

**PRISCILA BRANDÃO SILVA**

**ANÁLISE NUMÉRICA NÃO LINEAR DE LAJES DE CONCRETO COM  
FÔRMA DE AÇO INCORPORADA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva

Ouro Preto  
Março de 2018

S586a

Silva, Priscila Brandão.

Análise numérica não linear de lajes de concreto com fôrma de aço incorporada [manuscrito] / Priscila Brandão Silva. - 2018. xii, 104f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

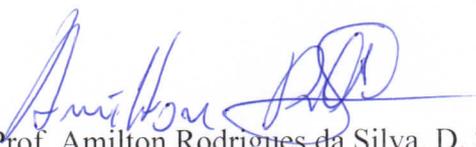
1. Lajes mistas. 2. Elementos planos de casca. 3. Conexão parcial. 4. Cisalhamento longitudinal. I. Silva, Amilton Rodrigues da. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624.014

# ANÁLISE NUMÉRICA NÃO LINEAR DE LAJES DE CONCRETO COM FÔRMA DE AÇO INCORPORADA

**AUTORA: PRISCILA BRANDÃO SILVA**

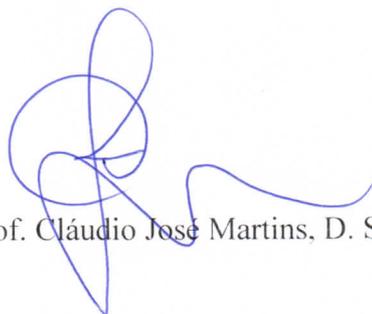
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 02 de março de 2018, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D. Sc. – UFOP



Prof. Cláudio José Martins, D. Sc. – CEFET/MG

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por me iluminar e me dar capacidade e forças nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, professor Amílton que não mediu esforços para o desenvolvimento desse trabalho, pela atenção, paciência e dedicação durante toda a orientação.

À minha família, especialmente a meus pais, Mário e Geralda, e ao meu irmão Mário Júnior que sempre me apoiaram e me incentivaram em todas as etapas da minha vida.

Ao meu esposo, Gustavo, por todo apoio, amor e compreensão.

Aos colegas de mestrado, pelos momentos de estudo e amizade, em especial à Tatiane e Denise.

À Isabela, pela companhia e paciência durante esses dois anos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos demais professores e funcionários do PROPEC, assim como a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, meu muito obrigado!

*“Não se preocupe em fazer muitas coisas, mas procure realizar perfeitamente aquilo que ache ser da vontade de Deus.”*

*Santo Afonso Maria de Ligório*

Resumo da dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil

## **Análise numérica não linear de lajes de concreto com fôrma de aço incorporada**

Priscila Brandão Silva

Março/2018

Orientador: Amilton Rodrigues da Silva

Os edifícios de múltiplos andares são cada vez mais comuns em grandes cidades para diversas finalidades, como edifícios residenciais e comerciais. As lajes de concreto com fôrma de aço incorporada são largamente utilizadas nesse tipo de edifícios. O comportamento das lajes mistas é governado pelo cisalhamento longitudinal na interface entre o aço e o concreto, que é desenvolvido em lajes sob flexão simples. O método  $m-k$  e o método da interação parcial, utilizados no cálculo da resistência ao cisalhamento na interface aço-concreto de lajes mistas, são baseados em ensaios experimentais caros e de longa duração. O uso do método dos elementos finitos apresenta vantagens como alta eficiência e baixo custo, logo, a análise numérica das lajes mistas se apresenta como uma alternativa interessante.

O objetivo principal desse trabalho é implementar um modelo de elementos finitos para análise numérica não linear de lajes de concreto com fôrma de aço incorporada. Dessa forma, dois elementos finitos planos de casca para análise numérica não linear de placas de concreto estrutural simples ou armado e placas de aço são implementados. Na formulação do primeiro é utilizada a teoria de placas de Reissner-Mindlin (placas espessas) definindo um elemento plano de casca com nove nós e cinco graus de liberdade por nó a ser utilizado na modelagem de placas de concreto. O segundo elemento plano de casca é baseado na teoria de placas de Kirchhoff (placas finas) considerando quatro nós e cinco graus de liberdade por nó, e é utilizado na análise numérica de placas de aço ou de concreto simples ou armado.

Nas análises numéricas apresentadas no presente trabalho a laje de concreto, de espessura dada pela altura total da laje menos a altura da forma de aço, e a fôrma de aço são modeladas com elementos planos de casca. A nervura de concreto é modelada com elementos de barra. O contato entre o aço e o concreto é modelado através de elementos de interface. As não linearidades geométrica e do material são consideradas na análise numérica. Os exemplos analisados validam o modelo numérico sugerido neste trabalho apresentando a vantagem de usar uma discretização bidimensional do problema enquanto que os modelos numéricos comparativos utilizam de uma discretização tridimensional da laje de concreto.

Palavras chaves: Lajes mistas, Elementos planos de casca, Conexão parcial, Cisalhamento longitudinal.

*Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.*

## **Numerical non-linear analysis of composite slabs with steel decking**

Priscila Brandão Silva

March/2018

*Advisor:* Amilton Rodrigues da Silva

Multi-storey buildings are increasingly common in large cities for various purposes such as residential and commercial buildings. Composite slabs with steel decking are widely used in this type of building. The behavior of composite slabs is governed by longitudinal shear at the interface between the steel deck and concrete, which is developed in slabs under simple bending. The  $m-k$  method and the partial connection method, that are used in the evaluation of shear strength at the steel-concrete interface of composite slabs, are based on expensive and long-term experimental tests. The use of the finite element method presents advantages such as high efficiency and low cost, so the numerical analysis of composite slabs is an interesting alternative.

The main objective of this work is to implement a finite element model for nonlinear numerical analysis of concrete with steel decking. Thus, two finite shell elements for nonlinear numerical analysis of reinforced or unreinforced concrete plates and steel plates are implemented. In the formulation of the first element, the Reissner-Mindlin plate theory (thick plates) is used to define flat shell element with nine nodes and five degrees of freedom per node to be used in the modeling of reinforced concrete slabs or unreinforced concrete. The second flat shell element is based on the Kirchoff plate theory (thin plates) considering four nodes and five degrees of freedom per node, and it is used in the numerical analysis of steel plates or reinforced concrete or unreinforced concrete.

In the numerical analyzes presented in the present work, the slab of concrete, of thickness given by the total height of the slab less the height of the steel deck, and the steel deck are modeled with flat shell elements. The concrete rib is modeled with bar elements. The contact between steel deck and concrete is modeled through interface elements. The geometric and material nonlinearities are considered in the numerical analysis. The analyzed examples validate the numerical model suggested in this work, presenting the advantage of using a two-dimensional discretization of the problem while in comparative numerical models are uses a three-dimensional discretization of the concrete slab.

**Key words:** Composite slabs, Flat shell elements, Partial connection, Longitudinal shear.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Esquema de uma laje mista.....	1
Figura 2.1 - Esquema de um pull-out test (adaptado de CHEN e SHI, 2011).....	7
Figura 2.2 - Esquema do push-off test (adaptado de DANIELS e CRISINEL, 1993).....	8
Figura 2.3 - Esquema do ensaio de flexão (adaptado de CHEN e SHI, 2011).....	9
Figura 2.4 - Determinação dos parâmetros $m$ e $k$ (EUROCODE 4, 2004).....	9
Figura 2.5 - Inclinação transversal das mossas.....	11
Figura 2.6 - Esquema do ensaio de flexão (RÍOS <i>et al.</i> , 2017).....	14
Figura 2.7 - a) Esquema da perfuração da chapa de aço, b) Chapa de aço perfurada, c) Uso da fôrma de aço perfurada (FERRER <i>et al.</i> , 2018) .....	14
Figura 2.8 - Elementos de placa divididos em camadas.....	15
Figura 3.1 - Modelo de laje mista implementada .....	19
Figura 3.2 - Representação dos elementos utilizados: (a) vista em perspectiva, (b) vista do plano xz .....	20
Figura 3.3 - Elemento plano de casca de nove nós dividido em camadas.....	21
Figura 3.4 - Curva tensão-deformação para o concreto comprimido (CEB/FIP, 2010).....	23
Figura 3.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (CEB/FIP, 2010) .....	24
Figura 3.6 – Área das barras de aço e largura de influência (DIAS, 2016).....	29
Figura 3.7 – Elemento finito retangular de nove nós (DIAS, 2016). .....	30
Figura 3.8 - Transformação do elemento de 9 nós para o elemento de 4 nós .....	37
Figura 3.9 - Coordenadas do lado do elemento (adaptado de RAZAQPUR <i>et al.</i> , 2002).....	44
Figura 3.10 - Graus de liberdade do elemento de viga e tensões em um elemento infinitesimal (Silva, 2010) .....	49
Figura 3.11 - Graus de liberdade do elemento de interface (Silva, 2010).....	53
Figura 3.12 - Deslizamento longitudinal (Silva, 2010) .....	53
Figura 4.1 – Geometria da fôrma (Chen e Shi, 2011) .....	58
Figura 4.2 - Discretização da laje .....	58
Figura 4.3 - Curva tensão cisalhante x deslizamento .....	59
Figura 4.4 - Carga x Deflexão no meio do vão .....	60
Figura 4.5 - Carga x Deslizamento na extremidade .....	61
Figura 4.6 - Deformada da laje.....	62
Figura 4.7 – Fôrma de aço .....	62
Figura 4.8 - Armadura longitudinal (Johnson e Shepherd, 2013) .....	63

Figura 4.9 - Curva tensão cisalhante x deslizamento .....	64
Figura 4.10 – Curva carga x deslocamento .....	65
Figura 4.11 - Curva carga x deslizamento .....	65
Figura 4.12 - Esquema da laje contínua .....	66
Figura 4.13 - Fôrma de aço (Gholamhoseini <i>et al.</i> , 2013).....	66
Figura 4.14 - Detalhe da armadura negativa (Gholamhoseini <i>et al.</i> , 2013) .....	66
Figura 4.15 – Esquema da laje contínua (Gholamhoseini <i>et al.</i> , 2013).....	67
Figura 4.16 - Curva tensão cisalhante x deslizamento .....	68
Figura 4.17 - Curva carga x deflexão no meio do vão .....	69
Figura 4.18 - Curva carga x deslizamento na extremidade para a laje contínua .....	69
Figura 4.19 - Laje discretizada .....	70
Figura 4.20 - Deformada da laje contínua .....	70
Figura 4.21 - Forma de aço (Ríos <i>et al.</i> , 2017).....	71
Figura 4.22 – Ensaio com quatro pontos de carregamento e diagrama de esforços cortantes (Ríos <i>et al.</i> , 2017) .....	71
Figura 4.23 - Laje AT6 .....	72
Figura 4.24 – Forma da curva tensão cisalhante x deslizamento (Ríos <i>et al.</i> , 2017) .....	73
Figura 4.25 - Carga x deflexão - Laje AT6 .....	74
Figura 4.26 - Laje AT6 – Curva carga x deslizamento .....	75
Figura 4.27 – Laje AM6 – Curva carga x deflexão .....	75
Figura 4.28 – Laje AM6 – Curva carga x deslizamento na extremidade .....	76
Figura 4.29 – Laje AF6 – Curva carga x deflexão no meio do vão.....	76
Figura 4.30 – Laje AF6 – Curva carga x deslizamento na extremidade .....	77
Figura 4.31 - Geometria da fôrma (Chen e Shi, 2011).....	77
Figura 4.32 - Discretização da laje P1-2.....	78
Figura 4.33 – Estágios do comportamento da conexão aço-concreto (MARCIUKAITIS, 2005) .....	79
Figura 4.34 - Curva tensão cisalhante x deslizamento .....	80
Figura 4.35 – Laje P1-2 – Carga x Deflexão no meio do vão .....	81
Figura 4.36 – Laje P2-2 – Carga x Deflexão no meio do vão .....	81
Figura 4.37 – Deformada da laje P1-2.....	82
Figura 4.38 - Geometria da fôrma .....	82
Figura 4.39 – Curva tensão cisalhante versus deslizamento .....	83
Figura 4.40 – Curva Carga deslizamento para a laje mista #5 .....	84

Figura 4.41 – Curva carga deslocamento para a laje mista #5 .....	85
Figura 4.42 – Curva Carga deslizamento para a laje mista #9 .....	86
Figura 4.43 – Curva carga deslocamento para a laje mista #9 .....	86
Figura 4.44 - Curvas Tensão cisalhante versus deslizamento .....	88
Figura 4.45 - Curva carga-deslocamento e carga-deslizamento para a laje mista #6.....	89
Figura 4.46 - Curva carga-deslocamento e carga-deslizamento para a laje mista #7.....	89
Figura 4.47 - Curva carga-deslocamento e carga-deslizamento para a laje mista #8.....	90

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Pontos da curva $\tau \times s$ .....	59
Tabela 4.2 – Pontos da curva $\tau \times s$ .....	64
Tabela 4.3 – Dimensões da laje KF70.....	67
Tabela 4.4 – Pontos da curva $\tau \times s$ .....	67
Tabela 4.5 - Propriedades dos materiais.....	68
Tabela 4.6 – Dados das lajes .....	71
Tabela 4.7 - Pontos das curvas Tensão cisalhante versus deslizamento .....	74
Tabela 4.8 - Dados das lajes .....	78
Tabela 4.9 – Dados dos materiais e da conexão aço-concreto .....	79
Tabela 4.10 – Pontos da curva $\tau \times s$ .....	80
Tabela 4.11 - Dimensões das lajes e propriedades dos materiais.....	83
Tabela 4.12 - Pontos das curvas mostradas na Figura 4.35.....	84
Tabela 4.13 – Força cortante máxima para as diferentes lajes mistas.....	87
Tabela 4.14 - Pontos das curvas Tensão cisalhante versus deslizamento .....	88

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	1
1.2	JUSTIFICATIVA .....	3
1.3	OBJETIVOS .....	4
1.4	METODOLOGIA .....	4
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	5
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>7</b>
2.1	ENSAIOS EXPERIMENTAIS PARA ANÁLISE DA INTERFACE .....	7
2.2	ESTUDOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS SOBRE LAJES MISTAS.....	10
2.3	ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE PLACAS DE CONCRETO ARMADO .....	14
2.4	ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE PLACAS FINAS .	17
<b>3</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b> .....	<b>19</b>
3.1	ELEMENTO PLANO DE CASCA ESPESSE .....	21
3.2	ELEMENTO PLANO DE CASCA FINO.....	37
3.2.1	FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE CASCA FINO.....	38
3.2.2	TRANSFORMAÇÃO PARA O ELEMENTO DE QUATRO NÓS .....	43
3.3	ELEMENTO DE BARRA.....	49
3.4	ELEMENTO DE INTERFACE.....	52
<b>4</b>	<b>EXEMPLOS E RESULTADOS</b> .....	<b>57</b>
4.1	ENSAIO DE FLEXÃO.....	57
4.2	LAJE MISTA COM ARMADURA LONGITUDINAL .....	62
4.3	LAJE CONTÍNUA .....	66
4.4	ENSAIO COM QUATRO PONTOS DE CARREGAMENTO.....	70
4.5	LAJE COM FÔRMA DE AÇO REENTRANTE.....	77
4.6	AVALIAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE LAJES ESBELTAS E LAJES ESPESSAS.....	82

<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>91</b>
5.1	COMENTÁRIOS GERAIS .....	91
5.2	CONCLUSÕES .....	92
5.3	TRABALHOS FUTUROS .....	93
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>94</b>
	<b>APÊNDICE A – DESCRIÇÃO DO PROGRAMA .....</b>	<b>97</b>
	<b>APÊNDICE B – MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO .....</b>	<b>102</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Um sistema estrutural misto de aço e concreto é aquele formado por perfis de aço que trabalham associados ao concreto que pode ser simples ou armado, de forma a aproveitar as melhores características mecânicas de cada material. Essa associação gera pilares, vigas, lajes e ligações mistas. Nesse trabalho será abordado o estudo do comportamento estrutural das lajes mistas, motivo pelo qual esse texto se concentra apenas nesse elemento estrutural.

Segundo Veljkovic (1996), os sistemas de lajes mistas, também conhecidas como lajes de concreto com fôrma de aço incorporada, surgiram no final da década de 1930 e se popularizaram durante o final da década de 1980 quando surgiu o interesse em construções rápidas. Campos (2001) afirma que o sistema estrutural de lajes mistas começou a ser utilizado no Brasil na década de 1990 e vem se difundindo desde então.

O uso desse tipo de sistema de lajes traz algumas vantagens como rápida instalação, dimensões e pesos reduzidos e, economia com fôrmas, visto que a chapa de aço desempenha essa função. Além disso, a fôrma de aço pode ser utilizada como plataforma de trabalho durante a fase de construção.

As lajes mistas são compostas por uma fôrma de aço perfilada formada a frio, conhecida como *steel deck*, e uma laje de concreto. A chapa de aço deve ser projetada para resistir às cargas de construção e, após o endurecimento do concreto atuar como parte ou toda a armadura de tração, e o concreto deve ser projetado para suportar os esforços de compressão e de cisalhamento vertical. A laje possui armaduras de distribuição para controlar os problemas de retração e fissuração do concreto e, nos casos de lajes contínuas são utilizadas armaduras de reforço para auxiliar na resistência à momentos fletores negativos. A Figura 1.1 mostra um esquema de uma laje mista de aço e concreto.

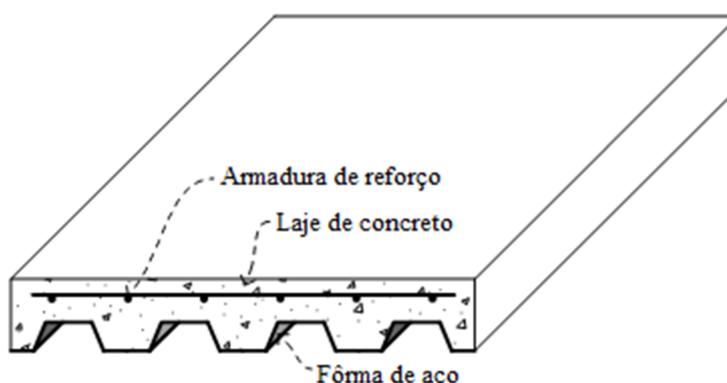


Figura 1.1 - Esquema de uma laje mista.

Existem vários fatores que influenciam na resistência ao cisalhamento da interface como: as espessuras da chapa de aço e da laje de concreto, o formato dessas chapas de aço, geometria, profundidade e inclinação das mossas e distância entre elas, a forma de carregamento, o tipo de ancoragem nas extremidades da laje e o vão de cisalhamento, que é definido na NBR 8800 (2008) para diferentes casos de carregamento:

- Um quarto do vão teórico da laje na direção das nervuras para cargas uniformemente distribuídas;
- A distância entre o ponto de aplicação de uma carga e o centro do apoio mais próximo para o caso de duas cargas concentradas simétricas;
- A relação entre o momento máximo e a maior reação de apoio para as outras condições de carregamento.

Os possíveis modos de falha para lajes mistas são: flexão, cisalhamento longitudinal, cisalhamento vertical e punção. No entanto, vários estudos experimentais mostraram que na maioria dos casos práticos o comportamento das lajes mistas é governado pelo cisalhamento longitudinal na interface entre o aço e o concreto, que é desenvolvido em lajes sob flexão simples.

Queiroz *et al.* (2010) indicam os casos em que os outros modos de falha podem ocorrer:

- Flexão: ocorre com a plastificação total da seção. A seção atinge a ruptura somente se o vão de cisalhamento for suficientemente grande e considerando interação total no contato entre o aço e o concreto;
- Cisalhamento vertical: pode ocorrer em lajes espessas, com vão curto submetidas a grandes carregamentos;
- Punção: é atingido se uma alta carga concentrada for aplicada em uma área pequena e sob uma laje pouco espessa.

Veljkovic (1996) afirma que a principal característica do modo de falha devido ao cisalhamento longitudinal é o deslizamento do concreto sobre a chapa de aço, quando a laje está submetida a um carregamento menor que a carga correspondente à resistência à flexão, o momento plástico resistente, calculado de acordo com a teoria plástica.

Para o aço e o concreto atuarem de forma mista é necessário que eles trabalhem em conjunto, apresentando uma aderência mecânica superior ao esforço de cisalhamento longitudinal na interface (CAMPOS, 2001). Assim, para garantir o comportamento misto da

laje, são utilizados dispositivos que produzem uma “ligação” entre os materiais. A NBR 8800 (2008) cita dois recursos possíveis:

- Ligação mecânica por meio de mossas (saliências) nas fôrmas de aço trapezoidais e,
- Ligação por atrito devido ao confinamento do concreto nas fôrmas de aço reentrantes.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Os edifícios de múltiplos andares são cada vez mais comuns em grandes cidades para diversas finalidades, como residenciais, comerciais, garagens, entre outras. Nesses tipos de edificações a utilização de estruturas de aço e estruturas mistas está em expansão, sendo que o sistema de lajes de concreto com fôrma de aço incorporada vem sendo utilizado em larga escala.

O método  $m-k$  e o método da interação parcial, utilizados no cálculo da resistência ao cisalhamento na interface aço-concreto de lajes mistas, indicados por normas técnicas sobre o assunto, como a NBR 8800 (2008) e o EUROCODE 4 (2004), são dependentes de ensaios experimentais em escala real, que são caros e demorados. No método  $m-k$ , ‘ $m$ ’ representa o intertravamento mecânico entre o aço e o concreto e ‘ $k$ ’ corresponde à fricção entre eles. Os valores de ‘ $m$ ’ e ‘ $k$ ’ são diferentes para cada tipo de fôrma de aço, o que implica na necessidade de ensaios experimentais para cada variação do perfil da chapa de aço (MARIMUTHU, 2006).

Abdullah e Easterling (2009) apresentaram a análise numérica de lajes mistas utilizando o método dos elementos finitos como uma alternativa econômica em relação aos ensaios de flexão em escala real, possibilitando a redução na frequência desses ensaios. A grande quantidade de fatores que influenciam no comportamento da interface aço-concreto traz certa dificuldade à modelagem numérica. Os autores afirmam ainda que a modelagem correta desse comportamento, dada na análise numérica pela relação entre a tensão de cisalhamento e o deslizamento entre a fôrma de aço e o concreto, é o fator que mais afeta na precisão dos resultados.

Vários trabalhos encontrados na literatura buscaram desenvolver um método simples para a modelagem dessa relação, com destaque ao trabalho de Ríos *et al.* (2017) que apresentaram um método dependente de poucos parâmetros. Os autores utilizaram também um método de interpolação apresentado anteriormente por Abdullah e Easterling (2008) a partir do qual é possível analisar lajes com comportamento desconhecido.

Observa-se da literatura sobre assunto uma busca da simulação numérica do problema de lajes de concreto armado com fôrma de aço incorporada usando o método dos elementos finitos. Na maioria dos casos (ABDULLAH E EASTERLING, 2009; CHEN E SHI, 2011; GHOLAMHOSEINI *et al.*, 2014; RÍOS *et al.*, 2017) os pesquisadores simulam a laje de concreto por elementos finitos tridimensionais, a fôrma de aço por elementos finitos planos de casca, e a conexão usando elementos de ligação. Nesse trabalho são utilizados apenas elementos planos de casca, unidimensional de barra e interface para simulação numérica da laje mista, proporcionando uma análise de menor custo computacional comparada àquela que utiliza de discretização tridimensional da parte de concreto da laje mista.

### **1.3 OBJETIVOS**

O objetivo geral deste trabalho é implementar um modelo de elementos finitos para análise numérica não linear de lajes mistas submetidas à sua capacidade última. A partir do objetivo geral têm-se os objetivos específicos listados a seguir:

- Simular o comportamento estrutural de placas de concreto considerando o comportamento ortotrópico do concreto após a fissuração com elementos finitos planos de casca;
- Simular o comportamento estrutural de placas de aço com elementos finitos planos de casca;
- Modelar a conexão deformável entre a forma de aço e o concreto com elementos de interface;
- Modelar as nervuras da laje mista com elementos de barra;
- Analisar alguns exemplos e comparar com resultados encontrados na literatura para validar assim o modelo proposto.

### **1.4 METODOLOGIA**

A metodologia deste trabalho consiste no desenvolvimento e implementação do modelo de lajes mistas em elementos finitos dentro do programa FEMOOP, *Finite Element Method Object Oriented Program* (GUIMARÃES, 1992). Esse programa é estruturado com uma hierarquia de classes, de acordo com os conceitos da programação orientada a objetos (POO). Algumas dessas classes são listadas no anexo A, em que é apresentado também um

fluxograma com algumas classes utilizadas na análise do problema de lajes de concreto com fôrma de aço incorporada. Neste trabalho, são incluídos novos elementos para análise de lajes de concreto com fôrma de aço incorporada usando elementos planos de casca, elemento de barra e elementos de interface. Dessa forma, são feitas alterações no FEMOOP criando novas filhas das classes *cAnmModel* e *cElement*.

A laje mista é modelada com elementos de casca sobrepostos. Para isso foi implementado um elemento de casca capaz de simular o comportamento estrutural de placas de concreto reforçado submetidas à sua capacidade última, e outro para simular o comportamento estrutural de placas de aço ou de concreto também submetidas a suas capacidades últimas.

A dificuldade na implementação dos elementos propostos nesse trabalho se deve a análise não linear do material, principalmente no caso do concreto em que, devido à sua baixa resistência a tração, ocorre um processo de fissuração, gerando um comportamento ortotrópico após o início do aparecimento das fissuras. Para essa análise será usado o modelo de fissuração apresentado por Huang *et al.* (2003). A ação conjunta da laje de concreto e a fôrma de aço incorporada deve-se ao atrito e à resistência mecânica gerada pelas mossas na fôrma de aço. Essa rigidez no contato entre o aço e o concreto será modelada por um elemento de interface (SILVA, 2010) que tem a função de simular a rigidez ao deslizamento e separação no contato, bem como de ligar os dois elementos de placa.

Outra dificuldade na simulação da laje mista usando elementos planos de casca para a laje de concreto é a presença das nervuras. Nesse trabalho é utilizado um elemento de barra para simular o comportamento estrutural das nervuras. A seção transversal desse elemento de barra é composta pelo concreto dentro da nervura, que pode em determinadas lajes mistas possuir armaduras.

Como a interface de contato entre a fôrma de aço e o concreto apresenta comportamento altamente não linear e deseja-se determinar a carga última da laje mista, as não linearidades geométrica e do material são consideradas na análise numérica como pode ser observado no capítulo que descreve a formulação dos elementos planos de casca usados na simulação numérica da laje de concreto e fôrma de aço.

## **1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Esse trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica sobre o comportamento estrutural de lajes mistas, com destaque ao

comportamento da interface entre a fôrma de aço e o concreto. Além disso, é apresentada uma revisão bibliográfica sobre elementos de placa para análise não linear de lajes de concreto, e uma revisão para elementos de placa finos, já que a fôrma de aço possui pequena espessura em relação à espessura da laje de concreto nas lajes mistas.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação do elemento finito para análise não linear de cascas espessas, que é implementado nesse trabalho para análise da laje de concreto, e a formulação do elemento finito para análise não linear de cascas finas, que é implementado nesse trabalho tanto para análise da fôrma de aço, quanto para a laje de concreto.

São expostos alguns exemplos de lajes mistas, no Capítulo 4, que foram estudados por outros autores de forma experimental e numérica, e comparados com os resultados obtidos usando os elementos finitos implementados nesse trabalho.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais com as conclusões obtidas durante o desenvolvimento desse trabalho, seguido pelas referências bibliografias citadas ao longo do texto.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O comportamento da interface de contato entre a fôrma de aço e o concreto de lajes mistas têm sido estudado extensivamente. A compreensão da interação parcial na interface de contato é necessária, pois o principal modo de ruptura para lajes mistas é devido ao cisalhamento longitudinal.

A partir de ensaios experimentais são obtidos os dados necessários para gerar curvas do deslizamento em função da tensão de cisalhamento. Os principais ensaios experimentais utilizados no estudo de lajes mistas estão apresentados no item 2.1. Vários trabalhos experimentais e numéricos para análise da capacidade última de lajes mistas podem ser encontrados na literatura. Uma revisão desses trabalhos é apresentada no item 2.2. Como neste trabalho analisa-se o comportamento não linear do concreto e aço em lajes mistas através do método dos elementos finitos, nos itens 2.3 e 2.4 é feita uma breve revisão sobre trabalhos que utilizaram tal método em suas formulações.

### 2.1 ENSAIOS EXPERIMENTAIS PARA ANÁLISE DA INTERFACE

Os ensaios experimentais mais utilizados no estudo de lajes mistas são o *pull-out test*, o *push-off test* e o ensaio de flexão. O *pull-out test* é realizado para investigar o comportamento da resistência ao cisalhamento na interface entre a chapa de aço e o concreto (DANIELS e CRISINEL, 1993). Um esquema típico do ensaio é indicado na Figura 2.1. São aplicadas forças laterais, através de molas pré-tensionadas, para simular o peso próprio do concreto.

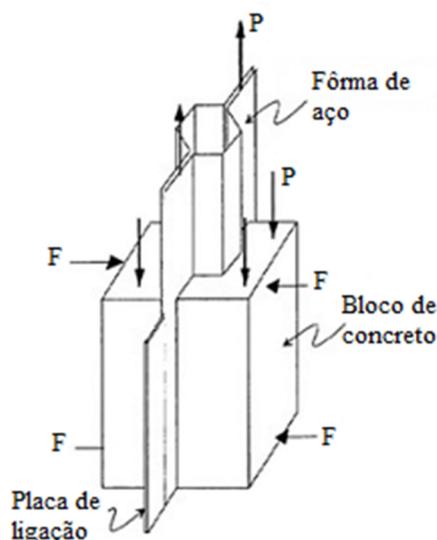


Figura 2.1 - Esquema de um pull-out test (adaptado de CHEN e SHI, 2011).

Os *push-off tests* têm como objetivo determinar o comportamento e a resistência da ancoragem da extremidade entre a viga, a fôrma de aço e a laje de concreto nos apoios (DANIELS e CRISINEL, 1993). O esquema de um *push-off test* pode ser observado na Figura 2.2.

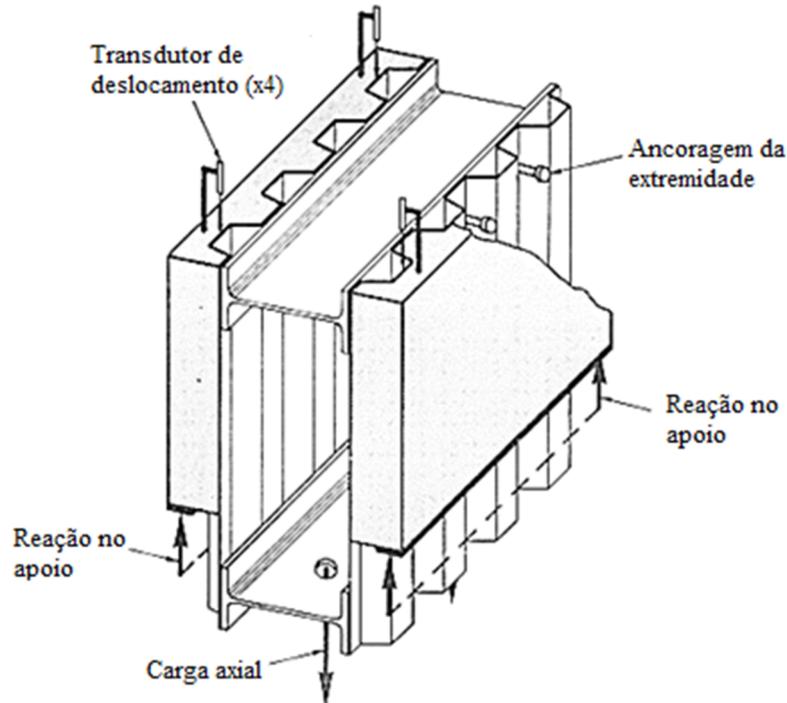


Figura 2.2 - Esquema do push-off test (adaptado de DANIELS e CRISINEL, 1993).

Abdullah e Easterling (2008) afirmam que o principal problema desses tipos de testes é que, devido à sua natureza, não capturam os efeitos da curvatura devido à flexão da laje e da razão entre o comprimento do vão de cisalhamento e a espessura efetiva do concreto.

O ensaio de flexão consiste na aplicação de duas cargas linearmente distribuídas sobre um corpo de prova de laje mista e é utilizado para a obtenção dos coeficientes do método *m-k*, em que *m* e *k* são constantes empíricas (em N/mm<sup>2</sup>) obtidas por meio de ensaios experimentais. Um esquema desse ensaio pode ser observado na Figura 2.3, em que as dimensões  $L_s$  correspondem ao vão de cisalhamento.

O método *m-k* é semi-empírico e é utilizado por normas como o EUROCODE 4 e a NBR 8800 (2008) para o cálculo da força cortante longitudinal resistente de cálculo de lajes mistas. Na equação 2.1 é dada a força cortante longitudinal resistente de cálculo (em Newtons), em que  $d_p$  é a distância da face superior da laje de concreto ao centro geométrico da seção efetiva da fôrma (em mm),  $b$  é a largura unitária da laje (1000 mm),  $L_s$  é o vão de cisalhamento (em mm) e  $A_s$  é a área da seção efetiva da fôrma.

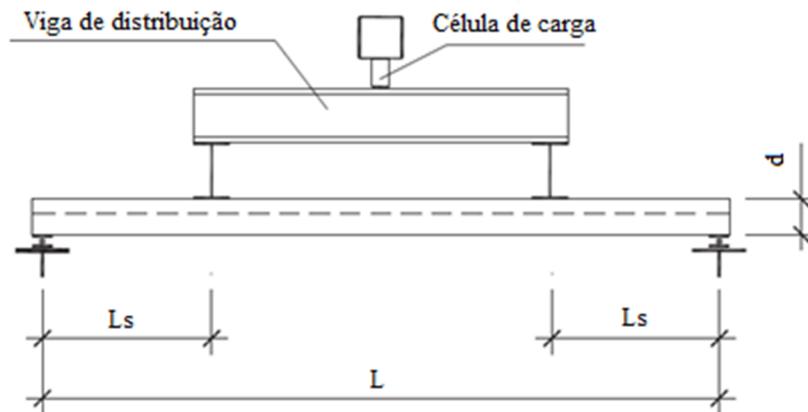


Figura 2.3 - Esquema do ensaio de flexão (adaptado de CHEN e SHI, 2011)

$$V = bd_p \left[ \left( \frac{mA_s}{bL_s} \right) + k \right] \quad (2.1)$$

Segundo Calixto *et al.* (2009) o método consiste em reescrever a anterior na forma  $y = mx + k$ , em que  $x = \frac{A_s}{bL_s}$  e  $y = \frac{V}{bd_p}$ .

Para cada modelo de laje são analisados dois grupos de três ensaios, indicados na Figura 2.4 pelas regiões A e B. Com os valores obtidos com os ensaios, encontra-se os valores de x e y e através de uma regressão linear com o método dos mínimos quadrados obtém-se os parâmetros m e k, como mostrado na Figura 2.4.

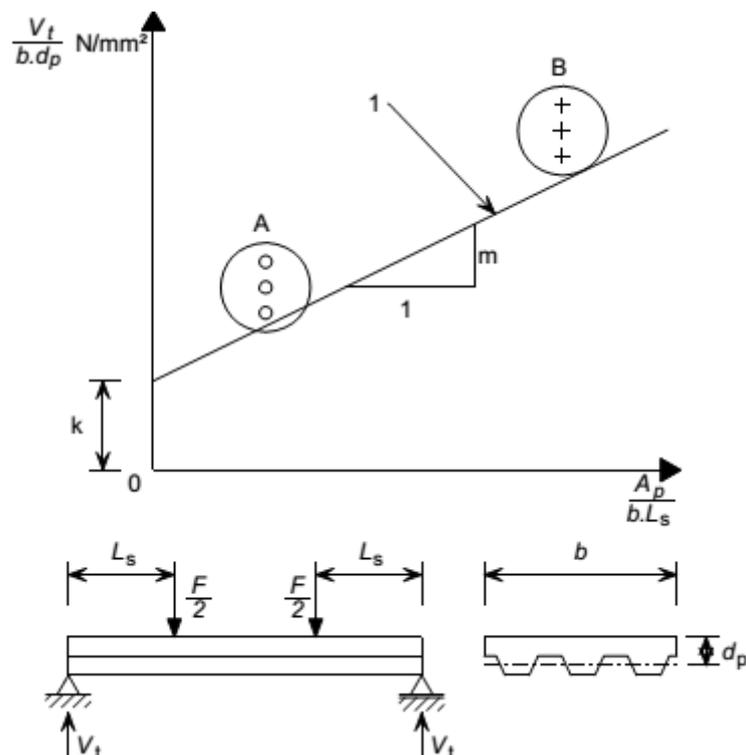


Figura 2.4 - Determinação dos parâmetros m e k (EUROCODE 4, 2004)

A curva que descreve o comportamento mecânico da conexão entre os dois materiais, característica que deve ser fornecida ao elemento de interface que irá representar mecanicamente esse contato, pode ser retirada de *pull-out tests* ou de ensaios de flexão. Contudo, com o uso de ensaios de flexão é possível gerar curvas deslizamento versus tensão de cisalhamento mais precisas. Além disso é possível analisar os efeitos da esbeltez no comportamento das lajes mistas.

## **2.2 ESTUDOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS SOBRE LAJES MISTAS**

Veljkovic (1996) buscou identificar os mecanismos que influenciam na transferência do cisalhamento longitudinal em lajes mistas. Um programa de ensaios em pequena escala foi estabelecido para obter os dados necessários para uma modelagem constitutiva da conexão parcial entre o aço e o concreto. Adicionalmente duas análises numéricas foram realizadas utilizando o método dos elementos finitos, sendo a primeira tridimensional, utilizando elementos de casca de quatro nós para modelar a fôrma de aço e elementos sólidos de oito nós para o concreto. Já na segunda análise foi utilizada uma modelagem bidimensional, com um elemento de viga de dois nós para modelar o aço, um elemento de placa de oito nós para modelar o concreto e um elemento de interface nodal para modelar as diferenças de comportamento do concreto na tração e compressão, ou seja, a não linearidade do concreto foi verificada a nível nodal através desse elemento. O autor concluiu que a distribuição do cisalhamento longitudinal é influenciada pela relação entre o cisalhamento longitudinal e o deslizamento, pela fissuração do concreto e pela redução do intertravamento mecânico devido à deformações na chapa de aço. Além disso, observou-se que a resistência na interface varia de acordo com a esbeltez da laje.

Resultado semelhante ao de Veljkovic (1996) foi verificado por Abdullah e Easterling (2009) que desenvolveram um procedimento de cálculo para o cisalhamento longitudinal em lajes mistas, chamado método do equilíbrio das forças, utilizando os resultados de ensaios de flexão. Os autores aplicaram as curvas de tensão de cisalhamento versus deslizamento obtidas com o método, em modelos de elementos finitos para analisar o efeito da esbeltez no comportamento das lajes mistas. O concreto foi modelado com elementos finitos sólidos e o aço com elementos finitos de casca. A interface entre a fôrma de aço e o concreto foi

modelada com elementos conectores aos quais foram atribuídas as curvas de cisalhamento versus deslizamento.

Ferrer *et al.* (2007) estudaram vários parâmetros geométricos que influenciam no comportamento da interface aço-concreto. Uma metodologia para a modelagem não linear tridimensional dos *pull-out test* foi desenvolvida para simular o comportamento do deslizamento na interface. Na modelagem foi utilizado o contato com fricção. O aço foi implementado usando um modelo elastoplástico multilinear em elementos finitos de casca espessos de quatro nós e o concreto como uma superfície de contato rígida. Um elemento linear foi usado para modelar as molas que simulam o peso próprio do concreto. Análises experimentais através dos ensaios *pull-out tests* e de flexão foram feitas para comparar e validar os resultados das análises de elementos finitos. Concluiu-se que os parâmetros que apresentaram uma maior influência na resistência ao deslizamento são a inclinação transversal das mossas, a espessura da chapa de aço e as condições da superfície de fricção. A inclinação transversal das mossas pode ser observada na Figura 2.5.

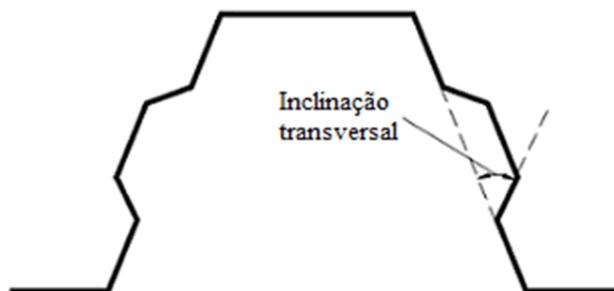


Figura 2.5 - Inclinação transversal das mossas.

Outro parâmetro que vem sendo estudado é o efeito da ancoragem das extremidades na resistência das lajes mistas. Essa ancoragem normalmente é feita com conectores de cisalhamento do tipo pino com cabeça soldados às flanges das vigas através da fôrma de aço ou com deformações das nervuras nas extremidades da laje. Os resultados de vários estudos mostraram que a ancoragem das extremidades melhora a resistência e o comportamento das lajes de concreto com fôrma de aço incorporada, como os obtidos por Chen (2002) que desenvolveu um estudo experimental para analisar a capacidade de carga de lajes mistas com várias condições de apoio.

Rana *et al.* (2015) afirmam que a ancoragem das extremidades em combinação com outros mecanismos de transferência do cisalhamento possui uma influência relevante na resistência, rigidez e ductilidade de lajes mistas. A partir de resultados experimentais os

autores concluíram que a ancoragem das extremidades produz um efeito positivo na resistência última das lajes mistas. Um modelo de elementos finitos tridimensional foi implementado pelos autores para simular o comportamento de lajes mistas com ancoragem nas extremidades. As não linearidades do concreto, dos conectores de cisalhamento, da chapa de aço e das armaduras de reforço foram consideradas. Elementos sólidos lineares hexaédricos de oito nós foram usados para modelar o concreto, os conectores de cisalhamento e a viga de aço. A fôrma de aço foi modelada com elementos de casca finos de 4 nós.

Degtyarev (2013) desenvolveu um modelo analítico para o cálculo da resistência de lajes mistas com ancoragem nas extremidades. O modelo foi formulado com base no equilíbrio, compatibilidade e relações tensão-deformação para a chapa de aço e o concreto. Com o modelo é possível capturar os efeitos do deslizamento sob certa tensão e deformação da laje e também, a mobilização da ancoragem nas extremidades. O modelo foi verificado em relação à dados de ensaios disponíveis e mostrou bons resultados.

Já no trabalho de Gholamhoseini *et al.* (2014) quatro tipos de fôrmas de aço foram testados para investigação da resistência última. A relação tensão de cisalhamento versus deslizamento foi obtida para cada laje durante o estudo experimental. Um modelo de elementos finitos tridimensional foi desenvolvido considerando as não linearidades geométrica e do material para análise das lajes estudadas. A solução foi obtida através do método iterativo de Newton-Raphson. A laje foi modelada com elementos sólidos tetraédricos com três graus de liberdade de translação por nó. Para a modelagem da interface de contato entre aço e o concreto foi utilizado o critério de Mohr-Coulomb. O modelo numérico apresentou precisão e confiabilidade em relação aos resultados obtidos em laboratório.

Chen e Shi (2011) desenvolveram uma abordagem utilizando o método dos elementos finitos para estudar o comportamento e o modo de falha de lajes mistas. Essa análise foi baseada no conceito do contato não linear na interface entre o aço e o concreto considerando adesão e fricção. As não linearidades do material e geométrica foram consideradas no modelo. O concreto foi modelado como um material de endurecimento isotrópico multilinear, considerando fissuração sob tração e esmagamento sob compressão. Para a fôrma de aço foi utilizada a lei constitutiva de endurecimento cinemático multilinear usando o critério de escoamento de Von Mises.

Majdí *et al.* (2014) analisaram o comportamento de um sistema de pisos mistos através da modelagem com elementos finitos. O sistema de pisos em questão contém pequenos perfis de aço contínuos que são ligados à parte superior da fôrma de aço nas regiões de ligação com as vigas e trabalham como conectores de cisalhamento. Uma análise não linear foi feita no

piso misto considerando todas as fontes de não linearidade. Adotou-se que os perfis formados a frio possuem relação tensão-deformação multilinear sob tração uniaxial. O concreto foi modelado considerando plasticidade, de acordo com o critério de Von Mises. O esmagamento do concreto não foi considerado. Para o caso do concreto tracionado, considerou-se comportamento linear antes da fissuração.

Os trabalhos de Chen e Shi (2011) e de Majdi *et al.* (2014) foram desenvolvidos com o auxílio do software computacional ANSYS e utilizaram os mesmos elementos finitos sólidos de oito nós para modelar o concreto e elementos finitos de casca de quatro nós para modelar as chapas de aço. O elemento finito sólido possui três graus de liberdade por nó (3 translações) e o elemento finito de casca possui seis graus de liberdade por nó (3 rotações e 3 translações). O comportamento da interface de contato também foi modelado utilizando o mesmo par de elementos de contato para os dois trabalhos. Os resultados dos dois trabalhos foram comparados com dados de ensaios experimentais e apresentaram valores convergentes. O sistema de pisos sugerido pelo segundo trabalho apresentou boa capacidade de transferência de cisalhamento, garantindo o comportamento misto entre o aço e o concreto.

Bradford (2010) desenvolveu a formulação de uma modelagem genérica para lajes mistas sujeitas a retração, deformações plásticas (devido à cargas de longa duração) e deformações térmicas considerando a interação parcial na interface entre a fôrma de aço e o concreto utilizando o princípio dos trabalhos virtuais. O aço foi considerado um material elástico e o concreto modelado como um componente não fissurado com uma deformação indireta devido a retração, pois a formulação foi desenvolvida para carregamentos de serviço.

Ríos *et al.* (2017) desenvolveram um modelo de elementos finitos que reproduz o comportamento da interface aço-concreto de lajes mistas. A interface aço-concreto foi simulada com comportamento não linear em relação ao cisalhamento, de forma a definir de forma adequada o comportamento da interface das lajes mistas. Um método simples foi proposto para calcular os parâmetros utilizados para modelar a interface, a partir de curvas carga-deflexão experimentais e da geometria das lajes. A laje de concreto foi modelada com elementos sólidos hexaédricos de oito nós e a fôrma de aço com elementos de casca quadrilaterais de 4 nós. Para estender a validade do modelo numérico para o caso de carregamentos uniformes, com uma região de força de cisalhamento longitudinal variável atuando nas lajes, um novo grupo de corpos de prova de lajes mistas foi submetido a ensaios de flexão com quatro pontos de carregamento. A Figura 2.6 apresenta um esquema desse ensaio. O modelo numérico proposto apresentou resultados confiáveis para os dois tipos de

ensaios. Além disso, é mais simples que outros modelos encontrados na literatura devido à facilidade para modelar a interface aço-concreto.

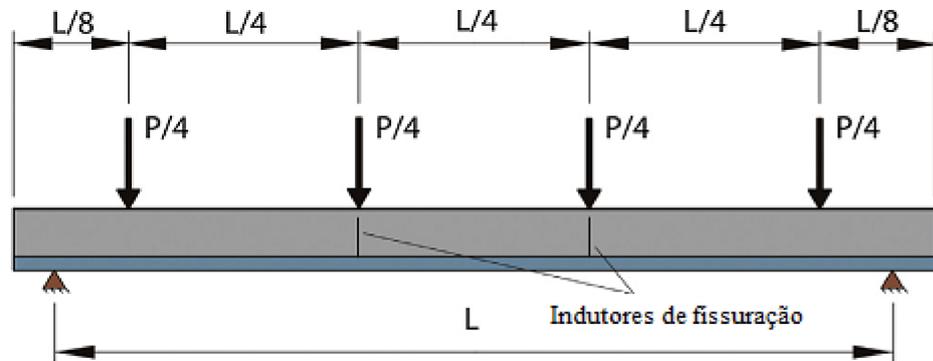


Figura 2.6 - Esquema do ensaio de flexão (RÍOS *et al.*, 2017)

No trabalho de Ferrer *et al.* (2018), um novo tipo de lajes mistas foi desenvolvido. Os autores sugeriram alterar as fôrmas de aço trapezoidais, substituindo as mossas por furos nas partes inclinadas das fôrmas de aço, como indicado na Figura 2.7. Dessa forma, as irregularidades na face interior da fôrma de aço geram uma ligação mais resistente na interface de contato. Os resultados obtidos mostraram que esse tipo de ligação é equivalente à conexão total entre os materiais, pois a ruptura das lajes ocorreu com a plastificação total das seções.

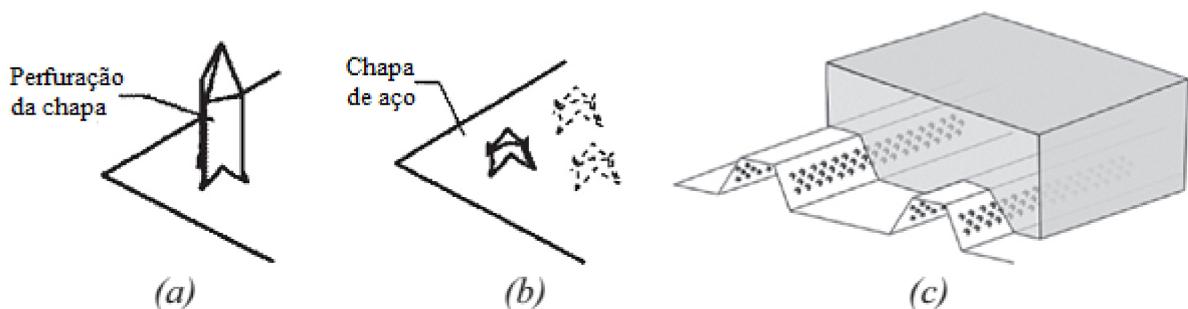


Figura 2.7 - a) Esquema da perfuração da chapa de aço, b) Chapa de aço perfurada, c) Uso da fôrma de aço perfurada (FERRER *et al.*, 2018)

## 2.3 ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE PLACAS DE CONCRETO ARMADO

Vários autores têm utilizado elementos finitos de placa divididos em camadas para a solução de problemas que envolvem análise não linear de placas de concreto armado. Nesse

modelo, como pode ser visto na Figura 2.8, o material e as propriedades mecânicas são definidos para cada camada. Para o caso de concreto armado, as barras de armadura são consideradas como camadas de aço equivalentes com rigidez apenas na direção das barras. De acordo com Silva (2010), nesse tipo de análise o efeito do cisalhamento ao longo da camada é geralmente desprezado, considerando-a em estado plano de tensões.

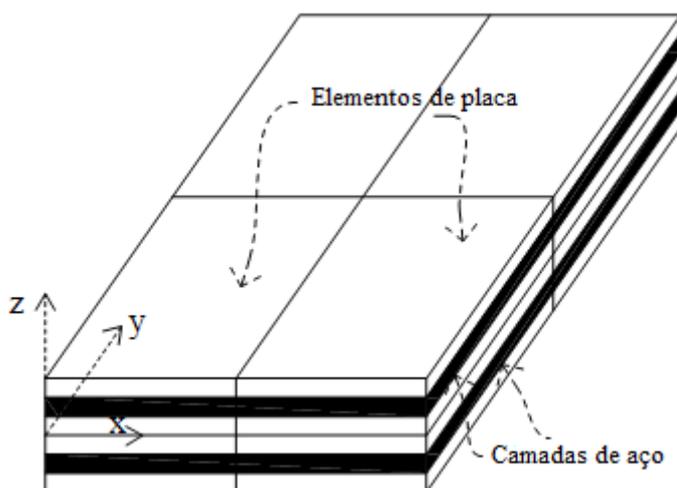


Figura 2.8 - Elementos de placa divididos em camadas

Yu *et al.* (2007) desenvolveram um elemento finito ortotrópico para modelar lajes de concreto ortotrópicas em situação de incêndio. A laje foi modelada utilizando um elemento finito de placa isoparamétrico de nove nós, dividido em camadas, baseado na teoria de placas de Reissner-Mindlin (placas espessas) e, um elemento de viga de três nós. Diferentes condições de temperatura e propriedades dos materiais podem ser aplicados a cada camada. A modelagem do elemento foi feita de forma que os elementos de placa representam a parte constante da laje (acima das nervuras) e os elementos de viga representam a porção nervurada. A fôrma de aço foi considerada como uma camada do elemento de placa. Uma espessura equivalente para a seção transversal do elemento de viga foi adotada segundo as dimensões da parte constante da laje e da seção transversal da nervura. Além disso, o elemento de viga compartilha os três nós com os nós centrais do elemento de placa. O modelo proposto é efetivo e reflete bem a influência das nervuras em lajes mistas em situação de incêndio.

Algumas formulações de elementos finitos vêm sendo desenvolvidas para análise de placas de concreto reforçadas considerando efeitos não lineares, como o trabalho de Teng *et al.* (2014). Dois elementos de placa retangulares divididos em camadas com oito nós e 48 graus de liberdade com a inclusão do efeito do deslizamento devido ao cisalhamento entre as

camadas de reforço e de concreto foram desenvolvidos nesse trabalho. Foram consideradas as não linearidades geométrica e do material. A formulação dos elementos de placa foi desenvolvida com base na teoria de Reissner-Mindlin que inclui deformações transversais por cisalhamento. Hughes (1987) afirma que para cascas ou placas finas a deformação por cisalhamento em geral é muito pequena, o que pode gerar erros nas respostas numéricas obtidas com os elementos baseados na teoria de Reissner-Mindlin, esse é o efeito de travamento por cisalhamento, que é denominado na literatura como *shear locking*. Os autores evitaram o problema de travamento por cisalhamento com o uso de funções de viga de Timoshenko para descrever a deflexão e a rotação dos elementos de placa. Os dois elementos apresentaram boa convergência e precisão.

Já Teng e Zhang (2014) desenvolveram um elemento finito de placa retangular dividido em camadas com quatro nós e 24 graus de liberdade. As funções de viga de Timoshenko foram usadas para descrever o comportamento sob flexão dos elementos de placa em camadas e o problema com *shear locking* é resolvido naturalmente. As não linearidades do material e geométrica foram consideradas. Antes da fissuração e do esmagamento o concreto foi considerado isotrópico e linear elástico. O elemento apresentou precisão e eficiência para a análise estrutural de lajes de concreto reforçadas.

Silva (2010) implementou um elemento de placa dividido em camadas para simular o comportamento de placas de concreto ligadas a vigas de aço considerando a interação parcial na interface de contato entre a laje de concreto e o perfil de aço. Na análise, o perfil de aço foi simulado por elementos finitos de barra e o contato entre os materiais por elementos de interface. Os efeitos não lineares físicos na placa de concreto foram considerados pela atribuição de diferentes propriedades do material a cada camada do elemento. A formulação do elemento de placa foi desenvolvida com base na teoria de Reissner-Mindlin e nas hipóteses de von Karman. O autor concluiu que o elemento desenvolvido é uma ferramenta simples para solução do problema em questão.

Um procedimento não linear de elementos finitos divididos em camadas para determinação do comportamento de lajes de concreto reforçadas submetidas à situações de incêndio foi desenvolvido por Huang *et al.* (2003). O procedimento proposto pelos autores é capaz de modelar o efeito membrana em lajes de concreto em situação de incêndio. Assim como Huang *et al.* (2003), Teng *et al.* (2014), Teng e Zhang (2014), e Silva (2010), utilizaram a formulação Lagrangeana total para análise não linear geométrica de elementos finitos, na qual os deslocamentos são referenciados à configuração inicial. Os autores observaram que o efeito de membrana é significativo no cálculo da carga última e devido a isso a não

linearidade geométrica influencia na determinação da carga última de placas de concreto armado.

## 2.4 ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE PLACAS FINAS

Como a fôrma de aço em lajes mistas é muito mais fina que a laje de concreto e analisando os resultados obtidos com o elemento finito que será apresentado no item 3.1 notou-se a necessidade de analisar o modelo utilizando elementos finitos de placa ou de casca finos.

Segundo Bathe *et al.* (1983), o ponto inicial no desenvolvimento de elementos de placa ou casca sujeitos a flexão é uma teoria de placas ou cascas que inclui deformações de cisalhamento. Se o elemento isoparamétrico é empregado para cascas muito finas, ele deve ser capaz de satisfazer a restrição de deformações de cisalhamento insignificantes. O autor indica que uma boa forma de satisfazer essa condição é usar a teoria discreta de Kirchhoff. Para isso, as variáveis nodais devem ser o deslocamento  $w$  e suas derivadas ( $\theta_x = w_{,y}$  e  $\theta_y = -w_{,x}$ ) e as hipóteses de Kirchhoff devem ser verificadas ao longo do contorno do elemento.

Batoz *et al.* (1980) desenvolveram um elemento finito para análise de placas finas, chamado DKT (triangular discreto de Kirchhoff), com nove graus de liberdade. Os autores indicam como ponto positivo do elemento sua formulação simples e clara, com disponibilidade das funções de interpolação. O elemento é eficiente no cálculo de deslocamentos e tensões para problemas estáticos e de frequências em problemas dinâmicos.

Segundo Batoz e Tahar (1982), o uso de elementos quadrilaterais é usado na discretização de placas de formas arbitrárias e alguns casos particulares de cascas como cascas cilíndricas. Os autores desenvolveram um novo elemento chamado DKQ para análise de problemas de placas finas submetidas à flexão. A formulação é baseada em uma generalização do elemento DKT. O elemento DKQ possui 12 graus de liberdade, sendo 3 graus de liberdade em cada nó do elemento.

Sarawit *et al.* (2003) apresentaram aplicações do método dos elementos finitos para análise de perfis de aço e de alumínio de paredes finas. Os autores afirmam que perfis de paredes finas podem ser modelados com elementos de casca finos, considerando a formulação de Kirchhoff. Concluiu-se que os resultados das análises numéricas realizadas nesse estudo são confiáveis e satisfatórios.

Razaqpur *et al.* (2003) desenvolveram um elemento finito de placa fino com doze graus de liberdade, chamado IDKQ, para análise de placas finas sujeitas a flexão. A formulação foi baseada em uma técnica de transformação de coordenadas que envolve a imposição das hipóteses discretas de Kirchhoff nos nós do centro e da metade do lado de um elemento de placa isoparamétrico de nove nós. A base teórica para o desenvolvimento do elemento foi a mesma utilizada por Batoz e Tahar (1982), mas a matriz de rigidez do elemento IDKQ é baseada na matriz de transformação utilizada para o elemento DKT por Batoz *et al.* (1980), resultando em uma formulação mais concisa. O elemento IDKQ apresentou taxas de convergência superiores em relação ao elemento DKQ e a outros elementos finitos.

### 3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Os elementos finitos que estão apresentados no presente trabalho foram implementados computacionalmente no programa FEMOOP (Guimarães, 1992). Esse programa foi desenvolvido na linguagem de programação C++ utilizando o conceito de programação orientada a objetos (POO), o que torna possível trabalhar com classes, permitindo assim, a criação de novos elementos sem o conhecimento total da estrutura do programa.

É apresentado na Figura 3.1 a discretização de uma laje mista em elementos finitos planos de casca, elementos de barra e elementos de interface. Nessa figura a laje mista tem apoios simples nas extremidades perpendiculares à direção das nervuras e é livre no restante de seu contorno. Dessa forma, a laje mista tende a flexionar apenas no plano  $yz$  da figura. Devido a isso, juntamente com a simetria das condições de apoio e carregamento, é simulado apenas uma nervura da laje mista e metade do seu vão. A laje mista mostrada na Figura 3.1 é muito utilizada na literatura para análise do comportamento de diferentes tipos de fôrmas de aço quanto ao cisalhamento longitudinal.

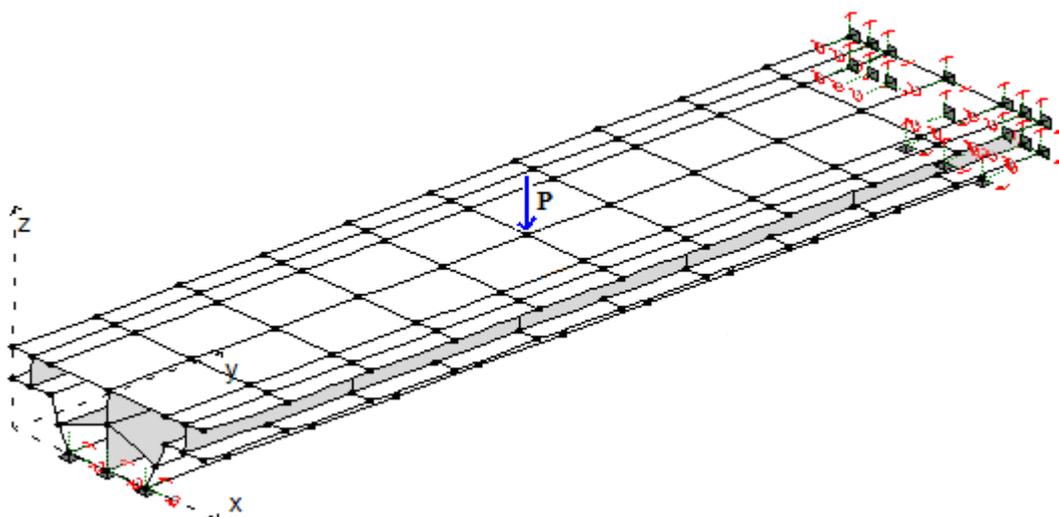


Figura 3.1 - Modelo de laje mista implementada

É detalhada nas Figuras 3.2 (a) e (b) a utilização dos elementos finitos descritos no parágrafo anterior na simulação numérica da laje mista. Observa-se dessas figuras que os elementos finitos de barra são utilizados para modelar as nervuras do concreto, elementos finitos de casca para a laje de concreto acima das nervuras e para a fôrma de aço. Para modelar a interface aço-concreto são utilizados dois elementos de interface, um que conecta dois elementos de cascas e outro que conecta barra a casca. Além disso, o elemento de

interface que conecta barra a casca é utilizado para representar a conexão entre as nervuras e a laje de concreto acima delas. Nesse caso não existe um plano de deslizamento nessa interface sendo atribuído à rigidez da conexão um valor elevado. Logo, nessa situação o elemento de interface tem função apenas de conectar a nervura à laje de concreto acima da nervura.

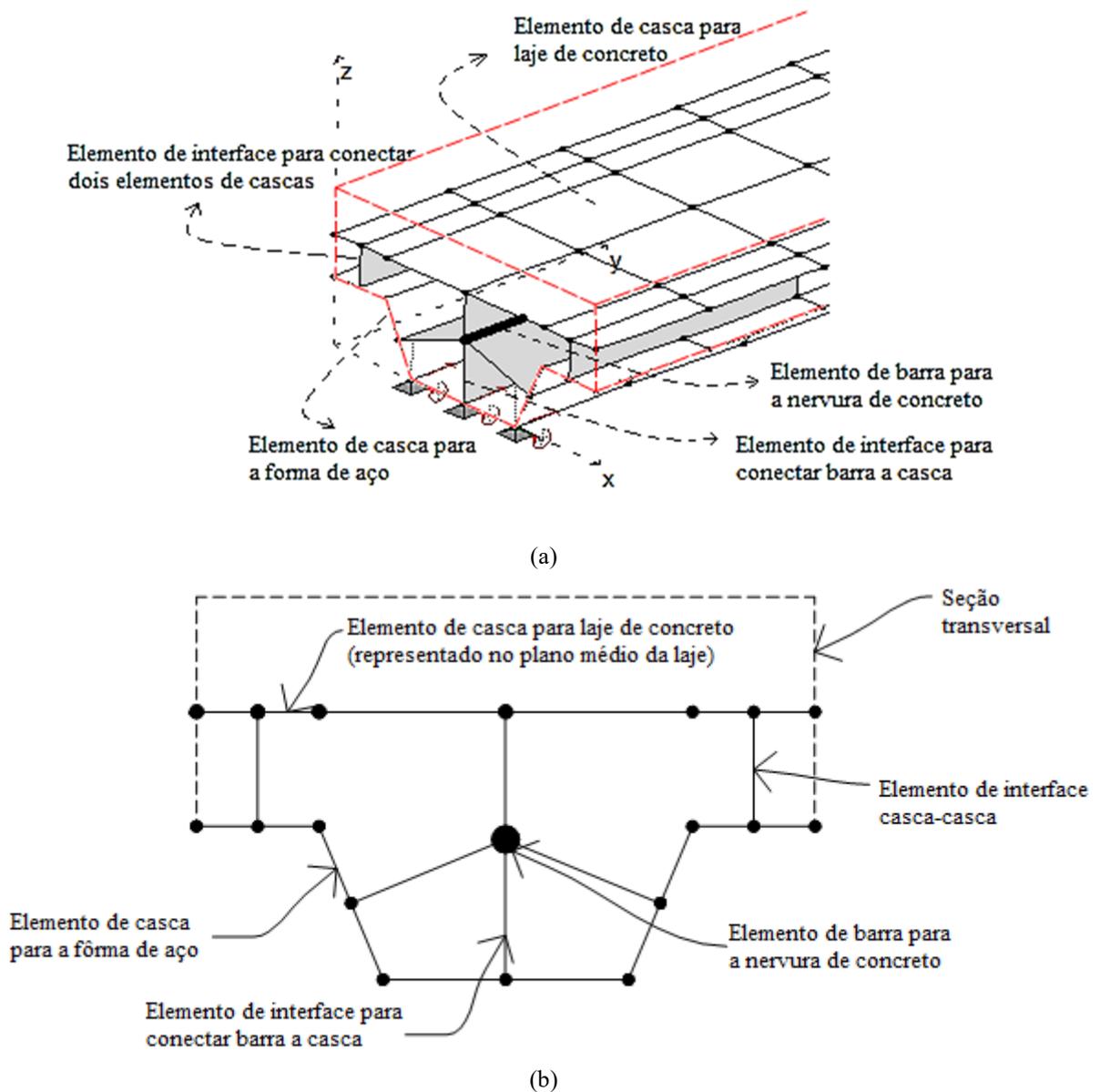


Figura 3.2 - Representação dos elementos utilizados: (a) vista em perspectiva, (b) vista do plano xz

Nos itens seguintes são apresentadas as formulações dos elementos utilizados na simulação numérica de lajes mistas formadas por uma laje de concreto simples ou armada com fôrma de aço incorporada. As formulações para os elementos planos de casca espesso e fino são mais detalhadas, pois foram desenvolvidas nesse trabalho. A formulação do elemento plano de casca espesso é baseada na formulação do elemento de placa de Dias (2016) e Silva

(2010). No trabalho de Dias (2016) não foram consideradas as não linearidades geométrica e física, já no trabalho de Silva (2010) as não linearidades foram consideradas e foi utilizada uma notação diferente da apresentada aqui. As demais formulações são apresentadas de forma reduzida já que foram implementadas em trabalhos anteriores.

### 3.1 ELEMENTO PLANO DE CASCA ESPESSO

O elemento finito plano de casca espesso implementado para a análise não linear de lajes mistas possui nove nós e cinco graus de liberdade por nó a nível local, sendo os graus de liberdade de translação na direção  $z$ , de rotação em torno dos eixos  $x$  e  $y$  (típicos dos elementos de placa) e os graus de liberdade de translação nas direções  $x$  e  $y$ , como mostra a Figura 3.3. A não linearidade física é considerada dividindo a seção em várias camadas, para isso são utilizadas as considerações utilizadas por Huang *et al.* (2003), que são:

- Os elementos são compostos por camadas de aço ou de concreto. O deslizamento entre as camadas é impedido.
- Cada camada pode possuir propriedades mecânicas diferentes e relações tensão-deformação independentes.
- As barras de reforço são consideradas como uma camada equivalente de aço com rigidez apenas na direção da barra. A camada de aço deve ter a mesma área que a área total das barras de reforço. A conexão entre as camadas de aço e de concreto é considerada perfeita.
- As camadas de concreto estão em estado plano de tensões e o concreto é considerado ortotrópico após a fissuração.

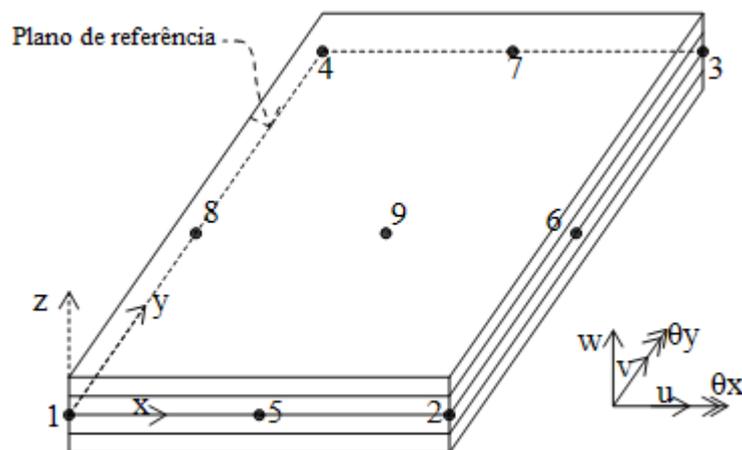


Figura 3.3 - Elemento plano de casca de nove nós dividido em camadas

De acordo com as hipóteses cinemáticas da teoria de placas de Reissner-Mindlin seções inicialmente planas e ortogonais a configuração indeformada, permanecem planas após deformações, porém não mais ortogonais. As equações dos deslocamentos para o elemento são:

$$u(x,y,z) = u^0(x,y) + z\theta_y(x,y) \quad (3.1)$$

$$v(x,y,z) = v^0(x,y) - z\theta_x(x,y) \quad (3.2)$$

$$w(x,y,z) = w^0(x,y) \quad (3.3)$$

Em que  $u^0$ ,  $v^0$  e  $w^0$  representam as translações do plano de referência do elemento plano de casca nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações das seções em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . E  $z$  é a posição da fibra em relação à superfície média ao longo da espessura do elemento plano de casca onde se deseja avaliar os deslocamentos. Para facilitar a notação, o sobrescrito zero será omitido nas equações seguintes.

Aplicando as Equações 3.1 a 3.3 a relação deformação-deslocamento de Green-Lagrange ( $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$ ) e desprezando a variação de  $w$  com  $z$ , obtêm-se as equações das deformações dadas pelas Equações 3.4 a 3.8.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - z\theta_{x,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + z\theta_{y,y} + v_{,x} - z\theta_{x,x} + w_{,x}w_{,y}) \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\theta_y + w_{,x}) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(-\theta_x + w_{,y}) \quad (3.8)$$

Como pode ser observado nas equações 3.4 e 3.5 existe uma relação não linear das deformações com os deslocamentos refletindo em uma não linearidade das equações de equilíbrio para o elemento analisado. Necessária para a formulação do problema, a relação tensão-deformação do material também gera uma não linearidade nas equações de equilíbrio. Para a análise não linear desse problema é utilizado nesse trabalho um método incremental com controle de deslocamento. No método utilizado é adotado um tamanho de passo pequeno sendo feita a cada passo uma correção na matriz de rigidez através do cálculo da tangente média. Dessa forma, o sistema de equações lineares é resolvido duas vezes para cada passo de

deslocamento, no entanto esse método evita ter que dar passos muito pequenos que podem levar a erros devidos a truncamentos e arredondamentos durante o processo.

Para a continuação da formulação do elemento plano de casca espesso é necessária associar as deformações dadas nas Equações 3.4 a 3.8 com as tensões em um ponto qualquer no elemento plano de casca. As relações tensão-deformação para o concreto usada nesse trabalho são os modelos definidos pelo Comitê Europeu de Concreto (CEB, 2010). Na Figura 3.4 está representada a curva tensão-deformação para o concreto comprimido e na Figura 3.5 para o concreto tracionado. Sendo que essa última é a mesma curva fornecida pela norma brasileira para dimensionamento de estruturas em concreto armado (NBR 6118, 2014). Já na curva para compressão, o modelo do CEB distingue do modelo da NBR 6118 quando se inicia o esmagamento do concreto, sendo que no modelo do CEB é considerado um amolecimento do concreto, enquanto que no modelo da NBR 6118 a tensão se mantém constante para um aumento de deformação até perda total da capacidade resistente do material.

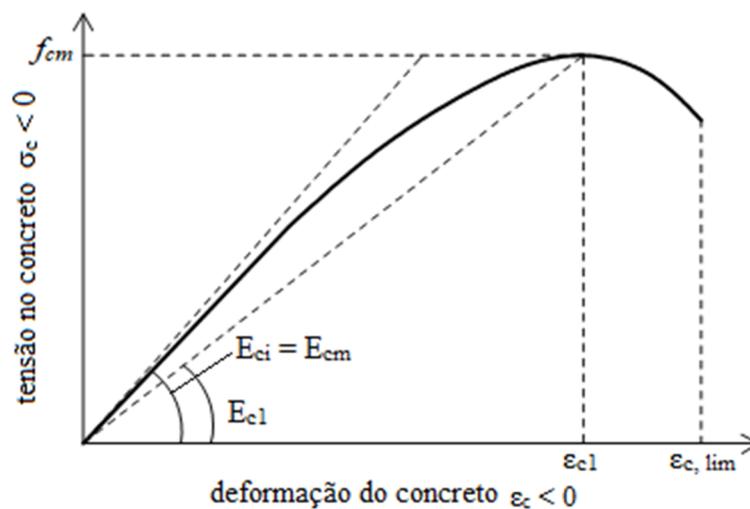


Figura 3.4 - Curva tensão-deformação para o concreto comprimido (CEB/FIP, 2010)

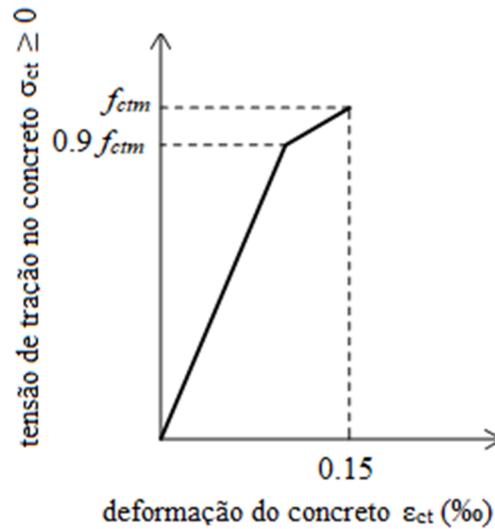


Figura 3.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (CEB/FIP, 2010)

Para o comportamento do concreto após a fissuração adotou-se um modelo bi-linear para a degradação do módulo de elasticidade semelhante ao sugerido por Rots *et al.* (1984) e usado também por Huang *et al.* (2003). No caso de concreto armado, o aço das barras de reforço é considerado elástico perfeitamente plástico.

Mesmo tendo o material relação tensão-deformação não linear, como o problema não linear é resolvido por um método incremental, é considerado a cada passo do método material linear com módulo de elasticidade dado pela tangente da curva tensão-deformação. Dessa forma a relação tensão-deformação pode ser obtida usando a lei de Hooke para o problema analisado. A seguir é discutida a matriz constitutiva da lei de Hooke para as situações do concreto após fissuração e esmagamento e dentro desses dois limites.

O concreto apresenta comportamento ortotrópico após a fissuração ou esmagamento, ou seja, apresenta características diferentes para cada direção principal. Considerando as camadas em estado plano de tensões, as direções principais são calculadas, sendo indicadas nesse trabalho pelos subscritos 1 e 2, em que a direção 1 é a de maior deformação principal. Para o desenvolvimento desse trabalho é considerado o critério de falha de von Mises. Se as deformações principais ( $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ ) estiverem dentro da região de falha, o concreto é considerado ortotrópico com a relação tensão-deformação desacoplada para as direções principais, dessa forma a matriz constitutiva do material é dada pela Equação 3.9.

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2}(G_1 + G_2) & 0 & 0 \\ & & & G_1 & 0 \\ \text{Sim.} & & & & G_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Na Equação anterior,  $E_1$  e  $E_2$  são dados pelas tangentes da curva tensão-deformação do concreto nos pontos  $\varepsilon = \varepsilon_1$  e  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , respectivamente. Já,  $G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu)}$  e  $G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu)}$ . A matriz de rigidez na direção dos eixos ortogonais  $x$  e  $y$  pode ser obtida a partir de  $\mathbf{D}_{12}$ , como descrito a seguir.

As tensões e deformações principais podem ser relacionadas com as tensões e deformações em relação aos eixos  $x$  e  $y$  quaisquer da forma

$$\boldsymbol{\tau}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{xy} \text{ e } \boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}, \text{ em que} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{R}_\sigma(\phi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \sin(2\phi) \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\sin(2\phi) \\ -\frac{1}{2}\sin(2\phi) & \frac{1}{2}\sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{R}_\varepsilon(\phi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{1}{2}\sin(2\phi) \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{1}{2}\sin(2\phi) \\ -\sin(2\phi) & \sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{bmatrix} \text{ e} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{R}_s(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Em que,  $\phi$  é o ângulo de rotação dos eixos principais em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . Substituindo as expressões 3.10 na relação tensão-deformação dada em relação as direções principais,  $\boldsymbol{\tau}_{12} = \mathbf{D}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_{12}$ , e sabendo que as matrizes de rotações são ortogonais, ou seja,

$\mathbf{R}_\sigma^{-1} = \mathbf{R}_\sigma^T$  e  $\mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{R}_s^T$ , tem-se:

$$\boldsymbol{\tau}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s^T \end{bmatrix} \mathbf{D}_{12} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}, \text{ logo:} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s^T \end{bmatrix} \mathbf{D}_{12} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Desenvolvendo a Equação 3.15 chega-se à matriz constitutiva para a relação tensão-deformação dada no sistema de referência  $xy$ . Os termos dessa matriz são dados pelas equações 3.17 a 3.25.

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & D_{45} \\ \text{Sim.} & & & & D_{55} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$D_{11} = E_1 \cos^4 \phi + E_2 \sin^4 \phi + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sin^2 (2\phi), \quad (3.17)$$

$$D_{12} = \frac{1}{4} \sin^2 (2\phi) (E_1 + E_2 - 4(G_1 + G_2)), \quad (3.18)$$

$$D_{13} = \frac{1}{2} \sin^2 \phi (E_1 \cos^2 \phi - E_2 \sin^2 \phi - (G_1 + G_2) \cos(2\phi)), \quad (3.19)$$

$$D_{22} = E_1 \sin^4 \phi + E_2 \cos^4 \phi + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sin^2 (2\phi), \quad (3.20)$$

$$D_{23} = \frac{1}{2} \sin^2 \phi (E_1 \sin^2 \phi - E_2 \cos^2 \phi + (G_1 + G_2) \cos(2\phi)), \quad (3.21)$$

$$D_{33} = \frac{1}{4} \sin^2 (2\phi) (E_1 + E_2) + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \cos^2 (2\phi), \quad (3.22)$$

$$D_{44} = G_1 \cos^2 \phi + G_2 \sin^2 \phi, \quad (3.23)$$

$$D_{45} = \frac{1}{2} (G_1 - G_2) \sin(2\phi) \mathbf{e}, \quad (3.24)$$

$$D_{55} = G_1 \sin^2 \phi + G_2 \cos^2 \phi. \quad (3.25)$$

Para o caso particular de material isotrópico, observado quando as deformações principais estiverem fora da região de falha do concreto, tem-se  $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_1 = G_2 = G$  e a matriz  $\mathbf{D}_{xy}$  da Equação 3.16 reduz a forma dada na Equação 3.26.

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Na Equação 3.26,  $\lambda = \nu E / (1 - \nu^2)$  e  $G = 0,5E / (1 + \nu)$ , sendo que  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Essa matriz constitutiva é um caso

particular da matriz constitutiva da lei generalizada de Hooke. Para o caso geral da relação tensão-deformação para o elemento analisado tem-se a Equação 3.27 dada a seguir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & D_{45} \\ Sim. & & & & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Aplicando um campo de deformações virtual compatível ao elemento plano de casca tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais,  $\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$ . Em que,  $\delta$  é o operador variacional,  $\sigma_{ij}$  é o estado tensional real em um ponto qualquer no elemento plano de casca, e  $\delta \varepsilon_{ij}$  é o estado de deformação virtual obtido a partir do campo de deslocamento virtual imposto ao elemento. Aplicando o operador variacional nas Equações 3.4 a 3.8 das deformações, chega-se às Equações 3.28 a 3.32.

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x} + z \delta \theta_{y,x} + w_{,x} \delta w_{,x} \quad (3.28)$$

$$\delta \varepsilon_y = \delta v_{,y} - z \delta \theta_{x,y} + w_{,y} \delta w_{,y} \quad (3.29)$$

$$\delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (\delta u_{,y} + z \delta \theta_{y,y} + \delta v_{,x} - z \delta \theta_{x,x} + w_{,y} \delta w_{,x} + w_{,x} \delta w_{,y}) \quad (3.30)$$

$$\delta \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} (\delta \theta_y + \delta w_{,x}) \quad (3.31)$$

$$\delta \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} (-\delta \theta_x + \delta w_{,y}) \quad (3.32)$$

Substituindo as Equações 3.28 a 3.32 na expressão do princípio do trabalho virtual e desprezando a tensão normal na direção  $z$ , chega-se à Equação 3.33 a seguir para o trabalho virtual interno.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \iiint_V [ & (\delta u_{,x} + z \delta \theta_{y,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) \sigma_x + (\delta v_{,y} - z \delta \theta_{x,y} + w_{,y} \delta w_{,y}) \sigma_y + (\delta u_{,y} + z \delta \theta_{y,y} + \\ & + \delta v_{,x} - z \delta \theta_{x,x} + w_{,y} \delta w_{,x} + w_{,x} \delta w_{,y}) \tau_{xy} + (\delta \theta_y + \delta w_{,x}) \tau_{xz} + (\delta w_{,y} - \delta \theta_x) \tau_{yz} ] dV \end{aligned} \quad (3.33)$$

Na equação anterior, a integral é escrita ao longo do volume indeformado do elemento plano de casca. Os esforços  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $Q_{xz}$ ,  $Q_{yz}$ ,  $M_y$ ,  $M_x$  e  $M_{xy}$ , podem ser definidos como mostrado nas Equações 3.34 a 3.38 a seguir. Na equação 3.38,  $k$  é um fator de correção no cálculo do esforço cortante, geralmente considerado igual a 5/6.

$$N_x = \int_h \sigma_x^c dz + \sum_{i=1}^{n_x} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (\sigma_x^s(z_i) - \sigma_x^c(z_i)) \quad (3.34)$$

$$N_y = \int_h \sigma_y^c dz + \sum_{i=1}^{n_y} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (\sigma_y^s(z_i) - \sigma_y^c(z_i)) \quad (3.35)$$

$$M_y = \int_h z \sigma_x^c dz + \sum_{i=1}^{n_x} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (\sigma_x^s(z_i) - \sigma_x^c(z_i)) \quad (3.36)$$

$$M_x = \int_h z \sigma_y^c dz + \sum_{i=1}^{n_y} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (\sigma_y^s(z_i) - \sigma_y^c(z_i)) \quad (3.37)$$

$$Q_{xz} = k \int_h \tau_{xz} dz, \quad Q_{yz} = k \int_h \tau_{yz} dz, \quad N_{xy} = \int_h \tau_{xy} dz, \quad M_{xy} = \int_h z \tau_{xy} dz \quad (3.38)$$

As barras de reforço devem ser consideradas na definição dos esforços internos, ou seja, nas Equações 3.34 a 3.38. Como observa-se dessas equações, é feito o somatório do número de camadas de barras na seção, levando em conta a área da barra ( $A_{xi}$ ) disposta na direção  $x$  e distribuída com um espaçamento ( $S_{xi}$ ) ao longo da direção  $y$ , conforme ilustrado na Figura 3.6. O mesmo vale para barras dispostas na direção  $y$ . Na equação 3.34,  $\sigma_x^s(z_i)$  e  $\sigma_x^c(z_i)$  são, respectivamente, as tensões no aço e no concreto no centro da camada de barras dispostas na direção  $x$ . Nos somatórios das equações 3.34 a 3.37 as tensões são consideradas positivas ou negativas para acrescentar a área de aço e retirar a área de concreto. A distância  $z_i$  é a distância do centro da barra ao centro da seção transversal, se o elemento de casca estiver sendo representado por uma superfície plana média. O índice  $c$  representa o concreto e o índice  $s$  o aço das barras de reforço (Dias, 2016).

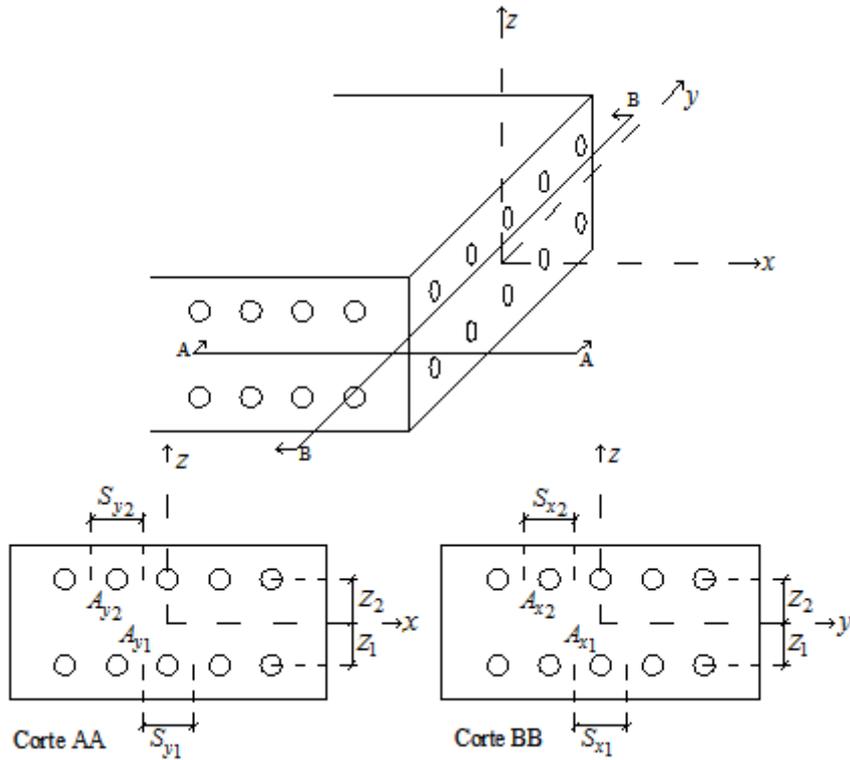


Figura 3.6 – Área das barras de aço e largura de influência (DIAS, 2016).

Como os variacionais dos deslocamentos são constantes em relação à espessura do elemento plano de casca (eixo \$z\$) e com os esforços definidos nas equações 3.34 a 3.38, chega-se a equação 3.39 para o trabalho virtual interno do elemento plano de casca.

$$\delta W_{\text{int}} = \iint_A [(\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) N_x + \delta \theta_{y,x} M_y + (\delta v_{,y} + w_{,y} \delta w_{,y}) N_y - \delta \theta_{x,y} M_x + (\delta u_{,y} + \delta v_{,x} + w_{,y} \delta w_{,x} + w_{,x} \delta w_{,y}) N_{xy} + (\delta \theta_{y,y} - \delta \theta_{x,x}) M_{xy} + (\delta \theta_y + \delta w_{,x}) Q_{xz} + (\delta w_{,y} - \delta \theta_x) Q_{yz}] dA \quad (3.39)$$

A Equação 3.39 fornece a formulação forte para o trabalho virtual interno, uma vez que as incógnitas são variáveis dependentes da posição do plano de referência analisada. Assumindo que a forma de variação dos deslocamentos seja conhecida e que apenas não se conhece os deslocamentos em determinados pontos (chamados graus de liberdade do elemento) determina-se a formulação fraca para o trabalho virtual interno. Nesse trabalho são adotadas funções polinomiais para representar a forma de variação dos deslocamentos no elemento.

Como a teoria de placa de Reissner-Mindlin é utilizada nessa formulação, os deslocamentos de translações e rotações podem ser interpolados independentemente, dessa forma, as funções de interpolação para o elemento são dadas por:

$$N_{1..4} = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - \xi_i) (\eta - \eta_i), \quad (3.40)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1) (1 - \xi^2), \quad (3.41)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2), \quad (3.42)$$

$$N_7 = \frac{1}{2} \eta (\eta - 1) (1 - \xi^2), \quad (3.43)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) (1 - \eta^2), \quad (3.44)$$

$$N_9 = (1 - \xi)^2 (1 - \eta^2). \quad (3.45)$$

Onde,  $\xi$  e  $\eta$  são apresentadas na Figura 3.7 e representam as coordenadas paramétricas do elemento finito retangular de nove nós.

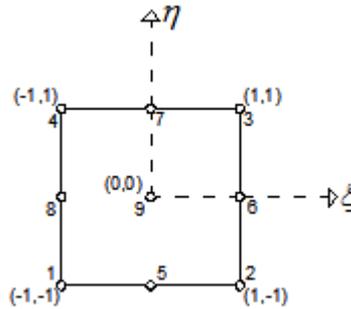


Figura 3.7 – Elemento finito retangular de nove nós (DIAS, 2016).

Definindo o vetor coluna  $\Phi$  de nove termos dados pelas funções de interpolação, ou seja,  $\Phi^T = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9)$ , chega-se a Equação 3.46 para as equações aproximadas dos deslocamentos em relação aos deslocamentos nodais. Onde,  $\mathbf{q}$  é um vetor coluna com quarenta e cinco termos dados pelos deslocamentos nodais, e  $\mathbf{O}$  é um vetor coluna nulo com nove elementos.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & \text{sim} & & \Phi^T & \mathbf{O}^T \\ & & & & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (3.46)$$

Escrevendo os variacionais dos deslocamentos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , e substituindo-os na equação (3.39) chega-se a formulação fraca para o trabalho virtual de um elemento plano de casca dada pela Equação 3.47.

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \iint_A & \left[ \left( \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_x + \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} M_y + \left( \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,y} \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_y - \frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} M_x + \right. \\
& + \left( \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,y} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} + \left( \frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \\
& \left. + \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \left( \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} \right] dA
\end{aligned} \quad (3.47)$$

O trabalho virtual externo é dado por  $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$ . Em que  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  é o vetor de forças externas nas direções dos graus de liberdade do elemento plano de casca. Da condição de que o trabalho virtual interno deve ser igual ao trabalho virtual externo ( $\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}$ ), tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{q}^T \iint_A & \left[ \left( \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_x + \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} M_y + \left( \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,y} \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_y - \frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} M_x + \right. \\
& + \left( \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,y} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} + \left( \frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \\
& \left. + \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \left( \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} \right] dA = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}
\end{aligned} \quad (3.48)$$

Sabendo que a Equação 3.48 deve ser válida para qualquer campo de deslocamento virtual compatível ( $\delta \mathbf{q}$ ), tem-se:  $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  é o vetor de forças internas dado pela expressão 3.49.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\text{int}} = \iint_A & \left[ \left( \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_x + \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} M_y + \left( \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,y} \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_y - \frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} M_x + \right. \\
& + \left( \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,y} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} + \left( \frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \\
& \left. + \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \left( \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} \right] dA
\end{aligned} \quad (3.49)$$

O vetor de forças internas para o elemento de casca da Equação 3.49 pode ser reescrito na forma apresentada pela equação 3.50.

$$\mathbf{f}_{int} = \iint_A \begin{bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_{xy} \Phi_{,x} + N_y \Phi_{,y} \\ Q_{xz} \Phi_{,x} + Q_{yz} \Phi_{,y} + w_{,x} N_x \Phi_{,x} + w_{,y} N_y \Phi_{,y} + N_{xy} (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \\ -M_{xy} \Phi_{,x} - M_x \Phi_{,y} - Q_{yz} \Phi \\ M_y \Phi_{,x} + M_{xy} \Phi_{,y} + Q_{xz} \Phi \end{bmatrix} dA \quad (3.50)$$

Para a resolução do problema não linear de equilíbrio  $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$ , é utilizado o método de Newton-Raphson, logo a matriz de rigidez tangente deve ser obtida. Sendo  $\mathbf{f}_{ext}$  constante em relação aos deslocamentos nodais, a matriz de rigidez tangente é dada por,

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{q}}.$$

$$\mathbf{K} = \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} \Psi_1 + \Phi_{,y} \Psi_2 \\ -\Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_{,y} \left( \frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi \left( \frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left( \frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dA \quad (3.51)$$

Na expressão (3.51),  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  são vetores colunas com 45 termos como mostrado nas expressões a seguir:

$$\Psi_1 = \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} w_{,x} \right)^T + \left( \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} w_{,y} \right)^T$$

$$\Psi_2 = \left( \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} N_y + \frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} w_{,y} \right)^T + \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} w_{,x} \right)^T$$

Na expressão 3.51, a derivada do esforço axial atuante na seção em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= \int_h \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} \left( \frac{\partial \sigma_x^s(z_i)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \sigma_x^c(z_i)}{\partial \mathbf{q}} \right) \\
\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= \int_h \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right) dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} \left( \frac{\partial \sigma_x^s}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x(z_i)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \sigma_x^c}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x(z_i)}{\partial \mathbf{q}} \right) \\
\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= \int_h \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right) dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \frac{\partial \varepsilon_x(z_i)}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Para facilitar a notação os produtos  $\frac{A_{xi}}{S_{xi}}(E_s - E_c)$  e  $\frac{A_{yi}}{S_{yi}}(E_s - E_c)$  serão substituídos, respectivamente, por  $\beta_{xi}$  e  $\beta_{yi}$  nas próximas expressões. Da Equação 3.27 tem-se  $\sigma_x = D_{11}\varepsilon_x + D_{12}\varepsilon_y + D_{13}\gamma_{xy}$ , logo as derivadas em relação às deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , presentes na expressão 3.52, são dadas por  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  e  $D_{13}$ , respectivamente. Para a segunda parcela da equação, são consideradas tensões apenas na direção longitudinal ao eixo da barra, ou seja, estado uniaxial de tensões, logo as derivadas serão dadas pelos módulos de elasticidade longitudinais obtidos pelas tangentes à curva tensão-deformação dos materiais. Já as derivadas das deformações em relação aos deslocamentos nodais são dadas pelas expressões 3.53 a 3.55.

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + z \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{O} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \\ \mathbf{O} \\ z \Phi_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} - z \frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,y} \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \Phi_{,y} \\ w_{,y} \Phi_{,y} \\ -z \Phi_{,y} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{z \partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{z \partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,y} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,y} \\ \Phi_{,x} \\ w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y} \\ -z \Phi_{,x} \\ z \Phi_{,y} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Substituindo as equações 3.53 a 3.55 na derivada dos deslocamentos nodais e lembrando que os vetores coluna que representam as funções de forma são constantes em relação ao eixo perpendicular ao elemento plano de casca (espessura do elemento), tem-se:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \begin{array}{c} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} dz + w_{,y} \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz + (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \\ -\Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \end{array} \right] + \sum_{i=1}^{nx} \beta_{xi} \left[ \begin{array}{c} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ z_i \Phi_{,x} \end{array} \right]$$

De forma análoga à descrita para o esforço axial, pode-se chegar às expressões para as derivadas em relação aos deslocamentos nodais dos outros esforços atuantes na seção. Logo:

$$\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \begin{array}{c} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz + w_{,y} \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} dz + (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz \\ -\Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} z dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz \end{array} \right] + \sum_{i=1}^{ny} \beta_{yi} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \Phi_{,y} \\ w_{,y} \Phi_{,y} \\ -z_i \Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \end{array} \right],$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \begin{array}{c} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} z dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz + w_{,y} \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} z dz + (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz \\ - \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} z^2 dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z^2 dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z^2 dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z^2 dz \end{array} \right] + \sum_{i=1}^{nx} \beta_{xi} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ z_i \Phi_{,y} \\ z_i w_{,y} \Phi_{,y} \\ - z_i^2 \Phi_{,y} \\ 0 \end{array} \right],$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \begin{array}{c} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} z dz + w_{,y} \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz + (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \\ - \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z^2 dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z^2 dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} z^2 dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z^2 dz \end{array} \right] + \sum_{i=1}^{nx} \beta_{yi} \left[ \begin{array}{c} z_i \Phi_{,x} \\ 0 \\ z_i w_{,x} \Phi_{,x} \\ 0 \\ z_i^2 \Phi_{,x} \end{array} \right],$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \begin{array}{c} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} dz \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz + w_{,y} \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz + (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} dz \\ - \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz \end{array} \right],$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \begin{array}{c} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz + w_{,y} \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz + (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz \\ - \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z^2 dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z^2 dz \end{array} \right], e$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \begin{array}{c} \text{O} \\ \text{O} \\ k(\Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{44} dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{45} dz) \\ -k\Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{45} dz \\ k\Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{44} dz \end{array} \right] e \frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \begin{array}{c} \text{O} \\ \text{O} \\ k(\Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{45} dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{55} dz) \\ -k\Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{55} dz \\ k\Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{45} dz \end{array} \right].$$

Já foram mostrados até aqui como determinar, a partir do campo de deslocamento nodal, as deformações, os módulos de elasticidade dos materiais e os termos da matriz constitutiva. Dessa forma, os esforços  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $Q_{xz}$ ,  $Q_{yz}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  presentes no vetor de forças internas (Equação 3.49) pode ser determinado, a partir de um determinado campo de deslocamento nodal, da forma descrita pela Equação 3.56 a seguir.

$$N_x = \int_h \sigma_x^c dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (\sigma_x^s(z_i) - \sigma_x^c(z_i))$$

$$N_x = \int_h [D_{11} \varepsilon_x + D_{12} \varepsilon_y + D_{13} \gamma_{xy}] dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \varepsilon_x(z_i) \quad (3.56)$$

Assim como descrito para o esforço axial na direção do eixo  $x$  dado pela Equação 3.56, obtém-se as expressões para os demais esforços atuantes na seção. Logo:

$$N_y = \int_h [D_{21} \varepsilon_x + D_{22} \varepsilon_y + D_{23} \gamma_{xy}] dz + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (E_s - E_c) \varepsilon_y(z_i),$$

$$M_x = \int_h [D_{11}\varepsilon_x + D_{12}\varepsilon_y + D_{13}\gamma_{xy}]zdz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) z_i \varepsilon_x(z_i),$$

$$M_y = \int_h [D_{21}\varepsilon_x + D_{22}\varepsilon_y + D_{23}\gamma_{xy}]zdz + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (E_s - E_c) z_i \varepsilon_y(z_i),$$

$$N_{xy} = \int_h [D_{31}\varepsilon_x + D_{32}\varepsilon_y + D_{33}\gamma_{xy}]dz, \quad M_{xy} = \int_h [D_{31}\varepsilon_x + D_{32}\varepsilon_y + D_{33}\gamma_{xy}]zdz,$$

$$Q_{xz} = \int_h [D_{44}\gamma_{xz} + D_{45}\gamma_{yz}]dz, \quad e Q_{yz} = \int_h [D_{54}\gamma_{xz} + D_{55}\gamma_{yz}]dz.$$

### 3.2 ELEMENTO PLANO DE CASCA FINO

O elemento finito implementado para a análise de cascas planas finas é o elemento retangular de quatro nós com cinco graus de liberdade por nó, três translações e duas rotações. É baseado no elemento apresentado por Razaqpur *et al.* (2003), denominado IDKQ e desenvolvido a partir das hipóteses discretas de Kirchhoff. Diferente do elemento de Razaqpur, o elemento implementado tem os graus de liberdade de translação nas direções  $x$  e  $y$ , já que a análise não linear e ação conjunta da laje de concreto e a fôrma de aço não permitem conhecer a posição do plano neutro para o qual esses deslocamentos são nulos.

Na Figura 3.8 está indicado que o elemento para a análise de cascas planas finas é desenvolvido a partir de um elemento plano de casca espesso com nove nós e cinco graus de liberdade por nó. Esse elemento é o mesmo elemento implementado no item anterior com a eliminação do grau de liberdade de translação vertical. A formulação é desenvolvida para o elemento de nove nós e os deslocamentos encontrados são transformados para o elemento de quatro nós através de uma matriz de transformação apresentada no item 4.2.

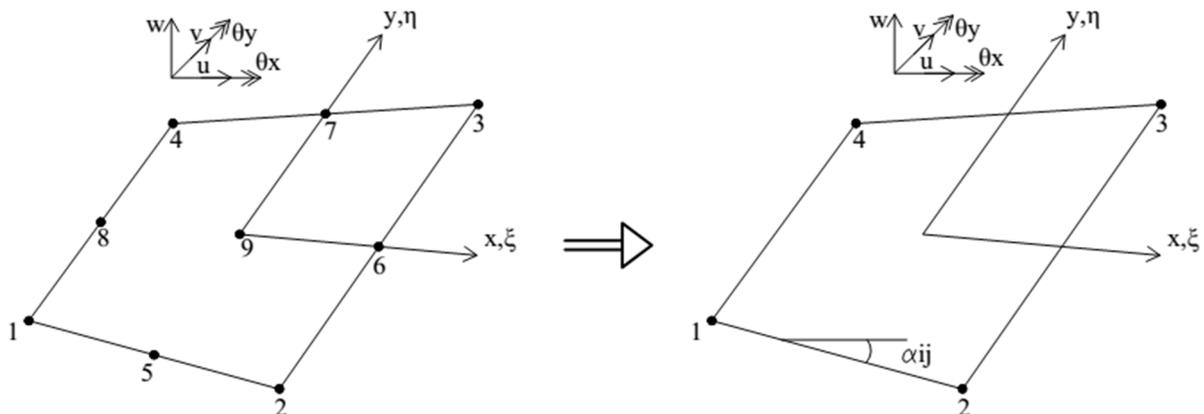


Figura 3.8 - Transformação do elemento de 9 nós para o elemento de 4 nós

### 3.2.1 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE CASCA FINO

A formulação apresentada nesse item foi desenvolvida para a análise de placas de aço, para utilizar o elemento na análise de placas de concreto as barras de armadura devem ser consideradas da forma apresentada para o item 3.1. Além disso as relações tensão-deformação usadas para o concreto são as apresentadas nas Figuras 3.4 e 3.5.

Assim como para o elemento plano de casca espesso (item 3.1), as equações dos deslocamentos para o elemento de casca fino são dadas pelas equações 3.1 a 3.3. Admitindo agora que  $\theta_x = w_{,y}$  e  $\theta_y = -w_{,x}$ , tem-se que  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ , e as demais deformações são dadas pelas equações 3.57 a 3.59.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x} + \frac{1}{2}\theta_y^2 \quad (3.57)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - z\theta_{x,y} + \frac{1}{2}\theta_x^2 \quad (3.58)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + z\theta_{y,y} + v_{,x} - z\theta_{x,x} - \theta_y\theta_x) \quad (3.59)$$

Observa-se das equações de deformações 3.57 a 3.59 que o deslocamento transversal não é mais incógnita explícita do problema. Isso é o que basicamente diferencia essa primeira parte da formulação do elemento plano de casca fino do elemento do item 3.1.

Para a análise da fôrma, o aço é modelado como um material elástico perfeitamente plástico. A relação tensão-deformação é dada pela expressão 3.60. Em que os termos  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{13}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{23}$  e  $D_{33}$  da matriz constitutiva foram definidos no item 3.1 pelas Equações 3.17 a 3.22.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ Sim & & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

Aplicando o operador variacional nas equações 3.56 a 3.58 das deformações chega-se às Equações 3.61 a 3.63 dadas a seguir.

$$\delta\varepsilon_x = \delta u_{,x} + z\delta\theta_{y,x} + \theta_y\delta\theta_y \quad (3.61)$$

$$\delta\varepsilon_y = \delta v_{,y} - z\delta\theta_{x,y} + \theta_x\delta\theta_x \quad (3.62)$$

$$\delta\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\delta u_{,y} + z\delta\theta_{y,y} + \delta v_{,x} - z\delta\theta_{x,x} - \theta_x\delta\theta_y - \theta_y\delta\theta_x) \quad (3.63)$$

Substituindo as Equações 3.61 a 3.63 na expressão do princípio do trabalho virtual e desprezando a tensão normal na direção  $z$ , chega-se à equação 3.64 para o trabalho virtual interno.

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V [(\delta u_{,x} + z\delta\theta_{y,x} + \theta_y\delta\theta_y)\sigma_x + (\delta v_{,y} - z\delta\theta_{x,y} + \theta_x\delta\theta_x)\sigma_y + (\delta u_{,y} + z\delta\theta_{y,y} + \delta v_{,x} - z\delta\theta_{x,x} - \theta_x\delta\theta_y - \theta_y\delta\theta_x)\tau_{xy}]dV \quad (3.64)$$

Na equação 3.63 a integral é escrita ao longo do volume indeformado do elemento plano de casca fino. Os esforços  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $M_y$ ,  $M_x$  e  $M_{xy}$  são definidos da mesma forma que no item 3.1, sendo que se o elemento estiver representando a fôrma de aço não se terá a contribuição da armadura que aparecem nas equações desses esforços para o material concreto.

Seguindo a mesma linha de raciocínio do item 3.1 para obter a formulação fraca do trabalho virtual interno e igualando ao trabalho virtual externo chega-se ao vetor de forças internas para o elemento plano de casca fino dado pela equação abaixo:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \iint_A \begin{Bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_{xy} \Phi_{,x} + N_y \Phi_{,y} \\ -M_{xy} \Phi_{,x} - M_x \Phi_{,y} + \theta_x N_y \Phi - \theta_y N_{xy} \Phi \\ M_y \Phi_{,x} + M_{xy} \Phi_{,y} + \theta_y N_x \Phi - \theta_x N_{xy} \Phi \end{Bmatrix} dA \quad (3.65)$$

Diferente do item 3.1, o vetor  $\Phi$  que representa as funções de forma avaliadas em um determinado ponto tem 36 termos, uma vez que, os graus de liberdade referente ao deslocamento vertical não estão sendo considerados nessa formulação. No entanto, para os outros graus de liberdades as funções de forma são as mesmas do item 3.1.

Análogo ao item 3.1, a matriz de rigidez tangente é dada por,  $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}}$ .

Desenvolvendo essa derivada dos esforços internos chega-se à equação 3.66 para a matriz de rigidez do elemento plano de casca fino.

$$\mathbf{K} = \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_{,y} \left( \frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Psi_1 \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Psi_2 \end{bmatrix} dA \quad (3.66)$$

Na Equação 3.66,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  são vetores colunas com 36 termos como mostrado nas expressões a seguir:

$$\Psi_1 = \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} N_y + \frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \theta_x \right)^T + \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \theta_y \right)^T$$

$$\Psi_2 = \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \theta_y \right)^T + \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \theta_x \right)^T$$

De forma análoga à descrita para o elemento de casca espesso, no item 3.1, pode-se chegar às expressões para as derivadas em relação aos deslocamentos nodais dos esforços atuantes na seção para o elemento de casca fino. Essas expressões são apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \\ -\Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz + \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz - \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz + \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} dz - \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz \\ -\Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} z dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz + \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} dz - \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz + \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} dz - \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} z dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz \\ -\Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} z^2 dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z^2 dz + \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{22} z dz - \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z^2 dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z^2 dz + \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz - \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \\ -\Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z^2 dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z^2 dz + \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{12} z dz - \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} z^2 dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z^2 dz + \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{11} z dz - \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} dz \\ -\Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz + \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} dz - \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz + \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} dz - \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} dz \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz \\ \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz + \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz \\ -\Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z^2 dz - \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z^2 dz + \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{23} z dz - \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz \\ \Phi_{,x} \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z^2 dz + \Phi_{,y} \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z^2 dz + \theta_y \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{13} z dz - \theta_x \Phi \int_{-h/2}^{h/2} D_{33} z dz \end{bmatrix}$$

Os esforços  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $Q_{xz}$ ,  $Q_{yz}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  presentes no vetor de forças internas (equação 3.65) podem ser obtidos de forma análoga à descrita para o elemento plano de casca espesso, no item 3.1. Logo:

$$N_x = \int_h [D_{11} \varepsilon_x + D_{12} \varepsilon_y + D_{13} \gamma_{xy}] dz, \quad N_y = \int_h [D_{21} \varepsilon_x + D_{22} \varepsilon_y + D_{23} \gamma_{xy}] dz,$$

$$M_x = \int_h [D_{11} \varepsilon_x + D_{12} \varepsilon_y + D_{13} \gamma_{xy}] z dz, \quad M_y = \int_h [D_{21} \varepsilon_x + D_{22} \varepsilon_y + D_{23} \gamma_{xy}] z dz,$$

$$N_{xy} = \int_h [D_{31} \varepsilon_x + D_{32} \varepsilon_y + D_{33} \gamma_{xy}] dz \quad \text{e} \quad M_{xy} = \int_h [D_{31} \varepsilon_x + D_{32} \varepsilon_y + D_{33} \gamma_{xy}] z dz.$$

A formulação do elemento plano de casca fino desenvolvida nesse item até aqui, é baseada na formulação do elemento plano de casca espesso do item 3.1. As hipóteses de Kirchoff são forçadas fazendo os graus de liberdade de rotação ser iguais as derivadas do deslocamento vertical, e, dessa forma, anulando as tensões cisalhantes. No entanto a formulação obtida não consegue ser utilizada porque suas funções de forma consideram independência das rotações em  $x$  e  $y$ , o que na teoria de Kirchoff não acontece. Razaqpur *et al.* (2003) conseguiu definir uma matriz de transformação que altera a formulação obtida até aqui em uma formulação consistente para um elemento plano de casca fino de quatro nós, ou seja, que atende as considerações da teoria de Kirchoff. Essa matriz de transformação é apresentada no item seguinte, e diferente de Razaqpur *et al.* (2003) nesse trabalho é considerado o efeito de membrana.

### 3.2.2 TRANSFORMAÇÃO PARA O ELEMENTO DE QUATRO NÓS

Sendo  $\mathbf{f}_{ext}$  o vetor de forças externas nas direções dos graus de liberdade do elemento plano de casca fino, o trabalho virtual externo é dado por  $\delta W_{ext} = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{f}_{ext}$ , em que  $\mathbf{p}^T$  é o vetor dos deslocamentos para o elemento de quatro nós. Da condição  $\delta W_{ext} = \delta W_{int}$  tem-se:

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{int} = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{f}_{ext} \quad (3.67)$$

Porém o variacional dos deslocamentos  $\delta \mathbf{q}^T$  na Equação 3.67 se refere aos deslocamentos para elemento de nove nós e cinco graus de liberdade por nó. Para escrever os deslocamentos do elemento de quatro nós é necessário fazer uma conversão através de uma matriz de transformação ( $\mathbf{T}_{n \times m}$ ), de forma que:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_{n \times m} \mathbf{p}. \quad (3.68)$$

Onde:  $n$  é o número de graus de liberdade do elemento de 9 nós,  $m$  é o número de graus de liberdade do elemento de 4 nós,

$$\mathbf{q}^T = \{u_1 \quad \dots \quad u_9 \quad v_1 \quad \dots \quad v_9 \quad \theta_{x1} \quad \dots \quad \theta_{x9} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad \theta_{y9}\}, \text{ e}$$

$$\mathbf{p}^T = \{u_1 \quad \dots \quad u_4 \quad v_1 \quad \dots \quad v_4 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}\}.$$

Além das coordenadas paramétricas, são definidas as coordenadas locais  $s$  e  $n$  para cada lado do elemento plano de casca fino. A coordenada  $s$  representa o eixo coincidente com o lado do elemento enquanto que a coordenada  $n$  corresponde ao eixo normal a esse lado. Na

Figura 3.9 está representada a posição de um dos lados do elemento em relação às

coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ . É mostrada na figura também a posição dos eixos  $s$  e  $n$ .

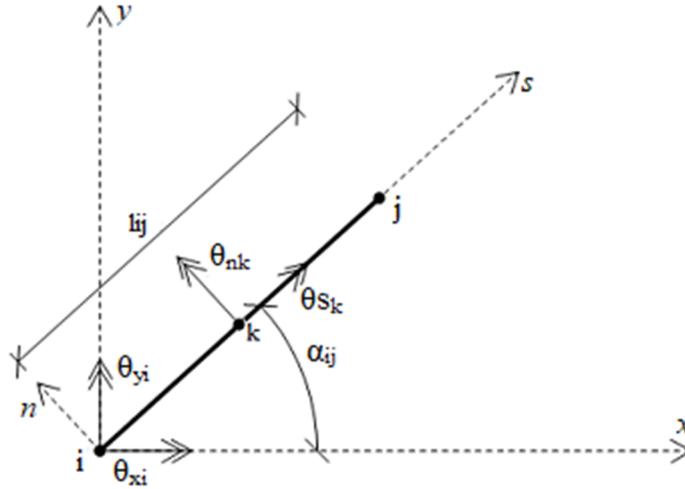


Figura 3.9 - Coordenadas do lado do elemento (adaptado de RAZAQPUR *et al.*, 2002)

Definindo  $\xi$  uma coordenada paramétrica na direção de  $s$ , de tal forma que a relação entre essas duas variáveis seja dada pela Equação 3.78 a seguir:

$$\xi = \frac{2}{l_{ij}}s - 1, \text{ logo: } \frac{d\xi}{ds} = \frac{2}{l_{ij}}. \quad (3.69)$$

Sendo os índices  $i$  e  $j$  representantes dos nós das extremidades do lado analisado, o deslocamento  $w$  ao longo desse lado pode ser obtido em função dos deslocamentos verticais e rotações nos nós desse lado, como é mostrado na Equação 3.70. Na Equação 3.71 é mostrada a derivada do deslocamento vertical em relação à variável  $s$ .

$$w(\xi) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 - 3\xi + \xi^3 & 2 + 3\xi - \xi^3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \end{Bmatrix} - \frac{l_{ij}}{8} (\xi^2 - 1) \begin{pmatrix} \xi - 1 & \xi + 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{ni} \\ \theta_{nj} \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{1}{2l_{ij}} \begin{pmatrix} -3 + 3\xi^2 & 3 - 3\xi^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \end{Bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\xi^2 - 2\xi - 1 & 3\xi^2 + 2\xi - 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{ni} \\ \theta_{nj} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

Da Figura 3.9 verifica-se que as coordenadas  $s$  e  $n$  são relacionadas com as coordenadas  $x$  e  $y$  pela expressão:

$$\begin{Bmatrix} s \\ n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} & \text{sen} \alpha_{ij} \\ -\text{sen} \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}. \quad (3.72)$$

Relacionando as rotações  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_{nk}$  com as derivadas de  $w$  tem-se:  $\theta_x = w_{,y}$ ,  $\theta_y = -w_{,x}$  e  $\theta_{nk} = -w_{,sk}$ . Desenvolvendo a derivada de  $w$  em relação a  $s$  e sabendo que o valor de  $\xi$  no ponto  $k$  é zero, encontra-se a expressão para a rotação  $\theta_{nk}$  no meio dos lados (nós 5, 6, 7 e 8). Já a rotação  $\theta_{sk}$  pode ser determinada pela média das rotações  $\theta_{si}$  e  $\theta_{sj}$ , como podem ser vistos nas Equações 3.73 e 3.74.

$$\theta_{nk} = \frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} \theta_{ni} - \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} \theta_{nj} \quad (3.73)$$

$$\theta_{sk} = \frac{1}{2} (\theta_{si} + \theta_{sj}) \quad (3.74)$$

Sendo  $\mathbf{J}$  a matriz de rotação mostrada na Equação 3.72, e como ela é ortogonal, ou seja,  $\mathbf{J}^T$  é sua inversa, pode-se determinar a partir das Equações 3.73 e 3.74 as rotações no ponto médio de cada lado do elemento retangular em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , como são mostradas na Equação 3.75.

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{Bmatrix} \theta_{sk} \\ \theta_{nk} \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Substituindo as rotações  $\theta_{nk}$  e  $\theta_{sk}$  na equação 3.85 por suas expressões 3.73 e 3.74, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2l_{ij}} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2l_{ij}} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{ni} \\ \theta_{si} \\ w_j \\ \theta_{nj} \\ \theta_{sj} \end{Bmatrix}. \quad (3.76)$$

Escrevendo as rotações  $\theta_{ni}$ ,  $\theta_{si}$ ,  $\theta_{nj}$  e  $\theta_{sj}$  em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , utilizando para isso matriz de rotação  $\mathbf{J}$ , encontra-se a expressão 3.77 para as rotações nos nós 5, 6, 7 e 8 do elemento de nove nós em função do deslocamento  $w$  e das rotações do elemento de quatro nós.

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cos \alpha_{ij} & \frac{1}{2} \sin \alpha_{ij} & 0 & \frac{1}{2} \cos \alpha_{ij} & \frac{1}{2} \sin \alpha_{ij} \\ -\frac{3}{2l_{ij}} & \frac{1}{4} \sin \alpha_{ij} & -\frac{1}{4} \cos \alpha_{ij} & \frac{3}{2l_{ij}} & \frac{1}{4} \sin \alpha_{ij} & -\frac{1}{4} \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

Para o nó 9 as rotações são obtidas utilizando o mesmo raciocínio para as rotações na direção  $n$  dos nós médios dos lados. Sendo que para a rotação na direção  $x$  é utilizada uma linha ligando o nós 5, 9 e 7, enquanto que para a direção  $y$  usa-se uma linha formada pelos nós 6, 9, 8. Dessa forma, tem-se:

$$\theta_{x9} = \frac{3}{2l_{57}} w_5 - \frac{1}{4} \theta_{x5} - \frac{3}{2l_{57}} w_7 - \frac{1}{4} \theta_{x7}, \text{ e} \quad (3.78)$$

$$\theta_{y9} = \frac{3}{2l_{57}} w_6 - \frac{1}{4} \theta_{y6} - \frac{3}{2l_{57}} w_8 - \frac{1}{4} \theta_{y8}. \quad (3.79)$$

Para as direções  $u$  e  $v$ , os deslocamentos dos vértices do elemento de nove nós são iguais aos deslocamentos dos vértices do elemento de quatro nós. Para os nós centrais de cada lado do elemento de nove nós os deslocamentos  $u$  e  $v$  são calculados pela média dos deslocamentos dos nós das extremidades do elemento de quatro nós. Ou seja,  $u_k = (u_i^* + u_j^*)/2$ . Para o nó 9, os deslocamentos  $u$  e  $v$  são calculadas pelas médias dos deslocamentos dos nós centrais, onde esses foram calculados usando a média dos nós das extremidades, dessa forma, tem-se:  $u_9 = (u_1^* + u_2^* + u_3^* + u_4^*)/4$  e  $v_9 = (v_1^* + v_2^* + v_3^* + v_4^*)/4$ . Nesse parágrafo, o sobescrito \* indica deslocamentos no elemento de quatro nós, ou seja, termos do vetor  $\mathbf{p}$ .

A seguir é apresentada a linha de raciocínio para definir a matriz de rigidez do elemento de quatro nós a partir da matriz de rigidez do elemento de 9 nós, obtida no item anterior, e a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  definida nesse item.

Da Equação 3.68, tem-se:  $\delta \mathbf{q}^T = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{T}^T$ . Substituindo  $\delta \mathbf{q}$  na equação 3.67 encontra-se:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}. \quad (3.80)$$

Dada o conjunto de funções  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ , e sendo  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  constante em relação aos deslocamentos nodais a matriz de rigidez tangente do elemento de quatro nós é dada por  $\mathbf{K}^* = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ . Sendo  $d\mathbf{q}$  uma variação infinitesimal em  $\mathbf{q}$  e considerando a expansão em série de Taylor das funções dadas pelos termos de  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ , tem-se:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{q} + d\mathbf{q}) &= f_1(\mathbf{q}) + \nabla f_1^T(\mathbf{q})d\mathbf{q} \\ f_2(\mathbf{q} + d\mathbf{q}) &= f_2(\mathbf{q}) + \nabla f_2^T(\mathbf{q})d\mathbf{q} \\ &\vdots \\ f_m(\mathbf{q} + d\mathbf{q}) &= f_m(\mathbf{q}) + \nabla f_m^T(\mathbf{q})d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Na Equação 3.81,  $\nabla$  é o gradiente, ou seja, a derivada em relação aos termos do vetor dos deslocamentos nodais do elemento de nove nós, logo:

$$\begin{aligned} \nabla f_1^T(\mathbf{q}) &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \quad \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \right) \\ \nabla f_2^T(\mathbf{q}) &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \right) \\ &\vdots \\ \nabla f_m^T(\mathbf{q}) &= \left( \frac{\partial f_m}{\partial q_1} \quad \frac{\partial f_m}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Levando 3.82 em 3.81 chega-se à Equação 3.83 para representação vetorial das equações dadas em 3.81.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q} + d\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \begin{bmatrix} \nabla^T f_1 \\ \nabla^T f_2 \\ \vdots \\ \nabla^T f_m \end{bmatrix} d\mathbf{q} = \mathbf{0}, \text{ logo: } \begin{bmatrix} \nabla^T f_1 \\ \nabla^T f_2 \\ \vdots \\ \nabla^T f_m \end{bmatrix} d\mathbf{q} = -\mathbf{f}(\mathbf{q}). \quad (3.83)$$

A Equação 3.83 é válida para qualquer  $\mathbf{q}$  desde que a variação  $d\mathbf{q}$  seja infinitesimal. Sendo assim, fazendo  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  tem-se  $\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{0}$  e, portanto,  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = -\mathbf{f}_{\text{ext}}$ . Dessa forma, a Equação 3.83 torna-se a Equação 3.84.

$$\begin{bmatrix} \nabla^T f_1 \\ \nabla^T f_2 \\ \vdots \\ \nabla^T f_m \end{bmatrix} d\mathbf{q} = \mathbf{f}_{ext} \quad (3.84)$$

Usando a Equação 3.68 para transformar a Equação 3.84 para os deslocamentos nodais do elemento de quatro nós, chega-se a Equação 3.85, onde:  $\mathbf{T}_{n \times m}$  é a matriz de transformação apresentada na Equação 3.68.

$$\begin{bmatrix} \nabla^T f_1 \\ \nabla^T f_2 \\ \vdots \\ \nabla^T f_m \end{bmatrix}_{m \times n} \mathbf{T}_{n \times m} d\mathbf{p} = \mathbf{f}_{ext} \quad (3.85)$$

Os termos da matriz dos gradientes apresentada na Equação 3.85 são dados pela Equação 3.86 a seguir. Nessa equação,  $i$  varia de 1 até  $n$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial q_i} &= T_{11} \frac{\partial f_{int}^1}{\partial q_i} + T_{21} \frac{\partial f_{int}^2}{\partial q_i} + \dots + T_{n1} \frac{\partial f_{int}^n}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial q_i} &= T_{12} \frac{\partial f_{int}^1}{\partial q_i} + T_{22} \frac{\partial f_{int}^2}{\partial q_i} + \dots + T_{n2} \frac{\partial f_{int}^n}{\partial q_i} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial q_i} &= T_{1m} \frac{\partial f_{int}^1}{\partial q_i} + T_{2m} \frac{\partial f_{int}^2}{\partial q_i} + \dots + T_{nm} \frac{\partial f_{int}^n}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Substituindo 3.86 em 3.85 e sabendo que:  $\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_i} = \left[ \frac{\partial f_{int}^1}{\partial q_i} \quad \frac{\partial f_{int}^2}{\partial q_i} \quad \dots \quad \frac{\partial f_{int}^n}{\partial q_i} \right]^T$ , chega-se

a Equação 3.87, onde  $\mathbf{T}_i$  é  $i$ -ésima coluna da matriz de Transformação.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_1} & \mathbf{T}_1^T \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_2} & \dots & \mathbf{T}_1^T \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_n} \\ \mathbf{T}_2^T \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_1} & \mathbf{T}_2^T \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_2} & \dots & \mathbf{T}_2^T \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{T}_m^T \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_1} & \mathbf{T}_m^T \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_2} & \dots & \mathbf{T}_m^T \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial q_n} \end{bmatrix}_{m \times n} d\mathbf{p} = \mathbf{f}_{ext} \quad (3.87)$$

A Equação 3.87 pode ser reescrita na forma mostrada na Equação 3.88, onde  $\mathbf{K}_{n \times n}$  é a matriz de rigidez do elemento de 9 nós obtida no item 3.2.1, e  $\mathbf{K}_{m \times m}^* = \mathbf{T}_{m \times n}^T \mathbf{K}_{n \times n} \mathbf{T}_{n \times m}$  é a matriz de rigidez do elemento de 4 nós.

$$\mathbf{T}_{m \times n}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\text{int}}^1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{\text{int}}^1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{\text{int}}^1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_{\text{int}}^2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{\text{int}}^2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{\text{int}}^2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{\text{int}}^n}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{\text{int}}^n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{\text{int}}^n}{\partial q_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{n \times n}} \mathbf{T}_{n \times m} d\mathbf{p} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.88)$$

No caso específico do elemento de quatro nós apresentado nesse item, a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  necessária para transformar a matriz de rigidez do elemento de 9 nós para o elemento de 4 nós, como descrito no parágrafo anterior, possui 36 linhas e 20 colunas. Seus elementos estão descritos no apêndice A.

### 3.3 ELEMENTO DE BARRA

Na simulação numérica da laje de concreto com fôrma de aço incorporada as nervuras de concreto são simuladas por elementos de barra. O elemento de barra utilizado nesse trabalho é o elemento implementado por Silva (2010) sendo apresentado nesse item de forma resumida. É mostrado na Figura 3.10 os graus de liberdade considerados na implementação do elemento de barra e as tensões que surgem em um elemento infinitesimal no volume da barra. Observa-se dessa figura que os graus de liberdade do elemento de barra são os mesmos adotados para o elemento plano de casca.

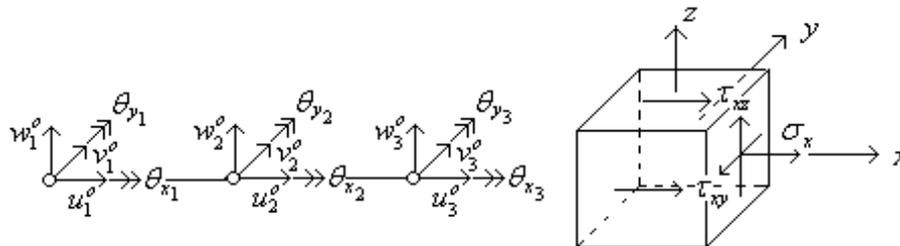


Figura 3.10 - Graus de liberdade do elemento de viga e tensões em um elemento infinitesimal (Silva, 2010)

Considerando as hipóteses cinemáticas da teoria de viga de Timoshenko e a aproximação de que um esforço de torção não provoca deslocamentos fora do plano de torção,

ou seja, que não haja empenamento da seção transversal, definem-se as equações de deslocamento como mostradas nas Equações 3.89 a 3.91.

$$u(x, y, z) = u^o(x) + z\theta_y(x) \quad (3.89)$$

$$v(x, y, z) = v^o(x) - z\theta_x(x) \quad (3.90)$$

$$w(x, y, z) = w^o(x) + y\theta_x(x) \quad (3.91)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais,  $\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$ . Onde,  $\sigma_{ij}$  são as componentes de tensões de Kirchhoff,  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes de deformação de Green-Lagrange,  $\delta$  é o operador variacional e  $V$  é o volume do sólido indeformado. Para o elemento de barra da figura 3.10, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dV. \quad (3.92)$$

As deformações e seus variacionais podem ser obtidos a partir das equações dos deslocamentos 3.89 a 3.91. Fazendo isso e substituindo na Equação 3.92 do trabalho virtual devido às forças interna, chega-se a abaixo:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \int_L \left[ \int_A \sigma_x dA (\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) + \int_A \tau_{xy} dA \delta v_{,x} + \int_A \tau_{xz} dA (w_{,x} + \delta \theta_y) + \right. \\ \left. + \int_A \sigma_x z dA \delta \theta_{y,x} + \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \delta \theta_{x,x} \right] dx. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Na Equação 3.93 pode-se identificar os esforços internos,  $N_x = \int_A \sigma_x dA$ ,  $N_{xy} = \int_A \tau_{xy} dA$ ,  $N_{xz} = \int_A \tau_{xz} dA$ ,  $M_x = \int_A \sigma_x z dA$  e  $T_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA$ . Aproximando as equações dos deslocamentos por funções de formas associadas aos deslocamentos nodais, chega-se a Equação 3.94 para a formulação fraca do trabalho virtual interno. Nessa equação,  $\Phi$  é um vetor coluna que representa as funções de forma dadas por polinômios quadráticos para os deslocamentos axiais, transversais e rotações,  $\mathbf{q} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{x_i} \quad \theta_{y_i}]^T$  com  $i$  variando de

1 até 9 representa os graus de liberdade do elemento de barra, e  $\mathbf{0}_u$  é um vetor coluna nulo com nove elementos.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_L \left[ N_x \left( \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xy} \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xz} \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + M_x \frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} + T_x \frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right] dx. \quad (3.94)$$

O trabalho virtual externo é obtido por  $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$ , onde  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  é o vetor de forças externas nodais. Da condição de  $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$ , chega-se a Equação 3.95 para o trabalho virtual. De forma análoga aos elementos mostrado nessa seção chega-se a matriz de rigidez tangente dada na Equação 3.96.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \begin{Bmatrix} N_x \Phi_{,x} \\ N_{xy} \Phi_{,x} \\ \frac{5}{6} N_{xz} \Phi_{,x} + N_x \Phi_{,x} w_{,x} \\ T_x \Phi_{,x} \\ M_x \Phi_{,x} + \frac{5}{6} N_{xz} \Phi \end{Bmatrix} dx. \quad (3.95)$$

$$\mathbf{K} = \int_L \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} w_{,x} \left( \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + N_x \Phi_{,x} \left( \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial T_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left( \frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{Bmatrix} dx. \quad (3.96)$$

As derivadas dos esforços internos em relação aos deslocamentos nodais que aparecem na matriz de rigidez tangente são dadas por:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E_T dA \\ \mathbf{0} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_A E_T dA \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \\ \mathbf{0} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E_T z^2 dA \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,x} \int_A G z dA \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Phi_{,x} \int_A G z dA \\ \Phi_{,x} \int_A G y dA \\ \Phi_{,x} \int_A G (y^2 + z^2) dA \\ \Phi \int_A G dA \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \Phi_{,x} \int_A G y dA \\ \Phi \int_A G dA \end{Bmatrix}.$$

As expressões dos esforços atuantes na seção transversal,  $N_x$ ,  $N_{xy}$ ,  $N_{xz}$ ,  $M_x$  e  $T_x$ , bem como, das rigidezes  $\int_A E dA$ ,  $\int_A E z dA$ ,  $\int_A E z^2 dA$ ,  $\int_A G dA$ ,  $\int_A G z dA$ ,  $\int_A G z^2 dA$ ,  $\int_A G y dA$  e  $\int_A G y^2 dA$ , são obtidas de forma analítica transformando a integral de área em uma integral de linha ao longo do contorno da seção transversal que tem forma geral dada por um polígono fechado qualquer.

### 3.4 ELEMENTO DE INTERFACE

Para a simulação da conexão deformável entre a laje de concreto e a fôrma de aço é utilizado o elemento de interface mostrado na Figura 3.11. Esse elemento tem a função também de ligar o elemento de barra que representa a nervura de concreto aos elementos planos de casca de concreto e aço. O elemento de interface utilizado para ligar elementos planos de casca de concreto aos elementos planos de casca de aço é similar a esse. Para maiores detalhes desses elementos consultar Silva (2010) e Dias (2016).

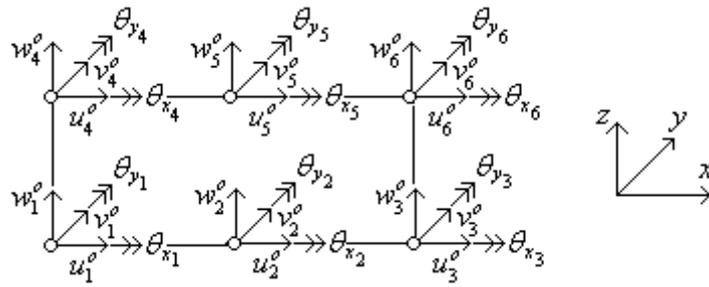


Figura 3.11 - Graus de liberdade do elemento de interface (Silva, 2010)

Sendo  $u_\alpha(x, y, z) = u_\alpha^0(x) + z\theta_{y\alpha}(x)$  e  $v_\alpha(x, y, z) = v_\alpha^0(x) - z\theta_{x\alpha}(x)$  as equações dos deslocamentos na direção  $x$  e  $y$  para os elementos acima ( $\alpha = 1$ ) e abaixo ( $\alpha = 2$ ) da interface de contato, e considerando  $w_\alpha(x, y, z) = w_\alpha^0(x) + y\theta_{x\alpha}(x)$  como a equação dos deslocamentos na direção  $z$ , tem-se as Equações 3.97 a 3.99 para os deslocamentos relativos longitudinal (direção  $x$ ), transversal (direção  $y$ ), e vertical (direção  $z$ ) do elemento de interface da figura 3.11.

$$s_l(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) - (y_2 - d)\theta_{y2}(x) - (d - y_1)\theta_{y1}(x) \quad (3.97)$$

$$s_t(x) = v_2^0(x) - v_1^0(x) + (y_2 - d)\theta_{x2}(x) + (d - y_1)\theta_{x1}(x) \quad (3.98)$$

$$s_v(x) = w_2^0(x) - w_1^0(x) + y(\theta_{x2}(x) - \theta_{x1}(x)) \quad (3.99)$$

São ilustrados na Figura 3.12 o deslocamento relativo na direção  $x$ , e as variáveis que aparecem nas Equações 3.97 a 3.99,  $d$ ,  $y_1$  e  $y_2$ . O sobrescrito  $o$  nessas equações indica deslocamento em um plano ou um eixo de referência adotado. Este índice será omitido nas equações a seguir para facilitar a notação.

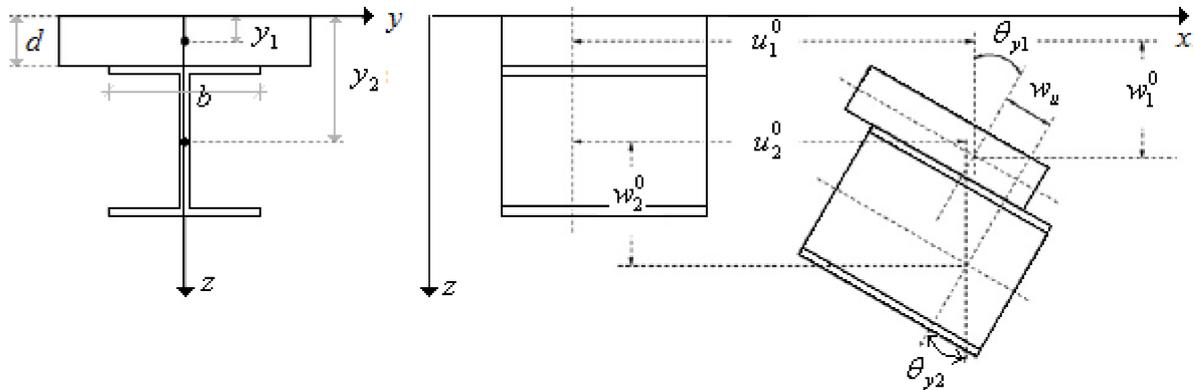


Figura 3.12 - Deslizamento longitudinal (Silva, 2010)

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento de interface da figura 3.11 deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} (S_b \delta s_l + N_b \delta s_v + V_b \delta s_t) d\Omega. \quad (3.100)$$

Na equação 3.100,  $S_b$ ,  $V_b$  e  $N_b$  são forças por unidade de comprimento na direção de  $u$ ,  $v$  e  $w$ , respectivamente. O contato representado pelo elemento de interface tem largura  $b$  e comprimento  $L$ . Sendo  $s_l$  e  $S_b$  constantes ao longo da largura de contato, tem-se que  $S_b/b$  fornece a tensão cisalhante na direção longitudinal do contato.  $s_t$  também é considerado constante em relação a  $b$ , já  $s_v$  varia linearmente, como mostra a equação 3.101. Dessa forma, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L (S_b \delta s_l + V_b \delta s_t) dx + \int_L \left( \int_b N_b \delta s_v dy \right) dx. \quad (3.101)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio dos elementos anteriores chega-se as Equações 3.102 e 3.103 para o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento de interface da Figura 3.11. Para maiores detalhes consultar Silva (2010) e Dias (2016).

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left\{ \begin{array}{c} -S_b \Phi \\ -V_b \Phi \\ -N_b^1 \Phi \\ [(d - y_1)V_b - N_b^2] \Phi \\ (y_1 - d)S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ V_b \Phi \\ N_b^1 \Phi \\ [(y_2 - d)V_b + N_b^2] \Phi \\ (d - y_2)S_b \Phi \end{array} \right\} dx. \quad (3.102)$$

$$\mathbf{K} = \int_L \begin{bmatrix} -\Phi \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left( \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left( \frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[ (d - y_1) \left( \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ (y_1 - d) \Phi \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left( \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left( \frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[ (y_2 - d) \left( \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ (d - y_2) \Phi \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dx \quad (3.103)$$

Nas Equações 3.102 e 3.103,  $N_b^1 = \int_b N_b dy$  e  $N_b^2 = \int_b N_b y dy$ ,  $\Phi$  é um vetor coluna dado pelas funções de forma. Foram utilizados polinômios quadráticos para a interpolação dos diferentes termos do vetor  $\mathbf{q}$  dos deslocamentos nodais. Esse vetor é dado por:

$$\mathbf{q} = \left[ \mathbf{q}_{u_1}^T \quad \mathbf{q}_{v_1}^T \quad \mathbf{q}_{w_1}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{x1}}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{y1}}^T \quad \mathbf{q}_{u_2}^T \quad \mathbf{q}_{v_2}^T \quad \mathbf{q}_{w_2}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{x2}}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{y2}}^T \right]^T.$$

Onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{u_1} &= [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T, \quad \mathbf{q}_{u_2} = [u_4 \quad u_5 \quad u_6]^T, \quad \mathbf{q}_{v_1} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T, \quad \mathbf{q}_{v_2} = [v_4 \quad v_5 \quad v_6]^T, \\ \mathbf{q}_{w_1} &= [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T, \quad \mathbf{q}_{w_2} = [w_4 \quad w_5 \quad w_6]^T, \quad \mathbf{q}_{\theta_{x1}} = [\theta_{x1} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{x3}]^T, \\ \mathbf{q}_{\theta_{x2}} &= [\theta_{x4} \quad \theta_{x5} \quad \theta_{x6}]^T, \quad \mathbf{q}_{\theta_{y1}} = [\theta_{y1} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{y3}]^T \text{ e } \mathbf{q}_{\theta_{y2}} = [\theta_{y4} \quad \theta_{y5} \quad \theta_{y6}]^T. \end{aligned}$$

As derivadas dos esforços por unidade de comprimento que surgem na interface de contato em relação aos deslocamentos nodais que aparecem na matriz de rigidez tangente são dadas por:

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} -\Phi E_{S_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ (y_1 - d)\Phi E_{S_b} \\ \Phi E_{S_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ (d - y_2)\Phi E_{S_b} \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \\ (d - y_1)\Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \\ (y_2 - d)\Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi \int_b E_{N_b} dy \\ -\Phi \int_b E_{N_b} y dy \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi \int_b E_{N_b} dy \\ \Phi \int_b E_{N_b} y dy \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \mathbf{e}$$

$$\frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi \int_b E_{N_b} y dy \\ -\Phi \int_b E_{N_b} y^2 dy \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi \int_b E_{N_b} y dy \\ \Phi \int_b E_{N_b} y^2 dy \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}.$$

Nas expressões acima,  $E_{S_b}$ ,  $E_{V_b}$  e  $E_{N_b}$  são as inclinações das tangentes às curvas força por unidade de comprimento versus deslizamento nas direções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Elas representam a rigidez da conexão.

## 4 EXEMPLOS E RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos a partir dos elementos finitos apresentados no Capítulo 3 deste trabalho. Para a validação desses elementos são utilizados resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura. Dessa forma, foram desenvolvidos seis exemplos que envolvem a análise numérica não linear de lajes mistas.

No primeiro exemplo é analisado um ensaio típico de flexão em lajes mistas. No segundo exemplo, armaduras longitudinais são colocadas dentro das nervuras das lajes mistas. Uma laje contínua é analisada no terceiro exemplo. Em seguida são apresentadas lajes avaliadas de forma numérica e experimental em ensaios de flexão com quatro pontos de carregamento, com a intenção de simular a situação de carregamento uniforme nas lajes mistas. No quinto exemplo são analisadas duas lajes mistas com fôrma de aço reentrante. Por fim, são feitas análises numéricas com lajes esbeltas e lajes espessas.

### 4.1 ENSAIO DE FLEXÃO

Nesse exemplo é avaliado o uso dos elementos finitos implementados na modelagem de um ensaio de flexão típico de lajes mistas, como o indicado na Figura 2.3 (Capítulo 2, item 2.1). A laje desse exemplo foi estudada experimentalmente por Chen (2003) e analisada numericamente por Chen e Shi (2011). São realizadas duas análises, sendo que na primeira análise o elemento plano de casca fino é usado para modelar tanto a fôrma de aço quanto a laje de concreto acima da nervura, ou seja, a laje de concreto de espessura dada pela altura total da laje menos a altura da forma de aço. Na segunda análise o elemento plano de casca espesso é utilizado para modelar a laje de concreto acima da nervura e o elemento plano de casca fino para modelar a fôrma de aço. A nervura é simulada por um elemento de barra com 3 nós e 5 graus de liberdade por nó, como apresentado no item 3.3. A ligação entre os elementos e a simulação da conexão deformável é feita pelos elementos de interface casca/casca e barra/casca.

A laje possui 914 mm de largura, 2.6 m de comprimento e duas cargas são aplicadas seguindo o indicado para o ensaio de flexão (mostrado na Figura 2.3), com vão de cisalhamento de 0.65 m. A espessura total de concreto é 165 mm. Na Figura 4.1 é apresentado um detalhe da fôrma de aço que possui espessura de 0.9 mm.

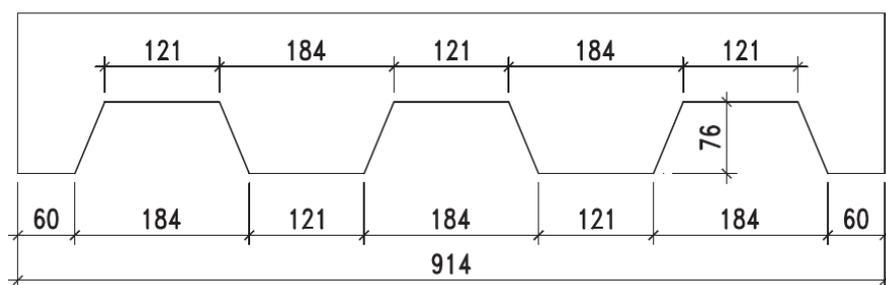


Figura 4.1 – Geometria da fôrma (Chen e Shi, 2011)

Na Figura 4.2 pode-se observar a laje discretizada em elementos planos de casca espessos para o concreto acima da nervura, elementos de barra de três nós para o concreto da nervura, elementos planos de casca finos para o aço e os elementos de interface indicados na cor cinza. Para a caracterização dos materiais foram utilizadas as curvas tensão-deformação apresentadas no item 3.1, sendo para o concreto adotado módulo de elasticidade  $E_c = 27133$  MPa, resistência à compressão  $f_c = 20.1$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ . Já para a fôrma de aço tem-se o módulo de elasticidade  $E_s = 210000$  MPa, tensão de escoamento  $f_y = 275$  MPa o coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . Como é mostrado na Figura 4.2, devido à simetria em relação ao plano  $yz$  e ao fato de que a laje é formada pela união de várias seções transversais como a indicada na referida figura, apenas uma nervura e metade do vão da laje mista é discretizado.

Ainda na Figura 4.2 são indicadas as condições de apoio e a posição de aplicação da carga. Os três nós da extremidade esquerda que estão marcados, tem os deslocamentos de translação ao longo do eixo  $x$  e rotação em  $y$  liberados. Os nós da extremidade da direita têm apenas a translação em  $z$  livre.

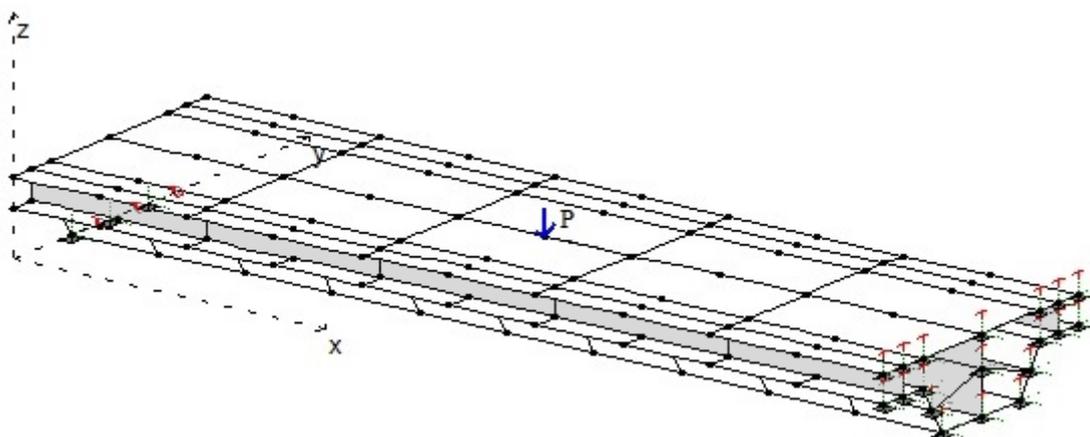


Figura 4.2 - Discretização da laje

A conexão entre o aço e o concreto foi modelada por elementos de interface de seis nós, que apresentam três rigidezes, longitudinal, transversal e vertical. Como a falha em lajes mistas ocorre devido ao cisalhamento longitudinal as possibilidades de separação vertical e deslizamento transversal são desconsideradas. Dessa forma, uma curva linear que representa conexão total, ou seja, rigidez elevada  $E = 10^6$  MPa é utilizada para representar o contato no sentido transversal e de separação vertical.

Chen (2003) fornece resultados experimentais para a curva carga-deslizamento longitudinal da laje mista analisada nesse exemplo. Esses resultados foram utilizados para definir a curva tensão cisalhante versus deslizamento longitudinal no contato aço-concreto da laje mista. Nesse trabalho, admite-se para essa curva uma função definida por sentenças, onde cada sentença é dada pela equação de uma reta. Os limites de cada intervalo da sentença bem como dos coeficientes linear e angular da equação da reta são definidos de forma que a resposta numérica e experimental carga-deslizamento para a laje mista sejam bastante próximas. Na Figura 4.3 é apresentada a curva fornecida aos elementos de interface para a laje mista em questão.

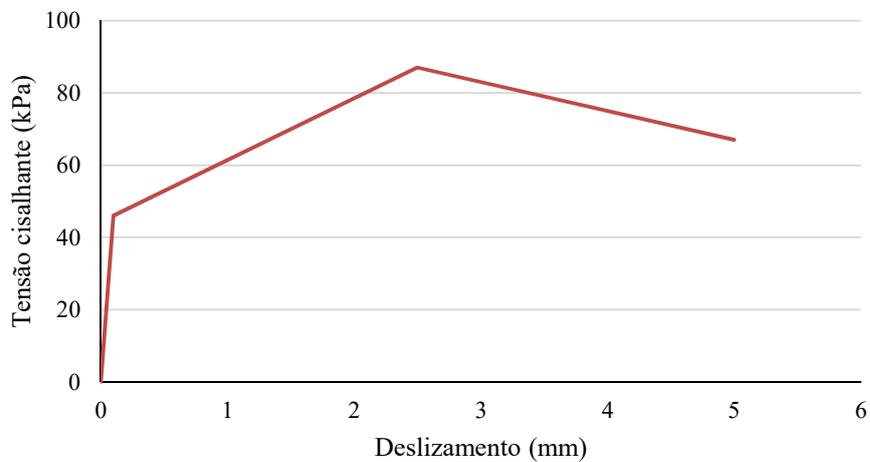


Figura 4.3 - Curva tensão cisalhante x deslizamento

Os pontos da curva mostrada na Figura 4.3 são apresentados na Tabela 4.1, na qual  $s$  corresponde ao deslizamento na interface de contato aço-concreto da laje mista, tomado na direção da nervura, e  $\tau$  à tensão cisalhante que surge na interface de contato.

$s$ (mm)	0	0.1	2.5	5.0
$\tau$ (kPa)	0	46.0	87.0	67.0

Os resultados numéricos de Chen e Shi (2011) foram obtidos com o programa comercial ANSYS. A fôrma de aço foi discretizada com elementos de casca, a laje de concreto com elementos sólidos. A conexão deformável foi modelada por um par de elementos de contato, considerando adesão e fricção. Com base no modelo de fricção Coulomb, foi definido que a resistência ao deslizamento longitudinal era garantida pelo atrito na interface. Uma rigidez baixa foi considerada após a perda do comportamento misto para manter a conexão na interface e evitar um movimento de corpo rígido. Nas Figuras 4.4 e 4.5 são ilustrados os resultados numéricos obtidos nesse trabalho, o resultado numérico de Chen e Shi (2011) e o resultado do modelo experimental apresentado por Chen (2003). O rótulo (casca4) refere-se à análise que utiliza apenas o elemento plano de casca fino e o rótulo (casca9+casca4) à análise que utiliza os dois elementos.

Na Figura 4.4 é apresentado o comportamento da deflexão no meio do vão da laje mista em relação à carga aplicada. Nota-se que nas duas análises o comportamento obtido para a fase linear, em que há a interação total entre o aço e o concreto, foi semelhante ao comportamento experimental. Com o início do comportamento não linear, há um distanciamento entre o comportamento experimental e o encontrado com os modelos numéricos. Essa diferença se deve à complexidade da simulação numérica do concreto após fissuração e da grande quantidade de fatores que influenciam no comportamento do contato em lajes mistas, como, por exemplo, efeitos localizados nas mossas. No entanto, em termos de carga última, a resposta numérica utilizando apenas os elementos de casca plano fino (Casca4), e a resposta numérica de Chen, apresentam valores próximos ao resultado experimental. A análise (Casca9+Casca4) apresenta um valor um pouco menor, o que pode ser explicado pela diferença nas formulações dos elementos Casca9 e Casca4, sendo que o elemento Casca9 pode apresentar o efeito *shear locking* discutido no capítulo 2 no item 2.3.

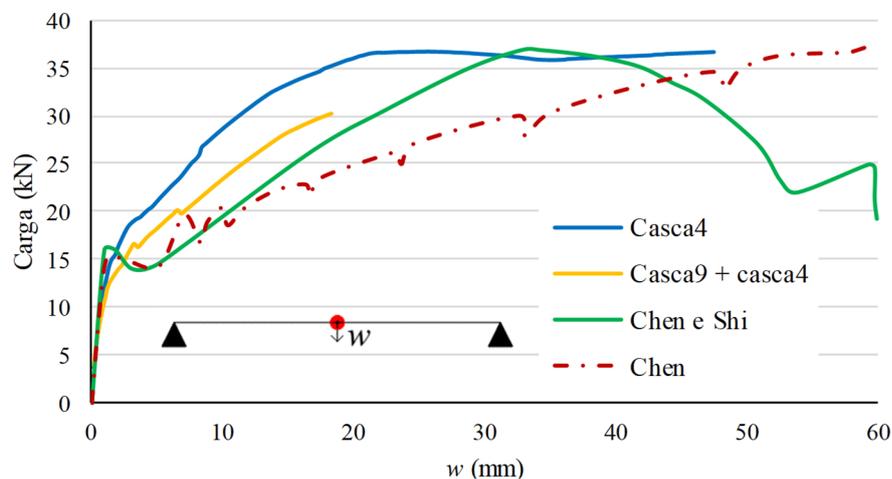


Figura 4.4 - Carga x Deflexão no meio do vão

Na Figura 4.5 é ilustrado o comportamento do deslizamento na extremidade da laje em relação à carga aplicada. Nota-se que todas as análises numéricas apresentaram comportamento próximo ao real no início da fase de comportamento não linear. Em termos de carga última, tanto a análise de Chen e Shi (2011) quanto à análise que utiliza apenas o elemento plano de casca fino (Casca4) fornecem resultados próximos do experimental. No entanto, observa-se que na análise com o elemento plano de casca fino (Casca4) o comportamento da fase não linear é muito próximo ao comportamento real, o que não é verificado na análise numérica de Chen e Shi (2011). Isso sugere que a curva tensão cisalhante versus deslizamento usada nesse trabalho representa melhor o comportamento da conexão deformável. Para a análise (Casca9+Casca4) cabem as mesmas considerações feitas para a curva carga-deslocamento da figura anterior.

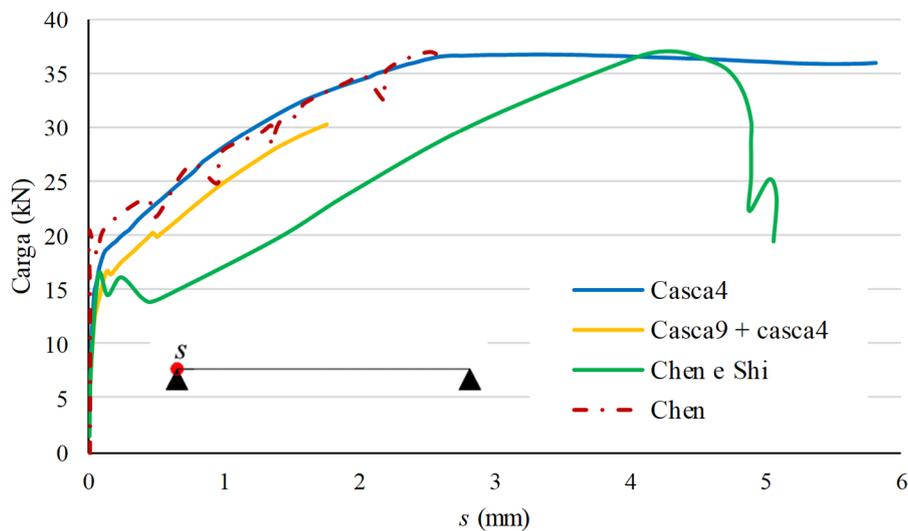


Figura 4.5 - Carga x Deslizamento na extremidade

Na Figura 4.6 está ilustrada a deformada da laje obtida na análise com o elemento de casca espesso representando a laje de concreto (Casca9+casca4), sendo indicado o ponto de máxima deflexão. Essa deformada foi obtida para a fase não linear da curva carga-deslocamento e observa-se uma maior curvatura da laje mista no ponto de aplicação da carga. Isso justifica o fato de alguns trabalhos adicionarem nesse ponto elementos (indutores de fissuração) que possam representar o comportamento do concreto após fissuração (RÍOS *et al.*, 2017).

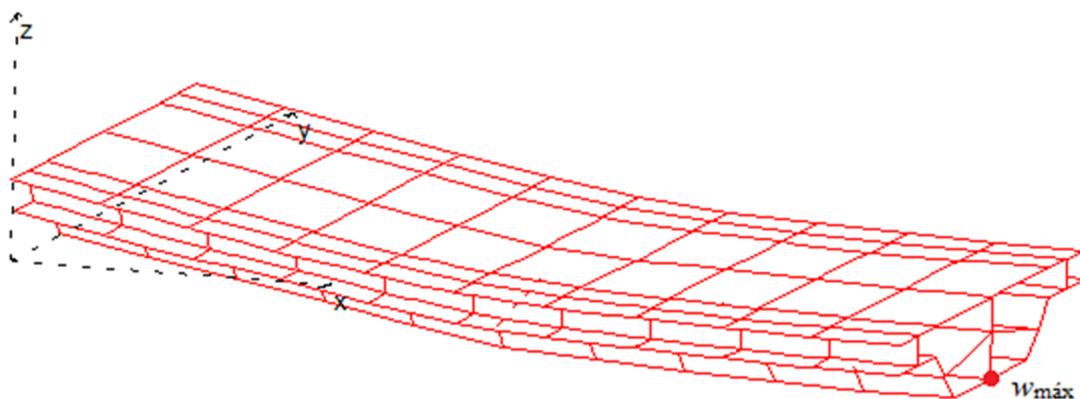


Figura 4.6 - Deformada da laje

## 4.2 LAJE MISTA COM ARMADURA LONGITUDINAL

Nesse exemplo é avaliado o uso dos elementos finitos implementados no presente trabalho para a modelagem de uma laje mista com armadura longitudinal. São realizadas duas análises, sendo que na primeira análise o elemento plano de casca fino é usado para modelar tanto a fôrma de aço quanto a laje de concreto acima da nervura. Na segunda análise o elemento plano de casca espesso é utilizado para modelar a laje de concreto e o elemento plano de casca fino para modelar a fôrma de aço.

Johnson e Shepherd (2013) desenvolveram uma análise experimental com essa laje para determinar a influência das armaduras de reforço longitudinais na resistência ao cisalhamento de lajes mistas. De acordo com os autores armaduras de reforço longitudinais são colocadas dentro das nervuras de lajes mistas para melhorar a resistência em situação de incêndio.

A laje mista em questão possui 4.8 m de comprimento, 0.9 m de largura e espessura de 140 mm. A laje é biapoiada e possui duas cargas aplicadas seguindo o indicado para o ensaio de flexão (mostrado na Figura 2.3), com vão de cisalhamento de 1.2m. A fôrma de aço utilizada possui 0.9 mm de espessura e o detalhe de uma está representado na Figura 4.7.

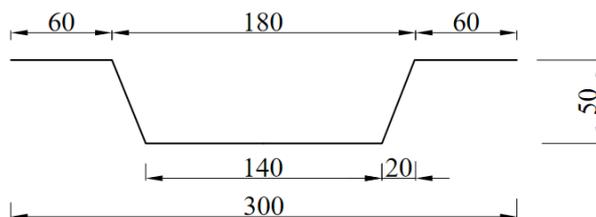


Figura 4.7 – Fôrma de aço

Uma barra de armadura de 16mm de diâmetro é colocada sobre cada nervura da laje, como mostrado na Figura 4.8. As outras barras mostradas nessa figura funcionam apenas como armaduras de distribuição.

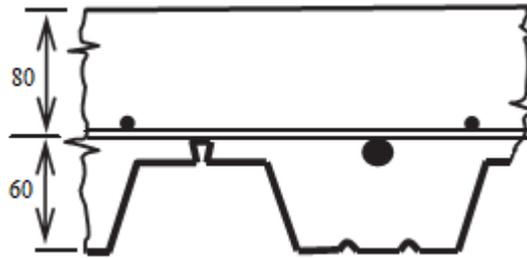


Figura 4.8 - Armadura longitudinal (Johnson e Shepherd, 2013)

Para a caracterização dos materiais foram utilizadas as curvas tensão-deformação apresentadas no item 3.1, sendo que para o concreto foi adotado módulo de elasticidade  $E_c = 22333$  MPa, resistência à compressão  $f_c = 20.1$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ . As barras de armadura são modeladas como uma camada de aço com rigidez apenas no sentido longitudinal da barra, com módulo de elasticidade  $E_s = 200000$  MPa, tensão de escoamento  $f_y = 320$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . Para a fôrma de aço tem-se o módulo de elasticidade  $E_s = 212000$  MPa, tensão de escoamento  $f_y = 402$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ .

São realizadas duas análises identificadas nesse exemplo como (casca4) e (casca9+casca4). Na análise (casca4), o elemento plano de casca fino é usado para modelar tanto a fôrma de aço quanto a laje de concreto acima da nervura. Na análise (casca9+casca4) o elemento plano de casca espesso é utilizado para modelar a laje de concreto acima da nervura e o elemento plano de casca fino para modelar a fôrma de aço. A armadura de reforço longitudinal é modelada como uma camada de aço dentro da laje de concreto acima da nervura, com rigidez apenas no sentido longitudinal da barra. A nervura é simulada por um elemento de barra como apresentado no item 3.3. A ligação entre os elementos e a simulação da conexão deformável é feita pelos elementos de interface placa/placa e viga/placa.

Assim como foi apresentado para o exemplo anterior, a conexão entre o aço e o concreto foi modelada por elementos de interface. Como a falha em lajes mistas é devida ao cisalhamento longitudinal, as possibilidades de separação vertical e deslizamento transversal são desconsideradas. Dessa forma, uma curva linear com rigidez elevada é utilizada para representar o contato no sentido transversal e de separação vertical.

Assim como no exemplo anterior, a curva tensão cisalhante versus deslizamento no contato aço-concreto da laje mista é definida por uma função dividida em sentenças, onde cada sentença é dada pela equação de uma reta. Os limites de cada intervalo da sentença, bem como dos coeficientes linear e angular da equação da reta foram definidos utilizando o resultado experimental da curva carga deslizamento da laje fornecida por Johnson e Shepherd (2013). Dessa forma, obtiveram-se os pontos apresentados na Tabela 4.2 para a curva tensão de cisalhamento versus deslizamento fornecida aos elementos de interface, indicada na Figura 4.9.

Tabela 4.2 – Pontos da curva  $\tau \times s$

$s$ (mm)	0	0.01	0.5	1.0	1.3
$\tau$ (kPa)	0	500	647	897	987

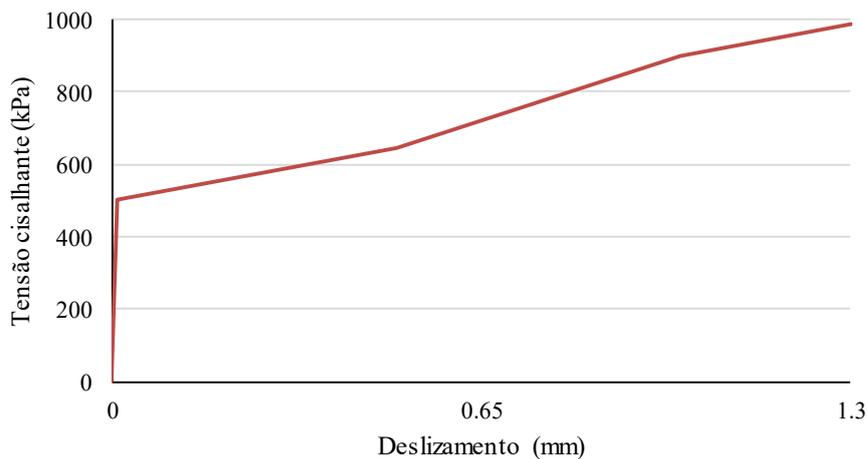


Figura 4.9 - Curva tensão cisalhante x deslizamento

Nas Figuras 4.10 e 4.11 são ilustrados os resultados numéricos obtidos nesse trabalho e o resultado do modelo experimental apresentado por Johnson e Shepherd (2013). Na Figura 4.10 está representado o comportamento da deflexão no meio do vão da laje em relação à carga aplicada. Observa-se que na análise (casca4), em que o elemento plano de casca fino foi utilizado para modelar a laje de concreto e a fôrma de aço, o resultado mostrou uma boa aproximação com o modelo experimental. O mesmo não aconteceu para a análise em que foram utilizados os dois elementos planos de casca apresentados nesse trabalho (casca9+casca4). Novamente cabem as justificativas citadas no exemplo anterior para essa diferença.

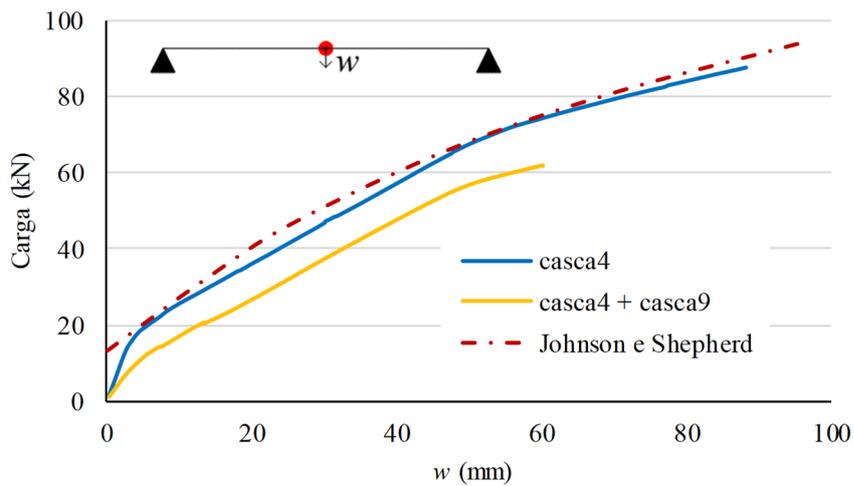


Figura 4.10 – Curva carga x deslocamento

Na Figura 4.11 é ilustrado o comportamento do deslizamento na extremidade da laje em relação à carga aplicada. Observa-se que na análise (casca4) o comportamento inicial da curva não é muito próximo do comportamento do modelo experimental. Essa rigidez maior da análise experimental pode ser devido a uma aderência por coesão que confere esse caráter de interação total para baixo nível de carregamento. Já a curva tensão cisalhante versus deslizamento dada na Tabela 4.2 não conseguiu conferir na análise numérica o mesmo comportamento de interação total para o mesmo nível de carregamento. No entanto, para níveis de carregamento mais altos a resposta numérica é bem próxima da experimental. Já na análise em que foram utilizados os dois elementos planos de casca (casca9+casca4), há uma boa aproximação inicial com o modelo experimental, porém, como já havia sido visto na anterior, o modelo numérico atinge uma carga última bem menor que a obtida no modelo experimental.

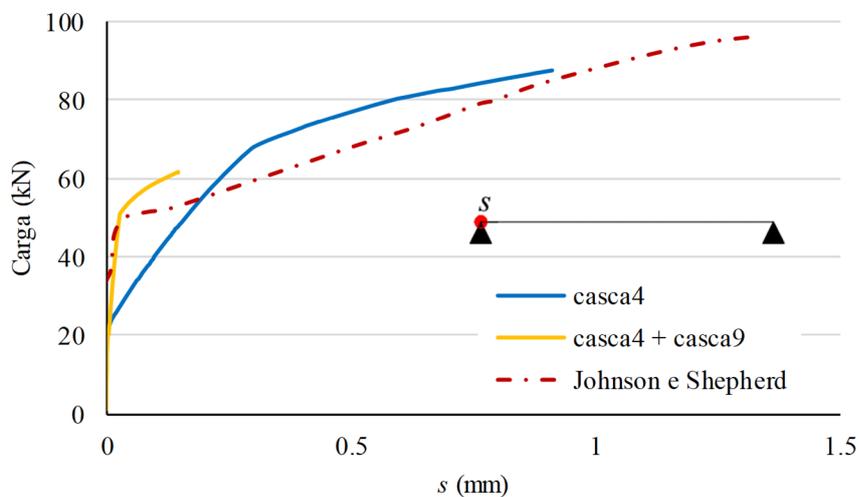


Figura 4.11 - Curva carga x deslizamento

### 4.3 LAJE CONTÍNUA

Nesse exemplo é avaliado o uso dos elementos finitos implementados no presente trabalho na modelagem de uma laje mista com dois vãos contínuos, como indicado na Figura 4.12.



Figura 4.12 - Esquema da laje contínua

A laje em questão foi desenvolvida com a fôrma indicada na Figura 4.13 e avaliada de formas numérica e experimental por Gholamhoseini *et al.* (2013).

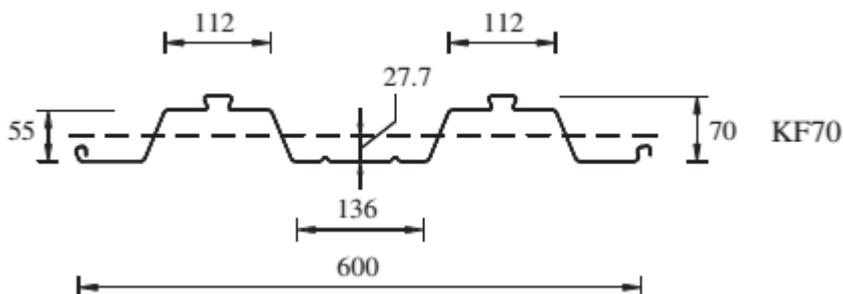


Figura 4.13 - Fôrma de aço (Gholamhoseini *et al.*, 2013)

A laje é contínua no apoio central e simplesmente apoiada nos dois apoios extremos. Armaduras de reforço transversais e longitudinais foram utilizadas na região com a presença de momento negativo sobre o apoio central. Há duas cargas aplicadas em cada vão da laje, de forma semelhante ao indicado para o ensaio de flexão. Nas Figuras 4.14 e 4.15 estão indicados, respectivamente, um detalhe das armaduras negativas e um esquema de um vão da laje contínua.

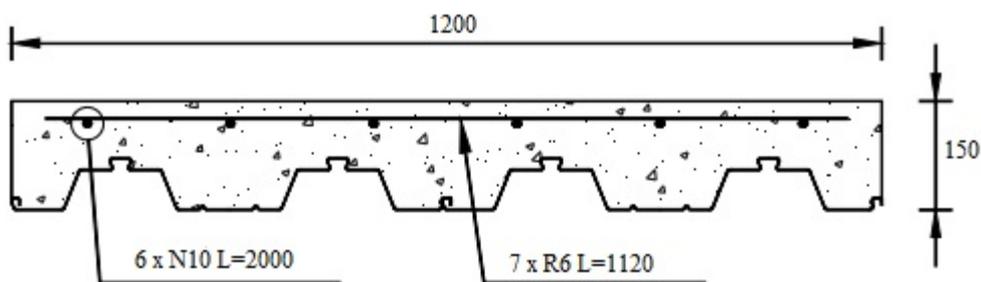


Figura 4.14 - Detalhe da armadura negativa (Gholamhoseini *et al.*, 2013)

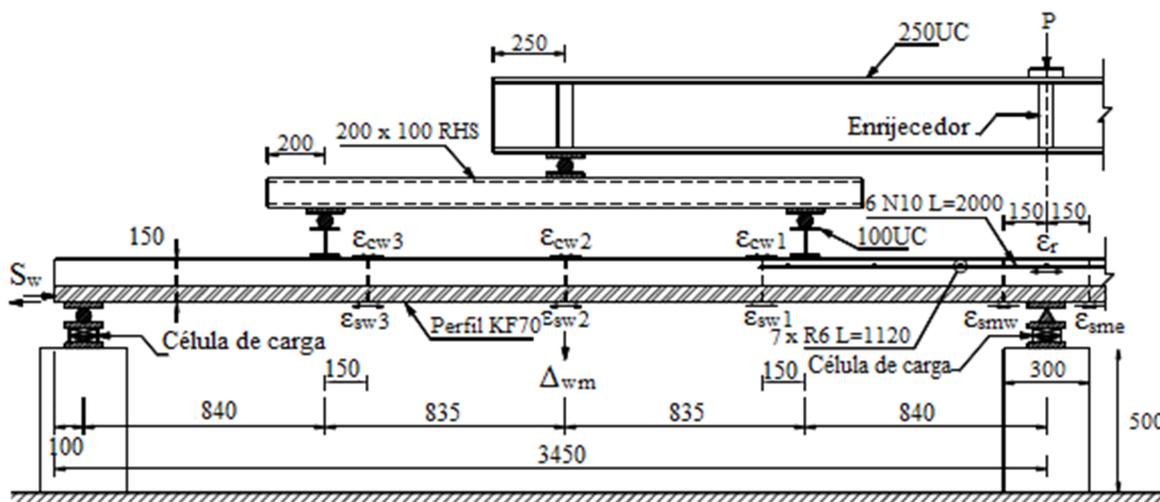


Figura 4.15 – Esquema da laje contínua (Gholamhoseini *et al.*, 2013)

Na Tabela 4.3 estão apresentadas as dimensões e o vão de cisalhamento da laje avaliada nesse exemplo. São realizadas duas análises (casca4) e (casca9+casca4), as descrições dessas análises já foram feitas nos exemplos anteriores.

Tabela 4.3 – Dimensões da laje KF70

Laje	Largura (m)	Comprimento total (m)	Espessura total (mm)	Vão (mm)	Vão de cisalhamento (mm)
KF-70	1.2	6.9	150	3350	$L/4 = 837.5$

Assim como nos exemplos anteriores, a separação vertical e o deslizamento transversal são desconsiderados, já a conexão longitudinal é representada por uma curva tensão cisalhante versus deslizamento no contato aço-concreto da laje mista dada por uma função definida em sentenças, onde cada sentença é dada pela equação de uma reta, como mostrado na Figura 4.16. Os pontos que definem essa curva estão apresentados na Tabela 4.5, e foram determinados a partir da resposta experimental da curva carga-deslizamento da laje contínua fornecida por Gholamhoseini *et al.* (2013).

Tabela 4.4 – Pontos da curva  $\tau \times s$

$s$ (mm)	0	0.1	0.6	2.5	7.0
$\tau$ (kPa)	0	2.0	8.0	14.65	0.0

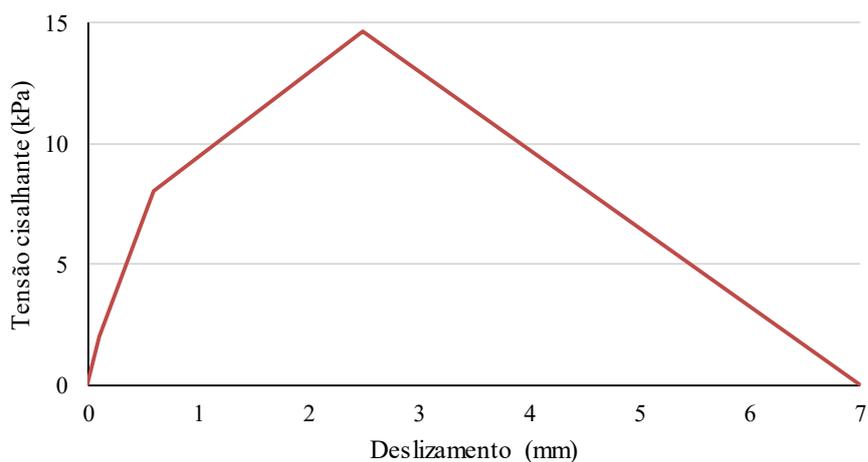


Figura 4.16 - Curva tensão cisalhante x deslizamento

Os materiais concreto e aço da fôrma são caracterizados pelas suas curvas tensão-deformação sendo para isso utilizados os valores indicados na Tabela 4.4. Para as barras de reforço a tensão de escoamento do aço é  $f_y = 495$  MPa e o módulo de elasticidade  $E_s = 205$  GPa.

Tabela 4.5 - Propriedades dos materiais

Laje	$f'_c$ (MPa)	$E_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$E_s$ (GPa)	Espessura da fôrma (mm)
KF-70	47.9	33050	532	203	0.75

Os resultados numéricos de Gholamhoseini *et al.* (2013) foram obtidos com o programa comercial ATENA 3D. Na análise não linear para a obtenção das curvas carga-deslocamentos e carga-deslizamento os autores utilizaram o método incremental em conjunto com o método iterativo de Newton Raphson. A fôrma de aço e a laje de concreto foram modeladas com elementos sólidos lineares tetraédricos com três graus de liberdade de translação por nó. As barras de reforço foram modeladas como barras discretas dentro da laje de concreto, com conexão total entre as barras e o concreto. A conexão entre o aço e o concreto foi simulada através de um material de interface que é baseado no critério de falha de Mohr-Coulomb. Nas Figuras 4.17 e 4.18 são apresentados os resultados numéricos obtidos nesse trabalho e os resultados numérico e experimental de Golamhoseini *et al.* (2013).

Na Figura 4.17 é representado o comportamento da deflexão no meio do vão da laje em relação à carga aplicada. Nota-se que nas duas análises, o comportamento da conexão parcial, caracterizada pela fase não linear da curva foi semelhante ao comportamento experimental. Na análise em que foi utilizado apenas o elemento plano de casca fino (casca4), a carga última obtida foi muito próxima da encontrada pelo modelo experimental, tanto em

relação à análise ‘casca9 + casca4’ quanto em relação ao modelo numérico de Gholamhoseini *et al.* (2013). A análise (Casca9+Casca4) apresenta um valor um pouco maior, o que assim como foi apresentado no primeiro exemplo, pode ser explicado pela diferença nas formulações dos elementos Casca9 e Casca4.

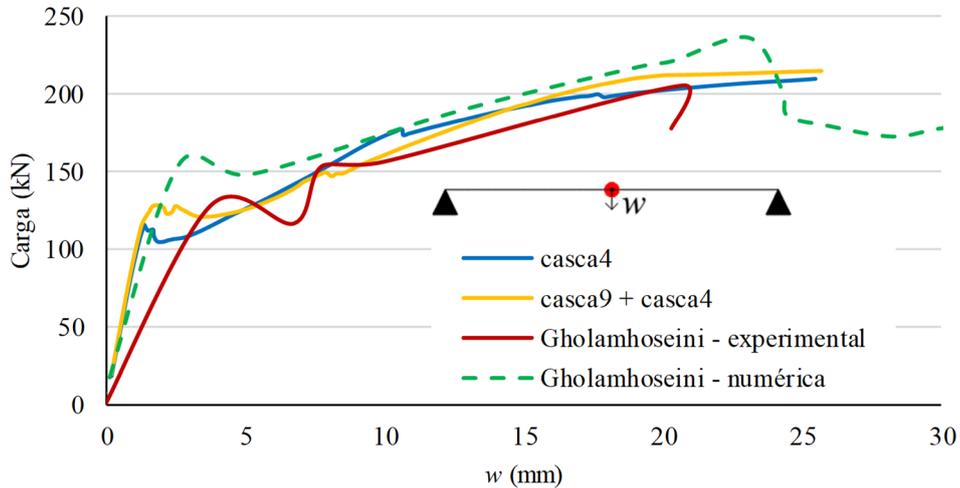


Figura 4.17 - Curva carga x deflexão no meio do vão

Na Figura 4.18 está representado o comportamento do deslizamento na extremidade da laje em relação à carga aplicada. Nota-se que as duas análises numéricas apresentaram comportamento próximo ao modelo experimental durante a fase linear, caracterizada pela conexão total na interface aço-concreto. Em relação à carga última, tanto a análise que utiliza apenas o elemento plano de casca fino (Casca4) fornece um resultado muito próximo do experimental. Para a análise (Casca9+Casca4) cabem as mesmas considerações feitas para a curva carga-deslocamento da figura anterior.

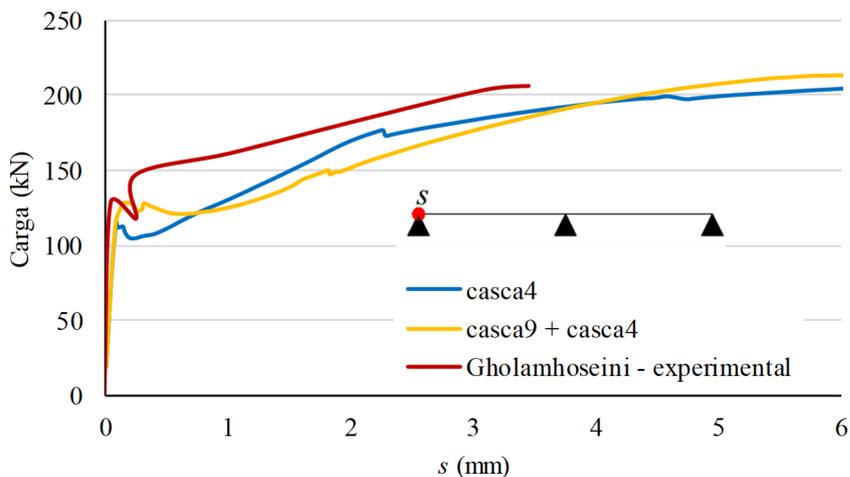


Figura 4.18 - Curva carga x deslizamento na extremidade para a laje contínua

Nas Figuras 4.19 e 4.20 estão apresentadas, respectivamente a laje mista discretizada e sua deformada. Devido à simetria apenas um vão foi modelado. Observa-se pela deformada, que a extremidade direita da laje é engastada, sendo essa condição de apoio responsável por simular o comportamento da continuidade sobre o apoio central da laje original.

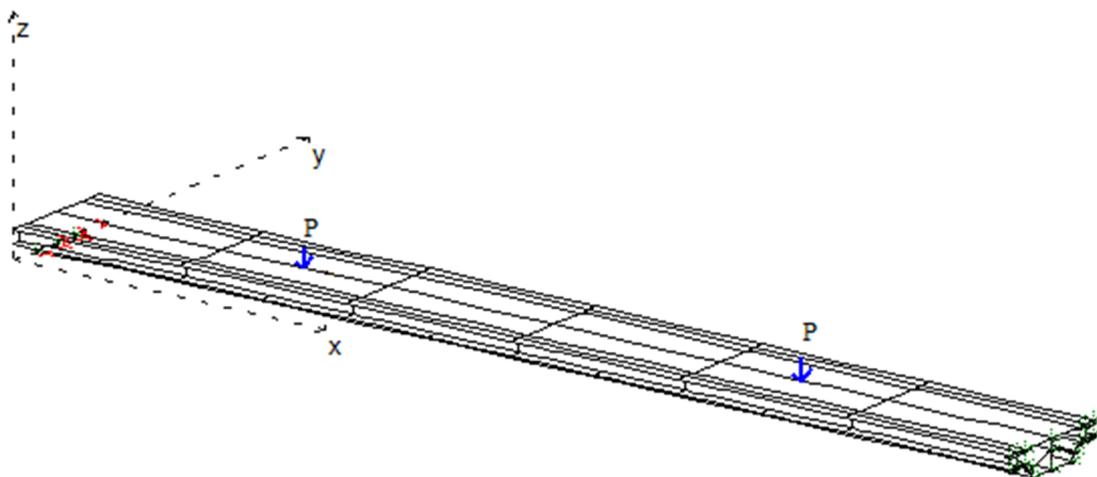


Figura 4.19 - Laje discretizada

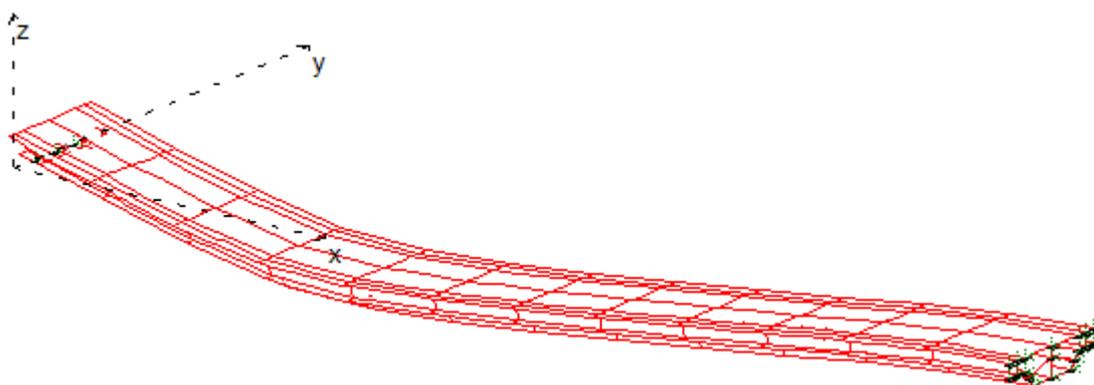


Figura 4.20 - Deformada da laje contínua

#### 4.4 ENSAIO COM QUATRO PONTOS DE CARREGAMENTO

No trabalho de Ríos *et al.* (2017) a fôrma de aço mostrada na Figura 4.21 foi avaliada experimentalmente e numericamente para diferentes situações de espessura da fôrma e espessura de concreto. Nesse exemplo o uso dos elementos finitos apresentados nesse trabalho é avaliado na modelagem de três lajes mistas com a fôrma de aço da Figura 4.21. Na Tabela 4.6 estão apresentadas as dimensões das lajes avaliadas nesse exemplo.

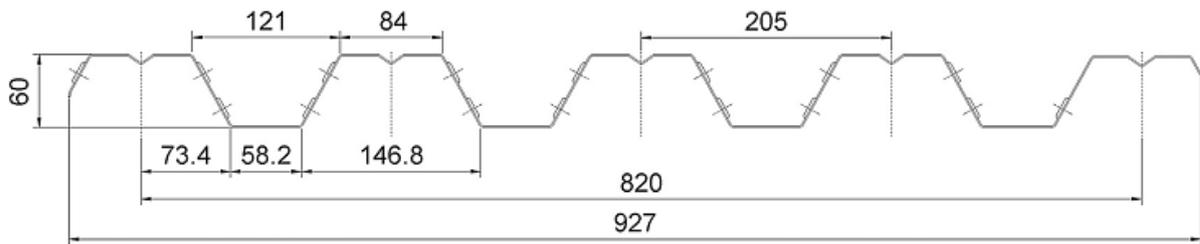


Figura 4.21 - Forma de aço (Ríos *et al.*, 2017)

Ríos *et al.* (2017) utilizaram um ensaio de flexão com quatro pontos de carregamento para simular a situação de carregamento uniforme nas lajes. Na Figura 4.22 é apresentado um esquema desse ensaio e um diagrama que representa os esforços cortantes atuantes na seção.

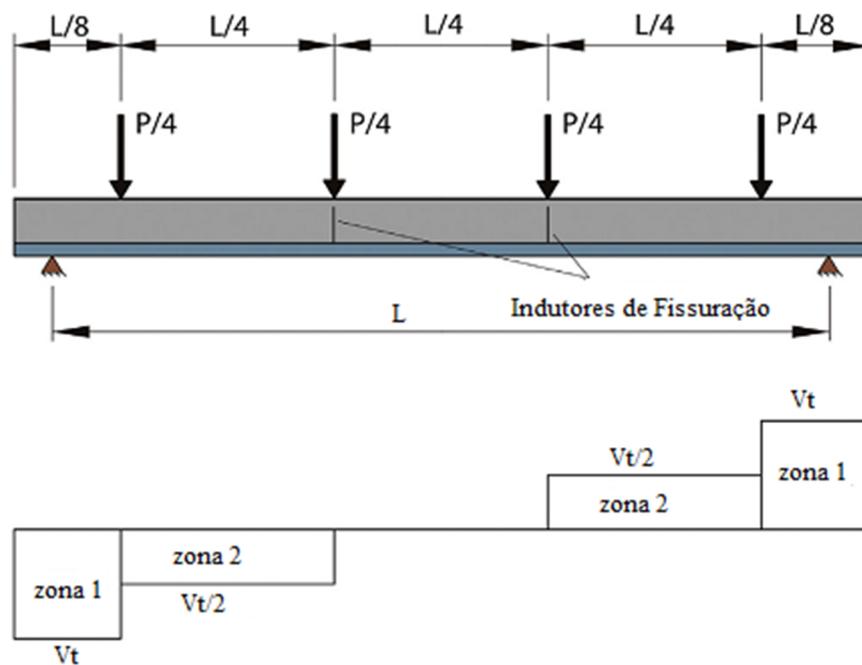


Figura 4.22 – Ensaio com quatro pontos de carregamento e diagrama de esforços cortantes (Ríos *et al.*, 2017)

Tabela 4.6 – Dados das lajes

Laje	Vão (m)	Largura (m)	Espessura da fôrma de aço (mm)	Espessura total do concreto (m)
AT6	1.8	0.82	0.8	0.11
AM6	3.4	0.82	1.0	0.16
AF6	4	0.82	1.2	0.20

As curvas tensão-deformação dos materiais foram definidas conforme item 3.1, sendo considerado para o concreto, módulo de elasticidade  $E_c = 31000$  MPa, resistência à compressão  $f_c = 39$  MPa, resistência à tração de 3 MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ . Para

a fôrma de aço adotou-se módulo de elasticidade  $E_s = 200000$  MPa, tensão de escoamento  $f_y = 320$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . Vem sendo sugerida na literatura, uma redução da tensão de escoamento e do módulo de elasticidade do aço nas regiões das fôrmas com presença de mossas. Ríos *et al.* (2017) afirmam que o fabricante da fôrma que utilizaram em seu trabalho indicou uma redução entre 47% e 50% dos valores iniciais. Os autores concluíram que uma redução de 50% gerava resultados mais adequados. Dessa forma, assim como na análise numérica de Ríos *et al.* (2017), foi considerada nesse exemplo uma redução de 50% nos valores da tensão de escoamento e do módulo de elasticidade para as regiões com mossas ( $f_y = 175$  Mpa,  $E_s = 105000$  MPa).

Assim como nos exemplos anteriores, foram realizadas as análises (casca4) e (casca9+casca4). Na Figura 4.23 é apresentada a discretização da laje AT6 utilizando elementos planos de casca finos tanto para o concreto acima da nervura quanto para a fôrma de aço e elementos de barra de três nós para o concreto da nervura. Nota-se também, as condições de apoio, em que os três nós da extremidade esquerda que estão marcados, tem os deslocamentos de translação ao longo do eixo  $x$  e rotação em  $y$  liberados e os nós da extremidade direita têm apenas a translação em  $z$  livre. Além disso, estão apresentadas duas das quatro cargas aplicadas na laje, pois devido à simetria do problema, apenas a metade do vão é modelada.

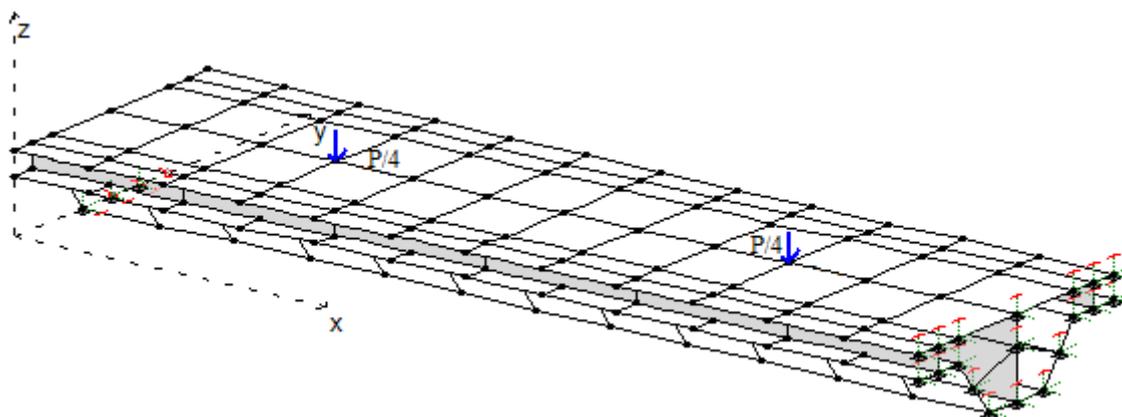


Figura 4.23 - Laje AT6

Na análise numérica apresentada nesse exemplo como referência, Ríos *et al.* (2017) utilizaram o software ABAQUS. A laje de concreto foi modelada por elementos sólidos de oito nós e o aço por elementos de casca de quatro nós. O aço foi considerado como um material elástico perfeitamente plástico com critério de falha de von Mises. A conexão entre a fôrma de aço e o concreto foi modelada por elementos conectores não lineares, com rigidez normal e tangencial.

A forma da curva tensão cisalhante versus deslizamento longitudinal ( $\tau$ - $s$ ) considerada por Ríos *et al.* (2017) para os elementos conectores é indicada na Figura 4.24. No caso de uma laje mista dúctil essas curvas podem ser definidas, de forma simplificada, como uma curva tri-linear com três pares de valores, relativos ao primeiro deslizamento, carga máxima e falha da laje. Nos elementos conectores, os valores  $\tau_1$ - $s_1$  estão relacionados ao primeiro deslizamento produzido entre o aço e o concreto e a carga aplicada quando esse deslizamento ocorre; os valores  $\tau_2$ - $s_2$  estão relacionados à resistência da laje (Carga e deflexão máximas na curva de carga-deslocamento) e os valores  $\tau_3$ - $s_3$  são definidos apenas para obter uma queda suave na curva para o comportamento pós colapso.

Na Figura 4.24, o ramo I com a maior rigidez corresponde ao comportamento de conexão total, o ramo II ao comportamento de conexão parcial e o ramo III ao comportamento pós-colapso. Os autores definiram um método de cálculo para os valores que determinam o comportamento  $\tau$ - $s$  para elementos conectores a partir de curvas experimentais carga x deflexão.

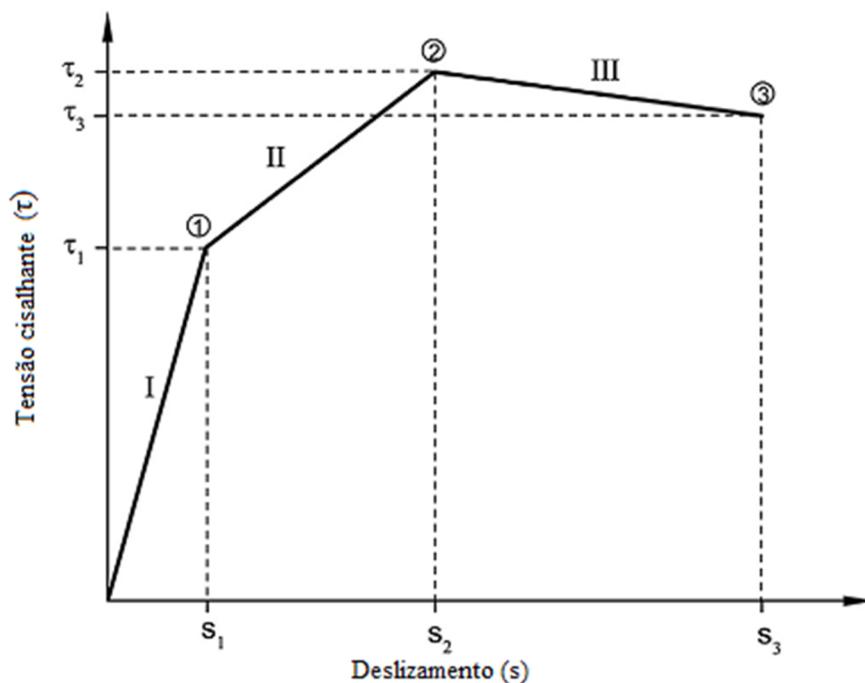


Figura 4.24 – Forma da curva tensão cisalhante x deslizamento (Ríos *et al.*, 2017)

Nesse exemplo, a interface entre o aço e o concreto é modelada por elementos de interface, sendo considerada conexão total nas direções equivalentes à separação vertical e deslizamento transversal, pois a falha em lajes mistas ocorre devido ao cisalhamento longitudinal. Para o contato na direção longitudinal, são utilizados os pares de valores calculados por Ríos *et al.* (2017), indicados na Tabela 4.7. A partir desses valores são

determinadas as equações das retas que formam a curva tensão cisalhante versus deslizamento no contato aço-concreto que é fornecida aos elementos de interface. Ríos *et al.* (2017) sugerem que as curvas tensão cisalhante versus deslizamento devem variar de acordo com a variação dos esforços cisalhantes ao longo das lajes. Dessa forma, são utilizadas duas curvas, uma até o comprimento de  $L/8$  mostrado na Figura 4.22 e outra de  $L/8$  a  $3L/4$ .

Tabela 4.7 - Pontos das curvas Tensão cisalhante versus deslizamento

		Valores até $L/8$				Valores de $L/8$ a $3L/4$			
AT6	$s(\text{mm})$	0.0	0.94	2.9	4.0	0.0	0.94	2.9	4.0
	$\tau(\text{kPa})$	0.0	153	210	88	0.0	76	104	49
AM6	$s(\text{mm})$	0.0	0.61	1.8	5.5	0.0	0.61	1.8	5.5
	$\tau(\text{kPa})$	0.0	104	170	81	0.0	52	85	56
AF6	$s(\text{mm})$	0.0	0.29	0.99	5.0	0.0	0.29	0.99	5.0
	$\tau(\text{kPa})$	0.0	132	210	75	0.0	66	105	54

Na Figura 4.25 é mostrado o comportamento da deflexão no meio do vão da laje AT6 em relação à carga aplicada. Nas duas análises numéricas desenvolvidas para essa laje há uma boa aproximação em relação ao modelo experimental de Ríos *et al.* (2017) até atingir a carga máxima. Os modelos numéricos desenvolvidos não conseguem avançar no comportamento pós colapso.

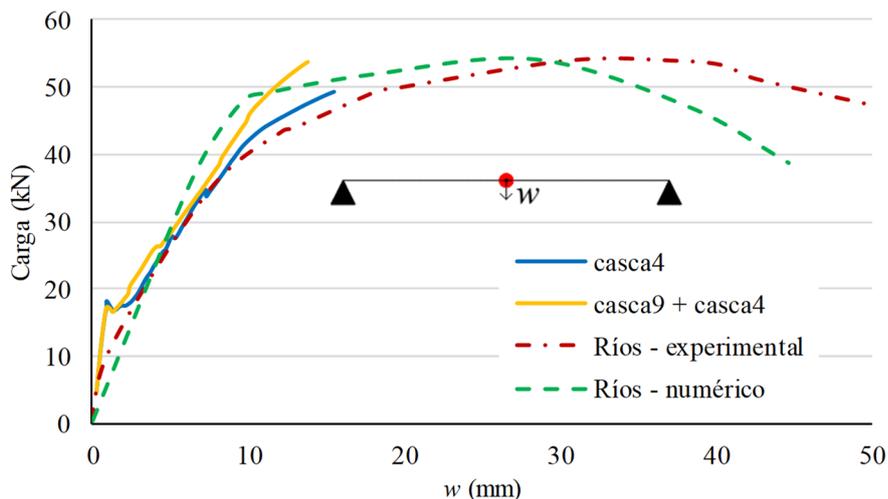


Figura 4.25 - Carga x deflexão - Laje AT6

A Figura 4.26 representa o comportamento do deslizamento na extremidade da laje AT6 em relação à carga aplicada. As duas análises só conseguem avançar até deslizamentos próximos de 1.0 mm. Apesar disso, nos dois casos as cargas últimas atingem valores próximos à carga última encontrada com o modelo experimental.

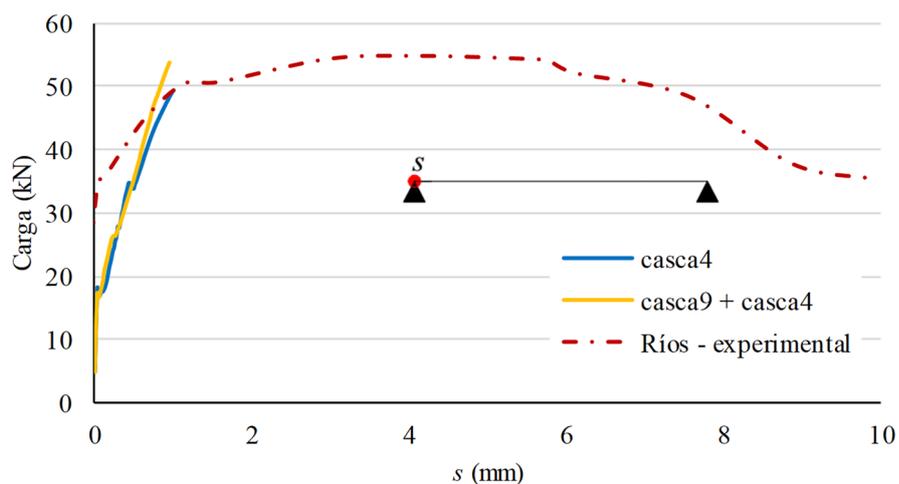


Figura 4.26 - Laje AT6 – Curva carga x deslizamento

Na Figura 4.27 é representado o comportamento da deflexão no meio do vão da laje AM6 em relação à carga aplicada. Há uma boa aproximação entre as análises numéricas desenvolvidas nesse exemplo e o modelo experimental de Ríos *et al.* (2017) até atingir a carga máxima. Percebe-se novamente que os modelos numéricos desenvolvidos nesse trabalho não conseguem avançar no comportamento pós colapso. As cargas últimas obtidas nas duas análises foram muito próximas à carga última do modelo experimental.

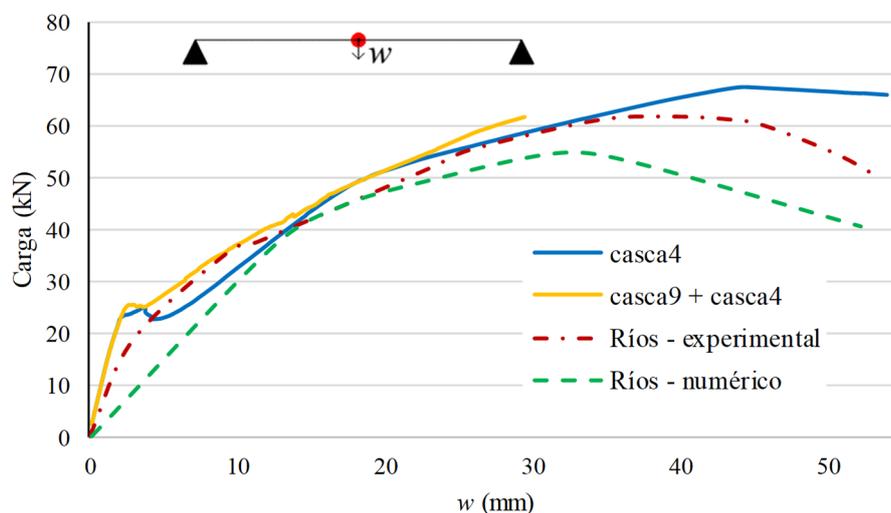


Figura 4.27 – Laje AM6 – Curva carga x deflexão

Para a laje AM6 o comportamento do deslizamento na extremidade em relação à carga aplicada, mostrado na Figura 4.28, é semelhante ao encontrado para a laje AT6. Nas duas análises obtém-se deslizamentos máximos próximos de 1.0 mm, com cargas últimas muito próximas à carga última do modelo experimental.

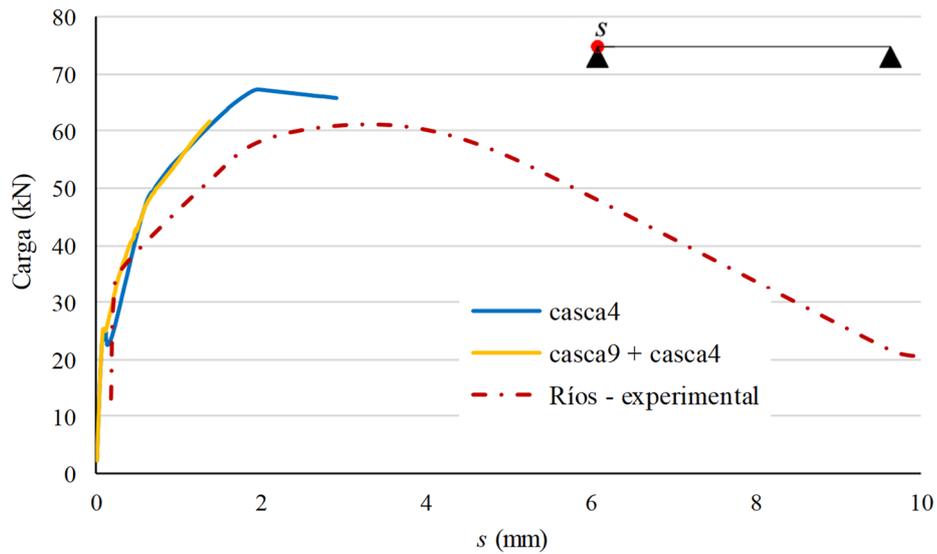


Figura 4.28 – Laje AM6 – Curva carga x deslizamento na extremidade

Na Figura 4.29 está representado o comportamento da deflexão no meio do vão da laje AF6 em relação à carga aplicada para as duas análises desenvolvidas nesse trabalho e para os modelos numérico e experimental de Ríos *et al.* (2017). Nas duas análises desenvolvidas nesse exemplo, a carga máxima obtida para a laje é superior à carga última do modelo experimental. Para as três lajes simuladas nesse exemplo, a partir das curvas carga versus deflexão (Figuras 4.25, 4.27 e 4.29), percebe-se claramente os pontos em que há a transição de conexão total para conexão parcial.

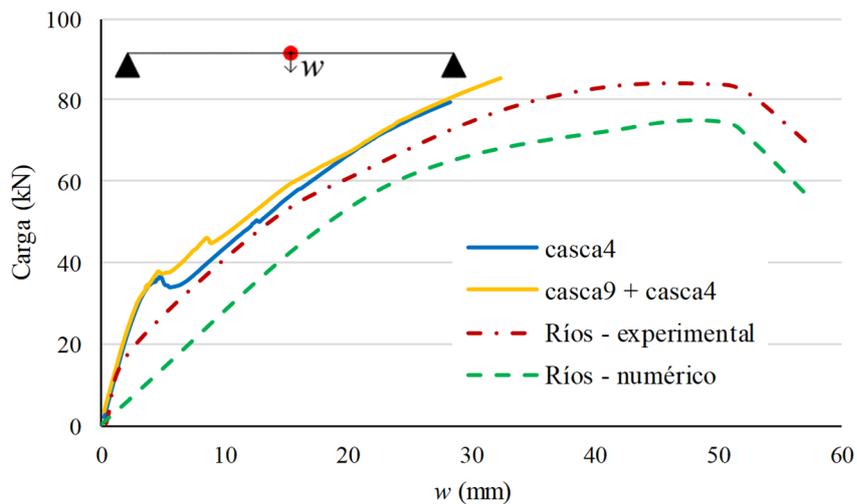


Figura 4.29 – Laje AF6 – Curva carga x deflexão no meio do vão

Para a laje AF6 o comportamento do deslizamento na extremidade em relação à carga aplicada, mostrado na Figura 4.30, é semelhante ao encontrado para as lajes AT6 e AM6. Para as três lajes os modelos numéricos do presente trabalho só conseguem capturar os deslizamentos até aproximadamente 1,0 mm, ponto em que é atingida a carga máxima.

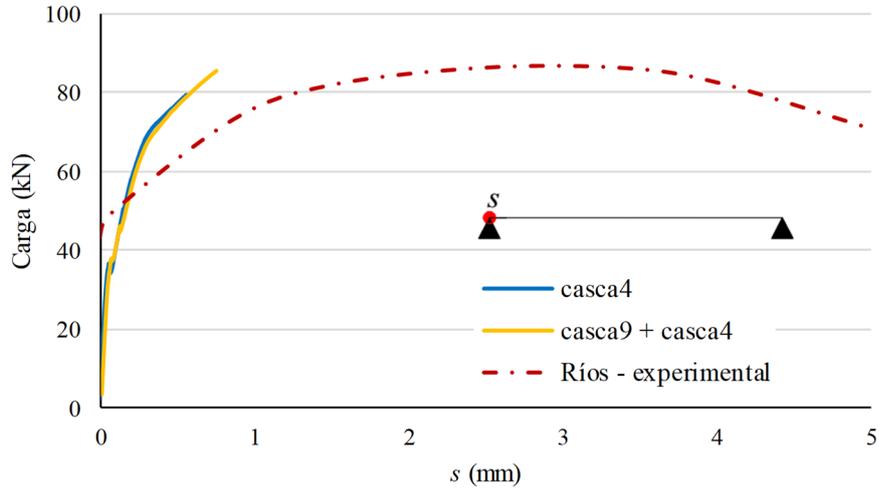


Figura 4.30 – Laje AF6 – Curva carga x deslizamento na extremidade

#### 4.5 LAJE COM FÔRMA DE AÇO REENTRANTE

Assim como as fôrmas de aço trapezoidais, as fôrmas de aço reentrantes são bastante empregadas em lajes mistas. Nesse caso não são utilizadas mossas, pois a geometria da fôrma gera um efeito de confinamento do concreto, que contribui para a resistência ao cisalhamento na interface aço-concreto.

Nesse exemplo é avaliado o uso dos elementos finitos apresentados no presente trabalho na modelagem de duas lajes mistas com a fôrma de aço reentrante indicada na Figura 4.31. As lajes em questão foram estudadas experimentalmente por Marciukaitis *et al.* (2006) e avaliadas numericamente por Chen e Shi (2011).

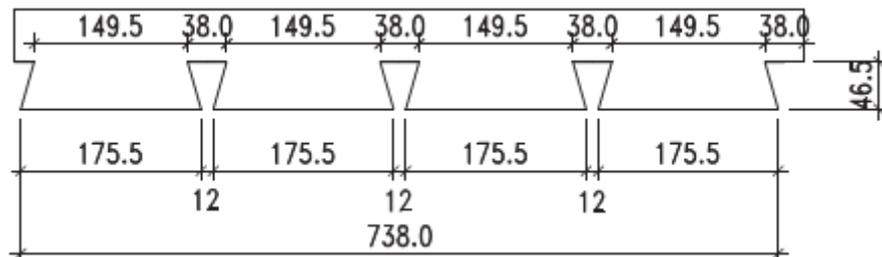


Figura 4.31 - Geometria da fôrma (Chen e Shi, 2011)

Na tabela 4.8 estão apresentadas as dimensões e o vão de cisalhamento das lajes avaliadas nesse exemplo. As lajes possuem duas cargas aplicadas, na forma que foi indicada para o ensaio de flexão na Figura 2.1 (capítulo 2, item 2.1). São realizadas duas análises (casca4) e (casca9+casca4), as descrições dessas análises já foram feitas nos exemplos anteriores.

Tabela 4.8 - Dados das lajes

Laje	Vão (m)	Largura (m)	Espessura da fôrma de aço (mm)	Espessura total do concreto (mm)	Vão de cisalhamento (m)
P1-2	1.8	0.77	0.9	75	0.6
P2-2	1.8	0.77	0.9	98	0.6

Na Figura 4.32 pode-se observar a discretização da laje P1-2 utilizando elementos planos de casca finos tanto para o concreto acima da nervura quanto para a fôrma de aço e elementos de barra de três nós para o concreto da nervura. Como pode ser observado nessa discretização e nos outros exemplos, o elemento de barra que representa o concreto na nervura não é localizado no centro geométrico de sua seção transversal. Isso porque, o elemento de interface que faz a ligação entre o elemento de barra e o elemento plano de casca deve formar um ângulo de  $90^\circ$  como o plano de deslizamento, que nesses exemplos, é paralelo ao elemento plano de casca. Nessa figura também são apresentadas as condições de apoio e a posição de aplicação da carga. Os três nós da extremidade esquerda que estão marcados, tem os deslocamentos de translação ao longo do eixo  $x$  e rotação em  $y$  liberados e os nós da extremidade direita tem apenas a translação em  $z$  livre.

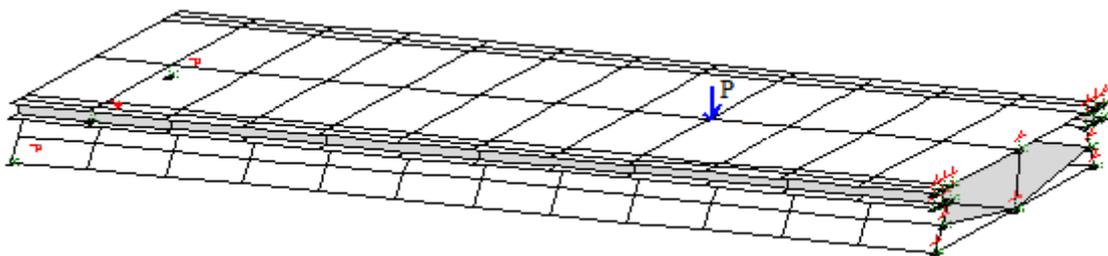


Figura 4.32 - Discretização da laje P1-2

Assim como foi apresentado para os exemplos anteriores, a conexão entre o aço e o concreto foi modelada por elementos de interface, sendo que as possibilidades de separação vertical e deslizamento transversal são desconsideradas, pois a falha em lajes mistas ocorre

devido ao cisalhamento longitudinal. Dessa forma, uma curva linear que representa conexão total é utilizada para representar o contato no sentido transversal e de separação vertical.

Para o contato na direção longitudinal, Marciukaitis *et al.* (2005) afirmam que o comportamento tensão cisalhante versus deslizamento longitudinal pode ser definida por um gráfico na forma mostrada na Figura 4.33, representando três possíveis estágios para a conexão. O estágio I corresponde ao comportamento elástico, o estágio II ao comportamento elasto-plástico e o estágio III se inicia com o início do esmagamento do concreto. Os valores das rigidezes da conexão ( $G_{w1}$  e  $G_{w2}$ ) foram dados pelos autores.

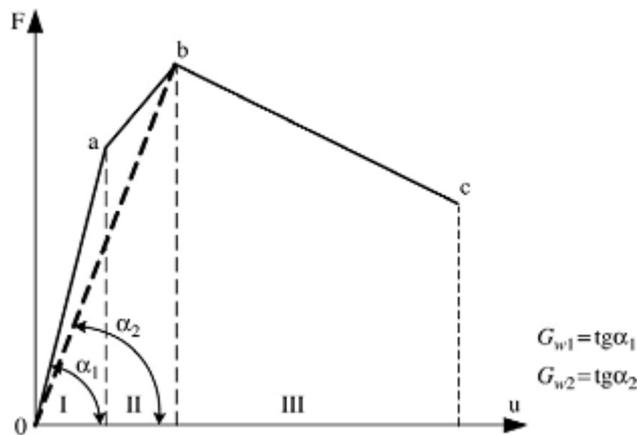


Figura 4.33 – Estágios do comportamento da conexão aço-concreto (MARCIUKAITIS, 2005)

Assim como nos exemplos anteriores, a curva tensão cisalhante versus deslizamento no contato aço-concreto da laje mista é definida por uma função dividida em sentenças, onde cada sentença é dada pela equação de uma reta, de forma semelhante à sugerida por Marciukaitis *et al.* (2005). Os limites de cada intervalo da sentença bem como dos coeficientes linear e angular da equação da reta são definidos a partir das rigidezes fornecidas por Marciukaitis *et al.* (2005). As propriedades dos materiais e os valores de  $G_{w1}$  e  $G_{w2}$  estão indicadas na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Dados dos materiais e da conexão aço-concreto

Laje	$f_y$ (MPa)	$E_s$ (GPa)	$\nu_s$	$f_c$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$\nu_c$	$G_{w1}$ (MPa)	$G_{w2}$ (MPa)
P1-2	317	205	0.3	21.6	40.5	0.2	210	149
P2-2	317	205	0.3	28.6	41.5	0.2	210	149

A curva tensão de cisalhamento versus deslizamento longitudinal fornecida aos elementos de interface está indicada na Figura 4.34 e seus pontos estão apresentados na Tabela 4.10.

$s$ (mm)	0	0.1	0.9	2.0
$\tau$ (kPa)	0	21.0	42.6	6.4

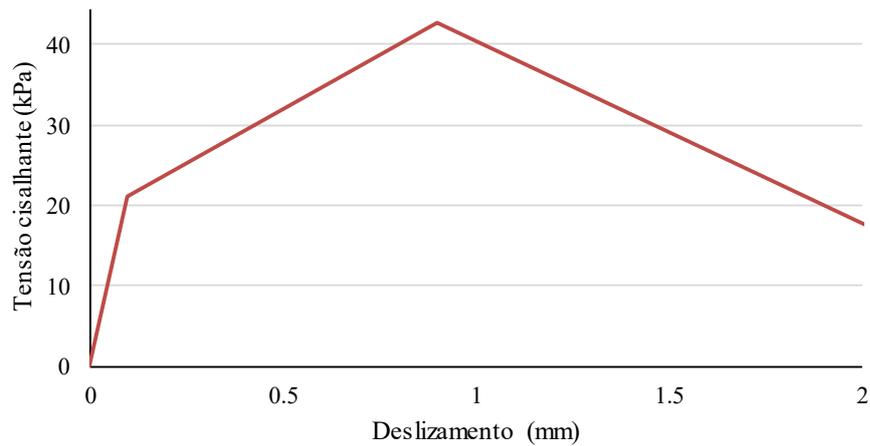


Figura 4.34 - Curva tensão cisalhante x deslizamento

Os resultados numéricos de Chen e Shi (2011) foram obtidos com o programa comercial ANSYS. A fôrma de aço foi discretizada com elementos de casca, a laje de concreto com elementos sólidos e a conexão foi modelada por um par de elementos de contato, permitindo apenas o deslizamento longitudinal. Nas Figuras 4.35 e 4.36 são ilustrados os resultados numéricos obtidos nesse trabalho, o resultado numérico de Chen e Shi (2011), e o resultado do modelo experimental apresentado por Marciukaitis *et al.* (2005).

Na Figura 4.35 é representado o comportamento da deflexão no meio do vão da laje P1-2 em relação à carga aplicada. Nota-se que nas duas análises o comportamento obtido para os modelos numéricos implementados nesse trabalho, tanto para a fase linear quanto para não linear, foi próximo ao comportamento do modelo experimental. De forma geral, os modelos numéricos desenvolvidos nesse trabalho apresentaram resultados que representam melhor o comportamento carga-deflexão para a laje P1-2 que o modelo numérico de referência.

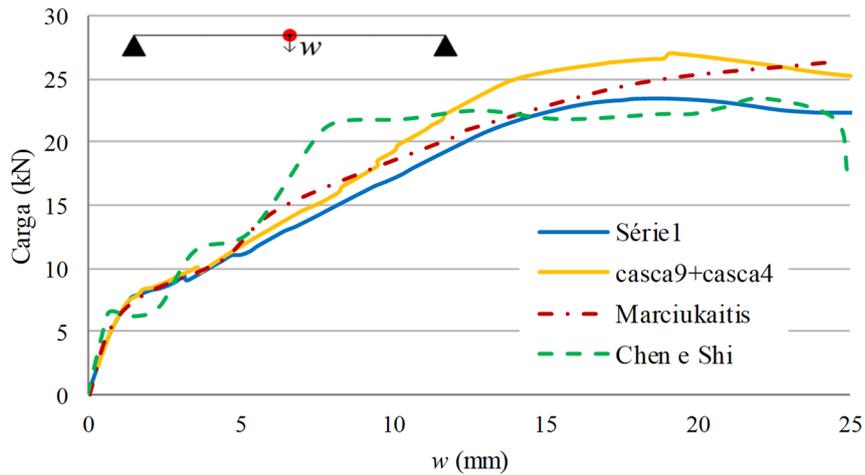


Figura 4.35 – Laje P1-2 – Carga x Deflexão no meio do vão

O comportamento da deflexão no meio do vão da laje P2-2 em relação à carga aplicada está ilustrado na Figura 4.36. Nota-se que para os dois modelos desenvolvidos nesse trabalho o resultado obtido para a fase linear e para o início da fase não linear é um pouco distante do comportamento do modelo experimental, o mesmo acontece para o modelo numérico de Chen e Shi (2011). Apesar disso, observa-se que para os dois modelos, assim como para o modelo experimental, a presença do comportamento não linear surge com uma carga aplicada de aproximadamente 15 kN. Com o aumento da carga, o comportamento apresentado pelos modelos desenvolvidos se aproxima do comportamento experimental. Na análise numérica de Chen e Shi (2011) observa-se um comportamento semelhante ao apresentado para os modelos do presente trabalho. De forma geral, os modelos numéricos desenvolvidos nesse trabalho representam bem o comportamento carga-deflexão para a laje P2-2. As cargas últimas obtidas nas duas análises foram muito próximas à carga última do modelo experimental.

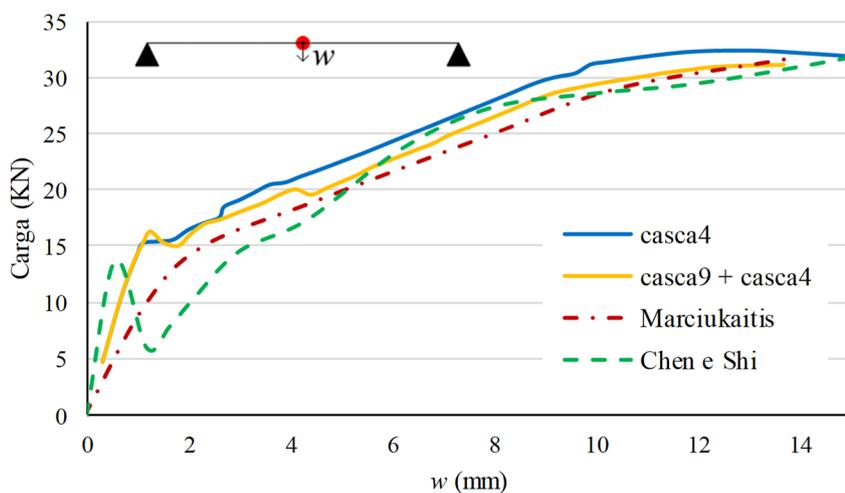


Figura 4.36 – Laje P2-2 – Carga x Deflexão no meio do vão

Na Figura 4.37 está ilustrada a deformada da laje P1-2 obtida na análise com o elemento plano de casca fino representando tanto a laje de concreto quanto a fôrma de aço (casca4). Essa deformada foi obtida para a fase não linear da curva carga-deslocamento próxima ao colapso. Observa-se dela uma maior curvatura da deformada próxima ao ponto de aplicação da carga concentrada.

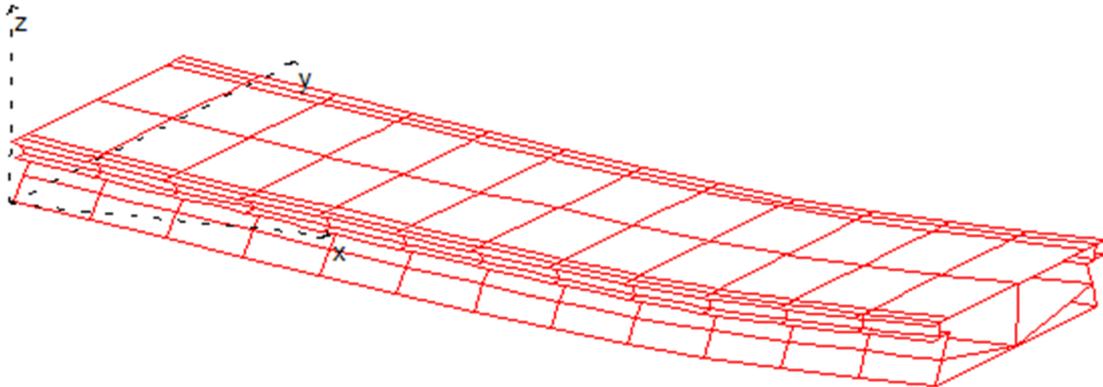


Figura 4.37 – Deformada da laje P1-2

## 4.6 AVALIAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE LAJES ESBELTAS E LAJES ESPESSAS

No trabalho de Abdullah e Easterling (2009) a fôrma de aço apresentada na Figura 4.38 foi avaliada experimentalmente e numericamente para diferentes situações de espessura de concreto e vão de cisalhamento. Os resultados obtidos por esses autores são usados nesse exemplo para validar os elementos implementados nesse trabalho e também definir um modelo de curva de tensão cisalhante versus deslizamento no contato entre a fôrma de aço e o concreto na direção das nervuras.

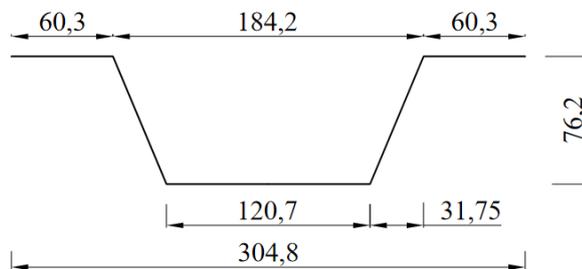


Figura 4.38 - Geometria da fôrma

Na Tabela 4.11 são apresentados os dados da fôrma de aço e da laje de concreto para os diferentes ensaios experimentais realizados por Abdullah e Easterling (2009).

Tabela 4.11 - Dimensões das lajes e propriedades dos materiais

Espécime	Espessura da forma (mm)	$f_y$ (MPa)	Vão da laje (mm)	Vão de cisalhamento (mm)	Espessura total do concreto (mm)	$f_c$ (MPa)
#5	1.5	350	1220	410	190	35
#6	1.5	350	2440	810	190	31
#7	1.5	350	3050	970	190	35
#8	1.5	350	3660	1120	125	35
#9	1.5	350	4270	1320	125	31

Na análise numérica considerada nesse exemplo a laje mista é simulada pelos elementos apresentados nos capítulos anteriores. A fôrma de aço é simulada por elementos planos de casca finos, assim como a laje de concreto de espessura dada pela altura total da laje menos a altura da fôrma de aço. A nervura é simulada por um elemento de barra com 5 graus de liberdade como apresentado nesse trabalho. A ligação entre os elementos e a simulação da conexão deformável é feita pelos elementos de interface placa/placa e viga/placa.

Como foi apresentado nos exemplos anteriores, a curva tensão cisalhante versus deslizamento no contato aço concreto da laje mista é definida por uma função dividida em sentenças, onde cada sentença é dada pela equação de uma reta. Essa mesma forma foi utilizada no trabalho de Abdullah e Easterling (2009). As curvas para os espécimes #5 e #9 são apresentadas na Figura 4.39 e seus pontos são apresentados na Tabela 4.12. Essas curvas foram definidas de forma a se ter uma proximidade nas respostas numérica e experimentais para a curva carga deslizamento desses espécimes, como mostrado nas Figuras 4.40 e 4.42.

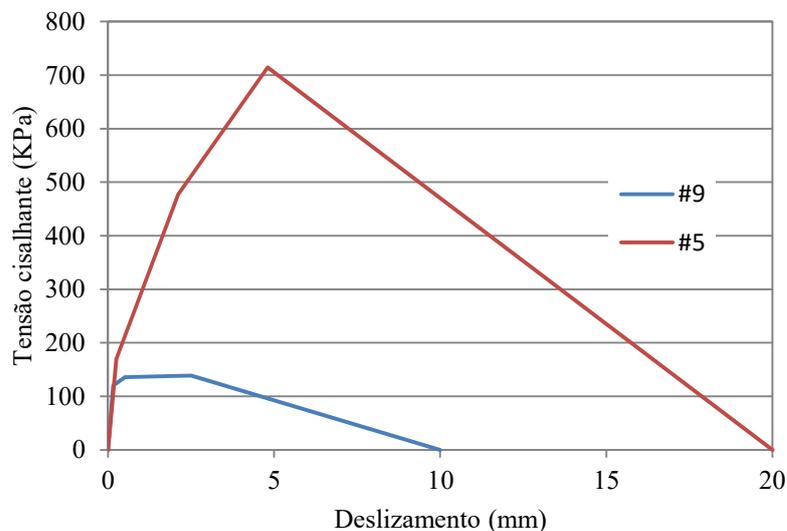


Figura 4.39 – Curva tensão cisalhante versus deslizamento

Na Tabela 4.12,  $s$  é o deslizamento na interface de contato aço-concreto da laje mista, tomado na direção da nervura.  $\tau$  é a tensão cisalhante que surge na interface de contato. Os pontos dados na Tabela 4.12 definem as curvas da Figura 4.39.

Tabela 4.12 - Pontos das curvas mostradas na Figura 4.35

	#5					#9				
$s(\text{mm})$	0	0.25	2.1	4.8	20	0	0.15	0.5	2.5	10
$\tau(\text{kPa})$	0	171.25	476.5	714.1	0	0	120	135.75	138.75	0

Na Figura 4.40,  $s_{\max}$  é o deslizamento entre a fôrma de aço e o concreto no apoio, e  $V$  é a reação no apoio. Nessa figura são apresentadas as curvas carga deslizamento para a laje mista #5. São apresentadas as respostas experimental e numérica (referência) obtidas por Abdullah e Easterling (2009) e a resposta numérica (presente) obtida pelos elementos implementados nesse trabalho. Na resposta numérica, indicada por referência na Figura 4.40, os autores utilizam o software comercial ABAQUS, discretizando a fôrma de aço em elementos planos de casca, o concreto em elementos sólidos, e para a conexão deformável é utilizado um elemento de ligação. O comportamento do elemento de ligação foi definido a partir de uma curva tensão cisalhante versus deslizamento calculada utilizando resultados de ensaios de flexão e o método do equilíbrio das forças, que foi proposto pelos autores.

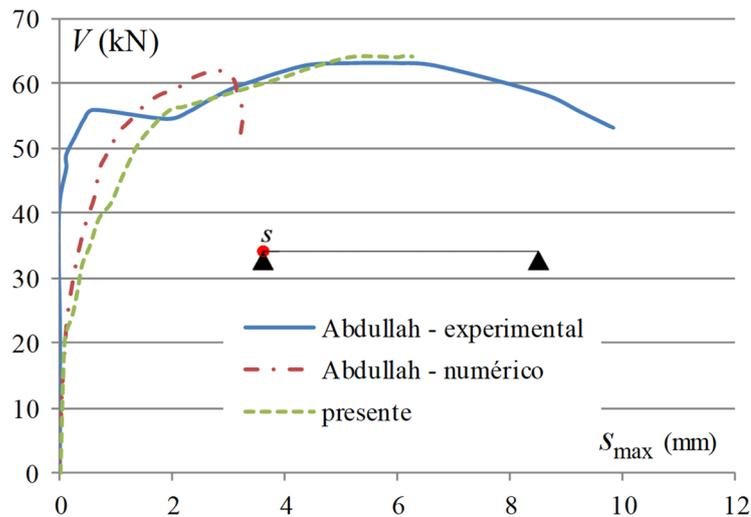


Figura 4.40 – Curva Carga deslizamento para a laje mista #5

Para a obtenção da curva utilizando os elementos implementados nesse trabalho foi utilizado uma análise não linear como descrita nos capítulos anteriores. Para a caracterização

dos materiais foi considerado a curva tensão deformação do concreto definida pelo CEB (2010), uma curva tensão deformação elasto-perfeitamente plástico foi considerada para o aço da fôrma. Para a curva tensão cisalhante versus deslizamento na direção da nervura foi considerada a curva no formato da curva mostrada na Figura 4.39. Os parâmetros dessa curva foram variados buscando a convergência da resposta numérica com a experimental, dessa forma, chegou-se à curva da Figura 4.39 para rigidez da conexão na direção da nervura. Na direção transversal da nervura, bem como na direção da separação vertical entre a fôrma e o concreto foram consideradas uma rigidez muito elevada, desconsiderando esses deslocamentos relativos.

Na Figura 4.41,  $w_{\max}$  é a flecha no meio do vão da laje mista biapoiada, e  $V$  é a reação no apoio. Nessa figura são apresentadas as curvas carga deslocamento para a laje mista #5. São apresentadas as respostas experimental e numérica (referência) obtidas por Abdullah e Easterling (2009) e a resposta numérica (presente) obtida pelos elementos implementados nesse trabalho. Como pode ser observado dessa figura a resposta obtida utilizando a curva tensão cisalhante versus deslizamento da Figura 4.39 tem boa aproximação com as respostas numérica e experimental de Abdullah e Easterling (2009).

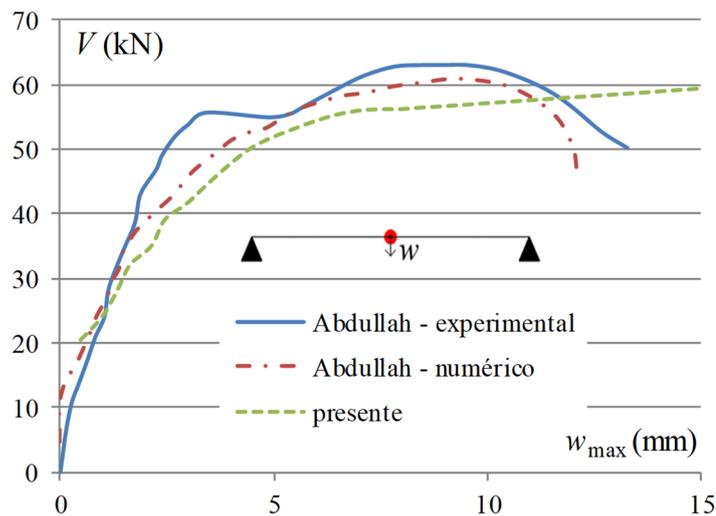


Figura 4.41 – Curva carga deslocamento para a laje mista #5

As Figuras 4.42 e 4.43 fornecem resultados análogos aos fornecidos pelas Figuras 4.40 e 4.41, considerando agora a laje mista com as propriedades geométricas indicada no espécime #9. Assim como na Figura 4.40, os parâmetros da curva tensão cisalhante versus deslizamento foram variados buscando a convergência da resposta numérica com a experimental, dessa forma, chegou-se à curva da Figura 4.39 para rigidez da conexão na

direção da nervura. Observa-se da Figura 4.42, que essa curva fornece um resultado em termos de deslizamento bem melhor que a curva utilizada pela análise numérica de Abdullah e Easterling (2009).

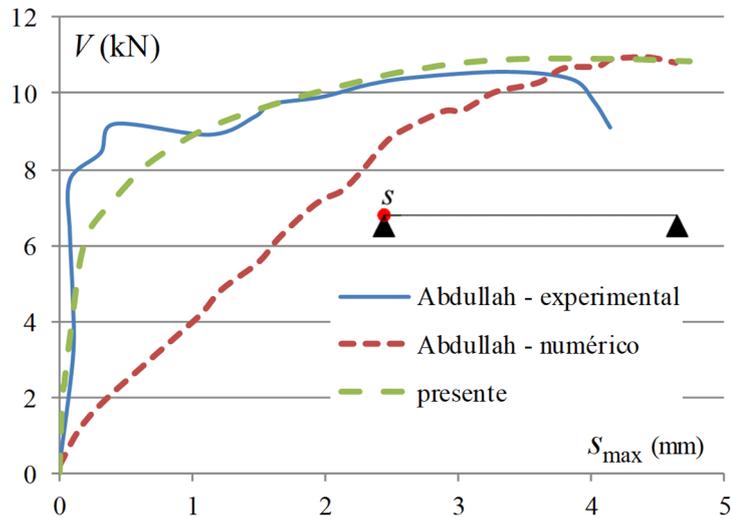


Figura 4.42 – Curva Carga deslizamento para a laje mista #9

Como pode ser observado da Figura 4.43, a resposta em termos de deslocamento transversal obtida utilizando a curva tensão cisalhante versus deslizamento da Figura 4.39 tem boa aproximação com as respostas numérica e experimental de Abdullah e Easterling (2009).

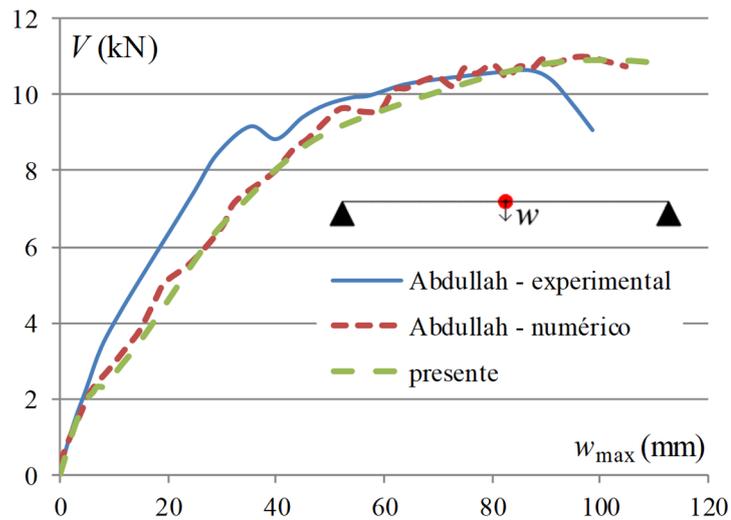


Figura 4.43 – Curva carga deslocamento para a laje mista #9

Sendo  $b$  e  $A_s$ , respectivamente, a largura e área da fôrma de aço,  $d$  a altura útil da laje mista, ou seja, distância da face superior da seção transversal da laje mista até metade da altura da fôrma de aço,  $L_s$  o vão de cisalhamento, e  $V$  a força cortante constante atuante na laje mista, verifica-se experimentalmente uma relação aproximadamente linear entre essas variáveis dadas pela Equação 4.1. Nessa equação  $m$  e  $k$  são parâmetros a serem determinados experimentalmente para uma determinada fôrma de aço e a partir dessa equação pode-se obter a força cortante máxima suportada pela laje considerando o estado limite último de cisalhamento longitudinal.

$$\frac{V}{bd} = m \frac{A_s}{bL_s} + k \quad (4.1)$$

Admitindo que a rigidez da conexão entre a fôrma de aço e a laje de concreto também segue essa relação linear, Abdullah e Easterling (2009) propôs um método de interpolação linear para se determinar a curva tensão cisalhante versus deslizamento da conexão para uma fôrma de aço em que se tenha resultados experimentais semelhantes aos necessários para obter os parâmetros  $m$  e  $k$ . Seguindo essa linha de raciocínio, as curvas tensão cisalhante versus deslizamento para uma determinada fôrma, que se tenha previamente definido duas dessas curvas como descrito nos parágrafos anteriores, podem ser obtidas considerando que as tensões cisalhantes e os deslizamentos variam com a mesma proporção em que variam as forças cortantes máximas da fôrma.

São apresentados na Tabela 4.13 os valores das forças cortantes máximas para os espécimes ensaiados por Abdullah e Easterling (2009). Conhecido os parâmetros  $m$  e  $k$  da fôrma de aço esses valores poderiam ser obtidos pela Equação 5.1.

Tabela 4.13 – Força cortante máxima para as diferentes lajes mistas

Espécime	#5	#6	#7	#8	#9
$V(\text{kN})$	62.9	25.9	23.0	12.9	10.6

Nos parágrafos anteriores foram definidas as curvas tensão cisalhante versus deslizamento para as lajes mistas #5 e #9. As curvas para as outras lajes mistas serão determinadas admitindo uma variação linear das tensões cisalhantes e deslizamentos, como no método  $m-k$ , com proporção igual à variação das forças cortantes máximas para as diferentes

lajes mistas. Os cálculos para um ponto da curva ( $s_i^{#6}, \tau_i^{#6}$ ) da laje mista #6 são apresentados nas equações 5.2 e 5.3 a seguir.

$$s_i^{#6} = \frac{s_i^{#9} - s_i^{#5}}{V^{#9} - V^{#5}}(V^{#6} - V^{#5}) + s_i^{#5} \quad (5.2)$$

$$\tau_i^{#6} = \frac{\tau_i^{#9} - \tau_i^{#5}}{V^{#9} - V^{#5}}(V^{#6} - V^{#5}) + \tau_i^{#5} \quad (5.3)$$

Usando as equações 5.2 e 5.3 chega-se às curvas tensão cisalhante versus deslizamento dadas na Figura 4.44 com pontos apresentados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 - Pontos das curvas Tensão cisalhante versus deslizamento

#6	$s(\text{mm})$	0.0	0.2	1.0	3.2	12.9
	$\tau(\text{kPa})$	0.0	135.0	235.4	307.0	0.0
#7	$s(\text{mm})$	0.0	0.2	0.9	3.0	12.4
	$\tau(\text{kPa})$	0.0	132.1	216.5	275.1	0.0
#8	$s(\text{mm})$	0.0	0.2	0.6	2.6	10.4
	$\tau(\text{kPa})$	0.0	122.3	150.7	164.1	0.0

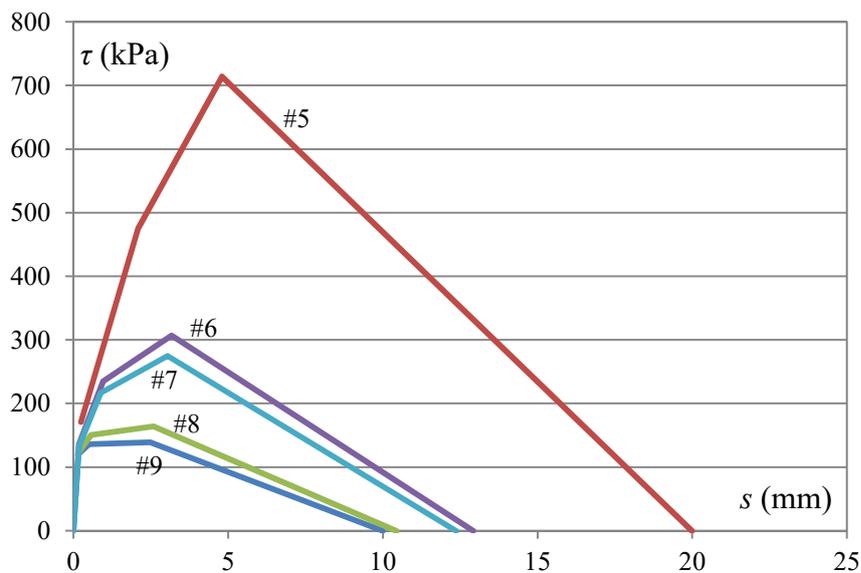


Figura 4.44 - Curvas Tensão cisalhante versus deslizamento

Usando as curvas tensão cisalhante versus deslizamento para as lajes mistas #6, #7 e #8, dadas na Figura 4.44 e Tabela 4.14, pode-se determinar, usando os elementos implementados nesse trabalho, as curvas carga-deslocamento transversal e carga-deslizamento, como apresentadas nas Figuras 4.45 a 4.47.

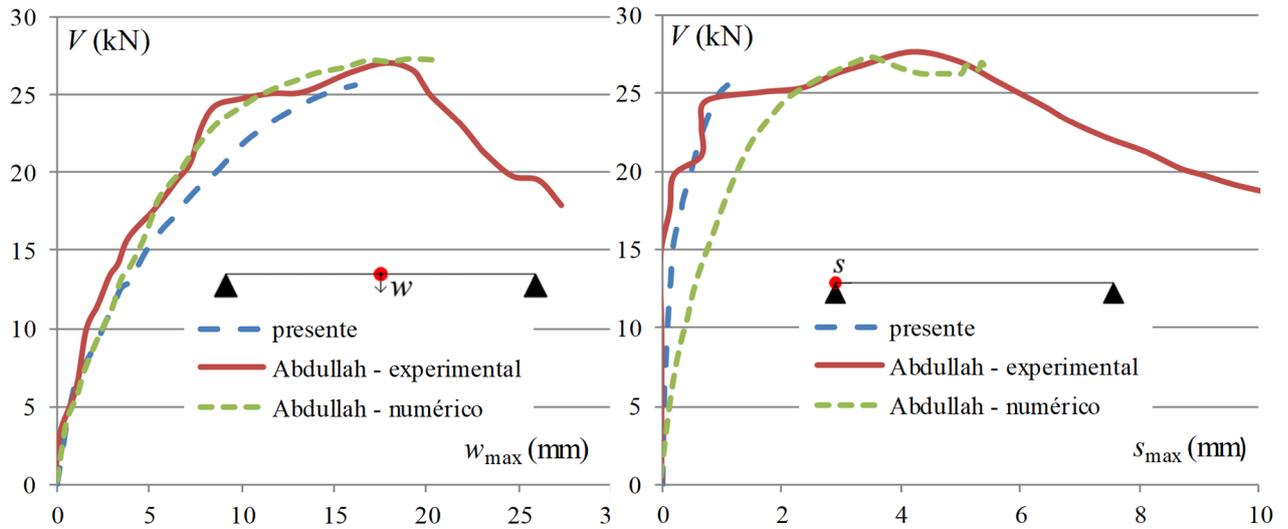


Figura 4.45 - Curva carga-deslocamento e carga-deslizamento para a laje mista #6

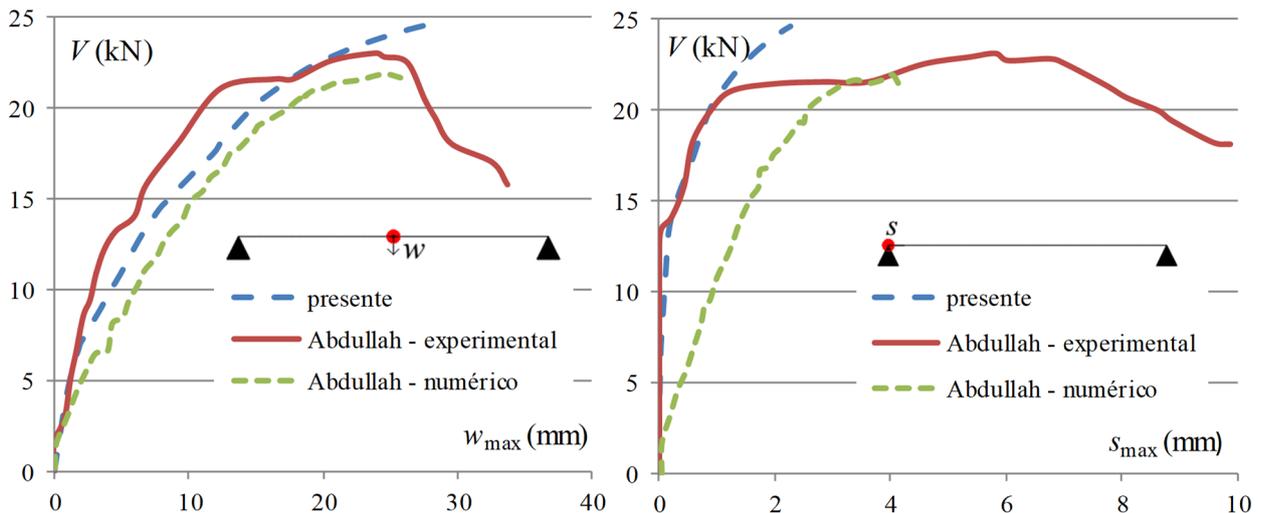


Figura 4.46 - Curva carga-deslocamento e carga-deslizamento para a laje mista #7

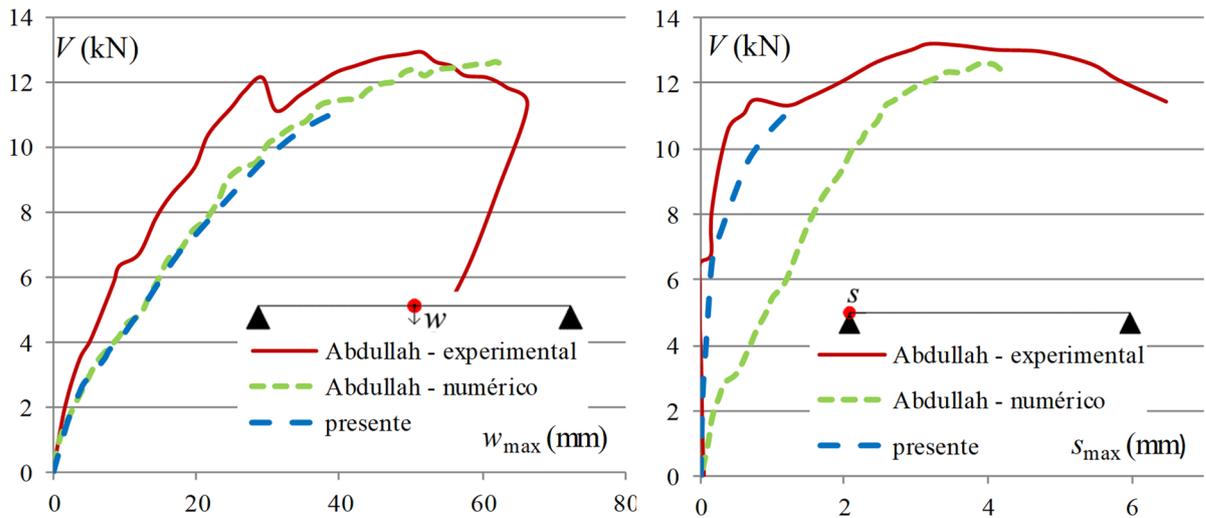


Figura 4.47 - Curva carga-deslocamento e carga-deslizamento para a laje mista #8

Observa-se das Figuras 4.45 a 4.47 que as soluções obtidas usando os elementos implementados nesse trabalho e as curvas tensão cisalhante versus deslizamento da Tabela 4.14 são bastante próximas das soluções experimentais e numérica obtidas por Abdullah e Easterling (2009). Sendo que para curva carga-deslizamento a solução numérica desse trabalho apresentou comportamento melhor que a solução numérica obtida por Abdullah e Easterling (2009).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 COMENTÁRIOS GERAIS

As formulações de elementos finitos planos de casca finos e espessos implementadas no presente trabalho foram desenvolvidas para a análise numérica não linear de lajes mistas. Esses elementos podem ser utilizados em outros casos práticos como na análise não linear de lajes de concreto armado, placas de aço, e em associação com outros elementos para análise de estruturas mais complexas como pontes e edifícios de múltiplos pavimentos.

No primeiro capítulo foi feita uma breve introdução com a descrição dos possíveis modos de falha para uma laje mista e a definição do vão de cisalhamento. Além disso, são apresentadas nesse capítulo as justificativas e os objetivos que levaram ao desenvolvimento do presente trabalho e uma breve descrição da estrutura do programa FEMOOP (*Finite Element Method Object Oriented Program*) usado para a implementação das formulações apresentadas nesse trabalho.

No capítulo 2 são apresentados os principais ensaios experimentais realizados em lajes mistas, o método  $m-k$  e uma revisão bibliográfica sobre trabalhos envolvendo análises numérica e experimental em lajes mistas. Além disso, foram feitas revisões acerca de pesquisas que envolvem o uso de análises numéricas usando elementos finitos para análise não linear de placas de concreto e de placas finas.

São apresentadas no capítulo 3 as formulações dos elementos implementados nesta pesquisa. Inicialmente é apresentada a formulação do elemento plano de casca espesso que possui nove nós com cinco graus de liberdade por nó a nível local considerando a teoria de placa de Reissner-Mindlin. Em seguida é apresentada a formulação do elemento plano de casca fino que contém quatro nós com cinco graus de liberdade por nó desenvolvido a partir das hipóteses discretas de Kirchhoff. Ainda nesse capítulo, são apresentadas de forma resumida, as formulações dos elementos finitos de barra e de interface que foram utilizados na modelagem das lajes mistas e que já haviam sido implementados em trabalhos anteriores.

No capítulo 4 foram desenvolvidos alguns exemplos numéricos com o objetivo de evidenciar a eficiência dos elementos finitos implementados. Os resultados numéricos encontrados são comparados com respostas numéricas e/ou experimentais extraídas de trabalhos encontrados na literatura.

## 5.2 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi implementado um modelo de elementos finitos para análise numérica não linear de lajes mistas submetidas à sua capacidade última. Para isso, foram desenvolvidos dois elementos planos de casca, sendo um baseado na teoria de placa de Reissner-Mindlin, que considera a energia de deformação devido ao cortante na formulação, e o outro baseado na teoria de placa de Kirchhoff, que desconsidera essa energia de deformação.

O comportamento estrutural de placas de concreto foi simulado considerando o comportamento ortotrópico do concreto após a fissuração com elementos finitos planos de casca, o comportamento estrutural de placas de aço foi simulado com elementos finitos planos de casca. A conexão deformável entre a forma de aço e o concreto foi modelada com elementos de interface e as nervuras da laje mista foram modeladas com elementos de barra.

A eficiência das formulações desenvolvidas e implementadas para simulação numérica de lajes mistas foram devidamente comprovadas com resultados obtidos em vários exemplos numéricos e experimentais encontrados na literatura. Em alguns exemplos a metodologia sugerida nesse trabalho apresentou resultados melhores que o modelo numérico apresentado na literatura. Em outros, observou-se que o modelo utilizado neste trabalho não conseguiu avançar nas curvas carga-deslizamento e carga-deflexão após o colapso, no entanto, as cargas limites encontradas foram satisfatórias. Esse fato é devido à utilização de uma análise simplificada, com o uso de elementos planos de casca e elementos de barra para simular a laje de concreto, sendo considerado para análise não linear do concreto o modelo de dano sugerido por Huang *et al.* (2003), enquanto que, nos trabalhos encontrados na literatura, foram utilizados elementos sólidos e outros modelos de tratamento do concreto pós colapso, na maioria dos casos, foram usados modelos de *softwares* comerciais sem uma apresentação clara desses.

Como uma conclusão geral, o modelo numérico sugerido nesse trabalho permite a obtenção das cargas máximas suportadas pelas lajes mistas com a vantagem de apresentar menor custo computacional comparada àquela que utiliza de discretização tridimensional da parte de concreto da laje mista, podendo-se afirmar então que o objetivo desse trabalho foi alcançado com sucesso.

### 5.3 TRABALHOS FUTUROS

Os elementos finitos planos de casca fino e espesso, que foram desenvolvidos no presente trabalho, permitem uma análise não linear de lajes mistas, placas de aço e de concreto simples ou armado. O elemento plano de casca fino é um elemento retangular com quatro nós e cinco graus de liberdade por nó. Para generalizar o elemento desenvolvido, possibilitando utilizá-lo na modelagem de cascas planas de formato arbitrário e representáveis por elementos de quatro nós, sugere-se o desenvolvimento de um elemento quadrilateral com base no elemento plano de casca fino apresentado nesse trabalho. Além disso, sugere-se o desenvolvimento de elementos finitos de casca curvos para a análise de casos particulares, por exemplo, de cascas ou lajes curvas.

Outro estudo interessante seria implementar elementos sólidos para a análise não linear tridimensional de estruturas, como as lajes mistas. Nesse caso, apesar de exigir um maior esforço computacional, seria possível considerar alguns fatores adicionais, como a presença de indutores de fissuração que são colocados na laje de concreto no ensaio de flexão, pois seria possível considerar a separação no sentido transversal entre os elementos sólidos.

Nesse trabalho foi considerado um critério de falha para o concreto tracionado com uma degradação da rigidez após atingir a deformação de 0.15%. Vêm sendo utilizada pela literatura uma queda na rigidez do concreto tracionado que é relacionada com a energia necessária para a abertura de fissuras. Sugere-se para trabalhos futuros a avaliação de lajes mistas com essa consideração.

Durante o desenvolvimento desse trabalho notou-se a necessidade do desenvolvimento de uma interface gráfica para facilitar a criação do arquivo de entrada e a visualização dos resultados. Para otimizar e melhorar a funcionalidade do FEMOOP em trabalhos futuros seria interessante desenvolver uma interface gráfica para o programa, com pré e pós-processamento gráfico tornando a análise mais rápida e o software mais simples de ser usado por qualquer usuário para análises numéricas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDULLAH, R.; EASTERLING, W. S. Determination of composite slab strength using a new elemental test method. **Journal of Structural Engineering**, v. 133, n. 9, p. 1268-1277, 2007.

ABDULLAH, R.; EASTERLING, W. S. New evaluation and modeling procedure for horizontal shear bond in composite slabs. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 65, p. 891-899, 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ABNT. **NBR 8800**: projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

BATHE, M. A. *et al.* Our discrete-Kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis – an assessment. **Computers & Structures**, v. 16, p. 89-98, 1983.

BATOZ, J. L. *et al.* A study of three-node triangular plate bending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, p. 1771-1812, 1980.

BATOZ, J. L.; TAHAR, M. B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, p. 1655-1677, 1982.

BRADFORD, M. A. Generic modelling of composite steel-concrete slabs subjected to shrinkage, creep and thermal strains including partial interaction. **Engineering Structures**, v. 32, p. 1459-1465, 2010.

CALIXTO, J. M.; BRENDOLAN, G.; PIMENTA, R.; Estudo comparativo dos critérios de dimensionamento ao cisalhamento longitudinal em lajes mistas de aço e concreto. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 2, n. 2, p. 124-141, 2009.

CAMPOS, P. C. **Efeito da continuidade no comportamento e na resistência de lajes mistas com fôrma de aço incorporada**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

CEB/FIP MODEL CODE. Fip Bulletin 55: Model Code 2010, First complete draft –Volume 1. **International Federation for Structural Concrete**, 2010.

CHEN, S. Load carrying capacity of composite slabs with various end constraints. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 59, p. 385-403, 2003.

CHEN, S.; SHI, X. Shear bond mechanism of composite slabs – A universal FE approach. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 67, p. 1475-1484, 2011.

DANIELS, B. J.; CRISINEL, M. Composite slab behavior and strength analysis. Part 1: Calculation procedure. **Journal of Structural Engineering**, v. 119, p. 16-35, 1993.

DEGTYAREV, V.V. Strength of composite slabs with end anchorages. Part 1: Analytical model. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 94, p. 150-162, 2013.

DIAS, L. E. S. **Análise numérica de cascas de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço usando elementos finitos de casca e interface**. Dissertação (Mestrado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2016.

EUROCODE 4. Design of composite steel and concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings. **Comite Européen de Normalisation**, 2004.

FERRER, M.; MARIMON, F; CASAFONT, M. An experimental investigation of a new perfect bond technology for composite slabs. **Construction and Building Materials**, v 166, p. 618-633, 2018.

FERRER, M.; MARIMON, F.; CRISINEL, M. Designing cold-formed steel sheets for composite slabs: An experimentally validated FEM approach to slip failure mechanics. **Thin-Walled Structures**, v. 44, p. 1261-1271, 2007.

GHOLAMHOSEINI, A. *et al.* Longitudinal shear stress and bond-slip relationships in composite concrete slabs. **Engineering Structures**, v. 69, p. 37-48, 2014.

GHOLAMHOSEINI, A.; GILBERT, I.; BRADFORD, M. Ultimate strength of continuous composite concrete slabs. In: COMPOSITE CONSTRUCTION IN STEEL AND CONCRETE, 7., 2013, Austrália. **Anais eletrônicos**. ASCE, 2013. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/9780784479735.054>>

GUIMARÃES, L. G. S. **Disciplina orientada a objetos para análise e visualização bidimensional de modelos de elementos finitos**. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica - Rio. Rio de Janeiro, 1992.

JOHNSON, R. P.; SHEPHERD, A. J. Resistance to longitudinal shear of composite slabs with longitudinal reinforcement. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 82, p.190-194, 2013.

HUANG, Z.; BURGESS, I. W.; PLANK, R. J. Modelling membrane action of concrete slabs in composite buildings in fire. Part I: Theoretical development. **Journal of Structural Engineering**, n. 8, v. 129, p. 1093-1102, 2003.

HUGHES T. J. R. **The finite element method**: linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1987.

MARCIUKAITIS, G.; JONAITIS, B.; VALIVONIS, J. Analysis of deflections of composite slabs with profiled sheeting up to the ultimate moment. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 62, p.820-830, 2006.

MARIMUTHU, V. *et al.* Experimental studies on composite deck slabs to determine the shear bond characteristic (*m-k*) values of the embosse profiled sheet. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 63, p.791-803, 2006.

MAJDI, Y.; HSU, C. T.; ZAREI, M. Finite element analysis of new composite floors having cold-formed steel and concrete slab. **Engineering Structures**, v. 77, p. 65-83, 2014.

QUEIROZ, G.; PIMENTA, R. J.; MARTINS, A. G. **Estruturas mistas**. Vol. 1. Rio de Janeiro: IABr/CBCA, 2010.

RANA, M. M.; UY, B.; MIRZA, O. Experimental and numerical study of end anchorage in composite slabs. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 115, p. 372-386, 2015.

RAZAQPUR, A. G.; NOFAL, M.; VASILESCU, A. An improved quadrilateral finite element for analysis of thin plates. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 40, p. 1-23, 2002.

RÍOS, J. D. *et al.* Numerical modelling of the shear-bond behaviour of composite slabs in four and six-point bending tests. **Engineering Structures**, v. 133, p. 91-104, 2017.

ROTS J. G. *et al.* The need for fracture mechanics options in finite element models for concrete structures. **Proceedings**, Int. Conf. On Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, F. Damjanic *et al.*, eds., Pineridge Press, Part 1, 19-32, 1984.

SARAWIT, A. T. *et al.* The finite element method for thin-walled members-applications. **Thin-Walled Structures**, v. 41, p. 191-206, 2003.

SILVA, A. R. **Análise numérica de elementos estruturais com interação parcial**. Tese (Doutorado). Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2010.

TENG, X.; ZHANG, Y. X. Nonlinear finite element analyses of FRP-strengthened reinforced concrete slabs using a new layered composite plate element. **Composite Structures**, v. 114, p. 20-29, 2014.

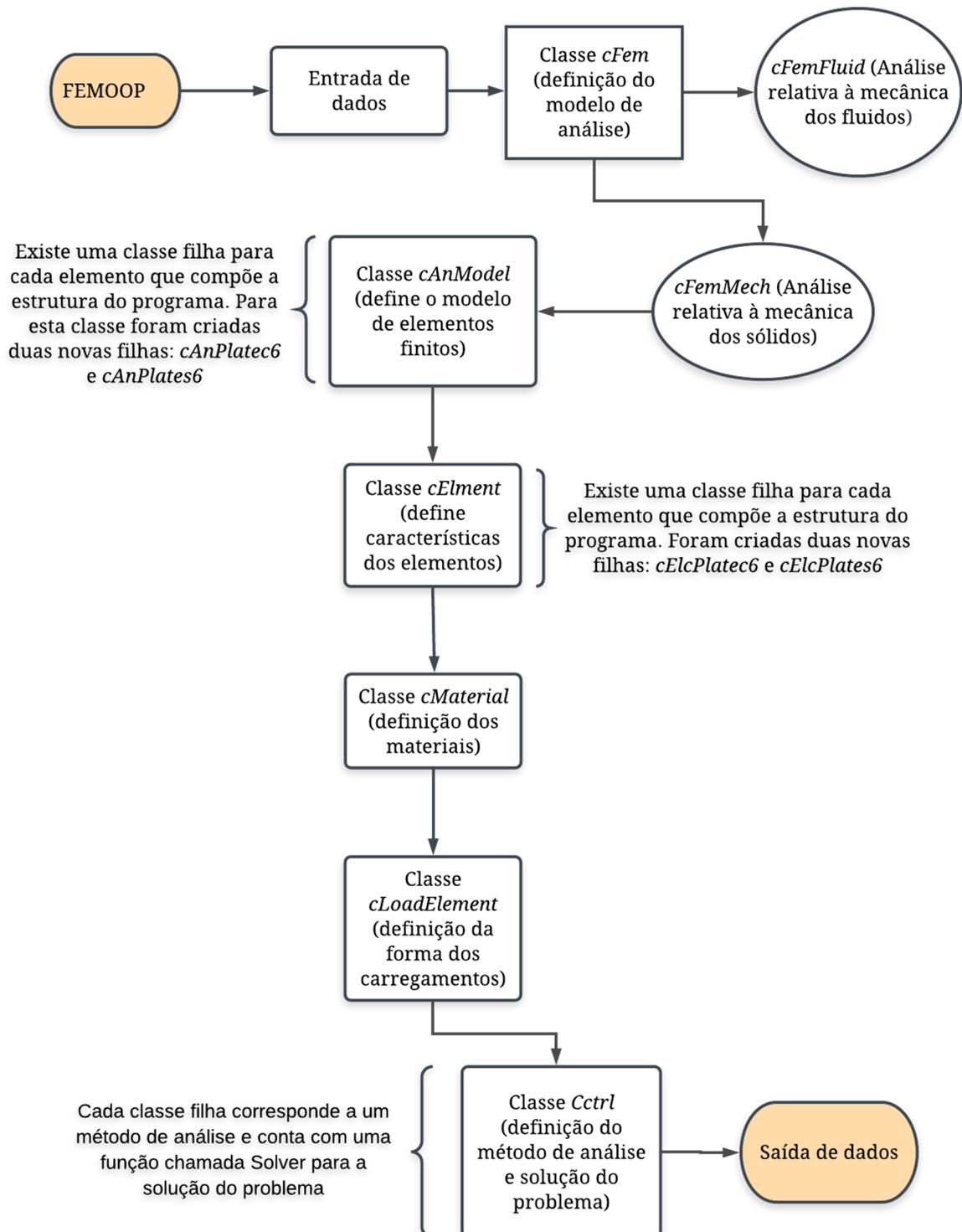
TENG, X.; ZHANG, Y. X.; LIN, X. Two new composite plate elements with bond-slip effect for nonlinear finite element analyses of FRP-strengthened concrete slabs. **Computers and Structures**, v. 148, p. 35-44, 2014.

VELJKOVIC, M. **Behaviour and resistance of composite slabs – Experiments and finite element analysis**. Tese (Doutorado). Department of Steel Structures, Lulea University of Technology, Lulea, Suécia, 1996.

YU, X. *et al.* Nonlinear analysis of orthotropic composite slabs in fire. **Engineering Structures**, v. 30, p. 67-80, 2007.

## APÊNDICE A – DESCRIÇÃO DO PROGRAMA FEMOOP

Neste anexo estão descritas algumas classes que compõem a estrutura do programa FEMOOP, e é apresentado um fluxograma com algumas das classes utilizadas na solução do problema discutido no presente trabalho.



*cFem*: Classe para funções e variáveis globais da análise numérica usando o método dos elementos finitos (MEF). Um elemento dessa classe é construído a partir de uma das suas classes filhas que definem a que tipo de problema será usado o método dos elementos finitos.

*cFemMech*: Filha da classe *cFem*, é usada na análise numérica de problemas envolvendo a mecânica dos sólidos.

*cFemFluid*: Filha da classe *cFem*, é usada na análise numérica de problemas envolvendo a mecânica dos fluidos.

O programa é iniciado criando um elemento dessa classe que irá gerenciar a criação de todos os outros elementos de classes necessários na análise. Nessa classe estão escritas as funções principais do MEF, como, por exemplo, funções responsáveis pela indexação dos índices das equações globais com os graus de liberdade de cada nó, montagem da matriz de rigidez global do sistema, montagem do vetor de força global, entre outras.

*cAnModel*: Classe para definir os modelos dos elementos finitos. As filhas dessa classe representam os modelos de elementos finitos para diferentes análises, como, por exemplo, análise de pórticos planos, espaciais, análise de placas e cascas, entre outros.

*cAnBeam2d*: Filha da classe *cAnModel*, define características do elemento para análise de pórticos planos, como, quantidade de nós no elemento e de graus de liberdade por nó.

*cAnInterface*: idem a *cAnBeam2d*, para elemento de interface entre dois elementos de barra.

*cAnPlate9*: idem a *cAnBeam2d*, para elemento de placa. Entre outras.

Quando se deseja inserir um novo elemento no FEMOOP, deve ser criada uma nova filha para *cAnModel* com as características desejadas desse novo elemento. Nesse trabalho é criado um elemento plano de casca considerando a teoria de placa de Kirchoff.

*cCtrl*: Classe que define o tipo de análise. Ou seja, as filhas dessa classe definem se o método de análise é para um problema estático linear, dinâmico linear, estático não linear usando método de Newton-Raphson com controle de carga ou deslocamento, análise estática não linear usando método incremental com matriz de rigidez tangente média, entre outros.

*cCtrlLinStat*: Filha da classe *cCtrl*, define uma função, chamada de *solver*, para análise de problemas estáticos lineares da mecânica dos sólidos.

*cPathNR*: idem a *cCtrlLinStat*, para análise de problemas estáticos não-lineares usando método incremental/iterativo com controle de carga.

*cPathDCM*: idem a *cCtrlLinStat*, para análise de problemas estáticos não-lineares usando método incremental/iterativo com controle de deslocamento. Entre outras.

Quando se deseja inserir um novo método de análise no FEMOPP, deve ser criada uma nova filha para *cCtrl* atribuindo à função *solver* as características desejadas.

*cElement*: Classe que define características e funções gerais dos elementos. Por exemplo, parâmetro que identifica o modelo do elemento (*cAnBeam2d*, *cAnBeam3d*, ...), e função que retorna os deslocamento calculados nos nós do elemento. As filhas dessa classe definem características individuais de cada elemento.

*cElcBeam2d*: Filha da classe *cElement*, define características individuais do elemento, como, por exemplo, material que o elemento é constituído, quantidade de pontos de integração numérica, função para definição da matriz de rigidez do elemento, entre outras.

*cElcBeam3d*: idem a *cElcBeam2d*.

*cElcPlate9*: idem a *cElcBeam2d*. Entre outras.

Quando se deseja inserir um novo elemento no FEMOPP, deve ser criada uma nova filha para *cElement* com as características desejadas desse novo elemento. Nesse trabalho foram utilizados elementos de interface e elementos de barra já implementados no FEMOPP, sendo implementados um elemento de casca de Reissner-Mindlin e um novo elemento para análise de cascas planas sob a teoria de placa de Kirchoff.

*cCrossSection*: Classe que define as propriedades de seções transversais para análise de pórticos planos ou espaciais. As filhas dessa classe definem diferentes formatos das seções e quantidade de materiais usados nas seções.

*cCrossPolygon*: Filha da classe *cCrossSection*, define uma seção transversal poligonal composta por apenas um tipo de material.

*cCrossCircle*: Filha da classe *cCrossSection*, define uma seção transversal circular composta por apenas um tipo de material.

*cMultMatSection*: Filha da classe *cCrossSection*, define uma seção transversal poligonal composta por um número qualquer de materiais, podendo ainda ser definidas barras pontuais dentro da seção.

Outros tipos de formatos de seção podem ser introduzidos no FEMOOP criando novas filhas da classe *cCrossSection*.

*cMaterial*: Classe para definição das propriedades dos materiais, como, por exemplo, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, densidade, entre outras. Na análise de placa e cascas, é usada também para definir a espessura dos elementos e características do material ao longo da espessura, como, por exemplo, a presença de armadura numa laje de concreto armado.

*cMaterialIsotropic*: Filha da classe *cMaterial*, define as propriedades dos materiais elástico isotrópicos.

*cMatConcreteReforced*: Filha da classe *cMaterial*, define as propriedades do material ao longo da espessura para análise linear de placas de concreto reforçado com barras de aço.

*cMatConcreteReforcedNL*: Filha da classe *cMaterial*, define as propriedades do material ao longo da espessura para análise não-linear de placas de concreto reforçado com barras de aço.

*cMatSteel*: Filha da classe *cMaterial*, define as propriedades do material ao longo da espessura para análise não-linear de placas de aço. Entre outras.

Outros tipos de materiais podem ser introduzidos no FEMOOP criando novas filhas da classe *cMaterial*. Nesse trabalho foram usadas as classes *cMatConcreteReforcedNL* e *cMatSteel* para a definição dos materiais na análise não linear dos elementos de placa de concreto e aço.

*cLoadElement*: Classe que define as características dos carregamentos aplicados nos elementos. Por exemplo, identifica quais elementos da malha de elementos finitos tem carregamento e que tipo de carregamento é (uniforme distribuído, concentrado, ...). As filhas dessa classe definem os diferentes tipos de carregamentos que podem atuar em diferentes tipos de elementos.

*cLoadPlatePoint*: Filha da classe *cLoadElement*, define um carregamento pontual no elemento de placa retangular.

*cLoadPlateUnif*: Filha da classe *cLoadElement*, define um carregamento uniformemente distribuído no elemento de placa retangular.

*cLoadShellUnif*: Filha da classe *cLoadElement*, define um carregamento uniformemente distribuído no elemento plano de casca retangular.

*cLoadBeam2dUnif*: Filha da classe *cLoadElement*, define um carregamento uniformemente distribuído no elemento de barra para pórticos planos. Entre outras.

Outros tipos de carregamentos podem ser introduzidos no FEMOOP criando novas filhas da classe *cLoadElement*.

*cStressStrain*: Classe para definição de diferentes modelos de curva tensão-deformação para os diferentes materiais. Em algumas análises não lineares é necessária a sua definição.

*cStressStrainSegPoli*: Filha da classe *cStressStrain*, define uma curva formada por um número qualquer de sentenças, onde cada sentença é definida por um polinômio de até terceira ordem.

*cStressStrainExponencial*: Filha da classe *cStressStrain*, define uma curva exponencial geralmente usada na relação força cortante versus deslizamento de conexões deformáveis.

Outros tipos de curvas para relação tensão-deformação podem ser introduzidas no FEMOOP criando novas filhas da classe *cStressStrain*. Nesse trabalho foi utilizada a classe *cStressStrainSegPoli* para definir as curvas tensão-deformação do aço da fôrma, do aço da armadura, do concreto e a curva tensão cisalhante-deslizamento da conexão deformável.

*cNode*: Classe que define as propriedades e funções exclusivas de cada nó da malha de elementos finitos. Por exemplo, suas coordenadas, carregamentos nodais, restrições de deslocamentos, função que associa os graus de liberdade do nó com o índice da equação do sistema global, entre outras.

## APÊNDICE B – MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

A matriz de transformação  $\mathbf{T}$  necessária para transformar a matriz de rigidez do elemento de 9 nós para o elemento de 4 nós, pode ser escrita pela expressão:

$$\mathbf{T}_{36 \times 20} = \begin{bmatrix} \mathbf{T1}_{18 \times 8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T2}_{18 \times 12} \end{bmatrix}$$

As matrizes  $\mathbf{T1}_{18 \times 8}$  e  $\mathbf{T2}_{18 \times 12}$  são dadas pelas expressões a seguir:

$$\mathbf{T1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_{5,1} & T_{5,2} & T_{5,3} & T_{5,4} & T_{5,5} & T_{5,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{6,4} & T_{6,5} & T_{6,6} & T_{6,7} & T_{6,8} & T_{6,9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{7,7} & T_{7,8} & T_{7,9} & T_{7,10} & T_{7,11} & T_{7,12} \\ T_{8,1} & T_{8,2} & T_{8,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{8,10} & T_{8,11} & T_{8,12} \\ T_{9,1} & T_{9,2} & T_{9,3} & T_{9,4} & T_{9,5} & T_{9,6} & T_{9,7} & T_{9,8} & T_{9,9} & T_{9,10} & T_{9,11} & T_{9,12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ T_{14,1} & T_{14,2} & T_{14,3} & T_{14,4} & T_{14,5} & T_{14,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{15,4} & T_{15,5} & T_{15,6} & T_{15,7} & T_{15,8} & T_{15,9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{16,7} & T_{16,8} & T_{16,9} & T_{16,10} & T_{16,11} & T_{16,12} \\ T_{17,1} & T_{17,2} & T_{17,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{17,10} & T_{17,11} & T_{17,12} \\ T_{18,1} & T_{18,2} & T_{18,3} & T_{18,4} & T_{18,5} & T_{18,6} & T_{18,7} & T_{18,8} & T_{18,9} & T_{18,10} & T_{18,11} & T_{18,12} \end{bmatrix}$$

Em que os termos da matriz  $\mathbf{T2}$ , dados por  $T_{i,j}$ , em que  $i$  é a linha e  $j$  é a coluna em que o termo se encontra, são apresentados a seguir:

$$T_{5,1} = -T_{5,4} = -\frac{3\text{sen}\alpha_{12}}{2l_{12}}, T_{5,2} = T_{5,5} = \frac{\cos^2 \alpha_{12}}{2} - \frac{\text{sen}^2 \alpha_{12}}{4}, T_{5,3} = T_{5,6} = \frac{3\text{sen}(2\alpha_{12})}{8},$$

$$T_{6,4} = -T_{6,7} = -\frac{3\text{sen}\alpha_{23}}{2l_{23}}, T_{6,5} = T_{6,8} = \frac{\cos^2 \alpha_{23}}{2} - \frac{\text{sen}^2 \alpha_{23}}{4}, T_{6,6} = T_{6,9} = \frac{3\text{sen}(2\alpha_{23})}{8},$$

$$T_{7,7} = -T_{7,10} = -\frac{3\text{sen}\alpha_{43}}{2l_{43}}, T_{7,8} = T_{7,11} = \frac{\cos^2 \alpha_{43}}{2} - \frac{\text{sen}^2 \alpha_{43}}{4}, T_{7,9} = T_{7,12} = \frac{3\text{sen}(2\alpha_{43})}{8},$$

$$T_{8,1} = -T_{8,10} = -\frac{3\text{sen}\alpha_{14}}{2l_{14}}, T_{8,2} = T_{8,11} = \frac{\cos^2 \alpha_{14}}{2} - \frac{\text{sen}^2 \alpha_{14}}{4}, T_{8,3} = T_{8,12} = \frac{3\text{sen}(2\alpha_{14})}{8},$$

$$T_{9,1} = -\frac{3}{4l_{57}} - \frac{3\cos\alpha_{12}}{8l_{12}}, T_{9,2} = \frac{3l_{12}}{16l_{57}}\text{sen}\alpha_{12} - \frac{\cos^2 \alpha_{12}}{8} + \frac{\text{sen}^2 \alpha_{12}}{16},$$

$$T_{9,3} = \frac{3l_{12}}{16l_{57}}\cos\alpha_{12} + \frac{3\text{sen}(2\alpha_{12})}{32}, T_{9,4} = -\frac{3}{4l_{57}} + \frac{3\text{sen}\alpha_{12}}{8l_{12}},$$

$$\begin{aligned}
T_{9,5} &= -\frac{3l_{12}}{16l_{57}} \operatorname{sen} \alpha_{12} - \frac{\cos^2 \alpha_{12}}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{12}}{16}, \quad T_{9,6} = -\frac{3l_{12}}{16l_{57}} \cos \alpha_{12} + \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{12})}{32}, \\
T_{9,7} &= \frac{3}{4l_{57}} + \frac{3 \operatorname{sen} \alpha_{43}}{8l_{43}}, \quad T_{9,8} = \frac{3l_{43}}{16l_{57}} \operatorname{sen} \alpha_{43} - \frac{\cos^2 \alpha_{43}}{8} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{43}}{16}, \\
T_{9,9} &= \frac{3l_{43}}{16l_{57}} \cos \alpha_{43} + \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{43})}{32}, \quad T_{9,10} = \frac{3}{4l_{57}} - \frac{3 \operatorname{sen} \alpha_{43}}{8l_{43}}, \\
T_{9,11} &= -\frac{3l_{43}}{16l_{57}} \operatorname{sen} \alpha_{43} - \frac{\cos^2 \alpha_{43}}{8} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{43}}{16}, \quad T_{9,12} = -\frac{3l_{43}}{16l_{57}} \cos \alpha_{43} + \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{43})}{32}, \\
T_{14,4} &= -T_{14,7} = \frac{3 \cos \alpha_{12}}{2l_{12}}, \quad T_{14,2} = T_{14,5} = \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{12})}{8}, \quad T_{14,3} = T_{14,6} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{12}}{2} - \frac{\cos^2 \alpha_{12}}{4}, \\
T_{15,4} &= -T_{15,7} = \frac{3 \cos \alpha_{23}}{2l_{23}}, \quad T_{15,5} = T_{15,8} = \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{23})}{8}, \quad T_{15,6} = T_{15,9} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{23}}{2} - \frac{\cos^2 \alpha_{23}}{4}, \\
T_{16,7} &= -T_{16,10} = \frac{3 \cos \alpha_{43}}{2l_{43}}, \quad T_{16,8} = T_{16,11} = \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{43})}{8}, \quad T_{16,9} = T_{16,12} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{43}}{2} - \frac{\cos^2 \alpha_{43}}{4}, \\
T_{17,1} &= -T_{17,10} = \frac{3 \cos \alpha_{14}}{2l_{14}}, \quad T_{17,2} = T_{17,11} = \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{14})}{8}, \quad T_{17,3} = T_{17,12} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{14}}{2} - \frac{\cos^2 \alpha_{14}}{4}, \\
T_{18,1} &= \frac{3}{4l_{68}} + \frac{3 \cos \alpha_{14}}{8l_{14}}, \quad T_{18,2} = \frac{3l_{14}}{16l_{68}} \operatorname{sen} \alpha_{14} + \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{14})}{32}, \\
T_{18,3} &= \frac{3l_{14}}{16l_{68}} \cos \alpha_{14} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{14}}{8} + \frac{\cos^2 \alpha_{14}}{16}, \quad T_{18,4} = -\frac{3}{4l_{68}} + \frac{3 \cos \alpha_{23}}{8l_{23}}, \\
T_{18,5} &= -\frac{3l_{23}}{16l_{68}} \operatorname{sen} \alpha_{23} + \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{23})}{32}, \quad T_{18,6} = -\frac{3l_{23}}{16l_{68}} \cos \alpha_{23} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{23}}{8} + \frac{\cos^2 \alpha_{23}}{16}, \\
T_{18,7} &= -\frac{3}{4l_{68}} - \frac{3 \cos \alpha_{23}}{8l_{23}}, \quad T_{18,8} = \frac{3l_{23}}{16l_{68}} \operatorname{sen} \alpha_{23} + \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{23})}{32}, \\
T_{18,9} &= \frac{3l_{23}}{16l_{68}} \cos \alpha_{23} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{23}}{8} + \frac{\cos^2 \alpha_{23}}{16}, \quad T_{18,10} = \frac{3}{4l_{68}} - \frac{3 \cos \alpha_{14}}{8l_{14}}, \\
T_{18,11} &= -\frac{3l_{14}}{16l_{68}} \operatorname{sen} \alpha_{14} + \frac{3 \operatorname{sen}(2\alpha_{14})}{32}, \quad T_{18,12} = -\frac{3l_{14}}{16l_{68}} \cos \alpha_{14} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{14}}{8} + \frac{\cos^2 \alpha_{14}}{16}.
\end{aligned}$$