

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

ANÁLISE NUMÉRICA DE SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS VIA MEF: APLICAÇÃO EM ELEMENTOS DE CONCRETO, DE AÇO E MISTOS DE AÇO E CONCRETO

Tiago José Ferreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Profa. Dra. Kátia Inácio da Silva

Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

Campus Morro do Cruzeiro

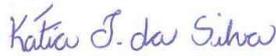
Ouro Preto, MG – Brasil

Abril, 2017

**ANÁLISE NUMÉRICA DE SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS VIA MEF:
APLICAÇÃO EM ELEMENTOS DE CONCRETO, DE AÇO E MISTOS DE
AÇO E CONCRETO**

AUTOR: TIAGO JOSÉ FERREIRA

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 05 de abril de 2017,
pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Profa. Kátia Inácio da Silva, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Paulo Anderson Santana Rocha, D. Sc. – UFOP



Prof. Arthur Ribeiro de Alvarenga, D. Sc. – Pós Doc/UFOP



Prof. Alexandre da Silva Galvão, D. Sc. – UFSJ

F383a Ferreira, Tiago.
Análise Numérica de Sólidos Axissimétricos via MEF [manuscrito]:
Aplicação em Elementos de Concreto, de Aço e Mistos de Aço e Concreto / Tiago
Ferreira. - 2017.
71f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Profa. Dra. Kátia Silva.
Coorientador: Prof. Dr. Paulo Rocha.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de
Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil.
Area de Concentração: Construção Metálica.

1. Sólidos Axissimétricos. 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Análise
Numérica. 4. Estruturas - Aço. 5. Estruturas - Concreto. I. Silva, Kátia. II.
Rocha, Paulo. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 624.014

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

Aos meus pais, meus irmãos e aos meus orientadores.

Agradecimentos

A Deus por me iluminar e me conduzir em todos os momentos da minha vida.

Aos meus pais Nascimento e Nair, pelo apoio, compreensão, motivação e ensinamentos passados. Sou eternamente grato por tudo que me proporcionam.

Aos meus irmãos Ana Carolina, Deibson e Ana Paula pelo companheirismo, amizade, incentivo, motivação e momentos de descontração.

Ao meu orientador Prof. Paulo Rocha pelos ensinamentos, amizade, motivação, paciência, conselhos e dedicação durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

À Profa. Kátia, pelas dicas, ensinamentos e apoio.

A todos os professores do mestrado e da graduação que contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

A todos os amigos do mestrado, em especial ao Miguel Ângelo, pelo apoio, amizade, companheirismo durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos Cesar, Jonathan, Douglas, Junior, Christian, Wagner, Luciano e Eveton pelos anos de parceria, irmandade e alegria.

À minha sobrinha Yasmin pela alegria e satisfação que me proporciona diariamente.

À minha família pela torcida e apoio em todas as etapas da minha vida.

Aos meus amigos da República Etnia, do CEFET e da graduação pela parceria e companheirismo.

À CAPES e à UFOP pelo auxílio financeiro.

“Tudo posso naquele que me fortalece.”

Filipenses 4.13

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil

ANÁLISE NUMÉRICA DE SÓLIDOS AXISSIMÉTRICOS VIA MEF: APLICAÇÃO EM ELEMENTOS DE CONCRETO, DE AÇO E MISTOS DE AÇO E CONCRETO

Tiago José Ferreira

Abril/2017

Orientadores: Profa. Dra. Kátia Inácio da Silva

Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

No presente trabalho tem-se como objetivo analisar o comportamento de estruturas axissimétricas submetidas a carregamentos axissimétricos, com a hipótese de relação linear-elástica do material. Para isso implementou-se computacionalmente uma formulação matemática baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando-se a linguagem de programação *Fortran 90/95* (CHAPMAN, 2003), a qual possibilita a obtenção dos valores de tensões, deformações e deslocamentos da estrutura axissimétrica. Para discretizar a estrutura foram utilizados elementos finitos triangulares com três nós, denominados de CST (*Constant Strain Triangle*), e como a formulação do MEF adotada neste trabalho possibilita avaliar as tensões apenas no centroide dos elementos, utilizou-se uma interpolação via polinômio de Lagrange para determinar as tensões nos nós dos elementos ou em qualquer outro ponto da estrutura. Com o intuito de verificar as respostas obtidas a partir do programa computacional implementado realizaram-se comparações com resultados da literatura e/ou de modelagens feitas com o auxílio do software ANSYS 12.1. Este trabalho pode contribuir de forma eficiente para o cálculo de tensões, deformações e deslocamentos em estruturas tais como: tubulações de água e gás, minerodutos, estacas de aço e/ou concreto, risers flexíveis, pilares de concreto e/ou aço, reservatórios, tubulões de concreto, entre outros.

Palavras-chave: Sólidos Axissimétricos, Método dos Elementos Finitos, Análise Numérica, Estruturas de aço, Estruturas de Concreto, Estruturas de Aço e Concreto

Abstract of the Dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial requirement for obtaining the degree of Master of Science in Civil Engineering

NUMERICAL ANALYSIS OF AXISSIMETRIC SOLIDS THROUGH FEM: APPLICATIONS IN CONCRETE, STEEL AND STEEL AND CONCRETE MIXED ELEMENTS

Tiago José Ferreira

April/2017

Advisors: Profa. Dra. Kátia Inácio da Silva

Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

In the present work, the objective is to analyze the behavior of axissimetric structures submitted to axissimetric loading through the hypothesis of the material's linear-elastic relationship. For this, a computational mathematical formulation based on the Finite Element Method (FEM) was implemented by using the Fortran 90/95 programming language (CHAPMAN, 2003), which enables the values of tensions, deformations and displacements of the axissimetric structure. In order to discretize the structure, triangular finite elements with three nodes, called Constant Strain Triangle (CST), were used, and since the FEM formulation adopted in this work makes it possible to evaluate the stresses only at the centroid of the elements, a Lagrange polynomial interpolation was used to determine the stresses at the element nodes or at any point in the structure. In order to verify the answers obtained from the implemented computational program, comparisons were made with literature results and/or modeling through ANSYS 12.1 software. This work can efficiently contribute to the calculation of tensions, deformations and displacements in structures such as: water and gas pipes, pipeline, steel and/or concrete piles, flexible risers, concrete and/or steel pillars, reservoirs, concrete pipes, among others.

Keywords: Axissimetric Solids, Finite Elements Method, Numerical Analysis, Steel Structures, Concrete Structures, Steel and Concrete Structures

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Lista de Siglas	xiii
Lista de Símbolos	xiv
1 Considerações Iniciais	1
1.1 Introdução	1
1.2 Objetivos	5
1.3 Origem do Método dos Elementos Finito	6
1.3.1 Modelo Compatível	8
1.3.2 Modelo de Equilíbrio.....	8
1.3.3 Modelo Híbrido	9
1.3.4 Modelos Mistos	9
1.4 Elementos Isoparamétricos	9
1.5 Estado da Arte.....	10
1.6 Organização do Trabalho	14
2 Análise de Sólidos Axissimétricos via MEF	15
2.1 Introdução	15
2.2 Triângulo de Deformação Específica Constante (CST).....	17
2.3 Campo de Deslocamento	18
2.4 Energia Potencial (Π) de um Corpo Elástico	19
2.5 Campo de Deformação.....	20
2.6 Campo de Tensão.....	22

2.7	Equação Constitutiva	23
2.8	Modelagem dos Elementos Finitos: Elemento Triangular.....	25
2.8.1	Conectividade dos elementos	26
2.8.2	Discretização do Campo de Deslocamento	27
2.8.3	Discretização dos Campos de Deformação e Tensão	27
2.8.4	Método da Energia Potencial.....	34
2.8.5	Carga Nodal.....	35
2.8.6	Força de Superfície	36
2.8.7	Termo de Força de Corpo.....	38
2.8.8	Método de obtenção das tensões nos nós dos elementos	38
2.9	Programa Computacional – Progxissimétrico.....	39
3	Exemplos	42
3.1	Introdução	42
3.2	Exemplos.....	42
3.2.1	Cilindro Vazado Sujeito à Pressão Radial Interna.....	42
3.2.2	Esfera Oca Sujeita à Carga Uniformemente Distribuída de Forma Radial	44
3.2.3	Cilindro Vazado Sujeito à Pressão Radial Interna.....	47
3.2.4	Volante Rotativo.....	50
3.2.5	Estaca de Concreto	52
3.2.6	Pilar Misto de Aço e Concreto	56
4	Considerações Finais	61
4.1	Introdução	61
4.2	Conclusões	61
4.3	Sugestões para Trabalhos Futuros	63
5	Referências	64

Lista de Figuras

1.1	Estrutura axissimétrica com seção transversal gerada por rotação segundo o eixo de revolução	2
1.2	Execução do estaqueamento com estacas pré-moldadas de concreto da Arena Sport Club Corinthians Paulista no estado de São Paulo (Fonte: www.tecgeo.com.br)	3
1.3	Mineroduto da Companhia Vale do Rio Doce no Município de Paragominas no estado do Pará (Fonte: www.constran.com.br)	3
1.4	Pilares de concreto armado do Viaduto da Cezário José de Castilho no estado de São Paulo (Fonte: www.sh.com.br)	4
1.5	Adutora de montagem rápida que abastece a cidade Quixeramobim no estado do Ceará (Fonte: www.ceara.gov.br)	4
1.6	Elementos Finitos	6
2.1	Sólido axissimétrico	15
2.2	Rotação do elemento dA	16
2.3	Condições de contorno	16
2.4	Representação das funções de forma no nó 1, nó 2 e nó 3	17
2.5	Representação das funções de forma por coordenadas de áreas	18
2.6	Deslocamentos de corpos axissimétricos	19
2.7	Volume elementar	19
2.8	Deformação Específica	21
2.9	Tensões no volume diferencial de um sólido axissimétrico submetido a cargas axissimétricas.....	22
2.10	Discretização em elementos triangulares	25
2.11	Discretização de uma estrutura com 6 nós e 5 elementos triangulares	25
2.12	Componentes dos deslocamentos globais de um elemento finito triangular	26
2.13	Elemento triangular axissimétrico	28
2.14	Carga Nodal	35
2.15	Superfície com carregamento trapezoidal	36
2.16	Projeção da carga de superfície.....	37
2.17	Fluxograma do Programa Progaxissimétrico.....	40

3.1	Cilindro Longo	43
3.2	Esfera Oca	44
3.3	Representação de um quarto da seção transversal	44
3.4	Direções das cargas nodais atuantes no cilindro vazado sujeito à pressão radial interna.....	45
3.5	Malha de elementos finitos (numeração dos nós)	46
3.6	Malha de elementos finitos (numeração dos elementos)	46
3.7	Cargas nodais atuantes no cilindro vazado sujeito à pressão radial interna	48
3.8	Malha de elementos finitos (numeração dos elementos) e condições de contorno (numeração dos nós).....	48
3.9	Região onde obtiveram-se os resultados de deslocamentos e tensões	49
3.10	Deslocamento radial no cilindro	49
3.11	Tensões versus posição radial no cilindro	50
3.12	Volante do tipo disco de aço	50
3.13	Discretização dos Elementos.....	51
3.14	Tensões Tangenciais	51
3.15	Estacas utilizadas como fundações profundas	52
3.16	Malha de elementos finitos com o número dos nós e dos elementos da estrutura discretizada.....	54
3.17	Pilar Misto de aço e concreto	57
3.18	Malha de elementos finitos com o número dos nós e dos elementos da estrutura discretizada.....	58
3.19	Deslocamentos nodais	58

Lista de Tabelas

2.1	Conectividade dos elementos finitos discretizados	26
3.1	Deslocamento Nodal.....	43
3.2	Tensões no Vaso de Pressão (MPa)	43
3.3	Deslocamento radial (em metros)	47
3.4	Tensão Tangencial (Pa) no Centroide de cada Elemento Finito	47
3.5	Tensão Tangencial (MPa) nos nós 1 e 5.....	52
3.6	Tensão Tangencial (MPa) no Centroide dos Elementos.....	52
3.7	Tensões Radiais (kN/m^2)	55
3.8	Tensões Axiais (kN/m^2)	55
3.9	Tensões Tangenciais (kN/m^2)	56
3.10	Tensões de Circunferencial (kN/m^2)	56
3.11	Tensões Radiais (kN/m^2)	59
3.12	Tensões Axiais (kN/m^2)	59
3.13	Tensões Tangenciais (kN/m^2)	60
3.14	Tensões de Circunferencial (kN/m^2)	60

Lista de Siglas

MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
CST	<i>Constant Strain Triangle</i>
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
3D	Três Dimensões

Lista de Símbolos

δ	variacional
Π	funcional exato
Π_a	funcional aproximado
ϕ_{ij}	função de interpolação para o elemento i
α_j	parâmetro desconhecido j
r	coordenada da abscissa
r_i	coordenada da abscissa no nó i
z	coordenada da ordenada
N	matriz função de forma
N_i	função de forma para o elemento i
ξ	coordenada natural Ksi
η	coordenada natural Eta
u	deslocamento radial
w	deslocamento axial
u	vetor deslocamento
A_i	área do triângulo i
U	energia de deformação interna
V	energia potencial das forças externas
f	vetor força de corpo
f_r	força de corpo na direção de r
f_z	força de corpo na direção de z
T	vetor força de superfície
T_{ri}	força de superfície na direção de r no nó i
T_{zi}	força de superfície na direção de z no nó i
P	vetor de carga pontual
P_r	carga pontual na direção de r

P_z	carga pontual na direção de z
dA	elemento infinitesimal de área
d θ	elemento infinitesimal de rotação
dr	elemento infinitesimal de comprimento na direção de r
dz	elemento infinitesimal de comprimento na direção de z
dV	elemento infinitesimal de volume
ϵ	vetor deformação
ϵ_r	deformação radial
ϵ_z	deformação axial
γ_{rz}	deformação tangencial
ϵ_θ	deformação circunferencial
α_E	parâmetro em função da natureza do agregado que influencia o módulo de elasticidade
σ	vetor tensão
σ_r	tenção radial
σ_z	tenção axial
τ_{rz}	tenção tangencial
σ_θ	tenção circunferencial
ν	coeficiente de Poisson
E	módulo de elasticidade
D	matriz que relaciona as tensões com as deformações
Q	vetor deslocamento global
Q_{2j-1}	deslocamento global na direção de r
Q_{2j}	deslocamento global na direção de z
q	vetor deslocamento local
q_{2j-1}	deslocamento local na direção de r
q_{2j}	deslocamento local na direção de z
J	matriz jacobiana
J ⁻¹	inversa da matriz jacobiana
A_e	área do elemento triangular

- U_e energia de deformação do elemento
- \mathbf{B} matriz de deformação específica–deslocamento do elemento
- \mathbf{K}^e matriz rigidez do elemento
- \bar{r} distância do centroide do elemento até o eixo z
- $\bar{\mathbf{B}}$ como a matriz deformação específica–deslocamento do elemento avaliada no centroide
- \mathbf{F} vetor força de carga nodal
- F_{ri} carga nodal na direção r no nó i
- F_{zi} carga nodal na direção z no nó i
- ℓ_{12} comprimento da superfície do triangulo exposta a carregamento
- $P_n(x)$ função polinomial de Lagrange

Capítulo 1

Considerações Iniciais

1.1 Introdução

Com a modernização e o fácil acesso a novos conceitos construtivos e suas aplicabilidades, torna-se elevado o crescimento das metrópoles e indústrias dentro do âmbito da construção civil.

Segundo Helene e Terzian (1992) a máquina, denominada indústria, que gera o mercado da construção civil é uma das mais importantes para o fluxo da rentabilidade, do direcionamento do volume populacional e das exigências e demandas relacionadas à empregabilidade dos produtos, para qualquer que seja o parâmetro que se utilize: capital circulante, número de pessoas empregadas, utilidades dos produtos e outros. Assim, este fato proporciona aumentos nos investimentos tecnológicos e nas exigências por parte dos consumidores e investidores que buscam melhorias na qualidade, diminuição nos custos e eficiência nas execuções das obras civis.

Com o intuito de obter economia e resultados eficientes na solução de problemas estruturais, desenvolveram-se diversos métodos numéricos, dentre os quais se destacam: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Segundo Vicente e Oliveira (2009) o termo Elementos Finitos foi utilizado pela primeira vez na literatura por Clough em 1960, em um artigo de engenharia sobre aplicações da elasticidade plana, porém, as ideias fundamentais do método já vinham sendo utilizadas há alguns anos por matemáticos, físicos e engenheiros. Este método tem como objetivo transformar um meio contínuo em formas geométricas simples e discretas, chamadas de elementos finitos. Devido a sua simplicidade, eficiência e boa precisão este método tornou-se uma das principais ferramentas de análise estrutural adotada por engenheiros.

O Método dos Elementos Finitos pode contribuir de forma eficiente para o cálculo de tensões, deformações e deslocamentos em estruturas tais como: tubulações de água e gás, minerodutos, estacas de aço e/ou concreto, risers flexíveis, pilares de concreto e/ou aço, reservatórios, tubulões de concreto, entre outros. Estas estruturas são denominadas axissimétricas e são caracterizadas por uma seção transversal que contém um eixo de revolução, conforme exemplo indicado na Figura 1.1. Um dos primeiros estudos em que se utilizou a aplicação dos elementos finitos em estruturas axissimétricas foi realizado por Percy *et al.* (1965), os quais empregaram o método dos elementos finitos para determinar a solução de problemas em corpos de revolução sujeitos a cargas simétricas e assimétricas.

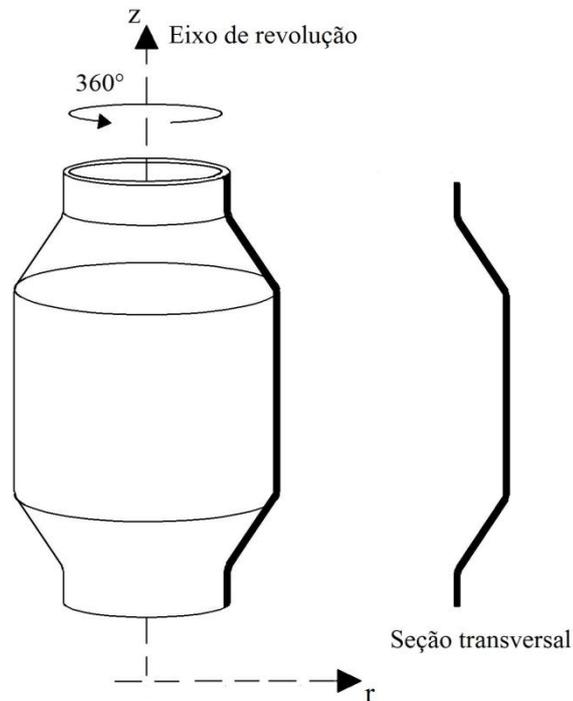


Figura 1.1 – Estrutura axissimétrica com seção transversal gerada por rotação segundo o eixo de revolução

Nas Figuras 1.2 a 1.5 ilustram-se algumas importantes aplicações das estruturas axissimétricas.



Figura 1.2 – Execução do estaqueamento com estacas pré-moldadas de concreto da Arena Sport Club Corinthians Paulista no estado de São Paulo
Fonte: www.tecgeo.com.br



Figura 1.3 – Mineroduto da Companhia Vale do Rio Doce no Município de Paragominas no estado do Pará
Fonte: www.constran.com.br



Figura 1.4 – Pilares de concreto armado do Viaduto da Cezário José de Castilho no estado de São Paulo
Fonte: www.sh.com.br



Figura 1.5 – Adutora de montagem rápida que abastece a cidade Quixeramobim no estado do Ceará
Fonte: www.ceara.gov.br

Segundo Vicente e Oliveira. (2009), utilizando-se o MEF obtêm-se os valores das tensões e das deformações dos corpos axissimétricos de forma semelhante àquelas que correspondem ao estado plano de tensão, em que a obtenção dos resultados das deformações

considera as hipóteses simplificadoras da teoria da elasticidade linear na análise plana de tensões e deformações.

Nesta pesquisa, considerou-se que os materiais são elástico-lineares. Estes materiais são caracterizados pela tendência da estrutura em voltar ao seu estado original após ocorrerem deformações ocasionadas por esforços externos com posterior alívio de carregamento (FONTES, 2005). Neste caso, o módulo de elasticidade é a razão entre a tensão aplicada e a deformação sofrida pelo corpo.

1.2 Objetivos

No presente trabalho tem-se como objetivo implementar computacionalmente uma formulação matemática baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando-se a linguagem *Fortran 90/95* (CHAPMAN, 2003), que possibilite obter os valores das tensões, deformações e deslocamentos em estruturas axissimétricas, considerando-se que os materiais apresentam comportamento elástico-linear e que as mesmas são submetidas a carregamentos axissimétricos.

Para discretizar a estrutura serão utilizados elementos finitos triangulares com três nós, denominados de CST (*Constant Strain Triangle*), sendo que cada nó apresenta dois graus de liberdade.

Para a obtenção das tensões e deformações em qualquer ponto dos elementos serão utilizadas funções de forma lineares.

É importante ressaltar que os campos de deslocamentos dependerão apenas das coordenadas r e z , tendo duas componentes, uma vez que, não existe deslocamento circunferencial. Assim, mesmo que ocorram tensões e deformações tangenciais ao plano bidimensional, essas serão constantes ao longo da coordenada de revolução θ (RODRIGUES, 2009).

Por fim, será verificada a eficiência do programa computacional implementado realizando-se a comparação de seus resultados com respostas da literatura, bem como, com resultados correspondentes às modelagens realizadas com o auxílio do Software ANSYS 12.1.

1.3 Origem do Método dos Elementos Finitos

Uma das técnicas utilizadas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) é a obtenção de soluções aproximadas de problemas através de um dado funcional que seja estacionário. A solução aproximada é geralmente formulada em termos de variáveis e funções com significado físico.

A Equação (1.1) representa a solução exata para um problema contínuo, que tem como objetivo encontrar a função analítica que define o comportamento da variável desconhecida, ou variáveis, em que o problema foi formulado.

$$\delta\Pi = 0 \quad (1.1)$$

No MEF o funcional exato, Π , é substituído por Π_a , funcional aproximado, e as variáveis do problema são expressas em termos de funções de interpolação ponderadas por parâmetros desconhecidos. Estes parâmetros são normalmente associados às variáveis do problema, ou algumas outras magnitudes físicas. O método requer subdividir o domínio de integração em regiões ou elementos finitos, como mostrado na Figura 1.6.

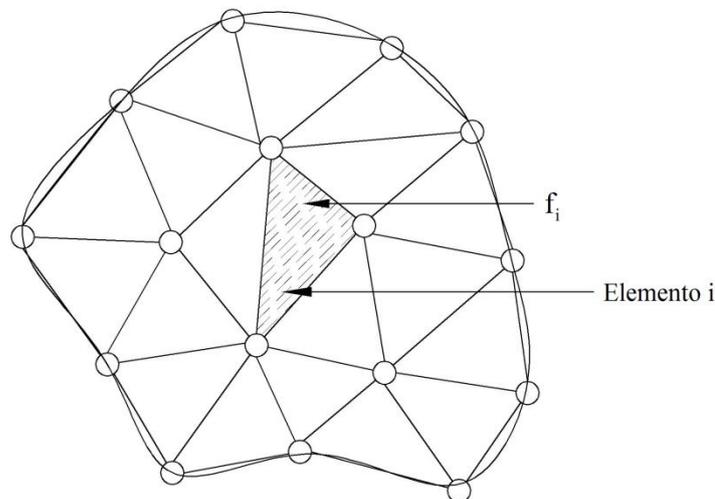


Figura 1.6 – Elementos Finitos

Em cada região, as variáveis do problema são expressas em termos de combinações lineares das funções de interpolação multiplicadas por parâmetros desconhecidos. Essas expressões definem o comportamento aproximado das variáveis do problema sobre o elemento, e sua seleção representa a etapa crítica do método. Sobre os limites do elemento, e eventualmente dentro do próprio elemento, alguns pontos nodais são identificados, de modo que, os parâmetros desconhecidos são os valores das variáveis selecionadas do problema

nesses pontos. Então, o valor do funcional aproximado, Π_a , sobre o domínio de integração pode ser pensado como a soma dos valores obtidos a partir da avaliação do funcional sobre cada elemento finito.

O MEF pode ser aplicado a uma grande variedade de problemas relevantes. Na Mecânica dos Sólidos, pode ser utilizado para resolver problemas de tensões planas, dobragem de placas, sólidos axissimétricos, cascas, cascas axissimétricas, torção de barras prismáticas, entre outros.

Como outras aplicações na engenharia pode-se mencionar o tratamento de problemas na Mecânica dos Solos, Mecânica das Rochas, Hidráulica, Transferência de Calor, etc.

Segundo Brebbia e Ferrante (1975) em 1943 teve início a aplicação do MEF por Courant, que formulou uma solução para o problema de torção de Saint Venant. Ele aplicou o princípio da energia potencial total mínima e subdividiu a seção transversal da barra em elementos triangulares. Em seguida, Prager e Synge (1947) e Synge (1957) generalizaram o trabalho desenvolvido por Courant, e nomearam como “O Método do Hipercírculo”, com aplicação em alguns problemas matemáticos.

De acordo com Brebbia e Ferrante (1975) no MEF os elementos contínuos são subdivididos em elementos finitos, interligados através de um número discreto de pontos nodais. Cada elemento é então considerado isolado dos outros. O comportamento genérico individual dos elementos é estabelecido como uma relação causa-efeito entre deslocamentos nodais e tensões ou forças. Esta relação é expressa em forma de matriz, em termos do coeficiente de rigidez ou do coeficiente de flexibilidade. Depois que estas expressões são configuradas para todos os elementos não conectados, o comportamento global do sistema é estudado. Para isto, é levada em conta a interação de cada parte do sistema, permitindo assim formular a solução na forma de um conjunto de equações algébricas simultâneas, novamente com coeficientes de rigidez ou flexibilidade. Tal sistema de equação é resolvido para obter os valores das incógnitas do problema. A partir desta solução global, voltada aos elementos individuais, pode-se encontrar a solução específica para cada um deles.

Segundo Brebbia e Ferrante (1975) a extensão desses métodos para o tratamento de problemas contínuos foi realizada por Hrennikoff através da técnica do "Modelo Físico", em 1941. Esta técnica é limitada e bons resultados são obtidos apenas em casos especiais.

Conforme Brebbia e Ferrante (1975) como já sugerido pelo trabalho de Argyris, a presente forma do MEF foi introduzida pela primeira vez por Turner, Clough, Martin e Topp, em 1956. Eles apresentaram formulações de elementos triangulares e retangulares para problemas

de tensão plana. Isso gerou um grande interesse e, a partir daí, a gama de aplicações do MEF na mecânica e nas estruturas sólidas cresceu muito rapidamente. Assim, Clough e Adini (1961), Melosh (1961), Tocher (1962) estudaram a dobragem de placas. Grafton e Strome (1963) aplicaram o método para cascas axissimétricas submetidas a cargas axissimétricas. É importante ressaltar a aplicação do MEF por Percy *et al.* (1965), em cascas axissimétricas sob cargas arbitrárias.

Esses desenvolvimentos, no entanto, seguiram a abordagem física, começando no princípio dos trabalhos virtuais e obtendo-se a rigidez equivalente e a matriz de cargas equivalentes, com deslocamentos nodais como incógnitas.

De acordo com Brebbia e Ferrante (1975), na década de 1960, um estudo mais aprofundado dos princípios variacionais permitiu a generalização do MEF de acordo com a abordagem variacional. Além disso, as diferentes alternativas de formulação, ou modelos de elementos finitos, foram introduzidas em um artigo científico desenvolvido por Pian e Tong (1969).

Com referência específica a problemas de mecânica dos sólidos, conforme Brebbia e Ferrante (1975), podem ser empregadas quatro alternativas de formulações de elementos finitos, diferindo no princípio variacional utilizado e no tipo de comportamento localizado assumido sobre cada elemento. Estas formulações são normalmente chamadas de modelos de elementos finitos e são descritas nos itens a seguir.

1.3.1 Modelo Compatível

É derivado do princípio da energia potencial mínima. Os campos de deslocamento contínuos são assumidos sobre cada elemento, de modo a preservar a compatibilidade de deslocamento entre elementos. As incógnitas do problema são os deslocamentos nodais. Esta alternativa é normalmente conhecida como Método dos Deslocamentos e conhecida também no meio científico como Método da Rigidez.

1.3.2 Modelo de Equilíbrio

É derivado do princípio da energia complementar mínima e baseado no equilíbrio dos campos de tensões. As incógnitas básicas do problema discreto equivalente são as tensões nos pontos nodais, embora eventualmente possam ser substituídos por deslocamentos nodais. Este método é normalmente conhecido como Método das Forças.

1.3.3 Modelo Híbrido

Dois tipos diferentes de modelos híbridos podem ser concebidos. O primeiro, que será chamado de tipo I, é baseado no princípio mínimo de energia complementar modificado. Os campos de tensão de equilíbrio são assumidos apenas nos limites dos elementos. O problema final desconhece os deslocamentos nodais.

Para o modelo híbrido do tipo 2 é utilizado um princípio de energia potencial mínimo modificado. Campos de deslocamento contínuos são assumidos sobre o elemento enquanto os equilíbrios de tensões são considerados nos limites do elemento.

1.3.4 Modelos Mistos

Os modelos mistos derivam de um princípio variacional generalizado, como o de Reissner. Campos de deslocamentos contínuos são escolhidos de forma independente, e campos de tensão de equilíbrio, são assumidos sobre os elementos. As equações governantes são definidas em termos de deslocamentos nodais e de tensões ou forças como incógnitas.

1.4 Elementos Isoparamétricos

Segundo Brebbia e Ferrante (1975) os primeiros elementos finitos considerados foram os de forma retangular e triangular. Para elementos retangulares as funções de interpolação são formadas pelo produto de variações lineares nas direções r e z (ver Figura 1.1). Para os elementos triangulares as funções são lineares em r e z . Embora as funções de interpolação para os elementos retangulares sejam polinômios de maior grau, os elementos triangulares têm a vantagem de uma maior flexibilidade na aproximação de superfícies irregulares e na classificação de uma malha de elementos finitos.

De acordo com Brebbia e Ferrante (1975) o desenvolvimento original dos elementos isoparamétricos pode ser rastreado até a ideia de Taig (1961), que teve como objetivo transformar elementos retangulares em elementos quadrilaterais de forma arbitrária, usando as mesmas funções de interpolação para representar a forma geométrica do elemento e os deslocamentos em seu domínio. Posteriormente, o conceito de elementos isoparamétricos foi sistematicamente desenvolvido por Zienkiewicz (1969). Eles estudaram elementos bidimensionais isoparamétricos triangulares e quadrilaterais e elementos tridimensionais de tetraedros e hexaedros. O nome isoparamétrico é derivado do fato de que a geometria do

elemento é representada em termos das coordenadas dos pontos nodais dos elementos, usando as mesmas funções de interpolação que avaliam os deslocamentos do elemento. As funções de interpolação são definidas em termos de coordenadas curvilíneas intrínsecas do elemento e interpolam as coordenadas e deslocamentos sobre os elementos, a partir das coordenadas e deslocamentos dos pontos nodais do elemento.

1.5 Estado da Arte

Diversos trabalhos foram desenvolvidos com o intuito de solucionar problemas axissimétricos. Um dos primeiros trabalhos apresentados foi desenvolvido por Penny (1961) através do Método das Diferenças Finitas aplicado em cascas simétricas. Posteriormente, Radkowski *et al.* (1962) utilizaram o Método das Diferenças Finitas para a solução de problemas axissimétricos.

Para realizar o estudo de estacas carregadas lateralmente Rogêdo (1970) desenvolveu um modelo formado por elementos finitos axissimétricos de seção transversal triangular. Nesta análise o solo não resiste aos esforços de tração, levando-se em conta somente os esforços de compressão. É importante ressaltar que o material da estaca, seja concreto, aço ou madeira, foi considerado como homogêneo, elástico, linear e isotrópico. Além disso, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson foram estimados nas direções horizontais e verticais.

Kroenke (1974) apresentou um método para separação e classificação de tensões em modelos de elementos finitos de sólidos axissimétricos. Para isto, calcularam-se as tensões em um determinado plano definido através de uma linha ao longo da seção transversal do vaso, denominada linha de tensões. Obtiveram-se as tensões em pontos igualmente espaçados ao longo da linha, através da interpolação ou extrapolação dos resultados nos elementos. As tensões foram separadas em parcelas de membrana, flexão e pico. Estas parcelas foram classificadas de acordo com a localização, origem e tipo.

O primeiro a propor uma solução numérica para problemas elásticos com simetria axial, para geometria e condições de contorno, foi Kermanidis (1975) trabalhando com carregamento fictício.

Hollinger e Hechmer (1986) investigaram os problemas de avaliação dos modos de falha relacionados com as tensões primárias e secundárias, suas relações com os resultados de tensões em modelos axissimétricos e 3D. Neste trabalho foram apresentados os procedimentos utilizados com suas limitações e dificuldades.

Hechmer e Hollinger (1988) abordaram o problema de quais componentes de tensões devem ser linearizadas em vasos de pressão com a utilização do MEF. Para isto fez-se uma investigação por meio da estimativa de sete métodos, usando uma análise axissimétrica simples. Dos sete métodos utilizados para linearização de tensões em modelos axissimétricos, cinco métodos foram baseados na linearização das componentes de tensão e dois métodos na linearização das tensões principais.

Fudoli (1992) apresentou em sua tese a formulação do método dos elementos de contorno para problemas elasto-lineares axissimétricos. Esse trabalho apresentou uma formulação direta do MEF, na qual é dada ênfase à obtenção das equações integrais de contorno para problemas axissimétricos, incluindo-se a dedução da solução fundamental para o caso de torção axissimétrica.

Posteriormente Smith (1996) desenvolveu um procedimento para a análise de tensão e deformação de cascas axissimétricas sob carregamento axissimétrico a partir da subdivisão da casca em seções na forma de anéis. A espessura da parede da casca pode ser variável, possibilitando a aplicação do método em cascas com geometria meridional irregular. Desenvolveram-se expressões para os coeficientes de influência de cada elemento do anel, avaliando-se as tensões na direção circunferencial e considerando-se a linearidade das tensões na direção meridional do anel.

Albuquerque *et al.* (1995) estudaram as componentes usadas para a linearização de tensões em vasos de pressão de reator nuclear. Fez-se um modelo de elementos finitos de sólidos axissimétricos (com elementos harmônicos) em um vaso de pressão sujeito a cargas não-axissimétricas.

Furtado (1995) desenvolveu e implementou algoritmos para a análise de tensões em corpos com geometria axissimétrica e submetidos a carregamentos não axissimétricos, admitindo-se comportamento linear elástico do material. Os algoritmos foram baseados no Método de Diferenças Finitas e no MEF empregando a expansão em série de Fourier. Este pesquisador também propôs a criação de um sistema computacional com a finalidade de facilitar a implementação de algoritmos relacionados à análise numérica de tensões. Além disso, os resultados teóricos e experimentais para um dado problema de análise de tensões foram comparados com seus resultados numéricos com o fim de avaliar a eficácia dos algoritmos propostos.

Albuquerque e Neto (1996) apresentaram os primeiros resultados sobre a classificação de tensões em modelos de elementos finitos de sólidos axissimétricos em conexões de bocais-cascas esféricas.

Guimarães (2006) propôs, implementou e testou a formulação de um modelo de elemento finito axissimétrico para a representação do comportamento de um tubo laminado por camadas de materiais compósitos com fibras. O objetivo da modelagem foi representar a seção geratriz de um tubo cilíndrico por um elemento quadrilateral de quatro nós, com três graus de liberdade por nó, com os deslocamentos nodais tomados em relação aos eixos de um sistema cilíndrico de coordenadas. Na validação do modelo numérico, considerou-se a comparação de seus resultados com os de soluções analíticas, disponíveis na literatura, e com aqueles fornecidos pelo software ANSYS. Verificou-se uma boa convergência entre as soluções numéricas obtidas com este modelo.

Smith e Filz (2007) elaboraram um modelo numérico axissimétrico com o intuito de estudar a célula de reforço estrutural em colunas de sustentação de barragem. Deste modo, realizou-se a análise axissimétrica e tridimensional do elemento estrutural, em que foram obtidos resultados semelhantes às respostas definidas pelos métodos de análise e também por valores experimentais.

Medina (2008) desenvolveu um método para obter a resposta visco-elástica de dutos flexíveis sob carregamentos axissimétricos nos quais frequentemente acontece o amortecimento interno para carregamentos cíclicos. As camadas poliméricas foram modeladas considerando o comportamento linear visco-elástico. As equações constitutivas foram representadas através da série de Prony. Para diferentes temperaturas de operação, o sistema de equação foi resolvido numericamente pelo Método do Trapézio. Além disso, foi apresentado um modelo para a caracterização térmica e visco-elástica das camadas poliméricas da Polimida 11.

Souza (2008) desenvolveu uma formulação estabilizada de elementos finitos para a solução das equações de Navier-Stokes em geometria axissimétrica aplicada a problemas de fluidodinâmica computacional com sistema axial, empregando as equações de Navier-Stokes e considerando efeitos de empuxo, transporte e difusão de calor, permitindo-se simular o comportamento fluidodinâmico em tubulações e setores do núcleo de um reator.

Oliveira (2009) desenvolveu uma ferramenta computacional didática voltada para a simulação do processo de conformação mecânica em matriz aberta de materiais rígido-plásticos, atendendo ao caso axissimétrico e estado plano de deformação. Implementou-se o código em linguagem C++ e utilizou-se o MEF para o desenvolvimento do módulo de cálculo. A validação da ferramenta desenvolvida foi realizada por comparação entre os resultados de ensaios físicos em corpos cilíndricos e os resultados das respectivas simulações numéricas.

Vicente e Oliveira. (2009) desenvolveram a análise de tensões em placas circulares utilizando elementos finitos axissimétricos. O foco deste artigo foi aplicar os procedimentos de modelagem por elementos finitos de sistemas estruturais axissimétricos para fins de análise de tensões, enfatizando os elementos estruturais do tipo placas circulares e vasos de pressão.

Rodrigues (2009) empregou a análise das estruturas axissimétricas no estudo de reservatórios circulares. O elemento estrutural analisado foi a casca cônica, tendo sido identificadas e deduzidas as equações que regem o comportamento deste elemento. A casca cônica foi utilizada pelo fato de ser um elemento axissimétrico geral de curvatura única, devido à sua simetria de revolução.

Lyon (2010) desenvolveu um modelo com base no MEF para estrutura axissimétrica bidimensional com o intuito de analisar as juntas adesivas cilíndricas, que tem a função de unir um material compósito a um material isotrópico. Consideraram-se neste estudo os efeitos da temperatura e todos os materiais utilizados nas análises realizadas foram assumidos como permanentes dentro da região linear elástica. Calcularam-se os deslocamentos que foram utilizados para conceber as juntas adesivas cilíndricas. Observou-se que o benefício de um modelo de elementos finitos específico para juntas adesivas é que os deslocamentos podem ser encontrados diretamente nos nós e interpolados dentro dos elementos.

Bezerra (2013) abordou a análise linear de estruturas de superfícies axissimétricas através do desenvolvimento e implementação de um código computacional baseado no método dos elementos finitos. Inicialmente foram estudadas as estruturas de forma isolada e posteriormente compatibilizadas formando estruturas acopladas.

Costa (2013) esclareceu alguns aspectos relativos ao projeto de fundações, direcionando-o para conceitos da Geotecnia, além de apresentar a análise dinâmica de uma fundação em estacas previamente monitoradas através de um software baseado no MEF para problemas axissimétricos. Ressalta-se que o estudo foi desenvolvido especificamente para os problemas geotécnicos.

Pagotto (2013) propôs um modelo analítico e um modelo numérico para a análise estrutural axissimétrica de risers flexíveis. Os risers flexíveis são estruturas tubulares cilíndricas de multicamadas usadas para transferir petróleo e gás desde o leito marinho até uma plataforma flutuante de produção de petróleo. Nesta pesquisa desenvolveu-se um modelo tridimensional de elementos finitos, modelando assim as interações entre os contatos das camadas com cargas axissimétricas, levando-se em conta os efeitos de tração, torção e pressões externas e internas.

Saraiva (2016) realizou uma análise numérica de placas circulares axissimétricas, com ou sem furos, bem como, elaborou um código computacional e comparou os resultados obtidos com os advindos da teoria das placas com simetria de revolução. A modelagem numérica foi desenvolvida através do MEF e baseada no princípio dos trabalhos virtuais (PTV) considerando o elemento retilíneo, isto é, elementos finitos unidimensionais compostos por dois nós, com dois graus de liberdade cada, sendo eles o deslocamento perpendicular ao eixo radial da placa e a rotação que compreende o ângulo entre o eixo radial da placa e a tangente à curva de deflexão.

1.6 Organização do Trabalho

O estudo sobre os fundamentos necessários para realizar a análise estrutural elástica via Método dos Elementos Finitos de estruturas axissimétricas é apresentado no Capítulo 2. Este capítulo contém o desenvolvimento da formulação do MEF utilizada para o cálculo das tensões, deformações e deslocamentos nas estruturas axissimétricas. Além disso, apresenta-se a estrutura do programa computacional implementado em linguagem *Fortran 90/95* (CHAPMAN, 2003), o qual denominou-se Progaxissimétrico, bem como, uma breve descrição das funções desempenhadas pelas sub-rotinas desenvolvidas.

Os exemplos, que têm como objetivo verificar e validar o programa computacional desenvolvido, são apresentados no Capítulo 3. Seis exemplos foram analisados, a saber: cilindro vazado sujeito à pressão radial interna; esfera oca sujeita à carga uniformemente distribuída de forma radial; cilindro vazado sujeito à pressão radial interna; volante rotativo; estaca de concreto e pilar misto de aço e concreto. Os resultados numéricos destes exemplos são comparados com as respostas numéricas e/ou teóricas presentes na literatura ou com os resultados obtidos a partir do software ANSYS 12.1.

Os comentários e as conclusões sobre a metodologia apresentada ao longo da dissertação, bem como, algumas sugestões para trabalhos futuros, estão presentes no Capítulo 4.

Capítulo 2

Análise de Sólidos Axissimétricos via MEF

2.1 Introdução

Os problemas que envolvem sólidos axissimétricos tridimensionais ou sólidos de revolução, sujeitos a carregamentos axissimétricos, podem ser reduzidos a simples problemas bidimensionais.

Devido à simetria da geometria da estrutura e da carga em torno do eixo z (ver Figuras 2.1 e 2.2) todas as deformações e tensões são independentes do ângulo de rotação, θ . Assim o problema pode ser visto como bidimensional no plano rz , definido pela área de rotação conforme se mostra na Figura 2.3.

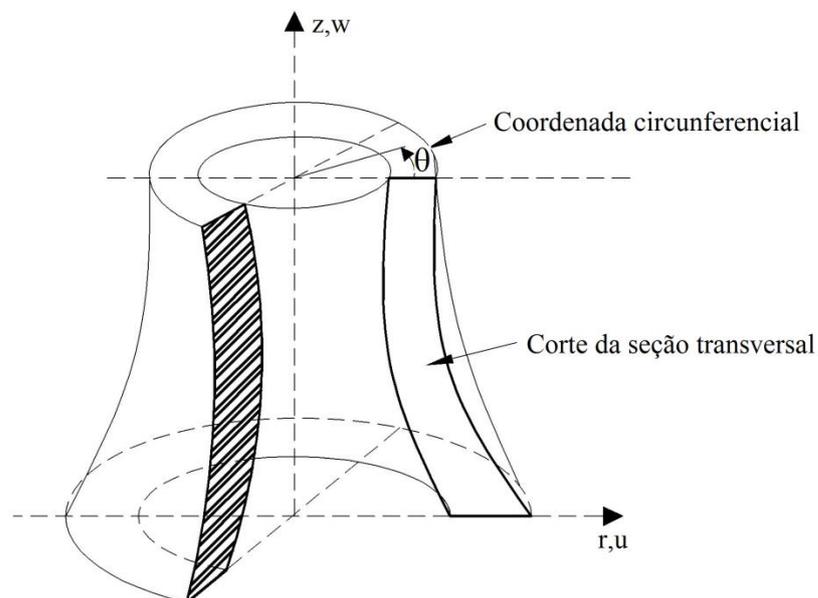


Figura 2.1 – Sólido axissimétrico

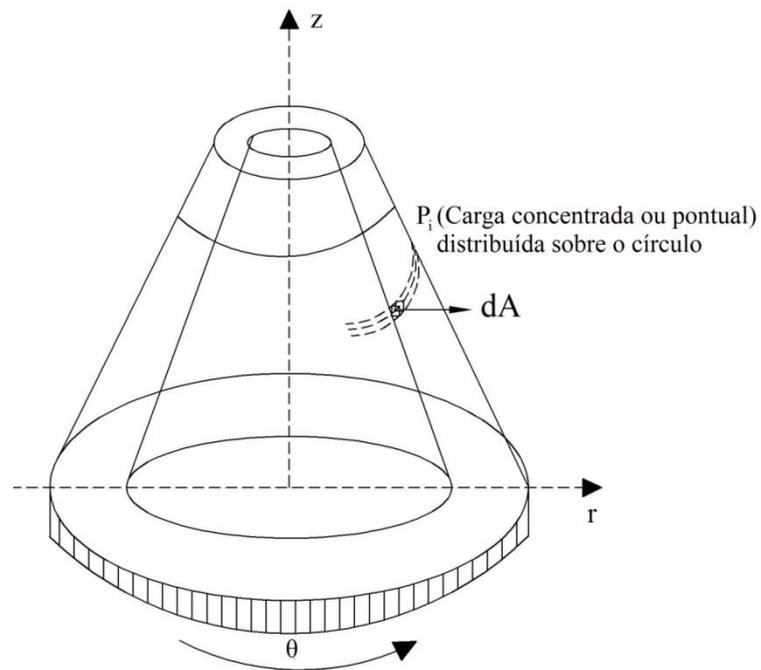


Figura 2.2 – Rotação do elemento dA

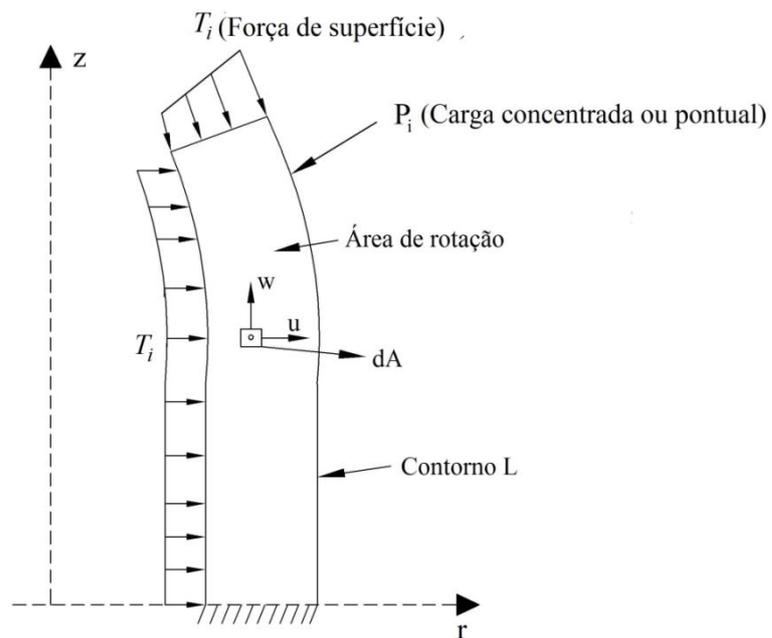


Figura 2.3 – Condições de contorno

As forças de gravidade, impostas aos sólidos supracitados, podem ser consideradas se atuarem na direção z .

Neste capítulo apresenta-se a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) adotada neste trabalho para a solução de problemas axissimétricos. Menciona-se que utilizam-se elementos triangulares de três nós, denominados CST (*Constant Strain Triangle*), para discretizar a estrutura.

2.2 Triângulo de Deformação Específica Constante (CST)

Para o elemento CST as funções de forma são lineares sobre o mesmo. Os deslocamentos dentro do elemento podem ser calculados através dos deslocamentos nodais. Para isto, no MEF utilizam-se as funções de forma. Conforme indicado na Figura 2.4 a função de forma N_1 possui valor unitário no nó 1 e diminui linearmente até atingir o valor nulo nos nós 2 e 3, definindo uma superfície plana. A função de forma N_2 possui valor unitário no nó 2 e diminui linearmente até atingir o valor nulo nos nós 1 e 3, definindo também uma superfície plana. Assim como as funções de forma N_1 e N_2 , a função de forma N_3 possui valor unitário no nó 3 e diminui linearmente até atingir o valor nulo nos nós 1 e 2, definindo uma superfície plana (CHANDRUPATLA e BELEGUNDU, 2014).

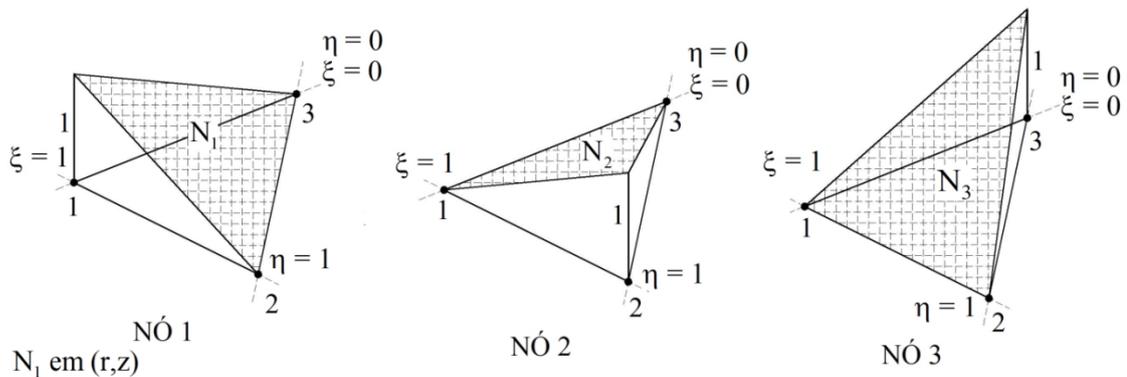


Figura 2.4 – Representação das funções de forma nos nós do elemento

As coordenadas cartesianas r e z são mapeadas nas coordenadas naturais ξ e η e as funções de forma são representadas pelas coordenadas naturais.

As funções de forma podem se representadas fisicamente por coordenadas de áreas. Um ponto (r, z) em um triângulo o divide em três áreas A_1 , A_2 e A_3 , conforme indicado na Figura 2.5. Portanto, as funções de forma são representadas precisamente por:

$$N_1 = \frac{A_1}{A} \quad (2.1)$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A} \quad (2.2)$$

$$N_3 = \frac{A_3}{A} \quad (2.3)$$

em que,

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \quad (2.4)$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2.5)$$

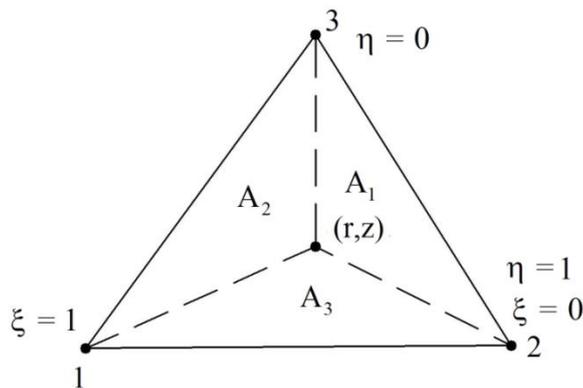


Figura 2.5 – Representação das funções de forma por coordenadas de áreas

2.3 Campo de Deslocamento

O sólido axissimétrico sob carregamento axissimétrico mostrado na Figura 2.6, está sujeito a deslocamento radial (u) e axial (w) e, devido à simetria axial, tem deslocamento circunferencial igual a zero. Sendo assim, o vetor deslocamento é dado por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(r,z) \\ w(r,z) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

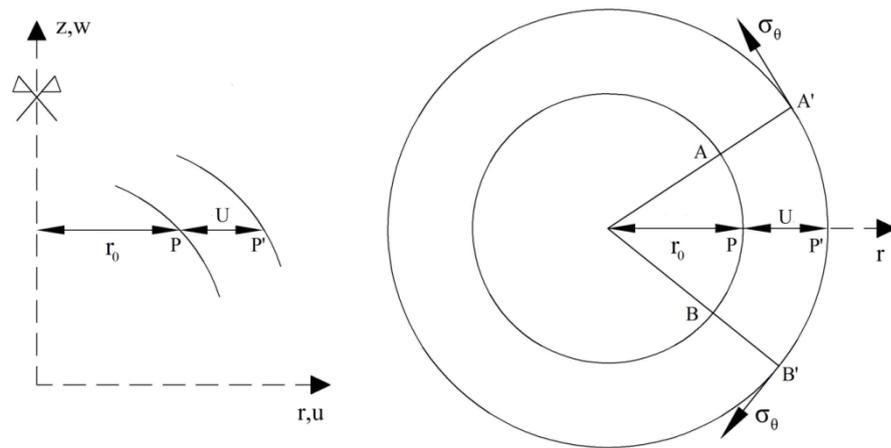


Figura 2.6 – Deslocamentos de corpos axissimétricos

2.4 Energia Potencial (Π) de um Corpo Elástico

Considerando o volume elementar mostrado na Figura 2.7, a energia potencial, Π , de um corpo elástico é definida como a soma da energia de deformação interna (U) com a energia potencial das forças externas (V), isto é:

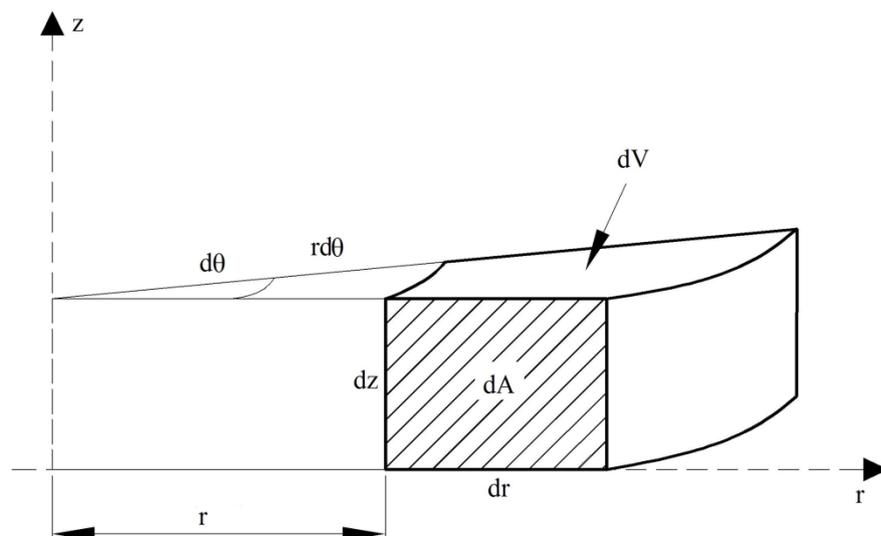


Figura 2.7 – Volume elementar

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} dA d\theta}_U - \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f} \mathbf{r} dA d\theta - \int_0^{2\pi} \int_\ell \mathbf{u}^T \mathbf{T} \mathbf{r} d\ell d\theta - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i}_V \quad (2.7)$$

em que,

$$\mathbf{u} = [u, w]^T \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{f} = [f_r, f_z]^T \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{T} = [T_r, T_z]^T \quad (2.8c)$$

$$\mathbf{P} = [P_r, P_z]^T \quad (2.8d)$$

sendo \mathbf{u} , \mathbf{f} , \mathbf{T} e \mathbf{P} , respectivamente, os vetores deslocamento, força de corpo, força de superfície e carga concentrada; $\mathbf{r} d\ell d\theta$ a área de superfície elementar; $\mathbf{r} dA d\theta$ o volume elementar; e a carga pontual é representada como uma carga distribuída pela linha em torno de um círculo, como ilustra-se nas Figuras 2.2 e 2.3.

Todas as variáveis nas integrais da Equação (2.7) são independentes de θ , assim sendo, a mesma pode ser reescrita como:

$$\Pi = 2\pi \left(\frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} dA - \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f} \mathbf{r} dA - \int_\ell \mathbf{u}^T \mathbf{T} \mathbf{r} d\ell \right) - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (2.9)$$

2.5 Campo de Deformação

Devido à simetria axial, os deslocamentos u e w são independentes da coordenada circunferencial, θ . Assim, escreve-se:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.10a)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.10b)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.10c)$$

sendo ε_r , ε_z e γ_{rz} , respectivamente, as deformações radial, axial e tangencial (ver Figura 2.8).

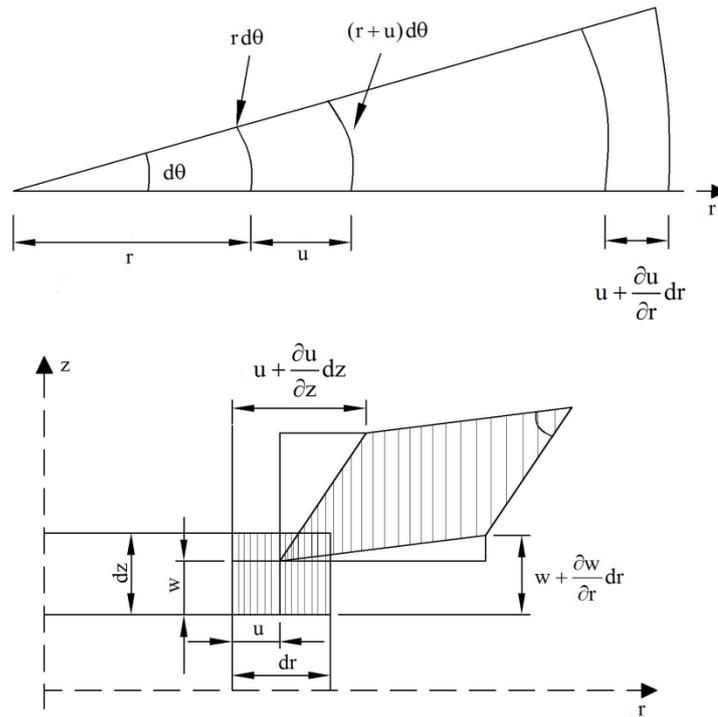


Figura 2.8 – Deformação Específica

Analisando a Figura 2.8, observa-se que antes da deformação, o comprimento do arco é $r d\theta$ e, após a deformação, o arco passa a ter comprimento $(r+u)d\theta$. Portanto, a deformação circunferencial (ε_θ) pode ser definida como:

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r} \quad (2.10d)$$

Finalmente, o vetor da deformação específica, $\boldsymbol{\varepsilon}$, é escrito como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz} \quad \varepsilon_\theta \right]^T \quad (2.11a)$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \frac{u}{r} \right]^T \quad (2.11b)$$

2.6 Campo de Tensão

Os deslocamentos radiais desenvolvem deformações circunferenciais que provocam as tensões σ_r , σ_z , τ_{rz} e σ_θ , as quais são independentes da coordenada θ , devido à simetria em relação ao eixo z .

Na análise de tensões em corpos axissimétricos, qualquer deslocamento radial provoca automaticamente uma deformação na direção circunferencial e a tensão nessa direção é dada por σ_θ .

O vetor tensão é definido como:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_r \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \quad \sigma_\theta]^T \quad (2.12)$$

em que σ_r , σ_z , τ_{rz} e σ_θ são, respectivamente, as tensões radial, axial, tangencial e circunferencial atuando em um volume elementar, como ilustra-se na Figura 2.9.

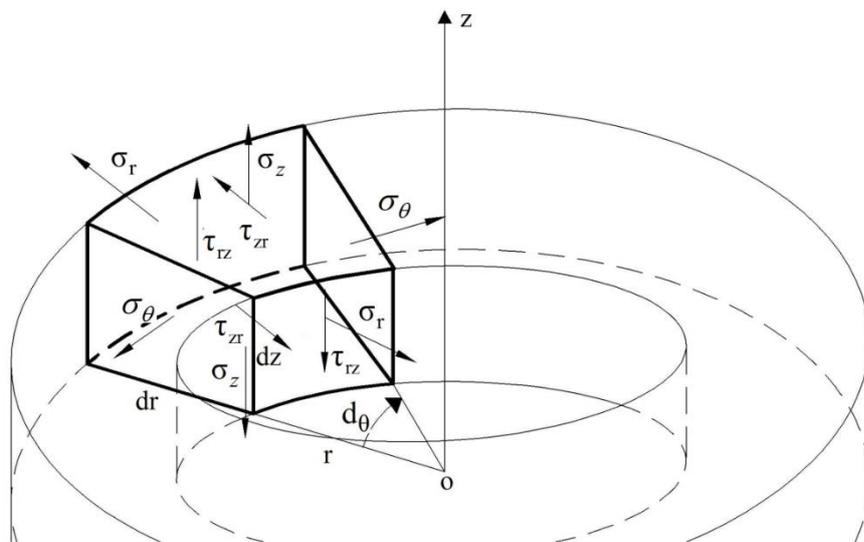


Figura 2.9 – Tensões no volume diferencial de um sólido axissimétrico submetido a cargas axissimétricas

2.7 Equação Constitutiva

As deformações no elemento axissimétrico, para material linear, homogêneo e isotrópico, são (BATHE, 1996):

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu\sigma_\theta}{E} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_r}{E} - \frac{\nu\sigma_\theta}{E} \quad (2.14)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{2(1+\nu)\tau_{rz}}{E} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\nu\sigma_r}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_\theta}{E} \quad (2.16)$$

A relação tensão deformação é escrita, na forma tradicional, como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.17)$$

sendo \mathbf{D} a matriz que relaciona as tensões com as deformações e sua forma tridimensional é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Porém, no estado plano de tensões podem-se retirar as duas últimas colunas da matriz e a equação anterior é reescrita como:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Trocando-se as posições das linhas 3 e 4 da Equação (2.19), vem:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Trocando-se as posições das colunas 3 e 4 da Equação (2.20), chega-se a:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

ou

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{0,5-\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Deste modo pode-se reescrever a Equação (2.17) para esta análise como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{0,5-\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

2.8 Modelagem dos Elementos Finitos: Elemento Triangular

A região bidimensional definida pela área de rotação é dividida em elementos triangulares, como representado na Figura 2.10. Embora cada elemento seja completamente representado pela área no plano rz , na verdade, esse é um sólido de revolução em forma de anel, obtido pela rotação do triângulo em torno do eixo z .

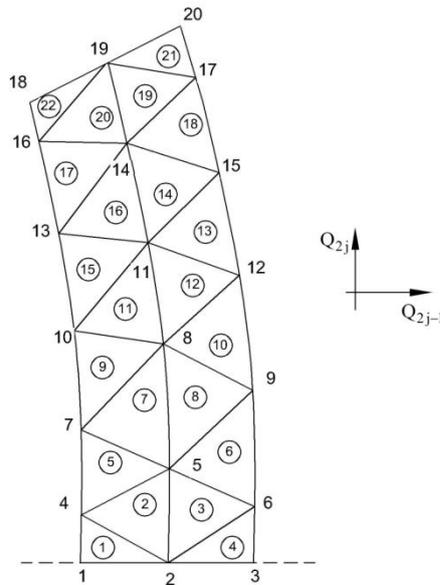


Figura 2.10 – Discretização em elementos triangulares

Para realização da modelagem de elementos finitos a região bidimensional é dividida em triângulos de lados retos. Os triângulos de três nós e três lados são chamados elementos. Para exemplificar, na Figura 2.11 representa-se uma estrutura discretizada em 5 elementos triangulares e 6 nós.

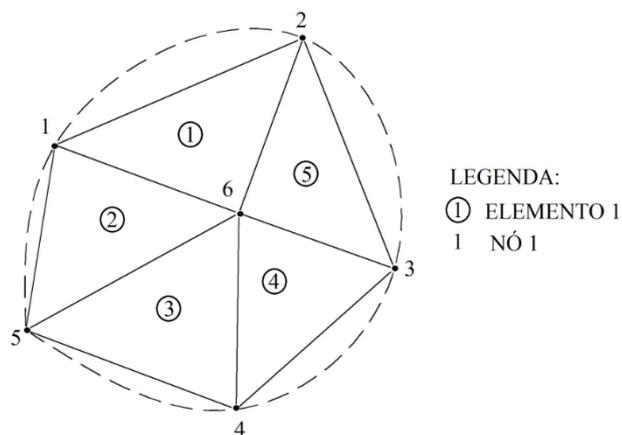


Figura 2.11 – Discretização de uma estrutura com 6 nós e 5 elementos triangulares

As componentes do deslocamento de um nó j qualquer são consideradas como Q_{2j-1} na direção r e Q_{2j} na direção z , conforme indicado na Figura 2.10. O vetor de deslocamento global da estrutura é dado por:

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n]^T \quad (2.24)$$

Na Figura 2.12 indicam-se as componentes dos deslocamentos globais de um elemento finito triangular.

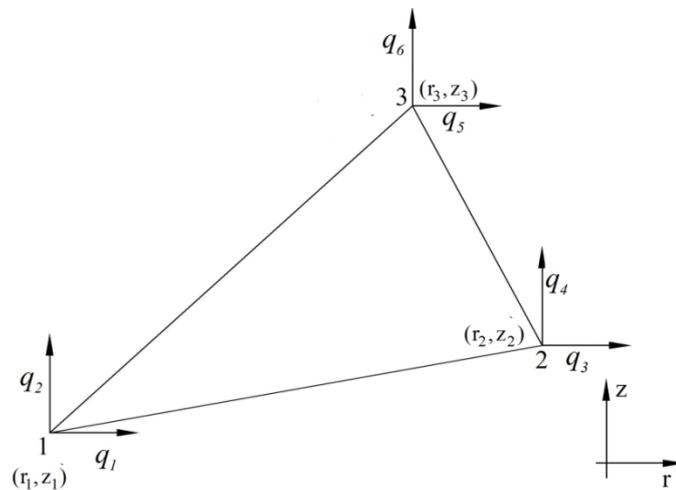


Figura 2.12 – Componentes dos deslocamentos globais de um elemento finito triangular

2.8.1 Conectividade dos elementos

A conectividade ou incidência indicam os nós que representam cada elemento da estrutura discretizada. Para isto, adotou-se o sentido anti-horário. Na Tabela 2.1 exemplifica-se a conectividade dos elementos da estrutura discretizada mostrada na Figura 2.11.

Tabela 2.1 – Conectividade dos elementos finitos discretizados

Número do Elemento	Três nós		
	1	2	3
1	6	2	1
2	6	1	5
3	6	5	4
4	6	4	3
5	6	3	2

2.8.2 Discretização do Campo de Deslocamento

O campo de deslocamento é interpolado dentro de cada seção meridional. Usando as funções de forma N_1 , N_2 e N_3 , o vetor deslocamento (\mathbf{u}) é definido a partir dos deslocamentos nodais do elemento triangular (\mathbf{q}) como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (2.25)$$

sendo \mathbf{N} (funções de forma) e \mathbf{q} (vetor deslocamento) dados por (ver Figura 2.12):

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (2.26b)$$

2.8.3 Discretização dos Campos de Deformação e Tensão

As estruturas axissimétricas ou de revolução são estruturas que podem ser representadas por uma seção transversal que contém um eixo de revolução. Estas estruturas são, portanto geradas rodando a seção transversal 360° segundo o eixo de revolução. Na Figura 2.13 representa-se uma estrutura axissimétrica de revolução triangular, na qual cada nó apresenta três deslocamentos horizontais (q_1 , q_3 e q_5) e três deslocamentos verticais (q_2 , q_4 e q_6).

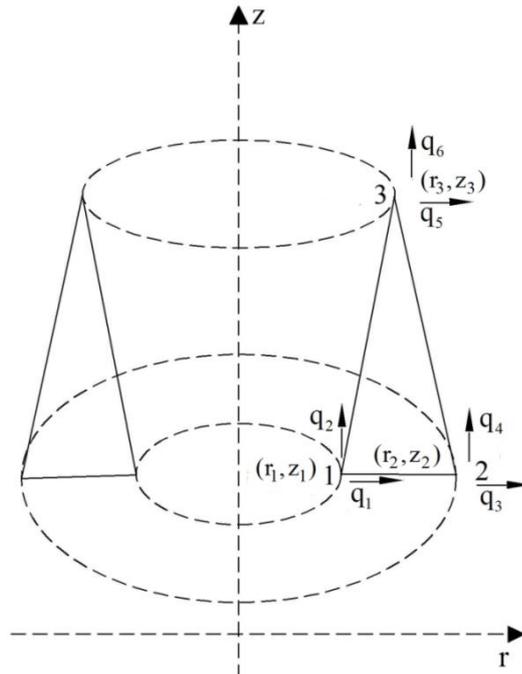


Figura 2.13 – Elemento triangular axissimétrico

Considerando-se que $N_1 = \xi$ e $N_2 = \eta$, nota-se, para um elemento finito bidimensional plano de três nós, que $N_3 = 1 - \xi - \eta$.

Deste modo, organizando-se as Equações (2.25), (2.26a) e (2.26b) de forma matricial, vem

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5 \\ w &= N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6 \end{aligned} \quad (2.27)$$

e pode-se escrever o deslocamento pelas relações isoparamétricas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= \xi q_1 + \eta q_3 + (1 - \xi - \eta) q_5 \\ w &= \xi q_2 + \eta q_4 + (1 - \xi - \eta) q_6 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Empregando a representação isoparamétrica, para a geometria (posição dos nós) escreve-se:

$$\begin{aligned} r &= \xi r_1 + \eta r_2 + (1 - \xi - \eta) r_3 \\ z &= \xi z_1 + \eta z_2 + (1 - \xi - \eta) z_3 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Aplicando a diferenciação dos deslocamentos em relação às grandezas isoparamétricas, encontra-se:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (2.30a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (2.30b)$$

Separando-se cada relação, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial r} (r_1 - r_3) + \frac{\partial u}{\partial z} (z_1 - z_3) \quad (2.31a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial r} (r_2 - r_3) + \frac{\partial u}{\partial z} (z_2 - z_3) \quad (2.31b)$$

Organizando-se de forma matricial, vem:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13} & z_{13} \\ r_{23} & z_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

De forma análoga, escreve-se:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (2.33a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial r} (r_1 - r_3) + \frac{\partial w}{\partial z} (z_1 - z_3) \quad (2.33b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial r} (r_2 - r_3) + \frac{\partial w}{\partial z} (z_2 - z_3) \quad (2.33c)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13} & z_{13} \\ r_{23} & z_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.33d)$$

Assim sendo, o Jacobiano é dado por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r_{13} & z_{13} \\ r_{23} & z_{23} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

em que utilizou-se a notação indicial simplificada

$$r_{ij} = r_i - r_j \quad (2.35a)$$

$$z_{ij} = z_i - z_j \quad (2.35b)$$

O determinante de \mathbf{J} é calculado a partir de

$$|\det \mathbf{J}| = 2 A_e \quad (2.36)$$

ou seja, o valor absoluto do determinante de \mathbf{J} é igual ao dobro da área do elemento (A_e). A partir das equações anteriores as seguintes relações inversas podem ser escritas:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.37a)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.37b)$$

em que

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} z_{23} & -z_{13} \\ -r_{23} & r_{13} \end{bmatrix} \quad (2.38a)$$

Sendo assim,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} z_{23} & -z_{13} \\ -r_{23} & r_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.38b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{z_{13}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (2.38c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{r_{23}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (2.38d)$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} z_{23} & -z_{13} \\ -r_{23} & r_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.38e)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{z_{13}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (2.38f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{r_{23}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (2.38g)$$

Introduzindo essas relações de transformação na relação deformação específica–deslocamento, mostrada na Equação (2.11b), e usando as Equações (2.27), (2.38c), (2.38d), (2.38f) e (2.38g), se obtém:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{z_{13}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ -\frac{r_{23}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{z_{13}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{r_{23}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3}{r} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Como

$$u = \xi q_1 + \eta q_3 + (1 - \xi - \eta) q_5 \quad (2.40a)$$

resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = (q_1 - q_5) \quad (2.40b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = (q_3 - q_5) \quad (2.40c)$$

e como

$$w = \xi q_2 + \eta q_4 + (1 - \xi - \eta) q_6 \quad (2.40d)$$

resulta que

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = (q_2 - q_6) \quad (2.40e)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = (q_4 - q_6) \quad (2.40f)$$

Substituindo as Equações (2.40b), (2.40c), (2.40e) e (2.40f) na Equação (2.39), vem:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{z_{23}(q_1 - q_5) - z_{13}(q_3 - q_5)}{\det \mathbf{J}} \\ \frac{-r_{23}(q_2 - q_6) + r_{13}(q_4 - q_6)}{\det \mathbf{J}} \\ \frac{z_{23}(q_2 - q_6) - z_{13}(q_4 - q_6) - r_{23}(q_1 - q_5) + r_{13}(q_3 - q_5)}{\det \mathbf{J}} \\ \frac{N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5}{r} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

e assim pode-se reescrever a deformação na forma matricial (CHANDRUPATLA e BELEGUNDU, 2014):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{z_{12}}{\det \mathbf{J}} & 0 \\ 0 & \frac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} \\ \frac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & \frac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & \frac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} & \frac{z_{12}}{\det \mathbf{J}} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

ou de forma compacta,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (2.43)$$

na qual a matriz de deformação específica–deslocamento do elemento, \mathbf{B} , de dimensão 4x6, é dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{z_{12}}{\det \mathbf{J}} & 0 \\ 0 & \frac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \frac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} \\ \frac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & \frac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & \frac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & \frac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & \frac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} & \frac{z_{12}}{\det \mathbf{J}} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

2.8.4 Método da Energia Potencial

A energia potencial, Π , na região discretizada é dada por:

$$\Pi = \sum_e \left[\frac{1}{2} \left(2\pi \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} dA - 2\pi \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f} \mathbf{r} dA - 2\pi \int_\ell \mathbf{u}^T \mathbf{T} \mathbf{r} d\ell \right) \right] - \sum \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (2.45)$$

A energia de deformação do elemento, U_e , dada pelo primeiro termo da Equação (2.45) pode ser escrita como

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(2\pi \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{r} dA \right) \mathbf{q} \quad (2.46)$$

sendo o termo dentro do parêntese a matriz de rigidez do elemento (\mathbf{K}^e), isto é,

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{r} dA \quad (2.47)$$

Deve-se observar que neste caso, a quarta linha em \mathbf{B} tem termos tipo $\frac{N_i}{r}$. Além disso, essa integral também possui um r adicional. Como uma aproximação simples, \mathbf{B} e r podem ser avaliados no centroide do triângulo e usados como valores representativos para o triângulo.

No centroide do triângulo, tem-se que:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3} \quad (2.48)$$

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \quad (2.49)$$

sendo \bar{r} a distância do centroide do elemento até o eixo z . Indicando $\bar{\mathbf{B}}$ como a matriz deformação específica-deslocamento do elemento, \mathbf{B} avaliada no centroide, obtém-se:

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \bar{r} \int_A \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dA \quad (2.50)$$

ou

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \bar{r} A_e \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \quad (2.51)$$

Observa-se que $2\pi \bar{r} A_e$ é o volume do elemento em forma de anel mostrado na Figura 2.13. Além disso, A_e é dada por:

$$A_e = \frac{1}{2} |\det \mathbf{J}| \quad (2.52)$$

Usa-se também a regra do centroide ou ponto intermediário para forças de corpo e superfície. Para obter melhores resultados, elementos menores precisam ser escolhidos mais próximos do eixo de simetria.

2.8.5 Carga Nodal

As cargas concentradas atuantes em cada nó são denominadas cargas nodais. Considere o carregamento nodal, F_{r1} , F_{z2} , F_{r2} , F_{z3} , F_{r3} e F_{z3} indicado na Figura 2.14.

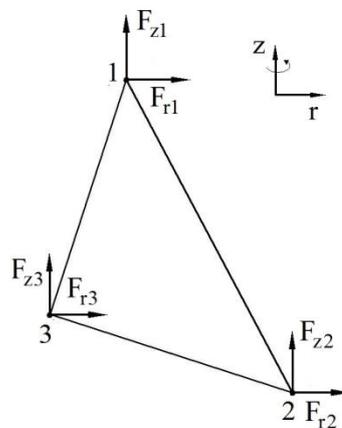


Figura 2.14 – Carga Nodal

O vetor da força de carga nodal pode ser descrito por:

$$\mathbf{F} = [F_{r1} \quad F_{z1} \quad F_{r2} \quad F_{z2} \quad F_{r3} \quad F_{z3}]^T \quad (2.53)$$

2.8.6 Força de Superfície

Considere o carregamento trapezoidal, que varia de p_1 a p_2 em uma superfície qualquer, conforme representado na Figura 2.15.

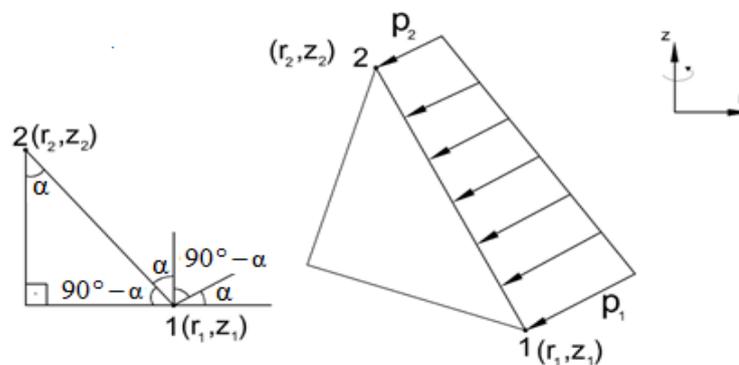


Figura 2.15 – Superfície com carregamento trapezoidal

O ponto 1 possui coordenadas r_1 e z_1 , o ponto 2 coordenadas r_2 e z_2 . O comprimento da superfície exposta ao carregamento pode ser escrito como

$$l_{12} = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.54)$$

o que permite definir as relações trigonométricas:

$$\text{sen } \alpha = \frac{r_1 - r_2}{l_{12}} \quad (2.55a)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{z_2 - z_1}{l_{12}} \quad (2.55b)$$

Decompondo o carregamento na direção dos eixos r e z , como mostrado na Figura 2.16, tem-se:

$$T_{r1} = -p_1 \cos\alpha \quad (2.56a)$$

$$T_{r2} = -p_2 \cos\alpha \quad (2.56b)$$

$$T_{z1} = -p_1 \sin\alpha \quad (2.56c)$$

$$T_{z2} = -p_2 \sin\alpha \quad (2.56d)$$

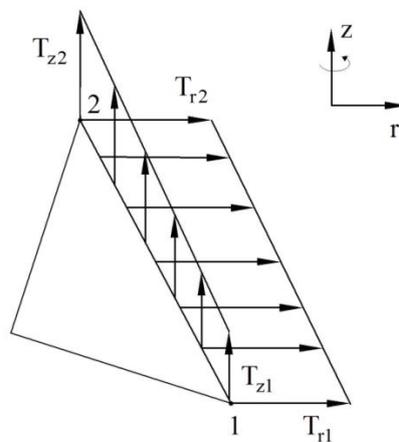


Figura 2.16 – Projeção da carga de superfície

Assim sendo, o vetor da força de superfície pode ser expresso como:

$$\mathbf{T} = \left[(a T_{r1} + b T_{r2}) \quad (a T_{z1} + b T_{z2}) \quad (b T_{r1} + c T_{r2}) \quad (b T_{z1} + c T_{z2}) \right]^T \quad (2.57)$$

em que

$$a = \frac{2\pi\ell_{12}(3r_1 + r_2)}{12} \quad (2.58a)$$

$$b = \frac{2\pi\ell_{12}(r_1 + r_2)}{12} \quad (2.58b)$$

$$c = \frac{2\pi\ell_{12}(r_1 + 3r_2)}{12} \quad (2.58c)$$

2.8.7 Termo de Força de Corpo

Primeiro, considera-se o termo de força de corpo dado pela expressão:

$$2\pi \int \mathbf{u}^T \mathbf{f} \mathbf{r} dA \quad (2.59)$$

Tem-se que:

$$2\pi \int_e (\mathbf{u} f_r + w f_z) r dA \quad (2.60)$$

$$2\pi \int_e [(N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5) f_r + (N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6) f_z] r dA \quad (2.61)$$

Mais uma vez, aproximam-se as quantidades variáveis por seus valores no centroide do triângulo. Deste modo, obtém-se

$$2\pi \int \mathbf{u}^T \mathbf{f} \mathbf{r} dA = \mathbf{q}^T \mathbf{f}_e \quad (2.62)$$

em que o vetor força do elemento, \mathbf{f}_e , é dado por:

$$\mathbf{f}_e = \frac{2\pi \bar{r} A_e}{3} \left[\bar{f}_{r1} \quad \bar{f}_{z1} \quad \bar{f}_{r2} \quad \bar{f}_{z2} \quad \bar{f}_{r3} \quad \bar{f}_{z3} \right]^T \quad (2.63)$$

Nos termos com a notação \bar{f} indica que os mesmos são avaliados no centroide. Quando a força de corpo é a carga principal, uma maior precisão poderá ser obtida pela substituição de $\mathbf{r} = N_1 \mathbf{r}_1 + N_2 \mathbf{r}_2 + N_3 \mathbf{r}_3$ na Equação (2.62) e pela integração para obter cargas nodais.

2.8.8 Método de obtenção das tensões nos nós dos elementos

Neste trabalho, de acordo com a formulação apresentada anteriormente, as tensões são calculadas no centroide de cada elemento finito triangular. Com a finalidade de determinar as tensões nos nós dos elementos ou em outro ponto qualquer da estrutura, utilizou-se uma interpolação via polinômio de Lagrange. A função polinomial é representada como (CHANDRUPATLA e BELEGUNDU, 2014):

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \right] y_k \quad (2.64)$$

Em que o produtório é representado como:

$$\prod_{p=1}^q y_p = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdots y_p \quad (2.65)$$

Para $k=1$ e para $n=3$, o primeiro termo do polinômio de interpolação de Lagrange seria o produto:

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} y_k = \left[\frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \right] y_1 \quad (2.66)$$

Por analogia, a tensão nos nós de cada elemento será calculada a partir de:

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \right] \sigma_k \quad (2.67)$$

2.9 Programa Computacional – Progaxissimétrico

O sistema Computacional Progaxissimétrico é capaz de realizar a análise numérica, via Método dos Elementos Finitos (MEF), de sistemas estruturais axissimétricos, sujeitos a carregamentos axissimétricos.

O sistema em questão foi implementado em linguagem *Fortran 90/95* (CHAPMAN, 2003) e na Figura 2.17 apresenta-se um fluxograma do mesmo.

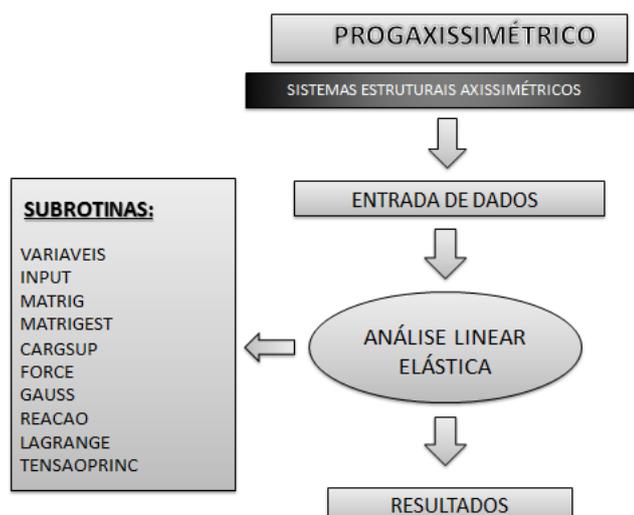


Figura 2.17 – Fluxograma do Programa Progaxissimétrico

A seguir descrevem-se, resumidamente, as tarefas executadas por cada uma das sub-rotinas do PROGAXISSIMÉTRICO:

- **VARIAVEIS:** Declaração de todas as variáveis necessárias para a execução do Progaxissimétrico.
- **INPUT:** Leitura e armazenamento dos dados de entrada fornecidos pelo usuário.
- **MATRIG:** Avaliação da matriz de rigidez de cada elemento da estrutura.
- **MATRIGEST:** Montagem da matriz de rigidez global da estrutura.
- **FORCE:** Obtenção das contribuições das cargas concentradas e das cargas de superfície nos nós dos elementos e montagem do vetor de forças globais da estrutura.
- **CARGSUP:** Cálculo da contribuição das cargas de superfície nos nós dos elementos carregados.
- **GAUSS:** Solução do sistema $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ e obtenção dos valores dos deslocamentos nodais. Sendo \mathbf{K} , \mathbf{U} e \mathbf{F} , respectivamente, a matriz de rigidez, o vetor de deslocamento nodais e o vetor de forças globais da estrutura.

- REACAO: Cálculo das reações de apoio em cada nó restringido e das tensões no centroide de cada elemento.
- LAGRANGE: Avaliação das tensões radiais, axiais, tangenciais e circunferenciais nos nós dos elementos ou em qualquer outro ponto da estrutura a partir de interpolação via polinômio de Lagrange.
- TENSAOPRINC: Cálculo das tensões principais em cada elemento.

Capítulo 3

Exemplos

3.1 Introdução

Neste capítulo são mostradas as aplicações do presente trabalho. Foram analisados 6 exemplos, a saber: um cilindro vazado sujeito à pressão radial interna; uma esfera oca sujeita à carga uniformemente distribuída de forma radial; um tubo sujeito à pressão radial interna; um volante rotativo sujeito a cargas nodais; uma estaca de concreto sujeita a um empuxo ao longo do seu fuste e a um carregamento nodal transferido do bloco de fundação até o seu topo; e por fim um pilar misto de aço e concreto sem armadura de aço sujeito a uma carga de superfície. Os resultados obtidos são comparados com resultados da literatura e/ou com os determinados a partir do software ANSYS 12.1.

3.2 Exemplos

3.2.1 Cilindro Vazado Sujeito à Pressão Radial Interna

Neste exemplo modelou-se um cilindro longo com diâmetro interno de 80mm, diâmetro externo de 120mm e com comprimento igual a 10mm, que se ajusta perfeitamente em um furo por toda a sua extensão. O cilindro é submetido a uma pressão interna de 2MPa. As propriedades físicas do material são: $E=200\text{GPa}$ e $\nu=0,3$. O exemplo foi modelado com 2 elementos finitos e com 4 nós. Na Figura 3.1 apresenta-se o cilindro e a discretização do mesmo e nas Tabelas 3.1 e 3.2 apresentam-se, respectivamente, os deslocamentos nos nós da peça e os valores das tensões radiais, axiais, tangenciais e circunferenciais no centroide de cada elemento. Estes resultados são comparados com as respostas obtidas por Chandrupatla e Belegundu (2014). Este exemplo foi analisado com cargas nodais e com a carga de superfície representada por uma pressão uniforme aplicada na aresta 2-3 do elemento 1 (ver Fig. 3.1).

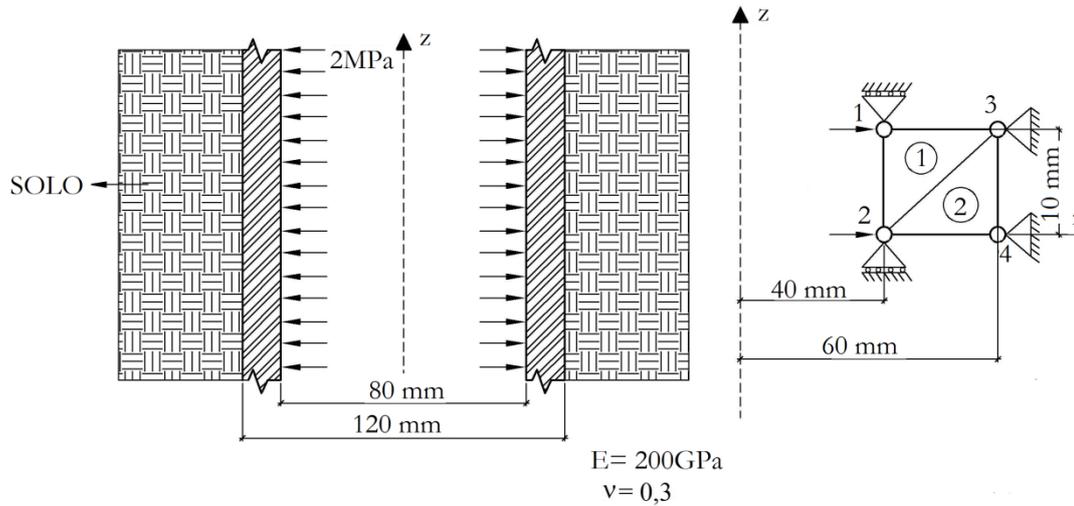


Figura 3.1 – Cilindro Longo

Tabela 3.1 – Deslocamento Nodal

Nó	Deslocamento em x (mm)	
	Presente Trabalho	Chandrupatla e Belegundu (2014)
1	1,395	1,400
2	1,329	1,330
3	0,000	0,000
4	0,000	0,000

Tabela 3.2 – Tensões nos elementos (MPa)

Tensões	Elemento 1		Elemento 2	
	Presente Trabalho	Chandrupatla e Belegundu (2014)	Presente Trabalho	Chandrupatla e Belegundu (2014)
σ_r	-1,653	-1,653	-1,693	-1,693
σ_z	-0,580	-0,581	-0,671	-0,671
τ_{rz}	-0,051	-0,051	0,000	0,000
σ_θ	-0,281	-0,281	-0,543	-0,543

3.2.2 Esfera Oca Sujeita à Carga Uniformemente Distribuída de Forma Radial

Nesta aplicação considera-se uma esfera oca, de raio interno igual a 1m e raio externo igual a 2m, submetida a uma pressão negativa unitária P em seu interior, conforme esquematizado na Figura 3.2.

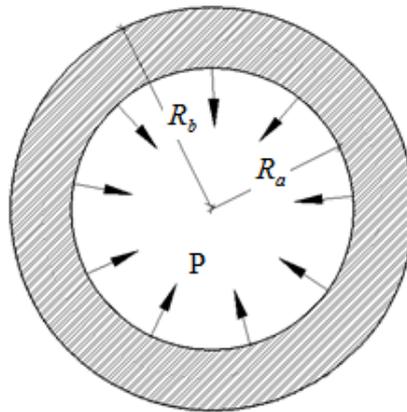


Figura 3.2 – Esfera Oca

Um quarto da seção transversal da esfera pode representar integralmente uma esfera completa quando o deslocamento é restrito no eixo vertical, sendo assim o modelo utilizado para a análise numérica, bem como, as condições de contorno empregadas são indicados na Figura 3.3.

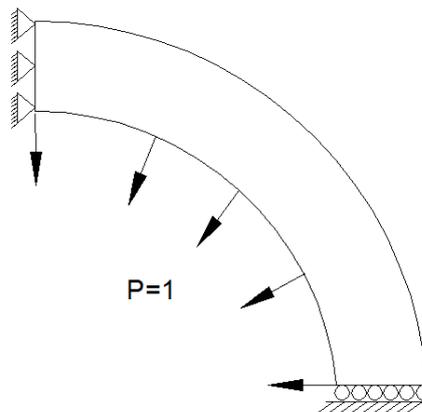


Figura 3.3 – Representação de um quarto da seção transversal da esfera

Na Figura 3.4 apresentam-se os carregamentos nodais atuantes no interior da esfera oca. Estas cargas serão decompostas em função dos ângulos formados com a horizontal.

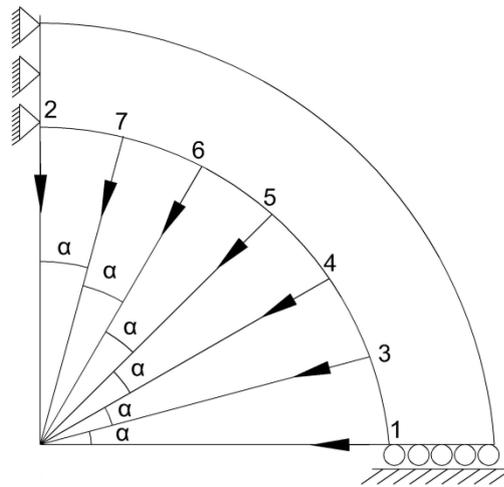


Figura 3.4 – Direções das cargas nodais atuantes no cilindro vazado sujeito à pressão radial interna

Considerou-se a discretização do domínio com elementos finitos triangulares de três nós (CST) resultando em uma malha com 96 elementos e 63 nós, como ilustram-se nas Figuras 3.5 e 3.6.

Com o objetivo de verificar as implementações numéricas realizadas, este exemplo foi modelado também no programa ANSYS 12.1 adotando-se a mesma malha empregada na análise via Proxaxissimétrico. Assim sendo, utilizou-se o elemento finito bidimensional com três nós e com 2 graus de liberdade por nó axissimétrico denominado PLANE 182 para a realização das análises.

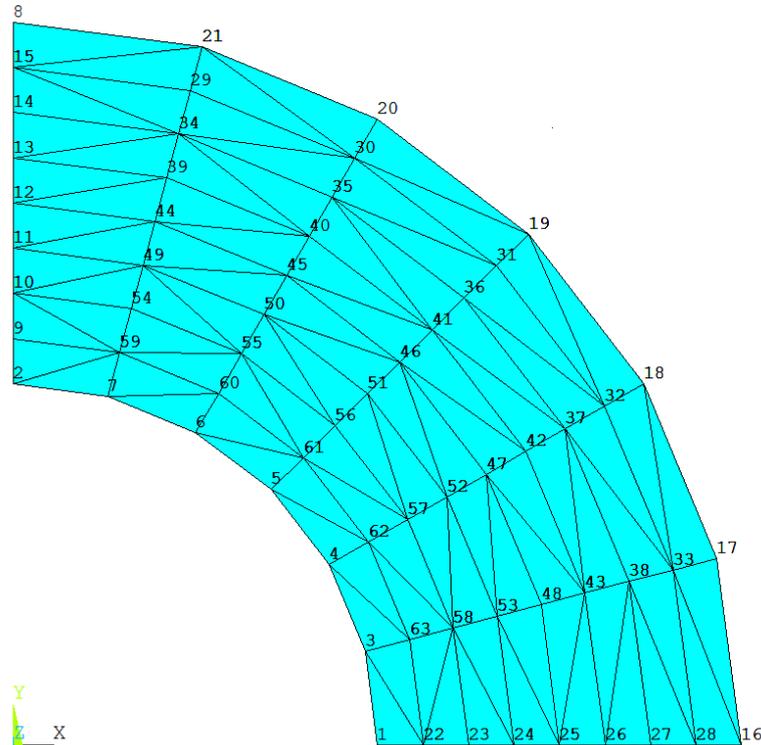


Figura 3.5 – Malha de elementos finitos (numeração dos nós) – Esfera

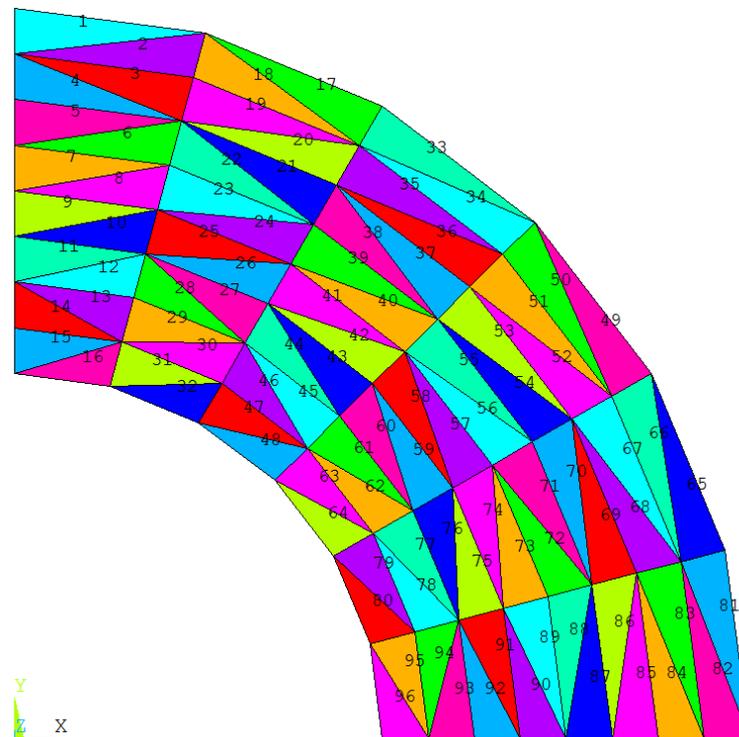


Figura 3.6 – Malha de elementos finitos (numeração dos elementos) – Esfera

Nas Tabelas 3.3 e 3.4 apresentam-se comparações entre as soluções numéricas obtidas a partir do programa computacional desenvolvido no presente trabalho e a partir do software

ANSYS 12.1, nas quais pode-se perceber que a precisão obtida pelas simulações numéricas é bastante satisfatória.

Tabela 3.3 – Deslocamento radial (em metros)

Nó	Raio(m)	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
22	1,125	-0,559	-0,564	0,990
24	1,375	-0,454	-0,460	0,988
26	1,625	-0,407	-0,413	0,985
28	1,875	-0,391	-0,397	0,980

Tabela 3.4 – Tensão Tangencial τ_{rz} (Pa) no centroide de alguns elementos

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
96	-0,610	-0,616	0,990
93	-0,434	-0,439	0,987
92	-0,378	-0,383	0,986
90	-0,317	-0,322	0,985
87	-0,265	-0,270	0,982
85	-0,239	-0,244	0,981
84	-0,225	-0,229	0,981
82	-0,208	-0,212	0,981

3.2.3 Cilindro Vazado Sujeito à Pressão Radial Interna

Neste exemplo tem-se um cilindro espesso, analisado anteriormente por Timoshenko e Goodier (1951), com $E=20,77 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$, $\nu=0,3$, diâmetro interno 5,08cm e externo 10,16cm, comprimento igual a 10,16cm e sujeito a uma pressão interna $p=0,616 \text{ kN/cm}^2$, conforme mostrado na Figura 3.7. Avaliou-se o valor dos deslocamentos máximos na peça e os valores referentes às tensões radiais e tangenciais nos nós dos elementos finitos nos pontos de deslocamento máximo.

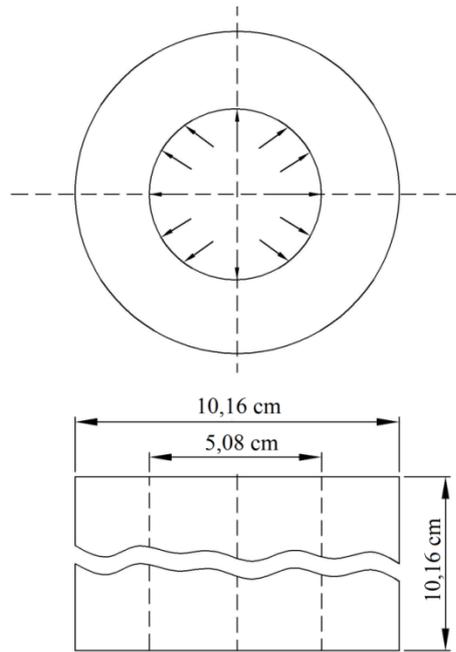


Figura 3.7 – Cargas nodais atuantes no cilindro vazado sujeito à pressão radial interna

Na Figura 3.8 apresentam-se a malha estruturada, composta por 40 elementos finitos triangulares e 33 nós, bem como, as condições de contorno adotadas para a obtenção das respostas via Proxaxissimétrico. Ressalta-se que esta é a mesma malha de elementos finitos apresentada na literatura.

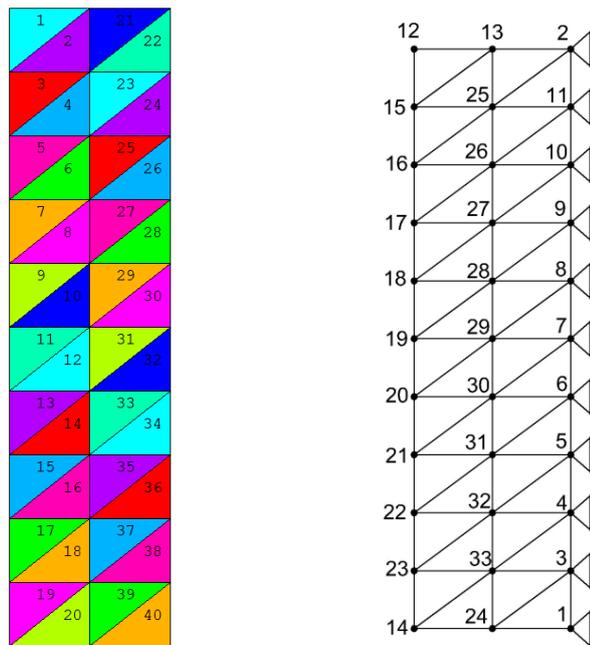


Figura 3.8 – Malha de elementos finitos (numeração dos elementos) e condições de contorno (numeração dos nós) – Cilindro vazado

Os resultados de deslocamentos e tensões indicados nas Figuras 3.10 e 3.11 foram avaliados em pontos radiais da estrutura discretizada, conforme indicado na Figura 3.9.

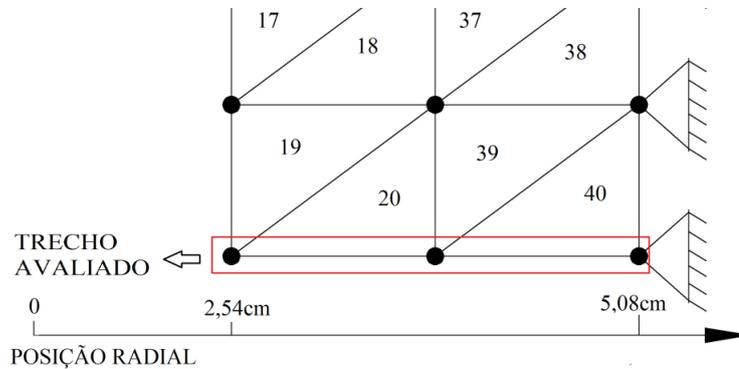


Figura 3.9 – Região na qual se obtiveram os resultados de deslocamentos e tensões – Cilindro vazado

As respostas numéricas mostradas nas Figuras 3.10 e 3.11 são comparadas com resultados teóricos obtidos por Timoshenko e Goodier (1951) correspondentes a pontos nodais da peça. As tensões radiais e tangenciais foram calculadas no sistema de coordenadas globais e avaliadas no centroide de cada elemento finito triangular. Para se chegar aos valores das tensões em algum ponto fora do centroide, utilizou-se a técnica da interpolação polinomial com auxílio do polinômio de interpolação de Lagrange.

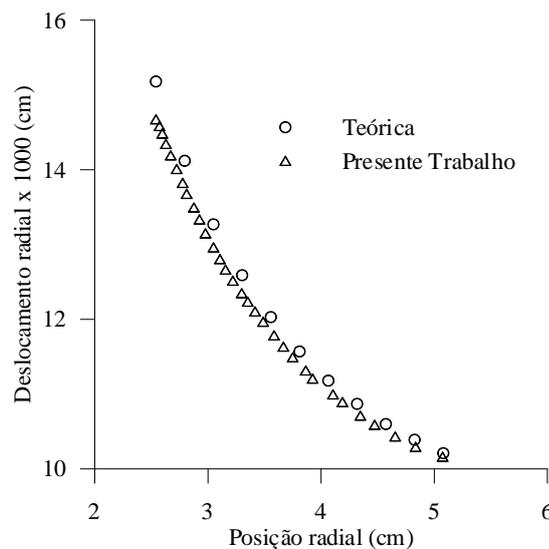


Figura 3.10 – Deslocamento radial no cilindro

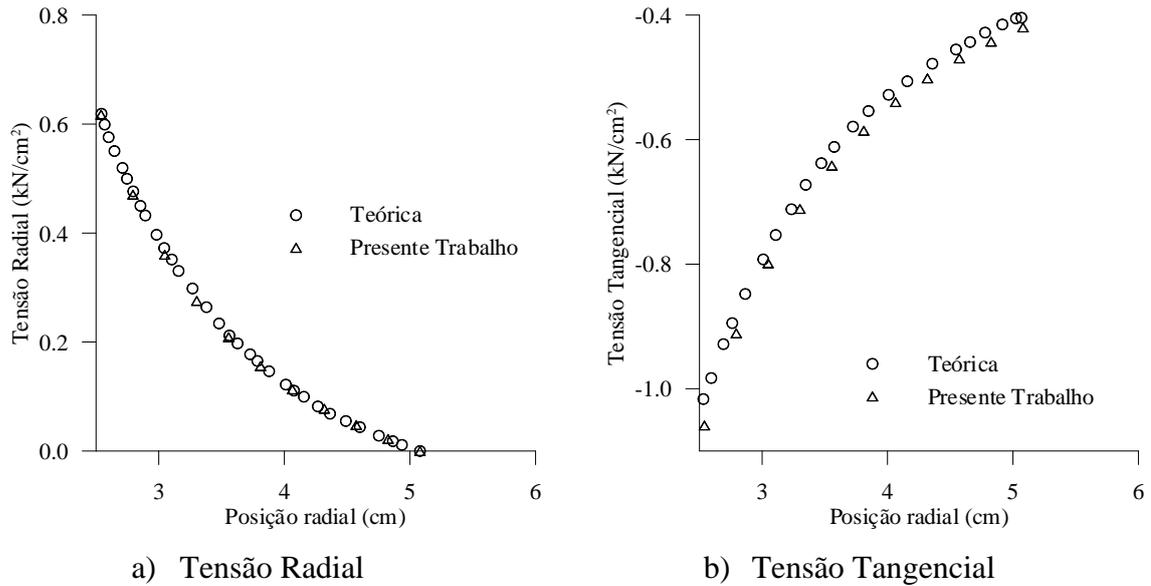


Figura 3.11 – Tensões versus posição radial no cilindro

3.2.4 Volante Rotativo

O exemplo mostrado na Figura 3.12 é um volante do tipo disco de aço que gira a 3000rpm. O diâmetro externo é de 600mm, o diâmetro do furo é de 150mm, a espessura do disco é de 25mm e o objetivo da aplicação é calcular a tensão tangencial no centroide dos elementos finitos, nos nós 1 e 5 da malha e ao longo da posição radial, na extremidade inferior dos elementos 1 e 3 (ver Figura 3.13).

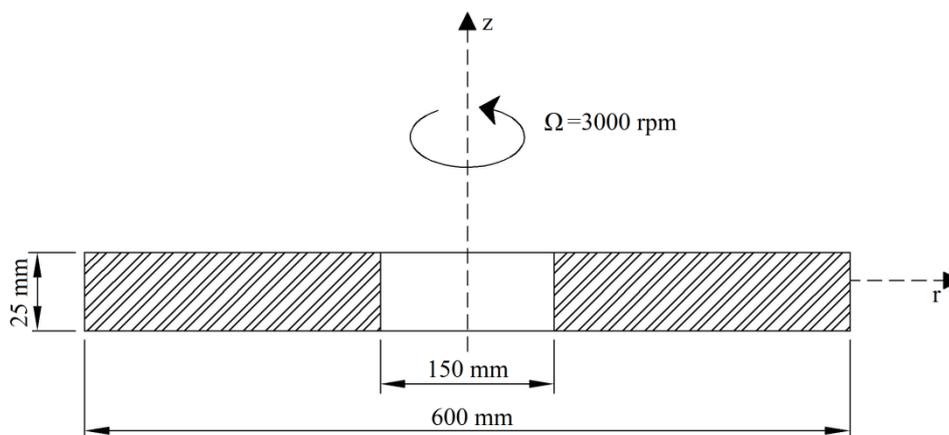


Figura 3.12 – Volante do tipo disco de aço

Para todas as análises, a peça foi discretizada com 4 elementos finitos e com 6 nós, conforme mostrado na Figura 3.13. O módulo de elasticidade é igual a 207GPa, o coeficiente

de Poisson é 0,3 e a densidade do aço é 7830kg/m^3 . Neste exemplo foram aplicadas cargas horizontais nos nós 1, 2, 3, 4, 5 e 6 iguais a 14403N , 40009N , 97621N , 161635N , 136030N e 78417N , respectivamente.

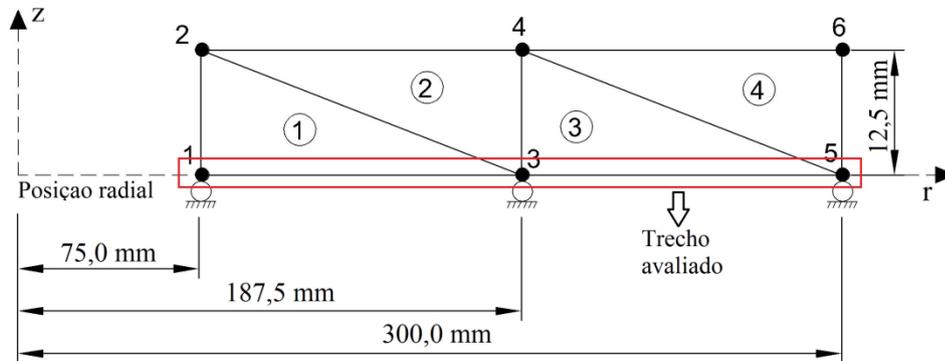


Figura 3.13 – Malha de elementos finitos – Volante rotativo

Na Figura 3.14 apresenta-se a tensão tangencial no volante rotativo em função da posição radial, (ver Figura 3.13) obtidas no presente trabalho, sendo a resposta comparada com as obtidas via software ANSYS 12.1 e por Chandrupatla e Belegundu (2014).

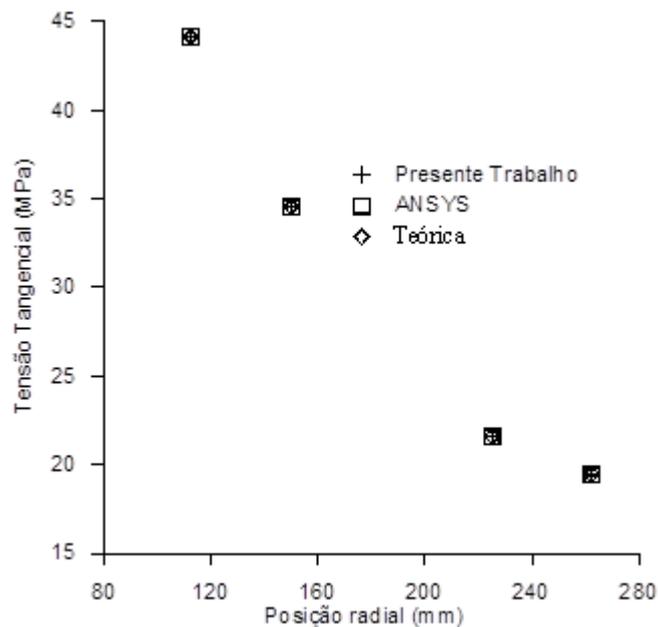


Figura 3.14 – Tensões Tangenciais

Os valores da tensão tangencial nos nós 1 e 5, determinados com a técnica da interpolação polinomial baseada na função de interpolação de Lagrange, são mostrados na Tabela 3.5 e comparados com os obtidos por Chandrupatla e Belegundu (2014).

Tabela 3.5 – Tensão Tangencial (MPa) nos nós 1 e 5

Nó	Presente Trabalho	Chandrupatla e Belegundu (2014)
1	55,110	55,100
5	20,830	20,800

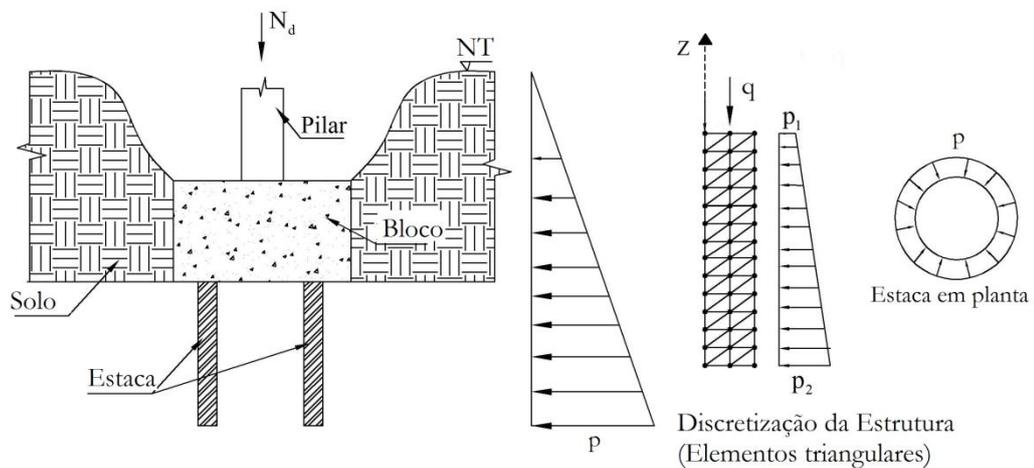
Na Tabela 3.6 apresentam-se os resultados referentes à tensão tangencial ou circunferencial no centroide de cada elemento finito triangular, sendo as mesmas comparadas com as respostas obtidas a partir do software ANSYS 12.1 e também com respostas da literatura.

Tabela 3.6 – Tensão Tangencial (MPa) no Centroide dos Elementos

Elemento	Presente Trabalho	Chandrupatla e Belegundu (2014)	ANSYS
1	44,130	44,100	44,105
2	34,500	34,500	34,484
3	21,570	21,600	21,564
4	19,400	19,400	19,389

3.2.5 Estaca de Concreto

Neste exemplo apresentam-se os resultados correspondentes à modelagem de uma estaca de concreto, conforme mostrado na Figura 3.15.

**Figura 3.15** – Estacas utilizadas como fundações profundas

A estaca de concreto apresenta $f_{ck} = 25\text{MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, parâmetro em função da natureza do agregado $\alpha_E = 1$, e o módulo de elasticidade do concreto foi calculado com a equação $E_c = 5600\alpha_E \sqrt{f_{ck}}$ da NBR 6118: 2014.

Neste exemplo considerou-se um solo com peso específico $\gamma_{\text{solo}} = 18\text{kN/m}^3$, ângulo de atrito $\phi = 30^\circ$ e coeficiente de empuxo ativo do solo $k_a = \text{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right)$, ou seja, $k_a = 0,333$.

O bloco possui uma altura igual a 2m e a estaca possui 10m de comprimento, ou seja, a altura do maciço de solo é $h = 12\text{m}$. O diâmetro da estaca é igual a 2m e a mesma está sujeita a uma carga axial igual a $q = 3000\text{kN}$. As pressões atuantes nas arestas da estaca são calculadas pela equação $p = k_a \gamma_{\text{solo}} h$.

A estrutura foi discretizada com 126 nós e 200 elementos, conforme mostrado na Figura 3.16. É importante ressaltar que nas análises realizadas através do programa ProgaXissimetrico e do ANSYS utilizou-se a mesma malha de elementos finitos.

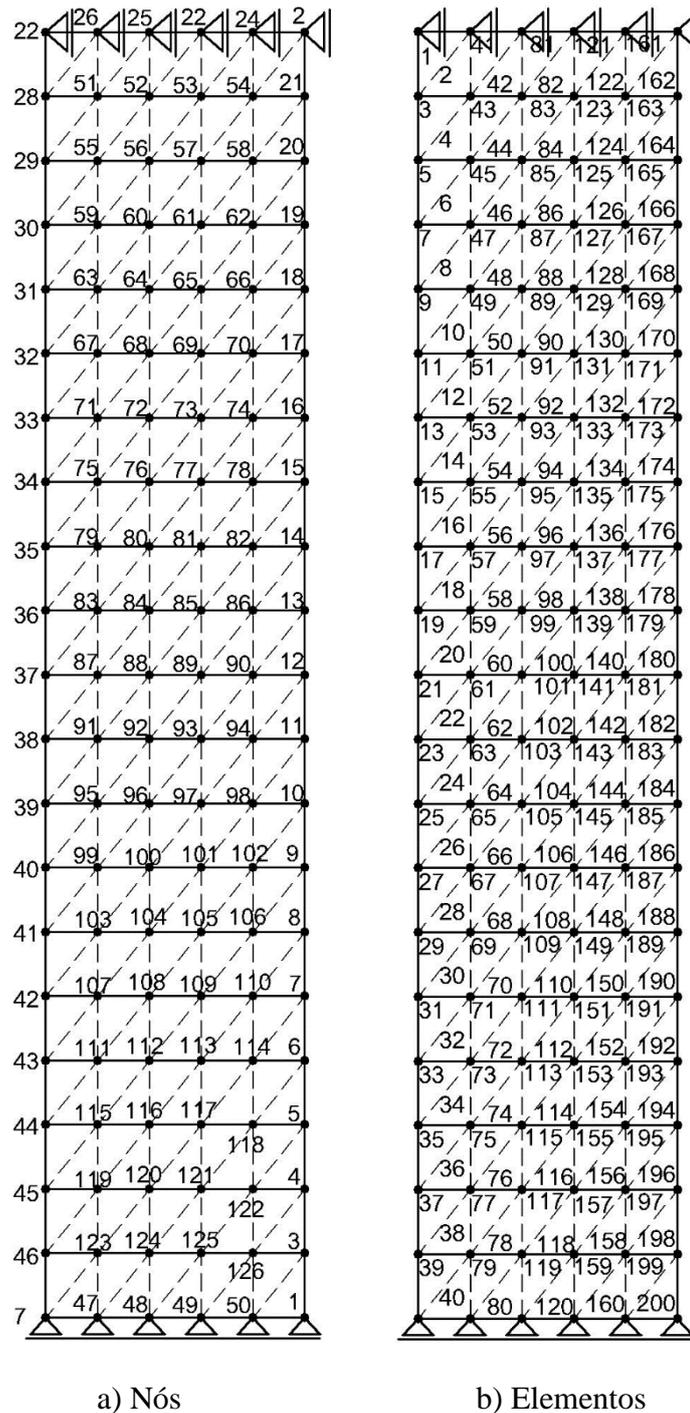


Figura 3.16 – Malha de elementos finitos da estaca – numeração dos nós e elementos

Nas Tabelas 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10 apresentam-se os resultados referentes à tensão radial, axial, tangencial e circunferencial no centroide dos elementos 192 a 200 (ver Figura 3.16), sendo as mesmas comparadas com as obtidas a partir do software ANSYS 12.1. Neste exemplo também se utilizou o elemento finito que corresponde a consideração bidimensional com três nós e com 2 graus de liberdade por nó axissimétrico denominado PLANE 182 para a realização das análises via ANSYS 12.1.

Tabela 3.7 – Tensões Radiais (kN/m²)

Elementos	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
192	34,860	34,842	1,0005
193	26,660	26,642	1,0007
194	125,300	125,210	1,0007
195	58,070	58,036	1,0006
196	614,100	613,790	1,0005
197	573,400	573,090	1,0005
198	-166,100	-166,020	1,0005
199	-741,700	-741,370	1,0004
200	-3196,000	-3194,800	1,0004

Tabela 3.8 – Tensões Axiais (kN/m²)

Elementos	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
192	-3039,000	-3037,600	1,0005
193	-3126,000	-3124,800	1,0004
194	-3101,000	-3099,400	1,0005
195	-3412,000	-3410,200	1,0005
196	-3392,000	-3390,200	1,0005
197	-4016,000	-4013,700	1,0006
198	-4695,000	-4692,400	1,0006
199	-5388,000	-5385,200	1,0005
200	-10700,000	-10694,000	1,0006

Tabela 3.9 – Tensões Tangenciais (kN/m²)

Elementos	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
192	-27,130	-27,115	1,0006
193	27,350	27,335	1,0005
194	99,730	99,679	1,0005
195	141,900	141,800	1,0007
196	6,742	6,739	1,0005
197	467,700	467,450	1,0005
198	1750,000	1749,200	1,0005
199	140,800	140,690	1,0008
200	-2086,000	-2084,900	1,0005

Tabela 3.10 – Tensões de Circunferencial (kN/m²)

Elementos	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
192	-27,130	-27,115	1,0006
193	27,350	27,335	1,0005
194	99,730	99,679	1,0005
195	141,900	141,800	1,0007
196	6,742	6,739	1,0005
197	467,700	467,450	1,0005
198	1750,000	1749,200	1,0005
199	140,800	140,690	1,0008
200	-2086,000	-2084,900	1,0005

3.2.6 Pilar Misto de Aço e Concreto

Neste exemplo apresentam-se os resultados numéricos referentes à análise de um pilar misto de aço e concreto sujeito a uma carga axial de projeto $P_d = 1200 \text{ kN}$. O pilar possui comprimento igual a 2m e as dimensões do tubo de aço são 35,56cmx33,06cmx1,25mm. O tubo foi preenchido com concreto cuja resistência característica aos 28 dias é igual a $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$, parâmetro em função da natureza do agregado $\alpha_E = 1$, e o módulo de elasticidade do concreto foi calculado com a equação $E_c = 5600 \alpha_E \sqrt{f_{ck}}$ da NBR 6118: 2014.

Considerou-se um coeficiente de Poisson para o aço do tubo $\nu = 0,3$ e para o concreto confinado igual a $\nu = 0,2$.

O objetivo da análise é calcular os deslocamentos laterais e as tensões radiais, axiais, tangenciais e circunferenciais em diferentes pontos da estrutura, e com a finalidade de validar os resultados obtidos através do programa computacional desenvolvido nesta pesquisa, a estrutura foi modelada também através do software ANSYS 12.1.

Na Figura 3.17 apresenta-se um esquema do carregamento que atua no topo do pilar misto de aço e concreto e na Figura 3.18 mostra-se a malha de elementos finitos adotada para a resolução deste exemplo.

Na Figura 3.19 apresentam-se os resultados dos deslocamentos nas direções x e y em diversos nós da estrutura, sendo os mesmos comparados com os obtidos com o auxílio do software ANSYS 12.1. Conforme mostrado na Figura 3.18, estes nós estão situados na extremidade do pilar, ao longo do seu comprimento.

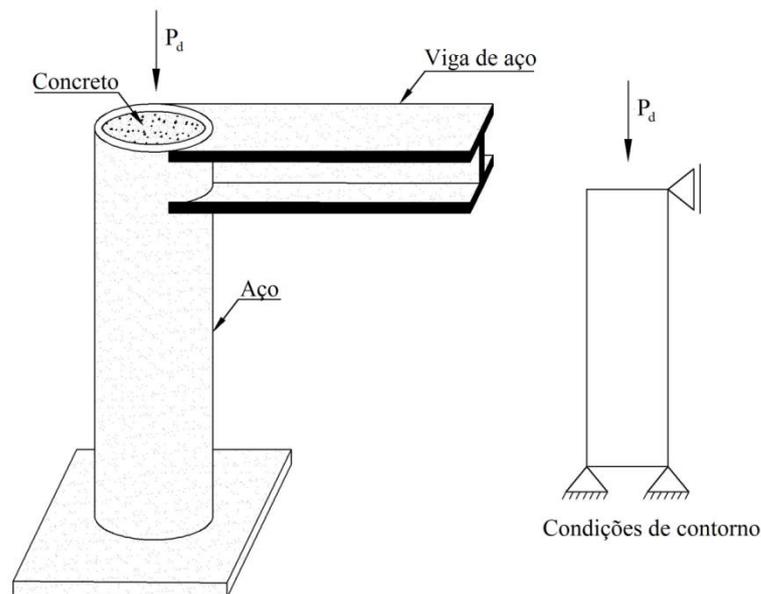


Figura 3.17 – Pilar misto de aço e concreto

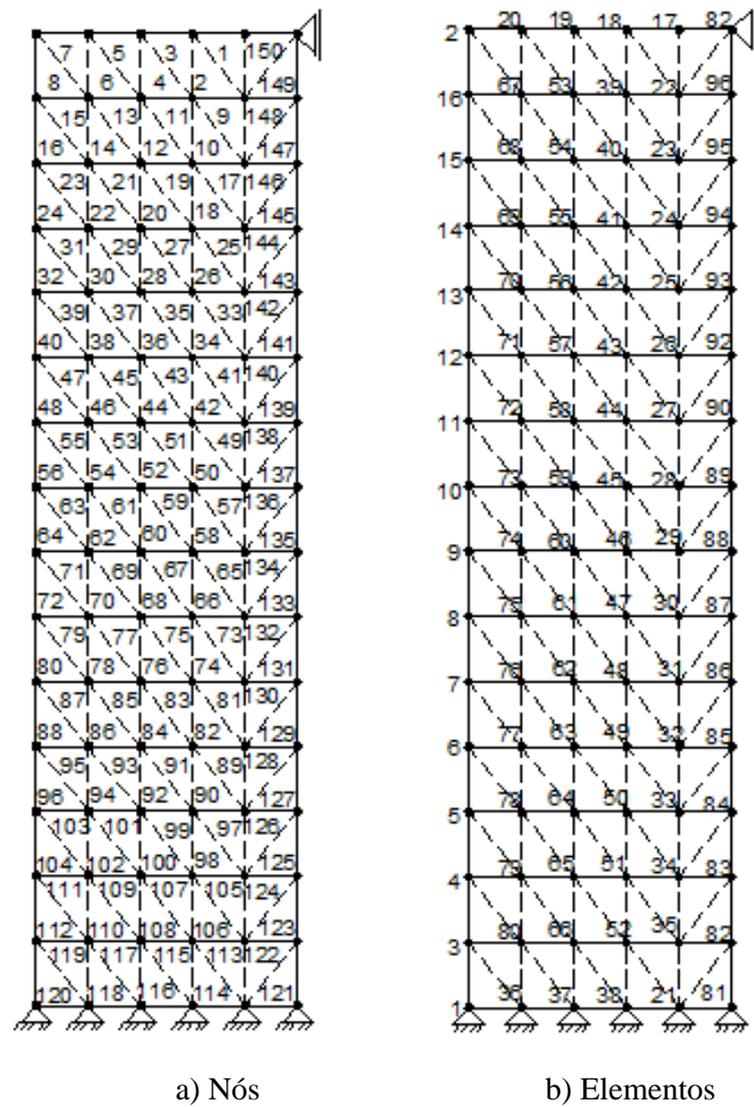


Figura 3.18 – Malha de elementos finitos do pilar misto de aço e concreto – numeração dos nós e elementos

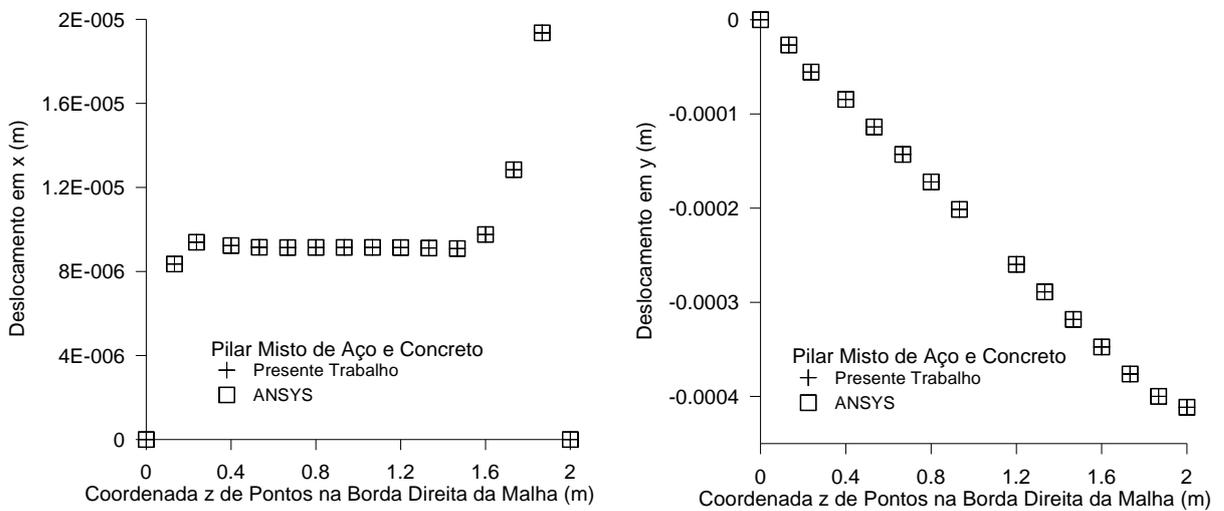


Figura 3.19 – Deslocamentos nodais

Nas Tabelas 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14 apresentam-se os resultados referentes às tensões radiais, axiais, tangenciais e circunferenciais dos elementos situados na extremidade superior do pilar misto.

Tabela 3.11 – Tensões Radiais (kN/m²)

Elementos	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
149	3665,000	3663,000	1,0005
150	-7096,000	-7092,000	1,0006
1	-461,000	-460,770	1,0005
2	-1689,000	-1687,700	1,0008
3	-1022,000	-1021,900	1,0001
4	-2875,000	-2873,200	1,0006
5	-2293,000	-2291,800	1,0005
6	-4616,000	-4613,200	1,0006
7	-5524,000	-5521,400	1,0005
8	-8313,000	-8308,900	1,0005

Tabela 3.12 – Tensões Axiais (kN/m²)

Elementos	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
149	-13360,000	-13354,000	1,0004
150	-22640,000	-22626,000	1,0006
1	-2920,000	-2918,500	1,0005
2	-5608,000	-5605,000	1,0005
3	-5659,000	-5655,800	1,0006
4	-11710,000	-11702,000	1,0007
5	-11820,000	-11815,000	1,0004
6	-28130,000	-28118,000	1,0004
7	-28400,000	-28385,000	1,0005
8	-92310,000	-92263,000	1,0005

Tabela 3.13 – Tensões Tangenciais (kN/m²)

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
149	12610,000	12608,000	1,0002
150	-1015,000	-1014,000	1,0010
1	614,900	614,620	1,0005
2	1467,000	1466,500	1,0003
3	546,600	546,360	1,0004
4	1506,000	1505,600	1,0003
5	356,600	356,420	1,0005
6	1207,000	1206,000	1,0008
7	779,000	778,600	1,0005
8	-22,720	-22,710	1,0004

Tabela 3.14 – Tensões de Circunferencial (kN/m²)

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
149	-6897,000	-6893,000	1,0006
150	1283,000	1283,000	1,0000
1	4714,000	4711,400	1,0006
2	1090,000	1089,600	1,0004
3	10410,000	10403,000	1,0007
4	2408,000	2406,900	1,0005
5	25400,000	25384,000	1,0006
6	3964,000	3961,800	1,0006
7	89730,000	89687,000	1,0005
8	6092,000	6088,700	1,0005

Considerações Finais

4.1 Introdução

No presente trabalho foi abordado o Método dos Elementos Finitos aplicado em estruturas axissimétricas submetidas a carregamentos axissimétricos. Neste contexto, objetivou-se determinar os valores de tensões, deformações e deslocamentos nas estruturas, levando-se em conta, que os materiais apresentam comportamento elástico-linear.

Desenvolveu-se, dessa forma, um programa computacional implementado em linguagem *Fortran 90/95* (CHAPMAN, 2003) denominado Progaxissimétrico.

No software ANSYS 12.1 obtêm-se valores de tensões e deformações nos centroides dos elementos discretizados. Neste trabalho além da avaliação das tensões e deformações nos centroides dos elementos, implementou-se uma rotina denominada Lagrange que possibilita determinar de forma eficiente os valores das tensões e deformações nos nós dos elementos ou em qualquer ponto dos elementos.

Para validar as implementações computacionais realizadas neste trabalho utilizaram-se as respostas de problemas fornecidas na literatura, bem como, as obtidas a partir de modelagens realizadas com auxílio do software ANSYS 12.1.

4.2 Conclusões

Dos resultados de deslocamentos e tensões analisados no cilindro vazado sujeito à pressão interna mostrados no Capítulo 3, a maior diferença percentual obtida pelo código implementado quando comparado com os resultados da literatura, foram 0,357% e 0,172%.

No exemplo correspondente à esfera oca sujeita à carga uniformemente distribuída de forma radial, verificou-se que as maiores diferenças percentuais obtidas entre o código

implementado e o software ANSYS 12.1, foram 1,5% e 1,89%. Essas respostas são referentes aos deslocamentos radiais obtidos nos nós e às tensões tangenciais analisadas nos elementos.

Assim como no exemplo do cilindro vazado, as tensões na esfera oca foram analisadas nos centroides dos elementos discretizados. Dessa forma, pode-se observar que quanto mais próximo da face interior da esfera, ou seja, da região de aplicação da força, menor a diferença entre os resultados de deslocamento nodal obtidos pelo código implementado e as respostas do software ANSYS 12.1. Percebe-se que no nó 22 a diferença entre os resultados obtidos pelos dois programas representa um valor percentual igual a 0,1%, já no nó 28 este valor se eleva para 2%. Observa-se que os valores de tensão variam da mesma forma que os valores de deformação, ou seja, à medida que os elementos se aproximam do centro da esfera, aumenta a convergência entre os valores de deformação obtidos pelo código implementado e pelo software ANSYS 12.1.

No exemplo do cilindro vazado sujeito à pressão radial interna pode-se observar a partir dos gráficos referentes aos valores de tensão e deslocamento nos nós dos elementos, uma excelente convergência entre os resultados numéricos obtidos no presente trabalho e os encontrados na literatura.

Ressalta-se que no exemplo do volante rotativo, os valores das tensões tangenciais nodais foram obtidos a partir da técnica de interpolação polinomial baseada na função de interpolação de Lagrange. A maior diferença percentual entre os resultados de tensões nodais obtidos via código computacional implementado e os resultados da literatura foi de 0,144%. Com relação às tensões obtidas no centroide dos elementos, o valor da média das diferenças obtidas pelo código implementado, quando comparado com as respostas da literatura e do software ANSYS 12.1, foram, respectivamente, 0,0517% e 0,0470%.

No exemplo da estaca de concreto, as tensões no centroide dos elementos determinadas pelo código implementado quando comparadas com os resultados do software ANSYS 12.1 resultaram em uma diferença percentual máxima de 0,08%.

Com relação ao pilar misto de aço e concreto, as tensões no centroide dos elementos obtidas via o programa Progaxissimétrico quando comparadas com os resultados do software ANSYS 12.1 resultaram em uma diferença máxima de 0,10%. Vale ressaltar que neste exemplo, gerou-se uma malha constituída por dois materiais, a saber: aço e concreto.

Nos diversos exemplos apresentados no Capítulo 3 observou-se uma convergência entre os resultados obtidos via Progaxissimétrico e as respostas da literatura e/ou as obtidas a partir do software ANSYS 12.1. Conclui-se, portanto que a implementação desenvolvida foi bem

sucedida, contribuindo com valores precisos de tensão, deformação e deslocamento das estruturas axissimétricas submetidas a carregamentos axissimétricos.

4.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Vários trabalhos podem ser elaborados a partir da base computacional desenvolvida nesta dissertação. A seguir são sugeridas as seguintes pesquisas objetivando-se a sua continuidade:

- Análise não linear elástica e inelástica de sólidos axissimétricos;
- Análise de sólidos axissimétricos sujeitos a cargas não axissimétricas;
- Análise de sólidos axissimétricos utilizando-se malhas quadrilaterais com quatro nós, oito e nove nós, uma vez que, o código implementado neste trabalho utiliza apenas elementos triangulares com três nós e este elemento apresenta um campo de deslocamentos com menos parcelas, ou seja, menos refinado e pode acarretar resultados com menor precisão quando comparados com exemplos reais;
- Incluir rotinas capazes de realizar o dimensionamento de estruturas axissimétricas utilizando-se o método dos elementos finitos e realizar comparações com respostas obtidas através de considerações normativas internacionais e também com as normas vigentes no Brasil.

Referências

- ALBUQUERQUE, L. B., MATTAR NETO, M., 1996, Determinação de Tensões em Conexões Bocal–Esfera Utilizando Modelos de Elementos Finitos. *SIBRAT*, Rio de Janeiro, Brasil.
- ALBUQUERQUE, L. B., ASSIS, G. M. V., MIRANDA, C. A. J, CRUZ, J. R. B., 1995, Pressure Vessel Stress Analysis with Axisymmetric Model and Harmonic Loading. 13th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.
- ANSYS, 2012. Inc. theory reference (version 12.1).
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- BATHE, K. J., 1996, Finite Element Procedures. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1051 p.
- BEZERRA, P. H. A., 2013, *Analysis of thin bidimensional axisymmetric structures via finite element method using atraight elemento*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.
- BREBBIA, C. A., FERRANTE, A. J., 1975, *The Finite Element Technique*. Porto Alegre: URGs.
- CHANDRUPATLIA, T. R., BELEGUNDU, A. D., 2014, Elementos Finitos. *Pearson Education do Brasil*, São Paulo, Brasil.
- CHAPMAN, S. J., *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw–Hill, 2nd ed, 2003.
- CLOUGH, R. W., ADINI, A., 1961, *Analysis of Plate Bending by the Finite Element Method*. Rep. To Nat. Sci. Found.

- COSTA, G. A. S., 2013, *Análise vibratória de fundações de máquinas sobre estacas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- FONTES, F. F., 2005; *Análise Estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil.
- FUDOLI, C. A., 1992, *Formulação do método dos elementos de contorno para problemas elasto-lineares axissimétricos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, Engenharia de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil.
- FURTADO, G. G., 1995, *Estudo e Implementação de Algoritmos para a Análise Numérica de Tensões Mecânicas em peças com Geometria Axissimétrica*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e Materiais, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.
- GRAFTON, P. E., STROME, D. R., (1963), Analysis of Axisymmetric Shells by the Direct Stiffness Method. *J. Am. Inst. Aeron. Astron.*, pp. 2342–2347.
- GUIMARÃES, G. P., 2006, *Uma Formulação de Elementos Finitos Axissimétricos para Análise de Tubos Laminados em Materiais Compósitos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PUC–RJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- HECHMER, J. L., HOLLINGER, G. L., 1988, Considerations in the Calculations of the Primary–Plus–Secondary Stress Intensity Range for Code Stress Classification. *PVP*.
- HELENE, P., TERZIAN, P., 1992, *Manual de dosagem e controle do concreto*. Pini, São Paulo, Brasil.
- HOLLINGER, G. L., HECHMER, J. L., 1986, Three–Dimensional Stress Criteria–A Weak Link in Vessel Design and Analysis. *PVP*.

- KERMANDIS, T., 1975, A numeral Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems, *Int. J. Solids Structurs*, vol.11, pp. 493–500.
- KROENKE, W. C., 1974, Classification of Finite Element Stresses According to ASME Section III Stress Categories, PVP. *Proc. of the 9411' ASME Winter Annual Meeting*, New York, pp. 107–140.
- LYON, P. E., 2010, *Axisymmetric finite elemento modeling for the design and analysis of cylindrical adhesive joints based on dimensional stability*. Masters dissertation, Utah State University, Logan, Utah.
- MEDINA, A. M., 2008, *Análise Estrutural Viscoelástica Axissimétrica de Dutos Flexíveis*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- MELOSH, R. S., 1961, A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending. *J. Aeronaut. Seci.*, pp. 34–42.
- OLIVEIRA, F. D., 2009, *Desenvolvimento de Ferramenta Computacional Usando o Método de Elementos Finitos para Simulação Numérico de Processo de Conformação em Matriz Aberta*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, PUC, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.
- PAGOTTO, L. D., 2013, *Modelos analítico e numérico para análise estrutural axissimétrica de risers flexíveis*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, Brasil.
- PENNY, R. K., 1961, Symmetrical Bending of the General Shell of Revolution by Finite Difference Methods. *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 3, pp. 369–377.
- PERCY, J. H., PIAN, T. H. H., KLEIN, S., NAVARATNA, D. R., 1965, Application of Matrix Displacement Method to Linear Elastic Analysis of Shells of Revolution, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 3, pp. 2138–2145.

- PIAN, T. H., TONG, P., 1969, Basis of Finite Element Methods For Solid Continus. *Int. J. Num. Meth. in Engrg.*, pp. 3–28.
- PRAGER, W., SYNGE, J. L., 1947, Aproximations in Elasticity Based on the Concept Function Space, pp.241–269.
- RADKOWSKI, P. P., DAVIS, R. M., BOLDUC, M. R., 1962, Numeric Analysis of Equations of Thin Shells of Revolution. *ARS Journal*, vol. 32, pp. 36–41.
- RODRIGUES, C. Y. C., 2009, *Análise de Estruturas Axissimétricas Aplicação a Reservatórios Circulares*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- ROGÊDO, P. I., 1970, *Estacas submetidas a solicitações horizontais—cálculo pelo método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, Laboratório Internacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal.
- SARAIVA, M. F. S., 2016, *Análise de Placas Circulares Axissimétricas pelo Método dos Elementos Finitos*. Trabalho de Conclusão de curso, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.
- SMITH, T. A., 1966, *Analysis of Axisymmetric Shell Structures under Axisymmetric Loading by the Finite Element Method*. US Army Missile Command Technical Report RS–TR–66–8, Redstone Arsenal, Alabama.
- SMITH, M., FILZ, G., 2007, *Axisymmetric Numerical Modelling of a Unit Cell in Geosynthetic-Reinforced, Column-Supported Embankments*. *Geosynthetics International*, vol. 14, pp. 13–22.
- SOUZA, A. L., 2008, *Uma formulação estabilizada de elementos finitos para solução das equações de Navier –Stokes em geometria axissimétrica*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação, Instituto de Engenharia Nuclear da Comissão Nacional de energia nuclear, Rio de Janeiro, Brasil.

SYNGE, J. L., 1957, *The Hypercicle in Mathematical Physics*. Cambridge, Univerity Press.

TAIG, I. C., 1961, *Structural Analysis by Matrix Displacement Method*. *English Eletric Aviation Report*.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N., 1951, *Theory of Elasticity*. Third Edition, New York, McGraw–Hill Co,

TOCHER, J. L, 1962, *Analysis of Plate Bending Using Triangular Elements*. Doctoral Dissertation, Civil Eng. Dep. Univ. of California, Berkeley.

VICENTE, W. M., OLIVEIRA, W. C., 2009. *Análise de Tensões em Placas Circulares Utilizando Elementos Finitos Axissimétricos*. Trabalho Final de Graduação de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil.

WEBPAGE. www.ceara.gov.br. <http://www.ceara.gov.br/sala-de-imprensa/noticias/15663-inauguracao-de-adutora-beneficiara-mais-de-60-mil-em-quixeramobim> Acessado em 26/11/2016.

WEBPAGE. www.constran.com.br. <<http://www.constran.com.br/contratodetalhes.phd?idcontrato=49#prettyPhotoCampos>, M.D (2006) > Acessado em 26/11/2016.

WEBPAGE. www.sh.com.br. <<http://www.sh.com.br/forma-para-pilar-circular>> Acessado em 26/11/2016.

WEBPAGE. www.tecgeo.com.br. <<http://www.tecgeo.com.br/servicos/estacas-pr-moldadas-de-concreto-3>>. Acessado em 26/11/2016.

ZIENKIEWICZ, O. C., 1969, *Isoparametric and Associated Element Families for Two and Three-dimension Analysis*. Chap.13 of *Finite Element Methods in Stress Analysis*, edited by Holand, Tapir.