	-18,2655	-18,2700	0,9998
4	-70,5651	-70,5700	0,9999
5	1234,4421	1234,4000	1,0000
6	18,2655	18,2700	0,9998

**b) Grelha 2**

O segundo exemplo também foi analisado por Gere e Weaver (1981).

**Figura 5. 12** - Estrutura da Grelha (Grelha 2)

Fonte: Adaptado de GERE; WEAVER, 1981.

**Figura 5. 13** - Numeração da Grelha (Grelha 2)

Fonte: Própria.

Os resultados encontrados são mostrados na Tabela 5. 18 e Tabela 5. 19. Assim como no exemplo anterior, os valores dos momentos de torção e momentos fletores se encontram em Kip.in, e os valores referentes aos esforços cortantes em Kip.

**Tabela 5. 18** - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 2)

Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Gere e Weaver (1981)	Presente Trabalho/Gere e Weaver
1	303,9415	303,9000	1,0001
2	-1311,4740	-1311,5000	1,0000
3	24,0397	24,0400	1,0000
4	-303,9415	-303,9000	1,0001
5	107,5039	107,5000	1,0000
6	-0,0397	-0,0397	1,0000

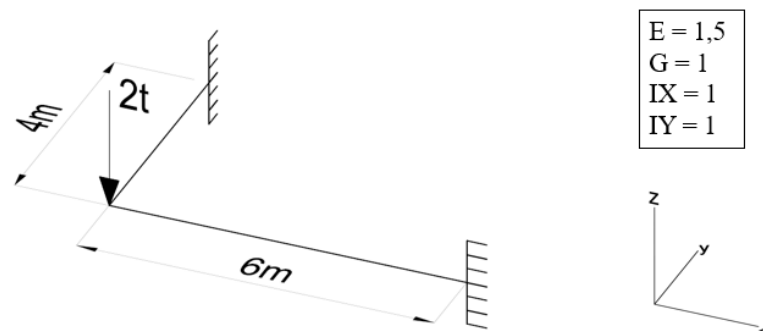
Tabela 5. 19 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 2)

Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Gere e Weaver (1981)	Presente Trabalho/Gere e Weaver
1	-292,3445	-292,3000	1,0002
2	896,3617	896,4000	1,0000
3	-9,9603	-9,9600	1,0000
4	292,3445	292,3000	1,0002
5	1598,6755	1598,7000	1,0000
6	29,9603	29,9600	1,0000

## c) Grelha 3

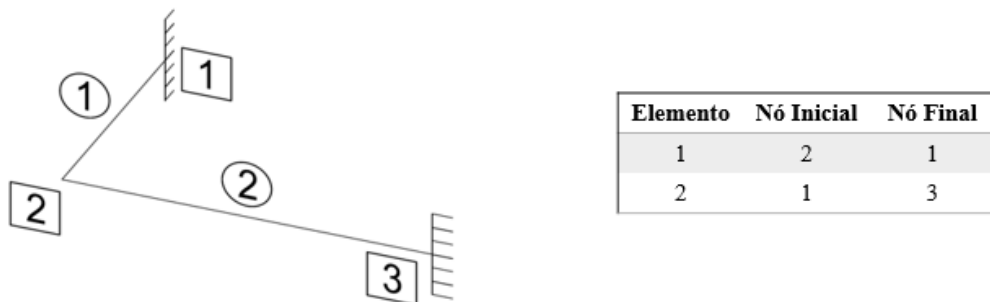
O exemplo 3 foi apresentado por Süsskind (1974) e é mostrado na Figura 5. 14.

Figura 5. 14 - Estrutura da Grelha (Grelha 3)



Fonte: Adaptado de SÜSSEKIND, 1974.

Figura 5. 15 - Numeração da Grelha (Grelha 3)



Fonte: Própria.



Nas Tabela 5. 20 e Tabela 5. 21 apresentam-se os resultados do presente trabalho e os apresentados por Süssekind (1974). Neste exemplo, os valores dos graus de liberdade são adimensionais, assim como, nos demais exemplos que se seguem.

**Tabela 5. 20** - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 3)

Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Süssekind (1974)	Presente Trabalho/Süssekind
1	1,6033	1,6100	0,9959
2	-9,9207	-9,9500	0,9971
4	1,6033	1,6100	0,9959
5	1,8038	1,8100	0,9966

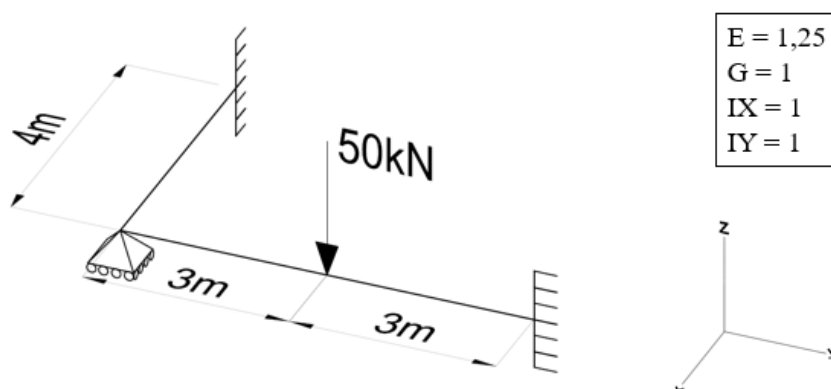
**Tabela 5. 21** - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 3)

Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Süssekind (1974)	Presente Trabalho/Süssekind
1	-1,8038	-1,8100	0,9966
2	1,6033	1,6100	0,9959
4	1,8038	1,8100	0,9966
5	4,8100	4,8200	0,9979

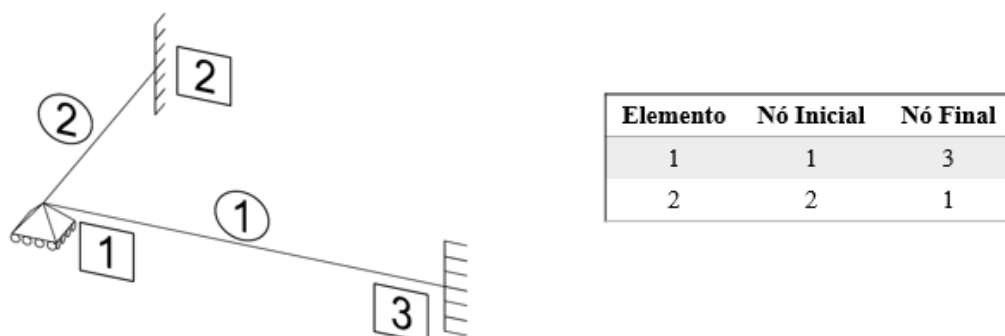
#### d) Grelha 4

Para o quarto exemplo, utilizou-se como referência uma estrutura apresentada por Soriano (2004).

**Figura 5. 16** - Estrutura da Grelha (Grelha 4)



Fonte: Adaptado de SORIANO, 2004.

**Figura 5. 17 - Numeração da Grelha (Grelha 4)**

Fonte: Própria.

Na Tabela 5. 22 e na Tabela 5. 23, apresentam-se os resultados obtidos.

**Tabela 5. 22 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 4)**

Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Soriano (2004)	Presente Trabalho/Soriano
1	0,0000	0,0000	1,0000
2	-8,6538	-8,6539	1,0000
3	17,7885	17,7880	1,0000
4	0,0000	0,0000	1,0000
5	51,9231	51,9230	1,0000
6	32,2115	32,2120	1,0000

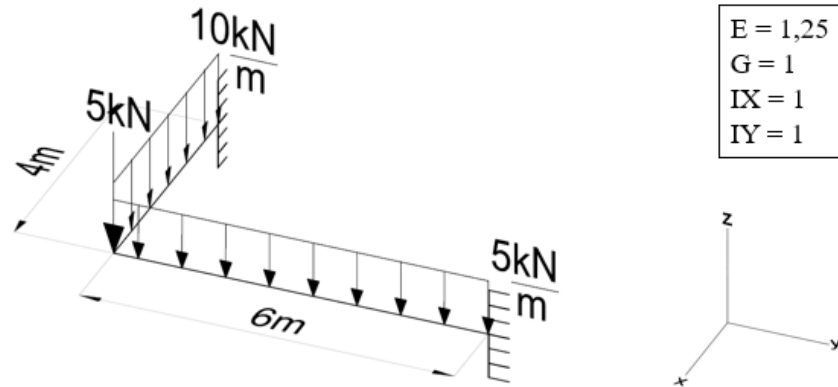
**Tabela 5. 23 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 4)**

Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Soriano (2004)	Presente Trabalho/Soriano
1	8,6539	8,6539	1,0000
2	0,0000	0,0000	1,0000
3	0,0000	0,0000	1,0000
4	-8,6539	-8,6539	1,0000
5	0,0000	0,0000	1,0000
6	0,0000	0,0000	1,0000

### e) Grelha 5

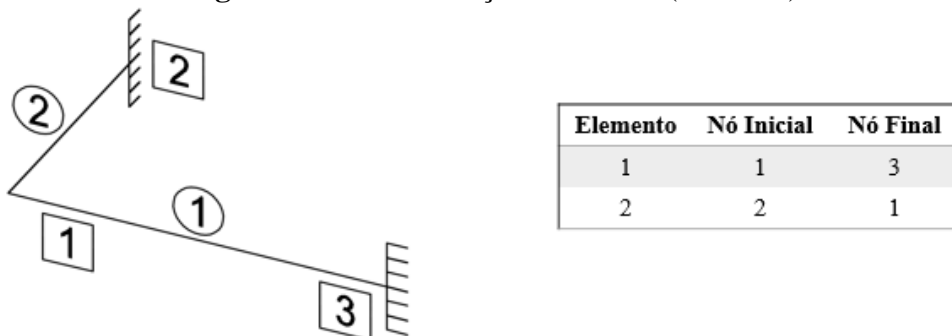
O exemplo 5 também foi extraído de Soriano (2004).

**Figura 5. 18 - Estrutura da Grelha (Grelha 5)**



Fonte: Adaptado de SORIANO, 2004.

**Figura 5. 19 - Numeração da Grelha (Grelha 5)**



Fonte: Própria.

Na Tabela 5. 24 e na Tabela 5. 25 apresentam-se os resultados encontrados após as análises.

**Tabela 5. 24 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 5)**

Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Soriano (2004)	Presente Trabalho/Soriano
1	15,0309	15,0560	0,9983
2	11,0095	11,0320	0,9980
3	3,27196	3,2580	1,0043
4	-15,0309	-15,0560	0,9983
5	59,3587	59,4180	0,9990
6	26,7280	26,7420	0,9995

**Tabela 5. 25** - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 5)

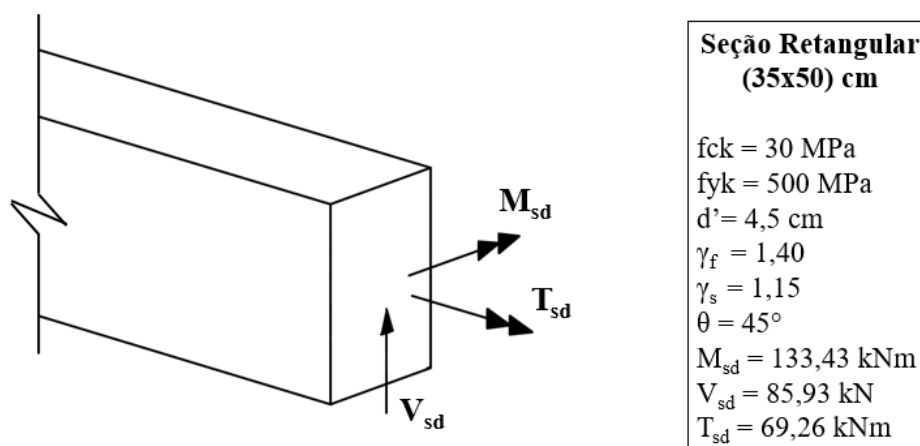
Numeração dos Graus de Liberdade	Presente Trabalho	Soriano (2004)	Presente Trabalho/Soriano
1	-11,0095	-11,0320	0,9980
2	-98,0602	-98,1840	0,9987
3	48,2720	48,2580	1,0003
4	11,0095	11,0320	0,9980
5	-15,0276	-15,0580	0,9980
6	-8,2720	-8,2580	1,0017

#### 5.4. DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES

A fim de se validar o programa computacional implementado para o dimensionamento de seções genéricas, foi realizado a priori, o dimensionamento completo de uma seção retangular, cujos resultados obtidos foram então comparados com os valores alcançados, seguindo as recomendações da norma NBR 6118 (ABNT, 2014). Ressalta-se que a estrutura se encontra submetida a esforço cortante, momento fletor e momento torçor. A seguir, os dados utilizados e os resultados obtidos na análise são discriminados detalhadamente.

#### Dimensionamento Completo de Seção Retangular

Para o estudo das seções retangulares, foi analisada a estrutura mostrada na Figura 5.20, sendo mostradas a geometria dessa seção, suas propriedades e os esforços atuantes na mesma.

**Figura 5. 20** - Geometria e dados da Seção Retangular

Fonte: Própria.

### Dimensionamento ao Momento Fletor

Foi realizado, inicialmente, o dimensionamento à flexão da seção por meio das especificações da norma NBR 6118 (ABNT, 2014) a fim de se obter a área de aço necessária para suportar às devidas solicitações de projeto. Neste caso, o valor do momento fletor aplicado foi igual a  $M_{sd} = 133,43 \text{ kNm}$ .

Posteriormente, a posição da linha neutra, o coeficiente  $\beta_x$  e a área de aço obtidos através da norma NBR 6118 (ABNT, 2014) foram comparados com os valores obtidos através do processo iterativo realizado no presente trabalho e os resultados são mostrados na Tabela 5. 26.

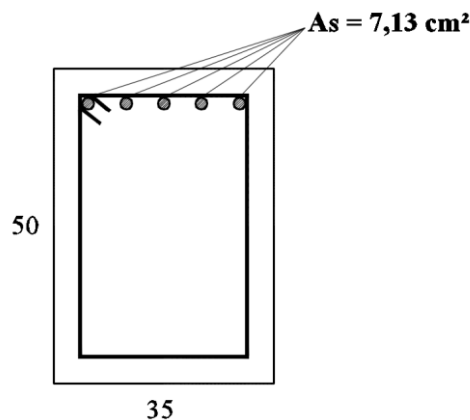
**Tabela 5. 26** - Dimensionamento à flexão de seção retangular

Seção Retangular	Método ABNT 6118 (2014)	Presente trabalho (Método da Iteração Linear)	ABNT/Presente trabalho
Posição da L.N. (m)	0,06074	0,06081	0,9988
Valor de $\beta_x$	0,1335	0,1336	0,9989
$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	7,12	7,13	0,9986

O processo de iteração foi realizado utilizando-se uma tolerância com valor igual a  $\varepsilon = 10^{-4}$  e os resultados alcançados se mostraram de grande eficiência quando comparados com o método normativo.

O detalhamento da armadura longitudinal à flexão é demonstrado na Figura 5. 21.

**Figura 5. 21** - Detalhamento das armaduras de flexão (Seção Retangular)



Fonte: Própria.

### Dimensionamento ao Esforço Cortante

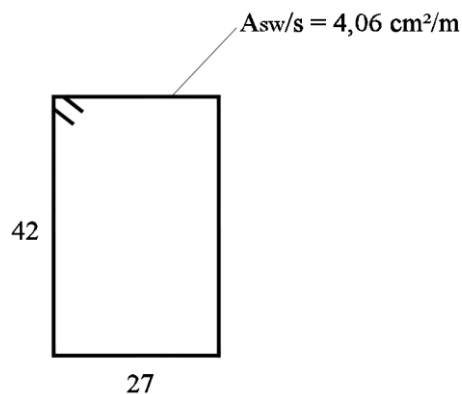
A implementação computacional desenvolvida para o dimensionamento das peças submetidas ao esforço cortante foi baseada também nas prescrições da norma NBR 6118 (ABNT, 2014). Para a seção retangular da Figura 5. 20, submetida ao esforço cortante de 85,93 kN, são mostrados na Tabela 5. 27, os resultados das áreas de armadura transversal necessárias e seus devidos espaçamentos máximos.

**Tabela 5. 27** - Dimensionamento ao Cortante de seção retangular

Seção Retangular	$A_s/s$ (cm <sup>2</sup> /m)	$S_{m\acute{a}x}$ (cm)
(35x50) cm	4,06	27,30

Segue na Figura 5. 22 a taxa de armadura transversal relativa ao esforço cortante na peça.

**Figura 5. 22** - Detalhamento da armadura transversal (Seção Retangular)



Fonte: Própria.

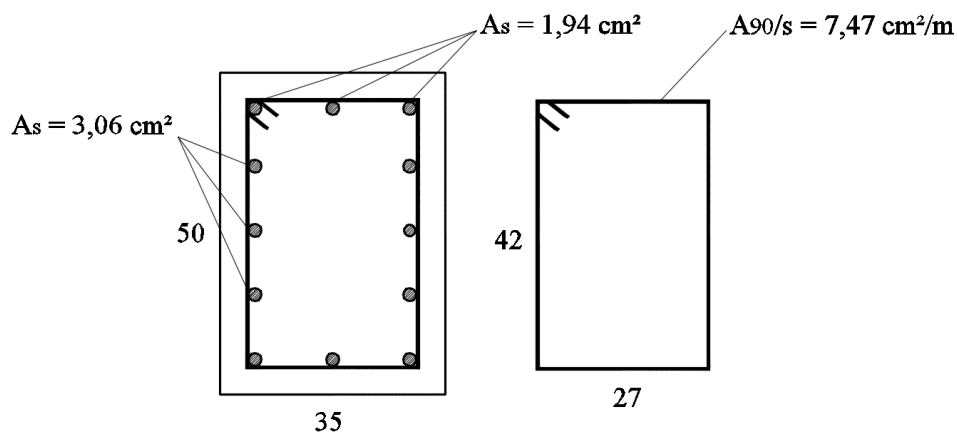
### Dimensionamento ao Momento Torçor

Primeiramente, calculou-se o valor de  $h_e$  da seção retangular da Figura 5. 20, após obtido este valor e baseando-se nas recomendações da norma NBR 6118 (ABNT, 2014) foi encontrado o resultado referente à taxa de armadura transversal e à área de armadura longitudinal total que resiste ao momento torçor  $T_{sd} = 69,26 \text{ kNm}$ . A taxa de armadura longitudinal foi por fim, dividida ao longo do perímetro da seção transversal, separando-se em armaduras horizontais e verticais da seção. Seguem na Tabela 5. 28 os dados do dimensionamento efetuado.

**Tabela 5. 28** - Dimensionamento à Torção de seção retangular

Seção Retangular	Armadura Transversal $A_s/s$ (cm <sup>2</sup> /m)	Espaçamento Máximo $S_{m\acute{a}x}$ (cm)	Armadura Longitudinal Superior/Inferior $A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura Longitudinal Lateral $A_s$ (cm <sup>2</sup> )
(35x50) cm	7,47	30,00	1,94	3,06

Portanto, fica especificado para o esforço torçor as seguintes armaduras constantes na Figura 5. 23.

**Figura 5. 23** - Detalhamento das armaduras de torção (Seção Retangular)

Fonte: Própria.

### Detalhamento final

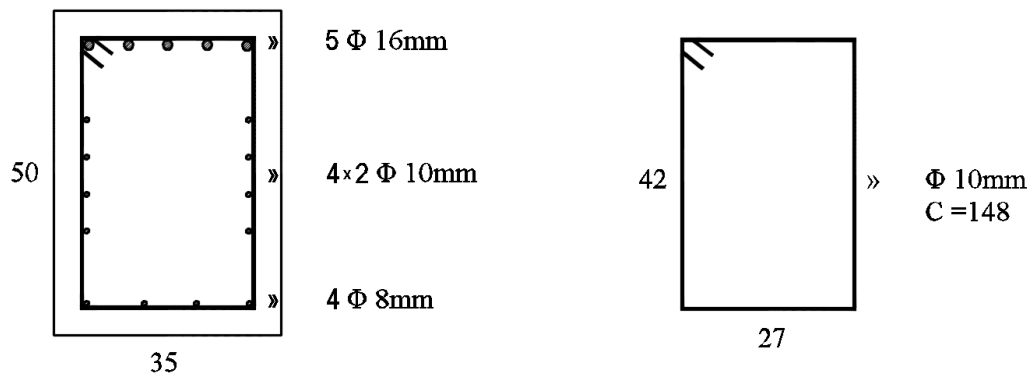
Após o dimensionamento das armaduras ser realizado de forma separada para cada solicitação, como prevê a norma NBR 6118 (ABNT, 2014), as mesmas foram sobrepostas e o resultado final é mostrado na Tabela 5. 29.

**Tabela 5. 29** - Dimensionamento completo da seção retangular

Seção Retangular	Armadura Transversal $A_s/s$ (cm <sup>2</sup> /m)	Espaçamento $S$ (cm)	Armadura Longitudinal Superior $A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura Longitudinal Inferior $A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura Longitudinal Lateral $A_s$ (cm <sup>2</sup> )
(35x50) cm	9,50	8,00	9,07	1,94	3,06

Mostra-se, portanto, na Figura 5. 24, o detalhamento final para a seção retangular:

**Figura 5. 24 - Detalhamento final das armaduras (Seção Retangular)**



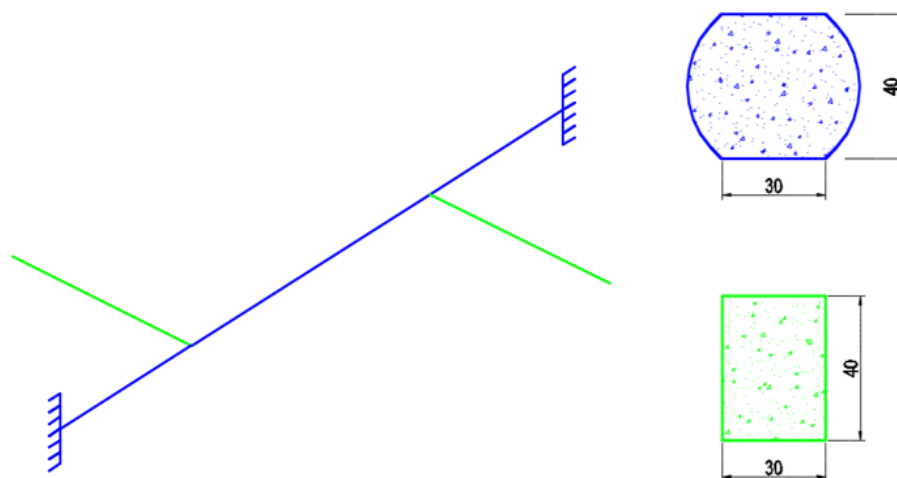
Fonte: Própria.

### 5.5. ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DA ESTRUTURA

Após verificar a total eficiência do programa em relação à análise das estruturas de grelha utilizando-se seções convencionais, foi formulado um exemplo em que fosse possível combinar vigas com seções retangulares associadas a vigas de seções genéricas.

A estrutura de grelha desenvolvida (Figura 5. 25) é composta por uma viga principal bi-engastada, na qual a seção transversal adotada refere-se à seção genérica apresentada neste trabalho como Caso 2 (Figura 5. 6). Para as vigas secundárias, foi aplicada uma seção retangular com base igual a 30 cm e altura 40 cm.

**Figura 5. 25 - Seções transversais da estrutura de grelha (Grelha 6)**

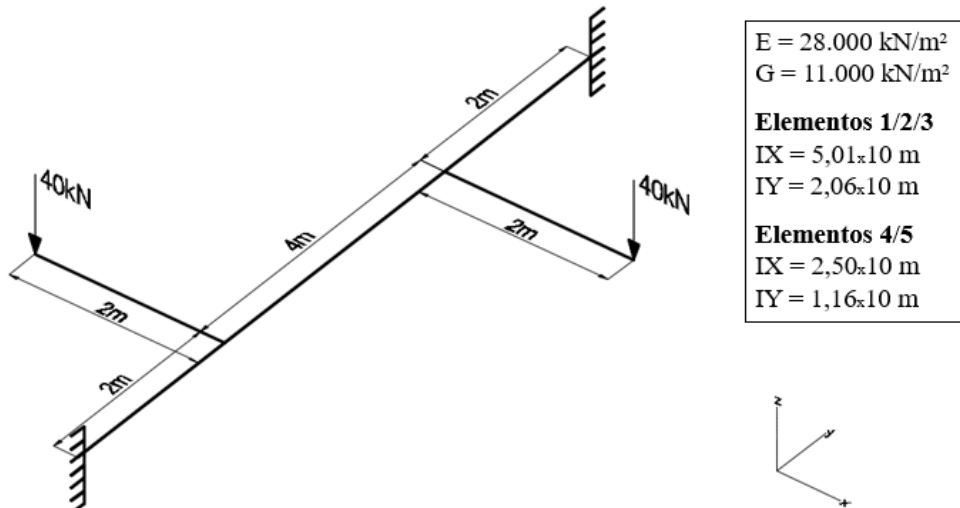


Fonte: Própria.



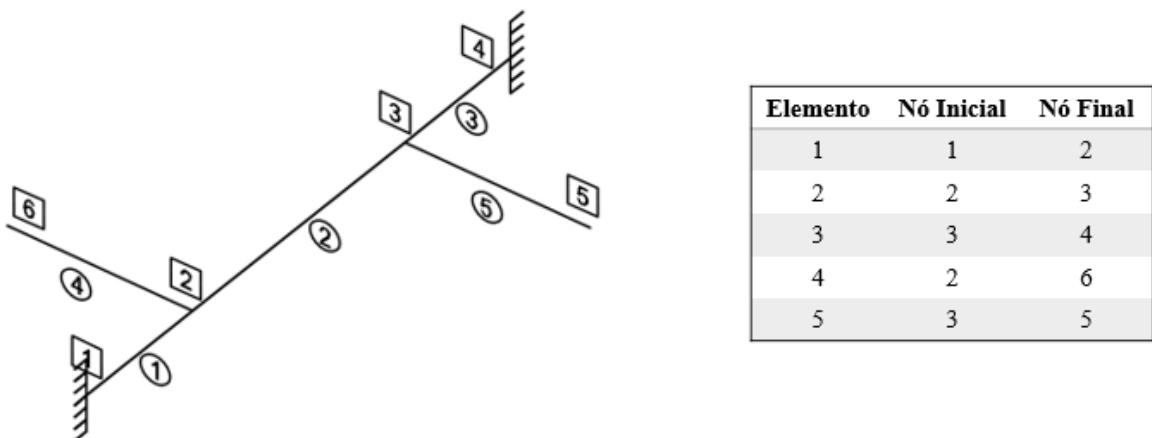
A Figura 5. 26 mostra a disposição desta estrutura com suas dimensões, assim como as propriedades e cargas aplicadas nesta análise. A numeração adotada para os nós, elementos e suas incidências podem ser vistas sequencialmente na Figura 5. 27.

**Figura 5. 26 - Estrutura da Grelha (Grelha 6)**



Fonte: Própria.

**Figura 5. 27 - Numeração da Grelha (Grelha 6)**



Fonte: Própria.

### 5.5.1. Análise elástica linear da estrutura

Após realizar a análise desta estrutura no programa desenvolvido, obteve-se os resultados finais para os esforços atuantes nos nós de cada elemento de barra. Os resultados são apresentados na Tabela 5. 30, Tabela 5. 31, Tabela 5. 32, Tabela 5. 33 e Tabela 5. 34. Os valores que se referem momentos torçores e momentos fletores são expressos em kNm e aos esforços cortantes, kN.

**Tabela 5. 30 - Ações nas extremidades do Elemento 1 (Grelha 6)**

<b>Numeração dos Graus de Liberdade</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Resultado Analítico</b>	<b>Presente Trabalho/ Analítico</b>
1	40,0000	40,0000	1,0000
2	-60,0000	-60,0000	1,0000
3	40,0000	40,0000	1,0000
4	-40,0000	-40,0000	1,0000
5	-20,0000	-20,0000	1,0000
6	-40,0000	-40,0000	1,0000

**Tabela 5. 31 - Ações nas extremidades do Elemento 2 (Grelha 6)**

<b>Numeração dos Graus de Liberdade</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Resultado Analítico</b>	<b>Presente Trabalho/ Analítico</b>
1	-40,0000	-40,0000	1,0000
2	20,0000	20,0000	1,0000
3	0,0000	0,0000	1,0000
4	40,0000	40,0000	1,0000
5	-20,0000	-20,0000	1,0000
6	0,0000	0,0000	1,0000

**Tabela 5. 32 - Ações nas extremidades do Elemento 3 (Grelha 6)**

<b>Numeração dos Graus de Liberdade</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Resultado Analítico</b>	<b>Presente Trabalho/ Analítico</b>
1	40,0000	40,0000	1,0000
2	20,0000	20,0000	1,0000
3	-40,0000	-40,0000	1,0000
4	-40,0000	-40,0000	1,0000
5	60,0000	60,0000	1,0000
6	40,0000	40,0000	1,0000

**Tabela 5. 33** - Ações nas extremidades do Elemento 4 (Grelha 6)

<b>Numeração dos Graus de Liberdade</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Resultado Analítico</b>	<b>Presente Trabalho/ Analítico</b>
1	0,0000	0,0000	1,0000
2	-80,0000	-80,0000	1,0000
3	40,0000	40,0000	1,0000
4	0,0000	0,0000	1,0000
5	0,0000	0,0000	1,0000
6	-40,0000	-40,0000	1,0000

**Tabela 5. 34** - Ações nas extremidades do Elemento 5 (Grelha 6)

<b>Numeração dos Graus de Liberdade</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Resultado Analítico</b>	<b>Presente Trabalho/ Analítico</b>
1	0,0000	0,0000	1,0000
2	-80,0000	-80,0000	1,0000
3	40,0000	40,0000	1,0000
4	0,0000	0,0000	1,0000
5	0,0000	0,0000	1,0000
6	-40,0000	-40,0000	1,0000

### 5.5.2. Dimensionamento da seção genérica

Neste item é apresentada a análise efetuada para a seção transversal genérica, assim como, as formulações utilizadas em seu dimensionamento, todas baseadas nas prescrições contidas na norma NBR 6118 (ABNT, 2014).

Após a análise elástica linear da estrutura de grelha apresentada, verifica-se que os esforços solicitantes de maior valor atuantes sobre a peça principal de seção genérica, são:

$$T_k = 40 \text{ kNm}$$

$$M_k = 60 \text{ kNm}$$

$$V_k = 40 \text{ kN}$$

Dessa forma, aplicando-se um coeficiente de majoração ( $\gamma_f = 1,4$ ) nos mesmos, tem-se para os cálculos de dimensionamento:

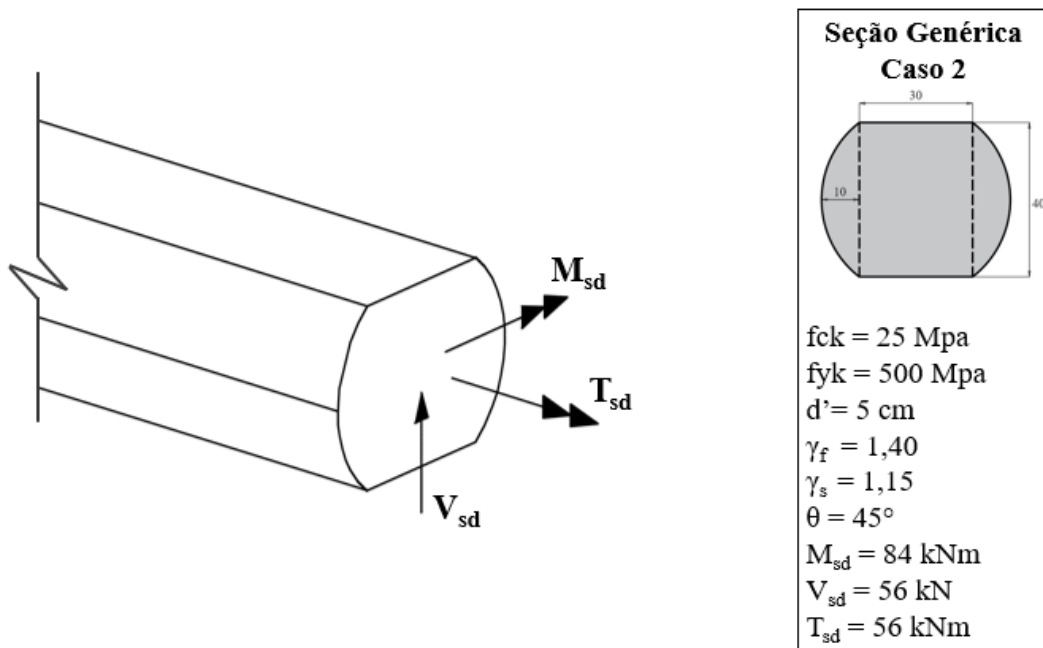
$$T_{sd} = 56 \text{ kNm}$$

$$M_{sd} = 84 \text{ kNm}$$

$$V_{sd} = 56 \text{ kN}$$

Na Figura 5. 28 apresenta-se a seção genérica, juntamente com suas propriedades e os esforços atuantes nesta análise.

**Figura 5. 28 - Geometria e dados da Seção Genérica 2**



Fonte: Própria.

### Dimensionamento ao Momento Fletor

Ressalta-se que para o dimensionamento à flexão de seções genéricas, é necessário primeiramente, o desenvolvimento de uma equação que represente a área de concreto da seção ( $A_c$ ) em função da variação de sua altura ( $x$ ). Assim sendo, a mesma foi obtida através de um polinômio de 3º grau e em seguida, para uma melhor aproximação, foi elaborada a equação da área de concreto via Polinômio de Interpolação de Lagrange sendo a mesma de 11º grau.

A equação de 3º grau encontrada para a área de concreto desta seção foi a Equação 5. 1.

$$A_c = 0,3x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 \quad (5. 1)$$

Por sua vez, por meio do Polinômio de Interpolação de Lagrange, foi obtida a equação de 11º grau, que é definida como:

$$\begin{aligned}
 A_c = & 0,3x + 1,329064412x^2 - 5,878508545x^3 + 31,145074x^4 - 183,825624 x^5 + \\
 & + 885,9885976x^6 - 3214,07284x^7 + 8253,160662x^8 - 14066,65998x^9 + \\
 & + 14222,35382x^{10} - 6464,704546x^{11}
 \end{aligned}
 \tag{5. 2}$$

Daí, substituindo-se o valor de x pela altura total da seção (0,4 m) na Equação 5. 1 e na Equação 5. 2, chegou-se a uma comparação entre os valores encontrados para a área de concreto e o seu valor exato retirado do programa AutoCAD. Na Tabela 5. 35 são mostrados os resultados obtidos.

**Tabela 5. 35** - Variação dos resultados referentes ao grau do polinômio da equação de  $A_c$

<b>Grau do Polinômio da equação de <math>A_c</math></b>	<b>Presente Trabalho <math>A_c</math> (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>Auto CAD <math>A_c</math> (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>Presente Trabalho/ AutoCAD</b>
<b>3°</b>	1733,3334		0,9853
<b>11°</b>	1759,1136	1759,1190	1,0000

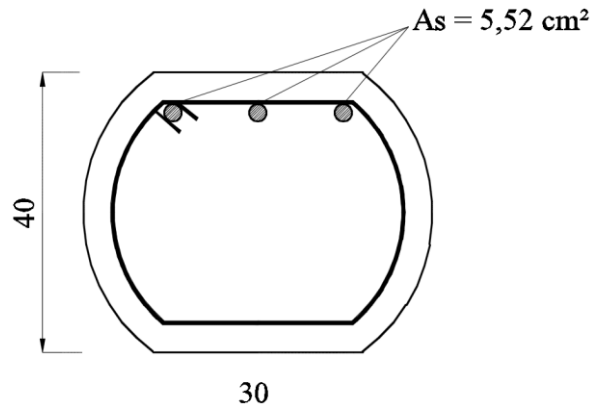
Nota-se que a área de concreto determinada com a função polinomial de 11° grau aproximou-se mais do valor exato da seção. Portanto a Equação 5. 2 foi introduzida à base computacional e utilizada em todos os dimensionamentos realizados para essa seção.

Logo após, foi possível, por meio do processo iterativo, determinar a posição da linha neutra na seção para um  $M_{sd}$  de 84 kNm e assim encontrar a área de aço necessária para suportar tal solicitação. No Apêndice A, encontram-se as formulações utilizadas para o desenvolvimento da função de iteração utilizada. Na Tabela 5. 36 mostram-se os resultados alcançados.

**Tabela 5. 36** - Dimensionamento à Flexão da seção genérica do Caso 2

<b><math>M_{sd}</math> (kNm)</b>	<b>Posição da L.N. (m)</b>	<b>Domínio (<math>\beta_x</math>)</b>	<b><math>A_s</math> (cm<sup>2</sup>)</b>
84	0,0	1	5,52

O detalhamento das armaduras longitudinais referentes ao momento fletor solicitante é apresentado na Figura 5. 29.

**Figura 5. 29** - Detalhamento da armadura de flexão (Seção Genérica 2)

Fonte: Própria.

**Dimensionamento ao Esforço Cortante**

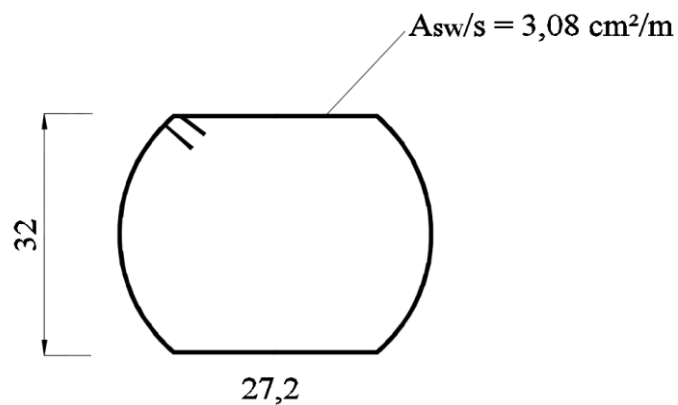
Com o auxílio da equação já desenvolvida para a área de concreto da seção genérica (Equação 5. 2) e atribuindo-se, dessa vez, o valor da altura útil da seção ( $h - d'$ ) ao valor de  $x$  na mesma, pode-se realizar o cálculo para o projeto da estrutura ao esforço cortante solicitado.

Na Tabela 5. 37 apresenta-se os resultados encontrados para um  $V_{sd}$  igual a 56 kN.

**Tabela 5. 37** - Dimensionamento ao Cortante da seção genérica do Caso 2

Seção Genérica	$A_s/s$ ( $\text{cm}^2/\text{m}$ )	$S_{\text{máx}}$ (cm)
Caso 2	3,08	21,00

A armadura transversal é mostrada na Figura 5. 30.

**Figura 5. 30** - Detalhamento da armadura transversal (Seção Genérica 2)

Fonte: Própria.

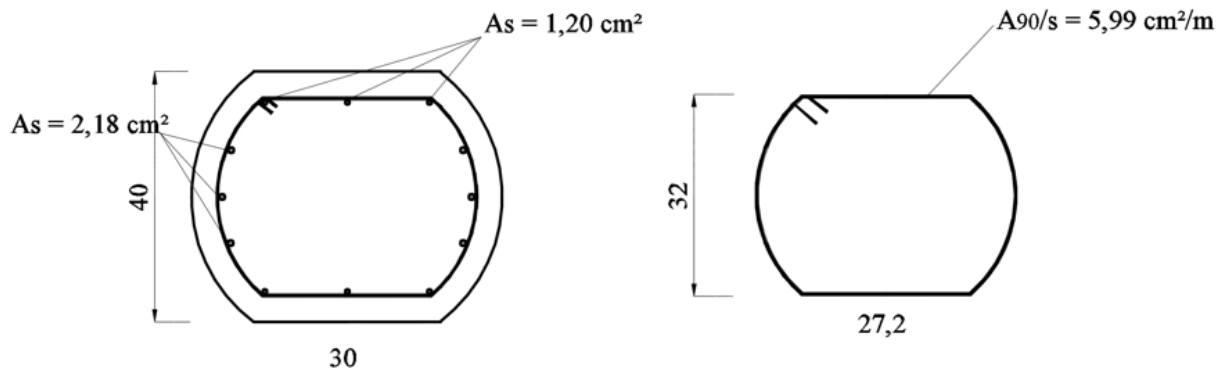
### Dimensionamento ao Momento Torçor

Para o dimensionamento da peça ao momento de torção, via método dos elementos finitos, calcularam-se a área e o perímetro da seção genérica cheia, e em seguida, a espessura equivalente foi retirada do programa desenvolvido e a área equivalente pôde então ser obtida com o auxílio do software AutoCAD. De forma similar à seção retangular, foram calculadas as áreas de armaduras para o esforço torçor solicitante. Assim, os resultados das armaduras totais para um  $T_{sd}$  igual a 56 kNm estão apresentados na Tabela 5. 38 e na Figura 5. 31 encontram-se os detalhamentos dessas armaduras.

**Tabela 5. 38** - Dimensionamento à Torção da seção genérica Caso 2

Seção Genérica	Armadura Transversal $A_s/s$ (cm <sup>2</sup> /m)	Espaçamento Máximo $S_{máx}$ (cm)	Armadura Longitudinal Superior/Inferior $A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura Longitudinal Lateral $A_s$ (cm <sup>2</sup> )
Caso 2	5,99	30	1,20	2,18

**Figura 5. 31** - Detalhamento das armaduras de torção (Seção Genérica 2)



Fonte: Própria.

### Detalhamento Total

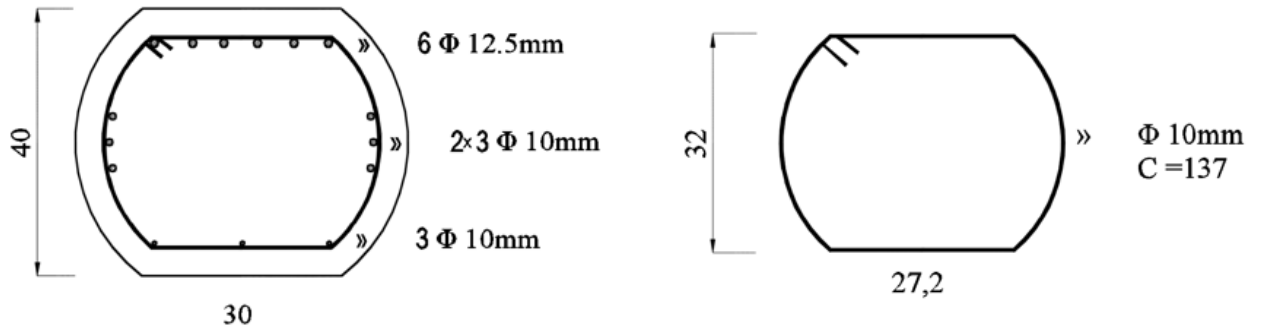
Somando-se os valores encontrados para cada esforço atuante na estrutura encontram-se os resultados finais para o dimensionamento da seção. Os mesmos são mostrados na Tabela 5. 39.

**Tabela 5. 39** - Dimensionamento completo da seção genérica Caso 2

Seção Genérica	Armadura Transversal $A_s/s$ (cm <sup>2</sup> /m)	Espaçamento $S$ (cm)	Armadura Longitudinal Superior $A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura Longitudinal Inferior $A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura Longitudinal Lateral $A_s$ (cm <sup>2</sup> )
Caso 2	7,53	11	6,72	1,20	2,18

Na Figura 5. 32 encontra-se o detalhamento final da seção.

**Figura 5. 32 - Detalhamento final das armaduras (Seção Genérica 2)**



Fonte: Própria.



## CAPÍTULO 6

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho foram desenvolvidas, a partir de diversos procedimentos numéricos, a análise e o dimensionamento de estruturas de concreto armado submetidas à torção. As estruturas estudadas apresentavam seções transversais genéricas e, para a determinação de suas propriedades geométricas, empregaram-se os métodos numéricos tais como, o Método dos Elementos Finitos CST (*Constant Strain Triangle*), Quadratura de Gauss (Método de Gauss-Legendre) e o Polinômio de Interpolação de Lagrange.

Para a análise elástica linear das grelhas, foi implementado o Método da Rigidez Direta (Método dos Deslocamentos), permitindo assim a obtenção dos esforços atuantes nas estruturas.

Para o dimensionamento das seções, o Método da Iteração Linear foi utilizado com o objetivo de determinar a posição da linha neutra de seções regulares ou genéricas. Baseando-se nas prescrições da norma NBR 6118 (ABNT, 2014) desenvolveu-se o projeto completo de seções genéricas de concreto armado sujeitos à flexão, esforço cortante e momento de torção.

Um programa computacional, implementado em linguagem FORTRAN 90, foi desenvolvido para a realização de todas as etapas do trabalho. Ao final de cada análise, os valores alcançados, por meio do código computacional, foram comparados com valores de referência tais como os obtidos através do software AutoCAD, encontrados na literatura e/ou resultados analíticos.

### 6.2. CONCLUSÕES

Inicialmente, estudaram-se oito seções transversais, sendo quatro regulares e quatro genéricas. Neste trabalho foram calculados, via MEF, os momentos de inércia em relação aos eixos baricêntricos e o momento de inércia polar para cada seção. Posteriormente, esses valores foram

comparados com respostas obtidas aplicando-se o software AutoCAD, notando-se uma total compatibilidade entre os dados.

Em seguida, calculou-se o perímetro das seções genéricas via Método de Gauss-Legendre e com a função aproximada através do Polinômio de Interpolação de Lagrange. Nesse caso, verificou-se uma excelente aproximação entre as respostas.

Com relação à análise estrutural, foram analisadas cinco grelhas conhecidas da literatura. Por consequência, pôde-se observar a efetividade do programa computacional desenvolvido, visto que todos os resultados se mostraram compatíveis.

A posição da linha neutra da seção de concreto foi obtida com o auxílio das expressões definidas pela norma NBR 6118 (ABNT, 2014) para uma seção transversal retangular e, em seguida, esse parâmetro foi determinado por meio do Método da Iteração Linear com o fim de validar a eficiência do método numérico utilizado. Nesse caso, a posição da linha neutra foi encontrada após três iterações e seu valor foi igual a 0,06074 m.

Após a validação do programa em todas as etapas de análise e dimensionamento, desenvolveu-se um exemplo completo de uma grelha com viga principal de seção genérica sujeita à torção de equilíbrio. Os valores encontrados para os esforços atuantes nas barras foram confrontados com resultados analíticos, mostrando assim uma exatidão entre suas respostas. Obtidos os esforços solicitantes na viga principal, a mesma foi dimensionada ao momento torçor, momento fletor e esforço cortante aplicando-se o programa computacional, tendo-se mostrado capaz de suportar todas as solicitações aplicadas na estrutura.

Observou-se ainda que, ao se aplicar o momento fletor na estrutura cujo valor foi igual a 84 kNm, foi necessária a armadura simples, visto que suas deformações se encontraram no final do domínio 1 e início do domínio 2. Nesse exemplo, a posição da linha neutra foi igual a 0, sendo necessárias sete iterações. Vale informar que a equação de equilíbrio estático necessária para a obtenção desse parâmetro gerou uma expressão do 12º grau em que foram obtidas dez raízes complexas e duas raízes reais.

### 6.3. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir são sugeridas algumas pesquisas objetivando-se a continuidade deste trabalho:

- Implementar o elemento quadrilateral com nove nós para o cálculo das propriedades geométricas com o objetivo de aumentar a precisão dos resultados;
- Realizar o projeto de peças com a utilização de armaduras ativas (concreto protendido);
- Complementar a etapa referente ao projeto de flexão da viga principal com seção genérica, projetando também a armadura necessária para resistir ao momento fletor de projeto igual a 28 kNm, que é o correspondente à armadura positiva. É importante informar que a armadura final de flexão será composta pela superposição entre a armadura simples referente ao momento fletor negativo, que é igual a 84 kNm e a armadura correspondente ao momento fletor positivo de projeto informada anteriormente;
- Realizar o projeto estrutural à torção segundo as prescrições do Eurocode 2 parte 1-1:2004 e da norma ACI 318/14;
- Projetar estruturas com concretos do Grupo II (Classe II), com  $50\text{MPa} \leq f_{ck} \leq 90\text{MPa}$ ;
- Projetar as estruturas com as demais seções genéricas mostradas neste trabalho.

# Referências

- ACI – American Concrete Institute. **ACI 318-2014**: Building Code Requirements for Structural Concrete. Farmington Hills, 2014. 520 p.
- ARAÚJO, J. M. Dimensionamento a Torção de Vigas de Concreto Armado. Teoria e Prática na Engenharia Civil, Rio Grande, n.21, p.1-11, Maio, 2013.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Revisão NBR 6118 - Projetos de Estruturas de Concreto, 2000.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 - Projetos de Estruturas de Concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- AVANCINI, J. *Formulação do Método dos Elementos Finitos para a Análise Elástica Linear de Grelhas*. 92 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Tecnológica Federal Do Paraná, Campo Mourão, 2015.
- BASTOS, P. S. S. *Torção em viga de concreto armado*. Notas de aula da disciplina 2323 – Estruturas de Concreto II. Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus de Bauru. Bauru/SP. 111 f. 2015.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado: segundo a NBR 6118:2003. 3ª Edição. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2007.
- CAVALCANTI, A. B. F. *Análise da Rigidez à Torção em Vigas de Concreto Armado de Resistência Normal e de Alta Resistência*. 241 f. Dissertação de Mestrado -Universidade Federal Fluminense. Niterói, 2005.
- CHIOVATO V. C. M.; CUNHA J. Simulação Numérica do Comportamento Estático e Pré-Dimensionamento de Estruturas da Construção Civil. In: IX ENCONTRO INTERNO & XIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA. Uberlândia. 2009.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *Model Code 1990*, MC-90, CEB-FIP, Bulletin D'Information n. 204, Lausanne, 1991.

- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1992-1-1**: Eurocode 2: design of concrete structures – parte 1-1: General rules and rules for buildings– structural fire design. Brussels: CEN, 2004.
- FARIA, J. W. S. *Dimensionamento à punção de lajes lisas apoiadas em pilares de seção transversal elíptica e semi-elíptica*. 76 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Ouro Preto. 2018.
- FANG, I. K., E SHIAU, J.K., *Torsional Behavior of Normal and High-Strength Concrete Beams*, ACI Structural Journal, Proceedings V.101, n.3, p.304-313. 2004.
- GERE, A. M., WEAVER JR., W. *Análise de Estruturas Reticuladas*. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois. 1981.
- KEMP E. L.; SOZEN M. A.; SIESS C. P. *Torsion in Reinforced Concrete*. Civil Engineering Studies, Structural Research Series, n. 226, University of Illinois. 1961.
- LIMA, J. S.; GUARDA M. C. C.; PINHEIRO L. M. *Estruturas de Concreto: Torção*. São Carlos. 2007.
- MARQUES, B. M. *Análise Comparativa do Dimensionamento em Concreto Armado de Escadas Através da Utilização do Software Cypecad e do Cálculo Manual de Acordo com a ABNT 6118 (2014)*. 97 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2019.
- MELO, H. S. *Um Estudo Comparativo Entre Métodos Analíticos Clássicos e Numérico (Mef) para o Cálculo de Tabuleiro de Pontes em Grelhas*. 136 f. Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Brasília. 2016.
- SANTOS, R. E. *Armação do Concreto no Brasil: História da Difusão da Tecnologia do Concreto Armado e da Construção de Sua Hegemonia*. 338 f. Tese de Doutorado – Faculdade de Educação da UFMG, Belo Horizonte, 2008.
- SILVA FILHO, J. J. H. *Reforço à Torção de Vigas de Concreto Armado com Compósito de Fibras de Carbono*. 280 f. Dissertação de Mestrado – Pontífca Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

SILVA J. R. B.; HOROWITZ, B. Rigidez a Torção Efetiva em Vigas de Concreto Armado. In: CILAMCE, XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Fortaleza. 2014.

SORIANO, H. L.; LIMA, S.S. *Análise de Estruturas - método das forças e métodos dos deslocamentos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2004.

SÜSSEKIND, J. C. *Curso de Análise Estrutural - Método das deformações. Processo de Cross*. 7.ed. Rio de Janeiro: Editora Globo. 1974.

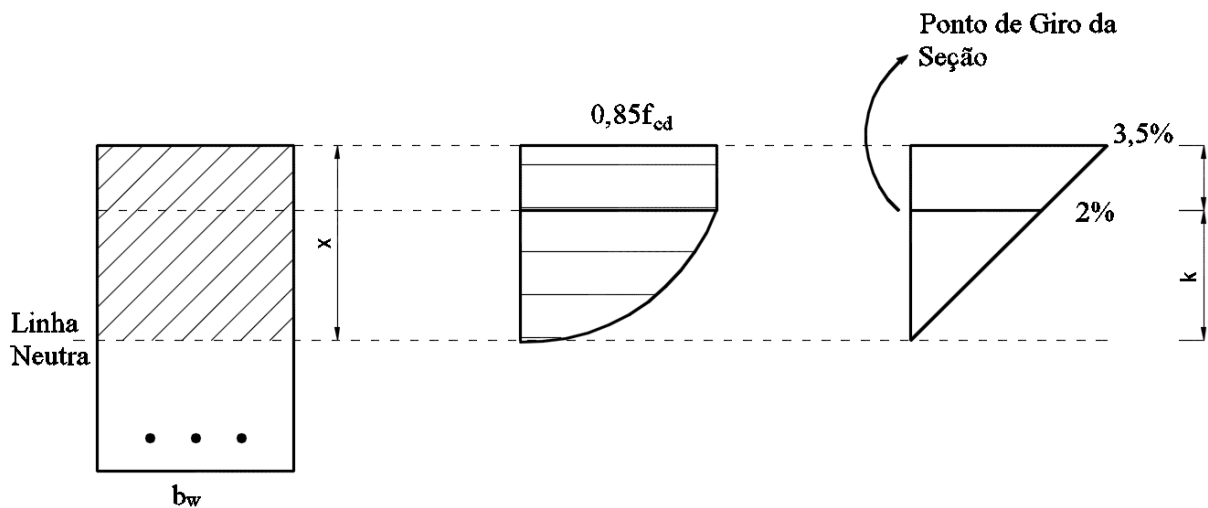
VAZ, L. E. *Cálculo de Placas e Grelhas Delgadas e Espessas pelo Método dos Elementos Finitos*. 108 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1973.

# APÊNDICE A

## FORMULAÇÃO DA FUNÇÃO DE ITERAÇÃO

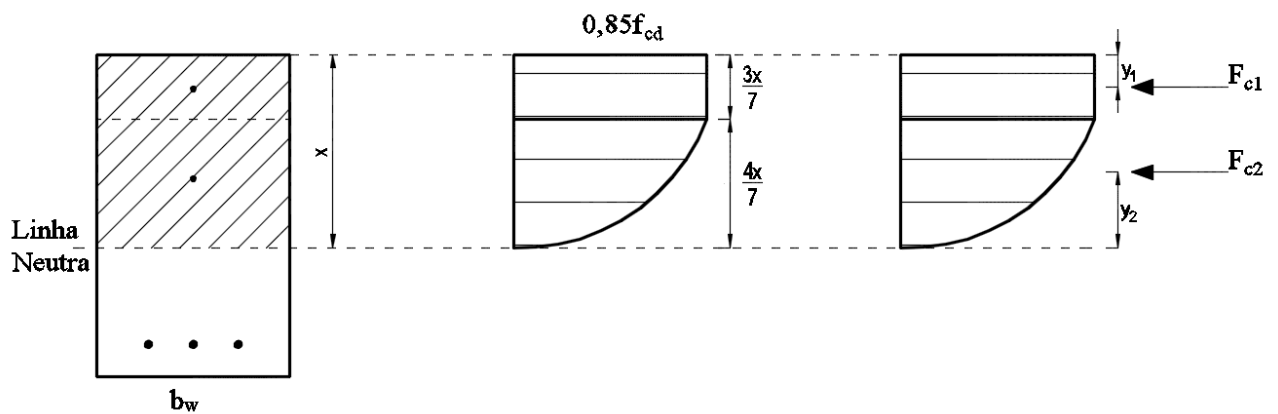
### Resultantes de forças na seção retangular

Tem-se que:



Por semelhança de triângulos, vem:

$$\frac{3,5}{x} = \frac{2}{k} \quad \rightarrow \quad 3,5 k = 2x \quad \rightarrow \quad k = \frac{2x}{(7/2)} = \frac{4x}{7}$$



Então, com as forças  $F_{c1}$  e  $F_{c2}$  aplicadas nos centroides das áreas, tem-se:

$$y_1 = 0,5 \frac{3x}{7} = \frac{3x}{14}$$

$$y_2 = \frac{5}{8} \frac{4x}{7} = \frac{5x}{14}$$

Sendo  $F = \sigma A$ :

$$F_{c1} = \left( 0,85 f_{cd} \frac{3x}{7} b_w \right)$$

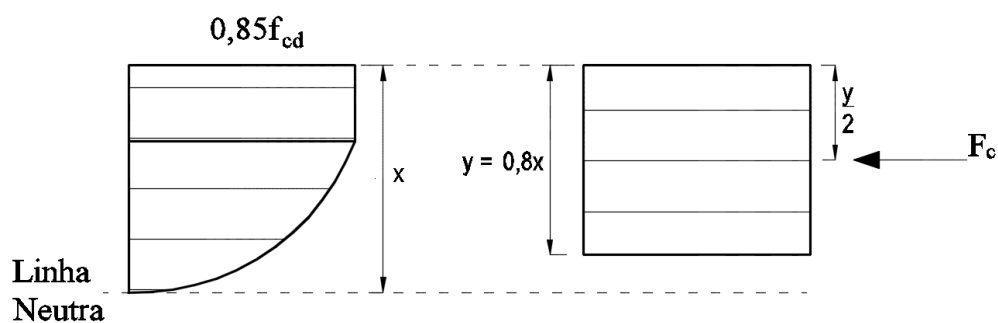
$$F_{c2} = \left( \frac{2}{3} 0,85 f_{cd} \frac{4x}{7} b_w \right)$$

$$F_c = F_{c1} + F_{c2}$$

$$F_c = \left( 0,85 f_{cd} \frac{3x}{7} b_w \right) + \left( \frac{2}{3} 0,85 f_{cd} \frac{4x}{7} b_w \right)$$

$$F_c = 0,85 f_{cd} b_w \left( \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \frac{4}{7} \right) x$$

$$F_c = 0,85 f_{cd} b_w 0,809x \approx 0,85 f_{cd} b_w \underbrace{0,8x}_y \quad \rightarrow y = 0,8x$$



### Cálculo de $\bar{y}$

$$F_c \bar{y} = F_{c1} y_1 + F_{c2} y_2$$

Em relação a borda superior da seção, vem:

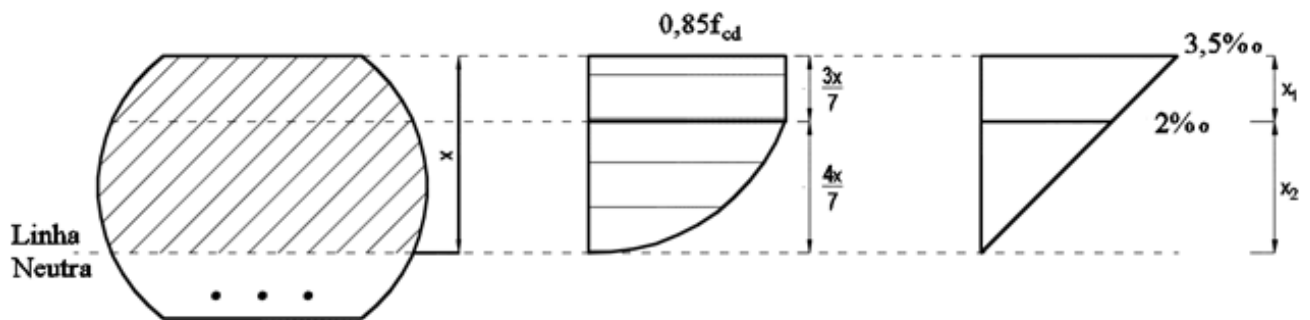


$$(0,85 f_{cd} b_w 0,809x) \bar{y} = \left(0,85 f_{cd} \frac{3x}{7} b_w\right) \left(\frac{3x}{14}\right) + \left(\frac{2}{3} 0,85 f_{cd} \frac{4x}{7} b_w\right) \left(x - \frac{5x}{14}\right)$$

$$\bar{y} = 0,416235714x \approx 0,4x$$

$$\rightarrow \bar{y} = 0,4x$$

### Resultantes de forças na seção genérica



$$F_{c1} = \sigma_{c1} A_c(x_1)$$

$$F_{c2} = \sigma_{c2} A_c(x_2)$$

Com:

$$x_1 = \frac{3x}{7} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{4x}{7}$$

Polinômio de 11º Grau para a área de concreto da seção:

$$\begin{aligned} A_c(x) = & 0,3x + 1,329064412x^2 - 5,878508545x^3 + 31,145074x^4 - 183,8256246x^5 + \\ & + 885,9885976x^6 - 3214,07284x^7 + 8253,160662x^8 - 14066,65998x^9 + \\ & + 14222,35382x^{10} - 6464,704546x^{11} \end{aligned}$$

Substituindo  $x_1 = 3x/7$  na equação anterior:

$$\begin{aligned} A_c(x_1) = & 0,1285714286x + 0,2441138716x^2 - 0,4627397397x^3 + 1,050708452x^4 - \\ & - 2,65779894x^5 + 5,489937761x^6 - 8,535288748x^7 + 9,39306654x^8 - \\ & - 6,861197522x^9 + 2,97305967x^{10} - 0,5791673127x^{11} \end{aligned}$$

$$A_c(x_2) = A_c(x) - A_c(x_1)$$

$$A_c(x_2) = 0,1714285714x + 1,08495054x^2 - 5,415768805x^3 + 30,09436555x^4 - \\ - 181,1678257x^5 + 880,4986598x^6 - 3205,537551x^7 + 8243,767625x^8 - \\ - 14059,79878x^9 + 14219,38076x^{10} - 6464,125379x^{11}$$

$$F_c = \sigma_{c1} A_c(x_1) + \sigma_{c2} A_c(x_2)$$

Similar à seção retangular, tem-se:

$$F_{c1} = 0,85 f_{cd} A_c(x_1) \quad (\text{Trecho com tensões constantes})$$

$$F_{c2} = \frac{2}{3} 0,85 f_{cd} A_c(x_2)$$

Então:

$$F_c = F_{c1} + F_{c2}$$

$$F_c = 0,85 f_{cd} A_c(x_1) + \frac{2}{3} 0,85 f_{cd} A_c(x_2)$$

$$F_c = 0,85 f_{cd} \left[ A_c(x_1) + \frac{2}{3} A_c(x_2) \right]$$

$F_c$  ficará posicionada a  $\bar{x}$  do topo da seção. Então:

$$M_{sd} = 0,85 f_{cd} \left[ A_c(x_1) + \frac{2}{3} A_c(x_2) \right] (d - \bar{x})$$

Portanto,  $\bar{x}$  é a função de iteração.

