



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



SUBESTRUTURAÇÃO DINÂMICA POR MEIO DO MÉTODO DE CRAIG- BAMPTON APLICADA A PÓRTICOS PLANOS

Lidiane de Paula Pinto Mapa

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves
Coorientador: Prof. Dr. Gustavo Paulinelli Guimarães

Ouro Preto, Março de 2018

M297s Mapa, Lidianne de Paula Pinto.
Subestruturação dinâmica por meio do método de CRAIG-BAMPTON aplicada a pórticos planos [manuscrito] / Lidianne de Paula Pinto Mapa. - 2018. 62f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves.
Coorientador: Prof. Dr. Gustavo Paulinelli Guimarães.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.
Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Subestruturação. 2. Craig-Bampton. 3. Síntese Modal de componentes. I. Neves, Francisco de Assis das . II. Guimarães, Gustavo Paulinelli . III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 624.014

SUBESTRUTURAÇÃO DINÂMICA POR MEIO DO MÉTODO DE CRAIG-BAMPTON APLICADA A PÓRTICOS PLANOS

AUTORA: LIDIANNE DE PAULA PINTO

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 01 de março de 2018, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Francisco de Assis das Neves, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Vinícius Nicchio Alves, D. Sc. – UFOP



Prof. Gustavo Paulinelli Guimarães, D. Sc. – UFOP



Profª. Maria Lúcia Machado Duarte, Ph.D. – UFMG

À minha família.

Meus agradecimentos

- A Deus.
- Aos meu pais e ao meu irmão pelo apoio e carinho.
- Ao meu orientador Prof. Francisco Assis das Neves e ao meu coorientador Prof. Gustavo Paulinelli Guimarães pelos conhecimentos transmitidos e pela oportunidade.
- Aos professores do PROPEC, em especial à Andrea.
- À Prof. Elisângela Martins Leal pelo carinho e pela experiência de vida ensinada.
- Aos amigos e colegas da turma do PROPEC.
- À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

SUBESTRUTURAÇÃO DINÂMICA POR MEIO DO MÉTODO DE CRAIG-BAMPTON APLICADA A PÓRTICOS PLANOS

Lidianne de Paula Pinto Mapa

Fevereiro/2018

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves

Coorientador: Prof. Dr. Gustavo Paulinelli Guimarães

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver o algoritmo de subestruturação linear através do método de Craig-Bampton para elementos de pórtico. Nesse contexto, busca-se esclarecer as formulações de acoplamento da síntese modal de componentes, mais especificadamente do método de Craig-Bampton. O algoritmo implementado foi aplicado ao acoplamento de vigas e pórticos. Essas aplicações foram direcionadas para otimização de estruturas, ou seja, quando deseja-se alterar a estrutura a fim de obter as frequências e modos naturais desejados. A redução da ordem de modelos proporcionada pelo método é descrita em cada aplicação. Análises via Método de Elementos Finitos (MEF) implementado e também através do *software* SAP 2000 possibilitaram a validação do algoritmo implementado.

Palavras-chave: Subestruturação, Craig-Bampton, Síntese Modal de componentes.

Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

**DYNAMIC SUBSTRUCTURING BY CRAIG-BAMPTON METHOD APPLIED
TO FRAMES.**

Lidianne de Paula Pinto Mapa

March/2018

The present work aims to develop the algorithm of linear substructuring through the Craig-Bampton method for two-dimensional frames. In this context, it is sought to clarify the coupling formulations of the component mode synthesis, more specifically the Craig-Bampton method. The implemented algorithm was applied the coupling of beams and frames. These applications were directed to optimize structures, that is, when it is desired to change the structure in order to obtain the desired natural frequencies and modes. The model reduced-order provided through the method described in each application. Analyzes via Finite Element Method (MEF) implemented and also through SAP 2000 software enabled the validation of the implemented algorithm.

Keywords: Substructuring, Craig-Bampton, Modal Synthesis of Components.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Procedimentos do método de subestruturação	12
Figura 2: Modos normais de interface fixa em uma subestrutura.	17
Figura 3: Modos normais de interface livre em uma subestrutura.	18
Figura 4: Modos de restrição para uma viga livre-livre.	19
Figura 5: Viga livre-livre	19
Figura 6: Elemento de pórtico plano	33
Figura 7: Elemento infinitesimal de viga sob flexão	34
Figura 8: Fluxograma do algoritmo desenvolvido.	37
Figura 9: Representação do acoplamento de vigas através do método de Craig-Bampton.	39
Figura 10: Primeiro (a), segundo (b) e terceiro (c) modo de vibração livre para a subestrutura 1.....	40
Figura 11: Primeiro (a), segundo (b) e terceiro (c) modos de vibração livre para a subestrutura 2.....	41
Figura 12: Primeiro - 49,839 Hz (a), segundo - 139,695 Hz (b) e terceiro - 269,265 Hz (c) modos de vibração livre para a viga bi-engastada.....	44
Figura 13: Valores dos coeficientes MAC entre os modos obtidos via Craig-Bampton e via Método de Elementos Finitos para a viga bi-engastada.	46
Figura 14: Representação do acoplamento de pórticos.	47
Figura 15: Primeiro - 10,156 Hz (a) segundo - 26,312 Hz (b) e terceiro - 53,431 Hz (c) modos de vibração para o pórtico acoplado.	50
Figura 16: Coeficiente MAC relativo ao acoplamento de pórticos (0 a 30Hz).....	51
Figura 17: Coeficiente MAC relativo ao acoplamento de pórticos (0 a 100 Hz).....	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Frequências naturais obtidas de forma analíticas e através do MEF e os respectivos erros.	42
Tabela 2: Frequências dos modos de interface fixa relativos as subestruturas 1 e 2.....	43
Tabela 3: Diferença percentual de frequência obtida entre o método MEF e C-B (0 a 500Hz).	45
Tabela 4: Frequências dos modos de interface fixa relativos as subestruturas A e B. ...	48
Tabela 5: Diferença percentual de frequência obtida entre o método MEF e C-B (0 a 30 Hz)	49
Tabela 6: Diferença percentual de frequência obtida entre o método MEF e C-B (0 a 100 Hz)	52

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Formulação do Problema	8
1.2	Justificativa	9
1.3	Objetivos e Descrição do Trabalho.....	10
1.4	Estrutura da Dissertação	10
2	SUBESTRUTURAÇÃO DINÂMICA	11
2.1	Definições	11
2.2	Síntese Modal de Componentes (CMS).....	13
2.2.1	Condensação Estática	14
2.2.2	Coordenadas Generalizadas.....	15
2.2.3	Modos Normais	16
2.2.4	Modos de Restrição	18
2.2.5	Acoplamento no Domínio Físico.....	20
2.2.6	Acoplamento em Coordenadas Generalizadas	22
2.2.7	Método de Craig-Bampton	24
2.2.8	Subestruturação Não-Linear através do Método de Craig-Bampton.....	26
2.3	Subestruturação Baseada em Frequência.....	31
2.4	Crítério de Confiança Modal (MAC).....	32
2.5	Matriz de Massa e Rigidez.....	32
2.6	Vibração Lateral em Vigas	34
3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	36
4	APLICAÇÕES.....	39
4.1	Acoplamento de Vigas Engastadas-Livres	39
4.2	Acoplamento de Pórticos de Dois Andares	46
5	CONCLUSÕES.....	54
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	54
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56

1 INTRODUÇÃO

1.1 Formulação do Problema

Comumente, análises em engenharia são descritas matematicamente por equações diferenciais, que não possuem soluções analíticas, sendo necessária a busca por soluções numéricas (Bathe, 1996).

As soluções numéricas de problemas estruturais grandes e complexos, através do Método de Elementos Finitos (MEF), exige grande eficiência computacional, e consequentemente elevados custos. Na análise dinâmica computacional, os detalhes de grandes modelos e a discretização no tempo faz com que o custo computacional seja elevado, relata Buckel (2014). Conforme McPheeters *et al.* (1988) e Qu *apud* Wenneker (2013), o custo computacional em análises dinâmicas é proporcional ao cubo do número de graus de liberdade.

Os métodos de acoplamento de subestruturas são amplamente desenvolvidos (Ohayon, Sampaio e Soize, 2013). Eles permitem conhecer o comportamento de sistemas complexos e grandes, através de informações dos comportamentos dinâmicos de subcomponentes.

D'Ambrogio e Sestieri (2004) relatam que se tratando de acoplamentos, deve-se considerar dois diferentes casos:

- ✓ Estruturas que devem ser montadas com o objetivo de se obter o comportamento dinâmico (subestruturação dinâmica).
- ✓ Estrutura que é acoplada a um segundo sistema com o objetivo de alterar o comportamento dinâmico. Nesse caso, desenvolve-se apenas modificações concentradas (modificação dinâmica estrutural).

Conforme Hang, Shankar e Lai (2009), a modificação dinâmica estrutural consiste na determinação dos efeitos de alterações de massa e rigidez na resposta dos sistemas mecânicos baseados em informações disponíveis do sistema original e da parte modificadora.

Bathe e Dong (2014) relatam que pela subestruturação dinâmica os subcomponentes são tipicamente analisados através de suas frequências ou modos dinâmicos. Assim, o comportamento da estrutura completa é obtido através da montagem de modelos de ordem reduzida desses subcomponentes. Nesse caso, ocorre diminuição do custo computacional, devido à aproximação de “n” graus de liberdade por “m” ($m \ll n$) coordenadas generalizadas.

Há casos em que também é necessário conhecer o comportamento de subcomponentes através de uma estrutura completa desenvolvendo a subestruturação (Voormeeren e Rixen, 2012; Law e Rentzsch, 2016). É Necessário, por exemplo, em sistemas delicados ou em condições operacionais.

A subestruturação dinâmica linear tem sido desenvolvida desde o século XX (Guyan, 1965; Craig e Bampton, 1968; MacNeal, 1971; Rubin, 1975). Um método de subestruturação linear eficiente é o método de Craig-Bampton (C-B). Dessa maneira, pretende-se desenvolver o método de subestruturação, realizando o acoplamento de subestruturas geometricamente lineares através do método de Craig-Bampton.

1.2 Justificativa

A subestruturação é amplamente utilizada em análises de elementos finitos. Esse método pode ser eficaz para a obtenção de respostas dinâmicas de estruturas complexas como, por exemplo, aeronaves (Bathe e Dong, 2014).

Rixen (2004) relata que é possível resolver sistemas lineares com milhões de graus de liberdade, entretanto, as complexidades dos sistemas estão aumentando juntamente com as capacidades da computação.

Além disso, os custos computacionais de respostas dinâmicas podem se tornar impraticáveis, relatam Hollkamp e Gordon (2008), uma vez que é necessário solucionar uma equação de equilíbrio do sistema para cada resposta no tempo.

De acordo com Allen e Kuether (2012), o custo computacional pode ser reduzido drasticamente no primeiro desacoplamento de uma estrutura em subcomponentes, e utilizando o método de Craig-Bampton para obter o comportamento da estrutura completa. Nesse método faz-se a redução do número de graus de liberdade internos de cada subestrutura. Assim, a solução é calculada em “m” coordenadas generalizadas que é muito menor que “n” graus de liberdade físicos.

Conforme D’Ambrogio e Sestieri (2004), além de facilitar os sistemas de montagem, a subestruturação permite fazer otimizações locais para posterior otimizações globais. Há possibilidade de utilizar diferentes modelos, a partir de uma análise numérica como, por exemplo, através do Método de Elementos Finitos, ou através de testes experimentais (Funções

de Resposta em Frequência: FRFs), tendo a possibilidade de realizar uma prototipagem virtual do sistema, permitindo modificações estruturais de componentes individuais quando a resposta dinâmica global do sistema montado não é satisfatória.

1.3 Objetivos e Descrição do Trabalho

Essa pesquisa tem como objetivo desenvolver a implementação do método de subestruturação dinâmica de Craig-Bampton, visando o acoplamento de elementos de pórtico planos para análises de vibração livre em diferentes faixas de frequência. No desenvolvimento do algoritmo, a discretização de cada subestrutura é realizada através do Método de Elementos Finitos, obtêm-se as matrizes generalizadas de cada subestrutura, e elas são acopladas pelos graus de liberdade de interface.

A fim de validar o algoritmo implementado é desenvolvido o critério de confiança modal (MAC) e realizado a comparação das frequências naturais do referido método e o Método de Elementos Finitos também implementado e validado através do software SAP 2000.

1.4 Estrutura da Dissertação

Esse trabalho foi elaborado em 5 capítulos. No capítulo 2 são apresentadas formulações gerais necessárias para a implementação do método de Craig-Bampton. Esse capítulo inicia-se apresentando definições de subestruturação e Síntese Modal de Componentes (CMS). A formulação de acoplamento no domínio físico e em coordenadas generalizadas, conceitos de modos normais e modos de restrição e critério de confiança modal (MAC) também são apresentados nesse capítulo. Por fim, o capítulo apresenta o método de Craig-Bampton.

No capítulo 3 é descrito a esquematização do algoritmo de Craig de Bampton que foi desenvolvido com base nas formulações definidas no capítulo 2 para análises de vibração livre.

No capítulo 4 é possível observar as aplicações desenvolvidas com o objetivo de validar o método. É apresentada a análise de vibração livre do acoplamento de vigas e também do acoplamento de pórticos. As frequências naturais e modos obtidos foram comparados com os obtidos via Método de Elementos Finitos.

No capítulo 5 são desenvolvidas as conclusões sobre a pesquisa e as considerações sobre trabalhos futuros.

2 SUBESTRUTURAÇÃO DINÂMICA

O objetivo desse capítulo é apresentar a base teórica para o desenvolvimento de subestruturação dinâmica através do método de Craig-Bampton. Por isso, o capítulo inicia-se com as definições de subestruturação, apresenta as formulações gerais de acoplamento em coordenadas generalizadas. E por fim, apresenta as formulações de acoplamento de estruturas com comportamento geométrico linear e não linear através do método de Craig-Bampton.

Na seção 2.4 é apresentado o critério de confiança modal, formulação que será necessária para validação dos modos obtidos na implementação do algoritmo.

A matriz de rigidez e a matriz de massa a serem consideradas são apresentadas na seção 2.5. A matriz de rigidez é baseada na teoria de Euler-Bernoulli. Nesse caso, é considerado apenas a flexão pura. Já a matriz de massa é considerada como distribuída. A seção 2.6 apresenta formulações analíticas a respeito de vibração lateral em vigas.

2.1 Definições

Conforme Allen e Kuether (2012), o método de subestruturação permite prever a resposta de uma montagem a partir de modelos dinâmicos de cada subestrutura, modelando experimentalmente cada subestrutura ou usando o Método de Elementos Finitos.

Craig e Kurdila (2006) relatam que a subestruturação envolve a divisão de uma estrutura em um número de subestruturas. Assim, obtém-se o modelo de ordem reduzida de cada subestrutura, e, então, é feito a montagem dos modelos de ordem reduzida de toda a estrutura.

Klerk, Rixen e Jong (2006) e Bittencourt (1990) relatam as vantagens do método de subestruturação:

- ✓ Demanda computacional inferior a análise global;
- ✓ Subestruturas iguais necessitam ser modeladas e reduzidas apenas uma vez;
- ✓ Possibilidade de combinar peças modeladas a partir de análise numérica ou experimental;
- ✓ O efeito da alteração das propriedades de uma subestrutura na estrutura montada pode ser eficientemente analisado.
- ✓ Permite compartilhar subestruturas de diferentes grupos de projeto.

- ✓ Conveniente se uma medição não puder ser feita porque a estrutura é muito grande ou complexa ou se não existir energia de excitação suficiente para uma excitação adequada.

Klerk, Rixen e Voormeeren (2008) descrevem os procedimentos do método de subestruturação para a decomposição discreta e contínua. Na figura 1 é possível observar a representação desses procedimentos.

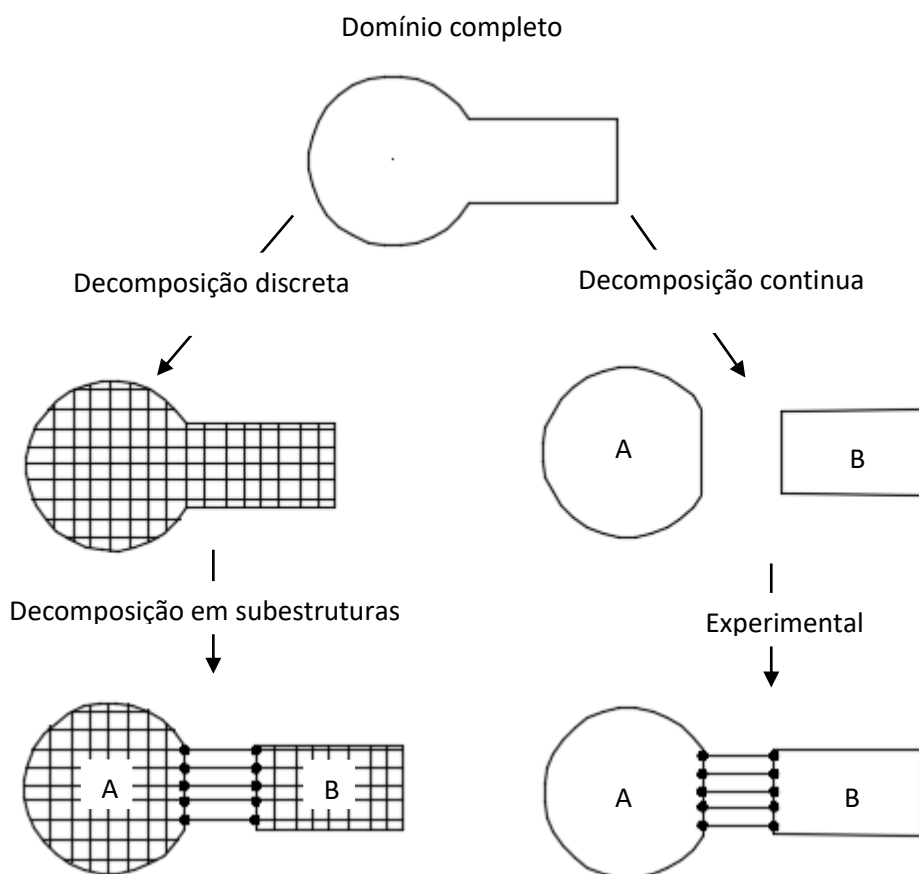


Figura 1: Procedimentos do método de subestruturação
Adaptado de Klerk, Rixen e Voormeeren (2008)

Observa-se pela figura 1 que para o caso de decomposição discreta, o modelo é dividido em subestruturas e o Método de Elementos Finitos ou similar é utilizado para discretizá-las. Para o caso de decomposição contínua, as subestruturas são analisadas experimentalmente, em vez de usar o Método de Elementos Finitos para criar o modelo de ordem reduzida.

Klerk, Rixen e Jong (2006) relatam que os métodos de subestruturação podem ser:

- ✓ Métodos baseados no domínio modal: Para os métodos baseados no domínio modal, cada subestrutura é descrita por matrizes generalizadas de massa, amortecimento e rigidez através de propriedades modais. Esse método chama-se síntese modal de componentes (CMS). O método de CMS mais conhecido é o método de Craig-Bampton.
- ✓ Métodos baseados no domínio da resposta: Para os métodos baseados no domínio da resposta, cada subestrutura é descrita em termos de funções de resposta em frequência (FRF's). Esse método é denominado subestruturação baseada em frequência (FBS).

Conforme Bittencourt (1990) e Bathe e Dong (2014), é possível obter soluções exatas realizando subestruturação em análises estáticas. Entretanto, em análises dinâmicas obtém-se uma aproximação dos autovalores e autovetores.

2.2 Síntese Modal de Componentes (CMS)

Conforme Rao (2011), a equação de equilíbrio de um sistema sob vibração forçada de N graus de liberdade não amortecido é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

Onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{K} é a matriz rigidez do sistema, ambas com dimensão N x N, \mathbf{u} é o vetor deslocamento e $\mathbf{f}(t)$ o vetor de força aplicada, ambos com dimensões N x 1.

De acordo com Diniz (2006), considerando pequenas oscilações harmônicas do tipo $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}e^{j\omega t}$, onde ω é a frequência das forças aplicadas, os deslocamentos são dados por $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}e^{j\omega t}$. Assim, a equação (2.1) pode ser escrita como:

$$[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (2.2)$$

Para vibrações livres o problema de autovalor da estrutura é considerado como:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{u} \quad (2.3)$$

Conforme Bathe e Dong (2014), as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} geralmente são positivas definidas. Assim, através do problema de autovalor da equação (2.3) obtém-se N frequências naturais ω_i para respectivos \mathbf{M} -ortonormais autovetores $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_N$, que são ordenadas, como:

$$0 < \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \dots \leq \omega_{N-1}^2 \leq \omega_N^2 \quad (2.4)$$

Segundo Rixen (2004), assumindo que um elemento finito definido em um domínio Ω é subdividido em um número $N^{(s)}$ de subestruturas, chamadas $\Omega^{(s)}$, tais que cada nó pertence a apenas uma subestrutura, exceto aqueles nos limites da interface, a equação de equilíbrio linear dinâmica de cada subestrutura $\Omega^{(s)}$ é dada por:

$$\mathbf{M}^{(s)}\ddot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{g}^{(s)} \quad s = 1, \dots, N_s \quad (2.5)$$

Onde $\mathbf{M}^{(s)}$ e $\mathbf{K}^{(s)}$ são as matrizes de massa e rigidez da subestrutura, $\mathbf{u}^{(s)}$ é vetor de deslocamento, $\mathbf{f}^{(s)}$ são forças externas aplicadas na subestrutura e $\mathbf{g}^{(s)}$ as forças internas nas interfaces entre as subestruturas.

2.2.1 Condensação Estática

Paz e Leigh (2004) define a condensação estática como processo em que as matrizes de massa e rigidez são particionadas em graus de liberdade denominados primários e secundários. Guyan (1965) desenvolveu o particionamento de matriz de massa e rigidez em graus de liberdade que estavam sob atuação de forças e os que não estavam, a fim de reduzir o tamanho dessas matrizes.

Na síntese modal de componentes as matrizes de cada subestrutura devem ser particionadas em graus de liberdade internos “i”, esses não estão sujeitos a forças externas \mathbf{f}_b e a forças internas de interface \mathbf{g}_b , e em os graus de liberdade de contorno “b”, esses são atuados por essas forças (Craig e Kurdila, 2006). Assim, a equação (2.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b + \mathbf{g}_b \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Paz e Leigh (2004) afirma que quando o método de condensação é aplicado em problemas dinâmicos possui incertezas que irão depender do número de graus de liberdade reduzidos .

2.2.2 Coordenadas Generalizadas

Craig e Kurdila (2006) relatam que as coordenadas de deslocamento físico das subestruturas \mathbf{u} são representadas em termos de coordenadas generalizadas de componentes \mathbf{p} através da transformação:

$$\mathbf{u}^{(s)} = \boldsymbol{\Psi}^{(s)} \mathbf{p}^{(s)} \quad (2.7)$$

Onde a matriz modal de componentes $\boldsymbol{\Psi}^{(s)}$ é a matriz de transformação de coordenadas, constituída pelos modos da subestrutura correspondente, que podem ser modos de corpo rígido, modos normais de vibração livre, modos de restrição e modos anexos. Conforme Diniz (2006), essa matriz é composta por um conjunto truncado de “M” ($M \ll N$) modos.

Wenneker (2013) relata que a redução modal diminui o tamanho do problema sem modificar a malha de elementos finitos. Pois, os graus de liberdade são aproximados por um possível deslocamento e correspondentes amplitudes chamados de graus de liberdade generalizados.

Kuether e Allen (2014b) afirmam que a eficiência do método de subestruturação depende dos modos usados para reduzir os modelos das subestruturas. Conforme McPheeters et al. (1988), o número de modos de cada subestrutura deve ser de acordo com a faixa de frequência de interesse. Kuether e Allen (2014) relatam que a regra básica para o acoplamento de subestruturas com comportamento linear geométrico é incluir modos com frequências até 1,5 a 2,0 vezes a frequência máxima de interesse.

Klerk, Rixen e Voormeeren (2008) relata que um conjunto completo de coordenadas físicas (equação (2.5)) é reduzido a um conjunto menor de coordenadas generalizadas substituindo a equação (2.7) em (2.5). A equação do movimento em coordenadas generalizadas é dada por:

$$\widehat{\mathbf{M}}^{(s)} \ddot{\mathbf{p}}^{(s)} + \widehat{\mathbf{K}}^{(s)} \mathbf{p}^{(s)} = \widehat{\mathbf{f}}^{(s)} + \widehat{\mathbf{g}}^{(s)} \quad (2.8)$$

Onde as matrizes de massa e rigidez e os vetores de força em coordenadas generalizadas, são dados, respectivamente, por:

$$\widehat{\mathbf{M}}^{(s)} = \boldsymbol{\Psi}^{(s)T} \mathbf{M}^{(s)} \boldsymbol{\Psi}^{(s)} \quad \widehat{\mathbf{K}}^{(s)} = \boldsymbol{\Psi}^{(s)T} \mathbf{K}^{(s)} \boldsymbol{\Psi}^{(s)} \quad \widehat{\mathbf{f}}^{(s)} = \boldsymbol{\Psi}^{(s)T} \mathbf{f}^{(s)} \quad (2.9)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^{(s)} = \boldsymbol{\Psi}^{(s)\text{T}} \mathbf{g}^{(s)}$$

2.2.3 Modos Normais

De acordo com Craig e Kurdila (2006), os modos normais são autovetores que podem ser classificados de acordo com as condições de contorno especificadas, como: modos normais de interface fixa, modos normais de interface livre e modos normais de interface híbrida.

Conforme Craig e Chang (1976a), os modos normais de interface fixa de uma subestrutura são obtidos restringindo-se os graus de liberdade de contorno da estrutura, ou seja fazendo $u_b \equiv 0$ na equação (2.6). Assim, tem-se o problema de autovalor:

$$[\mathbf{K}_{ii} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{ii}] \{\boldsymbol{\Phi}_i\}_j = \mathbf{0} \quad j = 1, 2, \dots, N_i \quad (2.10)$$

Em que N_i é número de graus de liberdade internos.

Conforme Chopra (2007), através da equação 2.10 obtem-se modos com fatores multiplicativos. Portanto, se $\boldsymbol{\Phi}_i$ é um modo de interface fixa, um vetor $\boldsymbol{\Phi}_i$ proporcional é o mesmo modo, pois também satisfaz a equação (2.10). Dessa forma, Chopra (2007) relata que é comum utilizar fatores escalares para padronizar os modos, esse processo é chamado de normalização. Em programas computacionais é comum, normalizar os modos em relação a matriz massa, \mathbf{M} .

Segundo Craig e Kurdila (2006), quando os modos de interface fixa são \mathbf{M}_{ii} -ortonormalizados, tem-se:

$$\boldsymbol{\Phi}_{ii}^{\text{T}} \mathbf{M}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_{ii} = \mathbf{I}_{ii} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{ii}^{\text{T}} \mathbf{K}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_{ii} = \boldsymbol{\Lambda}_{ii} = \text{diag}(\omega_j^2) \quad (2.12)$$

Pela figura 2 pode-se observar o primeiro, o segundo e o terceiro modos normais de interface fixas de uma viga.

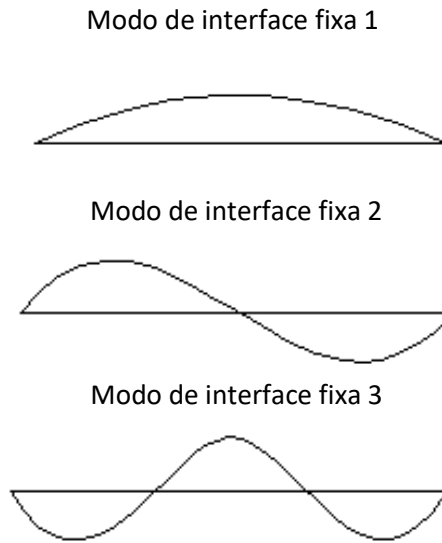


Figura 2: Modos normais de interface fixa em uma subestrutura.
Adaptado de Craig e Kurdila (2006)

Observa-se pela figura 2 os deslocamentos nulos nas interfaces de todos os modos, devido as restrições dos graus de liberdade de interface.

Conforme Craig e Chang (1976b) os modos de interface livre são obtidos fazendo $\mathbf{f}_b \equiv 0$ na equação (2.6). Assim, tem-se problema de autovalor:

$$[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}]\{\boldsymbol{\phi}\}_j = \mathbf{0} \quad j = 1, 2, \dots, N_f \quad (2.13)$$

Em que N_f é número de modos flexíveis.

Os modos normais de interface livre são ilustrados na figura 3.

Observa-se pela figura 3 os modos de vibração com todos graus de liberdade livres, portanto, com o deslocamento diferente de nulo nas interfaces. Se tratando de um problema clássico de autovalor (Wenneker, 2013).

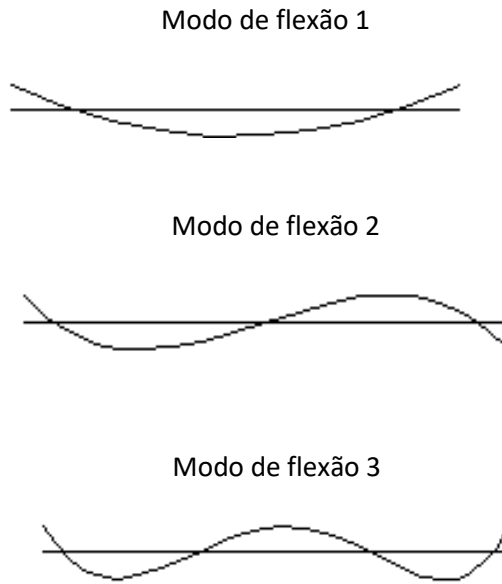


Figura 3: Modos normais de interface livre em uma subestrutura.
Adaptado de Craig e Kurdila (2006)

2.2.4 Modos de Restrição

Conforme Cook *et al.* (2002), modos de restrição são definidos como a deformação estática da estrutura quando um valor unitário é aplicado em um grau de liberdade de contorno.

Segundo Craig e Kurdila (2006), o conjunto de modos de restrição para cada subestrutura são dados por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{ib} \\ \mathbf{I}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{ib} \\ \mathbf{R}_{bb} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Onde \mathbf{R}_{bb} é o vetor de reação no grau de liberdade de contorno. Assim, a matriz de modos de restrição é dada por:

$$\boldsymbol{\Psi}_c \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{ib} \\ \mathbf{I}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib}] \\ \mathbf{I}_{bb} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Pela figura 4 é possível observar os modos de restrição para a viga livre-livre representada na figura 5.

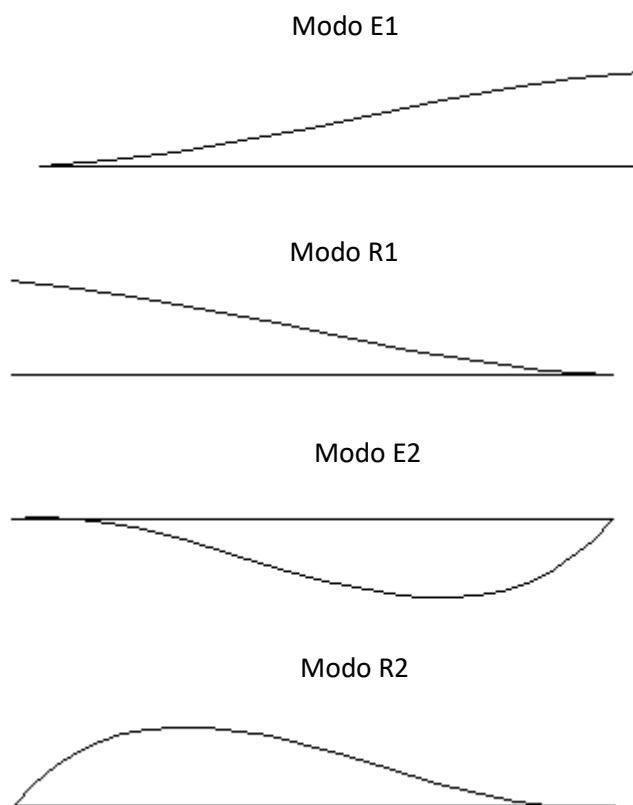


Figura 4: Modos de restrição para uma viga livre-livre.
Adaptado de Craig e Kurdila (2006)

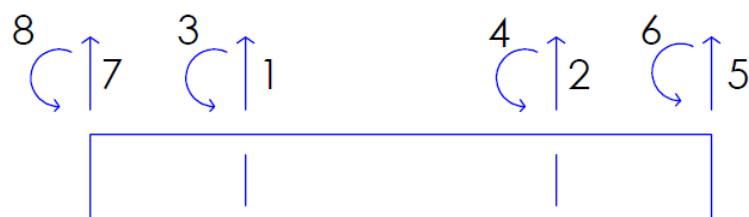


Figura 5: Viga livre-livre
Adaptado de Craig e Kurdila (2006)

Os modos E1 e R1 representados na figura 4 foram obtidos aplicando um deslocamento unitário nos graus de liberdade 5 e 7, respectivamente, representados na figura 5. Já os modos

E2 e R2 representados na figura 4 foram obtidos aplicando uma rotação unitária nos graus de liberdade 6 e 8, respectivamente, representados na figura 5.

2.2.5 Acoplamento no Domínio Físico

De acordo com Voormeeren e Rixen (2012), quando subestruturas são acopladas, duas condições devem ser satisfeitas nas suas interfaces:

- ✓ Condições de compatibilidade;
- ✓ Condições equilíbrio.

Segundo de Craig e Bampton (1968), a condição de compatibilidade de deslocamento em torno das interfaces das subestruturas é expressa por:

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

Onde \mathbf{C} é uma matriz booleana, que garante que qualquer par de graus de liberdade de interface $\mathbf{u}^{(k)}$ e $\mathbf{u}^{(l)}$ que se correspondem têm o mesmo deslocamento, isto é:

$$\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(l)} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

Law e Rentzsch (2016) relatam que as condições de equilíbrio são expressas por:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

Onde a matriz \mathbf{L} é uma matriz booleana que garante que a resultante de duas forças de graus de liberdade de interface $\mathbf{u}^{(k)}$ e $\mathbf{u}^{(l)}$ que se correspondem seja nula, ou seja:

$$\mathbf{g}^{(k)} + \mathbf{g}^{(l)} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Conforme Craig e Kurdila (2006), a equação de movimento de um sistema é baseada na equação de Lagrange com multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}$. Segundo Shanmugam e Padmanabhan (2006), o lagrangeano para um sistema de N_s subestruturas acopladas é escrito como:

$$\mathcal{L} = T - V + \mathbf{u}^T \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.20)$$

Onde T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema. Conforme Rao (2011) e Craig e Chung (1981), a energia cinética e potencial de um sistema com N graus de liberdade são, respectivamente, dadas em termos de coordenadas físicas por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} \dot{\mathbf{u}}^{(s)T} \mathbf{M}^{(s)} \dot{\mathbf{u}}^{(s)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.21)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} \dot{\mathbf{u}}^{(s)T} \mathbf{K}^{(s)} \dot{\mathbf{u}}^{(s)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.22)$$

De acordo com Craig e Kurdila (2006), a equação de movimento do sistema pode ser obtida aplicando a equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, N_U \quad (2.23)$$

Em que N_U é o número de graus de liberdade .

Diferenciando a equação (2.20) de acordo com (2.23) pode-se escrever um sistema com N_U equações de equilíbrio que seguem em forma de matriz :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.24)$$

Conforme Voormeeren e Rixen (2012), as forças internas nas interfaces são dadas por:

$$\mathbf{g} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.25)$$

A equação de movimento (2.24) pode ser combinada com a equação de compatibilidade (2.16) formando um conjunto de equações que seguem em forma de matriz (Craig e Kurdila, 2006):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Klerk, Rixen e Voormeeren (2008) relatam que os equacionamentos matemáticos descritos nessa seção foram consideradas nos primórdios da teoria dos elementos finitos, e tornou popular na década de 1990 na implementação de *solvers*.

2.2.6 Acoplamento em Coordenadas Generalizadas

Klerk, Rixen e Voormeeren (2008) afirmam que a condição de compatibilidade e a condição de equilíbrio também devem ser impostas a subestruturas quando os deslocamentos físicos são representados em coordenadas generalizadas. Elas são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{C}_p \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{L}_p^T \mathbf{g}_p = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

Onde:

$$\mathbf{C}_p \triangleq \mathbf{C}\Psi \quad (2.29)$$

$$\mathbf{L}_p \triangleq \mathbf{L}\Psi \quad (2.30)$$

Conforme Craig e Kurdila (2006), a equação de movimento do sistema é baseada na equação de Lagrange de movimento com multiplicadores de λ . Segundo Shanmugam e Padmanabhan (2006), o Lagrangiano para um sistema de N_s subestruturas acopladas é escrito como:

$$\mathcal{L} = T - V + \mathbf{p}^T \mathbf{C}_p^T \lambda \quad (2.31)$$

Onde T é a energia cinética e V energia potencial do sistema. Conforme Rao (2011) & Craig e Chung (1981), a energia cinética e potencial de um sistema com N graus de liberdade são, respectivamente, dadas em coordenadas generalizadas por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} \dot{\mathbf{p}}^{(s)T} \mathbf{M}^{(s)} \dot{\mathbf{p}}^{(s)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{p}} \quad (2.32)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{p}^{(s)T} \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{p}^{(s)} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{K}_p \mathbf{p} \quad (2.33)$$

De acordo com Shanmugam e Padmanabhan (2006), a equação de movimento do sistema pode ser obtida aplicando a equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_j} = f_{pj} \quad j = 1, 2, \dots, N_p \quad (2.34)$$

Em que N_p é o número de coordenadas generalizadas.

Diferenciando a equação (2.31) de acordo com a equação (2.34) pode-se escrever um sistema com N_p equações de equilíbrio que seguem em forma de matriz :

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_p \mathbf{p} = \mathbf{f}_p + \mathbf{C}_p^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.35)$$

Klerk, Rixen e Voormeeren (2008) relatam que as forças de interfaces são dadas por:

$$\mathbf{g}_p = \mathbf{C}_p^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.36)$$

A equação de movimento (2.35) pode ser combinada com a equação de compatibilidade (2.27) formando um conjunto de equações que seguem em forma matricial (Craig e Kurdila, 2006):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & -\mathbf{C}_p^T \\ -\mathbf{C}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Um método implícito é utilizado para solucionar esse conjunto de equações. Esse método consiste em substituir um conjunto de coordenadas generalizadas dependentes \mathbf{p} por um conjunto de coordenadas generalizadas independente \mathbf{q} , através da seguinte transformação (Craig e Chang,1976a):

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}_p \mathbf{q} \quad (2.38)$$

Conforme Craig e Chung (1981), rearranjando e particionando \mathbf{p} em N_D coordenadas dependentes \mathbf{p}_D e $N_p - N_D$ coordenadas linearmente independentes $\mathbf{p}_I \equiv \mathbf{q}$. Tem-se a condição de compatibilidade como:

$$[\mathbf{C}_{DD} \ \mathbf{C}_{DI}] \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_D \\ \mathbf{p}_I \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

Onde \mathbf{C}_{DD} é uma matriz quadrada não singular de \mathbf{C} .

A partir da equação (2.39) os graus de liberdade dependente são obtidos por:

$$\mathbf{p}_D = -\mathbf{C}_{DD}^{-1} \mathbf{C}_{DI} \mathbf{p}_I \quad (2.40)$$

Substituindo a equação (2.40) em (2.38), tem-se:

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_D \\ \mathbf{p}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{DD}^{-1}\mathbf{C}_{DI} \\ \mathbf{I}_{II} \end{bmatrix} \mathbf{p}_I \equiv \mathbf{L}_p \mathbf{q} \quad (2.41)$$

\mathbf{L}_p é a matriz de acoplamento de subestruturas, e é dada por:

$$\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{DD}^{-1}\mathbf{C}_{DI} \\ \mathbf{I}_{II} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Substituindo a equação (2.38) em (2.27):

$$\mathbf{C}_p \mathbf{L}_p \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \quad (2.43)$$

Portanto, \mathbf{L}_p é o espaço nulo de \mathbf{C}_p , ou vice versa.

Substituindo a equação (2.38) em (2.35) e pré-multiplicando o resultado por \mathbf{L}_p^T , tem-se (Craig e Kurdila, 2006):

$$\mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \mathbf{q} = \mathbf{f}_q + \mathbf{L}_p^T \mathbf{C}_p^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.44)$$

Onde $\mathbf{M}_q = \mathbf{L}_p^T \mathbf{M}_p \mathbf{L}_p$; $\mathbf{K}_q = \mathbf{L}_p^T \mathbf{K}_p \mathbf{L}_p$; $\mathbf{f}_q = \mathbf{L}_p^T \mathbf{f}_p$

Considerando a equação de condição de equilíbrio (2.28) e a equação (2.36), tem-se:

$$\mathbf{L}_p^T \mathbf{C}_p^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

Substituindo (2.45) em (2.44), obtém-se:

$$\mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_q \mathbf{q} = \mathbf{f}_q \quad (2.46)$$

2.2.7 Método de Craig-Bampton

Conforme Bathe e Dong (2014), o método de Craig-Bampton baseia-se na transformação de deslocamentos em coordenadas generalizadas através da combinação de modos normais de interface fixa e de modos de restrição. De acordo com Wenneker (2013), nesse método os graus de liberdade de contorno não são reduzidos e os deslocamentos internos podem ser aproximados aplicando um conjunto de modos truncados:

$$\mathbf{u}_i = \boldsymbol{\Phi}_{ik}\mathbf{p}_k + \boldsymbol{\Psi}_{ib}\mathbf{u}_b \quad (2.47)$$

Considerando que os graus de liberdade de contorno não são reduzidos, tem-se a base de redução de Craig-Bampton:

$$\mathbf{u}^{(s)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}^{(s)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{ik} & \boldsymbol{\Psi}_{ib} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{bb} \end{bmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_b \end{Bmatrix}^{(s)} = \mathbf{T}_{CB}\mathbf{p} \quad (2.48)$$

Onde $\boldsymbol{\Phi}_{ik}$ é a matriz dos “k” primeiros modos de interface fixa, $\boldsymbol{\Psi}_{ib}$ é a matriz de modos de restrição, \mathbf{p} é o vetor de coordenadas generalizadas e \mathbf{T}_{CB} é a matriz de transformação C-B.

De acordo com Craig e Kurdila (2006), quando os modos normais de interface fixa são normalizados de acordo com a equação (2.11) e (2.12), as matrizes de massa e rigidez generalizadas das subestruturas (equação (2.9)) apresentam as seguintes formas:

$$\widehat{\mathbf{M}}_{CB}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{kk} & \widehat{\mathbf{M}}_{kb} \\ \widehat{\mathbf{M}}_{bk} & \widehat{\mathbf{M}}_{bb} \end{bmatrix}^{(s)} \quad (2.49)$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{CB}^{(s)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{kk} & \mathbf{0}_{kb} \\ \mathbf{0}_{bk} & \widehat{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix}^{(s)} \quad (2.50)$$

Para o acoplamento de duas subestruturas, 1 e 2, a equação (2.38) é escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{k1}^{(1)} \\ \mathbf{p}_b^{(1)} \\ \mathbf{p}_{k2}^{(2)} \\ \mathbf{p}_b^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{k1}^{(1)} \\ \mathbf{q}_{k2}^{(2)} \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Assim, tem-se as respectivas matrizes de massa e rigidez de ordem reduzida superpostas (Craig e Kurdila, 2006):

$$\widehat{\mathbf{M}}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k_1 k_1} & \mathbf{0}_{k_1 k_2} & \widehat{\mathbf{M}}_{k_1 b}^{(1)} \\ \mathbf{0}_{k_2 k_1} & \mathbf{I}_{k_2 k_2} & \widehat{\mathbf{M}}_{k_2 b}^{(2)} \\ \widehat{\mathbf{M}}_{b k_1}^{(1)} & \widehat{\mathbf{M}}_{b k_2}^{(2)} & \widehat{\mathbf{M}}_{bb}^{(1)} + \widehat{\mathbf{M}}_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{k_1 k_1}^{(1)} & \mathbf{0}_{k_1 k_2} & \mathbf{0}_{k_2 b} \\ \mathbf{0}_{k_2 k_1} & \mathbf{\Lambda}_{k_2 k_2}^{(2)} & \mathbf{0}_{k_2 b} \\ \mathbf{0}_{b k_1} & \mathbf{0}_{b k_2} & \widehat{\mathbf{K}}_{bb}^{(1)} + \mathbf{K}_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

2.2.8 Subestruturação Não-Linear através do Método de Craig-Bampton

Conforme Wenneker (2013), a equação de equilíbrio de uma subestrutura com comportamento geométrico não linear com N graus de liberdade pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(t) \quad (2.54)$$

Onde $\mathbf{f}_{NL}(\mathbf{u})$ se refere a força de restauração não linear.

A equação (2.54) particionada em graus de liberdade internos i e de contorno b, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{NL,i}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{f}_{NL,b}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b(t) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Reduzindo a equação (2.55) conforme equação (2.8), através da matriz de transformação C-B (equação (2.48)) tem-se:

$$\widehat{\mathbf{M}}_{CB}\ddot{\mathbf{p}} + \widehat{\mathbf{K}}_{CB}\mathbf{p} + \mathbf{T}_{CB}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{NL,i}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{f}_{NL,b}(\mathbf{p}) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{CB}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b(t) \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{f}} \quad (2.56)$$

Conforme Kuether (2014), para o modelo reduzido, as forças de restauração modal não linear podem ser aproximadas por uma função:

$$\boldsymbol{\theta}(p_1, p_2, \dots, p_m) = \mathbf{T}_{CB} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{NL,i}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{f}_{NL,b}(\mathbf{p}) \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Segundo Hollkamp e Gordon (2008), a forma geral dessa função não linear para o r-ésimo modo é dada por:

$$\theta_r(p_1, p_2, \dots, p_m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_r(i, j) p_i p_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{k=j}^n A_r(i, j, k) p_i p_j p_k \quad (2.58)$$

De acordo com Kuether (2014), os coeficientes de rigidez não linear A_r e B_r não estão explicitamente disponíveis quando os modelos de MEF são construídos diretamente. Harmin e Cooper (2010) relatam que esses coeficientes podem ser obtidos através de vários testes estáticos não linear de cargas em um software de elementos finitos.

Segundo McEwan *et al.* (2001a) e McEwan *et al.* (2001b), considerando uma estrutura estática com comportamento geométrico não linear, tem-se:

$$\boldsymbol{\theta} = \hat{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{K}}_{CB} \mathbf{p} \quad (2.59)$$

Conforme Gordon e Hollkamp (2011), para r-ésimo modo tem-se:

$$\theta_r = \hat{f}_r - k_r p_r \quad (2.60)$$

Considerando a equação (2.60), tem-se a equação (2.58) em forma matricial para N testes de carga:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{c} f_r[1] - k_r q_r[1] \\ f_r[2] - k_r q_r[2] \\ \vdots \\ f_r[N] - k_r q_r[N] \end{array} \right\} = \\
& = \left[\begin{array}{cccc} p_1^2[1] & p_1 p_2[1] & \dots & p_n^2[1] & p_1^3[1] & p_1^2 p_2[1] & \dots & p_n^3[1] \\ p_1^2[2] & p_1 p_2[2] & \dots & p_n^2[2] & p_1^3[2] & p_1^2 p_2[2] & \dots & p_n^3[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^2[N] & p_1 p_2[N] & \dots & p_n^2[N] & p_1^3[N] & p_1^2 p_2[N] & \dots & p_n^3[N] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} B_r(1,1) \\ B_r(1,1) \\ \vdots \\ \vdots \\ B_r(n,n) \\ A_r(1,1,1) \\ A_r(1,1,2) \\ \vdots \\ \vdots \\ A_r(n,n,n) \end{array} \right\} \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Segundo Gordon e Hollkamp (2011), as amplitudes modais $p_r[k]$ para o r-ésimo modo correspondente ao k-ésimo teste de carga podem ser determinadas pela pseudo-inversa da matriz de transformação de Craig-Bampton:

$$\mathbf{p}[\mathbf{k}] = \mathbf{T}_{CB}^{\#} \mathbf{w}[\mathbf{k}] \quad (2.62)$$

Onde $\mathbf{w}[\mathbf{k}]$ é o vetor deslocamento obtido para o k-ésimo teste de carga realizado em um software de elementos finitos. O subscrito # denota pseudo-inversa da matriz.

Kuether e Allen (2014a) afirmam que pode-se considerar as cargas testes como sendo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} \{ \mathbf{T}_{CB,1} a_1 + \mathbf{T}_{CB,2} a_2 + \dots + \mathbf{T}_{CB,m} a_m \} = \mathbf{M} \sum_{r=1}^m \mathbf{T}_{CB,r} a_r \quad (2.63)$$

Onde a_r é o fator escalar de cargas correspondendo a amplitude de força do modo na r-ésima coluna de \mathbf{T}_{CB} .

Gordon e Hollkamp (2011) relatam que o fator escalar de cargas é dado pela seguinte relação:

$$a_r = \frac{\omega_r^2 w_{c,\max}}{\boldsymbol{\phi}_r^T \boldsymbol{\phi}_r \{\boldsymbol{\phi}_r\}_c} \quad (2.64)$$

Onde $w_{c,\max}$ é deslocamento máximo desejado em um ponto c , $\{\boldsymbol{\phi}_r\}_c$ é o deslocamento do ponto c para o r -ésimo modo.

De acordo com Kuether e Allen (2014b), o deslocamento desejado deve ser suficiente para causar efeitos não lineares. Segundo Gordon e Hollkamp (2011), se os deslocamentos desejados forem muito altos, o algoritmo poderá não convergir. Se os deslocamentos forem muito baixos, os deslocamentos estarão no intervalo linear.

Segundo McEwan *et al.* (2001a) as cargas testes no domínio modal são obtidas por:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{F} \quad (2.65)$$

Conforme Gordon e Hollkamp (2011), após a obtenção das soluções estáticas, os deslocamentos modais não lineares resultantes podem ser extraídos e comparado às amplitudes modais desejadas para garantir que os efeitos da não linearidade sejam exercidos.

De acordo com Kuether e Allen (2014a), uma boa escolha para o conjunto de carga é um conjunto de permutações das somas e diferenças dos fatores escalares. Em geral, o número de soluções estáticas requerido é dado por:

$$\text{Número de permutações} = 2m + \frac{2m!}{(m-2)!} + \frac{4m!}{3(m-3)!} \quad (2.66)$$

Onde m é o número total de modos usados na matriz de transformação de Craig-Bampton.

Conforme Gordon e Hollkamp (2011), a implementação elaborada conforme equação (2.61), ignora as dependências entre os coeficientes e, por isso, o conjunto resultante de coeficientes para um modelo pode ser matematicamente inconsistente. Uma abordagem melhorada pode ser implementada. Essa identifica os coeficientes independentes para todos os modos e os coeficientes dependentes são, então, calculados em uma segunda etapa. As dependências entre os coeficientes são:

$$A_i(i, i, j) = 3A_j(i, i, i), A_i(i, i, j) = A_j(i, i, j), A_l(i, j, k) = A_k(i, j, l), \quad (2.67)$$

$$A_j(i, j, k) = 2A_i(j, j, k) = 2A_k(i, j, j)$$

$$B_k(i, j) = B_i(j, k) = B_j(i, k) \text{ e } B_i(i, j) = 2B_j(i, i) \quad (2.68)$$

Kuether e Allen (2014a) relatam que para desenvolver o acoplamento utilizando método de Craig-Bampton, primeiramente, os termos quadráticos e cúbicos são separados em duas forças não lineares:

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_m]^T \quad \text{onde} \quad \beta_r = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_r(i, j) p_i p_j \quad (2.69)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m]^T \quad \text{onde} \quad \alpha_r = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m \sum_{k=j}^m A_r(i, j, k) p_i p_j p_k \quad (2.70)$$

Kuether (2014) afirma que os vetores $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ devem ser diferenciados em relação a cada respectiva coordenada generalizada:

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{p}) = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{p}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial p_1} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial p_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial p_m} \right] \quad (2.71)$$

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{p}) = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial p_1} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial p_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial p_m} \right] \quad (2.72)$$

Considerando as equações (2.71) e (2.72), segundo Kuether e Allen (2014a), a equação de equilíbrio (2.54) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\widehat{\mathbf{M}}_{\text{CB}} \ddot{\mathbf{p}} + \widehat{\mathbf{K}}_{\text{CB}} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{N}_1(\mathbf{p}) \mathbf{p} + \frac{1}{3} \mathbf{N}_2(\mathbf{p}) \mathbf{p} = \mathbf{T}_{\text{CB}}^T \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b(\mathbf{t}) \end{array} \right\} \quad (2.73)$$

As condições de compatibilidade e de equilíbrio para o acoplamento de duas subestruturas, A e B, são dadas, respectivamente, por (Kuether e Allen, 2014a):

$$\mathbf{C} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^A \\ \mathbf{u}^B \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_p \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k^A \\ \mathbf{u}_b^A \\ \mathbf{p}_k^B \\ \mathbf{u}_b^B \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.74)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k^A \\ \mathbf{x}_b^A \\ \mathbf{p}_b^B \\ \mathbf{x}_b^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_k^A \\ \mathbf{q}_k^B \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{L}_p \mathbf{q} \quad (2.75)$$

Assim, a equação de movimento das subestruturas acopladas é dada por (Kuether, 2017):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_p^T \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{M}}_{CB}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{M}}_{CB}^B \end{bmatrix} \mathbf{L}_p \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}_p^T \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{K}}_{CB}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{K}}_{CB}^B \end{bmatrix} \mathbf{L}_p \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{L}_p^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_1^B \end{bmatrix} \mathbf{L}_p \mathbf{q} \\ + \frac{1}{3} \mathbf{L}_p^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_2^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_2^B \end{bmatrix} \mathbf{L}_p \mathbf{q} = \mathbf{L}_p^T \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_{CB}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b^A(t) \end{Bmatrix} \\ \mathbf{T}_{CB}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b^B(t) \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.3 Subestruturação Baseada em Frequência

Conforme Klerk, Rixen e Voormeeren (2008), no caso de medições no domínio da frequência as propriedades de massa, amortecimento e rigidez dos sistemas não são conhecidos separadamente como no domínio físico. As equações de movimento, de compatibilidade e de equilíbrio são, respectivamente:

$$\mathbf{z}(\omega) \mathbf{u}(j\omega) = \mathbf{f}(\omega) + \mathbf{g}(\omega) \quad (2.77)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{0} \quad (2.78)$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{g}(\omega) = \mathbf{0} \quad (2.79)$$

Onde, \mathbf{u} , \mathbf{f} e \mathbf{g} representam a amplitude complexa da resposta harmônica e forças, respectivamente. A Impedância Mecânica \mathbf{z} é dada por:

$$\mathbf{z}(j\omega) \triangleq -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (2.80)$$

Em que j um número unitário imaginário.

2.4 Critério de Confiança Modal (MAC)

Conforme Allemang e Brown (2003), o critério de confiança modal (MAC) é uma medida de consistência de vetores modais obtidos de diferentes algoritmos, ou experimentalmente e através de métodos numéricos. Pastor, Binda e Harcarik (2012) relata que o MAC proporciona uma confiança adicional.

De acordo com Pastor, Binda e Harcarik (2012), o critério de confiança modal (MAC) é um indicador estatístico, baseado no método de mínimo quadrados e em análise de regressão linear, que é sensível à maior diferença entre valores comparativos e é insensível a pequenas diferenças. O coeficiente MAC entre dois conjuntos de vetores $\{\mathbf{u}_A\}$ e $\{\mathbf{u}_B\}$ é dado por:

$$\text{MAC}(r, q) = \frac{|\{\mathbf{u}_A\}_r^T \{\mathbf{u}_B\}_q|^2}{(\{\mathbf{u}_A\}_r^T \{\mathbf{u}_A\}_r)(\{\mathbf{u}_B\}_q^T \{\mathbf{u}_B\}_q)} \quad (2.81)$$

O coeficiente MAC varia entre 0 e 1. Segundo Allemang e Brown (1982), para os vetores modais exibirem uma relação consistente, o coeficiente MAC entre eles deve ser próximo do valor 1. Caso o MAC se aproxime de 0 os vetores não são correspondentes.

2.5 Matriz de Massa e Rigidez

Conforme Vaz (2011), a deformação axial deve ser considerada para análises em pórticos. A figura 6 demonstra um elemento de pórtico plano de comprimento L e graus de liberdade d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 e d_6 e $v(x)$ deslocamento vertical.

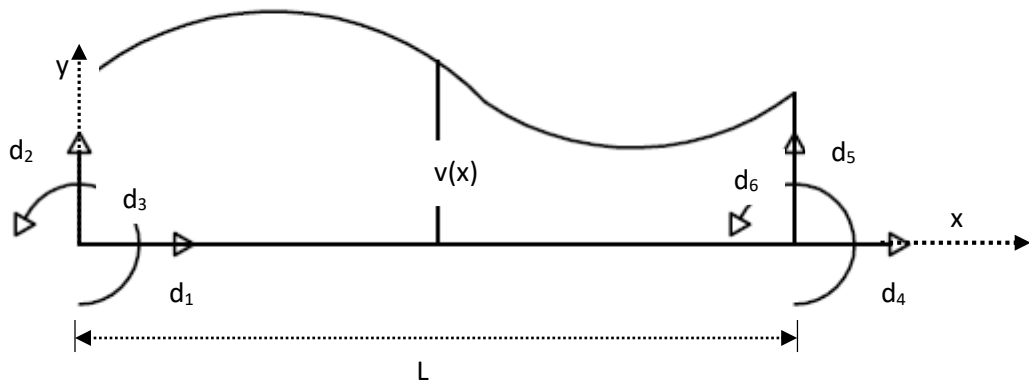


Figura 6: Elemento de pórtico plano
Adaptado de Vaz (2011)

Considerando dois nós por elemento (figura 6), tem-se a seguinte matriz de rigidez elástica, \mathbf{K}_e , no referencial local.

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia da seção transversal e A é a área de seção transversal.

A matriz de rigidez (equação 2.82) é obtida pela teoria de Euler-Bernoulli em que o cisalhamento não é considerado.

Ainda considerando o elemento de pórtico demonstrado na figura 6, tem-se a seguinte matriz de massa distribuída no referencial local.

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Onde ρ é a densidade do material.

2.6 Vibração Lateral em Vigas

Nessa seção será considerado a vibração lateral de vigas a fim de apresentar formulações de frequências naturais obtidas de forma analítica. A figura 7 demonstra um elemento infinitesimal de viga de comprimento dx sob flexão.

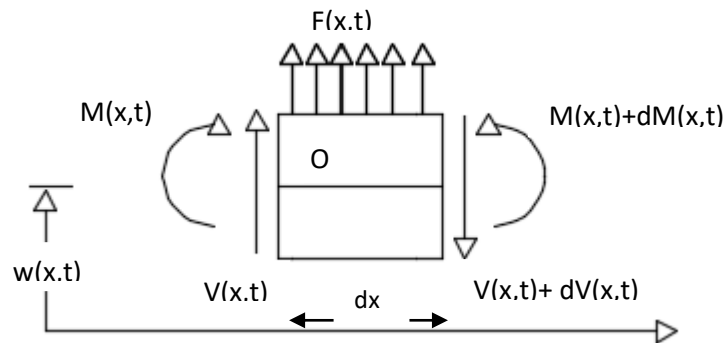


Figura 7: Elemento infinitesimal de viga sob flexão
Adaptado de Rao (2011)

Os termos descritos na figura 7 são $M(x,t)$, momento fletor, $V(x,t)$, cortante e $F(x,t)$, força externa por unidade de comprimento.

Através de equações de equilíbrio, considerando a viga em vibração livre tem-se a equação de movimento dada por:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (x, t) = 0 \quad (2.84)$$

Onde

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.85)$$

A função de forma modal obtida através da equação (2.84) é dada por:

$$\begin{aligned} w(x) = & C_1(\cos \beta x + \cosh \beta x) \\ & + C_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_3(\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4(\sin \beta x - \sinh \beta x) \end{aligned} \quad (2.86)$$

Onde as constantes C_1, C_2, C_3, C_4 e β podem ser encontradas aplicando as condições de contorno.

As frequências naturais podem ser calculadas por:

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (2.87)$$

Considerando uma viga engastada livre tem-se que os valores de $\beta_n l$, onde n é o número do modo, são dados por:

$$\begin{aligned} \beta_1 l &= 1,875104 \\ \beta_2 l &= 4,694091 \\ \beta_3 l &= 7,854757 \\ \beta_4 l &= 10,995541 \end{aligned} \quad (2.88)$$

3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Esse capítulo possui a descrição do algoritmo que foi implementado em linguagem MATLAB considerando formulações apresentadas no capítulo 2. Através do referido algoritmo pode-se obter frequências e modos naturais de estruturas aperticadas acopladas através do método de Craig-Bampton. O fluxograma computacional simplificado que representa o algoritmo implementado pode ser observado pela Figura 8.

Primeiramente, a estrutura é dividida em subestruturas a fim de fazer a entrada de dados no programa implementado. Os dados pertencentes a cada subestrutura são armazenados em uma estrutura tipo lista.

O programa principal inicia-se fazendo a leitura de dados geométricos e propriedades de materiais de cada subestrutura como:

- Propriedades das seções;
- Propriedades dos materiais;
- Número de nós;
- Número de elementos;
- Coordenadas dos nós;
- Matriz incidência de elementos finitos;
- Nós que possuem condições de contorno;
- Nós de interface;
- Intervalo de frequência de interesse;
- Número de subestruturas, N_{subes} .

A rotina procede dando início a um *loop* que se encerra quando atinge-se o número de subestruturas, N_{subes} , indicado na entrada de dados. Posteriormente, como mostra o fluxograma dado pela figura 8, é feito o cálculo das matrizes de massa e rigidez locais e faz-se a superposição das matrizes de massa e rigidez globais de cada elemento, através do procedimento padrão do Método de Elementos Finitos. Aplica-se as condições de contorno nas matrizes.

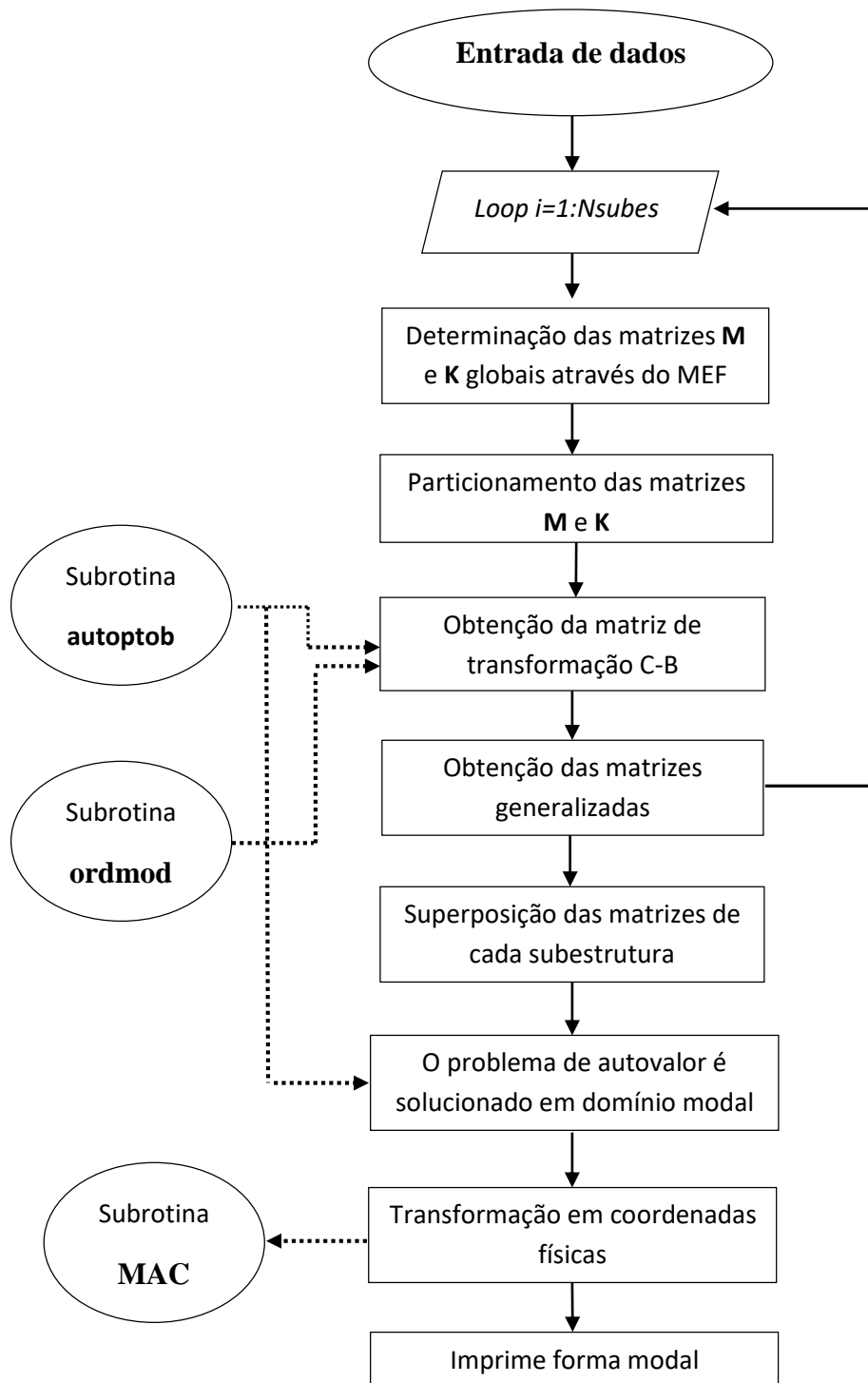


Figura 8: Fluxograma do algoritmo desenvolvido.

Em seguida (figura 8) as matrizes são particionadas em graus de liberdade internos e externos, conforme equação (2.6). Para obtenção da matriz de transformação C-B, as subrotinas **ordmod** e **autoprob** são executadas. Através da subrotina **autoprob** obtém-se o resultado do problema de autovalor dos modos normais de interface fixa e **M**-ortonormaliza esses modos.

Através da subrotina **ordmod** ordenam-se os autovalores e autovetores em ordem crescente. Os modos de restrição foram obtidos no programa principal. O número de modos normais utilizados na matriz de transformação de Craig-Bampton são selecionados de acordo com a frequência de interesse.

No passo seguinte (figura 8), as matrizes em coordenadas físicas são reduzidas através da matriz de transformação C-B, obtendo as matrizes generalizadas conforme (2.49) e (2.50).

Por seguinte (figura 8), as matrizes generalizadas de cada subestrutura são superpostas através da transformação linear (2.38). O problema dinâmico de vibração livre da estrutura global é solucionado no domínio modal. Assim, a matriz de transformação C-B é utilizada para obter a resposta física.

O Método de Elementos Finitos também foi implementado para análise de estruturas sob vibração livre. Assim, os modos obtidos no método de Craig-Bampton são correlacionados com os obtidos via Método de Elementos Finitos através da subrotina **MAC**. Finalmente, as formas modais e frequências da estrutura acoplada são impressas.

4 APLICAÇÕES

Nesse capítulo será apresentado aplicações com objetivo de validar o algoritmo que foi desenvolvido através de formulações apresentadas no capítulo 2.

Primeiramente, será apresentado uma aplicação de acoplamento de vigas. Posteriormente, será apresentado o acoplamento de pórticos. Ambas aplicações se tratam de problemas de vibração livre linear e teriam como aplicação a otimização estrutural, ou seja, a modificação de parte da estrutura a fim de alterar as frequências naturais e modos. Será descrito a redução de custo computacional obtida através do método de Craig-Bampton. A discretização dessas exemplificações foram feitas considerando pelo menos 7 elementos para o maior comprimento de onda em análise (ou seja maior frequência). Os resultados são comparados com soluções numéricas obtidas através do Método de Elementos Finitos.

4.1 Acoplamento de Vigas Engastadas-Livres

A fim de exemplificar o acoplamento de vigas, fez-se o acoplamento de duas vigas engastadas-livres, cada viga (subestruturas) foram discretizadas em 100 elementos finitos, considerou-se dois graus de liberdade por nó. A representação do acoplamento pode ser observado pela figura 9, onde as vigas foram acopladas através dos graus de liberdade de deslocamento e de rotação da interface compartilhada.

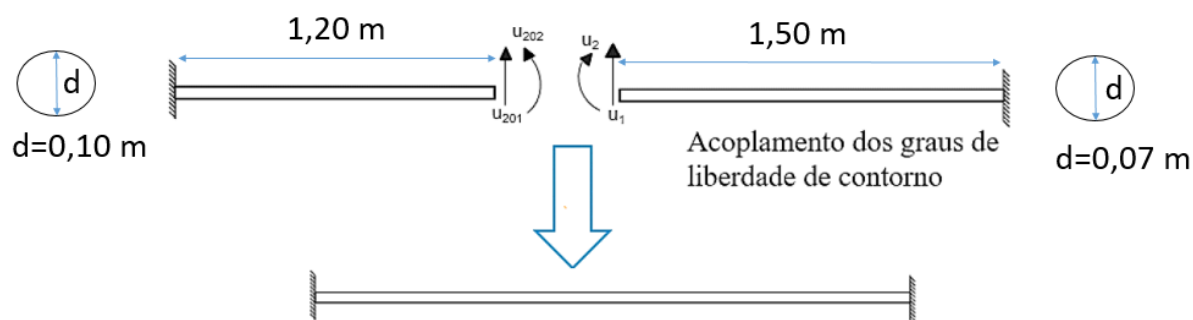


Figura 9: Representação do acoplamento de vigas através do método de Craig-Bampton.

As propriedades geométricas das vigas representadas na figura 9, são para a viga de comprimento $L = 1,20$ m, inércia $I = 0,49087 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ e área $A = 0,00785 \text{ m}^2$, e para a viga de comprimento $L = 1,5$ m, inércia $I = 0,1178 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ e área $A = 0,00385 \text{ m}^2$. Considerou-se o

alumínio o material dessas vigas com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E=70,0$ GPa e densidade 2780 Kg/m³.

Na figura 10 é possível observar o primeiro (a), o segundo (b) e o terceiro (c) modo de vibração livre para a viga engastada-livre de comprimento $L=1.2$ m, que será chamada aqui de subestrutura 1.

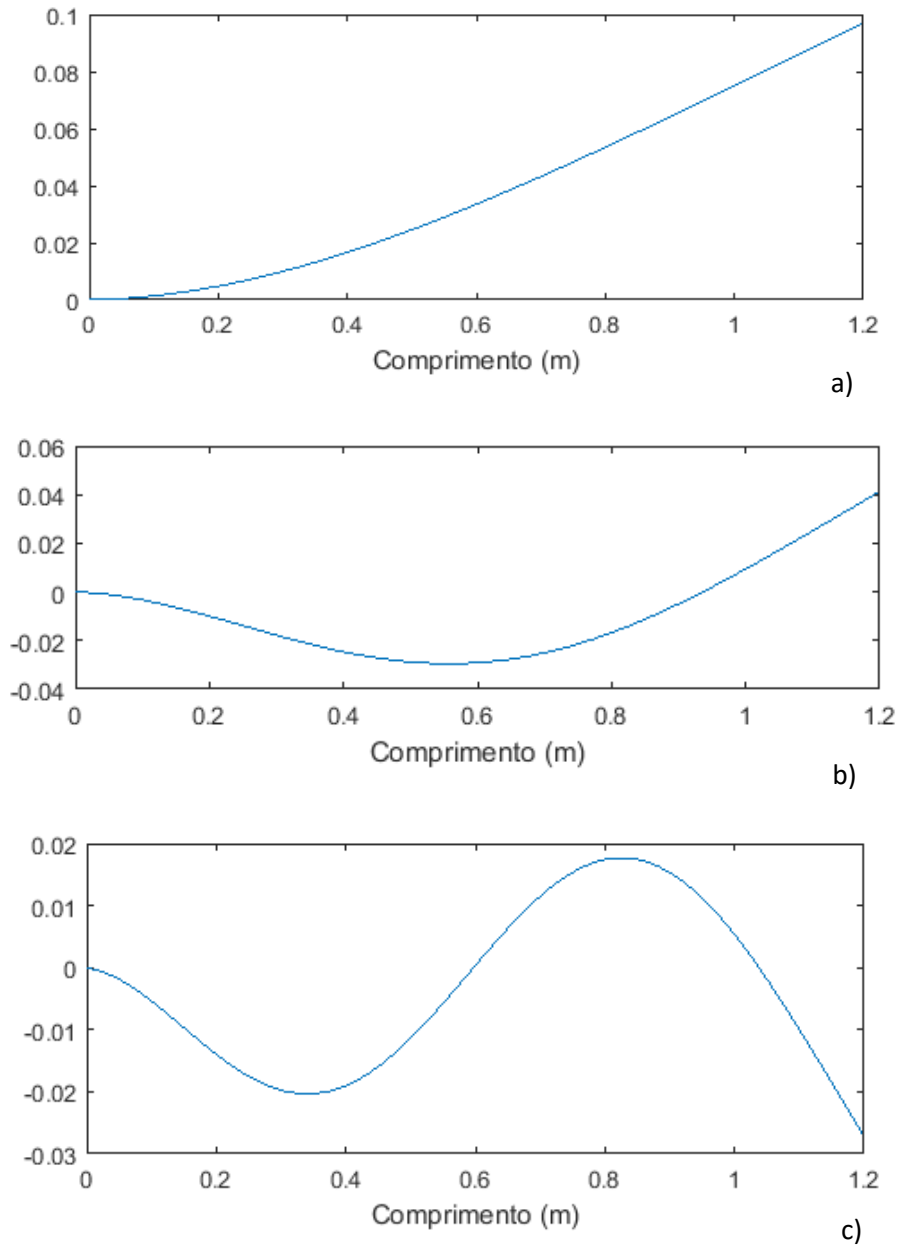


Figura 10: Primeiro (a), segundo (b) e terceiro (c) modo de vibração livre para a subestrutura 1.

Observa-se pela figura 10 que a amplitude máxima ocorreu no nó mais à direita para os três modos, sendo que eles são respectivos às três menores frequências de vibração livre, apresentadas na tabela 1.

Pela figura 11 é possível observar o primeiro (a), o segundo (b) e o terceiro (c) modo de vibração livre para a viga engastada-livre de comprimento $L=1.5$ m, que será chamada aqui de subestrutura 2.

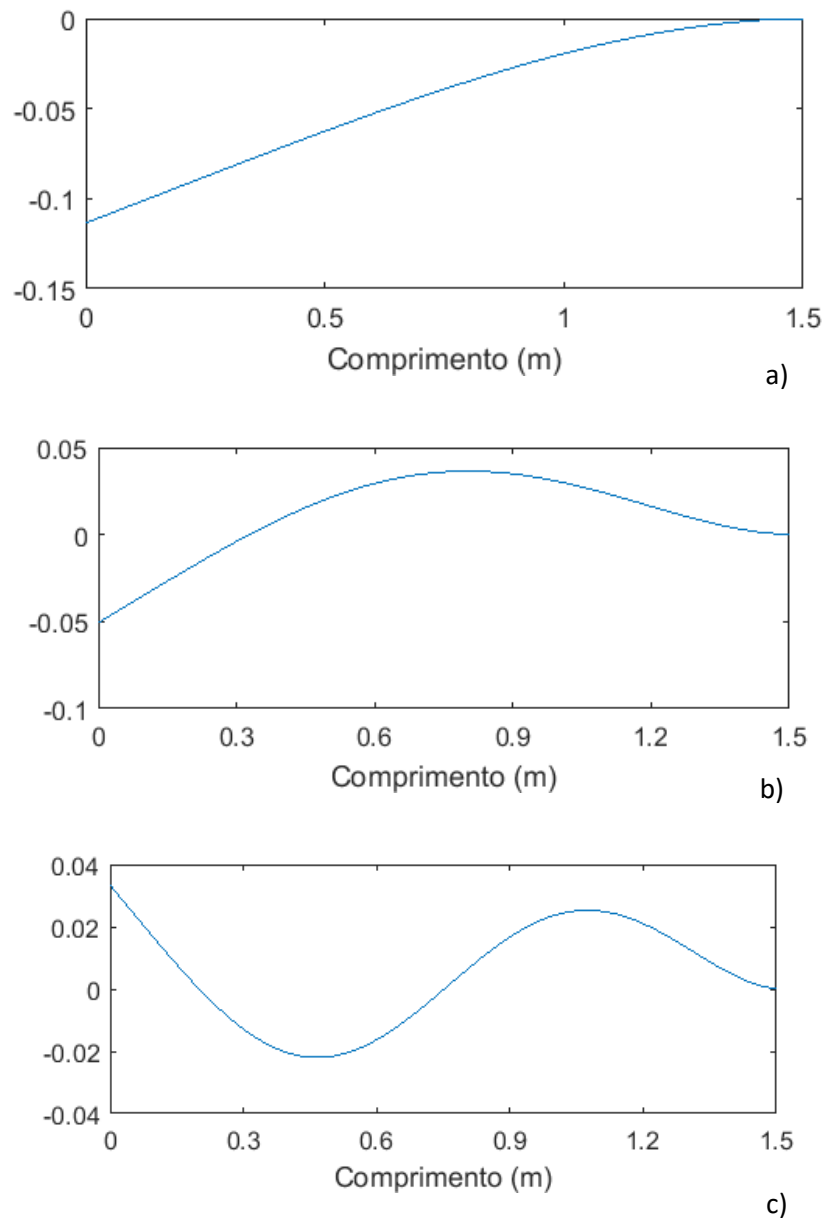


Figura 11: Primeiro (a), segundo (b) e terceiro (c) modos de vibração livre para a subestrutura 2.

Considerando que as condições de contorno da viga foram determinadas no nó da extremidade direita, nota-se pela figura 11 que a amplitude máxima apresentou-se no nó mais à esquerda para os três primeiros modos.

Observa-se que os modos de vibração apresentaram-se com maiores amplitudes para a viga de comprimento de 1,5 m (subestrutura 2) devido ao seu menor momento de inercia.

Pela tabela 1 é possível observar as frequências naturais obtidas via Método de Elementos Finitos e as obtidas de forma analítica para cada subestrutura com os respectivos erros para até o quarto modo.

O erros foram calculados através da seguinte fórmula:

$$\text{Diferença (\%)} = 100 \frac{\text{resultado analítico} - \text{resultado obtido via MEF}}{\text{resultado obtido via MEF}}$$

Tabela 1: Frequências naturais obtidas de forma analíticas e através do MEF e os respectivos erros.

Número do modo	Subestrutura 1			Subestrutura 2		
	MEF (Hz)	Frequências analíticas (Hz)	Erro (%)	MEF (Hz)	Frequências analíticas (Hz)	Erro (%)
1	48,750	48,750	0,000	21,840	21,840	0,000
2	305,511	305,499	0,004	136,869	136,864	0,004
3	855,441	855,428	0,002	383,237	383,232	0,002
4	1676,322	1676,322	0,000	750,992	750,992	0,0000

Observa-se pela tabela 1 que os resultados obtidos via Método de Elementos Finitos estão muito próximos das frequências calculadas analiticamente, o que comprova a eficiência do algoritmo do Método de Elementos Finitos implementado para as subestruturas.

Na tabela 2 é possível observar as frequências dos cinco primeiros modos de interface fixa para as subestruturas 1 e 2.

Tabela 2: Frequências dos modos de interface fixa relativos às subestruturas 1 e 2.

Número do modo	Subestrutura 1	Subestrutura 2
	Interface fixa (Hz)	Interface fixa (Hz)
1	310,209	383,086
2	855,102	751,002
3	1676,343	1241,444
4	2771,080	1854,504
5	4139,517	138,974

Considerando o intervalo de frequência de interesse de 0 a 500Hz, e incluindo os modos de cada subestrutura relativos a até 2 vezes a frequência máxima de interesse, pode-se observar pela tabela 2 que os dois primeiros modos estão dentro desse intervalo para subestrutura 1 e para a subestrutura 2. Assim, esses modos constituíram a matriz de transformação de Craig-Bampton, a fim de reduzir os modelos das subestruturas.

Pelo algoritmo verifica-se que o total de modos normais de interface fixa obtidos é igual ao número de graus de liberdade internos de cada subestrutura, conforme pode-se constatar também através da equação (2.10). Portanto, o número de elementos finitos adotados para cada subestrutura deve possibilitar que haja nós internos.

Na figura 12 é possível observar os três primeiros modos de vibração livre para a estrutura acoplada obtidos através do Método de Elementos Finitos e através do método de Craig-Bampton, conforme indica a legenda.

Observa-se pela figura 12 que as amplitudes dos três modos apresentados obtidas pelo Método de Craig-Bampton se mostraram próximas das obtidas via Método de Elementos Finitos.

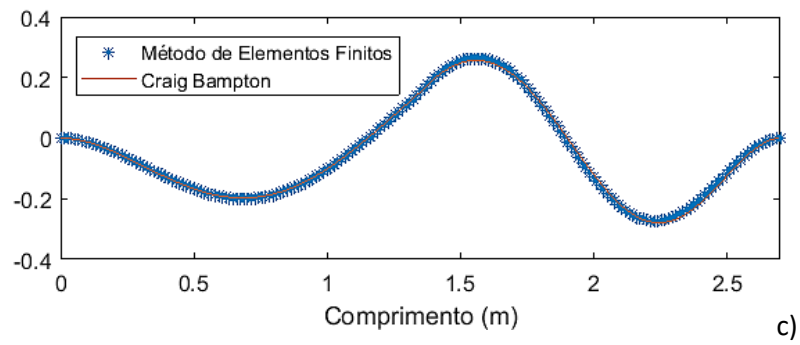
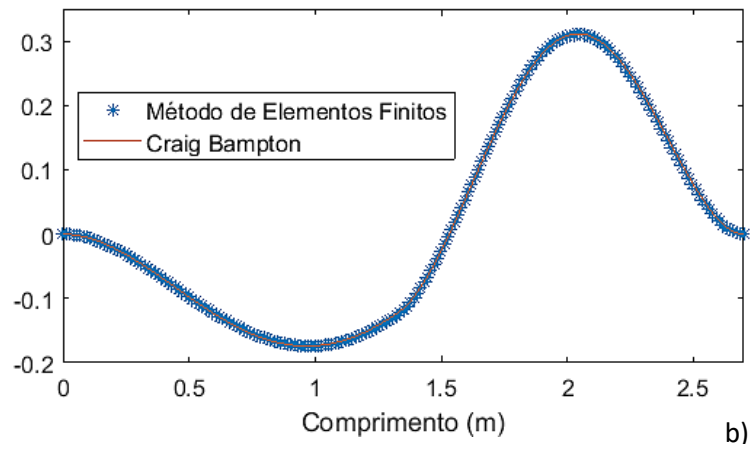
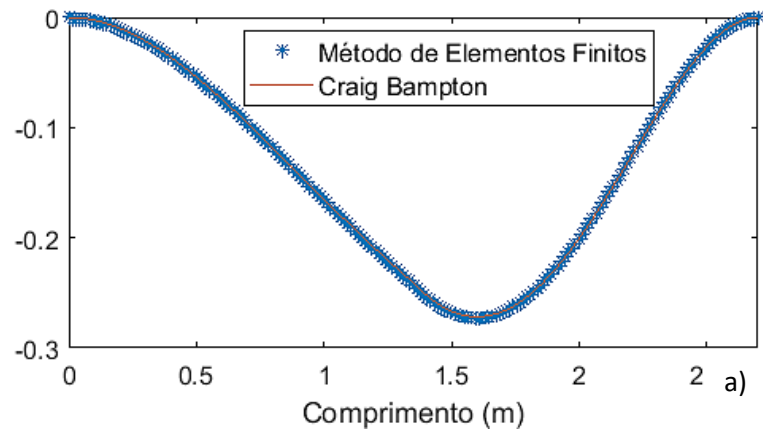


Figura 12: Primeiro - 49,839 Hz (a), segundo - 139,695 Hz (b) e terceiro - 269,265 Hz (c) modos de vibração livre para a viga bi-engastada.

Na tabela 3 é possível observar a convergência do método de Craig-Bampton em relação ao Método de Elementos Finitos considerando as frequências obtidas.

Tabela 3: Diferença percentual de frequência obtida entre o método MEF e C-B (0 a 500Hz).

Nº do modo	Craig-Bampton	MEF	Diferença (%)
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	49,853	49,839	0,028
2	140,589	139,695	0,640
3	270,486	269,265	0,453
4	443,402	436,434	1,597
5	784,950	674,921	16,302

A diferença apresentada na tabela 3 foi calculada através da seguinte fórmula:

$$\text{Diferença (\%)} = 100 \frac{\text{resultado obtido via MEF} - \text{resultado obtido via C - B}}{\text{resultado obtido via MEF}}$$

Nota-se pela tabela 3 que na faixa de frequência de interesse (0 a 500 Hz) as frequências naturais obtidas pelo método de Craig-Bampton são próximas das obtidas via Método de Elementos Finitos. A diferença máxima entre os métodos nessa faixa é de 1,597%, relativo ao quarto modo de vibração da estrutura acoplada. A precisão do método é melhor para as frequências relativas aos primeiros modos, devido ao número modos selecionados para a base de redução de Craig-Bampton.

A validação dos modos acoplados foi feita através do MAC. Pela Figura 13 é possível observar a correlação entre os modos obtidos via MEF e pelo método de Craig-Bampton através dos coeficientes MAC entre os modos.

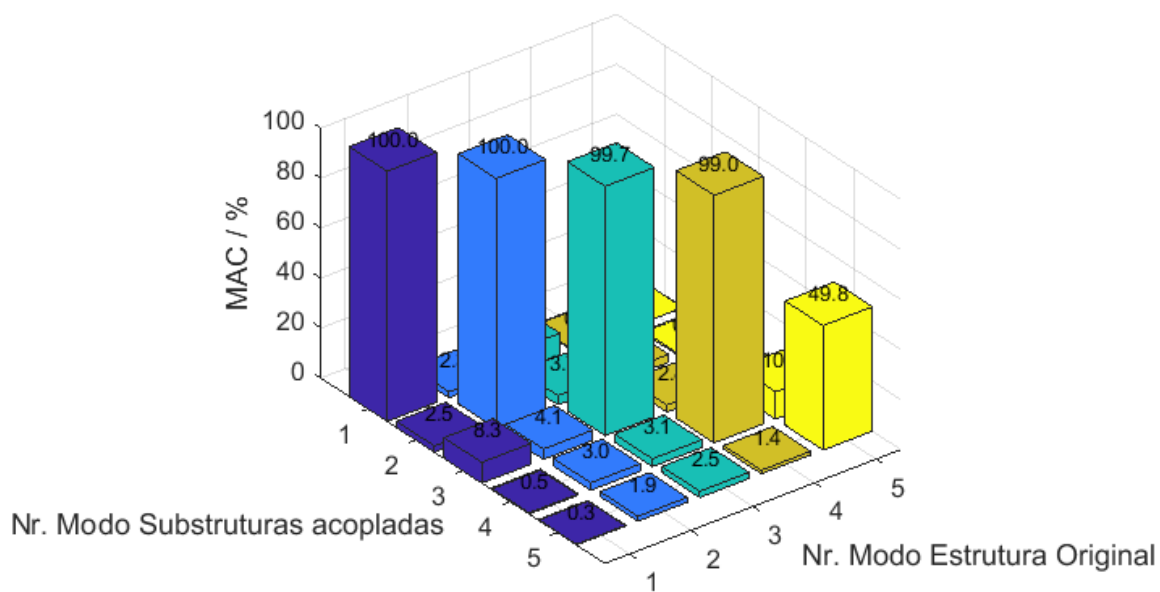


Figura 13: Valores dos coeficientes MAC entre os modos obtidos via Craig-Bampton e via Método de Elementos Finitos para a viga bi-engastada.

Observa-se pela figura 13 que os coeficientes MAC da diagonal principal se aproximaram de 100% e fora da diagonal se aproximaram de zero para todos os modos que estão dentro da faixa de frequência de interesse, indicando que os modos obtidos através do método de Craig-Bampton, se correlacionam corretamente com o respondente obtido via Método de Elementos Finitos até o quarto modo.

Nessa aplicação, o método de Craig-Bampton foi executado utilizando 6 equações, enquanto o Método de Elementos Finitos utilizou 398 equações.

4.2 Acoplamento de Pórticos de Dois Andares

A segunda aplicação a ser analisada se trata de acoplamento de dois pórticos, ambos de dois vãos. Nota-se pela figura 14 a representação do acoplamento dos pórticos.

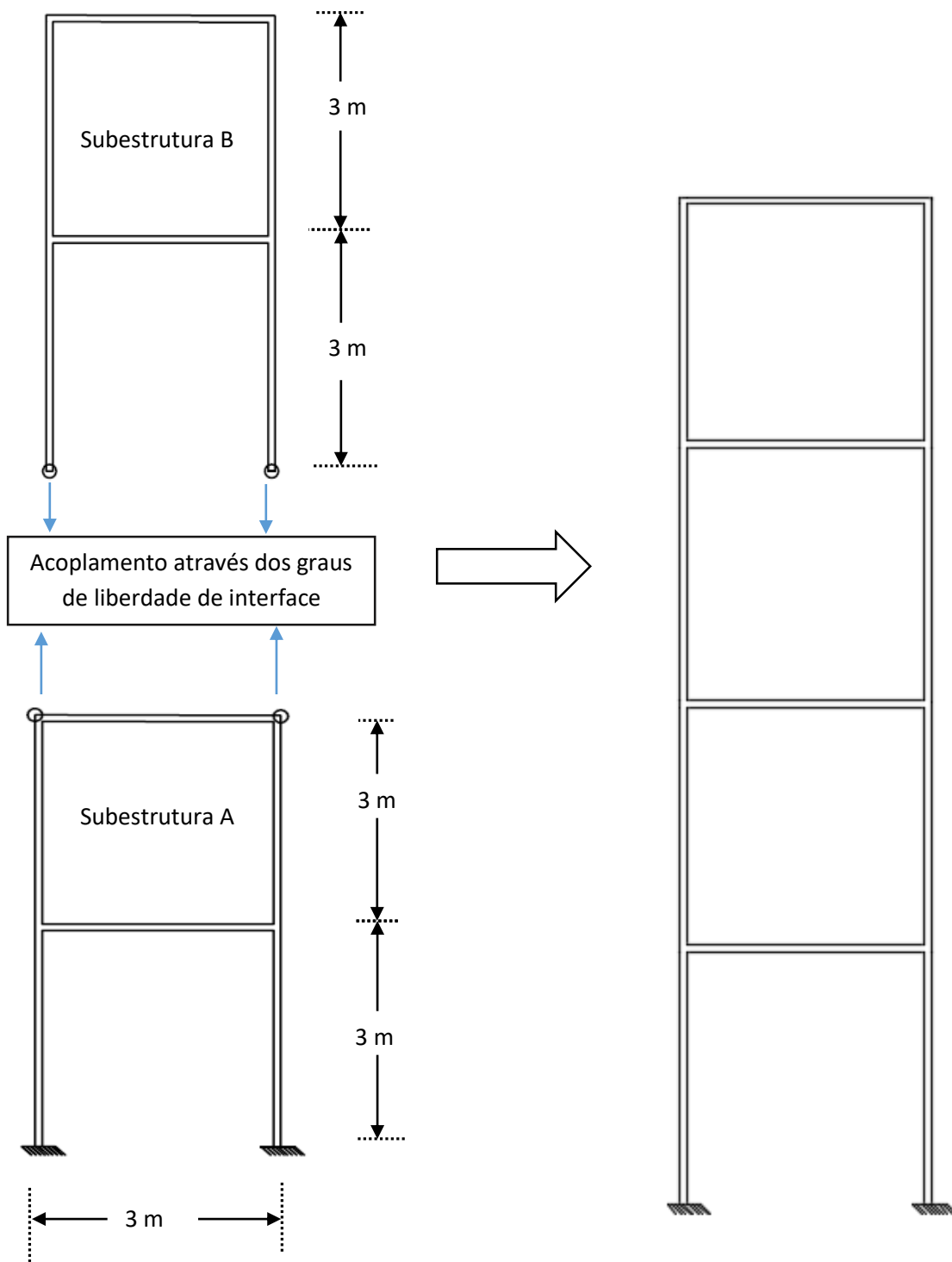


Figura 14: Representação do acoplamento de pórticos.

As vigas e colunas de cada pórtico (subestruturas) foram discretizadas em 10 elementos finitos, totalizando 120 elementos finitos de todo o pórtico. Esses pórticos foram acoplados através dos graus de liberdade das interfaces compartilhadas.

A subestrutura A foi modelada com o perfil W 310x143 e a subestrutura B com o perfil W 360x72. Foi considerado o módulo de elasticidade de 200 GPa para as seções das duas subestruturas.

Na tabela 4 é possível observar as frequências relativas aos seis primeiros modos de interface fixa obtidas para a subestrutura A e B.

Tabela 4: Frequências dos modos de interface fixa relativos as subestruturas A e B.

Número do modo	Subestrutura A	Subestrutura B
	Interface fixa (Hz)	Interface fixa (Hz)
1	53,767	19,392
2	163,213	64,216
3	214,125	132,634
4	247,779	148,990
5	258,358	188,709
6	321,073	223,086

Considerando a faixa de frequência de interesse de 0 a 30 Hz, e os modos de cada subestrutura relativos a até 2 vezes a frequência máxima de interesse, são selecionados para a base de transformação de Craig-Bampton o primeiro modo para a subestrutura A e o primeiro modo para a subestrutura B, observando as frequências dadas pela tabela 4.

Pela tabela 5 é possível observar as frequências obtidas via Método de Elementos Finitos e via Craig-Bampton para a estrutura completa.

Tabela 5: Diferença percentual de frequência obtida entre o método MEF e C-B (0 a 30 Hz)

Nº do modo	Craig-Bampton	MEF	Diferença %
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	10,162	10,156	0,053
2	26,435	26,312	0,470
3	58,668	53,431	9,802
4	111,776	74,330	50,377

Observa-se pela tabela 5 que dentro da faixa de frequência de interesse a diferença máxima entre os modos é de 0,470%, sendo que somente o primeiro e o segundo modo estão dentro da faixa de interesse. Os valores das frequências se distanciam para os modos fora da faixa de frequência de interesse.

Pela figura 15 pode-se observar os três primeiros modos de vibração do pórtico acoplado obtidos via Método de Elementos Finitos e via Craig-Bampton.

Nota-se pela figura 15 que o Método de Craig-Bampton e o Método de Elementos Finitos apresentam próximos somente para os dois primeiros modos apresentados (figura 15 (a)-(b)). O terceiro modo (figura 15 (c)) corresponde a frequência de 53,431 Hz pelo Método de Elementos Finitos.

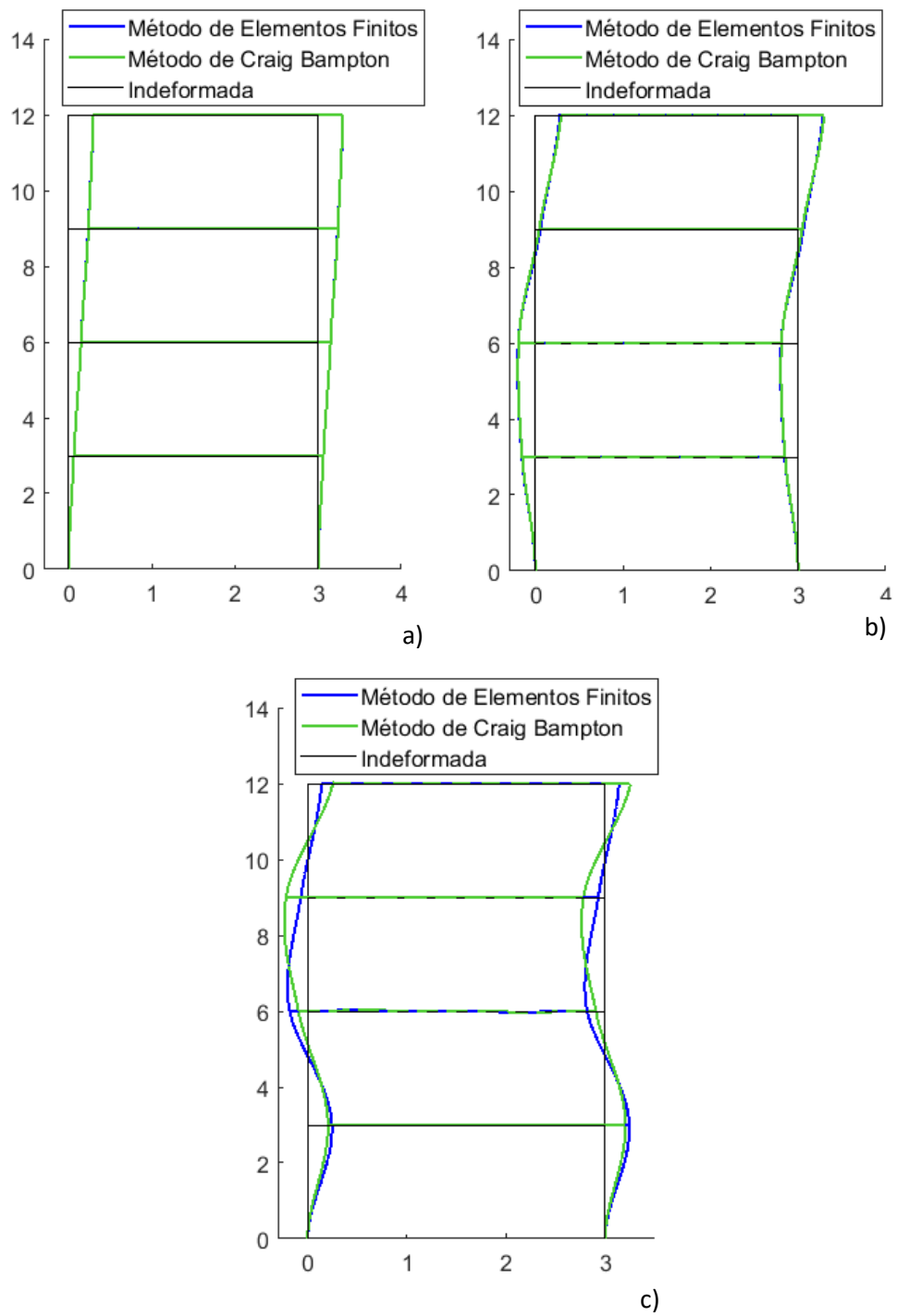


Figura 15: Primeiro - 10,156 Hz (a) segundo - 26,312 Hz (b) e terceiro - 53,431 Hz (c) modos de vibração para o pórtico acoplado.

Através do MAC apresentado na figura 16 é possível observar a consistência do método de Craig-Bampton com relação ao Método de Elementos Finitos.

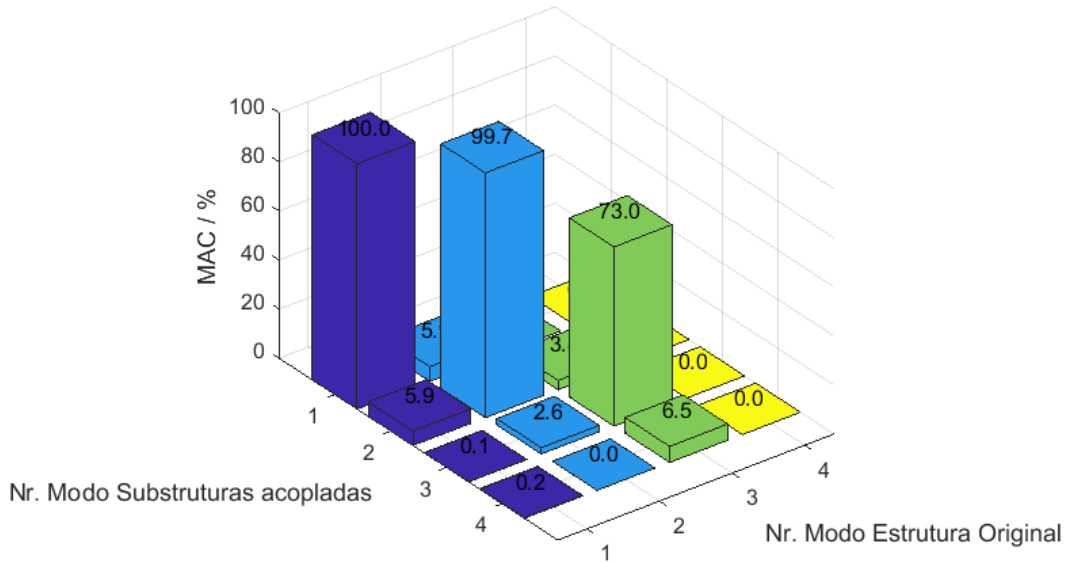


Figura 16: Coeficiente MAC relativo ao acoplamento de pórticos (0 a 30Hz).

A figura 16 evidencia que somente os dois primeiros modos obtidos via método de Craig-Bampton se correlaciona corretamente com o correspondente no Método de Elementos Finitos, pois apresentaram o coeficiente MAC próximo de 100%. O coeficiente MAC para o terceiro modo possui o valor de 73%, se mostrando inconsistente.

Mudando a faixa de frequência de interesse para 0 a 100 Hz, são selecionados para matriz transformação de Craig-Bampton dois modos para a subestrutura A e cinco modos para subestrutura B, observando os valores de frequência dados pela tabela 4.

Na tabela 6 é possível observar as frequências naturais obtidas para a estrutura completa através do Método de Elementos Finitos e através do método de Craig-Bampton com as respectivas diferenças entre os métodos.

Tabela 6: Diferença percentual de frequência obtida entre o método MEF e C-B (0 a 100 Hz)

Nº do modo	Craig-Bampton	MEF	Diferença (%)
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	
1	10,157	10,156	0,005
2	26,327	26,312	0,058
3	53,457	53,431	0,049
4	74,739	74,331	0,549
5	96,248	95,137	1,167
6	124,342	123,283	0,859

Observa-se pela tabela 6 que a diferença máxima entre as frequências naturais obtidas na faixa de frequência de interesse é de 1,167%. O sexto modo, relativo a frequência de 123,283 Hz pelo Método de Elementos Finitos, apresentou a diferença entre as frequências de 0,859 %.

A figura 17 apresenta os coeficientes MAC dado pela faixa de interesse de 0 a 100 Hz.

Demonstra-se pela figura 17 que o valor do coeficiente MAC apresentou valores próximos de 100% para os 6 primeiros modos, sendo que os cinco primeiros estão na faixa de frequência de interesse, conforme apresentado na tabela 6. O sexto modo apresentou-se consistente devido ao número de modos selecionados para matriz de transformação de Craig-Bampton.

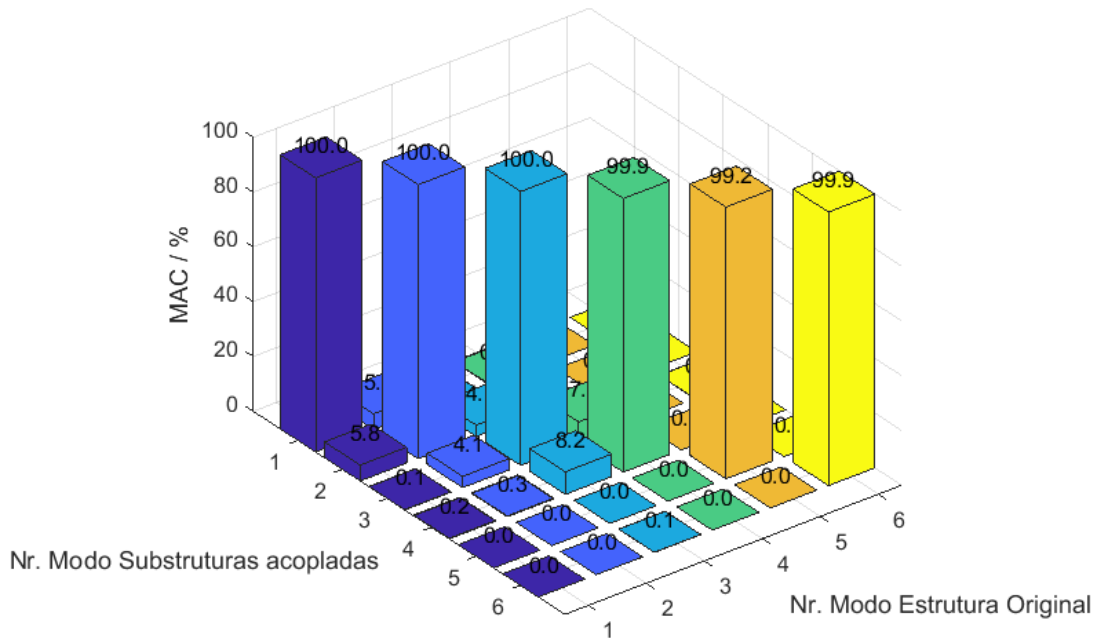


Figura 17: Coeficiente MAC relativo ao acoplamento de pórticos (0 a 100 Hz).

Observa-se que ocorreu uma melhor aproximação de frequências e modos quando foi considerado a faixa de frequência de interesse de 0 a 100 Hz.

Nessa aplicação, o Método de Elementos Finitos foi executado utilizando 348 equações, enquanto o método de Craig-Bampton para a faixa de frequência de 0 a 30 Hz utilizou 8 equações e para a faixa de frequência de 0 a 100 Hz utilizou-se 13 equações.

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou o acoplamento de subestruturas apertadas utilizando o método de Craig-Bampton, com objetivo de obter redução de custo computacional. Esse método é usual quando diferentes partes de uma estrutura são modeladas por diferentes equipes ou quando deseja-se fazer uma otimização, por exemplo. A discretização de cada subestrutura se deu através do Método de Elementos Finitos, posteriormente, obteve-se os modelos de ordem reduzida de cada subestrutura, para posterior acoplamento através de formulações do método de Craig-Bampton.

Através dos resultados dos problemas numéricos apresentados no capítulo anterior, pode-se observar que o uso do método de Craig-Bampton permite a redução do número de equações e, portanto, a redução do custo computacional.

A escolha da faixa de frequência de interesse faz com que o método tenha confiabilidade somente para os modos da estrutura acoplada que estão nesse intervalo. Entretanto, pode-se observar que o método de Craig-Bampton apresenta frequências e modos consistentes, quando comparado com o Método de Elementos Finitos, usando poucos modos na matriz de transformação. O aumento do número de modos, ou seja, aumento da faixa de frequência de interesse, faz com que a diferença entre o referido método e o Método de Elementos Finitos diminua.

No caso de subestruturas iguais, as montagens das matrizes através do Método de Elementos Finitos não necessitam serem elaboradas mais de uma vez, reduzindo ainda mais os custos computacionais.

Deve-se observar ainda, que para uma boa precisão do método de Craig-Bampton é necessário que os modos da matriz transformação e as respectivas matriz massa e rigidez sejam precisos, ou seja, o método de Craig-Bampton depende da discretização do Método de Elementos Finitos.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros propõe-se:

- ✓ Desenvolvimento do método de Craig-Bampton linear e não linear para placas e cascas;
- ✓ Desenvolver a solução do problema de autovalor através de um método numérico eficiente;
- ✓ Estudar a convergência baseada no número de modos utilizados.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L. **A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis**. In: First International Modal Analysis Conference, 1982. **Proceedings...** Orlando: IMAC, 1982. pp. 110-116.

ALLEN, M.S.; KUETHER, R.J. (2012). **Substructuring with Nonlinear Subcomponents: A Nonlinear Normal Mode Perspective**. In: Mayes R. *et al.* (eds) Topics in Experimental Dynamics Substructuring and Wind Turbine Dynamics, v. 2.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BATHE, K. J.; DONG, J. (2014). **Component mode synthesis with subspace iterations for controlled accuracy of frequency and mode shape solutions**, *Computers & Structures*, v. 139, p.28-32.

BITTERNCOURT, Marco Lúcio (1990). **Análise Estática e Dinâmica por Subestruturação e Programação Orientada por Objetos**. Dissertação de mestrado, Engenharia mecânica, Unicamp, São Paulo.

BUCKEL, Sebastian Johannes (2014). **Dynamic Substructuring using the Finite Cell Method**. Bachelor's thesis, Bachelor of Science program Engineering Science, Faculty of Civil, Geo and Environmental Engineering November.Conference, National Harbor, Orlando.

CHOPRA, Anil K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. New Jersey: Pearson Prentice Hall,

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 4th ed. edition, 2002.

CRAIG Jr., R. R.; CHUNG, Y. T. (1981). **A generalized substructure coupling procedure for damped systems**. AIAA paper, n. 81-0560, p.254–266.

CRAIG, R. R.; CHANG, C.-J. (1976a). **A review of substructure coupling methods for dynamic analysis**. Eng. Sci, v. 2 p. 393-408.

CRAIG, R.; CHANG, C. (1976b). **Free-Interface Methods of Substructures Coupling for Dynamic Analysis**, *AIAA Journal*, v. 14, n. 11, p. 1633–1635 (Technical Notes).

CRAIG, R.; BAMPTON, M., (1968). **Coupling of Substructures for Dynamic Analysis**, *AIAA Journal*, v. 6, n. 7, p. 1313–1319.

CRAIG, R.; KURDILA, A. **Fundamentals of Structural Dynamics**, New York: John Wiley, 2^a ed, 2006.

D'AMBROGIO, W.; SESTIERI, A. (2004). **Unified Approach to Substructuring and Structural Modification Problems**, *Shock and Vibration journal*, v. 11, n. 3, p. 295–309.

DINIZ, Alberto Carlos Guimarães Castro. **Derivação dos Métodos de Síntese Modal de Componentes Usando Desenvolvimento Espectral**. In: VII Simpósio de Mecânica Computacional, 2006, Araxá. **Anais...Araxá: SIMMEC**, 2006.

GORDON, R. W.; HOLLKAMP, J. J. **Reduced-Order Models for Acoustic Response Prediction, Air Force Research Laboratory**. Wright-Patterson Air Force Base, 2011, AFRL-RB-WP-TR-2011-3040.

GUYAN, R. J. (1965). **Reduction of Stiffness and Mass Matrices**. *AIAA Journal*, v. 33, p. 380-1965.

HANG, Huajiang; SHANKAR, Krishna; LAI, Joseph C.S. (2009). **Effects of Distributed Structural Dynamic Modification with reduced degrees of freedom**. *Mechanical Systems and signal Processing*, v. 23, p. 2154-3177.

Harmin, M.Y.; COOPER, J. E. **Efficient prediction of aeroelastic behaviour including geometric nonlinearities**, In: ISMA Conference, 2010. **Proceedings...** Leuven: SEM, p. 3109-3128.

HOLLKAMP, J. J.; GORDON, R. W. (2008) **Reduced-order models for nonlinear response prediction: Implicit condensation and expansion**. *Journal of Sound and Vibration*, v. 318, n. 4, p. 1139-1153.

KLERK, D., RIXEN, D.J.; VOORMEEREN, S.N. (2008). **General framework for dynamic substructuring: History, review and classification of techniques**. *AIAA Journal*, v. 46, n. 5, p. 1169–1181.

KLERK, de D.; RIXEN, D.; JONG, J., **Frequency Based Substructuring (FBS) Method Reformulated According to the Dual Domain Decomposition Method**. In: the Fifteenth International Modal Analysis Conference, 2006. **Proceedings... IMAC-XV**, 2006.

KUETHER R. J., ALLEN, M. S., HOLLKAMP, J. J. (2017). **Modal Substructuring of Geometrically Nonlinear Finite Element Models with Interface Reduction**, *AIAA Journal*, v.55, n. 5, p.1695-1706.

KUETHER, R. J. (2014). **Nonlinear Modal Substructuring of Geometrically Nonlinear Finite Element Models**, Doctoral Thesis, Engineering Mechanics, University of Wisconsin-Madison.

KUETHER, R. J.; ALLEN, M. S. **Craig-Bampton Substructuring for Geometrically Nonlinear Subcomponents**. In: the 32nd International Modal Analysis Conference, 2014a, Orlando. **Proceedings...** Orlando: IMAC XXXI, 2014a.

KUETHER, R. J.; ALLEN, M. S. **Substructuring with Nonlinear Reduced Order Models and Interface Reduction with Characteristic Constraint Modes**. In: 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Boston, Massachusetts, 2014b.

LAW, Mohit; RENTZSCH, Hendrik (2016). **Predicting Mobile Machine Tool Dynamics by Experimental Dynamic Substructuring**. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*. v. 108, p. 127-134, 2014.

MACNEAL, R., (1971). **A hybrid method of component mode synthesis**. *Computers & Structures*, v.1, p. 581–601.

MCEWAN, M.; WRIGHT, J.R.; COOPER, J.E.; LEUNG, Y.T. (2001a). **A Finite Element / Modal Technique for Nonlinear Plate and Stiffened Panel Response Prediction**, *AIAA journal*, p. 2001-1595.

MCEWAN, M.; WRIGHT, J.R.; COOPER, J.E.; LEUNG, Y.T. (2001b). **A Combined Modal/Finite Element Analysis Technique For The Dynamic Response Of A Non-Linear Beam To Harmonic Excitation.** *Journal Of Sound And Vibration*, v.243, n.4, p. 601-624.

MCPHEETERS, Barton W.; LEV, Avivi; BOGERT, Philip B.; SCAVUZZO, Rudolph J. **Dynamic Substructuring for Shock Spectrum Analysis Using Component Mode Synthesis.** In: The 58th Shock and Vibration Symposium, 1988, United States, **Proceedings...** United States: Shock and Vibration Symposium, p.63-77.

OHAYON, R; SAMPAIO, R.; SOIZE. C. (2013). **Dynamic substructuring of structural systems with dissipative physical interface.** In: the 22nd International Congress of Mechanical Engineering, 2013. **Proceedings...** Ribeirão Preto: COBEM 2013.

PÁSTOR, M & Binda, Michal & Harčarik, Tomáš. (2012). **Modal Assurance Criterion.** *Procedia Engineering*. 48. 543–548. 10.1016/j.proeng.2012.09.551.

PAZ, Mario; LEIGH, William. **Structural Dynamics: Theory and Computation.** Orlando: Kluwer Academic Publishers, 5ª Ed, 2004.

RAO, Singiresu. **Vibrações Mecânicas.** São Paulo: Editora Pearson Prentice Hall, 4ª ed, 2011.

RIXEN, D. (2004) **Dual Craig–Bampton Method for Dynamic Substructuring.** *Journal of Computational Mathematics*, v. 168, n. 1–2, p. 383–391.

RUBIN, S. (1975). **Improved component mode representation for structural dynamic analysis.** *AIAA Journal*, v. 18, p. 995–1006.

SHANMUGAM, A; PADMANABHAN, Chandrmouli (2006). **A Fixed-Free Interface Component Mode Synthesis Method for Rotordynamic Analysis.** *Journal of Sound and Vibration*. v. 297, p.664-679.

VAZ, Luiz Eloy. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

VOORMEEREN, S. N.; RIXEN, D. J. (2012). **A Family of Substructure Decoupling Techniques Based on a Dual Assembly approach.** *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 27, p. 379-396.

WENNEKER, F. (2013). **Component Mode Synthesis for geometrically nonlinear structures**. MSc. Thesis, Engineering Mechanics, Delft University of Technology.