



Alexandre da Silva Galvão

**INSTABILIDADE ESTÁTICA E DINÂMICA DE
PÓRTICOS PLANOS COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Paulo Batista Gonçalves
Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Rio de Janeiro, 23 setembro de 2004



Alexandre da Silva Galvão

Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos Com Ligações Semi-Rígidas

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Co-orientador

Departamento de Engenharia Civil – Escola de Minas – UFOP

Prof. João Cyro André

Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - USP -SP

Prof. Carlos Magluta

Programa de Engenharia Civil - COPPE – UFRJ

Prof. Marcelo Amorim Savi

Programa de Engenharia Mecânica – COPPE – UFRJ

Prof. João Luis Pascal Roehl

Departamento de Engenharia Civil – PUC – Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil – PUC – Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC – Rio

Rio de Janeiro, 23 setembro de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Alexandre da Silva Galvão

Graduou-se em Engenharia Civil na UFOP (Universidade Federal de Ouro Preto) em 1996. Fez curso de Mestrado em Construções Metálicas no Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil da UFOP pelo qual recebeu título de mestre no ano de 2000.

Ficha Catalográfica

Galvão, Alexandre da Silva

Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas / Alexandre da Silva Galvão; orientador: Paulo Batista Gonçalves; co-orientador: Ricardo Azoubel da Mota Silveira. – Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2004.

v., 245 f.:il.;29,7 cm

1. Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Instabilidade Estrutural. 3. Dinâmica Estrutural. 4. Não-linearidade geométrica. 5. Ligações semi-rígidas. 6. Pórticos Planos. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Silveira, Ricardo Azoubel. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. IV. Título.

CDD: 624

"A tua saudade
corta mais que o fio de navaia.
O coração fica aflito,
bate uma e a outra faia.
E os olhos se enchem d'água
que até a vista se atrapaia."

(do cientista e poeta Paulo Vanzolini)

Favelinha
Templo da juventude.
Ah a juventude!
energia sem remédio
que une sorrisos
de diferentes peitos
universos únicos e indivisíveis
diferentes culturas
existências frágeis e delicadas
diferentes paixões
confusões e medos velados
de muitos sotaques
máscaras que pesam nas faces
dores disfarçadas
lembranças e saudades
feridas de guerra
guerreiros da vida vivendo
vivendo...vivendo...
fazendo, enfim, valer
num ruído irresponsável
delirante e universal
a humanidade.

(Favelinha é o nome que damos ao setor do prédio da
PUC-Rio onde ficam nossas salas de estudos)

Dedico a todos que me fizeram, fazem e farão sofrer...
...de saudade...

Agradecimentos

À PUC-Rio por me receber e me acolher durante esses 4 últimos anos.

Ao bendito apoio financeiro do CNPq, sem o qual não realizaria este sonho.

A todos os professores que tive em minha vida, representados pela Irmã Fidelis do Educandário Santo Antônio de Ouro Preto que me alfabetizou, professor José Benedito Neves (in memoriam) da Escola Técnica Federal de Ouro Preto por ter mostrado tanto amor a esta linda profissão de educador, o meu pai João Galvão, meu professor por duas vezes na graduação, por ser a minha maior referência e meu maior incentivador, os meus professores do departamento de Engenharia Civil da UFOP, os meus professores da Puc-Rio.

À Ana Roxo, pela dedicação e amor ao seu trabalho e aos seus “filhos”.

Aos meus orientadores por serem, sem nenhuma dúvida, duas das pessoas mais importantes em toda minha vida: o Prof. Paulo Batista Gonçalves pela amizade, paciência e enorme carinho com que me acolhe sempre, chegando mesmo a fazer papel de pai nos meus momentos mais difíceis; o Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, por sua dedicação por vezes inacreditável e pela forte amizade nestes 6 anos em que me acompanha.

Aos amigo Ivy Jeann pela grande amizade e constante companheirismo, mesmo à distância; Anderson e Janaína pelo enorme carinho com que sempre me recebem; Raissa, por me ensinar Francês e pela bonita amizade; Leonardo Pinheiro pela colaboração e exemplo de vida; Anderson Resende, pela energia contagiante e por ser um bom companheiro; Denilson Lucena, que por muitas vezes substituiu o papel do meu irmão aqui na PUC;

À linda família que fiz em Rio Piracicaba, pelo carinho e amor que me dedicam sempre. São grandes professores nesta matéria, o Amor.

Às pessoas que passaram a fazer parte da minha vida nestes últimos anos e que me fizeram sorrir, amar, AMAR, suspirar, chorar, que me provocaram medo, ansiedade, ilusões, desilusões, sonhos, enfim, encheram a minha vida de poesia e beleza... (e muitas reticências)...

À minha querida amiga Cris, que torce é reza por mim, me dedicando um carinho sem medidas.

Aos meus pais e ao meu irmão eu não agradeço, pois eles fazem parte de mim e, portanto, agradecem junto comigo cada um dos representados desta lista.

RESUMO

Galvão, Alexandre da Silva; Gonçalves, Paulo Batista; Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. **Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas**. Rio de Janeiro, 2004. 245p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um programa computacional para a análise não-linear estática e dinâmica de pórticos planos com ligações flexíveis (semi-rígidas). Inicialmente é apresentada a metodologia de solução não-linear e as formulações dos elementos finitos adotados na base computacional implementada. Em seguida, são estudados vários exemplos de sistemas estruturais estáticos com caminhos de equilíbrio fortemente não-lineares com a finalidade de testar os programas implementados. Então é apresentada a formulação do problema dinâmico com a definição das equações diferenciais ordinárias de movimento e as expressões das matrizes de massa e amortecimento. A solução desse sistema de equações diferenciais ordinárias é obtida por métodos de integração numérica implícitos ou explícitos. Alguns destes métodos são apresentados neste trabalho e incorporados ao programa computacional em conjunto com estratégias adaptativas de incremento automático do intervalo de tempo de integração Δt . Por fim, o sistema computacional desenvolvido é utilizado na modelagem e obtenção da resposta estrutural estática e dinâmica de alguns sistemas estruturais planos com comportamento eminentemente não-linear. Através destes resultados são analisados alguns fenômenos importantes de instabilidade estática e dinâmica, bem como possíveis mecanismos de colapso e a influência de parâmetros físicos e geométricos no comportamento estrutural.

PALAVRAS-CHAVE

Instabilidade estrutural; dinâmica estrutural; não-linearidade geométrica; ligações semi-rígidas; pórticos planos.

ABSTRACT

Galvão, Alexandre da Silva; Gonçalves, Paulo Batista; Silveira, Ricardo Azoubel da Mota (advisors). **Static and dynamic instability of plane frames with semi-rigid connections**. Rio de Janeiro, 2004. 245p. D.Sc. Thesis – Departamento de Engenharia Civil. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main objective of this thesis is to develop a numerical methodology for the nonlinear static and dynamics analysis of plane frames with semi-rigid connections. Initially, the formulations of the adopted finite elements are presented and implemented together with numerical methodologies for the solution of the non-linear equilibrium equations. Then, some examples of strongly nonlinear structural systems under static loads are studied to check the methodology. Subsequently, the ordinary differential equations of motion are derived and the corresponding damping and mass matrices are presented. The solution of this system of ordinary differential equations is obtained by implicit or explicit numerical integration methods. Some of these methods are presented in this work and incorporated into the computational program together with adaptive strategies for the automatic increment of the time step Δt . Finally, the computational system here developed is used to study the static and dynamic response of some plain structural systems with an inherent nonlinear behavior. A detailed parametric study is carried out to identify the influence of physical and geometric parameters on the structural behavior. This enables the analysis of some important static and dynamic instability phenomena and identification of possible mechanisms of collapse.

KEY-WORDS

Structural instability; structural dynamic; geometric nonlinearity; semi-rigid connections; plane frames.

SUMÁRIO

1 Introdução	11
1.1 Considerações iniciais e objetivos	11
1.2 Organização do Trabalho	13
1.3 Revisão Bibliográfica	14
2 Problema estrutural estático não-linear	20
2.1 Introdução	20
2.2 Formulação do elemento finito não-linear	21
2.2.1 Relações deformação-deslocamento	24
2.2.2 Incremento da energia potencial total	26
2.2.3 Elemento finito	28
2.2.4 Matriz de rigidez e vetor de forças internas	30
2.3 Formulação do elemento finito híbrido não-linear	33
2.4 Metodologia de solução não-linear	43

13 Exemplos numéricos: análises estáticas não-lineares	48
3.1 Introdução	48
3.2 Arcos	50
3.2.1 Arco circular rotulado-engastado	50
3.2.2 Arco circular biarticulado	52
3.2.3 Arco senoidal sob carregamento distribuído	55
3.2.3.1 Estudo do parâmetro geométrico z_0	58
3.3. Pórticos em L	64
3.3.1 Pórtico de Lee	66
3.3.2 Pórtico de Roorda	67
3.3.3 Estudo paramétrico	70
3.3.3.1 Influência das condições de apoio	71
3.3.3.2 Influência da excentricidade do carregamento	73
3.3.3.3 Carregamento distribuído	75
3.3.3.4 Influência da rigidez da ligação entre as barras	76
4 Problema estrutural dinâmico não-linear	79
4.1 Introdução	79
4.2 Equações de movimento	79
4.2.1 Considerações sobre a matriz de massa	82
4.2.2 Equações do movimento para o problema linear	85
4.2.3 Equações do movimento para o problema não-linear geométrico	86
4.3 Análise de vibração livre	87
4.3.1 Equação característica	87
4.3.2 Algoritmo de solução do problema de autovalor	88
4.4 Algoritmos de integração	90
4.4.1 Métodos explícitos e implícitos	91
4.4.1.1 Método da diferença central	91
4.4.1.2 Método de Runge-Kutta	94
4.4.1.3 Método de Newmark	97
4.4.1.4 Método de Wilson- θ	100

4.4.2	Considerações sobre a análise dinâmica não-linear	104
4.4.3	Adaptatividade no tempo	107
4.4.3.1	Estratégia adaptativa para métodos da família de Newmark	108
4.4.3.2	Estratégia adaptativa para o método Runge-Kutta	111
5	Exemplos numéricos: análises dinâmicas	114
5.1	Introdução	114
5.2	Exemplos envolvendo análise de vibração	114
5.2.1	Barras com ligações semi-rígidas	115
5.2.2	Arco senoidal sob carregamento distribuído	124
5.2.2.1	Arco abatido: $z_0 = 20$ mm	124
5.2.2.2	Estudo do parâmetro geométrico z_0	128
5.2.3	Pórtico em L	136
5.3.	Exemplos de validação dos algoritmos de integração	148
5.3.1	Viga engastada-livre	148
5.3.2	Pórtico de Williams	151
5.3.3	Barras com ligações semi-rígidas	154
5.4	Exemplos numéricos de análise dinâmica não-linear	157
5.4.1	Arco senoidal	157
5.4.2	Pórtico em L	168
6.	Conclusões e sugestões	173
7.	Referências	179
APÊNDICE A:	Estratégias de incremento e iteração	197
APÊNDICE B:	Modelos de ligação	206
APÊNDICE C:	Programa Computacional	217

1

INTRODUÇÃO

1.1

CONSIDERAÇÕES INICIAIS E OBJETIVOS

Considerações práticas de projeto obrigam o engenheiro calculista a fazer verificações quanto à resistência e à estabilidade de sistemas estruturais. Adicionalmente, problemas relacionados com o estado limite de utilização desses sistemas também precisam ser analisados de forma cuidadosa.

O desenvolvimento de novos materiais, de novas técnicas construtivas, bem como a disponibilidade de recursos computacionais e fatores econômicos, entretanto, tem motivado o emprego de elementos estruturais cada vez mais leves e esbeltos nesses projetos. Porém, sabe-se que, a medida que se aumenta a esbeltez de um dado elemento estrutural, o seu mecanismo de colapso pode sofrer significativas mudanças qualitativas. Assim, problemas relativos à perda de estabilidade sob cargas estáticas e dinâmicas, bem como vibrações indesejáveis, podem surgir. Particularmente isto é bastante comum em projetos envolvendo estruturas metálicas reticuladas.

Portanto, a análise numérica não-linear dessas estruturas se torna cada vez mais relevante. Essa análise não-linear consiste basicamente em introduzir no modelo numérico e formulações a serem usadas, todos os fatores considerados relevantes e que permitam o analista conhecer os possíveis mecanismos de colapso da estrutura. Dentre os fatores considerados relevantes a serem incluídos na análise destacam-se: os efeitos decorrentes dos grandes deslocamentos e rotações que o sistema estrutural pode sofrer, a flexibilidade das conexões e as imperfeições iniciais, como as geométricas e de carregamento.

Assim, muitos pesquisadores têm se empenhado e direcionado suas pesquisas para o desenvolvimento de metodologias práticas e eficientes para uma análise não-linear de sistemas estruturais. Esta tese é uma continuação natural de uma série de pesquisas focadas neste objetivo. Dentre essas, vale destacar as pesquisas de Silveira (1995), Galvão (2000, 2001), Rocha (2000) e Pinheiro (2003), que desenvolveram em

linguagem *Fortran* (Fortran PowerStation 4.0, 1994-1995), um programa computacional capaz de realizar a análise não-linear de sistemas reticulados planos. Em Silveira (1995) estão os procedimentos numéricos necessários para a obtenção da resposta de sistemas estruturais esbeltos com restrições de contato; já Galvão (2000) estudou e implementou várias formulações não-lineares de elementos de viga-coluna; em Rocha (2000) são desenvolvidas estratégias de solução não-linear que permitem o traçado de forma completa do caminho não-linear de equilíbrio; Galvão (2001) adicionou ao sistema a possibilidade de se realizar a análise de vibração em treliças e pórticos planos e espaciais; e, recentemente, Pinheiro (2003) implementou formulações não-lineares para a análise de treliças planas e espaciais, bem como a possibilidade da modelagem de pórticos com ligações semi-rígidas. Paralelamente, vários trabalhos foram desenvolvidos nesta linha de pesquisa sobre ferramentas de análise qualitativa e quantitativa das oscilações não-lineares de sistemas estruturais suscetíveis a grandes deslocamentos usando modelos de baixa dimensão, isto é, modelos com poucos graus de liberdade. Dentre esses trabalhos deve-se mencionar as teses de Machado (1993) e Santee (1999), que implementaram diversos algoritmos para a análise de oscilações não-lineares, e Del Prado (2001), que usou estas ferramentas para analisar as oscilações não-lineares e instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas. Cabe também citar a tese de Pinto (1999) e Beneveli (2002), que estudaram o controle de vibrações não-lineares de estruturas flexíveis.

As referências citadas forneceram a base computacional para as implementações realizadas neste trabalho, cujo objetivo principal é a obtenção da resposta não-linear, estática e dinâmica, de sistemas estruturais reticulados planos com ligações rígidas e semi-rígidas. Atenção especial é dada à formulação do problema dinâmico não-linear e aos algoritmos empregados na sua solução. Foram então desenvolvidos e implementados métodos de integração numérica (explícitos e implícitos) que possibilitam a análise dinâmica de pórticos com a incorporação da flexibilidade das conexões das barras. Juntamente com esses métodos foram utilizadas estratégias adaptativas que permitem o controle automático dos incrementos de tempo no processo de integração das equações diferenciais do movimento.

Por fim, destaca-se que o presente trabalho é parte integrante da linha de pesquisa '*Instabilidade e Dinâmica de Estruturas*' do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

1.2

ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Ainda neste capítulo, na Seção 1.3, é feita uma pequena revisão bibliográfica onde atenção especial é dada aos trabalhos recentes sobre formulações e estratégias de solução dos problemas estáticos e dinâmicos não-lineares.

No Capítulo 2 é feita uma explanação geral sobre o problema estrutural estático não-linear, onde inicialmente são introduzidos os tipos de referenciais e em seguida a definição da formulação do elemento finito não-linear de viga-coluna. Depois são discutidas as modificações necessárias para que ele incorpore os efeitos devido à flexibilidade (ou semi-rigidez) das conexões estruturais. A metodologia de solução não-linear implementada é apresentada no final do referido capítulo.

No Capítulo 3 são realizadas análises estáticas de alguns sistemas estruturais com respostas fortemente não-lineares. Em particular, a atenção é voltada à análise paramétrica envolvendo dois sistemas estruturais clássicos: o arco senoidal abatido e os pórticos em L.

No Capítulo 4 é formulado o problema estrutural dinâmico com a definição das equações diferenciais ordinárias de movimento que caracterizam o equilíbrio do sistema. Em seguida, são apresentadas as expressões das matrizes de massa para o elemento finito com ligações rígidas e flexíveis. O problema de vibração livre e os procedimentos usados neste trabalho para se calcular as frequências naturais e os modos de vibração são então estudados. Por fim, são apresentados os métodos de integração direta e as estratégias de adaptatividade do incremento de tempo, que juntos serão usados na obtenção da resposta transiente linear e não-linear do sistema estrutural.

O Capítulo 5 apresenta as análises numéricas dos problemas estruturais dinâmicos lineares e não-lineares. Mais uma vez, atenção especial é dada ao arco

senoidal abatido e aos pórticos em L, dando continuidade assim ao estudo paramétrico iniciado no Capítulo 3.

Por fim, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões relativas ao emprego e implementações das diversas formulações e metodologias utilizadas nas análises numéricas dos Capítulos 3 e 5. Em seguida são apresentadas algumas sugestões para o desenvolvimento de pesquisas futuras.

1.3

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Formulações não-lineares para o elemento de viga-coluna em referenciais Lagrangianos total e atualizado (RLT e RLA) foram propostas por vários pesquisadores, dos quais pode-se citar: Wen et al. (1983); Chajes et al. (1987); Goto et al. (1987); Wong e Loi (1990); Alves (1993); e Torkamani et al. (1997). Adicionalmente, Yang e Kuo (1994) sugeriram que o vetor de forças internas poderia ser calculado através de duas abordagens: uma usando os deslocamentos naturais incrementais e a outra através da rigidez externa. Já Pacoste e Eriksson (1995 e 1997) introduziram, baseados numa formulação em RLT, relações de deformação-deslocamento não-lineares através de funções trigonométricas. Galvão (2000) implementou e comparou, através da análise de vários problemas estruturais, a eficiência computacional de várias formulações de elementos finitos de pórticos planos.

Entre os estudos que abordam a importância da inclusão da não-linearidade geométrica na análise estrutural, destacam-se: Fonte (1992) e Banki (1999), que estudaram o comportamento não-linear de edifícios; e Anchieta Jr (2001), que analisou torres de transmissão.

Nos últimos tempos, vários pesquisadores têm estudado e desenvolvido formulações com o objetivo de examinar o comportamento não-linear de estruturas metálicas aporticadas, onde, mais especificamente, a inclusão da não-linearidades física na análise tem recebido grande atenção. Dentro dessa linha de pesquisa

destacam-se os trabalhos de Chen e Sohal (1995) e de Chan e Chui (1997, 2000). Esses últimos pesquisadores adotaram o conceito da '*seção montada*' para levar em consideração a plastificação na seção. Merece ainda destaque o artigo de Liew et. al. (2000) e os publicados recentemente por Ochoa (2004) e Zhou e Chan (2004a, 2004b). No Brasil, a análise inelástica de sistemas estruturais metálicos tem despertado interesse de grandes centros de pesquisa e várias dissertações e teses já foram concluídas envolvendo esse tema (Martins, 1999; Landesman, 1999; Carneiro, 2000; Assaid, 2001).

A solução de sistemas de equações não-lineares e, em particular, a obtenção dos caminhos de equilíbrio de sistemas estruturais suscetíveis a flambagem é em muitos casos um problema de difícil solução. Assim, juntamente com as pesquisas relativas ao desenvolvimento de formulações não-lineares (física e geométrica), muitos trabalhos têm sido produzidos com a finalidade de se determinar a melhor estratégia de solução de sistemas de equações não-lineares. Os métodos que têm mostrado maior eficiência são os que combinam procedimentos incrementais e iterativos. Como trabalhos pioneiros, podem ser citados: Mallet e Marçal (1968), que utilizaram iterações do tipo Newton; e Zienkiewicz (1971), que apresentou uma modificação no método de Newton-Raphson, fazendo com que a matriz de rigidez só fosse atualizada a cada passo de carga. Nos últimos anos, diversos trabalhos vêm apresentando diferentes estratégias de controle automático do processo incremental, bem como diferentes estratégias de iteração. Utilizando um '*parâmetro de rigidez corrente*' como indicador do grau de não-linearidade do sistema estrutural, Bergan et al. (1978) e Bergan (1980) suprimiram as iterações de equilíbrio nas zonas críticas da trajetória, até os pontos limites serem atravessados.

Batoz e Dhatt (1979) apresentaram uma técnica na qual o ciclo iterativo é realizado não à carga constante, mas a deslocamento constante; Riks (1972) apresentou um método, baseado no *parâmetro comprimento de arco* Δl , capaz de obter o traçado completo do caminho de equilíbrio da estrutura; Meek e Tan (1984) apresentaram um resumo das principais técnicas para se ultrapassar os pontos limites, das quais a técnica do comprimento de arco foi reconhecida como uma das mais

eficientes. Contribuíram, adicionalmente, com essa técnica: Riks (1979), Ramm (1981) e Crisfield (1981 e 1991).

Yang e Kuo (1994) introduziram estratégias de incremento de carga e iteração baseadas num *parâmetro de rigidez generalizado*; Krenk (1993, 1995) elaborou uma estratégia de iteração usando a condição de ortogonalidade entre o vetor de forças residuais e o vetor de deslocamento incremental; e em Crisfield (1997) são encontrados procedimentos numéricos que permitem avaliar com precisão os pontos críticos existentes nas trajetórias de equilíbrio.

Joaquim (2000) implementou e testou a performance de técnicas numéricas para solução de problemas estáticos não-lineares. Numa dessas técnicas ele empregou o comprimento de arco cilíndrico junto com um acelerador de convergência do tipo *'line-search'*. Com a mesma base computacional utilizada no presente trabalho, Silveira et al. (1999a, 1999b) desenvolveram uma metodologia geral de solução de sistemas de equações algébricas não-lineares. Em sua dissertação de mestrado, Rocha (2000) realizou um estudo comparativo detalhado de várias estratégias de iteração e incremento de carga.

Nos projetos de estruturas metálicas tradicionais, os pórticos bi ou tridimensionais são usualmente analisados com a simplificação de que o comportamento da ligação viga-coluna pode ser idealizado através dos casos extremos, a saber: ligações *rotuladas* (onde nenhum momento é transmitido entre a coluna e a viga e esses elementos se comportam de forma independente) e *rígidas* (onde o ângulo entre os eixos da coluna e viga não se altera quando a estrutura se deforma). Nas estruturas reais, entretanto, investigações experimentais têm demonstrado que a maioria das conexões entre os elementos estruturais metálicos deve ser tratada como ligações semi-rígidas, usando curvas momento-rotação para descrever o seu comportamento. Torna-se necessário, portanto, incorporar o efeito da resistência e da flexibilidade (ou rigidez) da ligação na análise do sistema estrutural e dessa forma representar o comportamento verdadeiro do pórtico.

A bibliografia especializada relata que o primeiro trabalho desenvolvido para avaliar a rigidez de uma ligação foi realizado na Universidade de Illinois, em 1917 (Wilson e Moore, 1917). Desde essa época, e mais recentemente com a popularização

do uso da solda e dos parafusos de alta resistência, tem sido demonstrado um crescente interesse no estudo e no uso de ligações semi-rígidas em estruturas metálicas. Como já mencionado, outro fator importante para o avanço das pesquisas sobre o comportamento das ligações foi o desenvolvimento verificado na área da computação, o que possibilitou o uso de equipamentos e técnicas sofisticadas para a análise e tratamento dos modelos experimentais e para o refinamento dos modelos matemáticos desenvolvidos.

Entre os principais trabalhos surgidos nos últimos anos que tratam da análise não-linear estática de pórticos com conexões semi-rígidas destaca-se o de Sekulovic e Salatic (2001), que propuseram um elemento de viga-coluna híbrido. Esse último artigo está relacionado ao de Sekulovic e Malcevic (1994), que trata da análise de segunda ordem de pórticos. Outros trabalhos que apresentam formulações para análise de pórticos com ligações semi-rígidas são os de Lui e Chen (1988), King (1994), Simões (1996) e Xu (2001).

Vários outros trabalhos tratam da predição do comportamento não-linear de conexões semi-rígidas, seja através da modelagem por elementos finitos (Lima et al. 2002) ou através de banco de dados contendo os valores de momento e rotação oriundos de ensaios experimentais (Chen e Kishi, 1989; Abdalla e Chen, 1995).

Nas últimas décadas, vários pesquisadores propuseram formas de se aproximar o comportamento momento-rotação de ligações semi-rígidas através de modelos analíticos, matemáticos ou mistos. Entre os principais trabalhos, encontram-se os de Richard e Abbott (1975), Frye e Morris (1975), Ang e Morris (1984), Lui e Chen (1986, 1988), Kishi e Chen (1986a, 1986b), Al-Bermani et al. (1994) e Zhu et al. (1995), entre outros.

Utilizando a base computacional inicialmente desenvolvida por Silveira (1995) e expandida por Galvão (2000), Pinheiro (2003) implementou três formulações de elementos de viga-coluna com conexões semi-rígidas e várias possibilidades de curvas momento-rotação para aproximar o comportamento da ligação. Os trabalhos de Chen e Lui (1991), Chan e Chui (2000) e Sekulovic e Salatic (2001) foram de fundamental importância para o desenvolvimento da dissertação de Pinheiro (2003).

Portanto, a estabilidade elástica e inelástica de pórticos planos com ligações rígidas e flexíveis, sob carregamento estático, tem sido extensivamente estudada nas últimas décadas, porém, problemas envolvendo carregamento dinâmico dessas estruturas têm recebido atenção limitada (Xue e Meek, 2001).

Por outro lado, a engenharia estrutural vem cada vez mais concebendo sistemas estruturais que não podem ser analisados e dimensionados sem que os efeitos dinâmicos sejam considerados. Portanto, existe uma demanda crescente por sistemas computacionais com recursos para análise dinâmica linear e não-linear. Atentando a esse fato, nos últimos anos, várias teses e dissertações vêm sendo desenvolvidas em instituições brasileiras focalizando os estudos na análise dinâmica de estruturas. Entre elas podem ser citadas: Vianna (1991), que modelou as não-linearidades por meio de elementos especiais de amortecimento e de contato, e utilizou os métodos Hilber, Hughes e Taylor para integração no tempo; Pires (1992), que apresentou uma formulação para a análise não-linear geométrica (estática e dinâmica) em estruturas treliçadas; Fernandes Jr. (1995), que abordou o problema dinâmico de pórticos planos de aço sob carregamentos transientes com consideração de formação de rótulas plástica, onde excitações dinâmicas de curta duração e grande intensidade foram consideradas; Soares Filho (1997), que estudou o problema dinâmico de pórticos planos com ligações semi-rígidas nos regimes elástico e elastoplástico através de recursos da programação matemática, e abordando o problema de vibrações forçadas através do método da superposição modal e integração de Newmark; De Paula (2001), que apresentou uma formulação de modelos numéricos para estruturas reticuladas planas considerando as não-linearidades física e geométrica.

Para a análise dinâmica não-linear de estruturas, os métodos mais convenientes e, portanto, mais utilizados, são os métodos de integração implícitos, em particular os da família de Newmark (Chan e Chui, 2000). Algoritmos de integração direta, explícitos e implícitos, são fartamente apresentados na literatura. Destacam-se aqui os livros clássicos de elementos finitos como o Bathe (1995) e o Cook et al. (1989). Em 1988, Dokainish e Subbaraj publicaram dois artigos importantes (Dokainish e Subbaraj, 1988; Subbaraj e Dokainish, 1988) em que foram discutidas e apresentadas alternativas de implementação para diversos métodos de integração explícitos e

implícitos para análise estrutural linear e não-linear. Nos últimos anos, buscando-se eliminar as altas frequências da resposta dinâmica, tem-se pesquisado algoritmos com dissipação numérica controlada. A principal dificuldade no desenvolvimento de desses algoritmos está na definição do amortecimento numérico nas altas frequências sem introduzir um excessivo amortecimento em importantes modos de vibração de baixas frequências. Vários algoritmos implícitos com dissipação numérica foram desenvolvidos com esse objetivo, como por exemplo, o método Wilson- θ (Wilson et al, 1973), o método de α H-Newmark (Hilber e Hughes, 1978) e o método de α B-Newmark (Wood et al., 1980).

Com o objetivo de se melhorar a eficiência dos métodos de integração direta, sem, no entanto, diminuir a sua precisão, foram desenvolvidos procedimentos adaptativos para selecionar o maior incremento de tempo possível para o próximo passo do processo de solução. Entre os trabalhos envolvendo esse tema, citam-se: uma estratégia adaptativa que monitora o erro de truncamento no método Runge-Kutta (Press et. al., 1992); e uma estratégia adaptativa introduzida por Jacob (1990), baseada no trabalho de Bergan e Mollestad (1985), para algoritmos implícitos da família de Newmark. Em 1996, De Cássia (1996) utilizou três estratégias adaptativas distintas, uma no espaço e duas no tempo, na análise dinâmica bidimensional de problemas contínuos elasto e visco-plásticos.

Finalmente, a análise transiente linear e não-linear de vigas e pórticos com conexões semi-rígidas, bem como o estudo dos problemas de vibração associados com esses sistemas estruturais, podem ser encontrados nos artigos de Shi e Atluri (1989), Chan (1994), Chui e Chan (1997), e Sekulovic et al. (2002). Esses últimos autores obtiveram a resposta dinâmica não-linear de sistemas estruturais com ligações semi-rígidas também considerando a excentricidade do elemento de conexão em relação ao pilar.

2

PROBLEMA ESTRUTURAL ESTÁTICO NÃO-LINEAR

2.1

INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem o objetivo de fornecer os fundamentos para a obtenção da trajetória de equilíbrio de sistemas estruturais esbeltos através do método dos elementos finitos (MEF). Sabe-se que um dos passos importantes para se resolver um problema estrutural não-linear, a partir de uma abordagem numérica aproximada, é obter, através dos princípios básicos da mecânica, a equação ou o conjunto de equações algébricas não-lineares que governa o estado de equilíbrio do sistema. Portanto, outra etapa importante da análise é introduzida e envolve, invariavelmente, a solução da equação ou conjunto de equações algébricas não-lineares. Ao contrário do problema estrutural com características lineares, cuja solução pode ser obtida por procedimentos algébricos simples e diretos, a solução do problema não-linear normalmente só pode ser alcançada através do emprego de procedimentos numéricos especiais. Dos métodos usualmente adotados, os que são considerados mais eficientes procuram resolver passo a passo as equações não-lineares; em particular, merecem destaque os esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos.

Na próxima seção é apresentada a formulação do elemento finito não-linear de viga-coluna adotado na discretização dos problemas estruturais estáticos e dinâmicos do presente trabalho. Na Seção 2.3 são introduzidas modificações na relação força-deslocamento do elemento finito proposto para que ele incorpore os efeitos devido à flexibilidade (ou semi-rigidez) das conexões estruturais. Por fim, na Seção 2.4, é apresentada a metodologia de solução não-linear usada, que tem a característica de automatizar e controlar o processo incremental-iterativo de solução do conjunto de equações que definem o equilíbrio do sistema.

2.2

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO NÃO-LINEAR

Duas abordagens têm sido propostas para descrever o movimento de corpos sólidos: as do tipo Euleriana e Lagrangiana. Na formulação Euleriana, as coordenadas espaciais, isto é, aquelas associadas ao corpo deformado, são empregadas como as coordenadas de referência. Já na formulação Lagrangiana, as coordenadas materiais, ou seja, aquelas associadas ao corpo antes de sua deformação, são utilizadas como as coordenadas de referência.

A formulação Lagrangiana é particularmente apropriada para análises não-lineares do tipo passo-a-passo, onde o interesse está centrado na história de deformação de cada ponto do corpo durante o processo de carregamento. Já a formulação Euleriana tem sido amplamente adotada na análise de problemas de mecânica dos fluidos, onde a atenção está focada no movimento do material ao longo de um volume específico de controle. Posto isso, o presente trabalho restringe-se a formulações do tipo Lagrangiana, tendo-se em vista ainda que a maioria das formulações de elementos finitos com não-linearidade geométrica encontradas na literatura baseiam-se nesse tipo de referencial.

Com a abordagem Lagrangiana, três tipos de configurações podem ser concebidos em termos de um sistema estacionário de coordenadas Cartesianas: a configuração inicial, a última configuração deformada t e a configuração deformada corrente $t + \Delta t$. Por hipótese, assume-se que todas as variáveis de estado, tais como tensões, deformações e deslocamentos, juntamente com a história de carregamento, são conhecidas na configuração t . A partir daí, a questão principal passa a ser a formulação de um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração $t + \Delta t$, considerando que o carregamento externo atuando na configuração t tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de t para $t + \Delta t$ é tipicamente referido como um passo incremental.

Dependendo de qual configuração anterior é selecionada como referência para a obtenção do estado de equilíbrio do corpo na configuração deformada corrente,

$t + \Delta t$, dois tipos de referenciais Lagrangianos podem ser identificados: o referencial Lagrangiano atualizado (RLA), onde a última configuração t de equilíbrio é selecionada como o estado de referência, e o referencial Lagrangiano total (RLT), que utiliza a configuração inicial indeformada para o mesmo propósito.

Para o RLT, os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial indeformada (Figura 2.1) e para o RLA, os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga (Figura 2.2).

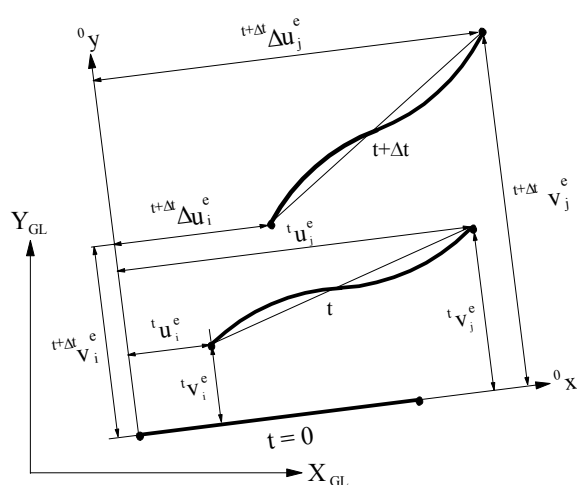


Figura 2.1: Referencial Lagrangiano total (RLT).

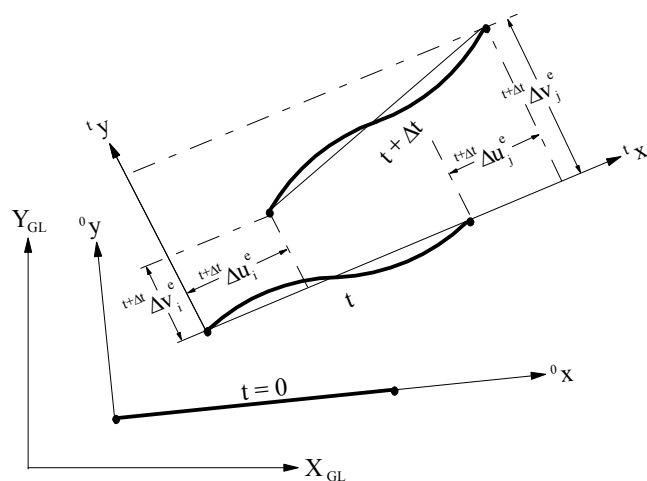


Figura 2.2: Referencial Lagrangiano atualizado (RLA).

É importante destacar que devido aos eventuais deslocamentos de corpo rígido ocorridos durante o processo incremental, cujas influências não são perfeitamente consideradas, bem como devido à utilização de funções de interpolação simplificadas, a tendência é que os resultados obtidos se afastem do comportamento real à medida que a configuração deformada distancia-se da configuração original. Este problema é menos sentido quando se utiliza o referencial Lagrangiano atualizado (RLA), pois neste tipo de abordagem a configuração de referencia é a obtida no incremento anterior ao que se deseja obter a configuração deformada, não havendo, portanto, grande distanciamento entre as duas configurações.

A teoria a ser apresentada a seguir fundamenta-se nos trabalhos de Yang e Kuo (1994) e Alves (1995), e Galvão (2000). Nesse último são encontradas várias formulações geometricamente não-lineares, para a modelagem de sistemas estruturais planos formados por barras. A análise do desempenho computacional dessas formulações é fornecida nos artigos de Galvão e Silveira (2000) e Silveira *et al.* (2000). Entretanto, merece destaque, do ponto de vista de desempenho na solução de problemas fortemente não-lineares, tempo de processamento e eficiência na obtenção das configurações pós-críticas mais complicadas, aquela formulação desenvolvida por Galvão (2000) que utiliza as relações cinemáticas não-lineares sugeridas por Yang e Kuo (1994) e os conceitos de energia propostos por Alves (1995). Essa formulação será brevemente descrita nas próximas seções.

Serão apresentadas primeiramente as relações deformação-deslocamento não-lineares do elemento finito considerado; em seguida, serão definidas a expressão da energia potencial total do sistema na forma incremental e as equações de equilíbrio não-lineares; e finalmente, a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas do elemento finito adotado.

2.2.1

Relações deformação-deslocamento

As seguintes componentes de deformação axial e transversal, baseadas no tensor de Green-Lagrange, e já expressas separando-se as parcelas lineares das não-lineares, são adotadas:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx} \quad (2.1)$$

$$\Delta \epsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + \Delta \eta_{xy} \quad (2.2)$$

onde para cada parcela se escreve:

$$\Delta e_{xx} = \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial x} \quad \Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right] \quad \Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right] \quad (2.4)$$

sendo $\Delta \bar{u}$ o deslocamento axial de um ponto distante y da linha neutra da seção.

Aceitando-se a hipótese da teoria de barras de Bernoulli de que as seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a deformação, escreve-se:

$$\Delta \bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (2.5)$$

onde a primeira parcela, Δu , é consequência dos esforços extensionais atuantes e é constante ao longo da seção; a segunda parcela, $y(d\Delta v/dx)$, é devido aos esforços de flexão, e varia linearmente com a distância à linha neutra. Substituindo-se então (2.5) em (2.3) e (2.4), chega-se a:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \quad (2.6a)$$

$$\Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} + y^2 \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.6b)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] = 0 \quad (2.6c)$$

$$\Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} + y \left(\frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) \right] \quad (2.6d)$$

No caso do RLA, é indispensável que se defina para o elemento finito considerado o estado de tensões, ou de deformações, na última configuração de equilíbrio obtida no processo de solução incremental, ou seja, na configuração t . Nessa configuração, as forças iniciais resultantes axiais tP , cisalhantes tQ , e momento fletor tM , podem ser definidas por:

$${}^tP = \int_A {}^t\tau_{xx} dA; \quad {}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA; \quad e \quad {}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (2.7)$$

e de acordo com a Figura 2.3, tem-se que:

$${}^tM = -M_i + \frac{(M_i + M_j)}{L} x \quad {}^tQ = -\frac{(M_i + M_j)}{L} \quad (2.8)$$

Para um elemento de pórtico plano cuja hipótese de Bernoulli tenha sido adotada, apenas a tensão axial $\Delta^t\tau_{xx}$ pode ser obtida diretamente da lei constitutiva: $\Delta^t\tau_{xx} = E \Delta e_{xx}$. Yang e Kuo (1994) sugerem que a tensão cisalhante incremental $\Delta^t\tau_{xy}$ seja determinada considerando-se como hipótese inicial a seção transversal simétrica em relação aos eixos x e z . Dessa forma, chega-se à seguinte expressão:

$$\Delta^t\tau_{xy} = S_{xy}^l + S_{xy}^n \quad (2.9)$$

onde as parcelas linear e não-linear do incremento da tensão cisalhante são dadas por (Yang e Kuo, 1994):

$$S_{xy}^l = \frac{E}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \quad \text{e} \quad S_{xy}^n = \frac{E}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \quad (2.10)$$

sendo h igual a altura da seção transversal do elemento de viga.

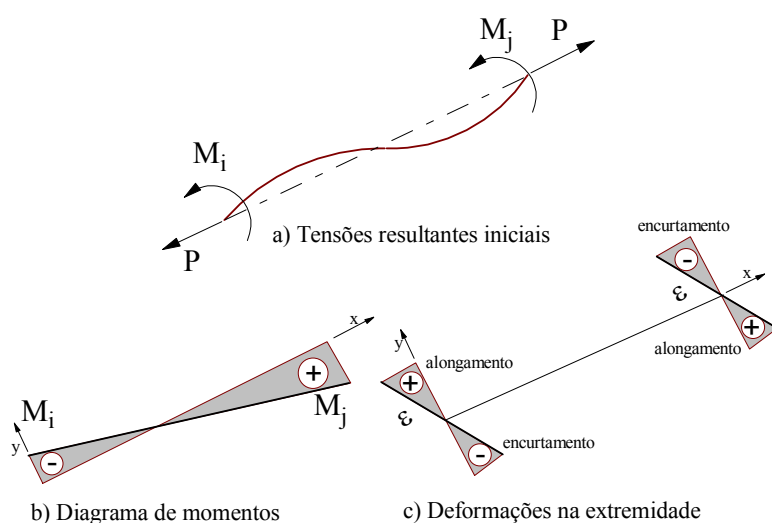


Figura 2.3: Deformação inicial: configuração de equilíbrio t .

2.2.2

Incremento da energia potencial total

O incremento na energia potencial total de um sistema estrutural pode ser definido, na configuração de equilíbrio $t+\Delta t$, de acordo com a seguinte expressão:

$$\Delta \Pi = \Delta D + \Delta V \quad (2.11)$$

sendo o incremento de energia interna de deformação, ΔD , já introduzindo as parcelas axial e cisalhante da deformação, dado por:

$$\Delta D = \iint_{\text{Vol}} \left({}^t\tau_{xx} \Delta \varepsilon_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \Delta \varepsilon_{xy} \right) dA dx + \iint_{\text{Vol}} \left(\frac{E}{2} \Delta \varepsilon_{xx}^2 + 2 \Delta {}^t\tau_{xy} \Delta \varepsilon_{xy} \right) dA dx \quad (2.12)$$

Já o incremento da energia potencial das forças externas, ΔV , é definido por:

$$\Delta V = - \int_S F_i \Delta u_i dS = - \left[\int_S {}^t F_i \Delta u_i dS + \int_S \Delta F_i \Delta u_i dS \right] \quad (2.13)$$

Assumindo aqui que as deformações incrementais são pequenas de forma que as parcelas não-lineares destas podem ser desprezadas, e seguindo a sugestão de Alves (1993), pode-se reescrever o funcional de energia da seguinte forma:

$$\Delta \Pi = U_L + U_\tau + U_0 - \left[\int_S {}^t F_i \Delta u_i dS + \int_S \Delta F_i \Delta u_i dS \right] \quad (2.14)$$

onde, através das Equações (2.6)-(2.9), define-se:

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{{}^t\text{Vol}} E \Delta e_{xx}^2 d\text{Vol} \quad (2.15a)$$

$$U_\tau = \frac{1}{2} \int_0^L P \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^t M \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^t Q \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \right] dx \quad (2.15b)$$

$$U_0 = \int_{\text{Vol}} \left({}^t\tau_{xx} \Delta e_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \Delta e_{xy} \right) d\text{Vol} \quad (2.15c)$$

Note que a Equação (2.15c) pode ser associada ao trabalho realizado pelas tensões atuantes no elemento, na configuração de equilíbrio t , quando o elemento

sofre o incremento de deformação. Esse trabalho, portanto, deve ser igual ao daquele realizado pelas forças externas atuantes em t , ou seja:

$$U_0 = \int_S^t F_i \Delta u_i dS \quad (2.16)$$

e assim consegue-se reescrever o incremento da energia potencial, $\Delta\Pi$, da seguinte forma:

$$\Delta\Pi = U_L + U_\tau - \int_S \Delta F_i \Delta u_i dS \quad (2.17)$$

2.2.3

Elemento finito

O elemento de viga-coluna adotado é o esquematizado na Figura 2.4. Trata-se de um segmento reto, limitado pelos nós i e j , que se deforma no plano de definição da estrutura. Cada elemento define um sistema local de coordenadas xy , rotacionado em relação a um sistema global de coordenadas XY de um certo ângulo α .

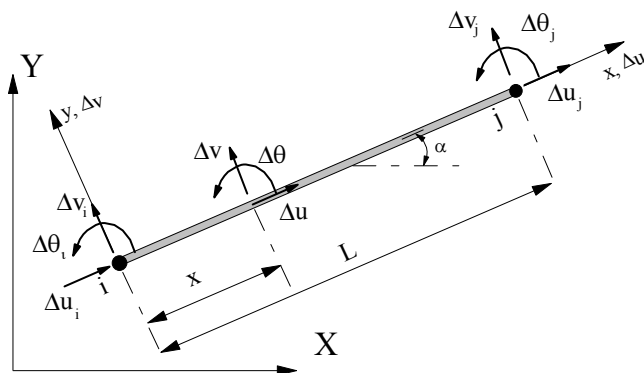


Figura 2.4: Elemento de viga-coluna adotado.

Para aproximar o deslocamento axial incremental Δu é adotada uma função linear, enquanto para a componente transversal Δv , admitindo-se $\Delta\theta = d\Delta v/dx$, adota-se uma função do terceiro grau. Dessa forma, escreve-se:

$$\Delta u = a_0 + a_1 x \quad (2.18a)$$

$$\Delta v = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (2.18b)$$

onde a_0 , a_1 , b_0 , b_1 , b_2 , b_3 e b_4 são constantes a serem determinadas através das condições de contorno do elemento, isto é: em $x = 0$, $\Delta u = \Delta u_1$, $\Delta v = \Delta v_1$ e $\Delta\theta_1 = d\Delta v_1/dx$; e em $x = L$, $\Delta u = \Delta u_2$, $\Delta v = \Delta v_2$ e $\Delta\theta_2 = d\Delta v_2/dx$. Dessas condições chega-se às expressões para Δu e Δv em termos dos seus valores nodais:

$$\Delta u = H_1 \Delta u_1 + H_2 \Delta u_2 \quad (2.19a)$$

$$\Delta v = H_3 \Delta v_1 + H_4 \Delta\theta_1 + H_5 \Delta v_2 + H_6 \Delta\theta_2 \quad (2.19b)$$

onde H_1 , H_2 ,... e H_6 são as funções de interpolação:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L}; \text{ e } H_2 = \frac{x}{L} \quad (2.20a)$$

$$H_3 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; H_4 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; H_5 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \text{ e } H_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.20b)$$

Matricialmente, tem-se que os deslocamentos Δu e Δv , e a rotação $\Delta\theta$ de um dado ponto do elemento, a uma distância x do nó i (Figura 2.4), são dadas por:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}^e \quad (2.21)$$

onde $\Delta \mathbf{d}^T = \{\Delta u \ \Delta v \ \Delta\theta\}$ e $\Delta \mathbf{u}^{eT} = \{\Delta u_i \ \Delta v_i \ \Delta\theta_i \ \Delta u_j \ \Delta v_j \ \Delta\theta_j\}$; \mathbf{H} é uma matriz que contém as funções de forma em (2.20).

2.2.4

Matriz de rigidez e vetor das forças internas

Com a substituição das Equações (2.19a,b) nas relações cinemáticas (2.6), e em seguida estas nas expressões (2.15), chega-se, de acordo com Alves (1993), à energia potencial total em função dos deslocamentos e forças nodais, ou seja:

$$\Delta\bar{\Pi} = \Delta\mathbf{u}^{eT} \left[\frac{1}{2} \mathbf{K}_L^e + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\tau^e \right] \Delta\mathbf{u}^e + \Delta\mathbf{u}^{eT} {}^t\mathbf{F}_i^e - \Delta\mathbf{u}^{eT} {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r^e \quad (2.22)$$

onde as componentes das matriz de rigidez linear \mathbf{K}_L^e e matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_τ^e são obtidas diretamente da energia interna de deformação através da diferenciação de U_L e U_τ , respectivamente:

$$k_{L(i,j)} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (2.23a)$$

$$k_{\tau(i,j)} = \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (2.23b)$$

Em (2.22), tem-se ainda que ${}^t\mathbf{F}_i$ caracteriza o vetor das forças internas do elemento genérico considerado na configuração de equilíbrio t ; λ é um fator de carga e \mathbf{F}_r um vetor de cargas nodais de referência.

Levando-se em conta então a contribuição de todos os elementos finitos, sem esquecer que o somatório dos vetores e das matrizes deve ser efetuado em relação a um referencial comum ($\mathbf{K} = \sum \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^e$, \mathbf{R}^e sendo a matriz de rotação do elemento), chega-se a uma expressão semelhante à (2.22) para todo o sistema estrutural. Do princípio da energia potencial total estacionária, tem-se que a condição de equilíbrio do sistema na configuração $t+\Delta t$ é dada por:

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau] \Delta \mathbf{U} + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (2.24a)$$

ou,

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r \quad (2.24b)$$

sendo:

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau]\Delta\mathbf{U} \quad (2.25)$$

definido como o incremento das forças internas da estrutura. Observe portanto que o vetor das forças internas na configuração de equilíbrio $t+\Delta t$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$, é obtido neste trabalho de forma incremental, ou seja, calculando a cada incremento o acréscimo nas forças internas.

Procurando-se eliminar os modos espúrios de deformação decorrentes de deslocamentos e rotações de corpo rígido, Yang e Kuo (1994) propõem que a seguinte equação seja utilizada para o incremento das forças internas num dado elemento genérico 'e':

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i^e = \mathbf{K}^e \Delta\mathbf{u}_N^e \quad (2.26)$$

com $\Delta\mathbf{u}_N^e$ sendo o vetor de *deslocamentos naturais incrementais* do elemento, no sistema local, e é definido como:

$$\Delta\mathbf{u}_N^{eT} = [0 \quad 0 \quad \theta_{ci} \quad \delta \quad 0 \quad \theta_{cj}] \quad (2.27)$$

onde, da Figura 2.5, chega-se às expressões dos deslocamentos que provocam deformação no elemento:

$$\delta = {}^{t+\Delta t}L - {}^tL; \quad \theta_{ci} = \Delta\theta_i - \psi; \quad \theta_{cj} = \Delta\theta_j - \psi \quad (2.28)$$

sendo $\psi = \tan^{-1}[v/({}^tL + U)]$, com $v = \Delta v_i - \Delta v_j$, a rotação de corpo rígido que o elemento sofre. Assim, através das relações anteriores, chega-se a uma expressão incremental força-deslocamento do elemento, ou seja:

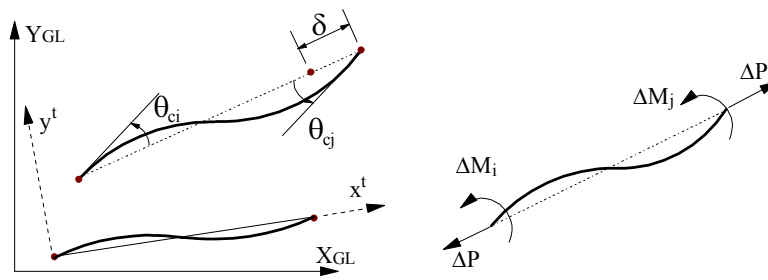
$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L + P/L & M_i/L & M_j/L \\ M_i/L & K_{ii} & K_{ij} \\ M_j/L & K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix}, \quad (2.29a)$$

onde

$$K_{ii} = K_{jj} = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} + \frac{4P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right) \quad (2.29b)$$

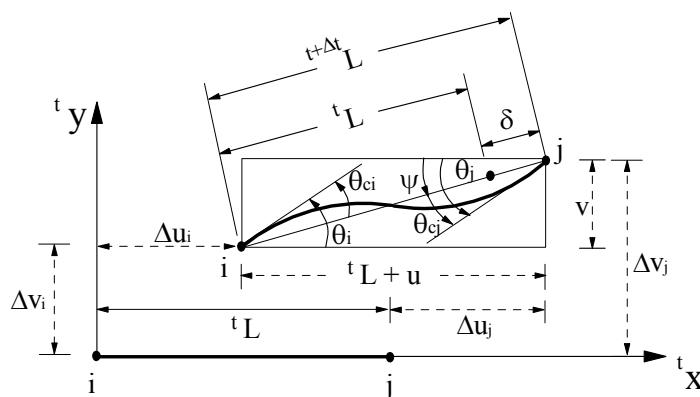
$$K_{ij} = K_{ji} = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} + \frac{2P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right) \quad (2.29c)$$

Por fim, o vetor das forças internas de todo o sistema estrutural deve ser obtido somando-se os esforços internos absorvidos por cada elemento, devidamente transformados para o sistema global de referência.



a) Deslocamentos naturais incrementais.

b) Esforços relacionados com δ , θ_i e θ_j



c) Geometria deformada

Figura 2.5: Cálculo das forças internas.

2.3

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO HÍBRIDO NÃO-LINEAR

Habitualmente, procedimentos padrões de análise não-linear para pórticos são baseados na hipótese de que as conexões nodais são ideais. Daí, duas idealizações extremas para as ligações são utilizadas: perfeitamente rígidas ou rotuladas. Modelos com conexões ideais simplificam o procedimento de análise, mas freqüentemente não representam o comportamento real dos sistemas estruturais. Em geral, conexões nodais de pórticos planos estão sujeitas à influência de momentos fletores e forças axiais e cisalhantes. Os efeitos destas últimas podem, em geral, ser negligenciados, de modo que apenas os momentos fletores são de interesse prático.

Há muitas maneiras de incorporar a flexibilidade da conexão nodal na análise discreta não-linear de pórticos. Um dos modos mais simples é a obtenção das matrizes de rigidez tomando-se como base a relação final de força-deslocamento do elemento de viga-coluna no sistema de coordenadas locais. Pretende-se então nesta seção apresentar de forma sucinta as modificações necessárias na relação força-deslocamento (2.29) para levar em consideração o efeito da flexibilidade da conexão numa análise não-linear.

Como mostrado por Pinheiro (2003), uma ligação semi-rígida pode ser modelada como um elemento de mola inserido no ponto de interseção entre a viga e a coluna, tal qual exemplificam as Figuras 2.6 e 2.7. Para a grande maioria das estruturas em aço, os efeitos das forças axial e cisalhante na deformação da conexão são pequenos se comparados com aqueles provocados pelo momento fletor. Por essa razão, apenas a deformação rotacional do elemento de mola é considerada em análises práticas. Por simplicidade de cálculo, o elemento de mola da conexão possui, por hipótese, tamanho desprezível, como mostrado pela Figura 2.7 (Chan e Chui, 2000).

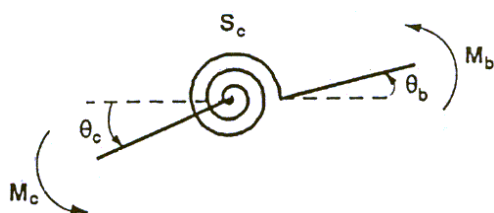


Figura 2.6: Elemento de mola simulando uma conexão.

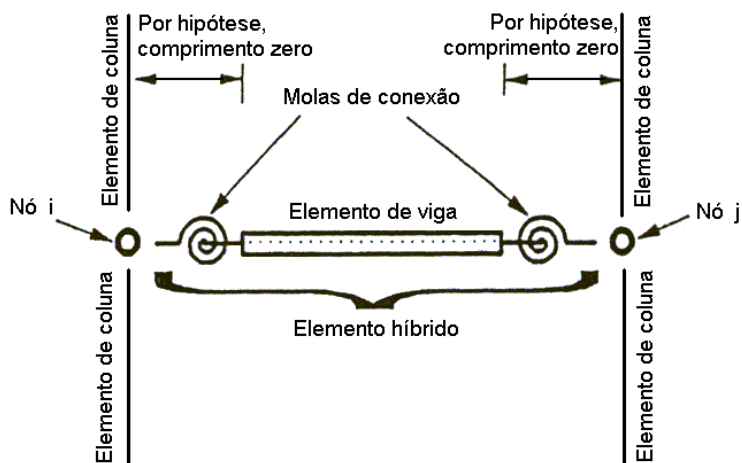


Figura 2.7: Modelo do elemento de pórtico semi-rígido idealizado.

Devido à flexibilidade de uma ligação semi-rígida, as rotações da extremidade da articulação conectada ao pilar e da extremidade conectada à viga são, em geral, diferentes e conhecidas como rotação da conexão θ_c e rotação da viga θ_b , respectivamente. Considerando a condição de equilíbrio dos momentos na conexão, obtém-se (Figura 2.6):

$$M_c + M_b = 0 \quad (2.30)$$

onde,

$$M_c = S_c(\theta_c - \theta_b) \quad (2.31a)$$

$$M_b = -M_c = S_c(\theta_b - \theta_c) \quad (2.31b)$$

em que M_c e M_b são os momentos na conexão e na viga, respectivamente, atuando no elemento de mola, e S_c é a rigidez da conexão. As equações (2.31a) e (2.31b) podem ser rearranjadas sob uma forma incremental matricial, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_c \\ \Delta M_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c \\ -S_c & S_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_c \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

sendo ΔM_c e ΔM_b os momentos nodais incrementais na conexão e na viga, respectivamente, $\Delta \theta_c$ e $\Delta \theta_b$ as rotações nodais incrementais correspondentes àqueles momentos e S_c a rigidez tangente da conexão, que é obtida fazendo-se:

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \quad (2.33)$$

onde M é o momento atuando na ligação e ϕ_c a rotação relativa (isto é, a rotação da mola ou deformação rotacional), definido como sendo

$$\phi_c = \theta_c - \theta_b \quad (2.34)$$

Da Equação (2.32), a matriz de rigidez tangente do elemento de mola pode ser descrita através:

$$\mathbf{K}_{s_c} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c \\ -S_c & S_c \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

A configuração deformada do elemento híbrido com molas nas extremidades é mostrada na Figura 2.8a. A rotação da ligação é definida como a diferença entre os ângulos de rotação do lado conectado ao nó global e o lado conectado ao elemento de viga-coluna, como já mostrado matematicamente pela Equação (2.34).

Com as molas de conexão adicionadas às extremidades da viga-coluna, a matriz de rigidez convencional do elemento deve ser modificada de tal modo a levar em consideração o efeito das ligações semi-rígidas. A matriz de rigidez resultante pode, então, ser utilizada nas análises posteriores.

Considerando agora as seções internas da viga-coluna conectadas às molas, a relação de rigidez do elemento, também na forma incremental, é dada por

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix}, \quad (2.36)$$

sendo os subscritos ‘i’ e ‘j’ referidos aos nós extremos i e j do elemento de viga-coluna. Os termos K_{ij} são as componentes de rigidez à flexão desse mesmo elemento, cujos valores são, para uma análise de primeira ordem, $4EI/L$ para K_{ii} e K_{jj} e $2EI/L$ para K_{ij} e K_{ji} . No caso de uma solução não-linear, tais valores dependem da formulação utilizada (Galvão, 2000; Pinheiro, 2003).

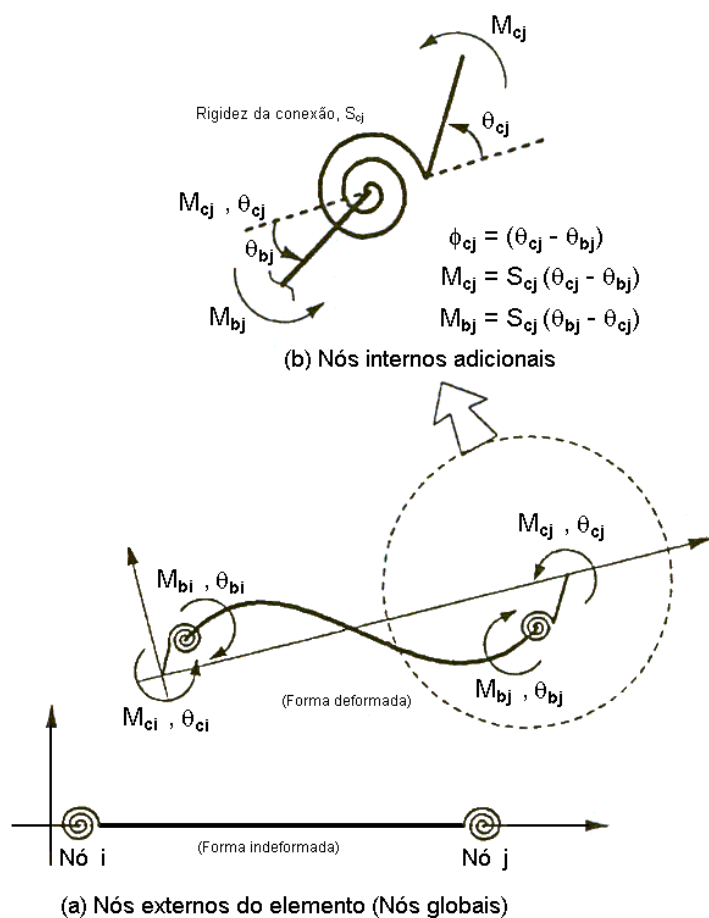


Figura 2.8: Elemento de viga-coluna com molas de conexão (Chan e Chui, 2000).

Combinando a Equação (2.36) com as componentes de rigidez das molas das duas extremidades do elemento, encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} & 0 \\ 0 & K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

onde S_{ci} e S_{cj} são as componentes de rigidez tangentes das molas de conexão e $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ são, de acordo com a Figura 2.9, as rotações incrementais das duas extremidades do elemento tomando-se como base um eixo paralelo ao último sistema de referência, ou seja, na última configuração de equilíbrio.

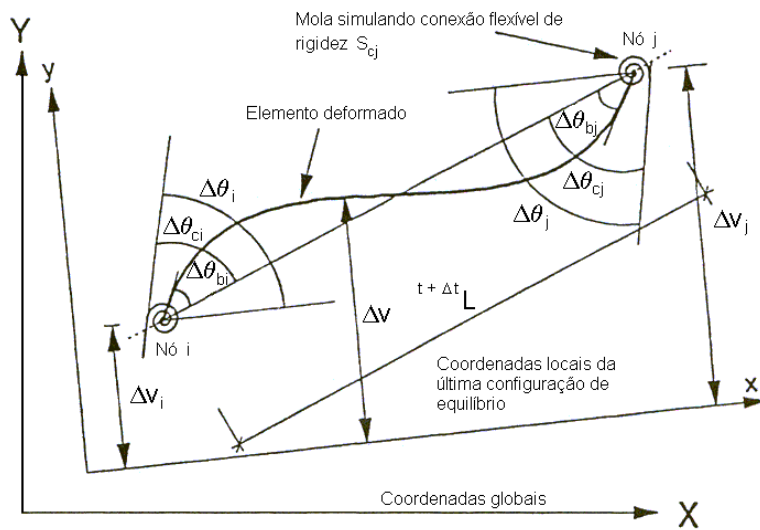


Figura 2.9: Rotações e deflexões laterais de uma elemento deformado com molas nas extremidades simulando conexões flexíveis (Pinheiro, 2003).

Efetuada-se a multiplicação matricial, assumindo-se que as cargas são aplicadas apenas nos nós globais, e que dessa forma tanto ΔM_{bi} quanto ΔM_{bj} sejam iguais a zero, chega-se a, já organizando-se matricialmente:

$$\begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

enquanto as equações restantes, também organizadas matricialmente, ficam:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

O vetor que contém os valores de $\Delta\theta_{bi}$ e $\Delta\theta_{bj}$ pode ser obtido a partir de (2.38) através da expressão:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Substituindo-se então equação anterior em (2.39), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{jj} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & S_{ci} + K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

onde $\beta = (S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji}K_{ij}$. Para um elemento de viga-coluna, pode-se ainda determinar algumas relações entre os esforços cisalhantes e os momentos incrementais. Essas relações, de acordo com a Figura 2.10, valem:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{ci} \\ M_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

em que ΔM_i e ΔM_j são os momentos incrementais, ΔQ_i e ΔQ_j são as forças cisalhantes incrementais nos nós do elemento híbrido e L é o comprimento do elemento de viga-coluna na configuração t de equilíbrio utilizada como referência, cujo sobrescrito esquerdo t foi omitido por questões de clareza.

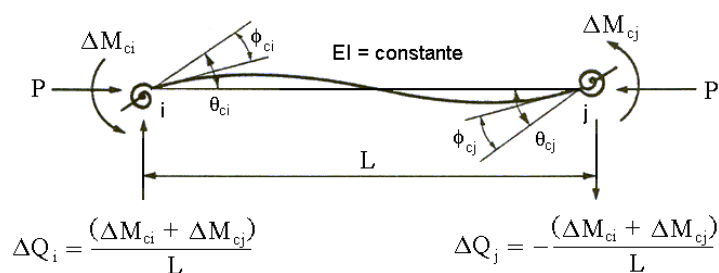


Figura 2.10: Notações para deslocamentos e forças nodais do elemento de pórtico plano com ligações semi-rígidas.

Combinando então (2.41) e (2.42), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{jj} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & S_{ci} + K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Da Figura 2.9, pode-se ainda obter as relações entre os incrementos de rotação da conexão em relação aos eixos locais e os incrementos de rotação obtidos em relação ao último sistema de coordenadas, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

onde Δv_i e Δv_j são os deslocamentos laterais incrementais projetados sobre a última configuração de equilíbrio de ambos os nós do elemento e L o comprimento do mesmo.

De posse de (2.44), pode-se obter a matriz de rigidez elástica para o elemento híbrido de viga-coluna substituindo-se a equação anterior em (2.43), o que fornece:

$$\begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{jj} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & S_{ci} + K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

cuja expressão final é:

$$\begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ke_{1,1} & Ke_{1,2} & Ke_{1,3} & Ke_{1,4} \\ Ke_{2,1} & Ke_{2,2} & Ke_{2,3} & Ke_{2,4} \\ Ke_{3,1} & Ke_{3,2} & Ke_{3,3} & Ke_{3,4} \\ Ke_{4,1} & Ke_{4,2} & Ke_{4,3} & Ke_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

onde:

$$Ke_{1,1} = S_{ci} - \frac{S_{ci}^2 (S_{cj} + K_{jj})}{\beta} \quad (2.47a)$$

$$Ke_{1,2} = -Ke_{1,4} = \frac{S_{ci}}{L} + \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj} - S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta L} \quad (2.47b)$$

$$Ke_{1,3} = \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj}}{\beta} \quad (2.47c)$$

$$Ke_{2,1} = -Ke_{4,1} = \frac{S_{ci}}{L} + \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci} - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta L} \quad (2.47d)$$

$$Ke_{2,2} = Ke_{4,4} = \frac{S_{ci} + S_{cj}}{L^2} + \frac{S_{cj}S_{ci}(K_{ji} + K_{ij}) - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii}) - S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta L^2} \quad (2.47e)$$

$$Ke_{2,3} = -Ke_{4,3} = \frac{S_{cj}}{L} + \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj} - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta L} \quad (2.47f)$$

$$Ke_{2,4} = Ke_{4,2} = \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii}) + S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj}) - S_{cj}S_{ci}(K_{ji} + K_{ij})}{\beta L^2} - \frac{(S_{ci} + S_{cj})}{L^2} \quad (2.47g)$$

$$Ke_{3,1} = \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci}}{\beta} \quad (2.47h)$$

$$Ke_{3,2} = -Ke_{3,4} = \frac{S_{cj}}{L} + \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci} - S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta L} \quad (2.47i)$$

$$Ke_{3,3} = S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta} \quad (2.47j)$$

Além disso, reagrupando-se esta última na matriz de rigidez completa do elemento, que possui dimensão 6, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta P_j \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & Ke_{2,2} & Ke_{2,1} & 0 & Ke_{2,4} & Ke_{2,3} \\ 0 & Ke_{1,2} & Ke_{1,1} & 0 & Ke_{1,4} & Ke_{1,3} \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & Ke_{4,2} & Ke_{4,1} & 0 & Ke_{4,4} & Ke_{4,3} \\ 0 & Ke_{3,2} & Ke_{3,1} & 0 & Ke_{3,4} & Ke_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

Com base na formulação de elemento finito não-linear apresentada na Seção 2.2, pode-se obter uma relação final de força-deslocamento já se levando em

consideração o efeito da semi-rigidez presente nas conexões nodais, que pode ser formulada como sendo

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L + P/L & M_i/L & M_j/L \\ M_i/L & K_{ii}^* & K_{ij}^* \\ M_j/L & K_{ji}^* & K_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix}, \quad (2.49)$$

onde os termos ΔP , ΔM_i e ΔM_j denotam a força axial incremental e os momentos nodais incrementais, respectivamente. Como também já definidos, δ , $\Delta\theta_i$ e $\Delta\theta_j$ mensuram o incremento de deformação axial e as rotações nodais incrementais, respectivamente. Os valores de P , M_i e M_j denotam a força axial e os momentos nodais na última configuração de equilíbrio, respectivamente. Por fim, os termos presentes na matriz de rigidez são definidos como

$$K_{ii}^* = S_{ci} - \frac{S_{ci}^2(S_{cj} + K_{jj})}{\beta} \quad (2.50a)$$

$$K_{ij}^* = \frac{S_{ci}K_{ij}S_{cj}}{\beta} \quad (2.50b)$$

$$K_{ji}^* = \frac{S_{cj}K_{ji}S_{ci}}{\beta} \quad (2.50c)$$

$$K_{jj}^* = S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + K_{ii})}{\beta} \quad (2.50d)$$

onde $\beta = (S_{ci} + K_{ii})(S_{cj} + K_{jj}) - K_{ji}K_{ij}$, sendo S_{ci} e S_{cj} os valores de semi-rigidez de ambas as conexões que, numa análise incremental-iterativa, podem ser atualizados utilizando-se um dos modelos constitutivos representativos da ligação (ver Apêndice B). Já K_{ii} , K_{ij} , K_{ji} e K_{jj} representam os termos da formulação não-linear utilizada e são dados pelas Equações (2.29b e 2.29c):

2.4

METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

De um modo geral, a condição de equilíbrio de um sistema estrutural com características não-lineares pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (2.51)$$

onde, como já mencionado, \mathbf{F}_i é vetor das forças internas da estrutura, função dos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura \mathbf{U} , e λ é o parâmetro de carregamento proporcional e é responsável pelo escalonamento de \mathbf{F}_r , que é um vetor de referência e de magnitude arbitrária, ou seja, apenas a sua direção é importante.

Para se obter as diversas configurações de equilíbrio do sistema e assim poder traçar a chamada trajetória não-linear de equilíbrio, deve-se resolver a equação (2.51) de forma incremental. Isso significa que para uma seqüência de incrementos do parâmetro de carga $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3, \dots$, deve ser calculada uma seqüência de incrementos de deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{U}_1, \Delta\mathbf{U}_2, \Delta\mathbf{U}_3, \dots$. Entretanto, como \mathbf{F}_i é uma função não-linear dos deslocamentos, a solução estimada do problema (solução predita: $\Delta\lambda^0, \Delta\mathbf{U}^0$), para cada passo de carga, não deve satisfazer *a priori* a equação anterior. Como conseqüência, defini-se uma força residual \mathbf{g} , ou também chamada força desequilibrada, dada por:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) \quad (2.52)$$

que deve ser aplicada novamente ao sistema estrutural. Os vários algoritmos existentes, que utilizam abordagem incremental-iterativa, apresentam como passo fundamental a avaliação dessas forças residuais, em particular das forças internas da estrutura. Dessa forma, uma nova estimativa para os deslocamentos é gerada pela relação:

$$\mathbf{K} \delta\mathbf{U} = \mathbf{g} \quad (2.53)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural e $\delta\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos residuais, ou seja, é o valor estimado para se corrigir o incremento de deslocamentos da solução predita $\Delta\mathbf{U}$.

Em vários trabalhos (Crisfield, 1991 e 1997) essa estimativa da correção de $\Delta\mathbf{u}$ não é obtida de uma maneira direta através da solução de (2.53). Nestes os deslocamentos residuais são definidos como a soma de duas componentes, ou seja:

$$\delta\mathbf{U} = \delta\mathbf{U}_g + \delta\lambda \delta\mathbf{U}_r \quad (2.54)$$

onde $\delta\lambda$ é um parâmetro que, a fim de tornar mais eficiente o processo de correção, deve ser avaliado no ciclo iterativo para também “corrigir” o incremento de carga; $\delta\mathbf{u}_g$ e $\delta\mathbf{u}_r$ são obtidos através das relações: $\delta\mathbf{U}_g = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}$ e $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$. Observe que esses vetores de deslocamentos podem ser obtidos de forma imediata, pois \mathbf{K} , \mathbf{g} e \mathbf{F}_r são conhecidos. A definição de $\delta\lambda$ em (2.54) vai depender de uma equação de restrição a ser imposta adicionalmente ao problema não-linear.

Uma das estratégias usada nesse trabalho para se chegar ao valor de $\delta\lambda$ é baseada no emprego da técnica denominada *comprimento de arco constante* (Crisfield, 1991; Rocha, 2000), que consiste em adicionar à Equação (2.51) a seguinte restrição:

$$\Delta\mathbf{U}^T \Delta\mathbf{U} + \Delta\lambda^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (2.55)$$

onde Δl é o comprimento de arco da trajetória de equilíbrio. A adição de (2.55) ao sistema permite que se faça ajuste no parâmetro de carga λ durante o ciclo iterativo, e dessa forma ultrapassar possíveis pontos críticos existentes nos caminhos primários e secundários.

Após a realização de uma série de iterações que leve o resíduo a ser tão pequeno quanto se queira, e isso é feito através de algum critério de convergência (Apêndice A), um novo estado de equilíbrio é estabelecido. A iteração representada

pelo superescrito k deve, portanto, fornecer os subincrementos (ou correções) $\delta\lambda^k$ e $\delta\mathbf{u}^k$, e após essa iteração os incrementos de carga e deslocamento são novamente avaliados fazendo:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad \text{e} \quad \Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k \quad (2.56)$$

Num contexto computacional, é vantajoso introduzir a equação de restrição seguindo as duas etapas de solução apresentadas a seguir:

1. A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é selecionado um incremento de carga, definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$, procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema (Equação (2.56), por exemplo). Após a seleção de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{u}^0$ através da equação:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (2.57)$$

sendo $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$ o vetor dos deslocamentos tangenciais. As aproximações $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$ caracterizam a chamada **solução incremental predita**.

2. Na segunda etapa de solução, procura-se, através de iterações do tipo Newton, corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o intuito de restaurar o equilíbrio da estrutura o mais rápido possível. Se as iterações realizadas envolvem não só os deslocamentos \mathbf{U} , mas também o parâmetro de carga λ , então uma equação adicional de restrição é requerida. A forma dessa equação de restrição é o que distingue as várias técnicas de solução (ver Apêndice A).

A Figura 2.11 fornece um esquema de solução incremental-iterativa para o sistema com um grau de liberdade, onde os parâmetros de carga e o deslocamento são atualizados seguindo a restrição de comprimento de arco cilíndrico (Crisfield, 1991).

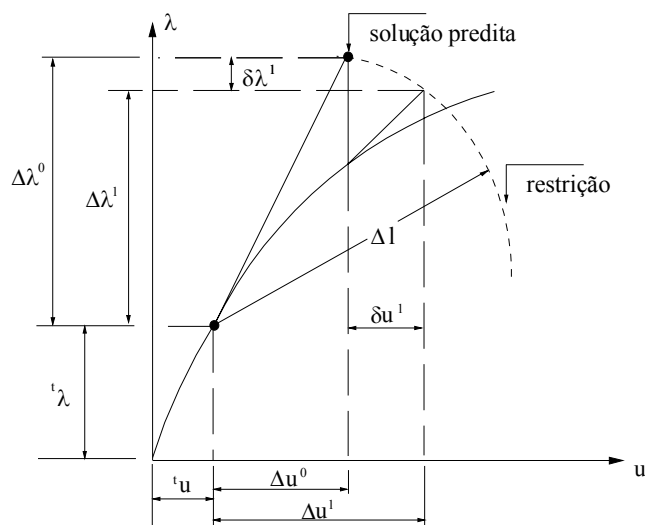
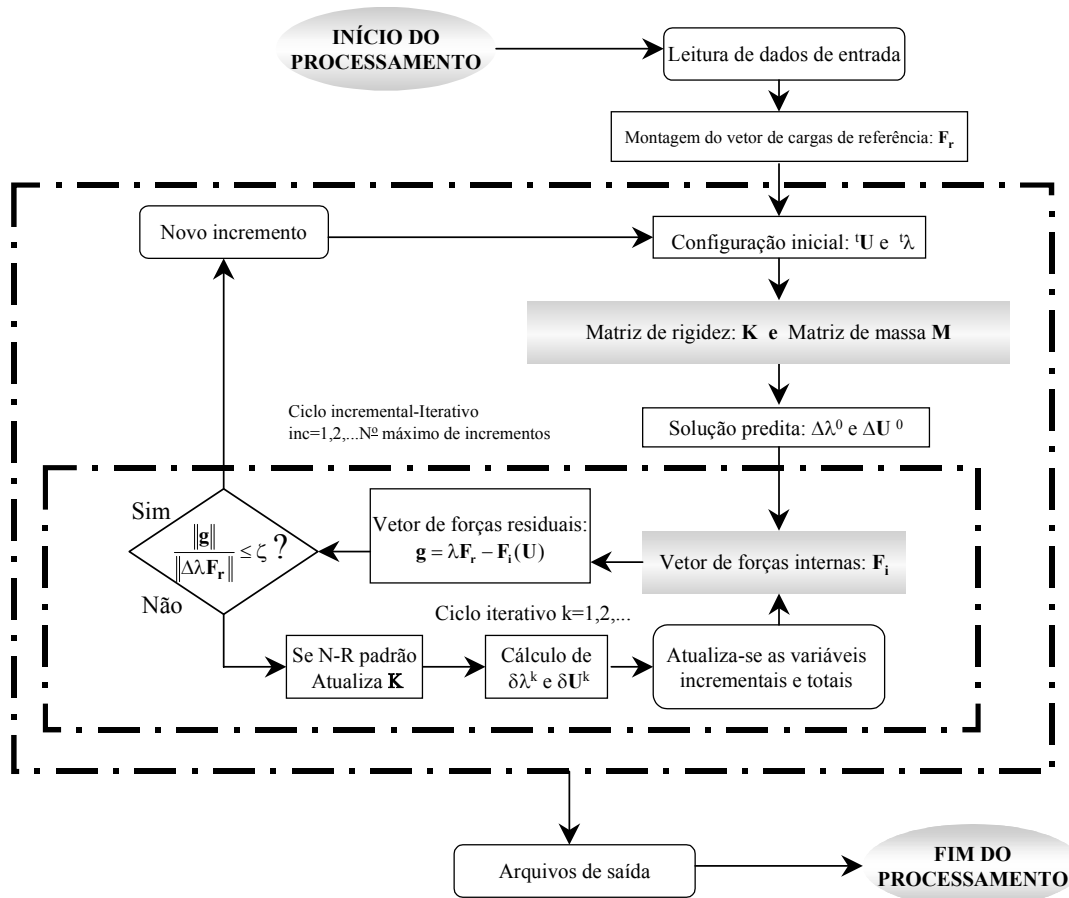


Figura 2.11: Solução para um incremento de carga.

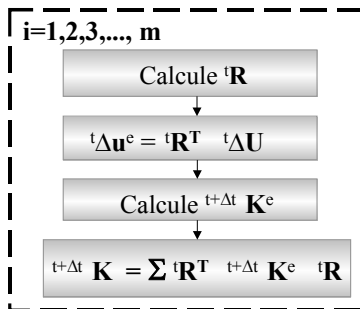
A seguir, com o propósito de fornecer um resumo dos procedimentos computacionais utilizados, são mostrados na Tabela 2.1 e Figura 2.12, os passos básicos envolvidos na implementação computacional da metodologia de solução numérica apresentada.

-
1. Configuração inicial: $t\mathbf{U}$ e $t\lambda$
 2. Definição da solução predita: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$
 3. Iterações: $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$
 4. Verifica a convergência: $\zeta_1 = \|\mathbf{g}^{(k-1)}\| / \|\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\| \leq \zeta$?
Sim: pare o ciclo de iterações, siga para o passo 7;
Não: calcule $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$
 5. Atualização das variáveis:
 - i. incrementais: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
 - ii. totais: ${}^{t+\Delta t}\lambda^k = t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k = t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
 6. Retorne ao passo 3
 7. Faça novo incremento de carga e recomece o processo
-

Tabela 2.1: Algoritmo de solução não-linear.



MATRIZ DE RIGIDEZ



onde:

- t e t+Delta : última configuração de equilíbrio e configuração corrente.
- R: matriz de rotação elementar atualizada na configuração t.
- R_a: matriz de rotação elementar atualizada na última iteração .
- Delta U: vetor de deslocamentos incrementais no sistema global.
- K: matriz de rigidez o sistema global.
- F_i: vetor de forças internas no sistema global.

VETOR DE FORÇAS INTERNAS

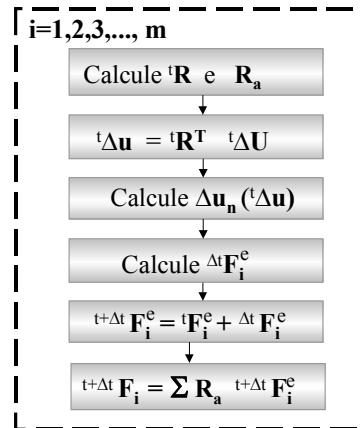


Figura 2.12: Fluxograma da metodologia de solução não-linear.

3

EXEMPLOS NUMÉRICOS: ANÁLISES ESTÁTICAS NÃO-LINEARES

3.1

INTRODUÇÃO

Nesse capítulo são realizadas análises estáticas de alguns exemplos estruturais com resposta fortemente não-linear. Em particular, concentra-se a atenção em dois exemplos estruturais clássicos: o arco senoidal abatido e o os pórticos em L.

Além de possibilitar um melhor entendimento da influência de parâmetros geométricos e físicos na resposta não-linear e, conseqüentemente, na estabilidade destas estruturas, estas análises são suficientes para ilustrar a eficiência da metodologia apresentada no Capítulo 2 em se resolver problemas estruturais estáticos com forte não-linearidade. Entretanto, vários outros exemplos estruturais podem ser encontrados em trabalhos que utilizaram a mesma base computacional, dos quais pode-se citar a tese de doutorado de Silveira (1995), as dissertações de mestrado de Galvão (2000) e Pinheiro (2003). A Figura 3.1 exibe um resumo das estruturas estudadas neste capítulo.

Os arco circulares ilustrados nas Figura 3.1a e 3.1b exibem caminhos de equilíbrio extremamente não-lineares. Para o primeiro, são usados como referência a solução analítica apresentada em Wood e Zienkiewicz (1977), e os resultados apresentados pelo segundo arco (Figura 3.1b) são comparados com os fornecidos por Yang e Kuo (1994).

O arco senoidal sob carregamento distribuído da Figura 3.1c tem seus resultados comparados aos apresentados por Bergan (1980) e, em seguida, é feito um estudo da influência de imperfeições de carregamento e da rigidez das ligações nos apoios.

Finalmente, é desenvolvida uma análise paramétrica detalhada para os pórticos em L (Figura 3.1d). Dois casos clássicos deste tipo de pórtico têm seus resultados comparados aos da literatura: o pórtico de Lee e o pórtico de Roorda.

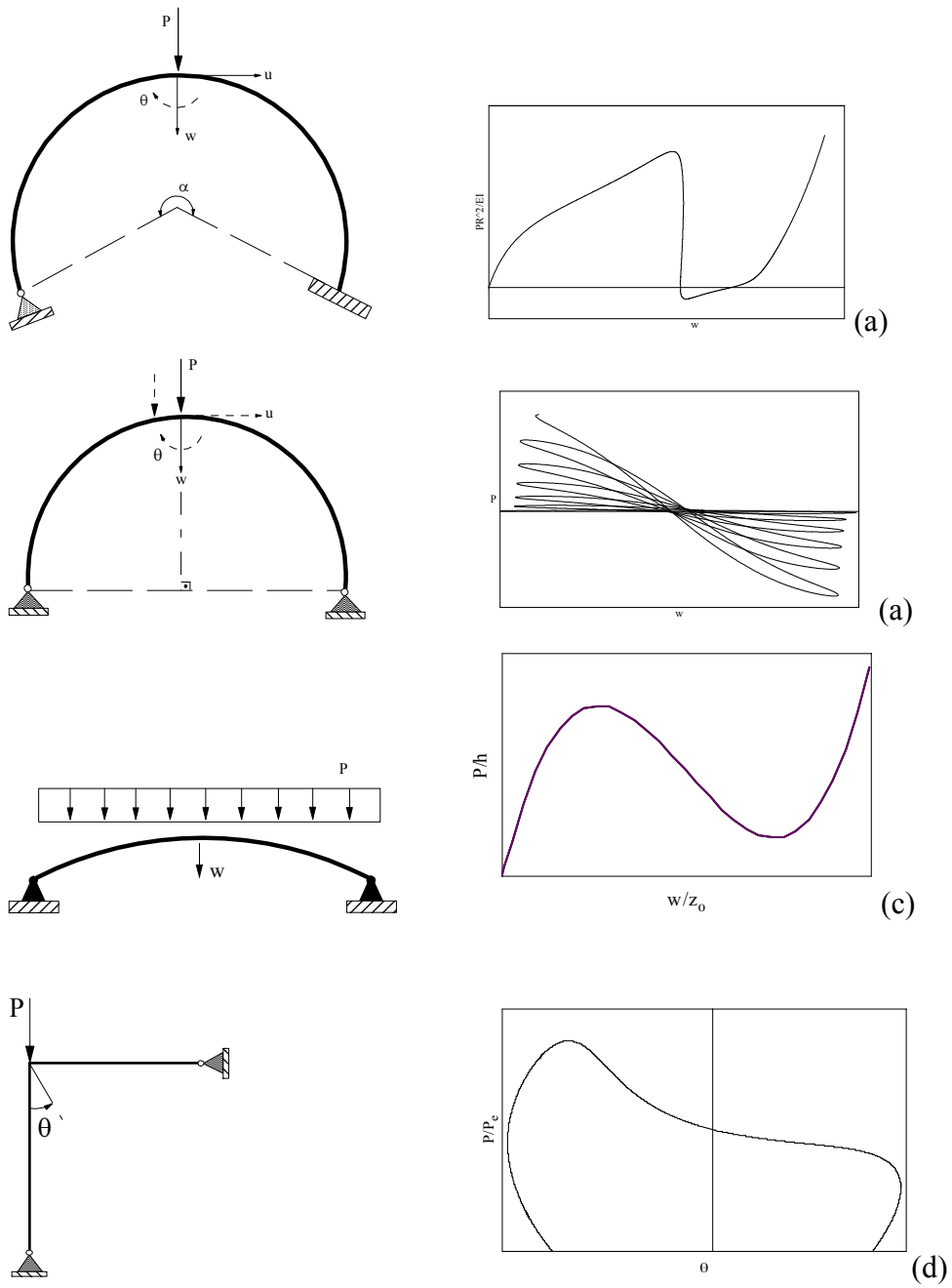


Figura 3.1: Sistemas estruturais analisados neste capítulo.

3.2

ARCOS

Os arcos esbeltos são sistemas estruturais que podem exibir, dependendo da magnitude e tipo de carregamento, assim como das condições de apoio, um comportamento fortemente não-linear. Com o objetivo então de verificar a eficiência das formulações apresentadas no capítulo anterior (ou Cap 2) serão analisadas nesta seção as respostas não-lineares de três arcos considerando o carregamento aplicado estaticamente. Tratam-se de exemplos clássicos de problemas de equilíbrio e estabilidade que possuem resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura.

Nestas análises a foi utilizado o método de Newton-Raphson modificado junto com as técnicas do *comprimento de arco cilíndrico* ou do *deslocamento generalizado* (Apêndice A). Os incrementos automáticos do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, foram também controlados por essas duas técnicas. Por fim, adotou-se, em geral, uma tolerância $\zeta = 10^{-4}$ para indicar a convergência da resposta.

3.2.1

Arco circular rotulado-engastado

Como primeiro exemplo tem-se o arco circular rotulado-engastado submetido a uma carga pontual centrada em seu eixo de simetria, conforme indicado na Figura 3.2. Para modelar esse sistema estrutural, adotou-se no presente trabalho uma malha de 32 elementos finitos.

Na Figura 3.3 são exibidas as trajetórias de equilíbrio do arco, indicando como o parâmetro de carga adimensional PR^2/EI varia em função do deslocamento transversal w e da rotação θ no topo do arco. A solução analítica para esse problema, até o primeiro ponto limite de carga, foi fornecida por Wood e Zienkiewicz (1977); Kouhia e Mikkola (1989) apresentaram resultados numéricos obtidos através de um modelo formado por 64 elementos. Observe a boa concordância dos resultados obtidos pelo presente trabalho com aqueles das referências citadas.

A Figura 3.4 exhibe as configurações deformadas do arco nas configurações A, B, C e D indicadas na Figura 3.3a.

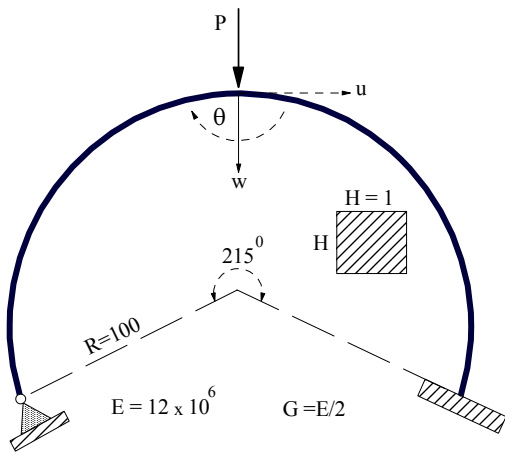
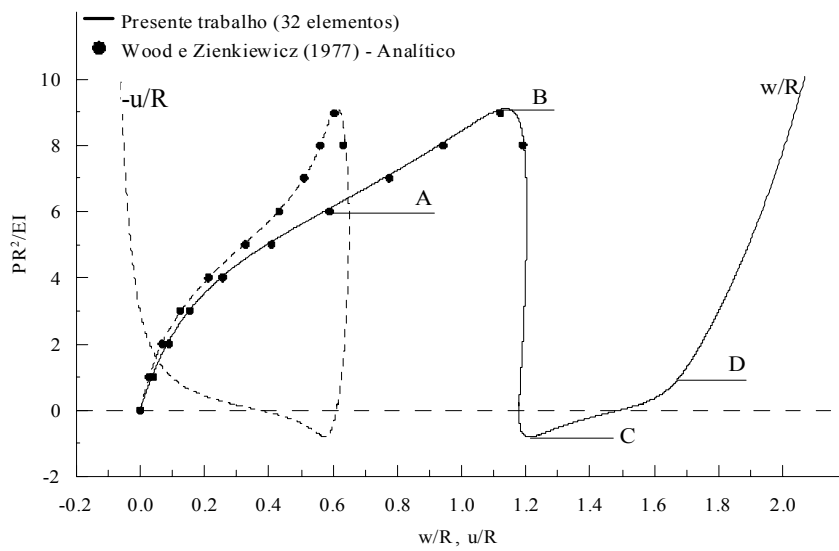
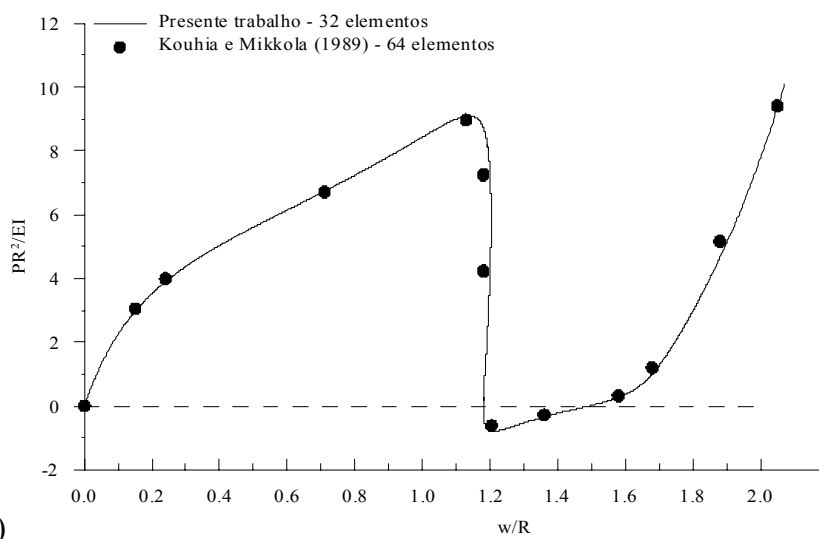


Figura 3.2: Arco circular rotulado-engastado sob carga pontual centrada.

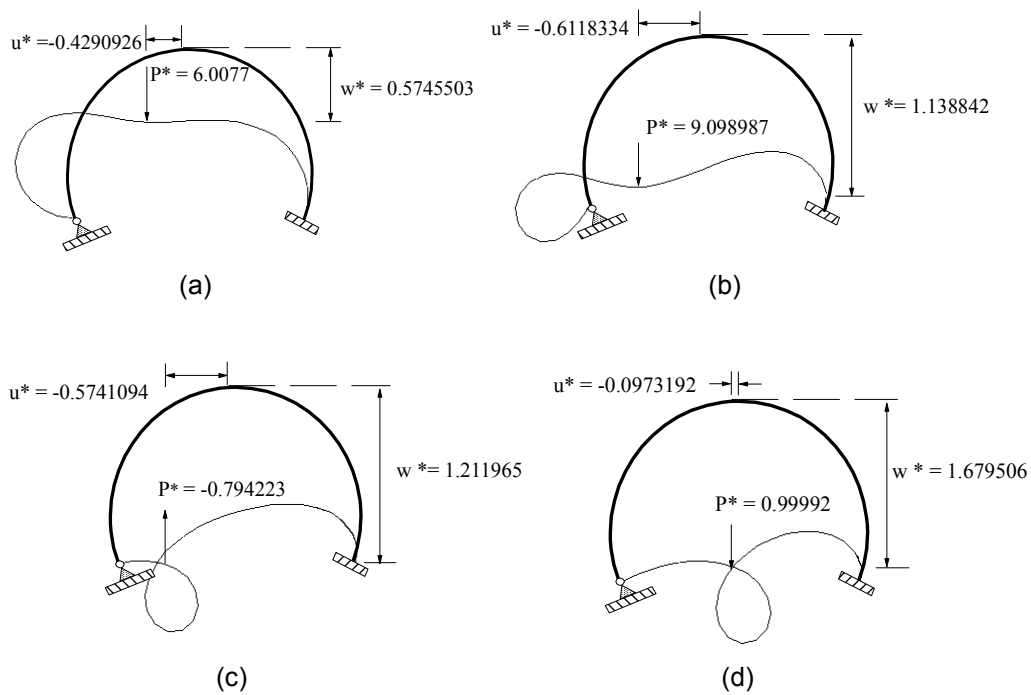


(a)



(b)

Figura 3.3: Trajetórias de equilíbrio do arco circular rotulado-engastado.



$$P^* = PR^2/EI; \quad w^* = w/R; \quad u^* = u/R$$

Figura 3.4: Configurações deformadas do arco circular rotulado-engastado.

3.2.2

Arco circular biarticulado

A resposta não-linear de um arco circular biarticulado, quando submetido às duas situações de carga concentrada indicadas na Figura 3.5, será estudada nesta seção.

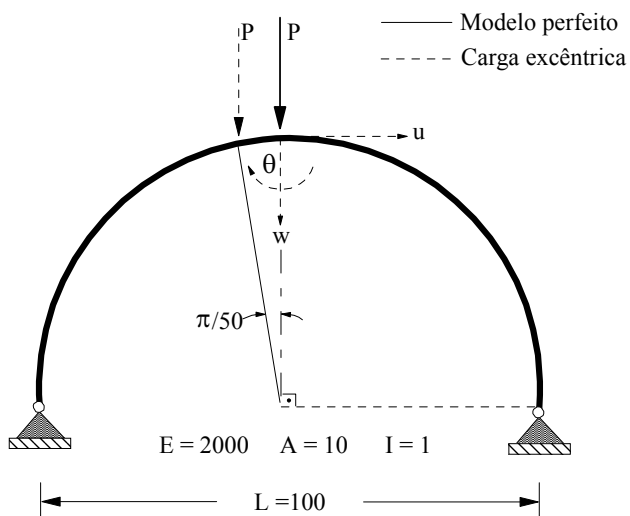
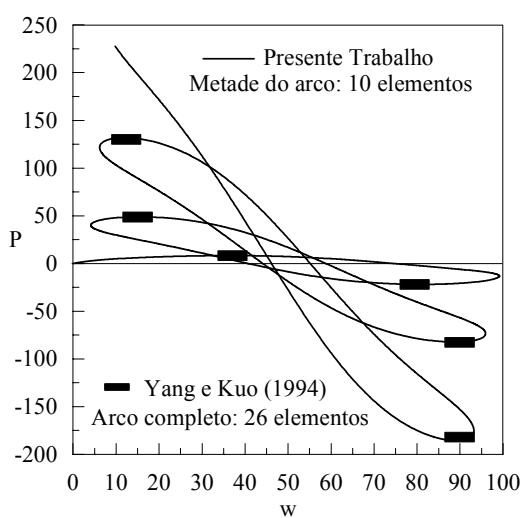


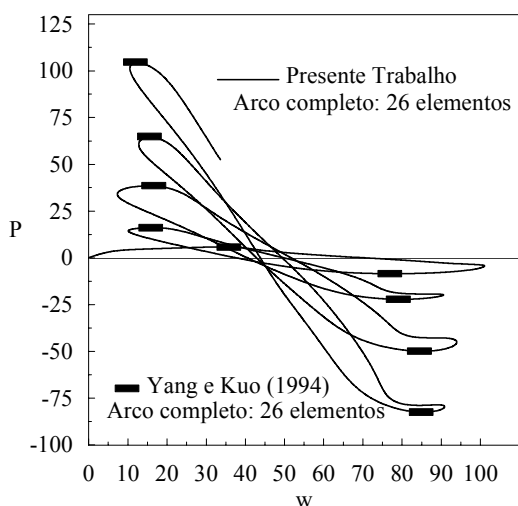
Figura 3.5: Arco circular biarticulado.

Para realizar a análise do modelo perfeito com carga pontual perfeitamente centrada, apenas metade do arco foi discretizada e adotou-se 10 elementos finitos. No caso do modelo com carga excêntrica, foi adotada uma malha composta de 26 elementos para modelar o arco completo.

Essas duas situações de carga provocam respostas fortemente não-lineares do arco, como mostradas através das trajetórias de equilíbrio ilustradas nas Figuras 3.6a e 3.6b. Observe que resultados obtidos pelo presente trabalho apresentam boa concordância com os disponíveis na literatura (Yang e Kuo, 1994).



(a) Modelo simétrico.



(b) Modelo assimétrico.

Figura 3.6: Arco circular biarticulado: trajetórias de equilíbrio

Para essas duas situações de carga o arco apresenta uma resposta cíclica. Esse comportamento pode ser notado através da Figura 3.7, onde são mostradas as deformadas da estrutura em alguns pontos das duas trajetórias. Dessa observação conclui-se que, após cada ciclo, os resultados tornam-se menos precisos, pois o número de elementos utilizados no modelo estrutural torna-se menos eficiente na representação da estrutura.

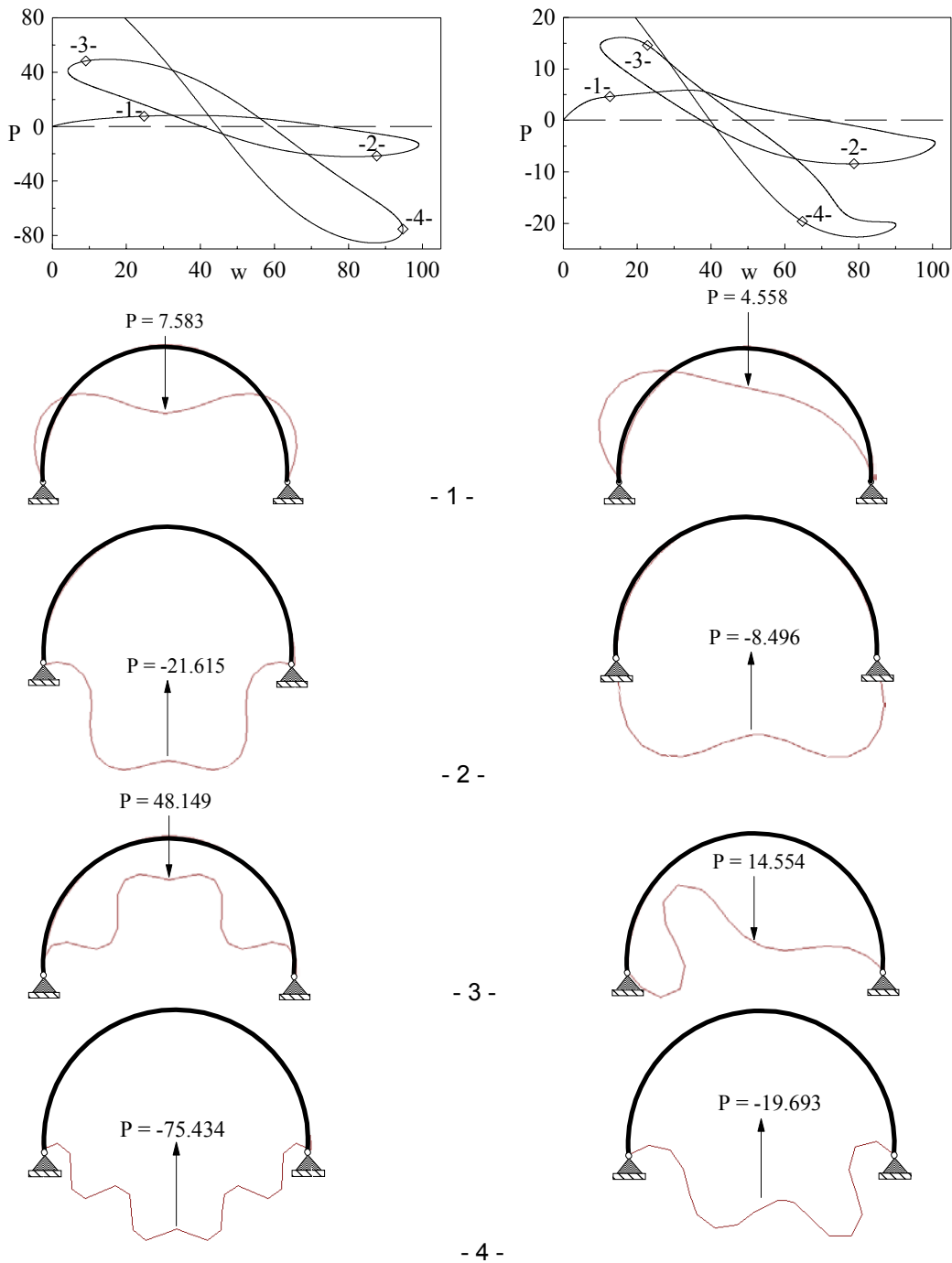


Figura 3.7: Configurações deformadas da estrutura.

3.2.3

Arco senoidal sob carregamento distribuído

Pretende-se nesta seção analisar a influência de imperfeições nas condições de apoio e de carregamento na resposta não-linear do arco senoidal apresentado na Figura 3.8. Entretanto, considera-se inicialmente o sistema estrutural clássico encontrado na literatura (Bergan, 1980), ou seja, o arco biarticulado e submetido a uma carga vertical P uniformemente distribuída, como mostrado na mesma figura.

A resposta do arco senoidal biarticulado a esse carregamento uniforme é apresentada através da trajetória de equilíbrio não-linear fornecido na Figura 3.9, onde mais uma vez fica comprovada a eficiência e exatidão das formulações implementadas neste trabalho. Na Tabela 3.2 são comparados os valores obtidos da carga P nos pontos críticos da trajetória de equilíbrio.

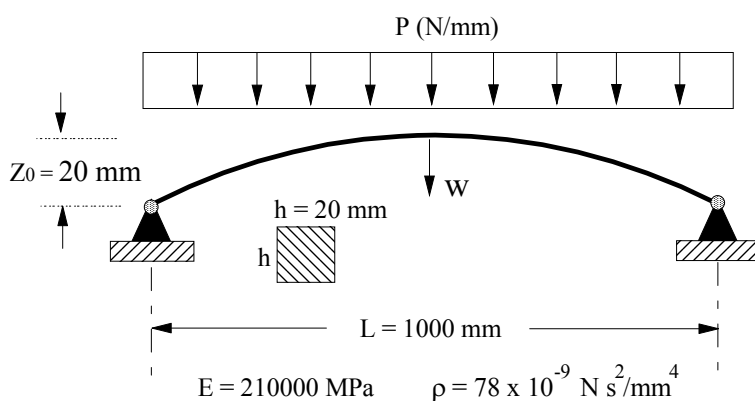


Figura 3.8: Arco senoidal biarticulado sob carga distribuída.

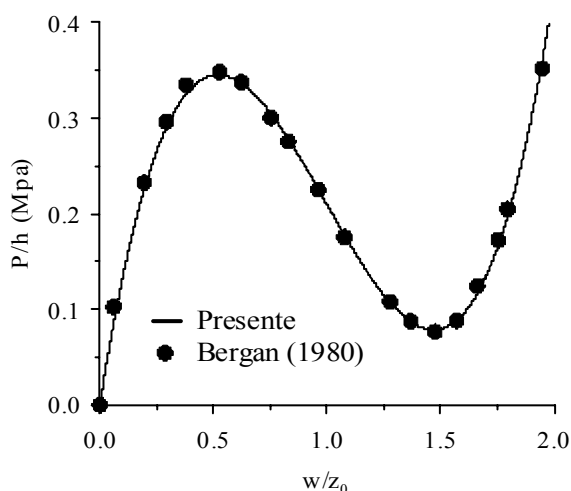


Figura 3.9: Trajetória de equilíbrio do arco senoidal biarticulado.

Com o objetivo de verificar a sensibilidade da resposta do arco senoidal a variações na rigidez dos apoios, analisa-se novamente o mesmo sistema, mas agora com ligações semi-rígidas, como ilustrado na Figura 3.10. Primeiramente, consideram-se as ligações flexíveis nas duas extremidades do arco com o mesmo valor da rigidez à rotação Sc (Figura 3.10a); em seguida, valores diferentes de Sc são adotados para essas ligações flexíveis (Figura 3.10b).

As trajetórias de equilíbrio para a primeira situação de apoio são apresentadas na Figura 3.11a. É interessante observar que o aumento da rigidez Sc ameniza o efeito de perda de estabilidade por ponto limite de carga seguido de salto (*snap-through*). Para Sc maiores que $20EI/L$, não se observam mais a presença de pontos críticos ao longo da trajetória.

A sensibilidade do arco à diferentes valores de Sc das ligações pode ser verificada através das trajetórias apresentadas na Figura 3.11b. Para esse estudo, procurou-se fixar a rigidez da extremidade esquerda do arco considerando $Sc_1 = 5EI/L$; e variou-se a rigidez da ligação do apoio da direita seguindo a relação $Sc_2 = Sc_1 (1 - \alpha)$. Note que a medida que a diferença entre Sc_1 e Sc_2 aumenta, como o acréscimo de α , o valor da carga crítica diminui e a inclinação da trajetória pós-crítica torna-se mais acentuada.

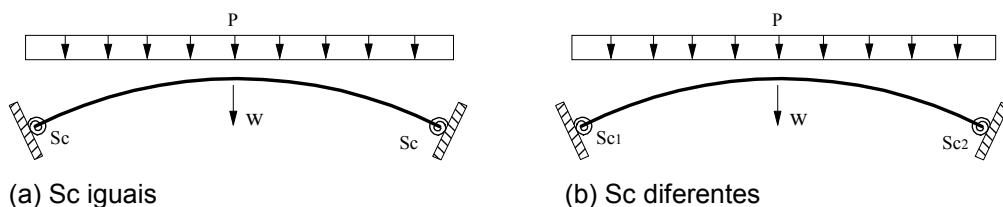
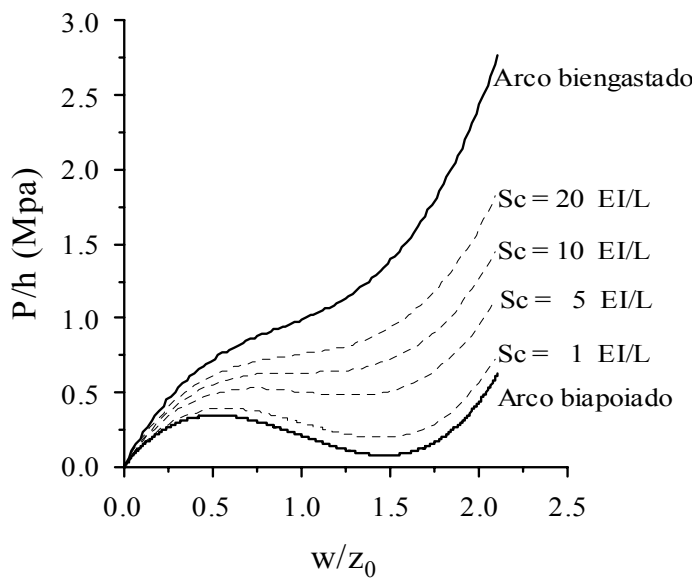


Figura 3.10: Arco senoidal com ligações semi-rígidas.

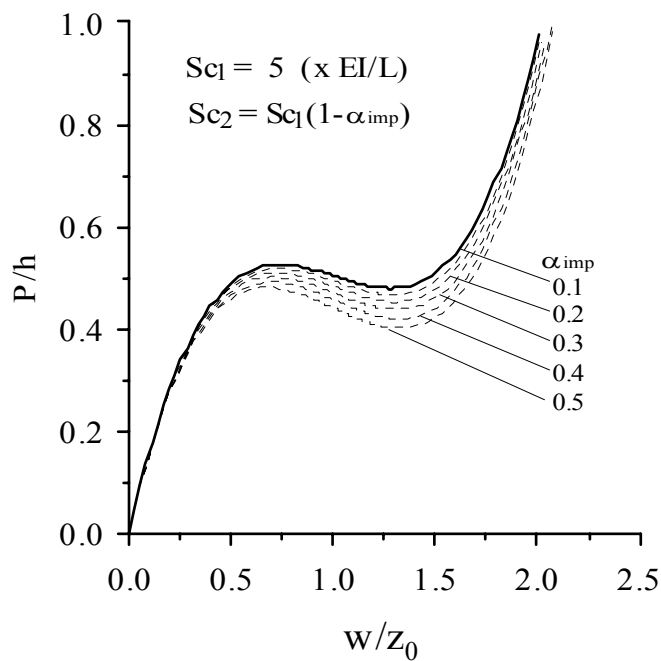
Por fim, analisam-se os efeitos de um carregamento imperfeito na resposta não-linear do arco com ligações idênticas semi-rígidas ($Sc = 5EI/L$). Como observado, essa imperfeição é associada a um carregamento distribuído adicional, de magnitude αP , introduzido do lado direito do arco. Os caminhos não-lineares de equilíbrio, para diferentes valores de α , são fornecidos na Figura 3.11.

Observa-se que à medida o valor do parâmetro α é incrementado, aumentando-se conseqüentemente a assimetria do carregamento, o valor da carga crítica diminui. Entretanto, essas imperfeições não ocasionaram o surgimento de

pontos de bifurcação, o que levaria a uma perda muito mais drástica da capacidade de carga.



(a) Sc iguais (Figura 3.10a)



(b) Sc diferentes (Figura 3.10b)

Figura 3.11: Trajetórias de equilíbrio do arco senoidal como ligações semi-rígidas.

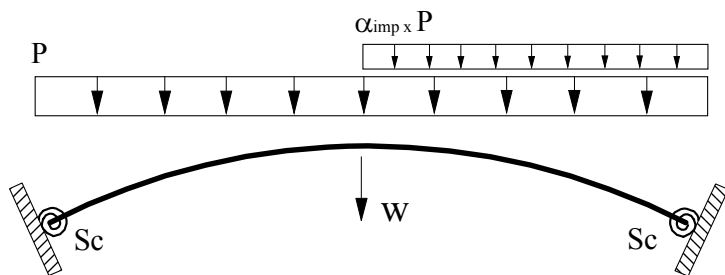


Figura 3.12: Arco senoidal com ligações semi-rígidas e carregamento imperfeito.

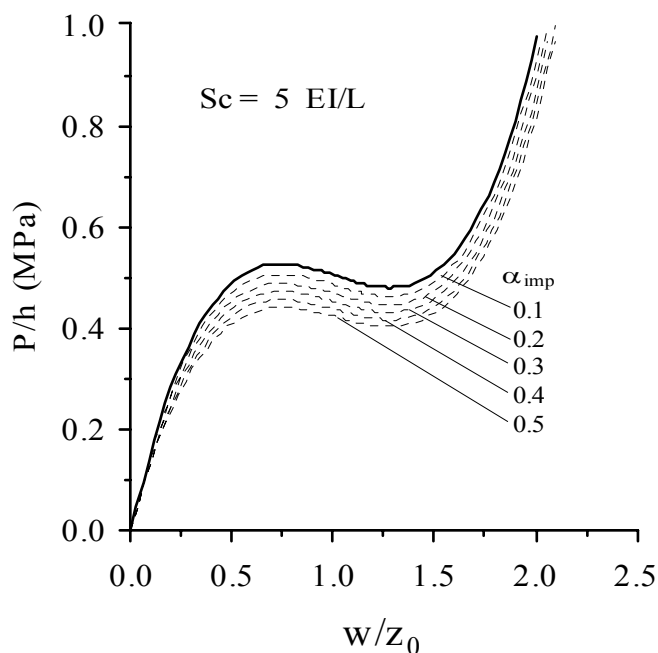


Figura 3.13: Trajetórias de equilíbrio do arco senoidal com ligações semi-rígidas e carregamento imperfeito.

3.2.3.1

Estudo do parâmetro geométrico z_0

Na literatura são encontrados alguns trabalhos que apresentam uma relação entre geometria do arco e o tipo de trajetória de equilíbrio que este deve apresentar. Em Schreyer e Masur (1966) foi definido o parâmetro geométrico $\lambda = 2z_0/h$, onde z_0 é a altura do arco e h a altura da seção transversal, como já indicado pela Figura 3.8. Neste mesmo trabalho, foram apresentados os seguintes limites de comportamento para um arco circular biengastado submetido a carregamento distribuído:

- (i) Se $2.85 > \lambda \rightarrow$ A trajetória de equilíbrio não apresenta pontos limites;
- (ii) Se $5.02 \geq \lambda \geq 2.85 \rightarrow$ Ocorrência de ponto limite seguido por salto dinâmico
- (iii) Se $5.74 \geq \lambda \geq 5.02 \rightarrow$ Ocorrência de ponto de bifurcação no ramo instável após o ponto limite;
- (iv) Se $\lambda \geq 5.74 \rightarrow$ Ponto de bifurcação ocorre antes do ponto limite;

Um estudo semelhante foi apresentado para um arco circular biarticulado em Dickie e Broughton (1971), e os seguintes limites de comportamento foram fornecidos:

- (v) Se $1.11 > \lambda \rightarrow$ A trajetória de equilíbrio não apresenta pontos limites;
- (vi) Se $2.24 \geq \lambda \geq 1.11 \rightarrow$ Ocorrência de ponto limite seguido por salto dinâmico
- (vii) Se $2.65 \geq \lambda \geq 2.24 \rightarrow$ Ocorrência de ponto de bifurcação no ramo instável após o ponto limite;
- (viii) Se $\lambda \geq 2.65 \rightarrow$ Ponto de bifurcação ocorre antes do ponto limite;

No presente trabalho é fixado o valor de $h = 20$ mm. Deste modo, a análise da influencia da geometria do arco no tipo de resposta estrutural se resume no estudo da influencia da altura z_0 do arco senoidal no comportamento estrutural.

A Figura 3.11 exhibe as trajetórias de equilíbrio para valores de z_0 iguais, respectivamente, a 20, 30, 40 e 50 mm. Para obter as trajetórias do modo simétrico dos arcos foi utilizado o procedimento de modelar apenas metade do arco, restringindo no nó do topo a deslocabilidade horizontal e a rotação. O modo assimétrico foi obtido com o modelo do arco inteiro e a introdução de pequenas imperfeições na geometria.

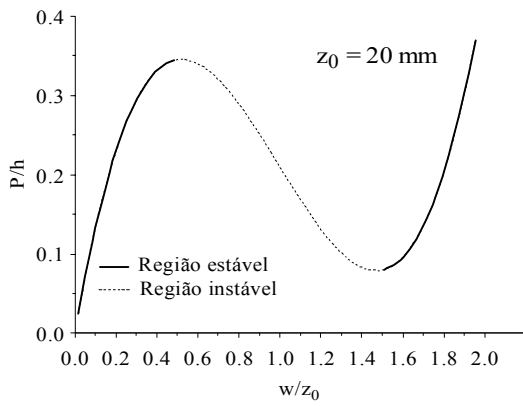
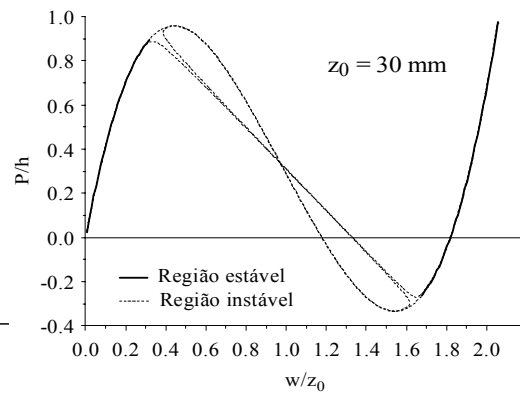
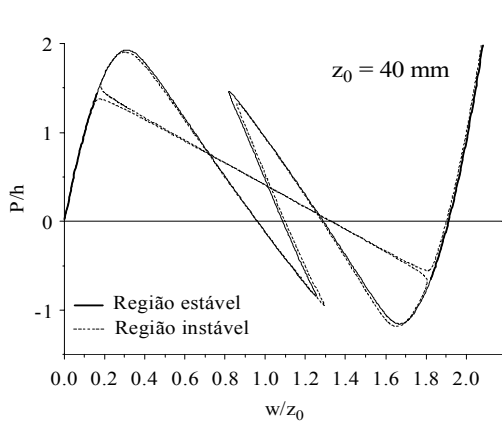
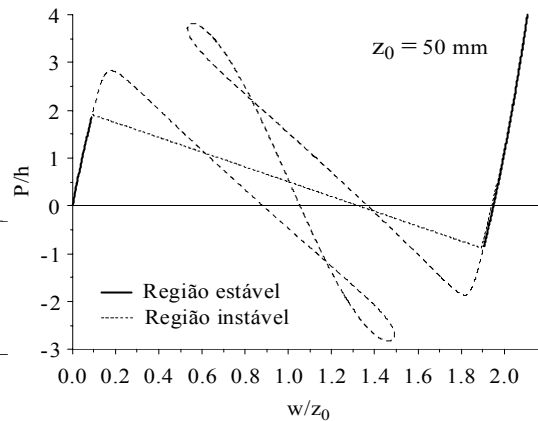
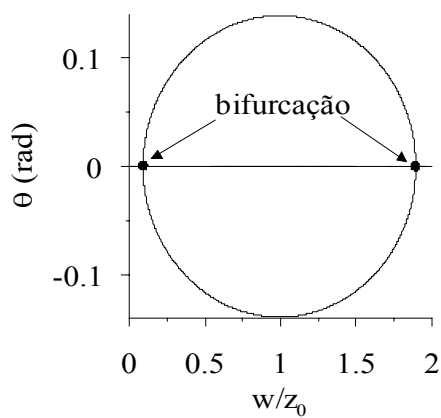
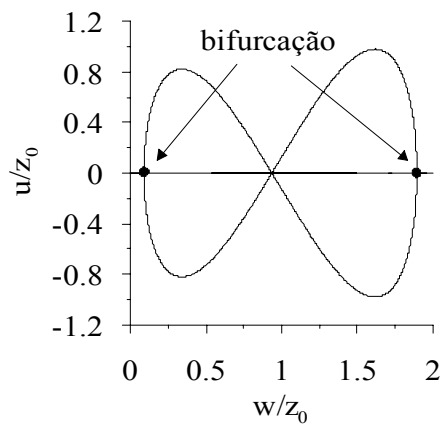
(a) $z_0 = 20$ mm(b) $z_0 = 30$ mm(c) $z_0 = 40$ mm(d) $z_0 = 50$ mm(e) $z_0 = 50$ mm(f) $z_0 = 50$ mm

Figura 3.14: Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de z_0 .

A primeira observação feita em relação aos caminhos de equilíbrio é o surgimento de um ponto de bifurcação ao longo do caminho não-linear para valores de z_0 acima de 20 mm. A este ponto de bifurcação segue uma perda de estabilidade do arco. O caminho pós-crítico encontrado tangencia a trajetória do

modo simétrico no ponto de bifurcação e volta a tangenciar este caminho em um outro ponto do caminho fundamental na região associada a configurações pós-flambagem logo após o ponto limite mínimo. Para se entender a forma desse caminho pós-crítico, apresenta-se nas Figuras 3.14e e 3.14f duas projeções deste caminho para o arco com z_0 igual a 50 mm.

Uma outra observação importante é que à medida que se reduz o valor de z_0 , o ponto limite associado ao modo assimétrico se aproxima do ponto limite do modo simétrico. Para tentar compreender melhor esse fenômeno, serão analisados no Capítulo 5 os modos de vibração e a variação das frequências naturais para estes diferentes valores de z_0 .

Em seguida, considerando-se o arco com altura $z_0 = 50$ mm, que, como foi visto, apresenta um ponto de bifurcação bem definido, pretende-se avaliar a sensibilidade da estrutura a imperfeições de carga e também de apoio.

A imperfeição de carregamento pode ser modelada como mostra a Figura 3.15. A sensibilidade da estrutura à imperfeição de carregamento é mostrada na Figura 3.16.

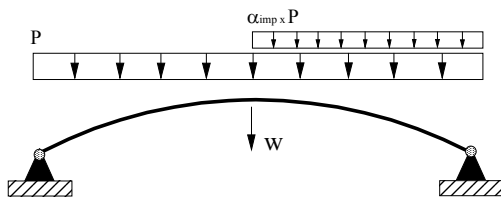


Figura 3.15: Imperfeição de carga.

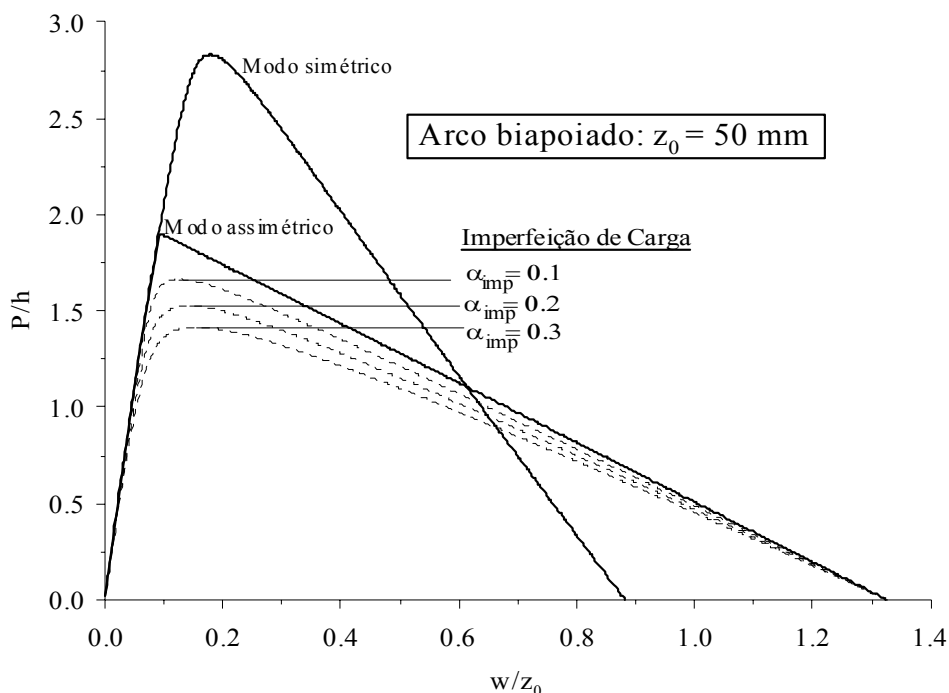


Figura 3.16: Sensibilidade à imperfeição de carga: arco biapoiado com $z_0 = 50$ mm.

Para o presente arco o efeito de imperfeições iniciais é extremamente relevante, reduzindo consideravelmente a capacidade de carga.

Da mesma forma deve-se avaliar a sensibilidade da estrutura na presença de imperfeições dos apoios. Supondo um arco apoiado em suas extremidades por conexões semi-rígidas de Rigidez Sc_1 e $Sc_2 = (1 + \alpha_{imp})Sc_1$ (Figura 3.17), obtém-se, como mostrado na Figura 3.18, duas situações de imperfeição: $\alpha_{imp} > 0$, em que a imperfeição de Sc_2 implica em uma maior rigidez na conexão e $\alpha_{imp} < 0$, em que a imperfeição de Sc_2 implica em redução de rigidez.

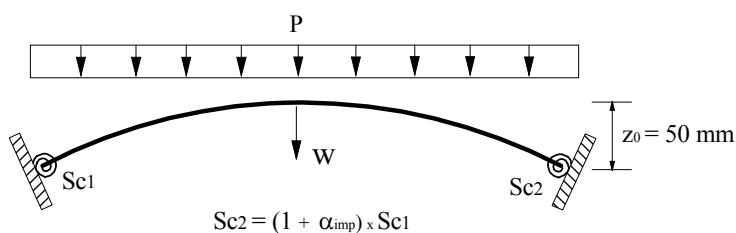


Figura 3.17: Arco $z_0 = 50$ mm e apoios semi-rígidos: $Sc_1 = Sc_2 = 5 EI/L$.

É interessante observar que um acréscimo de rigidez em uma das conexões leva a estrutura à perda de simetria fazendo-a perder capacidade de carga, entretanto, a variação na magnitude destes acréscimos para estrutura assimétrica não provoca grandes variações no primeiro ponto de bifurcação. A diferença é

mais sensível no segundo ponto de bifurcação. Por outro lado, a redução na rigidez de uma das ligações é fortemente sentida no primeiro ponto de bifurcação.

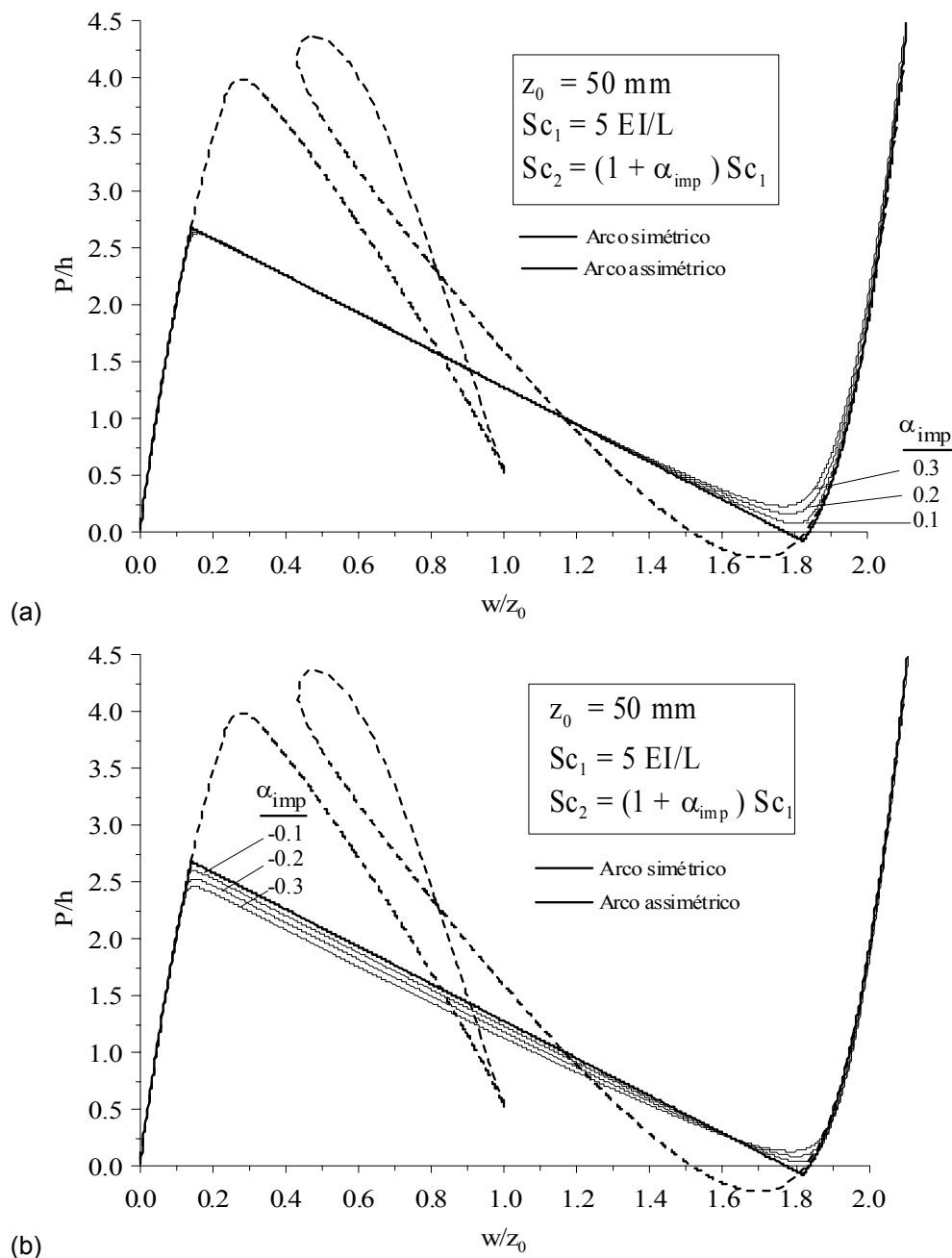


Figura 3.18: Arco $z_0 = 50$ mm e apoios semi-rígidos: $Sc_1 = 5 EI/L$ e $Sc_2 = Sc_1 (1 + \alpha_{imp})$.

No Capítulo 5 é apresentada uma análise paramétrica detalhada envolvendo o problema de vibração livre e resposta dinâmica não-linear para essa família de arcos.

3.3

PÓRTICOS EM L

Em algumas estruturas aperticadas esbeltas sujeitas a grandes deflexões, certos membros podem apresentar configurações de equilíbrio crítico e, principalmente, configurações pós-críticas, fortemente dependentes das características dos membros adjacentes. Esse é o caso dos pórticos em L, conhecidos na literatura como *L-Frames*. A Figura 3.19 mostra dois exemplos clássicos de pórticos em L, o *Pórtico de Lee* (Lee et al., 1968; Schweizerhof e Wriggers, 1986; Galvão et al., 2004) e o *Pórtico de Roorda* (Roorda, 1965; Koiter, 1967; Roorda e Chilver, 1970).

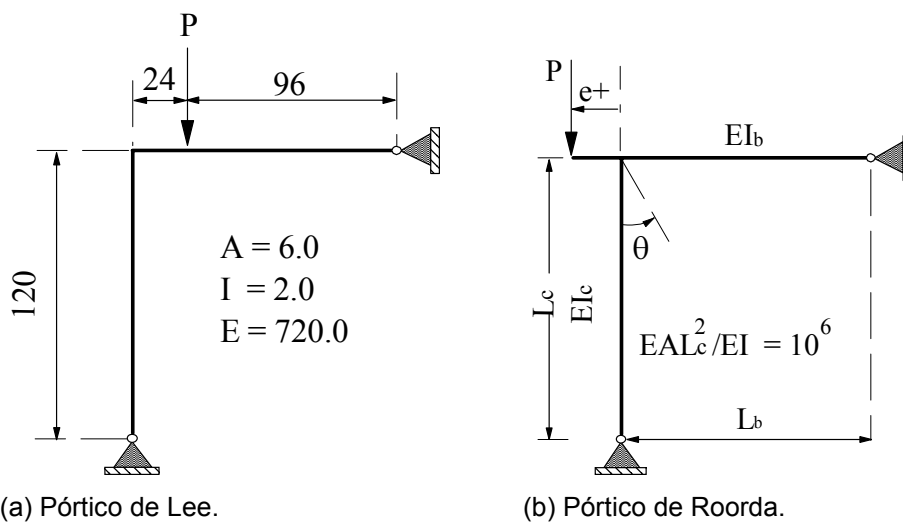


Figura 3.19 : Exemplos de pórticos em L.

Em 1967, Koiter (1967) mostrou que alguns pórticos em L apresentavam bifurcação assimétrica e, conseqüentemente, sua capacidade pós-crítica era afetada por imperfeições. Seus resultados puderam ser comparados com os obtidos experimentalmente por Roorda (1965). Desde então, o comportamento pós-crítico desse tipo de estrutura tem sido fartamente estudado. Vários autores no passado (Koiter, 1967; Roorda e Chilver, 1970; Brush e Almroth, 1975; Rizzi *et al.*, 1980; Gioncu e Ivan, 1983; Bazant e Cedolin, 1991), estudaram a região inicial da trajetória pós-crítica dessas estruturas através de expansões assintóticas da energia potencial ou das equações de equilíbrio que governam seu comportamento não-linear. Esses estudos normalmente tinham a preocupação de

determinar a inclinação e a curvatura do início da resposta pós-crítica, pois, como se sabe, esses dois parâmetros são suficientes para caracterizar o tipo de bifurcação, podendo ainda ser usados para estimar a sensibilidade da estrutura a imperfeições.

Essas soluções aproximadas podem, entretanto, descrever somente a região inicial do comportamento pós-crítico do pórtico e ainda gerar erros significativos quando houver grandes deslocamentos ou grandes imperfeições no sistema estrutural.

Devido à constatação da forte não-linearidade no seu comportamento pós-crítico, os *pórticos em L* têm sido usados por vários autores para testar a eficiência de várias formulações de elementos finitos, bem como o desempenho computacional de várias estratégias de solução de sistemas de equações não-lineares (Salerno e Lanzo, 1997; Meek e Xue, 1996; Pacoste e Eriksson, 1997; Waszczyszyn e Janus-Michalska, 1998; Silveira et al., 2000; Galvão e Silveira, 2000).

Entretanto, pouca coisa se sabe sobre a influência de vários parâmetros, tais como, condições de contorno, imperfeições geométricas e de carregamento, e rigidez da barra lateral no comportamento pós-crítico dessas estruturas aperticadas.

Será realizada então nesta seção um estudo para verificar a influência desses parâmetros na resposta não-linear e na sensibilidade a imperfeições dos *pórticos em L*. Serão mostrados inicialmente, no entanto, alguns resultados que validam as formulações apresentadas no Capítulo 2.

Em todas essas análises se adotou, em função da eficiência computacional observada, o método de Newton-Raphson modificado junto com a técnica do comprimento de arco cilíndrico para resolver o sistema de equações não-lineares. A tolerância utilizada para indicar a convergência em cada passo de carga foi de $\xi=10^{-3}$.

3.3.1

Pórtico de Lee

A primeira estrutura a ser analisada é a mostrada na Figura 3.20. Esse sistema estrutural, normalmente conhecido como *Pórtico de Lee* (Lee *et al.*, 1968), é composto por duas barras idênticas, uma vertical e outra horizontal, conectadas rigidamente entre si e com apoios articulados em suas extremidades. Uma única carga vertical P é aplicada na barra horizontal, a uma distancia de 24 unidades de comprimento da ligação.

A modelagem desse sistema estrutural neste trabalho foi feita usando-se 20 elementos finitos do mesmo tamanho (10 para cada barra). Para começar o processo de solução não-linear, adotou-se um parâmetro inicial de carga $\Delta\lambda_1^0 = 0.7 P_e$, com $P_e = \pi^2 EI/L^2$. As configurações deformadas do pórtico nos pontos críticos, bem como as trajetórias de equilíbrio referentes aos deslocamentos verticais e horizontais do nó onde a carga é aplicada são mostradas na Figura 3.21.

Como pode ser visto, a estrutura exibe um comportamento fortemente não-linear, com dois pontos limites de carga e dois pontos limites de deslocamento ao longo do caminho não-linear de equilíbrio. Note também que os resultados obtidos pelo presente trabalho são praticamente iguais aos fornecidos por Schweizerhof e Wriggers (1986), demonstrando a eficiência da formulação e metodologia de solução não-linear utilizadas aqui.

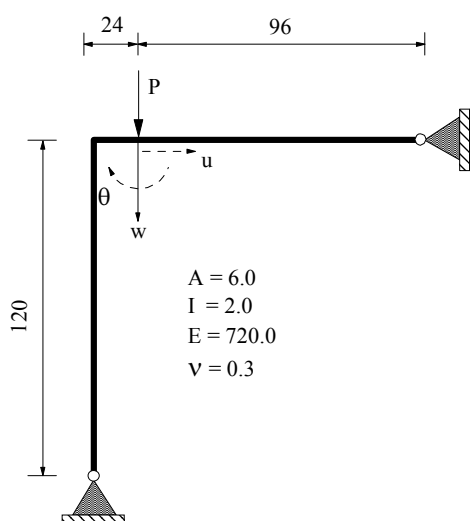


Figura 3.20: Pórtico de Lee.

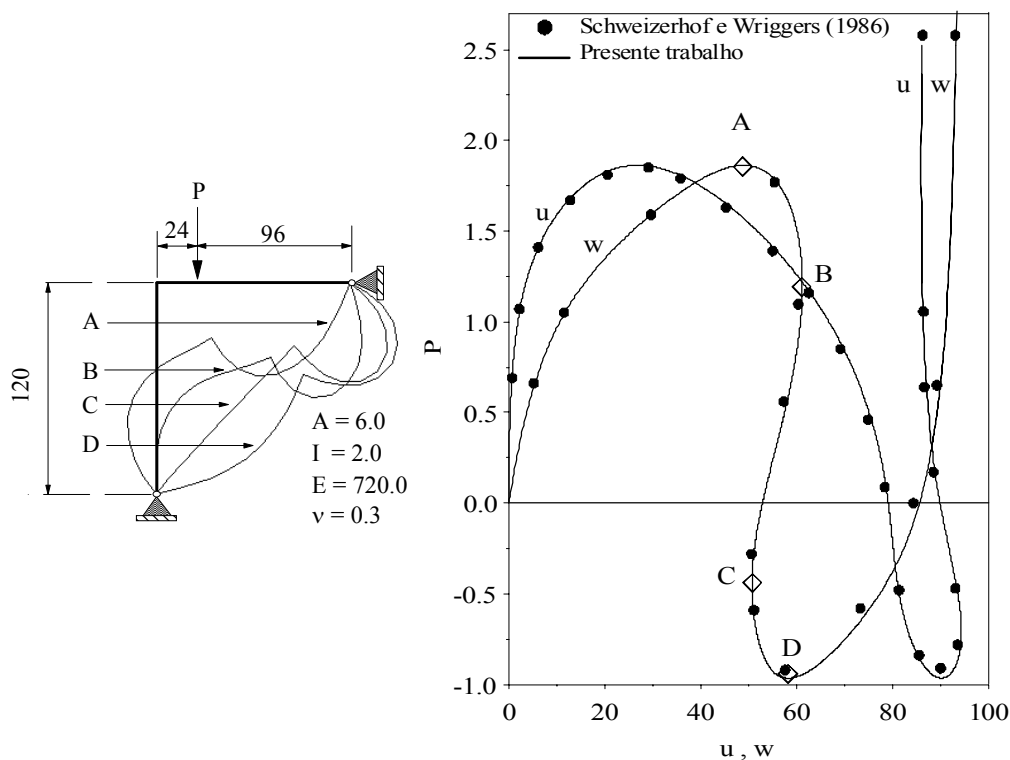


Figura 3.21: Trajetórias de equilíbrio do Pórtico de Lee.

3.3.2

Pórtico de Roorda

O segundo sistema estrutural a ser analisado é ilustrado na Figura 3.22a e é conhecido na literatura como o *pórtico de Roorda* (Roorda, 1965). Como será mostrado, trata-se de uma estrutura que apresenta bifurcação assimétrica.

Como no caso do pórtico de Lee, considerou-se 10 elementos para modelar cada membro e, com a finalidade de se obter as duas regiões da trajetória pós-crítica (bifurcação assimétrica), foram inseridas pequenas excentricidades ($e = L/10000$) na carga P (Figura 3.22b), gerando assim: (i) uma excentricidade positiva (θ^-) para a carga aplicada na extremidade livre de um elemento horizontal de comprimento $e = L/10000$, inserido à esquerda da conexão entre as barras; e (ii) uma excentricidade negativa (θ^+) para a carga aplicada na extremidade direita de um elemento de comprimento $e = L/10000$, à direita da ligação.

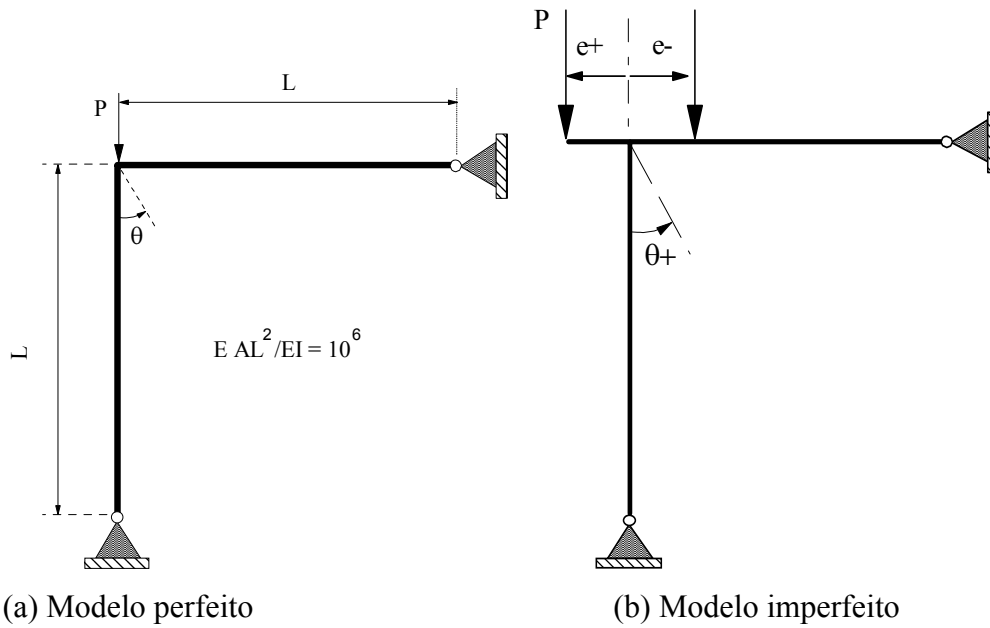


Figura 3.22: Pórtico de Roorda.

A Figura 3.23 fornece a variação do parâmetro de carga P/P_e , $P_e = \pi^2 EI/L^2$, com a rotação θ do nó de ligação entre as duas barras. Nessa figura, valores positivos de θ representam rotações anti-horárias do nó.

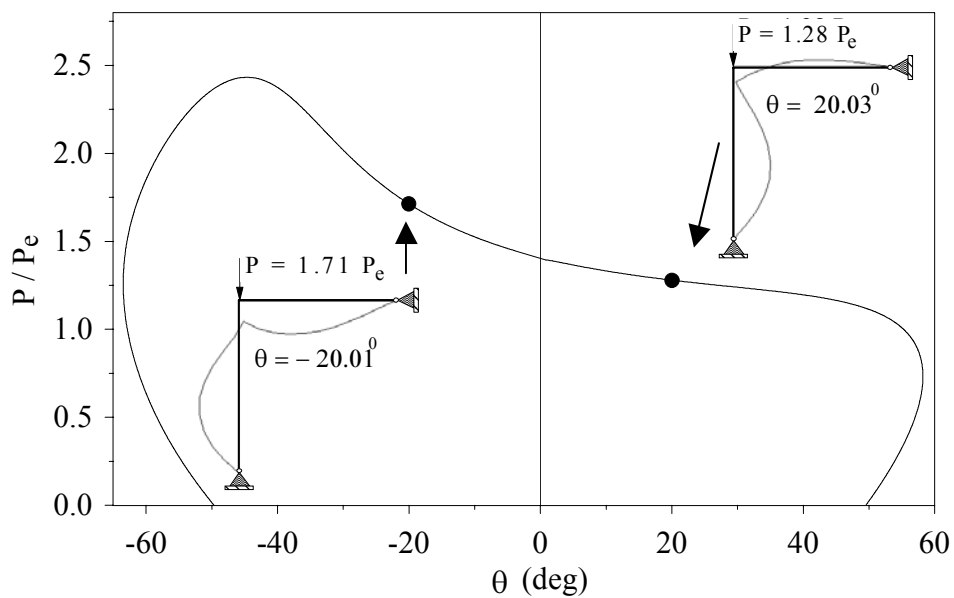


Figura 3.23: Trajetórias de equilíbrio do Pórtico de Roorda.

Observe que o pórtico apresenta bifurcação assimétrica, isto é, a resposta pós-crítica apresenta uma inclinação finita no ponto de bifurcação. Isso distingue

o comportamento de pórticos em geral do comportamento de colunas, que exibem uma bifurcação simétrica estável.

Esse comportamento do pórtico de Roorda acontece devido à influência do incremento das forças cisalhantes e encurtamento axial das barras em função dos seus respectivos deslocamentos. Assim, quando a coluna flamba para a direita ($\theta+$), um incremento de força cisalhante é produzido na viga fazendo com que as forças axiais de compressão na coluna sejam maiores que a carga aplicada, e assim a resistência do sistema diminui com o incremento da deformação do sistema. Nesse caso, então, a resposta pós-crítica é instável.

Analogamente, se o pórtico se desloca para esquerda ($\theta-$), uma força de tração secundária é induzida na coluna. Como consequência, a carga externa que a estrutura pode suportar cresce com o incremento da deformação do sistema. Nesse caso a configuração pós-crítica é estável e a inclinação da trajetória cresce até um ponto limite associado a grandes deslocamentos, após o qual este segmento da trajetória pós-crítica também se torna instável.

Através de uma análise clássica de estabilidade do pórtico de Roorda, chega-se a seguinte expressão para a carga crítica (Bazant e Cedolin, 1991):

$$P_{cr} = 1.407 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.1)$$

Através de expansões assintóticas das equações de equilíbrio que governam o comportamento não-linear do pórtico, Koiter (1967) obteve a seguinte aproximação para o início de sua da trajetória pós-crítica:

$$P/P_{cr} = 1 + 0.3805 \theta \quad (3.2)$$

que representa uma reta tangente à trajetória no ponto de bifurcação. Uma aproximação mais refinada foi introduzida por Rizzi et al. (1990), considerando, além da inclinação inicial, a curvatura inicial da trajetória pós-crítica, ou seja:

$$P/P_{cr} = 1 - 0.3805 \theta + 0.4638 \theta^2 \quad (3.3)$$

Os resultados obtidos através das Equações (3.2) e (3.3) são comparados na Figura 3.24 com a parte inicial da trajetória de equilíbrio secundária obtida no presente trabalho. A mesma figura fornece os pontos obtidos experimentalmente por Roorda (1965). Observe, mais uma vez, a boa concordância entre as soluções apresentadas para pequenos valores da rotação θ . Entretanto, como esperado, à medida que o valor de θ aumenta, cresce a diferença entre as respostas obtidas no presente trabalho e as das aproximações analíticas. Há também uma concordância satisfatória entre os resultados do presente trabalho e os resultados experimentais de Roorda (1965), atestando assim a precisão das formulações não-lineares empregadas aqui.

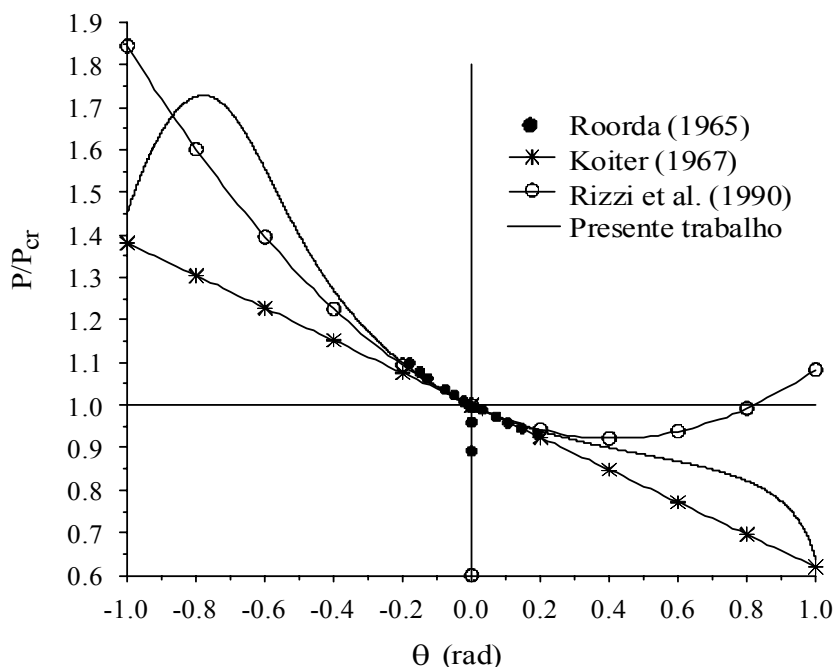


Figura 3.24: Pórtico de Roorda: comparação dos resultados numéricos e analíticos.

3.3.3

Estudo paramétrico

Enquanto várias soluções analíticas aproximadas são encontradas na literatura, poucos são os trabalhos destinados a uma análise paramétrica detalhada desses pórticos em L (Galvão et al., 2000). Entretanto, este estudo é essencial para a compreensão da influência dos parâmetros geométricos, condições de contorno e

imperfeições no comportamento crítico e pós-crítico dessas estruturas, podendo ser de grande ajuda a projetistas estruturais na avaliação da influência das barras de suporte lateral na estabilidade de estruturas.

Nas próximas seções será investigada a influência das condições de bordo, das imperfeições (carregamento) e da flexibilidade da ligação viga-coluna, no comportamento do pórtico com as propriedades físicas e geométricas estudado por Roorda (1965).

3.3.3.1

Influência das condições de apoio

Com o intuito de verificar a influência das condições de apoio, quatro tipos de suporte são considerados na extremidade direita da viga, como mostrado na Figura 3.25. As trajetórias de equilíbrio pós-crítico para essas quatro condições de bordo da viga são fornecidos na Figura 3.26 junto com as configurações deformadas dos pórticos para o valor de $\theta = \pm 10^\circ$. Neste gráfico, como nos demais, o carregamento é adimensionalizado pela divisão por $P_e = \pi^2 EI/L^2$.

Dessas trajetórias pode-se concluir que as condições de bordo da viga têm grande influência no comportamento do pórtico não apenas no que diz respeito ao valor da carga crítica, mas também na sua resposta pós-crítica e sensibilidade a imperfeição. Observe que para a condição de bordo C, quando é permitido o movimento horizontal do apoio, o valor da carga crítica é uma pequena fração da carga crítica do pórtico original de Roorda. Adicionalmente, o pórtico exibe uma bifurcação assimétrica, indicando que em situações práticas reais a carga máxima seria ainda menor.

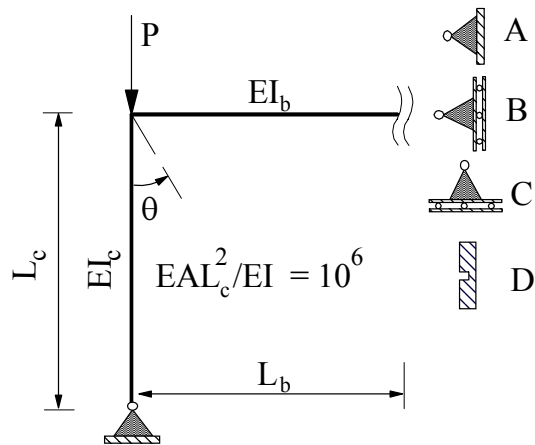
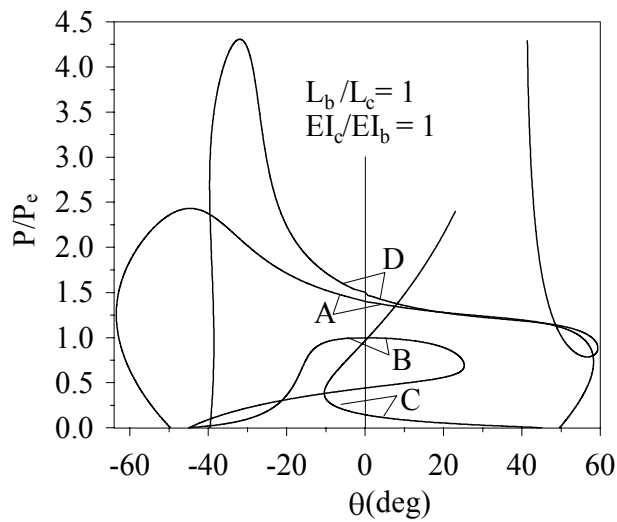
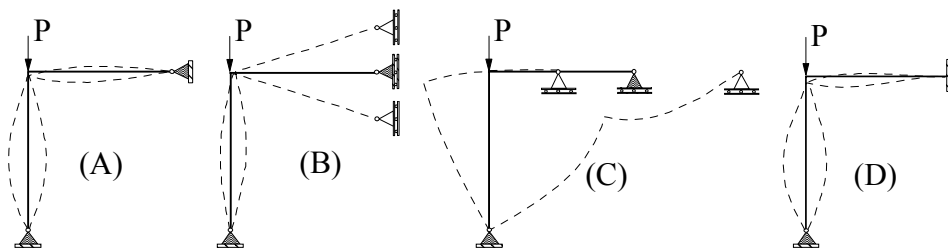


Figura 3.25: Pórtico em L com diferentes condições de apoio.



(a) Trajetórias de equilíbrio



(b) Configurações deformadas

Figura 3.26: Trajetórias de equilíbrio e configurações deformadas de um pórtico em L com diferentes condições de apoio.

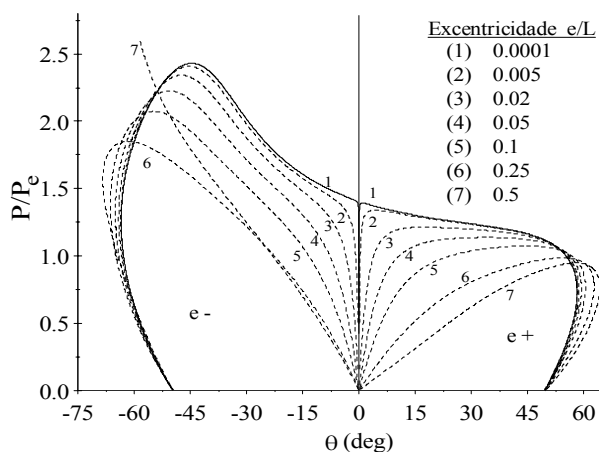
3.3.3.2

Influência da posição do carregamento

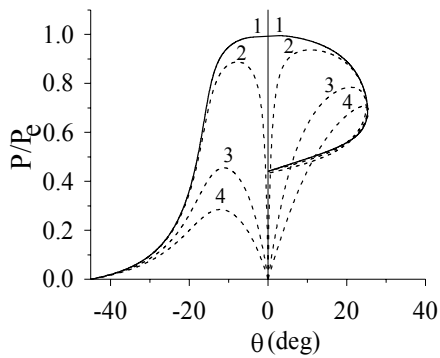
A influência da posição da carga P aplicada à esquerda ou à direita da coluna (Figura 22b), para as diferentes condições de contorno A, B, C e D da seção anterior (Figura 3.25), é mostrada nas Figuras 3.27a,b,c,d, onde o parâmetro de carga P/P_e é apresentado em função da rotação θ (ponto nodal localizado na conexão das barras) para diferentes valores do parâmetro e ($0 \leq e \leq L/2$), sendo e definido como a distancia entre o eixo da coluna e o ponto de aplicação da carga como mostrado na Figura 3.22b.

Analisando essas figuras pode-se constatar que, de um modo geral, quando há uma excentricidade positiva de carregamento, o pórtico exibe uma capacidade de carga P_{lim} inferior a P_{cr} ; e quanto maior a imperfeição, ou inclinação inicial do caminho pós-crítico, menor é P_{lim} . Quando a excentricidade é negativa, a resposta do sistema estrutural é estável até atingir uma carga limite associada a grandes deslocamentos e rotações. Mas, mesmo nessa situação, a excentricidade tem um efeito negativo na redução da rigidez efetiva do pórtico, como mostrado através da inclinação inicial da trajetória.

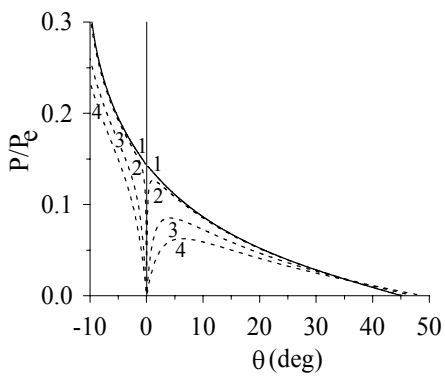
Para o caso de apoio B, quando a excentricidade tende a zero, a carga crítica do sistema estrutural tende à carga crítica de Euler.



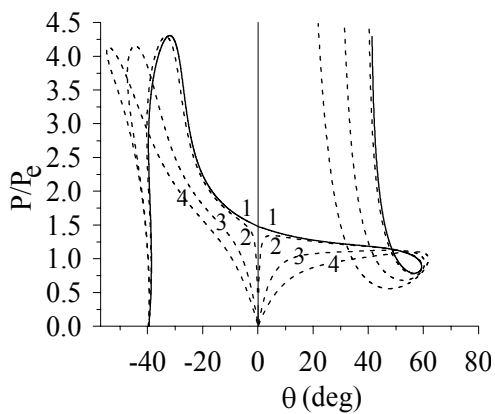
(a) Caso A



(b) Caso B



(c) Caso C



(d) Caso D

Figura 3.27: Trajetórias de equilíbrio do pórtico em L para carga em diferentes posições.

Por fim, a variação da carga limite do pórtico imperfeito (caso A) com o parâmetro e/L é mostrado na Figura 3.28, onde, como pode ser observado, os valores de P_{lim} obtidos no presente trabalho apresentam boa concordância com os obtidos experimentalmente por Roorda (1965) e analiticamente por Brush e Almroth (1975) através da expressão:

$$P_{\text{lim}}/P_{\text{cr}} = 1 - 1.15(e/L)^{1/2} \quad (3.4)$$

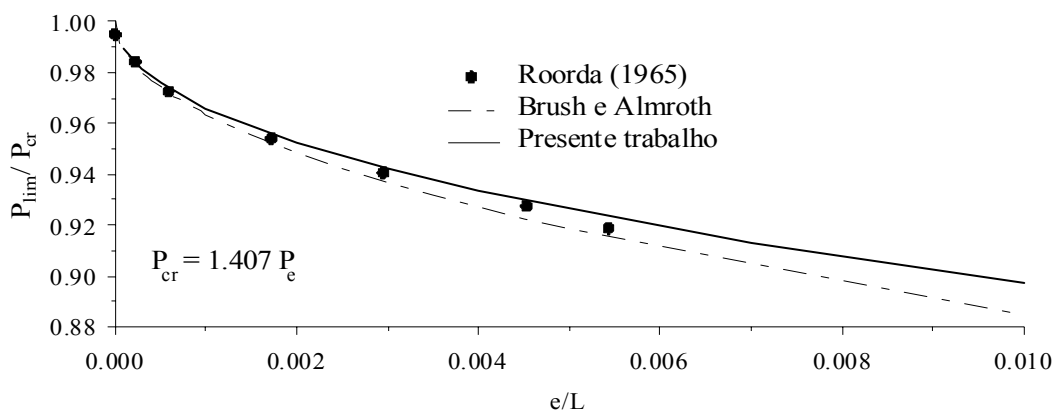


Figura 3.28: Comparação dos resultados numérico, experimental e analítico para P_{lim} .

3.3.3.3

Carregamento distribuído

Um caso muito comum de carregamento é o carregamento distribuído sobre a viga (Figura 3.29). A Figura 3.30 ilustra este caso comparando, para o caso de apoio A, as trajetórias de equilíbrio obtidas para algumas excentricidades e o caminho de equilíbrio de um carregamento distribuído sobre a viga.

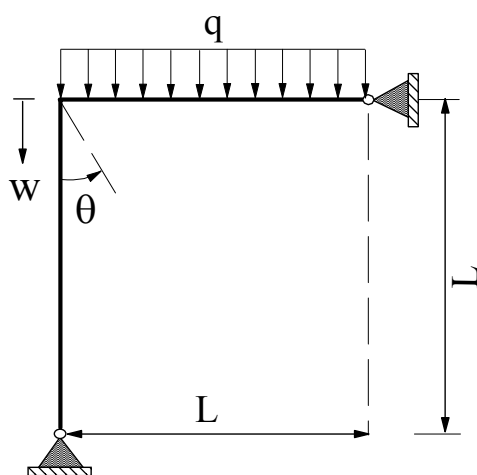


Figura 3.29: Pórtico em L com carga distribuída.

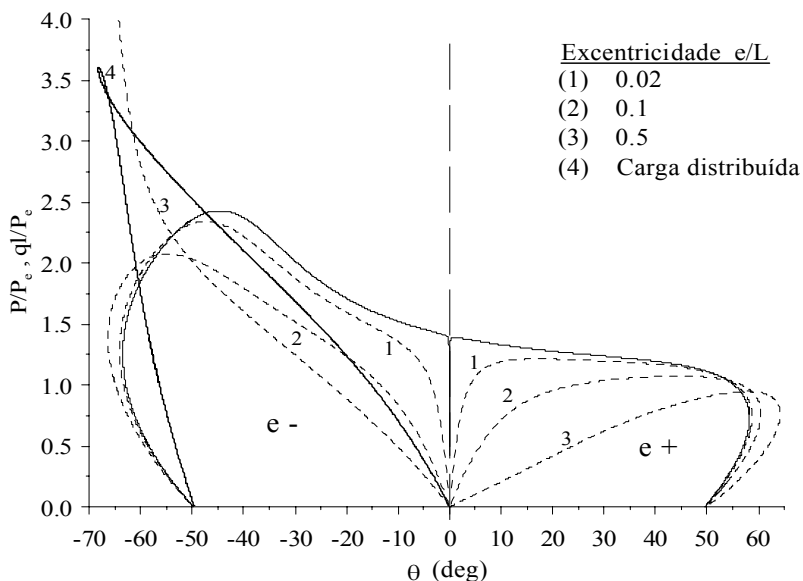


Figura 3.30: Comparação entre as trajetórias obtidas para diferentes posições da carga pontual e a trajetória de equilíbrio de uma carga distribuída sobre todo o vão da viga.

3.3.3.4

Influência da rigidez da ligação entre as barras

A última seção deste capítulo é destinada à verificação da influência da rigidez a rotação da ligação S_c entre as barras nas respostas crítica e pós-crítica do pórtico em L mostrado na Figura 3.31. Nessa mesma figura estão as quatro possibilidades de modelagem do sistema na região de aplicação da carga e do elemento híbrido de comprimento $L_{sr} = e = L/10000$ adotado, para possibilitar a obtenção das trajetórias pós-bifurcação. As trajetórias de equilíbrio do pórtico para esses modelos são apresentadas na Figura 3.32.

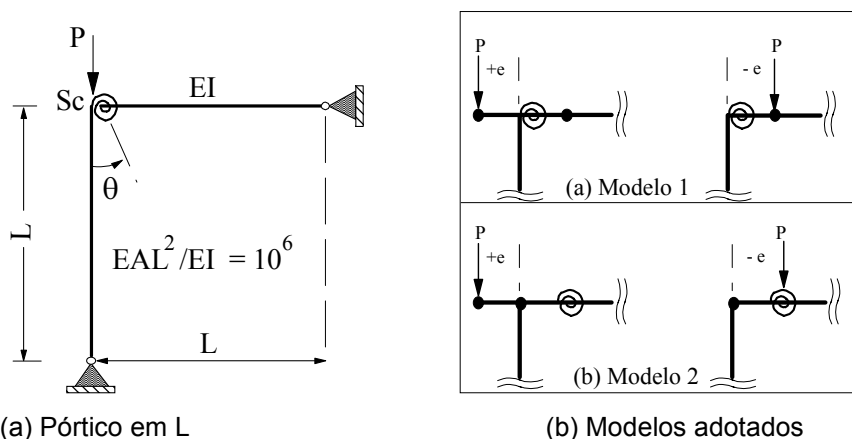
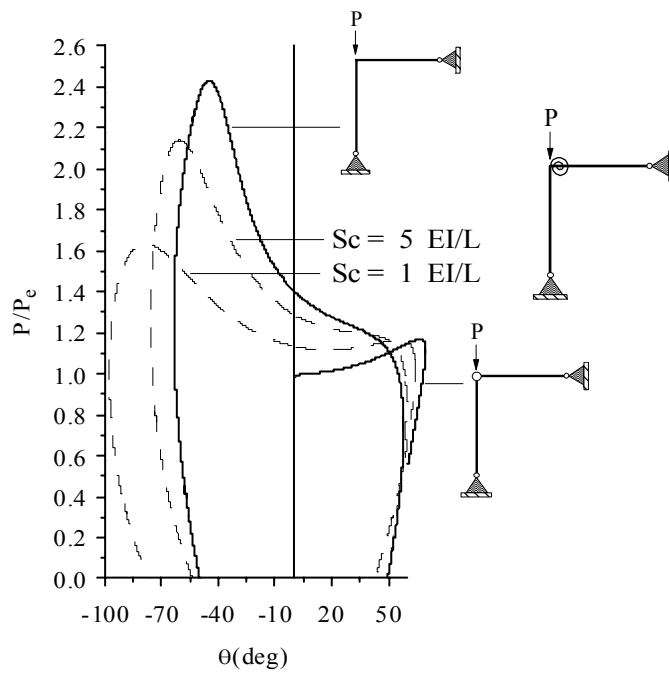
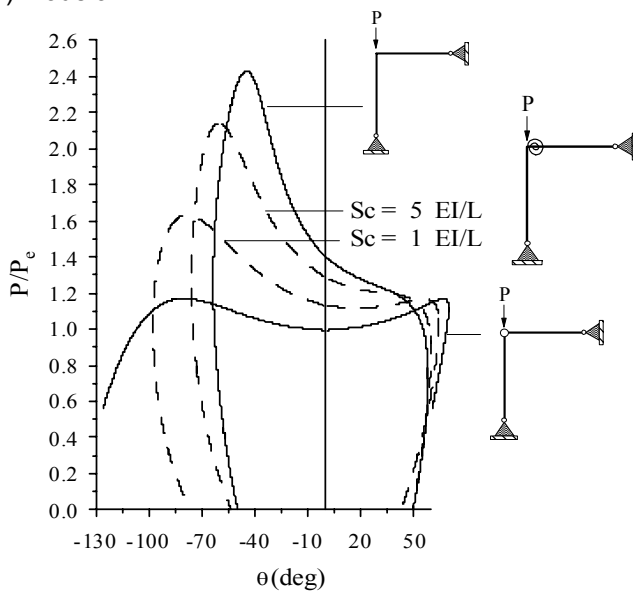


Figura 3.31: Pórtico em L com ligação semi-rígida entre as barras.



(a) Modelo 1



(b) Modelo 2

Figura 3.32: Trajetórias de equilíbrio do pórtico em L com ligação semi-rígida.

Pode-se observar inicialmente para os dois conjuntos de trajetórias de equilíbrio são semelhantes, principalmente para o caso da excentricidade positiva (trechos das trajetórias do lado direito nas duas figuras). No caso da excentricidade negativa (trechos das trajetórias do lado esquerdo), a medida que Sc diminui, a resposta pós-crítica dos dois conjuntos começam a apresentar diferenças, chegando até a situação limite de $Sc = 0$, onde o caminho pós-crítico

não pode ser obtido através do modelo 1. Isso já era esperado, pois nesse modelo o momento fletor não pode ser transmitido quando $Sc = 0$.

Adicionalmente, como já era também esperado, o aumento da rigidez da ligação promoveu um acréscimo do valor da carga crítica do pórtico. Entretanto, esse acréscimo de P_{cr} foi acompanhado por um aumento da inclinação da trajetória pós-crítica, o que caracteriza uma maior sensibilidade a imperfeições.

Essa é uma característica interessante apresentada por alguns sistemas estruturais sensíveis a imperfeições: a carga crítica cresce devido à variação de certos parâmetros, mas a sensibilidade a imperfeições também cresce. Desse modo, o aparente acréscimo na capacidade de carga pode ser totalmente destruído pela inevitável presença de imperfeições.

Para concluir, é importante observar que, geralmente, na prática, as relações das estruturas de aço são tais que efeitos de plasticidade podem ocorrer durante as fases iniciais da resposta pós-crítica ou até mesmo antes da ocorrência da flambagem do sistema. Nessas circunstâncias, é obviamente necessário considerar uma formulação que considere a plastificação de algumas seções. Esse tipo de abordagem certamente será considerado futuramente na continuidade do presente trabalho de pesquisa.

4

PROBLEMA ESTRUTURAL DINÂMICO NÃO-LINEAR

4.1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, a definição das equações diferenciais ordinárias de movimento, caracterizando o equilíbrio dinâmico do sistema estrutural, bem como as expressões das matrizes de massa e de amortecimento são mostradas na Seção 4.2. Em seguida, na Seção 4.3, são apresentados o problema de vibração livre e os procedimentos usados neste trabalho para se calcular as frequências naturais e os modos de vibração. Por fim, a Seção 4.4 fornece uma descrição detalhada dos métodos de integração explícitos e implícitos, bem como das estratégias de adaptatividade do incremento de tempo. Juntos, esses procedimentos são usados na solução dos problemas estruturais dinâmicos lineares e não-lineares.

4.2

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações diferenciais que governam a resposta dinâmica de um sistema estrutural podem ser obtidas utilizando-se o *Teorema dos Deslocamentos Virtuais*. Portanto, impondo-se o equilíbrio ao elemento finito apresentado na Figura 4.1, chega-se à seguinte relação, já adotando-se uma notação matricial:

$$\int_0^L \left[\delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{c}(x) \dot{\mathbf{u}} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \right] dx = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_e(t) \quad (4.1)$$

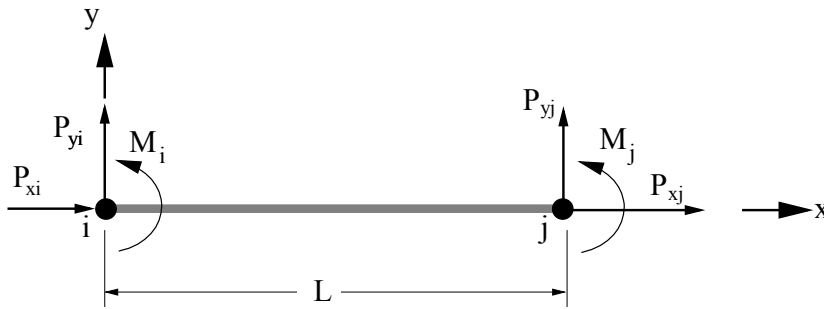


Figura 4.1: Elemento finito de viga-coluna adotado.

onde $\delta \mathbf{u}$ são os deslocamentos virtuais e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ as deformações virtuais correspondentes; $\boldsymbol{\sigma}$ são as tensões no elemento em equilíbrio com \mathbf{F}_e , que são as forças externas aplicadas, função da variável tempo, t ; ρ é a massa por unidade de volume e finalmente $c(x)$ representa o coeficiente de amortecimento viscoso distribuído ao longo comprimento L do elemento.

O campo de deslocamentos \mathbf{u} e suas duas primeiras derivadas no tempo, velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ ($d\mathbf{u}/dt$) e aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$ ($d^2\mathbf{u}/dt^2$), podem ser aproximados através das funções de forma $\mathbf{H}(x)$ (Equação (2.20)), e dos parâmetros nodais incrementais $\mathbf{u}^e(t)$, $\dot{\mathbf{u}}^e(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}^e(t)$, dependentes no tempo, como segue:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{H}(x) \mathbf{u}^e(t) \quad (4.2a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{H}(x) \dot{\mathbf{u}}^e(t) \quad (4.2b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{H}(x) \ddot{\mathbf{u}}^e(t) \quad (4.2c)$$

Pode-se considerar as relações anteriores como uma separação local de variáveis (Cook et All, 1989). Através da aproximação dos deslocamentos (4.2a), avalia-se as deformações no elemento através da expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \mathbf{B}(x) \mathbf{u}^e(t) \quad (4.3)$$

onde \mathbf{B} é definida como a matriz deformação-deslocamento e é obtida diferenciando-se e combinando-se de forma apropriada as linhas da matriz \mathbf{H} .

Com a substituição das Equações (4.2a), (4.2b), (4.2c) e (4.3) em (4.1), chega-se à forma aproximada e discreta desta última, em qualquer instante t , ou seja:

$$\delta \mathbf{u}^e \text{T} \left[\int_0^L \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, dx \, \ddot{\mathbf{u}}^e + \int_0^L c(x) \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, dx \, \dot{\mathbf{u}}^e + \int_0^L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dx - \mathbf{F}_e \right] = 0 \quad (4.4)$$

Observe que, ao tentar satisfazer a equação anterior, e sabendo que a variação dos deslocamentos $\delta \mathbf{u}$ é arbitrária, chega-se à equação de movimento na forma matricial clássica, do elemento finito considerado:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_e^e(t) \quad (4.4)$$

onde o primeiro termo do lado esquerdo da equação corresponde às forças de inércia do elemento, sendo \mathbf{M}^e a matriz de massa consistente do elemento, que é definida por:

$$\mathbf{M}^e = \int_0^L \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, dx, \quad (4.5)$$

O segundo termo caracteriza as forças dependentes da velocidade e do amortecimento; sendo a matriz \mathbf{C}^e chamada de matriz de amortecimento viscoso consistente e sua expressão é dada por:

$$\mathbf{C}^e = \int_0^L c(x) \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, dx \quad (4.6)$$

Finalmente, \mathbf{F}_i^e representa o vetor das forças internas, onde para o elemento finito adotado, e para problemas não-lineares, é calculado na forma incremental conforme apresentado no Capítulo 2, Equação (2.26).

Na prática, a determinação do coeficiente $c(x)$ em (4.5) é extremamente complicada ou até mesmo inviável. É adotada então neste trabalho a metodologia

usual de se contornar essa dificuldade: avalia-se a matriz de amortecimento através de uma matriz proporcional às matrizes de massa e de rigidez, ou seja, $\mathbf{C}^e = a_m \mathbf{M}^e + a_k \mathbf{K}^e$, onde a_m e a_k são os coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh. Seus valores são obtidos a partir do fator de amortecimento ξ , definido pelo usuário, e de duas frequências naturais distintas ω_i e ω_j , conforme expressões a seguir (Chopra, 1995):

$$a_m = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad \text{e} \quad a_k = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (4.7)$$

Finalmente, de acordo com as relações anteriores e somando-se a contribuição de cada elemento finito usado na modelagem do problema, escreve-se a equação que define a equilíbrio dinâmico de um dado sistema estrutural de acordo com:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_e \quad (4.8)$$

4.2.1

Considerações sobre a matriz de massa

Uma componente genérica m_{ij} da matriz de massa é conhecida como coeficiente de influência de massa e representa a força atuante no grau de liberdade i devido à aplicação de uma aceleração unitária em j e nula nos demais graus de liberdade. O método mais simples de se avaliar a matriz de massa de um elemento finito é o conhecido como o *método da massa concentrada (lumped mass method)*, em que se supõe as propriedades inerciais concentradas nos nós do elemento. Desse modo, para o elemento de viga-coluna da Figura 4.1, a matriz de massa concentrada \mathbf{M}^L é dada por uma matriz diagonal cujas componentes não-nulas são representadas pelo vetor:

$$\mathbf{M}_{ii}^L = [m/2 \quad m/2 \quad I_M \quad m/2 \quad m/2 \quad I_M] \quad (4.9)$$

onde o momento de inércia de massa I_M de uma barra uniforme de comprimento $L/2$ e massa $m/2 = \rho AL/2$ é dado por:

$$I_M = \frac{\rho AL^2}{24} \quad (4.10)$$

Assim, (4.9) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{ii}}^L = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{L^2}{12} & 1 & 1 & \frac{L^2}{12} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Evidentemente, a grande vantagem do *método da massa concentrada* é o fato da matriz de massa ser diagonal. Por outro lado, uma abordagem utilizando a matriz de massa consistente, dada pela equação (4.5), oferece maior precisão da resposta do sistema e, portanto, uma convergência mais rápida quando se utiliza um processo iterativo de solução. Além disso, as relações entre energia potencial e energia cinética são obtidas de forma consistente (Cook et al, 1989).

A matriz de massa consistente do elemento de viga-coluna adotado (Figura 4.1) é obtida diretamente através da Equação (4.5).

Ao se analisar o elemento finito com ligações semi-rígidas (elemento híbrido, Figura 2.10), no que diz respeito à definição da matriz de massa consistente, pode-se partir da seguinte aproximação dos deslocamentos transversais na forma incremental (Chan e Chui, 2000):

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} H_1^2 H_2 L & -H_1 H_2^2 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3-2H_1)H_1 & (3-2H_2)H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta v_j \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

onde:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad H_2 = \frac{x}{L} \quad (4.13)$$

Combinando-se (4.12), (2.41) e (2.42), chega-se ao campo de deslocamento Δv em função dos deslocamentos nodais, isto é:

$$\Delta v = \begin{bmatrix} H_1^2 H_2 L & -H_1 H_2^2 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (3-2H_1)H_1 & (3-2H_2)H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

expressão esta que pode ser reorganizada da seguinte forma:

$$\Delta v = \mathbf{H}_{sr} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

onde a matriz \mathbf{H}_{sr} , que contém as funções de forma específicas para o elemento com ligações semi-rígidas, é dada por:

$$\mathbf{H}_{sr} = \left(\begin{bmatrix} H_1^2 H_2 L & -H_1 H_2^2 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} + K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & S_{cj} + K_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (3-2H_1)H_1 & 0 & (3-2H_2)H_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Substituindo então \mathbf{H}_{sr} na expressão (4.5) chega-se à matriz de massa consistente (4x4) referentes aos deslocamentos indicados em (4.15). Os demais termos da matriz de massa consistente 6x6 do elemento com ligações semi-rígidas são idênticos aos da matriz de massa do elemento convencional.

4.2.2

Equações do movimento para o problema linear

Para um sistema estrutural com comportamento linear-elástico, o vetor das forças internas \mathbf{F}_i , para os tipos de elementos finitos adotados, pode ser obtido simplesmente fazendo-se:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_L \mathbf{U} \quad (4.17)$$

onde \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez linear do sistema e \mathbf{U} os deslocamentos nodais.

As forças externas são variáveis conhecidas do problema a ser resolvido. Com o objetivo de facilitar para o usuário do programa computacional a definição destas forças, adotou-se neste trabalho, a utilização de um vetor de referências semelhante ao utilizado no processo de solução do problema não-linear estático. Assim, define-se $\mathbf{F}_e(t) = \lambda(t) \mathbf{F}_r$, em que $\lambda(t)$ é o parâmetro de carga variável no tempo e \mathbf{F}_r , como já definido, é o vetor de cargas de referência.

Portanto, a resposta dinâmica de um sistema estrutural com características lineares pode ser obtida resolvendo-se o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_L \mathbf{U} = \lambda(t) \mathbf{F}_r \quad (4.19)$$

Geralmente, \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K}_L são constantes e simétricas; \mathbf{M} e \mathbf{K}_L são matrizes positivo definidas, \mathbf{C} é positivo semi-definida e λ uma função contínua do tempo.

Resolver o sistema de equações (4.19) consiste em se encontrar a resposta da estrutura no instante t , satisfazendo as condições iniciais do problema,

$$\mathbf{U}(t = 0) = {}^0\mathbf{U} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{U}}(t = 0) = {}^0\dot{\mathbf{U}} \quad (4.20)$$

onde ${}^0\mathbf{U}$ e ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ são, respectivamente, os vetores de deslocamento e velocidade iniciais. A aceleração em $t = 0$ é obtida diretamente de:

$${}^0\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1}[\lambda(0) \mathbf{F}_r - \mathbf{C} {}^0\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{K}_L {}^0\mathbf{U}] \quad (4.21)$$

Na Seção 4.4 serão apresentados vários procedimentos de solução da Equação (4.19).

4.2.3

Equações do movimento para o problema não-linear geométrico

Para o caso do sistema estrutural com comportamento não-linear elástico, as equações de movimento podem ser representadas, genericamente, como segue:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda(t) \mathbf{F}_r \quad (4.22)$$

onde agora o vetor das forças internas \mathbf{F}_i depende não-linearmente dos deslocamentos \mathbf{U} . Observe, entretanto, que este vetor pode ser calculado, para cada passo de tempo, e para os elementos finitos considerados, seguindo a abordagem incremental apresentada no Capítulo 2.

O algoritmo de solução adotado na solução da Equação (4.22) será apresentado adiante, na Seção 4.4.2.

4.3

ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE

O conhecimento das frequências naturais e modos de vibração de uma estrutura é de fundamental importância para o entendimento das vibrações livres e forçadas. Outra importante função de uma análise de frequências é o estudo da estabilidade de estruturas com caminhos de equilíbrio complicados. Se uma configuração de equilíbrio apresenta pelo menos uma frequência de valor imaginário, esta configuração é instável. Se uma configuração apresenta uma frequência nula, esta configuração corresponde a um ponto crítico. Este fato torna, portanto, bastante útil a obtenção de curvas que relacionam o quadrado da frequência natural com o nível de carregamento.

4.3.1

Equação característica

Costuma-se geralmente resolver os problemas de vibração livre desconsiderando inicialmente os efeitos de amortecimento. Nesse caso, a equação do movimento assume a seguinte forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema estrutural, que pode ou não ser dependente das forças internas no elemento. Supondo então que os deslocamentos na equação anterior possam ser substituídos por funções senoidais do tipo $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 \sin(\omega t)$, chega-se à seguinte equação característica do problema de autovalor:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (4.24)$$

onde ω é a frequência natural do sistema.

Para problemas não-lineares, na presença de forças axiais, a rigidez do elemento finito e conseqüentemente a rigidez do sistema estrutural, se modificam.

Esse efeito pode incluído na análise através da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_τ . Assim, o problema de autovalor pode ser redefinido da seguinte forma:

$$\left| [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau] - \omega^2 \mathbf{M} \right| = 0 \quad (4.25)$$

onde as matrizes de rigidez \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_τ para o elemento finito de pórtico plano convencional ou híbrido (ligações semi-rígidas) é obtida conforme mostrado no Capítulo 2.

4.3.2

Algoritmo de solução do problema de autovalor

A solução do problema de autovalor definido pela Equação (4.24) pode ser obtida de forma direta utilizando, por exemplo, o método de Jacobi (Brebbia e Ferrante, 1986; Demmel e Vaselec, 1989).

Entretanto, ao se incorporar a não-linearidade geométrica na análise, esta solução deixa de ser obtida de forma direta, já que a montagem da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_τ depende dos esforços internos atuantes no elemento. Faz-se necessário, portanto, o conhecimento da configuração de equilíbrio do sistema sob determinado carregamento, para que em seguida se possam avaliar esses esforços internos.

O algoritmo adotado neste trabalho para se calcular as frequências naturais, após cada nova configuração de equilíbrio do sistema, é apresentado na Figura 4.2.

Observe que a solução do problema de autovalor é obtida através da inclusão da sub-rotina FREQNAT, logo após a verificação da convergência do processo iterativo. Assim, a cada nova configuração de equilíbrio do sistema estrutural, os deslocamentos e os esforços internos obtidos são utilizados em FREQNAT para avaliar a matriz de rigidez e, logo em seguida, as frequências naturais e os modos de vibração. Na Figura 4.3 é mostrada a organização da sub-rotina FREQNAT.

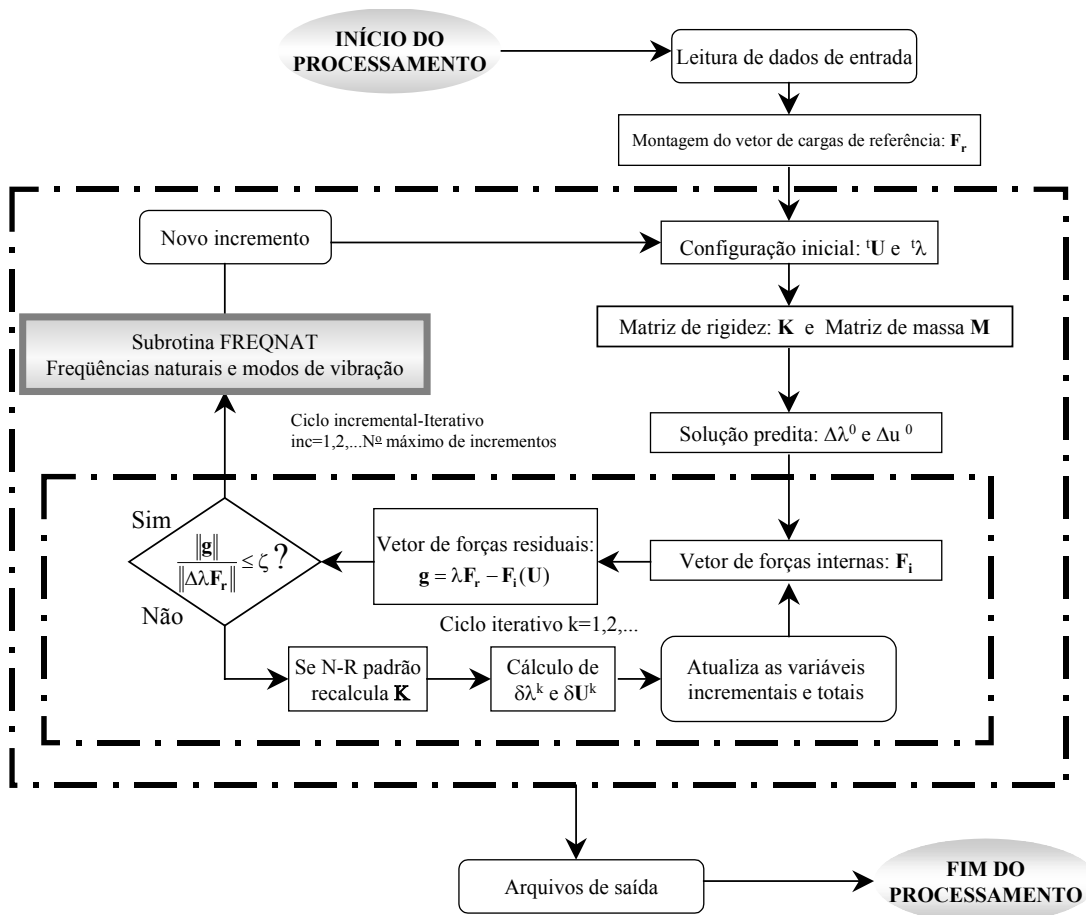


Figura 4.2: Algoritmo de solução não-linear.

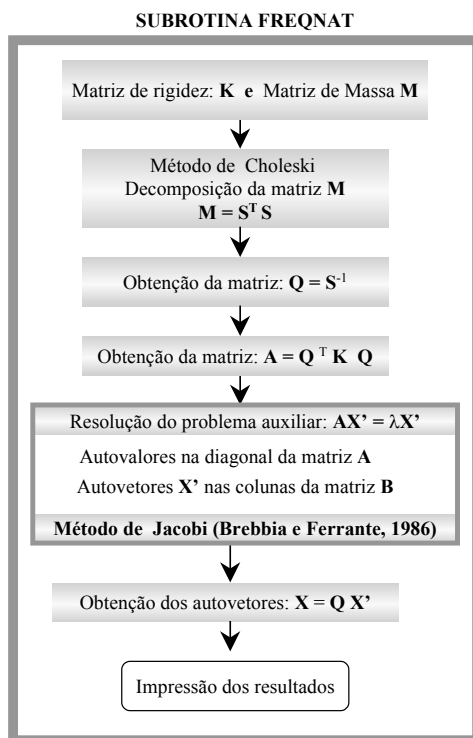


Figura 4.3: Algoritmo adotado para cálculo das frequências (Sub-rotina FREQNAT).

4.4

ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO

Os métodos de integração encontrados na literatura podem ser divididos em dois grupos: métodos explícitos e métodos implícitos (Dokainish e Subbaraj, 1988, Subbaraj e Dokainish, 1989). Esses métodos apresentam vantagens e desvantagens, que podem ser comparadas através do maior intervalo de tempo que pode ser utilizado para produzir a resposta com a eficiência desejada, bem como através da sua estabilidade numérica.

Um método de integração baseia-se geralmente em duas idéias básicas e essenciais:

- (i) as equações do movimento são discretizadas no tempo e o equilíbrio do sistema é imposto em instantes separados por intervalos de tempo;
- (ii) ao longo de cada intervalo de tempo, um determinado comportamento é adotado para se determinar a variação do deslocamento, da velocidade e da aceleração.

Nas próximas seções serão apresentados, de forma detalhada, os métodos explícitos e implícitos que foram implementados no programa de análise estrutural dinâmica linear e não-linear desenvolvido neste trabalho.

4.4.1

Métodos explícitos e implícitos

A principal característica dos métodos explícitos é a obtenção da solução do problema dinâmico no tempo $t+\Delta t$ considerando-se o equilíbrio do sistema no instante t , enquanto que para os métodos implícitos, algumas condições de equilíbrio precisam ser satisfeitas em $t+\Delta t$.

Os métodos explícitos têm a vantagem de exigir um menor número de operações nos cálculos envolvidos, o que os tornaria mais econômicos computacionalmente. Os métodos implícitos requerem usualmente a solução de um sistema de equações não-lineares em cada passo de tempo e a solução do problema é obtida através de sucessivas soluções de sistemas de equações

algébricas lineares (para cada instante de tempo), utilizando em geral algoritmos iterativos do tipo Newton-Raphson.

Em geral, os métodos implícitos são incondicionalmente estáveis, ou seja, não têm restrição com relação ao tamanho do incremento de tempo para efeito de estabilidade do algoritmo, e dessa forma, o tamanho do incremento de tempo é ditado pela precisão desejada e não pela estabilidade do algoritmo. Já os métodos explícitos são sempre condicionalmente estáveis e os incrementos de tempo requeridos por esses métodos, para que seja atendida a condição de estabilidade, são muito pequenos. Ao contrário dos algoritmos implícitos, o tamanho do incremento de tempo nos algoritmos explícitos é governado, em geral, pela estabilidade e não pela precisão do algoritmo, visto que o incremento de tempo requerido para estabilidade é tão pequeno que se torna suficiente para que se obtenha uma resposta precisa.

Os métodos explícitos são particularmente bem sucedidos em problemas dinâmicos de curta duração ou problemas de propagação de ondas, tais como estruturas sujeitas a carregamentos explosivos ou impactos de alta velocidade.

Os métodos explícitos mais tradicionalmente empregados na solução de problemas estruturais dinâmicos são os *métodos da diferença central e de Runge-Kutta*. Com relação aos métodos implícitos, destacam-se os *métodos da família de Newmark*

4.4.1.1

Método da diferença central

O método da diferença central é um dos métodos mais utilizados em programas de análise dinâmica. Esse método explícito é baseado nas seguintes fórmulas de diferenças centrais:

$${}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U} \right); \quad {}^{t-\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t/2}\mathbf{U} \right) \quad (4.26a,b)$$

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t/2}\mathbf{U} \right) \quad (4.26c)$$

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} \left({}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} - {}^{t-\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} \right) \quad (4.26d)$$

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U} = \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} + {}^t\mathbf{U} \right); \quad {}^{t-\Delta t/2}\mathbf{U} = \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right) \quad (4.26e,f)$$

onde $t-\Delta t$, t e $t+\Delta t$ são 3 instantes de tempo sucessivos. Das equações anteriores pode-se tirar:

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2\Delta t} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right) \quad (4.27a)$$

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2 {}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right) \quad (4.27b)$$

Será considerada inicialmente solução do problema estrutural dinâmico linear. Levando-se então (4.27a) e (4.27b) na equação diferencial de equilíbrio dinâmico (4.19) e, em seguida, reagrupando-se os termos, chega-se a:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \lambda(t)\mathbf{F}_r - \left(\mathbf{K} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^t\mathbf{U} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \quad (4.28)$$

do qual se deseja obter os deslocamentos ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$.

Nota-se em (4.28) que ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ é função de ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^{t-\Delta t}\mathbf{U}$, o que torna necessário um procedimento especial para iniciar o processo de solução. Esse procedimento pode ser facilmente alcançado conhecendo-se ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$, de onde pode-se calcular ${}^{-\Delta t}\mathbf{U}$, através de (4.27a) e (4.27b), ou seja:

$${}^{-\Delta t}\mathbf{U} = {}^0\mathbf{U} - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.29)$$

Conforme observado em (4.28), os deslocamentos no instante de tempo $t+\Delta t$ são calculados através dos parâmetros obtidos da configuração de equilíbrio do instante anterior t . Isso caracteriza um método explícito de integração. Note também que esse esquema de integração não requer a fatorização da matriz de rigidez efetiva na solução incremental. Entretanto, mesmo se uma matriz de massa diagonal for adotada (*método da massa concentrada*), e se a matriz de amortecimento não for diagonal, haverá necessidade da fatorização da matriz de massa efetiva $\hat{\mathbf{M}} = (1/\Delta t^2)\mathbf{M} + (1/2\Delta t)\mathbf{C}$.

Uma alternativa para contornar esse problema é apresentada por Dokainish e Subbaraj (1988), em que, substituindo ${}^t\dot{\mathbf{U}} = 1/2\Delta t ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})$ pela aproximação ${}^t\dot{\mathbf{U}} = 1/\Delta t ({}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})$, chega ao seguinte sistema explícito:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1} [\Delta t^2 ({}^t\lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{K}{}^t\mathbf{U}) - \Delta t \mathbf{C} ({}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})] + 2 {}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \quad (4.30)$$

No presente trabalho, entretanto, foi implementado o procedimento geral utilizando-se a expressão (4.28), conforme mostrado na tabela abaixo.

a. Cálculos iniciais:

1. Monte a matriz de massa \mathbf{M} , a matriz de rigidez \mathbf{K} , e a matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C} ;
2. Inicialize ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$;
3. Selecione um intervalo de tempo Δt ;
4. Calcule as constantes de integração:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}; a_1 = \frac{1}{2\Delta t}; a_2 = 2a_0; a_3 = \frac{1}{a_2}$$
5. Calcule ${}^{-\Delta t}\mathbf{U} = {}^0\mathbf{U} - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^0\ddot{\mathbf{U}}$;
6. Monte a matriz de massa efetiva: $\hat{\mathbf{M}} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$;
7. Triangularize a matriz de massa efetiva $\hat{\mathbf{M}}$.

b. Para cada passo de tempo Δt :

1. Calcule o carregamento efetivo em t :

$$\hat{\mathbf{F}} = {}^t\lambda \mathbf{F}_r - (\mathbf{K} + a_2 \mathbf{M}) {}^t\mathbf{U} - (a_0 \mathbf{M} - a_1 \mathbf{C}) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}$$

2. Avalie os deslocamentos no instante $t+\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{M}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$$

3. Avalie velocidades e acelerações no instante t :

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = a_1 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})$$

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = a_0 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2 {}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U})$$

Tabela 4.1: Método da diferença central.

4.4.1.2

Método de Runge-Kutta

Uma forma de se resolver problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias de ordem elevada é reduzir o problema a um sistema de equações de primeira ordem. Por exemplo, a equação de segunda ordem dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} = r(x) \quad (4.31)$$

pode ser reduzida ao seguinte sistema de duas equações de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = z(x) \quad (4.32a)$$

$$\frac{dz}{dx} = r(x) - q(x)z(x) \quad (4.32b)$$

Dessa maneira, pode-se substituir, ou reduzir, um problema com uma equação diferencial ordinária de ordem N por um problema de N de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, ou seja:

$$\frac{dv_i(x)}{dx} = f_i(x, v_1, \dots, v_N) \quad i = 1, \dots, N \quad (4.33)$$

onde f_i são funções conhecidas.

Para a solução do problema através de uma aproximação linear, como ilustrada na Figura 4.4, poderia ser adotado o *método de Euler*, que baseia-se na seguinte fórmula:

$${}^{n+1}\mathbf{v} = {}^n\mathbf{v} + \Delta x \mathbf{f}({}^n x, {}^n \mathbf{v}) \quad (4.34)$$

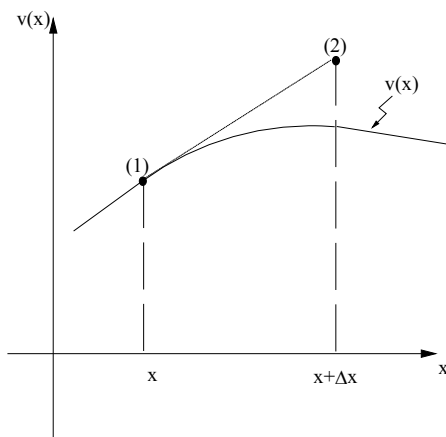


Figura 4.4: Representação gráfica do método de Euler (aproximação linear).

O método de Euler é conceitualmente importante. Entretanto, na prática, não é recomendável, pois, devido a sua aproximação grosseira, seriam necessários intervalos Δt muito pequenos para se obter soluções aceitáveis.

O *método de Runge-Kutta* consiste em se propagar a solução em um intervalo, combinando informações de vários passos obtidos pelo método de Euler em uma expansão do problema em série de Taylor na ordem que se desejar. Nos problemas de engenharia governados por equações diferenciais, em geral utiliza-se o *método de Runge-Kutta de quarta ordem*. Trata-se de um método clássico que é freqüentemente recomendado pelos matemáticos em função da sua exatidão (Dokainish e Subbaraj, 1989).

No método Runge-Kutta de quarta ordem, para cada passo Δt , é necessário que se calculem os parâmetros desejados em quatro situações distintas: uma vez para o ponto inicial, duas vezes para o ponto central e uma vez no ponto final do intervalo (Figura 4.5). A partir dos cálculos nesses pontos indicados, o valor final da função (mostrado como um ponto cheio) é calculado.

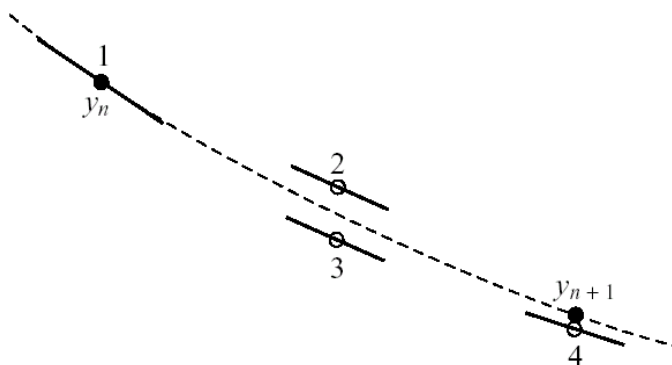


Figura 4.5: Idéia básica do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Esse método, portanto, envolve a seguinte seqüência de cálculos:

$$\mathbf{A}_1 = \Delta x \mathbf{f} \left({}^n x, {}^n \mathbf{v} \right) \quad (4.35a)$$

$$\mathbf{A}_2 = \Delta x \mathbf{f} \left({}^n x + \frac{\Delta x}{2}, {}^n \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 \right) \quad (4.35b)$$

$$\mathbf{A}_3 = \Delta x \mathbf{f} \left({}^n x + \frac{\Delta x}{2}, {}^n \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_2 \right) \quad (4.35c)$$

$$\mathbf{A}_4 = \Delta x \mathbf{f} \left({}^n x + \Delta x, {}^n \mathbf{v}_n + \mathbf{A}_3 \right) \quad (4.35d)$$

Esses quatro parâmetros são então combinados na seguinte expressão, que define a expressão geral do método de Runge-Kutta de quarta ordem:

$${}^{n+1}\mathbf{v} = {}^n\mathbf{v} + \frac{1}{6} \mathbf{A}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{A}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{A}_3 + \frac{1}{6} \mathbf{A}_4 \quad (4.36)$$

Desse modo, o método requer a avaliação da função conhecida \mathbf{f} e, por conseguinte, os parâmetros \mathbf{A}_i , em quatro pontos diferentes para cada passo Δx .

Tratando-se agora especificamente do problema de dinâmica estrutural em questão, representado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem dado em (4.19) ou (4.22), a redução da ordem do sistema é feita da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \quad (4.37a)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial t} = \mathbf{M}^{-1} [\lambda(t) \mathbf{F}_r - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{K} \mathbf{U}] \quad (4.37b)$$

portanto, para se utilizar o procedimento fornecido por (4.35-4.36), basta definir os parâmetros do método como é mostrado abaixo:

$${}^n \mathbf{x} = t \quad \text{e} \quad \Delta x = \Delta t; \quad (4.38.a)$$

$$\mathbf{f}^T = [\dot{u}_1 \ddot{u}_1 \dot{u}_2 \ddot{u}_2 \dots \dot{u}_m \ddot{u}_m]; \quad (4.38b)$$

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \dot{u}_1 u_2 \dot{u}_2 \dots u_m \dot{u}_m] \quad (4.38c)$$

onde m é o número de graus de liberdade do sistema estrutural a ser resolvido.

4.4.1.3

Método de Newmark

O método de Newmark (Newmark,1959) é o mais popular dos métodos de integração implícitos. Sua concepção é baseada na variação linear da aceleração ao longo do intervalo de integração. A variação da resposta de um sistema estrutural durante um intervalo de tempo Δt , considerando a aceleração linear, é ilustrado na Figura 4.6.

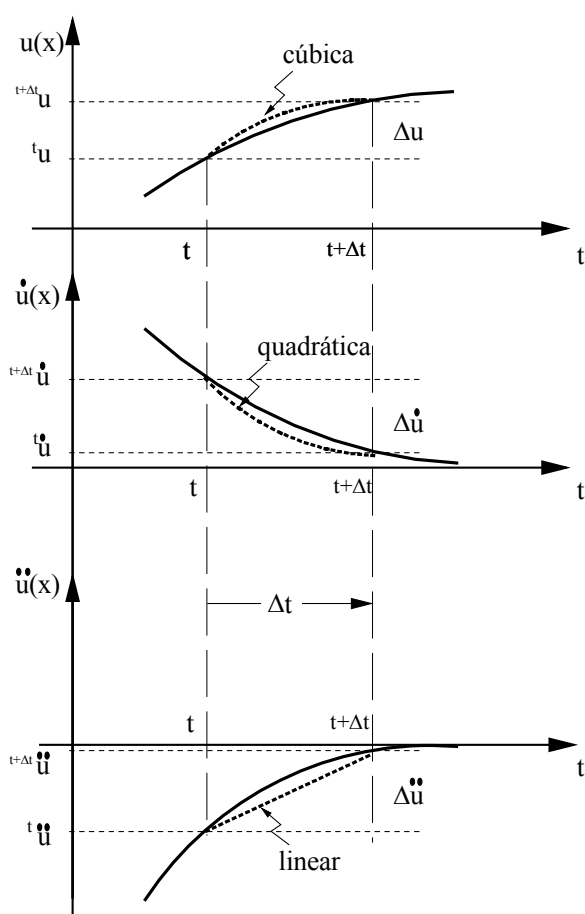


Figura 4.6: Aceleração linear.

De acordo com esse processo de integração, a expressão para a velocidade no final de cada intervalo é dada por:

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \frac{\Delta t}{2}({}^t\ddot{U} + {}^{t+\Delta t}\ddot{U}) \quad (4.39)$$

Para se obter ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ em função de parâmetros do instante anterior, utiliza-se a seguinte expansão em série de Taylor.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + {}^t\ddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^2}{2} + {}^t\dddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^3}{6} + {}^t\mathbf{U}^{iv}\frac{\Delta t^4}{24} + \dots \quad (4.40)$$

onde, de acordo com a hipótese de variação linear da aceleração, escreve-se:

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t}({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} - {}^t\ddot{\mathbf{U}}) \quad \text{e} \quad {}^t\mathbf{U}^{iv} = 0 \quad (4.41)$$

Assim, a Equação (4.40) é redefinida da seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + {}^t\ddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^2}{3} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^2}{6} \quad (4.42)$$

As expressões (4.39) e (4.42) são as fórmulas de Newmark para a variação linear da aceleração no intervalo de tempo considerado. Através do emprego dos parâmetros β e γ nessas expressões, cujos valores determinam a eficiência e estabilidade do algoritmo, chega-se às fórmulas gerais do método de Newmark, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + (1-\gamma){}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t + \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\Delta t \quad (4.43a)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right){}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 \quad (4.43b)$$

onde, para $\beta = 1/6$ e $\gamma = 1/2$, as relações acima correspondem ao método da aceleração linear. Newmark (1959) propôs os valores de $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ para se ter um algoritmo incondicionalmente estável com aceleração constante no intervalo, sendo esta definida pela média das acelerações nos instantes extremos do intervalo.

Para o problema linear, a resposta do sistema estrutural no instante $t+\Delta t$ pode ser avaliada resolvendo-se a seguinte equação de movimento:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (4.44)$$

De (4.46a), (4.46b) e (4.47), chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} \right] {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r + \\ & \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} {}^t\mathbf{U} + \left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t} - 1 \right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] - \\ & \mathbf{M} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t^2} {}^t\mathbf{U} + \frac{1}{\beta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

ou, de uma forma mais compacta:

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}} \quad (4.46)$$

onde a matriz de rigidez efetiva e o vetor de forças nodais efetivo são dados por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} \quad (4.47a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}} = & {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r + \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} {}^t\mathbf{U} + \left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t} - 1 \right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \\ & - \mathbf{M} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t^2} {}^t\mathbf{U} + \frac{1}{\beta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \end{aligned} \quad (4.47b)$$

Um resumo dos procedimentos do método Newmark para problemas estruturais lineares é apresentado no algoritmo presente na Tabela 4.2.

a. Cálculos iniciais:

1. Monte a matriz de massa \mathbf{M} , a matriz de rigidez \mathbf{K} e a matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C} ;
2. Inicialize ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$;
3. Selecione um intervalo de tempo Δt ;
4. Calcule as seguintes constantes de integração:

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}; a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}; a_3 = \left(\frac{1}{2\beta \Delta t} - 1 \right);$$

$$a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right); a_6 = \Delta t(1 - \gamma); a_7 = \Delta t\gamma$$
5. Monte a matriz de rigidez efetiva: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$;
6. Triangularize a matriz $\hat{\mathbf{K}}$.

b. Para cada passo de tempo Δt :

1. Calcule o carregamento efetivo em $t+\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{F}} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r + \mathbf{M}(a_0 {}^t\mathbf{U} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C}(a_1 {}^t\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}})$$
 2. Avalie os deslocamentos no instante $t+\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$$
 3. Avalie velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = a_0 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_6 {}^t\ddot{\mathbf{U}} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$$
-

Tabela 4.2: Método de Newmark para problemas estruturais dinâmicos lineares.

4.4.1.4

Método de Wilson- θ

O esquema de integração implícito conhecido como método Wilson- θ é uma extensão do método da aceleração linear. O método Wilson- θ , entretanto, considera variação linear da aceleração em um intervalo entre t e $t+\theta\Delta t$, como mostrado na Figura 4.7, onde $\theta \geq 1$. Quando $\theta = 1$ o problema se reduz ao método da aceleração linear. De acordo com a literatura pesquisada (Bathe, 1995; Subbaraj e Dokainish, 1989), para haver estabilidade incondicional dessa estratégia de solução é necessário utilizar $\theta \geq 1.37$.

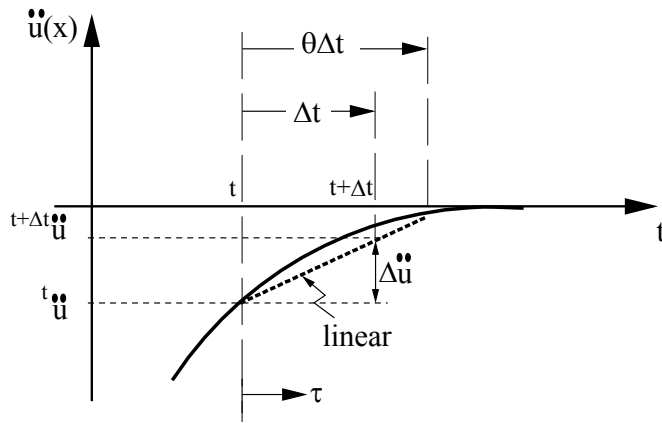


Figura 4.7: Idéia básica do método de Wilson- θ .

Fazendo τ ser o incremento no tempo, tal que $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$, tem-se a seguinte variação linear para a aceleração:

$${}^{t+\tau}\ddot{U} = {}^t\ddot{U} + \frac{\tau}{\theta\Delta t}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^t\ddot{U}) \quad (4.48)$$

Integrando-se duas vezes a equação anterior, chega-se a:

$${}^{t+\tau}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \tau {}^t\ddot{U} + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^t\ddot{U}) \quad (4.49a)$$

$${}^{t+\tau}U = {}^tU + \tau {}^t\dot{U} + \frac{\tau^2}{2} {}^t\ddot{U} + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} - {}^t\ddot{U}) \quad (4.49b)$$

Observe então que no instante $t+\theta\Delta t$, ou seja, $\tau = \theta\Delta t$, as duas equações anteriores se tornam:

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \frac{\theta\Delta t}{2}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} + {}^t\ddot{U}) \quad (4.50a)$$

$${}^{t+\theta\Delta t}U = {}^tU + \theta\Delta t {}^t\dot{U} + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} + 2 {}^t\ddot{U}) \quad (4.50b)$$

Dessas equações pode-se chegar aos valores de ${}^{t+\theta\Delta t}\dot{U}$ e ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U}$ em termos de ${}^{t+\theta\Delta t}U$, ou seja:

$${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - \frac{6}{\theta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} - 2 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.51a)$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = \frac{3}{\theta\Delta t}({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - 2 {}^t\dot{\mathbf{U}} - \frac{\theta\Delta t}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.51b)$$

Para se obter os deslocamentos, as velocidades e as acelerações no instante $t+\theta\Delta t$, o equilíbrio do sistema estrutural deve ser considerado nesse instante. Assim, escreve-se:

$$\mathbf{M} {}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} {}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\theta\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (4.52)$$

onde o parâmetro de carga é extrapolado linearmente através da expressão:

$${}^{t+\theta\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \theta ({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda) \quad (4.53)$$

Substituindo então as expressões de ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ e ${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$, Equações (4.51a) e (4.51b), em (4.52), chega-se a uma equação onde os deslocamentos podem ser obtidos no instante $t+\theta\Delta t$, ${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U}$, ou seja:

$$\left[\mathbf{K} + \frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{C} + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \mathbf{M} \right] {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} = [{}^t\lambda + \theta({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda)] \mathbf{F}_r + \mathbf{C} \left[\frac{3}{\theta\Delta t} {}^t\mathbf{U} + 2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\theta\Delta t}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] + \mathbf{M} \left[\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} {}^t\mathbf{U} + \frac{6}{\theta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + 2 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \quad (4.54)$$

que, como na seção anterior, pode ser simplificada de acordo com:

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}} \quad (4.55)$$

onde agora a matriz de rigidez efetiva e o vetor de forças nodais efetivo são dados por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{C} + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \mathbf{M} \quad (4.56a)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = [\lambda + \theta(\lambda - \lambda)] \mathbf{F}_r + \mathbf{C} \left[\frac{3}{\theta \Delta t} {}^t \mathbf{U} + 2 {}^t \dot{\mathbf{U}} + \frac{\theta \Delta t}{2} {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] + \mathbf{M} \left[\frac{6}{(\theta \Delta t)^2} {}^t \mathbf{U} + \frac{6}{\theta \Delta t} {}^t \dot{\mathbf{U}} + 2 {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] \quad (4.56b)$$

Note que através do vetor de deslocamento ${}^{t+\theta\Delta t} \mathbf{U}$ obtido da solução de (4.55), chega-se, para o instante $t+\theta\Delta t$, na aceleração ${}^{t+\theta\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}$ usando-se a Equação (2.51a). Com esse vetor calculado e fazendo-se $\tau = \Delta t$ em (4.48), (4.49a) e (4.49b), obtém-se, por fim, nos valores de ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}$, ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ procurados. A Tabela 4.3 apresenta de forma resumida o algoritmo de Wilson- θ para os problemas estruturais lineares.

a. Cálculos iniciais:

1. Monte a matriz de massa \mathbf{M} , a matriz de rigidez \mathbf{K} , e a matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C} ;
2. Inicialize ${}^0 \mathbf{U}$, ${}^0 \dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0 \ddot{\mathbf{U}}$;
3. Selecione um intervalo de tempo Δt ;
4. Calcule as seguintes constantes de integração:

$$a_0 = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2}; a_1 = \frac{3}{\theta \Delta t}; a_2 = 2a_1; a_3 = \frac{\theta \Delta t}{2};$$

$$a_4 = \frac{a_0}{\theta}; a_5 = -\frac{a_2}{\theta}; a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}; a_7 = \frac{\Delta t}{2}; a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$
5. Monte a matriz de rigidez efetiva: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$;
6. Triangularize $\hat{\mathbf{K}}$.

b. Para cada passo de tempo Δt :

1. Calcule o carregamento efetivo em $t+\theta\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{F}} = [\lambda + \theta(\lambda - \lambda)] \mathbf{F}_r + \mathbf{M} (a_0 {}^t \mathbf{U} + a_2 {}^t \dot{\mathbf{U}} + 2 {}^t \ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C} (a_1 {}^t \mathbf{U} + 2 {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t \ddot{\mathbf{U}})$$
 2. Avalie os deslocamentos no instante $t+\theta\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\theta\Delta t} \mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$$
 3. Avalie deslocamentos, velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = a_4 ({}^{t+\theta\Delta t} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{U}) + a_5 {}^t \dot{\mathbf{U}} - a_6 {}^t \ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_7 ({}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + {}^t \ddot{\mathbf{U}})$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + \Delta t {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_8 ({}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + 2 {}^t \ddot{\mathbf{U}})$$
-

Tabela 4.3: Método de Wilson- θ para problemas estruturais dinâmicos lineares.

4.4.2

Considerações sobre a análise dinâmica não-linear

Os algoritmos de integração explícitos e implícitos apresentados nas seções anteriores podem ser empregados na obtenção da resposta dinâmica não-linear de sistemas estruturais governada pela Equação (4.22). Entretanto, alguns cuidados devem ser tomados na busca pelo equilíbrio dinâmico do sistema, pois o vetor das forças internas F_i é uma função não-linear dos deslocamentos da estrutura.

Na realidade, todos os ingredientes para a obtenção da solução de (4.22) já foram apresentados, quais sejam:

- (i) a formulação incremental usada no Capítulo 2;
- (ii) a estratégia de solução não-linear também discutida no Capítulo 2, que é baseada num esquema incremental-iterativo; e, por fim,
- (iii) os algoritmos de integração apresentados neste capítulo, em particular, os esquemas implícitos.

Basta, portanto, coordenar e organizar esses procedimentos para se chegar ao algoritmo apresentado na Tabela 4.4 (Subbaraj e Dokainish, 1989), onde foram agrupados os métodos Newmark e Wilson- θ em um mesmo procedimento para análise de problemas estruturais dinâmicos não-lineares.

Esse foi o algoritmo de solução adotado no presente trabalho para a obtenção da resposta dinâmica não-linear de sistemas estruturais. No capítulo de exemplos e nas conclusões serão feitas considerações adicionais sobre a sua performance e eficiência computacional.

a. Procedimentos iniciais:

1. Calcule a matriz de massa \mathbf{M} ;
2. Inicialize ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$.

b. Para cada passo de tempo Δt :

1. Avalie a matriz de rigidez tangente \mathbf{K} ;
2. Avalie a matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C} ;
3. Calcule as seguintes constantes de integração:

i. Método de Newmark:

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}; a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}; a_3 = \left(\frac{1}{2\beta \Delta t} - 1 \right); a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1;$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right); a_6 = a_0; a_7 = -a_2; a_8 = -a_3; a_9 = \Delta t(1 - \gamma);$$

$$a_{10} = \Delta t \gamma$$

Obs. Faça $\theta = 1$ (recurso para se obter o vetor de carregamento efetivo para os dois métodos através de uma mesma expressão).

ii. Método de Wilson- θ :

$$a_0 = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2}; a_1 = \frac{3}{\theta \Delta t}; a_2 = 2a_1; a_3 = 2; a_4 = 2; a_5 = \frac{\theta \Delta t}{2}; a_6 = \frac{a_0}{\theta};$$

$$a_7 = -\frac{a_2}{\theta}; a_8 = 1 - \frac{3}{\theta}; a_9 = \frac{\Delta t}{2}; a_{10} = \frac{\Delta t^2}{6}$$

4. Monte a matriz de rigidez efetiva:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$$

5. Calcule o vetor de carregamento efetivo:

$$\hat{\mathbf{F}} = [{}^t\lambda + \theta({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda)] \mathbf{F}_r + \mathbf{M} (a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C} (a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) - {}^t\mathbf{F}_i$$

6. Avalie os deslocamentos nodais incrementais:

$$\hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$$

7. Processo iterativo para obtenção do equilíbrio dinâmico: $k = 1, 2, \dots$

i. Calcule as aproximações para acelerações, velocidades e deslocamentos:

$${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^k = a_0 \Delta \mathbf{U}^k - a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^k = a_1 \Delta \mathbf{U}^k - a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}}_t - a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^k$$

ii. Calcule o vetor de forças internas:

$${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{F}_i^{k+1} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{k+1}$$

iii. Calcule o vetor de forças residuais:

$${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{R}^{k+1} = [{}^t\lambda_t + \theta({}^{t+\Delta t}\lambda - {}^t\lambda)]\mathbf{F}_r - (\mathbf{M} {}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^k + \mathbf{C} {}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^k + {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{F}_i^k)$$

iv. Calcule a correção dos deslocamentos incrementais:

$$\widehat{\mathbf{K}} \delta \mathbf{U}^{k+1} = {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{R}^{k+1}$$

v. Atualize os deslocamentos incrementais:

$$\Delta \mathbf{U}^{k+1} = \Delta \mathbf{U}^k + \delta \mathbf{U}^{k+1}$$

vi. Verifique a convergência:

$$\frac{|\Delta \mathbf{U}^{k+1}|}{|{}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{k+1}|} \leq \text{fator de tolerância?}$$

Não: volte ao passo 7.

Sim: continue, vá para vii.

vii. Avalie os deslocamentos, velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$; vá para c.

c. Para o próximo instante:

1. Avalie o vetor de forças internas: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \Delta t \mathbf{F}_i$;
2. Selecione um novo intervalo de tempo Δt (*estratégia adaptativa*);
3. Volte ao passo b.

Tabela 4.4: Métodos de Newmark e de Wilson- θ para problemas estruturais dinâmicos não-lineares.

4.4.3

Adaptatividade no tempo

Com o objetivo de se melhorar a precisão e a eficiência de um algoritmo de integração no tempo, busca-se aqui um procedimento adaptativo que selecione, no final de cada passo do processo incremental, o maior incremento de tempo possível para o próximo passo, e que mantenha o grau de precisão desejado para a resposta.

De acordo com Bergan e Mollestad (1985), alguns critérios devem ser seguidos para garantir a boa performance de um algoritmo de adaptação no tempo. Dentre estes critérios estão:

- (i) os ajustes no incremento de tempo devem ser feitos tomando-se como referência o incremento de tempo inicial escolhido. É necessário que o incremento de tempo inicial seja menor do que um determinado valor crítico de forma que o algoritmo seja capaz de gerar as soluções iniciais e que essas possam ser utilizadas como base para os ajustes no incremento de tempo durante a simulação;
- (ii) o incremento de tempo deve permanecer constante durante o regime permanente, de forma que não ocorram modificações desnecessárias que possam comprometer tanto a estabilidade quanto a precisão do algoritmo;
- (iii) todos os parâmetros de entrada e de controle do algoritmo adaptativo devem ser simples de forma que o usuário possa prescrevê-los com facilidade;
- (iv) o critério de erro adotado deve ter um custo computacional mínimo de forma a não comprometer o desempenho do algoritmo;
- (v) o algoritmo deve reagir de forma imediata a mudanças súbitas no comportamento da estrutura;
- (vi) o incremento de tempo não deve ser alterado desnecessariamente.

Baseado no trabalho de Bergan e Mollestad (1985), Jacob (1990) apresentou a implementação computacional de uma estratégia adaptativa para algoritmos implícitos, com aplicações em estruturas complacentes em águas profundas. As principais características dessa estratégia são apresentadas a seguir:

(i) a determinação do intervalo de tempo pode variar ao longo da análise de acordo com a composição modal da resposta e com o comportamento não-linear do sistema estrutural;

(ii) a determinação das reavaliações da matriz de rigidez tangente, de modo a minimizar as ocorrências de cálculo, montagem e decomposição de matrizes efetivas globais durante o processo de integração.

Uma estratégia adaptativa baseada na proposta de Jacob (1990) foi implementada no presente trabalho, para os métodos da família de Newmark, na solução dos problemas lineares e não-lineares.

A estratégia adaptativa que monitora o erro de truncamento no método de Runge-Kutta de quarta ordem, apresentada em Press et. al. (1992), foi também usada aqui na solução dos problemas dinâmicos lineares.

4.4.3.1

Estratégia adaptativa para métodos da família de Newmark

Esta estratégia adaptativa tem como características principais a seleção automática do intervalo de tempo a ser utilizado no próximo passo de tempo e a determinação automática do disparo da reavaliação de rigidez do sistema, quando necessário. O conceito de frequência dominante é utilizado para ajustar o intervalo de tempo à composição modal da resposta. O comportamento não-linear é levado em conta tanto na seleção do intervalo de tempo quanto no disparo da reavaliação da rigidez, através de considerações heurísticas que são incorporadas ao processo.

Bergan e Mollestad (1985) apresentaram a seguinte expressão para a frequência dominante no instante $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\omega = \sqrt{\frac{{}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}^T \mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}}{{}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}^T \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}}} \quad (4.57)$$

onde ${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}$ é o incremento de deslocamentos entre os instantes de tempo t e $t+\Delta t$; \mathbf{K} é a matriz de rigidez tangente e \mathbf{M} é a matriz de massa.

A expressão (4.57) pode, entretanto, não fornecer resultados coerentes para a frequência dominante em instantes próximos a situações de amplitude máxima e mínima. De acordo com Jacob (1990), para contornar esse problema define-se inicialmente uma norma “média” dos deslocamentos em cada instante de tempo através da seguinte expressão: $\|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|^* = \|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|/\Delta t$, e, assim, obtém-se o máximo e mínimo histórico para esse valor, respectivamente, $\|\Delta\mathbf{U}\|_{\max}^*$ e $\|\Delta\mathbf{U}\|_{\min}^*$, sendo que a determinação do mínimo histórico é iniciada apenas após o instante em que o primeiro máximo local é detectado. Em seguida, duas estratégias complementares são utilizadas:

- (i) o primeiro critério verifica se $\|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|^*$ é menor do que a fração do máximo histórico: $\|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|^* < \|\Delta\mathbf{U}\|_{\max}^*/\varepsilon$, onde ε é um valor adotado que pode estar na faixa $5 \leq \varepsilon \leq 20$;
- (ii) o segundo critério verifica se $\|^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}\|^*$ está contido no intervalo definido por: $\left[\|\Delta\mathbf{U}\|_{\min}^*, \left(\|\Delta\mathbf{U}\|_{\max}^* - \|\Delta\mathbf{U}\|_{\min}^* \right) / \varepsilon \right]$.

Em situações em que ambos os critérios são satisfeitos, considera-se que a magnitude das quantidades envolvidas no cálculo da frequência característica é relativamente pequena, e a qualidade do valor obtido poderia ser prejudicada por problemas numéricos. Assim, para essa situação, mantém-se o valor do intervalo de tempo do instante anterior. Em situações normais, quando os dois critérios não impedem o cálculo de uma nova frequência dominante, utiliza-se, adicionalmente, o seguinte artifício para filtrar as componentes de alta frequência:

$${}^{t+\Delta t}\omega = \frac{{}^{t+\Delta t}\omega + {}^t\omega}{2} \quad (4.58)$$

Após a determinação da frequência dominante, o período de tempo correspondente pode ser avaliado através de:

$$T^* = \frac{2\pi}{t+\Delta t \omega^*} \quad (4.59)$$

A idéia dessa estratégia adaptativa é determinar um novo intervalo de tempo tomando-se uma fração λ do período característico T^* , ou seja:

$$\Delta t^* = \frac{T^*}{\lambda} \quad (4.60)$$

de modo a permitir a integração adequada dos modos que definem a composição da resposta.

O parâmetro λ é determinado de modo a permitir que o comportamento não-linear do problema seja levado em conta. Isso é feito controlando-se a variação do parâmetro λ através da monitoração do processo iterativo. Assim, se o número de iterações N_{it} do último passo de solução for menor que um determinado número ótimo de iterações N_{ot} (fornecido pelo usuário, e o valor típico $N_{ot} = 3$), deve-se reduzir o valor de λ dividindo-o por um fator ζ definido pelo usuário (valor típico é $\zeta = 1.05$). Caso contrário, se o N_{it} for maior que N_{ot} , deve-se aumentar o valor de λ multiplicando-o pelo fator ζ . Jacob (1990) ainda sugere que o valor de λ deve ser limitado por dois valores extremos λ_{min} e λ_{max} , (valores típicos são: $\lambda_{min} = 50$ e $\lambda_{max} = 500$).

A utilização pura e simples do intervalo de tempo obtido em (4.60) pode ocasionar variações na resposta do problema que podem ser pequenas ou grandes e bruscas (Jacob, 1990). Para evitar essas alterações são introduzidas regras heurísticas de modo a determinar quando e como a alteração do intervalo de tempo deve ser feita. Desse modo, é definido o seguinte parâmetro de controle:

$$\xi = \frac{\Delta t^*}{{}^n\Delta t} \quad (4.61)$$

sendo Δt^* a estimativa para o novo intervalo de tempo e ${}^n\Delta t$ o incremento de tempo dado no passo anterior do processo de solução.

Quatro parâmetros ajustáveis ξ_{\min} , ξ_1 , ξ_2 e ξ_{\max} , cujos valores típicos são $\xi_{\min} = 0.5$, $\xi_1 = 0.625$, $\xi_2 = 1.6$ e $\xi_{\max} = 1.8$, controlam o processo de acordo com as seguintes regras:

- (i) o valor do novo intervalo de tempo ${}^{n+1}\Delta t$ não pode ser menor que ξ_{\min} e nem maior que ξ_{\max} ;
- (ii) se a variação de Δt for muito pequena, deve-se manter o intervalo anterior, isto é, se o valor de ξ estiver entre ξ_1 e ξ_2 , mantém-se o intervalo, ${}^{n+1}\Delta t = {}^n\Delta t$; caso contrário, se a variação for suficientemente grande, e ξ for menor ou igual a ξ_1 ou for maior ou igual a ξ_2 , considera-se como novo valor do intervalo de tempo ${}^{n+1}\Delta t = \Delta t^*$.

Por fim, dois critérios foram usados neste trabalho para disparar automaticamente a reavaliação da rigidez do sistema estrutural durante o processo de solução, seguindo ainda sugestão de Jacob (1990). O primeiro critério dispara a reavaliação da rigidez toda vez que houver uma grande variação no valor do intervalo de tempo; o segundo critério está vinculado à monitoração do processo iterativo, e dispara a reavaliação sempre que o número de iterações do processo N_{it} exceder um número ótimo de iterações, determinado pelo usuário através do parâmetro N_{ot} .

4.4.3.2

Estratégia adaptativa para o método Runge-Kutta

Para o método de Runge-Kutta de quarta ordem, a técnica mais indicada para se controlar a variação do incremento de tempo Δt é o chamado “*step-doubling*” (Press *et. al.*, 1992).

Nessa técnica é necessário que, para cada incremento Δt , sejam realizados 3 cálculos pelo método de Runge-Kutta: uma vez considerando-se Δt um passo inteiro de tempo e em seguida como dois meio passos calculados de forma independente. Observe que cada um dos três cálculos por Runge-Kutta requer 4 cálculos (equações 4.35a - 4.35d). Descontando os valores iniciais, tem-se um total de 8 cálculos. A Figura 4.8 pretende ilustrar esta observação.

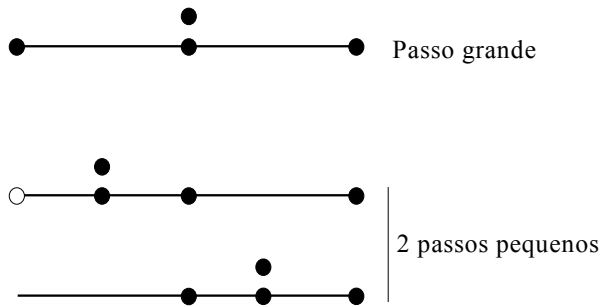


Figura 4.8: Utilização do método de Runge-Kuta com a divisão do intervalo de cálculo “Step-doubling” (Press *et. al.*, 1992).

Considerando-se um avanço do instante t para $t+2\Delta t$, pode-se exprimir a solução exata através de $v = v(t + 2\Delta t)$. A aproximação desta expressão, considerando-se que para se atingir este intervalo foi necessário apenas um passo de tempo igual a $2\Delta t$, pode ser obtida expandindo-se a solução em torno de v_1 da seguinte forma:

$$v(t + 2\Delta t) = v_1 + (2\Delta t)^5 \phi + O(\Delta t^6) + \dots \quad (4.62a)$$

Se, por outro lado, considera-se que foram necessários 2 passos iguais a Δt , obtém-se a seguinte aproximação em torno de v_2 :

$$v(t + 2\Delta t) = v_2 + 2 \Delta t^5 \phi + O(\Delta t^6) + \dots \quad (4.62b)$$

onde, na série de Taylor, $\phi = \frac{v^5(x)}{5!}$.

Um conveniente indicador de erro de truncamento é dado pela diferença entre estas duas estimativas, ou seja:

$$\Delta \equiv v_2 - v_1 = (2\Delta t)^5 \phi - 2(\Delta t)^5 \phi = 30(\Delta t)^5 \phi = 15 (2 \Delta t^5 \phi) \quad (4.63)$$

sendo este o valor a ser respeitado para se obter a precisão determinada, devendo-se, para isso, ajustar o intervalo Δt .

Combinando (4.62b) e (4.63) pode-se escrever:

$$v(t + 2\Delta t) = v_2 + \frac{\Delta}{15} + O(\Delta t^6) \quad (4.64)$$

Esta estimativa tem a precisão de quinta ordem, portanto, uma ordem acima que a do método original, entretanto, maior ordem de solução nem sempre significa maior precisão. Deve-se, portanto, usar Δ como estimativa de erro, mas é necessário algum dado adicional de precisão.

Para se obter a relação entre a estimativa de erro Δ e o próximo intervalo de tempo Δt . De acordo com (4.63), a variação de Δ é proporcional à variação de Δt^5 , assim, considerando-se que um passo ${}^n\Delta t$ produz um erro ${}^n\Delta$, um passo ${}^{n+1}\Delta t$ produziria um erro estimado por:

$${}^{n+1}\Delta t = {}^n\Delta t \left| \frac{{}^{n+1}\Delta}{{}^n\Delta} \right|^{0.2} \quad (4.65)$$

Definindo ζ como sendo o valor desejado para o erro, pode-se reescrever (4.65) na forma:

$${}^{n+1}\Delta t = {}^n\Delta t \left| \frac{\zeta}{{}^n\Delta} \right|^{0.2} \quad (4.66)$$

Deste modo, se a estimativa de erro ${}^n\Delta$ for maior que o erro requerido ζ , a equação impõe um aumento do próximo passo, e se, pelo contrário, ${}^n\Delta$ for menor que ζ , o próximo passo deve diminuir.

5.

EXEMPLOS NUMÉRICOS: ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA

5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta a aplicação dos procedimentos numéricos apresentados no Capítulo 4 na solução de problemas de vibração livre e análise dinâmica de alguns exemplos estruturais. Dando continuidade às análises não-lineares estáticas apresentadas no Capítulo 2, será dada atenção especial aos exemplos do arco senoidal e dos pórticos em L.

A seção 5.2 apresenta análises de vibração livre envolvendo o cálculo de frequências naturais e modos de vibração dos sistemas estruturais. Esta análise é fundamental no entendimento do processo de perda de estabilidade em estruturas com forte não-linearidade e caminhos de equilíbrio complicados.

Na seção 5.3 são analisados alguns problemas simples de integração numérica com o intuito de validar as implementações.

Finalmente, na seção 5.4 estuda-se o comportamento do arco senoidal e do pórtico em L quando estes são submetidos a certos carregamentos dinâmicos.

5.2. EXEMPLOS ENVOLVENDO ANÁLISE DE VIBRAÇÃO

Inicialmente, na seção 5.2.1, são apresentados alguns problemas estruturais simples envolvendo análise de vibração que validam as rotinas de solução de problemas de autovalores implementadas e estabelecem condições para se utilizar o elemento finito de ligação semi-rígida implementado em cálculos de frequências naturais. Em seguida, os exemplos estruturais de arco senoidal e pórticos em L, que já foram analisados na seção 3.2 quanto a influência dos parâmetros físicos e geométricos nos seus caminhos de equilíbrio, são analisados agora com o intuito de se compreender a influência destes parâmetros na estabilidade destas estruturas.

5.2.1

Barras com ligações semi-rígidas

Esta seção tem a finalidade de avaliar a eficiência dos procedimentos implementados no cálculo das freqüências naturais e a variação destas diante de diferentes níveis de carregamento estático.

Neste primeiro exemplo considera-se o caso de uma viga com duas ligações semi-rígidas nas suas extremidades, como mostrado na Figura 5.1.

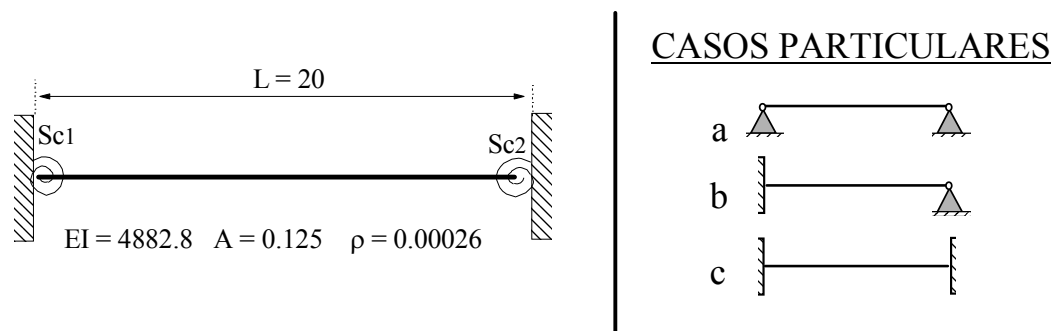


Figura 5.1: Viga com ligações semi-rígidas.

Dez elementos de mesmo tamanho são utilizados na modelagem, sendo 8 elementos de pórtico convencionais no interior e 2 elementos semi-rígidos nas extremidades da viga. Os valores obtidos para a menor freqüência natural de vibração do sistema, quando se varia a rigidez Sc da ligação, são apresentados na Figura 5.2 e comparadas com aquelas obtidas por Chan e Chui (2000).

Observe que quando a rigidez das ligações Sc tende a zero, a freqüência natural se aproxima, como esperado, do valor $\pi^2 \sqrt{EI/\rho AL^4}$, que é a solução analítica para menor freqüência natural da viga bi-apoiada. Quando a rigidez de uma das molas tende a infinito (engaste) enquanto a outra é mantida próxima de zero (apoio simples), a menor freqüência natural se aproxima do valor analítico da barra engastada-apoiada. Finalmente, quando $Sc \rightarrow \infty$, a menor freqüência se aproxima assintoticamente do resultado analítico da viga biengastada.

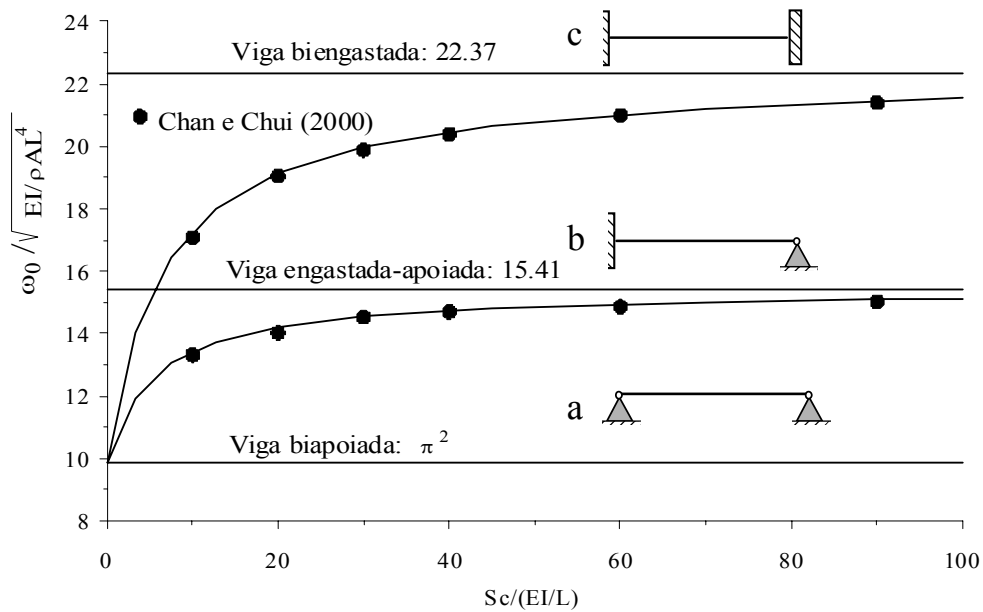


Figura 5.2: Viga com conexões semi-rígidas – Frequência natural ω_0 em função da Rigidez Sc .

Considera-se agora a coluna mostrada na Figura 5.3 que possui uma extremidade livre e uma conexão flexível na outra extremidade. Uma carga axial P é aplicada na extremidade livre.

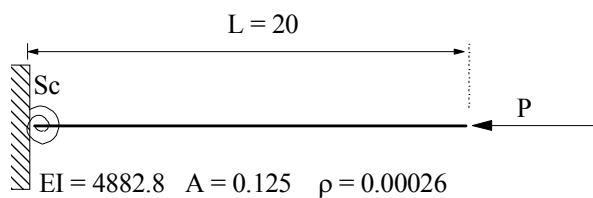


Figura 5.3: Coluna com ligação semi-rígida.

Na modelagem desse sistema estrutural foram adotados 9 elementos de mesmo tamanho distribuídos ao longo da barra e o elemento de conexão semi-rígido de comprimento $L_{SR} = L/500$. A necessidade de se utilizar elementos semi-rígidos de tamanho muito reduzido em certos problemas será discutida adiante.

Inicialmente, é realizada uma análise da estabilidade estática da coluna para diferentes valores da rigidez Sc . Várias trajetórias de equilíbrio foram obtidas e podem ser vistas na Figura 5.4, onde se destaca a influência da rigidez da ligação no valor da carga crítica da coluna.

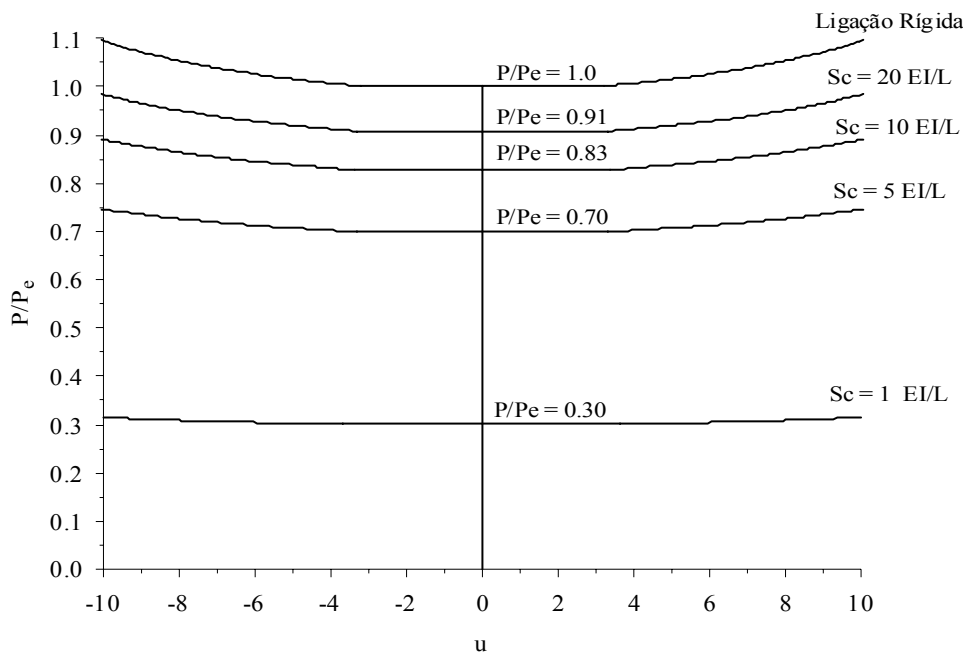


Figura 5.4: Trajetórias de equilíbrio da coluna para vários valores de Sc .

Como esperado, como o acréscimo de Sc , observa-se a tendência da carga de flambagem se aproximar do valor crítico da coluna engastada-livre ($P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$). Quando $Sc=0$, o sistema se torna hipostático.

Em seguida, foi realizado um estudo sobre o efeito da carga axial P nas frequências naturais da coluna para diferentes valores de rigidez Sc . Os resultados dessa análise são mostrados na Figura 5.5. As frequências naturais obtidas são expressas de forma adimensional através da sua divisão pela menor frequência da coluna engastada-livre; o carregamento é adimensionalizado usando-se a carga crítica da coluna engastada-livre. Mais uma vez, utilizam-se aqui para comparação os resultados fornecidos por Chan e Chui (2000).

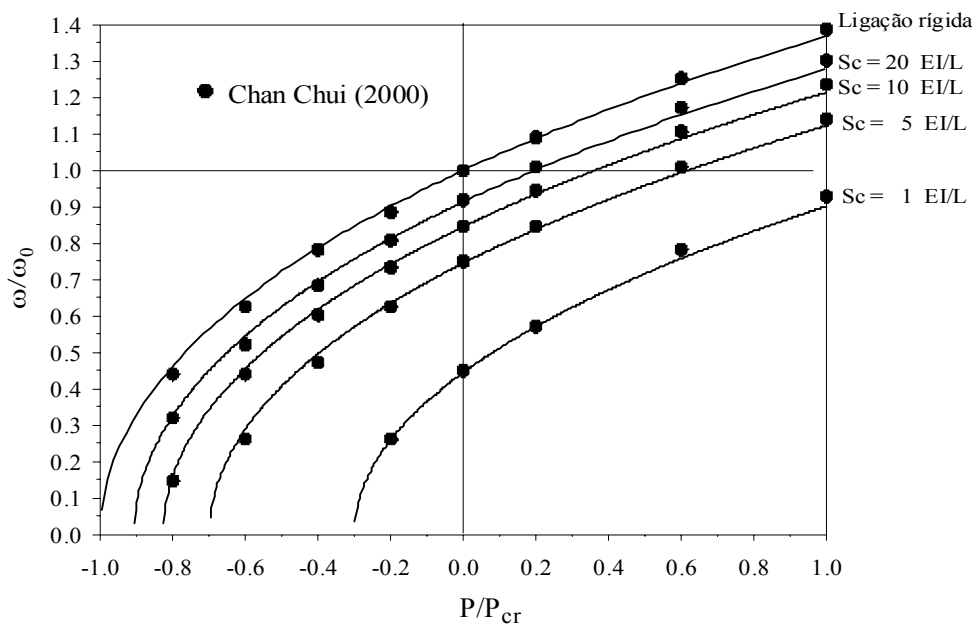


Figura 5.5: Influência da carga axial P e rigidez Sc da conexão na frequência natural ω .

Nota-se que o acréscimo de força axial modifica de forma significativa as frequências naturais da coluna. Se a força axial P é de tração, as frequências aumentam; se P for de compressão, as frequências diminuem. Quando a força P de compressão se aproxima do valor crítico a frequência natural tende a zero. Para ilustrar melhor esse fato, mostra-se na Figura 5.6 a variação do quadrado da frequência adimensional com o nível de carregamento estático. No caso de colunas, em virtude da linearidade do caminho fundamental de equilíbrio, essa relação é linear. Com base nessa relação, pode-se identificar, usando as frequências naturais da estrutura para pequenos níveis de carregamento, por extrapolação, a carga crítica da estrutura. Esse procedimento tem sido proposto na literatura como um método de ensaio não destrutivo para se avaliar a capacidade de carga de certas estruturas.

Convém salientar que em várias estruturas práticas, tais como torres, a conexão na base apresenta o comportamento de uma ligação semi-rígida, sendo, como mostram estes resultados, a avaliação de sua rigidez um dado importante para avaliar a resposta e segurança da estrutura.

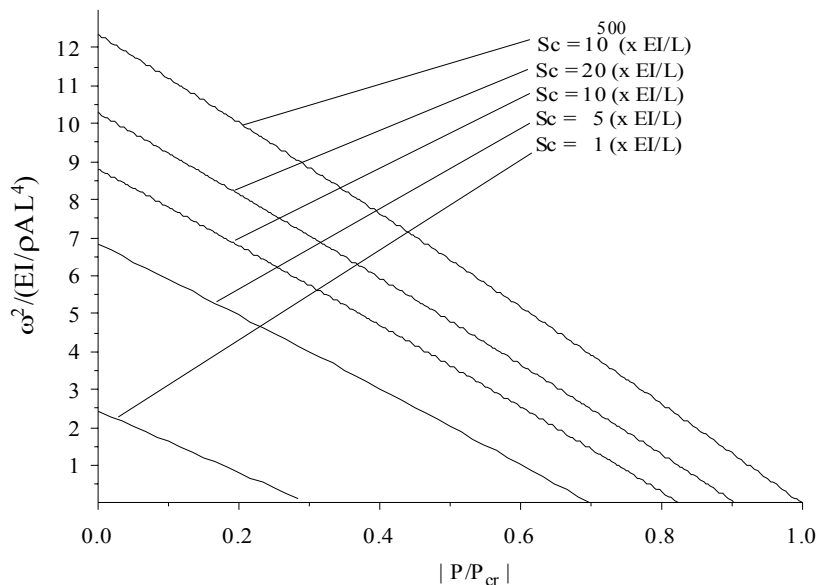


Figura 5.6: Influência da carga axial P e rigidez Sc da conexão no quadrado da frequência natural.

Considere agora, como ilustrado na Figura 5.7, uma coluna com ligações semi-rígidas nas duas extremidades e submetida a uma força axial P na extremidade livre a translação.

O objetivo inicial deste exemplo é analisar a variação da frequência natural da coluna com a rigidez Sc da ligação e verificar a influência da malha de elementos finitos nos resultados. Dessa forma é possível obter também a frequência da estrutura para os casos extremos de Sc , ou seja, a coluna bi-apoiada ($Sc = 0$) e biengastada ($Sc \rightarrow \infty$).

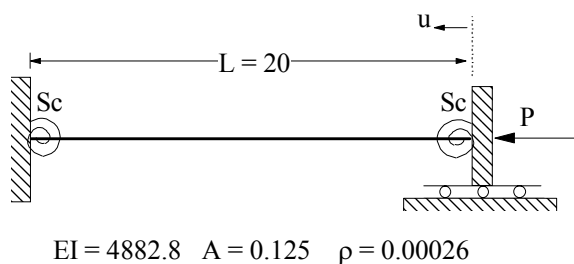


Figura 5.7: Coluna com ligações semi-rígidas nas extremidades.

Inicialmente, consideram-se duas malhas formadas por 10 e 30 elementos finitos de mesmo tamanho, sendo os elementos com ligações semi-rígidas localizados nas extremidades e de rigidez $Sc = 0$, simulando, portanto, uma coluna bi-apoiada. Os resultados obtidos dessas duas modelagens são comparados àqueles de uma coluna biapoiada discretizada com 10 elementos padrão de pórtico

plano de mesmo comprimento. Pode-se observar, através da Figura 5.8, que as frequências naturais calculadas para a coluna biapoiada modelada com elementos semi-rígidos com $Sc = 0$ não apresentam bons resultados, mesmo para uma malha mais refinada (30 elementos). Observa-se que para a barra descarregada o resultado é excelente, mas a discrepância cresce a medida que se aumenta a força compressiva.

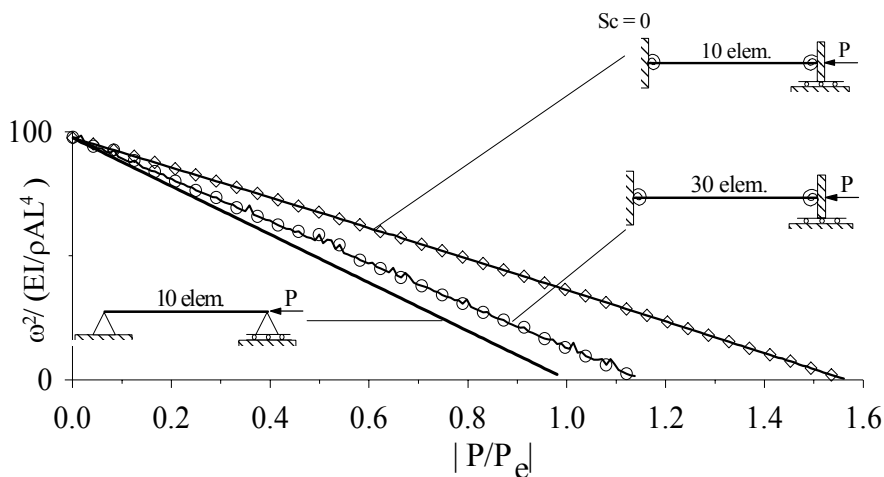


Figura 5.8: Influência da malha e da rigidez da ligação Sc nas frequências da coluna.

Nenhum comentário foi encontrado na literatura sobre ligações semi-rígidas a respeito dessa sensibilidade. Como base na análise das matrizes do sistema discretizado, verificou-se que a diminuição do comprimento do elemento semi-rígido diminui essa sensibilidade. A Figura 5.9 apresenta o novo modelo adotado para a coluna: 10 elementos padrão de pórtico plano de mesmo comprimento ligados a dois elementos semi-rígidos de comprimento reduzido L_{SR} .

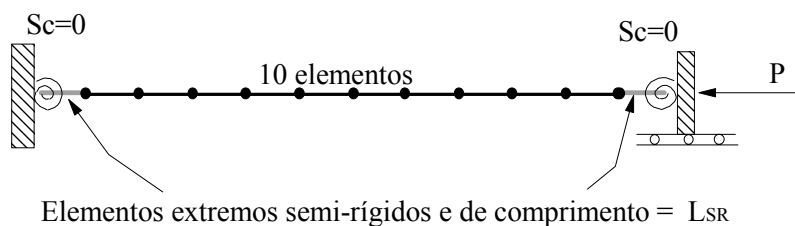


Figura 5.9: Modelo da coluna com 10 elementos padrão de pórtico plano iguais e 2 elementos extremos semi-rígidos com comprimento L_{SR} .

Um estudo foi então realizado para verificar que comprimento L_{SR} deveria ser adotado. Os resultados desse estudo são apresentados na Figura 5.10, que mostra que a medida que o comprimento do elemento semi-rígido diminui a resposta tende à solução exata da coluna bi-apoiada ($Sc = 0$).

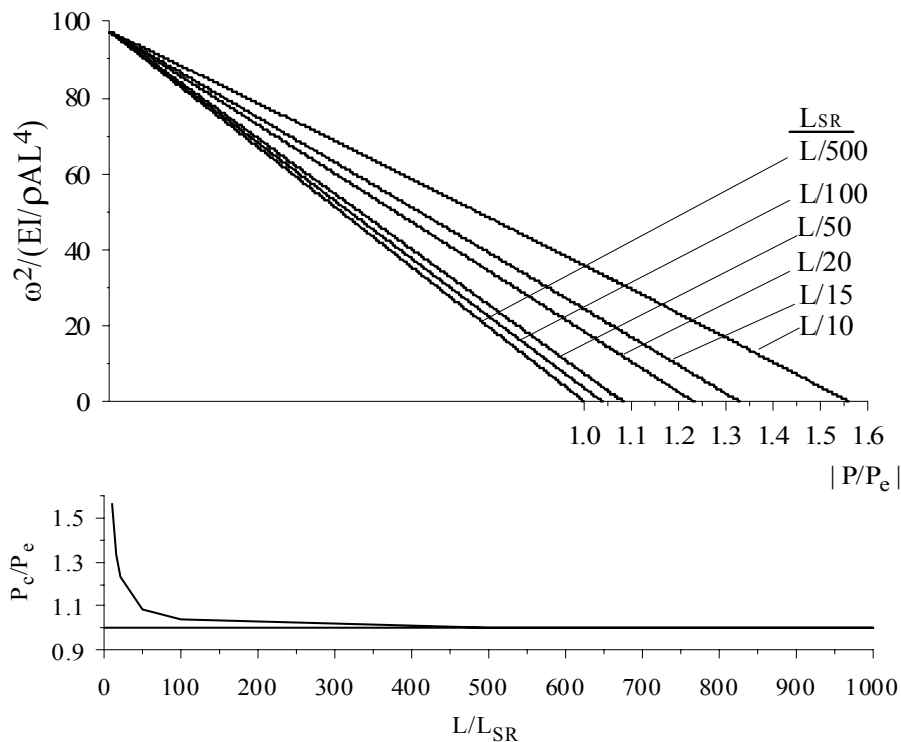


Figura 5.10: Sensibilidade ao comprimento L_{SR} do elemento com ligações semi-rígidas.

Com o modelo ilustrado na Figura 5.9 e adotando-se para o elemento semi-rígido $L_{SR} = L/500$ chegou-se às respostas apresentadas na Figura 5.11, onde é apresentada a variação da frequência natural com carregamento P para diferentes valores da rigidez da ligação Sc . Para $Sc = 0$ a estrutura se torna instável para um carregamento de compressão $P = P_e$ ($\pi^2 EI/L^2$), que é o valor analítico da carga crítica de compressão de Euler para a coluna bi-apoiada; para $Sc \rightarrow \infty$ a estrutura perde a estabilidade quando $P = 4 P_e$, que é o valor analítico da carga crítica da coluna bi-engastada. Em todos os exemplos mostrados a seguir sempre se usou um valor de L_{SR} suficientemente pequeno para se garantir a precisão dos resultados.

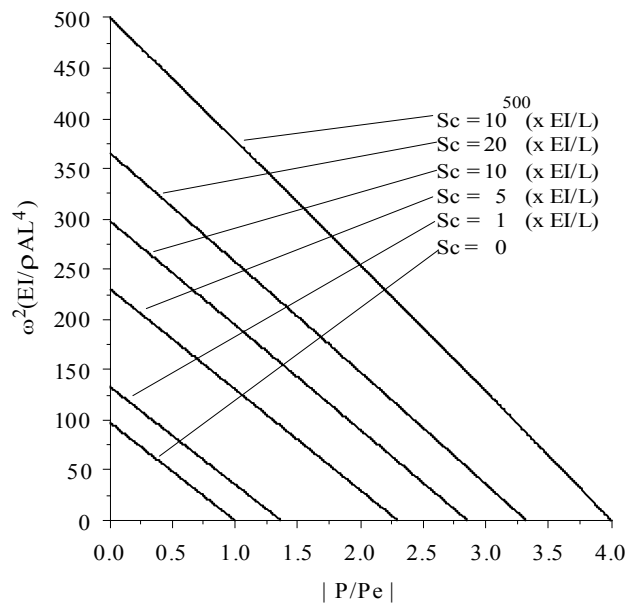


Figura 5.11: Relações frequência versus carga.

A Tabela 5.1 indica que as frequências naturais obtidas para esses valores extremos de rigidez das ligações, e considerando $P = 0$, apresentam boa concordância com os valores analíticos extraídos da literatura.

	Análítico (Paz, 1997)	Presente trabalho
Biapoiada	97.409	97.502
Biengastada	500.565	500.607

Tabela 5.1: Frequências naturais da coluna para valores extremos de Sc e para a força axial $P = 0$.

Através de uma análise não-linear estática, são obtidas as trajetórias de equilíbrio mostradas na Figura 5.12, sendo u o deslocamento na direção axial, do ponto localizado na extremidade direita da coluna.

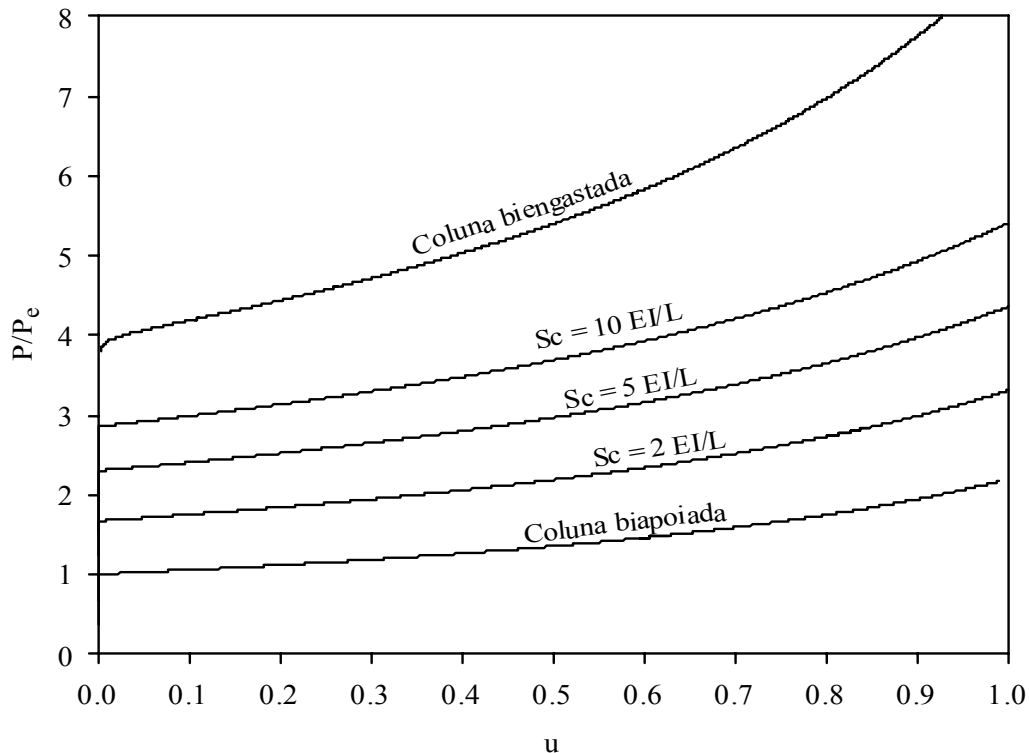


Figura 5.12: Trajetórias de equilíbrio da coluna com diferentes valores de Sc .

Superpondo-se os valores obtidos para a carga crítica através da análise estática (Figura 5.12) com os valores de carga que levaram a frequência natural da coluna a zero (Figura 5.11) e comparando esses resultados com os fornecidos por Chan e Chui (2000), pode-se, através da Figura 5.13, mais uma vez verificar a eficiência do procedimento adotado no presente trabalho.

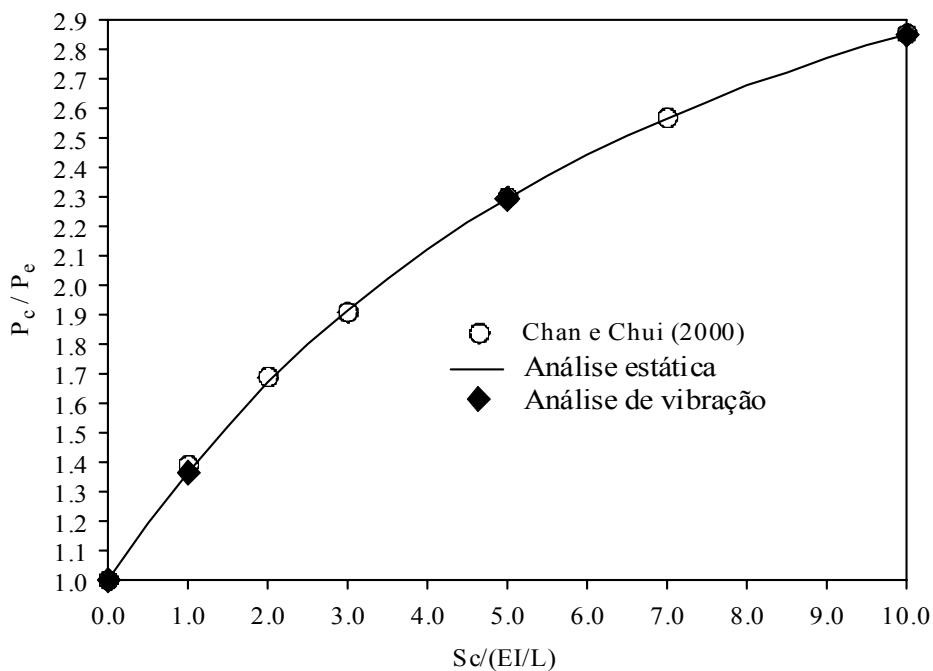


Figura 5.13: Trajetórias de equilíbrio da coluna com diferentes valores de Sc .

5.2.2

Arco senoidal sob carregamento distribuído

5.2.2.1

Arco abatido: $z_0 = 20$ mm

A Figura 5.14 mostra o mesmo arco para o qual foi realizada análise estática apresentada no capítulo 3. Aqui ele é modelado com 16 elementos finitos com a mesma projeção horizontal L_e e mais 2 elementos extremos com ligações semi-rígidas de comprimento $L_{SR}=L_e/10$.

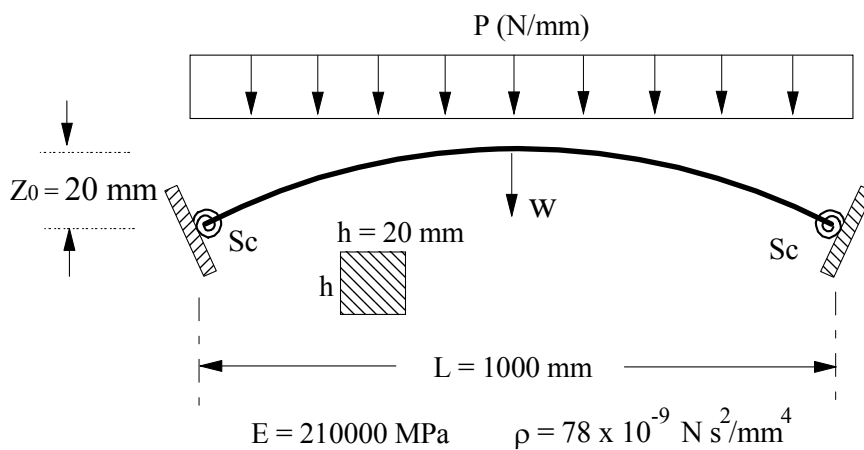


Figura 5.14: Arco senoidal sob carregamento distribuído.

A Figura 5.15 mostra os modos de vibração associados às 3 primeiras frequências naturais do arco para três condições de apoio: arco biapoiado, biengastado e com rigidez intermediária (ligações semi-rígidas) de $Sc = 5 EI/L$.

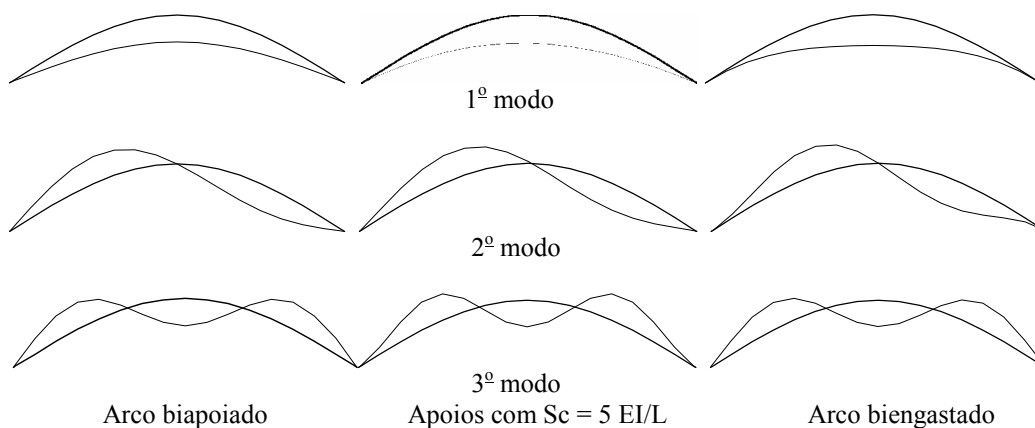


Figura 5.15: Modos de vibração.

Sendo esse um arco bastante abatido, observa-se que o primeiro modo de vibração é sempre simétrico, independente do valor de Sc . Adiante será visto que esta característica pode se modificar com a variação da altura z_0 do arco.

A Figura 5.16 exibe a variação das 3 primeiras freqüências naturais em função da rigidez das ligações, representadas pelo fator γ que pode assumir valores reais entre 0 (rótula perfeita) e 1 (ligação perfeitamente rígida). O parâmetro de rigidez Sc é dado em função de γ por : $Sc = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{3EI}{L}$.

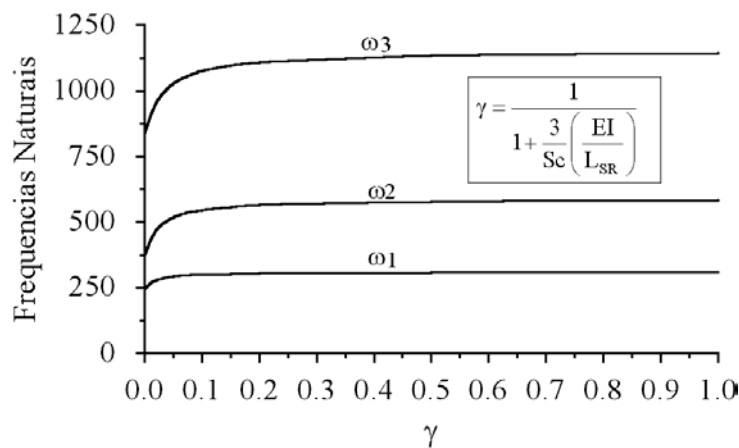


Figura 5.16: Variação das freqüências naturais com o parâmetro de rigidez da ligação γ .

Neste caso as freqüências estão sempre bem espaçadas, crescendo a medida que γ cresce, tendendo assintoticamente aos valores obtidos para um arco engastado. É interessante notar que a influência da ligação é maior para as freqüências mais altas. Isto se deve ao fato de, para modos mais altos, haver uma maior influência da energia de flexão das molas na rigidez efetiva do arco.

Em situações práticas podem existir pequenas diferenças entre os apoios que podem ocorrer durante a montagem ou mesmo durante a vida útil da estrutura. Para se estudar o efeito dessa classe de imperfeições, considera-se que a rigidez do apoio direito Sc_2 seja diferente da rigidez do apoio esquerdo Sc_1 . A imperfeição é definida através do parâmetro α_{imp} como mostra a Figura 5.17.

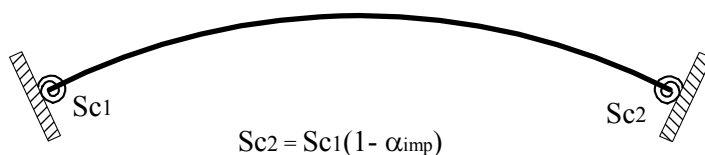


Figura 5.17: Imperfeição de apoio: $Sc = 5 EI/L$.

A Tabela 5.2 mostra a variação das 3 primeiras frequências com o parâmetro α_{imp} .

α_{imp}	Ω_1	Ω_2	Ω_3
0.1	268.251	435.393	909.632
0.2	267.403	432.919	906.596
0.3	266.464	430.286	903.416
0.4	265.418	427.480	900.079
0.5	264.246	424.488	896.577

Tabela 5.2: Variação das 3 primeiras frequências naturais com o parâmetro imperfeição do apoio α_{imp} .

Observa-se que há uma pequena redução no valor das frequências devido à diminuição da rigidez do apoio direito. Entretanto uma maior sensibilidade pode ser observada quando se considera arcos menos abatidos e o efeito do carregamento estático.

Para se estudar o efeito do carregamento estático em arcos, o problema se torna numericamente mais complexo que no caso da coluna, onde a influência da carga axial aparece somente na matriz de rigidez geométrica. Sendo o caminho de equilíbrio do arco eminentemente não-linear, deve-se introduzir o carregamento estático através do processo incremental-iterativo de solução não-linear e calcular a cada incremento as frequências naturais e modos de vibração em torno da configuração deformada. Com base nesse procedimento, obtém-se a Figura 5.18 que mostra a variação da primeira frequência natural com a carga para diversos valores da rigidez Sc . Estes resultados devem ser analisados conjuntamente com os da Figura 3.11, onde se estuda a influência de Sc no caminho não-linear de equilíbrio do arco.

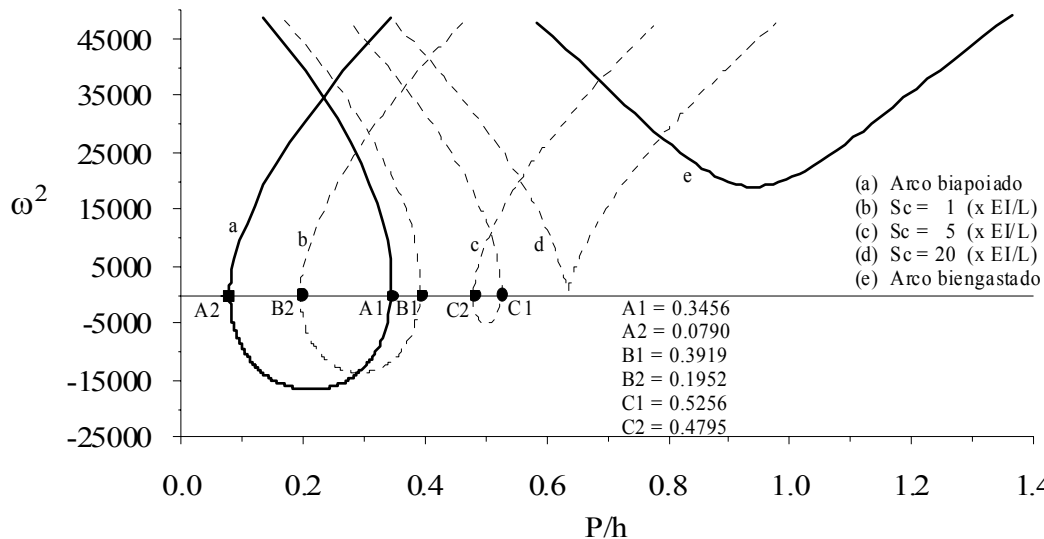


Figura 5.18: Variação da primeira frequência natural com o parâmetro de rigidez das ligações.

Nota-se a grande influência do carregamento estático nas frequências de vibração do arco. Essa influência torna-se mais marcante a medida que Sc decresce, ocorrendo um decréscimo acentuado no valor da frequência mínima e uma maior variação com o nível de carregamento. Isto porque a medida que Sc decresce, diminui a rigidez efetiva do arco e aumenta a não-linearidade da solução. Verifica-se que para os arcos, a relação carga-quadrado da frequência já não é mais linear, como no caso da coluna. Isto em virtude da não-linearidade do caminho de equilíbrio. Nota-se também que para pequenos valores de Sc , o quadrado da frequência se torna negativo, o que leva a frequências imaginárias. Segundo o critério dinâmico de estabilidade (Seydel, 1988), isso ocorre quando a configuração de equilíbrio é instável. Assim, pode-se identificar a partir da relação carga-frequências os trechos estáveis e instáveis dos caminhos de equilíbrio. No presente caso, os trechos instáveis correspondem ao trecho do caminho de equilíbrio entre os dois pontos limites observados na Figura 3.11. Os valores das cargas limites são também apresentados na Figura 5.18.

Cabe aqui ressaltar que a literatura técnica descreve várias estruturas metálicas em arco, em particular coberturas que utilizam arcos abatidos, que sofreram perda de estabilidade sob cargas estáticas ou dinâmicas em virtude da deterioração nos apoios. Um dos motivos mais frequentes é a corrosão. Nestes casos há um decréscimo lento no valor de Sc com, como mostram os resultados aqui apresentados, mudanças acentuadas na rigidez global da estrutura e em suas características dinâmicas. Mudanças estas que só podem ser detectadas e

quantificadas através de uma análise detalhada do comportamento não linear da estrutura. Os resultados também ressaltam a importância de se avaliar corretamente a rigidez das ligações no cálculo dessas estruturas.

5.2.2.2

Estudo do parâmetro geométrico z_0

No Capítulo 3 foram estudadas as trajetórias de equilíbrio para diferentes valores da altura z_0 (Figura 3.14) e considerando o arco senoidal com as características originalmente propostas por Bergan (1980). Aqui é feita a análise do parâmetro z_0 em relação aos modos de vibração e à variação das frequências naturais considerando-se as mesmas alturas. A Figura 5.19 mostra os dois primeiros modos de vibração para diferentes valores da altura do arco z_0 , mantendo-se o vão constante. Nota-se que para pequenos valores de z_0 o primeiro modo é sempre simétrico e o segundo assimétrico, estando as frequências bem espaçadas. A medida que z_0 cresce, as frequências se aproximam (ver Figura 5.19b) e a partir de um certo valor limite a frequência do modo assimétrico torna-se inferior à do modo simétrico, havendo uma inversão da forma do primeiro modo, como mostram as Figuras 5.19c e 5.19d.

Isto pode ser mais bem observado na Figura 5.20 onde se mostra a variação das duas menores frequências do arco em função de z_0 . Nota-se que, enquanto a frequência associada ao modo simétrico cresce linearmente com z_0 , a frequência do modo assimétrico se mantém quase que constante. Para z_0 aproximadamente igual a 31.4 mm, tem-se que as duas primeiras frequências são praticamente coincidentes. Cabe ressaltar que em estruturas com acentuado comportamento não-linear este fato ocorre com frequência, dando origem a diversos fenômenos de ressonância interna.

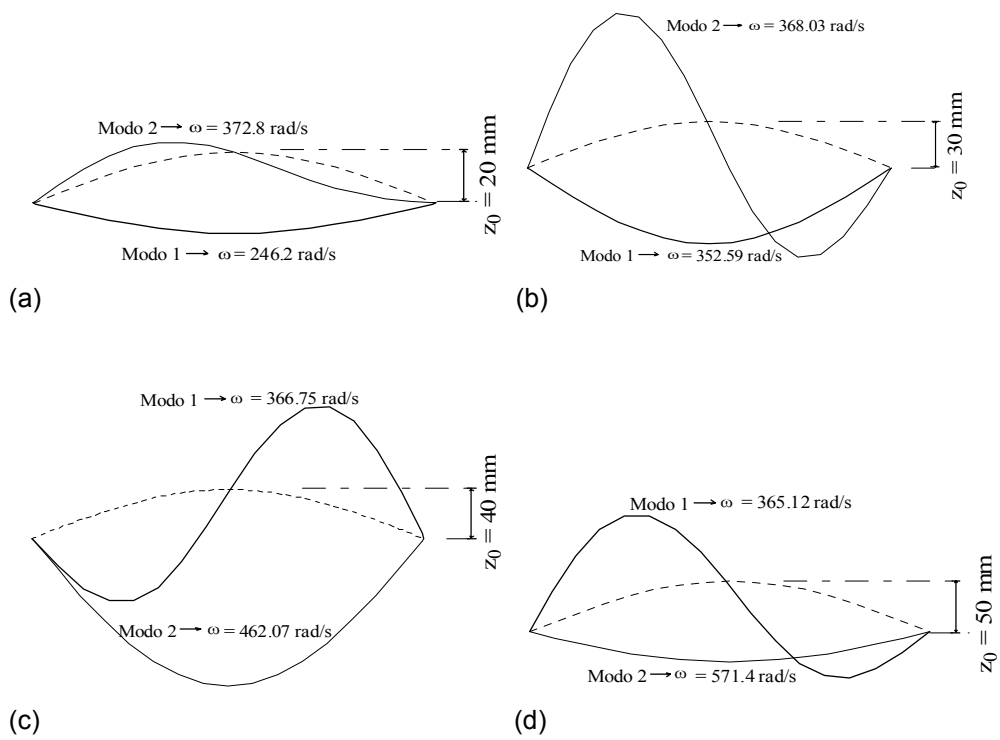


Figura 5.19: Modos de vibração para diferentes valores da altura z_0 .

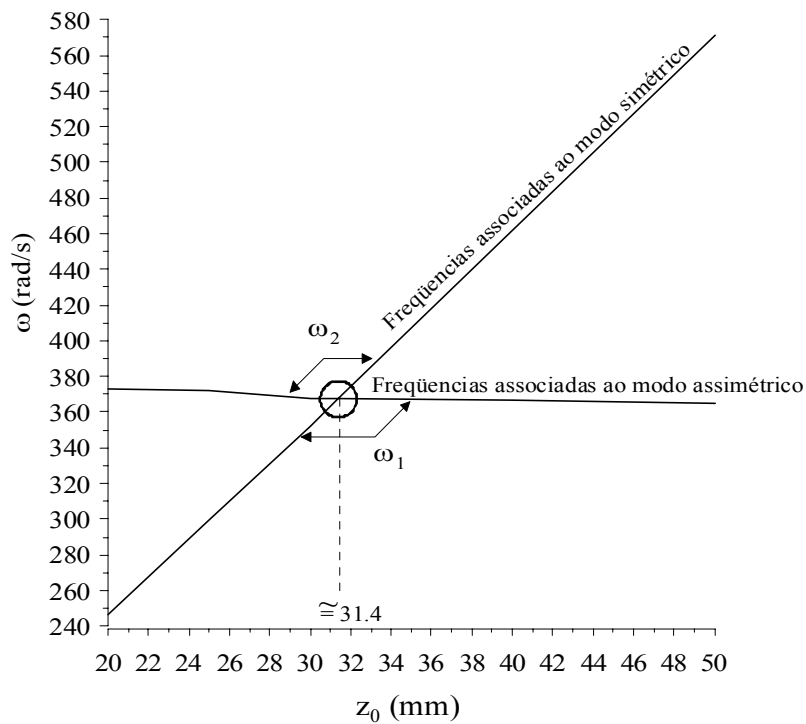


Figura 5.20: Variação das duas menores freqüências do arco em função de z_0 .

Na Figura 5.21 mostra-se a variação da primeira frequência natural considerando-se o arco perfeitamente simétrico e com uma imperfeição inicial bastante pequena que leva a uma pequena assimetria da estrutura. Nota-se que ambos os modelos levam aos mesmos resultados para pequenos valores de z_0 . À medida que z_0 cresce, passa a ocorrer uma bifurcação no modo assimétrico ao longo do caminho de equilíbrio. Nota-se nestes gráficos que todo o caminho pós-crítico localizado entre os dois pontos de bifurcação é instável, o mesmo ocorrendo com o caminho fundamental.

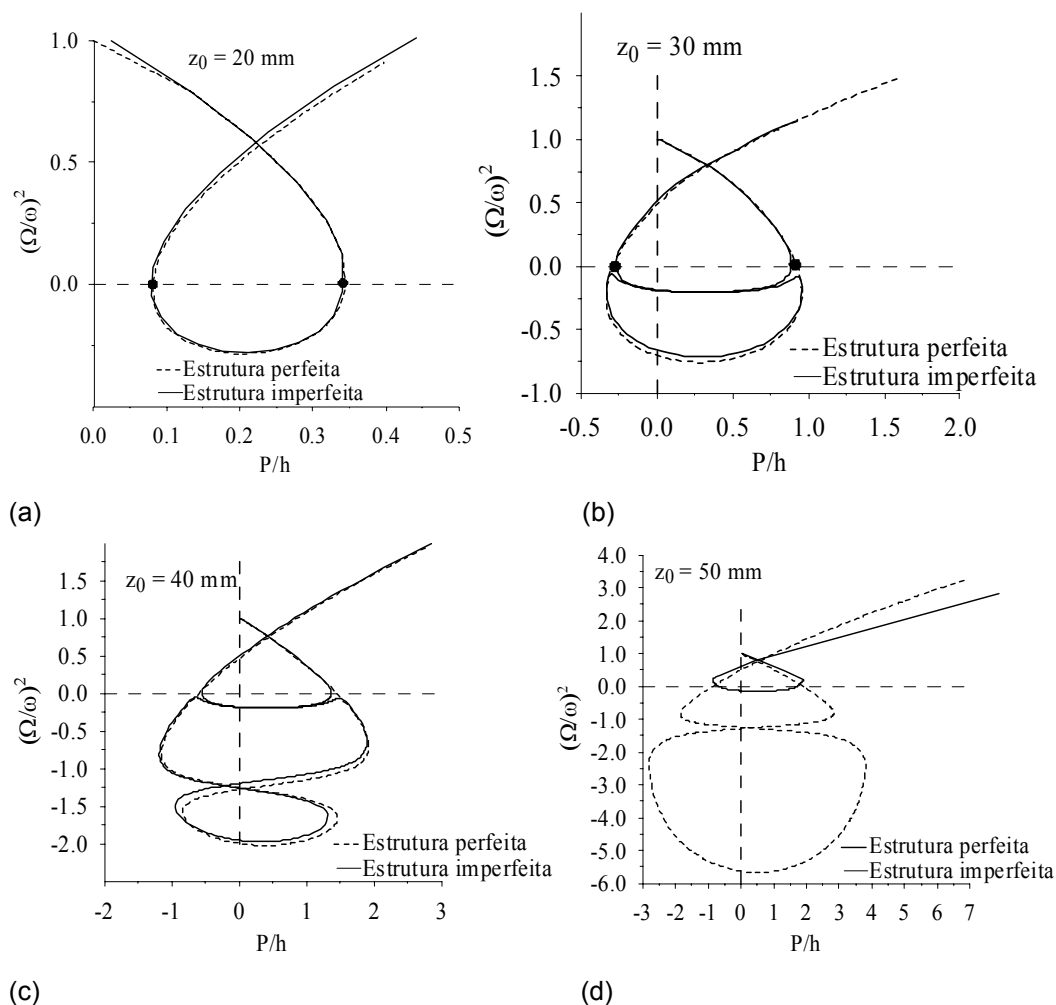


Figura 5.21: Variação da relação frequência vs. carregamento para diversos valores da altura z_0 : Estrutura perfeita e com pequena imperfeição inicial em um modo assimétrico.

Na Figura 5.22 mostra-se a variação das duas primeiras frequências naturais do arco perfeito com o nível de carregamento ao longo da trajetória de equilíbrio. Nota-se que a segunda menor frequência também é bastante afetada pelo nível de carregamento. Para valores altos de z_0 o quadrado da frequência se torna negativo

para ambos os modos indicando a importância de ambos os modos nos processos de perda de estabilidade do arco. Essas informações obtidas do modelo estrutural com um elevado nível de discretização são essenciais para o desenvolvimento de modelos discretos de baixa dimensão. O uso de modelos com poucos graus de liberdade (usualmente um ou dois) têm sido a prática usual na análise de vibrações não-lineares, isto por permitir o uso eficiente de diversos métodos de análise que se tornam impraticáveis para sistemas de grande dimensão e uma análise paramétrica mais detalhada do problema. Entretanto, para se aferir a confiabilidade desses necessita-se de modelos mais elaborados como os apresentados nesta tese.

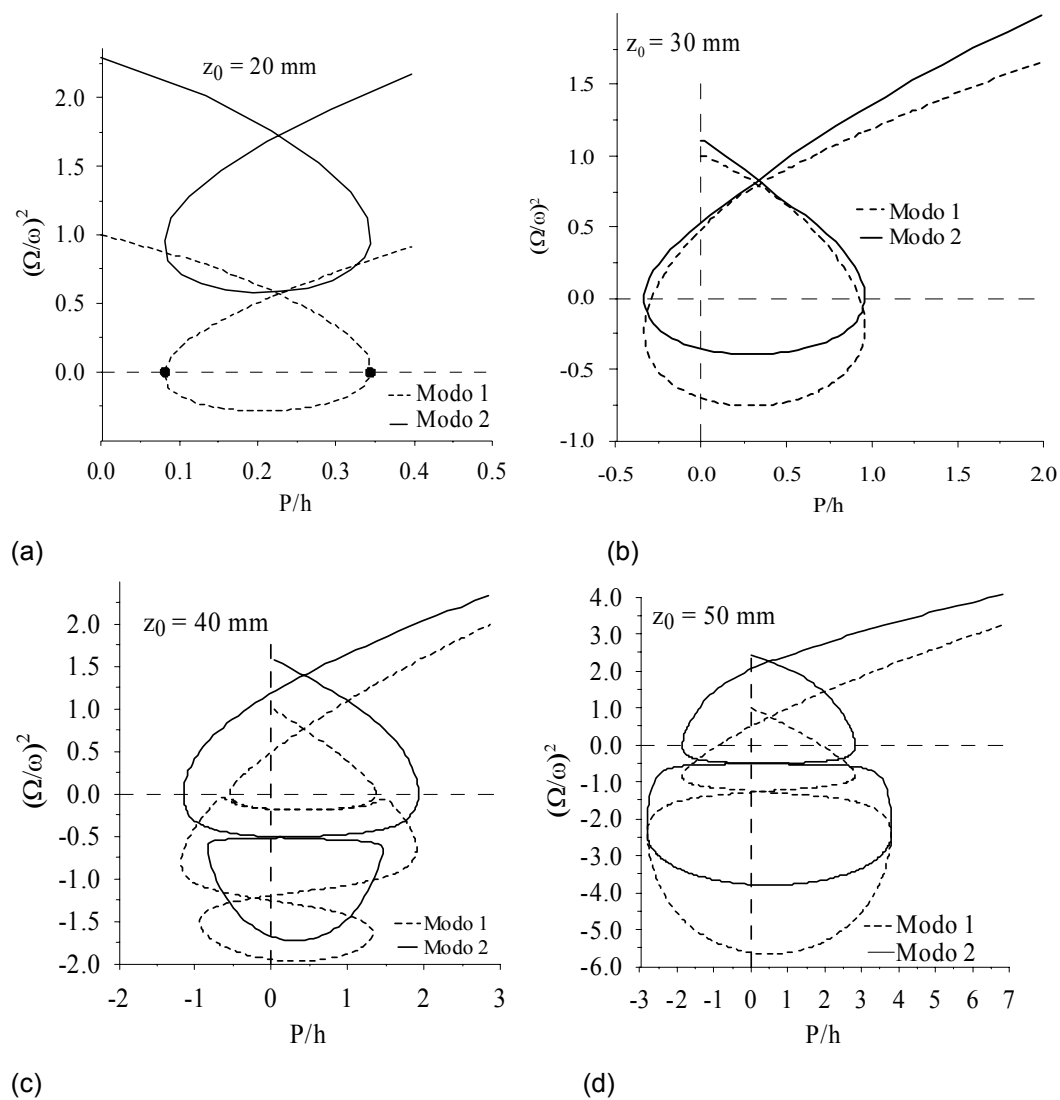


Figura 5.22: Variação da relação frequência x carregamento com a altura z_0 . Frequências associadas aos dois primeiros modos de vibração da estrutura perfeita.

As Figuras 5.23 e 5.24 exibem, respectivamente, a trajetória de equilíbrio e a variação da frequência com o carregamento para um arco com $z_0 = 31.4$ mm, na vizinhança do ponto onde há coincidência das frequências naturais. Nota-se que para esta geometria também há uma quase coincidência do ponto limite com o ponto de bifurcação, mostrando que é o mesmo mecanismo que gera a bifurcação por perda de simetria e a mudança da forma modal.

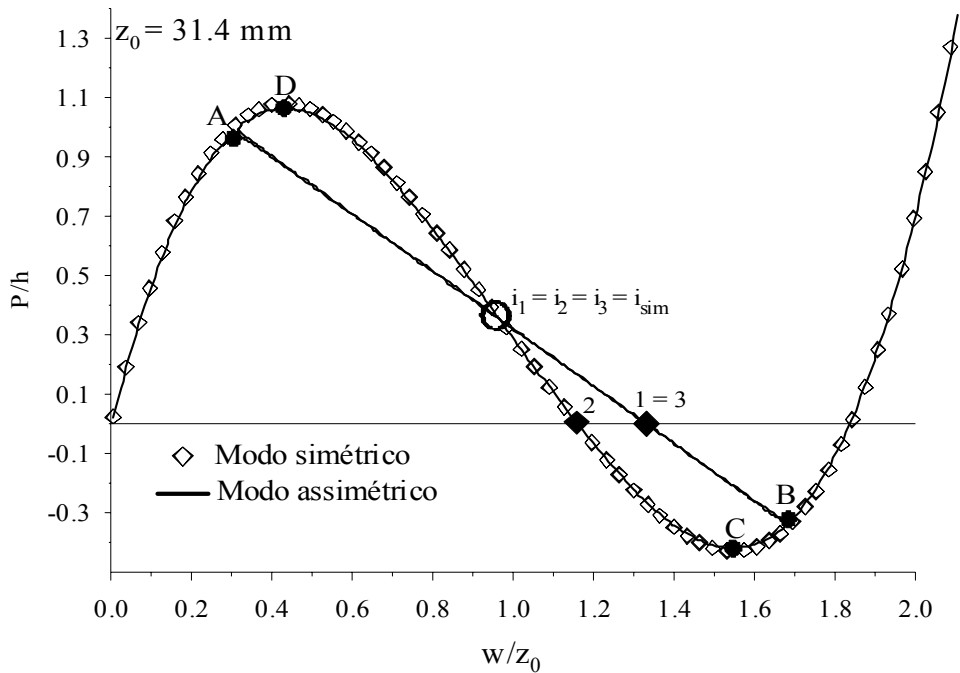


Figura 5.23: Trajetória de equilíbrio: $z_0 = 31.4$ mm.

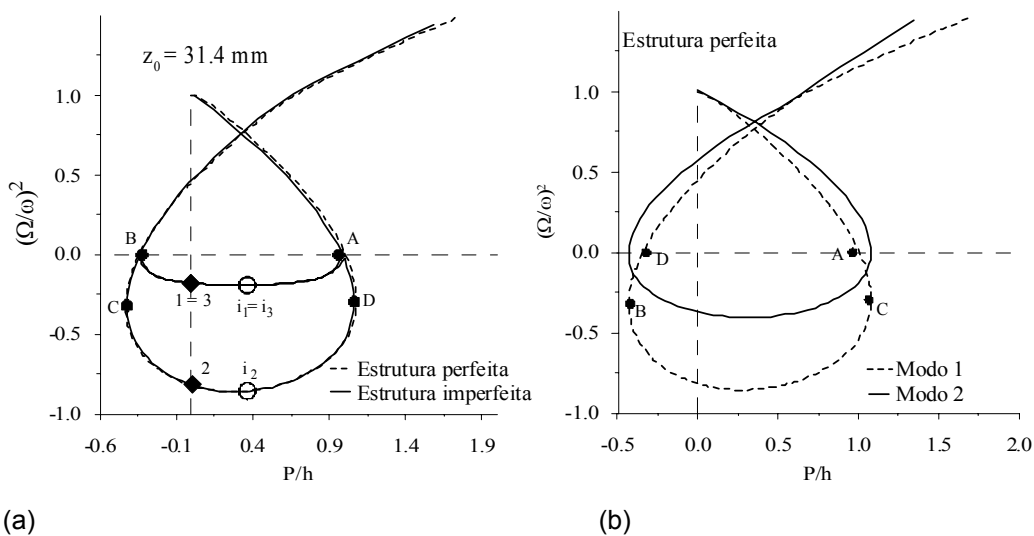


Figura 5.24: Freqüências naturais vs. carregamento: $z_0 = 31.4$ mm.

A seguir, na Figura 5.25, são mostradas as configurações deformadas do arco na vizinhança dos diferentes pontos críticos (pontos limites e pontos de bifurcação) ao longo do caminho de equilíbrio. Na Figura 5.26 mostram-se as configurações instáveis associadas ao caminho fundamental (i_2) e ao caminho pós-crítico (i_1 e i_3).

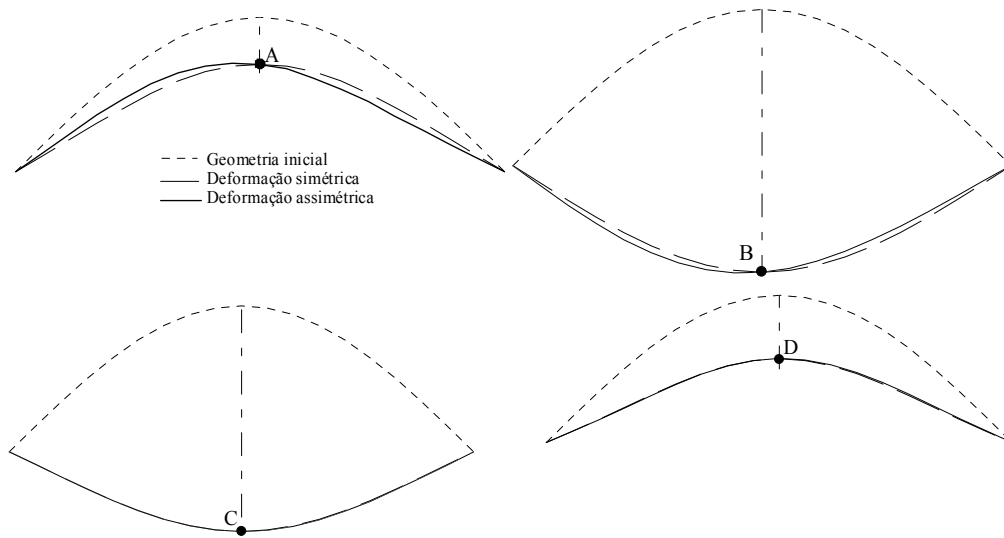


Figura 5.25: Configurações deformadas: $z_0 = 31.4$ mm.

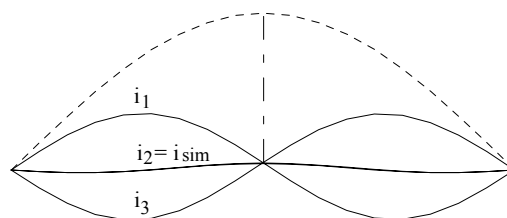


Figura 5.26: Configurações deformadas: $z_0 = 31.4$ mm.

Tem sido uma prática comum em análises numéricas por elementos finitos se utilizar condições de simetria para reduzir o número de graus de liberdade. Essa prática tem algumas implicações quando se estuda problemas de instabilidade. Nas Figuras 5.27 e 5.28 são comparados os resultados obtidos a partir de dois modelos diferentes usados para modelar o modo simétrico, isto é, o caminho fundamental de equilíbrio: (a) um modelo utilizando arco completo sem imperfeições e (b) um modelo utilizando metade do arco e restringindo a rotação e

o deslocamento horizontal no nó correspondente ao topo do arco. Observa-se que os dois modelos apresentam a mesma trajetória de equilíbrio, como mostra a Figura 5.28, porém há diferenças nas curvas que relacionam o quadrado da frequência com o carregamento e , portanto, na definição das regiões estáveis e instáveis ao longo do caminho fundamental de equilíbrio. Enquanto no modelo completo a frequência se torna nula no ponto de bifurcação, no modelo incompleto esta se torna nula no ponto relativo ao ponto limite, já que neste modelo a bifurcação é impedida pela restrição de simetria. Esta diferença se torna ainda maior para valores mais altos de z_0 .

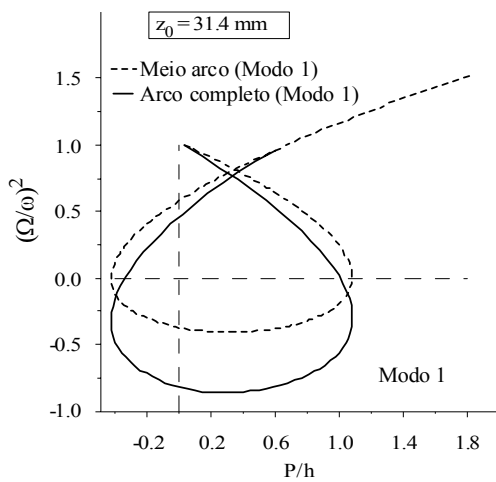
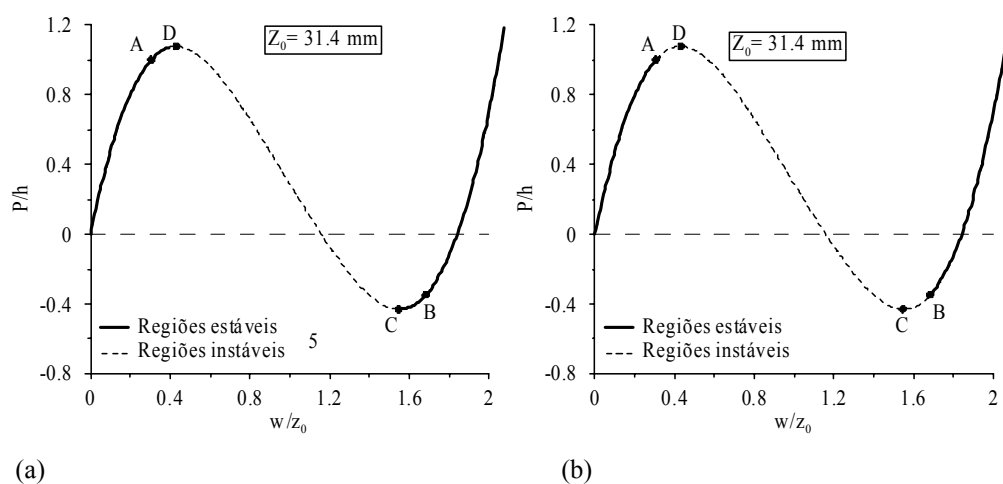


Figura 5.27: Frequências naturais x carregamento: comparação entre as frequências naturais dos dois modelos.



(a)

(b)

Figura 5.28: Estabilidade do arco simétrico $z_0 = 31.4$ mm: Modelo: (a) metade do arco, (b) arco completo.

Na Figura 5.30 mostra-se a variação do primeiro modo de vibração ao longo dos trechos estáveis do caminho de equilíbrio. As configurações correspondentes a esses modos são apresentadas na Figura 5.29.

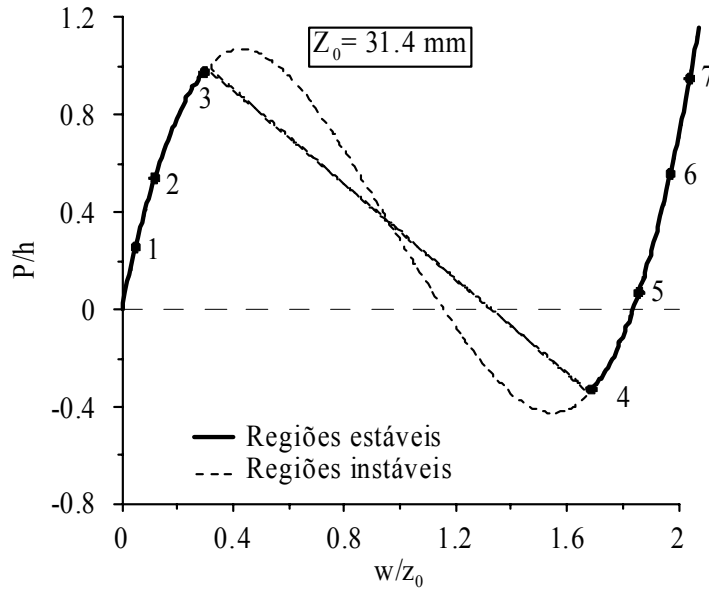


Figura 5.29: Arco $z_0 = 31.4 \text{ mm}$ – trajetória assimétrica.

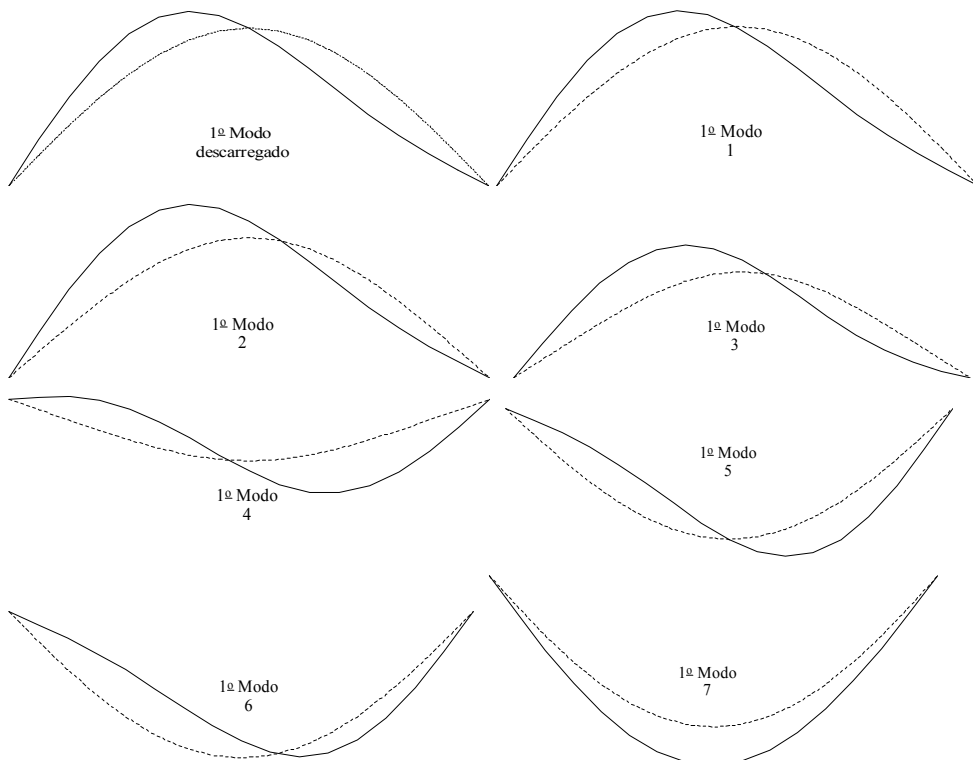


Figura 5.30: Variação do 1º modo de vibração (linha contínua) com o nível de carregamento representado em torno da configuração deformada (linha pontilhada).

5.2.3

Pórtico em L

Na Seção 3.3 foi apresentada uma análise estática paramétrica detalhada desta família de pórticos. Na presente seção, pretende-se dar ênfase ao estudo das frequências naturais e modos de vibração do pórtico em L. As características físicas e geométricas são apresentadas na Figura 5.31. Nestas análises, a ligação semi-rígida é representada por um elemento híbrido de comprimento $L_{sr} = L/1000$.

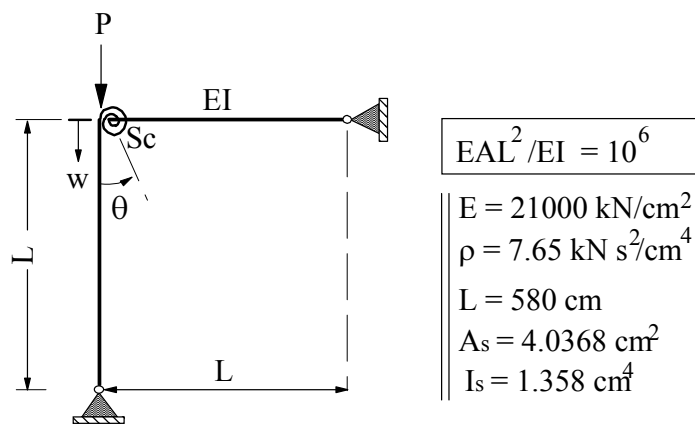


Figura 5.31: Pórtico em L com ligação semi-rígida entre as barras.

Como já visto na Seção 3.3, os pórticos em L geralmente apresentam um caminho fundamental de equilíbrio seguido de uma bifurcação assimétrica, caracterizada por uma dada inclinação inicial do caminho de equilíbrio pós-crítico. Foi também observado que o aumento da rigidez estrutural promove um aumento no valor da carga crítica do pórtico mas, por outro lado, torna mais forte a inclinação inicial do caminho pós-crítico e aumenta, portanto, a sensibilidade a imperfeições. Essa característica pode ser mais uma vez ilustrada pela Figura 5.32, que mostra a variação da trajetória de equilíbrio com a rigidez da ligação para os casos estudados neste item.

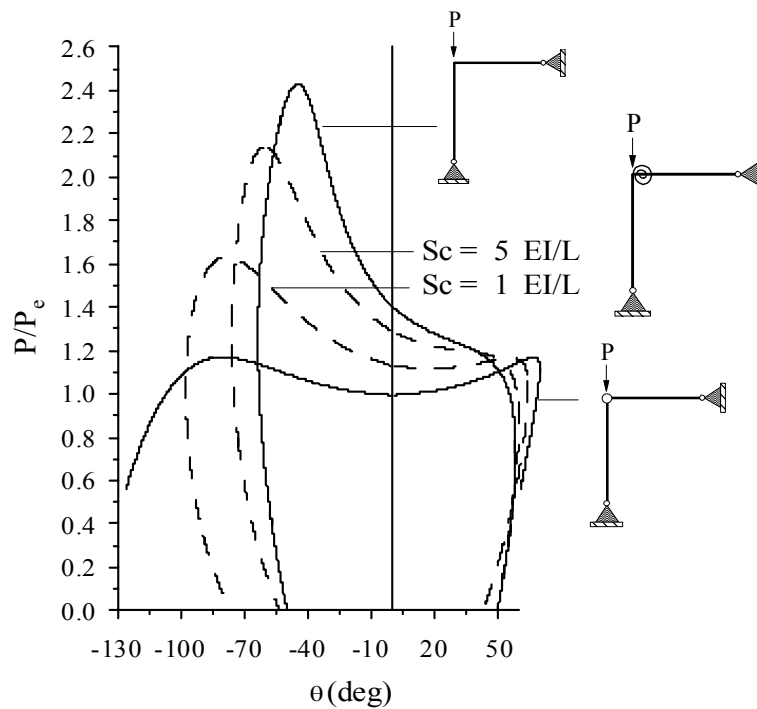


Figura 5.32: Pórtico em L: trajetórias de equilíbrio x rigidez das ligações.

A Figura 5.33 exibe a variação do quadrado da primeira frequência natural com o carregamento para diversos valores do parâmetro Sc . Nota-se que o trecho relativo ao caminho fundamental de equilíbrio é praticamente linear, aparecendo uma pequena não-linearidade próxima ao ponto de bifurcação, isto em virtude das perturbações utilizadas para se obter numericamente os dois ramos do caminho pós-crítico. A partir dos resultados verifica-se que o ramo direito do caminho pós-crítico é instável e o ramo esquerdo é estável até o ponto limite.

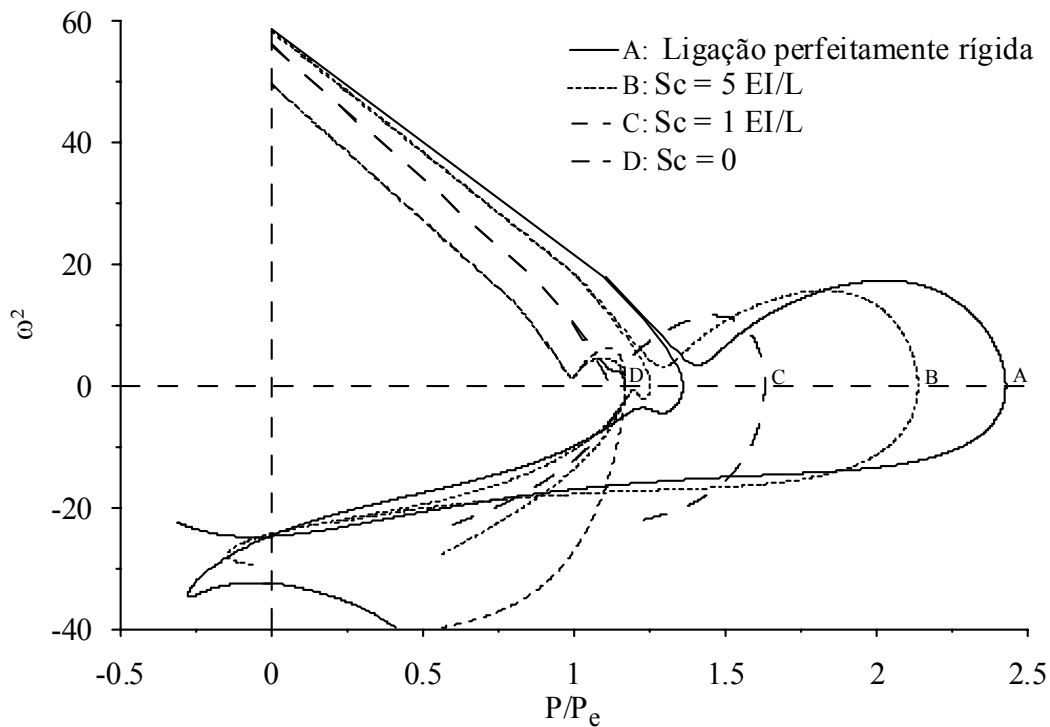


Figura 5.33: L-Frame: relação 1ª frequência x carga vertical x rigidez das ligações.

A variação das três primeiras frequências da estrutura descarregada com Sc é mostrada na Tabela 5.1

Sc	ω_1	ω_2	ω_3
∞	7.67	13.25	34.56
5 EI/L	7.64	11.53	34.52
1 EI/L	7.49	9.82	34.36
0	7.04	8.92	33.95

Tabela 5.1: Variação das 3 primeiras frequências naturais com o parâmetro Sc em torno da configuração de influência.

À medida que a rigidez da ligação se aproxima de zero, ou seja, a ligação se aproxima de uma rótula perfeita, as duas primeiras frequências se aproximam. Nota-se que, dentre as três frequências analisadas, a segunda frequência é a mais influenciada pela rigidez da ligação. Isto pode ser explicado, analisando-se os modos de vibração apresentados na Figura 5.36 que exibe os três primeiros modos de vibração para $Sc = 5EI/L$ e $Sc \rightarrow \infty$. Nota-se que a variação do ângulo entre as barras com Sc é bem maior para o segundo modo, levando a uma maior contribuição da mola na rigidez total do sistema.

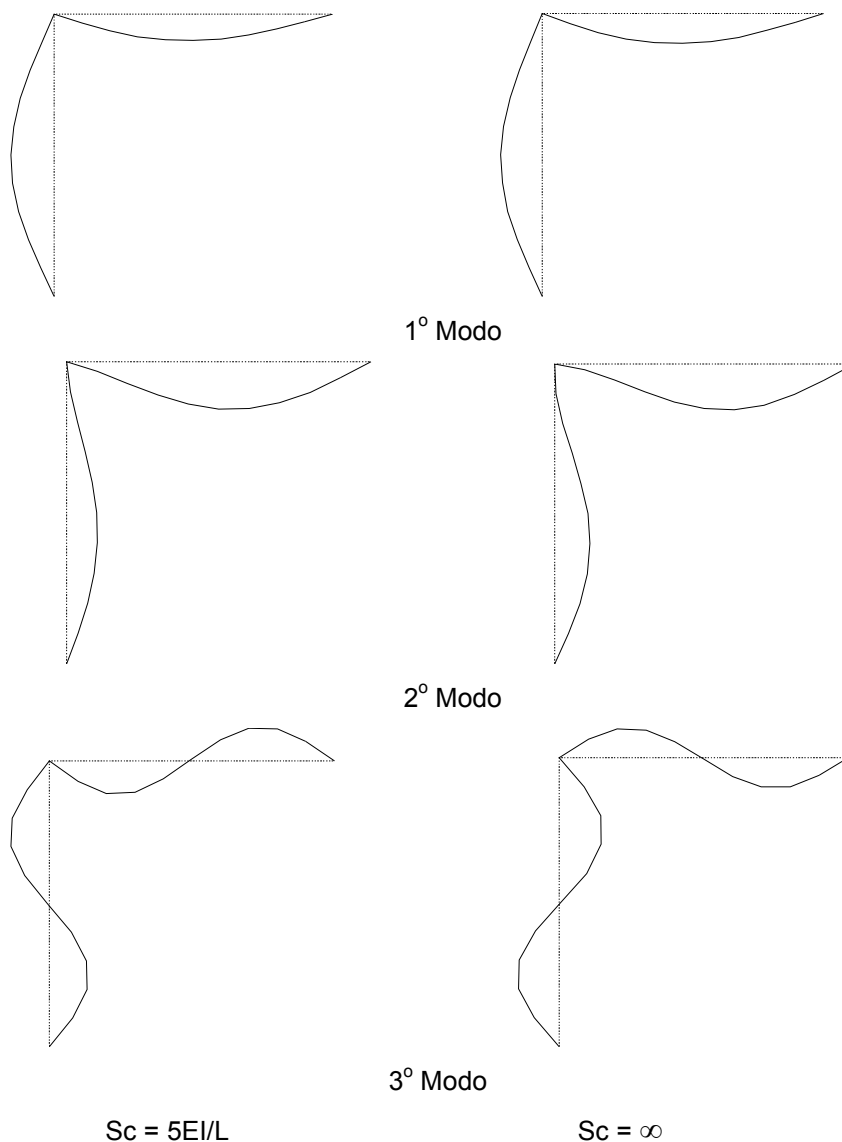
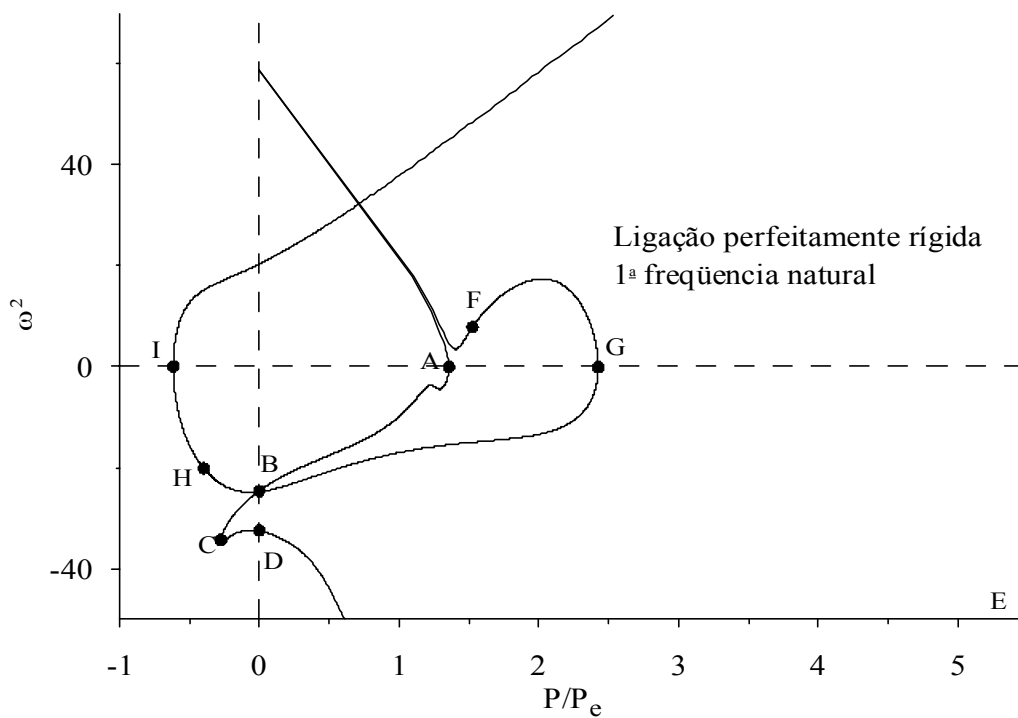
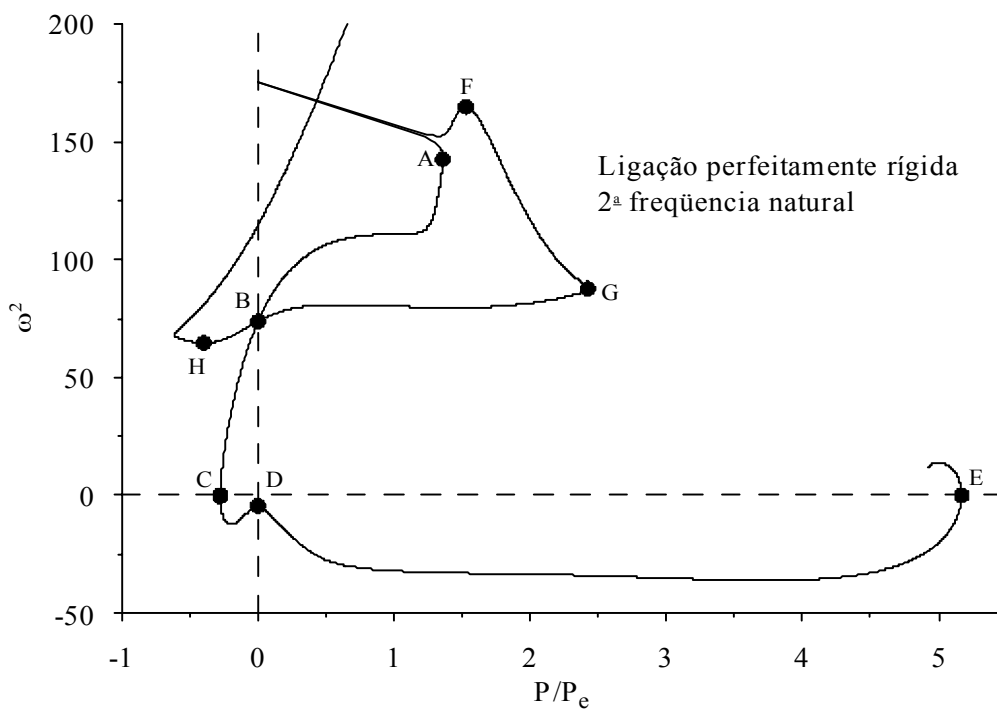


Figura 5.34: Pórtico em L, $Sc = 5EI/L$: modos de vibração para o pórtico descarregado.

Para se entender o comportamento estático e dinâmico em estágios pós-críticos avançados, são mostradas na Figura 5.35, para o pórtico com ligação perfeitamente rígida e carga concentrada, as curvas de variação das duas primeiras frequências naturais com o nível de carregamento até se alcançar grandes deslocamentos e rotações. Os resultados mostram que, como no caso do arco, o carregamento afeta de forma marcante ambas as frequências. Sabendo-se que as regiões da trajetória onde o equilíbrio é estável possuem todas as frequências naturais com valores reais e que as regiões correspondentes a valores negativos de ω^2 são instáveis (frequência natural com valor imaginário), pode-se destacar as configurações estáveis e as instáveis como mostra a Figura 5.36. Estes resultados revelam mais um ramo de equilíbrio estável associado a grandes deslocamentos.



(a) primeira frequência natural



(b) segunda frequência natural

Figura 5.35: Pórtico em L: relação frequências x carga vertical – Ligação perfeitamente rígida.

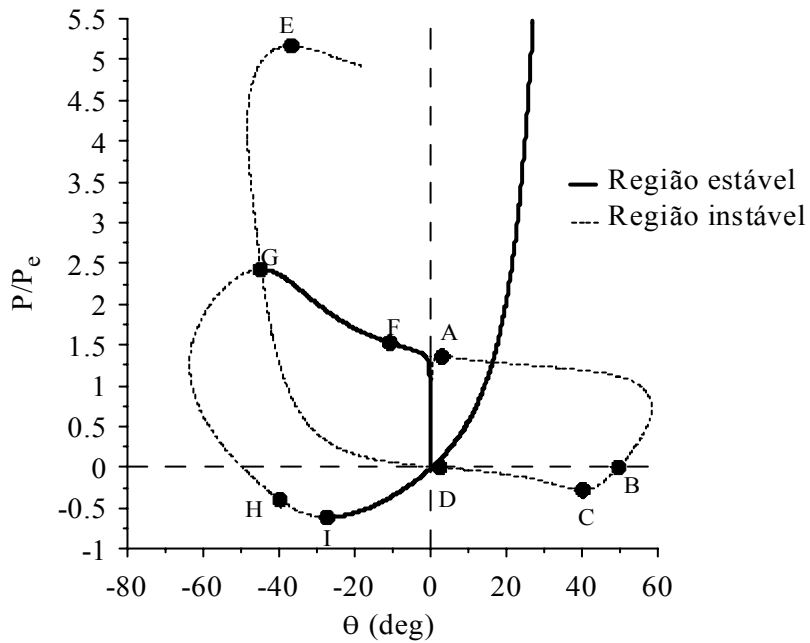
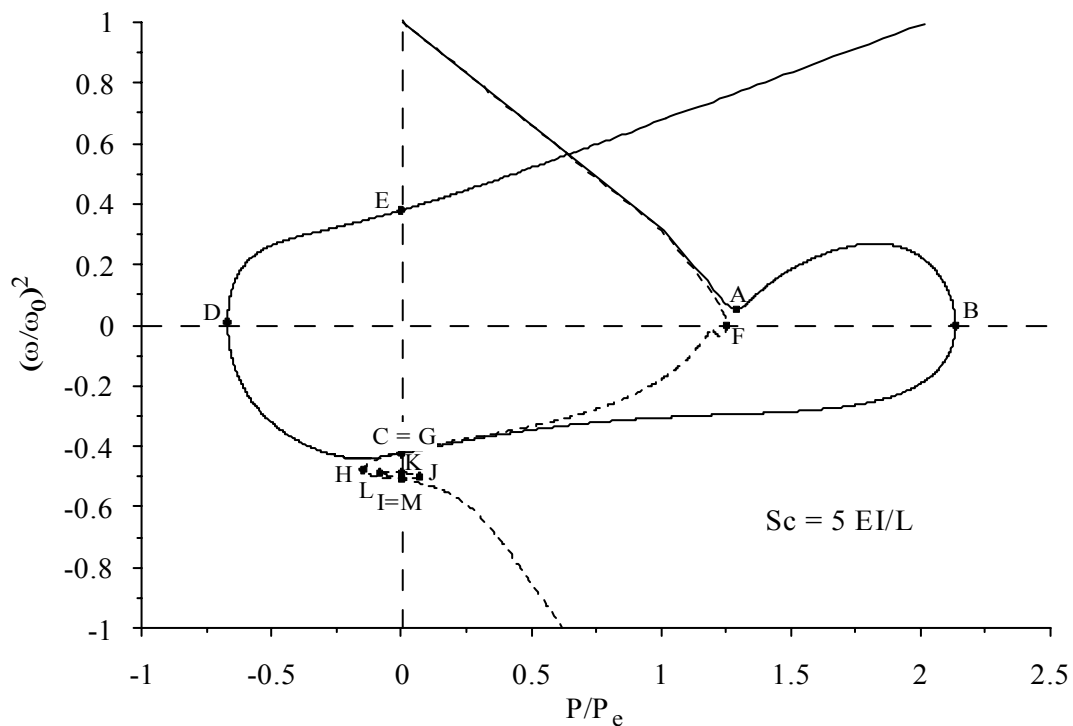
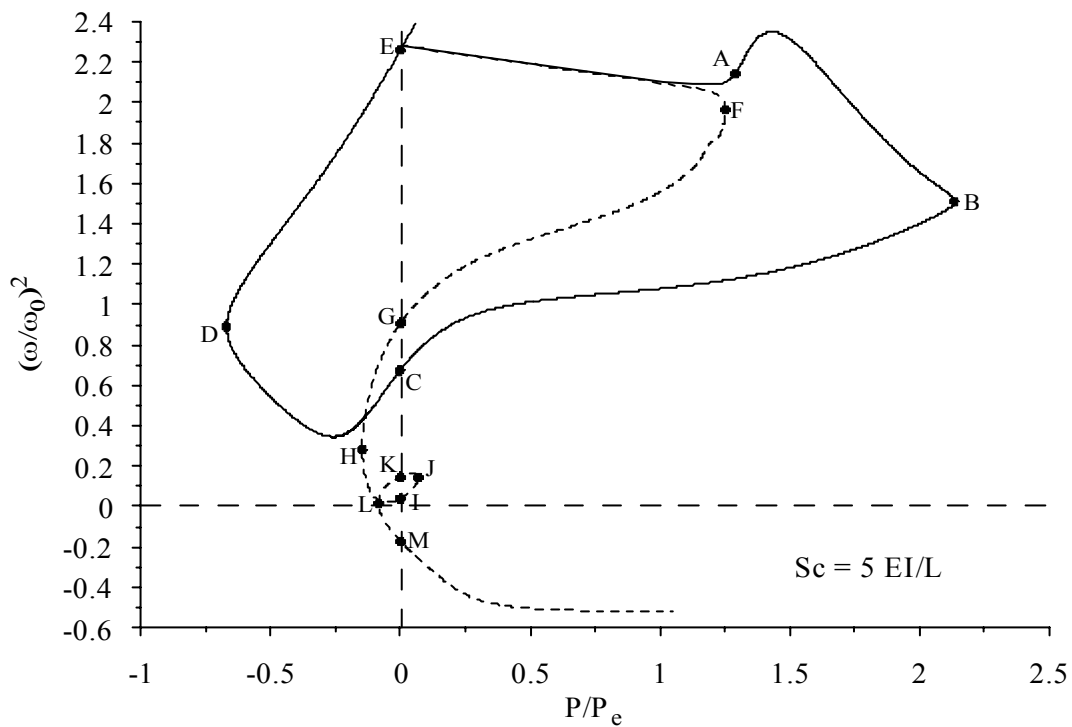


Figura 5.36: Trajetória de equilíbrio.

Em seguida, as Figuras 5.37, 5.38 e 5.39 apresentam os resultados de um estudo semelhante para o pórtico com uma ligação semi-rígida com $Sc = 5EI/L$.



(a) primeira frequência natural



(b) segunda frequência natural

Figura 5.37: L-Frame $Sc = 5EI/L$: relação frequência x carga vertical: Ligação semi-rígida $Sc=5EI/L$.

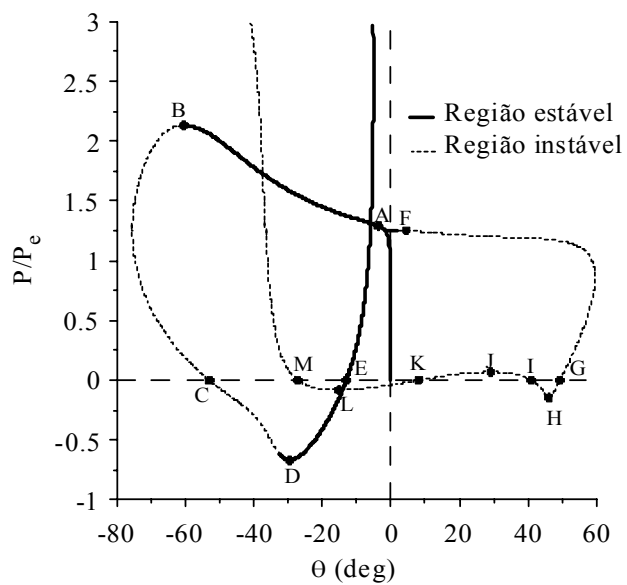


Figura 5.38: L-Frame $Sc = 5EI/L$: trajetória de equilíbrio: rotação θ no topo da coluna.

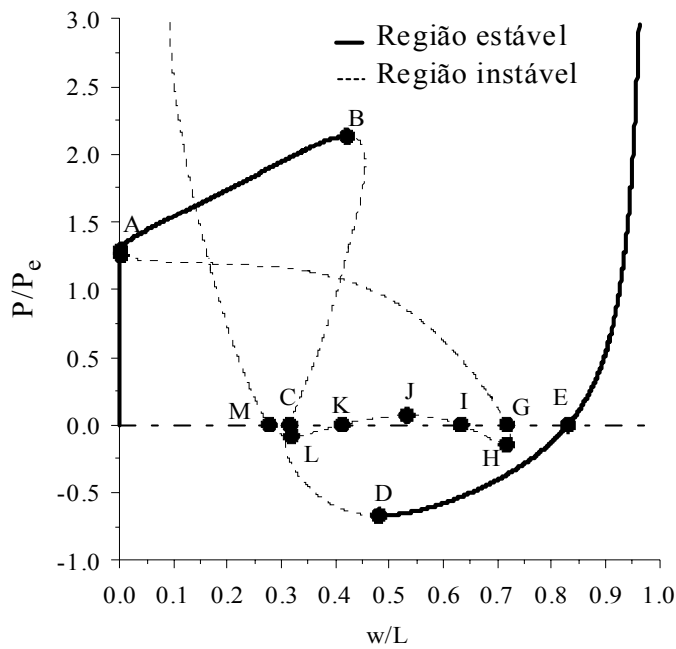


Figura 5.39: Pórtico em L, $Sc = 5EI/L$: trajetória de equilíbrio: deslocamento w no topo da coluna.

As Figuras 5.41 e 5.42 exibem a variação do 1º modo de vibração ao longo dos trechos estáveis do caminho de equilíbrio. As configurações analisadas estão indicadas na Figura 5.40.

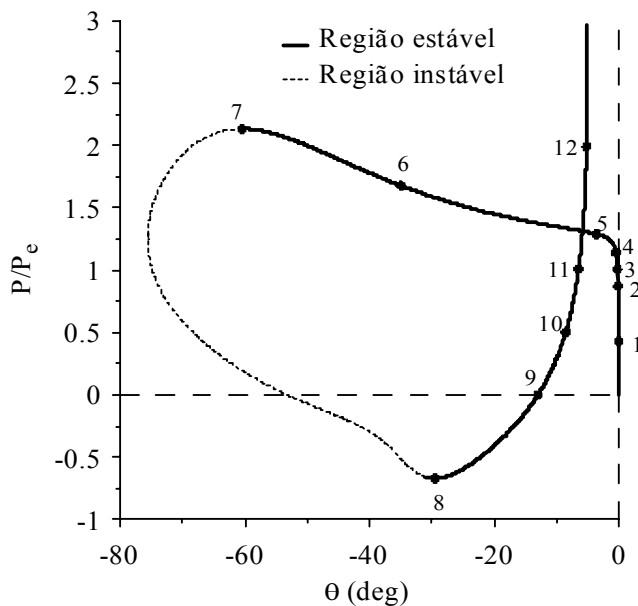


Figura 5.40: Pórtico em L, $Sc = 5EI/L$: trajetória de equilíbrio.

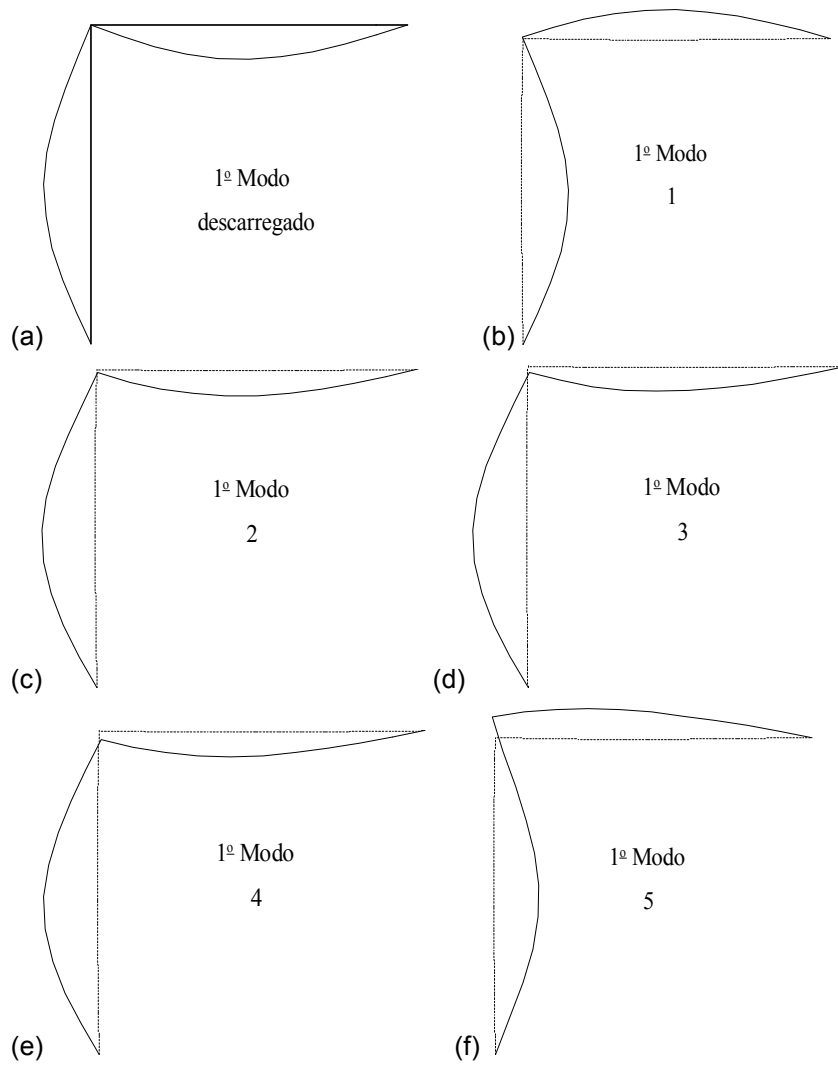


Figura 5.41: L-Frame $Sc = 5EI/L$: Variação do 1º modo de vibração com a configuração de equilíbrio: caminho de equilíbrio fundamental.

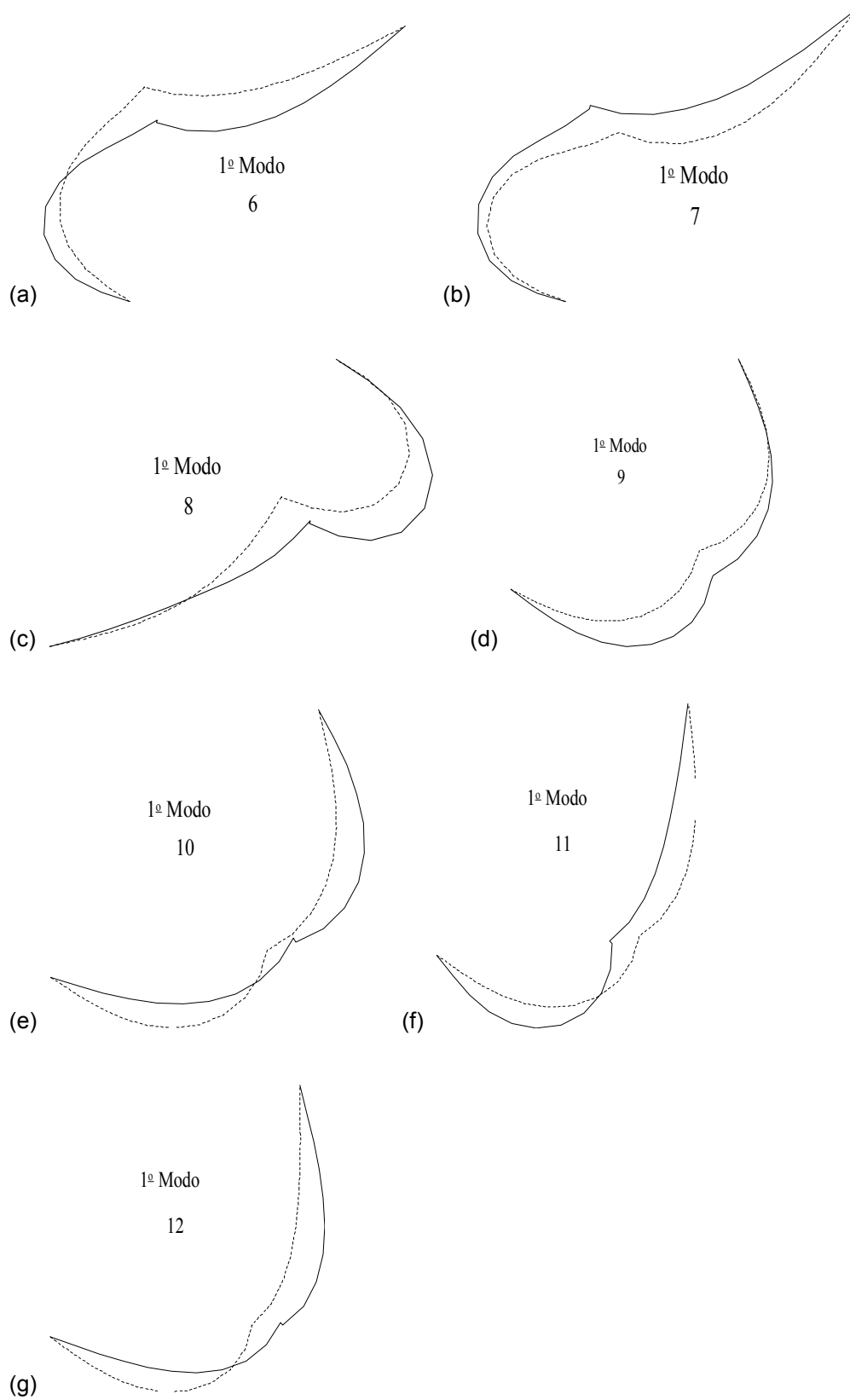


Figura 5.42: L-Frame $S_c = 5EI/L$: Variação do 1º modo de vibração (linha contínua) em torno da configuração deformada (linha pontilhada) na região estável da trajetória de equilíbrio pós-crítico

Usualmente, tem-se carga ao longo do vão das vigas em pórticos planos. Nesses casos, a resposta do sistema é semelhante ao de um pórtico carregamento pontual sobre a viga. Assim, tem-se que o seu comportamento é influenciado pelas características do caminho pós-crítico. Para se analisar esse problema, considera-se agora o pórtico sujeito a um carregamento distribuído, como mostra a Figura 5.43.

A variação das freqüências naturais com o nível de carregamento é fornecido na Figura 5.44.

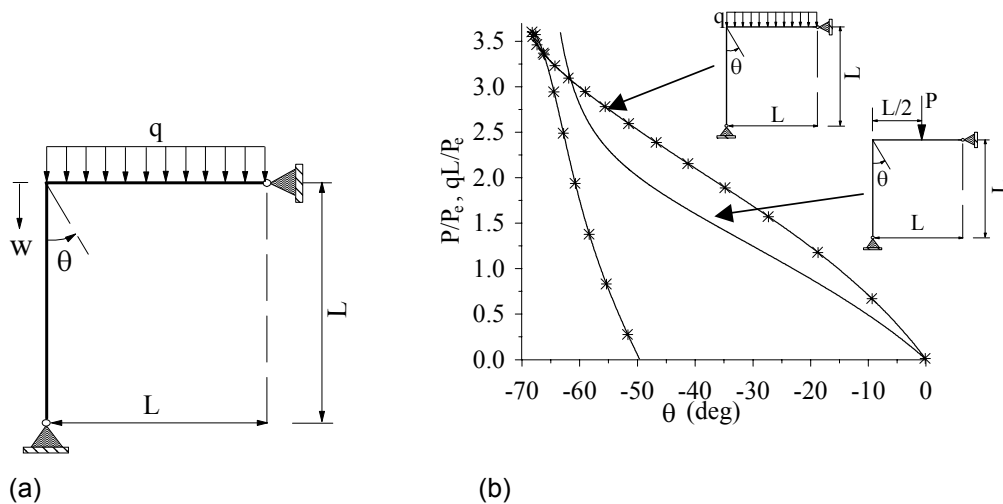


Figura 5.43: Pórtico em L com carregamento distribuído.

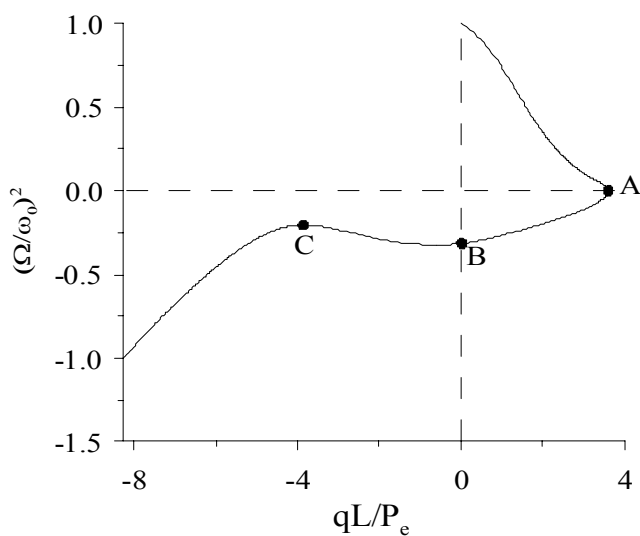


Figura 5.44: variação da relação de freqüências $(\Omega/\omega)^2$ com o nível de carregamento distribuído.

Da mesma forma que foi feito anteriormente, pode-se através desta curva conhecer as regiões estáveis e instáveis do caminho de equilíbrio.

A Figura 5.45 exibe a trajetória de equilíbrio em relação aos deslocamentos θ e w no topo da coluna, indicando as regiões de equilíbrio estável e instável.

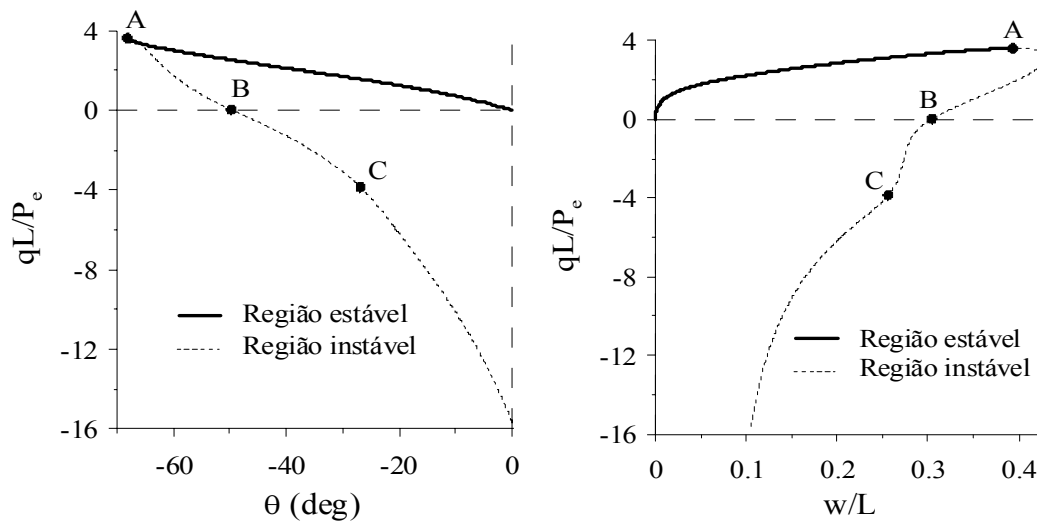


Figura 5.45: Trajetórias de equilíbrio do pórtico em L com carga distribuída.

A Figura 5.46 exibe as configurações deformadas do pórtico nas configurações A, B e C correspondentes às indicadas na Figura 5.45.

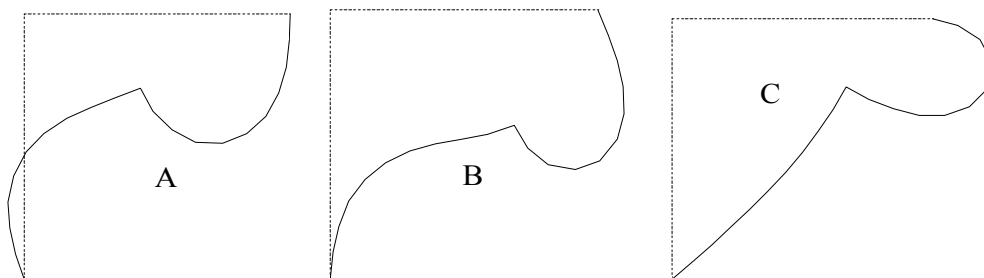


Figura 5.46: Configurações deformadas associadas aos pontos correspondentes da trajetória de equilíbrio.

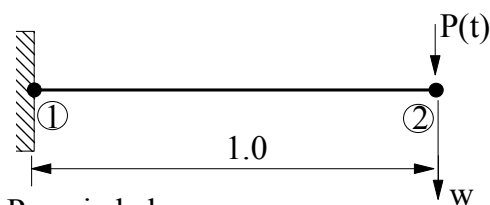
5.3.

EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO DOS ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

5.3.1

Viga engastada-livre

Inicialmente, para validar a implementação dos métodos de integração explícitos e implícitos, é feita uma análise dinâmica linear de uma viga engastada e livre, submetida a um pulso senoidal vertical aplicado na sua extremidade livre, conforme mostrado na Figura 5.47.



Propriedades

$$EI = 3.1941 \quad P(t) = \sin(\pi t/T), \quad 0 < t < T$$

$$\rho A = 1.0 \quad P(t) = 0, \quad t < T$$

Figura 5.47: Viga em balanço submetida a um pulso senoidal.

Pode-se observar através da Figura 5.48a que, ao se utilizar o Método Newmark para a integração numérica, e um passo de tempo constante $\Delta t = 0.05$ s, obtém-se resultados idênticos aos fornecidos por Smith e Griffiths (1999). Na Figura 5.48b são comparadas as respostas fornecidas por alguns métodos de integração implementados neste trabalho. Como esperado, os métodos explícitos (MDC e Runge-Kutta) precisaram de incrementos de tempo menores para apresentar os mesmos resultados do método implícito (Newmark).

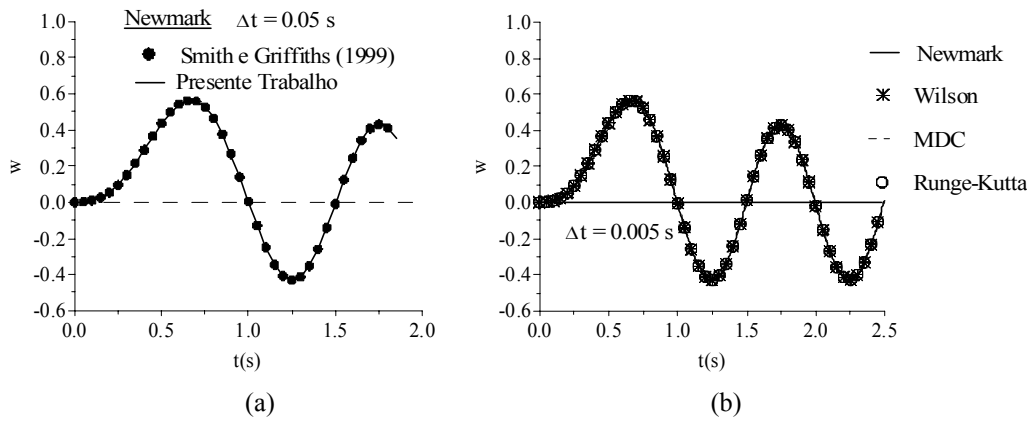
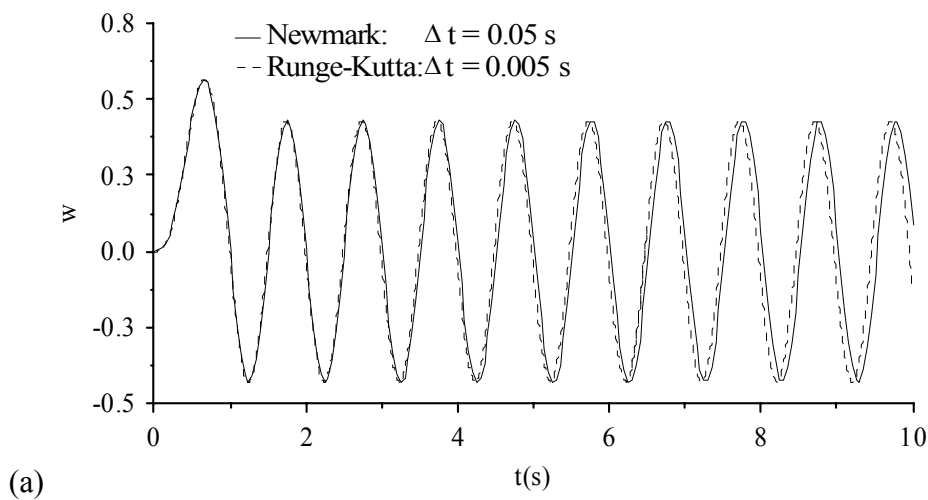
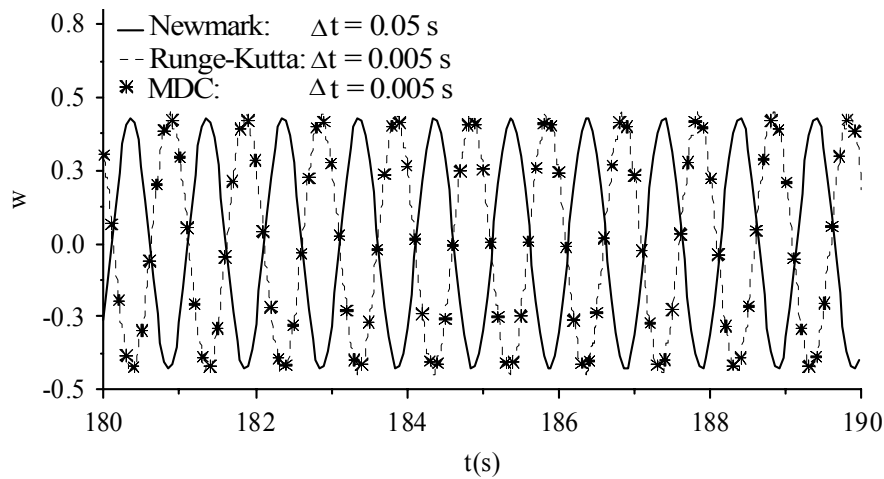


Figura 5.48: Comparação dos métodos de integração direta.

Na literatura técnica para fins de comparação entre diversos métodos de integração numérica e eficiência de algoritmos, apresentam-se apenas os primeiros ciclos da resposta transiente, o mesmo se observa em trabalhos sobre métodos numéricos para análise de vibrações não-lineares de sistemas estruturais complexos. Entretanto, na análise de vibrações não-lineares envolvendo problemas de ressonância e perda de estabilidade, necessita-se integrar as equações de movimento por um período relativamente longo de tempo até se obter a resposta permanente. A fim de observar a convergência dos métodos nestes casos, o mesmo problema foi resolvido para períodos de tempo mais longos. As Figuras. 5.49a e 5.49b mostram o comportamento do sistema estrutural em estudo no intervalo de 0 a 10 segundos, e de 180 a 190 segundos.





(b)
 Figura 5.49: Análise da convergência dos métodos.

Observa-se que, apesar das amplitudes das respostas serem semelhantes para todos os métodos e, além disso, permanecerem constantes durante toda a análise, à medida que se aumenta o tempo de integração da resposta, aumenta-se a defasagem entre as soluções obtidas pelos diferentes métodos. Mais especificamente, pode-se afirmar que ocorreu um “adiantamento” do Método Newmark em relação aos métodos explícitos (MDC e Runge-Kutta). Reduzindo-se o intervalo Δt para o método de Newmark, chega-se ao mesmo resultado obtido pelos métodos explícitos (Figura 5.50).

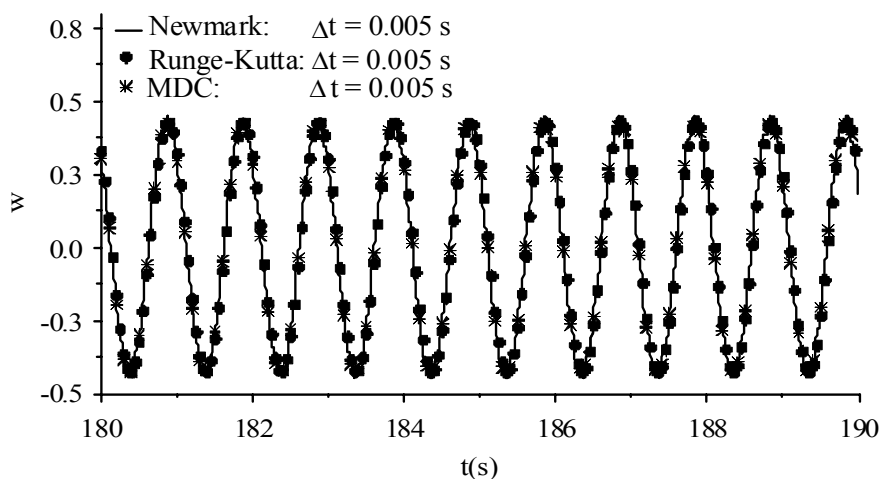


Figura 5.50: Análise da convergência dos métodos: redução de Δt .

Na Figura 5.51 são observadas as respostas dos dois métodos implícitos (Newmark e Wilson- θ) para intervalos de tempo maiores.

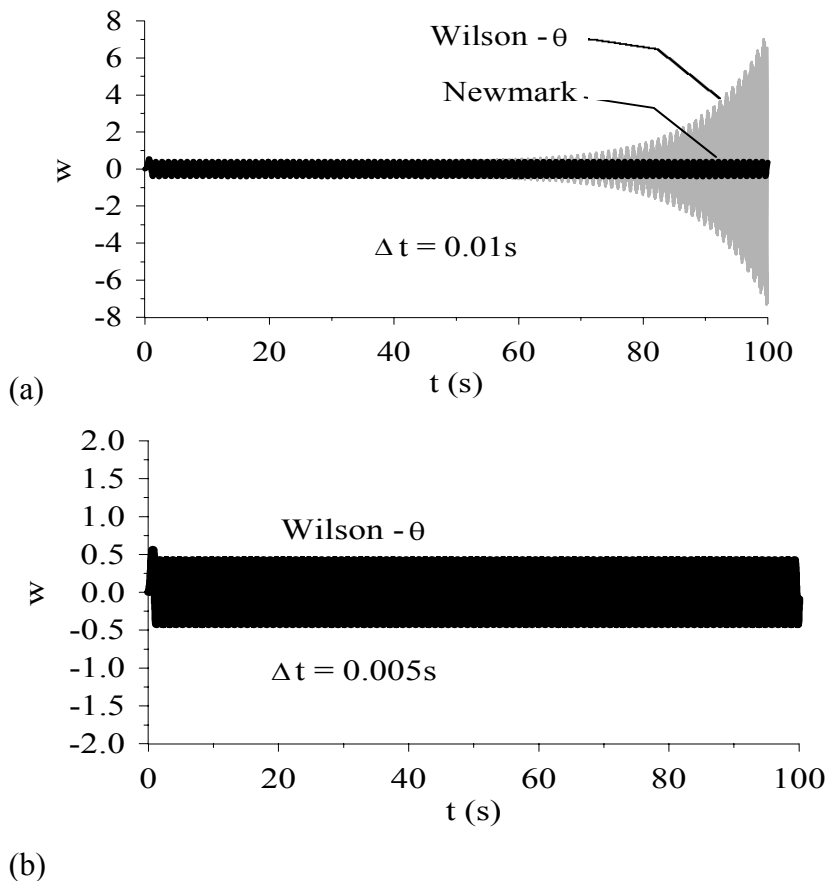


Figura 5.51: Comparação dos Métodos de Newmark e de Wilson- θ .

Ao utilizar para o Método de Wilson- θ um incremento de tempo constante $\Delta t = 0.01s$, que se mostrou adequado para o Método de Newmark, nota-se que ocorreu um aumento progressivo da amplitude da resposta, caracterizando assim uma divergência da solução. Essa divergência, entretanto, foi atenuada quando o passo de tempo foi reduzido. No exemplo estrutural em questão, portanto, foi observada uma maior eficiência do Método de Newmark em relação ao Método de Wilson- θ .

5.3.2

Pórtico de Williams

A Figura 5.52 mostra o sistema estrutural a ser analisado nesta seção. Trata-se de um pórtico abatido biengastado conhecido como o pórtico de Williams (Williams, 1964). Essa estrutura é frequentemente utilizada para validar modelos

e formulações não-lineares. É analisado aqui o caso em que esse pórtico é submetido a uma carga súbita, conforme indicado na figura. Pretende-se mais uma vez avaliar a implementação dos métodos de integração direta (Newmark e Wilson- θ), só que agora considerando a análise dinâmica não-linear. É feita ainda uma avaliação do método adaptativo implementado, verificando o comportamento da resposta em intervalos de tempo prolongados.

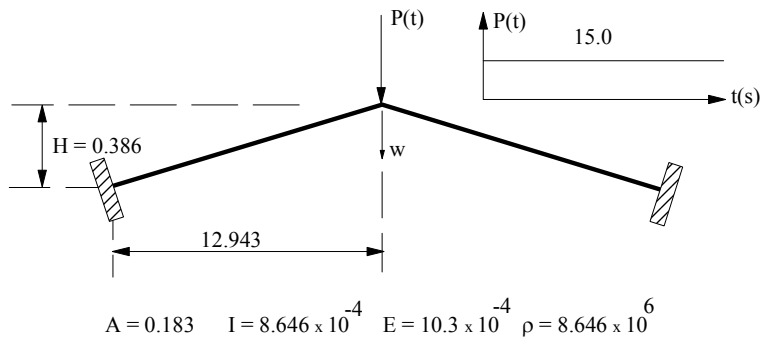


Figura 5.52: Pórtico de Williams.

Na Figura 5.53 são comparados os resultados obtidos no presente trabalho, utilizando-se Newmark, com os fornecidos por Chan e Chui (2000).

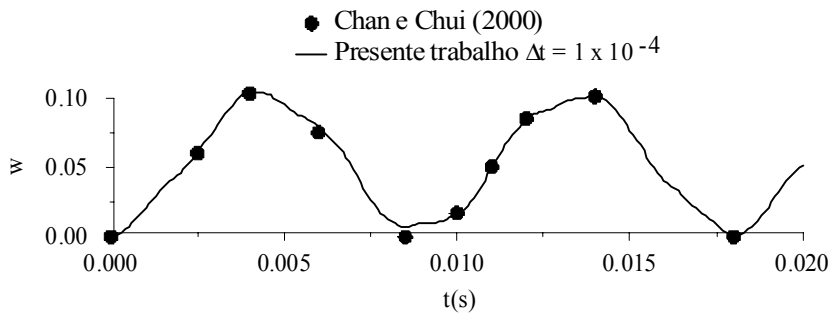


Figura 5.53: Análise comparativa da resposta.

Com o objetivo de observar o comportamento do método em um intervalo de tempo bem mais longo, executou-se a análise mostrada na Figura 5.54.

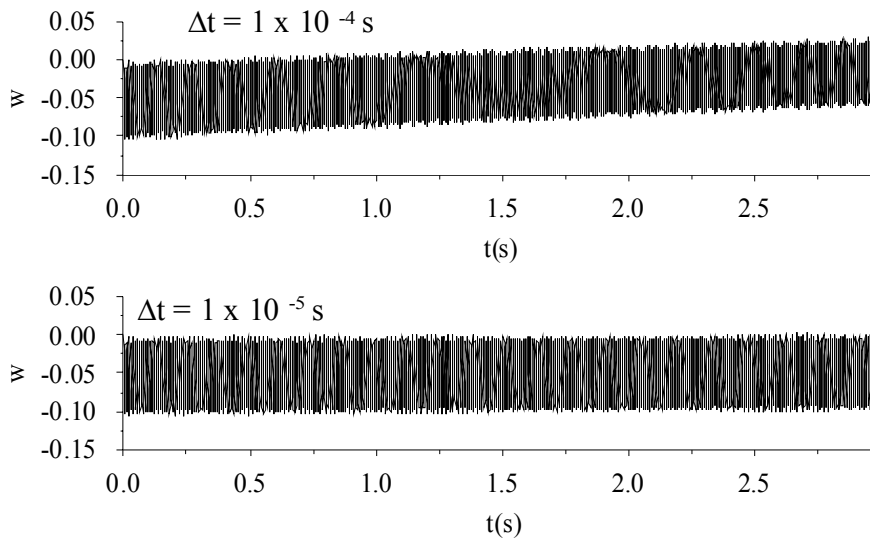
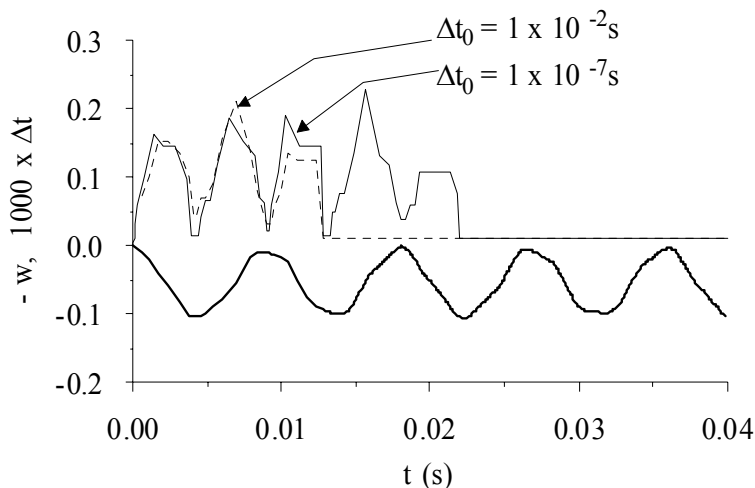


Figura 5.54: Análise da resposta num tempo estendido: Δt constante.

Observe que, para se obter tal resposta com incremento constante de tempo, foi necessário um passo de tempo $\Delta t = 10^{-5}$ s. Para o valor menor de $\Delta t = 10^{-4}$ s, nota-se a presença de um erro acumulado que faz com que haja um deslocamento da trajetória para cima.

Em seguida a análise é refeita utilizando-se a estratégia adaptativa para métodos da família de Newmark. A Figura 5.55 fornece as respostas obtidas para dois valores iniciais de Δt bem diferentes.



$$\Delta t_0 = 1 \times 10^{-2} \text{ s} \rightarrow \Delta t_{\text{méd}} = 1.29 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$$\Delta t_0 = 1 \times 10^{-7} \text{ s} \rightarrow \Delta t_{\text{méd}} = 1.06 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Figura 5.55: Estratégia adaptativa: análise da resposta com Δt variável.

Observa-se que o incremento de tempo varia nos primeiros instantes e tende a um valor constante. Para os dois valores iniciais o comportamento da variação e o valor dos intervalos médios obtidos são bem próximos. Entretanto, nota-se que para um valor inicial elevado, a média dos intervalos avaliados é ligeiramente maior.

Na Figura 5.56 pode ser observada a eficiência dos métodos de integração da família Newmark acoplados à estratégia adaptativa, onde é apresentada a resposta obtida para um intervalo de 4 segundos e um passo inicial de tempo relativamente grande, $\Delta t = 10^{-2}$ s. Com esse valor inicial, a estratégia adaptativa produziu variações nos passos de tempo tais que o incremento médio durante a execução foi $\Delta t_{\text{médio}} = 1.29 \times 10^{-5}$ s.

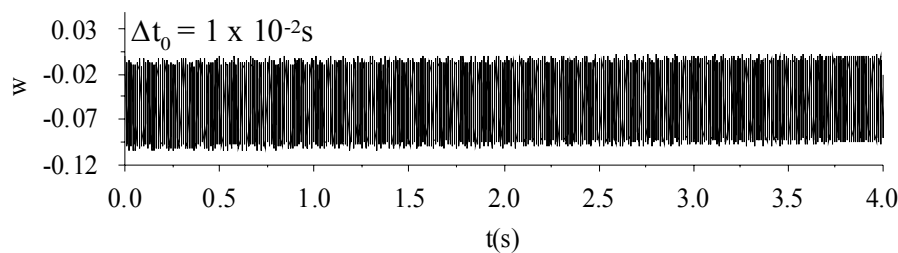
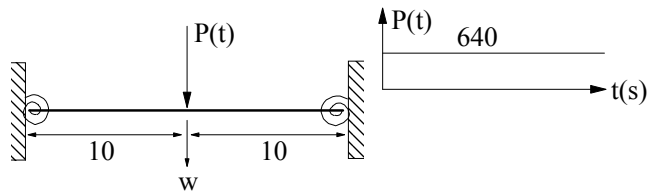


Figura 5.56: Estratégia adaptativa: resposta para um Δt inicial igual a 10^{-2} s.

5.3.3

Barras com ligações semi-rígidas

Com o objetivo de validar as implementações dos algoritmos de integração para a análise dinâmica não-linear de pórticos com ligações semi-rígidas, analisa-se nesta seção uma viga com duas ligações semi-rígidas nas suas extremidades, submetida a um carregamento instantâneo invariável no tempo, conforme mostrado na Figura 5.57.



Propriedades

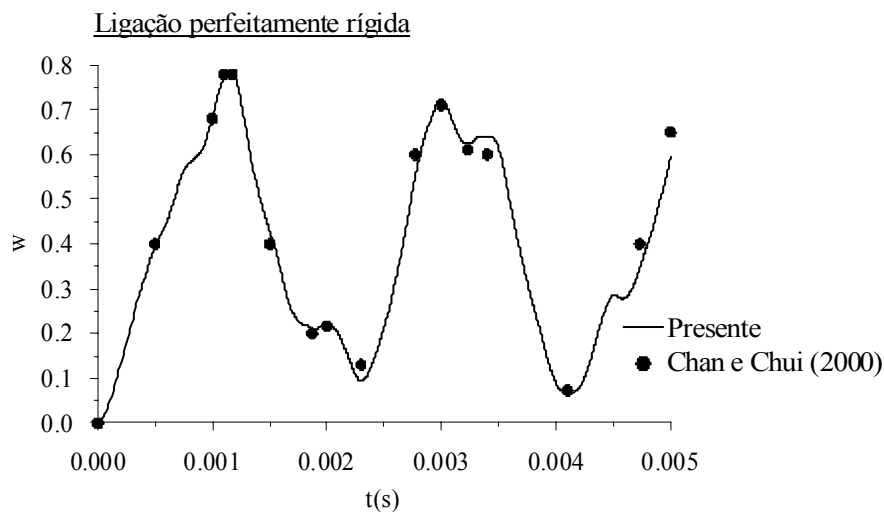
$$E = 3.0 \times 10^7 \quad A = 0.125$$

$$\rho = 26 \times 10^{-5} \quad I = 1.6276 \times 10^{-4}$$

Figura 5.57: Viga com ligações semi-rígidas.

Este é um exemplo clássico que já foi investigado por vários pesquisadores, tais como Mondkar e Powel (1977), Yang e Saigal (1984), e Chan e Chui (2000). Da mesma forma que Chan e Chui (2000), a viga é modelada no presente trabalho usando-se uma malha de 10 elementos finitos e resolvida pelo método de Newmark com passo de tempo constante $\Delta t = 10^{-6}$ s.

A resposta obtida no presente trabalho é apresentada juntamente com a fornecida por Chan e Chui (2000) na Figura 5.59 para 3 casos de ligação: ligação perfeitamente rígida, ligação semi-rígida com $Sc = 10 EI/L$ e $Sc = 1 EI/L$.



(a) Ligação perfeitamente rígida.

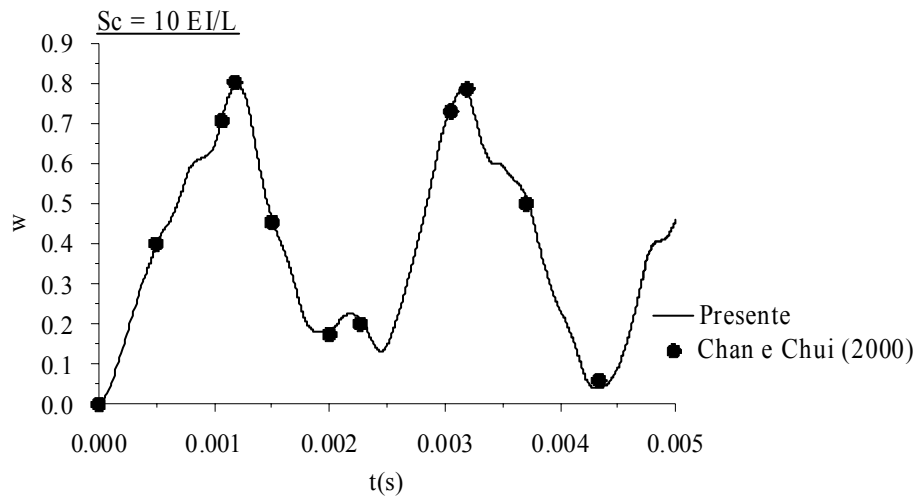
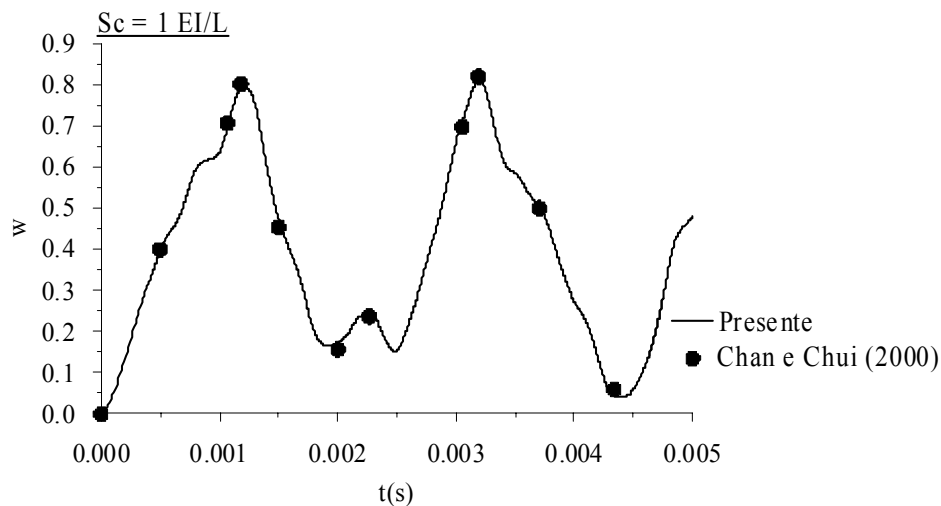
(b) $Sc = 10EI/L$ (c) $Sc = 1EI/L$

Figura 5.58: Viga com ligações semi-rígidas: resposta transiente.

Pode-se observar que os resultados obtidos no presente trabalho para a resposta transiente da estrutura praticamente coincidem com os fornecidos por Chan e Chui (2000). Isto dá uma boa indicação da eficiência das implementações aqui realizadas.

5.4.

EXEMPLOS NUMÉRICOS DE ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR

O objetivo deste item não é analisar com profundidade a dinâmica não linear dos sistemas estruturais em estudo, mas mostrar as potencialidades das ferramentas numéricas desenvolvidas na presente tese na análise das vibrações não-lineares e instabilidade dinâmica de estruturas. Para isto são novamente analisados o arco senoidal e o pórtico em L por apresentarem grande não-linearidade e perda de estabilidade sob certas cargas dinâmicas.

5.4.1

Arco senoidal

Nesta seção, será novamente estudado o arco senoidal já analisado nas seções 3.2.3 e 5.2.3. Serão considerados agora os dois tipos de carregamento ilustrados na Figura 5.59, a saber: (a) um carregamento de magnitude constante aplicado de forma súbita e (b) uma carga harmônica senoidal. Considera-se adicionalmente um amortecimento viscoso proporcional à massa e à rigidez, $\mathbf{C} = \alpha_m \mathbf{M} + \alpha_k \mathbf{K}$ definido pelos coeficientes de Rayleigh, α_m e α_k , que são calculados a partir da taxa de amortecimento crítico $\xi = 0,25$. A resposta dinâmica é obtida através do método de integração de Newmark para valores de intervalos de tempo Δt controlados pela estratégia adaptativa apresentada na seção 4.4.3.1.

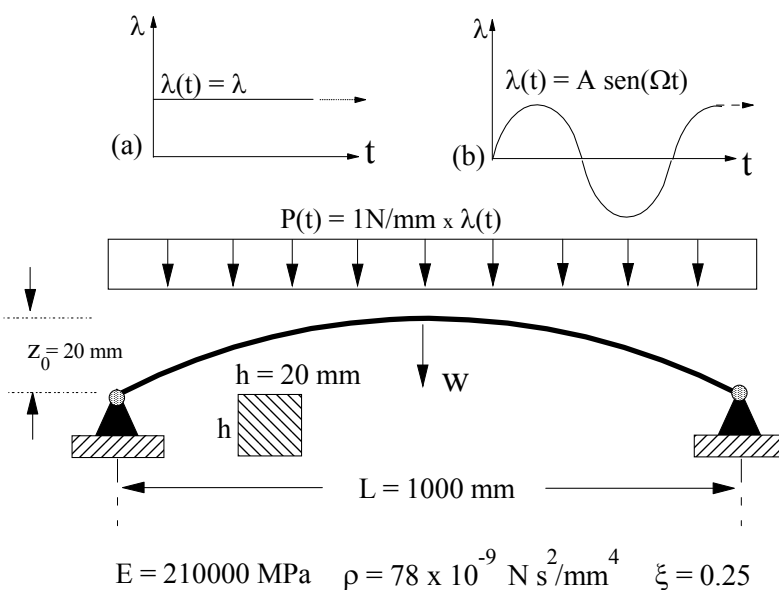
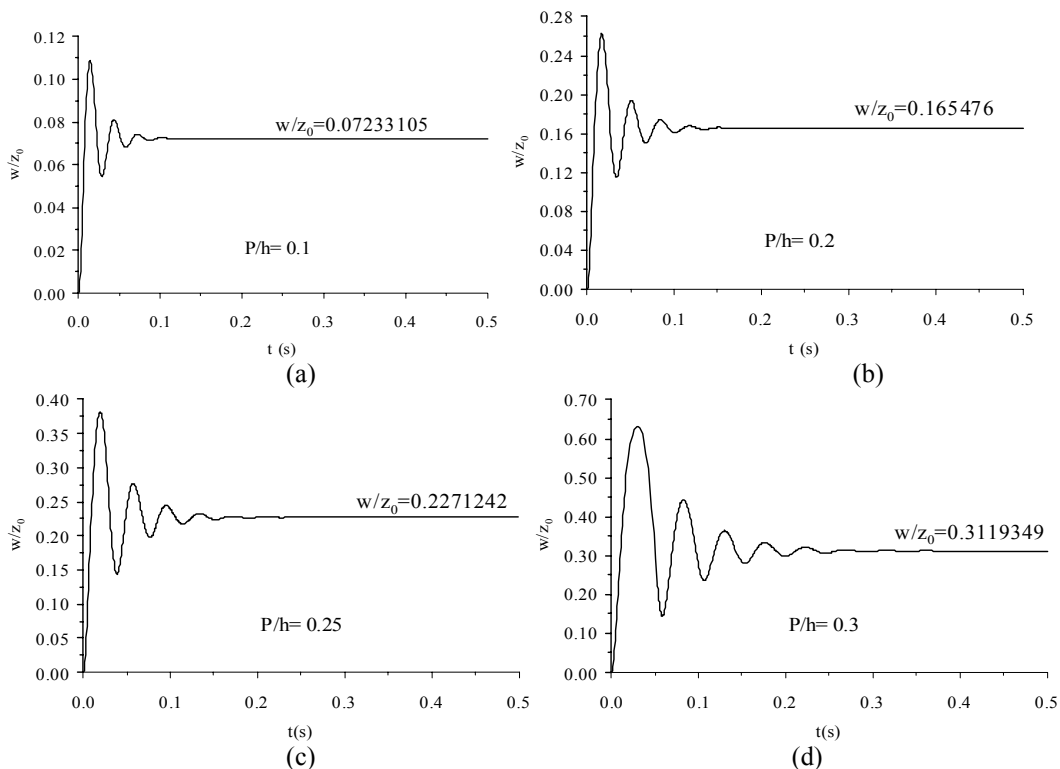


Figura 5.59: Arco senoidal abatido: análise dinâmica não-linear

Inicialmente, considera-se o arco submetido a uma carga de magnitude constante e de duração infinita, aplicada subitamente. Na Figura 5.60 mostra-se a resposta no tempo para níveis crescentes de carregamento. Logo após a aplicação da carga o arco apresenta uma resposta transiente com oscilações de grande amplitude no interior do vale potencial pré-flambagem e, a seguir, a resposta converge para uma posição de equilíbrio compatível com o nível de carregamento, como mostram as Figuras 5.60a-5.60e. Entretanto, para um nível de carregamento crítico inferior à carga limite, o arco escapa do vale potencial pré-flambagem e a resposta converge para uma solução pós-crítica estável com o arco assumindo uma configuração invertida. Esse fenômeno é conhecido como um salto dinâmico ou *snap-through*. A Figura 5.60f mostra, para uma carga levemente superior à carga de instabilidade dinâmica, a resposta no tempo onde se observa claramente a divergência da resposta durante o primeiro ciclo da resposta transiente. Este fenômeno é típico dessa classe de estruturas e pode ocorrer na presença de diversos tipos de carregamento dinâmico.



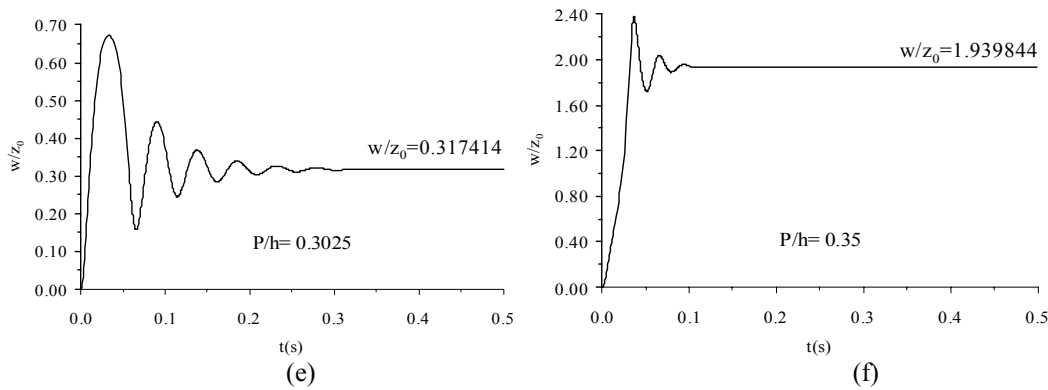


Figura 5.60: Resposta no tempo do arco senoidal para diferentes níveis de carregamento.

Na Figura 5.61 são mostrados os resultados obtidos para as configurações finais de equilíbrio associadas a cada nível de carregamento, sendo estes resultados comparados com aqueles obtidos na análise estática. Nota-se que os resultados das análises estática e dinâmica se superpõem, como era esperado, sendo que na análise dinâmica a perda de estabilidade ocorre para um nível de carregamento inferior ao obtido pela análise estática. Após a ocorrência do salto dinâmico, os resultados voltam a se superpor na região da trajetória que correspondente à concavidade invertida do arco. Esta concordância mostra que a metodologia aqui empregada é capaz de descrever processos de perda de estabilidade dinâmica com variações bruscas da resposta no tempo.

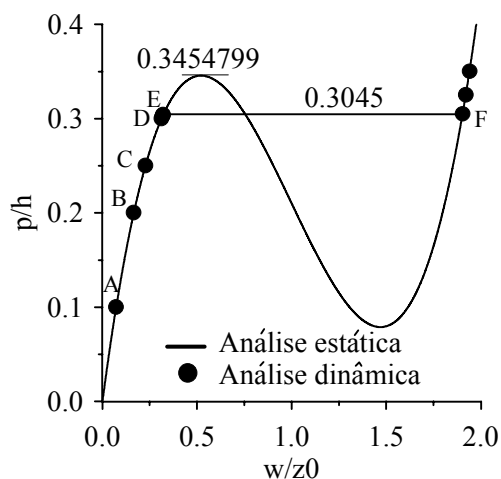


Figura 5.61: Superposição das análises dinâmica e estática.

A mesma análise é realizada para o arco com $z_0 = 50$ mm, considerando neste caso dois tipos de carregamento: (a) um carregamento distribuído uniforme,

semelhante ao do exemplo anterior, e (b) um carregamento não simétrico, semelhante ao usado no capítulo 3 (Figura 3.12) definido por $\alpha_{imp} = 0.5$. A resposta para diferentes níveis de carregamento é mostrada na Figura 5.62, para o caso de carregamento uniforme, onde se observa um comportamento semelhante ao caso anterior.

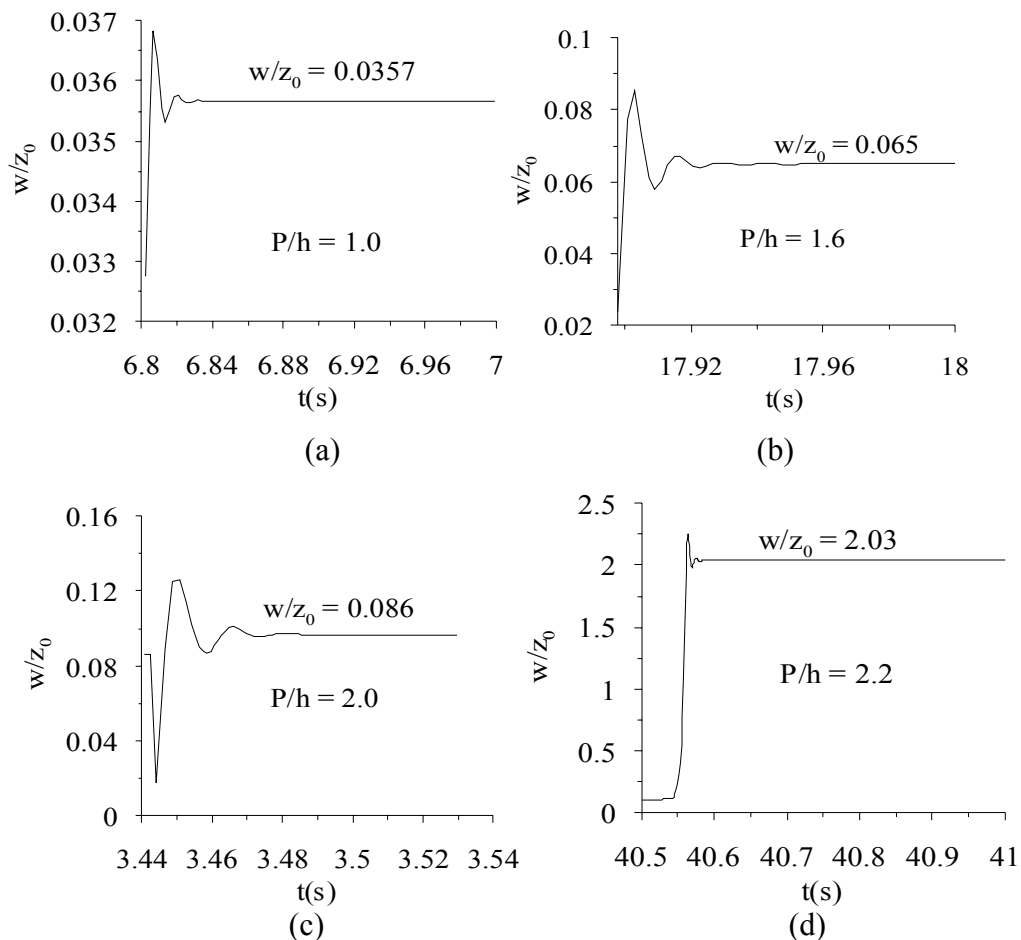


Figura 5.62: Resposta no tempo do arco senoidal sob carregamento uniforme para diferentes níveis de carregamento ($z_0=50\text{mm}$).

A Figura 5.63 superpõe a solução obtida pela análise dinâmica do sistema estrutural amortecido e trajetória de equilíbrio estático da estrutura. Observa-se que, para o caso de carregamento uniforme, a perda de estabilidade se dá para uma carga levemente inferior à carga de bifurcação estática. Quando se considera a assimetria do carregamento, nota-se que a carga crítica dinâmica é bem inferior ao valor da carga crítica estática. A sensibilidade da carga crítica à perda de simetria do carregamento é bastante importante do ponto de vista estrutural, já que

carregamentos assimétricos neste tipo de estrutura podem ocorrer em várias situações práticas, como é o caso de coberturas submetidas a cargas de vento.

A seguir, considera-se o arco submetido simultaneamente a uma carga estática de valor $P/h=1$ e a um carregamento harmônico com frequência de excitação igual a do arco submetido ao nível de carregamento estático aqui considerado. Os resultados obtidos para a resposta permanente são apresentados na Figura 5.64 para valores crescentes da magnitude do carregamento. Inicialmente o arco vibra em torno da configuração de equilíbrio estático, mas como no caso anterior, ao atingir um certo valor crítico, escapa do vale potencial pré-flambagem (Figura 5.64a) e passa a vibrar em torno de uma configuração pós-flambagem (Figura 5.64b). Para pequenos valores de carregamento o plano fase se mostra perfeitamente simétrico, denotando uma resposta harmônica quase linear. A medida que o carregamento cresce, o plano fase perde a simetria denotando a não-linearidade da resposta.

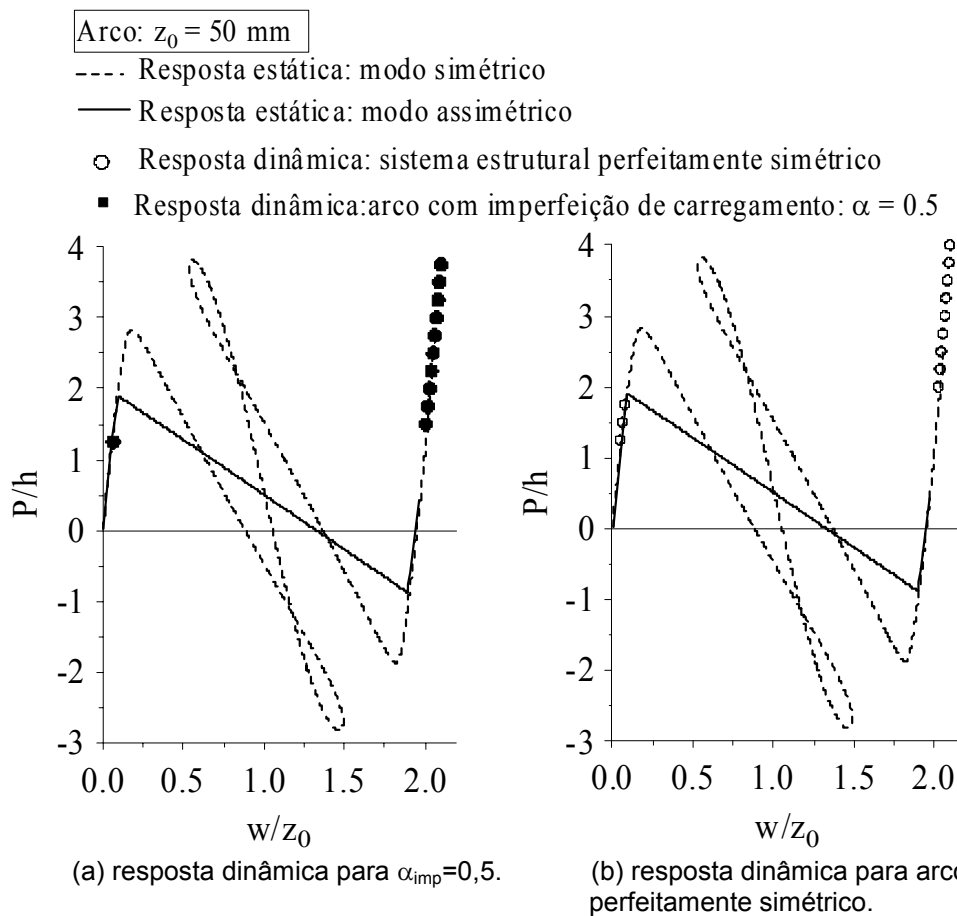


Figura 5.63: Resposta estática e dinâmica para diferentes níveis de carregamento.

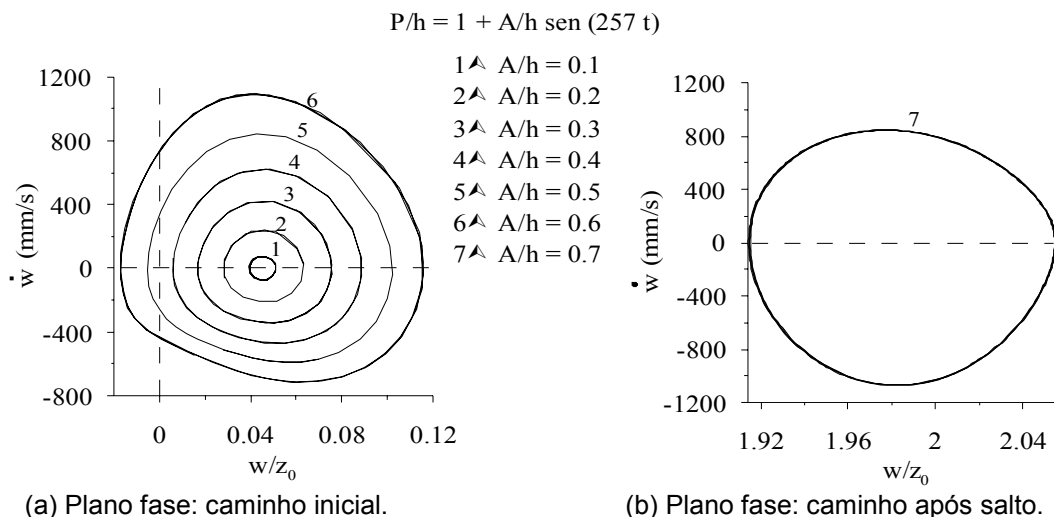


Figura 5.64: Resposta dinâmica para diferentes níveis de carregamento.

Para se analisar o problema de ressonância em estruturas com comportamento não-linear, estuda-se inicialmente o arco com $z_0 = 20$ mm submetido a uma carga harmônica senoidal. Ao contrário de modelos de baixa dimensão, onde diversas técnicas numéricas, tais como métodos de perturbação, podem ser empregados para se obter as curvas de ressonância não-linear com relativa facilidade, para sistemas estruturais com um número elevado de graus de liberdade este problema se torna bastante oneroso do ponto de vista computacional. No presente estudo, obtém-se, para diferentes valores de frequência de excitação, a resposta do sistema após a integração de um determinado número de ciclos que seja suficiente para se definir o estado permanente, e obtém-se para cada frequência de excitação a amplitude máxima e mínima da resposta permanente, como ilustrado na Figura 5.65, que exibe o diagrama de fase associado à relação de frequências $\Omega/\omega = 0.72$ e amplitude de excitação $A/h = 0.5$.MPa, bem como a sua correspondente situação no espectro de resposta. Crescendo e decrescendo a frequência no intervalo analisado, obtém-se a curva de ressonância desejada.

A Figura 5.66 exibe a variação do deslocamento adimensionalizado w/z_0 pela relação de frequência Ω/ω_a , obtida para várias amplitudes, sendo que $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = 238.4$ rad/s é a primeira frequência natural amortecida do sistema. Na Figura 5.67 mostram-se os mesmos dados, apresentando agora no eixo vertical a magnitude da resposta. Observa-se que, à medida que cresce a magnitude da excitação, o pico da curva de ressonância se desloca

acentuadamente para a esquerda, indicando uma grande não-linearidade com perda de rigidez (*softening*). Este comportamento é compatível com o tipo de não-linearidade observada na resposta estática do sistema. Para $A/h=0.4$ já se observa o início do dobramento da curva ressonância, típico de sistemas não-lineares, na região de baixas frequências o que leva a existência de mais de uma resposta permanente para o mesmo valor de frequência. Quando a magnitude da excitação atinge o valor $A/h=0.5$, nota-se um crescimento acentuado das amplitudes na região de baixas frequências até que o arco perde a estabilidade e muda de concavidade. Antes de ocorrer o salto, observam-se outras bifurcações associadas a duplicação de período. Uma resposta típica desta região é aquela ilustrada na Figura 5.65 e cuja resposta no tempo é apresentada na Figura 5.68. Os pontos destacados na Figura 5.69a correspondem aos pontos da seção de Poincaré da resposta que indicam claramente a duplicação de período. A Figura 5.69b mostra a região onde ocorre a duplicação de período.

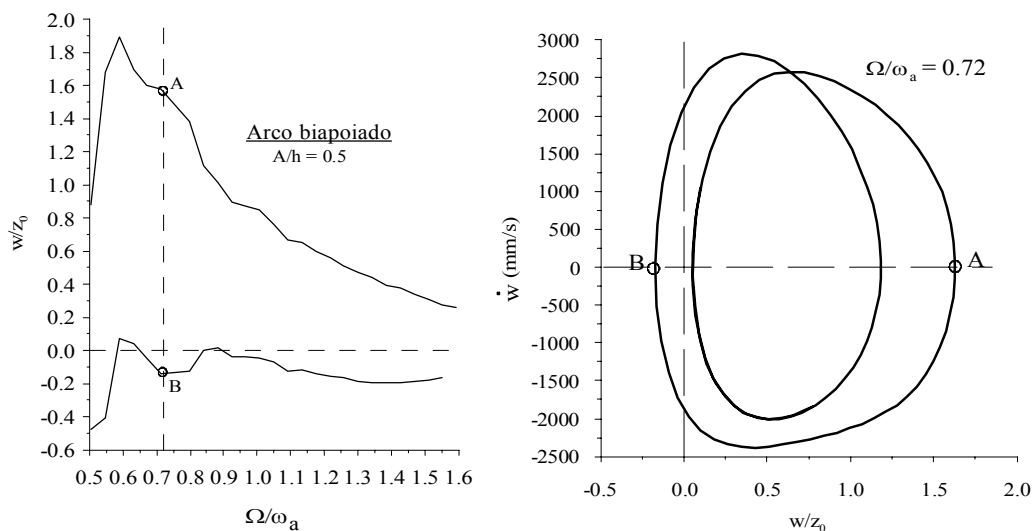


Figura 5.65: Diagrama de fase associado à relação de frequência $\Omega/\omega = 0.72$, indicando os valores de amplitude máxima e mínima.

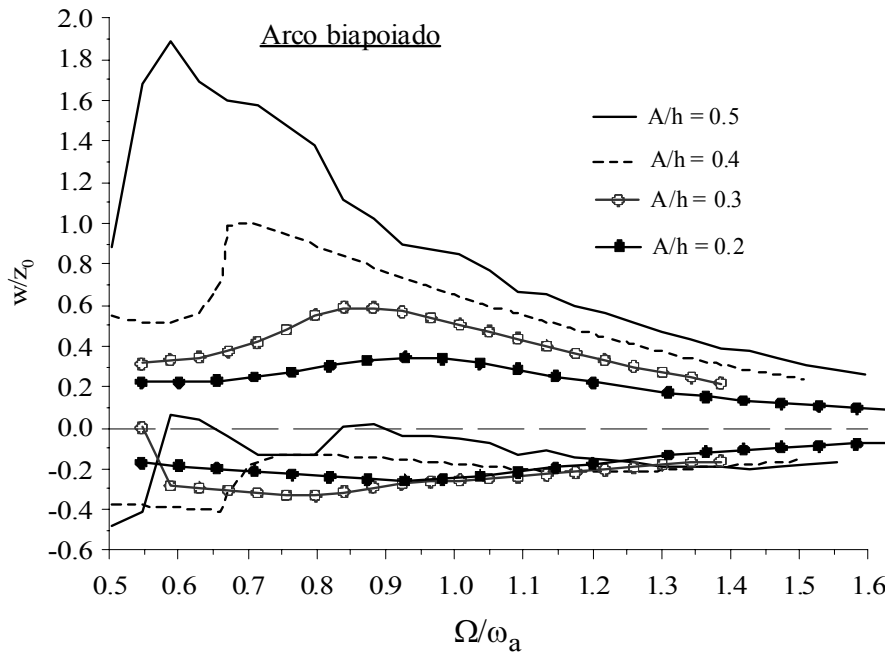


Figura 5.66: Variação dos limites máximos e mínimos da resposta permanente com a relação de frequências e amplitude de carregamento harmônico

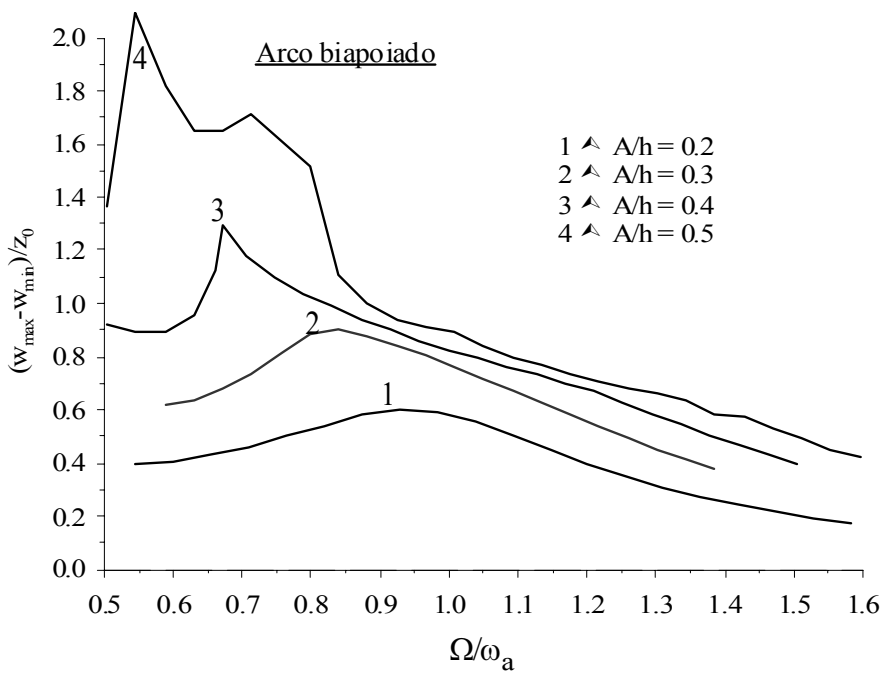


Figura 5.67: Variação do espectro de resposta com a amplitude da carga harmônica A/h .

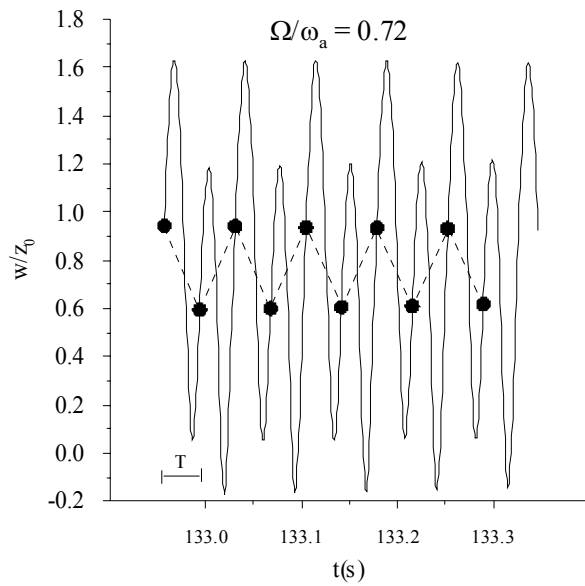
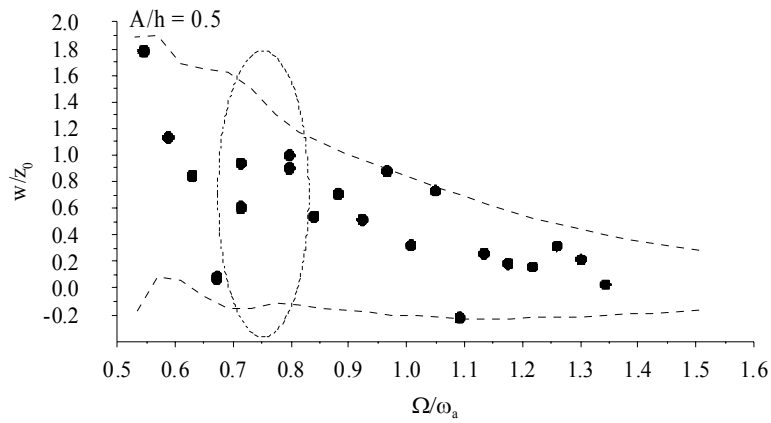
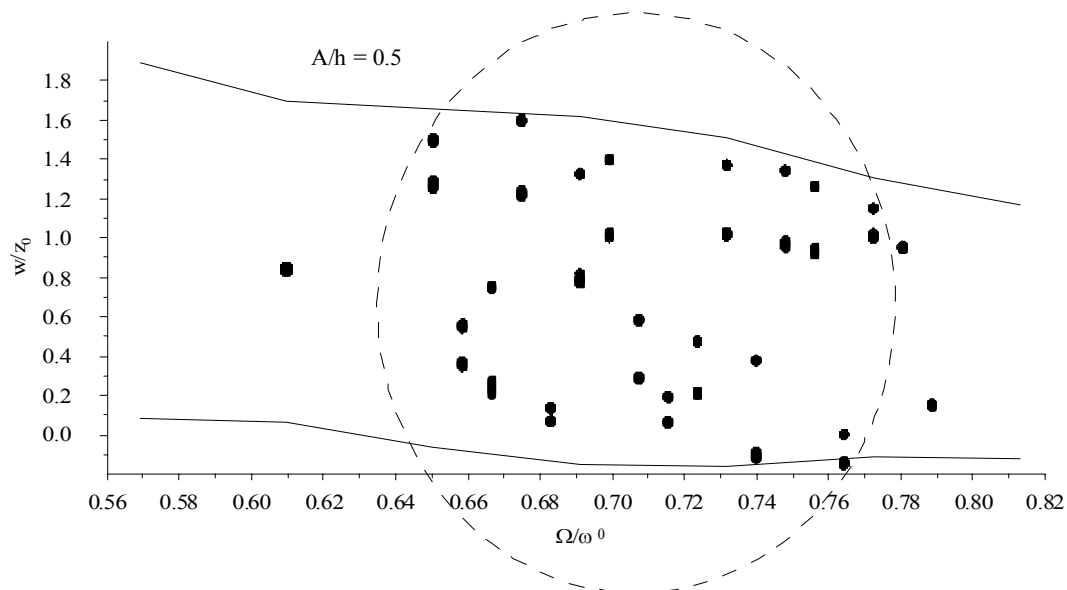


Figura 5.68: Resposta no tempo: duplicação de período.



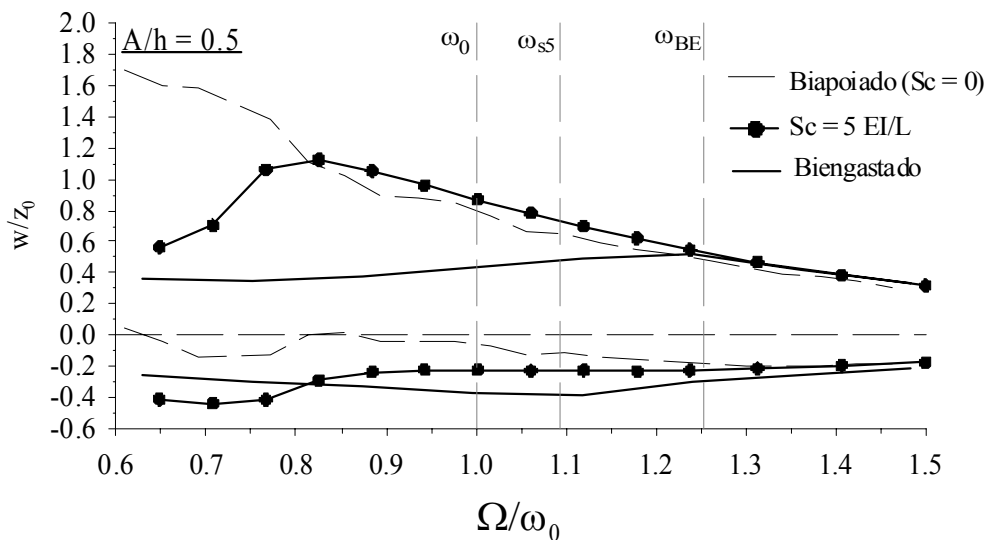
(a)



(b)

Figura 5.69: Coordenadas de Poincaré: duplicação de períodos.

Com o objetivo de observar a influência da rigidez das ligações na frequência de ressonância do arco, é mostrada na Figura 5.70 o espectro de resposta para três situações de apoio: arco biapoiado, apoios com ligação semi-rígida ($Sc = 5EI/L$) e arco biengastado, para uma magnitude de excitação de $A/h=0.5$. Para o arco biengastado a resposta praticamente exibe um comportamento semelhante ao de um sistema linear com o pico de ressonância coincidindo com a frequência natural do arco. À medida que Sc decresce, aumenta acentuadamente o grau de não-linearidade do sistema o que se reflete no grande deslocamento do pico de resposta na direção das baixas frequências. Novamente, os resultados apresentados reforçam a importância das condições de apoio e da estimativa correta da rigidez das ligações em sistemas não-lineares. Os resultados também ressaltam que variações na rigidez das ligações podem levar a estruturas a situações inesperadamente perigosas.



$\omega_0 = 246.2$ rad/s : Menor frequência natural do arco biapoiado,

$\omega_{s5} = 268.9$ rad/s : Menor frequência natural do arco com $Sc = 5EI/L$,

$\omega_{BE} = 308.5$ rad/s : Menor frequência natural do arco biengastado.

Figura 5.70: Variação do espectro de frequências com a rigidez dos apoios.

Considera-se agora o arco com a altura crítica $z_0 = 31.4$ mm. Utilizando o mesmo procedimento descrito anteriormente obtém-se as curvas apresentadas na Figura 5.71. Na Figura 5.72 mostram-se as deformadas correspondentes a amplitude máxima e mínima da resposta permanente do arco quando submetido a uma excitação harmônica de amplitude $A/h = 1.2$ e diferentes frequências de

excitação. Nota-se que, para valores altos da frequência, o arco vibra exibindo uma configuração simétrica. A medida que a frequência decresce o arco passa a exibir configurações com crescente assimetria. Esse processo se intensifica até que o arco perde a estabilidade e passa a vibrar em uma configuração simétrica invertida.

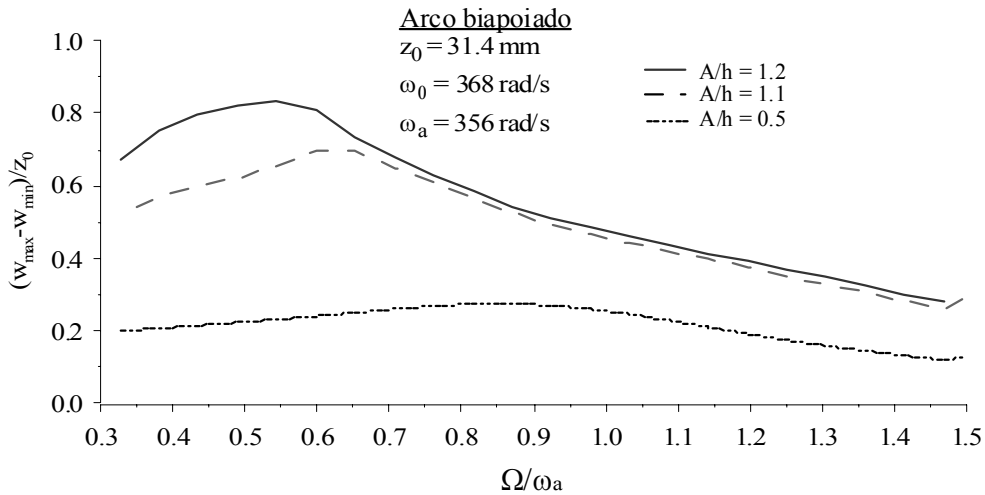


Figura 5.71: Espectro de resposta: Arco $z_0=31.4 \text{ mm}$.

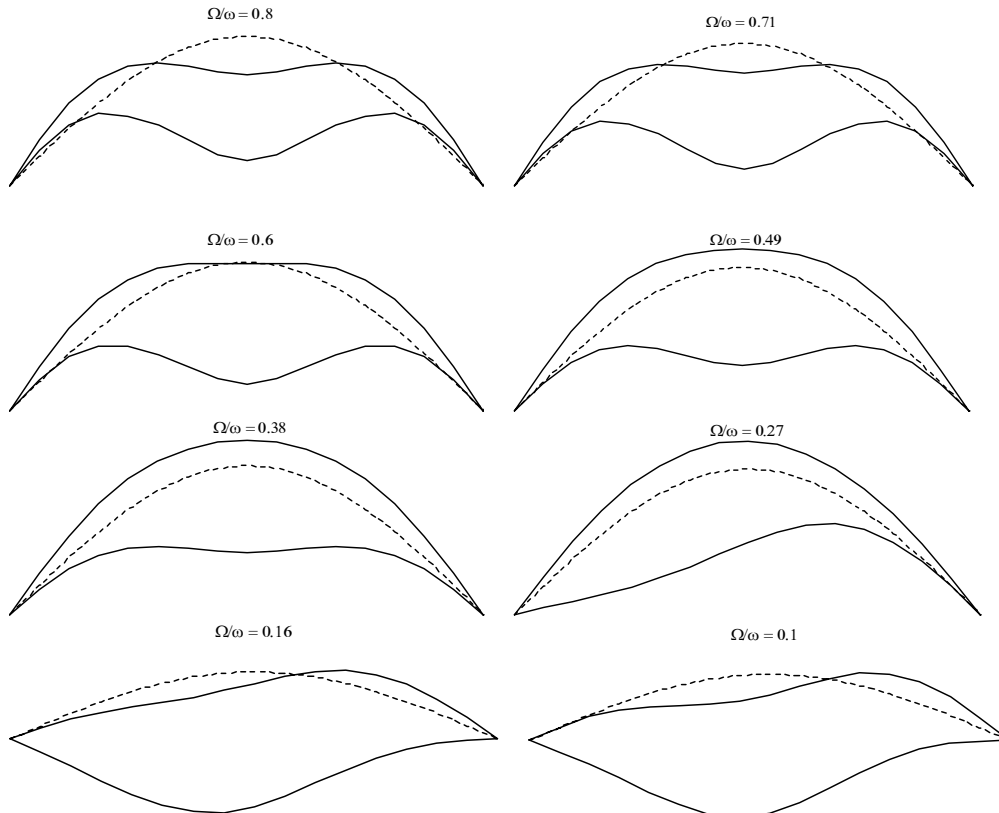


Figura 5.72: Deformadas no estado permanente do arco $z_0 = 31.4 \text{ mm}$, quando submetido a uma excitação harmônica de amplitude $A/h = 1.2$ e diferentes frequências de excitação.

5.4.2

Pórtico em L

Dando continuidade ao estudo paramétrico da seção 3.3 e ao estudo de vibrações da seção 5.2.3, pretende-se analisar aqui o comportamento do pórtico em L quando submetido a carregamento dinâmico. Neste estudo, considera-se um amortecimento viscoso proporcional à massa e à rigidez, $\mathbf{C} = a_m \mathbf{M} + a_k \mathbf{K}$, definido pelos coeficientes de Rayleigh, a_m e a_k , que são calculados a partir da taxa de amortecimento crítico $\xi = 0,4$. A resposta dinâmica é obtida através do método de integração de Newmark para valores de intervalos de tempo Δt controlados pela estratégia adaptativa da seção 4.4.3.1.

Inicialmente, considera-se o pórtico mostrado na Figura 5.73, com uma ligação semi-rígida entre as barras definida pelo parâmetro de rigidez $S_c = EI/L$.

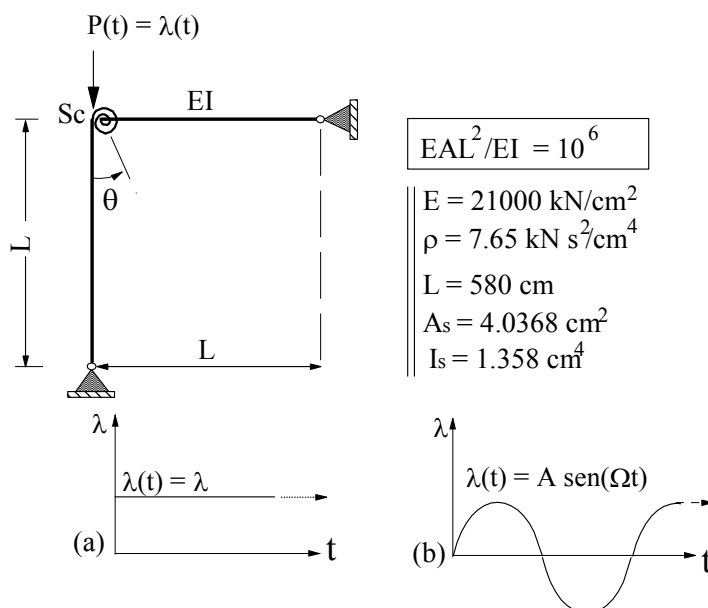


Figura 5.73: Pórtico em L com ligação semi-rígida.

Analisa-se então o comportamento do pórtico submetido a uma carga de magnitude constante e duração infinita, aplicada subitamente (Figura 5.73a). A Figura 5.74 exibe a resposta no tempo para diferentes níveis de carregamento. Como no caso do arco, o pórtico exibe grandes amplitudes na fase transiente e converge para uma configuração estática correspondente ao nível do carregamento aplicado.

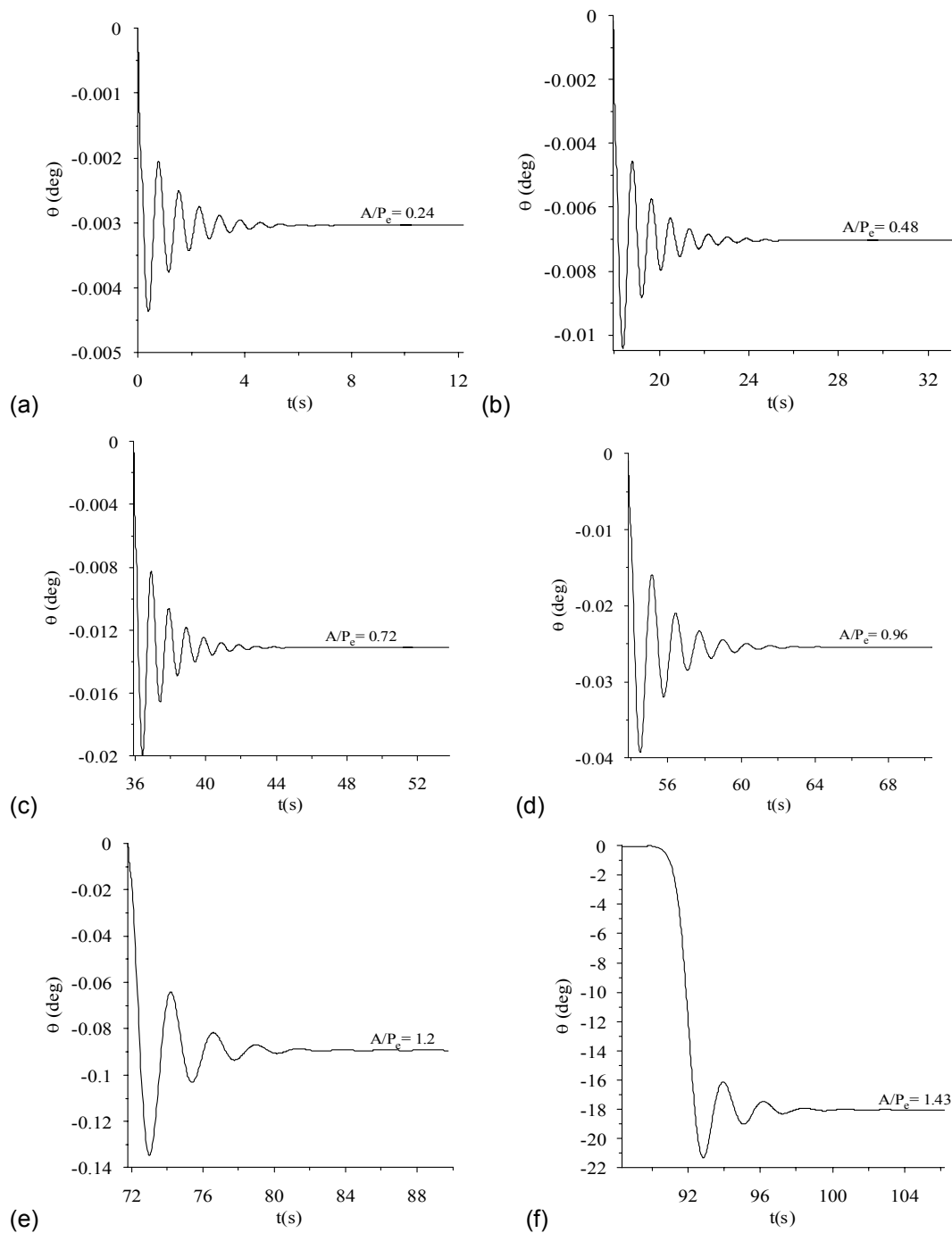


Figura 5.74: Resposta no tempo para diferentes níveis de carregamento do pórtico em L com ligação semi rígida dada por $S_c = 5EI/L$.

Na Figura 5.75 são mostrados os deslocamentos obtidos pela integração numérica do sistema dinâmico amortecido correspondentes a cada nível de carregamento aplicado, juntamente com a trajetória de equilíbrio obtida na análise não-linear estática. Observa-se que não houve perda de estabilidade nesse exemplo. Isso é explicado pelo fato das configurações pós-críticas instáveis para

cada nível de carregamento estarem associadas a configurações com grandes deslocamentos, como mostrado anteriormente. Assim, não se atinge a fronteira de estabilidade do vale potencial, durante a resposta transiente.

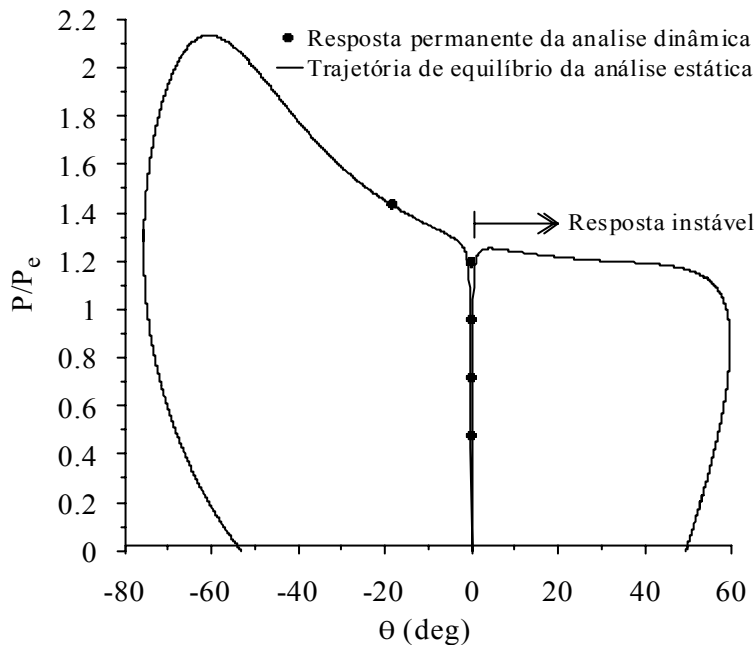


Figura 5.75: Superposição das análises dinâmica e estática.

Considerando agora o carregamento harmônico e utilizando o mesmo procedimento descrito para o exemplo do arco senoidal, obtém-se o espectro de resposta para o pórtico em L com a ligação perfeitamente rígida entre viga e coluna.

A Figura 5.76 exibe a variação da amplitude ($\theta_{\max} - \theta_{\min}$) com a razão de freqüências Ω/ω_a . Nota-se neste caso que a influência da não-linearidade é bastante pequena, fato explicado pela linearidade do caminho fundamental da estrutura perfeita. Na Figura 5.77, mostram-se os planos fase da resposta permanente para $A/P_e=0.4$ e diferentes valores da freqüência da excitação.

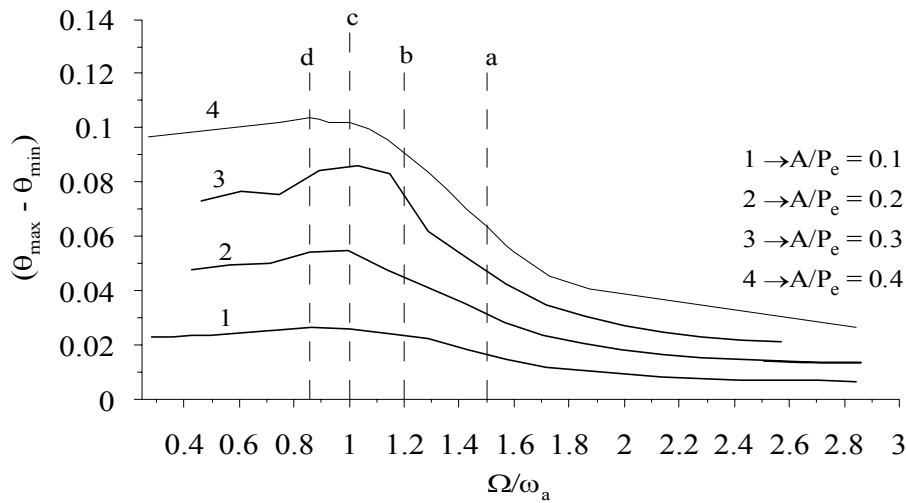


Figura 5.76: Espectro de resposta do pórtico em L com ligação perfeitamente rígida submetido a carregamento harmônico concentrado no topo da coluna.

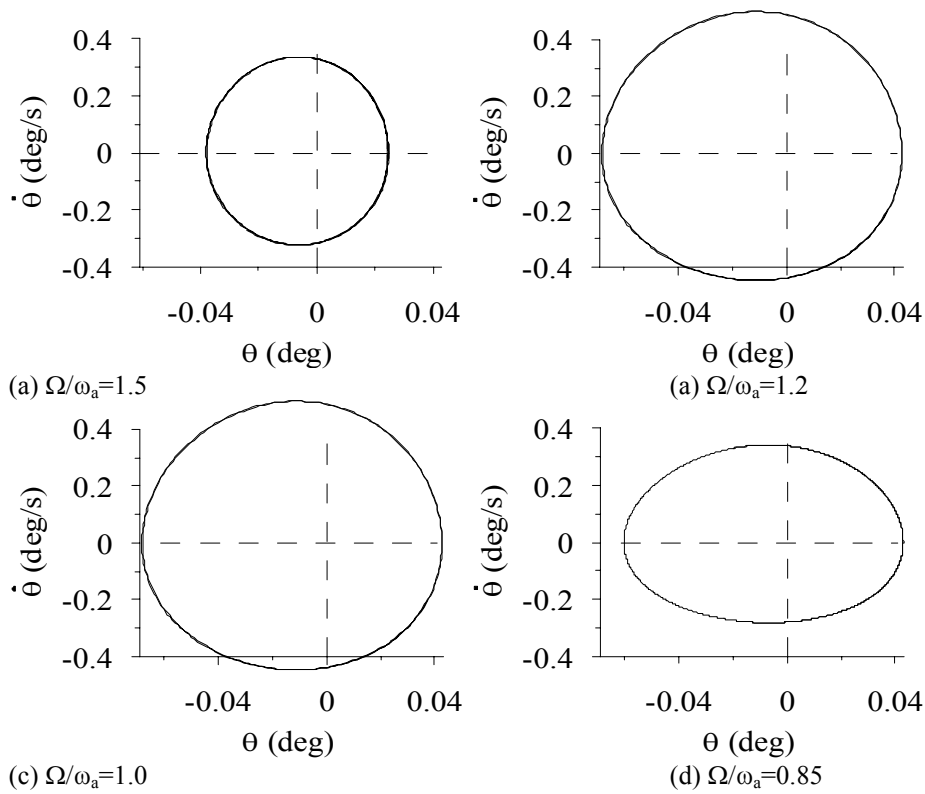


Figura 5.77: Planos fase para $A/P_e = 0.4$.

A seguir, o mesmo estudo é feito para o pórtico em L, porém considerando o carregamento distribuído, como indica a Figura 5.78. Neste caso, ao contrário do anterior, se observa um comportamento semelhante ao do arco com grande não-linearidade do tipo *softening*. Como mostrado anteriormente, o caminho de equilíbrio deste pórtico apresenta uma grande não-linearidade, similar ao do

pórtico com grandes imperfeições iniciais. Assim mostra-se a influência do tipo de carregamento na não-linearidade da resposta dinâmica.

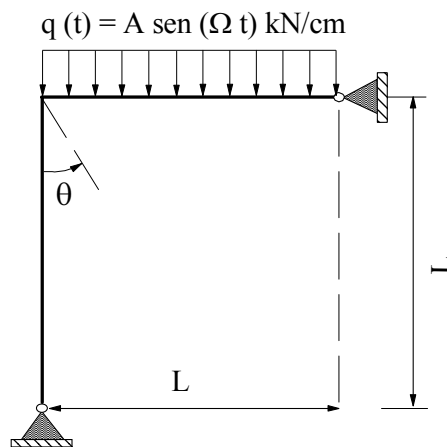


Figura 5.78: Pórtico em L submetido a carregamento harmônico distribuído.

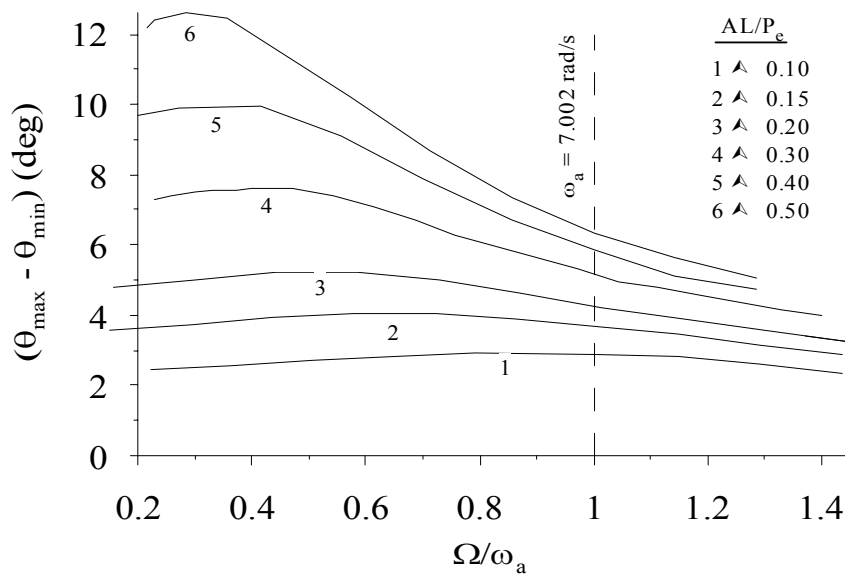


Figura 5.79: Espectro de respostas do pórtico em L com carga harmônica distribuída ao longo da viga.

6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1

CONCLUSÕES

Silveira (1995), Galvão (2000, 2001), Rocha (2000) e Pinheiro (2003), desenvolveram em linguagem *Fortran* (Fortran PowerStation 4.0, 1994-1995), um programa computacional capaz de realizar a análise não-linear de sistemas reticulados planos. Com base nesses trabalhos, que apresentam valiosas comparações entre diversas formulações de elementos finitos e metodologias de resolução de sistemas de equações não lineares, foram selecionadas as formulações e algoritmos apresentados nesta tese. Objetivando dar continuidade aos trabalhos precedentes, foi incorporada à base computacional citada a capacidade de desenvolver também análises de natureza dinâmica. Para isto foram inicialmente implementadas rotinas de solução de problemas de autovalores, que, acopladas à metodologia de solução não-linear, possibilitaram a determinação das frequências naturais e modos de vibração ao longo dos caminhos não-lineares de equilíbrio. Isto permitiu uma implementação eficiente do critério dinâmico de estabilidade, possibilitando a identificação dos trechos estáveis e instáveis ao longo das trajetórias de equilíbrio e, portanto, a identificação dos pontos críticos. Também foram incorporados ao mesmo sistema computacional algoritmos clássicos de integração numérica, implícitos (Newmark, Wilson- θ) e explícitos (Método das diferenças centrais e Runge-Kutta de quarta ordem), que possibilitaram análises lineares e não-lineares de pórticos planos com ligações rígidas e semi-rígidas sob carregamentos dinâmicos. Com a finalidade de tornar mais eficiente o processo de integração numérica, em conjunto com os métodos de integração, foram implementadas duas eficientes estratégias de controle automático dos incrementos de tempo.

Com o objetivo de validar as implementações das rotinas de solução do problema de autovalor e autovetor, foram estudados na seção 5.2 alguns exemplos simples envolvendo vibração livre de estruturas descarregadas e carregadas. A obtenção das frequências naturais e modos de vibração para as estruturas com as

ligações rígidas foram obtidas com sucesso. Entretanto, foi constatado, na análise de estruturas carregadas compressivamente, que a utilização do elemento com ligação semi-rígida pode gerar erros no cálculo das frequências. Através de um exemplo de barra carregada axialmente, foi observado que para a condição descarregada o resultado é excelente, mas surge uma discrepância crescente a medida que se aumenta a força compressiva. Também foi observado que este problema é tanto maior quanto mais flexíveis forem as ligações. Nenhum comentário foi encontrado na literatura sobre ligações semi-rígidas a respeito dessa sensibilidade. Com base na análise das matrizes do sistema discretizado, verificou-se que a diminuição do comprimento do elemento semi-rígido diminui essa sensibilidade. Portanto, no presente trabalho, o procedimento adotado para contornar este problema foi utilizar valores reduzidos para o comprimento L_{SR} dos elementos com ligações semi-rígidas na modelagem das estruturas.

Os métodos de integração numérica, bem como as estratégias adaptativas fornecidas no Capítulo 4, tiveram sua eficiência avaliada na seção 5.3. Foi visto que todos os métodos apresentaram excelentes resultados na resposta transiente. Entretanto, mesmo na análise de problemas lineares, utilizando-se dos mesmos valores de parâmetros e incremento de tempo recomendados para cada algoritmo, verificou-se que, após um grande número de ciclos, os métodos implícitos podem apresentar uma defasagem da resposta. Para resolver esse problema foi necessário usar um passo de tempo da mesma ordem de grandeza que aqueles exigidos pelos métodos explícitos. Esse problema se agrava na análise de sistemas não-lineares, mas pode ser minorado com a adaptatividade do passo de tempo.

Outra observação importante na análise não-linear é a ocorrência de um deslocamento da configuração de referência da resposta temporal quando se integra por um longo período de tempo, possivelmente devido à natureza cumulativa do processo incremental de cálculo dos esforços internos. O acúmulo de resíduos a cada incremento devido às simplificações e linearizações inerentes à formulação do elemento finito, para uma quantidade muito grande de incrementos, pode gerar erros não desprezíveis. Esse desvio pode ser reduzido com a diminuição do incremento no tempo, porém para análises envolvendo intervalos muito grandes de tempo e, portanto, uma quantidade muito grande de ciclos, uma dimensão economicamente viável de Δt pode levar a discrepâncias consideráveis.

Entretanto, a integração eficiente das equações de movimento por um longo período de tempo é uma necessidade na análise de sistemas não-lineares. Essas deficiências impedem a implementação eficiente em programas de elementos finitos de técnicas numéricas para a obtenção de, por exemplo, diagramas de bifurcação, expoentes de Liapunov, autovalores de Floquet e bacias de atração. Isso também é um empecilho a análise de sistemas que exibam longos transientes e movimentos caóticos.

Para aferir as potencialidades do sistema computacional aqui desenvolvido escolheu-se para uma análise detalhada dois problemas que apresentam respostas com forte não-linearidade: o arco de geometria senoidal submetido a carregamento distribuído e os pórticos em L. Pesou na escolha destes exemplos o fato de apresentarem características de comportamento que são comuns a uma grande gama de estruturas utilizadas na prática da engenharia. Pode-se, por exemplo, constatar no arco a perda de estabilidade por ponto limite ou através de bifurcação ao longo do caminho não-linear de equilíbrio em um modo assimétrico, com a ocorrência de saltos para configurações com grandes deslocamentos. Observa-se também sensibilidade a imperfeições com redução drástica da capacidade de carga da estrutura. Por sua vez, os pórticos em L apresentam não só saltos dinâmicos como são um exemplo clássico de estruturas com bifurcação assimétrica. Outro ponto que motivou a escolha dessas duas estruturas é a farta literatura com soluções analíticas, experimentais, aproximadas e numéricas, que, servindo como base para comparação, puderam dar confiabilidade aos modelos estruturais empregados nas análises subsequentes do presente trabalho.

Com a finalidade de se ter uma melhor compreensão dos fenômenos de instabilidade desses dois sistemas estruturais, estudou-se, na seção 5.2, a variação das frequências e modos de vibração destas estruturas para diferentes níveis de carregamentos, imperfeições geométricas, de ligações e de carga. Na seção 5.3, o comportamento destas estruturas é observado quando estas são submetidas a cargas dinâmicas.

Em seguida são apresentadas as principais observações relativas às análises não-linear estática e dinâmica dos sistemas estruturais analisados.

O arco senoidal abatido, cuja geometria inicial foi fornecida por Bergan (1980), não apresenta grande sensibilidade a imperfeições. Porém, ao se aumentar

a altura do arco, percebe-se que a partir de uma certa altura limite ocorre uma diferenciação clara entre a carga limite do arco perfeitamente simétrico e a carga de bifurcação em um modo assimétrico. Essa diferença aumenta gradativamente com o acréscimo da altura, e, portanto, os arcos pouco abatidos apresentam uma clara bifurcação seguida de perda de estabilidade. Nesses arcos observa-se uma maior sensibilidade a imperfeições. Em ambos os casos observa-se que os picos de ressonância são bastante afetados pelas características da estrutura e do carregamento.

Os resultados mostram uma grande sensibilidade a variações na rigidez da ligação. Em particular, mostra-se que um decréscimo na rigidez das ligações pode gerar uma mudança drástica nas respostas estática e dinâmica, aumentando o grau de não-linearidade e a probabilidade de colapso por perda de estabilidade. Isto se torna particularmente significativo, se for levado em consideração o fato de ligações em estruturas metálicas sofrerem usualmente uma deterioração ao longo da vida da estrutura em função de vários fatores como, por exemplo, corrosão. Esses resultados também indicam a importância de se avaliar de forma precisa a rigidez das ligações em sistemas estruturais não-lineares.

O pórtico em L estudado por Roorda (1965) foi analisado considerando-se variações da geometria, propriedades físicas e condições de contorno originais, e, deste modo, pôde-se estudar a influência de cada um destes parâmetros na solução da estrutura. Estas conclusões podem servir de base para a análise de outras geometrias de pórticos esbeltos. Por exemplo, foi observado que o aumento da rigidez da barra lateral promove o acréscimo do valor da carga crítica do pórtico; entretanto, há um aumento substancial na sensibilidade a imperfeições. Esta é uma característica interessante apresentada por vários sistemas sensíveis a imperfeições: a carga crítica cresce devido à variação de algumas restrições, mas a sensibilidade a imperfeições também cresce. Deste modo, o aparente acréscimo na capacidade de carga pode ser totalmente destruído pela inevitável presença de imperfeições.

Em resumo, os resultados demonstram que o presente desenvolvimento pode ser usado com eficiência na avaliação do comportamento estático e dinâmico de estruturas esbeltas suscetíveis a flambagem e pode servir de base para futuros desenvolvimentos, alguns dos quais são relatados a seguir.

6.2

SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Através do sistema computacional do presente trabalho pode-se dar continuidade ao estudo de vários fenômenos de instabilidade de estruturas comumente utilizadas na prática, como por exemplos torres de transmissão, treliças planas e espaciais, arcos, *pitched-roof frames*, etc.

Em relação a problemas de análise estrutural não-linear há um vasto campo de pesquisas do qual somente uma pequena parcela foi abordada pelo presente trabalho. Tendo em vista a seqüência do presente trabalho, pode-se sugerir a condução dos seguintes estudos:

1. Na análise dinâmica de pórticos semi-rígidos do presente trabalho, foi adotado um modelo com rigidez constante. Para se utilizar modelos mais realistas que levem em conta a variação da rigidez diante de grandes deformações durante a análise dinâmica é necessário levar em consideração o comportamento histerético da ligação (Chan e Chui, 2000);
2. Utilizou-se na integração numérica dos problemas dinâmicos não-lineares os algoritmos de Newmark e Wilson- θ , entretanto, foi visto na seção 5.3 que a resposta desses algoritmos em problemas envolvendo grandes intervalos de integração podem apresentar erros de precisão. Sugere-se, portanto, a implementação de outros algoritmos como, por exemplo, os algoritmos com dissipação numérica controlada α H-Newmark (Hilber e Hughes, 1978) e α B-Newmark (Wood et al., 1980). A implementação de algoritmos mais eficientes permitirá a obtenção de diagramas de bifurcação, além de outras ferramentas essenciais no estudo de vibrações não-lineares;
3. Sugere-se estudar outras formas de se calcular o vetor de forças internas acopladas ao processo incremental de integração numérica, com o intuito de se de reduzir a discrepância que possivelmente é causada por acúmulo de resíduos no processo incremental;

4. Para tornar a análise de estruturas metálicas mais realista em termos de projeto é necessária a implementação de modelos que considerem a não-linearidade física do material da estrutura (Chan e Chui, 1997e 2000);
5. Com base no programa aqui desenvolvido, pode-se desenvolver modelos de baixa dimensão, mas que sejam suficientemente precisos para uma análise paramétrica detalhada das oscilações não-lineares de elementos estruturais esbeltos. A obtenção de modelos representativos com poucos graus de liberdade tem merecido grande atenção dos pesquisadores nos últimos anos (Soares, 1998 e Baracho Neto, 2003).
6. Por fim, para tornar o programa mais acessível e possibilitar uma melhor visualização dos resultados obtidos são necessárias implementações de rotinas gráficas de pré e pós-processamento.

LISTA DE REFERÊNCIAS

Abdalla, K.M. e Chen, W.F. (1995), Expanded database of semi-rigid steel connections. *Computers & Structures*, Vol. 56, N° 4, p. 553-564.

Abu-yasein, O.A. e Frederick, G.R. (1994), Analysis of frames with semi-rigid joints. *Computers & Structures*, Vol. 52, N° 6, p. 1161-1168.

Al-Bermani, F.G.A., Li, B., Zhu, K., Kitipornchai, S., (1994). “Cyclic and seismic response of flexibly jointed frames”, *Eng. Struct.*, 16, 4, P. 249-255.

Almusallam, T.H. e Richard, R.M. (1994), Steel frame analysis with flexible joints exhibiting a strain-softening behavior. *Computers & Structures*, Vol. 46, N° 1, p. 55-65.

Alves, R.V. (1995), Instabilidade não-linear elástica de pórticos espaciais, tese de doutorado, COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Anchieta Junior, J. (2001), Análise Não-Linear Geométrica e Material de Torres de Transmissão, Dissertação de Mestrado, UENF, Rio de Janeiro, RJ.

Ang, K.M., Morris, G.A., (1984), Analysis of three-dimensional frames with flexible beam-column connections. *Can.J.Civil Eng.*, 11, p. 245-254.

Arbabi, F. (1982), Drift of flexibly connected frames, *Com. Struct.*, 15, 2, p.102-108.

Assaid, L. M. B., (2001), Método plástico aplicado às estruturas aporticadas de aço. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Baker, J.F.(1934), A note on the effective length of a pillar forming part of a continuous member in a building frame, 2nd report”, Steel Structures Res. Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research, HMSO, London, P.13-34.

Banki, A.L, (1999), Estudo sobre a inclusão da não linearidade geométrica em projetos de edifícios, Dissertação de Mestrado, UFSC, SC.

Baracho Neto, O. G. P., (2003), Modos normais e multimodos na dinâmica de estruturas de comportamento não-linear, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, USP, SP.

Bathe, K. J., (1982), Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Batho, C. (1931), Investigation on beam and stanchion connections, Steel Structures Res. Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research, HMSO, London, V.1-2, P.61-137.

Batoz, J.L. e Dhatt, G. (1979), Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems. Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 14, p. 1262-1267.

Bazant, Z.P. e Cedolin, L., (1991), Stability of Structures, Oxford Press, Oxford, UK.

Beneveli, S.M.A. (2002), Controle híbrido para atenuação de vibrações em edifícios, Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.

Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Krakeland, B. e Soreide, T. (1978), Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 12, p. 1677-1696.

Bergan, P.G., Mollestad, E. (1985), An Automatic Time-Stepping Algorithm for Dynamic Problems, *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, vol. 49, pp. 299-318,

Bergan, P.G. (1980), Solution Algorithms for Nonlinear Structural Problems. *Computers & Structures*, Vol. 12, p. 497-509.

Brush, D.O. e Almroth, B.O. (1975), Buckling of bars, plates and shells, International Student Edition.

Carneiro, D. S., (2000), Análise Plástica Aplicada a Estruturas Aporticadas em Aço. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Chajes, A. e Churchill, J.E. (1987), Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, No. 6, p. 1221-1235.

Chan, S.L. (1994), Vibration and modal analysis of steel frames with semi-rigid connections, *Eng.Struct.*, 16, 1, p.25-31.

Chan, S.L. e Chui. P.P.T., (1997), A generalised design-based elasto-plastic analysis of steel frames by sections assemblage concept. *Journal of Engineering Structures*, vol. 19(8), pp. 628-636.

Chen, W. F. & Sohal, I., (1995), Plastic Design and Second Order Analysis of Steel Frames. Springer-Verlag, New York.

Chan, S.L. e Chui, P.P.T. (2000), Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections, Elsevier.

Chen W.F. e Lui, E.M. (1991), Stability Design Of Steel Frames, Boca Raton Ann Arbor Boston London

Chen, Chang-New (1996), A Finite Element Study On Bifurcation and Limit Point Buckling of Elastic-Plastic Arches. Computers & Structures, Vol. 60, N°2, p. 189-196.

Chen, W.F. e Sohal, I. (1995), Plastic design and second order analysis of steel frames. Springer-verlag, New York.

Chen, W. F. e Toma, S. (1994), Advanced analysis of steel frames: theory, software and applications. Crc Press, inc., Flórida, USA.

Chopra, A.K (1995), Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering, Prentice Hall, New Jersei, USA.

Clough, R.W. e Penzien, J. (1993), Dynamics of Structures – 2nd. Edition, New York, McGraw-Hill.

Cook, R.D., Malkus, D.S. e Plesha, M.E. (1989), “Concepts and Applications of Finite Element Analysis”, John Wiley & Sons, Inc.

Cox, M.G. (1972), “The Numerical evaluation of B-splines”, J.Inst.Math.Applic., 10, 134-139.

Crisfield, M.A. (1981), A Fast Incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through", Computers & Structures, Vol. 13, pp. 52-62.

Crisfield, M.A. (1991), Non-linear finite element analysis of solids and structures, Vol 1, John Wiley & Sons.

Crisfield, M.A. (1997), Non-linear finite element analysis of solids and structures, Vol 2, John Wiley & Sons.

De Cássia, R.C.S. (1996), Estratégias Adaptativas para a análise dinâmica de materiais não-lineares via método de elementos finitos, Tese de Doutorado, COOPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

De Paula, C.F. (2001), Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas, Tese de Doutorado. USP-São Carlos, São Carlos, SP.

Del Prado, Z.J.G.N. (2001), Acoplamento e interação modal na instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas, Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.

Demmel, J. e Veselic, K. (1989), Jacobi's Method is More Accurate than QR.

Dickie, J.F. e Broughton, P. (1971), Stability Criteria for Shallow Arches, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 97, N. EM3, pp. 951-965.

Dokanish, M.A., Subbaraj, K. (1988), A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics – I. Explicit Methods, Computer & Structures, vol. 32, número 6, pp. 1371-1386.

Fonte, A.C.O. (1992), Analise nao linear geometrica de edificios altos, Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

Frye, M.J., Morris, G.A. (1975), Analysis of flexibly connected steel frames, Can.J.Civil Eng., 2, 3, p. 280-291.

Galvão, A.S. (2000), Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos, Dissertação de Mestrado, UFOP, Ouro Preto.

Galvão, A.S. (2001), Análise linear de estruturas reticuladas planas e espaciais, Trabalho da disciplina Estudo Orientado do programa de pós-graduação da PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ.

Gioncu, V. e Ivan, M. (1983), Fundamentals of structural stability analysis, Facla Publishing House, Timisoara, (in Romanian).

Gioncu, V. (1990), Structural Stability: Theory and Practice, Short Course, COPPE-UFRJ.

Goto, Y. e Chen, W. (1987), Second-order elastic analysis for frame design. Journal of the Structural Engineering, Vol. 113, N° 7, p. 1500-1519.

Heijer, C.D. e Rheinboldt, W.C. (1981), On steplength algorithms for a class of continuation methods. SIAM J. Num. Analysis, Vol. 18, p. 925-948.

Hilber, H.M.; e Hughes, T.J.R. (1978), Collocation, dissipation and 'overshoot' for time integration schemes in structural dynamics, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 6, p. 99-117.

Hsiao, K.M.; Hou, F.Y. e Spiliopoulos, K.V. (1988), Large displacement analysis of elasto-plastic frames. Computers & Structures, Vol. 28, N° 5, p. 627-633.

Jacob, B. P. (1990), Estratégias computacionais para análise não-linear dinâmica de estruturas complacentes para águas profundas, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil -COPPE/UFRJ.

Jennings, A. (1968), Frame analysis including change of geometry. *Journal of the Structural Division*. ASCE, Vol. 94, p. 627-644.

Joaquim, M.C., (2000), Procedimentos e estratégias para solução de problemas estáticos com não-linearidade geométrica, Dissertação de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

Jones, S.W., Kirby, P.A., Nethercot, D. (1980), Effect of semi-rigid connections on steel column strength, *J.Construct.Steel Res.*, 1, 38-46.

Fernades Junior, C. (1995), Analise dinâmica de pórticos metálicos planos sob ação de carregamentos transientes com consideração de rotulas plásticas, Dissertação de Mestrado. USP, SP.

Kawashima, S., Fujimoto, T. (1984), Vibration analysis of frames with semi-rigid connections, *Comput.Struct.*, 19, p.85-92.

King, W.S. (1994), The limit loads of steel semi-rigid frames analysed with different methods. *Computers & Structures*, Vol. 51, N° 5, p. 475-487.

Koiter, W.T. (1967), Post-buckling analysis of simple two-bar frame. in *Recent Progresses in Applied Mechanics*, Broberg. Ed. Almqvist and Wiksell, Sweden.

Kouhia, R. e Mikkola, M. (1989), Tracing the Equilibrium Path Beyond Simple Critical Points. *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, Vol. 28, p. 2923-2941.

Kounadis, A.N., Giri, J. e Simitzes, G. J. (1977), Nonlinear stability analysis of an eccentrically loaded two-bar frame, *Journal of Applied Mechanics*, pp. 701-706.

Krenk, S. (1993), Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations. Engineering Mechanics. Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark, N^o. 12, p. 01-18.

Krenk, S. (1995), An Orthogonal Residual Procedure for Non-Linear Finite Element Equations, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 38, p. 823-839.

Krishnamurthy, N., Huang, H.T., Jeffrey, P.K., Avery, L.K., (1979), Analytical M- ϕ curves for end-plate connections, J.Struct.Div.ASCE, 105, ST1, p.133-145.

Landesman, A. (1999), Análise e Implementação de Modelo Plástico para Estruturas Metálicas Aperticadas. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Lee, J.D. (1988), Finite Element Procedures for Large Strain Elastic-Plastic Theories. Computers & Structures, Vol. 28, N^o 3, p. 395-406.

Lee, S.S.; Koo, J.S.; Choi, J.M. (1994), Variational Formulation for Timoshenko Beam Element by Separation of Deformation Mode. Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, p. 599-610.

Lee, S.L., Manuel, F.S. and Rossow, E.C. (1968), Large deflection analysis and stability of elastic frames, J. Engng Mech. Div., ASCE, 94 (EM2), pp. 521-547

Li, Y. e Lui, E.M., (1995), A simplified plastic zone method for frame analysis. Microcomput. Civil Eng., vol. 10, pp. 51-62.

Liew, J.Y.R. (1992), Advanced Analysis for Frame Design, Ph.D. Thesis, Purdue University, West Lafayette, IN.

Liew, J.Y.R., White, D.W., e Chen, W.F. (1993a), Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 1. *J. Struct. Div. ASCE*, vol. 119(11), pp. 3196-.

Liew, J.Y.R., White, D.W., e Chen, W.F. (1993b), Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *J. Struct. Div. ASCE*, vol. 119(11), pp. -3237.

Liew, J.Y.R., Chen, W.F., e Chen, H. (2000), Advanced inelastic analysis of frame structures. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 55, pp. 245-265.

Lui, E. M. (1985), Effect of Connection Flexibility and Panel Zone Deformation on the Behavior of Plane Steel Frames. Ph.D. Thesis, School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, USA.

Lui, E.M ,Chen W.F. (1986), Analysis and behavior of flexible-jointed frames, *Engineering Structures*, 8, 1007-118.

Machado, V.,L. (1993), Bifurcações Múltiplas e Comportamento Não Linear de Sistemas Dinâmicos, Tese de Doutorado, COPPE – UFRJ, Rio de Janeiro.

Mallett, R.H. e Marcal, P.V. (1968), Finite Element Analysis of Nonlinear Structures. *Journal of the Structural Division. Proc. ASCE*, Vol. 94, No. ST9, p. 2081-2103.

Martins, G.V. (1999), Síntese Plástica e Análise Modal de Pórticos Metálicos Submetidos a Calgas não Proporcionais. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.

Matthies, H. e Strang, G. (1979), The Solution of Nonlinear Finite Element Equations. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* N 14, p. 1613-1626.

Meek, J.L. e Loghanathan, S. (1990), Geometric and Material Non-Linear Behaviour of Beam-Columns. *Computers & Structures*, Vol. 34, N° 1, p. 87-100.

Meek, J.L. e Xue, Q. (1996), A study on the instability problems for 2D-frames, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 136, pp. 347-361.

Meek, J.L. (1991), *Computer Methods in Structural Analysis*. E & FN SPON, Chapman & Hall.

Meek, J.L. e Tan, H.S. (1984), Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 47, p. 261-282.

Monforton, A.R., Wu, T.S. (1963), Matrix analysis of semi-rigid connected frames, *J.Struct.Div.ASCE*, 89, ST6, 13-42.

Newmark, N.M. (1959), A method of computation for structural dynamics, *ASCE J. of the Engineering Mechanics Division* 85 (EM 3), 67-94.

Ochoa, D.A., (2004), Large deflection stability of slender beam-columns with semirigid connections: elastica approach. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 130(3), pp. 274-282.

Ovunc, B.A. e Ren, T. (1996), Nonlinearities in the Analysis of Frames. *Computers & Structures*, Vol. 61, N° 6, p. 1177-1184.

Pacoste, C. e Eriksson, A. (1995), Element behaviour in post-critical plane frames analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, N° 125, p. 319-343.

Pacoste, C. e Eriksson, A. (1997), Beam elements in instability problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, N° 144, p. 163-197.

Park, M.S. e Lee, B.C. (1996), Geometrically Non-Linear and Elastoplastic Three-Dimensional Shear Flexible Beam Element of Von-Mises-Type Hardening Material. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* Vol 39, p. 383-408.

Pignataro M. e Rizzi, (1983), N. On the interaction between local and overall buckling of an asymmetric portal frame, *Meccanica* 18, pp. 92-96.

Pinheiro, L. (2003), Análises Não-Lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-Rígidos, Dissertação de Mestrado, Deciv-UFOP, Ouro Preto.

Pinto O.C. (1999), Controle não-linear de vibrações de estruturas flexíveis, Tese de doutorado, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.

Pires, A.J.A. (1992), Solução Incremental Automática De Treliças Com Não-Linearidade Geométrica Utilizando O Método De Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado. PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ.

Powell, G. H. (1969), Theory of nonlinear elastic structures, *J. struct. Div., ASCE*, Vol 95, N° 12, p. 2687-2701.

Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, A.A, Vetterling, W.T. (1992), *Numerical Recipes—The art of scientific computing (FORTRAN Version)*, Cambridge University Press.

Ramberg, W., Osgood, W.R. (1943), Description of stress-strain curves by three parameters, Technical Report No. 902, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, DC.

Ramm, E. (1981), Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89.

Richard, R.M., Abbott, B.J., (1975), Versatile elastic-plastic stress-strain formula, J. Eng. Mech. Div. ASCE 101,4, p. 511-515.

Riks, E. (1972), The Application of Newton's Methods to the Problems Elastic Stability. Int. J. Solids Structures, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp. 1060-1066.

Riks, E. (1979), An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. Int. J. Solids Structures, Vol. 15, p. 529-551.

Rizzi, N., Di Carlo, A. e Pignataro, M. (1980), A parametric post-buckling analysis of an asymmetric two-bar frame, J. Struct. Mech. 8, pp. 435-448.

Rocha, G. (2000), Estratégias Numéricas para Análise de Elementos Estruturais Esbeltos Metálicos, Dissertação de Mestrado, Deciv-UFOP, Ouro Preto .

Romstad, K.M., Subramanian, C.V. (1970), “Analysis of frames with partial connection rigidity”, J.Struct.Div.ASCE, 96, ST11, 2283-2300.

Roorda, J. (1965), The instability of imperfect elastic structures., Ph. D. University College London, England, (1965).

Roorda, J. and. Chilver, A.H. (1970), Frame Buckling: An Illustration of the Perturbation Technique, Intl. J. Non-Linear Mech., vol.5, pp. 235-246.

Roorda, J., (1965), The Instability of Imperfect Elastic Structures, PhD Thesis, University College London, England.

Saje, M.; Turk, G.; Kalagasidu, A. e Vratanaar, B. (1998). A Kinematically Exact Finite Element Formulation of Elastic-Plastic Curved Beams. *Computers & Structures*, Vol. 67, p. 197-214.

Saje, M.; Turk, G.; Planinc, I. e Vratanaar, B. (1997), A Kinematically Exact Finite Element Formulation of Planar Elastic-Plastic Frames. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, N° 144, p. 125-151.

Saldanha, A.C. (1997), *Análise Não-Linear do Comportamento de Pórticos Metálicos com Ligações Semi-Rígidas*, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas/UFOP.

Salerno, G. e Lanzo, A.D.(1997), A nonlinear beam finite element for the post-buckling analysis of plane frames by Koiters's perturbation approach, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 146, pp. 325-349, 1997.

Santee, D.M. (1999), "Vibrações Não-Lineares e Instabilidades de Elementos Estruturais Sensíveis a Imperfeições", Tese de Doutorado, PUC/RJ, Rio de Janeiro.

Santos, M.N. (2004), *Aplicação do Método da Rótula Plástica na Análise Não-Linear de Estruturas*, Relatório Final de Pesquisa PIBIC/CNPq/UFOP, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Schreyer, H.L., Masur, E.F. (1966), Buckling Of Shallow Arches, *Journal of the Engineering Mechanics division*, vol. 92, N. EM4, pp. 951-965.

Schweizerhof, K.H. e Wriggers, P. (1986), Consistent Linearization for path Following Methods in Nonlinear FE Analysis. . *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 59, p. 269-279.

Sekulovic, M., Salatic, R., Nefovska, M. (2002), "Dynamic analysis of steel flexible connections", *Computers and Structures*, 80, 935-955.

Seydel, R. (1988), From equilibrium to chaos. Elsevier, Amsterdam.

Shi, J. e Crisfield, M.A. (1992), A simple indicator and branch switching technique for hidden unstable equilibrium paths. *Finite Elements in Analysis & Design*, 12, p. 303-312.

Shi, J., Chan, S.L., Wong, Y.L. (1996), “Modelling for moment-rotation characteristics for end-plate connections”, *J.Struct..Eng.ASCE*, 112, 11, p.1300-1306.

Silveira, R.A.M., Galvão, A.S. e Gonçalves, P.B. (2000), A comparative study of some non-linear formulations for the analysis of plane frames, *Proc. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2000)*, eds. E. Oñate, G. Bugada and B. Suárez, Barcelona, CD-ROM.

Silveira, R.A.M. (1995), *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado. PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ.

Silveira, R.A.M., Rocha, G., e Gonçalves, P.B. (1999a), Estratégias numéricas para análises geometricamente não-lineares. *Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM/99)*, Águas de Lindóia/SP, Brasil, Novembro, 22-26/11/1999, 10 páginas, CD-ROM, ISBN: 85-85769-03-3.

Silveira, R.A.M., Rocha, G., e Gonçalves, P.B. (1999b), Estratégias de incremento de carga e iteração para análise não-linear de estruturas. *Anais do XX CILAMCE, USP, São Paulo/SP, Brasil, Novembro*, p. 213.1-213.20, CD-ROM, ISBN: 85-901027-1-8.

Simitses, G. J. e Kounandis, A. N. (1978), Buckling of imperfect rigid-jointed frames, *J. Eng. Mech. Div. ASCE* 104(3), pp. 569-586.

Singh, H. e Singh, G.M. (1992), Non-Linear Analysis of Frames. *Computers & Structures*, Vol. 44, Nº 6, p. 1377-1379.

Sivakumaran, K.S. (1988), Seismic response of multi-storey steel buildings with flexible connections”, *Eng..Struct.*, 10, p.239-248.

Soares, M.E.S. (1998), Modos de vibração não-lineares em sistemas discretizados pelo método dos elementos finitos, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, USP, SP.

Soares Filho, M. (1997), Análise elástica e elastoplástica de pórticos planos submetidos a excitações dinâmicas com a consideração de conexões semi-rígidas, Dissertação de Mestrado. UnB, DF.

Stelmack, T.W., Marley, M.J. e Gerstle, K.H. (1986), Analysis and tests of flexibly connected steel frames, *J.Struct..Eng. ASCE*, 112, 7, 1573-1588.

Subbaraj, K., Dokanish, M.A. (1988), A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics – II. Implicit Methods”, *Computer & Structures*, vol. 32, número 6, pp. 1387-1401.

Thom, R. (1975), Structural stability and morphogenesis, (Transl. from the French by D. H. Fowler), Benjamin, Reading, UK.

Thompson, J.M.T. e Hunt, G.W. (1973), A General theory of elastic stability, John Wiley & Sons, Inc.

Timoshenko, S.P. e Gere, J.E. (1963), Theory of Elastic Stability. Mechanical Engineering Series, McGraw-Hill.

Timoshenko, S.P. e Gere, J.E. (1982), *Mecânica dos Sólidos. Livros Técnicos e Científicos*, Vol 01.

Torkamani, M.A.M.; Sonmez, M. e Cao, J. (1997), *Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method. Journal of Structural Engineering*, Vol 12, N° 9, p. 1225-1235.

Viana, D.M. (1991), *Analise dinamica nao-linear de estruturas: aplicação em problemas de contato e amortecimento. dissertação de mestrado. instituto militar de engenharia, Rio de Janeiro, RJ.*

Wriggers, P. (1988), *A simple method for the calculation of post-critical branches. Engineering Computations*, 5, p. 103-109.

Waszczyszyn, Z. e Janus-Michalka, M. (1998), *Numerical approach to the 'exact' finite element analysis of in-plane finite displacement of framed structures. Computers & Structures*, Vol. 69, p. 525-535.

Wen, R.K. e Rahimzadeh J. (1983), *Nonlinear elastic frame analysis by finite element. Journal of the Structural Engineering*, Vol. 109, N° 8, p. 1952-1971.

Williams, F.W. (1964), *An Approach to the nolinear behavior of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections, Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 17(4), p. 451-469, 1964.

Wilson W.M. e Moore, H.F. (1917), *Tests to determine the rigidity of riveted joints in steel structures. Bulletin No. 104, Engineering Experiment Station, University of Illinois.*

Wilson, E.L., Farhoomand, I. e Bathe, K J. (1973), Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures., International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, pp. 241-252.

Wong, M.B. e Tin-Loi, F. (1990), Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures. Computers & Structures, Vol. 34, No. 4, p. 633-640.

Wood,W.L., Bossak,M. e Zienkiewicz,C. (1980), Na Alpha Modification of Newmark's Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, p. 1562-1566.

Wood, R.D. e Zienkiewicz, O.C. (1977), Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells. Computers & Structures, Vol. 7, p. 725-735.

Xu, Q. e Meek, J.L. (2001), Dynamic Response and Instability of Frames Structures. Computers Methods Appl.Mech.Engrg., 190, p.5233-5242.

Xu, Z. e Mirmiran, A. (1997), Looping Behavior of Arches Using Corotational Finite Element. Computers & Structures, Vol. 62, N° 6, p. 1059-1071.

Yang, Y. B. e Kuo, S. B. (1994), Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures, Prentice Hall.

Yang, Y. B. e Shieh, M. S. (1990), Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol. 28, N° 12, p. 2110-2116.

Youssef-Agha, W. e Aktan, H.M. (1989), Seismic response of low-rise steel frames, Srtuct.Div.ASCE, 115(3), p. 594-607.

Yu, C.H., Shanmugan, N.E. (1986), Stability of frames with semi-rigid joints,. Computers & Structures, 23, 5, p. 639-648.

Zienkiewicz, O.C. (1971), The Finite Element in Engineering Science, McGraw-Hill, London.

Zhou, Z. H., e Chan, S. L. (2004a), Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member. I: One hinge along member. Journal of Structural Engineering, vol. 130(4), pp. 538-544.

Zhou, Z. H. e Chan, S. L. (2004b), Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member. II: Three hinges along member. Journal of Structural Engineering, vol. 130(4), pp. 545-553.

APÊNDICE A

ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO E ITERAÇÃO

A.1

ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA

A obtenção da solução incremental inicial tem como passo fundamental a definição do parâmetro de carga inicial $\Delta\lambda^0$. A seleção automática do incremento desse parâmetro deve refletir o grau de não-linearidade corrente do sistema, isto é, deve fornecer grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear e levar à pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear. Além disso, o algoritmo deve ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximo e mínimo são ultrapassados.

Crisfield (1991) e Ramm (1982) sugeriram estratégias de incremento automático de carga e de outros parâmetros (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo) baseadas na relação: $(I_d / I_{p,a})^\alpha$; onde, I_d é o número de iterações desejadas pelo analista para convergência no ciclo iterativo, $I_{p,a}$ é o número de iterações que foram necessárias para convergência no passo anterior e α é um expoente cujo valor encontra-se usualmente entre 0.5 e 2. Algumas estratégias de incremento de carga baseadas nessa relação serão descritas a seguir.

A.1.1

Incremento direto do parâmetro de carga

Caso se queira obter de forma direta e automaticamente o valor do parâmetro inicial de carga λ , então a seguinte expressão deve ser usada:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_{p,a}^0 (I_d / I_{p,a})^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

sendo $\Delta\lambda_{p,a}^0$ o incremento de carga inicial do passo de carga anterior.

A.1.2

Incremento de Uma Componente de Deslocamento

Adotando-se um método que seja baseado no controle de deslocamento, o incremento de uma dada componente do vetor de deslocamentos incrementais da estrutura deve ser escolhido com o propósito de limitar o incremento inicial do parâmetro de carga. Pode-se, portanto, calcular o incremento de uma dada componente j do vetor de deslocamentos para o passo corrente de carga de acordo com:

$$\Delta u_j = \Delta u_{j(p,a)} (I_d / I_{p,a})^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

Tem-se, então, que a componente j da solução incremental predita, $\Delta \mathbf{u}^0$, deve satisfazer à seguinte relação:

$$\Delta \mathbf{u}^0(j) = \Delta u_j \quad (\text{A.3})$$

Usando-se a Equação (2.57) na expressão anterior, chega-se à expressão procurada para $\Delta\lambda^0$, ou seja:

$$\Delta\lambda^0 = \Delta u_j / \delta \mathbf{u}_r(j) \quad (\text{A.4})$$

Uma outra forma de controle do incremento inicial dos deslocamentos foi proposta por Krenk (1995) considerando a inequação:

$$\|\Delta \mathbf{u}^0\| \leq \Delta \mathbf{u}_{\max} = C \|\Delta \mathbf{u}_1\| \quad (\text{A.5})$$

onde, $\Delta \mathbf{u}_1$ é o incremento do vetor de deslocamentos obtido durante o primeiro passo de carga e C é uma constante cujo valor encontra-se entre 1.5 a 2.5. Krenk adicionalmente propôs que a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais iniciais poderia ser controlada pela relação:

$$\|\Delta \mathbf{u}^0\| = \|\Delta \mathbf{u}_{p,a}\| (I_d / I_{p,a})^\alpha \quad (\text{A.6})$$

A.1.3

Incremento do comprimento de arco

A relação $I_d/I_{p,a}$ pode ainda ser empregada na definição do incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente, ou seja:

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} (I_d / I_{p,a})^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

onde $\Delta l_{p,a}$ e Δl representam os incrementos do comprimento de arco no passos de carga anterior (valor conhecido) e no passo de carga corrente (incógnita), respectivamente.

Através da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial,

$$\Delta \mathbf{u}^{0T} \Delta \mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \quad (\text{A.8})$$

onde é desprezado o termo do carregamento, chega-se, substituindo-se (2.57) em (A.8), na expressão procurada:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta l / \sqrt{\delta\mathbf{u}_T^T \delta\mathbf{u}_T} \quad (\text{A.9})$$

A.1.4

Incremento baseado no parâmetro de rigidez GSP

Como visto até aqui, dependendo da forma da restrição imposta, diferentes expressões para obtenção de $\Delta\lambda^0$ podem ser obtidas. Yang e Kuo (1994) propuseram, adicionalmente, que a seguinte equação de restrição deveria ser respeitada nas duas etapas de solução não-linear (solução predita e ciclo de iterações):

$$\mathbf{C}^T \delta\mathbf{u}^k + k \delta\lambda^k = H \quad (\text{A.10})$$

onde \mathbf{C} e k são constantes e H um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo). Em função de valores selecionados para essas variáveis, chega-se a diferentes estratégias de incremento de carga e de iteração. A equação de restrição anterior, juntamente com a Equação (2.53), rescrita novamente abaixo:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta\mathbf{u}^k = \delta\lambda^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (\text{A.11})$$

formam um sistema de equações com $N+1$ incógnitas. Essas duas equações podem ser combinadas de forma que após manipulações algébricas e matriciais, chega-se à seguinte expressão para o parâmetro de carga (Yang e Kuo, 1994):

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta\mathbf{u}_r^k + k} (\mathbf{H} - \mathbf{C}^T \delta\mathbf{u}_g^k) \quad (\text{A.12})$$

Seguindo a sugestão de Yang e Shieh (1990) para os valores de \mathbf{C} e k , ou seja:

$$\mathbf{C} = \Delta\lambda^0 \mathbf{}^t\delta\mathbf{u}_r \quad e \quad k = 0, \quad (\text{A.13})$$

onde $\mathbf{}^t\delta\mathbf{u}_r$ o vetor de deslocamentos nodais tangenciais do passo de carga anterior (ver Equação 2.54), chega-se numa nova expressão para $\delta\lambda$, ou seja:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^0 \mathbf{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r^k} (\mathbf{H} - \Delta\lambda^0 \mathbf{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^k). \quad (\text{A.14})$$

A solução incremental inicial $\Delta\lambda^0$ é então obtida fazendo-se, na equação anterior, $k = 0$, $\delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0$, $\delta\mathbf{u}_g^0 = \mathbf{0}$, e $\delta\mathbf{u}_r^0 = \delta\mathbf{u}_r$. Dessa forma escreve-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{H_0}{\mathbf{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}}. \quad (\text{A.15})$$

O valor do parâmetro incremental H_0 (no caso, *deslocamento generalizado*) pode ser definido usando a equação anterior e assumindo que no primeiro passo de carga se conhece o valor de $\Delta\lambda^0$ (valor fornecido pelo analista). Assim, pode-se escrever:

$$H_0 = (\Delta\lambda_1^0)^2 \mathbf{}^1\delta\mathbf{u}_r^T \mathbf{}^1\delta\mathbf{u}_r \quad (\text{A.16})$$

Observe que com a substituição de (A.16) em (A.15), chega-se a:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{\mathbf{}^1\delta\mathbf{u}_r^T \mathbf{}^1\delta\mathbf{u}_r}{\mathbf{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}}. \quad (\text{A.17})$$

Adicionalmente, a consideração do *parâmetro de rigidez generalizado* (GSP) do sistema como segue:

$$\text{GSP} = \frac{\mathbf{}^1\delta\mathbf{u}_r^T \mathbf{}^1\delta\mathbf{u}_r}{\mathbf{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r} \quad (\text{A.18})$$

permite reescrever (A.17) da seguinte forma:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (\text{A.19})$$

onde o critério utilizado para escolher o sinal correto na expressão anterior é baseado no sinal do parâmetro GSP. Como já destacado, para o primeiro incremento, $\Delta\lambda^0$ é um valor prescrito (GSP=1).

A.2

ESTRATÉGIAS DE ITERAÇÃO

O parâmetro de carga $\delta\lambda$ pode ser calculado em função de uma dada estratégia de iteração, ou equação de restrição imposta ao problema. Não se pode esperar, entretanto, de nenhuma estratégia a mesma eficiência na resolução de diferentes problemas fortemente não-lineares. Algumas das estratégias implementadas no programa são apresentadas a seguir.

A.2.1

Iteração a deslocamento constante

Powell e Simons (1981) estabeleceram uma estratégia incremental-iterativa baseada nos seguintes procedimentos:

1. Na solução incremental predita, uma dada componente j do vetor de deslocamentos é acrescida de uma certa quantidade especificada, conforme Equação (A.2);
2. Essa componente, entretanto, é mantida constante durante as iterações subseqüentes, de modo que a seguinte equação de restrição deve ser respeitada:

$$\delta\mathbf{u}^k(j) = \delta\mathbf{u}_g^k(j) + \delta\lambda^k \delta\mathbf{u}_r^k(j) = 0 \quad (\text{A.20})$$

Resolvendo-se, então, a equação acima para $\delta\lambda^k$, chega-se a:

$$\delta\lambda^k = -\delta\mathbf{u}_g^k(j) / \delta\mathbf{u}_r^k(j) \quad (\text{A.21})$$

A.2.2

Iteração a comprimento de arco constante

As idéias originalmente propostas por Riks (1972) e Wempner (1971), propiciaram o surgimento de diversas estratégias que impõem, em cada iteração, a condição de comprimento de arco constante. Crisfield (1981) e Ramm (1982) observaram, através de vários exemplos numéricos, que, em problemas práticos com número elevado de variáveis, o "termo de carga" da Equação (2.55) poderia ser desprezado. Eles então propuseram, que, a cada iteração, a seguinte equação simplificada:

$$\Delta \mathbf{u}^{kT} \Delta \mathbf{u}^k = \Delta l^2 \quad (\text{A.22})$$

deveria ser respeitada a cada iteração. Usando as Equações (2.55) e (2.56) na expressão anterior, chega-se a uma equação quadrática em $\delta\lambda$:

$$A\delta\lambda^k + B\delta\lambda^k + C = 0 \quad (\text{A.23})$$

onde,

$$A = \delta \mathbf{u}_r^{kT} \delta \mathbf{u}_r^k; \quad B = 2\delta \mathbf{u}_r^{kT} (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k); \quad C = (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k)^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) - \Delta l^2.$$

Com a resolução de (A.23), chega-se a dois valores de $\delta\lambda$, $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$, de forma que deve-se escolher entre as soluções:

$$\Delta \mathbf{u}_1^k = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta\lambda_1^k \delta \mathbf{u}_r^k \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{u}_2^k = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta\lambda_2^k \delta \mathbf{u}_r^k \quad (\text{A.24})$$

aquela que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior, $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$. Essa escolha deve prevenir que a solução regrida ao longo do caminho já calculado. Um procedimento simples a ser seguido, e que foi implementado nesse programa, consiste em se achar o menor ângulo entre $\Delta \mathbf{u}^k$ e $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$. Isso equivale a achar o máximo cosseno do ângulo:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{1,2} &= \Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \Delta \mathbf{u}^k / \Delta l^2 \\ &= \Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) / \Delta l^2 + \delta\lambda_{1,2} \Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \delta \mathbf{u}_r^k / \Delta l^2 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Como (A.23) é uma equação quadrática, ela poderá ter raízes imaginárias se $B^2 - 4AC$ for menor que zero. Essa situação pode existir quando o incremento inicial

do parâmetro de carga for grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio (Meek e Tan, 1984).

A restrição de comprimento de arco constante foi utilizada por Riks (1979) apenas para a obtenção do incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$. No processo iterativo subsequente ($k \geq 1$), a equação de restrição usada para calcular $\delta\lambda$ é obtida fazendo com que a solução iterativa $(\delta\mathbf{u}^k, \delta\lambda^k \mathbf{F}_r)$ seja ortogonal à solução incremental predita $(\Delta\mathbf{u}^0, \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r)$, ou seja:

$$\delta\mathbf{u}^{kT} \Delta\mathbf{u}^0 + \delta\lambda^k \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (\text{A.26})$$

A substituição de (2.54) em (A.26) fornece a expressão procurada para a determinação da correção do parâmetro de carga:

$$\delta\lambda = -\Delta\mathbf{u}^{0T} \delta\mathbf{u}_g / (\Delta\mathbf{u}^{0T} \delta\mathbf{u}_r + \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r) \quad (\text{A.27})$$

A.2.3

Iteração baseada no deslocamento generalizado

Na seção A.1.4, foi mostrado que, de acordo com o trabalho de Yang e Kuo (1994), a seguinte expressão deveria ser considerada para o parâmetro de carga ao longo da solução não-linear:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^0 \mathbf{t} \delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r^k} (\mathbf{H} - \Delta\lambda^0 \mathbf{t} \delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^k). \quad (\text{A.28})$$

Na obtenção da solução incremental predita ($k = 0$), os referidos pesquisadores definiram que o parâmetro incremental H_0 (no caso, *deslocamento generalizado*) deveria ser obtido de acordo com a Equação (A.16); durante o ciclo iterativo é assumido que esse parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, isto é: $H = 0$, para $k > 0$. Dessa forma pode-se reescrever (A.28) como:

$$\delta\lambda^k = \frac{\mathbf{t} \delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^k}{\mathbf{t} \delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r^k}. \quad (\text{A.29})$$

que é a expressão procurada para correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

A.3 SINAL DO INCREMENTO INICIAL DO PARÂMETRO DE CARGA

A princípio o sinal do incremento inicial de carga dado pelas equações de restrição pode ser positivo ou negativo. Entretanto, a escolha do sinal correto é de suma importância na definição de seqüências de soluções (\mathbf{u}, λ) que permitam um avanço contínuo na resposta carga-deslocamento.

Nesse trabalho o procedimento para a escolha do sinal de $\Delta\lambda^0$ é o sugerido por Yang e Kuo (1994). Segundo estes autores, o sinal do parâmetro de rigidez corrente depende exclusivamente dos vetores ${}^t\delta\mathbf{u}_r$ (passo de carga anterior) e $\delta\mathbf{u}_r$ (passo de carga corrente), conforme ilustrado na Equação (A.18). Portanto, o parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites, para os demais passos este permanecerá sempre positivo, o que pode ser visto na Figura A.1.

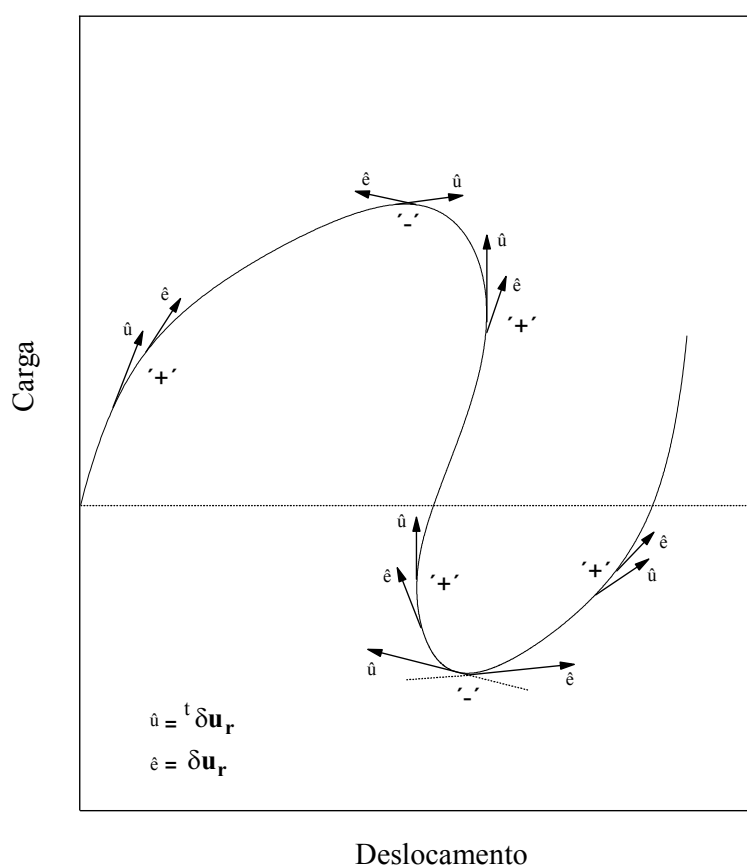
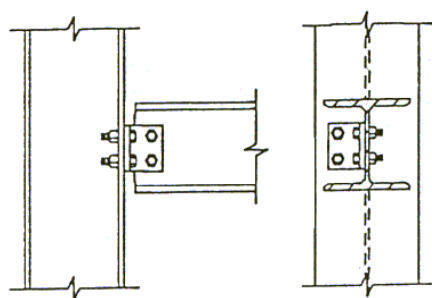


Figura A.1: Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado GSP (Yang e Kuo, 1994).

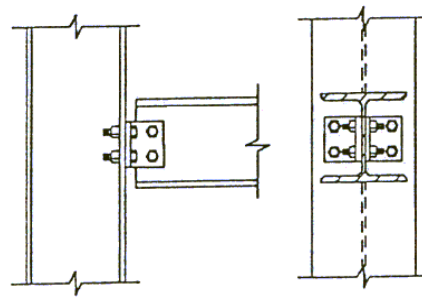
APÊNDICE B

MODELOS DE LIGAÇÕES

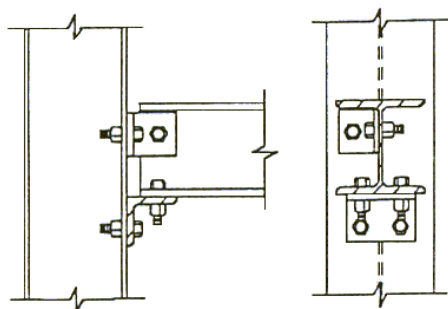
Na construção de edifícios em aço, as conexões de viga-coluna são amplamente utilizadas. A Figura B.1 apresenta alguns exemplos de ligações que estão entre as de uso mais comum. Estritamente falando, as hipóteses extensamente utilizadas de conexões viga-coluna perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas são praticamente irrealizáveis. Numerosos experimentos têm mostrado que, na prática, as ligações se comportam de forma não-linear devido à plastificação gradual de seus componentes, tais como placas, parafusos, etc. As propriedades das ligações são complexas e incertezas em seu comportamento são comuns. Os efeitos da não-linearidade da estrutura tornam estas questões ainda mais complexas. As virtuais causas desta complexidade incluem imperfeições geométricas, tensões residuais devido à soldagem, concentração de tensões e efeitos locais secundários. Para a maioria das conexões, no entanto, as deformações axiais e cisalhantes são, em geral, pequenas se comparadas com as deformações devido à flexão. Por questões de simplicidade, apenas o comportamento rotacional das conexões, devido à ação de flexão, será considerado. A Figura A.2 mostra a deformação rotacional de uma ligação.



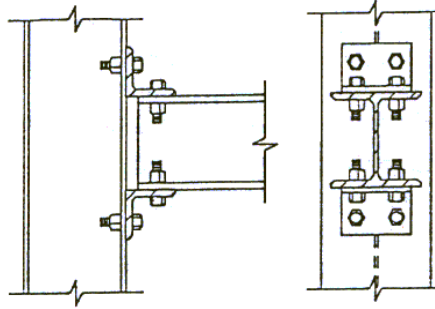
a) Cantoneira de Alma Simples



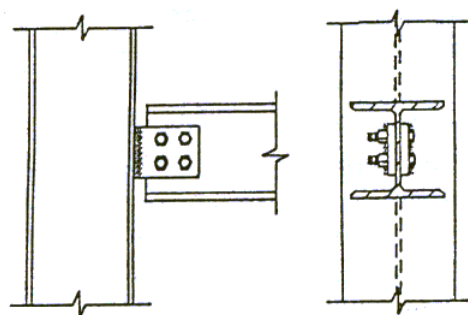
b) Cantoneira Dupla de Alma



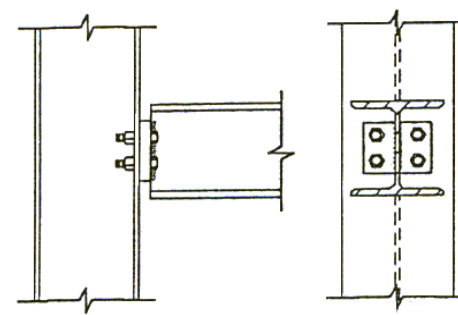
c) Cantoneira de Alma e Assento



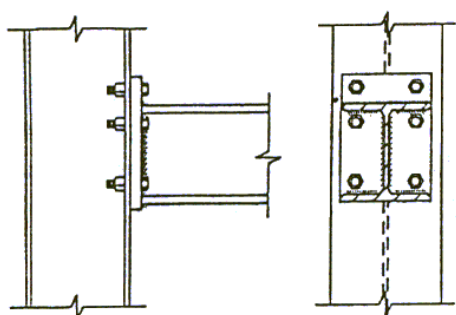
d) Cantoneira de Topo e Assento



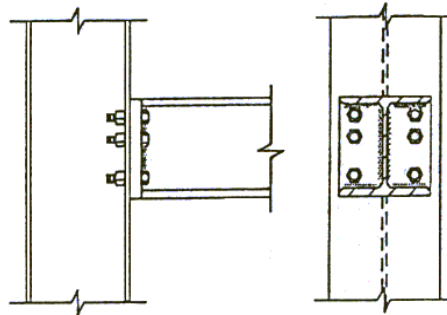
d) Chapa de Extremidade



f) Chapa Soldada à Alma da Viga



g) Ligação com Chapa de Topo Estendida



h) Ligação com Chapa de Topo

Figura B.1: Tipos de ligações viga-coluna.

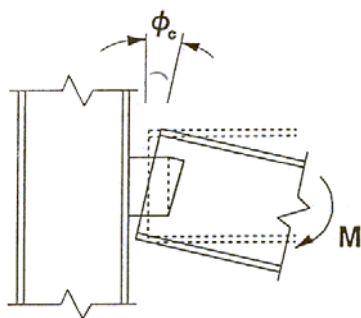


Figura B.2: Deformação rotacional de uma conexão.

O comportamento não-linear de uma ligação é usualmente representado por uma curva momento-rotação ($M-\phi_c$), que, em geral, pode ser obtida de resultados experimentais. Curvas $M-\phi_c$ típicas de alguns tipos de ligações são mostradas na Figura B.3.

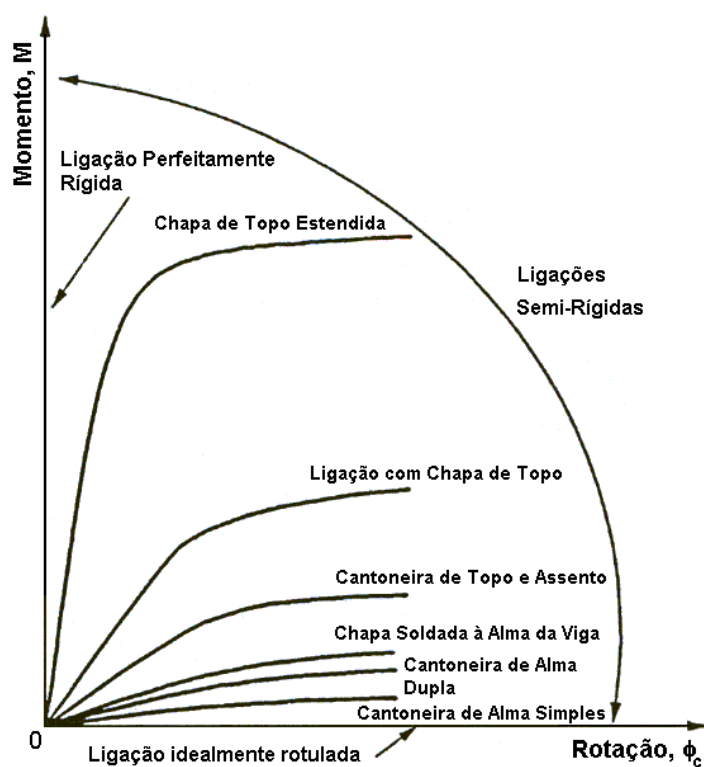


Figura B.3: Curvas momento-rotação típicas de algumas das ligações mais comuns.

Com o objetivo de incorporar as curvas $M-\phi_c$ de forma mais sistemática e eficiente em uma análise computacional de estruturas reticuladas, as relações

momento versus rotação são usualmente modeladas por uma função matemática. Uma boa função matemática deve ser simples, de poucos parâmetros, de fácil determinação desses parâmetros, fisicamente plausível, numericamente estável, não possuir primeiras derivadas negativas e capaz de representar uma grande quantidade de tipos de ligações.

B.1

Classificação dos modelos de ligações

Genericamente falando, o comportamento de uma conexão pode ser simplificado por um conjunto de relações momento versus rotação. Matematicamente, essas relações podem ser expressas na forma geral

$$M = f(\phi_c), \quad (\text{B.1a})$$

ou, inversamente,

$$\phi_c = g(M), \quad (\text{B.1b})$$

em que $f(\phi_c)$ e $g(M)$ são funções matemáticas; M é o momento na conexão e ϕ_c é a rotação da mesma, igual à diferença entre as rotações das duas extremidades da ligação.

Basicamente, a classificação das relações momento-rotação de ligações pode ser, de um modo geral, dividida em três tipos principais: os modelos analíticos, matemáticos e mistos. Nos modelos analíticos, a relação M - ϕ_c é baseada nas características físicas de uma conexão. Nos modelos matemáticos, por outro lado, a relação é expressa por uma função matemática em que os parâmetros são determinados por uma curva ajustada a resultados experimentais. Por último, os modelos mistos combinam os modelos analítico e matemático.

B.2

Classificação dos modelos de ligações

Pinheiro (2003) incorporou ao programa computacional do presente trabalho três funções para descrever o comportamento não-linear de ligações semi-rígidas: a exponencial, exponencial modificado e de Richard-Abbott. Segundo a literatura existente, estas funções estão entre as mais populares e possuem boa eficiência computacional, primeiras derivadas sempre positivas e boa precisão estão entre as razões que motivaram suas escolhas. Além destes, pode ser considerado o modelo linear, principalmente em análises lineares, em casos onde há recomendação de norma para o uso apenas da rigidez inicial em análises estruturais e para estudos de vibrações e pequenas deflexões. As principais características dos modelos implementados serão abordadas a seguir.

B.2.1

Modelo linear

Este é o modelo mais simples e necessita de apenas um parâmetro para definir a rigidez de uma conexão. Em virtude de sua simplicidade, o modelo linear tem sido amplamente utilizado nos estágios iniciais de desenvolvimento de métodos de análise para articulações semi-rígidas (Batho e co-autores, 1931, 1934, 1936; Rathbun, 1936; Baker, 1934; Monforton e Wu, 1963) e na análise de vibração e bifurcação de pórticos semi-rígidos (Chan, 1994; Chan e Chui, 2000). A função momento-rotação pode ser escrita como sendo

$$M = S_c^o \phi_c \quad (B.2)$$

em que S_c^o é constante e igual ao valor da rigidez inicial da conexão, que pode ser obtida de experimentos. Matematicamente, uma função simples de S_c^o pode ser expressa em termos da rigidez da viga. Lightfoot e LeMessurier (1974) assumiram a rigidez da ligação como sendo

$$S_c^o = \lambda \frac{4EI}{L}, \quad (\text{B.3})$$

onde EI e L são a rigidez à flexão e o comprimento da viga, respectivamente, e λ é o índice de rigidez, proposto para indicar o grau de flexibilidade da conexão. O valor de λ varia de zero, para o caso de uma articulação idealmente rotulada, até o infinito, para o caso de uma articulação idealmente rígida.

Alternativamente, a equação (B.3) pode ainda ser modificada pela adoção de um fator fixo η , sugerido primeiramente por Romstad e Subramanian (1970) e Yu e Shanmugam (1986), o que levará à expressão

$$S_c^o = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{4EI}{L}. \quad (\text{B.4})$$

O fator η é igual a zero para ligações rotuladas. Para o caso de ligações rígidas, possui valor unitário. Em Simões (1996) e Sekulovic e Salatic (2001), há uma variação da equação (B.4), adaptada para a situação em que a conexão é idealizada como sendo uma mola e sua rigidez à rotação representaria a rigidez à esforços de flexão da ligação. Para este caso, utiliza-se um fator γ que possui o mesmo princípio do fator η na equação (B.4), que, de acordo com a Figura (B.4), tornar-se

$$S_c^o = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{3EI}{L}. \quad (\text{B.5})$$

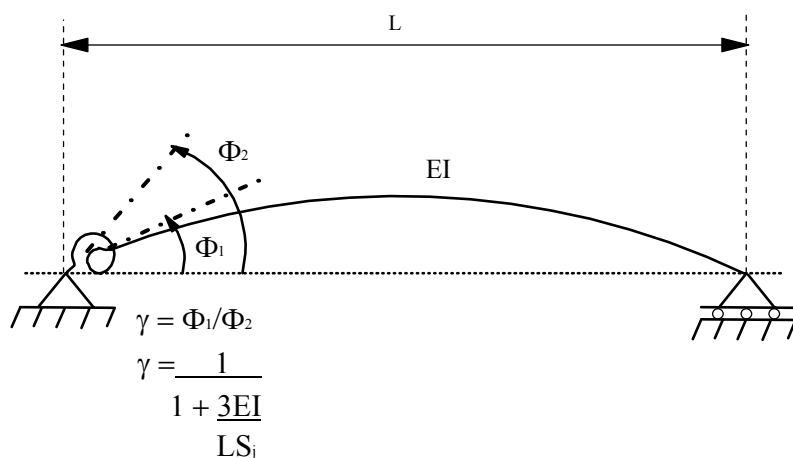


Figura B.4: Fator de rigidez γ .

O modelo linear é simples de ser utilizado porque a rigidez inicial das ligações é facilmente obtida de experimentos e permanece constante ao longo da análise, sem a necessidade de ser atualizada. No entanto, como ilustrado na Figura (B.5), o modelo linear não é muito preciso em casos de grandes deflexões e sua utilização é mais apropriada nas análises linear, de vibração e de bifurcação, onde as deflexões são pequenas.

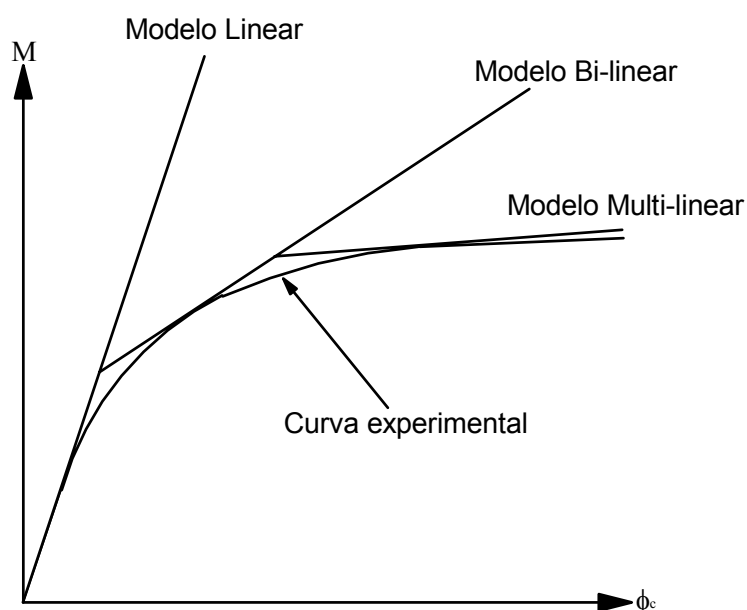


Figura B.5 : Modelos linearizados.

B.2.1

Modelos exponenciais

Lui e Chen (1986, 1988) propuseram um modelo exponencial para descrever a relação momento-rotacão sob a forma

$$M = M_o + \sum_{j=1}^n C_j \left[1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) \right] + R_{kf} |\phi_c|, \quad (\text{B.6a})$$

enquanto que o valor de sua rigidez tangente é dada por

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{2j\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) + R_{kf}, \quad (\text{B.6b})$$

sendo que a rigidez inicial valerá

$$S_c^o = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=0} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{2j\alpha} + R_{kf}, \quad (\text{B.6c})$$

onde M é o valor do momento na conexão; $|\phi_c|$ o módulo da deformação rotacional da conexão; M_o é o momento inicial; R_{kf} é a rigidez devido ao encruamento da ligação; α é um fator de escala; n é o número de termos considerados e C_j é o coeficiente de ajustamento da curva. Baseados em resultados experimentais anteriores, Lui e Chen (1988) determinaram os valores dos parâmetros de ajustamento de curvas do modelo exponencial para quatro tipos de conexões: cantoneira simples de alma, cantoneira de topo e assento, ligação com chapa de topo e ligação com chapa de topo estendida. Os valores estão sumarizados na Tabela (B.1), enquanto que as propriedades de cada conexão, derivadas da função exponencial, estão apresentadas na Figura (B.6).. Em geral, o modelo exponencial de Chen-Lui fornece uma boa representação do comportamento não-linear da ligação e sua precisão é comparável ao modelo B-spline cúbico (Chan e Chui, 2000). No entanto, o modelo de Chen-Lui requer um grande número de parâmetros para ajuste da curva. Além disto, se houver uma mudança abrupta na declividade da curva $M-\phi_c$, este modelo pode não representá-la corretamente. Por conseguinte, Kishi e Chen refinaram o modelo exponencial para que este pudesse acomodar qualquer mudança acentuada na curva $M-\phi_c$. Sob condições de carregamento, a função proposta por esses pesquisadores é escrita como sendo

$$M = M_o + \sum_{j=1}^m C_j \left[1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) \right] + \sum_{k=1}^n D_k (|\phi_c| - |\phi_k|) H[|\phi_c| - |\phi_k|], \quad (\text{B.7a})$$

enquanto que a rigidez tangente da conexão possui a forma

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{2j\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) + \sum_{k=1}^n D_k H[|\phi_c| - |\phi_k|] \quad (\text{B.7b})$$

e a rigidez inicial é igual a

$$S_c^o = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=0} = \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{2j\alpha} + D_k H[\phi_c]_{k=1}, \quad (\text{B.7c})$$

Tipos de conexão (kip-inch)				
A	B	C	D	
Cantoneira de alma simples (Richard et al., 1982)	Cantoneira de topo e Assento (Azizinamini et al., 1985)	Ligação com chapa de topo (Ostrander, 1970)	Ligação com chapa de topo estendida (Johnson e Walpole, 1981)	
M_o	0	0	0	0
R_{kf}	$0,47104 \times 10^2$	$0,43169 \times 10^2$	$0,96415 \times 10^2$	$0,41193 \times 10^3$
α	$0,51167 \times 10^{-3}$	$0,31425 \times 10^{-3}$	$0,31783 \times 10^{-3}$	$0,67083 \times 10^{-3}$
C_1	$-0,43300 \times 10^2$	$-0,34515 \times 10^3$	$-0,25038 \times 10^3$	$-0,67824 \times 10^3$
C_2	$0,12139 \times 10^4$	$0,52345 \times 10^4$	$0,50736 \times 10^4$	$0,27084 \times 10^4$
C_3	$-0,58583 \times 10^4$	$-0,26762 \times 10^5$	$-0,30396 \times 10^5$	$-0,21389 \times 10^5$
C_4	$0,12971 \times 10^5$	$0,61920 \times 10^5$	$0,75338 \times 10^5$	$0,78563 \times 10^5$
C_5	$-0,13374 \times 10^5$	$-0,65114 \times 10^5$	$-0,82873 \times 10^5$	$-0,99740 \times 10^5$
C_6	$0,52224 \times 10^4$	$0,25506 \times 10^5$	$0,33927 \times 10^5$	$0,43042 \times 10^5$
S_c^o	$0,48000 \times 10^5$	$0,95219 \times 10^5$	$0,11000 \times 10^6$	$0,30800 \times 10^6$

Tabela B.1: Parâmetros do modelo exponencial de Chen-Lui utilizados para algumas ligações (extraído de Chen e Lui, 1988)

onde os valores M_o , α e C_j são iguais àqueles definidos nas equações (B.6a) a (B.6b), ϕ_k são as rotações iniciais das componentes lineares, D_k um coeficiente de ajustamento para a porção linear da curva e $H[\phi]$ é a função de Heaviside, definida como sendo

$$\begin{aligned} H[\phi] &= 1 && \text{quando } \phi \geq 0, \\ H[\phi] &= 0 && \text{quando } \phi < 0. \end{aligned} \quad (\text{B.7d})$$

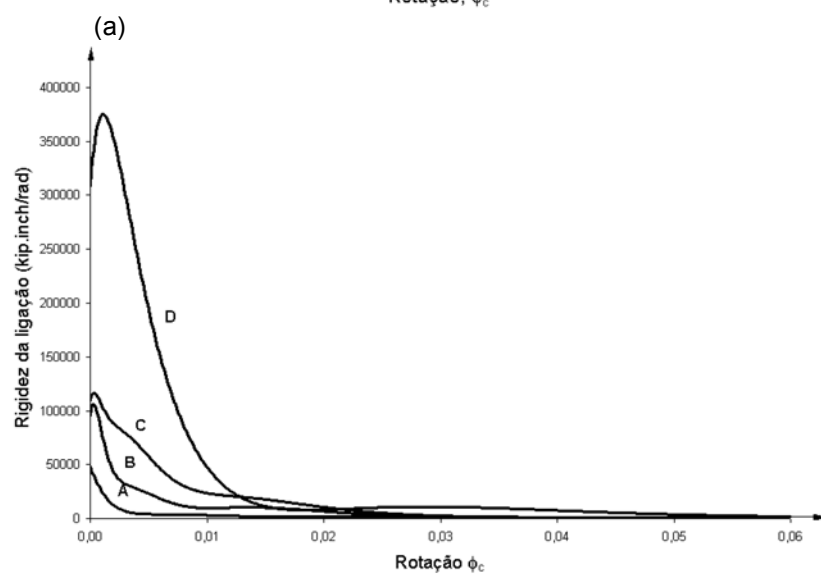
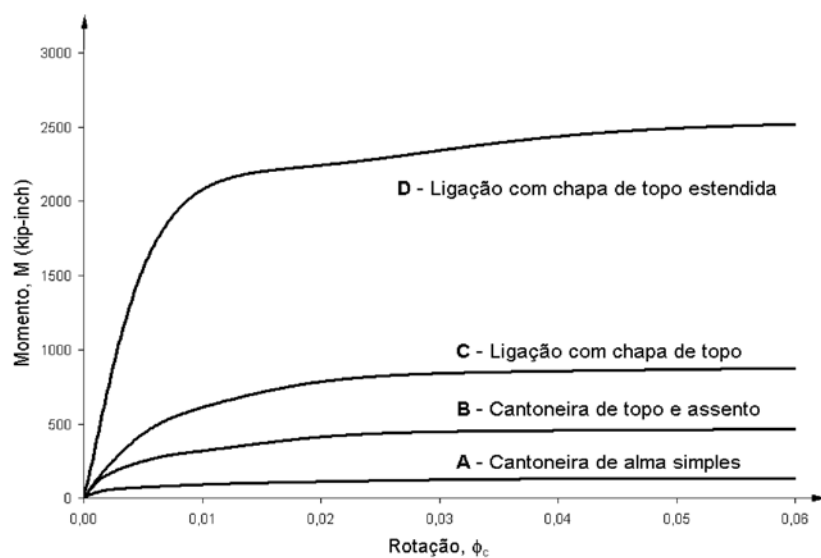


Figura B.6 – Propriedades de ligações representadas pelo modelo exponencial de Chen e Lui: (a) Curvas momento-rotação; (b) Curvas rigidez-rotação.

B.2.3

Modelo de Richard-Abbott

Este modelo, que requer quatro parâmetros, foi originalmente proposto por Richard e Abbott (1975). Na trajetória de equilíbrio, o comportamento momento-rotação é descrito pela expressão

$$M = \frac{(k - k_p)|\phi_c|}{\left[1 + \frac{(k - k_p)|\phi_c|^n}{M_o}\right]^{1/n}} + k_p|\phi_c|, \quad (\text{B.8a})$$

enquanto que a correspondente rigidez valerá

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \Big|_{|\phi_c|=\phi_c} = \frac{(k - k_p)}{\left[1 + \frac{(k - k_p)|\phi_c|^n}{M_o}\right]^{(n+1)/n}} + k_p, \quad (\text{B.8b})$$

sendo k a rigidez inicial, k_p a rigidez devido ao encruamento, n é um parâmetro definindo a curvatura do diagrama e M_o é o momento de referência. A Figura (B.7) mostra a forma típica de uma curva obtida pelo modelo de Richard-Abbott.

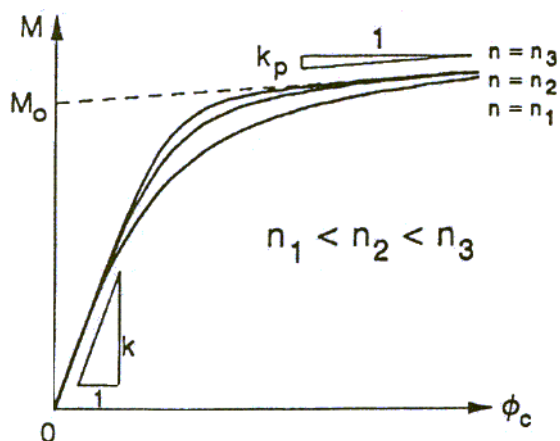


Figura B.7: Forma típica do modelo de Richard-Abbott.

Como precisa de apenas quatro parâmetros para definir a curva $M-\phi_c$ e o resultado sempre fornece uma rigidez positiva, este modelo possui boa eficiência computacional e é um dos mais utilizados para representação de ligações semi-rígidas.

APÊNDICE C

PROGRAMA COMPUTACIONAL

C.1

INTRODUÇÃO

Nesta seção será apresentado o programa computacional utilizado como base do trabalho (Silveira 1995, Galvão 2000, e Rocha 2000), bem como os procedimentos computacionais adotados na implementação dos métodos de integração e estratégias adaptativas, conforme apresentado no Capítulo 3.

A Figura C.1 apresenta o algoritmo do programa principal. No módulo 1 (**Entrada de Dados**), dois arquivos de dados, necessários à análise do problema, são lidos. Inicialmente é feita a leitura dos parâmetros que definem o modelo de elementos finitos adotado para o sistema estrutural. Em seguida devem ser fornecidos ao programa os parâmetros que controlam a solução, dependendo do tipo de análise a ser realizada.

1. No módulo 2 (**Análise do Problema**), é realizada a análise do sistema estrutural em estudo, que pode ser estática (linear ou não-linear) ou dinâmica (linear ou não-linear). As opções mostradas em *itálico* foram adicionadas ao sistema no presente trabalho.
2. No módulo 3 (**Saída de Resultados**), é feita a impressão dos resultados em arquivos de saída.

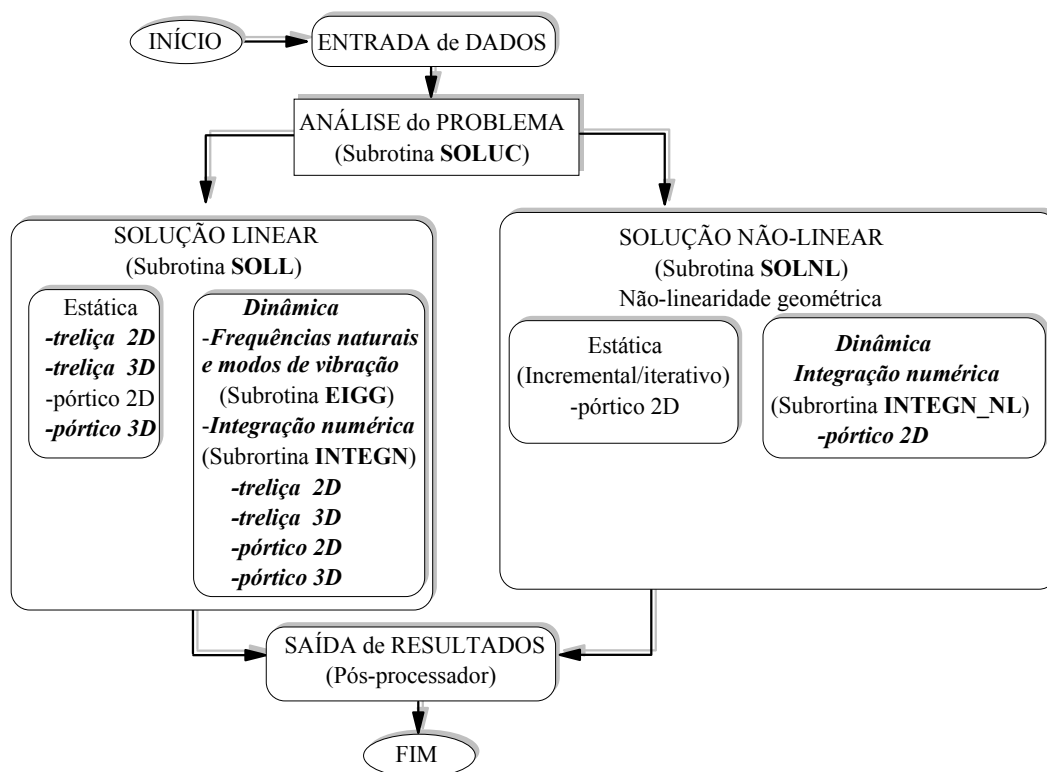


Figura C.1 - Esquema simplificado do programa.

A seguir serão apresentadas algumas subrotinas, com maior destaque para as desenvolvidas no presente trabalho.

C.2

SUBROTINA SOLL

- Essa subrotina é responsável pelo gerenciamento dos algoritmos de solução linear.
- Monta a matriz de rigidez global do sistema através da subrotina **STIFK0**;
- Se a análise for linear estática:
 - monta o vetor de carregamento externo (ou de referencia);
 - Calcula os deslocamentos nodais resolvendo o sistema $\mathbf{K}_L \mathbf{u} = \mathbf{F}$ através de fatorização de Crout;
 - calcula os esforços em cada barra e imprime no arquivo de saída, subrotina **STRESF**;
- Se a análise dinâmica:
 - monta a matriz de massa global do sistema, subrotina **MATMAS**;
 - calcula as frequências naturais e os modos de vibração do sistema, resolvendo o problema de autovalor ($\mathbf{K}_L - \omega^2 \mathbf{K}_m$) \mathbf{u} , subrotina **EIGG**;
 - Imprime as frequências naturais e os modos de vibração no arquivo de saída;
 - Resolve o problema integrando numericamente, subrotina **INTEGN**;
- Retorna ao programa principal.

C.3

SUBROTINA STIFK0

Essa subrotina é responsável pela montagem da matriz de rigidez global do sistema.

- Calcula a matriz de rotação do elemento.
- Calcula a matriz de rigidez do elemento no sistema local;
- Calcula a matriz de rigidez do elemento no sistema global através da matriz de rotação: $\mathbf{K}_g = \mathbf{R}^t \mathbf{K} \mathbf{R}$.
- Armazena a matriz elementar \mathbf{K}_g na matriz de rigidez global do sistema.
- Fim da subrotina STIFK0.

C.4

SUBROTINA STRESF

Subrotina para calcular e imprimir as forças resultantes nos elementos.

- Elementos de treliça (2D ou 3D):
 - para cada elemento da estrutura:
 - Identifica a numeração do grau de liberdade inicial de cada nó.
 - Calcula os cossenos diretores da barra.
 - Obtém os deslocamentos em coordenadas globais
 - Calcula os esforços normais na barra.
 - Calcula as reações globais nos nós.
 - Imprime no arquivo de saída os esforços axiais e as reações nodais.
- Elementos de pórtico (2D e 3D):
 - para cada elemento da estrutura:
 - Identifica a numeração do grau de liberdade inicial de cada nó.
 - Calcula a sub-matriz de transformação **Rs** da barra.
 - Obtém os deslocamentos em coordenadas globais
 - Calcula os deslocamentos no sistema local através de **Rs**.
 - Obtém a matriz de rigidez local da barra.
 - Calcula os esforços locais na barra.
 - Obtém os esforços em coordenadas globais através de **Rs**.
 - Calcula as reações globais nos nós.
 - Imprime no arquivo de saída os esforços nas barras e as reações nodais.
- Fim da subrotina STRESF.

C.5

SUBROTINA MATMAS

Essa subrotina retorna a matriz de massa do sistema.

- Para cada elemento da estrutura:
 - Identifica a numeração do grau de liberdade inicial de cada nó.
 - Calcula a matriz de rotação.
 - Calcula a matriz de massa no sistema local
 - Através da matriz de rotação do elemento calcula a matriz de massa no sistema global.
 - Armazena na matriz de massa global do sistema.
- Fim da subrotina MATMAS.

C.6

SUBROTINA EIGG

Subrotina para o cálculo de autovalores e autovetores.

- Inverte a matriz de massa usando o método de Choleski.
- Calcula $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_L$
- Calcular os autovalores e autovetores de \mathbf{A} pelo método de Jacobi
- Fim da subrotina EIGG.

C.7

SUBROTINA INTEGN

Subrotina para integração numérica do problema dinâmico linear

- Leitura de dados, subrotina **INPUTD**;
- Obtenção do vetor inicial de carregamentos $\lambda_1 \mathbf{F}_r$;
- Para o método Runge-Kutta:

- Montagem Inicial dos Vetores $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \& \\ M \\ u_n \\ \& \\ \end{bmatrix}$ e $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \text{Vel}_1 \\ \text{Acel}_1 \\ M \\ \text{Vel}_n \\ \text{Acel}_n \end{bmatrix}$;

- Para utilizar o método adaptativo dado na seção (3.3.2.2) recorra à subrotina **ODEINT**, dada em Press *et al.* (1992), senão, continue;
- Para demais métodos:
 - Definição das constantes de cálculo do método a ser utilizado;
 - Para o método das diferenças centrais, avalia os deslocamentos no instante $-\Delta t$;
 - Montagem da matriz de rigidez efetiva (ou matriz de massa efetiva caso o método utilizado seja Diferenças Centrais);
- Início do processo incremental de tempo:
 - Atualiza as variáveis: $t_1 = t_2$ e $t_2 = t_2 + \Delta t$;
 - Obtenção do Fator de Carga λ no instante t_2 por interpolação linear;
 - Solução no tempo $t+\Delta t$ (Método Newmark):
 - Atualiza as variáveis \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$;
 - Calcula o vetor de carregamentos $\lambda_1 \mathbf{F}_r$ em $t+\Delta t$;

- Calcula o carregamento efetivo em $t+\Delta t$:

$$\mathbf{F}_e = \lambda_{t+\Delta t} \mathbf{F}_r + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{u}_t + a_2 \dot{\mathbf{u}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{C}(a_1 \mathbf{u}_t + a_4 \dot{\mathbf{u}}_t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_t);$$

- Avalia os deslocamentos no instante $t+\Delta t$: $\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_e$;
- Avalia velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = a_0 (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}_t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t ; \text{ e}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + a_6 \ddot{\mathbf{u}}_t + a_7 \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$$

- Solução no tempo $t+\theta\Delta t$ (Método Wilson- θ):

- Atualiza as variáveis \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$;
- Calcula o vetor de carregamentos $\lambda_i \mathbf{F}_r$ em $t+\theta\Delta t$;
- Calcula o carregamento efetivo em $t+\theta\Delta t$:

$$\mathbf{F}_e = [\lambda_t + \theta(\lambda_{t+\Delta t} - \lambda_t)] \mathbf{F}_r + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{u}_t + a_2 \dot{\mathbf{u}}_t + 2 \ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{C}(a_1 \mathbf{u}_t + 2 \dot{\mathbf{u}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t)$$

- Avalia os deslocamentos no instante $t+\theta\Delta t$: $\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{F}_e$;
- Avalia velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = a_4 (\mathbf{u}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{u}_t) + a_5 \dot{\mathbf{u}}_t - a_6 \ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + a_7 (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_t)$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + a_8 (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + 2 \ddot{\mathbf{u}}_t)$$

- Solução no tempo t (Método das Diferenças Centrais):

- Atualiza as variáveis \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ (exceto o primeiro passo);
- Calcula o vetor de carregamentos $\lambda_i \mathbf{F}_r$ em t ;
- Calcula o carregamento efetivo em t :

$$\mathbf{F}_e = \lambda_t \mathbf{F}_r - (\mathbf{K} + a_2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_t - (a_0 \mathbf{M} - a_1 \mathbf{C}) \mathbf{u}_{t-\Delta t};$$

- Avalia os deslocamentos no instante t : $\hat{\mathbf{M}} \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_e$;
- Para o primeiro passo de tempo, o processo é interrompido aqui, pois o que segue é a obtenção das velocidades e acelerações no instante inicial, que são condições iniciais já conhecidas.

- Avalia velocidades e acelerações no instante t:

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \alpha(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{u}}_t = \alpha^0(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t-\Delta t})$$

- Solução no tempo t (Método Runge-Kutta):
 - Atualiza as variáveis \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ (exceto o primeiro passo);
 - Calcula o vetor de carregamentos $\lambda_i \mathbf{F}_r$ em t;
 - Avalia os parâmetros do método: Subrotinas **RK4** e **DERIVS**, definidas em Press *et. Al* (1992);
 - Obtém os deslocamentos, velocidades e acelerações diretamente dos vetores \mathbf{f} e \mathbf{v} avaliados pelo método.

- Imposição da equação de movimento: deve-se observar que dentro de cada intervalo Δt a aceleração é linear e, além disso, o amortecimento e a rigidez do sistema permanecem constantes, portanto o erro tende a acumular a cada passo de tempo e é conveniente que no cálculo das acelerações no final de cada passo se force a satisfação da equação do movimento (N.A. do Prof. Roehl, 2000). Aqui este procedimento é feito para os métodos de Newmark, Wilson- θ e Diferenças centrais: $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}[\lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{K} \mathbf{u}]$.

- Impressão dos resultados no instante de tempo avaliado;

- Fim do processo incremental de tempo:

C.8

SUBROTINA INTEG_NL:

Subrotina para integração numérica do problema dinâmico não-linear

- Leitura de dados, subrotina **INPUTD**;
- Definição das constantes dos métodos;
- Inicializa a variável auxiliar do método de reavaliação da rigidez, $Reaval = 1$;
- Calcula o vetor de esforços resistentes \mathbf{F}_i para os deslocamentos iniciais, subrotina **LOADPI** (Galvão, 2000);
- Obtenção do vetor inicial de carregamentos $\lambda_1 \mathbf{F}_r$;
- Início do processo incremental de tempo:
 - Atualiza as variáveis: $t_1 = t_2$ e $t_2 = t_2 + \Delta t$;
 - Obtenção do Fator de Carga λ no instante t_2 por interpolação linear;
 - Avaliação do vetor de carregamentos externos $\lambda_i \mathbf{F}_r$ em $t + \Delta t$;
 - Calcula as constantes envolvidas nos métodos (Newmark ou Wilson- θ);
 - Inicializa as variáveis incrementais $\Delta \mathbf{u}$ e $\delta \mathbf{u}$;
 - Se $Reaval = 1$, avalia a matriz de rigidez efetiva triangularizada \mathbf{K}_e e faz $Reaval = 0$;
 - Calcula o vetor de carregamento efetivo:

$$\mathbf{F}_e = [\lambda_t + \theta(\lambda_{t+\Delta t} - \lambda_t)] \mathbf{F}_r + \mathbf{M}(a_2 \dot{\mathbf{u}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{C}(a_4 \dot{\mathbf{u}}_t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_t) - \mathbf{F}_i_t$$
 - Avalia os deslocamentos incrementais: $\mathbf{K}' \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_e$;
- Início do processo iterativo para convergir ao equilíbrio dinâmico:
 - Calcula as aproximações para acelerações, velocidades e deslocamentos:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}^k = a_0 \Delta \mathbf{u}^k - a_2 \dot{\mathbf{u}}_t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t$$

$$\mathbf{u}_{t+\theta\Delta t}^k = a_1 \Delta \mathbf{u}^k - a_4 \mathbf{u}_t - a_5 \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{u}_{t+\theta\Delta t}^k = \mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u}^k$$

- As forças internas são calculadas com coordenadas atualizadas e deslocamentos incrementais, $\mathbf{F}_{t+\theta\Delta t}^{k+1} = \mathbf{F}_t + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{k+1}$, subrotina **VETFI** (Galvão, 2000);

- Calcula o vetor de forças residuais:

$$\mathbf{R}_{t+\theta\Delta t}^{k+1} = [\lambda_t + \theta(\lambda_{t+\Delta t} - \lambda_t)] \mathbf{F}_r - (\mathbf{M} \mathbf{u}_{t+\theta\Delta t}^k + \mathbf{C} \mathbf{u}_{t+\theta\Delta t}^k + \mathbf{F}_{t+\theta\Delta t}^k);$$

- Obtém a correção dos deslocamentos incrementais:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{R}_{t+\theta\Delta t}^{k+1};$$

- Corrige os deslocamentos incrementais: $\Delta \mathbf{u}^{k+1} = \Delta \mathbf{u}^k + \delta \mathbf{u}^{k+1}$;
- Atualiza os deslocamentos, velocidades e acelerações em $t+\theta\Delta t$ e verifica a convergência:

$$\frac{|\Delta \mathbf{u}^{k+1}|}{|\mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u}^{k+1}|} \leq \text{fator de tolerância?};$$

- Obtém os deslocamentos, velocidades e acelerações no instante $t+\Delta t$.

- Fim do ciclo iterativo;
- Estratégia de variação do intervalo Δt e reavaliação de rigidez (Jacob, 1990):
 - Subrotina **DET_LAMB**;
 - Subrotina **DET_DT**;
 - Subrotina **DTREAVAL**;
- Zera a variável de recálculo: $\text{Recal} = 0$;
- Impressão dos resultados do último instante de tempo avaliado;
- Avalia o vetor de forças internas $\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_t + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}$ para o próximo instante.; subrotina **LOADPI** (Galvão, 2000);

C.9**SUBROTINA DET_LAMB:**

Subrotina para determinar o valor do parâmetro λ .

- Se $\text{Recal} = 1$, λ_1 preserva o valor, ignorando o calculo anterior de λ , senão, se $\text{Recal} = 0$, atualiza o valor de λ_1 fazendo $\lambda_1 = \lambda$;
- Para prever recálculos, se $\text{Recal} = 1$, $\lambda = \lambda_1$
- Se $N_{it} < N_{ot}$, $\lambda = \lambda / \zeta$;
- Se $N_{it} = N_{ot}$, $\lambda = \lambda$;
- Se $N_{it} > N_{ot}$, $\lambda = \lambda \times \zeta$;
- Se $\lambda < \lambda_{\min}$, $\lambda = \lambda_{\min}$;
- Se $\lambda > \lambda_{\max}$, $\lambda = \lambda_{\max}$;

C.10**SUBROTINA DET_DT:**

Subrotina para determinar o valor inicial do intervalo Δt .

- Cálculo da frequência dominante, $\omega_{t+\Delta t} = \sqrt{\frac{\Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}}{\Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}}}$;
- Determinação do intervalo do período correspondente, $T = \frac{2\pi}{\omega_{t+\Delta t}}$;
- Determinação inicial do Intervalo de tempo, $\Delta t = \frac{T}{\lambda}$;

C.11

SUBROTINA DTREAVAl:

Subrotina para definir o valor de Δt e a reavaliação da rigidez através do parâmetro auxiliar Reaval.

- Inicializa a variável NormDD = 0.d0;
- Define o parâmetro: VAL = 12.d0;
- Se Recal = 1, Ndmx1 e Ndmn1 preservam os valores, ignorando o calculo anterior, senão, atualiza os valores fazendo: Ndmx1 = NormDDmx, e Ndmn1 = NormDDmn;
- Para prever recálculos, se Recal = 1, NormDDmx = Ndmx1, e NormDDmn = Ndmn1;
- Determinação de NormDD pela expressão $\|\Delta u\|_{t+\Delta t}^* = \|\Delta u_{t+\Delta t}\| / \Delta t$;
- Determinação de Maximo valor histórico de NormDD;
- Se o primeiro máximo local já foi detectado, determina o Minimo valor de NormDD;
- Obtenção de valores limites que definem os critérios de rejeição de frequências: Aa = NormDDmx/Val; Ab = (NormDDmx-NormDDmn)/Val;
- Verifica os 2 critérios de rejeição:
 - Se [NormDD <. Aa] e [NormDDmn ≤ NormDD ≤ Ab], mantém-se o valor do intervalo de tempo Δt do instante anterior;
 - Senão, continua e determina novo Δt .
- Determinação da frequência de cálculo $\omega_{t+\Delta t}^*$:
 - Se $\omega_t \leq (1.05 \omega_{t+\Delta t})$ ou $(\omega_{t+\Delta t} \leq (1.05 \omega_t))$, $\omega_{t+\Delta t}^* = \frac{\omega_{t+\Delta t} + \omega_t}{2}$;
 - Senão, se $\omega_t \leq \omega_{t+\Delta t}$, $\omega_{t+\Delta t}^* = 1.05\omega_t$;
 - Senão, se $\omega_{t+\Delta t} \leq \omega_t$, $\omega_{t+\Delta t}^* = 1.05\omega_{t+\Delta t}$;

- Determina o período de cálculo: $T^* = \frac{2\pi}{\omega_{t+\Delta t}^*}$;
- Determina de $\Delta t^* = \frac{T^*}{\lambda}$;
- Determina $\xi = \frac{\Delta t^*}{\Delta t_n}$ (sendo Δt_n o Δt do passo anterior);
- Definição do novo intervalo de tempo e da reavaliação da rigidez:
 - Se $[\xi < \xi_{\min}]$, $\Delta t = \xi_{\min} \Delta t_n$;
 - Senão, se $[\xi > \xi_{\max}]$, $\Delta t = \xi_{\max} \Delta t_n$;
 - Senão, se $[\xi_1 < \xi < \xi_2]$, $\Delta t = \Delta t_n$;
 - Senão, $\Delta t = \Delta t^*$;
- Se $N_{it} > N_{ot}$,
 - Faça Reaval = 1;
 - Se $[\xi < 1]$, $\Delta t = \xi \Delta t_1$;
- Fim de DTREAVAl.

C.12

ENTRADA DE DADOS

C.12.1

Subrotina INPUT1

Uma vez elaborado o desenho esquemático da malha cobrindo o domínio do sistema estrutural a ser analisado — incluindo numeração dos nós, elementos, tipos de materiais, etc — prepara-se um arquivo de dados de entrada com o objetivo de transmitir informações suficientes do modelo de elementos finitos adotado.

A Subrotina INPUT1 é responsável pela leitura das informações contidas neste arquivo. Na passagem por esta subrotina, um conjunto de vetores e matrizes é pré-estabelecido para armazenar: coordenadas nodais; conectividades dos elementos; propriedades dos materiais; forças nodais; etc; além da definição da dimensão dos vetores e matrizes usados nos próximos módulos do programa.

Os procedimentos a serem seguidos para montagem deste arquivo são comentados a seguir:

1. Nas três primeiras linhas do arquivo são fornecidas informações sobre o tipo de problema a ser analisado e os parâmetros de controle do programa, como mostrado na Tabela C.1. Essas informações são utilizadas na leitura dos dados subsequentes;
2. Uma vez fornecidos os parâmetros de controle, o programa espera ler uma série de dados para a descrição da malha. O fluxo destes dados é controlado por um conjunto de *macro-comandos*. A Tabela C.2 fornece quais os macro-comandos possíveis de serem lidos, e a correspondente tarefa associada;

Variável	Descrição
<i>1ª linha</i>	
TITLE	Título do problema a ser analisado
<i>2ª linha</i>	
NPOIN	Número de pontos nodais
NELEM	Número de elementos
NDIME	Dimensão espacial
:	:
<i>3ª linha</i>	
NCASE	Número de casos de carga
NTYPE	Tipo da análise (versão atual)
	-ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA:
	NTYPE ELEMENTO
	0 treliça 2D
	1 pórtico 2D
	2 treliça 3D
	3 pórtico 3D
	-ANÁLISE LINEAR DINÂMICA (frequências naturais e modos de vibração e integração numérica)
	NTYPE ELEMENTO
	4 treliça 2D
	5 pórtico 2D
	6 treliça 3D
	7 pórtico 3D
	-ANÁLISE NÃO-LINEAR DINAMICA
	9 pórtico 2D
	-ANÁLISE NÃO-LINEAR ESTÁTICA
	NTYPE ELEMENTO
	10 treliça 2D
	11 pórtico 2D
	12 treliça 3D
NPLOT	Indicador de plotagem

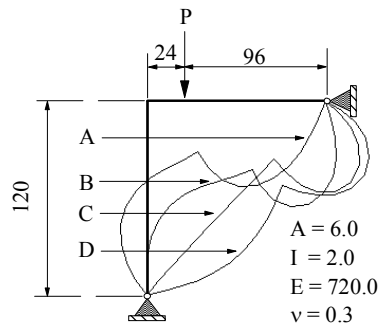
Tabela C.1 - Parâmetros de controle.

Macro-comando	Descrição
COOR	Dados para coordenadas
ELEM	Dados para elementos
MATE	Dados para material
SECA	Dados para seção transversal
PLOT	Dados para plotagem (pós-processamento)
GRAF	Dados para montagem de gráficos
PRIN	Imprime os dados lidos
NOPR	Não imprime os dados lidos
END	Último macro-comando; Finaliza os dados da malha

Tabela C.2 – Macro-comandos.

3. O uso de macro-comandos permite que se especifique apenas aqueles ítems de dados necessários para cada análise, além de diminuir as chances de erro na montagem do arquivo pelo usuário;
4. Seguido ao macro-comando COOR, deve existir outro macro caracterizando o tipo da estrutura;
5. O macro BOUN encarrega-se da leitura subsequente dos nós da malha que estão impedidos ou livres de se deslocarem. A partir destes dados calcula-se o número total de deslocabilidades do sistema, NEQ. Esta variável define a dimensão dos vetores e matrizes utilizados nos próximos módulos do programa;
6. O último passo para montagem do arquivo de dados diz respeito à especificação dos parâmetros necessários para montagem do vetor de carregamento nodal de referência, F_r .

A Figura C.2 exemplifica com um arquivo de dados contendo a modelagem do pórtico-de-Lee com 20 elementos finitos.



```

ANALISE NAO-LINEAR: PÓRTICO DE LEE (20 elementos finitos)          ...TITLE
21 20 2 1 2 1 3          ...npoin,nelem,ndime,nmats,npmat,nsecs,npsec
1 11 1 2 3          ...ncase,ntype,nplot,nnode,ndofn
coor          ...MACRO-COMANDO
Ppor          ...MACRO-COMANDO
21          ...Numero de nós de ppor
1 1 0.0 0.0          ...no,ng,x,y
11 1 0.0 120.0
21 0 120.0 120.0
boun          ...MACRO-COMANDO
1 1 1 1 0          ...no,ng,dx,dy,dz
21 0 1 1 0
elem          ...MACRO-COMANDO
1 1 2 1          ...el,noi,noj,lx
20 20 21 1
mate          ...MACRO-COMANDO
720.0 360.0          ...E,G
1          ...ngelm
1 20          ...kell,kel2
seca          ...MACRO-COMANDO
6.0 2.0 1.2          ...a,i,be
1          ...ngelm
1 20          ...kell,kel2
plot          ...MACRO-COMANDO
'mesh' 1.0 0.0          ...lci,ct(1),ct(2)
graf          ...MACRO-COMANDO
13 13          ...npl,ndl
load          ...MACRO-COMANDO
1          ...Nc
1 0          ...iplod,iedge
13 0. -1. 0.          ...no,px,py,mz
dead          ...MACRO-COMANDO
1          ...Nc
1 0          ...iplod,iedge
13 0. -1. 0.          ...no,px,py,mz
21 0. 0. 0.
end

```

Figura C.2 - Exemplo de um arquivo de dados - Subrotina INPUT1.

C.12.2

Subrotina INPUT2

A seguir é apresentado um esquema do arquivo utilizado na análise não-linear geométrica. Após cada macro-comando uma linha de dados é introduzida, permitindo ao usuário definir a formulação não-linear e a estratégia incremental-iterativa, bem como os parâmetros que controlam o processo de solução e o tipo de impressão de resultados desejada.

```
%PRINCIPAL
11 3 3 5.e-2 410 21 2 1 1.e-3 ...form,Einc,Eite,faci,ninc,nitmax,iterty,cconv,betok
%CHANGE
0 0 ...iswch,cstifs
%CONTINC
5 10. 0.05 0.0 10.0 5.0 ...ides,fxm,fxn,dldes,dldmx,dldmn
%SCREEN
100 0 ...kwinc,kplot
%RELATO
0 ...rel
%REANAL
0 ...ires
%POS3D
1 2 ... kmvie,kview
%POSPRO
2 1 ...kmvde,kvdef
%FREQUENCE
3 5 ...npf(n de freqs),nttf(intervalo de passos)
%END
```

Figura C.3: Exemplo de um arquivo de dados - Subrotina INPUT2.

a) Macro-Comando %PRINCIPAL

A esse macro-comando segue uma linha com os principais parâmetros a serem utilizados na solução-não-linear. São eles:

a.1) FORM: Valor inteiro que define a formulação do elemento finito não-linear a ser utilizada:

11 → Formulação YGN: baseada em Yang e Kuo (1994), linearizada, em RLA e com o cálculo das forças internas através dos deslocamentos naturais;

12 → Formulação **YHN**: baseada em Yang e Kuo (1994), termos de segunda ordem, em RLA e com o cálculo das forças internas através dos deslocamentos naturais;

2 → Formulação **AFN**: baseada em Alves (1993), termos de segunda ordem, em RLA e com o cálculo das forças internas através dos deslocamentos naturais;

3 → Formulação **PTT**: baseada em Pacoste e Eriksson (1997), relações melhoradas, em RLT, funções de interpolação lineares e integração numérica com 1 ponto de integração gaussiano;

a.2) EINC: Valor inteiro que define a estratégia incremental a ser utilizada:

0 → Incremento não-automático;

1 → Incremento direto do parâmetro de carga **INCL**;

2 → Incremento da componente de deslocamento selecionada **INCD**;

3 → Incremento do comprimento de arco **INCA**;

4 → Incremento do trabalho externo **INCW**;

5 → Incremento do deslocamento generalizado **INCGD**.

a.3) EITE: Valor inteiro que define a estratégia de iteração a ser utilizada:

1 → Iteração a carga constante **ILDC**;

2 → Iteração a deslocamento constante **IDIS**;

31 → Iteração a comprimento de arco constante **ICA1**;

32 → Iteração a comprimento de arco constante **ICA2**;

33 → Iteração a comprimento de arco constante **ICA3**;

34 → Iteração a comprimento de arco constante **ICA4**;

4 → Iteração a trabalho externo constante **ITEC**;

5 → Iteração a norma mínima dos deslocamentos residuais **IMDO**;

6 → Iteração a norma mínima das forças desequilibradas **IMFD**;

71 → Iteração a resposta ponderada constante **IRP1**;

72 → Iteração a resposta ponderada constante **IRP2**;

81 → Iteração a resíduo ortogonal (1 condição) **IRO1**;

82 → Iteração a resíduo ortogonal (2 condições) **IRO2**;

a.4) FACI: Valor real que define a valor inicial do parâmetro de carga λ ;

a.5) NINC: Valor inteiro que define o número de incrementos do processo;

a.6) NITMAX: Valor inteiro que define o número máximo de iterações;

a.7) ITERTY: Valor inteiro que define o tipo de iteração adotada:

1 → Newton-Raphson padrão;

2 → Newton-Raphson-modificado;

a.8) CCONV: Valor inteiro que define o critério de convergência:

1 → Carga;

2 → Deslocamento;

3 → Carga e deslocamento;

a.9) BETOK: Valor real que define o fator de tolerância para a convergência;

b) Macro-Comando % CONTINC

A esse macro-comando seguem parâmetros de controle do incremento automático relativos a estratégia incremental adotada. Assim, tem-se as possíveis linhas de comando:

-Para **INCL**: ...IDES, FMX, FMN

-Para **INCD**: ...IDES, FMX, FMN, DDES, DDMX, DDMN, NODES,
COMSEL

-Para **INCA**: ...IDES, FMX, FMN, DLDES, DLDMX, DLDMN

-Para **INCW**: ...IDES, FMX, FMN, WDES, WDMX, DWMN

-Para **INCGD** ...essa linha não é necessária.

b.1) IDES: Valor inteiro que define número de iterações desejadas I_d . Para estratégias com controle automático do incremento baseado na relação $(I_d / {}^t I)$;

b.2) FMX: Valor real que define o incremento máximo do parâmetro de carga;

b.3) FMN: Valor real que define o incremento mínimo do parâmetro de carga;

b.4) DDES: Valor real que define o incremento de deslocamento desejado;

b.5) DDMX: Valor real que define o incremento máximo de deslocamento;

b.6) DDMN: Valor real que define o incremento mínimo de deslocamento;

b.7) NODES: Define o nó usado para o controle de deslocamento;

b.8) COMSEL: Define o a componente de deslocamento do nó NODES a ser utilizada no controle de deslocamento:

1 → Deslocamento horizontal u;

1 → Deslocamento vertical v ;

3 → rotação θ ;

b.9) DLDES: Incremento desejado do comprimento de arco;

b.10) DLDMX: Incremento máximo do comprimento de arco;

b.11) DLDMN: Incremento mínimo do comprimento de arco;

b.12) WDES: Incremento desejado para o trabalho externo;

b.13) WDMX: Incremento máximo do trabalho externo;

b.14) WDMN: Incremento mínimo do trabalho externo;

c) Macro-Comando %REANAL

Utilizado quando se deseja guardar os dados da análise para uma futura continuação do processo.

c.1) IRES: Valor inteiro que define o tipo de re-análise que se deseja fazer:

1 → Grava todos os dados necessários para um futuro recomeço do processo;

2 → Grava os deslocamentos da estrutura para simular, numa análise futura, um modelo estrutural com imperfeições iniciais;

d) Macro-Comando %RELATO

d.1) REL: Valor inteiro que define a impressão dos arquivos de saída. Se esse macro-comando for omitido, o programa imprime somente os dados iniciais em um arquivo com extensão (.s) e os dados para os gráficos do processo incremental em um arquivo (.dat):

1 → Imprime no arquivo (.s), além dos dados iniciais, as principais informações relativas a cada passo de carga;

2 → Imprime as tensões para cada passo de carga em um arquivo (Stress.s).

e) Macro-Comando %POS3D

Define a saída para o arquivo neutro a ser usado pelo programa de pós-processamento POS-3D (ref,1992)

e.1) KMVIE: Número máximo de impressões no arquivo neutro POS3D.pos;

e.2) KMVIE: Número que indica de quantos em quantos passos são impressos os resultados;

f) Macro-Comando %POSPRO

Define a saída para o arquivo neutro a ser usado pelo programa de pós-processamento desenvolvido por Silveira (1995)

- f.1) KMVDE: Número máximo de impressões no arquivo neutro DEPOS;
- f.2) KVDEF: Número que indica de quantos em quantos passos são impressos os resultados;

g) Macro-Comando %SCREEN

Segue a esse macro-comando parâmetros que definem a impressão de resultados na tela, durante o processamento.

- g.1) KWINC: De quantos em quantos incrementos serão visualizados as iterações e os resultados do passo de carga corrente na tela;
- g.2) KPLOT: De quantos em quantos incrementos serão visualizados as deformadas da estrutura na tela.

h) Macro-Comando % CHANGE

A primeira linha que segue a esse macro-comando, define a troca da estratégia de incremento de carga durante o processo incremental para a estratégia **INCA**, com as variáveis ISWCH e CSTIFS. Se ISWCH for diferente de zero, uma segunda linha deve ser lida com os parâmetros DLDES, DLDMX e DLDMN, já definidos anteriormente no parágrafo do macro-comando %CONTINC.

- h.1) ISWCH = 1: Define a troca de estratégia para **INCA**, quando o parâmetro de rigidez corrente $CSTIF < CSTIFS$, definido pelo usuário;
- h.2) CSTIFS: Valor do parâmetro de rigidez que define a troca de estratégia.

i) Macro-Comando % FREQUENCE

A presença deste macro-comando indica que se deseja o cálculo das frequências naturais durante o processo incremental-iterativo. Ao marco-comando segue uma linha com os dois seguintes valores inteiros:

- i.1) NPF: O programa irá calcular as NPF primeiras frequências da estrutura;
- i.2) NTTF: As frequências serão calculadas de NTTF em NTTF passos de carga.

C.12.3

Subrotina INPUTD

Nesta seção é apresentado um esquema do arquivo utilizado na análise dinâmica linear e não-linear, através de integração numérica. Após definir as primeiras linhas de variáveis, são utilizados macro-comandos, após os quais uma linha de dados é introduzida, permitindo ao usuário a definição do problema e do método e parâmetros que controlam o processo de integração.

Seja a seguir o exemplo de um arquivo para análise dinâmica linear, usando Newmark, para uma estrutura sob um carregamento que varia no tempo através de uma função senoidal. Esse carregamento é modelado por um vetor de referencia definido no arquivo Data1 e pela variação no tempo, definida pelo vetor fator de carga λ_t :

```

20000000 0.5d0 10000000 500 20      ...Nt, Dt0, Nper, Nqqp, Tprint
0                                     ...impr
12                                    ...NF
%AMORT_PROP_RAYLEIGH                ...MACRO-COMANDO
1                                     ...DataType
0.4d0 0.4d0 7.64d0 11.53d0          ...Ks1,Ksi2,Fn1,Fn2
%NEWMARK                             ...MACRO-COMANDO
0.25d0 0.5                           ...Alfa,Beta
1 0                                    ...Estrat, Valtipic
1.05d0 50.d0                         ...Ksi, Lmn
%DES_INI                             ...MACRO-COMANDO
0.0d0 0.0d0 0.0d0
%VEL_INI                             ...MACRO-COMANDO
0.0d0 0.0d0 0.0d0
%ACE_INI                             ...MACRO-COMANDO
0.0d0 0.0d0 0.0d0
%FATOR_DE_CARGA                     ...MACRO-COMANDO
0.0 0.0                              ...FLT(1,j), FLT(2,j), para j = 1, NF
0.1 0.987
0.2 1.877
0.3 2.584
0.4 3.038
0.5 3.194
0.6 3.038
0.7 2.584
0.8 1.877
0.9 0.987
1.0 0.0
1.8 0.0
%END                                 ...MACRO-COMANDO

```

Figura A.4: Arquivo de dados para integração de um problema linear.


```

20000000 0.5d0 10000000 500 20      ...Nt, Dt0, Nper, Nqqp, Tprint
1000 5 000                          ...Kwinc, Impr, Kplot
2                                    ...NF
%AMORT_PROP_RAYLEIGH                 ...MACRO-COMANDO
1                                    ...DataType
0.4d0 0.4d0 7.64d0 11.53d0          ...Ks1,Ksi2,Fn1,Fn2
%NEWMARK-NL                          ...MACRO-COMANDO
0.25d0 0.5                          ...Alfa,Beta
51 1.E-8 1 0                        ...Nite,Tol,Estrat,valtupic
3 1.05 50 500                      ...Not, Ksi, Lmn, Lmx
%FATOR_DE_CARGA_SENO                 ...AMPL,OMEGA
0.9 6.0
%FATOR_DE_CARGA_ESTATICA
1                                    ...autcar
1.d0                                  ...Fator inicial
%STEADY_STATE_CONTROL               ...MACRO-COMANDO
3 0.5 2.0 10.0                     ...auto, acresc, parm, parmx
%END

```

Figura A.5: Arquivo de dados para integração de um problema não-linear.

a) Primeiras linhas de variáveis

Antes de se introduzir os macro-comandos, três linhas de variáveis devem ser introduzidas. A primeira linha deve definir Nt e Dt0, onde:

- a.1) Nt: Valor inteiro que define o número de passos de tempo que serão considerados.
- a.2) Dt0: Valor real que define o tamanho do passo de tempo inicial.
- a.3) Nper: Número de períodos (caso carregamento seja periódico)
- a.4) Nqqp: Número de ciclos para definir a resposta permanente.
- a.5) Tprint: parâmetro que define o número de ciclos a ter a resposta no tempo impressa a cada mudança do parâmetro de excitação.

Para análise linear, a segunda linha deve definir somente a variável impr. Caso a análise seja não-linear, é necessário definir kwinc, impr e kplot, nesta ordem.

- a.6) kwinc: valor inteiro que define de quantos em quantos passos serão mostradas as iterações na tela, durante a execução;
- a.7) Impr: valor inteiro que define de quantos em quantos passos serão impressos os resultados no arquivo de saída para plotagem de gráficos;
- a.8) Kplot: valor inteiro que define de quantos em quantos passos será mostrada a deformada da estrutura na tela, durante a execução. Esse

parâmetro só é necessário se Nplot tiver sido definido diferente de 0 no arquivo Data1.

A terceira linhas deve definir a dimensão NF do vetor contendo os fatores de carga a serem interpolados durante a solução. Caso o carregamento seja definido através de uma função (%FATOR_DE_CARGA_SENO), utiliza-se o valor 2.

b) Macro-Comando %AMORT_PROP_RAYLEIGH

Caso haja necessidade de se definir um amortecimento proporcional, deve-se introduzir esse macro-comando, seguido por duas linhas. Na primeira linha deve-se definir que tipo de dados serão introduzidos através do valor inteiro Datatype.

Se Datatype = 0, esta linha é seguida por uma segunda linha que deve definir de forma explícita os coeficientes de Rayleigh RayK e RayM:

- b.1) RayK: valor real que define a constante de Rayleigh de proporcionalidade de rigidez;
- b.2) RayM: valor real que define a constante de Rayleigh de proporcionalidade de massa.

Se Datatype = 1, esta linha é seguida por uma segunda linha em que se deve definir quatro parâmetros :

- b.3) Ksi1 e Ksi2: valores reais que definem o amortecimento proporcional associados aos modos de vibração 1 e 2;
- b.4) Fn1 e Fn2: valor das frequências naturais associadas aos modos de vibração 1 e 2;

c) Macro-Comando que define o Método de Solução

Caso se deseje uma análise linear, os macro-comandos disponíveis são:

- c.1) **%NEWMARK**: Método de Newmark. Esse Macro-comando deve ser seguido por uma linha definindo Alfa e Beta, que são parâmetros que controlam a eficiência do método;
- c.2) **%WILSON**: Método Wilson- θ . Esse Macro-comando deve ser seguido por uma linha definindo o parâmetro Theta;

c.3) **%D_CENTRAL**: Método das diferenças centrais. Não há linhas de variáveis após esse macro-comando;

c.4) **%RUNGE-KUTTA**: Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Não há linhas de variáveis após esse macro-comando;

Após as linha que definem o método e os seus parâmetros de controle, adiciona-se uma linha definindo *Estrat,Valtipic* que são, respectivamente a definição da utilização ou não da estratégia adaptativa (1 ou 0) e a utilização ou não dos valores típicos definidos para a estratégia (1 ou 0). Se o usuário não desejar usar os valores típicos para os parâmetros do método adaptativo (*Vatipic* = 1), estes devem ser definidos numa terceira linha de dados: *Ksi* e *Lmn*, para os métodos da família Newmark. Para Runge-Kutta a terceira linha deve conter: *tin*, *tfin*, *Dtmin* e *EPS*, onde: *tin* e *tfin* definem os instantes do início e do fim do processo, *Dtmin* define o limite mínimo para o passo de tempo e *EPS* define a precisão desejada.

Para análise não-linear:

c.5) **%NEWMARK-NL**: Método de Newmark adaptado para análise não-linear geométrica, conforme sugerido por Jacob (1990). Esse Macro-comando deve ser seguido por duas linhas de variáveis. A primeira definindo *Alfa* e *Beta*, que são as variáveis controladoras do método, e a segunda definindo *Nite*, *Eps*, *Estrat,Valtipic* que são, respectivamente, o número máximo de iterações, a precisão desejada no processo, a definição da utilização ou não da estratégia adaptativa (1 ou 0) e a utilização ou não dos valores típicos definidos para a estratégia (1 ou 0). Se o usuário não desejar usar os valores típicos para os parâmetros do método adaptativo (*Vatipic* = 0), estes devem ser definidos numa terceira linha de dados: *Not*, *Ksi*, *Lmn*, *Lmx*.

c.6) **%WILSON-NL**: Método Wilson- θ adaptado para análise não-linear geométrica, conforme sugerido por Jacob (1990). Da mesma forma, esse Macro-comando deve ser seguido por duas linhas de variáveis. A primeira definindo *Theta*, que é a variável de controle do método, e a segunda definindo *Nite*, *Eps*, *Estrat,Valtipic*. Da mesma maneira que para Newmark, se o usuário não desejar usar os valores típicos para os

parâmetros do método adaptativo ($V_{atipic} = 0$), estes devem ser definidos numa terceira linha de dados: Not, Ksi, Lmn, Lmx.

d) Macro-Comandos %DES_INI, %VEL_INI e %ACE_INI

Macro-comandos que permitem a introdução de deslocamentos, velocidades e acelerações iniciais nas deslocabilidades da estrutura analisada. Esses valores devem ser colocados na linha seguinte, na mesma ordem da numeração das deslocabilidades associadas.

e) Macro-Comando %FATOR_DE_CARGA

Define os valores do fator proporcional de carregamento em diferentes instantes. Durante a execução, pontos intermediários são obtidos através de interpolação linear. Após esse macro-comando, as NF linhas seguintes devem apresentar cada uma dois valores reais, o primeiro indicando o instante considerado e o segundo o valor do parâmetro neste instante.

f) Macro-Comando %FATOR_DE_CARGA_SENO

Esse macro-comando indica que a estrutura será excitada por um carregamento harmônico senoidal. A linha seguinte deve definir .

f.1) AMPL: Valor inicial da amplitude do carregamento harmônico;

f.2) OMEGA: Valor inicial da frequência de excitação.

g) Macro-Comando %FATOR_DE_CARGA_ESTATICA

Caso haja necessidade de se introduzir um carregamento estático que varie após um determinado número de ciclos (*Step*), isto é feito através da definição do vetor de forças fixas ou *dead load*, no arquivos de entrada 1(Figura C2) e do fator de carga estática, que é definido nesta parte do arquivo de dados.

h) Macro-Comando %STEADY_STATE_CONTROL

Esse macro-comando indica quais parâmetros devem ser modificados a cada obtenção da resposta permanente (após NQQP ciclos) e de que forma estes parâmetros devem ser modificados.

h.1) AUTO: Valor inteiro que indica qual parâmetro será modificado:

-Se Auto = 1, a cada NQQP ciclos modifica-se o fator de carga fixa;

-Se Auto = 2, a cada NQQP ciclos modifica-se o valor da amplitude de excitação;

-Se Auto = 3, a cada NQQP ciclos modifica-se a frequência de excitação;

h.2) ACRESC: Define o valor do acréscimo a ser dado ao parâmetro definido por AUTO, a cada NQQP ciclos.

h.3) PARMN e PARMX: Valores limites para o parâmetro de controle. Atingidos estes valores, há ainda um acréscimo igual a 20% de ACRESC e em seguida o parâmetro começa a ser reduzido de ACRESC a cada NQQP ciclos. Isto permite a obtenção, no “retorno”, de novos pontos da curva que define a variação do steady-state com o parâmetro controlado.