

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO DE LAJES
LISAS APOIADAS EM PILARES DE SEÇÃO
TRANSVERSAL ELÍPTICA E SEMI-
ELÍPTICA**

Jhonatan Willian Souza Faria

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

Campus Morro do Cruzeiro
Ouro Preto, MG – Brasil
Fevereiro, 2018

F224d

Faria, Jhonatan Willian Souza.

Dimensionamento à punção de lajes lisas apoiadas em pilares de seção transversal elíptica e semi-elíptica [manuscrito] / Jhonatan Willian Souza Faria. - 2018.

xvii, 76f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Desenho (Engenharia) - Dimensionamento. 2. Colunas de concreto. 3. Lajes de concreto. 4. Construção Metálica. I. Rocha, Paulo Anderson Santana. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624.014

DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO DE LAJES LISAS APOIADAS EM PILARES DE SEÇÃO TRANSVERSAL ELÍPTICA E SEMI-ELÍPTICA

AUTOR: JHONATAN WILLIAN SOUZA FARIA

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 23 de fevereiro de 2018, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Paulo Anderson Santana Rocha, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Jaime Florêncio Martins, D. Sc. – UFOP



Prof. Alexandre da Silva Galvão, D. Sc. – UFSJ

*Aos meus pais, minhas irmãs e ao
meu orientador.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela benção da vida.

Agradeço aos meus pais Gisélia e Levindo, pelos ensinamentos da vida e dos verdadeiros valores morais. Agradeço a toda minha família que se mostrou solidária em todos os momentos.

As minhas irmãs Isadora e Luana pelo companheirismo, momentos, motivação, amizade e incentivo.

Ao meu orientador prof. Paulo Rocha pelos ensinamentos, paciência e por me guiar e incentivar nesta pesquisa.

Agradeço a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PROPEC que tanto contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Agradeço ao órgão fomentador CAPES pelo auxílio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

A todos os amigos do mestrado, pelo apoio, amizade, companheirismo e conhecimentos contribuídos durante o desenvolvimento deste trabalho.

*“A paz é a única forma de nos
sentirmos realmente humanos.”*

Albert Einstein

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil

DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO DE LAJES LISAS APOIADAS EM PILARES DE SEÇÃO TRANSVERSAL ELÍPTICA E SEMI- ELÍPTICA

Jhonatan Willian Souza Faria

Fevereiro/2018

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

O presente trabalho tem como principal objetivo realizar de forma automática o dimensionamento à punção de duas lajes lisas de concreto armado, sendo a primeira apoiada em um pilar com seção transversal elíptica e a segunda laje apoiada em um pilar com seção transversal semi-elíptica. Inicialmente compararam-se as respostas dos parâmetros relevantes para a realização do projeto das lajes com os resultados obtidos a partir do software AutoCAD. Lembrando que nesta pesquisa os resultados foram determinados através de alguns métodos numéricos e com o auxílio de soluções analíticas. Posteriormente, construiu-se a curva de interação de um pilar de concreto armado de seção transversal semi-elíptica. Para a obtenção da curva utilizou-se a Regra dos Trapézios e as equações de compatibilidade de deformações e de equilíbrio correspondentes a cada domínio de deformação tomando por base a ABNT NBR 6118 (2014). Vale ressaltar que no presente trabalho propõem-se duas equações: uma para calcular o centroide de cada região comprimida e outra para calcular a área de cada parcela comprimida da seção semi-elíptica. Após as intervenções no código computacional, realizou-se o dimensionamento das lajes lisas à punção seguindo as prescrições normativas da ABNT NBR 6118 (2014) e para isso utilizou-se a linguagem computacional FORTRAN 90.

Palavras-chave: Dimensionamento à punção, Pilar com seção transversal elíptica, Pilar com seção transversal semi-elíptica, Contornos críticos.

Abstract of the Dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial requirement for obtaining the degree of Master of Science in Civil Engineering

**PUNCHING SHEAR DESIGN OF FLAT SLABS SUPPORTED ON
ELLIPTICAL AND SEMI-ELLIPTICAL CROSS-SECTION
COLUMN**

Jhonatan Willian Souza Faria

Fevereiro/2018

Advisor: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

The main objective of this work is to perform automatically the punching shear design of two reinforced concrete flat slabs, the first being supported on a column with an elliptical cross-section and the second slab supported on a column with a semi-elliptical cross-section. We initially compared the responses of the parameters relevant to the design of slabs with the results obtained from AutoCAD software. Recalling that in this research the results were determined through some numerical methods and with the aid of analytical solutions. Subsequently, the interaction curve for the cross-section of a reinforced concrete column of semi-elliptical cross-section was constructed. In order to obtain the curve, we used the Trapezium Rule and the strain and equilibrium compatibility equations corresponding to each strain domain based on ABNT NBR 6118 (2014). It is worth mentioning that in the present work two equations are proposed: one to calculate the centroid of each compressed region and another to calculate the area of each compressed portion of the semi-elliptical section. After the interventions in the computational code, the dimensioning of the flat slabs was performed according to the normative prescriptions of ABNT NBR 6118 (2014) and for this the FORTRAN 90 computer language was used.

Keywords: Punching shear design, Column with elliptical cross-section, Column with semi-elliptical cross-section, Critical contours.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Siglas	xiv
Lista de Símbolos	xv
Capítulo 1- Introdução.....	1
1.1 Considerações Iniciais.....	1
1.2 Objetivos da pesquisa.....	4
1.2.1 Objetivo Geral.....	4
1.2.2 Objetivos específicos	5
1.3 Estado da Arte.....	5
1.4 Organização do Trabalho.....	10
Capítulo 2- Punção em Lajes de Concreto Armado.....	11
2.1 Introdução	11
2.2 Parâmetros que Influenciam a Resistência à Punção.....	12
2.2.1 Resistência à Compressão do Concreto	12
2.2.2 Taxa de Armadura de Flexão Tractionada.....	12
2.2.3 Dimensões e Geometria do Pilar	13
2.2.4 Size Effect – Efeito de Tamanho	13
2.2.5 Presença de Armaduras de Cisalhamento	14
2.3 Prescrições da ABNT NBR 6118 (2014).....	17
2.3.1 Método de Cálculo.....	17
2.3.2 Tensão Solicitante na Superfície Crítica.....	18
2.3.2.1 Pilar Interno com Carregamento Simétrico.....	18
2.3.2.2 Pilar Interno com Efeito de Momento.....	21
2.3.2.3 Valores do Módulo de Resistência Plástico (W_p)	23
2.3.2.4 Pilar de Borda.....	25
2.3.2.5 Pilar de Canto	27
2.3.2.6 Capitel	28
2.3.3 Tensão Resistente nas Superfícies Críticas.....	29
2.3.3.1 Tensão Resistente na Superfície Crítica C (Compressão Diagonal do Concreto).....	29

2.3.3.2 Tensão Resistente na Superfície Crítica C'	29
2.3.3.3 Tensão Resistente na Superfície Crítica C''	31
2.3.4 Armadura de Punção Obrigatória	31
2.3.5 Disposição de Armaduras de Punção.....	31
Capítulo 3- Características Geométricas da Seção Transversal	34
3.1 Introdução	34
3.2 Área da Seção Elíptica.....	35
3.3 Perímetro da Seção Elíptica.....	37
3.4 Módulo de Resistência Plástico da Seção Elíptica	39
3.5 Centroide de uma Seção Semi-Elíptica	40
3.6 Momento de Inércia da Seção Semi-Elíptica.....	41
3.7 Métodos Numéricos	43
3.7.1 Regra dos Trapézios.....	43
3.7.2 Método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss).....	45
3.7.3 Cálculo do Momento de Inércia através do Método dos Elementos Finitos .	46
Capítulo 4- Aplicações.....	48
4.1 Introdução	48
4.2 Exemplos	48
4.2.1 Momentos de inércia para seções via MEF	48
4.2.2 Momentos de inércia da seção elíptica em relação aos eixos baricêntricos ..	53
4.2.3 Comprimento de uma elipse via Método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss)	54
4.2.4 Cálculo do Perímetro e Área da seção elíptica	54
4.2.5 Cálculo da Área e Perímetro da seção semi-elíptica.....	56
4.2.6 Cálculo do Módulo de Resistência Plástico da seção elíptica	57
4.2.7 Cálculo do Centroide da seção semi-elíptica.....	57
4.2.8 Curva de interação da seção transversal semi-elíptica de um pilar de concreto	58
4.2.9 Dimensionamento à punção de uma laje lisa apoiada em um pilar com seção semi-elíptica.....	65
4.2.10 Dimensionamento à punção de uma laje lisa apoiada em um pilar com seção elíptica.....	67
Capítulo 5- Considerações Finais	71
5.1 Introdução	71
5.2 Conclusões	71
5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros	72

Referências 73

Lista de Figuras

Figura 1.1: Sistemas estruturais para estruturas de concreto (FERREIRA, 2010).....	1
Figura 1.2: Exemplos de colapsos estruturais surgidos por esforços de punção.....	3
Figura 1.3: Perfil “I” utilizado como armadura de cisalhamento (TRAUTWEIN, 2006).....	6
Figura 1.4: Lajes cortadas ao meio após a ruptura nos ensaios (TRAUTWEIN, 2006)..	8
Figura 2.1: Inclinação da superfície de ruptura	11
Figura 2.2: Armaduras de cisalhamento do tipo estribos e barra dobrada (FERREIRA, 2010).....	15
Figura 2.3: Arranjos para a distribuição das armaduras de cisalhamento (FERREIRA, 2010).....	16
Figura 2.4: Superfície crítica para o modelo de cálculo.....	18
Figura 2.5: Perímetro crítico em pilares internos.....	19
Figura 2.6: $dF = \tau dA$	19
Figura 2.7: Força infinitesimal na seção crítica.....	20
Figura 2.8: Tensão de cisalhamento (τ_{sd}) no contorno C’ para pilar com carregamento assimétrico.....	21
Figura 2.9: Comprimentos infinitesimais das coordenadas retangulares e polar, associadas ao comprimento infinitesimal na direção do perímetro.....	23
Figura 2.10: Comprimento infinitesimal da coordenada polar associado ao comprimento infinitesimal na direção do perímetro.....	24
Figura 2.11: Perímetro crítico em pilares de borda.....	26
Figura 2.12: Perímetro crítico em pilares de canto.....	27

Figura 2.13: Altura útil no caso de capitel.	28
Figura 2.14: Disposição da armadura de punção em planta.	32
Figura 2.15: Disposição da armadura de punção em corte.	32
Figura 2.16: Armadura de punção tipo pino (FIGUEIREDO FILHO, 1989 <i>apud</i> FERREIRA, 2005).	33
Figura 3.1: Elipse centrada na origem.	34
Figura 3.2: Coordenadas u e v.	42
Figura 4.1a: Seção retangular.	49
Figura 4.1b: Seção triangular.	49
Figura 4.1c: Seção retangular com um furo.	50
Figura 4.2a: Seções genéricas (arbitrárias).	51
Figura 4.2b: Malhas de elementos finitos das seções arbitrárias.	52
Figura 4.3. Seção elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm.	54
Figura 4.4: Esquema da seção semi-elíptica.	59
Figura 4.5: Diagrama de deformações no Domínio 1.	60
Figura 4.6: Diagramas de deformações no Domínio 2, Domínio 3, Domínio 4 e Domínio 4a.	61
Figura 4.7: Diagrama de deformações no Domínio 5.	63
Figura 4.8: Curva de interação da seção semi-elíptica.	65
Figura 4.9: Laje lisa com pilar central de seção semi-elíptica.	66
Figura 4.10: Laje lisa com pilar central de seção elíptica.	68
Figura 4.11: Disposição dos conectores (cm).	70

Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Valores de K.	22
Tabela 4.1a: Seção Retangular com 3 elementos finitos.	49
Tabela 4.1b: Seção Triangular com 3 elementos finitos.	49
Tabela 4.1c: Seção Retangular com um furo com 48 elementos finitos.	50
Tabela 4.1d: Seção Retangular com furo com 193 elementos finitos.	50
Tabela 4.2a: Caso 1 (Malha com 586 elementos).	52
Tabela 4.2b: Caso 2 (Malha com 120 elementos)	53
Tabela 4.2c: Caso 3 (Malha com 486 elementos).	53
Tabela 4.2d: Caso 4 (Malha com 608 elementos).	53
Tabela 4.3: Seção elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm	54
Tabela 4.4: Perímetro da Seção elíptica para $a=3$ e $b=2$	54
Tabela 4.5: Perímetro da seção elíptica para $a=10$ cm e $b= 8$ cm (cm).....	55
Tabela 4.6. Área da seção elíptica para $a=10$ cm e $b= 8$ cm (cm^2).	55
Tabela 4.7: Área da seção semi-elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm (cm^2).	56
Tabela 4.8: Perímetro da seção semi-elíptica para $a=10$ cm e $b=8$ cm (cm).....	56
Tabela 4.9: Módulo de Resistência Plástico da seção elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm (cm^2).	57
Tabela 4.10: Centróide da seção semi-elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm (cm).....	58

Lista de Siglas

D.Sc	Doutor em Ciências
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFSJ	Universidade Federal de São João Del Rei
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PROPEC	Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
NBR	Norma Brasileira
CEB MC	Código Modelo do Comitê Euro-Internacional do Concreto
ACI	American Concrete Institute
MC	Model Code – FIP (Federação Internacional da Protenção)
REBAP	Regulamento de Estruturas de Concreto Armado e Protendido
BBK	Boverkerkets handbok om Betangkonstruktioner (sueco)
BS	British Standards (inglês)
CSA	Canadian Standards Associations (ingês)
DIN	Deutsches Institut für Normung (alemão)
NS	Norwegian Standard (inglês)
SIA	Société suisse des Ingénieurs et des Architectes (francês)
MEF	Método dos Elementos Finitos
MPE	Método dos Pórticos Equivalentes

Lista de Símbolos

d	altura útil da laje
f_{ck}	Tensão de compressão característica do concreto
ρ	Taxa de armadura de flexão tracionada
A_s	Armadura de flexão tracionada
S_0	Distância da primeira camada de armadura de cisalhamento até a face do pilar
S_r	Espaçamento entre as camadas de armadura de cisalhamento
C	Primeira superfície crítica
C'	Segunda superfície crítica
C''	Terceira superfície crítica
τ_{sd}	Tensão de cisalhamento solicitante
τ	Tensão de cisalhamento
d_x	Altura útil da laje na direção x
d_y	Altura útil da laje na direção y
u	Perímetro crítico
F_{sd}	Força ou reação concentrada de cálculo
e_x	Excentricidade em x
e_y	Excentricidade em y
W_p	Módulo de Resistência Plástico
M_{sd}	Momento solicitante de cálculo
K	Coefficiente que fornece a parcela de M_{sd} transmitida ao pilar por cisalhamento
C_1	Dimensão do pilar paralela à excentricidade da força
C_2	Dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força
u^*	Perímetro crítico reduzido
M_u^*	Momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido u^* em relação ao centro do pilar
C'_1 e C'_2	Contorno crítico para o caso de lajes com capitel
d_c	Altura útil da laje na face do pilar (laje com capitel)

d_a	Altura útil da laje no contorno C_1' (laje com capitel)
l_c	Distância entre a borda do capitel e a face do pilar
τ_{Rd2}	Tensão resistente do concreto sob compressão diagonal
f_{cd}	Resistência de cálculo do concreto à compressão cilíndrica
α_v	Fator de correção da resistência do concreto
τ_{Rd1}	Tensão resistente para trechos sem armadura de punção
τ_{Rd3}	Tensão resistente para trechos com armadura de punção
A_{sw}	Área da armadura de punção
α	Ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje
f_{ywd}	Resistência de cálculo da armadura de punção
a	Parâmetro da elipse de maior comprimento
b	Parâmetro da elipse de menor comprimento
c	Foco da elipse
S_1	Área correspondente ao primeiro quadrante da elipse
A	Área
e	Excentricidade da elipse
l_T	Perímetro da elipse
\bar{y}	Centroide
J	Jacobiano
$P_1(x)$	Polinômio de interpolação de Newton
w_n	Pesos de Gauss-Legendre
x_n	Pontos de Gauss-Legendre
N	Função de forma
ξ	Coordenada natural Ksi
η	Coordenada natural eta
P_e	Perímetro da seção elíptica
P_{se}	Perímetro da seção semi-elíptica
γ_{con}	Peso específico do concreto

s_c	Carga devido a sobrecarga
p_p	Carga devido ao peso próprio
p_d	Carga total de projeto
l_e	Comprimento efetivo do pilar
ε_c	Deformação no concreto
ε_s	Deformação da armadura
ε_{st}	Deformações das armaduras intermediárias
A_c	Área comprimida
A_{cse}	Área comprimida da seção semi-elíptica
$\varepsilon_{c,inf}$	Deformação específica na face inferior do concreto
i_x	Raio de giração
λ	Esbeltez do pilar
$A_{s,laje}$	Armadura da laje

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A definição segundo a norma ABNT NBR 6118 (2014) para lajes-cogumelo é que estas são lajes apoiadas diretamente em pilares com capitéis, enquanto lajes lisas são lajes apoiadas nos pilares sem capitéis. Neste tipo de sistema estrutural não existem vigas, com as lajes sendo apoiadas diretamente sobre os pilares. A Figura 1.1 mostra alguns dos sistemas para estruturas de concreto.

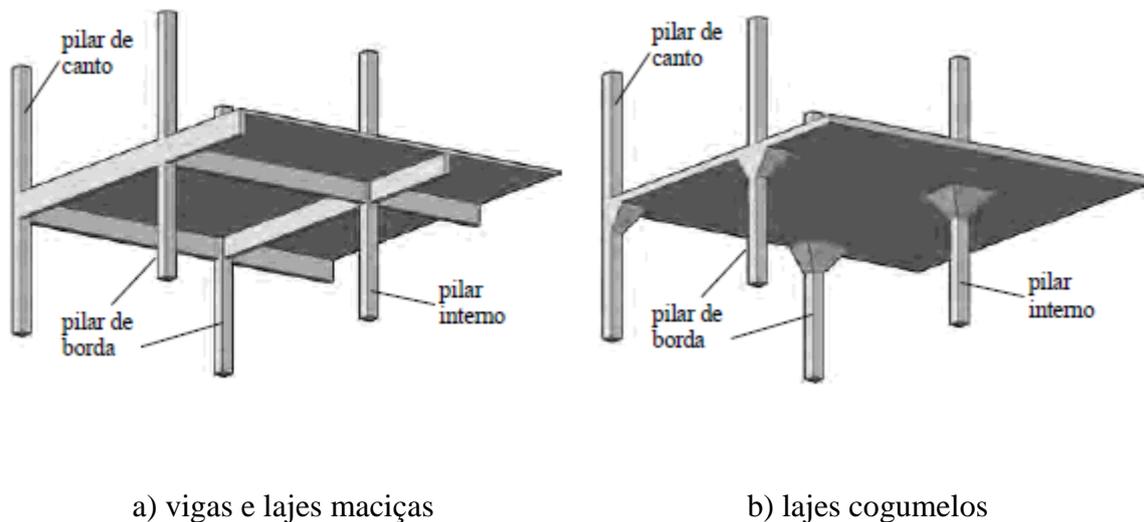
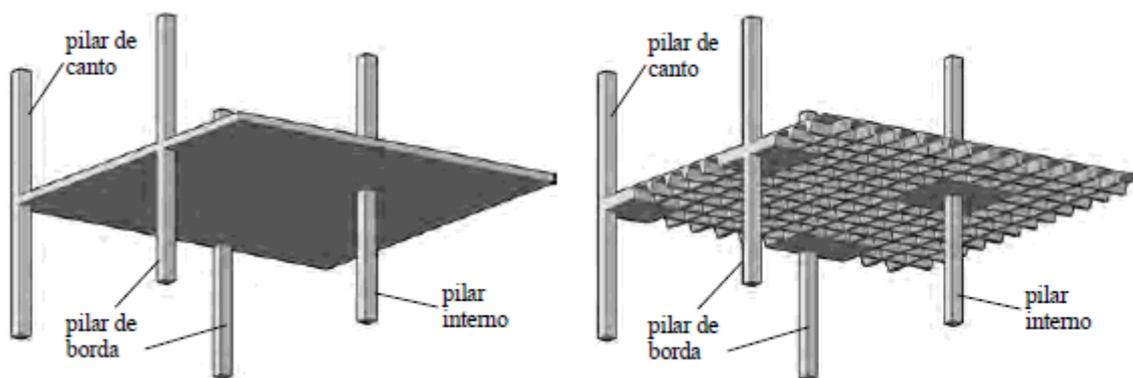


Figura 1.1: Sistemas estruturais para estruturas de concreto (FERREIRA, 2010).



c) lajes lisas

d) lajes lisas nervuradas

Figura 1.1: Sistemas estruturais para estruturas de concreto (FERREIRA, 2010).

O mercado imobiliário tem exigido, para edifícios residenciais e comerciais, os chamados *layouts* flexíveis, onde se permite ao consumidor a possibilidade de dividir internamente o imóvel sem restrições para disposição dos compartimentos, sendo necessário para isto que na fase de projeto seja evitada ao máximo, a ocorrência de pilares e vigas na área interna dos edifícios. Para este propósito as lajes lisas são ideais, pois seu uso permite a eliminação das vigas internas (FERREIRA, 2006).

De acordo com Sacramento, Ferreira, Oliveira *et al.* (2012), as lajes lisas podem ser consideradas como uma boa opção para edifícios de concreto, uma vez que, permitem maior agilidade ao processo construtivo devido à simplificação das formas e armaduras do pavimento, reduzindo custos com mão-de-obra, e, principalmente, por atribuírem maior flexibilidade ao layout dos pavimentos.

Como desvantagem, Damasceno (2007) diz que os sistemas estruturais com lajes lisas, enfrentam um problema que diz respeito à estabilidade global da estrutura, principalmente em se tratando da sua suscetibilidade à carga horizontal, onde a estabilização lateral é essencial. A ausência de vigas torna a edificação, evidentemente, menos rígida alterando a estabilidade da mesma. Esta estabilidade perante a ação dos ventos diminui, pois a parcela de contribuição das vigas para o contraventamento deixa de existir. Entretanto, podem ser tomadas algumas medidas para assegurar certa rigidez à estrutura como, por exemplo: vigas de bordo contornando todo o perímetro da edificação; áreas reservadas aos poços de elevadores e/ou escadas sendo constituídas

por estruturas inteiramente monolíticas e a disposição dos pilares também confere à estrutura uma maior ou menor rigidez.

Paiva, Ferreira, Oliveira *et al.* (2015) explica que o dimensionamento de pavimentos com lajes lisas envolve a verificação da resistência à punção da ligação laje-pilar. Esta é uma etapa fundamental do projeto, uma vez que, a estrutura pode atingir o estado limite último devido ao esgotamento da capacidade resistente ao cisalhamento nos contornos da ligação laje-pilar, em um modo de ruptura denominado de punção. A punção pode levar a estrutura à ruína através do colapso progressivo.

A punção é um tipo de ruína que pode ocorrer quando forças concentradas, ou atuando em pequenas áreas, são aplicadas diretamente nas lajes, causando a sua perfuração. Nas lajes lisas, esta situação é típica na região da ligação laje-pilar (MELGES, 2001).

Segundo Melo (1990), o primeiro acidente registrado de ruptura por punção ocorreu em Indianópolis, nos Estados Unidos, em 1911, onde as lajes se desligaram completamente dos pilares, levando o edifício Prest-o-Lite ao colapso. Outros casos de acidentes estruturais devido à ruptura por punção têm sido registrados, como por exemplo, o colapso por puncionamento em um edifício de 16 pavimentos, em 1971, situado na Avenida Commonwealth, Boston - Massachusetts, Estados Unidos (Figura 1.2a); o colapso parcial do edifício Pipers Row Car Park, localizado na cidade de Wolverhampton na Inglaterra em 1997 (Figura 1.2b).



(a) Edifício de apartamentos em Boston, Massachusetts, Estados Unidos em 1971 (KING, 2004)



(b) Colapso parcial do edifício Pipers Row Car Park, Wolverhampton (WOOD, 1997)

Figura 1.2: Exemplos de colapsos estruturais surgidos por esforços de punção.

A resistência ao cisalhamento é um fator importante no dimensionamento de lajes lisas, sendo um fator determinante para a escolha da espessura da laje, da geometria dos pilares, da resistência à compressão do concreto, ou a utilização de armadura de cisalhamento.

Na ausência de uma teoria capaz de explicar e prever com precisão o mecanismo de ruptura por punção, em função das diversas variáveis envolvidas, o dimensionamento de lajes lisas é feito seguindo recomendações de normas de projeto (PAIVA, 2015). A ABNT NBR 6118 (2014) assume uma tensão resistente ao cisalhamento constante ao longo de um perímetro de controle, sendo esta tensão normalmente estimada como uma função de parâmetros como a altura útil da laje, taxa de armadura, resistência à compressão do concreto, geometria e dimensões do pilar.

1.2 Objetivos da pesquisa

1.2.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo realizar o dimensionamento de duas lajes lisas de concreto armado, uma apoiada em um pilar com seção transversal elíptica e outra apoiada em um pilar com seção transversal semi-elíptica, visando realizar um estudo preciso para esse tipo de sistema estrutural. O dimensionamento será realizado seguindo as recomendações feitas pela ABNT NBR 6118 (2014) e ainda será realizada a automatização do processo de dimensionamento a partir da utilização de uma linguagem de programação. Vale ressaltar que não há nenhuma recomendação na ABNT NBR 6118 (2014) para pilares com seções transversais elípticas e semi-elípticas, ou seja, só existem curvas de interação correspondentes a seções transversais quadradas, retangulares e circulares. O efeito da punção é um fator importante no dimensionamento desse tipo de estrutura, assim como a espessura da laje, a geometria dos pilares, o uso de armadura de cisalhamento, dentre outros.

1.2.2 Objetivos específicos

- Apresentar os principais fatores que influenciam o efeito da punção, bem como, os principais tipos de armadura de combate à mesma;
- Apresentar o método de cálculo adotado pela ABNT NBR 6118 (2014);
- Apresentar as características geométricas da seção transversal elíptica e semi-elíptica;
- Obtenção das características geométricas da seção transversal através de métodos numéricos;
- Comparar alguns resultados numéricos obtidos com a solução analítica da seção transversal elíptica e semi-elíptica.
- Construir a curva de interação do pilar de seção semi-elíptica.
- Realizar o dimensionamento à punção através das recomendações feitas pela ABNT NBR 6118 (2014).

1.3 Estado da Arte

Neste tópico é apresentado um breve relato do desenvolvimento histórico do sistema de lajes lisas, com detalhes de alguns ensaios realizados em laboratório, os quais buscavam analisar a viabilidade e segurança deste sistema. Os resultados de diversas pesquisas são utilizados para descrever os parâmetros que influenciam na resistência à punção de lajes lisas de concreto armado.

Em 1980, Ghali & Megally *apud* Rabello (2010), realizaram ensaios em quinze lajes quadradas com lados iguais a 1900 mm, armadas com armadura de punção tipo *stud*. Ghali & Megally (1980) verificaram em seus ensaios que nas lajes com armadura de cisalhamento a ruptura não foi frágil e estas ainda apresentaram uma ductilidade maior do que as lajes sem armadura de cisalhamento.

Regan (1985), menciona a existência de três possibilidades de ruptura da ligação laje-pilar reforçada com armadura de punção: a primeira refere-se a uma superfície de ruptura junto à face do pilar, a segunda na região transversalmente armada, e a terceira além da região armada. Regan (1985) afirma que para uma laje sem armadura de cisalhamento, a superfície de ruptura forma um ângulo de aproximadamente 25° com o plano da laje, com origem na face do pilar, para a situação de carregamento simétrico. A

partir dessa conclusão, Regan (1985) sugeriu que ao se adicionar um elemento de armadura de cisalhamento, posicionado a uma distância que force a mudança da inclinação da superfície de ruptura, haverá um acréscimo para a contribuição do concreto na carga de ruptura. Este acréscimo é moderado até que a inclinação se aproxime de 45° e, a partir desta inclinação, o aumento é bastante significativo.

Fusco (1985) verificou em ensaios experimentais de lajes armadas com conectores tipo pino, que o entrosamento dos agregados ao longo da superfície de ruptura e o efeito de pino da armadura de flexão são elementos essenciais na resistência das lajes ao cisalhamento. Ele menciona ainda que o esquema resistente tipo treliça existe somente na vizinhança da força concentrada.

Gomes (1991), realizou diversos ensaios estudando o efeito da armadura de cisalhamento em lajes de concreto armado submetidas a carregamento simétrico. Para servir como armadura de cisalhamento, foram usados perfis metálicos de seção “I”, cortados com uma espessura “s” de acordo com a área de armadura transversal necessária (Figura 1.3).

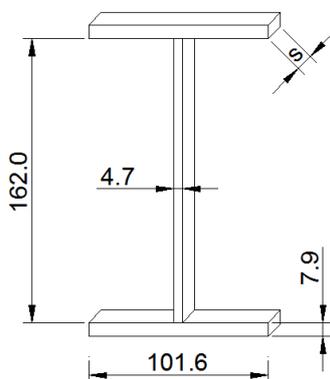


Figura 1.3: Perfil “I” utilizado como armadura de cisalhamento (TRAUTWEIN, 2006).

Em seus ensaios, Gomes (1991) concluiu que usando armadura de punção, pode-se obter um aumento na resistência à punção por vezes maior que 100% em lajes de concreto armado. A forma de distribuição da armadura de cisalhamento é um importante parâmetro e pode limitar a resistência à punção de uma laje, como foi verificado nos ensaios realizados, em que a disposição radial da armadura de cisalhamento proporcionou melhores resultados que a do tipo dupla cruz. Gomes (1991)

recomenda ainda que a distância entre os elementos da armadura de cisalhamento não deve exceder $0,5d$, no qual d é a altura útil da laje.

Melo (1994) apresentou um estudo sobre a importância do uso de uma armadura junto à armadura de flexão inferior na laje, de modo a evitar o colapso progressivo, caso ocorra a ruptura da ligação laje-pilar.

Melges (1995) realizou estudos e ensaios onde propôs que se adicionasse ao critério do CEB CM90 o efeito do momento, atuando perpendicularmente à borda, ao da força nos pilares de borda e canto, com a intenção de evitar erro de equilíbrio.

Cordovil e Fusco (1995) apresentaram ensaios com a finalidade de estudar o comportamento de lajes lisas com armadura de cisalhamento, constituídas por elementos tipo pino com chapas de ancoragem soldadas na extremidade. Comparando-se as lajes com armadura de cisalhamento com as lajes sem armadura de cisalhamento, ocorreu um aumento da resistência à punção de, aproximadamente, 17% para as lajes submetidas a carregamento simétrico e de 54% para as lajes com carregamento excêntrico.

Elgabry e Ghali (1996) realizaram estudos experimentais e numéricos em conjunto relacionados à punção. No primeiro deles são apontados resultados experimentais sobre o uso de conectores tipo pino em ligações laje-pilar, submetidas a um momento fletor desbalanceado. Em seu outro estudo, expõem algumas propostas sobre o assunto para a revisão do ACI 318.

Hallgren (1996) realizou ensaios utilizando concreto de alto desempenho e armadura de cisalhamento com barras dobradas, formando um ângulo aproximado de 33° com a horizontal. Hallgren (1996) observou que todas as lajes com baixas taxas de armadura de flexão e com armadura de cisalhamento tiveram um comportamento mais dúctil antes de alcançar a ruptura. O acréscimo de resistência com a utilização de barras dobradas chegou a 69%. Verificou também a influência das barras dobradas no comportamento pós puncionamento das lajes, que introduziu nas lajes com armadura de cisalhamento uma carga residual em torno de 50% da carga última.

Em 1998, Oliveira realizou vários ensaios em lajes de concreto armado de alta resistência com f_{ck} entre 60 MPa e 66 MPa, submetidas a puncionamento simétrico, com o objetivo de comparar a eficácia de estribos retangulares convencionais com estribos inclinados, que podem ser posicionados após a colocação da armadura de flexão. Oliveira (1998) também apresenta uma comparação entre as tensões cisalhantes

determinadas pelo Método dos Elementos Finitos e algumas normas utilizadas. Seus resultados indicaram que os estribos inclinados tiveram um desempenho significativamente melhor do que os estribos convencionais.

Trautwein (2006) apresentou um estudo experimental e numérico, onde analisava lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento, sem envolver a armadura de flexão. A Figura 1.4 apresenta duas das lajes rompidas por punção nos ensaios.



Figura 1.4: Lajes cortadas ao meio após a ruptura nos ensaios (TRAUTWEIN, 2006).

O principal objetivo dos ensaios efetuados por Trautwein (2006) era investigar a eficiência de se utilizar esse tipo de armadura de cisalhamento sem envolver a armadura de flexão. Todas as lajes romperam por punção, com cargas de ruptura superiores em até 110%, em relação às cargas de ruptura em lajes similares sem armadura de cisalhamento, demonstrando a eficiência da armadura. As simulações numéricas foram realizadas utilizando modelos axissimétricos e tridimensionais, de lajes cogumelo de concreto armado, com o objetivo de reproduzir numericamente alguns resultados obtidos por pesquisadores e documentados na literatura, validando a parte experimental e a modelagem numérica.

Albuquerque (2010) apresentou um estudo experimental de ligação laje lisa/pilar retangular de centro com armadura de cisalhamento tipo *stud*. O objetivo da pesquisa foi verificar a influência dos *studs* no aumento da rigidez da ligação, na alteração do padrão de fissuração, e na forma do cone de ruptura. Albuquerque (2010), realizou comparações entre os resultados experimentais e as prescrições normativas

estabelecidas pela ABNT NBR 6118 e por alguns códigos internacionais de referência, como o ACI 318 e o EUROCODE 2, no qual o EUROCODE 2 forneceu melhores estimativas e a favor da segurança, em relação aos demais códigos avaliados. A NBR 6118 apresentou boas estimativas, enquanto o ACI 318 mostrou-se mais conservador, em parte por ter em sua formulação limitações para a resistência característica do concreto e tensão de escoamento do aço.

Lopes (2012) avaliou experimentalmente as características resistentes ao puncionamento dos cantos de lajes de concreto armado. Lopes, teve como objetivo avaliar a capacidade resistente, não só em termos de esforços máximos, mas também em termos de rigidez à deformação e ainda classificar o tipo de ruptura ocorrido, visto que, foram identificadas rupturas tanto por corte, como por flexão. Os resultados experimentais obtidos, para as cargas e para os perímetros de ruptura, foram comparados com os valores regulamentares recomendados, nomeadamente, segundo o EC2, o MC, o ACI e o REBAP.

Martins (2012) estudou as características resistentes ao puncionamento de bordos de lajes de concreto armado, com o objetivo de avaliar diversos aspectos, nomeadamente ao nível da resistência e da deformação, onde procurou-se conhecer a carga de fissuração, a carga de cedência, a carga máxima e os deslocamentos correspondentes. Martins (2012), ainda avaliou o tipo de ruptura ocorrido com base em três métodos conhecidos e propôs duas metodologias para a identificação do tipo de ruptura. Os resultados experimentais obtidos para as cargas máximas e para os comprimentos dos perímetros de ruptura, foram comparados com os valores regulamentares recomendados pelos diversos códigos, nomeadamente o ACI, o BBK, o BS, o CSA, o DIN, o EC2, o MC 2010, o NS, o REBAP e o SIA.

Silva (2013) apresentou um estudo do comportamento das lajes lisas apoiadas em pilares dispostos irregularmente em planta, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), através do software SAP2000, e o Método dos Pórticos Equivalentes (MPE), procurando estabelecer um termo de comparação entre os métodos e verificar se é plausível a sua aplicação a lajes deste tipo. De acordo com Silva (2013), analisando o comportamento e os resultados obtidos em paralelo com os resultados obtidos pelo MPE, foi possível estabelecer as possibilidades de aplicação do MPE em lajes irregulares num ambiente de projeto.

Albuquerque (2015) apresentou um estudo experimental de ligação laje lisa com pilar quadrado de canto reentrante. O objetivo foi investigar a presença de armadura de cisalhamento disposta radialmente, a taxa de armadura de flexão na região do pilar, e o desbalanceamento dos momentos nas duas direções. Albuquerque (2015) comparou os resultados experimentais obtidos com uma proposição para a determinação das resistências esperadas pelas normas NBR 6118 (2014), Eurocode 2 (2004) e ACI 318 (2014), e pelas recomendações do MC2010 (2013), pois as lajes lisas com pilares reentrantes não são abordadas por estas normas e recomendações. Também foi realizada uma simulação numérica, que emprega o método dos elementos finitos para efetuar análises tridimensionais não lineares em estruturas de concreto armado.

1.4 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, serão apresentados detalhes sobre a ruptura por puncionamento das lajes lisas e os parâmetros que influenciam a resistência da ligação laje-pilar. Serão expostas também as formulações teóricas e recomendações da norma ABNT NBR 6118 (2014).

As características geométricas da seção transversal serão abordadas no Capítulo 3, dentre elas podem-se citar a área, o perímetro, o Módulo de Resistência Plástico de uma seção elíptica, e o centroide e momento de inércia de uma seção semi-elíptica. Neste capítulo também serão descritos os métodos numéricos utilizados para a obtenção das características geométricas, além disso, propõem-se duas equações: uma para calcular o centroide da seção e outra para calcular a área de cada parcela comprimida da seção semi-elíptica.

No Capítulo 4 são apresentadas algumas aplicações, inicialmente mostrando respostas correspondentes às propriedades geométricas das seções, posteriormente a obtenção da curva de interação momento versus normal para a seção transversal semi-elíptica de um pilar de concreto e por fim o dimensionamento de duas lajes lisas.

Os comentários e as conclusões sobre a metodologia apresentada ao longo da dissertação, bem como, algumas sugestões para trabalhos futuros estão presentes no Capítulo 5.

Capítulo 2

Punção em Lajes de Concreto Armado

2.1 Introdução

Define-se por punção a ruptura localizada por corte geralmente em elementos planos devido à presença de cargas concentradas elevadas. Esse tipo de ruptura pode ocorrer principalmente nos encontros entre elementos lineares comprimidos (pilares) com elementos planos (lajes), comuns nos casos de lajes lisas e cogumelo e quando se tem pilares apoiados sobre elementos planos.

A ruptura por punção ocorre por corte localizado. As elevadas tensões de corte (cisalhamento) geram tensões principais de tração em um plano inclinado de aproximadamente 25° e 30° com o plano da laje, rompendo, por falta de armadura adequada, o elemento plano rompendo segundo a forma de um tronco de cone, como mostra a Figura 2.1.

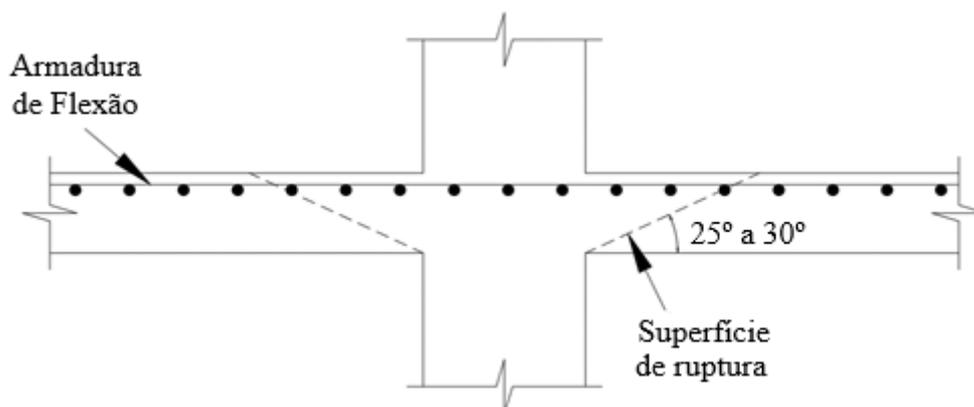


Figura 2.1: Inclinação da superfície de ruptura.

2.2 Parâmetros que Influenciam a Resistência à Punção

Devido à complexidade do fenômeno, há diversos parâmetros que influenciam na resistência à punção. Os principais fatores analisados são: resistência à compressão do concreto; taxa de armadura de flexão tracionada; dimensões e geometria do pilar; size effect- efeito de tamanho e a presença de armadura de cisalhamento. Esses parâmetros mencionados são detalhados nos itens a seguir.

2.2.1 Resistência à Compressão do Concreto

A ruptura por cisalhamento de uma estrutura de concreto sem armadura de combate a tal esforço é governada, dentre outros fatores, pela resistência à tração do concreto. Como para fins de projeto de uma estrutura, o estabelecimento da resistência à compressão é o passo inicial desse processo e as formulações normativas costumam relacionar a resistência à tração do concreto como uma função de sua resistência à compressão. É comum observar que as pesquisas experimentais correlacionam a resistência ao cisalhamento com a resistência à compressão do concreto (FERREIRA, 2010).

Segundo Lima (2012), um dos primeiros a tentar avaliar a influência do concreto na resistência à punção foi Graf (1993), quando o mesmo concluiu que havia uma relação não linear entre o aumento da capacidade da ligação laje-pilar e o aumento da resistência do concreto. Em outro estudo, Moe (1961 *apud* LIMA, 2012) propôs que essa relação poderia ser expressa como uma função proporcional à raiz quadrada da resistência do concreto. Hallgreen (1996) concluiu que em concretos de altas resistências a função proposta por Moe (1961) tende a superestimar a influência da resistência à compressão do concreto na resistência ao cisalhamento do mesmo.

2.2.2 Taxa de Armadura de Flexão Tracionada

A taxa de armadura de flexão tracionada (ρ) é definida como a razão entre a área de armadura de flexão tracionada (A_s) e a área de concreto, que é expressa pelo produto da altura útil da laje (d) por uma largura a ser considerada.

A taxa de armadura de flexão tracionada influencia a resistência à punção, principalmente nos casos de lajes sem armadura de cisalhamento. Segundo Regan (1981), o aumento na taxa de armadura de flexão tem como efeito o aumento da zona comprimida, reduzindo a fissuração na ligação laje-pilar. Além disso, a espessura das fissuras de flexão é reduzida, o que facilita a transferência de forças através do engrenamento de agregados, podendo ainda aumentar o efeito de pino.

2.2.3 Dimensões e Geometria do Pilar

A geometria e as dimensões do pilar também afetam a resistência de uma laje, pois determinam a forma como as tensões se distribuem na ligação laje-pilar. Regan e Braestrup (1985) observaram que a resistência em pilares circulares foi cerca de 15% maior comparado com pilares quadrados com área equivalente. A menor resistência em pilares quadrados é explicada pelo fato desses pilares apresentarem uma concentração de tensões nos cantos.

De acordo com Melges (2001) para pilares alongados, onde a relação entre o lado maior e o lado menor é superior a 2 (dois), a ruína é mais abrupta, o tamanho do cone de punção é menor e a resistência da ligação também é menor, quando comparados com pilares de seções quadradas. Isto também se deve ao fato de que as tensões se concentram nos cantos e nos menores lados do pilar.

2.2.4 Size Effect – Efeito de Tamanho

De acordo com Fusco (1984, *apud* Melges, 2001) a influência do efeito de tamanho geralmente é dada em função da altura útil da laje. Este efeito refere-se ao fato de que, em igualdade de outras condições, as lajes de menor altura útil são mais resistentes que as lajes mais espessas. Este fato é, em princípio, justificável pela possibilidade de maior heterogeneidade do concreto das lajes mais espessas. Além disso, mesmo com uma mesma taxa de armadura longitudinal, nas lajes de maior espessura, a armadura de tração é menos eficiente no controle da abertura das fissuras ao longo de toda a altura da seção fissurada. Deste modo, a espessura da peça condiciona o engrenamento dos agregados, fazendo com que a altura útil também seja um fator que controla a resistência das lajes ao cisalhamento. Resultados experimentais mostram, no entanto,

que a partir de uma determinada espessura, a influência da variação da altura útil deixa de ser significativa. Essa limitação da influência da espessura a um determinado valor decorre de um efeito de escala entre a altura útil da peça e o diâmetro máximo dos agregados empregados na fabricação do concreto.

2.2.5 Presença de Armaduras de Cisalhamento

No momento do dimensionamento de uma ligação laje-pilar, caso seja verificado que esta ligação não atende a segurança quanto à punção, sua resistência pode ser elevada adotando-se algumas medidas, como o aumento da seção do pilar, da espessura da laje, da taxa de armadura de flexão, ou da resistência à compressão do concreto. Porém, pilares com maiores dimensões costumam ser problemáticos do ponto de vista arquitetônico. Já o aumento da espessura da laje significaria uma elevação significativa dos custos, tanto da estrutura quanto das fundações. Finalmente, tanto o aumento da taxa de armadura de flexão quanto o da resistência à compressão do concreto seriam pouco efetivos, tornando-os por si só muitas vezes inviável. Assim, quando se deseja aumentar a resistência à punção, a melhor solução é através da utilização de armaduras de cisalhamento (FERREIRA, 2010).

Diversos tipos de armadura de cisalhamento já foram testados quanto à sua eficiência técnica e construtiva. As primeiras armaduras testadas no combate à punção foram barras dobradas (Figura 2.2a). Estribos também podem ser utilizados como armadura de cisalhamento em lajes, sendo os tipos mais comuns os estribos fechados (Figura 2.2b), estribos abertos (Figura 2.2c), estribos tipo “pente” (Figura 2.2d) e estribos inclinados (Figura 2.2e). Os estribos fechados e estribos do tipo “pente” podem ser de difícil colocação, interferindo na armadura de flexão e na armadura dos pilares, ao passo que, estribos abertos com pernas simples tendem a apresentar problemas de ancoragem, mesmo que sejam usadas barras horizontais. Apenas os estribos inclinados mostraram-se eficientes no combate à punção, sendo, no entanto, pouco utilizados por questões construtivas. As armaduras do tipo pino, ilustradas nas Figuras 2.2f e 2.2g, são também bastante eficientes no combate à punção, sendo o tipo de armadura de cisalhamento mais popular para lajes devido ao fato de serem industrializadas e fornecidas por empresas especializadas, ou seja, não necessitando de serem confeccionadas nos canteiros de obras. Outra vantagem desse tipo de armadura de

cisalhamento consiste no fato de ser a mais fácil de garantir o correto espaçamento entre as diferentes camadas de armadura, uma vez que, os pinos são fixados em guias de aço (LIMA, 2012).

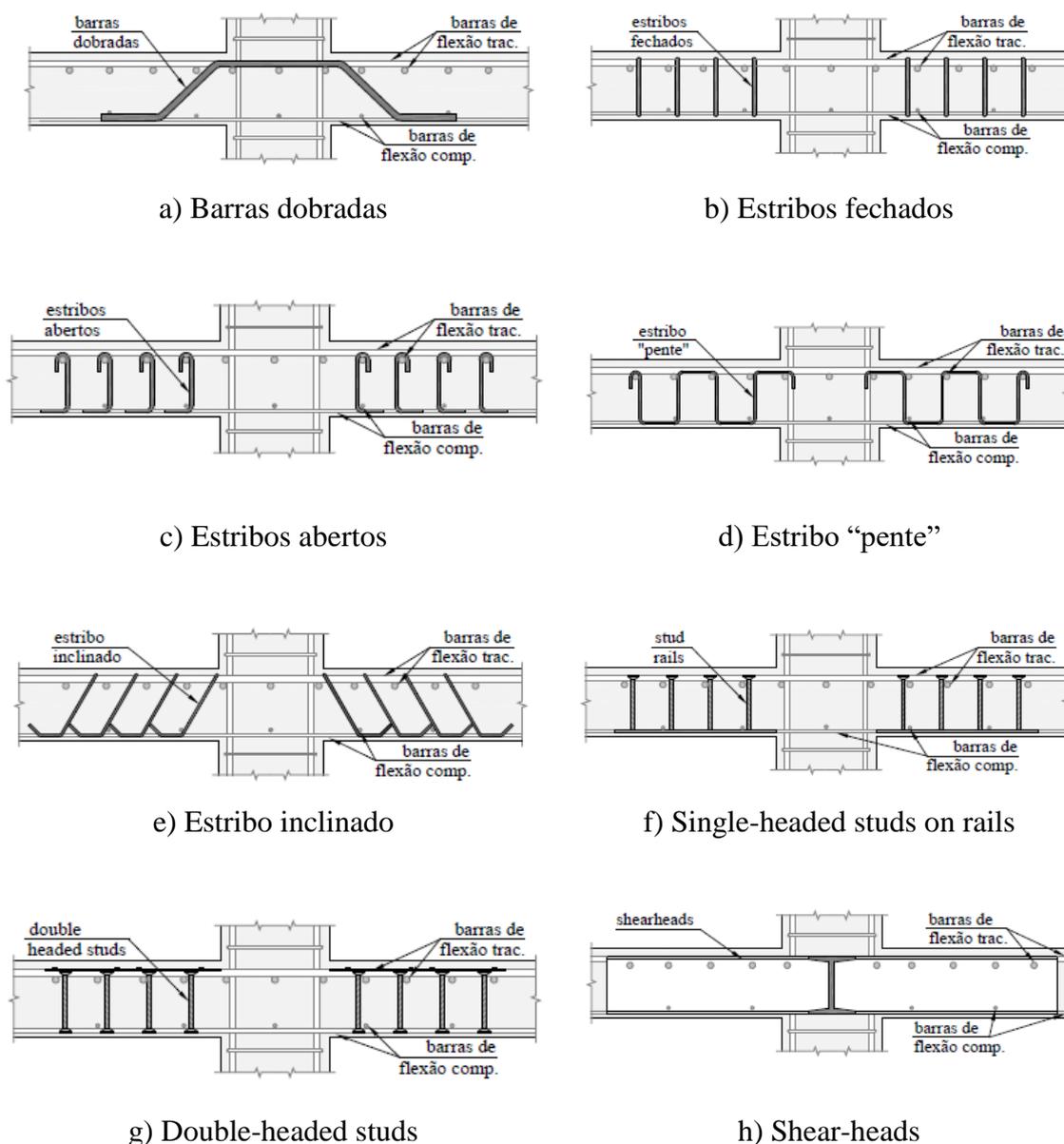
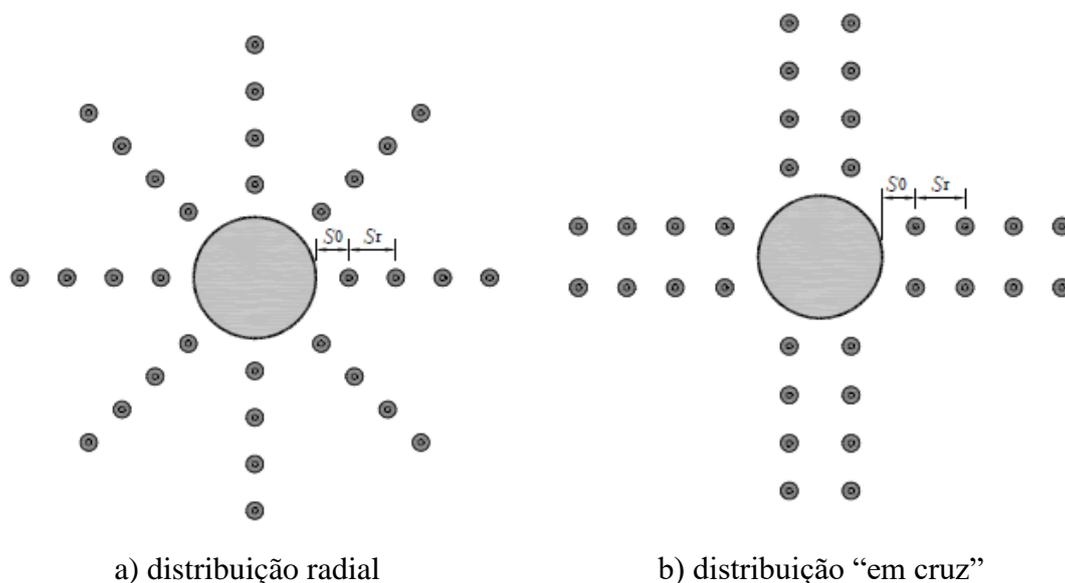


Figura 2.2: Armaduras de cisalhamento do tipo estribos e barra dobrada (FERREIRA, 2010).

Além do tipo de armadura de cisalhamento, a quantidade e o arranjo adotado para a distribuição das armaduras influencia a resistência à punção de lajes lisas. De acordo com Ferreira (2010) o arranjo ideal seria o radial (Figura 2.3a) onde as armaduras de

cisalhamento são distribuídas igualmente em torno da superfície de ruptura. Por questões construtivas muitas vezes é mais simples concentrar as armaduras de cisalhamento em faixas ortogonais, em um arranjo “em cruz”, conforme pode ser observado na Figura 2.3b.



a) distribuição radial

b) distribuição “em cruz”

Figura 2.3: Arranjos para a distribuição das armaduras de cisalhamento (FERREIRA, 2010).

Outros parâmetros importantes para a distribuição das armaduras de cisalhamentos são: a distância da primeira camada de armadura de cisalhamento até a face do pilar (S_0) e o espaçamento entre as camadas de armadura de cisalhamento (S_r). Limitações impostas a esses parâmetros são importantes, pois a resistência ao cisalhamento em lajes lisas de concreto armado com armadura de cisalhamento, rompendo dentro da região das armaduras, depende significativamente do número de barras cruzadas pela superfície de ruptura. No caso da primeira camada (S_0), a ABNT NBR 6118 (2014) recomenda que seu comprimento seja, no máximo, $0,5d$. No que se refere ao espaçamento entre as camadas (S_r), estas mesmas normas recomendam uma distância máxima de $0,75d$.

2.3 Prescrições da ABNT NBR 6118 (2014)

A seguir são apresentados os fundamentos da verificação da punção segundo as prescrições normativas da ABNT NBR 6118 (2014).

2.3.1 Método de Cálculo

O método mais conhecido e desenvolvido para verificar a resistência de uma ligação laje-pilar com relação à punção é o da superfície de controle, adotado pela ABNT NBR 6118 (2014). A sua vantagem em relação aos demais é a sua generalização, pois pode ser aplicada em qualquer configuração de pilar (RABELLO, 2016).

O modelo de cálculo de punção em lajes corresponde à verificação do cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas (depende da presença de armadura específica para punção) definidas no entorno de forças concentradas.

A primeira superfície crítica (contorno C) é definida no entorno do pilar ou da carga concentrada. Nessa região as tensões de compressão devidas à carga transmitida pelo pilar são predominantes, devendo essa seção crítica ser verificada indiretamente quanto à tensão de compressão diagonal do concreto, através da tensão de cisalhamento. Essa verificação deve ser feita em lajes com ou sem armadura.

A segunda superfície crítica (contorno C') é afastada $2d$ do pilar ou da carga concentrada. Nessa região há uma diminuição da influência das tensões de compressão devida à carga transmitida pelo pilar, há também um aumento da influência da força cisalhante e por consequência das tensões principais de tração. Assim, esta superfície crítica deve ser verificada à punção, a qual está associada à tração diagonal do concreto. Caso haja necessidade, essa ligação deve ser reforçada por armadura transversal.

A terceira superfície crítica (contorno C'') apenas deve ser verificada quando for necessário colocar armadura transversal. Essa verificação é semelhante à situação da segunda superfície crítica, admitindo uma superfície de ruptura mais longe do ponto da aplicação da carga concentrada.

A Figura 2.4 apresenta as superfícies críticas de acordo com o modelo da superfície de controle, adotado pela ABNT NBR 6118: 2014.

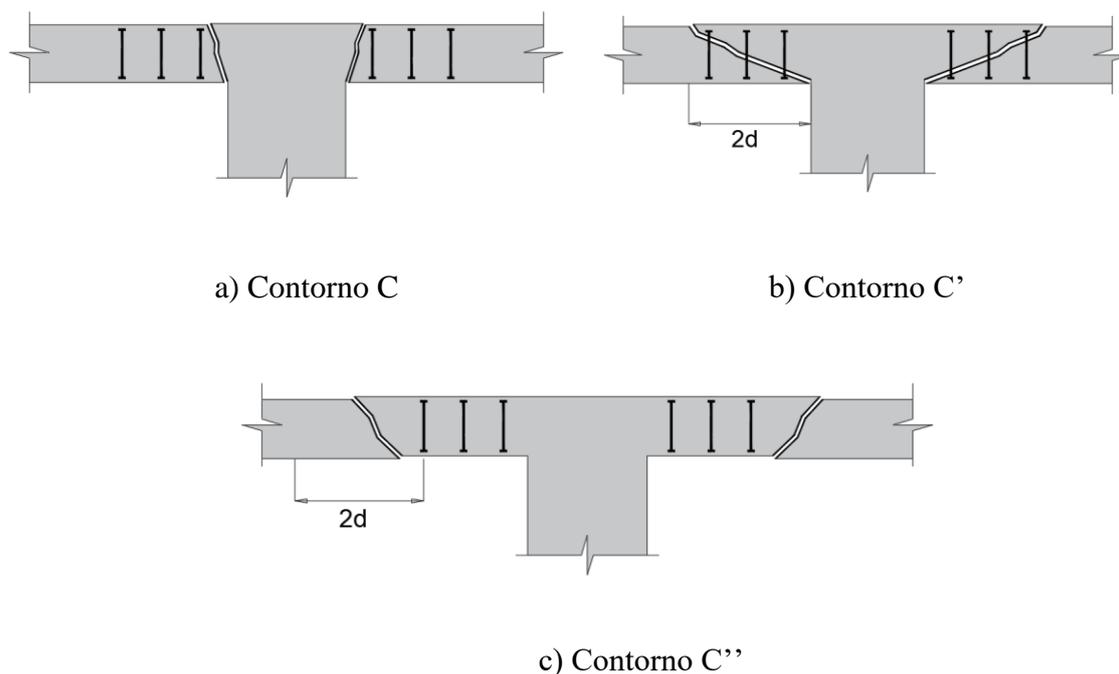


Figura 2.4: Superfície crítica para o modelo de cálculo.

2.3.2 Tensão Solicitante na Superfície Crítica

Para o cálculo das tensões solicitantes na superfície crítica, devem ser considerados a posição dos pilares na estrutura, o tipo de carregamento e a geometria dos pilares.

2.3.2.1 Pilar Interno com Carregamento Simétrico

A Figura 2.5 apresenta as possíveis formas de se obter o perímetro da superfície crítica, para verificação da punção de pilares internos em lajes lisas. Se o carregamento nos pilares internos for simétrico, a influência de flexão nos pilares pode ser desprezada, ou seja, a tensão de cisalhamento (τ_{sd}) que atua no contorno C' tem distribuição uniforme, como mostra a Figura 2.6.

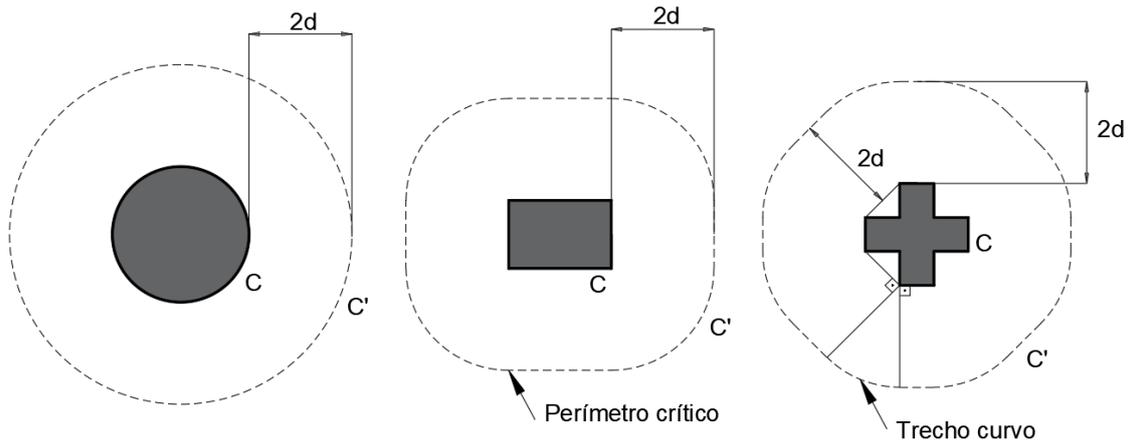


Figura 2.5: Perímetro crítico em pilares internos.

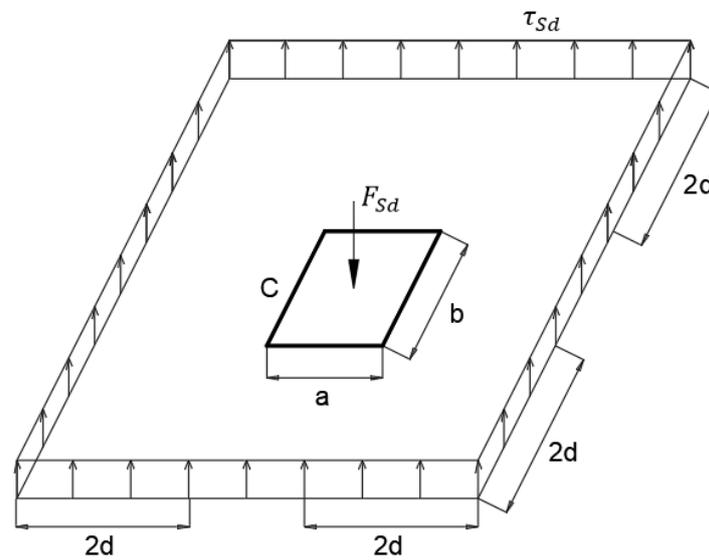


Figura 2.6: $dF = \tau dA$.

A Figura 2.7 representa a força resultante que atua num elemento de área infinitesimal ao longo do perímetro crítico.

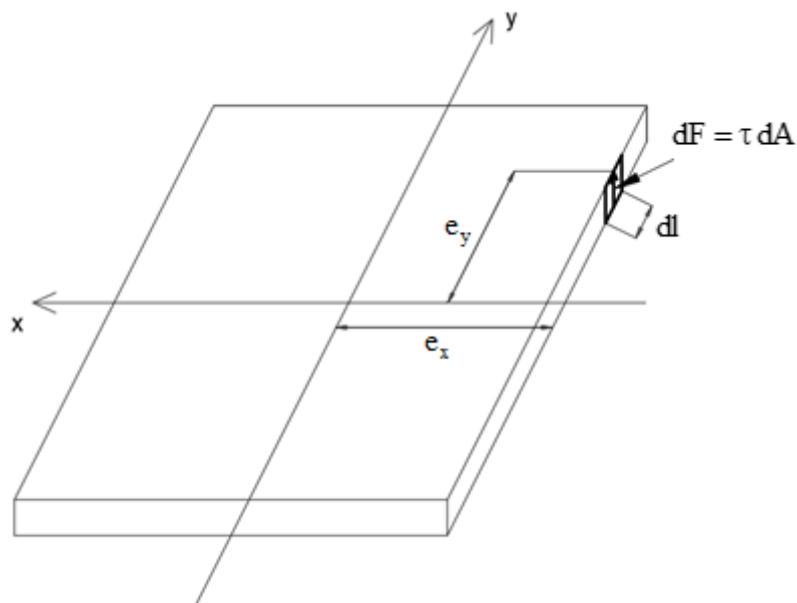


Figura 2.7: Força infinitesimal na seção crítica.

Tomando-se o equilíbrio de forças verticais, tem-se:

$$dF = \tau dA \quad (2.1a)$$

$$F = \oint \tau dl \quad (2.1b)$$

$$F = \tau d u \quad (2.1c)$$

Da equação (2.1c) chega-se à expressão da tensão de cisalhamento atuante no perímetro crítico, dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u d} \quad (2.2)$$

onde:

$d = \frac{d_x + d_y}{2}$ é a altura útil média da laje no contorno C';

d_x e d_y são as alturas úteis da laje nas direções x e y;

u é o perímetro do contorno C';

F_{sd} é a força ou reação concentrada de cálculo.

A força de punção F_{sd} pode ser reduzida da força distribuída aplicada na face oposta da laje, dentro do contorno considerado na verificação C ou C'.

2.3.2.2 Pilar Interno com Efeito de Momento

No caso em que, além de forças verticais, existe transferência de momento da laje para o pilar, o efeito da assimetria deve ser considerado e a tensão de cisalhamento (τ_{sd}), que atua no contorno C' , não mais terá distribuição uniforme (Figura 2.8). No entanto, a ruptura por punção devido ao momento na ligação pilar-laje acontece com distribuição uniforme de tensão de cisalhamento no perímetro crítico.

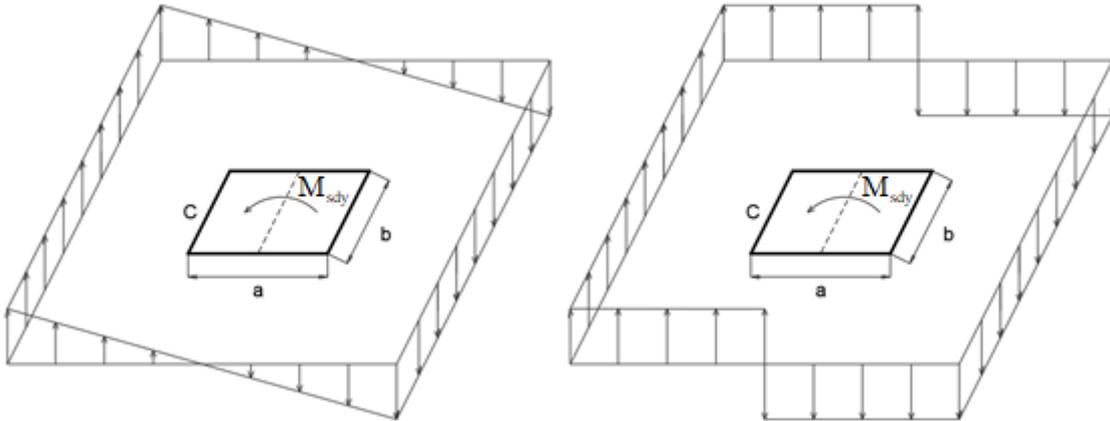


Figura 2.8: Tensão de cisalhamento (τ_{sd}) no contorno C' para pilar com carregamento assimétrico.

Das Figuras 2.7 e 2.8 pode-se determinar a parcela da tensão de cisalhamento devida ao momento em relação ao eixo y . Tomando o equilíbrio de momento em torno do eixo y , tem-se:

$$dM_y = dF e_x \quad (2.3a)$$

$$dM_y = \tau dA e_x \quad (2.3b)$$

$$M_y = \oint \tau d l e_x \quad (2.3c)$$

$$M_y = \tau d \oint e_x d l \quad (2.3d)$$

$$W_p = \oint e_x d l \quad (2.3e)$$

Sendo W_p o módulo de resistência plástico no contorno C' , logo tem-se:

$$M_y = \tau d W_p \quad (2.4)$$

Da equação (2.4) chega-se à expressão da tensão de cisalhamento atuante no perímetro crítico devido ao momento em torno do eixo y, dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{M_{sd_y}}{W_p d} \quad (2.5)$$

De forma análoga pode-se obter a expressão da tensão de cisalhamento atuante no perímetro crítico devido ao momento em torno do eixo x, dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{M_{sd_x}}{W_p d} \quad (2.6)$$

A tensão de cisalhamento atuante no perímetro crítico devido aos momentos e à força axial, pode ser determinada considerando o princípio da superposição dos efeitos, logo:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u d} + \frac{K_y M_{sd_y}}{W_{py} d} + \frac{K_x M_{sd_x}}{W_{px} d} \quad (2.7)$$

onde K é o coeficiente que fornece a parcela de M_{sd} transmitida ao pilar por cisalhamento. Esse coeficiente depende da relação entre C_1 e C_2 como mostra a Tabela 2.1. Pela tabela, verifica-se que esse coeficiente (K) é diferente para os momentos atuantes em eixos distintos.

Tabela 2.1: Valores de K

C_1/C_2	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80

onde:

C_1 é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;

C_2 é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.

2.3.2.3 Valores do Módulo de Resistência Plástico (W_p)

a) Pilar Retangular

Na Figura 2.9 apresentam-se os comprimentos infinitesimais das coordenadas retangulares (dx e dy) e polar ($d\theta$), associadas ao comprimento infinitesimal na direção do perímetro (dl).

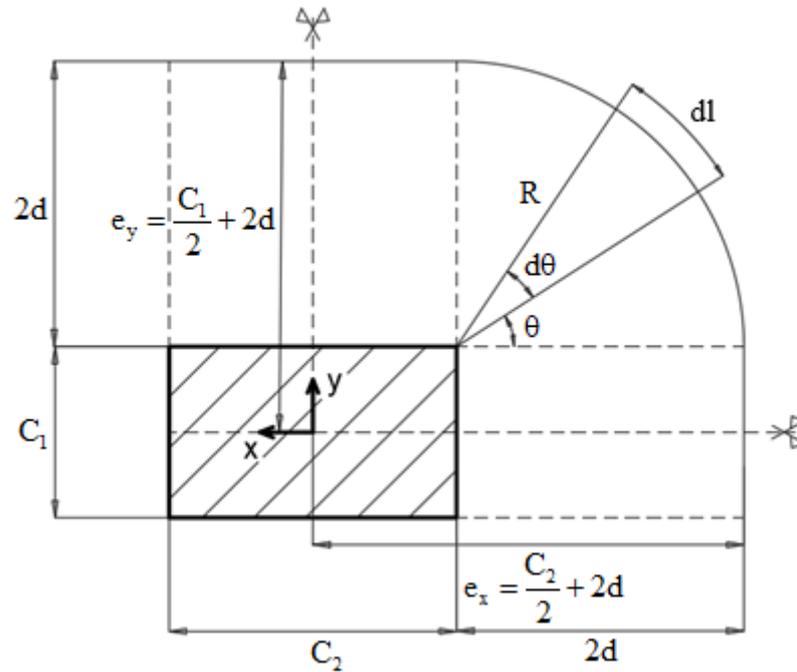


Figura 2.9: Comprimentos infinitesimais das coordenadas retangulares e polar, associadas ao comprimento infinitesimal na direção do perímetro.

Considerando a dupla simetria do perímetro crítico para o pilar de seção transversal retangular e momento em torno do eixo x , tem-se:

$$W_{px} = \oint e_y dl \quad (2.8a)$$

$$W_{px} = 4 \left[\int_0^{C_2/2} y dy + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{C_1}{2} + R \sin\theta \right) dl + \int_0^{C_2/2} \left(2d + \frac{C_1}{2} \right) dl \right] \quad (2.8b)$$

Sendo $R = 2d$, $dl = R d\theta = 2d d\theta$ e na terceira parcela $dl = dx$, logo:

$$W_{px} = 4 \left[\int_0^{c_1/2} y dy + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{C_1}{2} + 2d \sin\theta \right) 2d d\theta + \int_0^{c_2/2} \left(2d + \frac{C_1}{2} \right) dx \right] \quad (2.9)$$

Desenvolvendo-se a expressão, chega-se a:

$$W_{px} = \frac{C_1^2}{2} + 2\pi d C_1 + 16d^2 + 4d C_2 + C_1 C_2 \quad (2.10)$$

Analogamente para o momento em torno do eixo y, tem-se:

$$W_{py} = \frac{C_2^2}{2} + 2\pi d C_2 + 16d^2 + 4d C_1 + C_1 C_2 \quad (2.11)$$

b) Pilar Circular

Na Figura 2.10 apresenta-se o comprimento infinitesimal da coordenada polar ($d\theta$), associada ao comprimento infinitesimal na direção do perímetro (dl).

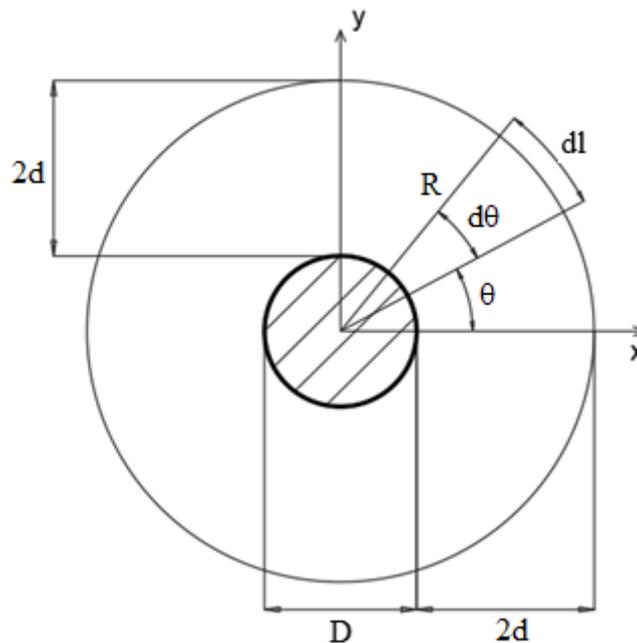


Figura 2.10: Comprimento infinitesimal da coordenada polar associado ao comprimento infinitesimal na direção do perímetro.

Considerando-se a dupla simetria do perímetro crítico para o pilar de seção transversal circular e considerando momento em torno do eixo x ou y, tem-se:

$$W_p = \oint e_x dl \quad (2.12a)$$

$$W_{px} = 4 \left[\int_0^{\pi/2} \left(\frac{D}{2} + 2d \right) \sin\theta \left(\frac{D}{2} + 2d \right) d\theta \right] \quad (2.12b)$$

Desenvolvendo-se, chega-se a:

$$W_p = (D + 4d)^2 \quad (2.13)$$

em que D é o diâmetro do pilar e d é a altura útil da laje.

c) Pilar de seção Transversal Qualquer

Para um pilar de seção transversal qualquer o procedimento de cálculo segue de forma semelhante ao descrito para seções retangulares e circulares. De forma a simplificar a integral de linha ao longo do perímetro crítico para um pilar de seção transversal qualquer, pode-se, a favor da segurança, desprezar os trechos curvos do perímetro.

2.3.2.4 Pilar de Borda

A Figura 2.11 ilustra o perímetro crítico para um pilar retangular de borda. Observa-se pela Figura 2.11, um perímetro crítico reduzido que leva em consideração a presença de uma borda livre da seção crítica para o efeito de punção. Esse perímetro crítico reduzido deve ser considerado para o momento em relação ao eixo y (momento que flexiona o pilar num plano perpendicular à borda livre). Para o momento em relação ao eixo x adota-se o perímetro crítico não reduzido.

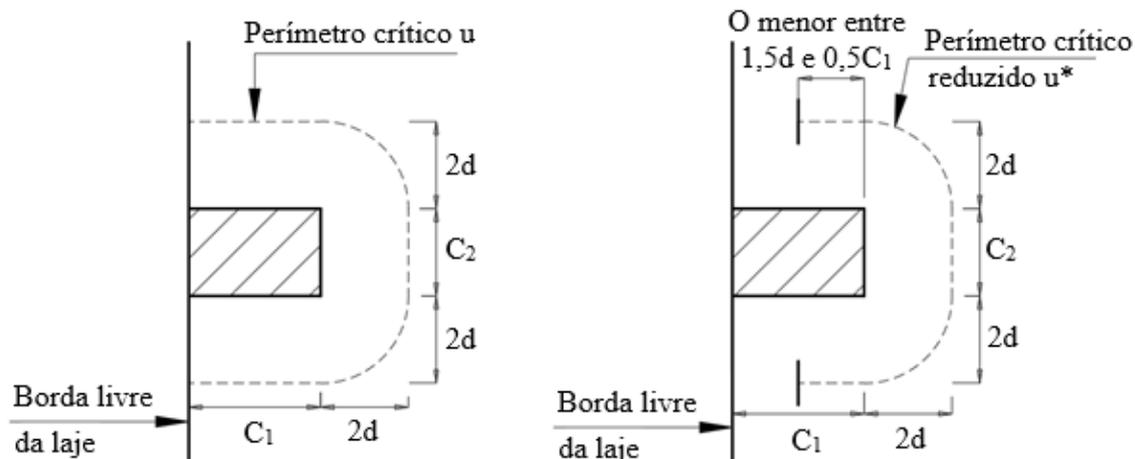


Figura 2.11: Perímetro crítico em pilares de borda.

A tensão de cisalhamento atuante no perímetro crítico devido aos momentos e à força axial, pode ser determinada considerando o princípio da superposição dos efeitos, logo:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u^* d} + \frac{K_y M_y^*}{W_{py} d} + \frac{K_x M_{Sd_x}}{W_{px} d} \quad (2.14)$$

sendo:

$$M_y^* = (M_{Sd_y} - M_{uy}^*) \geq 0 \quad (2.15)$$

onde:

F_{Sd} é a reação do apoio;

u^* é o perímetro crítico reduzido;

M_{Sd_y} é o momento de cálculo no plano perpendicular à borda livre (momento em torno do eixo y);

M_{Sd_x} é o momento de cálculo no plano paralelo à borda livre (momento em torno do eixo x);

M_{uy}^* é o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido u^* em relação ao centro do pilar;

W_{px} e W_{py} são os módulos de resistência plástica nas direções x e y, ambos calculados para o perímetro u .

2.3.2.5 Pilar de Canto

A Figura 2.12 apresenta o perímetro crítico para um pilar retangular de canto. Pela Figura 2.12, o perímetro crítico leva em consideração a presença de duas bordas livres da seção crítica para o efeito da punção. Esse perímetro crítico reduzido deve ser considerado para ambos momentos, em relação aos eixos x e y.

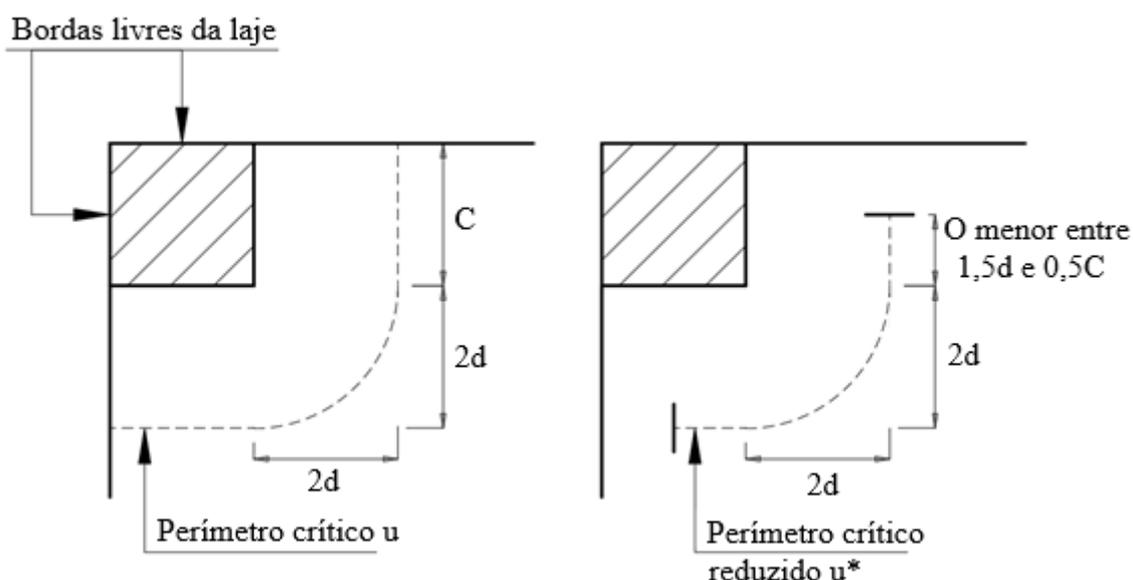


Figura 2.12: Perímetro crítico em pilares de canto.

A tensão de cisalhamento atuante no perímetro crítico devido aos momentos e à força axial, pode ser determinada considerando o princípio da superposição dos efeitos, logo:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u^* d} + \frac{K_y M_y^*}{W_{py} d} + \frac{K_x M_x^*}{W_{px} d} \quad (2.16)$$

sendo:

$$M_y^* = (M_{Sd_y} - M_{uy}^*) \geq 0 \quad (2.17a)$$

$$M_x^* = (M_{Sd_x} - M_{ux}^*) \geq 0 \quad (2.17b)$$

onde:

F_{Sd} é a reação do apoio;

u^* é o perímetro crítico reduzido;

$M_{sd,y}$ e $M_{sd,x}$ são os momentos de cálculo;

M_{ux}^* e M_{uy}^* são os momentos de cálculo resultantes da excentricidade do perímetro crítico reduzido u em relação aos eixos x e y passando pelo centro do pilar;

W_{px} e W_{py} são os módulos de resistência plástica nas direções x e y , ambos calculados para o perímetro u .

2.3.2.6 Capitel

Quando existir capitel, devem ser feitas duas verificações nos contornos C'_1 e C'_2 , como indica a Figura 2.13.

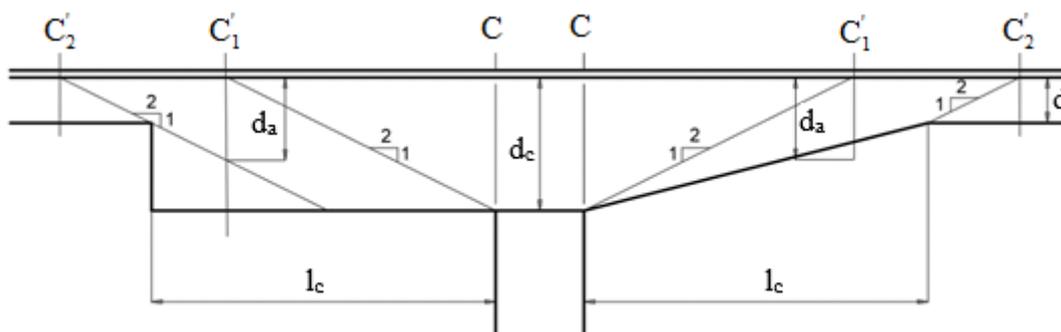


Figura 2.13: Altura útil no caso de capitel.

em que:

d é a altura útil da laje no contorno C'_2 ;

d_c é a altura útil da laje na face do pilar;

d_a é a altura útil da laje no contorno C'_1 ;

l_c é a distância entre a borda do capitel e a face do pilar.

A avaliação da punção em lajes com capitel se faz de forma análoga aos casos de lajes sem a presença de capitel. Para o caso de lajes com capitel, deve-se determinar a posição de cada perímetro crítico, a sua altura útil e verificar a necessidade de avaliação desses perímetros críticos de acordo com os critérios a seguir:

- i. $l_c \leq 2(d_c - d) \Rightarrow$ basta verificar o contorno C'_2 ;
- ii. $2(d_c - d) < l_c \leq 2d_c \Rightarrow$ basta verificar o contorno C'_1 ;

iii. $l_c > 2d_c \Rightarrow$ verificar os contornos C'_1 e C'_2 .

2.3.3 Tensão Resistente nas Superfícies Críticas

2.3.3.1 Tensão Resistente na Superfície Crítica C (Compressão Diagonal do Concreto)

Essa verificação deve ser feita no contorno C, em lajes com ou sem armadura de punção. Deve ser comparada a tensão de cisalhamento que leva a seção crítica à plastificação, para momentos e força axial atuantes, com a tensão resistente do concreto sob compressão diagonal, ou seja:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27 \alpha_v f_{cd} \quad (2.18)$$

sendo:

$$\alpha_v = 1 - \frac{f_{ck}}{250}, \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa.}$$

onde:

f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto à compressão cilíndrica (MPa);

α_v é o fator de correção da resistência do concreto;

f_{ck} é a resistência característica à compressão cilíndrica do concreto.

2.3.3.2 Tensão Resistente na Superfície Crítica C'

a) Trecho sem armadura de punção

Essa verificação deve ser feita em elementos estruturais ou trechos sem armadura de punção, a tensão resistente crítica C' deve ser calculada como segue:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100 \rho f_{ck})^{1/3} \quad (2.19)$$

sendo:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \quad (2.20)$$

onde:

$d = \frac{d_x + d_y}{2}$ é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico C'

ρ_x e ρ_y são as taxas geométricas de armadura da laje nas duas direções ortogonais assim calculadas:

- i. na largura igual à dimensão ou área carregada do pilar acrescida de 3d para cada um dos lados;
- ii. no caso de proximidade da borda, prevalece a distância até a borda, quando menor que 3d.

Se existir capitel, essa verificação deve ser feita no contorno crítico C'_1 e C'_2 conforme dito nas seções anteriores.

b) Trechos com armadura de punção

No caso de elementos estruturais ou trechos com armadura de punção, a tensão resistente crítica C' deve ser calculada como se segue:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,10 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100 \rho f_{ck})^{1/3} + 1,5 \frac{d}{S_r} \frac{A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha}{u d} \quad (2.21)$$

onde:

$$S_r \leq 0,75 d$$

S_r é o espaçamento radial entre linhas de armadura de punção;

A_{sw} é a área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a C';

α é o ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;

u é o perímetro crítico ou perímetro crítico reduzido no caso de pilares de borda ou de canto;

f_{ywd} é a resistência de cálculo da armadura de punção, com

- i. $f_{ywd} \leq 300 \text{MPa}$ para conectores;
- ii. $f_{ywd} \leq 250 \text{MPa}$ para estribos (aço CA-50 ou CA-60);
- iii. Para lajes com espessura maior que 15 cm, esses valores podem ser aumentados.

Essa armadura deve ser preferencialmente constituída por três ou mais linhas de conectores tipo pino com cabeça, dispostas radialmente a partir do perímetro do pilar.

As extremidades dos conectores devem estar ancoradas fora do plano da armadura de flexão correspondente.

2.3.3.3 Tensão Resistente na Superfície Crítica C''

Quando for necessário utilizar armadura de punção, ela deve ser estendida em contornos paralelos a C' até que, num contorno C'' afastado $2d$ do último contorno de armadura, não seja mais necessária armadura, ou seja, até que $\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1}$.

2.3.4 Armadura de Punção Obrigatória

Quando a estabilidade global da estrutura depender da resistência da laje à punção, deve ser prevista armadura de punção, mesmo que $\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1}$. Essa armadura deve equilibrar um mínimo de 50% de F_{Sd} .

2.3.5 Disposição de Armaduras de Punção

As armaduras para resistir à punção devem ser constituídas por estribos verticais ou conectores, com preferência pela utilização destes últimos. O diâmetro da armadura de estribos não pode superar $h/20$ e deve haver contato mecânico das barras longitudinais com os cantos dos estribos (ancoragem mecânica).

A disposição dos conectores tanto pode ser radial, quanto em linhas paralelas ou perpendiculares às faces do pilar, como mostra a Figura 2.14. Em qualquer dos casos, é necessário utilizar pelo menos três linhas de conectores e obedecer aos espaçamentos recomendados pela ABNT NBR 6118: 2014, para que, dessa forma, as tensões cisalhantes sejam absorvidas. O espaçamento entre a face do pilar e a primeira linha de conectores deve ser inferior a $0,50d$, e entre duas linhas consecutivas de conectores deve ser inferior a $0,75d$, como mostra a Figura 2.15.

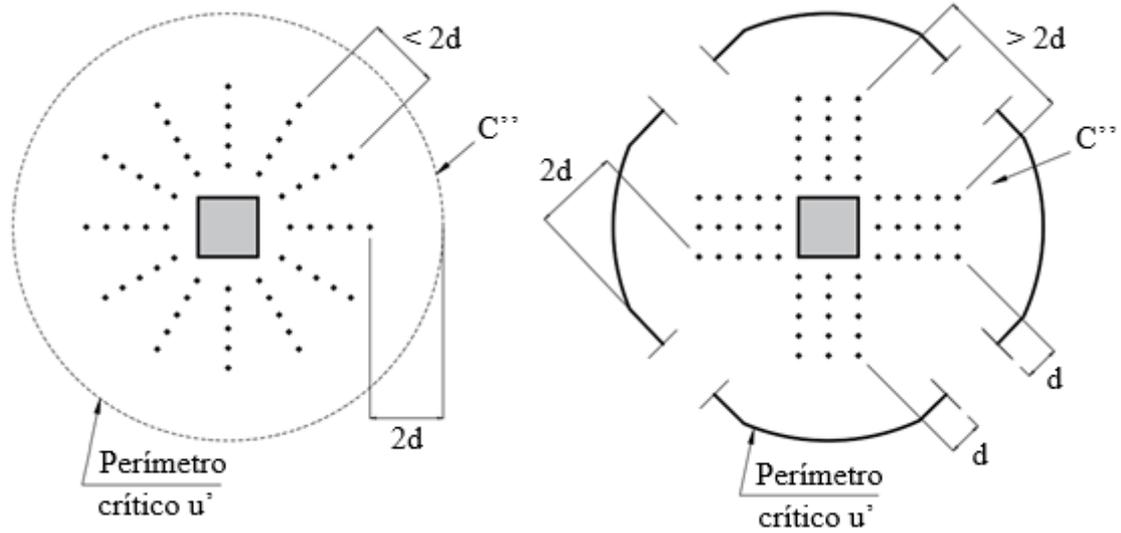


Figura 2.14: Disposição da armadura de punção em planta.



Figura 2.15: Disposição da armadura de punção em corte.

Quando utilizada armadura do tipo pino, as mesmas seguem algumas recomendações de acordo com a Figura 2.16.

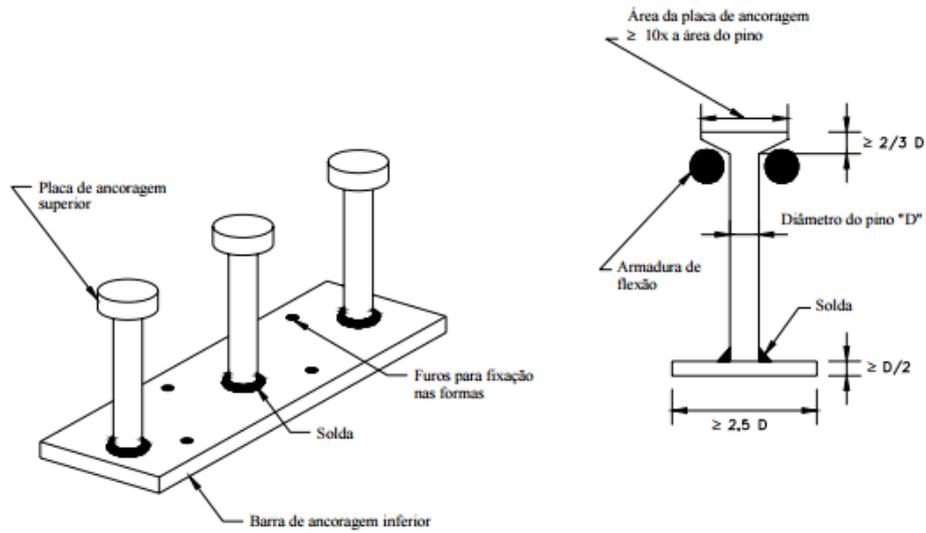


Figura 2.16: Armadura de punção tipo pino (FIGUEIREDO FILHO, 1989 *apud* FERREIRA, 2005).

Capítulo 3

Características Geométricas da Seção Transversal

3.1 Introdução

Nesta seção serão apresentadas as deduções matemáticas das características geométricas da seção transversal, assim como a área, perímetro, Módulo de Resistência Plástico de uma seção elíptica, e o centroide e momento de inércia de uma seção semi-elíptica. Ainda serão descritos os métodos numéricos utilizados para a obtenção destas características geométricas.

A Figura 3.1 apresenta uma elipse de centro $(0,0)$, focos $(-c,0)$ e $(c,0)$ e vértices $(-a, 0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ e $(0,-b)$ onde o eixo maior tem comprimento $2a$ e o eixo menor tem comprimento $2b$.

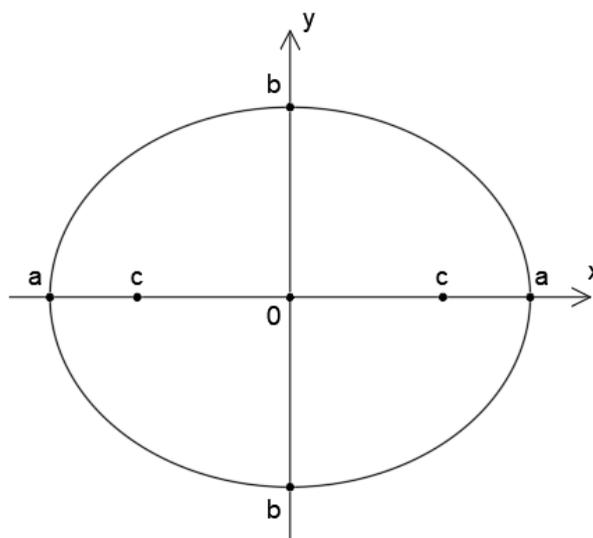


Figura 3.1: Elipse centrada na origem.

3.2 Área da Seção Elíptica

A equação reduzida da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.1)$$

onde $a^2 = b^2 + c^2$.

Isolando-se a variável y , tem-se:

$$y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.2)$$

A área da semi-elipse, que denotaremos por S_1 , corresponde à região delimitada pelo eixo Ox e pela função $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_1(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, logo

$$S_1 = \int_0^a f_1(x) dx \quad (3.3a)$$

$$S_1 = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (3.3b)$$

Realizando o cálculo da integral indefinida, tem-se

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (3.4a)$$

$$\int a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \quad (3.4b)$$

Fazendo $\left(\frac{x}{a}\right) = \sin u$ e $dx = a \cos u du$, chega-se a

$$\int a \sqrt{1 - \sin^2 u} a \cos u du = a^2 \int \sqrt{\cos^2 u} \cos u du \quad (3.5)$$

Sabe-se que $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$ pois $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então

$$a^2 \int \cos^2 u \, du = a^2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u \right) du \quad (3.6)$$

Resolvendo-se a equação, chega-se a:

$$a^2 \int \cos^2 u \, du = a^2 \left(\frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin 2u + k \right) \quad (3.7)$$

onde k é uma constante qualquer.

Utilizando algumas relações trigonométricas, chega-se a:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = a^2 \left(\frac{1}{2} u + \frac{\sin u \cos u}{2} + k \right) \quad (3.8)$$

Substituindo $\sin u = \left(\frac{x}{a} \right)$, $u = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$ e $\cos u = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}$, tem-se:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = a^2 \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} + k \right) \quad (3.9a)$$

$$S_1 = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{b}{a} a^2 \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right) \Bigg|_0^a \quad (3.9b)$$

Resolvendo, chega-se a:

$$S_1 = \frac{a b \pi}{4} \quad (3.10)$$

Portanto, a área total de uma elipse será dada por $4S_1$, logo:

$$A = \pi a b \quad (3.11)$$

Se $a = b = r$, a fórmula da área da elipse resulta na expressão mais conhecida para a área de um círculo, dada por:

$$A = \pi r^2 \quad (3.12)$$

3.3 Perímetro da Seção Elíptica

Como visto anteriormente, a equação reduzida da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.13)$$

Onde $a^2 = b^2 + c^2$.

Derivando-se implicitamente ambos os membros da igualdade em relação a x , obtém-se

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0 \quad (3.14a)$$

$$y' = -\frac{b^2 x}{y a^2} \quad (3.14b)$$

Elevando-se ambos os lados ao quadrado e depois somando 1 em cada membro, chega-se a

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{b^4 x^2}{y^2 a^4} \quad (3.15)$$

Isolando-se y^2 da equação (3.13), obtém-se

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} \quad (3.16)$$

Substituindo-se a equação (3.16) na equação (3.15) e simplificando, encontra-se

$$1 + (y')^2 = \frac{\left(a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} \right)}{a^2 - x^2} \quad (3.17)$$

Como a excentricidade da elipse é dada por $e = c/a$, tem-se

$$1 + (y')^2 = \frac{(a^2 - e^2 x^2)}{a^2 - x^2} \quad (3.18)$$

O perímetro procurado é dado pela fórmula

$$l_T = 4 \int_0^a \sqrt{1+(y')^2} dx \quad (3.19)$$

logo,

$$l_T = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx \quad (3.20)$$

Fazendo-se uma substituição trigonométrica, onde $x = a \operatorname{sen} \alpha$, tem-se que $dx = a \cos \alpha d\alpha$. Para $x = 0$, tem-se que $\alpha = 0$ e para $x = a$, tem-se que $\alpha = \pi/2$. Assim:

$$l_T = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} a \cos \alpha d\alpha \quad (3.21a)$$

$$l_T = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} a \cos \alpha d\alpha \quad (3.21b)$$

$$l_T = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} d\alpha \quad (3.21c)$$

Observa-se que se $e = 0$, a elipse representa uma circunferência de raio a , cujo perímetro é $2\pi a$.

A resolução da integral será realizada a partir de uma aproximação através de uma serie binomial, a partir de uma expansão de potências do tipo $(1+x)^n$, para todo $x, n \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$. Assim, como

$$|-e^2 \operatorname{sen}^2 \alpha| = |e^2| |\operatorname{sen}^2 \alpha| < 1 \quad (3.22)$$

Usa-se a igualdade

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (3.23)$$

para a obtenção de tal aproximação, considera-se que $n = 1/2$ e $x = -e^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$ na equação (3.23) e substituindo-se na equação (3.21c), obtém-se

$$l_T \cong 4a \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{e^2 \sin^2 \alpha}{2} - \frac{e^4 \sin^4 \alpha}{8} \right) d\alpha \quad (3.24)$$

Resolvendo-se a integral termo a termo, obtém-se a fórmula aproximada para calcular o perímetro de uma elipse em função de sua excentricidade e do seu eixo maior, isto é:

$$l_T \cong a\pi \left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} \right) \quad (3.25)$$

3.4 Módulo de Resistência Plástico da Seção Elíptica

O Módulo de Resistência Plástico referente ao eixo y pode ser obtido através de

$$W_{py} = 4 \int_0^a e_x dl \quad (3.26)$$

Fazendo $e_x = x$ e $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx$, chega-se a

$$W_{py} = 4 \int_0^a x \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx \quad (3.27)$$

Fazendo-se uma substituição trigonométrica, onde $x = a \sin \alpha$, temos que $dx = a \cos \alpha d\alpha$. Para $x = 0$, tem-se $\alpha = 0$ e para $x = a$, temos $\alpha = \pi/2$. Assim:

$$W_{py} = 4 \int_0^{\pi/2} a \sin \alpha \sqrt{\frac{a^2 - e^2 a^2 \sin^2 \alpha}{a^2 - a^2 \sin^2 \alpha}} a \cos \alpha d\alpha \quad (3.28)$$

Simplificando, vem

$$W_{py} = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \quad (3.29)$$

Realizando uma aproximação através de uma série binomial, como visto para o cálculo do perímetro, obtém-se

$$W_{py} \cong 4a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \left(1 - \frac{e^2 \sin^2 \alpha}{2} - \frac{e^4 \sin^4 \alpha}{8} \right) d\alpha \quad (3.30)$$

Solucionando-se a integral, chega-se à equação aproximada para calcular o Módulo de Resistência Plástico de uma elipse em função de sua excentricidade e do seu eixo maior, isto é:

$$W_{py} = 4a^2 \left(1 - \frac{e^2}{3} - \frac{e^4}{15} \right) \quad (3.31)$$

De forma análoga, para o eixo x, tem-se

$$W_{px} = 4 \left(b^2 + \frac{c^2}{3} - \frac{c^4}{15b^2} \right) \quad (3.32)$$

3.5 Centroide de uma Seção Semi-Elíptica

O centroide da seção semi-elíptica é obtido através de

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} \quad (3.33)$$

Em que o momento em relação ao eixo x é calculado através de

$$M_x = \int_A y dA \quad (3.34)$$

sendo $dA = x dy$, vem

$$M_x = 2 \int_0^b y x dy \quad (3.35)$$

Isolando-se x da equação reduzida da elipse, obtém-se

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (3.36)$$

logo,

$$M_x = 2 \int_0^b y \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} dy \quad (3.37)$$

Fazendo-se uma substituição trigonométrica, onde $y = b \operatorname{sen} \alpha$, tem-se que $dy = b \cos \alpha d\alpha$. Para $y = 0$, tem-se que $\alpha = 0$ e para $y = b$, tem-se que $\alpha = \pi/2$. Assim:

$$M_x = 2 \int_0^{\pi/2} b \operatorname{sen} \alpha \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} b \cos \alpha d\alpha \quad (3.38)$$

Simplificando, obtém-se

$$M_x = 2ab^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \quad (3.39)$$

Resolvendo-se a integral, chega-se a

$$M_x = \frac{2ab^2}{3} \quad (3.40)$$

portanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\left(\frac{2ab^2}{3}\right)}{\left(\frac{\pi ab}{2}\right)} \quad (3.41)$$

Então, a expressão para calcular o centroide da sessão semi-elíptica é dada por

$$\bar{y} = \frac{4b}{3\pi} \quad (3.42)$$

3.6 Momento de Inércia da Seção Semi-Elíptica

O momento de inércia em relação ao eixo x é calculado por

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (3.43)$$

Realizando-se uma mudança de coordenada, sendo $x = a u$ e $y = b v$, a equação reduzida da elipse se torna

$$u^2 + v^2 = 1 \quad (3.44)$$

No qual $u = p \cos \alpha$ e $v = p \sin \alpha$, conforme Figura 3.2

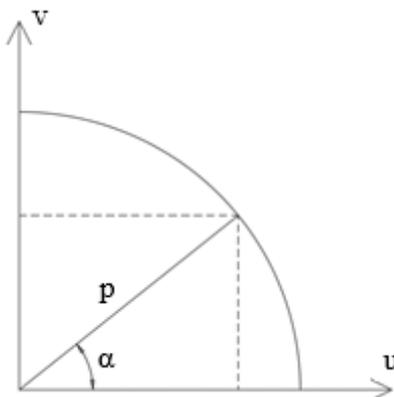


Figura 3.2: Coordenadas u e v .

Como $x = a u$, tem-se que $dx = a du$ e como $y = b v$, tem-se que $dy = b dv$, logo

$$I_x = \int_A y^2 dA = \iint y^2 dx dy = \iint y^2 a b du dv \quad (3.45a)$$

$$I_x = \iint b^2 v^2 a b du dv \quad (3.45b)$$

$$I_x = \iint a b^3 p^2 \sin^2 \alpha du dv \quad (3.45c)$$

Fazendo-se o Jacobiano, tem-se:

$$J \begin{pmatrix} u & v \\ p & \alpha \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -p \sin \alpha \\ \sin \alpha & p \cos \alpha \end{vmatrix} \quad (3.46a)$$

$$\frac{du}{dp} \frac{dv}{d\alpha} = p(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = p \quad (3.46b)$$

logo,

$$du dv = p dp d\alpha \quad (3.47)$$

Substituindo-se a equação (3.47) na equação (3.45c), vem

$$I_x = \int_0^{\pi} \int_0^1 a b^3 p^3 \sin^2 \alpha dp d\alpha \quad (3.48)$$

Resolvendo-se a integral, chega-se à equação correspondente ao momento de inércia da seção semi-elíptica, dada por

$$I_x = \frac{\pi a b^3}{8} \quad (3.49)$$

3.7 Métodos Numéricos

No presente trabalho utilizaram-se alguns métodos numéricos para a obtenção da área, perímetro, centro de gravidade e momento de inércia da seção transversal. Os métodos adotados nesta pesquisa são descritos nos itens seguintes.

3.7.1 Regra dos Trapézios

A noção básica da regra dos Trapézios é usar um polinômio de interpolação de 1º grau em cada subintervalo (x_i, x_{i+1}) , do intervalo total sobre o qual se efetua a interpolação. Assim, a equação se transforma em

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx \quad (3.50)$$

Onde $P_1(x)$ pode ser expresso na forma do polinômio de interpolação de Newton com diferenças ascendentes, dado por

$$P_1(x) = y_i + \frac{\Delta y_i}{h} (x - x_i) \quad (3.51)$$

logo,

$$I \cong \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[y_i + \frac{\Delta y_i}{h} (x - x_i) \right] dx \quad (3.52)$$

Considerando-se que

$$\alpha = \frac{x - x_i}{h} \quad (3.53a)$$

$$d\alpha = \frac{dx}{h} \quad (3.53b)$$

tem-se que

$$dx = h d\alpha \quad (3.54)$$

Nota-se que para $x = x_{i+1}$, tem-se $\alpha = 1$ e para $x = x_i$, tem-se $\alpha = 0$, logo

$$I \cong \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 [y_i + \Delta y_i \alpha] h d\alpha \quad (3.55)$$

Resolvendo-se a integral, chega-se a

$$I \cong \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{2} (y_i + \Delta y_{i+1}) \quad (3.56)$$

Portanto, a expressão genérica para a integração sobre um conjunto de pontos igualmente espaçados será

$$I \cong \frac{h}{2} (y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (3.57)$$

Utilizando-se a Regra dos Trapézios, desenvolveu-se uma expressão para calcular o centroide para uma sessão semi-elíptica, dada por

$$\bar{y} = \frac{h}{8} \frac{\sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (3.58)$$

É importante ressaltar que no presente trabalho, utilizou-se a Regra dos Trapézios porque à medida que se alteram as deformações do concreto e do aço ao longo da seção,

o parâmetro b vai se modificando, uma vez que, a seção é semi-elíptica. Vale ressaltar que as propriedades geométricas também podem ser obtidas via método dos elementos finitos. Alguns detalhes são apresentados nos Exemplos 1 e 2 deste trabalho.

3.7.2 Método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss)

Neste trabalho utilizou-se também a técnica da quadratura de Gauss para a obtenção da área, do perímetro e do Módulo de Resistência Plástico (W_p) das seções elípticas e semi-elípticas. Desta forma, considerando-se o problema de avaliar numericamente uma integral unidimensional na forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (3.59)$$

A aproximação de n pontos será:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) + \dots + w_n f(x_n) \quad (3.60)$$

em que w_1, w_2, \dots, w_n são os pesos e x_1, x_2, \dots, x_n são os pontos de Gauss-Legendre.

Uma integral $\int_a^b f(x) dx$ sobre um intervalo $[a, b]$ arbitrário pode ser transformada em uma integral sobre $[-1, 1]$ utilizando a mudança de variáveis:

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b] \quad (3.61)$$

Isso permite que a quadratura de Gauss-Legendre seja aplicada a todo intervalo $[a, b]$, já que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b - a)t + (b + a)}{2}\right) \frac{(b - a)}{2} dt \quad (3.62)$$

O método de Gauss-Legendre será utilizado neste trabalho por se tratar de um procedimento eficiente, ou seja, fornece respostas confiáveis para o cálculo de perímetros e áreas de seções genéricas.

3.7.3 Cálculo do Momento de Inércia através do Método dos Elementos Finitos

O momento de inércia de uma seção é dado por:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (3.63)$$

A coordenada y de qualquer ponto do elemento pode ser expressa em termos das funções de interpolação. Logo, para um elemento finito triangular com três nós, tem-se:

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \quad (3.64)$$

Considerando-se que $N_1 = \xi$ e $N_2 = \eta$, nota-se, para um elemento finito bidimensional plano de três nós, que $N_3 = 1 - \xi - \eta$. Em que ξ e η são as coordenadas naturais.

Deste modo, tem-se:

$$y = \mathbf{N} \mathbf{y}_e \quad (3.65a)$$

$$y = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [\xi \quad \eta \quad 1 - \xi - \eta] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (3.65b)$$

Assim:

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{y}_e^T \mathbf{N}^T = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 - \xi - \eta \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Então, fazendo-se:

$$I_x = \int_A \mathbf{y}^T y dA \quad (3.67)$$

sendo a área infinitesimal dada por $dA = \det J d\eta d\xi$, tem-se ainda:

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \det \mathbf{J} d\eta d\xi \quad (3.68a)$$

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{bmatrix} [\xi \quad \eta \quad 1-\xi-\eta] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \det \mathbf{J} d\eta d\xi \quad (3.68b)$$

Desenvolvendo-se a integral dupla, chega-se à equação necessária para o cálculo do momento de inércia de uma seção genérica via MEF:

$$I_x = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \det \mathbf{J} \begin{bmatrix} 1/12 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/12 & 1/24 \\ 1/24 & 1/24 & 1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

lembrando que Jacobiano é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Caso se deseje determinar o momento de inércia em relação aos eixos baricêntricos de uma dada seção transversal, basta fazer:

$$I_{\text{bar}} = I - \sum_{i=1}^{\text{nel}} (y_i - y_{\text{bar}})^2 A_i \quad (3.71)$$

em que I_{bar} é o momento de inércia no eixo baricêntrico, y_{bar} a coordenada do centroide da seção no baricentro e A é a área de cada elemento.

Capítulo 4

Aplicações

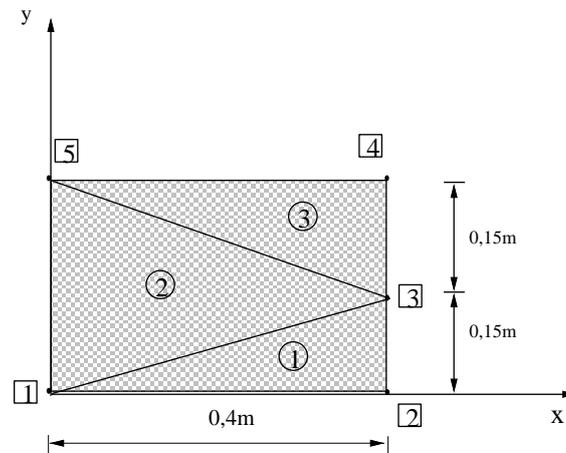
4.1 Introdução

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos a partir desta pesquisa e referentes ao projeto de lajes lisas apoiadas em pilares de seções transversais elípticas e semi-elípticas. Os exemplos foram organizados da seguinte forma: inicialmente são mostradas respostas correspondentes às propriedades geométricas das seções, posteriormente foi obtida a curva de interação momento versus normal para a seção transversal semi-elíptica de um pilar de concreto e por fim realizou-se o dimensionamento de duas lajes lisas.

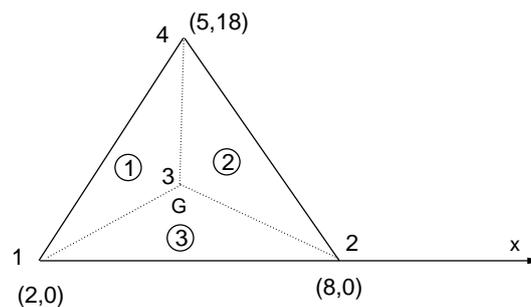
4.2 Exemplos

4.2.1 Momentos de inércia para seções via MEF

Neste exemplo obtiveram-se de forma numérica os valores dos momentos de inércia para várias seções transversais usando-se o método dos elementos finitos. As seções foram discretizadas com diversas malhas e as respostas foram comparadas com resultados analíticos e através do programa AutoCAD. Nas Figuras 4.1a, 4.1b e 4.1c mostram-se as seções estudadas com as malhas de elementos finitos adotadas. Nas Tabelas 4.1a, 4.1b, 4.1c e 4.1d comprova-se a eficiência do método dos elementos finitos para o cálculo do momento de inércia de diferentes seções transversais. É importante mencionar que o cálculo das propriedades geométricas das seções é imprescindível para a realização da análise estrutural e de grande valia para a realização do projeto de estruturas.

a) **Seção Retangular****Figura 4.1a:** Seção retangular.**Tabela 4.1a:** Seção Retangular com 3 elementos finitos

	Presente Trabalho	Analítico	Presente Trabalho/ Analítico
I_x	$9 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	$9 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	1,00
I_y	$1,6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$	$1,6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$	1,00
J	$2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^4$	$2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^4$	1,00

b) **Seção Triangular****Figura 4.1b:** Seção triangular.**Tabela 4.1b:** Seção Triangular com 3 elementos finitos

	Presente Trabalho	Analítico	Presente Trabalho/ Analítico
I_x	972	972	1,00
I_y	81	81	1,00
J	1053	1053	1,00

c) **Seção Retangular com Furo**

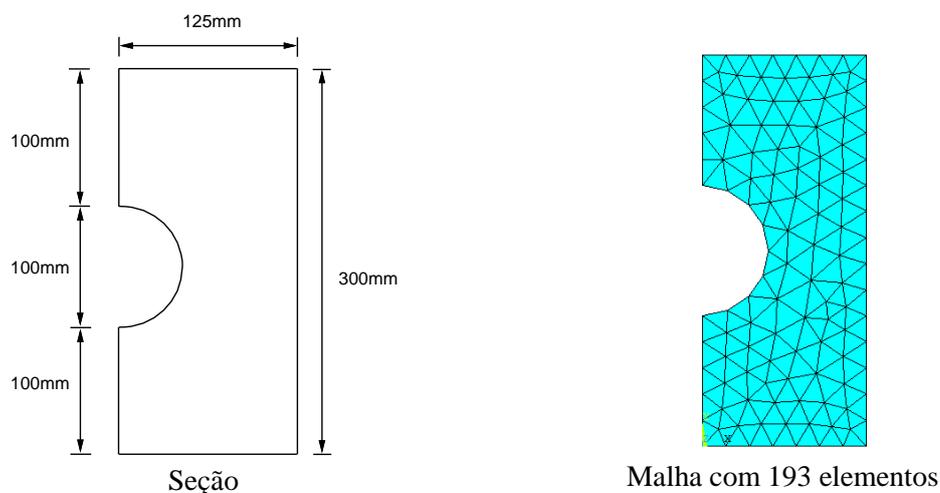


Figura 4.1c: Seção retangular com um furo.

Tabela 4.1c: Seção Retangular com um furo com 48 elementos finitos

	Presente Trabalho	Analítico	Presente Trabalho/ Analítico
I_x	$2,8 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	$2,7879 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	1,00434
I_y	$4 \times 10^{-5} \text{ m}^4$	$3,968 \times 10^{-5} \text{ m}^4$	1,00806
J	$3,2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	$3,1847 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	1,00480

Tabela 4.1d: Seção Retangular com furo com 193 elementos finitos

	Presente Trabalho	Analítico	Presente Trabalho/ Analítico
I_x	$2,7891 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	$2,7879 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	1,00043
I_y	$4,082 \times 10^{-5} \text{ m}^4$	$3,968 \times 10^{-5} \text{ m}^4$	1,0287
J	$3,1974 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	$3,1847 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	1,0039

d) **Seções Genéricas e Malhas de Elementos Finitos**

Neste item apresentam-se quatro seções genéricas (arbitrárias) e o objetivo principal é obter via método dos elementos finitos (MEF), as propriedades geométricas das mesmas. Dentre as características determinadas podem-se citar os momentos de inércia em relação aos eixos baricêntricos x e y e por fim o momento de inércia polar.

Nas Figuras 4.2a e 4.2b mostram-se as seções genéricas estudadas e as malhas de elementos finitos adotadas.

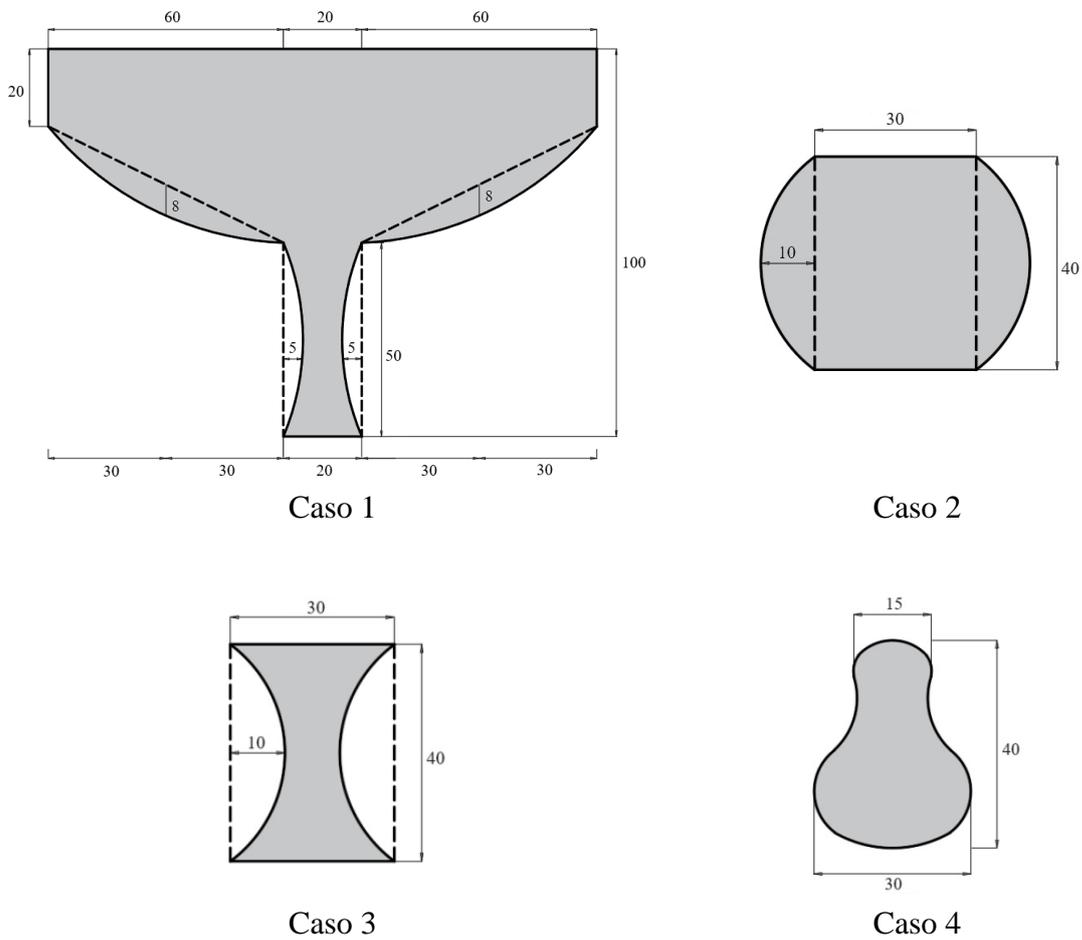
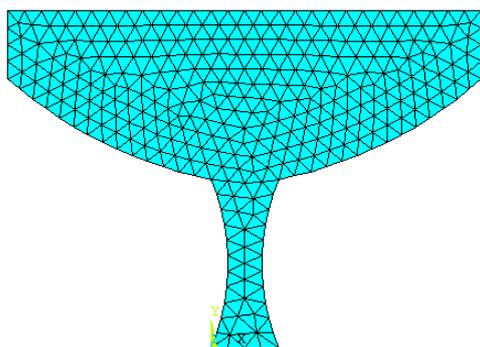
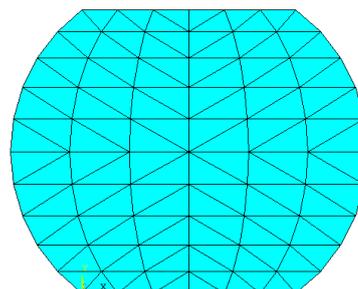


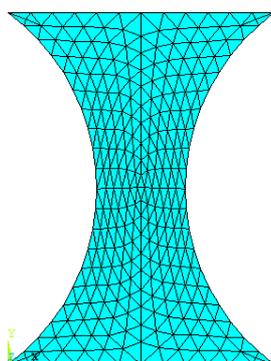
Figura 4.2a: Seções genéricas (arbitrárias).



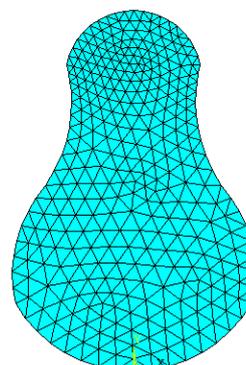
Caso 1 – Malha com 586 elementos



Caso 2 - Malha com 120 elementos



Caso 3 - Malha com 486 elementos



Caso 4 - Malha com 608 elementos

Figura 4.2b: Malhas de elementos finitos das seções arbitrárias.

Nas Tabelas 4.2a, 4.2b, 4.2c e 4.2d apresentam-se os resultados dos momentos de inércia obtidos através do presente trabalho e as comparações com o programa AutoCAD. É importante ressaltar que neste trabalho utilizou-se para a discretização da seção o elemento finito bidimensional triangular com 3 nós (CST) e que as malhas foram geradas através do software ANSYS 17.

Tabela 4.2a: Caso 1 (Malha com 586 elementos)

	Presente Trabalho	AutoCAD	Presente Trabalho/ AutoCAD
I_x	$2,85 \times 10^6 \text{ cm}^4$	$2,8434 \times 10^6 \text{ cm}^4$	1,002
I_y	$7,3248 \times 10^6 \text{ cm}^4$	$7,3289 \times 10^6 \text{ cm}^4$	0,999
J	$1,01751 \times 10^7 \text{ cm}^4$	$1,01724 \times 10^7 \text{ cm}^4$	1,0003

Tabela 4.2b: Caso 2 (Malha com 120 elementos)

	Presente Trabalho	AutoCAD	Presente Trabalho/ AutoCAD
I_x	$2,063 \times 10^5 \text{ cm}^4$	$2,073 \times 10^5 \text{ cm}^4$	0,995
I_y	$2,9422 \times 10^5 \text{ cm}^4$	$2,9736 \times 10^5 \text{ cm}^4$	0,989
J	$5,0052 \times 10^5 \text{ cm}^4$	$5,0466 \times 10^5 \text{ cm}^4$	0,992

Tabela 4.2c: Caso 3 (Malha com 486 elementos)

	Presente Trabalho	AutoCAD	Presente Trabalho/ AutoCAD
I_x	$1,1289 \times 10^5 \text{ cm}^4$	$1,1264 \times 10^5 \text{ cm}^4$	1,002
I_y	$1,956 \times 10^4 \text{ cm}^4$	$1,943 \times 10^4 \text{ cm}^4$	1,0067
J	$1,3245 \times 10^5 \text{ cm}^4$	$1,3207 \times 10^5 \text{ cm}^4$	1,0028

Tabela 4.2d: Caso 4 (Malha com 608 elementos)

	Presente Trabalho	AutoCAD	Presente Trabalho/ AutoCAD
I_x	$7,8155 \times 10^4 \text{ cm}^4$	$7,8552 \times 10^4 \text{ cm}^4$	0,995
I_y	$2,6894 \times 10^4 \text{ cm}^4$	$2,6648 \times 10^4 \text{ cm}^4$	1,009
J	$1,05 \times 10^5 \text{ cm}^4$	$1,052 \times 10^5 \text{ cm}^4$	0,998

4.2.2 Momentos de inércia da seção elíptica em relação aos eixos baricêntricos

O objetivo deste exemplo é apresentar de forma numérica os resultados dos momentos de inércia para uma seção elíptica. As respostas foram obtidas através das expressões analíticas, em seguida com o auxílio do programa AutoCAD e por fim através do método dos elementos finitos conforme apresentado no Exemplo 1. Para isso, utilizou-se o elemento finito triangular com três nós (CST) e a seção foi discretizada com 585 nós e com 1064 elementos. Na Figura 4.3 apresenta-se a seção discretizada e na Tabela 4.3 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos.

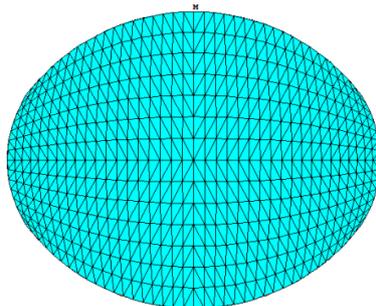


Figura 4.3. Seção elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm.

Tabela 4.3: Seção elíptica com $a=10$ cm e $b=8$ cm

Momento de Inércia	Analítico	AutoCAD	Presente Trabalho
I_x	$4,021 \times 10^3 \text{ cm}^4$	$4,021 \times 10^3 \text{ cm}^4$	$3,911 \times 10^3 \text{ cm}^4$
I_y	$6,283 \times 10^3 \text{ cm}^4$	$6,283 \times 10^3 \text{ cm}^4$	$6,166 \times 10^3 \text{ cm}^4$

4.2.3 Comprimento de uma elipse via Método de Gauss-Legendre (Quadratura de Gauss)

Neste exemplo, apresentam-se os resultados referentes ao comprimento da seção elíptica representada pela equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ no primeiro quadrante. Para a obtenção dos resultados, utilizaram-se 5 pontos de Gauss e as respostas foram comparadas com os valores determinados por Burden, R., Faires e Burden, A. (2016). A Tabela 4.4 apresenta a comparação entre a solução obtida no presente trabalho e a solução analítica obtida por Burden, R., Faires e Burden, A. (2016).

Tabela 4.4: Perímetro da Seção elíptica para $a=3$ e $b=2$

Comprimento	Burden, R., Faires e Burden, A. (2016)	Presente Trabalho
L	3,7437137	3,7437137

4.2.4 Cálculo do Perímetro e Área da seção elíptica

O perímetro da seção elíptica foi obtido com base nos procedimentos matemáticos utilizados via cálculo infinitesimal e é calculado por:

$$P_e = a \pi \left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} \right) \quad (4.1)$$

Por sua vez, a é a medida do semi-eixo maior da elipse, $e = c/a$ é a excentricidade da seção elíptica e c é a coordenada do foco da elipse. Com o fim de validar a dedução da expressão matemática, o perímetro foi obtido com auxílio do programa AutoCAD e com o Método de Gauss-Legendre com 60 pontos, no qual verificou-se uma boa aproximação entre as respostas.

O perímetro da seção elíptica será um parâmetro relevante no dimensionamento da laje lisa à punção, pois serão verificados os efeitos da compressão diagonal (bielas comprimidas) no contorno C do pilar e os efeitos da tração diagonal ou punção nos contornos C' e C''. Na Tabela 4.5 apresentam-se os valores do perímetro da seção elíptica.

Tabela 4.5: Perímetro da seção elíptica para $a=10$ cm e $b= 8$ cm (cm)

Analítica	AutoCAD	Gauss- Legendre	Analítica/AutoCAD	Analítica/Gauss- Legendre
56,7952	56,7233	56,3977	1,001	1,007

A área de uma seção transversal elíptica é dada por:

$$A = \pi a b \quad (4.2)$$

Na Tabela 4.6 apresentam-se os valores da área da seção transversal elíptica comparando a solução analítica com os resultados obtidos através do programa AutoCAD e pelo método de Gauss-Legendre com 60 pontos.

Tabela 4.6. Área da seção elíptica para $a=10$ cm e $b= 8$ cm (cm^2)

Analítica	AutoCAD	Gauss- Legendre	Analítica/AutoCAD	Analítica/ Gauss-Legendre
251,3274	251,3274	251,3276	1,0000	1,0000

4.2.5 Cálculo da Área e Perímetro da seção semi-elíptica

Neste exemplo modelou-se a seção semi-elíptica via regra dos trapézios com 300 e 1000 pontos com o programa computacional implementado em linguagem FORTRAN 90 e o resultado foi comparado com a solução analítica e com o resultado obtido através do Método de Gauss-Legendre com 60 pontos. Os resultados são mostrados na Tabela 4.7.

Tabela 4.7: Área da seção semi-elíptica com a=10 cm e b=8 cm (cm²)

Presente Trabalho		Solução Analítica	Gauss-Legendre	Presente Trabalho/Solução Analítica	Presente Trabalho/Gauss-Legendre
300	125,6381	125,6637	125,6638	0,99980	0,99980
1000	125,6595			0,99997	0,99997

O perímetro da seção semi-elíptica é dado por:

$$P_{se} = \frac{a\pi}{2} \left(2 - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^4}{32} \right) + 2a \quad (4.3)$$

em que $e = c/a$ é a excentricidade da seção elíptica.

Na Tabela 4.8 apresentam-se os valores do perímetro da seção semi-elíptica, comparando a solução analítica com os resultados obtidos através do programa AutoCAD e com o Método de Gauss-Legendre com 60 pontos.

Tabela 4.8: Perímetro da seção semi-elíptica para a=10 cm e b=8 cm (cm)

Analítica	AutoCAD	Gauss-Legendre	Analítica/AutoCAD	Analítica/Gauss-Legendre
48,3976	48,3617	48,1988	1,0007	1,0041

4.2.6 Cálculo do Módulo de Resistência Plástico da seção elíptica

O Módulo de Resistência Plástico da seção elíptica foi obtido com base nos procedimentos matemáticos utilizados via cálculo infinitesimal e é calculado por:

$$W_{px} = 4 \left(b^2 + \frac{c^2}{3} - \frac{c^4}{15b^2} \right) \quad (4.4a)$$

$$W_{py} = 4a^2 \left(1 - \frac{e^2}{3} - \frac{e^4}{15} \right) \quad (4.4b)$$

Na Tabela 4.9 apresentam-se os valores do Módulo de Resistência Plástico da seção transversal elíptica, comparando a solução analítica com o resultado obtido através do método de Gauss-Legendre com 60 pontos.

Tabela 4.9: Módulo de Resistência Plástico da seção elíptica com a=10 cm e b=8 cm (cm²)

Módulo de Resistência Plástico	Gauss-Legendre	Solução Analítica	Gauss-Legendre/ Solução Analítica
W_x	296,344	298,600	0,9924
W_y	344,615	348,544	0,9887

4.2.7 Cálculo do Centróide da seção semi-elíptica

Com o objetivo de calcular o ponto em que a força axial de compressão atuará na região comprimida, desenvolveu-se uma expressão numérica baseada na regra dos trapézios necessária para se calcular o centróide dessa região, uma vez que, não existem equações definidas para as seções correspondentes às fatias comprimidas de uma seção semi-elíptica. A validação desse resultado servirá para calcular o centróide de qualquer região comprimida com profundidade $y \leq b$. Este procedimento servirá para o cálculo do momento fletor da seção semi-elíptica para qualquer par de deformações ε_c e ε_s . Para se verificar a eficiência da equação proposta, comparou-se o resultado numérico com a resposta do valor do centróide da seção semi-elíptica, obtido através da solução analítica determinada com base no cálculo infinitesimal dada pela equação que segue.

$$\bar{y} = \frac{4b}{3\pi} \quad (4.5)$$

Vale informar que a expressão proposta nesta pesquisa é dada pela seguinte equação:

$$\bar{y} = \frac{h}{8} \frac{\sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (4.6)$$

Na Tabela 4.10 apresentam-se os valores do centroide da seção semi-elíptica.

Tabela 4.10: Centroide da seção semi-elíptica com a=10 cm e b=8 cm (cm)

Número de Pontos	Presente Trabalho	Solução Analítica	Presente Trabalho/ Solução Analítica
300	3,395685	3,395305	1,0001

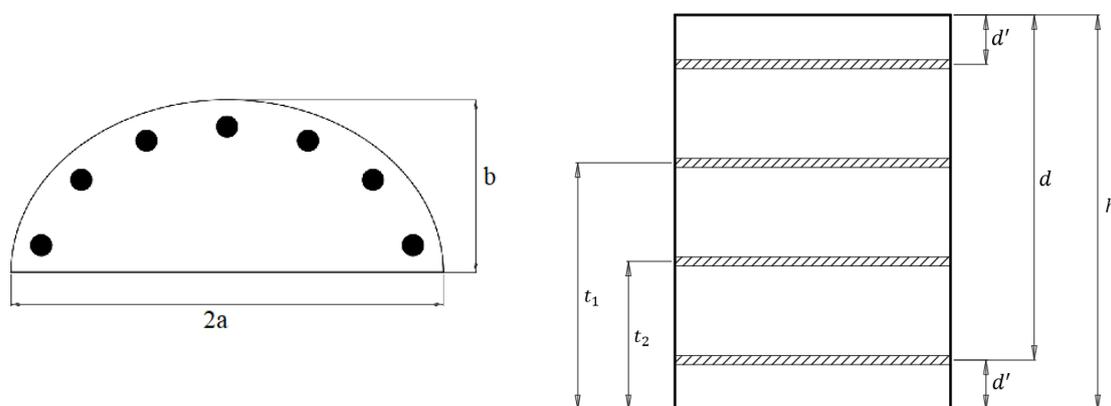
Nas Tabelas 4.3 a 4.10 foi possível verificar uma excelente aproximação entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e através das comparações realizadas com as diferentes técnicas adotadas.

4.2.8 Curva de interação da seção transversal semi-elíptica de um pilar de concreto

Neste exemplo, apresentam-se os carregamentos de cálculo atuantes no pilar de concreto armado de seção semi-elíptica e apresenta-se a curva de resistência (curva de interação momento versus normal) referente à seção transversal deste pilar de concreto armado. Nesta aplicação considerou-se para a seção transversal a = 20 cm, b = 16 cm, com área de aço das armaduras $A_s = 5,4977 \text{ cm}^2$, há 7 barras de 10 mm, a resistência característica do concreto à compressão é $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ e $d' = 2,5 \text{ cm}$. Nesta aplicação o peso específico do concreto é $\gamma_{con} = 25 \text{ kN/m}^3$, a espessura da laje é $h_{laje} = 12 \text{ cm}$, considerou-se uma sobrecarga igual a $s_c = 1,5 \text{ kN/m}^2$, peso próprio $pp = 3 \text{ kN/m}^2$. A carga total de projeto é $pd = 6,3 \text{ kN/m}^2$. O pilar terá um comprimento igual a 300 cm e será considerado como bi-engastado. Assim, tem-se que $l_e = 0,51$.

Para a construção da curva de interação foi implementada uma sub-rotina na base computacional em que foram criadas equações de compatibilidade de deformação e equações de equilíbrio correspondentes a todos os domínios de deformação. Os casos em que $0 \leq y \leq b$ se referem ao comportamento da seção de concreto trabalhando no Domínio 2, Domínio 3, Domínio 4 e Domínio 4a, que caracterizam uma certa parcela da seção de concreto sujeita ao esforço de compressão. O programa computacional permitirá a construção da curva de interação ou curva de resistência da seção transversal semi-elíptica, uma vez que, não há na literatura nenhuma curva de interação correspondente a esta configuração geométrica. Há apenas curvas para seções retangulares, quadradas e circulares. Dentre os ábacos clássicos necessários para o dimensionamento de pilares de concreto podem-se citar os ábacos de Montoya (2001), os ábacos de Venturini (1987) e os ábacos de Pinheiro (1994).

Para auxiliar a definição das equações que regem o equilíbrio na seção nos diversos domínios, a Figura 4.4 mostra a seção transversal semi-elíptica e as notações a serem utilizadas para definir as variáveis envolvidas.



a) Seção transversal

b) Seção longitudinal

Figura 4.4: Esquema da seção semi-elíptica.

a) Domínio 1

A Figura 4.5 apresenta o diagrama de deformações no Domínio 1.

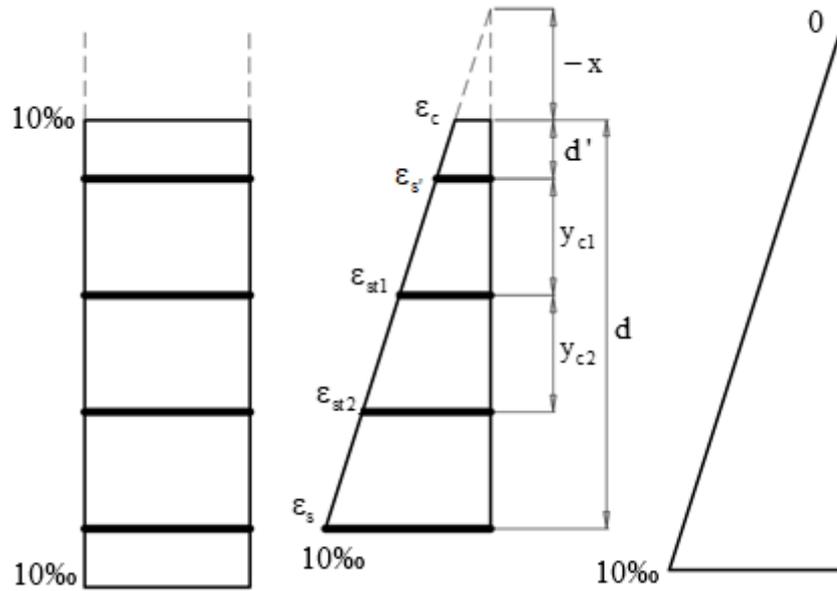


Figura 4.5: Diagrama de deformações no Domínio 1.

A posição da linha neutra x é calculada por:

$$\varepsilon_c = \frac{-10x}{(d-x)} \quad (4.7)$$

A deformação é calculada por:

$$\varepsilon_s = \frac{10(d'-x)}{(d-x)} \quad (4.8)$$

As deformações das armaduras intermediárias são calculadas por:

$$\varepsilon_{st1} = \frac{\varepsilon_c(-x + d' + y_{c1})}{(d-x)} \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{st2} = \frac{\varepsilon_c(-x + d' + y_{c1} + y_{c2})}{(d-x)} \quad (4.10)$$

As equações de equilíbrio válidas no Domínio 1 para uma seção retangular são:

$$N_d = \sum_{i=1}^n F_{si} \quad (4.11)$$

$$M_d = \left(N_d \frac{h}{2} \right) - \sum_{i=1}^n F_{si} t_i \quad (4.12)$$

Para a seção semi-elíptica são:

$$N_d = \sum_{i=1}^n F_{si} \quad (4.13)$$

$$M_d = (N_d \bar{y}) - \sum_{i=1}^n F_{si} t_i \quad (4.14)$$

A coordenada do centroide da seção semi-elíptica válida para a seção que trabalha no Domínio 1 e no Domínio 5, pode ser obtida através da equação

$$\bar{y} = \frac{4b}{3\pi} \quad (4.15)$$

b) Domínio 2, Domínio 3, Domínio 4 e Domínio 4a

A Figura 4.6 apresenta os diagramas de deformações válidos no Domínio 2, Domínio 3, Domínio 4 e Domínio 4a.

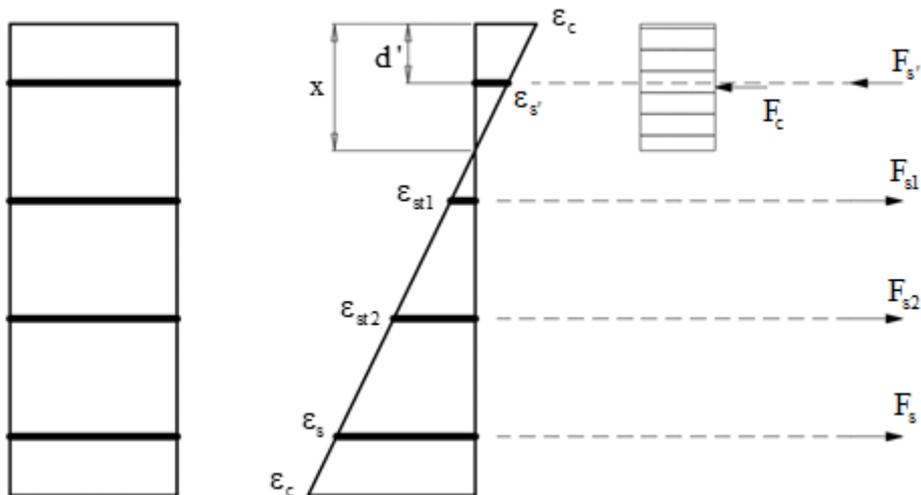


Figura 4.6: Diagramas de deformações no Domínio 2, Domínio 3, Domínio 4 e Domínio 4a.

A equação de equilíbrio é dada por

$$N_d = -F_c + \sum_{i=1}^n F_{si} \quad (4.16)$$

na qual $F_c = 0,85 f_{cd} A_c$.

A área comprimida, A_c , é obtida via Regra dos Trapézios para as diferentes posições da linha neutra, dada pela fórmula:

$$A = \frac{h}{2} (y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (4.17)$$

A equação do momento considera que os momentos externos são iguais aos momentos internos, então:

$$M_d = \frac{h}{2} N_d + F_c (h - 0,4x) - \sum_{i=1}^n F_{si} t_i \quad (4.18)$$

A rigor no Domínio 1, os esforços atuantes provocam o alongamento da barra, por isso, as deformações assumem valores positivos. Porém, a partir do domínio 2, há compressão do concreto e as deformações no concreto assumem valores negativos. Assim, tem-se:

$$-\frac{\varepsilon_c}{x} = -\frac{\varepsilon_{s'}}{(x - d')} \quad (4.19)$$

A posição da linha neutra x é calculada por

$$x = \frac{-\varepsilon_c d}{(-\varepsilon_c + \varepsilon_s)} \quad (4.20)$$

A deformação é calculada por:

$$\varepsilon_{s'} = \frac{\varepsilon_c (x - d')}{x} \quad (4.21)$$

As deformações das armaduras intermediárias são calculadas por:

$$\varepsilon_{sil} = \frac{-\varepsilon_c (h - x - t_{il})}{x} \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_{si2} = \frac{-\varepsilon_c (h - x - t_{i2})}{x} \quad (4.23)$$

c) **Domínio 5**

A Figura 4.7 apresenta o diagrama de deformações no Domínio 5.

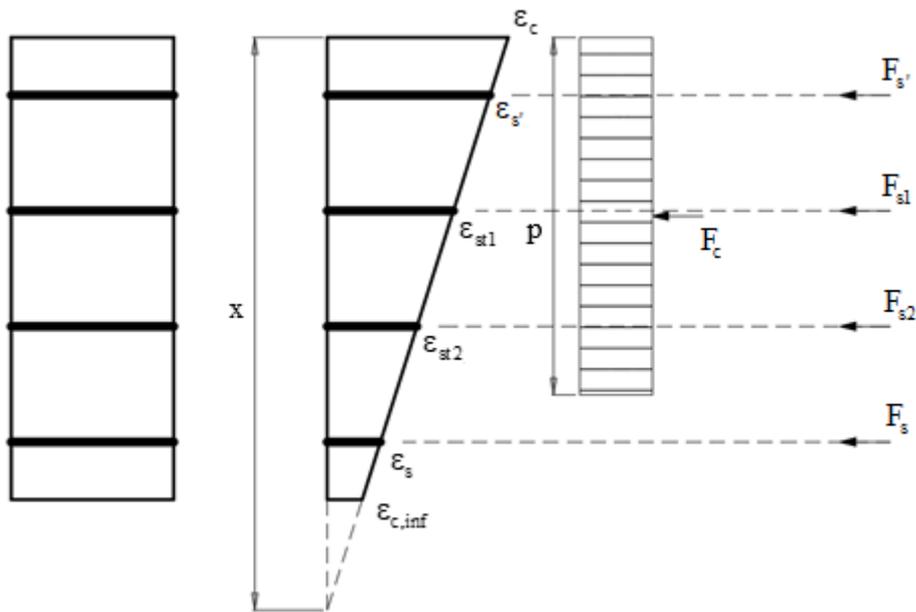


Figura 4.7: Diagrama de deformações no Domínio 5.

No Domínio 5 tem-se que, $x_{lim} = 1,25h$ e para concreto com $f_{ck} \leq 50$ MPa, $p = 0,8x$.

As equações de equilíbrio são dadas por

$$N_d = -F_c + \sum_{i=1}^n F_{si} \quad (4.24)$$

na qual $F_c = 0,85 f_{cd} A_{cse}$.

A_{cse} é a área comprimida da semi-elipse.

$$M_d = N_d y_{bar} + F_c (y_{bar} + b - 0,8x) - \sum_{i=1}^n F_{si} t_i \quad (4.25)$$

A posição da linha neutra x é calculada por

$$x = \frac{\varepsilon_c}{(\varepsilon_c - \varepsilon_{c,\text{inf}})} \quad (4.26)$$

Sendo $\varepsilon_{c,\text{inf}}$ a deformação específica na face inferior do concreto, dada por

$$\varepsilon_{c,\text{inf}} = \frac{-14 - 4\varepsilon_c}{4} \quad (4.27)$$

No Domínio 5, $\varepsilon_{c,\text{inf}}$ varia entre $-3,5\%$ e -2% . Desta forma, a deformação é calculada por:

$$\varepsilon_{s'} = \frac{\varepsilon_c (x - d')}{x} \quad (4.28)$$

As deformações das armaduras intermediárias são calculadas por:

$$\varepsilon_{\text{si1}} = \frac{\varepsilon_c (x - h + t_{i1})}{x} \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_{\text{si2}} = \frac{\varepsilon_c (x - h + t_{i2})}{x} \quad (4.30)$$

d) Construção da curva de interação

O raio de giração e a esbeltez do pilar são calculados através das Equações (4.31) e (4.32).

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (4.31)$$

$$\lambda = \frac{l_c}{i_x} \quad (4.32)$$

Com base nos dados da seção transversal no comprimento do pilar tem-se que $\lambda = 18,75$ e como a esbeltez limite é $\lambda_1 = 35$, não é necessário levar em conta os efeitos de segunda ordem no dimensionamento do pilar.

Com base nas informações acima, a carga normal de cálculo é $N_d = 56,7 \text{ kN}$ (de compressão) e o momento é $M_d = 11,34 \text{ kNm}$. Estas solicitações foram determinadas com base na definição da área de influência da laje e a partir da combinação das solicitações atuantes, obtiveram-se os valores de cada um dos carregamentos.

Pela Figura 4.8, verifica-se que o pilar de concreto com seção semi-elíptica de dimensões iguais a $a = 20 \text{ cm}$ e $b = 16 \text{ cm}$ suporta os carregamentos aplicados, pois os carregamentos se encontram na região interna da curva de resistência.

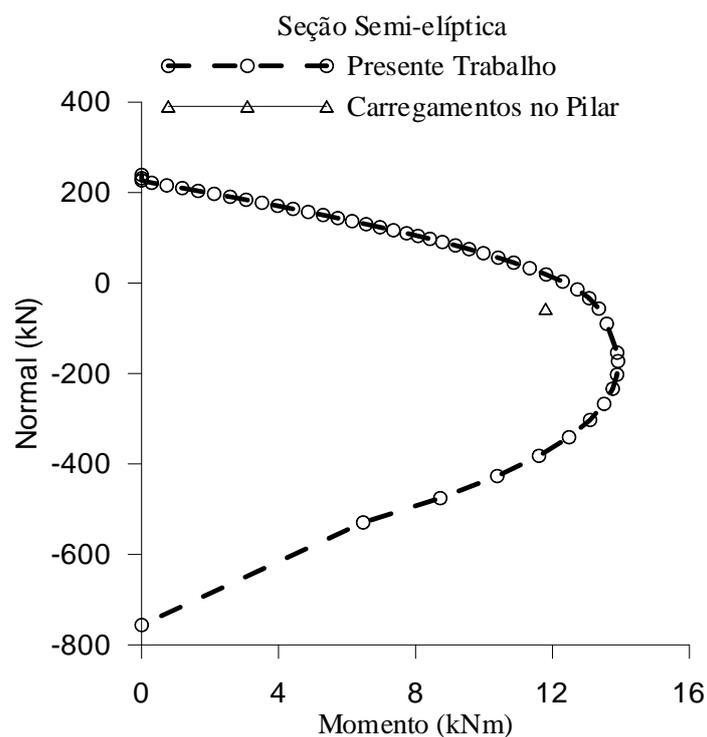


Figura 4.8: Curva de interação da seção semi-elíptica.

4.2.9 Dimensionamento à punção de uma laje lisa apoiada em um pilar com seção semi-elíptica

Neste exemplo serão utilizados os dados referentes aos carregamentos e ao pilar do exemplo anterior. Para a laje lisa será adotada uma altura de 12 cm com $A_{s,laje} = \varnothing 8,0 \text{ c} / 8,0 \text{ cm}$ (nas duas direções) e altura útil de $d = 9,5 \text{ cm}$. O esquema para este exemplo é ilustrado na Figura 4.9.

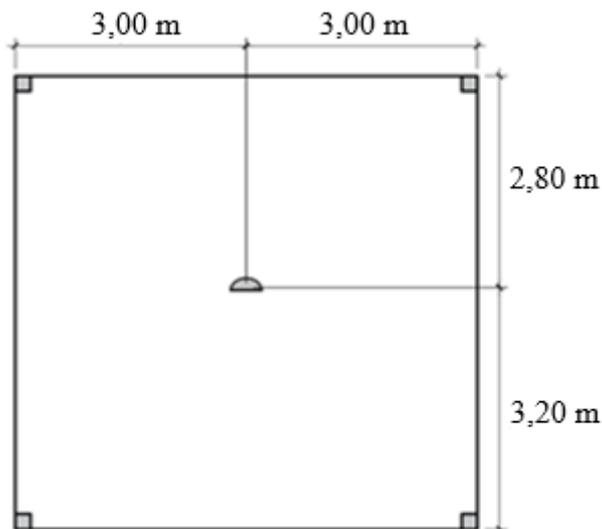


Figura 4.9: Laje lisa com pilar central de seção semi-elíptica.

Para a verificação da ligação, as tensões atuantes (τ_{sd}) e resistentes (τ_{Rd}) de cálculo serão calculadas e, a seguir, comparadas.

O dimensionamento será realizado através da implementação computacional das prescrições normativas, e para isso foi utilizada a linguagem computacional FORTRAN 90.

a) Verificação do contorno C

O perímetro e o Módulo de Resistência Plástico foram obtidos através do Método de Gauss-Legendre com 60 pontos, logo:

$$u = 96,3977 \text{ cm}$$

$$W_x = 418,9272 \text{ cm}^2$$

$$K_x = 0,45 \text{ (} C_1/C_2 = 0,40 \text{)}$$

$$N_d = 56,7 \text{ kN}$$

$$M_d = 11,34 \text{ kNm}$$

Utilizando-se o programa computacional desenvolvido, tem-se que:

$$\tau_{sd} = 1901,368 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_{Rd2} = 5091,429 \text{ kN/m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} < \tau_{Rd2}$, portanto a compressão diagonal no concreto está verificada e não há esmagamento do mesmo.

b) Verificação do Contorno C' (afastado 2d da face do pilar)

Considerando-se os mesmos critérios mostrados no item a, desta seção, tem-se que:

$$u = 193,6115 \text{ cm}$$

$$W_x = 1848,4421 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{sd} = 598,868 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_{Rd1} = 797,967 \text{ kN/m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} < \tau_{Rd1}$, portanto nesta aplicação não será necessária a armadura de punção.

4.2.10 Dimensionamento à punção de uma laje lisa apoiada em um pilar com seção elíptica

Nesta aplicação considerou-se para a seção transversal $a = 20 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$, $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$. O peso específico do concreto é $\gamma_{con} = 25 \text{ kN/m}^3$, a espessura da laje é $h_{laje} = 15 \text{ cm}$ com $A_{s,laje} = \varnothing 8,0 \text{ c} / 8,0 \text{ cm}$ (nas duas direções) e altura útil de $d = 12,5 \text{ cm}$, considerou-se uma sobrecarga igual a $s_c = 3,0 \text{ kN/m}^2$, peso próprio de $pp = 3 \text{ kN/m}^2$. O esquema para este exemplo é ilustrado na Figura 4.10.

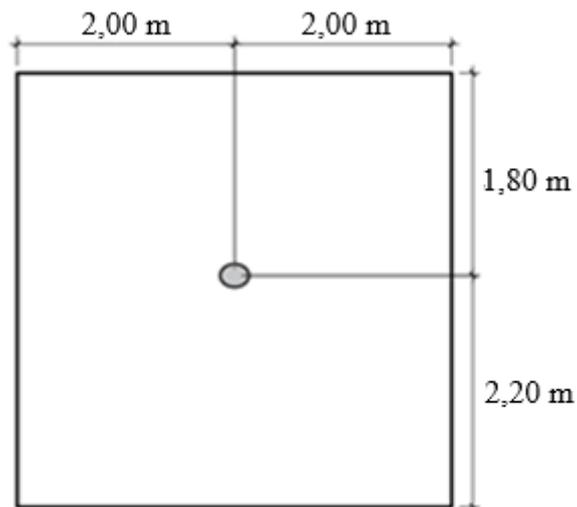


Figura 4.10: Laje lisa com pilar central de seção elíptica.

a) Verificação do contorno C

Neste exemplo o perímetro e o Módulo de Resistência Plástico também foram obtidos através do Método de Gauss-Legendre com 60 pontos, logo:

$$u = 112,7954 \text{ cm}$$

$$W_x = 1185,3749 \text{ cm}^2$$

$$K_x = 0,54 \text{ (} C_1/C_2 = 0,80 \text{)}$$

$$N_d = 151,2 \text{ kN}$$

$$M_d = 30,24 \text{ kNm}$$

Utilizando-se o programa computacional desenvolvido, tem-se que:

$$\tau_{sd} = 2174,456 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_{Rd2} = 3548,571 \text{ kN/m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} < \tau_{Rd2}$, portanto a compressão diagonal no concreto está verificada e não há esmagamento do mesmo.

b) Verificação do Contorno C' (afastado 2d da face do pilar)

$$u = 268,6542 \text{ cm}$$

$$W_x = 7090,2707 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{sd} = 634,492 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_{Rd1} = 597,999 \text{ kN/m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} > \tau_{Rd1}$, portanto será necessário o uso de algum tipo de armadura de punção.

Serão adotados para a armadura de punção, conectores tipo pino com $\varnothing 6,3 \text{ mm}$ e com $f_{ywd} = 434,78 \text{ MPa}$.

Apesar do valor da resistência de cálculo (f_{ywd}) da armadura de punção ser de $434,78 \text{ MPa}$, a ABNT NBR 6118 (2014) limita este valor em 300 MPa para conectores tipo pino.

Portanto, a área de aço necessária será:

$$A_{sw} = 0,9766 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Adotam-se, $4 \varnothing 6,3 \text{ mm}$ por linha de conectores, com distribuição perpendicular à face do pilar.

c) Verificação do Contorno C'' (afastado 2d da última linha de conectores)

A Figura 4.11 apresenta a disposição dos conectores adotados.

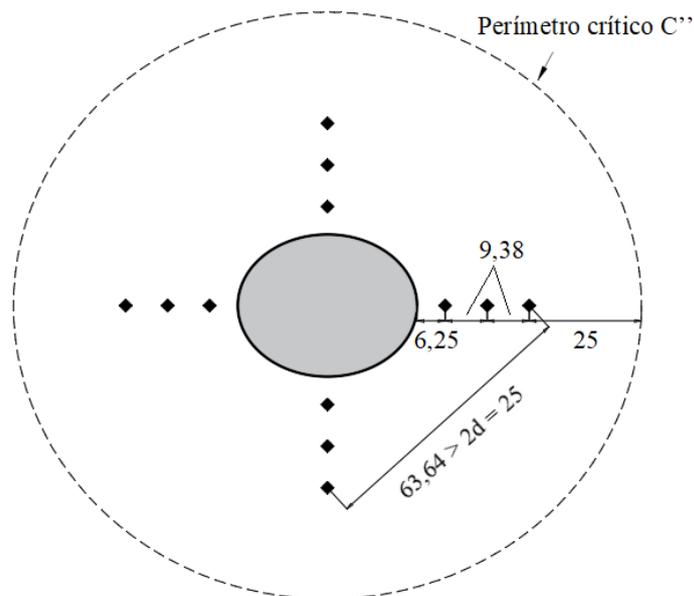


Figura 4.11: Disposição dos conectores (cm).

A tensão atuante de cálculo no contorno C'' deve ser comparada com a tensão resistente de cálculo, relativa a trechos sem armadura de punção, Logo:

$$u = 424,6625 \text{ cm}$$

$$W_x = 17944,0583 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{sd} = 357,640 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_{Rd1} = 597,999 \text{ kN/m}^2$$

Comparando-se a tensão atuante e a tensão resistente de cálculo, tem-se que $\tau_{sd} < \tau_{Rd1}$, portanto a armadura de punção adotada é suficiente para resistir aos esforços solicitantes.

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Introdução

No presente trabalho foi abordado o dimensionamento à punção de lajes lisas apoiadas em pilares de seção transversal elíptica e semi-elíptica. Neste contexto, objetivou-se também determinar as propriedades geométricas da seção transversal, através de expressões analíticas e a partir de diferentes métodos numéricos, dentre eles podem-se citar a Regra dos Trapézios, a Quadratura de Gauss (Método de Gauss-Legendre) e o método dos elementos finitos.

Dessa forma, utilizou-se um programa computacional implementado em linguagem FORTRAN 90 para obtenção dos resultados.

Para validar as implementações computacionais realizadas, compararam-se as respostas com resultados analíticos e com respostas obtidas a partir do software AutoCAD.

5.2 Conclusões

Nos exemplos apresentados observou-se uma boa concordância entre os resultados obtidos via Regra dos Trapézios, Método de Gauss-Legendre e pelo MEF com as respostas analíticas desenvolvidas e as obtidas a partir do software AutoCAD. Portanto, os resultados obtidos através dos métodos numéricos foram bem-sucedidos, contribuindo com boas respostas para o cálculo da área, perímetro, Módulo de Resistência Plástico e centroide de qualquer fatia comprimida da seção semi-elíptica.

Neste trabalho foram desenvolvidas duas expressões, uma para calcular o centroide e outra para calcular a área de cada parcela comprimida da seção semi-elíptica

utilizando a Regra dos Trapézios, esta expressão foi utilizada para a obtenção da curva de interação momento versus normal.

A armadura considerada para o pilar de seção transversal semi-elíptica mostrou-se suficiente para resistir aos esforços solicitados. A laje lisa apoiada neste pilar de seção transversal semi-elíptica foi verificada quanto a ocorrência do fenômeno de punção, seguindo as recomendações da ABNT NBR 6118 (2014). Neste caso, verificou-se que a laje está segura quanto à ocorrência deste fenômeno sem a necessidade da introdução de armaduras de punção, conforme foi mostrado no procedimento de cálculo apresentado neste trabalho.

Porém, no exemplo referente ao dimensionamento à punção de uma laje lisa apoiada em um pilar de seção transversal elíptica, observa-se que a partir dos cálculos realizados, há a necessidade de reforço da laje com as armaduras de punção (conectores), no qual a presença dos mesmos elevou consideravelmente a resistência da ligação.

5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

A seguir são sugeridas as seguintes pesquisas objetivando-se a continuidade deste trabalho:

- Realizar o dimensionamento à punção de lajes lisas apoiadas em pilares de seção transversal elíptica e semi-elíptica através de considerações normativas internacionais e realizar comparações das respostas com a norma brasileira;
- Realizar o dimensionamento à punção de lajes lisas apoiadas em pilares de seção transversal elíptica e semi-elíptica em posições diferentes na estrutura, como de canto e de borda;
- Construir a curva de interação para um pilar de seção transversal elíptica.
- Realização de campanhas experimentais com o fim de identificar mecanismos importantes de desempenho das lajes apoiadas em pilares de concreto armado com seções transversais elípticas e semi-elípticas;
- Fazer comparativos com as seções transversais quadradas, retangulares e circulares;
- Realizar programas experimentais com concretos que apresentam resistência característica à compressão entre 50 MPa e 90 MPa.

Referências

- ALBUQUERQUE, E. J. P. *Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento e Pilares de Centro Retangulares*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 205 p, 2010.
- ALBUQUERQUE, E. J. P. *Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento e Pilar de Canto Reentrante*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 379 p, 2015.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118- Projeto de estruturas de concreto- Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- BURDEN, R. L., FAIRES, J. D., BURDEN, A. M. *Análise numérica*. 3. ed. bras. São Paulo: Cengage Learning, 879 p, 2016.
- CORDOVIL, F. A. B., FUSCO, P. B. *Ensaio de Placas de Concreto Armado - Punção Excêntrica*. In: XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Tucumán, p. 141-151, 1995.
- DAMASCENO, L. S. R. *Análise Experimental de Lajes Lisas Unidirecionais de Concreto Armado com Pilares Retangulares ao Puncionamento*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, PA, 213p, 2007.
- ELGABRY, A. A., GHALI, A.. *Moment Transfer by Shear in Slab-Column Connections*. ACI Journal, v.93, n.2, p.187-196. Mar, 1996.
- FERREIRA, A. M. *Análise da Punção e Flechas em Lajes Maciças sem Vigas de Concreto Armado de Acordo com as Prescrições da NBR 6118:2003*. Dissertação

de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 182p, 2005.

FERREIRA, M. P. *Análise Experimental de Lajes Lisas Unidirecionais de Concreto Armado ao Puncionamento Simétrico ou Assimétrico*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, PA, 217p, 2006.

FERREIRA, M. P. *Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armaduras de Cisalhamento e Momentos Desbalanceados*. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 275p, 2010.

FUSCO, P.B. *Investigação Experimental Sobre o Cisalhamento em Lajes de Concreto Armado*. Boletim técnico, BT/PEF 8505), EPUSP. São Paulo, 1985.

GOMES, R. B. *Punching Resistance of Reinforced Concrete Flat Slabs with Shear Reinforcement*. PhD Thesis. The Polytechnic of Central London. London, 1991.

HALLGREN, M, *Punching Shear Capacity of Reinforced High Strength Concrete Slabs*. Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, 206 p, 1996.

KING, S., DELATTE, N. "Collapse of 2000 Commonwealth Avenue: Punching Shear Case Study." *J.Perform.Constr.Facil.*, 18(1), 54-61, 2004

LIMA, A. W. *Estudo experimental e analítico de punção em lajes lisas de concreto armado utilizando polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC) como armadura de cisalhamento*. 2012. 166 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 2012.

LOPES, J. F. P. *Resistência ao Puncionamento dos Cantos de Lajes de Betão Armado*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra. Coimbra, 2012.

MARTINS, M. F. N. *Resistência ao Puncionamento de Bordos de Lajes de Betão Armado*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra. Coimbra, 2012.

- MELGES, J. L. P. *Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teórico-experimental*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 252 p, 1995.
- MELGES, J. L. P. *Análise Experimental da Punção em Lajes de Concreto Armado e Protendido*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 406 p, 2001.
- MELO, G. S. S. A., *Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs after Local Failure*. PhD Thesis, Polytechnic of Central London, London, England, 214p, 1990.
- MELO, G. S. S. A. *Proposição de Item da Norma com Referência ao Cálculo de Armadura Contra Colapso Progressivo em Lajes Cogumelo*. REIBRAC, 36., Anais. V.2, p.725-734. Porto Alegre, 1994.
- MONTOYA, P. J., MESEGUER, A. G. & CABRÉ, F. H. *Hormigón Armado*, 14^a edição, Editora Gustavo Gili S.A. Barcelona, 2001.
- OLIVEIRA, D. R. C. *Análise Experimental de Lajes Cogumelo de Concreto Armado de Alta Resistência com Armadura Inclinada de Punção*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília. Brasília, 137p, 1998.
- PAIVA, O. S., FERREIRA, M. P., OLIVEIRA, D. R. C., LIMA NETO, A. F., TEIXEIRA, M. R. *Influência do Índice de Retangularidade dos Pilares e das Condições de Contorno na Resistência à Punção de Ligações Laje-pilar*. Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, Belém-PA, v.8, n.3, p.260-295, jun. 2015.
- PINHEIRO, L. M. ; BARALDI, L. T. ; POREM, M. E. *Concreto Armado: Ábacos para Flexão Oblíqua*. Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1994.
- RABELLO, F. T. *Análise Comparativa de Normas para a Punção em Lajes de Concreto Armado*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 248 p, 2010.

- RABELLO, F. T. *Estudo de Lajes Lisas de Concreto com Visão Integrada de Flexão e Punção*. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina., Florianópolis, SC, 268 p, 2016.
- REGAN, P. E. *Behavior of reinforced concrete flat slabs*. Report 89, Construction Industry Research and Information Association (CIRIA); London, p89, Feb. 1981.
- REGAN, P. E.; BRAESTRUP, M. W. *Punching shear in reinforced concrete: a state of the art report*. CEB Bulletin d'Information, n.168, jan, 1985.
- REGAN, P. E. *Shear Combs, Reinforcement Against Punching*. The Structural Engineer. London, 1985.
- SACRAMENTO, P. V. P, FERREIRA, M. P., OLIVEIRA, D. R. C., MELO, G. S. S. A. *Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado sem Armadura de Cisalhamento*. Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, Belém-PA, v.5, n.5, p.659-691, out. 2012.
- SILVA, V. H. M. P. *Dimensionamento de Lajes Fungiformes com Irregularidades Limitadas em Planta*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2013.
- TRAUTWEIN, L. M. *Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado: Análise Experimental e Numérica*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 277 f, 2006.
- VENTURINI, W. S. *Dimensionamento de Peças Retangulares de Concreto Armado Solicitadas à Flexão Reta*. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1987
- WOOD, J. G. M., *Pipers Row Car Park, Wolverhampton: Quantitative Study of the Causes of the Partial Collapse on 20th March 1997*. Report presented to Structural Studies & Design Ltd, England, 1997, 209 p.