

**Universidade Federal de Ouro Preto**

Escola de Minas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PROPEC

---

Dissertação

---

**Análise Inelástica de  
Segunda Ordem de Arcos  
Metálicos**

*Lidiane Rodrigues Reis Maia de Deus*

Ouro Preto  
2019



**UFOP**

Universidade Federal de Ouro Preto - Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **ANÁLISE INELÁSTICA DE SEGUNDA ORDEM DE ARCOS METÁLICOS**

**Lidiane Rodrigues Reis Maia de Deus**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

Campus Morro do Cruzeiro  
Ouro Preto, MG - Brasil  
Fevereiro, 2019

# **ANÁLISE INELÁSTICA DE SEGUNDA ORDEM DE ARCOS METÁLICOS**

**AUTORA: LIDIANE RODRIGUES REIS MAIA DE DEUS**

Essa dissertação foi apresentada em seção pública e aprovada em      de fevereiro de 2019,  
pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D.Sc. – UFOP (Presidente)

Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha, D.Sc. – UFOP

Prof. Dr. Igor José Mendes Lemes, D.Sc. – UFLA

Dr. Rharã de Almeida Cardoso, D. Sc – UFJF

*“O sucesso é a soma de pequenos esforços, repetidos  
dia sim, e no outro dia também.”*  
Robert Collier

*“Genialidade é esforço.”*  
Johann Wolfgang von Goethe

À minha família e ao meu orientador.

# Agradecimentos

À Deus, que cuida de mim em todas as jornadas a que me proponho, e cujos caminhos maravilhosos me permitiram realizar esse trabalho.

À Maria, mãezinha, que intercede por mim e aquece meu coração sempre que necessito.

Aos meus pais, Rosilene e Gilberto, por serem a minha essência, minha consciência, aqueles que me ensinaram que os caminhos estão sempre abertos para os que são humildes, e por torcerem tanto pelo meu sucesso.

Ao meu marido, Marco Túlio, por superar essa jornada comigo. Por estar ao meu lado e me apoiar incondicionalmente, mesmo que às vezes o caminho tenha sido duro. Por valorizar o meu esforço de uma forma única, e sempre me ajudar a dar o melhor de mim, sem julgamentos.

Ao meu Orientador, Ricardo, pela valiosa contribuição para o meu crescimento acadêmico, e ainda mais pelo crescimento pessoal, por ser inspiração como um mentor dedicado, disciplinado e que ama o que faz.

À Igor, Jéssica e Dalilah, pelo apoio necessário no desenvolvimento dessa dissertação, sempre cheios de boa vontade.

À minhas Fernandas, Fernanda Andrade e Fernanda Camargo. Compartilhamos muitas dificuldades de escrever as respectivas dissertações, mesmo que às vezes em áreas completamente diferentes.

Aos colegas do PROPEC, por passarem comigo pelas dificuldades das disciplinas e pelos momentos felizes. Todos crescemos um pouco juntos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) pelos ensinamentos.

À CAPES e à UFOP, pela ajuda financeira.

A todos, que de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

# ANÁLISE INELÁSTICA DE SEGUNDA ORDEM DE ARCOS METÁLICOS

**Lidiane Rodrigues Reis Maia de Deus**

Fevereiro, 2019

*Orientadores:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Paulo Anderson Santana Rocha

Os arcos são estruturas utilizadas desde o Egito Antigo como forma de vencer grandes vãos, já que, em alguns elementos estruturais, a curvatura introduz ganhos de resistência. Por apresentar comportamento fortemente não linear, é interessante que as formulações numéricas utilizadas na modelagem das estruturas arqueadas levem em consideração as várias fontes de não linearidades, tais como as geométricas e do material. Este trabalho se insere no contexto da análise inelástica de segunda ordem (AISO) de arcos metálicos. São estudados arcos com as mais diversas características, desde os muito abatidos até os muito pouco abatidos, diversas seções transversais, condições de apoio e carregamentos, incluindo a carga térmica. Para a realização da AISO, utiliza-se a formulação do Referencial Corrotacional (RCR) para introduzir os efeitos geométricos não lineares. O comportamento inelástico do material é modelado via acoplamento do Método da Rótula Plástica Refinado com o Método da Compatibilidade de Deformações (MRPR/MCD), e para a solução do problema estático não linear utiliza-se uma estratégia incremental-iterativa baseada no método de *Newton-Raphson* Modificado. Nos exemplos simulados, foram analisadas as trajetórias de equilíbrio, a influência da razão de abatimento, tipos de apoio, condições de carregamento, curvas de resistência dos arcos, dentre outros fatores pouco explorados na literatura em geral, como a utilização de seções tubulares e o índice de plastificação das seções. Os resultados obtidos com a metodologia numérica empregada apresentam boa concordância com outros resultados numéricos da literatura.

**Palavras-Chave:** Arcos metálicos, Inelasticidade, MRPR/MCD, Formulação corrotacional, Carga térmica.

Abstract of Dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

# **INELASTIC SECOND ORDER ANALYSIS OF STEEL ARCHES**

**Lidiane Rodrigues Reis Maia de Deus**

February, 2019

*Advisors:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Paulo Anderson Santana Rocha

The arches are structures used since the ancient Egypt as a way to overcome large spans, since that for a few structural elements, curvature introduces strength gains. For presenting strongly nonlinear behavior, it is interesting that the numerical formulations used in the modeling of arched structures consider the various sources of nonlinearities, such as geometric and material nonlinearities. This work is inserted in the context of the second-order inelastic analysis (SOIA) of steel arches. The analysis of arches with various characteristics, both shallow and non-shallow arches, several cross sections, boundary and loads conditions, including thermal load, are discussed. For the SOIA, the Co-rotational formulation (CR) is used to introduce non-linear geometric effects. The inelastic behavior of the material is modeled by coupling the Refined Plastic Hinge Method (RPHM) with the Strain Compatibility Method (RPHM/SCM), and for the solution of the nonlinear static problem, an incremental-iterative strategy based on Newton-Raphson modified method is used. In the simulated examples, attention was given to the equilibrium path, the influence of rise-to-span ratio, type of support, loading conditions, full yield curves, among other factors not much explored in the general literature, for example the use of tubular sections and the plastification index of sections. The results obtained with the numerical methodology used show good agreement with other numerical results of the literature.

**Keywords:** Steel arches, Inelasticity, RPHM/SCM, Co-rotational formulation, Thermal load.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Siglas</b>	<b>xiv</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1. Os Arcos e suas Aplicações na Engenharia Civil	1
1.2. Objetivos da Dissertação	4
1.3. Metodologia e Principais Contribuições	5
1.4. Organização da Dissertação	6
<b>Estado da Arte</b>	<b>7</b>
2.1. Introdução	7
2.2. Estabilidade Elástica de Arcos	7
2.3. Estabilidade Inelástica de Arcos	9
2.4. Arcos com Ligações Semirrígidas	12
2.5. Arcos em Situação de Incêndio e Outros Temas	13
2.6. Estudo de Arcos no Âmbito do PROPEC	14
2.7. O Sistema Computacional CS-ASA	16
2.7.1. Módulos CS-ASA/FA e CS-ASA/FSA	18
<b>Fundamentos da Análise Avançada</b>	<b>20</b>
3.1. Introdução	20
3.2. Formulação Geométrica Não Linear	20
3.2.1. Vetores de Deslocamento Nodal Global $\mathbf{u}_g$ e Local $\mathbf{u}_l$	21
3.2.2. Matrizes de Rigidez Global $\mathbf{K}_g$ e Local $\mathbf{K}_l$	23
3.3. Formulação Inelástica: Acoplamento MRPR/MCD	25
3.3.1. Método da Compatibilidade de Deformações	27
3.3.2. Relação Constitutiva do Aço em Temperatura Ambiente	28
3.3.3. Relação Momento-Curvatura e Rigidezes Generalizadas	30
3.3.4. Curva de Interação $NM$	34
3.4. Metodologia para Solução do Problema Estático Não Linear	34
3.4.1. Primeira Etapa: Solução Incremental Predita	36
3.4.2. Segunda Etapa: Ciclo de Iterações	37



3.5.	Problema Termoestrutural	39
3.5.1.	Curvas de Incêndio	39
3.5.2.	Propriedades Termomecânicas do Aço sob Altas Temperaturas	40
3.5.3.	Análise Térmica Transiente do Elemento Estrutural via MEF	42
3.5.4	Análise Termoestrutural	45
<b>Análises Numéricas</b>		<b>48</b>
4.1.	Introdução	48
4.2.	Arcos com Perfil I HEB-300	49
4.2.1.	Estudo da Malha	50
4.2.2.	Trajétórias de Equilíbrio	51
4.2.3.	Carga Limite de Plastificação	52
4.2.4.	Capacidade Resistente da Seção	53
4.2.5.	Influência das Condições de Bordo	53
4.3.	Arcos com Perfil I 10UB29	55
4.3.1.	Estudo da Malha	56
4.3.2.	Trajétórias de Equilíbrio	57
4.3.3.	Estudo da Relação $f/L$ e Capacidade Resistente da Seção	60
4.4.	Arcos com Seções Tubulares Vazadas e Seção Retangular Cheia	63
4.4.1.	Trajétórias de Equilíbrio e Configuração Deformada	64
4.4.2.	Arco Circular Biapoiado com SCV: Relação Diâmetro $D$ x Espessura $t$	68
4.4.3.	Índice de Plastificação e Capacidade Resistente da Seção	69
4.5.	Arco com Perfil I Laminado em Situação de Incêndio	70
4.5.1.	Análise Estrutural em Temperatura Ambiente	71
4.5.2.	Análise Térmica do Perfil I Laminado do Tipo UB 406x140x46	72
4.5.3.	Análise Termoestrutural	75
4.6.	Pórtico Tipo Galpão com Arco Metálico	78
<b>Considerações Finais</b>		<b>82</b>
5.1.	Introdução	82
5.2.	Conclusões	83
5.3.	Sugestões para Trabalhos Futuros	85
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>87</b>
<b>Apêndice A - Matriz de Rigidez do Elemento Corrotacional</b>		<b>102</b>
A.1.	Termos da Matriz de Rigidez	102

# Lista de Figuras

Figura 1.1. Aqueduto de Segóvia, Espanha _____	2
Figura 1.2. Aqueduto Pont du Gard, França _____	2
Figura 1.3. Cobertura em arco treliçado vencendo grandes vãos, Brasil _____	2
Figura 1.4. Ponte Sando, Suécia _____	3
Figura 1.5. Ponte em Suzhou, China _____	3
Figura 1.6. Ópera de Arame, vistas externa e interna, Brasil _____	3
Figura 2.1. Equação de interação proposta por Pi e Trahair (1999) para os arcos metálicos _____	10
Figura 2.2. Método gráfico para definição da carga plástica de colapso proposto por Spoorenberg <i>et al.</i> (2012a) _____	11
Figura 2.3. Fatores de modificação do EN 1993-1-2:2005 desenvolvidos por Dimopoulos e Gantes (2008) _____	12
Figura 2.4. Pesquisas realizadas no PROPEC envolvendo arcos metálicos _____	14
Figura 2.5. Tipos de análises realizadas no sistema CS-ASA _____	16
Figura 2.6. CS-ASA: análises estruturais avançadas à temperatura ambiente _____	18
Figura 2.7. CS-ASA: análises estruturais avançadas à temperatura elevada _____	19
Figura 3.1. Deslocamentos no sistema de coordenadas global _____	22
Figura 3.2. Elemento finito no sistema corrotacional _____	26
Figura 3.3. Campo de deformações para um problema plano (LEMES, 2018) _____	28
Figura 3.4. Relação constitutiva do aço dos perfis: modelo trilinear (LEMES, 2018) _____	29
Figura 3.5. Modelo normativo para descrição da tensão residual em perfil I _____	30
Figura 3.6. Modelo de distribuição da tensão residual em perfil tubular retangular _____	30
Figura 3.7. Relação $M \times \Phi$ para o cálculo das rigidezes generalizadas _____	33
Figura 3.8. Relação constitutiva do aço em situação de incêndio – sem encruamento _____	40
Figura 3.9. Variação da temperatura no intervalo de tempo $\Delta t$ _____	44
Figura 4.1. Arcos abatidos e pouco abatidos _____	49
Figura 4.2. Malha 4 da Tabela 4.3 _____	51

Figura 4.3. Trajetórias de equilíbrio do arco metálico _____	52
Figura 4.4. Capacidade resistente do perfil I HEB-300 e variação $NM$ de seções selecionadas dos arcos _____	54
Figura 4.5. Arcos abatidos e pouco abatidos com perfil I HEB-300: influência das condições de bordo _____	54
Figura 4.6. Arcos com perfil I 10UB29 _____	55
Figura 4.7. Condições de carregamento adotadas _____	56
Figura 4.8. Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga concentrada no topo _____	58
Figura 4.9. Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga concentrada à $L/4$ _____	58
Figura 4.10. Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga vertical distribuída _____	59
Figura 4.11. Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga vertical distribuída parcial _____	59
Figura 4.12. Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga radial _____	60
Figura 4.13. Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de $f/L$ _____	61
Figura 4.14. Trajetórias de equilíbrio: caso simétrico x caso assimétrico ( $5^\circ < 2\Theta < 220^\circ$ ) _____	62
Figura 4.15. Arcos circulares biapoiados _____	63
Figura 4.16. Trajetórias de equilíbrio do arco com perfil SCV _____	64
Figura 4.17. Trajetória de equilíbrio de arcos pouco abatidos com seções vazadas _____	65
Figura 4.18. Evolução da configuração deformada do Arco 5 (SCV) _____	66
Figura 4.19. Arco circular muito abatido biengastado com SRC (Arco 6) _____	67
Figura 4.20. Evolução da configuração deformada do Arco 6 (SRC) _____	67
Figura 4.21. Trajetórias de equilíbrio do arco pouco abatido biapoiado com SCV _____	68
Figura 4.22. Índice de plastificação do arco com SCV (Arco 5) _____	69
Figura 4.23. Arco biengastado com SCV (Arco 5): curva de resistência e interação $NM$ de seções selecionadas _____	70
Figura 4.24. Arco com perfil I laminado UB 406x140x46 em situação de incêndio _____	71
Figura 4.25. Trajetórias de equilíbrio dos arcos em temperatura ambiente _____	72
Figura 4.26. Curva de resistência do perfil I laminado do tipo UB 406x140x46 e variação $NM$ em seções selecionadas dos arcos biapoiado e biengastado _____	73
Figura 4.27. Discretização da seção transversal através do elemento finito linear plano Q4 _____	73

Figura 4.28. Curvas temperatura $T$ x tempo $t$ para diferentes pontos do perfil I laminado do tipo UB 406x140x46: 4 faces expostas ao fogo _____	74
Figura 4.29 Curvas temperatura $T$ x tempo $t$ para diferentes pontos do perfil I laminado do tipo UB 406x140x46: 1 e 3 faces expostas ao fogo _____	75
Figura 4.30. Curvas limites de resistências ( $NM$ ) do perfil UB406x140x46: 4 faces expostas ao fogo _____	76
Figura 4.31. Variação do deslocamento vertical $v_c$ no centro do arco com a temperatura $T$ para duas condições de contorno da estrutura: biapoiada e biengastada _____	77
Figura 4.32. Variação dos parâmetros de rigidez $EA$ e $EI$ com a temperatura $T$ _____	78
Figura 4.33. Sistemas estrutural metálico com pórticos tipo galpão _____	79
Figura 4.34. Trajetória de equilíbrio e evolução da configuração deformada do pórtico metálico tipo galpão biengastado _____	80
Figura 4.35. Diagramas de esforços solicitantes do pórtico metálico tipo galpão _____	80
Figura 4.36. Índice de plastificação em seções do arco metálico _____	81

# Lista de Tabelas

Tabela 3.1. Estratégia numérica adotada para a construção da curva de interação <i>NM</i> _____	35
Tabela 3.2. Estratégia de solução do problema estrutural estático não linear _____	41
Tabela 3.3. Fatores de redução da curva tensão-deformação do aço sob altas temperaturas _____	42
Tabela 3.4. Solução do problema transiente de condução de calor – método incremental simples ____	45
Tabela 3.5. Estratégia de solução adotada para os problemas termomecânicos _____	47
Tabela 4.1. Propriedades do aço _____	49
Tabela 4.2. Estudo da malha (arco e seção transversal (ST)): Spoorenberg <i>et al.</i> (2012a) _____	50
Tabela 4.3. Estudo da malha (arco e seção transversal (ST)): presente trabalho _____	51
Tabela 4.4. Carga limite de plastificação para arcos abatidos e pouco abatidos _____	53
Tabela 4.5. Número de elementos utilizados na discretização dos arcos _____	57
Tabela 4.6. Propriedades do aço _____	71
Tabela 4.7. Carga limite dos arcos em temperatura ambiente _____	72
Tabela 4.8. Valor da carga concentrada <i>P</i> adotados na análise termomecânica _____	76
Tabela 4.9. Temperaturas críticas para os arcos em situação de incêndio _____	78
Tabela 4.10. Propriedades do aço _____	79

# Lista de Siglas

<b>AFA-OPSM</b>	Advanced Frame Analysis - Ouro Preto School of Mines
<b>AIPO</b>	Análise inelástica de primeira ordem
<b>AIISO</b>	Análise inelástica de segunda ordem
<b>CP</b>	Centroide plástico
<b>CS-ASA</b>	<i>Computational System for Advanced Structural Analysis</i>
<b>CS-ASA/FA</b>	<i>Computational System for Advanced Structural Analysis/Fire Analysis</i>
<b>CS-ASA/FSA</b>	<i>Computational System for Advanced Structural Analysis/Fire Structural Analysis</i>
<b>DEN</b>	Diagrama de esforço normal
<b>DMF</b>	Diagrama de momento fletor
<b>GSP</b>	Generalized Stiffness Parameter
<b>MCD</b>	Método da Compatibilidade de Deformações
<b>MDF</b>	Método das Diferenças Finitas
<b>MDG</b>	Método do Deslocamento Generalizado
<b>MEF</b>	Método dos Elementos Finitos
<b>MRPR</b>	Método da Rótula Plástica Refinado
<b>NLG</b>	Não linearidade geométrica
<b>NLM</b>	Não linearidade do material
<b>NM</b>	Curva de interação esforço normal (N) – momento fletor (M)
<b>NMDR</b>	Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais
<b>PROPEC/UFOP</b>	Programa de Pós-Grad. em Eng. Civil da Universidade Federal de Ouro Preto
<b>PTV</b>	Princípio dos Trabalhos Virtuais
<b>RCR</b>	Formulação do Referencial Corrotacional
<b>RLA</b>	Referencial Lagrangiano Atualizado
<b>SCV</b>	Seção circular vazada
<b>SQV</b>	Seção quadrada vazada
<b>SRC</b>	Seção retangular cheia
<b>SRV</b>	Seção retangular vazada
<b>SSRC</b>	Structural Stability Research Council

# CAPÍTULO 1

## Introdução

### 1.1. Os Arcos e suas Aplicações na Engenharia Civil

Estaticamente, a função de uma estrutura se traduz na capacidade que ela tem de receber carregamentos e de transmiti-los para o solo, de modo a constituir um conjunto estável. Dessa forma, a estrutura é compreendida como um sistema que recebe solicitações externas, as absorve internamente, e as transmite até os apoios, onde encontram o equilíbrio (SUSSEKIND, 1981; NUNES, 2009).

Em estruturas de grande extensão, entretanto, a absorção e condução dos esforços se torna mais complicada. Uma das formas mais utilizadas para melhorar a capacidade das estruturas de vencer grandes vãos é utilizar a curvatura nos elementos, que introduz ganhos de resistência quando comparados a elementos retos.

Os arcos estruturais surgiram no Egito Antigo, e seu uso mais remoto data de 3500 a.C. (TURNER, 1996), viabilizando a maior parte das estruturas construídas nesse período, e se tornando a base da arquitetura Europeia (JORDAN, 1985). Esse ganho de resistência, aliado ao fato dos esforços de compressão e flexão serem predominantes nos arcos em detrimento dos esforços de tração tornaram os arcos estruturas muito apropriadas para essa época, visto que os materiais disponíveis nesse período eram principalmente particulados rochosos, que em suma tem baixa resistência à tração e alta resistência a compressão. Essa característica tornava o arco uma estrutura particularmente vantajosa do ponto de vista da engenharia.

As Figuras 1.1 e 1.2 trazem, respectivamente, dois exemplos de construções romanas que perduraram até hoje: o Aqueduto de Segóvia, localizado na Espanha, com 813m de comprimento e 28m de altura; e a Pont du Gard, uma ponte-aqueduto localizada na França construída pelos romanos no século I da nossa era, considerada a ponte antiga mais alta do mundo e que se encontra em excelente estado de conservação.



Fonte: <http://www.italianaware.com>

**Figura 1.1.** Aqueduto de Segóvia, Espanha



Fonte: <http://www.pontdugard.com>

**Figura 1.2.** Aqueduto Pont du Gard, França

Na atualidade, com estruturas que precisam vencer vãos cada vez maiores e espaços cobertos cada vez mais amplos que demandam pouca obstrução por elementos estruturais devido ao uso e ocupação do espaço, os arcos continuam sendo uma forma de viabilizar projetos mais leves e econômicos, utilizando materiais mais resistentes e novas técnicas construtivas. Os arcos mais comuns encontrados nas construções atuais são de aço, concreto armado, mistos de aço-concreto e de madeira. Em termos de geometria, os arcos podem ser abatidos e pouco abatidos, circulares, senoidais, parabólicos ou elípticos e podem ter seções transversais variadas, passando pelos perfis I, tubulares vazados ou cheios (aço), tubulares preenchidos (mistos aço-concreto) retangulares ou circulares (madeira ou concreto armado). Podem ser biapoiados, biengastados, triarticulados ou ainda ter ligações semirrígidas.

A principal utilização dos arcos hoje em dia está na construção de pontes, túneis e coberturas, ou seja, estruturas que se caracterizam pelos grandes vãos. Como exemplo, a Figura 1.3 apresenta uma cobertura construída com arcos treliçados com vãos de 119m, localizada em Cachoeira Paulista, São Paulo.



Fonte: <https://mapio.net>

**Figura 1.3.** Cobertura em arco treliçado vencendo grandes vãos, Brasil.



As Figuras 1.4 e 1.5 apresentam, respectivamente, a ponte Sandö (vão livre de 264m), construída com arcos de concreto armado, localizada no município de Kramfors, norte da Suécia e a ponte sobre o rio Xujiang, em Suzhou, na China, construída de madeira, com vão de 75,7m, um dos maiores do mundo nesse material. Por fim, a Ópera de Arame, na Figura 1.6, é um teatro brasileiro, localizado na cidade de Curitiba, que tem uma cúpula composta por diversos arcos treliçados metálicos com seção tubular variável, além de outros arcos estruturais.



Fonte: destinationhogakusten.com (Agne Saterberg)

**Figura 1.4.** Ponte Sando, Suécia



Fonte: www.chinesetimeschool.com

**Figura 1.5.** Ponte em Suzhou, China



Fonte: <https://www.parquedaspedreiras.com.br>



Fonte: Usiminas, 1998

**Figura 1.6.** Ópera de Arame, vistas externa e interna, Brasil

É comum que os arcos apresentem esforços de compressão e flexão que dependem principalmente das condições de apoio e carregamento atuantes. Cargas assimétricas geram mais esforços de flexão, assim como as ligações engastadas ou semirrígidas.

Justamente por estarem submetidos principalmente à compressão, os arcos podem sofrer flambagem no plano, ou fora do plano. Para impedir a flambagem lateral (fora do plano), é comum usar travamentos pontuais. Já para impedir a flambagem no próprio plano, é necessário aumentar a rigidez das peças, ou modificar a geometria dos arcos.

Mesmo com diversas vantagens estruturais e arquitetônicas, os arcos tendem a apresentar comportamento fortemente não linear. Dentre as fontes de não linearidade, merecem destaque: as geométricas (grandes deslocamentos e rotações, imperfeição inicial e excentricidade), do material (comportamento inelástico, elastoplástico, endurecimento) e da ligação com os apoios (semirrigidez, apoios assimétricos). Por isso é importante que as formulações numéricas utilizadas na modelagem das estruturas arqueadas levem em consideração esses efeitos não lineares.

## 1.2. Objetivos da Dissertação

A presente pesquisa se insere no contexto da análise inelástica de segunda ordem (AISO) de arcos metálicos. Propõe-se aqui a análise não linear de diversos sistemas estruturais, desde os arcos muito abatidos, abatidos, pouco abatidos até os muito pouco abatidos, com seções transversais em perfil I, tubulares vazadas (circulares, retangulares e quadradas) e retangulares cheias. As condições de apoio consideradas são as biapoiadas ou biengastadas. Os carregamentos compreendem as cargas concentradas simétricas (no topo do arco, principalmente) e assimétricas (cargas aplicadas a 1/4 da projeção horizontal do arco), cargas distribuídas verticais simétricas (carga distribuída em toda a projeção horizontal do arco) e assimétricas (carga distribuída em parte da projeção horizontal do arco), cargas radiais, além da carga térmica (arcos em situação de incêndio).

Para realização dessas AISO será utilizado o programa computacional CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; SILVA, 2009; LEMES, 2018), que vem sendo desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto (PROPEC/UFOP). O CS-ASA será detalhado na Seção 2.7, Capítulo 2. No sentido de validar as modelagens realizadas neste trabalho, serão usados resultados numéricos extraídos da literatura, além daqueles obtidos através dos softwares MASTAN2 (ZIEMIAN e MCGUIRE, 2000; [www.mastan2.com](http://www.mastan2.com)) e SAFIR (FRANSSEN, 2005; [www.uee.uliege.be](http://www.uee.uliege.be)).

Como objetivos específicos, têm-se:

- Estudar a influência da discretização dos modelos (arco e seção transversal);
- Avaliar os esforços internos predominantes nos arcos metálicos;
- Estudar a influência da posição do carregamento na resistência dos arcos metálicos;
- Estudar a influência da relação de abatimento  $f/L$  dos arcos, sendo  $f$  a flecha e  $L$  o vão do arco;

- Estudar o comportamento dos arcos em situação de incêndio;

Por fim, vale informar que o tema desta dissertação está em concordância com os objetivos do PROPEC, e está relacionada com as seguintes linhas de pesquisa do programa:

- *Mecânica Computacional*: que objetiva o desenvolvimento e aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
- *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas*: que visa estudar isoladamente ou em conjunto o comportamento (resistência e estabilidade) das diversas partes de uma estrutura.

### **1.3. Metodologia e Principais Contribuições**

Trata-se de uma dissertação com ênfase na solução numérica não linear de arcos estruturados em aço. Várias formulações implementadas no CS-ASA por diversos autores (SILVA, 2009; SILVA, 2016; BARROS, 2016; LEMES, 2018; PIRES, 2018) são utilizadas.

No contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), utiliza-se a formulação do Referencial Corrotacional (RCR) no acompanhamento do movimento do arco (SILVA, 2016) e assim introduzir os efeitos geométricos não lineares.

O comportamento inelástico do material é modelado via acoplamento do Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR), que considera a plastificação na seção transversal de forma gradativa nos pontos nodais dos elementos finitos, com o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), que é utilizado na avaliação de curvas de resistência e na obtenção das rigidezes axial e à flexão generalizadas. Através dessa abordagem numérica acompanha-se a degradação da resistência e rigidez da seção transversal metálica (LEMES, 2018).

Na solução do problema estático não linear, utiliza-se uma estratégia incremental-iterativa, organizada em duas etapas, para cada passo de carga. Na primeira etapa, chamada predita, obtém-se uma aproximação para os incrementos do parâmetro de carga e deslocamentos nodais. Na segunda etapa, chamada corretiva, utiliza-se a técnica iterativa de *Newton-Raphson* acoplado à estratégia de continuidade Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (NMDR; CHAN, 1988; SILVA, 2009).

Na solução dos problemas térmico e termoestrutural, os módulos CS-ASA/FA (*Computational System for Advanced Structural Analysis/Fire Analysis*) e CS-ASA/FSA (*Computational System for Advanced Structural Analysis/Fire Structural Analysis*) são empregados, respectivamente (BARROS, 2016; PIRES, 2018). O primeiro módulo é responsável pela determinação do campo de temperaturas na seção transversal dos elementos

estruturais; o segundo realiza a análise termoestrutural avançada através das formulações não lineares mencionadas nos parágrafos anteriores para o estudo dos arcos à temperatura ambiente.

As análises elásticas de segunda ordem de arcos metálicos são amplamente estudadas por diversos autores (GALVÃO, 2000; SILVA, 2009; PIRES, 2012; PI e TRAHAIR, 1999; BRADFORD *et al.*, 2015; XU *et al.*, 2014). Grande parte dos trabalhos envolvendo plasticidade em arcos, trazem análises inelásticas de primeira ordem (AIPO), onde não se acompanha a degradação da seção transversal (TRAHAIR *et al.*, 1997; SPOORENBERG *et al.*, 2012b). As AISO dessas estruturas são pouco exploradas e assim esta pesquisa procura preencher esta lacuna. Isso significa a elaboração de análises mais realísticas sobre a capacidade de carga dos arcos metálicos através da inclusão de vários efeitos não lineares, além das tensões residuais e carga térmica. Através dessas AISO, pretende-se verificar a influência de vários parâmetros no comportamento não linear do arco, como por exemplo a razão de abatimento, condições de carregamento, curvas de resistência dos arcos, entre outros, que são pouco exploradas na literatura em geral, como a utilização de seções tubulares e o índice de plastificação das seções.

#### **1.4. Organização da Dissertação**

Os fundamentos teóricos desta dissertação e os resultados numéricos obtidos serão apresentados nos próximos quatro capítulos e um apêndice.

No capítulo seguinte é apresentada uma extensa pesquisa bibliográfica sobre arcos metálicos, de concreto armado e mistos (aço-concreto). São abordados trabalhos relacionados com a estabilidade elástica e inelástica de arcos, arcos com ligações semirrígidas e arcos em situação de incêndio. O final do capítulo traz um breve histórico do estudo de arcos no PROPEC, com detalhes sobre o programa CS-ASA.

No Capítulo 3 são apresentadas as formulações para a AISO no contexto da plasticidade concentrada, detalhando o elemento finito não linear empregado e a estratégia de solução não linear adotada. Além disso, são apresentadas nesse capítulo as formulações para os problemas térmico e termoestrutural.

Os exemplos numéricos trazendo as AISO de arcos metálicos encontram-se no Capítulo 4. Como já mencionado, os resultados obtidos via CS-ASA são validados usando pesquisas publicadas e aqueles numéricos via MASTAN2 e SAFIR.

Por fim, no Capítulo 5, são estabelecidas algumas conclusões referentes à pesquisa realizada. Alguns temas são sugeridos no sentido de dar continuidade a esta dissertação. Completando o trabalho, o Apêndice A traz as componentes da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$ .

# CAPÍTULO 2

## Estado da Arte

### 2.1. Introdução

O conceito de análise avançada de estruturas é encontrado na literatura a partir do trabalho de BJORHOVDE (1972) *apud* CHEN *et al.* (1996), que desenvolveu um longo estudo para a obtenção das curvas de resistência do *Structural Stability Research Council* (SSRC). Atualmente, a análise avançada pode ser definida como a análise estrutural que engloba vários efeitos não lineares, incluindo principalmente os geométricos e físicos.

Uma extensa pesquisa bibliográfica relacionada aos arcos metálicos, de concreto armado e mistos de aço-concreto foi realizada nesta dissertação. Seu objetivo primordial era entender como as características geométricas, condições de apoio e carregamento, incluindo os efeitos não lineares, influenciavam no comportamento dos arcos. Portanto, este capítulo traz referências bibliográficas que fundamentam e contextualizam o tema deste trabalho.

O capítulo foi dividido em 7 seções, a maioria trazendo estudos que abordam efeitos importantes na análise de arcos. Na próxima seção, por exemplo, são encontrados trabalhos envolvendo a análise elástica não linear de arcos; a Seção 2.3 apresenta pesquisas relacionadas à análise inelástica de arcos; na sequência, nas Seções 2.4 e 2.5, são abordadas publicações que trazem as ligações semirrígidas e a carga térmica (incêndio), respectivamente, a essas estruturas. A Seção 2.6 fornece um breve histórico dos estudos sobre arcos realizados no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFOP (PROPEC/UFOP). Por fim, na Seção 2.7, destaca-se o programa computacional CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; SILVA, 2009), utilizado neste trabalho.

### 2.2. Estabilidade Elástica de Arcos

A maioria das Normas de Projetos utilizadas no dia a dia dos engenheiros não apresentam métodos específicos para o projeto de arcos e, em muitos casos, utilizam o equivalente à teoria de flambagem clássica (interação linear viga-coluna), que não considera os efeitos pré-

flambagem. Porém, os arcos, principalmente os abatidos, são estruturas que apresentam comportamento fortemente não linear, cujas deformações pré-flambagem são elevadas, sendo necessário levá-las em consideração para se prever o comportamento da estrutura de forma assertiva (PI e TRAHAIR, 1999; PI *et al.*, 2002).

Diante disso, a estabilidade elástica de arcos tem sido extensamente estudada por diversos autores, que utilizam diferentes características geométricas, de carregamento e condições de apoio em suas análises. Pi *et al.* (2002) realizaram a análise elástica não linear de arcos circulares abatidos sob carregamento radial uniforme. Análises similares foram realizadas com arcos parabólicos (BRADFORD *et al.*, 2015; MOON *et al.*, 2007), triarticulados (PI e BRADFORD, 2015), com condições de apoio assimétricas, sendo uma extremidade do arco apoiada e outra engastada (PI e BRADFORD, 2012a e 2013a), cargas concentradas (BRADFORD *et al.*, 2002; XU *et al.*, 2014; PI *et al.*, 2016), cargas distribuídas verticais (BRADFORD *et al.*, 2015; GUO *et al.*, 2016b), dentre outras várias características. Em todos os casos, a não linearidade geométrica (NLG) foi levada em consideração, e os resultados obtidos através dos métodos analíticos foram comparados a análises experimentais ou numéricas baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF). Nos trabalhos citados, o foco era desenvolver uma formulação específica para o estudo de arcos e obtenção das suas trajetórias de equilíbrio.

Ainda no âmbito da análise elástica de arcos, os efeitos da NLG e da imperfeição inicial são extensamente estudados por vários autores. Pi e Bradford (2014) verificaram os efeitos da NLG na análise elástica de arcos metálicos triarticulados sob carga radial uniforme e desenvolveram uma solução analítica baseada no princípio da energia potencial estacionária para determinar as equações de equilíbrio do sistema estrutural. Esses autores verificaram que a NLG influencia significativamente o comportamento e flambagem do arco. Adicionalmente, em suas análises elásticas não lineares, eles concluíram o efeito do momento fletor nos arcos triarticulados sob carga radial reduzida a reserva de carga do estado limite de serviço do arco.

Dando continuidade ao estudo mencionado no parágrafo anterior, Bradford e Pi (2015) verificaram o efeito da NLG na análise elástica de arcos circulares triarticulados de seção tubular circular de aço preenchida com concreto sob carga concentrada aplicada no topo do arco. Mais uma vez, eles verificaram que a inclusão da NLG na análise acarretava em aumentos significantes das forças axiais e momentos fletores no pino localizado no topo do arco.

Zhou *et al.* (2015) apresentaram um método analítico para a avaliação da estabilidade elástica de arcos abatidos com imperfeições geométricas iniciais assimétricas. Esses autores verificaram a forte influência da imperfeição inicial nas análises realizadas.

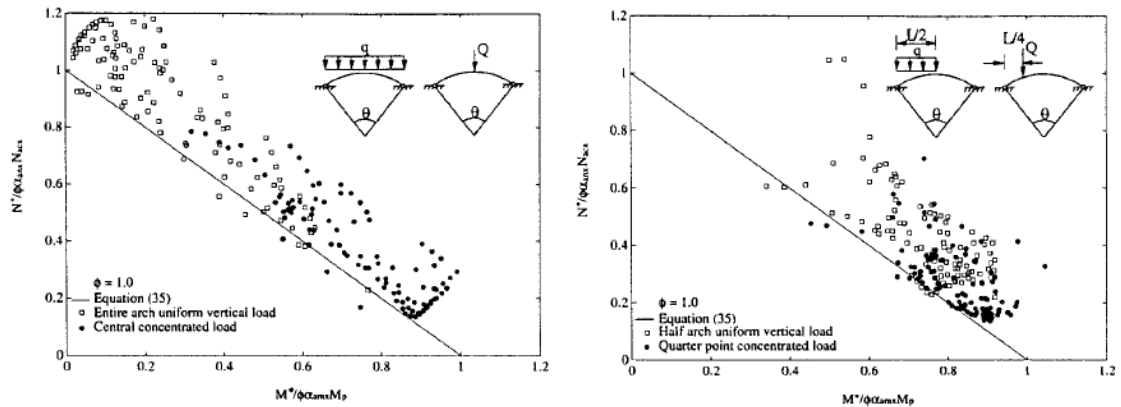
Oliveira e Silva (2017) estudaram os arcos abatidos e pouco abatidos sob várias condições de apoio e carregamento. Um elemento de viga com teoria unificada de Bernoulli-Timoshenko, aliado à formulação corrotacional, foi usado na modelagem dos arcos. As trajetórias de equilíbrio foram obtidas com o auxílio do método do comprimento de arco através das quais constatou-se que o elemento utilizado tem a capacidade de representar estruturas sujeitas à grandes deslocamentos e rotações.

### **2.3. Estabilidade Inelástica de Arcos**

Assim como na análise elástica não linear, os autores utilizam variações na geometria, condições de carregamento e apoio do arco em suas análises inelásticas de segunda ordem (AISO), que é o objeto principal desta dissertação.

Pi e Trahair (1996a) realizaram análises inelásticas em arcos através de um programa computacional baseado no MEF desenvolvido pelos próprios autores em 1994 (PI e TRAHAIR, 1994a, 1994b). Através desse programa, esses pesquisadores estudaram a flambagem inelástica e carga crítica de arcos circulares metálicos com seção I, levando em conta os efeitos da curvatura do arco, grandes deformações, imperfeição geométrica inicial e tensão residual. Vários carregamentos simétricos e assimétricos foram aplicados, entre eles: o radial, o uniformemente distribuído e o concentrado. Eles deram atenção especial à verificação da influência da relação de abatimento do arco ( $f/L$ :  $f$  é a flecha e  $L$  o vão do arco) e das tensões residuais na obtenção dos esforços internos de compressão e flexão.

Dando continuidade ao estudo mencionado no parágrafo anterior, Pi e Trahair (1999) estudaram a flambagem inelástica de arcos metálicos em compressão uniforme e desenvolveram equações de interação para o projeto dessas estruturas. Eles chegaram em soluções analíticas para as cargas de flambagem dos arcos abatidos e pouco abatidos em compressão uniforme. Adicionalmente, obtiveram uma equação de interação modificada que fornece os limites inferiores da resistência de arcos abatidos e não abatidos submetidos à flexão e compressão considerando distribuições não uniformes do momento fletor e da força axial de compressão ao longo do arco e a redistribuição do momento fletor após a formação da rótula plástica. Um exemplo de validação dessa equação de interação modificada pode ser visualizado na Figura 2.1, retirada de Pi e Trahair (1999). Os resultados obtidos por Pi e Trahair (1996a, 1999) foram usados na validação das análises numéricas realizadas nessa dissertação (Capítulo 4, Seções 4.3 e 4.4).



(a) Cargas simétricas

(b) Cargas assimétricas

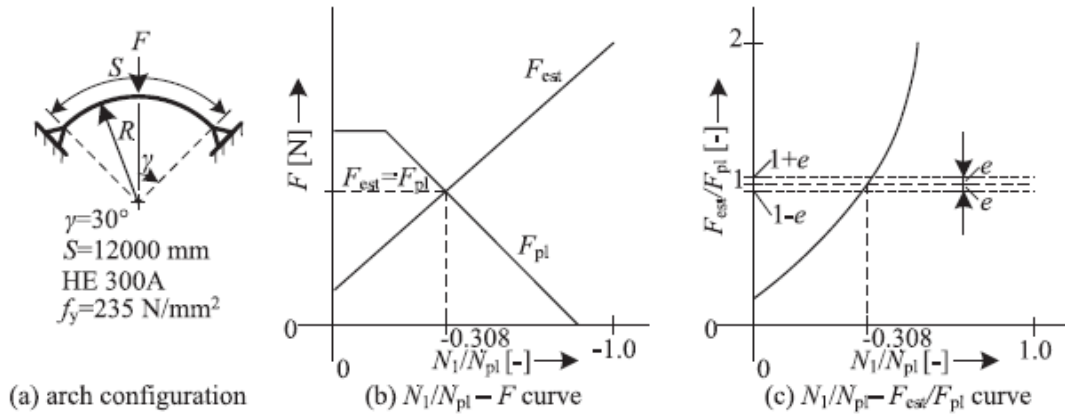
**Figura 2.1.** Equação de interação proposta por Pi e Trahair (1999) para os arcos metálicos

Utilizando os métodos dos limites superior/ inferior e os fundamentos da teoria plástica, Spoorenberg *et al.* (2012a) desenvolveram soluções analíticas para a obtenção da carga crítica de arcos circulares de aço sujeitos à carregamento vertical. Como suas análises foram baseadas na teoria plástica de primeira ordem, os efeitos geométricos não lineares da estrutura não foram investigados.

Para validar seus estudos, Spoorenberg *et al.* (2012a) utilizaram exemplos de arcos muito abatidos, pouco abatidos, biengastados, biapoiados, com carga concentrada vertical no topo do arco e carga distribuída vertical ao longo de toda a projeção horizontal do arco. Posteriormente, os arcos estudados foram comparados com modelos construídos via MEF através do software ANSYS 11.0 (2008). Além da obtenção de equações que representam o comportamento do arco, esses pesquisadores também criaram um método gráfico para a determinação da carga crítica de flambagem do arco utilizando essas equações, o que pode ser visto na Figura 2.2, que foi extraída do artigo citado. Como será mostrado no Capítulo 4, Seção 4.2, algumas análises inelásticas idealizadas por esses autores foram usadas nessa dissertação.

Dimopoulos e Gantes (2008) estudaram o comportamento inelástico de arcos circulares biapoiados e biengastados sob carregamento vertical distribuído ao longo da projeção horizontal da estrutura. Foram considerados arcos com seção tubular circular vazada de acordo as disposições do EN 1993-1-2:2005, e sob os efeitos combinados de compressão e flexão. Foi proposta a inserção de fatores de modificação nas equações de interação do EN 1993-1-2:2005, para que se adequassem ao projeto estrutural de tais arcos, de forma a se obter bons resultados para o limite inferior da resistência dos mesmos.





**Figura 2.2.** Método gráfico para definição da carga plástica de colapso proposto por Spoorenberg *et al.* (2012a)

O programa computacional utilizado pelos autores para as análises numéricas foi o ADINA (2005), que utiliza o método de controle de deslocamento em combinação com o método de *Newton-Raphson* padrão para solucionar o sistema de equações não lineares. Os fatores de modificação inseridos na equação de interação do EN 1993-1-2:2005 foram baseados em dois métodos: um descrito por Boissonnade *et al.*, 2004 (Método 1), e o outro descrito por Greiner e Lindner, 2006 (Método 2). As Equações (2.1) e (2.2) apresentam a equação de interação do EN 1993-1-2:2005, modificada pelos métodos 1 e 2 respectivamente.

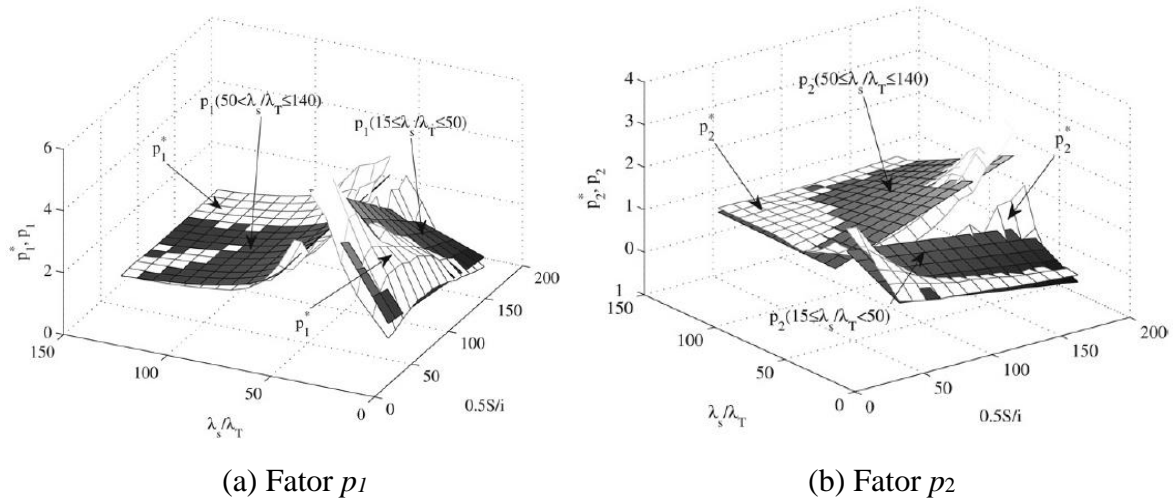
$$x_y \frac{N_{Ed}}{\gamma_{M1} A f_y} + \frac{k_{yy}}{p_1} \frac{M_{y,Ed}}{w_{pl,y} f_y} \leq \phi \quad (2.1)$$

$$x_y \frac{N_{Ed}}{\gamma_{M1} A f_y} + \frac{k_{yy}}{p_2} \frac{M_{y,Ed}}{w_{pl,y} f_y} \leq \phi \quad (2.2)$$

sendo  $N_{Ed}$ , e  $M_{y,Ed}$  os maiores valores de força normal e momento fletor internos, respectivamente, ao longo do arco (não necessariamente na mesma seção).  $A$  é a área da seção transversal,  $w_{pl,y}$  é o módulo plástico da seção,  $f_y$  é a tensão de escoamento,  $x_y$  é um fator de redução devido à flambagem no plano,  $k_{yy}$  é um fator de interação que combina compressão e flambagem,  $\phi = 1$ ,  $\gamma_{M1} = 1$  para os casos apresentados no artigo. Os fatores  $p_1$  e  $p_2$  são os fatores de modificação citados anteriormente. A Figura 2.3 (extraída do artigo citado) fornece uma representação gráfica dos fatores de modificação estudados por Dimopoulos e Gantes (2008) para arcos biapoiados.

Ainda no mesmo artigo, os autores verificaram que apenas a equação linear de interação para viga-coluna proposta pelo EN 1993-1-2:2005 não era realmente suficiente para o projeto

seguro de arcos circulares, e que era difícil se encontrar fatores de modificação para a equação do EN 1993-1-2:2005 que refletissem, genericamente, o comportamento da maior parte dessas estruturas (principalmente os arcos muito abatidos). Alguns resultados obtidos por esses autores foram utilizados no Capítulo 4, Seção 4.4.



**Figura 2.3.** Fatores de modificação do EN 1993-1-2:2005 desenvolvidos por Dimopoulos e Gantes (2008)

Por fim, são destacados outros trabalhos que trazem análises inelásticas de primeira ou segunda ordem em arcos: arcos metálicos com cargas concentradas assimétricas (TRAHAIR *et al.*, 1997); arcos metálicos com cargas uniformemente distribuída assimétrica (PI *et al.*, 2008b); arcos metálicos biengastados (PI e BRADFORD, 2004; GUO *et al.*, 2015); arcos de concreto armado e mistos de aço e concreto (HEIDARPOUR *et al.*, 2010a; PI *et al.*, 2012; HAMED *et al.*, 2015).

## 2.4. Arcos com Ligações Semirrígidas

O tipo da ligação (rotulada, engastada e semirrígida) dos arcos com seus apoios é um tema de grande relevância nas análises elásticas e inelásticas dessas estruturas. Em PI *et al.* (2008a), por exemplo, foram realizadas análises elásticas não lineares de arcos abatidos sob carga concentrada e apoios com certa restrição rotacional. Na mesma linha de pesquisa, esses autores variaram as características do sistema estrutural, como a adoção de cargas radiais (PI e BRADFORD, 2009) e consideraram os apoios com restrições rotacionais diferentes (PI e BRADFORD, 2012b, 2013c). Em todos os trabalhos, foi verificado que a ligação semirrígida estrutura-apoio tinha grande influência no comportamento de flambagem dos arcos metálicos.

Nos trabalhos de Pi e Bradford (2012b, 2013c) os autores desenvolveram soluções analíticas para prever o comportamento e a carga de flambagem dos arcos estudados. Para um arco biapoiado com restrição rotacional com diferentes rigidezes em cada um dos apoios, chegaram à conclusão de que, nesse caso específico, a perda da estabilidade do arco normalmente acontecia por ponto limite e não por bifurcação.

Mais recentemente, Lu *et al.* (2017) desenvolveram um estudo experimental de arcos circulares abatidos, com restrições horizontais e rotacionais nos apoios, com o intuito de avaliar sua flambagem e resistência última. Esses arcos eram conectados de forma semirrígida às colunas, e diferentes condições de carregamento foram consideradas: 5 cargas concentradas verticais e uma carga uniformemente distribuída vertical ao longo do arco. Esses autores concluíram que a redução da resistência final da estrutura, quando se consideravam restrições elásticas horizontais e rotacionais, era máxima no caso da carga uniformemente distribuída vertical e mínima no caso das cargas concentradas.

No âmbito das estruturas de concreto e mistas aço – concreto, Pi *et al.* (2007) realizaram análises elásticas e inelásticas em arcos de concreto armado e arcos tubulares mistos de aço e concreto com ligação semirrígida.

## **2.5. Arcos em Situação de Incêndio e Outros Temas**

Outro tema importante no estudo dos arcos, e objeto de pesquisa de diversos autores, é a consideração da carga térmica (incêndio).

Heidarpour *et al.* (2010b) realizaram a análise termoelástica de arcos metálicos sob carga uniformemente distribuída em situação de incêndio. As extremidades dos arcos foram restringidas por molas translacionais verticais e horizontais, e uma mola rotacional, configurando uma ligação semirrígida. A formulação numérica apresentada por esses autores, que levava em consideração a degradação do aço frente ao aumento de temperaturas, foi validada usando resultados obtidos através do software ABAQUS (2006). Já em Heidarpour *et al.* (2010c) foi realizada a análise inelástica de segunda ordem (AISO) de arcos metálicos com ligações semirrígidas e sob temperaturas elevadas. Como no artigo anterior, os resultados obtidos por esses autores se mostraram consistentes com aqueles do ABAQUS.

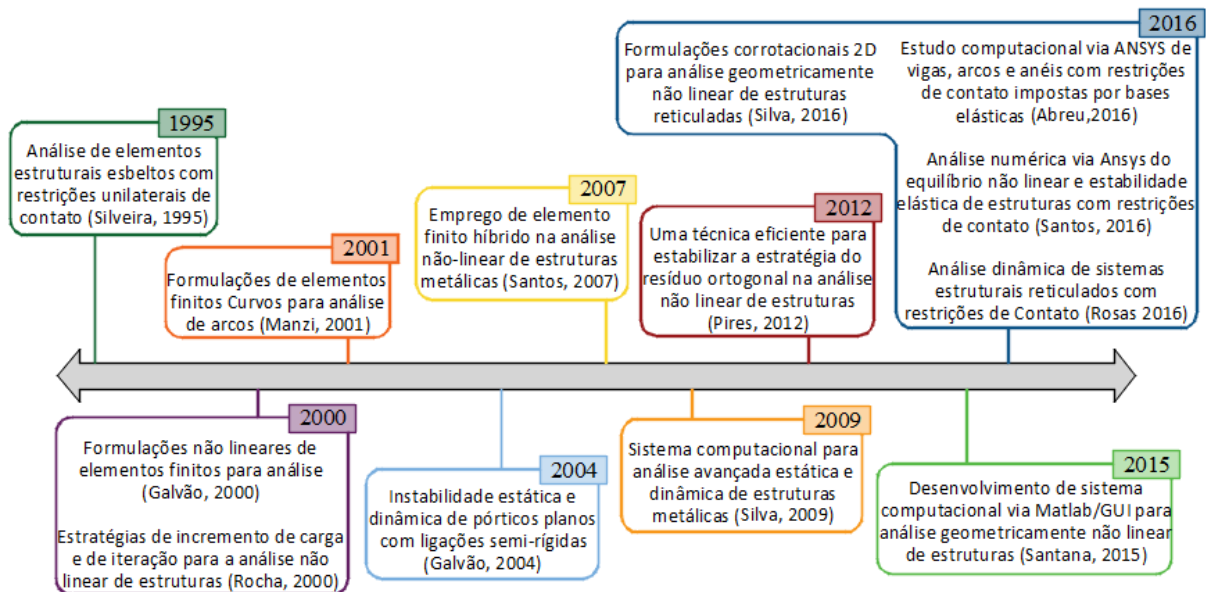
Entre outras pesquisas que consideram os arcos em situação de incêndio, merecem destaque: Pi e Bradford (2010a), que considerou cargas radiais atuantes no arco antes da aplicação da carga térmica; Guo *et al.* (2016a), que analisaram o comportamento de um arco

biapoiado sob incêndio; e, Pi e Bradford (2010b), que compararam o comportamento elástico não linear de arcos biapoiados e biengastados sob carga térmica.

Por fim, vale destacar outros temas estudados também relacionados com os arcos: flambagem local (GUO *et al.*, 2017a e 2017b); instabilidade fora do plano (PI e TRAHAIR, 1998; LA POUTRÉ *et al.*, 2013; GUO *et al.*, 2015); análises transientes e de vibração livre (PI e BRADFORD, 2008, 2012c e 2013b; LIU *et al.*, 2017).

## 2.6. Estudo de Arcos no Âmbito do PROPEC

No âmbito do PROPEC, o estudo de arcos teve como ponto de partida a tese de doutorado de Silveira (1995), orientador dessa dissertação de mestrado. Algumas aplicações numéricas dessa tese envolveram a análise elástica de segunda ordem de arcos esbeltos com restrições unilaterais de contato impostas pelo solo (ou rocha). Desde então, diversas pesquisas relacionadas com arcos metálicos foram realizadas no PROPEC, e são pontuadas na linha do tempo apresentada na Figura 2.4 e nos itens a seguir:



**Figura 2.4.** Pesquisas realizadas no PROPEC envolvendo arcos metálicos

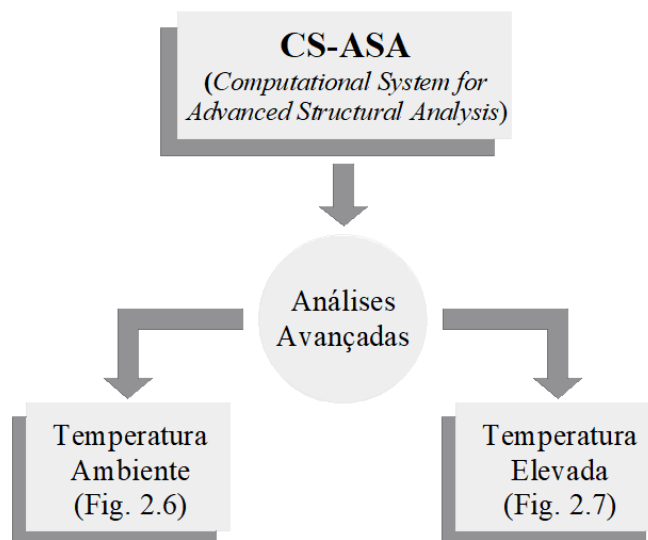
- Galvão (2000) implementou formulações geometricamente não lineares de elementos finitos para análise das estruturas, como por exemplo as formulações de Yang e Kuo (1994) e Pacoste e Eriksson (1997), e realizou a análise elástica não linear de vários arcos, circulares e senoidais, de seção transversal retangular fechada, sob diversas condições de apoio e carregamento, analisando a trajetória de equilíbrio dos mesmos e os pontos limites e pontos de bifurcação apresentados;

- Rocha (2000) realizou a análise elástica não linear dos arcos apresentados por Galvão (2000) utilizando novas estratégias de incremento de carga e de iteração (comprimento de arco constante, norma mínima dos deslocamentos residuais, resíduo ortogonal, deslocamento generalizado, etc.);
- Manzi (2001) implementou formulações de elementos finitos curvos para análise elástica linear de arcos, incluindo arcos de inércia variável e arcos espessos, traçando diagramas de momento fletor e analisando a relevância de  $f/L$  sobre as reações de apoio, além das linhas de influência dos arcos;
- Galvão (2004) desenvolveu, em sua tese de doutorado, um código computacional para a análise estática e dinâmica não linear de estruturas metálicas planas com ligações semirrígidas; trata-se da primeira pesquisa envolvendo a análise dinâmica não linear de arcos metálicos esbeltos;
- Santos (2007) desenvolveu um elemento finito híbrido que incorpora os efeitos de segunda ordem, da inelasticidade do aço e da rigidez da ligação. Ele obteve trajetórias de equilíbrio de arcos perfeitos e imperfeitos com ligações semirrígidas;
- Silva (2009) unificou as várias formulações desenvolvidas anteriormente e criou o sistema computacional CS-ASA, com inovações nas formulações inelásticas, transientes e *solvers* não lineares. A autora realizou análises estáticas e dinâmicas não lineares em arcos metálicos que incluíam ligações semirrígidas;
- Pires (2012) trouxe a técnica do fluxo normal (WATSON *et al.*, 1987 e 1997; PIRES *et al.* 2011) para a base do CS-ASA. Essa técnica foi acoplada à estratégia do resíduo ortogonal (KRENK, 1995) no sentido de melhorar a sua eficiência computacional. Para verificar a eficiência desse acoplamento foram analisados arcos esbeltos com comportamento fortemente não linear;
- Santana (2015) desenvolveu, via MATLAB/GUI (KWON *et al.*, 1997; MATHWORKS, 2013), um sistema computacional gráfico-interativo denominado AFA-OPSM (*Advanced Frame Analysis - Ouro Preto School of Mines*). Ele utilizou vários arcos esbeltos modelados por Galvão (2000) para validar suas implementações e resultados;
- Silva (2016) implementou várias formulações corrotacionais na base do CS-ASA. Com o objetivo de validar suas implementações, ela utilizou vários arcos esbeltos inicialmente estudados por Galvão (2004), Silva (2009) e Pires (2012);

- Abreu (2016) e Santos (2016) estudaram, via MEF e software ANSYS 11.0 (2008), o problema de equilíbrio elástico não linear de arcos esbeltos e anéis em contato com o solo/rocha;
- Rosas (2016) realizou análise dinâmica elástica não linear de estruturas planas considerando a interação com o solo. Um dos modelos utilizados na validação das formulações implementadas foi um arco senoidal com molas discretas nos apoios. Esse exemplo já havia sido estudado também por Galvão (2004) e Silva (2009), onde agora foram inseridas ligações semirrígidas não lineares nas extremidades.

## 2.7. O Sistema Computacional CS-ASA

O sistema computacional utilizado nessa dissertação para realização das análises inelásticas de segunda ordem de arcos metálicos é o CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; SILVA, 2009). Trata-se de um sistema computacional baseado no MEF, implementado em linguagem *Fortran* 90/95 (CHAPMAN, 2003), que realiza análises estáticas e dinâmicas não lineares de estruturas. Essas análises estruturais podem ser realizadas a temperatura ambiente ou elevada (Figura 2.5). O CS-ASA é estruturado em módulos (ou classes), o que facilita a introdução de novas funcionalidades, já que apenas módulos específicos são alterados ou inseridos.



**Figura 2.5.** Tipos de análises realizadas no sistema CS-ASA

A base desse sistema foi criada por Silveira (1995), que investigou a instabilidade elástica de colunas, arcos e anéis com restrições unilaterais de contato. Galvão (2000) e Rocha (2000) desenvolveram, respectivamente, formulações geometricamente não lineares para

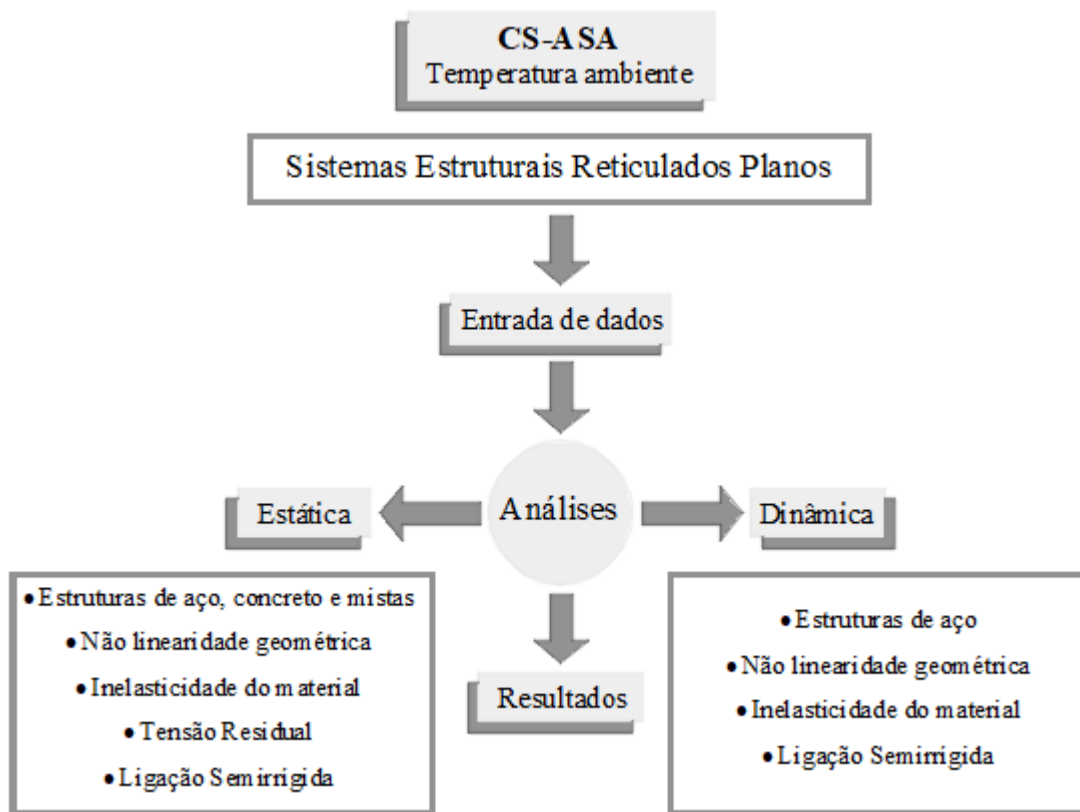
elementos finitos de pórticos planos e estratégias de incremento de carga e iteração para a análise não-linear de estruturas. Nos anos seguintes, Pinheiro (2003) estudou formulações geometricamente não-lineares de elementos de treliças e elementos finitos semirrígidos para a simulação de ligações flexíveis, Galvão (2004) iniciou o desenvolvimento das rotinas de dinâmica linear e não linear para estudo de vibrações de estruturas metálicas e Machado (2005) e Rocha (2006) realizaram estudos relacionados à análise inelástica de estruturas metálicas. Todos esses trabalhos numéricos, no entanto, não tinham uma base computacional única.

Silva (2009) uniu todas essas estratégias e formulações em um único sistema computacional, o CS-ASA, que inicialmente foi concebido para análises de estruturas metálicas. Após a criação da plataforma, Pires (2012) acoplou a técnica do fluxo normal e o método do resíduo ortogonal, o que permitiu traçar a trajetória de equilíbrio completa de vários sistemas estruturais, identificando e passando pelos pontos singulares ou críticos ao longo da trajetória de equilíbrio dos mesmos. Gonçalves (2013) implementou uma nova equação para o módulo de elasticidade tangente, proposta por Ziemian e McGuire (2002), com o intuito de verificar como a degradação da rigidez da seção varia em função do esforço normal e do momento fletor para colunas com flexão em torno do eixo de maior / menor inércia.

Visando ampliar ainda mais as funcionalidades do CS-ASA, Lemes (2015) viabilizou a análise avançada estática de estruturas de concreto e mistas aço/concreto ao definir as propriedades geométricas da seção mista a partir de Integrais de Contorno. Introduzindo o conceito de rigidez generalizada para a análise não linear de estruturas, implementou as curvas de capacidade máxima da seção e a simulação da perda de rigidez nodal utilizando o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). Paralelamente a esse trabalho, Silva (2016) implementou formulações corrotacionais para simulação da NLG das estruturas reticuladas. Continuando o trabalho anterior, em Lemes *et al.* (2017) foi utilizado o MRPR para reproduzir a plasticidade nos pontos nodais do elemento finito corrotacional, acoplado ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), que apresenta uma simulação mais realista da degradação das rigidezes axial e à flexão do elemento, a partir da utilização explícita da relação constitutiva dos materiais. Já em Lemes (2018) foram implementadas formulações para simulação de ligações semirrígidas e interação parcial em vigas mistas. As atuais funcionalidades do CS-ASA, para análise em temperatura ambiente, estão apresentadas na Figura 2.6.

A entrada de dados do programa é realizada a partir de dois arquivos de texto, que podem ser vistos em Prado (2012) e Lemes (2015). O primeiro arquivo contém dados relacionados ao tipo de análise, características geométricas, seção transversal, características do material, condições de apoio e carregamento. O segundo arquivo contém a formulação não

linear utilizada, estratégias de incremento de carga e iteração, o método de *Newton-Raphson* (padrão ou modificado), critérios de convergência, dentre outras informações. Os resultados obtidos no processamento do programa também são impressos como arquivos de texto.



**Figura 2.6.** CS-ASA: análises estruturais avançadas à temperatura ambiente

### 2.7.1. Módulos CS-ASA/FA e CS-ASA/FSA

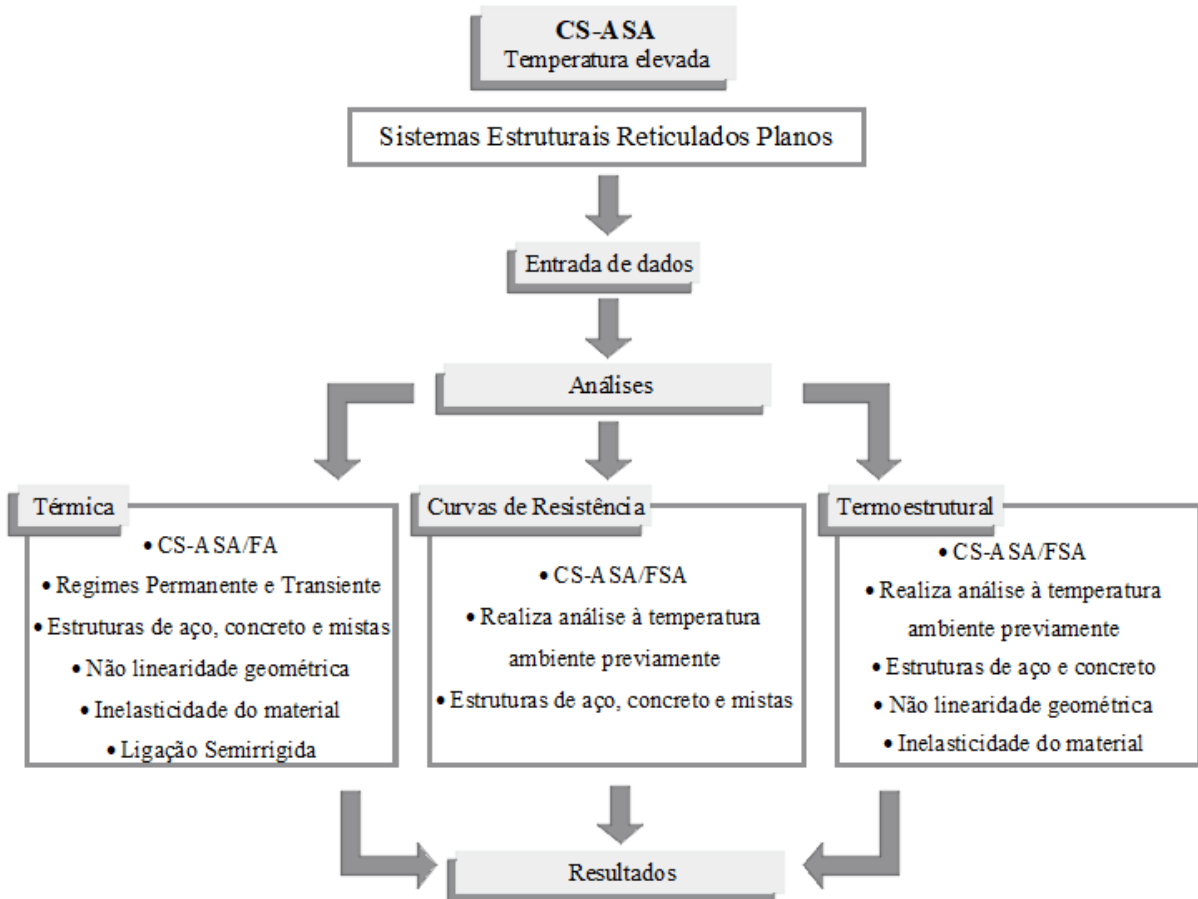
Barros (2016) e Pires (2018) iniciaram as implementações de formulações numéricas relacionadas à análise avançada de estruturas de aço e de concreto armado em situação de incêndio. O desenvolvimento dessas pesquisas resultou na criação dos módulos CS-ASA/FA (*Computational System for Advanced Structural Analysis/Fire Analysis*) e CS-ASA/FSA (*Computational System for Advanced Structural Analysis/Fire Structural Analysis*). O Módulo CS-ASA/FA é destinado à realização da análise térmica da estrutura, determinando o campo de temperatura na seção transversal dos elementos estruturais via MEF em regime permanente e transiente. Já o Módulo CS-ASA/FSA é responsável pela análise termoestrutural, com a consideração de vários efeitos não lineares. As atuais funcionalidades do CS-ASA para a análise estrutural avançada em temperatura elevada estão apresentadas na Figura 2.7.

A entrada de dados é realizada através de arquivos de texto: os dois arquivos relativos a análise estrutural à temperatura ambiente e mais dois novos arquivos, específicos para as



análises térmica, termoestrutural e obtenção de curvas de resistência sob incêndio. Os arquivos contêm informações referentes às condições de contorno, forma de aquecimento, formulações e demais parâmetros das análises relativas a altas temperaturas. Esses arquivos de entrada podem ser observados em Pires (2018).

Nas análises térmicas, a modelagem da seção transversal em elementos finitos bidimensionais é realizada através do programa GID (CIMNE, 2004).



**Figura 2.7.** CS-ASA: análises estruturais avançadas à temperatura elevada

# CAPÍTULO 3

## Fundamentos da Análise Avançada

### 3.1. Introdução

A elaboração de projetos de arcos metálicos cada vez mais sofisticados, que usam a fase plástica do modelo constitutivo dos materiais para conseguir ganhos de resistência na estrutura quando esta é submetida a cargas extremas, levanta a necessidade da concepção de modelos computacionais que retratem fielmente seu comportamento através da incorporação de vários efeitos não lineares.

Este capítulo tem por objetivo apresentar as formulações e procedimentos numéricos desenvolvidos e implementados no CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*) por diversos autores (SILVA, 2009; LEMES, 2015, 2018; SILVA, 2016; BARROS, 2016; e PIRES, 2018) que possibilitam a análise não linear avançada de arcos metálicos e outras estruturas.

No contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), as próximas seções trazem a formulação geométrica não linear adotada, que segue a formulação do referencial corrotacional; a formulação inelástica utilizada, que acopla o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD); e a estratégia de solução não linear adotada. Na sequência, são apresentados os fundamentos para o estudo de estruturas metálicas em situação de incêndio, bem como a metodologia numérica usada na solução do problema termoestrutural.

### 3.2. Formulação Geométrica Não Linear

No caso de alterações relevantes na geometria da estrutura ao longo do processo de carregamento, torna-se importante a consideração dos chamados efeitos de segunda ordem. Em sistemas estruturais esbeltos, esses efeitos são importantes fontes de não linearidade do problema e sua avaliação deve ser incluída na análise.

Para tal, neste estudo é adotada a formulação do Referencial Corrotacional (RCR), que é conveniente para estabilizar a relação entre as variáveis locais e globais (ALHASAWI *et al.*, 2017) do problema estrutural não linear, além de permitir a separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e os movimentos deformacionais da estrutura. Numa abordagem via MEF, somente os movimentos que causam deformações são considerados no cálculo das forças internas.

As descrições cinemáticas baseadas no RCR foram adaptadas ao Referencial Lagrangiano Atualizado (RLA), que toma como referência (num processo incremental) a última configuração de equilíbrio do sistema estrutural. Essa combinação RCR/RLA foi implementada no CS-ASA por Silva (2016) utilizando as formulações propostas por Battini (2002) e Tang *et al.* (2015) baseadas na teoria de viga de Euler-Bernoulli.

Ao se adotar a combinação RCR/RLA, algumas suposições envolvendo a formulação de elementos finitos devem ser consideradas:

- O elemento finito usado na modelagem do arco é plano e prismático, e a sua seção transversal permanece plana após a deformação;
- A seção transversal do arco é considerada compacta, ou seja, instabilidades locais não são verificadas e assim ela pode desenvolver toda a sua capacidade de rotação;
- Considera-se o problema bidimensional (eixo z travado), de forma que efeitos relacionados com a flambagem lateral ou torção são desconsiderados;
- Deformações devido ao cisalhamento são desconsideradas; e
- Grandes deslocamentos e rotações de corpo rígidos são permitidos.

### 3.2.1. Vetores de Deslocamento Nodal Global $\mathbf{u}_g$ e Local $\mathbf{u}_l$

Na abordagem corrotacional há a separação entre os movimentos de corpo rígido e os movimentos deformacionais da estrutura. A Figura 3.1 traz a movimentação do elemento e a nomenclatura adotada para os deslocamentos e rotações nodais no sistema global de coordenadas.

Segundo Chhang *et al.* (2017), o movimento de corpo rígido é descrito pelos deslocamentos nodais globais de translação e de rotação ( $u_{ig}$ ,  $v_{ig}$ , e  $\alpha - \alpha_0$ , respectivamente). O sistema de coordenadas locais ( $x'$ ,  $y'$ ) é sempre colocado no nó inicial do elemento e descreve os movimentos deformacionais da estrutura.

O vetor global de deslocamentos nodais é definido por:

$$\mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} u_{ig} & v_{ig} & \theta_{ig} & u_{jg} & v_{jg} & \theta_{jg} \end{bmatrix}^T \quad (3.1)$$

em que  $u$  representa a translação horizontal,  $v$  a translação vertical e  $\theta$  a rotação dos nós  $i$  e  $j$ .

O vetor local de deslocamentos nodais naturais é definido por:

$$\mathbf{u}_l = [\delta \quad \theta_i \quad \theta_j]^T \quad (3.2)$$

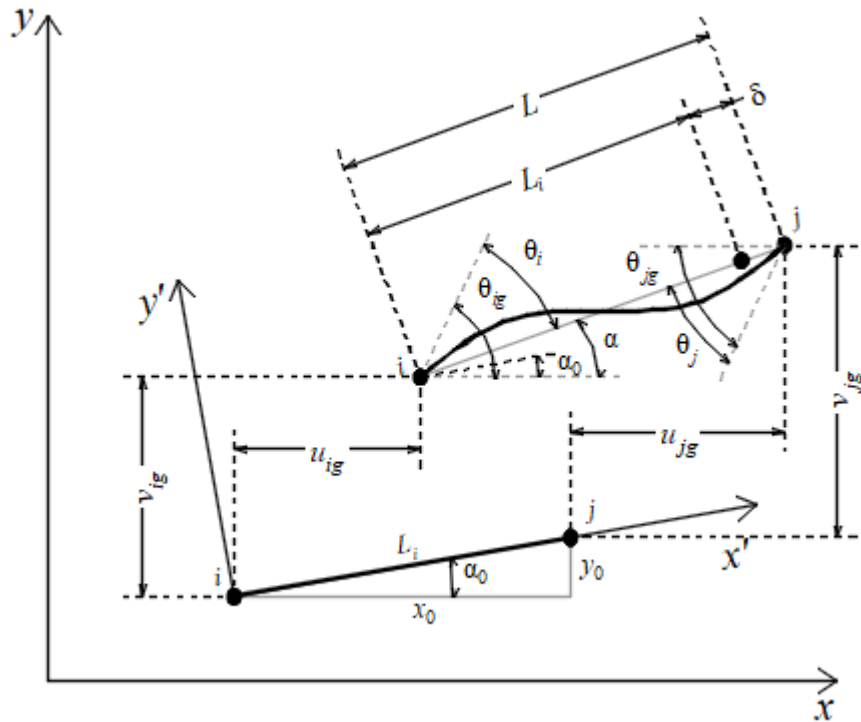
em que  $\delta$ ,  $\theta_i$  e  $\theta_j$  podem ser obtidos através das seguintes expressões:

$$\delta = L - L_i = \sqrt{(x_0 + u_{jg} - u_{ig})^2 + (y_0 + v_{jg} - v_{ig})^2} - \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (3.3)$$

$$\theta_i = \theta_{ig} - \alpha_0 = \theta_{ig} - \tan^{-1} \left( \frac{y_0 + v_{jg} - v_{ig}}{x_0 + u_{jg} - u_{ig}} \right) \quad (3.4)$$

$$\theta_j = \theta_{jg} - \alpha_0 = \theta_{jg} - \tan^{-1} \left( \frac{y_0 + v_{jg} - v_{ig}}{x_0 + u_{jg} - u_{ig}} \right) \quad (3.5)$$

com  $L$  sendo o comprimento atualizado do elemento,  $L_i$  o comprimento inicial, e  $x_0$  e  $y_0$  são, respectivamente, as projeções horizontal e vertical do elemento nos eixos globais.



**Figura 3.1.** Deslocamentos no sistema de coordenadas global

A partir da diferenciação das Equações (3.3) à (3.5) em relação aos graus de liberdade, obtêm-se os deslocamentos virtuais locais em função dos deslocamentos virtuais globais, que são organizados matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha/L & \cos\alpha/L & 1 & \text{sen}\alpha/L & -\cos\alpha/L & 0 \\ -\text{sen}\alpha/L & \cos\alpha/L & 0 & \text{sen}\alpha/L & -\cos\alpha/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{ig} \\ \Delta v_{ig} \\ \Delta\theta_{ig} \\ \Delta u_{jg} \\ \Delta v_{jg} \\ \Delta\theta_{jg} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

ou na sua forma mais compacta:

$$\Delta\mathbf{u}_l = \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}_g \quad (3.7)$$

em que  $\Delta\mathbf{u}_l$  e  $\Delta\mathbf{u}_g$  são, respectivamente, os vetores de deslocamentos incrementais nos sistemas local e global. A matriz  $\mathbf{B}$  é a matriz de transformação de deslocamentos entre os sistemas global e local. Essa matriz é obtida através da multiplicação da matriz de transformação  $\mathbf{T}^T$ , que converte o sistema de coordenadas local para o referencial corrotacional, por  $\mathbf{R}$ , que é a matriz de rotação que relaciona os sistemas local e global (SILVA, 2016; SILVA, 2009). Essas matrizes são definidas da seguinte maneira:

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.2.2. Matrizes de Rigidez Global $\mathbf{K}_g$ e Local $\mathbf{K}_l$

A relação entre o vetor de forças internas local e global é obtida através do Princípio dos trabalhos virtuais (PTV) e da Equação (3.7), ou seja:

$$\Delta\mathbf{u}_g^T \mathbf{f}_g = \Delta\mathbf{u}_l^T \mathbf{f}_l = \Delta\mathbf{u}_g^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (3.10)$$

A partir da equação anterior, define-se a relação entre força global  $\mathbf{f}_g$  e força local  $\mathbf{f}_l$ :

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (3.11)$$

Diferenciando a equação anterior em relação ao vetor de deslocamentos  $\Delta\mathbf{u}_g$ , obtém-se a matriz de rigidez tangente global  $\mathbf{K}_g$ , ou seja (CHHANG *et al.*, 2017; SILVA, 2016):

$$\mathbf{K}_g = \frac{\Delta \mathbf{f}_g}{\Delta \mathbf{u}_g} = \underbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B}}_{\mathbf{K}_e} + \underbrace{\frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L} N + \frac{1}{L^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T)}_{\mathbf{K}_{geo}} (M_i + M_j) \quad (3.12)$$

na qual  $\mathbf{K}_l$  é a matriz de rigidez do elemento no sistema local corrotacional,  $N$ ,  $M_i$  e  $M_j$  são as forças internas associadas aos graus de liberdade locais, e os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{z}$  são definidos da seguinte forma (SILVA, 2016):

$$\mathbf{r} = [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad 0 \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha \quad 0]^T \quad (3.13)$$

$$\mathbf{z} = [\sin \alpha \quad -\cos \alpha \quad 0 \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad 0]^T \quad (3.14)$$

O primeiro termo da Equação (3.12) representa a matriz de rigidez elástica ( $\mathbf{K}_e$ ) e o segundo termo representa a matriz de rigidez geométrica ( $\mathbf{K}_{geo}$ ), na qual são levados em consideração os efeitos de segunda ordem. A cada incremento de carga, as forças internas do elemento, a matriz de rigidez e a matriz de transformação  $\mathbf{B}$  são atualizadas.

Na análise geométrica não linear, o elemento finito pode apresentar um aumento espúrio de rigidez quando funções de interpolação de baixa ordem são utilizadas para aproximar os deslocamentos. Adicionalmente, se sujeito a grandes deformações, o elemento pode apresentar o chamado travamento da membrana (*membrane locking*). Esse fenômeno geralmente é contornado através da integração numérica reduzida ou emprego de funções de interpolação de ordem elevada, procedimentos que levam a bons resultados quando o número de elementos utilizados na modelagem computacional é grande. Entretanto, para que sejam computacionalmente eficientes, os modelos precisam ter o menor número de elementos possível.

Para contornar esse problema, Tang *et al.* (2015) propôs o uso das equações diferenciais de equilíbrio de forças para se obter as funções de interpolação.

Utilizando o tensor de Green e a curvatura seguindo a teoria de Euler-Bernoulli, a deformação axial e a curvatura podem ser descritas da seguinte maneira:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (3.15)$$

$$\Phi = -\frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.16)$$

De acordo com Tang *et al.* (2015) e Silva (2016), para que os efeitos de “*membrane locking*” sejam eliminados ou reduzidos, os deslocamentos devem ser aproximados da seguinte forma:

$$v = x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \theta_i + \frac{x^2}{L} \left(\frac{x}{L} - 1\right) \theta_j \quad (3.17)$$

$$u = \underbrace{\frac{x}{L} \delta}_{\text{normal}} + \underbrace{\frac{x}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx}_{\text{flexão}} \quad (3.18)$$

com parte do deslocamento axial gerado pela força normal e parte pela flexão. A partir das equações anteriores, é possível reescrever a deformação axial:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} + \frac{2\theta_i^2 - \theta_i \theta_j + 2\theta_j^2}{30} \quad (3.19)$$

Considerando que as cargas são conservativas e aplicadas nos pontos nodais, escreve-se a energia potencial  $\Pi$  do sistema da seguinte forma:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} EA \int_0^L \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^L \Phi^2 dx - \sum_{i=1}^3 f_{l,i} u_{l,i} \quad (3.20)$$

em que  $U$  é a energia de deformação,  $W$  é o trabalho externo realizado,  $E$ ,  $A$  e  $I$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade do material, a área e a inércia da seção transversal. Substituindo as expressões de  $\varepsilon$  e  $\Phi$  na equação anterior e usando o princípio da energia potencial estacionária, chega-se a:

$$\Delta \Pi = \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l} - \mathbf{f}_l \right) \Delta \mathbf{u}_l = 0 \quad (3.21)$$

de onde se conclui que a primeira derivada da energia de deformação  $U$  em relação ao vetor de deslocamentos locais  $\mathbf{u}_l$  resulta no vetor de forças internas, isto é:

$$\mathbf{f}_l = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l} \quad (3.22)$$

A segunda derivada desse vetor em relação ao vetor de deslocamentos locais  $\mathbf{u}_l$  fornece a matriz de rigidez tangente local  $\mathbf{K}_l$ :

$$\mathbf{K}_l = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}_l^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial \mathbf{u}_l} \quad (3.23)$$

### 3.3. Formulação Inelástica: Acoplamento MRPR/MCD

Nesta seção apresenta-se a formulação inelástica baseada no acoplamento do Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) e do Método da Compatibilidade de Deformação (MCD) implementado no CS-ASA. O objetivo do MRPR é capturar o avanço da plastificação especificamente nos pontos nodais dos elementos finitos, desde o início do escoamento da seção

transversal até sua plastificação total, com a formação da rótula plástica. Para atingir esse objetivo, a formulação adotada baseia-se na proposta de Lemes (2018), onde se considera que o desenvolvimento da plasticidade nos pontos nodais dos membros estruturais é capturado por rigidezes generalizadas calculadas através do MCD. Portanto, para monitorar a degradação da rigidez da seção transversal nos pontos nodais do elemento, utiliza-se os fundamentos do MCD que serão detalhados na próxima seção.

O elemento finito utilizado na modelagem do arco é o elemento de viga-coluna delimitado por pontos nodais  $i$  e  $j$ , como ilustrado na Figura 3.2 no sistema local corrotacional. Nesse sistema local de referência, a relação força-deslocamento (Equação 3.23) do elemento pode ser reescrita da seguinte forma:

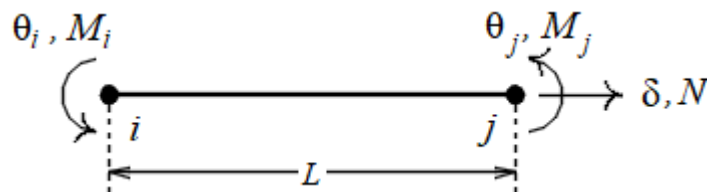
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix}}_{\text{Forma incremental}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad \therefore \underbrace{\Delta \mathbf{f}_l = \mathbf{K}_l \Delta \mathbf{u}_l}_{\text{Forma compacta}} \quad (3.24)$$

em que  $\Delta N$ ,  $\Delta M_i$  e  $\Delta M_j$  são incrementos de força normal e momentos fletores, e  $\Delta \delta$ ,  $\Delta \theta_i$  e  $\Delta \theta_j$  são incrementos de deslocamento axial e rotações, respectivamente. De acordo com a formulação inelástica adotada, os termos de rigidez presentes na matriz  $\mathbf{K}_l$  são calculados através do MCD considerando a tangente à relação momento-curvatura ( $M \times \Phi$ ). Inicialmente, os parâmetros de rigidez são calculados tanto no nó  $i$  como no nó  $j$  do elemento, para em seguida se estabelecer uma variação linear desses parâmetros ao longo do comprimento do elemento (ZIEMIAN e MCGUIRE, 2002), ou seja:

$$EI(x) = \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right) EI_{T,i} + \frac{x}{L} EI_{T,j} \right] \quad (3.25)$$

na qual  $L$  é o comprimento do elemento, e  $EI_{T,i}$  e  $EI_{T,j}$  são os parâmetros de rigidez à flexão generalizados (Seção 3.3.3).

Através da derivada segunda das funções de interpolação de Hermite chega-se na matriz de rigidez reduzida  $\mathbf{k}^*$ , com termos associados apenas à flexão (MCGUIRE *et al.*, 2000):



**Figura 3.2.** Elemento finito no sistema corrotacional



$$\mathbf{k}^* = \int_0^L \mathbf{N}^T EI_T(x) \mathbf{N} dx \quad (3.26)$$

com,

$$\mathbf{N} = \left[ N_1 = \frac{2}{L} \left( 2 - \frac{3x}{L} \right) \quad N_2 = \frac{2}{L} \left( 1 - \frac{3x}{L} \right) \right] \quad (3.27)$$

sendo  $N_1$  e  $N_2$  funções de interpolação relativas aos graus de liberdade de rotação. Usando as Equações (3.25) e (3.27) em (3.26), e realizando a integração, chega-se a:

$$\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{3EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} & \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \\ \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} & \frac{EI_{T,i} + 3EI_{T,j}}{L} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Finalmente, considerando que a rigidez axial no elemento é dada pela média dessa rigidez nos pontos nodais, define-se os coeficientes da matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{K}_l$  (Equação 3.24):

$$\begin{aligned} k_{11} = (EA)^* &= \frac{EA_{T,i} + EA_{T,j}}{2}; & k_{22} &= \left( \frac{EI_1}{L} \right)^* = \frac{3EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \\ k_{23} = k_{32} &= \left( \frac{EI_2}{L} \right)^* = \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L}; & k_{33} &= \left( \frac{EI_3}{L} \right)^* = \frac{EI_{T,i} + 3EI_{T,j}}{L} \end{aligned} \quad (3.29)$$

em que  $EA_{T,i}$ ,  $EA_{T,j}$ ,  $EI_{T,i}$  e  $EI_{T,j}$  são os parâmetros de rigidez generalizados (Seção 3.3.3). Todas as componentes da matriz de rigidez local do elemento ( $\mathbf{K}_l$ ) são apresentadas no Apêndice A.

### 3.3.1. Método da Compatibilidade de Deformações

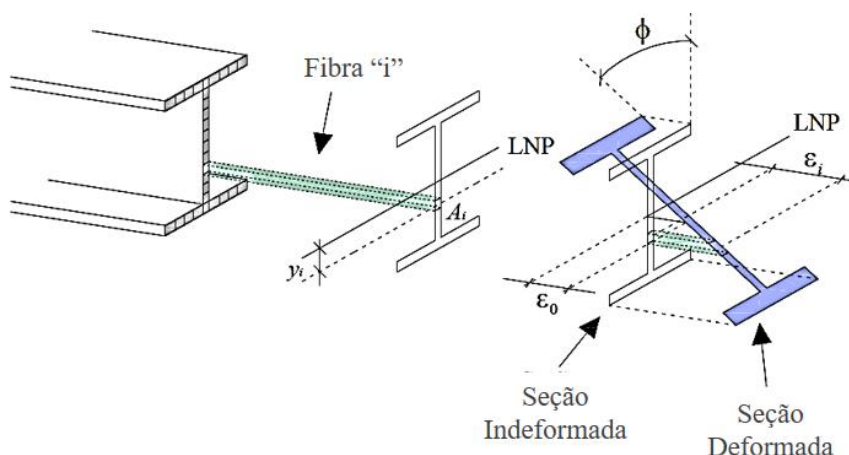
Quando um elemento estrutural é submetido à esforços externos, este se deforma, gerando forças internas para que o sistema seja equilibrado. A nível de seção transversal, essa deformação é contemplada no MCD, que é uma técnica baseada na teoria de Euler-Bernoulli para a avaliação de seções transversais compactas (AISC LRFD, 2016). O MCD permite o emprego generalizado de modelos constitutivos, uma vez conhecida a deformada da seção transversal.

Supõe-se que o campo de deformações seja contínuo e que a seção permaneça plana após a deformação, como ilustrado na Figura 3.3.

A princípio é realizada a discretização da seção transversal em fatias, ou em fibras (exemplificado na Figura 3.3). Segundo Lemes (2015), a discretização em fatias é bastante

satisfatória na análise de estruturas planas, porém, a discretização em fibras é indicada quando a tensão residual é introduzida explicitamente no perfil metálico.

Neste trabalho, a discretização em fibras é adotada para perfis I e perfis tubulares retangulares, pois podem apresentar tensões residuais. A discretização em fatias é adotada para os perfis circulares. Detalhes sobre a abordagem usada na discretização da seção transversal podem ser vistos em Lemes *et al.* (2017).



**Figura 3.3.** Campo de deformações para um problema plano (LEMES, 2018)

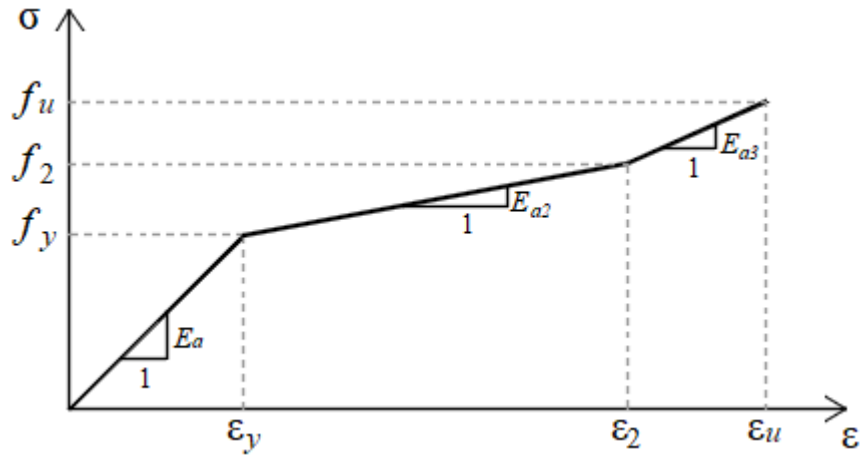
O propósito da discretização é captar a deformação axial,  $\epsilon$ , no centroide plástico (CP) de cada fibra ou fatia e então, através das relações constitutivas dos materiais, obter as respectivas tensões e os módulos de elasticidade tangentes em cada uma. Após a discretização da seção, é possível realizar a análise não linear da condição deformada da seção transversal e obter sua capacidade resistente e seus parâmetros de rigidez. As próximas seções trazem a relação constitutiva adotada, a relação momento-curvatura e o cálculo dos parâmetros de rigidez generalizados.

### 3.3.2. Relação Constitutiva do Aço em Temperatura Ambiente

O aço é um material isotrópico e seu comportamento pode ser representado através de um diagrama tensão-deformação. Em temperatura ambiente, foi adotado para o aço o modelo constitutivo trilinear, em que há a possibilidade da consideração do encruamento do material. O trecho referente ao primeiro quadrante desse modelo é exibido na Figura 3.4, e pode ser definido através das equações (LEMES *et al.*, 2017; LEMES, 2018;):

$$\sigma = \begin{cases} -f_2 + E_{a3}(\varepsilon + \varepsilon_2), & \text{se } -\varepsilon_u \geq \varepsilon > -\varepsilon_2 \\ -f_y + E_{a2}(\varepsilon + \varepsilon_y), & \text{se } -\varepsilon_2 \geq \varepsilon \geq -\varepsilon_y \\ E_a \varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y + E_{a2}(\varepsilon - \varepsilon_y), & \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2 \\ f_2 + E_{a3}(\varepsilon - \varepsilon_2), & \text{se } \varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_u \end{cases} \quad (3.30)$$

em que  $f_y$ ,  $f_2$ ,  $f_u$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_u$  são as tensões e deformações limítrofes dos trechos lineares da relação constitutiva e os parâmetros  $E_a$ ,  $E_{a2}$ , e  $E_{a3}$  são os módulos de elasticidade correspondentes a cada trecho. O valor de  $\varepsilon_y$  é determinado pela relação  $f_y / E_a$  e o valor de  $\varepsilon_2$  corresponde a  $10 \times \varepsilon_y$ .



**Figura 3.4.** Relação constitutiva do aço dos perfis: modelo trilinear (LEMES, 2018)

As tensões residuais são aplicadas diretamente sobre o perfil e seguem, neste trabalho, o modelo do EN 1993-1-2:2005 para perfis I, baseado na proposta do ECCS (1983), ilustrado na Figura 3.5(b). Esse modelo apresenta distribuição bilinear de tensões em todas as chapas componentes do perfil, sendo que os valores de  $\sigma_r$  dependem das relações geométricas da base e altura da seção transversal, conforme:

$$\sigma_r = \begin{cases} 0,5f_y & \text{se } h/b_f \leq 1,2 \\ 0,3f_y & \text{se } h/b_f > 1,2 \end{cases} \quad (3.31)$$

na qual  $h$  é a altura total da seção transversal e  $b_f$  é a largura das mesas.

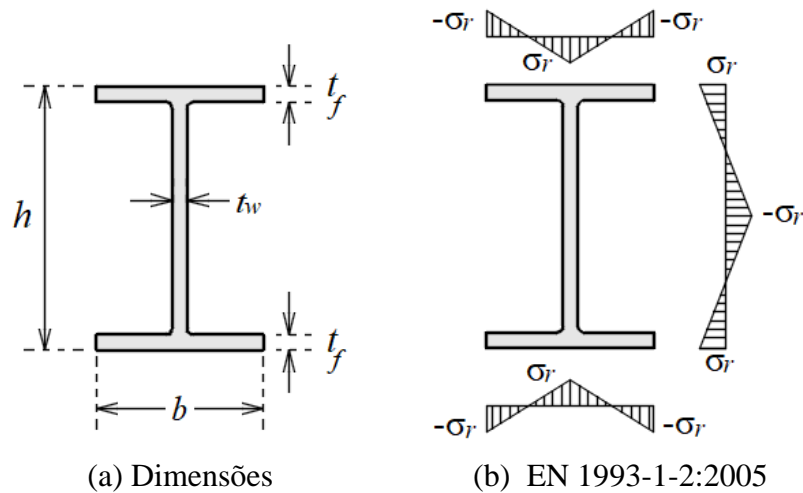
No CS-ASA existe também a possibilidade da utilização do modelo do AISC LRFD (2010) para as tensões residuais em perfis I, cujas equações estão descritas em Lemes (2018).

No caso de seções tubulares retangulares, foi adotada a distribuição de tensões residuais baseada no modelo de Salmon *et al.* (2009) e adaptada por Mathur (2011). Essa distribuição de tensões residuais na seção transversal é apresentada na Figura 3.6(b). O valor de  $\sigma_r$  pode ser

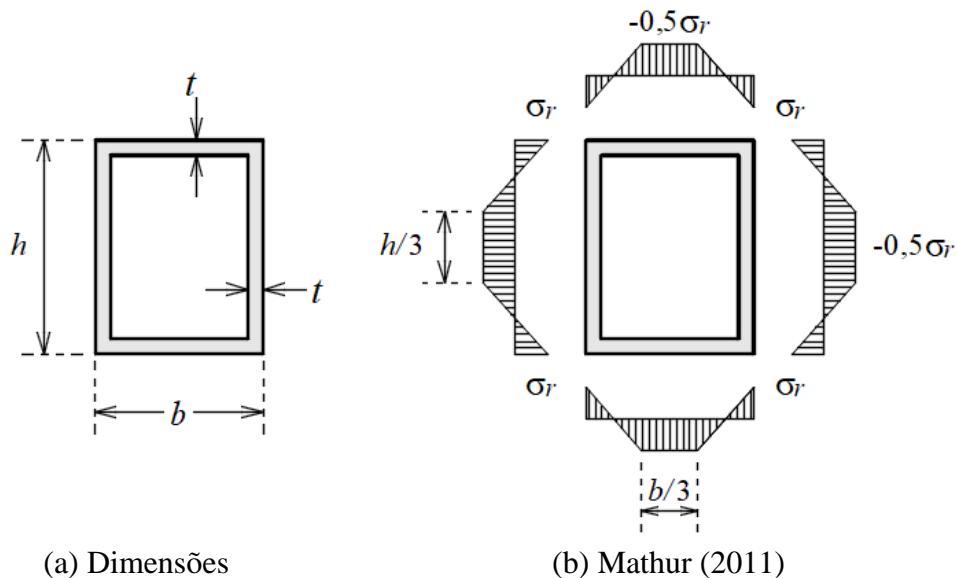
calculado por meio de expressões em função das dimensões da seção ou assumindo algum valor fixo.

### 3.3.3. Relação Momento-Curvatura e Rigidezes Generalizadas

A relação momento-curvatura ( $M \times \Phi$ ) pode ser usada para representar o comportamento da seção transversal para determinado esforço axial, e permite definir o regime (elástico, elastoplástico, plástico) no qual a seção se encontra para diferentes valores do momento fletor.



**Figura 3.5.** Modelo normativo para descrição da tensão residual em perfil I



**Figura 3.6.** Modelo de distribuição da tensão residual em perfil tubular retangular

O método de *Newton-Raphson* é utilizado aqui para a obtenção dessa relação. A estratégia de incrementos utilizada relaciona o momento como função da curvatura (ZUBYDAN, 2013):

$$M_{j+1} = M_j + \Phi EI \quad (3.32)$$

na qual  $j$  refere-se ao incremento anterior e  $j+1$  ao incremento atual,  $\Phi$  é um valor de incremento constante para a curvatura e  $EI$  é a rigidez a flexão da seção transversal.

Para descrever satisfatoriamente a deformada da seção transversal, é realizada a discretização da seção, como mencionada na Seção 3.3.1. A fim de captar a deformação axial,  $\epsilon$ , no CP de cada fibra ou fatia, duas variáveis são indispensáveis: a área das fibras/fatias e sua respectiva posição em relação ao CP da seção, já que, dessa forma, tanto para o método de *Newton-Raphson* quanto para os métodos *quasi-Newton*, os problemas de convergência são minimizados (CALDAS, 2004; CHEN *et al.*, 2001; SFAKIANAKIS, 2002).

De acordo com Roik e Bergmann (1990), a posição do CP pode ser dada por:

$$x_{CP} = \frac{x_a A_a f_y}{A_a f_y}; \quad y_{CP} = \frac{y_a A_a f_y}{A_a f_y} \quad (3.33)$$

em que  $A_a$  é a área de aço do perfil metálico,  $x_a$  e  $y_a$  são as coordenadas do centroide da área de aço em relação a um sistema de referência e  $f_y$  é a resistência de escoamento do aço do perfil.

A Figura 3.3 ilustra a configuração deformada do perfil I para uma combinação de esforço normal e momento fletor. A partir dela, a deformação axial na  $i$ -ésima fibra,  $\epsilon_i$  é dada por:

$$\epsilon_i = \epsilon_0 + \Phi y_i + \epsilon_{ri} \quad (3.34)$$

na qual  $\epsilon_0$  é a deformação axial no CP da seção,  $\Phi$  é a curvatura,  $y_i$  é a distância entre os centroides plásticos da fibra analisada e da seção transversal, e  $\epsilon_{ri}$  é a deformação residual na  $i$ -ésima fibra (no caso da discretização em fatias, essa parcela é desconsiderada).

Matricialmente, com  $\epsilon_0$  e  $\Phi$  sendo posições do vetor de deformações  $\mathbf{X}$ , tem-se:

$$\mathbf{X} = [\epsilon_0 \quad \Phi]^T \quad (3.35)$$

O equilíbrio da seção é atingido quando:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0 \quad (3.36)$$

em que o vetor de forças externas é dado por:

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

sendo  $N$  o esforço normal e  $M$  o momento fletor.

O vetor de forças internas é dado por integrais clássicas para a força normal e o momento fletor, ou seja:

$$\mathbf{f}_{int} = \left\{ \begin{array}{l} N_{int} = \int_A \sigma[\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)] dA \\ M_{int} = \int_A \sigma[\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)] y dA \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

no qual  $N_{int}$  corresponde à força normal e  $M_{int}$  corresponde ao momento fletor. Conhecidos os valores de  $A_i$  e  $y_i$  de cada fibra ou fatia, as integrais clássicas podem ser descritas através do seguinte somatório, sendo  $n_{fib}$  o número de fibras ou fatias da discretização:

$$\mathbf{f}_{int} \cong \left\{ \begin{array}{l} N_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \Phi)] A_i \\ M_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \Phi)] y_i A_i \end{array} \right\} \quad (3.39)$$

Se o processo é iniciado com  $\mathbf{X} = 0$ , a convergência só poderá ser atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. É realizada então a expansão em série de Taylor, truncada no termo de primeira ordem:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} (\delta\mathbf{X}) \quad (3.40)$$

Admitindo que haja equilíbrio no ponto  $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = 0$ , sabendo que  $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k$ , e isolando a parcela  $\mathbf{X}^{k+1}$ , que é a configuração deformada da seção transversal na iteração  $k + 1$  tem-se:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + [\mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (3.41)$$

em que  $\mathbf{F}'$  é a matriz constitutiva da seção transversal ou matriz Jacobiana do problema não linear (Equação 3.36). Essa matriz é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{F}' = \left( -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{12} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \Phi} \\ f_{21} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{22} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

cujos termos são:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \int_A E_T dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i; & f_{12} &= \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} &= \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i; & f_{22} &= \int_A E_T y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{aligned} \quad (3.43)$$

em que  $E_T$  é resultado da derivada da tensão  $\sigma$  em relação à deformação  $\varepsilon$ .

A cada incremento do vetor de deformações  $\mathbf{X}$  é verificado, através de algum critério de convergência (Seção 3.4.2), se foi atingido o equilíbrio de forças na seção transversal (Equação

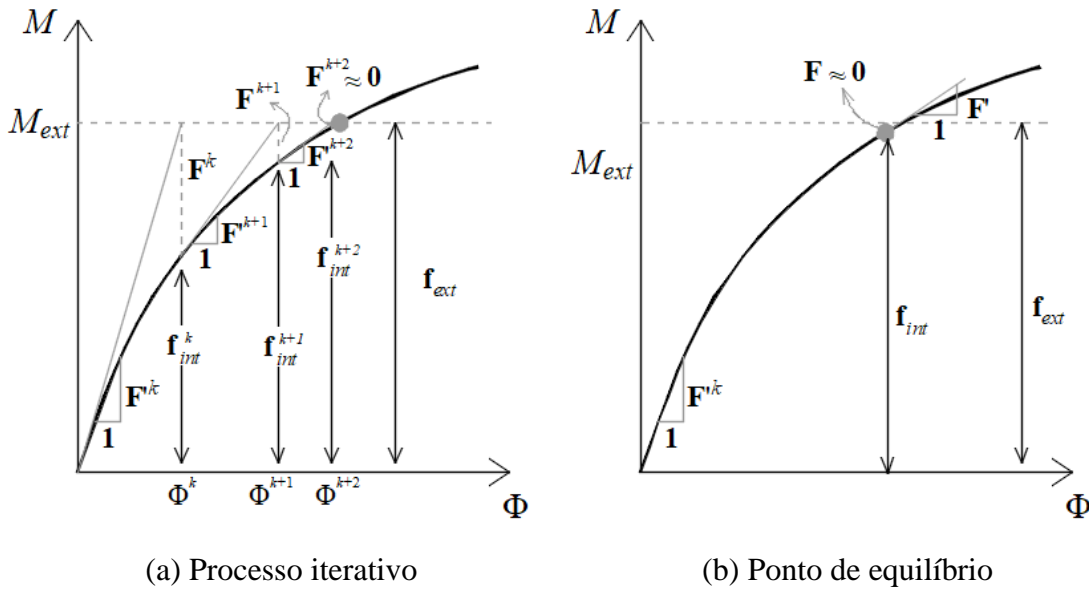
3.36). Em outras palavras, esse processo é repetido até que se chegue em uma configuração deformada da seção compatível com os esforços atuantes nela, daí o nome MCD. A Figura 3.7(a) fornece o processo incremental-iterativo a ser resolvido a nível da seção transversal.

É importante mencionar que na realização da análise da seção transversal, inicialmente o CP está fixo. À medida que as forças internas variam, a seção se deforma, e passa a apresentar deformações axiais cada vez maiores e o CP pode mudar de posição à medida que a seção começa a plastificar. A rigidez à flexão tangente à curva  $M \times \Phi$  pode ser obtida a partir da posição atualizada do CP, que é calculada de acordo com:

$$y_{CP} = \frac{\int_A E_T y dA}{\int_A E_T dA} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i} \quad (3.44)$$

Ao se atingir a configuração deformada da seção transversal compatível com o par de esforços  $N$  e  $M$ , ou seja, no momento que se obtém convergência do processo incremental-iterativo descrito acima e representado graficamente na Figura 3.7(b), as componentes da matriz constitutiva  $\mathbf{F}'$  deve ser usada para a obtenção das rigidezes generalizadas axial ( $EA_T$ ) e à flexão ( $EI_T$ ) (CHIOREAN, 2013; LEMES, 2018). Suas expressões são dadas por:

$$EA_T = f_{11} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{22}}; \quad EI_T = f_{22} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{11}} \quad (3.45)$$



**Figura 3.7.** Relação  $M \times \Phi$  para o cálculo das rigidezes generalizadas

### 3.3.4. Curva de Interação $NM$

O procedimento numérico descrito na seção anterior pode ser usado na montagem da curva de interação esforço normal – momento fletor ( $NM$ ). Essa curva de interação é um conjunto de pares ordenados nos quais para cada valor de esforço normal  $N$ , há um momento máximo  $M$  da relação momento-curvatura correspondente.

Portanto, para um determinado  $N$  atuante na seção transversal, são dados incrementos no momento fletor  $M$ , de forma que o momento fletor último resistente seja atingido quando o determinante da matriz constitutiva  $\mathbf{F}'$  for igual a zero, indicando assim uma tangente horizontal à curva momento-curvatura ( $M \times \Phi$ ). Esse procedimento é repetido para vários valores de  $N$ , chegando-se então a vários pares de pontos  $NM$  que permitem a definição com certa precisão da curva de interação. A Tabela 3.1 traz os procedimentos numéricos adotados na construção dessa curva  $NM$ .

A curva de início de plastificação pode ser também definida através dessa estratégia numérica. Quando a primeira fibra da seção apresentar deformação axial  $\varepsilon$  maior que a deformação de início de escoamento do aço, a fibra em questão inicia o processo de degradação e conseqüentemente a seção começa a perder resistência. Nesse instante, a relação momento-curvatura passa a apresentar comportamento não linear. O momento fletor responsável por esse fato é tido como momento de início de plastificação.

No CS-ASA, a curva  $NM$  é construída antes do início da análise estrutural com o intuito de reduzir a demanda computacional.

## 3.4. Metodologia para Solução do Problema Estático Não Linear

Na análise não linear de uma estrutura, é necessário que a matriz de rigidez seja atualizada constantemente na busca de um estado de equilíbrio, levando em consideração as não linearidades geométrica e física do problema. No contexto do MEF, a matriz de rigidez do sistema estrutural é, portanto, função do vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$ , do vetor de forças internas  $\mathbf{P}$  (força normal e momento fletor), e do módulo de elasticidade tangente do aço  $E_T$  (no caso da formulação inelástica adotada neste trabalho), ou seja:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \quad (3.46)$$

Para realizar essa atualização da matriz de rigidez, é necessária a utilização de uma estratégia incremental-iterativa, em que são identificadas duas etapas no processo de solução não linear para cada passo de carga. A primeira delas, denominada etapa predita, envolve a



obtenção dos deslocamentos incrementais a partir de um determinado acréscimo de carregamento. Na segunda etapa, denominada corretiva, ocorre a avaliação das forças internas através de um processo iterativo (SILVA, 2009).

**Tabela 3.1.** Estratégia numérica adotada para a construção da curva de interação  $NM$

- 
1. Leitura de dados da estrutura: seção transversal e materiais
  2. Discretização da seção transversal em faixas ou fibras
  3. Obtenção do centroide plástico CP da seção ← (Equação 3.33)
  4. Translada-se o sistema de referência para o CP
  5. Determinar máximos esforços axiais de compressão ( $N_{c,max}$ ) e de tração ( $N_{t,max}$ )
  6. Cálculo do incremento de esforço normal  $\Delta N = (N_{t,max} - N_{c,max}) / 100 N$
  7.  $N = N_{c,max}$
  8. Para cada incremento de força normal, faça:
    - X = 0**
    - Para cada incremento de momento fletor  $M$ , faça: ← (Equação 3.32)
      - Montar  $\mathbf{f}_{ext}$
      - Para  $k \leftarrow 1, nmax$  faça: ← (PROCESSO ITERATIVO)
        - Determinar  $\varepsilon$  ← (Equação 3.34)
        - Montar  $\mathbf{f}_{int}$  ← (Equação 3.38)
        - Calcular  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  ← (Equação 3.36)
        - Se  $\|\mathbf{F}\| / \|\mathbf{f}_{ext}\| \leq Tol$ , então:
          - Parar processo iterativo. Ir para <sup>(A)</sup>
          - Fim Se
          - Montar a matriz de rigidez tangente da seção  $\mathbf{F}'$  ← (Equação 3.42)
          - Verificar se  $\mathbf{F}'$  é singular
          - Se  $\mathbf{F}'$  é singular, então:
            - Momento último resistente encontrado
            - Armazenar  $N$  e  $M$  (ponto da curva de interação)
            - Parar processo e seguir para <sup>(B)</sup>
          - Fim Se
          - <sup>(A)</sup> Corrigir o vetor de deformações  $\mathbf{X}$  ← (Equação 3.41)
        - Fim Para
      - Fim Para
      - <sup>(B)</sup>  $N = N + \Delta N$
      - Fim Para
- 

O vetor de forças internas é então comparado ao vetor de forças externas, e o equilíbrio é verificado (vetor de forças residuais,  $\mathbf{g}$ ). Caso a estrutura esteja em equilíbrio, é feito um novo

incremento do carregamento externo; em caso negativo, o processo corretivo é refeito até atingir o equilíbrio, ou seja:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \cong \mathbf{F}_e, \text{ ou, } \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \cong \lambda \mathbf{F}_r \Rightarrow \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \cong 0 \quad (3.47)$$

em que  $\mathbf{F}_i$  é o vetor de forças internas,  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas, dado por um fator de carga  $\lambda$  multiplicado por um vetor de referência que dá a direção do carregamento  $\mathbf{F}_r$ .

Métodos eficientes de solução de problemas não lineares devem ser capazes de obter todos os pontos de equilíbrio do sistema (caminho de equilíbrio), identificando e passando pelos pontos críticos (pontos limites e pontos de bifurcação) que possam existir no caminho (SILVEIRA, 1995).

Nas Seções 3.4.1 e 3.4.2 a seguir, são descritas, para um dado passo de carga, as duas principais etapas do processo de solução não linear. Nessas seções são adotadas as seguintes notações:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga ( $t$ ), e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga ( $t + \Delta t$ );
- $k$  é o contador do número de iterações. Na fase predita,  $k = 0$ , na fase corretiva,  $k > 0$  (fase em que ocorre o ciclo iterativo de *Newton-Raphson*);
- $\lambda$  e  $\mathbf{U}$  definem, respectivamente, o parâmetro de carga e deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{U}$  caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio; e
- $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}$  denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

### 3.4.1. Primeira Etapa: Solução Incremental Predita

O primeiro passo para obter a solução incremental predita ( $\Delta\lambda^0, \Delta\mathbf{U}^0$ ) é montar a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  a partir da última configuração de equilíbrio conhecida (configuração  $t$ ). O vetor de deslocamentos nodais  $\delta\mathbf{U}_r$  é então obtido a partir da seguinte expressão:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r \quad (3.48)$$

Neste trabalho, o incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , é determinado através do Método do Deslocamento Generalizado (MDG; YANG e KUO, 1994). Trata-se de uma das várias estratégias de incremento de carga que estão incluídas no CS-ASA e podem ser encontradas nos trabalhos de Silveira (1995), Rocha (2000), Silva (2009) e Pires (2012).

No caso do MDG, o valor de  $\Delta\lambda^0$  é dado pela seguinte expressão:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T)({}^1\delta\mathbf{U}_r)}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T)(\delta\mathbf{U}_r)}} = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{|GSP|} \quad (3.49)$$

na qual o índice 1 indica valores de  $\Delta\lambda^0$  e  $\delta\mathbf{U}_r$  obtidos no primeiro passo de carga. O sinal da equação anterior depende do parâmetro *GSP* (*Generalized Stiffness Parameter*; YANG e KUO, 1994; SILVA, 2009), ou, mais especificamente, dos vetores relativos aos passos de carga anterior ( ${}^t\delta\mathbf{U}_r$ ) e corrente ( $\delta\mathbf{U}_r$ ).

Os deslocamentos nodais incrementais  $\Delta\mathbf{U}^0$  são obtidos a partir do escalonamento de  $\delta\mathbf{U}_r$ , ou seja:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (3.50)$$

No final desta primeira etapa, o parâmetro de carga e o vetor de deslocamentos nodais totais são atualizados:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.51)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.52)$$

nas quais  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{U}$  definem o ponto de equilíbrio do sistema no último passo de carga.

Em geral (3.51) e (3.52) não representam um ponto de equilíbrio do sistema estrutural e, portanto, é necessário ajustá-las através de correções, o que caracteriza a segunda etapa da solução do problema não linear.

### 3.4.2. Segunda Etapa: Ciclo de Iterações

O método de *Newton-Raphson* é utilizado na maioria das resoluções de problemas estruturais não lineares (CRISFIELD, 1991). A estratégia de iteração idealizada por esse método é repetida até que o vetor de forças residuais,  $\mathbf{g}$ , seja anulado, conforme imposto pela Equação (3.47):

$$\mathbf{g} = \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \cong 0 \quad (3.53)$$

o que indica que o equilíbrio do sistema foi atingido.

Tradicionalmente, o método de *Newton-Raphson* considera que o parâmetro de carga  $\lambda$  seja mantido constante durante o ciclo iterativo, e assim a trajetória de equilíbrio pode ser obtida até um ponto limite ou ponto de bifurcação. Para que seja possível traçar toda a trajetória de equilíbrio além desses pontos críticos, é necessário que seja permitida a variação de  $\lambda$  durante o ciclo iterativo.

Utilizando a técnica geral de solução descrita por Batoz e Dhatt (1979), na qual ocorre variação do parâmetro de carga ao longo do ciclo iterativo, considera-se que a mudança nos deslocamentos nodais é regida pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (3.54)$$

sendo  $\mathbf{g}$ , portanto, o vetor que deve se anular ao longo do processo iterativo, indicando um ponto de equilíbrio da estrutura. Note que  $\mathbf{g}$  foi definido como uma função dos deslocamentos nodais totais  $\mathbf{U}^{(k-1)}$ , calculados na iteração anterior, e também do parâmetro de carga total  $\lambda^k$ , que é uma incógnita descrita a partir da equação:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.55)$$

Substituindo as Equações (3.53) e (3.55) na Equação (3.54), vem:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \left[ (\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)} \right] = \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.56)$$

que pode ser reorganizada da seguinte forma:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.57)$$

em que:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = (\mathbf{K}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}; \quad \delta\mathbf{U}_r^k = (\mathbf{K}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{F}_r \quad (3.58)$$

A correção do parâmetro de carga  $\delta\lambda^k$ , única incógnita da Equação (3.55), pode ser calculada através de alguma estratégia de iteração (SILVA, 2009). Neste trabalho foi utilizada a estratégia baseada na Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (NMDR) proposta por Chan (1988), em que:

$$\delta\lambda^k = - \frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (3.59)$$

sendo os vetores  $\delta\mathbf{U}_r^k$  e  $\delta\mathbf{U}_g^k$  definidos através das Equações (3.58). Uma vez obtida a correção  $\delta\lambda^k$ , retorna-se à Equação (3.57) para o cálculo de  $\delta\mathbf{U}^k$ .

Após a obtenção da solução corretiva  $\delta\lambda^k$  e  $\delta\mathbf{U}^k$ , as variáveis incrementais e totais são atualizadas:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad \text{e} \quad \Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.60)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad \text{e} \quad {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (3.61)$$

O CS-ASA apresenta três critérios de convergência para interrupção do processo iterativo. O primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças (critério de forças) e é calculado no início da iteração corrente, ou seja:

$$\varrho_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\|} \leq \varrho \quad (3.62)$$

em que o numerador representa a norma Euclidiana do vetor das forças residuais e o denominador representa a norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo.

O segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos (critério de deslocamentos) e é sempre verificado ao final da iteração corrente, sendo definido como:

$$\varrho_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \varrho \quad (3.63)$$

em que o numerador é a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos e o denominador é a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, obtidos após a correção do processo iterativo. O terceiro critério é baseado na combinação dos dois anteriores.

O valor de  $\varrho$  é um dado de entrada do programa e deve ser escolhido com cautela, de acordo com o problema estudado. Neste trabalho,  $\varrho$  foi tomado igual a  $10^{-4}$ . A Tabela 3.2 traz a estratégia numérica adotada para a solução do problema estrutural estático não linear.

### 3.5. Problema Termoestrutural

#### 3.5.1. Curvas de Incêndio

As curvas temperatura-tempo são utilizadas pelas normas vigentes para representar a evolução e os efeitos provocados por um incêndio real ao qual uma estrutura pode ser submetida. Essas curvas podem ser nominais (definidas por expressões simples, independem da dimensão, tipo de edifício e compartimento afetado) ou paramétricas (permitem a consideração de parâmetros que influenciam a extensão e o desenvolvimento do incêndio, além de simularem a fase de arrefecimento) e partem do princípio de que o incêndio já tenha atingido o ponto de inflamação generalizada (*flashover*), desprezando-se a fase inicial de elevação progressiva da temperatura.

Neste trabalho optou-se pelo uso da curva de incêndio padrão da ISO 834-1 (1999) estabelecida pelo EN 1991-1-2:2002. Essa curva, que é frequentemente utilizada nos ensaios de laboratório em fornos para determinação da resistência ao fogo dos elementos estruturais, é dada por:

$$T_{gases} = T_0 + 345 \log(8t + 1) \quad (3.64)$$

na qual  $T_{gases}$  corresponde à temperatura dos gases em °C,  $T_0$  é a temperatura ambiente inicial (geralmente adotada 20 °C) e  $t$  é o tempo de exposição ao fogo em minutos. Outras curvas propostas pelo EN 1991-1-2:2002 podem ser observadas em Pires (2018) e Barros (2016).

### 3.5.2. Propriedades Termomecânicas do Aço sob Altas Temperaturas

As propriedades do aço, classificadas como térmicas (condutividade térmica, calor específico e alongamento térmico) e mecânicas (resistência e rigidez) são alteradas em função do aumento de temperatura à qual as estruturas estão submetidas durante um incêndio.

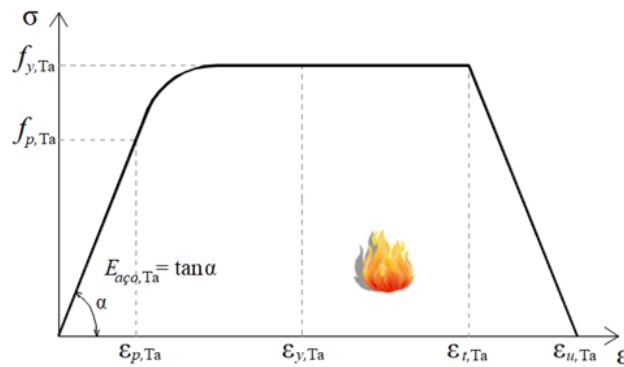
A variação das propriedades térmicas do aço adotada é recomendada pela ABNT NBR 14323:2013, que foi baseada no EN 1993- 1-2:2005.

As propriedades mecânicas de resistência e rigidez estão relacionadas, respectivamente, à tensão de escoamento e ao módulo de elasticidade do aço, características obtidas a partir da curva tensão-deformação específica para o comportamento do material sob fogo, prevista na EN 1994-1-2:2005, representada na Figura 3.8 e dada pelas Equações (3.65).

$$\sigma = \begin{cases} \varepsilon E_{Ta}, & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_{p,Ta} \\ f_{p,Ta} - c + (b/a) \sqrt{a^2 - (\varepsilon_{y,Ta} - \varepsilon)^2}, & \text{se } \varepsilon_{p,Ta} < \varepsilon \leq \varepsilon_{y,Ta} \\ f_{y,Ta}, & \text{se } \varepsilon_{y,Ta} < \varepsilon \leq \varepsilon_{t,Ta} \\ f_{y,Ta} \sqrt{1 - (\varepsilon - \varepsilon_{t,Ta}) / (\varepsilon_{u,Ta} - \varepsilon_{t,Ta})}, & \text{se } \varepsilon_{t,Ta} < \varepsilon < \varepsilon_{u,Ta} \\ 0, & \text{se } \varepsilon = \varepsilon_{u,Ta} \end{cases} \quad (3.65)$$

em que  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c$  e os parâmetros  $\varepsilon_{p,Ta}$ ,  $\varepsilon_{y,Ta}$ ,  $\varepsilon_{t,Ta}$  e  $\varepsilon_{u,Ta}$  são:

$$\begin{aligned} a^2 &= (\varepsilon_{y,Ta} - \varepsilon_{p,Ta})(\varepsilon_{y,Ta} - \varepsilon_{p,Ta} + c/E_{Ta}); & b^2 &= c(\varepsilon_{y,Ta} - \varepsilon_{p,Ta})E_{Ta} + c^2; \\ c &= \frac{(f_{y,Ta} - f_{p,Ta})^2}{(\varepsilon_{y,Ta} - \varepsilon_{p,Ta})E_{Ta} - 2(f_{y,Ta} - f_{p,Ta})}; & & \\ \varepsilon_{p,Ta} &= f_{p,Ta}/E_{Ta}; & \varepsilon_{y,Ta} &= 0,02; & \varepsilon_{t,Ta} &= 0,15; & \varepsilon_{u,Ta} &= 0,20 \end{aligned} \quad (3.66)$$



**Figura 3.8.** Relação constitutiva do aço em situação de incêndio – sem encruamento

**Tabela 3.2.** Estratégia de solução do problema estrutural estático não linear

- 
1. Leitura de dados da estrutura: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros particulares referentes ao tipo de análise
  2. Montagem do vetor de cargas nodais de referência,  $\mathbf{F}_r$ , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado
  3.  $t = 0$
  4.  $t_1 = t$
  5. Considera-se a condição inicial dada por  ${}^t\mathbf{U} = 0$  e  ${}^t\lambda = 0$
  6. Para cada incremento de carga, faça:  $\leftarrow$  (PROCESSO INCREMENTAL)
    - $t = t_1$   $\leftarrow$  (*Passo de carga anterior*)
    - $t_1 = t + 1$   $\leftarrow$  (*Passo de carga corrente*)
    - Montagem da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$   $\leftarrow$  (*Equação 3.12*)
    - Resolução de  $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$
    - Se  $t_1 = 1$ , então:
      - $\Delta\lambda_0 = (\Delta\lambda_0)_1$
      - senão, definir  $\Delta\lambda_0$   $\leftarrow$  (*Equação 3.49*)
    - Fim Se
    - Determinar  $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$
    - Atualizar as variáveis na configuração  $t_1$ :  ${}^{(t_1)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$  e  ${}^{(t_1)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
    - Para  $k \leftarrow -1$ ,  $nmax$ , faça:  $\leftarrow$  (PROCESSO ITERATIVO N-R)
      - Avaliar o vetor de forças internas:  ${}^{t_1}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
      - Calcular o vetor de forças residuais:  $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{t_1}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{t_1}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$
      - Se  $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\| / \|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\| \leq \text{tolerância}$ , então:
        - Parar o processo iterativo e seguir para o passo 7
      - Fim Se
      - Se *Newton-Raphson* PADRÃO, então:
        - Atualização de  $\mathbf{K}$
        - Fim Se
        - Calcular a correção do parâmetro de carga  $\delta\lambda^k$   $\leftarrow$  (*Equação 3.59*)
        - Corrigir os deslocamentos nodais:  $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$
        - Atualizar as variáveis incrementais e totais
          - $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$
          - $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$  } incrementais
          - ${}^{t_1}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$  } totais
          - ${}^{t_1}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$  }
  7. Fim Para
-

A curva tensão-deformação considera ainda os fatores de redução da resistência ao escoamento ( $k_{y,Ta}$ ), do limite de proporcionalidade ( $k_{p,Ta}$ ) e do módulo de elasticidade ( $k_{E,Ta}$ ) do aço, que são definidos da seguinte forma (Tabela 3.3):

$$k_{y,Ta} = \frac{f_{y,Ta}}{f_y}, k_{p,Ta} = \frac{f_{p,Ta}}{f_y}, k_{E,Ta} = \frac{E_{Ta}}{E} \quad (3.67)$$

em que  $f_{y,Ta}$ ,  $f_{p,Ta}$  e  $E_{Ta}$  são, respectivamente, a resistência ao escoamento, o limite de proporcionalidade e o módulo de elasticidade do aço a uma temperatura  $T_a$ ;  $f_y$  é a resistência ao escoamento e  $E$  é o módulo de elasticidade, ambos à temperatura ambiente (20°C). Tais fatores foram baseados nos dados da British Steel (agora denominada Corus; KIRBY e PRESTON, 1988), e foram obtidos para os aços laminados com taxas de aquecimento entre 2 °C/min e 50 °C/min.

**Tabela 3.3.** Fatores de redução da curva tensão-deformação do aço sob altas temperaturas

Temperatura do aço $T_a$ (°C)	Fatores de Redução		
	Resistência ao escoamento $k_{y,Ta} = f_{y,Ta} / f_y$	Limite de proporcionalidade $k_{p,Ta} = f_{p,Ta} / f_y$	Módulo de elasticidade $k_{E,Ta} = E_{Ta} / E$
20	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	0,8070	0,9000
300	1,0000	0,6130	0,8000
400	1,0000	0,4200	0,7000
500	0,7800	0,3600	0,6000
600	0,4700	0,1800	0,3100
700	0,2300	0,0750	0,1300
800	0,1100	0,0500	0,0900
900	0,0600	0,0375	0,0680
1000	0,0400	0,0250	0,0450
1100	0,0200	0,0125	0,0225
1200	0,0000	0,0000	0,0000

Para valores intermediários da temperatura do aço, pode ser realizada a interpolação linear.

### 3.5.3. Análise Térmica Transiente do Elemento Estrutural via MEF

A análise térmica de um elemento submetido à situação de incêndio consiste na determinação da variação do campo de temperaturas desse elemento a partir das condições de contorno



relativas ao modelo de incêndio adotado. Essa análise envolve a determinação do calor proveniente dos gases do incêndio, transferido por convecção e radiação ao elemento de estudo e a condução do calor no interior desse elemento. Detalhes sobre os mecanismos de transferência de calor por condução, convecção e radiação que possibilitam determinar a transferência de energia que ocorre durante um incêndio real e a resolução do problema de condução de calor podem ser verificados em Barros (2016) e Pires (2018). No presente trabalho, admite-se que a distribuição de temperaturas ao longo de cada elemento estrutural é uniforme e igual àquela estimada para a seção transversal, de forma que a análise é realizada apenas no plano da seção transversal através de modelos numéricos de transferência de calor a partir dos quais é possível determinar a temperatura em diferentes pontos da seção transversal.

No contexto do MEF, a equação de equilíbrio que governa o problema transiente de condução de calor é dada, matricialmente, por (BARROS, 2016):

$$\mathbf{C} \left\{ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right\} + \mathbf{K} \{ \mathbf{T} \} = \mathbf{R} \quad (3.68)$$

em que  $\mathbf{T}$  é o vetor incógnito de temperaturas nodais da estrutura,  $\mathbf{C}$  é a matriz de capacitância (capacidade térmica),  $\mathbf{K}$  é a matriz de condutividade térmica, e  $\mathbf{R}$  é o vetor de fluxo de calor normais, dados pelas seguintes equações:

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (3.69)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + h \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (3.70)$$

$$\mathbf{R} = Q \int_{\Omega} \mathbf{N}^T d\Omega + h T_{\infty} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T d\Gamma - q_0 \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T d\Gamma \quad (3.71)$$

nas quais respectivamente,  $\rho$  e  $c$  são massa e o calor específicos do material,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{M}$  são as matrizes das funções e das derivadas das funções de interpolação,  $\mathbf{D}$  é a matriz das condutividades térmicas;  $h$  é o coeficiente de transmissão de calor por convecção e/ou por radiação;  $Q$  é a fonte de calor;  $T_{\infty}$  é a temperatura dos gases e  $q_0$  é o fluxo de calor prescrito no instante  $t$ .

Para se determinar o vetor de temperaturas  $\mathbf{T}$ , solução da Equação (3.68), é adotada uma estratégia de integração no tempo baseada no Método das Diferenças Finitas (MDF, LEWIS *et al.*, 2004; RIGOBELLO, 2011; NUNES, 2014). Através da expansão em série de Taylor, a variação da temperatura no tempo  $t_{n+\theta}$  (Figura 3.9) pode ser dada por:

$$\mathbf{T}_{n+\theta} = \mathbf{T}_n + \theta\Delta t \frac{\partial \mathbf{T}_{n+\theta}}{\partial t} + \theta \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{n+\theta}}{\partial t^2} + \dots \quad (3.72)$$

em que  $n$  é o número total de intervalos de tempo e  $\theta$  é um parâmetro que define, dentro de cada intervalo de tempo, o instante em que a Equação (3.68) será satisfeita. Considerando a aproximação para um intervalo de tempo  $\Delta t$ , tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{n+\theta}}{\partial t} = \frac{\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n}{\Delta t} \quad (3.73)$$

Com a substituição da Equação (3.73) na Equação (3.72), e desprezando os termos de ordem elevada, chega-se a:

$$\mathbf{T}_{n+\theta} = \theta\mathbf{T}_{n+1} + (1-\theta)\mathbf{T}_n \quad (3.74)$$

A Equação (3.70) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{C}_{n+\theta} \left\{ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right\}_{n+\theta} + \mathbf{K}_{n+\theta} \{ \mathbf{T} \}_{n+\theta} = \mathbf{R}_{n+\theta} \quad (3.75)$$

Substituindo então as Equações (3.73) e (3.74) na equação anterior, e rearranjando os termos, chega-se a:

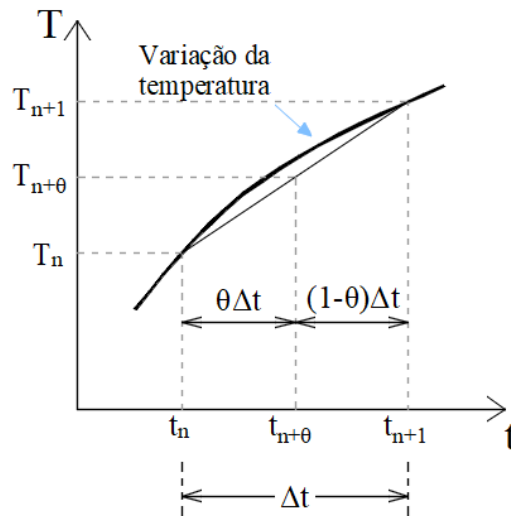
$$\mathbf{T}_{n+1} = (\mathbf{C}_{n+\theta} + \theta\Delta t\mathbf{K}_{n+\theta})^{-1} [\mathbf{C}_{n+\theta} - (1-\theta)\Delta t\mathbf{K}_{n+\theta}] \mathbf{T}_n + \mathbf{R}_{n+\theta} \quad (3.76)$$

ou ainda, de forma mais compacta, como:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+\theta} \{ \mathbf{T}_{n+1} \} = \hat{\mathbf{R}}_{n+\theta} \quad (3.77)$$

em que:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_{n+\theta} &= (\mathbf{C}_{n+\theta} + \theta\Delta t\mathbf{K}_{n+\theta}) \\ \hat{\mathbf{R}}_{n+\theta} &= [\mathbf{C}_{n+\theta} - (1-\theta)\Delta t\mathbf{K}_{n+\theta}] \mathbf{T}_n + \mathbf{R}_{n+\theta} \end{aligned} \quad (3.78)$$



**Figura 3.9.** Variação da temperatura no intervalo de tempo  $\Delta t$

Através da variação de  $\theta$ , vários esquemas de integração no tempo podem ser obtidos. Detalhes sobre esses esquemas são encontrados em Bathe (1996), Rigobello (2011) e Barros (2016).

A Equação (3.77) é fortemente não linear, já que as propriedades do material dependem intrinsecamente da temperatura. Para resolução do sistema não linear gerado por essa equação, foi utilizado o método incremental simples (Tabela 3.4), uma técnica numérica baseada em integração linear no tempo que utiliza processos iterativos. Segundo Mouço (2008), a precisão desse método é suficiente e não afeta consideravelmente a resposta estrutural, principalmente quando os intervalos de tempo escolhidos são pequenos.

**Tabela 3.4.** Solução do problema transiente condução de calor – método incremental simples

---

1. Leitura de dados de entrada, condições iniciais e de contorno
2. $\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_0 = 20^\circ\text{C}$ (Temperatura ambiente)
3. Para cada incremento de tempo $\Delta t \leftarrow 1, n_{\text{máx}}$ , faça: $\blackleftarrow$ ( <i>PROCESSO INCREMENTAL</i> )
Cálculo da matriz de capacitância $\mathbf{C}$ $\blackleftarrow$ (Equação 3.71)
Cálculo da matriz de condução térmica $\mathbf{K}$ $\blackleftarrow$ (Equação 3.72)
Cálculo do fluxo de calor $\mathbf{R}$ $\blackleftarrow$ (Equação 3.73)
Obtenção de $\hat{\mathbf{K}}_{n+\theta}$ e $\hat{\mathbf{R}}_{n+\theta}$ $\blackleftarrow$ (Equação 3.90)
Resolução do sistema de equações $\{\mathbf{T}\}_{n+1} = \left[ \hat{\mathbf{K}}_{n+\theta} \right]^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{n+\theta}$
Fim Para

---

### 3.5.4 Análise Termoestrutural

Na análise de uma estrutura metálica em situação de incêndio avalia-se a resposta da estrutura sob os efeitos da ação térmica devido ao aumento de temperatura. O comportamento da estrutura é medido através da evolução dos seus deslocamentos, deformações e tensões, associados à dilatação térmica e à degradação das propriedades mecânicas de resistência e rigidez do aço. Essa análise é primordial para avaliar a segurança de uma estrutura perante um incêndio, determinando o tempo máximo seguro antes que a estrutura colapse.

A solução da análise termoestrutural é composta de 3 fases. Na primeira fase é realizada uma análise estrutural com as condições de apoio e carregamento típicas da estrutura à temperatura ambiente, na qual são determinados os deslocamentos e tensões na mesma antes do aumento de temperatura. Na segunda fase, é realizada a análise térmica, que consiste na determinação do campo de temperaturas na seção transversal dos elementos afetados pelo fogo a cada instante do incêndio, levando em conta a variação das propriedades do aço em função da elevação de temperatura. Portanto, nessa fase determina-se a variação das propriedades

mecânicas e térmicas do aço devido ao incêndio. Na terceira fase, os deslocamentos, deformações e tensões na estrutura são obtidos levando em consideração a degradação das propriedades do aço devido à elevação de temperatura, a cada instante.

Para a realização da análise estrutural sob condições de incêndio, Barros (2016) e Pires (2018) criaram no CS-ASA (SILVA, 2009) os módulos CS-ASA/FA (*Computational System for Advanced Structural Analysis/Fire Analysis*) e CS-ASA/FSA (*Computational System for Advanced Structural Analysis/Fire Structural Analysis*), que realizam as análises térmica e termoestrutural, respectivamente, segunda e terceira fases descritas no parágrafo anterior, e que utilizam as formulações numéricas descritas nas Seções 3.3, 3.4 e 3.5.3.

As formulações utilizadas na análise estrutural e termoestrutural, primeira e terceira fases da análise, foram apresentadas nas Seções 3.3 e 3.4, e compreendem, respectivamente, o uso da formulação corrotacional e do acoplamento MRPR/MCD na representação das não linearidades geométricas e físicas da estrutura. Alguns pontos importantes com relação ao uso dessas formulações devem ser destacados:

- Na fase da análise estrutural, a relação constitutiva dos materiais segue o que foi descrito na Seção 3.3.2. Já na análise termoestrutural, a relação constitutiva depende da elevação da temperatura, e, portanto, segue a Seção 3.5.2;
- Na análise termoestrutural, os termos da matriz constitutiva  $\mathbf{F}'$  dados pelas Equações (3.43) apresentam o módulo de elasticidade tangente  $E_T$  multiplicado pelo fator de redução  $k_{E,Ta}$  (Equação 3.67);
- Diferente do que acontece na análise estrutural (à temperatura ambiente) em que a curva  $NM$  é construída antes do início da análise, na análise termoestrutural, a curva de capacidade máxima da seção transversal (curva  $NM$ ) precisa ser construída à cada incremento de tempo de duração do incêndio, já que as propriedades mecânicas se modificam à medida que a temperatura varia, o que exige maior demanda computacional; e
- O critério de convergência utilizado nas análises termoestruturais é o de deslocamentos (Equação 3.63).

Na análise termoestrutural, considera-se que a carga permanece fixa, não ocorrendo, portanto, sua variação após o início do incêndio (NAJJAR, 1994; SOUZA JR, 1998; IU e CHAN, 2004; CALDAS, 2008). Após o início do incêndio, são aplicados incrementos de tempo até atingir o tempo total de duração do incêndio. A cada incremento de tempo, obtém-se a temperatura do elemento, que influencia as propriedades do aço (rigidez, resistência e

deformação térmica) e conseqüentemente os resultados de deslocamento, deformação e tensão na estrutura.

Na análise termoestrutural, a cada incremento de tempo a matriz de rigidez e o vetor de forças externas precisam ser atualizados, e o equilíbrio estrutural, reestabelecido através de métodos iterativos. A Tabela 3.5 apresenta o algoritmo de solução do processo incremental-iterativo para problemas termoestruturais. Maiores detalhes desse procedimento numérico podem ser encontrados em Barros (2016), Pires (2018) e Barros *et al.* (2018).

**Tabela 3.5.** Estratégia de solução adotada para os problemas termoestruturais

---

**FASE 1: Análise Estática**

1. Leitura de dados
2. Construção das curvas de interação ← (Tabela 3.1)
3. Cálculo do vetor de cargas nodais  $\mathbf{F}_r$
4. Solução incremental e processo iterativo da análise estrutural ← (Tabela 3.2)

**FASES 2 e 3: Análises térmica e termoestrutural**

5. Lê dados de entrada relativos ao incêndio
6. Para cada inc. de tempo ( $n_{inct} \leftarrow 1, n_{max}$ ), faça: ← (PROCESSO INCREMENTAL)

Cálculo do campo de temperaturas na seção transversal dos elementos estruturais

Construção das curvas de interação ← (Tabela 3.1)

Montagem da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$

Para  $k \leftarrow 1, n_{max}$  faça: ← (PROCESSO ITERATIVO NR)

Avaliação do vetor de forças internas  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = \mathbf{K}\mathbf{U}^{(k-1)}$

Cálculo do vetor de forças residuais  $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r^{constante} - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_{ep}^{(k-1)}$

Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais:  $\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)}$

Atualização dos deslocamentos totais  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \delta\mathbf{U}^k$

Se  $\|\delta\mathbf{U}^k\| / \|\mathbf{U}^k\| \leq Tol$ , então:

Parar processo e seguir para <sup>(A)</sup>

Fim se

Fim para

<sup>(A)</sup> Se  $n_{inct} < n_{máx}$ , realizar novo incremento de carga

Fim para

---

# CAPÍTULO 4

## Análises Numéricas

### 4.1. Introdução

Este capítulo traz análises inelásticas de segunda ordem (AISO) de arcos metálicos abatidos e pouco abatidos usando a formulação numérica apresentada no capítulo anterior. Essas análises são realizadas basicamente em dois níveis: local, em que a atenção é voltada ao estudo da capacidade resistente da seção transversal do arco; e global, na qual se investiga o comportamento da estrutura como um todo.

As modelagens computacionais dos arcos são realizadas via CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; SILVA, 2009;) e os resultados obtidos são comparados às soluções analíticas e numéricas encontradas na literatura. Os softwares MASTAN2 (ZIEMIAN e MCGUIRE, 2000; [www.mastan2.com](http://www.mastan2.com)) e SAFIR (FRANSSEN, 2005; [www.uee.uliege.be](http://www.uee.uliege.be)) também são utilizados na validação dos resultados numéricos aqui obtidos através do CS-ASA.

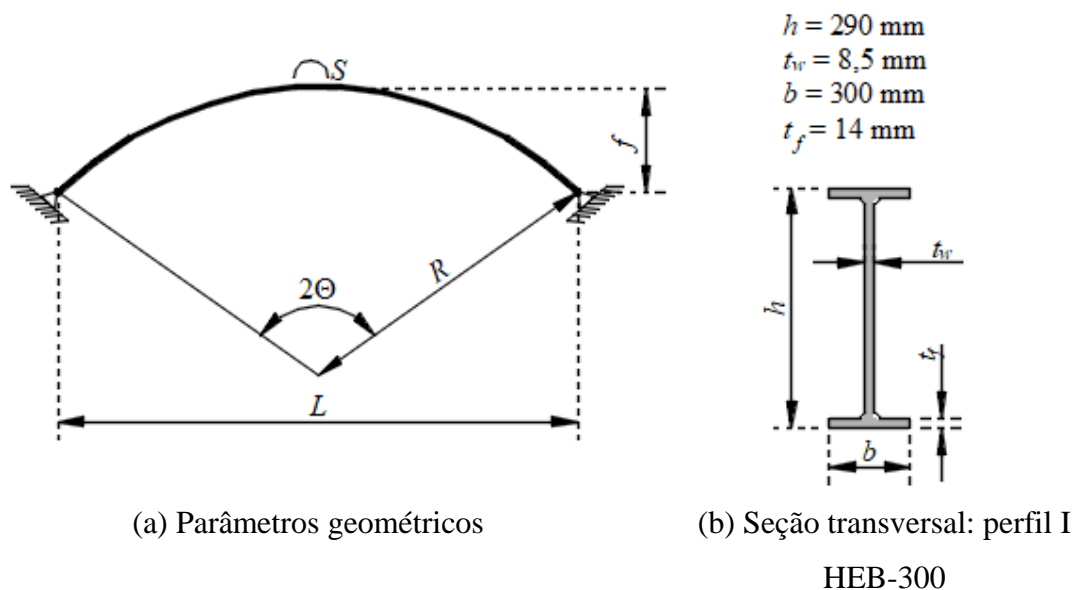
O capítulo é dividido em 5 grandes exemplos: o primeiro apresenta um panorama geral da análise inelástica de arcos (abatidos e pouco abatidos) de seção transversal em perfil I, abrangendo a influência das condições de apoio; o segundo procura abordar diferentes configurações de cargas aplicadas e a influência da relação de abatimento ( $f/L$ , em que  $f$  é a flecha e  $L$  é o comprimento do arco) sobre o comportamento da estrutura; no terceiro exemplo é realizado um estudo sobre arcos com seções transversais tubulares circulares, retangulares e quadradas; o quarto exemplo traz análises térmicas e termoestruturais de um arco em situação de incêndio; o quinto e último exemplo fornece a análise de um pórtico metálico tipo galpão cujo elemento horizontal (viga) é substituído por um arco.

Em todas as simulações numéricas deste capítulo, a solução do problema não linear é obtida através de uma estratégia incremental-iterativa. Em cada passo de carga, a solução predita é definida através do Método do Deslocamento Generalizado (MDG; YANG e KUO, 1994). Já para a correção do parâmetro de carga ao longo do ciclo iterativo é adotada a técnica

da Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (NMDR; CHAN, 1988), juntamente com o método de *Newton-Raphson* Modificado. Dentre as possíveis combinações existentes no CS-ASA, essa foi a que se mostrou mais estável do ponto de vista numérico. A tolerância para convergência adotada é de  $10^{-4}$  e o número máximo de iterações é igual a 20.

## 4.2. Arcos com Perfil I HEB-300

A Figura 4.1 e a Tabela 4.1 trazem, respectivamente, os parâmetros geométricos e do aço dos arcos metálicos abatidos e pouco abatidos com seção transversal em perfil I HEB-300 (seção compacta, com  $\lambda = 10,71 < \lambda_p = 11,09$  – NBR 8800:2008 – Seção 5.1.2), analisados nesta seção. O comportamento do aço segue o modelo constitutivo trilinear (Seção 3.3.2). Para a criação dos diferentes modelos numéricos, o ângulo interno do arco ( $2\Theta$ ) foi alterado de acordo com o abatimento do mesmo ( $f/L$ ), sendo o comprimento do arco ( $S$ ) mantido constante.



**Figura 4.1.** Arcos abatidos e pouco abatidos

**Tabela 4.1.** Propriedades do aço

Perfil I HEB-300	Módulo de Elasticidade ( $E$ )	200 GPa
	Tensão de Escoamento ( $f_y$ )	235 MPa

As análises estão divididas em 5 partes: estudo da malha de discretização (arco e seção transversal), trajetória de equilíbrio, carga limite, capacidade resistente da seção transversal e influência das condições de apoio. Os resultados aqui obtidos são comparados aos de Spooenberg *et al.* (2012a), que utilizaram o software ANSYS 11.0 (2008) e realizaram análises

inelásticas de primeira ordem. O modelo de tensões residuais utilizado em ambas as abordagens numéricas é descrito pelo EN 1993-1-2:2005 (Seção 3.3.2).

#### 4.2.1. Estudo da Malha

Spoorenberg *et al.* (2012a) adotaram 4 diferentes malhas em suas análises (Tabela 4.2) para estudar o comportamento de um arco biapoiado com ângulo interno  $2\Theta = 180^\circ$  (muito pouco abatido) e comprimento  $S = 12\text{m}$  submetido à uma carga concentrada no topo. Através dessa tabela, observa-se que à medida que o número de elementos da malha aumenta, a carga de plastificação ( $F_{pl}$ ) diminui. Esses autores tomaram como referência o valor de  $F_{pl} = 608\text{kN}$  obtido com a Malha 4 e verificaram que com a Malha 3 (malha adotada) já era possível alcançar um resultado satisfatório para a carga de plastificação do arco, com uma diferença de apenas 2,35%.

**Tabela 4.2.** Estudo da malha (arco e seção transversal (ST)): Spoorenberg *et al.* (2012a)

Malha	Discretização		$F_{pl}$ (kN)	Diferença (%) <sup>1</sup>
	Arco	ST		
1	24	6	685,55	12,8
2	48	12	633,75	4,24
3	96	24	622,20	2,35
4	192	48	608,00	-

<sup>1</sup> Valor de referência:  $F_{pl} = 608\text{kN}$  da Malha 4

No presente trabalho foram estudados vários conjuntos de malhas para discretização do arco e sua seção transversal, sendo que os resultados de 5 deles são apresentados na Tabela 4.3, e o mesmo valor de  $F_{pl} = 608\text{kN}$  é tomado como referência. Nota-se que a malha que forneceu a carga crítica plástica  $F_{pl}$  mais próxima da literatura é a Malha 4 (Figura 4.2), na qual se tem uma diferença de apenas 0,2% em relação ao valor de referência. Verifica-se também que Spoorenberg *et al.* (2012a) necessitaram de 96 elementos (arco) e 24 divisões (seção transversal) para se chegar próximo ao valor de referência, enquanto neste trabalho foram necessários apenas 8 elementos (arco) e 15 divisões (seção transversal), de onde se destaca a eficiência computacional da formulação numérica empregada.

A divisão da seção transversal é muito importante na calibragem do modelo computacional, como pode ser constatado também na Tabela 4.3 através dos resultados apresentados para as malhas 3, 4 e 5, que possuem mesma discretização para o arco e diferentes divisões para a seção transversal.

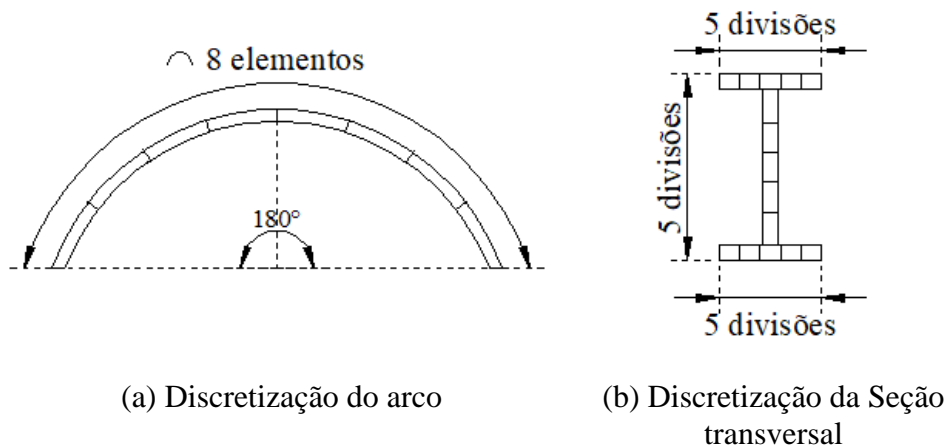


Deve-se ressaltar ainda que, no caso dos arcos, a malha pode depender também de outros fatores, dentre eles: o tipo de carregamento, o fator de abatimento  $f/L$ , as condições de apoio, a forma geométrica da seção transversal, dentre outros. Mais adiante, no Exemplo 2 (Seção 4.3), esse assunto é retomado, ou seja, a importância da malha (arco e seção transversal) na modelagem do problema via CS-ASA.

**Tabela 4.3.** Estudo da malha (arco e seção transversal (ST)): presente trabalho

Malha	Discretização		$F_{pl}$ (kN)	Diferença (%) <sup>2</sup>
	Arco	ST		
1	4	9	576,986	-5,1
2	4	30	611,88	0,6
3	8	9	576,472	-5,2
4	8	15	609,166	0,2
5	8	30	614,002	1,0

<sup>2</sup> Valor de referência:  $F_{pl} = 608\text{kN}$  da Malha 4 (Tabela 4.2; SPOORENBERG *et al.*, 2012)



**Figura 4.2.** Malha 4 da Tabela 4.3

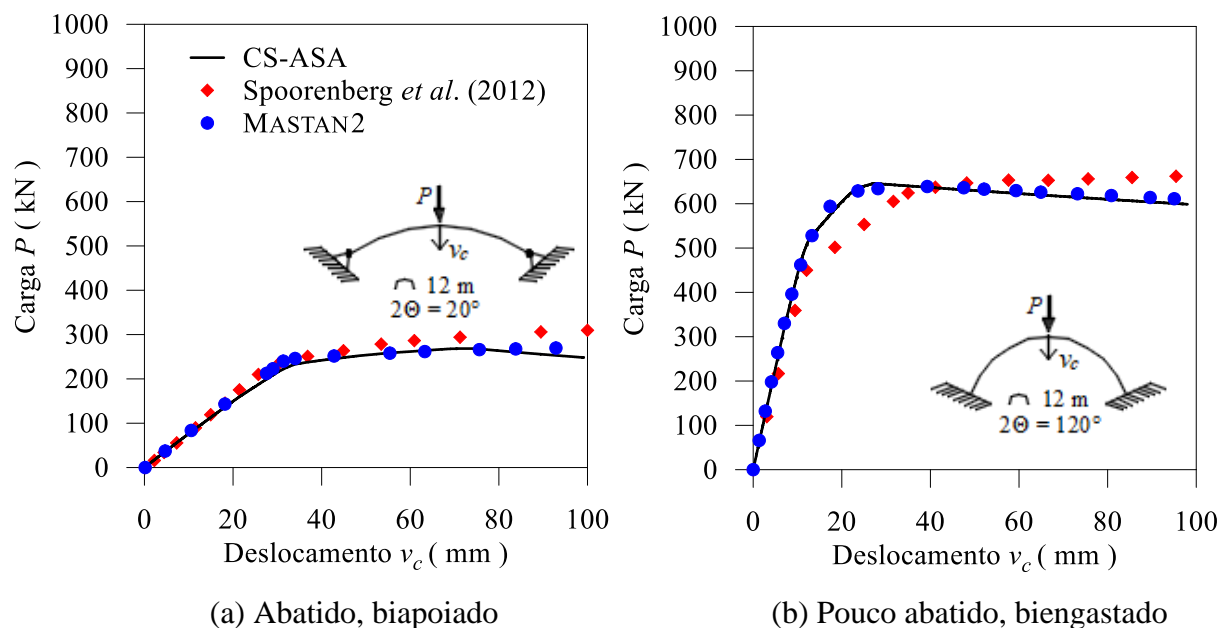
#### 4.2.2. Trajetórias de Equilíbrio

Spoorenberg *et al.* (2012a) obtiveram as trajetórias de equilíbrio de arcos metálicos abatidos e pouco abatidos, biapoiados e biengastados, sujeitos aos seguintes carregamentos: carga vertical concentrada no topo e carga vertical uniformemente distribuída ao longo de todo o arco. Como já comentado, suas análises não levaram em consideração os efeitos de segunda ordem.

A Figura 4.3(a) traz as trajetórias de equilíbrio do arco abatido biapoiado, com  $2\Theta = 20^\circ$  e  $S = 12\text{m}$ , retirada da literatura e obtidas através do CS-ASA e MASTAN2. A malha adotada foi a mesma observada na Figura 4.2. Observa-se que os caminhos não lineares de equilíbrio obtidos através do CS-ASA e MASTAN2 apresentam maior concordância, uma vez que, em

ambas as análises, os efeitos geométricos não lineares são considerados, o que não acontece na modelagem numérica de Spoorenberg *et al.* (2012a).

Já na Figura 4.3(b) são as trajetórias de equilíbrio de um arco pouco abatido biengastado, com  $2\Theta = 120^\circ$  e  $S = 12\text{m}$ . Como na análise anterior, ocorre maior aproximação entre os resultados extraídos do CS-ASA e MASTAN2. Nota-se que, no centro do arco, onde ocorre a plastificação da seção, o deslocamento vertical  $v_c$  de Spoorenberg é mais acentuado do que o obtido no CS-ASA, para um mesmo nível de carga. Nos dois modelos, tanto para o arco abatido biapoiado quanto para o arco pouco abatido biengastado, ocorre a perda de estabilidade por ponto limite de carga.



**Figura 4.3.** Trajetórias de equilíbrio do arco metálico

#### 4.2.3. Carga Limite de Plastificação

Neste estudo, o objetivo é avaliar a carga limite de plastificação para arcos com comprimento  $S = 12\text{m}$  e  $2\Theta$  variando de  $10^\circ$  a  $180^\circ$ , de forma a incluir arcos abatidos e não abatidos sob carga vertical concentrada e duas condições de apoio (biapoiada e biengastada). No caso dos arcos biapoiados considerou-se também a carga vertical uniformemente distribuída.

Através da Tabela 4.4 percebe-se que quanto mais abatido é o arco, menor é a carga limite de plastificação do mesmo, porém a relação entre o ângulo interno  $2\Theta$  e a carga crítica inelástica é não linear. Para os tipos de carregamento e condições de apoio considerados, à medida que o ângulo interno aumenta, a carga limite de plastificação também aumenta, porém mais lentamente. Como esperado, para uma mesma geometria, o arco biengastado tem a carga crítica inelástica maior do que a do arco biapoiado.

**Tabela 4.4.** Carga limite de plastificação para arcos abatidos e pouco abatidos

$2\Theta$ (°)	Características dos Arcos			
	Carga Concentrada (kN)			Carga distribuída (kN/m)
	Biapoiado	Biengastado	Acrescimo de carga <sup>3</sup>	Biapoiado
10	135	211	56 %	18
30	360	360	0 %	60
60	498	513	3 %	119
90	562	599	7 %	154
120	597	646	8 %	182
150	609	673	10 %	193
180	609	689	13 %	196

<sup>3</sup> Acréscimo de carga resistente da condição biengastada em relação à condição biapoiada

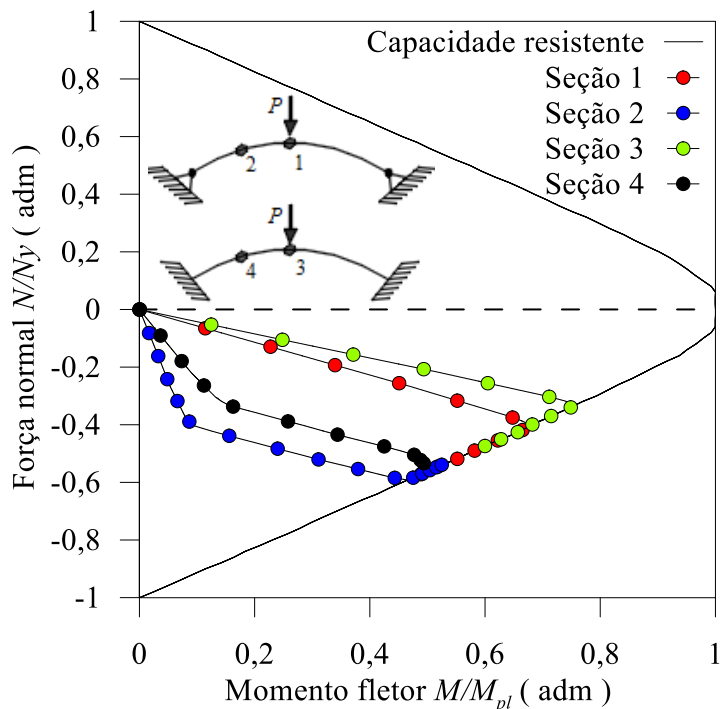
#### 4.2.4. Capacidade Resistente da Seção

Avalia-se agora a capacidade resistente da seção transversal do arco através da curva de interação esforço normal x momento fletor ( $NM$ ), considerando a flexão em torno do eixo de maior inércia. Os dois arcos analisados têm comprimento  $S = 12\text{m}$ , ângulo interno  $2\Theta = 20^\circ$  (arcos abatidos) e carga concentrada no topo, com o primeiro deles sendo biapoiado e o segundo biengastado. A Figura 4.4 fornece a curva de resistência para os dois sistemas, que independe das condições de contorno da estrutura. Nessa mesma figura pode ser avaliada a variação  $NM$  nas Seções 1, 2, 3 e 4 (ver detalhe na figura). As Seções 1 e 2 estão localizadas no arco biapoiado, e as Seções 3 e 4 no biengastado. Nota-se que, em todos esses pontos, acontece a plastificação total da seção transversal. Nessa figura é possível observar que não há grande disparidade entre os esforços normais de compressão e momento fletor atuantes nas seções predeterminadas.

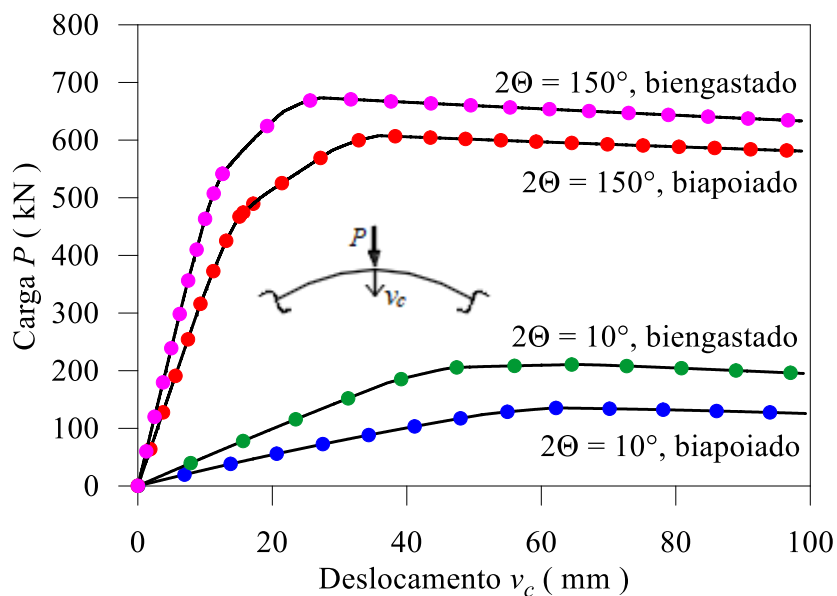
#### 4.2.5. Influência das Condições de Bordo

As condições de bordo são fatores que influenciam o comportamento dos arcos. Na Figura 4.5 são apresentados os caminhos não lineares de equilíbrio que procuram destacar a influência das condições de bordo em dois conjuntos de estruturas. O primeiro conjunto aborda os arcos muito abatidos com  $S = 12\text{m}$  e  $2\Theta = 10^\circ$ ; no segundo conjunto estão os arcos muito pouco abatidos com  $S = 12\text{m}$  e  $2\Theta = 150^\circ$ . Como esperado, os arcos biengastados apresentam carga limite de plastificação superior à carga limite de plastificação dos arcos biapoiados, com maior influência

sobre o arco muito abatido ( $2\Theta \leq 10^\circ$ ) – a carga limite do arco biengastado (211kN), foi cerca 56% maior que a do biapoiado, 136kN. No caso das demais configurações de arcos ( $2\Theta > 10^\circ$ ), o acréscimo de resistência do arco biapoiado para o arco biengastado é pequeno, ficando entre 3% e 13%.



**Figura 4.4.** Capacidade resistente do perfil I HEB-300 e variação  $NM$  de seções selecionadas dos arcos

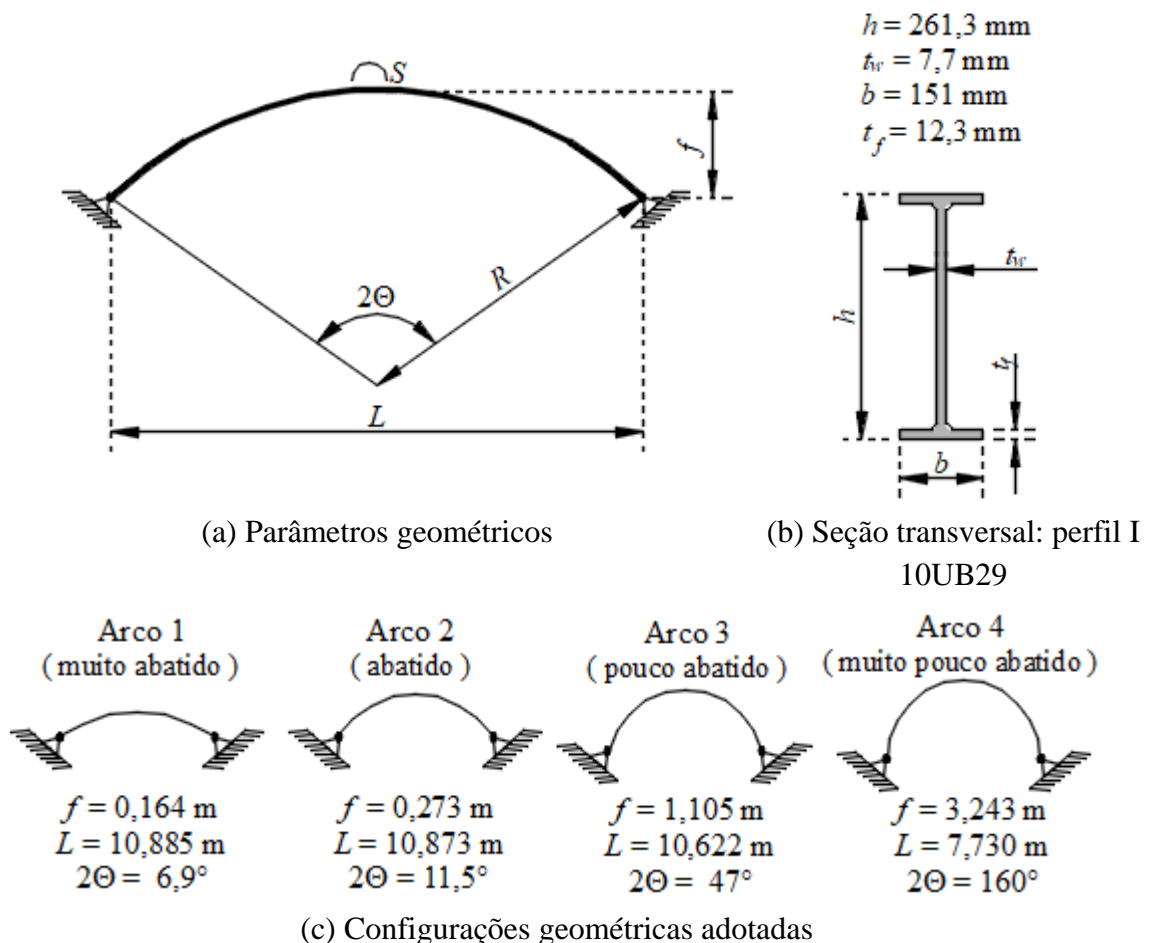


**Figura 4.5.** Arcos abatidos e pouco abatidos com perfil I HEB-300: influência das condições de bordo

### 4.3. Arcos com Perfil I 10UB29

Esta seção destina-se a verificar a influência do carregamento e da relação de abatimento  $f/L$  em arcos com perfil I 10UB29. Trata-se de um perfil ainda mais compacto que o apresentado no exemplo anterior, com  $\lambda = 6,14 < \lambda_p = 10,75$  (NBR 8800:2008, Seção 5.1.2) e, portanto, a flambagem local não é levada em consideração, já que não acontece antes da plastificação da seção transversal. Esses arcos foram inicialmente estudados por Pi e Trahair (1999), e seus resultados são apresentados neste exemplo. O perfil metálico possui aço com módulo de elasticidade  $E = 200\text{GPa}$  e resistência de escoamento  $\sigma_y = 250\text{MPa}$ . O comportamento do aço é descrito através do modelo constitutivo trilinear (Seção 3.3.2). As características geométricas do arco são apresentadas nas Figuras 4.6(a) e (b).

Os modelos numéricos são criados a partir de quatro configurações geométricas, que representam desde o arco muito abatido (Arco 1) até o muito pouco abatido (Arco 4), e são exibidos na Figura 4.6(c). As condições de carregamento adotadas estão na Figura 4.7.



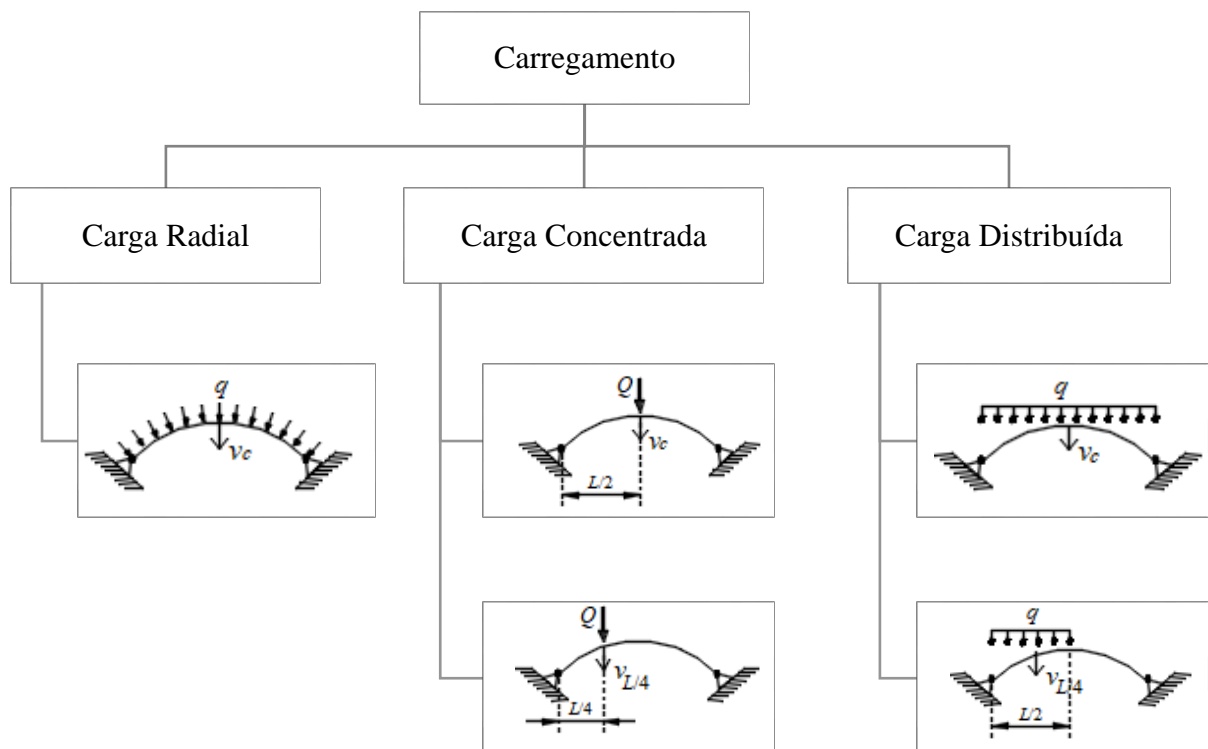
**Figura 4.6.** Arcos com perfil I 10UB29

### 4.3.1. Estudo da Malha

Como no exemplo anterior, o estudo da malha (arco e seção transversal) é de grande importância uma vez que esse tipo de estrutura apresenta, naturalmente, um comportamento fortemente não linear.

Após várias tentativas para se determinar a malha ideal (número de elementos finitos para o arco e número de divisões para a seção transversal) para cada um dos quatro arcos, considerando cada tipo de carregamento, chegou-se à conclusão de que seriam necessárias entre 45 e 60 divisões para a seção transversal e, portanto, os resultados mostrados a seguir são obtidos considerando 60 divisões na seção transversal, sendo 20 em cada uma das mesas e 20 na alma.

No caso da discretização do arco, a Tabela 4.5 apresenta o número de elementos necessários em cada modelo estudado, para se chegar a resultados assertivos. De um modo geral, é necessário menor refinamento nos casos dos arcos que tem razão  $f/L$  intermediária – os arcos abatidos e pouco abatidos (Arcos 2 e 3). Com relação ao carregamento, observou-se que as cargas simétricas exigiram também um menor refinamento que as assimétricas, que acentuam o comportamento não linear dos arcos.



**Figura 4.7.** Condições de carregamento adotadas

**Tabela 4.5.** Número de elementos utilizados na discretização dos arcos

Carga	Arcos			
	Arco 1 ( $2\Theta = 6,9^\circ$ )	Arco 2 ( $2\Theta = 11,5^\circ$ )	Arco 3 ( $2\Theta = 47^\circ$ )	Arco 4 ( $2\Theta = 160^\circ$ )
C.D. Radial	16	8	8	36
C.C. $L/2$	16	8	8	60
C.C. $L/4$	60	36	60	200
C.D. Vertical (AC)	8	36	16	60
C.D. Vertical (MA)	200	100	100	200

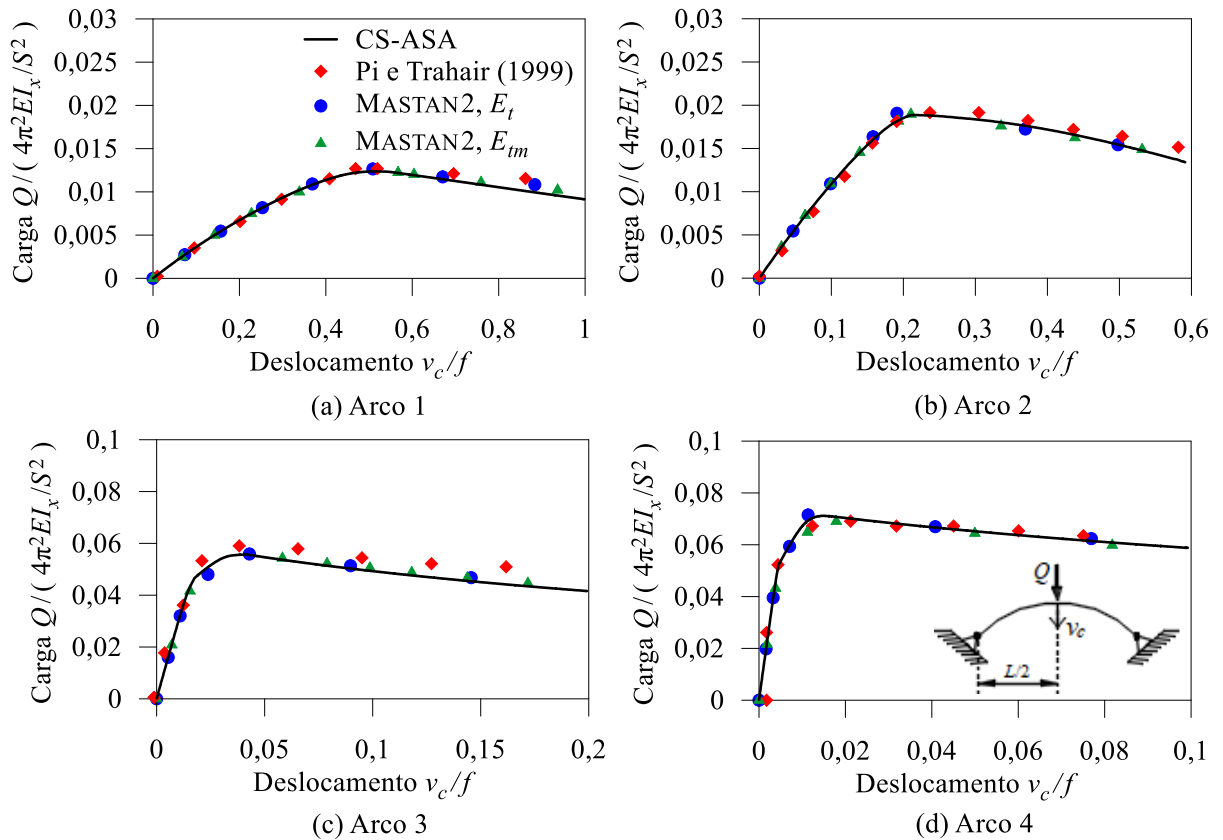
Nota: AC = carga atuante no arco completo; MA = carga atuante até o meio do arco

### 4.3.2. Trajetórias de Equilíbrio

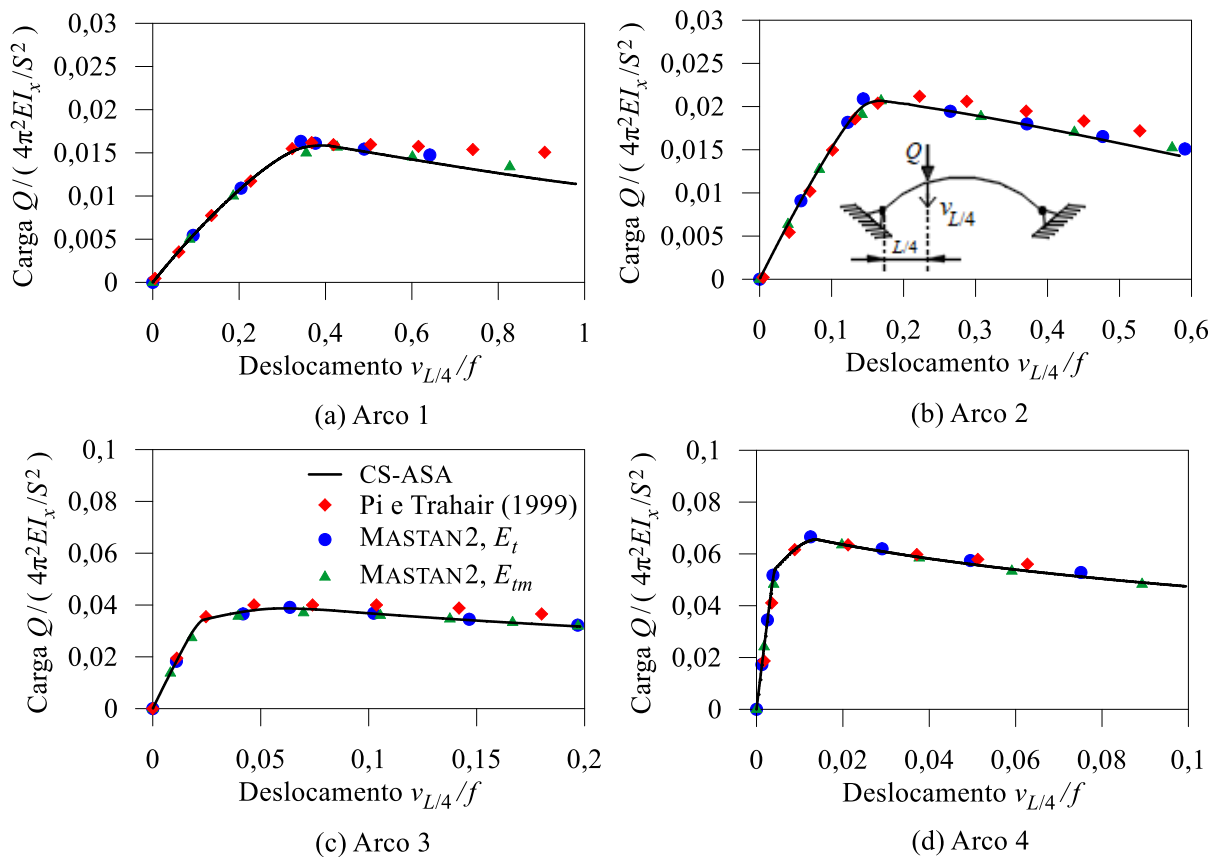
Nessa seção são exibidos, através das Figuras 4.8 - 4.12, os caminhos não lineares de equilíbrio para os arcos sob as situações de carregamento apresentadas na Figura 4.7, ou seja: carga concentrada no meio do vão  $L$  (Figura 4.8); carga concentrada a  $1/4$  do vão  $L$  (Figura 4.9); carga vertical distribuída em todo o vão  $L$  do arco (Figura 4.10); carga distribuída até o meio do arco (Figura 4.11); e carga radial (Figura 4.12). Na representação da resposta da estrutura, o deslocamento vertical,  $v_c$ , no topo ou  $v_{L/4}$  a  $1/4$  do vão do arco é tomado como referência e adimensionalizado através da flecha,  $f$ ; o carregamento, representado por  $Q$  ou  $q$ , é parametrizado em relação à segunda carga de flambagem elástica de uma coluna de comprimento equivalente  $S$  (eixo de maior inércia; PI e TRAHAIR, 1999).

Os resultados obtidos via CS-ASA foram comparados àqueles de Pi e Trahair (1999) para os arcos sob carga concentrada e carga radial. O software MASTAN2 foi utilizado no estudo de todos os modelos e contribui com dois resultados diferentes, um adotando o módulo de elasticidade tangente,  $E_t$ , e o outro adotando o módulo de elasticidade tangente modificado,  $E_{tm}$ . Esse último incorpora na sua expressão a influência do momento fletor (GONÇALVES, 2013; ZIEMIAN e MCGUIRE, 2002).

Dessas figuras percebe-se que os resultados encontrados via CS-ASA estão próximos aos da literatura e do MASTAN2 na grande maioria dos casos. Segundo Pi e Trahair (1999), para os carregamentos concentrados e radiais os Arcos 1 e 2 (muito abatido e abatido, respectivamente), em geral, perdem sua estabilidade por ponto limite. Os Arcos 3 e 4 (pouco abatido e muito pouco abatido, respectivamente) em geral perdem estabilidade por bifurcação.

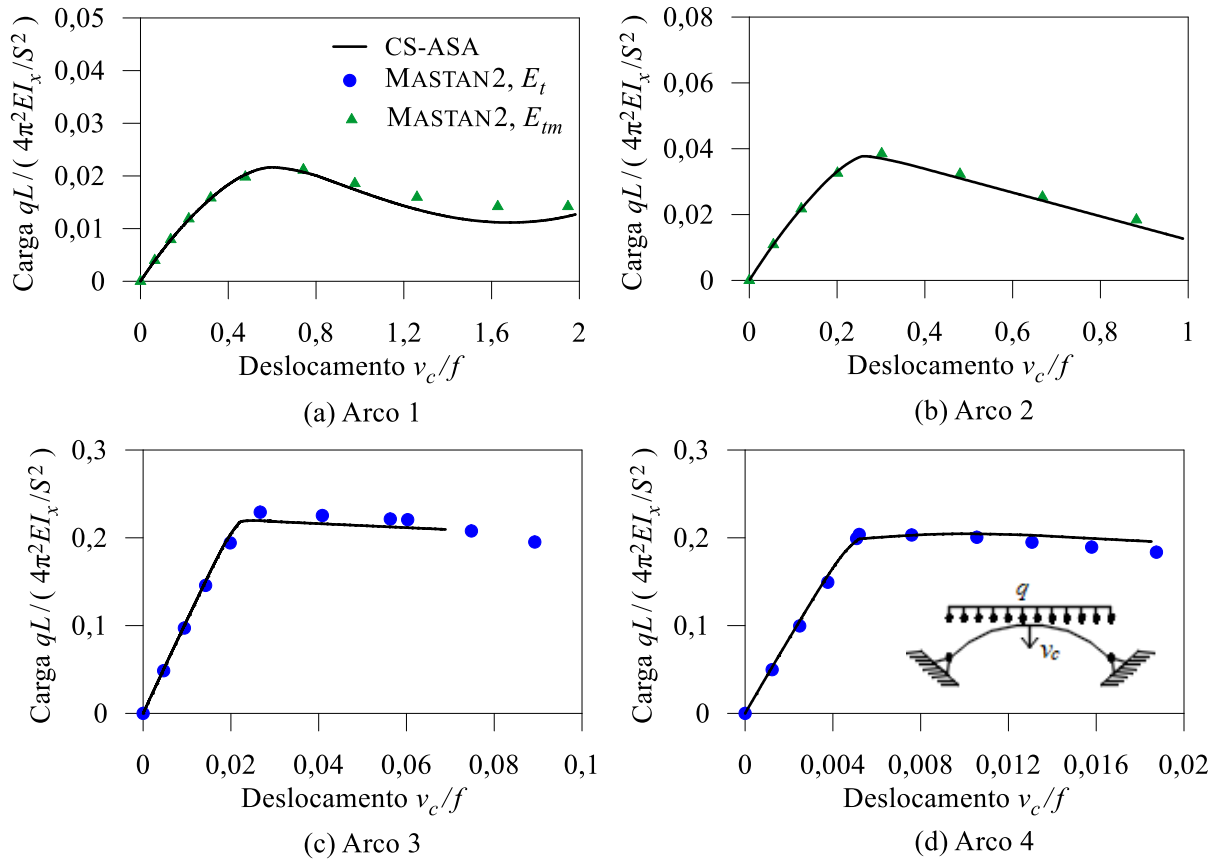


**Figura 4.8.** Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga concentrada no topo

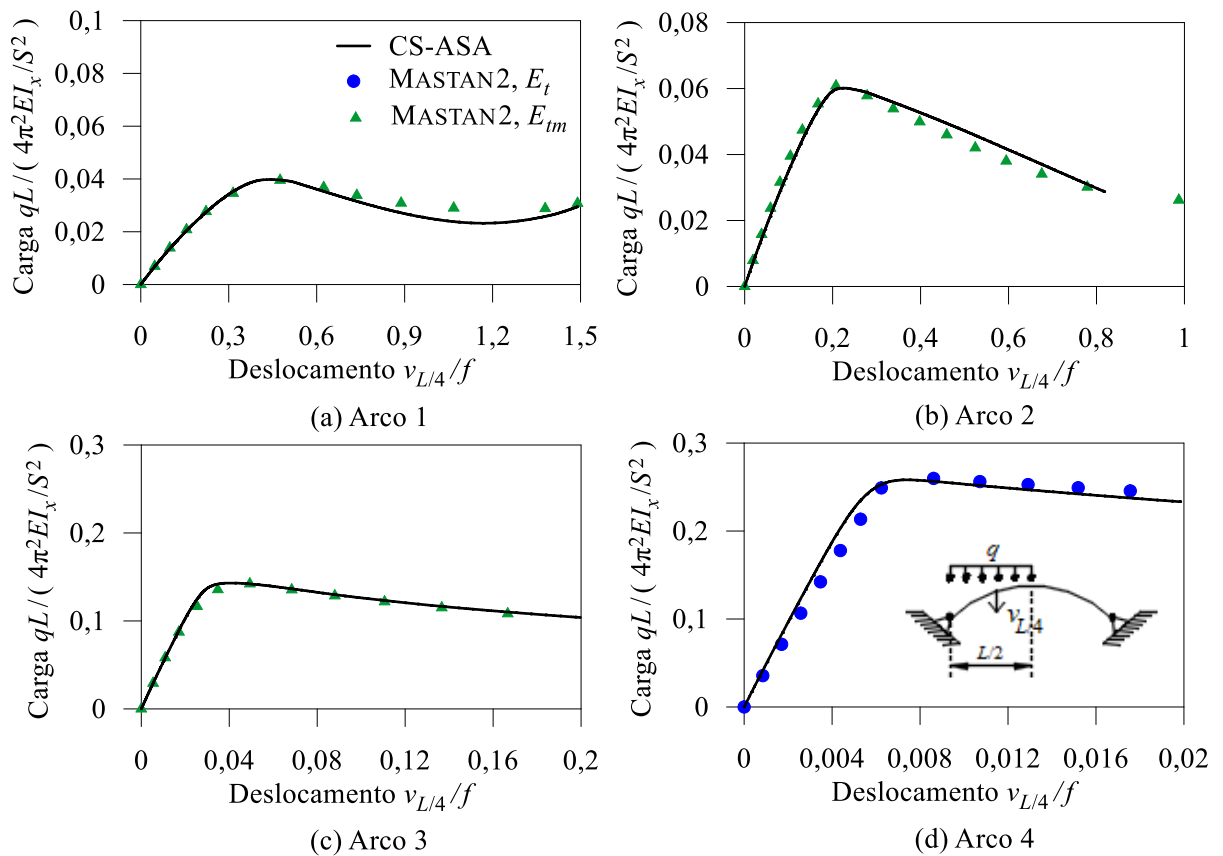


**Figura 4.9.** Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga concentrada à  $L/4$



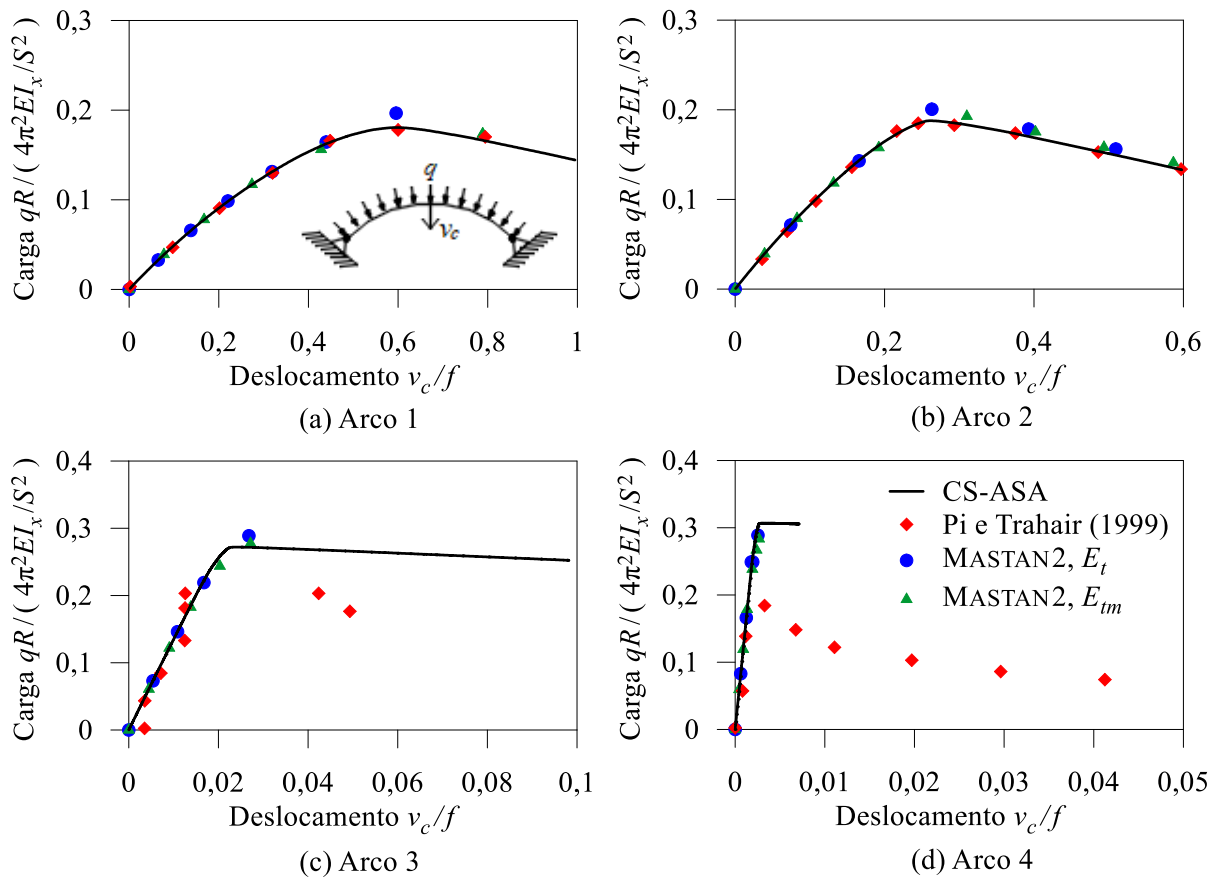


**Figura 4.10.** Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga vertical distribuída



**Figura 4.11.** Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga vertical distribuída parcial

As Figuras 4.12(c) e (d), que contêm as respostas dos Arcos 3 e 4 (pouco abatido e muito pouco abatido, respectivamente), sob carga radial, apresentam resultados conflitantes. Embora a resposta do arco extraída do CS-ASA seja divergente à da literatura, a mesma se mostra consistente com a do MASTAN2 até a carga crítica. Ao se atingir a carga crítica, entretanto, não foi possível obter convergência na resposta via MASTAN2, e assim o caminho pós-crítico não é mostrado. Deve-se salientar que outras análises de arcos sob cargas radiais foram realizadas ao longo dessa pesquisa e os resultados encontrados através do CS-ASA e MASTAN2 sempre se mostraram semelhantes e consistentes.



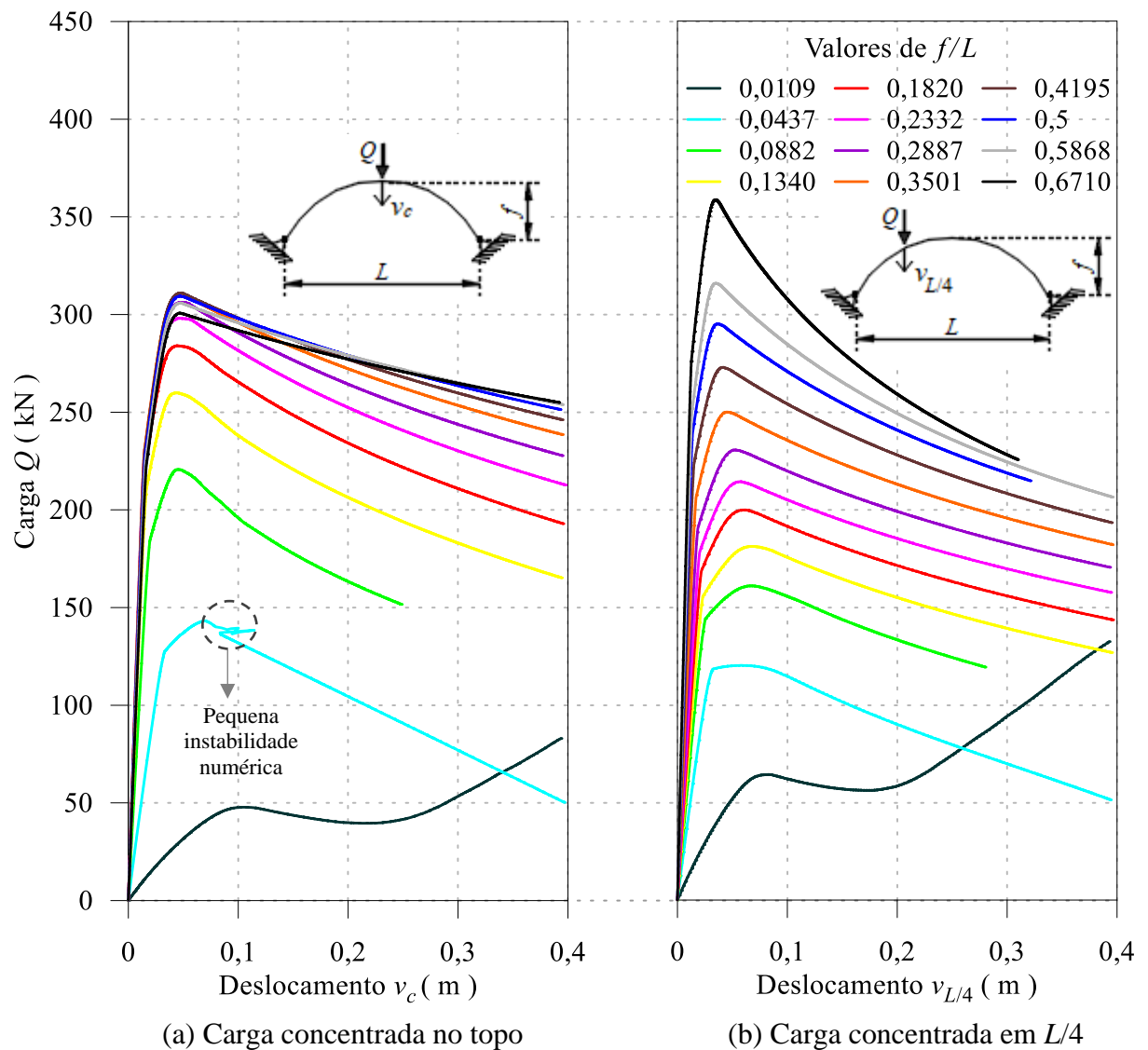
**Figura 4.12.** Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga radial

#### 4.3.3. Estudo da Relação $f/L$ e Capacidade Resistente da Seção

Mantendo o valor do comprimento do arco  $S = 10,89\text{m}$  constante e variando o valor do ângulo interno  $2\Theta$  de  $5^\circ$  até  $220^\circ$ , foram obtidas as trajetórias de equilíbrio ilustradas nas Figuras 4.13(a) e (b) para 12 arcos com diferentes valores de  $f/L$ . Na Figura 4.13(a) são representados os caminhos não lineares para os arcos submetidos a uma carga concentrada no topo (caso simétrico) e na Figura 4.13(b) são representados os resultados considerando a carga concentrada em  $L/4$  (caso assimétrico). A razão  $f/L$  está relacionada com o nível de abatimento do arco e,

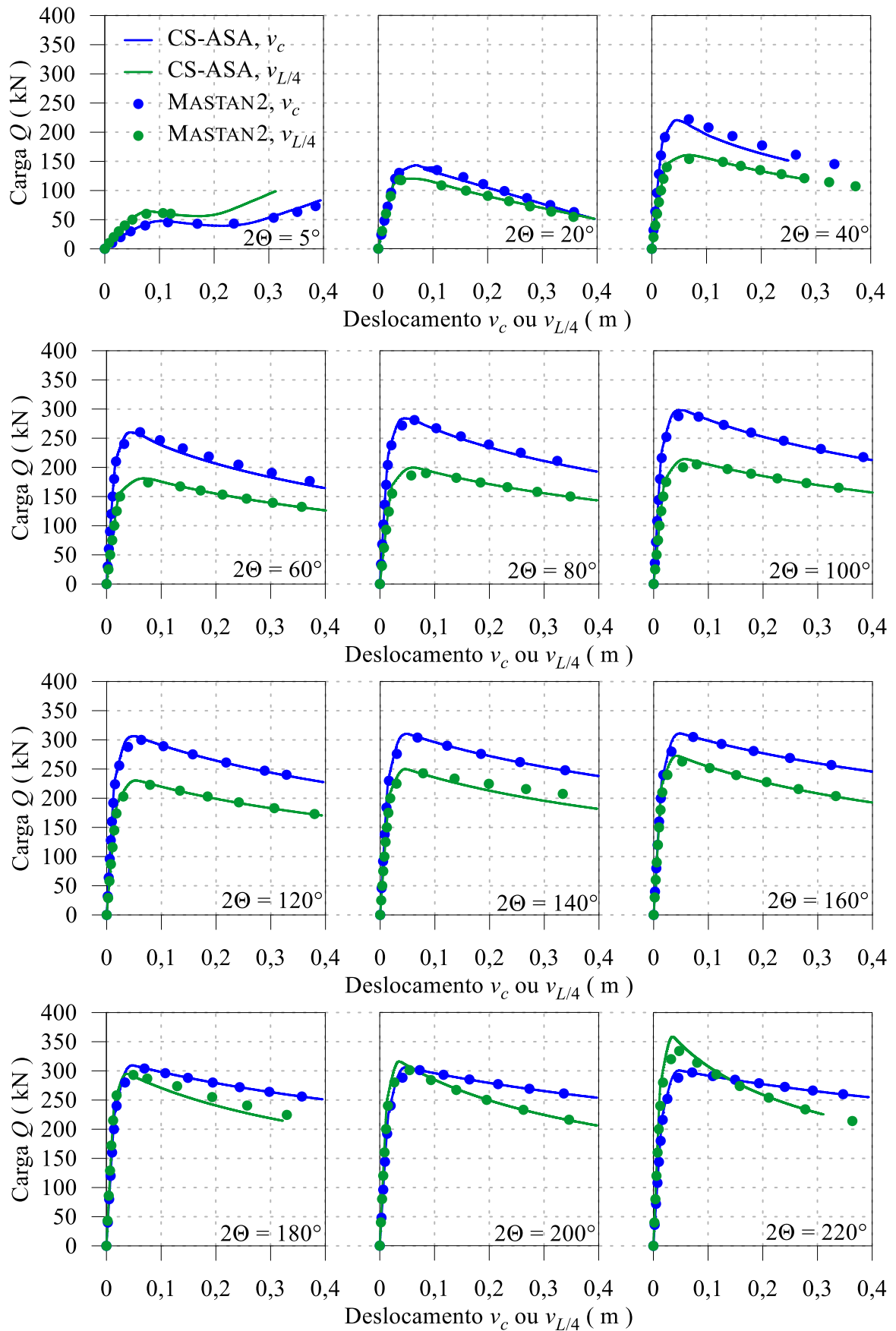
como verificado através dessas figuras, exerce grande influência sobre o comportamento do mesmo.

Para ambos os casos de carregamento, à medida que o valor de  $f/L$  aumenta, ou seja, a medida que o arco se torna menos abatido, a carga crítica se torna mais elevada, como já constatado no exemplo anterior. No caso simétrico (Figura 4.13(a)), a resistência aumenta inicialmente de forma rápida a cada aumento de  $f/L$ , depois aumenta mais lentamente até que se estabiliza entre  $0,3501 < f/L < 0,5$  e na sequência passa a cair para valores de  $f/L > 0,5$ . No caso assimétrico (Figura 4.13 (b)), a resistência aumenta acentuadamente para as três primeiras relações  $f/L$  do arco e depois o aumento passa a ser mais constante para cada aumento de  $f/L$ .



**Figura 4.13.** Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de  $f/L$

Para verificar de forma mais adequada como esses dois casos de carga afetam o comportamento do arco para diferentes relações  $f/L$ , foi elaborada a Figura 4.14. Essa figura fornece as trajetórias de equilíbrio da estrutura com ângulo interno  $2\Theta$  variando de  $5^\circ$  até  $220^\circ$ .



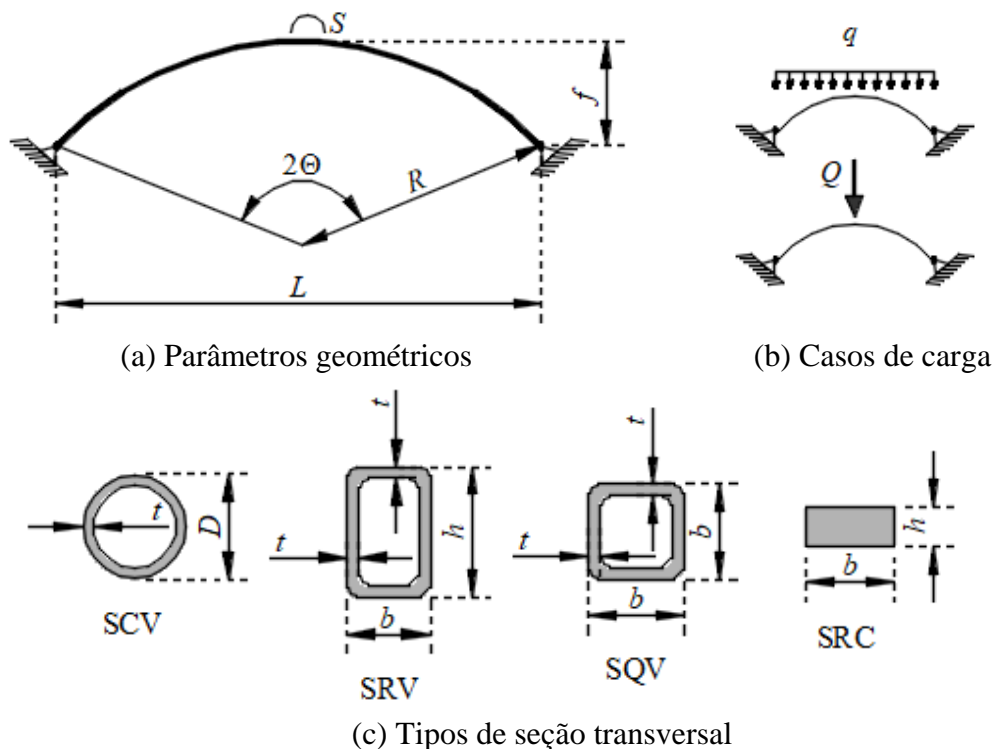
**Figura 4.14.** Trajetórias de equilíbrio: caso simétrico x caso assimétrico ( $5^\circ < 2\Theta < 220^\circ$ )

Note que para  $2\Theta = 5^\circ$ , chega-se numa carga limite mais elevada para o caso assimétrico do carregamento; para  $2\Theta = 20^\circ$  a situação se inverte, ou seja, o arco com carga no topo (caso simétrico) passa a ser mais resistente. Essa diferença cresce até  $2\Theta = 100^\circ$ , quando passa a cair até  $2\Theta = 180^\circ$ . Para  $2\Theta = 200^\circ$  e  $2\Theta = 220^\circ$ , o arco sob carga assimétrica passa a apresentar uma carga limite superior.

Portanto, para esse estudo, no caso assimétrico de carregamento, os arcos muito abatidos ( $2\Theta < 20^\circ$ ) e muito pouco abatidos ( $2\Theta > 200^\circ$ ) apresentaram um melhor desempenho estrutural. Para valores de  $20 \leq 2\Theta \leq 200^\circ$  o arco com carga simétrica (aplicada no topo) apresenta-se mais resistente.

#### 4.4. Arcos com Seções Tubulares Vazadas e Seção Retangular Cheia

O aumento do emprego de vigas, colunas e arcos metálicos com seções transversais tubulares retangulares e circulares (vazadas e cheias) enfatiza a necessidade de se encontrar formulações numéricas avançadas para o estudo da resistência desses tipos de perfis. São abordados nesta seção arcos circulares biapoiados sujeitos à carga distribuída e carga concentrada (Figuras 4.15(a) e 4.15(b)). Quatro tipos de seções transversais são estudados: circular vazada (SCV), retangular vazada (SRV), quadrada vazada (SQV) e retangular cheia (SRC), como mostra a Figura 4.15(c).



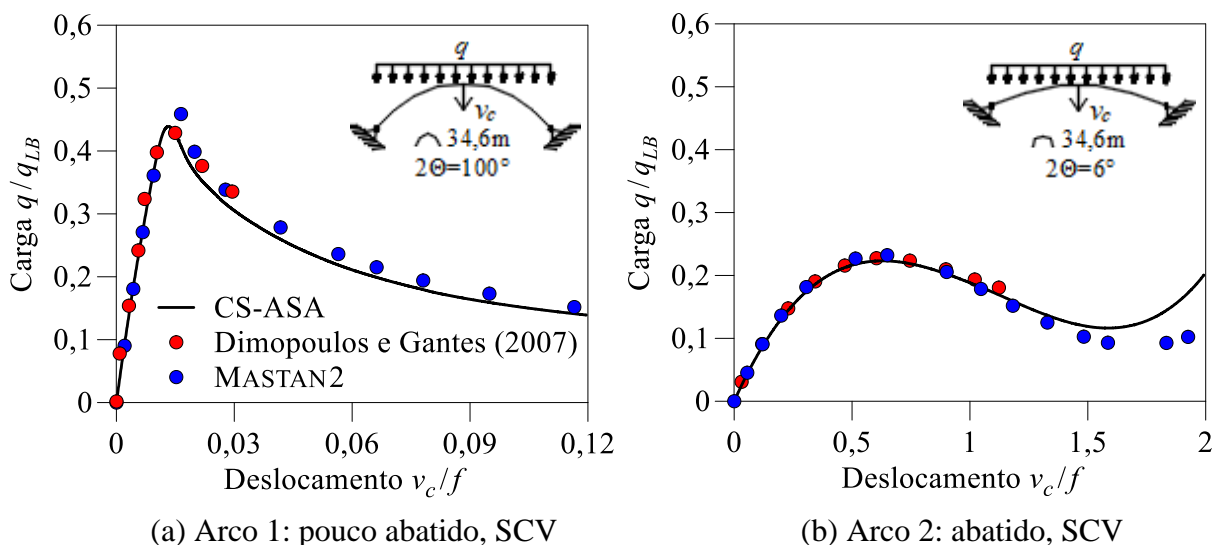
**Figura 4.15.** Arcos circulares biapoiados

O aço utilizado nas seções tubulares vazadas é o S275, que tem módulo de elasticidade  $E = 210\text{GPa}$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 275\text{MPa}$ ; já o material da seção retangular cheia tem módulo de elasticidade equivalente ao alumínio,  $E = 68,95\text{GPa}$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 138\text{MPa}$ . A relação constitutiva para o aço segue o modelo trilinear apresentado na Seção 3.3.2. Admite-se que as SCV e SRC não possuem tensão residual. Já as seções SRV e SQV seguem a distribuição de tensões residuais de Mathur (2011) (Seção 3.3.2).

#### 4.4.1. Trajetórias de Equilíbrio e Configuração Deformada

Os dois primeiros arcos a serem analisados têm perfil metálico SCV, com diâmetro  $D = 508\text{mm}$  e espessura  $t = 20\text{mm}$ , e estão submetidos a uma carga uniformemente distribuída. O primeiro arco (Arco 1) é pouco abatido, com ângulo interno  $2\Theta = 100^\circ$  e comprimento de arco  $S = 34,6\text{m}$ , e é modelado com 20 elementos finitos e 20 divisões (faixas) na seção transversal. O segundo arco (Arco 2) é muito abatido, com ângulo interno  $2\Theta = 6^\circ$ , comprimento  $S = 34,6\text{m}$  e modelo numérico que possui 40 elementos finitos e 20 divisões (faixas) na seção transversal.

As trajetórias de equilíbrio dessas duas estruturas são exibidas nas Figuras 4.16(a) e 4.16(b), respectivamente. Note que a carga  $q$ , no eixo vertical, é adimensionalizada através da carga  $q_{LB}$ , que representa a primeira carga crítica de flambagem do arco (uma análise da carga crítica elástica de cada arco foi realizada via MASTAN2, de onde foram extraídos os valores de  $q_{LB}$ ). Observe também que os resultados obtidos via CS-ASA apresentam boa concordância com aqueles obtidos no MASTAN2 e Dimopoulos e Gantes (2008), o que valida o emprego da formulação inelástica apresentada no capítulo anterior para estruturas com SCVs.

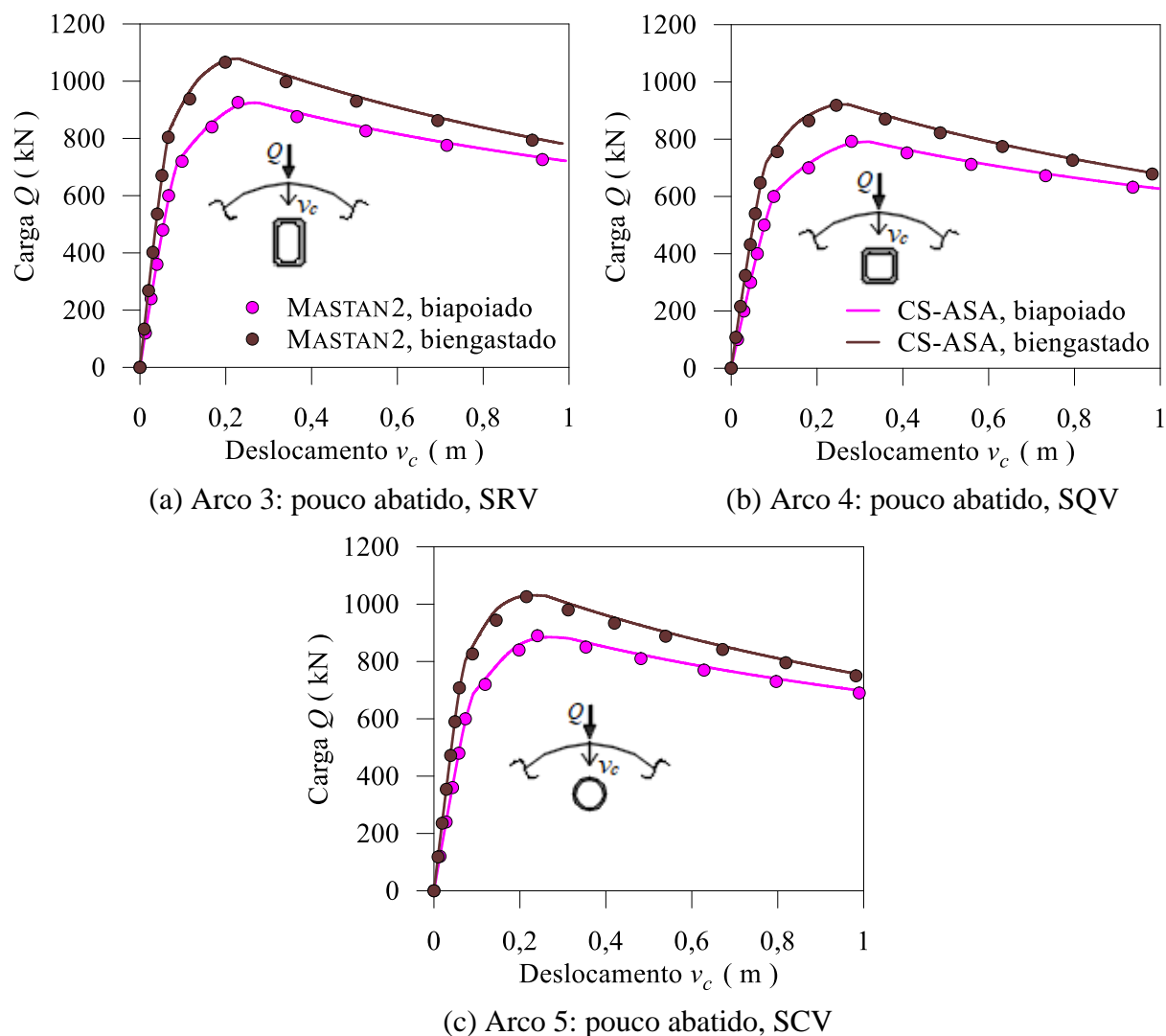


**Figura 4.16.** Trajetórias de equilíbrio do arco com perfil SCV

Os arcos com SCV, como pode ser visto através de seus caminhos não lineares de equilíbrio, apresentam comportamento similar aos arcos com perfil I, ou seja: maior capacidade de carga do arco pouco abatido (Arco 1) em relação ao muito abatido (Arco 2); e redução de forma acentuada da resistência do arco pouco abatido (Arco 1) após ser atingida a carga de bifurcação.

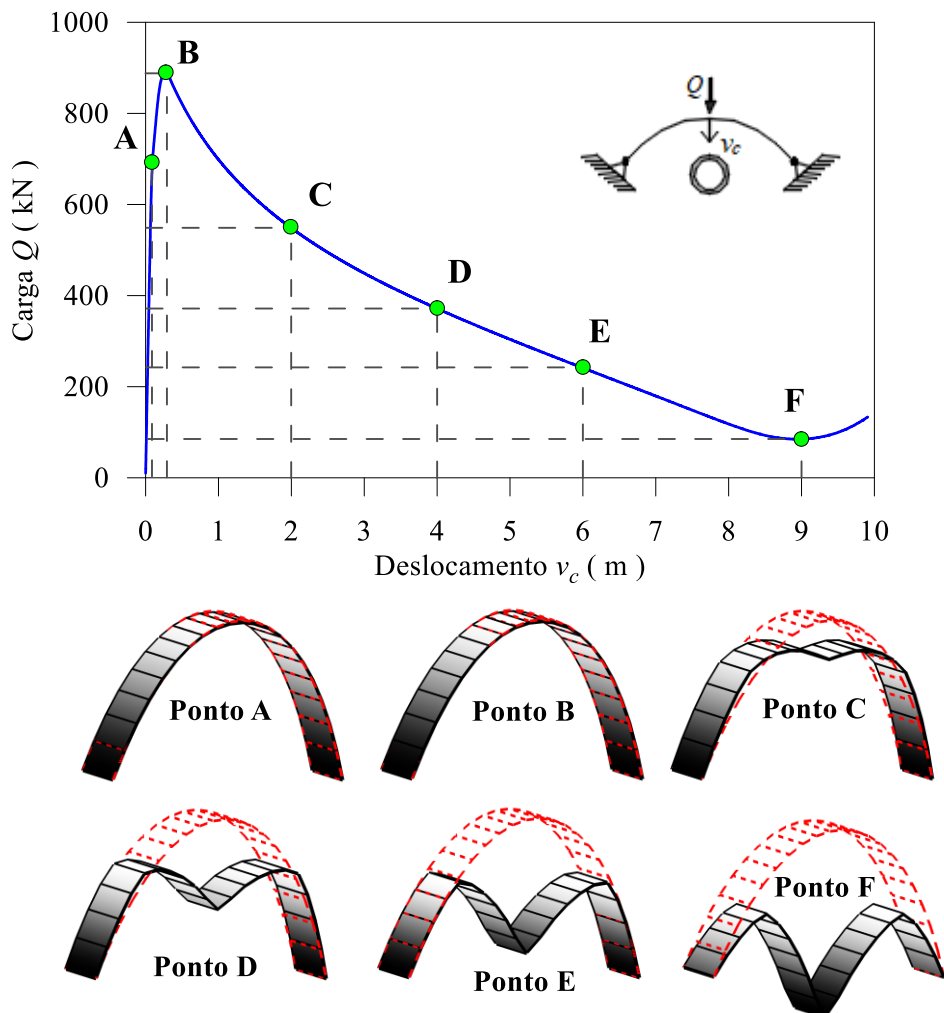
São analisados agora arcos circulares sob carga concentrada e com as seguintes seções transversais: SRV ( $h = 500\text{mm}$ ,  $b = 300\text{mm}$  e  $t = 20\text{mm}$ ; Arco 3); SQV ( $b = 400\text{mm}$  e  $t = 20\text{mm}$ ; Arco4); SCV ( $D = 508\text{mm}$  e  $t = 20\text{mm}$ ; Arco 5); e SRC ( $b = 25,4\text{mm}$  e  $h = 4,7625\text{mm}$ ; Arco 6).

As Figuras 4.17(a), (b) e (c) apresentam a trajetória de equilíbrio dos Arcos 3, 4 e 5 respectivamente. Esses arcos são pouco abatidos, com ângulo interno  $2\Theta = 100^\circ$  e comprimento de  $S = 34,6\text{m}$ , e são modelados com 20 elementos finitos e 20 divisões (faixas) na seção transversal para a SCV e 60 divisões (fibras) para as demais seções.



**Figura 4.17.** Trajetória de equilíbrio de arcos pouco abatidos com seções vazadas

Os resultados aqui obtidos são comparados àqueles do MASTAN2 para duas condições de apoio: arco biapoiado e arco biengastado. A Figura 4.18 traz a evolução da configuração deformada do Arco 5 (SCV) biapoiado em alguns pontos de equilíbrio marcados na trajetória.



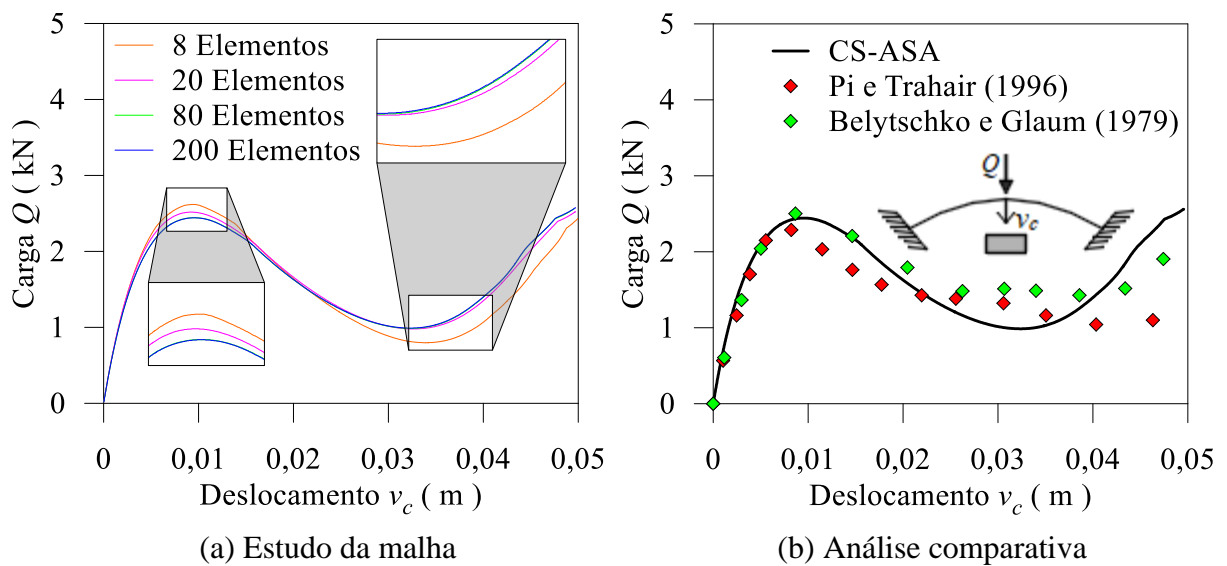
**Figura 4.18.** Evolução da configuração deformada do Arco 5 (SCV)

O arco circular muito abatido biengastado com seção transversal retangular cheia (SRC, Arco 6) tem raio  $R = 3,38\text{m}$  e ângulo interno  $2\Theta = 14,67^\circ$ , e foi inicialmente estudado por Belytschko e Glaum (1979) e depois de forma analítica por Pi e Trahair (1996a). Esses trabalhos, como apresentado a seguir, serão utilizados na validação dos resultados obtidos via CS-ASA.

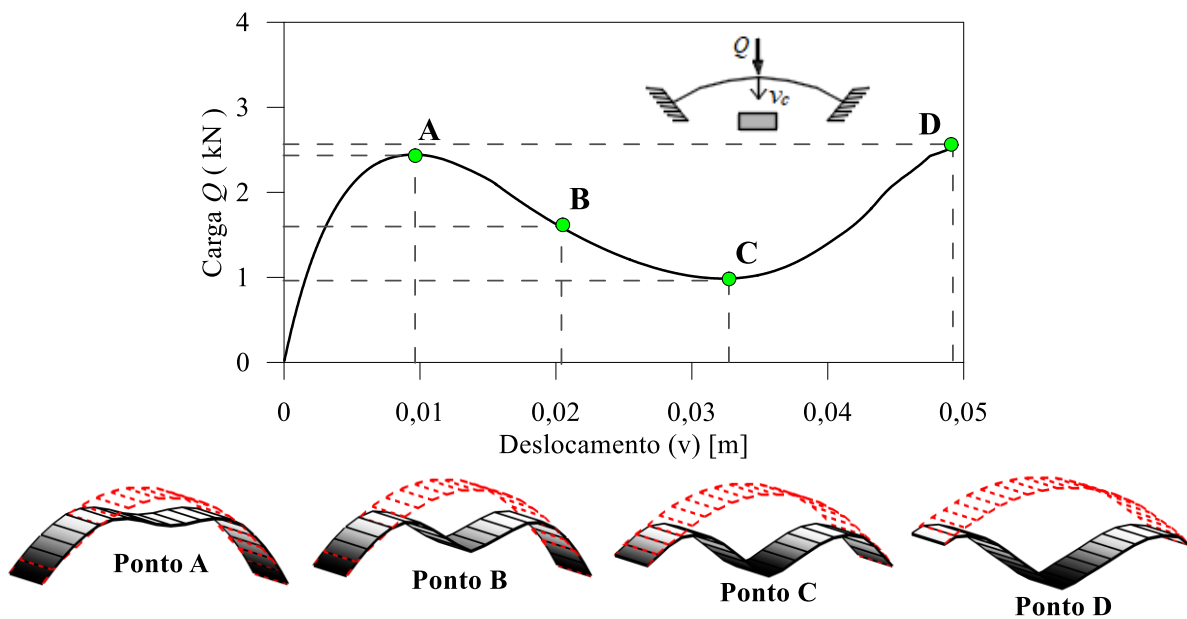
A Figura 4.19(a) fornece a trajetória de equilíbrio do Arco 6 para diferentes malhas: 8, 20, 80 e 200 elementos finitos na discretização do arco e 15 divisões da seção transversal. No caso da malha mais refinada, com 200 elementos, a carga crítica de plastificação atingida foi de 2,44kN, que corresponde a uma diferença de 2,46% do valor fornecido por Belytschko e Glaum (1979) (2,50kN). Com a malha de 80 elementos chegou-se a uma diferença quase



insignificante em relação à de 200 elementos (0,07%). Assim, por questões de simplificação e eficiência computacional do modelo, essa última discretização foi adotada na obtenção do caminho não linear apresentado na Figura 4.19(b). De acordo a resposta apresentada, trata-se de uma estrutura que perde estabilidade quando o ponto limite de carga é atingido. Os resultados da literatura são utilizados para comparação, em que se observa a boa concordância em relação aos de Belytschko e Glaum (1979), principalmente no momento da formação da primeira rótula plástica, que ocorre próximo à carga limite de 2,5kN. Verifica-se também uma aproximação razoável nesse ponto com o modelo de Pi e Trahair (1996a). Por fim, a Figura 4.20 apresenta as configurações do arco para os pontos de equilíbrio A, B, C e D em destaque.



**Figura 4.19.** Arco circular muito abatido biengastado com SRC (Arco 6)

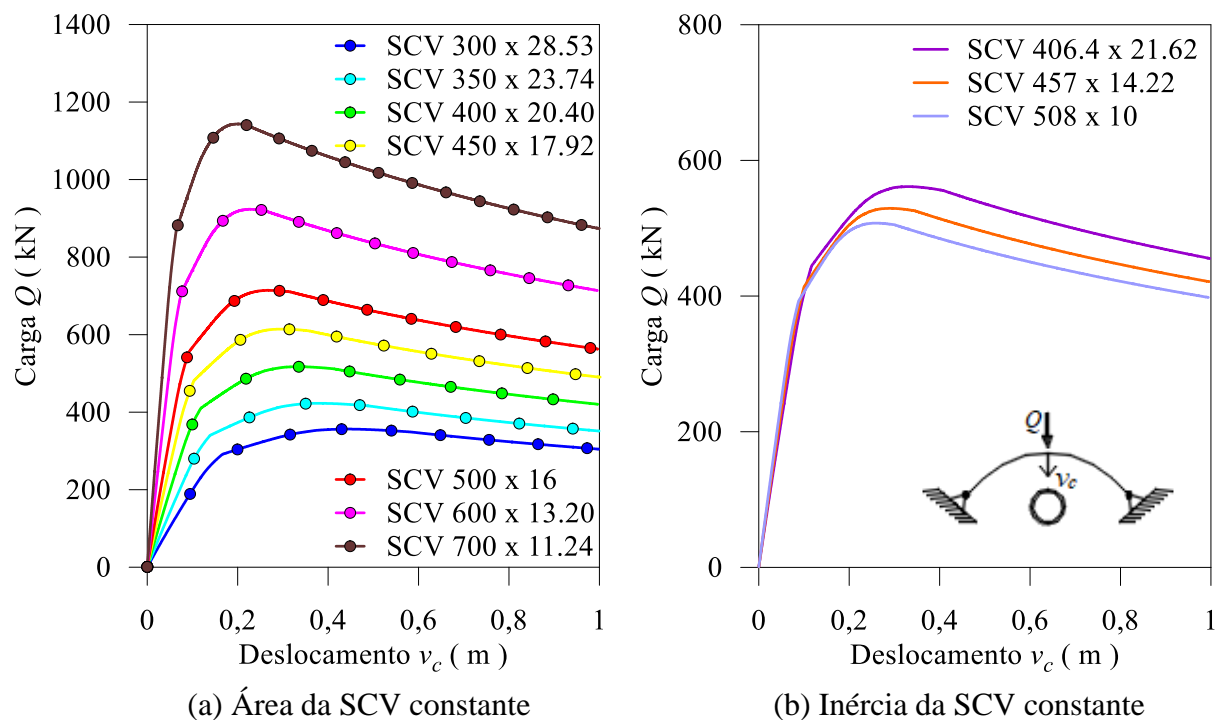


**Figura 4.20.** Evolução da configuração deformada do Arco 6 (SRC)

#### 4.4.2. Arco Circular Biapoiado com SCV: Relação Diâmetro $D$ x Espessura $t$

O emprego crescente de membros estruturais metálicos com seções transversais circulares vazadas (SCV) tem motivado pesquisas envolvendo a capacidade de carga desses membros e a resistência de sua seção transversal. Para as SCVs, em particular, o estudo da relação diâmetro externo ( $D$ ) versus espessura ( $t$ ) do tubo é importante pois pode levar a projetos estruturais econômicos através da redução do consumo do aço, sem reduzir, entretanto, a segurança da estrutura ou edificação.

Nesse sentido, a Figura 4.21(a) apresenta as trajetórias de equilíbrio para um arco biapoiado, SCV, de comprimento  $S = 34,6\text{m}$  e ângulo interno  $2\Theta = 100^\circ$  sob carga concentrada no topo. Nessa figura, a área da seção tubular vazada é mantida constante, porém varia-se o seu diâmetro externo ( $D$ ) e sua espessura ( $t$ ). Observe que a capacidade de carga do arco aumenta à medida que se aumenta também o diâmetro do tubo, e ocorre redução da espessura, tornando assim o membro mais esbelto. O projetista, entretanto, deve ficar atento à essa redução da espessura no sentido de se evitar a flambagem local da peça, o que não acontece nesse caso visto que as seções são todas compactas.



**Figura 4.21.** Trajetórias de equilíbrio do arco pouco abatido biapoiado com SCV

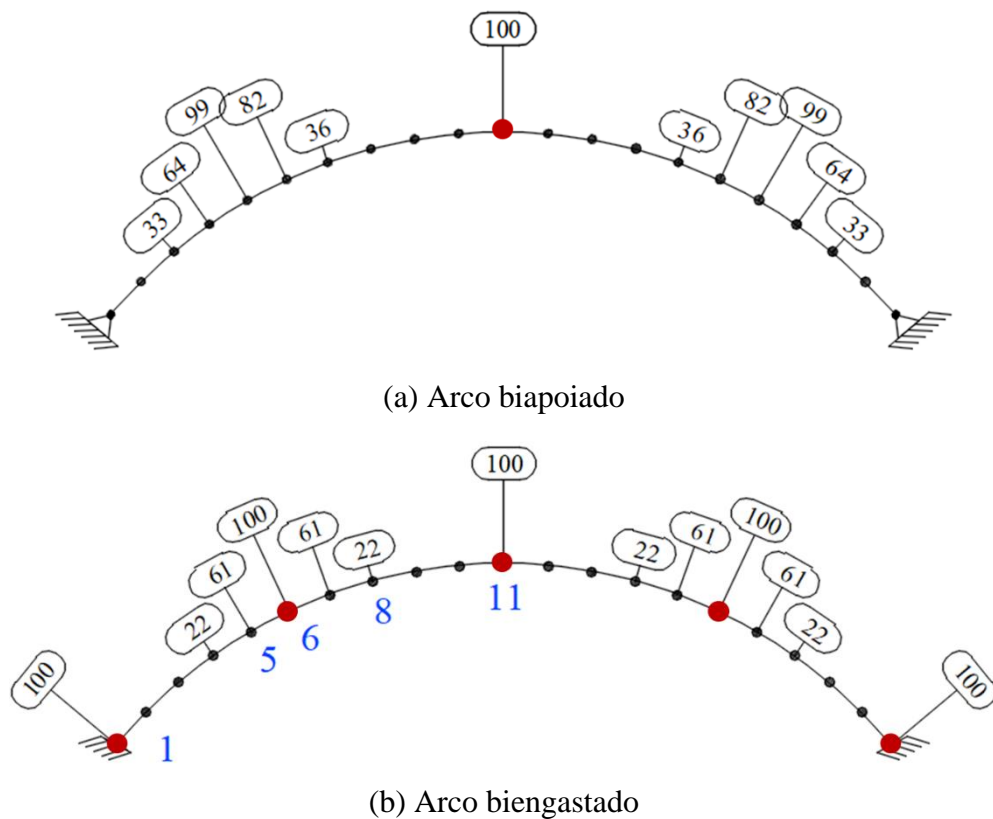
Na Figura 4.21(b) são exibidos os caminhos de equilíbrio do mesmo arco com três seções circulares vazadas com diferentes  $D$  e  $t$ , porém agora mantendo a inércia constante. Outras restrições podem condicionar a definição da seção transversal do perfil metálico através da sua inércia. Os resultados apresentados mostram que o perfil cuja seção transversal tem a

maior espessura (SCV 406,4 x 21,62) fornece melhor desempenho em termos de resistência, porém um perfil intermediário (SCV 457 x 14,22) pode ser considerado melhor solução visto que tem uma área menor de aço e diferença de resistência pouco significativa.

Vale ressaltar que os diâmetros de tubos utilizados na Figura 4.21 são fictícios, porém estudo similar pode ser realizado com diâmetros de tubos comerciais.

#### 4.4.3. Índice de Plastificação e Capacidade Resistente da Seção

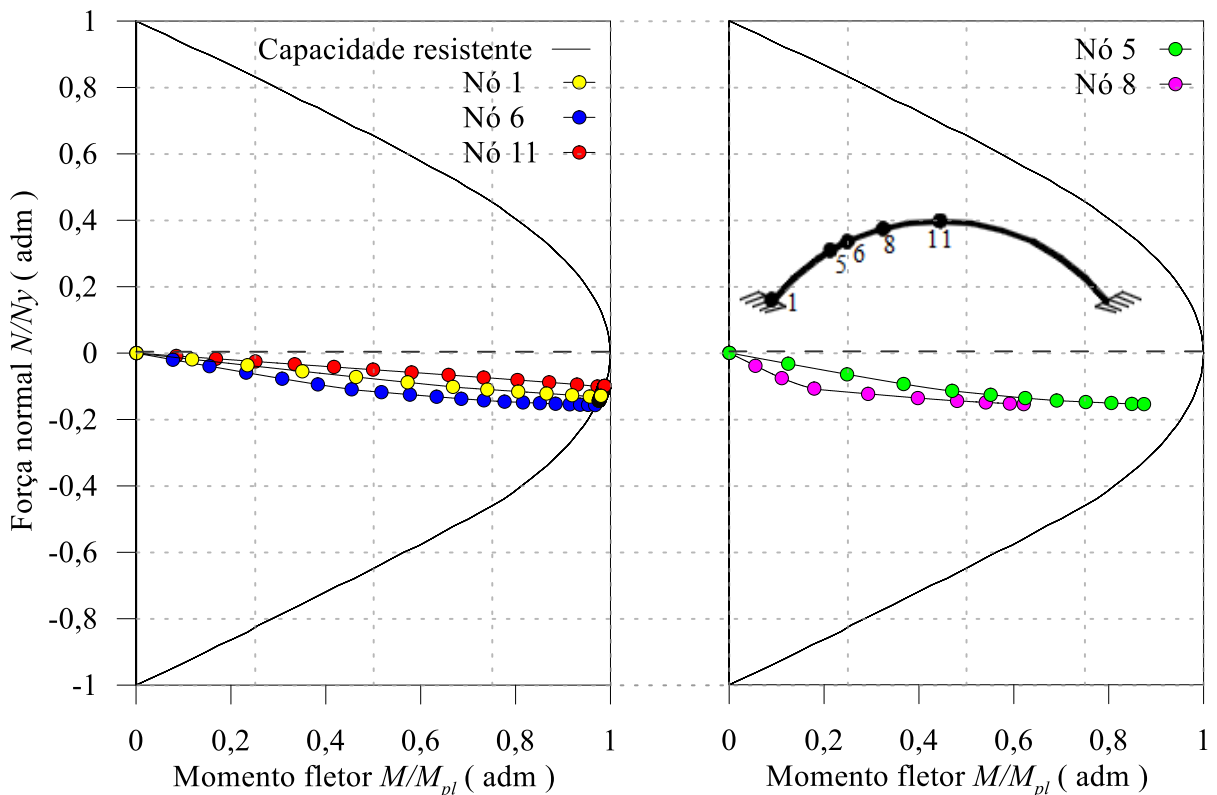
Nas Figuras 4.22(a) e 4.22(b) são exibidos os índices de plastificação nas seções transversais do arco circular com SCV (Arco 5) sob carga concentrada no topo, com bordos biapoiados e biengastados, respectivamente. Esse índice de plastificação é calculado através da rigidez à flexão ( $EI$ ) da seção, tomando como parâmetros a rigidez inicial (rigidez completa, antes do início da plastificação) e a rigidez após degradação da seção (nesse caso, ao fim da análise). Através de círculos em vermelho são destacadas as seções, em ambos os arcos, que atingem a plastificação total, ou seja, o índice de plastificação é 100%. Em ambos os arcos a primeira rótula plástica se forma no topo do arco; já no arco biengastado, mais duas rótulas plásticas são formadas nos apoios e na sequência mais duas a um quarto de cada apoio.



**Figura 4.22.** Índice de plastificação do arco com SCV (Arco 5)

A capacidade resistente da seção transversal (curva de interação  $NM$ ) e a variação dos esforços internos nas seções localizadas nos pontos nodais 1, 5, 6, 8 e 11 (mesmos pontos apresentados na Figura 4.22) são ilustradas nas Figuras 4.23(a) e 4.23(b). Como pode ser verificado, as seções 1, 6 e 11 atingem a plastificação total; já as seções 5 e 8 atingem, respectivamente, 61% e 22% de plastificação.

Através da Figura 4.23 pode-se ainda concluir que os momentos fletores nas respectivas seções são mais representativos que os esforços normais de compressão. Além disso, a interação  $NM$  para cada nó é semelhante em todas as seções selecionadas.

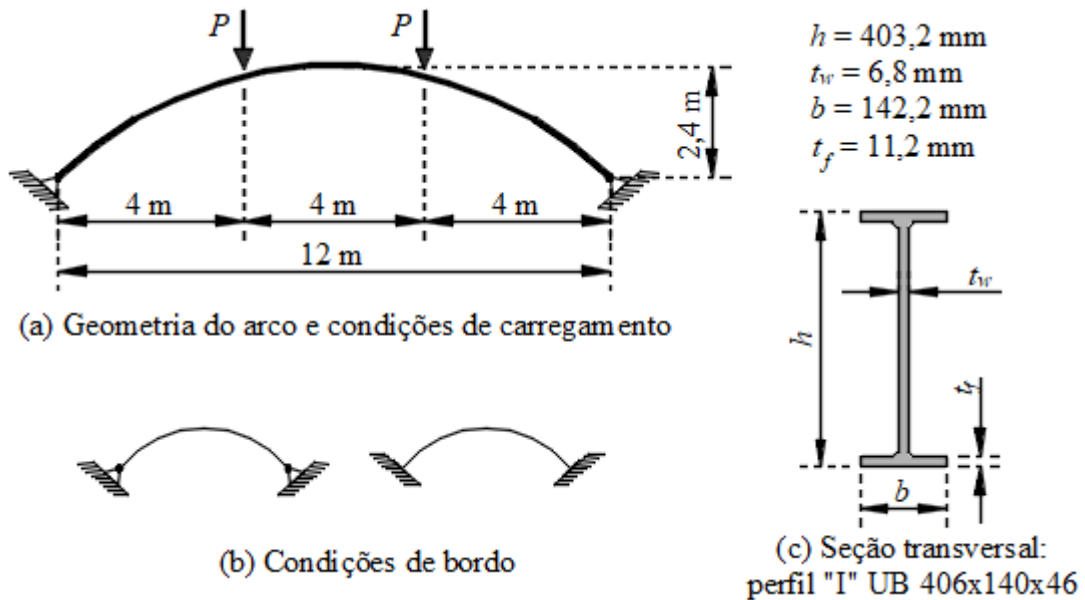


**Figura 4.23.** Arco biengastado com SCV (Arco 5): curva de resistência e interação  $NM$  de seções selecionadas

#### 4.5. Arco com Perfil I Laminado em Situação de Incêndio

Neste exemplo é analisado um arco em situação de incêndio cuja seção transversal é formada pelo perfil I laminado do tipo UB 406x140x46 (seção compacta, com  $\lambda = 6,35 < \lambda_p = 9,02$  – NBR 8800:2008 – Seção 5.1.2). As condições de carregamento e contorno consideradas, assim como as características geométricas da estrutura e sua seção transversal, estão na Figura 4.24 (GUO *et al.*, 2016a). As propriedades do aço são apresentadas na Tabela 4.6.

A relação constitutiva para o aço em temperatura ambiente segue o modelo trilinear apresentado na Seção 3.3.2. Em situação de incêndio, entretanto, as relações constitutivas específicas para o comportamento do material sob fogo são previstas na EN 1994-1-2:2005 e obedecem o modelo apresentado na Seção 3.5.2, considerando os fatores de redução mostrados na Tabela 3.3, Seção 3.5.3 (BARROS, 2016; PIRES, 2018).



**Figura 4.24.** Arco com perfil I laminado UB 406x140x46 em situação de incêndio

**Tabela 4.6.** Propriedades do aço

S355	Módulo de elasticidade, $E$	200 GPa
	Tensão de escoamento, $f_y$	355 MPa

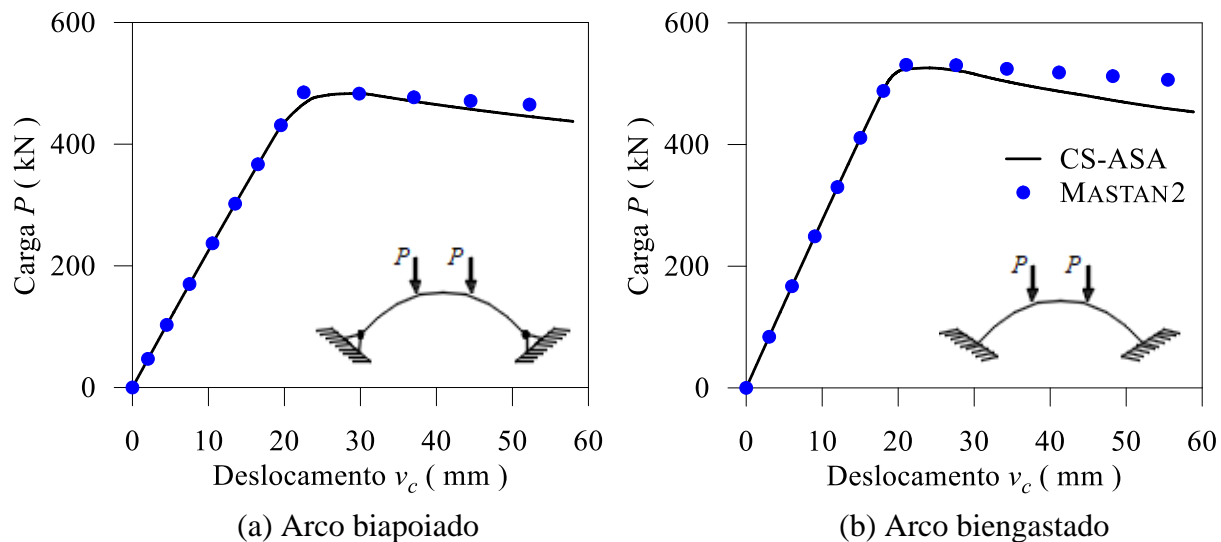
O problema estrutural estudado nesta seção é dividido em três partes: análise do arco em temperatura ambiente, análise térmica da seção transversal e análise termomecânica.

#### 4.5.1. Análise Estrutural em Temperatura Ambiente

Inicialmente é realizada a análise inelástica de segunda ordem (AISO) do arco em temperatura ambiente com o objetivo de se chegar na sua carga última e na capacidade resistente de sua seção transversal. Nessa parte do estudo, os resultados encontrados via CS-ASA foram comparados àqueles do MASTAN2.

Nas Figuras 4.25(a) e 4.25(b) são apresentadas as trajetórias de equilíbrio dos arcos biapoiado e biengastado em temperatura ambiente, respectivamente. Vale ressaltar que um estudo de malha foi realizado previamente, de onde se chegou à discretização de 30 elementos

finitos para a estrutura e 30 divisões da seção transversal. Através dessas figuras pode ser observada a semelhança dos resultados alcançados através do CS-ASA e MASTAN2, inclusive para os valores das cargas limites, conforme indicado na Tabela 4.7.



**Figura 4.25.** Trajetórias de equilíbrio dos arcos em temperatura ambiente

**Tabela 4.7.** Carga limite dos arcos em temperatura ambiente

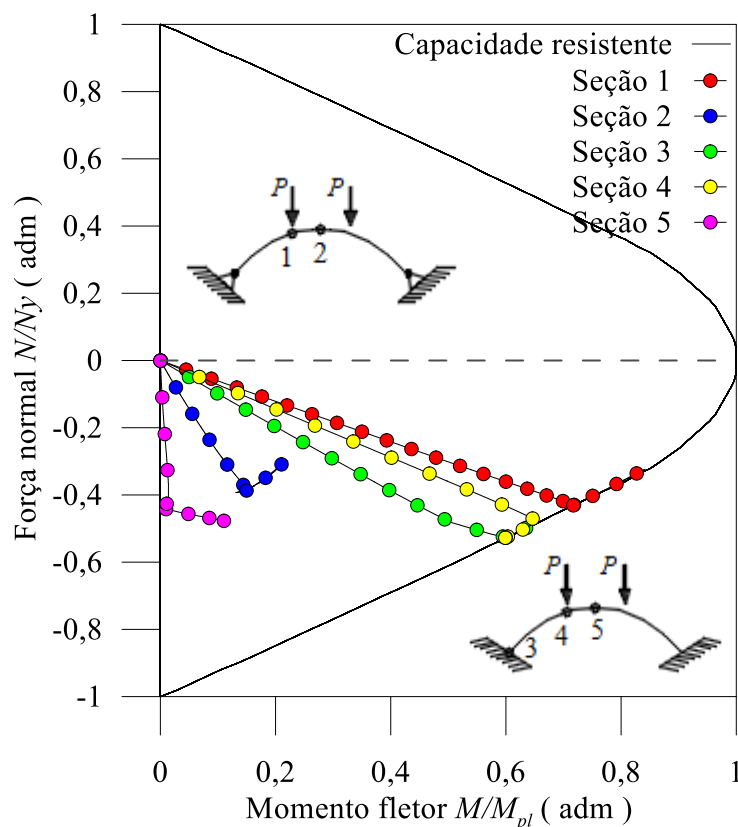
Apoios	Carga Limite, $P_l$ (kN)		
	CS-ASA	MASTAN2	% Diferença
<b>Biapoiado</b>	483,5	488,0	0,92
<b>Biengastado</b>	526,0	535,5	1,77

A capacidade resistente da seção é caracterizada na Figura 4.26 através da curva de interação esforço  $NM$ , considerando a flexão em torno do eixo de maior inércia do perfil. Nessa mesma figura estão a variação  $NM$  nas seções transversais 1 e 2 no arco biapoiado e seções 3, 4 e 5 no arco biengastado. A plastificação total da seção acontece nos pontos 1, 3 e 4, que tem como consequência o posicionamento das cargas (em 1 e 4) e condições de apoio (em 3).

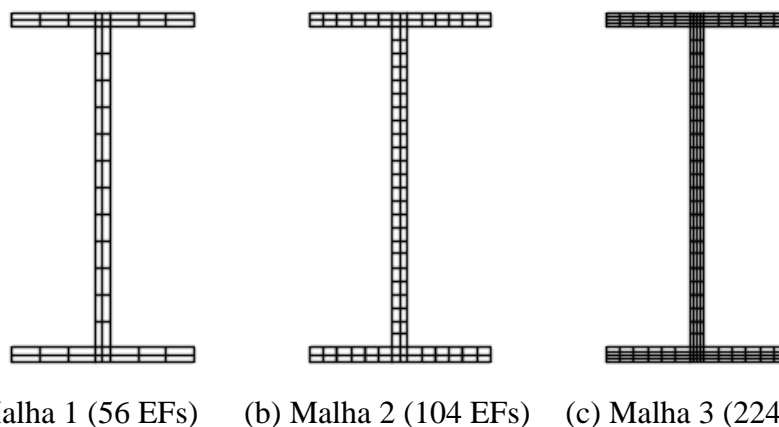
#### 4.5.2. Análise Térmica do Perfil I Laminado do Tipo UB 406x140x46

O perfil I laminado do tipo UB 406x140x46 foi submetido ao fogo, mas sob diferentes condições de exposição (1, 3 ou 4 faces expostas), sem proteção térmica. Na solução numérica do problema térmico (Seção 3.5.3), adotou-se o coeficiente de transferência de calor por convecção igual a  $25 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ , o incremento de tempo  $\Delta t = 10\text{s}$  e as estratégias de solução descritas na Seção 3.5.3.

A definição da discretização da seção transversal através dos elementos finitos lineares Q4 foi realizada considerando a seção transversal exposta ao fogo em suas 4 faces (Figura 4.27), e os resultados obtidos através do módulo do CS-ASA/FA (BARROS, 2016; PIRES, 2018) são comparados aos do SAFIR.



**Figura 4.26.** Curva de resistência do perfil I laminado do tipo UB 406x140x46 e variação  $NM$  em seções selecionadas dos arcos biapoiado e biengastado

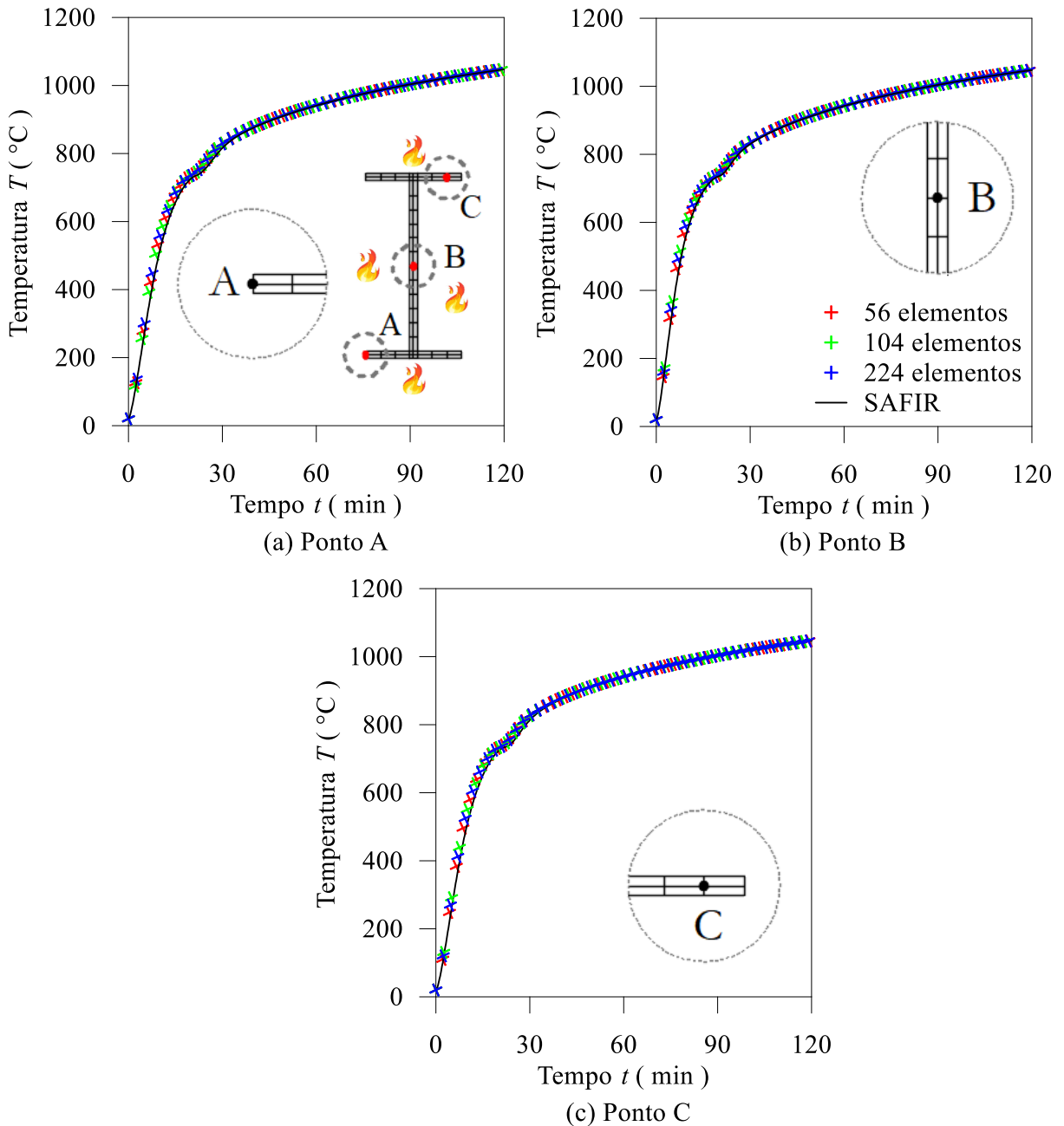


(a) Malha 1 (56 EFs)    (b) Malha 2 (104 EFs)    (c) Malha 3 (224 EFs)

**Figura 4.27.** Discretização da seção transversal através do elemento finito linear plano Q4

Os pontos considerados na seção transversal para se investigar a variação da temperatura  $T$  com o tempo  $t$  estão destacados na Figura 4.28(a), na qual se pode observar o comportamento do ponto A localizado na extremidade da mesa inferior do perfil. As Figuras 4.28(b) e 4.28(c)

trazem a variação da temperatura  $T$  nos pontos B e C, respectivamente. Pode-se perceber que os resultados são praticamente os mesmos para as três malhas estudadas e são semelhantes aos resultados do programa SAFIR. Dessa forma, adotou-se a Malha 1 (56 elementos) para análise termoestrutural a ser apresentada na seção seguinte.

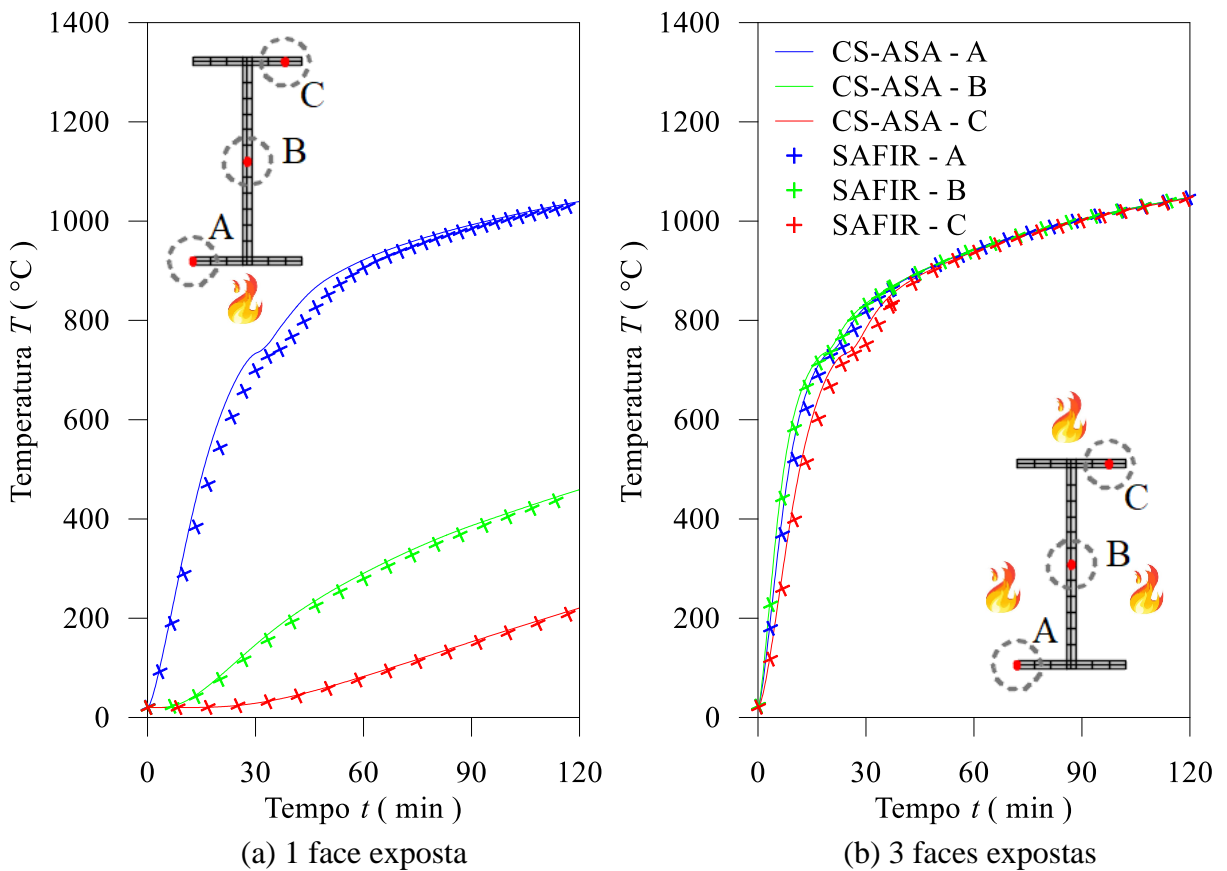


**Figura 4.28.** Curvas temperatura  $T$  x tempo  $t$  para diferentes pontos do perfil I laminado do tipo UB 406x140x46: 4 faces expostas ao fogo

Nas Figuras 4.29(a) e 4.29(b) são apresentadas a variação da temperatura  $T$  nos mesmos pontos A, B e C do perfil para as situações de uma e três faces expostas ao fogo,



respectivamente. Mais uma vez, os resultados obtidos com o módulo CS-ASA/FA (Malha 1) ficam bem próximos aos do SAFIR.



**Figura 4.29** Curvas temperatura  $T$  x tempo  $t$  para diferentes pontos do perfil I laminado do tipo UB 406x140x46

#### 4.5.3. Análise Termoestrutural

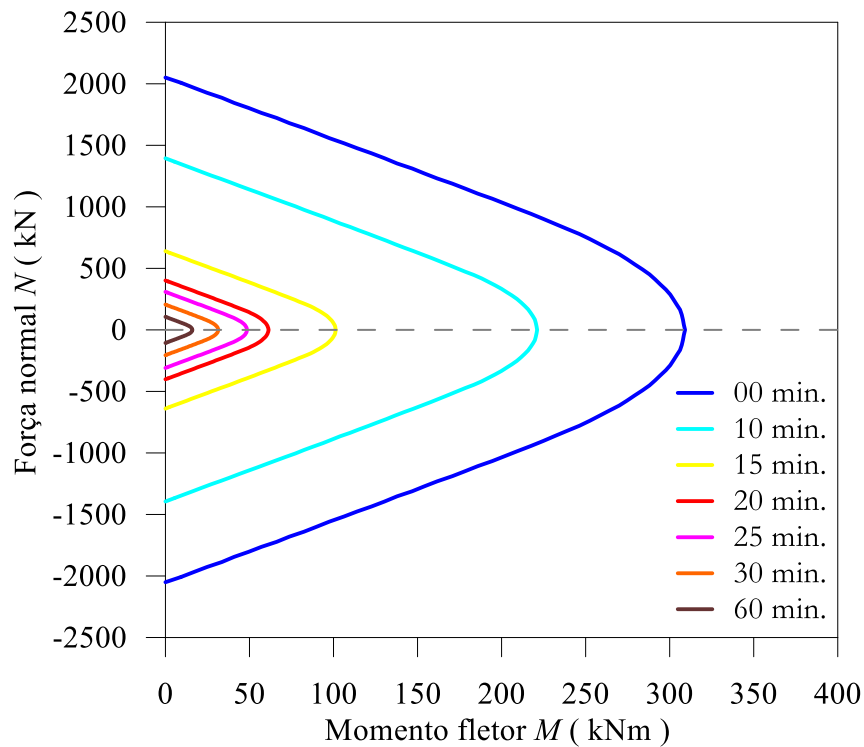
Pretende-se avaliar o comportamento dos mesmos arcos biapoiado e biengastado da Seção 4.5.1 (perfil I laminado do tipo UB 406x140x46), mas agora sob ação simultânea do carregamento externo atuante (duas cargas concentradas  $P$ ) e variação de temperatura (perfil com as 4 faces expostas). Foram utilizadas as análises estruturais à temperatura ambiente realizadas na primeira etapa deste exemplo para chegar aos valores das duas cargas concentradas  $P$  que são aplicadas à estrutura antes da sua exposição ao fogo. A Tabela 4.8 fornece os valores dessas duas cargas  $P$  adotados na análise termoestrutural.

Nas análises termoestruturais de arcos metálicos, considera-se como fatores de redução do módulo de elasticidade ( $k_{E,Ta}$ ), do limite de proporcionalidade ( $k_{p,Ta}$ ) e da resistência ao escoamento ( $k_{y,Ta}$ ), os valores propostos pelo EN 1993-1-2:2005, conforme apresentados na Seção 3.5.3.

**Tabela 4.8.** Valor da carga concentrada  $P$  adotados na análise termoestrutural

Arco	Cargas Aplicadas, $P/P_l$ (kN)			
	Carga limite $P_l$	$P/P_l = 0,3$	$P/P_l = 0,5$	$P/P_l = 0,85$
<b>Biapoiado</b>	483,5	145,0	242,0	411,0
<b>Biengastado</b>	526,0	158,0	263,0	447,0

Como primeiro resultado da análise termoestrutural, tem-se as curvas limites de resistências (ou curvas de interação  $NM$ ) do perfil UB406x140x46 apresentadas na Figura 4.30, quando se considera suas 4 faces expostas ao fogo, para os tempos de exposição de 0, 10, 15, 20, 25, 30 e 60 minutos. Através dessas curvas de interação  $NM$  fica evidente a degradação dos limites plásticos da seção à medida que a temperatura aumenta. A curva  $NM$  para  $\Delta t = 0$  caracteriza a resistência da seção transversal em temperatura ambiente.

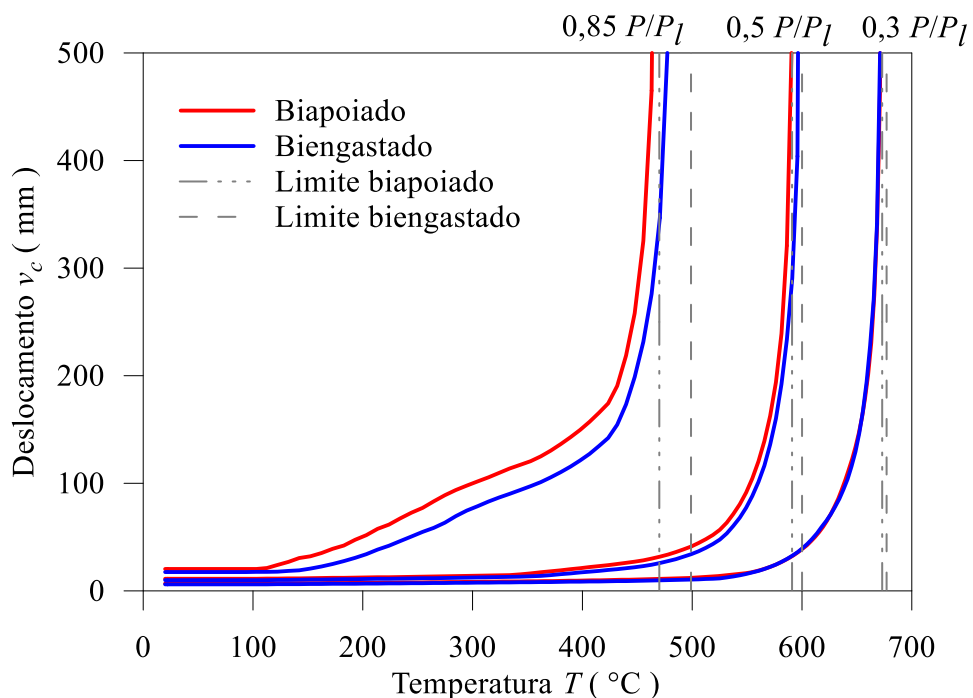


**Figura 4.30.** Curvas limites de resistências ( $NM$ ) do perfil UB406x140x46: 4 faces expostas ao fogo

O segundo resultado da análise termoestrutural é caracterizado pela resposta da estrutura mostrada na Figura 4.31. Observe que para os três níveis de carregamento externo  $P$  considerados (Tabela 4.8), essa figura apresenta a variação do deslocamento vertical  $v_c$  no centro do arco com a temperatura  $T$  para as duas condições de apoio da estrutura (biapoiada e biengastada). Como esperado, quanto maior o carregamento  $P$  aplicado no arco, menor é sua

resistência ao fogo e, como consequência, maiores são os deslocamentos obtidos. Além disso, as condições de apoio parecem exercer maior influência na análise termoestrutural para os valores mais elevados do carregamento aplicado  $P$ . A Tabela 4.9 exhibe as temperaturas críticas obtidas para as diferentes análises realizadas nos arcos biapoiado e biengastado, considerando que o perfil metálico seja exposto ao fogo em suas 4 faces.

Como consequência do aumento da temperatura, que leva à redução do módulo de elasticidade e da resistência ao escoamento, ocorre a degradação dos parâmetros de rigidez à flexão  $EI$  e rigidez axial  $EA$ , trazendo para a análise estrutural os efeitos da ação térmica. Essa variação pode ser verificada através das Figuras 4.32(a) e 4.32(b) para os três níveis de carregamento considerados na seção localizada no topo do arco. Desde o início das análises até aproximadamente  $T = 100^\circ\text{C}$ , não há redução dos coeficientes  $EA$  e  $EI$ . De  $100^\circ\text{C}$  até aproximadamente  $400^\circ\text{C}$ , esses parâmetros começam a ser reduzidos de forma linear para os três níveis de carga aplicada. Após  $T = 400^\circ\text{C}$ , entretanto, a curva de  $0,85P/P_l$  passa a ter uma redução mais rápida e acentuada que as outras duas, que ainda variam linearmente até  $550^\circ\text{C}$ . A partir dessa última temperatura as curvas para de  $0,5P/P_l$  e de  $0,3P/P_l$  também passam a cair rapidamente.

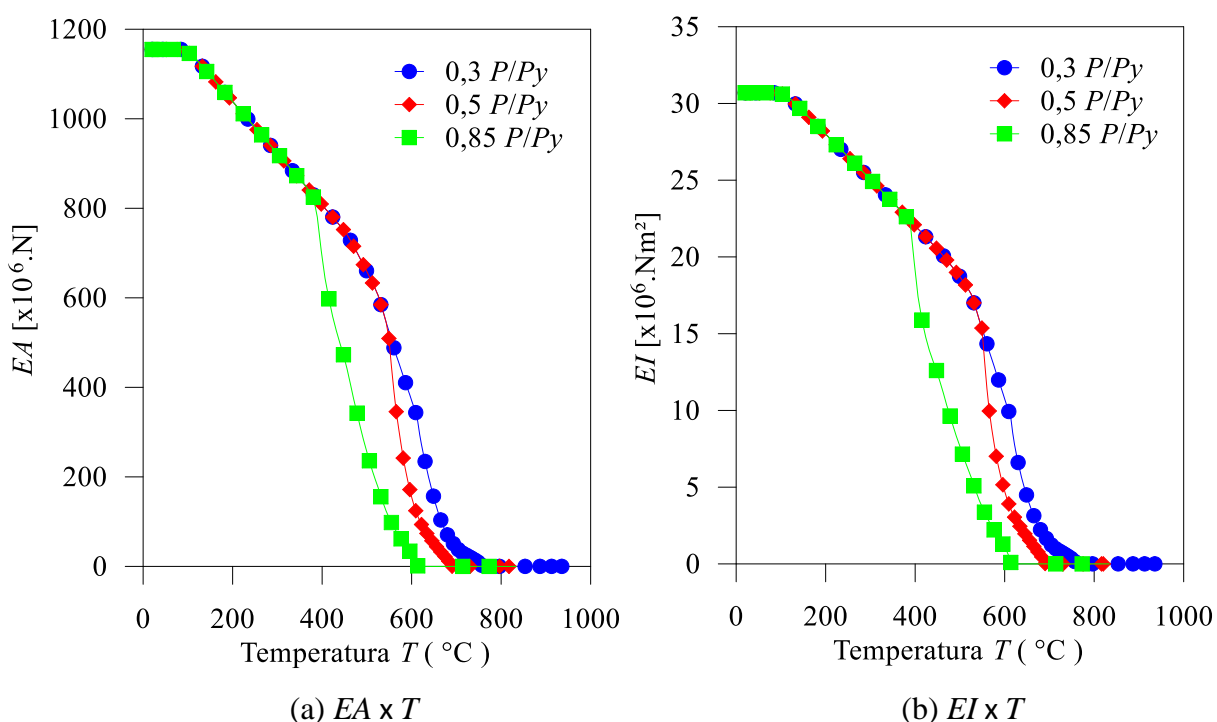


**Figura 4.31.** Variação do deslocamento vertical  $v_c$  no centro do arco com a temperatura  $T$  para duas condições de apoio da estrutura: biapoiada e biengastada

É importante observar que, a estrutura tratada neste exemplo seria levada ao colapso muito rapidamente se exposta ao fogo. Tal estrutura só poderia ser realmente utilizada se recebesse proteção passiva contra incêndio, como pintura ou argamassa projetada por exemplo.

**Tabela 4.9.** Temperaturas críticas para os arcos em situação de incêndio

Temperaturas Críticas (°C)						
Exposição ao fogo: 4 faces	Arco biapoiado			Arco biengastado		
	$P/P_t = 0,3$	$P/P_t = 0,5$	$P/P_t = 0,85$	$P/P_t = 0,3$	$P/P_t = 0,5$	$P/P_t = 0,85$
	673	592	471	677	600	499

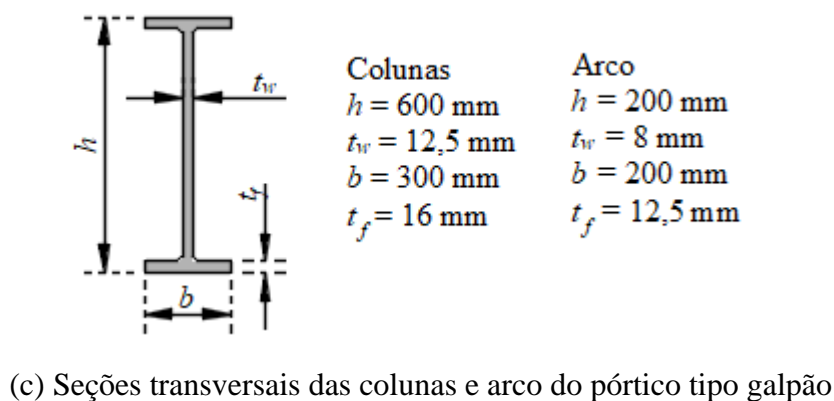
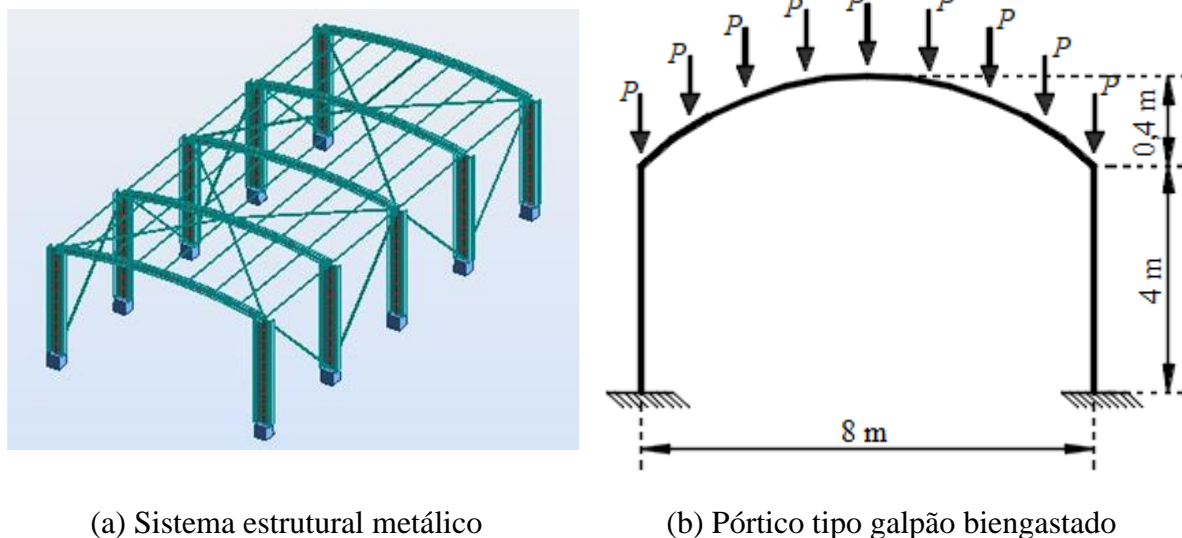


**Figura 4.32.** Variação dos parâmetros de rigidez  $EA$  e  $EI$  com a temperatura  $T$

#### 4.6. Pórtico Tipo Galpão com Arco Metálico

Um sistema estrutural completo formado por vários pórticos metálicos tipo galpão é apresentado na Figura 4.33(a). Um pórtico padrão típico desse sistema e os detalhes das dimensões dos perfis I de aço Q345B, de suas colunas e arco estão nas Figura 4.33(b) e 4.33(c), respectivamente. As terças (pontos de entrada de carga) estão localizadas a cada metro e o carregamento atuante é representado por 9 cargas concentradas no arco, espaçadas igualmente. A Tabela 4.10 traz as propriedades do aço adotado.

Esta seção tem como objetivo a realização da AISO desse pórtico padrão tipo galpão que possui como elemento estrutural principal na sua cobertura um arco metálico. O modelo adotado para as tensões residuais segue o descrito pelo EN 1993-1-2:2005 (Seção 3.3.2).



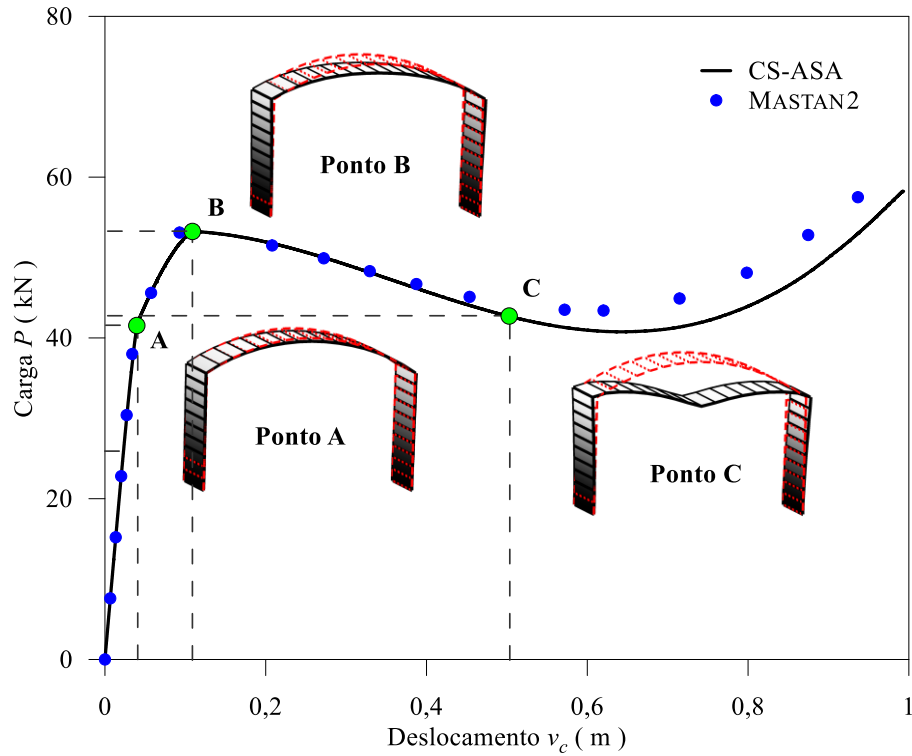
**Figura 4.33.** Sistemas estrutural metálico com pórticos tipo galpão

**Tabela 4.10.** Propriedades do aço

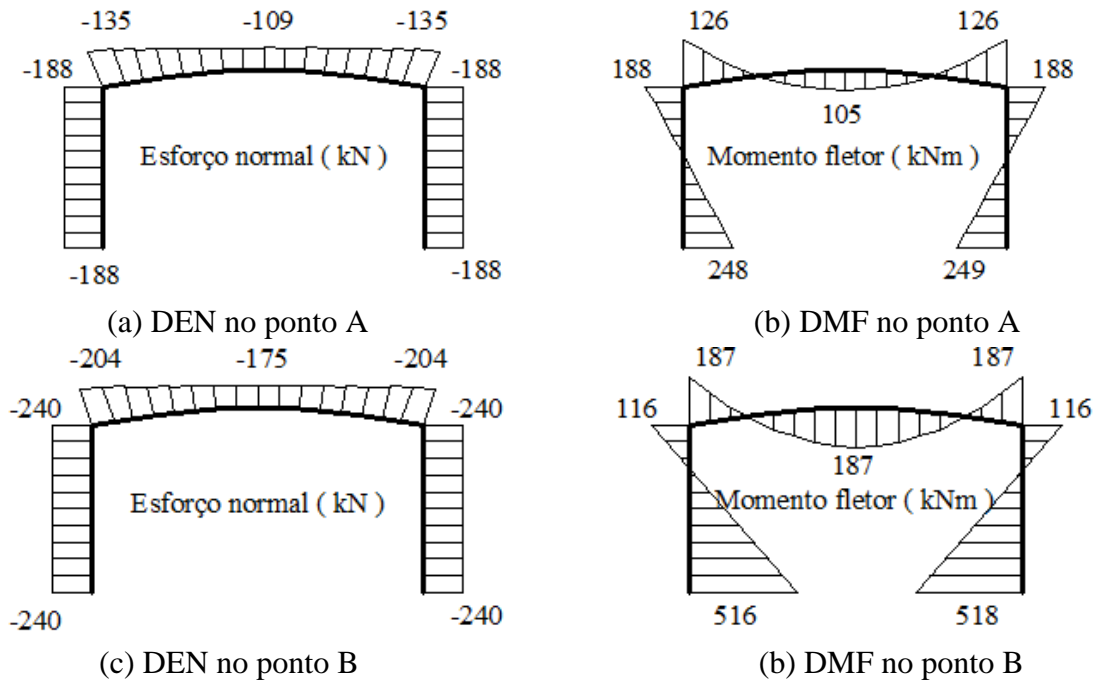
Q345B	Módulo de elasticidade $E$	220 GPa
	Tensão de escoamento $f_y$	360,3 MPa

A Figura 4.34 apresenta a trajetória de equilíbrio e a evolução da configuração deformada do pórtico, cujo arco tem fator de abatimento de  $f/L = 0,05$  (abatido). Os resultados obtidos via CS-ASA, usando uma malha de 10 e 16 elementos finitos para as colunas e arco, respectivamente, são comparados aos obtidos através do MASTAN2. Existe semelhança entre os pontos de equilíbrio atingidos com esses dois programas, assim como os valores das cargas limites obtidos: 53,2kN no CS-ASA e 53,1kN no MASTAN2.

A Figura 4.35 apresenta o diagrama de esforços internos (esforço normal, DEN, e momento fletor, DMF) para as configurações de equilíbrio em A e B na trajetória de equilíbrio do pórtico (Figura 4.34).

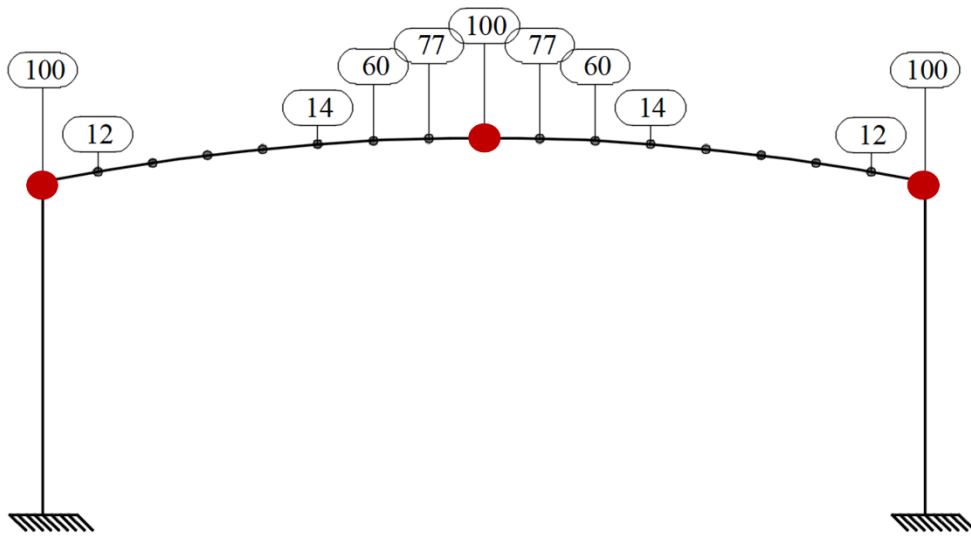


**Figura 4.34.** Trajetória de equilíbrio e evolução da configuração deformada do pórtico metálico tipo galpão biengastado



**Figura 4.35.** Diagramas de esforços solicitantes do pórtico metálico tipo galpão (A e B na Figura 4.34)

A Figura 4.36 fornece o índice de plastificação das seções do arco no momento em que a carga limite é atingida. São destacados em vermelho os pontos localizados onde ocorre a formação de rótulas plásticas e o percentual de plastificação em algumas seções é mostrada no interior das elipses indicadas na figura. As primeiras rótulas plásticas se formam na ligação arco-coluna, e na sequência ocorre a formação da rótula no topo do arco, conforme a Figura 4.35. As seções localizadas nas colunas não se degradaram, já que a inércia do perfil das colunas é muito maior que a inércia do perfil do arco.



**Figura 4.36.** Índice de plastificação em seções do arco metálico

# CAPÍTULO 5

## Considerações Finais

### 5.1. Introdução

Neste trabalho foi abordada a análise inelástica de segunda ordem (AISO) de arcos metálicos com diversas características geométricas, condições de apoio e carregamento. Foram adotadas formulações numéricas baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF) incluindo os efeitos não lineares geométrico e do material, aliadas a estratégias de solução não linear eficientes. Os modelos discretos idealizados para arcos metálicos reproduziram resultados próximos das literaturas utilizadas para comparação.

A base computacional utilizada foi o CS-ASA — *Computational System for Advanced Structural Analysis* (SILVA, 2009). Como já mencionado nos capítulos anteriores, trata-se um programa baseado no MEF e estruturado em módulos, que foi inicialmente idealizado para análises não lineares estática e dinâmica de estruturas metálicas. Atualmente é possível realizar, também via CS-ASA, análises de estruturas de concreto armado e mistas (aço e concreto; LEMES, 2015, 2018). No Capítulo 4, todas as análises não lineares foram realizadas através de uma estratégia incremental-iterativa. Ou seja, para cada passo de carga: via Método do Deslocamento Generalizado (MDG; YANG e KUO, 1994) foi obtida a chamada solução predita; via Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (NMDR; CHAN, 1988) foi realizada a correção do parâmetro de carga ao longo de um ciclo iterativo de *Newton-Raphson* Modificado.

As simulações computacionais realizadas no capítulo anterior foram validadas através de trabalhos numéricos da literatura, e também através dos softwares MASTAN2 (ZIEMIAN e MCGUIRE, 2000) e SAFIR (FRANSSSEN, 2005). Na próxima seção serão apresentadas algumas conclusões de caráter geral acerca das formulações numéricas empregadas e em seguida conclusões mais específicas envolvendo o comportamento dos arcos. Na sequência serão feitas sugestões para futuros trabalhos.



## 5.2. Conclusões

Pode-se afirmar que as formulações numéricas adotadas permitiram, com boa precisão, analisar o comportamento não linear inelástico de segunda ordem de arcos desde muito abatidos até muito pouco abatidos com diferentes condições de apoio e carregamento. Merece destaque, entretanto, o acoplamento do Método da Rótula Plástica Refinada (MRPR) — que considera a plastificação na seção transversal de forma gradativa, mas apenas nos pontos nodais dos elementos finitos —, ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) — que foi utilizado na avaliação das curvas de resistência e na obtenção das rigidezes axial e à flexão generalizadas. Esse acoplamento contribuiu para que as análises inelásticas dos arcos fossem realizadas com sucesso, ou seja, os resultados obtidos via CS-ASA apresentaram boa concordância com aqueles da literatura e/ou com os das análises via MASTAN2 usando a opção do módulo tangente modificado,  $E_{tm}$  (ZIEMIAN e MCGUIRE, 2002).

A estratégia numérica adotada na análise termoestrutural dos arcos metálicos, que foram apresentadas no Capítulo 3, se mostrou promissora. Os resultados obtidos das análises térmicas da seção transversal metálica foram coincidentes com aqueles do SAFIR.

Faz-se ainda necessário um estudo aprofundado sobre arcos metálicos abatidos e pouco abatidos sob carregamento radial, visto que ainda existem algumas inconsistências entre resultados da literatura e os obtidos via CS-ASA e MASTAN2.

Como conclusões mais específicas da pesquisa realizada, destacam-se:

### ***Sobre a malha de discretização da estrutura e divisões da seção transversal:***

Em todos os modelos analisados observou-se grande sensibilidade da resposta da estrutura em relação à discretização adotada, principalmente com relação ao número de elementos finitos ao longo do arco, mas também ao número de divisões da seção transversal. Na comparação de arcos com mesmo valor de comprimento  $S$  e diferentes valores de ângulo interno  $2\Theta$ , verificou-se que as estruturas com valores de  $2\Theta$  muito pequenos (arcos muito abatidos) ou muito grandes (arco muito pouco abatido) necessitavam de maior discretização da seção transversal em relação às demais. Da mesma forma, arcos sob cargas assimétricas também demandaram maior refinamento de malha, já que esse carregamento acentua o seu comportamento não linear. Com relação ao número de divisões na seção transversal, existiu grande variação entre os exemplos realizados. Em alguns casos, a redução, mesmo que mínima do número de elementos que foi usado em cada um dos casos implicava em instabilidades numéricas, impedindo que o CS-ASA traçasse o caminho de equilíbrio pós crítico da estrutura. Futuramente, pode ser realizado um

estudo aprofundado, variando-se a estratégia incremental-iterativa de forma a traçar a trajetória de equilíbrio completa com o menor número de divisões da seção transversal possível.

***Sobre os esforços internos atuantes nos arcos:***

Não há predominância clara entre os esforços de compressão ou flexão nos arcos estudados. Para cada um deles, o tipo e posição do carregamento, as condições de apoio, o tipo de seção transversal, a posição da seção escolhida ao longo do arco para análise dos esforços internos influenciam de forma única os esforços internos na seção.

***Sobre o carregamento atuante:***

No caso das cargas concentradas verticais aplicadas, a posição da carga teve grande influência na resistência dos arcos com diferentes relações de abatimento  $f/L$  (sendo  $f$  a flecha e  $L$  o vão do arco). Portanto, é necessário um estudo criterioso envolvendo o posicionamento da carga, específico para cada configuração de arco, de modo a extrair o seu melhor desempenho estrutural. Trata-se de análise relevante para os arcos usados como elementos estruturais principais em pontes e coberturas, com pontos específicos de posicionamento das cargas concentradas.

No caso das cargas uniformemente distribuídas verticais aplicadas, os arcos estudados nas Seções 4.3 e 4.4 tiveram uma distribuição de esforços internos mais uniforme. Sob carregamento radial foram analisados arcos biapoiados, como na Seção 4.3. Estes arcos apresentam exclusivamente esforços de compressão.

***Sobre a relação  $f/L$ :***

As trajetórias de equilíbrio obtiveram, no geral, boa concordância com os dados de literaturas utilizadas ou análises numéricas realizadas via MASTAN2. Na maior parte dos casos estudados, a perda da estabilidade se dá através de pontos limite, condição na qual a partir de um pequeno acréscimo de carga, podem ocorrer saltos dinâmicos para outras configurações de equilíbrio. No entanto, em alguns casos de arcos muito abatidos e abatidos, também aconteceu perda de estabilidade por bifurcação.

A relação de abatimento do arco  $f/L$  mostrou grande influência na resistência dos arcos. Para um arco de mesmo comprimento  $S$ , quanto maior é o valor de  $f/L$ , mais resistente é o arco, ou seja, quanto menos abatido é o arco, mais resistente ele se torna. Além desse comportamento típico dos arcos relativo à influência da relação de abatimento, a posição da carga aplicada no

arco também influência a relação de abatimento x carga crítica, como pôde ser observado na Figura 4.13.

#### ***Sobre a análise térmica e termoestrutural:***

Nas análises térmicas das seções transversais metálicas dos arcos, quando uma ou mais faces da seção do perfil eram expostas ao fogo, a temperatura na face ou faces afetadas diretamente pelo fogo aumentava de forma mais rápida, como esperado, até atingir valores em torno de 600°C e 700°C, para em seguida subir mais lentamente. O mesmo comportamento foi observado na degradação dos limites plásticos (curvas de resistência) sob carregamento térmico. Inicialmente, ocorre uma degradação rápida do par *NM* máximos resistidos pela estrutura, e essa degradação vai ficando mais lenta a medida que a temperatura atinge valores entre 600°C e 700°C.

A análise termoestrutural do arco metálico foi realizada basicamente em duas etapas: na primeira, o arco era submetido a um carregamento externo típico; na segunda, o arco previamente carregado era analisado sob situação de incêndio. Quanto menor era essa carga previamente aplicada à estrutura, maior era a sua resistência ao fogo e menor era o deslocamento atingido. Isso pode ser explicado através do fenômeno de degradação dos parâmetros generalizados de rigidez axial (*EA*) e à flexão (*EI*), que podem ser diretamente afetados pela carga inicialmente aplicada à estrutura, caso já se inicie o processo de escoamento do aço, e em seguida pela carga térmica, com a redução das propriedades físicas e mecânicas do material.

### **5.3. Sugestões para Trabalhos Futuros**

No futuro, várias pesquisas podem ser realizadas no sentido de dar continuidade a esta dissertação. Dentre elas, merecem destaque os seguintes temas:

- Estudo numérico avançado de arcos de concreto armado e mistos (LIU *et al.*, 2015; PI, *et al.*, 2012; LEMES, 2015, 2018);
- Análise não linear de arcos abatidos e pouco abatidos sob carga radial (PI e BRADFORD, 2003; BRADFORD *et al.*, 2011);
- Análise não linear de arcos com ligações semirrígidas (LU *et al.*, 2017; PI *et al.*, 2007);

- Continuidade das análises termomecânicas de arcos metálicos, de concreto armado e mistos (HEIDARPOUR *et al.*, 2010a, 2010b; PI e BRADFORD, 2010a; GUO *et al.*, 2016a);
- Emprego de seções transversais não compactas e investigar o fenômeno da flambagem local (PRZEMIENIECKI, 1973; BRADFORD e AZHARI, 1993; SEIF e SCHAFER, 2010);
- Expansão da plataforma computacional CS-ASA para análises 3D (CHIOREAN, 2013; BLEYER e BUHAN, 2013; SANTANA, 2019);
- Análises 3D inelásticas de segunda ordem de arcos abatidos e pouco abatidos (KIM e LEE, 2002; PI e TRAHAIR, 1996b); e
- Emprego da plasticidade distribuída na análise avançada de arcos (CALDAS, 2004; ALVARENGA, 2010; NGUYEN e KIM, 2016);

## Referências Bibliográficas

ABAQUS, 2006. User's and Theory Manuals, Hibbitt, Karlsson, Sorensen, Inc.

ABREU, J. F. A. C., 2016. *Estudo computacional via ANSYS de vigas, arcos e anéis com restrições de contato impostas por bases elásticas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

ADINA Solids & Structures, 2005. ADINA R & D, Inc. / K.J. Bathe.

AISC LRFD, 2010. *Specification for structural steel buildings*. American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois, USA.

AISC LRFD, 2016. *Specification for structural steel buildings*. American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois, USA.

ALHASAWI, A.; HENG, P.; HJIAJ, M.; GUEZOULLI, S.; BATTINI, J.-M., 2017. *Co-rotational planar beam element with generalized elasto-plastic hinges*. Engineering Structures, v. 151, p. 188-205.

ALVARENGA, A. R., 2005. *Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

ALVARENGA, A. R., 2010. *As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

ANSYS®, 2008. Product Launcher Release 11.0.

- BARROS, R. C., 2016. *Avaliação Numérica Avançada do Desempenho de Estruturas de Aço Sob Temperaturas Elevadas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- BARROS, R. C.; PIRES, D.; SILVEIRA, R. A. M.; LEMES, I. J. M.; ROCHA, P. A. S., 2018. *Advanced inelastic analysis of steel structures at elevated temperatures*. Journal of Constructional Steel Research, v.145, p.368-385.
- BATHE, K. J., 1996. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey, EUA.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G., 1979. *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 14, p. 1262-1267.
- BATTINI, J.M., 2002. *Co-rotational beam elements in instability problems*. Ph.D Thesis. Royal Institute of Technology. Department of Mechanics, Stockholm, Sweden.
- BELYTSCHKO, T.; GLAUM, L. W., 1979. *Application of higher order co-rotational stretch theories to nonlinear finite element analysis*. Computers and Structures, v.10, p. 175-182.
- BJORHOVDE, R., 1972. *Deterministic and probabilistic approaches to the strength of steel columns*, Ph.D. dissertation, Fritz Laboratory Reports.
- BLEYER, J.; de BUHAN, P., 2013. *Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3D composite frame structures*. Computers & Structures, v. 129, p. 86–98.
- BOISSONNADE, N.; JASPART, J., P.; MUZEAU, J. P., VILLETTE, M., 2004. *New interaction formulae for beam–columns in Eurocode 3: The French–Belgian approach*. Journal of Constructional Steel Research, v.60, p. 421–31.
- BRADFORD, M.A.; AZHARI, M., 1993. *Local buckling of I-Sections bent about the minor axis*. Journal of Constructional Steel Research, v. 31, p. 73-89.
- BRADFORD, M. A.; PI, Y.-L., 2015. *Geometric Nonlinearity and Long-Term Behavior of Crown-Pinned CFST Arches*. Journal of Structural Engineering, v. 141(8), p. 04014190/1-11.

- BRADFORD, M. A.; PI, Y.-L.; QU, W., 2011. *Time-dependent in-plane behaviour and buckling of concrete-filled steel tubular arches*. Engineering Structures, v. 33(5), p. 1781–1795.
- BRADFORD, M. A.; PI, Y.-L.; YANG, G.; FAN, X.-C., 2015. *Effects of approximations on non-linear in-plane elastic buckling and postbuckling analyses of shallow parabolic arches*. Engineering Structures, v. 101, p. 58–67.
- BRADFORD, M. A.; UY, B.; PI, Y.-L., 2002. *In-Plane Elastic Stability of Arches under a Central Concentrated Load*. Journal of Engineering Mechanics, v. 128(7), p. 710–719.
- CALDAS, R. B., 2004. *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- CALDAS, R. B., 2008. *Análise Numérica de Estruturas de Aço, Concreto e Mistas em Situação de Incêndio*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, EE/UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- CHAN, S. L., 1988. *Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 26, p. 2657-2669.
- CHAPMAN, S. J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn.
- CHEN, W. F.; GOTO, Y.; LIEW, J. Y. R., 1996. *Stability Design of Semi-Rigid Frames*. John Wiley.
- CHEN, S.; TENG, J. G.; CHAN, S. L., 2001. *Design of biaxially loaded short composite columns of arbitrary section*. Journal of Structural Engineering, v. 127, n. 6, p. 678-685.
- CHHANG, S.; BATTINI, J.-M.; HJIAJ, M., 2017. *Energy-momentum method for co-rotational plane beams: A comparative study of shear exible formulations*. Finite Elements in Analysis and Design, v. 134, p. 41-54.
- CHIOREAN, C. G., 2013. *A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D composite steel-concrete frame structures*. Engineering Structures, v. 57, p. 125-152.

- CIMNE, 2004. *Centro Internacional de Métodos Numéricos em Engenharia*. GID Pré/pós Processador Gráfico – Versão 7.2. Barcelona.
- CRISFIELD, M. A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. USA: John Wiley & Sons Inc., v. 1.
- DIMOPOULOS, C. A.; GANTES, C. J., 2008. *Design of circular steel arches with hollow circular cross-sections according to EC3*. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 64, p. 1077-1085.
- DYM, C. L.; WILLIAMS, H. E., 2011. *Stress and Displacement Estimates for Arches*. *Journal of Structural Engineering*, v.137, p 49-58.
- ECCS, 1983. *Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints*. European Convention for Constructional Steelwork, pub. n°. 33.
- EN 1991-1-2:2002 - European Committee for Standardization. *Eurocode 1: Basis of Design and Actions on Structures. Part 1-2: Actions on Structures, Actions on Structures Exposed to Fire*. Brussels.
- EN 1992-1-2:2004 - European Committee for Standardization. *Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-2: General rules, Structural Fire Design*. Brussels.
- EN 1993-1-2:2005 - European Committee for Standardization. *Eurocode 3: Design of Steel Structures, Parte 1-2: General Rules, Structural Fire Design*. Brussels.
- EN 1994-1-2:2005 - European Committee for Standardization. *Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures, Parte 1-2: General Rules, Structural Fire Design*. Brussels.
- FRANSSEN, J.-M., 2005. *SAFIR - A thermal/structural program modelling structures under fire*. *AISC, Engineering Journal*, v. 42(3), p. 143-158.
- GALAL, K.; EL-SAWY, T., 2010. *Effect of retrofit strategies on mitigating progressive collapse of steel frame structures*. *Journal of Constructional Steel Research*, v.66, p.520-531.



- GALVÃO, A. S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- GALVÃO, A.S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, RJ, Brasil.
- GONÇALVES, G.A., 2013. *Modelagem do comportamento inelástico de estruturas de aço: membros sob flexão em torno do eixo de menor inércia*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- GREINER, R.; LINDNER, J., 2006. *Interaction formulae for member subjected to bending and axial compression in EUROCODE 3-the method 2 approach*. Journal of Constructional Steel Research, v. 62, p.757–70.
- GUO, Y.-L.; ZHAO, S.-Y.; PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A.; DOU, C., 2015. *An experimental study on out-of-plane inelastic buckling strength of fixed steel arches*. Engineering Structures, v. 98, p. 118–127.
- GUO, Z.; WANG, Y.; LU, N.; ZHANG, H.; ZHU, F., 2016a. *Behaviour of a two-pinned steel arch at elevated temperatures*. Thin-Walled Structures, v.107, p. 248-256
- GUO, Y.-L.; CHEN, H.; PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2016b. *In-plane strength of steel arches with a sinusoidal corrugated web under a full-span uniform vertical load: Experimental and numerical investigations*. Engineering Structures, v. 110, p. 105–115.
- GUO, Y.-L.; YUAN, X.; BRADFORD, M. A.; PI, Y.-L.; CHEN, H., 2017a. *Strength design of pin-ended circular steel arches with welded hollow section accounting for web local buckling*. Thin-Walled Structures, v. 115, p. 100–109.
- GUO, Y.-L.; YUAN, X.; PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A.; CHEN, H., 2017b. *In-Plane Failure and Strength of Pin-Ended Circular Steel Arches Considering Coupled Local and Global Buckling*. Journal of Structural Engineering, v. 143(1), p. 04016157.

- HAMED, E.; CHANG, Z.-T.; RABINOVITCH, O., 2015. *Strengthening of Reinforced Concrete Arches with Externally Bonded Composite Materials: Testing and Analysis*. Journal of Composites for Construction, v. 19(1), p. 04014031/1-15.
- HEIDARPOUR, A.; PHAM, T. H.; BRADFORD, M. A., 2010a. *Nonlinear thermoelastic analysis of composite steel–concrete arches including partial interaction and elevated temperature loading*. Engineering Structures, v. 32(10), p. 3248–3257.
- HEIDARPOUR, A.; ABDULLAH, A.; BRADFORD, M. A., 2010b. *Non-linear thermoelastic analysis of steel arch members subjected to fire*. Fire Safety Journal, v. 45(3), p. 183–192.
- HEIDARPOUR, A.; ABDULLAH, A. A.; BRADFORD, M. A., 2010c. *Non-linear inelastic analysis of steel arches at elevated temperatures*. Journal of Constructional Steel Research, v. 66(4), p. 512–519.
- HEYMAN, J., 1995. *Stone skeleton: Structural engineering of masonry architecture*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- ISO 834-1, 1999. *Fire Resistance Tests - Elements of Buildings Construction, Part 1: General Requirements*. ISO - International Organization for Standardization. Geneva.
- IU, C. K; CHAN, S.L. 2004. *A simulation-based large deflection and inelastic analysis of steel frames under fire*. Journal of Constructional Steel Research, v. 60, p. 1495-1524.
- JORDAN, R. F., 1985. *História da arquitetura no Ocidente*. São Paulo: Verbo.
- KIM, S.E.; LEE, J., 2002. *Improved refined plastic-hinge analysis accounting for lateral torsional buckling*. Journal of Constructional Steel Research, v. 58, p. 1431-1453.
- KIRBY, B.R., PRESTON, R. R., 1988. *High temperature properties of hot rolled, structural steels for use in fire engineering design studies*. Fire Safety Journal, v. 13(1), p. 27-37.
- KRENK, S., 1995. *An orthogonal residual pProcedure for non-linear finite element equations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 38, p. 823-839.

- KUHLMANN, U.; RÖLLE, L.; IZZUDDIN, B. A.; PEREIRA, M. F., 2012. *Resistance and Response of Steel and Steel–Concrete Composite Structures in Progressive Collapse Assessment*. Structural Engineering International, v.1/2012, p. 86-92.
- KWON, Y. W., 1997. *The Finite Element Method Using MATLAB*. CRC Press.
- LA POUTRÉ, D. B.; SPOORENBERG, R. C.; SNIJDER, H. H.; HOENDERKAMP, J. C. D., 2013. *Out-of-plane stability of roller bent steel arches – An experimental investigation*. Journal of Constructional Steel Research, v. 81, p. 20–34.
- LANDESMANN, A., 2003. *Modelo Não-Linear Inelástico para Análise de Estruturas Metálicas Aporticadas em Condições de Incêndio*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- LEMES, Í. J. M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D.; ROCHA, P. A. S., 2017. *Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM*. Engineering Structures, v. 147, p. 12-26.
- LEMES, I. J. M., 2018. *Estudo Numérico Avançado de Estruturas de Aço, Concreto e Mistas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- LEVY, M. (2006), *The Arch: Born in the Sewer, Raised to the Heavens*. Nexus Network Journal, vol. 8, pp 7-11.
- LEWIS, R.W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K.N., 2004. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley & Sons, Chichester.
- LIU, A.-R; HUANG, Y.-H; FU, J.-Y; YU, Q.-C; RAO, R., 2015. *Experimental research on stable ultimate bearing capacity of leaning-type arch rib systems*. Journal of Constructional Steel Research, v. 114, p. 281-292.

- LIU, A.; YANG, Z.; LU, H.; FU, J.; PI, Y.-L., 2017. *Experimental and analytical investigation on the in-plane dynamic instability of arches owing to parametric resonance*. Journal of Vibration and Control, v. , p. 107754631772621/1-14.
- LU, Y.; CHENG, Y.; HAN, Q., 2017. *Experimental investigation into the in-plane buckling and ultimate resistance of circular steel arches with elastic horizontal and rotational end restraints*. Thin-Walled Structures, v.118, p.164-180.
- MACHADO, F. C. S., 2005. *Análise Inelástica de Segunda-ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- MANZI, E. N., 2001. *Formulações para elementos finitos curvos para análise de arcos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- MATHUR, K., 2011. *Effect of residual stresses and initial imperfections on earthquake response of steel moment frames*. Tese de Doutorado. Graduate College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America.
- MATHWORKS, 2013. MATLAB Release 2013b
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D., 2000. *Matrix Structural Analysis*. 2nd. ed., *Faculty Books*. 7.
- MOON, J.; YOON, K.-Y.; LEE, T.-H.; LEE, H.-E., 2007. *In-plane elastic buckling of pin-ended shallow parabolic arches*. Engineering Structures, v. 29(10), p. 2611–2617.
- MOUÇO, D.L., 2008. *Modelo Inelástico para Análise Avançada de Estruturas Mistas Aço-Concreto em Situação de Incêndio*. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- NAJJAR, S. R., 1994. *Three-Dimensional Analysis of Steel Frames and Sub-Frames in Fire*. Ph.D. dissertation, University of Sheffield, Department of Civil and Structural Engineering, Sheffield.
- NBR 8800, 2008. *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Associação Brasileira de Normas Técnicas.

- NBR 14323, 2013. *Dimensionamento de estruturas de aço e de estruturas mistas aço-concreto de edifícios em situação de incêndio*. Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- NGUYEN, P.-C.; KIM, S.-E., 2016. *Advanced analysis for planar steel frames with semi-rigid connections using plastic-zone method*. *Steel and Composite Structures*, v. 21(5), p. 1121-1144
- NUNES, P. C. C., 2009. *Teoria do arco de alvenaria: uma perspectiva histórica*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- NUNES, N. E. M., 2014. *Código Computacional para Análise Térmica Tridimensional de Estruturas em Situação de Incêndio*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, SP, Brasil.
- OLIVEIRA, G. C.; SILVA, W. T. M., 2017. *Análise não-linear de arcos utilizando o elemento de viga unificado bernoulli-timoshenko e a formulação co-rotacional*. *REEC – Revista eletrônica de engenharia civil*, v. 13 (2), p. 1-16.
- PACOSTE, C.; ERIKSSON, A., 1997. *Beam elements in instability problems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 144(1-2), p. 163–197.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2003. *Inelastic buckling and strengths of steel I-section arches with central torsional restraints*. *Thin-Walled Structures*, v.41(7), p. 663–689.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2004. *In-plane strength and design of fixed steel I-section arches*. *Engineering Structures*, v. 26(3), p. 291–301.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2008. *Dynamic buckling of shallow pin-ended arches under a sudden central concentrated load*. *Journal of Sound and Vibration*, v. 317(3-5), p. 898–917.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2009. *Non-linear in-plane postbuckling of arches with rotational end restraints under uniform radial loading*. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 44(9), p. 975–989.

- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2010a. *Nonlinear in-plane elastic buckling of shallow circular arches under uniform radial and thermal loading*. International Journal of Mechanical Sciences, v. 52(1), p. 75–88.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2010b. *In-plane thermoelastic behaviour and buckling of pin-ended and fixed circular arches*. Engineering Structures, v. 32(1), p. 250–260.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2012a. *Non-linear in-plane analysis and buckling of pinned–fixed shallow arches subjected to a central concentrated load*. International Journal of Non-Linear Mechanics, v. 47(4), p. 118–131.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2012b. *Non-linear buckling and postbuckling analysis of arches with unequal rotational end restraints under a central concentrated load*. International Journal of Solids and Structures, v. 49(26), p. 3762–3773.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2012c. *Nonlinear dynamic buckling of shallow circular arches under a sudden uniform radial load*. Journal of Sound and Vibration, v. 331(18), p. 4199–4217.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2013a. *Nonlinear elastic analysis and buckling of pinned–fixed arches*. International Journal of Mechanical Sciences, v. 68, p. 212–223.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2013b. *Nonlinear dynamic buckling of pinned–fixed shallow arches under a sudden central concentrated load*. Nonlinear Dynamics, v. 73(3), p. 1289–1306.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2013c. *Nonlinear analysis and buckling of shallow arches with unequal rotational end restraints*. Engineering Structures, v. 46, p. 615–630.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2014. *Effects of nonlinearity and temperature field on in-plane behaviour and buckling of crown-pinned steel arches*. Engineering Structures, v. 74, p. 1–12.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A. 2015. *In-Plane Analyses of Elastic Three-Pinned Steel Arches*. Journal of Structural Engineering, v. 141(2), p. 06014009/1-4.

- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A.; GUO, Y.-L., 2016. *Revisiting Nonlinear In-Plane Elastic Buckling and Postbuckling Analysis of Shallow Circular Arches under a Central Concentrated Load*. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 142(8), p. 04016046/1-8.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A.; TIN-LOI, F.; GILBERT, R. I., 2007. *Geometric and material nonlinear analyses of elastically restrained arches*. *Engineering Structures*, v. 29(3), p. 283–295.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A.; TIN-LOI, F., 2008a. *Non-linear in-plane buckling of rotationally restrained shallow arches under a central concentrated load*. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 43(1), p. 1–17.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A.; TIN-LOI, F., 2008b. *In-plane strength of steel arches*. *Advanced Steel Construction*, v. 4 (4), p. 306-322.
- PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A.; UY, B., 2002. *In-plane stability of arches*. *International Journal of Solids and Structures*, v. 39(1), p. 105–125.
- PI, Y.-L.; LIU, C.; BRADFORD, M. A.; ZHANG, S., 2012. *In-plane strength of concrete-filled steel tubular circular arches*. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 69(1), p. 77–94.
- PI, Y. L.; TRAHAIR, N. S., 1994a. *Nonlinear Inelastic Analysis of Steel Beam-Columns. I: Theory*. *Journal of Structural Engineering*, v. 120(7), p. 2041–2061.
- PI, Y. L.; TRAHAIR, N. S., 1994b. *Nonlinear Inelastic Analysis of Steel Beam-Columns. II: Applications*. *Journal of Structural Engineering*, v. 120(7), p. 2062–2085.
- PI, Y.-L.; TRAHAIR, N. S., 1996a. *In-plane inelastic buckling and strengths of steel arches*. *Journal of Structural Engineering*, v.122, p. 734-747.
- PI, Y.-L.; TRAHAIR, N. S., 1996b. *Three-dimensional nonlinear analysis of elastic arches*. *Engineering Structures*, v. 18(1), p. 49–63.
- PI, Y.-L.; TRAHAIR, N. S., 1998. *Out-of-Plane Inelastic Buckling and Strength of Steel Arches*. *Journal of Structural Engineering*, v. 124(2), p. 174–183.

- PI, Y.-L.; TRAHAIR, N. S., 1999. *In-plane buckling and design of steel arches*. Journal of Structural Engineering, v.125, p. 1291-1298.
- PINHEIRO, L., 2003. *Análises Não-lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semirrígidos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- PIRES, D.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA R. A. M., 2011. *A técnica do fluxo normal aplicada à análise não linear de arcos esbeltos*. Anais do 32º CILAMCE, Ouro Preto, MG, Brasil, v. 1, pp. 1–19.
- PIRES, D., 2012. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- PIRES, D., 2018. *Análise Numérica Avançada de Estruturas de Aço e de Concreto Armado em Situação de Incêndio*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- PRADO, I. M., 2012. *CS-ASA Preprocessor: Sistema Gráfico Interativo de Pré-processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- PRZEMIENIECKI, J. S., 1973. *Finite element structural analysis of local instability*. AIAA Journal, v.11, p.33-39).
- RIGOBELLO, R., 2011. *Desenvolvimento e Aplicação de Código Computacional para Análise de Estruturas de Aço Aporticadas em Situação de Incêndio*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, SP, Brasil.
- ROCHA, G., 2000. *Estratégias numéricas para análise de elementos estruturais esbeltos metálicos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.



- ROCHA, P. A. S., 2006. *Análise inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semirrígidas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- ROIK, K.; BERGMANN, R., 1990. *Design method for composite columns with unsymmetrical cross-sections*. Journal of Constructional Steel Research, v. 15, p. 153-168.
- ROSAS, L. R. B., 2016. *Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Reticulados com Restrições de Contato*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SALMON, C. G.; JOHNSON, J. E.; MALHAS, F., 2009. *Steel Structures: Design and Behavior*. 5. ed. Nova Iorque: Prentice Hall.
- SANTANA, M. V. B., 2015. *Desenvolvimento de Sistema Computacional via MATLAB/GUI (Graphical User Interface) para Análise Geometricamente Não Linear de Estruturas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SANTANA, M. V. B., 2019. *Tailored Corotational Formulations for the Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Bistable Structures* (a ser defendida). Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, RJ, Brasil.
- SANTOS, L. C., 2016. *Análise numérica via Ansys do equilíbrio não linear e estabilidade elástica de estruturas com restrições de contato*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SANTOS, M. N., 2007. *Emprego de Elemento Finito Híbrido na Análise Não-linear de Estruturas Metálicas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SEIF, M.; SCHAFER, B. W., 2010. *Local buckling of structural steel shapes*. Journal of Constructional Steel Research, v. 66(10), p. 1232–1247.

- SFAKIANAKIS, M. G., 2002. *Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete section of arbitrary shape by fiber model and computer graphics*. Advances in Engineering Software, v. 33, p. 227-242.
- SILVA, A. R. D., 2009. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SILVA, J. L., 2016. *Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SILVEIRA, R. A. M., 1995. *Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SOUZA Jr. V., 1998. *Análise de Pórticos de Aço sob Altas Temperaturas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SPOORENBERG, R. C.; SNIJDER, H. H.; HOENDERKAMP, J. C. D., 2012a. *A theoretical method for calculating the collapse load of steel circular arches*. Engineering Structures, v. 38, p. 89-103
- SPOORENBERG, R. C.; SNIJDER, H. H.; HOENDERKAMP, J. C. D.; BEG, D., 2012b. *Design rules for out-of-plane stability of roller bent steel arches with FEM*. Journal of Constructional Steel Research, v. 79, p. 9–21.
- SUSSEKIND, J.C., 1981. *Curso de análise estrutural*. Porto Alegre: Globo, v. 3, 6 ed.
- TANG, Y. Q.; ZHOU, Z. H.; CHAN, S. L., 2015. *Nonlinear beam-column element under consistente deformation*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, v. 15, n. 5, p. 1450068/1-24.
- TRAHAIR, N. S.; PI, Y.-L.; CLARKE, M. J.; PAPANGELIS, J. P., 1997. *Plastic Design of Steel Arches*. Advances in Structural Engineering, v. 1(1), p. 1–9.
- TURNER, J., 1996. *The dictionary of art*. London: Macmillan, 1996.

- USIMINAS, 1998. *CR ROM Usimetal*. Usiminas, Belo Horizonte.
- XU, Y.J.; GUI, X.M.; ZHAO, B.; ZHOU, R.Q., 2014. *In-Plane Elastic Stability of Arches under a Radial Concentrated Load*. *Engineering*, v. 6, p. 572-583.
- WATSON, L. T.; BILLUPS, S. C.; MORGAN, A. P., 1987. *Algorithm 652: HOMPACT: A suite of codes for globally convergent homotopy algorithms*. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 13(3), p. 281-310.
- WATSON, L. T.; SOSONKINA, M.; MELVILLE, R. C.; MORGAN, A. P.; WALKER, H. F., 1997. *Algorithm 777: HOMPACT90: A suite of Fortran 90 Codes for globally convergent homotopy algorithms*. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 23(4), p. 514-549.
- YANG, Y.; KUO, S., 1994. *Theory & analysis of nonlinear framed structures*. [S.l.]: Prentice Hall.
- ZIEMIAN, R. D.; MCGUIRE, W., 2000. *MASTAN2*, v. 1.0, distributor Wiley, New York.
- ZIEMIAN, R. D.; MCGUIRE, W., 2002. *Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis*. *Journal of Structural Engineering*, v.128, p. 1301-1307.
- ZHOU, Y.; CHANG, W.; STANCIULESCU, I., 2015. *Nonlinear stability and remote unconnected equilibria of shallow arches with asymmetric geometric imperfections*. *International Journal of Non-Linear Mechanics*,
- ZUBYDAN, A. H., 2013. *Inelastic large deflection analysis of space steel frames including H-shaped cross-section members*. *Engineering Structures*, v. 48, p. 155-165.

# APÊNDICE A

## Matriz de Rigidez do Elemento Corrotacional

### A.1. Termos da Matriz de Rigidez

Para evitar aumentos de rigidez espúrios nos elementos durante a análise estrutural (efeito *locking*) é necessário que as funções de interpolação sejam ajustadas. Neste trabalho, foi empregado o ajuste realizado por Tang *et al.*, 2015, que utilizou funções de interpolação de quinta ordem para realizar a interpolação dos deslocamentos axiais.

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}_l$  apresentada na Seção 3.2.2 é baseada na premissa de que o material se comporta elasticamente, porém essa consideração é modificada na Seção 3.3, na qual é inserida a não linearidade do material (NLM). Os termos da matriz de rigidez do elemento corrotacional  $\mathbf{K}_l$  levando em consideração a NLM são dadas por:

$$\begin{aligned}k_{11} &= \frac{\partial N}{\partial \delta} = \frac{(EA)^*}{L}; & k_{12} &= \frac{\partial N}{\partial \theta_i} = \frac{(EA)^*}{30}(4\theta_i - \theta_j) \\k_{13} &= \frac{\partial N}{\partial \theta_j} = \frac{(EA)^*}{30}(-\theta_i + 4\theta_j); & k_{21} &= \frac{\partial M_i}{\partial \delta} = \frac{(EA)^*}{30}(4\theta_i - \theta_j) \\k_{22} &= \frac{\partial M_i}{\partial \theta_i} = \left(\frac{EI_1}{L}\right)^* + \frac{4(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{900}(24\theta_i^2 - 12\theta_i\theta_j + 9\theta_j^2) \\k_{23} &= \frac{\partial M_i}{\partial \theta_j} = \left(\frac{EI_2}{L}\right)^* - \frac{(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{450}(-3\theta_i^2 + 9\theta_i\theta_j - 3\theta_j^2) \\k_{31} &= \frac{\partial M_j}{\partial \delta} = \frac{(EA)^*}{30}(-\theta_i + 4\theta_j) \\k_{32} &= \frac{\partial M_j}{\partial \theta_i} = \left(\frac{EI_2}{L}\right)^* - \frac{(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{450}(-3\theta_i^2 + 9\theta_i\theta_j - 3\theta_j^2) \\k_{33} &= \frac{\partial M_j}{\partial \theta_j} = \left(\frac{EI_3}{L}\right)^* + \frac{4(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{9000}(9\theta_i^2 - 12\theta_i\theta_j - 24\theta_j^2)\end{aligned}$$

em que  $EA$  e  $EI$  são as rigidezes axial e à flexão da seção.  $L$  é o comprimento do elemento,  $\delta$ ,  $\theta_i$  e  $\theta_j$  são, respectivamente, os graus de liberdade do sistema local relativos ao deslocamento axial, rotação do nó  $i$  e rotação do nó  $j$ . Os termos  $(EA^*)$  e  $(EI_n/L)^*$ , com  $(n = 1, 2, 3)$  são definidos na Seção 3.3.

