

**Universidade Federal de Ouro Preto**

Escola de Minas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PROPEC

---

## **Tese**

---

# **Análise de pisos mistos com conexão deformável sob ação de cargas induzidas por atividades rítmicas considerando a interação homem-estrutura**

**Wanderson Gonçalves Machado**

Ouro Preto  
2019



**UFOP**

Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação Em Engenharia Civil

**Análise de pisos mistos com conexão deformável sob ação de  
cargas induzidas por atividades rítmicas considerando a  
interação homem-estrutura**

**Wanderson Gonçalves Machado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas e Construção.

Orientadores: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves  
Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva

Ouro Preto, março de 2019

M149a Machado, Wanderson.  
Análise de pisos mistos com conexão deformável sob ação de cargas induzidas por atividades rítmicas considerando a interação homem-estrutura [manuscrito] / Wanderson Machado. - 2019.  
182f.: il.: color; graf.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Neves.  
Coorientador: Prof. Dr. Amilton Silva.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.  
Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Análise dinâmica. 2. Pisos mistos. 3. Conexão Deformável. 4. Método dos Elementos Finitos. 5. Interação Homem-Estrutura. I. Neves, Francisco. II. Silva, Amilton. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.


CDU: 624.01

Catálogo: [www.sisbin.ufop.br](http://www.sisbin.ufop.br)

# ANÁLISE DE PISOS MISTOS COM CONEXÃO DEFORMÁVEL SOB AÇÃO DE CARGAS INDUZIDAS POR ATIVIDADES RÍTMICAS CONSIDERANDO A INTERAÇÃO HOMEM-ESTRUTURA

**AUTOR: WANDERSON GONÇALVES MACHADO**

Esta tese foi apresentada em sessão pública e aprovada em 15 de março de 2019, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

  
Prof. Francisco de Assis das Neves, D. Sc. – UFOP (Presidente)

  
Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D. Sc. – UFOP

  
Prof. Alexandre Abrahão Cury, D. Sc. – UFJF

  
Prof. João Batista Marques de Sousa Júnior, D. Sc. – UFC

  
Prof. Wendell Diniz Varela, D. Sc. – UFRJ

*“Dele, por Ele e para Ele são todas  
as coisas. A Ele a glória por toda  
a eternidade! Amém.”  
Rom 11, 36*

*Dedico este trabalho aos meus Pais, Geraldo e Sebastiana, e à minha  
Esposa, Tatiane, que me apoiaram em todos os momentos  
e rezaram sempre por mim, me dando forças para continuar.*

## AGRADECIMENTOS

À Deus e Nossa Senhora, que sendo presenças reais na minha vida, me deram forças para continuar a cada dia, me ajudando a trilhar por completo mais este caminho.

Aos meus pais, Geraldo e Sebastiana, que mesmo de longe e não compreendendo o sentido deste título, rezaram sempre por mim, sendo essenciais para que este momento se concretizasse.

À minha esposa e eterna namorada, Tatiane, pela amizade sincera, apoio constante, compreensão, carinho, e por ser um Anjo de Deus na minha vida, que me ouviu sempre e nos momentos em que pensei em desistir me deu forças para continuar.

À minha família que me apoiou em todos os momentos.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves e Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva, pela atenção, compreensão, apoio e companheirismo.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC), à Escola de Minas e à Universidade Federal de Ouro Preto, pela oportunidade de realizar um Doutorado por uma Universidade Federal.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao IFMG-Campus Santa Luzia pela compreensão e liberação em diversos momentos e pela licença concedida para que eu pudesse me dedicar à finalização deste trabalho.

Aos irmãos do MUR-OP pelos momentos de orações e partilhas, que me ajudaram e me ajudam a sustentar espiritualmente em Ouro Preto.

Aos amigos Lucas, Débora, Thaís, Luan, Jennefer e Renan por serem refúgio poderoso, seja nas muitas orações e/ou conversas, e é claro, nos diversos momentos de descontrações.

Aos meus sogros, Mauro e Anete, pelas orações e por sempre se preocuparem comigo.

Aos demais amigos, que de forma direta ou indireta foram importantes para que eu pudesse chegar até aqui, obrigado pela amizade sincera.

A todos o meu muito obrigado. Que Deus e Nossa Senhora abençoem a todos!!!

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	VII
LISTA DE TABELAS .....	X
RESUMO .....	XII
ABSTRACT .....	XIII

### Capítulo 1

<b>Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1. Considerações Iniciais .....	2
1.2. Motivações e Objetivos .....	6
1.3. Escopo do Trabalho .....	10

### Capítulo 2

<b>Revisão Bibliográfica.....</b>	<b>11</b>
2.1. Pisos Mistos .....	12
2.2. Conexão Deformável .....	15
2.2.1. Tipos de conectores .....	15
2.2.2. Classificação dos conectores .....	17
2.3. Vibrações em Pisos Mistos .....	19
2.4. Análise Dinâmica.....	25
2.4.1. Método de Integração Direta - Wilson Theta .....	28
2.5. Interação Homem – Estrutura (IHE).....	30
2.6. Análise Dinâmica sem considerar IHE.....	34
2.7. Análise Dinâmica considerando IHE.....	38

### Capítulo 3

<b>Implementação dos Elementos de Placa, Barra e Interface.....</b>	<b>55</b>
3.1. Considerações Iniciais .....	56
3.2. Elemento Plano de Placa ( <i>PLATE9</i> ) .....	58
3.2.1. Matriz de rigidez.....	58
3.2.2. Matriz de massa .....	68
3.3. Elemento de Viga ( <i>BEAMRMT</i> ) .....	70
3.3.1. Matriz rigidez .....	70
3.3.2. Matriz de massa .....	81
3.4. Elemento de Barra 3D ( <i>BEAM3DT</i> ) .....	84
3.4.1. Matriz de rigidez.....	84
3.4.2. Matriz de massa .....	89
3.5. Elemento de Interface ( <i>INTBEAMPLATE</i> ).....	91
3.5.1. Matriz de rigidez.....	91

### Capítulo 4

<b>Carregamentos Dinâmicos.....</b>	<b>97</b>
4.1. Considerações Iniciais .....	98
4.2. Modelos de Força dura .....	100
4.2.1. Modelo de carregamento I.....	100
4.2.2. Modelo de carregamento II .....	100

4.2.3.	Modelo de carregamento III .....	101
4.2.4.	Modelo de carregamento IV .....	103
4.2.5.	Modelo de carregamento V .....	104
4.3.	Modelo Biodinâmico .....	106
4.3.1.	Modelo de carregamento VI.....	106

## Capítulo 5

<b>Resultados e Discussões.....</b>	<b>109</b>	
5.1.	Exemplo 1: Piso Misto com colunas.....	110
5.2.	Exemplo 2: Passarela .....	120
5.3.	Exemplo 3: Viga Mista .....	127
5.4.	Exemplo 4: Viga Mista – Efeito “ <i>Shear lag</i> ” .....	131
5.5.	Exemplo 5: IHE – 1 pedestre .....	134
5.6.	Exemplo 6: IHE - Efeito de Multidão.....	139
5.7.	Exemplo 7: Piso Misto com IHE .....	144
5.8.	Exemplo 8: Piso Misto de 3 pavimentos com IHE.....	148
5.8.1.	Resultados obtidos para Conexão Não deformável ( $E_{sb} = E_{vb} = 10^9\text{kPa}$ ). .....	148
5.8.2.	Resultados obtidos para Conexão Deformável ( $E_{sb} = E_{vb} = 2 \times 10^5\text{kPa}$ ). .....	151
5.8.3.	Resultados obtidos para Conexão Livre ( $E_{sb} = E_{vb} = 0\text{kPa}$ ). .....	153

## Capítulo 6

<b>Considerações Finais.....</b>	<b>156</b>	
6.1.	Conclusões .....	157
6.2.	Sugestões para Trabalhos Futuros .....	159
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>160</b>	



## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 1

Figura 1. 1. A Passarela do Milênio vista a partir de um restaurante na Tate Modern .....	3
Figura 1. 2. Passarela na Carolina do Norte/EUA logo após o desabamento.....	3

### CAPÍTULO 2

Figura 2. 1. Piso misto formado por laje mista associada à viga de aço .....	13
Figura 2. 2. Tipos de conectores.....	16
Figura 2. 3. Tipos de conectores e comportamento.....	16
Figura 2. 4. Classificação dos conectores e suas curvas características .....	17
Figura 2. 5. Curva força x deslizamento.....	18
Figura 2. 6. Sistema mecânico simplificado representando o corpo humano .....	19
Figura 2. 7. Acelerações pico médias em várias frequências .....	20
Figura 2. 8 Fluxograma ilustrativo da avaliação de pisos .....	22
Figura 2. 9. Limites de tolerância recomendados para conforto humano.....	23
Figura 2. 10. Variação do <i>FAD</i> em função da variação de $\beta_f$ .....	27
Figura 2. 11. Modelo de representação do corpo humano por forças (“força dura”).....	32
Figura 2. 12. Modelo de um pedestre com um grau de liberdade sobre a estrutura (S1GL)....	33
Figura 2. 13. Modelo do corpo humano S2GL.....	33
Figura 2. 14. Modelo do corpo humano S3GL.....	33
Figura 2. 15. Diagrama de forças de reação da superfície.....	42
Figura 2. 16. Passarela mista de aço-concreto com conexão não-deformável .....	42
Figura 2. 17. Teste experimental com relação de massa de 0,431 para 19 pessoas com joelhos semi-flexionados.....	43
Figura 2. 18. Vista da passarela investigada.....	44
Figura 2. 19. Modelo em elemento finito de uma passarela mista de aço-concreto.....	44
Figura 2. 20. Modelo com interação dinâmica pedestre-passarela.....	44
Figura 2. 21. Variação das acelerações de pico em função do número de pedestres .....	45
Figura 2. 22. Aceleração vertical, no domínio do tempo, produzido por 70 pedestres caminhando na laje de concreto com a frequência de passo ( $f_p=1,80\text{Hz}$ ), perto da frequência fundamental da passarela ( $f_{01}=1,82\text{Hz}$ ) .....	46
Figura 2. 23. Piso misto de aço-concreto com 3 pavimentos .....	48
Figura 2. 24. Modelo em elementos finitos .....	48
Figura 2. 25. Fotos e esquemas de passarelas.....	49
Figura 2. 26. Modelo massa-mola-amortecedor de um sistema estacionário de estrutura de tráfego.....	50
Figura 2. 27. Passarela em viga de aço.....	51
Figura 2. 28. Passarela Warwick .....	51
Figura 2. 29. Esquema do caminho de ensaios de caminhar (Passarela Warwick).....	52

### CAPÍTULO 3

Figura 3. 1. Piso misto em perspectiva com os eixos globais .....	57
Figura 3. 2. Graus de liberdade dos Elementos de Placa, Viga e Interface.....	57
Figura 3. 3. Graus de liberdade do elemento de placa e tensões em um elemento infinitesimal .....	58
Figura 3. 4. Elemento finito retangular de nove nós .....	62
Figura 3. 5. Graus de liberdade do elemento de viga e tensões em um elemento infinitesimal .....	70
Figura 3. 6. Relação entre eixos locais com o eixo da seção transversal do retângulo .....	71

Figura 3. 7. Graus de liberdade do elemento de Barra 3D e tensões em um elemento infinitesimal.....	84
Figura 3. 8. Graus de Liberdade do elemento de interface.....	91
Figura 3. 9. Deslizamento longitudinal .....	92
Figura 3. 10. Deslizamento transversal .....	93
Figura 3. 11. Separação vertical .....	93

#### CAPÍTULO 4

Figura 4. 1. Medidas de distância e tempo de um ciclo de caminhar.....	99
Figura 4. 2. Representação da carga durante a caminhada.....	101
Figura 4. 3. Variação espacial do carregamento humano no tempo.....	102
Figura 4. 4. Característica da função adotada.....	105
Figura 4. 5. Coeficiente de defasagem para as atividades propostas.....	105
Figura 4. 6. Sistema MMA .....	106
Figura 4. 7. Esquema do sistema acoplado.....	106

#### CAPÍTULO 5

Figura 5. 1. Modelo estrutural do piso com as colunas. ....	110
Figura 5. 2. Seção Transversal do piso em estudo .....	111
Figura 5. 3. Piso discretizado em elementos finitos .....	112
Figura 5. 4. Modos de vibração natural para o piso misto (conexão não deformável).....	113
Figura 5. 5. Malha de elementos finitos .....	114
Figura 5. 6. Modos de vibração natural para o piso misto (interação livre).....	116
Figura 5. 7. Aceleração de pico para o Modelo de carregamento I e $E_{sb} = E_{vb} = 10^9 \text{kPa}$ .....	119
Figura 5. 8. Passarela com vão de 12m .....	120
Figura 5. 9. Passarela mista discretizada em elementos finitos de placa e barra.....	121
Figura 5. 10. Modos de vibração natural (conexão não deformável) .....	122
Figura 5. 11. Modos de vibração natural para (Interação livre) .....	123
Figura 5. 12. Deslocamento vertical no centro da passarela .....	124
Figura 5. 13. Aceleração na direção vertical no centro da passarela.....	124
Figura 5. 14. Viga mista .....	127
Figura 5. 15. Viga mista discretizada em elementos finitos.....	127
Figura 5. 16. Modos de vibração natural .....	128
Figura 5. 17. Modo de vibração referente à torção da viga, considerando a conexão não deformável ( $f_n=9,75\text{Hz}$ ).....	129
Figura 5. 18. Comparação do histórico do deslocamento considerando um carregamento móvel concentrado percorrendo a viga.....	130
Figura 5. 19. Variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto (L = 4m) .	132
Figura 5. 20. Variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto (L = 15m)	133
Figura 5. 21. Históricos de acelerações para Piso Rígido – Diferença entre os resultados experimentais (Gomez <i>et al.</i> , 2018) e numérico (presente trabalho).....	135
Figura 5. 22. Históricos de acelerações para Piso Rígido – Diferença entre os resultados numérico e analítico (presente trabalho) .....	136
Figura 5. 23. Históricos de acelerações para Passarela de Aço Flexível – Diferença entre os resultados experimentais (Gomez <i>et al.</i> , 2018) e numérica (presente trabalho).....	137
Figura 5. 24. Históricos de acelerações para Passarela de Aço Flexível – Diferença entre o posicionamento dos pedestres de forma discreta e contínua .....	138
Figura 5. 25. Histórico de aceleração de pico de uma multidão composta por 100 pessoas aplicadas de forma randômica na passarela (distribuição aleatória) – Posicionamento dos pedestres de forma discreta.....	140

Figura 5. 26. Acelerações de pico de 100 multidões compostas por 100 pessoas cada, aplicadas de forma randômica na passarela (distribuição aleatória) – Posicionamento dos pedestres de forma discreta .....	141
Figura 5. 27. Histórico de aceleração de 1 multidão composta por 100 pessoas aplicadas de forma pré-determinada na passarela (distribuição determinística) – Posicionamento dos pedestres de forma discreta.....	142
Figura 5. 28. Acelerações de pico de 100 multidões compostas por 100 pessoas cada, aplicadas de forma randômica na passarela (distribuição aleatória) – Posicionamento dos pedestres de forma contínua .....	143
Figura 5. 29. Carregamento no nó central de cada elemento de placa .....	145
Figura 5. 30. Discretização do piso em elementos de placa, barra e interface .....	148
Figura 5. 31. Modos de vibração (Conexão Não deformável) .....	149
Figura 5. 32. Trinta e duas pessoas praticando atividades aeróbicas no 2° andar do piso misto. Dimensão em metros .....	150
Figura 5. 33. Nós analisados na resposta dinâmica .....	150
Figura 5. 34. Histórico de acelerações no ponto G (Conexão Não deformável).....	151
Figura 5. 35. Modos de vibração (Conexão Deformável) .....	152
Figura 5. 36. Histórico de acelerações no ponto G (Conexão Deformável).....	153
Figura 5. 37. Modos de vibração (Conexão Livre).....	153
Figura 5. 38. Histórico de acelerações no ponto G (Conexão Livre) .....	154

## LISTA DE TABELAS

### CAPÍTULO 2

Tabela 2. 1. Limites de percepção humana às vibrações verticais (pessoa em pé) .....	21
Tabela 2. 2. Avaliação dos valores das acelerações de pico com base no guia de projeto SETRA (2006).....	45
Tabela 2. 3. Comparação entre os valores de picos de aceleração obtidos pelos guias de projeto e o estudo de Silva <i>et al.</i> (2016) .....	46
Tabela 2. 4. Frequências naturais da passarela considerando interação dinâmica pedestre-passarela.....	47
Tabela 2. 5. Estudo de modelos encontrados na literatura para passarelas considerando carregamento simples ou de multidão .....	54

### CAPÍTULO 4

Tabela 4. 1. Faixas de frequência das atividades.....	100
Tabela 4. 2. Características do passo humano .....	102
Tabela 4. 3. Parâmetros utilizados.....	105
Tabela 4. 4. Parâmetros biodinâmicos para piso rígido.....	107

### CAPÍTULO 5

Tabela 5. 1. Características geométricas do piso em estudo .....	111
Tabela 5. 2. Comparação entre resultados obtidos para frequências naturais associadas aos modos de vibração.....	113
Tabela 5. 3. Variações das frequências naturais referente aos modos de vibração com a variação da rigidez da conexão.....	116
Tabela 5. 4. Acelerações de pico em um ponto no meio do piso para diferentes carregamentos (conexão não deformável).....	117
Tabela 5. 5. Acelerações de pico em um ponto no meio do piso para diferentes carregamentos (rigidez da conexão variável) .....	118
Tabela 5. 6. Frequências referente aos primeiros modos naturais de vibração (conexão não deformável).....	122
Tabela 5. 7. Frequências naturais referente aos modos de vibração (rigidez da conexão variável).....	123
Tabela 5. 8. Valores dos deslocamentos máximos e das acelerações de pico em um ponto no meio da passarela (conexão não deformável).....	125
Tabela 5. 9. Valores das acelerações de pico e as frequências de passo em um ponto no meio do piso (rigidez da conexão variável).....	125
Tabela 5. 10. Valores das frequências e os modos naturais de vibração de uma viga mista aço-concreto para uma rigidez da conexão de 100 MPa .....	128
Tabela 5. 11. Valores das frequências e os modos naturais de vibração referente à flexão de uma viga mista aço-concreto considerando diferentes graus de interação na conexão deformável.....	129
Tabela 5. 12. Valores das frequências e os modos naturais de vibração de uma viga mista aço-concreto considerando diferentes graus de interação na conexão deformável e diferentes vãos (4m e 15m) .....	131
Tabela 5. 13. Diferença das frequências naturais para a viga de vibração de uma viga mista aço-concreto considerando diferentes graus de interação na conexão deformável.....	132
Tabela 5. 14. Frequências naturais referentes aos Modos de vibração natural associados aos deslocamentos verticais.....	137

Tabela 5. 15. Frequências naturais para três níveis de rigidez da conexão .....	144
Tabela 5. 16. Acelerações de pico e médias no centro do piso para diferentes carregamentos .....	146
Tabela 5. 17. Frequências para os primeiros modos de vibração natural do piso (Conexão Não deformável) .....	149
Tabela 5. 18. Acelerações de pico nos centros das lajes (Conexão Não deformável)...	151
Tabela 5. 19. Frequências para os primeiros modos de vibração natural do piso (Conexão Deformável).....	151
Tabela 5. 20. Acelerações de pico nos centros das lajes (Conexão Deformável) .....	152
Tabela 5. 21. Frequências para os primeiros modos de vibração natural do piso (Conexão Livre) .....	153
Tabela 5. 22. Acelerações de pico nos centros das lajes (Conexão Livre).....	154

**Título:** Análise de pisos mistos com conexão deformável sob ação de cargas induzidas por atividades rítmicas considerando a Interação Homem-Estrutura

## RESUMO

Novas tendências arquitetônicas aliadas a necessidade de vencer grandes vãos, e sobretudo, com um menor peso estrutural, tem resultado em sistemas estruturais cada vez mais arrojados. Esse arrojo tem provocado, muitas vezes, sérios problemas quanto aos Estados Limites de Utilização da estrutura, principalmente os relacionados à vibração, o que na maioria das vezes não causa risco de ruína da estrutura, mas sérios problemas quanto ao conforto dos usuários. Os elementos estruturais mistos de aço e concreto mais utilizados são as vigas, pilares e pisos, sendo este último objeto de estudo deste trabalho. Os pisos mistos têm sido muito utilizados devido a sua capacidade de vencer grandes vãos. O objetivo do presente trabalho é validar os elementos de barra, placa e interface implementados para a análise dinâmica de pisos mistos considerando uma possível conexão deformável, bem como a Interação Homem-Estrutura (IHE), ou seja, que o usuário, simulado por um sistema Massa-Mola-Amortecedor (MMA). Encontra-se na literatura diversos trabalhos sobre a análise dinâmica de pisos mistos considerando a conexão não-deformável, porém quando se considera a conexão deformável juntamente com à IHE, nenhum trabalho foi encontrado. A validação dos elementos finitos implementados é realizada por meio da avaliação das frequências naturais e modos de vibração, bem como dos deslocamentos e acelerações (de pico e/ou médias), sendo os resultados obtidos comparados com resultados encontrados por outros autores, sempre procurando verificar a influência da rigidez da conexão e/ou da IHE no comportamento estrutural. Para a avaliação do comportamento desses elementos, é utilizado o Método dos Elementos Finitos, sendo o piso discretizado por elementos finitos de barra, placas e interface. Já o usuário/pedestre é discretizado de duas maneiras: primeiro, considerado como uma “força dura”, ou seja, não interage com a superfície da estrutura; segundo, considerado como um sistema massa-mola-amortecedor, capaz de simular a IHE, sendo ainda possível simular o efeito de multidão por meio da utilização de vários sistemas MMA na estrutura. Os resultados obtidos se mostraram satisfatórios para estruturas mistas com conexão deformável e não deformável e também para estruturas formadas por um único material, tanto considerando o pedestre como “força dura”, quanto considerando-o como um sistema MMA, seja para um único pedestre ou considerando o efeito de multidão.

**PALAVRAS-CHAVE:** Análise dinâmica. Pisos mistos. Conexão Deformável. Método dos Elementos Finitos. Interação Homem-Estrutura.

**Title:** Analysis of composite slabs with deformable connection under the action of loads induced by rhythmic activities considering the Human-Structure Interaction

### **ABSTRACT**

New architectural tendencies combined with the need to overcome large spans, and above all, with a smaller structural weight, has resulted in increasingly bold structural systems. Such boldness has often caused serious problems with the Serviceability Limit States of the structure, especially those related to the vibration, which in most cases do not cause danger of collapse of the structure, but serious problems as to the comfort of the users. The most commonly structural composite elements of steel and concrete are beams, columns and slabs, the latter object of study of this work. Composite slabs have been largely used because of their capacity to overcome large spans. The objective of the present work is to validate the bar, plate and interface elements implemented for the dynamic analysis of composite floors considering a possible deformable connection, as well as the Human-Structure Interaction (HSI) i.e. that the user, simulated by a Mass-Spring-Damper (MSD) system. Several studies on the dynamic analysis of composite floors are considered in the literature considering the non-deformable connection, but when the deformable connection is considered together with the IHE, no research has been found. The validation of the finite elements implemented is carried out by means of the evaluation of the natural frequencies and modes of vibration, as well as the displacements and accelerations (peak and / or medium), being the results obtained compared with results found by other authors, always seeking to verify the influence of the stiffness of the connection and / or HSI on the structural behavior. For the evaluation of the behavior of these elements, the Finite Element Method is used, being the floor is discretized by bars, plates and interface finite elements. The user / pedestrian is discretized in two ways: first, considered as a "hard force", that is, it does not interact with the surface of the structure; second, considered as a mass-spring-damping system, capable of simulating the HSI, and it is still possible to simulate the crowd effect through the use of several MSD systems in the structure. The results obtained were satisfactory for mixed structures with deformable and non-deformable connection and also for structures formed by a single material, both considering the pedestrian as "hard force", considering it as an MSD system, either for a single pedestrian or considering the crowd effect.

**KEY WORDS:** Dynamic analysis. Composite floors. Deformable Connection. Finite Element Method. Human-Structure Interaction.

# **Capítulo 1**

---

## **Introdução**



## 1.1. Considerações Iniciais

As exigências do mercado e as novas tendências arquitetônicas, que buscam proporcionar maior flexibilidade de adequação dos ambientes, têm feito com que os projetistas estruturais utilizassem com o passar do tempo concepções cada vez mais arrojadas para os sistemas estruturais. Tais concepções, como por exemplo, o menor peso das peças estruturais, e a menor quantidade de elementos estruturais verticais, têm gerado estruturas mais leves com vãos livres cada vez maiores, visando obter um preço final menor para as construções tanto em relação ao custo dos materiais quanto em relação ao custo de execução.

O menor peso das peças estruturais é resultado do progresso da engenharia estrutural, realizado por meio do desenvolvimento de métodos numéricos cada vez mais sofisticados, associados à popularização dos microcomputadores cada vez mais eficientes, e ainda devido ao desenvolvimento de materiais cada vez mais resistentes, gerando elementos estruturais mais esbeltos.

A busca por vencer grandes vãos, aliada à diminuição do peso próprio dos elementos estruturais, faz com que surjam consideráveis problemas de vibração em pisos, exigindo maior atenção de projetistas na avaliação dos estados limites de serviço, principalmente os relacionados à deformação excessiva e vibrações (Mello *et al.*, 2007), sendo as vibrações o foco deste trabalho.

Os problemas de vibrações em pisos não é um fato recente, pelo contrário, há muito tempo se convive com estruturas que, apesar de não possuírem nenhum risco de ruptura, provocam incômodo, quanto utilizadas, visto que suas vibrações são perceptíveis aos usuários. As vibrações em uma estrutura ocorrem quando este possui uma rigidez inadequada, um baixo amortecimento, e/ou pouca massa.

As preocupações com vibrações em pontes e passarelas por exemplo, tornaram-se mais evidentes com os episódios sofridos pela Passarela de Solferino em Paris em 1999 (SETRA, 2006) e pela passarela que cruza o Rio Tamisa, a Passarela do Milênio (Figura 1. 1) em Londres em 2000 (Dallard *et al.*, 2001), tendo essas passarelas sofrido vibrações inesperadas de grande amplitude induzidas por pedestres durante as suas inaugurações. A principal delas, a Passarela do Milênio, que foi inaugurada pela rainha da Inglaterra no dia 09 de maio de 2000, e aberta ao público em 10 de junho de 2000, mas, por instabilidades e vibrações, foi interditada três dias depois, tendo sido apelidada pelos ingleses de “*wobbly bridge*” (“*passarela trêmula*”). Resolvidos os problemas estruturais, a Passarela do Milênio foi aberta ao público novamente

apenas em 22 de fevereiro de 2002 e atualmente é cruzada por milhares de pessoas todos os dias.

**Figura 1. 1.** A Passarela do Milênio vista a partir de um restaurante na Tate Modern



Fonte: Debona (2016)

Outro fato, foi o que aconteceu durante a saída de uma multidão em um evento esportivo, também em 2000, em uma Passarela na Carolina do Norte/EUA (Figura 1. 2), deixando mais de 100 pessoas feridas (BBC NEWS, 2000 *apud* Debona, 2016).

**Figura 1. 2.** Passarela na Carolina do Norte/EUA logo após o desabamento



Fonte: BBC NEWS (2000)

Tais fatos, aliados a sistemas estruturais mais esbeltos e vãos cada vez maiores, fizeram com que fossem geradas diversas análises à respeito de vibrações em estruturas induzidas por carregamento humano (Živanović *et al.*, 2005; Racic *et al.*, 2009; Bruno e Venuti, 2009; Macdonald, 2009 e Ingolfsson *et al.*, 2012), tendo sido desenvolvidos vários modelos analíticos para passarelas, com o intuito de prever respostas em ambas as direções (lateral e vertical).

Outro ponto muito importante é que ocupantes humanos presentes em estruturas da Engenharia Civil, não apenas perturbam a estrutura, como também podem mudar as propriedades da estrutura que eles ocupam, logo as propriedades modais do sistema dinâmico Homem-Estrutura devem ser consideradas nos cálculos de projeto, com o intuito de evitar as vibrações excessivas (Pavic e Reynolds, 2003). Os ocupantes da estrutura são modelados como uma massa adicional à estrutura, geralmente significando um adicional de amortecimento para a estrutura, dando-se origem, como é conhecido na literatura, à Interação Homem-Estrutura (IHE).

Como já mencionado, tão importante quanto a verificação dos estados limites últimos da estrutura é a verificação dos estados limites de serviço. A análise de vibrações de pisos tem objetivo de avaliar, principalmente, a percepção humana às vibrações causadas por determinadas atividades rítmicas, como caminhar, pular, dançar, entre outras, visando minimizar a percepção do usuário no que tange à utilização de determinada edificação.

Os níveis de aceitabilidade de vibrações de um usuário em uma edificação devem ser estabelecidos em um estágio conceitual de projeto, levando em consideração qual será a utilização real do piso, visto que após construído, uma modificação significativa na massa, rigidez e amortecimento do sistema, visando proporcionar uma redução da percepção de vibração dos usuários, é mais complicada de ser realizada.

Segundo Laman (1999), *“quando a resposta de um piso sujeita a uma atividade normal causada por ocupantes se torna desconfortável ou perturbadora, o sucesso da utilização do edifício é seriamente prejudicado”*. Portanto, para obter sucesso em um projeto estrutural é extremamente importante a consideração correta da finalidade do ambiente construído, tanto para definição da combinação do carregamento de cálculo para verificação dos estados limites últimos, quanto para a verificação dos estados limites de serviço relacionados com o conforto dos usuários por exemplo. É importante ainda realizar análises que retratem melhor o comportamento do sistema estrutural e do usuário, obtidas quando considerada a IHE, ou seja, o usuário é modelado como um sistema Massa-Mola-Amortecedor (MMA) ao invés de considerar o usuário do sistema apenas como uma “força dura” (como é conhecida na literatura), onde não se considera a interação entre homem e a estrutura.

Os elementos estruturais mistos de aço-concreto, devido a abordagens mais abrangentes em normas (NBR 8800, 2015 no Brasil, por exemplo), têm se tornado uma alternativa cada vez mais interessante e usual na construção civil, sendo os mais comuns, os pilares, as vigas e os pisos. Os pisos mistos, formados por lajes de concreto armado associadas a vigas de aço por conectores mecânicos, tem sido uma opção bastante comum nos edifícios de múltiplos pavimentos, bem como em passarelas e pontes, sendo os pisos mistos, presentes em edificações ou passarelas, objetos de estudo deste presente trabalho.

## 1.2. Motivações e Objetivos

Os projetos de pisos formados por lajes de concreto ligadas a vigas e pilares de aço são elaborados levando em consideração a interação parcial, ou seja, a conexão das vigas com a laje de concreto é deformável. Isto significa que, por motivos técnicos e econômicos, a quantidade de conectores de cisalhamento utilizada é inferior a necessária para impedir totalmente o deslocamento relativo na interface, portanto, esse deslizamento influenciará de forma considerável no comportamento estrutural do piso misto.

Com relação à aplicação de cargas, segundo Lima e Santos (2008), na construção civil, em sua grande maioria, as cargas às quais uma estrutura está submetida são dinâmicas. No entanto, o efeito dinâmico da maioria dessas cargas pode ser desprezado, pois não influencia de forma considerável no comportamento da estrutura, sendo tratadas como cargas estáticas. Porém, em alguns casos o carregamento dinâmico influencia consideravelmente no comportamento das estruturas, devendo ser considerados na avaliação dos estados limites últimos e de serviço. Os carregamentos dinâmicos a serem considerados em geral são principalmente os de ventos, terremotos, carros, pessoas, entre outros, sendo que neste trabalho os carregamentos considerados são aqueles oriundos de pessoas.

De uma forma aproximada, pode-se considerar que o comportamento dos elementos estruturais mistos com conexão deformável caracteriza um tipo de ligação semirrígida, pois o grau de rigidez da conexão gera diferentes níveis de deslizamentos na interface, o que altera a rigidez à flexão do elemento misto. É dito aproximada, pois Silva (2009) afirma que ligações semirrígidas submetidas à carregamentos cíclicos desenvolvem um comportamento inelástico que provoca o amortecimento histerético, no entanto este trabalho é realizado apenas para a análise linear, não sendo possível prever o comportamento histerético da ligação.

Nie et al. (2004) cita a alta frequência fundamental de vibração das vigas mistas como uma de suas vantagens em relação as vigas simples tradicionais de aço ou de concreto (armado ou não), onde a frequência fundamental é tida como a primeira frequência natural de vibração. A frequência natural do sistema é a frequência em que a estrutura vibra de forma livre (sem que haja carga aplicada durante o processo de vibração). O deslocamento de uma estrutura está ligado à sua frequência natural de vibração, sendo que quanto maiores são as frequências, menores são os deslocamentos.

Além de considerar a conexão deformável na ligação da interface aço-concreto de pisos formados por laje de concreto e viga de aço, considera-se nesse trabalho as cargas rítmicas,

oriundas de atividades realizadas por pessoas, como por exemplo, andar, correr, pular, dançar, etc. Muitos são os trabalhos envolvendo análise de piso misto submetido à carregamento rítmico, no entanto, até onde o autor tem conhecimento e como pode ser melhor observado no Capítulo 2, a maioria dos autores considera análise experimental ou mesmo uma análise numérica envolvendo elementos finitos sólidos para as lajes de concreto e planos de casca para as vigas de aço, ou ainda elementos finitos planos de casca para ambos os elementos estruturais, sendo que em sua grande maioria utilizam softwares comerciais nas análises. Logo, propõe-se uma análise onde são utilizados elementos finitos de barra para simular as vigas e pilares de aço e elementos de placa para simular as lajes de concreto, o que tende a diminuir o esforço computacional. Será utilizado ainda um elemento de interface para simular uma possível conexão deformável entre as vigas de aço e a laje de concreto e ligar os elementos que os representam.

Até onde o autor tem conhecimento, este tipo de elemento de interface é estudado por poucos pesquisadores (Silva, 2010 e Dias, 2016), porém apenas para a análise estática (apesar de não linear), sendo implementada neste trabalho, a parte referente à análise dinâmica linear. A maioria dos trabalhos utiliza elemento finito já contido no software comercial ou mesmo considerando o deslizamento como sendo incorporado em um elemento finito de viga mista principalmente, como por exemplo Machado (2012).

Esse trabalho pertence à linha de pesquisa denominada Mecânica Computacional, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC), sendo extensão e continuação de trabalhos desenvolvidos neste mesmo programa, tais como as dissertações de mestrado de Sales (2001), Moreira (2004), Caldas (2004), Pereira (2005), Muniz (2005), Silva (2006), Oliveira (2009), a tese de doutorado de Silva (2010) e como continuação da dissertação de mestrado do próprio autor (Machado, 2012). De uma forma geral, esses trabalhos citados contemplam implementações numéricas para análise não linear física de vigas mistas aço-concreto, análise não linear geométrica de pilares mistos aço-concreto, análise não linear de placas de concreto associadas a vigas de aço, análise dinâmica linear de vigas mistas com conexão deformável.

O intuito deste trabalho é dar continuidade ao trabalho desenvolvido no mestrado pelo próprio autor (Machado, 2012), porém considerando a associação de um elemento de viga com um elemento de placa bidimensional com conexão deformável, sendo que a conexão deformável não é representada mais por meio da incorporação do deslizamento relativo na formulação de elemento de viga mista (Machado, 2012), mas por meio de um elemento de interface que representa essa conexão deformável. Assim como Machado (2012), será

considerado o comportamento linear do aço e do concreto no piso misto, caracterizando análise linear.

Quanto às ações dinâmicas, foram estudados e implementados diferentes carregamentos rítmicos com o intuito de realizar um estudo paramétrico para verificar, por exemplo, a influência da rigidez da conexão entre viga e lajes no comportamento de pisos sob ação desses carregamentos rítmicos.

Outras aplicações práticas envolvendo a análise dinâmica de estruturas são simuladas por elementos finitos de placa e lineares de barra, como por exemplo, a influência da aproximação da largura efetiva em vigas mistas no cálculo das frequências e modos de vibração natural, ou seja, influência do efeito “shear lag” nessa análise.

Diante das motivações expostas, tem-se que o principal objetivo desse trabalho consiste na avaliação da eficiência dos elementos finitos implementados para análise dinâmica, por meio da determinação do comportamento mecânico de pisos mistos, formados por lajes de concreto e vigas de aço associados por conexão deformável, sob a ação de cargas dinâmicas oriundas de atividades rítmicas, de forma especial avaliar a eficiência do elemento de interface, que tem a função de representar a conexão deformável.

Na análise do comportamento estrutural dos pisos mistos submetidos a carregamentos cíclicos e móveis (rítmicos) é utilizado o MEF, onde as vigas de aço são simuladas por elementos finitos de barra, implementados considerando a teoria de viga de Timoshenko, as lajes de concreto são simuladas por elementos finitos planos de casca, implementados considerando a teoria de placa de Reissner – Mindlin, e a conexão deformável na interface de contato entre as lajes e vigas são simuladas por elementos de interface. Como o elemento de placa está submetido à flexão em duas direções, tem-se que dependendo da direção do elemento de barra associado ao elemento de placa, que este pode sofrer torção. Sendo considerada a teoria de torção uniforme na implementação do elemento de barra.

O desenvolvimento da formulação e a implementação dos elementos finitos será realizada em linguagem de programação C++, dentro do programa FEMOOP (Finite Element Method Object Oriented Program). Diversas implementações já foram realizadas em trabalhos anteriores, como por exemplo Silva (2006, 2010) e Dias (2016). O FEMOOP é um programa que foi desenvolvido utilizando uma estrutura básica de POO, programação orientada a objetos, consistindo em uma hierarquia de classes responsáveis por cada faceta do sistema a ser desenvolvido. Originou-se de trabalhos desenvolvidos no início da década de 90 na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) sob orientação Luiz Fernando Martha, e desde então tem sido utilizado com sucesso na área de análise numérica de estruturas por vários

pesquisadores brasileiros, como Parente Jr. (2000), Sousa Jr. (2000), Caldas (2004), Muniz (2005), Silva (2006), Silva (2010), Dias (2016), entre outros. Possui a vantagem de possuir seu código aberto permitindo ampliações e alterações sem grandes dificuldades.

Neste trabalho foram realizadas implementações adicionais atribuindo aos elementos finitos implementados por Silva (2006, 2010) e Dias (2016) a capacidade de análise de estruturas sob carregamento dinâmico. Ou seja, desenvolvimento e implementação das matrizes de massa desses elementos finitos. Também foram implementados nesse trabalho, dentro do FEMOOP, métodos de análise dinâmica como o método de integração direta de Wilson-Theta, assim como diferentes modelos de carregamentos referentes a atividades rítmicas.

Após desenvolvida as formulações e suas respectivas implementações no FEMOOP, foi realizada uma verificação do comportamento dinâmico dos pisos mistos (aço-concreto) através de exemplos encontrados na literatura ou dados experimentais, sendo realizada uma calibração, com o intuito de validar a utilização desses elementos para análise dinâmica de pisos mistos com conexão deformável.

Foi implementado no FEMOOP um modelo de análise que permite simular conjuntamente piso misto, através do MEF usando os elementos de barra, placa e interface, com um ou mais sistemas MMA, analisados por meio de solução analítica de um problema MMA de um grau de liberdade. Foram obtidas, em especial, respostas para pisos e passarelas mistas de aço-concreto submetidos a carregamentos humanos. É utilizada uma abordagem considerando a conexão deformável, bem como a IHE. A abordagem se justifica, pois não existe, até onde o presente autor tenha conhecimento, nenhum trabalho considerando as duas configurações, como é possível verificar na Tabela 2. 5 presente no Capítulo 2.

Com relação à IHE, é apresentada uma revisão detalhada da literatura para a modelagem de um único pedestre e também para uma multidão de pedestres. Neste trabalho, cada pedestre é modelado como modelo de “força dura” para utilização nos exemplos de 1 a 4 e como um sistema MMA para os exemplos de 5 a 8. Finalmente, algumas aplicações de exemplo são apresentadas para quantificar a interação entre a multidão e a estrutura e os resultados são comparados para os diferentes tipos de modelos buscando validar os elementos implementados e calibrados para a análise de vibração de estruturas submetidas à carregamento humano, considerando a IHE e a conexão deformável, fornecendo uma boa base para os pesquisadores continuarem melhorando os modelos de IHE para análise de estruturas mistas considerando a conexão deformável.



**1.3. Escopo do Trabalho**

Este trabalho está dividido em 6 (seis) capítulos e as Referências Bibliográficas. No Capítulo 1 foi apresentada uma Introdução contemplando a análise dinâmica (considerando a IHE ou não) em os pisos mistos com conexão deformável, bem como apresentou as motivações e objetivos deste trabalho. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica englobando os pisos mistos com conexão deformável e não deformável, vibrações em piso mistos, análise dinâmica de sistemas estruturais mistos, considerando estes submetidos à carregamentos dinâmicos ou não. A revisão contida no Capítulo 2 engloba também os elementos finitos de placa, viga e interface utilizado em análises numéricas realizadas por outros autores. Engloba ainda uma revisão sobre diversos trabalhos considerando a IHE, que pode ser considerada uma das fontes de amortecimento da estrutura.

No Capítulo 3 apresentam-se as formulações para os elementos de placa, viga e interface para a análise dinâmica, considerando para os elementos de placa e de viga as matrizes de rigidez e de massa e para o elemento de interface apenas a matriz de rigidez.

O Capítulo 4 apresenta os diversos tipos de carregamentos dinâmicos rítmicos de acordo com autores encontrados na literatura, bem como alguns modelos de carregamento representados por sistemas massa-mola-amortecedor (MMA), implicando a IHE.

O Capítulo 5 apresenta 8 (oito) exemplos numéricos, no intuito de validar, para a análise linear dinâmica, os elementos finitos de placa, viga e interface. Em alguns exemplos, busca-se comparar os resultados considerando a IHE com os resultados onde não são consideradas a IHE.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões referentes a este trabalho, principalmente no que diz respeito à IHE, que muitas vezes é negligenciada, sendo as conclusões em especial de estruturas mistas (viga ou laje), com a conexão na interface deformável. É apresentado também neste capítulo, algumas sugestões para trabalhos futuros, principalmente no tocante à IHE.

## **Capítulo 2**

---

### **Revisão Bibliográfica**

Neste capítulo é apresentada a Revisão Bibliográfica sobre alguns aspectos: pisos mistos, conexão deformável, vibrações em pisos mistos, Análise dinâmica e Interação Homem-Estrutura. É apresentada ainda uma revisão de trabalhos encontrados na literatura sobre a análise dinâmica de pisos mistos com conexão deformável (ou não), sendo esta parte da revisão divididas em duas partes, sem considerar a IHE e considerando a IHE.

### **2.1.Pisos Mistos**

Os elementos estruturais mistos são formados pela associação de perfis ou chapas de aço com elementos de concreto. Nos pisos mistos as dimensões dos elementos geralmente permitem a análise por elementos de placas para a laje de concreto e elementos de barra para vigas e pilares, sendo que o concreto pode ser armado ou não (Queiroz *et al.*, 2001).

Para uma melhor resposta da ação conjunta dos dois materiais (aço e concreto), estes são ligados de forma mecânica por meio de conectores, denominados conectores de cisalhamento. Assim, para a correta utilização desses elementos estruturais é necessária a compreensão do comportamento de forma isolada de cada elemento que compõe a seção, bem como o entendimento de seu comportamento global, a partir da interação entre os componentes, proporcionada pela ligação realizada pelos conectores. Surge daí a necessidade de avaliações experimentais e numéricas que possam fornecer subsídios para o melhor conhecimento do seu comportamento (Queiroz *et al.*, 2001).

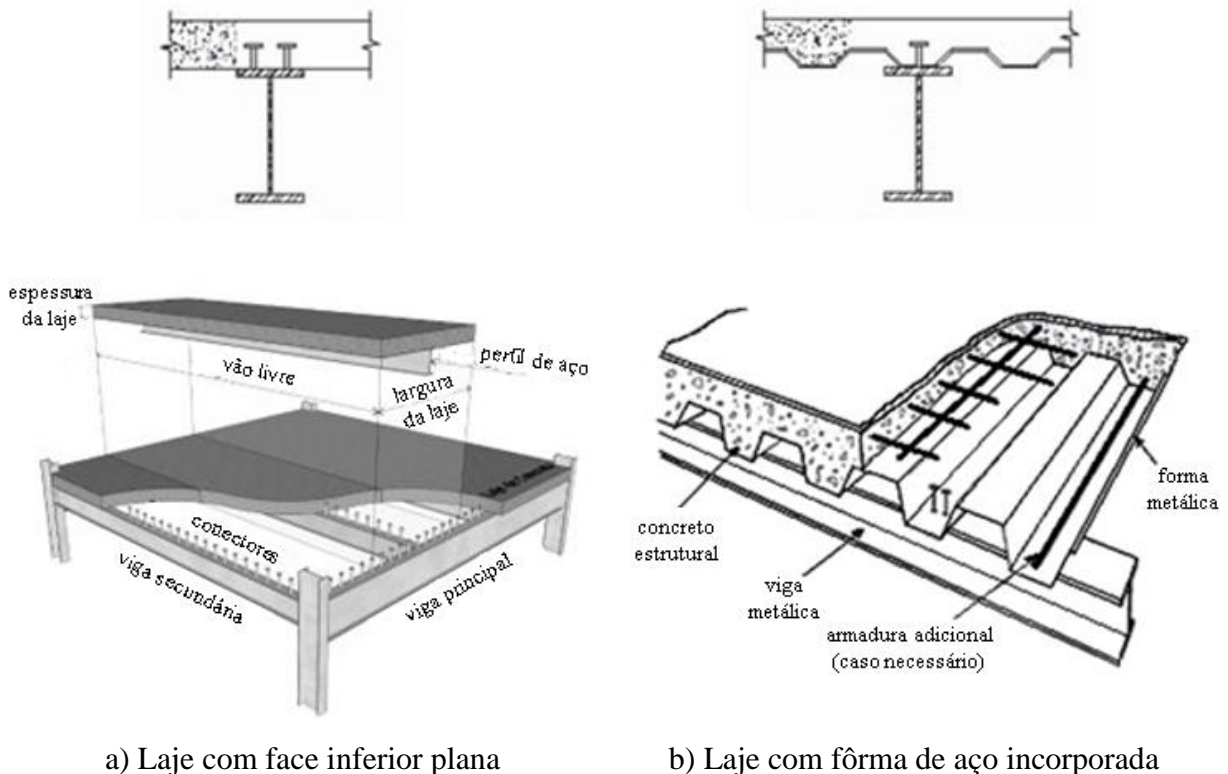
O elemento estrutural misto mais comum na prática da construção civil é a viga mista formada por uma laje de concreto, armado ou não, ligado por conectores a uma viga de aço, geralmente de perfil I. Mesmo nos casos onde a laje de concreto tenha uma largura grande, é comum a utilização do conceito da largura efetiva para analisar o problema de placa associada a uma viga de aço na forma simplificada de viga mista. A utilização do aço na confecção dos elementos estruturais lineares, e do concreto no preenchimento dos elementos de superfície, é adotada como uma solução de viga mista, aproveitando a altura da laje de concreto sobreposta à viga de aço, gerando um elemento estrutural com maior rigidez quando comparado com a viga puramente metálica (Silva, 2006).

O crescente uso de estruturas em aço na construção civil no Brasil, associado a processos de execução de conectores mecânicos cada vez mais simples, e comportamento estrutural muito eficiente dos elementos estruturais mistos, tem gerado um relevante aumento na utilização dessa técnica construtiva. Segundo Nie *et al.* (2004), esse tipo de solução é muito utilizado quando se quer vencer grandes vãos, como no caso de passarelas, pontes e galpões industriais. De acordo

com os autores, nesses casos as vigas/ pisos mistos apresentam uma alta relação vão versus altura da viga, menor deformação, e uma alta frequência fundamental de vibração, quando comparadas às vigas/ pisos convencionais.

Os pisos mistos analisados nesse trabalho são formados por lajes de concreto ligadas a vigas de aço por conectores mecânicos, como mostra a Figura 2. 1. Nessa figura são mostradas as duas formas mais utilizadas do piso misto: a laje de concreto com a face inferior plana (Figura 2. 1-a) e a laje de concreto com a fôrma de aço incorporada (Figura 2. 1-b), sendo utilizados nos exemplos deste presente trabalho, pisos mistos com a laje de concreto com a face inferior plana.

**Figura 2. 1.** Piso misto formado por laje mista associada à viga de aço



a) Laje com face inferior plana

b) Laje com fôrma de aço incorporada

Fonte: Adaptada de Portal Metálica

A utilização de sistemas estruturais mistos aço-concreto amplia consideravelmente a gama de soluções em concreto armado e em aço. Queiroz *et al.* (2001) lista outras vantagens dos sistemas mistos aço-concreto, como a possibilidade de dispensa de fôrmas e escoramentos (caso da fôrma de aço incorporada), a redução do peso próprio e a redução do volume da estrutura (quando comparados com estruturas de concreto armado), o aumento da precisão dimensional da construção, a redução do consumo de aço estrutural, a redução da necessidade das proteções contra incêndio e corrosão e o aumento na rigidez e resistência à flambagem.

No caso de vigas mistas pode-se ainda citar a prevenção de flambagem da mesa superior do perfil de aço e à flambagem lateral do perfil. Por ter sua parte de aço pré-fabricada, os sistemas estruturais possuem qualidade, precisão e tempo de execução melhores que os sistemas estruturais onde todas as partes são moldados in loco (Queiroz *et al.*, 2001).

É bastante comum na análise estrutural de pisos formados por lajes de concreto ligadas a vigas de aço a avaliação das lajes e das vigas de forma separada. Nessa simplificação considera-se uma “largura colaborante” da laje de concreto para definir a seção transversal das vigas mistas. Na maioria dos casos práticos essas simplificações são a favor da segurança fazendo com que o dimensionamento do elemento estrutural seja superestimado. No entanto, a generalização disso é bastante complicada e erros contra a segurança podem ocorrer em determinadas situações de projeto.

Mesmo em situações de vigas mistas isoladas a variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto, efeito conhecido na literatura como “*shear lag*”, que é tão mais significativo quanto maior for a largura da seção de concreto, pode gerar erros consideráveis quando se avalia esse elemento estrutural considerando a aproximação da teoria de viga para toda a seção (Machado, 2012 e Machado *et al.*, 2017). Nesses casos, o problema de viga mista com conexão deformável deve ser tratado como um problema de placa de concreto associada a vigas de aço através de conexão deformável, podendo assim avaliar corretamente o efeito “*shear lag*”. A influência desse efeito em vigas mistas com conexão deformável submetida a carregamentos rítmicos é uma das contribuições do presente trabalho.

Os pisos mistos, quando sujeito a ações humanas, como caminhar, correr, pular, entre outras, podem resultar em respostas dinâmicas indesejáveis, principalmente se tratando de estruturas com grandes vãos, como passarelas e pontes, pois além de serem estruturas mais leves, possuem propriedades amortecedoras restritas devido a presença do menor número de elementos estruturais, bem como elementos não estruturais (móveis, equipamentos, etc).

O que pode agravar ainda mais, é quando as análises realizadas nesses sistemas com propriedades amortecedoras já restritas, não consideram a IHE, pois como será melhor abordado a partir do item 2.5, esta interação é muitas vezes considerada como fonte de amortecimento para o sistema, que é a forma mais real de se considerar o usuário agindo na estrutura, e não apenas como uma “força dura”, que não tem interação nenhuma com a estrutura (Pavic e Reynolds, 2003).

Outra questão, é que os pisos mistos também podem apresentar problemas de vibração devido às suas conexões flexíveis (deformáveis), devendo ser melhor compreendida para realização da análise dinâmica.

## 2.2. Conexão Deformável

A ligação entre o perfil de aço e a laje de concreto nos pisos mistos é proporcionada pelos conectores de cisalhamento, pois, embora a aderência natural entre os materiais componentes do elemento estrutural misto possa ser elevada, possui baixa confiabilidade, não sendo, portanto, considerado no cálculo estrutural. Logo, se faz necessária a utilização desses meios mecânicos, visando promover a interação na interface dos materiais constituintes do elemento misto, ou seja, do aço com o concreto (Silva, 2006).

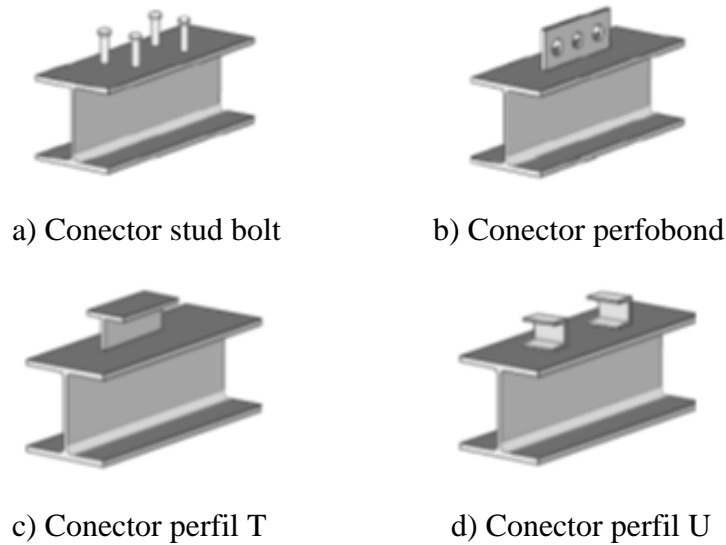
A função do conector de cisalhamento e demais meios mecânicos, consiste em absorver os esforços cisalhantes induzidos na interface de contato entre os materiais constituintes do elemento estrutural misto, de forma a diminuir o deslizamento na interface (escorregamento longitudinal entre os materiais) e também o deslocamento vertical (separação vertical na interface de contato entre os materiais).

A ligação na interface de contato entre os materiais constituintes do elemento estrutural misto (aço e o concreto) pode ser feita de forma parcial ou total. A ligação é parcial quando a rigidez da conexão é pequena e a deformação dessa, devido aos esforços cisalhantes induzidos na interface de contato, geram deslizamentos significativos na interface (conexão deformável). Nesses casos, os deslizamentos devem ser considerados na análise do comportamento do sistema misto, bem como da estrutura como um todo, visto que a interação é importante para a análise. A ligação é total quando a rigidez da conexão é muito grande apresentando deformações muito pequenas para os esforços cisalhantes induzidos na interface de contato, o que faz com que os deslizamentos sejam insignificantes no comportamento do sistema misto, sendo, portanto, desprezados na análise (conexão não-deformável).

### 2.2.1. Tipos de conectores

Os conectores de cisalhamento podem ser de diversas formas, sendo alguns tipos mostrados na Figura 2. 2. Dentre os diferentes tipos de conectores de cisalhamento, o conector do tipo pino com cabeça (*stud bolt*), mostrado na Figura 2. 2-a, é o mais utilizado na prática da construção civil. Além de ser de fácil execução, esse tipo de conector fornece à curva força cortante versus deslizamento na interface de contato entre os diferentes materiais um comportamento com patamar plástico, como é mostrado na Figura 2. 3.

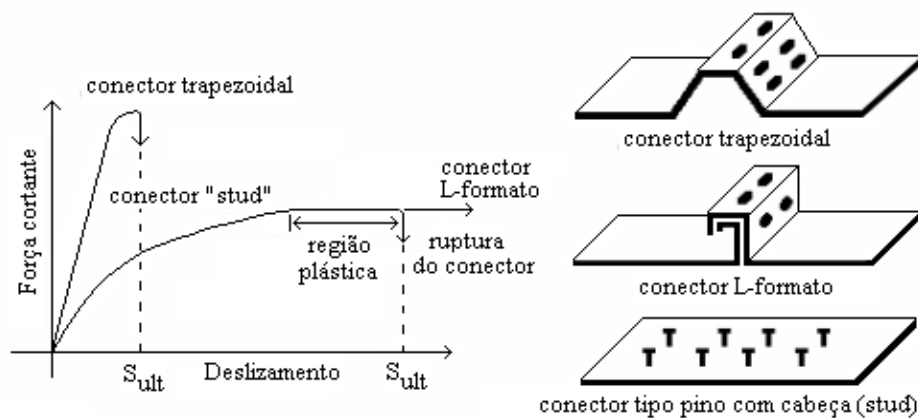
Figura 2. 2. Tipos de conectores



Fonte: Lopes *et al.* (2012)

A curva força cortante versus deslizamento mostrada na Figura 2. 3 é a propriedade mecânica mais importante do conector que tem a função de absorver os esforços cisalhantes na interface de contato entre os materiais ligados por ele. As curvas que apresentam um comportamento dúctil, identificado por um patamar de escoamento, ou seja, grandes deslizamentos antes da ruptura da ligação, permitem ao elemento estrutural misto uma redistribuição dos esforços e avisos de grandes deslocamentos antes da ruína, que é um comportamento sempre desejável nos materiais utilizados na engenharia estrutural (Oehlers e Bradford, 1995).

Figura 2. 3. Tipos de conectores e comportamento



Fonte: Adaptada de Oehlers e Bradford (1995)

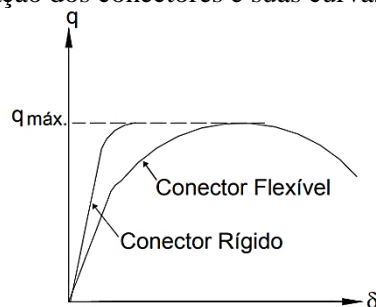
Os conectores de cisalhamento tipo pino com cabeça (*stud bolt*) são projetados para serem utilizados não apenas como conector de cisalhamento, mas também como eletrodo de solda durante o processo de soldagem no perfil metálico. O nome pino com cabeça é devido ao seu formato, caracterizado pela existência de uma cabeça semelhante à de um prego, a qual é padronizada para cada diâmetro do conector (Oehlers e Bradford, 1999).

A possibilidade de ocorrência de deslizamento relativo significativo na interface de contato entre os diferentes materiais nos elementos estruturais mistos com conexão deformável diferencia de forma considerável o seu comportamento estrutural em relação aos elementos onde esse deslizamento é desprezível. Esse fenômeno influencia no dimensionamento do elemento estrutural em relação tanto à sua capacidade resistente final quanto ao seu comportamento em serviço, ou seja, seus deslocamentos e a fissuração do concreto. Exemplos dessa influência podem ser vistos nos trabalhos de Sousa e Silva (2007 e 2010), Silva e Sousa (2009) e Sousa *et al.* (2010).

### 2.2.2. Classificação dos conectores

São vários os tipos de conectores de cisalhamento disponíveis no mercado, sendo alguns deles já mostrados na Figura 2. 2. Uma classificação possível desses conectores é quanto a sua rigidez, podendo ser classificados em flexíveis e rígidos. Essa classificação é obtida por meio da relação entre a força cortante no conector e o deslizamento relativo na interface de contato entre os materiais ligados pelo conector. Esta relação surge em resposta ao fluxo de cisalhamento longitudinal que é gerado pela transferência de força provocada entre a laje de concreto e o perfil de aço, sendo que a força e o deslizamento podem ser obtidos por meio de ensaios de cisalhamento. Quanto menor a rigidez, menor é a relação força cortante versus deslizamento identificada pela inclinação da reta no trecho linear da curva mostrada na Figura 2. 4

**Figura 2. 4.** Classificação dos conectores e suas curvas características

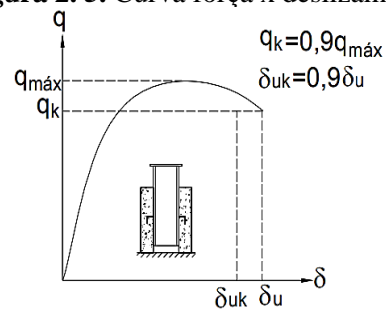


Fonte: David (2007)



Além da qualificação quanto a sua rigidez, existe a classificação quanto à sua ductilidade, que é a capacidade de deslizamento do conector após atingir a resistência máxima, sendo classificado em dúctil e frágil. Segundo a Eurocode 4 (2004), o conector é considerado dúctil se o valor da capacidade de deformação ( $\delta_{uk}$  mostrado na Figura 2. 5) for igual ou superior a 6 mm, caso contrário, o conector é considerado frágil. No caso de conectores frágeis, praticamente não há deslizamento do conector após atingir a resistência máxima, rompendo-se de forma abrupta.

Figura 2. 5. Curva força x deslizamento



Fonte: David (2007)

### 2.3. Vibrações em Pisos Mistos

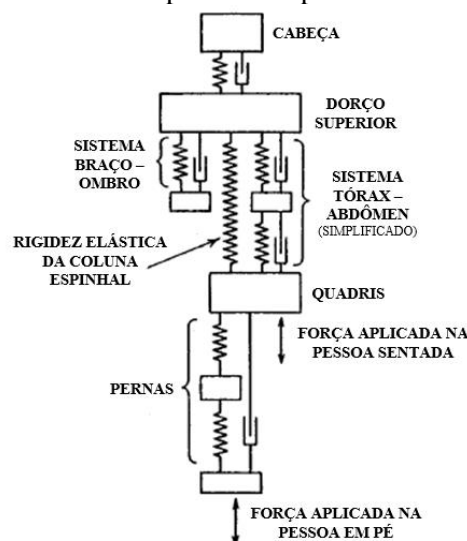
São diversas as fontes de excitação que provocam vibrações nos edifícios, tais como cargas oriundas do tráfego de veículos pesados em áreas vizinhas, bem como de equipamentos em construções próximas ou mesmo instaladas no edifício, além é claro das ações humanas (Moreira, 2004). O grande problema é que essas vibrações, mesmo que não ocasionem perda de resistência, podem ocasionar, em muitos casos, pânico, perda de eficiência no trabalho e danos à saúde.

Os sistemas mistos de aço-concreto possuem como características frequências naturais muito próximas da frequência natural de excitação associada às atividades humanas, como, andar, pular, dançar, entre outras. Portanto, para um dimensionamento ideal é de extrema importância a análise dos efeitos de excitação de atividades humanas nos pisos mistos.

O ser humano é sensível às vibrações, sendo que essa sensibilidade está ligada não apenas ao tipo de vibração, mas a aspectos físicos e psicológicos, ou seja, a posição em que se encontra, se em pé, sentado ou deitado, como é a orientação da coluna, qual é a natureza da atividade, bem como características tais como idade, sexo, humor, hora do dia, a frequência que a atividade acontece e o ambiente (Moreira, 2004).

Segundo Varela (2004), o corpo humano pode ser representado pelo sistema mecânico simplificado mostrado na Figura 2. 6. Como pode-se observar nessa figura, o corpo humano é basicamente formado por um sistema massa-mola-amortecedor (MMA).

**Figura 2. 6.** Sistema mecânico simplificado representando o corpo humano

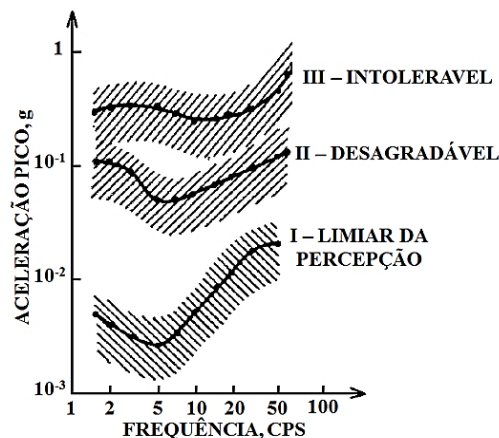


Fonte: Coermann (1960)

É importante ter ciência de como a estrutura reage aos diferentes aspectos mencionados anteriormente, influenciando assim na sensibilidade humana, porém é necessário conhecer também como é dada a percepção humana a essas vibrações, o que se dá pelas amplitudes de deslocamentos, velocidades e acelerações, bem como pela frequência que a estrutura vibra, e ainda pelo amortecimento da estrutura e o tempo à qual a estrutura está exposta a determinado carregamento (Varela, 2004).

Segundo Von Gierke e Goldman (1976), a resposta das pessoas com relação à percepção, desconforto e tolerância se dá pelo gráfico apresentado na Figura 2. 7, considerando uma exposição às vibrações de 5 a 20 minutos. Na Figura 2. 7, I refere-se às acelerações para as quais as pessoas percebem as vibrações, II as acham desagradável, e III não as toleram mais. As áreas hachuradas nessa figura são um desvio padrão para cada lado da média, onde foram considerados dados de sete fontes (Varela, 2004).

Figura 2. 7. Acelerações pico médias em várias frequências



Fonte: Goldman (1948)

Outros parâmetros para verificação da percepção humana em relação às vibrações são apresentados na Tabela 2. **Erro! Fonte de referência não encontrada..** Nessa tabela é mostrado o nível limite de percepção em termos de velocidade e aceleração, desde o nível de pouco perceptível até intolerável, para diferentes níveis de frequência. Os dados dessa tabela foram obtidos a partir da combinação de dados de vários autores, os quais apresentam uma variação de um fator de no máximo 2 vezes os valores fornecidos (Bachmann, 1995 *apud* Varela, 2004).

**Tabela 2. 1.** Limites de percepção humana às vibrações verticais (pessoa em pé)

Descrição	Frequência de 1 a 10 Hz, Aceleração máxima (mm/s <sup>2</sup> )	Frequência de 10 a 100 Hz, Velocidade máxima (mm/s)
Pouco perceptível	34	0,5
Claramente perceptível	100	1,3
Desagradável	550	6,8
Intolerável	1800	13,8

Fonte: Bachmann (1995)

Como já dito, a excitação provocada pelas atividades humanas, como caminhar, pular, dançar, ou alguma outra atividade aeróbica, podem fazer com que os pisos fiquem sujeitos a altos níveis de vibrações. Saidi *et al.* (2006) cita o baixo peso próprio dos elementos estruturais e a questão de serem compostos por sistemas com baixa rigidez, como principais motivos pelo qual a frequência natural de vibração se aproxima da frequência de excitação do piso (ressonância). Já em relação às vibrações excessivas em pisos pode-se adicionar, aos motivos citados, o baixo amortecimento do sistema.

A massa do piso e a rigidez normalmente são constantes durante toda a vida útil da estrutura, podendo ser estabelecido com precisão, porém o amortecimento é mais complicado, pois geralmente está associado a componentes não-estruturais como falsos pisos, paredes, lajes suspensas e até mesmo com mobiliário, armários, prateleiras, etc. Buscando compreender melhor as vibrações do piso misto, e especificamente, compreender melhor como que o amortecimento influencia, é que Saidi *et al.* (2006), descreve alguns fatores que afetam as vibrações do piso, mostrando sistemas de amortecimento disponíveis que podem ser utilizados para reduzir os níveis de vibração em pisos mistos.

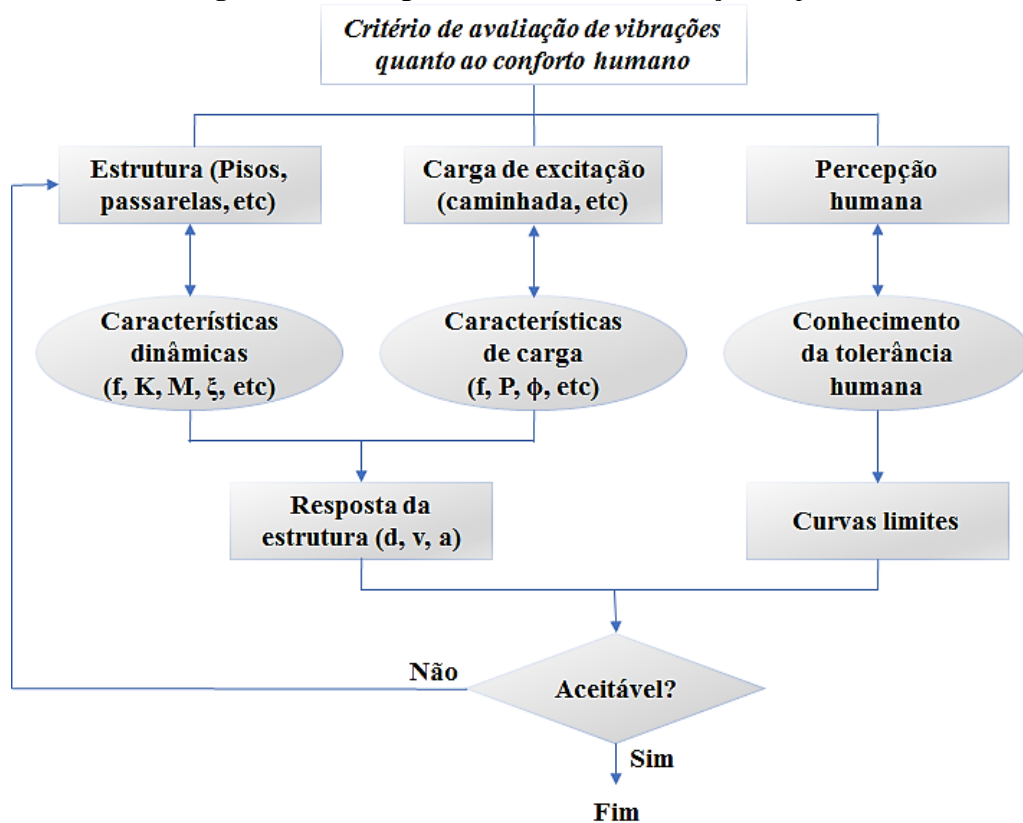
As baixas frequências de vibração dos elementos estruturais têm se aproximado cada vez mais da faixa de frequência de excitações associadas às atividades humanas, o que torna o elemento susceptível aos efeitos de vibrações induzidos por pequenos impactos e por excitações mais intensas, como é o caso do caminhar de pessoas e outras ações dinâmicas rítmicas. Segundo Collette (2004), o caminhar de pessoas induz cargas rítmicas verticais e horizontais impulsivas, dominadas pela frequência de excitação, pois estas frequências, típicas de uma caminhada de uma pessoa, se encontra entre 1,6 e 2,4 passos por segundo, ou seja, 1,6 e 2,4Hz (caminhada lento-rápido). Para corrida a taxa rítmica vai até cerca de 3Hz, a depender da velocidade da corrida. De uma forma geral, um piso irá sofrer maior influência de um carregamento rítmico, quanto mais a frequência de excitação citada se aproximar da frequência natural do piso.

Verificando os critérios de resistência e estabilidade dos pisos mistos aço-concreto com vãos e dimensões usuais, verifica-se que os estados-limites últimos não são ultrapassados, porém os estados-limites de utilização, que são associados às vibrações excessivas, devem ser bem analisados, visando assim, diminuir os efeitos provocados por atividades humanas, bem como outros tipos de excitações.

As análises das vibrações provocadas por atividades humanas têm sido cada vez mais elaboradas, devido à complexidade que é expressar tal carregamento, visto que essas atividades se encontram associadas à particularidades corporais de cada indivíduo e ainda ao jeito que tal indivíduo realiza determinado tipo de atividade, visto que cada indivíduo imprime uma marcha e uma velocidade que é particular da sua estrutura corporal. As particularidades geralmente são: sexo, peso, idade, tipo de calçado, entre outros (Mello *et al.*, 2007).

Segundo Rainer *et al.* (1988) *apud* Moreira (2004), são três os fatores que devem ser levados em consideração para a aceitabilidade dos pisos sob vibrações: características do piso (estrutura), tipos de ação de excitação no piso (carga) e os limites aceitáveis de vibração (percepção humana), como mostrado na Figura 2. 8.

Figura 2. 8 Fluxograma ilustrativo da avaliação de pisos

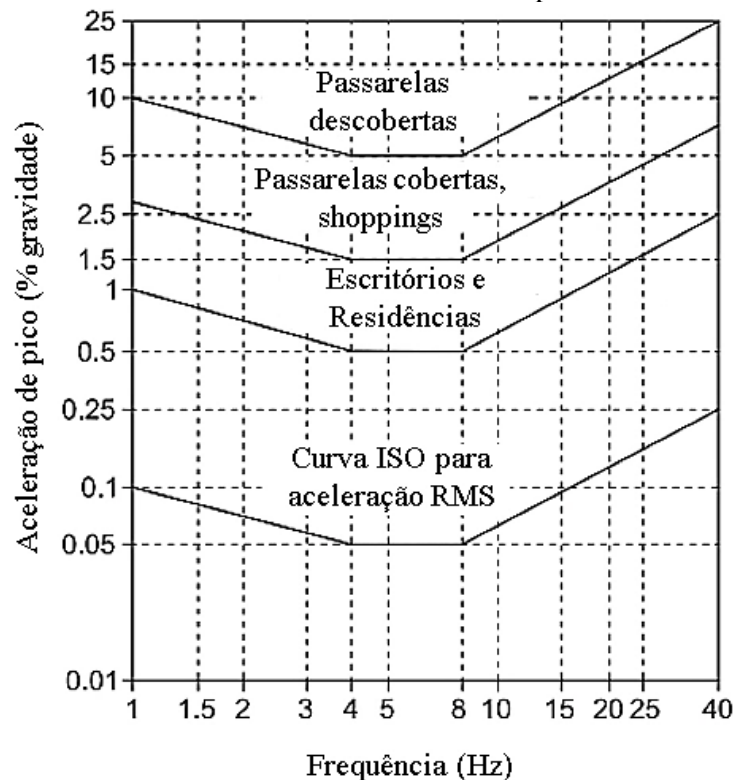


Fonte: Adaptada de Moreira (2004)

É mostrado claramente na Figura 2. 8, que para avaliar as vibrações quanto ao conforto humano é preciso relacionar as características dinâmicas da estrutura com as características de carga da excitação com o que é tolerável para o ser humano, ou seja, comparar a resposta da estrutura [deslocamento ( $d$ ), velocidade ( $v$ ) e aceleração ( $a$ )], com as curvas limites de aceitação para que haja conforto humano. Caso o resultado dessa comparação seja aceitável, será executado o projeto, caso não esteja dentro dos limites aceitáveis deve-se estudar uma nova concepção de projeto, bem como distribuição de cargas, visto que a percepção humana não sofre alteração para uma mesma atividade que seja executada.

A Figura 2. 9 mostra os limites de tolerância das acelerações de pico recomendados para conforto humano pela AISC (Murray *et al.*, 2016).

Figura 2. 9. Limites de tolerância recomendados para conforto humano



Fonte: Adaptada de Murray *et al.* (2016)

A percepção das pessoas que estão submetidas a vibração depende muito fortemente do que elas estão fazendo. Pessoas em escritórios ou residências não gostam de vibrações “distintamente perceptíveis”, ou seja, aceleração acima de 0,5 % da aceleração da gravidade (0,005g), enquanto que pessoas que participam de uma determinada atividade física, “aceitam” vibrações 10 a 30 vezes maiores (5 % a 15 % de g ou mais). Pessoas jantando ao lado de uma pista de dança, levantando pesos ao lado de um ginásio de aeróbica, ou de pé em um shopping

ou em uma passarela coberta aceita valores entre cerca de 1,5% de  $g$ . Pessoas andando ao ar livre em uma ponte, passarela ou escada aceitam acelerações mais altas também (cerca de 5 % de  $g$ ). Note-se que esses limites são para frequências de vibração entre 4 e 8 Hz, que é a gama de frequências de ressonância de órgãos humanos. Fora desta faixa de frequência, as pessoas aceitam acelerações mais altas (Murray *et al.*, 2016).

A Figura 1.11 apresenta ainda a curva referente à ISO para limites de tolerância referente a aceleração RMS para o conforto humano, sendo que a aceleração RMS da estrutura ( $a_{rms}$ ) pode ser obtida pela Equação (1.1). O **RMS** (do inglês **root mean square**), é a raiz do valor quadrático médio ou valor eficaz, é uma medida estatística da magnitude de uma quantidade variável (Murray *et al.*, 2016)

$$a_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} a(t)^2 dt} . \quad (1.1)$$

Na Equação (1.1), o comprimento do passo ( $T_p$ ) e a resposta individual ao impulso do passo ( $a(t)$ ), que é uma aceleração de pico inicial ( $a_p$ ) seguida de um decaimento, são calculados respectivamente pelas equações a seguir :

$$T_p = \frac{1}{f_p} , \quad (1.2)$$

$$a(t) = a_p e^{-2\pi f_n \beta t} \text{sen}(2\pi f_n t) . \quad (1.3)$$

onde,  $f_p$  é a frequência do passo,  $f_n$  é a frequência natural fundamental,  $\beta$  é a relação de amortecimento (geralmente igual a 0,06) e  $t$  é o tempo.

Murray *et al.* (2016) estimaram fatores multiplicadores numa faixa de “5 a 8”, que corresponde a uma aceleração RMS na faixa de “0,25 a 0,40% de  $g$ ” para escritórios e residências e utilizando a experiência, estabeleceram limites de “0,5% de  $g$ ” para outros ambientes, como shoppings e passarelas.

## 2.4. Análise Dinâmica

A análise dinâmica pode ser realizada no domínio do tempo ou no domínio da frequência, sendo que neste trabalho, serão realizadas análises no domínio do tempo.

A solução de um problema dinâmico consiste em obter as respostas do sistema (deslocamentos, velocidades, acelerações, esforços, etc.) em função do tempo ou da frequência, a partir de certo instante inicial para o qual se conhecem as suas configurações.

O problema dinâmico associado às vibrações induzidas por atividades humanas sobre um piso formado por lajes de concreto ligadas a vigas de aço é regido pela Equação (1.4). Essa equação descreve o equilíbrio de um corpo deformável inserido em um meio que gera um amortecimento do movimento acelerado induzido por uma força dinâmica.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (1.4)$$

Na Equação (1.4),  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa global, na qual cada coeficiente  $\mathbf{M}_{ij}$  representa a força de inércia por unidade de aceleração na direção  $i$  devido à aceleração unitária na direção  $j$ ;  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento, na qual cada coeficiente  $\mathbf{C}_{ij}$  representa a força de amortecimento viscoso por unidade de velocidade na direção  $i$  devido à velocidade unitária na direção  $j$ ;  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez, na qual cada coeficiente  $\mathbf{K}_{ij}$  representa a força na direção  $i$  devido à deslocamento unitário na direção  $j$ ;  $\mathbf{d}$  é o vetor de deslocamentos e  $\mathbf{F}(t)$  é o vetor de forças nodais equivalentes.

O carregamento  $\mathbf{F}(t)$  é dependente da atividade que será desenvolvida sobre o piso, sendo que diversos autores já determinaram funções que regem tais atividades, como será mostrado com mais detalhes para diferentes atividades no capítulo 4.

A Equação (1.4) representa o problema dinâmico geral, ou seja, uma análise de vibração forçada considerando o amortecimento. Situações particulares de análise podem ser definidas a partir da Equação (1.4). Por exemplo, desprezando o amortecimento e considerando movimento livre, tem-se a análise de vibração livre da estrutura dada pela Equação (1.5). Da solução do problema de vibração livre determinam-se duas características dinâmicas muito importantes, as frequências naturais e os modos de vibração referentes a cada frequência.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$



As frequências naturais e os modos de vibração são determinados a partir da resolução de um problema de autovalor generalizado dado pela Equação (1.6). Nessa equação,  $\Phi_i$  são os modos naturais de vibração e  $\omega_{0i}$  são as frequências naturais de vibração.

$$(\mathbf{K} - \omega_{0i}^2 \mathbf{M}) \Phi_i = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

O procedimento para determinação das frequências naturais e os modos de vibração para um ou múltiplos graus de liberdade são mostradas em detalhe no trabalho de Machado (2012), como em diversos outros trabalhos, por exemplo, Bathe (1986).

Após a determinação das características dinâmicas da estrutura, se faz necessário estabelecer o carregamento de excitação  $\mathbf{F}(t)$ , que pode se dar de diversas formas: caminhada, corrida, pulos, dança ou outra atividade rítmica exercida. A Equação (1.4) trata do carregamento  $\mathbf{F}(t)$  para o caso geral, referente à atividade que se deseja analisar.

Moreira (2004), considerando um carregamento  $\mathbf{F}(t)$  variando de forma harmônica, o que faz com que possa ser escrito como uma função seno, a partir de manipulações matemáticas, determina o fator de amplificação dinâmica ( $FAD$ ), dado por:

$$FAD = \frac{\rho}{y_w} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_f^2)^2 + (2\beta_f^2 \xi)^2}}. \quad (1.7)$$

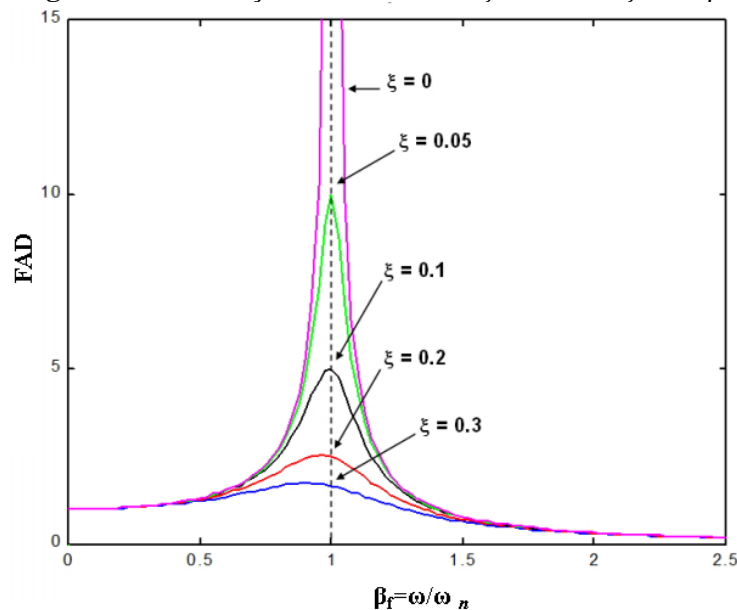
Na Equação (1.7),  $(\rho)$  é a amplitude da resposta permanente dada por  $p_0 / k \sqrt{(1 - \beta_f^2)^2 + (2\beta_f^2 \xi)^2}$ ,  $(y_w)$  é a deflexão estática dada por  $\frac{mg}{k}$ ,  $p_0$  é amplitude estática,  $k$  é a rigidez,  $\beta_f = \bar{w} / w_0$  é a razão entre a frequência da força de excitação e a frequência natural do sistema, e  $\xi$  é a taxa de amortecimento modal.

Quando  $\beta_f$  é igual a 1, ou seja, a frequência da força de excitação e a frequência natural são iguais, caracteriza-se o fenômeno denominado Ressonância, logo o fator de amplificação dinâmica é inversamente proporcional a taxa de amortecimento. Substituindo  $\beta_f = 1$  na Equação (1.7) chega-se a Equação (1.8) para o fator de amplificação dinâmica. Dessa equação observa-se que o efeito de ressonância em um problema com amortecimento muito pequeno gera deslocamentos tendendo ao infinito, e esse comportamento é observado na Figura 2. 10, para as curvas com valor reduzido da taxa de amortecimento  $\xi$ .

$$FAD(\beta_f = 1) = \frac{1}{2\xi} = \frac{0,5}{\xi}. \quad (1.8)$$

Na Figura 2. 10 é mostrado o gráfico da variação do fator de amplificação dinâmica ( $FAD$ ) em função da razão entre as frequências ( $\beta_f$ ) e da taxa de amortecimento ( $\xi$ ). É perceptível que quando  $\beta_f$  é igual a 1 (ressonância) e a taxa de amortecimento é muito baixa (próxima de zero), a resposta se torna muito grande ( $FAD$  tendendo para o infinito). Mantendo o  $\beta_f$  igual a 1 (um) e aumentando a taxa de amortecimento, percebe-se uma diminuição considerável no  $FAD$ . Quando a frequência da força de excitação for igual a zero ( $\beta_f = 0$ ), significa que é estática a força aplicada e quando a força de excitação é muito grande ( $\beta_f$  tendendo ao infinito), o  $FAD$  tende para zero, ou seja, as amplitudes de vibração se tornam muito pequenas (Moreira, 2004).

**Figura 2. 10.** Variação do  $FAD$  em função da variação de  $\beta_f$



Fonte: Barros (2010)

Em geral, não é simples obter soluções analíticas para problemas de análise dinâmica, principalmente com múltiplos graus de liberdade, devendo-se recorrer a procedimentos numéricos de integração das equações diferenciais do movimento ao longo do tempo. Estes procedimentos fornecem as soluções para valores discretos do tempo  $t_0, t_1, \dots, t_n$ .

---

Lopes *et al.* (2012) desenvolveu uma metodologia de análise com o objetivo de investigar a resposta dinâmica não linear de sistemas estruturais de pisos mistos em aço-concreto, investigando a influência da interação entre o aço e o concreto (conexão deformável e não deformável) e das ligações estruturais (viga-coluna e viga-viga). Em sua investigação, Lopes *et al.* (2012) utilizam três modelos de carregamento dinâmico para representar atividades rítmicas como saltos à vontade e ginástica aeróbica, demonstrando que os critérios de projetos, tais como a interação aço-concreto e as ligações estruturais devem ser mais cuidadosamente verificados, principalmente no que diz respeito à verificação dos estados limites de utilização referentes ao conforto humano.

#### 2.4.1. Método de Integração Direta - Wilson Theta

Neste trabalho é utilizado o Método de integração direta para integrar as equações passo a passo, onde o termo “direta” significa que as estas são integradas no tempo, antes que as equações sofram alguma transformação. O Método de integração direta baseia-se em duas ideias: resolver a equação do movimento (Equação (1.4)) em intervalos  $\Delta t$  discretos, implicando num equilíbrio dinâmico que inclui os efeitos de inércia e amortecimento, ou seja, tomado em pontos discretos dentro do intervalo de solução; discretizar o tempo em intervalos  $\Delta t$ , de forma que os deslocamentos, velocidades e acelerações sejam determinados para cada tempo  $t + \Delta t$ . (Bathe, 1986 *apud* Machado, 2012).

Antes de aplicar os métodos de integração direta devem ser determinadas as matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$ , sendo aplicadas condições iniciais no tempo zero ( $\mathbf{d}^0$ ,  $\dot{\mathbf{d}}^0$ ,  $\ddot{\mathbf{d}}^0$ ). O tempo total  $T$  é dividido em  $n$  intervalos, onde se tem  $\Delta t = T / n$ , sendo possível encontrar a solução nos tempos  $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, T$ .

Existem diversos Métodos de integração direta, sendo utilizado neste trabalho o Método de Wilson-Theta. O Método de Wilson-Theta é uma extensão do método da aceleração linear, em que uma variação linear da aceleração é assumida de um tempo  $t$  até  $t + \Delta t$ . No método de Wilson-Theta, a aceleração na equação do movimento é assumida como linear do tempo  $t$  até  $t + \theta\Delta t$ , sendo usualmente utilizado  $\theta = 1,4$ .

As constantes de integração são calculadas da seguinte forma:

$$a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}; a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}; a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2}; \quad (1.9)$$

$$a_4 = \frac{a_0}{\theta}; a_5 = \frac{-a_2}{\theta}; a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}; a_7 = \frac{\Delta t}{2}; a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}.$$

A matriz de rigidez efetiva e a sua triangularização são calculadas utilizando as Equações (1.10) e (1.11).

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}, \quad (1.10)$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T. \quad (1.11)$$

Para cada passo de tempo o vetor das cargas efetivas no tempo  $t + \theta\Delta t$  é calculado pela Equação (1.12). Logo após, calculam-se os deslocamentos nesse tempo através da equação (1.13).

$$\widehat{\mathbf{p}}^{t+\theta\Delta t} = \mathbf{p}^t + \theta(\mathbf{p}^{t+\Delta t} - \mathbf{p}^t) + \mathbf{M}(a_0\mathbf{d}^t + a_2\dot{\mathbf{d}}^t + 2\ddot{\mathbf{d}}^t) + \mathbf{C}(a_1\mathbf{d}^t + 2\dot{\mathbf{d}}^t + a_3\ddot{\mathbf{d}}^t), \quad (1.12)$$

$$\mathbf{LDL}^T\mathbf{d}^{t+\theta\Delta t} = \widehat{\mathbf{p}}^{t+\theta\Delta t}. \quad (1.13)$$

Obtido os deslocamentos no tempo  $t + \theta\Delta t$ , calculam-se as acelerações, as velocidades e os deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$ , dados respectivamente por:

$$\ddot{\mathbf{d}}^{t+\Delta t} = a_4(\mathbf{d}^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{d}^t) + a_5\dot{\mathbf{d}}^t + a_6\ddot{\mathbf{d}}^t, \quad (1.14)$$

$$\dot{\mathbf{d}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{d}}^t + a_7(\ddot{\mathbf{d}}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{d}}^t), \quad (1.15)$$

$$\mathbf{d}^{t+\Delta t} = \mathbf{d}^t + \Delta t\dot{\mathbf{d}}^t + a_8(\ddot{\mathbf{d}}^{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{d}}^t). \quad (1.16)$$

### **2.5. Interação Homem – Estrutura (IHE)**

Um número cada vez maior de estruturas e, em particular passarelas, tem sofrido com altos níveis de vibrações, quando solicitadas por pessoas em movimento (Gomez *et al.*, 2018).

Segundo Debona (2016), não é procedimento regular em escritórios de engenharia o estudo do comportamento dinâmico de passarelas de pedestres, principalmente no tocante aos estados limites de utilização, ou seja, que está relacionado ao conforto dos usuários.

Com relação à infraestrutura urbana, as passarelas são importantes componentes, pois se caracterizam por serem meios mais seguros destinados aos pedestres, para atravessarem estradas e rodovias. No entanto, apesar de serem projetadas de acordo com diretrizes existentes, um grande número de passarelas apresenta problemas de vibrações excessivas, quando submetidas ao tráfego de pessoas. Tais problemas estão relacionados à alta flexibilidade estrutural, baixo peso, e grandes vãos livres (Gomez *et al.* (2018), por isso, quando induzida pelo homem, algumas passarelas são mais sensíveis à carga dinâmica do que outras.

Živanović *et al.* (2005) cita que provavelmente o mais antigo relato de vibrações perceptíveis em passarelas foi feito por Stevenson (1821), tendo esse, relatado fortes vibrações devido a uma marcha em uma passarela, indicando a necessidade de considerar carregamentos dinâmicos, induzidos por pedestres, em projetos de passarelas. Živanović *et al.* (2005) cita ainda que 10 anos após as observações de Stevenson, um colapso da passarela em Broughton, nos Estados Unidos, foi causado por soldados marchando. Tilden (1913) realizou um avançado estudo para aquele tempo, relatando principalmente o efeito de multidão, tendo também relatado algumas experiências em que, embora não tendo medição precisa de dispositivos, quantificou o efeito dinâmico de uma força gerada também por uma única pessoa realizando diferentes atividades.

A análise de vibrações em estruturas tem sido um tema que tem causado muito interesse nas últimas décadas, principalmente devido a demanda por projetos que contemplem estruturas com maiores vãos, e ainda tenham que ser leves e esbeltas, critérios estéticos que tem feito com que as passarelas sofram com vibrações excessivas, causando desconforto aos seus usuários e/ou mesmo o colapso da estrutura (Caprani e Ahmadi, 2016).

Como dito anteriormente, as preocupações com vibrações em passarelas tornaram-se mais evidentes com os episódios sofridos pela Passarela de Solferino em Paris em 1999, Passarela do Milênio em Londres (Figura 1. 1) e também pela Passarela na Carolina do Norte/EUA em 2000 (Figura 1. 2), gerando diversos estudos, como já mencionados. Diversos desses estudos constataram que os ocupantes de uma estrutura não apenas têm propriedades

excitadoras, mas também amortecedoras, como em Pavic e Reynolds (2003), dando importância aos estudos considerando a IHE, fato que até estes acontecimentos não tinham sua devida atenção.

Na literatura existem formulações bem estabelecidas do fenômeno de Interação Veículo-Estrutura (IVE), enquanto na área de IHE ainda existe uma necessidade de formulações melhor documentadas do problema. Como existem analogias entre o IVE e o IHE, as formulações de IVE podem ser estendidas para o problema IHE. No entanto, deve-se ter em mente que a natureza dinâmica da força humana é diferente se comparada com a de um veículo (Pu e Liu, 2010).

Salyards e Hua (2015) cita que os efeitos da IHE foram primeiro observados por Lenzen (1966), tendo este realizado o seguinte questionamento: “O que fornece amortecimento?” Revendo os testes realizados na cidade de Kansas verificou que quase tudo fornece amortecimento, tendo sido realizados testes em uma sala de aula vazia e cheia, respectivamente. As vibrações não eram perceptíveis pelos alunos ou professores, quando a sala estava cheia, porém, as vibrações eram irritantes quando a sala estava vazia, ou seja, com muito menos amortecimento. Logo, “*o ser humano é um dos melhores absorvedores de energia encontrado*” (Lenzen, 1966).

Pensar que os ocupantes de uma estrutura se comportam como um sistema dinâmico massa-mola-amortecedor (MMA), ou seja, que interage com a estrutura através da IHE, é entender que essa interação é crítica para a análise da vibração, já que negligenciar seus efeitos pode resultar em uma superestimação da resposta dinâmica de uma estrutura e, como resultado, um projeto estrutural mais caro (Salyards e Hua, 2015).

De forma especial, as vibrações têm causado grandes preocupações em estruturas de pontes e passarelas, sendo que neste trabalho será tratada as vibrações em passarelas, bem como em pisos diversos, considerando a IHE e a excitação induzida pelo ser humano.

A interação pedestre-estrutura é tratada como um sistema MMA, sendo classificado por Sachse (2002) em duas categorias: a primeira compreendendo o efeito que o pedestre exerce sobre as propriedades da estrutura (massa, rigidez e amortecimento) e a segunda compreendendo os efeitos que as vibrações estruturais exercem sobre as forças induzidas pelo pedestre (frequência de passo, comprimento, velocidade de caminhada).

Como dito, grande parte dos projetos, não consideram a IHE assumindo simplesmente que o pedestre pode ser representado como uma carga móvel que se desloca pela passarela, ignorando os efeitos dinâmicos oriundos da IHE, que é tida como a fonte de incerteza na resposta dinâmica de passarelas (Blanchard *et al.* 1977). Van Nimmen *et al.* (2014) relatam que

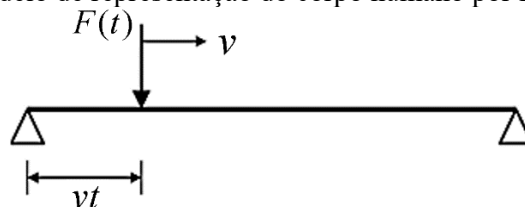
as diretrizes de funcionalidade existentes não preveem respostas dinâmicas precisas para passarelas, existindo, portanto, lacunas significativas no conhecimento deste problema em questão, visto que as diretrizes existentes sofrem de soluções de projetos inconsistentes e por vezes ilógicas.

Foram propostos vários modelos analíticos de vibrações verticais induzidas por carregamento humano, a maioria considerando um único pedestre como uma força determinística do movimento harmônico (Živanović *et al.* 2005) e desprezando a IHE como um efeito bidirecional.

Živanović *et al.* (2009) diz que, apesar dos avanços nos modelos de carga e nas previsões de resposta devido à evolução computacional, as respostas medidas em passarelas em funcionamento, frequentemente se afastam muito daquelas previstas. Shahabpoor *et al.* (2013) cita como a principal razão para esta lacuna, os estudos experimentais de IHE e os modelos analíticos disponíveis, que são incapazes de reproduzir a interação dinâmica entre os dois sistemas de forma adequada.

Debona (2016) apresenta um modelo biodinâmico mais realista de simulação de pessoas caminhando, buscando uma melhor interação dinâmica entre pedestre e estrutura. Trata-se de um modelo simplificado representando a dinâmica vertical do movimento. Representação essa que surgiu da necessidade de se complementar o modelo de força que é largamente utilizado (Figura 2. 11), com um modelo de massa, rigidez e amortecimento, para que se possa então considerar as contribuições dinâmicas que os pedestres aplicam nas estruturas, principalmente quando a quantidade de pedestres é maior (efeito de multidão). Estes modelos podem ser representados por um sistema de um, dois, três ou vários graus de liberdade (S1GL, S2GL, S3GL, ..., SVGL).

**Figura 2. 11.** Modelo de representação do corpo humano por forças (“força dura)

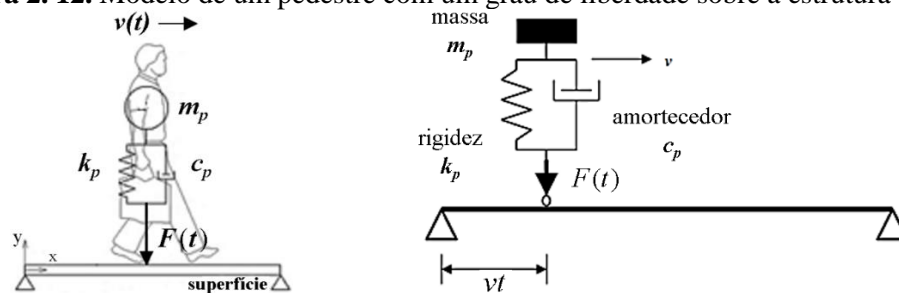


Fonte: Adaptada de Caprani *et al.* (2011)

As figuras a seguir (Figura 2. 12 a Figura 2. 14) mostram os modelos biodinâmicos para um, dois e três graus de liberdade, respectivamente. Cada modelo S1GL é acoplado a um modelo de força concentrada pulsante, podendo assim simular um efeito proporcionado por um

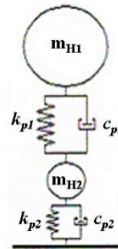
único pedestre, ou mesmo uma multidão de pedestres (Caprani *et al.*, 2011). O modelo S2GL é utilizado geralmente para simular uma pessoa em pé e em repouso, visto que a flexão dos joelhos muda a rigidez do corpo, não sendo adequado para simular o caminhar de pessoas (ISO 5982, 1981). Já o S3GL considera três massas ligadas por duas pernas rígidas articuladas e sem massa, sendo que um ponto, que é a massa do quadril (M), é ligado aos dois pontos dos pés, que são as massas dos pés (m), sendo que M é bem maior que m (Garcia, 1998).

**Figura 2. 12.** Modelo de um pedestre com um grau de liberdade sobre a estrutura (S1GL)



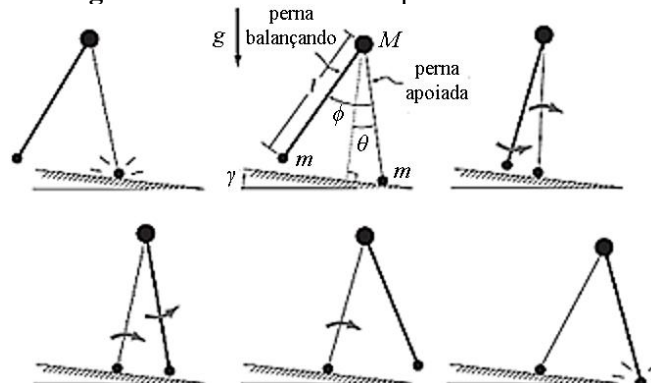
Fonte: Adaptada de Caprani *et al.* (2011)

**Figura 2. 13.** Modelo do corpo humano S2GL



Fonte: Adaptada de ISO 5982 (1981)

**Figura 2. 14.** Modelo do corpo humano S3GL



Fonte: Adaptada de Garcia (1998)

O presente trabalho utiliza um modelo biodinâmico com um grau de liberdade apenas, visto que representa satisfatoriamente o caminhar de pessoas, sendo tratado neste trabalho o efeito com um único pedestre e também o efeito de multidão.



## **2.6. Análise Dinâmica sem considerar IHE**

O sistema estrutural misto é formado por um perfil de aço soldado, laminado ou formado a frio, em conjunto com uma laje de concreto simples ou armado. A ligação do perfil de aço com a laje de concreto é proporcionada por meios mecânicos, tais como conectores, mossas, ressalto, entre outros, seja por atrito ou simplesmente por aderência e repartição de cargas (Queiroz *et al.*, 2001).

Os elementos estruturais mistos de aço-concreto, quando comparados com os de concreto (simples ou armado) e mesmo com os metálicos, possuem algumas vantagens, pois aproveitam melhor a capacidade resistente de cada material que os constituem. O aço é um material com uma capacidade resistente tanto à tração quanto à compressão muito boa, já o concreto possui uma excelente resistência à compressão, porém à tração sua resistência é cerca de apenas 8 a 15 % de sua resistência à compressão (Silva, 2006).

Elementos estruturais mistos de aço e concreto vêm sendo uma opção frequente para soluções estruturais na construção civil (Lemes, 2015). Devido a isso, tem-se notado nos últimos anos um crescente interesse no desenvolvimento de soluções numéricas para vigas mistas com conexão deformável, como pode ser verificado pela grande quantidade de publicações em periódicos especializados e dissertações e teses, como: Ayoub e Filippou (2000); Dall'Asta e Zona (2004a); Dall'Asta e Zona (2004b); Ranzi *et al.* (2006); Gara *et al.* (2006); Silva (2006); Silva e Sousa (2009), Silva (2010); Machado (2012); Skec *et al.* (2010); Sousa (2013), Lemes (2015); Lemes *et al.* (2017); Machado *et al.* (2017), entre outras.

A análise de elementos mistos se torna, em determinados aspectos, mais complexa que de elementos estruturais de aço ou de concreto armado, uma vez que devem ser consideradas características associadas ao comportamento do aço e do concreto de forma isolada, bem como do comportamento obtido da interação entre ambos os materiais. Pode-se citar, por exemplo, a não linearidade física, retração e fluência do concreto, o confinamento do concreto em elementos preenchidos, o deslizamento parcial e questões como a flambagem local e tensões residuais nos perfis como características a serem levadas em consideração (Oliveira, 2009).

Os procedimentos de análise e dimensionamento de elementos mistos apresentados em normas técnicas (Eurocode 4, 2004; AISC, 2005; ACI318, 2004 e NBR 8800, 2015) adotam simplificações, como a largura efetiva de contribuição da laje de concreto, seção homogeneizada, interação total entre os diferentes elementos constituintes, ou seja, conexão não deformável, que podem fornecer resultados não compatíveis com os da realidade. Resultados estes que geralmente são a favor da segurança, porém contra a economia.

O fato de simplificações de norma gera resultados muitas vezes não condizentes com a realidade, junto com a popularização de computadores cada vez mais eficientes motiva a implementação de métodos numéricos capazes de simular o problema, fazendo com que se obtenha resultados mais próximos da realidade. Com a utilização de computadores, é possível considerar, sem muito esforço, por exemplo, a interação parcial entre os elementos constituintes (conexão deformável) que é um dos objetivos deste trabalho.

Sommer (2002) realizou uma análise dinâmica de pisos mistos aço-concreto, sendo que sobre os pisos eram aplicados carregamentos correspondentes a atividades rítmicas. Para tal análise foi utilizado o programa computacional ANSYS (em sua versão 5.7), baseado em elementos finitos para simular a laje de concreto e elementos de barra (utilizando elementos tridimensionais), para as vigas de aço, garantindo a interação total entre os mesmos. O trabalho de Sommer (2002) difere do presente trabalho, devido ao tipo de interação ser total (conexão não deformável).

Moreira (2004) realizou uma avaliação comparativa de diversos tipos de pisos dentro de uma edificação em estrutura metálica, inclusive pisos mistos, sendo os pisos avaliados induzidos por cargas impulsivas e cargas oriundas do caminhar de pessoas. Porém em seu trabalho não foi levado em consideração o grau de interação na interface aço-concreto (considerando conexão não deformável), sendo o trabalho um caso geral do comportamento de pisos e não um caso específico do comportamento de pisos mistos.

Varela (2004), em sua tese de doutorado, realizou uma investigação se baseando em correlações das respostas dinâmicas num histórico de tempo, obtidas de forma teóricas e também experimentais em estruturas reais. Foram feitas modelagens simulando uma ou várias pessoas agindo no sistema estrutural.

Níveis irritantes de vibrações em piso, devido a movimentos humanos como caminhar e correr, se tornaram mais comuns durante as duas últimas décadas. Segundo Setareh (2006), os principais fatores que contribuem para este problema são: diminuição da massa do piso, resultante da utilização de materiais de construção de resistência mais elevados e sistemas mistos; diminuição da frequência natural de vibração do piso, devido à expectativa de piso mais longos; aumento no número de atividades rítmicas humanas, como aeróbica; e uma diminuição no amortecimento devido ao menor número de partições e itens de mobiliário e outros fatores que contribuem.

Mello *et al.* (2007) desenvolveu uma análise capaz de avaliar o conforto humano em pisos de edificações considerando modelos representativos de caminhar de pessoas. A sua análise buscou comprovar que o simples caminhar de pessoas sobre uma laje pode vir a gerar

níveis elevados de vibração, causando um desconforto aos seus usuários, pois estão fora dos critérios de conforto humano, bem como pode vir a causar deslocamentos e deformações excessivas no piso misto, podendo, raras vezes, comprometer a estrutura.

Mello *et al.* (2007) investigou ainda o comportamento dinâmico de vários modelos estruturais utilizados por Murray *et al.* (1997), sendo que em suas análises foi considerada a rigidez da coluna de aço. Em um primeiro momento, determinadas as frequências naturais e os modos de vibração, para que posteriormente fosse obtida a resposta dinâmica dos pisos mistos em termos de uma análise de suas acelerações máximas. Em sua análise, foi utilizado um modelo computacional, via método dos elementos finitos, sendo empregado o software ANSYS e posteriormente comparando os resultados com a literatura (Murray *et al.*, 1997) e (ISO 2631-2, 1989).

Em suas análises, Murray *et al.* (1997) idealizaram dois modelos de carregamentos com o intuito de representar a ação dinâmica gerada durante o caminhar de pessoas. O primeiro carregamento foi composto pela parcela estática, correspondente ao peso do indivíduo e uma combinação de harmônicos associados às excitações dinâmicas. Já no segundo carregamento foi incorporado o efeito do pico transiente representativo do impacto do calcanhar humano.

Varela e Battista (2011) apresentaram uma investigação através de testes em laboratório, onde o protótipo da plataforma de piso misto foi feita em escala real (1:1), medindo resultados para aplicação de cargas rítmicas, principalmente pelo caminhar de forma aleatório de pessoas. Onde para se compensar a falta de amortecimento foi instalado um sistema de controle passivo de amortecimento. O desempenho dos dispositivos de controle foi avaliado por meio de comparações entre as amplitudes de aceleração experimentais obtidos para a estrutura controlada e não controlada submetido a forças dinâmicas semelhantes produzidos por uma ou mais pessoas a pé.

Varela e Battista (2011) apresentaram ainda resultados relevantes das respostas no domínio do tempo e da frequência comprovando que dispositivos de controle passivo de amortecimento, pequenos e de baixo custo, já podem ser incluídos na fase de concepção de uma estrutura inteligente, pois são acessórios eficazes para reduzir substancialmente as vibrações induzidas por pessoas em pavimentos mistos de grande vão.

Lopes *et al.* (2012) investigaram a influência do grau de interação aço-concreto de pisos mistos (desde interação total até os vários níveis de interação parcial). A análise dinâmica realizada considera a não linearidade geométrica e que o piso em questão está sujeito a ações dinâmicas proporcionadas por atividades humanas que é o objeto de estudo deste trabalho,

porém, diferente do presente trabalho, a análise foi realizada via ANSYS, onde o grau de interação na interface foi realizado por meio de um elemento já contido no software.

Yaghin *et al.* (2014) realizaram um procedimento de análise, com o objetivo de avaliar também o conforto humano sob pisos mistos, visando uma avaliação mais realista para este tipo de estrutura quando está submetida à vibração devido ao simples caminhar de pessoas. Suas análises foram realizadas por meio do software ABAQUS sob carregamentos de pessoas se movimentando, sendo as colunas, vigas e lajes de concreto modeladas com elementos de placa. Yaghin *et al.* (2014) também realizou uma análise considerando o efeito dinâmico de um grupo de pessoas se movimentando em estruturas esbeltas.

## 2.7. Análise Dinâmica considerando IHE

Vários modelos apresentados na literatura incorporam a influência de pedestres atravessando uma estrutura flexível, porém a grande maioria não considera as interações dinâmicas com a superfície (Gomez *et al.*, 2018).

Intuitivamente, a massa da multidão poderia mudar as propriedades dinâmicas do sistema Homem-Estrutura, implicando a possibilidade de incluir a massa em modelos de força, levando-os a respostas mais precisas (Gomez *et al.*, 2018). Esta ideia já foi adotada para a Interação Veículo-Estrutura (IVE) e áreas similares (Pu e Liu, 2010).

Fujino *et al.* (1993) afirma que os pedestres aplicam uma força dependente do tempo razoavelmente periódica que pode ter várias direções: vertical, horizontal-lateral, horizontal-longitudinal, e afirma ainda que a avaliação da força produzida pelo movimento de um pedestre de forma precisa é essencial. Neste presente trabalho, apenas as vibrações na direção vertical serão consideradas.

Ebrahimpour *et al.* (1996) utilizaram plataformas instrumentadas para medir o deslocamento da estrutura durante uma caminhada, sendo as análises no domínio do tempo, onde, para prever a resposta de vibração, foi obtido um modelo analítico. Entre os modelos de força no domínio do tempo, as funções harmônicas são frequentemente utilizadas (Rainer *et al.*, 1988 e Yao *et al.*, 2002)). Alguns modelos probabilísticos do domínio do tempo podem ser encontrados em Ebrahimpour *et al.* (1996) e Živanović *et al.* (2007). Para domínio de frequência, Brownjohn *et al.* (2004) e Caprani *et al.* (2011) utilizaram modelos de força de caminhada em termos de suas densidades espectrais.

Ellis e Ji (1997) sugere que a multidão deve ser modelada como um sistema amortecido e não como um simples sistema de massa, que como geralmente é modelada. Este trabalho, datado de antes do acontecimento do ano 2000 na Passarela do Milênio, em Londres, que ocasionou o fechamento da passarela 3 dias após sua inauguração devido à excessivas vibrações, vem mostrar que já existia uma preocupação em se considerar a Interação Homem-Estrutura (IHE), porém ainda era muito tímida esta preocupação. Ao longo do tempo, com o avanço computacional, novos modelos de sistemas Massa-Mola-Amortecedor (MMA) vem sendo apresentados para modelagem do pedestre, partindo desde modelos mais simples, com apenas um grau de liberdade, até mais complexos, com  $n$  graus de liberdade (Figura 2. 12 a Figura 2. 14) porém todos eles apresentado resultados mais reais comparados aos resultados em que não se considera a IHE.

Ellis e Ji (1997) analisaram a influência da IHE, experimentalmente, utilizando uma arquibancada de um estádio de Rugby em Twickenham, distrito da Inglaterra. Onde perceberam que os espectadores quando parados (sentados ou em pé) agregavam massa para o sistema, sendo que no momento que começavam a pular de forma aleatória, percebia-se excessivas vibrações verticais.

Brownjohn (2001) realizou uma análise dinâmica de um piso misto de aço-concreto, considerando a conexão não deformável. Foram realizadas análises experimentais, sendo avaliados os modos de vibração do piso para um único ocupante, quatro ocupantes e para uma multidão em diferentes situações (sentada, pulando, entre outras). Em todas as análises o ocupante é tratado como um sistema MMA de dois graus de liberdade, considerando a IHE.

Pavic e Reynolds (2003) realizaram um extenso estudo, mostrando a importância de se considerar a IHE. Este trabalho foi baseado em dois aspectos: como o movimento estrutural influenciava nas forças dinâmicas aplicadas pelo homem na própria estrutura; e como que os ocupantes influenciam nas propriedades dinâmicas da estrutura (massa, rigidez e amortecimento), mostrando que em ambos os casos a IHE pode influenciar de forma considerável. Pavic e Reynolds (2003) afirmam que a sincronização não intencional dos pedestres para os movimentos da estrutura é um caso de IHE.

As estruturas podem ser analisadas via Método da Superposição Modal ou via Método da Integração Direta Método, sendo que em ambas é utilizado o Método dos Elementos finitos (MEF) na discretização da estrutura.

Os pedestre podem ser modelados de diferentes formas: uma forma mais simplória, que é como uma força em movimento (FM), conhecida na literatura como “força dura”, ou seja, considerar que uma carga concentrada viaja a uma velocidade constante pela estrutura (Machado, 2012 e Machado *et al.*, 2017), sendo que este tipo de análise pode superestimar a resposta da passarela, visto que não considera a interação da estrutura com o seu usuário (Fanning *et al.*, 2005). Outra forma, um pouco mais realista, é utilizar um modelo que possa simular a interação em massa do pedestre com a estrutura, chamado de Modelo Massa Móvel (MM), desenvolvido por Biggs (1964). Porém, um modelo mais realista seria modelar o pedestre como um sistema MMA (Zhang *et al.*, 2000), visto que considera a separação dos centros de massas do pedestre e da estrutura, devido a consideração, além da massa, da rigidez e amortecimento do sistema.

Živanović *et al.* (2005) realizaram um extenso estudo a respeito de vibrações em passarelas induzidas pelo ser humano, incluindo a IHE, verificando que existe um grau de sincronização entre as pessoas dentro da multidão, pois o ritmo tende a ser ajustado ao

movimento da passarela. Živanović *et al.* (2005) apontam alguns fatores que podem influenciar no grau da sincronização: frequência natural da passarela excitada por uma multidão andando, amplitude da resposta da passarela, número de pessoas envolvidas, densidade e velocidade das pessoas.

De acordo com Caprani e Ahmadi (2016), o estudo mais aprofundado sobre o a representação do usuário como um sistema MMA foi introduzido por Archbold (2004) na área de IHE, apesar de já haver estudos sobre a IHE anteriormente, principalmente depois do ocorrido com a Passarela do Milênio no ano 2000.

Archbold (2008) utilizou um modelo de sistema MMA em um programa em elementos finitos comercial, com sincronização de multidão, e descobriu que a resposta de vibração prevista não é linearmente proporcional ao nível de sincronização da multidão, porém nenhuma formulação analítica foi apresentada para o modelo utilizado.

Kim *et al.* (2008) também utilizaram um modelo MMA de dois graus de liberdade para os pedestres, concluindo que a análise dinâmica usando um modelo de “força dura” no domínio do tempo, pode não prever bem as respostas de vibração em comparação com as do modelo MMA.

Além da interação em massa, os pesquisadores sugeriram que pedestres andando podem adicionar amortecimento à vibração de estruturas na direção vertical (Willford, 2002), assim, modelar os pedestres como absorvedores de vibração poderiam explicar como a massa humana provoca efeitos de amortecimento no sistema.

Živanović *et al.* (2005) realizaram um estudo de vibrações provocadas por pedestres e o conforto dos usuários, tendo comprovado que os pedestres são as mais importantes fontes de vibração em passarelas.

Um modelo matemático e computacional, desenvolvido por Bruno e Venuti (2009), buscou simular o fenômeno da excitação lateral oriunda do caminhar de uma multidão de pedestres sobre uma passarela. Modelo esse utilizado por Bruno e Venuti (2009) para simular um evento real no Japão, mostrando excelente concordância dos resultados reais com o simulado.

Caprani *et al.* (2011) *apud* Venuti *et al.* (2014) utilizam um modelo de multidão, com parâmetros de pedestres individualizados, mas com um único harmônico para a função de força dos pedestres, sendo o modelo utilizado baseado no sistema MMA, considerando a IHE.

Caprani *et al.* (2011) realizaram ainda uma análise de vibração vertical característica de uma passarela flexível sujeita a carga de multidão, onde o efeito de multidão é medido multiplicando-se o efeito para um único pedestre por um fator pré-determinado. A estrutura

analisada trata-se de uma viga com massa de 500kg/m, tendo 50m de comprimento e 2m de largura, tendo sido modelada por elementos de barra e realizadas análises modais e via integração direta de Newmark.

Sullivan *et al.* (2012) analisam uma passarela mista com conexão não deformável entre a laje de madeira e as vigas de suporte da laje. Utilizaram em suas análises um modelo discretizados em elementos finitos de viga baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, sendo resolvido por integração direta de Newmark, considerando o amortecimento proporcional de Rayleigh. As análises consideram apenas um pedestre caminhando sobre a passarela mista, porém este pedestre foi considerado como uma força movimento, como uma massa em movimento e por fim como um sistema massa-mola-amortecedor, ou seja, realizaram análises com e sem IHE, de forma a poder comparar os resultados de ambas, mostrando mais uma vez a importância de se considerar a IHE.

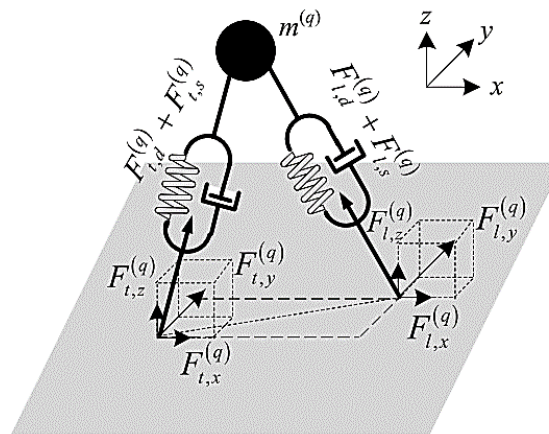
Silva *et al.* (2013) examinaram a IHE devido a uma multidão colocando os sistemas MMA estacionários nos nós de um modelo de elemento finito para passarela, confirmando que as multidões estacionárias contribuem para uma mudança nas propriedades dinâmicas do sistema.

Behnia *et al.* (2013) realizaram uma análise de um piso misto de um edifício existente, considerando a conexão não deformável. Devido à complexidade do piso em questão, foram utilizados elementos finitos de viga, placa e casca para análise numérica modal, utilizando o SAP2000/ Standard, onde foram considerados 6, 12, 18, 24, 30 e 36 modos de vibração, para verificação da quantidade de modos necessários para a obtenção de melhores resultados. Os resultados foram obtidos considerando uma multidão caminhando e pulando, tendo sido considerada a IHE.

Qin *et al.* (2013) e Gao *et al.* (2018) apresentaram um sistema 3D de IHE, para aplicações gerais, baseado no modelo biomecânico do ser humano. O pedestre é modelado como um sistema móvel com uma massa e duas pernas como subsistemas mola-amortecedor, conforme Figura 2. 15. Qin *et al.* (2013) realizou análise apenas para um único pedestre, porém, este modelo é capaz de simular melhor a interação de multidão-estrutura, pois consegue reproduzir melhor as forças de reações entre os pés e a estrutura, obtendo valores mais semelhantes aos medidos em campo, sendo utilizado por Gao *et al.* (2018) para analisar um efeito de multidão. O exemplo utilizado por Gao *et al.* (2018) foi o mesmo utilizado por Qin *et al.* (2013), sendo uma passarela constituída de concreto. Foram realizadas, em ambos, uma análise modal, sendo a estrutura modelada por elementos de vigas de Euler-Bernoulli.



Figura 2. 15. Diagrama de forças de reação da superfície



Fonte: Gao *et al.* (2018)

Debona *et al.* (2014) realizou investigações sobre o comportamento dinâmico de passarelas mistas aço-concreto com conexão não deformável. Foi utilizado uma passarela real de 82,5m (Figura 2. 16), composta por treliças em perfis tubulares de aço e laje de concreto, que apresentava vibrações excessivas nas direções lateral e longitudinal. Confrontando resultados experimentais com numéricos para o caminhar de pedestres.

Figura 2. 16. Passarela mista de aço-concreto com conexão não-deformável



Fonte: Debona *et al.* (2014)

Testes com 150 pedestres caminhando em uma passarela de aço em Cingapura, foram realizados por Brownjohn *et al.* (2004), constatando que houve um aumento no amortecimento da estrutura. Silva *et al.* (2016) também relataram modificações nos amortecimentos geradas pelo caminhar de pedestres em passarelas mistas de aço-concreto.

Zhang *et al.* (2015) construiu um modelo do corpo humano na posição sentada com 17 graus de liberdade, incluindo o suporte do encosto e a interação entre os pés e a superfície (IHE). Três tipos de modelos humanos biodinâmicos são levados em consideração: o primeiro modelo não inclui a interação entre os pés e o chão, o segundo considera a interação dos pés e

chão usando uma mola de alta rigidez e o terceiro inclui a interação usando uma mola macia. Os resultados da simulação indicam que a interação entre os pés e a superfície exerce um efeito não desprezível sobre o desempenho do conjunto na vibração do corpo.

Salyards e Hua (2015) realizaram análises experimentais e numéricas (via SAP2000) em um piso misto com conexão deformável. Na modelagem pelo SAP2000 a estrutura foi simulada com elementos finitos de barra para as vigas e de placa para a laje de concreto. As análises foram realizadas para 1, 4, 8, 16 e 19 ocupantes (caracterizando o efeito de multidão), em três posições diferentes: em pé com a perna reta; em pé com joelhos semi-flexionados e sentados. Nos três casos os ocupantes do piso estavam parados. As análises levaram à conclusão que os ocupantes agregam amortecimento ao sistema.

**Figura 2. 17.** Teste experimental com relação de massa de 0,431 para 19 pessoas com joelhos semi-flexionados



Fonte: Salyards e Hua (2015)

Van Nimmen *et al.* (2015) estudou a influência da presença de pedestres estacionários na resposta dinâmica de passarelas utilizando um modelo de sistema MMA para análise modal, concluindo que a presença de pessoas em diferentes posições afeta o comportamento dinâmico do indivíduo-estrutura.

Duarte *et al.* (2015) avaliaram o conforto humano em uma passarela mista de aço-concreto, com conexão não deformável (interação total), localizada na cidade do Rio de Janeiro/RJ (Figura 2. 18). A análise dinâmica foi realizada por meio de modelagem numérica no Software ANSYS (Figura 2. 19), onde a passarela foi modelada utilizando-se elementos de barra (BEAM44) para as vigas e colunas metálicas e elementos de casca (SHELL63) para a laje de concreto, sendo ainda utilizado o elemento LINK8 para simular a conexão não-deformável.

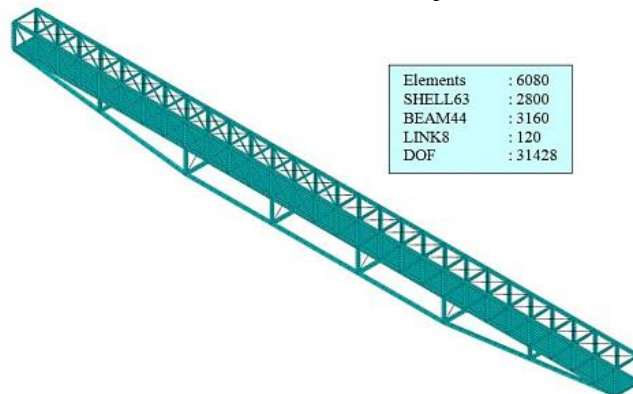
Já para representar o pedestre foram utilizados de forma combinada, os elementos MASS21 e COMBIN14, caracterizando um sistema MMA, sendo capaz de simular a IHE (Figura 2. 20). As análises em ambos os trabalhos foram realizadas considerando 46, 56, 70, 92, 112 e 140 pedestres. Além das análises considerando a IHE, todas também foram realizadas sem considerar a IHE (considerando a “força dura”), sendo comparados os resultados obtidos em ambas as análises e com guias de aceitabilidade.

Figura 2. 18. Vista da passarela investigada



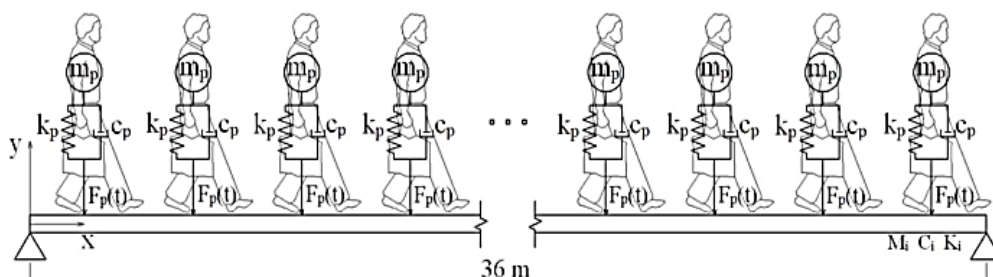
Fonte: Silva *et al.* (2016)

Figura 2. 19. Modelo em elemento finito de uma passarela mista de aço-concreto



Fonte: Silva *et al.* (2016)

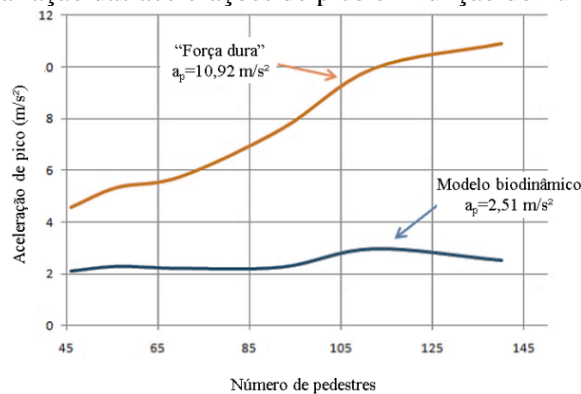
Figura 2. 20. Modelo com interação dinâmica pedestre-passarela



Fonte: Silva *et al.* (2016)

Os resultados obtidos por Duarte *et al.* (2015) comprovam que considerar a IHE tem influência considerável nos resultados, pois fornece resultados de acelerações de pico aproximadamente 4 vezes menor do que com a análise utilizando “força dura” (Figura 2. 21). É facilmente perceptível, principalmente quando se compara com guias de aceitabilidade, onde para “força dura” não era aceitável, quando se considera a IHE percebe-se que são obtidos valores aceitáveis de acelerações em muitos dos casos (Tabela 2. 2).

**Figura 2. 21.** Variação das acelerações de pico em função do número de pedestres



Fonte: Adaptada de Duarte *et al.* (2015)

**Tabela 2. 2.** Avaliação dos valores das acelerações de pico com base no guia de projeto SETRA (2006)

Número de pedestres	Aceleração de pico (m/s <sup>2</sup> )		Conforto humano	
	Força dura	Modelo biodinâmico	Força dura	Modelo biodinâmico
46	4,59	2,09	Inaceitável	Mínimo
56	5,35	2,27	Inaceitável	Mínimo
70	5,78	2,20	Inaceitável	Mínimo
92	7,62	2,24	Inaceitável	Mínimo
112	9,95	2,97	Inaceitável	Inaceitável
140	10,92	2,51	Inaceitável	Inaceitável

Fonte: Adaptada de Duarte *et al.* (2015)

Silva *et al.* (2016) analisaram a mesma passarela analisada por Duarte *et al.* (2015), tendo obtido resultados um pouco diferentes, devido ao espaçamento entre os usuários serem diferentes. Os resultados obtidos por Silva *et al.* (2016) e comparados com o guia SETRA (2006) são dados pela Tabela 2. 3.

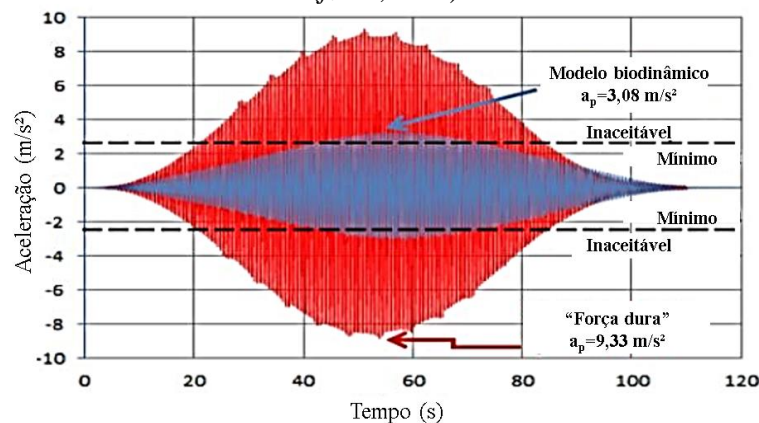
**Tabela 2. 3.** Comparação entre os valores de picos de aceleração obtidos pelos guias de projeto e o estudo de Silva *et al.* (2016)

Número de pedestres caminhando na passarela	Guia de projetos (SETRA, 2006) $a_p$ (m/s <sup>2</sup> )	Interação dinâmica Pedestre-Estrutura (Modelo biodinâmico) $a_p$ (m/s <sup>2</sup> )
46	2,20	1,86
56	2,41	2,03
70	2,66	3,08
92	2,99	2,57
112	3,24	2,83
140	3,53	2,96

Fonte: Adaptada de Silva *et al.* (2016)

A Figura 2. 22 mostra a comparação da aceleração vertical produzida por 70 pedestres caminhando, considerando os pedestres como “força dura” e como modelo biodinâmico, comparando ainda com os níveis aceitáveis.

**Figura 2. 22.** Aceleração vertical, no domínio do tempo, produzido por 70 pedestres caminhando na laje de concreto com a frequência de passo ( $f_p=1,80\text{Hz}$ ), perto da frequência fundamental da passarela ( $f_{01}=1,82\text{Hz}$ )



Fonte: Adaptada de Silva *et al.* (2016)

As respostas dinâmicas da passarela obtidas em Silva *et al.* (2016) foram comparadas com os valores limites propostos por vários autores e padrões de projeto. Os resultados indicam que os modelos de carregamento biodinâmicos levam a valores máximos de aceleração mais baixos do que os produzidos pelos modelos tradicionais, como por exemplo para a análise com 70 pedestres, onde os métodos tradicionais acusam 9,33 m/s<sup>2</sup>, utilizando a IHE, a aceleração cai para 3,08 m/s<sup>2</sup>, fornecendo evidências de que o efeito da IHE deveria ser considerado quando passarelas mistas estão sujeitas ao fluxo de pedestres.

As acelerações de pico ( $a_p$ ), obtidas do guia de projeto internacional (SETRA, 2006) são da mesma ordem de grandeza das obtidas através da análise dinâmica utilizando os modelos

biodinâmicos, como observado na Tabela 2. 3. No entanto, deve ser enfatizado que esses guias considera um único grau de liberdade (S1GL) e não incluem as características dinâmicas dos pedestres. Por outro lado, a mesma ordem de grandeza da resposta de acelerações de pico, obtida com base em abordagens muito diferentes mostra a consistência dos resultados determinados pelo uso dessa metodologia de análise desenvolvida nesta investigação (modelagem biodinâmica), quando comparado com fórmulas simplificadas, como visto na Figura 2. 22, onde é comparado com as respostas para a “força dura”.

Silva *et al.* (2016) avaliaram também as frequências naturais da passarela obtidas para a configuração forçada, devido à presença dos usuários, considerando assim a IHE, como mostrado na Tabela 2. 4, onde percebe-se que as frequências naturais da passarela diminuem à medida que se agrega massa ao sistema, sendo mais perceptíveis para as frequências referentes ao primeiro modo de vibração.

**Tabela 2. 4.** Frequências naturais da passarela considerando interação dinâmica pedestre-passearela

Frequências naturais (Hz)	Número de pedestres caminhando na passarela					
	46	56	70	92	112	140
f <sub>01</sub>	1,83	1,83	1,82	1,78	1,77	1,73
f <sub>02</sub>	2,27	2,27	2,27	2,27	2,27	2,27
f <sub>03</sub>	2,34	2,34	2,33	2,33	2,32	2,31
f <sub>04</sub>	4,71	4,72	4,73	4,74	4,75	4,78
f <sub>05</sub>	5,62	5,62	5,63	5,63	5,63	5,63
f <sub>06</sub>	6,79	6,79	6,79	6,79	6,79	6,79

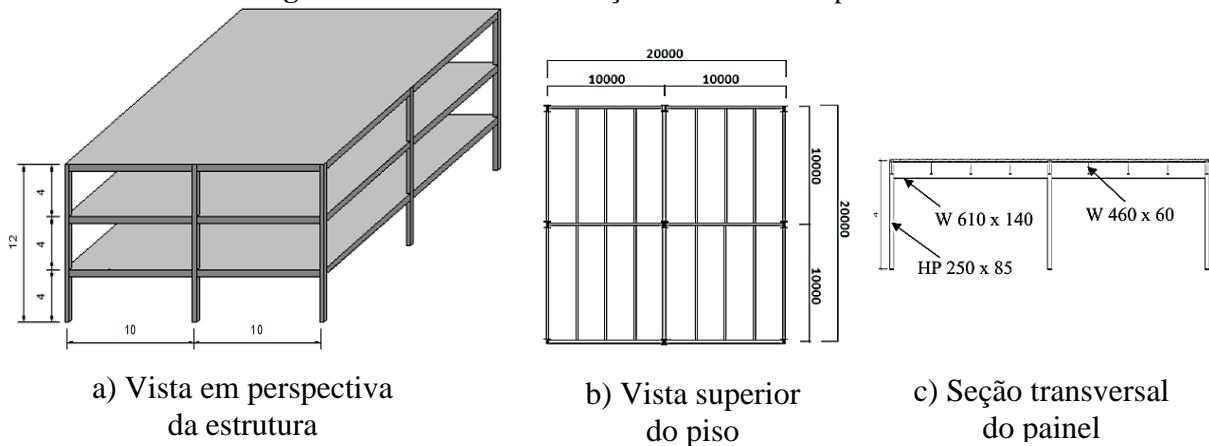
Fonte: Silva *et al.* (2016)

Caprani e Ahmadi (2016) realizaram análises numéricas, via integração direta e superposição modal em uma passarela hipotética de 50 m de comprimento, representada por uma viga metálica, sendo realizadas análises considerando o indivíduo como força e massa em movimento, ambas desconsiderando a IHE, tendo também realizado análises considerando a IHE. Todas as análises foram realizadas para um único pedestre e depois expandida para uma multidão com movimentos previamente determinados, posteriormente para uma multidão com movimentos aleatórios, e por fim foram considerados 100 multidões aleatórias, visando encontrar valores médios para uma maior amostragem. Foram utilizados dados destes autores para o Exemplo 6 deste trabalho.

Venuti *et al.* (2016) realizaram estudos em uma passarela virtual de 100m de comprimento e 3m de largura, sendo considerada a IHE para uma análise de múltiplos pedestres atravessando a passarela de forma aleatória. O material constituinte da passarela não é definido, porém as massas modais da passarela são iguais a 25, 50, 150 e 250 toneladas.

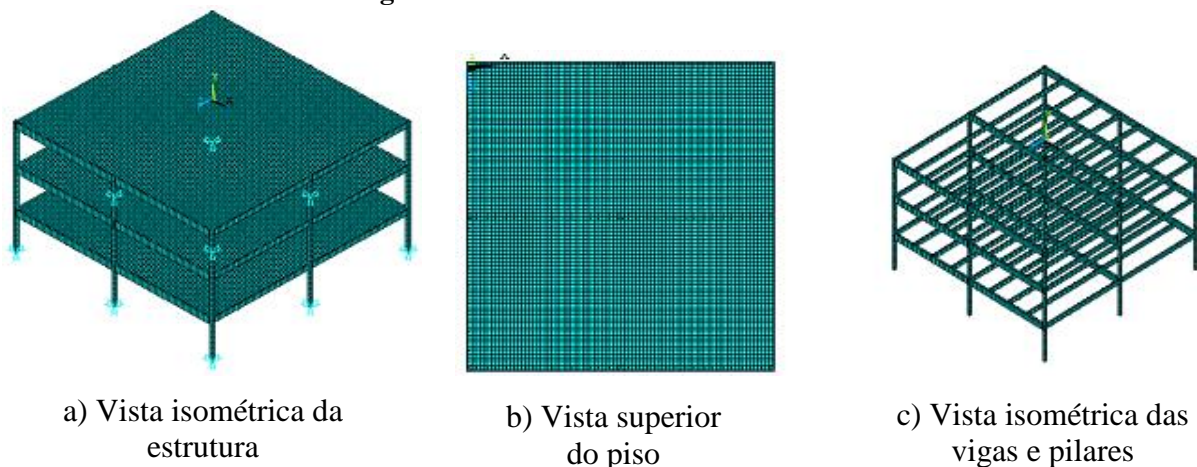
Campista e Gaspar (2016) realizam um estudo do efeito da IHE representado por modelos biodinâmicos, ou seja, sistema MMA acoplado à estrutura, tendo sido investigado pelos autores, um modelo estrutural de três andares utilizado para aulas de ginástica (Figura 2. 23). Para a modelagem em Elementos Finitos, Campista e Gaspar (2016) utilizaram o ANSYS, tendo sido utilizado elementos de barra para as vigas e elementos de casca para a laje de concreto do piso misto, considerando interação completa, como visto na Figura 2. 24. A resposta estrutural dinâmica do modelo analisado foi feita com base nas acelerações de pico, RMS e VDV. Foram utilizados dados destes autores para o Exemplo 8 deste trabalho.

**Figura 2. 23.** Piso misto de aço-concreto com 3 pavimentos



Fonte: Adaptada de Campista e Gaspar (2016)

**Figura 2. 24.** Modelo em elementos finitos



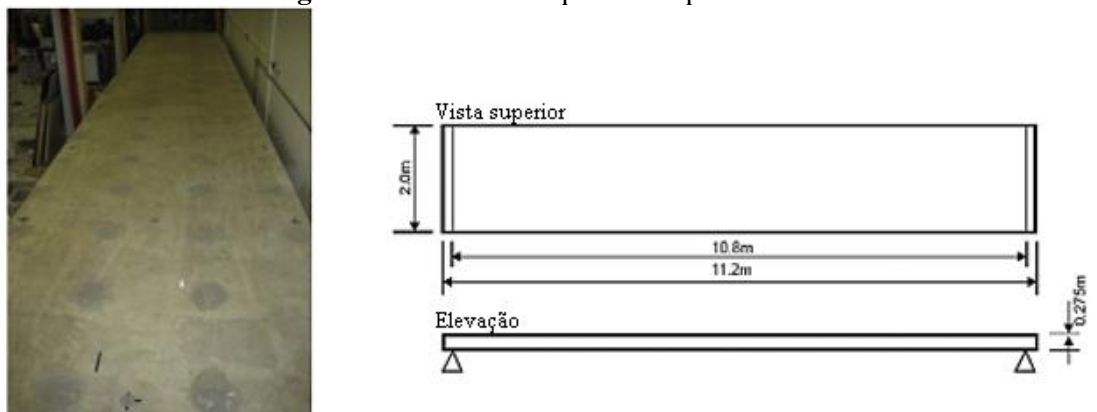
Fonte: Adaptada de Campista e Gaspar (2016)

Van Nimmen *et al.* (2017) apresentaram um modelo detalhado de multidões, aplicado para investigar a influência da interação vertical Homem-Estrutura na resposta dinâmica de passarelas sob excitação de pedestres. Cada pedestre foi modelado como um sistema MMA de

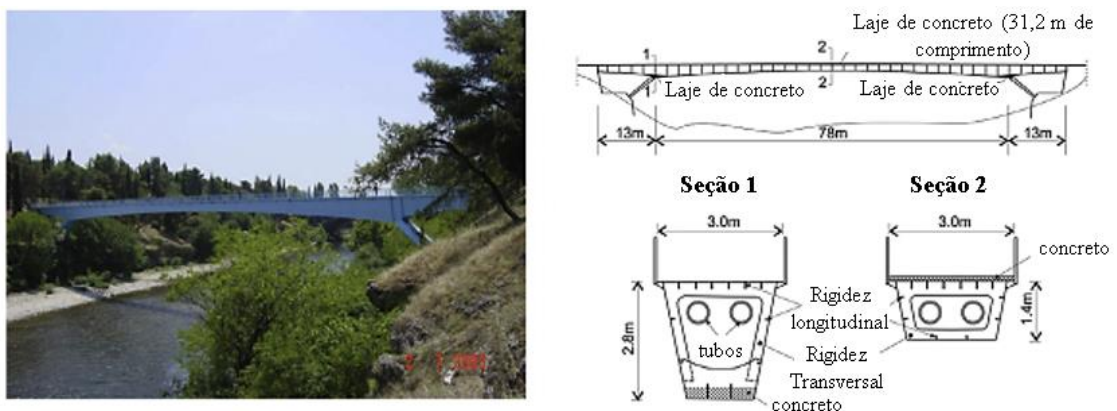
um grau de liberdade e as análises experimental e modal da passarela metálica foram realizadas para 30, 75, 120, 150 e 225 pedestres.

Shahabpoor *et al.* (2016) analisaram duas passarelas em escala real: uma passarela de concreto pós-tensionada na Universidade de Sheffield (Figura 2. 25a) e uma passarela de viga caixa em aço localizada em Podgorica, capital do Montenegro (Figura 2. 25b). A passarela de Podgorica, apesar de ter laje de concreto, não foi tratada no referido trabalho como uma estrutura mista, mas apenas de aço, sendo que o concreto foi apenas considerado como um acréscimo de massa ao sistema. As análises foram realizadas para uma multidão de pedestres considerando a IHE e também a interação solo-estrutura (ISE), como visto no modelo representado na Figura 2. 26, tendo sido realizada a análise modal e integração numérica de Beta-Newmark e Runge Kutta.

Figura 2. 25. Fotos e esquemas de passarelas



a) Passarela de Universidade de Sheffield

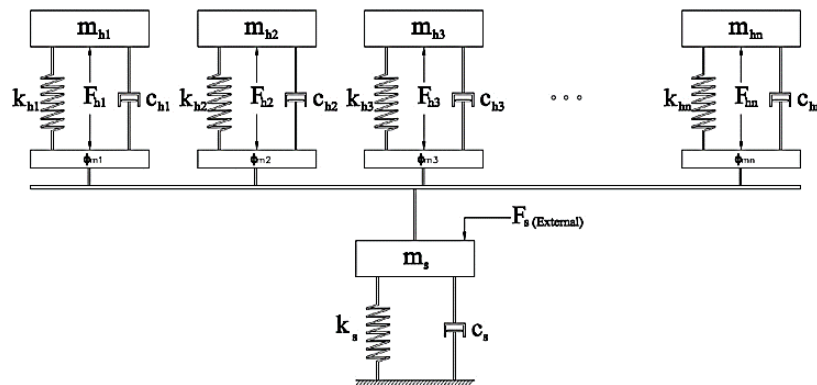


b) Passarela de Podgorica

Fonte: Adaptada de Shahabpoor *et al.* (2016)



Figura 2. 26. Modelo massa-mola-amortecedor de um sistema estacionário de estrutura de tráfego



Fonte: Shahabpoor *et al.* (2016)

Toso *et al.* (2017) realizaram uma análise numérica e experimental de uma passarela mista de aço-concreto considerando a IHE. A estrutura, situada em Brasília, foi modelada no MATLAB e utilizou-se a integração numérica de Newmark para obter as respostas de deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo.

Gomez *et al.* (2018) apresentaram um modelo que se mostrou eficaz na modelagem dinâmica associada à IHE, tendo sido realizado uma série de experimentos, envolvendo pessoas caminhando em diferentes condições. O modelo foi validado, pois se mostrou capaz de reproduzir complexos padrões de vibração, visto que os resultados obtidos demonstraram que o modelo IHE oferece uma abordagem eficaz e confiável para simulação da estrutura.

Gomez *et al.* (2018) realizaram estudos em um piso rígido, sendo o carregamento humano tratado inicialmente como uma “força dura”, como tradicionalmente é tratado pela maioria dos autores, ou seja, não considera a IHE. Em seguida foi construída uma passarela, representada por uma viga de aço apoiada em dois blocos de concreto, como pode ser visto na Figura 2. 27, tendo sido realizadas análises experimental e numérica (Integração direta) para um indivíduo trafegando por vez na passarela, sendo neste caso considerada a IHE.

**Figura 2. 27.** Passarela em viga de aço



Fonte: Gomez *et al.* (2018)

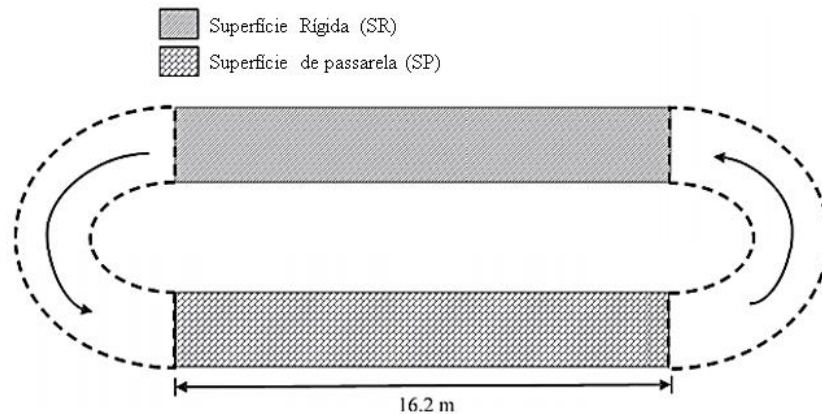
Ahmadi *et al.* (2018) realizaram análise experimental-numérica em uma passarela mista de aço-concreto, considerando uma parte rígida e outra flexível, como mostrada na Figura 2. 28 e Figura 2. 29, sendo medidas as acelerações em cada parte da passarela com acelerômetros. A análise numérica foi realizada por meio da simulação de Monte Carlo. A conexão na interface é deformável, tendo se considerado nas análises a IHE.

**Figura 2. 28.** Passarela Warwick



Fonte: Ahmadi *et al.* (2018)

Figura 2. 29. Esquema do caminho de ensaios de caminhar (Passarela Warwick)



Fonte: Adaptada de Ahmadi *et al.* (2018)

Diversos trabalhos (dissertações e teses) do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual do Rio de Janeiro, tais como: Lima (2007), Langer (2009), Debona (2011), Gonçalves (2011), Zuniga (2011), Feitosa (2012), Souza (2012), Gaspar (2013), Mendes (2014), Campista (2015), Figueiredo (2015), Pena (2015), Duarte (2016), Debona (2016) e Aguiar (2017), estudaram o comportamento dinâmico de pisos/ passarelas mistas de aço-concreto, porém, apenas dois destes levaram em consideração a IHE (Duarte, 2016 e Debona, 2016), sendo que em nenhum deles a conexão era deformável, ou seja, a conexão na interface foi considerada não-deformável em todos os trabalhos.

A Tabela 2. 5, mostra, assim como ao longo da revisão bibliográfica realizada neste presente trabalho, que a IHE começou a ser estudada antes mesmo do ocorrido na Passarela do Milênio em 2000, porém realmente ganhou destaque após este episódio. Sendo dada uma ênfase em trabalhos a partir de 2010 na Tabela 2. 5, pois antes de 2010 poucos trabalhos contemplavam a IHE para estruturas mistas, tendo sido citado apenas um deles (Bownjohn, 2001).

Foram citados na Tabela 2. 5 outros 30 trabalhos contemplando a IHE, e destes apenas 15 levaram em consideração estruturas mistas, e destes nenhum levou em consideração a conexão deformável, portanto, até onde o autor tem conhecimento, devido a vasta pesquisa realizada, não existe nenhum trabalho considerando de forma simultânea estruturas mistas com conexão deformável e IHE. Em todos os exemplos encontrados, onde a análise é de uma estrutura mista, considerando a IHE, a conexão é não deformável (interação total).

Nota-se ainda da Tabela 2. 5 que a modelagem da estrutura é feita utilizando em sua maioria elementos finitos de viga, sendo que, quando se trata de estrutura mista ou mesmo um piso, utiliza-se elementos de placa ou casca. Os elementos de casca são utilizados principalmente quando se utiliza de softwares comerciais como o ANSYS e o SAP quando se

analisa uma passarela (que tem uma dimensão muito maior do que a outra) geralmente se utiliza elementos de vigas, porém como já visto, a resposta pode ser influenciada pelo efeito “*shear lag*” em se tratando de estruturas mistas. Logo, o objetivo do presente trabalho é fazer a análise de pisos e passarelas mistas, considerando a conexão deformável e a IHE.

Outra observação importante é que poucos trabalhos comparam as respostas obtidas por modelos que consideram o pedestre apenas como uma “força dura”, com as respostas obtidas considerando o pedestre como um sistema MMA.

Tabela 2. 5. Estudo de modelos encontrados na literatura para passarelas considerando carregamento simples ou de multidão

Referência	Composição Estrutura			Conexão Deformável		Modelo Estrutura (Tipo de EF)			Modelo humano			Carregamento	
	Aço	Concreto	Mista	Sim	Não	Casca	Placa	Viga	FM	MM	MMA	Simplex	Multidão
Ellis e Ji (1997) <sup>1</sup>		*		-	-	-	-	-			*		*
Brownjohn (2001) <sup>1</sup>			*		*	-	-	-			*	*	*
Živanović <i>et al.</i> (2010) <sup>1</sup>			*		*	-	-	-			*		*
Caprani <i>et al.</i> (2011) <sup>2</sup>	*	*						*	*		*	*	*
Sullivan <i>et al.</i> (2012)			*		*			*	*	*	*	*	*
Piccardo e Tubino (2012) <sup>3</sup>	*			-	-			*			*		*
Caprani <i>et al.</i> (2012)		*		-	-			*			*	*	*
Carroll <i>et al.</i> (2012)	*			-	-			*			*	*	*
Qin <i>et al.</i> (2013)		*		-	-			*			*	*	
Behnia <i>et al.</i> (2013)			*		*	*	*	*			*		*
Gajalakshmi <i>et al.</i> (2014) <sup>3</sup>			*		*		*	*			*	*	
Salyards e Noss (2014) <sup>3</sup>	*			-	-		*	*			*		*
Villamizar <i>et al.</i> (2014) <sup>1</sup>			*		*	-	-	-			*		*
Duarte <i>et al.</i> (2015)			*		*	*		*	*		*		*
Salyards e Hua (2015) <sup>3</sup>			*		*		*	*			*	*	*
Ortiz-Lasprilla e Caicedo (2015) <sup>1</sup>		*		-	-	-	-	-			*	*	
Silva <i>et al.</i> (2016)			*		*	*		*	*		*		*
Caprani e Ahmadi (2016)	*			-	-			*	*	*	*	*	*
Venuti <i>et al.</i> (2016) <sup>2</sup>	*	*		-	-			*			*		*
Campista e Gaspar (2016)			*		*		*	*	*		*		*
Love <i>et al.</i> (2016) <sup>1</sup>			*		*	-	-	-			*		*
Archbold e Mullarney (2017) <sup>1,5</sup>			*		*	-	-	-			*	*	*
Toso <i>et al.</i> (2017)			*		*			*			*		*
Shahabpoor <i>et al.</i> (2016) <sup>4</sup>	*	*		-	-			*			*		*
Van Nimmen <i>et al.</i> (2017) <sup>1</sup>	*			-	-	-	-	-			*		*
Zhang <i>et al.</i> (2017) <sup>1</sup>	*			-	-	-	-	-			*	*	*
Ahmadi <i>et al.</i> (2017)			*		*			*	*		*	*	*
Han e Zhou (2017) <sup>3</sup>	*			-	-	*					*	*	
Gao <i>et al.</i> (2018)		*		-	-			*			*		*
Gomez <i>et al.</i> (2018)	*			-	-			*			*	*	

OBS: <sup>1</sup> A análise foi apenas Experimental, não tendo sido modelado o pedestre, porém foi considerada IHE; <sup>2</sup> pode ser aplicado para diferentes materiais; <sup>3</sup> Foi realizado também a análise experimental e/ou analítica; <sup>4</sup> Além da IHE, foi considerada a interação solo-estrutura; <sup>5</sup> A passarela é mista, porém não é aço-concreto; O hífen “-” significa NÃO SE APLICA, pois com relação à conexão se aplicam apenas à estruturas mistas, já com relação ao modelo da estrutura se aplicam apenas para análise numérica, e nestes a análise foi apenas experimental.

## **Capítulo 3**

---

### **Implementação dos Elementos de Placa, Barra e Interface**

### 3.1. Considerações Iniciais

Com o intuito de avaliar numericamente o problema de pisos mistos formados por uma laje de concreto ligada a vigas de aço longitudinais, transversais, ou em direções quaisquer, serão apresentadas nesse capítulo as formulações dos elementos finitos capazes de simular o comportamento de placas de concreto ligadas a vigas de aço, sendo utilizada uma conexão deformável na direção do eixo da viga. Os elementos finitos apresentados a seguir foram implementados em trabalhos anteriores (Silva, 2006; Silva, 2010; Dias, 2016) onde foram utilizados em análises de problemas estáticos. Já as implementações referentes a uma análise dinâmica, como a obtenção das matrizes de massa dos elementos, bem como a consideração da torção uniforme são contribuições desse trabalho.

Na construção civil, o caso mais comum de elemento estrutural misto, é representado por placas de concreto ligadas a vigas de aço por meio de conectores mecânicos, sendo encontradas em pisos e lajes de edifícios de múltiplos andares em estrutura de aço, em pontes mistas, passarelas, entre outras obras civis.

A simulação desse tipo de problema utilizando apenas elementos finitos de barra é possível definindo para a laje de concreto uma largura de contribuição, chamada de largura efetiva. No entanto, a concentração da força de cisalhamento na interface de contato da laje de concreto com a viga de aço gera uma variação da distribuição da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto. Essa variação (chamada na literatura de efeito “*shear lag*”) não pode ser avaliada pela análise de vigas podendo implicar em erros significativos, motivando a simulação do problema de uma forma mais complexa, utilizando-se elementos de placa para simular a laje de concreto, já as vigas de aço podem ser simuladas por elementos de barras.

A seguir são apresentadas as formulações dos elementos finitos de placa, viga e interface utilizados neste trabalho para análise dinâmica de pisos formados por lajes de concreto, vigas e pilares de aço. Esses elementos foram desenvolvidos por Silva (2006, 2010) e utilizados em análises estáticas de pisos formados por lajes de concreto e vigas de aço. Logo, as implementações referentes ao elemento de barra 3D, e análise dinâmica são contribuições deste trabalho. Esses elementos finitos foram implementados, como já dito, no FEMOOP (Guimarães, 1992).

Devido a análise do piso considerando a interação de todos os seus elementos estruturais (vigas, pilares e lajes), não é possível definir a superfície neutra dos elementos bidimensionais (lajes), havendo, portanto, a necessidade da consideração do efeito de membrana no elemento

plano de placa, o que força esse elemento ter 5 graus de liberdade por nó, quando se considera a teoria de placa de Reissner–Mindlin. Já o elemento de barra que simula as vigas será ligado à laje de concreto pelo elemento de interface. Dessa forma, ambos elementos de barra e interface devem ter graus de liberdade compatíveis com o elemento de placa. Em determinadas situações as colunas dos pisos serão consideradas nas análises. Como essas tem possibilidade de flexionares em mais de um plano, diferente das vigas, elas devem apresentar todos os seis graus de liberdade possível para um problema tridimensional.

Na Figura 3. 1 é mostrada a forma com que os elementos de placa, viga e interface se localizam no piso misto, bem como os eixos globais e algumas medidas importantes que serão explicadas posteriormente. Já a Figura 3. 2 mostra os graus de liberdade dos elementos de placa, viga e interface.

Figura 3. 1. Piso misto em perspectiva com os eixos globais

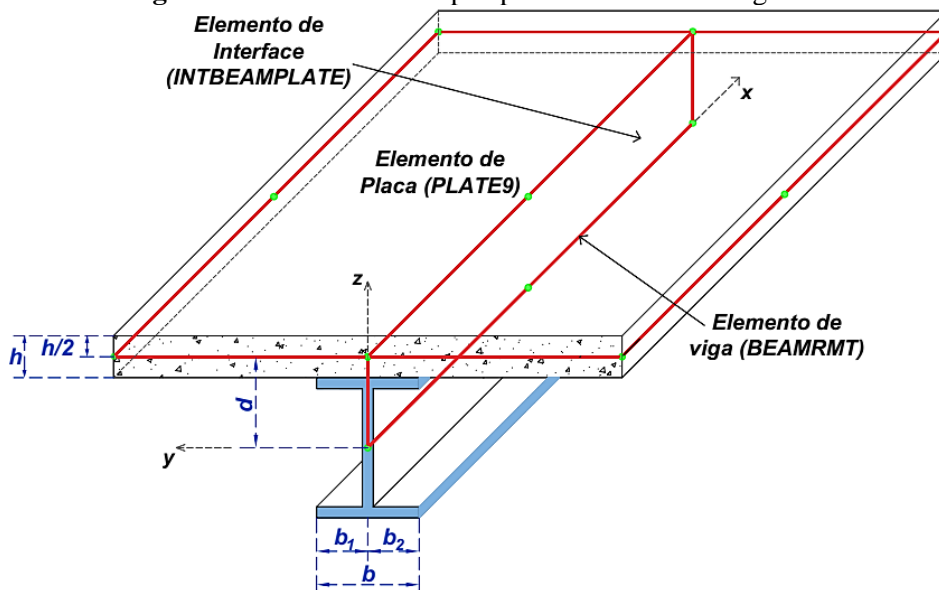
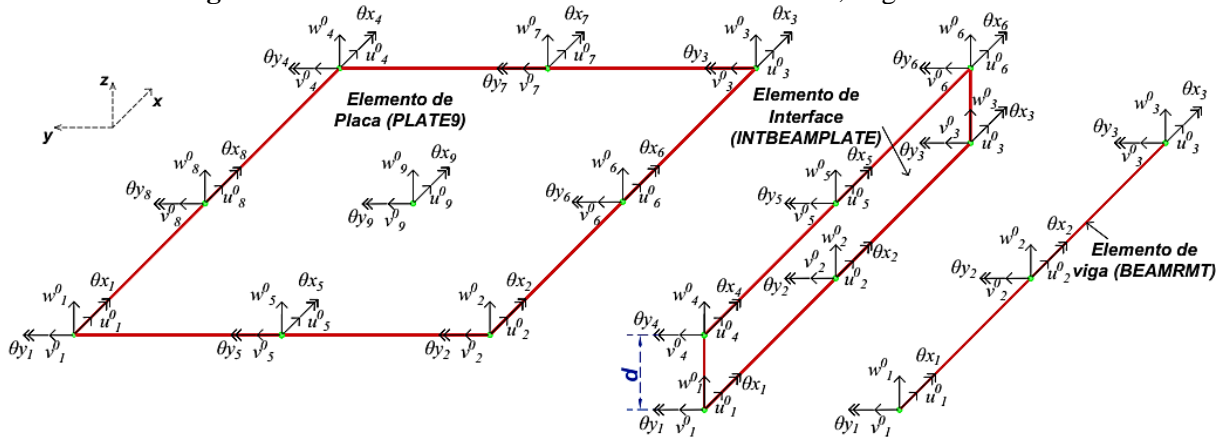


Figura 3. 2. Graus de liberdade dos Elementos de Placa, Viga e Interface



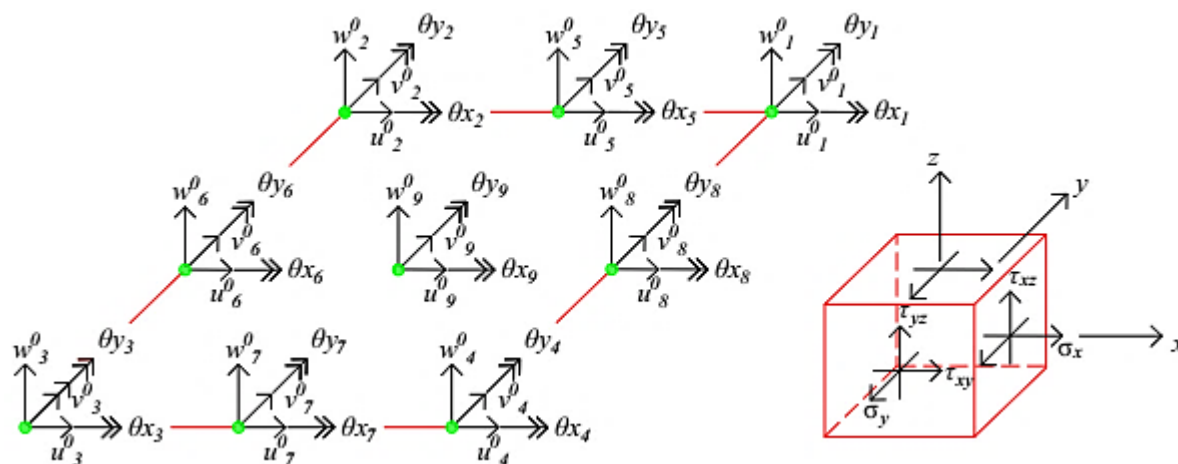


### 3.2. Elemento Plano de Placa (PLATE9)

#### 3.2.1. Matriz de rigidez

O elemento finito de placa utilizado neste trabalho é o elemento plano retangular de nove nós com cinco graus de liberdade por nó a nível local (Bathe, 1986). O elemento de placa, chamado nesse trabalho de *PLATE9*, considera, além do deslocamento vertical na direção de  $z$  e rotações em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , translações nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , como são mostrados na Figura 3. 3. No elemento tradicional de placa a superfície média é neutra quando se considera material homogêneo, linear e isotrópico, e carregamento perpendicular ao plano da placa. No entanto, neste trabalho mesmo considerando a placa de concreto homogênea, linear e isotrópica, não é possível identificar a posição da superfície neutra já que a conexão rígida ou semirrígida da laje com as vigas altera as posições das linhas neutras na laje e na viga.

Figura 3. 3. Graus de liberdade do elemento de placa e tensões em um elemento infinitesimal



Fonte: Adaptada de Silva (2010)

As hipóteses cinemáticas da teoria de placa de Reissner-Mindlin são consideradas, e diz que seções inicialmente planas e ortogonais à configuração indeformada permanecem planas após deformações, porém não mais ortogonais. Sendo assim, as equações dos deslocamentos para o elemento são:

$$u(x,y,z) = u^0(x,y) + z\theta_y(x,y) , \tag{3.1}$$

---

$$v(x,y,z) = v^0(x,y) - z\theta_x(x,y), \quad (3.2)$$

$$w(x,y,z) = w^0(x,y). \quad (3.3)$$

Presente nas Equações (3.1) a (3.3),  $u^0$ ,  $v^0$  e  $w^0$  representam os deslocamentos de translação da superfície média, ou em uma superfície de referência qualquer do elemento de placa nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ;  $\theta_x$  e  $\theta_y$  representam as rotações das seções em relação aos eixos  $x$  e  $y$ ;  $z$  é a posição da fibra em relação à superfície de referência ao longo da espessura do elemento plano de placa onde se deseja avaliar os deslocamentos. De forma a facilitar a notação, o subscrito zero será omitido nas equações seguintes.

Considerando pequenas mudanças de configurações e desprezando-se a variação de  $w$  com  $z$ , após a aplicação da relação de deformação-deslocamento de Green-Lagrange nas equações de deslocamentos (3.1) a (3.3), obtêm-se as equações das deformações dadas a seguir.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - z\theta_{x,y}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + z\theta_{y,y} + v_{,x} - z\theta_{x,x}), \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\theta_y + w_{,x}), \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(-\theta_x + w_{,y}). \quad (3.8)$$

Considerando que o material seja homogêneo, isotrópico e linear, ou seja, válida a relação tensão deformação da lei generalizada de Hooke, e desprezando a tensão normal na direção  $z$ , chega-se à relação tensão deformação dada pela equação

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde as constantes de Lamé  $\lambda$  e  $G$  são dadas por  $\lambda = \nu E / (1 - \nu^2)$  e  $G = 0,5E / (1 + \nu)$ . Sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal do material, e  $\nu$  o seu coeficiente de Poisson.

Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, aplica-se um campo de deformação virtual compatível ao elemento de placa deformável, obtendo,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (3.10)$$

onde:  $\delta$  é o operador variacional,  $\sigma_{ij}$  é o estado tensional real em um ponto qualquer no elemento plano de placa, e  $\delta \varepsilon_{ij}$  é o estado de deformação virtual em um ponto qualquer no elemento plano de placa, ou seja, a deformação obtida devido ao campo de deslocamento virtual aplicado ao elemento. Ao se aplicar o operador variacional nas Equações (3.4) a (3.8) das deformações, obtêm-se as equações dadas a seguir.

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x} + z \delta \theta_{y,x}, \quad (3.11)$$

$$\delta \varepsilon_y = \delta v_{,y} - z \delta \theta_{x,y}, \quad (3.12)$$

$$\delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (\delta u_{,y} + z \delta \theta_{y,y} + \delta v_{,x} - z \delta \theta_{x,x}), \quad (3.13)$$

$$\delta \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} (\delta \theta_y + \delta w_{,x}), \quad (3.14)$$

$$\delta \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} (-\delta \theta_x + \delta w_{,y}). \quad (3.15)$$

Despreza-se a tensão normal na direção  $z$  e substitui as Equações (3.11) a (3.15) na equação do princípio dos trabalhos virtuais (Equação (3.10)), obtendo-se a equação a seguir para o trabalho virtual interno.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \iiint_V [ & (\delta u_{,x} + z\delta\theta_{y,x})\sigma_x + (\delta v_{,y} - z\delta\theta_{x,y})\sigma_y + (\delta u_{,y} + z\delta\theta_{y,y} + \delta v_{,x})\tau_{xy} - \\ & - z\delta\theta_{x,x}\tau_{xy} + (\delta\theta_y + \delta w_{,x})\tau_{xz} + (\delta w_{,y} - \delta\theta_x)\tau_{yz} ] dV. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A integral é escrita ao longo do volume indeformado do elemento plano de placa na Equação (3.16), formulação lagrangiana tradicional. Sabendo que os variacionais dos deslocamentos são constantes em relação à espessura do elemento de placa (eixo  $z$ ), os esforços  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $Q_{xz}$ ,  $Q_{yz}$ ,  $M_y$ ,  $M_x$  e  $M_{xy}$  são definidos, como mostrado nas Equações (3.17) a (3.21), chegando-se então, à Equação (3.22) para o trabalho virtual interno do elemento plano de placa.

$$N_x = \int_h \sigma_x^c dz, \quad (3.17)$$

$$N_y = \int_h \sigma_y^c dz, \quad (3.18)$$

$$M_y = \int_h z\sigma_x^c dz, \quad (3.19)$$

$$M_x = \int_h z\sigma_y^c dz, \quad (3.20)$$

$$Q_{xz} = k \int_h \tau_{xz} dz, \quad Q_{yz} = k \int_h \tau_{yz} dz, \quad N_{xy} = \int_h \tau_{xy} dz, \quad M_{xy} = \int_h z\tau_{xy} dz, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \iint_A (\delta u_{,x} N_x + \delta\theta_{y,x} M_y + \delta v_{,y} N_y - \delta\theta_{x,y} M_x + \delta u_{,y} N_{xy} + \delta\theta_{y,y} M_{xy} + \\ + \delta v_{,x} N_{xy} - \delta\theta_{x,x} M_{xy} + \delta\theta_y Q_{xz} + \delta w_{,x} Q_{xz} - \delta\theta_x Q_{yz} + \delta w_{,y} Q_{yz}) dA. \end{aligned} \quad (3.22)$$

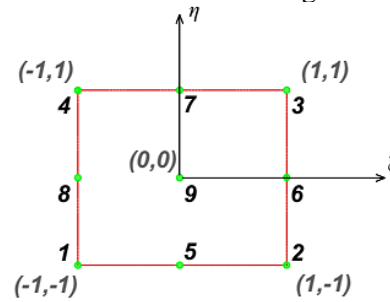
O fator  $k$ , presente na Equação (3.21), corresponde a uma correção no cálculo do esforço cortante devido à aproximação feita por causa da consideração de que seções planas permanecem planas após deformações, ou seja, a tensão cisalhante é constante ao longo da espessura do elemento plano de placa. O valor de  $k$  mais comumente utilizado é de  $5/6$ , mas depende da forma da seção transversal.

Considerando a aproximação por elementos finitos, baseado em deslocamentos, tem-se que as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais ( $\mathbf{q}$ ) representados pela Equação (3.23).

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad \dots \quad u_9 \quad v_1 \quad \dots \quad v_9 \quad w_1 \quad \dots \quad w_9 \quad \theta_{x1} \quad \dots \quad \theta_{x9} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad \theta_{y9}\}^T. \quad (3.23)$$

Como é utilizada a teoria de placa de Reissner–Mindlin na formulação do elemento tem-se que as rotações são independentes da translação podendo ser interpoladas independentemente. Como se trata de um elemento com nove nós, sendo três na direção  $\xi$  e três na direção  $\eta$ , devem ser adotadas funções de forma dadas por polinômios bi quadráticos, como mostrado nas Equações (3.24) a (3.29) a seguir. Nessas equações,  $\xi$  e  $\eta$  representam as coordenadas paramétricas do elemento finito retangular usado e ilustrado na Figura 3. 4.

Figura 3. 4. Elemento finito retangular de nove nós



$$N_{1..4} = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - \xi_i) (\eta - \eta_i), \quad (3.24)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1) (1 - \xi^2), \quad (3.25)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2), \quad (3.26)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}\eta(\eta-1)(1-\xi^2), \quad (3.27)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)(1-\eta^2), \quad (3.28)$$

$$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2). \quad (3.29)$$

As funções de interpolação dadas pelas Equações (3.24) a (3.29), serão representadas pelo vetor coluna  $\Phi$  de nove termos descrito a seguir.

$$\Phi^T = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9). \quad (3.30)$$

A Equação (3.31) a seguir representa os deslocamentos de translação e rotação na superfície de referência do elemento de placa da Figura 3. 3 aproximados pelas funções de interpolação (Equações (3.24) a (3.29)) aplicadas nos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ .

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ & \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ & & \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ & \mathbf{sim} & & \Phi^T & \mathbf{0}^T \\ & & & & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q}. \quad (3.31)$$

Na Equação (3.31),  $\mathbf{q}$  é um vetor coluna com seus termos dados por quarenta e cinco deslocamentos nodais e  $\mathbf{0}$  é um vetor coluna nulo com nove componentes. Sendo os deslocamentos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  funções dos deslocamentos nodais, onde os seus variacionais podem ser escritos a partir da seguinte equação:  $\delta a = \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} \right)$ , sendo  $\mathbf{q}$  o vetor dos deslocamentos nodais,  $\partial$  o operador diferencial e  $a$  substituído por  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ . Substituindo esses variacionais na Equação (3.22) chega-se ao trabalho virtual interno de um elemento plano de placa dado pela equação a seguir.

$$\delta W_{\text{int}} = \iint_A \left[ \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_x + \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_y + \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_y - \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_x + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} - \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \\
 & +\delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} - \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} ] dA. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

O trabalho virtual externo é dado por  $\delta W_{ext} = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{f}_{ext}$ , onde  $\mathbf{f}_{ext}$  é o vetor de forças externas nas direções dos graus de liberdade do elemento plano de placa. O vetor  $\mathbf{f}_{ext}$  é dado pelas forças externas aplicadas diretamente na direção dos graus de liberdade do elemento, e as forças nodais equivalentes obtidas a partir do carregamento externo atuando ao longo do elemento.

Da condição  $\delta W_{ext} = \delta W_{int}$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \iint_A \left[ \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_x + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_y + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_y - \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_x + \right. \\
 & \quad +\delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} - \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \\
 & \quad \left. +\delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} - \delta\mathbf{q}^T \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} \right] dA = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{f}_{ext}. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

A Equação (3.33) é válida para qualquer campo de deslocamento virtual compatível ( $\delta\mathbf{q}$ ), logo tem-se que:  $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{f}_{int}$  é o vetor de forças internas dado pela Equação (3.34):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{int} = \iint_A & \left[ N_x \left( \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + M_y \left( \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_y \left( \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_x \left( \frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xy} \left( \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\
 & \quad + M_{xy} \left( \frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xy} \left( \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_{xy} \left( \frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \\
 & \quad \left. + Q_{xz} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + Q_{xz} \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + Q_{yz} \left( \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) - Q_{yz} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) \right]. \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Reescrevendo da forma matricial o vetor de forças internas para o elemento plano de placa, temos a Equação (3.35).

$$\mathbf{f}_{int} = \iint_A \begin{bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_{xy} \Phi_{,x} + N_y \Phi_{,y} \\ Q_{xz} \Phi_{,x} + Q_{yz} \Phi_{,y} \\ -M_{xy} \Phi_{,x} - M_x \Phi_{,y} - Q_{yz} \Phi \\ M_y \Phi_{,x} + M_{xy} \Phi_{,y} + Q_{xz} \Phi \end{bmatrix} dA. \quad (3.35)$$

O método de Newton-Rapshon pode ser utilizado na solução do problema  $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$ , onde é comum a sua linearização através da aproximação da função dos deslocamentos nodais por sua expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem ( $\mathbf{f}(\mathbf{q}_{k+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_k) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{q}_k) \mathbf{d} = \mathbf{0}$ ). A solução do problema passa a ser um processo iterativo de soluções de problemas lineares a cada passo. Para o primeiro passo admite-se  $\mathbf{q}_0$ , então  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \mathbf{d}$ , com  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{q}_0) \mathbf{d} = -\mathbf{f}(\mathbf{q}_0)$ . Se o vetor de forças interna for linear em  $\mathbf{q}$  então com apenas uma iteração tem-se a solução, caso contrário o processo é repetido até que se tenha a solução com uma precisão desejada. Para solução do problema linear é necessária a determinação da matriz de rigidez tangente ( $\mathbf{K} = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{q}_0)$ ) obtida derivando o vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais, ou seja,

$$\mathbf{K} = \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_{,y} \left( \frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi \left( \frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left( \frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dA. \quad (3.36)$$

A derivada do esforço axial atuante na seção em relação aos deslocamentos nodais, na Equação (3.36), é dada por:



$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \int_h \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} \right) dz. \quad (3.37)$$

A partir da Equação (3.9), tem-se que  $\sigma_x = (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y$ , sendo assim, as derivadas em relação às deformações  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  são dadas respectivamente por  $\lambda + 2G$  e  $\lambda$ . As derivadas das deformações lineares em relação aos deslocamentos nodais são dadas pelas equações a seguir.

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{z \partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ z \Phi_{,x} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{z \partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \\ -z \Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Substituindo na Equação (3.37), as Equações (3.38) e (3.39) e considerando que os vetores coluna, que representam as funções de forma, são constantes em relação ao eixo perpendicular ao plano do elemento de placa (espessura do elemento), tem-se:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \int_h (\lambda + 2G) dz \\ \Phi_{,y} \int_h \lambda dz \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,y} \int_h \lambda z dz \\ \Phi_{,x} \int_h (\lambda + 2G) z dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} (\lambda + 2G) h \\ \Phi_{,y} \lambda h \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Na Equação (3.40),  $h$  é a espessura do elemento plano de placa e a superfície de referência é tomada na superfície média do elemento plano de placa, dessa forma, as integrais

ao longo da espessura de funções ímpares serão nulas. As demais variáveis já foram descritas ao longo dessa seção. De forma análoga à descrita para o esforço axial, pode-se chegar às Equações (3.41) a (3.44) para as derivadas em relação aos deslocamentos nodais dos outros esforços atuantes na seção.

$$\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \lambda h \\ \Phi_{,y} (\lambda + 2G) h \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,y} (\lambda + 2G) \frac{h^3}{12} \\ \Phi_{,x} \lambda \frac{h^3}{12} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,y} \lambda \frac{h^3}{12} \\ \Phi_{,x} (\lambda + 2G) \frac{h^3}{12} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,y} Gh \\ \Phi_{,x} Gh \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} kGh \\ \mathbf{0} \\ \Phi kGh \end{bmatrix}, \frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,y} kGh \\ -\Phi kGh \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,x} G \frac{h^3}{12} \\ \Phi_{,y} G \frac{h^3}{12} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

### 3.2.2. Matriz de massa

Os deslocamentos, considerando a teoria de placa de Reissner-Mindlin, são dados pelas Equações (3.1) a (3.3), podendo ser escritas na forma matricial apresentada a seguir.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^o \\ v^o \\ w^o \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}. \quad (3.45)$$

Os deslocamentos de translação e rotação da superfície de referência do elemento plano de placa podem ser aproximados por funções de forma aplicadas aos deslocamentos nodais ( $\mathbf{q}$ ) como apresentado na Equação (3.31) do item anterior.

Substituindo a equação desses deslocamentos aproximados na Equação (3.45) e multiplicando-se as matrizes, obtêm-se:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & z\Phi^T \\ \mathbf{0}^T & \Phi^T & \mathbf{0}^T & -z\Phi^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T & y\Phi^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{H}\mathbf{q}. \quad (3.46)$$

A matriz  $\mathbf{H}$  na Equação (3.46) relaciona o deslocamento em um ponto qualquer do elemento plano de placa com os deslocamentos nodais do elemento finito utilizado na análise. Como é apresentada na sequência dessa seção, para a determinação da matriz de massa para análise dinâmica de estruturas discretizadas pelo elemento finito plano de placa é necessária a matriz obtida pelo produto da transposta de  $\mathbf{H}$  por  $\mathbf{H}$ , ou seja:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Phi\Phi^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & z\Phi\Phi^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & -z\Phi\Phi^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T & y\Phi\Phi^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & -z\Phi\Phi^T & y\Phi\Phi^T & z^2\Phi\Phi^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ z\Phi\Phi^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & z^2\Phi\Phi^T \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Sendo  $dm$  a massa infinitesimal em um ponto qualquer do volume  $V$  do elemento plano de placa, e considerando  $\rho$  a densidade de massa do material nesse ponto, tem-se  $dm = \rho dV$ . No equilíbrio de forças em uma análise dinâmica, a matriz de massa está associada à força dinâmica dada pelo produto entre a massa concentrada em um determinado ponto e a aceleração desse ponto. Sendo a aceleração a derivada segunda do deslocamento em relação ao tempo, e esse pode ser escrito pela Equação (3.46), obtém-se a matriz de massa para o elemento plano de placa dada pela Equação (3.48). Na determinação da Equação (3.48) foi considerado o plano de referência na superfície média do elemento de placa de espessura  $h$ , e densidade constante ao longo do volume do elemento de placa.

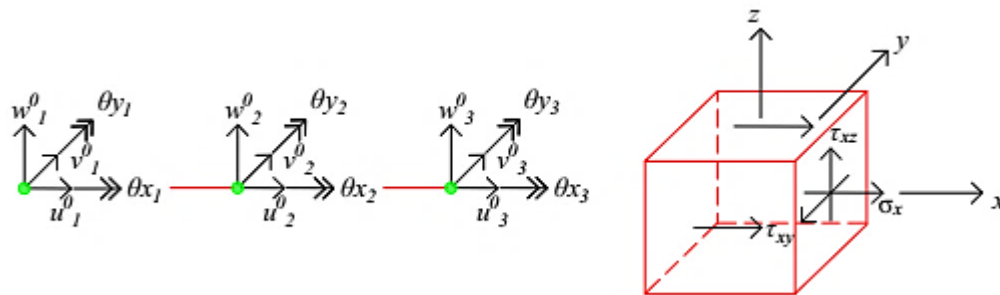
$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV = \rho \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T h & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T h & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T h & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T \frac{h^3}{12} & \mathbf{0} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \mathbf{0}^T & \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} dA \quad (3.48)$$

### 3.3. Elemento de Viga (*BEAMRMT*)

#### 3.3.1. Matriz rigidez

O elemento finito de viga utilizado nesse trabalho tem graus de liberdade compatíveis com aqueles definidos para o elemento finito de placa do item anterior. Na Figura 3. 5 são ilustrados os graus de liberdade desse elemento, e as tensões em um hexaedro elementar retirado de um ponto qualquer do elemento de viga, chamado nesse texto de *BEAMRMT*.

**Figura 3. 5.** Graus de liberdade do elemento de viga e tensões em um elemento infinitesimal



Fonte: Adaptada de Silva (2010)

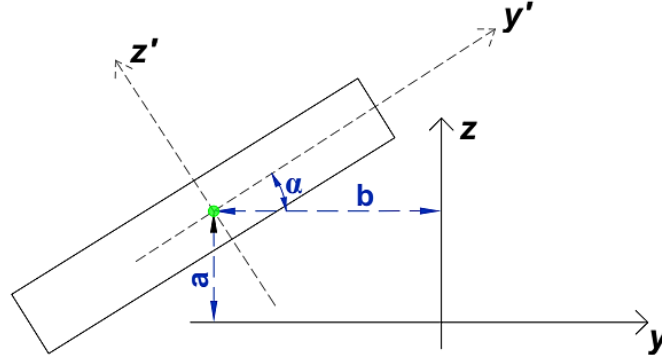
Considerando o princípio da superposição dos efeitos a formulação do elemento será dividida em duas partes. Uma considerando apenas o efeito de torção e outra considerando os efeitos de cisalhamento, flexão e carga axial. Inicia-se com a formulação do elemento de barra sob torção uniforme. Na definição das equações de deslocamento (Equações (3.49) a (3.51)) para o elemento de viga da Figura 3. 5 sob torção uniforme admite-se que as seções apresentam a mesma deformação ao longo do eixo do elemento independentemente da posição  $x$ . Essa aproximação é aceita para seções com área setorial nula obtida em relação ao polo coincidente com o centro de cisalhamento da seção, o que acontece com perfis do tipo I, T, cruciforme, entre outros. A forma dessas seções é definida por composições de retângulos de pequenas espessuras. São ilustradas na Figura 3. 6 as variáveis que relacionam os eixos locais de cada retângulo com o eixo da seção transversal.

$$u(x, y, z) = u(y, z), \quad (3.49)$$

$$v(x, y, z) = -(z + a)\theta_x(x), \quad (3.50)$$

$$w(x, y, z) = (y + b)\theta_x(x). \quad (3.51)$$

**Figura 3. 6.** Relação entre eixos locais com o eixo da seção transversal do retângulo



Fonte: Adaptada de Silva (2010)

Das equações de deslocamento e da equação de deformação de Green-Lagrange considerando uma variação linear de  $\theta_x(x)$  ao longo do eixo da viga, obtém-se as equações das deformações dadas por:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0, \quad (3.52)$$

$$\gamma_{xz} = u_{,z} + (y + b)\theta_{x,x}, \quad (3.53)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} - (z + a)\theta_{x,x}. \quad (3.54)$$

Admitindo válida a lei de Hooke, ou seja, material homogêneo, isotrópico e linear elástico, e sendo  $G$  o módulo de deformação transversal do material, as relações tensão deformação são dadas por:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (3.55)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}. \quad (3.56)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (3.57)$$

onde,  $\sigma_{ij}$  são as componentes de tensões de Kirchhoff,  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes de deformação de Green-Lagrange,  $\delta$  é o operador variacional e  $V$  é o volume do sólido indeformado. Para o caso de problemas de viga da Figura 3. 5 sob torção uniforme, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V (\tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV. \quad (3.58)$$

Os variacionais das deformações que aparece na Equação (3.58) são dados por:

$$\delta \gamma_{xz} = \delta u_{,z} + (y+b) \delta \theta_{x,x}, \quad (3.59)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta u_{,y} - (z+a) \delta \theta_{x,x}. \quad (3.60)$$

Substituindo as equações dos variacionais das deformações no elemento de barra sob torção uniforme na Equação (3.58) do trabalho virtual, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L \int_A \{ \tau_{xy} [\delta u_{,y} - (z+a) \delta \theta_{x,x}] + \tau_{xz} [\delta u_{,z} + (y+b) \delta \theta_{x,x}] \} dA dx. \quad (3.61)$$

Para analisarmos a Equação (3.61) é necessária a definição da função  $u(y, z)$ . Essa tarefa pode ser bastante complexa dependendo da seção transversal da barra. Nesse trabalho será definida essa função para uma seção retangular com largura bem maior que sua espessura. Sendo assim o procedimento descrito a seguir é capaz de analisar seções que podem ser decompostas em retângulos, como, por exemplo, seção do tipo I, T, cruciformes, entre outras.

Admitindo-se a função de tensão  $\phi(y, z)$  tal que  $\tau_{xy} = -\phi_{,z}$  e  $\tau_{xz} = \phi_{,y}$  verifica-se que as equações diferenciais do equilíbrio são satisfeitas. Para satisfazer as equações de compatibilidade há uma exigência de que  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  sejam lineares em  $y$  e  $z$ , o que será observado mais a seguir. Já em relação às equações constitutivas chega-se à equação diferencial parcial dada a seguir.

$$\phi_{,yy} + \phi_{,zz} = 2G\theta_{,xx}. \quad (3.62)$$

Para uma seção retangular com origem do eixo no centro geométrico da seção e coordenadas  $(y'_i, z'_i)$  de seus vértices, sendo  $y'z'$  eixos locais paralelos aos lados do retângulo,  $\alpha$  o ângulo de inclinação de  $y'$  em relação a  $y$ , e  $(a,b)$  as coordenadas da origem de  $y'z'$  em relação ao eixo  $yz$ , obtém-se a função de tensão dada por:  $\phi(z') = G\theta_{,xx}(z'^2 - 0,25t^2)$ . Nessa equação  $t$  é a espessura do elemento retangular e é dada por  $z'_4 - z'_1$ . Para a determinação dessa equação considerou-se que a largura da seção retangular  $(y'_2 - y'_1)$  é muito maior que a espessura. Essa consideração é comum nos perfis em aço com seção composta por retângulos.

As relações entre as coordenadas do sistema local  $y'z'$  e o sistema de referência global da seção  $yz$  com origem no centro de cisalhamento da seção são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y+b \\ z+a \end{Bmatrix}. \quad (3.63)$$

Como  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G[u_{,y} - (z+a)\theta_{,xx}]$ ,  $\tau_{xy} = -\phi_{,z}$  e  $z = \text{sen} \alpha y' + \cos \alpha z' - a$ , logo:

$$u_{,y} = (\text{sen} \alpha y' - \cos \alpha z')\theta_{,xx}. \quad (3.64)$$

De forma análoga utilizada para a determinação da Equação (3.64) obtém-se a equação dada a seguir.

$$u_{,z} = -(\text{sen} \alpha z' + \cos \alpha y')\theta_{,xx}. \quad (3.65)$$

Levando os variacionais das Equações (3.64) e (3.65) à equação do variacional do trabalho virtual interno (Equação (3.61)), chega-se a nova equação a seguir para o trabalho virtual interno no elemento de barra sujeito à torção uniforme (Equação (3.66)). Observa-se dessa equação que  $\theta_{,xx}$  é considerado constante. Isso é necessário para que seja válida a equação diferencial parcial (Equação (3.62)).



$$\delta W_{\text{int}} = -2 \int_L \int_A (\cos \alpha \tau_{xy} + \sin \alpha \tau_{xz}) z' dA dx \delta \theta_{x,x}. \quad (3.66)$$

Como a aproximação da rotação referente à torção ao longo do eixo da barra é linear e o elemento finito de barra adotado nesse trabalho tem três nós, a barra deve ser dividida em dois trechos, sendo  $T_{x1} = -2 \int_A (\cos \alpha \tau_{xy} + \sin \alpha \tau_{xz}) z' dA$  e  $\theta_{x1}$ , respectivamente, o esforço de torção interno na seção no trecho do nó 1 ao nó 2 e a rotação nesse trecho, e  $T_{x2}$  e  $\theta_{x2}$  análogos para o trecho do nó 2 ao nó 3, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \frac{L}{2} T_{x1} \delta \theta_{x1,x} + \frac{L}{2} T_{x2} \delta \theta_{x2,x}. \quad (3.67)$$

Considerando os efeitos combinados de carga axial, flexão e cisalhamento as equações de deslocamento para o elemento de viga da Figura 3. 5 são dadas pelas Equações (3.68) a (3.70) a seguir. Na definição dessas equações são consideradas as hipóteses cinemáticas da teoria de viga de Timoshenko.

$$u(x, y, z) = u^o(x) + z\theta_y(x), \quad (3.68)$$

$$v(x, y, z) = v^o(x), \quad (3.69)$$

$$w(x, y, z) = w^o(x). \quad (3.70)$$

Nas Equações (3.69) e (3.70) o sobrescrito  $o$  indica deslocamento em um eixo de referência adotado. Este índice será omitido nas equações a seguir para facilitar a notação. Das equações de deslocamento e da equação de deformação de Green-Lagrange, obtém-se as equações das deformações dadas a seguir.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x}, \quad (3.71)$$

$$\gamma_{xz} = \theta_y + w_{,x}, \quad (3.72)$$

$$\gamma_{xy} = v_{,x} . \quad (3.73)$$

Admitindo válida a lei de Hooke, ou seja, material homogêneo, isotrópico e linear elástico, e sendo  $E$  o módulo de deformação axial,  $G$  o módulo de deformação por cortante, as relações tensão deformação são dadas por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x , \quad (3.74)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} , \quad (3.75)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} . \quad (3.76)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV , \quad (3.77)$$

onde,  $\sigma_{ij}$  são as componentes de tensões de Kirchhoff,  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes de deformação de Green-Lagrange,  $\delta$  é o operador variacional e  $V$  é o volume do sólido indeformado. Para o caso de problemas de viga da Figura 3. 5, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV . \quad (3.78)$$

O variacional das deformações que aparece nas Equações (3.77) a (3.78) são dados por

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x} + z \delta \theta_{y,x} , \quad (3.79)$$

$$\delta \gamma_{xz} = \delta \theta_y + \delta w_{,x} , \quad (3.80)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta v_{,x} . \quad (3.81)$$

Observando que os deslocamentos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são dependentes apenas da posição do ponto no eixo de referência (eixo  $x$  local), ou seja, são constantes em relação aos eixos que definem o plano da seção transversal do elemento de viga, pode-se reescrever a Equação (3.81) do trabalho virtual na forma dada pela equação a seguir.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L \left[ \int_A \sigma_x dA \delta u_{,x} + \int_A \tau_{xy} dA \delta v_{,x} + \int_A \tau_{xz} dA (w_{,x} + \delta \theta_y) + \int_A \sigma_x z dA \delta \theta_{y,x} \right] dx. \quad (3.82)$$

Identifica-se na Equação (3.82) os esforços  $N_x = \int_A \sigma_x dA$ ,  $N_{xy} = \int_A \tau_{xy} dA$ ,

$N_{xz} = \int_A \tau_{xz} dA$  e  $M_x = \int_A \sigma_x z dA$ , atuantes na seção transversal do elemento de viga. Logo:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [N_x \delta u_{,x} + N_{xy} \delta v_{,x} + N_{xz} (\delta w_{,x} + \delta \theta_y) + M_x \delta \theta_{y,x}] dx. \quad (3.83)$$

Na aproximação de elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de formas associadas aos deslocamentos nodais ( $\mathbf{q}$ ). Para o elemento em questão foram adotadas funções de forma dadas por polinômios quadráticos representado nas Equações (3.84) a (3.89) pelo vetor coluna  $\Phi$  de três termos. Exceto para as rotações de torção no eixo da barra, para esses deslocamentos são consideradas interpolações lineares nas duas metades do elemento, ou seja, do nó 1 ao nó 2, e do nó 2 ao nó 3. Logo as funções de forma são polinômios lineares representados na Equação (3.88) e (3.89) pelos vetores coluna  $\mathbf{B}_1 = [\frac{1}{2}(1-\xi) \quad \frac{1}{2}(1+\xi) \quad 0]^T$  e  $\mathbf{B}_2 = [0 \quad \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \frac{1}{2}(1+\xi)]^T$ , onde  $\xi$  é uma coordenada paramétrica ao longo do eixo da barra sendo  $\xi = -1$  no nó 1, 0 no nó 2 e 1 no nó 3.

$$u = [\Phi^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}, \quad (3.84)$$

$$v = [\mathbf{0}^T \quad \Phi^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}, \quad (3.85)$$

$$w = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \Phi^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}, \quad (3.86)$$

$$\theta_y = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \Phi^T] \mathbf{q}, \quad (3.87)$$

$$\theta_{x1} = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{B}_1^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}, \quad (3.88)$$

$$\theta_{x2} = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{B}_2^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}. \quad (3.89)$$

Nas Equações (3.84) a (3.89),  $\mathbf{q} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^T$  com  $i$  variando de 1 até 3 (número de nós do elemento de viga),  $\mathbf{q}$  representa os graus de liberdade do elemento nas direções dos deslocamentos de translações e rotações, e  $\mathbf{0}$  é um vetor coluna nulo com três componentes. A implementação de outros elementos finitos de viga com diferentes quantidades de nós diferencia da implementação mostrada nessa seção apenas nas funções de interpolação dadas pelo vetor  $\Phi$  e  $\mathbf{B}$ , e no tamanho de  $\mathbf{q}$ .

Se  $a$  é função dos deslocamentos nodais então o variacional de  $a$  é dado por  $\delta a = \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} \right)$ . Levando a aproximação dos deslocamentos na equação do trabalho virtual das forças internas considerando a torção, carga axial, cisalhamento e flexão chega-se a equação a seguir.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \left\{ \int_L [N_x \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xy} \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xz} \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\ \left. + M_x \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}}] dx + \frac{L}{2} (T_{x1} \frac{\partial \theta_{x1,x}}{\partial \mathbf{q}} + T_{x2} \frac{\partial \theta_{x2,x}}{\partial \mathbf{q}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

O trabalho virtual externo é obtido por  $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$ , onde  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  é o vetor de forças externas nodais. O elemento pode estar submetido a diferentes tipos de carregamento. Esses, por sua vez, são distribuídos para os nós do elemento por meio de integração ao longo do elemento, obtendo os conhecidos esforços nodais equivalentes (Bathe, 1986). A condição de  $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$  deve ser válida para qualquer campo de deformação virtual compatível, portanto, ela pode ser escrita na forma  $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  é o vetor de forças internas dado pela equação

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left[ N_x \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xy} \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xz} \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + M_x \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} \right] dx + \frac{L}{2} \left( T_{x1} \frac{\partial \theta_{x1,x}}{\partial \mathbf{q}} + T_{x1} \frac{\partial \theta_{x2,x}}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (3.91)$$

Substituindo na Equação (3.91) as derivadas das equações dos deslocamentos, Equações (3.84) a (3.89), em relação aos deslocamentos nodais, tem-se:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \left\{ \begin{array}{l} \int_L N_x \Phi_{,x} dx \\ \frac{5}{6} \int_L N_{xy} \Phi_{,x} dx \\ \frac{5}{6} \int_L N_{xz} \Phi_{,x} dx \\ \frac{L}{2} (T_{x1} \mathbf{B}_{1,x} + T_{x2} \mathbf{B}_{2,x}) \\ \int_L (M_x \Phi_{,x} + \frac{5}{6} N_{xz} \Phi) dx \end{array} \right\}. \quad (3.92)$$

Foi inserido na Equação (3.92) o fator 5/6 de redução do cortante atuante na seção transversal. Isso é feito para diminuir a influência da aproximação de que seções transversais do elemento de viga permanecem planas após deformações, como adotado na definição das equações de deslocamentos do elemento de viga da Figura 3. 5.

Assim como no elemento de placa o método de Newton-Rapshon pode ser utilizado na solução do problema  $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ , dessa forma obtêm-se a matriz de rigidez tangente dada pela equação a seguir.

$$\mathbf{K} = \left[ \begin{array}{l} \int_L \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \\ \frac{5}{6} \int_L \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \\ \frac{5}{6} \int_L \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \\ \frac{L}{2} \left[ \mathbf{B}_{1,x} \left( \frac{\partial T_{x1}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{B}_{2,x} \left( \frac{\partial T_{x2}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] \\ \int_L \left[ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{5}{6} \Phi \left( \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] dx \end{array} \right]. \quad (3.93)$$

Na Equação (3.93), a derivada do esforço axial atuante na seção em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \left( \int_A \sigma_x dA \right)}{\partial \mathbf{q}} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} dA, \quad (3.94)$$

onde  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}$  é dada pela inclinação da tangente a curva tensão-deformação e será denotada por

$E_T$ . Já a derivada da deformação axial em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + z \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ z\Phi_{,x} \end{Bmatrix}. \quad (3.95)$$

Substituindo a Equação (3.95) em (3.94) e observando que os vetores coluna que representam as funções de forma variam apenas ao longo do eixo longitudinal do elemento, tem-se

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E_T dA \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \end{Bmatrix}. \quad (3.96)$$

De forma análoga à descrita para o esforço axial, pode-se determinar as derivadas dos outros esforços atuantes na seção em relação aos deslocamentos nodais, logo

$$\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E z^2 dA \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \text{ e } \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \mathbf{0} \\ \Phi \int_A G dA \end{Bmatrix}. \quad (3.97)$$

As equações dos esforços atuantes na seção transversal,  $N_x$ ,  $N_{xy}$ ,  $N_{xz}$  e  $M_x$  bem como, das rigidezes  $\int_A E dA$ ,  $\int_A E z dA$ ,  $\int_A E z^2 dA$ ,  $\int_A G dA$ ,  $\int_A G z dA$  e  $\int_A G y dA$ , são obtidas de forma analítica transformando a integral de área em uma integral de linha ao longo do contorno da seção transversal que tem forma geral dada por um polígono fechado qualquer. O método utilizado neste trabalho para o cálculo desses esforços e rigidezes foi descrito de forma simplificada neste item 3.3, porém, uma descrição detalhada deste método pode ser encontrada em Caldas (2004) e Silva (2006).

O esforço de torção é obtido considerando uma seção transversal composta por retângulos de largura bem maior que sua espessura, como mostrado na equação a seguir. Onde,  $A_i$  é a área de um retângulo da seção composta e  $nr$  é o número de retângulos que compõem a seção.

$$T_{x1} = -2 \int_A (\cos \alpha \tau_{xy} + \sin \alpha \tau_{xz}) z' dA = -2 \sum_{i=1}^{nr} \int_{A_i} (\cos \alpha \tau_{xy} + \sin \alpha \tau_{xz}) z' dA_i. \quad (3.98)$$

Sendo  $A_i$  uma região retangular limitada pelas coordenadas  $y'_1$  e  $y'_2$  na direção  $y'$  e  $z'_1$  e  $z'_2$  na direção  $z'$ , os termos do somatório da Equação (3.98) podem ser obtidos como apresentado na equação a seguir.

$$\int_{y'_1}^{y'_2} \int_{z'_1}^{z'_2} (\cos \alpha \tau_{xy} + \sin \alpha \tau_{xz}) z' dz' dy'. \quad (3.99)$$

Usando as Equações (3.84) e (3.85) das derivadas da função  $u(y,z)$  nas equações de  $\tau_{xy} = G[u_{,y} - (z+a)\theta_{,x,x}]$  e  $\tau_{xz} = G[u_{,z} + (y+b)\theta_{,x,x}]$  e levando na Equação (3.99) obtém-se a Equação (3.100) para os termos do somatório da Equação (3.98).

$$\int_{y'_1}^{y'_2} \int_{z'_1}^{z'_2} (\cos \alpha \tau_{xy} + \sin \alpha \tau_{xz}) z' dz' dy' = -\frac{2}{3} G(y'_2 - y'_1)(z'_{2^3} - z'_{1^3}) \theta_{x1,x}. \quad (3.100)$$

Levando a Equação (3.100) na (3.98) obtém-se o momento de torção no trecho de nó 1 ao nó 2, dado pela Equação (3.101). De forma análoga chega-se a Equação (3.102) para o momento de torção no trecho de nó 2 ao nó 3. Nessas equações foram considerados  $y'_2 = -y'_1 = b/2$  (largura da seção retangular) e  $z'_2 = -z'_1 = t/2$  (espessura da seção retangular).

$$T_{x1} = G \theta_{x1,x} \sum_{i=1}^{nr} \frac{b_i t_i^3}{3}, \quad (3.101)$$

$$T_{x2} = G \theta_{x2,x} \sum_{i=1}^{nr} \frac{b_i t_i^3}{3}. \quad (3.102)$$

Derivando as Equações (3.101) e (3.102) em relação aos deslocamentos nodais chega-se às expressões para as derivadas do esforço de torção nos dois trechos, como são dadas pelas equações a seguir.

$$\frac{\partial T_{x1}}{\partial \mathbf{q}} = G \sum_{i=1}^{nr} \frac{b_i t_i^3}{3} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{1,x} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}, \quad (3.103)$$

$$\frac{\partial T_{x2}}{\partial \mathbf{q}} = G \sum_{i=1}^{nr} \frac{b_i t_i^3}{3} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{B}_{2,x} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.104)$$

### 3.3.2. Matriz de massa

As equações dos deslocamentos são dadas pelas Equações (3.49) a (3.51) e podem ser escritas na forma matricial apresentada a seguir:



$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^o \\ v^o \\ w^o \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}. \quad (3.105)$$

De forma análoga ao que foi feito para a determinação da matriz de rigidez, nas equações seguintes o índice  $o$  será omitido, como forma de simplificação. Como já dito esse índice refere-se ao eixo representativo do elemento de viga.

As equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de formas (representadas pelo vetor coluna  $\Phi$ ) associadas aos deslocamentos nodais ( $\mathbf{q}$ ), dadas pelas Equações (3.84) a (3.89), onde, como já mencionado,  $\mathbf{q} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^T$ , sendo que  $i$  varia de 1 até 3, e  $\mathbf{0}$  é um vetor coluna nulo com cinco termos. Substituindo as aproximações dos deslocamentos na Equação (3.105), tem-se:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q}. \quad (3.106)$$

Multiplicando-se as matrizes na Equação (3.106), obtêm-se:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & z\Phi^T \\ \mathbf{0}^T & \Phi^T & \mathbf{0}^T & -z\Phi^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T & y\Phi^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{H}\mathbf{q}. \quad (3.107)$$

A matriz  $\mathbf{H}$  na Equação (3.107) relaciona o deslocamento em um ponto qualquer do elemento de viga com os deslocamentos nodais do elemento. Para a determinação da matriz de massa, necessária na análise dinâmica de estruturas discretizadas por elementos finitos de viga, é necessária a matriz obtida pelo produto da transposta de  $\mathbf{H}$  por  $\mathbf{H}$ , dada pela Equação (3.51).

Portanto, na determinação da matriz de massa do elemento de viga dada pela Equação (3.108), de forma análoga ao elemento placa (Equação (3.52)), foi considerado densidade constante ao longo do volume.

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV = \rho \int_L \begin{bmatrix} \Phi\Phi^T A & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T Q_y \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T A & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & -\Phi\Phi^T Q_y & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T A & \Phi\Phi^T Q_z & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & -\Phi\Phi^T Q_y & \Phi\Phi^T Q_z & \Phi\Phi^T J & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \Phi\Phi^T Q_y & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T I_y \end{bmatrix} dx. \quad (3.108)$$

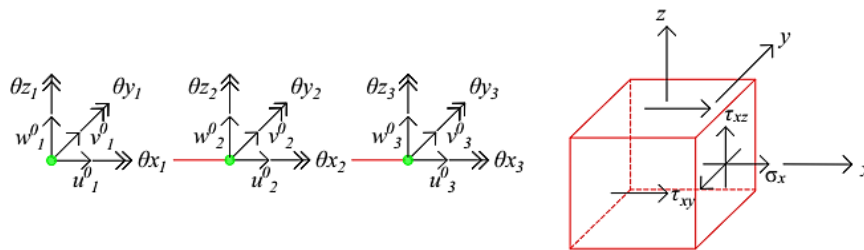
Na matriz dada pela Equação (3.108), tem-se que  $Q_y = \int_A z dA$  é o momento estático da seção em relação ao eixo  $y$ ;  $Q_z = \int_A y dA$  é o momento estático da seção em relação ao eixo  $z$ ;  $I_y = \int_A z^2 dA$  é o momento de inércia da seção em relação ao eixo  $y$ ;  $I_z = \int_A y^2 dA$  é o momento de inércia da seção em relação ao eixo  $z$ ;  $I_{xy} = \int_A yz dA$  é o produto de inércia da seção;  $J = \int_A (y^2 + z^2) dA$  é o momento de inércia polar da seção.

### 3.4. Elemento de Barra 3D (*BEAM3DT*)

#### 3.4.1. Matriz de rigidez

Na Figura 3. 7 é ilustrado a quantidade de nós e os graus de liberdade do elemento de barra 3D utilizado neste trabalho. Nessa mesma figura ilustra-se as componentes de tensão em um hexaedro elementar retirado de um ponto qualquer no volume do elemento de barra 3D. Diferente do elemento de viga do item anterior, esse elemento está sujeito a flexão nos planos  $xz$  e  $xy$ , sendo  $x$  coincidente com o eixo da barra,  $y$  e  $z$  formam o plano da seção transversal da barra. O elemento de barra apresentado nesse item será utilizado para a discretização de pilares (caso esses existem na estrutura a ser analisada), e é chamado nesse texto de *BEAM3DT*. A formulação é muito semelhante à do elemento de viga descrito no item anterior, e por isso terá sua apresentação resumida como descrita a seguir.

**Figura 3. 7.** Graus de liberdade do elemento de Barra 3D e tensões em um elemento infinitesimal



Fonte: Adaptada de Silva (2010)

Assim como no elemento anterior é considerado o princípio da superposição dos efeitos analisando separadamente a torção dos efeitos de cisalhamento, flexão e carga axial. As mesmas considerações para a torção do elemento de viga da seção anterior são admitidas aqui, dessa forma essa parte da implementação é idêntica à do elemento anterior e por isso não será apresentada.

Considerando os esforços de cisalhamento, flexão e carga axial são definidas as Equações (3.50), (3.51) e (3.109) para os deslocamentos do elemento de viga da Figura 3. 7. A Equação (3.109) é apresentada a seguir e diferencia da Equação (3.49) do elemento de viga da seção anterior apenas pela parcela  $-y\theta_z(x)$ . Já as Equações (3.50) e (3.51) são as mesmas do elemento anterior e são apresentadas naquela seção.

$$u(x, y, z) = u^o(x) + z\theta_y(x) - y\theta_z(x). \quad (3.109)$$

Aplicando o tensor de deformação de Green-Lagrange nas equações dos deslocamentos considerando pequenas mudanças de configurações e pequenas rotações, chega-se às equações das deformações. A deformação  $\gamma_{xz}$  é dada pela Equação (3.53), sendo as deformações  $\varepsilon_x$  e  $\gamma_{xy}$  dadas por:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x} - y\theta_{z,x}, \quad (3.110)$$

$$\gamma_{xy} = -\theta_z + v_{,x}. \quad (3.111)$$

Considerando válida a lei de Hooke, as relações tensão deformação são dadas pelas Equações (3.55) e (3.56). Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (3.112)$$

onde,  $\sigma_{ij}$  são as componentes de tensões de Kirchhoff,  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes de deformação de Green-Lagrange,  $\delta$  é o operador variacional e  $V$  é o volume do sólido indeformado. Para o elemento de barra da Figura 3. 5, tem-se

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V ( \sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} ) dV. \quad (3.113)$$

O variacional da deformação  $\gamma_{xz}$  que aparece na Equação (3.113) é dado pela Equação (3.53), já os variacionais das deformações  $\varepsilon_x$  e  $\gamma_{xy}$  são dados por:

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x} + z\delta\theta_{y,x} - y\delta\theta_{z,x}, \quad (3.114)$$

$$\delta \gamma_{xy} = -\delta\theta_z + \delta v_{,x}. \quad (3.115)$$

Substituindo na Equação (3.113) do trabalho virtual devido às forças internas atuantes no elemento de viga da Figura 3. 5, as Equações (3.53), (3.114) e (3.115), e observando que os

deslocamentos  $u, v, w, \theta_x, \theta_y$  e  $\theta_z$  destas equações variam apenas ao longo do eixo do elemento, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L \left[ \int_A \sigma_x dA \delta u_{,x} + \int_A \tau_{xy} dA (\delta v_{,x} - \delta \theta_z) + \int_A \tau_{xz} dA (\delta \theta_y) + \int_A \sigma_x z dA \delta \theta_{y,x} - \int_A \sigma_x y dA \delta \theta_{z,x} \right] dx. \quad (3.116)$$

Na Equação (3.116) identifica-se os esforços  $N_x = \int_A \sigma_x dA$ ,  $N_{xy} = \int_A \tau_{xy} dA$ ,  $N_{xz} = \int_A \tau_{xz} dA$ ,  $M_y = \int_A \sigma_x z dA$  e  $M_z = \int_A \sigma_x y dA$ , atuantes na seção transversal do elemento de viga. Logo:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [N_x \delta u_{,x} + N_{xy} (\delta v_{,x} - \delta \theta_z) + N_{xz} (\delta w_{,x} + \delta \theta_y) + M_y \delta \theta_{y,x} - M_z \delta \theta_{z,x}] dx. \quad (3.117)$$

Na aproximação de elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de formas associadas aos deslocamentos nodais ( $\mathbf{q}$ ). As funções de forma são as mesmas do elemento de viga da seção anterior e são representadas pelos vetores colunas  $\Phi$ ,  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  nas equações de aproximação dos deslocamentos apresentadas a seguir.

$$u = [\Phi^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}, \quad (3.118)$$

$$v = [\mathbf{0}^T \quad \Phi^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}, \quad (3.119)$$

$$w = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \Phi^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}, \quad (3.120)$$

$$\theta_{x1} = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{B}_1^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}, \quad (3.121)$$

$$\theta_{x2} = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{B}_2^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q}, \quad (3.122)$$

$$\theta_y = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}, \quad (3.123)$$

$$\theta_z = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q}. \quad (3.124)$$

Nas Equações (3.118) a (3.124),  $\mathbf{q} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]^T$ , onde  $i$  varia de 1 até 3, representa os graus de liberdade do elemento nas direções dos deslocamentos de translações e rotações, e  $\mathbf{0}_u$  é um vetor coluna nulo com três componentes. Outras configurações de interpolação podem ser adotadas para o elemento sem maiores dificuldades.

Se  $a$  é função dos deslocamentos nodais então o variacional de  $a$  é dado por  $\delta a = \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} \right)$ . Levando a aproximação dos deslocamentos na equação do trabalho virtual das forças internas considerando a torção, carga axial, cisalhamento e flexão chega-se a equação a seguir.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \left\{ \int_L \left[ N_x \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xy} \left( \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta_z}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xz} \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + M_y \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} - M_z \frac{\partial \theta_{z,x}}{\partial \mathbf{q}} \right] dx + L(T_{x1} \frac{\partial \theta_{x1,x}}{\partial \mathbf{q}} + T_{x2} \frac{\partial \theta_{x2,x}}{\partial \mathbf{q}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

De forma análoga ao elemento de viga do item anterior chega-se ao vetor de forças interna para o elemento de barra dado pela Equação (3.126). Nessa equação é introduzido o fator 5/6 de redução do cortante atuante na seção transversal para diminuir a influência da aproximação de que seções transversais do elemento de viga permanecem planas após deformações.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \left\{ \begin{array}{l} \int_L N_x \Phi_{,x} dx \\ \frac{5}{6} \int_L N_{xy} \Phi_{,x} dx \\ \frac{5}{6} \int_L N_{xz} \Phi_{,x} dx \\ \frac{L}{2} (T_{x1} \mathbf{B}_{1,x} + T_{x2} \mathbf{B}_{2,x}) \\ \int_L (M_y \Phi_{,x} + \frac{5}{6} N_{xz} \Phi) dx \\ - \int_L (M_z \Phi_{,x} + \frac{5}{6} N_{xy} \Phi) dx \end{array} \right\}. \quad (3.126)$$

Assim como no elemento de placa o método de Newton-Rapshon pode ser utilizado na solução do problema  $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$ , dessa forma a matriz de rigidez é obtida derivando o vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais, ou seja,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \int_L \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \\ \frac{5}{6} \int_L \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \\ \frac{5}{6} \int_L \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T dx \\ \frac{L}{2} [\mathbf{B}_{1,x} \left( \frac{\partial T_{x1}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{B}_{2,x} \left( \frac{\partial T_{x2}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T] \\ \int_L \left[ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{5}{6} \Phi \left( \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] dx \\ - \int_L \left[ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{5}{6} \Phi \left( \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] dx \end{bmatrix}. \quad (3.127)$$

Na Equação (3.127), as derivadas dos esforços atuantes na seção em relação aos deslocamentos nodais podem ser obtidas a partir da definição desses esforços apresentadas anteriormente e da relação das deformações com os deslocamentos nodais. A seguir são apresentados esses vetores, sendo que os passos para a definição desses podem ser vistos na seção anterior para o elemento de viga *BEAMRMT*.

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E dA \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E z dA \\ - \Phi_{,x} \int_A E y dA \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E z dA \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E z^2 dA \\ - \Phi_{,x} \int_A E y z dA \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial M_z}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E y dA \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E y z dA \\ - \Phi_{,x} \int_A E y^2 dA \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi \int_A G dA \end{Bmatrix} \text{ e } \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \mathbf{0} \\ \Phi \int_A G dA \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (3.128)$$

De forma análoga ao elemento de viga da seção anterior obtém-se as derivadas dos esforços de torção em relação aos deslocamentos nodais, dadas por:

$$\frac{\partial T_{x1}}{\partial \mathbf{q}} = G \sum_{i=1}^{nr} \frac{b_i t_i^3}{3} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{1,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \text{ e } \frac{\partial T_{x2}}{\partial \mathbf{q}} = G \sum_{i=1}^{nr} \frac{b_i t_i^3}{3} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{2,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (3.129)$$

As equações dos esforços atuantes na seção transversal,  $N_x$ ,  $N_{xy}$ ,  $N_{xz}$ ,  $M_y$  e  $M_z$ , bem como, das rigidezes  $\int_A E dA$ ,  $\int_A E z dA$ ,  $\int_A E z^2 dA$ ,  $\int_A E y dA$ ,  $\int_A E y^2 dA$ ,  $\int_A E y z dA$ ,  $\int_A G dA$ ,  $\int_A G z dA$ ,  $\int_A G z^2 dA$ ,  $\int_A G y dA$  e  $\int_A G y^2 dA$ , são obtidas de forma analítica transformando a integral de área em uma integral de linha ao longo do contorno da seção transversal que tem forma geral dada por um polígono fechado qualquer

### 3.4.2. Matriz de massa

Os deslocamentos são dados pelas equações (3.50), (3.51) e (3.109), podendo ser escritas na forma matricial apresentada a seguir:



$$\mathbf{u} = \begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} u^o \\ v^o \\ w^o \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{cases}. \quad (3.130)$$

Trabalhando de forma análoga a determinação da matriz de massa do elemento de viga do item anterior chega-se a Equação (3.131) para a matriz de massa do elemento de barra mostrado na Figura 3. 5.

$$\mathbf{M} = \rho \int_L \begin{bmatrix} \Phi\Phi^T A & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T Q_y & -\Phi\Phi^T Q_z \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T A & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & -\Phi\Phi^T Q_y & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T A & \Phi\Phi^T Q_z & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & -\Phi\Phi^T Q_y & \Phi\Phi^T Q_z & \Phi\Phi^T J & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \Phi\Phi^T Q_y & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \Phi\Phi^T I_y & -\Phi\Phi^T I_{yz} \\ -\Phi\Phi^T Q_z & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & -\Phi\Phi^T I_{yz} & \Phi\Phi^T I_z \end{bmatrix} dx. \quad (3.131)$$

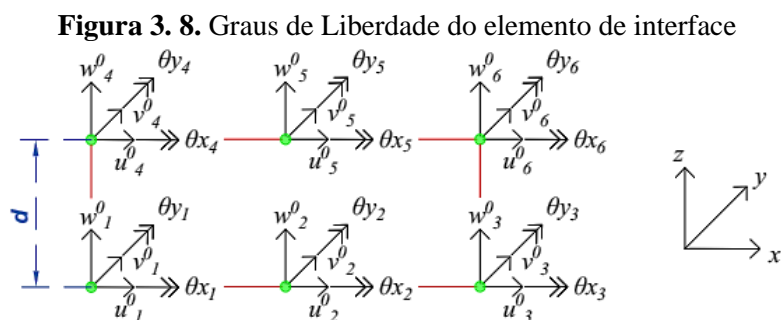
Na equação (3.131), as parcelas referentes aos momentos estáticos e de inércia são como definidas no item anterior para a matriz de massa do elemento de viga com 5 graus de liberdade por nó.

### 3.5. Elemento de Interface (INTBEAMPLATE)

#### 3.5.1. Matriz de rigidez

Nesta seção é apresentada a formulação do elemento de interface responsável por simular a conexão deformável entre a laje de concreto e a viga de aço que são representados por elementos planos de placas e lineares de vigas, respectivamente, cuja formulações foram apresentadas nos itens 3.3 e 3.4.

Na Figura 3. 8 é ilustrado o elemento de interface de seis nós com 5 graus de liberdade por nó, mostrando a sequência dos graus de liberdade para a formação do vetor dos deslocamentos nodais.



Fonte: Adaptada de Silva (2010)

Embora sua espessura física real seja nula, a distância vertical  $d$  entre os nós inferiores e superiores do elemento de interface depende das posições da superfície de referência do elemento de placa e do eixo de referência do elemento de viga.

Como o elemento de interface representa fisicamente apenas o contato entre os elementos finitos de placa e de viga, as equações dos deslocamentos relativos que acontecem nessa interface devem ser definidas. A equação do deslocamento relativo longitudinal ( $s_l$ ), transversal ( $s_t$ ), e vertical ( $s_v$ ), direções  $x$ ,  $z$  e  $y$  mostrada na Figura 3. 9, Figura 3. 10 e Figura 3. 11 respectivamente, são dadas a seguir (Silva, 2010):

$$s_l(x) = u_2(x, y, z = -0,5h) - u_1(x, y, z = d - 0,5h), \quad (3.132)$$

$$s_t(x) = v_2(x, y, z = d - 0,5h) - v_1(x, y, z = -0,5h), \quad (3.133)$$

$$s_v(x) = w_2(x, y, z) - w_1(x, y, z). \quad (3.134)$$

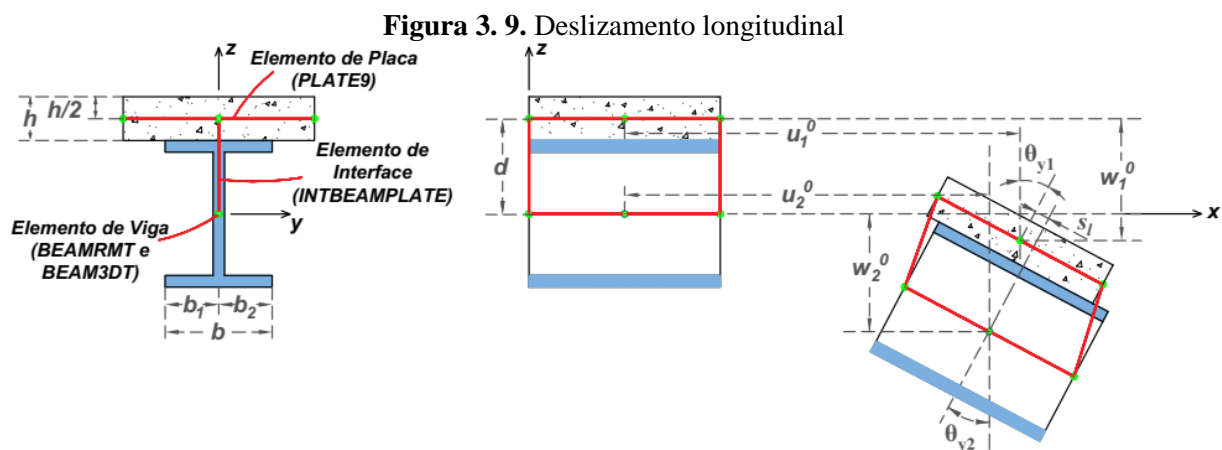
Nas Equações (3.132) a (3.134),  $u_\alpha(x, y, z) = u_\alpha^0(x) - z\theta_{y\alpha}(x)$ ,  $w_\alpha(x, y, z) = w_\alpha^0(x) + y\theta_{x\alpha}(x)$ , e  $v_\alpha(x, y, z) = v_\alpha^0(x) - z\theta_{x\alpha}(x)$  são as equações dos deslocamentos na direção  $x$ ,  $z$  e  $y$  ao longo dos elementos lineares de viga abaixo ( $\alpha = 1$ ) e dos elementos planos de placa acima ( $\alpha = 2$ ) do elemento de interface analisado. Portanto,

$$s_l(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) - 0,5h\theta_{y2}(x) - (d - 0,5h)\theta_{y1}(x), \quad (3.135)$$

$$s_t(x) = v_2^0(x) - v_1^0(x) + 0,5h\theta_{x2}(x) + (d - 0,5h)\theta_{x1}(x), \quad (3.136)$$

$$s_v(x) = w_2^0(x) - w_1^0(x) + y[\theta_{x2}(x) - \theta_{x1}(x)]. \quad (3.137)$$

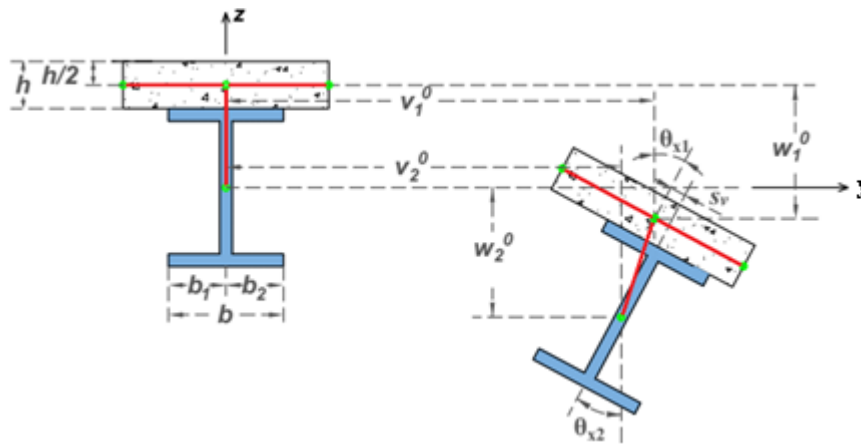
Nas figuras seguintes (Figura 3. 9 a Figura 3. 11), os índices 1 e 2 referem-se ao material aço e concreto respectivamente,  $d$  já definido anteriormente, e  $h$  é a espessura do elemento de placa com superfície de referência dada pela superfície média ( $h/2$ ).



Fonte: Adaptada de Silva e Sousa (2009)

Considerando uma relação linear entre as forças por unidade de comprimento na direção de  $u$  ( $S_b$ ),  $v$  ( $V_b$ ) e  $w$  ( $N_b$ ), em relação a seus respectivos deslocamentos relativos e, sendo  $E_{S_b}$ ,  $E_{V_b}$  e  $E_{N_b}$ , respectivamente, as rigidezes de deformação do elemento de interface na direção dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , então

Figura 3. 10. Deslizamento transversal



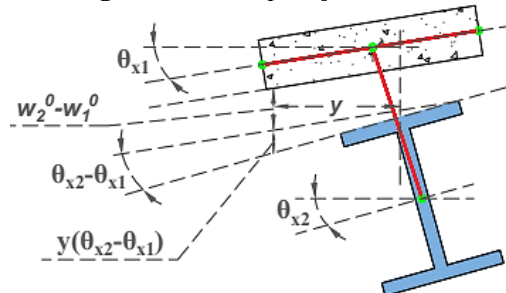
Fonte: Adaptada de Silva (2010)

$$S_b = E_{S_b} s_l, V_b = E_{V_b} s_t \text{ e } N_b = E_{N_b} s_v. \quad (3.138)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento de interface da Figura 3. 11 deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} (S_b \delta s_l + N_b \delta s_v + V_b \delta s_t) d\Omega. \quad (3.139)$$

Figura 3. 11. Separação vertical



Fonte: Adaptada de Silva (2010)

Como  $s_l$  e  $s_t$  variam somente ao longo do eixo do elemento de interface (eixo  $x$ ), já  $s_v$  varia também ao longo do eixo  $y$ . Na formulação a seguir será considerado que o eixo  $y$  varia de  $-b_1$  a  $b_2$  (Figura 3. 1, Figura 3. 9 e Figura 3. 10), onde  $b$  é a largura referente a interface de contato. Esses valores são importantes quando se permite uma separação vertical na interface

de contato, nesses casos eles evitam que haja a interpenetração entre as partes acima e abaixo da interface de contato.

Com essas considerações pode-se reescrever a equação do trabalho virtual chegando-se então a:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L (S_b \delta s_l + V_b \delta s_t) dx + \int_L \left( \int_b N_b \delta s_v dy \right) dx. \quad (3.140)$$

Na Equação (3.140),  $b$  é a largura na direção  $y$  da seção de contato entre os materiais, como mostrado na Figura 3. 1. Os variacionais dos deslocamentos relativos horizontal, transversal e vertical do elemento de interface são dados pelas equações a seguir

$$\delta s_l = \delta u_2 - \delta u_1 - 0,5h\delta\theta_{y2} - (d - 0,5h)\delta\theta_{y1}, \quad (3.141)$$

$$\delta s_t = \delta v_2 - \delta v_1 + 0,5h\delta\theta_{x2} + (d - 0,5h)\delta\theta_{x1}, \quad (3.142)$$

$$\delta s_v = \delta w_2 - \delta w_1 + y(\delta\theta_{x2} - \delta\theta_{x1}). \quad (3.143)$$

Substituindo a variação dos deslocamentos relativos na Equação (3.140) do trabalho virtual, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \int_L (S_b(\delta u_2 - \delta u_1) + V_b(\delta v_2 - \delta v_1) + N_b^1(\delta w_2 - \delta w_1) + [(d - 0,5h)V_b - N_b^2]\delta\theta_{x1} - \\ -(d - 0,5h)S_b\delta\theta_{y1} + [\frac{1}{2}hV_b + N_b^2]\delta\theta_{x2} - 0,5hS_b\delta\theta_{y2}) dx. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Na Equação (3.144),  $N_b^1 = \int_b N_b dy$  e  $N_b^2 = \int_b N_b y dy$  representam as forças verticais ao longo da largura (eixo  $y$ ) na interface de contato entre os materiais.

Na aproximação por elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais ( $\mathbf{q}$ ). Para o elemento em questão foram adotadas funções de forma dadas por polinômios quadráticos representadas nas Equações (3.145) a (3.149) pelo vetor coluna  $\Phi$ .

$$u_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{u_\alpha}, \quad (3.145)$$

$$v_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{v_\alpha}, \quad (3.146)$$

$$w_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{w_\alpha}, \quad (3.147)$$

$$\theta_{x\alpha} = \Phi^T \mathbf{q}_{\theta_{x\alpha}}, \quad (3.148)$$

$$\theta_{y\alpha} = \Phi^T \mathbf{q}_{\theta_{y\alpha}}. \quad (3.149)$$

Manipulando as equações, Silva (2010) chega ao vetor de forças internas e a matriz de rigidez apresentados a seguir.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \begin{Bmatrix} -S_b \Phi \\ -V_b \Phi \\ -N_b^1 \Phi \\ [(d-0,5h)V_b - N_b^2] \Phi \\ (0,5h-d)S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ V_b \Phi \\ N_b^1 \Phi \\ (0,5hV_b + N_b^2) \Phi \\ -0,5hS_b \Phi \end{Bmatrix} dx \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \int_L \begin{Bmatrix} -\Phi \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left( \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left( \frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[ (d-0,5h) \left( \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ (0,5h-d) \Phi \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left( \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left( \frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[ 0,5h \left( \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ -0,5h \Phi \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{Bmatrix} dx. \quad (3.150)$$

Na Equação (3.150), a derivada do esforço de cisalhamento longitudinal por unidade de comprimento do elemento de interface em relação ao deslocamento nodal é dada pela Equação (3.151). Nesta equação,  $\mathbf{0}$  é um vetor de coluna nulo com três componentes. Para os outros esforços segue o mesmo raciocínio (Silva, 2010).

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial (E_{S_b} s_l)}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} -E_{S_b} \Phi \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ (0,5h-d)E_{S_b} \Phi \\ E_{S_b} \Phi \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -0,5hE_{S_b} \Phi \end{Bmatrix}. \quad (3.151)$$

## **Capítulo 4**

---

# **Carregamentos Dinâmicos**



**4.1.Considerações Iniciais**

Os carregamentos dinâmicos possuem a característica de variar ao longo do tempo sua magnitude, direção e posição, logo, variam também ao longo do tempo as respostas da estrutura, em termos de deslocamento, velocidade e aceleração (Lima e Santos, 2008).

Existem diversas fontes geradoras de carregamento dinâmico, tais como: a ação dinâmica do vento; a atuação de equipamentos em uma estrutura; ações sísmicas; tráfego de veículos; as ações rítmicas, causadas por atividades relacionadas aos seres humanos, como caminhar, dançar, pular, correr, dentre outras.

Para bem analisar os efeitos que tais cargas dinâmicas causam à estrutura, primeiramente é preciso conhecer bem a natureza da carga, para que a mesma possa ser corretamente descrita. Logo, quando se trata de atividades humanas, pode-se tratá-la como carregamentos harmônicos, visto que são repetidas durante vários ciclos sucessivos.

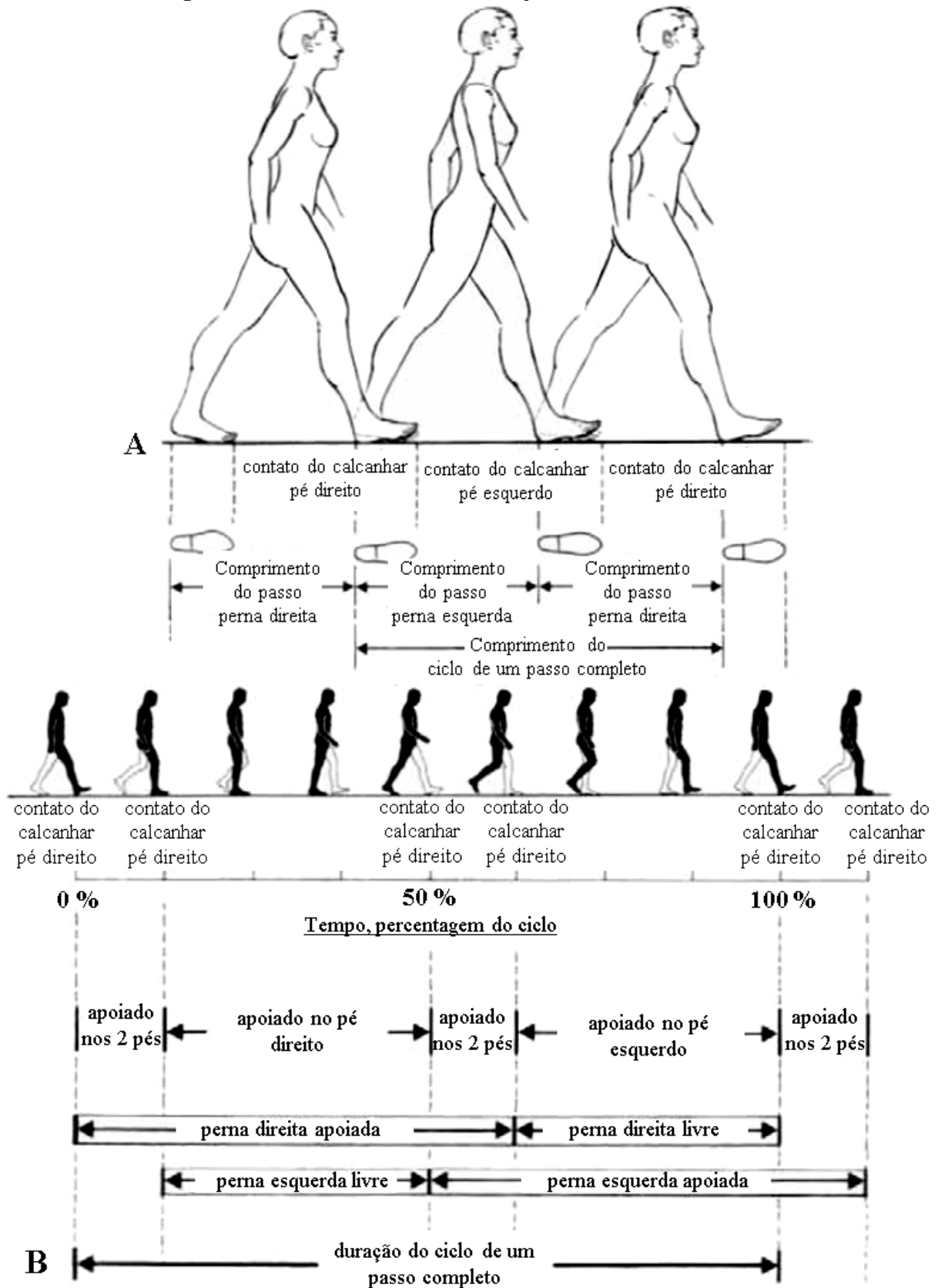
Segundo Alves (1997) *apud* Mello (2009), existem duas categorias de cargas geradas por atividades humanas, a primeira, referente às atividades onde não há perda de contato com a estrutura, como, por exemplo, a caminhada e a dança de salão. A segunda, onde existe a perda do contato com a estrutura, tais como corrida e a ginástica aeróbica.

Nesse capítulo, serão apresentados alguns modelos de força dura de carregamentos encontrados na literatura para algumas atividades rítmicas (Modelos de I a V), bem como um modelo biodinâmico, considerando a IHE (Modelo VI). Porém, não serão implementados todos os modelos descritos, mas apenas os modelos I, II, III e VI.

Segundo Inman *et al.* (1981) *apud* Varela (2004), as medidas de tempo e distância de um ciclo completo de um passo do caminhar de uma pessoa é mostrado na Figura 4. 1, onde verifica-se alguns parâmetros importantes que devem ser levados em consideração na análise desse tipo de carregamento, tais como: comprimento do passo (ambas as pernas), o contato do calcanhar com o piso (ambas as pernas), o comprimento do ciclo de um passo completo, tempo de apoio de cada um dos pés ou mesmo ambos e duração do ciclo de um passo completo.

Na Figura 4. 1 é mostrado com detalhes um ciclo de um caminhar de uma pessoa. No entanto, cada atividade possui suas particularidades, principalmente com relação ao tempo e forma de aplicação da carga no piso, sendo assim, cada tipo de atividade deve ser modelado de forma individual.

Figura 4. 1. Medidas de distância e tempo de um ciclo de caminhar



Fonte: Adaptada de Inman et al. (1981)

## 4.2. Modelos de Força dura

### 4.2.1. Modelo de carregamento I

O primeiro modelo é referente ao caminhar de pessoas, sem considerar o impacto do calcanhar. Esse modelo foi utilizado por Murray (1997) *apud* Mello *et al.* (2008). Nesse modelo a força  $F(t)$  dada pela Equação (4.1) representa a força gerada pelo caminhar de uma pessoa desprezando o impacto do calcanhar e considerando apenas o 1º harmônico.

$$F(t) = P\alpha_i \cos(2\pi i f_p t) \tag{4.1}$$

Na Equação (4.1),  $P$  é o peso do ser humano tomado igual a 700 N (Moreira, 2004);  $\alpha_i$  é o coeficiente dinâmico para a componente da força do 1º harmônico igual a 0,5 (como mostrado na Tabela 4. 1);  $i$  é o múltiplo harmônico da frequência do passo (1, 2, 3,...);  $f_p$  é a frequência de passo da atividade ou frequência da excitação e  $t$  é o tempo.

**Tabela 4. 1.** Faixas de frequência das atividades

Frequência de excitação ( $f_p$ ) e coeficientes dinâmicos ( $\alpha_i$ )						
Harmônico $i$	Pessoa caminhando		Aula de aeróbica		Grupo de dança	
	$f_p$ (Hz)	$\alpha_i$	$f_p$ (Hz)	$\alpha_i$	$f_p$ (Hz)	$\alpha_i$
1	1.6 - 2.2	0.5	2.0 - 2.75	1.5	1.5 - 2.7	0.5
2	3.2 - 4.4	0.2	4.0 - 5.5	0.6	3.0 - 5.4	0.05
4	4.8 - 6.6	0.1	6.0 - 8.25	0.1	-	-
4	6.4 - 8.8	0.05	-	-	-	-

Fonte: Adaptada de Murray (2016)

Os coeficientes dinâmicos  $\alpha_i$ , mostrados na Tabela 4. 1, são dados pelos picos da força senoidal dividido pelos pesos das pessoas. Para o modelo de carregamento I, será considerado apenas o referente ao primeiro harmônico, tendo este sido implementado neste trabalho.

### 4.2.2. Modelo de carregamento II

Esse modelo de carregamento representa o mesmo tipo de problema do modelo do item 4.2.1. Diferente do modelo anterior, este considera a parcela estática estacionária devido ao peso da pessoa e ainda todos os harmônicos representados pela somatória na Equação (4.2).

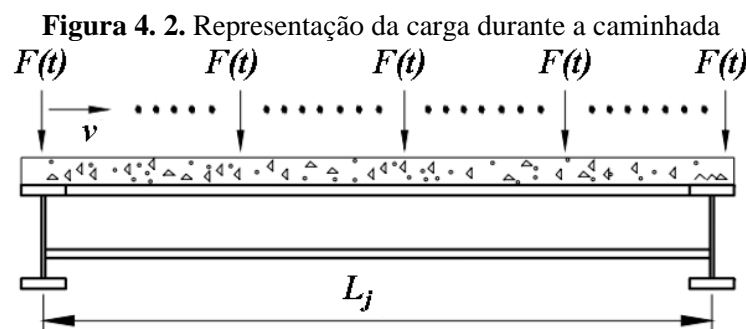
$$F(t) = P \left[ 1 + \sum \alpha_i \cos(2\pi i f_p t + \phi_i) \right] \quad (4.2)$$

Na Equação (4.2),  $P$  é o peso estático estacionário do ser humano tomado igual a 700 N (Moreira, 2004);  $\alpha_i$  é o coeficiente dinâmico para a componente da força harmônica  $i$  (sendo considerado os 4 harmônicos mostrados na Tabela 4. 1);  $i$  é o múltiplo harmônico da frequência do passo (1, 2, 3,...);  $f_p$  é a frequência de passo da atividade ou frequência da excitação;  $t$  é o tempo e  $\phi_i$  é o ângulo de fase para o harmônico  $i$ .

O modelo de carregamento I dado no item 4.2.1 pode ser considerado um caso particular do modelo de carregamento II. No modelo I, escolhe-se dentre os diferentes harmônicos do modelo II, aquele que tem frequência mais próxima da frequência de excitação. Observa-se que essa frequência acaba sobressaindo na resposta, justificando a desconsideração das outras. Este modelo foi implementado para este trabalho

### 4.2.3. Modelo de carregamento III

Semelhante ao modelo de carregamento “II”, este modelo, implementado para este trabalho, considera todos quatro harmônicos representativos do caminhar humano e a parcela estática devido ao peso da pessoa. Porém, neste caso, a carga estática ( $P$ ), deixa de ser estacionária e passa a variar, a uma velocidade ( $v$ ), a sua posição com o tempo ( $t$ ), como mostrado nas Figura 4. 2.

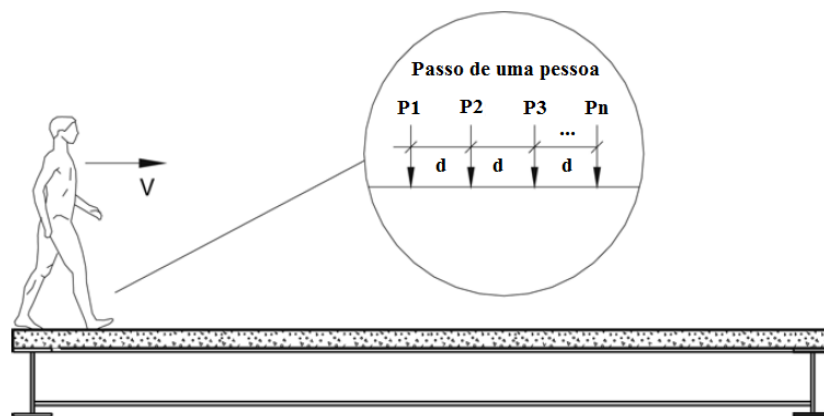


Fonte: Mello (2005)

Para representar esta variação espacial sobre o piso, foi considerado que ao longo da distância do passo, divide-se o carregamento em um número  $n$  de forças dinâmicas ( $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ), espaçadas em uma distância  $d$  uma da outra, sendo  $d$  a distância do

passo dividida pelo número de intervalos  $(n - 1)$ , como pode ser visto na Figura 4. 3. No entanto, as forças dinâmicas não são aplicadas ao mesmo tempo. A primeira força aplicada deve ser  $P1$ , de acordo com a Equação (4.2), por um intervalo de tempo de contato ao longo do elemento da malha (período do passo  $(T_p)$  dividido pela quantidade de intervalos  $(n - 1)$ , onde  $T_p = 1 / f_p$ , sendo  $f_p$  a frequência do passo), e no final deste intervalo de tempo, a carga  $P1$  torna-se zero e a carga  $P2$  é aplicada pelo mesmo intervalo de tempo. Esse processo ocorre sucessivamente até que todas as forças dinâmicas  $(Pn)$  sejam aplicadas ao longo da estrutura. A força não necessariamente precisa ser aplicada sobre os nós dos elementos, podendo ser aplicada ao longo dos elementos, quando isso ocorre, é calculada a carga equivalente que deverão ser aplicadas nos nós do elemento à qual a carga se encontra (Moreira, 2004).

Figura 4. 3. Variação espacial do carregamento humano no tempo



Fonte: Adaptada de Mello *et al.* (2008)

Na Figura 4. 3, percebe-se que a carga é constantemente aplicada na estrutura a certa velocidade. Essa carga “ $F(t)$ ” seria representada pela Equação (4.2), portanto variável com o tempo. O intervalo de tempo da aplicação da carga no nó da estrutura depende da distância e da frequência do passo, definidos pela Tabela 4. 2, a seguir:

Tabela 4. 2. Características do passo humano

Atividade	Velocidade (m/s)	Distância do passo (m)	Frequência do passo (Hz)
Caminhada lenta	1,1	0,6	1,7
Caminhada normal	1,5	0,75	2,0
Caminhada rápida	2,2	1,0	2,3

Fonte: Adaptada de Bachmann e Ammann (1987)

4.2.4. Modelo de carregamento IV

No quarto carregamento é considerado o efeito do impacto do calcanhar na ação dinâmica do caminhar de uma pessoa. Varela (2004) *apud* Mello (2008) considera que  $F(t)$  poderá assumir diferentes valores a depender do tempo ( $t$ ) e do período do passo ( $T_p$ ), sendo definida como:

$$F(t) = \begin{cases} \left( \frac{f_{mi}F_m - P}{0,04T_p} \right)t + P; & \text{se } 0 \leq t \leq 0,04T_p \\ f_{mi}F_m \left[ \frac{C_1(t - 0,04T_p)}{0,02T_p} + 1 \right]; & \text{se } 0,04T_p \leq t \leq 0,06T_p \\ F_m; & \text{se } 0,06T_p \leq t \leq 0,15T_p \\ P + \sum_{i=1}^{nh} P\alpha \left[ 2\pi i f_c(t + 0,1T_p) + \phi_i \right]; & \text{se } 0,15T_p \leq t \leq 0,9T_p \\ 10(P + C_2) \left( \frac{t}{T_p} - 1 \right) + P; & \text{se } 0,9T_p \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.3)$$

onde,  $F(t)$  é a representação matemática aproximada da força da reação do piso ao caminhar;  $t$  é o instante de tempo em (s);  $P$  é o peso da pessoa (N);  $i$  é o número do  $i$ -ésimo harmônico da 1ª frequência natural do sistema;  $nh$  é números de harmônicos considerados para representar a força, ou seja, números de termos da série de Fourier representativa da atividade humana;  $\phi_i$  é o ângulo de fase entre o  $i$ -ésimo e o primeiro harmônico;  $f_p$  é a frequência do passo do caminhar humano;  $F_m$  é o valor máximo da série de Fourier (Transformada rápida de Fourier com três termos, definida pela Equação (4.4), na qual considera a parcela estática associada ao peso da pessoa e três ou quatro componentes harmônicos da excitação);  $f_{mi}$  é o fator de majoração do impacto do calcanhar, ou seja, é a relação entre o valor do pico transiente do calcanhar e o valor máximo da série de Fourier ( $F_m$ ), que varia de pessoa a pessoa, por isso deve ter um estudo bem aprofundado;  $T_p$  é o período do passo;  $C_1$  é o coeficiente dado pela Equação (4.5);  $C_2$  é o coeficiente dado pela Equação (4.6).

$$F_m = P \left( 1 + \sum_{i=1}^{nh} \alpha_i \right), \quad (4.4)$$

$$C_1 = \left( \frac{1}{f_{mi}} - 1 \right), \quad (4.5)$$

$$C_2 = \begin{cases} P(1 - \alpha_2); & \text{se } nh = 3 \\ P(1 - \alpha_2 + \alpha_4); & \text{se } nh = 4 \end{cases}. \quad (4.6)$$

Nas Equações (4.4) e (4.6), tem-se que  $\alpha_i$  são coeficientes dinâmicos do  $i$ -ésimo harmônico da série de Fourier dados pela Tabela 4. 1. Este modelo não foi implementado para análises neste trabalho, ficando apenas como contribuição para trabalhos futuros.

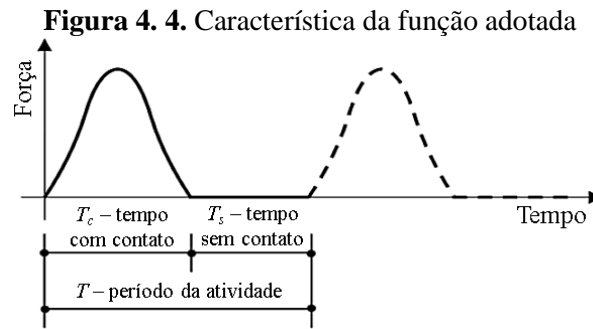
#### 4.2.5. Modelo de carregamento V

Este modelo representa a ação dinâmica gerada pela atividade de saltos/pulos de pessoas. Faisca (2003) *apud* Campista (2015) apresentou a Equação (4.7) para modelar esse tipo de ação dinâmica.

$$F(t) = \begin{cases} CD \left\{ K_p P \left[ 0,5 - 0,5 \cos \left( \frac{2\pi}{T_c} t \right) \right] \right\} & \text{para } t \leq T_c \\ 0, & \text{para } T_c \leq t \leq T \end{cases}. \quad (4.7)$$

Na Equação (4.7),  $F(t)$  é a representação matemática do carregamento no tempo (N);  $CD$  é o coeficiente de defasagem (mostrados para algumas atividades na Figura 4. 5 e na Tabela 4. 3);  $K_p$  é o coeficiente de impacto (mostrado para algumas atividades na Tabela 4. 3);  $P$  é o peso da pessoa, tomado como 700 a 800N;  $T$  é o período da atividade (s);  $T_c$  é o período de contato da atividade (s);  $t$  é o tempo (s).

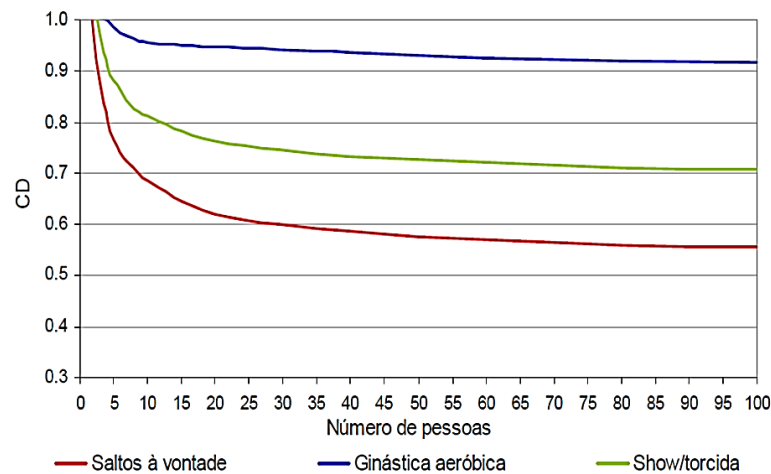
O gráfico da Figura 4. 4, mostra uma curva genérica resultante da Equação (4.7), referente ao carregamento aplicado em relação ao período da atividade.



Fonte: Faisca (2003)

Os coeficientes de defasagem para as atividades propostas por Mello (2009) e também por Faisca (2003) *apud* Campista (2015), são mostrados na Figura 4. 5.

**Figura 4. 5.** Coeficiente de defasagem para as atividades propostas



Fonte: Faisca (2003)

Davies (1969) *apud* Mello (2009) utilizou os períodos totais das atividades e de contatos e os coeficientes de impacto dados pela Tabela 4. 3.

**Tabela 4. 3.** Parâmetros utilizados

Atividade	$T$ (s)	$T_c$ (s)	$K_p$
Saltos à vontade	$0,44 \pm 0,15$	$0,32 \pm 0,09$	$3,17 \pm 0,58$
Ginástica aeróbica	$0,44 \pm 0,09$	$0,34 \pm 0,09$	$2,78 \pm 0,60$

Fonte: Adaptada de Davies (1969)

Este modelo não foi implementado para análises neste trabalho, ficando apenas como contribuição para trabalhos. futuros

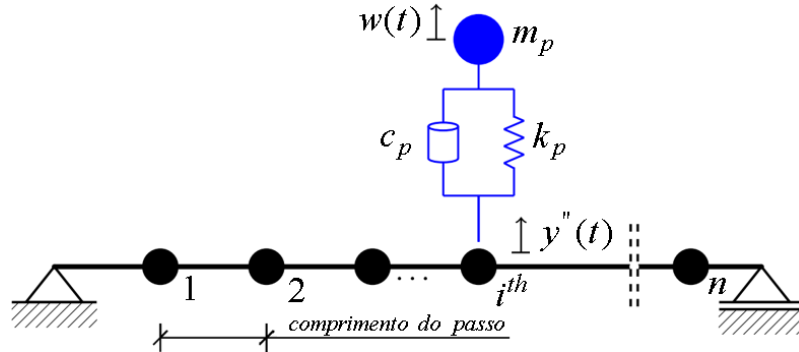


### 4.3. Modelo Biodinâmico

#### 4.3.1. Modelo de carregamento VI

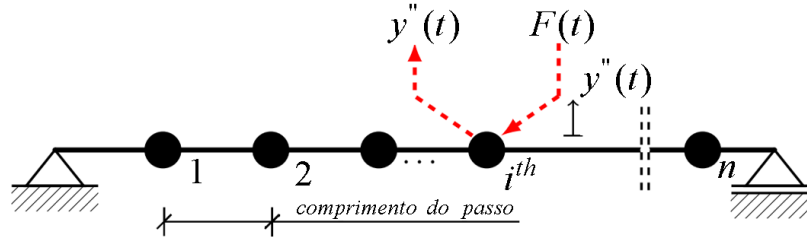
Gomez *et al.* (2018) apresentaram um modelo biodinâmico, onde, para representar os subsistemas acoplados, foi desenvolvido um modelo que incorpora diretamente as interações bidirecionais entre a passarela e o pedestre no ponto de contato (ou seja, onde se localizam os pedestres). Este sistema é particionado em duas subestruturas dinâmicas, uma é a passarela, que foi modelada por Elementos Finitos, e a segunda subestrutura é o pedestre, que foi modelado como um sistema MMA (Figura 4. 6). Essas duas subestruturas dinâmicas são acopladas, e cada uma terá influência sobre a outra, ou seja, o usuário aplica uma carregamento,  $F(t)$ , na estrutura e a estrutura devolve uma aceleração ao usuário,  $y''(t)$ , como mostrado na Figura 4. 7.

Figura 4. 6. Sistema MMA



Fonte: Adaptada de Gomez *et al.* (2018)

Figura 4. 7. Esquema do sistema acoplado



Fonte: Adaptada de Gomez *et al.* (2018)

A equação de movimento da estrutura é dada por:

$$\mathbf{M}_B [y''(t)] + \mathbf{C}_B [y'(t)] + \mathbf{K}_B [y(t)] = [\mathbf{L}(t)] F(t) \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{M}_B$ ,  $\mathbf{C}_B$  e  $\mathbf{K}_B$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura, respectivamente;  $[y''(t)]$ ,  $[y'(t)]$  e  $[y(t)]$  são os vetores contendo as acelerações, velocidades e deslocamentos nodais da estrutura no ponto de contato e  $[\mathbf{L}(t)]$  é um vetor coluna que varia com o tempo e é definido pela localização espacial do pedestre na ponte, ou seja, o vetor é preenchido com zero, exceto no grau de liberdade correspondente ao deslocamento nodal do ponto onde o pedestre está agindo, sendo definido como  $[\mathbf{L}(t)] = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]$  e  $F(t)$  é a representação matemática do carregamento no ponto de contato dada por:

$$F(t) = c_p w'(t) + k_p w(t), \tag{4.9}$$

No modelo biodinâmico apresentado por Gomez *et al.* (2018), as acelerações nodais da estrutura ( $y_i''(t)$ ) é obtida pela seguinte equação:

$$m_p w''(t) + c_p w'(t) + k_p w(t) = -m_p y_i''(t).$$

(4.10)

onde  $c_p$  e  $k_p$  são os parâmetros biodinâmicos do pedestre;  $m_p$  é a massa do pedestre e  $w''(t)$ ,  $w'(t)$  e  $w(t)$  são a aceleração, velocidade e o deslocamento do centro de massa do corpo do pedestre, respectivamente.

Os parâmetros biodinâmicos,  $c_p$  e  $k_p$ , mostrados na Tabela 4. 4, são obtidos por Gomez *et al.* (2018), para três pedestres de massas distintas considerando o piso rígido, e mostra ainda o valor da velocidade definida para cada início de passo,  $w'(t_0)$ , ou seja, a cada toque do calcanhar.

**Tabela 4. 4. Parâmetros biodinâmicos para piso rígido**

Pessoa	$m_p$ (kg)	$c_p$ (kg·s <sup>-1</sup> )	$k_p$ (N·m <sup>-1</sup> )	$w'(t_0)$ (m·s <sup>-1</sup> )
A	56	212,5	14000	0,30
B	97	501,4	20000	0,38
C	72	273,2	18000	0,22

Fonte: Adaptada de Gomez *et al.* (2018)



## **Capítulo 5**

---

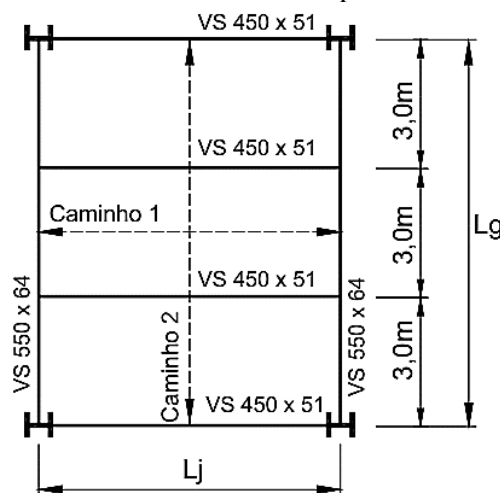
### **Resultados e Discussões**

Para validação das implementações realizadas neste trabalho, resultados obtidos da análise dinâmica de pisos mistos e outros modelos estruturais simulados pelos elementos finitos *PLATE9*, *BEAMRMT*, *BEAM3DT*, e *INTBEAMPLATE* são comparados com resultados de outros autores. São apresentados 8 exemplos de diversos autores, sendo que os 4 primeiros não levam em consideração a Interação Homem-Estrutura (IHE) e os 4 últimos levam em consideração tal interação.

### 5.1. Exemplo 1: Piso Misto com colunas

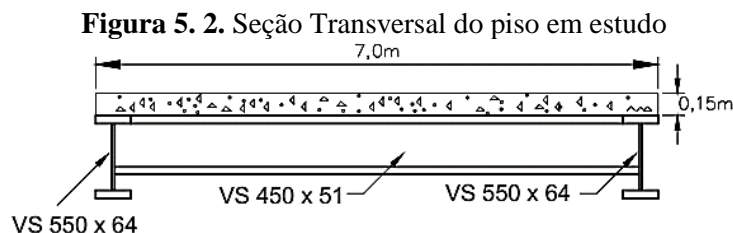
O primeiro exemplo trata-se de um piso misto formado por uma laje retangular de concreto ligada a seis vigas de aço de seção transversal I, e a quatro colunas de aço localizadas em cada um dos vértices da laje, como mostrado na Figura 5. 1. Esse mesmo exemplo foi analisado por Mello (2005) e Mello *et al.* (2007, 2008), sendo os resultados obtidos neste trabalho comparados com os resultados obtidos por Mello (2005).

Figura 5. 1. Modelo estrutural do piso com as colunas.



Fonte: Mello (2005)

Um corte na direção horizontal do piso misto da Figura 5. 1 é mostrado na Figura 5. 2, onde  $L_j$  nesse trabalho foi considerada igual a 7m. Nesse modelo a influência da rigidez das colunas de aço são consideradas na análise, sendo para isso, utilizadas colunas com altura de 5m, e características geométricas contidas na Tabela 5. 1. As características dos demais perfis metálicos e da laje de concreto também estão contidas na Tabela 5. 1.



Fonte: Mello (2005)

**Tabela 5. 1.** Características geométricas do piso em estudo

Tipo de Perfil	Altura ( $d$ )	Largura da mesa ( $b_f$ )	Espessura da mesa superior ( $t_f$ )	Espessura da mesa inferior ( $t_f$ )	Espessura da alma ( $t_w$ )
Viga: VS 550 x 64	550	250	9,5	9,5	6,3
Viga: VC 450 x 51	450	200	9,5	9,5	6,3
Coluna: VS 300 x 62	300	300	9,5	9,5	8,0

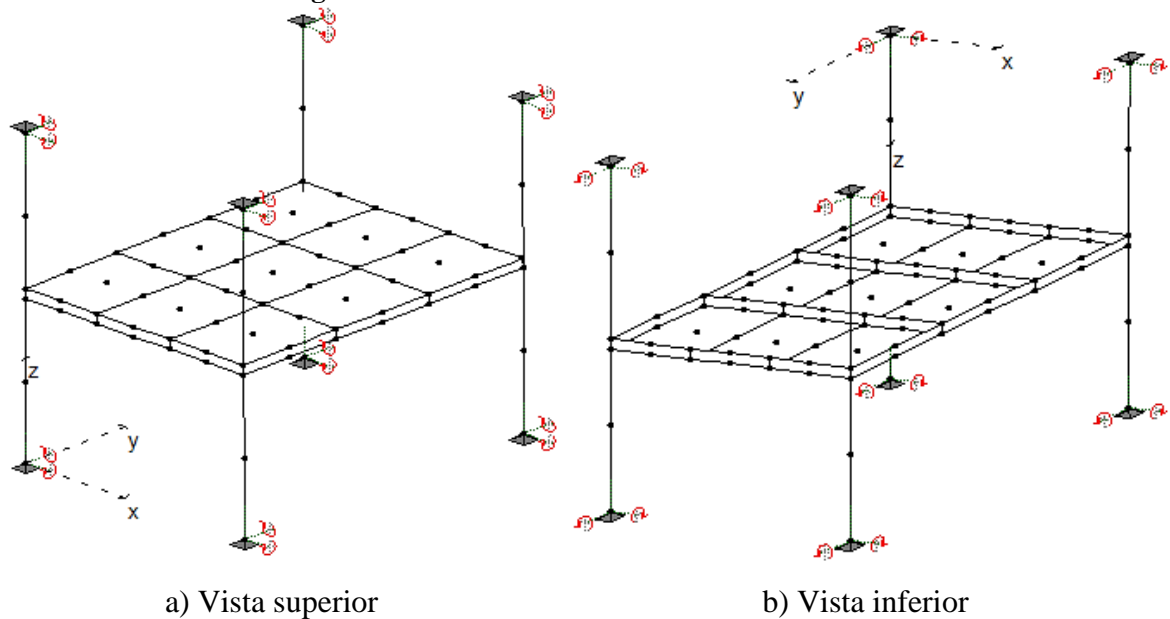
Fonte: Adaptada de Mello (2005)

Mello (2005) realizou diversas análises para o mesmo piso, mantendo o “ $L_g$ ” igual a 9m e modificando o “ $L_j$ ” (ver Figura 5. 1), considerando valores entre os limites de 5m até 10m com variação de 0,5m. No entanto, neste trabalho é considerado apenas o caso em que “ $L_j$ ” é igual a 7m. Já com relação ao espaçamento entre as vigas secundárias, esses são mantidos constantes e iguais a 3m. As vigas principais e secundárias são formadas por perfis soldados da série VS, de acordo com a Tabela 5. 1.

Os perfis metálicos do tipo “I” são constituídos por um aço com limite de escoamento de 300 MPa. Para as vigas de aço, foi considerado um módulo de elasticidade igual a 200GPa, coeficiente de Poisson de 0,3 e massa específica igual a 7850Kg/m<sup>3</sup>. A laje de concreto possui espessura de 0,15m, resistência característica à compressão de 30MPa, módulo de elasticidade igual a 24GPa, coeficiente de Poisson de 0,1 e massa específica igual a 2550kg/m<sup>3</sup>.

A discretização do piso misto analisado neste exemplo é feita por elementos finitos de placa, viga, e interface, como mostrada na Figura 5. 3, onde é apresentado o mesmo piso em duas vistas diferentes (inferior e superior).

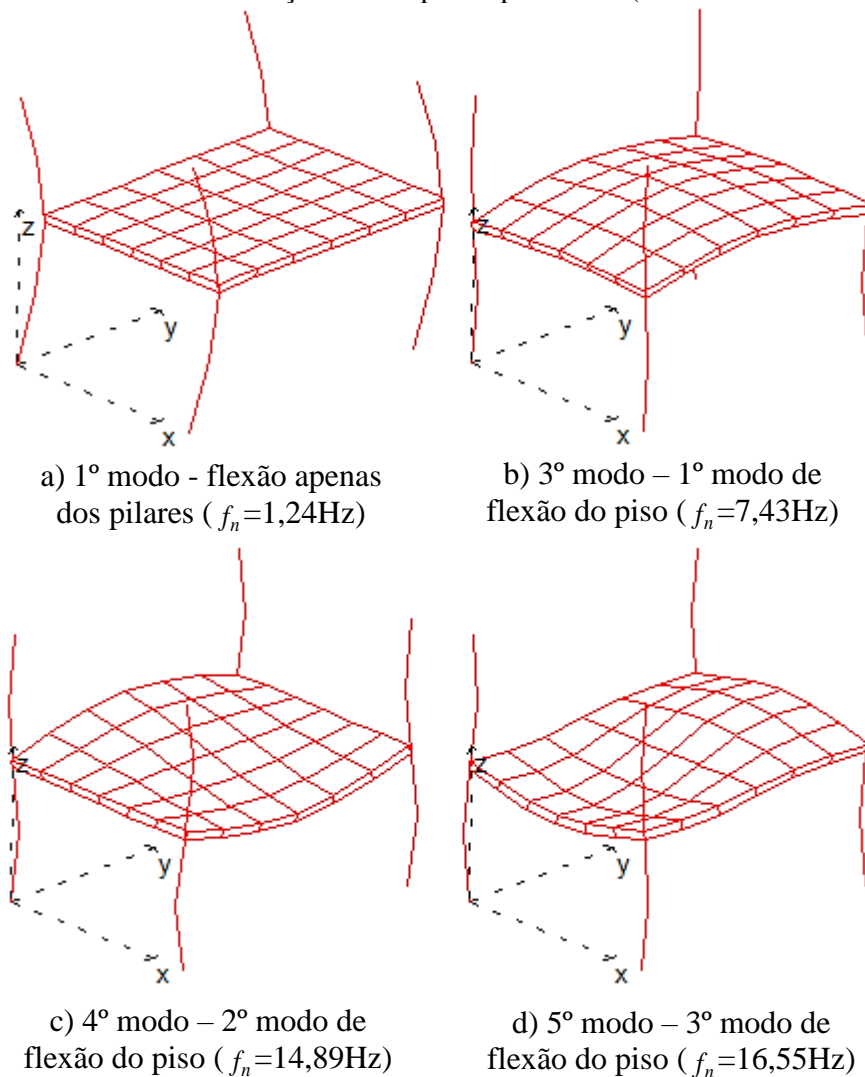
Figura 5. 3. Piso discretizado em elementos finitos



- A discretização do piso misto em questão foi realizada da seguinte forma:
- Os elementos lineares verticais (colunas) foram discretizados por 2 (dois) elementos de barra tridimensional para cada coluna (elementos finitos unidimensionais chamados de *BEAM3DT* no FEMOOP), elementos que permitem a flexibilidade dos pilares em ambas as direções.
  - Os elementos lineares horizontais (vigas) foram discretizados por 3 (três) elementos de barra para cada viga (elementos finitos unidimensionais chamados de *BEAMRMT* no FEMOOP).
  - A laje de concreto foi discretizada em 9 (nove) elementos retangulares de placas (elementos finitos bidimensionais chamados de *PLATE9* no FEMOOP).
  - A ligação entre os elementos de barra (vigas) e os elementos de placa (laje) é feita por 3 (três) elementos de Interface (elementos finitos unidimensionais chamados de *INTBEAMPLATE* no FEMOOP).

São ilustrados na Figura 5. 4 alguns modos naturais de vibração do piso misto analisado, sendo obtidos de acordo com a análise descrita neste trabalho. Como pode ser observado nessa figura, o primeiro modo está relacionado à flexão apenas dos pilares no plano  $xz$  (mostrado na Figura 5. 4a), ou seja, o piso não sofre flexão. De forma semelhante, o 2º modo também apresenta apenas flexão dos pilares, porém em  $yz$  (não mostrado na Figura 5. 4 devido semelhança com o 1º modo). Já o 3º, 4º e 5º modos de vibração são referentes à flexão, de forma conjunta, do piso, vigas e pilares, como pode ser visto nas Figura 5. 4b-d.

Figura 5. 4. Modos de vibração natural para o piso misto (conexão não deformável)



As frequências dos 10 (dez) primeiros modos naturais de vibração para o piso misto da Figura 5. 1 são dadas na Tabela 5. 2, onde estão contidos os resultados obtidos por Mello (2005) e os resultados obtidos neste trabalho. Os modos referentes à flexão dos pilares (dois primeiros) não foram determinados por Mello (2005), por isso, não são apresentados na Tabela 5. 2 para esses autores. Os demais modos naturais de vibração mostrados na Tabela 5. 2 são relacionados à flexão do piso e vigas e dos pilares, sendo que 1º deles está em negrito.

Tabela 5. 2. Comparação entre resultados obtidos para frequências naturais associadas aos modos de vibração

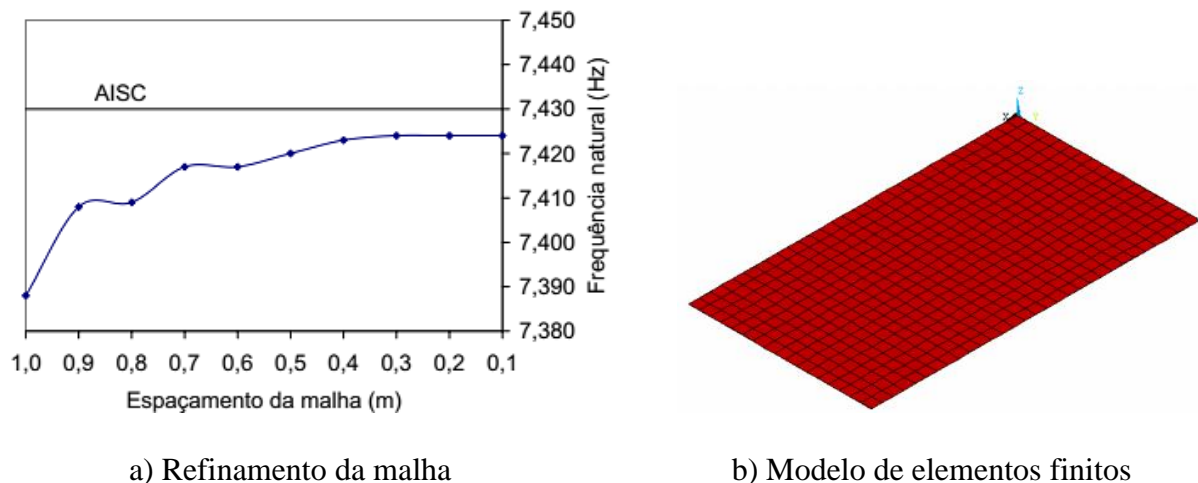
Modo de vibração	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
$f_n$ (Hz)	Presente trabalho	1,24	2,19	<b>7,43</b>	14,89	16,55	21,31	32,42	33,95	37,42	38,36
	Mello (2005)	-	-	<b>7,42</b>	14,70	15,23	20,32	30,82	31,86	37,18	45,38
Diferença (%)	-	-	0,13	1,28	7,98	4,65	4,94	6,16	0,64	15,47	



Nota-se da Tabela 5. 2, que os resultados obtidos neste trabalho são muito próximos dos valores de Mello (2005), sendo que a diferença nas respostas pode ser explicada por diferenças nas formulações dos elementos finitos utilizados em cada um dos trabalhos. Os dois trabalhos simularam o problema utilizando elementos finitos de placa para a laje de concreto e de barra para as vigas e pilares. No entanto, Mello (2005) utilizou elementos de placa retangular de quatro nós do ANSYS, o que gera a necessidade de uma discretização da malha de elementos finitos bem mais refinada que os elementos de nove nós. Mello não identificou a teoria de placa usada na formulação do elemento de placa de 4 nós usado, enquanto que neste trabalho foi utilizado um elemento de placa de nove nós com sua formulação baseada na teoria de placas de Reissner-Mindlin (truncamento para cortante, sendo mais rígido para modos mais altos) e discretização conforme apresentado na Figura 5. 3 e descrita anteriormente (item 3.2).

Como é mostrado na Figura 5. 5, Mello (2005) começou utilizando uma malha com espaçamento de 1 m (para laje, vigas e pilares), tendo encontrado valores de frequência um pouco menores que 7,39Hz, à medida que foi aumentando a discretização a frequência foi reduzindo convergindo para o valor de 7,424Hz (aproximado na Tabela 5. 2 para 7,42Hz) para um espaçamento da malha menor igual a 0,3m. Já o presente trabalho, a malha utilizada possui espaçamento de 5 m para os pilares e 2,3m e 3m para as vigas, laje e interface.

Figura 5. 5. Malha de elementos finitos



a) Refinamento da malha

b) Modelo de elementos finitos

Fonte: Adaptada de Mello (2005)

Mello (2005) obteve ainda, por meio do método simplificado da AISC (Murray *et al.*, 1997), para esse mesmo piso, o valor de 7,43Hz para a frequência de vibração referente ao primeiro modo natural de vibração considerando a flexão da placa (como pode ser observado na Figura 5. 4b). Ou seja, o resultado obtido neste presente trabalho (7,43 Hz), é idêntico ao

---

obtido pelo método de (Murray *et al.*, 1997). Nota-se da Tabela 5. 2 que frequência associada ao 1º modo de flexão do piso e vigas, é apenas o 3º modo mostrado, visto que os dois primeiros são referentes apenas à flexão dos pilares.

Na Tabela 5. 3 são apresentadas as frequências naturais do piso misto considerando a variação da rigidez da conexão entre as vigas de aço e a laje de concreto. Nessa tabela,  $E_{sb}$  é a rigidez longitudinal na conexão, ou seja, ao longo do eixo longitudinal da viga, enquanto que  $E_{vb}$  é a rigidez transversal na conexão, ou seja, perpendicular ao eixo longitudinal da viga, logo  $E_{sb}$  está relacionada a um deslizamento ao longo do eixo longitudinal da viga, e  $E_{vb}$  com um deslizamento lateral da mesma. Os valores das rigidezes da conexão estão em kPa, sendo que para simular uma conexão não deformável (interação total), utilizou-se um valor de  $10^9$ kPa (valor muito alto), para uma conexão deformável (interação parcial) o valor de  $2 \times 10^5$ kPa e 0 (zero) kPa para simular interação livre (Machado, 2012).

O valor utilizado para conexão deformável é embasado no trabalho de Oehlers e Coughlan (1986), que através do tratamento estatístico de 116 diferentes curvas força cortante versus deslizamento de conectores do tipo pino com cabeça estabeleceram uma relação empírica para obter a rigidez da conexão. De acordo com o trabalho desses autores conectores tipo pino com cabeça de 19,1mm espaçados a cada 29,5cm resultam em uma rigidez de 200Mpa ( $2 \times 10^5$ kPa) para a conexão deformável. Para essa configuração e seguindo as prescrições da norma NBR 8800 (2015) verifica-se que as vigas principais e secundárias do piso analisado têm grau de interação de 73% e 67%, respectivamente.

São mostrados na Figura 5. 6 o primeiro e o quinto modo de vibração natural para o piso misto com interação livre nas direções longitudinal e transversal. Observa-se dessa figura que o primeiro modo de vibração se refere a um deslocamento relativo entre a laje de concreto e as vigas de aço (Figura 5. 6a). Somente a partir do quinto modo de vibração natural tem-se o envolvimento da flexão do piso nos modos de vibrações (Figura 5. 6b), como pode ser visto na Tabela 5. 3.

Figura 5. 6. Modos de vibração natural para o piso misto (interação livre)

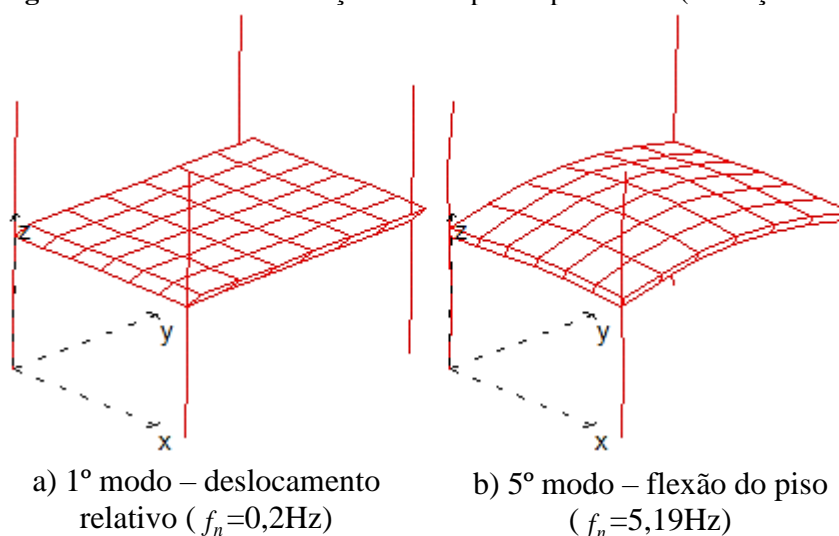


Tabela 5. 3. Variações das frequências naturais referente aos modos de vibração com a variação da rigidez da conexão

$E_{sb}$ (kPa)	$E_{vb}$ (kPa)		Modos de vibração									
			1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
$1 \times 10^9$	$1 \times 10^9$	$f_n$ (Hz)	1,24	2,19	<b>7,43</b>	14,89	16,55	21,31	32,42	33,95	37,42	38,36
$2 \times 10^5$	$1 \times 10^9$		1,24	2,19	<b>7,15</b>	13,83	15,08	20,09	30,05	31,50	34,42	37,14
0	$1 \times 10^9$		1,24	2,19	<b>6,85</b>	12,95	14,03	18,93	28,47	30,00	31,54	36,42
$1 \times 10^9$	$2 \times 10^5$		1,24	2,19	<b>7,31</b>	14,83	16,27	20,89	31,67	33,55	36,72	37,80
$1 \times 10^9$	0		1,24	2,19	<b>7,02</b>	14,72	15,29	19,65	29,86	31,82	34,15	37,59
$2 \times 10^5$	$2 \times 10^5$		1,24	2,19	<b>6,88</b>	13,33	14,56	19,56	28,17	30,44	35,99	36,45
0	0		0,02	0,02	0,03	3,38	<b>5,19</b>	5,98	10,13	11,50	15,91	21,47

Observa-se da Tabela 5. 3, que as frequências naturais, referente aos modos de vibração, sofrem uma redução com a diminuição da rigidez da conexão deformável, por exemplo, para o primeiro modo de vibração que envolve flexão no piso (em negrito na Tabela 5. 3), a frequência decresce de 7,43Hz para 5,19Hz quando passamos de interação total para livre nas duas direções, ou seja, uma redução de 30,1% da frequência. Já para a interação parcial nas duas direções o valor decresce de 7,43Hz para 6,88Hz, ou seja, uma redução de apenas 7,4% da frequência, considerando também primeiro modo de vibração que envolve flexão no piso.

Observa-se da Tabela 5. 3, que a rigidez da conexão não interfere nas frequências referentes aos modos de vibração que flexionam apenas as colunas, isso se deve ao movimento de corpo rígido do piso. No entanto, ao permitir interação livre nas duas direções existe a possibilidade de o movimento de corpo rígido, ou seja, possibilidade de ocorrer movimento apenas da laje de concreto ou das vigas, como mostrado na Figura 5.6a. Pode-se observar também para interação livre, um acréscimo na quantidade de modos de vibração que levam em

consideração apenas os deslocamentos relativos entre a laje de concreto e as vigas de aço e também a flexão dos pilares (Tabela 5. 3).

A Tabela 5. 4 mostra a diferença entre os resultados de aceleração de pico obtidos por Mello *et al.* (2008) e neste trabalho para a conexão não deformável, onde percebe-se uma boa proximidade entre os valores, principalmente para os Modelos I e II onde a carga dinâmica é aplicada em um ponto fixo. Para o Modelo III, onde a carga varia a sua posição ao longo do tempo, os resultados divergem mais, porém esta diferença, mais uma vez, pode ser explicada pelas diferenças nas formulações, tipos de elementos finitos usados nos dois trabalhos, modelo de análise dinâmica e forma de consideração do amortecimento. Os Modelos I, II e III são descritos nos itens 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3 respectivamente.

**Tabela 5. 4.** Acelerações de pico em um ponto no meio do piso para diferentes carregamentos (conexão não deformável)

$E_{sb}=E_{vb}=10^9$ kPa (interação total)		Modelo I	Modelo II	Modelo III Caminho 1	Modelo III Caminho 2
Presente trabalho	Aceleração	0,026	0,034	0,094	0,085
Mello <i>et al.</i> (2008)	(m/s <sup>2</sup> )	0,027	0,033	0,083	0,092
Diferença (%)		3,70	2,94	11,70	7,61

Na Tabela 5. 5 são apresentados os valores das acelerações de pico em um ponto no meio do piso para três diferentes formas de carregamento que simulam atividades rítmicas (descritos nos itens de 4.2.2 até 4.2.4 do capítulo 4) e diferentes rigidezes de conexão.

Para os Modelos de carregamento I e II a frequência do carregamento para cada caso de rigidez da conexão deformável foi definida como a frequência do 1º modo de vibração natural envolvendo flexão do piso (Tabela 5. 3) dividida por quatro. Já para o modelo III a frequência foi mantida constante e igual a 1,856Hz.

No modelo de carregamento I e II foi considerado a força  $F(t)$  dada pela Equação (4.1) e (4.2), respectivamente, atuando durante um intervalo de tempo de 2s no centro do piso misto. No modelo de carregamento III, a força  $F(t)$  também é dada pela Equação (4.2), porém a análise leva em consideração também uma variação espacial de aplicação da carga dinâmica simulando o caminhar de uma pessoa ao longo dos cursos 1 e 2 mostrados na Figura 5. 1.

Como a frequência do passo está sempre entre 1,6 e 2,2 (frequência natural dividida por 4), de acordo com a Tabela 4. 1, o coeficiente dinâmico  $\alpha_i$  foi tomado como 0,5; 0,2; 0,1 e 0,05 respectivamente. O fator de impacto ( $f_{mi}$ ) é igual a 1,12 e os ângulos de fase são  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = \pi/2$ ,  $\phi_3 = \pi/2$ , e  $\phi_4 = \pi/2$ .

Nesse trabalho foi utilizado o método de integração direta Wilson-Theta com fator Theta de 1,4 (Bathe, 1986). Para os incrementos de tempo foram adotados 0,013s para os modelos de carregamento I e II, e de 0,005s para o modelo de carregamento III. A diferença nos incrementos de tempo deve-se ao fato que no carregamento III o intervalo de tempo de atuação da força é bem menor que nos carregamentos I e II.

Para o amortecimento nesse trabalho é considerado o modelo de amortecimento proporcional de Ritz com parâmetros alfa e beta determinados a partir da taxa de amortecimento de 3% para os dois primeiros modos de vibração envolvendo flexão da laje de concreto, ou seja, frequências de 7,43Hz e 14,89Hz. Já no trabalho de Mello *et al.* (2008) é considerado uma taxa de 3% para todo o sistema estrutural, não sendo melhor explicado.

**Tabela 5. 5.** Acelerações de pico em um ponto no meio do piso para diferentes carregamentos (rigidez da conexão variável)

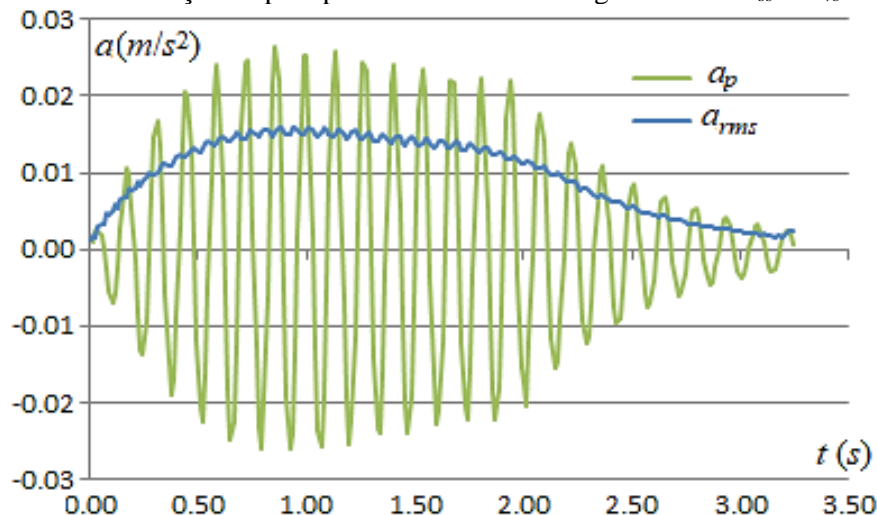
$E_{sb}$ (kPa)	$E_{vb}$ (kPa)		Modelo I	Modelo II	Modelo III Caminho 1	Modelo III Caminho 2	AISC (Murray <i>et al.</i> (2016))
$1 \times 10^9$	$1 \times 10^9$	Aceleração (m/s <sup>2</sup> )	0,026	0,034	0,094	0,085	0,147 (1,5% g) (valor baseado na Tabela 1.11 para Piso)
$2 \times 10^5$	$1 \times 10^9$		0,027	0,033	0,075	0,071	
0	$1 \times 10^9$		0,028	0,034	0,060	0,056	
$1 \times 10^9$	$2 \times 10^5$		0,027	0,032	0,071	0,078	
$1 \times 10^9$	0		0,028	0,037	0,082	0,077	
$2 \times 10^5$	$2 \times 10^5$		0,034	0,032	0,072	0,065	
0	0		0,037	0,042	0,091	0,086	
Variação Interação Total e Parcial (%)			+30,7	-6,7	-30,5	-30,7	
Variação Interação Total e Nula (%)			+42,3	+23,5	-3,3	+1,2	

Observa-se da Tabela 5. 5, que para o modelo de carregamento I há um aumento da aceleração de pico com a redução da rigidez da conexão como era esperado já que a redução de rigidez da conexão reduz a frequência fundamental do piso. Para o Modelo II houve uma pequena variação da resposta para Interação total em relação a parcial, ou seja, a variação na rigidez da conexão não influencia de forma considerável na análise. Já para o modelo III percebe-se uma mudança brusca de comportamento quando a carga passa a variar sua posição ao longo do tempo, ao invés de aumentar, a aceleração diminui consideravelmente quando se compara Interação total com a parcial. No modelo III a frequência da força dinâmica foi mantida constante para os diferentes níveis de rigidez da conexão o que explica a redução em vez de aumento da aceleração de pico. No mais, a variação dos resultados na Tabela 5. 5 mostra que diferentes simulações de carregamentos rítmicos e rigidez da conexão geram variações

significativas nas acelerações do sistema, devendo o projetista estar atento a todos esses parâmetros de análise.

É apresentada na Figura 5. 7 a variação da aceleração de pico e da aceleração média *RMS* ( $a_{rms}$ ) ao longo do tempo para o modelo de carregamento I e rigidez total da conexão longitudinal e transversal, sendo a aceleração *RMS* dada pela Equação (1.1).

**Figura 5. 7.** Aceleração de pico para o Modelo de carregamento I e  $E_{sb} = E_{vb} = 10^9\text{kPa}$

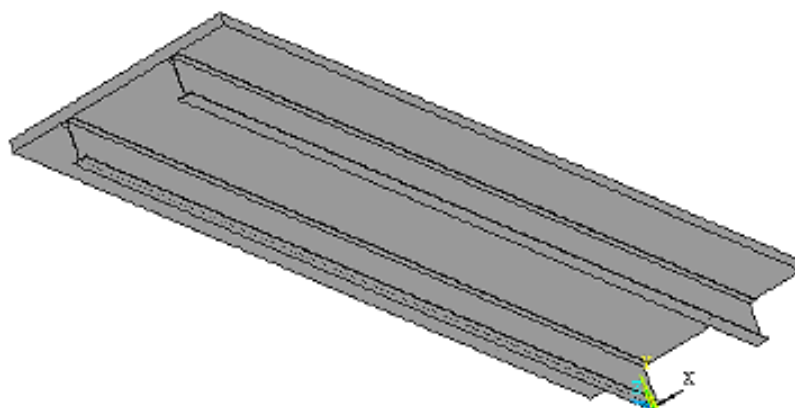


Observa-se da Figura 5. 7 que a aceleração *RMS* fornece valores menos variáveis comparados com os valores das acelerações de pico, se mostrando menos vulneráveis a possíveis erros de simulação.

### 5.2.Exemplo 2: Passarela

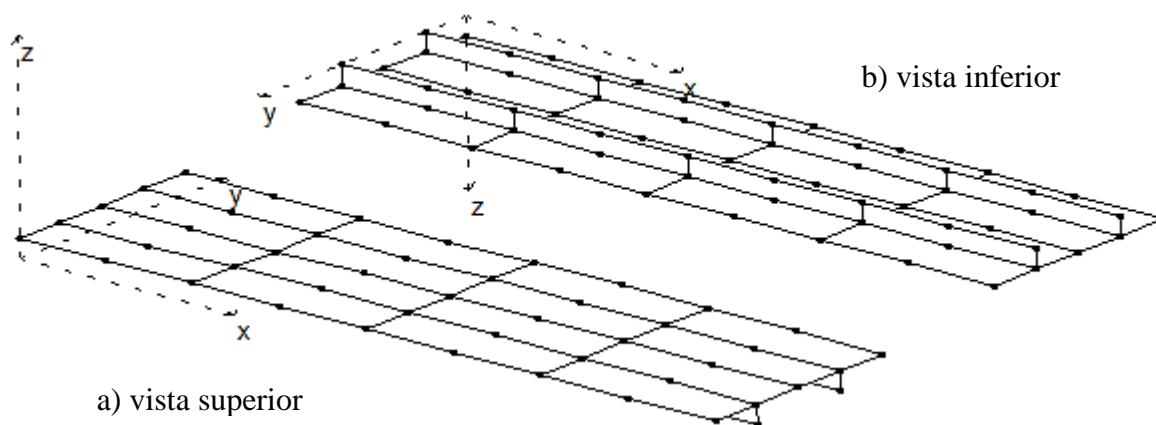
Nesse exemplo é analisada uma passarela formada por uma laje de concreto de 3m de largura, por 12m de comprimento e 15cm de espessura, ligada a duas vigas metálicas (W530x66) dispostas longitudinalmente e espaçadas lateralmente por uma distância de 1,5m e 0,75m das extremidades, como mostra a Figura 5. 8. As dimensões dos perfis I são:  $d=525\text{mm}$ ,  $b_f=165\text{mm}$ ,  $t_f=11,7\text{mm}$  e  $t_w=9\text{mm}$ . O módulo de elasticidade longitudinal do aço utilizado é de  $2 \times 10^{11}\text{N/m}^2$ , coeficiente de Poisson de 0,3 e massa específica de  $7850\text{kg/m}^3$ . O módulo de elasticidade longitudinal do concreto utilizado é de  $2,4 \times 10^{10}\text{N/m}^2$ , coeficiente de Poisson de 0,1 e massa específica de  $2400\text{kg/m}^3$ . Esse mesmo exemplo foi analisado por Moreira (2004) sendo os resultados do autor utilizados nesse trabalho para comparação com os resultados obtidos.

**Figura 5. 8.** Passarela com vão de 12m



Fonte: Moreira (2004)

A discretização da passarela em elementos finitos de placa, vigas e interface é mostrada na Figura 5. 9. Nessa figura, a mesma passarela é mostrada com dois pontos de vista diferentes, uma vista superior e outra inferior.

**Figura 5. 9.** Passarela mista discretizada em elementos finitos de placa e barra

A passarela mista mostrada na Figura 5. 8 foi discretizada da seguinte forma: as vigas de aço foram discretizadas por quatro elementos de barra (BEAMRMT) para cada viga; a laje de concreto foi discretizada por oito elementos de placas com efeito de membrana e flexão (PLATE9); a ligação entre os elementos de barra (vigas) e os elementos de placa (laje) é feita por quatro elementos de interface (INTBEAMPLATE).

As frequências dos 4 (quatro) primeiros modos naturais de vibração encontrados no presente trabalho para conexão não deformável são mostradas na Tabela 5. 6, onde são apresentados também os valores obtidos por Moreira (2004). Esses modos naturais de vibração da passarela em questão são ilustrados na Figura 5. 10. Como podem ser observados nessa figura, o primeiro e terceiro modos estão relacionados com flexão da passarela, já o segundo e quarto estão relacionados com torção nos eixos das vigas.

A diferença nas respostas mostradas na Tabela 5. 6 pode ser explicada por diferenças nas formulações dos elementos finitos utilizados por Moreira (2004) e nesse trabalho. Os dois trabalhos simularam o problema usando elementos de placa para a laje de concreto e elementos de barra para as vigas. No entanto, Moreira (2004) utilizou elementos de placa retangular de quatro nós do ANSYS, não sendo identificada a teoria de placas usada para a sua formulação, enquanto que no presente trabalho foi utilizado um elemento de placa de nove nós com sua formulação baseada na teoria de placas de Reissner–Mindlin.

As diferenças mais significativas nos modos naturais de vibração apresentados na Tabela 5. 6 são referentes aos modos de vibração que envolvem torção nas vigas e laje. Como mencionado no capítulo referente às formulações dos elementos (Capítulo 3), a torção no elemento de barra é considerada uniforme, com ângulo de torção relativo constante ao longo do elemento e deslocamento relativo axial nulo. Moreira (2004) não apresenta as características do elemento de viga utilizado em sua análise. Apesar das diferenças significativas nos modos

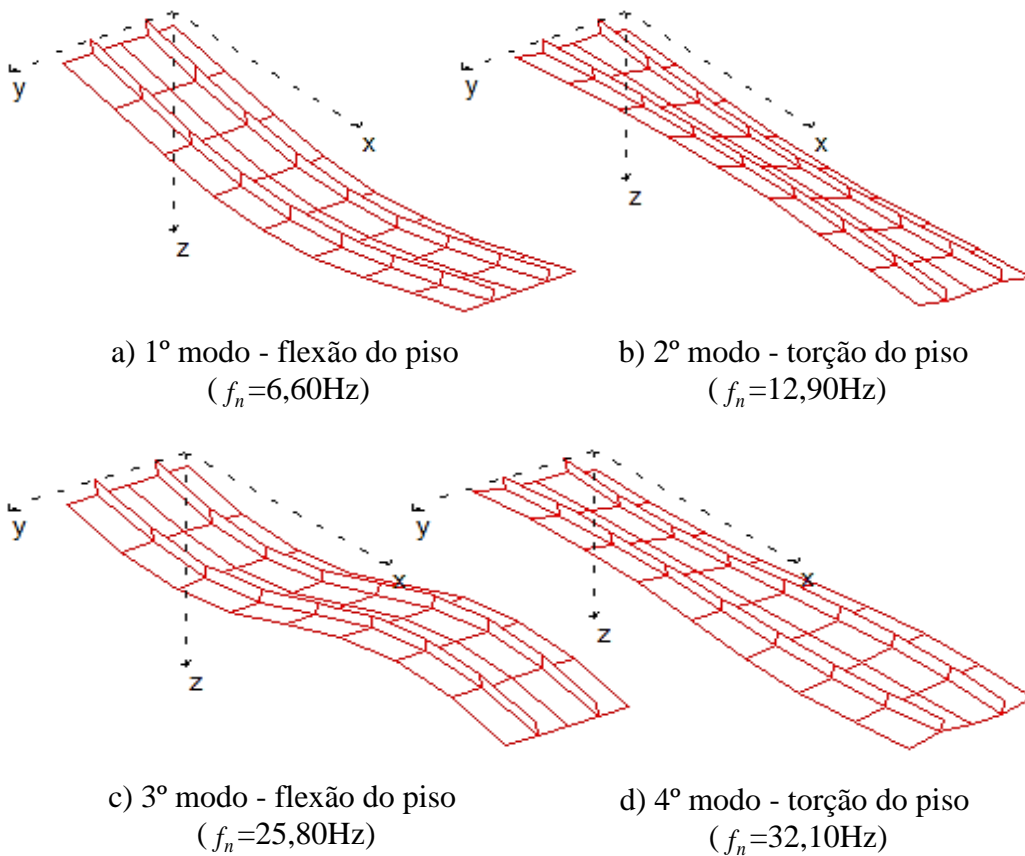


naturais de vibração que envolvem torção encontradas no presente trabalho e em Moreira (2004), essas diferenças não prejudicam as respostas referentes a deslocamentos e acelerações na direção de aplicação dos carregamentos, como pode ser observado na Tabela 5. 8 mais à frente.

**Tabela 5. 6.** Frequências referente aos primeiros modos naturais de vibração (conexão não deformável)

Modo de vibração		1°	2°	3°	4°
$f_n$ (Hz)	Presente trabalho	6,60	12,9	25,8	32,1
	Moreira (2004)	6,62	9,77	25,9	26,8
Diferença (%)		0,30	24,26	0,39	16,51

**Figura 5. 10.** Modos de vibração natural (conexão não deformável)



Na Tabela 5. 7 são apresentados os modos naturais de vibração para diferentes rigidezes da conexão entre as vigas de aço e a laje de concreto. Onde  $E_{sb}$  e  $E_{vb}$  são como definidos no exemplo anterior.

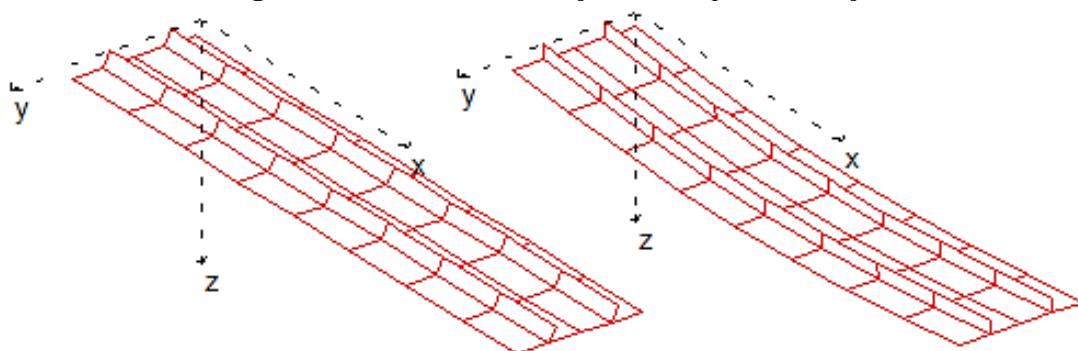
**Tabela 5. 7.** Frequências naturais referente aos modos de vibração (rigidez da conexão variável)

$E_{sb}$ (kPa)	$E_{vb}$ (kPa)	$f_n$ (Hz)	Modos de vibração			
			1°	2°	3°	4°
$1 \times 10^9$	$1 \times 10^9$		6,60	12,98	25,88	32,14
$2 \times 10^5$	$1 \times 10^9$		5,93	12,31	20,67	29,56
0	$1 \times 10^9$		4,00	10,87	16,67	27,35
$1 \times 10^9$	$2 \times 10^5$		6,60	12,14	25,85	28,39
$1 \times 10^9$	0		6,60	9,96	25,69	28,28
$2 \times 10^5$	$2 \times 10^5$		5,93	11,53	20,66	26,67
0	0		4,00	8,76	16,64	21,81

Observa-se da Tabela 5. 7, que as frequências dos modos naturais de vibração reduzem com a diminuição da rigidez da conexão deformável. Por exemplo, para o primeiro modo de vibração que envolve flexão na passarela a frequência decresce de 6,60Hz para 4,00Hz, quando passamos de interação total para livre na direção longitudinal, ou seja, uma redução de 39,4% da frequência. Observa-se ainda da Tabela 5. 7, que a rigidez transversal ao contato da viga com a laje não gera variações significativas nos modos naturais de vibração, a não ser os surgimentos de novos modos naturais de vibração referentes a deslocamentos relativos na direção transversal ao eixo da viga.

Na Figura 5. 11 são ilustrados o primeiro e o quinto modo de vibração natural para a passarela mista com interação livre nas direções longitudinal e transversal. Observa-se dessa figura, que o primeiro modo de vibração se refere a um deslocamento relativo na direção y entre a laje de concreto e as vigas de aço. Somente a partir do quinto modo de vibração natural tem-se o envolvimento da flexão da passarela nos modos de vibração natural.

**Figura 5. 11.** Modos de vibração natural para (Interação livre)



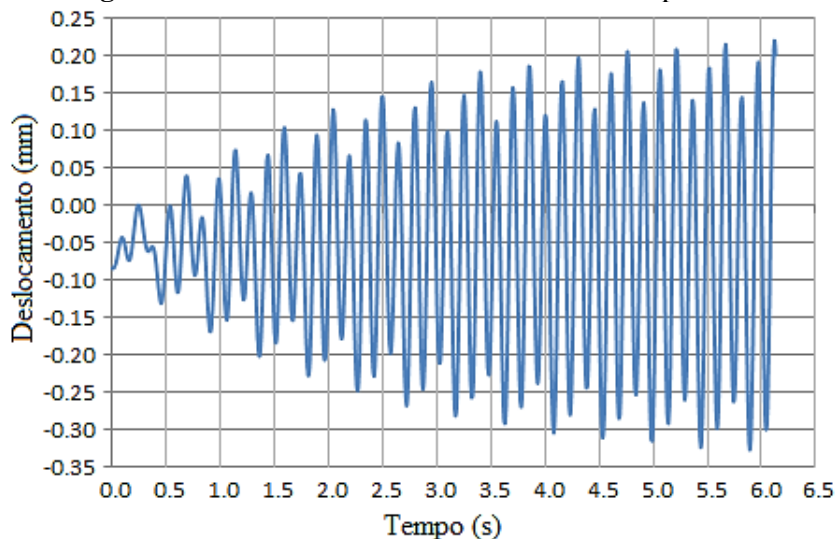
a) 1° modo – deslocamento de corpo rígido  
( $f_n=0,02\text{Hz}$ )

b) 5° modo – flexão da passarela  
( $f_n= 4,00\text{Hz}$ )

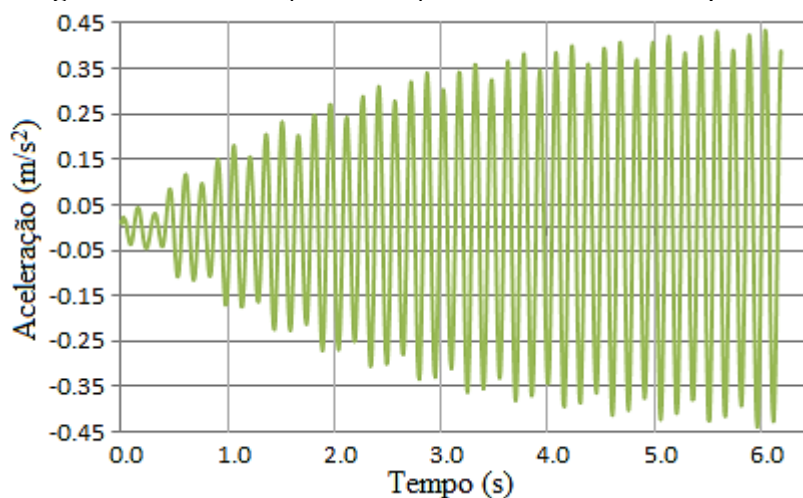
Considerando um carregamento harmônico completo (análogo ao modelo II do exemplo anterior e descrito no item 4.2.2) com os mesmos dados do exemplo de Moreira (2004), chega-

se as respostas dadas na Figura 5. 12 e Figura 5. 13 para a variação do deslocamento e aceleração no centro da passarela.

**Figura 5. 12.** Deslocamento vertical no centro da passarela



**Figura 5. 13.** Aceleração na direção vertical no centro da passarela



A carga dinâmica (Equação (4.2)) foi aplicada no centro da passarela e teve sua frequência definida de acordo com frequência fundamental da passarela. A frequência do passo utilizada por Moreira (2004) foi de  $6,62/3 = 2,207\text{Hz}$ , visto que a frequência natural devido ao 1º modo de vibração era de  $6,62\text{Hz}$ , logo será utilizado neste exemplo também como referência a frequência natural devido ao 1º modo de vibração para cada rigidez da conexão (Tabela 5. 6). O peso da pessoa foi adotado como  $700\text{N}$ , os coeficientes dinâmicos dados pela Tabela 4. 1 para pessoas caminhando e os ângulos de fase são  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \pi/2$ .

Moreira (2004) utilizou o tempo de aplicação da carga (tempo de contato) de de 6,138 s e o amortecimento de 1 %, resultando em  $\alpha=0.6628$  e  $\beta=0.0000979$ . Moreira (2004) usou o algoritmo de Newmark, com o passo de tempo para a integração das equações de 0,001s. Nesse trabalho foi adotado o mesmo passo de tempo sendo usado o algoritmo de Wilson-Theta, com parâmetro  $\theta$  igual a 1,4. Também foi considerado o tempo de aplicação da carga de 6.138s e amortecimento de 1%, que implica em  $\alpha=0,6604$  e  $\beta=0.0000982$ , um pouco diferente de Moreira (2004) devido a pequena diferença nos modos de frequência natural referentes à flexão obtidos nesse trabalho e os de Moreira (2004).

Na Tabela 5. 8 são apresentados os valores obtidos de deslocamento e aceleração neste trabalho e por Moreira (2004), para a passarela em questão, considerando a conexão não deformável, bem como a diferença entre eles, de onde se percebe que existe uma proximidade muito boa entre os resultados, apesar das diferenças significativas nos modos de torção mostrados na Tabela 5. 6.

**Tabela 5. 8.** Valores dos deslocamentos máximos e das acelerações de pico em um ponto no meio da passarela (conexão não deformável)

$E_{sb}=E_{vb}=10^9$ kPa (interação total)	Deslocamento (m/s)	Aceleração (m/s <sup>2</sup> )
Presente trabalho	0,327	0,438
Moreira (2004)	0,336	0,444
Diferença (%)	2,68	1,35

Na Tabela 5. 9 são apresentados os valores das acelerações de pico no centro da passarela da Figura 5. 8 considerando uma variação da rigidez longitudinal e transversal da conexão deformável entre a viga de aço e a laje de concreto, tendo Moreira (2004) obtido a aceleração apenas para a conexão não deformável.

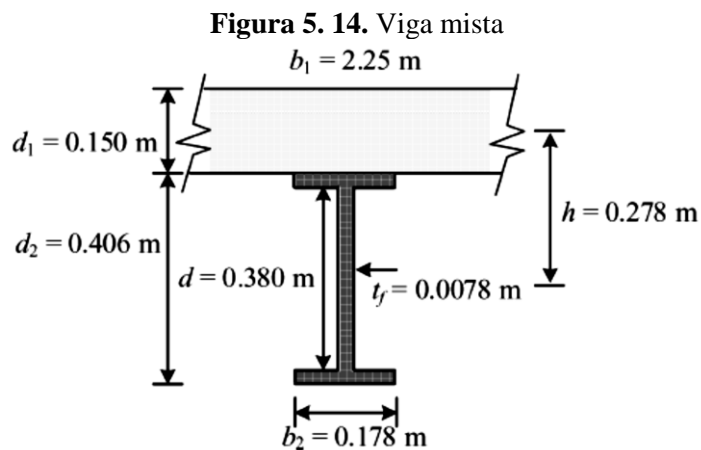
**Tabela 5. 9.** Valores das acelerações de pico e as frequências de passo em um ponto no meio do piso (rigidez da conexão variável)

$E_{sb}$ (kPa)	$E_{vb}$ (kPa)	Frequência de passo (Hz)	Aceleração de pico (m/s <sup>2</sup> )	AISC (Murray <i>et al.</i> , 2016) (m/s <sup>2</sup> )
$1 \times 10^9$	$1 \times 10^9$	2,20	0,438	0,49 (5% g) (valor baseado na Figura 2. 9 para Passarela)
$2 \times 10^5$	$1 \times 10^9$	1,98	0,439	
0	$1 \times 10^9$	1,33	0,387	
$1 \times 10^9$	$2 \times 10^5$	2,20	0,438	
$1 \times 10^9$	0	2,20	0,438	
$2 \times 10^5$	$2 \times 10^5$	1,98	0,439	
0	0	1,33	0,387	

Verifica-se da Tabela 5. 9, que a rigidez transversal ao eixo de contato entre a viga e a laje de concreto não interfere no valor da aceleração para esse problema. A coluna referente a frequência na Tabela 5. 9, refere-se à frequência de passo admitida no carregamento harmônico, esses valores foram obtidos dividindo por três a frequência natural de vibração do primeiro modo, apresentados na Tabela 5. 7. Os valores obtidos para aceleração de pico não têm variação significativa com a redução da rigidez longitudinal da conexão deformável, no entanto, como a frequência reduz, os limites de tolerância para essas acelerações também reduzem, porém todas elas abaixo do que preconiza a AISC.

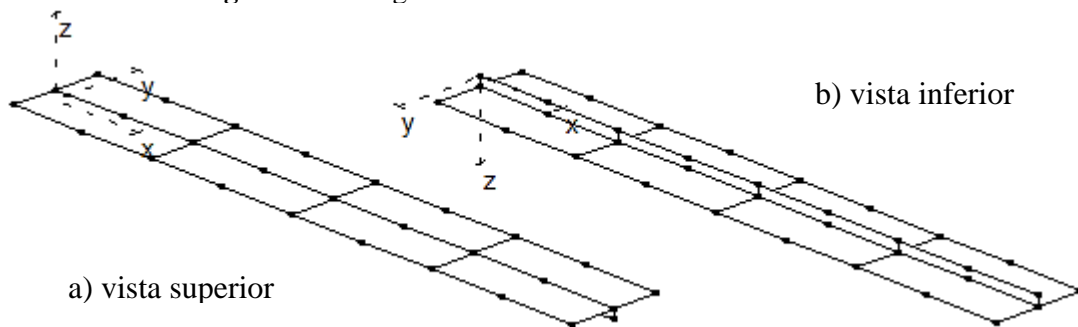
**5.3.Exemplo 3: Viga Mista**

Nesse exemplo (Figura 5. 14), os elementos finitos implementados nesse trabalho são utilizados para determinar as frequências e os modos naturais de vibração de uma viga mista aço-concreto analisada por Machado (2012). Na Figura 5. 15 é ilustrada a discretização da viga mista.



Fonte: Machado (2012)

**Figura 5. 15. Viga mista discretizada em elementos finitos**

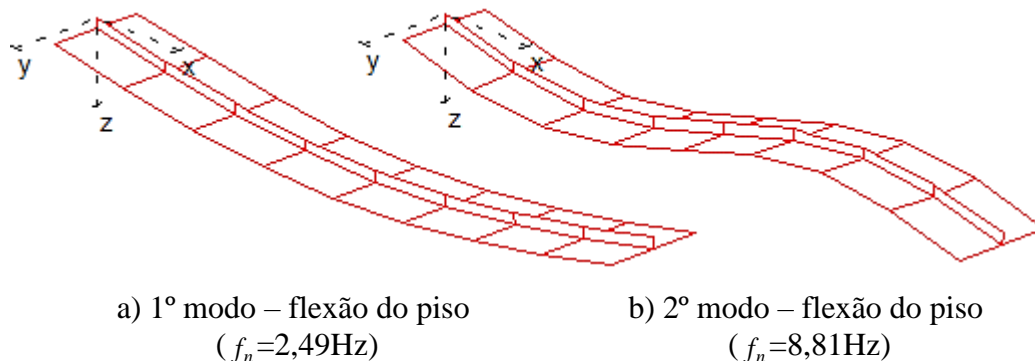


As propriedades da seção transversal e dos materiais são as seguintes:  $L=15\text{m}$ ,  $E_1=13,55\text{GPa}$ ,  $E_2=200\text{GPa}$ ,  $A_1=0,338\text{m}^2$ ,  $A_2=0,00763\text{m}^2$ ,  $I_1=6,328 \times 10^{-4}\text{m}^4$ ,  $I_2=2,15 \times 10^{-4}\text{m}^4$ ,  $m_1=810\text{kg/m}$  e  $m_2=60,65\text{kg/m}$ . O módulo de rigidez ao cisalhamento da interface  $E_{sb}$  é de  $100\text{MPa}$  (considerando interação parcial).

A viga mista foi discretizada da seguinte forma: a viga de aço foi discretizada por quatro elementos de barra (*BEAMRMT*); a laje de concreto foi discretizada por quatro elementos de placas com efeito de membrana e flexão (*PLATE9*) e a ligação entre os elementos de barra e os elementos de placa é feita por quatro elemento de interface (*INTBEAMPLATE*).

Na Figura 5. 16, são mostrados os dois primeiros modos naturais de vibração.

**Figura 5. 16.** Modos de vibração natural



Na Tabela 5. 10 são apresentadas as frequências dos dois primeiros modos de vibração natural da viga mista analisada para uma rigidez da conexão de 100MPa. Na Tabela 5. 10, os resultados referentes a *PLATE9+INTBEAMPLATE+BEAMRMT* são referentes à simulação da viga mista por elementos finitos de placa para a discretização da laje de concreto, elementos de barra para a discretização da viga de aço e o elemento de interface para simular a conexão deformável, a formulação desses elementos são apresentadas nesse trabalho. Os resultados são comparados com os resultados utilizando os elementos *BEAM2D+INTERFACE* (Silva, 2007) e *SLIP10DOF* (Machado, 2012). Silva (2006) utiliza, tanto para a laje de concreto quanto para a viga de aço, elementos de barras com três graus de liberdade com formulação baseada na teoria de vigas de Euler-Bernoulli e a conexão deformável é representada por um elemento de interface de 3 graus de liberdade ou através de um grau de liberdade a mais em cada nó para representar o deslocamento relativo na direção do eixo da barra. Machado (2012) utiliza um elemento com 10 graus de liberdade, possuindo o deslizamento incorporado.

**Tabela 5. 10.** Valores das frequências e os modos naturais de vibração de uma viga mista aço-concreto para uma rigidez da conexão de 100 MPa

Modos de vibração	<i>PLATE9+INTBEAMPLATE+BEAMRMT</i>	<i>BEAM2D+INTERFACE</i> (Silva, 2006)	<i>SLIP10DOF</i> (Machado, 2012)
1º	2,49 ( <b>0 % e 0,40 %</b> )	2,49	2,48
2º	8,81 ( <b>3,18 % e 3,41 %</b> )	8,53	8,51

Observa-se da Tabela 5. 10, resultados praticamente iguais para Machado (2012) e Silva (2007), e bastante próximos dos resultados utilizando os elementos implementados nesse trabalho, como pode ser observado nos valores em negrito e entre parênteses, que representa a

diferença (em porcentagem) dos resultados encontrados no presente trabalho para os valores encontrados por Silva (2007) e Machado (2012), respectivamente. As pequenas diferenças podem ser explicadas pela diferença nas teorias usadas na formulação dos elementos (Silva, 2007) e forma de consideração do deslizamento (Machado, 2012).

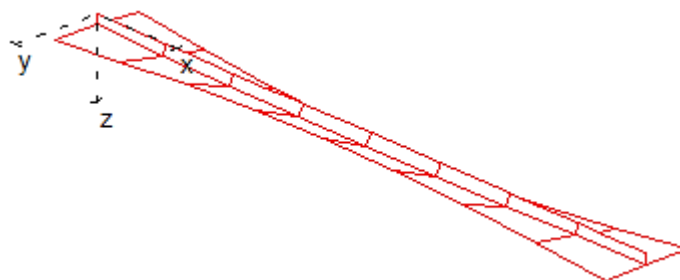
Na Tabela 5. 11, são apresentados os resultados para os dois primeiros modos naturais de vibração referentes à flexão da viga mista considerando diferentes graus de interação na conexão deformável, representada pela rigidez  $E_{sb}$ . Os valores em negrito e entre parênteses representa a diferença (em porcentagem), dos valores obtidos no presente trabalho para os valores obtidos por Silva (2007), de onde se percebe uma boa proximidade dos resultados.

**Tabela 5. 11.** Valores das frequências e os modos naturais de vibração referente à flexão de uma viga mista aço-concreto considerando diferentes graus de interação na conexão deformável

Modos de vibração	<i>PLATE9+INTBEAMPLATE+BEAMRMT</i>			BEAM2D+INTERFACE (Silva, 2006)		
	$E_{sb} = 0\text{MPa}$	$E_{sb} = 100\text{MPa}$	$E_{sb} = 10^6\text{MPa}$	$E_{sb} = 0\text{MPa}$	$E_{sb} = 100\text{MPa}$	$E_{sb} = 10^6\text{MPa}$
1° $f_n$	1,73 <b>(1,73 %)</b>	2,49 <b>(0,40 %)</b>	2,81 <b>(0 %)</b>	1,70	2,48	2,81
2° (Hz)	7,27 <b>(6,60 %)</b>	8,81 <b>(3,18 %)</b>	11,39 <b>(0,18 %)</b>	6,79	8,53	11,37

Uma observação importante é que, para interação total, aparece entre os dois primeiros modos naturais de vibração referentes à flexão da viga (mostrados na Tabela 5. 11), um modo natural de vibração referente à torção, não mostrado na Tabela 5. 11, já que as análises de Silva (2007) e Machado (2012) não consideram o grau de liberdade de torção na viga. O valor da frequência desse modo é de 9,75Hz, a Figura 5. 17 mostra a forma desse modo.

**Figura 5. 17.** Modo de vibração referente à torção da viga, considerando a conexão não deformável ( $f_n=9,75\text{Hz}$ )

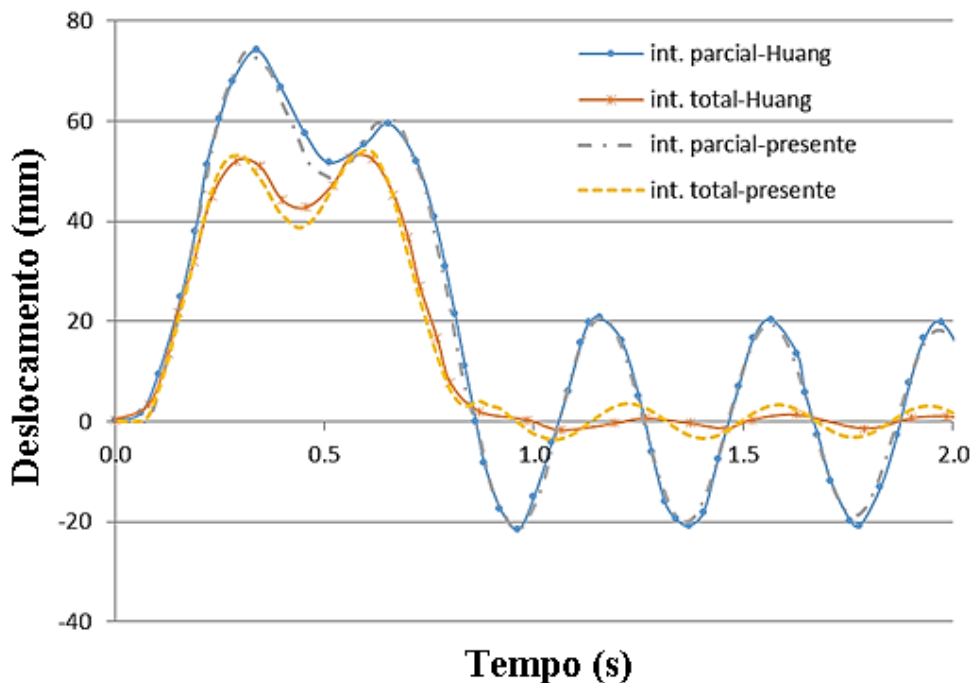


A viga mista analisada nesse exemplo (Figura 5. 14) foi estudada por Huang e Su (2008) e Machado (2012). Huang e Su (2008) apresentaram uma solução analítica para o histórico do



deslocamento considerando um carregamento móvel concentrado de 100kN percorrendo a viga a uma velocidade de 16,67m/s. A Figura 5. 18 apresenta as soluções analíticas desses autores para a conexão não deformável e também para a conexão deformável. Na mesma figura são apresentadas as soluções numéricas obtidas pelos elementos finitos implementados neste trabalho. Na definição do carregamento móvel foi considerada a carga concentrada de 100kN atuando em 7 posições diferentes por um intervalo de tempo de 0,1125s em cada posição. O problema dinâmico foi resolvido pelo método de integração direta de Wilson-Teta considerando um intervalo de tempo de 0,01s e um fator de 1,4 para o método.

**Figura 5. 18.** Comparação do histórico do deslocamento considerando um carregamento móvel concentrado percorrendo a viga



Observa-se da Figura 5. 18 os bons resultados obtidos pelos elementos finitos implementados neste trabalho. A pequena diferença pode ser explicada mais uma vez pelas diferenças entre as formulações analítica de Huang e Su (2008) e as formulações usadas para a implementações dos elementos *PLATE9*, *BEAMRMT* e *INTBEAMPLATE*.

#### 5.4.Exemplo 4: Viga Mista – Efeito “*Shear lag*”

Nesse exemplo será tratada a influência do efeito “*shear lag*” (variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto em vigas mistas) na determinação dos modos naturais de vibração de vigas mistas aço-concreto, sendo considerada a mesma viga do exemplo anterior (Figura 5. 14), analisada considerando vão original de 15 m e também de 4 m para demonstrar melhor o efeito “*shear lag*”.

Este exemplo é devido à possibilidade de ser verificado na análise utilizando os elementos *PLATE9*, *BEAMRMT* e *INTBEAMPLATE* a influência do efeito “*shear lag*” em vigas mistas com interação parcial quando submetidas a carregamentos dinâmicos. Para isso são comparados os resultados desses elementos com os resultados usando os elementos *BEAMRMT* e *INTBEAMPLATE* que não conseguem simular o efeito “*shear lag*”.

A Tabela 5. 12 apresenta os resultados para os dois primeiros modos naturais de vibração referentes à flexão considerando os três níveis de interação: conexão não deformável, deformável e livre. Os resultados foram obtidos utilizando os elementos finitos implementados neste trabalho. Os resultados para  $L = 15\text{m}$  usando os elementos *PLATE9*, *BEAMRMT* e *INTBEAMPLATE* foram determinados no exemplo anterior e por isso não são mostrados na Tabela 5. 12.

Em uma primeira análise, a viga mista foi simulada, tanto para a laje de concreto como para o perfil de aço, pelo elemento de viga *BEAMRMT*. Em uma segunda análise, a viga mista foi simulada pelo elemento de placa *PLATE9*, para a laje de concreto, e pelo elemento de viga *BEAMRMT*, para o perfil de aço. A conexão deformável foi simulada em ambas análises pelo elemento de interface *INTBEAMPLATE*.

**Tabela 5. 12.** Valores das frequências e os modos naturais de vibração de uma viga mista aço-concreto considerando diferentes graus de interação na conexão deformável e diferentes vãos (4m e 15m)

Modos de vibração	<i>BEAMRMT+INTBEAMPLATE+BEAMRMT</i>						<i>PLATE9+INTBEAMPLATE+BEAMRMT</i>		
	L = 4m			L = 15m			L = 4m		
	$E_{sb}=0$	$E_{sb}=100$	$E_{sb}=10^6$	$E_{sb}=0$	$E_{sb}=100$	$E_{sb}=10^6$	$E_{sb}=0$	$E_{sb}=100$	$E_{sb}=10^6$
1° $f_n$	23,30	25,51	36,12	1,72	2,47	2,76	22,15	24,06	32,21
2° (Hz)	87,19	89,21	111,86	7,05	8,50	10,65	75,64	76,03	77,79

Comparando os resultados obtidos na Tabela 5. 11 com os da Tabela 5. 12, percebe-se que para o comprimento de 15 m a diferença dos resultados é pequena quando se considera a laje de concreto como um elemento de placa ou de viga.

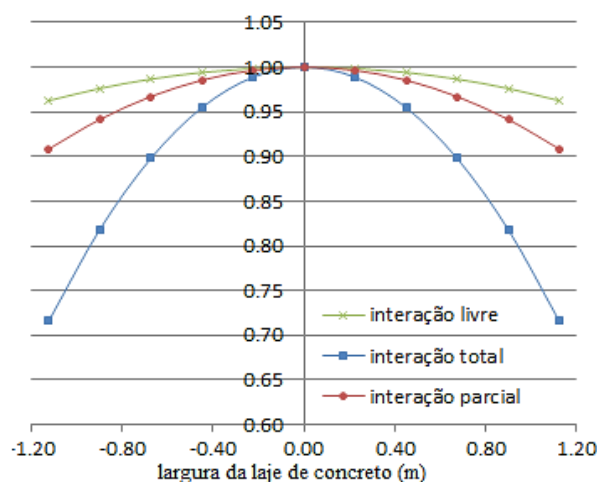
São apresentados na Tabela 5. 13 a diferença relativa entre os resultados obtidos considerando as duas análises descritas no parágrafo anterior. No cálculo dessa diferença relativa é considerada a resposta obtida pela segunda análise como referência. Observa-se dessa tabela que as diferenças são menores quanto maior for o vão, o que indica uma influência do efeito “*shear-lag*” nas respostas do cálculo dos modos naturais de vibração, pois quanto maior a relação largura/comprimento, maior esse efeito. Observa-se da tabela que a diferença nas respostas aumenta com o aumento da rigidez da conexão, principalmente para o 2º modo natural de vibração referente à flexão.

**Tabela 5. 13.** Diferença das frequências naturais para a viga de vibração de uma viga mista aço-concreto considerando diferentes graus de interação na conexão deformável

Modos de vibração	Diferença (%)					
	L = 4m			L = 15m		
	$E_{sb}=0$	$E_{sb}=100$	$E_{sb}=10^6$	$E_{sb}=0$	$E_{sb}=100$	$E_{sb}=10^6$
1º	9,7	6,0	12,1	0,6	0,8	1,8
2º	15,3	17,3	43,8	3,0	3,5	6,5

A Figura 5. 19 mostra a variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto para os três níveis de interação, considerando o vão de 4m. Esse gráfico foi obtido para uma carga concentrada no meio do vão da viga, porém o valor da carga não influencia nas curvas mostradas no gráfico uma vez que a análise é linear os resultados foram adimensionalizados pelo valor da tensão normal no ponto médio da largura da laje de concreto.

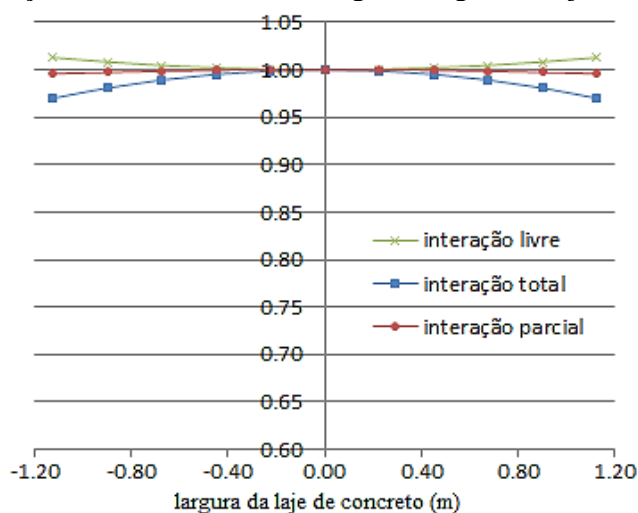
**Figura 5. 19.** Variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto (L = 4m)



Observa-se da Figura 5. 19 que para interação livre essa variação é bem pequena, enquanto que para interação total ela é bem significativa. Já que o elemento de viga *BEAMRMT* não consegue simular essa variação da tensão normal isso gerou um erro maior na determinação dos modos naturais de vibração para rigidez mais alta, como pode ser observado na Tabela 5. 13.

Análoga à Figura 5. 19, tem-se a Figura 5. 20 para o vão de 15m.

**Figura 5. 20.** Variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto (L = 15m)



Neste caso, como o vão é grande comparado com a largura da laje de concreto, o efeito “*shear-lag*” não é significativo como pode ser observado da Figura 5. 20, isso reflete nos menores erros para avaliação dos modos naturais de vibração mostrados na Tabela 5. 13. No entanto, apesar da variação ser pequena ainda pode ser observado a influência do grau de interação nessa variação o que acarreta nos erros um pouco maiores para a interação total.

### 5.5.Exemplo 5: IHE – 1 pedestre

Neste exemplo, retirado de Gomez *et al.* (2018), é analisado um sistema MMA, dado pelo Modelo de carregamento VI mostrado no item 4.3.1 do Capítulo 4. Será considerado um pedestre de 29 anos de idade, com massa igual a 56kg, sem histórico de problema de postura caminhando a uma velocidade constante sobre um piso rígido, assumindo  $y''_i(t) = 0$  na Equação (4.9), ou seja, nesse caso apenas o sistema MMA trabalha, sendo a equação de equilíbrio dinâmico dada por:

$$m_p w''(t) + c_p w'(t) + k_p w(t) = 0. \quad (5.2)$$

Considerando  $w_0 = w(0) = 0$  e  $w'(0) = w'_0$ , chega-se à solução analítica para o primeiro período do sistema MMA (primeiro passo do pedestre), dada a seguir.

$$w(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left[ \frac{w'_0}{\omega_a} \text{sen}(\omega_a t) \right]. \quad (5.3)$$

A Equação (5.3) é válida para  $0 < t < T_p$  onde  $T_p$  é o tempo do passo do pedestre sobre o piso, ou seja, o tempo entre o toque de um calcanhar e outro. Para a solução analítica em  $T_p < t < 2T_p$  toma-se a solução da Equação (5.2) considerando  $w_1 = w(T_p)$  e  $w'(T_p) = w'_0$ , com  $w(T_p)$  obtido da Equação (5.3), sendo assim, tem-se:

$$w(t) = e^{-\xi\omega_0(t-T_p)} \left\{ w_1 \cos[\omega_a(t-T_p)] + \left( \frac{w'_0}{\omega_a} + \frac{\xi w_1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}[\omega_a(t-T_p)] \right\}. \quad (5.4)$$

Considerando agora um passo qualquer, ou seja,  $nT_p < t < (n+1)T_p$ , com  $n+1$  representando o total de passos dados, obtém-se a Equação (5.5) que representa a solução da Equação (5.2), considerando  $w_n = w(nT_p)$  e  $w'(nT_p) = w'_0$ .

$$w(t) = e^{-\xi\omega_0(t-nT_p)} \left\{ w_n \cos[\omega_a(t-nT_p)] + \left( \frac{w'_0}{\omega_a} + \frac{\xi w_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}[\omega_a(t-nT_p)] \right\}. \quad (5.5)$$

Nas Equações (5.2) a (5.4), tem-se que:

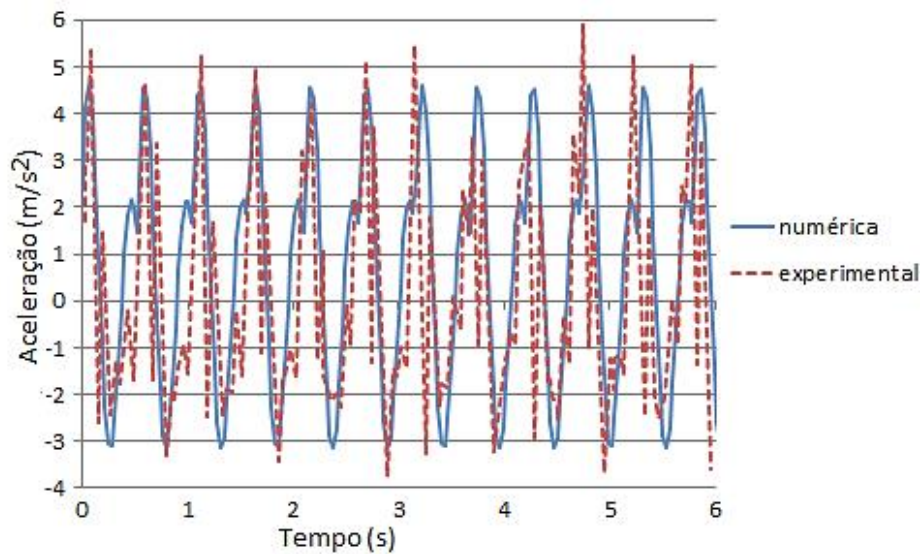
$$\omega_0 = \sqrt{k_p / m_p} , \quad (5.6)$$

$$\xi = c_p / (2m_p\omega_0) , \quad (5.7)$$

$$\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} . \quad (5.8)$$

Na Figura 5. 21 é apresentado o histórico no tempo da aceleração no sistema MMA considerando a solução experimental obtida por Gomez *et al.* (2018).

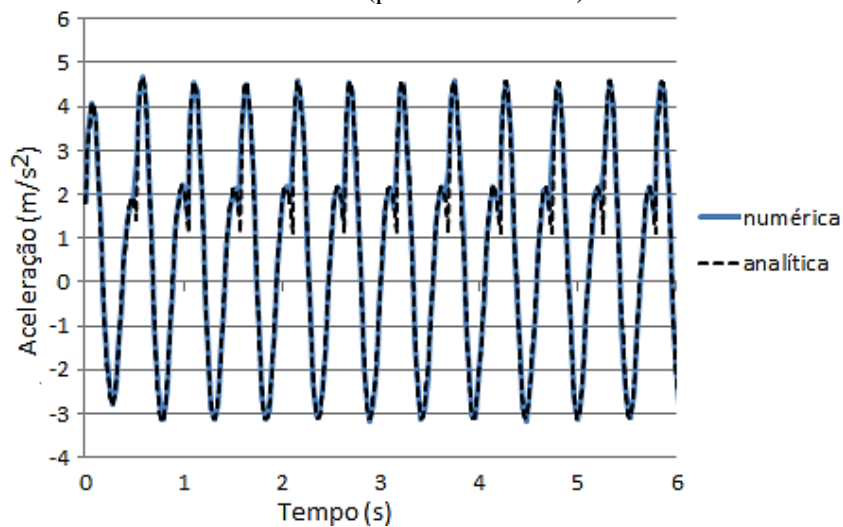
**Figura 5. 21.** Históricos de acelerações para Piso Rígido – Diferença entre os resultados experimentais (Gomez *et al.*, 2018) e numérico (presente trabalho)



A partir dessa curva os autores obtiveram as propriedades biodinâmicas ( $c_p = 212,5\text{kg/s}$ ,  $k_p = 14\text{kN/m}$  e  $w'_0 = 0,3\text{m/s}$ ) do pedestre analisado (mostrados na Tabela 4. 4). Na Figura 5. 21 apresenta-se ainda a resposta numérica obtida a partir da formulação apresentada nesse trabalho considerando um piso de rigidez elevada e o método de integração direta de Wilson-Theta com  $\theta = 1,4$  e passo de tempo de 0,01s. Observa-se da figura uma boa convergência entre a solução numérica e experimental validando os parâmetros biodinâmicos definidos para o pedestre analisado. As pequenas diferenças podem estar associadas à perda de passo do pedestre durante o experimento.

Na Figura 5. 22 são apresentados os históricos no tempo da aceleração no sistema MMA considerando a solução analítica dada pela derivada segunda em  $t$  da Equação (5.5), e a solução numérica conforme descrita no parágrafo anterior. Do gráfico da Figura 5. 22 observa-se a convergência da solução numérica com a solução analítica validando o modelo numérico implementado.

**Figura 5. 22.** Históricos de acelerações para Piso Rígido – Diferença entre os resultados numérico e analítico (presente trabalho)



Na sequência do trabalho realizado por Gomez *et al.* (2018), uma passarela foi construída, sendo constituída apenas por uma viga de aço perfil I laminado padrão europeu W30x132. As propriedades do aço da viga são:  $f_y = 345\text{MPa}$ ,  $E = 200\text{GPa}$ , e peso total de 29,4kN. A viga tem um comprimento de 15,24m sendo simplesmente apoiada em dois blocos de concreto conferindo a viga um vão livre de 14,64m. Essa passarela foi simulada numericamente utilizando o elemento de barra *BEAMRMT* descrito nesse trabalho, tendo sido utilizada uma discretização da passarela em 4 elementos de barra.

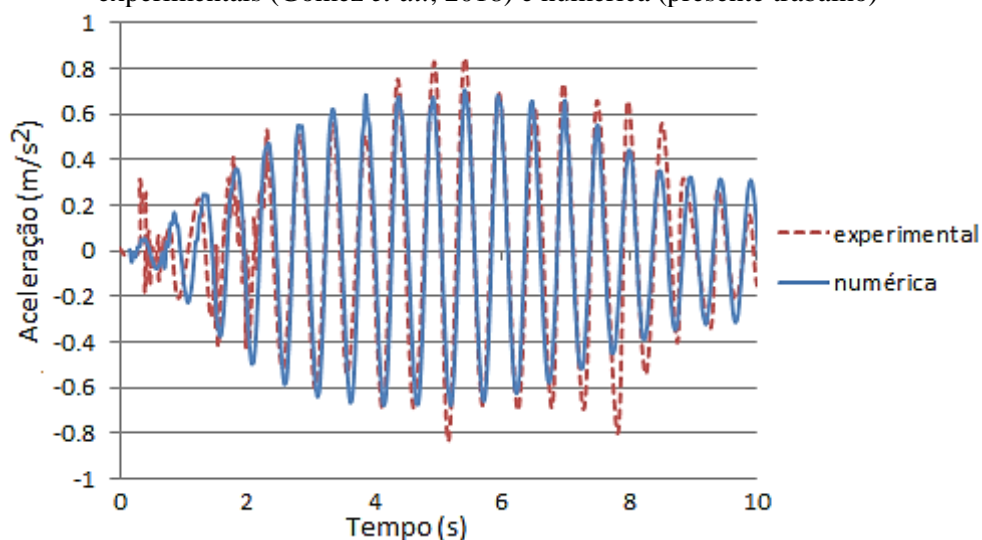
Na Tabela 5. 14 são comparados os valores experimentais (Gomez *et al.*, 2018) e numéricos das frequências naturais de vibração, para os primeiros modos referentes aos deslocamentos verticais, que geram flexão em torno do eixo de menor inércia da viga, mostrando valores muito próximos, sendo um pouco mais discrepante para o 3º modo, porém como o 1º e 2º são bem próximos não influenciará muito na resposta das acelerações, como se percebe na Figura 5. 23 e Figura 5. 24.

**Tabela 5. 14.** Frequências naturais referentes aos Modos de vibração natural associados aos deslocamentos verticais

Modos de vibração natural associados aos deslocamentos verticais		1° modo	2° modo	3° modo
$f_n$ (Hz)	Experimental (Gomez <i>et al.</i> , 2018)	2,15	8,31	18,12
	Numérico (Presente trabalho)	2,12	8,57	20,05
Diferença (%)		1,40	3,03	9,63

Na Figura 5. 23 é apresentado o histórico no tempo da aceleração vertical no meio do vão da passarela representada pela viga de aço. São apresentados os resultados experimentais obtidos por Gomez *et al.* (2018) e o resultado numérico utilizando elemento de barra *BEAMRMT* descrito neste trabalho. O pedestre, representado pelo sistema MMA (como mostrado na Figura 4. 6), foi considerado caminhando a uma velocidade  $v_p = 1,6$  m/s e uma frequência  $f_p = 1,9$ Hz para o toque do calcanhar na passarela. Ambas as análises dinâmicas, sistema MMA e elementos finitos para a passarela, foram feitos considerando o método de integração direta de Wilson-Theta com  $\theta = 1,4$  e passo de tempo de 0,01s. Para o amortecimento na análise dinâmica da passarela foi admitido o amortecimento proporcional de Rayleigh Ritz, utilizando as taxas de 0,28 e 0,48% para os dois primeiros modos de vibração natural como parâmetros para definir as constantes de proporcionalidade de Rayleigh Ritz.

**Figura 5. 23.** Históricos de acelerações para Passarela de Aço Flexível – Diferença entre os resultados experimentais (Gomez *et al.*, 2018) e numérica (presente trabalho)



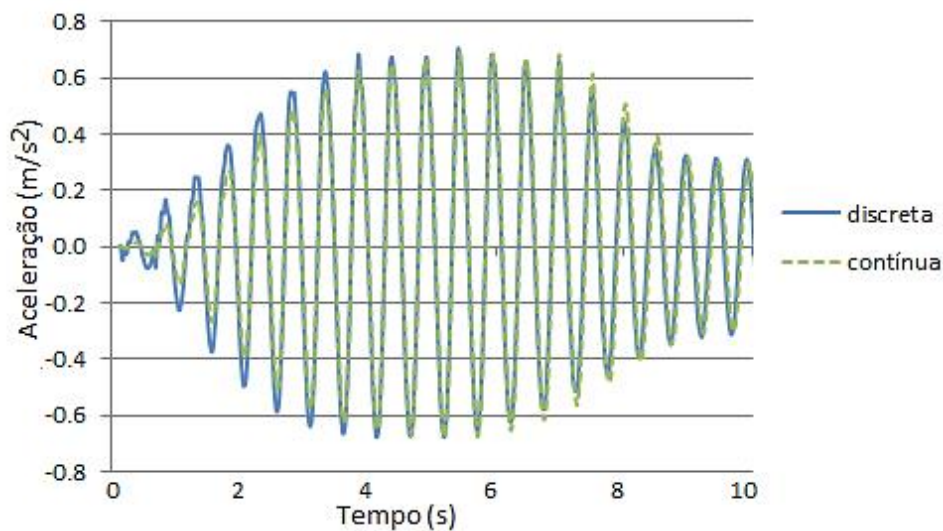
Na resposta numérica mostrada na Figura 5. 23 foi admitida uma análise discreta do posicionamento do pedestre (sistema MMA) na passarela. Ou seja, no intervalo de tempo  $0 < t < T_p$  ( $T_p = 1/f_p$ ) onde o pedestre se encontra fixo na posição de  $v_p T_p$  do apoio. Já no



intervalo de tempo  $T_p < t < 2T_p$  o pedestre se encontra fixo na posição de  $2v_p T_p$  do apoio, e assim por diante. Observa-se da Figura 5. 23 uma boa concordância dos resultados numérico obtidos com o elemento de barra *BEAMRMT* e o experimental obtido por Gomez *et al.* (2018).

Ao invés de uma análise discreta no posicionamento do pedestre na passarela, na resposta numérica mostrada na Figura 5. 24 foi admitida uma análise contínua, ou seja, no intervalo de tempo  $0 < t < T_p$  o pedestre encontra-se movendo do apoio à posição de  $v_p T_p$  do apoio. A troca de posição do pedestre na passarela nesse intervalo de tempo é feita de acordo com o passo de tempo usado no método de integração numérica, como esse é muito pequeno, admite-se que o movimento seja contínuo. Apesar do movimento ser contínuo o efeito do calcanhar é inserido de forma discreta em todo instante que o sistema MMA toca a passarela.

**Figura 5. 24.** Históricos de acelerações para Passarela de Aço Flexível – Diferença entre o posicionamento dos pedestres de forma discreta e contínua



Observa-se da Figura 5. 24 uma pequena diferença entre as respostas numéricas contínua e discreta no início do movimento do pedestre na passarela, o que não chega a influenciar a aceleração máxima imposta à passarela obtidas pelas diferentes análises. Isso implica que o posicionamento do pedestre pode ser considerado na análise tanto de forma contínua como discreta.

### 5.6.Exemplo 6: IHE - Efeito de Multidão

Neste exemplo é considerado um grupo de 100 pedestres movendo-se sobre uma passarela, utilizando o Modelo de carregamento VI, conforme mostrado no item 4.3.1 do Capítulo 4. A passarela é admitida como uma viga bi apoiada, de vão igual a 50m, frequência natural de 2Hz, e massa de 500kg/m, ou seja, não é considerado um material específico para a passarela, mas apenas deve obedecer a massa por metro. Para o amortecimento é considerado o modelo proporcional de Rayleigh Ritz admitindo uma taxa de amortecimento de 0,5% para os dois primeiros modos de vibração natural.

Os dados necessários para a análise são gerados de forma aleatória conforme a para cada parâmetro. A massa do pedestre é representada por uma distribuição log-normal com média de 73,85kg e desvio padrão de 15,68kg (Portier *et al.*, 2007). O comprimento do passo é considerado como sendo normalmente distribuído com uma média de 0,66m e utilizando um coeficiente de variação de 10% (Caprani *et al.*, 2012). A chegada dos pedestres é considerada como um processo de Poisson e os intervalos são descritos pela distribuição exponencial com diferença média de chegada de 0,56m (Caprani *et al.*, 2012). Para a frequência de passo dos pedestres é considerada uma distribuição uniforme dentro do intervalo de 1,8–3,5Hz (englobando caminhada e corrida). O mesmo acontece para os parâmetros biodinâmicos dos pedestres de amortecimento e rigidez sendo adotados os limites, respectivamente, 100–300N/s, e 9,4–36kN/m.

Este exemplo foi analisado por Caprani e Ahmadi (2016), tendo os autores realizado uma análise via superposição modal conjunta da passarela e dos pedestres, representados por sistemas MMA, considerando na posição de cada pedestre, uma força harmônica com ângulo obtido de forma randômica considerando-o com uma distribuição uniforme no intervalo de  $0-2\pi$ . Os autores obtiveram uma aceleração máxima de  $1,89 \text{ m/s}^2$  no centro da passarela em questão, considerando para a análise os dados gerados de forma randômica. Para pedestres saudáveis, a força vertical produzida é geralmente da mesma magnitude e aproximadamente periódicos (Caprani e Ahmadi, 2016). Portanto, as forças do pé esquerdo e do pé direito são frequentemente combinadas no tempo para agir como se houvesse uma força atuando na superfície (Caprani e Ahmadi, 2016). Consequentemente, a força de reação da superfície de passos sucessivos pode ser representada por uma série de Fourier descrito por:

$$G(t) = W \sum_{k=0}^r \eta_k \cos(2\pi k f_p t + \varphi_k). \quad (5.8)$$

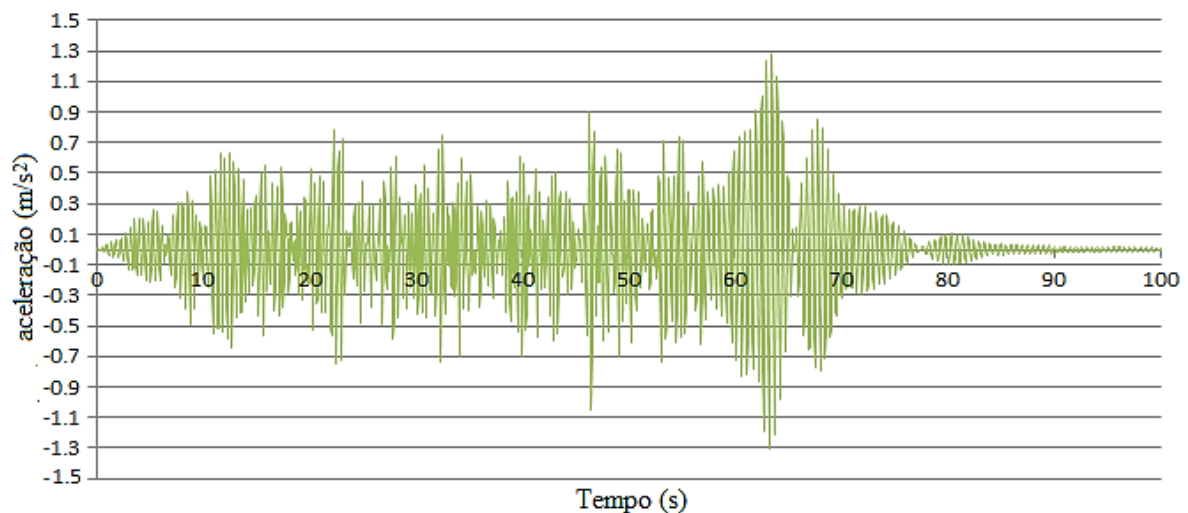
onde,  $W = m_p g$ , em que  $m_p$  é a massa de pedestres e  $g$  é a aceleração devido à gravidade;  $f_p$  é a frequência do passo;  $\eta_k$  é o fator de carga dinâmica para o  $k^{th}$  harmônico e  $\varphi_k$  é o ângulo de fase do  $k^{th}$  harmônico,  $r$  representa o número de harmônicos considerados e  $t$  é o tempo.

Diferente de Caprani e Ahmadi (2016), neste trabalho não é utilizado uma força dinâmica harmônica para representar o pedestre e, conforme Gomez *et al.* (2018) a passarela e os sistemas MMA são analisados de forma independentes considerando a interação entre eles. No modelo adotado neste trabalho, é considerado que a velocidade inicial é imposta ao sistema MMA (que representa o pedestre) sempre quando esse sistema toca a passarela (igual durante todo o percurso, sempre que há o toque do calcanhar), sendo ela considerada um parâmetro biodinâmico do pedestre. Neste trabalho foi admitido para a velocidade inicial de toque do calcanhar do pedestre na passarela, um valor randômico com distribuição uniforme dentro do intervalo de 0,3 a 0,5m/s.

Na análise numérica da passarela é considerado o MEF, sendo discretizada em 4 elementos de barra *BEAMRMT*, onde todas as análises dinâmicas, sistemas MMA e elementos finitos para a passarela, são realizadas considerando o método de integração direta de Wilson  $\theta$  com  $\theta = 1,4$  e passo de tempo de 0,02s.

Na Figura 5. 25 é apresentada o histórico no tempo da aceleração máxima no meio do vão da passarela, considerando uma multidão composta por 100 pessoas, e que os dados dessa multidão são gerados de forma randômica para a análise dinâmica considerando a IHE, sendo considerado o posicionamento do pedestre de forma discreta.

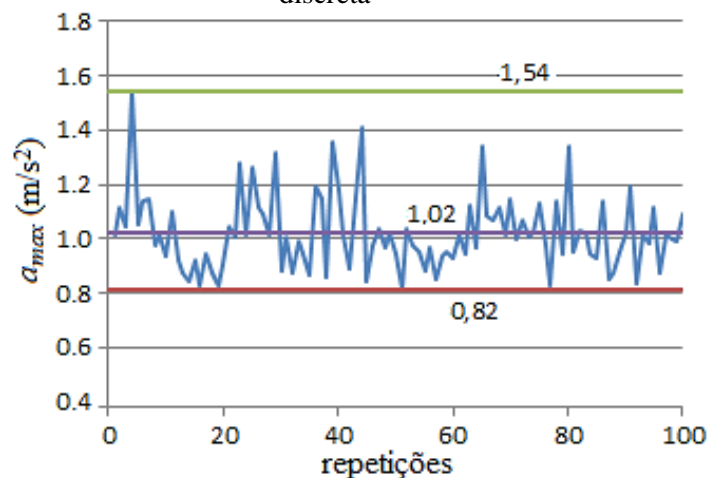
**Figura 5. 25.** Histórico de aceleração de pico de uma multidão composta por 100 pessoas aplicadas de forma randômica na passarela (distribuição aleatória) – Posicionamento dos pedestres de forma discreta



Da Figura 5. 25 obtém-se a aceleração máxima de  $1,31\text{m/s}^2$ , um pouco menor que a aceleração máxima obtida por Caprani e Ahmadi (2016) que foi de  $1,89\text{m/s}^2$ . Deve-se destacar que além da diferença nos modelos de IHE adotado nesse trabalho e o adotado por Caprani e Ahmadi (2016), também tem a diferença dos dados utilizados nas análises, uma vez que esses foram obtidos de forma randômica conforme uma determinada distribuição, não sendo capaz de reproduzir exatamente o mesmo comportamento sempre, ou seja, o comportamento mostrado na Figura 5. 25 foi obtido para parâmetros obtidos de forma randômica obedecendo determinada distribuição aleatória para cada parâmetro. Dessa forma é preciso comparar a média das acelerações máximas para distintas análises e não apenas a aceleração máxima de uma multidão específica.

Devido à variabilidade dos parâmetros referentes aos sistemas MMA, que representam os pedestres caminhando sobre a passarela, foi feita uma análise considerando 100 configurações distintas para esses dados. Na Figura 5. 26 é mostrada a variação da aceleração máxima no meio do vão da passarela para os diferentes dados obtidos de forma randômica. Também são apresentadas a aceleração média, mínima e máxima dos 100 valores obtidos. Observa-se dessa figura uma variação significativa da aceleração máxima e mínima em relação à aceleração média, mostrando que determinadas combinações dentre as variabilidades dos dados podem resultar em diferenças significativas nas respostas em termos de aceleração máxima, justificando uma análise considerando a variabilidade desses dados.

**Figura 5. 26.** Acelerações de pico de 100 multidões compostas por 100 pessoas cada, aplicadas de forma randômica na passarela (distribuição aleatória) – Posicionamento dos pedestres de forma discreta

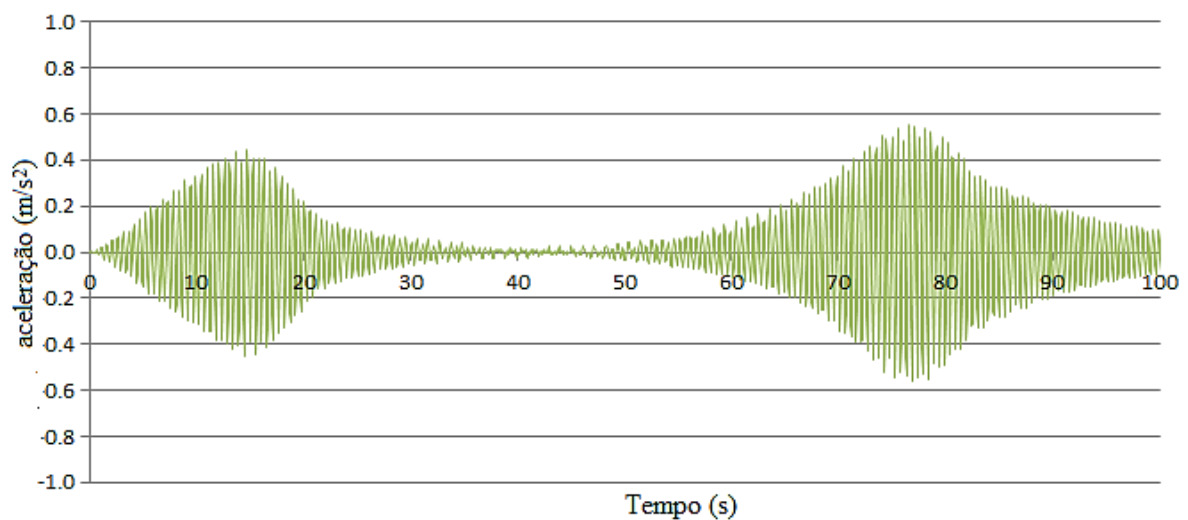


Para verificar a importância da consideração dos dados dos sistemas MMA como variáveis com determinada distribuição aleatória é analisada a mesma passarela considerando

esses dados determinísticos e iguais aos valores médios de suas distribuições, ou seja: 73,85kg para a massa dos pedestres; 0,66m para o tamanho do passo dos pedestres; 0,56m para a distância entre os pedestres; 1,9Hz para a frequência dos passos dos pedestres; 200N/s para o amortecimento dos pedestres; 22,7kN/m para a rigidez dos pedestres; e 0,4m/s para a velocidade inicial de toque do calcanhar dos pedestres na passarela.

Na Figura 5. 27 é apresentado o histórico no tempo da aceleração máxima no meio do vão da passarela. Devido à uniformização dos dados dos pedestres observa-se uma resposta do histórico da aceleração mais harmônica em comparação com os dados variáveis dos pedestres (Figura 5. 25). Observa-se também uma aceleração máxima de 0,55m/s<sup>2</sup>, bem menor que a aceleração máxima obtida considerando a variabilidade dos dados, inclusive menor que aceleração mínima obtida dentre as 100 configurações distintas analisadas (Figura 5. 25), que é de 1,31m/s<sup>2</sup>.

**Figura 5. 27.** Histórico de aceleração de 1 multidão composta por 100 pessoas aplicadas de forma pré-determinada na passarela (distribuição determinística) – Posicionamento dos pedestres de forma discreta

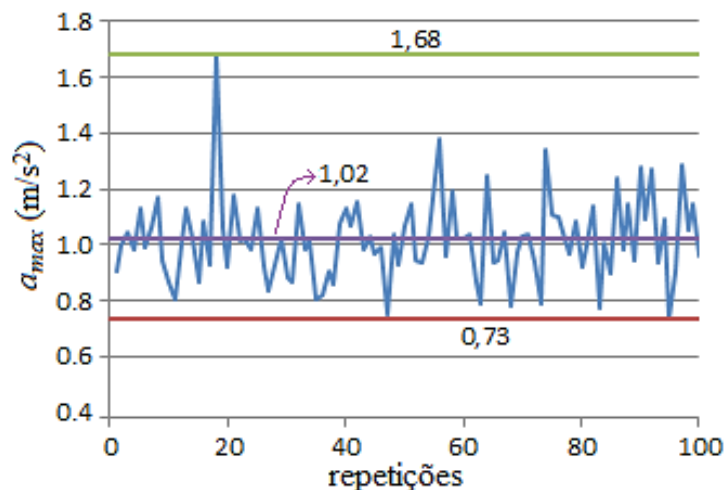


O comportamento mostrado na Figura 5. 27 é um caso ainda mais particular do que o mostrado na Figura 5. 25, pois se tratam de parâmetros totalmente pré-determinados para uma multidão, caso que somente poderia acontecer em algum experimento (onde todos os parâmetros fossem devidamente controlados), ou mesmo em algum tipo de marcha de soldados por exemplo (Živanović *et al.*, 2005), porém, ainda assim, dificilmente teria o comportamento mostrado na Figura 5. 27, pois para que isso acontecesse todos os soldados teriam que ter a massa igual a 73,85kg. Justificando ainda mais a necessidade de se realizar a análise

considerando a variabilidade dos parâmetros que caracterizam os pedestres e a interação deles com a passarela.

Nas respostas numéricas anteriores foram admitidas análises discretas do posicionamento do pedestre (sistema MMA) na passarela, já na resposta numérica mostrada na Figura 5. 28 é admitida uma análise contínua desse posicionamento. A análise mostrada na Figura 5. 28 apresenta a variação da aceleração máxima no meio do vão da passarela para os diferentes dados obtidos de forma randômica da mesma forma que foi analisada na Figura 5. 26, com a diferença da consideração do posicionamento dos pedestres como contínua.

**Figura 5. 28.** Acelerações de pico de 100 multidões compostas por 100 pessoas cada, aplicadas de forma randômica na passarela (distribuição aleatória) – Posicionamento dos pedestres de forma contínua



Observa-se da Figura 5. 26 e Figura 5. 28 uma pequena diferença entre as acelerações máximas e mínimas nas duas análises, no entanto as acelerações médias foram iguais para as diferentes análises. Considerando que as 100 multidões que geraram a resposta da Figura 5. 26 não são as mesmas 100 multidões que geraram a resposta da Figura 5. 28, apenas a aceleração média pode ser comparada entre as análises. Dessa forma, conclui-se mais uma vez que a diferença entre a consideração do posicionamento do pedestre na passarela de forma discreta ou contínua não afeta os resultados de acelerações máximas.

Conclui-se ainda que não é possível ter um bom parâmetro de resposta quando se considera apenas uma multidão, mesmo com a multidão gerada de forma aleatória, sendo necessário considerar uma amostra mais significativa, como por exemplo 100 multidões geradas de forma aleatória, como o que foi realizado neste exemplo.

### 5.7. Exemplo 7: Piso Misto com IHE

Neste exemplo é considerado o mesmo piso misto analisado no exemplo 5.1 (Figura 5.1), onde as características geométricas são dadas pela Tabela 5.1 e os demais dados descritos no item 5.1, sendo adotado o Modelo de carregamento VI (item 4.3.1). A discretização do piso misto pelos elementos implementados neste trabalho é a mesma do exemplo 5.1.

Na Tabela 5.15 são apresentadas as frequências naturais de vibrações referentes ao primeiro modo de vibração natural considerando flexão da laje para três diferentes níveis de rigidez da conexão entre as vigas e a laje de concreto (não deformável, deformável e livre). O valor entre parênteses e negrito foi obtido por Mello *et al.* (2008), sendo que os autores avaliaram a situação considerando apenas a conexão não deformável entre as vigas e a laje do piso misto em questão. A Tabela 5.15 é um resumo da Tabela 5.2 e Tabela 5.5.

**Tabela 5.15.** Frequências naturais para três níveis de rigidez da conexão

$E_{sb} = E_{vb}$ (kPa)	$1 \times 10^9$	$2 \times 10^5$	0
Frequência (Hz)	7,43 ( <b>7,42</b> )	6,88	5,19

Mello *et al.* (2008) determinaram os valores das acelerações de pico em um ponto no meio do piso para três diferentes formas de carregamento que simulam atividades rítmicas. No Modelo de carregamento I e II foi considerado a força  $F(t)$  dada por Mello *et al.* (2008) pelas Equações (4.1) e (4.2), respectivamente, atuando durante um intervalo de tempo de 2s no centro do piso analisado.

No Modelo de carregamento III, a força  $F(t)$  também é dada pela Equação (4.2), porém, além de considerar uma parcela estática como o Modelo II, a análise leva em consideração uma variação espacial da aplicação da carga dinâmica, simulando o caminhar de uma pessoa ao longo do caminho 1 mostrado na Figura 5.1. Para a Eq. (4.2) foram adotados coeficientes dinâmicos, fator de impacto e os ângulos de fase semelhantes ao exemplo 5.1, dados pela Tabela 4.1. Para ambas as Equações (4.1) e (4.2), foi considerado a frequência do carregamento ( $f_s$ ), dada pela frequência do 1º modo de vibração natural envolvendo flexão do piso, dividida por quatro.

Diferentes análises, considerando o carregamento rítmico representado por um sistema MMA, foram realizadas com intuito de verificar a influência desse modelo na determinação das acelerações do piso, considerando a variação da rigidez da conexão entre as vigas e a laje. Devido à variabilidade dos parâmetros biodinâmicos dos pedestres representados pelos

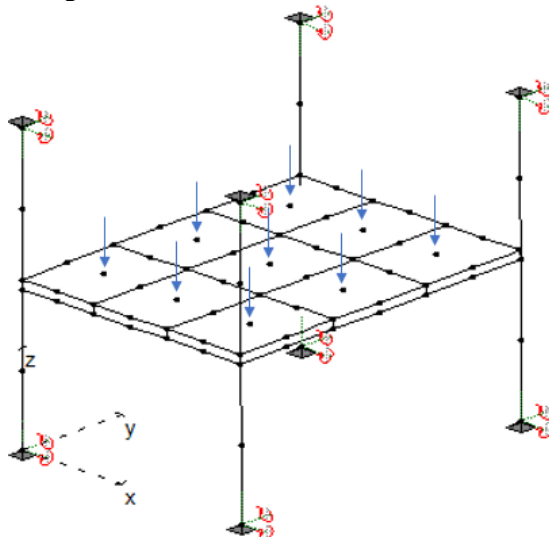
sistemas MMA, foram definidos dois pedestres que apresentem respostas iguais (em termos de acelerações médias) às obtidas pelos carregamentos I e II considerando conexão não deformável entre as vigas e a laje do piso.

O pedestre 1 apresenta os seguintes parâmetros: 70kg de massa, 200N/s de amortecimento, 27kN/m de rigidez e 0,38m/s para a velocidade inicial de toque do seu calcanhar no piso. Já o pedestre 2 apresenta os seguintes parâmetros: 70kg de massa, 300N/s de amortecimento, 33kN/m de rigidez e 0,5m/s para a velocidade inicial de toque do seu calcanhar no piso. A frequência do carregamento ( $f_s$ ) é dada para ambos os pedestres como sendo a frequência do 1º modo de vibração natural envolvendo flexão do piso dividida por quatro.

Na Tabela 5. 16 são apresentados os valores de acelerações de pico e médias no centro do piso analisado para diferentes carregamentos. Aceleração de pico é a máxima aceleração obtida no histórico de variação da aceleração com o tempo. A aceleração média ( $a_{rms}$ ) é a aceleração obtida no histórico de variação da aceleração dada pela Equação (1.1) com o tempo. No cálculo da aceleração média foi considerado o intervalo  $T_p = 0,5s$ .

Os carregamentos MMA1 e MMA2 consistem nos sistemas MMA referentes aos pedestres 1 e 2, respectivamente, fixos no centro do piso. O carregamento MMA3 consiste no sistema MMA referente ao pedestre 2, movendo-se ao longo do caminho 1. No Modelo I9 é colocada a força do Modelo I, fixa no nó central de cada um dos nove elementos planos de casca que discretizam a laje do piso (Figura 5. 29). O Modelo II9 é análogo ao Modelo I9 sendo utilizada a força do modelo II, já os carregamentos MMA1\_9 e MMA2\_9 são análogos aos modelos I9 e II9, substituindo as forças, respectivamente pelos sistemas MMA que representam os pedestres 1 e 2.

Figura 5. 29. Carregamento no nó central de cada elemento de placa





Os valores entre parênteses contidos na Tabela 5. 16 são resultados obtidos por Mello *et al.* (2008), apenas para conexão não deformável. Porém, antes de avaliar os resultados da Tabela 5. 16, deve-se lembrar que, junto com a redução da rigidez da conexão, outros parâmetros que interferem nas respostas de acelerações do piso são alterados, como, por exemplo, a frequência natural de vibração do piso que define a frequência do carregamento aplicado, e também os coeficientes de proporcionalidade do amortecimento de Rayleigh Ritz.

**Tabela 5. 16.** Acelerações de pico e médias no centro do piso para diferentes carregamentos

$E_{sb} = E_{vb}$ (kPa)	Aceleração de pico (m/s <sup>2</sup> )			AISC (Murray <i>et al.</i> (2016) (m/s <sup>2</sup> )	Aceleração média ( $a_{rms}$ ) (m/s <sup>2</sup> )			ISO (1989) <i>apud</i> (Murray <i>et al.</i> (2016) (m/s <sup>2</sup> )
	1x10 <sup>9</sup>	2x10 <sup>5</sup>	0		1x10 <sup>9</sup>	2x10 <sup>5</sup>	0	
Modelo I	0,026 <b>(0,027)</b>	0,027	0,038	0,147 (1,5% g) (valor baseado na Figura 2. 9 para Piso)	0,015	0,016	0,022	0,05 (0,5 % g)  (valor baseado na Figura 2. 9 para Piso)
MMA1	0,036	0,039	0,088		0,015	0,015	0,041	
Modelo II	0,034 <b>(0,033)</b>	0,033	0,040		0,021	0,020	0,027	
MMA2	0,058	0,066	0,140		0,021	0,024	<b>0,069</b>	
Modelo III	0,077 <b>(0,083)</b>	0,081	0,089		0,032	0,033	0,037	
MMA3	0,080	0,067	0,075		0,031	0,029	0,027	
Modelo I9	<b>0,15</b>	<b>0,16</b>	<b>0,22</b>		<b>0,087</b>	<b>0,098</b>	<b>0,13</b>	
MMA1_9	<b>0,20</b>	<b>0,20</b>	<b>0,49</b>		<b>0,085</b>	<b>0,084</b>	<b>0,24</b>	
Modelo II9	<b>0,19</b>	<b>0,19</b>	<b>0,22</b>		<b>0,10</b>	<b>0,10</b>	<b>0,14</b>	
MMA2_9	<b>0,25</b>	<b>0,25</b>	<b>0,79</b>		<b>0,12</b>	<b>0,14</b>	<b>0,40</b>	

Observa-se da Tabela 5. 16, que o fato de garantir que a aceleração média seja igual para a força dura e seu respectivo sistema MMA (acelerações médias de 0,015 e 0,021), a aceleração de pico sofre variações significativas. Os presentes autores entendem que a aceleração média é mais estável que a aceleração de pico em termos de variações nas respostas em consequência do método de análise utilizado, tamanho do incremento de tempo, entre outros. Por isso, optou-se por uniformizar a aceleração média em vez da aceleração de pico.

Analisando as respostas referentes ao modelo I e MMA1 observa-se que o modelo I teve um aumento de 46% nas acelerações com a variação da rigidez da conexão de interação total para livre, já o carregamento MMA1 teve um aumento de 244%, porém quando se compara os resultados para interação total e parcial percebe-se que não há muita diferença. Considerando a diferença entre os dois modelos, conclui-se que a IHE se intensifica com a redução da rigidez da conexão entre as vigas e a laje de concreto, porém mais significativamente para interação nula. Para o modelo II o aumento da aceleração é de 29% enquanto que para o carregamento MMA2 o aumento é de 241%, no entanto comparando a interação total com a parcial mais uma

---

vez os resultados para o modelo II foram praticamente idênticos, sendo mais perceptível para o MMA2 (14%). Esse mesmo comportamento, com maior ou menor intensidade, foi evidenciado para os outros carregamentos, exceto o modelo III.

No Modelo III observou-se que as acelerações não sofrem variações significativas com a variação da rigidez da conexão (5% para Interação parcial e 16% para Interação nula comparada com a Total). O Modelo III diferencia dos outros modelos porque considera uma variação do posicionamento da força rítmica simulando o caminhar de uma pessoa, tendo sido o único caso, dentro de todos analisados, em que tanto a aceleração média quanto a aceleração de pico diminuíram (apesar de pouco), ao invés de aumentarem de forma tão significativa com a diminuição da rigidez da conexão, que é o que acontece nos outros modelos de carregamento. Isso pode indicar um comportamento diferente do piso quando submetido a um carregamento móvel, ou seja, quando a carga do sistema MMA é aplicada de forma variável ao longo da estrutura, ela age no sentido de excitar ainda mais a estrutura. Quando é aplicada de forma estática de forma a agregar amortecimento à estrutura, aumentando a rigidez da conexão.

Percebe-se também da Tabela 5. 16 que há um acréscimo considerável na aceleração de pico quando se compara os modelos de “foça dura” com o respectivo sistema MMA, exceto para os resultados do Modelo III com os do sistema MMA3, que ao invés de sofrer um aumento da aceleração de pico como nos demais, houve uma diminuição da mesma, corroborando com o que foi dito anteriormente sobre o comportamento ser diferente quando a carga está em movimento (agindo no sentido de excitar ainda mais a estrutura).

Percebe-se ainda da Tabela 5. 16 que para os Modelos I, II, III e respectivos sistemas MMA, os valores da aceleração de pico se mantiveram abaixo dos limites estabelecidos pela AISC (Murray *et al.*, 2016) para o conforto humano, já para os Modelos I9 e II9 e respectivos sistemas MMA, os valores encontrados ultrapassaram esses limites (valores em negrito e sublinhado).

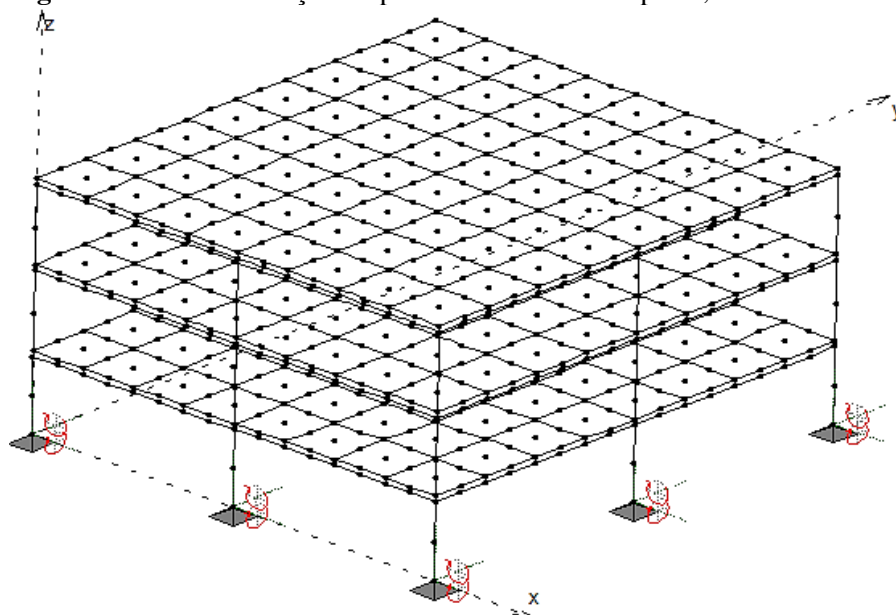
Outro ponto importante a ser observado é que comparando os resultados dos Modelo I e II, bem como os resultados dos sistemas MMA1 e MMA2, percebe-se que houve um aumento significativo na aceleração, fato que se explica pela rigidez e velocidade do toque do calcanhar do pedestre 2 serem maiores do que do pedestre 1, apesar do amortecimento também ser maior. Concluindo que não basta apenas a propriedade de amortecimento ser maior para que se tenha uma situação mais favorável, é preciso analisar os três parâmetros de forma mais criteriosa. Apesar da carga ser fixa no centro do piso para o modelo MMA, o pedestre é considerado fazendo uma atividade como se estivesse saltando parado no centro do piso a uma frequência igual à frequência de sua caminhada, ou seja, é considerado a velocidade do toque do calcanhar

### 5.8. Exemplo 8: Piso Misto de 3 pavimentos com IHE

Neste exemplo é analisado o piso misto com 3 pavimentos analisado por Campista e Gaspar (2016) mostrado na Figura 2. 23. O piso misto é constituído por 3 lajes de concreto e vigas e pilares de aço, com dimensão de 20mx20m, área de 3x400m<sup>2</sup> e um total de 12 lajes de 10mx10m. A laje de concreto possui espessura de 10cm e cada pilar tem altura de 4m. A seção de aço utilizada foi de perfil W soldado, com tensão de escoamento de 345MPa, enquanto a laje de concreto possui uma resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ) de 30MPa e módulo de elasticidade secante ( $E_{cs}$ ) de 26x10<sup>3</sup>MPa.

A Figura 5. 30 mostra a discretização do piso misto de 3 pavimentos em elementos de placa, barra e interface. Onde cada laje de concreto foi discretizada por quatro elementos de placas com efeito de membrana e flexão (*PLATE9*), cada viga de aço foi discretizada por quatro elementos de barra (*BEAMRMT*), cada pilar de aço foi discretizado por quatro elementos de barra (*BEAM3DT*) e cada ligação entre os elementos de barra e os elementos de placa é feita por quatro elemento de interface (*INTBEAMPLATE*).

Figura 5. 30. Discretização do piso em elementos de placa, barra e interface



#### 5.8.1. Resultados obtidos para Conexão Não deformável ( $E_{sb} = E_{vb} = 10^9$ kPa).

A partir da discretização mostrada na Figura 5. 30, foi gerada a Tabela 5. 17 com os resultados das frequências para os 5 primeiros modos de vibração natural do piso misto em

questão, obtidos para conexão não deformável ( $E_{sb} = E_{vb} = 10^9 \text{kPa}$ ), sendo os resultados comparados com Campista e Gaspar (2016).

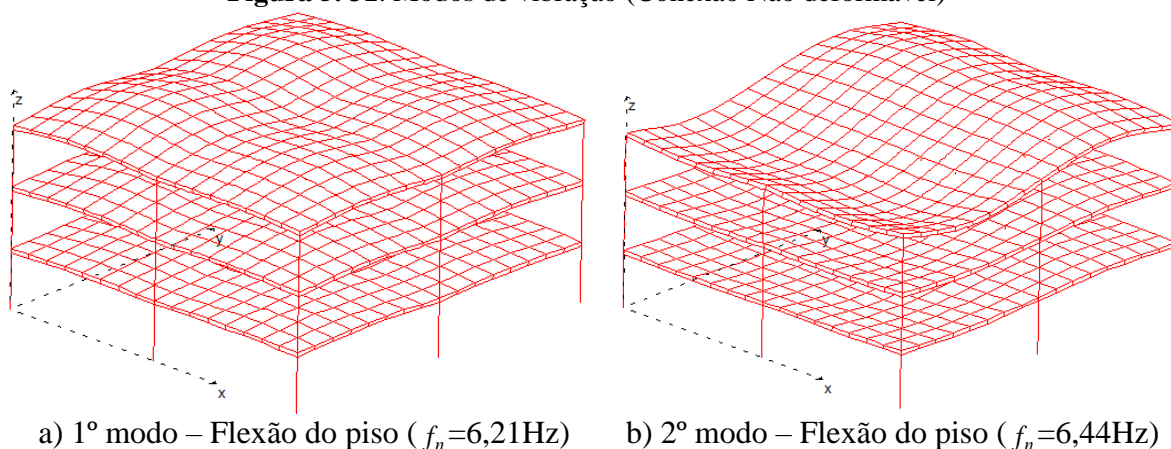
**Tabela 5. 17.** Frequências para os primeiros modos de vibração natural do piso (Conexão Não deformável)

Modo de vibração		1°	2°	3°	4°	5°
$f_n$ (Hz)	Presente trabalho	6,21	6,44	6,48	6,65	6,68
	Campista e Gaspar (2016)	6,29	6,54	6,56	6,60	6,98
Diferença (%)		1,27	1,55	1,23	0,76	4,49

Comparando os resultados das frequências naturais obtidos neste presente trabalho, utilizando os elementos de placa, barra e interface com os de Campista e Gaspar (2016), para a conexão não deformável, percebe-se uma boa proximidade dos resultados, mostrando-se mais uma vez a eficiência desses elementos na análise dinâmica de pisos mistos.

A título de ilustração, a Figura 5. 31 mostra dois primeiros modos de vibração obtidos neste trabalho para conexão não deformável ( $E_{sb} = E_{vb} = 10^9 \text{kPa}$ ).

**Figura 5. 31.** Modos de vibração (Conexão Não deformável)

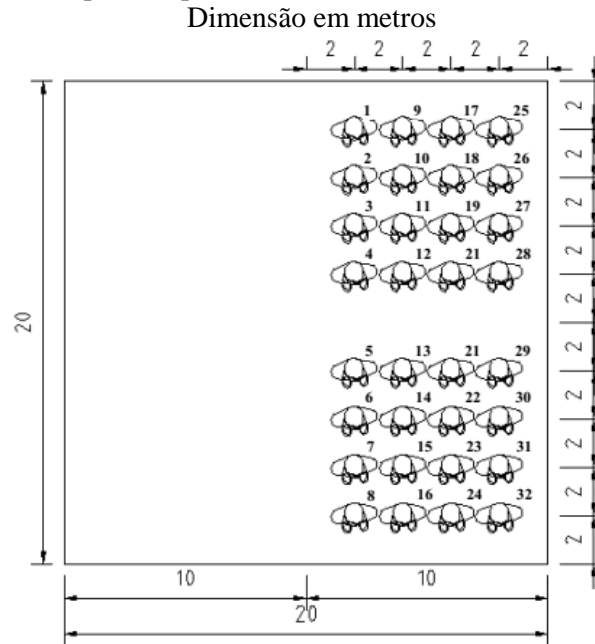


Considerando a aplicação dos seguintes carregamentos:

- ✓ Car 1 = carregamento dinâmico dado pelo Modelo de carregamento I (item 4.2.1). Onde considerou-se peso da pessoa de 800N, e frequência da força harmônica dada pela 1ª frequência dividida por 4, ou seja, igual a  $6,21/4 = 1,55\text{Hz}$ . Essa força harmônica foi aplicada em 32 pontos do segundo piso como mostrado na Figura 5. 32. Os outros dados são iguais aos considerados para os outros exemplos e esse tipo de carregamento. Como o modelo de carregamento utilizado por Campista e Gaspar (2016) é diferente dos modelos utilizados neste trabalho, os resultados em termos de aceleração não serão comparados com este autor.

- ✓ Car 2 = Carregamento rítmico representado por um sistema MMA. A pessoa apresenta os seguintes parâmetros: 80kg para a sua massa; 548kg/s para o seu amortecimento; 15kN/m para a sua rigidez; e 0,30m/s para a velocidade inicial de toque do seu calcanhar no piso. A frequência do carregamento ( $f_s$ ) é dada por 2,18Hz. Esse carregamento foi aplicado em 32 pontos no segundo piso.

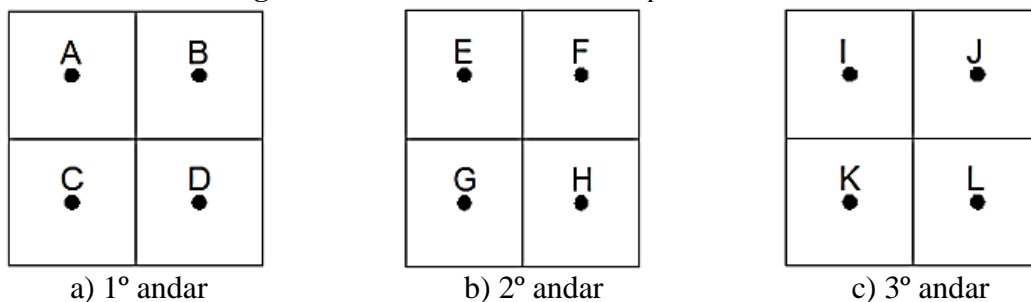
**Figura 5. 32.** Trinta e duas pessoas praticando atividades aeróbicas no 2º andar do piso misto.



As coordenadas dos pontos são coincidentes com o centro de cada uma das baias de 10 m x 10 m, como mostrado na Figura 5. 33, sendo então:

- ✓ Piso 1: A(5,15,4); B(15,15,4); C(5,5,4); D(15,5,4);
- ✓ Piso 2: E(5,15,8); F(15,15,8); G(5,5,8); H(15,5,8);
- ✓ Piso 3: I(5,15,12); J(15,15,12); K(5,5,12); L(15,5,12);

**Figura 5. 33.** Nós analisados na resposta dinâmica



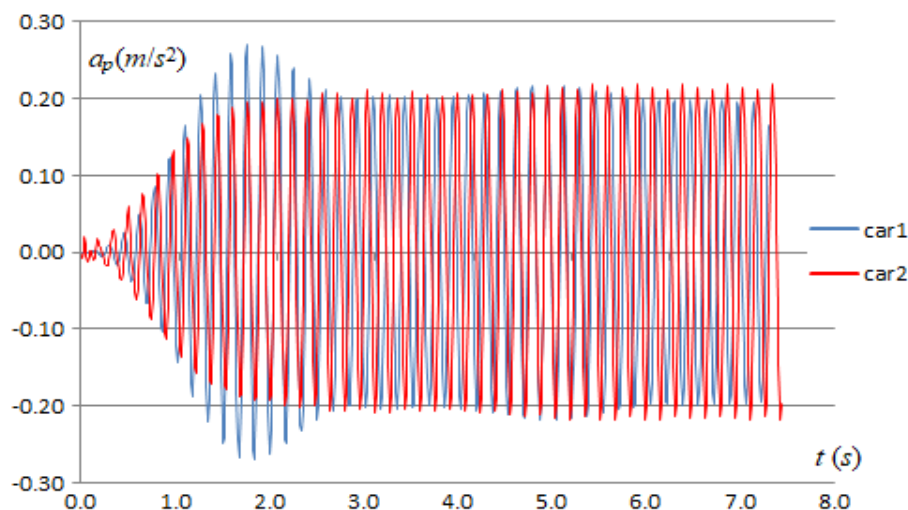
Fonte: Campista e Gaspar (2016)

Na Tabela 5. 18 são fornecidas as acelerações de pico em  $m/s^2$  nos pontos centrais das lajes, já a Figura 5. 34 fornece um histórico de acelerações em um ponto específico (ponto G).

**Tabela 5. 18.** Acelerações de pico nos centros das lajes (Conexão Não deformável)

Ponto/ Carregamento		Car 1	Car 2
Piso 1	A	0,081	0,090
	B	0,097	0,041
	C	0,085	0,088
	D	0,098	0,042
Piso 2	E	0,271	0,225
	F	0,332	0,305
	G	0,270	0,219
	H	0,327	0,304
Piso 3	I	0,228	0,077
	J	0,199	0,111
	K	0,332	0,305
	L	0,202	0,108

**Figura 5. 34.** Histórico de acelerações no ponto G (Conexão Não deformável)



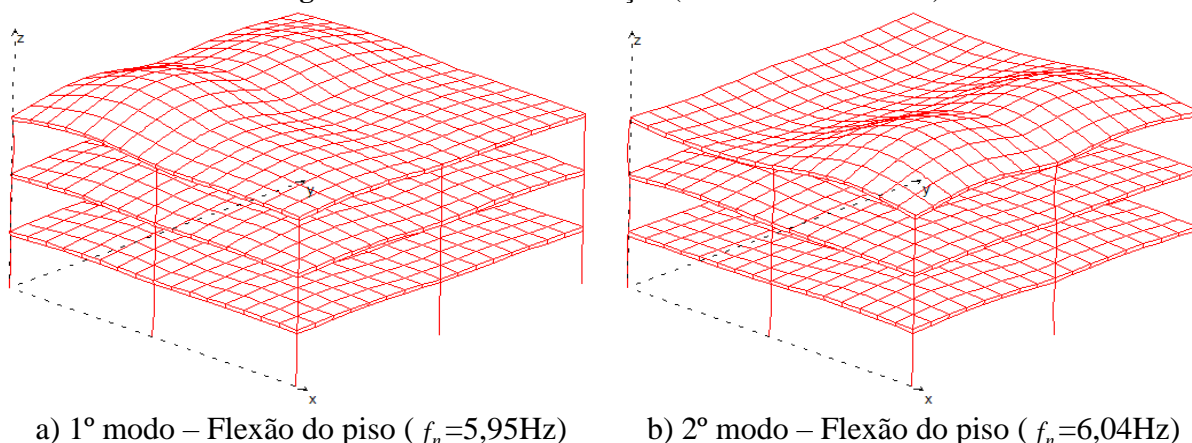
### 5.8.2. Resultados obtidos para Conexão Deformável ( $E_{sb} = E_{vb} = 2 \times 10^5 \text{kPa}$ ).

Considerando a conexão deformável, tem-se que as frequências naturais referente aos cinco primeiros modos de vibração são dadas pela Tabela 5. 19, sendo os dois primeiros plotados na Figura 5. 35. Não serão comparados os resultados para a conexão deformável visto que Campista e Gaspar (2016) considerou apenas conexão não deformável.

**Tabela 5. 19.** Frequências para os primeiros modos de vibração natural do piso (Conexão Deformável)

Modo de vibração		1°	2°	3°	4°	5°
$f_n$ (Hz)	Presente trabalho	5,95	6,04	6,24	6,28	6,40

Figura 5. 35. Modos de vibração (Conexão Deformável)



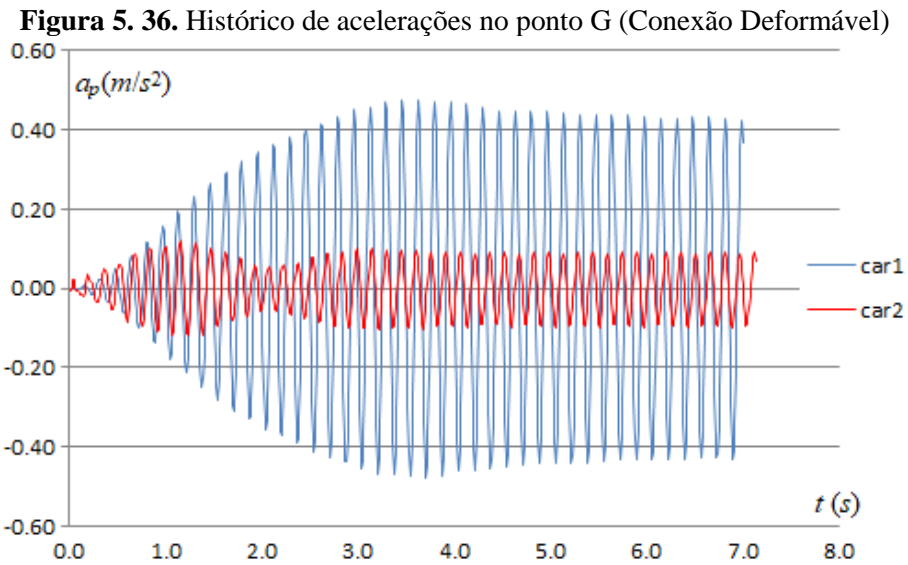
Comparando os resultados para conexão não deformável (Tabela 5. 17) com os resultados para conexão deformável (Tabela 5. 19), utilizando os elementos implementados neste trabalho, percebe-se uma pequena diminuição das frequências naturais, como por exemplo 4,19 % para a 1ª frequência.

Os carregamentos Car 1 e Car 2 tem as mesmas características do item 5.8.1, exceto com relação à frequência que é considerada, sendo agora usada o valor da 1ª frequência natural dividida por quatro, ou seja,  $5,95/4 = 1,4875\text{Hz}$ .

Temos que a Tabela 5. 20 fornece as acelerações de pico em  $\text{m/s}^2$  nos pontos centrais das lajes, já a Figura 5. 36 fornece um histórico de acelerações em um ponto específico (ponto G):

Tabela 5. 20. Acelerações de pico nos centros das lajes (Conexão Deformável)

Ponto/ Carregamento		Car 1	Car 2
Piso 1	A	0, 130	0, 071
	B	0, 064	0, 077
	C	0, 189	0, 047
	D	0, 095	0, 053
Piso 2	E	0, 348	0, 197
	F	0, 554	0, 372
	G	0, 476	0, 120
	H	0, 524	0, 310
Piso 3	I	0, 154	0, 117
	J	0, 237	0, 126
	K	0, 554	0, 372
	L	0, 283	0, 092



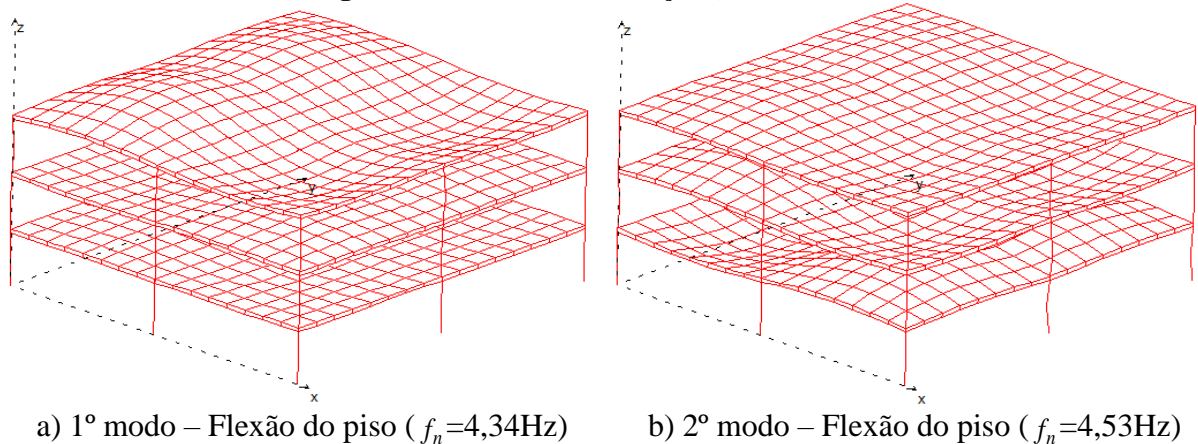
**5.8.3. Resultados obtidos para Conexão Livre ( $E_{sb} = E_{vb} = 0\text{kPa}$ ).**

Considerando a conexão com rigidez nula, tem-se que as frequências naturais referentes aos cinco primeiros modos de vibração são dadas pela Tabela 5. 21, sendo os dois primeiros plotados na Figura 5. 37. Não serão comparados os resultados para a conexão livre, visto que Campista e Gaspar (2016) considerou apenas conexão não deformável.

**Tabela 5. 21.** Frequências para os primeiros modos de vibração natural do piso (Conexão Livre)

Modo de vibração		1°	2°	3°	4°	5°
$f_n$ (Hz)	Presente trabalho	4,34	4,53	4,92	4,95	5,04

**Figura 5. 37.** Modos de vibração (Conexão Livre)





Comparando os resultados para conexão não deformável (Tabela 5. 17) com os resultados para conexão livre (Tabela 5. 21), utilizando os elementos implementados neste trabalho, percebe-se uma diminuição significativa das frequências naturais, como por exemplo 30,11% para a 1ª frequência, porém como já foi dito, a interação livre é pouco aplicável na prática.

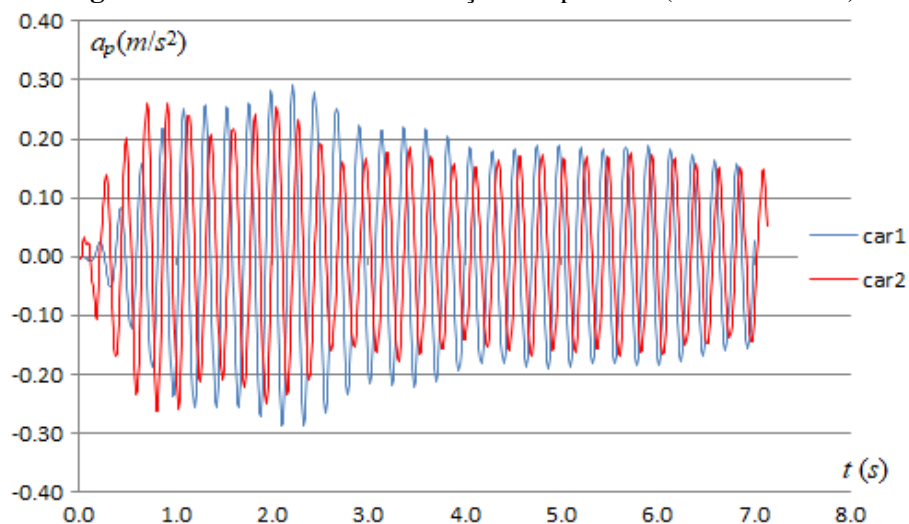
Os carregamentos Car 1 e Car 2 tem as mesmas características do item 5.8.1, exceto com relação à frequência que é considerada, idem ao exemplo anterior, onde a 1ª frequência natural é igual a 4,34 Hz, ou seja,  $4,34/4 = 1,085\text{Hz}$ .

Na Tabela 5. 22 são fornecidas as acelerações de pico em  $\text{m/s}^2$  nos pontos centrais das lajes, já a Figura 5. 38 fornece um histórico de acelerações em um ponto específico (ponto G):

**Tabela 5. 22.** Acelerações de pico nos centros das lajes (Conexão Livre)

Ponto/ Carregamento		Car 1	Car 2
Piso 1	A	0, 151	0, 130
	B	0, 145	0, 126
	C	0, 166	0, 145
	D	0, 160	0, 139
Piso 2	E	0, 271	0, 261
	F	0, 373	0, 420
	G	0, 291	0, 264
	H	0, 383	0, 428
Piso 3	I	0, 235	0, 177
	J	0, 252	0, 196
	K	0, 373	0, 420
	L	0, 273	0, 214

**Figura 5. 38.** Histórico de acelerações no ponto G (Conexão Livre)



Comparando os valores das acelerações para conexões não deformável, deformável e livre, dados pela Tabela 5. 18, Tabela 5. 20 e Tabela 5. 22 respectivamente, percebe-se para a força dura (Car 1), um aumento quando muda da conexão não deformável para a conexão deformável para todos do 1º piso, exceto para os pontos A e C, todos do 2º piso e os pontos I e J do 3º piso. Quando se considera a IHE (Car 2), a aceleração aumenta em todos os casos.

A Figura 5. 34, Figura 5. 36 e Figura 5. 38 mostra o histórico da aceleração de pico ao longo de um tempo igual a 7 segundos, para uma conexão não deformável, deformável e livre respectivamente. Na Figura 5. 36 verifica-se um comportamento muito diferente entre o modelo de força dura (Car 1) e o modelo com IHE (Car 2), diferente do comportamento bem próximos para os dois modelos de carregamento, visto na Figura 5. 34 e Figura 5. 38, verificando que para esse piso de três pavimentos analisado a conexão deformável pode ser mais imprescindível se considerar a IHE.

## **Capítulo 6**

---

### **Considerações Finais**

### 6.1. Conclusões

O presente trabalho consiste na implementação e adaptação de elementos finitos de placa, barra e interface para análise dinâmica de pisos mistos formados por uma laje de concreto ligada a vigas e pilares de aço com uma possível conexão deformável entre as vigas e a laje de concreto. Na análise dinâmica são considerados modelos de carregamento de “força dura” para simular carregamentos rítmicos bem como um modelo que considera a interação homem estrutura. Conclui-se, que os elementos finitos de placa (*PLATE9*), barra (*BEAMRMT* e *BEAM3DT*) e interface (*INTBEAMPLATE*) apresentam resultados satisfatórios, tanto para “força dura” quanto para IHE, quando comparados com resultados numéricos encontrados na literatura e em alguns casos com resultados analíticos também encontrados na literatura ou neste trabalho.

A discrepância em alguns resultados pode ser explicada pelas diferentes formulações utilizadas nas implementações dos elementos finitos pelo presente autor em relação aos autores aos quais estes resultados foram comparados.

Alguns exemplos foram analisados e conclusões já apresentadas. No exemplo 4 estudou-se o efeito “*shear-lag*” na determinação dos modos naturais de vibração de vigas mistas com interação parcial. Observou-se que quanto maior a relação largura da laje/comprimento do vão, ou seja, maior o efeito “*shear-lag*” na análise, maior são as variações na resposta dos modos naturais de vibração considerando diferentes níveis de interação parcial. Sendo assim, podemos concluir que quanto maior é essa relação e o grau de interação parcial, mais a laje de concreto precisa ser simulada por meio de um elemento de placa e não um elemento de barra, visto que o elemento de barra não consegue prever a variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto.

O modelo MMA, retirado de Gomez *et al.* (2018), e implementado no FEMOOP, se mostrou eficiente tanto para simular um único pedestre presente na estrutura, quanto para simular o efeito de multidão, seja para uma única multidão (com dados determinados ou aleatórios) quanto para simular várias multidões aleatórias.

Conclui-se ainda deste trabalho a importância de se considerar dados aleatórios dos usuários da estrutura para representar um multidão ao invés de se considerar esses dados apenas de forma determinística (pré-determinados), e mais ainda, considerar não apenas uma única multidão, mas várias multidões, de forma a se ter uma maior amostragem, sendo os resultados mais significativos, visto que não se trata de um resultado particular, como de uma única

multidão gerada aleatoriamente, e muito menos de uma multidão onde todos os dados de seus usuários já são pré-determinados, que é quase impossível de acontecer.

Percebe-se que os elementos implementados para a análise dinâmica se mostraram mais eficientes para simular pisos mistos em que o modelo de carregamento é aplicado de forma estática (Modelos I e II), ou seja, sem variar sua posição no tempo. Quando o modelo de carregamento considera a carga variando de posição ao longo da estrutura (Modelo III) os resultados se mostraram um pouco mais divergentes, como pode ser visto no exemplo 1.

Percebe-se ainda que quando o piso tem uma relação largura/comprimento muito grande, como, por exemplo, uma passarela (exemplos 2, 3, 4 e 5), os resultados em termos de deslocamento e aceleração foram comparados com os resultados obtidos por outros autores, e para os exemplos implementados, mostraram resultados mais próximos do que para piso (como nos exemplos 1 e 7), tanto para análise onde a IHE era desprezada ou não.

Conclui-se por meio dos exemplos 6 e 7 que é mais significativo considerar a aceleração média *RMS* do que a aceleração de pico, pois a *RMS* fornece um valor eficaz, ou seja, um valor mais confiável, visto que é capaz de eliminar picos que não são reais, ou seja, possíveis picos oriundos de erros numéricos.

Do exemplo 8 conclui-se que o comportamento muito diferente entre o modelo de força dura (Car 1) e o modelo com IHE (Car 2) pode significar que para a conexão deformável pode ser mais imprescindível se considerar a IHE, devendo ser melhor estudado a sua influência no comportamento da estrutura, especialmente quando se considera que existe deslizamento na interface, ou seja, a conexão deformável.

Percebe-se ainda da Tabela 5. 16 que para os Modelos I, II, III e respectivos sistemas MMA, os valores da aceleração de pico se mantiveram abaixo dos limites estabelecidos pela AISC (Murray *et al.*, 2016) para o conforto humano, já para os Modelos I9 e II9 e respectivos sistemas MMA, os valores encontrados ultrapassaram esses limites. Dessa forma, pode-se concluir que a quantidade de pedestres considerados na análise influencia na resposta em termos de acelerações de pico.

Por fim, conclui-se que não basta apenas avaliar a propriedade de amortecimento do pedestre, é preciso avaliar os três parâmetros (amortecimento, rigidez e velocidade) de forma mais criteriosa, para que possa ser analisado o aumento da aceleração, como visto na Tabela 5. 16. Logo, essa avaliação mais criteriosa, variando-se todos esses parâmetros é uma das sugestões para futuros trabalhos.

## **6.2.Sugestões para Trabalhos Futuros**

Sugere-se que sejam implementados outros modelos de sistemas MMA para que a análise considerando a IHE comece a ser abordada em trabalhos futuros deste programa de pós-graduação (PROPEC) e passe a ser mais abordado pelos demais programas, principalmente no que diz respeito à estruturas mistas considerando a possibilidade de conexão deformável entre a laje de concreto e as vigas de aço e até mesmo considerando a não linearidade física e geométrica, sendo então possível analisar o comportamento histerético da conexão.

Sugere-se ainda que outros modelos de carregamentos rítmicos possam ser implementados e avaliados, sejam eles considerando ou não a IHE, visto que neste presente trabalho apenas o caminhar de pessoas foi contemplado, seja por meio dos Modelos III e IV (sem considerar a IHE), quanto por meio do sistema MMA (considerando IHE).

Com relação aos modelos de carregamentos onde se considera a IHE e multidão, sugere-se implementar modelos de multidão que permita que um pedestre caminhe ou realize qualquer atividade rítmica de forma aleatória pela estrutura, sendo possível até mesmo um usuário se desviar do outro. No modelo implementado neste trabalho o sistema MMA pode ter diferentes linhas de trajetos entre outras variações, mas essas linhas de trajetos são independentes não havendo, portanto, a possibilidade de desvio de um trajeto em relação ao outro.

Sugere-se também que seja realizada análise de pontes mistas com carregamento MMA representando um carregamento de veículo-tipo e também análise da ação de frenagem de veículos juntamente com a interação parcial em pontes mistas, bem como determinar as superfícies de influência destas estruturas considerando as várias posições possíveis de colocação, seja do veículo-tipo no caso de pontes ou do indivíduo no caso de passarelas e demais piso mistos.

Sugere-se que sejam realizadas as análises de pisos mistos com conexão deformável considerando a IHE também no domínio da frequência, visto que este trabalho foi realizado no domínio do tempo.

Por fim, sugere-se que sejam realizadas análises experimentais considerando a conexão deformável.

## **Referências Bibliográficas**

---

- Aguiar, J. V. **Modelagem do comportamento estrutural dinâmico e avaliação dos critérios de projeto para conforto humano de edifícios submetidos a ações humanas rítmicas sobre os pisos**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGE CIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2017.
- Ahmadi, E.; Caprani, C. C. e Heidarpour, A. **An equivalent moving force model for consideration of human-structure interaction**. Applied Mathematical Modelling, v. 51, p. 526-545, 2017.
- Ahmadi, H.; Caprani, C. C.; Zivanovi, S.; Evans, N. e Heidarpour, A. **A framework for quantification of human-structure interaction in vertical direction**. Journal of Sound and Vibration, v. 432, p. 351-372, 2018.
- Alves, N. K. C. **Cargas Dinâmicas devido a Pessoas em Movimento**. Dissertação de Mestrado. COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Rio de Janeiro, 1997
- American Concrete Institute. ACI 318-05: 2004. **Building Code Requirement for Structural Concrete and Commentary**. Austin, 2004.
- American Institute of Steel Construction. AISC: 2005. **Load and Resistance Factor Design Specification for Steel Buildings**. Chicago, 2005.
- Archbold, P. **Interactive Load Models for Pedestrian Footbridges**. Dept. of Civil Engineering, University College Dublin, Dublin, 2004.
- Archbold, P. **Evaluation of novel interactive load models of crowd loading on footbridges**. Proceedings of 4<sup>th</sup> Symposium on Bridge and Infrastructure Research in Ireland, National University of Ireland, Galway, p. 35-44, 2008.
- Archbold P. e Mullarney, B. **The relationship between pedestrian loading and dynamic response of an FRP composite footbridge**. Bridge Structures, v. 13, p. 147–157, 2017.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 8800: 2015. **Projeto de Revisão. Projeto e Execução de Estruturas de Aço e Estruturas Mistas Aço-Concreto em Edifícios**. Rio de Janeiro, 2015.
- Ayoub A. e Filippou F. **Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element**. Engineering Structures, v. 126, p. 371–81, 2000.
- Bachmann, H. **Vibration Problems in Structures – Practical Guidelines**. Institut für Baustatik und Konstruktion, 1. ed, Basel, 1995.
- Bachmann, H. e Ammann, W. **Vibrations in Structures: Induced by Man and Machines**. ABSE, 1987.
- Barros, E. de. **Análise da frequência de ressonância de um vibrador eletrodinâmico**. Revista de Ciências exatas e Tecnologia, v. 5, n. 5, p. 27-45, 2010.
- Bathe, K. J. **Finite element procedures**. Englewood Cliffs, 1986.
- BBC NEWS. **Scores hurt as US bridge collapses**. Publicado em 21 de Maio de 2000, Disponível em: <http://news.bbc.co.uk/1/hi/world/americas/757611.stm>, Acesso em: 30 de agosto de 2018.
- Behnia, A.; Chai, H. K.; Ranjbar, N. e Behnia, N. **Finite element analysis of the dynamic response of composite floors subjected to walking induced vibrations**. Advances in Structural Engineering, v. 16, n. 5, p. 959–974, 2013.
- Biggs, J. M. **Introduction to Structural Dynamics**. McGraw-Hill, New York, 1964.
- Blanchard, J.; Davies, B. L. e Smith, J. W. **Design criteria and analysis for dynamic loading of footbridges**. Symposium on Dynamic Behaviour of Bridges, Transport and Road Research Laboratory, Berkshire, p. 90–106, 1977.
- Brownjohn, J. M. W. e Zheng, X. **Effects of human postures on energy dissipation from vibrating floors**. SPIE - The International Society for Optical Engineering 4317, 4317, p. 489–93, 2001



- Brownjohn, J. M. W.; Pavic, A. e Omenzetter, P. **A spectral density approach for modeling continuous vertical forces on pedestrian structures due to walking**. Canadian Journal of Civil Engineering, v. 31, n. 1, p. 65–77, 2004.
- Bruno, L. e Venuti, F. **Crowd–structure interaction in footbridges: modeling, application to a real case-study and sensitivity analyses**. Journal of Sound and Vibration, v. 323, p. 475–493, 2009.
- Caldas, R. B. **Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2004.
- Campista, F. F. **Análise de vibrações e estudo de conforto humano sobre pisos mistos (aço-concreto) submetidos a ações humanas rítmicas**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2015.
- Campista, F. F.; Gaspar, C. M. R. e da Silva, J. G. S. **Avaliação do Conforto Humano de Pisos Mistos (Aço-concreto) de Edificações Com Base no Emprego de Modelos Biodinâmicos**. XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Brasília, 6-9 novembro, 2016.
- Caprani, C. C.; Keogh, J.; Archbold, P. e Fanning, P. **Characteristic Vertical Response of a Footbridge Due to Crowd Loading**. EuroDyn: 8<sup>th</sup> International Conference on Structural Dynamics. Leuven, Belgium, 4-6 julho, 2011.
- Caprani, C. C.; Keogh, J.; Archbold, P. e Fanning, P. **Enhancement factors for the vertical response of footbridges subjected to stochastic crowd loading**. Computers and Structures, v. 102-103, p. 87–96, 2012.
- Caprani, C. C. e Ahmadi, E. **Formulation of human–structure interaction system models for vertical vibration**. Journal of Sound and Vibration, v. 377, p. 346–367, 2016.
- Carroll, S. P.; Owen, J. S. e Hussei, M. F. M. **Modelling crowd-bridge dynamic interaction with a discretely defined crowd**. Journal of Sound and Vibration, v. 33, p. 2685–2709, 2012.
- Coermann, R.R. **Aerospace Med.**, 31: 443, 1960.
- Collette, F. **Comfort and vibrations on floors due to walking loads**. COWI Publications, The Scandinavian Vibration Society, SVIB, Stockholm, 2004.
- Dallard, P.; Fitzpatrick, T.; Flint, A.; Low, A.; Smith, R.M.; Willford, M. e Roche, M. **London Millennium Footbridge: pedestrian-induced lateral vibration**. ASCE Journal of Bridge Engineering, v. 6, n. 6, p. 412-417, 2001.
- Dall’Asta, A e Zona, A. **Comparison and validation of displacement and composite elements for the non-linear analysis of composite beams**. Computer and Structures, v. 82, p. 2117–2130, 2004a.
- Dall’Asta, A. e Zona, A. **Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection**. Finite Elements in Analysis and Design, v. 40, p. 425-448, 2004b.
- David, D. L. **Análise teórica e experimental de conectores de cisalhamento e vigas mistas constituídas por perfis de aço formados a frio e laje de vigotas pré- moldadas**. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, USP, São Paulo, 2007.
- Davies, C. **Tests On Half-Scale Steel-Concrete Composite Beams With Welded Stud Connectors**. The Structural Engineer, v.47, 1969.
- Debona, G. L. **Modelagem do comportamento dinâmico de passarelas tubulares mistas (aço-concreto), submetidas ao caminhar humano**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-

- Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2011.
- Debona, G. L.; da Silva, J. G. S. ; Sieira, A. C. C.; Vellasco, P. C. G. da S. e Lima, L. R. O de; **Análise de Vibrações de Passarelas Tubulares Mistas (Aço-concreto) via Método Dos Elementos Finitos**. 10th World Congresso n Computational Mechanics, São Paulo, v. 1, n. 1, 2014.
- Debona, G. L. **Monitoração Experimental e Modelagem Numérica sobre a Resposta Estrutural Dinâmica de Passarelas de Pedestres**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2016.
- Dias, L. E. S. **Análise numérica de cascas de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço usando elementos finitos de casca e interface**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2016.
- Duarte, I. F. B.; Debona, G. L. e da Silva, J. G. S. **Análise de Conforto Humano em Passarelas de Pedestres Mistas (Aço-Concreto) com Base na Utilização de Modelos Biodinâmicos**. XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Rio de Janeiro, 22-25 novembro, 2015.
- Duarte, I. F. B. **Análise de vibrações e avaliação de conforto humano sobre passarelas de pedestres mistas (aço-concreto) com base no emprego de modelos biodinâmicos**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2016.
- Ebrahimpour, A.; Haman, A., Sack, R. L. e Patten, W. **Measuring and modeling dynamic loads imposed by moving crowds**. Engineering Structures, v. 122, p. 1468–1473, 1996.
- Ellis, B. R. e Ji, T. **Human–structure interaction in vertical vibrations**. Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings, v. 122, p. 1-9, 1997.
- Eurocode 4. **Design of Composite Steel and Concrete Structures - Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings**, European Committee for Standardization, British Standards Instituion, London , 1994.
- Faisca, R. G. **Caracterização de Cargas Dinâmicas Geradas por Atividades Humana**. Tese de Doutorado. COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.
- Fanning, P.J.; Archbold, P. e Pavic, A. **A novel interactive pedestrian load model for flexible footbridges**. Proceedings of the SEM Annual Conference & Exposition on Experimental and Applied Mechanics, p. 1–8, 2005.
- Feitosa, F. F. **Análise dinâmica de passarelas de pedestres mistas (aço-concreto) com aberturas na alma das vigas de aço**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2012.
- Figueiredo, F. P. **Estudo do comportamento dinâmico de passarelas devido ao caminhar de pedestres**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2005.
- Fujino, Y.; Pacheco, B. M.; Nakamura, S. e Warnitchai, P. **Synchronization of human walking observed during lateral vibration of a congested pedestrian bridge**. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 22, n. 9, p. 741-758, 1993.
- Gajalakshmi, G.; Mohaideen, J. A. e Santhakumar, A.R. **State of the art on Dynamic Behavior of Structures under Human Induced Activities**. National Journal on Advances in Building Sciences & Mechanics, v.. 5, n. 1, 2014.
- Gao, Y. A., Yang, Q. S. e Dong, Y. **A Three-Dimensional Pedestrian–Structure Interaction Model for General Applications**. International Journal of Structural Stability and Dynamics, v. 18, n. 9, 1850107, 2018.

- Gara, F.; Ranzi, G. e Leoni, G. **Displacement-based formulations for composite beams with longitudinal slip and vertical uplift**. Int J Numer Methods Eng, v. 65, p. 1197–220, 2006.
- Garcia, Eduardo Alfonso Cadavid. **Biofísica**. São Paulo, Sarvier, 1998.
- Gaspar, C. M. R. **Análise Dinâmica e controle de vibrações de pisos de edificações submetidos a atividades humanas rítmicas**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2013.
- Goldman, D. E. **USN MRI Rept. 1**, NM 004 001, March 1948.
- Gomez, D. S. M.; Dyke, S. J. e Rietdyk, S. **Experimental Verification of a Substructure Based Model to Describe Pedestrian–Bridge Interaction**. Journal of Bridge Engineering, ASCE, v. 23, n.4, 04018013, 2018.
- Gonçalves, S. G. **Análise dinâmica não-linear de pisos mistos (aço-concreto) submetidos a ações humanas rítmicas**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2011.
- Guimarães, L. G. S. **Disciplina Orientada a Objetos para Análise e Visualização Bidimensional de Modelos de Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 1992.
- Han, H. e Zhou, D. Mechanical Parameters of Standing Body and Applications in Human–Structure Interaction. International Journal of Applied Mechanics, v. 9, n. 2, 1750021 (30 p.), 2017.
- Huang, C., e Su, Y. **Dynamic Characteristics of Partial Composite Beams**. International Journal of Structural Stability and Dynamics, v. 8, n. 4, p. 665-685, 2008.
- Ingólfsson, E. T.; Georgakis, C. T. e Jönsson, J. **Pedestrian-induced lateral vibrations of footbridges: a literature review**. Engineering Structures, v. 45, p. 21–52, 2012.
- Inman, V. T.; Ralston, H. J., Todd, F. **Human Walking**. 1<sup>st</sup> ed., Baltimore, Williams & Wilkins, 1981.
- International Organization for Standardization. ISO 5982: 1981. **Bases for Design of Structures - Vibration and Shock-Mechanical driving point impedance of the human body**. Genebra, 1981.
- International Standard Organization. ISO 2631-2: 1989. **Evaluation of human exposure to whole-body vibration, Part 2: Human Exposure to Continuous and Shock-Induced Vibrations in Buildings (1 to 80Hz)**. Genebra, 1989.
- Kim, S. H.; Cho, K. I.; Choi, M. S. e Lim, J. Y. **Development of human body model for the dynamic analysis of footbridges under pedestrian induced excitation**. Steel Structures, v. 8, p. 333-345, 2008.
- Laman, J. A. **Design Aids for Walking Vibrations in Steel Framed Floors**. Engineering Journal, AISC, Second Quarter, 1999.
- Langer, N. A. dos S. **Estudo do Conforto Humano em Pisos Mistos (Aço-Concreto) Submetidos a Ações Humanas Rítmicas**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2009.
- Lemes, I. J. M. **Análise avançada via MRPR de estruturas mistas de aço e concreto**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2015.
- Lemes, Í. J. M.; Silva, A. R. D.; Silveira, R. A. M. e Rocha, P. A. S. **Análise numérica do comportamento não linear de estruturas mistas de aço e concreto**. Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, v. 10, n. 1, p. 53-83, 2017.

- Lenzen, K. H. **Vibration of steel joist-concrete slab floors**. Engineering Journal, AISC, v. 3 n. 3, p. 133-136, 1966.
- Lima, N. L. de A. **Efeito da modelagem do carregamento, do impacto do calcanhar humano e do amortecimento estrutural na resposta dinâmica de passarelas mistas**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2007.
- Lima, S. S., e Santos, S. H. **Análise Dinâmica das Estruturas**. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2008.
- Lopes, E. D. C.; Silva, J. G. S. e Andrade, S. A. L. **Análise dinâmica não linear de pisos mistos de edificações submetidos a atividades humanas rítmicas**. 10° World Congress on Computational Mechanics, Sao Paulo, 2012.
- Love, J. S.; Haskett, T. C. e Gradeen, A. G. **Footfall-Induced Vibration: Prediction and Control Strategies. Resilient Infrastructure**. London, 1-4 de Julho, 2016.
- Macdonald, J. **Lateral excitation of bridges by balancing pedestrians**. Proceedings of the Royal Society A – Mathematical, Physical and Engineering Sciences, v. 465, p. 1055–1073, 2009.
- Machado, W. G. **Análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2012.
- Machado, W. G.; Neves, F. A. e Sousa, J. B. M. **Parametric modal dynamic analysis of steel-concrete composite beams with deformable shear connection**. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 14, n. 2, p. 335–356, 2017.
- Mello, A. V. de A. **Vibrações Em Pisos De Edificações Induzidas Por Atividades Humanas**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2005.
- Mello, A. V. A.; da Silva, J. G. S.; Andrade, S. A. L.; Vellasco, P. C. G. S. e Lima, L. R. O. **Estudo do Conforto Humano em Pisos Mistos (Aço-Concreto)**. Revista Da Escola De Minas. V. 60, p. 409–18, 2007.
- Mello, A. V. A.; Silva, J. G. S.; Vellasco, P. C. G. S.; Andrade, S. A. L. e Lima, L. R. O. **Dynamic analysis of composite systems made of concrete slabs and steel beams**. J Constr Steel Res, v. 64, p. 1142–1151, 2008.
- Mello, A. V. A. **Analysis of the effect of steel-concrete interaction on the dynamic response of composite floors**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2009.
- Mendes, J. P. **Análise dinâmica e controle de vibrações de passarelas de pedestres submetidas ao caminhar humano**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2014.
- Moreira, B. C. **Avaliação comparativa de pisos de edificações em estrutura metálica quanto aos critérios de vibração**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2004.
- Muniz, C. F. D. G. **Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2005.
- Murray, T. M.; Allen, D. E. e Ungar, E. E. **Floor vibration due to Human Activities**. Steel Design Guide Series, American Institute of Steel Construction, AISC, Chicago, 1997.
- Murray, T. M.; Allen, D. E.; Ungar, E. E. e Davis, D. B. **Vibrations of Steel-Framed Structural Systems due to Human Activity. Steel Design Guide**. American Institute of Steel Construction, AISC, Second Edition, Chicago, 2016.

- Nie, J.; Fan, J. e Cai, C. S. **Stiffness and Deflection of Steel-Concrete Composite Beams under Negative Bending**. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 130, n.11, p. 1842 – 1851, 2004.
- Oehlers, D. J. e Coughlan, C. G. **The shear stiffness of stud shear connections in composite beams**. Journal of Constructional Steel Steel Research, v. 6, p. 273-284, 1986.
- Oehlers, D. J. e Bradford, M. A. **Composite Steel and Concrete Structural Members: Fundamental Behaviour**. Pergamon Press, Oxford, 1995.
- Oehlers, D. J., & Bradford, M. A. **Elementary Behaviour of Composite Steel and Concrete Structural Members**. Butterworth Heinemann, Oxford, 1999.
- Ohlsson, S. V. **Floor vibration and human discomfort**. Tese de Doutorado. Department of Structural Engineering, Chalmers University of Technology, Gotemborg, Sweden, 1982.
- Oliveira, C. E. **Análise Não-Linear Geométrica de Vigas-Colunas com Interação Parcial**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2009.
- Ortiz-Lasprilla, A. R. e Caicedo, J. M. **Comparing closed loop control models and mass-spring-damper models for human structure interaction problems**. Dynamics of Civil Structures, v. 2, p. 67-74, 2015.
- Parente Jr., E. **Análise de Sensibilidade e Otimização de Forma de Estruturas Geometricamente Não-Lineares**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2000.
- Pavic, A. e Reynolds, P. **Human-Structure Dynamic Interaction in Civil Engineering Dynamics: A Literature Review**. The Shock and Vibration Digest, v. 35, p. 1-53, 2003.
- Peña, W. D. L. **Modelagem do caminhar humano e avaliação de conforto humano de passarelas de pedestres**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2015.
- Pereira, C. C. G. **Curvas de percepção e conforto humano para vibrações verticais**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2005.
- Piccardo, G. e Tubino, F. **Equivalent spectral model and maximum dynamic response for the serviceability analysis of footbridges**. Engineering Structures, v. 40, p. 445-456, 2012.
- Portal Met@lica Construção Civil. **Caracterização das construções mistas aço/concreto**. Disponível em: <http://www.metalica.com.br/caracterizacao-das-construcoes-mistas-aco-concreto>. Acesso em: 30 de agosto de 2018.
- Portier, K.; Tolson, J.K e Roberts, S.M. **Body weight distributions for risk assessment, Risk Analysis**. An Official Publication of the Society for Risk Analysis, v. 27, p. 11–26, 2007.
- Pu, J. e Liu, P. **Numerical calculation of dynamic response for multi-span non-uniform beam subjected to moving mass with friction**. Engineering, v. 2, p. 367–377, 2010.
- Queiroz, G. & Pimenta, R. J. & Mata, L. A. C. **Elementos das Estruturas Mistas Aço-Concreto**. Ed. O Lutador, Belo Horizonte, 2001.
- Qin, J. W.; Law, S. S.; Yang, Q. S. e Yang, N. **Pedestrian bridge dynamic interaction, including human participation**. Journal of Sound and Vibration, v. 332, n. 4, p. 1107–1124, 2013.
- Rainer, J. H.; Pernica, G. e Allen, D. E. **Dynamic loading and response of footbridges**. Canadian Journal of Civil Engineering, v. 15, n. 1, p. 66-71, 1988.
- Racic, V.; Pavic, A. e Brownjohn, J. M. W. **Experimental identification and analytical modelling of human walking forces: literature review**. Journal of Sound and Vibration, v. 326, p. 1–49, 2009.

- Ranzi, G.; Gara, F. e Ansourian, P. **General method of analysis for composite beams with longitudinal and transverse partial interaction**. *Computer Structure*, v. 84, p. 2373–2384, 2006.
- Sachse, R. **Modeling effects of human occupants on modal properties of slender structures**. *Structural Engineer*, v. 80, p. 21–22, 2002.
- Saidi, I.; Hritos, N.; Gad, E. F. e Wilson, J. L. **Floor vibrations due to human excitation – damping perspective**. *Earthquake Engineering in Australia*, Canberra, 24-26 de novembro, 2006.
- Sales, U. C. **Mapeamento dos problemas gerados na associação entre sistemas de vedação e estrutura metálica e caracterização acústica e vibratória de painéis de vedação**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2001.
- Salyards, K. A. e Hua, Y. **Assessment of dynamic properties of a crowd model for human–structure interaction modeling**. *Engineering Structures*, v. 89, p. 103–110, 2015.
- Salyards, K. e Noss, N. **Experimental evaluation of the influence of human–structure interaction for vibration serviceability**. *ASCE J Perform Constr Facil*, v. 28, n. 3, p. 458–65, 2014.
- SETRA. **Technical guide footbridges: Assesment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading**. França, 2006.
- Setareh, M. **Pendulum Tuned Mass Dampers for Floor Vibration Control**. *Journal of Performance of Construction Facilities*; v. 20, n. 1, p. 64-73, 2006.
- Shahabpoor, E.; Pavic, A. e Racic, V. **Using MSD model to simulate human– structure interaction during walking**. In: *Proc 31st int modal analysis conf.*, Society of Experimental Mechanics, Orange County, 2013.
- Shahabpoor, E.; Pavic, A. e Racic, V. **Interaction between Walking Humans and Structures in Vertical Direction: A Literature Review**. *Shock and Vibration*, v. 2016, 3430285 (22 p.), 2016.
- Silva, A. R. da. **Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2006.
- Silva, A. R. da e Sousa Jr, J. B. M. de. **A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip**. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 45, n. 5, p. 305–314, 2009.
- Silva, A. R. D. **Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2009.
- Silva, A. R. da. **Análise Numérica de Elementos Estruturais com Interação Parcial**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2010.
- Silva, F. da; Fernandes, B. e Pimentel, R. **Modeling of crowd load in vertical direction using biodynamic model for pedestrians crossing footbridges**. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v. 40, p. 1196–1204, 2013.
- Silva, J. G. S. da.; Burgos, R. B.; Duarte, I. F. B. e Debona, G. L. **Vibration Analysis and Human Comfort Evaluation of Steel-Concrete Composite Footbridges Based on the Modelling of the Pedestrian Structure Dynamic Interaction Effect**. *Int. Journal of Engineering Research and Application*, v. 6, n. 11, p. 38-45, 2016.
- Silva, A. R. de. e Sousa Jr., J. B. M. de **A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip**. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.45, p. 305 - 314, 2009.

- Škec, L.; Schnabl, S.; Planinc, I. e Jelenić, G. **Analytical modelling of multilayer beams with compliant interfaces**. Finite Elements in Analysis and Design, v. 84, p. 371–81, 2006.
- Sommer, R. M. R. **Análise de vibrações em pisos mistos aço/concreto**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2002.
- Sousa Jr, J. B. M. de.; Silva, A. R. da. **Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements**. Finite Elements in Analysis and Design, v. 43, p. 954–964, 2007.
- Sousa Jr. J. B. M. de. **Auto-Adaptação e Otimização de Forma em Placas**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2000.
- Sousa Jr., J.B.M. de. e Silva, A. R. da. **Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements**, Finite Elements in Analysis and Design, v. 43, p. 954–964, 2007.
- Sousa Jr, J. B. M. de. e Silva, A. R. da. **Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip**. Engineering Structures, v. 32, p.1671–1680, 2010.
- Sousa Jr., J. B. M. de.; Oliveira, C. E.M. e Silva, A. R.da. **Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam and columns with partial interaction**. Journal of Constructional Steel Research., v. 66, p. 772 - 779, 2010.
- Sousa Jr., J. B. M. de. **Exact finite elements for multilayered composite beam-columns with partial interaction**. Computers and Structures, v.123, p.48 - 57, 2013.
- Souza, J. M. dos S. **Análise da resposta dinâmica de passarelas de pedestres considerando-se uma modelagem probabilística do caminhar humano**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGE CIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2012.
- Sullivan, D.; Caprani, C.C. e Keogh, J. **The response of a footbridge to pedestrians carrying additional mass**, BCRI(Bridge and Concrete Research Ireland) Conference, Dublin, 2012.
- Stevenson, R. **Description of bridges of suspension**. Edinburgh Philosophical Journal, v. 5,n. 10, p. 237–256, 1821.
- Tilden, C. J. **Kinetic effects of crowds**. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, ASCE, v. 39, n. 3, p. 325–340, 1913.
- Toso, M. A.; Gomes, H. M. e de Brito, J. L. V. **Crowdstructure interaction: Investigating the spatiality and synchronization of a pedestrian force model**. Journal of Constructional Steel Research, v. 133, p. 510-21, 2017.
- Van Nimmen, K.; Lombaert, G.; Jonkers, I.; Roeck, G.D. e Van den Broek, P. **Characterisation of walking loads by 3D inertial motion tracking**. Journal of Sound and Vibration. v. 333, n. 20, p. 5212–5226, 2014.
- Van Nimmen, K.; Maes, K.; Živanović, S.; Lombaert, G. ; de Roeck, G. e Van den Broeck, P. **Identification and modelling of vertical human–structure interaction**. Proceedings of the 33<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference Series, Orlando, 2015.
- Van Nimmen, K.; Lombaert, G.; Jonkers, I.; Roeck, G.D. e Van den Broek, P. **The impact of vertical human-structure interaction on the response of footbridges to pedestrian excitation**. Journal of Sound and Vibration. v. 402, p. 104-121, 2017.
- Varela, W.D. **Modelo Teórico – experimental para análise de vibrações induzidas por pessoas caminhando sobre lajes de edifícios**. Tese de Doutorado. COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.
- Varela W. D. e Battista R. **Control of Vibration Induced by People Walking on Large Span Composite Floor Decks**. Engineering Structures, v. 33, p. 2485–94, 2011.

- Venuti, F.; Racic, V. e Corbetta, A. **Pedestrian structure interaction in the vertical direction: coupled oscillator-force model for vibration serviceability assessment**. Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Structural Dynamics, EURODYN, p. 915-920, 2014.
- Venuti, F.; Racic, V. e Corbetta, A. **Modelling framework for dynamic interaction between multiple pedestrians and vertical vibrations of footbridges**. Journal of Sound and Vibration, v. 379, p. 245–263, 2016.
- Villamizar, S.; Gómez, D. e Thomson, P. **Effects of human-structure interaction in slabs Efectos de interacción humano-estructura en losas**. DYNA, v. 81, n. 184, p. 129-137, 2014.
- Von Gierke, E. E. e Goldman, D. E. **Effects of Shock and vibration on Man**. 2<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill Book Company, 2002.
- Yaghin, M. A. L.; Karimi, M. R. B.; Rahmani, A. e Balkanlou, V.S. **Investigating the Behavior of Composite Floors (Steel Beams and Concrete Slabs) under Mans Rhythmical Movement**. Journal of Civil Engineering Research, v. 4, p. 25–32, 2014.
- Yao, S.; Wright, J.R.; Pavic, A. e Reynolds, P. **Forces Generated when Bouncing or Jumping on a Flexible Structure**, ISMA, Leuven, p. 563–572, 2002.
- Willford, M. **Dynamic actions and reactions of pedestrians**. Proceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges, Paris, 20–22 de novembro, p. 66–73, 2002,
- Zhang, L.; Xu, D.; Makhous, M. e Lin, F. **Stiffness and viscous damping of the human leg**. Proceedings of the 24<sup>th</sup> Annual Meeting of the American Society of Biomechanics, Chicago, 2000.
- Zhang, M.; Georgakis, C.T.; Qu, W. e Chen, J. **SMD model parameters of pedestrians for vertical human–structure interaction**. IMAC, XXXIII A Conference and Exposition on Structural Dynamics, 2015.
- Zhang, M.; Georgakis, C. T. e Chen, J. **Biomechanically Excited SMD Model of a Walking Pedestrian**. American Society of Civil Engineer, v. 21, n. 8, 4016003 (9 p.), 2017.
- Živanovic, S.; Pavic, A. e Reynolds, P. **Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: A literature review**. Journal of Sound and Vibration, 279, 1–74, 2005.
- Živanović, S.; Pavić, A. e Reynolds, P. **Probability-based prediction of multi-mode vibration response to walking excitation**. Engineering Structures, v. 29, p. 942–954, 2007.
- Zivanovic, S.; Díaz, I. M. e Pavic, A. **Influence of walking and standing crowds on structural dynamic performance**. Proceedings of the IMAC XXVII, The Printing House Inc., Orlando, 2009.
- Zivanovic, S.; Pavic, A. e Ingolfsson, E. T. **Modeling spatially unrestricted pedestrian traffic on footbridges**. ASCE Journal of Structural Engineering, v. 136, n. 10, p. 1296–1308, 2010.
- Zúñiga, J. E. V. **Análise da resposta dinâmica experimental de uma passarela tubular mista, aço-concreto, submetida ao caminhar humano**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, 2011.



