

Universidade Federal de Ouro Preto - Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

ESTUDO NUMÉRICO AVANÇADO DE ESTRUTURAS DE AÇO, CONCRETO E MISTAS

Ígor José Mendes Lemes

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Campus Morro do Cruzeiro
Ouro Preto, MG - Brasil
Janeiro, 2018

L543e Lemes, Igor José Mendes.
Estudo Numérico Avançado de Estruturas de Aço, Concreto e Mistas
[manuscrito] / Igor José Mendes Lemes. - 2018.
177f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.
Coorientador: Profa. Dra. Andréa Regina Dias Silva.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas.
Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil.
Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Estrutura mista. 2. Materiais compostos. 3. Engenharia de estruturas. 4.
Deformação e tensões. I. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. II. Silva, Andréa
Regina Dias. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 624.014

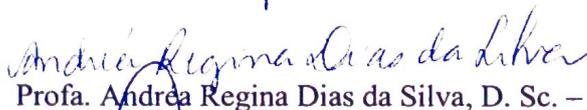
ESTUDO NUMÉRICO AVANÇADO DE ESTRUTURAS DE AÇO, CONCRETO E MISTAS

AUTOR: ÍGOR JOSÉ MENDES LEMES

Esta tese foi apresentada em sessão pública e aprovada em 30 de janeiro de 2018, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D. Sc. – UFOP (Presidente)



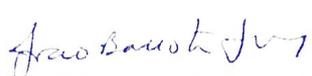
Profa. Andrea Regina Dias da Silva, D. Sc. – UFOP



Prof. Paulo Anderson Santana Rocha, D. Sc. - UFOP



Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D. Sc. – UFOP



Prof. João Batista Marques de Sousa Jr., D. Sc. – UFC



Prof. Bernardo Horowitz, Ph. D.– UFPE

Aos meus pais, meu irmão e
meus orientadores.

Agradecimentos

A Deus e à Nossa Senhora, por iluminarem meus caminhos e guiarem meus passos.

Aos meus pais Dimas e Maria, pela enorme dedicação, incentivo e ensinamentos passados ao longo de toda minha vida.

Ao meu irmão Guto, pelos auxílios, incentivo e momentos de descontração.

Aos meus orientadores, professor Ricardo e professora Andréa, pela excelente orientação, amizade e disposição em ajudar na pesquisa e nos problemas “extra-campo” ocorridos durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores Paulo Rocha e Amilton, pelas orientações lúcidas durante a graduação, pelo incentivo à pesquisa, fornecimento de materiais para estudo e pelas eternas ajudas com este e outros trabalhos.

Aos professores do DECIV, em especial Geraldo, Aloísio e Cadú pelo suporte fornecido durante o período em que fiz parte do departamento.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação profissional e também pessoal, desde o ensino básico até os dias atuais. Em especial àqueles com quem convivi durante a pós graduação: Francisco Assis, Francisco Célio, Arlene, Marcílio e João Batista.

Aos membros da banca de avaliação que colaboraram significativamente para a qualidade do texto, destacando o professor Bernardo que ainda não foi citado aqui.

Aos colegas Rafael e Luis Eduardo pelo incentivo e ajuda durante a elaboração desse trabalho, pela amizade e suporte nos outros desafios que enfrentei durante esse período.

Aos colegas da pós graduação, Jéssica, Iara, Dalilah, Letícia, Vinícius, Everton e Marko pelos estudos, amizade, ajuda e momentos de descontração.

À Róvia, à Sílvia e ao André, por estarem sempre dispostos a resolver os problemas do dia a dia da pós graduação.

À CAPES e à UFOP, pelo auxílio financeiro.

*"If you see the light break through the clouds
And fire run the distant towers
Now the world will begin
Exactly how it ends"*

— THOMAS MATTHEW DELONGE

Resumo da Tese apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil

ESTUDO NUMÉRICO AVANÇADO DE ESTRUTURAS DE AÇO, CONCRETO E MISTAS

Ígor José Mendes Lemes

Janeiro, 2018

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Este trabalho apresenta uma formulação numérica generalizada, baseada na plasticidade concentrada, aplicável na análise de estruturas de aço, de concreto e mistas de aço e concreto. São abordadas fontes de não linearidades, como: os efeitos de segunda ordem, a inelasticidade, as ligações semirrígidas e a interação parcial em vigas mistas. Um elemento finito corrotacional 2D foi utilizado e associado a funções de interpolação para evitar o enrijecimento espúrio da estrutura durante a análise. Associado a este elemento, o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) foi utilizado para inserir o comportamento dos materiais nos nós do modelo numérico, viabilizando a análise de elementos constituídos por concreto. As ligações semirrígidas foram tratadas por meio de pseudo-molas de comprimento nulo, inseridas nas extremidades do elemento, sendo sua rigidez rotacional obtida pela relação momento-rotação da ligação. Já a interação parcial foi simulada com um grau de liberdade adicional no problema local, via MCD. Fez-se o desmembramento da força axial, sendo parte absorvida pelo perfil e a outra parte pela laje. Verificou-se nos exemplos simulados que a formulação numérica proposta é estável com boa concordância com dados numéricos e experimentais da literatura e sem os problemas comumente relacionados aos métodos baseados na plasticidade concentrada. Por fim, o tratamento da interação parcial aliada à plasticidade na forma concentrada e às ligações semirrígidas se torna um diferencial do estudo realizado.

Palavras-Chave: Estruturas Mistas, Interação Parcial, Ligações Semirrígidas, MCD

Abstract of Thesis presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Civil Engineering

ADVANCED NUMERICAL STUDY OF STEEL, CONCRETE AND STEEL-CONCRETE COMPOSITE STRUCTURES

Ígor José Mendes Lemes

January, 2018

Advisors: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

This thesis presents a generalized concentrated plasticity-based numerical formulation, applicable in the analysis of steel, concrete and steel-concrete composite structures. Non-linearity sources are discussed, such as second-order effects, inelasticity, semi-rigid connections and partial interaction in composite beams. A 2D corotational finite element was used and associated with interpolation functions to avoid the spurious stiffness of the structure during the analysis. Associated with this element, the Strain Compatibility Method (SCM) was used to insert the materials behavior in the nodes of the numerical model, allowing the analysis of elements constituted by concrete. The semi-rigid connections were simulated by the inclusion of rotational zero-length pseudo-springs at the finite elements ends, and the connections behavior is given by its moment-rotation relationship. The partial interaction was approached with an additional degree of freedom in the local problem, via SCM. The axial force was decomposed, part being absorbed by the steel section and the other part by the slab. It has been found in the simulated examples the proposed numerical formulation is stable with good agreement to numerical and experimental data of the literature and without the commonly problems related to concentrated plasticity-based methods. Finally, the treatment of the partial interaction with the concentrated plasticity and semi-rigid connections is a differential of the present study.

Keywords: Composite Structures, Partial Interaction, Semi-Rigid Connections, SCM

Lista de publicações provenientes das pesquisas desenvolvidas ao longo do curso de Doutorado em Engenharia Civil

Publicações em revistas científicas

LEMES, Í.J.M.; SILVA, J.L.; SILVEIRA, R.A.M.; SILVA, A.R.D.; ROCHA, P.A.S.

Nonlinear formulation for stability analysis of semi-rigid steel and steel-concrete composite frames. 2018. (Em produção)

LEMES, Í.J.M.; BARROS, R.C.; SILVEIRA, R.A.M.; SILVA, A.R.D.; ROCHA, P.A.S.

Numerical analysis of RC plane structures: a concentrated nonlinear effect approach. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2018. (Submetido em novembro/2017)

LEMES, Í.J.M.; SILVA, J.L.; BATELO, E.A.P.; SILVEIRA, R.A.M.

Influence of residual stresses models prescribed in design codes in the steel I sections behavior. *International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry*. (Aceito para publicação).

LEMES, Í.J.M.; SILVEIRA, R.A.M.; SILVA, A.R.D.; ROCHA, P.A.S.

Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM. *Engineering Structures*, v. 147, p. 12-26, 2017. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.05.042.

LEMES, Í.J.M.; SILVA, A.R.D.; SILVEIRA, R.A.M.; ROCHA, P.A.S.

Numerical analysis of nonlinear behavior of steel-concrete composite structures. *Ibracon Structures and Materials Journal*, v. 10, n. 1, p. 53-83, 2017. DOI: 10.1590/S1983-41952017000100004

LEMES, Í.J.M.; SILVA, A.R.D.; SILVEIRA, R.A.M.; ROCHA, P.A.S.

Determinação da capacidade resistente de elementos estruturais mistos através do método da rótula plástica refinado. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 33, n. 1-2, p. 24-34, 2017. DOI: 10.1016/j.rimni.2015.10.003

Publicações em eventos científicos

- LEMES, Í.J.M.**; BARROS, R.C.; SILVA, J.L.; BATELO, E.A.P.; SILVEIRA, R.A.M. Formulação numérica para a simulação do comportamento de estruturas de concreto armado. *XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2017. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2017-0667
- LEMES, Í.J.M.**; SILVA, J.L.; SILVEIRA, R.A.M.; SILVA, A.R.D.; ROCHA, P.A.S. Análise numérica de pórticos mistos de aço e concreto com ligações semirrígidas. *XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2017. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2017-0671
- LEMES, Í.J.M.**; SILVA, J.L.; SILVA, A.R.D.; SILVEIRA, R.A.M.; ROCHA, P.A.S. Numerical study of steel plane frames considering the semi-rigid connections and concentrated plasticity effects. *EMI International Conference*. 2017.
- LEMES, Í.J.M.**; BARROS, R.C.; BATELO, E.A.P.; SILVEIRA, R.A.M. An efficient approach to limiting the elastic range in advanced analysis of steel structures via RPHM. *Eurosteel - CE/papers*, v. 1, p. 1353-1362, 2017. DOI: 10.1002/cepa.177
- LEMES, Í.J.M.**; SILVA, A.R.D.; SILVEIRA, R.A.M.; ROCHA, P.A.S. Estudo numérico comparativo via análise não linear do comportamento de estruturas de concreto armado com base nas normas de projeto NBR 6118 e EC2. *58 Congresso Brasileiro do Concreto*. 2016.
- LEMES, Í.J.M.**; SILVA, A.R.D.; SILVEIRA, R.A.M.; ROCHA, P.A.S. Estudo numérico comparativo de metodologias para a degradação da rigidez à flexão no contexto do Método da Rótula Plástica Refinado. *XXXVII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2016. Link
- LEMES, Í.J.M.**; SILVA, J.L.; BATELO, E.A.P.; SILVEIRA, R.A.M. Influência dos modelos de tensões residuais prescritos em códigos normativos no comportamento de perfis I. *XXXVII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2016. Link

- LEMES, Í.J.M.;** SILVA, A.R.D.; SILVEIRA, R.A.M.; ROCHA, P.A.S. Avaliação da estabilidade de pórticos planos mistos de aço e concreto via acoplamento MCD/MRPR. *XII Simpósio de Mecânica Computacional*. v.1, p. 476-483, 2016. Link
- LEMES, Í.J.M.;** SILVA, A.R.D.; SILVEIRA, R.A.M.; ROCHA, P.A.S. Acoplamento MCD/ MRPR para análise de estruturas metálicas, de concreto e mistas. *XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2015. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2015-0183
- LEMES, Í.J.M.;** SILVA, A.R.D.; SILVEIRA, R.A.M.; ROCHA, P.A.S. Modelo numérico para análise de estruturas de concreto armado, metálicas e mistas. *57 Congresso Brasileiro do Concreto*. 2015.

Sumário

Lista de Figuras	xvi
Lista de Tabelas	xx
Lista de Siglas	xxii
Lista de Símbolos	xxiv
1 Introdução	1
1.1 Considerações Gerais	1
1.2 Motivação	4
1.3 Objetivos	5
1.4 Sistema Computacional CS-ASA	6
1.5 Organização do Trabalho	7
2 Análise Não Linear de Estruturas Mistas com Interação Total	10
2.1 Considerações Iniciais	10
2.2 Fundamentação Teórica	11
2.2.1 Comportamento uniaxial do concreto	13
2.2.2 Comportamento uniaxial do aço	14
2.3 Elemento Finito Corrotacional	15
2.3.1 Relações cinemáticas do elemento	16
2.3.2 Formulação do elemento	18
2.3.3 Matriz de rigidez - \mathbf{K}_l	19
2.3.4 Simulação da plasticidade concentrada	20
2.3.5 Return mapping	23
2.4 Solução do Problema Estático Não Linear	23

2.4.1	Solução incremental predita	25
2.4.2	Ciclo de iterações	26
2.5	Método da Compatibilidade de Deformações	30
2.5.1	Comportamento uniaxial do aço dos perfis	31
2.5.2	Comportamento uniaxial do aço das armaduras	33
2.5.3	Comportamento uniaxial do concreto	34
2.5.4	Relação momento-curvatura	37
2.5.5	Curvas de interação $N \times M$	41
2.5.6	Rigidezes generalizadas	42
3	Ligações Semirrígidas em Estruturas de Aço e Mistras	45
3.1	Considerações Iniciais	45
3.2	Fundamentação Teórica	46
3.3	Comportamento das Ligações	47
3.3.1	Modelo linear	48
3.3.2	Modelo exponencial	49
3.3.3	Modelo exponencial modificado	51
3.3.4	Modelo multilinear	51
3.4	Elemento Finito com Ligações Semirrígidas	52
4	Vigas Mistras de Aço e Concreto com Interação Parcial	57
4.1	Considerações Iniciais	57
4.2	Estado da Arte	58
4.3	Conectores de Cisalhamento	60
4.4	Grau de Interação e Momento de Inércia Efetivo	61
4.5	Modelo Constitutivo da Conexão	63
4.6	Formulação Numérica	65
4.6.1	Desmembramento da força axial entre a laje e o perfil	65
4.6.2	Considerações sobre a rigidez elástica	69
4.6.3	Função do grau de ação mista	70
4.6.4	Rigidez dos conectores e força cortante atuante	72
4.6.5	Arranjo numérico da formulação apresentada	73

5	Análises Numéricas	75
5.1	Considerações Iniciais	75
5.2	Análise de Seções Transversais	76
5.2.1	Seções de aço	76
5.2.2	Seção mista totalmente revestida	82
5.3	Análise de Vigas Isoladas	86
5.3.1	Viga de aço	86
5.3.2	Viga de concreto armado	91
5.3.3	Viga mista com interação total	92
5.3.4	Viga mista simplesmente apoiada com interação parcial	94
5.3.5	Vigas mistas contínuas com interação parcial	96
5.4	Análise de Pilares Isolados	101
5.4.1	Pilar de aço	101
5.4.2	Pilar de concreto armado	102
5.4.3	Pilares mistos com materiais de alta resistência	108
5.5	Análise de Pórticos	109
5.5.1	Portal de concreto armado	109
5.5.2	Pórtico simples metálico/misto	111
5.6	Análise de Pórticos com Ligações Semirrígidas	113
5.6.1	Pórtico metálico de dois andares	113
5.6.2	Pórtico misto de dois andares	116
5.6.3	Pórtico metálico de cinco andares e quatro vãos	118
5.6.4	Pórtico metálico de seis andares	120
6	Considerações Finais	129
6.1	Introdução	129
6.2	Conclusões	130
6.3	Difusão e Uso das Formulações Desenvolvidas	131
6.4	Sugestões para Trabalhos Futuros	132
	Referências	135

Apêndice A – Matriz de Rigidez do Elemento Corrotacional	151
A.1 Considerações Iniciais	151
A.2 Termos da Matriz de Rigidez	151
Apêndice B – Matriz de Rigidez da Seção Mista com Interação Parcial	153
B.1 Considerações Iniciais	153
B.2 Termos da Matriz Constitutiva da Seção	153
Apêndice C – Proposta alternativa para NLF em estruturas de concreto armado	156
C.1 Considerações Iniciais	156
C.2 Formulação do Elemento Finito	157
C.3 Rigidez Rotacional das Pseudo-Molas	158
C.4 Simulação da Fissuração do Concreto	160
C.5 Comportamento dos Materiais	161
C.6 Módulo de Elasticidade para a Análise Global	162
C.7 Momento de Inércia da Seção Fissurada	163
C.8 Curvas de Interação	163
C.9 Análises Numéricas	164
C.9.1 Análise de uma seção transversal típica	164
C.9.2 Pilar de Foure	166
C.9.3 Pórtico simples biapoiado	170
C.10 Conclusões	175

Lista de Figuras

1.1	Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados (SILVA, 2009)	8
2.1	Deslocamentos no sistema global de coordenadas	17
2.2	Elemento finito corrotacional	21
2.3	Violação da curva de interação para plastificação total	24
2.4	Campo de deformações para um problema plano	30
2.5	Discretização da seção transversal em fibras	31
2.6	Relação constitutiva do aço	31
2.7	Modelos normativos para a descrição das tensões residuais para perfis I	33
2.8	Modelo de tensões residuais para o perfil retangular	33
2.9	Modelo constitutivo para o aço das armaduras	34
2.10	Modelos constitutivos para o concreto sob compressão	35
2.11	Modelos constitutivos para o concreto sob tração	36
2.12	Curva de interação $N \times M$	42
2.13	Construção da relação $M \times \Phi$ para o cálculo das rigidezes generalizadas	44
3.1	Detalhes construtivos de ligações viga-pilar para estruturas de aço	50
3.2	Modelo multilinear	52
3.3	Elemento finito composto para simulação das ligações semirrígidas	53
3.4	Elemento finito deformado com molas fictícias	53
4.1	Tipos de conectores de cisalhamento (VERÍSSIMO, 2007)	61
4.2	Tipos de interação em vigas mistas de aço e concreto	62
4.3	Modelo constitutivo para a conexão aço-concreto	64
4.4	Campo de deformações descontínuo	66

4.5	Definição da força cortante por unidade de comprimento nos conectores	72
5.1	Comportamento das seções UB	77
5.2	Comportamento das seções UC	78
5.3	Curvas de interação esforço normal-momento fletor para as seções UB	80
5.4	Curvas de interação esforço normal-momento fletor para as seções UC	81
5.5	Perfil W12x120 totalmente revestido com concreto	83
5.6	Comportamento da seção com o modelo de tensões residuais do EC 3 (1992)	84
5.7	Comportamento da seção com o modelo de tensões residuais do AISC LRFD (2010)	84
5.8	Seção mista: curvas de interação $N \times M$ para o eixo de maior inércia	85
5.9	Comparação do comportamento da seção usando os dois modelos normativos para as tensões residuais	86
5.10	Comportamento da seção com o modelo de tensões residuais do EC 3 (1992)	86
5.11	Comportamento da seção com o modelo de tensões residuais do AISC LRFD (2010)	87
5.12	Seção mista: curvas de interação $N \times M$ para o eixo de menor inércia	87
5.13	Comparação do comportamento da seção usando os dois modelos normativos para as tensões residuais	88
5.14	Seção mista: curvas de interação	88
5.15	Viga de aço biengastada	89
5.16	Trajatórias de equilíbrio	89
5.17	Variação do momento fletor interno em relação à carga aplicada	90
5.18	Viga de concreto armado	91
5.19	Trajatória de equilíbrio - viga de concreto armado	92
5.20	Viga mista com interação total	93
5.21	Trajatória de equilíbrio - viga mista com interação total	94
5.22	Viga mista simplesmente apoiada com interação parcial	95
5.23	Trajatória de equilíbrio - viga mista simplesmente apoiada com IP	96
5.24	Vigas mistas contínuas com interação parcial	97
5.25	Trajatórias de equilíbrio para as vigas com interação parcial	99
5.26	Trajatórias de equilíbrio: comparação dos graus de interação	100
5.27	Deslocamentos verticais ao longo das vigas no ponto limite de carga	101

5.28	Pilar de aço (VAN KUREN; GALAMBOS, 1964)	102
5.29	Trajectoria de equilíbrio - pilar de aço	103
5.30	Pilar de Foure	103
5.31	Trajectoria de equilíbrio - Pilar de Foure	104
5.32	Forças internas no nó 1 e curvas de interação	105
5.33	Comparação entre as metodologias de degradação da rigidez à flexão	105
5.34	Trajectorias de equilíbrio - comparação entre as normas	106
5.35	Variação do EI_t em relação ao momento fletor interno no nó 1	107
5.36	Relação $EI_T/EI_{T,i}$ (%) nos pontos nodais para o deslocamento $u = 6$ cm	108
5.37	Pórtico simples: geometria, discretização adotada e seções transversais	111
5.38	Trajectoria de equilíbrio - pórtico em concreto armado	112
5.39	Pórtico simples: geometria, discretização adotada e seções transversais	113
5.40	Trajectorias de equilíbrio	114
5.41	Pórtico de dois andares: geometria, carregamentos e discretização adotada	114
5.42	Relação $M \times \phi$ para o pórtico de 2 andares (STELMACK, 1982)	115
5.43	Trajectorias de equilíbrio - pórtico de 2 andares	115
5.44	Porcentagem de degradação das rigidezes no ponto limite	116
5.45	Pórtico de Bochum: geometria, carregamentos e discretização adotada	117
5.46	Curvas $M \times \phi$ para as ligações do pórtico de Bochum	119
5.47	Pórtico de Bochum: curva carga-deslocamento u	120
5.48	Pórtico de Shanghai: geometria, cargas em kN e discretização adotada	121
5.49	Trajectorias de equilíbrio - pórtico de Shanghai	122
5.50	Pórtico de 6 andares - geometria, carregamento e discretização adotada	122
5.51	Trajectorias de equilíbrio - pórtico de 6 andares	123
5.52	Forças internas em $\lambda_{lim} = 1.13$: Presente trabalho \times [Chan e Chui (2000)]	124
5.53	Trajectorias de equilíbrio	125
5.54	Seção transversal das vigas mistas do pórtico de Vogel	127
5.55	Trajectorias de equilíbrio - pórtico de 6 andares com viga mista	128
6.1	Imagem representativa das pesquisas de Barros (2016) e Pires (2018)	132
6.2	Imagem representativa da pesquisa de Deus (2018)	133
C.1	Elemento finito composto para simulação da plasticidade com pseudo-molas	157

C.2	Curvas interação e regiões de degradação da rigidez rotacional das molas . . .	159
C.3	Relações constitutivas utilizadas	162
C.4	Concreto sob compressão: definição da deformação elástica	162
C.5	Seção em concreto armado (dimensões em cm)	164
C.6	Seção de concreto armado: curvas de interação $N \times M$	165
C.7	Seção de concreto armado: $I_{cr} \times N$	166
C.8	Malhas de elementos finitos testadas	167
C.9	Trajatórias de equilíbrio - Pilar de Foure	168
C.10	Trajatória de equilíbrio - Pilar de Foure	169
C.11	Forças internas no nó 1 e curvas de interação	169
C.12	Porcentagem de degradação da rigidez da mola (malha 4)	170
C.13	Pórtico de Cranston (1965)	171
C.14	Trajatórias de equilíbrio - Pórtico de Cranston (1965)	173
C.15	Trajatórias de equilíbrio - Comparação com dados experimentais	174
C.16	Pórtico de Cranston - monitoramento de uma seção plastificada	175
C.17	Diagrama de momentos fletores	176

Lista de Tabelas

2.1	Coeficientes da Equação 2.36	24
2.2	Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear	29
2.3	Estratégia numérica para a construção da curva de interação	43
3.1	Parâmetros do modelo exponencial (LUI; CHEN, 1988) (Em kN, m, rad) . . .	50
4.1	Variáveis do modelo constitutivo da conexão	64
4.2	Estratégia numérica para a obtenção da rigidez na interação parcial	74
5.1	Dados dos materiais	83
5.2	Valores $\lambda PL/M_p$ de formação das rótulas plásticas sem tensões residuais . . .	90
5.3	Valores $\lambda PL/M_p$ de formação das rótulas plásticas com tensões residuais . . .	90
5.4	Dados dos materiais da viga de concreto armado (em kN, cm)	91
5.5	Dados dos materiais para a viga mista com interação parcial (em kN, cm) . .	95
5.6	Dados geométricos e dos materiais das vigas VMIP	98
5.7	Dados dos materiais do pilar de concreto armado (em kN, cm)	103
5.8	Cargas últimas em kN	107
5.9	Dados dos materiais e cargas limites	110
5.10	Dados dos materiais (em kN, cm)	110
5.11	Tensões de escoamento e última dos perfis de aço	118
5.12	Cargas últimas em kN	124
5.13	Cargas últimas em kN	126
5.14	Função do grau de ação mista	127
C.1	Parâmetros das Equações C.5 e C.6	161

C.2	Dados dos materiais (em kN, cm)	164
C.3	Cargas críticas em kN - Pilar de Foure	167
C.4	Dados dos materiais (em kN, cm)	171
C.5	Cargas críticas em kN - Pórtico de Cranston	172
C.6	Valores do momento fletor interno no ponto limite (em kNm)	176

Lista de Siglas

AISC	<i>American Institute of Steel Construction</i>
BM	Equação proposta por Branson e Metz (1963)
CCT	Concreto com a resistência a tração considerada
CI	Curva de interação
CIF	Curva de início de fissuração da seção
CIP	Curva de início de plastificação da seção
CP	Centroide plástico
CPT	Curva de plastificação total da seção
CS-ASA	<i>Computational System for Advanced Structural Analysis</i>
CST	Concreto sem a resistência a tração considerada
ECCS	<i>European Convention for Constructional Steelwork</i>
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
EC	Normas europeias para projetos estruturais e geotécnicos de obras civis
FB	Respostas obtidas por Ferguson e Breen (1966)
FI	Força interna
GSP	<i>Generalized Stiffness Parameter</i>
IE	Início de escoamento
IT	Interação total
LRFD	<i>Load and Resistance Factor Design</i>
MCD	Método da Compatibilidade de Deformações
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRP	Método da Rótula Plástica

MRPR	Método da Rótula Plástica Refinado
MRPRM	Método da Rótula Plástica Refinado Modificado
MZP	Método da Zona Plástica
NBR	Norma Brasileira
NLF	Não Linearidade Física
NLG	Não Linearidade Geométrica
P	Equação proposta por Patel <i>et al.</i> (2015)
PM	Pórtico misto
PVM	Pórtico com viga mista e pilares de aço
REF	Referência
RMF	Resposta usando molas fictícias
RRMC	Resposta usando a relação momento-curvatura
SEF	Análise Sem Efeito da Fissuração
SI	Sem interação
TEB	Teoria de viga de Euler Bernoulli
TT	Teoria de viga de Timoshenko
VMIP	Viga mista com interação parcial
ZP	Zona plástica

Lista de Símbolos

LETRAS MINÚSCULAS PARA VARIÁVEIS

b	dimensão da base da seção transversal
b_f	largura das mesas do perfil metálico
c	cosseno de um ângulo
c_1	indicador da formação de rótula plástica no nó i
c_2	indicador da formação de rótula plástica no nó j
d_l	distância do CP da seção mista ao CP da laje
d_p	distância do CP da seção mista ao CP do perfil
e_s	espaçamento entre os conectores
$f(\gamma_{ef})$	função do grau de ação mista
f_2	resistência do aço no início do terceiro trecho da relação constitutiva
f_c	resistência do concreto à compressão
f_{cin}	tensão de início de plastificação do concreto
f_{ck}	resistência característica do concreto à compressão
f_{cr}	resistência à fissuração do concreto
f_{ij}	termos da matriz de rigidez da seção transversal
f_u	resistência última do aço dos perfis
f_y	resistência de escoamento do aço dos perfis
f_{ptd}	resistência última do aço das armaduras sob tração
f_{pyd}	resistência de escoamento do aço das armaduras
h	dimensão da altura da seção transversal
h_c	altura da laje
h_l	altura da conexão (nula)

k	contador do número de iterações
k_{Tc}	rigidez de um conector isolado
k_{ij}	termos da matriz de rigidez
k_{ij}^*	termos da matriz de rigidez reduzida
i	nó inicial
j	nó final
	contador de incrementos na relação momento-curvatura
m	contador do número de coeficientes de ajustamento no modelo exponencial
n_b	número de barras presentes na seção transversal
n_{fib}	número de fibras presentes na seção transversal
n_l	número de linhas de conectores em um trecho da viga
n_{lc}	número de linhas de conectores no comprimento de influência
n_{max}	número máximo de interações
o	variável auxiliar para a relação constitutiva do concreto via EC 2 (2004)
s	seno de um ângulo
t	espessura da seção transversal
	indicador do passo de carga
t_f	espessura da mesa do perfil de aço
t_w	espessura da alma do perfil de aço
u	deslocamento axial
	deslocamento medido da estrutura
u_{ig}	deslocamento horizontal global no nó i
u_{jg}	deslocamento horizontal global no nó j
v	deslocamento vertical
v_{ig}	deslocamento vertical global no nó i
v_{jg}	deslocamento vertical global no nó j
x	eixo horizontal global
x'	eixo horizontal local
x_0	projeção da posição inicial do elemento no eixo global x
x_a	posição horizontal do centroide da área de aço (perfil)
x_b	posição horizontal do centroide da área das armaduras
x_c	posição horizontal do centroide da área de concreto

x_{CP}	posição horizontal do centroide plástico da seção transversal
y	eixo vertical global
y'	eixo vertical local
y_0	projeção da posição inicial do elemento no eixo global y
y_a	posição vertical do centroide da área de aço (perfil)
y_b	posição vertical do centroide da área das armaduras
y_c	posição vertical do centroide da área de concreto
y_{cp}	posição vertical do centroide plástico da seção transversal
y_i	posição da i -ésima fibra em relação ao CP da seção

LETRAS MAIÚSCULAS PARA VARIÁVEIS

A	área da seção transversal do elemento
A_a	área da seção transversal da aço (perfil)
A_b	área da seção transversal das armaduras
A_c	área da seção transversal do concreto
A_i	área da i -ésima fibra
A_l	área da seção transversal da laje de concreto
C_m	coeficientes de ajustamento da curva exponencial momento-rotação
D_k	coeficiente de ajustamento para o trecho linear da curva
E	módulo de elasticidade do material
E_a	módulo de elasticidade do aço no regime elástico
E_{a2}	módulo de elasticidade do aço no segundo trecho da relação constitutiva
E_{a3}	módulo de elasticidade do aço no terceiro trecho da relação constitutiva
E_{cm}	módulo de elasticidade secante do concreto para tensão de $0.4f_c$
E_{ci}	módulo de elasticidade tangente inicial do concreto sob compressão
E_{csi}	módulo de elasticidade secante do concreto para tensão de $0.75f_c$
E_s	módulo de elasticidade do aço da armadura no regime elástico
E_{s2}	módulo de elasticidade do aço da armadura no encruamento
E_T	módulo de elasticidade tangente
E_{tr}	módulo de elasticidade inicial do concreto à tração
$E_{tr,2}$	módulo de elasticidade após o início da fissuração do concreto
EI_{ef}	rigidez à flexão efetiva da seção mista

EI^{nul}	rigidez à flexão da seção mista com interação nula
EI^{tot}	rigidez à flexão da seção mista com interação total
H	força cortante no(s) conector(es) dispostos na seção analisada
H_{con}	força cortante na conexão por cisalhamento no comprimento de influência
H_{max}	força cortante máxima resistida por um conector isolado
H_{Rd}	força cortante resistente na conexão por cisalhamento
H_{Sd}	força cortante solicitante na conexão por cisalhamento
I	momento de inércia da seção transversal
I_a	momento de inércia da seção transversal de aço
I_c	momento de inércia da seção transversal de concreto intacta
I_{ef}	momento de inércia efetivo da seção transversal
I_{tr}	momento de inércia da seção transversal mista homogeneizada
L_i	comprimento inicial do elemento finito
L	comprimento final do elemento finito
M	momento fletor
M_0	momento fletor inicial na ligação
M_{bi}	momento fletor atuante no elemento de viga no nó i
M_{bj}	momento fletor atuante no elemento de viga no nó j
M_{ci}	momento fletor atuante no elemento de mola no nó i
M_{cj}	momento fletor atuante no elemento de mola no nó j
M_{cr}	momento fletor de início de fissuração
M_{er}	momento fletor de início de plastificação
M_{ext}	momento fletor externo
M_i	momento fletor no nó i no sistema local
M_{int}	momento fletor interno
M_j	momento fletor no nó j no sistema local
M_{pr}	momento fletor reduzido devido a presença de força axial
M_{pri}	momento fletor reduzido devido a presença de força axial no nó i
M_{prj}	momento fletor reduzido devido a presença de força axial no nó j
N	esforço normal
$N_{c,max}$	esforço normal máximo de compressão
$N_{ext,l}$	esforço normal externo na laje de concreto

$N_{ext,p}$	esforço normal externo no perfil de aço
N_{int}	esforço normal interno
$N_{int,l}$	esforço normal interno na laje de concreto
$N_{int,p}$	esforço normal interno no perfil de aço
N_l^{tot}	esforço normal na laje em viga com interação total
$N_{t,max}$	esforço normal máximo de tração
P	Carga externa concentrada
P_{cr}	Carga crítica
R_{kf}	rigidez devido ao encruamento da ligação
S_c	rigidez à flexão da ligação
$S_{c,ini}$	rigidez à flexão inicial da ligação
S_{ci}	rigidez à flexão da ligação no nó i
S_{cj}	rigidez à flexão da ligação no nó j
S_p	rigidez rotacional da mola para simular a plasticidade
Tol	tolerância - processo iterativo local
U	energia interna de deformação
V	trabalho realizado pelas forças internas e externas
W	trabalho externo realizado

LETRAS MINÚSCULAS PARA VETORES E MATRIZES

\mathbf{f}_{ext}	vetor de forças externas da seção
\mathbf{f}_g	vetor de forças nodais de elemento no sistema global
\mathbf{f}_{int}	vetor de forças internas da seção
\mathbf{f}_l	vetor de forças nodais de elemento no sistema local
\mathbf{f}_{ps}	vetor de correção dos esforços internos
\mathbf{g}	vetor de forças desequilibradas globais
\mathbf{k}^*	matriz de rigidez reduzida com termos de flexão não lineares
\mathbf{r}	vetor com funções trigonométricas para a NLG
\mathbf{u}_l	vetor de deslocamentos no sistema local
\mathbf{u}_g	vetor de deslocamentos no sistema global
\mathbf{z}	vetor com funções trigonométricas para a NLG

LETRAS MAIÚSCULAS PARA VETORES E MATRIZES

B	matriz de transformação entre sistemas referenciais (local \leftrightarrow global)
F	vetor de forças desequilibradas da relação momento-curvatura
F'	matriz de rigidez tangente da relação momento-curvatura
F_i	vetor de forças internas - problema global
F_r	vetor de referência, indicador da direção da carga incremental
K	matriz de rigidez tangente
K_g	matriz de rigidez do elemento no sistema global
K_l	matriz de rigidez do elemento no sistema local
K_{lh}	matriz de rigidez do elemento no sistema local com rótula formada
N	vetor com as derivadas segundas das funções de interpolação de Hermite
P	vetor de forças internas (axial e momento fletor)
U	vetor de deslocamentos nodais
U⁰	vetor para o incremento inicial dos deslocamentos nodais
U_g	vetor de deslocamentos nodais corrigido
U_r	vetor de deslocamentos nodais para as cargas de referência
X	vetor de deformações

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α	rotação do elemento como corpo rígido
	indicador do confinamento do concreto
	fator de escala no modelo exponencial para ligação viga-pilar
α_0	rotação inicial do elemento no sistema global
α_1	fator que considera a interação das barras longitudinais com o concreto
α_2	fator que considera os efeitos de duração da carga e cargas cíclicas
γ	parâmetro de amolecimento do concreto
γ_{ef}	grau de ação mista
δ	translação na direção axial do elemento
	correção feita no ciclo incremental/iterativo
ε	deformação axial
ε_0	deformação axial no centroide plástico da seção
ε_1	deformação axial limite do regime linear do aço

ε_2	deformação inicial do regime de encruamento do aço
ε_a	deformação axial no CP do perfil
ε_c	deformação axial de compressão no concreto deformação axial no CP da laje
ε_{ci}	deformação de plastificação à compressão do concreto
ε_{cin}	deformação limite elástica do concreto sob compressão
ε_{cr}	deformação de fissuração do concreto
ε_{ct}	deformação limite elástica do concreto sob tração
ε_{cu}	deformação última à compressão do concreto
ε_i	deformação axial na i -ésima fibra
ε_l	deformação axial na laje
ε_p	deformação axial no perfil
ε_{pud}	deformação última do aço da armadura sob tração
ε_{pyd}	deformação de escoamento do aço da armadura
ε_{ri}	deformação na i -ésima fibra devido às tensões residuais
ε_u	deformação última do aço
ε_{ud}	deformação última do aço da armadura sob compressão
ε_y	deformação de escoamento do aço
ε_ζ	deslizamento descrito como deformação
ζ	deslizamento na interface aço-concreto
ζ_u	deslizamento último na interface aço-concreto
η	relação entre a deformação atuante e ε_{ci}
η_i	grau de interação
θ	rotação nos nós do elemento
θ_{bi}	rotação da ligação mola-elemento em relação ao eixo x' no nó i
θ_{bj}	rotação da ligação mola-elemento em relação ao eixo x' no nó j
θ_{ci}	rotação da ligação mola-mola em relação ao eixo x' no nó i
θ_{cj}	rotação da ligação mola-mola em relação ao eixo x' no nó j
θ_i	rotação local no nó i
θ_j	rotação local no nó j
θ_{ig}	rotação global no nó i
θ_{jg}	rotação global no nó j

λ	fator do incremento de carga
λ^0	fator do incremento de carga atualizado
λ_1^0	fator do incremento de carga inicial
μ	<i>fixity factor</i> coeficiente de flambagem
ν_1	constante que define a rigidez de um conector
ν_2	constante que define a rigidez de um conector
ρ_i	variação do momento no nó i para retorná-lo ao domínio resistente
ρ_j	variação do momento no nó j para retorná-lo ao domínio resistente
ϱ	tolerância do processo iterativo global
ϱ_1	erro calculado pelo critério de forças
ϱ_2	erro calculado pelo critério de deslocamentos
σ	tensão
σ_c	tensão de compressão no concreto
σ_r	tensão residual no perfil de aço
σ_{rc}	tensão residual de compressão no perfil de aço
σ_{rt}	tensão residual de tração no perfil de aço
σ_t	tensão de tração no concreto
ϕ_c	rotação na ligação
ϕ_k	rotação inicial de uma componente linear
ψ_1	constante que reduz a capacidade resistente da conexão à força cortante
ψ_2	constante que reduz a rigidez da conexão à força cortante

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ	variação imperfeição geométrica incremento
Π	energia potencial do sistema
Φ	curvatura

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

Na concepção dos projetos estruturais de engenharia, os projetistas iniciam os cálculos baseando-se em três premissas: segurança, tempo (elaboração e execução da obra) e economia. Para se atingir um equilíbrio entre essas variáveis há uma gama de materiais e métodos disponíveis no mercado. De forma isolada, dentre os materiais mais usados na construção civil, destacam-se o concreto e o aço (LEMES, 2015).

Cada material tem suas características e é empregado nos projetos de acordo com as necessidades. Ainda que os elementos estruturais reticulados sejam de aço, o concreto armado é presença frequente na confecção das fundações e das lajes. Além da sua relação resistência/peso auxiliar na obtenção de lajes com capacidade resistente e rigidez adequadas tanto para os Estados Limites Últimos (ELU) quanto para os Estados Limites de Serviço (ELS), a etapa de pré endurecimento permite a confecção das mais variadas formas para os elementos estruturais. Embora o concreto apresente boa resistência à compressão, sob esforços de tração o material fissa com baixos índices de carregamento, necessitando assim de armaduras de aço para melhorar a capacidade resistente de elementos tracionados e/ou fletidos.

A natureza quase artesanal do processo de fabricação do concreto implica que, pequenas variações em sua composição (quantidade de agregado, consumo de cimento e relação água/cimento) podem conduzir à produção de concretos excepcionalmente duráveis ou extremamente vulneráveis (BEBER, 2003). Embora as técnicas para a confecção de estruturas de concreto tenham evoluído, tal como o controle de qualidade, o aço apresenta

vantagens em relação ao concreto pela sua homogeneidade e um processo de fabricação com controle mais rígido.

Batelo (2014) ressalta que devido à sua concepção estrutural e forma esbelta, os pórticos de aço compõem uma estrutura leve, econômica, eficiente e de montagem rápida, possibilitando a execução de projetos mais elaborados e desafiadores. Apesar de muitas vantagens como componente estrutural, o aço apresenta problemas quando exposto às intempéries, o que causa a corrosão do material, e ao fogo. Dessa forma, por apresentar boa resistência aos agentes agressivos, o concreto foi primeiramente usado para revestir e proteger os perfis metálicos. Embora o concreto tivesse uma participação em termos estruturais, sua contribuição na capacidade resistente e rigidez dos elementos era desprezada (LEMES *et al.*, 2017c).

A ideia de proteção dos pilares metálicos impulsionou o surgimento dos primeiros pilares mistos de aço e concreto que, desde então, evoluíram e hoje apresentam variações no arranjo e composição desses materiais. Desta forma, além dos pilares preenchidos, existem outros tipos de pilares mistos que diferem daqueles pela posição que o concreto estrutural ocupa na seção transversal. Em função dessa posição, os pilares mistos podem ser classificados em revestidos e preenchidos (NARDIN, 2003).

A associação do aço e do concreto visa, fundamentalmente, o melhor aproveitamento físico e mecânico dos materiais (DENAVIT, 2012). Assim, as estruturas mistas de aço e concreto apresentam vantagens no que diz respeito à capacidade resistente, rigidez, proteção dos elementos metálicos (incêndio e corrosão), custo benefício, ductilidade, etc. Griffis (1986) relatou que os elementos de concreto geralmente oferecem propriedades de amortecimento consideráveis para o sistema estrutural, enquanto os componentes de aço proporcionam a redução do peso total da estrutura e conseqüentemente dos custos relacionados à fundação. Além disso, esse tipo de estrutura também possui vantagens durante a execução. Durante a cura do concreto, esse pode ser suportado por perfis metálicos e fôrmas, reduzindo gastos com escoramentos e aumentando o espaço livre de circulação na obra.

A união de diferentes materiais em um mesmo elemento estrutural é feita por um meio de conexão. Segundo Caldas (2004), no caso das estruturas mistas de aço e concreto, a interação pode ocorrer por meios mecânicos (conectores, mossas e ressalto), por atrito, ou por simples aderência e repartição de cargas.

Segundo Lemes (2015), há dois tipos de interação: total e parcial. Define-se como interação total a perfeita união entre os materiais. Em outras palavras, pode-se descrever o campo de deformações na seção transversal de forma aproximadamente linear, sem pequenos saltos ou descontinuidades. Para que tal grau de interação seja atingido é necessário, por exemplo, um número suficiente de conectores de cisalhamento para que não ocorra deslizamento na interface dos materiais. É comum adotar esse tipo de interação para a análise numérica de elementos reticulados (CALDAS, 2004; IU *et al.*, 2009; LIU, 2013; FONG; CHAN, 2012; CHIOREAN, 2013; GONÇALVES; CARVALHO, 2014). Quando os materiais trabalham de forma conjunta, e a conexão entre eles é deformável, a interação é dita parcial. Dessa forma, ocorre deslizamento na interface implicando no comportamento não monolítico do elemento. Segundo Spacone e El-Tawil (2004), a interação parcial é um problema inerente às estruturas mistas e influencia principalmente nos estados limites de utilização, na dissipação de energia, nas distribuições locais de tensão e nos estados limites últimos. As conexões deformáveis já foram objetos de diversos estudos (FAELLA *et al.*, 2002; SILVA, 2006; SILVA, 2010; SOUSA JR, 2013; TURMO *et al.*, 2015; CHIOREAN; BURU, 2017).

A presença do concreto na estrutura aumenta o grau de dificuldade para a avaliação das rigidezes e da capacidade resistente das seções transversais devido ao seu comportamento uniaxial. De modo a facilitar os cálculos do projetista, normas de projeto apresentam procedimentos simplificados para a determinação da capacidade resistente desses elementos (EC 4, 2004; NBR 8800, 2008). Diante da dificuldade em obter uma resposta com maior grau de precisão, o AISC LRFD (2016) fornece metodologias simplificadas para o estudo da seção transversal. Ainda assim, para se chegar a melhores resultados, a norma americana cita como alternativa o uso do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). Além de uma descrição mais realista do comportamento de seções transversais mistas de aço e concreto, a norma americana cita que sua utilização também é aplicável na determinação da capacidade resistente nominal de seções irregulares e nas situações onde o aço utilizado não apresenta comportamento elastoplástico perfeito. Além da determinação da capacidade resistente (CALDAS, 2004; LEMES *et al.*, 2017a; LEMES *et al.*, 2017b), o MCD também se aplica na avaliação das rigidezes axial e à flexão da seção transversal (CHIOREAN, 2013; LEMES *et al.*, 2015; LEMES *et al.*, 2017c).

As informações apresentadas nos parágrafos anteriores se enquadram no contexto da

análise estrutural não linear física e são perfeitamente aplicáveis ao Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). No MRPR, a plasticidade é considerada a nível local exclusivamente nos pontos nodais dos elementos finitos oriundos da discretização da estrutura.

Segundo Oliveira (2007), a engenharia passou por grandes avanços, particularmente as áreas de projetos e de construção civil. As técnicas de otimização no que diz respeito ao peso e à forma, o desenvolvimento de equipamentos de teste e computacionais, e modelagens numéricas eficientes levaram a construções mais econômicas e esbeltas, e a edifícios mais altos e arrojados. Assim, questões antes não convenientemente abordadas passaram a assumir fundamental importância no projeto estrutural seguro e econômico. O conhecimento dos chamados efeitos não lineares, sejam provenientes da geometria da estrutura, da plastificação ou fissuração dos materiais e do comportamento das ligações entre os elementos da estrutura, é de fundamental importância para que a estrutura exerça satisfatoriamente a função para a qual foi projetada. Numericamente, considera-se que a busca por formulações cada vez mais precisas e metodologias de solução rápidas é um processo contínuo e necessário.

1.2 Motivação

Uma extensa pesquisa bibliográfica foi realizada no contexto da análise não linear de estruturas de aço, concreto armado e mistas de aço e concreto. As fontes de não linearidades na análise estrutural mais discutidas na literatura são:

- não linearidade geométrica;
- não linearidade do material;
- semirrigidez das ligações viga-pilar;
- conexão por cisalhamento deformável na interface aço-concreto.

Resultados numéricos com menor erro estão ligados às formulações mais precisas, que consideram a não linearidade dos materiais de forma distribuída ao longo do comprimento dos elementos finitos. Uma vez que essas formulações demandam um intenso esforço computacional, surgiram formulações alternativas considerando a plasticidade concentrada nos pontos nodais. Porém, diversos trabalhos relatam problemas numéricos associados

à plasticidade concentrada, tais como: rigidez espúria, irregularidades na definição da capacidade resistente das seções transversais, impossibilidade da simulação das tensões residuais (em estruturas de aço e mistas de aço e concreto).

Embora sejam bastante discutidas formulações numéricas para a simulação de pórticos de aço com ligações semirrígidas, são raras as pesquisas que tratam da análise global de estruturas mistas nesse contexto. Mesmo assim, há uma preferência pelo uso de métodos baseados na plasticidade distribuída. Foi possível verificar que as pesquisas nos dias atuais focam mais no comportamento da ligação viga-pilar fazendo uso de modelos físicos em laboratório e/ou com uso de *softwares* comerciais.

Outra fonte de não linearidade de interesse do presente trabalho é a oriunda da conexão deformável entre o aço e o concreto em estruturas mistas. Embora seja um campo mais explorado do que o das ligações semirrígidas em estruturas mistas, o mesmo ainda encontra-se em evolução com diversas propostas numéricas recentes. Destaca-se aqui o fato de que novamente tem-se preferência pela consideração desse efeito de forma distribuída ao longo do comprimento do elemento. Em casos isolados, a simulação concentrada do efeito da interação parcial se deu por meio de considerações normativas simplificadas, acarretando na perda de precisão na avaliação do comportamento das peças mistas com conexão deformável.

A união de todos esses efeitos (não linearidades geométrica, do material, das ligações viga-pilar e da conexão por cisalhamento) em formulações numéricas não foi encontrado na literatura. Como fator motivacional, tem-se então a proposição da união dos efeitos anteriormente listados considerando-os concentrados nos pontos nodais dos elementos finitos, com formulações numéricas estáveis sem a presença dos problemas comumente associados à plasticidade concentrada.

Todos os tópicos ressaltados serão discutidos ao longo do capítulos posteriores, destacando tanto as referências bibliográficas relevantes quanto as metodologias numéricas propostas no presente trabalho para a correção dos problemas observados.

1.3 Objetivos

Propõe-se neste trabalho uma abordagem baseada no Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) (CALDAS, 2004; CHIOREAN, 2013) para a avaliação tanto da capa-

cidade resistente da seção transversal, quanto das rigidezes axial e à flexão. A construção da relação momento-curvatura se torna essencial para tal avaliação (LEMES *et al.*, 2015; LEMES *et al.*, 2017c). Uma vez considerando a tangente à relação momento-curvatura, as rigidezes dependem das propriedades geométricas da seção e do módulo de elasticidade dos materiais, retirado das respectivas relações constitutivas. Visa-se o acoplamento dessa metodologia ao MRPR, avaliando assim a plasticidade de forma nodal através dos parâmetros generalizados de rigidez. Por isso, as molas rotacionais fictícias, usualmente empregadas para simular a inelasticidade dos materiais no MRPR (CHAN; CHUI, 2000), não são necessárias, gerando uma nova metodologia aqui denominada *Método da Rótula Plástica Refinado Modificado* (MRPRM).

Por outro lado, as molas fictícias são introduzidas no modelo para simular o comportamento da ligação viga-pilar (CHAN; CHUI, 2000). Nesse sentido, a relação momento-rotação é fundamental no âmbito da análise. Diversos modelos matemáticos serão tratados na formulação numérica proposta, com destaque para o modelo multilinear, que pode retratar de forma bastante aceitável qualquer comportamento de uma ligação sob flexão, seja em elementos de aço, mistos de aço e concreto, ou ainda de concreto pré-moldado.

Nos elementos mistos de aço e concreto ainda há a possibilidade de deslizamento na interface aço-concreto. O presente trabalho visa a simulação desse efeito fazendo a divisão do esforço axial, sendo parte absorvida pela laje e parte pelo perfil. A diferença entre esses valores tem relação direta com a conexão por cisalhamento e seu grau de interação. Assim, considerando o comportamento não linear do conjunto de conectores de cisalhamento, torna-se possível obter numericamente o comportamento de vigas mistas de aço e concreto com interação parcial.

Ressalta-se, por fim, que o presente trabalho vai de encontro com os objetivos do PRO-PEC/Deciv/EM/UFOP e está relacionado com as seguintes linhas de pesquisa: *Mecânica Computacional*, e *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas*.

1.4 Sistema Computacional CS-ASA

Silveira (1995) desenvolveu uma base computacional para investigação da instabilidade elástica de colunas, arcos e anéis com restrições unilaterais de contato. Desde então, diferentes pesquisas foram realizadas a partir dessa mesma base, porém em programas

independentes (GALVÃO, 2000; ROCHA, 2000; MACHADO, 2005; ROCHA, 2006).

Silva (2009) uniu esses programas em uma única base computacional e adicionou novas funcionalidades à plataforma. Tal base computacional recebeu o nome de CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*) e é utilizada nesse trabalho. Trata-se de um sistema computacional inicialmente idealizado para estruturas metálicas, que é capaz de realizar análise numérica avançada estática e dinâmica de estruturas baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF). Implementado em linguagem *Fortran* 90/95 (CHAPMAN, 2003), o CS-ASA é todo estruturado em módulos (classes). Dessa forma, a introdução de novas funcionalidades é facilitada, uma vez que se alteram apenas rotinas internas a módulos específicos.

Para análise estática não linear via CS-ASA, a entrada de dados é feita em dois arquivos de texto. No primeiro são fornecidas as informações referentes ao tipo de análise, da estrutura (geometria e condições de contorno), dos materiais, das seções e dos carregamentos. No segundo arquivo são definidos a formulação não linear a ser utilizada, as estratégias de incremento de carga e iteração, o incremento inicial do parâmetro de carga, o método de *Newton-Raphson* (padrão ou modificado) e o critério de convergência. Após o processamento (análise do problema estrutural), a saída e impressão dos resultados também são feitas em formato de arquivos de texto.

Como proposta deste trabalho pretende-se viabilizar a consideração das três fontes de não linearidade associadas às estruturas de aço, concreto e mistas, isto é: não linearidade geométrica, do material e das conexões. Na Figura 1.1 são ilustradas as funcionalidades da plataforma CS-ASA.

1.5 Organização do Trabalho

O presente trabalho está dividido em 6 capítulos e 3 apêndices de modo a contemplar todos os tópicos relevantes a serem considerados na pesquisa.

No próximo capítulo será apresentada uma metodologia generalizada para análise de estruturas no contexto da plasticidade concentrada. Após uma pesquisa bibliográfica referente ao tema estudado, serão detalhadas as obtenções da formulação do elemento finito não linear, das estratégias de incremento de carga e iteração, da curva de interação entre o esforço normal e o momento fletor, e das rigidezes axial e à flexão via MCD.

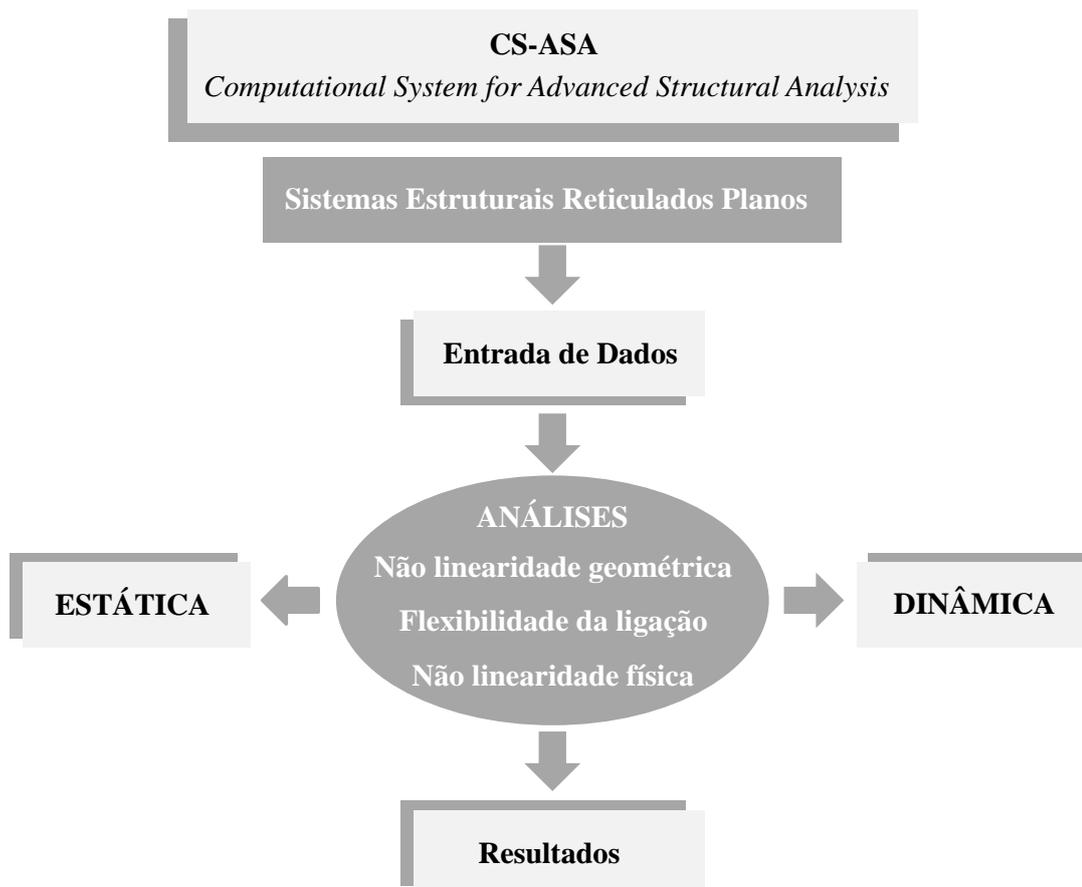


Figura 1.1 – Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados (SILVA, 2009)

Em seguida, no Capítulo 3, um elemento finito composto será discutido. Nesse elemento, molas rotacionais fictícias são introduzidas em suas extremidades, modificando a sua relação força-deslocamento. A formulação numérica será apresentada juntamente com a revisão bibliográfica. Além disso, modelos para a simulação do comportamento momento-rotação das ligações viga-pilar, ou mesmo pilar-base, serão abordados.

O efeito da interação parcial em vigas mistas de aço e concreto será discutido no Capítulo 4. A abordagem aqui apresentada é baseada na divisão do esforço axial entre a laje de concreto e o perfil de aço, sendo essa divisão função direta do grau de interação proporcionado pelos conectores de cisalhamento.

A validação dos procedimentos numéricos apresentados nos Capítulos 2-4 será feita por meio de análises de seções transversais e sistemas estruturais, sendo os resultados encontrados discutidos no Capítulo 5. Como parâmetros de comparação, as respostas da literatura, tanto no contexto experimental quanto numérico, serão utilizadas.

No Capítulo 6 serão feitas considerações sobre a precisão das implementações com-

putacionais realizadas com uma breve discussão dos resultados obtidos. Neste capítulo também serão apresentadas possíveis pesquisas futuras, sendo listadas concomitantemente algumas referências bibliográficas para eventual consulta.

Para completar o trabalho, no Apêndice A serão apresentados na forma completa os termos da matriz de rigidez desconsiderando a não linearidade geométrica. Para esses termos, uma função de interpolação de quinta ordem para o deslocamento axial é usada, de modo a eliminar fenômenos de travamento. Para os deslocamentos transversais, a função de interpolação é de terceira ordem. No Apêndice B, os termos da matriz constitutiva da seção transversal para o problema da interação parcial serão apresentados.

Como estudo paralelo ao discutido nos capítulos da tese, uma metodologia alternativa para a simulação do comportamento não linear de estruturas de concreto armado será apresentada no Apêndice C. Nessa metodologia, manteve-se a abordagem clássica do MRPR com molas fictícias para simulação da plasticidade. Porém, a fissuração do concreto será tratada por meio de uma equação polinomial aproximada.

CAPÍTULO 2

Análise Não Linear de Estruturas Mistas com Interação Total

2.1 Considerações Iniciais

A simulação realista do comportamento de qualquer estrutura exige uma descrição confiável do comportamento dos materiais que as compõem. Além disso, as metodologias numéricas empregadas devem ser eficientes, ou seja, rápidas na execução e precisas na resposta.

Tem-se como objetivo, neste capítulo, a obtenção de uma metodologia numérica que seja capaz de atender aos requisitos anteriormente citados. Serão consideradas as não linearidades geométrica e dos materiais, aliadas a estratégias de solução já validadas e presentes na plataforma CS-ASA-*Computational System for Advanced Structural Analysis* (SILVA, 2009). Surgem como desafios as obtenções da capacidade resistente da seção, descrita através das curvas de interação, e os parâmetros de rigidez axial e à flexão, sendo a formulação numérica, aqui utilizada, baseada na teoria de Euler-Bernoulli.

A seguir, uma revisão bibliográfica do tema será apresentada, destacando tópicos relevantes no estudo a ser realizado. Posteriormente, apresentam-se a formulação numérica via Método da Rótula Plástica Refinado Modificado (MRPRM) acoplado ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) e as estratégias de solução do problema estático não linear. No presente capítulo a interação entre os materiais é dita completa, sem deslizamento na interface aço-concreto, e as ligações entre as vigas e os pilares são perfeitamente rígidas.

2.2 Fundamentação Teórica

No contexto da análise numérica avançada de estruturas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca como ferramenta eficiente. Assim, os *softwares* comerciais ou produzidos de forma independente baseados nesse método se tornam meios importantes para a avaliação e compreensão do comportamento de problemas associados à engenharia. O programa CS-ASA (SILVA, 2009) vem sendo desenvolvido ao longo dos últimos anos visando o estudo de diversas fontes de não linearidade, tanto no âmbito da análise estática quanto dinâmica de estruturas de aço. Mais recentemente, Lemes (2015) incluiu uma metodologia generalizada para avaliação da capacidade resistente da seção transversal e, acoplada ao conceito de rigidez homogeneizada, proporcionou ao CS-ASA condições para a realização de análises inelásticas de segunda ordem de estruturas mistas.

São encontrados na literatura diversos trabalhos nesta linha de pesquisa (CALDAS, 2004; BRATINA *et al.*, 2004; MUNIZ, 2005; CHIOREAN, 2013; GONÇALVES; CARVALHO, 2014). A busca pela generalização e eficiência das formulações induz a utilização de métodos de análise da plasticidade de forma distribuída, como é comumente chamado o Método da Zona Plástica (MZP). Nessa abordagem, a consideração direta das deformações na formulação facilita a modelagem de elementos que possuem o concreto na sua composição. Isso se deve ao comportamento não linear com propriedades diferentes na tração e na ocmpressão do material. Embora seja considerado mais preciso (CHEN; KIM, 1997), o MZP demanda um intenso esforço computacional.

O Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) surge como alternativa para se obter boa precisão nos resultados de forma mais viável computacionalmente. Usualmente, o MRPR está associado à análise de estruturas metálicas (CHAN; CHUI, 2000; SILVA, 2009) e mistas (FONG; CHAN, 2012; LEMES, 2015). Nessa abordagem concentrada, é possível que a degradação da rigidez da seção transversal seja feita por meio de elementos de mola fictícios, inseridos nas extremidades dos elementos finitos de viga-pilar. Essa degradação se inicia quando a combinação de esforço normal e momento fletor ultrapassa o limite do regime elástico imposto por uma curva de início de plastificação. Em outras palavras, a seção transversal apresenta comportamento linear elástico até que essa curva seja atingida. Por outro lado, mesmo com o refinamento do Método da Rótula Plástica (MRP), em qualquer análise, sempre haverá um trecho onde o comportamento dos materiais presentes na seção será linear elástico. Dessa forma, a modelagem de elementos de concreto armado

não é precisa.

Liu *et al.* (2012b) propuseram um modelo de análise de estruturas de concreto armado via MRPR. Nesse modelo, o momento de inércia da seção transversal era reduzido pela equação aproximada proposta por Branson e Metz (1963) mesclado ao conceito da mola fictícia. Já Ngo-Huu e Kim (2012) estudaram uma metodologia mista entre o MRPR e o MZP para a avaliação de estruturas mistas. Nesse trabalho, os autores fizeram a discretização da seção transversal em fibras e avaliaram o módulo de elasticidade tangente dos materiais por meio das respectivas deformações. Em um trabalho recente sem as pseudo-molas, Kostic *et al.* (2016) estudaram especificamente a resposta inelástica concentrada de pilares mistos preenchidos. O modelo utilizado nesse trabalho para a degradação da rigidez foi proposto por Lubliner *et al.* (1993). No entanto, nessa pesquisa os autores consideraram a rigidez à flexão homogeneizada até que o limite elástico fosse atingido (HAJJAR; GOURLEY, 1996). Já Scott e Fenves (2006) limitaram a plasticidade a regiões com comprimento específico nas extremidades dos elementos finitos. Além disso, alguns métodos de integração foram testados na região plástica, a fim de eliminar a resposta não objetiva causada pelo comportamento de amolecimento dos materiais em elementos finitos de viga-pilar com formulação baseada no método das forças.

A abordagem da plasticidade no presente trabalho é semelhante a algumas pesquisas usando o modelo baseado em fibra, mas em termos globais, esses estudos focaram formulações baseadas no método das forças (VALIPOUR; FOSTER, 2009; VALIPOUR; FOSTER, 2010; KOSTIC; FILIPPOU, 2012; CHIOREAN, 2013; KOSTIC *et al.*, 2016).

Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo combinar eficiência computacional e precisão na resposta numérica. Assim, decidiu-se seguir a metodologia mais simples de implementação através do método dos deslocamentos, mas com mais elementos finitos por membro para possibilitar também a análise de plasticidade concentrada nos pontos nodais. Portanto, o arranjo numérico destacado neste capítulo possibilita uma metodologia geral, aplicável a estruturas de aço, concreto e mistas de aço e concreto, que não apresenta limitações comumente relacionadas à plasticidade concentrada, tais como: interação da força axial com o momento de flexão, o comportamento de endurecimento ou amolecimento dos materiais e o efeito das tensões residuais nas estruturas de aço (KOSTIC; FILIPPOU, 2012).

2.2.1 Comportamento uniaxial do concreto

Na construção civil o concreto se destaca como um dos materiais mais utilizados na composição de elementos estruturais. Por isso, a compreensão do comportamento do material é essencial para o projetista. Vale destacar ainda o desenvolvimento de materiais de alta resistência resultando em seções cada vez mais esbeltas. Nessa circunstância, existe a possibilidade do aparecimento de grandes deslocamentos e deformações, que originam os chamados efeitos não lineares.

As normas mais atuais apresentam uma tendência de encorajar a utilização e desenvolvimento de métodos e programas de análise estrutural que considerem as não linearidades das estruturas de concreto armado em projetos estruturais (STRAMANDINOLI, 2007). Bratina *et al.* (2004) destacaram que a evolução das metodologias numéricas de análise de estruturas de concreto armado influenciaram de forma positiva na previsão do comportamento estrutural (tensões, deslocamentos, cargas limites, danos, entre outros).

O procedimento numérico utilizado no presente trabalho para a construção da relação momento-curvatura faz uso direto das relações constitutivas do concreto e do aço das armaduras. Torna-se importante a caracterização dos materiais para que os resultados obtidos sejam condizentes com a realidade. Na literatura, diversos autores utilizaram relações tensão-deformação diferentes em suas pesquisas. Além disso, no estudo das normas de projeto (NBR 6118, 2014; EC 2, 2004), vê-se que a descrição do comportamento uniaxial do concreto varia de código para código, principalmente no que diz respeito ao amolecimento e a consideração da resistência à tração do material. Parente Jr *et al.* (2014) e Lemes *et al.* (2016a) realizaram estudos numéricos comparativos dos modelos normativos, considerando a resistência à tração do concreto.

Nota-se ainda que muitos dos pesquisadores optaram por usar modelos constitutivos diferentes dos propostos em normas. Chiorean (2013) utilizou um modelo, para descrição do comportamento do concreto sob compressão, semelhante ao proposto na NBR 6118 (2014), porém o autor considera o amolecimento do concreto através do parâmetro γ , que será discutido na Seção 2.5.3. No caso da tração, o referido autor utiliza o modelo de Vecchio e Collins (1986). Já Bratina *et al.* (2004), além da relação dada no EC 2 (2004), utilizaram também a curva fornecida por Desayi e Krishnan (1964). Tal fato é o oposto ao que se observa na descrição do comportamento uniaxial do aço, exceto pelos modelos de tensões residuais.

2.2.2 Comportamento uniaxial do aço

Diferentemente do concreto, encontra-se, na literatura, um número reduzido de modelos matemáticos para a descrição da relação tensão-deformação do aço utilizado em perfis: elastoplástico perfeito (CALDAS, 2004; FONG; CHAN, 2012), bilinear com encruamento (LEMES *et al.*, 2015) e, ainda, um modelo trilinear (CHIOREAN, 2013). É notável que dentre os três modelos, o último é o mais geral, pois a simples alteração de alguns parâmetros que descrevem a curva trilinear pode transformá-la nos outros dois modelos citados. Este modelo é discutido na Seção 2.5.1.

No âmbito da análise de estruturas metálicas, fatores como as imperfeições geométricas e as tensões residuais podem contribuir para redução da capacidade resistente do sistema. As tensões residuais aparecem com o resfriamento desigual das diversas partes dos perfis, seja depois da laminação, seja por causa do corte a maçarico seguido de soldagem, seja por causa da soldagem de chapas laminadas em tiras, ou também devido ao resfriamento após dobramento a quente ou nos tubos depois de serem estrudados ou trefilados (ALVARENGA, 2005). Segundo Alvarenga e Silveira (2006), diversos ensaios de laboratório permitiram o aparecimento de modelos simplificados que são usados para representar as tensões residuais. No entanto, nas peças reais, o comportamento individual é bastante variável e apresenta um campo de pesquisas ainda extenso a ser explorado.

A consideração das tensões residuais influencia diretamente no comportamento não linear físico (NLF) de seções metálicas e mistas de aço e concreto. Dessa forma, a transição do regime elástico para o plástico ocorre gradativamente. Ainda assim, na literatura (LIEW *et al.*, 1993a; LIEW *et al.*, 1993b; CHAN; CHUI, 2000; FONG; CHAN, 2012), são usadas curvas simplificadas para a descrição de um limite elástico para a seção dentro do diagrama esforço normal-momento fletor. Em um estudo recente, Lemes *et al.* (2016b) verificaram a necessidade de revisão dessas curvas enfatizando a divergência dos modelos simplificados com os obtidos via MCD para o eixo de menor inércia da seção transversal.

No contexto do MRPR, Li *et al.* (2015) estudaram seções tubulares retangulares e perfis I soldados. Os autores utilizaram uma metodologia baseada em métodos *quasi-Newton* para a análise da seção transversal (CHEN *et al.*, 2001). Nesse último trabalho, os autores se basearam em modelos de tensões residuais específicas para os tipos de perfis avaliados e forneceram as curvas de início (CIP) e de plastificação total (CPT) da seção. Esse estudo abriu a discussão de como as CIP devem ser obtidas.

Zubydan (2011) fez um estudo específico de perfis de aço I e H submetidos à flexão em torno do eixo de menor inércia. No referido estudo, o autor propôs uma formulação empírica para o cálculo do módulo de elasticidade tangente desses perfis. Nesse contexto, Ziemian e McGuire (2002) propuseram uma abordagem com plasticidade concentrada juntamente a avaliação aproximada do módulo de elasticidade.

Chiorean (2013) fez um breve estudo do comportamento de perfis I totalmente revestidos com concreto considerando os modelos de tensões residuais do AISC LRFD (2010), que usam as prescrições definidas por Galambos e Ketter (1959), e do EC 3 (1992), que baseou seu modelo nas definições da norma ECCS (1983). Porém, como o autor desta pesquisa trabalhou com as rigidezes generalizadas (utilizando o módulo de elasticidade tangente dos materiais) não houve necessidade da avaliação das CIPs. Essas curvas são importantes na definição do limite do comportamento linear da rigidez à flexão no contexto do MRPR considerando elementos finitos compostos (CHAN; CHUI, 2000).

Em um trabalho recente, Abrambes e Quach (2016) fizeram um levantamento dos modelos de tensões residuais em diversas formas de seções transversais de aço laminadas, soldadas e dobradas a frio. Para seções que não apresentam um consenso no modelo de tensões residuais, como as seções tubulares circulares, Barsan e Chiorean (1999) recomendaram a utilização do comportamento uniaxial descrito pela relação de Ramberg-Osgood, que fornece a transição gradativa do regime elástico para o plástico.

No que diz respeito ao comportamento do aço das armaduras longitudinais, há uma diferenciação. Chiorean (2013) utilizou um modelos bilineares. Basicamente, o encruamento do aço é considerado apenas sob tração de forma a limitar problemas de instabilidade em elementos comprimidos, já que as armaduras são elementos esbeltos. Ainda assim, Bratina *et al.* (2004) consideraram o encruamento também nas barras comprimidas. A relação constitutiva do aço das armaduras é apresentada na Seção 2.5.2.

2.3 Elemento Finito Corrotacional

Usualmente, o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) está associado à vinculação de molas fictícias nas extremidades do elemento finito de viga-pilar para a simulação da degradação da rigidez à flexão da seção transversal (MACHADO, 2005; SILVA, 2009; LEMES, 2015). Propõe-se neste trabalho retirar essas molas e simular a não linearidade

do material através da relação momento-curvatura na metodologia denominada MRPRM, como será discutido na Seção 2.5.4.

É importante destacar algumas considerações envolvendo a formulação de elementos finitos adotada neste capítulo, isto é:

- todos os elementos são inicialmente retos e prismáticos, e a seção transversal permanece plana após a deformação;
- são desprezados os efeitos de instabilidade locais, como a flambagem nas chapas componentes dos perfis de aço; assim a seção pode desenvolver sua capacidade total de rotação plástica;
- os efeitos de instabilidade globais que podem acontecer em problemas tridimensionais, como a flambagem lateral ou torcional, são ignorados pois considera-se um sistema de travamento no eixo z ;
- grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos;
- as deformações originadas pelo cisalhamento são ignoradas;
- no caso da análise de estruturas mistas, considera-se a interação total entre os elementos de aço e concreto.

2.3.1 Relações cinemáticas do elemento

A Figura 2.1 mostra a cinemática do elemento e a nomenclatura dos movimentos (translações e rotações) utilizadas a seguir. Se o elemento estrutural apresenta grandes deslocamentos e rotações, os graus de liberdade globais contêm o movimento rígido e a parte que realmente causa deformação. A abordagem corrotacional visa separar essas partes.

Chhang *et al.* (2017) descreveram que o movimento de corpo rígido é definido pelos deslocamentos globais (translações u_{ig} e v_{ig} , e rotação $\alpha - \alpha_0$). Isso define um sistema de coordenadas locais (x', y') que se move continuamente com o elemento. O sistema local é usado para descrever a parte do movimento que realmente causa deformação no elemento.

Os graus de liberdade globais, indicados com o subscrito g , são descritos por:

$$\mathbf{u}_g = [u_{ig} \quad v_{ig} \quad \theta_{ig} \quad u_{jg} \quad v_{jg} \quad \theta_{jg}]^T \quad (2.1)$$

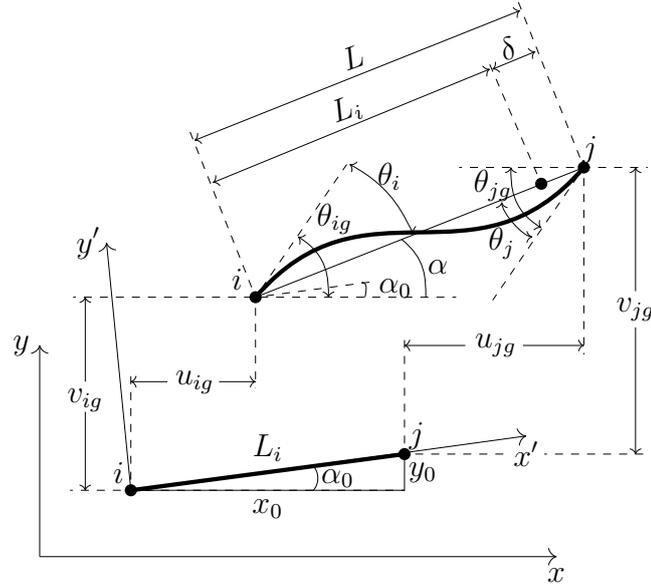


Figura 2.1 – Deslocamentos no sistema global de coordenadas

em que u , v e θ são a translação horizontal, a translação vertical e a rotação, respectivamente, e os subscritos i e j definem os nós.

Os graus de liberdade locais podem ser escritos na forma reduzida como:

$$\mathbf{u}_l = [\delta \quad \theta_i \quad \theta_j]^T \quad (2.2)$$

sendo δ , θ_i e θ_j funções dos graus de liberdade globais, tal como definido a seguir:

$$\begin{aligned} \delta &= L - L_i \\ \delta &= \sqrt{(x_0 + u_{jg} - u_{ig})^2 + (y_0 + v_{jg} - v_{ig})^2} - \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\theta_i = \theta_{ig} - \alpha_0 = \theta_{ig} - \tan^{-1} \left(\frac{y_0 + v_{jg} - v_{ig}}{x_0 + u_{jg} - u_{ig}} \right) \quad (2.4)$$

$$\theta_j = \theta_{jg} - \alpha_0 = \theta_{jg} - \tan^{-1} \left(\frac{y_0 + v_{jg} - v_{ig}}{x_0 + u_{jg} - u_{ig}} \right) \quad (2.5)$$

A diferenciação das Equações 2.3-2.5 em relação aos graus de liberdade globais fornece

o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{ig} \\ \Delta v_{ig} \\ \Delta\theta_{ig} \\ \Delta u_{jg} \\ \Delta v_{jg} \\ \Delta\theta_{jg} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

ou na sua forma compacta:

$$\Delta\mathbf{u}_l = \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}_g \quad (2.7)$$

em que s é o *sen* α , c é o *cos* α , $\Delta\mathbf{u}_l$ e $\Delta\mathbf{u}_g$ são os deslocamentos incrementais totais no sistema local e global, respectivamente. Por fim, a matriz \mathbf{B} é responsável pela transformação dos deslocamentos do sistema global para o local e vice-versa.

2.3.2 Formulação do elemento

A abordagem corrotacional é conveniente para estabilizar a relação entre as variáveis locais e globais (ALHASAWI *et al.*, 2017). Partindo do Princípio dos Trabalhos Virtuais, é possível descrever a relação entre as forças nos dois sistemas referenciais da seguinte forma:

$$\Delta V = \Delta\mathbf{u}_g^T \mathbf{f}_g = \Delta\mathbf{u}_l^T \mathbf{f}_l = \Delta\mathbf{u}_g^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (2.8)$$

em que se faz uso da Equação (2.7).

Da equação anterior, pode-se definir a relação entre os vetores de forças globais, \mathbf{f}_g , e locais, \mathbf{f}_l , como:

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (2.9)$$

Pela diferenciação da Equação (2.9) em relação ao vetor de deslocamentos globais, $\Delta\mathbf{u}_g$, obtém-se a matriz de rigidez global, que é definida por (CHHANG *et al.*, 2017):

$$\mathbf{K}_g = \frac{\Delta\mathbf{f}_g}{\Delta\mathbf{u}_g} = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L} N + \frac{1}{L^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T) (M_i + M_j) \quad (2.10)$$

sendo \mathbf{K}_l a matriz de rigidez do elemento no sistema local 2.3.3, N , M_i e M_j as forças internas referentes aos graus de liberdade locais, e:

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \quad (2.11)$$

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T \quad (2.12)$$

2.3.3 Matriz de rigidez - \mathbf{K}_l

Nas formulações numéricas via MEF baseadas no método dos deslocamentos, problemas de travamento (*locking phenomena*) podem aparecer. Esse fenômeno são aumentos espúrios de rigidez na estrutura durante a análise e estão associados ao uso de funções de interpolação de baixa ordem. Tang *et al.* (2015) destacaram que o *membrane locking* surge quando é usada uma função de interpolação de baixa ordem para o deslocamento axial do elemento de viga-pilar na análise não linear geométrica (NLG). Usando a forma degenerada do tensor de Green e a curvatura baseada na teoria de Euler-Bernoulli, as deformações axiais são descritas como:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (2.13)$$

$$\Phi = -\frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.14)$$

Assumindo que o deslocamento axial total pode ser dividido em uma parte referente a força normal e uma outra induzida pela flexão, de acordo com Tang *et al.* (2015) e Silva (2016) as interpolações para os deslocamentos transversal (v) e axial (u) que eliminam o *membrane locking* são dadas por:

$$v = x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \theta_i + \frac{x^2}{L} \left(\frac{x}{L} - 1\right) \theta_j \quad (2.15)$$

$$u = \underbrace{\frac{x}{L} \delta}_{\text{axial}} + \underbrace{\frac{x}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx}_{\text{flexão}} \quad (2.16)$$

Da Equação (2.16), a deformação axial pode ser escrita como função do deslocamento e das rotações como segue:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} + \frac{2\theta_i^2 - \theta_i\theta_j + 2\theta_j^2}{30} \quad (2.17)$$

Considerando aqui o material com comportamento elástico e sendo as cargas aplicadas nos pontos nodais e conservativas (trabalho realizado pelos esforços internos e externos é independente do caminho percorrido pela estrutura ao passar da condição de equilíbrio inicial para outra configuração qualquer), a energia potencial do sistema, Π , é expressa pela energia de deformação U e pelo trabalho externo realizado W , ou seja:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}EA \int_0^L \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2}EI \int_0^L \Phi^2 dx - \sum_{i=1}^3 f_{l,i} u_{l,i} \quad (2.18)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material, A e I são as propriedades geométricas da seção (área e inércia). Usando as Equações (2.14) e (2.17) na Equação (2.18) a energia potencial é agora expressa em função dos graus de liberdade do elemento. Pelo princípio da energia potencial estacionária, a primeira variação na função implica nas equações de equilíbrio, assim:

$$\Delta\Pi = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l} - \mathbf{f}_l \right) \Delta\mathbf{u}_l = 0 \quad (2.19)$$

sendo que a primeira variação da energia de deformação, U , resulta no vetor de forças internas, \mathbf{f}_l , ou seja:

$$\mathbf{f}_l = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l} \quad (2.20)$$

e a matriz de rigidez tangente como a segunda variação da energia de deformação, ou primeira derivada do vetor de forças internas:

$$\mathbf{K}_l = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}_l^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial \mathbf{u}_l} \quad (2.21)$$

em que os termos da matriz de rigidez são explicitamente mostrados no Apêndice A.

2.3.4 Simulação da plasticidade concentrada

Nesta abordagem não serão consideradas as molas fictícias usualmente utilizadas para a simulação da não linearidade do material no MRPR. No presente trabalho, as relações momento-curvatura serão utilizadas para a simulação da degradação das rigidezes (MRPRM). Na modelagem do sistema estrutural via MEF, utiliza-se o elemento finito de viga-pilar delimitado pelos pontos nodais i e j , como mostrado na Figura 2.2.

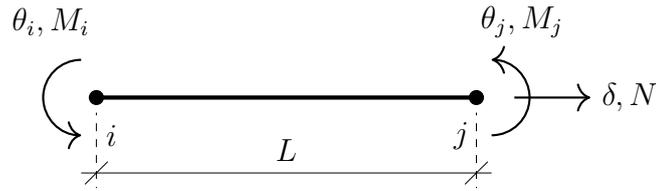


Figura 2.2 – Elemento finito corrotacional

A relação de equilíbrio na forma incremental do elemento finito de viga-pilar considerado é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

ou ainda, na sua forma compacta, escreve-se:

$$\Delta \mathbf{f}_l = \mathbf{K}_l \Delta \mathbf{u}_l \quad (2.23)$$

na qual, ΔN , ΔM_i e ΔM_j são os incrementos de força axial e de momentos fletores e $\Delta \delta$, $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ são os incrementos de deslocamento axial e rotações nodais, respectivamente.

Os termos referentes à flexão, considerando a não linearidade dos materiais, da matriz apresentada na Equação 2.22 são obtidos por meio de uma abordagem semelhante à proposta por Ziemian e McGuire (2002). De modo a evitar processos de integração na matriz de rigidez durante a análise, os termos de flexão são calculados considerando considerando a tangente à relação momento-curvatura ($M \times \Phi$) variando linearmente ao longo do comprimento do elemento, semelhante ao caso de um gradiente linear do momento (ZIEMIAN; MCGUIRE, 2002). Assim:

$$EI(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) EI_{T,i} + \frac{x}{L} EI_{T,j} \right] \quad (2.24)$$

em que $EI_{T,i}$ e $EI_{T,j}$ são as rigidezes à flexão, obtidas conforme descrito na Seção 2.5.6, nos pontos nodais i e j , respectivamente, e L é o comprimento do elemento finito.

A matriz de rigidez reduzida com apenas os termos referentes à flexão é definida utilizando a derivada segunda das funções de interpolação de Hermite, apresentadas na Equação 2.15, \mathbf{N} , ou seja (MCGUIRE *et al.*, 2000):

$$\mathbf{k}^* = \int_0^L \mathbf{N}^T EI_T(x) \mathbf{N} dx \quad (2.25)$$

em que:

$$\mathbf{N} = \left[N_1 = \frac{2}{L} \left(2 - \frac{3x}{L} \right) \quad N_2 = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{3x}{L} \right) \right] \quad (2.26)$$

sendo cada uma das duas funções de interpolação descritas referentes aos graus de liberdade de rotação.

Desenvolvendo a Expressão 2.25 chega-se em:

$$\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} \int_0^L N_1^2 EI_T(x) dx & \int_0^L N_1 N_2 EI_T(x) dx \\ \int_0^L N_1 N_2 EI_T(x) dx & \int_0^L N_2^2 EI_T(x) dx \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

que resulta em:

$$k_{11}^* = \int_0^L \left[\frac{2}{L} \left(2 - 3\frac{x}{L} \right) \right]^2 EI_T(x) dx \quad (2.28)$$

$$k_{12}^* = k_{21}^* = \int_0^L \left[\frac{2}{L} \left(2 - 3\frac{x}{L} \right) \right] \left[\frac{2}{L} \left(1 - 3\frac{x}{L} \right) \right] EI_T(x) dx \quad (2.29)$$

$$k_{22}^* = \int_0^L \left[\frac{2}{L} \left(1 - 3\frac{x}{L} \right) \right]^2 EI_T(x) dx \quad (2.30)$$

Resolvendo-se as integrais das Equações 2.28-2.30, chega-se a:

$$\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{3EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} & \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \\ \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} & \frac{EI_{T,i} + 3EI_{T,j}}{L} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Considerando que a rigidez axial no elemento é dada pela média das rigidezes nos pontos nodais i e j , tem-se as seguintes expressões para os coeficientes da matriz de rigidez do elemento corrotacional, \mathbf{K}_l :

$$(EA)^* = \frac{EA_{T,i} + EA_{T,j}}{2} \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{EI_1}{L} \right)^* = \frac{3EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{EI_2}{L} \right)^* = \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{EI_3}{L}\right)^* = \frac{EI_{T,i} + 3EI_{T,j}}{L} \quad (2.35)$$

em que EA_T é a rigidez axial tangente à relação momento-curvatura que, tal como a rigidez à flexão, é discutida na Seção 2.5.

2.3.5 Return mapping

Em uma seção plastificada, ou seja, com a combinação de esforços N e M sobre a curva de plastificação, numericamente o aumento da força axial externa resulta no desequilíbrio do sistema. Isto é, as cargas atuantes naquela seção ultrapassam o limite de resistência da mesma. Isso é contornado na formulação utilizada por meio da estratégia denominada *return mapping*. Essa estratégia consiste de uma alteração na relação força-deslocamento do elemento (Equação 2.22) para que capacidade resistente última da seção não seja violada. Assim a equação é reescrita da seguinte forma (SILVA, 2009):

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & c_1 K_{22} & 0 \\ k_{31} & 0 & c_2 K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho_i \\ \rho_j \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

que, na forma compacta fica:

$$\Delta \mathbf{f}_l = \mathbf{K}_{lh} \Delta \mathbf{u}_l + \Delta \mathbf{f}_{ps} \quad (2.37)$$

sendo $K_{22} = k_{22} - k_{23}k_{32}/k_{33}$ e $K_{33} = k_{33} - k_{23}k_{32}/k_{22}$, em que k_{mn} é o termo que corresponde à linha m e à coluna n na matriz de rigidez \mathbf{K}_l (Equação 2.22). O vetor $\Delta \mathbf{f}_{ps}$ é o vetor de correção dos esforços internos, e c_1 , c_2 , ρ_i e ρ_j são mostrados na Tabela 2.1, onde é apresentado o parâmetro δM_{pr} . Como pode ser visto na Figura 2.3, esse translado caracteriza o retorno de M à curva de interação, mantendo o esforço axial, N , constante. Maiores detalhes desse procedimento numérico estão em Silva (2009).

2.4 Solução do Problema Estático Não Linear

No estudo do comportamento não linear de uma estrutura, é necessária a atualização constante da matriz de rigidez para obtenção do estado de equilíbrio devido às alterações em sua geometria e não linearidade dos materiais. Quando esses dois fatores são levados

Tabela 2.1 – Coeficientes da Equação 2.36

Rótula Plástica	Parâmetros			
	c_1	c_2	ρ_1	ρ_2
Extremidade i	0	1	δM_{pri}	$\delta M_{pri} (k_{32}/k_{22})$
Extremidade j	1	0	$\delta M_{prj} (k_{23}/k_{33})$	δM_{prj}
Extremidades i e j	0	0	δM_{pri}	δM_{prj}

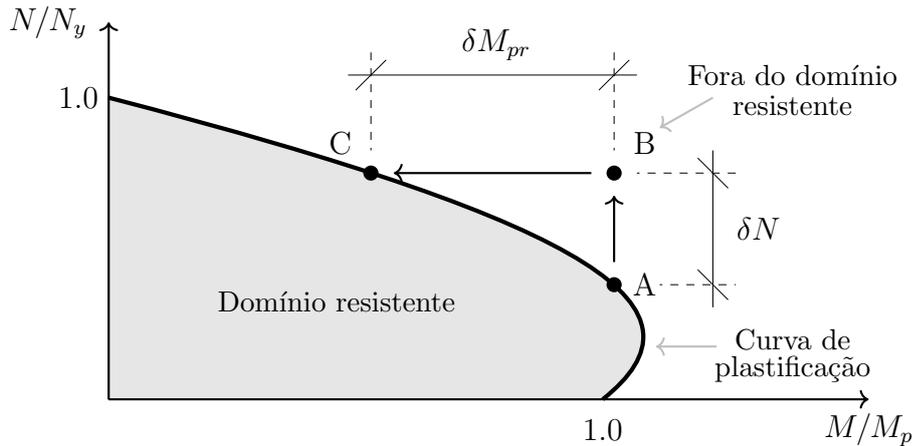


Figura 2.3 – Violação da curva de interação para plastificação total

em conta no problema de engenharia estrutural, eles são introduzidos na matriz de rigidez, \mathbf{K} , como:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \quad (2.38)$$

em que \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{P} são as forças internas (força axial e momento fletor), e E_T é o parâmetro que se refere ao módulo de elasticidade tangente dos materiais.

Numericamente, o processo de solução do problema estático não linear, por uma estratégia incremental e iterativa, pode ser dividido em duas etapas: solução incremental predita e o ciclo de iterações. O processo consiste em, para cada incremento de carga dado, obter o equilíbrio entre forças internas e externas da seguinte forma:

$$\lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \cong 0 \quad (2.39)$$

sendo \mathbf{F}_i o vetor de forças internas, \mathbf{F}_r o vetor de referência em que somente sua direção é importante e λ o fator de carga.

Métodos eficientes de solução de sistemas não lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio (primário ou secundário) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos críticos (pontos limites de carga e de deslocamento e/ou pontos de bifurcação que possam existir (SILVEIRA, 1995)).

A seguir são descritos alguns dos passos fundamentais das etapas do procedimento de solução de problemas estáticos não lineares. Porém, inicialmente, são feitas algumas observações a respeito da notação adotada:

- considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga t , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga $t + \Delta t$;
- k é o contador do número de iterações. A primeira fase, definida como solução incremental predita, ocorre em $k = 0$, e o ciclo iterativo para valores de $k \neq 0$;
- λ e \mathbf{U} definem o parâmetro de carga e deslocamentos nodais totais, respectivamente;
- $\Delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{U}$ são, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{U}$ correspondem, respectivamente, as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o procedimento iterativo.

2.4.1 Solução incremental predita

Considerando que todas as variáveis do problema estrutural sejam conhecidas na configuração t , monta-se, nesse ponto, a matriz de rigidez tangente, \mathbf{K} . O vetor de deslocamentos nodais $\delta\mathbf{U}_r$ pode então ser obtido através da equação:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r \quad (2.40)$$

O incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, é determinado automaticamente por meio de uma das diversas estratégias de incremento de carga e iteração que estão presentes no CS-ASA, e podem ser vistas em Silveira (1995), Rocha (2000), Silva (2009) e Pires (2012). Essa seleção pode estar condicionada a uma equação de restrição adicional imposta ao problema. Para este trabalho, será utilizada a técnica do deslocamento generalizado (YANG; KUO, 1994). Assim, $\Delta\lambda^0$ é calculado como:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{\left| \frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) ({}^1\delta\mathbf{U}_r)}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) (\delta\mathbf{U}_r)} \right|} = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{|GSP|} \quad (2.41)$$

em que o índice 1 indica os valores de $\Delta\lambda^0$ e $\delta\mathbf{U}_r$ obtidos no primeiro passo de carga e GSP (*Generalized Stiffness Parameter*) representa o parâmetro de rigidez generalizado do sistema. O sinal da equação anterior depende apenas dos vetores ${}^t\delta\mathbf{U}_r$ (passo de carga anterior) e $\delta\mathbf{U}_r$ (passo de carga corrente). Segundo Yang e Kuo (1994), o parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanecerá sempre positivo.

Com a determinação de $\Delta\lambda^0$, os deslocamentos nodais incrementais, $\Delta\mathbf{U}^0$, são obtidos escalonando-se $\delta\mathbf{U}_r$, ou seja:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (2.42)$$

Os parâmetros de carga e de deslocamentos nodais totais podem ser atualizados por meio das seguintes expressões:

$$({}^{t+\Delta t})\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (2.43)$$

$$({}^{t+\Delta t})\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (2.44)$$

em que ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{U}$ descrevem o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga.

Como as Equações 2.43 e 2.44 nem sempre determinam um ponto de equilíbrio do sistema estrutural, é necessário então ajustá-las para que tal condição seja atingida. Isso é feito por meio do ciclo de iterações descrito a seguir.

2.4.2 Ciclo de iterações

A maioria dos métodos de resolução de problemas estruturais não lineares é baseada no método de *Newton-Raphson* (CRISFIELD, 1991). O processo iterativo é repetido até que a condição imposta pela Equação 2.39 seja atingida pela seguinte expressão:

$$\mathbf{g} = \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, E_T) \quad (2.45)$$

sendo \mathbf{g} o vetor de forças residuais, que indica o desequilíbrio de forças do sistema estrutural. Quando esse vetor se anula pode-se afirmar que o equilíbrio foi atingido.

No esquema tradicional do método de *Newton-Raphson*, o parâmetro de carga λ é mantido constante ao longo de todo o processo iterativo. Dessa forma, a trajetória de equilíbrio pode ser obtida até que um ponto limite e/ou de bifurcação seja atingido. A liberdade de variação de λ possibilita que toda a trajetória de equilíbrio seja traçada, e assim, ao longo do processo iterativo, a seguinte condição deve ser respeitada (fórmula de *Newton-Raphson*) (BATOZ; DHATT, 1979):

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k\right), k \geq 1 \quad (2.46)$$

Sendo uma variável agora, o parâmetro de carga para a iteração corrente k é calculado como:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (2.47)$$

A correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$, é definida por meio de uma estratégia de iteração. Neste trabalho, foi utilizada a estratégia da norma mínima dos deslocamentos residuais proposta por Chan (1988), em que $\delta\lambda^k$ é definido por:

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (2.48)$$

sendo $\delta\mathbf{U}_g^k$ a correção obtida da aplicação do método de *Newton-Raphson*, resultante da aplicação das forças desequilibradas e $\delta\mathbf{U}_r^k$ o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de \mathbf{F}_r . Esses vetores são apresentados a seguir.

Substituindo as Equações 2.45 e 2.47 em 2.46, tem-se:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \left[(\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)} \right] = \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (2.49)$$

Observe então que o vetor de deslocamentos nodais iterativos, $\delta\mathbf{U}^k$, expresso na equação anterior, pode ser escrito como a soma de duas parcelas, ou seja:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.50)$$

em que:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = \left(\mathbf{K}^{(k-1)} \right)^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (2.51)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = \left(\mathbf{K}^{(k-1)} \right)^{-1} \mathbf{F}_r \quad (2.52)$$

O vetor de deslocamentos iterativos, $\delta\mathbf{U}_r^k$, será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais, $\delta\mathbf{U}_r$, definido na Equação 2.40, quando for utilizado o método de *Newton-Raphson* modificado, uma vez que a matriz de rigidez é mantida constante ao longo do processo iterativo.

As variáveis incrementais são atualizadas da seguinte forma após a obtenção das soluções iterativas:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (2.53)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.54)$$

e, por fim, as variáveis totais:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (2.55)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (2.56)$$

Para que o equilíbrio seja atingido é necessário que um critério de convergência seja satisfeito. Dessa forma, o usuário deve fornecer na entrada de dados uma tolerância aceitável, ϱ , para o processo iterativo ser interrompido. No CS-ASA há dois critérios de convergência. O primeiro deles baseado no equilíbrio das forças presentes no sistema, e é calculado como:

$$\varrho_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \varrho \quad (2.57)$$

sendo representado pela razão das normas Euclidianas do vetor de forças residuais e do vetor de incremento de carregamento externo.

O segundo critério de convergência tem como parâmetro de análise os deslocamentos, e é definido como:

$$\varrho_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \varrho \quad (2.58)$$

em que o numerador é tido pela norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos e o denominador pela norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, obtidos após a correção do processo iterativo.

A Tabela 2.2 descreve, sequencialmente, os procedimentos apresentados nesta seção para a solução do problema estático não linear.

Tabela 2.2 – Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear

1.	Ler os dados gerais da estrutura e do tipo de análise	
2.	Montar do vetor de cargas de referência, \mathbf{F}_r (direção da carga externa aplicada)	
3.	$t = 0$	
4.	$t_1 = t$	
5.	Considerar a condição inicial ${}^t\mathbf{U} = \mathbf{0}$ e ${}^t\lambda = 0$	
6.	para cada incremento de carga faça	▷ PROCESSO INCREMENTAL
7.	$t = t_1$	▷ Passo de carga anterior
8.	$t_1 = t + 1$	▷ Passo de carga corrente
9.	Montar a matriz de rigidez tangente \mathbf{K} (Equação 2.10)	
10.	Resolver: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$	
11.	se $t_1 = 1$ então	
12.	$\Delta\lambda^0 = (\Delta\lambda^0)_1$	
13.	senão	
14.	Definir: $\Delta\lambda^0$ (Equação 2.41)	
15.	fim se	
16.	Determinar: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r$	
17.	Atualizar as variáveis na configuração t_1 : ${}^{t_1}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda_0$ e ${}^{t_1}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$	
18.	para $k \leftarrow 1, nmax$ faça	▷ PROCESSO ITERATIVO
19.	Avaliar o vetor de forças internas: ${}^{t_1}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$	
20.	Calcular o vetor de forças residuais: $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{t_1}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{t_1}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$	
21.	se $\ \mathbf{g}^{(k-1)}\ \div \ \Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\ \leq \text{tolerância}$ então	
22.	Parar o processo iterativo e seguir para linha 32	
23.	fim se	
24.	se Newton-Raphson padrão então	
25.	Atualizar a matriz \mathbf{K}	
26.	fim se	
27.	Calcular a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$ (Equação 2.48)	
28.	Corrigir os deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$	
29.	Atualizar as variáveis incrementais e totais: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{k-1} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{k-1} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$ ${}^{t_1}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{t_1}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$	
30.	fim para	
31.	Atualizar as variáveis que forem necessárias	
32.	fim para	

2.5 Método da Compatibilidade de Deformações

Segundo o AISC LRFD (2016), o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) é uma abordagem baseada na teoria de Euler-Bernoulli para a avaliação de seções transversais compactas. Uma vez conhecida a forma deformada da seção, permite-se o uso de uma abordagem generalizada de compatibilidade que usa modelos constitutivos propostos por normas ou aceitos pela comunidade científica.

Supondo que todos os materiais presentes no elemento atuem conjuntamente (interação total), pode-se supor que o campo de deformações é contínuo, como ilustrado na Figura 2.4. Além disso, a seção permanece plana após a deformação, como ilustrado pelo plano azul nessa mesma figura.

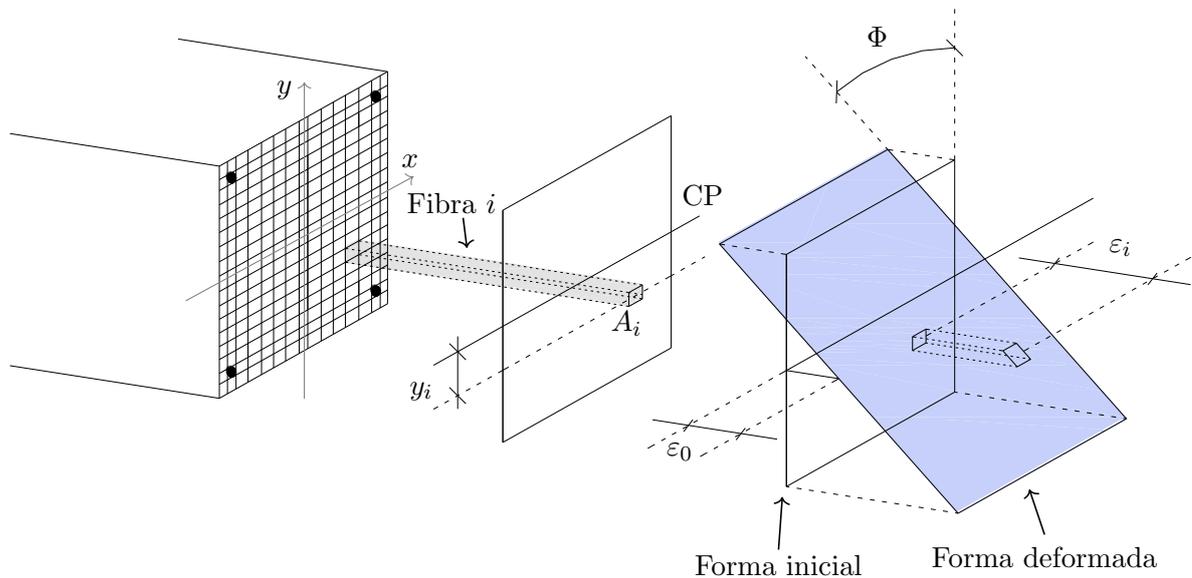


Figura 2.4 – Campo de deformações para um problema plano

Para fazer a análise da condição deformada da seção transversal e obter a sua capacidade resistente e rigidez, uma discretização da seção é feita. No estudo de estruturas planas, a discretização em fatias é bastante satisfatória (LEMES, 2015). Porém, no presente trabalho, as tensões residuais serão introduzidas explicitamente no perfil metálico. Assim, será feita a discretização em fibras, como ilustrado na Figura 2.5.

Utiliza-se então o conceito de sub-regiões. A seção transversal é dividida em regiões menores, sendo aplicado um gerador de malha estruturada. Embora na Figura 2.5 seja ilustrada apenas uma seção mista totalmente revestida, o gerador é aplicável a diversas tipologias de seções mistas, metálicas e de concreto armado (LEMES *et al.*, 2017c).

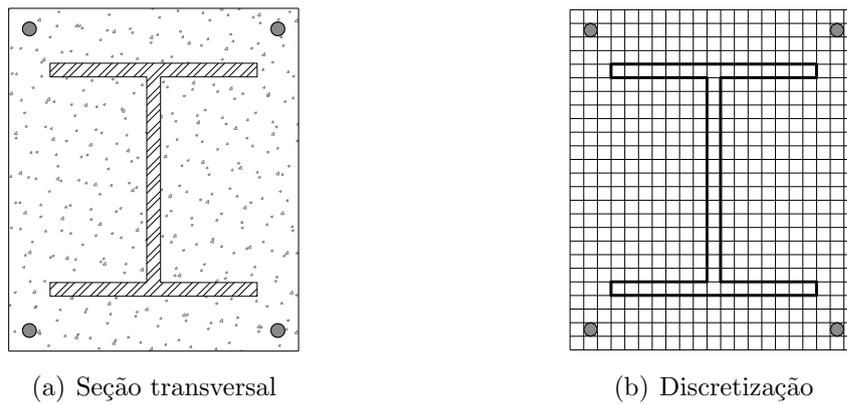


Figura 2.5 – Discretização da seção transversal em fibras

A discretização tem como parâmetro inicial o número de divisões nas duas direções, fornecidos como dados de entrada. Após a obtenção das sub-regiões, é feita uma busca visando encontrar trechos que apresentam áreas maiores. O objetivo principal dessa metodologia é gerar uma malha de fibras com tamanhos aproximadamente iguais em toda a seção transversal, e assim minimizar o erro para a obtenção da rigidez à flexão da seção.

2.5.1 Comportamento uniaxial do aço dos perfis

O comportamento do aço será descrito através do modelo constitutivo trilinear ilustrado na Figura 2.6. Deve-se ressaltar a possibilidade da consideração do encruamento do material. Uma característica do aço dos perfis é o seu comportamento à tração igual ao de compressão. Assim, na Figura 2.6 é mostrado apenas o trecho referente ao primeiro quadrante da relação constitutiva. O comportamento do aço é descrito da seguinte forma:

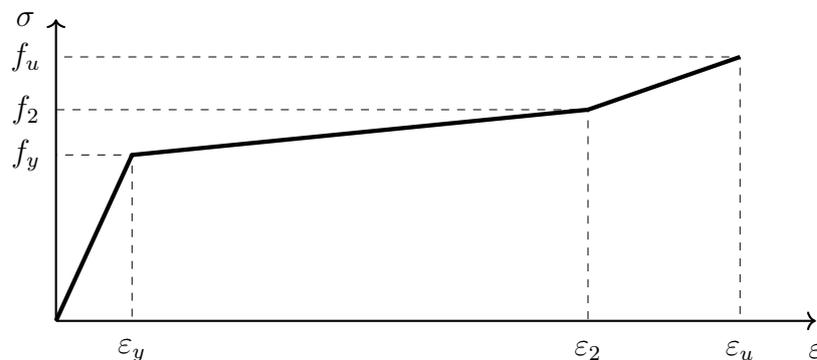


Figura 2.6 – Relação constitutiva do aço

$$\sigma = \begin{cases} -f_2 + E_{a3}(\varepsilon + \varepsilon_2), & \text{se } -\varepsilon_u \geq \varepsilon > -\varepsilon_2 \\ -f_y + E_{a2}(\varepsilon + \varepsilon_y), & \text{se } -\varepsilon_2 \geq \varepsilon \geq -\varepsilon_y \\ E_a \varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y + E_{a2}(\varepsilon - \varepsilon_y), & \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2 \\ f_2 + E_{a3}(\varepsilon - \varepsilon_2), & \text{se } \varepsilon_2 < \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (2.59)$$

em que f_y , f_2 , f_u , ε_y , ε_2 e ε_u , são respectivamente as tensões e as deformações que delimitam os trechos lineares da relação constitutiva; já os parâmetros E_a , E_{a2} e E_{a3} são os módulos de elasticidade. Vale ressaltar que ε_y é determinado pela relação entre f_y e E_a , e ε_2 é tomado igual a $10 \varepsilon_y$.

Vale lembrar que, após o processo de fabricação, o elemento de aço sofre um resfriamento desigual originando as tensões residuais. Assim, considera-se que ocorram deformações prescritas na seção.

O EC 3 (1992), com base na proposta da norma ECCS (1983), utiliza o modelo ilustrado na Figura 2.7(b). Nesse modelo, as tensões residuais são dispostas em todas as chapas do perfil por meio de uma distribuição bilinear. Além disso, os valores de σ_r dependem diretamente da relação entre a altura e a base da seção transversal, conforme:

$$\sigma_r = \begin{cases} 0.5f_y, & \text{se } h/b_f \leq 1.2 \\ 0.3f_y, & \text{se } h/b_f > 1.2 \end{cases} \quad (2.60)$$

em que h é a altura total da seção transversal e b_f é a largura das mesas.

Já o AISC LRFD (2010) descreve as tensões residuais de forma semelhante nas mesas, porém com valores máximos de tração e compressão diferentes (GALAMBOS; KETTER, 1959). Na alma, a distribuição é adotada constante. Esses valores máximos são dados a seguir:

$$\begin{cases} \sigma_{rc} = 0.3f_y \\ \sigma_{rt} = \sigma_{rc} \left[\frac{b_f t_f}{b_f t_f + t_w (h - 2t_f)} \right] \end{cases} \quad (2.61)$$

sendo t_f a espessura da mesa e t_w a espessura da alma.

No caso de seções tubulares retangulares, Figura 2.8(a), a distribuição de tensões residuais utilizada por Mathur (2011), que é baseada no modelo fornecido por Salmon *et al.* (2009), é adotada aqui. Os valores, de forma proporcional, das tensões são fornecidos

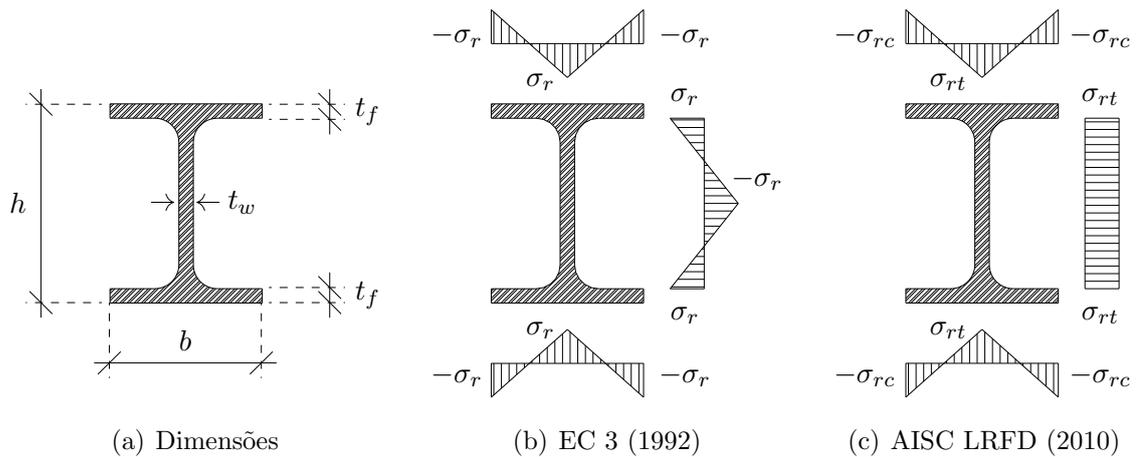


Figura 2.7 – Modelos normativos para a descrição das tensões residuais para perfis I

na Figura 2.8(b). O valor de σ_r pode ser calculado por meio de expressões, em função das dimensões da seção, ou por meio de valores fixos.

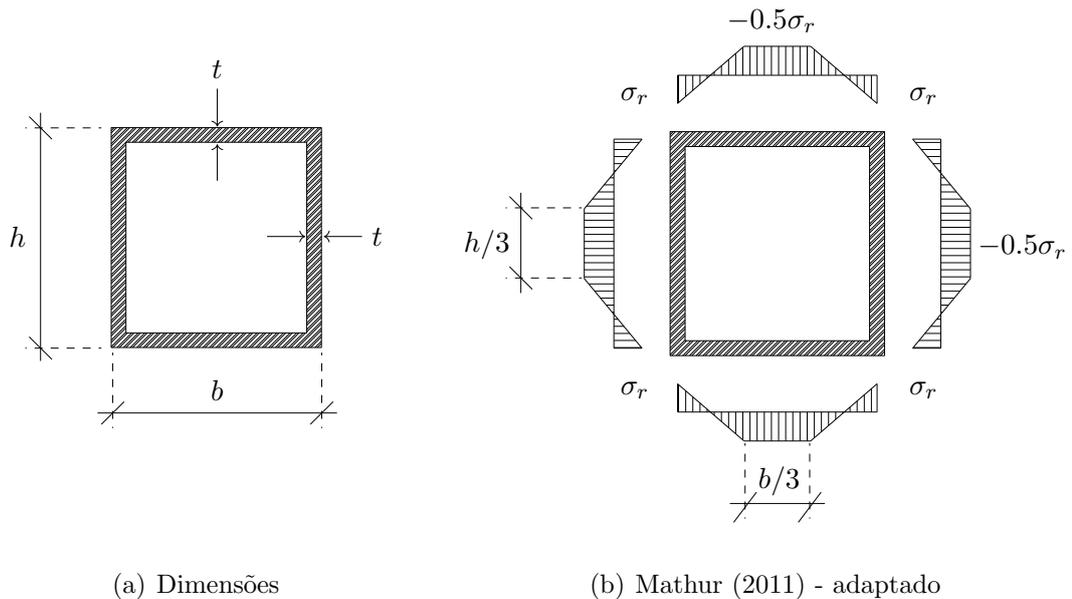


Figura 2.8 – Modelo de tensões residuais para o perfil retangular

2.5.2 Comportamento uniaxial do aço das armaduras

Além da possibilidade de modelagem do comportamento das armaduras longitudinais por meio da relação constitutiva trilinear ilustrada na Figura 2.6, outro modelo também foi implementado (Figura 2.9). Trata-se de dois modelos bilineares tanto na tração quanto na compressão, sendo que nesse último o efeito do encruamento é desprezado. Dessa forma,

escreve-se:

$$\sigma = \begin{cases} -f_{pyd}, & \text{se } -\varepsilon_{ud} \geq \varepsilon > -\varepsilon_{pyd} \\ E_s \varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_{pyd} < \varepsilon < \varepsilon_{pyd} \\ f_{pyd} + E_{s2} (\varepsilon - \varepsilon_{pyd}), & \text{se } \varepsilon_{pyd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{pud} \end{cases} \quad (2.62)$$

sendo f_{pyd} a máxima tensão de compressão resistente do aço das armaduras; E_s e E_{s2} são os módulos de elasticidade, na fase elástica e de encruamento respectivamente; o parâmetro ε_{pyd} refere-se a deformação limite do regime elástico, e ε_{ud} e ε_{pud} definem as deformações últimas do material quando sob compressão (limitada pelo comportamento do concreto) e tração, respectivamente.

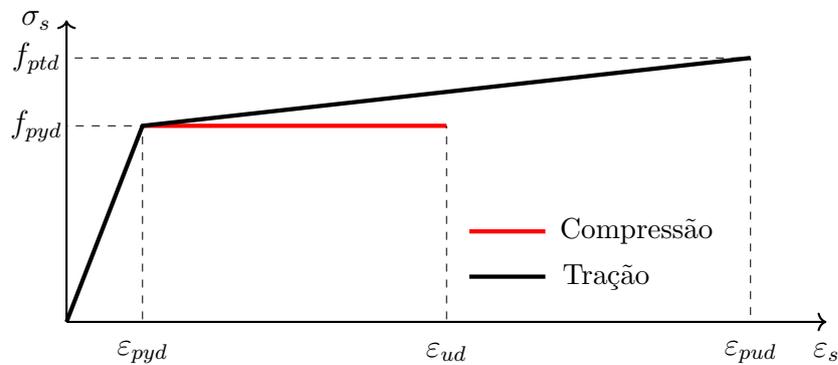


Figura 2.9 – Modelo constitutivo para o aço das armaduras

2.5.3 Comportamento uniaxial do concreto

O EC 2 (2004) define algumas relações constitutivas para o concreto. A primeira delas refere-se a análise não linear estrutural global e é mostrada na Figura 2.10, que é definida pela seguinte equação:

$$\sigma_c = f_c \left[\frac{o\eta - \eta^2}{1 + \eta(o - 2)} \right] \quad (2.63)$$

em que f_c é a máxima tensão de compressão do concreto, η é dado pela relação entre a deformação de compressão atuante e a deformação ε_{ci} ; e o parâmetro o é definido como:

$$o = 1.05 E_{cm} \frac{|\varepsilon_{ci}|}{f_c} \quad (2.64)$$

sendo E_{cm} o módulo de elasticidade secante do concreto referente a tensão $0.4f_c$.

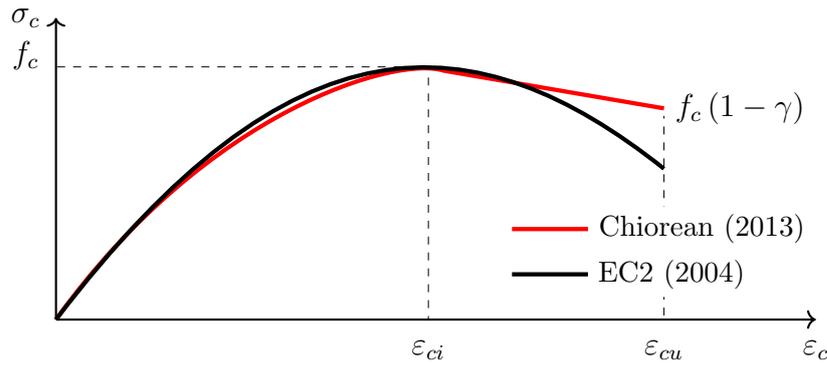


Figura 2.10 – Modelos constitutivos para o concreto sob compressão

Vale ressaltar que a norma europeia (EC 2, 2004) permite o uso de outras relações constitutivas desde que as mesmas representem adequadamente o comportamento do concreto utilizado.

Para a avaliação da capacidade resistente das seções transversais de concreto armado, três metodologias são propostas na norma europeia: o diagrama parábola-retângulo como o dado por Chiorean (2013) (Figura 2.10, fazendo $\gamma = 0$); de forma mais conservadora, o EC 2 (2004) também permite a utilização da relação constitutiva bilinear semelhante ao modelo elastoplástico perfeito do aço (desprezando a resistência à tração do concreto); por último, a análise pelo bloco de tensão equivalente também pode ser utilizada. No presente trabalho, não foram utilizadas tais considerações.

A relação constitutiva usada por Chiorean (2013) e adaptada da NBR 6118 (2014), ilustrada na Figura 2.10, também pode ser utilizada para descrever o comportamento do concreto à compressão. A norma brasileira considera o diagrama parábola-retângulo sem o efeito do amolecimento do concreto, após a deformação limite do trecho parabólico, ε_{ci} . Como opção para o usuário, tal efeito pode ser simulado através do parâmetro γ , ou seja:

$$\sigma_c = \begin{cases} f_c \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 \right], & \text{se } \varepsilon_{ci} < \varepsilon \leq 0 \\ f_c \left[1 - \gamma \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{ci}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{ci}} \right) \right], & \text{se } \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ci} \end{cases} \quad (2.65)$$

em que f_c e ε_{cu} são, respectivamente, os valores máximos de resistência e deformação do concreto sob compressão.

O concreto tem propriedades mecânicas distintas na tração e na compressão. Quando tracionado, esse material apresenta resistência máxima f_{cr} (Figura 2.11). Destaca-se, também, que ao atingir a resistência f_{cr} inicia-se o processo de fissuração. Para deformações

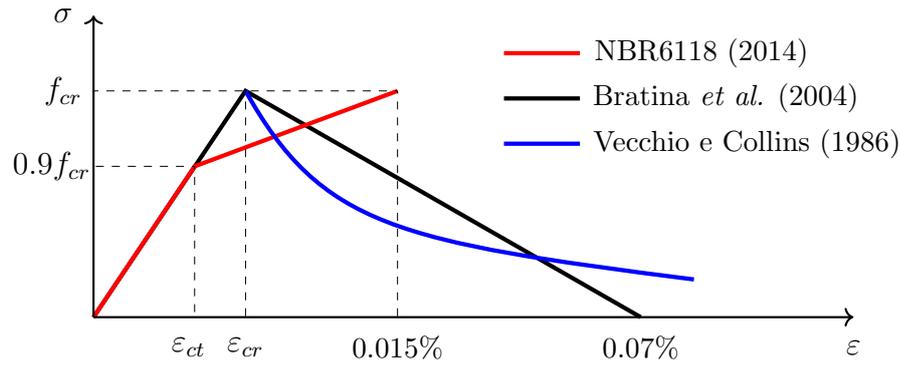


Figura 2.11 – Modelos constitutivos para o concreto sob tração

superiores a ε_{cr} o concreto perde resistência. Assim, diversos pesquisadores e até mesmo as normas de projeto desconsideram sua contribuição quando tracionado.

Um dos modelos implementados no presente trabalho foi o proposto por Bazant e Oh (1983), sendo a máxima deformação de tração limitada em 0.07% (BRATINA *et al.*, 2004), e ilustrado na Figura 2.11. Dessa forma, tem-se:

$$\sigma_t = \begin{cases} E_{tr}\varepsilon, & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} + E_{tr,2}(\varepsilon - \varepsilon_{cr}), & \text{se } \varepsilon_{cr} < \varepsilon < 0.07\% \end{cases} \quad (2.66)$$

sendo ε_{cr} a deformação de início de fissuração; f_{cr} é a resistência à fissuração do concreto; e E_{tr} e $E_{tr,2}$ são os módulos de elasticidade do concreto à tração antes e depois da fissuração, respectivamente.

A norma brasileira (NBR 6118, 2014) permite a consideração da resistência à tração do concreto através de uma relação bilinear ilustrada em vermelho na Figura 2.11. Note que, diferentemente do comportamento mostrado nas outras curvas não há um decaimento gradual da resistência à tração do concreto. Assim, o comportamento é descrito como:

$$\sigma = \begin{cases} E_{tr}\varepsilon, & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ct} \\ 0.9f_{cr} + E_{tr,2}(\varepsilon - \varepsilon_{ct}), & \text{se } \varepsilon_{ct} < \varepsilon \leq 0.015\% \end{cases} \quad (2.67)$$

em que $E_{tr,2}$ agora é positivo e pode ser facilmente determinado como o coeficiente angular do trecho linear entre ε_{ct} e 0.015%.

Por fim, outro modelo bastante abordado na literatura (STRAMANDINOLI; ROVERE, 2008; CHIOREAN, 2013) é o proposto por Vecchio e Collins (1986), que é destacado em azul na Figura 2.11. Nesse modelo, após o início do processo de fissuração, o concreto apresenta uma redução de resistência não linear que tende a uma assíntota hori-

zontal para valores grandes de deformação de tração. Para essa relação tensão-deformação, tem-se:

$$\sigma = \begin{cases} E_{tr}\varepsilon, & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{1 + \sqrt{500\varepsilon}}, & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (2.68)$$

em que ε_{cr} é a deformação de fissuração do concreto, f_{cr} é a resistência à fissuração do concreto, igual a $1.4(f_c/10)^{2/3}$, α_1 é o fator que considera a interação das barras longitudinais com o concreto, e α_2 é o fator que considera os efeitos de duração da carga e cargas cíclicas.

2.5.4 Relação momento-curvatura

Neste trabalho, optou-se por utilizar o método iterativo de *Newton-Raphson* para a obtenção da relação momento-curvatura. Para um valor fixo de esforço axial, N , são dados incrementos no momento fletor solicitante, M , até que o momento último resistente seja atingido. Foi então utilizada uma estratégia de incrementos mista, relacionando diretamente o momento como função da curvatura, tal como (ZUBYDAN, 2013):

$$M_{j+1} = M_j + \Phi EI \quad (2.69)$$

em que o índice j refere-se ao incremento anterior, Φ é um valor constante de incremento para curvatura e EI é a rigidez à flexão da seção transversal.

Para descrever de forma eficiente a distribuição de deformações bidimensional, a discretização da seção em fatias é bastante eficiente. Porém, a introdução explícita das tensões residuais (Figura 2.7) na seção metálica exige uma divisão em fibras como ilustrado na Figura 2.5. O propósito dessa divisão é captar a deformação axial, ε , no centroide plástico CP de cada fibra e então, através das relações constitutivas dos materiais, obter as respectivas tensões e os módulos de elasticidade tangentes em cada fibra. Duas variáveis são substanciais para empregar essa metodologia: a área das fibras e sua respectiva posição. Essa segunda é referenciada ao CP da seção, já que alguns pesquisadores (CALDAS, 2004; CHEN *et al.*, 2001; SFAKIANAKIS, 2002) apontaram que dessa forma, tanto para o método de *Newton-Raphson* quanto para os métodos *quasi-Newton*, os problemas de convergência são minimizados.

A posição do CP da seção é dada por (ROIK; BERGMANN, 1990):

$$x_{CP} = \frac{x_c A_c \alpha f_c + x_a A_a f_y + x_b A_b f_{pyd}}{A_c \alpha f_c + A_a f_y + A_b f_{pyd}} \quad (2.70)$$

$$y_{CP} = \frac{y_c A_c \alpha f_c + y_a A_a f_y + y_b A_b f_{pyd}}{A_c \alpha f_c + A_a f_y + A_b f_{pyd}} \quad (2.71)$$

com A_c , A_a e A_b sendo as áreas de concreto, do perfil metálico e da armadura longitudinal; α é um coeficiente que indica se o concreto está confinado ($\alpha = 1.0$) ou não ($\alpha = 0.85$); y_c , y_a e y_b são as coordenadas do centroide, das respectivas áreas, no eixo das ordenadas, em relação a um sistema de referência; e f_c , f_y e f_{pyd} são a resistência do concreto, as resistências de escoamento dos aços do perfil e das armaduras, respectivamente. Liu *et al.* (2012a) e Chen *et al.* (2001) utilizam as Equações 2.70 e 2.71, porém com α igual a 1 para qualquer situação.

A Figura 2.4 ilustra a distribuição de deformações na seção mista para uma combinação de esforços axial e de momento fletor. Observando a Figura 2.4, a deformação axial na i -ésima fibra, ε_i , é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \Phi y_i + \varepsilon_{ri} \quad (2.72)$$

em que y_i é a distância entre os centroides plásticos (CP) da fibra analisada e da seção transversal, ε_0 é a deformação axial no CP da seção e Φ a respectiva curvatura. Note que o termo ε_{ri} só é necessário quando a fibra for correspondente a um perfil metálico, de tal forma que essa variável retrata a deformação residual (Figura 2.7) na i -ésima fibra.

Para notação matricial adotada a seguir, as variáveis ε_0 e Φ serão posições do vetor de deformações $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \quad \Phi]^T$. Numericamente, pode-se dizer que o equilíbrio da seção é obtido quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0 \quad (2.73)$$

em que o vetor de forças externas \mathbf{f}_{ext} é dado pelo esforço axial, N , e de momento fletor, M , ou seja:

$$\mathbf{f}_{ext} = \left\{ \begin{array}{c} N \\ M \end{array} \right\} \quad (2.74)$$

Já o vetor de forças internas é dado por expressões integrais clássicas para o esforço axial, N_{int} , e momento fletor, M_{int} . Uma vez conhecidas as áreas, A_i , e posições, y_i , de cada fibra, a integral passa a ser o somatório descrito como:

$$\mathbf{f}_{int} = \left\{ \begin{array}{l} N_{int} = \int_A \sigma [\varepsilon (\varepsilon_0, \Phi)] dA \\ M_{int} = \int_A \sigma [\varepsilon (\varepsilon_0, \Phi)] y dA \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{l} N_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma [\varepsilon_i (\varepsilon_0, \Phi)] A_i \\ M_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma [\varepsilon_i (\varepsilon_0, \Phi)] y_i A_i \end{array} \right\} \quad (2.75)$$

na qual, n_{fib} é o número de fibras geradas pela discretização da seção.

Embora seja eficiente iniciar o processo com $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, a convergência só é atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. Faz-se então a expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem, ou seja:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} (\delta\mathbf{X}) \quad (2.76)$$

Partindo do suposto equilíbrio no ponto $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}$, ou seja, $\mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, e sabendo que $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k$, tem-se:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k) \quad (2.77)$$

Assim, pode-se isolar o termo \mathbf{X}^{k+1} na equação anterior e, conseqüentemente, determinar a configuração deformada da seção transversal na interação $k + 1$ conhecendo as informações da interação k , tal como segue:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (2.78)$$

Note que a função de equilíbrio $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, dada na Equação 2.73, é dependente dos termos \mathbf{f}_{ext} e \mathbf{f}_{int} sendo que apenas o segundo termo é função de \mathbf{X} , ou seja, a derivada de $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ em relação a \mathbf{X} é negativa. Pode-se ainda reescrever a Equação 2.78 como:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + [\mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (2.79)$$

na qual \mathbf{F}' é a matriz constitutiva da seção transversal ou matriz Jacobiana do problema não linear expresso na Equação 2.73, isto é:

$$\mathbf{F}' = \left(-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{12} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \Phi} \\ f_{21} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{22} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

O termo f_{11} pode ser determinado como segue:

$$f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) dA \right] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_A \sigma(\varepsilon_0 + \Phi y_i + \varepsilon_{ri}) dA \right] \quad (2.81)$$

em que torna-se necessário o uso da Regra da Cadeia para solução da equação anterior.

Ou seja:

$$f_{11} = \int_A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} \right) dA = \int_A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial (\varepsilon_0 + \Phi y_i + \varepsilon_{ri})}{\partial \varepsilon_0} \right) dA = \int_A \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} dA \quad (2.82)$$

A derivada da tensão, σ , em relação a deformação, ε , resulta no módulo de elasticidade tangente, E_T . Dessa forma, pode-se escrever:

$$f_{11} = \int_A E_T dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i \quad (2.83)$$

Analogamente ao desenvolvimento de f_{11} , os demais termos de \mathbf{F}' são dados por:

$$\begin{aligned} f_{12} &= \frac{\partial N_{int}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) dA \right] = \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) y dA \right] = \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{22} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_A \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \Phi)) y dA \right] = \int_A E_T y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{aligned} \quad (2.84)$$

O critério de convergência adotado neste trabalho foi proposto por Chiorean (2013) e é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F} , e do vetor de forças externas, \mathbf{f}_{ext} . Assim, escreve-se:

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}_{ext}\|} \leq Tol \quad (2.85)$$

com Tol sendo a tolerância, que é assumida aqui 10^{-5} .

2.5.5 Curvas de interação $N \times M$

Quando, para um dado esforço axial, é atingido o momento máximo da relação momento-curvatura, tem-se a plastificação total da seção. Define-se então, que esse par de esforços é um ponto da curva de interação $N \times M$. Nas análises globais com o uso das rigidezes generalizadas, abordadas a seguir, usa-se apenas essa curva, sem a necessidade de uma curva de início de plastificação.

As curvas de interação esforço normal-momento fletor são construídas antes do início da análise estrutural, pois a construção da relação momento-curvatura até o momento de plastificação em cada ponto nodal da estrutura durante o ciclo incremental-iterativo global demanda um esforço computacional elevado. Tal estratégia é adotada com o intuito de acelerar a execução das simulações numéricas.

Fora do ciclo incremental-iterativo, obtêm-se então as curvas de interação $N \times M$. Dessa forma, a construção da relação momento-curvatura é feita para cada incremento de momento fletor até que a matriz Jacobiana, dada na Equação 2.80, fique singular.

Em contrapartida, torna-se necessário simplificar a curva de interação. Assim, a curva é construída através de uma série de pares ordenados $N \times M$. Uma vez iniciada a análise estrutural é necessário saber o valor do momento de plastificação reduzido, M_{pr} , para um dado valor de esforço normal, N . Assim, qualquer ponto na curva de interação, mostrada na Figura 2.12 e construída seguindo o algoritmo descrito na Tabela 2.3, pode ser obtido por interpolação linear, tal como dado a seguir:

$$M_{pr} = \left(\frac{M_{j+1} - M_j}{N_{j+1} - N_j} \right) (N - N_j) + M_j \quad (2.86)$$

sendo j e $j + 1$ os pontos que apresentam esforço normal N_j e N_{j+1} imediatamente menor e maior, respectivamente, que o valor de N .

Dentro do MRPR, as análises que usam as rigidezes homogeneizadas partem do princípio de que todas as seções apresentam estados elástico, elastoplástico e plástico. Neste sentido, a definição de uma curva que limite o regime elástico é importante e é definida como curva de início de plastificação. Essa curva também é obtida da relação momento-curvatura. Quando a primeira fibra da seção apresentar deformação axial, ε , maior que a deformação de início de escoamento do aço (do perfil e/ou das barras longitudinais) e/ou a deformação de início de plastificação do concreto (FONG; CHAN, 2012), a fibra em questão inicia o processo de degradação e conseqüentemente a seção perde rigidez. Nesse

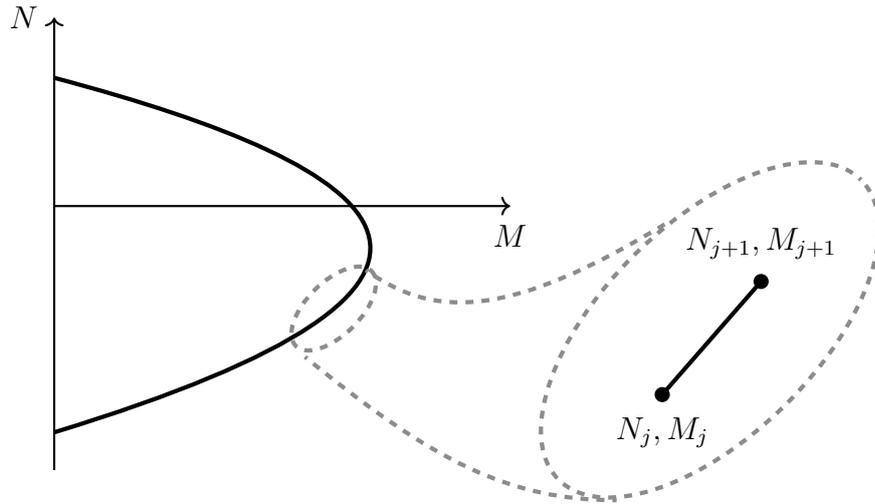


Figura 2.12 – Curva de interação $N \times M$

instante, a relação momento-curvatura passa a apresentar comportamento não linear. O momento fletor responsável por esse fato é tido como momento de início de plastificação.

2.5.6 Rigidezes generalizadas

A análise da seção transversal inicia-se com o centroide plástico (CP) fixo na posição dada através das Equações 2.70 e 2.71. Porém, a medida que as forças internas variam, a configuração deformada da seção passa a apresentar deformações axiais cada vez maiores e conseqüentemente o CP muda de posição. Dessa forma, avalia-se a posição do CP como:

$$y_{CP} = \frac{\int_A E_T y dA}{\int_A E_T dA} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i} \quad (2.87)$$

A rigidez à flexão tangente, ou seja, utilizando valores do módulo de elasticidade tangente às relações constitutivas, deve ser calculada em relação à posição atualizada do CP, y_{CP} . Assim, a rigidez EI_T é dada por:

$$EI_T = \int_A (y - y_{CP})^2 E_T dA = \int_A y^2 E_T dA - \int_A 2(y)(y_{CP}) E_T dA + \int_A y_{CP}^2 E_T dA \quad (2.88)$$

Sendo o sistema discretizado em fibras, as integrais da equação anterior se tornam somatórios, ou seja:

$$EI_T = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i - 2 \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_{CP} A_i + \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_{CP}^2 A_i \quad (2.89)$$

Tabela 2.3 – Estratégia numérica para a construção da curva de interação

1.	Ler os dados da seção transversal e dos materiais
2.	Discretizar a seção transversal
3.	Obter o centroide plástico CP (Equações 2.70 e 2.71)
4.	Transladar o sistema de referência para o CP
5.	Determinar os máximos esforços axiais (tração $N_{t,max}$ e compressão $N_{c,max}$)
6.	Calcular o incremento de esforço normal $\Delta N = (N_{t,max} - N_{c,max})/100$
7.	Primeiro valor de esforço normal $N = N_{c,max}$
8.	para cada incremento de esforço normal, N , faça
9.	Inicializar: $\mathbf{X} = \mathbf{0}$
10.	para cada incremento de momento fletor, M , (Equação 2.69) faça
11.	Montar \mathbf{f}_{ext}
12.	para $k \leftarrow 1, n_{max}$ faça
13.	Determinar ε (Equação 2.72)
14.	Montar \mathbf{f}_{int} (Equação 2.75)
15.	Calcular $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ (Equação 2.73)
16.	se $\ \mathbf{F}\ \div \ \mathbf{f}_{ext}\ \leq Tol$ então
17.	Parar o processo iterativo e seguir para linha 26
18.	fim se
19.	Montar a matriz de rigidez tangente da seção \mathbf{F}' (Equação 2.80)
20.	Verificar a singularidade de \mathbf{F}'
21.	se \mathbf{F}' é singular então
22.	Momento último resistente encontrado
23.	Armazenar M e N como um ponto da curva de interação
24.	Parar processo e seguir para linha 29
25.	fim se
26.	Corrigir o vetor de deformações \mathbf{X} (Equação 2.79)
27.	fim para
28.	fim para
29.	$N = N + \Delta N$
30.	fim para

Substituindo o valor de y_p , dado pela Equação 2.87, na Expressão 2.89, chega-se em:

$$EI_T = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i - 2 \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \frac{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i} + \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i} \right)^2 \quad (2.90)$$

que pode ser reduzida à:

$$EI_T = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i - \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \frac{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i} \quad (2.91)$$

Correlacionando as Equações 2.83 e 2.84 com 2.91, nota-se que EI_T pode ser descrito em função da matriz constitutiva da seção transversal. Assim, tem-se:

$$EI_T = f_{22} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{11}} \quad (2.92)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento anteriormente apresentado para a obtenção da rigidez a flexão, obtém-se para a rigidez axial, EA_T (CHIOREAN, 2013):

$$EA_T = f_{11} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{22}} \quad (2.93)$$

Graficamente, a resposta encontrada no presente trabalho refere-se à rigidez tangente à relação momento-curvatura ($M \times \Phi$), descrita na seção 2.5.4. Ou seja, dado um par de esforços externos N e M , ao se atingir a configuração deformada da seção responsável pelos esforços internos que equilibrem o sistema, monta-se a matriz constitutiva e calcula-se as rigidezes generalizadas. Tal procedimento é ilustrado na Figura 2.13.

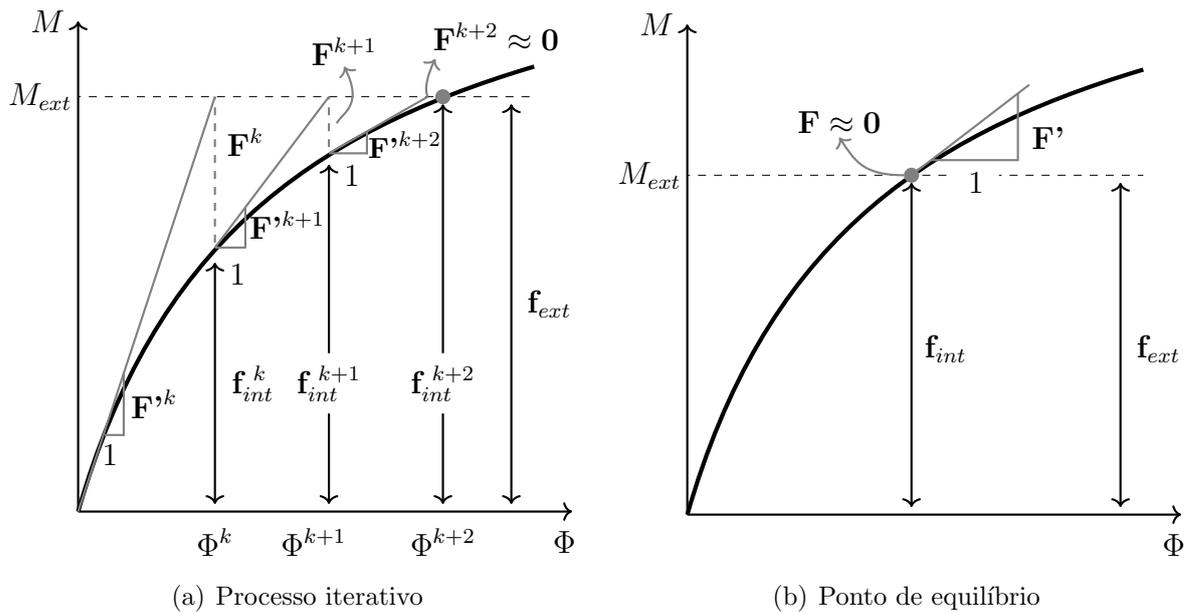


Figura 2.13 – Construção da relação $M \times \Phi$ para o cálculo das rigidezes generalizadas

CAPÍTULO 3

Ligações Semirrígidas em Estruturas de Aço e Mistas

3.1 Considerações Iniciais

Até o presente capítulo, as ligações entre vigas e pilares foram consideradas perfeitamente rígidas. As estruturas de aço e de concreto pré moldado são montadas no local da edificação, ou seja, os elementos estruturais devem ser conectados por meio de ligações para que juntos exerçam a função a eles destinada na etapa de projeto. Essas ligações são feitas por meio de parafusos ou solda nas estruturas de aço ou por chumbadores e almofadas, por exemplo, nas estruturas de concreto protendido. Por consequência, os elementos de ligação também apresentam rigidez e capacidade resistente, que devem ser estudados a fim de se aferir, com precisão, a capacidade de carga da estrutura como um todo. Essa discussão se estende às estruturas mistas, já que na maioria dos casos, a união dos elementos é feita de forma semelhante às estruturas de aço apenas, considerando também a contribuição do concreto e sua respectiva armadura no comportamento da ligação.

O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento das ligações em estruturas de aço e mistas de aço e concreto. Para isso, modelos de simulação do comportamento não linear das ligações serão acoplados à formulação desenvolvida no Capítulo 2. Para a simulação do comportamento das ligações, molas rotacionais fictícias de comprimento nulo serão inseridas nas extremidades dos elementos finitos, sendo suas propriedades definidas pelas curvas momento-rotação.

3.2 Fundamentação Teórica

O tipo de ligação adotado para junção de elementos estruturais implica diretamente na capacidade de carga de um sistema estrutural. O estudo do comportamento de ligações semirrígidas não é algo novo, porém é um campo que ainda pode ser muito explorado (SILVA, 2009).

Em caráter numérico, as ligações são elementos estruturais pontuais, introduzidas na formulação através de seu comportamento, via curva momento-rotação $M \times \phi_c$, em pontos nodais específicos. Silva (2009) destaca que devido ao comportamento altamente não linear das ligações semirrígidas, é bastante complicado representá-lo matematicamente usando aproximações simples e adequadas. Existem vários modelos analíticos para essa finalidade. Muitos deles, embora possam reproduzir perfeitamente o comportamento da ligação, são bastante complexos e só adequados para certas tipologias. Segundo Rocha (2006), alguns dos modelos de destaque para a caracterização desse comportamento são: o modelo linear, o exponencial (LUI; CHEN, 1986), o exponencial modificado (KISHI; CHEN, 1986) e o multilinear. Os modelos exponenciais exigem um número elevado de parâmetros, que por sua vez, foram todos calibrados para ligações específicas de estruturas de aço. Assim, o modelo multilinear se torna uma solução viável, pois pontos da curva $M \times \phi_c$ são retirados diretamente de ensaios experimentais e não fica preso ao comportamento singular de algumas ligações.

Quando se fala de ligações semirrígidas em estruturas de aço tem-se uma maior precisão na simulação numérica dessas estruturas. Isso se deve à grande quantidade de estudos realizados nesse contexto (LUI; CHEN, 1986; CHEN; LUI, 1991; CHEN *et al.*, 1996; CHAN; CHUI, 2000; ROCHA, 2006; SILVA, 2009; ALVARENGA, 2010). Alguns desses trabalhos, em especial o livro de Chan e Chui (2000), faz uso de molas rotacionais fictícias de comprimento nulo na extremidade de um elemento finito. Essas molas são responsáveis pela introdução da curva $M \times \phi_c$ na formulação numérica. Chen *et al.* (1996) destacaram que para a grande maioria das estruturas de aço, os efeitos das forças axial e cortante na deformação da ligação são pequenos se comparados com os causados pelo momento fletor. O que faz com que essas molas fictícias representem bem o comportamento da ligação. Mesmo assim, existem trabalhos que consideram explicitamente a excentricidade da ligação, como por exemplo, o estudo de Sekulovic e Salatic (2001).

Vale ressaltar que no contexto das estruturas mistas de aço e concreto, a maioria

dos trabalhos focam na análise experimental de tipologias estruturais específicas. Esses estudos visam fundamentalmente a obtenção de curvas momento-rotação para as ligações ensaiadas (WANG *et al.*, 2009; DABAON *et al.*, 2009; FU *et al.*, 2010). No âmbito numérico, alguns trabalhos utilizaram *softwares* comerciais para a obtenção da curva $M \times \phi_c$ (FU *et al.*, 2007; VEGA; XIAO, 2014; TINEO, 2016).

O desenvolvimento de formulações numéricas para a simulação do comportamento de estruturas mistas com ligações semirrígidas segue, basicamente, as mesmas abordagens utilizadas nas estruturas de aço. Shi *et al.* (1996), Fang *et al.* (1999) e Landesmann (2011) fizeram simularam pórticos mistos considerando o efeito das ligações semirrígidas por meio de molas rotacionais fictícias, de comprimento nulo, colocadas nas extremidades dos elementos finitos, tal como feito em estruturas metálicas (CHAN; CHUI, 2000; ROCHA, 2006; SILVA, 2009).

Em uma linha um pouco diferente, Bayo *et al.* (2012) propuseram um elemento finito cruciforme para simular as ligações entre elementos mistos. Segundo esses autores, esse elemento finito consegue avaliar de forma mais precisa o comportamento das ligações em relação aos elementos de molas rotacionais amplamente utilizados na literatura. Tal afirmação provém da quantidade de graus de liberdade presente no elemento cruciforme, sendo esses capazes de levar em consideração a influência de forças axiais, cisalhantes, momentos fletores, e ainda eventuais excentricidades na ligação.

3.3 Comportamento das Ligações

Para a análise de estruturas com ligações semirrígidas, o primeiro procedimento a ser realizado é a modelagem do comportamento da ligação. A descrição desse comportamento é comumente feita através de curvas momento-rotação $M \times \phi_c$, que são obtidas por ensaios experimentais, através de simulação numérica em elementos finitos (CAMPOS JÚNIOR, 1990; CHEN; TOMA, 1994; RIBEIRO, 1998) ou por modelos teóricos. Esses últimos são desenvolvidos aplicando-se técnicas de ajuste de curva aos resultados obtidos de forma numérica e/ou experimental (SILVA, 2009).

Ao utilizar a curva $M \times \phi_c$ tem-se melhor descrição do comportamento real da estrutura já que, assim como os efeitos da não linearidade geométrica e a inelasticidade, as ligações também podem apresentar comportamento não linear. Elas podem ser escritas, de uma

forma geral, como:

$$M = f(\phi_c) \quad (3.1)$$

$$\phi_c = g(M) \quad (3.2)$$

em que M representa o momento que atua na ligação e ϕ_c é a sua rotação relativa ou capacidade de rotação.

A rigidez da ligação, S_c , é matematicamente expressa pela tangente a curva $M \times \phi_c$, ou seja:

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \quad (3.3)$$

A viga tende a acompanhar a rotação de extremidade de forma proporcional ao momento que ali atua, no regime elástico, passando ao regime não linear com a plasticidade. Já a ligação tem o seu comportamento não linear dada pela relação $M \times \phi_c$, porém é necessário considerar que tais rotações (da ligação e da viga) se somam na avaliação do comportamento estrutural, daí a necessidade de um parâmetro comum, μ (ALVARENGA, 2010). Esse parâmetro é conhecido como *fixity factor* e é definido por Cunningham (1990) como:

$$\mu = \frac{1}{1 + (3EI) / (S_c L)} \quad (3.4)$$

sendo EI e L a rigidez à flexão e o comprimento da viga, respectivamente.

A seguir, são apresentados alguns modelos para a descrição do comportamento das ligações implementados no CS-ASA.

3.3.1 Modelo linear

Nesse modelo é necessário apenas o parâmetro S_c , que representa a rigidez da mola fictícia. Uma vez que o comportamento é linear, a função que descreve a relação momento-rotação é dada por:

$$M = S_{c,ini}\phi_c \quad (3.5)$$

sendo $S_{c,ini}$ o valor da rigidez inicial da ligação, que pode ser expresso em função da rigidez à flexão da viga, e de um coeficiente de rigidez proposto para indicar o grau da flexibilidade

da ligação, μ (Equação 3.4). Esse fator de rigidez varia de 0, para ligações idealmente rotuladas, a 1, para ligações perfeitamente rígidas (SILVA, 2009). Rearranjando a Equação 3.4 define-se a rigidez inicial como:

$$S_{c,ini} = \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{3EI}{L} \quad (3.6)$$

Usando o modelo linear, considera-se que a rigidez da ligação, S_c , permanece constante ao longo da análise e tem valor igual à $S_{c,ini}$. Silva (2009) destaca que esse é o modelo de ligação mais simples e que é amplamente utilizado nos estágios iniciais de desenvolvimento de métodos de análise para ligações semirrígidas. No entanto, não é muito preciso em casos de grandes deslocamentos. Sua utilização é mais apropriada nas análises linear, de vibração e de bifurcação, onde os deslocamentos são pequenos (CHAN; CHUI, 2000). Para corrigir os problemas gerados por esse modelo em análises não lineares, faz-se necessário o uso de um modelo que descreva o comportamento da ligação de forma mais precisa, levando em conta sua não linearidade.

3.3.2 Modelo exponencial

Quando se trata da análise de estruturas de aço considerando as ligações semirrígidas, um modelo não linear bastante difundido na literatura é o modelo exponencial (LUI; CHEN, 1986; LUI; CHEN, 1988; ROCHA, 2006; SILVA, 2009), sendo a curva $M \times \phi_c$ dada por:

$$M = M_0 + \sum_{m=1}^n C_m \left[1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2m\alpha}\right) \right] + R_{kf} |\phi_c| \quad (3.7)$$

em que M é o valor do momento na ligação, ϕ_c é a sua rotação, M_0 é o momento inicial, R_{kf} é a rigidez devido ao encruamento da ligação, α é um fator de escala, n é o número de termos considerados no ajuste e C_m , para $m = 1, 2, \dots, n$, são coeficientes de ajustamento da curva.

Na Figura 3.1 a seguir estão os detalhes construtivos de quatro ligações viga-pilar entre elementos de aço: ligação com cantoneira de alma simples (*A*), com cantoneira de topo e assento (*B*), com chapa de topo (*C*) e ligação com chapa de topo estendida (*D*). Os valores dos parâmetros do modelo exponencial para essas ligações detalhadas, baseados em ensaios experimentais (CHEN; LUI, 1991), são indicados na Tabela 3.1.

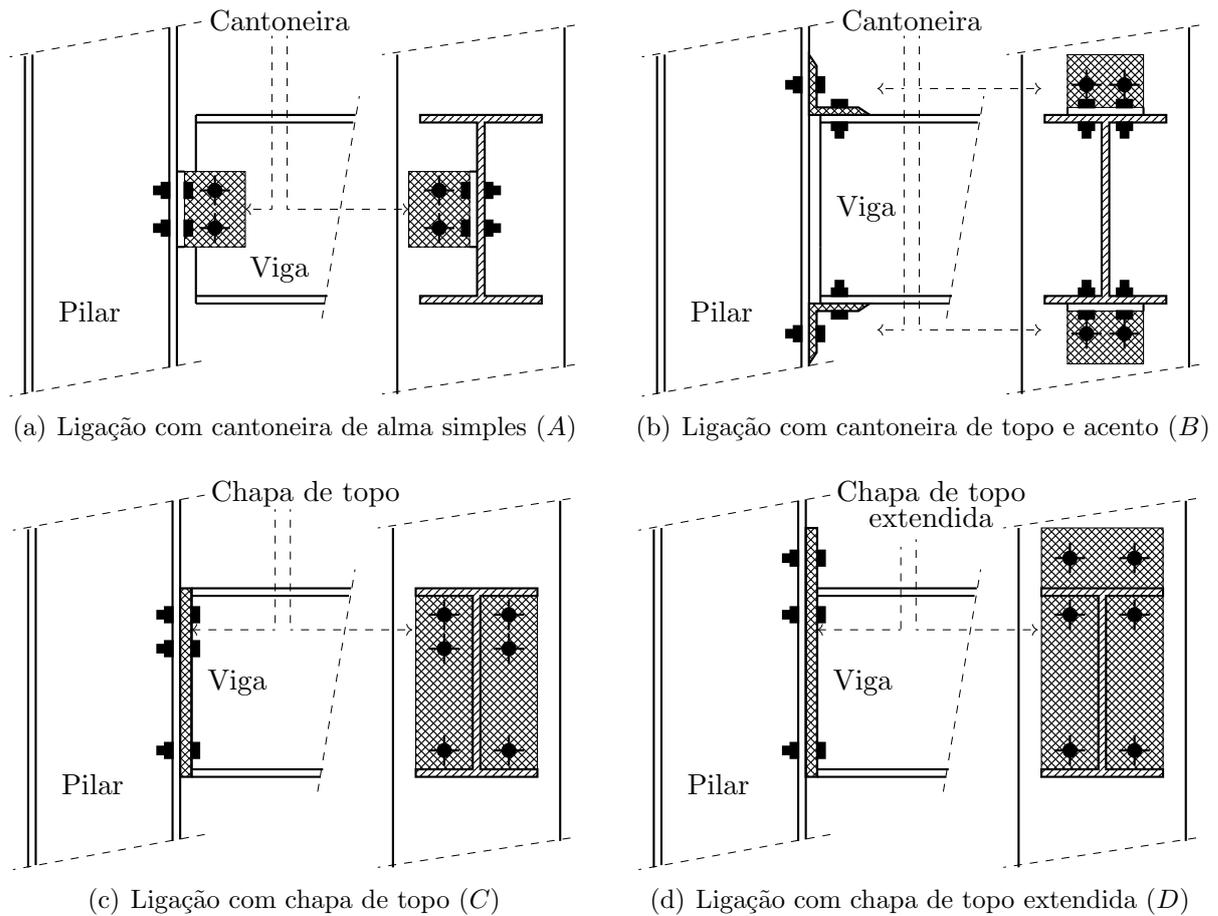


Figura 3.1 – Detalhes construtivos de ligações viga-pilar para estruturas de aço

Tabela 3.1 – Parâmetros do modelo exponencial (LUI; CHEN, 1988) (Em kN, m, rad)

Parâmetro	Tipo de ligação			
	A	B	C	D
Testado por	Richard <i>et al.</i> (1982)	Azizinamini <i>et al.</i> (1985)	Ostrander (1970)	Johnson e Walpole (1981)
M_0	0	0	0	0
R_{kf}	5.322	48.774	108.925	46.542
α	0.00051167	0.00031425	0.00031783	0.00067083
C_1	-4.892	-38.997	-28.287	-76.631
C_2	137.140	591.419	573.189	306.008
C_3	-661.841	-3023.700	-3433.984	-2414.494
C_4	1465.397	6996.021	8511.301	8876.428
C_5	-1510.926	-7356.895	-9362.567	-11269.108
C_6	590.000	2881.791	3832.899	4863.093
$S_{c,ini}$	5440.592	10758.303	12340.198	34799.330

A rigidez tangente é dada pela derivada da Equação 3.7, ou seja:

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{2m\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2m\alpha}\right) + R_{kf} \quad (3.8)$$

Geralmente, o modelo exponencial proposto por Lui e Chen (1986) e Lui e Chen (1988) fornece uma boa representação do comportamento não linear da ligação (CHAN; CHUI, 2000), apesar da necessidade de um grande número de parâmetros de ajuste da curva. Contudo, se houver uma modificação abrupta na declividade da curva $M \times \phi_c$, esse modelo não pode representá-lo corretamente. Para contornar esse problema, Kishi e Chen (1986) o modificaram para que pudesse representar variações acentuadas na curva. Eles desenvolveram o modelo exponencial modificado descrito a seguir.

3.3.3 Modelo exponencial modificado

Nesse modelo, a Equação 3.7 é modificada, e passa a ser descrita como:

$$M = M_0 + \sum_{m=1}^n C_m \left[1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2m\alpha}\right) \right] + \sum_{k=1}^n D_k (|\phi_c| - |\phi_k|) H[|\phi_c| - |\phi_k|] \quad (3.9)$$

sendo sua derivada, a rigidez tangente, dada por:

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{2m\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2m\alpha}\right) + \sum_{k=1}^n D_k H[|\phi_c| - |\phi_k|] \quad (3.10)$$

em que D_k é um coeficiente de ajustamento para o trecho linear da curva, ϕ_k a rotação inicial de uma componente linear, e $H[\phi_c]$ é a função de *Heaviside*, definida como sendo:

$$\begin{cases} H[\phi_c] = 1, & \text{se } \phi_c \geq 0 \\ H[\phi_c] = 0, & \text{se } \phi_c < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

3.3.4 Modelo multilinear

Os modelos anteriormente descritos nem sempre são capazes de descrever precisamente o comportamento de alguns tipos de ligação, além disso, são exclusivos para ligações entre elementos estruturais puramente de aço. Uma alternativa para contornar esse problema está no fornecimento explícito de pontos da curva momento-rotação e a rigidez da mesma é obtida por meio de interpolação linear. Para isso, deve ser fornecido um número m de pares ordenados (ϕ_c, M) , como mostra a Figura 3.2, que seja capaz de retratar fielmente o comportamento real da ligação.

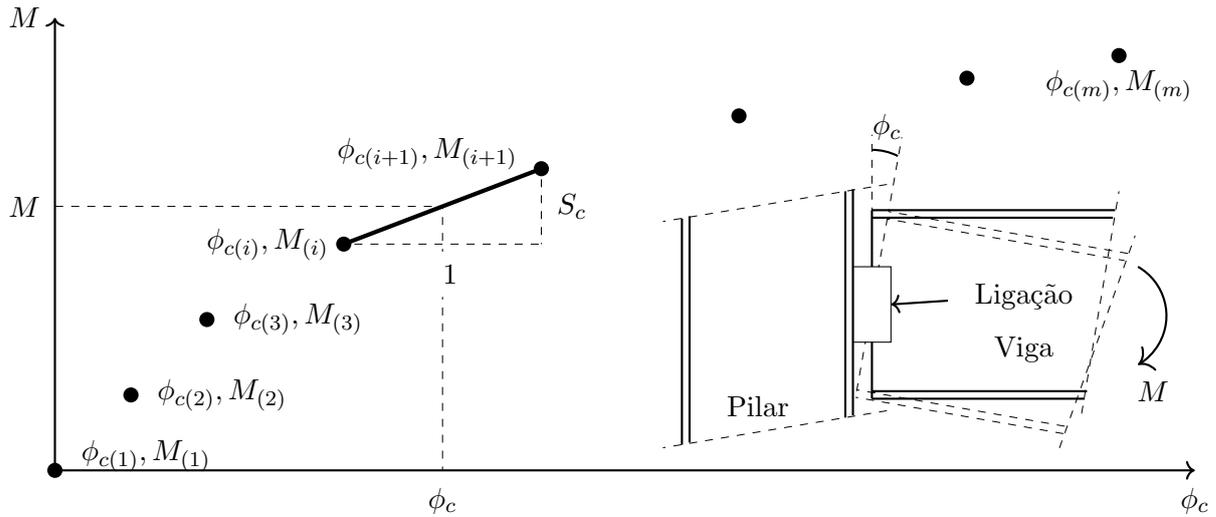


Figura 3.2 – Modelo multilinear

Nesse caso, a rigidez da ligação é dada por:

$$S_c = \frac{\Delta M}{\Delta \phi_c} = \frac{M_{(i+1)} - M_{(i)}}{\phi_{c(i+1)} - \phi_{c(i)}} \quad (3.12)$$

em que M_i e M_{i+1} são os limites inferior e superior do intervalo no qual o momento M , que atua na ligação, se encontra. Esse intervalo é estabelecido em função do nível de carregamento aplicado.

3.4 Elemento Finito com Ligações Semirrígidas

O comportamento não linear de uma ligação será simulado através do parâmetro S_c . Esse parâmetro representa a rigidez rotacional das molas fictícias inseridas nas extremidades do elemento finito, como mostrado na Figura 3.3. Por se tratar de um elemento finito composto (elemento de viga-pilar junto a elementos de mola), a matriz de rigidez deve ser modificada para que incorpore o efeito da semirrígidez da ligação. A abordagem aqui utilizada parte de uma formulação matemática muito semelhante a utilizada por Lemes (2015) para a simulação da plasticidade de forma concentrada. Vale destacar que na simulação do referido autor, ambos os nós, i e j , estavam sujeitos a variação de sua rigidez em qualquer discretização utilizada. Aqui, não necessariamente os dois nós do elemento finito representarão ligações semirrígidas, pois o nó i pode representar a ligação viga/pilar e o nó j a ligação rígida de dois elementos de viga. Dessa forma, deve-se ter um cuidado adicional na entrada de dados do programa para que os verdadeiros nós semirrígidos sejam

corretamente identificados.

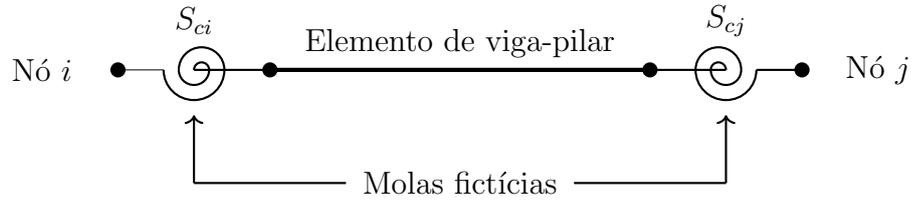


Figura 3.3 – Elemento finito composto para simulação das ligações semirrígidas

Como já relatado, segundo Chen *et al.* (1996), para a grande maioria das estruturas de aço, os efeitos das forças axial e cisalhante na deformação da ligação são pequenos se comparados àqueles causados pelo momento fletor. Tal informação também pode ser aplicada às estruturas mistas, já que as ligações são feitas por elementos de aço, porém deve-se levar em conta a contribuição do concreto e das armaduras na rigidez rotacional. Em se tratando de análises bidimensionais, a torção também é desprezada, ou seja, as ligações semirrígidas serão simuladas considerando apenas a rotação no eixo de flexão.

Segundo Chan e Chui (2000), a rotação relativa da ligação, ϕ_c , é definida entre os ângulos de rotação do lado conectado ao nó global do elemento, θ_c , e daquele conectado ao elemento de viga-pilar, θ_b (Figura 3.4). Assim, no elemento finito composto as rotações nas ligações das extremidades i e j podem ser escritas, na forma incremental, como:

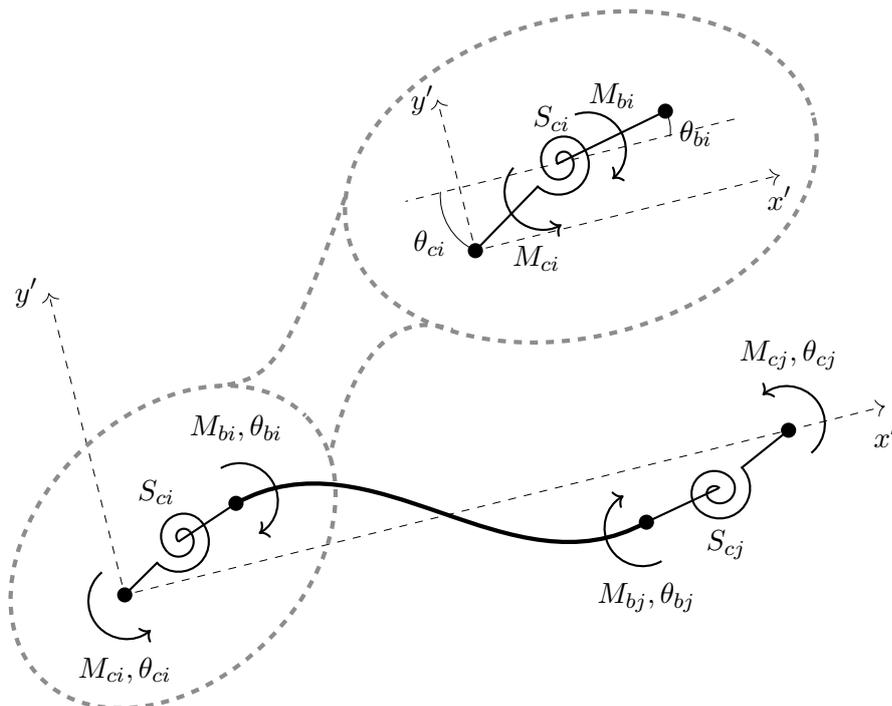


Figura 3.4 – Elemento finito deformado com molas fictícias

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{ci} &= \Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\phi_{cj} &= \Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj}\end{aligned}\tag{3.13}$$

em que $\Delta\phi_{ci}$ e $\Delta\phi_{cj}$ descrevem as rotações relativas incrementais referentes à flexibilidade das ligações.

Partindo da Equação 3.3 e isolando a parcela da variação do momento fletor M em cada um dos nós, chega-se em:

$$\begin{aligned}\Delta M_{ci} &= S_{ci}\Delta\phi_{ci} \\ \Delta M_{cj} &= S_{cj}\Delta\phi_{cj}\end{aligned}\tag{3.14}$$

na qual ΔM_{ci} e ΔM_{cj} são, respectivamente, os momentos fletores atuantes nos elementos de mola das extremidades i e j .

Sendo o sistema equilibrado em relação aos momentos atuantes nos elementos de ligação das extremidades, i e j , define-se:

$$\begin{aligned}\Delta M_{ci} + \Delta M_{bi} &= 0 \\ \Delta M_{cj} + \Delta M_{bj} &= 0\end{aligned}\tag{3.15}$$

Associando as Equações 3.14 e 3.15, escreve-se:

$$\begin{aligned}\Delta M_{ci} &= S_{ci}(\Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi}) \\ \Delta M_{bi} &= -\Delta M_{ci} = S_{ci}(\Delta\theta_{bi} - \Delta\theta_{ci}) \\ \Delta M_{cj} &= S_{cj}(\Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj}) \\ \Delta M_{bj} &= -\Delta M_{cj} = S_{cj}(\Delta\theta_{bj} - \Delta\theta_{cj})\end{aligned}\tag{3.16}$$

sendo ΔM_{bi} e ΔM_{bj} os momentos atuantes no elemento de viga-pilar (Figura 3.4).

Reescrevendo as Equações 3.16 na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{bi} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{cj} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{3.17}$$

nas quais as matrizes representam as matrizes de rigidez dos elementos de ligação das extremidades i e j .

Como definido no Capítulo 2, a relação força-deslocamento para elementos de viga-pilar (Equação 2.22), considerando exclusivamente os graus de liberdade das rotações em i e j , é definida por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde os termos de rigidez à flexão da matriz, $k_{m,n}$, são os coeficientes correspondentes à linha m e coluna n da matriz de rigidez do elemento de viga-pilar convencional, no qual as ligações são consideradas perfeitamente rígidas. Esses termos consideram os efeitos das não linearidades física e geométrica por meio da formulação apresentada no Capítulo 2 (YANG; KUO, 1994; LEMES *et al.*, 2017c).

Combinando as Expressões 3.17 e 3.18, chega-se em:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + k_{22} & k_{23} & 0 \\ 0 & k_{32} & S_{cj} + k_{33} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Assumindo que as cargas são aplicadas exclusivamente nos pontos nodais globais do elemento, ou seja, $\Delta M_{bi} = 0$ e $\Delta M_{bj} = 0$, o rearranjo matricial das linhas 2 e 3 leva a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} S_{ci} + k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & S_{cj} + k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

e, para as linhas 1 e 4 da Equação 3.19, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Isolando o vetor $[\Delta \theta_{bi} \quad \Delta \theta_{bj}]^T$ na Equação 3.20 e substituindo na Equação 3.21, chega-se em:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} + \left(-\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + k_{33} & -k_{23} \\ -k_{32} & S_{ci} + k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

na qual $\beta = (S_{ci} + k_{22})(S_{cj} + k_{33}) - k_{32}k_{23}$. Com o desenvolvimento da expressão anterior chega-se em:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} - \frac{S_{ci}^2(S_{cj} + k_{33})}{\beta} & \frac{S_{ci}k_{23}S_{cj}}{\beta} \\ \frac{S_{cj}k_{32}S_{ci}}{\beta} & S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + k_{22})}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

A expressão final para a relação força-deslocamento para o elemento finito composto (incluindo o efeito da ligação semirrígida) referenciado ao sistema local, considerando todos os graus de liberdade, é definida como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & S_{ci} - \frac{S_{ci}^2(S_{cj} + k_{33})}{\beta} & \frac{S_{ci}k_{23}S_{cj}}{\beta} \\ k_{31} & \frac{S_{cj}k_{32}S_{ci}}{\beta} & S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci} + k_{22})}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

CAPÍTULO 4

Vigas Mistas de Aço e Concreto com Interação Parcial

4.1 Considerações Iniciais

Além das não linearidades geométrica, do material do perfil e da seção de concreto e das ligações viga-pilar, os elementos estruturais mistos de aço e concreto podem apresentar ainda a interação parcial. Entende-se como interação parcial a não linearidade na conexão por cisalhamento na interface entre os materiais, sendo essa tratada como deformável. Nesse sentido, o grau de ação mista se torna uma propriedade importante uma vez que o mesmo pode retratar o quão rígida será essa conexão.

A união entre os materiais pode ser feita por meio de conectores mecânicos (conectores, mossas e ressaltos), por atrito, ou por simples aderência e repartição de cargas (CALDAS, 2004). Esses conectores podem ser, em algumas situações, suficientes para que a interação entre os materiais seja dita perfeita ou total. Nesse caso, tem-se um comportamento monolítico do elemento estrutural sem deslizamento na interface aço-concreto, como abordado no Capítulo 2.

Caso ocorra deslizamento na interface aço-concreto, a interação é definida como parcial. Para vigas mistas, essa condição é caracterizada pelo comportamento não monolítico do elemento. Isso faz com que a capacidade resistente e a rigidez do elemento estrutural sejam reduzidas, porém o número reduzido de conectores proporciona economia.

Os meios de conexão por cisalhamento e as modificações na formulação numérica são abordados neste capítulo.

4.2 Estado da Arte

Segundo Ranzi (2003), os primeiros trabalhos analíticos que avaliaram o comportamento de elementos estruturais mistos com interação parcial longitudinal foram realizados nos anos 40 e 50 (STÜSSI, 1947; GANHOLM, 1949; NEWMARK *et al.*, 1951). Ainda segundo o autor, a pesquisa de Newmark *et al.* (1951) é, talvez, a mais difundida e citada na literatura. O modelo de Newmark, como é conhecido, baseia-se em hipóteses simplificadoras tais como: análise no regime linear elástico, uso da teoria de Euler-Bernoulli (TEB) e a não consideração da separação vertical entre os elementos de aço e de concreto, sendo essa introduzida no estudo de Adekola (1968).

Tal como Newmark *et al.* (1951), outros pesquisadores também consideraram o problema elástico e focaram exclusivamente no comportamento da conexão por cisalhamento entre os materiais (ADEKOLA, 1968; GIRHAMMAR; PAN, 1993; RANZI *et al.*, 2006). Um dos primeiros trabalhos a considerar o comportamento não linear dos materiais foi o de Yasunori *et al.* (1981), porém os autores usaram modelos constitutivos elastoplásticos perfeitos tanto para o aço quanto para o concreto, o que não condiz com a realidade, principalmente se tratando do concreto tracionado. A descrição do comportamento não linear dos materiais em problemas de elementos mistos com interação parcial foi evolutivo ao longo do tempo (SALARI *et al.*, 1998; DALL'ASTA; ZONA, 2002; ERKMEN; ATTARD, 2011) até o trabalho de Liu *et al.* (2013) que descreve o comportamento do concreto à tração por um modelo de dano com amolecimento pós-fissuração.

Na grande maioria dos casos, os estudos sobre a conexão deformável se concentram na análise de vigas mistas. Assim, uma discussão muito abordada na literatura está relacionada com a precisão da resposta dos sistemas estruturais usando a TEB (SOUSA JR *et al.*, 2010; FOCACCI *et al.*, 2015) ou a teoria de viga de Timoshenko (TT) (RANZI; ZONA, 2007; XU; WU, 2007; NGUYEN *et al.*, 2014). Um comparativo direto entre as teorias de viga pode ser visto nos trabalhos de Faella *et al.* (2010), Zona e Ranzi (2011), Martinelli *et al.* (2012), Sousa Jr (2013), entre outros.

Ainda no contexto da comparação das teorias de viga, Silva e Sousa Jr (2009) propuseram elementos de interface com espessura nula para promover a conexão deformável entre o perfil de aço e a laje de concreto, modelados como elementos finitos de viga-pilar de forma independente. Nesse trabalho, o elemento de interface proposto em Sousa Jr e Silva (2007), baseado na TEB, foi confrontado com outros quatro elementos de interface, sendo

um deles também baseado na TEB e outros três na TT, diferenciando-os basicamente pelas funções de interpolação, e conseqüentemente o número de nós de cada elemento. Posteriormente, Sousa Jr e Silva (2010) expandiram as análises aos elementos mistos compostos por múltiplas camadas. E, mais recentemente, em uma extensão dessa linha de pesquisa, Dias (2016) desenvolveu dois elementos finitos de interface, sendo um unidimensional e o outro bidimensional, e simulou numericamente tanto a laje de concreto quanto o perfil de aço por elementos de casca. Entre outras possibilidades, o próprio *push-out test* pôde ser simulado numericamente pela formulação proposta pelo último autor.

A abordagem da conexão deformável com elementos finitos de interface se destaca no âmbito da generalização do problema, seja em elementos mistos de aço e concreto, ou ainda na análise de elementos com múltiplas camadas. Outro fator relevante é a introdução explícita de rigidezes e capacidades resistentes diferenciadas para o deslizamento longitudinal e separação vertical na conexão. A maioria dos trabalhos encontrados nessa área (SCHELLEKENS; DE BORST, 1993; SILVA, 2006) basearam-se nos desenvolvimentos de Goodman *et al.* (1968), que é tido como o primeiro a utilizar elementos de interface com espessura nula.

Com uma metodologia diferente, encontram-se na literatura diversos trabalhos em que a interação parcial é considerada introduzindo graus de liberdade em um elemento finito de viga-pilar (AYOUB; FILIPPOU, 2000; FAELLA *et al.*, 2003; SOUSA JR *et al.*, 2010; FAELLA *et al.*, 2010).

Com um elemento finito unidimensional para a análise plana não linear de vigas mistas de aço e concreto, Valipour e Bradford (2009) apresentaram uma formulação baseada no método das forças, onde o elemento finito apresenta quatro graus de liberdade por nó. Nesse trabalho, o deslizamento na interface foi simulado repartindo explicitamente a força axial (a nível de elemento), sendo uma fração dela absorvida pelo perfil de aço e a outra pela laje de concreto. Ainda no método da flexibilidade, Chiorean e Buru (2017) propuseram um elemento finito com seis graus de liberdade capaz de captar o efeito da interação parcial entre os componentes de aço e de concreto. Porém, os autores fazem a consideração do deslizamento na interface aço-concreto na formulação local, nos pontos de integração ao longo do elemento finito. O campo de deformações foi considerado linear com uma descontinuidade no plano de deslizamento. Vale destacar que a formulação proposta no referido trabalho permite a utilização de apenas um elemento finito por membro e a

plasticidade foi considerada de forma distribuída. Além disso, o *software* ABAQUS foi utilizado como ferramenta para comparação dos resultados.

Dall'Asta e Zona (2004a) e Chiorean e Buru (2017) relataram que o uso de formulações baseadas em deslocamento apresentam problemas relacionados aos fenômenos de *locking*. Esses fenômenos estão ligados a um enrijecimento não realista da estrutura como, por exemplo, a perda da precisão na avaliação do efeito do deslizamento na conexão (*slip locking*). Embora esses fatores sejam levados em consideração, alguns autores adotaram saídas alternativas aos problemas citados e desenvolveram suas formulações com base no método da rigidez. Battini *et al.* (2009), por exemplo, optaram por usar a matriz de rigidez baseada na solução exata das equações que governam o problema de vigas mistas com conexão deformável. Já Sousa Jr *et al.* (2010) concentraram suas soluções no grau das funções de interpolação de deslocamentos utilizadas.

Ainda pouco explorada na análise de elementos mistos com interação parcial longitudinal, a plasticidade concentrada foi encontrada em apenas três pesquisas (LIEW *et al.*, 2001; IU *et al.*, 2009; IU, 2016). Em todos esses trabalhos, a simulação numérica da conexão deformável é introduzida nos modelos da mesma forma. A simulação é feita usando as considerações da norma americana para o projeto de vigas mistas, sendo as considerações sobre o tema mantidas até os dias atuais na versão vigente da norma (AISC LRFD, 2016). Basicamente, o momento de inércia da seção mista é reduzido considerando explicitamente o grau de interação proporcionado pelos conectores de cisalhamento. Vale ressaltar que a NBR 8800 (2008) segue o mesmo procedimento, e este é descrito no item 4.4 deste capítulo. Com isso, vê-se um campo ainda aberto à pesquisa e melhoria nas propostas de formulação considerando plasticidade concentrada e interação parcial, sendo esta a proposta deste trabalho.

4.3 Conectores de Cisalhamento

A união de diferentes materiais em um mesmo elemento estrutural visa o melhor aproveitamento físico e mecânico desses. Para que isso seja possível, deve-se ter um meio de conexão entre os materiais, que por sua vez pode ser feita por conectores de cisalhamento. Na Figura 4.1 são ilustrados alguns tipos de conectores mecânicos utilizados na confecção de elementos mistos.

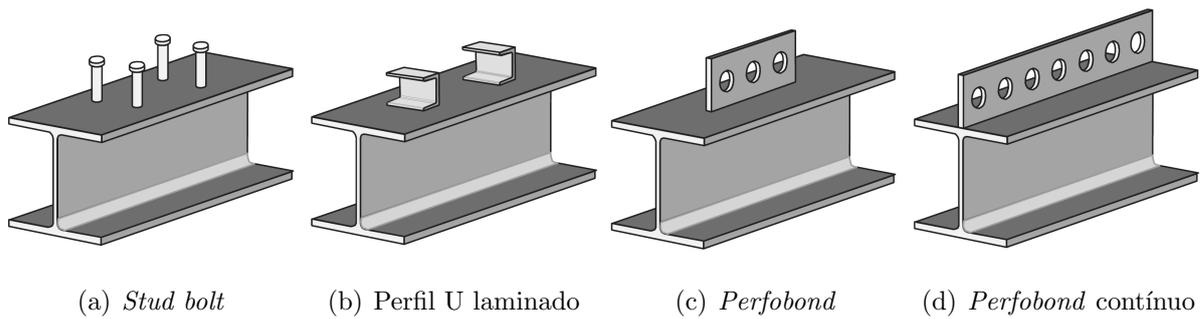


Figura 4.1 – Tipos de conectores de cisalhamento (VERÍSSIMO, 2007)

Um dos primeiros estudos no contexto da avaliação do comportamento da conexão foi realizado por Ollgaard *et al.* (1971) que definiu a capacidade resistente ao cisalhamento de conectores *stud bolt* por meio de uma análise estatística. Outra contribuição desse trabalho está na obtenção da relação constitutiva dos elementos da ligação por meio de uma expressão exponencial, abordada adiante, que vem sendo amplamente utilizada por outras pesquisas (ARIBERT; LABIB, 1982; JOHNSON; MOLENSTRA, 1991; FAELLA *et al.*, 2003; CHIOREAN; BURU, 2017). Além do *stud bolt*, conectores com perfis U (BARAN; TOPKAYA, 2012; SHARIATI *et al.*, 2016) e *Perfobond* (ZHENG *et al.*, 2016) também já foram testados experimentalmente.

Não necessariamente os quatro modelos de conectores apresentados na Figura 4.1 são unanimidade. Veríssimo (2007), por exemplo, analisou um conector com chapa dentada denominado *Crestbond*. Já Vianna (2009) propôs um conector alternativo, *T-Perfobond*, que deriva do conector *Perfobond* acrescentando a componente da mesa, que trabalha como um bloco. Ou ainda, a pesquisa de Chater (2015) que usou barras de aço CA-50 convencionalmente dobradas, em forma de dente-de-serra, que apresentaram resistência superior ao conector *stud-bolt*.

Independente do tipo de conector utilizado, a quantidade de elementos de ligação influencia diretamente no comportamento do elemento estrutural, sendo essa influência conhecida como grau de interação.

4.4 Grau de Interação e Momento de Inércia Efetivo

Como já mencionado, há dois tipos de interação: total e parcial. Define-se interação total como a perfeita conexão entre os materiais. Em outras palavras, pode-se descrever o campo de deformações na seção transversal de forma aproximadamente linear, sem

pequenos saltos ou descontinuidades. Para que tal grau de interação seja atingido é necessário, por exemplo, um número suficiente de conectores de cisalhamento para que não ocorra deslizamento na interface dos materiais (Figura 4.2(b)). Para análise de elementos reticulados é comum adotar a interação total (FONG; CHAN, 2012; CHIOREAN, 2013; GONÇALVES; CARVALHO, 2014; LEMES *et al.*, 2017c).

Quando os materiais trabalham de forma conjunta, porém a conexão entre eles é deformável, a interação é dita parcial. Dessa forma, ocorre deslizamento na interface implicando no comportamento não monolítico do elemento estrutural (Figura 4.2(c)). Segundo Spacone e El-Tawil (2004), a interação parcial é um problema inerente às estruturas mistas e influenciam principalmente nos estados limites de utilização, dissipação de energia, distribuições locais de tensão e estados limites últimos. As conexões deformáveis foram objetos de diversos estudos, ressaltados no início deste capítulo, e descrevem uma condição mais realista ante a consideração da perfeita conexão entre os materiais.

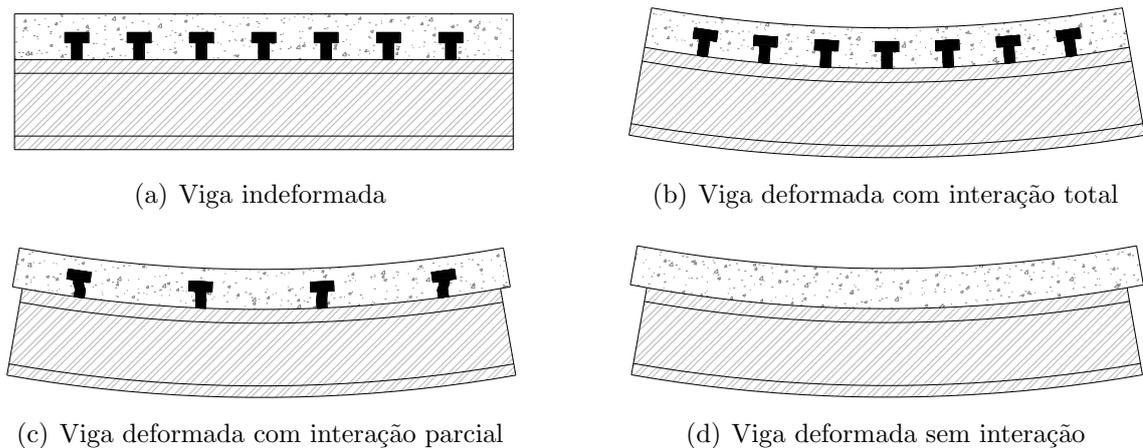


Figura 4.2 – Tipos de interação em vigas mistas de aço e concreto

A grandeza que mede o quão conjunto ou independente será o trabalho da laje e do perfil é denominada grau de interação. A aferição precisa dessa grandeza envolve algumas variáveis, tais como: a quantidade, a resistência e a rigidez dos conectores, além do esmagamento localizado do concreto na região de contato com os conectores. A relação entre a força resistente dos elementos de conexão atuando em conjunto, ΣH_{Rd} , e a força de cisalhamento solicitante de cálculo entre o componente de aço e a laje, H_{Sd} , é definida como grau de interação (η_i), ou seja (NBR 8800, 2008):

$$\eta_i = \frac{\Sigma H_{Rd}}{H_{Sd}} \quad (4.1)$$

Embora a norma brasileira forneça limites inferiores para o grau de interação para os casos de seções duplamente simétricas e monossimétricas, não se faz referência a uma margem onde a interação possa ser dita total, a não ser que $\eta_i = 1$. Assim, para vigas mistas de alma cheia, em regiões de momento positivo, a redução do momento de inércia efetivo segundo a NBR 8800 (2008), é dada por:

$$I_{ef} = I_a + \sqrt{\eta_i} (I_{tr} - I_a) \quad (4.2)$$

em que I_a e I_{tr} são os momentos de inércia da seção do perfil de aço isolado e da seção mista homogeneizada, respectivamente.

Nas regiões de momento negativo o momento de inércia efetivo é dado pela seção transversal formada pelo perfil de aço mais a armadura longitudinal contida na largura efetiva da laje de concreto (NBR 8800, 2008).

O procedimento normativo para a avaliação do momento de inércia efetivo, considerando o deslizamento na interface, parte do conceito de homogeneização da seção transversal para simplificar o processo de avaliação da deslocabilidade do elemento estrutural. Essa simplificação, muitas vezes utilizadas na literatura (LIEW *et al.*, 2001; CHAN *et al.*, 2010; FONG; CHAN, 2012; LEMES *et al.*, 2017a; LEMES *et al.*, 2017b), é aconselhável apenas para a análise no estado limite de serviço, com tensões elásticas. De modo a eliminar essa simplificação, não apenas a inelasticidade dos materiais deve ser considerada, mas também a não linearidade do comportamento dos conectores como descrito a seguir.

4.5 Modelo Constitutivo da Conexão

A interação parcial é basicamente descrita introduzindo na análise estrutural o comportamento não linear do meio de conexão. Um modelo constitutivo bastante difundido na literatura (FAELLA *et al.*, 2003; SOUSA JR *et al.*, 2010; CHIOREAN; BURU, 2017; UDDIN *et al.*, 2017) é o de Ollgaard *et al.* (1971), que descreve a curva força cortante por unidade de comprimento-deslizamento relativo ($H \times \zeta$), por uma função exponencial, mostrada na Figura 4.3, e é dada por:

$$H = H_{max} [1 - \exp(-\nu_1 \zeta)]^{\nu_2} \quad \text{se } \zeta \leq \zeta_u \quad (4.3)$$

sendo H_{max} a força cortante máxima resistente de um conector isolado, que pode ser definida por experimentos ou considerações normativas (EC 4, 2004; NBR 8800, 2008; AISC LRFD, 2016), ζ é o deslizamento relativo entre os componentes de aço e concreto, e os parâmetros ν_1 e ν_2 são constantes que definem a rigidez do modelo constitutivo da conexão e foram calibradas ao longo de algumas pesquisas realizadas, como mostrado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Variáveis do modelo constitutivo da conexão

Referência	Constantes	
	ν_1	ν_2
Ollgaard <i>et al.</i> (1971)	1	0.558
Aribert e Labib (1982)	1.535	0.989
Johnson e Molenstra (1991)	0.7	0.8

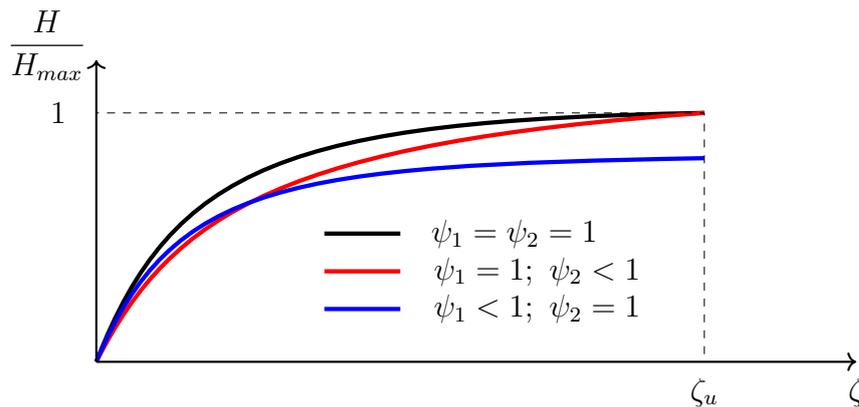


Figura 4.3 – Modelo constitutivo para a conexão aço-concreto

Nas regiões de momento negativo a relação dada na Equação 4.3 é modificada por meio de dois parâmetros de redução: ψ_1 , que reduz a capacidade resistente da conexão à força cortante na interface aço-concreto e ψ_2 , que reduz a rigidez da conexão. Assim, a relação constitutiva proposta por Ollgaard *et al.* (1971) é modificada como segue (FAELLA *et al.*, 2003):

$$H = \psi_1 H_{max} [1 - \exp(-\psi_2 \nu_1 \zeta)]^{\nu_2} \quad \text{se } \zeta \leq \zeta_u \quad (4.4)$$

Com a consideração da interação parcial, um grau de liberdade deve ser acrescentado ao sistema local para a simulação da conexão deformável entre o perfil de aço e a laje de concreto. Na Seção 2.5 foi abordado o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD)

em elementos estruturais que tinham como característica o comportamento monolítico. Neste capítulo, o procedimento é alterado para a consideração do deslizamento na interface aço-concreto, considerando o comportamento não linear dos conectores de cisalhamento por meio da relação constitutiva de Ollgaard *et al.* (1971).

4.6 Formulação Numérica

O efeito da interação parcial foi introduzido na plataforma CS-ASA por meio da adição de mais um grau de liberdade no problema local. Esse grau de liberdade corresponde a uma descontinuidade no campo linear de deformações, e ocorre exatamente na interface aço-concreto. Para o desenvolvimento da formulação numérica, algumas simplificações são adotadas neste trabalho:

- considera-se que os conectores de cisalhamento são igualmente espaçados, sendo a força cortante na interface igualmente distribuída;
- o atrito na conexão não é explicitamente considerado;
- o deslizamento longitudinal é permitido, mas a separação vertical da laje e do perfil não é considerada; e
- embora a conexão entre o perfil e a laje seja deformável, as armaduras longitudinais têm a perfeita interação com o concreto presente na laje.

4.6.1 Desmembramento da força axial entre a laje e o perfil

Pela teoria de Euler-Bernoulli tem-se que a seção permanece plana após sua deformação. Além disso, independentemente do grau de interação entre a laje de concreto e o perfil de aço, considera-se que a curvatura da seção é igual nos dois elementos (laje e perfil). Com isso, o deslizamento na interface aço-concreto pode ser descrito por uma repartição não uniforme da carga axial entre a laje e o perfil. Agora, diferentemente do problema tratado na Seção 2.5, três graus de liberdade são considerados no problema local (seção transversal). As forças atuantes na seção transversal são dadas por:

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{Bmatrix} N_{ext,l} \\ N_{ext,p} \\ M_{ext} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{ext,l} \\ N - N_{ext,l} \\ M_{ext} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

em que $N_{ext,l}$ e $N_{ext,p}$ são as forças axiais externas atuantes na laje e no perfil de aço, respectivamente, M_{ext} é o momento fletor externo.

O objetivo passa a ser a definição da parte da carga axial absorvida pela laje, $N_{ext,l}$. Segundo Chiorean e Buru (2017), esse valor é uma fração da carga axial que atuaria na laje caso houvesse interação total, N_l^{tot} , dado por:

$$N_{ext,l} = f(\gamma_{ef}) N_l^{tot} \quad (4.6)$$

sendo que $f(\gamma_{ef})$ é um fator de redução que depende exclusivamente do grau de ação mista, γ_{ef} , sendo esses parâmetros detalhados na Seção 4.6.3.

A Figura 4.4 ilustra do campo de deformações na seção transversal mista considerando a conexão por cisalhamento como deformável quando submetida às forças definidas no vetor \mathbf{f}_{ext} (Equação 4.5). Observando essa mesma figura, e tomando como referência o centroide plástico da seção (CP), é possível escrever as deformações, em qualquer ponto y_i , no perfil $\varepsilon_{i,p}$ e na laje $\varepsilon_{i,l}$, pelas seguintes relações:

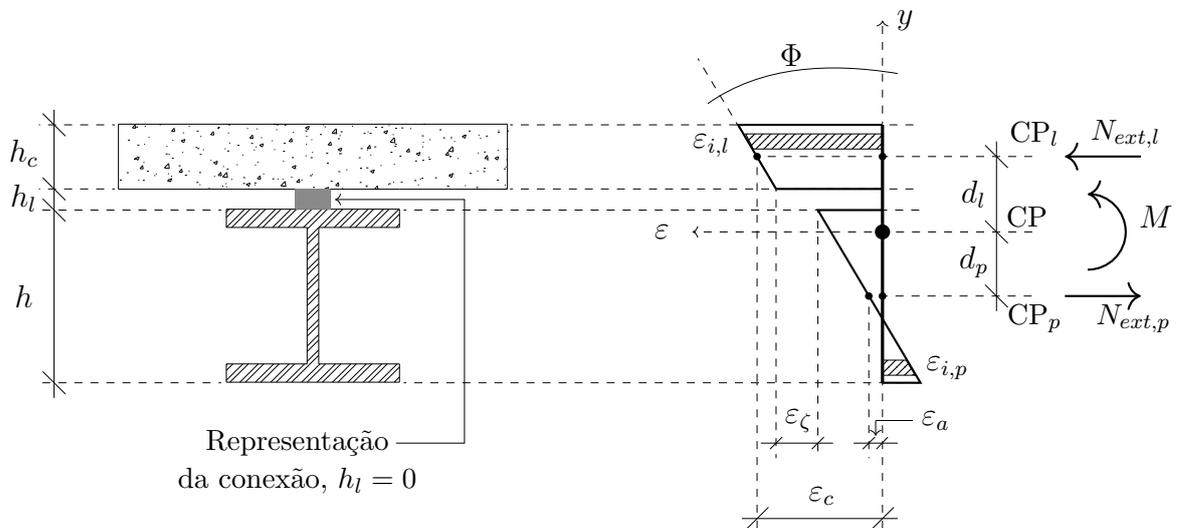


Figura 4.4 – Campo de deformações descontínuo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,p} &= \varepsilon_a + \Phi (y_i - d_p) + \varepsilon_{ri} \\ \varepsilon_{i,l} &= \varepsilon_c + \Phi (y_i - d_l) \end{aligned} \quad (4.7)$$

em que ε_a e ε_c são as deformações axiais nos centroides plásticos do perfil (CP_p) e da laje (CP_l), respectivamente, e d_p e d_l são as distâncias do CP_p e do CP_l ao CP da seção transversal indeformada (destaca-se que d_p é negativo).

Os graus de liberdade passam a ser as defomações axiais nos CPs da laje, ε_c , do perfil, ε_a , e a curvatura da seção, Φ , que são os componentes do vetor de defomações \mathbf{X} , ou seja:

$$\mathbf{X}^T = [\varepsilon_c \quad \varepsilon_a \quad \Phi] \quad (4.8)$$

Conhecidas as defomações na seção, por meio das relações constitutivas dos materiais, chega-se nas tensões atuantes, e conseqüentemente nos esforços internos. Esses, por sua vez, são componentes do vetor de forças internas da seção, dado por:

$$\mathbf{f}_{int} = \left\{ \begin{array}{l} N_{int,l} = \int_{A_l} \sigma [\varepsilon_l (\varepsilon_c, \Phi)] dA + \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_i [\varepsilon_l (\varepsilon_c, \Phi)] A_{bi} \\ N_{int,p} = \int_{A_a} \sigma [\varepsilon_p (\varepsilon_a, \Phi)] dA \\ M_{int} = \int_{A_l} \sigma [\varepsilon_l (\varepsilon_c, \Phi)] y dA + \int_{A_a} \sigma [\varepsilon_p (\varepsilon_a, \Phi)] y dA + \sum_{i=1}^{n_b} \sigma_i [\varepsilon_l (\varepsilon_c, \Phi)] y_i A_{bi} \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

sendo $N_{int,l}$ e $N_{int,p}$ as forças axiais internas atuantes na laje de concreto e no perfil de aço, respectivamente, M_{int} o momento fletor interno, e as áreas da laje e do perfil são denominadas como A_l e A_a . As barras são tidas como elementos discretos de área individual A_{bi} devendo ser feita a varredura nas n_b barras.

Tomando como base que o procedimento não linear descrito aqui segue a forma semelhante ao discutido na Seção 2.5, tem-se ainda que definir a matriz constitutiva da seção transversal, ou seja:

$$\mathbf{F}' = \left(-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \varepsilon_c} & f_{12} = \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \varepsilon_a} & f_{13} = \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \Phi} \\ f_{21} = \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \varepsilon_c} & f_{22} = \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \varepsilon_a} & f_{23} = \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \Phi} \\ f_{31} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_c} & f_{32} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_a} & f_{33} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

É possível extrair, como já apresentado, as rigidezes axial e à flexão da matriz constitutiva da seção transversal. Na Seção 2.5 foi demonstrada a obtenção da rigidez à flexão considerando explicitamente a atualização da posição do CP da seção transversal. Uma forma alternativa para o cálculo dos parâmetros de rigidez toma como base a tangente à relação momento-curvatura ($M \times \Phi$). Nessa situação a relação $M \times \Phi$ é analisada na sua

forma incremental, já considerando os termos nulos da matriz constitutiva (ver o Apêndice B), ou seja:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & 0 & f_{13} \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_c \\ \Delta\varepsilon_a \\ \Delta\Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta N_{ext,l} \\ \Delta N_{ext,p} \\ \Delta M_{ext} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Vale ainda lembrar que a força axial no perfil é dada pela subtração do esforço axial total pela parcela absorvida pela laje. Assim, trazendo as Equações 4.5 e 4.6 em 4.12, chega-se no sistema de equações:

$$\begin{cases} f_{11}\Delta\varepsilon_c + f_{13}\Delta\Phi = f(\gamma_{ef})\Delta N_l^{tot} \\ f_{22}\Delta\varepsilon_a + f_{23}\Delta\Phi = \Delta N - f(\gamma_{ef})\Delta N_l^{tot} \\ f_{31}\Delta\varepsilon_c + f_{32}\Delta\varepsilon_a + f_{33}\Delta\Phi = \Delta M_{ext} \end{cases} \quad (4.12)$$

A rigidez à flexão tangente da seção transversal (EI_T) é obtida pela variação do momento M_{ext} em relação à variação da curvatura, considerando $\Delta N = 0$, ou seja:

$$EI_T = \left. \frac{\Delta M_{ext}}{\Delta\Phi} \right|_{\Delta N=0} \quad (4.13)$$

Para isso, o sistema de Equações 4.12 deve ser manipulado algebricamente. Lembrando que $\Delta N = 0$, isolando $\Delta\varepsilon_c$ na primeira equação, $\Delta\varepsilon_a$ na segunda e substituindo na terceira, chega-se a:

$$f_{31} \left[\frac{f(\gamma_{ef})\Delta N_l^{tot} - f_{13}\Delta\Phi}{f_{11}} \right] + f_{32} \left[\frac{-f(\gamma_{ef})\Delta N_l^{tot} - f_{23}\Delta\Phi}{f_{22}} \right] + f_{33}\Delta\Phi = \Delta M_{ext} \quad (4.14)$$

Trabalhando a equação anterior e colocando em evidência $f(\gamma_{ef})N_l^{tot}$ e $\Delta\Phi$ no lado esquerdo da igualdade, tem-se:

$$f(\gamma_{ef})\Delta N_l^{tot} \underbrace{\left(\frac{f_{31}}{f_{11}} - \frac{f_{32}}{f_{22}} \right)}_b + \Delta\Phi \underbrace{\left(f_{33} - \frac{f_{31}f_{13}}{f_{11}} - \frac{f_{32}f_{23}}{f_{22}} \right)}_a = \Delta M_{ext} \quad (4.15)$$

Denominando como b e a as partes da equação anterior que apresentam os termos da matriz constitutiva da seção transversal, e dividindo os dois lados da igualdade por ΔM_{ext} , obtém-se:

$$f(\gamma_{ef}) \left(\frac{\Delta N_l^{tot}}{\Delta M_{ext}} \right) b + \left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta M_{ext}} \right) a = 1 \quad (4.16)$$

Por fim, isolando a relação $\Delta\Phi/\Delta M_{ext}$ e invertendo-a chega-se na rigidez à flexão tangente à relação $M \times \Phi$:

$$EI_T = \frac{a}{1 - bf(\gamma_{ef}) \Delta N_l^{tot} / \Delta M_{ext}} \quad (4.17)$$

Note então que a rigidez à flexão é função da variação da força axial na laje de concreto (considerando a interação total) devido a uma variação do momento fletor atuante ΔM_{ext} . Assim, ΔN_l^{tot} é dado por:

$$\Delta N_l^{tot} = N_{l, M_{ext} + \Delta M_{ext}}^{tot} - N_{l, M_{ext}}^{tot} \quad (4.18)$$

Conclui-se que para obter a rigidez à flexão da seção mista considerando a conexão por cisalhamento como deformável, é necessário fazer a análise previa da seção da viga mista considerando a interação completa na interface aço-concreto. Maiores detalhes sobre o procedimento numérico são descritos na Seção 4.6.5.

As rigidezes axiais da laje de concreto $EA_{T,l}$ e do perfil de aço $EA_{T,p}$ podem ser obtidas tal como feito para a rigidez à flexão. Assim:

$$EA_{T,l} = \left. \frac{\Delta N_{ext,l}}{\Delta \varepsilon_c} \right|_{\Delta M=0}, \quad EA_{T,p} = \left. \frac{\Delta N_{ext,p}}{\Delta \varepsilon_a} \right|_{\Delta M=0} \quad (4.19)$$

As relações anteriores resultam em expressões que dependem exclusivamente dos termos da matriz constitutiva, e são definidas como segue (CHIOREAN; BURU, 2017):

$$EA_{T,l} = \frac{f_{11}(f_{23}f_{32} - f_{22}f_{33}) + f_{13}f_{22}f_{31}}{f_{23}f_{32} - f_{22}f_{33} + f_{13}f_{23}} \quad (4.20)$$

$$EA_{T,p} = \frac{f_{22}(f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31}) + f_{11}f_{23}f_{32}}{f_{11}f_{33} - f_{13}f_{31} + f_{31}f_{23}}$$

Assim, a rigidez axial final da seção transversal é dada pela soma das rigidezes axiais da laje e do perfil de aço:

$$EA_T = EA_{T,l} + EA_{T,p} \quad (4.21)$$

4.6.2 Considerações sobre a rigidez elástica

A Equação 4.17 considera implicitamente, nos termos a e b , a não linearidade dos materiais empregados. No entanto, em regime elástico é possível simplificar a Equação

4.17. Nesse caso, o módulo de elasticidade é tomado como constante, e com base nas equações apresentadas no Apêndice B, pode-se chegar em:

$$a = EI_l + EI_p = EI^{nul}; \quad b = d_l + d_p \quad (4.22)$$

sendo EI_l e EI_p as rigidezes à flexão da laje e do perfil separadamente e EI^{nul} a rigidez à flexão da seção sem interação. Também é possível substituir a relação entre a variação da força axial interna na laje pela variação do momento fletor atuante. Para isso, parte-se da definição da rigidez à flexão da seção com interação total, ou seja:

$$EI^{tot} = EI^{nul} + (d_l + d_p)^2 \frac{EA_l EA_p}{EA_l + EA_p} = EI^{nul} + (d_l + d_p)^2 EA^* \quad (4.23)$$

em que EA_p e EA_l são as rigidezes axiais do perfil de aço e da laje, respectivamente. Também é possível definir a variação elástica da força na laje de concreto como:

$$\Delta N_l^{tot} = \frac{\Delta M_{ext}}{EI^{tot}} (d_l + d_p) EA^* \quad (4.24)$$

O trabalho algébrico das Equações 4.17, 4.22-4.24 resulta na seguinte equação para o cálculo da rigidez à flexão da seção mista com interação parcial no regime elástico:

$$EI_{ef} = \frac{EI^{nul}}{1 - f(\gamma_{ef}) \left(\frac{EI^{tot} - EI^{nul}}{EI^{tot}} \right)} \quad (4.25)$$

A forma elástica da rigidez à flexão da seção é de grande importância para a definição da função do grau de ação mista, discutida a seguir.

4.6.3 Função do grau de ação mista

Girhammar e Pan (2007) realizaram um estudo de elementos mistos com interação parcial definindo a solução exata das equações diferenciais que governam o referido problema estático. Seu estudo foi baseado na TEB e sua formulação desenvolvida no regime elástico. Dentre as contribuições desse trabalho, tem-se a equação da rigidez à flexão efetiva, EI_{ef} , da seção transversal mista considerando a interação parcial, obtida através de uma análise de flambagem dos elementos:

$$EI_{ef} = \left[1 + \frac{EI^{tot}/EI^{nul} - 1}{1 + (\mu/\pi)^2 (\alpha L)^2} \right]^{-1} EI^{tot} \quad (4.26)$$

em que μ é o coeficiente de flambagem do elemento, que pode ser o utilizado nos casos gerais para elementos com interação total e condições de contorno usuais (GIRHAMMAR; PAN, 2007; GIRHAMMAR, 2008), e α é definido da seguinte forma:

$$\alpha = \sqrt{\frac{k EI^{tot}}{EA^* EI^{nul}}} \quad (4.27)$$

sendo k o parâmetro que indica a rigidez da conexão. Por se tratar de um problema elástico, Faella *et al.* (2003) definiram k como a rigidez secante da relação constitutiva proposta por Ollgaard *et al.* (1971) considerando $H = 0.5H_{max}$.

Chiorean e Buru (2017) destacaram que a rigidez à flexão avaliada na Equação 4.26 proporciona resultados eficientes em se tratando de deslocamentos, forças internas e tensões em elementos com interação parcial. A simples manipulação algébrica da Equação 4.26, leva a seguinte expressão:

$$EI_{ef} = \frac{EI^{nul}}{1 - \left[\frac{1}{1 + (\pi/\mu\alpha L)^2} \right] \left(\frac{EI^{tot} - EI^{nul}}{EI^{tot}} \right)} \quad (4.28)$$

Agora, uma breve comparação das Equações 4.25 e 4.28 em regime elástico, leva a definição intuitiva da função do grau de interação $f(\gamma_{ef})$, que é descrita como:

$$f(\gamma_{ef}) = \frac{1}{1 + (\pi^2/\gamma_{ef}^2)} \quad (4.29)$$

em que o grau de ação mista γ_{ef} é descrito por:

$$\gamma_{ef} = \mu\alpha L \quad (4.30)$$

Até o presente momento, a formulação para o cálculo da função do grau de ação mista foi apresentada em regime elástico. No entanto, uma simples consideração faz com que os parâmetros das quais $f(\gamma_{ef})$ é dependente se tornem não lineares. Note que, no cálculo do grau de ação mista, dado na Equação 4.30, α é o único parâmetro dependente do módulo de elasticidade dos materiais e da rigidez da conexão. Basta então considerar a não linearidade dessas variáveis para que o problema da interação parcial seja tratado de forma mais realista. Ou seja:

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_{Tc} EI_T^{tot}}{EA_T^* EI_T^{nul}}} \quad (4.31)$$

em que k_{Tc} é a rigidez dos conectores e será discutido a seguir. As demais variáveis calculadas com base em equações previamente definidas considerando a possível variação do módulo de elasticidade.

4.6.4 Rigidez dos conectores e força cortante atuante

A conexão por cisalhamento é geralmente feita por conectores do tipo *stud* (pino com cabeça) que são assumidos igualmente posicionados com espaçamento e_s . A Figura 4.5 ilustra a disposição de n_l linhas de conectores em um trecho de uma viga. Nesse trecho, estão contidos o nó i , e os nós adjacentes $i - 1$ e $i + 1$. O objetivo é avaliar a força cortante nos conectores que pertencem ao comprimento de influência (l_{cod}) do i -ésimo nó. Para isso, é necessário saber o comprimento dos elementos finitos que são comuns ao nó analisado, no caso, L_j e L_{j+1} .

Fazendo o diagrama de corpo livre da laje de concreto dentro do comprimento de influência do ponto nodal i , como ilustrado na Figura 4.5, pode-se obter a força cortante na conexão H_{con} pela simples relação entre as forças internas na laje, $N_{int,l}$. Ou seja:

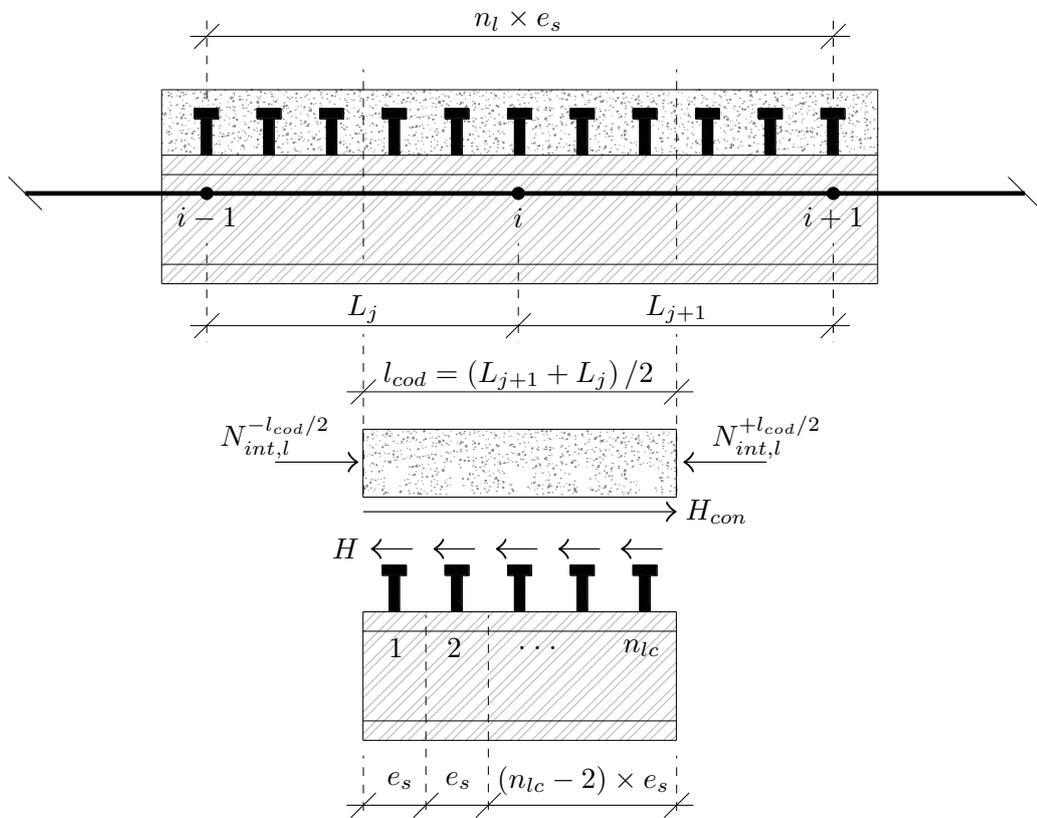


Figura 4.5 – Definição da força cortante por unidade de comprimento nos conectores

$$H_{con} = N_{int,l}^{+l_{cod}/2} - N_{int,l}^{-l_{cod}/2} \quad (4.32)$$

A determinação da força cortante de forma simplificada, na linha de conectores paralela ao plano da seção transversal é feita da seguinte forma:

$$H = \frac{H_{con}}{n_{lc}} \quad (4.33)$$

em que n_{lc} é o número de linhas de conectores dispostas dentro de um determinado comprimento de influência. Uma vez conhecida a força H , a rigidez k_{Tc} do conector, relativa ao espaçamento, pode ser obtida pela derivada da relação de Ollgaard *et al.* (1971). Assim:

$$k_{Tc} = \frac{1}{e_s} \frac{dH}{d\zeta} = \nu_1 \nu_2 \psi_1 \psi_2 H_{max} (1 - \exp[-\psi_2 \nu_1 \zeta])^{\nu_2 - 1} \exp(-\psi_2 \nu_1 \zeta) \quad (4.34)$$

De todas as variáveis presentes na expressão que define k_{Tc} , apenas o deslizamento ζ ainda não foi calculado. Para isso, basta isolar ζ na Equação 4.4 e substituir os valores. Portanto, o deslizamento é dado por:

$$\zeta = -\frac{1}{\psi_2 \nu_1} \ln \left[1 - \left(\frac{H}{\psi_1 H_{max}} \right)^{\frac{1}{\nu_2}} \right] \quad (4.35)$$

4.6.5 Arranjo numérico da formulação apresentada

Após a apresentação das equações referentes ao problema da interação parcial em estruturas mistas, apresenta-se na Tabela 4.2 um breve fluxograma para a solução do referido problema. É importante que seja ressaltado o fato de que essa estratégia é aplicada na obtenção da capacidade resistente da seção transversal e também na aferição da rigidez do elemento estrutural com conexão deformável.

Note que na Tabela 4.2 o valor da função do grau de interação é tida como conhecida. Isso se dá pelo fato dessa variável ser atualizada no final do ciclo iterativo global, ou seja, é mantida constante durante o processo iterativo. Assim, uma vez atingida a convergência, o parâmetro α (Equação 4.31) é calculado em todos os pontos nodais presentes na viga e conseqüentemente $f(\gamma_{ef})$ é atualizado em cada nó.

Tabela 4.2 – Estratégia numérica para a obtenção da rigidez na interação parcial

-
-
1. Admitir $f(\gamma_{ef})$, M_{ext} , N , dados da seção e dos materiais como conhecidos
 2. Analisar a seção com interação total para obter ΔN_i^{tot}
 3. Calcular a força axial atuante na laje, $N_{ext,l}$ (Equação 4.6)
 4. Montar o vetor das forças externas (Equação 4.5)
 5. Inicializar: $\mathbf{X} = \mathbf{0}$
 6. **para** $k \leftarrow 1$, $nmax$ **faça**
 7. Determinar ε_l e ε_p (Equação 4.7)
 8. Montar \mathbf{f}_{int} (Equação 4.9)
 9. Calcular $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ (Equação 2.73)
 10. **se** $\|\mathbf{F}\| \div \|\mathbf{f}_{ext}\| \leq Tol$ **então**
 11. Parar o processo iterativo e seguir para linha 20
 12. **fim se**
 13. Montar a matriz de rigidez tangente da seção \mathbf{F}' (Equação 4.10)
 14. Verificar a singularidade de \mathbf{F}'
 15. **se** \mathbf{F}' é singular **então**
 16. Capacidade resistente violada - rigidezes nulas
 17. Parar processo e seguir para linha 20
 18. **fim se**
 19. Corrigir o vetor de deformações \mathbf{X} (Equação 2.79)
 20. **fim para**
 21. Calcular as rigidezes axial e à flexão (Equações 4.21 e 4.17)
-
-

CAPÍTULO 5

Análises Numéricas

5.1 Considerações Iniciais

Nesta seção, as estratégias numéricas apresentadas nos capítulos anteriores são utilizadas visando o estudo de sistemas estruturais de aço, de concreto e mistos de aço e concreto. Os exemplos aqui abordados visam diversos estudos a nível local (seção transversal/ponto nodal) e global (estrutura como um todo). Ressalta-se que os resultados encontrados são comparados com os apresentados na literatura, obtidos de forma numérica e/ou experimental. Além disso, em uma das análises é feito um breve estudo comparativo entre as metodologias de avaliação da degradação da rigidez abordadas no contexto do Método da Rótula Plástica Refinado Modificado (MRPRM) em relação a sua versão clássica (MRPR).

Este capítulo foi dividido em 4 seções: análise de seções transversais, onde a estratégia numérica local via Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) é testada; análise de vigas isoladas, com verificação do comportamento global de elementos sob domínio da flexão em torno do eixo de maior inércia, com interação total e parcial; análise de pilares isolados, com atenção especial à flexão em torno do eixo de menor inércia; e análise de pórticos com ligações rígidas e semirrígidas.

A solução do problema não linear de estruturas de aço, concreto e mistas é obtida utilizando a estratégia do deslocamento generalizado para o incremento de carga e a norma mínima dos deslocamentos residuais no processo iterativo. Dessa forma, é possível passar por pontos limites que possam vir a existir nas trajetórias de equilíbrio. Destaca-se que em todos os problemas aqui estudados foi utilizado o método de *Newton-Raphson* modificado com tolerância de 10^{-4} .

5.2 Análise de Seções Transversais

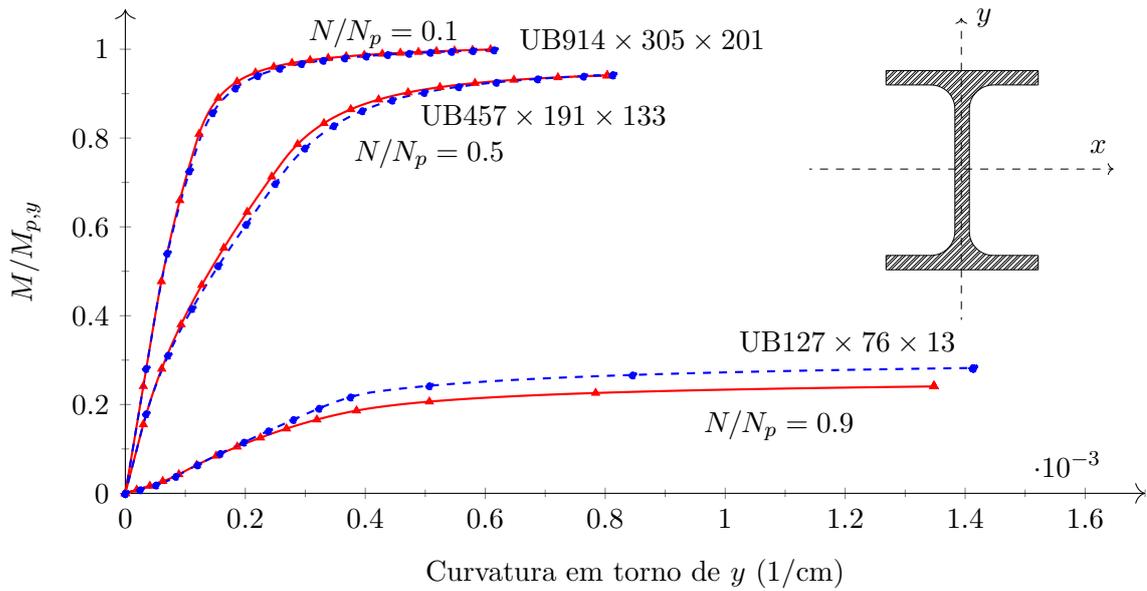
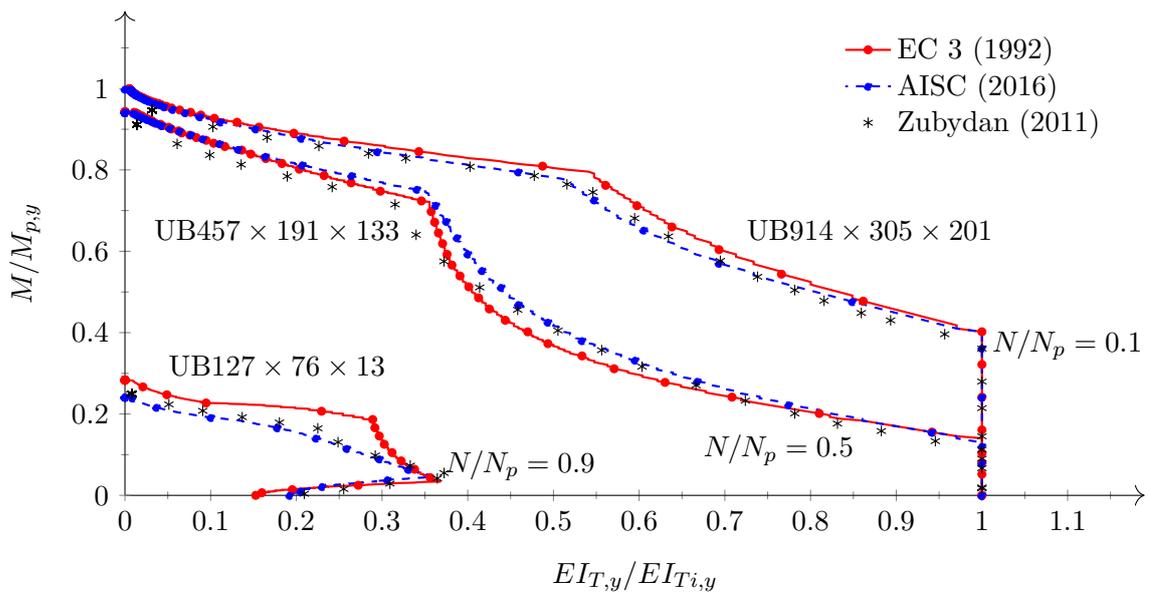
5.2.1 Seções de aço

Zubydan (2011) fez análises da variação do módulo de elasticidade tangente do aço constituinte de perfis I (UB) e H (UC) em relação ao aumento do momento fletor atuante na seção. Vale ressaltar que o autor se dedicou ao estudo de elementos metálicos fletidos em torno do eixo de menor inércia. Assim, o mesmo utilizou as considerações do EC 3 (1992) para a definição das tensões residuais. A seguir são apresentadas as respostas obtidas no presente trabalho utilizando os modelos de tensões residuais descritos na Seção 2.5.1. Para todas as seções transversais, o aço apresenta tensão de escoamento igual a 25 kN/cm² e módulo de elasticidade 20000 kN/cm².

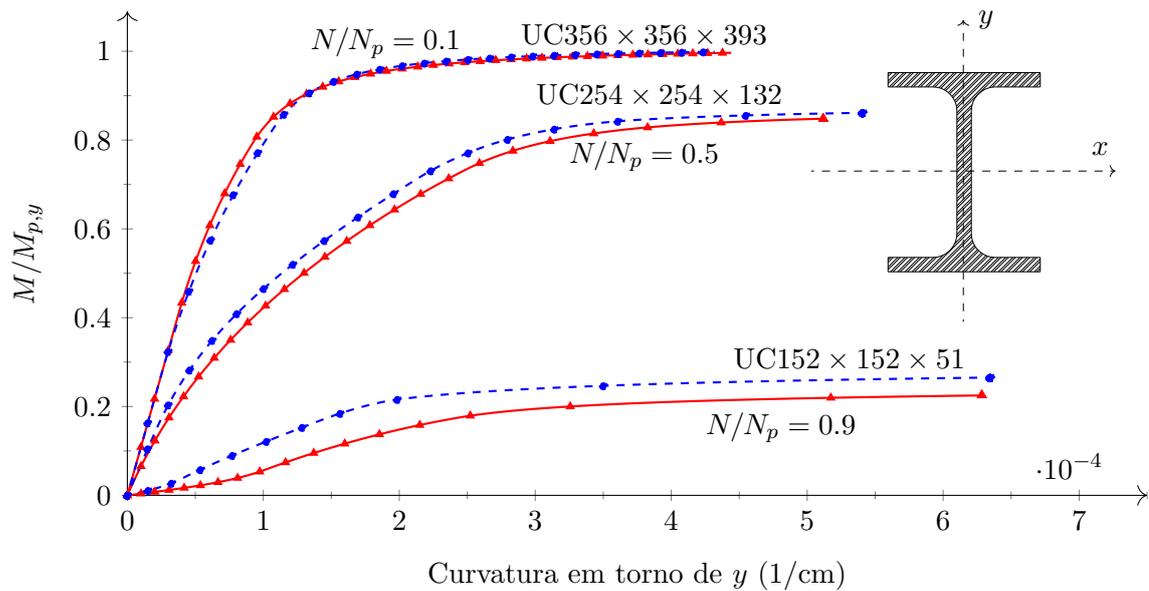
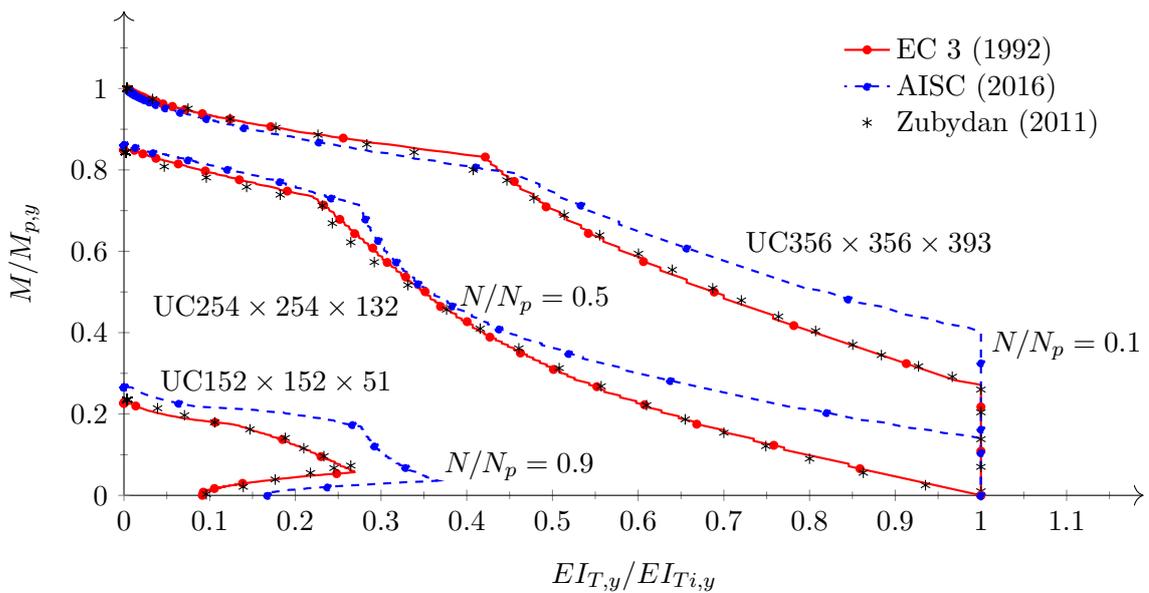
Nas Figuras 5.1 e 5.2 são apresentadas as relações momento-curvatura e as curvas momento fletor-rigidez à flexão tanto para seções UB e UC utilizando as considerações do EC 3 (1992) e do AISC LRFD (2016). Através das Figuras 5.1(b) e 5.2(b) verifica-se a boa concordância entre os resultados obtidos considerando o modelo de tensões residuais do EC 3 (1992) com os resultados de Zubydan (2011), tanto para os perfis UB quanto UC. Com a utilização do modelo do AISC LRFD (2016) ocorre boa proximidade entre os resultados apenas nas análises dos perfis UB. Tais seções transversais apresentam a altura maior em relação à dimensão da base, com isso, as tensões residuais de compressão nas extremidades das mesas se equivalem às tensões σ_r do EC 3 (1992) aproximando consideravelmente as respostas (Figura 5.1(b)).

A Figura 5.2(b) não apresenta a mesma convergência entre os resultados utilizando as abordagens normativas descritas no item 2.5.1. Verificou-se que em todos os casos analisados, as seções com o modelo de tensões residuais do AISC LRFD (2016) começaram a perder rigidez à flexão para valores maiores de momento fletor do que as seções com o modelo do EC 3 (1992). Essa situação ocorre pois para os perfis UC, equivalentes aos perfis H, a prescrição do EC 3 (1992) define o valor de σ_r como $0.5f_y$ e no AISC LRFD (2016) os mesmos valores atribuídos às seções I são utilizados neste caso, ou seja, $\sigma_{rc} = 0.3f_y$. Como as tensões de tração são sempre menores que a de compressão, pode-se afirmar que o AISC LRFD (2016) apresenta uma margem maior para que a seção transversal trabalhe dentro do regime elástico.

Para validar a afirmação feita anteriormente são ilustradas as curvas de interação entre

(a) Relações $M \times \phi$ (b) Variações $M \times EI_y$ **Figura 5.1** – Comportamento das seções UB

o esforço normal e o momento fletor nas Figuras 5.3 e 5.4. Verifica-se que as abordagens já presentes na literatura (CHAN; CHUI, 2000; SILVA, 2009) se equiparam com as curvas de início de plastificação (CIP) obtidas usando o modelo de distribuição das tensões residuais do EC 3 (1992) em elementos fletidos em torno do eixo de maior inércia. Ao verificar as CIPs considerando o modelo do AISC LRFD (2016), uma assimetria em relação ao eixo horizontal pode ser observada. Tal fato é determinado pela distribuição constante de tensões residuais de tração na alma do perfil. Sob esforços normais de tração, os valores

(a) Relações $M \times \phi$ (b) Variações $M \times EI_y$ **Figura 5.2** – Comportamento das seções UC

de σ_{rt} são determinantes na obtenção da CIP e o valor de σ_{rc} quando sob compressão, colaborando para uma maior região elástica nos diagramas $N \times M$.

Porém, ao analisar as CIPs no eixo de menor inércia a assimetria no eixo horizontal é mais acentuada. Percebe-se então uma divergência no comportamento das curvas obtidas para os eixos de maior e menor inércia. Verificou-se que o comportamento ilustrado nas curvas provém dos modelos apresentarem suas maiores tensões de tração na alma e no centro das mesas, sobre o centroide plástico da seção no eixo de flexão. Assim, sob cargas

de compressão, o comportamento é perfeitamente linear com maior influencia do momento fletor. Sob tração, a carga axial se torna mais relevante, mudando completamente a forma da curva.

Três pontos são destacados na Figura 5.3(b): A, B e C. O ponto A representa a situação em que a seção transversal mostra o maior momento de flexão dentro do regime elástico. Para as seções UB, é evidente que esse ponto é coincidente para ambos os modelos de tensões residuais, EC 3 (1992) e AISC LRFD (2016). Isso ocorre porque ambos os modelos apresentam tensões de compressão nas extremidades das mesas iguais a $0.3f_y$. Note que, para a flexão em torno do eixo de menor inércia, essas tensões são responsáveis pela determinação do momento de flexão elástico máximo possível na seção. Para atingi-lo, é necessária uma força de tração axial, N_A , capaz de anular o valor das tensões residuais de compressão ($0.3f_y$), ou seja:

$$N_A = A_g (0.3f_y) \quad (5.1)$$

em que A_g é a área da seção de aço e f_y é a tensão de escoamento do material. Assim, as tensões residuais máximas de compressão se anulam antes da aplicação do momento de flexão, que no ponto A, é dado por:

$$M_A = W_y f_y \quad (5.2)$$

em que W_y é o módulo resistente elástico da seção no eixo de menor inércia.

Os pontos B e C se diferem pelos valores máximos de tensões residuais de tração prescritos nas normas de projeto e abordados na Seção 2.5.1.

A Equação 2.60 define que a tensão residual de tração no meio das mesas e nas extremidades da alma, dada pelo EC 3 (1992) para seções UB, é de $0.3f_y$, mesmo valor adotado para as partes comprimidas da seção transversal.

Entre o ponto B e o eixo vertical, é evidente uma reta quase horizontal, indicando que as tensões geradas pela carga axial nesse ponto juntamente com as tensões residuais de tração ($0.3f_y$) são praticamente iguais a f_y . Ou seja, $N_B = A_g (0.7f_y)$. Em relação ao momento de flexão, deve-se notar que as tensões normais geradas por N_B são de tração, aliviando as tensões residuais de compressão ($-0.3f_y$) nas extremidades das mesas. Assim, M_B pode ser definido como $M_B = W_y (0.6f_y)$.

O AISC LRFD (2016) define σ_{rt} como uma função do valor das tensões residuais

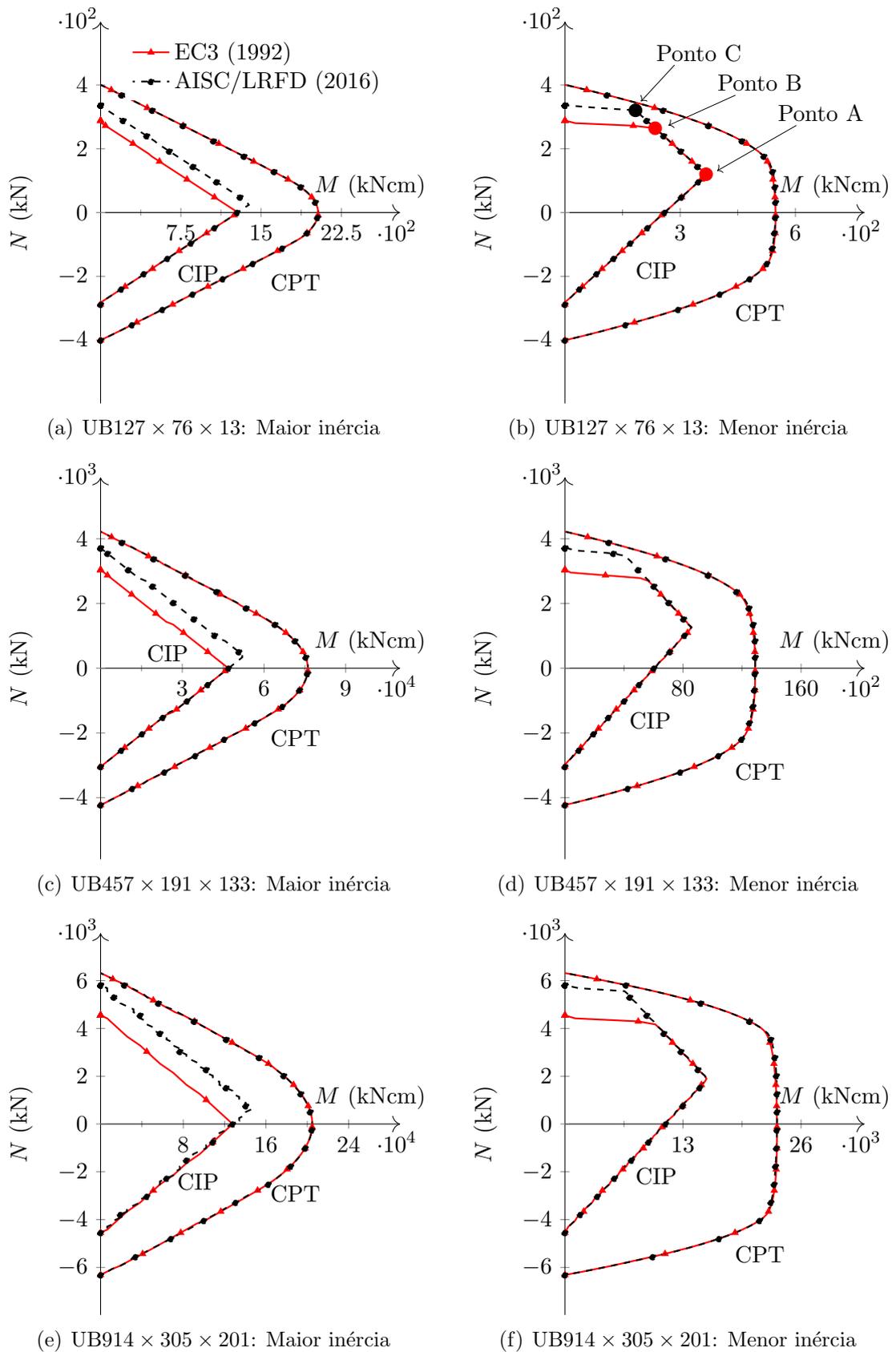
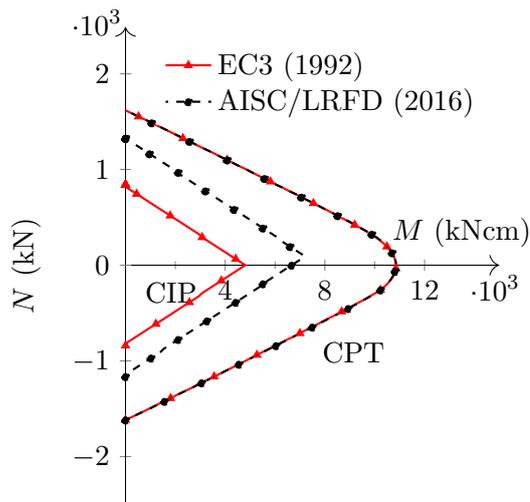
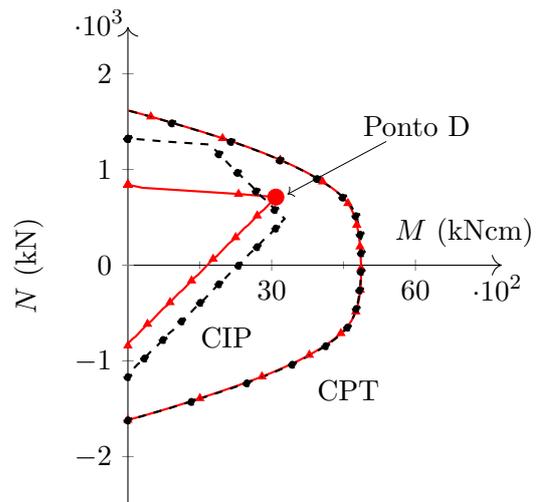


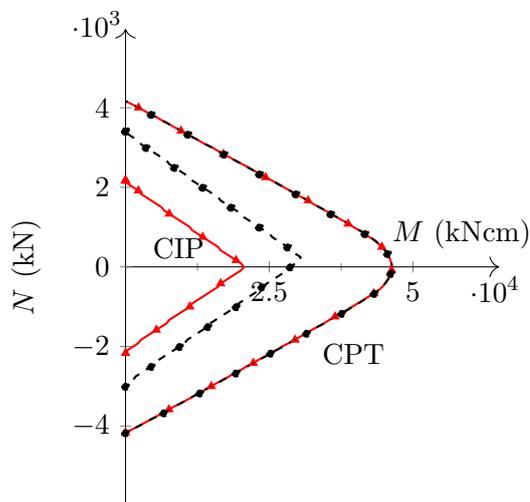
Figura 5.3 – Curvas de interação esforço normal-momento fletor para as seções UB



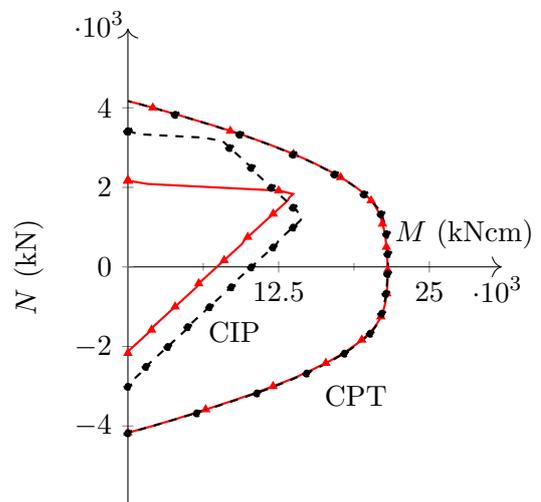
(a) UC152 × 152 × 51: Maior inércia



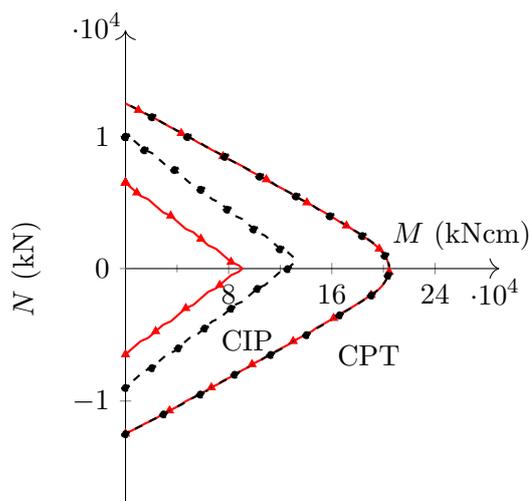
(b) UC152 × 152 × 51: Menor inércia



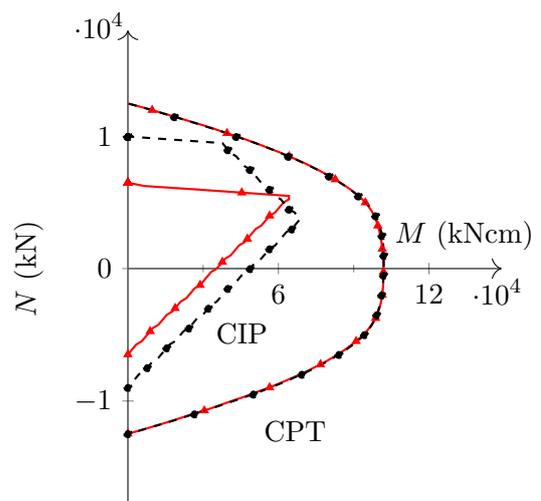
(c) UC254 × 254 × 132: Maior inércia



(d) UB254 × 254 × 132: Menor inércia



(e) UB914 × 305 × 201: Maior inércia



(f) UB914 × 305 × 201: Menor inércia

Figura 5.4 – Curvas de interação esforço normal-momento fletor para as seções UC

máximas de compressão, σ_{rc} . Na Equação 2.61, é mostrado intuitivamente que em todos os casos σ_{rt} é inferior a σ_{rc} . Pode-se afirmar que, para esta norma, o regime elástico é maior do que no EC 3 (1992), como se vê nas Figuras 5.3 e 5.4. O ponto C é analisado da mesma maneira que o ponto B, mas usando as considerações da norma americana.

O ponto D mostrado na Figura 5.4(b) segue a mesma abordagem mostrada nas curvas das seções UB. Destaca-se que as seções UC apresentam uma forma aproximadamente quadrada, modificando o valor de σ_r dado pela norma europeia. Nessa situação $\sigma_r = 0.5f_y$. Assim, a força de tração axial responsável pela definição do ponto D é $N_D = A_g(0.5f_y)$. Neste caso, o momento máximo de flexão é obtido como descrito para o ponto A, discutido anteriormente para as seções UB. No entanto, a tensão gerada pela força N_D anula as tensões residuais de compressão e, ao mesmo tempo, aumenta as tensões de tração nas extremidades da alma, que atingem o valor de f_y . Essa descrição é muito clara na Figura 5.4 quando o modelo de tensões residuais do EC 3 (1992) é usado na flexão em torno do eixo de menor inércia.

Com os resultados obtidos, evidencia-se a necessidade de se revisar as curvas de início de plastificação CIP para as seções de aço I submetidas à flexão no eixo de menor inércia. Com a breve descrição dos pares ordenados referentes aos pontos A, B, C e D é possível desenhar curvas simplificadas onde o procedimento não linear localizado na seção transversal pode ser evitado reduzindo o tempo de processamento em análises numéricas via Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR).

5.2.2 Seção mista totalmente revestida

Chiorean (2013) apresentou um estudo da seção mista de aço e concreto ilustrada na Figura 5.5. Trata-se de um perfil W12x120 totalmente revestido com concreto e armado com quatro barras de 20 mm de diâmetro. Os dados dos materiais utilizados na seção transversal são mostrados na Tabela 5.1. Além disso, destaca-se que as deformações limites do concreto ε_{ci} e ε_{cu} foram tomadas como 0.002 e 0.0035, e a deformação última do aço, ε_u , tida como 0.01. O amolecimento do concreto foi simulado através do parâmetro $\gamma = 0.15$ e para a descrição do comportamento à tração do concreto foi considerado $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 0.75$.

Chiorean (2013) realizou várias análises usando os dois modelos de distribuição de tensões residuais para perfis I descritos na Seção 2.5.1. Todas essas análises foram feitas

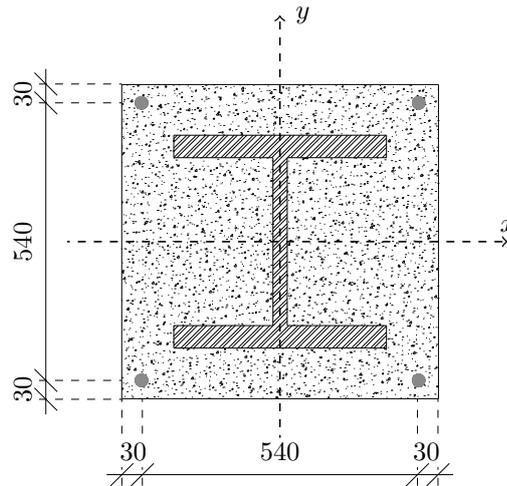


Figura 5.5 – Perfil W12x120 totalmente revestido com concreto

Tabela 5.1 – Dados dos materiais

Aço do perfil		Aço das barras		Concreto
f_y (kN/cm ²)	E_a (kN/cm ²)	f_{pyd} (kN/cm ²)	E_s (kN/cm ²)	f_c (kN/cm ²)
30	20000	40	20000	2

também no presente trabalho com o intuito de calibrar os modelos e assim aferir as CIPs e CPTs da seção mista estudada. Outro objetivo presente nas análises dessa seção, está na avaliação da influência da proposta da deformação limite do regime elástico do concreto ($\epsilon_{ci}/2$), estabelecida por Fong e Chan (2012) sobre os modelos de tensões residuais na definição das CIPs.

A seguir são apresentadas as relações momento-curvatura (Figuras 5.6(a) e 5.7(a)) e curvas momento fletor-rigidez à flexão (Figuras 5.6(b) e 5.7(b)) para o eixo de maior inércia e, em todos os casos, os resultados foram comparados com a literatura. Para cada uma das curvas foram fixados valores de esforço normal, tais como: 4000 kN, 8000 kN e 12000 kN, e assim o procedimento descrito no item 2.5.4 foi utilizado.

Em todas as análises foram observadas boas concordâncias com os resultados obtidos por Chiorean (2013). Vale destacar que, em alguns casos, as relações momento-curvatura encontradas no presente trabalho são menos dúcteis do que as da literatura. Embora os procedimentos utilizados sejam semelhantes, os critérios de parada são diferentes, o que pode influenciar diretamente no ponto limite das relações momento-curvatura.

As curvas das Figuras 5.6(b) e 5.7(b) demonstram em todos os casos uma queda de rigidez acentuada. Essa queda está relacionada com o início da fissuração nas fibras

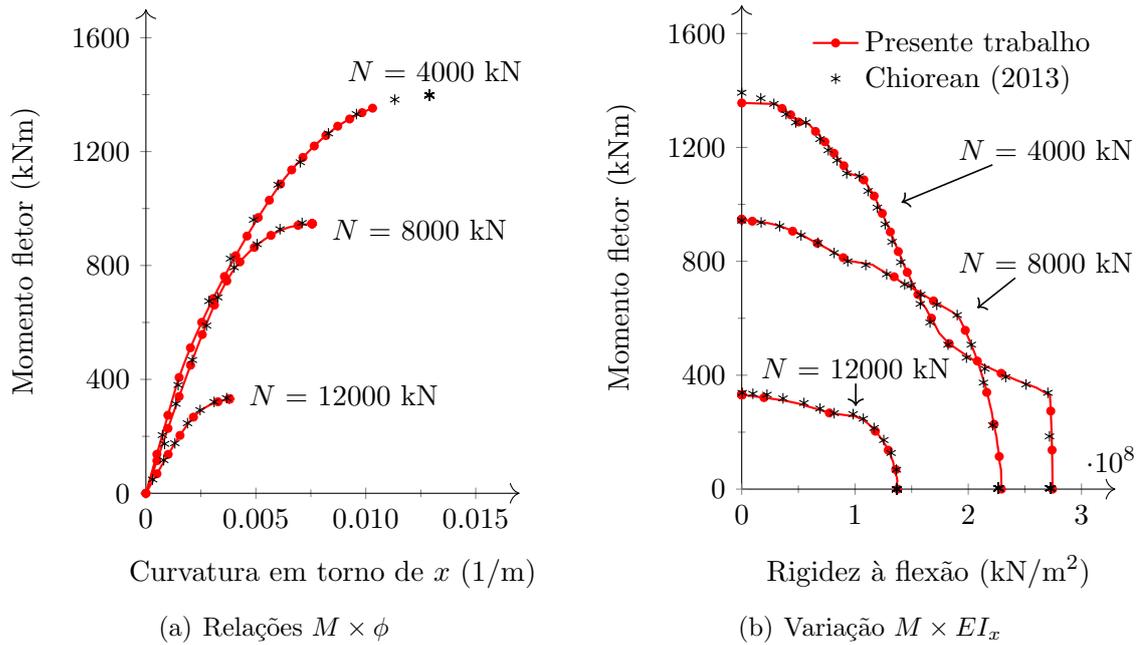


Figura 5.6 – Comportamento da seção com o modelo de tensões residuais do EC 3 (1992)

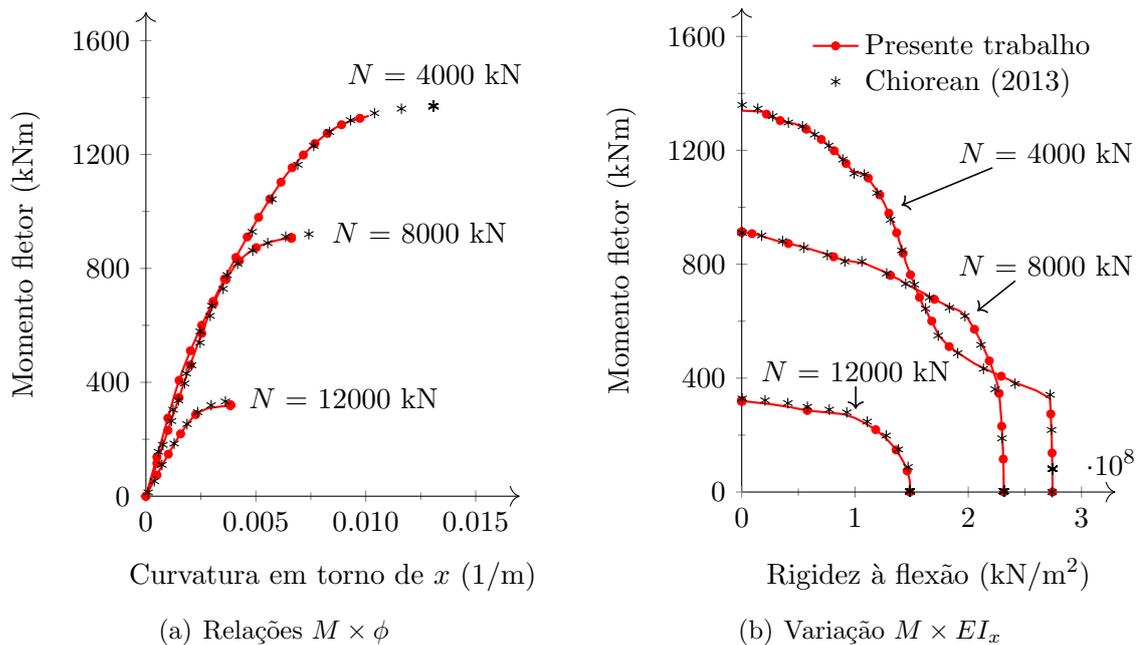


Figura 5.7 – Comportamento da seção com o modelo de tensões residuais do AISC LRFD (2010)

mais tracionadas e conseqüentemente diminuição do módulo de elasticidade tangente do concreto. Note que nas abordagens da literatura para estruturas mistas (FONG; CHAN, 2012; LEMES, 2015) esse fato é considerado de forma aproximada, como por exemplo a redução de 40% da rigidez à flexão da seção de concreto armado (LEMES, 2015). Assim, para eliminar essa aproximação deveriam haver três curvas dentro do diagrama $N \times M$.

Além das CPT e CIP, há a necessidade de uma curva de início de fissuração (CIF), discutida no Anexo ??, para uma simulação mais realista.

Nas Figuras 5.8(a) e 5.8(b) são apresentadas tanto as CIPs quanto as CPTs obtidas utilizando as prescrições do EC 3 (1992) e do AISC LRFD (2010). Nota-se pouca variação em relação às CPTs, porém as CIPs foram bastante diferentes.

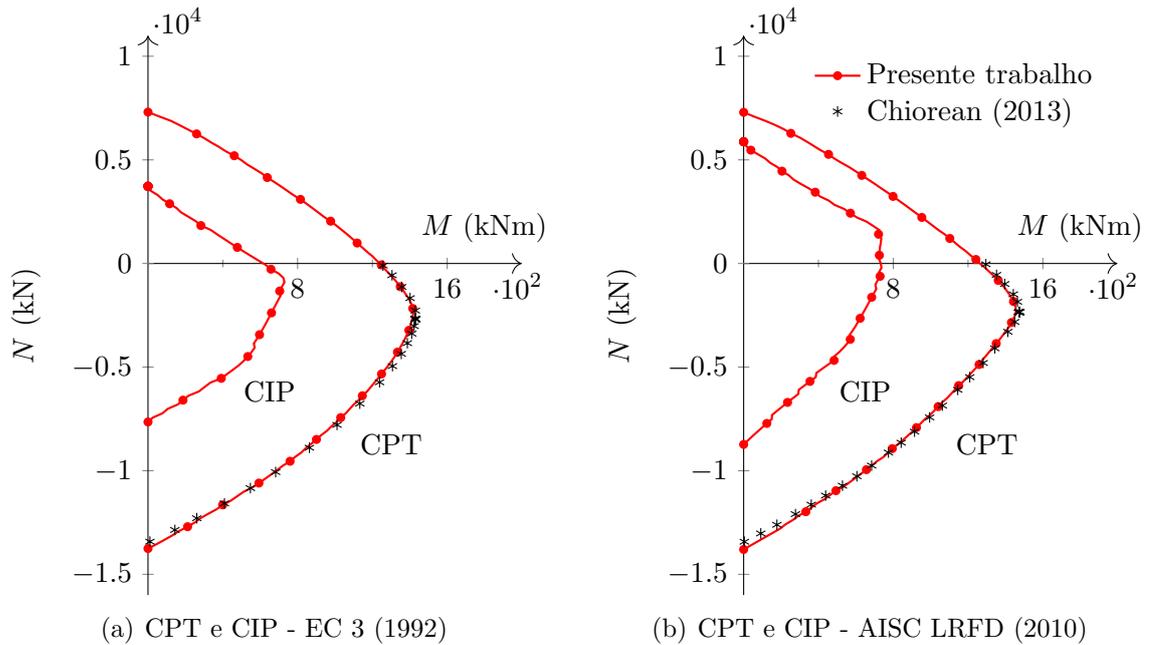


Figura 5.8 – Seção mista: curvas de interação $N \times M$ para o eixo de maior inércia

A comparação das relações momento-curvatura (Figura 5.9(a)) e das curvas $M \times EI$ (Figura 5.9(b)) mostram uma leve divergência nas respostas usando o EC 3 (1992) e o AISC LRFD (2010).

As mesmas observações feitas para as análises em torno do eixo de maior inércia podem ser feitas, agora, para o eixo de menor inércia (Figuras 5.10(a) - 5.13(b)), que, embora apresente curvas com valores diferentes, o comportamento observado é bastante semelhante.

As comparações das curvas CIPs e CPTs usando as duas normas são apresentadas na Figura 5.14. Como pode-se observar há uma leve diferença nas CPTs usando os tensões residuais do EC 3 (1992) e do AISC LRFD (2010). O fator principal das comparações está nas CIPs. Verifica-se uma divergência significativa para os eixos de menor e de maior inércia, e nas duas situações o modelo do AISC LRFD (2010) proporcionou uma região de comportamento elástico maior dentro dos diagramas $N \times M$.

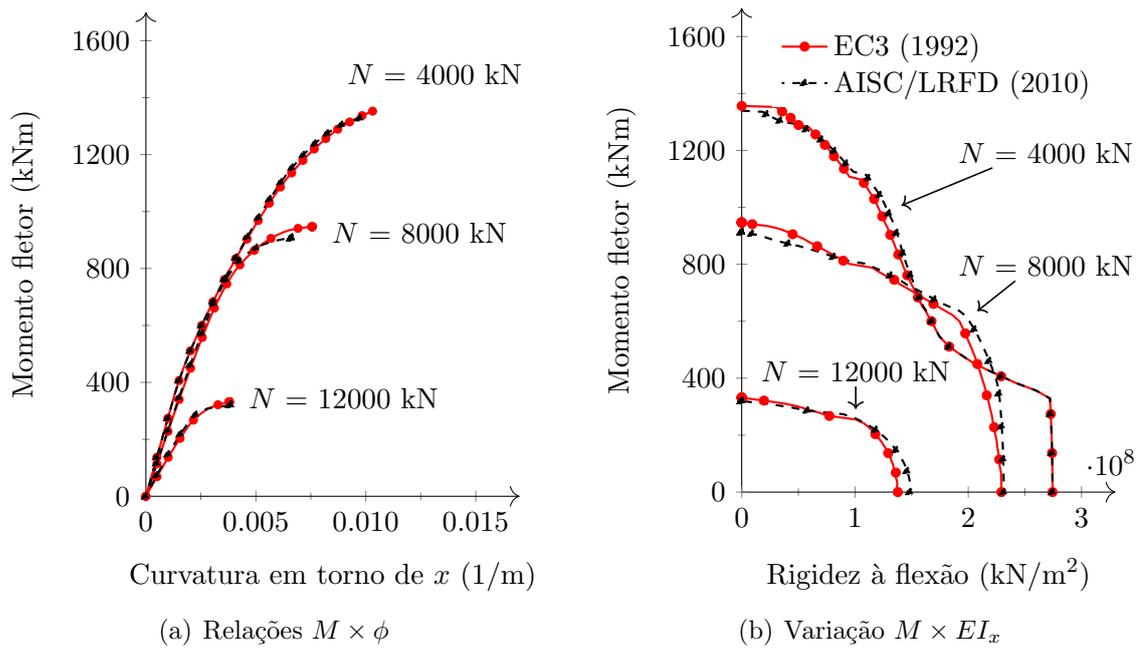


Figura 5.9 – Comparação do comportamento da seção usando os dois modelos normativos para as tensões residuais

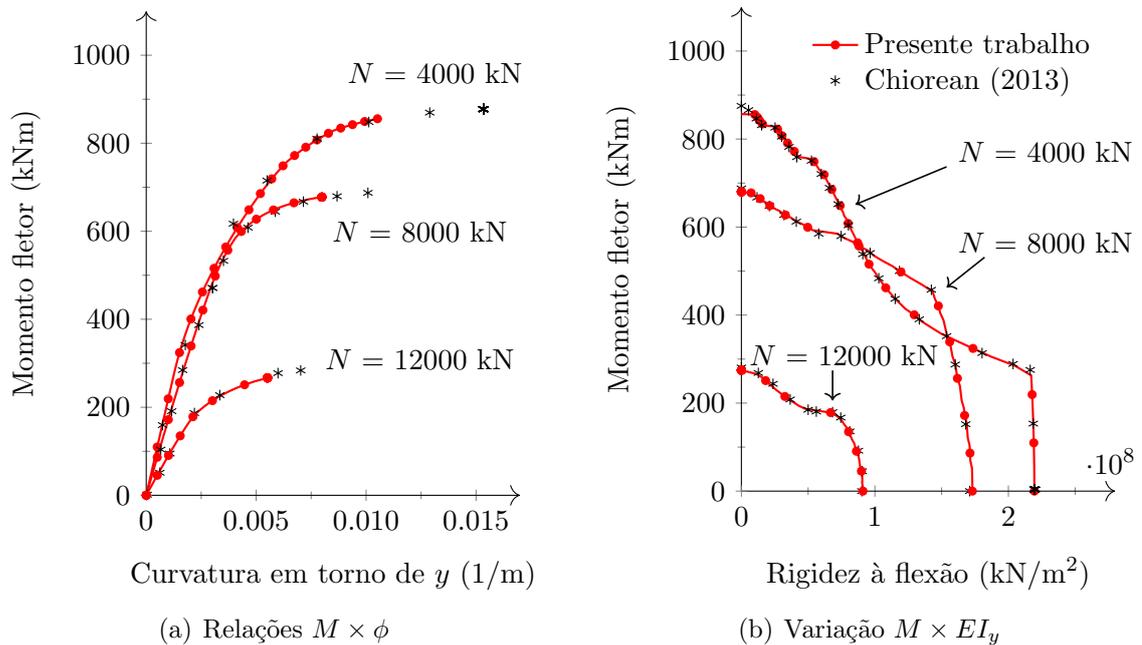


Figura 5.10 – Comportamento da seção com o modelo de tensões residuais do EC 3 (1992)

5.3 Análise de Vigas Isoladas

5.3.1 Viga de aço

Uma viga de aço biengastada é estudada neste item. Trabalhos anteriores envolvendo esse problema (NEAL, 1977; CHEN; SOHAL, 1995) foram feitos considerando uma seção

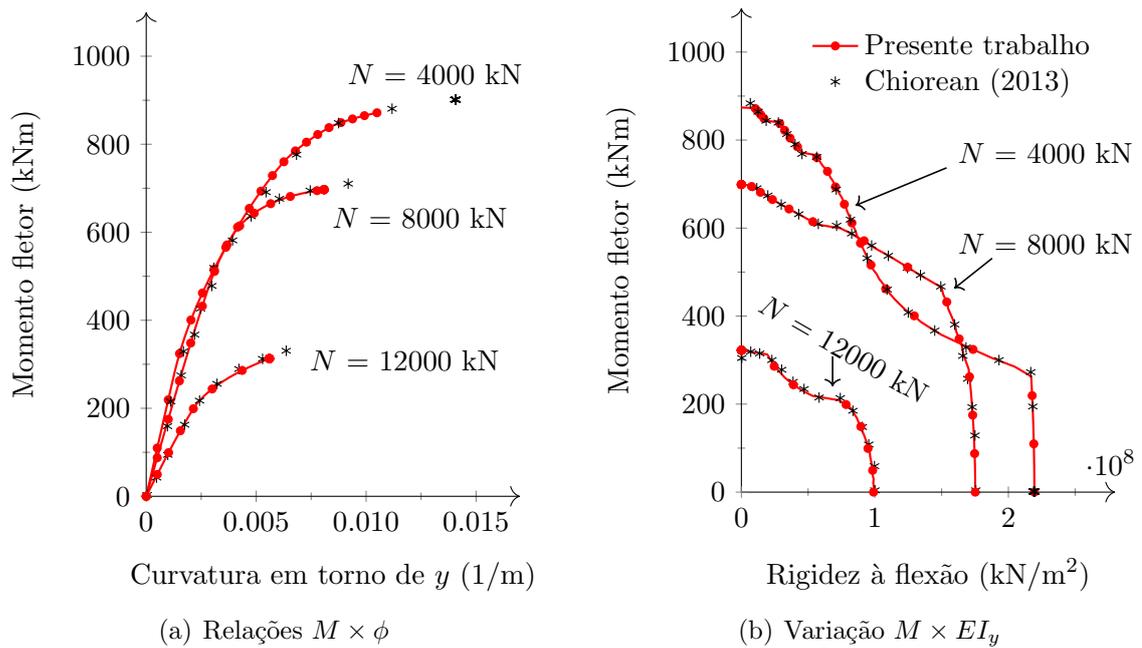


Figura 5.11 – Comportamento da seção com o modelo de tensões residuais do AISC LRFD (2010)

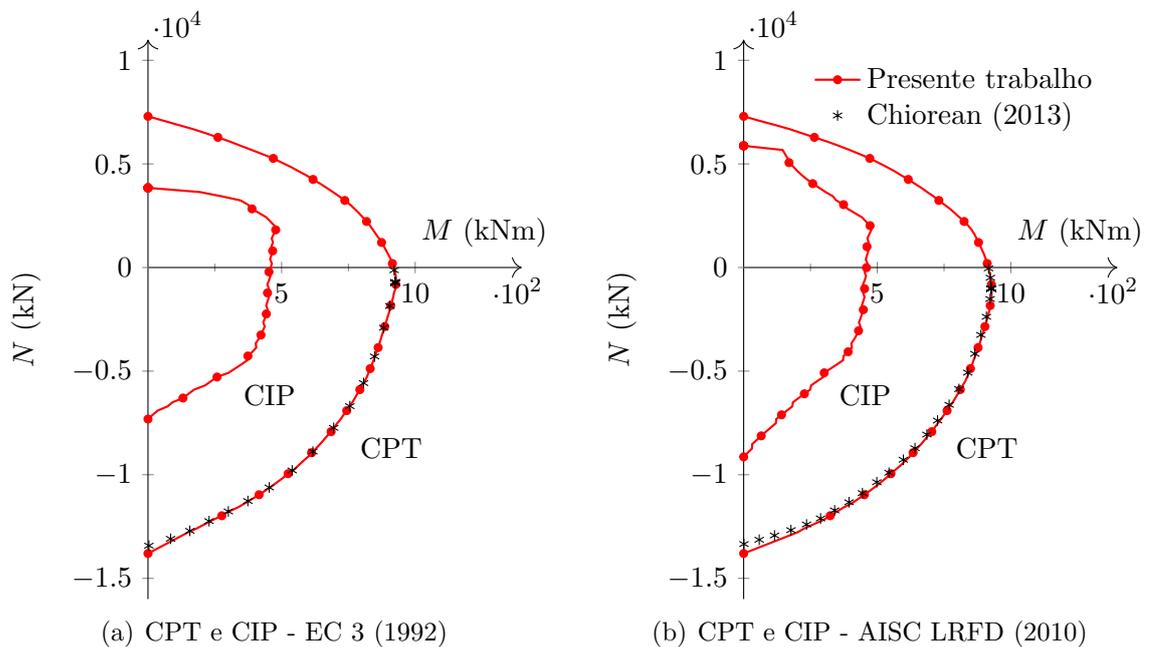


Figura 5.12 – Seção mista: curvas de interação $N \times M$ para o eixo de menor inércia

retangular para a viga. Liew *et al.* (1992) modificaram a seção para um perfil laminado americano e introduziram no modelo as tensões residuais (ALVARENGA, 2005). Trata-se de uma viga de aço composta por um perfil WF 8×48 com comprimento $L = 300$ cm com uma carga vertical concentrada aplicada a $L/3$ do engaste da esquerda, como ilustrado na Figura 5.15. Nessa figura também é ilustrada a malha de elementos finitos utilizada nas

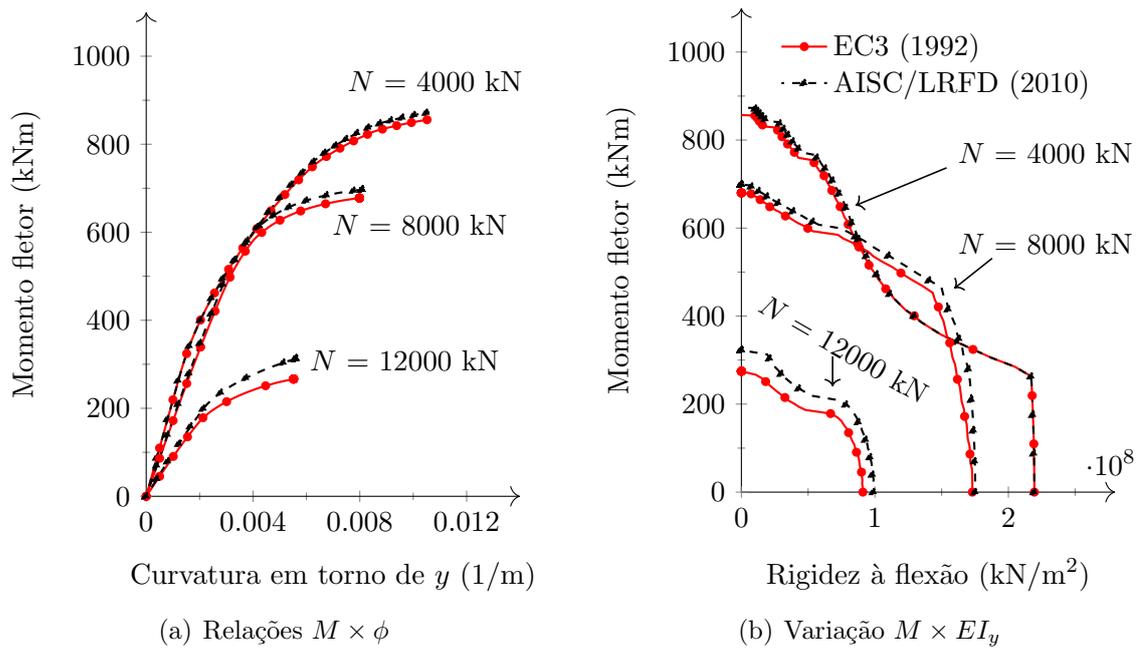


Figura 5.13 – Comparação do comportamento da seção usando os dois modelos normativos para as tensões residuais

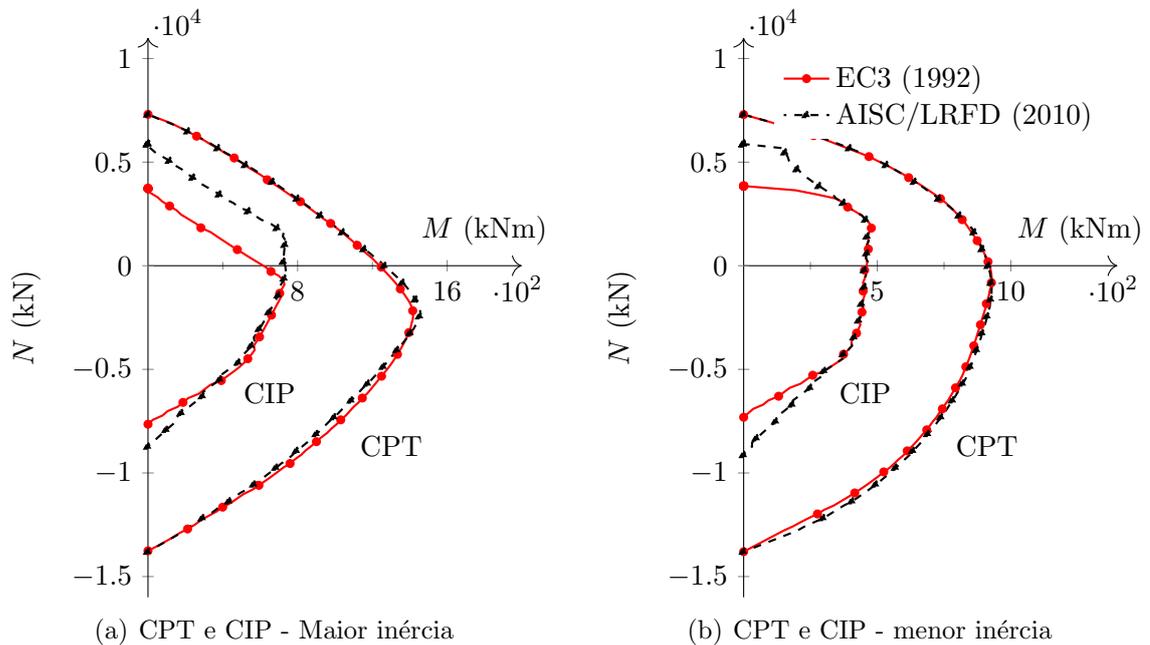


Figura 5.14 – Seção mista: curvas de interação

análises (3 elementos e 4 pontos nodais). O aço utilizado é o ASTM A7 com $f_y = 23.5$ kN/cm² e $E_a = 20500$ kN/cm². Para o exemplo em questão o modelo de tensões residuais do EC 3 (1992) é utilizado.

Na Figura 5.16 são mostradas as trajetórias de equilíbrio obtidas utilizando a formulação proposta no presente trabalho. São feitas duas análises: com e sem tensões residuais.

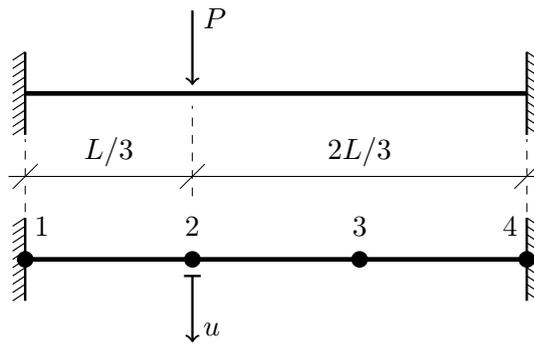


Figura 5.15 – Viga de aço biengastada

Verifica-se boa concordância com os resultados de Alvarenga (2005), que utilizou uma formulação que considera a plasticidade de forma distribuída. Nota-se que na análise considerando as tensões residuais a estrutura apresentou uma deslocabilidade um pouco maior ($u = 1.59$ cm) em relação ao resultado desconsiderando-as ($u = 1.33$ cm). O processo de degradação da rigidez ocorre nos pontos nodais da estrutura seguindo a metodologia do MRPRM, e dessa forma a análise é interrompida quando ocorre a formação de 3 rótulas plásticas na estrutura, número suficiente para formar um mecanismo. A primeira rótula se forma no nó 1, em seguida forma-se outra rótula no nó 2 e por fim no nó 4. Vale ressaltar que não há degradação da rigidez do nó 3.

As Tabelas 5.2 e 5.3 descrevem os valores de carga λP responsáveis pela formação de cada uma das rótulas formadas na estrutura.

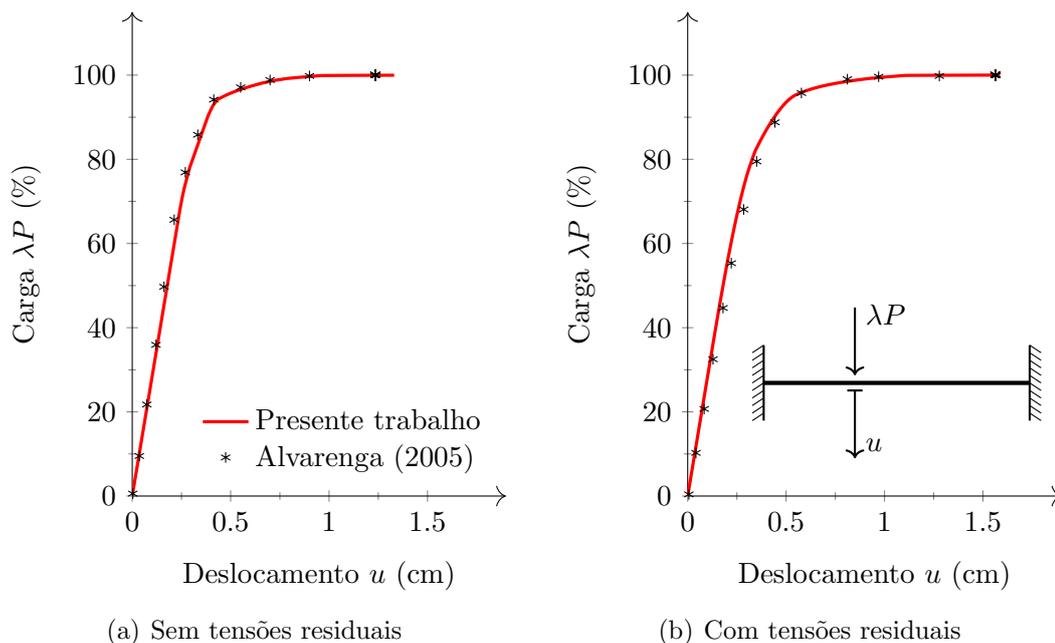


Figura 5.16 – Trajetórias de equilíbrio

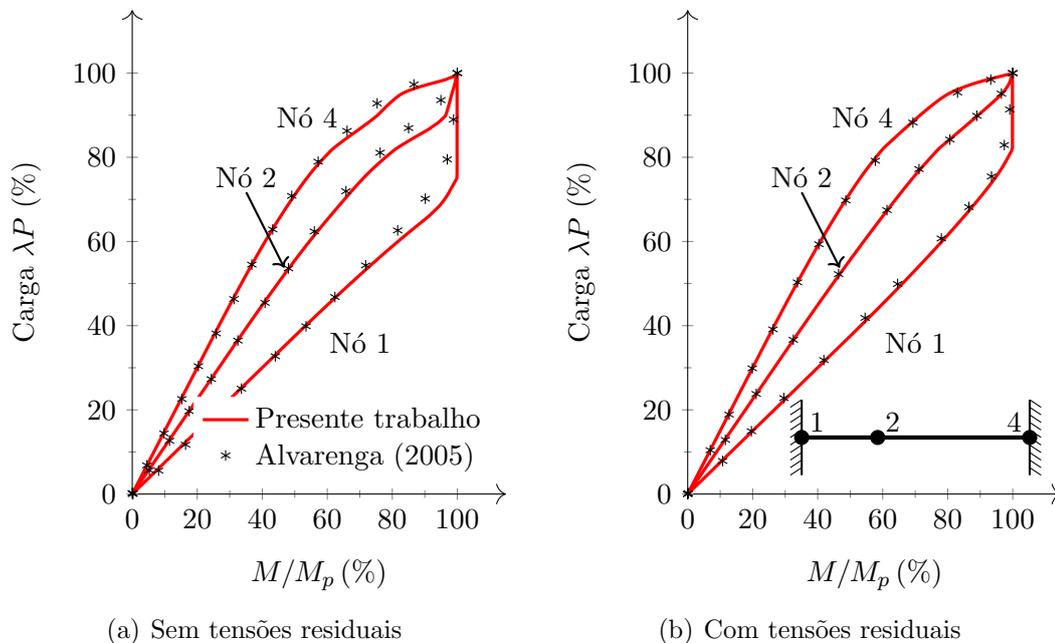
Tabela 5.2 – Valores $\lambda PL/M_p$ de formação das rótulas plásticas sem tensões residuais

Rótulas	Liew <i>et al.</i> (1992)	Chan e Chui (2000)	Alvarenga (2005)	CS-ASA
1 ^a	6.75	6.76	8.01	6.91
2 ^a	8.63	8.65	8.77	8.76
3 ^a	8.91	8.99	9.00	8.99

Tabela 5.3 – Valores $\lambda PL/M_p$ de formação das rótulas plásticas com tensões residuais

Rótulas	Liew <i>et al.</i> (1992)	Chan e Chui (2000)	Alvarenga (2005)	CS-ASA
1 ^a	8.31	8.25	8.01	7.38
2 ^a	8.78	8.82	8.64	8.81
3 ^a	8.91	8.97	9.00	8.97

Alvarenga (2005) analisou as forças internas (momento fletor) em pontos específicos da viga (nós 1, 2 e 4) e plotou dois gráficos referentes à variação da carga vertical aplicada (λP) pelo momento interno atuante nos pontos de interesse, como dado na Figura 5.17. Note que para as duas análises, considerando ou não as tensões residuais, os três pontos avaliados atingem o momento de plastificação, resultando na formação de rótulas plásticas.

**Figura 5.17** – Variação do momento fletor interno em relação à carga aplicada

Vê-se boa concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e os fornecidos por Alvarenga (2005), validando assim a formulação proposta no presente trabalho

(MRPRM) para a análise de vigas de aço considerando ou não as tensões residuais.

5.3.2 Viga de concreto armado

As vigas de concreto armado ensaiadas por Beber (2003) e ilustradas na Figura 5.18 são, agora, simuladas numericamente via CS-ASA. O referido autor fez ensaios em duas vigas geometricamente idênticas, sendo denominadas como VT1 e VT2 (STRAMANDINOLI; ROVERE, 2008). Tratam-se de duas vigas simplesmente apoiadas com vão de 235 cm e solicitadas por cargas verticais incrementais igualmente espaçadas. A seção transversal apresenta armadura positiva dada por duas barras de 10 mm de diâmetro, e a armadura negativa por duas barras de 6 mm, como pode ser visto na Figura 5.18(b). Os parâmetros de resistência e de rigidez dos materiais utilizados são apresentados na Tabela 5.4. Neste exemplo, optou-se por descrever o comportamento do concreto comprimido com amolecimento, através do parâmetro γ . Sob tração, a relação constitutiva bilinear (Figura 2.11) é utilizada (BAŽANT; OH, 1983; BRATINA *et al.*, 2004).

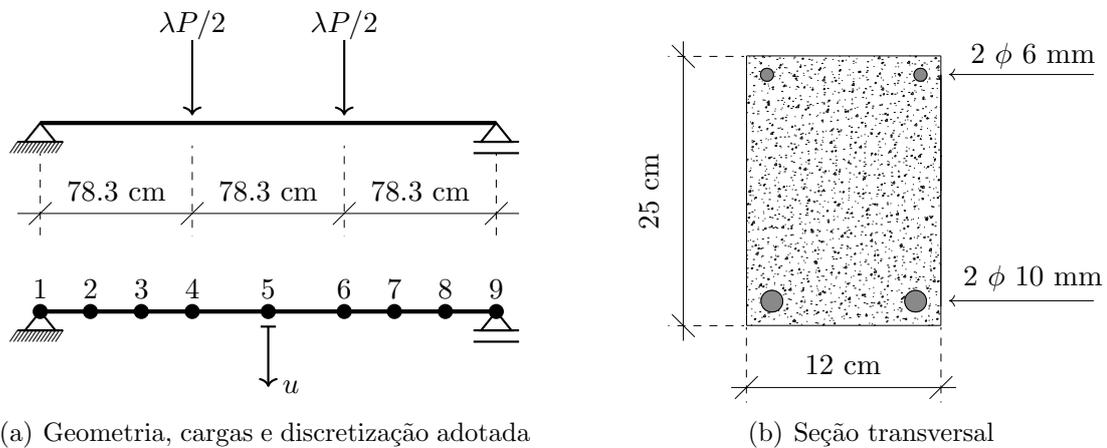


Figura 5.18 – Viga de concreto armado

Tabela 5.4 – Dados dos materiais da viga de concreto armado (em kN, cm)

Concreto					Aço		
f_c	f_{cr}	ε_{ci}	ε_{cu}	γ	f_{pyd}	E_s	ε_{pud}
3.35	0.262	-0.002	-0.0035	0.15	56.5	21480	0.060

Stramandinoli e Rovere (2008) destacaram que cada uma das linhas de armaduras possuem diferentes tensões de escoamento, e ainda, a armadura negativa (comprimida) apresenta encruamento com módulo de elasticidade igual a $0.016E_s$. Porém, mantendo

as considerações da Seção 2.5.3 do presente trabalho, optou-se por considerar que ambas as linhas de armaduras apresentassem o mesmo comportamento (elastoplástico perfeito) e com o mesmo valor de tensão de escoamento.

O resultado obtido por meio da simulação numérica é comparado com os experimentais de Beber (2003) e ilustrado na Figura 5.19. Verifica-se uma boa precisão da resposta obtida com a formulação proposta. Como já mencionado, as vigas VT1 e VT2 são iguais. A simplificação na descrição do comportamento do aço não altera significativamente a resposta numérica. Isso pode ser afirmado pois no ramo ascendente da trajetória de equilíbrio, as armaduras se encontram em regime elástico. O início de escoamento (IE) da armadura tracionada é verificado para a carga total, λP igual a 45.93 kN, ponto referente à transição entre o trecho ascendente e o patamar na trajetória de equilíbrio. Já o escoamento das barras comprimidas se iniciou com uma carga um pouco maior, 46.07 kN.

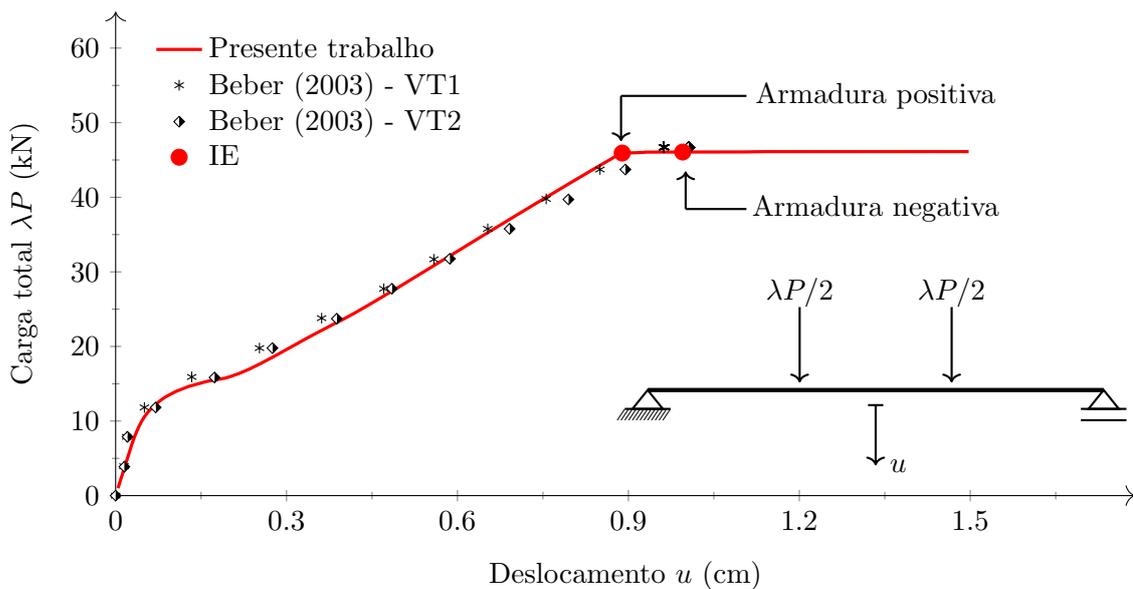


Figura 5.19 – Trajetória de equilíbrio - viga de concreto armado

5.3.3 Viga mista com interação total

Slutter e Driscoll (1965) analisaram experimentalmente a viga mista contínua ilustrada na Figura 5.20. Posteriormente, Liew *et al.* (2001), Nie *et al.* (2011) e Chiorean (2013) validaram suas formulações numéricas comparando seus resultados com os obtidos em laboratório. Trata-se de uma laje de concreto apoiada sobre um perfil metálico, com

completa interação entre os materiais. O concreto apresenta resistência máxima à compressão igual a 1.6 kN/cm^2 e deformação ε_{ci} tomada igual a -0.002 . O aço é modelado com módulo de elasticidade inicial de 20000 kN/cm^2 e tensão de escoamento, f_y , de 25.24 kN/cm^2 . Por se utilizar um modelo trilinear para a descrição do comportamento do aço, os dados fornecidos por Chiorean (2013) serão utilizados para a consideração do encruamento, sendo E_{a2} e E_{a3} tidos como 0 e 100 kN/cm^2 , respectivamente. As deformações ε_2 e ε_u são dadas, respectivamente, por $10\varepsilon_y$ e 2.5% . A estrutura é solicitada por quatro cargas concentradas que são incrementadas, sendo duas em cada um dos vãos da viga. Serão utilizadas duas malhas de elementos finitos a fim de verificar a eficiência da avaliação da plastificação concentrada em vigas mistas (seção monossimétrica) em regiões de momento negativo. A primeira malha consiste em 6 elementos convencionalmente dispostos; em seguida essa malha é refinada e serão utilizados 12 elementos, como apresentado na Figura 5.20(a).

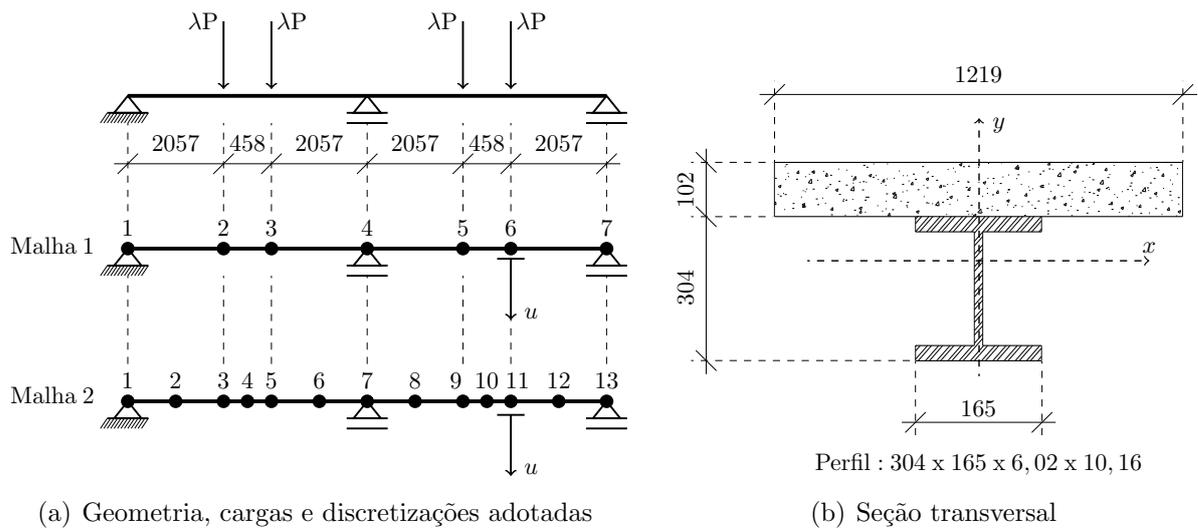


Figura 5.20 – Viga mista com interação total

O comportamento do sistema é avaliado através da curva carga $\lambda P \times$ deslocamento vertical u mostrado na Figura 5.21. Neste problema, verificou-se uma maior sensibilidade ao refinamento da malha. A malha menos refinada (malha 1) apresentou resultados mais conservadores se comparados com os outros resultados numéricos (malha 2 e o obtido por Chiorean (2013)).

A proximidade entre as análises realizadas com a presente formulação e as respostas presentes na literatura indicam a validade do acoplamento MRPRM também para seções monossimétricas. A modelagem de vigas mistas via MRPR normalmente é feita através

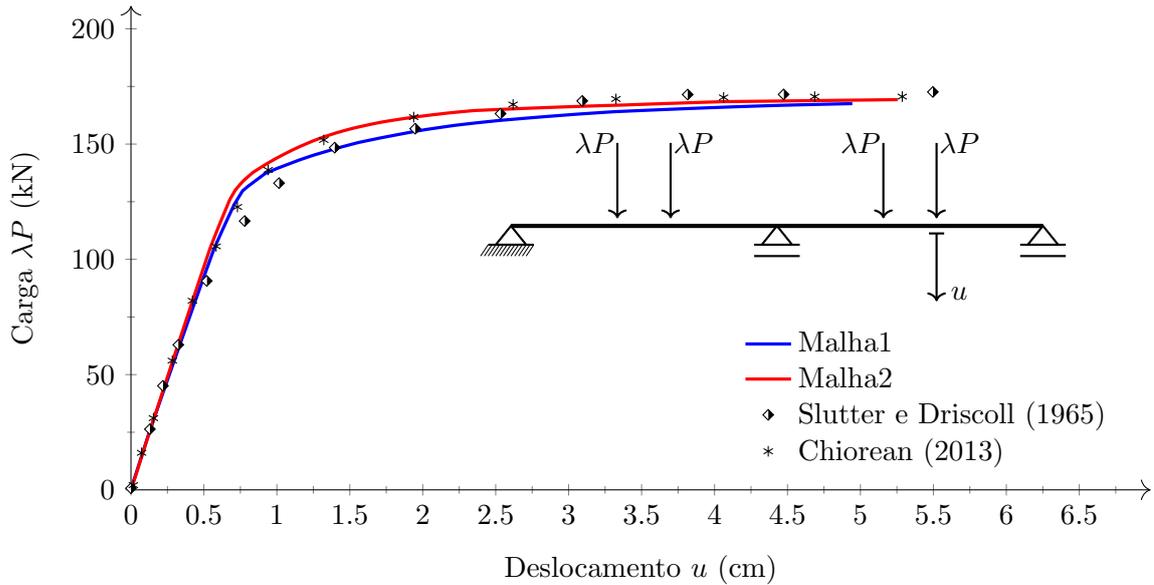


Figura 5.21 – Trajetória de equilíbrio - viga mista com interação total

de expressões aproximadas, baseadas na homogeneização da seção transversal (LIEW *et al.*, 2001; LEMES, 2015). Sendo a rigidez à flexão da seção da viga mista calculada de forma aproximada como a soma de frações das rigidezes nos trechos de momento positivo e de momento negativo. A utilização das relações momento-curvatura em cada um dos pontos nodais aumenta o grau de precisão na obtenção dos parâmetros EA e EI .

5.3.4 Viga mista simplesmente apoiada com interação parcial

Chapman e Balakrishnan (1964) realizaram ensaios experimentais em vigas mistas simplesmente apoiadas com interação parcial. Seus resultados foram, por muitas vezes, tomados como parâmetro de comparação por pesquisadores que desenvolveram modelos numéricos para a solução do referido problema (EL-LOBODY; LAM, 2003; QUEIROZ *et al.*, 2007; CHIOREAN; BURU, 2017). No presente trabalho, a viga denominada pelos autores dos ensaios como $E1$, ilustrada na Fig. 5.22, é estudada. Nessa mesma figura, são ilustrados o carregamento, a geometria, as malhas de elementos finitos e a seção transversal da viga. Trata-se de uma viga constituída por uma laje de concreto 15.24×121.9 cm conectada a um perfil de aço por meio de 100 conectores do tipo *stud*. Esses são dispostos em pares igualmente espaçados ao longo do comprimento da estrutura. O comportamento uniaxial do concreto é descrito pela relação constitutiva parábola-retângulo sem amolecimento ($\gamma = 0$) sob compressão, e pelo modelo de Vecchio e Collins (1986) sob tração. O encruamento do aço do perfil metálico é considerado apenas no terceiro trecho do modelo

trilinear, sendo esse efeito desprezado no aço das armaduras. Os dados dos materiais e dos conectores de cisalhamento usados na estrutura são apresentados na Tabela 5.5.

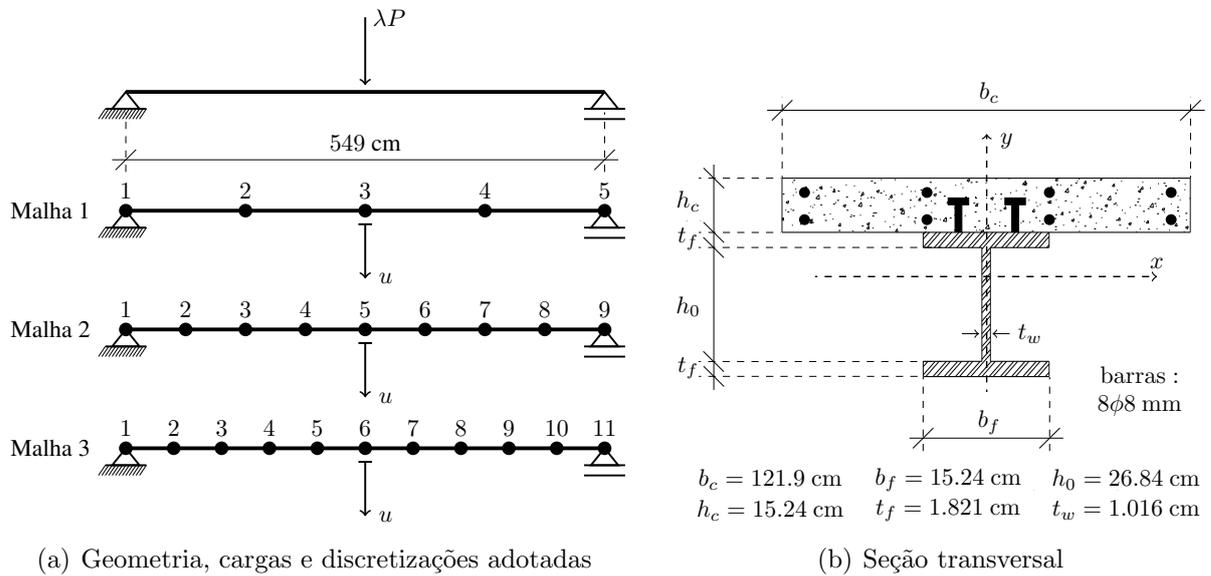


Figura 5.22 – Viga mista simplesmente apoiada com interação parcial

Tabela 5.5 – Dados dos materiais para a viga mista com interação parcial (em kN, cm)

Material	Dado/Valor	Material	Dado/Valor
Concreto	f_c 3.268	Aço - perfil	f_y 25.82
	ε_{ci} -0.0022		E_a 20200
	ε_{cu} -0.00395		E_{a2} 0
n_c 100	E_{a3} 350		
Conectores	n_{cl} 2		ε_u 0.0482
	e_s 12.1		f_{pyd} 32
	H_{max} 110	E_s 20500	

Na Tabela 5.5 foi fornecido um valor de f_y comum para a alma e para as mesas do perfil. Na literatura, as tensões de escoamento das chapas componentes da seção transversal são diferentes. De modo a adequar esse problema aos dados de entrada do CS-ASA, o momento de plastificação total da seção foi calculado considerando a distribuição de tensões plásticas na seção (dados experimentais: 24.94 kN/cm^2 nas mesas e 29.65 kN/cm^2 na alma). Em seguida, conhecendo-se o momento de plastificação e o módulo resistente plástico, chegou-se ao valor da tensão de escoamento equivalente de 25.82 kN/cm^2 , considerada aqui.

Na Figura 5.23 são ilustradas as trajetórias de equilíbrio encontradas com a formulação apresentada no presente trabalho para cada uma das três malhas definidas na Figura 5.22(a). É visível uma forte sensibilidade à malha utilizada, sendo as menos refinadas discrepantes em relação à carga limite da estrutura. Tal fato está diretamente ligado à concentração do efeito da interação parcial no ponto nodal. Ao considerar o deslizamento de todos os conectores dentro do comprimento de influência, l_{cod} , de forma igualitária e concentrados nos pontos nodais, são desconsideradas variações da força cortante na interface aço-concreto nas regiões adjacentes ao ponto nodal analisado. Porém, o refinamento da malha é suficiente para corrigir esse problema, como pode ser visto na curva carga-deslocamento referente à simulação da malha 3. Nessa malha, por sua vez, pode ser observada boa concordância da rigidez inicial e da capacidade limite de carga do modelo numérico em relação aos resultados experimentais (CHAPMAN; BALAKRISHNAN, 1964).

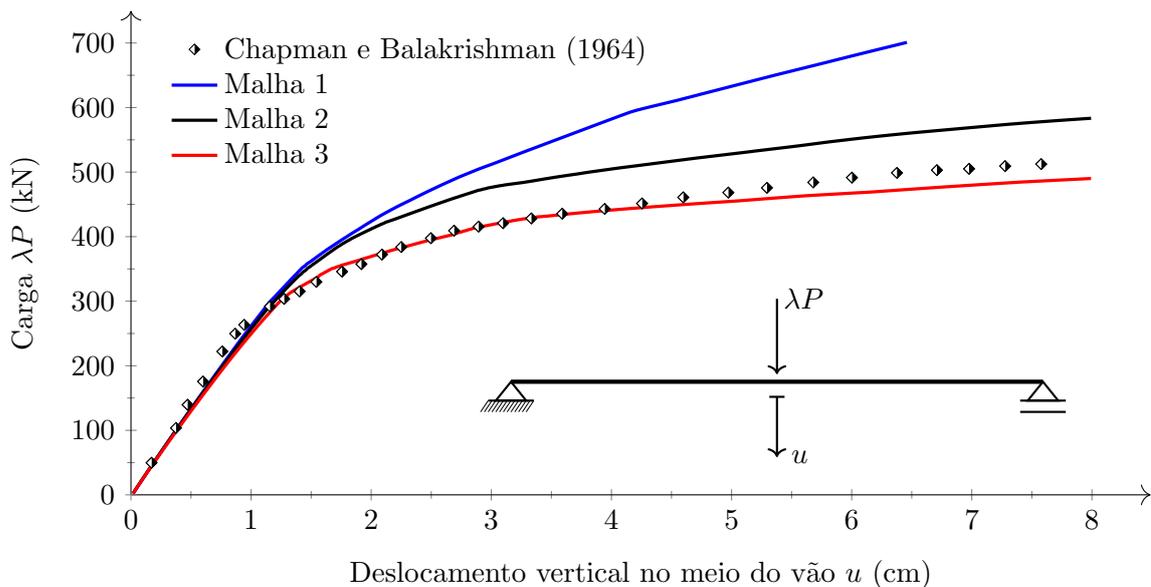


Figura 5.23 – Trajetória de equilíbrio - viga mista simplesmente apoiada com IP

5.3.5 Vigas mistas contínuas com interação parcial

Diferentemente do problema anterior, agora as vigas mistas com interação parcial são contínuas. Para isso, os resultados experimentais obtidos por Ansourian (1981) são utilizados como parâmetro de comparação. Três vigas mistas com interação parcial são testadas, sendo todas com dois vãos. Na viga intitulada VMIP-1 (viga mista com interação parcial 1) a carga é aplicada em apenas um dos vãos do elemento estrutural, $\lambda P_2 = 0$,

quando nas vigas VMIP-2 e VMIP-3 os dois vãos são igualmente carregados, $\lambda P_1 = \lambda P_2$. A Figura 5.24 ilustra uma situação genérica, sendo particularizada para os casos das vigas VMIP-1, VMIP-2 e VMIP-3 quando considerados os dados disponíveis na Tabela 5.6.

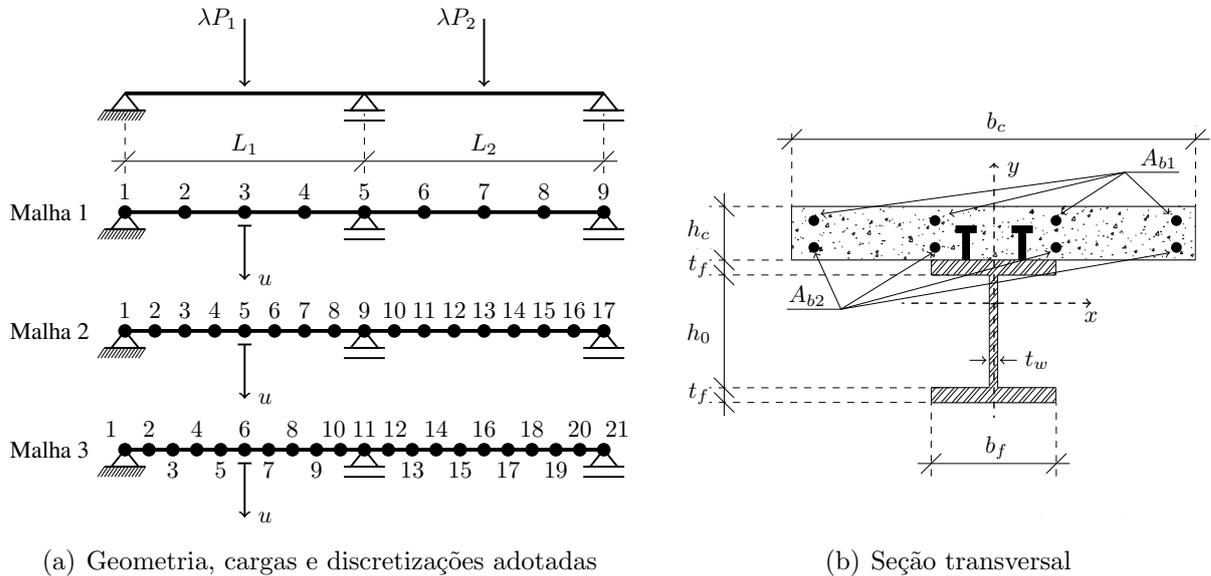


Figura 5.24 – Vigas mistas contínuas com interação parcial

Tal como no exemplo anterior, as tensões de escoamento nas chapas componentes do perfil de aço não são iguais. Sendo assim, novamente uma análise prévia considerando a distribuição plástica de tensões (usando os valores experimentais) foi realizada, de modo a possibilitar o uso de um valor equivalente. Neste exemplo também foi estudada a influência da discretização da estrutura.

Na Figura 5.25 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio das três vigas contínuas comparando os resultados aqui obtidos com numéricos (CHIOREAN; BURU, 2017) e experimentais (ANSOURIAN, 1981). Novamente, uma forte sensibilidade a malha de elementos finitos foi observada. Embora a rigidez inicial seja compatível para todas as análises, a capacidade resistente só converge nas situações com maior refinamento. Notoriamente, a malha 3 apresenta resultados satisfatórios nas análises das três vigas mostrando que a consideração da interação parcial em vigas mistas contínuas também pode ser simulada.

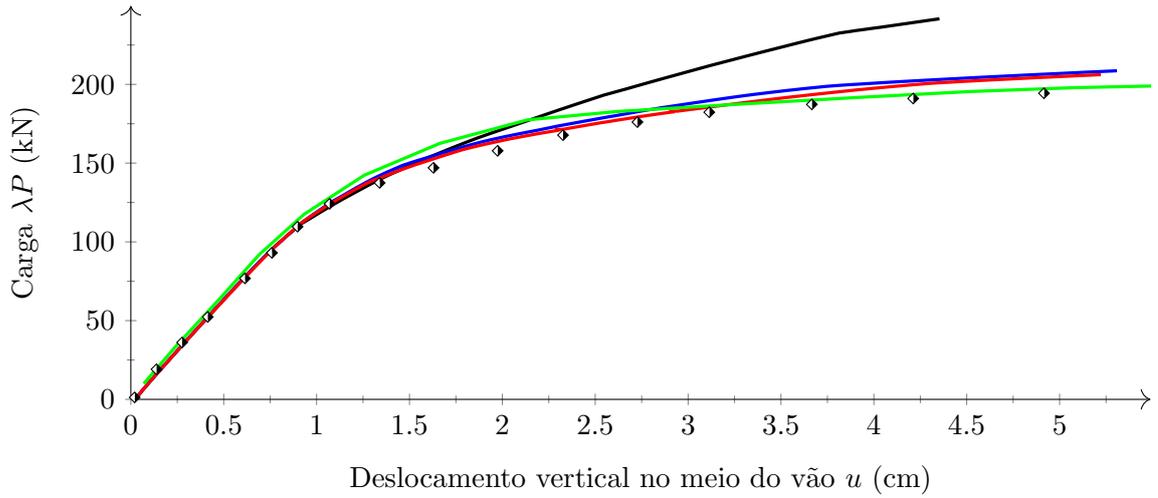
Dentre as três vigas, a VMIP-2 se apresenta com comportamento numérico um pouco diferente, sendo a convergência atingida usando apenas a malha 3, ao contrário das demais, onde a malha 2 já apresenta boa resposta. Considerando os dados fornecidos na Tabela 5.6, vê-se que essa viga é a que apresenta maior número de conectores, recaindo no problema

Tabela 5.6 – Dados geométricos e dos materiais das vigas VMIP

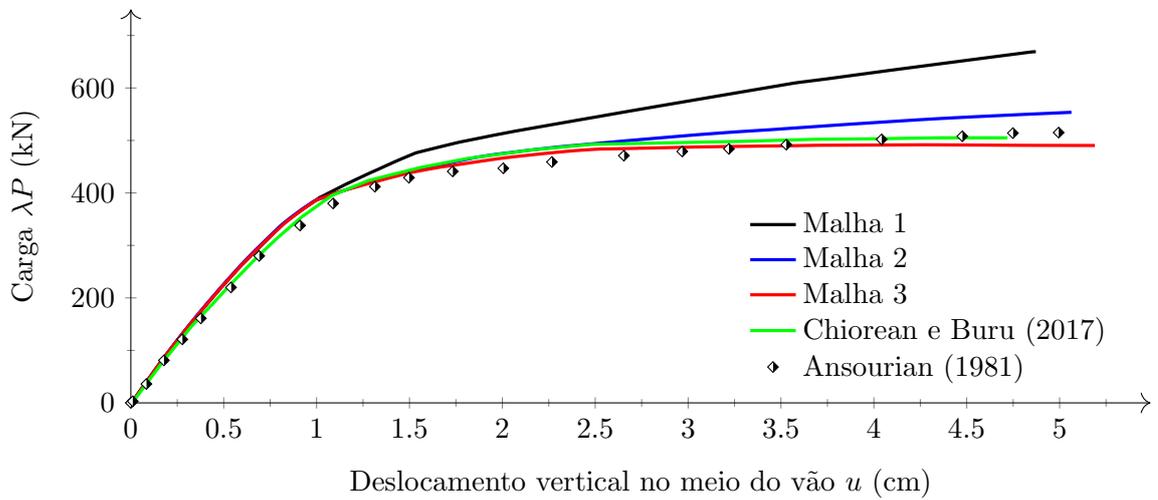
Variável e unidade	Sigla	Viga		
		VMIP-1	VMIP-2	VMIP-3
Carga (kN)	λP_1	λP	$0.5\lambda P$	$0.5\lambda P$
	λP_2	-	$0.5\lambda P$	$0.5\lambda P$
Comprimento (m)	L_1	400	450	450
	L_2	500	450	450
Área das barras em M^- (cm ²)	A_{b1}	8.00	8.04	12.06
	A_{b2}	3.16	7.67	4.70
Área das barras em M^+ (cm ²)	A_{b1}	-	1.6	3.20
	A_{b2}	1.60	1.60	1.60
Dimensões laje (m)	h_c	10.0	10.0	10.0
	b_c	80.0	80.0	130.0
Dimensões do perfil (m)	t_f	0.85	1.00	0.98
	h_0	18.30	17.00	22.04
	b_f	10.00	20.00	12.00
	t_w	0.56	0.65	0.62
Concreto (kN,cm)	f_c	2.46	2.79	2.30
	ε_{ci}	-0.00220	-0.00220	-0.00220
	ε_{cu}	-0.00484	-0.00452	-0.00502
Aço dos perfis (kN,cm)	f_y	29.109	23.770	26.782
	E_a	20600	20600	20600
	E_{a2}	0	0	0
	E_{a3}	600	300	480
	ε_u	0.0287	0.0703	0.0502
Aço das barras (kN,cm)	f_{pyd}	43	43	43
	E_s	20600	20600	20600
	E_{s2}	600	300	480
Conectores (kN,cm)	n_c	66	84	60
	n_{cl}	2	3	2
	s	28	33	30
	H_{max}	110	110	110

já discutido no exemplo anterior. Assim, para minimizar a variação da força cortante no plano de deslizamento dentro do comprimento de influência, é necessário o uso de um maior número de pontos nodais, reduzindo, l_{cod} . Esse fator se destaca como um ponto negativo da formulação aqui apresentada.

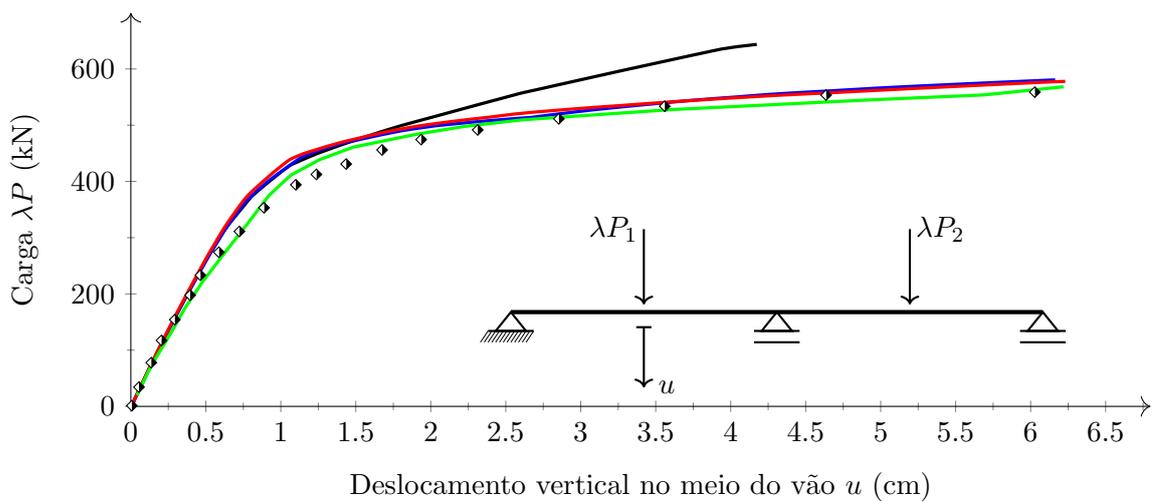
Outra forma possível de análise é variar o parâmetro $f(\gamma_{ef})$, alterando o grau de ação mista. Através desse parâmetro pode-se obter a resposta de um sistema com perfeita conexão entre a laje e o perfil, $f(\gamma_{ef}) = 1$, ou com conexão inexistente, $f(\gamma_{ef}) = 0$. Esse



(a) Viga VMIP-1



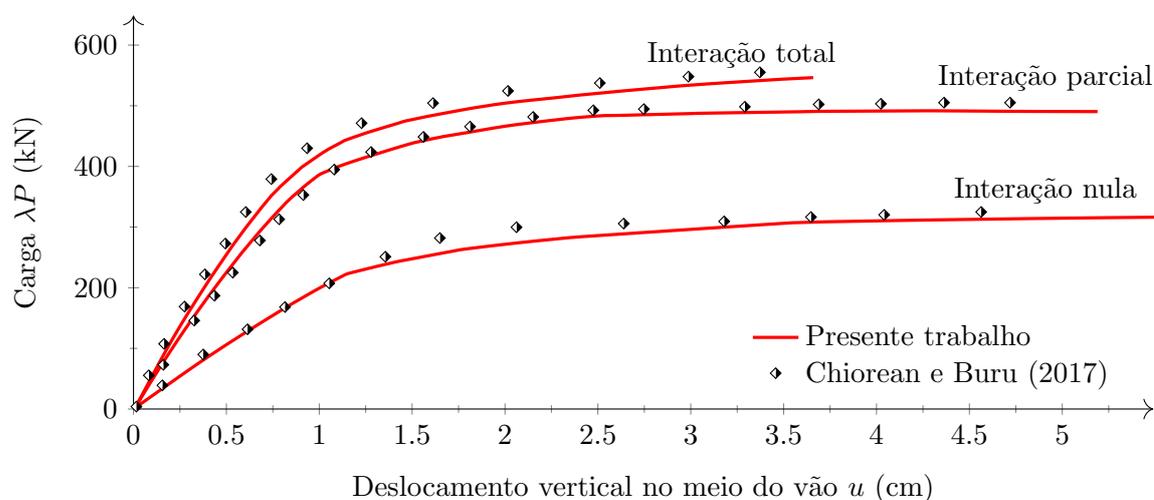
(b) Viga VMIP-2



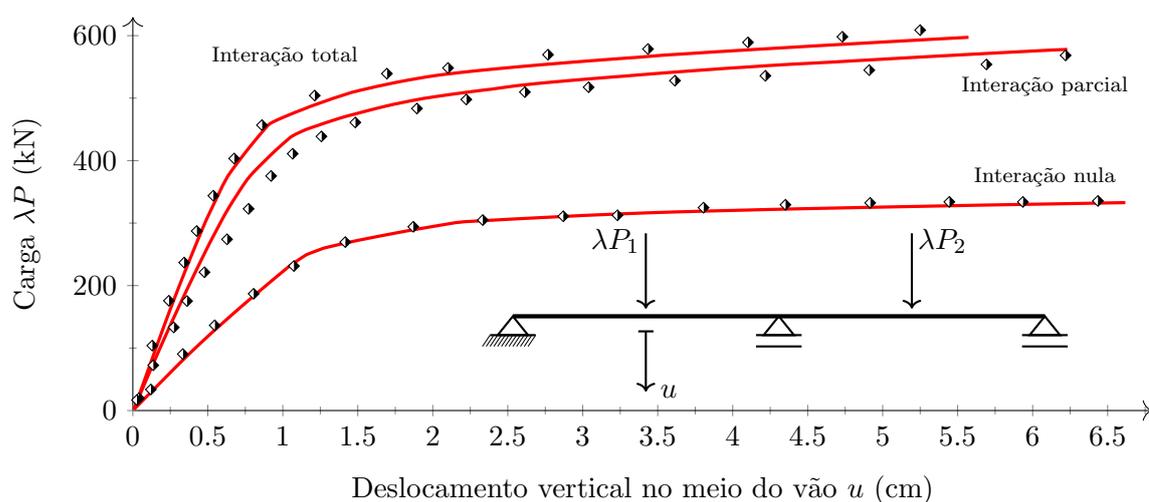
(c) Viga VMIP-3

Figura 5.25 – Trajetórias de equilíbrio para as vigas com interação parcial

estudo é realizado aqui para as vigas VMIP-2 e VMIP-3 e ilustrado na Figura 5.26. Como já era de se esperar, quanto menor for o grau de deformabilidade da conexão por cisalhamento maior a rigidez e a capacidade resistente do sistema. É possível ainda verificar que a conexão utilizada nos elementos ensaiados no laboratório é mais próxima do comportamento considerando a perfeita interação entre a laje e o perfil, do que desconsiderando-a por completo. Nessas análises, toma-se como parâmetro de comparação as respostas numéricas obtidas por Chiorean e Buru (2017) por meio de uma metodologia de análise baseada na plasticidade distribuída.



(a) Viga VMIP-2



(b) Viga VMIP-3

Figura 5.26 – Trajetórias de equilíbrio: comparação dos graus de interação

Como complemento ao estudo apresentado na Figura 5.26, são apresentadas na Figura 5.27 as configurações deformadas das vigas VMIP-2 e VMIP-3 no ponto limite de carga, considerando a variação do grau de ação mista. Nos casos analisados, as estruturas com

conexão menos deformável apresentam menor deslocabilidade mesmo sob a ação de cargas limites maiores.

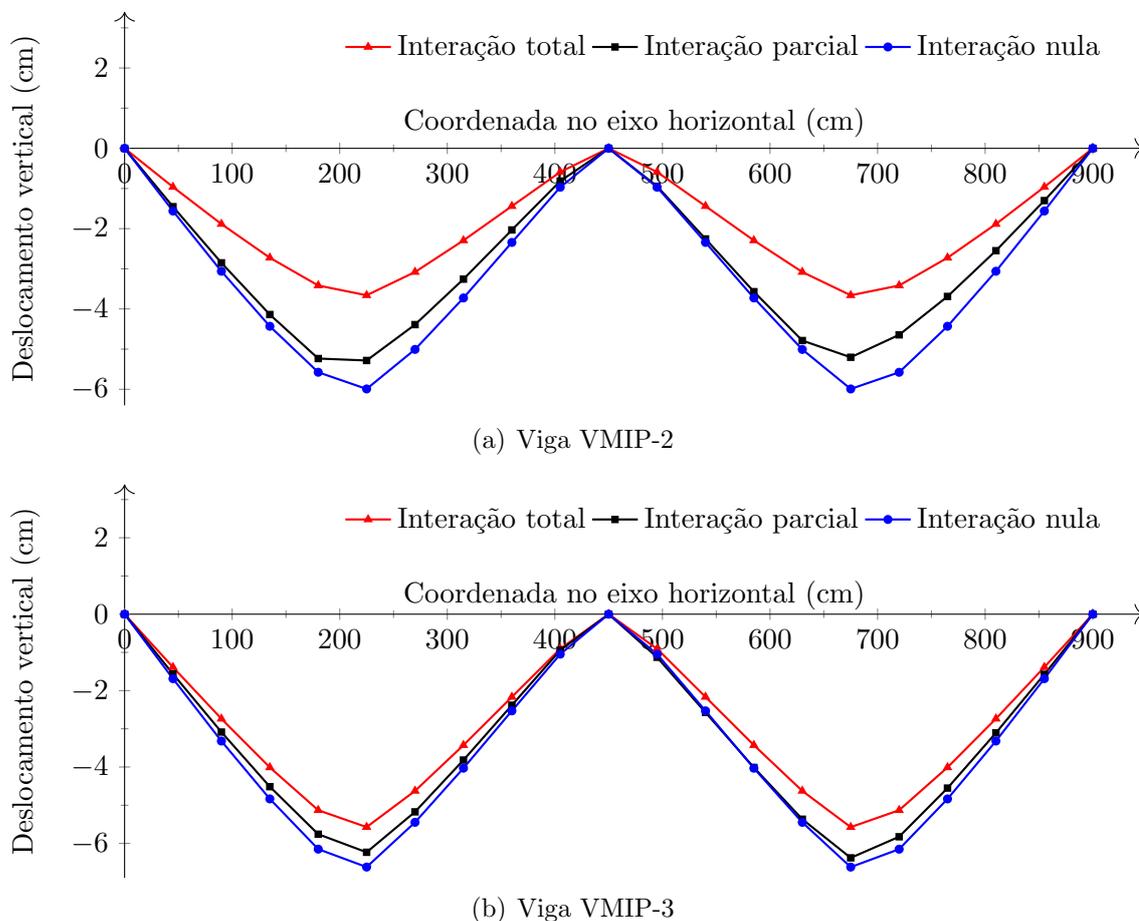


Figura 5.27 – Deslocamentos verticais ao longo das vigas no ponto limite de carga

5.4 Análise de Pilares Isolados

5.4.1 Pilar de aço

Van Kuren e Galambos (1964) fizeram o ensaio experimental do pilar apresentado na Figura 5.28. Posteriormente, seus resultados se tornaram referências para calibração de diversas formulações numéricas (EL-ZANATY *et al.*, 1980; CHEN; TOMA, 1994). Trata-se de um pilar de aço, retilíneo (ALVARENGA, 2005), com seção 4WF13, simplesmente apoiado, submetido a uma carga vertical de compressão fixa P e um momento incremental λM (em torno do eixo de maior inércia). O material apresenta E_a de 20278 kN/cm², carga resistente de compressão N_p dada por 591.82 kN e momento de plastificação M_p como 24640 kNcm. A carga vertical P é uma fração de N_p , calculado como $P = 0.158N_p$.

O sistema foi discretizado com apenas 4 elementos e 5 pontos nodais. Considerou-se aqui o modelo de tensões residuais do AISC LRFD (2010).

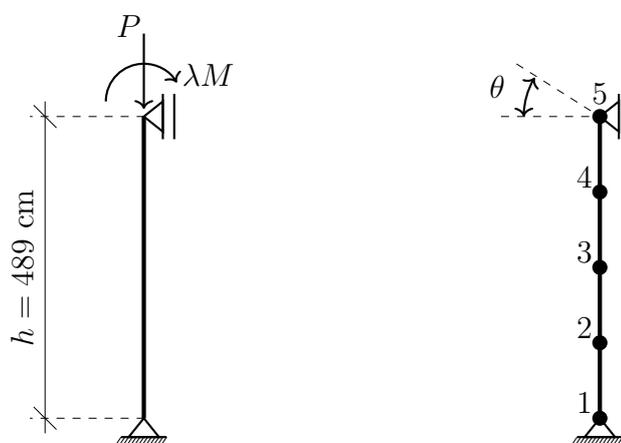


Figura 5.28 – Pilar de aço (VAN KUREN; GALAMBOS, 1964)

A trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 5.29 relaciona a variação do momento fletor incremental com a rotação no nó 5. Verifica-se que as curvas experimental e numérica apresentam o mesmo comportamento, ressaltando, mais uma vez, a precisão da formulação proposta. Merece ser destacado que na análise via CS-ASA, o ponto limite de carga foi obtido com valor percentual de $\lambda M/M_p = 88.9\%$, sendo o valor fornecido por Van Kuren e Galambos (1964) de 88.4%. Porém, ao comparar as rotações referentes aos pontos limites, tem-se na análise numérica 0.078 rad e na experimental 0.065 rad. A máxima rotação obtida no presente trabalho, 0.099 rad, refere-se a formação de uma rótula plástica no nó 4, fazendo com que a estrutura se torne instável.

5.4.2 Pilar de concreto armado

Na Figura 5.30 é apresentado o chamado pilar de Foure, que foi ensaiado inicialmente por Espion (1993) e depois estudado por diversos pesquisadores (BRATINA *et al.*, 2004; MUNIZ, 2005; LIU *et al.*, 2012b; GONÇALVES; CARVALHO, 2014) para validação de seus resultados numéricos. Trata-se de um pilar de concreto armado com 225 cm de comprimento, engastado na base, e sob flexão em torno do eixo de menor inércia, como destacado na Figura 5.30. Essa flexão ocorre devido a uma excentricidade da carga vertical aplicada a 1.5 cm do eixo centroidal do elemento. Além disso, segundo Liu *et al.* (2012b), uma imperfeição geométrica inicial é tomada igual a $h/1000$. A discretização adotada na modelagem desse exemplo tem 4 elementos e 5 pontos nodais. A seção transversal é

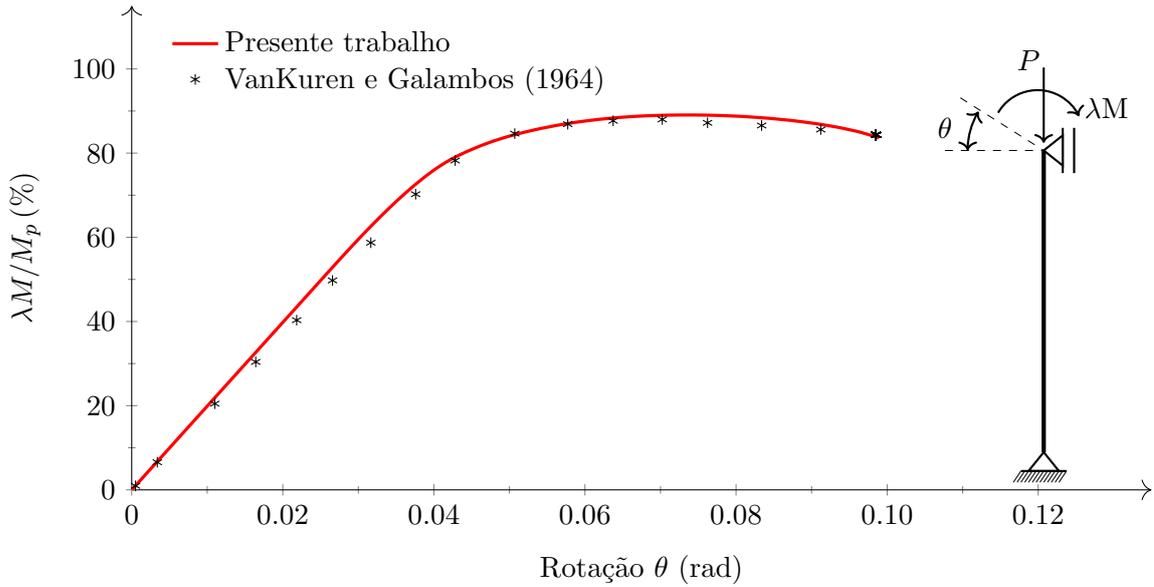


Figura 5.29 – Trajetória de equilíbrio - pilar de aço

retangular 15 × 20 cm com armaduras positivas e negativas com áreas iguais a 2.26 cm² com distância à borda da seção de 2 cm. A seção foi discretizada com 8 divisões em cada direção. Os dados dos materiais componentes do pilar estão na Tabela 5.7.

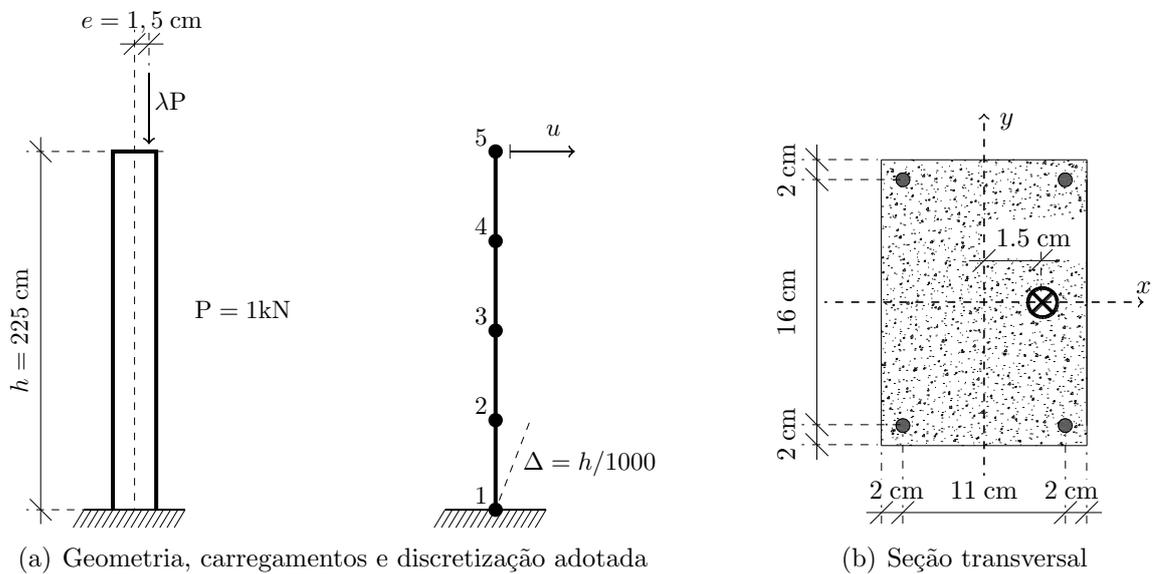


Figura 5.30 – Pilar de Foure

Tabela 5.7 – Dados dos materiais do pilar de concreto armado (em kN, cm)

Concreto				Aço		
f_c	f_{cr}	ε_{ci}	ε_{cu}	f_{pyd}	E_s	ε_{pud}
3.83	0.292	-0.0023	-0.0035	46.5	20000	0.020

Duas análises são realizadas aqui: considerando a resistência a tração do concreto (CCT), por meio da relação proposta por Bazant e Oh (1983) e desconsiderando-a (CST). Pode-se verificar na Figura 5.31 a boa convergência entre os resultados obtidos com a presente metodologia e os encontrados na literatura, tanto no contexto numérico quanto experimental. Na análise CCT realizada no CS-ASA ($P_{max,CCT}^{CS-ASA} = 449.9$ kN), verifica-se uma diferença de apenas 0.9% no valor da carga máxima suportada pelo elemento estrutural em comparação com o valor medido em laboratório ($P_{max}^{Espion} = 454$ kN). No caso em que a resistência à tração do concreto é desconsiderada (CST), nota-se uma redução da carga limite da coluna ($P_{max,CST}^{CS-ASA} = 416.1$ kN). Muniz (2005) também analisou essa situação em que a resistência à tração do concreto é desprezada. Dessa forma, a carga última obtida pelo referido pesquisador foi de $P_{max}^{Muniz} = 422$ kN, que corresponde a uma diferença de 1.4% em relação ao resultado obtido no presente trabalho.

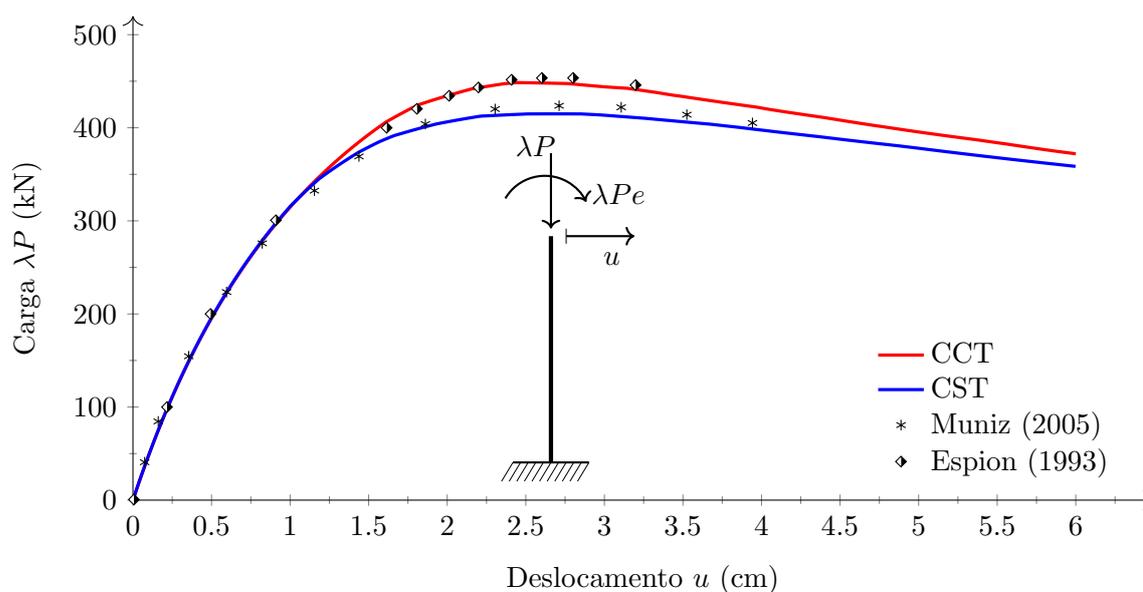


Figura 5.31 – Trajetória de equilíbrio - Pilar de Fouré

A Figura 5.32 ilustra o histórico de variação das forças internas e as respectivas curvas de interação normal-momento fletor para as análises CST e CCT. Vê-se claramente que a consideração da resistência à tração do concreto não é determinante na obtenção da curva de interação $N \times M$. Conclui-se que a amplificação da capacidade resistente do pilar na análise CCT se deve à rigidez do mesmo. A combinação entre as cargas normal de compressão (λP) e de momento fletor ($\lambda P e$) não é suficiente para que as deformações de tração sejam significantes a ponto de iniciar o processo de fissuração. Assim, essas deformações do concreto são menores do que ε_{cr} , e o módulo de elasticidade é tomado

igual a E_{tr} , diferentemente da análise CST, onde esse valor é nulo.

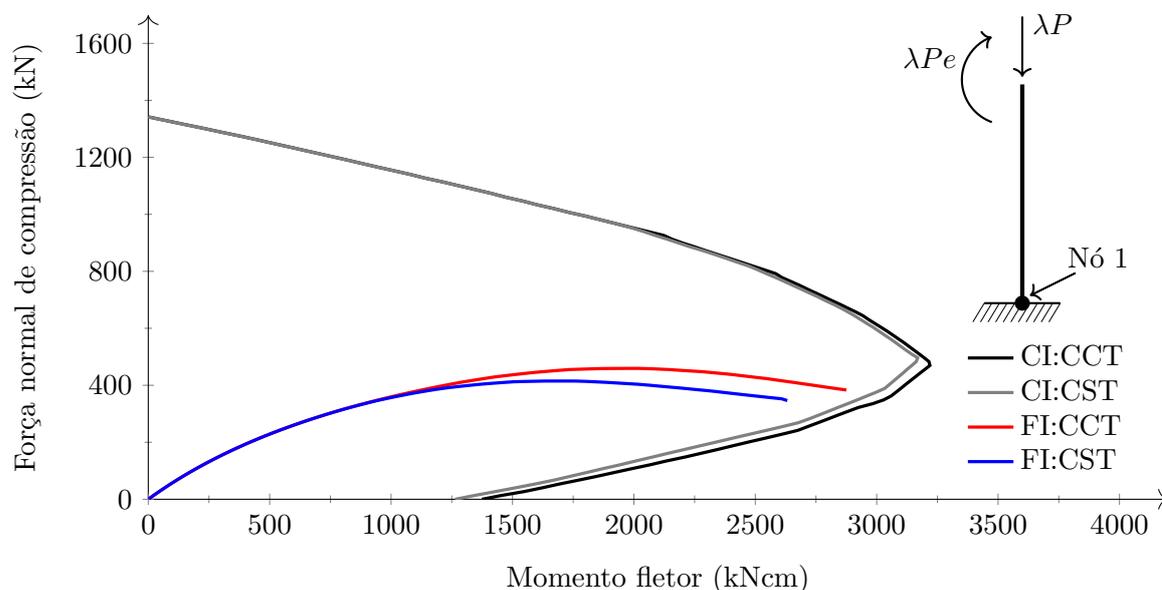


Figura 5.32 – Forças internas no nó 1 e curvas de interação

Lemes (2015) destacou que o uso de molas fictícias para simular a degradação da rigidez à flexão de estruturas de concreto armado é conservador. Ao observar a Figura 5.33, vê-se o conservadorismo imposto pelo uso do módulo de elasticidade secante do concreto tomado igual a 1.92 kN/cm^2 . De fato, a análise com molas fictícias (MRPR) exige que a relação constitutiva dos materiais empregados apresente um trecho linear elástico. Essa consideração introduziu uma perda de precisão considerável na aferição dos resultados.

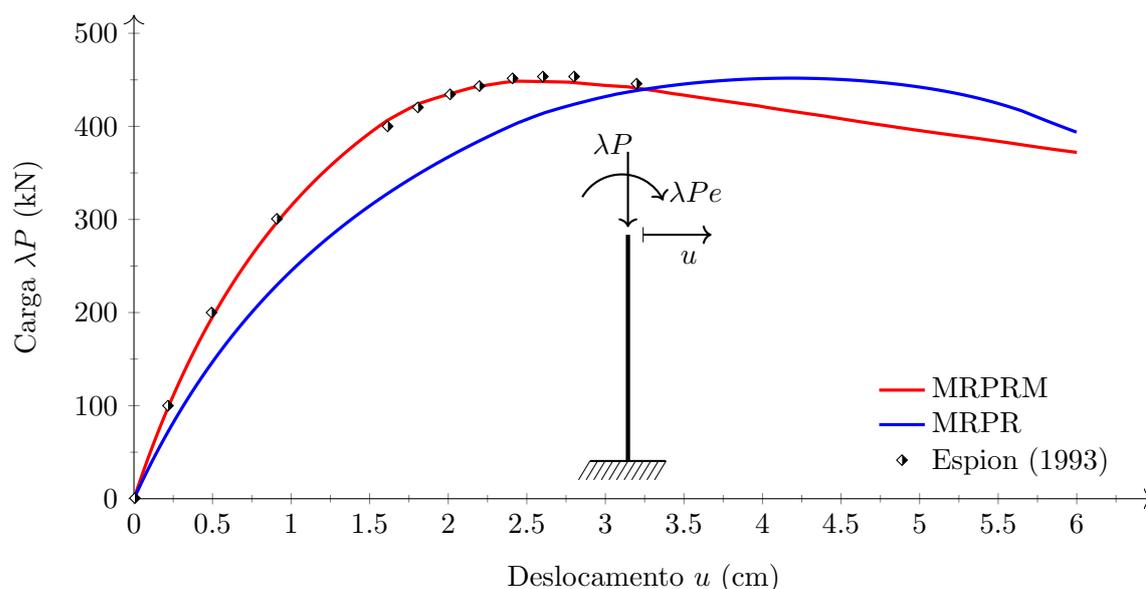


Figura 5.33 – Comparação entre as metodologias de degradação da rigidez à flexão

Parente Jr *et al.* (2014) fizeram um estudo do comportamento do pilar de Foure considerando-o geometricamente perfeito, ou seja, sem desaprumo ou curvatura inicial. Os autores também avaliaram, por meio de simulações numéricas, as respostas do pilar utilizando tanto a relação constitutiva proposta na NBR 6118 (2014) quanto a do EC 2 (2004). Tal estudo também foi realizado no presente trabalho.

Ao analisar as relações constitutivas, vê-se que as mesmas se diferenciam, basicamente, pela forma como tratam o amolecimento do concreto após o mesmo atingir a deformação ε_{ci} , como discutido na Seção 2.2.1. Porém, vale ressaltar que o comportamento descrito no EC 2 (2004) é um pouco mais rígido para pequenas deformações de compressão. Tal comportamento pode ser observado nas trajetórias de equilíbrio mostradas na Figura 5.34.

Ao considerar o pilar perfeitamente retilíneo sem imperfeições iniciais (BRATINA *et al.*, 2004; PARENTE JR *et al.*, 2014), nota-se um comportamento levemente mais rígido de todas as curvas numéricas em relação à experimental até o deslocamento de 2 cm no topo do pilar.

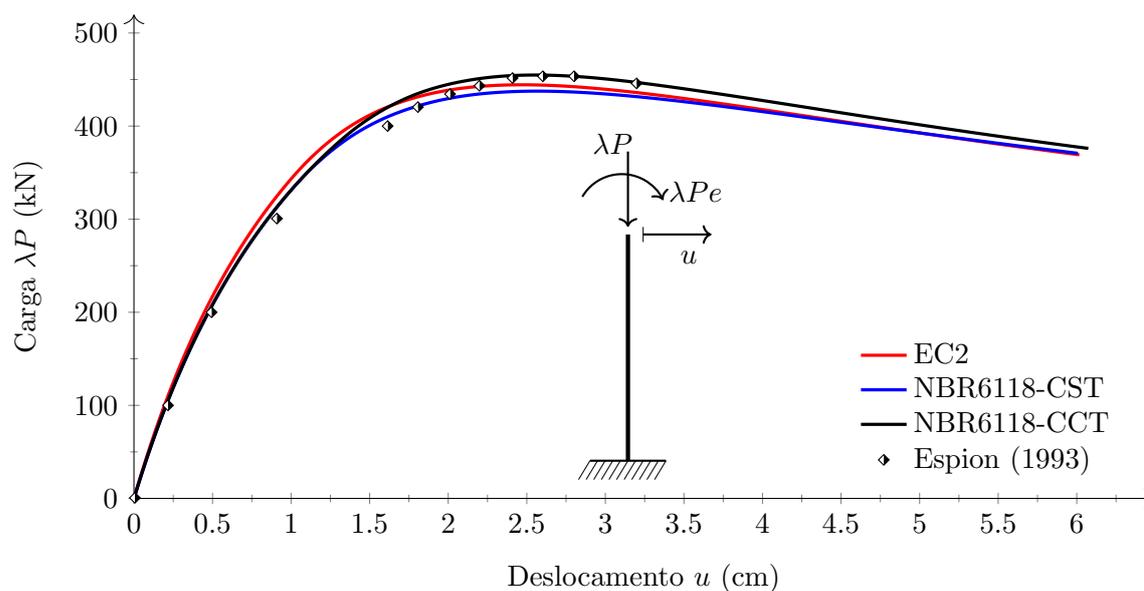


Figura 5.34 – Trajetórias de equilíbrio - comparação entre as normas

Mesmo com o pilar perfeitamente retilíneo, foi verificada uma boa convergência das propostas normativas na análise global da estrutura comparando-as com a resposta experimental (ESPION, 1993). Vale ressaltar, tal como feito anteriormente, uma rigidez maior da curva obtida utilizando a relação constitutiva do EC 2 (2004). Por outro lado, quando considera-se a resistência à tração do concreto descrita na NBR 6118 (2014) (Equação 2.67), análise intitulada NBR6118-CCT, verifica-se um ganho de capacidade resistente do

elemento. É observado que as curvas considerando a tração (CCT) e desconsiderando-a (CST) são coincidentes até a carga de 371 kN. Na Tabela 5.8 são apresentadas as cargas limites encontradas nas análises.

Tabela 5.8 – Cargas últimas em kN

Norma	Carga
EC2	444.36
NBR6118-CST	437.54
NBR6118-CCT	454.84
Experimental	454

Em se tratando do MRPRM, pode-se avaliar a variação da rigidez à flexão a medida que o momento fletor interno atuante nos nós se modifica. Na Figura 5.35 é feita uma comparação dessa variação para cada uma das relações constitutivas adotadas nas análises. Tal processo é avaliado no nó 1, que representa o ponto onde há maiores esforços internos. Destaca-se os pontos próximos ao momento fletor de 1000 kNcm, onde há uma queda acentuada de rigidez. Nesse instante algumas fibras passam a apresentar deformações positivas, de tração, reduzindo abruptamente a rigidez à flexão tangente EI_t . Na análise NBR6118-CCT, esse fato ocorre para momentos maiores já que até que as fibras atinjam a deformação 0.015%, o concreto ainda apresenta módulo de elasticidade tangente positivo e diferente de zero.

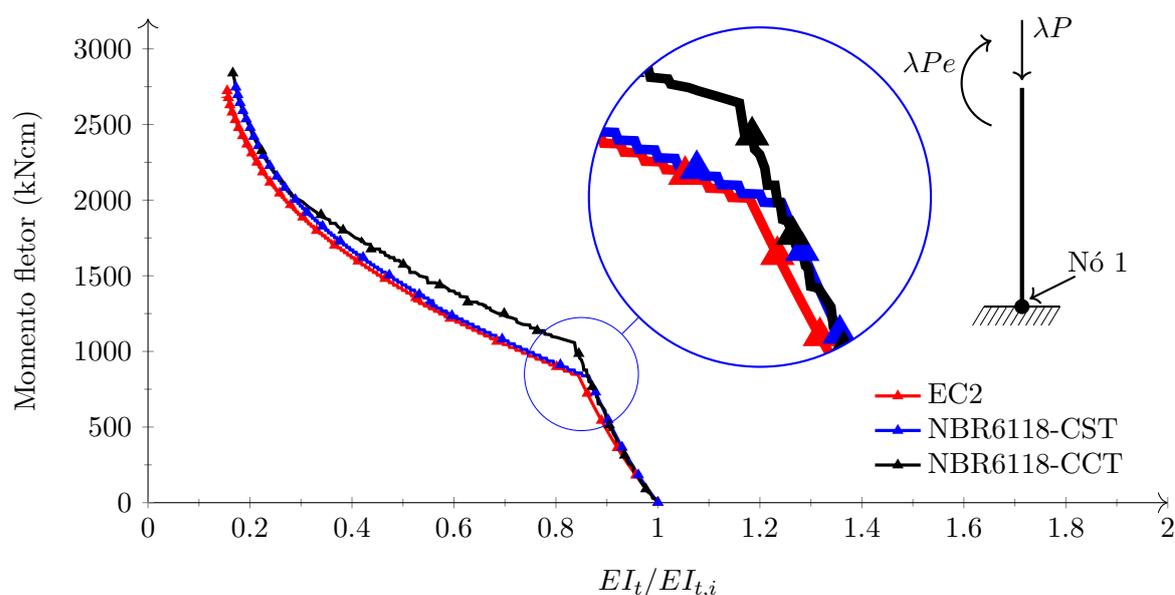


Figura 5.35 – Variação do EI_t em relação ao momento fletor interno no nó 1

Na Figura 5.35 foi dado um *zoom* no ponto onde ocorre o início de fissuração para cada uma das três análises envolvendo as considerações normativas estudadas. Ficou evidente nesse *zoom* uma instabilidade numérica. Nota-se que a suavidade dessa curva é na verdade uma série de pequenos degraus. Isso se deve ao fato de que a discretização da seção transversal não contemplou um grande refinamento. No entanto, ao verificar as trajetórias de equilíbrio anteriormente plotadas, vê-se que a resposta global é satisfatória.

Ao final da análise, no instante em que o deslocamento lateral u no topo do pilar atingiu 6 cm, foi medido o índice de degradação da rigidez à flexão nos cinco pontos nodais do modelo e ilustrado na Figura 5.36.

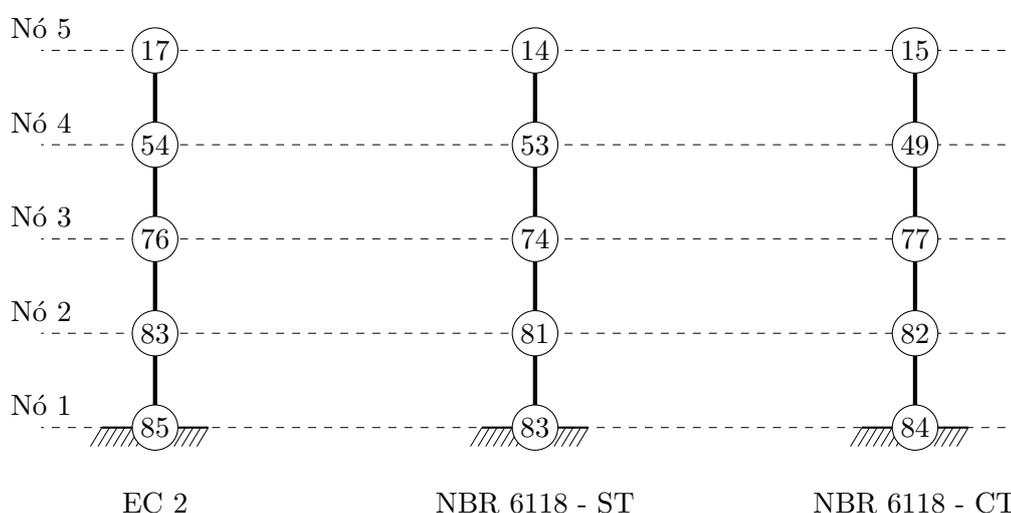


Figura 5.36 – Relação $EI_T/EI_{T,i}$ (%) nos pontos nodais para o deslocamento $u = 6$ cm

5.4.3 Pilares mistos com materiais de alta resistência

Liu *et al.* (2003) realizaram o ensaio experimental de 21 espécimes tubulares retangulares mistos. As dimensões da base, b , da altura, h , e da espessura da parede do tubo, t , dos corpos de prova são apresentados na Tabela 5.9. Os materiais utilizados eram de alta resistência, sendo o aço com f_y igual a 55 kN/cm². A tensão de compressão cilíndrica do concreto variou entre 70.8 e 82.1 kN/cm². Basicamente, os ensaios foram realizados em pilares curtos de modo que sua seção transversal conseguisse desenvolver sua capacidade resistente máxima. Além disso, a carga axial aplicada no elemento estrutural foi feita de forma concêntrica para evitar o aparecimento de esforços de flexão. Os pilares, todos simplesmente apoiados, foram discretizadas da mesma forma tanto a nível global, utilizando quatro elementos e cinco pontos nodais, quanto a nível local, com 64 fibras.

Os dados das seções transversais e os resultados obtidos com a formulação numérica apresentada (P_{CS-ASA}) são descritos na Tabela 5.9, onde também é feita a comparação com os resultados experimentais (P_{Test}) obtidos por Liu *et al.* (2003). Verifica-se nessa tabela uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais. Em termos médios, os dados extraídos do programa CS-ASA apresentam uma variação de apenas 0.5% em relação aos dados obtidos em laboratório. Destaca-se também a baixa dispersão dos resultados em relação à média calculada, como mostrado pelo desvio padrão, demonstrando assim, a confiabilidade dos resultados obtidos neste trabalho.

Nota-se que em alguns casos, dois espécimes com mesmos materiais, o corpo de prova com menor seção transversal apresentou uma carga limite, em termos experimentais, maior do que o outro elemento ensaiado. Isso pode ser visto se comparados os espécimes C2-1 e C2-2. Teoricamente esses valores deveriam ser invertidos, já que a redução da seção transversal implica diretamente na diminuição da capacidade resistente do elemento estrutural. Nos pilares C6-1 e C6-2 pode-se visualizar que nos testes, a seção levemente maior (C6-2) apresentou uma capacidade de carga 9% maior. Por fim, destacam-se os resultados das colunas C8-1 e C8-2. Nesses testes, os corpos de prova com seções muito semelhantes e mesmos materiais apresentaram 15% de diferença na capacidade resistente. Nesses casos citados, percebe-se a maior discrepância se confrontados com as análises via CS-ASA. Porém, Liu *et al.* (2003) também avaliou o comportamento dos pilares ensaiados perante as considerações das normas europeia, americana e britânica. Essas análises através das metodologias normativas refletiram a mesma tendência das respostas numéricas obtidas no presente trabalho.

5.5 Análise de Pórticos

5.5.1 Portal de concreto armado

O portal ilustrado na Figura 5.37 é estudado nesta seção. Novamente, estão disponíveis na literatura resultados experimentais (FERGUSON; BREEN, 1966) e numéricos (GUNNIN *et al.*, 1977; BRATINA *et al.*, 2004). Trata-se de um pórtico quadrado de concreto armado com altura e vão iguais a 213 cm e uma imperfeição geométrica inicial global igual a $h/500$. São aplicadas cargas incrementais verticais no topo dos dois pilares e uma carga horizontal no topo do pilar da direita. Cada membro é dividido em dois

Tabela 5.9 – Dados dos materiais e cargas limites

Espécime	b	h	t	L	P_{Teste}	P_{CS-ASA}	$\frac{P_{CS-ASA}}{P_{Teste}}$
	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(kN)	(kN)	
C1-1	100.3	98.2	4.18	300	1490	1459	0.979
C1-2	101.5	100.6	4.18	300	1535	1499	0.977
C2-1	101.2	101.1	4.18	300	1740	1599	0.919
C2-2	100.7	100.4	4.18	300	1775	1584	0.892
C3	182.8	181.2	4.18	540	3590	3595	1.001
C4	181.8	180.4	4.18	540	4210	4233	1.005
C5-1	120.7	80.1	4.18	360	1450	1456	1.004
C5-2	119.3	80.6	4.18	360	1425	1448	1.016
C6-1	119.6	80.6	4.18	360	1560	1542	0.988
C6-2	120.5	80.6	4.18	360	1700	1551	0.912
C7-1	179.7	121.5	4.18	540	2530	2621	1.036
C8-1	180.4	119.8	4.18	540	2970	3031	1.021
C8-2	179.2	121.3	4.18	540	2590	3043	1.175
C9-1	160.2	81.4	4.18	480	1710	1822	1.065
C9-2	160.7	80.5	4.18	480	1820	1814	0.997
C10-1	160.1	81.0	4.18	480	1880	1947	1.036
C10-2	160.6	80.1	4.18	480	2100	1937	0.922
C11-1	199.8	101.2	4.18	600	2350	2512	1.069
C11-2	200.2	98.9	4.18	600	2380	2495	1.048
C12-1	199.2	102.1	4.18	600	2900	2919	1.007
C12-2	199.8	99.6	4.18	600	2800	2873	1.026
						Média	1.005
						Desvio padrão	0.063

elementos finitos. As seções dos pilares e das vigas são retangulares com armaduras longitudinais dispostas conforme ilustrado nas Figuras 5.37(b) e 5.37(c), respectivamente. Uma malha estruturada com 64 fibras é utilizada nas seções transversais. Os dados dos materiais utilizados nas análises são destacados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 – Dados dos materiais (em kN, cm)

Elemento	Concreto			Aço		
	f_c	ε_{ci}	ε_{cu}	f_{pyd}	E_s	ε_{pud}
Pilares	2.21	-0.00185	-0.0035	38.39	20200	0.020
Vigas	2.21	-0.00185	-0.0035	40.34	20200	0.020

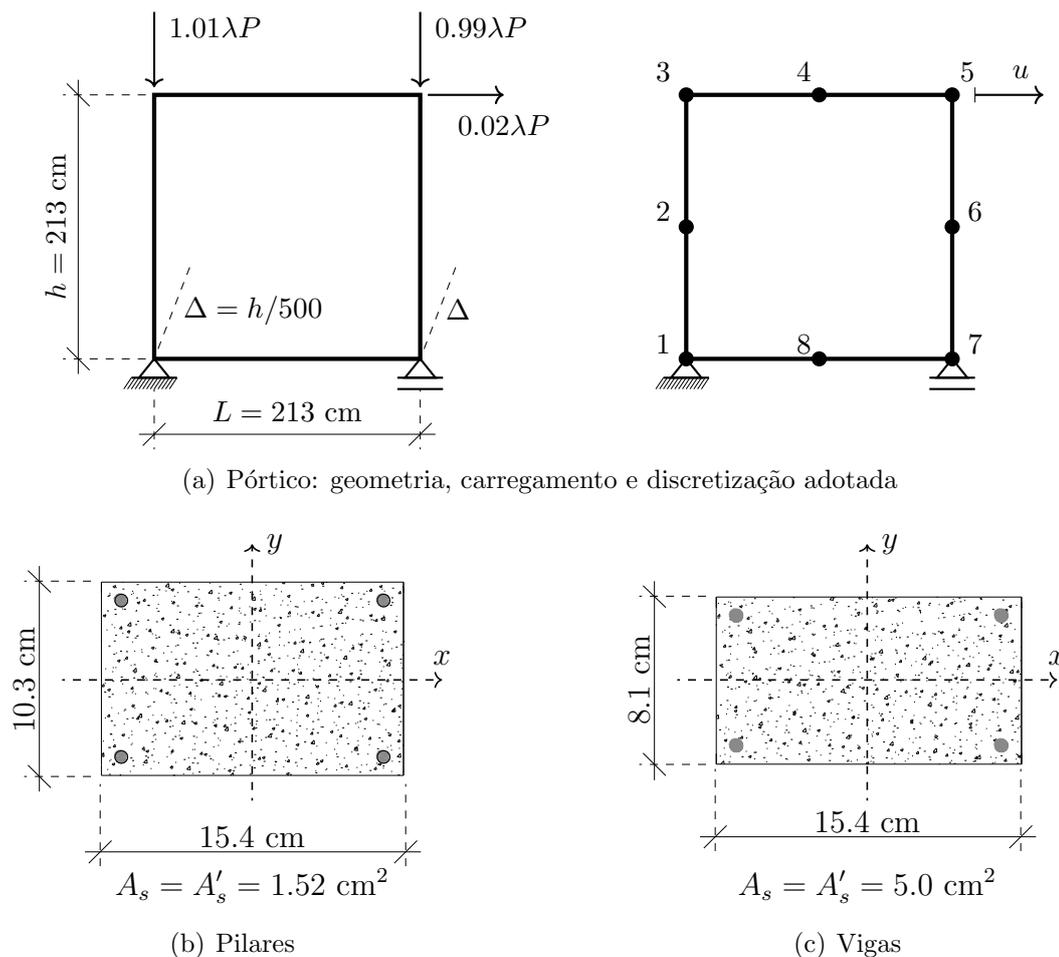


Figura 5.37 – Pórtico simples: geometria, discretização adotada e seções transversais

Os resultados obtidos através do CS-ASA são apresentados na Figura 5.38 e comparados com os de Ferguson e Breen (1966) (denotado adiante como FB). Percebe-se boa proximidade entre o comportamento da estrutura obtido de forma numérica e o simulado em laboratório. A diferença entre as cargas limites é de 1%, sendo $P_{max}^{CS-ASA} = 139.6$ kN e $P_{max}^{FB} = 141$ kN. Além disso, os respectivos valores de deslocamentos referentes às cargas críticas também são próximos, sendo $u^{CS-ASA} = 6.55$ cm e $u^{FB} = 6.11$ cm.

5.5.2 Pórtico simples metálico/misto

Nesta subseção é estudado o pórtico ilustrado na Figura 5.39 que foi inicialmente proposto por Liew *et al.* (2001) em um estudo de sistemas estruturais metálicos com vigas mistas. Esses autores estudaram o ganho de rigidez e capacidade resistente proporcionado pela inclusão da laje de concreto na viga em relação a um sistema puramente metálico. Já Iu *et al.* (2009) propuseram revestir totalmente os pilares com concreto. Posteriormente,

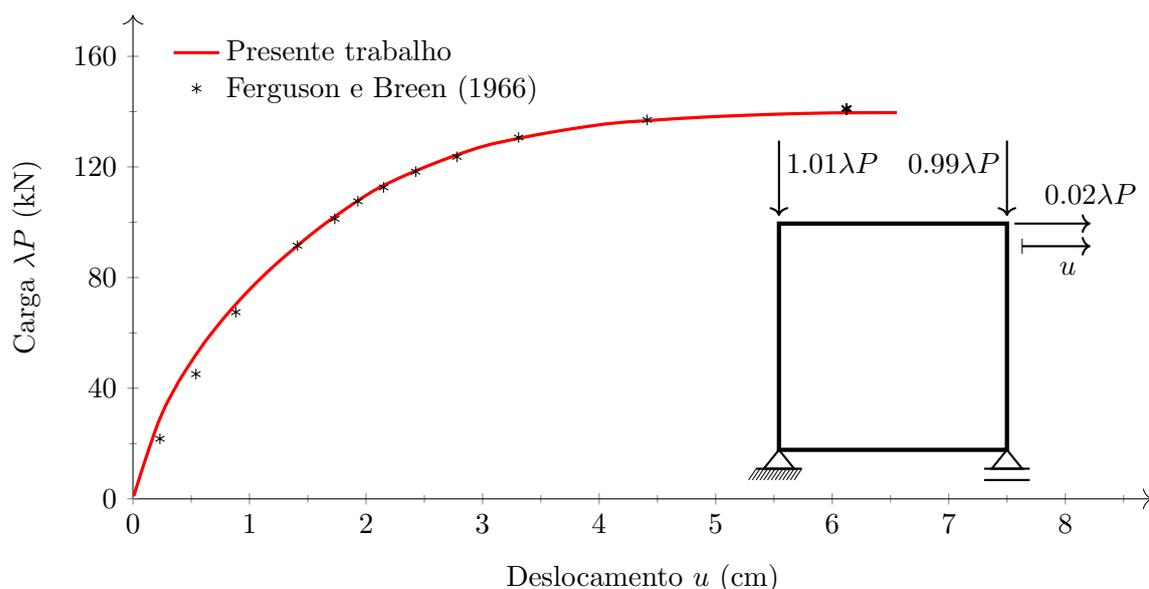


Figura 5.38 – Trajetória de equilíbrio - pórtico em concreto armado

Chiorean (2013) e Lemes (2015) validaram suas formulações comparando as curvas carga-deslocamento obtidas por eles com as presentes na literatura.

A estrutura em questão é um pórtico simples de altura e vão iguais a 5 metros, sendo os pilares constituídos com perfis W12×50 e a viga com perfil W12×27. Quando considerado o efeito da laje de concreto, a mesma apresenta altura igual a 102 mm e largura de 1219 mm. Os pilares são totalmente revestidos em uma segunda análise, apresentando seção mista quadrada de base igual a 400 mm. São aplicadas cargas incrementais verticais no topo dos pilares, e horizontal no topo do pilar esquerdo. É considerado que o pórtico não apresenta imperfeições geométricas iniciais.

Serão realizadas duas análises: estrutura com pilares de aço e viga mista (PVM) e o sistema estrutural totalmente misto (PM). As trajetórias de equilíbrio para esses sistemas são definidas através da variação da carga incremental em relação ao deslocamento no topo do pilar direito. Considera-se para o aço uma resistência de escoamento f_y igual a 24.82 kN/cm² e um módulo de elasticidade tomado como 20000 kN/cm². A resistência característica do concreto à compressão, f_c , adotada é de 1.6 kN/cm². Para o concreto, os parâmetros ε_{ci} e ε_{cu} são tomados como -0.002 e -0.0035, respectivamente.

Na Figura 5.40 são apresentadas as curvas carga-deslocamento para os dois casos acima descritos. Observando essa mesma figura, pode-se concluir que o MRPRM utilizado neste trabalho se apresenta condizente com os resultados obtidos por Iu *et al.* (2009), que utiliza o MRPR com elementos de molas fictícios.

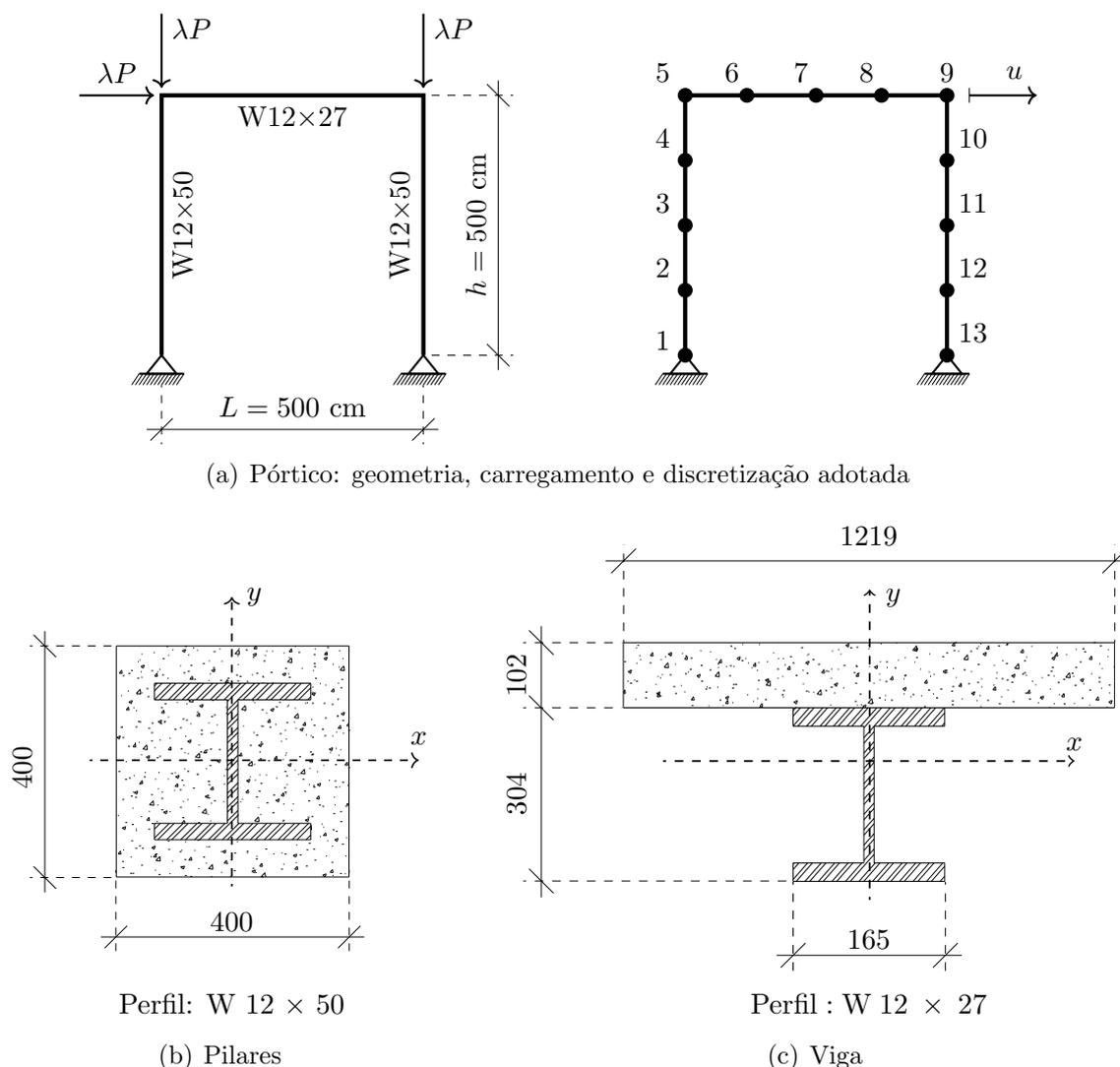


Figura 5.39 – Pórtico simples: geometria, discretização adotada e seções transversais

5.6 Análise de Pórticos com Ligações Semirrígidas

5.6.1 Pórtico metálico de dois andares

Nesta seção o pórtico de dois andares ilustrado na Figura 5.41 é estudado. Por ter resultados experimentais obtidos por Stelmack (1982) essa estrutura é muito utilizada na literatura (NGUYEN; KIM, 2014; SARITAS; KOSEOGLU, 2015). Trata-se de um pórtico de aço A36 com ligações semirrígidas entre as vigas e os pilares. Todos os elementos estruturais são compostos por perfis W5×16 sob flexão em torno do eixo de maior inércia. Cargas fixas de 10.68 kN, igualmente espaçadas, são aplicadas na viga do primeiro piso. As cargas incrementais são laterais atuando nas junções do pilar esquerdo com as duas vigas, conforme apresentado na Figura 5.41. Para a estrutura em questão, os pilares foram

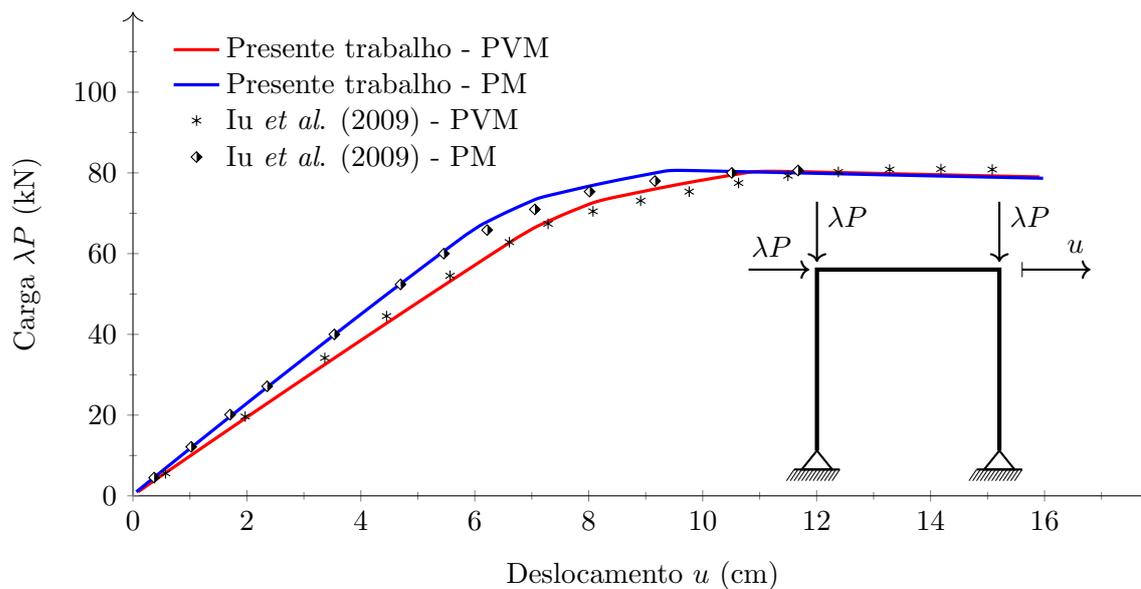


Figura 5.40 – Trajetórias de equilíbrio

divididos em 2 elementos por membro e as vigas em 3 elementos, totalizando 14 elementos e 14 pontos nodais.

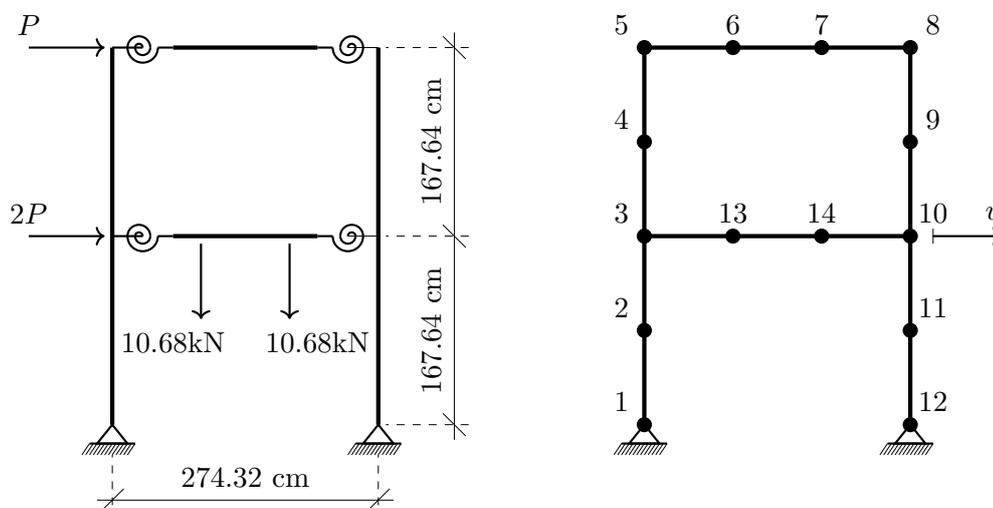


Figura 5.41 – Pórtico de dois andares: geometria, carregamentos e discretização adotada

Para a curva $M \times \phi$ das quatro ligações semirrígidas foi adotado o modelo multilinear, já que Stelmack (1982) fornece valores experimentais para a descrição do comportamento da ligação real. Assim, foram adotados 6 pontos no modelo multilinear conforme ilustrado na Figura 5.42.

A curva carga-deslocamento obtida no presente trabalho e a resposta experimental (STELMACK, 1982) são plotadas e comparadas na Figura 5.43. Embora o resultado numérico tenha tido deslocamentos maiores, percebe-se uma boa aproximação com a curva

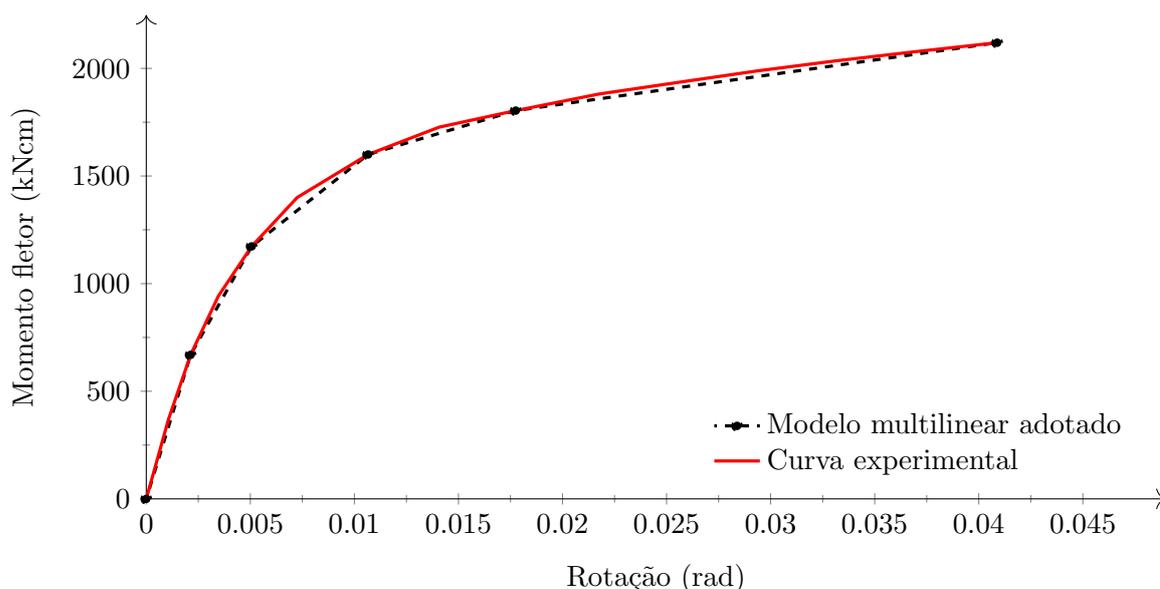


Figura 5.42 – Relação $M \times \phi$ para o pórtico de 2 andares (STELMACK, 1982)

de Stelmack (1982), validando assim a formulação apresentada.

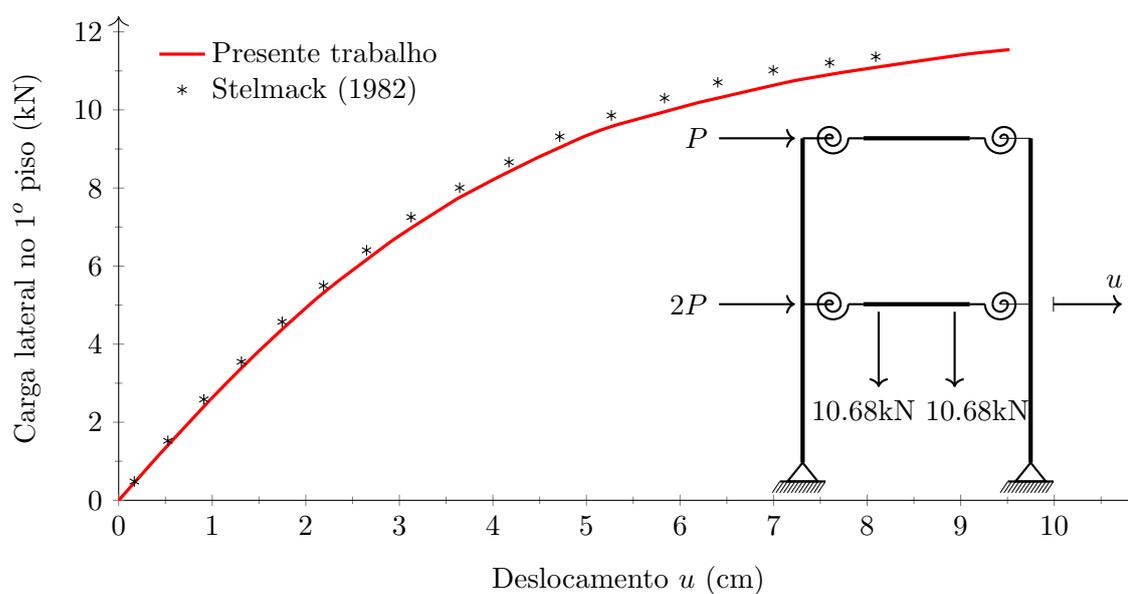


Figura 5.43 – Trajetórias de equilíbrio - pórtico de 2 andares

Um estudo dos índices de plastificação nos pontos nodais e das respectivas quedas de rigidez das ligações fornecem uma visão mais detalhada do que ocorre no problema. Na Figura 5.44 esses dados são fornecidos no instante em que a estrutura atinge seu máximo valor de carga resistente. Como mostrado na Figura 5.44(a) as ligações praticamente atingem seu limite resistente, uma vez que o índice de degradação da rigidez das ligações foram de 96% e 97%. Percebe-se, entretanto, que não ocorre a formação de nenhuma rótula

plástica em nenhum dos 14 pontos nodais, porém vê-se no que topo dos pilares inferiores ocorre uma maior degradação da rigidez à flexão, com valores de 55% e 54% para os pilares da esquerda e da direita, respectivamente. Isso demonstra que o comportamento do sistema ensaiado por Stelmack (1982) sofre maior influência da semirrigidez da ligação ante a não linearidade do material.

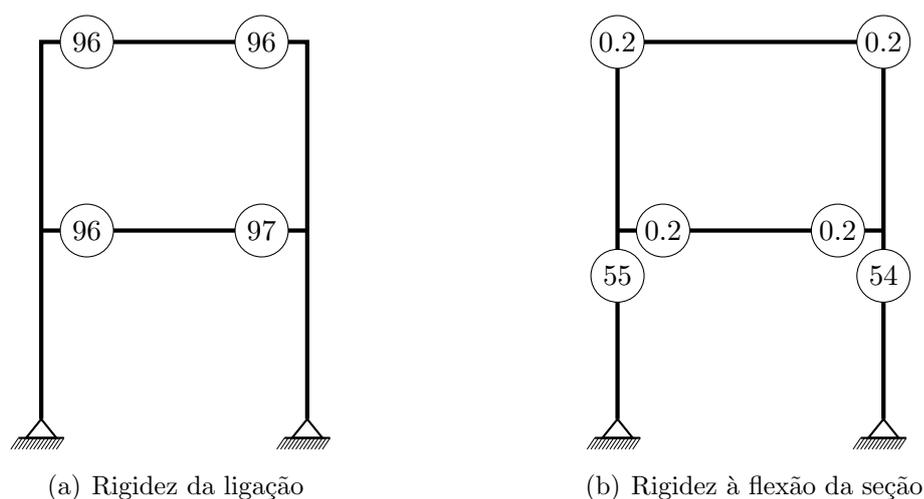


Figura 5.44 – Porcentagem de degradação das rigidezes no ponto limite

5.6.2 Pórtico misto de dois andares

O pórtico misto de dois andares e dois vãos, ilustrado na Figura 5.45, foi ensaiado experimentalmente por Krauss (2002) na Universidade de Bochum, Alemanha. Para aferir os resultados de forma mais realista, partes isoladas da estrutura, como por exemplo as ligações viga-pilar, foram testadas em outros locais, tais como: Universidade de Liège (Bélgica), Universidade de Aachen (Alemanha) e Labein (Espanha). Trata-se de um pórtico de altura total 4.99 m e 9.76 m de comprimento, constituído por pilares de aço e vigas mistas de aço e concreto (Figura 5.45).

Bitar *et al.* (2006) destacaram que nos ensaios experimentais, cada perfil metálico utilizado apresentava diferentes valores de tensões de escoamento e última nas chapas componentes da seção (alma e mesas). Porém, Demonceau (2008) ressaltou que, embora alguns trechos das vigas e das ligações tenham apresentado início de escoamento, não houve aparecimento de mecanismos plásticos. Assim sendo, neste trabalho optou-se que para os perfis utilizados, a tensão de escoamento utilizada na modelagem foi a tensão $f_{y,mesa}$ dada na Tabela 5.11. Além disso, foi considerado o módulo de elasticidade de 21000

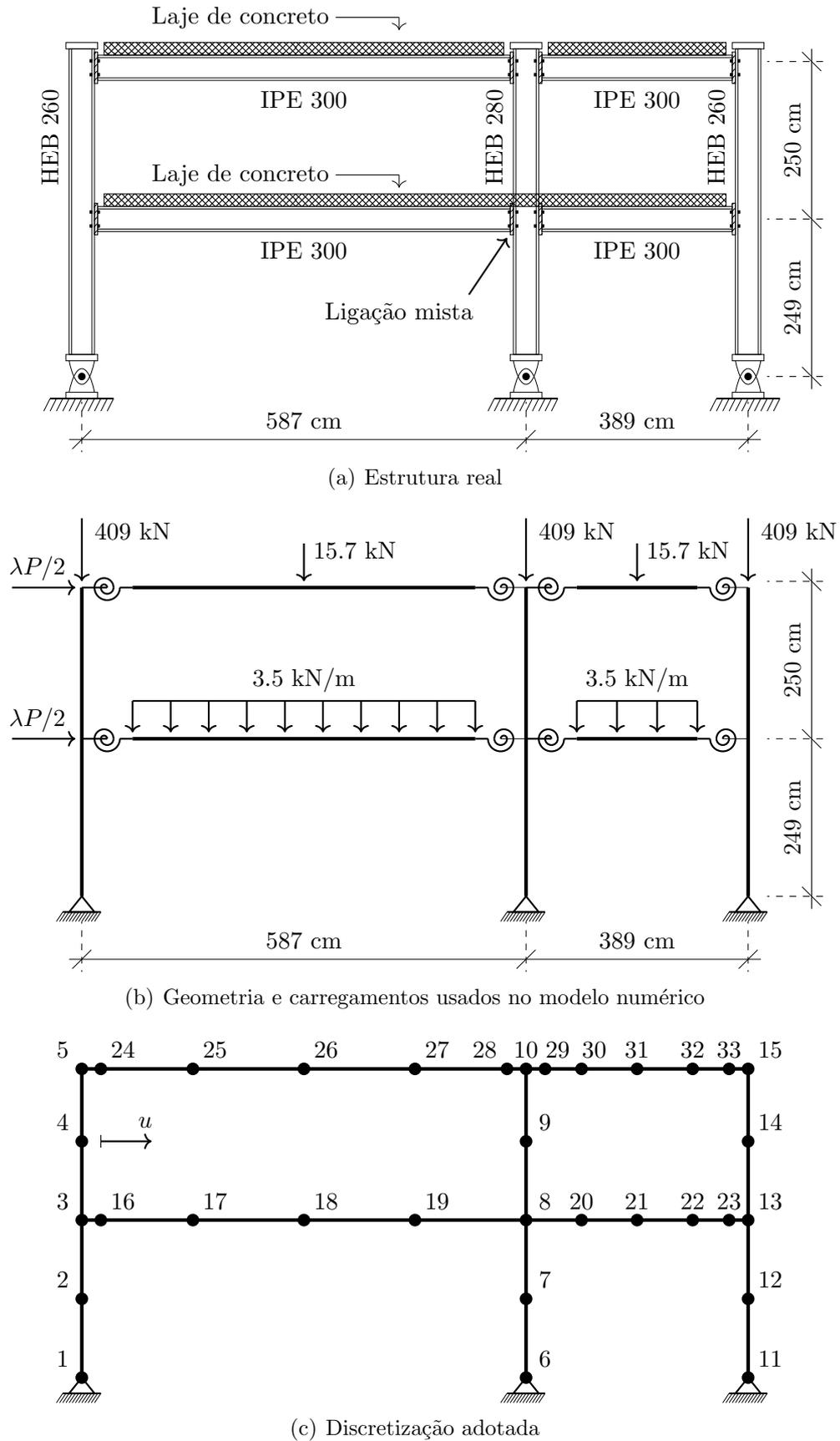


Figura 5.45 – Pórtico de Bochum: geometria, carregamentos e discretização adotada

kN/cm² para todos os componentes de aço (perfis e armaduras). Já o concreto utilizado na laje componente da viga mista foi aferido com resistência à compressão característica igual a 4.47 kN/cm². Sob compressão, optou-se por utilizar a relação constitutiva da NBR 6118 (2014), e sob tração, o comportamento descrito por Bratina *et al.* (2004).

Tabela 5.11 – Tensões de escoamento e última dos perfis de aço

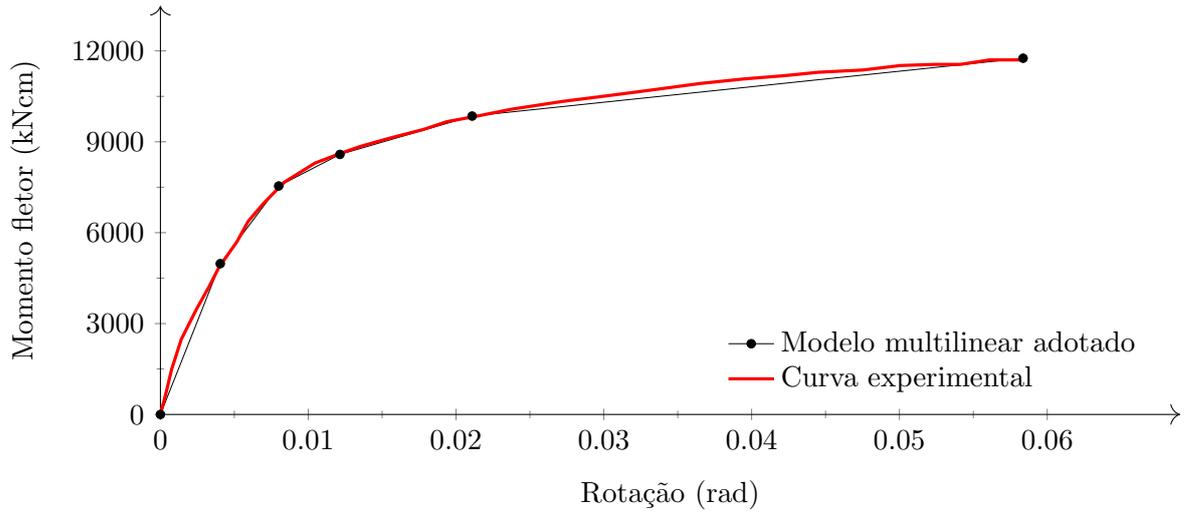
Perfil	Alma	Mesa
HEB 260	$f_y = 32.7 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 28.5 \text{ kN/cm}^2$
	$f_u = 48 \text{ kN/cm}^2$	$f_u = 46.5 \text{ kN/cm}^2$
HEB 280	$f_y = 34.1 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 29.9 \text{ kN/cm}^2$
	$f_u = 45 \text{ kN/cm}^2$	$f_u = 42.9 \text{ kN/cm}^2$
IPE 300	$f_y = 35.7 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 32.7 \text{ kN/cm}^2$
	$f_u = 48 \text{ kN/cm}^2$	$f_u = 46.5 \text{ kN/cm}^2$

Demonceau (2008) destacou que todas as ligações entre as vigas e os pilares são classificadas como semirrígidas. O comportamento de cada ligação presente na estrutura é fornecido na Figura 5.46. Uma vez que os resultados experimentais são dados, usou-se, no presente trabalho, o modelo multilinear para a entrada de dados da curva $M \times \phi$ no programa CS-ASA. Para todos os casos, foram utilizados 6 pontos.

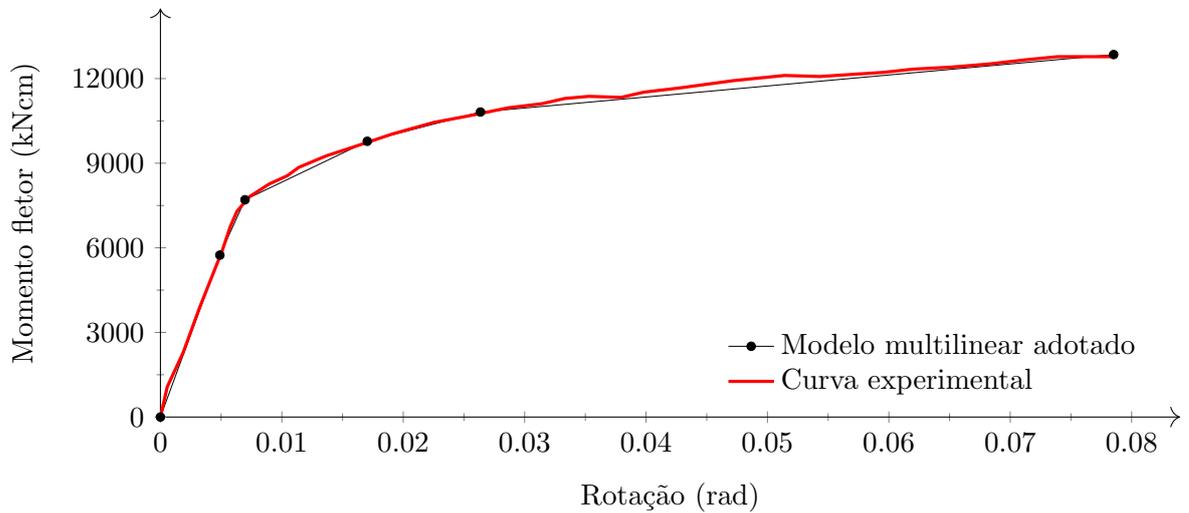
Foram encontrados na literatura resultados experimentais para avaliação dos deslocamentos em diversos pontos da estrutura (BITAR *et al.*, 2006). Numericamente, apenas Demonceau (2008) apresenta uma trajetória de equilíbrio no ponto de aplicação da carga incremental, ponto próximo ao nó 4. Na Figura 5.47 são comparadas as trajetórias de equilíbrio do presente trabalho e as dadas na literatura referentes ao deslocamento u . Percebe-se uma boa aproximação com as curvas da literatura (KRAUSS, 2002; DEMONCEAU, 2008), principalmente na comparação com a curva numérica obtida usando o *software* FINELG (DEMONCEAU, 2008). Em termos comparativos, o presente trabalho encontrou um fator de carga limite $\lambda P_{lim} = 185 \text{ kN}$ e a análise no FINELG resultou em um valor limite de 182 kN, ou seja, uma diferença de apenas 1.6%.

5.6.3 Pórtico metálico de cinco andares e quatro vãos

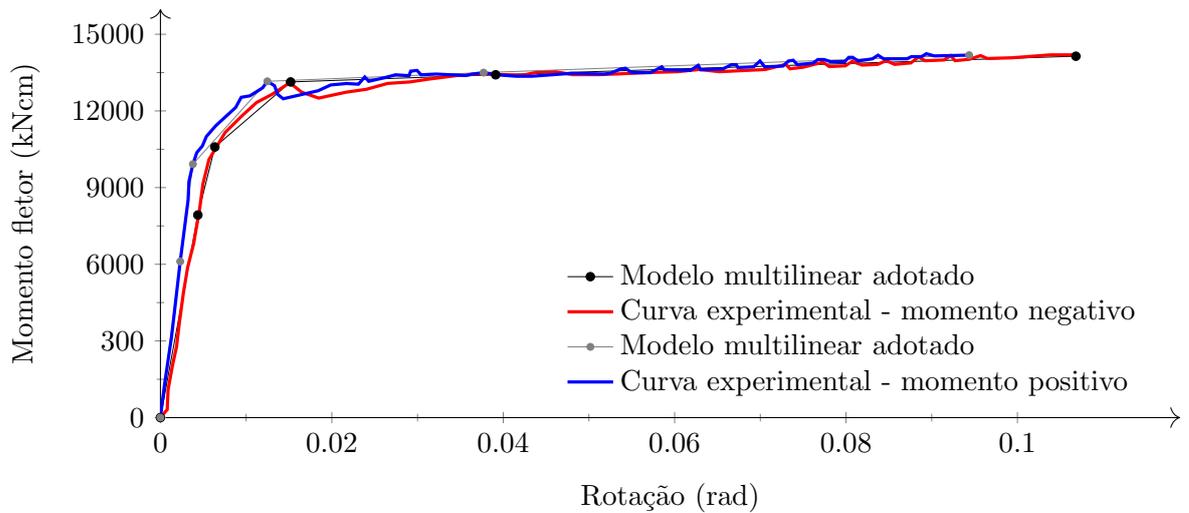
Nguyen e Kim (2016) realizaram um estudo do comportamento do pórtico metálico de cinco andares e quatro vãos ilustrado na Figura 5.48. Segundo os autores, trata-se de um pórtico real localizado na cidade de Shanghai na China. O pórtico apresenta quatro



(a) Ligação com os pilares externos no primeiro pavimento



(b) Ligação com os pilares externos e interno no segundo pavimento



(c) Ligação com o pilar interno

Figura 5.46 – Curvas $M \times \phi$ para a as ligações do pórtico de Bochum

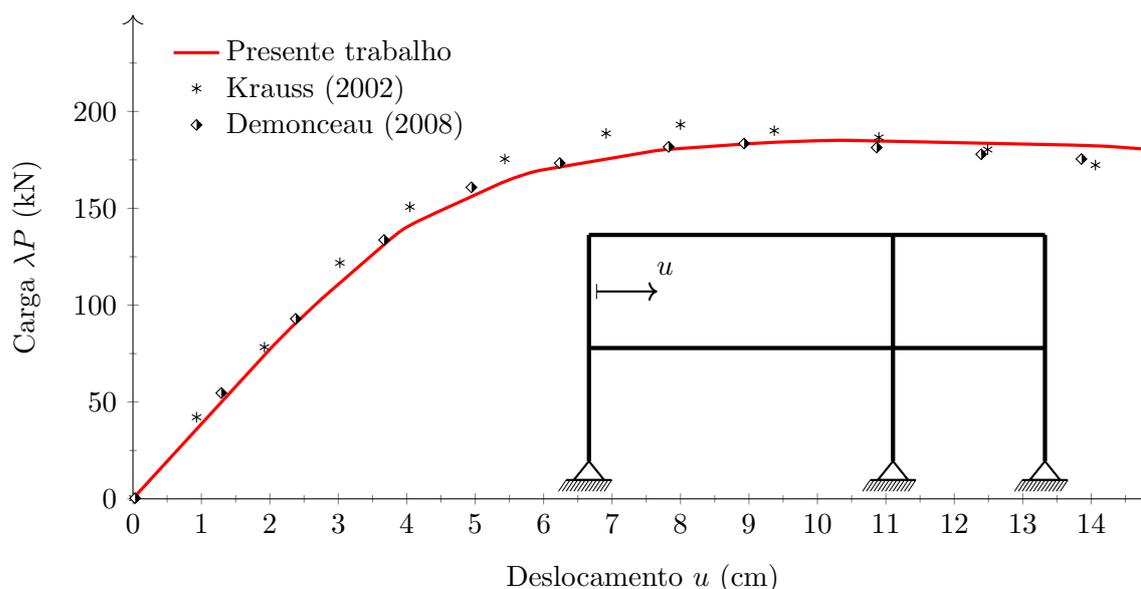


Figura 5.47 – Pórtico de Bochum: curva carga-deslocamento u

vãos igualmente espaçados com comprimento total de 40 m e cinco andares com altura total de 19.7 m. O pavimento térreo tem altura de 4.5 m e os demais pavimentos tem altura igual a 3.5 m. A ligação entre as vigas e os pilares é feita com uma chapa de topo parafusada (tipo C) e modelada através do modelo exponencial (Tabela 3.1). Foi adotado o módulo de elasticidade do aço como sendo 20000 kN/cm^2 e a tensão de escoamento de 23.5 kN/cm^2 . Na Figura 5.48 também são ilustrados os perfis estruturais que compõem o pórtico e as cargas atuantes.

Nguyen e Kim (2016) apresentaram a trajetória de equilíbrio relacionando o fator de carga λ e o deslocamento horizontal, u , no topo do pórtico. Ao comparar o resultado obtido com a formulação descrita no presente capítulo, percebe-se uma boa convergência, principalmente no início da curva. Tal aproximação provém da descrição do comportamento da ligação. Tanto no presente trabalho quanto no estudo de Nguyen e Kim (2016), o modelo exponencial foi utilizado.

5.6.4 Pórtico metálico de seis andares

O pórtico apresentado na Figura 5.50 foi inicialmente estudado por Vogel (1985) tanto por meio de uma análise considerando os efeitos da plasticidade de forma distribuída quanto de forma concentrada. Posteriormente, diversos autores simularam esse sistema estrutural (ZIEMIAN, 1993; BARSAN; CHIOREAN, 1999; CHAN; CHUI, 2000; MACHADO, 2005). A geometria, os perfis, o carregamento e a malha de elementos finitos

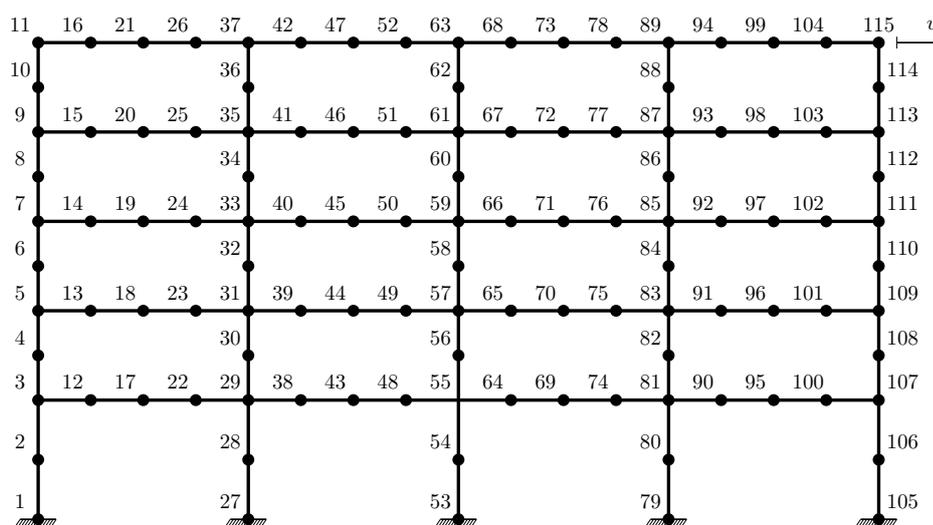
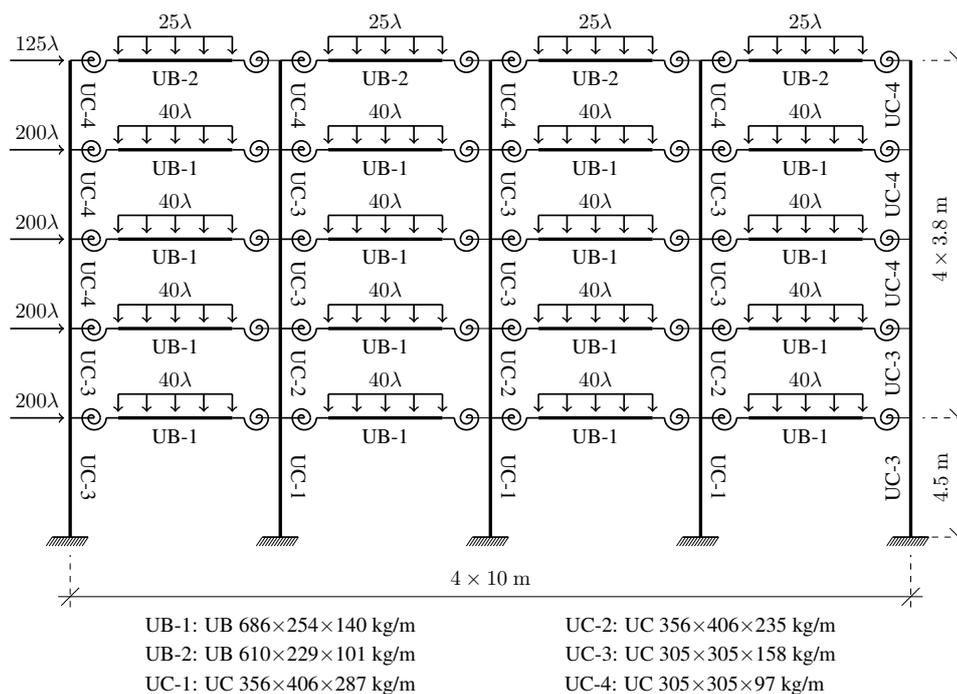


Figura 5.48 – Pórtico de Shanghai: geometria, cargas em kN e discretização adotada

utilizada são mostrados nessa mesma figura. Todas as cargas atuantes são consideradas de forma incremental. A estrutura apresenta uma imperfeição geométrica global igual a $1/450$ (VOGEL, 1985).

O aço dos perfis apresenta tensão de escoamento igual a 23.5 kN/cm^2 e módulo de elasticidade tomado como 20500 kN/cm^2 na fase elástica. Foi adotada uma relação elastoplástica perfeita, sem a consideração do encruamento do material. O modelo de tensões residuais utilizado é o mesmo proposto pelo EC 3 (1992) e ilustrado na Figura 2.7(b). Chan e Chui (2000) propuseram um estudo do mesmo sistema estrutural considerando as ligações como semirrígidas. Para isso, os quatro modelos ilustrados na Figura 3.1 foram

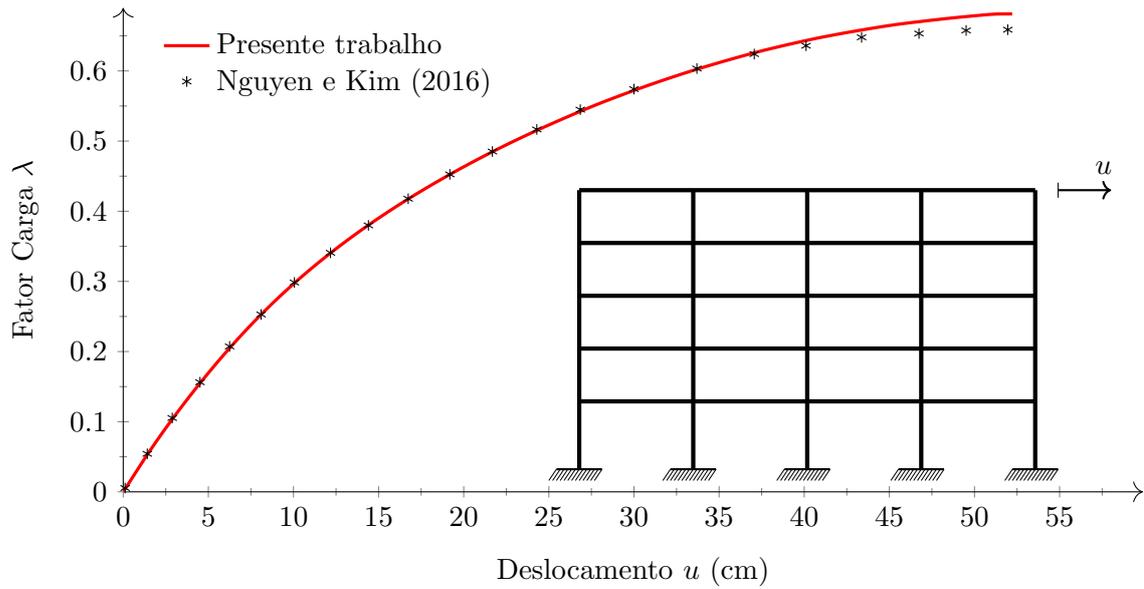


Figura 5.49 – Trajetórias de equilíbrio - pórtico de Shanghai

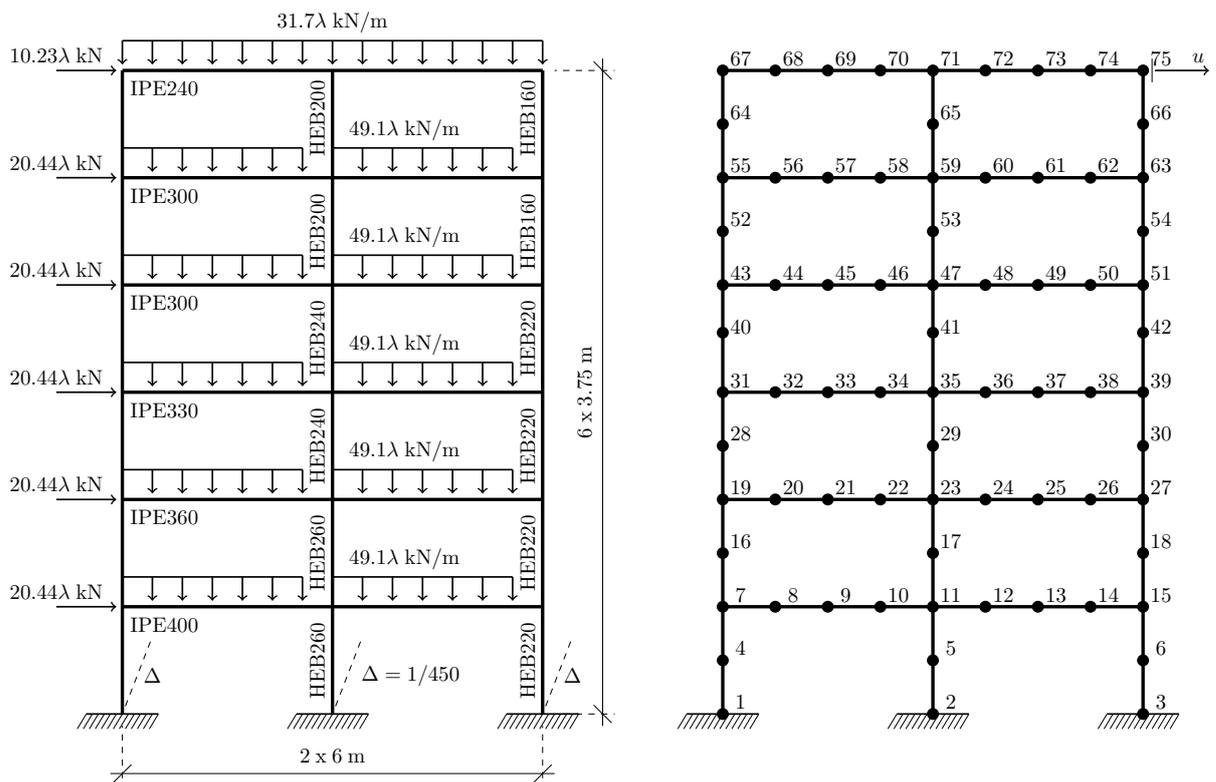


Figura 5.50 – Pórtico de 6 andares - geometria, carregamento e discretização adotada

simulados. Dessa forma, as análises da estrutura em questão serão divididas em quatro etapas:

- considerando as ligações perfeitamente rígidas;
- as ligações com comportamento linear; e

- as ligações com comportamento não linear por meio do modelo exponencial;
- considerando as vigas como mistas com interação parcial e total.

Considerando o comportamento perfeitamente rígido das ligações, ou seja, $S_c \rightarrow \infty$, vê-se na Figura 5.51 que há uma boa concordância entre os resultados obtidos na análise realizada no CS-ASA e o fornecido na literatura (VOGEL, 1985; CHAN; CHUI, 2000). Vale ressaltar que na pesquisa realizada por Chan e Chui (2000) a inelasticidade do aço foi simulada através de molas fictícias nas extremidades do elemento finito, e ainda, o autor considera uma imperfeição geométrica inicial maior, $\Delta = 1/300$. Já Vogel (1985) considerou a plasticidade de forma distribuída (zona plástica-ZP). Tal variação é função dos momentos de início e de final de plastificação da seção transversal. Dessa forma, a variação da rigidez à flexão via MCD e por molas fictícias apresentam uma leve diferença como pode ser vista no início do trecho não linear da curva carga deslocamento ilustrada na Figura 5.51. Ao se aproximar da carga crítica, as trajetórias de equilíbrio se aproximam novamente, sendo λ_{lim} coincidente, como ressaltado na Tabela 5.12.

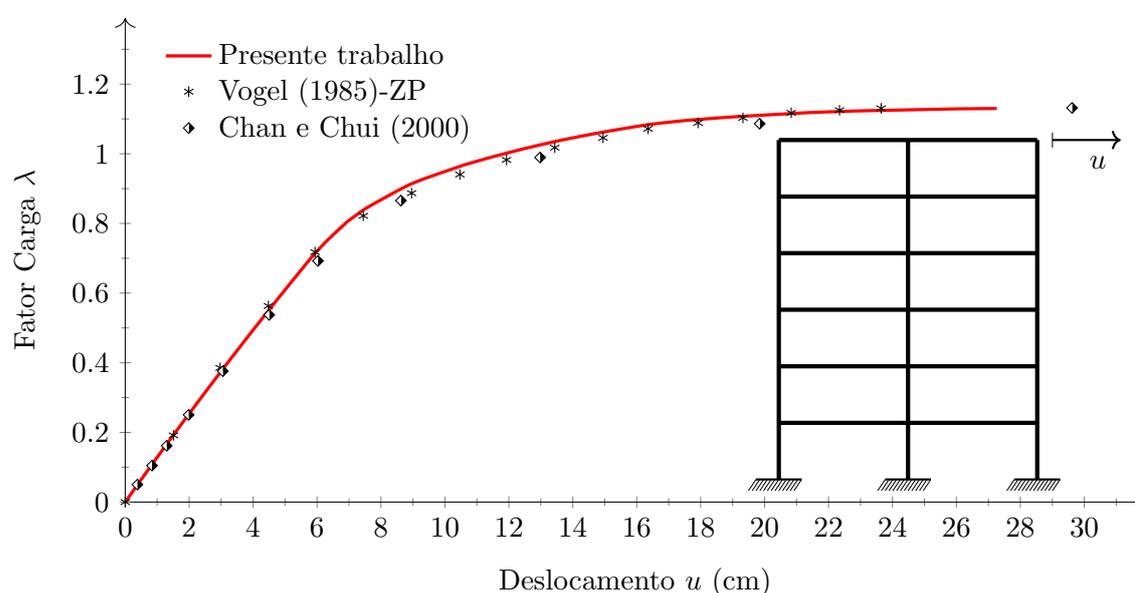
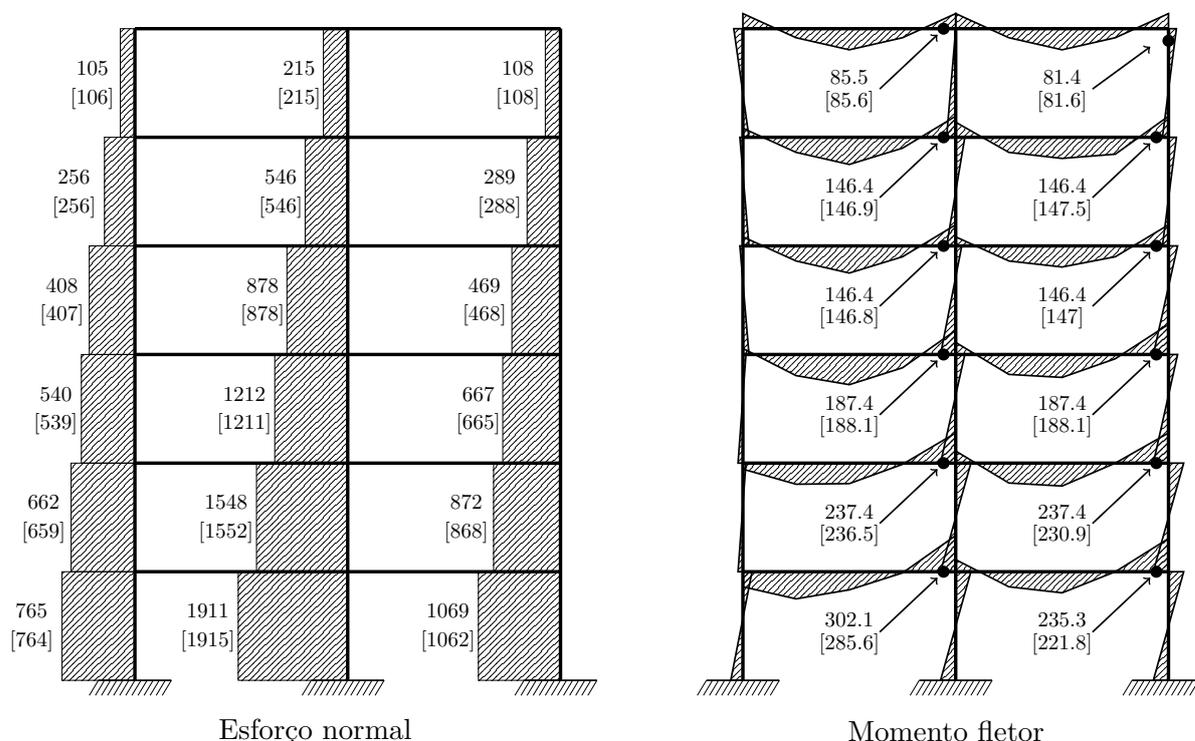


Figura 5.51 – Trajetórias de equilíbrio - pórtico de 6 andares

Chan e Chui (2000) apresentaram um estudo das forças internas na estrutura no momento que antecede o colapso, ou seja, quando a carga atinge o valor de λ_{lim} (Figura 5.52). Quando confrontados com os valores obtidos na presente análise, percebe-se novamente boa aproximação, o que valida a metodologia implementada com base no MRPRM para análises de estruturas de aço.

Tabela 5.12 – Cargas últimas em kN

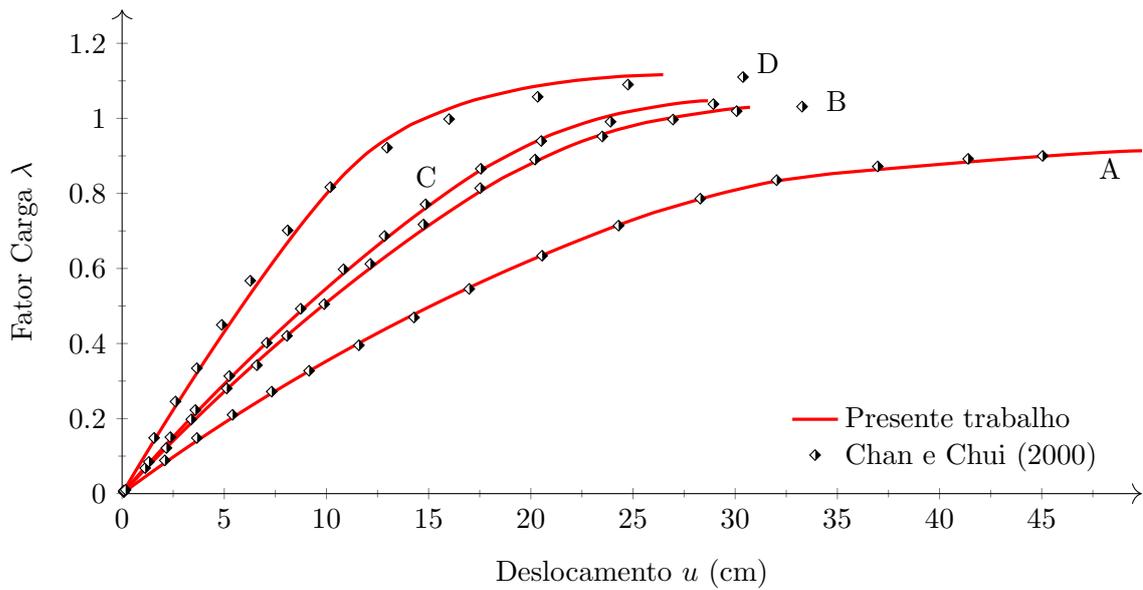
Referência	λ_{lim}
Presente trabalho - MRPRM	1.13
Vogel (1985) - Rótula plástica	1.12
Vogel (1985) - Zona plástica	1.11
Ziemian (1993) - Rótula plástica	1.13
Chan e Chui (2000) - Rótula plástica	1.13
Machado (2005) - Rótula plástica	1.15
Rocha (2006) - Rótula plástica	1.11

**Figura 5.52** – Forças internas em $\lambda_{lim} = 1.13$: Presente trabalho \times [Chan e Chui (2000)]

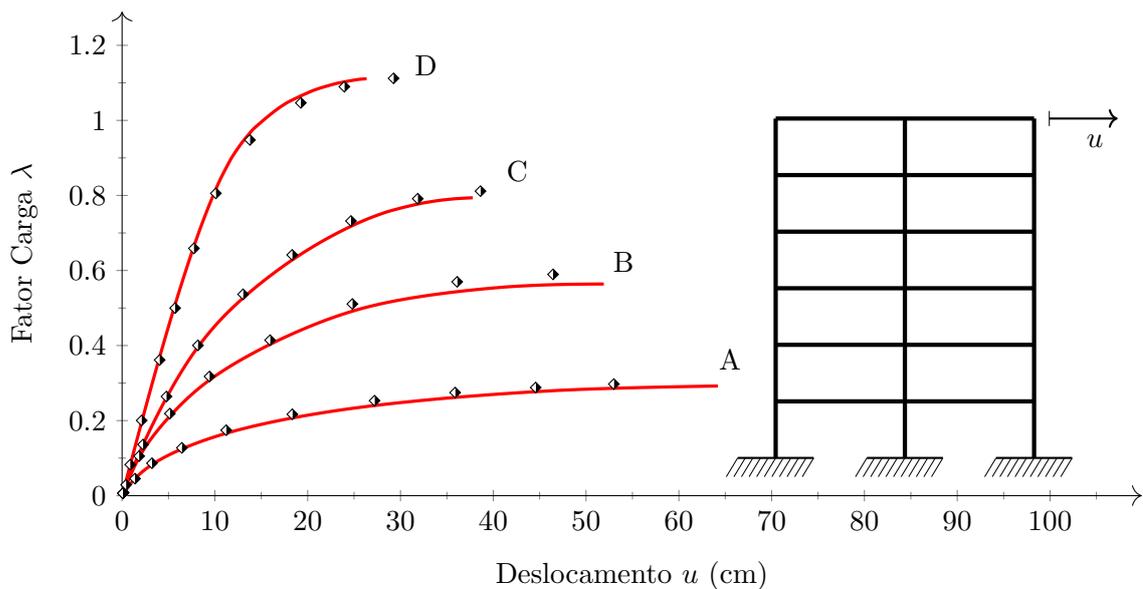
Ao realizar as análises considerando as ligações semirrígidas com comportamento linear e não linear, os quatro modelos de ligação apresentados no item 3.3.2 foram testados. Em outras palavras, o parâmetro S_c é mantido constante e seu valor foi retirado diretamente da Tabela 3.1 em um primeiro momento. Na sequência, o modelo exponencial é usado (LUI; CHEN, 1986; LUI; CHEN, 1988). As curvas carga-deslocamento para as quatro análises realizadas são mostradas na Figura 5.53.

As trajetórias de equilíbrio demonstram claramente a variação da capacidade resistente e da rigidez do sistema estrutural a medida que cada uma das quatro ligações citadas

na seção 3.3.2 são simuladas. Dessa forma, vê-se que há a necessidade de estudar o comportamento de cada ligação presente em um sistema estrutural, pois essa pode alterar significativamente a capacidade resistente do sistema, conforme destacado na Tabela 5.13. Merece destaque, nas simulações usando o modelo exponencial, a redução da capacidade resistente do sistema usando a ligação com cantoneira de alma simples (tipo A), em que o sistema estrutural apresentou carga limite, λ_{lim} , aproximadamente 73.5% menor do que o sistema com ligações com chapa de topo estendida (tipo D).



(a) Ligações com comportamento linear



(b) Ligações com comportamento não linear

Figura 5.53 – Trajetórias de equilíbrio

Nas simulações realizadas utilizando os modelos lineares para a descrição da curva

Tabela 5.13 – Cargas últimas em kN

Ligação	Modelo linear		Modelo não linear	
	Presente trabalho	Chan e Chui (2000)	Presente trabalho	Chan e Chui (2000)
A	0.914	0.89	0.294	0.31
B	1.029	1.03	0.564	0.59
C	1.047	1.04	0.794	0.81
D	1.116	1.11	1.111	1.11

$M \times \phi$ da ligação, foram obtidas cargas limites superiores às dos modelos não lineares. De fato, manter o parâmetro S_c constante induz a um sistema mais rígido, implicando em menores deslocamentos e diminuição dos esforços internos oriundos da não linearidade geométrica. Outro fator de grande relevância: no modelo linear $M \times \phi$, não há um momento último resistente da ligação, ou seja, uma vez definido o $S_{c,ini}$ (constante em toda a análise), quem define de fato a carga limite é a capacidade resistente da seção transversal.

Com relação as simulações utilizando o modelo exponencial, pode-se ver claramente uma redução da capacidade de carga do sistema. Indo além, percebe-se que quanto mais rígida é a ligação, maior é a influência da não linearidade física do material. Na simulação usando a ligação tipo D, têm-se 16 rótulas plásticas formadas além de outras 43 seções em processo de degradação da rigidez à flexão. Esses números reduzem para 1 rótula formada e 39 seções degradando para a análise com a ligação tipo C. Para os resultados com as ligações B e A, não houve formação de rótulas plásticas, apenas degradação parcial em 18 e 7 seções, respectivamente.

Por fim, Fang *et al.* (2000) estenderam ainda mais a gama de análises desse pórtico considerando as vigas como mistas, ilustradas na Figura 5.54. Nesta figura o perfil de aço é simplesmente descrito como IPE, sendo que sua definição completa (IPE240, IPE300, IPE330, IPE360, IPE400) depende de qual pavimento a viga pertence e é definida na Figura 5.50. No referido trabalho, os autores consideraram a análise elástica da estrutura, variando a disposição dos conectores, simples ou em dupla. Recentemente, Chiorean e Buru (2017) definiram a função do grau de ação mista para cada viga do sistema estrutural, sendo esses valores apresentados na Tabela 5.14.

Embora as seções transversais sejam analisadas com a possibilidade de plastificação,

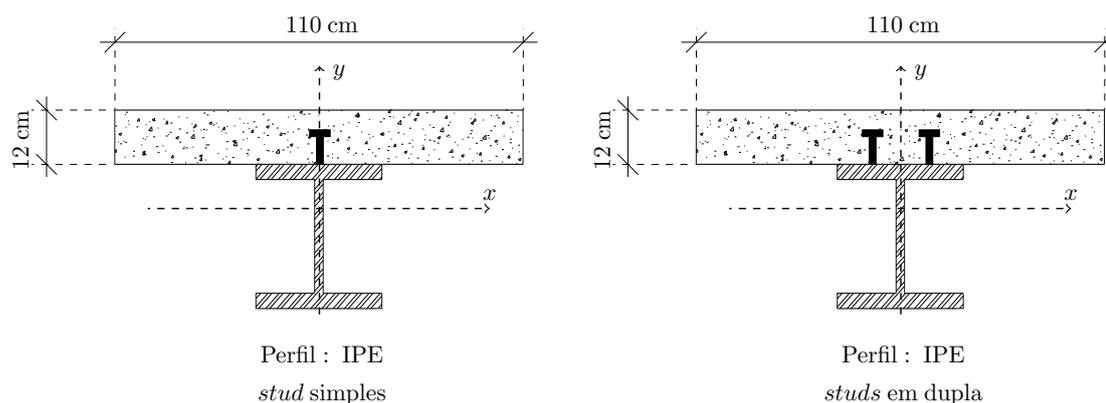


Figura 5.54 – Seção transversal das vigas mistas do pórtico de Vogel

Tabela 5.14 – Função do grau de ação mista

Viga	<i>Studs simples</i>		<i>Studs em dupla</i>	
	γ_{ef}	$f(\gamma_{ef})$	γ_{ef}	$f(\gamma_{ef})$
1 ^o pavimento	2.743	0.433	3.879	0.604
2 ^o pavimento	2.924	0.464	4.135	0.634
3 ^o pavimento	2.924	0.464	4.135	0.634
4 ^o pavimento	3.328	0.529	4.707	0.692
5 ^o pavimento	3.328	0.529	4.707	0.692
6 ^o pavimento	3.760	0.589	5.318	0.741

considerando $f_c = 3 \text{ kN/cm}^2$, segue-se aqui a análise proposta por Chiorean e Buru (2017), em que a função do grau de ação mista é mantida constante durante toda a análise. Dessa forma, mantendo $f(\gamma_{ef})$ constante, não há a necessidade de refinamento da malha, como visto nas Seções 5.3.4 e 5.3.5 do presente capítulo. As curvas carga-deslocamento da estrutura, considerando interação total (IT), nula (SI) e parcial, são apresentadas na Figura 5.55. Novamente, a formulação numérica se mostrou satisfatória fornecendo resultados condizentes com os fornecidos por Chiorean e Buru (2017), referido na figura a seguir como REF (referência), que consideraram os efeitos da plasticidade de forma distribuída.

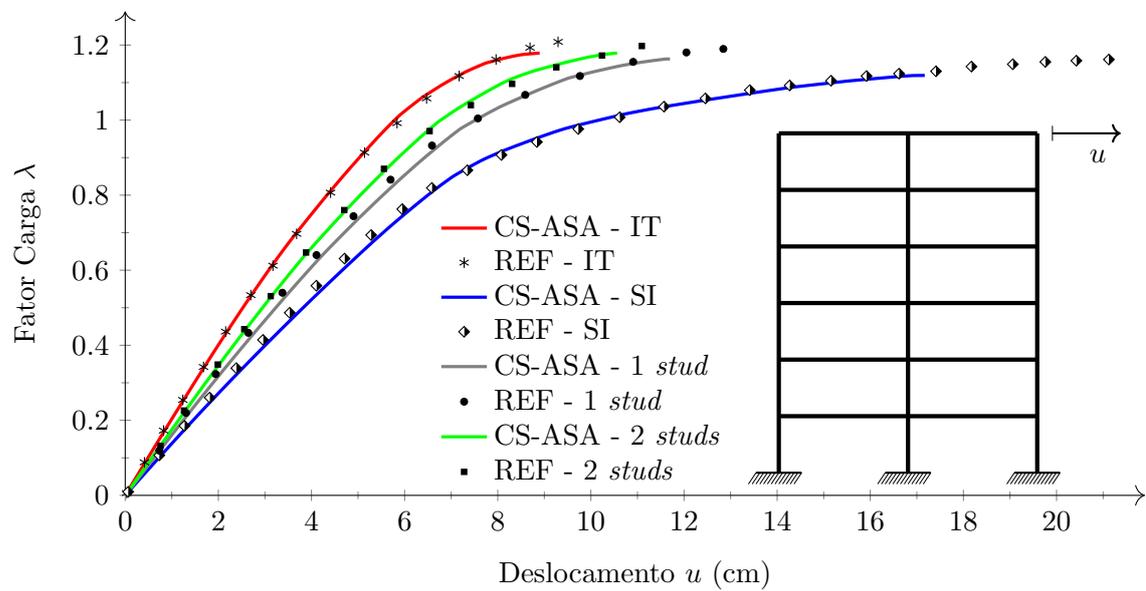


Figura 5.55 – Trajetórias de equilíbrio - pórtico de 6 andares com viga mista

CAPÍTULO 6

Considerações Finais

6.1 Introdução

No presente trabalho foram abordadas soluções numéricas para a simulação de sistemas estruturais de aço, concreto armado e mistos de aço e concreto. Diversas fontes de não linearidade foram consideradas simultaneamente: a não linearidade geométrica, a inelasticidade, as ligações semirrígidas e a possibilidade de deslizamento na interface aço-concreto de vigas mistas.

A base computacional utilizada nesta tese foi o programa CS-ASA - *Computational System for Advanced Structural Analysis* (SILVA, 2009), inicialmente desenvolvido para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas e recentemente expandido para análise de estruturas mistas de aço e concreto por Lemes (2015). As alterações na plataforma para possibilitar uma abordagem mais geral, no contexto da análise estrutural, foram discutidas ao longo dos capítulos do presente trabalho. Um fator relevante é que algumas prescrições normativas também foram levadas em consideração, tais como: os modelos de tensões residuais nas seções de aço (EC 3, 1992; AISC LRFD, 2016) e os modelos constitutivos dos materiais (EC 2, 2004; NBR 6118, 2014). Isso faz com que as implementações não tenham carácter exclusivamente teórico mas também seja aplicável à prática.

Para validar as implementações realizadas nesse trabalho foram feitas simulações de diversos sistemas estruturais em que foram encontradas respostas numéricas e experimentais na literatura. Nos próximos itens são apresentadas, respectivamente, as conclusões das simulações realizadas no Capítulo 5 e algumas sugestões para trabalhos futuros.

6.2 Conclusões

Nos vários exemplos simulados no capítulo anterior, pode-se observar uma convergência satisfatória entre os resultados aqui obtidos com dados numéricos e/ou experimentais presentes na literatura. Conclui-se assim que as implementações desenvolvidas foram bem sucedidas, proporcionando ao CS-ASA uma nova funcionalidade: *Análise Inelástica de 2ª Ordem de Estruturas Mistas de Aço e Concreto com Ligações Semirrígidas e Interação Parcial*. A formulação apresentada permite ainda que estruturas puramente de aço ou de concreto armado também sejam simuladas.

A calibração do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) foi feito analisando o comportamento de diversas seções transversais de aço e mistas de aço e concreto variando os modelos de tensões residuais. Com os resultados dessas análises, é possível afirmar a necessidade de revisão das curvas de início de plastificação (CIP) para a flexão em torno do eixo de menor inércia, usualmente aliadas ao Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). A aplicação do modelo via MCD, mais realista, demonstra que as CIP apresentam forma bem diferente das utilizadas de forma simplificada (dada por modelos lineares). Além disso, a variação da rigidez à flexão das seções foi estudada e calibrada, uma vez que esses dados são de grande importância para a montagem da matriz de rigidez do elemento nas análises globais (das estruturas como um todo).

O MRPRM forneceu análises com boa precisão na resposta para elementos estruturais isolados (vigas e pilares) e para os sistemas estruturais (pórticos) com diversas possibilidades de composição, sejam estruturas totalmente em aço, em concreto armado, mistas ou ainda com alguns elementos de aço e outros mistos. A associação da proposta MRPRM com uma formulação não linear geométrica (NLG) com funções de interpolação de ordem elevada elimina os problemas de travamento (*locking*). Assim, não foram observados aqui os problemas relatados por Kostic e Filippou (2012) nas simulações considerando a plasticidade concentrada (consideração das tensões residuais, interação entre força axial e momento fletor e a consideração do encruamento e amolecimento dos materiais presentes nas seções transversais).

As ligações semirrígidas foram tratadas por meio da consideração exclusiva do seu comportamento sob flexão. Para isso, molas rotacionais fictícias foram introduzidas nos elementos de modo a captar a variação da rigidez flexional da ligação no modelo numérico. Assim, curvas momento-rotação provenientes de modelos matemáticos (lineares

e exponenciais) e com introdução direta de pontos conhecidos (modelo multilinear) foram apresentadas e discutidas. No caso, o modelo multilinear merece destaque pela sua generalidade, podendo representar a curva momento-rotação para qualquer tipo de ligação, seja entre elementos puramente de aço, elementos mistos, ou ainda elementos de aço ligados a elementos mistos. Os resultados aqui encontrados foram confrontados com dados experimentais presentes na literatura, validando as implementações e confirmando a hipótese simplificadora adotada que forças axiais e cisalhantes pouco influenciam no comportamento da ligação.

No que diz respeito à interação parcial, a ideia da divisão do esforço axial entre a laje e o perfil, em carácter local, é suficiente para uma simulação próxima do comportamento real da estrutura. Verificou-se nesse trabalho que a resposta numérica considerando os efeitos de forma concentrada aproximou-se consideravelmente das respostas numéricas e experimentais presentes na literatura, validando a proposta do presente estudo. Uma atenção especial foi dada ao estudo da malha, sendo observado que baixos índices de refinamento superestimam a rigidez dos conectores dentro do comprimento de influência, de modo que a resposta numérica perde precisão no que diz respeito à capacidade de carga final do sistema. Essa situação apresenta maior visibilidade à medida que o número de conectores ao longo do comprimento do elemento estrutural aumenta. Por outro lado, o uso de discretizações com maiores números de elementos finitos é suficiente para corrigir o problema observado dentro do contexto da formulação aqui apresentada. Outra forma de correção que poderia ser testada é baseada no estudo da rigidez dos conectores dentro do comprimento de influência, passando a obtê-la de forma mais precisa considerando o grupo de conectores como um todo, não apenas um isolado.

6.3 Difusão e Uso das Formulações Desenvolvidas

O presente trabalho começou a ser desenvolvido no início de 2015 com a inclusão do MCD na plataforma CS-ASA. Concomitantemente as implementações aqui realizadas, outros trabalhos, a nível de mestrado e doutorado, utilizaram a base desenvolvida para soluções de diversos problemas.

Em sua dissertação de mestrado Barros (2016) empregou o MRPRM para analisar o comportamento inelástico de segunda ordem de estruturas de aço em situação de incên-

dio. Para isso, após a análise térmica das seções transversais, a temperatura nas fibras eram conhecidas e assim, com o uso de relações constitutivas adequadas, propiciaram a utilização da formulação inelástica aqui apresentada. A Figura 6.1 ilustra de forma geral o trabalho descrito. Essa base computacional, no contexto da análise estrutural sob elevadas temperaturas, vem sendo ampliada por Pires (2018), na sua Tese de Doutorado, que trabalha diretamente com o MRPRM para análise de estruturas de concreto armado.

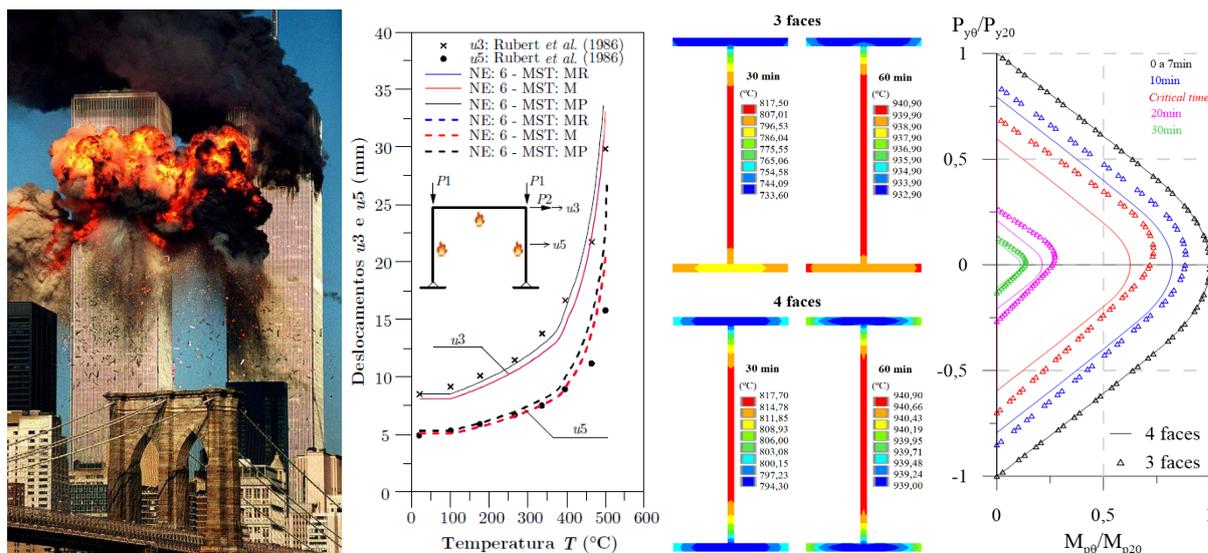


Figura 6.1 – Imagem representativa das pesquisas de Barros (2016) e Pires (2018)

Já Silva (2018) está realizando a análise inelástica de segunda ordem de estruturas com restrições bilaterais e unilaterais de contato. Nesse sentido, a parte inelástica provem dos desenvolvimentos do presente trabalho.

Por fim, Deus (2018) vem desenvolvendo um estudo intitulado *Estudo computacional avançado sobre arcos metálicos, de concreto e mistos abatidos e pouco abatidos*. Novamente o MRPRM vem proporcionando bons resultados e alguns frutos desse trabalho são apresentados na Figura 6.2.

6.4 Sugestões para Trabalhos Futuros

Alguns trabalhos podem ser desenvolvidos a partir da base apresentada nesta tese. A seguir, são descritas possíveis pesquisas futuras e alguns trabalhos relevantes para eventual consulta:

- Análise não linear de estruturas de concreto pré-moldado considerando as ligações

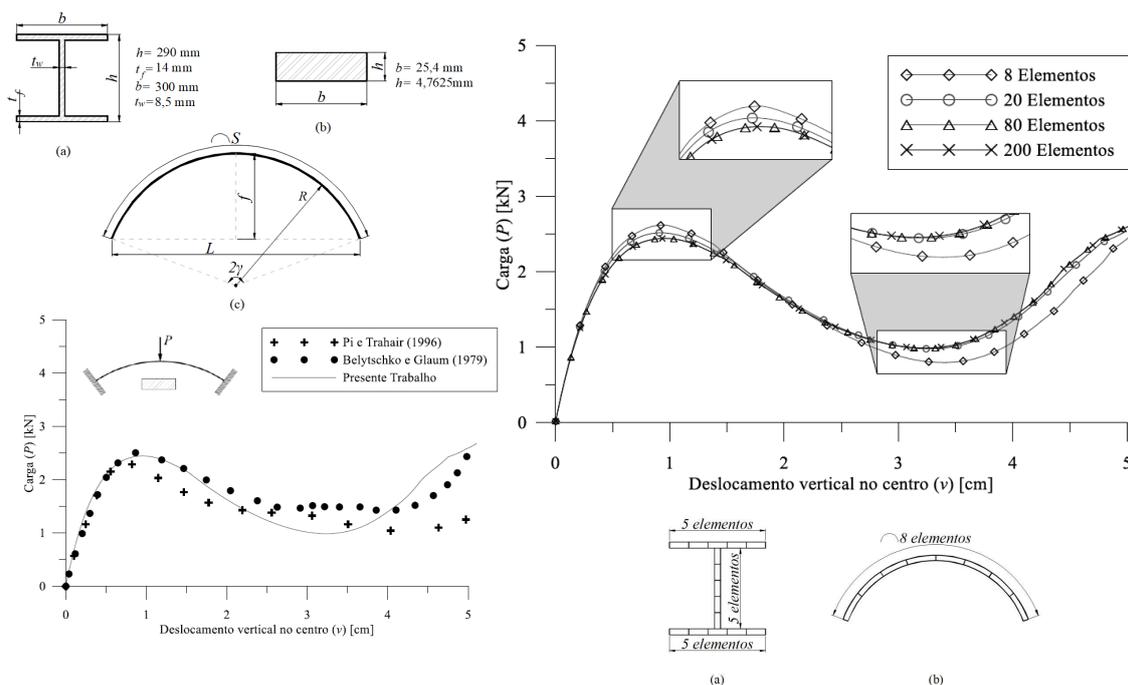


Figura 6.2 – Imagem representativa da pesquisa de Deus (2018)

semirrígidas (HAWILEH *et al.*, 2010; DEBS *et al.*, 2010; KATAOKA *et al.*, 2012);

- Introdução do efeito das forças cortante e normal no comportamento das ligações semirrígidas (BAYO *et al.*, 2012);
- Simulação do colapso progressivo em estruturas mistas (IZZUDDIN *et al.*, 2008; FU, 2010);
- Desenvolver formulações não lineares globais baseadas no método das forças (SCOTT; FENVES, 2006; VALIPOUR; FOSTER, 2010; KOSTIC; FILIPPOU, 2012; CHIOREAN, 2013);
- Introdução da força de protensão nos elementos de concreto (GREGORI *et al.*, 2007);
- Análise dinâmica não linear de estruturas mistas de aço e concreto (EL-TAWIL; DEIERLEIN, 2001; CHEN *et al.*, 2010; CHEN *et al.*, 2014; SKALOMENOS *et al.*, 2014);
- Expansão da plataforma computacional para o contexto tridimensional (CHIOREAN, 2013; BLEYER; BUHAN, 2013; NGUYEN; KIM, 2014);

- Interpolação da resposta nodal para o interior do elemento (plasticidade distribuída) (CALDAS, 2004; ALVARENGA, 2010; NGUYEN; KIM, 2016);
- Consideração da teoria de viga de Timoshenko para a consideração da deformação por cisalhamento no elemento (CHIOREAN; BURU, 2017);
- Análise avançada de elementos estruturais com restrições de contato impostas por um meio elástico, como o solo, por exemplo (KAMPITSIS; SAPOUNTZAKIS, 2017);
- Avaliação numérica da confiabilidade de estruturas mistas considerando as diversas fontes de não linearidades discutidas no presente trabalho (AGOSTINI, 2014);
- Simulação numérica das estruturas mistas em situação de incêndio (CALDAS, 2008; CALDAS *et al.*, 2010);
- Desenvolvimento de uma interface gráfica para o programa CS-ASA;

Referências

- ABRAMBES, M.; QUACH, W. M. Residual stresses in steel members: a review of available analytical expressions. *International Journal of Structural Integrity*, v. 7, n. 1, p. 70–94, 2016.
- ACI 318. Building code requirements for structural concrete and commentary. *American Concrete Institute, Detroit, MI*, 2008.
- ADEKOLA, A. Partial interaction between elastically connected elements of a composite beam. *International Journal of Solids and Structures*, 1968.
- AGOSTINI, B. M. *Análise de confiabilidade estrutural de pórticos metálicos planos com ligações semirrígidas*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.
- AISC LRFD. Specification for structural steel buildings. *American Institute of Steel Construction, Chicago, IL*, 2010.
- AISC LRFD. Specification for structural steel buildings. *American Institute of Steel Construction, Chicago, IL*, 2016.
- ALHASAWI, A.; HENG, P.; HJIAJ, M.; GUEZOULLI, S.; BATTINI, J.-M. Co-rotational planar beam element with generalized elasto-plastic hinges. *Engineering Structures*, v. 151, p. 188–205, 2017.
- ALVARENGA, A. R. *Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2005.
- ALVARENGA, A. R. *As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2010.
- ALVARENGA, A. R.; SILVEIRA, R. A. M. Efeito das tensões residuais na análise de estruturas simples de aço. In: *XXXII Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural*. [S.l.: s.n.], 2006.
- ANSOURIAN, P. Experiments on continuous composite beams. *Proceedings of the Institution of Civil Engineer*, v. 71, n. 2, p. 25–51, 1981.

- ARIBERT, J. M.; LABIB, A. G. Modele de calcul elasto-plastique de poutre mixtes a connexion partielle. *Construction Metallique*, v. 4, p. 3–51, 1982.
- AYOUB, A.; FILIPPOU, F. C. Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element. *Journal of Structural Engineering*, v. 126, n. 3, p. 371–381, 2000.
- AZIZINAMINI, A.; BRADBURN, J. H.; RADZIMINISKI, J. B. *Static and cyclic behavior of semi-rigid steel beam-column*. [S.l.], 1985.
- BARAN, E.; TOPKAYA, C. An experimental study on channel type shear connectors. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 74, p. 108–117, 2012.
- BARROS, R. C. *Avaliação Numérica avançada do desempenho de estruturas de aço sob elevadas temperaturas*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2016.
- BARSAN, G.; CHIOREAN, C. Influence of residual stress on the carrying-capacity of steel framed structures. Numerical investigation. In: DUBINA, D.; IVANY, M. (Ed.). *Stability and Ductility of Steel Structures*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 317–324.
- BATELO, E. A. P. *Análise dinâmica avançada de estruturas de aço sob cargas extremas*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2014.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 1262–1267, 1979.
- BATTINI, J. M.; NGUYEN, Q. H.; HJIAJ, M. Non-linear finite element analysis of composite beams with interlayer slip. *Computers and Structures*, v. 87, p. 904–912, 2009.
- BAYO, E.; GARCIA, J.; GIL, B.; NI, R. G. An efficient cruciform element to model semirigid composite connections for frame analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 72, p. 97–104, 2012.
- BAŽANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 1983.
- BEBER, A. J. *Comportamento estrutural de vigas de concreto armado reforçadas com compósitos de fibra de carbono*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2003.
- BITAR, D.; RYAN, Y.; CARAMELLI, S.; SALVATORE, W.; TAUCER, F.; JASPART, J.-P.; DEMONCEAU, J.-F.; HALLER, M.; GRIJALVO, J.; HEISE, F.; KINDMANN, R.; KRAUSS, M.; HOFFMEISTER, B.; OPPE, M.; STANGENBERG, H. *Steel products and applications for buildings, construction and industry: Applicability of composite structures to sway frames*. Brussels, Belgium, 2006.

- BLEYER, J.; BUHAN, P. de. Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3d composite frame structures. *Computers and Structures*, v. 129, p. 86–98, 2013.
- BRANSON, D.; METZ, G. *Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams*. Auburn: Dept. of Civil Engineering and Auburn Research Foundation, Auburn University, 1963.
- BRATINA, S.; SAJE, M.; PLANINC, I. On material and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solids and Structures*, v. 41, p. 7181–7207, 2004.
- CALDAS, R. B. *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2004.
- CALDAS, R. B. *Análise numérica de estruturas de aço, concreto e mistas em situação de incêndio*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2008.
- CALDAS, R. B.; SOUSA JR, J. B. M.; FAKURY, R. H. Interaction diagrams for reinforced concrete sections subjected to fire. *Engineering Structures*, v. 32, n. 9, p. 2832–2838, 2010.
- CAMPOS JÚNIOR, R. *Análise do comportamento de estruturas reticuladas de aço com ligações semirrígidas*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1990.
- CHAN, S. L. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 26, p. 2657–2669, 1988.
- CHAN, S. L.; CHUI, P. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Oxford: Elsevier, 2000.
- CHAN, S. L.; LIU, S.; LIU, Y. Advanced analysis of hybrid frame structures by refined plastic hinge approach. In: UY, B.; TAO, Z.; MASHIRI, F.; ZHU, X.; MIRZA, O.; TAN, E. L. (Ed.). *Steel and Composite Structures - Proceedings of 4th International Conference*. [S.l.], 2010.
- CHAPMAN, J. C.; BALAKRISHNAN, S. Experiments on composite beams. *Structural engineers*, v. 42, p. 369–383, 1964.
- CHAPMAN, S. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. 2. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003.
- CHATER, L. *Estudo de conector de cisalhamento em barra de aço CA-50 para viga mista aço-concreto*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 2015.
- CHEN, C.; WANG, C.; SUN, H. Experimental study on seismic behavior of full encased steel-concrete composite columns. *Journal of Structural Engineering*, v. 140, n. 6, 2014.

- CHEN, S.; TENG, J. G.; CHAN, S. L. Design of biaxially loaded short composite columns of arbitrary section. *Journal of Structural Engineering*, v. 127, n. 6, p. 678–685, 2001.
- CHEN, W.; GOTO, Y.; LIEW, J. *Stability Design of Semi-rigid Frames*. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc., 1996.
- CHEN, W.; KIM, S. *LRFD Steel Design using Advanced Analysis*. Boca Raton, Flórida, EUA: CRC Press, 1997.
- CHEN, W.; SOHAL, I. *Plastic design and second order analysis of steel frames*. Nova Iorque: [s.n.], 1995.
- CHEN, W. F.; LUI, E. M. *Stability Design of Steel Frames*. Boca Raton, Flórida: CRC Press, 1991.
- CHEN, W. F.; TOMA, S. *Advanced analysis of steel frames - Theory software and applications*. Boca Raton: CRC Press, 1994.
- CHEN, Y.; WANG, T.; YANG, J.; ZHAO, X. Test and numerical simulation of partially encased composite columns subject to axial and cyclic horizontal loads. *International Journal of Steel Structures*, v. 10, n. 4, p. 385–393, 2010.
- CHHANG, S.; BATTINI, J.-M.; HJIAJ, M. Energy-momentum method for co-rotational plane beams: A comparative study of shear flexible formulations. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 134, p. 41–54, 2017.
- CHIOREAN, C. G. A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D composite steel-concrete frame structures. *Engineering Structures*, v. 57, p. 125–152, 2013.
- CHIOREAN, C. G.; BURU, S. M. Practical nonlinear inelastic analysis method of composite steel-concrete beams with partial composite action. *Engineering Structures*, v. 134, p. 74–106, 2017.
- CRANSTON, W. B. *Testes on reinforced concrete frames, 1: Pinned portal frames*. [S.l.], 1965.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. USA: John Wiley & Sons Inc., 1991. v. 1.
- CUNNINGHAM, R. Some aspects of semi-rigid connections in structural steelwork. *The Structural Engineer*, v. 68, n. 5, p. 85–92, 1990.
- DABAON, M. A.; EL-BOGHADADI, M. H.; KHAROOB, O. F. Experimental and numerical model for space steel and composite semi-rigid joints. *Journal of Constructional Steel Research*, 2009.
- DALL'ASTA, A.; ZONA, A. A non-linear analysis of composite beams by a displacement approach. *Computers and Structures*, v. 80, p. 2217–2228, 2002.
- DALL'ASTA, A.; ZONA, A. Slip locking in finite elements for composite beams with deformable shear connection. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, p. 1907–1930, 2004a.

- DEBS, M. K. E.; MIOTTO, A. M.; DEBS, A. L. H. C. E. Analysis of a semi-rigid connection for precast concrete. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings*, v. 163, n. 1, p. 41–51, 2010.
- DEMONCEAU, J.-F. *Steel and composite building frames: sway response under conventional loading and development of membrane effect in beams further to an exceptional action*. Tese (Doutorado) — Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, Liège, Belgium, 2008.
- DENAVIT, M. *Characterization of behavior of steel-concrete composite members and frames with applications for design*. 2012. 727 f. Tese (Doutorado) — Graduate College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America, 2012.
- DESAYI, P.; KRISHNAN, S. Equation for stress-strain curve of concrete. *Journal of American Concrete Institute*, v. 61, p. 345–350, 1964.
- DEUS, L. R. R. M. *Estudo computacional avançado sobre arcos metálicos, de concreto e mistos abatidos e pouco abatidos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil (em andamento), 2018.
- DIAS, L. E. S. *Análise numérica de cascas de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço usando elementos finitos de casca e interface*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2016.
- EC 2. Design of concrete structures - part 1-1: General rules and rules for buildings. *Comite Européen de Normalisation, CEN prEN*, 2004.
- EC 3. CEN EUROCODE 3 design of steel structures. vol. part 1. *European Committee for Standardization*, 1992.
- EC 4. Design of composite steel and concrete structures. *Comite Européen de Normalisation, CEN prEN*, 2004.
- ECCS. Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints. *European Convention for Constructional Steelwork*, Pub. no. 33, 1983.
- EL-LOBODY, E.; LAM, D. Finite element analysis of steel-concrete composite girders. *Advances in Structural Engineering*, v. 6, n. 4, p. 267–281, 2003.
- EL-TAWIL, S.; DEIERLEIN, G. G. Nonlinear analysis of mixed steel-concrete frames. II: implementation and verification. *Journal of Structural Engineering*, v. 127, n. 6, p. 656–665, 2001.
- EL-ZANATY, M.; MURRAY, D.; BJORHOVDE, R. *Inelastic behavior of multi-storey steel frames*. Structural Engineering Report, Univ. Alberta, Canadá, 1980.
- ERKMEN, R. E.; ATTARD, M. M. Displacement-based finite element formulation for material-nonlinear analysis of composite beams and treatment of locking behaviour. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, p. 1293–1305, 2011.

- ESPION, B. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs. In: *TC 114 RILEM. E&FN Spon.* [S.l.: s.n.], 1993.
- FAELLA, C.; MARTINELLI, E.; NIGRO, E. Steel and concrete composite beam with flexible shear connection: "exact" analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Computers and Structures*, v. 80, p. 1001–1009, 2002.
- FAELLA, C.; MARTINELLI, E.; NIGRO, E. Shear connection nonlinearity and deflections of steel-concrete composite beams: a simplified method. *Journal of Structural Engineering*, v. 129, n. 1, p. 12–20, 2003.
- FAELLA, C.; MARTINELLI, E.; NIGRO, E. Steel-concrete composite beams in partial interaction: closed-form "exact" expression of the stiffness matrix and the vector of equivalent nodal forces. *Engineering Structures*, v. 32, p. 2744–2754, 2010.
- FANG, L.; CHAN, S.; WONG, Y. Strength analysis of semi-rigid steel-concrete composite frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 52, p. 269–291, 1999.
- FANG, L.; CHAN, S.; WONG, Y. Numerical analysis of composite frames with partial shear–stud interaction by one element per member. *Engineering Structures*, v. 22, n. 10, p. 1285–1300, 2000.
- FERGUSON, P.; BREEN, J. Investigation of the long concrete column in a frame subject to lateral loads. In: *Symposium on Reinforced Concrete Columns.* [S.l.]: American Concrete Institute SP-13, 1966.
- FOCACCI, F.; FORABOSCHI, P.; DE STEFANO, M. Composite beam general connected: analytical model. *Composite Structures*, v. 133, p. 1237–1248, 2015.
- FONG, M.; CHAN, S. L. Advanced analysis of steel-concrete composite beam-columns by refined plastic-hinge method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 12, n. 6, 2012.
- FU, F. 3d nonlinear dynamic progressive collapse analysis of multistorey steel composite frame buildings - parametric study. *Engineering Structures*, v. 32, p. 3974–3980, 2010.
- FU, F.; LAM, D.; YE, J. Parametric study of semi-rigid composite connections with 3D finite element approach. *Engineering Structures*, v. 29, p. 888–898, 2007.
- FU, F.; LAM, D.; YE, J. Moment resistance and rotation capacity of semi-rigid composite connections with precast hollow slabs. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 66, p. 452–461, 2010.
- GALAMBOS, T.; KETTER, R. Columns under combined bending and thrust. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 85, p. 1–30, 1959.
- GALVÃO, A. S. *Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos.* Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2000.

- GANHOLM, H. *On composite beams and columns with particular regard to nailed timber structures*. Gotemburgo, Suécia: Transaction No. 88, Chalmers Technical University, 1949.
- GIRHAMMAR, U. A. Composite beam–columns with interlayer slip—approximate analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 50, n. 12, p. 1636–1649, 2008.
- GIRHAMMAR, U. A.; PAN, D. Dynamic analysis of composite members with interlayer slip. *International Journal of Solids and Structures*, v. 30, p. 797–823, 1993.
- GIRHAMMAR, U. A.; PAN, D. H. Exact static analysis of partially composite beams and beam–columns. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 49, n. 2, p. 239–255, 2007.
- GONÇALVES, R.; CARVALHO, J. An efficient geometrically exact beam element for composite columns and its application to concrete encased steel I-sections. *Engineering Structures*, v. 75, p. 213–224, 2014.
- GOODMAN, R. E.; TAYLOR, R. L.; BREKKE, T. L. A model for the mechanics of jointed rock. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, v. 99, p. 637–659, 1968.
- GREGORI, J. N.; SOSA, P. M.; PRADA, M. F.; FILIPPOU, F. C. A 3d numerical model for reinforced and prestressed concrete elements subjected to combined axial, bending, shear and torsion loading. *Engineering Structures*, v. 29, n. 12, p. 3404–3419, 2007.
- GRIFFIS, L. G. Some design considerations for composite-frame structures. *Engineering Journal*, v. 23, p. 59–65, 1986.
- GUNNIN, B.; RAD, F.; FURLONG, R. A general nonlinear analysis of concrete structures and comparison with frame tests. *Computers and Structures*, v. 7, p. 257–265, 1977.
- HAJJAR, J. F.; GOURLEY, B. C. Representation of concrete-filled steel tube cross-section strength. *Journal of Structural Engineering*, v. 122, p. 1327–1336, 1996.
- HAWILEH, R.; RAHMAN, A.; TABATABAI, H. Nonlinear finite element analysis and modeling of a precast hybrid beam–column connection subjected to cyclic loads. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 9, p. 2562–2583, 2010.
- IU, C.; BRADFORD, M.; CHEN, W. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. *Engineering Structures*, v. 31, p. 799–813, 2009.
- IU, C. K. Nonlinear analysis for the pre and post yield behaviour of a composite structure with the refined plastic hinge method. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 119, p. 1–16, 2016.
- IZZUDDIN, B.; SMITH, D. L. Efficient nonlinear analysis of elasto-plastic 3d r/c frames using adaptive techniques. *Computers & Structures*, v. 78, n. 4, p. 549–573, 2000.
- IZZUDDIN, B.; VLASSIS, A.; ELGHAZOULI, A.; NETHERCOT, D. Progressive collapse of multi-storey buildings due to sudden column loss - part i: Simplified assessment framework. *Engineering Structures*, v. 30, n. 5, p. 1308–1328, 2008.

- JOHNSON, N. D.; WALPOLE, W. R. *Bolted end-plate beam-to-column connections under earthquake type loading*. [S.l.], 1981.
- JOHNSON, R. P.; MOLENSTRA, I. N. Partial shear connection in composite beams for buildings. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, v. 79, n. 2, p. 679–704, 1991.
- KAMPITSIS, A.; SAPOUNTZAKIS, E. Dynamic analysis of beam-soil interaction systems with material and geometrical nonlinearities. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 90, p. 82–99, 2017.
- KATAOKA, M. N.; FERREIRA, M. A.; DEBS, A. L. H. C. E. A study on the behavior of beam-column connections in precast concrete structures: experimental analysis. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 5, n. 6, p. 848–873, 2012.
- KISHI, N.; CHEN, W. F. *Data base of steel beam-to-column connections*. West Lafayette, IN, 1986.
- KOSTIC, S. M.; FILIPPOU, F. C. Section discretization of fiber beam-column elements for cyclic inelastic response. *Journal of Structural E*, v. 138, n. 5, p. 592–601, 2012.
- KOSTIC, S. M.; FILIPPOU, F. C.; DERETIC-STOJANOVIC, B. General plastic model for inelastic RCFT column response. *Computers and Structures*, v. 168, p. 56–67, 2016.
- KRAUSS, M. *Applicability of composite structures to sway frames*. [S.l.], 2002.
- LANDESMANN, A. Inelastic analysis of semi-rigid composite structures under fire conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 33, n. 4, 2011.
- LEMES, Í. J. M. *Análise avançada via MRPR de estruturas mistas de aço e concreto*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2015.
- LEMES, Í. J. M.; BATELO, E. A. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M.; ROCHA, P. A. S. Estudo numérico comparativo via análise não linear do comportamento de estruturas de concreto armado com base nas normas de projeto NBR 6118 e EC2. In: *Anais do 58 Congresso Brasileiro do Concreto*. [S.l.: s.n.], 2016a.
- LEMES, Í. J. M.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M.; ROCHA, P. Acoplamento MCD/MRPR para análise de estruturas metálicas, de concreto e mistas. In: *XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. [S.l.: s.n.], 2015.
- LEMES, Í. J. M.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M.; ROCHA, P. A. S. Determinação da capacidade resistente de elementos estruturais mistos através do método da rótula plástica refinado. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 33, n. 1-2, p. 24–34, 2017a.
- LEMES, Í. J. M.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M.; ROCHA, P. A. S. Numerical analysis of nonlinear behavior of steel concrete composite structures. *Ibracon Structures and Materials Journal*, v. 10, n. 1, p. 53–83, 2017b.

- LEMES, Í. J. M.; SILVA, J. L.; BATELO, E.; SILVEIRA, R. A. M. Influência dos modelos de tensões residuais prescritos em códigos normativos no comportamento de perfis I. In: *XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. [S.l.: s.n.], 2016b.
- LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D.; ROCHA, P. A. S. Non-linear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM. *Engineering Structures*, v. 147, p. 12–26, 2017c.
- LI, T.; LIU, S.; CHAN, S. Direct analysis for high-strength steel frames with explicit model of residual stresses. *Engineering Structures*, v. 100, p. 342–355, 2015.
- LIEW, J.; CHEN, H.; SHANMUGAM, N. Inelastic analysis of steel frames with composite beams. *Journal of Structural Engineering*, v. 127, n. 2, p. 194–202, 2001.
- LIEW, J.; WHITE, D.; CHEN, W. *Second-order refined plastic hinge analysis of frames*. Purdue University, West Lafayette, 1992.
- LIEW, J.; WHITE, D.; CHEN, W. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 1. *Journal of Structural Division*, v. 119, n. 11, p. 3196–3216, 1993a.
- LIEW, J.; WHITE, D.; CHEN, W. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *Journal of Structural Division*, v. 119, n. 11, p. 3217–3237, 1993b.
- LIU, D.; GHO, W.-M.; YUAN, J. Ultimate capacity of high-strength rectangular concrete-filled steel hollow section stub columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 59, p. 1499–1515, 2003.
- LIU, S. W. *Second order design and advanced analysis of hybrid steel and concrete framed structures*. Tese (Doutorado) — Department of Civil and Environmental Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, 2013.
- LIU, S. W.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames part 1: Cross-section analysis technique and second-order analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 70, p. 326–336, 2012a.
- LIU, S. W.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames part 2: Refined plastic hinge and advanced analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 70, p. 337–349, 2012b.
- LIU, X.; BRADFORD, M. A.; ERKMEN, R. E. Non-linear inelastic analysis of steel-concrete composite beams curved in-plan. *Engineering Structures*, v. 57, p. 484–492, 2013.
- LUBLINER, J.; TAYLOR, R. L.; AURICCHIO, F. A new model of generalized plastic and its numerical implementation. *International Journal of Solids and Structures*, v. 30, n. 22, p. 3171–3184, 1993.
- LUI, E.; CHEN, W. Analysis and behavior of flexible-jointed frames. *Engineering Structures*, v. 8, n. 2, p. 107–118, 1986.

- LUI, E. M.; CHEN, W. F. Behavior of braced and unbraced semi-rigid frame. *International Journal of Solids and Structures*, v. 24, n. 9, p. 893–913, 1988.
- MACHADO, F. C. S. *Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2005.
- MARTINELLI, E.; NGUYEN, Q. H.; HJIAJ, M. Dimensionless formulation and comparative study of analytical models for composite beams in partial interaction. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 75, p. 21–31, 2012.
- MATHUR, K. *Effect of residual stresses and initial imperfections on earthquake response of steel moment frames*. Tese (Doutorado) — Graduate College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America, 2011.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. *Matrix structural analysis*. 2 nd. ed. New York: [s.n.], 2000.
- MUNIZ, C. F. D. G. *Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2005.
- NARDIN, S. de. *Pilares mistos preenchidos: estudo da flexo-compressão e de ligações viga-pilar*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, 2003.
- NBR 6118. Projeto de estruturas de concreto - procedimento. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, 2014.
- NBR 8800. Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, 2008.
- NEAL, B. *The plastic method of structural analysis*. 3. ed. Londres: [s.n.], 1977.
- NEWMARK, N. M.; SIESS, C. P.; VIEST, I. M. Test and analysis of composite beam with incomplete interaction. *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, v. 9, p. 75–92, 1951.
- NGO-HUU, C.; KIM, S. Practical nonlinear analysis of steel concrete composite frames using fiber hinge method. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 74, p. 90–97, 2012.
- NGUYEN, P. C.; KIM, S. An advanced analysis method for three-dimensional steel frames with semi-rigid connections. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 80, p. 23–32, 2014.
- NGUYEN, P.-C.; KIM, S. E. Advanced analysis for planar steel frames with semi-rigid connections using plastic-zone method. *Steel and Composite Structures*, v. 21, n. 5, p. 1121–1144, 2016.
- NGUYEN, Q. H.; HJIAJ, M.; LAI, V. A. Force-based FE for large displacement inelastic analysis of two-layer timoshenko beams with interlayer slips. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 85, p. 1–10, 2014.

- NIE, J.; TAO, M.; CAI, C.; CHEN, G. Modeling and investigation of elasto-plastic behavior of steel-concrete composite frame system. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 67, p. 1973–1984, 2011.
- OLIVEIRA, D. M. *Estudo dos processos aproximados utilizados para a consideração das não linear físicas e geométrica na análise global das estruturas de concreto armado*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2007.
- OLLGAARD, J. G.; SLUTTER, R. G.; FISHER, J. W. Shear strength of stud connectors in lightweight and normal-weight concrete. *AISC Engineering Journal*, v. 8, n. 2, p. 55–64, 1971.
- OSTRANDER, J. R. *An experimental investigation of end-plate connections*. Dissertação (Mestrado) — University of Saskatchewan, Saskatoon, Saskatchewan, Canada, 1970.
- PAPANIKOLAOU, V. K.; THERMOU, G. E.; KAPPOS, A. J. Moment-curvature analysis of R/C jacketed rectangular sections including interface slip under cyclic loading. In: *15 WCEE*. Lisboa, Portugal: [s.n.], 2012.
- PARENTE JR, E.; NOGUEIRA, G.; NETO, M. M.; MOREIRA, L. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. *Ibracon Structures and Materials Journal*, v. 7, n. 5, p. 879–904, 2014.
- PATEL, K.; BHARDWAJ, A.; CHAUDHARY, S.; NAGPAL, A. Explicit expression for effective moment of inertia of RC beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, n. 3, p. 542–560, 2015.
- PIRES, D. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2012.
- PIRES, D. *Análise avançada de estruturas em aço, concreto e mistas (aço-concreto) sob incêndio*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil. (em andamento), 2018.
- QUEIROZ, F.; VELLASCO, P.; NETHERCOT, D. Finite element modelling of composite beams with full and partial shear connection. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 63, n. 4, p. 505–521, 2007.
- QUEIROZ, G.; PIMENTA, R. J.; MATA, L. A. C. *Elementos das Estruturas Mistas Aço-Concreto*. Belo Horizonte: O Lutador, 2001.
- RANZI, G. *Partial interaction analysis of composite beams using the direct stiffness method*. Tese (Doutorado) — School of Civil and Environmental Engineering, The University of New South Wales, Sydney, Australia, 2003.
- RANZI, G.; GARA, F.; LEONI, G.; BRADFORD, M. A. Analysis of composite beams with partial shear interaction using available modelling technique: a comparative study. *Computers and Structures*, v. 84, p. 930–941, 2006.

- RANZI, G.; ZONA, A. A steel-concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component. *Engineering Structures*, v. 29, p. 3026–3041, 2007.
- RIBEIRO, L. *Estudo do comportamento das ligações parafusada viga-coluna com chapa de topo*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, 1998.
- RICHARD, R. M.; KRIEGH, J. D.; HORMBY, D. E. Design of single plate framing connections with A307 bolts. *Engineering Journal - American Institute of Steel Construction*, v. 19, n. 4, p. 209–213, 1982.
- ROCHA, G. *Estratégias numérica para análise de elementos estruturais esbeltos metálicos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2000.
- ROCHA, P. A. S. *Análise inelástica de segunda ordem de estruturas metálicas com ligações semi-rígidas*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2006.
- ROIK, K.; BERGMANN, R. Design method for composite columns with unsymmetrical cross-sections. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 15, p. 153–168, 1990.
- SALARI, M. R.; SHING, E. S. S. B.; FRANGOPOL, D. M. Nonlinear analysis of composite beams with deformable shear connections. *Journal of Structural Engineering*, v. 124, p. 1148–1158, 1998.
- SALMON, C. G.; JOHNSON, J. E.; MALHAS, F. *Steel Structures: Design and Behavior*. 5. ed. Nova Iorque: Prentice Hall, 2009.
- SARITAS, A.; KOSEOGLU, A. Distributed inelastic planar frame element with localized semi-rigid connections for nonlinear analysis of steel structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 96-98, p. 216–231, 2015.
- SCHELLEKENS, J. C. J.; DE BORST, R. On the numerical integration of interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36, p. 43–66, 1993.
- SCOTT, M. H.; FENVES, G. L. Plastic hinge integration method for force-based beam-column elements. *Journal of Structural Engineering*, v. 132, n. 2, p. 244–252, 2006.
- SEKULOVIC, M.; SALATIC, R. Nonlinear analysis of frames with flexible connections. *Computers and Structures*, v. 79, n. 11, p. 1097–1107, 2001.
- SFAKIANAKIS, M. G. Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete section of arbitrary shape by fiber model and computer graphics. *Advances in Engineering Software*, v. 33, p. 227–242, 2002.
- SHARIATI, M.; RAMLI SULONG, N. H.; SHARIATI, A.; KUEH, A. B. H. Comparative performance of channel and angle shear connectors in high strength concrete composites: An experimental study. *Construction and Building Materials*, v. 120, p. 382–392, 2016.

- SHI, Y. J.; CHAN, S. L.; WONG, Y. L. Ultimate strength analysis of composite plane frames. In: *Proceedings of International Conference on Advances in Steel Structures*. Hong Kong: [s.n.], 1996.
- SILVA, A. R. D. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. 2009. 322 f. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2009.
- SILVA, A. R. da. *Análise numérica de vigas mistas com interação parcial*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2006.
- SILVA, A. R. da. *Análise numérica de elementos estruturais com interação parcial*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2010.
- SILVA, A. R. da; SOUSA JR, J. B. M. A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 45, p. 305–314, 2009.
- SILVA, J. L. *Análise inelástica de segunda ordem de estruturas com restrições bilaterais e unilaterais de contato*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil (em andamento), 2018.
- SILVA, J. L. e. *Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2016.
- SILVEIRA, R. A. M. *Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1995.
- SKALOMENOS, K. A.; HATZIGEORGIOU, G. D.; BESKOS, D. E. Parameter identification of three hysteretic model for the simulation of response of cft columns to cyclic loading. *Engineering Structures*, v. 61, p. 44–60, 2014.
- SLUTTER, R. G.; DRISCOLL, G. Flexural strength of steel-concrete composite beams. *Journal of the Structural Division*, v. 91, p. 71–99, 1965.
- SOUSA JR, J. B. M. Exact finite elements for multilayered composite beam-columns with partial interaction. *Computers and Structures*, v. 123, p. 48–57, 2013.
- SOUSA JR, J. B. M.; OLIVEIRA, C. E. M.; SILVA, A. R. Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam-columns with partial interaction. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 66, p. 772–779, 2010.
- SOUSA JR, J. B. M.; SILVA, A. R. da. Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 43, p. 954–964, 2007.

- SOUSA JR, J. B. M.; SILVA, A. R. da. Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip. *Engineering Structures*, v. 32, p. 1671–1680, 2010.
- SPACONE, E.; EL-TAWIL, S. Nonlinear analysis of steel-concrete composite structures: State of the art. *Journal of Structural Engineering*, v. 130, n. 2, p. 159–168, 2004.
- STELMACK, T. *Analytical and experimental response of flexibly-connected steel frames*. [S.l.], 1982.
- STRAMANDINOLI, R. *Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, 2007.
- STRAMANDINOLI, R. S.; ROVERE, H. L. L. An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members. *Engineering Structures*, v. 30, p. 2069–2080, 2008.
- STÜSSI, F. Composite beams. *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, v. 8, p. 249–269, 1947.
- TANG, Y. Q.; ZHOU, Z. H.; CHAN, S. L. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 15, n. 5, p. 1450068, 2015.
- TINEO, R. P. *Ligação mista viga-pilar preenchido com chapa passante: modelagem numérica e análise paramétrica*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil, 2016.
- TURMO, J.; LOZANO-GALANT, J. A.; MIRAMBELL, E.; XU, D. Modeling composite beams with partial interaction. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 114, p. 380–393, 2015.
- UDDIN, M. A.; SHEIKH, A. H.; BROWN, D.; BENNETT, T.; UY, B. A higher order model for inelastic response of composite beams with interfacial slip using a dissipation based arc-length method. *Engineering Structures*, v. 139, p. 120–134, 2017.
- VALIPOUR, H. R.; BRADFORD, M. A. A steel-concrete composite beam element with material nonlinearities and partial shear interaction. *Fibre Chemistry Elements in Analysis and Design*, v. 45, p. 966–972, 2009.
- VALIPOUR, H. R.; FOSTER, S. J. Nonlocal damage formulation for a flexible-based frame element. *Journal of Structural Engineering*, v. 132, p. 1213–1221, 2009.
- VALIPOUR, H. R.; FOSTER, S. J. A total secant flexibility-based formulation for frame elements with physical and geometrical nonlinearities. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, p. 288–297, 2010.
- VAN KUREN, R.; GALAMBOS, T. Beam-column experiments. *Journal of Structural Engineering*, v. 90, n. 2, p. 223–256, 1964.

- VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. Modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *Journal of American Concrete Institute*, v. 83, n. 2, p. 219–231, 1986.
- VEGA, G.; XIAO, R. Advanced study of non-linear semi-continuous beam-column end-plate connection and metal-decking floor modelling. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 95, p. 191–197, 2014.
- VERÍSSIMO, G. S. *Desenvolvimento de um conector de cisalhamento em chapa dentada para estruturas mistas de aço e concreto e estudo de seu comportamento*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2007.
- VIANNA, J. da C. *Avaliação do comportamento estrutural de coconector Perfobond e T-Perfobond para vigas mistas*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2009.
- VOGEL, U. *Calibrating frames*. Stahlbau. Berlim, 1985.
- WANG, J.-F.; HAN, L. H.; UY, B. Behavior of flush end plate joints to concrete-filled steel tubular columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 65, p. 925–939, 2009.
- XU, R.; WU, Y. Static, dynamic and buckling analysis of partial interaction composite members using timoshenko's beam theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 49, p. 1139–1155, 2007.
- YANG, Y.; KUO, S. *Theory & analysis of nonlinear framed structures*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994.
- YASUNORI, A.; SUMIO, H.; KAJITA, T. Elastic-plastic analysis of composite beams with incomplete interaction by finite element method. *Computers and Structures*, v. 14, p. 453–462, 1981.
- ZHENG, S.; LIU, Y.; YODA, T.; LIN, W. Parametric study on shear capacity of circular-hole and long-hole perfobond shear connector. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 117, p. 64–80, 2016.
- ZIEMIAN, R. D. Examples of frame studies used to verify advanced method of inelastic analysis. In: STRUCTURAL STABILITY RESEARCH COUNCIL, SSR. *Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames*. Lehigh University, Bethlehem, PA, 1993.
- ZIEMIAN, R. D.; McGUIRE, W. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. *Journal of Structural Engineering*, v. 128, n. 10, p. 1301–1307, 2002.
- ZONA, A.; RANZI, G. Finite element models for nonlinear analysis of steel-concrete composite beams with partial interaction in combined bending and shear. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, p. 98–118, 2011.

ZUBYDAN, A. H. Inelastic second order analysis of steel frame elements flexed about minor axis. *Engineering Structures*, v. 33, p. 227–242, 2011.

ZUBYDAN, A. H. Inelastic large deflection analysis of space steel frames including H-shaped cross-section members. *Engineering Structures*, v. 48, p. 155–165, 2013.

APÊNDICE A

Matriz de Rigidez do Elemento Corrotacional

A.1 Considerações Iniciais

De modo a evitar os fenômenos de travamento (*locking*), aumentos irrealistas de rigidez no elemento durante a análise estrutural, deve-se ter um ajuste das funções de interpolação. Na literatura encontram-se diversas discussões a respeito do assunto. No presente trabalho, a sugestão de Tang *et al.* (2015) foi considerada, com o uso de uma função de interpolação de ordem elevada (quinta ordem) para a interpolação dos deslocamentos axiais.

A.2 Termos da Matriz de Rigidez

A modificação das funções de interpolação para o deslocamento axial alteram os termos da matriz de rigidez. Porém, sua dedução apresentada na Seção 2.3.3, toma como condição o comportamento elástico do material. Tal consideração é modificada na seção seguinte (Seção 2.3.4).

Os termos da matriz de rigidez do elemento corrotacional, \mathbf{K}_l , considerando a não

linearidade dos materiais, são dados por:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{\partial N}{\partial \delta} = \frac{(EA)^*}{L} \\
k_{12} &= \frac{\partial N}{\partial \theta_i} = \frac{(EA)^*}{30} (4\theta_i - \theta_j) \\
k_{13} &= \frac{\partial N}{\partial \theta_j} = \frac{(EA)^*}{30} (-\theta_i + 4\theta_j) \\
k_{21} &= \frac{\partial M_i}{\partial \delta} = \frac{(EA)^*}{30} (4\theta_i - \theta_j) \\
k_{22} &= \frac{\partial M_i}{\partial \theta_i} = \left(\frac{EI_1}{L}\right)^* + \frac{4(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{900} (24\theta_i^2 - 12\theta_i\theta_j + 9\theta_j^2) \\
k_{23} &= \frac{\partial M_i}{\partial \theta_j} = \left(\frac{EI_2}{L}\right)^* - \frac{(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{450} (-3\theta_i^2 + 9\theta_i\theta_j - 3\theta_j^2) \\
k_{31} &= \frac{\partial M_j}{\partial \delta} = \frac{(EA)^*}{30} (-\theta_i + 4\theta_j) \\
k_{32} &= \frac{\partial M_j}{\partial \theta_i} = \left(\frac{EI_2}{L}\right)^* - \frac{(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{450} (-3\theta_i^2 + 9\theta_i\theta_j - 3\theta_j^2) \\
k_{33} &= \frac{\partial M_j}{\partial \theta_j} = \left(\frac{EI_3}{L}\right)^* + \frac{4(EA)^* \delta}{30} + \frac{(EA)^* L}{900} (9\theta_i^2 - 12\theta_i\theta_j - 24\theta_j^2)
\end{aligned} \tag{A.1}$$

em que EA e EI são as rigidezes axial e à flexão da seção do elemento de comprimento L , δ , θ_i e θ_j são os graus de liberdade no sistema local referentes ao deslocamento axial, a rotação no nó i e no nó j , respectivamente. Os termos EA^* e $(EI_i/L)^*$, com $(i = 1, 2, 3)$, são definidos na Seção 2.3.4.

APÊNDICE B

Matriz de Rigidez da Seção Mista com Interação Parcial

B.1 Considerações Iniciais

A consideração do deslizamento na interface aço-concreto de vigas mistas foi feita baseando-se no desmembramento da força axial N , atuante na seção transversal. Esse desmembramento criou um novo grau de liberdade no problema local, na seção transversal, amplificando a ordem do problema e o tamanho das equações que definem os termos da matriz constitutiva da seção transversal. Nesse Apêndice, são descritos de forma explícita todos os termos componentes da matriz \mathbf{F}' .

B.2 Termos da Matriz Constitutiva da Seção

A rigidez da seção transversal é diretamente dependente das deformações nos pontos da seção. As funções que descrevem a forma deformada da seção foram apresentadas na Equação 4.7. Além disso, é necessário ter definido o comportamento dos materiais por meio das relações tensão-deformação, que foram descritas nas Seções 2.5.1-2.5.3.

Os termos f_{ij} da matriz constitutiva da seção transversal, \mathbf{F}' , são dados por:

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) dA \right] + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] A_{bi} \\
&= \sum_{i=1}^{n_{fib,c}} E_{cT,i} A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_b} E_{bT,i} A_{bi} \\
f_{12} &= \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) dA \right] + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] A_{bi} = 0 \\
f_{31} &= \frac{\partial N_{int,l}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) dA \right] + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \Phi} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] A_{bi} \\
&= \sum_{i=1}^{n_{fib,c}} E_{cT,i} (y_i - d_l) A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_b} E_{bT,i} (y_i - d_l) A_{bi} \\
f_{21} &= \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) dA \right] = 0 \\
f_{22} &= \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) dA \right] = \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} E_{aT,i} A_{ai} \\
f_{23} &= \frac{\partial N_{int,p}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) dA \right] = \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} E_{aT,i} (y_i - d_p) A_{ai} \\
f_{31} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_c} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) y_i dA \right] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) y_i dA \right] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] y_i A_{bi} = \sum_{i=1}^{n_{fib,c}} E_{cT,i} y_i A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_b} E_{bT,i} y_i A_{bi} \\
f_{32} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_a} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) y_i dA \right] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) y_i dA \right] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_a} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] y_i A_{bi} = \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} E_{aT,i} y_i A_{ai} \\
f_{33} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_{A_l} \sigma(\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)) y_i dA \right] + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\int_{A_a} \sigma(\varepsilon_p(\varepsilon_a, \Phi)) y_i dA \right] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\partial}{\partial \Phi} \sigma[\varepsilon_l(\varepsilon_c, \Phi)] y_i A_{bi} = \sum_{i=1}^{n_{fib,c}} E_{cT,i} (y_i - d_l) y_i A_{ci} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} E_{aT,i} (y_i - d_p) y_i A_{ai} + \sum_{i=1}^{n_b} E_{bT,i} (y_i - d_l) y_i A_{bi}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

em que $N_{int,l}$, $N_{int,p}$ e M_{int} são os esforços internos axial na laje, axial no perfil e momento fletor, respectivamente; ε_l é a função linear de deformação na laje que depende da deformação axial no seu centroide plástico ε_c , da curvatura Φ e da posição y_i do ponto

analisado, já ε_p é a função de deformações no perfil, dependente de Φ e da deformação axial no centroide plástico do perfil ε_a . As variáveis d_l e d_p são as distâncias entre os centroides plásticos da laje e do perfil em relação ao CP da seção. Por fim, E_T é o módulo de elasticidade tangente do material e A a área da seção, sendo esses dois parâmetros associados ao perfil, às barras e ao concreto identificados pelos subíndices a , b e c , respectivamente.

APÊNDICE C

Proposta alternativa para NLF em estruturas de concreto armado

C.1 Considerações Iniciais

Como destacado ao longo do texto do presente trabalho, o Método da Rótula Plástica Refinado clássico considera a plasticidade concentrada em molas rotacionais fictícias colocadas nas extremidades dos elementos. Por sua vez, a degradação da rigidez rotacional das molas representa a não linearidade do material. Como o método foi concebido para análise de estruturas metálicas o ideal é que o mesmo seja aplicado a materiais com comportamento elastoplástico perfeito.

Quando se pensa no uso das molas fictícias para simular estruturas de concreto armado, tem-se de imediato algumas incompatibilidades, como: diferentes propriedades na tração e na compressão, necessidade de um regime linear elástico do material (contrariando o comportamento inerentemente não linear do concreto sob compressão) e não há considerações sobre a fissuração do material.

Nesse sentido, surge como opção para solucionar o problema no MRPR clássico, a introdução de uma curva de interação para limitar o estado não fissurado e a determinação de novas equações para a degradação da rigidez dessas estruturas. As equações de redução do momento de inércia propostas por Branson e Metz (1963) e Patel *et al.* (2015) foram utilizadas para a avaliação da seção fissurada.

Por fim, alguns exemplos são apresentados e comparados com dados experimentais presentes na literatura. Algumas conclusões sobre o procedimento numérico implementado

são feitas também. Para isso as estratégias de incremento de carga e interação junto ao *Return Mapping*, apresentados no Capítulo 2, são utilizadas.

C.2 Formulação do Elemento Finito

Como mencionado, optou-se aqui pela utilização do MRPR, que considera a plasticidade de forma concentrada em molas rotacionais fictícias. Nesse sentido, a degradação das rigidezes axial e à flexão ocorre exclusivamente nos pontos nodais. Nesta seção apresenta-se o método de forma geral, introduzindo o efeito das não linearidades geométrica e do material.

Aqui, o elemento finito composto ilustrado na Figura C.1 é igual ao utilizado para simulação das ligações semirrígidas. Porém, a rigidez rotacional S_p das molas fictícias ou pseudo-molas, agora retrata o comportamento não linear do material. Dessa forma, não há necessidade de deduzir novamente a relação força-deslocamento do elemento, sendo esta dada por:

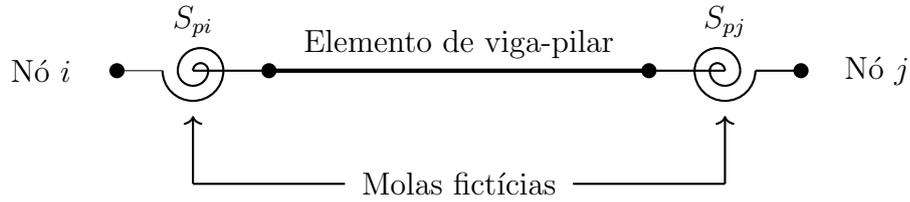


Figura C.1 – Elemento finito composto para simulação da plasticidade com pseudo-molas

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_{pi} \\ \Delta M_{pj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{pi} - \frac{S_{pi}^2 (S_{pj} + k_{33})}{\beta} & \frac{S_{pi} k_{23} S_{pj}}{\beta} \\ 0 & \frac{S_{pj} k_{32} S_{pi}}{\beta} & S_{pj} - \frac{S_{pj}^2 (S_{pi} + k_{22})}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_{pi} \\ \Delta \theta_{pj} \end{Bmatrix} \quad (C.1)$$

na qual $\beta = (S_{pi} + k_{22})(S_{pj} + k_{33}) - k_{32}k_{23}$.

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{E_{csi} A}{L} \\ k_{22} &= \frac{E_{csi} (3I_{ef,i} + I_{ef,j})}{L} + \frac{2NL}{15} \\ k_{23} = k_{32} &= \frac{E_{csi} (I_{ef,i} + I_{ef,j})}{L} + \frac{NL}{30} \\ k_{33} &= \frac{E_{csi} (I_{ef,i} + 3I_{ef,j})}{L} + \frac{2NL}{15} \end{aligned} \quad (C.2)$$

sendo N a força axial interna atuante, E_{csi} o módulo de elasticidade secante do concreto (discutido na Seção C.6), A a área da seção transversal, I_{ef} o momento de inércia efetivo (discutido posteriormente), avaliado nos pontos nodais i e j , e L o comprimento do elemento finito.

Duas diferenças em relação à relação força-deslocamento apresentada na Equação 3.24 podem ser ressaltadas. A primeira trata-se dos termos k_{12} , k_{13} , k_{21} e k_{31} . Nessa nova abordagem, usou-se uma função de interpolação de primeira ordem para o deslocamento axial na formulação do elemento.

A segunda observação vem das parcelas adicionais nos termos referentes à flexão. Essa parcela se refere à consideração da não linearidade geométrica, que é introduzida nesta metodologia por meio de uma formulação simplificada proposta por Yang e Kuo (1994). A opção pelo emprego desses termos simplificados foi feita em análises numéricas anteriores, onde termos de ordem elevada pouco influenciaram na resposta global dos sistemas de concreto armado de pequeno porte (LEMES *et al.*, 2017c).

C.3 Rigidez Rotacional das Pseudo-Molas

Como já mencionado, no MRPR clássico a degradação da rigidez à flexão da seção transversal, simulando a plasticidade, é feita por molas fictícias. Assim sendo, é necessário obter formas de degradação da rigidez dessas molas condizentes com o material empregado na seção transversal. A proposta original do MRPR foi desenvolvida para elementos de aço com comportamento elastoplástico perfeito. Quando se trata de elementos em concreto armado, a metodologia original deve ser modificada conforme proposto no presente trabalho.

A Figura C.2 ilustra três curvas de interação referentes a uma dada seção transversal: a curva de plastificação total (CPT) - indica o limite resistente; a curva de início de plastificação (CIP) - define a região elástica; e a curva de início de fissuração (CIF) - delimita o estado não fissurado da seção transversal. Todas essas curvas são frutos de uma combinação entre o esforço axial e um momento fletor atuante em torno de um dos eixos principais de inércia.

A curva de início de fissuração não era necessária na proposta original do MRPR (CHAN; CHUI, 2000), uma vez que se tratava exclusivamente de sistemas estruturais de

aço. Porém, na evolução do método nota-se a necessidade de introduzir essa curva para melhor se aproximar do comportamento real de estruturas de concreto armado.

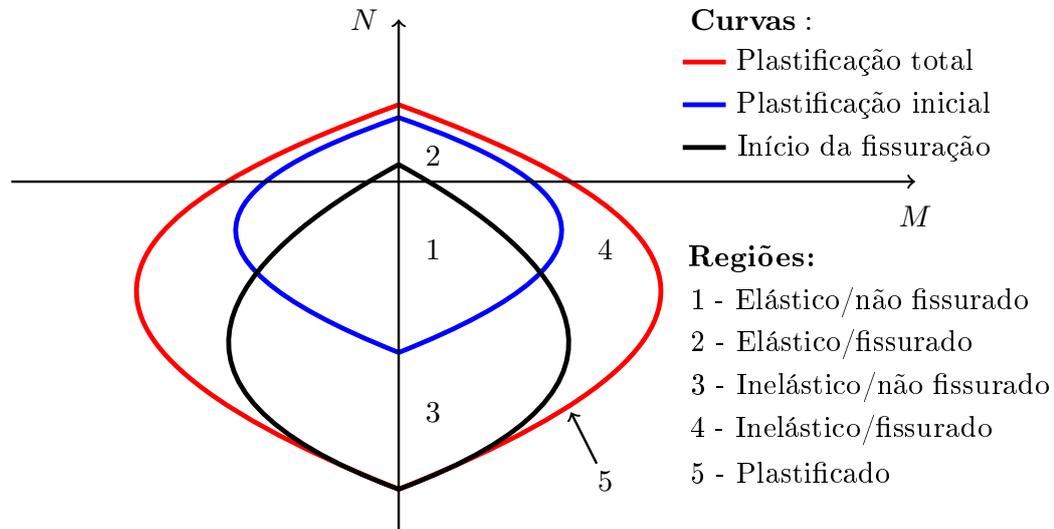


Figura C.2 – Curvas interação e regiões de degradação da rigidez rotacional das molas

Na Figura C.2 é possível observar também quatro regiões. Dessa forma, necessita-se da definição de expressões para a simulação da rigidez da pseudo-mola em cada uma das regiões descritas.

De acordo com o MRPR clássico, três equações definem a rigidez das pseudo-molas para as regiões mencionadas anteriormente. Nas regiões 1 e 2, observa-se que a seção está em um regime elástico. Nas regiões 3 e 4, pode-se notar que a seção se encontra em um processo de degradação de rigidez devido a deformações plásticas. E, finalmente, para quando ocorre a seção completamente plastificada (região 5). Para um dado valor de momento de flexão interno combinado a uma carga axial, S_p é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{se } M \leq M_{er} : \quad S_p &= 1 \times 10^{10} \\
 \text{se } M_{er} \leq M \leq M_{pr} : \quad S_p &= \frac{E_{csi} I_{ef}}{L} \left(\frac{M_{pr} - M}{M - M_{er}} \right) \\
 \text{se } M_{pr} \leq M : \quad S_p &= 1 \times 10^{-10}
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

em que L é o comprimento do elemento finito, M_{pr} e M_{er} são os momentos de plastificação total e o de início de plastificação reduzidos pela ação conjunta a um esforço axial, e I_{ef} é o momento de inércia efetivo da seção, considerando a fissuração, como discutido a seguir.

C.4 Simulação da Fissuração do Concreto

Como ressaltado anteriormente, não há uma equação específica para simular a fissuração usando a rigidez rotacional das pseudo-molas, S_p . Assim, pretende-se utilizar, ainda, a Equação C.3. Quando as rigidezes das pseudo-molas são infinitas, ou tratadas numericamente como tal, o limite para $S_p \rightarrow \infty$ faz com que os termos k_{22} , k_{23} , k_{32} e k_{33} apresentem convergência para os valores atribuídos na Equação C.2. Assim, para os termos expressos nessas equações tem-se inicialmente o momento de inércia modificado pela proposta de Branson e Metz (1963) (equação BM), utilizada de várias formas por normas de projeto tais como a NBR 6118 (2014) e o ACI 318 (2008), como:

$$\begin{aligned} \text{se } M \leq M_{cr} : \quad I_{ef} &= I_c \\ \text{se } M > M_{cr} : \quad I_{ef} &= \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^3\right] I_{cr} \quad I_{ef} \leq I_c \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

em que M_{cr} e M são, respectivamente, o momento de início de fissuração e o momento fletor atuante na seção, I_c é o momento de inércia da seção de concreto intacta (inclinação inicial da relação momento-curvatura para esforço normal nulo) e I_{cr} é o momento de inércia da seção fissurada avaliado na análise não linear da seção, como discutido na Seção 2.5.

Patel *et al.* (2015) apresentaram uma abordagem alternativa baseada em redes neurais para estimar o momento de inércia efetivo por meio de uma equação explícita (equação P), que é descrita como:

$$I_{ef} = \frac{3I_c}{1 + e^{-\left[7.4688 + \sum_{k=1}^6 \left(\frac{a_k}{1 + e^{H_k}}\right)\right]}} \quad (\text{C.5})$$

em que:

$$H_k = b_k \chi_t + c_k \frac{I_{cr}}{I_c} + d_k \frac{M_{cr}}{M} + e_k \quad (\text{C.6})$$

sendo χ_t a porcentagem de armadura tracionada e a_k , b_k , c_k , d_k e e_k descritos na Tabela C.1.

Tabela C.1 – Parâmetros das Equações C.5 e C.6

Parâmetro	<i>k</i>					
	1	2	3	4	5	6
<i>a</i>	8.7116	-0.3754	11.6985	-10.7167	0.6177	22.9397
<i>b</i>	-0.1978	4.3806	2.8322	3.0191	10.1889	-3.7310
<i>c</i>	1.2333	-22.0048	-4.1654	-4.3927	-15.7592	5.4520
<i>d</i>	0.0011	-0.1823	9.4775	9.7598	5.0682	-0.0189
<i>e</i>	-0.0386	6.2396	-6.7756	-7.1914	-3.2443	-2.9660

C.5 Comportamento dos Materiais

O concreto foi descrito pela relação tensão-defomção prescrita na NBR 6118 (2014) sob compressão, e pela proposta de Vecchio e Collins (1986) quando tracionado. Ambas as relações já mencionadas foram discutidas na Seção 2.5.3.

Uma relação constitutiva que negligencia os efeitos de encruamento e considera uma transição gradual entre os regimes elástico e plástico foi utilizada para descrever o comportamento das armaduras de aço (CALDAS, 2004). Portanto:

$$\sigma = \begin{cases} -f_y, & \text{se } -\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_y \\ (c + \sqrt{c^2 + 45|\varepsilon| - 0.49})f_y, & \text{se } -\varepsilon_y < \varepsilon \leq -\varepsilon_1 \\ E_s\varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_1 \\ (c + \sqrt{c^2 + 45\varepsilon - 0.49})f_y, & \text{se } \varepsilon_1 \leq \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y, & \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

em que:

$$c = 0.7 - 22.5 \frac{f_y}{E_s} \quad (\text{C.8})$$

$$\varepsilon_1 = 0.7 \frac{f_y}{E_s} \quad (\text{C.9})$$

$$\varepsilon_y = 0.002 + \frac{f_y}{E_a} \quad (\text{C.10})$$

Essas relações são mostradas na Figura C.3.

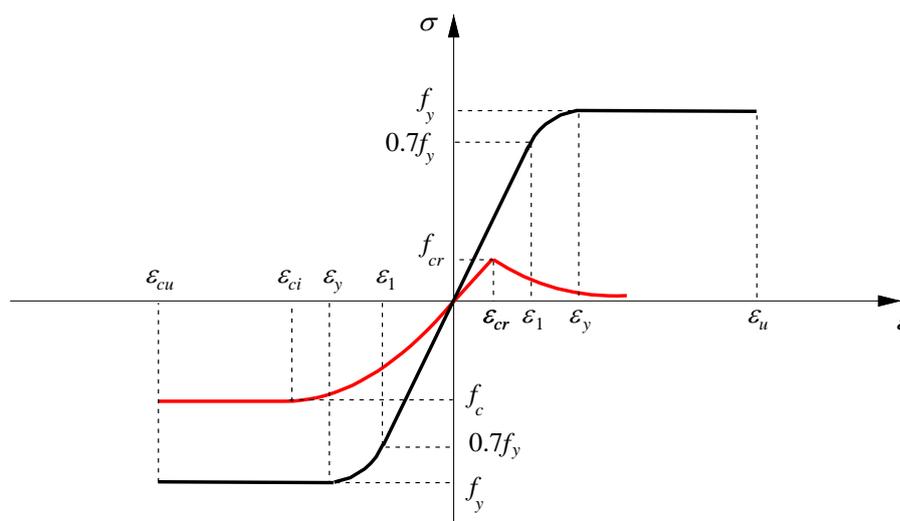


Figura C.3 – Relações constitutivas utilizadas

C.6 Módulo de Elasticidade para a Análise Global

Para as análises considerando as curvas de interação como limites dos regimes não fissurado, elástico e resistente, são importantes: as relações constitutivas dos materiais e as deformações correspondentes à limitação desses regimes. Nesta seção, é discutida especificamente a definição da tensão limite elástica do concreto, bem como o módulo de elasticidade a ser utilizado na análise estrutural. Izzuddin e Smith (2000) assumiram que a deformação no limite elástico, ϵ_{cin} , pode ser definida como o parâmetro correspondente a f_c , considerando uma falsa relação linear-elástica, como mostrado na Figura C.4.

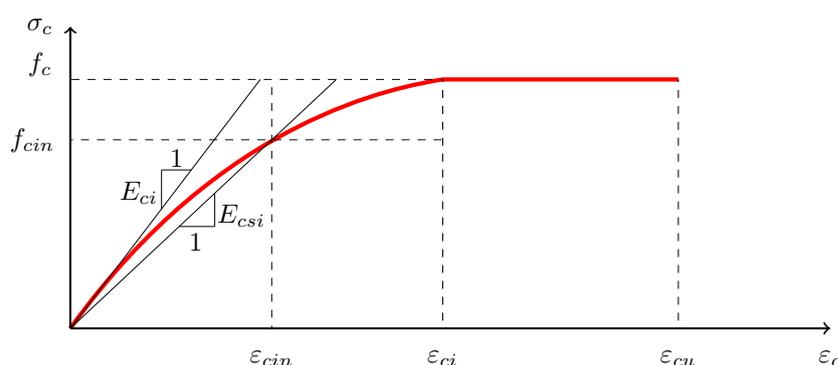


Figura C.4 – Concreto sob compressão: definição da deformação elástica

Ilustrado na Figura C.4, E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente inicial do concreto sob compressão, e é dado por:

$$E_{ci} = \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (C.11)$$

Com a determinação de E_{ci} , e usando a equação da lei de Hooke ($f_c = E_{ci}\varepsilon_{cin}$), pode-se chegar facilmente em $\varepsilon_{cin} = \varepsilon_{ci}/2$. Conseqüentemente, f_{cin} , tensão de início de plastificação do concreto, é dada por $0.75f_c$.

Liu *et al.* (2012b) e Iu (2016) usaram o módulo de elasticidade tangente inicial como E_{ci} nas Equações C.2 e C.3. Observe que esse valor é constante durante a análise e não há degradação da rigidez pseudo-mola quando as forças internas da seção estão no regime elástico. Isso acaba por superestimar o valor do módulo de elasticidade devido ao comportamento não linear do concreto sob compressão.

C.7 Momento de Inércia da Seção Fissurada

A norma brasileira NBR 6118 (2014) considera, para a aplicação da equação BM (C.4), que o momento de inércia da seção fissurada, I_{cr} , deve ser considerado no regime elástico, uma vez que a equação é aplicada para a avaliação do estado limite de utilização, na verificação da flecha imediata em vigas. No presente trabalho, as análises extrapolam o regime elástico, assim, o momento de inércia da seção fissurada é avaliado no ponto crítico da relação momento-curvatura para cada valor de força axial.

C.8 Curvas de Interação

As curvas de plastificação total (CPT) e de início de plastificação (CIP) são obtidas conforme detalhado na Seção 2.5.5 do presente trabalho.

As curvas de início de fissuração (CIF) seguem, basicamente, a mesma metodologia. Ou seja, na construção da relação momento-curvatura, quando, para um valor fixo de esforço axial e incrementos sucessivos de momento fletor, a primeira fibra da seção transversal atingir a deformação de início de fissuração ε_{cr} tem-se que o momento responsável por tal fato é o momento de início de fissuração, M_{cr} .

C.9 Análises Numéricas

C.9.1 Análise de uma seção transversal típica

Liu *et al.* (2012a) simularam a capacidade resistente da seção de concreto armado mostrada na Figura C.5. As propriedades dos materiais que a compõem são apresentados na Tabela C.2. Duas análises são feitas aqui: considerando (CCT) e desconsiderando (CST) a resistência à tração do concreto. O objetivo deste exemplo é testar o procedimento não linear local para a definição dos limites não fissurado, elástico e resistente da seção transversal. Assim, a flexão em torno de ambos os eixos principais é estudada aqui.

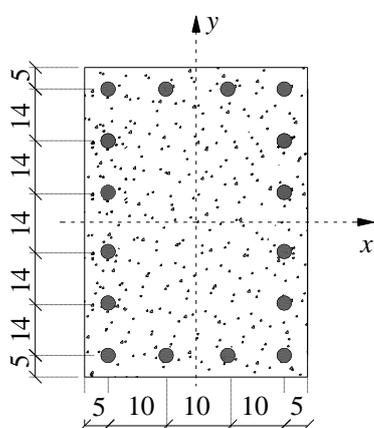


Figura C.5 – Seção em concreto armado (dimensões em cm)

Tabela C.2 – Dados dos materiais (em kN, cm)

Concreto				
f_c	f_{cr}	γ_c	ε_{ci}	ε_{cu}
4.0	0.269	1.5	-0.0023	-0.0035
Aço				
f_y	E_s	γ_s	ϕ	ε_u
35.5	20500	1.15	2	0.01

Na Figura C.6, as curvas de interação para as duas situações descritas anteriormente são mostradas: flexão nos eixos de maior e menor inércia. Pode-se facilmente ver a definição dos limites descritos na Seção C.3. Liu *et al.* (2012a) apresentaram apenas as curvas de interação referentes à capacidade resistente e à resistência à tração do concreto foi negligenciada. Assim, observa-se uma convergência dos resultados da análise CST com os dos referidos autores. A consideração desse efeito amplifica a capacidade resistente da seção transversal em aproximadamente 6%.

Como já esperado, a curva de início de fissuração (CIF) mostra momentos de flexão maiores à medida que a força de compressão axial é maior até coincidir com a curva de plastificação total. Nesta última condição, a seção transversal atinge sua capacidade resistente máxima sem fissurar. Na análise CCT, esta curva é obtida quando a primeira fibra atinge a deformação ε_{cr} , e na análise CST, quando a primeira fibra apresenta deformação

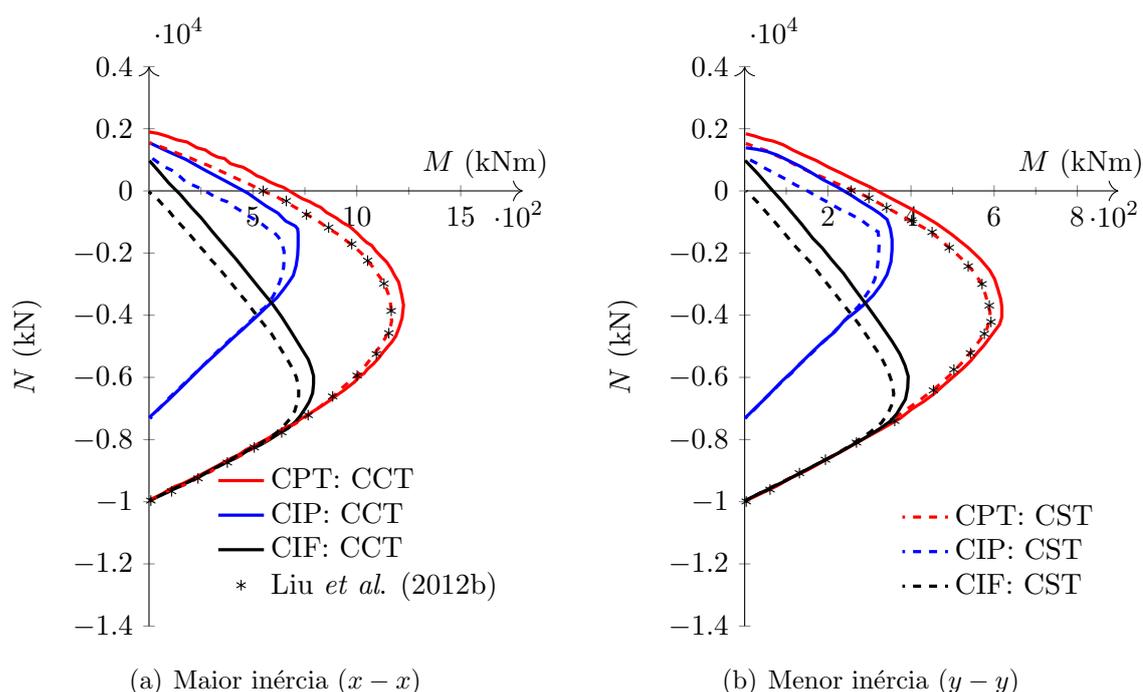


Figura C.6 – Seção de concreto armado: curvas de interação $N \times M$

axial positiva.

Nas curvas de início de plastificação (CIP), um ponto angular pode ser visto próximo da força de compressão axial de 1000 kN. Esse ponto representa a mudança na influência do material na definição dessa curva. Isto é, para valores superiores a -1000 kN, o escoamento das armaduras é determinante e a curva é construída quando a deformação axial da barra atinge ε_y . Para valores de N menores que -1000 kN, as deformações plásticas do concreto governam a construção desta curva, sendo montadas quando a primeira fibra atinge ε_{cin} (IZZUDDIN; SMITH, 2000).

A Figura C.7 mostra a variação do momento de inércia da seção fissurada (I_{cr}) em relação à força axial aplicada na seção transversal para os eixos de maior e menor inércia. Como esperado, para valores elevados de forças axiais de compressão, a seção transversal atinge o ponto crítico da relação momento-curvatura sem fissurar, ou seja, o I_{cr} é igual a I_c (momento de inércia da seção intacta, em x $I_{c,x}$, e em y $I_{c,y}$). Outra observação é sobre a leve influência da consideração da resistência à tração no concreto. Nota-se que na análise CCT, tem-se valores mais altos de I_{cr} porque algumas fibras que possuem valores baixos de deformações de tração ainda menores que ε_{cr} . Consequentemente, quanto maior a tendência da força axial ser de tração menor será o momento de inércia da seção fissurada.

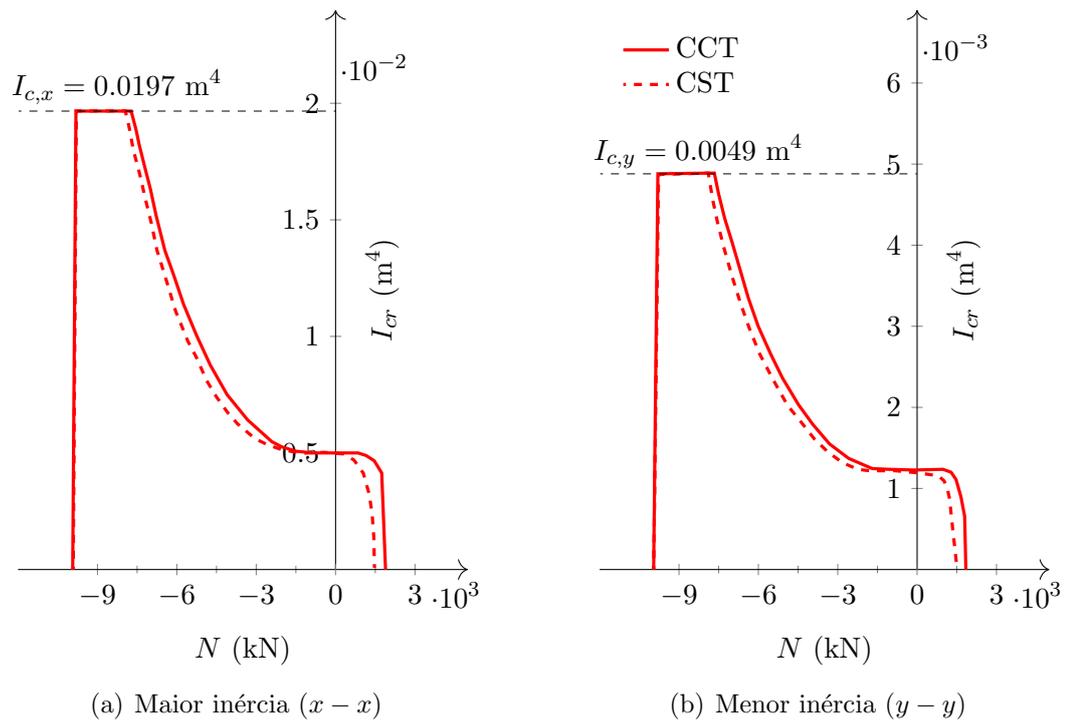


Figura C.7 – Seção de concreto armado: $I_{cr} \times N$

C.9.2 Pilar de Foure

Novamente, o pilar de Foure (Figura 5.30) com comprimento de 225 cm é estudado, agora com a proposta apresentada neste apêndice. Além das considerações já apresentadas na Seção 5.4.2, um estudo do refinamento da malha (variando de 1 a 6 elementos finitos de igual comprimento - Figura C.8) é aqui realizado.

O estudo do refinamento de malha é de grande importância, pois os efeitos não lineares são tratados exclusivamente em pontos nodais. Assim, são testadas 6 malhas de elementos finitos e os resultados obtidos usando a aproximação proposta por Branson e Metz (1963) com cada uma delas são mostrados na Figura C.9(a). Para este pilar de concreto armado, há uma baixa influência da malha na resposta global do sistema. As trajetórias de equilíbrio são muito próximas, evidenciando a boa convergência da formulação proposta para índices baixos de refinamento. Outra informação importante que pode ser feita em relação à carga crítica de cada malha testada (Tabela C.3) é a tendência de estabilização da carga crítica próxima ao valor experimental ($P_{exp} = 454kN$).

O mesmo estudo foi realizado considerando a proposta de Patel *et al.* (2015). Embora as mesmas conclusões anteriormente feitas sejam adequadas nessas análises, em todas as situações, as cargas críticas encontradas para esta condição foram, em média, aproxima-

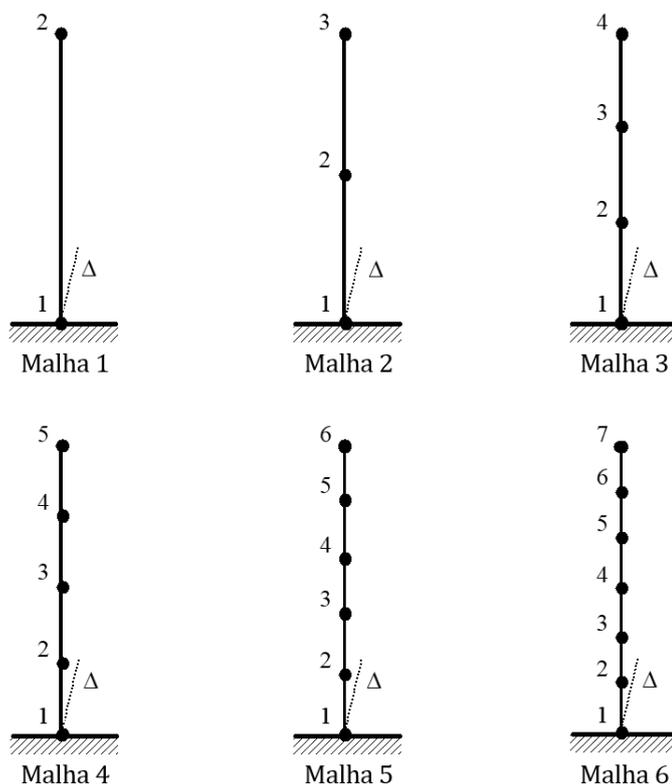


Figura C.8 – Malhas de elementos finitos testadas

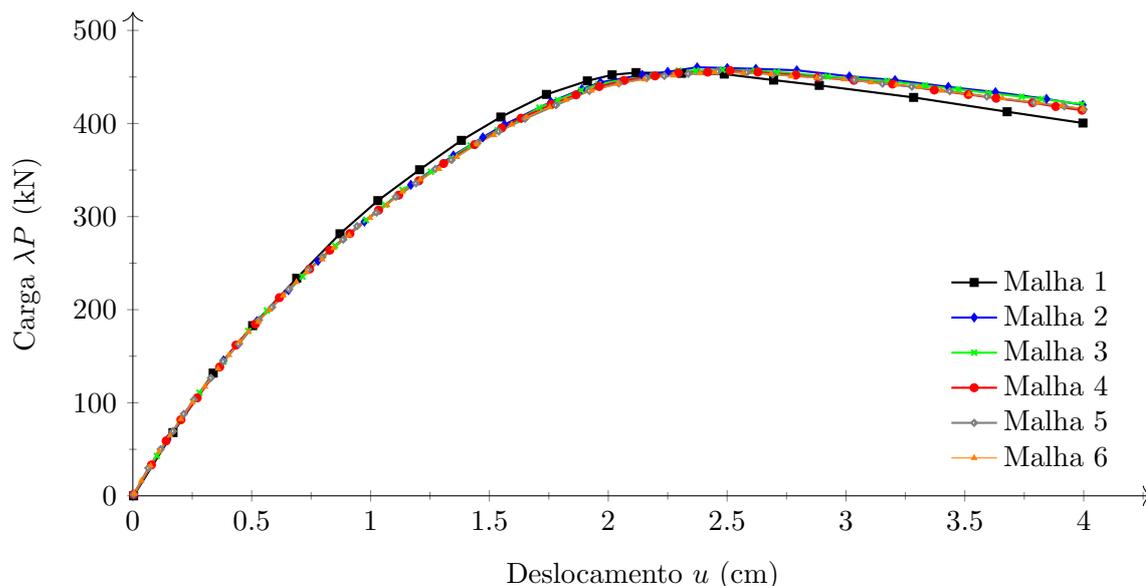
Tabela C.3 – Cargas críticas em kN - Pilar de Foure

Equação	Malha					
	1	2	3	4	5	6
BM	452.851	457.467	455.296	454.816	454.441	454.277
P	456.583	463.444	461.358	460.801	460.523	460.338

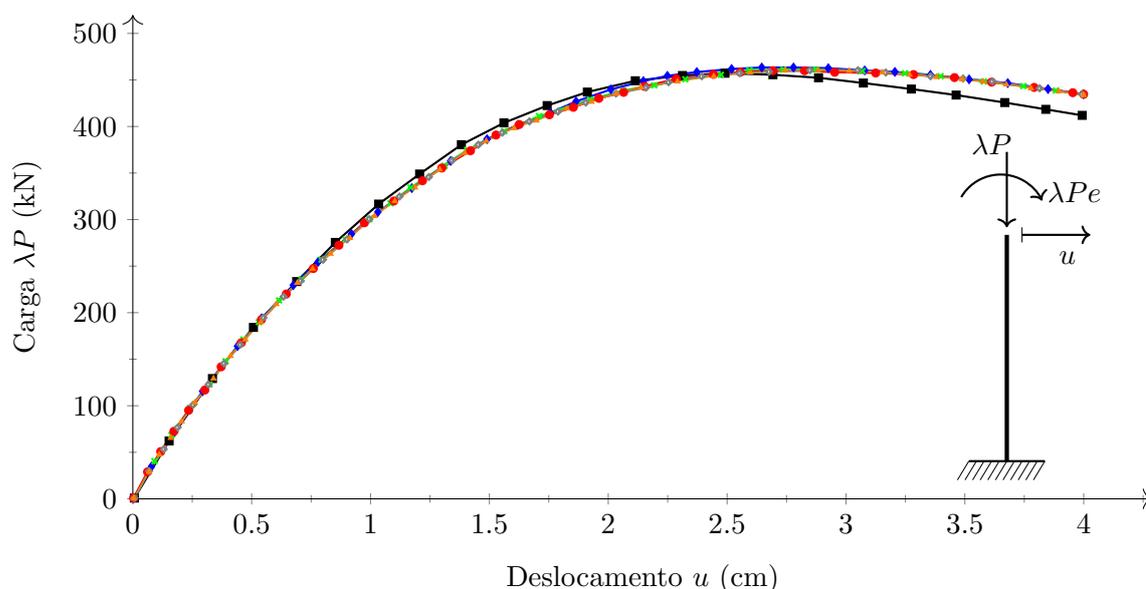
mente 1.3% maiores que as simuladas com a equação BM, como pode ser visto na Tabela C.3.

Para a comparação com os resultados experimentais fornecidos por Espion (1993), foi escolhida a malha 4 (4 elementos e 5 pontos nodais). Isso foi definido com base na discretização adotada na Seção 5.4.2 e o fato de que essa malha oferece uma carga crítica muito próxima das malhas mais refinadas. Para essa mesma malha, foi realizada uma análise sem o efeito de fissuração (SEF), demonstrando a importância de considerar esse efeito na análise das estruturas de concreto armado, mesmo em elementos com grande influência da força de compressão axial.

Na Figura C.10, os resultados obtidos com a formulação numérica apresentada neste apêndice são plotadas e comparadas com os resultados experimentais (ESPION, 1993).



(a) Usando a equação de Branson e Metz (1963)

(b) Usando a equação de Patel *et al.* (2015)**Figura C.9** – Trajetórias de equilíbrio - Pilar de Foure

Em geral, podemos ver um bom comportamento das trajetórias de equilíbrio considerando a equação de Branson e Metz (1963) - BM, e a equação de Patel *et al.* (2015) - P, sendo bem ajustadas à curva experimental. No entanto, vale destacar que, após o início da fissuração, $\lambda P = 383.55$ kN, a análise SEF diverge e perde a precisão.

Após o início da fissuração, cada uma das equações do momento de inércia efetivo apresenta valores diferentes, alterando a rigidez do sistema, o que faz com que cada uma das trajetórias de equilíbrio atinja o início de escoamento para diferentes valores da carga incremental, conforme destacado na Figura C.10.

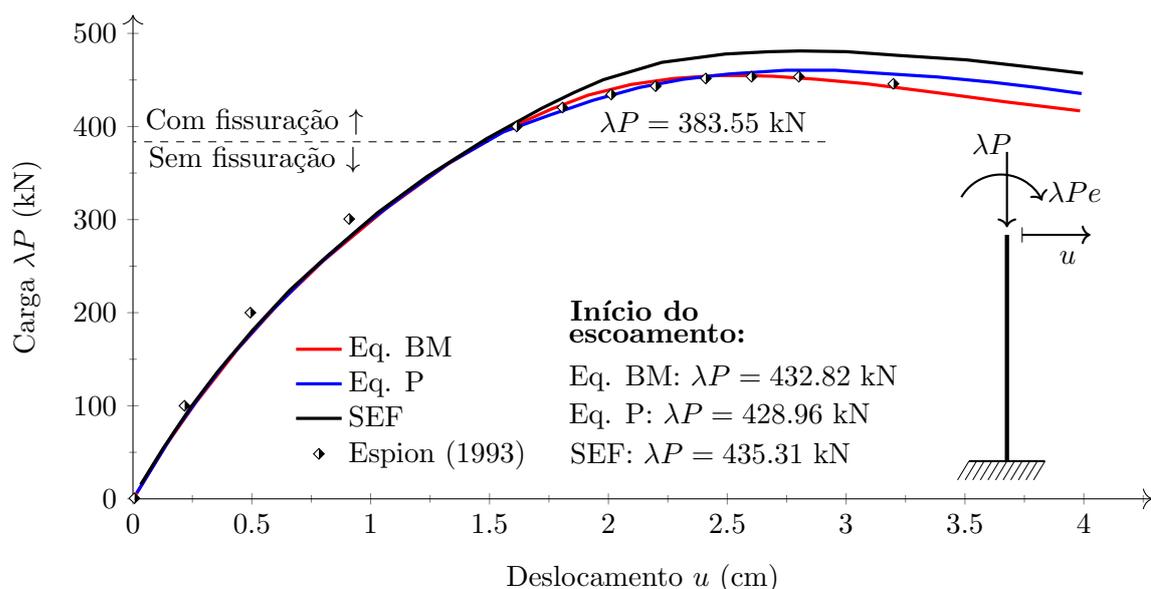


Figura C.10 – Trajetória de equilíbrio - Pilar de Foure

Para todas as análises numéricas, a fissuração se iniciou antes da plastificação do material. Esta observação é visível na Figura C.11. O ponto onde a maior sollicitação sobre a estrutura é na base da mesma. Assim, juntamente com as curvas de interação, as forças internas nesse nó foram plotadas. Em uma breve comparação dos resultados obtidos aqui com os fornecidos no item 5.4.2, uma boa convergência de ambos os resultados (BM e P) pode ser verificada com os dados obtidos via MCD/MRPR, mostrado na Figura C.11.

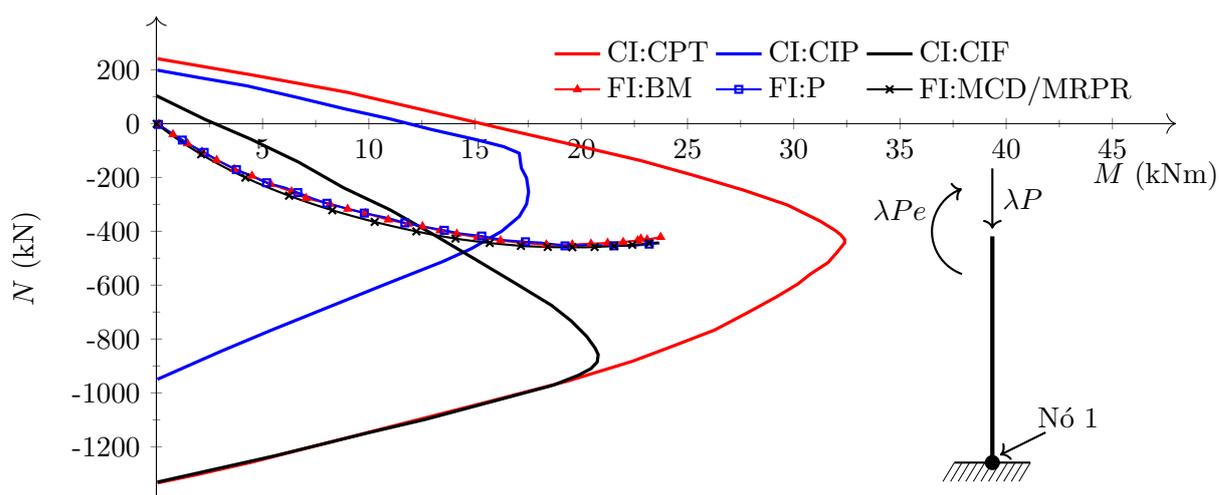


Figura C.11 – Forças internas no nó 1 e curvas de interação

A Figura C.11 também fornece outras informações importantes. Observe que as forças internas do nó 1 não alcançam a curva de interação referente a capacidade resistente da seção transversal, ou seja, não há rótulas plásticas na estrutura. No entanto, a combinação

das forças no nó 1 excede a curva de início de plastificação, degradando o parâmetro S_p e a curva de início de fissuração, alterando o momento de inércia efetivo, I_{ef} .

A Figura C.12 ilustra a porcentagem da degradação da rigidez das pseudo-molas sob carga crítica, P_{cr} , e para o deslocamento $u = 4$ cm. Conforme mencionado anteriormente, é evidente que não há rótulas plásticas no pilar de Foure, uma vez que em nenhuma das situações foi verificada uma pseudo-mola com 100% de degradação. Comparando a análise com as equações BM e P, tem-se que os resultados da simulação usando a equação P atingem valores de degradação maiores. Isso pode ser explicado pelo fato de que a carga crítica desta análise foi encontrada para valores de deslocamento maiores, como pode ser visto na Figura C.10. Com maiores deslocamentos, há valores de momento de flexão internos mais altos, aumentando a sollicitação nos pontos nodais. A comparação dos valores encontrados para o mesmo valor de deslocamento, $u = 4$ cm, tem-se que a análise usando a equação P ainda possui maiores valores de degradação. Novamente, observando a Figura C.10, verifica-se que, nessa situação, a análise usando a equação P tem o maior valor de λP , conseqüentemente aumentando as forças internas na estrutura.

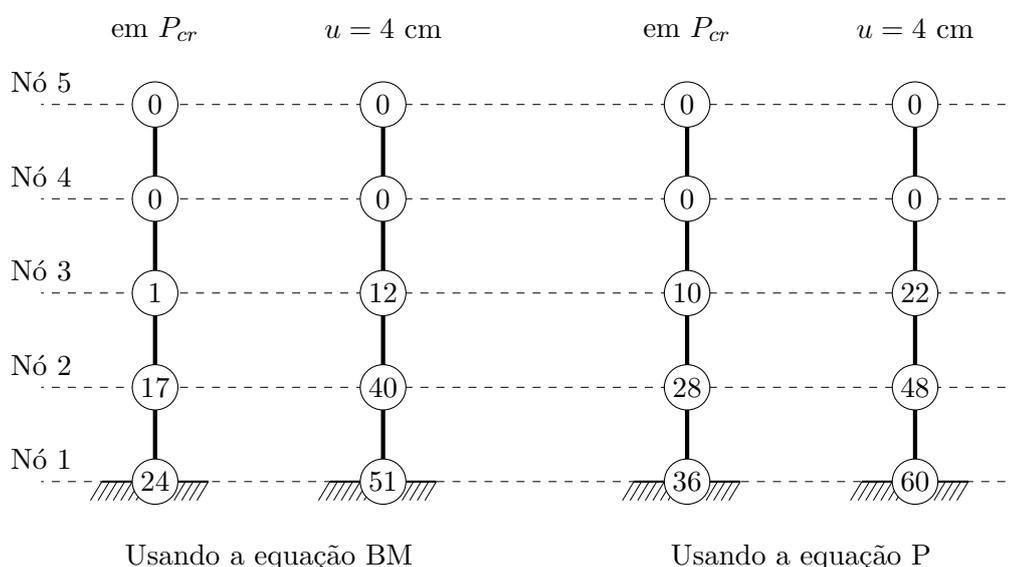
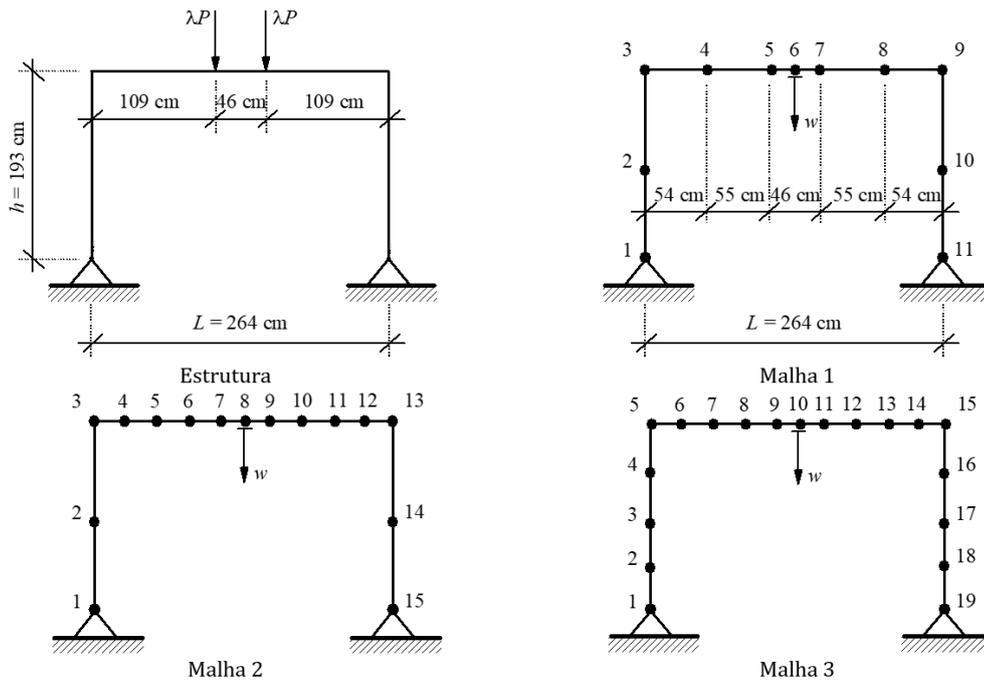


Figura C.12 – Porcentagem de degradação da rigidez da mola (malha 4)

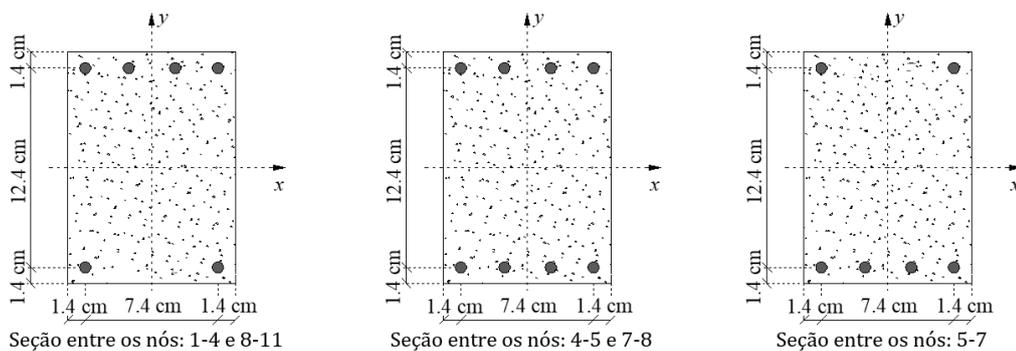
C.9.3 Pórtico simples biapoiado

O pórtico de concreto armado biapoiado testado por Cranston (1965) e mostrado na Figura C.13 é analisado. Essa estrutura é submetida a duas cargas verticais incrementais igualmente espaçadas inseridas na viga. Cranston (1965) forneceu apenas f_c e f_{pyd} , já

os outros dados são retirados de outros trabalhos (BRATINA *et al.*, 2004; VALIPOUR; FOSTER, 2009; LIU *et al.*, 2012b) com base no EC 2 (2004), e dados na Tabela C.4. Todos os elementos estão sob flexão em torno do eixo de maior inércia e todas as barras de reforço apresentam diâmetro de 9.5 mm. As seções transversais são definidas com base nos pontos nodais da malha 1.



(a) Geometria, malhas e carregamentos



(b) Seções transversais definidas com base nos nós da malha 1

Figura C.13 – Pórtico de Cranston (1965)**Tabela C.4** – Dados dos materiais (em kN, cm)

Concreto					Aço		
f_c	f_{cr}	E_c	ε_{ci}	ε_{cu}	f_{pyd}	E_s	ε_{pud}
3.65	0.32	2777.1	-0.0023	-0.0035	29.3	20000	0.015

Três malhas de elementos finitos são testadas. Basicamente, a malha 1 é considerada como a menos refinada possível. Os pilares foram discretizados em dois elementos, conforme estudado no exemplo anterior, e a viga foi dividida com base nas variações das seções transversais neste elemento estrutural. As malhas 2 e 3 avaliam a influência da discretização da viga e do pilar, respectivamente.

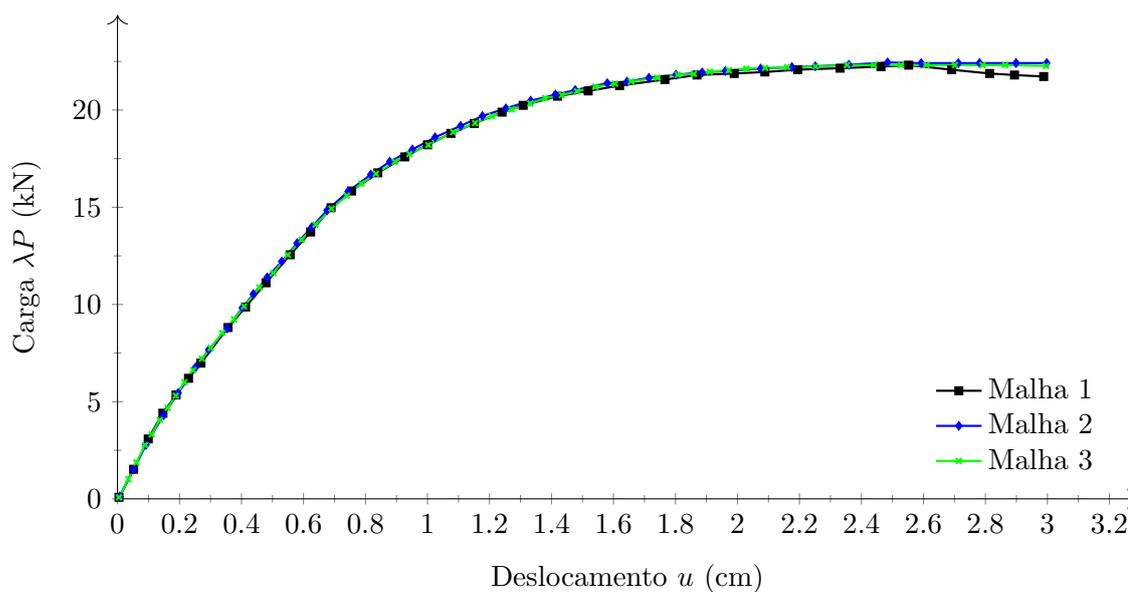
Como pode ser visto na Figura C.14, a formulação descrita nesse apêndice apresentou baixa sensibilidade à malha usada novamente, usando equações BM e P. É possível verificar na Tabela C.5 que a carga crítica da estrutura tende a um valor fixo à medida que a malha se torna mais refinada. Pode-se notar que as cargas críticas se aproximaram bem em ambas as situações. Neste exemplo especificamente, os valores encontrados para P_{cr} usando a equação P foram menores que os encontrados usando a equação BM, ao contrário do exemplo anterior. Patel *et al.* (2015) mostraram que a equação P apresenta respostas menos rígidas do que a proposta por Branson e Metz (1963), quando a seção da viga já está fissurada. Isso gera uma proximidade na resposta porque, ao superestimar ligeiramente a capacidade do pilar, esta equação é menos conservadora em relação ao comportamento da viga.

Tabela C.5 – Cargas críticas em kN - Pórtico de Cranston

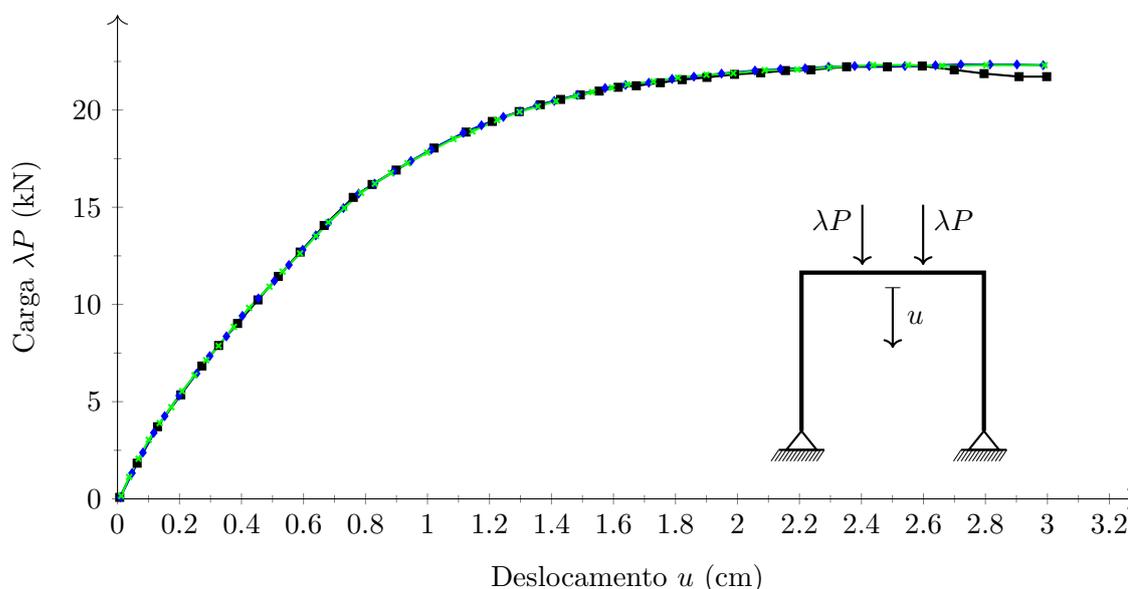
Equação	Malha		
	1	2	3
BM	22.302	22.344	22.349
P	22.286	22.387	22.444

A malha 1 apresenta um ponto limite de carga para valores de deslocamento menores do que as outras malhas. Isto ocorre devido à formação rápida da rótula plástica nas extremidades e no centro da viga. Assim, é possível ver nas Figuras C.14(a) e C.14(b) um amolecimento mais pronunciado no comportamento geral desta malha. Nota-se que o refinamento de malha do pilar, malha 3, mostra uma baixa alteração na carga crítica e na trajetória de equilíbrio.

Pode-se ver que a malha 2 é suficiente para a análise estrutural, e esta malha será usada agora. Assim, os resultados obtidos numericamente são comparados com os obtidos por Cranston (1965). Duas curvas são traçadas na Figura C.15, carga-deslocamento e a variação do momento de flexão na extremidade esquerda do viga pelo deslocamento. Em

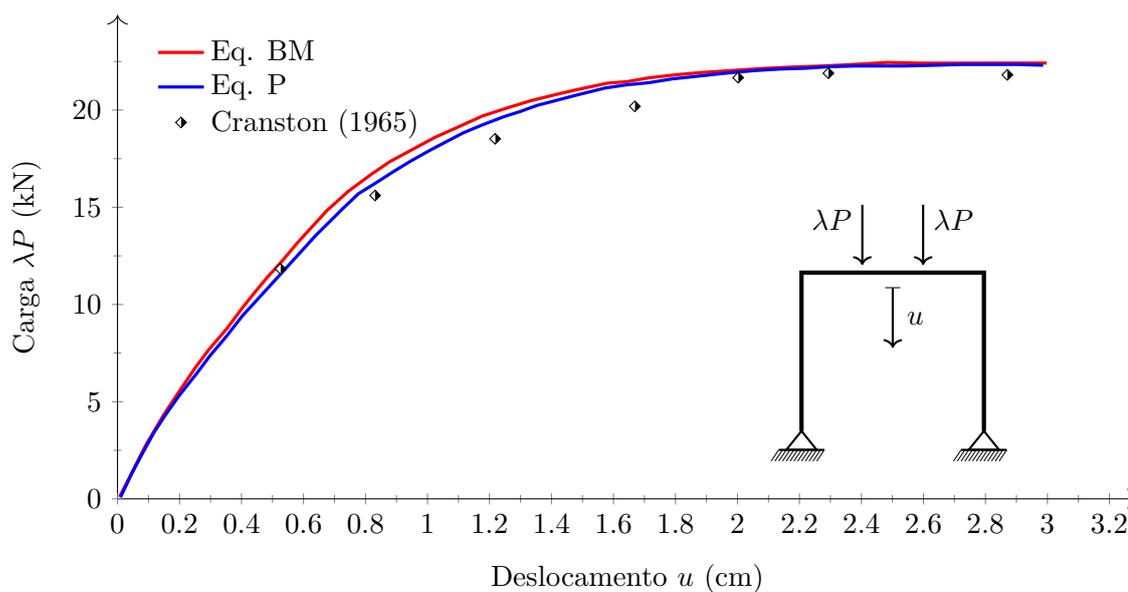


(a) Usando a equação de Branson e Metz (1963)

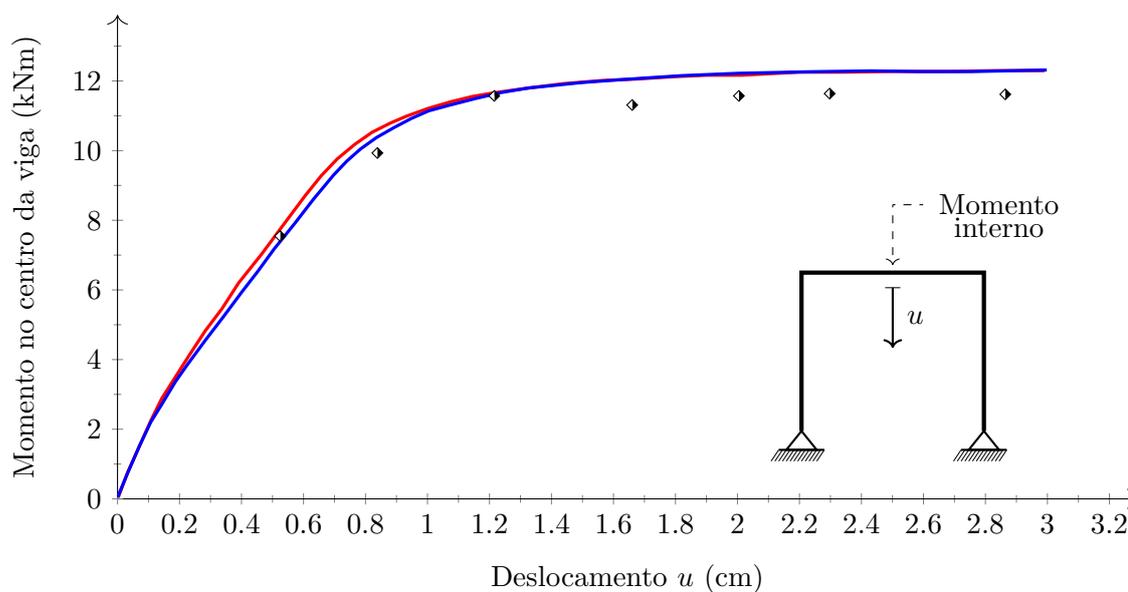
(b) Usando a equação de Patel *et al.* (2015)**Figura C.14** – Trajetórias de equilíbrio - Pórtico de Cranston (1965)

ambas as situações, pode-se observar uma boa proximidade entre as curvas numéricas e as experimentais. É possível destacar a boa concordância da rigidez inicial e a carga crítica do sistema estrutural para as duas equações de momento de inércia efetivo.

Dois rótulas plásticas são formadas ao longo do histórico de carregamento da análise estrutural. As rótulas são formadas nos nós 3 e 13 (na viga). Assim, devido à simetria do problema, foi escolhido monitorar a degradação da rigidez da pseudo-mola exclusivamente no nó 3, conforme ilustrado na Figura C.16. Nesta mesma figura, é possível identificar os momentos de início e de plastificação total da seção, indicados por linhas pontilhadas. Os



(a) Curva carga-deslocamento



(b) Curva moment-deslocamento

Figura C.15 – Trajetórias de equilíbrio - Comparação com dados experimentais

resultados obtidos com ambas as equações são coincidentes. Isso pode ser explicado porque M_{er} e M_{pr} são obtidos através da análise da seção transversal, via MCD. Considerando a proximidade entre os resultados obtidos na Figura C.15 e os momentos de flexão internos discutidos a seguir, pode-se concluir que a Equação C.3 torna-se praticamente a mesma nos dois casos.

Nota-se que, na situação em que a estrutura está sob ação de carga crítica, os diagramas de momentos de flexão usando as duas equações para o momento de inércia efetivo para simular a fissuração são os mesmos. Na Figura C.17, o diagrama do momento de

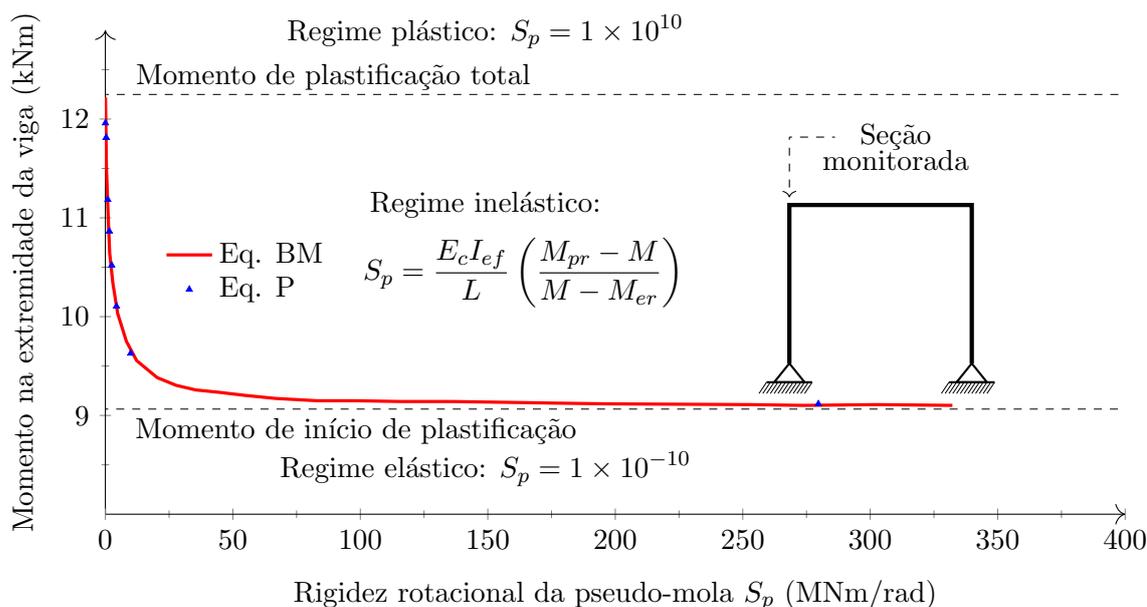


Figura C.16 – Pórtico de Cranston - monitoramento de uma seção plastificada

flexão é mostrado e os valores obtidos numericamente, utilizando equações (BM e P) são apresentados na Tabela C.6.

C.10 Conclusões

Este apêndice apresenta uma formulação alternativa para análises não linear física e geométrica de estruturas planas de concreto armado. Nesta proposta, a plasticidade é tratada de forma concentrada utilizando o MRPR onde as molas rotacionais fictícias simulam a degradação da rigidez à flexão na seção transversal. A fissuração foi inserida através do cálculo do momento de inércia efetivo da seção transversal, considerado através de duas abordagens: Branson e Metz (1963) e Patel *et al.* (2015). Algumas conclusões gerais podem ser feitas:

- as vigas isoladas não foram analisadas, uma vez que o pórtico de Cranston (1965) tem seu comportamento basicamente definido pela não-linearidade do material na viga;
- baixos índices de refinamento foram suficientes para uma resposta global satisfatória nos dois exemplos testados;
- o uso da equação do momento de inércia efetivo dos elementos de concreto armado

Tabela C.6 – Valores do momento fletor interno no ponto limite (em kNm)

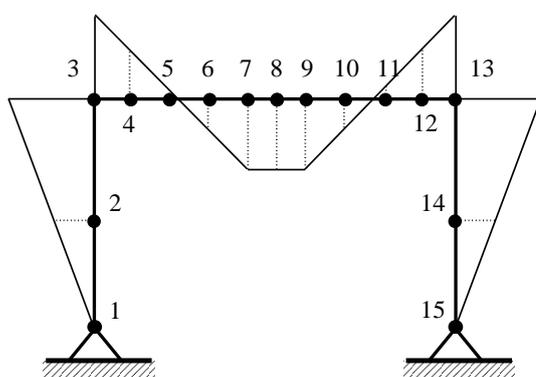


Figura C.17 – Diagrama de momentos fletores

Nó	Análise	
	BM	P
1	0	0
2	6.2	6.2
3	12.24	12.24
4	6.17	6.17
5	0.1	0.1
6	6.08	6.08
7	12.27	12.27
8	12.28	12.28
9	12.27	12.27
10	6.08	6.08
11	0.1	0.1
12	6.17	6.17
13	12.24	12.24
14	6.2	6.2
15	0	0

melhora a precisão das análises, uma vez que a fissuração é um problema inerente a elementos de concreto sob esforço de tração;

- as malhas mais refinadas tendem a soluções convergentes sem apresentar instabilidades numéricas e oscilações de carga crítica dos sistemas estruturais simulados;
- a proposta de união do MRPR clássico com a equação do momento de inércia efetivo proporcionou resultados satisfatórios no contexto da análise não linear de estruturas planas de concreto armado.

Mais especificamente, na comparação das equações do momento de inércia efetivo, destaca-se:

- ambas as equações foram desenvolvidas para vigas. Um ajuste no momento de inércia da seção fissurada foi necessário para permitir a sua utilização na análise de pilares/pórticos;

- como observado por Patel *et al.* (2015), a Equação C.5 fornece respostas menos rígidas para vigas em processo de fissuração quando comparada à Equação C.4. Esta observação pode ser vista analisando os dois exemplos testados, no pilar de Foure houve uma carga crítica maior quando a Equação C.5 foi usada. No pórtico de Cranston (1965), devido ao fato de que a viga apresenta maiores taxas de fissuração, é possível ver que a situação é revertida e os resultados obtidos através da Equação C.5 são mais conservadores do que os encontrados com a Equação C.4.