

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA ATRAVÉS DO MÉTODO DO BALANÇO HARMÔNICO

RAFAEL AÉSIO DE OLIVEIRA ZALTRON

OURO PRETO, MG – BRASIL

2016

ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA ATRAVÉS DO MÉTODO DO BALANÇO HARMÔNICO

Rafael Aésio de Oliveira Zaltron

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves

Ouro Preto, 30 de Maio de 2016

Dedico este trabalho aos
meus pais e a minha esposa.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

Ao professor Francisco Assis, pelo incentivo à realização deste trabalho.

Ao ilustre corpo docente do PROPEC, em especial aos professores Ricardo Azoubel, Francisco Célio, Ricardo Fiorotti, Arlene, Andréa Silva e Marcílio.

A Róvia, por seu atendimento eficiente prestado no período em que foi secretária do PROPEC.

À CAPES pelo apoio financeiro durante os últimos anos;

Aos meus amigos e colegas o qual tenho grande admiração e carinho, em especial Rharã de Almeida e Marko Rupert.

Aos meus pais e irmãos, pelo carinho e confiança transmitida, proporcionando um ambiente familiar único.

A minha esposa Helena Sandri, pela paciência e incentivo aos meus estudos, mesmo que isso às vezes resulta-se em saudades.

Resumo da Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA ATRAVÉS DO MÉTODO DO BALANÇO HARMÔNICO

Rafael Aésio de Oliveira Zaltron

Maio/2016

Orientador: Francisco de Assis das Neves

Esta dissertação tem como objetivo gerar e avaliar a resposta dinâmica de um sistema estrutural discreto no domínio da frequência, através das curvas de ressonância fazendo uso do Método do Balanço Harmônico. A resposta do sistema é avaliada na fase permanente para cargas harmônicas, periódicas e impulsivas, para sistemas dotados de amortecimento viscoso. O sistema estrutural discreto aqui desenvolvido trata-se de um Shear Building como apresenta à bibliografia, porém a solução é baseada na dimensão das matrizes de rigidez e de massa, podendo ser facilmente adotada para outros modelos ou elementos estruturais. As propriedades do sistema tais como massa e rigidez são tomadas como constantes. No desenvolvimento temos então vários modelos estruturais, variando entre eles a fonte de excitação dinâmica e a matriz de amortecimento sendo primeiramente apresentados os resultados para sistemas dotados de amortecimento viscoso do tipo proporcional e posterior à resposta é avaliada para sistemas dotados de amortecimento viscoso do tipo não-proporcional. Para cada modelo além da obtenção do espectro de resposta em frequência também é obtido o histórico de deslocamento no tempo, onde as duas respostas são dadas pelo Método do Balanço Harmônico. O espectro de resposta em frequência é avaliado em relação à análise harmônica é comparado com os deslocamentos máximos na frequência de ressonância, já o histórico de deslocamento é então comparado como outros dois métodos que também são baseados no domínio da frequência (ImFT e Pseudo-Forcas). Essa comparação permite concluir que a metodologia apresentada neste trabalho é eficaz tanto para obter a resposta no domínio da frequência quanto no domínio do tempo. Outras observações referente ao estudo realizado serão estabelecidas.

Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

DYNAMIC ANALYSIS IN FREQUENCY DOMAIN THROUGH THE HARMONIC BALANCE METHOD

Rafael Aésio de Oliveira Zaltron

May/2016

Advisors: Francisco de Assis das Neves

This work aims to generate and evaluate the dynamic response of a discrete structural system in the frequency domain, through the resonance curves making use of the Harmonic Balance Method. The system response is evaluated in the permanent phase to harmonic, periodic and impulsive loads, for systems with viscous damping. The discrete structural system developed here it is a Shear Building features as the bibliography, but the solution is based on the size of the stiffness matrix and mass, and can be easily adopted for other models or structural elements. The system properties such as mass and stiffness are taken as constant. Development then we have various structural models, ranging between them the source of dynamic excitation and damping matrix is first presented the results for systems with viscous damping proportional and later type of response is evaluated for systems with viscous damping type not-proportional. For each model in addition to obtaining the frequency response spectrum is also obtained the displacement history in time, where the two answers are given by the Harmonic Balance Method. The frequency response spectrum is evaluated relative to the harmonic analysis is compared with the maximum displacement at the resonant frequency, since the displacement history is then compared to the other two methods which are also based in the frequency domain (IMFT). This comparison shows that the method presented in this paper is effective both for the response in the frequency domain and in the time domain. Other observations concerning the studies will be established.

Lista de Figuras

3.1	Periodização de $p(t)$, tempo estendido e N termos da DFT.....	28
3.2	Resposta no domínio da frequência usando a DFT.....	29
3.3	Histórico de resposta. – Métodos baseados no domínio da frequência.....	36
4.1	Espectro de resposta HBM – Amplitude / Frequência.....	41
4.2	Ângulo fase assumido no domínio.....	42
4.3	Espectro de resposta HBM – Fase /Frequência.....	43
4.4	FFT para um carregamento Harmônico – Função seno.....	44
4.5	FFT para um carregamento Harmônico – Função cosseno.....	45
4.6	FFT para um carregamento Harmônico – Função seno e cosseno.....	45
4.7	FFT para um carregamento Periódico.....	46
4.8	FFT para um carregamento Impulsivo.....	47
5.1	Modelo estrutural discreto – Modelo 01.....	49
5.2	M01, ω_{crit} - Espectro de resposta Modelo 01, com 20 incrementos de ω	50
5.3	M01, ω_{crit} - Histórico de deslocamento na frequência de ressonância - $\omega_n = 31,42 \text{ rad/s}$ - DOF_1	51
5.4	M01, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_n = 31,42 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 0.00257 \text{ m}$..	51
5.5	M01, ω_{crit} - Relação entre Fase ϕ e Frequência ω via HBM.....	52
5.6	Modelo estrutural discreto – Modelo 02.....	53
5.7	M02, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$, $ U_{crit} = 0.00257 \text{ m}$	55
5.8	M02, ω_{crit} - Histórico de deslocamentos na frequência de ressonância - (DOF_1).....	55
5.9	M02, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	56

5.10	M02, ω_{crit} - Relação entre Fase ϕ e Frequência ω via HBM- (DOF_1).....	56
5.11	M02, C01 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 1,681 \text{ in}$	57
5.12	M02, C01 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	58
5.13	M02, C01 - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1)..	58
5.14	M02, C02 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 0,490 \text{ in}$	59
5.15	M02, C02 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	60
5.16	M02, C02 - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1).	60
5.17	M02, C03 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 2,591 \text{ in}$	61
5.18	M02, C03 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	62
5.19	M02, C03 - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1).	62
5.20	Modelo estrutural discreto – Modelo 02 para caso de carregamentos combinados.....	63
5.21	M02, C04a - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 3,466 \text{ in}$	64
5.22	M02, C04a - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	65
5.23	M02, C04a - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1).....	65
5.24	M02, C04b - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 2.269 \text{ in}$	66
5.25	M02, C04b - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	67
5.26	M02, C04b - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1).....	67
5.27	Modelo estrutural discreto – Modelo 03.	70
5.28	M03, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$, $ U_{crit} = 0,3244 \text{ in}$	71
5.29	M03, ω_{crit} - Histórico de deslocamentos HBM - (DOF_1).....	71
5.30	M03, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{crit} $	72

5.31	M03, ω_{crit} - Relação entre Fase ϕ e Frequência ω via HBM - (DOF_1).....	72
5.32	M03, C01 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 0,195 \text{ in}$	73
5.33	M03, C01 - Espectro de resposta - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	73
5.34	M03, C01 - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).	74
5.35	M03, C02 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 0,3176 \text{ in}$	74
5.36	M03, C02 - Espectro de resposta - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	75
5.37	M03, C02 - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).	75
5.38	Modelo estrutural discreto – Modelo 04.	77
5.39	M04, C01a - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 15,0 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 3,69 \text{ in}$	79
5.40	M04, C01a - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ u_{m\acute{a}x} $	79
5.41	M04, C01a - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).....	80
5.42	M04, C01b - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 15,0 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 1,643 \text{ in}$	81
5.43	M04, C01b - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	81
5.44	M04, C01b - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).	82
5.45	M04, C01c - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 15,0 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 1,523 \text{ in}$	83
5.46	M04, C01c - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	83
5.47	M04, C01c - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).....	84
5.48	M04, C01d - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 15,0 \text{ rad/s}$, $ U_{m\acute{a}x} = 1,116 \text{ in}$	85
5.49	M04, C01d - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $ U_{m\acute{a}x} $	85
5.50	M04, C01d - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).	86

Lista de Tabelas

3.1	Frequências discretas.....	32
5.1	Amplitudes e deslocamentos máximos em função do carregamento.....	68
5.2	Amplitudes e deslocamentos máximos em função do carregamento.....	76
5.3	Amplitudes máximas em relação à frequência de ressonância	78
5.4	Amplitudes e deslocamentos máximos em função do carregamento.....	87

Sumário

Lista de Figuras.....	vii
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	14
1.1 Considerações Iniciais	14
1.2 Objetivos	15
1.3 Justificativas	15
1.4 Revisão Bibliográfica	16
1.5 Apresentação Sumária	18
2 Análise Dinâmica de Estruturas.....	19
2.1 Modelos Estruturais Discretos	19
2.1.1 Sistemas Dotados de Amortecimento Proporcional	21
2.1.2 Sistemas Dotados de Amortecimento Não-Proporcional	22
2.2 A Resposta no Domínio da Frequência.....	22
2.2.1 Métodos Baseados na Superposição Modal	22
2.2.2 Método Baseados em Linearização	23
3 Métodos de Análise Dinâmica para o Domínio da Frequência.....	25
3.1 Introdução.....	25
3.2 Método Clássico.....	25
3.3 Método da ImFT.....	30
3.4 Método das Pseudo-Forças.....	35
4 Análise Dinâmica pelo Método do Balanço Harmônico.....	38
4.1 Introdução.....	38
4.2 Formulação e Desenvolvimento.....	38
4.3 Resposta em Frequência.....	40
4.3.1 Curva de Ressonância – Relação Amplitude e Frequência	40
4.3.2 Curva de Ressonância – Relação Amplitude e Fase.....	41
4.4 Resposta na Fase Permanente.....	43

4.4.1	Carregamento Harmônico.....	44
4.3.2	Carregamento Periódico	46
4.3.3	Carregamento Geral.....	46
5	Avaliação dos Resultados	48
5.1	Avaliação da Curva de Ressonância	48
5.2	Sistemas Dotados de Amortecimento Proporcional	49
5.2.1	Modelo 01	49
5.2.1.1	Espectro de Resposta na Frequência de Ressonância	50
5.2.2	Modelo 02.....	53
5.2.2.1	Espectro de Resposta na Frequência de Ressonância	54
5.2.2.2	Caso 1 – Resposta Permanente a um Carregamento Harmônico	57
5.2.2.3	Caso 2 – Resposta Permanente a um Carregamento Periódico.....	59
5.2.2.4	Caso 3 – Resposta Permanente a um Carregamento Transiente	61
5.2.2.5	Caso 4 – Resposta Permanente a um Combinação de Excitações ...	63
5.2.2.6	Resultados	68
5.3	Sistemas Dotados de Amortecimento Não-Proporcional.....	69
5.3.1	Modelo 03.....	69
5.3.1.1	Espectro de Resposta na Frequência de Ressonância	70
5.3.1.2	Caso 1 – Resposta Permanente a um Carregamento Harmônico	73
5.3.1.3	Caso 2 – Resposta Permanente a um Carregamento Transiente	74
5.3.1.4	Resultados	76
5.3.2	Modelo 04.....	77
5.3.2.1	Caso 1a – Resposta Permanente a um Carregamento Transiente	78
5.2.2.2	Caso 2b – Resposta Permanente a um Carregamento Transiente	80
5.3.2.3	Caso 1c – Resposta Permanente a um Carregamento Transiente	82
5.3.2.4	Caso 1d – Resposta Permanente a um Combinação de Transiente..	84
5.3.2.5	Resultados	86
6	Considerações Finais	88
6.1	Conclusões.....	88
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	90
	Referências Bibliográficas	91

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A análise de estruturas no domínio da frequência vem ganhando campo nas últimas décadas primeiramente devido ao desenvolvimento computacional e estratégias para avaliar a transformada discreta de Fourier com mais eficiência. Existem varias vantagens em se avaliar a resposta no domínio da frequência uma delas e que não há necessidade de conhecer as condições iniciais, e pode se avaliar a resposta para sistemas com propriedades dependente da frequência, por exemplo, interação solo-estrutura com maior precisão.

A resposta no domínio da frequência permite obter um espectro de resposta associado neste caso as propriedades do sistema tais como massa, rigidez, amortecimento e a excitação dinâmica. Em alguns casos a resposta em frequência que é caracterizada pelas curvas de ressonância, pode ser obtida indiretamente através de uma análise no tempo, oque leva a um grande esforço computacional para estrutura com vários graus de liberdade.

Entre as soluções possíveis ou alternativas para obter a resposta em frequência temos os métodos baseados na superposição modal, e os métodos baseados em linearização equivalente, todos abordados de uma forma implícita. Uma abordagem diferenciada, porém não nova consiste em fazer uso do Método do Balanço Harmônico ou Balanço Harmônico Linearizado para obter a resposta no domínio da frequência, o mesmo será então desenvolvido neste trabalho a fim de avaliar a resposta de sistemas estruturais no domínio da frequência e comparar sua resposta no tempo com métodos já existentes.

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem por objetivo gerar e avaliar a resposta de um sistema estrutural discreto no domínio da frequência através da obtenção das curvas de ressonância fazendo uso do Método do Balanço Harmônico. Esta abordagem servirá para então avaliar a resposta na fase permanente para cargas harmônicas, periódicas e impulsivas em sistemas dotados de amortecimento viscoso, tendo como parâmetro a amplitude do espectro e o histórico de deslocamento obtido pelo método proposto. Também será avaliado a precisão da resposta no domínio do tempo através de métodos conhecidos baseados no domínio da frequência, tal como a ImFT e a Pseudo-Forcas.

1.3 Justificativas

Uma propriedade que caracteriza um sistema estrutural quanto a sua rigidez são as frequências naturais, estas então associadas à massa e a rigidez do sistema. Estendendo a formulação para o domínio da frequência é possível então avaliar quais são as frequências a serem excitadas e suas respectivas amplitudes, nos fornecendo um espectro de resposta associado aos parâmetros citados acima. Porém, se sabe que esta amplitude está associada à resposta na fase permanente, dependendo da excitação dinâmica e do modelo de amortecimento. Com isso pretende-se avaliar qual carregamento apresenta as maiores amplitudes e em que frequência ele tem seu valor mais significativo, se comparado com as amplitudes na frequência de ressonância, e qual a influência do modelo de amortecimento adotado na resposta em frequência. Outro fator que levou ao desenvolvimento deste trabalho, consiste basicamente em que os métodos que são baseados no domínio da frequência citados na literatura, ao apresentar o histórico de resposta no tempo tanto para sistemas dotados de amortecimento proporcional quanto não-proporcional perdem o espectro de resposta, neste sentido pretende-se fazer uso do Método do Balanço Harmônico para obter a resposta tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, independente do sistema de amortecimento ou excitação que o sistema esteja submetido, possibilitando o método a ser expandido para análise de estruturas complexas.

1.4 Revisão Bibliográfica

A escolha do domínio onde se deseja avaliar a resposta dinâmica de uma estrutura depende basicamente das propriedades físicas do sistema e de sua fonte de excitação. Como este trabalho consiste em avaliar a resposta em frequência então será apresentada uma breve e sucinta análise de estudos já públicos, a fim de se ter um embasamento teórico para proceder então o desenvolvimento deste trabalho.

Ferreira (2002), em seu livro de *Análise Dinâmica no Domínio da Frequência de Sistemas Estruturas*, cita que os métodos formulados no domínio da frequência são baseados na resposta de um sistema a uma excitação harmônica e são implementados pela técnica da transformada de Fourier (FT). Os métodos baseados no domínio da frequência tornaram-se competitivos, em relação àqueles baseados no domínio do tempo, desde o aparecimento do algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT) para avaliação da transformada discreta de Fourier (DFT).

Em sua publicação (Ferreira), apresenta duas formulações para análise dinâmica: a formulação clássica com o uso da FFT para avaliação das transformadas discretas de Fourier e a formulação matricial no qual as transformadas discretas de Fourier são executadas implicitamente no mesmo procedimento que leva a resposta no domínio do tempo, por isso chamada de transformada implícita de Fourier (ImFT).

Ribeiro, (1998) realizou um estudo com base na formulação matricial para análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência, onde as transformadas discretas de Fourier (DFT) diretas e inversas são resolvidas implicitamente através de operações matriciais, tomou como base estudos já realizado anteriormente por Venâncio-Filho e Claret (1991).

Ainda Ribeiro, (1998) em seu estudo faz uso da transformação modal e o método das pseudo-forças, combinados a formulação matricial para então obter a resposta no domínio da frequência considerando sistemas dotados de amortecimento viscoso proporcional e não-proporcional. O mesmo se valeu do método das pseudo-forças, pois dado o amortecimento não-proporcional a matriz de amortecimento não pode ser desacoplada, pois a mesma não satisfaz a condição de ortogonalidade em relação a matriz modal,

tratando os termos fora da diagonal principal e transferindo para o segundo termo da equação e os tratando como pseudo-forças para então ser resolvidos por processo iterativo.

Seguindo a mesma linha de estudo Camargo, (2008) apresentou erros inerentes ao processo de discretização da formulação discreta de Fourier, usando o teorema da convolução, onde apresenta um método para correção da resposta estacionária obtida pela (DFT), que dependendo de fatores como intervalos de discretização ou tempo estendido pode diferir consideravelmente em relação a resposta exata. Mostrou também que a correção desta resposta pode ser feita em termos das funções unitária transiente ou estacionária da resposta. A alta eficiência deste algoritmo foi demonstrada através de exemplos numéricos, nos quais a resposta obtida pela (DFT) com um tempo estendido inadequado é corrigida e comparada à resposta obtidas em outros métodos, como através da integral de Duhamel ou pela ImFT, Camargo (2008).

Santolin, (2006) baseado também na ImFT apresentada por Claret (1991) e Venâncio-Filho e Claret (1995) fez uso da formulação matricial e implícita para a resposta dinâmica no domínio da frequência de múltiplos graus de liberdade em coordenadas nodais para sistemas dotados de amortecimento proporcional e não-proporcional, condições iniciais tanto para deslocamento quanto para velocidade.

Os métodos supramencionados acima tem sua resposta dada a partir das equações desacopladas pelo método da superposição modal para resolver o sistema de múltiplos graus de liberdade. Quando este apresenta amortecimento do tipo não-proporcional faz-se uso do método das pseudo-forças para então avaliar a resposta no domínio da frequência.

Uma alternativa para avaliar a resposta em frequência e apresentado por Setio, (1991), o mesmo faz uso do método do balanço harmônico, onde o processo consiste em linearizar a equação diferencial de 2ª ordem e obter a solução para cada incremento de frequência. A solução pode ser obtida de forma direta utilizando um algoritmo tipo Gauss ou Cholesky ou um processo iterativo com Newton-Raphson. O processo consiste em submeter a estrutura a uma excitação harmônica com uma frequência de excitação ω que multiplica o vetor de cargas de referência. Com isso se assume uma aproximação dos deslocamentos na fase permanente através da combinação de harmônicos ou através de uma série truncada de Fourier.

A solução para cada incremento de ω fornece as amplitudes modais valores então a serem determinados. Tendo então as amplitudes modais para cada incremento ω é possível então traçar o diagrama ou curvas de ressonância, e avaliar a excitação das frequências naturais e sua respectiva amplitude.

1.5 Apresentação Sumária

O capítulo 2 apresenta aplicações para análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência. Também é feita uma abordagem sucinta envolvendo as transformadas de Fourier, tempo estendido, resposta em regime permanente e transiente, soluções baseada na superposição modal, soluções baseadas em linearização.

O capítulo 3 apresenta a formulação matemática para análise dinâmica no domínio da frequência para os métodos tradicional, ImFT e o método das Pseudo-Forças. Os mesmo serão então avaliados para modelos numéricos e verificado a precisão e convergência da solução e tempo necessário para processamento.

O capítulo 4 apresenta o desenvolvimento para obter a resposta em frequência através do Método do Balanço Harmônico HBM, formação das matrizes de massa e rigidez, sistemas dotados de amortecimento proporcional e não-proporcional, resposta na fase permanente mediante excitação dinâmica, também apresenta a interpretação física quanto as relações dada pelas curvas de ressonância. Por fim discute a aplicabilidade HBM combinado com o método dos elementos finitos.

O capítulo 5 apresenta as curvas de ressonância para modelos numéricos e sua resposta mediante a excitação dinâmica em fase permanente tomando uma carga harmônica, periódica e impulsiva. Também a resposta em amplitude para sistemas adotados de amortecimento proporcional e não proporcional. Ainda são validados e comparados os resultados obtidos pelo método tradicional, ImFT, Pseudo-Forças e o HBM tendo a resposta no domínio do tempo.

O capítulo 6 são feitas as conclusões finais e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Análise Dinâmica de Estruturas

2.1 Modelos Estruturais Discretos

A modelagem de sistemas estruturas teve um grande aprimoramento nas últimas décadas, notadamente a partir do surgimento do método de análise por elementos finitos.

A partir de propriedades dinâmicas de estruturas de comportamento linear elásticos, o que se aplica à este trabalho pode-se modelar tais sistemas por elementos finitos. A resposta da estrutura para vibrações forçadas pode ser obtida com o uso das matrizes de massa, amortecimento e rigidez pelos métodos de superposição modal ou integração direta ou fazendo-se uso das transformadas.

Para chegar ao sistema de equações de equilíbrio de uma estrutura em análise dinâmica, o princípio dos deslocamentos virtuais será estendido com a inclusão do trabalho virtual das forças reais de inercia f_I nos deslocamentos virtuais δu , assim:

$$\int_0^{V_k} \delta \varepsilon^t \sigma dV_k = \int_0^{V_k} \delta u^t f_I dV_k + \delta u^t f \quad 2.1$$

No método dos elementos finitos, o campo de deslocamento no interior dos elementos u é definido pela interpolação dos deslocamentos nodais d como:

$$u = N d \quad 2.2$$

Onde a matriz N é a matriz de interpolação dos deslocamentos nodais. Derivando-se duas vezes em relação ao tempo os dois lados da expressão (2.1), chega-se ao campo das acelerações no interior do elemento \ddot{u} obtido por interpolação das acelerações nodais:

$$\ddot{u} = N \ddot{d} \quad 2.3$$

Em analogia a (2.2) os campos dos deslocamentos virtuais são dados por:

$$\delta u = N \delta d \quad 2.4$$

Segundo o principio de D'Alembert, as forças de inércia reais por unidade de volume são dadas por:

$$f_I = -\rho\ddot{u} = -\rho N \ddot{d} \quad 2.5$$

Onde ρ é a densidade de massa do material. Substituindo as expressões (2.4) e (2.5) nas expressões do principio dos deslocamentos virtuais (2.1) para um elemento e desenvolvendo o lado esquerdo da expressão obtém-se:

$$\delta d^t K d = -\delta d^t \int_0^{V_k} \rho N^t N d V_k \ddot{d} + \delta d^t f \quad 2.6$$

Eliminando δd^t , que aparece em todas as parcelas,

$$K d + M \ddot{d} = f \quad 2.7$$

Onde M é a matriz de massa do elemento dado por:

$$M = \int_0^{V_k} \rho N^t N d V_k \quad 2.8$$

A expressão (2.7) representa o sistema de equações de equilíbrio dinâmico. As expressão completa inclui as forças de dissipação ou de amortecimento, logo:

$$K d + C \dot{d} + M \ddot{d} = f \quad 2.9$$

Ou seguindo a nomenclatura a ser utilizada neste trabalho.

$$K u + C \dot{u} + M \ddot{u} = p(t) \quad 2.10$$

Onde C é a matriz de amortecimento do elemento.

A matriz de rigidez K depende do elemento a ser considerado na modelagem do sistema, e o conceito de rigidez implica que quanto maior a rigidez, maior a força necessária para provocar certo deslocamento. Onde cada um dos seus coeficientes tem um conceito físico. Sendo $K_{i,j}$ o esforço restaurador elástico na direção de u_i devido à imposição de deslocamento unitário na direção u_j , mantidos nulos os demais.

Para a matriz de massa M podemos considerar ela sendo consistente porque o campo das acelerações é consistente com o campo dos deslocamentos, ou seja, obtido por derivação dos campos de deslocamentos.

Uma formulação mais simples para a matriz de massa M , é denominada matriz de massa concentrada que é obtida colocando-se partes m_i da massa total do elemento $m = \rho AL$ nos nós i de forma que a soma dos m_i seja igual a m . A mais simples entre as matrizes de massa concentrada é formada colocando-se as frações de massa m_i associadas apenas aos graus de liberdade de deslocamento vertical e não às rotações.

O amortecimento em estruturas acontece devido a mecanismos dissipadores, tais como histerese do material, fricção em juntas microfissuras no material. Apesar de o amortecimento não ser do tipo viscoso (amortecimento devido ao movimento de um corpo sólido mergulhado em um fluido) ele é matematicamente tratado como tal, ou seja, representado pelo produto de uma constante de viscosidade c pela velocidade do corpo. A matriz de amortecimento C é conveniente representada por uma função linear das matrizes K e M , ou seja:

$$C = \alpha K + \beta M \quad 2.11$$

Essa forma de representar o amortecimento, denominada amortecimento proporcional ou de Rayleigh, é conveniente porque a matriz definida em (2.11) é ortogonalizável. Já quanto esta matriz não-proporcional, ou seja a adição de dissipadores em graus de liberdade definido a matriz de amortecimento passa então a ser dita do tipo não-proporcional, não podendo ser ortogonalizável.

Este capítulo aborda considerações quanto à equação de equilíbrio dinâmico e o seu desenvolvimento via elementos finitos, pois isto permitirá que o estudo desenvolvido seja expandido para vários tipos de elementos desde o mais simples (barras) aos mais complexos (cascas).

2.1.1 Sistemas Dotados de Amortecimento Proporcional

Em sistemas onde o amortecimento é considerado como distribuído pela estrutura de forma semelhante a massa e a rigidez expressão (2.11), ele é dito proporcional ou de Rayleigh. Sistemas com amortecimento proporcional utilizam técnicas de transformação modal para desacoplar as equações de dinâmicas. Assim, a resposta em coordenadas físicas pode ser obtida pela superposição da resposta em coordenadas modais, tanto no domínio do tempo como no da frequência (Clough e Penzien, 1993).

2.1.2 Sistemas Dotados de Amortecimento Não-Proporcional

Em sistemas com características mais complexas de amortecimento, a matriz de amortecimento não é mais proporcional à massa e a rigidez do sistema. Diz-se então que o amortecimento é não proporcional.

O amortecimento não proporcional é representado por uma matriz que não é ortogonal à matriz modal. Uma das técnicas utilizadas para desacoplar as equações dinâmicas como dado Hurty e Rubinstein (1964), consiste em utilizar modos complexo, porem o problema de autovalor para este caso é duas vezes maior que o convencional, e os modos complexo dificultam a interpretação física da resposta do sistema.

Conforme (Santolin, 1998) pode-se resolver os sistemas dotados de amortecimento não-proporcional através do método das pseudo-forças. Neste método, os termos da matriz de amortecimento responsáveis pelo acoplamento das equações são transferidos para o segundo membro da equação e tratados como pseudo-forças. Assim, o primeiro termo permanece desacoplando como ocorre em sistemas de amortecimento proporcional.

2.2 A Resposta no Domínio da Frequência

Neste item busca-se referenciar trabalhos já desenvolvidos quanto à solução ou redução da ordem de uma equação diferencial ordinária ou parcial.

Dentre as soluções possíveis as que mais chamam a atenção são as relacionadas à redução de ordem ou linearização, pois a mesma é avaliada de forma implícita e tratada posterior como uma solução de sistema linear.

Tratando-se da resposta do equilíbrio dinâmico de uma estrutura com material elástico linear, temos os métodos como se apresenta.

2.2.1 Métodos Baseados na Superposição Modal

O estudo do comportamento dinâmico de estruturas pode ser feito, entre vários métodos, através de sua discretização e, por exemplo, com o uso do método da superposição modal. O método da superposição modal calcula a resposta de cada modo de

vibrar separadamente e a seguir obtém a resposta total por meio da soma das contribuições individuais de cada modo.

O conceito de modos normais em sistemas estruturais dinâmicos é associado às frequências naturais (ou fundamentais) de um sistema linear (Mamede, 2008). A existência destes modos possibilita a introdução de coordenadas normais que proporcionam o desacoplamento do sistema.

Quanto a resposta no domínio da frequência que se valem das propriedades ortogonais dos modos, podemos citar trabalhos desenvolvidos por Claret e Venâncio-Filho (1991) desenvolvimento da formulação matricial ImFT, posterior estendido para sistemas com vários graus de liberdade por Ribeiro (1998).

2.2.1 Métodos Baseados em Linearização

O elevado custo computacional para resolução de sistemas de grande dimensão torna o uso de métodos de linearização ou redução de ordem de fundamental importância, para se avaliar a resposta dinâmica de um sistema. Tendo em vista que algumas propriedades são não ortogonalizável tal como o amortecimento não-proporcional ou dos dependentes da frequência faz-se necessário então de um método que sua resposta se avaliada no domínio da frequência.

Outra peculiaridade dos métodos de redução da ordem é que podem ser avaliados de forma implícita, ou seja, a resposta é dada através de operações matriciais, que envolva a linearização do sistema, obtendo a resposta em coordenadas físicas do sistema.

Avaliando os trabalhos desenvolvidos por Soares (2002), Ferreira (1998) tem-se a resposta dada no domínio da frequência através do uso do método das pseudo-forças. Este vem mostrando boa convergência do resultado mediante a inclusão de efeitos não lineares. Também em trabalho publicado por Paullo (2014), temos o método do balanço harmônico linearizado, que consiste basicamente em um método de redução de ordem. Como verificada na bibliografia o método do balanço harmônico nos permite tanto obter a resposta em frequência neste caso associado a amplitude ou a fase, ou a resposta no tempo a partir da inversão do vetor de amplitudes modais dado pela IFFT.

Com o interesse de averiguar a resposta do sistema mediante a excitação pelo espectro de resposta será então desenvolvida neste trabalho o método do balanço harmônico, sendo que para sistemas dotados de amortecimento não-proporcional será avaliado sua resposta no domínio do tempo pelo então já bem estabelecido método das pseudo-forças.

Capítulo 3

Métodos de Análise Dinâmica para o Domínio da Frequência

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta a formulação matemática dada pela revisão bibliográfica, para se avaliar a resposta de sistemas dinâmicos no domínio da frequência. Primeiramente é abordado o método clássico que faz uso da transformada de Fourier para a mudança de domínio, posterior se estende o método para uma formulação implícita como apresentada por Claret, (1991). Os dois métodos apresentados inicialmente são baseados na superposição modal. O terceiro e último método também é baseado em uma formulação implícita porém dispensa a necessidade de obter as matrizes em coordenadas modais, podendo ser avaliado a resposta em coordenadas físicas.

Ao final deste capítulo é possível avaliar e comparar então a solução apresentadas por cada um dos métodos proposto.

3.2 Método Clássico

O método clássico consiste basicamente em resolver a equação dinâmica Eq.(3.1) com o uso da transformada de Fourier. Onde as transformadas fazem a mudança de domínio e, conseqüentemente de variável independente.

Tem-se agora a equação dinâmica Eq.(3.1) para um sistema dotado de amortecimento viscoso.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = p(t) \quad 3.1$$

A solução completa desta equação é,

$$u(t) = u_t(t) + u_s(t) \quad 3.2$$

Onde $u_s(t)$ é a resposta permanente a uma vibração forçada, e $u_t(t)$ é a resposta transiente em vibração livre.

A resposta na fase permanente no domínio da frequência para excitação periódica é obtida pela transformada de Fourier. A função complexa de resposta na frequência $H(\omega)$ descreve a resposta permanente do sistema diante de uma excitação complexa $p(t) = Pe^{i\omega t}$. Para um sistema dotado de amortecimento viscoso a função complexa de resposta na frequência é dada como.

$$H(\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right] + i\left[2\xi(\omega/\omega_n)\right]} \quad 3.3$$

Onde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência natural, é $\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$ a taxa de amortecimento.

Se o sistema está submetido a uma excitação complexa $p(t) = Pe^{i\omega t}$, onde P é a amplitude da excitação neste caso uma escalar e ω é a frequência, a resposta permanente do sistema para excitação complexa no domínio da frequência passa a ser:

$$U(\omega) = H(\omega)P \quad 3.4$$

Para o domínio do tempo tem-se:

$$u_s(t) = U(\omega)e^{i\omega t} \quad 3.5$$

Onde a função de transferência $H(\omega)$ deve ser avaliada dependendo o tipo de amortecimento adotado.

Já a resposta permanente para uma excitação não periódica, pode ser expressa pela soma de funções complexas $P(\omega)e^{i\omega t}$ para diferentes frequências ω como mostra a Eq.(3.6).

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad 3.6$$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t} dt \quad 3.7$$

A equação Eq.(3.6) é conhecida como transformada inversa de Fourier (IFT) de $P(\omega)$ e a equação Eq.(3.7) é conhecida como transformada de Fourier (FT) de $p(t)$. Sendo a resposta no domínio da frequência.

$$U(\omega) = H(\omega)P(\omega) \quad 3.8$$

Para o domínio do tempo.

$$u_{s\omega}(t) = U(\omega)e^{i\omega t} \quad 3.9$$

A resposta permanente é obtida se avaliando $p(t)$ da Eq.(3.6) na integral da Eq.(3.10) em função da frequência.

$$u_s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad 3.10$$

Porém existe uma grande dificuldade em se avaliar as integrais analíticas da FT e a IFT dadas pela Eq.(3.6) e Eq.(3.7). Uma forma de obter estes pontos discretos é através da avaliação numérica com uso de algoritmos tais como transformada discreta de Fourier e a inversa da transformada discreta de Fourier.

Avaliando a resposta permanente pela transformada discreta de Fourier (DFT), é necessário estabelecer alguns parâmetros relacionados ao processo de discretização da excitação.

O processo de discretização de uma função acaba por transformá-la em uma função periódica, com a aplicação da DFT o carregamento passa a ser periodizado, e com o período igual ao tempo estendido T_0 . O tempo estendido T_0 deve ser escolhido de maneira que a resposta do carregamento a um período praticamente se anule até que encontre o carregamento do período seguinte, caso isso não aconteça a resposta será obtida no período seguinte, tendo condições iniciais não nulas podendo fazer divergir da resposta exata (Camargo, 2008).

O processo de discretização de $p(t)$ deve-se fazer com que a função tenha um tempo de duração T_0 em instantes de tempo igualmente espaçados N intervalos de 0 a N . O intervalo de tempo Δt deve ser dependente da máxima frequência a ser obtida

$f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t}$ ou $\omega_{\max} = \frac{\pi}{\Delta t}$, fazendo com que $p(t)$ seja definido por um conjunto de pontos discretos (t_n, p_n) .

A Fig.(3.1) mostra que se adotar um tempo estendido muito curto a resposta do sistema será dada com condições não nula, e que o mesmo deve ser dependente do número de pontos onde se deseja avaliar $p(t)$ espaçados de forma igualmente.

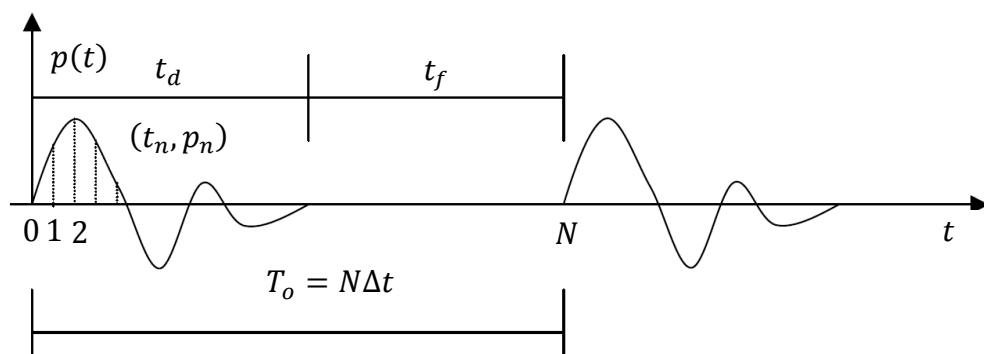


Figura 3.1 Periodização de $p(t)$, tempo estendido e N termos da DFT.

No domínio da frequência a resposta para cada grau de liberdade é dependente da amplitude da excitação p_n logo;

$$U(\omega_j) = H(\omega_j)P_j \quad 3.11$$

Tendo:

$$\omega_{j0} = \begin{cases} j\omega_0 & 0 \leq j \leq N/2 \\ -(N-j)\omega_0 & N/2 \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad 3.12$$

Com isso podemos então escrever que a resposta permanente no domínio do tempo é:

$$u_{sn} = \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{i(2\pi nj/N)} \quad 3.13$$

Já a resposta transiente do sistema dotado de amortecimento viscoso, é:

$$u_t(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad 3.14$$

Onde $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ é a frequência amortecida. Logo A e B são condições iniciais $u(0)$ e $\dot{u}(0)$.

Impondo as condições iniciais temos então:

$$A = u(0) - u_s(0) \quad 3.15$$

$$B = \{\dot{u}(0) + \xi\omega_D [u(0) - u_s(0)] - \dot{u}_s(0)\} / \omega_D \quad 3.16$$

A Fig.(3.2) mostra a o pseudocódigo para avaliar a resposta no domínio da frequência, onde a DFT de $p(t)$ é avaliada através do algoritmo FFT. Já a resposta no domínio do tempo e obtida fazendo a IFFT de $U(\omega_j)$.

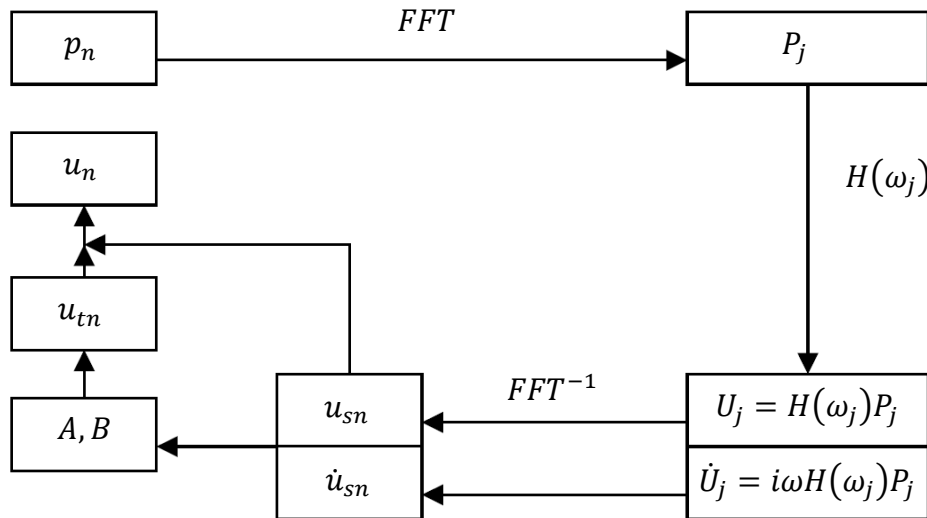


Figura 3.2 Resposta no domínio da frequência usando a DFT. (Liangcai, 2003, p.10).

Consegue-se observar desta forma clara que a solução da equação dinâmica depende da resposta transiente e permanente do sistema. Ao final deste capítulo pode-se avaliar o resultado do método clássico com os outros métodos baseado na superposição modal.

3.3 Método da ImFT

A transformada implícita de Fourier apresentada abaixo tem com referência os estudos realizados por Claret (1991), e Venâncio-Filho e Claret (1995). Em trabalhos publicados por Ribeiro (1998) e Camargo (2008) verificou-se a mesma formulação desenvolvida de forma implícita, porem Ribeiro (1998) verifica a resposta para sistema dotados de amortecimento viscoso proporcional e não-proporcional, já Camargo (2008) apresenta técnicas corretivas para a resposta tanto em regime permanente e transiente, como também define parâmetro para escolha do tempo estendido, a fim de evitar que condições não nulas se sobrepõem na resposta do sistema devido a periodicidade da excitação.

O cálculo da resposta de um sistema com o uso da transformada discreta de Fourier é por meio dos somatórios definidos nas Eq.(3.17) e (3.18).

$$P(\bar{\omega}_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(t_n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \quad 3.17$$

$$u(t_n) = \frac{\Delta \bar{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} H(\bar{\omega}_m) P(\bar{\omega}_m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \quad 3.18$$

Como a multiplicação de matrizes envolve a soma de produtos entre linhas e colunas, pode-se tirar proveito disso e definir matrizes especiais que, quando multiplicadas, calculam a DFT, efetuando os somatórios que as definem (Camargo, 2008).

O cálculo da DFT por meio dessa formulação matricial é chamado de método da transformada implícita de Fourier (ou ImFT) Claret(1991), pois a resposta é obtida por produtos entre matrizes, sendo a DFT calculada implicitamente nas multiplicações.

Por isso, definimos inicialmente um vetor \mathbf{p} contendo o carregamento discreto:

$$\mathbf{p} = \{p(t_0) \quad p(t_1) \quad p(t_2) \quad \dots \quad p(t_{N-1})\}^T \quad 3.19$$

Definimos também uma matriz \mathbf{E}^* , com $N \times N$ elementos, e elemento genérico dado por:

$$\mathbf{E}_{m,n}^* = e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad m = 0, \dots, N-1, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad 3.20$$

Ou, explicitamente:

$$\mathbf{E}_{m,n}^* = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 & e^0 & \dots & e^0 \\ e^0 & e^{\frac{2\pi i}{N}} & e^{\frac{4\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \\ e^0 & e^{\frac{4\pi i}{N}} & e^{\frac{8\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{4\pi i}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^0 & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)} & e^{-\frac{4\pi i}{N}(N-1)} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad 3.21$$

Desse modo, Eq.(3.17), que é a transformada discreta do carregamento $p(t)$, pode ser reescrita em forma matricial da seguinte maneira:

$$\mathbf{P} = \Delta t \mathbf{E}^* \mathbf{p} \quad 3.22$$

O vetor \mathbf{P} assim definido conterá os elementos $P(\bar{\omega}_n)$ da transformada discreta de Fourier sobre os elementos do vetor \mathbf{p} .

Agora, define-se a matriz \mathbf{E} , semelhante à matriz \mathbf{E}^* , porém, com elementos genéricos dado por:

$$\mathbf{E}_{m,n} = e^{\frac{2\pi i mn}{N}}, \quad m = 0, \dots, N-1, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad 3.23$$

E também a matriz \mathbf{H} , que é uma matriz diagonal $N \times N$, cujos elementos são a função complexa de resposta na frequência tomada nas frequências discretas $\bar{\omega}_n$.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H(\bar{\omega}_0) & & \dots & 0 & 0 \\ & H(\bar{\omega}_1) & & & 0 \\ \vdots & & H(\bar{\omega}_2) & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & & H(\bar{\omega}_{N-1}) \end{bmatrix} \quad 3.24$$

Os tempos discretos da Eq.(3.19) e as frequências discretas da Eq.(3.24) são definidos normalmente como na DFT, seja, $t_n = n\Delta t$ e $\bar{\omega}_m = \mu_m \Delta \bar{\omega}$, onde μ_m é dado pela Tabela 2.1.

Tabela 3.1 Frequências discretas.

m	μ_m	$\bar{\omega}_m$
0	0	0
1	1	$\Delta\bar{\omega}$
2	1	$2\Delta\bar{\omega}$
\vdots	\vdots	\vdots
$N/2-1$	$N/2-1$	$(N/2-1)\Delta\bar{\omega}$
$N/2$	$N/2$	$N/2\Delta\bar{\omega}$
$N/2+1$	$-N/2+1$	$(-N/2+1)\Delta\bar{\omega}$
$N/2+2$	$-N/2+1$	$(-N/2+2)\Delta\bar{\omega}$
$N-2$	-2	$-2\Delta\bar{\omega}$
$N-1$	-1	$-\Delta\bar{\omega}$

Com \mathbf{E} , \mathbf{H} e \mathbf{P} assim definidos, a Eq.(3.18) pode ser reescrita em forma matricial da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \mathbf{EHP} \quad 3.25$$

O vetor \mathbf{u} conterà a resposta no domínio do tempo nos tempos discretos. Finalmente, substituindo-se em \mathbf{u} a Eq.(3.22), temos a forma mais compacta:

$$\mathbf{u} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \mathbf{EH}(\Delta t \mathbf{E}^* \mathbf{p}) \quad 3.26$$

Onde:

$$\mathbf{e} = \mathbf{EHE}^* \quad 3.27$$

A matriz \mathbf{e} , que multiplica o vetor \mathbf{p} na Eq.(3.27), tem em si as três etapas necessárias para encontrar a resposta do sistema: a transformada direta de $p(t)$, a multiplicação pela função complexa de resposta na frequência, e a transformada inversa.

A transformada implícita de Fourier não exige que o número N de pontos discretizado seja uma potência de 2, como exige o algoritmo original da FFT, para calcular

a DFT eficientemente. E, mais ainda, pode-se encontrar a resposta do sistema com um número menor de pontos. Para isso, basta usar a formulação apresentada tomando os primeiros $S + 1$ elementos do vetor \mathbf{p} , os primeiros $S \times N$ elementos da matriz \mathbf{E} e os primeiros $N \times S$ elementos da matriz \mathbf{E}^* . A matriz \mathbf{H} fica inalterada. Com isso, a matriz \mathbf{e} será $S \times S$ e a resposta será obtida no vetor \mathbf{u} , que terá S elementos.

A matriz \mathbf{e} tem várias propriedades úteis. Partindo-se dos elementos genéricos de \mathbf{E} , \mathbf{H} e \mathbf{E}^* , pode-se escrever um elemento genérico de \mathbf{e} como sendo:

$$\mathbf{e}_{m,n} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{H}_{k,k} e^{\frac{2\pi i}{N}k(m-n)}, \quad m = 0, \dots, N-1, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad 3.28$$

De onde se pode obter que:

$$\mathbf{e}_{m+1,n+1} = \mathbf{e}_{m,n} \quad 3.29$$

Isso significa que a matriz \mathbf{e} é uma matriz do tipo *Toeplitz*, ou seja, os elementos ao longo de suas diagonais são todos iguais. Essa propriedade facilita a implementação computacional da formulação, uma vez que não é necessário calcular todos os elementos da matriz, apenas os da primeira linha e da primeira coluna. Isso causa uma redução drástica no esforço computacional requerido para o cálculo da ImFT, pois, ao invés de calcular N^2 elementos, será necessário calcular efetivamente apenas $2N - 1$ elementos. Uma melhor maneira de representar a matriz \mathbf{e} seria como a seguir, onde N arbitrariamente como sendo igual a 5:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{0,0} & e_{0,1} & e_{0,2} & e_{0,3} & e_{0,4} \\ e_{1,0} & e_{0,0} & e_{0,1} & e_{0,2} & e_{0,3} \\ e_{2,0} & e_{1,0} & e_{0,0} & e_{0,1} & e_{0,2} \\ e_{3,0} & e_{2,0} & e_{1,0} & e_{0,0} & e_{0,1} \\ e_{4,0} & e_{3,0} & e_{2,0} & e_{1,0} & e_{0,0} \end{bmatrix}$$

Um outro fato que facilita ainda mais a implementação computacional vem de:

$$\mathbf{e}_{1,N-j+1} = \mathbf{e}_{j+1,1} \quad 3.30$$

Isso significa, para um j qualquer, o elemento de ordem $N - j + 1$ na primeira linha \mathbf{e} é igual ao elemento de ordem $j + 1$ da primeira coluna de \mathbf{e} , pois os elementos da primeira linha podem ser encontrados a partir desta.

Outra importante propriedade a ser considerada no algoritmo da ImFT está relacionado à condição de *causalidade*. A condição de *causalidade* requer que eventos futuros não interfiram em eventos passados. Assim, uma consequência direta da *causalidade* é que a matriz \mathbf{e} seja triangular inferior, o que não acontece, como se pode ver na Eq.(2.24). Soares Jr. E Mansur afirmam que a matriz \mathbf{e} reflete a periodicidade dos algoritmos da DFT e \mathbf{e} será triangular somente se o período T_p for infinito.

Ainda segundo Soares Jr. E Mansur, a primeira linha da matriz \mathbf{e} é igual a uma linha virtual de ordem $N + 1$ que seguira após a N -ésima, e assim por diante. Se o período de força aplicada for adequadamente estendido, os elementos nulos da parte triangular superior de \mathbf{e} serão multiplicados por elementos não nulos de \mathbf{p} e os elementos nulos de \mathbf{p} serão multiplicados pelos elementos não nulos da parte triangular superior de \mathbf{e} . Portanto, se o período não é estendido adequadamente, um comportamento não causal pode aparecer tanto no procedimento da ImFT quanto na da DFT.

Entretanto, no procedimento da ImFT, pode-se desprezar a parte triangular superior de \mathbf{e} impondo que os elementos acima da diagonal principal sejam nulos. A condição de causalidade está representada, com a periodicidade inerente aos algoritmos da transformada de Fourier eliminada. Como consequência direta, a extensão do período não mais dependera das características do carregamento, e em vez disso será definida pelas propriedades físicas do sistema.

No exemplo abaixo, a matriz \mathbf{e} é representada com N arbitrariamente igual a 5:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{1,0} & e_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ e_{2,0} & e_{1,0} & e_{0,0} & 0 & 0 \\ e_{3,0} & e_{2,0} & e_{1,0} & e_{0,0} & 0 \\ e_{4,0} & e_{3,0} & e_{2,0} & e_{1,0} & e_{0,0} \end{bmatrix}$$

A formulação matricial também pode ser usada com o amortecimento dependente da frequência. Assim, como na formulação clássica, basta usar a Eq.(2.1), que define $H(\bar{\omega})$, com o amortecimento substituído pela expressão que o define.

3.4 Método das Pseudo-Forças

Realizando a revisão bibliográfica me deparei com os métodos de linearização, ou técnicas para solução de equações diferenciais através de operações que resulta em um sistema de equação linear. O método a ser desenvolvido abaixo foi apresentado por Bernal (1998), onde o método consiste basicamente em reduzir um sistema de equações de 2ª para 1ª ordem. Uma das vantagens em se fazer esta linearização está na possibilidade de obter soluções implícitas, para a resposta de um sistema para múltiplos graus de liberdade mediante a uma excitação arbitrária.

Consideramos a equação dinâmica como apresentada na Eq.(3.1), onde se define então:

$$\dot{u} = x \quad 3.31$$

Substituindo a Eq.(3.31) na Eq.(3.1), logo.

$$M\dot{x} + Cx + Ku = p(t) \quad 3.32$$

Onde.

$$\dot{x} = M^{-1}(p(t) - Cx - Ku) \quad 3.33$$

Reescrevendo a expressão acima, na forma matricial temos.

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -M^{-1}p(t) \end{Bmatrix} \quad 3.34$$

O vetor que contém os deslocamentos e a velocidade é a resposta permanente do sistema.

Designando $\{y\} = \begin{Bmatrix} u \\ x \end{Bmatrix}$, temos.

$$\dot{y} = Ay + Bf(t) \quad 3.35$$

Onde a matriz A é dado como a matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad 3.36$$

Logo a matriz B e o vetor $f(t)$ são o vetor dos termos independentes, como:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$$

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ p(t) \end{Bmatrix}$$
3.37

Então a solução para Eq.(3.31) passa ser dada pela solução do sistema linear Eq.(3.31).

Após onerosas operações matemáticas, a expansão em uma Série de Taylor, a mudança de variável, imposição das condições de contorno e condições iniciais, a fim de obter uma função que tenha uma representatividade para a resposta do sistema obtém-se.

$$Y(t) = (P_1 + P_2) f_0 - P_2 f_1 + e^{At} y_0$$
3.38

Sendo $P_1 = A^{-1} [e^{At} - I] B f_0$, $P_2 = \left(B - \frac{P_1}{t} \right)$ e $e^{At} = \Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$

Logo a resposta para o deslocamento, considerando as condições iniciais $y_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{Bmatrix}$.

$$u(t) = u_0 + Y(t)$$
3.39

Caso tenha necessidade de avaliar o desenvolvimento da solução acima o mesmo é apresentado em Anexo.

Abaixo é possível verificar a resposta obtida para um modelo numérico, a partir das formulações apresentadas acima.

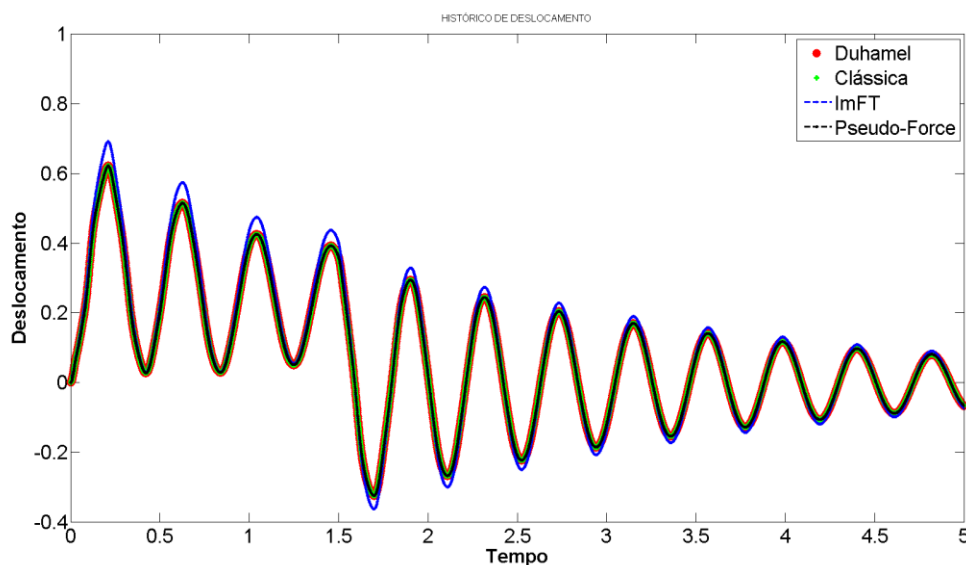


Figura 3.3 Histórico de resposta. - Métodos baseados no domínio da frequência.

Observa-se que neste método de redução da ordem da equação dinâmica e da linearização do sistema, por mais que se de a mudança da variável temporal, a resposta ainda e dada no domínio do tempo. O próximo capítulo então apresenta uma formulação baseada em uma Série de Fourier que faz a mudança de domínio e permite a linearização do sistema, porém com uma abordagem mais fácil, nos fornecendo assim a resposta tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Capítulo 4

Análise Dinâmica pelo Método do Balanço Harmônico

4.1 Introdução

Com o objetivo de obter o espectro de resposta no domínio da frequência para casos de excitações definidas e avaliar a resposta em função do modelo amortecimento adotado, desenvolve-se neste capítulo o Método do Balanço Harmônico. A escolha deste método para avaliar a resposta no domínio da frequência é que as soluções para estas expressões são dados em função da amplitude U e da fase ϕ da resposta do sistema.

4.2 Formulação e Desenvolvimento

Uma das técnicas geralmente utilizada para obter soluções aproximadas para equações diferenciais é o Método do Balanço Harmônico. Este método permite gerar soluções periódicas aproximadas a partir de uma série de Fourier truncada.

O método do Balanço Harmônico consiste na aproximação dos deslocamentos na fase permanente através da combinação de harmônicos, tal como dado pela expressão:

$$u(t) = \sum_{n=0}^N [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \quad 4.1$$

Onde A_n e B_n são os vetores das componentes das amplitudes modais no n -ésimo harmônico e N é o número de harmônicos usados na aproximação.

Tendo a equação dinâmica dada pela Eq.(4.2);

$$M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + Ku(t) = p \quad 4.2$$

Submetendo a estrutura a uma excitação harmônica com uma frequência de excitação ω que multiplica o vetor de forças de referência, o equilíbrio dinâmico é dado por:

$$M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + Ku(t) = F \cos(\omega t) p \quad 4.3$$

Onde F e ω são a amplitude e a frequência da excitação harmônica.

Com base nos trabalhos publicados por Muñoz (2014) e Pasquetti (2008), sendo o caso de uma análise linear, a Eq.(4.1), é necessário apenas o segundo termo do somatório.

Portanto, o vetor de deslocamento é aproximado por:

$$u(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) \quad 4.4$$

Substituindo a Eq.(4.4) e suas respectivas derivadas na Eq.(4.3) obtém-se:

$$(\omega C A_1 - \omega^2 M B_1) \cos(\omega t) - (\omega^2 M A_1 + \omega C B_1) \sin(\omega t) = F p \cos(\omega t) \quad 4.5$$

Considerando $F \cdot p = F_0$, a Eq.(4.1) pode ser reescrita como um sistema de equações que iguala os coeficientes das funções harmônicas como:

$$\begin{bmatrix} \omega C & -\omega^2 M + K \\ -\omega^2 M + K & -\omega C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 4.6$$

A Eq.(4.1) pode ser escrita de uma forma mais compacta, tal como:

$$\bar{K}(\omega) \cdot \bar{A} = \bar{F} \quad 4.7$$

Onde:

$$\bar{K}(\omega) = \begin{bmatrix} \omega C & -\omega^2 M + K \\ -\omega^2 M + K & -\omega C \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 4.8$$

Sendo a frequência de excitação ω e o vetor de amplitudes modais \bar{A} as variáveis a serem determinadas. Muñoz (2014) salienta que apesar de uma análise linear, o sistema de equações é não linear, portanto é necessário o emprego de um método de solução ou método de controle para solução de sistema de equações não lineares.

A solução adotada para o presente trabalho consiste basicamente em fazer incremento de frequência ω sendo o vetor de amplitudes modais \bar{A} determinado por inversão da matriz $\bar{K}(\omega)$, sendo neste caso ω já estabelecido dentro do ciclo iterativo, logo a Eq.(4.1), passa a ser:

$$\bar{A} = \bar{K}(\omega)^{-1} \cdot \bar{F} \quad 4.9$$

Basicamente este método apresenta a resposta em frequência para coordenadas físicas, o que permite aplicar o método para sistemas dotados de amortecimento viscoso proporcional ou não-proporcional. Outra vantagem da formulação é que como a frequência de excitação ω é dada a partir de incrementos e possível utilizar o mesmo método para avaliar por exemplo sistemas dotado de amortecimento dependente da frequência.

4.3 Resposta em Frequência

A solução do sistema dado pela Eq.(4.1), é definido em relação aos termos associado amplitude U e a Fase ϕ .

4.3.1 Curva de Ressonância – Relação Amplitude e Frequência

A curva de ressonância é obtida a partir do vetor de amplitudes modais \bar{A} , sendo este avaliado a cada incremento de frequência ω . Tendo o vetor de amplitudes modais este e avaliado pela sua normal, como dado pela expressão abaixo.

$$|U|_{m\acute{a}x} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad 4.10$$

Porém lembrando que o mesmo é solução para cada incremento de ω , o mesmo também assume posições distintas dentro do vetor de amplitude modais ω , por exemplo, este depende da dimensão das matrizes envolvidas, logo:

$$|U|_{(i,j) m\acute{a}x} = \sqrt{A_{i,j}^2 + B_{2+i,j}^2} \quad 4.11$$

Sendo $i = 1..n$, para n os respectivos graus de liberdade, e $j = 0..\omega_n$ avaliado para cada incremento de frequência. Desta forma o espectro de resposta é mostrado na figura abaixo:

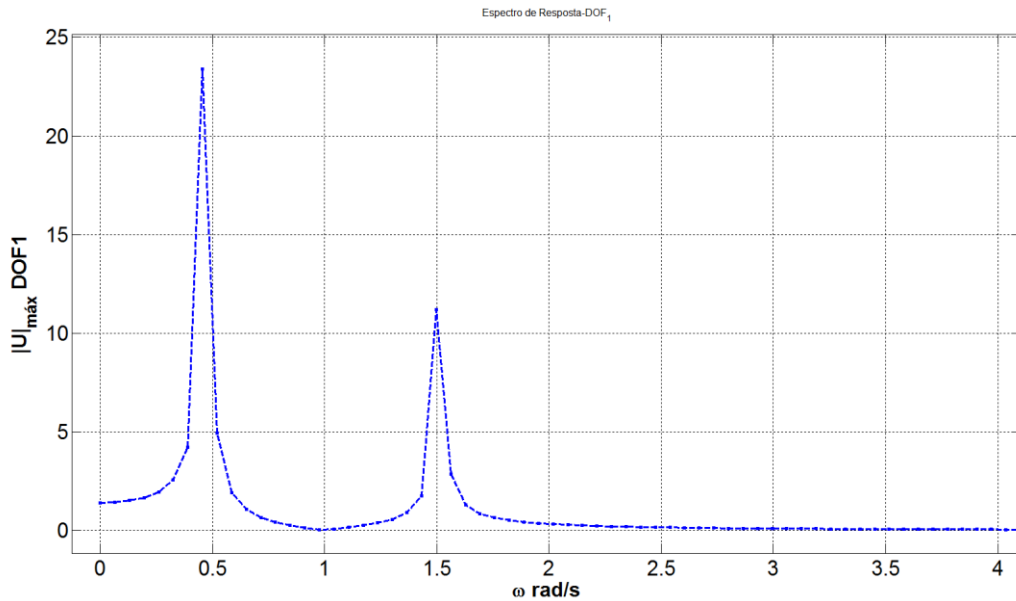


Figura 4.1 Espectro de resposta HBM – Amplitude / Frequência.

Para a figura (4.1) é possível observar o espectro de resposta para um determinado grau de liberdade, mediante uma excitação harmônica, é também possível avaliar que as amplitudes são máximas nas respectivas frequências naturais do sistema, dado a partir da figura (4.1), porém as amplitudes são distintas, devido a parâmetros associado a excitação e amortecimento.

Pelo espectro de resposta gerado, conseguimos observar que as frequências que são mais excitadas são as frequências naturais do sistema dinâmico, também podemos ter a respectiva amplitude associada a cada uma destas frequências naturais. Verifica-se também que é possível averiguar, com mais facilidade quais são as frequências críticas ou relacionar a amplitude do carregamento com um certa frequência ω de excitação.

4.3.2 Curva de Ressonância – Fase e Frequência

No item anterior foi apresentada a relação entre amplitude e frequência oque caracteriza a curva de ressonância, sendo a amplitude máxima $|U|_{máx}$ dada na primeira frequência natural do sistema como esperado.

Porém podemos ainda associar a resposta com o ângulo fase ou simplesmente fase da resposta do espectro, a partir de uma frequência discreta ω .

Tem-se então como mostrado na equação

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{A_1}{B_1} \right) \quad 4.12$$

Ou na forma matricial;

$$\phi_{(i,j)} = \tan^{-1} \left(\frac{A_{i,j}}{B_{2+i,j}} \right) \quad 4.13$$

Logo $\phi_{(i,j)}$;

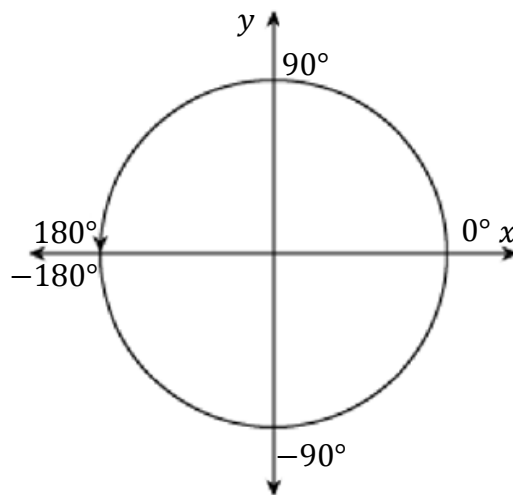


Figura 4.2 Ângulo fase assumido no domínio.

A fase no Método do Balanço Harmônico consiste em uma parte real $A_{i,j}$ e a parte imaginária de $B_{2+i,j}$. É possível avaliar então a relação entre amplitude $|U|$ e a Fase ϕ em relação a frequência ω , como mostra a figura (4.4) e (4.5).

$$\phi_{(i,j)} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Re}[A_{i,j}]}{\text{Im}[B_{2+i,j}]} \right) \quad 4.14$$

Então tem-se que a mudança na amplitude e na Fase não é fixa, mais sim dependente das características dinâmicas do sistema e da frequência de entrada ω .

Na figura (4.4) observa-se que a fase terá valores entre $-\pi$ e π , implicando no ganho ou defasagem da resposta em frequência.

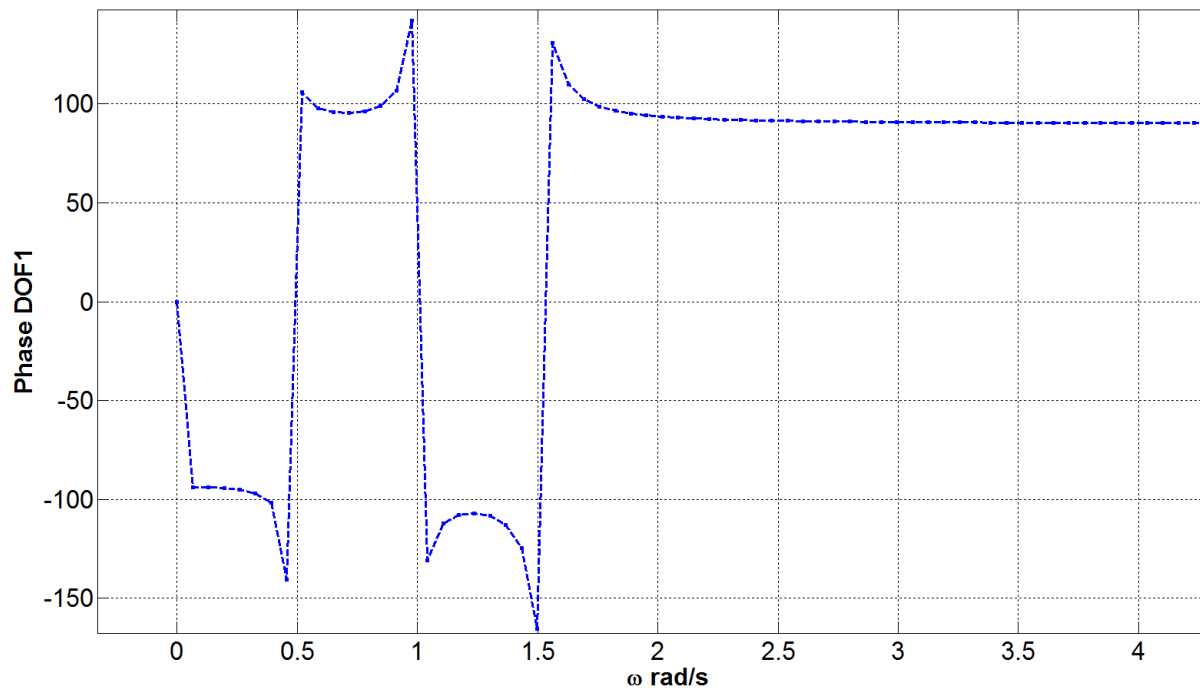


Figura 4.3 Espectro de resposta HBM – Fase / Frequência.

4.4 Resposta na Fase Permanente

A resposta associada ao sistema na fase permanente nos remete ao modelo de excitação dinâmica a ser adotado ou combinado. Devido ao uso do Método do Balanço Harmônico, para cada incremento de frequência ω , interessa obter a respectiva amplitude correspondente a excitação para então obter a solução do sistema em função das amplitudes modais.

Uma força de corresponder a excitação dinâmica dado no domínio do tempo é através da periodização do carregamento, o mesmo método a ser empregado aqui é mesmo utilizado por Camargo (2008) e por Ribeiro (1998) na formulação ImFT, que consiste em fazer uso da transformada discreta de Fourier e periodizar o vetor de cargas de referência.

Os parâmetros associados à excitação no domínio da frequência necessitam, por exemplo, do tempo estendido T_0 o número de termos N aonde se deseja avaliar a resposta

em frequência. Onde que para o vetor de incremento de frequências ω será então associado uma respectiva amplitude dado pela $FFT(p)$, onde o vetor de amplitudes modais \bar{A} apresenta a solução respectivamente para o equilíbrio dinâmico do sistema.

Nos próximos itens serão mostrados como representar uma excitação dinâmica que corresponda a uma função discretizadas no tempo, e apresentar sua mudança de domínio através do uso da FFT .

4.4.1 Carregamento Harmônico

Uma excitação harmônica é uma combinação linear de seno e cosseno com mesma frequência. Adotando uma excitação como expressa pela Eq.(4.1).

$$p(t) = b \sin(\omega t) \quad 4.15$$

Onde b está associando a amplitude e ω a frequência da excitação dinâmica, temos.

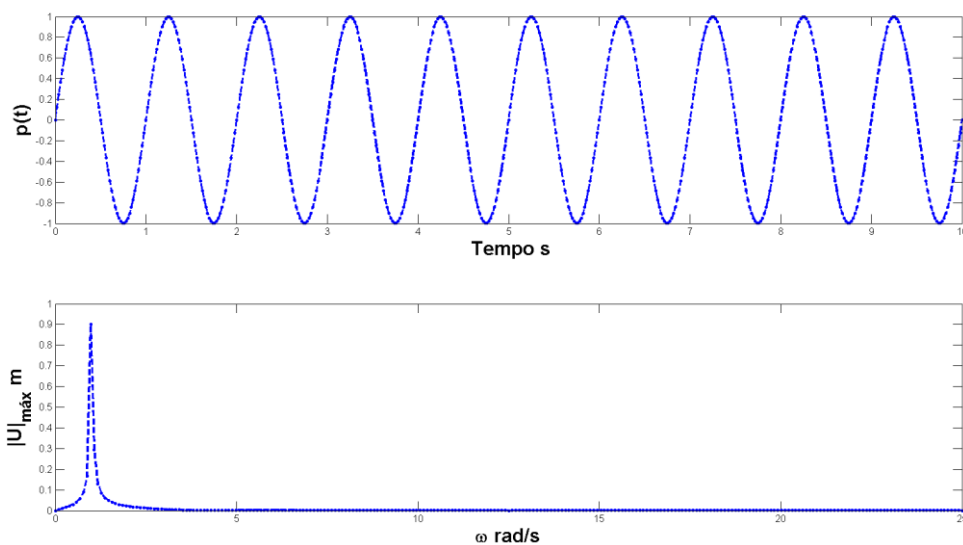


Figura 4.4 FFT para um carregamento Harmônico – Função seno.

Já se expressarmos a excitação dinâmica por:

$$p(t) = a \cos(\omega t) \quad 4.16$$

Temos neste caso a associado então a amplitude.

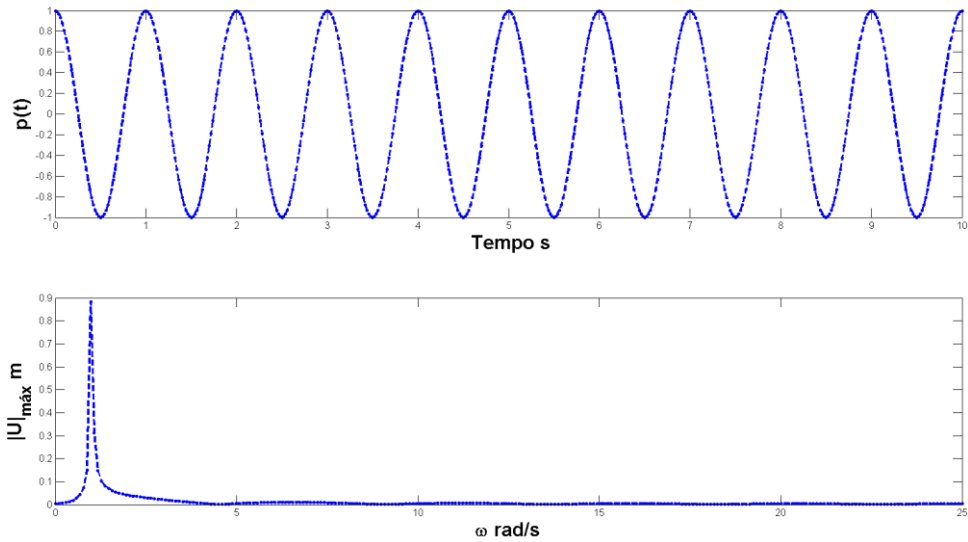


Figura 4.5 FFT para um carregamento Harmônico – Função cosseno.

Se acaso expressarmos o carregamento pela combinação de seus harmônicos temos então a resposta como mostrado na figura.

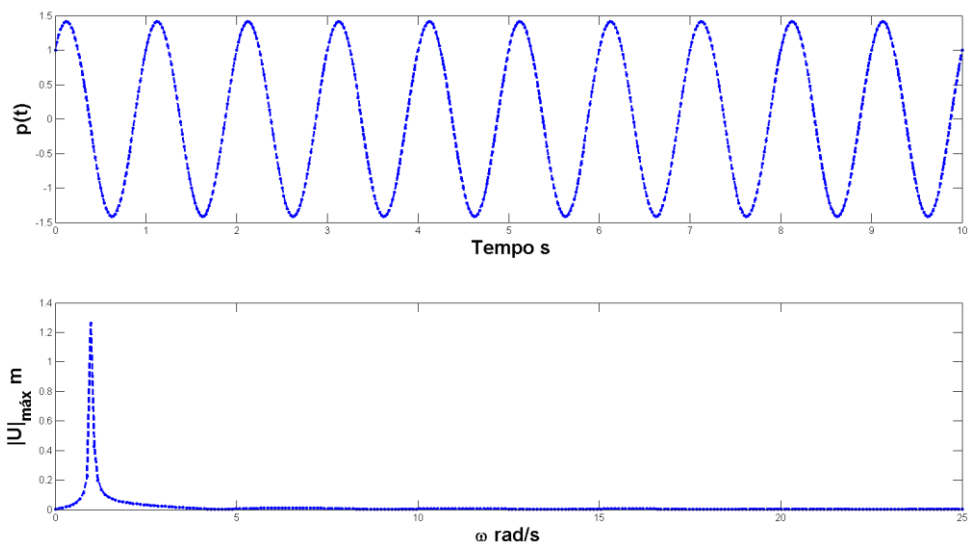


Figura 4.6 FFT para um carregamento Harmônico – Função seno e cosseno.

Tendo então a excitação expressa por seus valores representativos no domínio do tempo, podemos então proceder a avaliação deste vetor no domínio da frequência a partir da transformada rápida de Fourier, sendo seu espectro de resposta mostrado na figura abaixo.

4.4.2 Carregamento Periódico

Considere uma excitação periódica não harmônica $p(t)$, a qual representa uma força, um torque ou um deslocamento de base.

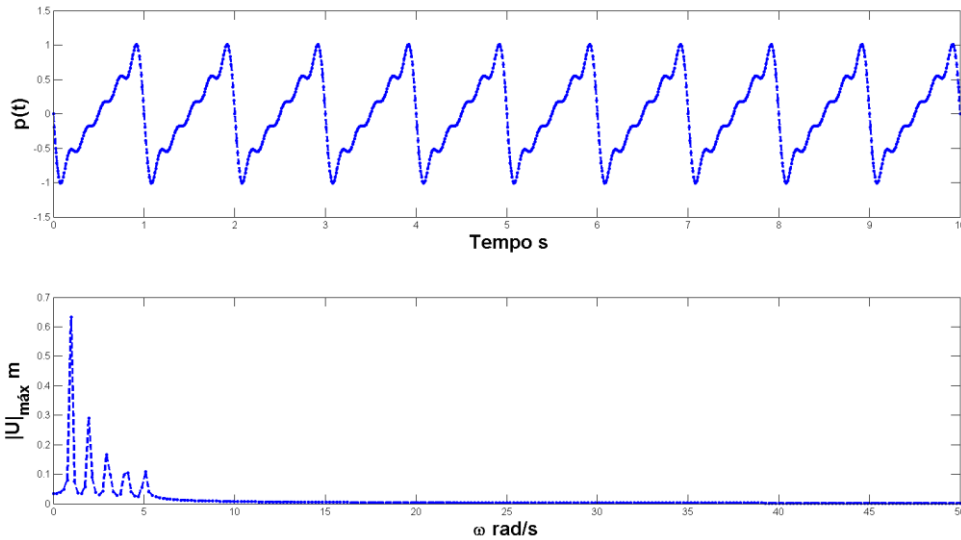


Figura 4.7 FFT para um carregamento Periódico.

Um carregamento periódico qualquer pode ser expresso na forma de uma série de Fourier.

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t \quad 4.17$$

Com:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \bar{\omega}_n t dt, \quad b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \bar{\omega}_n t dt \quad 4.18$$

Neste caso de excitação a resposta fica dependente de n termos que serão utilizados então para aproximar a função periódica pela Série de Fourier.

4.4.3 Carregamento Geral

Já para um carregamento geral, podemos assumir que ele seja transiente ou impulsivo, pois o mesmo apresenta amplitude extremas em tempo de duração muito curto, podemos caracterizar este tipo de excitação como uma função por partes definidas entre um domínio válido.

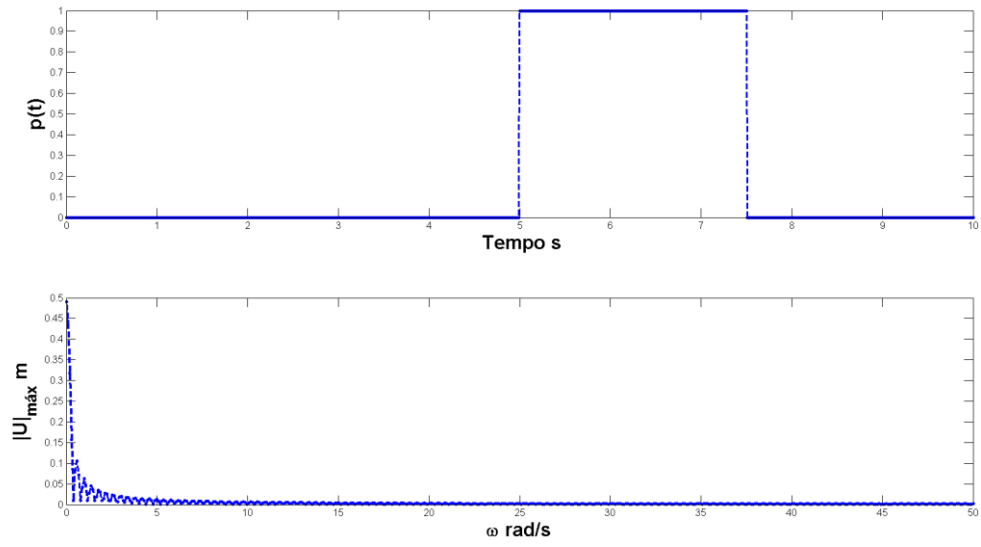


Figura 4.8 FFT para uma carregamento Impulsivo.

Capítulo 5

Avaliação dos Resultados

5.1 Avaliação da Curva de Ressonância

Neste presente capítulo serão apresentados alguns exemplos numéricos analisados por Clough e Penzien (1993), e verificar a resposta do espectro a partir da formulação desenvolvida neste trabalho para sistemas dotados de amortecimento do tipo viscoso proporcional e não proporcional.

Para facilitar a interpretação, os resultados são organizados partindo da resposta do espectro na frequência de ressonância para um dado modelo, onde se tem as frequências e amplitudes críticas, logo então é possível verificar a resposta a partir de um histórico deslocamento dado no domínio do tempo onde se avalia a amplitude do deslocamento induzindo a estrutura a uma excitação harmônica na frequência de ressonância por um longo período, podendo então comparar a resposta dada no domínio da frequência e pela dada no domínio do tempo. Tendo então as frequências e as amplitudes críticas obtida pelo método do balanço harmônico na frequência de ressonância procedesse à avaliação do espectro para vários modelos de carregamento a fim de comparar as suas respectivas amplitudes máximas com as amplitudes críticas da frequência de ressonância.

Os resultados foram comparados à resposta no tempo para sistemas dotados de amortecimento proporcional através da ImFT Camargo (2008), e para os dotados de amortecimento não proporcional através do método das Pseudo-Forças, tendo como base o trabalho realizado por Santolin (2006) onde ao concluir a análise são comparados resultados com os fornecidos pela bibliografia.

5.2 Avaliação da Curva de Ressonância para Sistemas Dotados de Amortecimento Proporcional

Serão analisados no item (5.2.1) e (5.2.2) dois modelos estruturais discretos dotados de amortecimento viscoso proporcional, com o intuito de avaliar os resultados do espectro de resposta.

O modelo 01 consiste em um sistema com um único grau de liberdade, onde procura se avaliar o espectro de resposta obtido pelo método proposto no domínio da frequência e compara-lo com um espectro obtido de forma indireta no domínio do tempo, onde se faz incrementos de ω avaliando a amplitude de deslocamento.

Após esta fase de análise e verificação dos resultados, procedesse então para modelos estruturais discretos maiores, por exemplo, o modelo 02, ou seja, com vários graus de liberdade, variando entre eles o tipo de carregamento ou excitação dinâmica, como pode ser avaliados a partir do item (5.2.2).

5.2.1 Modelo 01

O modelo estrutural apresentado na figura (5.1) pode ser tratado com um sistema de um único grau de liberdade. Onde os seguintes parâmetros são assumidos, expressão (5.1).

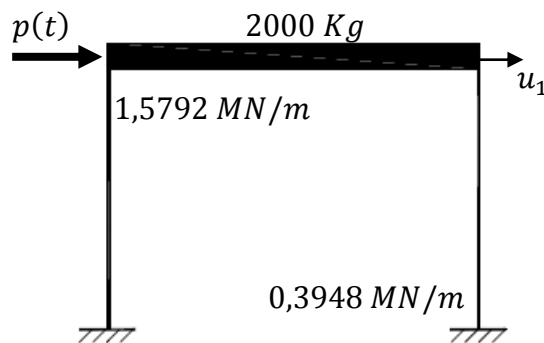


Figura 5.1 Modelo estrutural discreto – Modelo 01.

$$M = 2000 \text{ Kg} , \quad K = 1,974 \text{ MN/m} , \quad \xi = 1.0\% \quad 5.1$$

O mesmo modelo foi apresentado por Santolin (2006), porem com a resposta dada no domínio do tempo. Por mais que seja um sistema dotado de um único grau de liberdade, pelo método do balanço harmônico ele é tratado de forma implícita, pois o vetor de amplitudes modais depende dos coeficientes A_1 e B_1 .

Os parâmetros assumidos para avaliar o espectro de resposta na frequência de ressonância e montar o vetor de forças de referência adota-se um carregamento harmônico, dado $p(t) = 100\sin(\omega t)$ por um período de 15,0 segundos com incremento de tempo $\Delta t = 0.01$ segundos. O tempo total da análise foi estendido para se avaliar a amplitude no regime permanente com a estrutura em vibração livre.

5.2.1.1 Espectro de Resposta na Frequência de Ressonância

A frequência natural do sistema $\omega_n = 31,42 \text{ rad/s}$ vai ser assumida para então montar o vetor de excitação dinâmica ou de força de referência.

Na figura (5.2) temos a resposta avaliada de forma indireta através da resposta no tempo, variando ou fazendo incremento de ω , desta forma temos o espectro de resposta para o modelo 01 com 20 incrementos de ω .

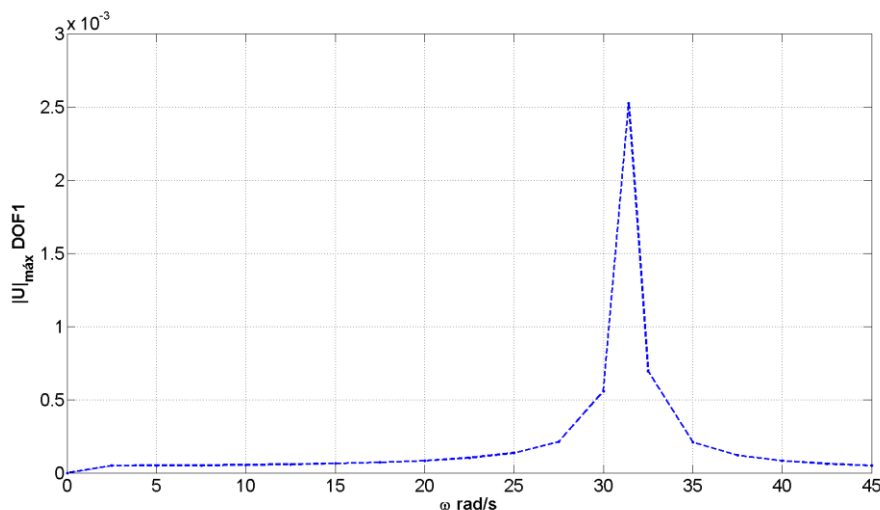


Figura 5.2 M01, ω_{crit} - Espectro de resposta Modelo 01, com 20 incrementos de ω .

Na figura (5.3) temos o histórico de deslocamento para o modelo 01 assumindo $\omega_n = \omega$.

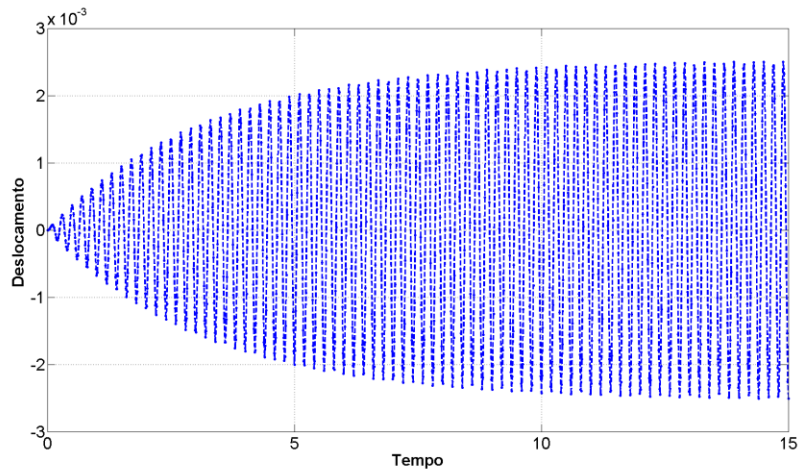


Figura 5.3 M01, ω_{crit} - Histórico de deslocamento na frequência de ressonância -
 $\omega_n = 31,42 \text{ rad/s} - \text{DOF}_1$.

Na figura (5.4) temos a resposta em frequência, obtida pelo método proposto, onde é possível verificar a coerência entre o resultado apresentado na figura (5.2) e (5.3).

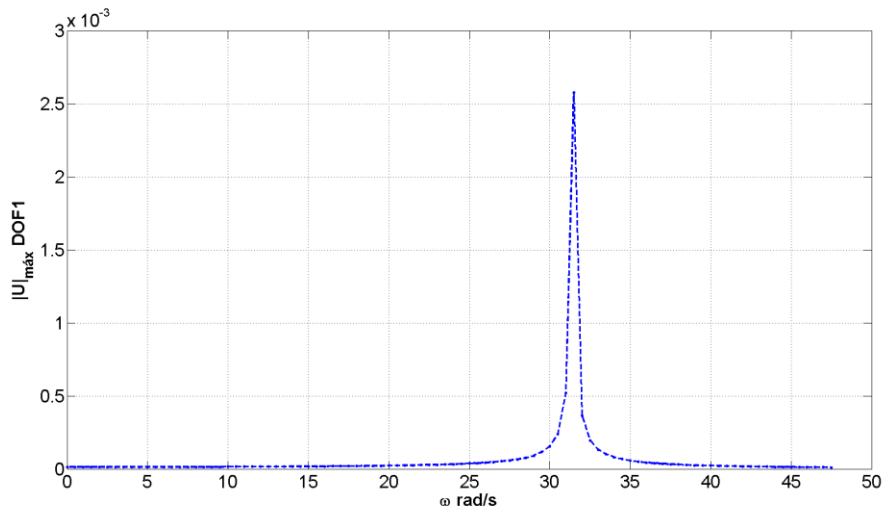


Figura 5.4 M01, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_n = 31,42 \text{ rad/s}$,
 $|U_{m\acute{a}x}| = 0.00257 \text{ m}$.

Consegue-se observar que a amplitude dos deslocamentos avaliados pela resposta no domínio do tempo foi $0,00252m$ e a resposta do espectro foi de $0,00257m$. Com isso temos assegurado à convergência e precisão do método proposto, onde o mesmo será então no decorrer deste capítulo avaliado para outros modelos estruturais discretos.

O tempo necessário para obter o espectro de resposta através do método do balanço harmônico foi, de $0,019657$ segundos. Se formos obter a resposta no domínio do tempo usando integração direta tem-se $0,009196$ segundos. Esta diferença de resultado se deve, pois a resposta no domínio do tempo já tem seus coeficientes avaliados de forma implícita no caso do método do balanço harmônico ele ainda precisa resolver um sistema de equações lineares para então obter os coeficientes associado ao equilíbrio dinâmico do sistema.

Na figura (5.5) temos então a relação entre Fase ϕ e frequência ω dado no intervalo relativo à análise.

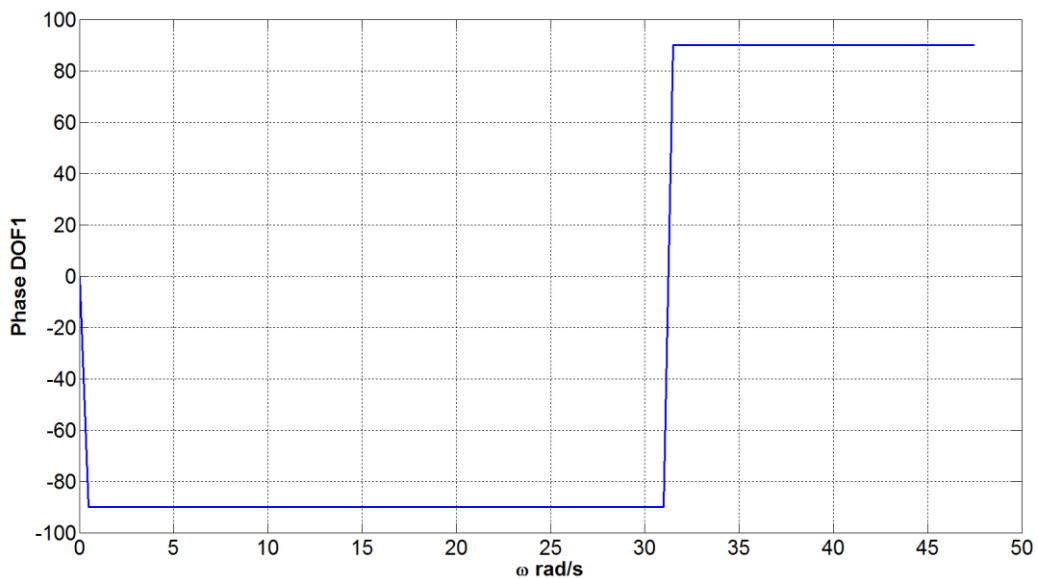


Figura 5.5 M01, ω_{crit} - Relação entre Fase ϕ e Frequência ω via HBM.

E possível avaliar o decaimento da resposta em relação a uma frequência inicial ω_i e um ganho da resposta a partir de ω_n , que respectivamente corresponde a frequência natural do sistema.

5.2.2 Modelo 02

O sistema estrutural discreto aqui apresentado pela figura (5.6) é tratado pela bibliografia como Shear Building sendo analisado por Clough e Penzien (1993), Santolin (2006), e será submetido a vários modelos de carregamentos dinâmicos a fim de obter e verificar quais são as frequências e as amplitudes críticas para cada caso de carregamento.

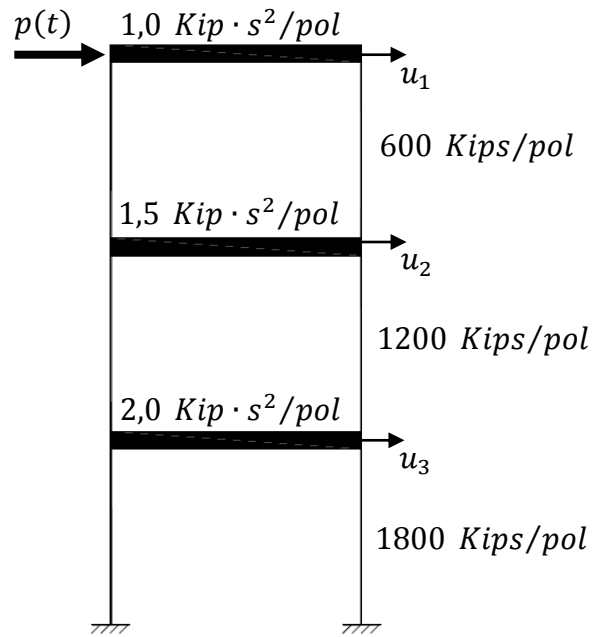


Figura 5.6 Modelo estrutural discreto – Modelo 02.

O sistema de unidade utilizado naquele trabalho será mantido para fins de comparação.

O sistema apresenta os seguintes coeficientes para a matriz de massa discreta M .

$$M = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 2,0 \end{bmatrix} \text{Kip} \cdot \text{s}^2 / \text{pol} \quad 5.2$$

Para a matriz de rigidez K .

$$K = \begin{bmatrix} 600,0 & -600,0 & 0,0 \\ -600,0 & 1,800 & -1200,0 \\ 0,0 & -1200,0 & 3000,0 \end{bmatrix} \text{Kips} / \text{pol} \quad 5.3$$

Já quanto a matriz de amortecimento C foi assumido um amortecimento de 5% para os modos 1 e 3, resultando desta forma em uma matriz de amortecimento proporcional em coordenadas físicas:

$$C = \begin{bmatrix} 2,09 & -0,99 & 0,0 \\ -0,99 & 4,63 & -1,98 \\ 0,0 & -1,98 & 7,16 \end{bmatrix} \text{Kip} \cdot \text{s} / \text{pol} \quad 5.4$$

Já os parâmetros associado à discretização do tempo e frequência de amostragem são mantido para todos os casos, onde somente varia a carregamento. O intervalo de tempo adotado para análise foi de $\Delta t = 0,001$ segundos, tempo de análise de 3,0 segundos. Já para obter os espectros os parâmetros foram definidos $N = 3072$ e a frequência de amostragem $F_s = 100$.

As respectivas frequências naturais foram obtidas a partir da solução do problema de autovalor e autovetor, pois será utilizada para comparar com as obtidas pelo espectro de resposta. Onde $\omega_1 = 14,52 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 31,05 \text{ rad/s}$ e $\omega_3 = 46,09 \text{ rad/s}$.

A partir do modelo 02 já definido, então se dá início a obtenção da resposta para vários modelos de carregamento isolados ou combinados, onde o objetivo é avaliar quais são as amplitudes máximas $|U_{máx}|$ e compara-las com as amplitudes críticas $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância ω_{crit} esta por sua vez correspondente com a primeira frequência natural do sistema ω_n , onde $n = 1$.

Será utilizada a seguinte designação para as amplitudes, onde o resultado avaliado no domínio da frequência e dado a partir das amplitudes modais em módulo $|U|$, é para o domínio do tempo temos então associado aos deslocamentos hora representado por u .

5.2.2.1 Espectro de Resposta na Frequência de Ressonância

Na figura (5.7) temos então um carregamento harmônico mantendo-se a amplitude porem na frequência de ressonância $\omega_{crit} = 14,52 \text{ rad/s}$, onde é possível verificar a amplitude crítica $|U_{crit}|$ que teremos como resposta na fase permanente.

Tendo a figura (5.7) e (5.8), podemos verificar que ambas apresentam a mesma amplitude, diante de um carregamento harmônico na frequência de ressonância ω_n validando mais uma vez os resultados, porém com a resposta dado em domínios diferentes.

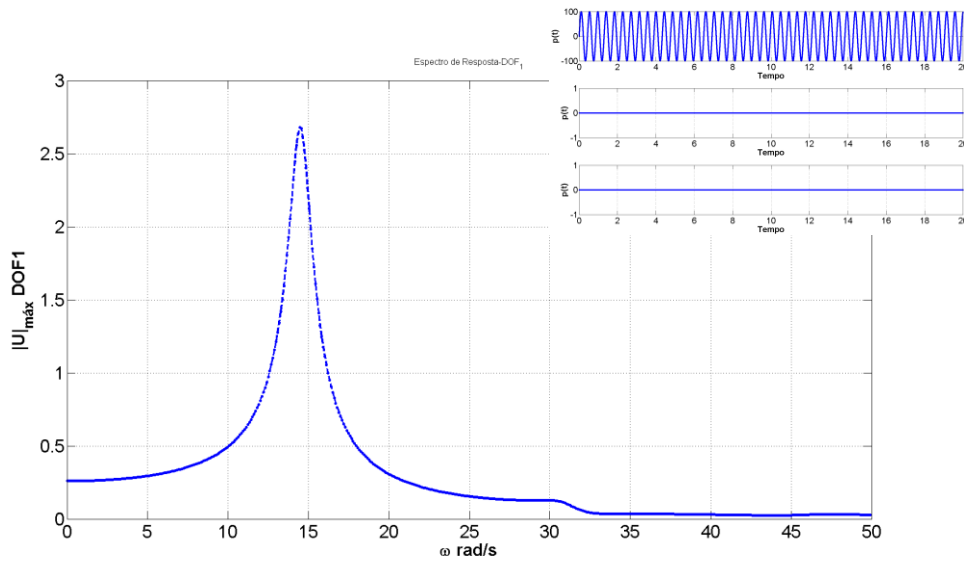


Figura 5.7 M02, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$,

$$|U_{crit}| = 0.00257 \text{ m} .$$

Na figura (5.8) temos o histórico de deslocamento para o modelo 02 assumindo $\omega = \omega_{crit}$.

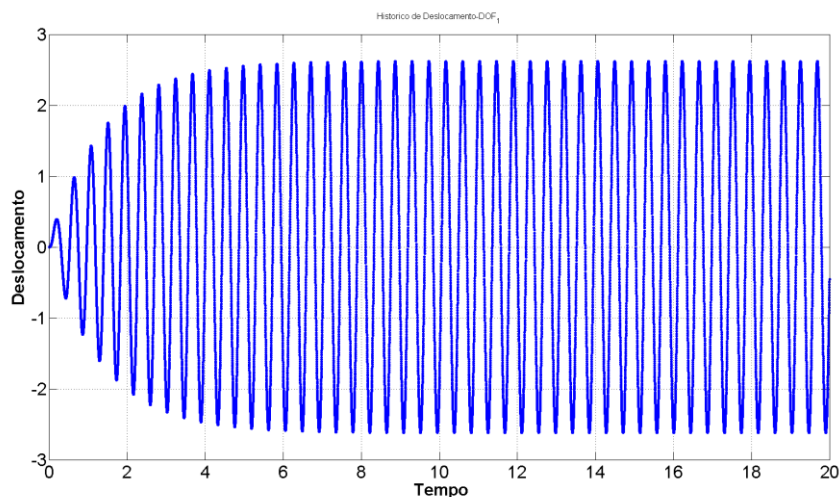


Figura 5.8 M02, ω_{crit} - Histórico de deslocamentos na frequência de ressonância - (DOF_1).

Na figura (5.9) temos o espectro de resposta para o modelo 02 assumindo $\omega = \omega_{crit}$, para todos os graus de liberdade, onde é possível avaliar que as amplitude de resposta.

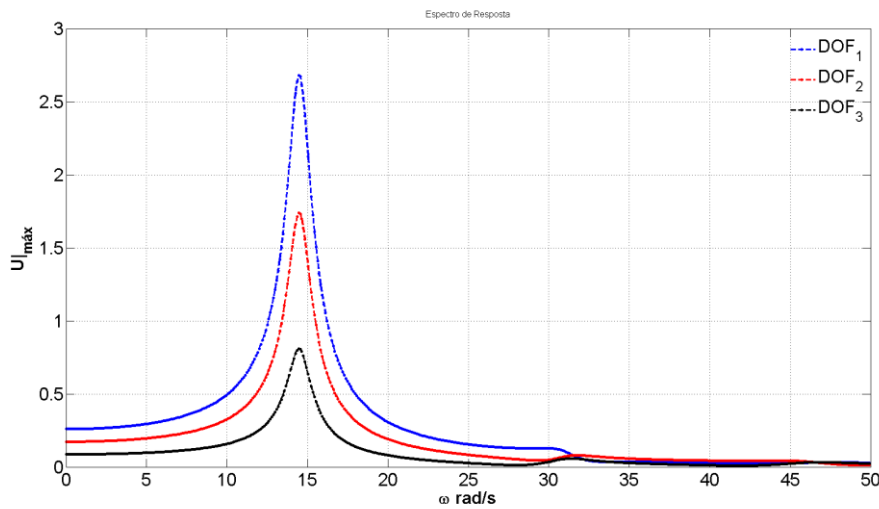


Figura 5.9 M02, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{\max}|$.

Observa-se o espectro de resposta como mostrado na figura (5.7) ou (5.9), e comparando o, por exemplo, com o espectro de resposta de um dado carregamento e possível avaliar a relação entre as amplitudes em uma frequência ω qualquer, com a frequência de ressonância ω_{crit} onde então as amplitudes serão críticas $|U_{crit}|$.

Na figura (5.10) tem-se a relação entre Fase ϕ e frequência ω para o modelo em análise.

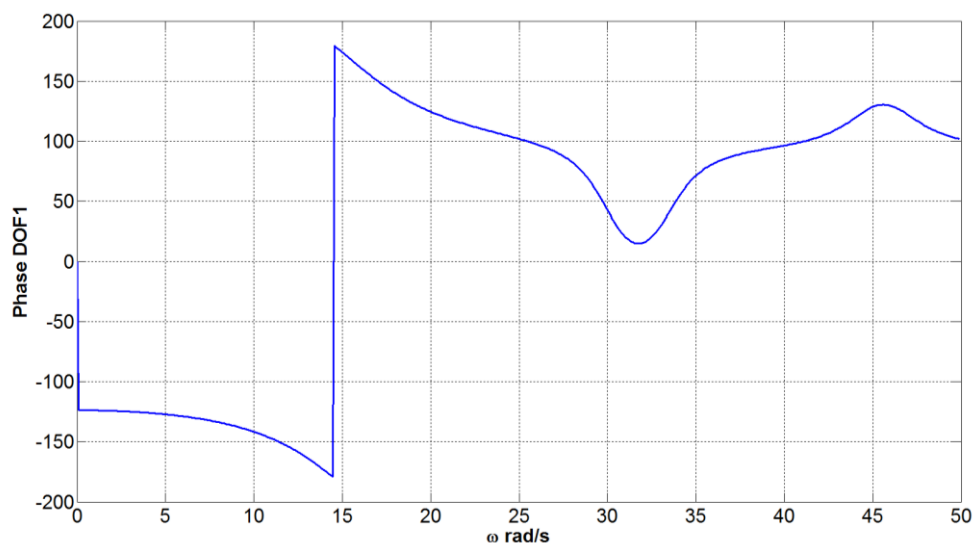


Figura 5.10 M02, ω_{crit} - Relação entre Fase ϕ e Frequência ω via HBM - (DOF_1).

Nos próximos itens vamos avaliar o espectro de resposta do modelo 02, e qual é a influência do modelo de carregamento na amplitude de resposta do sistema, também como avaliar a resposta dada no domínio do tempo pelo método proposto.

5.2.2.2 Caso 1 - Resposta Permanente a um Carregamento Harmônico

O vetor de forças de referência é montado a partir de uma função harmônica $p(t) = 100\sin(5,0t)$ tal como apresentado por Santolin (2006), atuando de modo pertinente a excitar a estrutura, ou seja, atuando durante todo o período definido pela análise.

Nas figuras (5.11) é possível verificar as amplitudes $|U_{máx}|$ no espectro de resposta provocado pelo carregamento harmônico.

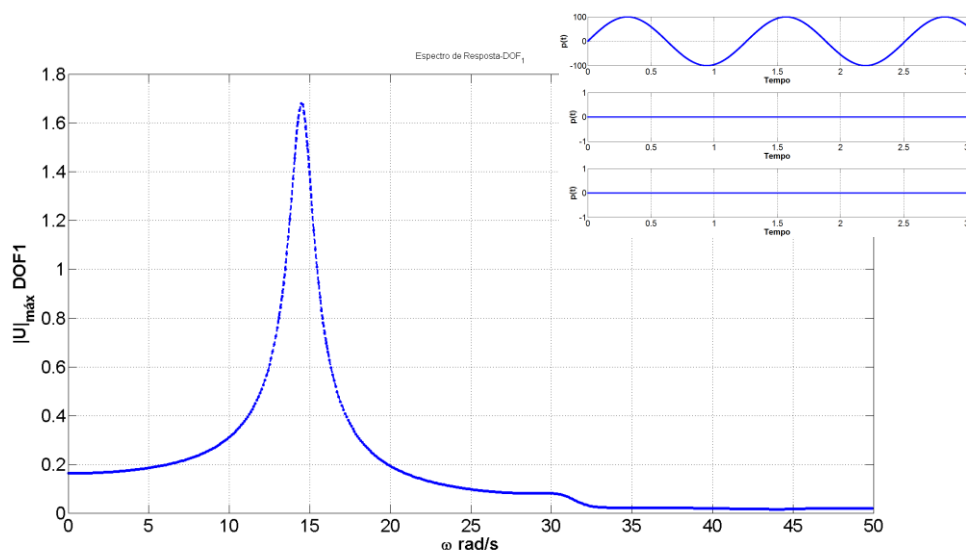


Figura 5.11 M02, C01 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$,

$$|U_{máx}| = 1,681 \text{ in} .$$

A figura (5.12) mostra a resposta do espectro para todos os graus de liberdade sobrepostos. Onde é possível verificar que a frequência crítica ω_{crit} é comum á todos oque esta coerente, e a amplitude máxima $|U_{máx}|$ é dada no grau de liberdade 1 (DOF_1), que corresponde ao ponto de atuação do carregamento.

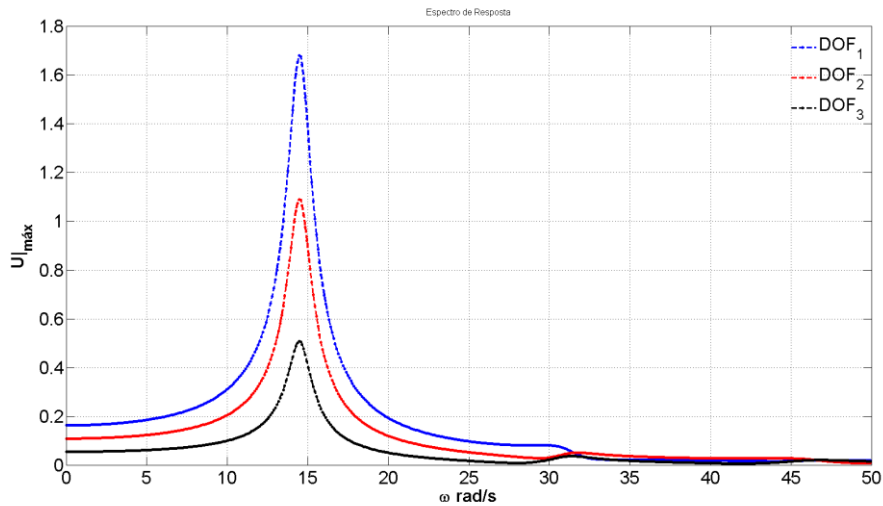


Figura 5.12 M02, C01 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{m\acute{a}x}|$.

Na figura (5.13) temos o hist3rico de deslocamento $u(t)$ obtido para o grau de liberdade (DOF_1), mediante uma excita3o harm3nica pela ImFT e pelo HBM.

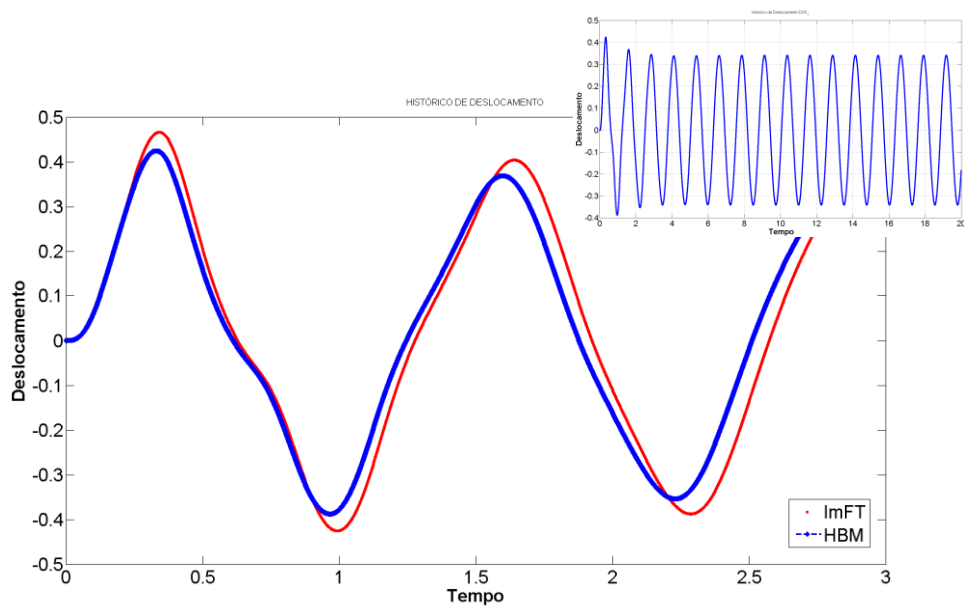


Figura 5.13 M02, C01 - Hist3rico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1).

Na tabela (5.1) 3 comparada a amplitude $|U_{m\acute{a}x}|$ dada pelo carregamento aqui apresentado, e a amplitude $|U_{crit}|$ na frequ3ncia de resson\ancia.

5.2.2.3 Caso 2 - Resposta Permanente a um Carregamento Periódico

O vetor de forças de referência agora é montado a partir de uma função periódica

dada $p(t) = \frac{2h}{\pi} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n \omega t$ tendo a amplitude $h=100$, frequência de excitação

$\omega = 5,0 \text{ rad/s}$ e $n = 5$, obtendo assim a expressão final, tal como mostrado abaixo:

$$p(t) = \frac{200 \left(-\sin(5t) - \frac{1}{2} \sin(10t) - \frac{1}{3} \sin(15t) - \frac{1}{4} \sin(20t) - \frac{1}{5} \sin(25t) \right)}{\pi}$$

Nas figuras (5.12) e (5.13) é possível verificar as amplitudes no espectro de resposta provocado pelo carregamento periódico.

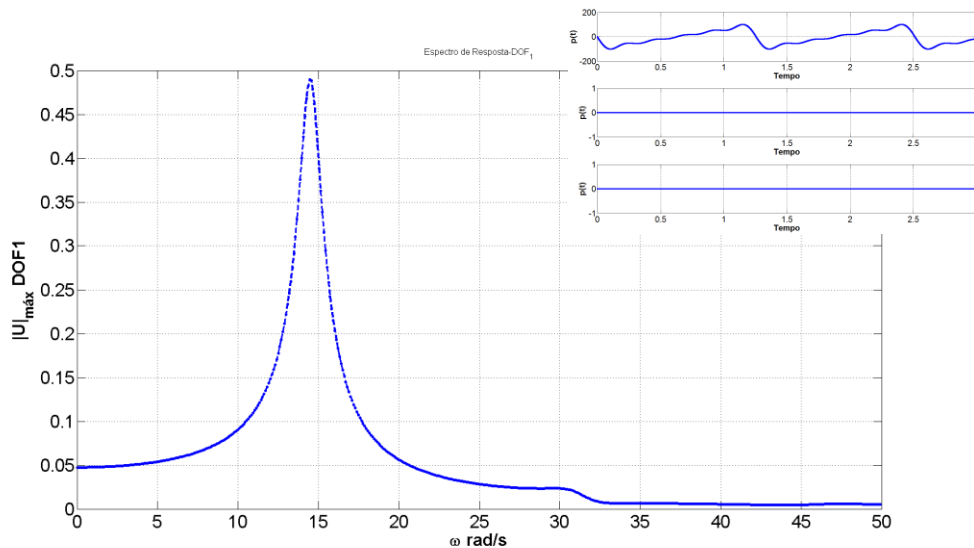


Figura 5.14 M02, C02 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$,

$$|U_{max}| = 0,490 \text{ in}.$$

A figura (5.15) mostra a resposta do espectro para todos os graus de liberdade sobrepostos.

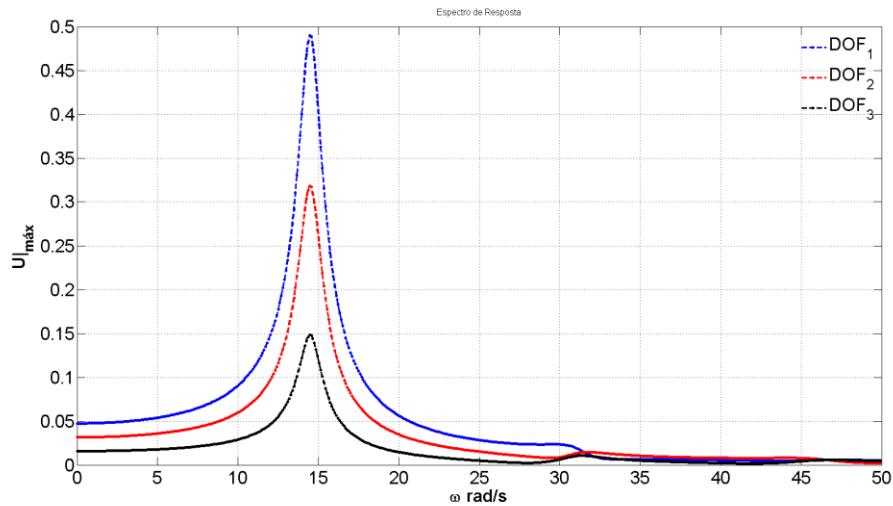


Figura 5.15 M02, C02 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{m\acute{a}x}|$.

Na figura (5.14) temos o hist3rico de deslocamento obtido para o grau de liberdade (DOF_1), mediante um carregamento peri3dico pela ImFT.

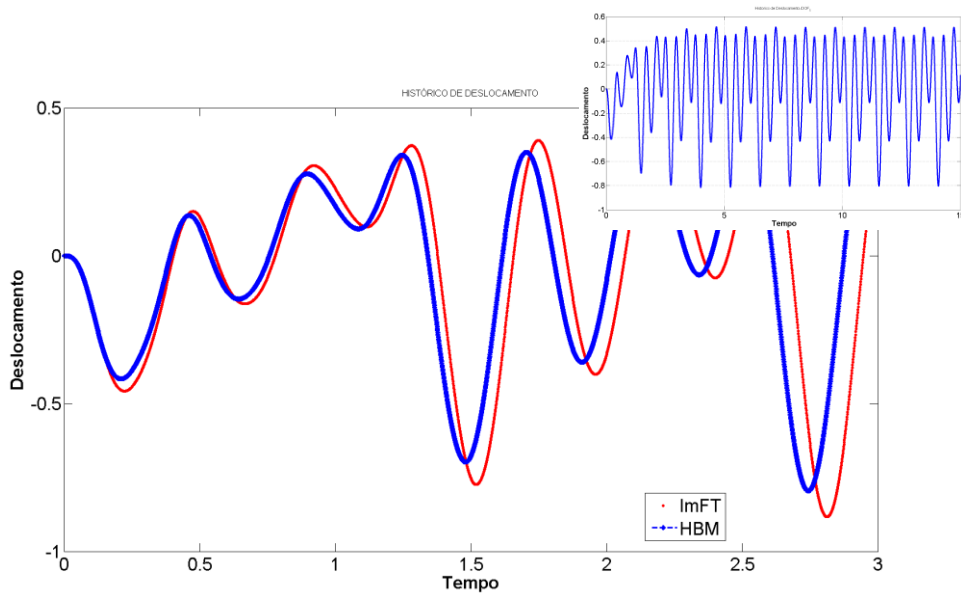


Figura 5.16 M02, C02 - Hist3rico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1).

Na tabela (5.1) 3 comparada a amplitude $|U_{m\acute{a}x}|$ dada pelo carregamento aqui apresentado, e a amplitude $|U_{crit}|$ na frequ3ncia de resson\ancia.

5.2.2.4 Caso 3 - Resposta Permanente a um Carregamento Transiente

O vetor de forças de referência é montado a partir de uma função por partes, com a finalidade de representar um carregamento impulsivo tipo triangular dado pela expressão

$$p(t) = \begin{cases} \frac{-100}{0,05}(t) + 100 \rightarrow 0 \leq t \leq 0,05 \\ 0,00 \rightarrow 0,05 \leq t \leq 3,00 \end{cases} \quad \text{tal como apresentado por Santolin (2006, p. 70).}$$

A amplitude do carregamento acima é idêntica à amplitude adotada para os outros dois carregamentos anteriormente abordados.

Nas figuras (5.15) é possível avaliar a amplitude $|u_{m\acute{a}x}|$ no espectro de resposta provocado pelo carregamento transiente tipo impulsivo.

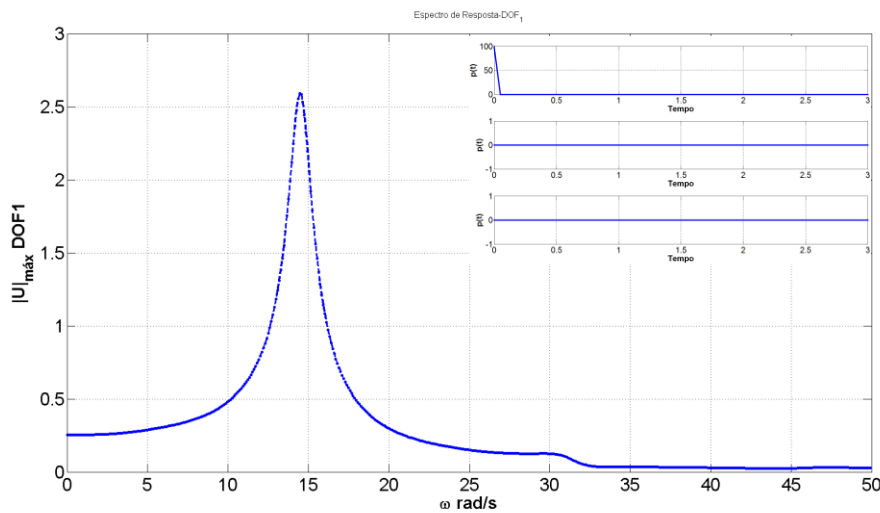


Figura 5.17 M02, C03 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$,

$$|U_{m\acute{a}x}| = 2,591 \text{ in} .$$

A figura (5.18) mostra a resposta do espectro para todos os graus de liberdade sobrepostos.

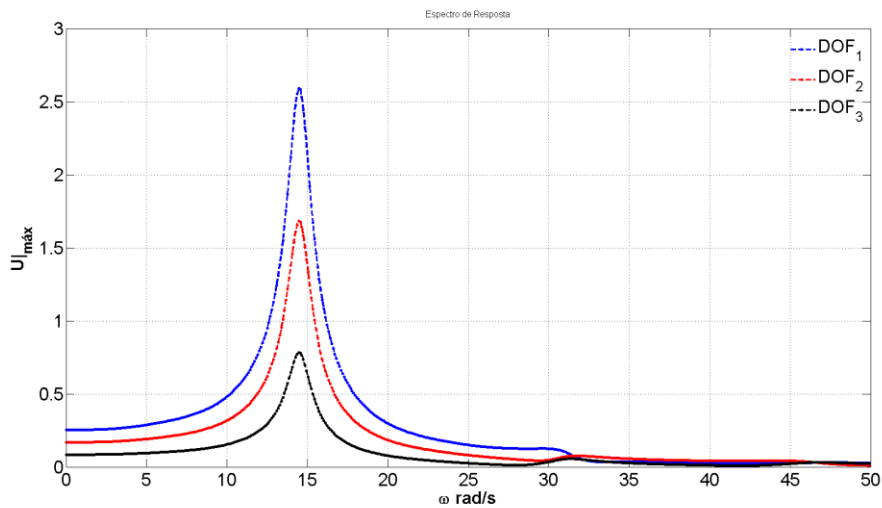


Figura 5.18 M02, C03 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{m\acute{a}x}|$.

Na figura (5.19) temos o hist3rico de deslocamento obtido para o grau de liberdade (DOF_1), mediante um carregamento transiente.

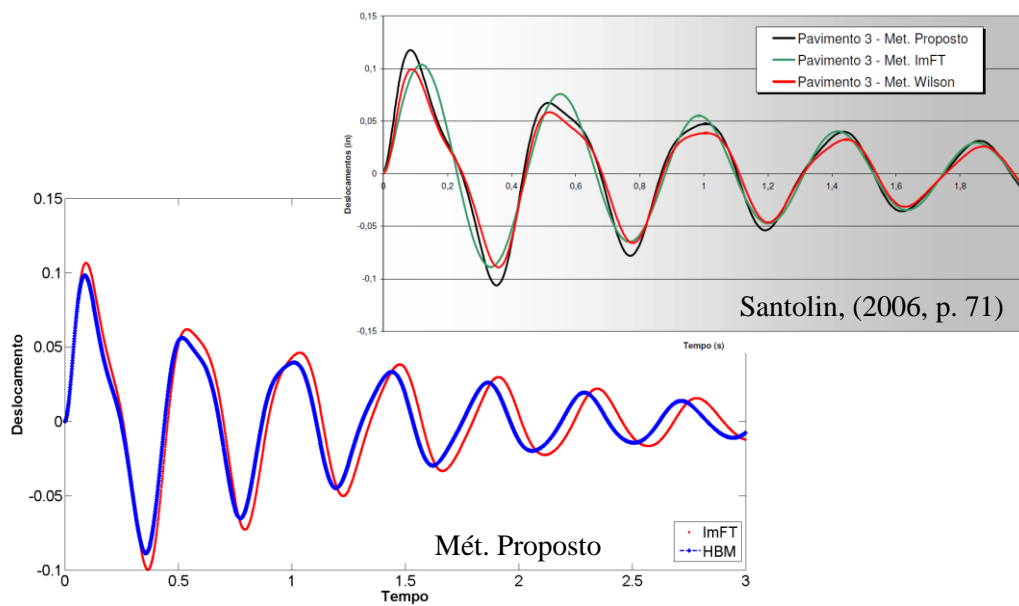


Figura 5.19 M02, C03 - Hist3rico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1).

Tamb3m na figura (5.19) 3 poss3vel avaliar o hist3rico de deslocamento dado pela formula3o no dom3nio da frequ3ncia e compara-lo com os resultados apresentados por Santolin (2006, p. 71).

Sendo o amortecimento do tipo viscoso proporcional é possível ainda avaliar o tempo de processamento para obtenção das soluções para equilíbrio dinâmico do sistema por três métodos, onde o método clássico apresenta 0,2787 segundos, ImFT 0,8556 segundos e o pseudo-forças 0,1128 segundos ambos implementado neste trabalho.

Na tabela (5.1) é comparada a amplitude $|U_{m\acute{a}x}|$ dada pelo carregamento aqui apresentado, e a amplitude $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância.

5.2.2.5 Caso 4 - Resposta Permanente a uma Combinação de Excitações

Neste item será avaliado o espectro de resposta quando ocorrer carregamentos combinados. Serão adotados dois casos para carregamentos combinados. O caso (4a) consiste em um carregamento tipo transiente $p_1(t)$ e tipo harmônico $p_2(t)$. O caso (4b) adota-se $p_1(t)$ e $p_2(t)$ do tipo harmônico porem com frequências ω diferentes. As expressões que se referem ao carregamento combinado caso (4a) podem ser avaliadas pelas expressões (5.5) e (5.6), já para o caso (4b) nas expressões (5.7) e (5.8).

Na figura (5.18) temos o mesmo sistema estrutural mostrado anteriormente figura (5.5), porem agora com carregamentos combinados.

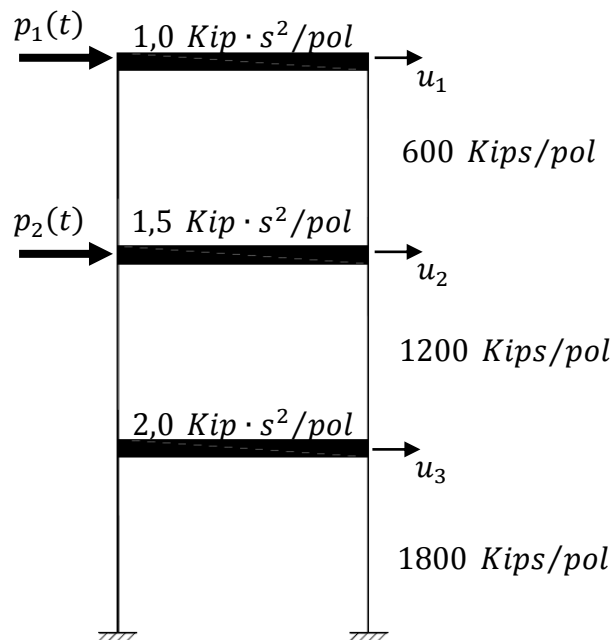


Figura 5.20 Modelo estrutural discreto – Modelo 02 para caso de carregamentos combinados.

Todas as propriedades como massa, amortecimento e rigidez são idênticas as do modelo 02 que pode ser verificada na figura (5.5), assim como parâmetros associados à análise para obtenção da resposta.

5.2.2.5.1 Caso 4a

Os carregamentos a serem combinados $p_1(t)$ tipo transiente e $p_2(t)$ tipo harmônico, ambos atuam em um determinado intervalo de tempo, mostrado na expressão (5.5) e (5.6).

$$p_1(t) = \begin{cases} 100 - 50(t) \rightarrow 0 \leq t \leq 1,00 \\ 10 \rightarrow 1,00 \leq t \leq 1,50 \\ 0 \rightarrow 1,5 \leq t \leq 3,00 \end{cases} \quad 5.5$$

A amplitude de ambos os carregamentos são mantidas idênticas a análises anteriores.

$$p_2(t) = \begin{cases} 100 \sin(5t) \rightarrow 0 \leq t \leq 2,50 \\ 0,00 \rightarrow 2,50 \leq t \leq 3,00 \end{cases} \quad 5.6$$

Nas figuras (5.19) e (5.20) é possível verificar as amplitudes no espectro de resposta provocado pelos carregamentos combinados para o caso (4a).

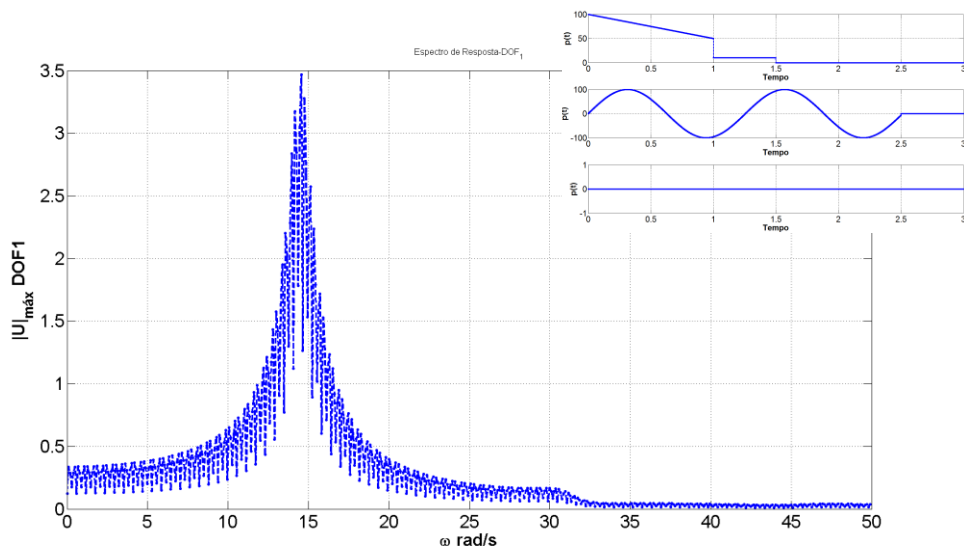


Figura 5.21 M02, C04a - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$,

$$|U_{m\acute{a}x}| = 3,466 \text{ in} .$$

A figura (5.20) mostra a resposta do espectro para todos os graus de liberdade sobrepostos.

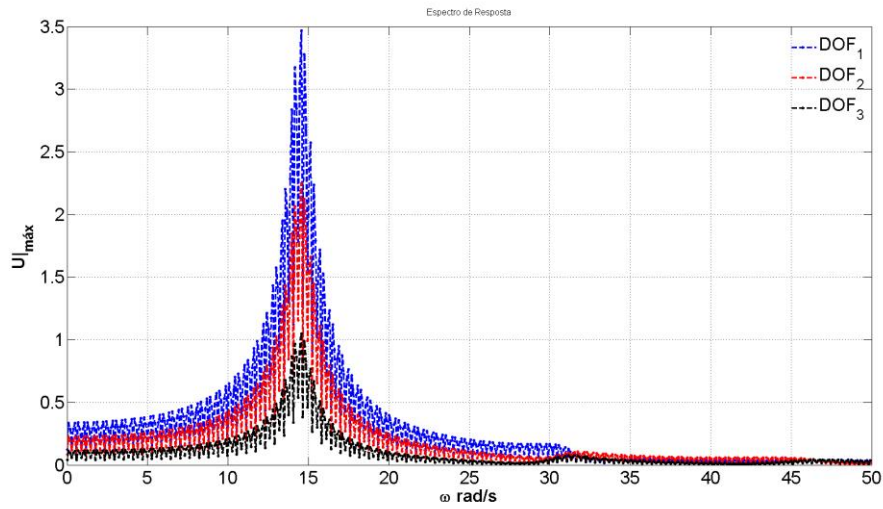


Figura 5.22 M02, C04a - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{m\acute{a}x}|$.

Na figura (5.21) temos o hist3rico de deslocamento obtido para o grau de liberdade (DOF_1), mediante aos carregamentos combinados.

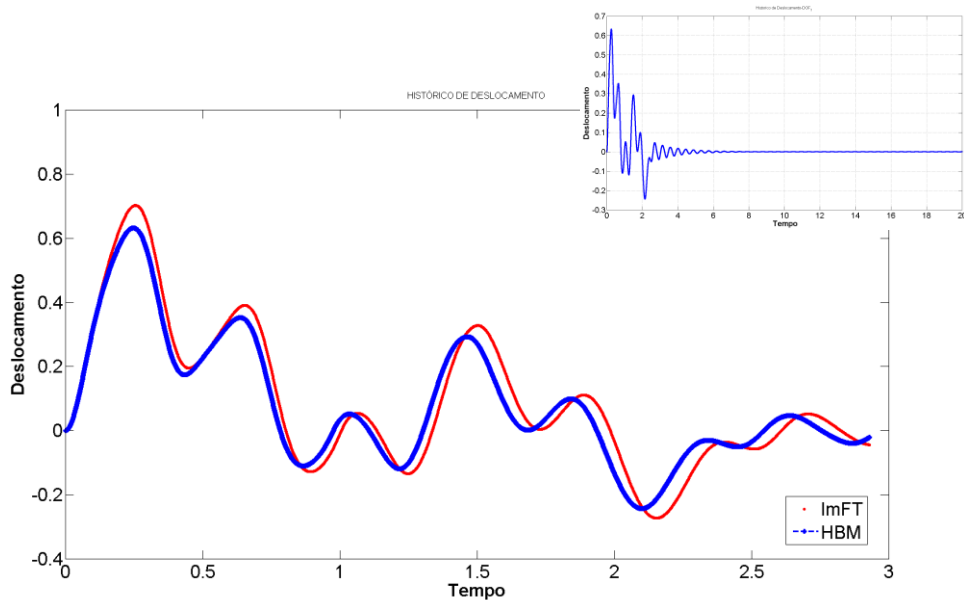


Figura 5.23 M02, C04a - Hist3rico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1).

Na tabela (5.1) 3e comparada a amplitude $|U_{m\acute{a}x}|$ dada pelo carregamento aqui apresentado, e a amplitude $|U_{crit}|$ na frequ3ncia de resson\ancia.

5.2.2.5.2 Caso 4b

Agora os carregamentos a serem combinados $p_1(t)$ e $p_2(t)$ são harmônicos, ambos atuam em um determinado intervalo de tempo como mostrado na expressão (5.7) e (5.8).

$$p_1(t) = 100 \sin(3,5t) \rightarrow 0 \leq t \leq 3,00 \quad 5.7$$

A amplitude de ambos os carregamentos são mantidas idênticas.

$$p_2(t) = \begin{cases} 100 \sin(5t) \rightarrow 0 \leq t \leq 1,25 \\ 0,00 \rightarrow 1,25 \leq t \leq 3,00 \end{cases} \quad 5.8$$

Nas figuras (5.24) e (5.25) é possível verificar as amplitudes no espectro de resposta provocado pelos carregamentos combinados para o caso (4b).

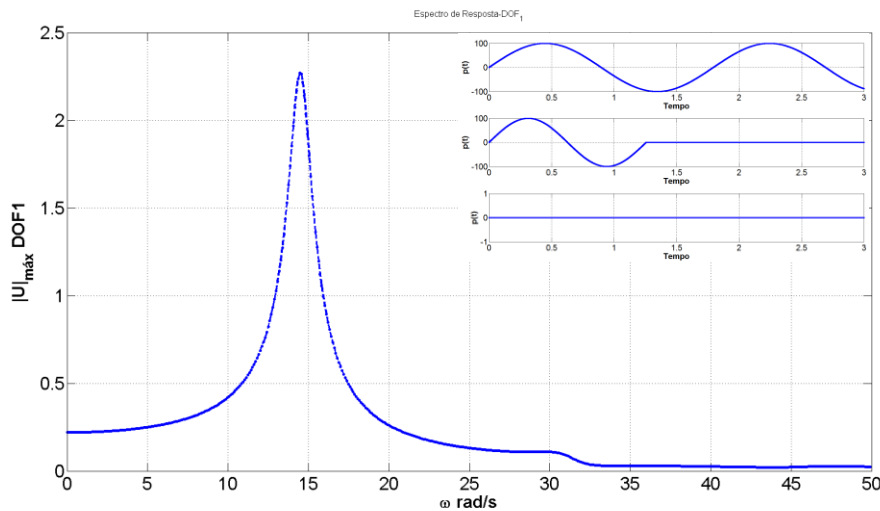


Figura 5.24 M02, C04b - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$,

$$|U_{\max}| = 2.269 \text{ in} .$$

A figura (5.25) mostra a resposta do espectro para todos os graus de liberdade sobrepostos.

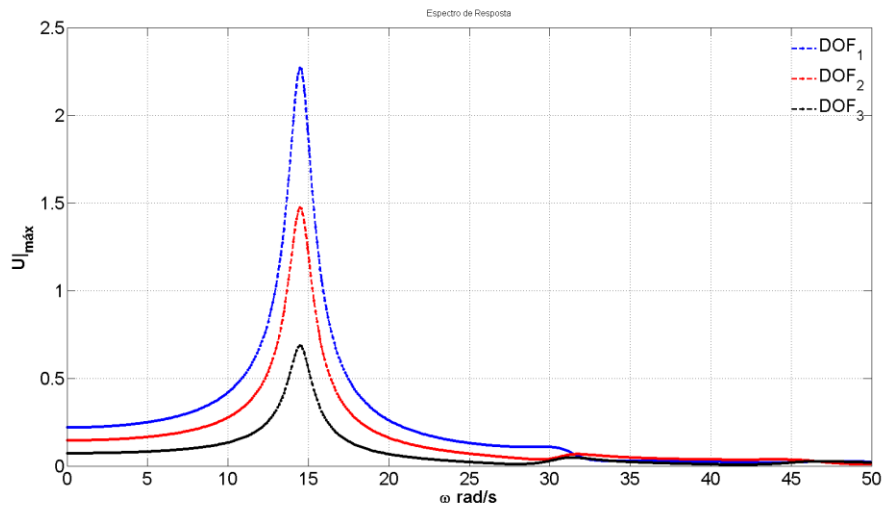


Figura 5.25 M02, C04b - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{\max}|$.

Na figura (5.26) temos o histórico de deslocamento obtido para o grau de liberdade (DOF_1), mediante um carregamento periódico.

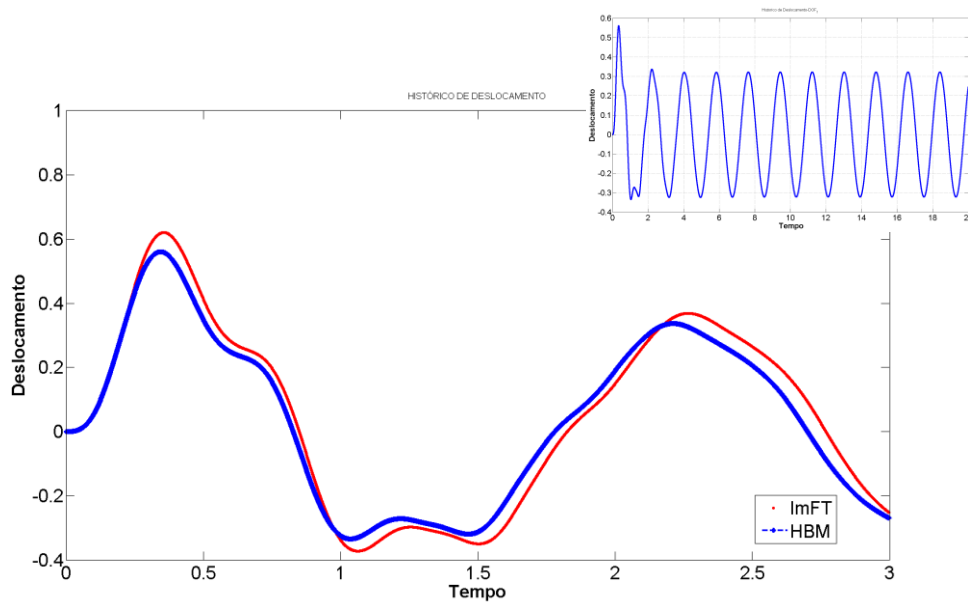


Figura 5.26 M02, C04b - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - ImFT / HBM - (DOF_1).

Na tabela (5.1) é comparada a amplitude $|U_{\max}|$ dada pelo carregamento aqui apresentado, e a amplitude $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância.

5.2.2.6 Resultados

Para melhor avaliar os resultados obtidos em relação à amplitude crítica $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância e a amplitude máxima $|U_{máx}|$ para um dado modelo de carregamento temos os resultados obtidos como mostrado na tabela (5.1) onde se observa:

Tabela 5.1 Amplitudes e deslocamentos máximos em função do carregamento

Modelo de Excitação	ImFT		HBM	
	$ U_{máx} $	$ u_{máx} $	$ U_{máx} $	$ u_{máx} $
Ressonância $ U_{crit} $	2,613	2.613	2,678	2.682
Harmônico		0.4661	1,681	0.4246
Periódico		0.4828	0,490	0.4349
Transiente		0.1067	2,591	0.0984
Combinado	Caso 4a	0.7030	5,151 _{crit}	0.6326
	Caso 4b	0.6207	3,466 _{crit}	0.5606

A partir da tabela (5.1) podemos observar que as amplitudes máximas $|U_{máx}|$ são dadas quanto temos carregamentos transientes, os valores ainda ficam mais distintos quando estes carregamentos transientes passam a ser combinados, como mostra a tabela para o caso (4a). Verifica-se também que nestes casos as amplitudes produzidas por estes carregamentos ultrapassam as amplitudes críticas $|U_{crit}|$ obtidas na frequência de ressonância.

Quanto ao histórico de deslocamentos $u(t)$ tem-se que a situação mais desfavorável, como mostrado no espectro de resposta o carregamento Combinado do Caso 4a, onde temos um carregamento impulsivo que atua em um curto intervalo de tempo, combinado com um carregamento harmônico excitando a estrutura de forma pertinente.

Também consegue se verificar que a resposta no domínio do tempo fazendo usos do HBM, converge em relação aos resultados fornecidos pela ImFT.

5.3 Avaliação da Curva de Ressonância para Sistemas Dotados de Amortecimento Não-Proporcional

As próximas análises pretende averiguar a resposta do espectro frente a sistemas dotados de amortecimento viscoso não proporcional.

O modelo 03 consiste em um sistema com as mesmas propriedades atribuídas ao modelo 02, porem sendo acrescentado um amortecedor discreto no primeiro grau de liberdade (DOF_1), onde a metodologia de avaliação dos resultados consiste em verificar o espectro na frequência de ressonância ω_{crit} , para então comparar a amplitude crítica $|U_{crit}|$ com a amplitude máxima $|U_{max}|$ dada em função do carregamento adotado.

O modelo 04 apresenta novas propriedades relacionadas à massa e rigidez do sistema, porem o amortecimento agora e adicionado ao grau de liberdade 02 (DOF_2) e 03 (DOF_3), passando a ser uma combinação apresentada em quatro (04) casos distintos.

5.3.1 Modelo 03

Dada à figura (5.27) podemos observar que o grau de liberdade 01 (DOF_1), foi adicionado um amortecedor discreto onde $c_1 = 20,0 \text{ Kip} \cdot \text{s/pol}$, desta forma o problema não pode ser mais avaliado utilizando técnicas baseadas em superposição modal. A solução agora fica basicamente restringida ao uso do método do balanço harmônico HBM e das Pseudo-Forças.

Quanto ao modelo de carregamento a ser avaliado, será adotado somente dois casos. O primeiro consiste em uma excitação harmônica a mesma descrita no item (5.2.2.2) e um carregamento transiente mencionado no item (5.2.2.4). Optou-se por reduzir a análise a estes dois carregamentos, pois ambos apresentam as maiores amplitudes como se procedeu a avaliação das respostas anteriores.

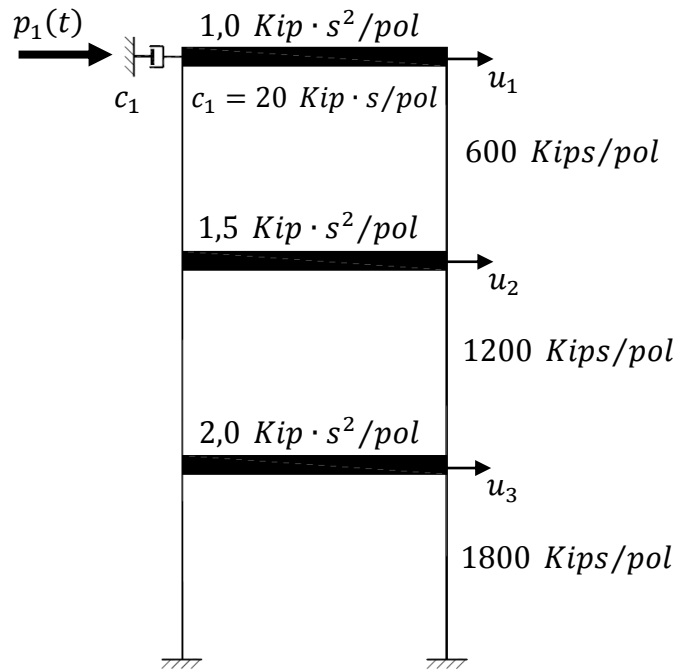


Figura 5.27 Modelo estrutural discreto – Modelo 03.

Sendo a matriz de massa e rigidez já apresentada nas expressões (5.2) e (5.3), temos então a matriz de amortecimento com amortecedor discreto acrescentado, como mostra a expressão (5.9).

$$C = \begin{bmatrix} 22,09 & -0,99 & 0,0 \\ -0,99 & 4,63 & -1,98 \\ 0,0 & -1,98 & 7,16 \end{bmatrix} \text{Kip} \cdot \text{s} / \text{pol} \quad 5.9$$

A inclusão do amortecedor discreto faz com que se some o valor de c_1 ao termo $C_{(1,1)}$ da matriz de amortecimento.

5.3.1.1 Espectro de Resposta na Frequência de Ressonância

Na figura (5.26) temos então um carregamento harmônico mantendo-se a amplitude porem na frequência de ressonância $\omega_n = 14,52 \text{ rad/s}$, onde é possível verificar a amplitude máxima $|U_{crit}|$ que teremos como resposta na fase permanente.

Tendo a figura (5.26) e (5.27), podemos verificar que ambas apresentam a mesma amplitude, diante de um carregamento harmônico na frequência de ressonância ω_{crit} .

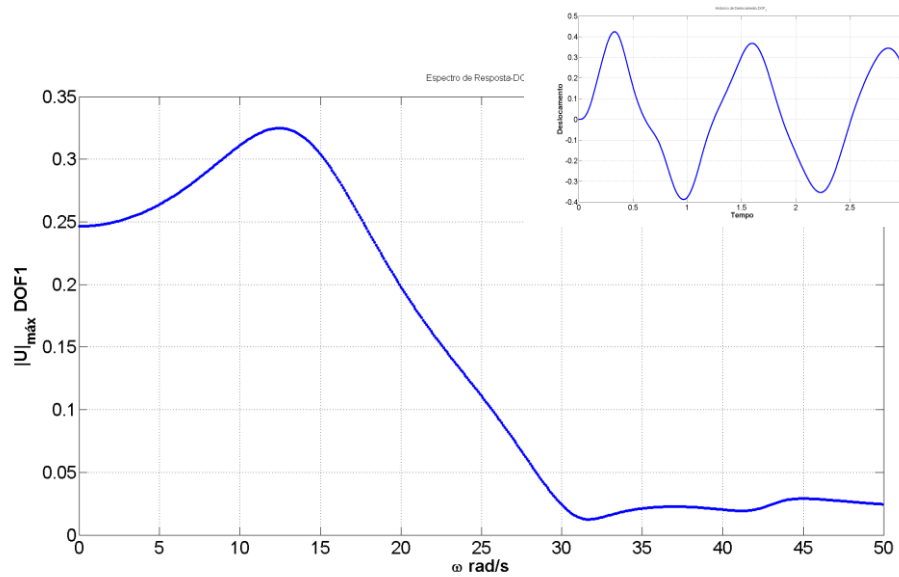


Figura 5.28 M03, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$,

$$|U_{crit}| = 0,3244 \text{ in} .$$

Na figura (5.27) temos o histórico de deslocamento para o modelo 03 assumindo $\omega_{crit} = \omega$.

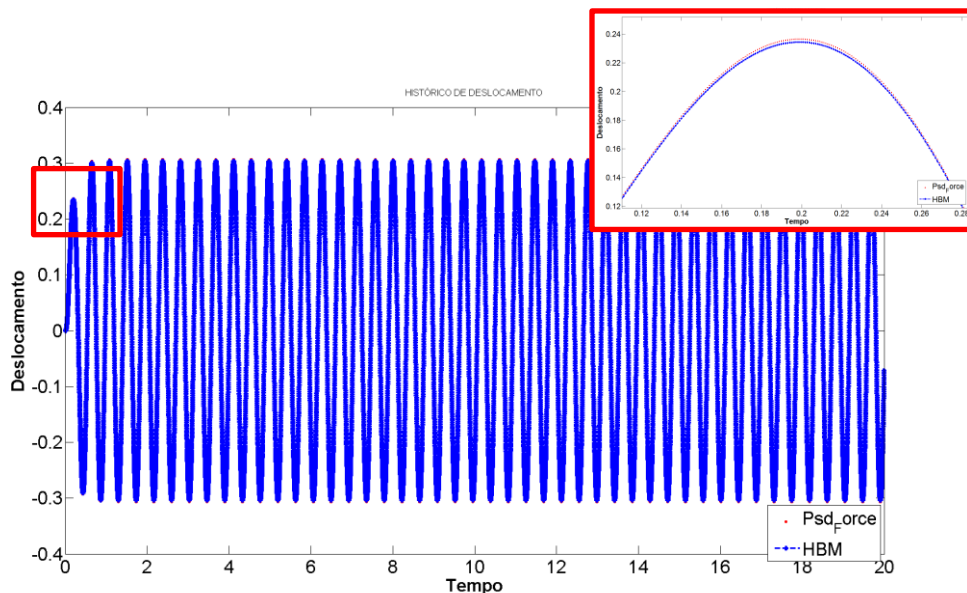


Figura 5.29 M03, ω_{crit} - Histórico de deslocamentos HBM - (DOF_1).

Nas figuras (5.28) é possível verificar as amplitudes no espectro de resposta provocado pelo carregamento harmônico na frequência de ressonância para cada um dos graus de liberdade (DOF_n).

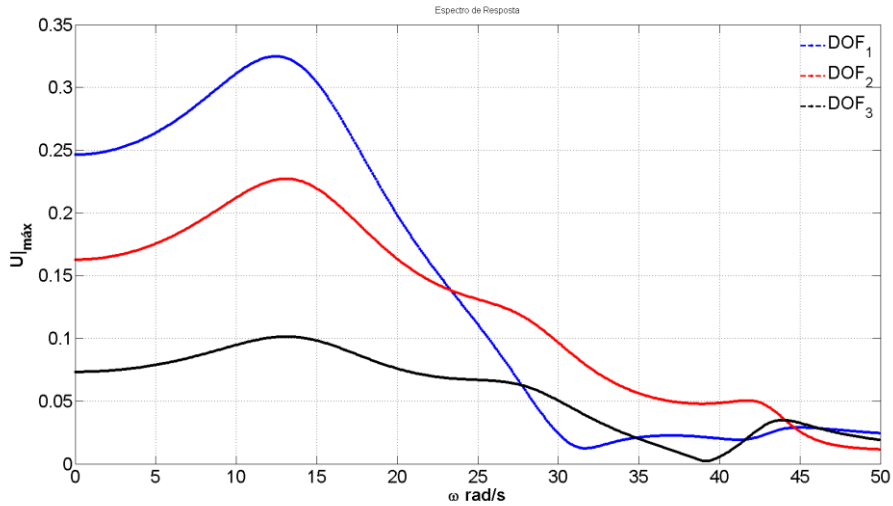


Figura 5.30 M03, ω_{crit} - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{crit}|$.

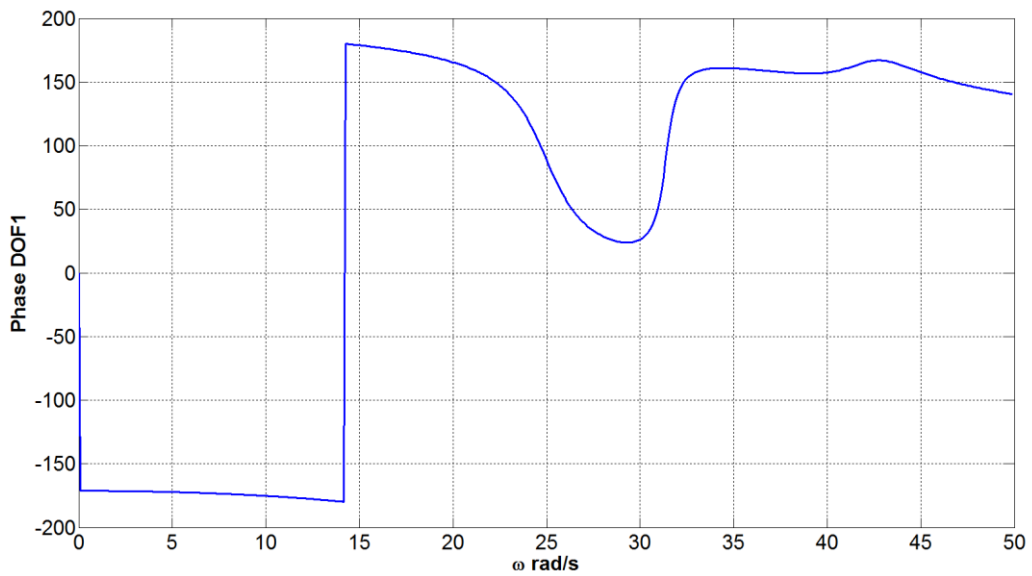


Figura 5.31 M03, ω_{crit} - Relação entre Fase ϕ e Frequência ω via HBM - (DOF_1).

5.3.1.2 Caso 1 - Resposta Permanente a um Carregamento Harmônico

A figura (5.29) apresenta a resposta do espectro para um carregamento harmônico tendo $p(t) = 100\sin(5.0t)$.

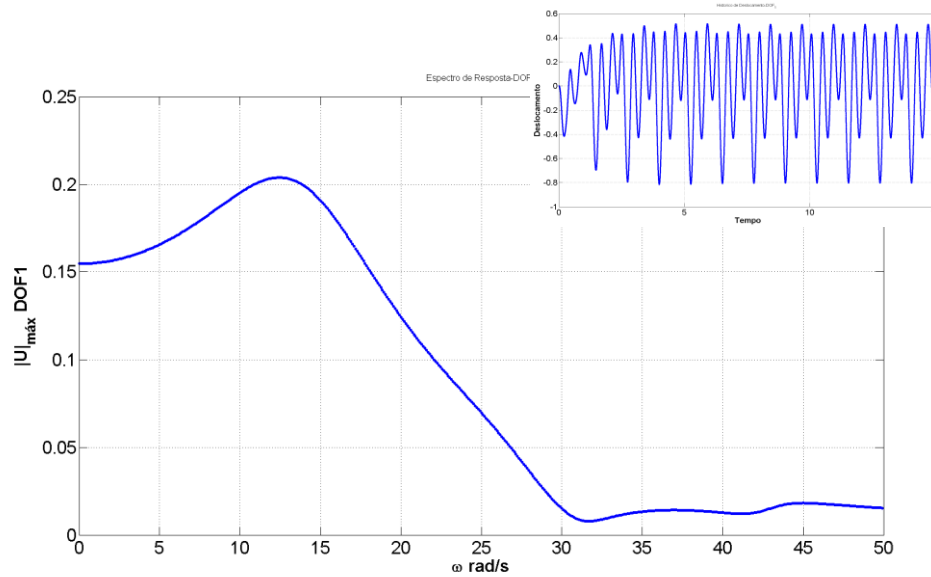


Figura 5.32 M03, C01 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$,

$$|U_{m\acute{a}x}| = 0,195 \text{ in}.$$

A figura (5.30) apresenta a amplitude máxima $|U_{m\acute{a}x}|$ para cada um dos graus de liberdade.

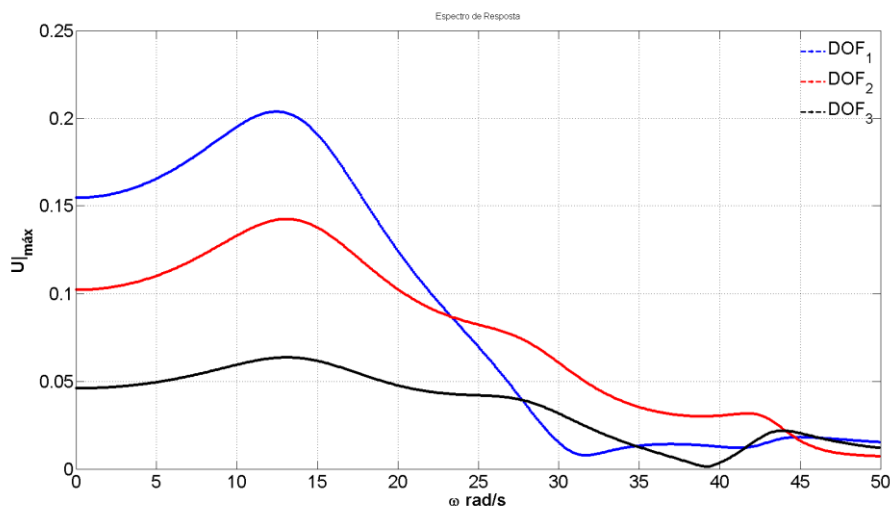


Figura 5.33 M03, C01 - Espectro de resposta - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{m\acute{a}x}|$.

Na figura (5.31) temos o histórico de deslocamento obtido para o grau de liberdade (DOF_1), mediante uma excitação harmônica pela pseudo-forças.

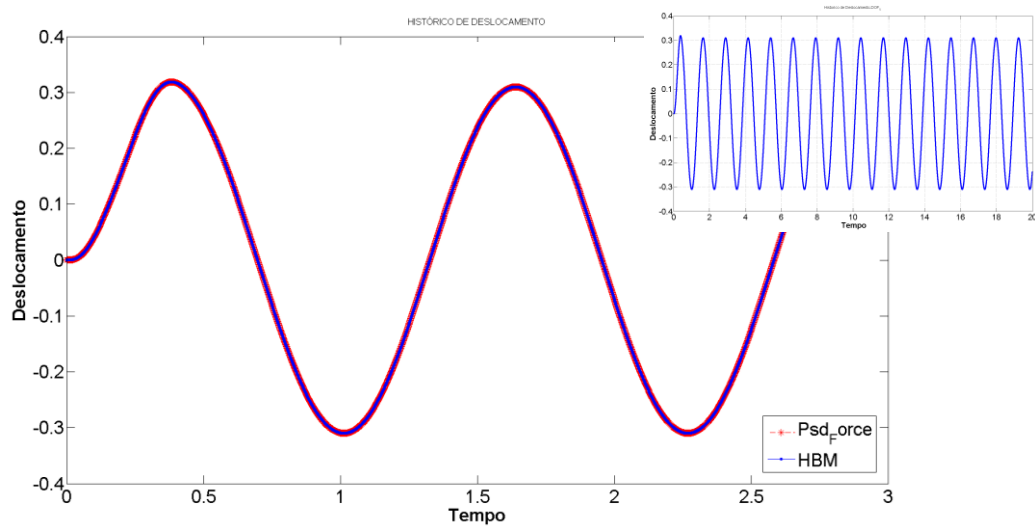


Figura 5.34 M03, C01 - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).

5.3.1.3 Caso 2 - Resposta Permanente a um Carregamento Transiente

A figura (5.32) apresenta a resposta do espectro para um carregamento harmônico dado

pela expressão
$$p(t) = \begin{cases} \frac{-100}{0,05}(t) + 100 \rightarrow 0 \leq t \leq 0,05 \\ 0,00 \rightarrow 0,05 \leq t \leq 3,00 \end{cases} .$$

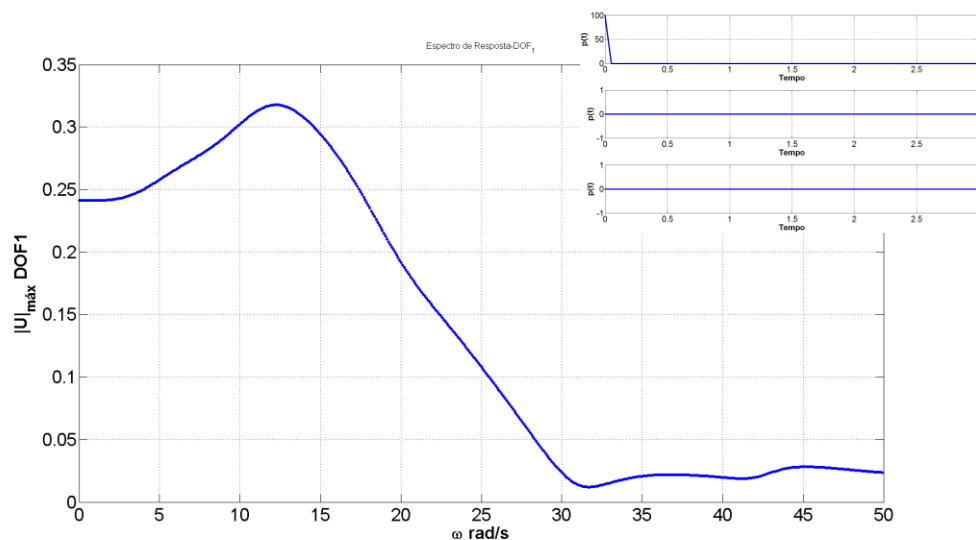


Figura 5.35 M03, C02 - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 14,50 \text{ rad/s}$,

$$|U_{m\acute{a}x}| = 0,3176 \text{ in} .$$

A figura (5.33) apresenta a amplitude máxima $|U_{m\acute{a}x}|$ para cada um dos graus de liberdade.

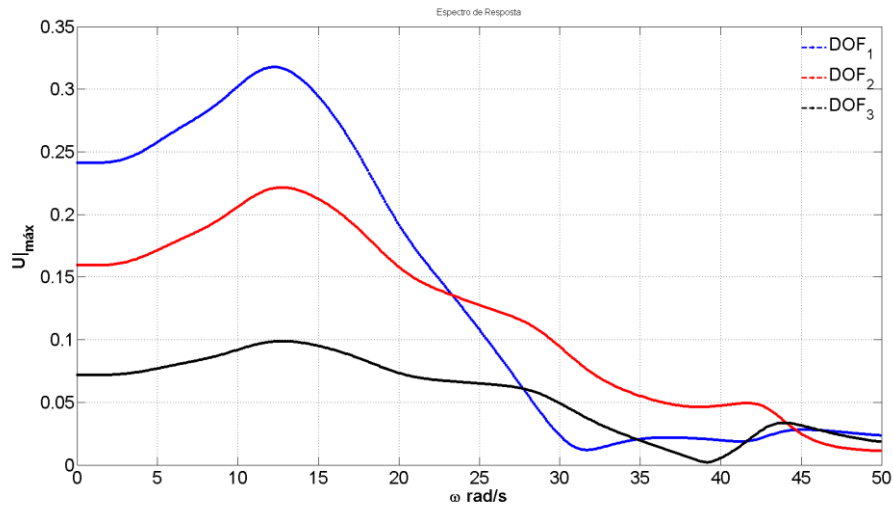


Figura 5.36 M03, C02 - Espectro de resposta - (DOF₁, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{m\acute{a}x}|$.

Também na figura (5.37) é possível avaliar o histórico de deslocamento dado pela formulação no domínio da frequência e compara-lo com os resultados apresentados por Santolin (2006, p. 81).

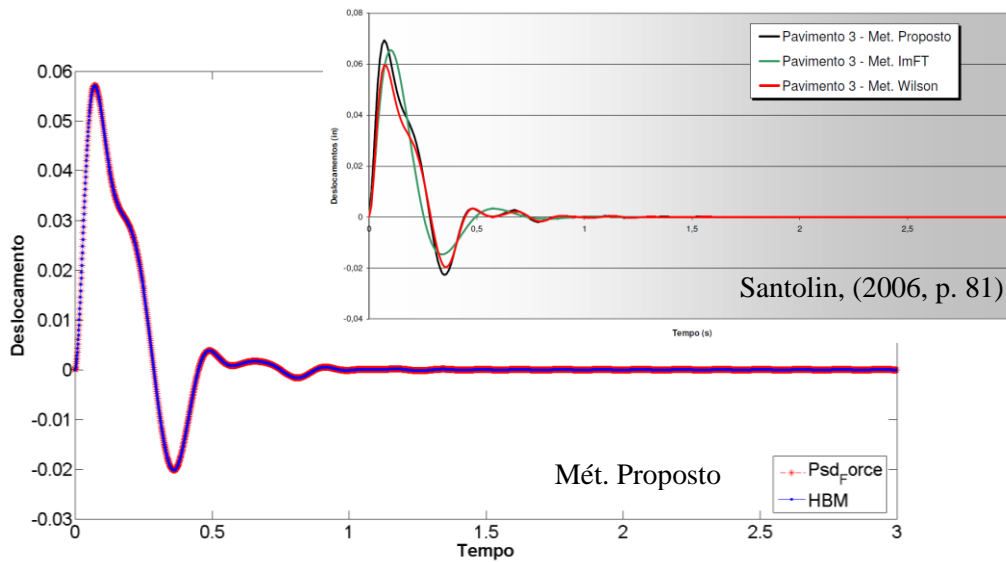


Figura 5.37 M03, C02 - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF₁).

5.3.1.4 Resultados

Para melhor avaliar os resultados obtidos em relação à amplitude crítica $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância e a amplitude máxima $|U_{máx}|$ para um dado modelo de carregamento temos os resultados obtidos como mostrado na tabela (5.2) onde se observa:

Tabela 5.2 Amplitudes e deslocamento máximos em função do carregamento

Modelo de Excitação	Pseudo-Forças		HBM	
	$ U_{crit} $	$ u_{máx} $	$ U_{crit} $	$ u_{máx} $
Ressonância $ u_{crit} $	0,303	0,303	0,324	0,324
Harmônico		0,3188	0,195	0,3188
Transiente		0,0571	0,317	0,0571

Avaliando as amplitudes máximas $|U_{máx}|$ dadas em função do tipo de carregamento podemos verificar que estas se apresentam menores que a amplitude crítica $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância. Se compararmos com a amplitude do sistema sem adição do amortecedor discreto para o caso do carregamento transiente $|U_{máx}| = 2.591 \text{ in}$ dado na tabela (5.1), e compararmos com o valor apresentado na tabela (5.2), tem-se uma redução significativa na resposta do sistema, relacionado então com a amplitude máxima $|U_{máx}|$.

Quanto a histórico de resposta, o método HBM proposto neste trabalho, apresenta bons resultados se compararmos com a resposta obtida pelo método das Pseudo-Forças. Onde se percebe a única diferença relativa acontece quanto a resposta da estrutura e avaliada sobre a frequência de ressonância, conforme abordagem do método das Pseudo-Forças o mesmo tem sua resposta em um domínio onde os deslocamentos vão de pequenos a moderados, oque não acontece com uma estrutura excitada na frequência de ressonância, por isso os resultados apresentam divergência em seus respectivos valores.

5.3.2 Modelo 04

O modelo a ser analisado agora consiste em um modelo estrutural discreto que será submetido a um carregamento impulsivo $p(t) = \begin{cases} 100 \rightarrow 0 \leq t \leq 0,1 \\ 0,00 \rightarrow 0,1 \leq t \leq 3,00 \end{cases}$, para avaliar a resposta obtida pelo método proposto com o apresentado por Santolin (2006, p. 84).

O grau de liberdade 01 (DOF_1) segue como nos modelos anteriores. O que se difere dos anteriores é que neste modelo 04 aos graus de liberdade 02 (DOF_2) e 03 (DOF_03) serão adicionados amortecedores discretos c_2 e c_3 , onde se pretende avaliar a influência que o amortecedor pode trazer em relação à amplitude máxima $|u_{máx}|$ obtida pelo espectro de resposta.

A figura (5.35) apresenta o modelo estrutural que será então avaliado à resposta em função da amplitude máxima $|u_{máx}|$ variando parâmetros associados ao amortecimento.

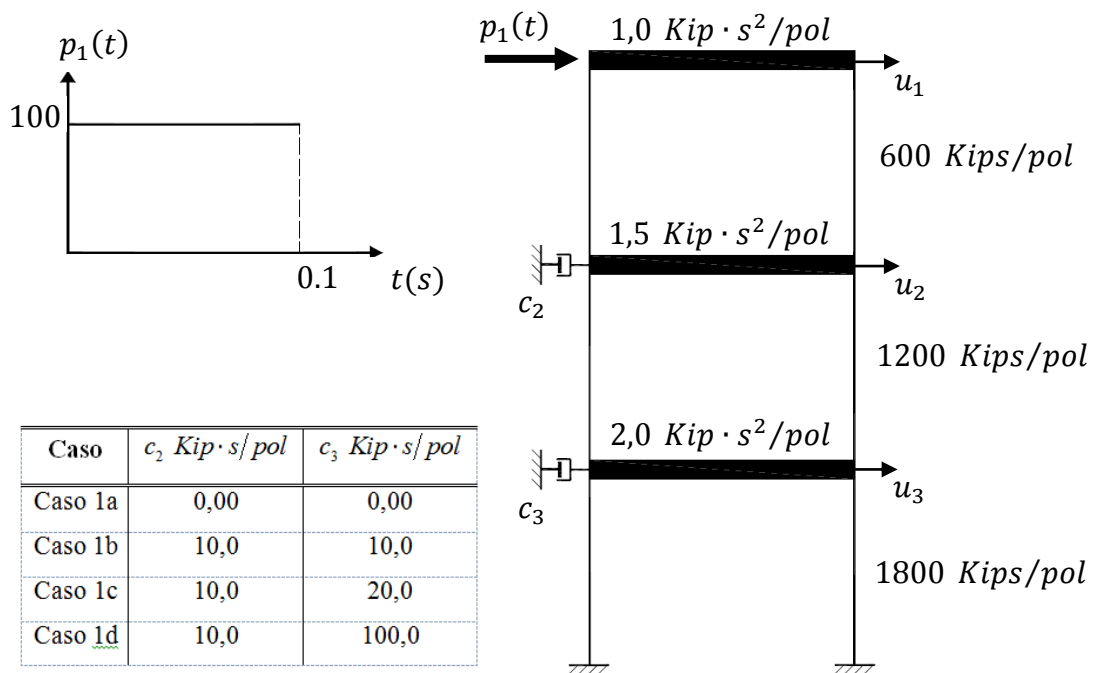


Figura 5.38 Modelo estrutural discreto – Modelo 04.

Neste modelo 04 optou-se por verificar somente o carregamento transiente, pois o mesmo apresenta as maiores amplitudes em relação demais modelos de carregamento já analisados, mesmo considerando a amplitude máxima em relação à frequência de

ressonância. Na tabela (5.3) mostrada abaixo, é possível verificar os valores pelo quais se optou somente por analisar a resposta para excitações transientes.

Tabela 5.3 Amplitudes máximas em relação à frequência de ressonância

C	Pseudo-Forças $ U_{crit} $	HBM $ U_{crit} $	
	$N = 1024$	$N = 1024$	$N = 3072$
Caso 1a	3,22	3,869	3,435
Caso 1b	0,981	1,110	0,979
Caso 1c	0,900	1,000	0,890
Caso 1d	0,654	0,652	0,655

Os valores mostrados na tabela (5.3) são para carregamento harmônico como apresentado nas análises anteriores, na frequência de ressonância.

5.3.2.1 Caso 1a - Resposta Permanente a um Carregamento Transiente

Os amortecedores discretos c_2 e c_3 adicionados a matriz de amortecimento, sem contabilizar a suas contribuições, ou seja, $c_2 = c_3 = 0$, sendo a matriz de amortecimento do sistema dada pela expressão (5.10).

$$C = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 8,9 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 16,4 \end{bmatrix} \text{Kip} \cdot \text{s/pol} \quad 5.10$$

Quanto ao vetor de forças de referência é o mesmo foi apresentado no item (5.3.2), sendo este o mesmo utilizado em todos os quatro (04) casos.

Na figura (5.39) é possível então avaliar a resposta do espectro para um carregamento impulsivo, e avaliar a sua respectiva amplitude máxima $|U_{máx}|$.

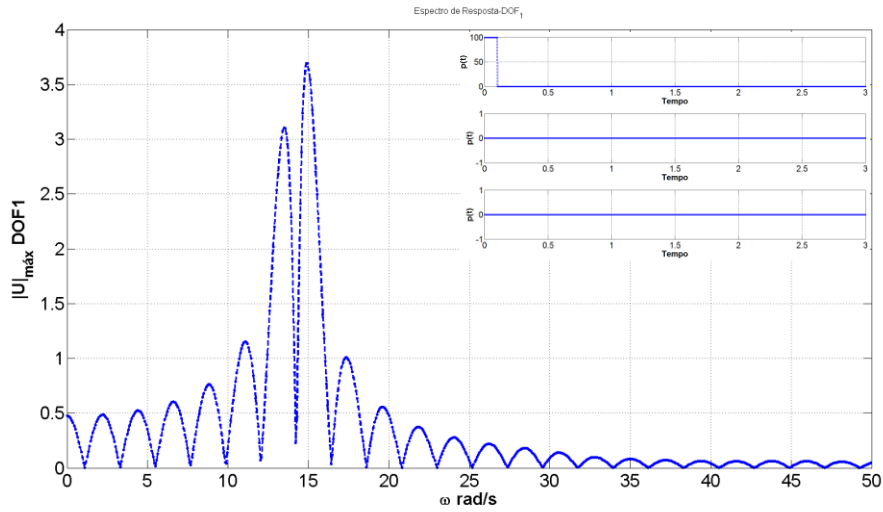


Figura 5.39 M04, C01a - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 15,0 \text{ rad/s}$,

$$|U_{m\acute{a}x}| = 3,69 \text{ in} .$$

A figura (5.41) apresenta a amplitude máxima $|U_{m\acute{a}x}|$ para cada um dos graus de liberdade.

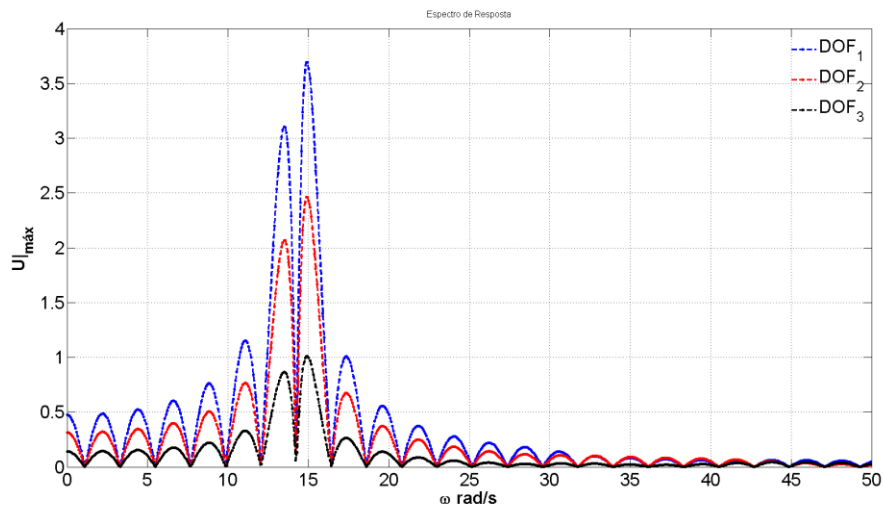


Figura 5.40 M04, C01a - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|u_{m\acute{a}x}|$.

Também na figura (5.41) é possível avaliar o histórico de deslocamento dado pela formulação no domínio da frequência e compara-lo com os resultados apresentados por Santolin (2006, p. 86).

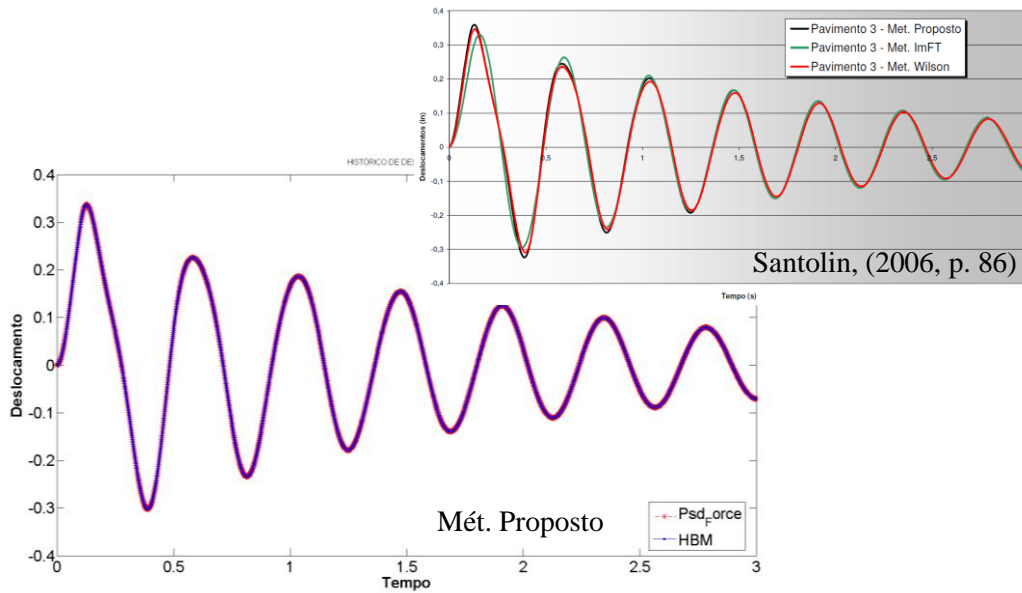


Figura 5.41 M04, C01a - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).

Na tabela (5.4) é comparada a amplitude $|U_{m\acute{a}x}|$ dada pelo carregamento aqui apresentado, e a amplitude $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância.

5.3.2.2 Caso 1b - Resposta Permanente a um Carregamento Transiente

Os amortecedores discretos c_2 e c_3 adicionados a matriz de amortecimento, são agora contabilizados onde $c_2 = 10 \text{ Kip} \cdot \text{s}/\text{pol}$ e $c_3 = 10 \text{ Kip} \cdot \text{s}/\text{pol}$, para o caso (1b), sendo a matriz de amortecimento do sistema dada pela expressão (5.11).

$$C = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 18,9 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 26,4 \end{bmatrix} \text{Kip} \cdot \text{s}/\text{pol} \quad 5.11$$

Na figura (5.42) é possível então avaliar a resposta do espectro para um carregamento impulsivo, e avaliar a sua respectiva amplitude máxima $|U_{m\acute{a}x}|$.

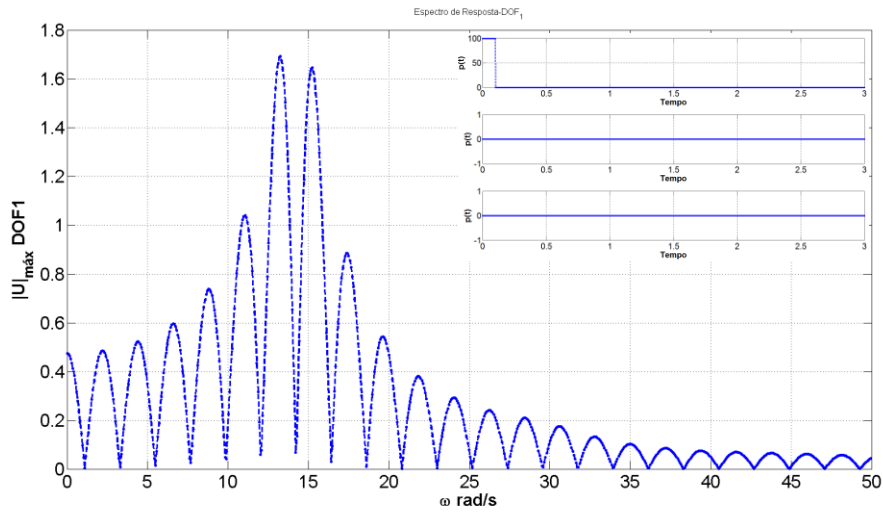


Figura 5.42 M04, C01b - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 15,0 \text{ rad/s}$,

$$|U_{m\acute{a}x}| = 1,643 \text{ in} .$$

A figura (5.43) apresenta a amplitude máxima $|U_{m\acute{a}x}|$ para cada um dos graus de liberdade.

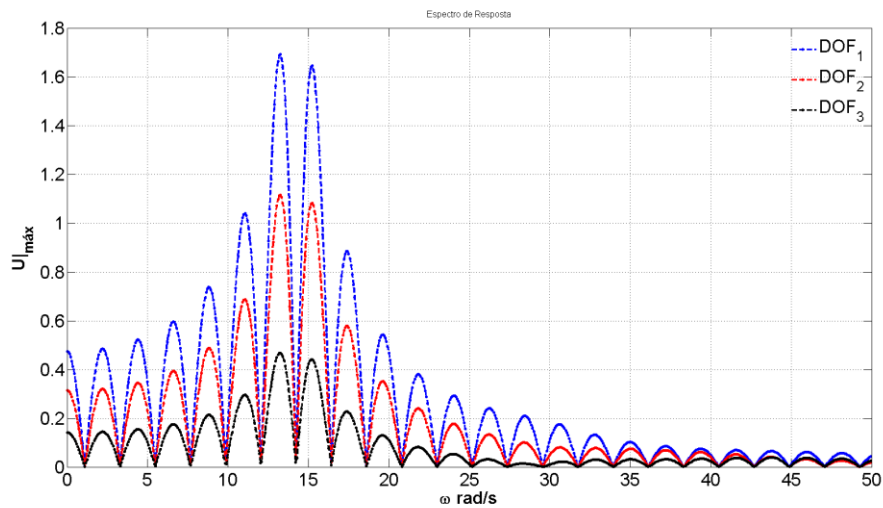


Figura 5.43 M04, C01b - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{m\acute{a}x}|$.

Também na figura (5.44) é possível avaliar o histórico de deslocamento dado pela formulação no domínio da frequência e compará-lo com os resultados apresentados por Santolin (2006, p. 88).

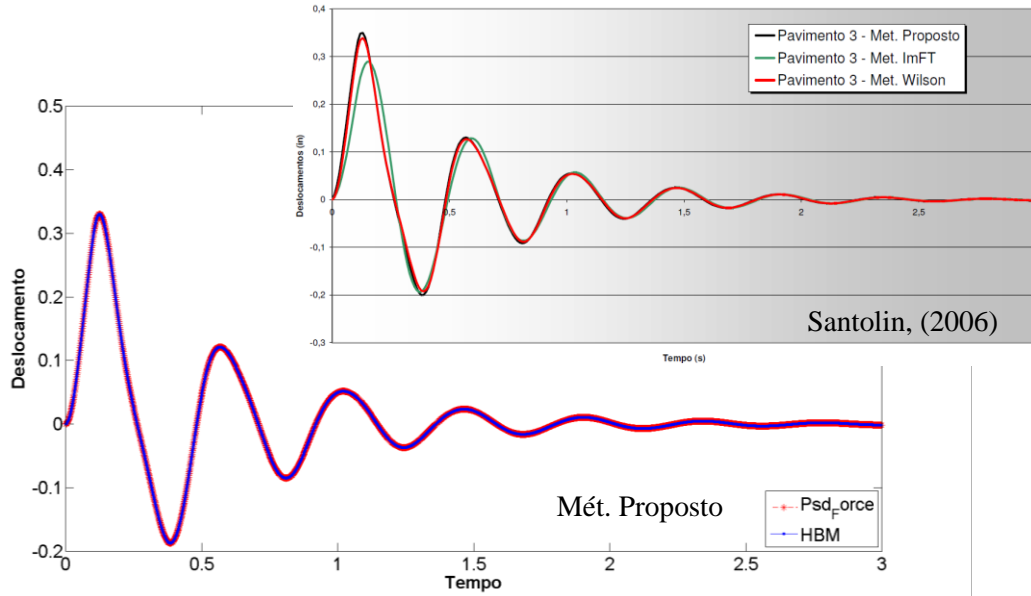


Figura 5.44 M04, C01b - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).

Na tabela (5.4) é comparada a amplitude $|U_{m\acute{a}x}|$ dada pelo carregamento aqui apresentado, e a amplitude $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância.

5.3.2.3 Caso 1c - Resposta Permanente a um Carregamento Transiente

Os amortecedores discretos c_2 e c_3 adicionados a matriz de amortecimento, são agora contabilizados onde $c_2 = 10 \text{ Kip} \cdot \text{s/pol}$ e $c_3 = 20 \text{ Kip} \cdot \text{s/pol}$, para o caso (1c), sendo a matriz de amortecimento do sistema dada pela expressão (5.12).

$$C = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 18,9 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 36,4 \end{bmatrix} \text{Kip} \cdot \text{s/pol} \quad 5.12$$

Na figura (5.45) é possível então avaliar a resposta do espectro para um carregamento impulsivo, e avaliar a sua respectiva amplitude máxima $|U_{m\acute{a}x}|$.

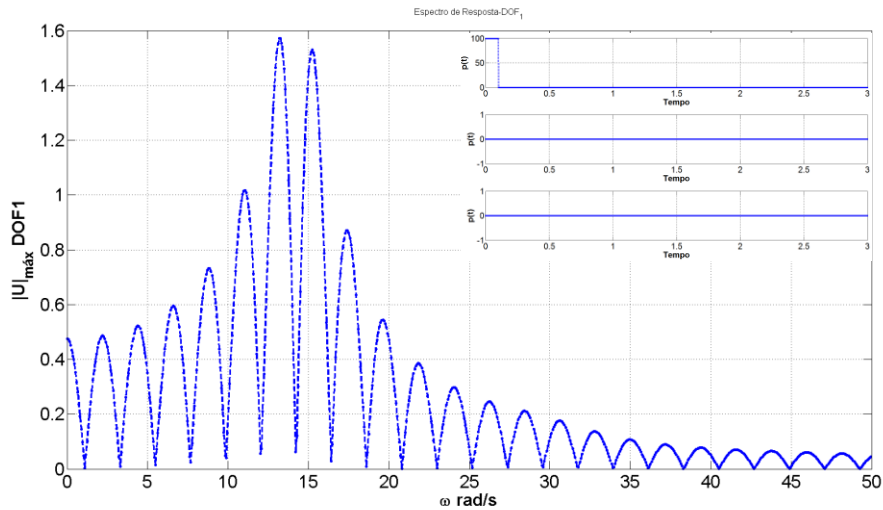


Figura 5.45 M04, C01c - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 15,0 \text{ rad/s}$,

$$|U_{m\acute{a}x}| = 1,523 \text{ in} .$$

A figura (5.46) apresenta a amplitude máxima $|u_{m\acute{a}x}|$ para cada um dos graus de liberdade.

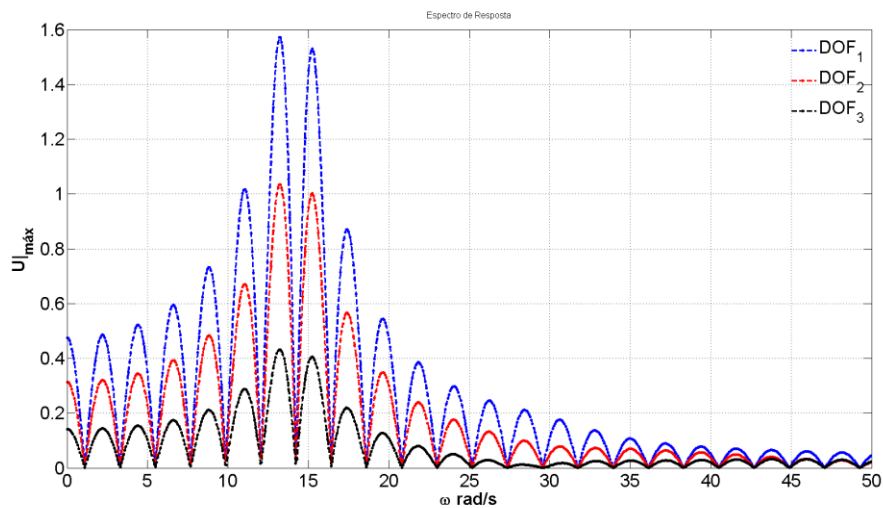


Figura 5.46 M04, C01c - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|U_{m\acute{a}x}|$.

Também na figura (5.47) é possível avaliar o histórico de deslocamento dado pela formulação no domínio da frequência e compara-lo com os resultados apresentados por Santolin (2006, p. 90).

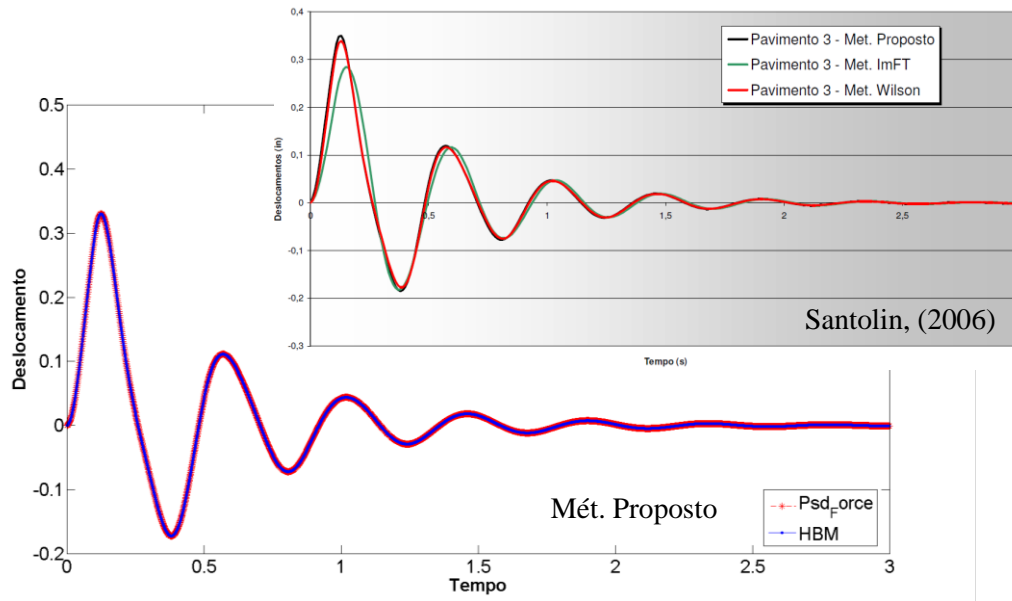


Figura 5.47 M04, C01c - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).

Na tabela (5.4) é comparada a amplitude $|U_{m\acute{a}x}|$ dada pelo carregamento aqui apresentado, e a amplitude $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância.

5.3.2.4 Caso 1d - Resposta Permanente a um Carregamento Transiente

Os amortecedores discretos c_2 e c_3 adicionados a matriz de amortecimento, são agora contabilizados onde $c_2 = 10 \text{ Kip} \cdot \text{s}/\text{pol}$ e $c_4 = 100 \text{ Kip} \cdot \text{s}/\text{pol}$, para o caso (1d), sendo a matriz de amortecimento do sistema dada pela expressão (5.13).

$$C = \begin{bmatrix} 3,1 & -3,1 & 0,0 \\ -3,1 & 18,9 & -5,8 \\ 0,0 & -5,8 & 116,4 \end{bmatrix} \text{Kip} \cdot \text{s}/\text{pol} \quad 5.13$$

Na figura (5.48) é possível então avaliar a resposta do espectro para um carregamento impulsivo, e avaliar a sua respectiva amplitude máxima $|U_{m\acute{a}x}|$.

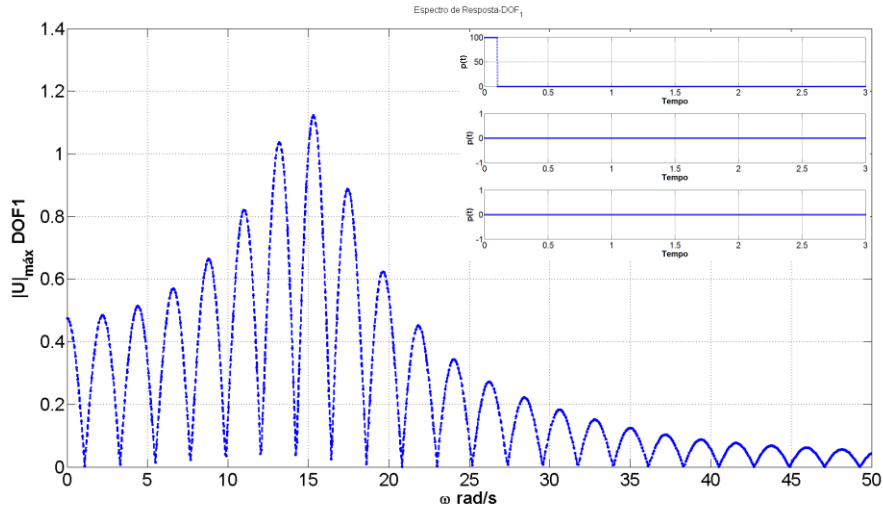


Figura 5.48 M04, C01d - Espectro de resposta HBM - (DOF_1), $\omega_{crit} = 15,0 \text{ rad/s}$,

$$|U_{m\acute{a}x}| = 1,116 \text{ in} .$$

A figura (5.49) apresenta a amplitude máxima $|U_{m\acute{a}x}|$ para cada um dos graus de liberdade.

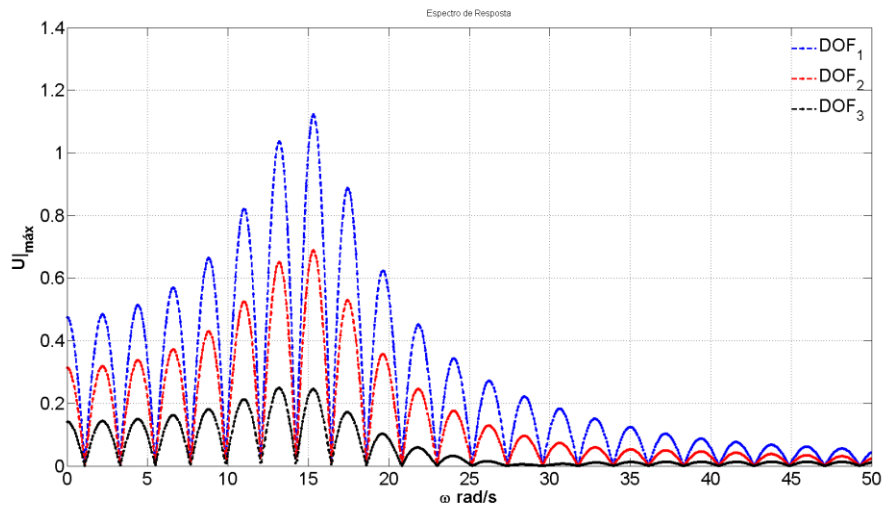


Figura 5.49 M04, C01d - Espectro de resposta HBM - (DOF_1, 2 e 3), ω_{crit} e $|u_{m\acute{a}x}|$.

Também na figura (5.50) é possível avaliar o histórico de deslocamento dado pela formulação no domínio da frequência e compará-lo com os resultados apresentados por Santolin (2006, p. 94).

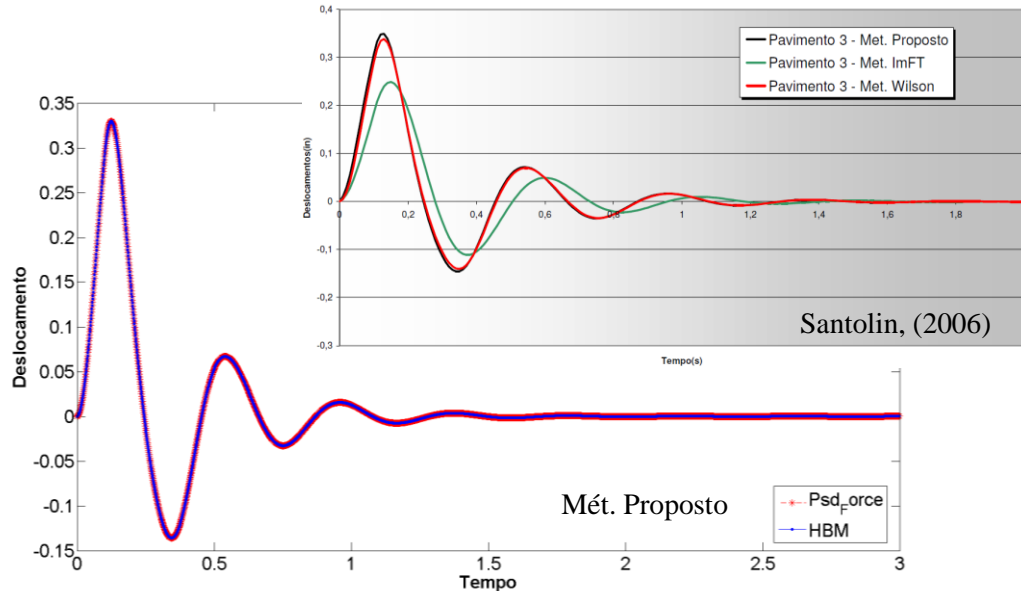


Figura 5.50 M04, C01d - Histórico de deslocamentos $u(t)$ - P_Force / HBM - (DOF_1).

Na tabela (5.4) é comparada a amplitude $|U_{m\acute{a}x}|$ dada pelo carregamento aqui apresentado, e a amplitude $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância.

5.3.2.5 Resultados

Para avaliar os resultados obtidos em relação à amplitude crítica $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância e a amplitude máxima $|U_{m\acute{a}x}|$ para um dado modelo de carregamento temos os resultados obtidos como mostrado na tabela (5.4) onde se observa:

Avaliando as amplitudes máximas $|U_{m\acute{a}x}|$ para o modelo 04, tem-se que o carregamento adotado na análise tende a provocar amplitudes maiores que as amplitudes críticas $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância. O amortecimento tem grande influência sobre o resultado como se observa a amplitude obtida pelo caso (1a) e o caso (1b), ou seja, sistema que vem a serem solicitados por carregamentos repentinos de grande amplitude, os amortecedores discretos vem a contribuir para o sistema de uma forma muito significativa.

Tabela 5.4 Amplitudes e deslocamentos máximos em função do amortecimento

C	Pseudo-Forças		HBM	
	$ U_{crit} $	$ u_{máx} $	$ U_{crit} $	$ u_{máx} $
Caso 1a		0,3369	3,690	0,3369
Caso 1b		0,3305	1,643	0,3305
Caso 1c		0,3304	1,523	0,3304
Caso 1d		0,3299	1,116	0,3298

Na mesma tabela, podemos verificar que a inclusão do amortecimento discreto traz vantagens ao sistema, mais ele se torna mais eficiente se todos os amortecedores apresentarem o mesmo valor. Como se observa a resposta dada na tabela (5.4) caso (1b) ao caso (1d), onde o valor de c_3 aumento significativamente porem as amplitudes não responderam em proporção ao amortecimento adotado.

Capítulo 6

Considerações Finais

6.1 Conclusões

No presente trabalho são abordadas metodologias que permitem avaliar a resposta de um sistema dinâmico no domínio da frequência, cada um apresentando suas peculiaridade e limitações. Optou-se por fazer uso do Método do Balanço Harmônico, pois o mesmo fornece o histórico de deslocamento, neste caso no domínio do tempo, sem perder a resposta do espectro, sendo este último à solução em amplitudes modais.

A estabilidade das soluções fornecidas pelo Método do Balanço Harmônico, em relação aos outros dois métodos, que foram comparados a partir de modelos numéricos, nos permite as seguintes considerações:

O Método do Balanço Harmônico pode ser utilizado para obter a resposta no domínio da frequência, quanto no tempo ou um processo misto frequência e tempo.

O precisão e convergência dos resultados foram satisfatórias, tanto para sistemas dotados de amortecimento proporcional ou não proporcional, o que nos permite facilmente implementar para sistemas de amortecimento dependente da frequência, pois o mesmo passa por este domínio antes de nos fornecer a resposta no tempo.

Em relação ao desempenho o Método do Balanço Harmônico, necessita de maior tempo de processamento para fornecer a resposta do sistema em relação aos outros métodos supracitados neste trabalho. Isto se deve ao fato de que o vetor de amplitudes modais é obtido de forma implícita, ou seja, a solução é baseada na solução de um sistema de equações lineares.

O espectro de resposta fornecido pelo HBM, no caso de carregamentos harmônicos ou periódicos é uma função suave, enquanto para carregamentos combinados ou impulsivos este apresenta decaimento da resposta do espectro, este fato se deve a FFT de $p(t)$ que passa então a ser avaliada para cada N termos do carregamento que foi periodizado.

Ao se proceder uma análise harmônica o HBM pode apresentar resultados satisfatórios, ao se avaliar a resposta em uma frequência discreta ω , com isso podemos obter facilmente a amplitude dos deslocamentos $|U|$, associado a parâmetro do sistema.

Tirando as amplitudes críticas $|U_{crit}|$ na frequência de ressonância ω_{crit} , cujos valores são máximos, o carregamento que apresenta os maiores deslocamento e amplitudes são os carregamentos impulsivos, como pode ser observado no desenvolvimento do trabalho. Quanto maior for à amplitude de $p(t)$ e menor o intervalo de tempo de ação do mesmo, este provoca deslocamentos maiores do que submeter o sistema a uma excitação harmônica por um período longo ou estendido.

Quanto à inclusão de dissipadores de energia, neste caso amortecimento discreto, pode-se avaliar que o mesmo é muito importante na resposta do sistema, seja em relação à $|U_{crit}|$ ou relação $|U|$ qualquer. Porém ao avaliar a resposta no domínio do tempo temos que o melhor modelo de amortecimento a ser adotado seria aquele distribuído de forma homogênea no sistema.

O método da ImFT não pode se utilizado para comparar a resposta no modelo 03 e 04, pois com o aumento dos parâmetros associados ao amortecimento e conseqüentemente aumento do acoplamento do sistema, faz com que os resultados diverjam. O método das Pseudo-Forças foi utilizado então para comparar a resposta no histórico do tempo como o método proposto HBM, apresentando nas duas implementações ótimos resultados.

Desta forma os modelos numéricos apresentados tiveram o objetivo de validar o método é o programa desenvolvido neste trabalho, a fim de permitir o mesmo integre o forneça resultados quanto a resposta de sistema estruturais maiores ou mais complexos.

6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Deixo aqui algumas sugestões para trabalhos futuros que podem tomar como base a formulação apresentada neste trabalho.

Incluir o método em um programa baseado em elementos finitos, permitindo obter a resposta de sistemas dinâmicos compostos por elementos de pórticos ou placas.

Avaliar a resposta do espectro mediante a inclusão dos efeitos de não linearidade geométrica e física.

Expandir o Método do Balanço Harmônico para o Método do Balanço Harmônico Incremental.

Avaliar a resposta para sistemas dotados de amortecimento dependente da frequência e histerético.

O desenvolvimento de uma GUI que permita a visualização dinâmica do espectro e o histórico de deslocamento.

Referências Bibliográficas

BATHE, K. J., 1996. Finite Element Procedures. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

BRIGHAM, E. O., 1974. The Fast Fourier Transform. Prentice-Hall.

CALENZANI, A. F. G., 2002. Análise Dinâmica no Domínio da Frequência de Sistemas com Amortecimento não Clássico. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFES, Vitória, ES, Brasil.

CAMARGO, R. S., 2008. Técnicas Eficientes de Correção de Erros na Análise Dinâmica de Estruturas no Domínio da Frequência. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFES, Vitória, ES, Brasil.

CAMARGO, R. S., FERREIRA, W. G., CALENZANI, A. F., BADKE, A. N., ASSIS, F. N., SILVEIRA, R. A. M., SILVA, A. R. D., 2010. Comparação Didática entre Formulações no Tempo e na Frequência da Análise Dinâmica de Estruturas. XXXVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, Anais... Fortaleza.

CHAMBERLAIN, Z. M. P., 2007. Sistemas com Amortecimento não-proporcional no Domínio da Frequência. Da Vinci, Curitiba, v. 4, n. 1, p. 159-168.

CLARET, A. M., VENÂNCIO-FILHO, F., 1991. A modal superposition pseudo-forças method for dynamics analysis of structural system with non-proportional damping. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, n.20, p. 303-315.

CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., 1993. Dynamics of structures. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1993.

FERREIRA, M. B., 2003. Um Método Recursivo de Geração da Função de Resposta Complexa em Frequência. Dissertação de Mestrado, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

- FERREIRA, W. G., 1998. Análise dinâmica não linear no domínio da frequência em sistemas estruturais com amortecimento não proporcional. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- FERREIRA, W. G., CAMARGO, R. S., FRASSON, A., MANSUR, W. J., 2007. O Número Complexo e seu uso na Engenharia Estrutural. XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, Anais... Curitiba.
- FERREIRA, W. G., SECHIM, C., FREITAS, M. S., 2000. Análise dinâmica no domínio do tempo de sistemas com múltiplos graus de liberdade. Aplicação em pórticos metálicos. Revista Engenharia, Ciência e Tecnologia, Vitória, v. 3, n. 17, p. 93-100.
- FERREIRA, W. G., VENÂNCIO-FILHO, F., CLARET, A. M., MANSUR, W. J., 2000. Um Método Pseudo-Force no domínio da frequência para dinâmicas estruturais análise não linear de Sistemas e nonproportional Amortecimento. Revista da Sociedade Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, v. 22, n. 4, p. 93-100.
- MAMEDE, A. L. G. Z., 2008. Simulação de Modelos Dinâmicos com Amortecimento Não-Proporcional. Dissertação Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- MUNOZ, L. P., SILVA, A. R. D., GONÇALVES, P. B., SILVEIRA, R. A. M., 2014. Análise Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticulares Submetidas a Ações Sísmicas no Domínio da Frequência. Conference:XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, v.1, Fortaleza.
- RIBEIRO, M. V., 1998. Formulação matricial da análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência. Dissertação de Mestrado, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SANTOLIN, A., 2006. Formulação da Análise Dinâmica de Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade no Domínio da Frequência em Coordenadas Físicas. Dissertação de Mestrado, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- VENÂNCIO-FILHO, F., CLARET, A. M., 1995. Frequency domain analysis of MDOF systems: Nodal and Modal coordinates formulations. Computers & Structures, v. 56, n. 1, p. 189-191.