

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

# **IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DE BIELAS E TIRANTES VIA MEF: APLICAÇÃO EM BLOCOS DE FUNDAÇÃO, CONSOLOS CURTOS, VIGAS- PAREDE E SAPATAS RÍGIDAS**

**Miguel Angelo Araújo Lima**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha  
Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Campus Morro do Cruzeiro  
Ouro Preto, MG – Brasil  
Fevereiro, 2018

L732i

Lima, Miguel Angelo Araújo .

Implementação numérica do modelo de bielas e tirantes via MEF  
[manuscrito]: aplicação em blocos de fundação, consolos curtos, vigas-parede e  
sapatas rígidas / Miguel Angelo Araújo Lima. - 2018.

111f.: il.: color; graf.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha.

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de  
Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Fundações (Engenharia). 2. Trelças (Construção civil). 3. Blocos de concreto.  
4. Desenho (Engenharia) - Dimensionamento. I. Rocha, Paulo Anderson  
Santana . II. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota . III. Universidade Federal de  
Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 624.014

Catálogo: [www.sisbin.ufop.br](http://www.sisbin.ufop.br)

# IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DE BIELAS E TIRANTES VIA MEF: APLICAÇÃO EM BLOCOS DE FUNDAÇÃO, CONSOLOS CURTOS, VIGAS-PAREDE E SAPATAS RÍGIDAS

**AUTOR: MIGUEL ÂNGELO ARAÚJO LIMA**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 19 de fevereiro de 2018, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



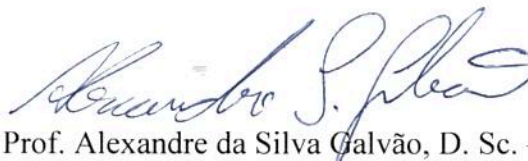
Prof. Paulo Anderson Santana Rocha, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D. Sc. – UFOP



Prof. Geraldo Donizetti de Paula, D. Sc. – UFOP



Prof. Alexandre da Silva Galvão, D. Sc. – UFSJ

*Aos meus pais, meus irmãos e aos  
meus orientadores.*

# Agradecimentos

A Deus, por me iluminar e me conduzir em todos momentos da minha vida.

Aos meus pais Gonçalo e Maria de Lourdes, pelo apoio, compreensão, motivação e ensinamentos passados. Sou eternamente grato por tudo que me proporcionam.

Aos meus irmãos Michele e Mateus pelo companheirismo, amizade, incentivo, motivação e momentos de descontração.

A minha namorada Thaís Pacelli, por sempre me motivar e me apoiar mesmo nos momentos mais difíceis, nunca me deixando desistir e sempre acreditando no meu potencial.

Aos meus orientadores prof. Paulo Rocha e Ricardo Azoubel pelos ensinamentos, amizade, motivação, paciência, conselhos e dedicação durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores do mestrado e da graduação que contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

A todos os amigos do mestrado, em especial ao Tiago José Ferreira, pelo apoio, amizade e companheirismo e conhecimentos contribuídos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos de Itabirito/MG e da República Etnia/OB, pelos anos de parceria, irmandade e alegria.

A minha família pela torcida e apoio em todas as etapas da minha vida.

A CAPES e à UFOP, pelo auxílio financeiro.

A todos que fazem parte dessa conquista, o meu muito obrigado.

*“No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade.”*

**Albert Einstein**

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

# **IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DE BIELAS E TIRANTES VIA MEF: APLICAÇÃO EM BLOCOS DE FUNDAÇÃO, CONSOLOS CURTOS, VIGAS- PAREDE E SAPATAS RÍGIDAS**

**Miguel Angelo Araújo Lima**

Fevereiro, 2018

Orientadores: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Esse trabalho tem como objetivo realizar análises numéricas elástico-lineares. Para tal, foi desenvolvido um programa computacional destinado à implementação numérica do Modelo de Bielas e Tirantes, utilizando-se uma formulação baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF). Com esse modelo foi possível analisar o comportamento de elementos estruturais como blocos de fundação, consolos curtos e sapatas rígidas, e ainda realizar o dimensionamento das armaduras de aço, representar os valores de tensões, deformações e deslocamentos na região de uma viga representada com o Modelo de Bielas desenvolvido por MONTROYA *et al.* (1991). Adicionalmente, foi realizada a modelagem numérica via MEF de uma viga-parede com uma grande abertura, que foi inicialmente estudada por SCHLAICH *et al.* (1987). Com o fim de validar as implementações numéricas, os resultados foram comparados com modelagens numéricas realizadas com o auxílio do software ANSYS 17 e com expressões normativas.

**Palavras-chave:** Modelo de Bielas e Tirantes, Elementos Finitos, Blocos de Fundação, Consolos Curto, Vigas-parede, Sapatas Rígidas.

Abstract of the Dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for obtaining the degree of Master of Science in Civil Engineering.

**ANALYSIS AND DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES  
USING STRUT AND TIE MODEL BY FEM:  
APPLICATION IN FOUNDATION BLOCKS, SHORT  
CONSOLES, WALL BEAMS AND RIGID SHOES**

**Miguel Angelo Araújo Lima**

February, 2018

Advisors: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

The present work has as main objective to perform elastic-linear analyzes through a computational program with numerical approach of the strut-and-tie model using a formulation based on the Finite Element Method (FEM). In this model, it is possible to analyze the behavior of structural elements such as foundation blocks, wall beams, short consoles, also represent the values of tensions, deformations and displacements in the region of a beam represented as the Model of cranks developed by MONTROYA *et al.* (1991). Besides numerically modeling via FEM a wall beam with a large aperture, developed by SCHLAICH *et al.* (1987). In order to validate the numerical implementations, the results were compared with numerical modeling performed with the aid of ANSYS software 17 and with normative expressions.

**Keywords:** Strut-and-tie model, Finite elements, Foundation Block, Short Consoles, Wall Beams and Rigid Shoes.



# Sumário

<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas .....</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Siglas .....</b>	<b>xvi</b>
<b>Lista de Símbolos .....</b>	<b>xvii</b>
<b>Capítulo 1 - Introdução.....</b>	<b>21</b>
1.1 Considerações Iniciais .....	21
1.2 Motivação .....	22
1.3 Objetivo .....	23
1.4 Pesquisa Bibliográfica .....	24
1.4.1 Consolos Curtos .....	24
1.4.2 Vigas-parede.....	25
1.4.3 Bloco de Fundação .....	27
1.4.4 Sapata Rígida.....	29
<b>Capítulo 2 - Modelo de Bielias e Tirantes.....</b>	<b>32</b>
2.1 Considerações Iniciais .....	32
2.2 Método de Blévyot e Frémy (Blocos de Fundação) .....	33
2.2.1 Blocos sobre duas estacas .....	34
2.3 Consolos de Concreto .....	38
2.4 Vigas-Parede.....	41
2.4.1 Mecanismos de ruptura de vigas-parede .....	42
2.5 Cálculo das Tensões de Compressão $\sigma_c$ nas Bielias de Concreto.....	45
2.5.1 Comprimento da seção BC na direção dos estribos .....	46
2.5.2 Valores Limites das Tensões de Compressão nas Bielias .....	49

2.5.3 Estado Limite Último de Elementos Lineares sob Força Cortante .....	50
2.6 Sapatas Rígidas .....	50
2.6.1 Dimensões da Sapata.....	52
2.6.2 Tensão de Cisalhamento no Concreto .....	53
2.6.3 Dimensionamento à flexão.....	53
<b>Capítulo 3 - Formulação via Método dos Elementos Finitos.....</b>	<b>56</b>
3.1 Considerações Iniciais .....	56
3.2 Modelagem por Elementos Finitos .....	57
3.3 Conectividade dos Elementos .....	58
3.4 Triângulo de Deformação Específica Constante (CST) .....	59
3.5 Representação Isoparamétrica .....	61
3.6 Avaliação das Deformações Específicas .....	62
3.7 Método da Energia Potencial .....	66
3.8 Rigidez do Elemento.....	66
3.9 Força de Corpo.....	67
3.10 Força de Superfície .....	68
3.11 Carga Pontual.....	70
3.12 Deslocamento Nodal.....	70
3.13 Cálculo de Tensão.....	70
<b>Capítulo 4 - Aplicações Numéricas .....</b>	<b>72</b>
4.1 Considerações Iniciais .....	72
4.2 Modelo desenvolvido por MONTOYA (1991). .....	73
4.3 Representação numérica do Modelo de SCHÄFER & SCHLÄICH (1987) .....	78
4.4 Consolo Curto .....	86
4.5 Bloco de Fundação com duas Estacas de Concreto .....	92
4.6 Sapata Rígida .....	98

<b>Capítulo 5 - Conclusões.....</b>	<b>104</b>
5.1 Considerações Finais .....	104
5.2 Conclusões .....	104
5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros .....	105
<b>Referências .....</b>	<b>107</b>

# Lista de Figuras

Figura 2.1: Modelo idealizado da formação de bielas.....	32
Figura 2.2: Modelo desenvolvido por elementos finitos para idealização das bielas.....	32
Figura 2.3: Funcionamento estrutural básico do bloco – FUSCO (1995). .....	33
Figura 2.5: Região junto ao pilar e às bielas de concreto em um bloco de duas estacas.	36
Figura 2.6: Esquema para cálculo da armadura longitudinal. ....	37
Figura 2.7: Modelo de análise e características geométricas de consolo curto - LEONHARDT & MÖNNIG adaptado por EL DEBS (1979).....	39
Figura 2.8: Vão de cisalhamento (a) $a_v < 2h$ – viga-parede; (b) $a_v = 2h$ – limite para classificação de uma viga-parede; (c) $a_v > 2h$ – viga esbelta (ACI 318: 2008). .....	42
Figura 2.9: Princípio de Saint Venant (SAINT VENANT, 1855).....	42
Figura 2.10: Ruptura por flexão em vigas biapoiadas (SANTOS, 1999).....	43
Figura 2.11: Ruptura por esmagamento em viga biapoiada (MELO, 1984). ....	44
Figura 2.12: Ruptura por tração diagonal em uma viga biapoiada (MELO, 1984).....	44
Figura 2.13: Ruptura por flexo-cisalhamento em vigas biapoiadas (SANTOS, 1999). .	45
Figura 2.14: Viga seccionada por um plano com inclinação $\alpha$ . ....	46
Figura 2.15: Representação da parte analisada da viga. ....	46
Figura 2.16: Dimensões de uma sapata isolada - Verificação da Rigidez.....	51
Figura 2.17: Pilares apoiados em: (a) Placa, (b) Sapata Rígida, (c) Sapata Flexível. ....	52
Figura 2.18: Tensões normais e forças resultantes no concreto e armadura em uma sapata. ....	54
Figura 2.19: Esquema para determinação da armadura longitudinal. ....	55

Figura 3.1: Região bidimensional discretizada por elementos CST.....	57
Figura 3.2: Correspondência dos nós dos elementos.....	58
Figura 3.3: Representação das funções de forma no nó 1 (a), nó 2 (b) e nó 3 (c).....	60
Figura 3.4: Representação das funções de forma por área em um elemento triangular.	61
Figura 3.5: Componentes da força de superfície em relação ao eixo global. ....	69
Figura 3.6: Decomposição das pressões nodais.....	69
Figura 4.1: Região da viga analisada pelo modelo de MONTROYA.....	73
Figura 4.2: Representação do modelo de MONTROYA (cm).....	73
Figura 4.3: Malha adotada - ANSYS. ....	74
Figura 4.4a: Tensão principal $\sigma_1$ .....	74
Figura 4.5a: Deslocamentos nodais em $x$ . ....	78
Figura 4.6: Viga-parede Modelo de SCHÄFER & SCHLÄICH (1987).....	79
Figura 4.7: Formação de bielas e tirantes na viga-parede do modelo de SCHÄFER & SCHLÄICH (1987). ....	80
Figura 4.8: Solução elementar para a viga-parede do modelo de SCHÄFER & SCHLÄICH (1987). ....	80
Figura 4.9: Malha livre da Viga-parede – ANSYS. ....	81
Figura 4.10a: Tensão principal $\sigma_I$ . ....	81
Figura 4.11: Representação vetorial dos esforços da viga-parede - ANSYS.....	83
Figura 4.12: Malha livre refinada da Viga-parede – ANSYS. ....	83
Figura 4.13: Representação vetorial das tensões na viga-parede com a malha refinada-ANSYS. ....	84

Figura 4.14a: Deslocamento em x. ....	86
Figura 4.15: Dimensões do consolo curto (cm).....	87
Figura 4.16: Malha livre do consolo curto - ANSYS.....	87
Figura 4.17a: Tensão principal $\sigma_1$ . ....	88
Figura 4.18: Representação vetorial do consolo curto - ANSYS.....	89
Figura 4.19a: Deslocamento em x. ....	92
Figura 4.20: Dimensões do bloco de fundação com duas estacas de concreto (cm). ....	93
Figura 4.21: Discretização do bloco de fundação - ANSYS. ....	93
Figura 4.22a: Tensão principal $\sigma_1$ . ....	94
Figura 4.23: Representação vetorial do bloco de fundação - ANSYS. ....	95
Figura 4.24a: Deslocamento em x. ....	97
Figura 4.25: Dimensões da sapata rígida (cm). ....	98
Figura 4.26: Malha da sapata rígida com 25 divisões - ANSYS.....	99
Figura 4.27a: Tensão principal $\sigma_1$ . ....	99
Figura 4.28: Representação vetorial da sapata rígida com 25 divisões - ANSYS.....	100
Figura 4.29a: Deslocamento em x. ....	103

# Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Incidências da região analisada. ....	58
Tabela 4.1: Tensões $\sigma_x$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	76
Tabela 4.2: Tensões $\sigma_y$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	76
Tabela 4.3: Tensões $\tau_{xy}$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	76
Tabela 4.4: Tensão principal $\sigma_1$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	77
Tabela 4.5: Tensão principal $\sigma_2$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	77
Tabela 4.6: Verificação das tensões de fissuras (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	78
Tabela 4.7: Tensões $\sigma_x$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	84
Tabela 4.8: Tensões $\sigma_y$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	85
Tabela 4.9: Tensões $\tau_{xy}$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	85
Tabela 4.10: Tensão Principal $\sigma_1$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	85
Tabela 4.11: Tensão Principal $\sigma_2$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	86
Tabela 4.12: Tensões $\sigma_x$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	90
Tabela 4.13: Tensões $\sigma_y$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	90
Tabela 4.14: Tensões $\tau_{xy}$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	90
Tabela 4.15: Tensão Principal $\sigma_1$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	91
Tabela 4.16: Tensão Principal $\sigma_2$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	91
Tabela 4.17: Área de aço (cm <sup>2</sup> ). ....	92
Tabela 4.18: Número de barras ( $\phi = 12,5\text{mm}$ ). ....	92
Tabela 4.19: Tensões $\sigma_x$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	95
Tabela 4.20: Tensões $\sigma_y$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	96
Tabela 4.21: Tensões $\tau_{xy}$ (kN/cm <sup>2</sup> ). ....	96

Tabela 4.22: Tensão Principal $\sigma_1$ (kN/cm <sup>2</sup> ). .....	96
Tabela 4.23: Tensão Principal $\sigma_2$ (kN/cm <sup>2</sup> ). .....	97
Tabela 4.24: Área de aço (cm <sup>2</sup> ). .....	98
Tabela 4.25: Número de barras ( $\phi = 20\text{mm}$ ). .....	98
Tabela 4.26: Tensões $\sigma_x$ (kN/cm <sup>2</sup> ). .....	101
Tabela 4.27: Tensões $\sigma_y$ (kN/cm <sup>2</sup> ). .....	101
Tabela 4.28: Tensões $\tau_{xy}$ (kN/cm <sup>2</sup> ).....	102
Tabela 4.29: Tensão Principal $\sigma_1$ (kN/cm <sup>2</sup> ). .....	102
Tabela 4.30: Tensão Principal $\sigma_2$ (kN/cm <sup>2</sup> ). .....	102



# Lista de Siglas

D.Sc	Doutor em Ciências
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFSJ	Universidade Federal de São João Del Rei
OB	Ouro Branco
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PROPEC	Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil
MEF	Método dos Elementos Finitos
CST	Constant Strain Triangle
DECIV	Departamento de Engenharia Civil
CFC	Fibra de Carbono
CFRP	Polímeros Reforçados com Fibras de Carbono
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
NBR	Norma Brasileira
HSC	Concreto de Alta Resistência
ANLOG	Análise Não-Linear de Obras Geotécnicas
DMT	dilatômetro de Marchetti
PMT	pressiométricos de Menard
RS	Rio Grande do Sul
ELU	Estado Limite Último
ACI	American Concrete Institute

# Lista de Símbolos

$R_{cd}$	Reação de apoio
$\sigma_{c,lim}$	Tensão de compressão limite
$f_{cd}$	Tensão de compressão de cálculo do concreto
$f_{ck}$	Tensão de compressão característica do concreto
$F_b$	Esforço de compressão
$F_t$	Esforço de tração
$\alpha$	Inclinação das bielas comprimidas
$z$	Braço de alavanca
$A_s$	Area de aço da armadura
$a_0$	Dimensão do pilar na direção da maior dimensão do bloco de fundação
$A_{pilar}$	Área da seção transversal do pilar
$A_{biela}^P$	Área da base do pilar
$N_d$	Esforço normal atuante
$V_d$	Esforço cortante atuante
$a$	Distância da força aplicada até a face do pilar
$d$	altura útil do elemento
$a_{bie}$	Área da biela comprimida
$h_{bie}$	Altura da biela comprimida
$\sigma_{cd}$	Tensão de compressão na biela
$\beta$	Coeficiente do valor limite de tensão na biela
$\tau_{wu}$	Tensão tangencial de referência

$l$	Comprimento do vão
$\beta$	Ângulo que as linhas de fissuras formam com a horizontal
$\tau_{máx}$	Tensão tangencial máxima
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensão principal
$V_{Rd2}$	Resistência das diagonais comprimidas
$V_{Rd3}$	Resistência de tração diagonal
$V_c$	Parcela de resistência à tração devido ao concreto
$V_{sw}$	Parcela de resistência à tração devido às armaduras transversais
$h$	Altura da sapata
$a$	Dimensão da sapata em uma determinada direção
$a_p$	Dimensão do pilar na mesma direção
$\alpha_0$	Rigidez da sapata
$\tau_{Sd}$	Tensão de cisalhamento solicitante de cálculo
$V_l$	Força cortante no perímetro do pilar
$u_p$	Perímetro ao longo do contorno do pilar
$\tau_{Rd2}$	Tensão de cisalhamento resistente de cálculo
$\phi_{ij}$	Função de interpolação para o elemento $i$
$\mathbf{N}$	Matriz função de forma
$N_i$	Função de forma para o elemento $i$
$\xi$	Coordenada natural Ksi
$\eta$	Coordenada natural eta
$\mathbf{u}$	Vetor deslocamento
$u$	Deslocamento em $x$

$v$	Deslocamento em $y$
$A_i$	Área do triângulo $i$
$U$	Energia de deformação interna
$V$	Energia potencial das forças externas
$\mathbf{f}$	Vetor força de corpo
$f_x$	Força de corpo na direção de $x$
$f_y$	Força de corpo na direção de $y$
$\mathbf{T}$	Vetor força de superfície
$T_x$	Força de superfície na direção de $x$
$T_y$	Força de superfície na direção de $y$
$\mathbf{P}$	Vetor de carga pontual
$P_x$	Carga pontual na direção $x$
$P_y$	Carga pontual na direção de $y$
$dA$	Elemento infinitesimal de área
$dL$	Elemento infinitesimal de comprimento
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor deformação específica
$\varepsilon_x$	Deformação normal na direção de $x$
$\varepsilon_y$	Deformação normal na direção de $y$
$\gamma_{xy}$	Deformação cisalhante no plano $xy$
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor tensão
$\sigma_x$	Tensão normal na direção $x$
$\sigma_y$	Tensão normal na direção $y$
$\tau_{xy}$	Tensão cisalhante em $xy$

$\nu$	Coeficiente de Poisson
$E$	Módulo de elasticidade
$\mathbf{D}$	Matriz que relaciona as tensões com as deformações
$\mathbf{Q}$	Vetor deslocamento global
$Q_{2j-1}$	Deslocamento global na direção de x
$Q_{2j}$	deslocamento global na direção de y
$\mathbf{q}$	vetor deslocamento local
$q_{2j-1}$	Deslocamento local na direção de x
$q_{2j}$	Deslocamento local na direção de y
$\mathbf{J}$	Matriz jacobiana
$\mathbf{J}^{-1}$	Inversa da matriz jacobiana
$A_e$	Área do elemento triangular
$U_e$	Energia de deformação do elemento
$\mathbf{B}$	Matriz de deformação específica-deslocamento do elemento
$\mathbf{C}$	Matriz de cofatores
$\mathbf{K}$	Matriz rigidez do elemento
$\mathbf{F}$	Vetor força de carga nodal
$F_x$	Carga nodal na direção x
$F_y$	Carga nodal na direção y
$l_{1-2}$	Comprimento da superfície do triangulo exposta a carregamento
$\Pi$	Funcional exato

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

A concepção de projetos estruturais estabelece três propósitos: economia, tempo de execução e segurança. Para se atingir o equilíbrio entre esses fatores há uma ampla quantidade de materiais e métodos disponíveis no mercado, que são abordados em vários temas de pesquisas em todo o mundo. Tratando-se dos elementos estruturais, o aço e o concreto são os materiais mais utilizados. Esses elementos apresentam comportamentos estruturais distintos, mas que se completam quando trabalham em conjunto, visto que o aço possui boa resistência à tração e o concreto à compressão.

Muitas vezes em uma análise estrutural o projetista é forçado a propor uma solução simplificada para um problema que requer uma análise mais específica, devido aos prazos reduzidos impostos pelo mercado. Esse fato pode acarretar em um superdimensionamento dos elementos estruturais gerando um gasto excessivo de materiais ou até mesmo levar o sistema estrutural à ruptura.

O Método dos Elementos Finitos (MEF), concebido na década de 50, vem sendo utilizado com grande sucesso na engenharia estrutural. Existe uma infinidade de softwares com poderosos pós-processadores e com os mais avançados modelos construtivos para o tratamento do concreto armado (SOUZA, 2006). Em uma modelagem utilizando o MEF é necessário que se faça um levantamento dos parâmetros a serem considerados e uma análise cuidadosa da aplicação dos carregamentos e das condições de contorno, para que se possa realizar uma análise precisa e confiável dos resultados obtidos.

O Modelo de Bielas e Tirantes vem como uma alternativa para solucionar casos específicos em que não se aplica a hipótese de Bernoulli ou hipótese das seções planas. Este procedimento permite identificar as regiões da estrutura que exibem comportamento diferenciado em relação às distribuições de tensões e deformações. Neste trabalho serão

analisados por meio do Modelo de Bielas e Tirantes via MEF, os seguintes casos: consolos curtos, vigas-parede, sapatas rígidas, blocos de fundação sob duas estacas e viga sob flexão segundo o modelo proposto por MONTROYA *et al.* (1991).

O estudo levará em consideração que os materiais se comportam de maneira elástico-linear. Nesse caso, após sofrer deformações, a estrutura tende a retornar ao seu estado original quando o carregamento externo for cessado. Além disso, há uma relação linear entre as componentes de tensão e deformação do material, conhecida como módulo de elasticidade (FONTES, 2005).

É importante ressaltar que nessa pesquisa será utilizada a formulação isoparamétrica do Método dos Elementos Finitos, na qual as funções de forma dos elementos são dadas no sistema local de coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$  (VICENTE & OLIVEIRA, 2009).

## 1.2 Motivação

Os projetos estruturais apresentam diversos elementos que possuem distribuição de tensão não linear. Seu comportamento deve ser estudado para que a segurança de todo um conjunto estrutural seja garantida.

O Modelo de Bielas e Tirantes permite obter o detalhamento de estruturas em concreto armado com maior precisão, visto que essas estruturas suportam os carregamentos aos quais estão submetidos por meio de um conjunto de campos de tensões de compressão, sendo interligadas por tirantes tracionados que garantem o equilíbrio do sistema. Dessa forma é possível realizar análises e obter o dimensionamento mais adequado para uma estrutura, substituindo procedimentos empíricos e regras baseadas na experiência por uma metodologia racional de projeto.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) será a base deste estudo que irá descrever o comportamento dos consolos curtos, vigas-parede, sapatas rígidas, bloco de fundação e da viga desenvolvida por MONTROYA *et al.* (1991). Esse método permite generalizar, de uma maneira computacionalmente muito eficaz, a formulação de elementos com diferentes graus de aproximação do campo de deslocamentos. Permitindo, de forma eficiente, conhecer os valores das tensões principais nas quais a estrutura está submetida. Consequentemente, é possível minimizar os casos de superdimensionamento de

estruturas, alcançando uma solução satisfatória, quer em termos econômicos ou na verificação dos pré-requisitos funcionais e regulamentares.

### 1.3 Objetivo

O presente trabalho tem como principal objetivo realizar análises numéricas elástico-lineares. Para isso foi desenvolvido um programa computacional destinado à implementação numérica do Modelo de Bielas e Tirantes, utilizando-se uma formulação baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF). Com este modelo será possível analisar o comportamento de elementos estruturais como blocos de fundação, vigas-parede, consolos curtos, sapatas rígidas, representar também os valores de tensões, deformações e deslocamentos na região de uma viga representada como o Modelo de bielas desenvolvido por MONTROYA *et al.* (1991). Adicionalmente, foi modelada numericamente via MEF uma viga-parede com uma grande abertura, estudada por SCHLAICH *et al.* (1987).

O programa computacional será implementado em linguagem computacional FORTRAN 90 e serão adotados os elementos finitos triangulares, conhecidos como *Constant Strain Triangle* (CST), devido a sua simplicidade de emprego e oferecer resultados satisfatórios.

Com o fim de validar as implementações realizadas serão feitas modelagens numéricas com o auxílio do software ANSYS 17. Através das análises realizadas busca-se obter os deslocamentos nodais para a verificação de possíveis deformações excessivas que geram fissuras nos elementos, além dos valores das tensões no centroide de cada elemento finito, bem como, as tensões principais que permitem identificar as regiões que estão comprimidas (bielas) e as regiões tracionadas (tirantes). E por fim, determinar se há a formação de trincas em diferentes regiões das peças de concreto e dimensionar a armadura de aço tracionada. Essas trincas se formarão sempre que as tensões principais de tração forem maiores que a resistência do concreto à tração.

Por fim, esta dissertação está relacionada com as seguintes linhas de pesquisa do PROPEC/DECIV/EM/UFOP, a saber: Mecânica Computacional e Comportamento e Dimensionamento de Estruturas.



## 1.4 Pesquisa Bibliográfica

O modelo de Bielas e Tirantes vem sendo associado ao dimensionamento e análise de elementos estruturais especiais desde o início do século XX, quando RITTER e MÖRSCH introduziram a clássica “Analogia da Treliça”. Ao longo de várias décadas, numerosos pesquisadores utilizam esse método em suas análises, e em alguns casos, sugeriram modificações ao modelo original com o intuito de aperfeiçoá-los e adequá-los aos resultados experimentais. A seguir, encontram-se diversos trabalhos relacionados aos casos que serão analisados nesse estudo.

### 1.4.1 Consolos Curtos

CORRY & DOLAN (2001) desenvolveram uma pesquisa que avaliou o comportamento de um consolo curto de concreto armado reforçado com CFC. Por meio da pesquisa ficou evidente a importância da utilização de no mínimo duas camadas de reforço que proporciona uma maior proteção na região fissurada, onde ocorre a redistribuição das solicitações.

ELGWADY *et al.* (2002) ensaiaram seis consolos curtos reforçados com CFC, com o objetivo de estudar a eficiência desse material no aumento da capacidade resistente desses elementos estruturais.

FERNANDES & DEBS (2005) realizaram análises para verificar a capacidade resistente de consolos de concreto armado considerando a contribuição da armadura de costura. Diversos estudos experimentais da literatura comprovam que a armadura de costura aumenta a capacidade resistente dos consolos, além de melhorar o comportamento da estrutura quanto à fissuração e ductilidade. O trabalho propôs dois procedimentos de cálculo pelo Método de Biela e Tirante considerando a altura efetiva de cada barra de costura, validando através de 245 aplicações em consolos. A primeira proposta foi baseada em HAGBERG (1983) e a segunda baseada em LEONHARDT & MÖNNIG (1977). Vale ressaltar que 98% das análises apresentaram resultados a favor da segurança, para os casos de consolos com costura.

RIBEIRO *et al.* (2006) buscou avaliar o comportamento de consolos curtos reforçados à flexão e ao cisalhamento com CFRP ensaiando quatro consolos e utilizando a metodologia do Modelo das Bielas e Tirantes, sendo um de referência (CCR-01) e três

com configurações diferentes de reforço (CRF-20, CRF-30 e CRF-40). Verificou-se que o reforço estrutural aumentou a capacidade resistente dos consolos curtos em até 26%, sendo que a configuração CRF-40 que utilizou tiras de CFRP dispostas diagonalmente a (45°) apresentou os melhores resultados.

TROTTA (2012) realizou um estudo experimental do comportamento de uma ligação viga-pilar em concreto pré-moldado utilizando perfis metálicos embutidos nos elementos estruturais, que permite a transmissão dos momentos fletores positivos e negativos. Observou-se que o consolo metálico chegou ao escoamento antes de atingir a capacidade resistente dos outros elementos da ligação, pois na seção da ligação, apenas o consolo resiste à flexão.

SANTOS & VIEIRA (2016) desenvolveram um software para o dimensionamento de consolos curtos de concreto armado, utilizando o Método de Bielas e Tirantes e baseado na ABNT NBR 9062:2006. Desenvolveu-se um exemplo do livro do modelo de Bielas e Tirantes aplicado a estruturas de concreto armado (SILVA & GIONGO, 2000), realizando o dimensionamento pelo modelo de HAGBERG e comparando com os resultados obtidos pelo programa. Foram obtidos resultados precisos que validam o funcionamento do software.

#### **1.4.2 Vigas-parede**

FILHO (1996) realizou o detalhamento das estruturas de concreto pelo Método das Bielas e Tirantes. Foi projetada uma viga-parede com uma grande abertura, conforme desenvolvida por SCHLAICH *et al.* (1987).

SOUZA *et al.* (2003) desenvolveu um estudo com o propósito de apresentar a análise e o dimensionamento de uma viga-parede complexa utilizando o método de Bielas e Tirantes. As verificações feitas com auxílio do Método dos Elementos Finitos e com o programa DIANA indicaram um desempenho satisfatório para o elemento analisado. Porém, levando em consideração a armadura mínima exigida pela maioria dos códigos de concreto estrutural, concluiu-se que o Método das Bielas e Tirantes pode não ser uma solução adequada para o dimensionamento das “Regiões D”, que segundo SCHÄFER & SCHLÄICH (1988, 1991), são regiões em que a Hipótese de Bernoulli não pode ser aplicada, isto é, a distribuição de deformações ao longo do elemento ocorre de forma não linear.

SANTOS (2006) realizou a análise de vigas de concreto armado utilizando Modelos de Bielas e Tirantes. Os resultados permitiram realizar comparações com os resultados realizados segundo critérios da NBR 6118:2003 e do MC CEB-FIP (1990), o que possibilitou a identificação de aspectos de maior dificuldade na concepção de um modelo de bielas e tirantes e os pontos críticos dos mesmos, nos quais, há maior possibilidade de falha nas verificações.

PANTOJA *et al.* (2010) avaliaram o desempenho do Modelo de Bielas e Tirantes via análise de confiabilidade. O método permite apreciar as incertezas inerentes ao carregamento atuante e às respectivas resistências do concreto e do aço da estrutura analisada. Os índices de confiabilidade são obtidos para mostrar a validade da formulação.

NEPOMUCENO (2012) realizou a análise de vigas-parede aplicando o Modelo de Bielas e Tirantes e Micro Treliça. Duas propostas analíticas foram analisadas, a predição da carga última com o software CAST e a análise não linear com o software *Micro-Truss Analyzer*. Os resultados analíticos foram seguros e puderam prever o modo de ruptura de maneira adequada.

ALMEIDA *et al.* (2013) realizou a análise do Modelo de Bielas e Tirantes para estruturas de concreto armado via uma técnica da otimização topológica para identificar o fluxo de tensões na estrutura, definindo a configuração dos membros de bielas e quantificando os valores para realizar o dimensionamento. Os resultados obtidos foram comparados e validados com trabalhos científicos pioneiros sobre o assunto.

SIMÃO (2014) realizou uma análise e dimensionamento de vigas de concreto armado com aberturas na alma utilizando o Método de Bielas e Tirantes submetidas a um carregamento distribuído ao longo do comprimento. Verificou-se que é possível realizar o dimensionamento das vigas com abertura sem que haja redução da capacidade de carga, e que a redução da rigidez pode ser controlada de modo a garantir um correto comportamento estrutural.

HARDJASAPUTRA (2015) desenvolveu um estudo demonstrando como o Modelo de Bielas e Tirantes pode ser utilizado em vigas-parede com alturas e aberturas diferentes utilizando técnicas evolutivas de otimização estrutural.

FRANCO (2015) realizou comparação entre diferentes metodologias de cálculo para viga-parede, visto que, esses elementos estruturais possuem regiões que não atendem à

hipótese das seções planas. O Método das Bielas e Tirantes e o Método Corda-Painel foram utilizados nas análises e comparados com resultados provenientes de análises experimentais efetuadas através dos estudos desenvolvidos por LEONHARDT & WALTHER (1966).

SHURAIM & EL-SAYED (2016) realizaram uma verificação experimental do Modelo de Bielas e Tirantes para vigas-parede com concreto de alta resistência (HSC) sem armadura de cisalhamento. Foi realizado um total de 18 análises em vigas-parede, testadas em quatro pontos de flexão até a falha. A capacidade de carga das vigas-paredes obtidas pelo Método de Bielas e Tirantes foram comparadas com os resultados experimentais, obtendo bons resultados e boa capacidade de carga para as vigas-parede sem armadura de cisalhamento.

### **1.4.3 Bloco de Fundação**

MIGUEL (2000) analisou blocos sobre três estacas, verificando o desenvolvimento de fissuras e o modo de ruína através de ensaios experimentais em escala real e análises numéricas tridimensionais e não linear. Estas análises se concentram no progresso das tensões normais principais, das deformações totais e plásticas principais e nos deslocamentos relativos às forças características e de cálculo.

MUNHOZ (2004) analisou o comportamento de blocos de concreto armado sobre estacas submetidas à ação de força centrada. Utilizaram-se resultados obtidos por meio de modelos analíticos e realizou-se uma análise numérica utilizando-se um programa baseado no Método dos Elementos Finitos considerando o comportamento do material como elástico linear. Verificou-se que o método de treliça utilizado em projetos é simplificado, sugerindo a utilização de um Modelo de Bielas e Tirantes mais refinado.

SOUZA (2006) realizou análise e dimensionamento de elementos especiais em concreto armado utilizando o Método dos Elementos Finitos e o Método das Bielas. Tendo como objetivo investigar a aplicabilidade dos métodos citados, estabelecendo recomendações práticas no desenvolvimento de projetos estruturais complexos em qualquer forma geométrica.

EBELING (2006) analisou a base de pilares pré-moldados na ligação com cálice de fundação, visando preencher a falta de informações sobre o comportamento da base de pilares na região do embutimento. Foram ensaiados dois modelos em que os cálices de

fundação possuem interface de contato lisa com comprimentos de embutimento diferentes. A simulação numérica foi realizada pelo Método dos Elementos Finitos considerando a não linearidade física, geométrica e de contato. Comparando os resultados de ambas as análises, é possível determinar os deslocamentos, deformações na armadura principal e transversal, fissuração e fluxo de tensões, prevendo que a ruína dos modelos ocorre por plastificação da armadura longitudinal tracionada.

CAMPOS (2007) analisou experimentalmente blocos de fundação sobre duas estacas, sob carregamento centrado, para estruturas pré-fabricadas. Na ligação pilar-fundação foi utilizado cálice de fundação com interface rugosa e a transmissão dos esforços entre o pilar e as estacas foi feita a partir da implementação do Modelo de Bielas e Tirantes. O objetivo principal da análise é observar a colaboração do comprimento embutido do pilar para o dimensionamento da base do bloco, e também as diferenças na formação dos campos e nas trajetórias de tensões.

SAKAI (2010) realizou a análise de blocos de concreto armado sobre estacas. Demonstrou a relação entre métodos de cálculo de reações nas estacas e tensões nos blocos de estacas envolvidas pelo solo através de análise numérica baseada no Método dos Elementos Finitos. Verificou-se a importância da interação solo-estrutura no estudo dos blocos rígidos e que há maior concentração de reações nas estacas laterais, e não nas centrais como é proposto por alguns métodos simplificados.

FILHO (2010) analisou o comportamento de blocos sobre quatro estacas com cálice embutido para ligação com pilar pré-moldado. Os resultados indicam a ocorrência de transferência de esforços do pilar para a fundação a partir das paredes do cálice, com intensidade insuficiente para a formação das bielas de compressão, surgindo o risco da punção nos blocos abordados.

FILHO *et al.* (2011) avaliaram dois modelos de bielas e tirantes para o dimensionamento de blocos de fundação sobre quatro estacas com cálice embutido com interfaces lisas. O primeiro modelo foi adaptado ao modelo proposto da literatura para sapata com cálice embutido. Já o segundo, é semelhante ao modelo usual utilizado para blocos ligados a pilares monoliticamente, considerando uma redução da altura da treliça espacial devido à limitação de transferência de tensões de cisalhamento nas paredes da interface da ligação.

MUNHOZ & GIONGO (2011) realizaram uma análise do comportamento estrutural de blocos rígidos sobre estacas solicitadas por força vertical, horizontal e momento fletor.

Desenvolveu-se uma análise numérica não linear utilizando o Método dos Elementos Finitos. A distribuição do fluxo das tensões principais foi analisada, permitindo a criação de modelos mais refinados utilizando o Modelo de Bielas e Tirantes.

TANNO (2012) realizou um estudo analítico e uma análise numérica linear para blocos de concreto sobre estacas posicionadas nas divisas de terrenos, apresentando soluções para a execução de projetos.

BARROS & GIONGO (2012) realizaram um estudo teórico do comportamento de blocos de fundação sobre duas estacas com cálice externo e embutido em uma abordagem numérica. Assim, podendo prever a força última suportada pelos modelos utilizando uma analogia de bielas e tirantes. Uma análise tridimensional no programa DIANA foi desenvolvida considerando o efeito da não linearidade física dos materiais (concreto e aço).

BARROS (2013) estudou o comportamento de blocos de concreto armado sobre duas estacas com cálice externo, parcialmente embutido e utilizado na ligação pilar-fundação de estruturas de concreto pré-moldado, submetida à ação de força centrada. Foi apresentado um estudo experimental e numérico em escala reduzida 1:2, considerando conformação das paredes do cálice e do pilar com e sem rugosidade. A análise numérica tridimensional foi desenvolvida utilizando um programa baseado no Método dos Elementos Finitos considerando a não linearidade física dos materiais.

OLIVEIRA *et al.* (2014) desenvolveram uma simulação numérica e dimensionamento pelo Método de Bielas e Tirantes para blocos de concreto armado sobre seis estacas. Levaram em consideração a deformabilidade do solo de apoio das estacas, diferentes resistências para o concreto e pilares com seções transversais quadradas e retangulares, submetidos a um carregamento centrado.

#### **1.4.4 Sapata Rígida**

BURNIER (2006) analisou numericamente duas provas de cargas em sapatas por meio do método dos elementos finitos utilizando os programas SIGMA/W da Geo-Slope International Ltd. e ANLOG (Análise Não-Linear de Obras Geotécnicas) desenvolvido por NOGUEIRA (1998). Na modelagem do comportamento tensão-deformação do solo foram utilizados os seguintes modelos: linear e elástico, não-linear e elástico (hiperbólico), elástico-perfeitamente-plástico de Mohr Coulomb e elasto-plástico de lade-

kim. Os parâmetros utilizados para os modelos foram obtidos por ensaios triaxiais e edométricos realizados por GOUVÊA (2000) e por DUARTE (2006). Os resultados das análises foram comparados com resultados experimentais, sendo que o modelo hiperbólico forneceu as melhores comparações para a análise com os dados de DUARTE (2006). Já para os dados de GOUVÊA (2000) o modelo de Mohr-Coulomb obteve melhor representatividade na curva de tensão-recalque. Em relação aos programas utilizados, o programa ANLOG teve um melhor desempenho comparado com os resultados do programa SIGMA/W.

OLIVEIRA (2011) desenvolveu um programa computacional para a realização de projeto estrutural de sapatas rígidas isoladas com base quadrada ou retangular submetidas a esforços de compressão ou tração, tendo como base a ABNT NBR 6118:2007- Projeto de Estruturas de Concreto: procedimento - e a ABNT NBR 6122:2010 – Projeto e Execução de Fundações. O programa foi desenvolvido utilizando a linguagem de programação Visual Basic. A partir dos dados de entrada o programa fornece a área de aço necessária para resistir aos esforços solicitantes e o respectivo detalhamento da sapata. Como validação, o programa apresentou bons resultados para os exemplos propostos.

DUARTE *et al.* (2012) analisaram a capacidade de carga de uma sapata rígida em solo residual maduro de gnaiss. Avaliaram as metodologias usuais utilizadas para prever a capacidade de carga e tensões admissíveis para fundações rasas e rígidas. Para isso foi realizada uma prova de carga em uma sapata quadrada de 0,80m de lado, com 0,5m de profundidade. Para a determinação das características mecânicas do solo, foram executados os seguintes ensaios de campo: investigação de simples reconhecimento (SPT), dilatômetro de Marchetti (DMT) e pressiométricos de Menard (PMT). Em laboratório realizaram-se os ensaios de caracterização física e determinação das características de tensão-deformação e resistência, em amostras deformadas e indeformadas no solo. Com o estudo verificou-se que os métodos que utilizam informações “de campo” fornecem bons resultados.

ABBAD (2014) realizou um estudo comparativo entre a utilização de estaca escavada e sapata isolada em uma edificação na cidade de Santa Maria – RS, levando em consideração todas as variáveis que cada tipo de solução envolve. Com isso, verificou-se que as fundações do tipo sapata isolada apresentam melhores resultados e melhor custo benefício, apesar de terem como ponto negativo maior tempo de execução.

VIEIRA (2014) desenvolveu o dimensionamento geotécnico e estrutural de sapatas rígidas com dimensões usuais em projetos de residências unifamiliares. O dimensionamento foi realizado seguindo critérios utilizados pelas normas ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6122: 2010, comparando com os resultados de um programa comercial utilizado na prática de projetos (CYPECAD). As comparações realizadas mostraram que os resultados obtidos pelo programa comercial são mais conservadores.

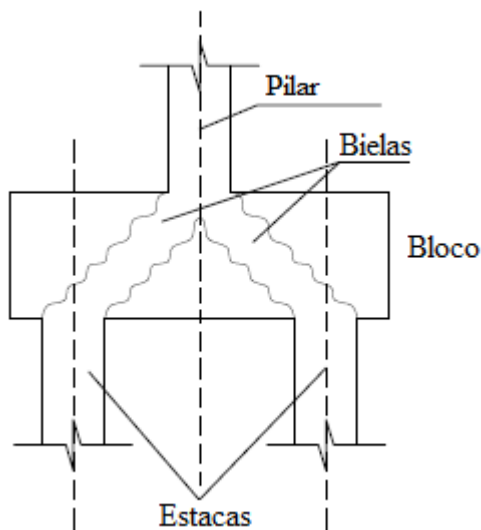
LIMA (2015) realizou uma análise crítica para a utilização de programas computacionais ao realizar projetos estruturais de fundações superficiais usando sapatas centradas. Os métodos literários utilizados foram o CEB-70 e o método das bielas, comparando com resultados do software computacional Eberick V9. Pelas comparações realizadas verificou-se que os métodos literários apresentam melhores taxas de armaduras em relação ao software computacional.



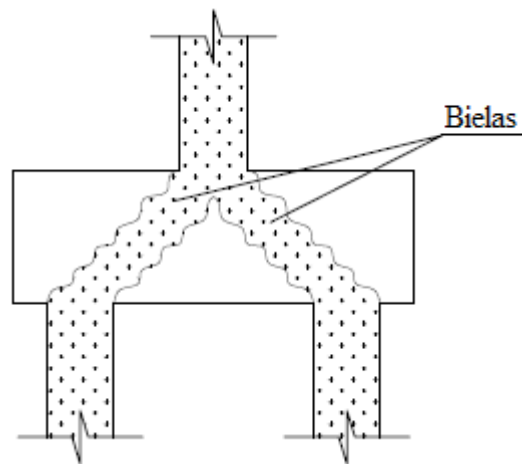
# Modelo de Bielas e Tirantes

## 2.1 Considerações Iniciais

O Modelo de Bielas e Tirantes tem como princípio a idealização que a força do pilar se concentra em algumas regiões do bloco de fundação até chegar às estacas. São formadas zonas de concreto comprimidas (bielas), como Morsch idealizou no caso das vigas. A Figura 2.1 mostra as regiões comprimidas do concreto em um bloco submetido a uma força vertical. Este modelo foi comprovado ao se resolver um bloco análogo utilizando o método dos elementos finitos (DELALIBERA, 2005), que pode ser visto na Figura 2.2, sendo que as tensões principais obtidas estão representadas em um tom mais escuro, comprovando a formação das bielas comprimidas.



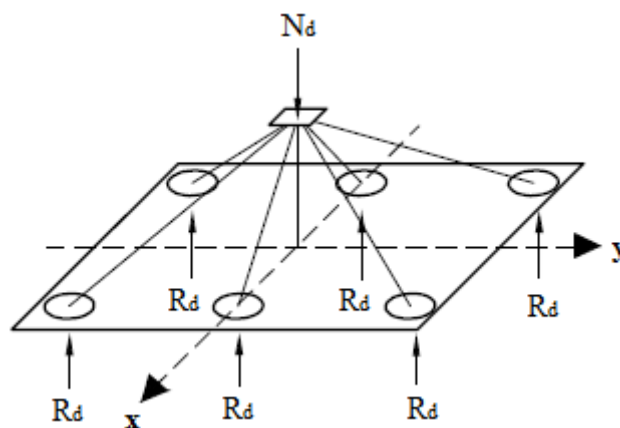
**Figura 2.1:** Modelo idealizado da formação de bielas.



**Figura 2.2:** Modelo desenvolvido por elementos finitos para idealização das bielas.

Logo, o Método de Bielas e Tirantes consiste em admitir que um bloco possui um funcionamento estrutural básico similar à de uma treliça espacial (Figura 2.3), constituído de:

- Barras comprimidas e inclinadas (bielas): constituídas pelo concreto comprimido e responsáveis pela transmissão do carregamento dos pilares para as estacas;
- Barras tracionadas (tirantes): constituídas pelas armaduras principais, situadas nas faixas definidas pelas estacas e logo acima do plano de arrasamento das estacas, junto à face inferior dos blocos.



**Figura 2.3:** Funcionamento estrutural básico do bloco – FUSCO (1995).

Os modelos e conceitos apresentados são embasados em ensaios relatados na bibliografia, e pode-se dizer que se iniciaram com os estudos de HOBBS & STEIN (1957), que analisaram o comportamento de blocos sobre duas estacas de forma analítica e experimental, em setenta modelos em escala 1:3 e de BLÉVOT & FRÉMY (1967), ensaiando 100 blocos em suas análises.

## 2.2 Método de Blévet e Frémy (Blocos de Fundação)

A partir dos resultados obtidos pelos ensaios realizados por BLÉVOT & FRÉMY (1967), deu-se origem a um processo de cálculo para a armadura longitudinal (tirante) e verificação da tensão de compressão na biela, sendo similar ao processo de Biela e Tirante, mas se difere na definição da seção da biela. Este processo tem sido de grande utilidade nas construções brasileiras, apesar da ABNT NBR 6118:2014 não citá-lo explicitamente.

Portanto, o método de Blévet e Frémy, também entendido como o de Biela e Tirante, consiste no cálculo das armaduras tracionadas e verificação da tensão nas bielas de

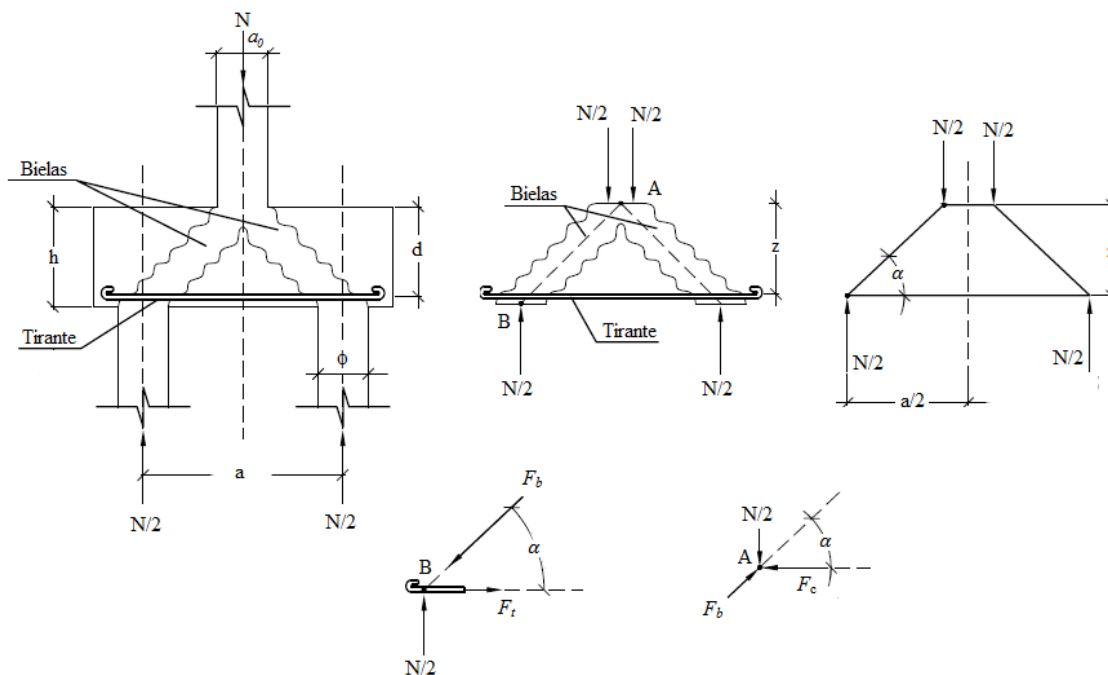
compressão que se desenvolvem no interior do bloco, devendo ser feita junto à base do pilar e junto à cabeça da estaca.

As tensões de compressão obtidas nas duas verificações devem ser inferiores a um valor limite ( $\sigma_{c,lim}$ ) sendo função do número de estacas sob o bloco, do desvio-padrão da resistência do concreto e do efeito Rusch, ou seja:

- Blocos com duas estacas:  $\sigma_{c,lim} = 1,26 f_{cd} = 0,9 f_{ck}$
- Blocos com três estacas:  $\sigma_{c,lim} = 1,58 f_{cd} = 1,125 f_{ck}$
- Blocos com quatro estacas:  $\sigma_{c,lim} = 1,89 f_{cd} = 1,35 f_{ck}$

### 2.2.1 Blocos sobre duas estacas

Blocos rígidos sobre duas estacas formam duas bielas de compressão que transferem a carga dos pilares para as estacas (Figura 2.4). Para resistir às componentes horizontais dessas forças é necessária uma armadura tracionada (tirante) na face inferior do bloco. De acordo com o método de BLÉVOT & FRÉMY (1967), o cálculo do bloco consiste em determinar a área necessária do tirante e verificar se a tensão de compressão das bielas está dentro do limite permitido.



**Figura 2.4:** Bloco rígido sobre duas estacas.

Admitindo que os esforços no pilar e nas estacas no bloco se deem nos pontos A e B respectivamente, cada estaca recebe metade do carregamento atuante no pilar. Isolando o nó B, verifica-se que atua na biela um esforço de compressão  $F_b$  e no tirante (armadura) uma força de tração  $F_t$ .

A partir da componente de força mostrada na Figura 2.4, e fazendo-se o equilíbrio de forças no ponto B, chega-se a:

$$F_b = \frac{N/2}{\sin \alpha} \quad (2.1)$$

$$F_t = \frac{N}{2 \tan \alpha} \quad (2.2)$$

Para se determinar a inclinação da biela ( $\alpha$ ) é preciso obter a posição do nó A, que como se observa na Figura 2.4, dista  $z$  (que é o braço de alavanca) até a armadura do tirante ( $A_s$ ) e, em princípio, está na vertical que passa a  $\frac{a_0}{4}$  do eixo do pilar, sendo  $a_0$  a dimensão do pilar na direção da maior dimensão do bloco.

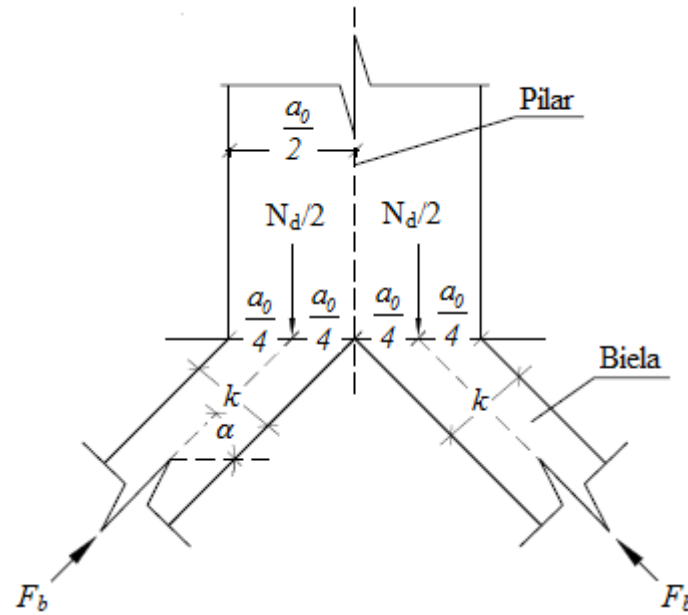
Admitindo-se que o braço de alavanca seja  $z = 0,9 d$ , a tangente do ângulo  $\alpha$  é dada por:

$$\tan \alpha = \frac{0,9 d}{\left(\frac{a}{2} - \frac{a_0}{4}\right)} \quad (2.3)$$

### - Verificações das Bielas de Compressão

Como dito anteriormente, as tensões das bielas comprimidas devem ser verificadas junto à base do pilar e junto à cabeça da estaca. Quando o bloco é projetado dentro das dimensões recomendadas, quase sempre a capacidade de carga é garantida, desde que o ângulo  $\alpha$  fique compreendido entre  $45^\circ$  e  $55^\circ$ .

A tensão nas bielas na base do pilar (ponto A) é verificada pela relação entre as áreas da seção transversal do pilar ( $A_{pilar}$ ) e da biela ( $A_{biela}^P$ ) na base do pilar conforme mostra a Figura 2.5.



**Figura 2.5:** Região junto ao pilar e às bielas de concreto em um bloco de duas estacas.

Chega-se então à seguinte relação:

$$\frac{A_{pilar}}{2} \sin \alpha = A_{biela}^P \quad (2.4)$$

Sendo:

$$A_{pilar} = b a_0 \quad (2.5a)$$

$$A_{biela}^P = b k \quad (2.5b)$$

$$k = \frac{a_0}{2} \sin \alpha \quad (2.5c)$$

Dividindo-se a força na biela dada pela equação 2.1 pela área da biela ( $A_{biela}^P$ ) tem-se a tensão normal na biela junto ao pilar ( $\sigma_{c,biela,P}$ ):

$$\sigma_{c,biela,P} = \frac{N_d}{A_{pilar} \sin^2 \alpha} \quad (2.6)$$

De maneira análoga, a tensão nas bielas junto à estaca pode ser verificada pela relação entre as áreas da seção transversal da estaca ( $A_{estaca}$ ) e da biela ( $A_{biela}^e$ ) junto à estaca, dada por:

$$A_{estaca} \sin \alpha = A_{biela}^e \quad (2.7)$$

Dividindo-se o valor da força atuante na biela no ponto B ( $F_b$ ) dado pela Equação 2.1, pela área da seção transversal da biela ( $A_{biela}^e$ ) tem-se a tensão normal na biela junto à estaca ( $\sigma_{c,biela,e}$ ):

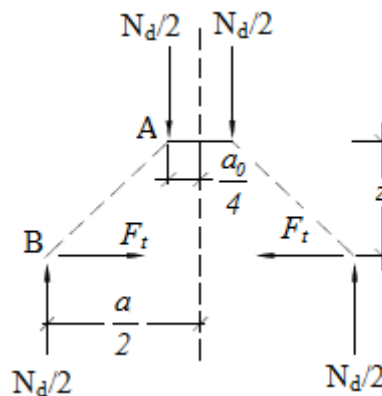
$$\sigma_{c,biela,e} = \frac{N_d}{2 A_{estaca} \sin^2 \alpha} \quad (2.8)$$

Determinadas as tensões para ambos os casos, seus valores devem ser inferiores ao valor limite ( $\sigma_{c,lim}$ ), que para blocos sobre duas estacas é dado por:

$$\sigma_{c,lim} = 1,26 f_{cd} = 0,9 f_{ck} \quad (2.9)$$

#### - Cálculo da armadura principal de tração

A armadura principal de tração, no Estado Limite Último (ELU), pode ser calculada a partir da equação 2.2, sendo a tangente do ângulo de inclinação das bielas ( $\alpha$ ) dado pela equação 2.3,  $F_t$  a força atuante na armadura e  $N_d$  a força de cálculo no pilar, conforme mostra a Figura 2.6.



**Figura 2.6:** Esquema para cálculo da armadura longitudinal.

Como  $F_t = A_s f_{yd}$ , tem-se que a armadura principal de tração ( $A_s$ ) é dada por:

$$A_s = \frac{N_d}{3,6} \frac{a}{f_{yd} d} \left( 1 - \frac{a_0}{2a} \right) \quad (2.10)$$

## 2.3 Consolos de Concreto

O comportamento estrutural dos consolos curtos e muito curtos se difere das vigas, pois não se pode levar em consideração a hipótese da teoria clássica de flexão. Para analisar sua capacidade resistente ou realizar seu dimensionamento, não é possível utilizar os modelos de cálculo de vigas que levam em consideração a hipótese da manutenção das seções planas após sofrerem deformações. Mesmo em considerações que o material seja homogêneo, isotrópico e elástico perfeito, as tensões normais não variam de forma linear ao longo da sua altura e as tensões tangenciais e as normais aos planos ortogonais a essa seção não podem ser desprezadas. Além disso, após a fissuração do concreto ocorre a redução da rigidez do consolo. Desta forma, o projeto desses elementos estruturais deve ser feito obedecendo a recomendações específicas (FERNANDES & EL DEBS, 2005).

Segundo a ABNT NBR-9062:2006, os consolos são calculados seguindo três intervalos da razão entre a distância da força aplicada até a face do pilar ( $a$ ) e a altura útil do consolo ( $d$ ). Logo se chega à seguinte classificação:

- Consolos muito curtos ( $a/d < 0,5$ ): cálculo com Modelo de Atrito-Cisalhamento;
- Consolos curtos ( $0,5 \leq a/d \leq 1,0$ ): cálculo com Modelo de Biela e Tirante;
- Consolos longos ( $1,0 < a/d < 2,0$ ): cálculo como viga.

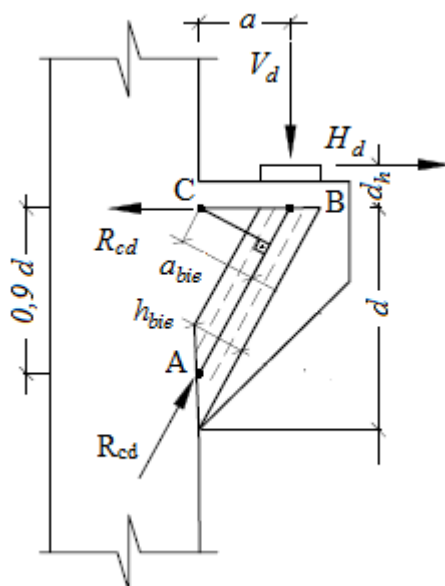
Além da armadura principal do tirante, os consolos apresentam outra armadura de importância relevante e distribuída em direção horizontal ao longo da altura restante do consolo, denominada de armadura de costura. Sua principal finalidade é evitar as fissuras que venham a ocorrer na interface consolo-pilar e promover, quando adequadamente ancorada, um confinamento na biela de compressão, garantindo uma ductilidade à peça.

De uma maneira geral, a armadura de costura não é levada em consideração no cálculo da resistência do consolo. Para o Método de Bielas e Tirantes, apenas a formulação apresentada por MACHADO (1998), que se baseia em HAGBERG leva em consideração

a armadura de costura, concentrando uma altura equivalente igual a  $2d/3$ . Também conhecido como método de treliças, o Modelo de Bielas e Tirantes para consolos curtos consiste em idealizar o comportamento do concreto, nos trechos descontínuos, através das bielas (compressão) e tirantes (tração), com suas posições definidas a partir do fluxo de tensões. Os elementos são conectados por nós, idealizando uma treliça.

O dimensionamento utilizando esse método consiste em verificar a resistência à compressão em uma seção fictícia da biela e calcular a área da armadura do tirante em função da tensão de escoamento do aço.

O modelo clássico consiste no equilíbrio de forças e momentos no esquema de treliça apresentado na Figura 2.7.



**Figura 2.7:** Modelo de análise e características geométricas de consolo curto - LEONHARDT & MÖNNIG adaptado por EL DEBS (1979).

A área ( $a_{bie}$ ) e a altura ( $h_{bie}$ ) da biela comprimida são dadas por:

$$a_{bie} = \frac{0,9 d a}{\sqrt{0,9^2 + a^2}} = \frac{0,9 a}{\sqrt{0,9^2 + (a/d)^2}} \quad (2.11)$$

$$h_{bie} = 0,2 d \quad (2.12)$$

A armadura do tirante é determinada realizando o equilíbrio de momento em relação ao ponto A, resultando na seguinte expressão:



$$A_{stif} f_{yd} = \frac{V_d a + H_d (0,9 d + d_h)}{0,9 d} \quad (2.13)$$

Considerando  $d_h/d$  aproximadamente igual a 0,2, tem-se:

$$A_{stif} = \frac{V_d}{f_{yd}} \frac{a}{0,9 d} + 1,2 \frac{H_d}{f_{yd}} \quad (2.14)$$

Do equilíbrio de momentos em relação ao ponto C, tem-se:

$$R_{cd} = \frac{V_d a + H_d d_h}{a_{bie}} \quad (2.15)$$

Substituindo a equação 2.11 na equação 2.15, tem-se:

$$R_{cd} = \frac{V_d a + H_d d_h}{0,9 d} \sqrt{(0,9)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \quad (2.16)$$

A tensão de compressão na biela ( $\sigma_{cd}$ ) é calculada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{cd} = \frac{R_{cd}}{0,2 b d} \quad (2.17)$$

Substituindo-se a equação 2.16 na equação 2.17, tem-se:

$$\sigma_{cd} = \frac{V_d}{0,18 b d} \left(1 + \frac{H_d d_h}{V_d a}\right) \sqrt{(0,9)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \quad (2.18)$$

Desprezando-se o valor da parcela  $H_d d_h / V_d a$ , pois em casos usuais seu valor é menor que 0,06 e limitando-se o valor da tensão na biela em  $\beta f_{cd}$ , tem-se:

$$\sigma_{cd} = \frac{V_d}{0,18 b d} \sqrt{(0,9)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \leq \beta f_{cd} \quad (2.19)$$

Adota-se  $\beta = 1$  no caso de forças diretas e  $\beta = 0,85$  para forças indiretas.

Passando a expressão 2.19 para a forma de tensão tangencial de referência, obtém-se:

$$\tau_{wu} = \frac{V_d}{bd} \leq \tau_{wu} = \frac{0,18\beta f_{cd}}{\sqrt{(0,9)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2}} \quad (2.20)$$

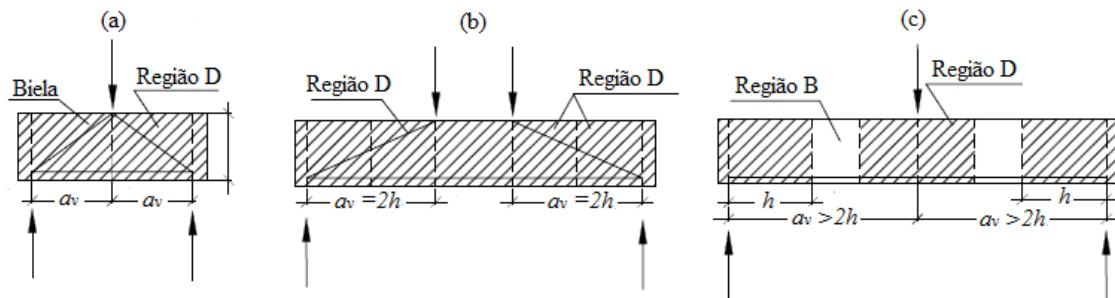
## 2.4 Vigas-Parede

LEONHARDT & MONNIG (1979) definiram vigas-parede como chapas que possuem apoios semelhantes às vigas, e perceberam que para  $l/d \leq 2$  (onde  $l$  representa o vão e  $d$  a altura útil), para vigas com único vão e para  $l/d \leq 3$ , para vigas contínuas, observa-se um comportamento de viga-parede.

Com auxílio do diagrama de deformações  $\epsilon_x$ , LEONHARDT & MONNIG estipularam um limite entre vigas-parede e vigas comuns. Nas vigas-parede não se aplica a Hipótese de Bernoulli, pois as deformações e tensões não se distribuem de forma linear.

A ABNT NBR 6118:2014 classifica as vigas-parede como elementos especiais caracterizados por um comportamento que não se aplica a hipótese das seções planas. Por esse motivo, devem ser dimensionadas por modelos teóricos apropriados, como por exemplo, modelos elásticos, não lineares ou Modelo de Biela e Tirante. As vigas-parede são definidas como estruturas planas verticais apoiadas de modo descontínuo, que apresentam relação  $l/h \leq 2$  para vigas biapoiadas e  $l/h \leq 3$  para vigas contínuas.

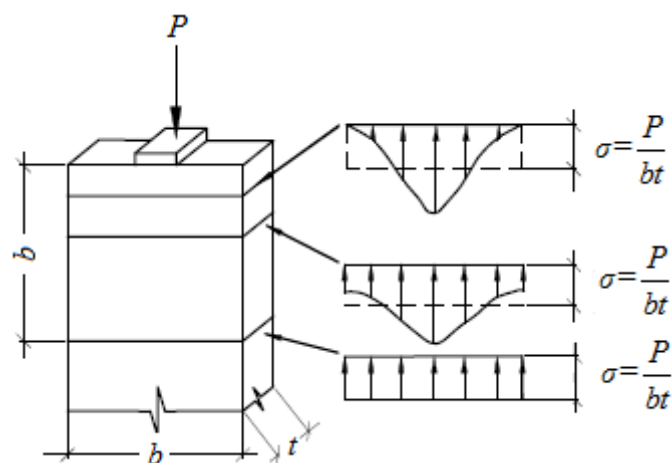
Já a norma americana ACI 318: 2008 define vigas-parede como uma viga cuja parcela significativa do carregamento aplicado é transferida para os apoios por meio de uma biela, que faz a ligação entre a carga e a reação. Esse fenômeno ocorre se uma carga concentrada atua a uma distância  $2d$  ou menor do apoio, onde  $d$  é a altura útil da viga. No caso de vigas submetidas a carregamento uniformemente distribuído percebe-se esse fato quando se tem uma relação entre o comprimento e a altura da viga menor que 4, conforme mostra a Figura 2.8.



**Figura 2.8:** Vão de cisalhamento (a)  $a_v < 2h$  – viga-parede; (b)  $a_v = 2h$  – limite para classificação de uma viga-parede; (c)  $a_v > 2h$  – viga esbelta (ACI 318: 2008).

Em se tratando dos métodos de dimensionamento, o ACI 318: 2008 recomenda a utilização de ferramentas de análise não linear ou por meio do Método de Bielas e Tirantes. Constata-se que a ACI 318: 2008 é mais rigorosa quanto à classificação e a definição das vigas-parede, pois leva em consideração o vão de cisalhamento.

A ACI 318: 2008 têm como base científica o princípio de *Saint Venant* e a subdivisão das estruturas em regiões “B” (distribuição de deformações lineares – Hipótese de Bernoulli) e regiões “D” (distribuição de deformações não lineares). A perturbação causada por uma carga concentrada, reação de apoio ou descontinuidade geométrica, se propaga por uma distância  $b$  do local onde ocorre a perturbação, resultando na regularização de tensões (Figura 2.9). Essa perturbação gera distribuição de tensões e deformações de forma não lineares.



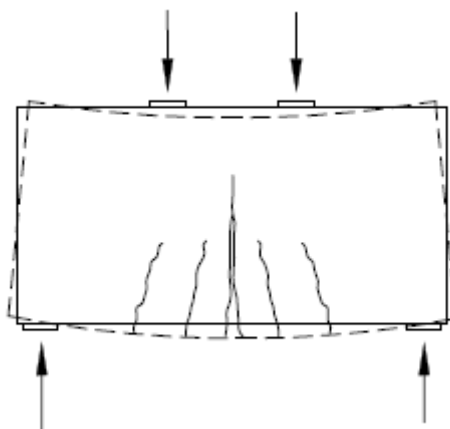
**Figura 2.9:** Princípio de Saint Venant (SAINT VENANT, 1855).

#### 2.4.1 Mecanismos de ruptura de vigas-parede

Quando se tem uma taxa de armadura principal de tração bem distribuída e ancorada, a resistência à flexão de uma viga-parede é sempre superior à de cisalhamento

(GUIMARÃES, 1980), o que induz a estrutura a apresentar uma ruptura por cisalhamento. Por ser uma ruptura frágil e catastrófica, é importante conhecer os modos de ruptura de vigas-paredes:

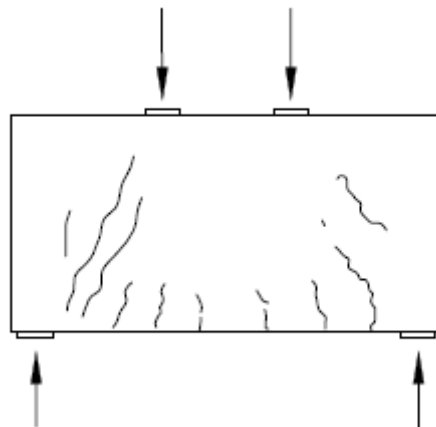
- Ruptura por flexão: ocorre o escoamento da armadura de flexão no meio do vão, com o surgimento de fissuras verticais que se prolongam da base da viga até quase toda altura da viga-parede. A ruptura se dá por escoamento da armadura, podendo ocorrer o esmagamento do concreto. A Figura 2.10 demonstra esse tipo de ruptura.



**Figura 2.10:** Ruptura por flexão em vigas biapoiadas (SANTOS, 1999).

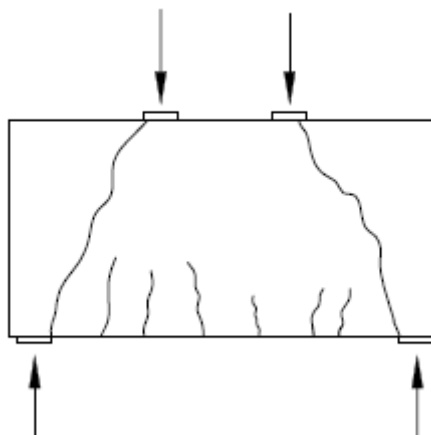
- Ruptura por Cisalhamento: depende da localização e distribuição das cargas aplicadas. No caso de vigas-parede biapoiadas submetidas a um carregamento aplicado no bordo superior, a ruptura tem início com a formação de uma fissura diagonal em ambos os vãos de cisalhamento, próxima aos apoios e que se propaga em direção ao ponto onde foi aplicado o carregamento concentrado ou a  $1/3$  do vão a partir do apoio, quando se tem carga distribuída.

Para vigas-parede biapoiadas, a ruptura é dividida em ruptura por compressão diagonal e tração diagonal ou fendilhamento. Na ruptura por compressão diagonal (Figura 2.11), após o aparecimento da primeira fissura entre o apoio e o ponto de aplicação de carga, surgem novas fissuras paralelas à primeira, formando uma biela comprimida, que é esmagada.



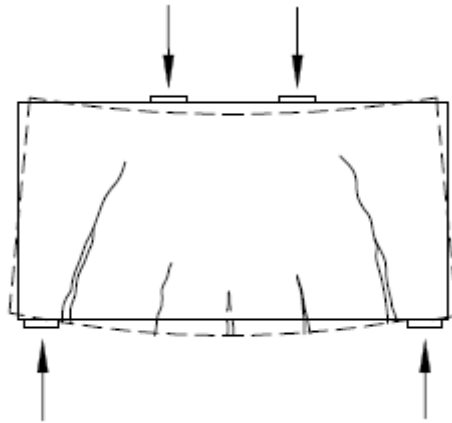
**Figura 2.11:** Ruptura por esmagamento em viga biapoiada (MELO, 1984).

Quando se tem a ruptura por tração diagonal ou fendilhamento (Figura 2.12), ocorre logo após a formação da fissura diagonal, sem que ocorra o esmagamento do concreto. Com o acréscimo de carga, as bielas ficam cada vez mais comprimidas, e conseqüentemente, a tração indireta transversal ao campo de compressão também é aumentada. Essa ruptura é semelhante à ruptura de corpos de prova cilíndricos ensaiados à compressão diametral (MELO, 1984).



**Figura 2.12:** Ruptura por tração diagonal em uma viga biapoiada (MELO, 1984).

- Ruptura por flexão-cisalhamento: ocorre o escoamento da armadura seguido pelo esmagamento do concreto na zona comprimida. A resistência última ao cisalhamento é atingida antes que ocorra o esmagamento total do concreto.



**Figura 2.13:** Ruptura por flexo-cisalhamento em vigas biapoiadas (SANTOS, 1999).

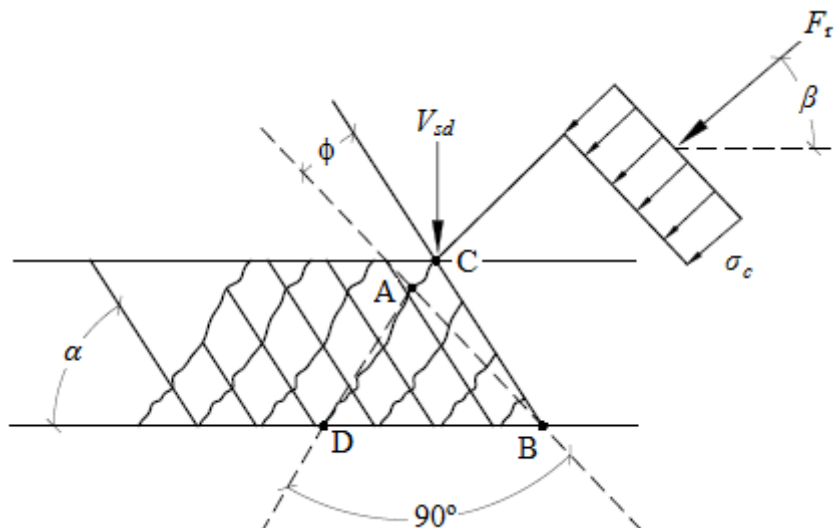
- Ruptura Local: tendo elevados valores de tensão sobre os apoios e/ou locais onde as cargas concentradas são aplicadas, pode ocorrer o esmagamento do concreto antes que toda a capacidade da viga-parede seja atingida (MELO, 1984).

## 2.5 Cálculo das Tensões de Compressão $\sigma_c$ nas Bieladas de Concreto

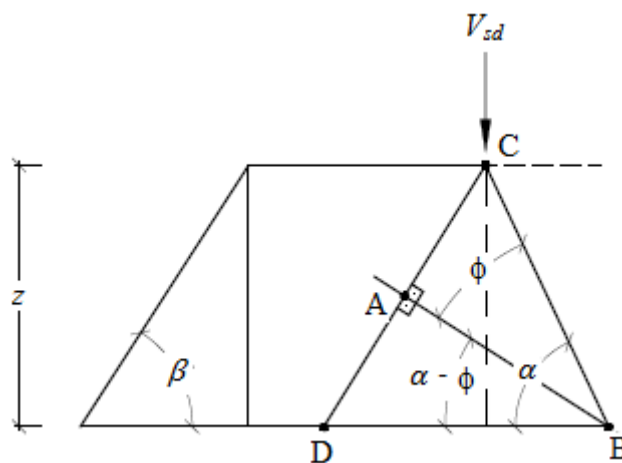
As tensões normais de compressão em uma biela podem ser obtidas, de maneira aproximada, fazendo-se o equilíbrio das forças atuantes em uma seção que corta um conjunto de bieladas.

O modelo desenvolvido por MONTROYA *et al.* (1991) é útil para analisar o comportamento das tensões de compressão nas bieladas de uma viga fletida e para determinar alguns valores limites, especificados pelas normas. Valores mais confiáveis são obtidos apenas por análises experimentais.

Seja uma viga em seu estado de ruptura, seccionada por um plano com inclinação  $\alpha$ , na direção da armadura transversal e com as bieladas inclinadas de um ângulo  $\beta$ , conforme mostra a Figura 2.14. A partir dos elementos conhecidos, relaciona-se o valor do esforço cortante na seção transversal com a da tensão normal de compressão nas bieladas de concreto.



**Figura 2.14:** Viga seccionada por um plano com inclinação  $\alpha$ .



**Figura 2.15:** Representação da parte analisada da viga.

Sendo:

$\alpha$  = ângulo que o plano que intercepta as linhas de fissuras forma com a horizontal.

$\beta$  = ângulo que as linhas de fissuras formam com a horizontal.

Os principais passos para se obter a equação que fornece a tensão de compressão em uma biela, cuja seção é  $AB \times b_w$  serão citados a seguir.

### 2.5.1 Comprimento da seção BC na direção dos estribos

Considerando a representação mostrada na Figura 2.15 e realizando relações trigonométricas adequadas, tem-se que o comprimento  $BC$  é dado por:

$$BC = \frac{z}{\sin \alpha} \quad (2.21)$$

Projetando-se o segmento  $BC$  sobre  $AB$ , normal à direção das bielas, encontra-se que o segmento  $AB$  é dado por:

$$AB = BC \cos \phi \quad (2.22)$$

Substituindo-se a equação 2.21 em 2.22, o comprimento  $AB$  pode ser escrito como:

$$AB = \frac{z}{\sin \alpha} \cos \phi \quad (2.23)$$

Sabendo-se que o triângulo  $ABD$  é retângulo sendo o segmento  $AB$  perpendicular às linhas de fissuras, então:

$$\phi = \alpha + \beta - 90^\circ \quad (2.24)$$

Substituindo-se a equação 2.24 em 2.23, tem-se:

$$AB = \frac{z}{\sin \alpha} \cos(\alpha + \beta - 90^\circ) \quad (2.25)$$

Realizando-se transformações trigonométricas apropriadas, a equação 2.25 pode ser escrita como:

$$AB = z \sin \beta [\cotg \alpha + \cotg \beta] \quad (2.26)$$

A força resultante interna de compressão nas bielas é dada por:

$$F_r = \sigma_c AB b_w \quad (2.27)$$

Na fase de ruptura, a projeção vertical de  $F_r$  é a força cortante  $V_{sd}$  atuante na seção dada por:

$$V_{sd} = F_r \sin \beta \quad (2.28)$$

Substituindo-se a equação 2.27 em 2.28, tem-se:



$$V_{sd} = \sigma_c AB b_w \sin\beta \quad (2.29)$$

Sendo a força cortante  $V_{sd}$  um dado conhecido, tem-se o valor da tensão de compressão das bielas dada por:

$$\sigma_c = \frac{V_{sd}}{AB b_w \sin\beta} \quad (2.30)$$

Substituindo-se a equação 2.26 em 2.30 chega-se a:

$$\sigma_c = \frac{V_{sd}}{b_w z \sin\beta [\cotg \alpha + \cotg \beta] \sin\beta} \quad (2.31)$$

De forma sucinta:

$$\sigma_c = \frac{V_{sd}}{b_w z} \frac{1}{\sin^2\beta [\cotg \alpha + \cotg \beta]} \quad (2.32)$$

Sendo a tensão tangencial máxima ( $\tau_{m\acute{a}x}$ ) de refer\encia na flex\~ao igual a  $\frac{V_{sd}}{b_w z}$ , tem-se:

$$\sigma_c = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{\sin^2\beta [\cotg \alpha + \cotg \beta]} \quad (2.33)$$

Sendo  $z = \frac{d}{1,10}$ , e substituindo-se na equa\~ao 2.32, resulta em:

$$\sigma_c = \frac{1,10 V_{sd}}{b_w d} \frac{1}{\sin^2\beta [\cotg \alpha + \cotg \beta]} \quad (2.34)$$

De forma sucinta, chega-se a:

$$\sigma_c = \frac{1,10 \tau_{sd}}{\sin^2\beta [\cotg \alpha + \cotg \beta]} \quad (2.35)$$

Quando s\~ao utilizados estribos para resistir aos esfor\~oes cisalhantes  $\alpha = 90^\circ$  e quando se usam cavaletes (barras dobradas)  $\alpha = 45^\circ$ . Em rela\~ao ao \~angulo  $\beta$  que representa a

inclinação das bielas, são utilizados dois valores:  $\beta = 45^\circ$  (Modelo de cálculo I) e  $\beta = 30^\circ$  (Modelo de cálculo II), sendo estes preconizados pela ABNT NBR 6118:2014.

Substituindo-se os valores dos ângulos citados acima na expressão 2.35, tem-se quatro situações distintas:

- Utilizando estribos e o Método de Cálculo I

$$\sigma_c = 2 \tau_{m\acute{a}x} \quad (2.36)$$

- Utilizando estribos e o Método de Cálculo II

$$\sigma_c = 2,31 \tau_{m\acute{a}x} \quad (2.37)$$

- Utilizando cavaletes e o Método de Cálculo I

$$\sigma_c = \tau_{m\acute{a}x} \quad (2.38)$$

- Utilizando cavaletes e o Método de Cálculo II

$$\sigma_c = 1,47 \tau_{m\acute{a}x} \quad (2.39)$$

### 2.5.2 Valores Limites das Tensões de Compressão nas Bielas

A teoria clássica da treliça indica fissuras inclinadas a  $45^\circ$  e com essa inclinação as tensões principais de compressão valem:

$$\sigma_2 = \sigma_c = \tau_{m\acute{a}x} \quad (2.40)$$

Esses valores de tensões principais ocorrem para  $\alpha = 45^\circ$  e  $\beta = 45^\circ$ .

As tensões de compressão nas bielas não devem causar esmagamento no concreto. As tensões de cisalhamento atuantes na viga devem ser limitadas a determinados valores, de modo que, a segurança da viga não fique comprometida.

### 2.5.3 Estado Limite Último de Elementos Lineares sob Força Cortante

A resistência do elemento estrutural analisado sob força cortante segundo a ABNT NBR 6118:2014 será satisfeita quando forem verificadas, simultaneamente, as seguintes condições:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (2.41)$$

$$V_{sd} \leq V_{Rd3} = (V_c + V_{sw}) \quad (2.42)$$

Sendo:

$V_{sd}$  = força cortante solicitante de cálculo;

$V_{Rd2}$  = resistência das diagonais comprimidas;

$V_{Rd3}$  = resistência de tração diagonal;

$V_c$  = parcela de resistência à tração devido ao concreto;

$V_{sw}$  = parcela de resistência à tração devido às armaduras transversais.

## 2.6 Sapatas Rígidas

Considerando as características do solo e a edificação a ser executada, as fundações podem ser classificadas em profundas e superficiais. As fundações profundas são compostas pelas estacas e tubulões de diversos tipos, geralmente utilizadas em obras de grande porte. Já as fundações superficiais são compreendidas basicamente pelas sapatas e os radiers, sendo indicadas para regiões que apresentam boa capacidade de carga (CARVALHO & PINHEIRO, 2009).

As sapatas podem ser classificadas em função do tipo de carregamento que irão receber, sendo realizadas as verificações necessárias e o dimensionamento da armadura de tração para manter seu funcionamento. As sapatas mais empregadas são: isoladas (rígidas e flexíveis, dependendo das suas dimensões), corridas (suportam muros ou paredes), combinadas ou associadas (suportam dois ou mais pilares), associadas por meio de vigas-alavanca ou de equilíbrio (empregadas em divisas para evitar excentricidade sobre a última sapata) e contínuas (suportam vários pilares alinhados).

Nesse estudo serão tratadas somente as sapatas isoladas, que segundo a ABNT NBR 6118:2014 podem ser classificadas como rígidas e flexíveis, sendo que uma sapata é considerada rígida quando atende a seguinte condição:

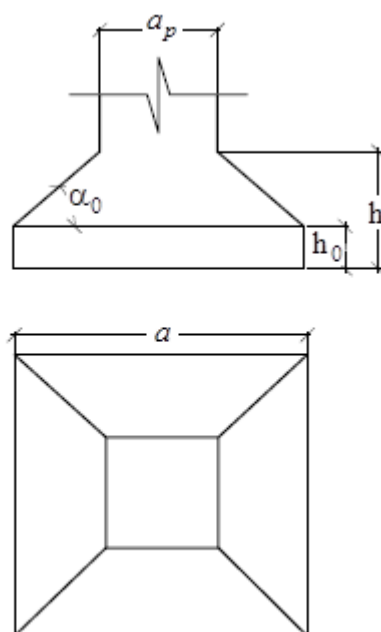
$$h \geq (a - a_p)/3 \quad (2.43)$$

Sendo:

$h$  = altura da sapata;

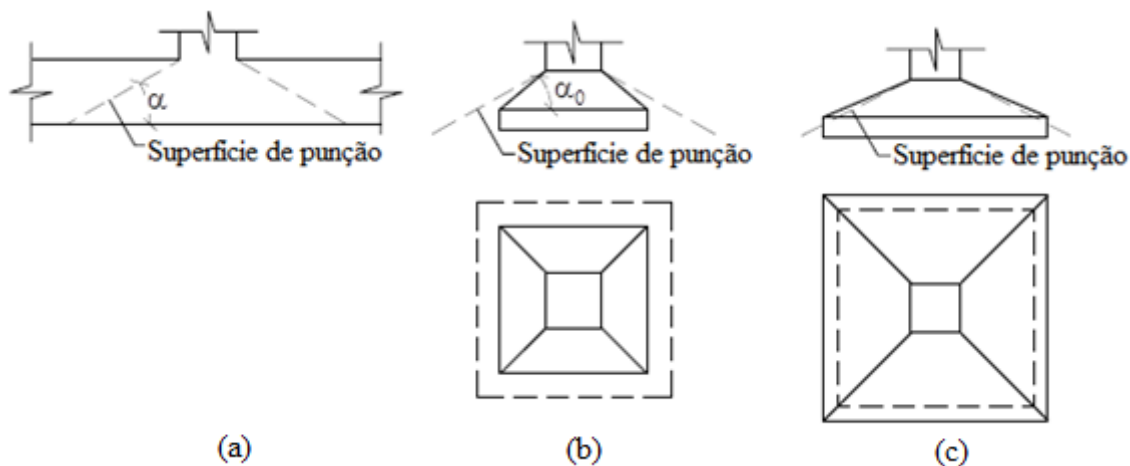
$a$  = dimensão da sapata em uma determinada direção;

$a_p$  = dimensão do pilar na mesma direção.



**Figura 2.16:** Dimensões de uma sapata isolada - Verificação da Rigidez.

As sapatas rígidas apresentam como vantagem o fato de não haver a possibilidade da ocorrência de punção causada pelo pilar, visto que, a sapata fica inteiramente dentro do cone hipotético de punção (CARVALHO & PINHEIRO, 2009). A Figura 2.17 apresenta a punção de uma placa, uma sapata rígida (inteiramente dentro do cone de punção) e outra flexível (com possibilidade de punção), todos os casos submetidos ao carregamento pontual do pilar. O ângulo  $\alpha_0$  representa basicamente a rigidez da sapata, estando ligado ao grau de compacidade do concreto a ser usado. Já as linhas tracejadas na Figura 2.17 indicam a superfície de ruptura da sapata de uma forma teórica.



**Figura 2.17:** Pilares apoiados em: (a) Placa, (b) Sapata Rígida, (c) Sapata Flexível.

Para uma maior facilidade na concretagem, é recomendável que o ângulo  $\alpha_0$  seja em torno de  $30^\circ$ , que representa o ângulo de atrito interno do concreto (ângulo de talude natural) de compactação média. Dessa forma, no anteprojeto podem-se considerar sapatas rígidas, aquelas que possuem ângulo  $\alpha_0$  igual ou superior a  $30^\circ$ , e flexíveis quando  $\alpha_0$  é menor que  $30^\circ$ .

Uma sapata rígida submetida a uma carga axial centrada causa tensões no solo, que segundo a ABNT NBR 6118:2014, vale a hipótese de distribuição plana de tensões uniformes no solo, exceto para o caso de sapatas apoiadas em rochas. Para realizar o correto dimensionamento de uma sapata sob um pilar com carga axial centrada é necessário conhecimento da tensão admissível do solo para realizar as verificações que serão apresentadas a seguir.

### 2.6.1 Dimensões da Sapata

As dimensões em planta da sapata são determinadas inicialmente pela verificação das tensões do solo, que não devem ultrapassar o valor admissível encontrado em ensaios de caracterização. Uma sapata de área  $A$  e peso próprio  $P$ , submetida a um carregamento  $N$ , deve atender à seguinte condição:

$$\sigma_{solo} = \frac{N+P}{A_{sapata}} \leq \bar{\sigma}_{solo} \quad (2.44)$$

É recomendável que a base da sapata seja homotética em relação à seção do pilar, ou seja, que a sapata tenha os lados proporcionais ao do pilar (CARVALHO & PINHEIRO, 2009). Em relação à altura da sapata ( $h_0$ ), recomenda-se um valor mínimo de 10 cm, atendendo a condição para que a sapata seja classificada como rígida mostrada na Equação 2.43.

### 2.6.2 Tensão de Cisalhamento no Concreto

Como o ângulo limite para a sapata ser admitida como rígida é  $\alpha_0 = 33,69^\circ$  e o cone de punção se forma entre  $26^\circ$  e  $30^\circ$ , segundo a ABNT NBR 6118:2014, não é preciso verificar a tração diagonal para as sapatas rígidas, pois o cone de punção estará sempre fora da sapata (Figura 2.17).

Já a compressão diagonal do concreto deve ser verificada, segundo a ABNT NBR 6118:2014 deve atender à condição dada pela Equação 2.45.

$$\tau_{Sd} \leq \frac{V_l}{u_p d} \leq \tau_{Rd2} = 0,27 \alpha_v f_{cd} \quad (2.45)$$

Sendo que:

$\tau_{Sd}$  = tensão de cisalhamento solicitante de cálculo;

$V_l$  = força cortante no perímetro do pilar, que por segurança pode-se utilizar a força normal aplicada no pilar;

$u_p$  = perímetro ao longo do contorno do pilar;

$d$  = altura útil da sapata;

$\tau_{Rd2}$  = tensão de cisalhamento resistente de cálculo;

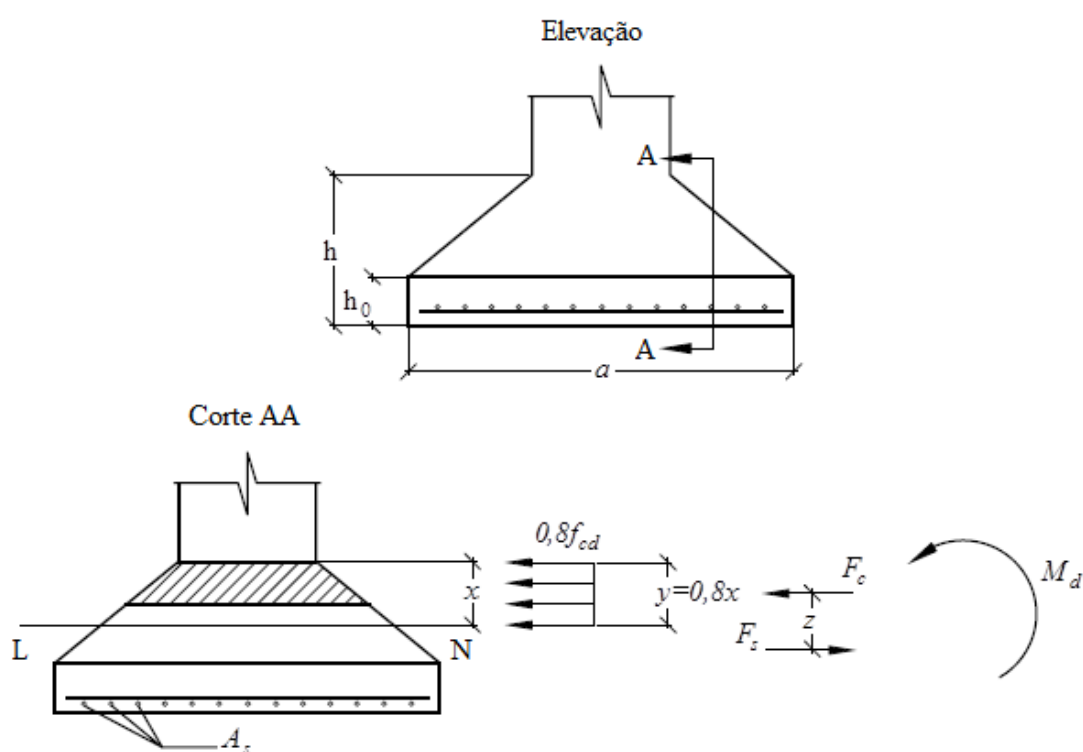
$\alpha_v = 1 - f_{ck} / 250$  com  $f_{ck}$  em MPa.

### 2.6.3 Dimensionamento à flexão

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, as sapatas rígidas podem ter seu comportamento estrutural caracterizado pelo trabalho à flexão nas duas direções, admitindo-se que, para cada uma delas, a tração na flexão seja uniformemente distribuída na largura da sapata. Esse fato não se aplica à compressão na flexão, pois se concentra mais na região do pilar que se apoia na sapata. Para o cálculo e dimensionamento, devem ser utilizados modelos

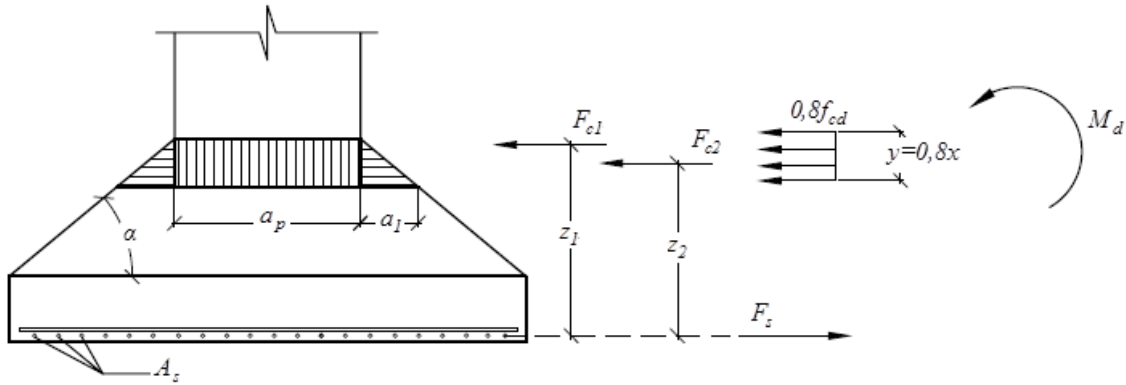
tridimensionais lineares, modelos de biela e tirantes tridimensionais, ou modelos de flexão que são mais simples e usuais no meio técnico.

O cálculo à flexão em sapata se difere das vigas pelo fato da região comprimida do concreto não ser retangular, como mostra a Figura 2.18. Na região comprimida (hachurada) há uma tensão limite de  $0,80 f_{cd}$ . A resultante de tensão de compressão no concreto é uma força ( $F_c$ ) que deve equilibrar a força ( $F_s$ ) resultante da tensão na armadura. Segundo a ABNT NBR 6118:2014, a armadura de tração deve apresentar distribuição uniforme ao longo da largura da sapata.



**Figura 2.18:** Tensões normais e forças resultantes no concreto e armadura em uma sapata.

A força de compressão pode ser decomposta em duas: uma força ( $F_{c1}$ ) resultante da tensão que age na região retangular de largura  $a_p$  e altura  $0,8x$ , e outra força ( $F_{c2}$ ) que representa a resultante das tensões que agem nas duas regiões triangulares da base  $a_1$  e com altura  $0,8x$ , conforme mostra a Figura 2.19. Realizando o equilíbrio de forças é possível determinar a armadura de aço ( $A_s$ ) necessária para suportar o esforço ao qual a sapata estará submetida.



**Figura 2.19:** Esquema para determinação da armadura longitudinal.

Portanto utilizando relações trigonométricas e manipulações matemáticas, as forças de compressão são dadas pelas equações:

$$F_{c1} = a_p \, 0,64 \, x \, f_{cd} \quad (2.46)$$

$$F_{c2} = 0,512 \, x^2 \, \cot\alpha \, f_{cd} \quad (2.47)$$

Logo, podem ser determinadas as expressões que representam os momentos resistentes devido às parcelas  $F_{c1}$  e  $F_{c2}$  sendo que o momento é dado pelo produto da força pelo braço de alavanca, sendo que  $d$  representa a altura útil da seção. Portanto, os momentos resistentes devido às parcelas das forças de compressão são:

$$M_{Fc1} = (0,64 \, a_p \, f_{cd} \, x \, d) - (0,256 \, a_p \, f_{cd} \, x^2) \quad (2.46)$$

$$M_{Fc2} = (0,512 \, f_{cd} \, x^2 \, d \, \cot\alpha) - (0,273 \, f_{cd} \, x^3 \, \cot\alpha) \quad (2.47)$$

O momento resistente total da sapata é a soma dos momentos devido às parcelas das forças de compressão e deve ser igual ao momento de cálculo na seção ( $M_d$ ), ou seja:

$$M_{Fc1} + M_{Fc2} = M_d \quad (2.48)$$

Realizando-se a igualdade da equação 2.48, encontra-se uma equação do terceiro grau em  $x$ , sendo que  $x$  representa a distância da base do pilar até a linha neutra da sapata. Determinando o valor de  $x$ , obtém-se o valor da área de aço da armadura ( $A_s$ ) que é calculado pela equação abaixo:

$$A_s = (a_p \, 0,64 \, x + 0,512 \, x^2 \, \cot\alpha) \quad (2.49)$$



## Formulação via Método dos Elementos Finitos

### 3.1 Considerações Iniciais

A formulação de elementos finitos bidimensionais segue as etapas usadas nos problemas unidimensionais. Os deslocamentos, os valores de componentes de força de superfície e de força de corpo distribuídas são funções das posições indicadas por  $(x, y)$ . O vetor de deslocamento  $\mathbf{u}$  é dado por:

$$\mathbf{u} = [u \ v]^T \quad (3.1)$$

Sendo que  $u$  e  $v$  são as componentes  $x$  e  $y$  de  $\mathbf{u}$ , respectivamente. As tensões e deformações específicas são dadas por:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T \quad (3.2a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T \quad (3.2b)$$

A força de corpo, força de superfície e o volume do elemento são representados por:

$$\mathbf{f} = [f_x \ f_y]^T \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{T} = [T_x \ T_y]^T \quad (3.3b)$$

$$\partial V = t \partial A \quad (3.3c)$$

Sendo que  $t$  refere-se a espessura do elemento.

Assim sendo, as relações deformação específica-deslocamento são dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (3.4)$$

A relação entre as tensões e deformações é dada pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.5)$$

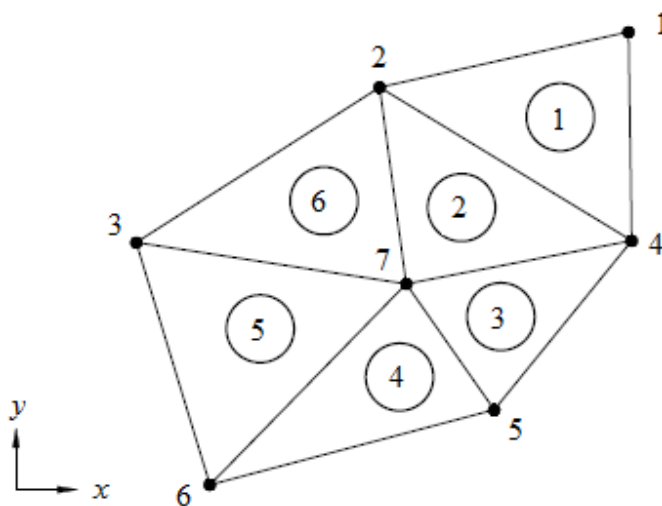
Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

A região é discretizada com o intuito de expressar os deslocamentos em termos de valores em pontos discretos, sendo que  $E$  representa o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $\sigma$  e  $\tau$  as tensões normais e cisalhantes respectivamente,  $\varepsilon$  e  $\gamma$  as deformações específicas.

### 3.2 Modelagem por Elementos Finitos

A região bidimensional mostrada na Figura 3.1 é dividida em triângulos de lados retos. Esses triângulos que em sua totalidade formam a região analisada são chamados de elementos.

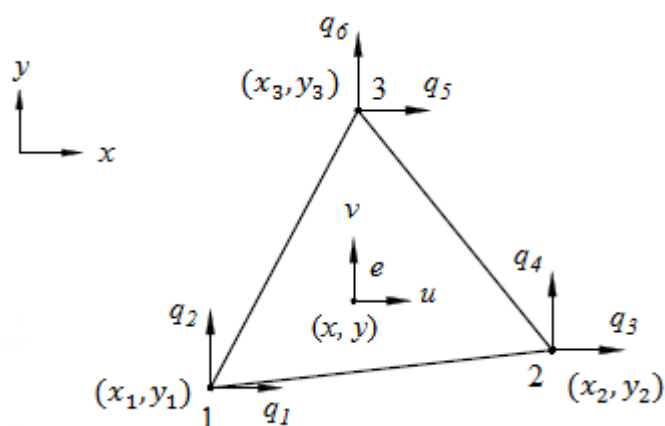


**Figura 3.1:** Região bidimensional discretizada por elementos CST.

As componentes do deslocamento de um nó  $j$  qualquer são consideradas como  $Q_{2j-1}$  na direção  $x$  e  $Q_{2j}$  na direção  $y$ . O vetor de deslocamento global da estrutura analisada é indicado por:

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \ Q_2 \dots \ Q_n]^T \quad (3.7)$$

A Figura 3.2 estabelece a correspondência entre os números de nós locais e globais, além do respectivo grau de liberdade relacionado. Além de demonstrar as componentes de deslocamentos globais do elemento finito triangular.



**Figura 3.2:** Correspondência dos nós dos elementos.

### 3.3 Conectividade dos Elementos

As conectividades ou incidências de um elemento referem-se aos nós que formam um elemento, adotando o sentido anti-horário para estabelecer uma sequência para identificar os seus nós. Analisando-se a Figura 3.1, a Tabela 3.1 demonstra as conectividades dos elementos triangulares que discretizaram a região analisada.

**Tabela 3.1:** Incidências da região analisada.

Elemento	Conectividades		
	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>
1	1	2	4
2	2	7	4
3	4	7	5
4	5	7	6
5	7	3	6
6	2	3	7

O vetor de deslocamento no sistema local é indicado como:

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \dots \ q_n]^T \quad (3.8)$$

As coordenadas nodais designadas por  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$  tem a correspondência global estabelecida por meio da Tabela 3.1. A representação local das coordenadas nodais e do grau de liberdade proporciona uma configuração para uma representação simples e clara das características do elemento.

### 3.4 Triângulo de Deformação Específica Constante (CST)

Os deslocamentos nos pontos dentro de um elemento precisam ser representados em termos dos deslocamentos nodais do elemento. O Método dos Elementos Finitos usa o conceito de funções de forma no desenvolvimento sistemático dessas interpolações. Para o CST (*Constant Strain Triangle*), as funções de forma são lineares sobre o elemento. As funções de forma  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  correspondem aos nós 1, 2 e 3 do elemento. A função  $N_1$  assume o valor unitário no nó 1, e se reduz linearmente para os nós 2 e 3. Os valores de  $N_1$  definem uma superfície plana.  $N_2$  e  $N_3$  são representadas por superfícies semelhantes com valores unitários nos nós 2 e 3 e caindo para zero nas arestas opostas, que podem ser vistos na Figura 3.3. Qualquer combinação linear dessas funções de forma também representa uma superfície plana.

Em particular  $N_1 + N_2 + N_3$  representa um plano com altura um nos nós 1, 2 e 3, portanto, é paralelo ao triângulo 123.

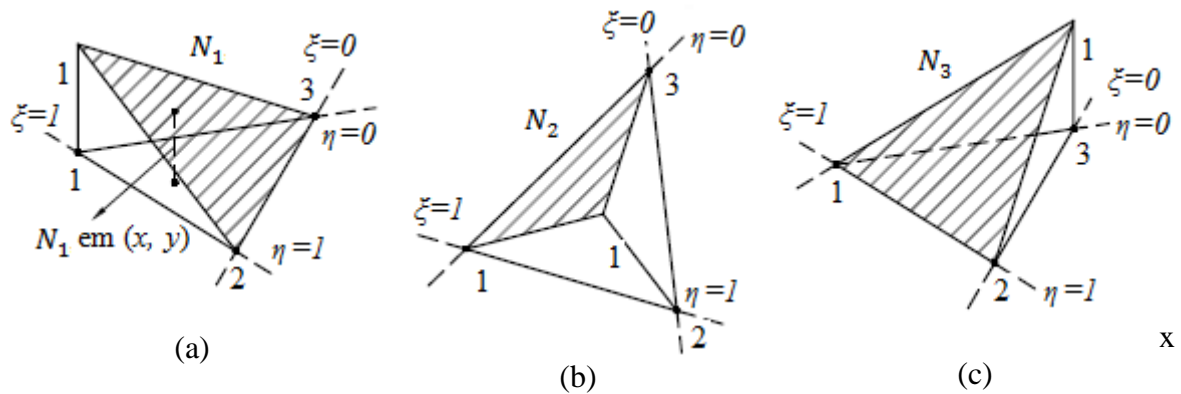
$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \quad (3.9)$$

$N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  não são linearmente independentes. As funções de forma independentes são representadas pelas coordenadas naturais  $\eta$  e  $\xi$ , como:

$$N_1 = \xi \quad (3.10a)$$

$$N_2 = \eta \quad (3.10b)$$

$$N_3 = 1 - \xi - \eta \quad (3.10c)$$



**Figura 3.3:** Representação das funções de forma no nó 1 (a), nó 2 (b) e nó 3 (c).

No problema unidimensional as coordenadas  $x$  foram mapeadas em coordenadas naturais  $\xi$  e as funções de forma foram definidas como funções de  $\xi$ .

No caso de problemas bidimensionais, as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  são mapeadas nas coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$ . As funções de forma são função das coordenadas naturais, podendo ser representadas fisicamente por coordenadas de área.

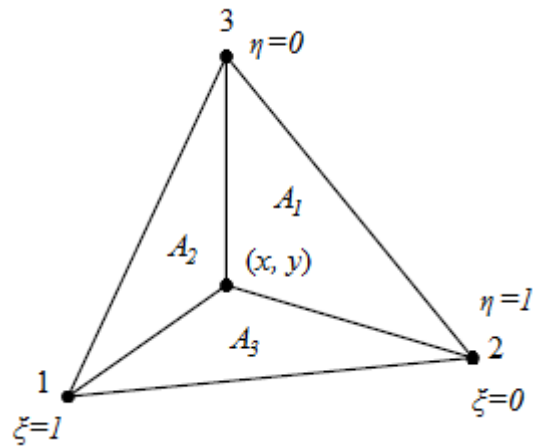
Um ponto  $(x, y)$  em um triângulo o divide em três áreas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , conforme Figura 3.4. Logo, as funções de forma podem ser representadas por:

$$N_1 = \frac{A_1}{A} \quad (3.11a)$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A} \quad (3.11b)$$

$$N_3 = \frac{A_3}{A} \quad (3.11c)$$

Sendo que  $A$  representa a área do elemento, comprovando a igualdade da equação 3.9.



**Figura 3.4:** Representação das funções de forma por área em um elemento triangular.

### 3.5 Representação Isoparamétrica

Os deslocamentos do elemento são escritos usando as funções de forma e os valores nodais do campo de deslocamento desconhecido.

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5 \quad (3.12a)$$

$$v = N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6 \quad (3.12b)$$

Sendo  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  expressos pelas equações 3.10a, 3.10b e 3.10c as equações 3.12a e 3.12b ficam representadas por:

$$u = (q_1 - q_5)\xi + (q_3 - q_5)\eta + q_5 \quad (3.13a)$$

$$v = (q_2 - q_6)\xi + (q_4 - q_6)\eta + q_6 \quad (3.13b)$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Ou seja, na forma simplificada, tem-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (3.15)$$

As coordenadas  $x$  e  $y$  também podem ser representadas em termos de coordenadas nodais pelo uso das mesmas funções de forma. Essa é a chamada representação isoparamétrica.

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad (3.16a)$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \quad (3.16b)$$

Substituindo-se as equações 3.10a, 3.10b e 3.10c nas equações 3.16a e 3.16b, tem-se:

$$x = (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta + x_3 \quad (3.17a)$$

$$y = (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta + y_3 \quad (3.17b)$$

Usando-se as notações  $x_{ij} = x_i - x_j$  e  $x_{ji} = x_j - x_i$ , tem-se:

$$x = x_{13} \xi + x_{23} \eta + x_3 \quad (3.18a)$$

$$y = y_{13} \xi + y_{23} \eta + y_3 \quad (3.18b)$$

As representações isoparamétricas relacionam as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  às coordenadas naturais  $\eta$  e  $\xi$ .

### 3.6 Avaliação das Deformações Específicas

Na avaliação das deformações específicas, as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  devem ser tomadas com relação a  $x$  e  $y$ . Pelas equações anteriores verificou-se que  $u$ ,  $v$ ,  $x$  e  $y$  são funções de  $\eta$  e  $\xi$ . Logo, podem ser representadas por:

$$u = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (3.19a)$$

$$v = v[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (3.19b)$$

Usando-se a regra da cadeia para derivadas de  $u$ , tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \quad (3.20b)$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A matriz quadrada (2x2) da equação 3.21 é denotada como Jacobiana de transformação, logo:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Realizando-se as derivadas da matriz Jacobiana, tem-se:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Assim, chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Sendo que  $\mathbf{J}^{-1}$  é a inversa da matriz Jacobiana de Transformação, dada por:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{Adj \mathbf{J}}{det \mathbf{J}} \quad (3.25)$$

A adjunta da matriz Jacobiana corresponde à matriz transposta dos cofatores:



$$\text{Adj } \mathbf{J} = \mathbf{C}^T \quad (3.26)$$

Os termos da matriz dos cofatores são determinados a partir da seguinte expressão:  $C_{ij} = (-1)^{i+j} MC_{ij}$ . Sendo que  $i$  e  $j$  correspondem às posições dos termos na linha e coluna da matriz, respectivamente e  $MC_{ij}$  refere-se ao menor complementar da matriz  $\mathbf{J}$ . Portanto, tem-se que a matriz dos cofatores e sua transposta são dadas por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_{23} & -x_{23} \\ -y_{13} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Obtendo-se o determinante da matriz Jacobiana de Transformação e substituindo a equação 3.28 na equação 3.25 através da relação mencionada na equação 3.26, tem-se:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{(x_{13} \ y_{23} \ -y_{13} \ x_{23})} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Da geometria analítica, sabe-se que a magnitude do determinante da matriz Jacobiana ( $\mathbf{J}$ ) é o dobro da área do triângulo. Se os pontos 1, 2 e 3 são ordenados de uma forma anti-horária, o determinante da matriz Jacobiana tem o sinal positivo.

$$A = \frac{1}{2} |\det \mathbf{J}| \quad (3.30)$$

Pelas equações anteriores, conclui-se que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Por analogia, vem:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} \frac{\partial v}{\partial \zeta} - y_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + x_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Usando-se as relações deformação específica-deslocamento, obtém-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23}(q_1 - q_5) - y_{13}(q_3 - q_5) \\ -x_{23}(q_2 - q_6) + x_{13}(q_4 - q_6) \\ -x_{23}(q_1 - q_5) + x_{13}(q_3 - q_5) + y_{23}(q_2 - q_6) - y_{13}(q_4 - q_6) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Pela definição de  $x_{ij}$  e  $y_{ij}$  demonstra-se que  $y_{ij} = -y_{ji}$  e  $y_{ij} = y_{ik} - y_{jk}$ . Pode-se então escrever a equação 3.33 da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23}q_1 + y_{31}q_3 + y_{12}q_5 \\ x_{23}q_2 + x_{31}q_4 + x_{12}q_6 \\ x_{32}q_1 + y_{23}q_2 + x_{13}q_3 + y_{31}q_4 + x_{21}q_5 + y_{12}q_6 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

De forma sucinta, a equação 3.34 pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (3.35)$$

Na sua forma matricial, fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Na equação 3.36 nomeia-se a matriz (3x6) de matriz  $\mathbf{B}$ , sendo todas as suas componentes constantes expressas em termos das coordenadas nodais.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

### 3.7 Método da Energia Potencial

A energia potencial do sistema é dada por:

$$\Pi = \frac{I}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} t dA - \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA - \int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dL - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (3.38)$$

Sendo que os termos correspondem à energia de deformação do elemento, força de corpo, força de superfície e carregamento pontual, respectivamente. No último termo da Equação 3.38 o índice  $i$  indica o ponto de aplicação de uma carga pontual  $\mathbf{P}_i = [P_x \ P_y]^T$ .

Representando-se a equação de forma discreta, a energia potencial total pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Pi = \sum_e U_e - \sum_e \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA - \sum_e \int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dL - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (3.39)$$

Sendo que:

$U_e = \frac{I}{2} \int_e \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} t dA$  é a energia de deformação do elemento.

### 3.8 Rigidez do Elemento

Substituindo-se a equação 3.35 na energia de deformação do elemento, tem-se:

$$U_e = \frac{I}{2} \int_e \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} t dA \quad (3.40)$$

Considerando-se a espessura do elemento como  $t_e$ , vem:

$$U_e = \frac{I}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t_e \left( \int_e dA \right) \mathbf{q} \quad (3.41)$$

Sendo que:

$$\left( \int_e dA \right) = A_e \quad (3.42)$$

Substituindo-se a equação 3.42 na equação 3.41, tem-se:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t_e A_e \mathbf{q} \quad (3.43)$$

Da expressão 3.43 retira-se a rigidez do elemento, dada por:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t_e A_e \quad (3.44)$$

Portanto, a energia de deformação do elemento, em função de  $\mathbf{K}_e$  pode ser escrita como:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} \quad (3.45)$$

### 3.9 Força de Corpo

O termo força de corpo, que corresponde ao peso do elemento analisado e que integra a expressão 3.38 referente à energia potencial total, é considerado como:

$$\int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA = t_e \int_e (u f_x + v f_y) dA \quad (3.46)$$

Usando-se as relações de interpolação dadas pelas equações 3.12a e 3.12b, tem-se:

$$\int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA = t_e \left[ \begin{array}{l} \int_e N_1 q_1 f_x dA + \int_e N_2 q_3 f_x dA + \int_e N_3 q_5 f_x dA + \\ \int_e N_1 q_2 f_y dA + \int_e N_2 q_4 f_y dA + \int_e N_3 q_6 f_y dA \end{array} \right] \quad (3.47)$$

Isolando-se os deslocamentos nodais na equação 3.47 e sendo que  $\int_e N_1 dA$  representa o

volume de um tetraedro com área de base  $A_e$  e altura de canto igual a um (adimensional).

Sendo que o volume do tetraedro corresponde a  $\frac{1}{3}$  da área da base multiplicada pela altura, a expressão 3.47 passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA = \mathbf{q}^T \mathbf{f}^e \quad (3.48)$$

Sendo que  $\mathbf{f}^e$  corresponde ao vetor de força de corpo do elemento dado por:

$$\mathbf{f}^e = \frac{t_e A_e}{3} [f_x \quad f_y \quad f_x \quad f_y \quad f_x \quad f_y]^T \quad (3.49)$$

Essas forças nodais no elemento contribuem para o vetor de carga global  $\mathbf{F}$ . A conectividade precisa ser novamente utilizada para acrescentar  $\mathbf{f}^e$  no vetor de força global  $\mathbf{F}$ .

### 3.10 Força de Superfície

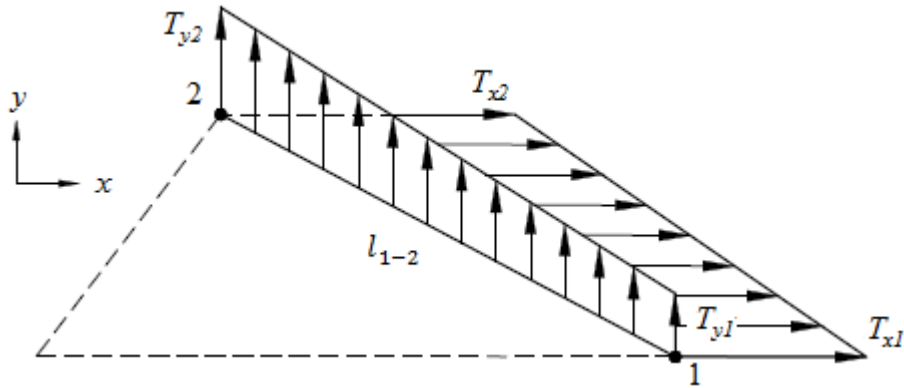
O termo para a força de superfície corresponde à carga distribuída que atua na superfície do corpo. Essa força age nas arestas dos elementos que conectam os nós do contorno. Análogo à força de corpo, os carregamentos devido à força de superfície contribuem para o vetor de carga global  $\mathbf{F}$ . A força de superfície é dada pelo termo  $\int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dL$  que aparece na equação 3.38.

Levando-se em consideração que a aresta  $l_{1-2}$  do elemento analisado está solicitada pela força de superfície  $T_x$  e  $T_y$ , vem:

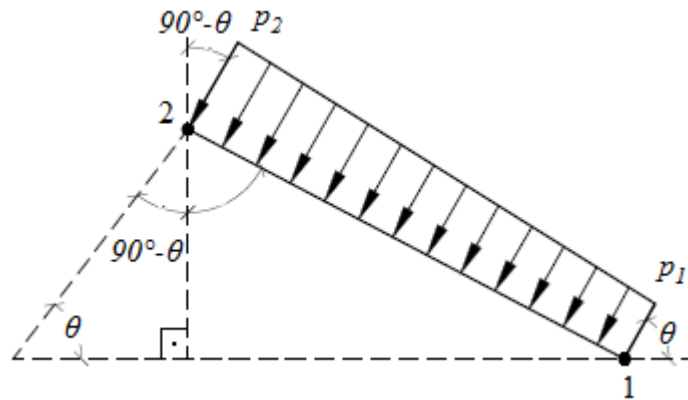
$$\int_L \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dL = t_e \int_{l_{1-2}} (u T_x + v T_y) t dL \quad (3.50)$$

Usando-se as relações de interpolação dadas pelas equações 3.12a e 3.12b e desenvolvendo-se as integrais chega-se à expressão 3.51, que determina as componentes da força de superfície em relação ao eixo de referências global mostrado na Figura 3.5.

$$\mathbf{T}^e = \frac{l_{1-2} t}{6} \begin{bmatrix} 2T_{x1}+T_{x2} & 2T_{y1}+T_{y2} & T_{x1}+2T_{x2} & T_{y1}+2T_{y2} \end{bmatrix}^T \quad (3.51)$$



**Figura 3.5:** Componentes da força de superfície em relação ao eixo global.



**Figura 3.6:** Decomposição das pressões nodais.

As componentes  $T_{x1}$ ,  $T_{x2}$ ,  $T_{y1}$  e  $T_{y2}$  apresentadas na equação 3.51 são determinadas fazendo a decomposição das pressões nodais do sistema local para o sistema global como indica a Figura 3.6.

Verifica-se que as componentes de pressões são dadas por:

$$T_{x1} = -p_1 \cos \theta \quad (3.52a)$$

$$T_{x2} = -p_2 \cos \theta \quad (3.52b)$$

$$T_{y1} = -p_1 \sin \theta \quad (3.52c)$$

$$T_{y2} = -p_2 \sin \theta \quad (3.52d)$$

### 3.11 Carga Pontual

Uma carga pontual pode ser facilmente considerada colocando um nó no ponto de aplicação. Portanto, sendo  $i$  o ponto de aplicação no qual  $\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} P_x & P_y \end{bmatrix}^T$  está sendo aplicado, tem-se:

$$\mathbf{U}_i^T P_i = Q_{2i-1} P_x + Q_{2i} P_y \quad (3.53)$$

Dessa forma, as componentes da carga pontual  $P_x$  e  $P_y$  são somadas às componentes do vetor de força global  $\mathbf{F}$ .

### 3.12 Deslocamento Nodal

Considerando-se a energia de deformação e os termos de força, obtém-se a energia potencial total da seguinte forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{f} \quad (3.54)$$

Considerando-se as condições de contorno e realizando-se as modificações de rigidez e forças, a equação 3.54 fica definida como:

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (3.55)$$

Sendo que:

$\mathbf{K}$  = matriz de rigidez da estrutura analisada;

$\mathbf{Q}$  = vetor de deslocamentos nodais da estrutura;

$\mathbf{F}$  = vetor de cargas globais.

### 3.13 Cálculo de Tensão

Como as deformações específicas são constantes em um elemento CST, as suas componentes de tensões também permanecem constantes.

Os valores das tensões devem ser calculados para cada elemento, usando as relações de deformação específica-deslocamento do elemento.

Substituindo-se a equação 3.35 na equação 3.5, tem-se que a tensão em cada elemento é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (3.56)$$

A conectividade será utilizada para extrair os deslocamentos nodais do elemento  $\mathbf{q}$  do vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{Q}$ .

Para fim de interpolação, as tensões obtidas através da equação 3.56 podem ser usadas como um valor referente ao centroide do elemento analisado. As tensões principais e suas direções principais são determinadas a partir das relações do Círculo de Mohr.



# Capítulo 4

## Aplicações Numéricas

### 4.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo são mostradas as aplicações do presente trabalho, que consiste em representar de forma numérica o Modelo de Bielas e Tirantes em diferentes elementos estruturais de concreto armado. Inicialmente, foram obtidos os deslocamentos nodais, as tensões nas bielas comprimidas do modelo desenvolvido por MONTROYA *et al.* (1991), os deslocamentos nodais, as tensões de compressão e de tração, além das tensões principais em uma viga-parede com abertura. Nos dois primeiros exemplos, os resultados foram comparados com respostas determinadas através do software ANSYS 17, com o fim de validar as implementações numéricas realizadas.

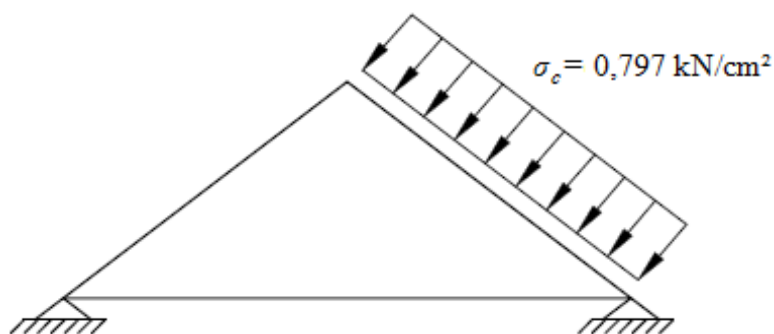
Na sequência, mostram-se mais três aplicações, sendo elas: a análise de um consolo curto, a análise de um bloco de fundação sob duas estacas de concreto e a análise de uma sapata rígida.

Para o consolo curto e para o bloco de fundação, além da obtenção de deslocamentos e tensões, realizou-se também o dimensionamento das armaduras de aço tracionadas. O objetivo principal da adoção deste procedimento foi obter as tensões máximas determinadas através do Método dos Elementos Finitos (MEF) e calcular as áreas de aço das armaduras. Por fim, fez-se um comparativo com os resultados calculados com o auxílio da norma ABNT NBR 9062 (2006) e do Método clássico de Blévoit & Frémy.

Atentando-se ao fato de que todas as modelagem feitas com o software ANSYS 17 para comparação dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido, foram utilizadas as mesmas malhas com os elementos triangulares CST.

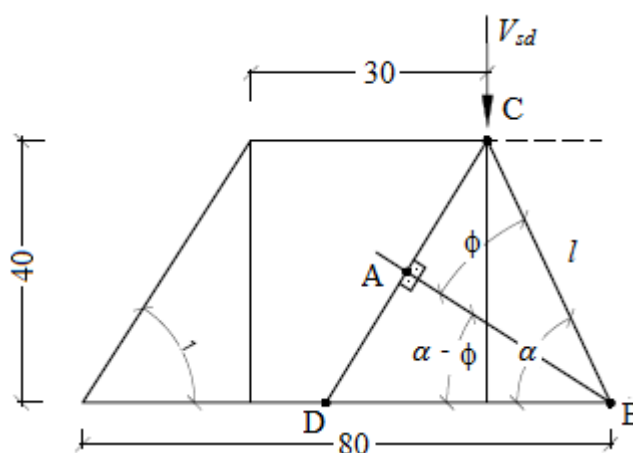
## 4.2 Modelo desenvolvido por MONTOYA (1991)

Neste exemplo serão calculadas as tensões de compressão nas bielas da região de uma viga de concreto armado sujeita à flexão. Esta região é mostrada na (Figura 4.1) e está submetida a um carregamento de superfície igual a  $0,797 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 4.1:** Região da viga analisada pelo modelo de MONTOYA.

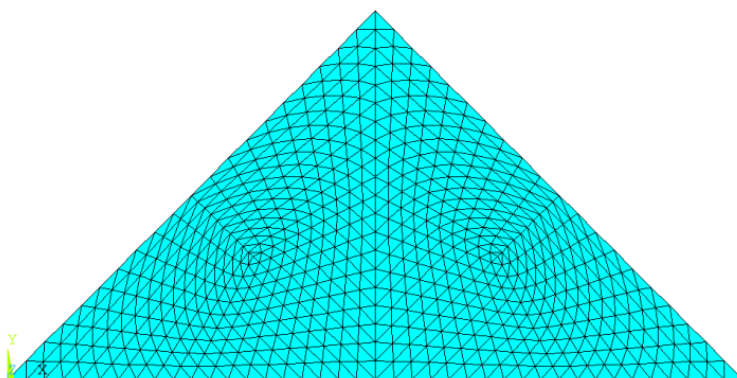
Na Figura 4.2 mostram-se as características geométricas da região analisada, sendo submetida a um carregamento pontual  $V_{sd} = 600 \text{ kN}$  aplicado no ponto C. Assim sendo, utilizou-se o modelo de cálculo I, com  $\alpha = 50^\circ$  e  $\beta = 45^\circ$ . A seção transversal da região analisada é igual a  $40 \times 25 \text{ cm}$ , com altura útil ( $d$ ) igual a  $36 \text{ cm}$  e com ( $d'$ ) igual a  $4 \text{ cm}$ . Com relação às propriedades físicas dos materiais, foram utilizados módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a  $2800 \text{ kN/cm}^2$ , coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) igual a  $0,25$  e o concreto com resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ) igual a  $30 \text{ MPa}$ .



**Figura 4.2:** Representação do modelo de MONTOYA (cm).

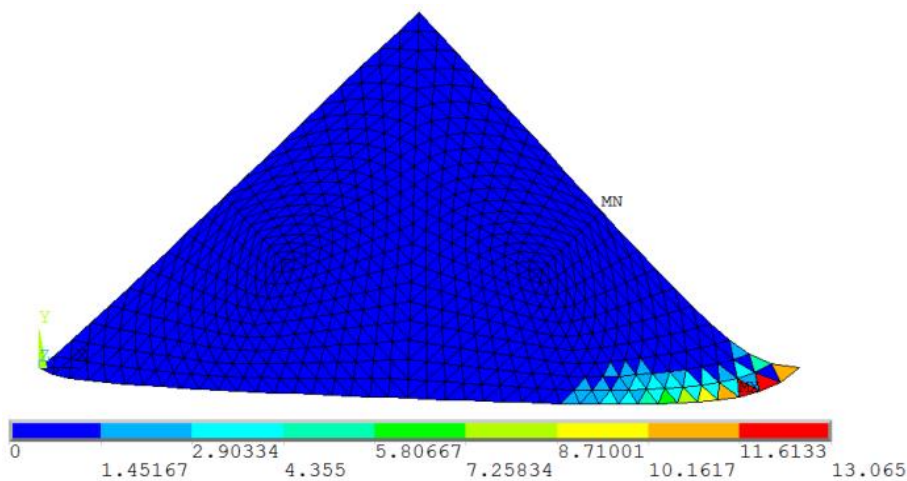
A região estudada foi discretizada com o auxílio do software ANSYS 17. E nesta aplicação adotou-se uma malha com 1200 elementos finitos triangulares (CST) e 641 nós, representada na Figura 4.3.

É importante mencionar que a numeração dos nós, as suas coordenadas, além da numeração dos elementos e as incidências ou conectividades serão introduzidas no arquivo de entrada de dados do programa computacional desenvolvido ao longo dessa pesquisa.

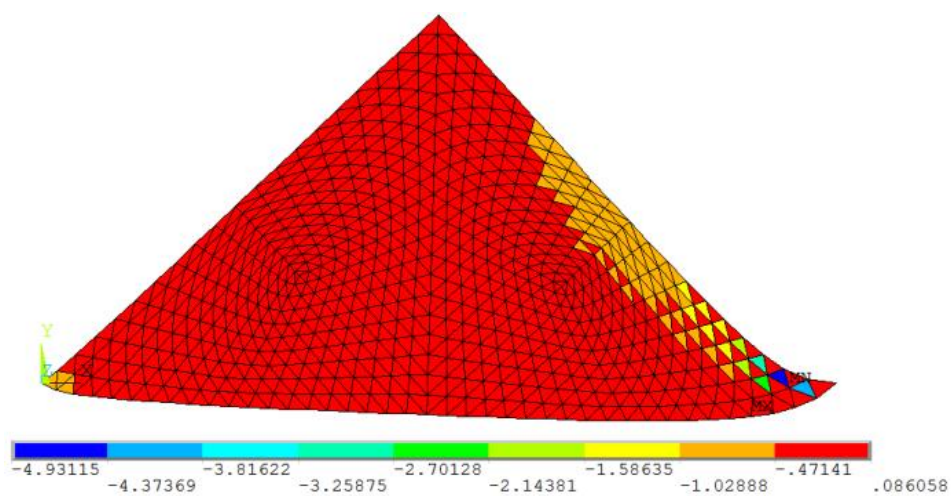


**Figura 4.3:** Malha adotada - ANSYS.

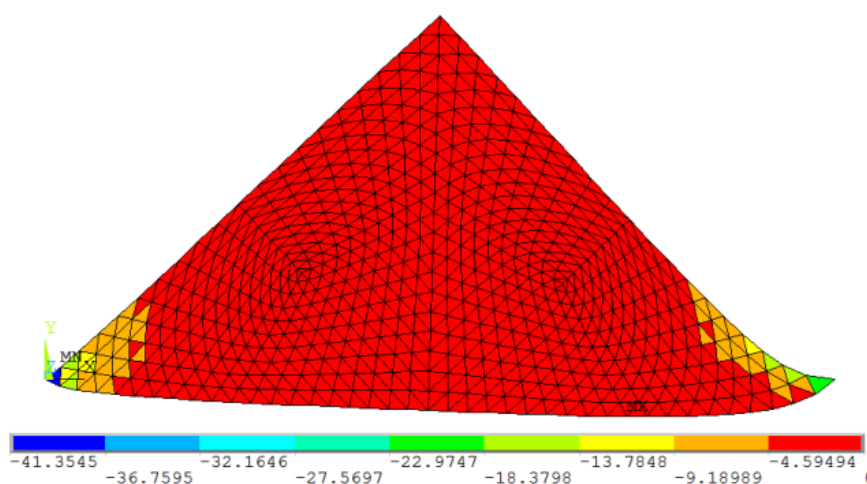
Nas Figuras 4.4a, 4.4b e 4.4c observam-se as configurações deformadas da região comprimida correspondentes às três tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , respectivamente. Os valores das tensões encontrados na escala de referência das figuras são dados em kN/cm<sup>2</sup>.



**Figura 4.4a:** Tensão principal  $\sigma_1$  .



**Figura 4.4b:** Tensão principal  $\sigma_2$ .



**Figura 4.4c:** Tensão principal  $\sigma_3$ .

Nas Tabelas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam-se comparações entre os resultados numéricos obtidos por meio do programa computacional desenvolvido e através do software ANSYS 17. Percebe-se que a precisão obtida pelas simulações numéricas é satisfatória tanto para as tensões elementares ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ ) quanto para as tensões principais ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ).

**Tabela 4.1:** Tensões  $\sigma_x$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	-0,7552	-0,7552	1,0000
20	-0,3896	-0,3896	1,0001
30	-0,8807	-0,8807	1,0000
40	-0,4279	-0,4279	1,0000
50	-0,9961	-0,9961	1,0000
60	-0,5038	-0,5038	1,0000
70	-1,1000	-1,0996	1,0004
80	-0,6030	-0,6030	1,0000
90	-1,1890	-1,1892	0,9998
100	-0,7143	-0,7143	1,0000

**Tabela 4.2:** Tensões  $\sigma_y$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	-0,6156	-0,6156	1,0000
20	-0,3985	-0,3985	1,0000
30	-0,5535	-0,5535	0,9999
40	-0,4054	-0,4054	1,0000
50	-0,4849	-0,4849	1,0000
60	-0,3993	-0,3993	0,9999
70	-0,4118	-0,4118	1,0000
80	-0,3782	-0,3782	1,0000
90	-0,3364	-0,3364	0,9999
100	-0,3435	-0,3435	1,0000

**Tabela 4.3:** Tensões  $\tau_{xy}$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	-0,1374	-0,1374	1,0002
20	-0,4087	-0,4088	0,9999
30	-0,1107	-0,1107	0,9996
40	-0,4096	-0,4096	1,0000
50	-0,0990	-0,0990	1,0000
60	-0,4069	-0,4069	1,0000
70	-0,1009	-0,1009	1,0005
80	-0,4040	-0,4040	1,0000
90	-0,1150	-0,1150	0,9999
100	-0,4031	-0,4031	0,9999

**Tabela 4.4:** Tensão principal  $\sigma_1$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	-0,5313	-0,5313	1,0000
20	0,0147	0,0147	1,0002
30	-0,5196	-0,5196	1,0000
40	-0,0069	-0,0069	1,0000
50	-0,4664	-0,4664	1,0000
60	-0,0413	-0,0413	1,0000
70	-0,3973	-0,3973	1,0000
80	-0,0713	-0,0713	1,0000
90	-0,3212	-0,3212	1,0000
100	-0,0852	-0,0852	1,0000

**Tabela 4.5:** Tensão principal  $\sigma_2$  (kN/cm<sup>2</sup>).

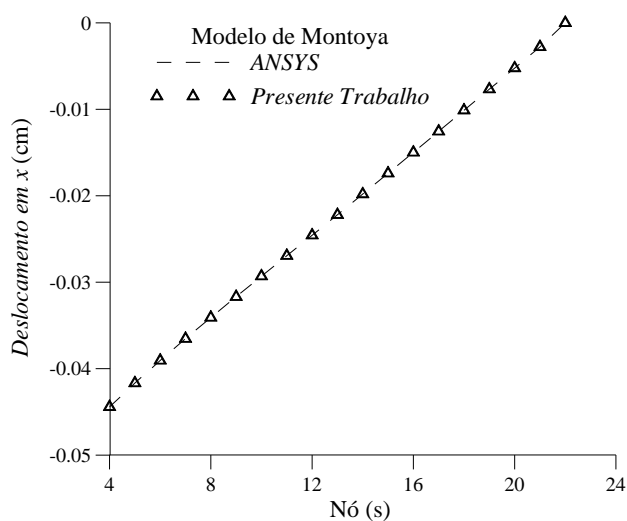
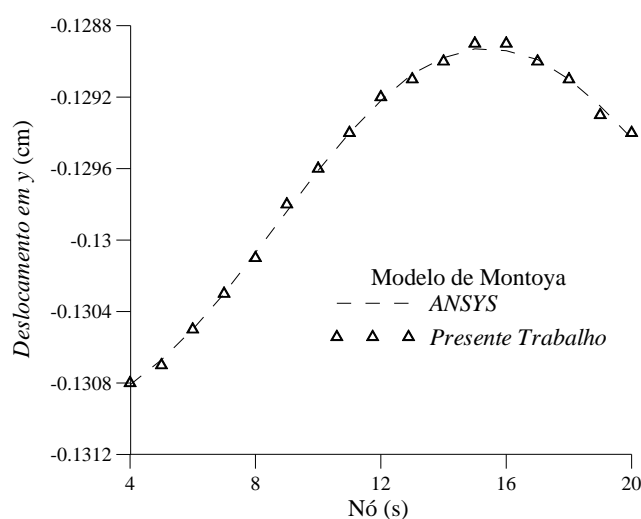
<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	-0,8395	-0,8395	1,0000
20	-0,8028	-0,8028	1,0000
30	-0,9146	-0,9147	0,9999
40	-0,8264	-0,8264	1,0000
50	-1,0150	-1,0150	1,0000
60	-0,8618	-0,8618	1,0000
70	-1,1140	-1,1140	1,0000
80	-0,9100	-0,9100	1,0000
90	-0,1204	-0,1204	1,0000
100	-0,9726	-0,9726	1,0000

Comparando-se as tensões  $\sigma_1$  positivas com a resistência à tração do concreto, calculada como  $(0,1 f_{ck})$ , verifica-se que há formação de fissuras em algumas regiões específicas do modelo. A Tabela 4.6 comprova esse fato, pois há valores de tensão que ultrapassam 0,30 kN/cm<sup>2</sup> que corresponde à resistência à tração do concreto.

**Tabela 4.6:** Verificação das tensões de fissuras (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Ocorrência de trincas
18	0,0155	0,0155	NÃO
19	0,0028	0,0028	NÃO
20	0,0147	0,0147	NÃO
200	0,0871	0,0871	NÃO
201	2,0210	2,0205	SIM
202	3,0250	3,0251	SIM
203	2,4100	2,4103	SIM
204	3,7910	3,7912	SIM
205	2,8180	2,8178	SIM
206	4,7445	4,7452	SIM

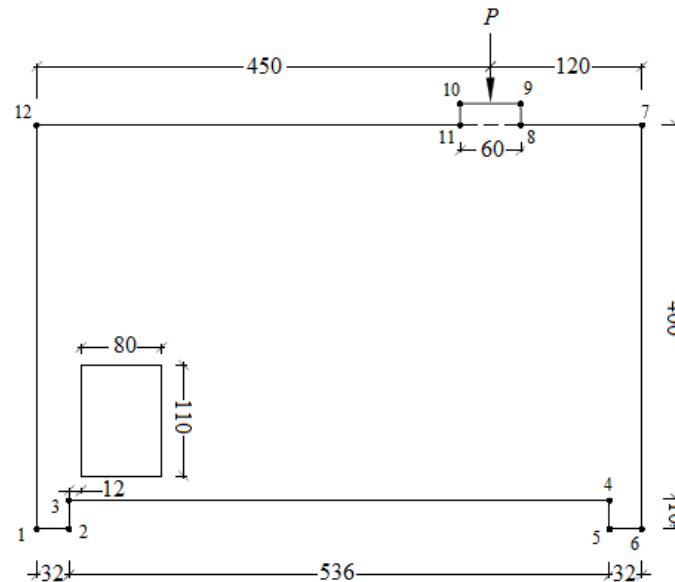
Nas Figuras 4.5a e 4.5b mostram-se comparações gráficas entre os deslocamentos nodais obtidos através do programa desenvolvido nesta pesquisa e a partir dos resultados encontrados com auxílio do software ANSYS 17. Neste caso, é possível verificar a precisão entre os resultados dos deslocamentos nas duas direções dos eixos de referências ( $x$  e  $y$ ), validando dessa forma, a implementação numérica desenvolvida.

**Figura 4.5a:** Deslocamentos nodais em  $x$ .**Figura 4.5b:** Deslocamentos nodais em  $y$ .

### 4.3 Representação numérica do Modelo de SCHÄFER & SCHLÄICH (1987)

Neste exemplo será analisado numericamente o modelo de SCHÄFER & SCHLÄICH (1987) que corresponde a uma viga-parede com abertura e sujeita a um carregamento

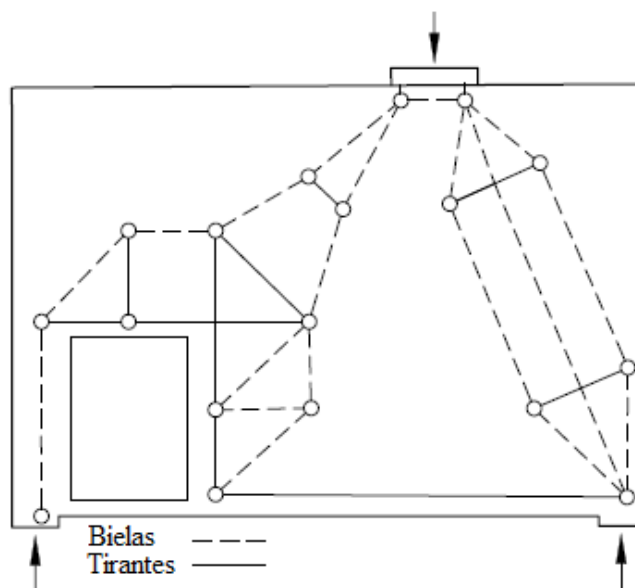
pontual. Na Figura 4.6 apresenta-se de forma detalhada a viga-parede, que está sujeita à carga de 800 kN. O concreto apresenta um módulo de elasticidade igual a 2800 kN/cm<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson igual a 0,25.



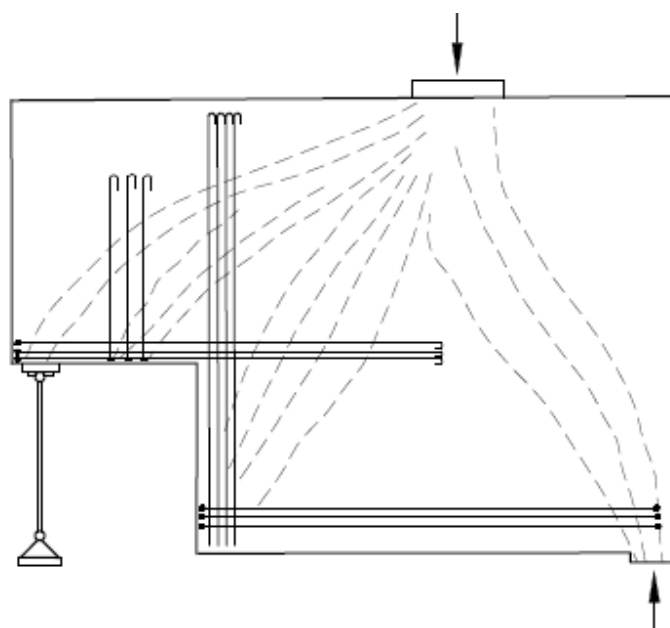
**Figura 4.6:** Viga-parede Modelo de SCHÄFER & SCHLÄICH (1987).

Nesta aplicação, pretende-se encontrar as regiões tracionadas e comprimidas da viga-parede, tomando por base o Modelo de Bielas e Tirantes, conforme mostra a Figura 4.7. Sendo assim, seria possível realizar o correto dimensionamento da viga-parede, definindo o posicionamento das barras de aço que resistirão aos esforços de tração, conforme SCHÄFER & SCHLÄICH (1987) sugerem em sua solução elementar vide Figura 4.8.



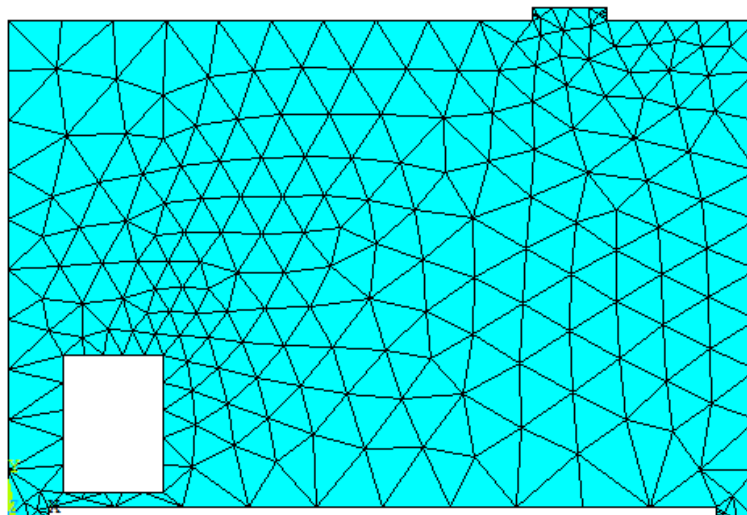


**Figura 4.7:** Formação de bielas e tirantes na viga-parede do modelo de SCHÄFER & SCHLÄICH (1987).



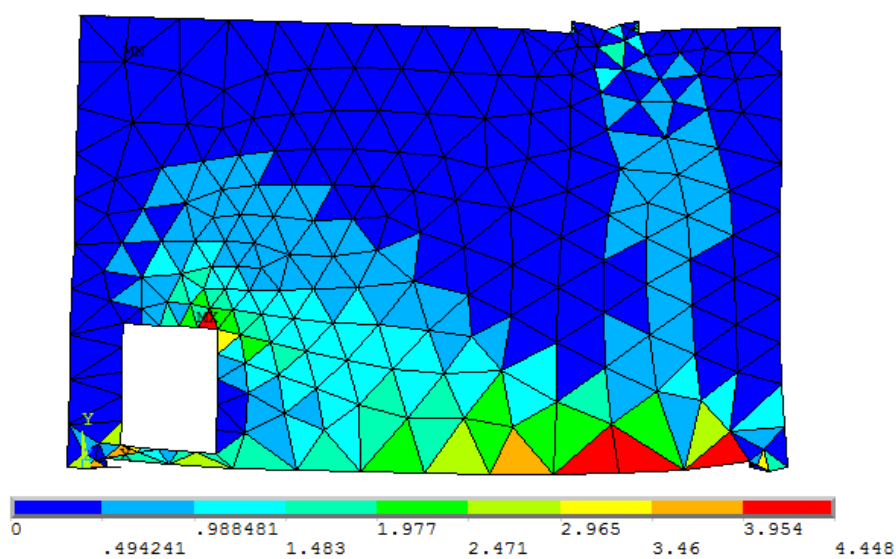
**Figura 4.8:** Solução elementar para a viga-parede do modelo de SCHÄFER & SCHLÄICH (1987).

A viga-parede foi discretizada com o auxílio do software ANSYS 17, gerando-se uma malha livre com 414 elementos finitos triangulares (CST) e 249 nós, conforme se mostra na Figura 4.9.

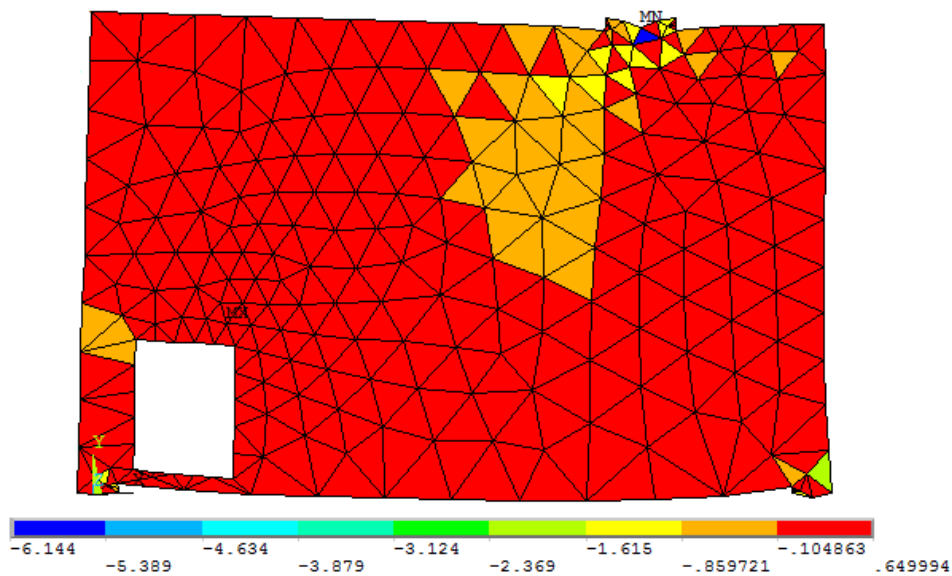


**Figura 4.9:** Malha livre da Viga-parede – ANSYS.

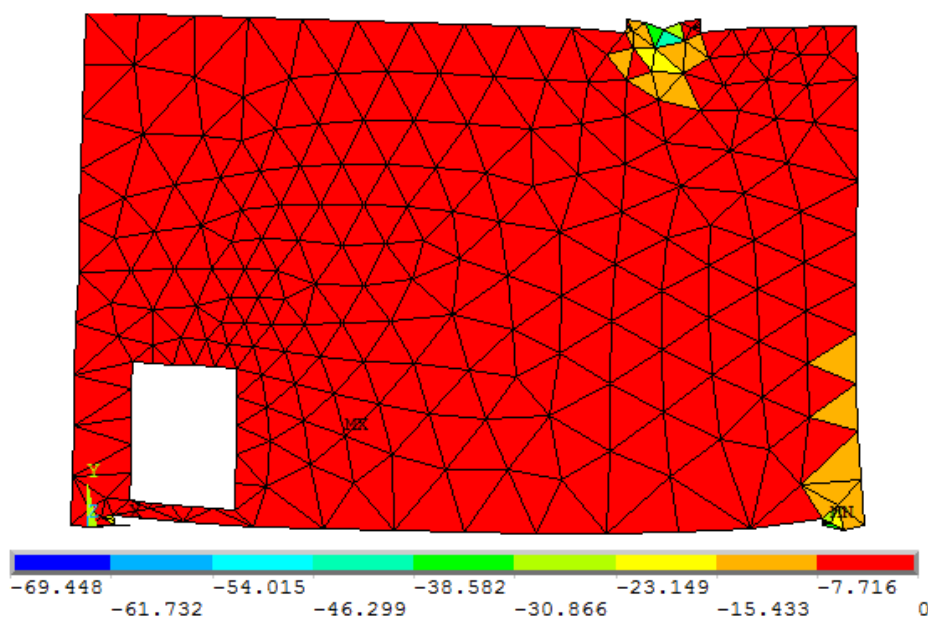
Nas Figuras 4.10a, 4.10b e 4.10c mostram-se o comportamento e as deformações da viga-parede.



**Figura 4.10a:** Tensão principal  $\sigma_1$ .

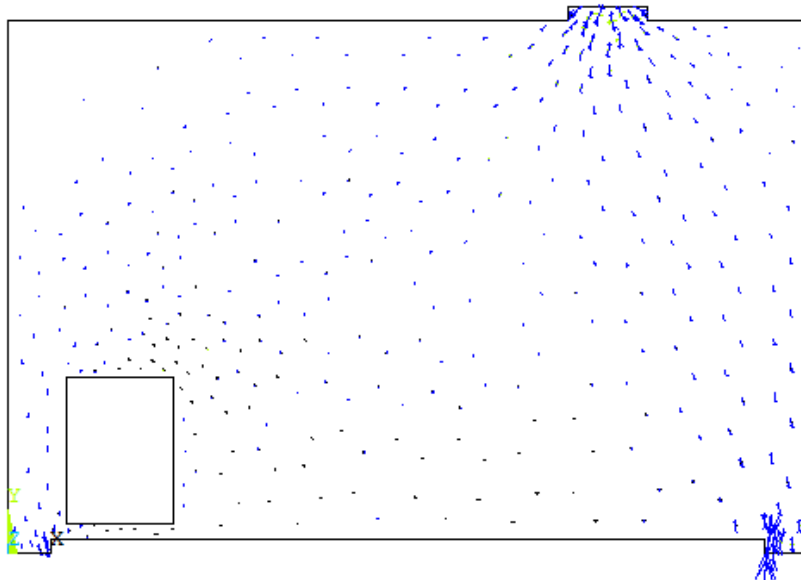


**Figura 4.10b:** Tensão principal  $\sigma_2$ .



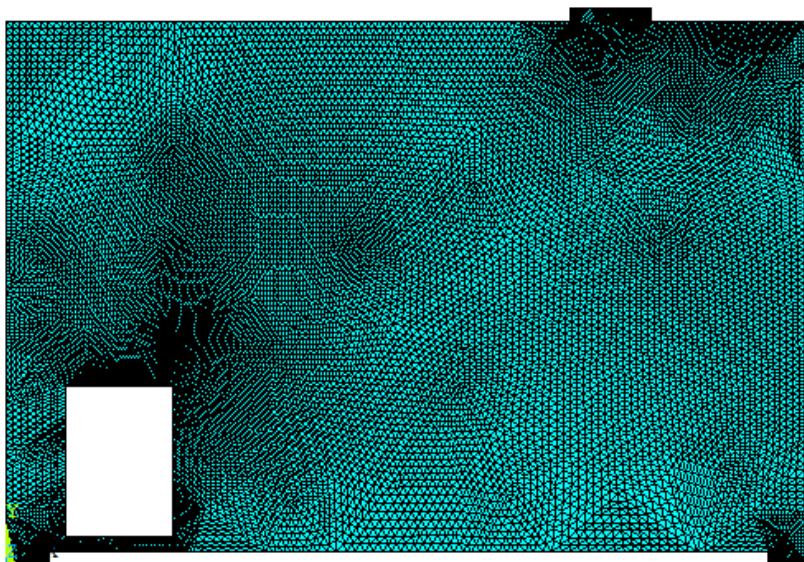
**Figura 4.10c:** Tensão principal  $\sigma_3$ .

Na Figura 4.11 visualizam-se os esforços de tração e compressão atuantes na viga-parede de forma vetorial.



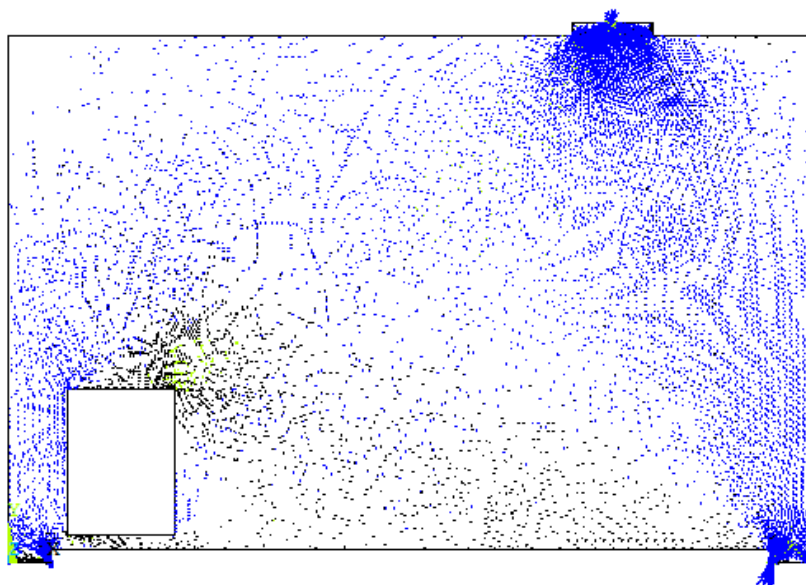
**Figura 4.11:** Representação vetorial dos esforços da viga-parede - ANSYS.

Com o intuito de se mostrar uma melhor representação das regiões comprimidas e tracionadas da viga-parede, realizou-se um maior refinamento na malha de elementos finitos. Vale ressaltar que a nova malha apresenta 26496 elementos finitos triangulares (CST) e 13584 nós, conforme se mostra na Figura 4.12.



**Figura 4.12:** Malha livre refinada da Viga-parede – ANSYS.

Assim, as regiões comprimidas que formam as bielas na viga-parede são representadas na cor azul na Figura 4.13.



**Figura 4.13:** Representação vetorial das tensões na viga-parede com a malha refinada-ANSYS.

Nas Tabelas 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11 apresentam-se comparações entre os resultados numéricos obtidos por meio do programa computacional desenvolvido e do software ANSYS 17. Neste caso, percebe-se também excelente aproximação entre as simulações numéricas realizadas.

**Tabela 4.7:** Tensões  $\sigma_x$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
1	-0,3167	-0,3167	1,0001
50	1,0030	1,0035	0,9995
100	-0,1158	-0,1158	1,0004
150	-0,1362	-0,1362	1,0001
200	-0,3266	-0,3266	0,9999
250	0,0105	0,0105	0,9998
300	-0,3654	-0,3654	1,0000
350	0,5519	0,5519	1,0000
400	-3,8440	-3,8442	0,9999
414	-3,9420	-3,9423	0,9999

**Tabela 4.8:** Tensões  $\sigma_y$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
1	-0,0766	-0,0766	1,0000
50	-0,0818	-0,0818	1,0000
100	-0,5528	-0,5528	1,0000
150	-2,8170	-2,8169	1,0000
200	-2,3570	-2,3570	1,0000
250	0,1902	0,1902	1,0003
300	0,1591	0,1591	1,0001
350	0,3279	0,3279	1,0000
400	-4,7240	-4,7244	0,9999
414	-3,1630	-3,1627	1,0001

**Tabela 4.9:** Tensões  $\tau_{xy}$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
1	-0,7080	-0,7080	1,0001
50	-0,2509	-0,2510	0,9998
100	-0,3003	-0,3003	1,0000
150	1,6410	1,6406	1,0002
200	-0,5192	-0,5192	1,0000
250	-0,5483	-0,5483	1,0000
300	-0,7349	-0,7349	0,9999
350	-0,6071	-0,6071	1,0000
400	-3,9740	-3,9744	0,9999
414	-4,3650	-4,3650	1,0000

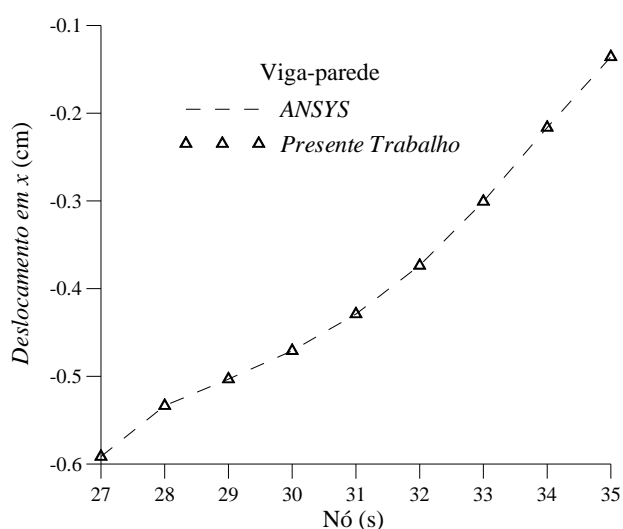
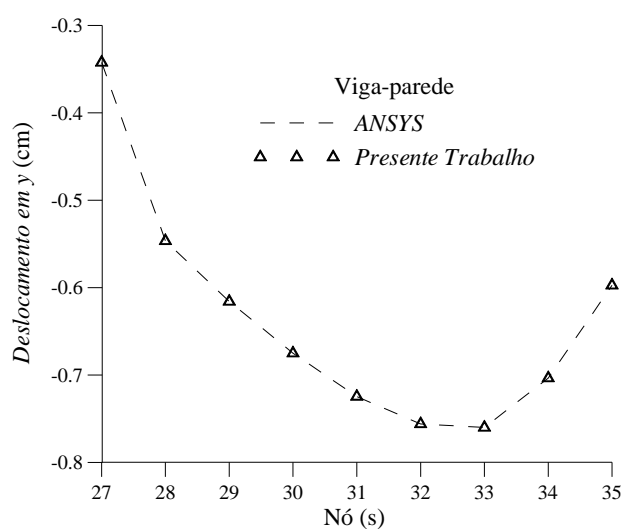
**Tabela 4.10:** Tensão Principal  $\sigma_I$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
1	0,5215	0,5215	1,0001
50	1,0590	1,0587	1,0003
100	0,0371	0,0371	1,0001
150	0,6420	0,6420	1,0000
200	-0,2016	-0,2016	1,0002
250	0,6559	0,6559	0,9999
300	0,6772	0,6772	1,0001
350	1,0570	1,0573	0,9997
400	-0,2857	-0,2857	1,0002
414	0,8299	0,8299	1,0000

**Tabela 4.11:** Tensão Principal  $\sigma_2$  (kN/cm<sup>2</sup>).

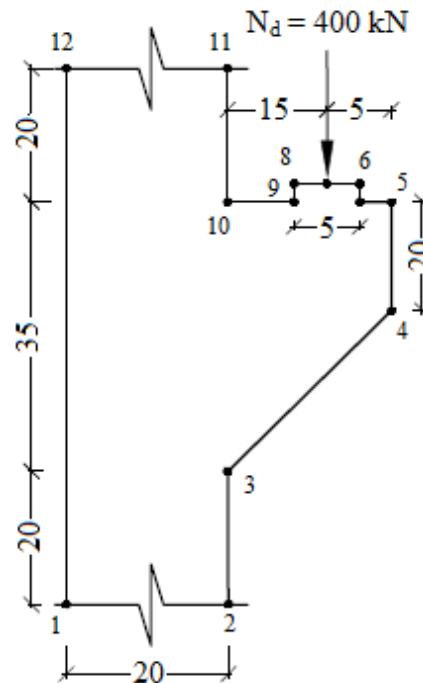
Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
1	-0,9147	-0,9147	1,0000
50	-0,1370	-0,1370	1,0002
100	-0,7057	-0,7057	1,0001
150	-3,5950	-3,5950	1,0000
200	-2,4820	-2,4820	1,0000
250	-0,4553	-0,4553	1,0001
300	-0,8835	-0,8835	1,0000
350	-0,1775	-0,1775	1,0001
400	-8,2830	-8,2830	1,0000
414	-7,9350	-7,9348	1,0000

Nas Figuras 4.14a e 4.14b apresentam-se comparações gráficas entre os deslocamentos nodais obtidos através do programa desenvolvido e os resultados encontrados a partir do software ANSYS 17. Nesta aplicação, escolheram-se nós localizados na parte inferior da viga-parede.

**Figura 4.14a:** Deslocamento em x.**Figura 4.14b:** Deslocamento em y.

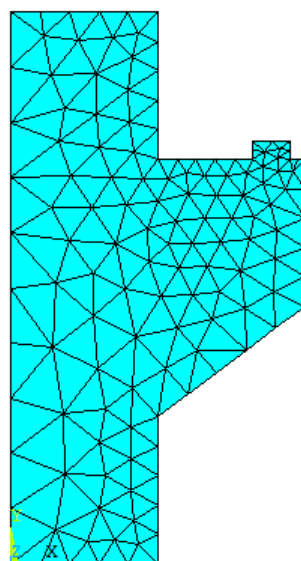
## 4.4 Consolo Curto

O consolo curto analisado está submetido a um carregamento pontual igual a 400 kN, cujas dimensões são mostradas na Figura 4.15. Nesta aplicação também se considerou concreto com módulo de elasticidade igual a 2800 kN/cm<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson igual a 0,25.



**Figura 4.15:** Dimensões do consolo curto (cm).

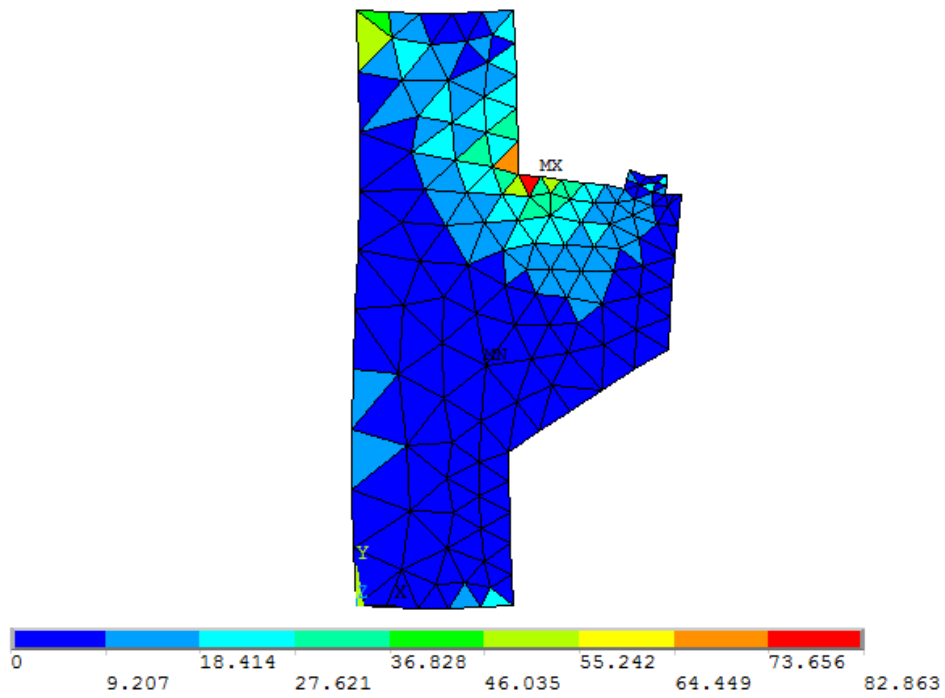
O consolo curto foi discretizado pelo software ANSYS 17 e para este exemplo considerou-se uma malha livre com 223 elementos finitos triangulares (CST) e com 139 nós, conforme se vê na Figura 4.16. Apesar da malha gerada para esse exemplo ser do tipo livre, os elementos na região tracionada possuem áreas similares, permitindo a realização do dimensionamento da armadura de costura do consolo, cujos resultados serão mostrados no final desta aplicação.



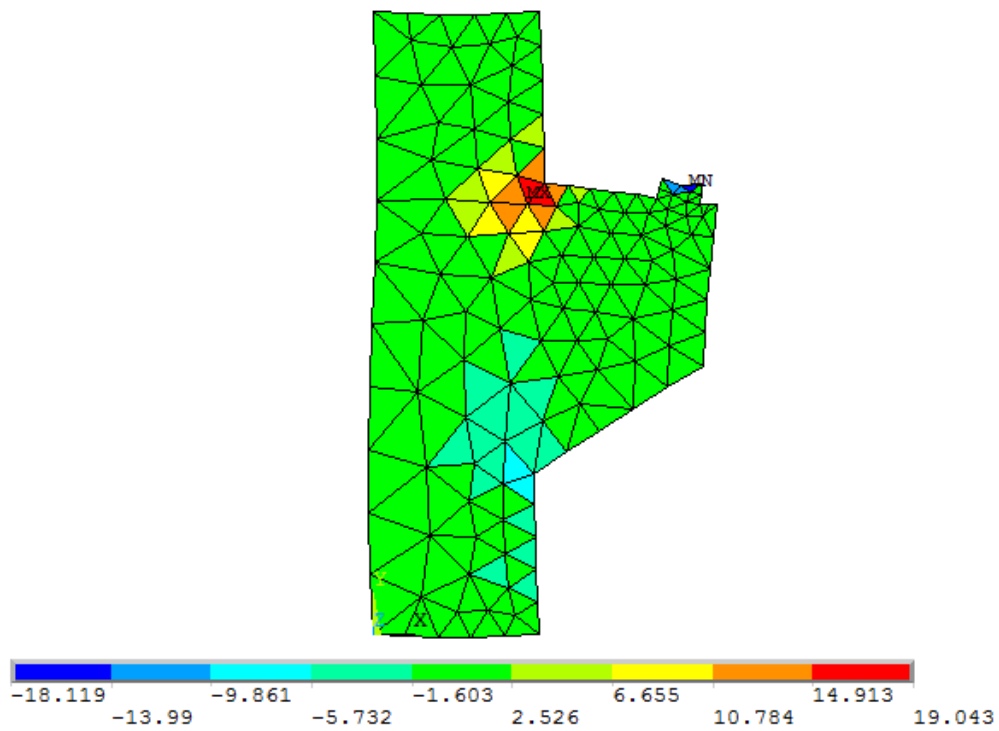
**Figura 4.16:** Malha livre do consolo curto - ANSYS.



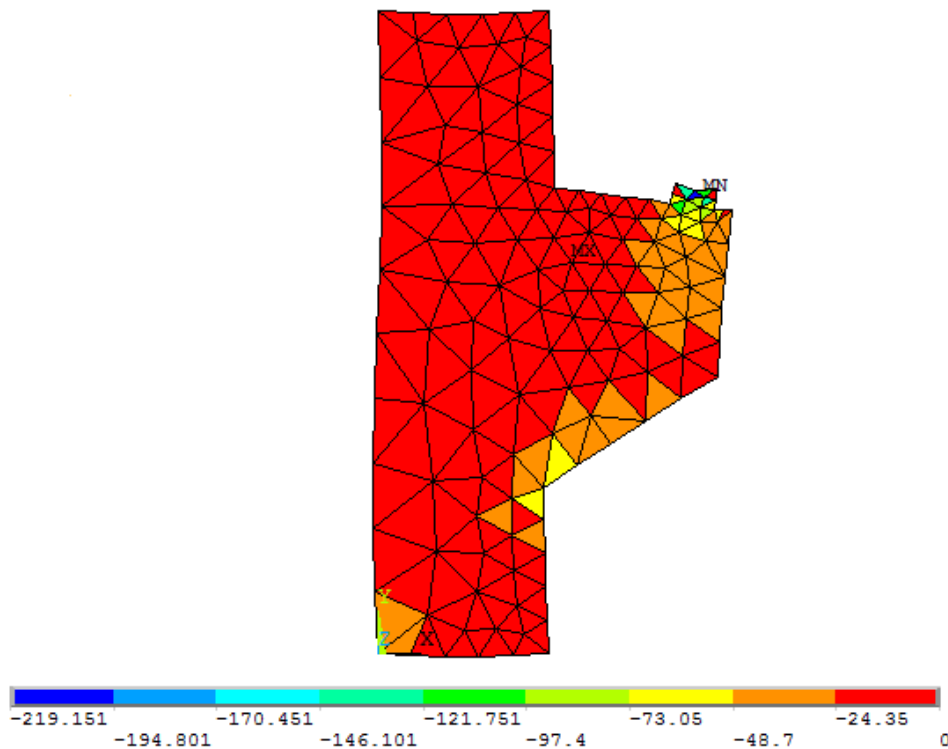
As configurações deformadas do elemento em análise são mostradas nas Figuras 4.17a, 4.17b e 4.17c, respectivamente, cujas escalas de referências encontram-se em kN/cm<sup>2</sup>.



**Figura 4.17a:** Tensão principal  $\sigma_1$ .

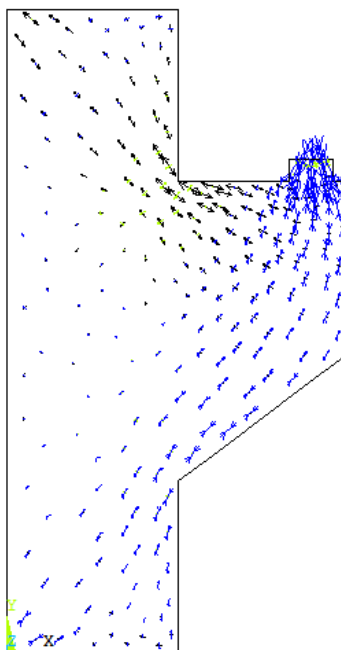


**Figura 4.17b:** Tensão principal  $\sigma_2$ .



**Figura 4.17c:** Tensão principal  $\sigma_3$ .

Assim como nos casos anteriores, é possível visualizar a representação vetorial desses esforços na forma vetorial mostrada na Figura 4.18. Na Figura mostram-se as regiões tracionadas (em preto) e comprimidas (em azul) do elemento estrutural em estudo.



**Figura 4.18:** Representação vetorial do consolo curto - ANSYS.

Nas Tabelas 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16 apresentam-se comparações entre os resultados do presente trabalho e as respostas determinadas através do software ANSYS 17.

**Tabela 4.12:** Tensões  $\sigma_x$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
10	5,3280	5,3283	0,9999
30	8,7690	8,7687	1,0000
50	-6,1200	-6,1197	1,0000
70	3,0680	3,0675	1,0002
90	-11,2900	-11,2950	0,9996
110	-4,3290	-4,3285	1,0001
130	-0,7243	-0,7243	1,0000
150	14,7000	14,6990	1,0001
170	3,8040	3,8043	0,9999
200	15,9100	15,9080	1,0001

**Tabela 4.13:** Tensões  $\sigma_y$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
10	17,5400	17,5360	1,0002
30	-93,2300	-93,2280	1,0000
50	-8,4660	-8,4661	1,0000
70	-0,4384	-0,4384	1,0001
90	-12,8000	-12,7990	1,0001
110	-17,7300	-17,7320	0,9999
130	-16,7900	-16,7900	1,0000
150	-1,3020	-1,3024	0,9997
170	-24,5400	-24,5410	1,0000
200	2,0090	2,0092	0,9999

**Tabela 4.14:** Tensões  $\tau_{xy}$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
10	-7,4150	-7,4154	0,9999
30	1,3720	1,3717	1,0002
50	-12,9600	-12,9590	1,0001
70	-3,4170	-3,4166	1,0001
90	-14,0100	-14,0120	0,9999
110	-8,8050	-8,8049	1,0000
130	-3,7960	-3,7958	1,0001
150	-4,1280	-4,1275	1,0001
170	-13,0000	-12,9990	1,0001
200	-9,3750	-9,3747	1,0000

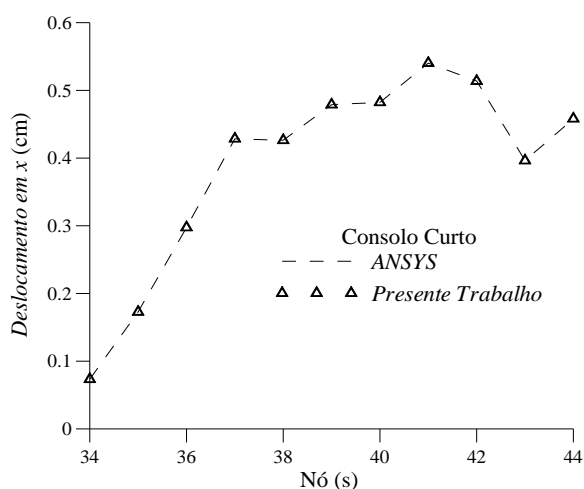
**Tabela 4.15:** Tensão Principal  $\sigma_1$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	12,8900	12,8890	1,0001
30	8,7870	8,7871	1,0000
50	5,7190	5,7192	1,0000
70	5,1550	5,1546	1,0001
90	1,9850	1,9850	1,0000
110	0,0349	0,0349	0,9999
130	0,1274	0,1274	1,0000
150	15,7000	15,7010	0,9999
170	8,8630	8,8627	1,0000
200	20,6300	20,6280	1,0001

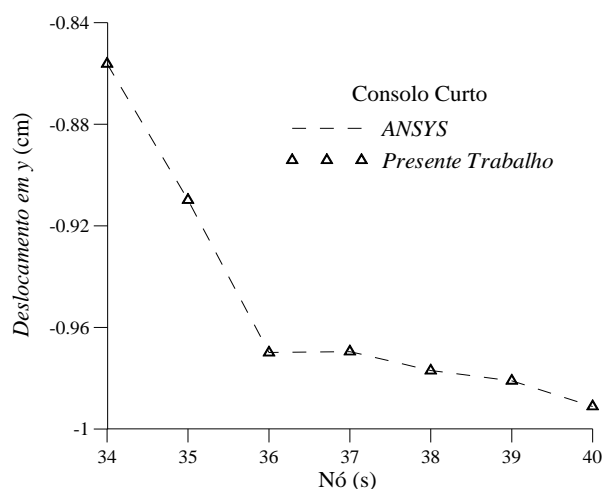
**Tabela 4.16:** Tensão Principal  $\sigma_2$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	-45,3000	-45,2980	1,0000
30	-93,2500	-93,2460	1,0000
50	-20,3100	-20,3050	1,0002
70	-2,5250	-2,5255	0,9998
90	-26,0800	-26,0790	1,0000
110	-22,1000	-22,0960	1,0002
130	-17,6400	-17,6410	0,9999
150	-2,3040	-2,3043	0,9999
170	-29,6000	-29,5990	1,0000
200	-2,7110	-2,7109	1,0000

Nas Figuras 4.19a e 4.19b mostram-se comparações gráficas entre os deslocamentos nodais obtidos através do programa desenvolvido e os resultados do ANSYS 17, sendo os nós referentes à parte superior do consolo curto, local próximo ao posicionamento das armaduras de aço.



**Figura 4.19a:** Deslocamento em x.



**Figura 4.19b:** Deslocamento em y.

Por fim, realizou-se o dimensionamento do consolo curto segundo as prescrições da ABNT NBR 9062 (2006) e seus resultados foram comparados com respostas obtidas pelo Método dos Elementos Finitos, sendo os valores das tensões elementares extraídos da modelagem realizada. Para a realização do dimensionamento, considerou-se:  $d=31\text{cm}$ ,  $d'=4\text{cm}$ ,  $a=15,5\text{cm}$  e  $f_{yd}=43,47\text{kN/cm}^2$ . Na Tabela 4.17 mostram-se os resultados do dimensionamento.

**Tabela 4.17:** Área de aço ( $\text{cm}^2$ ).

ABNT NBR 9062 (2006)	Presente Trabalho	Presente Trabalho/ ABNT NBR 9062 (2006)
5,11	4,64	0,91

A partir dos resultados mostrados na Tabela 4.17, calculou-se o número de barras de aço necessárias para suportar os esforços de tração utilizando as duas metodologias, sendo os resultados mostrados na Tabela 4.18.

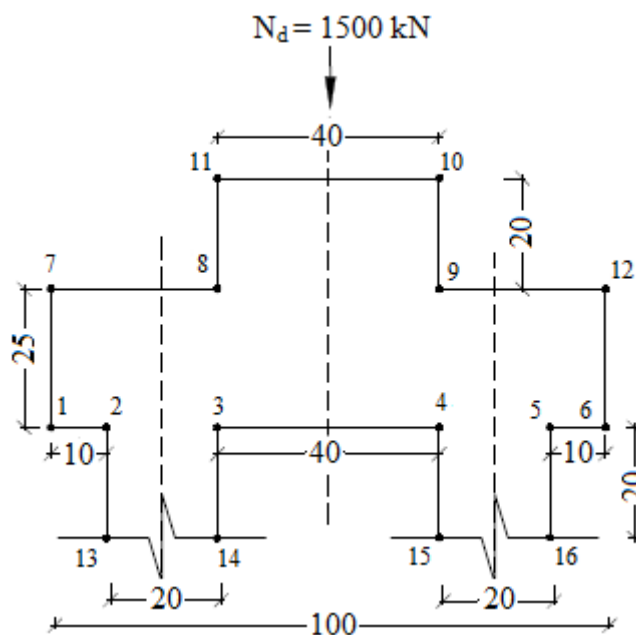
**Tabela 4.18:** Número de barras ( $\phi = 12,5\text{mm}$ ).

ABNT NBR 9062 (2006)	Presente Trabalho
4	4

## 4.5 Bloco de Fundação com duas Estacas de Concreto

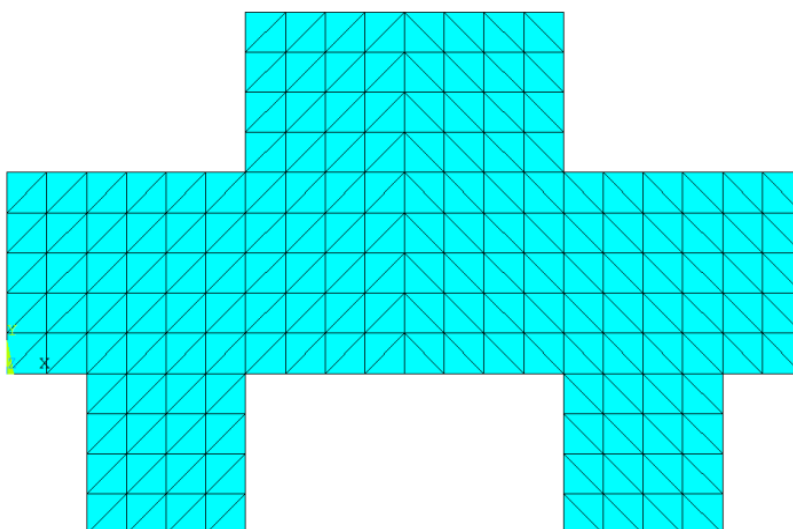
O bloco de fundação com duas estacas está submetido a um carregamento pontual igual a 1500 kN e suas dimensões são mostradas na Figura 4.20. Nesta aplicação, considerou-

se concreto com módulo de elasticidade igual a  $2800 \text{ kN/cm}^2$  e coeficiente de Poisson igual a 0,25.



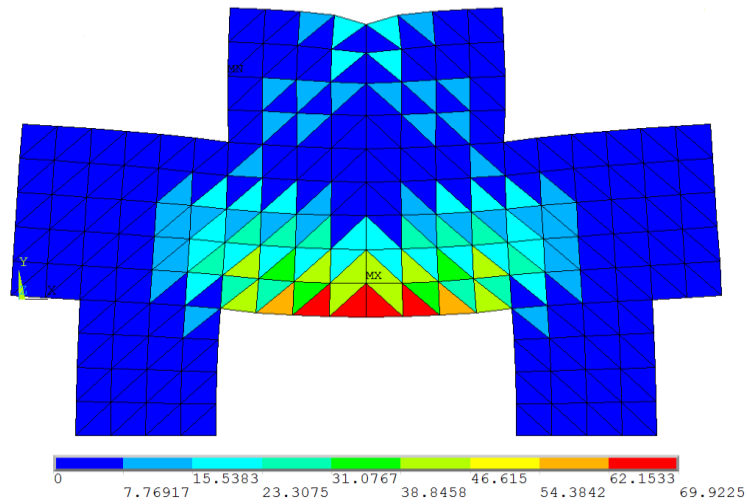
**Figura 4.20:** Dimensões do bloco de fundação com duas estacas de concreto (cm).

O bloco de fundação foi discretizado com auxílio do software ANSYS 17, gerando-se uma malha estruturada com 328 elementos finitos triangulares (CST) e com 202 nós, conforme se apresenta na Figura 4.21.

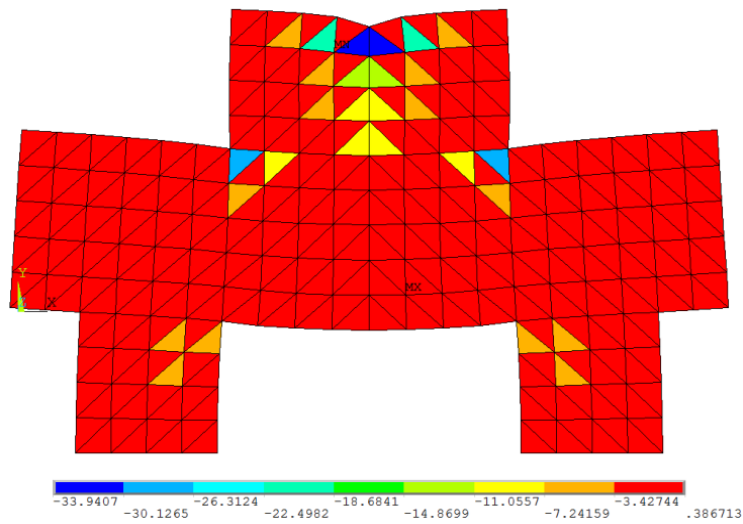


**Figura 4.21:** Discretização do bloco de fundação - ANSYS.

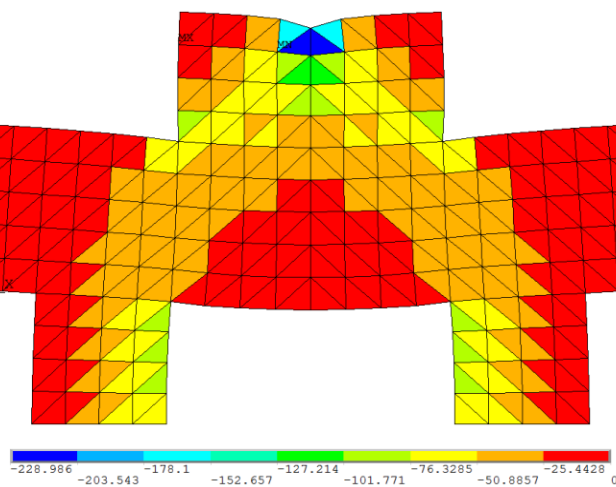
Com auxílio do programa ANSYS 17 é possível observar nas Figuras 4.22a, 4.22b e 4.22c as configurações deformadas do bloco de fundações.



**Figura 4.22a:** Tensão principal  $\sigma_1$ .

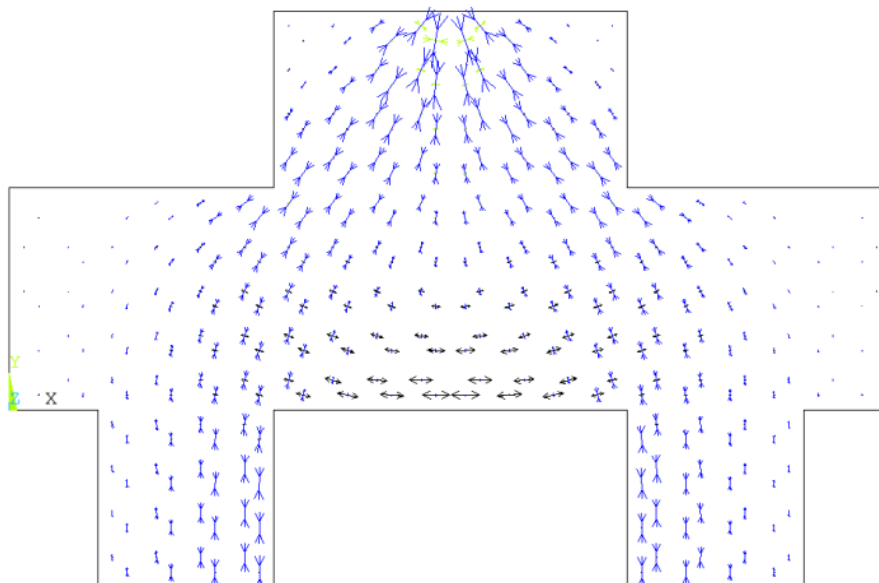


**Figura 4.22b:** Tensão principal  $\sigma_2$ .



**Figura 4.22c:** Tensão principal  $\sigma_3$ .

Na Figura 4.23 mostram-se, de forma vetorial, as tensões de tração e compressão no bloco de fundação, que garantem o equilíbrio do elemento estrutural.



**Figura 4.23:** Representação vetorial do bloco de fundação - ANSYS.

Nas Tabelas 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23 apresentam-se comparações entre os resultados numéricos obtidos por meio do programa computacional desenvolvido e por meio do software ANSYS 17. Neste caso, percebe-se também excelente aproximação entre as simulações numéricas realizadas.

**Tabela 4.19:** Tensões  $\sigma_x$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
10	-15,4200	-15,4170	1,0002
20	-22,8700	-22,8700	1,0000
30	-12,0000	-11,9950	1,0004
40	-46,6600	-46,6650	0,9999
50	-2,0900	-2,0905	0,9998
60	-22,5400	-22,5380	1,0001
70	-7,0360	-7,0356	1,0001
80	5,9950	5,9951	1,0000
90	27,6600	27,6600	1,0000
100	58,5300	58,5320	1,0000



**Tabela 4.20:** Tensões  $\sigma_y$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	-7,5970	-7,5974	0,9999
20	-59,4700	-59,4740	0,9999
30	-74,9800	-74,9790	1,0000
40	-216,3000	-216,2600	1,0002
50	-21,6700	-21,6660	1,0002
60	-29,7100	-29,7150	0,9998
70	-27,1600	-27,1610	1,0000
80	-18,9200	-18,9160	1,0002
90	-15,2200	-15,2210	0,9999
100	0,5455	0,5455	1,0001

**Tabela 4.21:** Tensões  $\tau_{xy}$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	2,8870	2,8874	0,9999
20	-29,4300	-29,4350	0,9998
30	-12,6600	-12,6620	0,9998
40	48,1700	48,1650	1,0001
50	15,4200	15,4240	0,9997
60	27,8700	27,8720	0,9999
70	16,8200	16,8200	1,0000
80	6,8850	6,8846	1,0001
90	26,9700	26,9710	1,0000
100	11,7500	11,7460	1,0003

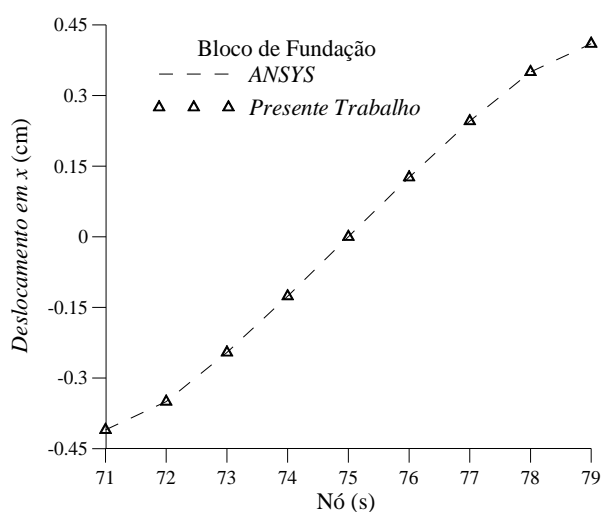
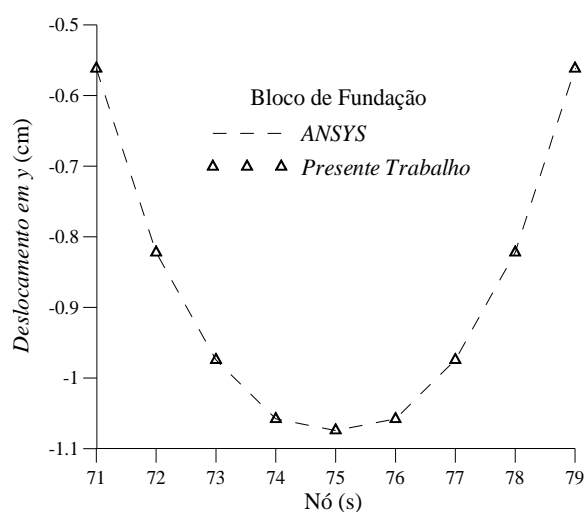
**Tabela 4.22:** Tensão Principal  $\sigma_I$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
10	-6,6470	-6,6467	1,0000
20	-6,5110	-6,5111	1,0000
30	-9,5450	-9,5453	1,0000
40	-33,9400	-33,9410	1,0000
50	6,3890	6,3890	1,0000
60	1,9750	1,9754	0,9998
70	2,5020	2,5019	1,0000
80	7,7710	7,7711	1,0000
90	40,6700	40,6740	0,9999
100	60,8200	60,8200	1,0000

**Tabela 4.23:** Tensão Principal  $\sigma_2$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
10	-16,3700	-16,3670	1,0002
20	-75,8300	-75,8320	1,0000
30	-77,4300	-77,4290	1,0000
40	-229,0000	-228,9900	1,0000
50	-30,1500	-30,1460	1,0001
60	-54,2300	-54,2290	1,0000
70	-36,7000	-36,6980	1,0001
80	-20,6900	-20,6920	0,9999
90	-28,2400	-28,2360	1,0001
100	-1,7430	-1,7435	0,9997

Nas Figuras 4.24a e 4.24b mostram-se comparações gráficas entre os deslocamentos nodais obtidos através do programa desenvolvido e os resultados do ANSYS 17, sendo os nós referentes à parte inferior do bloco de fundação, localizados entre as duas estacas de concreto.

**Figura 4.24a:** Deslocamento em x.**Figura 4.24b:** Deslocamento em y.

Por fim, encontrou-se a área de aço da armadura tracionada através do Método de Blévoit & Frémy e os resultados foram comparados com as respostas determinadas com base no Método dos Elementos Finitos. Para a realização do dimensionamento, considerou-se:  $h = 25\text{cm}$ ,  $d' = 4\text{cm}$ ,  $a_0 = 40\text{cm}$ ,  $a = 60\text{cm}$  e  $f_{yd} = 43,47\text{kN/cm}^2$ . Os resultados são mostrados na Tabela 4.24. Neste exemplo, também se verifica uma boa aproximação entre os resultados encontrados através dos dois procedimentos.

**Tabela 4.24:** Área de aço (cm<sup>2</sup>).

Blébot & Frémy	Presente Trabalho	Blébot e Frémy/Presente Trabalho
18,25	16,35	0,90

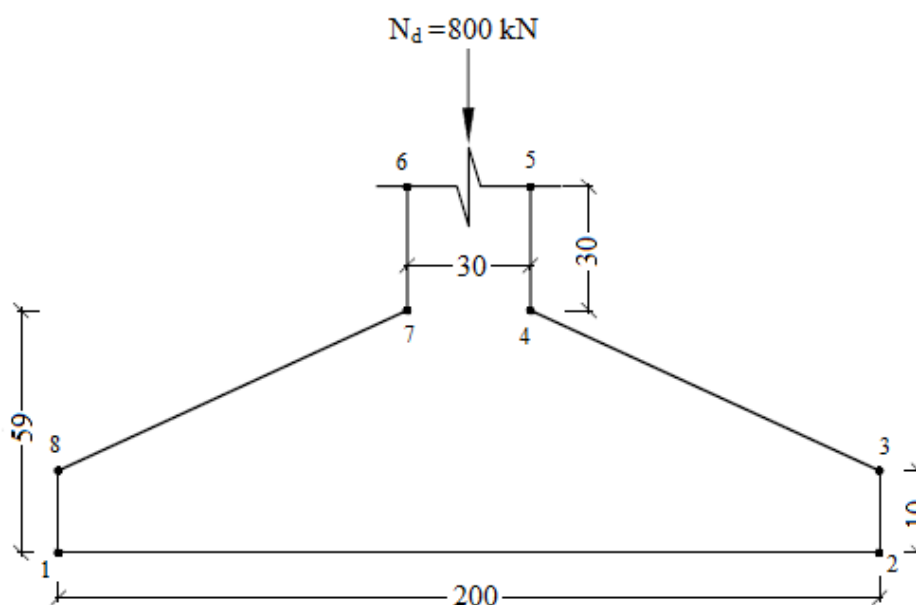
Por fim, na Tabela 4.25 mostra-se o número de barras de aço tracionadas necessárias em cada uma das direções do bloco de fundações.

**Tabela 4.25:** Número de barras ( $\phi = 20\text{mm}$ ).

Blébot & Frémy	Presente Trabalho
6	5

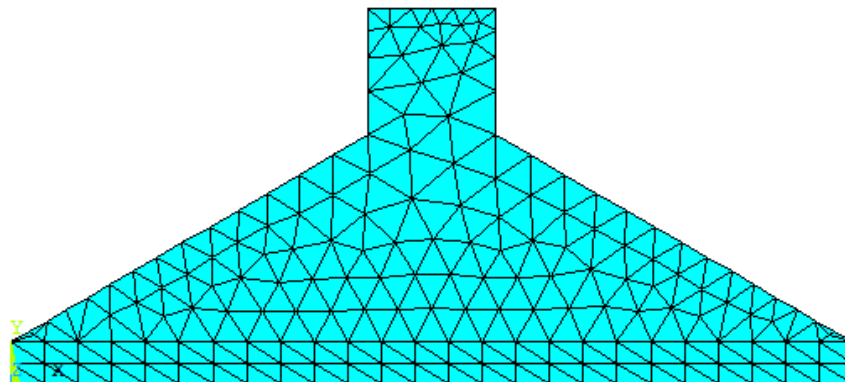
## 4.6 Sapata Rígida

A sapata rígida em análise está submetida a um carregamento pontual igual a 800 kN, cujas dimensões são mostradas na Figura 4.25. O concreto apresenta um módulo de elasticidade igual a 2800 kN/cm<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson igual a 0,25.

**Figura 4.25:** Dimensões da sapata rígida (cm).

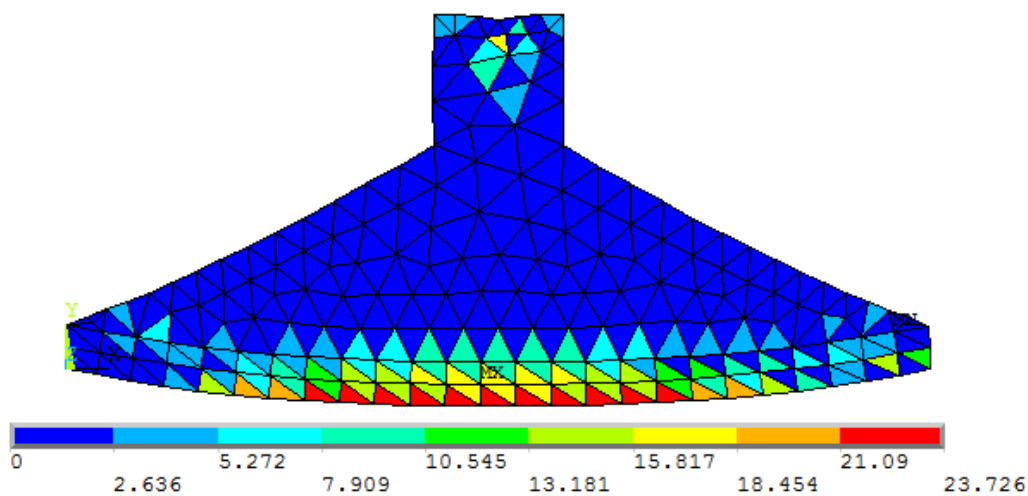
Em sua modelagem, a sapata foi dividida em duas regiões. A parte superior foi discretizada com uma malha livre e a parte inferior foi discretizada de forma estruturada.

A sapata rígida foi discretizada pelo ANSYS 17 sendo que a parte inferior foi seccionada em 25 divisões conforme Figura 4.26. A malha gerada apresenta 329 elementos finitos triangulares (CST) e com 201 nós.

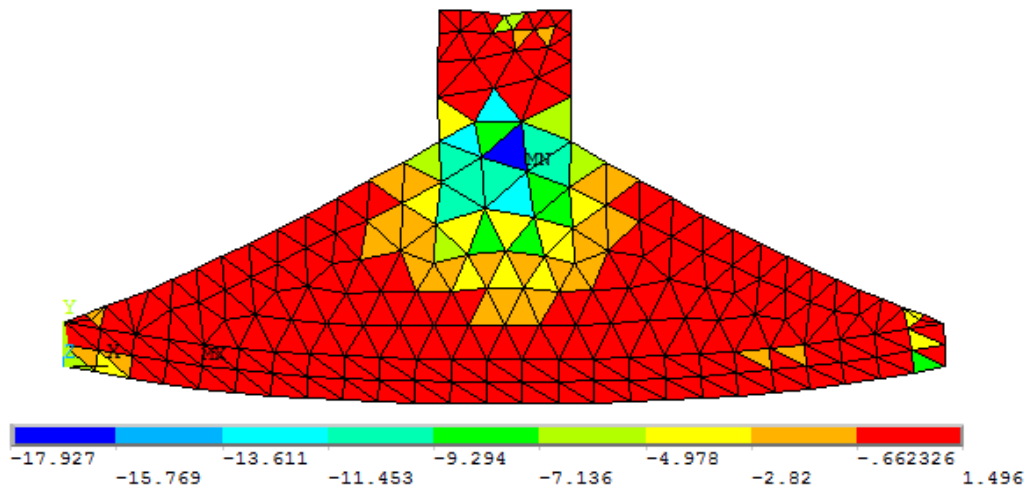


**Figura 4.26:** Malha da sapata rígida com 25 divisões - ANSYS.

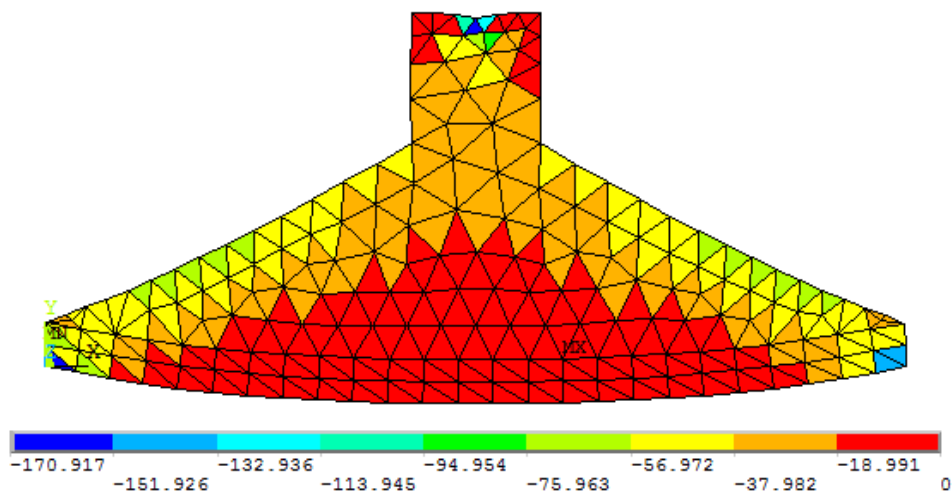
O comportamento e as deformações da sapata rígida com 25 divisões na parte inferior e que corresponde às tensões principais ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ ) podem ser visualizadas através do software ANSYS 17 mostradas nas Figuras 4.27a, 4.27b e 4.27c.



**Figura 4.27a:** Tensão principal  $\sigma_1$ .

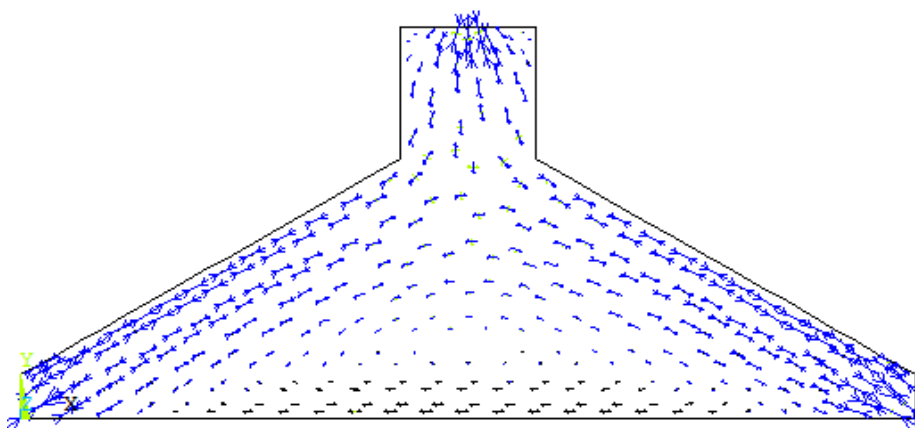


**Figura 4.27b:** Tensão principal  $\sigma_2$ .



**Figura 4.27c:** Tensão principal  $\sigma_3$ .

A Figura 4.28 mostra, de forma vetorial, as tensões de tração e compressão na sapata analisada.



**Figura 4.28:** Representação vetorial da sapata rígida com 25 divisões - ANSYS.

As Tabelas 4.26, 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30 apresentam-se os resultados numéricos obtidos por meio do programa computacional desenvolvido e através do software ANSYS 17.

**Tabela 4.26:** Tensões  $\sigma_x$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
1	-21,3800	-21,3840	0,9998
40	5,2410	5,2406	1,0001
80	23,3000	23,3010	1,0000
120	-16,3700	-16,3720	0,9999
160	-26,2600	-26,2600	1,0000
200	-22,8400	-22,8370	1,0001
240	-30,2800	-30,2800	1,0000
280	-1,7730	-1,7731	0,9999
320	-2,2510	-2,2509	1,0000
329	-31,9300	-31,9250	1,0002

**Tabela 4.27:** Tensões  $\sigma_y$  (kN/cm<sup>2</sup>).

<b>Elemento</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Presente Trabalho/ANSYS</b>
1	-23,5500	-23,5550	0,9998
40	0,4340	0,4340	1,0000
80	1,1660	1,1661	0,9999
120	-2,8400	-2,8401	1,0000
160	-4,9580	-4,9584	0,9999
200	-9,6150	-9,6153	1,0000
240	-8,6300	-8,6303	1,0000
180	-15,7000	-15,7030	0,9998
320	-4,7820	-4,7821	1,0000
329	-15,1900	-15,1900	1,0000

**Tabela 4.28:** Tensões  $\tau_{xy}$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
1	24,9700	24,9690	1,0000
40	-0,4914	-0,4914	1,0001
80	2,4540	24,5380	0,1000
120	4,1260	4,1257	1,0001
160	-11,5100	-11,5110	0,9999
200	5,7290	57,2930	0,1000
240	15,9500	15,9470	1,0002
180	5,6540	56,5450	0,1000
320	-6,6560	-66,5620	0,1000
329	25,5700	25,5710	1,0000

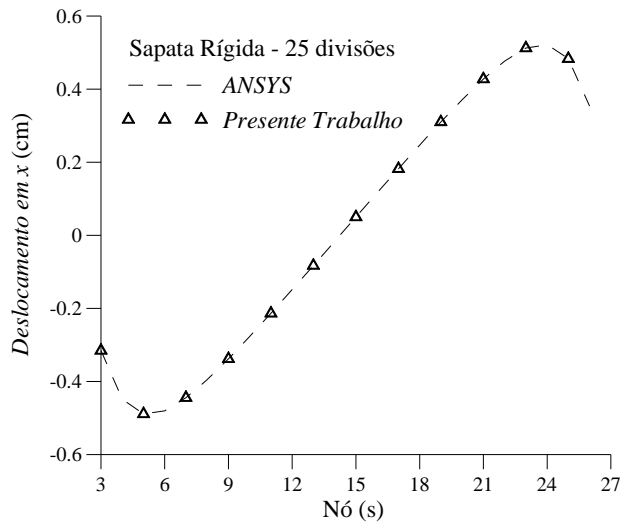
**Tabela 4.29:** Tensão Principal  $\sigma_1$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
1	2,5240	2,5236	1,0002
40	5,2900	5,2903	0,9999
80	23,5700	23,5700	1,0000
120	-1,6810	-16,8140	0,1000
160	0,0732	0,0732	1,0000
200	-7,4780	-7,4781	1,0000
240	-0,1815	-0,1815	1,0001
280	0,2332	0,2332	0,9999
320	3,2590	3,2590	1,0000
329	3,3480	3,3479	1,0000

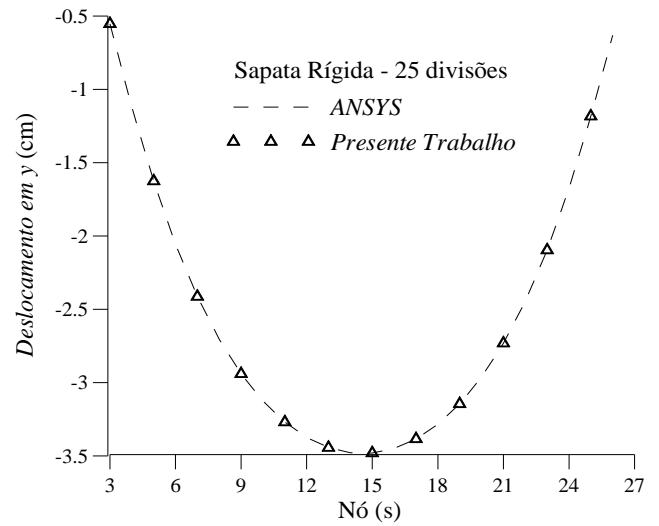
**Tabela 4.30:** Tensão Principal  $\sigma_2$  (kN/cm<sup>2</sup>).

Elemento	Presente Trabalho	ANSYS	Presente Trabalho/ANSYS
1	-47,4600	-47,4620	1,0000
40	0,3843	0,3843	1,0000
80	0,8974	0,8974	1,0000
120	-17,5300	-17,5300	1,0000
160	-31,2900	-31,2920	0,9999
200	-24,9700	-24,9740	0,9998
240	-38,7300	-38,7290	1,0000
280	-17,7100	-17,7090	1,0001
320	-10,2900	-10,2920	0,9998
329	-50,4600	-50,4640	0,9999

Com relação aos deslocamentos nodais, as Figuras 4.29a e 4.29b mostram as comparações gráficas entre os deslocamentos na parte inferior da sapata rígida obtida por meio do programa desenvolvido e os resultados obtidos através do software ANSYS 17.



**Figura 4.29a:** Deslocamento em x.



**Figura 4.29b:** Deslocamento em y.



# Capítulo 5

## Conclusões

### 5.1 Considerações Finais

No presente trabalho foi realizada a implementação do Modelo de Bielas e Tirantes via Método dos Elementos Finitos, com aplicações em blocos de fundação, consolos curtos, vigas-parede e sapatas rígidas, além de analisar numericamente via método dos elementos finitos o modelo desenvolvido por MONTROYA *et al.* (1991). Neste contexto, objetivou-se determinar os valores de tensões elementares, tensões principais e deslocamentos nas estruturas, considerando que os materiais apresentam comportamento elástico-linear. Desenvolveu-se, dessa forma, um programa computacional implementado em linguagem Fortran 90/95 (CHAPMAN, 2003) que permitiu a realização das análises.

Para validar as implementações computacionais realizadas no trabalho, utilizaram-se respostas de problemas encontrados na literatura, bem como, as obtidas a partir de modelagens realizadas com auxílio do software ANSYS 17.

### 5.2 Conclusões

Em todas as aplicações apresentadas nesse trabalho, observou-se uma ótima convergência entre os resultados numéricos obtidos com o programa computacional implementado e a partir das respostas encontradas por meio do software ANSYS 17, tanto para os resultados de tensões elementares e tensões principais, quanto para os resultados de deslocamentos nodais dos elementos analisados. Logo, verifica-se que a implementação do Modelo de Bielas e Tirantes utilizando uma formulação via Método dos Elementos Finitos foi bem sucedida, contribuindo com valores precisos de tensões e deslocamentos das estruturas planas com comportamento elástico-linear. Com isso, este procedimento permite que o projetista realize análises mais precisas, e conseqüentemente, dimensionamentos de elementos estruturais com maior segurança e custo benefício. Isso ficou evidente em duas

aplicações deste trabalho, nas quais, foram realizados os cálculos das áreas de aço das armaduras de aço mediante o uso do método dos elementos finitos.

Na análise feita por meio do modelo desenvolvido por MONTROYA *et al.* (1991), verificaram-se diversos pontos onde há o surgimento de trincas (fissuras), visto que, os valores de tensões obtidos ultrapassaram a resistência à tração do concreto, sendo necessário o uso das armaduras que resistirão aos esforços de tração.

Com relação à análise da viga-parede, verificou-se a formação das bielas e tirantes na transferência dos esforços internos, que garantem o equilíbrio do elemento estrutural e isso justifica a adoção da metodologia utilizada.

Nos dimensionamentos realizados no consolo curto e no bloco de fundação, obtiveram-se resultados com cerca de 90% de aproximação, comparados com as prescrições normativas vigentes no Brasil. Foi possível notar que os dimensionamentos das armaduras de aço com as metodologias clássicas encontradas na literatura se mostraram mais conservadores quando comparados com os resultados obtidos via Método dos Elementos Finitos (MEF). De qualquer modo, a realização do dimensionamento destes elementos estruturais com o uso do método dos elementos finitos é possível, uma vez que os resultados encontrados se aproximaram das respostas obtidas com base na ABNT NBR 9062 (2006) e com o método clássico de BLÉVOT & FRÉMY (1967).

Na análise realizada para a sapata rígida, verificou-se que o refinamento da malha na parte inferior, onde ficam posicionadas as armaduras de tração, possibilitou melhores resultados comparando com outras malhas analisadas. Além de permitir resultados para a área de aço da armadura de tração, com uma aproximação de 95% comparado com o resultado encontrado por CARVALHO & PINHEIRO (2009).

### **5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros**

Vários trabalhos podem ser elaborados a partir da base computacional desenvolvida nesta dissertação. Com o objetivo de dar continuidade ao tema proposto, são sugeridas as seguintes pesquisas:

- Análise não linear física dos elementos estruturais estudados;

- Implementar através do método dos elementos finitos, o Modelo de Bielas e Tirantes válido para elementos estruturais tridimensionais. Como por exemplo, blocos de fundação apoiados em quatro ou mais estacas;
- Análise e projeto com elementos sujeitos a cargas excêntricas;
- Análise utilizando-se elementos finitos quadrilaterais com quatro nós, oito e nove nós, uma vez que, o código implementado neste trabalho utiliza apenas os elementos triangulares com três nós (CST) e este elemento apresenta um campo de deslocamentos com menos parcelas, ou seja, menos refinado e pode acarretar resultados com menor precisão quando comparados com exemplos reais;
- Incluir rotinas capazes de realizar o dimensionamento do elemento utilizando-se o método dos elementos finitos e realizar comparações com respostas obtidas através de considerações normativas internacionais. Visto que o dimensionamento realizado nesse trabalho não foi implementando no programa desenvolvido.

# Referências

- ABBAD, G. P., 2014. *Estudo de pré-viabilidade na especificação de fundação do tipo estaca escavada ou sapata isolada em edificação multifamiliar*. Trabalho de Diplomação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Maria, UFSM, Santa Maria, RS, Brasil.
- ABNT NBR-6118, 2003. *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento*, Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, Brasil.
- ABNT NBR-6118, 2007. *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento*, Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, Brasil.
- ABNT NBR-6118, 2014. *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento*, Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, Brasil.
- ABNT NBR-6122, 2010. *Projeto e Execução de Fundações*, Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, Brasil.
- ABNT NBR-9062, 2006. *Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado*, Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, Brasil.
- ACI 318, 2008. *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318R-08)*. American Concrete Institute. Farmington Hills: Michigan.
- ALMEIDA, V. S., SIMONETTI, H. L., NETO, L. O., 2013. Análise de modelos de bielas e tirantes para estruturas de concreto armado via uma técnica numérica. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, vol. 6, pp. 139-157.
- BARROS, R., 2013. *Análise numérica e experimental de blocos de concreto armado sobre duas estacas com cálice externo, parcialmente embutido e embutido utilizado na ligação pilar-fundação*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.
- BARROS, R., GIONGO, J. S., 2012. Estudo teórico do comportamento de blocos de fundação sobre duas estacas com cálice externo e embutido: uma abordagem numérica. *Encontro Nacional Betão Estrutural – BE2012*, FEUP.
- BLÉVOT, J., FRÉMY, R., 1967. *Semelles sur piex. Analles d' Institut Techique du Bâtiment et des Travaux Publlics*. Paris, vol.20, n.230, pp.223-295.
- BURNIER, A. A. L., 2006. *Análise numérica de provas de carga em sapatas utilizando o método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, UFV, Viçosa, MG, Brasil.
- CAMPOS, L. A.; 2007. *Análise experimental de bloco de fundação sobre duas estacas, sob carga centrada, para estrutura pré-fabricada*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.

- CARVALHO, R. C., PINHEIRO, L. M., 2009. *Cálculo e Detalhamento de Estruturas usuais de Concreto Armado*. PINI, vol. 2, pp.450-474.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, 1990. CEB-FIP model code 1990: *first draft, Addendum, Bulletin D'Information*, n.198.
- CORRY, R. W., DOLAN, C. W., 2001. Strengthening and Repair of a Column Bracket Using a Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP) FABRIC. *PCI Journal*, vol. 46, n 1, pp. 54-63.
- DELALIBERA, R. G., 2005. *Estudo experimental e analítico de blocos sobre estacas submetidos a momento e normal*. Qualificação de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.
- DUARTE, L. N., 2006. *Estudo da relação tensão-deformação de uma sapata instrumentada por meio de prova de carga direta*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, UFV, Viçosa, MG, Brasil.
- DUARTE, L. N., MINETTE, E., KONDA, D. H., BRANDÃO, F. F., SANTOS, W. A. R., 2012. Análise de capacidade de carga de uma sapata rígida assente em solo residual maduro de gnaiss. *Revista Panorâmica On-Line*, vol. 13, pp. 122-130.
- EBELING, E. B., 2006. *Analysis of the precast concrete column base in the connection socket*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.
- ELGWADY, M. A., RABIE, M., MOSTAFA, M. T., 2002. Strengthening of Corbels Using CFRP an Experimental Program. *Proceedings of the Third International Conference on Composites in Infrastructure ICC'02*. San Francisco, California, USA.
- FERNANDES, R. M., EL DEBS, M. K., 2005. Análise da capacidade resistente de consolos de concreto armado considerando a contribuição da armadura de costura. *Cadernos de Engenharia de Estruturas da UFSCar*, vol. 7, n 25, pp.103-128.
- FILHO, A. C., 1996. Detalhamento das estruturas de concreto pelo método das bielas e dos tirantes. *Caderno de engenharia UFRGS*, Rio Grande do Sul, Brasil.
- FILHO, C. A. M., 2010. *Análise do Comportamento de Blocos sobre Quatro Estacas com Cálice Embutido*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- FILHO, C. A. M., BARROS, B., GIONGO, J. S., 2011. Modelos de Bielas e Tirantes aplicados a Blocos sobre Quatro Estacas com Cálice Embutido. *Engenharia estudo e Pesquisa*, vol.11, n.1, pp.5-14.
- FONTES, F. F., 2005. *Análise Estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.

- FRANCO, M. I. E., 2015. *Vigas-parede: Comparação entre diferentes metodologias de cálculo*. Dissertação de Graduação; Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil.
- FUSCO, P. B., 1995. *Técnica de armar as estruturas de concreto*. Editora Pini, São Paulo.
- GOUVÊA, M. A. S., 2000. *Análise das relações carga-recalque de uma fundação em verdadeira grandeza*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, UFV, Viçosa, MG, Brasil.
- GUIMARÃES, G. B., 1980. *Análise experimental de vigas-parede de concreto armado enrijecidas por pilares laterais*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- HAGBERG, T., 1983. Design of concrete brackets: on the application of the truss analogy. *ACI Journal*, pp.3-12.
- HARDJASAPUTRA, H., 2015. Evolutionary structural optimization as tool in finding strut-and-tie-models for designing reinforced concrete deep beam. *Proceeding of 5th International Conference of Euro Asia Civil Engineering Forum (EACEF-5)*.
- HOBBS, N. B.; STEIN, P. (1957). An investigation into the stress distribution in pile caps with some notes on design. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 57, pp. 559-628.
- LIMA, J. L. R. F., 2015. *Projeto estrutural de fundações superficiais: análise crítica da utilização de programas computacionais*. Trabalho de Diplomação em Engenharia Civil, Universidade Federal da Paraíba, UFPB, Araruna, PB, Brasil.
- LEONHARDT, F., MÖNNIG, E., 1977. *Construções de concreto: princípios básicos sobre armação de estruturas de concreto armado*. Editora Interciência, vol. 3, 1.ed., Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- LEONHARDT, F., MÖNNIG, E., 1979. *Construções de concreto*. Editora Interciência, vol. 2, 1.ed., Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- LEONHARDT, F., WALTHER, R., 1966. Wandartige Träger. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, n. 178, pp. 33-78.
- MACHADO, C. P., 1998. *Consolos curtos e muito curtos de concreto armado*. Tese de Doutorado, Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.
- MELO, G. S. S. A., 1984. *Análise paramétrica de vigas-parede de concreto armado pelo método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MIGUEL, M. G., 2000. *Análises Experimental e Numérica de Blocos Sobre Três Estacas*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

- MONTOYA, J.P., MESEGUER, G. A., MORÁN, C. F., 1991. *Hormigón Armado. Design of Concrete Structures*. McGraw-Hill, 11th edition, New York.
- MUNHOZ, F. S., 2004. *Análise do comportamento de blocos de concreto armado sobre estacas submetidas à ação de força centrada*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- MUNHOZ, F. S., GIONGO, J. S., 2011. Análise do comportamento estrutural de blocos rígidos sobre estacas com pilares de seções quadradas e retangulares sob a ação de força vertical, horizontal e momento fletor. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, Edição Especial ENDOSET 2011. ISSN: 1809-5860, vol. 13, n. 59, pp. 9-12, 2011.
- NEPOMUCENO, C. L., 2012. *Análise de Vigas-Parede aplicando Modelo de Biela e Tirante e Microtreliça*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- NOGUEIRA, C. L., 1998. *Análise não linear de escavações e aterros*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- OLIVEIRA, D. S., BARROS, R., GIONGO, J. S., 2014. Blocos de concreto armado sobre seis estacas: simulação numérica e dimensionamento pelo método de bielas e tirantes. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, vol.7, n. 1, pp. 1-23.
- OLIVEIRA, R. S., 2011. *Programa Computacional para Projeto Estrutural de Sapatas Rígidas Isoladas*. Trabalho de Diplomação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- PANTOJA, J. C., VAZ, L. E., MARTHA, L. F., 2010. Avaliação de Desempenho de Modelos de Bielas e Tirantes via Análise de Confiabilidade. *III Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- RIBEIRO, T. G., OLIVEIRA, M. P., OLIVEIRA, D. R. C., 2006. Análise Experimental de Consolos Curtos Reforçados com CFRP. *Anais do 49º Congresso Brasileiro do Concreto*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SAINT-VENANT, A. J. C. B., 1855. Memoire sur la Torsion des Prismes, Mem. *Divers Savants*, vol. 14, pp. 233-560.
- SAKAI, E., 2000. *Análise de blocos de concreto armado sobre estacas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Geotecnia e Construção Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, GO, Brasil.
- SANTOS, D., 2006. *Análise de vigas de concreto armado utilizando modelos de bielas e tirantes*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- SANTOS, G. G. M., 1999. *Análise sistemática de vigas-parede biapoiadas de concreto armado*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- SANTOS, K. F., VIEIRA, D. V., 2016. “Software” Para Dimensionamento de Consolos Curtos De Concreto. *IX Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SCHÄFER, K., SCHLÄICH, J., 1988. Consistent Design of Structural Concrete Using Strut-And-Tie Models. *Colóquio sobre Comportamento e Projeto de Estruturas*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SCHÄFER, K., SCHLÄICH, J., 1991. Design and Detailing of Structural Concrete Using Strut-and-Tie Models. *The Structural Engineer*, vol.69, n.6.
- SCHLAICH, J., SCHÄFER, K., JENNEWEIN, M., 1987. Toward a Consistent Design of Structural Concrete. *PCI Journal*, vol. 32, n. 3, pp.75-150.
- SHURAIM, A. B., EI-SAYED, A. K., 2016. Experimental verification of strut and tie model for HSC deep beams without shear reinforcement. *Engineering Structures*.
- SILVA, R. C., GIONGO, J. S., 2000. Modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- SIMÃO, D. W. G., 2014. *Análise e dimensionamento de vigas de concreto armado com aberturas na alma*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil.
- SOUZA, R. A., 2006. Análise, dimensionamento e verificação de elementos especiais em concreto armado utilizando o método dos elementos finitos e o método das bielas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 22, n.1, pp. 31–44.
- SOUZA, R. A., BITTENCOURT, T. N., FIGUEIRAS, J. A., PIMENTEL, J. S. S., 2003. *Dimensionamento e Verificação de Uma Viga-Parede Complexa Utilizando o Método das Bielas e Análise Não-Linear*.
- TANNO, D. C. S., 2012. *Blocos de concreto sobre estacas posicionados nas divisas de terrenos: estudo analítico e análise numérica linear*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- TROTTA, A. M., 2012. *Estudo experimental de uma ligação viga-pilar em concreto pré-moldado utilizando perfis metálicos e solda*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- VICENTE, W. M., OLIVEIRA, W. C., 2009. *Análise de Tensões em Placas Circulares Utilizando Elementos Finitos Axissimétricos*. Trabalho Final de Graduação de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil.
- VIEIRA, W. S. R., 2014. *Dimensionamento geotécnico e estrutural de sapatas rígidas*. Projeto apresentado ao curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.