



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas - Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

---



Luma Caroline de Barros

Aplicação de métodos no domínio da frequência para identificação modal de estruturas

Ouro Preto  
2016

Luma Caroline de Barros

Aplicação de métodos no domínio da frequência para identificação modal de estruturas

Ouro Preto  
2016

Luma Caroline de Barros

Aplicação de métodos no domínio da frequência para identificação modal de estruturas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Abrahão Cury

Ouro Preto  
2016

**B277a** Barros, Luma Caroline.  
Aplicação de métodos no domínio da frequência para identificação modal de estruturas [manuscrito] / Luma Caroline Barros. - 2016.  
92f.: il.: color, grafis, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Abrahão Cury.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.  
Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Análise modal. 2. Métodos de simulação. 3. Dinâmica estrutural. I. Cury, Alexandre Abrahão. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624.01

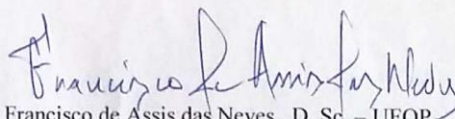
**APLICAÇÃO DE MÉTODOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA  
IDENTIFICAÇÃO MODAL DE ESTRUTURAS**

**AUTORA: LUMA CAROLINE DE BARROS**

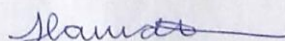
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 26 de agosto de 2016, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Alexandre Abrahão Cury, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Francisco de Assis das Neves, D. Sc. – UFOP



Prof. Flávio de Souza Barbosa, D. Sc. – UFJF

*À minha família, em especial aos meus pais.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus por todas as bênçãos a mim concedidas e por estar presente em todos os momentos de minha vida.

Aos meus pais, Alceu e Rosângela, que me apoiaram, incentivaram, investiram no meu futuro e que muitas vezes acreditaram em mim mais que eu mesma. Agradeço por me proporcionarem oportunidades maravilhosas, sempre com muito amor e carinho.

Aos meus queridos irmãos, Leonardo e Lais, que em todos os momentos estiveram ao meu lado.

A toda minha família, pelo apoio e união.

Ao meu namorado, Mário, pelo amor, dedicação, companheirismo, apoio e contribuição a este trabalho.

A minha madrinha Rose pelo incentivo, exemplo, apoio e atenção.

Agradeço também aos meus amigos, os que eu trouxe comigo, e aos que conheci em Ouro Preto.

Aos professores, que compartilharam seus conhecimentos e experiências, especialmente ao Alexandre pela orientação e disponibilidade.

A Universidade Federal de Ouro Preto, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior), que me proporcionaram mais uma etapa de aprendizado.

*O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.  
(José de Alencar)*



## RESUMO

A realização de ensaios de vibração em sistemas estruturais e sua posterior análise são de grande importância prática na área das Engenharias, especialmente para a Engenharia Civil. O monitoramento dinâmico pode desempenhar um papel importante no que se refere à gestão e à manutenção de estruturas, dado que esta ferramenta permite a avaliação periódica ou contínua de pontes, barragens, edifícios, máquinas, estádios e estruturas *offshore*, por intermédio da análise de sua resposta às ações ambientais, sem interromper o seu funcionamento operacional.

De modo geral, o monitoramento dinâmico se faz a partir do acompanhamento da variação das características de vibração das estruturas, comumente chamadas de parâmetros modais. Tais parâmetros são as frequências naturais, as taxas de amortecimento e as formas modais de vibração do sistema estrutural em estudo.

O escopo desta dissertação consiste em uma análise comparativa de duas técnicas existentes na literatura e utilizadas para identificação modal de estruturas. Mais especificamente, são abordados dois métodos para a identificação modal no domínio da frequência, com base na análise da resposta das estruturas às ações a que comumente estão sujeitas. Assim, elencam-se: o método da seleção de picos (PP - *Peak Picking*) e o método da decomposição no domínio da frequência (FDD - *Frequency Domain Decomposition*).

Com o objetivo de comparar o desempenho desses métodos, visando evidenciar as potencialidades e as limitações de cada um, e determinar a capacidade deles em identificar frequências naturais próximas, simulações numéricas foram realizadas no software MATLAB e alguns estudos de casos de estruturas de pequeno e grande porte ensaiadas experimentalmente foram explorados.

Os parâmetros modais identificados foram comparados aos resultados obtidos analiticamente, numericamente ou, ainda, aos de outros trabalhos. Assim, foi possível mostrar que métodos PP e FDD são capazes de fazer uma identificação satisfatória das frequências naturais e dos modos de vibração. Por fim, são apresentadas considerações sobre o trabalho elaborado e sugestões que poderão ser desenvolvidas em trabalhos futuros.

**Palavras-chaves:** análise modal, métodos de identificação modal no domínio de frequência, monitoramento de estruturas e frequências naturais próximas

## ABSTRACT

The execution of vibration tests on structural systems and their analysis are of great practical importance to the field of engineering, especially for the Civil Engineering. Dynamic monitoring can play an important role with regard to the management and maintenance of structures, as it allows periodic or continuous evaluation of bridges, dams, buildings, machinery, stadiums and offshore structures through the analysis of their output due to environmental actions without interrupting their operational functioning.

In general, dynamic monitoring is achieved by monitoring the variation of structural vibration characteristics, commonly named modal parameters. Such parameters are the natural frequencies, damping ratios and vibration mode shapes of the structural system under study.

The scope of this paper consists of a comparative analysis of some existing techniques used to structural modal identification. More specifically, some methods are addressed for the modal identification in the frequency domain. They are: the Peak Picking method (PP) and Frequency Domain Decomposition (FDD).

Aiming to compare the performance of these methods and in order to highlight the potentialities and limitations of each one and to determine their ability to identify closely-spaced natural frequencies, numerical simulations were performed in the MATLAB software and some cases of small and large structures tested experimentally are explored.

The resulting modal parameters are compared to the results obtained analytically, numerically or to other papers results. Thus, it was possible to show that PP and FDD methods are able to make a satisfactory identification of natural frequencies and vibration mode shapes. Finally, some considerations are presented as well as suggestions that may be developed in future works.

**Keywords:** modal analysis, modal identification methods in the frequency domain, monitoring structures and close natural frequencies

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Classificação dos métodos. Fonte: Maia e Silva (2001) .....	5
Figura 2 - Estrutura com vários graus de liberdade. Fonte: Clough e Penzien (1993)...	6
Figura 3 - Método da meia potência para determinação do amortecimento em um sistema com um grau de liberdade. Fonte: Silva (2007) .....	17
Figura 4 - Sinal sem ruído - Caso Controle I .....	25
Figura 5 - Sinal com adição de 10% de ruído - Caso Controle I .....	26
Figura 6 - Sinal com adição de 20% de ruído - Caso Controle I .....	26
Figura 7 - Espectros gerados pelos métodos - Caso Controle I .....	29
Figura 8 - Sinal sem ruído e 10 segundos de ensaio .....	31
Figura 9 - Sinal com adição de 10% de ruído e 10 segundos de ensaio .....	31
Figura 10 - Sinal com adição de 20% de ruído e 10 segundos de ensaio .....	31
Figura 11 - Avaliação do erro relativo na identificação das frequências próprias - sinal sem ruído - métodos PP e FDD .....	33
Figura 12 - Avaliação do erro relativo na identificação das taxas de amortecimento - sinal sem ruído - método PP .....	33
Figura 13 - Avaliação do erro relativo na identificação das frequências próprias - sinal com 10% de ruído - métodos PP e FDD .....	35
Figura 14 - Avaliação do erro relativo na identificação das taxas de amortecimento - sinal com 10% de ruído - método PP .....	35
Figura 15 - Avaliação do erro relativo na identificação das frequências próprias - sinal com 20% de ruído - métodos PP e FDD .....	37
Figura 16 - Avaliação do erro relativo na identificação das taxas de amortecimento - sinal com 20% de ruído - método PP .....	37
Figura 17 - Espectros gerados pelos métodos - Caso Controle II .....	38
Figura 18 - Representação da viga estudada. Fonte: Alves (2012).....	39
Figura 19 - Sinal sem ruído - Viga Modelada Computacionalmente.....	40
Figura 20 - Sinal com adição de 10% de ruído - Viga Modelada Computacionalmente .....	40
Figura 21 - Sinal com adição de 20% de ruído - Viga Modelada Computacionalmente .....	40
Figura 22 - Modos de vibração obtidos pelo PP para uma viga modelada computacionalmente sem ruído .....	42
Figura 23 - Modos de vibração obtidos pelo FDD para uma viga modelada computacionalmente sem ruído .....	42

Figura 24 - Formas modais de vibração identificadas pelo PP para uma viga modelada computacionalmente com 10% de ruído .....	43
Figura 25 - Formas modais identificadas pelo FDD para uma viga modelada computacionalmente com 10% de ruído .....	44
Figura 26 - Modos de vibração obtidos pelo método PP para uma viga modelada computacionalmente com 20% de ruído .....	45
Figura 27 - Modos de vibração obtidos pelo método FDD para uma viga modelada computacionalmente com 20% de ruído .....	45
Figura 28 - Espectros gerados pelos métodos - Viga Modelada Computacionalmente .....	46
Figura 29 - Viga de aço biapoiada e instrumentada .....	46
Figura 30 - Sinal do ensaio com excitação por impacto .....	47
Figura 31 - Sinal do ensaio com excitação aleatória .....	48
Figura 32 - Formas modais obtidas pelo método PP (ensaio de excitação aleatória)..	50
Figura 33 - Formas modais obtidas pelo método FDD (ensaio de excitação aleatória). .....	50
Figura 34 - Espectros gerados pelos métodos - Viga Biapoiada (COPPE) - ensaio de excitação aleatória .....	51
Figura 35 - Formas modais de vibração identificadas pelo PP (ensaio de excitação por impacto).....	52
Figura 36 - Formas modais de vibração obtidas pelo FDD (ensaio de excitação por impacto).....	53
Figura 37 - Espectros gerados pelos métodos - Viga Biapoiada (COPPE) - ensaio de excitação por impacto .....	53
Figura 38 - Ponte PI-57. Fonte: Cury (2010) .....	54
Figura 39 - Acelerômetros instrumentados na estrutura. Fonte: Cury (2010) .....	54
Figura 40 - Posicionamento dos acelerômetros na estrutura. Fonte: Cury (2010).....	55
Figura 41 - Sinal registrado durante ensaio da Ponte PI-57 .....	55
Figura 42 - Primeiro modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Flexão .....	57
Figura 43 - Segundo modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Flexão .....	57
Figura 44 - Terceiro modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Torção .....	58
Figura 45 - Quarto modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Flexão.....	58
Figura 46 - Quinto modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Torção.....	59
Figura 47 - Sexto modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57- Flexo-Torção .....	59
Figura 48 - Sétimo modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Flexo-Torção .....	60

Figura 49 - Primeiro modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexão...	60
Figura 50 - Segundo modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexão..	61
Figura 51 - Terceiro modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Torção ..	61
Figura 52 - Quarto modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexão .....	61
Figura 53 - Quinto modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexão .....	62
Figura 54 - Sexto modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexo-Torção .....	62
Figura 55 - Sétimo modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexo-Torção .....	63
Figura 56 - Espectros gerados pelos métodos - Ponte PI-57 .....	63
Figura 57 - Visão geral do viaduto ferroviário. Fonte: Cury (2010) .....	64
Figura 58 - Vista dos sensores a2, a9 e d2. Fonte: Cury (2010) .....	65
Figura 59 - Vista do sistema de aquisição de dados e dos cabos. Fonte: Cury (2010) .....	65
Figura 60 - Localização dos sensores. Fonte: Cury (2010) .....	66
Figura 61 - Sinal registrado durante ensaio do Viaduto PK075+317 .....	67
Figura 62 - Primeiro modo próprio identificado pelo PP para o viaduto PK 075+317 - Flexão.....	68
Figura 63 - Terceiro modo próprio identificado pelo PP para o viaduto PK 075+317 - Torção .....	68
Figura 64 - Quarto modo próprio identificado pelo PP para o viaduto PK 075+317 - Flexo-Torção .....	69
Figura 65 - Primeiro modo próprio identificado pelo FDD para o viaduto PK 075+317 - Flexão.....	69
Figura 66 - Terceiro modo próprio identificado pelo FDD para o viaduto PK 075+317 - Torção .....	70
Figura 67 - Quarto modo próprio identificado pelo FDD para o viaduto PK 075+317 - Flexo-Torção .....	70
Figura 68 - Espectros gerados pelos métodos - Viaduto PK075+317 .....	71

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros modais teóricos para o Caso Controle I .....	25
Tabela 2 - Comparativo das frequências identificadas pelas técnicas de identificação modal para o sinal sem ruído .....	27
Tabela 3 - Comparativo das taxas de amortecimento obtidas pelo PP para o sinal sem ruído .....	27
Tabela 4 - Comparativo das frequências identificadas pelos métodos de identificação modal para o sinal com adição de 10% de ruído.....	27
Tabela 5 - Comparativo das taxas de amortecimento obtidas pelo PP para o sinal com adição de 10% de ruído .....	28
Tabela 6 - Comparativo entre as frequências identificadas pelos métodos e valores de referência, com seus respectivos erros.....	28
Tabela 7 - Comparativo entre as taxas de amortecimento obtidas pelo PP e valores de referência, com seus respectivos erros.....	29
Tabela 8 - Parâmetros modais teóricos para o Caso Controle II .....	30
Tabela 9 - Tempo de ensaio e resoluções frequências .....	30
Tabela 10 - Comparativo das frequências naturais para sinal contendo frequências próximas sem ruído .....	32
Tabela 11 - Comparativo das taxas de amortecimento para sinal contendo frequências próximas sem ruído .....	32
Tabela 12 - Comparativo entre frequências naturais identificadas pelos métodos e valores utilizados para gerar o sinal com adição de 10% de ruído.....	34
Tabela 13 - Comparativo entre taxas de amortecimento obtidas pelo PP e valores utilizados para gerar o sinal com adição de 10% de ruído .....	34
Tabela 14 - Comparativo das frequências naturais para um sinal numérico contendo frequências próximas com adição de 20% de ruído.....	36
Tabela 15 - Comparativo das taxas de amortecimento para um sinal numérico contendo frequências próximas com adição de 20% de ruído .....	36
Tabela 16 - Valores teóricos para as frequências próprias e taxas de amortecimento .....	39
Tabela 17 - Comparativo das frequências naturais identificadas pelas técnicas e os valores de referência para uma viga modelada computacionalmente sem ruído .....	41
Tabela 18 - Comparativo das taxas de amortecimento obtidas pelo PP e os valores de referência para uma viga modelada computacionalmente sem ruído.....	41

Tabela 19 - Comparativo entre as frequências naturais identificadas pelas técnicas e valores de referência para uma viga modelada computacionalmente com 10% de ruído .....	43
Tabela 20 - Comparativo entre as taxas de amortecimento obtidas pelo PP e valores de referência para uma viga modelada computacionalmente com 10% de ruído.....	43
Tabela 21 - Comparativo entre as frequências naturais identificadas pelas técnicas e valores de referência para uma viga modelada computacionalmente com 20% de ruído .....	44
Tabela 22 - Comparativo entre as taxas de amortecimento obtidas pelo PP e valores de referência para uma viga modelada computacionalmente com 20% de ruído.....	44
Tabela 23 - Posicionamento dos acelerômetros na estrutura.....	47
Tabela 24 - Frequências naturais de vibração identificadas analiticamente .....	48
Tabela 25 - Comparativo das frequências naturais identificadas pelas técnicas para a estrutura submetida ao ensaio com excitação aleatória.....	49
Tabela 26 - Valores das taxas de amortecimento obtidas pelo método PP para estrutura submetida ao ensaio com excitação aleatória.....	50
Tabela 27 - Comparativo das frequências naturais identificadas pelos métodos para estrutura submetida ao ensaio de impacto.....	51
Tabela 28 - Valores das taxas de amortecimento obtidas pelo PP para a estrutura submetida ao ensaio de impacto .....	52
Tabela 29 - Parâmetros modais de referência para a Ponte PI-57 .....	55
Tabela 30 - Comparativo das frequências naturais para ponte PI-57 .....	56
Tabela 31 - Comparativo das taxas de amortecimento para ponte PI-57 .....	56
Tabela 32 - Parâmetros modais de referência para o Viaduto PK075+317 .....	66
Tabela 33 - Comparativo das frequências naturais para o viaduto PK 075+317 .....	67
Tabela 34 - Comparativo das taxas de amortecimento para o viaduto PK 075+317 ...	68

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO .....	1
1.1.	JUSTIFICATIVA .....	3
1.2.	OBJETIVOS .....	3
2.	REVISÃO DA LITERATURA .....	4
2.1.	MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL.....	4
2.2.	ANÁLISE MODAL TEÓRICA .....	5
2.3.	ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL .....	8
2.4.	DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	9
3.	METODOLOGIA .....	12
3.1.	MATRIZ DAS FUNÇÕES DE DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA ...	12
3.2.	MÉTODO PEAK PICKING.....	14
3.2.1.	IDENTIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS .....	15
3.2.2.	IDENTIFICAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES MODAIS.....	16
3.2.3.	IDENTIFICAÇÃO DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO .....	17
3.3.	MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA .....	18
3.3.1.	DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES .....	18
3.3.2.	VERSÃO BASE (FDD) .....	19
3.4.	ALGORITMOS.....	21
3.4.1.	PEAK PICKING .....	21
3.4.2.	MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	22
3.4.3.	ALGORITMO AUXILIAR <i>MODOREAL</i> .....	23
4.	APLICAÇÕES E RESULTADOS.....	24
4.1.	CASO CONTROLE I .....	24
4.1.1.	SINAL SEM RUÍDO .....	26
4.1.2.	SINAL COM 10% DE RUÍDO .....	27
4.1.3.	SINAL COM 20% DE RUÍDO .....	28
4.2.	CASO CONTROLE II .....	29
4.2.1.	SINAL SEM RUÍDO .....	32
4.2.2.	SINAL COM 10% DE RUÍDO .....	34
4.2.3.	SINAL COM 20% DE RUÍDO .....	36
4.3.	VIGA MODELADA COMPUTACIONALMENTE .....	38
4.3.1.	SINAL SEM RUÍDO .....	41
4.3.2.	SINAL COM 10% DE RUÍDO .....	42
4.3.3.	SINAL COM 20% DE RUÍDO .....	44
4.4.	VIGA BIAPOIADA (COPPE).....	46



4.4.1.	ENSAIO ALEATÓRIO.....	49
4.4.2.	ENSAIO DE IMPACTO.....	51
4.5.	PONTE PI-57 .....	54
4.6.	VIADUTO FÉRREO PK 075+317.....	64
5.	COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS E DISCUSSÃO .....	71
6.	CONCLUSÕES.....	72
7.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	73
	REFERÊNCIAS .....	74

## 1. INTRODUÇÃO

A vasta diversidade de estruturas de Engenharia Civil existente e a crescente preocupação voltada para a segurança têm causado um aumento significativo na realização de avaliações dinâmicas experimentais. Isto ocorre tanto para as novas estruturas, que dispõem do uso de novos materiais de maior qualidade e desempenho, mais esbeltas e flexíveis, quanto para as mais antigas, que podem ter integridade questionável.

A avaliação dinâmica experimental pode ter várias aplicações no campo da Engenharia. Na Engenharia Civil, pode ser utilizada para a validação de modelos para a análise do comportamento de estruturas que estão sob ações dinâmicas, tais como: vento, terremotos, excitações de tráfego, entre outros. Ou ainda, na caracterização global, como no caso do monitoramento de estruturas, principalmente nos casos em que não há interrupções ou mesmo interferências no funcionamento de tais estruturas.

Como resultado, tal avaliação fornece informações que descrevem as estruturas a partir dos chamados *parâmetros modais de vibração* que são representados em termos de suas frequências naturais, taxas de amortecimento e modos de vibração.

A identificação das características dinâmicas das estruturas pode ser feita de forma analítica, numérica (análise modal teórica) ou experimental (análise modal experimental). Neste trabalho, o foco é a análise modal experimental.

Na análise modal, a caracterização é feita com base nos sinais oriundos da resposta provocada por uma determinada excitação. De acordo com Mendes e Oliveira (2008), os parâmetros modais de estruturas podem ser identificados por duas vias distintas:

- Relacionando a resposta da estrutura com a respectiva excitação produzida artificialmente e medida (ensaio de vibração forçada – *input e output*);
- Analisando somente a resposta da estrutura, tendo em consideração um conjunto de hipóteses relacionadas à natureza da excitação ambiente (ensaio de vibração ambiente – *output only*).

A primeira via foi inicialmente desenvolvida na Engenharia Mecânica e depois se estendeu para a Engenharia Civil, com suas especificidades, decorrentes das características das suas próprias estruturas (RODRIGUES, 2004). Por tal razão, a análise modal experimental com controle e medição de excitação é mais tradicional e também conhecida por identificação modal clássica.

Ao contrário da maioria dos casos da Engenharia Mecânica, as estruturas de Engenharia Civil geralmente apresentam grandes dimensões e baixos valores de frequência natural de vibração. Tais características tornam a execução de ensaios de vibração forçada por vezes inviável, já que para sua realização é necessária a

utilização de grandes equipamentos que, além dos altos custos, também implicam em despesas adicionais de transporte e de montagem/desmontagem. Além da questão econômica, no caso das estruturas em serviço, a realização deste tipo de ensaio pode levar à interrupção total ou parcial do funcionamento da estrutura. Por fim, mas não tão frequentemente, a vibração forçada, se não realizada adequadamente, pode causar danos à estrutura.

Os ensaios de estruturas sob excitação ambiente, por sua vez, requerem apenas ações naturais às quais a estrutura está submetida, como por exemplo, o vento, o tráfego de veículos e/ou pessoas, terremotos, entre outros. Portanto, as dificuldades mencionadas no parágrafo anterior são sensivelmente mitigadas. Levando-se em consideração o aspecto prático, os ensaios para medição das respostas dinâmicas de estruturas sujeitas às ações ambientais são, atualmente, a opção mais adequada para a avaliação dinâmica na Engenharia Civil (RODRIGUES, 2004).

A existência de recursos que proporcionam a identificação das características dinâmicas de estruturas utilizando somente sua resposta amplia as potencialidades dos sistemas de monitoramento contínuo, pois é possível, a partir das informações adquiridas, estimar a todo o momento os parâmetros modais da estrutura, para somente então avaliar a sua condição estrutural. O uso destes sistemas de caracterização tem sido cada vez mais frequente em estruturas de grande importância econômica e social e é justificado pela crescente preocupação designada aos custos referentes à intervenção do funcionamento das estruturas. Intervenções essas que têm por objetivo reabilitar e reforçar os elementos das estruturas, cujo custo poderá ser consideravelmente reduzido a partir de uma correta monitoração (MAGALHÃES, 2004; TAVARES, 2013).

Assim como nos métodos clássicos de análise modal, os métodos baseados somente nas respostas das estruturas também podem ser tratados no **domínio do tempo**, dentre os quais se podem destacar: os Modelos Autoregressivos de Média Móvel (*Autoregressive Moving Average - ARMA*), Método de Polirreferência de Exponencial Complexa (*Polyreference Complex Exponential - PRCE*), Identificação Estocástica de Subespaço (*Stochastic Subspace Identification Methods - SSI*), Exponencial Complexa por Mínimos Quadrados (*Least-Squares Complex Exponential - LSCE*), Exponencial Complexa (*Complex Exponential - CE*), Método de Ibrahim (*Ibrahim Time Domain - ITD*) e Algoritmo de Realização de Autossistema (*Eigen System Realization Algorithm - ERA*); e no **domínio da frequência**, dentre os quais se destacam: o método de Ajuste de Curva (*Curve - Fit*), Método de Polirreferência no Domínio da Frequência (*Polyreference Frequency Domain - PRFD*), Método Básico no Domínio da Frequência (*Basic Frequency Domain - BFD*), também conhecido como

Método da Seleção de Picos (*Peak Picking* - PP), Método inverso (*Inverse Method*), Método da Exponencial Complexa no Domínio da Frequência (*Complex Exponential Frequency Domain* - CEFD), Método de Decomposição no Domínio da Frequência (*Frequency Domain Decomposition* - FDD) e Método Melhorado de Decomposição no Domínio da Frequência (*Enhanced Frequency Domain Decomposition* - EFDD). Este último domínio de análise foi o foco deste trabalho. Além disso, foi considerado apenas o estudo de modelos do tipo “*output-only*”, isto é, aqueles em que apenas a resposta medida é conhecida. E os métodos de análise aplicados foram os métodos *Peak Picking* e *Frequency Domain Decomposition*.

### 1.1. JUSTIFICATIVA

O comportamento de uma estrutura pode ser afetado por diversas modificações das suas condições originais, como o aparecimento de pequenas fissuras em elementos de concreto, a oxidação de elementos em aço, deslocamentos excessivos de certos pontos, entre outras. Das diversas abordagens existentes que permitem identificar esses sinais de degradação, surge com importância cada vez maior, o estudo contínuo, via análise experimental, das propriedades dinâmicas de uma estrutura (TAVARES, 2013).

Por estes motivos, dá-se importância ao monitoramento contínuo de estruturas de Engenharia Civil a partir da identificação modal, tendo em vista que isto ainda é uma lacuna existente no Brasil, devido aos poucos trabalhos desenvolvidos nessa área.

Para o desenvolvimento desta dissertação optou-se por trabalhar no domínio da frequência devido a algumas dificuldades ainda presentes neste domínio de análise, como, por exemplo, a identificação de frequências naturais muito próximas e das taxas de amortecimento. Com relação aos métodos, foram escolhidos o *Peak Picking* e o *Frequency Domain Decomposition* devido a sua relevância histórica, além de serem os dois métodos mais clássicos do domínio da frequência.

### 1.2. OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivos principais:

- Avaliar técnicas do domínio da frequência para identificação modal experimental de estruturas e determinar qual delas é mais robusta;
- Determinar o limite de identificação entre as frequências naturais de vibração pelos métodos avaliados quando essas são próximas, já que a principal desvantagem dos métodos desenvolvidos no domínio da frequência está na identificação de frequências com valores muito próximos.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

Nesta seção é abordada uma revisão da literatura sobre identificação modal de estruturas.

### 2.1. MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL

A análise modal é de grande valia para a Engenharia e, por este motivo, tem sido amplamente utilizada na solução de problemas em diversas áreas, com destaque para as Engenharias Mecânica e Civil. Para esta última área, sua aplicação visa solucionar, principalmente, questões relacionadas à vibração excessiva em máquinas e carregamentos dinâmicos em estruturas civis. A análise modal pode ser utilizada desde a fase de projeto na qual, a partir do estudo preliminar dos parâmetros modais, busca-se otimizar no equipamento e/ou na estrutura as solicitações de operação, até o monitoramento durante o seu uso. Por último, se podem utilizar os parâmetros identificados em um estado de referência, com o objetivo de detectar alterações que possam indicar a ocorrência de falhas (DUARTE et al., 2010).

De acordo com Nóbrega (2004), a análise modal é o processo constituído de métodos teóricos e experimentais que possibilitam a elaboração de um modelo matemático que representa o comportamento dinâmico do sistema em estudo. Seu principal objetivo é a determinação dos parâmetros modais estruturais (frequências naturais, modo de vibração e taxas de amortecimento). Tais parâmetros podem ser determinados por métodos teóricos e numéricos - utilizando-se o Método dos Elementos Finitos - ou, em situações em que não existe modelo matemático, os parâmetros modais podem ser determinados experimentalmente. Ou ainda, mesmo que exista o modelo, a abordagem experimental pode ser utilizada para a verificação e validação dos resultados do modelo analítico/numérico.

Entre as análises teórica e experimental existem diversos métodos para determinação dos parâmetros modais. Tais métodos diferem entre si e são classificados em relação aos tipos de dados de entrada, processamento matemático dos dados e resposta produzida. Paziani (2002) descreve a seguinte classificação:

Primeiramente deve ser considerado o domínio no qual os dados são tratados numericamente, sendo os mais comuns os aplicados no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Posteriormente é considerado o número de modos a serem analisados, podendo ser métodos de um grau de liberdade (SDOF - *Single Degree of Freedom*) e métodos de múltiplos graus de liberdade (MDOF - *Multiple Degree of Freedom*). Nos métodos indiretos (que são os que identificam o modelo modal dado pelos parâmetros globais)

no domínio da frequência podem ser tanto SDOF quanto MDOF. Já nos métodos diretos (que são os que identificam o modelo espacial) no mesmo domínio podem ser apenas MDOF.

Os métodos podem ainda ser classificados quanto a FRF (Função de Resposta em Frequência), que relaciona a resposta medida com a entrada fornecida. Os métodos que se aplicam a apenas uma FRF de cada vez, são conhecidos como métodos de única entrada e única saída - SISO (*Single Input, Single Output*).

Os métodos que permitem a análise simultânea de várias FRFs, sendo a excitação realizada em um único ponto e a resposta medida em vários pontos da estrutura são os chamados métodos de única entrada e múltipla saída - SIMO (*Single Input, Multiples Output*).

Por fim, têm-se os métodos de múltipla entrada e múltipla saída - MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*). E os métodos de múltipla entrada e única saída - MISO (*Multiple Input, Single Output*), essa última classe de métodos é possível, porém, incomum. Na Figura 1 é mostrado um esquema classificatório de acordo com Maia e Silva (2001).

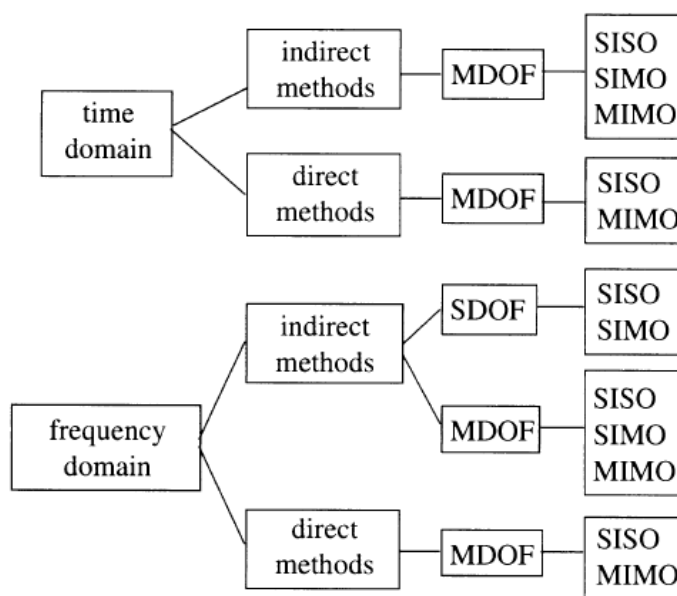


Figura 1 - Classificação dos métodos. Fonte: Maia e Silva (2001)

## 2.2. ANÁLISE MODAL TEÓRICA

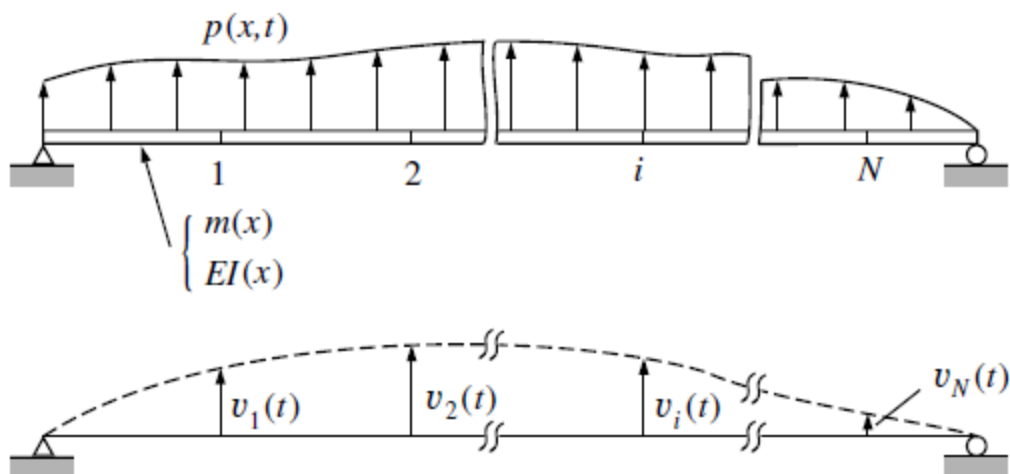
Para determinar as características dinâmicas de uma estrutura, a análise modal teórica utiliza métodos analíticos e numéricos (PAZIANI, 2002). Para ser realizada esta análise, é necessário que seja desenvolvido um modelo matemático representado por um conjunto de matrizes da estrutura usando técnicas de discretização espacial. Essa discretização resulta nas matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Estes modelos são posteriormente usados em formulações que possibilitem desacoplamento do

sistema. A solução do modelo matricial leva a formulação de um problema de autovalor e autovetor, que por sua vez, fornece as características dinâmicas da estrutura: os modos normais de vibração e suas respectivas frequências naturais (SCZIBOR, 2002).

Quando é utilizado um modelo matemático, este modelo deve ser capaz de simular o comportamento estrutural do sistema em questão. Entretanto, devido à complexidade de um sistema real, faz-se necessário a adoção de algumas simplificações. Borges (2006) sugere três hipóteses básicas para atender essas simplificações:

- Linearidade do comportamento dinâmico: a resposta da estrutura para uma combinação de forças aplicadas simultaneamente é equivalente à soma das respostas de cada força atuando individualmente;
- Invariável no tempo: os parâmetros físicos da estrutura são constantes;
- Observável: a relação entrada/saída medida contém informações suficientes para determinar o comportamento dinâmico do modelo.

Na análise modal por elementos finitos, de acordo com Clough e Penzien (1995), a formulação das equações de movimento de um sistema MDOF pode ser feita baseada em uma estrutura como a mostrada na Figura 2. A discussão se aplica igualmente a qualquer tipo de estrutura, mas a visualização dos fatores físicos envolvidos na avaliação de toda a atuação das forças é simplificada para este tipo de estrutura.



**Figura 2 - Estrutura com vários graus de liberdade. Fonte: Clough e Penzien (1993)**

O movimento desta estrutura é definido pelos deslocamentos de um conjunto de pontos discretos na viga:  $v_1(t), v_2(t), \dots, v_i(t), \dots, v_N(t)$ . Inicialmente, estes pontos podem estar localizados na estrutura arbitrariamente, no entanto, na prática, eles devem ser associados às características específicas das propriedades físicas da

estrutura que podem ser significativos e devem ser distribuídas de modo a proporcionar uma boa definição da forma defletida. O número de graus de liberdade de deslocamento (componentes) a ser considerado pode ser determinado ao critério do analista; quanto maior o número de graus de liberdade, melhor serão as aproximações do real comportamento dinâmico, mas em muitos casos, bons resultados podem ser obtidos com apenas dois ou três graus de liberdade (CLOUGH; PENZIEN, 1995).

A equação do movimento do sistema apresentado na Figura 2, ainda conforme Clough e Penzien (1995), pode ser formulada expressando o equilíbrio das forças efetivas associado com cada um dos seus graus de liberdade. Em geral, quatro tipos de forças são considerados: o carregamento externo, as forças de inércia, de amortecimento e elástica. Dessa forma, para cada um dos vários graus de liberdade o equilíbrio dinâmico pode ser dado pela expressão (2.1), na qual  $v$  é função do tempo e da posição da seção, assim,  $v$ ,  $\dot{v}$  e  $\ddot{v}$  representam os vetores deslocamento, velocidade e aceleração dos graus de liberdade, respectivamente.  $M$  é a matriz de massa,  $C$  é a matriz de amortecimento,  $K$  é a matriz de rigidez e  $f$  o vetor de forças externas em função do tempo.

$$M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = f(t) \quad (2.1)$$

Como as estruturas da Engenharia Civil apresentam baixo amortecimento, sendo dessa forma, as frequências amortecidas próximas das frequências não amortecidas, Clough e Penzien (1995), consideram a estrutura em vibração livre e com amortecimento desprezado. Assim, chega-se a expressão (2.2).

$$M\ddot{v} + Kv = 0 \quad (2.2)$$

Nessas condições, a solução para a equação (2.2) é a seguinte:

$$v(t) = \hat{v} \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (2.3)$$

Fazendo a segunda derivada de (2.3) e substituindo essa derivada e a expressão de (2.3) em (2.2), após algumas simplificações chega à expressão (2.4).

$$[K - \omega^2 M]\hat{v} = 0 \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é um problema de autovalor. As incógnitas  $\omega^2$  (frequências naturais de vibração) são os autovalores, enquanto o deslocamento correspondente aos vetores  $v$  (modos de vibração) são os autovetores. Portanto, ao solucionar a equação (2.4), têm-se as características dinâmicas do sistema.



Para obter a matriz de amortecimento, seguindo a formulação de Rayleigh expressa na equação (2.5), é necessário considerá-la proporcional as matrizes de massa e rigidez.

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2.5)$$

Por fim, para calcular as taxas de amortecimento, pode-se utilizar a expressão (2.6), sendo que  $\omega_n$  representa as frequências naturais de vibração da estrutura em radianos por segundo.

$$\xi = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2} \quad (2.6)$$

### 2.3. ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

De acordo com Paziani (2002), além da análise modal teórica, existe um segundo procedimento para a determinação das características dinâmicas de uma estrutura (e que utiliza dados oriundos de medições), denominado Análise Modal Experimental (AME). Nesse caso, os parâmetros modais são obtidos a partir de dados experimentais.

Zhang et al. (2005) destacam algumas limitações da análise modal experimental tradicional (AME) em função de suas características de aplicação:

- Na análise experimental, a excitação artificial é geralmente realizada com intuito de medir as funções de transferência. Todavia, tais funções são difíceis e em alguns casos impossíveis de serem medidas nos ensaios em campo e em estruturas de grande porte. Além disso, seria necessária uma elevada quantidade de energia que fosse capaz de excitar determinados modos de vibração dessas estruturas;
- Ensaios realizados em laboratório, ou seja, ensaios controlados podem ter condições significativamente divergentes das condições de operação reais da estrutura;
- Muitas vezes os componentes são testados isoladamente em laboratório em vez de sistema completo e nesses casos se a condição de contorno não for devidamente simulada, o resultado do ensaio pode não representar a realidade.

Como alternativa para suprir estas limitações, é possível lançar mão da Análise Modal Operacional (AMO), que tem por característica principal a utilização das medições provenientes do próprio carregamento da estrutura em operação como resposta da excitação produzida (DUARTE et al., 2010).

Rodrigues (2004) salienta que as técnicas da análise modal operacional por disporem de excitação obtida sem necessidade de equipamentos e sem exigir a interrupção das condições de operação das estruturas apresentam uma grande vantagem com relação às técnicas de identificação modal clássica. Em especial nos casos das estruturas da Engenharia Civil, esses aspectos são bastante importantes, pois permitem que a avaliação das características dinâmicas das estruturas seja feita com custos significativamente reduzidos.

A identificação dos métodos baseados apenas na resposta, assim como no caso clássico, pode ser realizada tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. Os métodos no domínio da frequência tiveram um desenvolvimento inicial mais acelerado, provavelmente causado pela popularização da técnica da Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform - FFT*), a partir de meados da década de 1960. Os métodos no domínio do tempo surgiram como alternativa promissora aos métodos na frequência, visto que podiam (e ainda podem) ser aplicados em estruturas que apresentam características especiais, como, por exemplo, em casos de modos acoplados e frequências naturais muito próximas (JUNIOR, 2006).

De acordo com Allemang e Brown (1987), os métodos no domínio do tempo e no domínio da frequência têm essencialmente a mesma capacidade para estimar os parâmetros modais. No entanto, os métodos do domínio de tempo são numericamente mais estáveis para grandes faixas de frequência ou para um grande número de modos e os métodos de domínio de frequência são melhores quando os efeitos residuais dos modos acima ou abaixo do intervalo de frequência de interesse devem ser incluídos.

Devido às diferenças citadas anteriormente, pode haver uma crença de que os métodos de identificação dos domínios do tempo e da frequência sejam concorrentes. Entretanto, Ljung e Glover (1981) demonstraram que eles devem ser tratados como complementares, aliando a visão global sobre as propriedades dos dados e do sistema da análise espectral com a precisão da análise temporal.

#### **2.4. DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**

A análise no domínio da frequência de séries temporais de acelerações em ensaios de vibrações permite o acesso a informações úteis para a caracterização do comportamento dinâmico de estruturas. Inicialmente, a partir das séries temporais das acelerações, não é possível obter muita informação sobre uma dada estrutura, sendo possível notar apenas a duração da observação, o intervalo de tempo entre os pontos medidos (frequência de amostragem) e os valores máximos de aceleração. Entretanto, a decomposição dos registros de acelerações, medidos na estrutura, utilizando, por

exemplo, o conceito associado às séries de Fourier, possibilita o acesso imediato aos valores de frequência, para os quais uma dada estrutura vibra. Tais valores de frequência correspondem às frequências naturais de vibração da estrutura (MENDES, OLIVEIRA, 2008).

De acordo com Rodrigues (2004), os métodos de análise modal no domínio da frequência, que têm por base as estimativas das funções de densidade espectral da resposta, avaliadas a partir do algoritmo da transformada rápida de Fourier, são de rápida execução e também fáceis de utilizar. Para o melhor desenvolvimento dessas técnicas, as frequências naturais de vibração das estruturas são avaliadas em valores discretos de frequência. Acrescenta-se, ainda, que o efeito de *leakage* (explicado adiante), que se verifica nas estimativas das funções de densidade espectral, pode introduzir erros na avaliação dos parâmetros modais, especialmente na determinação dos coeficientes de amortecimento. Por estes motivos, esses métodos podem apresentar alguma dificuldade na avaliação das características de modos de vibração com frequências muito próximas. Nota-se que estas desvantagens são minimizadas se as funções de densidade espectral forem estimadas com uma resolução em frequência muito alta, o que implica a obtenção de séries de resposta com durações longas.

Os métodos de identificação modal que utilizam apenas as respostas no domínio da frequência podem ser agrupados basicamente em duas classes, segundo Borges (2006): o método da seleção de picos e o método de decomposição no domínio da frequência.

O desenvolvimento histórico desses métodos de identificação, ainda de acordo com Borges (2006), aconteceu da seguinte maneira: a implementação do método *Peak Picking* (embora a ideia fundamental já tivesse sido formulada anteriormente), foi atribuída a Andreas Johann Felber, pelo seu trabalho em 1993. Os conceitos básicos do método FDD foram apresentados por Palle Andersen em 1997. Na década seguinte, em 2000, Rune Brincker, Lingmi Zhang e Palle Andersen discutiram de forma mais completa a aplicação do método para análise modal experimental.

Nos métodos apresentados acima a identificação dos parâmetros modais é realizada a partir das funções de densidade espectral da resposta do sistema. Estas funções são utilizadas na construção de uma matriz de densidade espectral, a qual é formada pelas funções de densidade espectral de potência na diagonal principal, e as funções de densidade espectral cruzada nas demais posições. Depois de obtida a matriz de densidade espectral, o procedimento para extração dos parâmetros modais da estrutura é ligeiramente diferente em cada um dos métodos (BORGES, 2006).

O método básico no domínio da frequência é baseado na construção da média normalizada de densidade espectral de potência (*Average Normalized Power Spectral Density - ANPSDs*), que permite identificar os picos dos espectros de potência das respostas com os picos das funções de resposta em frequência, podendo assim, serem estimadas as frequências naturais da estrutura. Essa técnica fornece uma estimativa razoável desde que os modos de vibração sejam bem separados. E apresentam problemas de incertezas na estimativa do amortecimento (BORGES, 2010).

Conforme Brincker et al. (2000), a técnica da Decomposição no Domínio da Frequência foi desenvolvida para resolver os problemas encontrados na técnica clássica (*Peak Picking*), mas mantém a facilidade de uso.

O método FDD é baseado na decomposição em valores singulares (*Singular Value Decomposition - SVD*). A matriz de densidade espectral é decomposta em um conjunto de funções de densidade autoespectrais, cada um correspondendo a um único grau de liberdade do sistema. Este resultado é exato, no caso em que a excitação é do tipo ruído branco, a estrutura é levemente amortecida, e quando os modos de vibração de modos próximos são geometricamente ortogonais. Se estes pressupostos não forem cumpridos, a decomposição é aproximada, mas ainda assim os resultados são significativamente mais precisos do que os resultados da abordagem clássica (BRINCKER et al., 2000).

Freitas (2008) conclui em seu trabalho que o método FDD é mais viável para casos simples, devido a sua praticidade de aplicação. No entanto, para casos em que os modos de vibração são muito próximos, outros métodos, como o da Identificação Estocástica de Subespaço, apresentam resultados mais precisos.

Algumas das principais vantagens das técnicas baseadas no domínio da frequência com relação às técnicas desenvolvidas no domínio do tempo são a facilidade de interação com o usuário, rapidez e simplicidade de utilização (BORGES, 2010). Todavia, de acordo com Freitas (2008), as técnicas no domínio da frequência, que são baseadas no simples processamento do sinal utilizando a Transformada de Fourier, fornecem estimativas razoáveis apenas se os modos forem bem separados. Para modos próximos elas podem apresentar alguma dificuldade na identificação, e mesmo que os modos possam ser identificados, a estimativa fica prejudicada. Outro aspecto é a limitação nas estimativas das frequências e das taxas de amortecimentos devido aos problemas relacionados com a resolução do espectro de potência.

### 3. METODOLOGIA

Nesta seção são descritos os dois métodos de análise escolhidos, bem como a determinação da matriz das funções de densidade espectral de potência, que é a base de ambos os métodos.

#### 3.1. MATRIZ DAS FUNÇÕES DE DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

Na avaliação experimental dinâmica, com base na medição da resposta em vários pontos das estruturas, é usual organizar a informação obtida, já convertida para o domínio da frequência, na matriz das funções de densidade espectral de potência da resposta. A matriz contém na sua diagonal principal os autoespectros da resposta medida no grau de liberdade  $ii$ , e nos elementos restantes,  $ij$ , os espectros cruzados, os quais relacionam a resposta medida no grau de liberdade  $i$  com a resposta medida no grau de liberdade  $j$  (MENDES; OLIVEIRA, 2008).

De acordo com Magalhães (2004), tendo em vista que, na prática, apenas uma realização do processo estocástico é conhecida, as séries temporais não têm uma duração infinita e seu valor é medido em instantes temporais afastados de  $\Delta t$ , pois o sinal adquirido encontra-se discretizado. Sendo assim, só é possível obter uma estimativa do espectro, que é dada pela multiplicação da transformada de Fourier de um sinal temporal pela transformada de Fourier do conjugado do sinal dividido pelo tempo de duração, como expresso na equação (3.1), onde  $N$  representa o número total de pontos adquiridos.

$$\hat{S}_{x_1x_2}(\omega) = \frac{X_1(\omega)^* X_2(\omega)}{N\Delta t} \quad (3.1)$$

Ao aplicar transformadas de Fourier a sinais discretos de duração finita, têm-se como consequência os erros de *leakage* e *aliasing*. O erro de *leakage* ou de escorregamento se dá pelo caráter finito da série temporal e também pela existência de descontinuidades do sinal periodizado, pois para fazer o sinal finito, ele pode ser cortado em algum múltiplo de seu período. O erro manifesta-se a partir da distribuição da energia associada a uma frequência específica pelas frequências na sua vizinhança. Já o erro de *aliasing* ocorre devido ao sinal, por se encontrar discretizado, ter sido registrado a uma taxa de aquisição significativamente baixa (má representação do sinal digital a partir do sinal analógico). Assim, altas frequências aparecerão como baixas, ou seja, a energia associada às frequências superiores à metade da frequência de amostragem (frequência de Nyquist) aparecerão nas frequências inferiores à frequência de Nyquist (MAGALHÃES, 2004; MIGUEL, 2007). A equação (3.1) fica, portanto, sujeita aos erros acima descritos e estes devem ser atenuados, pois são considerados inaceitáveis na análise modal.

Segundo Magalhães (2004), o erro de *aliasing* pode ser minimizado dividindo-se a série temporal em segmentos mais curtos e realizando-se uma estimativa “alisada” da função densidade espectral, a partir da média das estimativas espectrais simples de cada um dos segmentos, calculadas pela expressão (3.1). Entretanto, a utilização de muitos segmentos exige que estes sejam mais curtos, gerando assim, um agravamento do erro de *leakage* e uma diminuição da resolução em frequência (aumento do espaçamento entre cada abscissa do espectro). Uma maneira de conseguir um bom número de segmentos com comprimento razoável é a partir da adoção de alguma sobreposição entre eles. Esta sobreposição é conhecida por “*overlapping*”.

Para mitigar o erro de *leakage*, Magalhães (2004) sugere a aplicação de janelas temporais a cada um dos segmentos. Existem vários tipos de janelas que podem ser utilizadas nos sinais que resultam dos ensaios de vibração ambiente (sinais aleatórios), sendo uma das mais usadas as janelas de Hanning (MAGALHÃES, 2004). No entanto, a aplicação da janela temporal altera o conteúdo energético do sinal, ou seja, a sua variância. Para que não ocorra tal alteração, após ser aplicada a janela, as ordenadas do sinal devem ser divididas pela raiz quadrada do valor quadrático médio da janela (soma dos quadrados das ordenadas da janela dividida pelo número de ordenadas).

Existe um procedimento para estimar as funções de densidade espectral com base nesses processos de minimização dos erros, ou seja, em séries temporais divididas em segmentos, aplicação de uma janela de dados a cada segmento, e também no cálculo da FFT de cada segmento para posterior realização de médias. Esse procedimento é conhecido como procedimento de Welch, publicado por Peter Welch em 1967 (MAGALHÃES, 2004).

Existem duas situações em que a matriz de densidade espectral pode ser obtida. A primeira, de acordo com Magalhães (2004), ocorre se a medição da resposta de todos os pontos instrumentados da estrutura for realizada simultaneamente. Nesse caso, a matriz é quadrada, com dimensão igual ao número de pontos instrumentados, e pode ser calculada de forma compacta, como mostra a equação (3.2). Nesta expressão,  $Y(\omega)$  representa um vetor coluna com a quantidade de linhas igual ao número de graus de liberdade instrumentados que contém a FFT do vetor das respostas  $y(t)$ .

$$\hat{S}_y(\omega) = \frac{Y(\omega) * Y(\omega)^T}{N\Delta t} \quad (3.2)$$

Todavia, na maior parte das aplicações, para que seja feita uma caracterização adequada e satisfatória do comportamento dinâmico das estruturas, é essencial

instrumentar um elevado número de graus de liberdade, ou seja, pontos de medição. No entanto, isto nem sempre é possível, já que pode tornar o ensaio muito dispendioso. Assim, é comum realizar o ensaio em várias fases (“*setups*”), nas quais as medições da resposta da estrutura são feitas de maneira sequencial, recorrendo a diferentes disposições de sensores. Ao utilizar essa técnica de ensaio, é necessário garantir que as medições nas diferentes fases, sejam relacionáveis. Para isso, alguns graus de liberdade têm de ser medidos em todos os “*setups*” (graus de liberdade de referência) (MAGALHÃES, 2004).

Fazendo-se essa escolha para realização dos ensaios, Magalhães (2004) afirma não ser possível obter uma matriz de espectros quadrada e sim uma estimar uma matriz retangular com dimensão  $l \times r$ , sendo  $l$  o número de pontos da estrutura em que a resposta é medida e  $r$  é o número de graus de liberdade de referência. Então o cálculo da nova matriz é dado pela expressão (3.3), na qual  $Y^{ref}(\omega)$  representa um vetor de dimensão  $r$  com as FFTs das respostas relativas aos graus de liberdade instrumentados em todos os “*setups*” (graus de liberdade de referência).

$$\hat{S}_y^{ref}(\omega) = \frac{Y(\omega) * Y^{ref}(\omega)^T}{N\Delta t} \quad (3.3)$$

### 3.2. MÉTODO PEAK PICKING

O método de seleção de picos (PP) é o método de identificação modal mais antigo e mais utilizado em aplicações de Engenharia Civil; tal método é realizado a partir de excitações ambientes. Sua utilização em larga escala se deve principalmente à sua facilidade de aplicação e confiabilidade dos resultados obtidos (TAVARES, 2013).

Os fundamentos do método PP baseiam-se na hipótese de que para frequências próximas das frequências naturais da estrutura, a resposta dinâmica é essencialmente condicionada pela contribuição do modo ressonante. Para facilitar a compreensão deste método, é possível considerar a resposta da estrutura como um conjunto de osciladores de um grau de liberdade, cada um com as suas características dinâmicas próprias. Com esses osciladores, é possível, a partir daqueles que apresentam uma frequência natural  $\omega_k$  e um coeficiente de amortecimento  $\xi_k$  iguais às frequências naturais e respectivos coeficientes de amortecimento do modo ressonante, simular o comportamento dinâmico da estrutura (MAGALHÃES, 2004; TAVARES, 2013).

As frequência naturais  $\omega_k$  se encontram refletidas nas frequências associadas aos picos das funções de densidade espectral, enquanto os coeficientes de amortecimento  $\xi_k$  se refletem na largura dos picos de ressonância das mesmas

funções de densidade espectral. As configurações dos modos de vibração  $\varphi_k$  dependem da relação entre as funções de densidade espectral, tendo por referência um determinado grau de liberdade (MENDES; OLIVEIRA, 2008).

O requisito relativo ao afastamento das frequências naturais representa uma das maiores limitações desse método, pois se esse requisito não for atendido, o método não é capaz de separar as contribuições dos modos com frequências próximas para a resposta medida da estrutura (MAGALHÃES, 2004).

### 3.2.1. IDENTIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

De acordo com Felber (1993), para cada registro obtido no ensaio de vibração, determina-se um autoespectro ou densidade espectral de potência (*Power Spectral Density* - PSD) correspondente. Assim, torna-se possível identificar, para cada registro, os picos de frequência correspondentes aos modos ressonantes. Entretanto, no caso de grandes estruturas, em que o número de pontos instrumentados tende a ser elevado, identificar os picos de frequência para cada autoespectro é inviável. Por outro lado, também não é possível fazer essa identificação considerando apenas um ponto, pois este pode coincidir com o nó de algum dos modos de vibração da estrutura. É necessário, então, considerar a densidade espectral de potência média de todos os pontos medidos para garantir que todas as frequências naturais da estrutura sejam identificadas. Para solucionar essa questão, é usual utilizar uma função de identificação das frequências naturais com base em um grupo de densidade espectral de potência. Esta função é chamada de Média Densidade de Energia Espectral Normalizada (ANPSD) ou espectro médio normalizado e pode ser calculada pela expressão (3.4), na qual  $l$  representa o número de graus de liberdade instrumentados e  $NPSDi$  são os espectros normalizados (*Normalized Power Spectral Density* - NPSD).

$$ANPSD(\omega) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l NPSDi(\omega) \quad (3.4)$$

Ainda com base no trabalho de Felber (1993), os espectros normalizados são calculados dividindo-se as estimativas dos autoespectros pelo somatório de suas  $N$  ordenadas, ou seja, espectros encontrados na diagonal principal da matriz de densidade espectral dividido pela soma total dos valores das ordenadas de cada espectro, como na expressão (3.5).

$$NPSDi(\omega) = \frac{PSDi(\omega)}{\sum_{k=1}^N PSD(\omega_k)} \quad (3.5)$$

Na prática, a normalização dos espectros é muito importante, pois nos ensaios realizados com vários *setups*, as séries temporais associadas a cada grau de liberdade não são todas medidas simultaneamente, podendo, assim, existir diferenças



de intensidade da excitação ao longo do período de ensaio, que conduzem a espectros de resposta com diferentes conteúdos energéticos (MAGALHÃES, 2004).

Finalmente, segundo Magalhães (2004), para identificar as frequências naturais da estrutura, basta analisar os “picos” do espectro de potência médio normalizado.

### 3.2.2. IDENTIFICAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES MODAIS

Depois de identificadas as frequências naturais de vibração, procede-se de forma a identificar os modos de vibração relacionados a essas frequências. De acordo com Tavares (2013), as configurações modais podem ser obtidas pela expressão (3.6).

$$\frac{S_{j,ref}(\omega)}{S_{ref,ref}(\omega)} \approx \frac{\Phi_j}{\Phi_{ref}} \quad (3.6)$$

A expressão (3.6) relaciona a ordenada modal de um grau de liberdade de referência com a de um ponto  $j$  genérico. Essa relação é obtida fazendo-se o quociente entre o espectro cruzado do ponto genérico com o ponto de referência e o autoespectro do ponto de referência, ambos determinados para a frequência ressonante  $\omega$  (TAVARES, 2013).

Ainda com base no trabalho de Tavares (2013), realizado o cálculo da relação à esquerda da igualdade na expressão (3.6), a ordenada do ponto  $j$  poderá ser determinada atribuindo-se um valor unitário para  $\Phi_{ref}$ , surgindo assim a denominada função de transferência, que permite relacionar as respostas a uma excitação ambiente segundo dois graus de liberdade da estrutura. A função de transferência é dada pela expressão (3.7), onde  $S_y(\omega)_{(j,ref)}$  é o espectro cruzado entre um ponto genérico e um ponto de referência e  $S_y(\omega)_{(ref,ref)}$  é o autoespectro do ponto de referência.

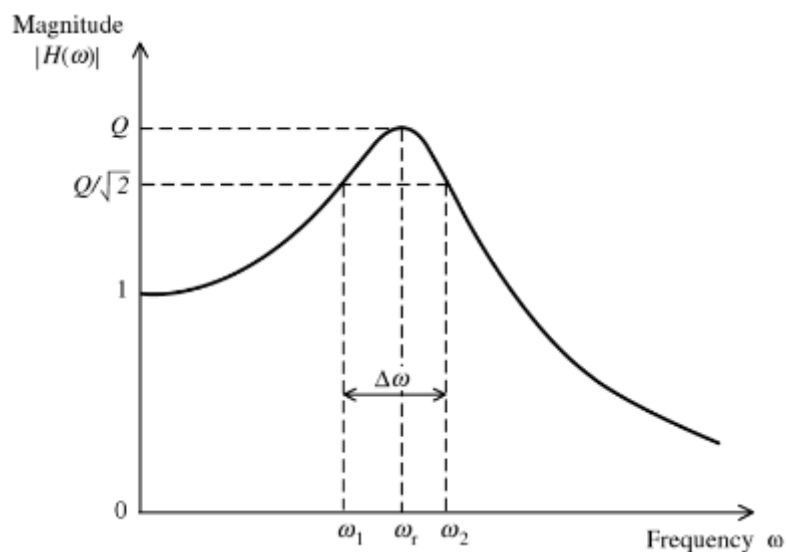
$$T_{j,ref} = \frac{S_y(\omega)_{(j,ref)}}{S_y(\omega)_{(ref,ref)}} \quad (3.7)$$

Segundo Magalhães (2004), pelo fato de os espectros cruzados serem valores complexos, o quociente anterior conduz a um número complexo, cuja amplitude relaciona a amplitude do modo de vibração nos dois graus de liberdade ( $j$  e  $ref$ ) e a fase, que se apenas existirem modos reais, deverá assumir os valores  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ . O valor da fase indica se os graus de liberdade  $j$  e  $ref$  têm deslocamentos no mesmo sentido (caso em que o valor da fase é  $0^\circ$ ) ou em sentidos opostos (caso em que o valor da fase é  $180^\circ$ ).

### 3.2.3. IDENTIFICAÇÃO DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO

O método da seleção de picos permite, a partir dos autoespectros criados, estimar os coeficientes de amortecimento modais. A estimativa é feita a partir do método da meia potência, que se baseia na seleção de três pontos do ANPSD para cada um dos modos ressonantes identificados (MENDES; OLIVEIRA, 2008; TAVARES, 2013).

De acordo com França (2014), o método da meia potência é um método de um grau de liberdade, ou seja, que analisa isoladamente os picos de ressonância de uma FRF. Para Silva (2007), a meia potência é definida como a largura da curva da resposta de frequência quando a magnitude ( $Q$ ) é  $1/\sqrt{2}$  vezes o valor do pico de ressonância e o valor desta largura é denotado por  $\Delta\omega$ , como ilustrado na Figura 3.



**Figura 3 - Método da meia potência para determinação do amortecimento em um sistema com um grau de liberdade. Fonte: Silva (2007)**

Os três pontos citados por Mendes e Oliveira são  $\omega_i$ ,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , como visto na Figura 3. Com esses valores, é possível obter uma estimativa do coeficiente de amortecimento do modo de vibração  $i$ , utilizando a expressão (3.8).

$$\xi_i = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_i} \quad (3.8)$$

Mendes e Oliveira (2008) ressaltam a necessidade de ter atenção com o fato da precisão na seleção dos pontos de meia potência (com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ), depender da resolução em frequência, neste caso, finita. Para grandes valores de  $\Delta\omega$  (possivelmente a maioria dos casos), é necessário fazer interpolações para determinar os valores das frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

O método, de acordo com Mendes e Oliveira (2008), geralmente superestima os valores da taxa de amortecimento, ou seja, um erro de viés por excesso, o qual ocorre fundamentalmente do efeito de escorregamento (*leakage*) associado à resolução finita

em frequência dos espectros. Este efeito existe, mesmo utilizando janelas de dados, pois estas apenas minimizam tal efeito.

### 3.3. MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Conforme Magalhães (2004), mesmo que os princípios fundamentais do método já tivessem sido utilizados nas décadas de 80 e 90, a atual designação “*Frequency Domain Decomposition*” (FDD) foi apresentada em 2000 por Rune Brincker.

O método de decomposição no domínio da frequência (FDD) pode ser considerado como uma extensão do método da seleção de picos, pois assim como o método PP, também é desenvolvido tendo como informação base as estimativas das funções de densidade espectral de potência da resposta em aceleração. Este método conta com uma versão base que permite somente identificar as frequências naturais e avaliar configurações modais. Entretanto, foi desenvolvida uma versão melhorada, com base na qual é também possível obter estimativas dos coeficientes de amortecimento modais (MENDES; OLIVEIRA; 2008).

Ainda referenciando o trabalho de Mendes e Oliveira (2008), o método baseia-se na decomposição em valores singulares (SVD). O conceito da SVD pode ser entendido como uma extensão da decomposição em valores próprios. Sendo assim, a decomposição consiste em diagonalizar a matriz das densidades espectrais de potência da resposta em aceleração, decompondo-a em contribuições modais que, em cada frequência, influenciam significativamente a resposta da estrutura.

Sabendo-se que o método FDD é tido como uma extensão do método de seleção dos picos e que, em relação ao tempo de execução, é adicionado apenas o tempo necessário para efetuar a decomposição em valores singulares da matriz de funções de densidade espectral em cada frequência, o método FDD pode então ser considerado de fácil utilização e de execução rápida (RODRIGUES, 2004).

#### 3.3.1. DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

O procedimento da decomposição em valores singulares apresentado por Magalhães (2004) é descrito a seguir.

A decomposição em valores singulares de uma matriz  $A$  qualquer, de dimensão  $m \times n$ , com  $m > n$ , em três outras matrizes, é realizada conforme a expressão (3.9).

$$A = USV^T, \text{ com } S = \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Na expressão (3.9),  $S_1$  é uma matriz quadrada diagonal, de dimensão  $n$ , que contém os valores singulares da matriz  $A$  em ordem decrescente; as matrizes  $U$  e  $V$  são matrizes unitárias (satisfazem a seguinte propriedade:  $AA^T = I$ ), de dimensão

$m \times m$  e  $n \times n$  que contêm os vetores singulares à esquerda e à direita, respectivamente. O número de valores singulares não nulos indica a ordem da matriz  $A$ , ou seja, o número de colunas, ou linhas, linearmente independentes.

Como já mencionado, a decomposição em valores singulares está relacionada com a determinação de valores e vetores próprios das matrizes  $A^T A$  e  $AA^T$ . Nesse caso, os valores singulares da matriz  $A$  são iguais às raízes quadradas positivas dos valores próprios das matrizes  $A^T A$  e  $AA^T$ . As colunas de  $U$  contêm os vetores próprios de  $AA^T$  e as colunas de  $V$  os vetores próprios de  $A^T A$ .

Até então, foram consideradas matrizes com valores reais. Considerando agora que a matriz em análise seja complexa, as igualdades podem ser mantidas se a operação de transposição ( $\bullet^T$ ) for substituída pela operação de transposição seguida de conjugação complexa ( $\bullet^H$ ).

Para matrizes reais e simétricas ou complexas e hermitianas (que satisfazem a propriedade  $A^H = A$ ) os valores singulares coincidem com os valores próprios e as matrizes  $U$  e  $V$ , que passam a ser coincidentes, contêm os vetores próprios. Dessa forma, o problema de determinação de valores e vetores próprios pode ser entendido como um caso particular de aplicação desta técnica mais genérica que, por sua vez, pode ser aplicada a matrizes retangulares.

### 3.3.2. VERSÃO BASE (FDD)

Como mencionado anteriormente, a decomposição SVD da matriz dos espectros de resposta a decompõe em um conjunto de funções de densidade espectral de potência, cada um correspondendo a um sistema de um grau de liberdade. Este resultado só é exato se o carregamento for do tipo ruído branco, a estrutura for levemente amortecida e se os modos de vibração com frequências próximas forem ortogonais. Se estes pressupostos não forem cumpridos, o resultado será aproximado, mas ainda assim são significativamente mais precisos se comparados aos resultados do método da seleção de picos (BRINCKER et al., 2000).

A metodologia, assim como a sua justificativa, proposta por Brincker et al. (2000), com algumas adaptações realizada por Magalhães (2004), são apresentadas a seguir.

No método de decomposição no domínio da frequência, o primeiro passo é estimar a matriz de densidade espectral. Esta estimativa, avaliada em qualquer frequência discreta  $\omega_i$ , é decomposta aplicando-se a SVD à matriz. Assim, obtém-se:

$$S_y(\omega_i) = U_i S_i U_i^H \quad (3.10)$$

Pelo fato de a matriz  $S_y$  ser quadrada e hermitiana, a matriz  $V$  da expressão (3.9) coincide com a matriz  $U$ .

Na diagonal principal da matriz  $S_i$  são armazenados, em ordem decrescente, os valores singulares da matriz das funções de densidade espectral. Estes valores singulares coincidem com as ordenadas, na frequência  $\omega_i$ , dos espectros de potência dos osciladores de um grau de liberdade, em correspondência com os modos de vibração da estrutura, que contribuem significativamente para a sua resposta nessa frequência. Como os valores singulares são armazenados em ordem decrescente, o primeiro valor singular contém, para cada frequência, a ordenada do autoespectro do oscilador de um grau de liberdade relativo ao modo de vibração dominante nessa frequência.

Se não existirem modos próximos, o primeiro valor singular contém, na vizinhança destes picos, os segmentos mais relevantes dos autoespectros dos osciladores de um grau de liberdade, importantes para avaliar a resposta da estrutura. Os demais valores singulares apresentam valores próximos de zero. No caso de a estrutura ter modos de vibração com frequências próximas, a decomposição em valores singulares da matriz das funções de densidade espectral, na vizinhança dessas frequências, apresenta tantos valores singulares como valores significativos (picos), quantos os modos existentes nessa situação, possibilitando dessa forma o seu reconhecimento.

Em síntese, a identificação das frequências naturais da estrutura pode ser feita pela avaliação da abscissa correspondente ao máximo dos picos de todos os valores singulares.

Os modos de vibração são obtidos a partir da primeira coluna da matriz  $U_i$ , avaliada na respectiva frequência de ressonância. Se as frequências naturais de vibração forem suficientemente afastadas umas das outras, então, os modos de vibração dessas frequências são obtidos a partir da primeira coluna da matriz  $U_i$ , para a correspondente frequência de ressonância. Nos casos em que existem modos com frequências próximas, a configuração do modo dominante é também obtida pela primeira coluna da matriz  $U_i$ , em correspondência com a respectiva frequência de ressonância. No entanto, as outras configurações modais serão avaliadas com base nas colunas (vetores singulares) correspondentes aos valores singulares que apresentem picos, em correspondência com a abscissa em que o valor singular apresenta o seu máximo local.

Nos ensaios realizados com vários “*setups*”, o método consiste em determinar a matriz de densidade espectral para cada um dos “*setups*” avaliados, obtendo-se, para cada matriz, tantos valores singulares quantos graus de liberdade instrumentados. O

procedimento habitual nestas situações é o de resumir toda a informação em um único espectro normalizado, que permite a identificação de todas as frequências naturais da estrutura, procedimento semelhante ao ANPSD no método de seleção de picos. As configurações modais são obtidas avaliando a primeira coluna da matriz  $U_i$  de cada “*setup*”, fazendo-se a correspondência de cada elemento da matriz ao ponto da estrutura instrumentado.

Alternativamente, pode-se também aplicar a SVD a uma matriz de espectros retangular contendo apenas as colunas relativas aos sensores de referência. Ao proceder desta forma, o número de valores singulares será igual ao número de sensores de referência utilizados, sendo apenas possível identificar tantos modos, com frequências próximas, quantos os sensores de referência adotados.

### **3.4. ALGORITMOS**

As aplicações dos algoritmos dos dois métodos que compõem esta dissertação estão disponíveis na plataforma do *software* MATLAB. Para a utilização desses algoritmos, foi realizado um estudo minucioso de cada um deles. Em todos os casos simulados, os dados de entrada são sinais puros, ou seja, sem qualquer tipo de pré-processamento.

#### **3.4.1. PEAK PICKING**

O algoritmo do método da seleção de picos (PP) permite ao usuário a seleção manual dos picos. O código utiliza como entrada: dados temporais (sinal), ou seja, acelerações no tempo; frequência de amostragem do ensaio e um canal de referência para a normalização dos modos de vibração. Como saída, fornece as frequências naturais de vibração identificadas pelo usuário (a partir da seleção de picos), as taxas de amortecimento e as formas modais de vibração referentes às frequências identificadas.

O procedimento utilizado pelo algoritmo inicia-se com a leitura do arquivo de dados e, a partir da função *cpsd.m* (*Compute Power Spectral Density*), que utiliza o procedimento de Welch modificado (empregando o número de pontos da FFT, janela de dados, sobreposição de sinal e a taxa de amostragem do ensaio) (Mathworks, 2011), são obtidas as matrizes de densidade espectral de potência (PSD) e um vetor de frequências. Tal vetor contém valores de frequência de zero a metade da frequência de amostragem, considerando uma resolução frequencial estabelecida pela função *cpsd.m* a partir do número de pontos da FFT. Com os valores das PSDs são calculados os espectros normalizados (NPSD) e, posteriormente, também os espectros médios normalizados (ANPSD).

O código utiliza uma subfunção por meio da qual, a partir do ANPSD, do vetor de frequências, do sinal de entrada e de um canal de referência, obtêm-se as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura simulada. Para isso, são plotados os valores do ANPSD em função do vetor de frequências e, a partir desse gráfico, o usuário seleciona os picos desejados.

Para o cálculo dos modos de vibração, a função *tfestimate.m* é utilizada para fornecer uma estimativa da função de transferência que, por sua vez, é dada pelo quociente entre a densidade espectral cruzada de potência (demais sinais) e a densidade espectral de potência (sinal de referência). Então, os modos de vibração identificados são os valores resultantes das funções de transferência referentes às frequências naturais previamente obtidas. Os modos obtidos pela função de transferência são sempre modos complexos. Assim, torna-se necessário o uso de um algoritmo auxiliar para transformá-los em modos reais (seção 3.4.3).

O último parâmetro modal, as taxas de amortecimento, é calculado a partir de um algoritmo externo denominado *halfpow.m* (Barbosa, 2001), que é baseado no método de meia potência e tem como dados de entrada as frequências naturais, os índices das frequências naturais (posições dessas frequências no vetor de frequências), a resposta em frequência (ANPSD) e o intervalo de tempo de aquisição do sinal.

### **3.4.2. MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**

O código do método FDD também obtém as frequências naturais e formas modais de vibração a partir da seleção manual de picos. Como informação de entrada, o algoritmo necessita dos dados temporais e da frequência de amostragem do ensaio.

O algoritmo consiste em fazer a leitura do sinal obtido em ensaio e, a partir da função *cpsd.m* são obtidos as matrizes de densidade espectral de potência (PSD) e o vetor de frequências, assim como no método da seleção de picos. Então, uma subfunção é introduzida para calcular as frequências naturais e os modos de vibração a partir do vetor de frequências e das PSDs. Utilizando a função *svd.m* (*Singular Value Decomposition*) é feita a decomposição de todas as matrizes PSDs em valores e vetores singulares. Na sequência, o primeiro valor singular de cada uma das PSDs é plotado em função do vetor de frequências e, a partir desse gráfico, são selecionados os picos desejados.

As formas modais de vibração são obtidas pela primeira coluna das matrizes de vetores singulares referentes a cada uma das frequências próprias (anteriormente identificadas). Novamente, os modos identificados são modos complexos, portanto,

utiliza-se o algoritmo externo *modoreal.m* (seção 3.4.3) para transformar tais modos em modos reais.

### 3.4.3. ALGORITMO AUXILIAR *MODOREAL*

O código *modoreal.m* foi programado para transformar modos complexos em modos reais. De acordo com Barbosa (2001), o algoritmo procede da seguinte maneira:

Os modos de vibração complexos podem ser escritos como mostrado na equação (3.11).

$$\phi_r = c_r + id_r \quad (3.11)$$

sendo  $c_r$  e  $d_r$  vetores contendo as partes reais e imaginárias do modo  $\phi_r$ , respectivamente.

O módulo da n-ésima componente do r-ésimo modo real  $\phi_{nr}^*$  é dado pela equação (3.12).

$$\phi_{nr}^* = \sqrt{c_{nr}^2 + d_{nr}^2} \quad (3.12)$$

onde  $c_{nr}$  e  $d_{nr}$  representam a n-ésima componente do r-ésimo vetor contendo as partes reais e imaginárias do modo  $\phi_{nr}^*$ , respectivamente.

Finalmente, os valores obtidos devem ser corrigidos de acordo com o ângulo de fase dos sinais (se têm o mesmo deslocamento ou contrário). Para isso, o valor absoluto  $\phi_{nr}^*$  é multiplicado por uma constante  $\eta$ , dada pela equação (3.13).

$$\eta = \begin{cases} -1, & \text{se } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{d_{nr}}{c_{nr}}\right) \quad (3.14)$$

Para concluir a descrição do código *modoreal.m*, ainda segundo Barbosa (2001), destaca-se que para o modo conjugado  $\phi_r = c_r - id_r$ , obtêm-se componentes reais de mesmo módulo, porém simétricas àquelas obtidas para o mesmo modo  $\phi_r = c_r + id_r$ , representando, portanto, a mesma forma modal de vibração.



#### 4. APLICAÇÕES E RESULTADOS

Os métodos PP e FDD foram aplicados às respostas de ensaios dinâmicos referentes a seis estudos de caso. E na presente seção, apresentam-se todas as aplicações e seus respectivos resultados.

Os estudos numéricos normalmente representam o primeiro passo para a análise do desempenho e aptidão das técnicas de identificação dos parâmetros modais de estruturais (ALVES, 2012). Portanto, as aplicações desse trabalho iniciam-se com três estudos numéricos e são concluídas com três estudos reais, sendo um deles uma viga ensaiada em laboratório e os outros dois referentes a estruturas em operação.

A determinação de qual das técnicas é a mais apta, no geral, a identificar os parâmetros modais estruturais, foi feita comparando-se os resultados obtidos pelos métodos com resultados previamente conhecidos, obtidos a partir de modelos numéricos, ou ainda numéricos e/ou experimentais já obtidos em outros trabalhos presentes na literatura. E a determinação do limite identificável entre as frequências naturais foi feita testando diversas distâncias entre as frequências simuladas.

Para ambas as avaliações, ruídos foram inseridos nas respostas dos ensaios. Tais procedimentos são descritos de maneira mais detalhada em cada uma das aplicações apresentadas a seguir.

No caso do método PP, diversas simulações foram feitas, cada uma considerando um diferente canal como referência. Feito isso, os resultados de cada uma das simulações foram analisados, avaliando-se as configurações modais em relação ao comportamento teórico e determinou-se o melhor entre eles. Assim, apenas o melhor resultado é apresentado para cada caso.

##### 4.1. CASO CONTROLE I

A primeira aplicação é um sinal gerado numericamente de uma estrutura qualquer (não importando sua geometria) utilizado como base para comparação e avaliação dos resultados dos métodos aplicados nesse trabalho.

Para gerar os sinais foi utilizada a equação (4.1), variando-se alguns parâmetros. Tal equação descreve a vibração livre amortecida de um sistema dinâmico com 5 graus de liberdade. Nela,  $\omega_D$  representa a frequência natural amortecida que, para pequenas taxas de amortecimento  $\xi$ , equivale à própria frequência natural  $\omega = 2\pi f$ . A amplitude do sinal no instante  $t$  é dada por  $y(t)$ ,  $\rho$  é um fator de amplitude e  $\theta$  é uma parcela de fase.

$$y(t) = \sum_{i=1}^5 \rho_i \cos(\omega_{Di}t + \theta_i) e^{-\xi_i \omega_i t} \quad (4.1)$$

O sinal dinâmico gerado contém cinco frequências conhecidas, bem como suas taxas de amortecimento, mostradas na Tabela 1. A esse sinal, foram adicionados diferentes níveis de ruído branco, sendo o pior caso o de 20%.

**Tabela 1 - Parâmetros modais teóricos para o Caso Controle I**

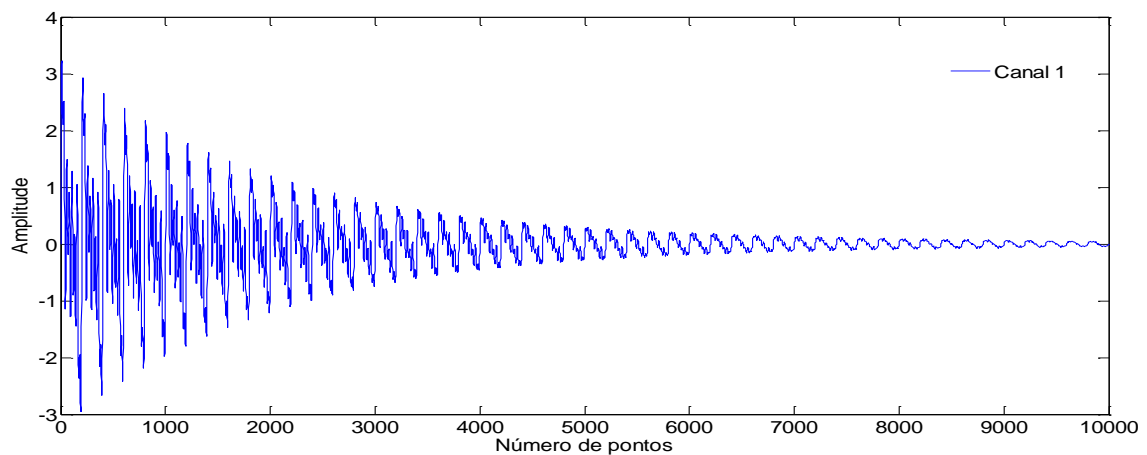
	Frequências próprias (Hz)	Taxas de amortecimento (%)
1	0,50	1,00
2	1,00	0,80
3	1,50	0,60
4	2,00	0,40
5	4,00	0,20

Os ruídos foram gerados multiplicando o nível de ruído pelo desvio-padrão de cada canal de medição e por um vetor de valores aleatórios de uma distribuição gaussiana de média zero e desvio-padrão unitário (o que caracteriza um ruído branco). A resposta dinâmica com ruído pode ser obtida adicionando a resposta sem ruído ao vetor de ruído, que é calculado pela expressão (4.2):

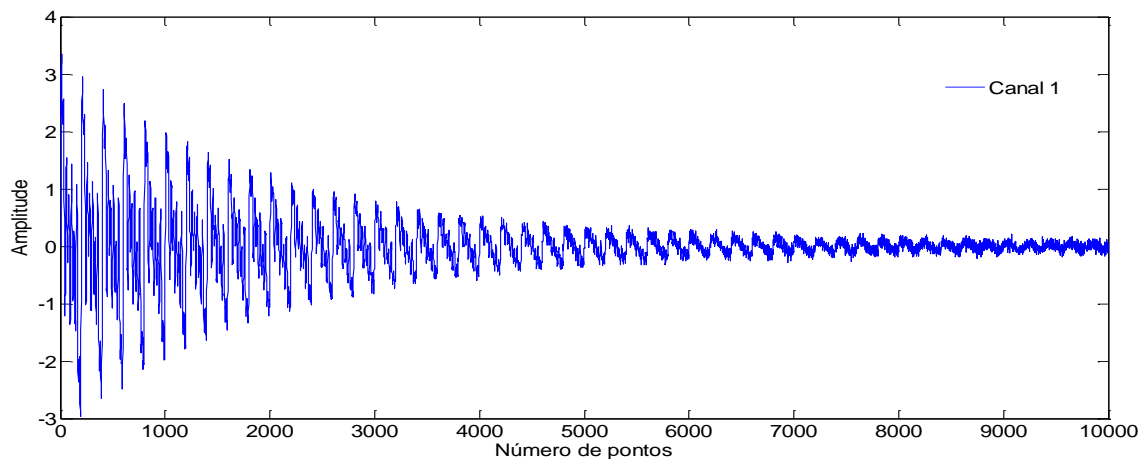
$$X_{i,ruído} = X_i + \eta_{ruído} \sigma_{X_i} V \sim N(0,1) \quad (4.2)$$

onde  $X_i$  e  $X_{i,ruído}$  representam, respectivamente, as respostas dinâmicas da estrutura sem e com ruído medidas pelo sensor  $i$ ,  $\eta_{ruído}$  é o nível de ruído adicionado,  $\sigma_{X_i}$  o desvio-padrão de  $X_i$  e  $V \sim N(0,1)$  um vetor gaussiano de média nula e desvio-padrão unitário.

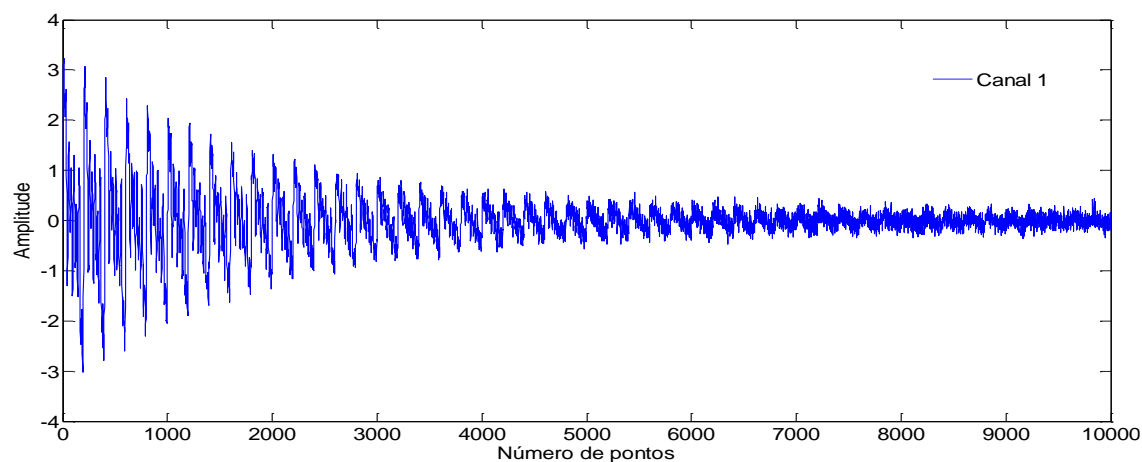
Nas Figuras 4, 5 e 6 são ilustrados os sinais para os casos sem ruído, com adição de 10% de ruído e com adição de 20% de ruído, respectivamente. Para os sinais gerados, foi considerada uma taxa de amostragem de 100 Hz, gerando o equivalente a 10 segundos de sinal.



**Figura 4 - Sinal sem ruído - Caso Controle I**



**Figura 5 - Sinal com adição de 10% de ruído - Caso Controle I**



**Figura 6 - Sinal com adição de 20% de ruído - Caso Controle I**

Para o Caso Controle I, apresentam-se como resultado apenas as frequências próprias e as taxas de amortecimento. Os modos de vibração são construídos a partir das amplitudes modais que são identificadas para cada um dos sensores. Como nesse caso tem-se apenas um ponto de observação (que representa o sensor de medição de uma estrutura real), identifica-se somente um valor unitário, que nada representa fisicamente. Os resultados obtidos para cada nível de ruído analisado são apresentados nos tópicos seguintes.

#### **4.1.1. SINAL SEM RUÍDO**

Os dados de entrada foram: sinal temporal gerado numericamente de uma estrutura qualquer, frequência de amostragem (100 Hz) e canal de referência (1) que, para o Caso Controle I, é a única possibilidade, já que existe apenas um ponto observação.

Nas Tabelas 2 e 3 são apresentados os parâmetros modais identificados, as comparações entre os resultados obtidos pelas técnicas e os valores de referência e os erros relativos em valores absolutos gerados por cada uma delas.

**Tabela 2 - Comparativo das frequências identificadas pelas técnicas de identificação modal para o sinal sem ruído**

Frequências de referência (Hz)	PP (Hz)	Erros relativos (%)	FDD (Hz)	Erros relativos (%)
0,50	0,49	2,00	0,49	2,00
1,00	1,00	0,00	1,00	0,00
1,50	1,49	0,67	1,49	0,67
2,00	2,00	0,00	2,00	0,00
4,00	4,00	0,00	4,00	0,00

Como pode ser visto no comparativo de frequências, os resultados dos métodos PP e FDD foram bem próximos dos valores de referência. Os erros relativos foram menores que 1%, com exceção do primeiro modo, que apresentou erro de 2,00%.

**Tabela 3 - Comparativo das taxas de amortecimento obtidas pelo PP para o sinal sem ruído**

Taxas de amortecimento de referência (%)	PP (%)	Erros relativos (%)
1,00	9,51	851,00
0,80	3,83	378,75
0,60	3,08	413,33
0,40	1,93	382,50
0,20	1,02	410,00

Por outro lado, os erros relativos referentes às taxas de amortecimento identificadas foram muito altos, não permitindo assim que esses resultados caracterizem adequadamente a estrutura analisada.

#### 4.1.2. SINAL COM 10% DE RUÍDO

Os parâmetros modais identificados são apresentados nas Tabelas 4 e 5, nas quais também são feitos comparativos dos resultados dos métodos com os valores de referência, contendo ainda a porcentagem de erro, em valores absolutos, para cada um dos métodos e parâmetros.

**Tabela 4 - Comparativo das frequências identificadas pelos métodos de identificação modal para o sinal com adição de 10% de ruído**

Frequências de referência (Hz)	PP (Hz)	Erros relativos (%)	FDD (Hz)	Erros relativos (%)
0,50	0,49	2,00	0,49	2,00
1,00	1,00	0,00	1,00	0,00
1,50	1,49	0,67	1,49	0,67
2,00	2,00	0,00	2,00	0,00
4,00	4,00	0,00	4,00	0,00

Os resultados obtidos pelos métodos PP e FDD, relativos às frequências próprias, mantiveram-se os mesmos em relação ao sinal sem ruído, o que indica que o ruído adicionado não afetou a capacidade de identificação das frequências para ambos os métodos. Assim sendo, as estimativas foram adequadas, apresentando erros abaixo de 1%, sendo nulo para três dos cinco modos contidos no sinal.

**Tabela 5 - Comparativo das taxas de amortecimento obtidas pelo PP para o sinal com adição de 10% de ruído**

<b>Taxas de amortecimento de referência (%)</b>	<b>PP (%)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>
1,00	9,51	851,00
0,80	3,83	378,75
0,60	3,08	413,33
0,40	1,93	382,50
0,20	1,02	410,00

As taxas de amortecimento, entretanto, continuaram apresentando erros relativos muito altos, que não são válidos para caracterizar a estrutura. De toda sorte, o acréscimo de 10% de ruído no sinal não causou alterações significativas em relação aos resultados obtidos pelo método PP.

#### 4.1.3. SINAL COM 20% DE RUÍDO

Os resultados obtidos e os comparativos das técnicas com a teoria são mostrados nas Tabelas 6 e 7.

**Tabela 6 - Comparativo entre as frequências identificadas pelos métodos e valores de referência, com seus respectivos erros**

<b>Frequências de referência (Hz)</b>	<b>PP (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>	<b>FDD (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>
0,50	0,49	2,00	0,49	2,00
1,00	1,00	0,00	1,00	0,00
1,50	1,49	0,67	1,49	0,67
2,00	2,00	0,00	2,00	0,00
4,00	4,00	0,00	4,00	0,00

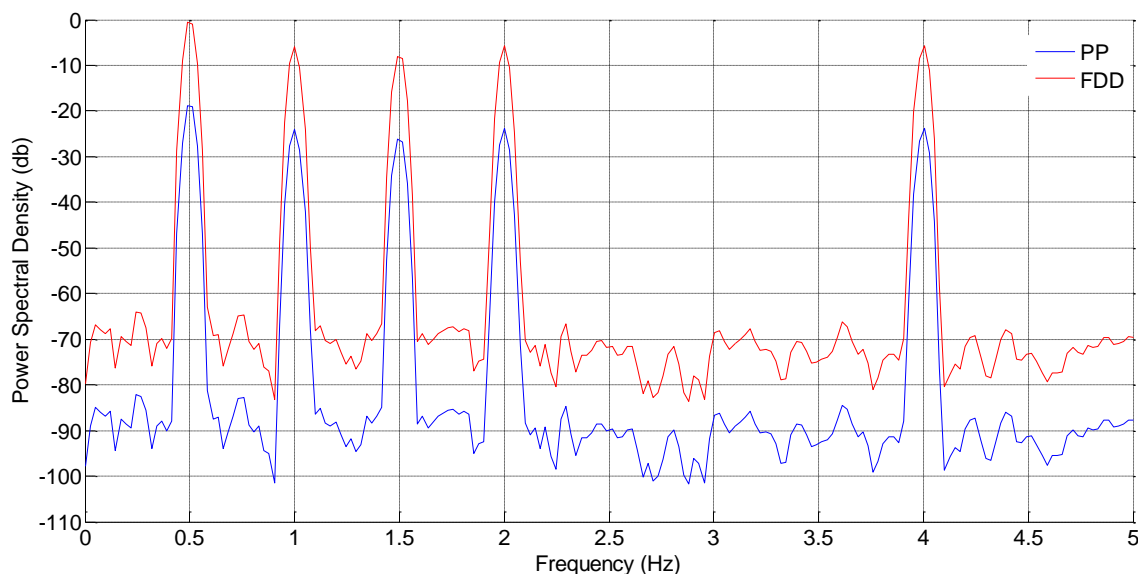
Mesmo com um acréscimo de 20% de ruído ao sinal numérico, os métodos fizeram uma boa identificação das frequências naturais (mesmos valores obtidos para o caso de sinal sem ruído), afirmando ainda mais a eficiência dos métodos na identificação de frequências para essa ordem de proximidade e nível de ruído.

**Tabela 7 - Comparativo entre as taxas de amortecimento obtidas pelo PP e valores de referência, com seus respectivos erros**

Taxas de amortecimento de referência (%)	PP (%)	Erros relativos (%)
1,00	9,53	853,00
0,80	3,83	378,75
0,60	3,07	411,67
0,40	1,92	380,00
0,20	1,02	410,00

O resultado para as taxas de amortecimento foi levemente afetado pela adição de 20% de ruído, mas não de maneira significativa. Os erros relativos continuam elevados e são inaceitáveis para a caracterização da estrutura.

A Figura 7 apresenta os espectros identificados para ambos os métodos, considerando-se somente o caso do sinal com 20% de ruído, já que os demais resultados foram idênticos. Notam-se, claramente, os picos nas posições indicadas pelas frequências naturais identificadas.



**Figura 7 - Espectros gerados pelos métodos - Caso Controle I**

#### 4.2. CASO CONTROLE II

O Caso Controle I contemplou o caso de um sinal contendo frequências que distavam de, no mínimo, 0,5 Hz. Nas simulações realizadas, percebeu-se que, mesmo adicionando-se diferentes níveis de ruído, ambos os métodos foram capazes de identificá-las. Assim, viu-se a necessidade de avaliar sinais contendo frequências naturais mais próximas que 0,5 Hz. Para fazer tal avaliação lançou-se mão do Caso Controle II.

No Caso Controle II, os sinais também foram gerados numericamente e são referentes à simulação de uma estrutura qualquer (independentemente de sua geometria), utilizando apenas um ponto de observação.

Os sinais foram gerados pela equação (4.1) de modo que se obtivessem duas frequências naturais próximas. Para isso, fixou-se a primeira frequência e variou-se a segunda de décimo em décimo, iniciando-se com uma variação de 0,1 Hz, até que as duas fossem identificadas.

Simulações preliminares, com resolução frequencial de 0,1 Hz, demonstraram que não foi possível fazer qualquer identificação - para ambos os métodos - até uma diferença de 0,4 Hz entre as frequências. Portanto, a diferença mínima identificável pelos métodos foi de 0,5 Hz. Finalmente, os valores dos parâmetros dinâmicos utilizados para gerar os sinais são apresentados na Tabela 8.

**Tabela 8 - Parâmetros modais teóricos para o Caso Controle II**

	<b>Frequências próprias (Hz)</b>	<b>Taxas de amortecimento (%)</b>
<b>1</b>	20,80	1,00
<b>2</b>	21,30	2,00

A fim de realizar uma avaliação mais expressiva e realista dos resultados, com relação à capacidade de identificação dos métodos para frequências naturais próximas e para as taxas de amortecimento, foram gerados e simulados vários sinais com os parâmetros modais mostrados na Tabela 8, cada um considerando uma diferente resolução frequencial.

O cálculo da resolução frequencial foi feito de acordo com a expressão (4.3), sendo o tempo de ensaio dado em [s] e a resolução frequencial em [Hz].

$$\text{Resolução frequencial} = \frac{1}{\text{tempo de ensaio}} \quad (4.3)$$

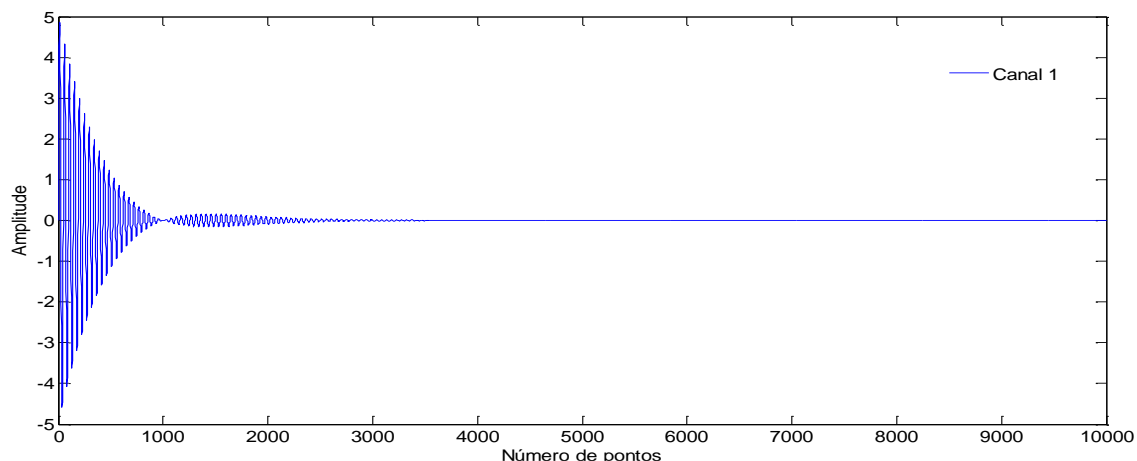
Na Tabela 9 são mostrados os tempos de ensaio com as respectivas resoluções frequências utilizadas para gerar os sinais.

**Tabela 9 - Tempo de ensaio e resoluções frequências**

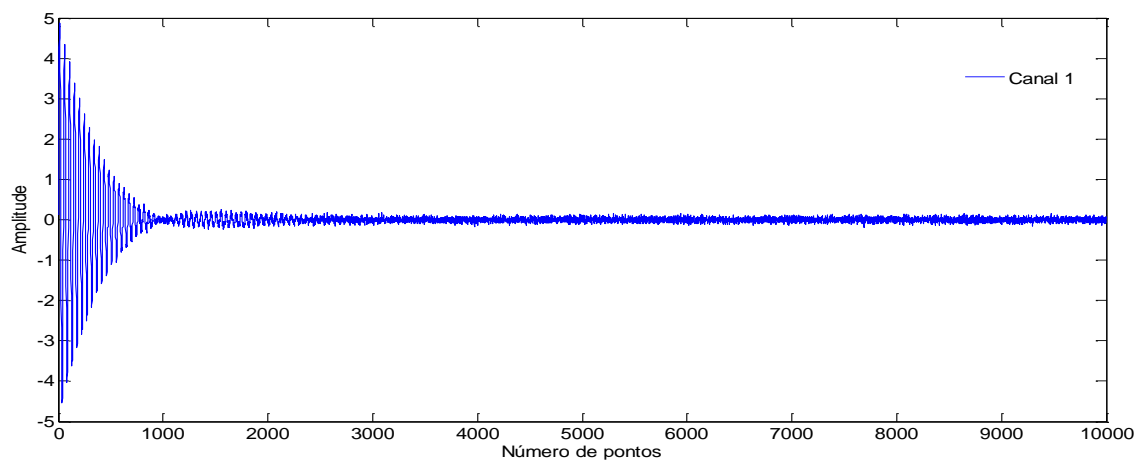
<b>Tempo de ensaio (s)</b>	<b>Resolução frequencial (Hz)</b>
10	0,100
30	0,033
50	0,020
70	0,014

Assim como na primeira aplicação, diferentes níveis de ruídos foram adicionados a todos os sinais, conforme a equação (4.2). Para todos os sinais gerados, foi considerada uma taxa de amostragem de 1000 Hz.

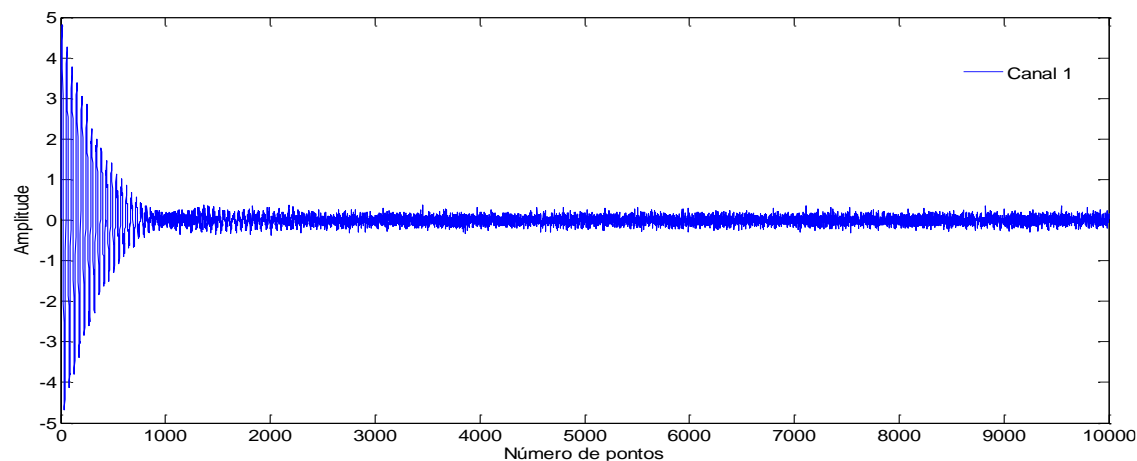
Para o Caso Controle II são mostrados apenas os sinais gerados para uma das resoluções frequenciais. Assim, nas Figuras 8, 9 e 10 são mostrados os sinais com 10 segundos de ensaio (menor resolução frequencial) para os casos sem ruído, com adição de 10% de ruído e com adição de 20% de ruído, respectivamente.



**Figura 8 - Sinal sem ruído e 10 segundos de ensaio**



**Figura 9 - Sinal com adição de 10% de ruído e 10 segundos de ensaio**



**Figura 10 - Sinal com adição de 20% de ruído e 10 segundos de ensaio**



Pelo mesmo motivo descrito no Caso Controle I, para o Caso Controle II também se têm como resultados apenas as frequências naturais e as taxas de amortecimento. As identificações destes parâmetros modais para cada um dos níveis de ruído analisados são mostradas nos tópicos seguintes.

#### 4.2.1. SINAL SEM RUÍDO

Nas Tabelas 10 e 11 são mostrados os parâmetros modais identificados e feitas comparações entre os resultados obtidos pelas técnicas estudadas e os valores utilizados para gerar o sinal. Os comparativos contêm também os erros relativos em valores absolutos de cada técnica.

**Tabela 10 - Comparativo das frequências naturais para sinal contendo frequências próximas sem ruído**

<b>Frequências de referência (Hz)</b>	<b>PP (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>	<b>FDD (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>
20,80	20,75	0,24	20,75	0,24
21,30	21,48	0,85	21,48	0,85

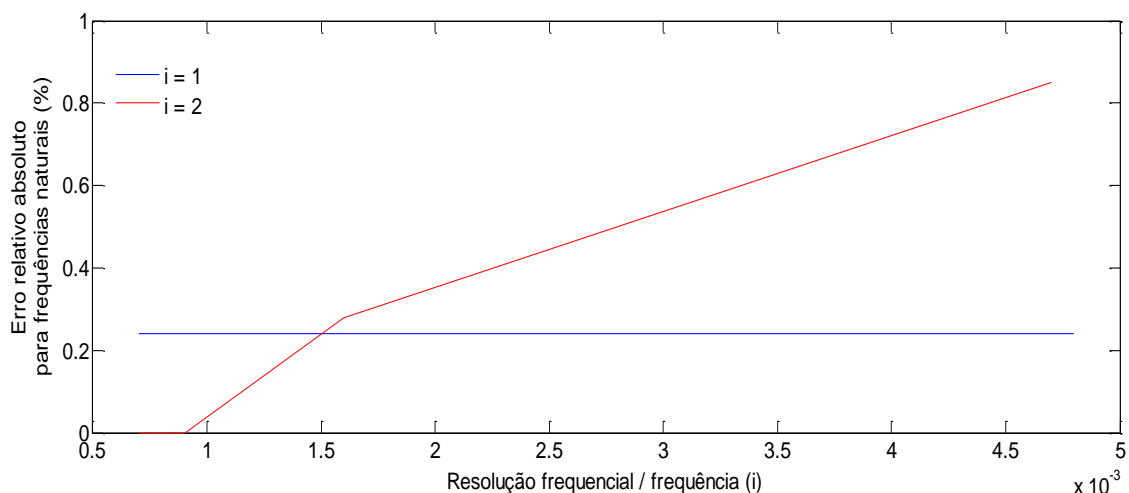
Para os métodos PP e FDD, ambas as frequências naturais de vibração ficaram próximas dos valores utilizados para gerar o sinal (com erros inferiores a 1%), obtendo assim identificações satisfatórias.

**Tabela 11 - Comparativo das taxas de amortecimento para sinal contendo frequências próximas sem ruído**

<b>Taxas de amortecimento de referência (%)</b>	<b>PP (%)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>
1,00	1,74	74,00
2,00	1,95	2,50

O mesmo não ocorreu para as taxas de amortecimento, que apresentam bom resultado somente para o segundo modo de vibração.

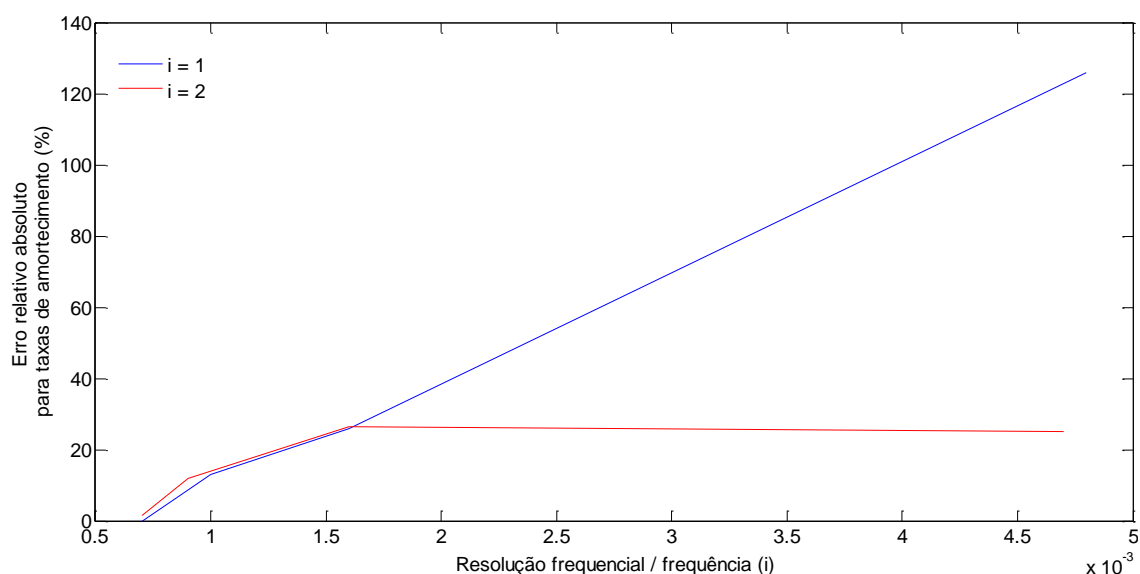
Na avaliação da capacidade de identificação das frequências naturais para diferentes tempos de ensaio, os resultados obtidos pelos métodos PP e FDD foram idênticos para todas as simulações do sinal sem adição de ruído. Na Figura 11 são mostradas curvas dos erros relativos absolutos para cada uma das frequências naturais de vibração em função da resolução frequencial dividida pela frequencial própria de interesse, as quais representam os resultados de ambos os métodos.



**Figura 11 - Avaliação do erro relativo na identificação das frequências próprias - sinal sem ruído - métodos PP e FDD**

Observa-se nas curvas da Figura 11 que o erro na identificação da primeira frequência natural de vibração manteve-se constante para todas as resoluções frequenciais avaliadas. Já o erro obtido para a segunda frequência própria foi proporcional a resolução frequencial, portanto, a capacidade de identificação dos métodos PP e FDD melhoram com o refinamento da resolução frequencial. Para ambas as frequências próprias os erros apresentados foram sempre baixos e inferiores a 1%.

A Figura 12 apresenta as curvas para mesma avaliação da figura anterior, porém agora considerando o erro relativo gerado na identificação das taxas de amortecimento pelo método PP.



**Figura 12 - Avaliação do erro relativo na identificação das taxas de amortecimento - sinal sem ruído - método PP**

Os resultados para as taxas de amortecimento mostraram que a determinação desse parâmetro modal melhora significativamente com o refinamento da resolução

frequencial, principalmente para a taxa de amortecimento referente ao primeiro modo de vibração. Neste caso, os resultados são considerados aceitáveis quando a relação resolução/frequência é inferior a 0,0010, ou seja, quando a resolução frequencial tem valor inferior a 0,020 Hz.

#### 4.2.2. SINAL COM 10% DE RUÍDO

Os resultados para o sinal com adição de 10% de ruído são apresentados nas Tabelas 12 e 13, nas quais também são feitos comparativos entre os parâmetros modais obtidos pelos métodos e os valores para os quais o sinal foi gerado. Os erros relativos são apresentados em valores absolutos.

**Tabela 12 - Comparativo entre frequências naturais identificadas pelos métodos e valores utilizados para gerar o sinal com adição de 10% de ruído**

Frequências de referência (Hz)	PP (Hz)	Erros relativos (%)	FDD (Hz)	Erros relativos (%)
20,80	20,75	0,24	20,75	0,24
21,30	21,48	0,85	21,48	0,85

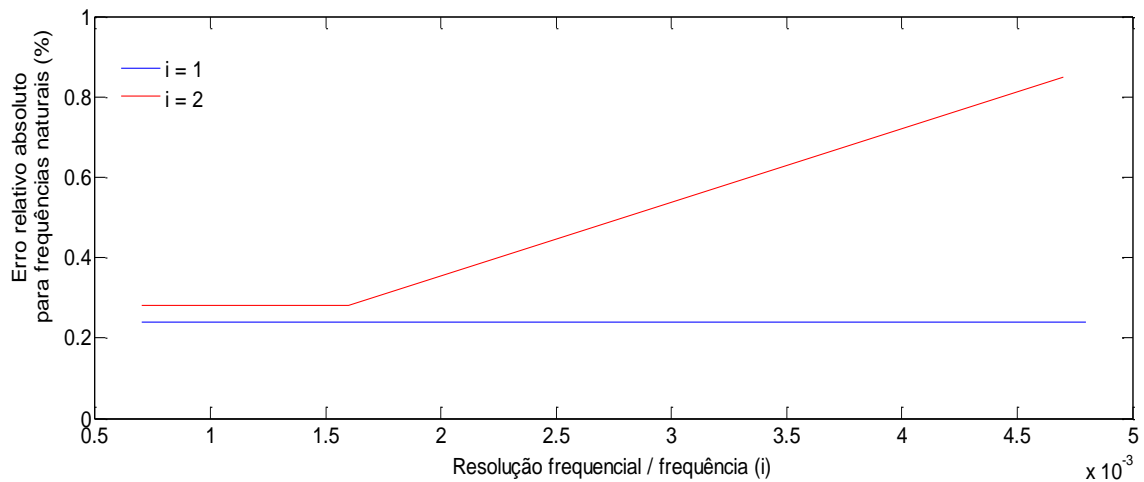
Para um acréscimo de 10% de ruído, os métodos mantiveram a boa identificação das frequências próximas (com erros inferiores a 1%), resultando em valores idênticos aos obtidos pelos métodos para o sinal sem adição de ruído.

**Tabela 13 - Comparativo entre taxas de amortecimento obtidas pelo PP e valores utilizados para gerar o sinal com adição de 10% de ruído**

Taxas de amortecimento de referência (%)	PP (%)	Erros relativos (%)
1,00	1,75	75,00
2,00	1,94	3,00

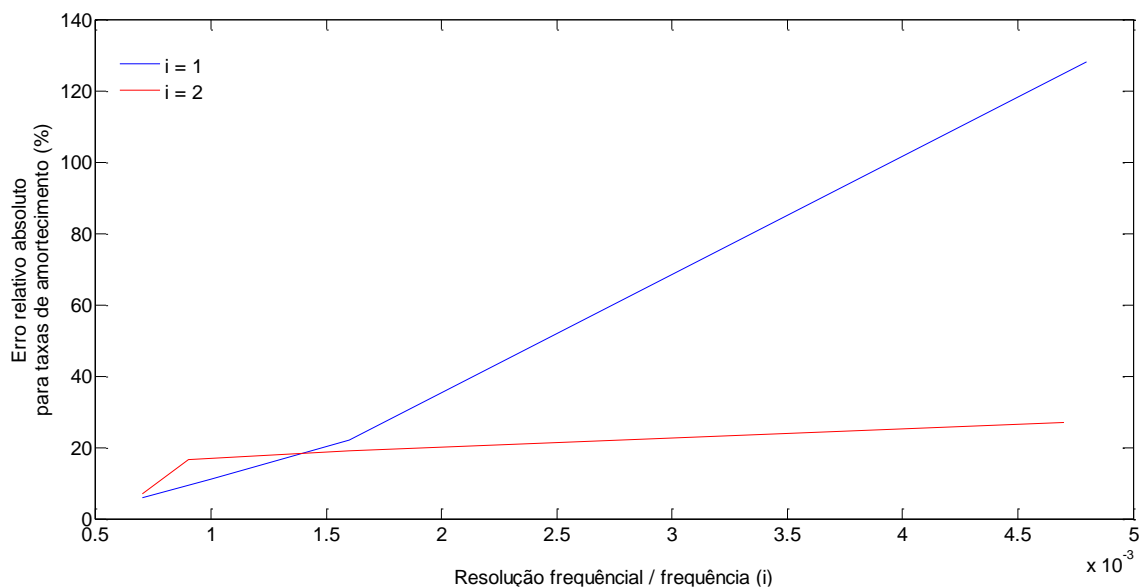
As taxas de amortecimento apresentaram valores bem próximos aos do caso anterior (sinal sem ruído). Portanto, a adição de 10% de ruído não provocou mudanças significativas nos resultados do método.

Quanto à avaliação levando em consideração diferentes tempos de ensaio, os resultados obtidos para o sinal com adição de 10% de ruído também foram idênticos para os dois métodos de análise e são mostrados na forma de gráficos nas Figuras 13 e 14.



**Figura 13 - Avaliação do erro relativo na identificação das frequências próprias - sinal com 10% de ruído - métodos PP e FDD**

O erro na identificação da primeira frequência natural de vibração permaneceu constante durante todas as variações analisadas. No entanto, para a segunda frequência natural o erro relativo reduziu com o refinamento da resolução frequencial até uma relação resolução frequencial/frequência de 0,0016. Para valores inferiores a este, o erro ficou constante.



**Figura 14 - Avaliação do erro relativo na identificação das taxas de amortecimento - sinal com 10% de ruído - método PP**

Para as taxas de amortecimento a melhora na resolução frequencial proporcionou também uma melhora significativa na precisão de identificação deste parâmetro modal, principalmente para a taxa de amortecimento referente ao primeiro modo de vibração.

#### 4.2.3. SINAL COM 20% DE RUÍDO

Nas Tabelas 14 e 15 são mostrados os parâmetros modais identificados e feitas comparações entre os resultados obtidos pelos métodos e os valores para os quais o sinal foi gerado. Os comparativos também contam com os erros relativos em valores absolutos de cada um dos métodos.

**Tabela 14 - Comparativo das frequências naturais para um sinal numérico contendo frequências próximas com adição de 20% de ruído**

<b>Frequências de referência (Hz)</b>	<b>PP (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>	<b>FDD (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>
20,80	20,75	0,24	20,75	0,24
21,30	21,48	0,85	21,48	0,85

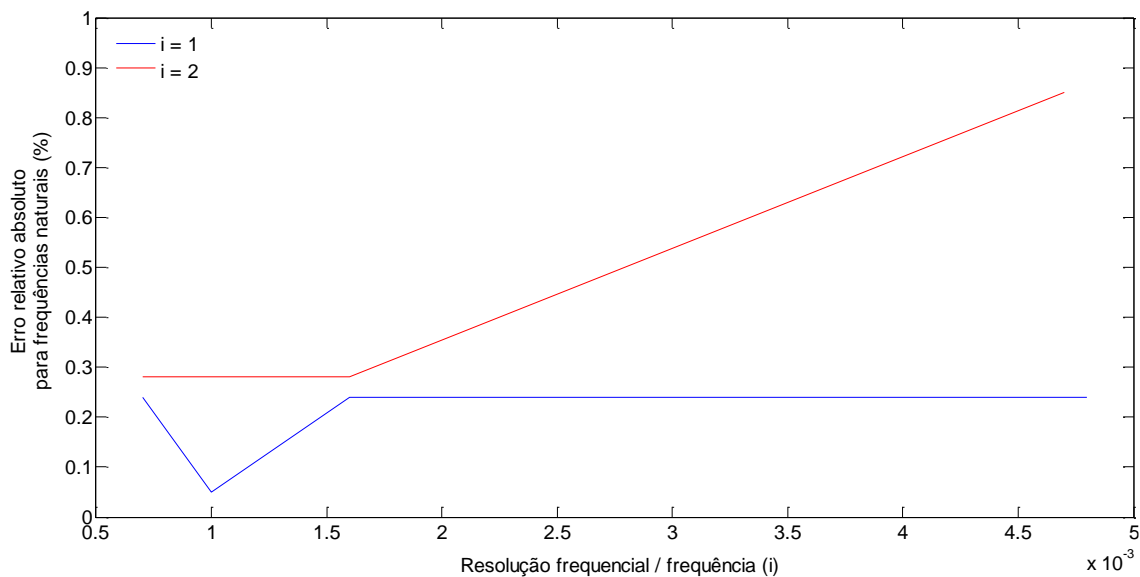
Os valores obtidos para as frequências próprias permaneceram os mesmos do caso para o sinal sem ruído, apresentando erros relativos abaixo de 1%. Desta forma, reafirmando a capacidade satisfatória de ambos os métodos em identificar frequências com esta ordem de proximidade, mesmo com presença significativa de ruído no sinal.

**Tabela 15 - Comparativo das taxas de amortecimento para um sinal numérico contendo frequências próximas com adição de 20% de ruído**

<b>Taxas de amortecimento de referência (%)</b>	<b>PP (%)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>
1,00	1,77	77,00
2,00	1,98	1,00

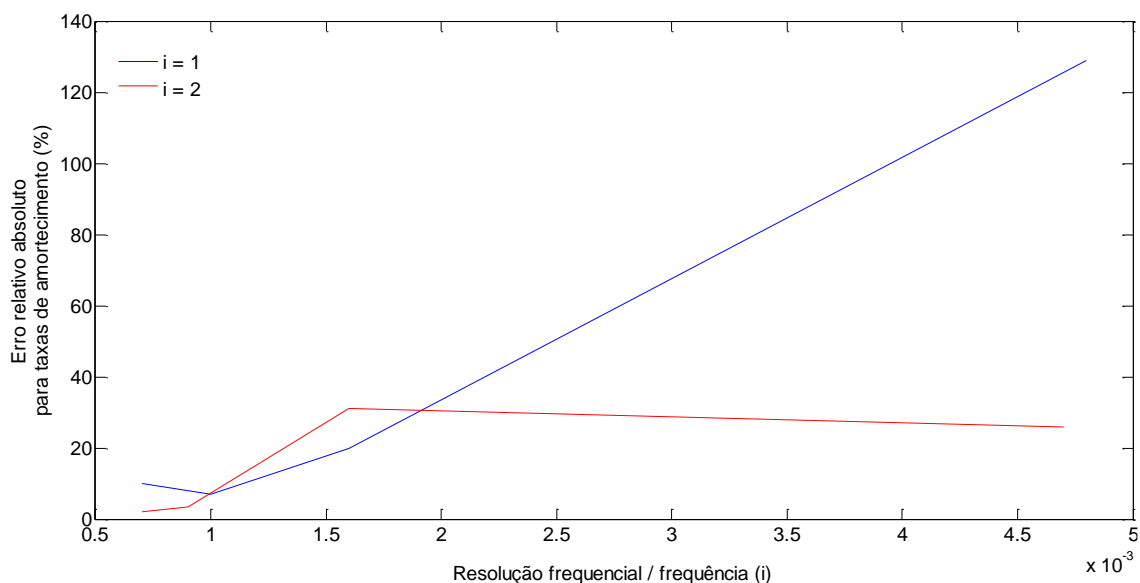
A identificação das taxas de amortecimento também não teve alteração significativa em relação aos dois casos anteriores (sinal sem ruído e com adição de 10% de ruído). Assim sendo, a adição de até 20% de ruído não comprometeu a identificação dos parâmetros modais pelo método PP.

A avaliação da capacidade de identificação dos métodos PP e FDD novamente apresentaram resultados idênticos para as frequências naturais de vibração. Os resultados desta avaliação, para os sinais com adição de 20% de ruído, são mostrados nas Figuras 15 e 16.



**Figura 15 - Avaliação do erro relativo na identificação das frequências próprias - sinal com 20% de ruído - métodos PP e FDD**

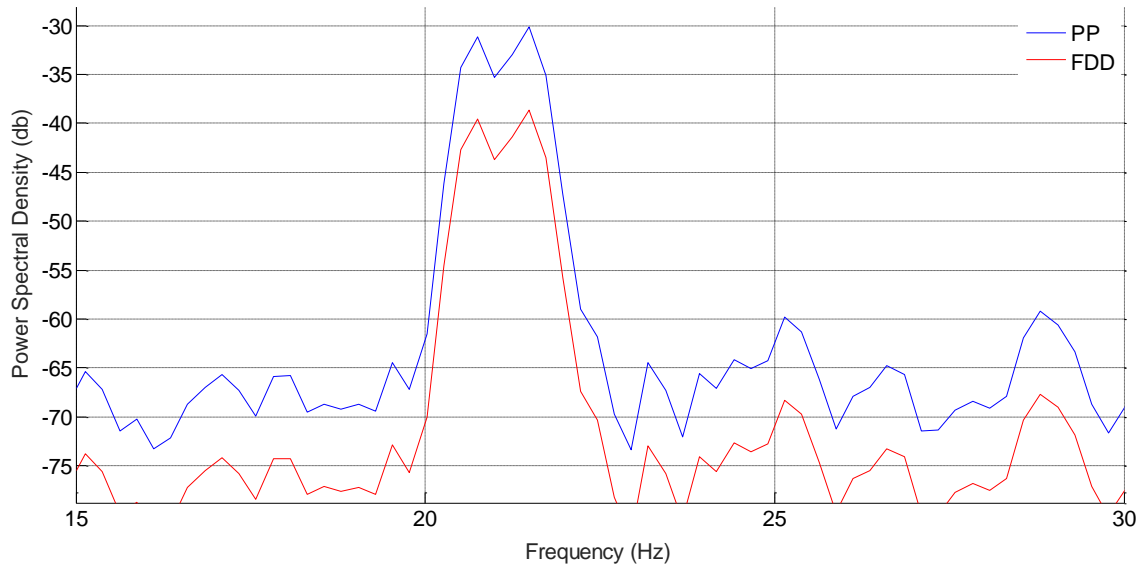
A identificação feita para a primeira frequência natural de vibração apresentou uma descontinuidade quando o valor da relação resolução frequencial/frequência foi de 0,001 e para os demais valores dessa relação os erros relativos permaneceram constantes. Já a curva obtida para a segunda frequência própria apresentou o mesmo comportamento daquela obtida para os sinais com 10% de ruído.



**Figura 16 - Avaliação do erro relativo na identificação das taxas de amortecimento - sinal com 20% de ruído - método PP**

Os erros gerados na identificação das taxas de amortecimento, mais uma vez, mostraram-se mais sensíveis a variação da resolução frequencial do que os erros gerados na identificação das frequências naturais. E para este parâmetro modal, os resultados são considerados aceitáveis quando a relação resolução frequencial/frequência é inferior a 0,001.

A Figura 17 apresenta os espectros identificados para ambos os métodos, considerando-se somente o caso do sinal com 20% de ruído, já que os demais resultados foram idênticos. Ainda que com alguma dificuldade, é possível notar os picos nas posições indicadas pelas frequências naturais identificadas.

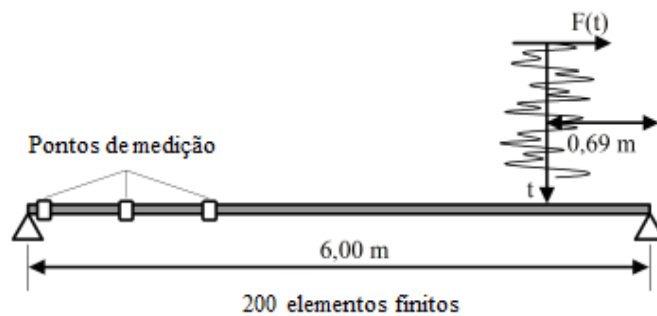


**Figura 17 - Espectros gerados pelos métodos - Caso Controle II**

#### 4.3. VIGA MODELADA COMPUTACIONALMENTE

O terceiro caso apresentado é modelo numérico de uma viga de aço biapoiada com seção transversal tipo I com 6 m de comprimento. A estrutura foi modelada utilizando o método dos elementos finitos (MEF) a partir de um programa desenvolvido no Matlab® (acrônimo de *MATrix LABoratory*) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). O modelo discretizado conta com 200 elementos finitos, onde cada um desses elementos é formado por dois nós com três graus de liberdade cada. A excitação da viga decorre da aplicação de uma força aleatória no nó 178 (localizado a 0,69 m de distância do apoio direito) cuja amplitude e frequência variam aleatoriamente. Ressalta-se que essa posição permite melhor excitar as três primeiras frequências naturais de vibração (e modos próprios associados) da estrutura.

As respostas dinâmicas são medidas em dez pontos equidistantes da viga durante 100 segundos. A frequência de amostragem é de 100 Hz. A Figura 18 ilustra o esquema da viga estudada, destacando a posição da força de excitação e os pontos de medições.



**Figura 18 - Representação da viga estudada. Fonte: Alves (2012)**

As propriedades relativas à geometria e à natureza do material da viga considerada são as seguintes:

- Módulo de elasticidade longitudinal: 210 GPa;
- Massa volumétrica: 7850 kg.m<sup>-3</sup>;
- Seção transversal: 2,81 x 10<sup>-3</sup> m<sup>2</sup>;
- Momento de inércia: 1,845 x 10<sup>-8</sup> m<sup>4</sup>.

Os valores das frequências naturais foram identificados analiticamente pela expressão (3.3). Na Tabela 16 são apresentadas as frequências próprias calculadas, bem como as taxas de amortecimento impostas para gerar o sinal.

$$f_i = \frac{i^2 \pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}} \quad (3.3)$$

onde:

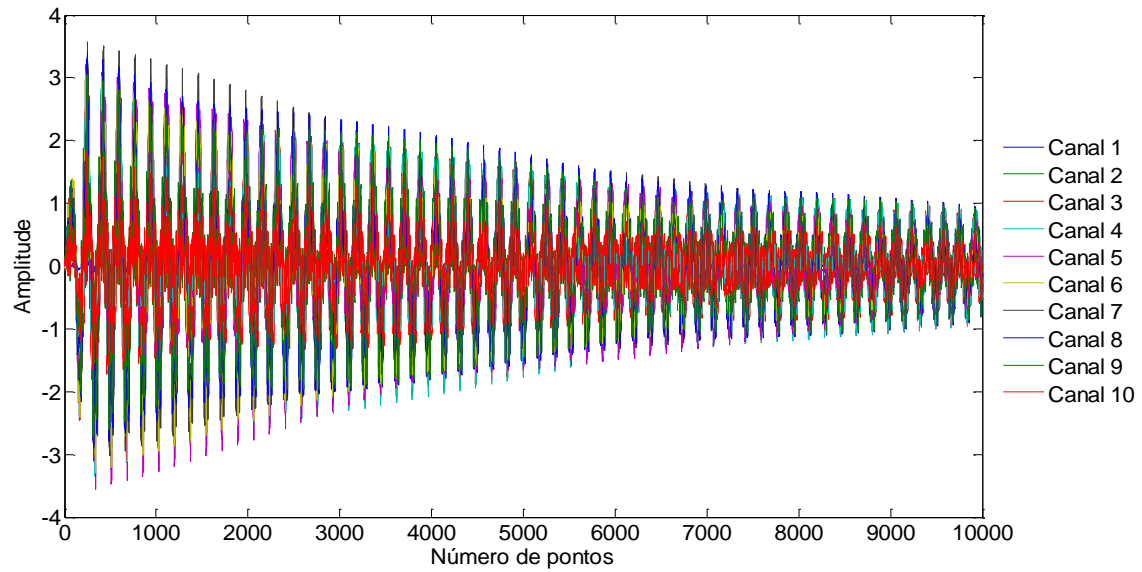
- $i$  - modo de vibração;
- $E$  - módulo de elasticidade longitudinal;
- $I$  - momento de inércia da seção;
- $\rho$  - massa específica;
- $S$  - área da seção;
- $L$  - comprimento da barra.

**Tabela 16 - Valores teóricos para as frequências próprias e taxas de amortecimento**

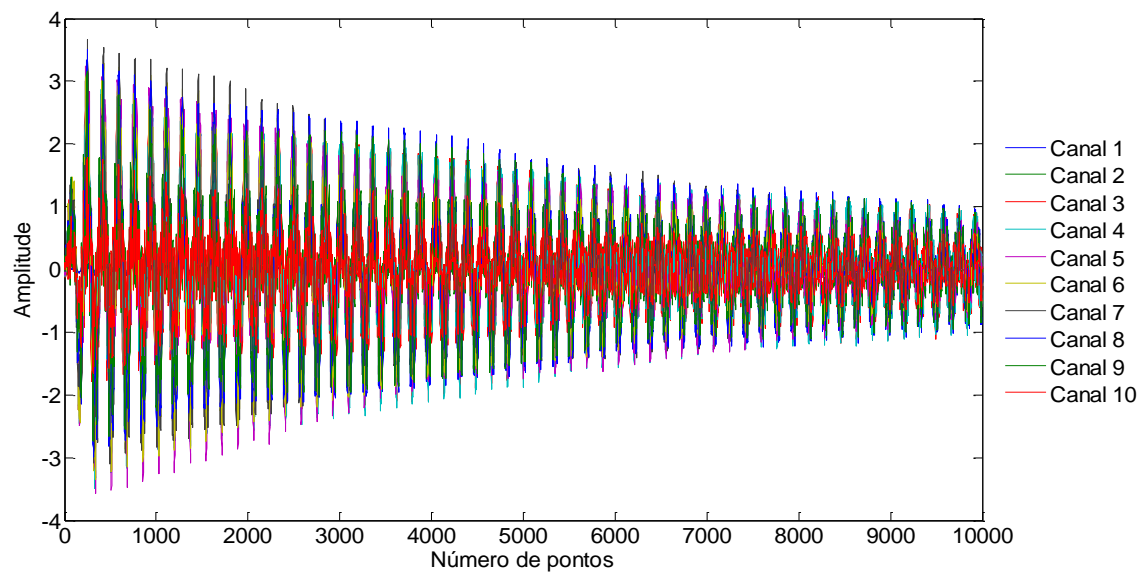
<b>i</b>	<b>Frequências (Hz)</b>	<b>Taxas de amortecimento (%)</b>
<b>1</b>	0,58	0,50
<b>2</b>	2,31	0,05
<b>3</b>	5,21	0,05

Para esse caso, também foram considerados três níveis de ruído: 0, 10% e 20%, gerados conforme mostrado na expressão (3.2). Os sinais gerados são apresentados nas Figuras 19, 20 e 21, respectivamente.

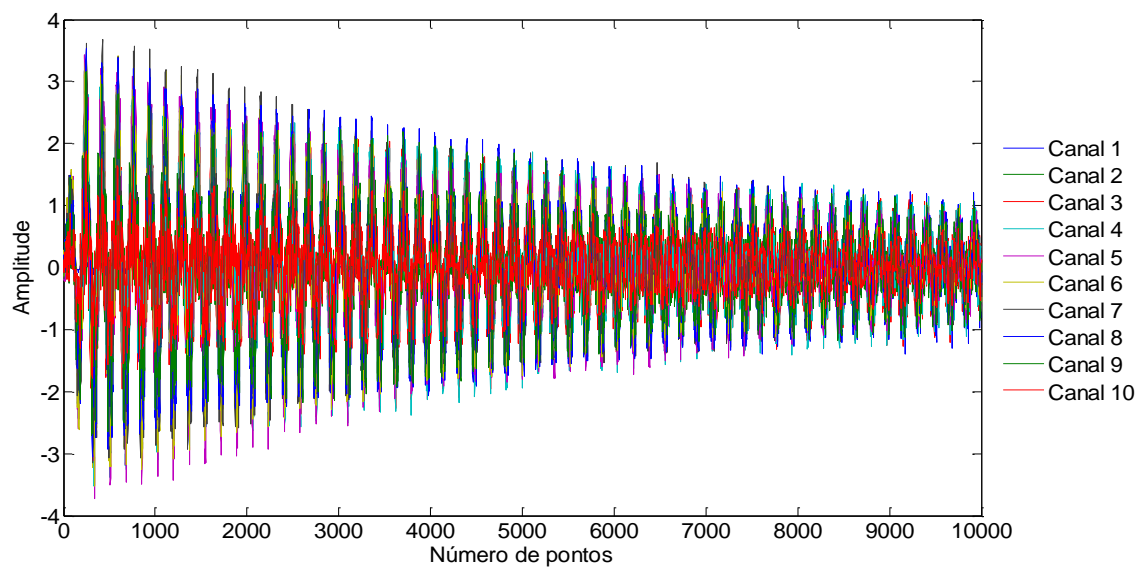




**Figura 19 - Sinal sem ruído - Viga Modelada Computacionalmente**



**Figura 20 - Sinal com adição de 10% de ruído - Viga Modelada Computacionalmente**



**Figura 21 - Sinal com adição de 20% de ruído - Viga Modelada Computacionalmente**

Em todas as variações do terceiro caso, a frequência de amostragem foi de 100 Hz e o canal de referência foi o de número 10. Os resultados obtidos são apresentados nos tópicos seguintes.

#### 4.3.1. SINAL SEM RUÍDO

Nas Tabelas 17 e 18 são mostrados os resultados obtidos e os comparativos entre as técnicas simuladas e os valores de referência, assim como os erros relativos em valores absolutos de cada uma das técnicas.

**Tabela 17 - Comparativo das frequências naturais identificadas pelas técnicas e os valores de referência para uma viga modelada computacionalmente sem ruído**

Frequências de referência (Hz)	PP (Hz)	Erros relativos (%)	FDD (Hz)	Erros relativos (%)
0,57	0,59	3,51	0,59	3,51
2,31	2,32	0,43	2,32	0,43
5,20	5,22	0,38	5,22	0,38

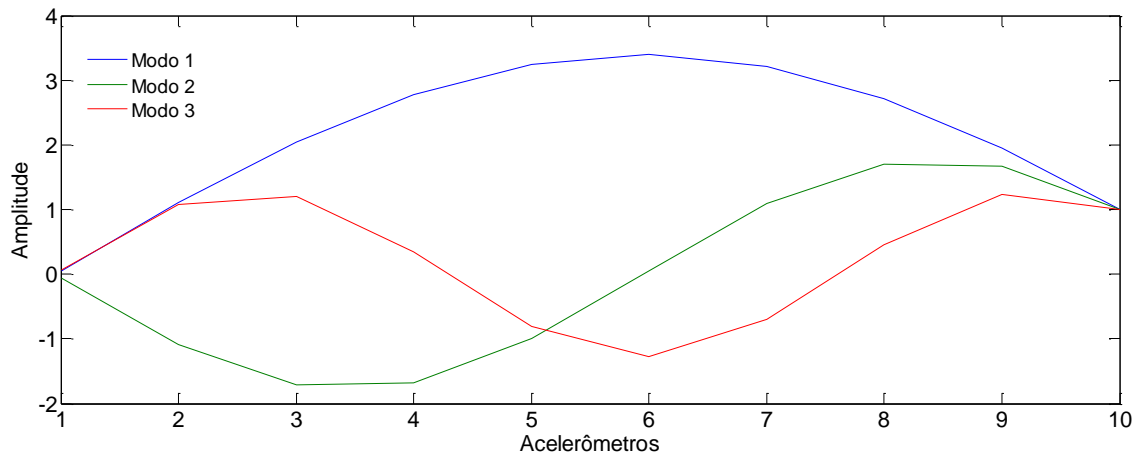
O resultado da identificação das frequências naturais foi bom para ambos os métodos, apresentando erros relativos abaixo de 1%, com exceção das frequências referentes ao primeiro modo de vibração, que apresentaram erro de 3,51%.

**Tabela 18 - Comparativo das taxas de amortecimento obtidas pelo PP e os valores de referência para uma viga modelada computacionalmente sem ruído**

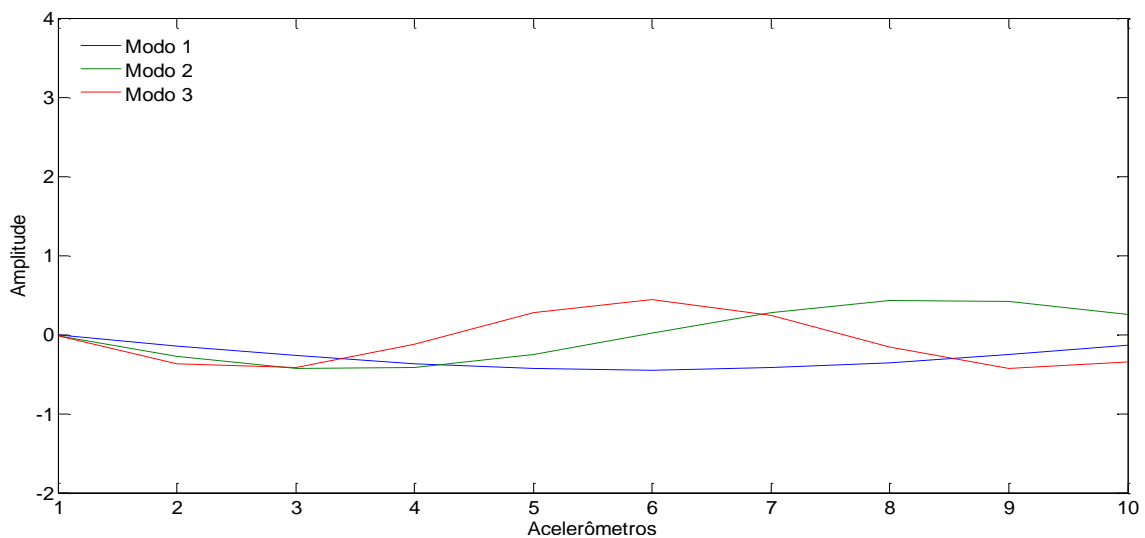
Taxas de amortecimento de referência (%)	PP (%)	Erros relativos (%)
0,50	7,38	1376,00
0,05	1,75	3400,00
0,05	0,78	1460,00

Já para as taxas de amortecimento, o resultado foi ruim, sendo os valores obtidos consideravelmente superestimados em relação aos valores de referência, com erros elevados.

As configurações modais de vibração obtidas pelos métodos PP e FDD são apresentadas nas Figuras 22 e 23, respectivamente.



**Figura 22 - Modos de vibração obtidos pelo PP para uma viga modelada computacionalmente sem ruído**



**Figura 23 - Modos de vibração obtidos pelo FDD para uma viga modelada computacionalmente sem ruído**

Como pode ser visto nas Figuras 22 e 23, as configurações modais obtidas pelos métodos PP e FDD são muito próximas ao esperado pela teoria. Claramente, observa-se que o primeiro modo é representado por uma meia onda, o segundo por duas meias ondas e, finalmente, o terceiro por três meias ondas.

#### 4.3.2. SINAL COM 10% DE RUÍDO

Os resultados obtidos pelos métodos de análise e comparativos entre estes métodos e os valores de referência com seus respectivos erros relativos, em valores absolutos, são apresentados nas Tabelas 19 e 20.

**Tabela 19 - Comparativo entre as frequências naturais identificadas pelas técnicas e valores de referência para uma viga modelada computacionalmente com 10% de ruído**

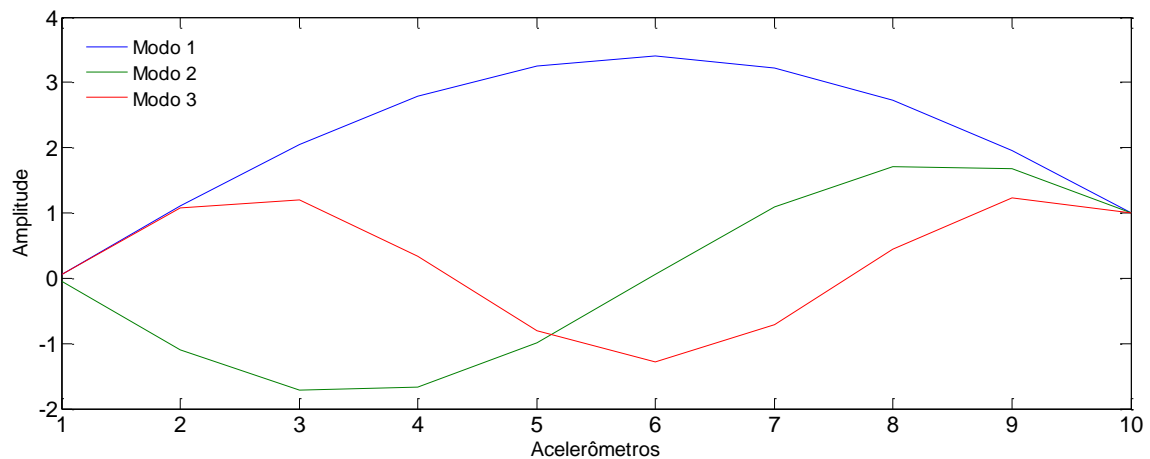
Frequências de referência (Hz)	PP (Hz)	Erros relativos (%)	FDD (Hz)	Erros relativos (%)
0,57	0,59	3,51	0,59	3,51
2,31	2,32	0,43	2,32	0,43
5,20	5,22	0,38	5,22	0,38

Mesmo com a adição de 10% de ruído ao sinal, as identificações das frequências próprias permaneceram boas, com erros baixos, na maior parte das vezes inferior a 1%. As taxas de amortecimento continuaram apresentando erros elevados.

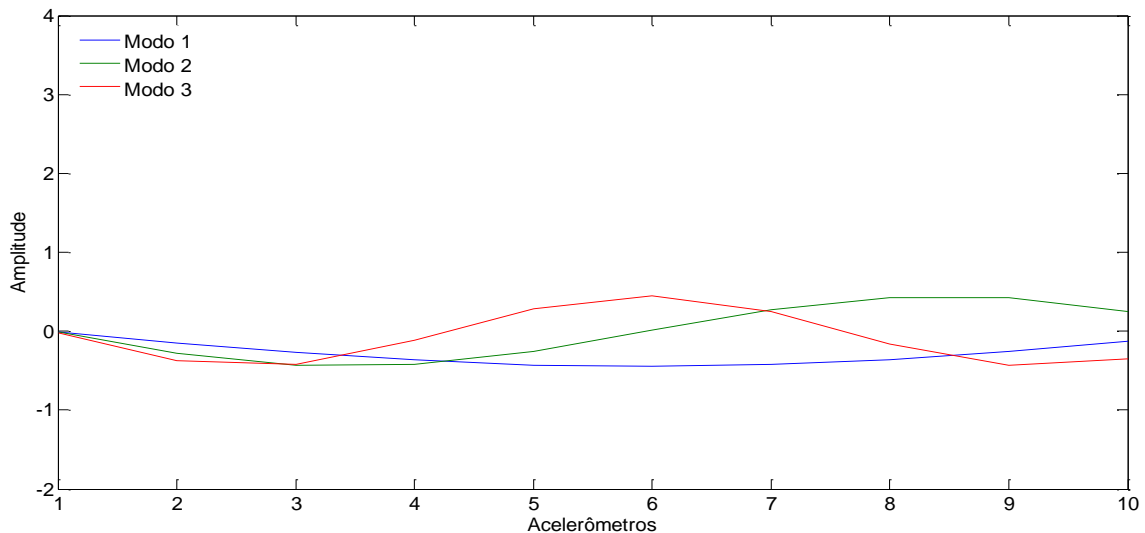
**Tabela 20 - Comparativo entre as taxas de amortecimento obtidas pelo PP e valores de referência para uma viga modelada computacionalmente com 10% de ruído**

Taxas de amortecimento de referência (%)	PP (%)	Erros relativos (%)
0,50	7,37	1374,00
0,05	1,75	3400,00
0,05	0,78	1460,00

Os modos de vibração identificados pelos métodos PP e FDD são ilustrados nas Figuras 24 e 25, respectivamente.



**Figura 24 - Formas modais de vibração identificadas pelo PP para uma viga modelada computacionalmente com 10% de ruído**



**Figura 25 - Formas modais identificadas pelo FDD para uma viga modelada computacionalmente com 10% de ruído**

As formas modais de vibração identificadas pelos métodos PP e FDD também não sofreram alterações com a adição do ruído, mantendo-se satisfatórias.

#### 4.3.3. SINAL COM 20% DE RUÍDO

Os parâmetros modais identificados estão nas Tabelas 21 e 22, nas quais também são feitos comparativos entre os resultados obtidos pelas técnicas e os valores de referência, incluindo erros percentuais em valores absolutos.

**Tabela 21 - Comparativo entre as frequências naturais identificadas pelas técnicas e valores de referência para uma viga modelada computacionalmente com 20% de ruído**

Frequências de referência (Hz)	PP (Hz)	Erros relativos (%)	FDD (Hz)	Erros relativos (%)
0,57	0,59	3,51	0,59	3,51
2,31	2,32	0,43	2,32	0,43
5,20	5,22	0,38	5,22	0,38

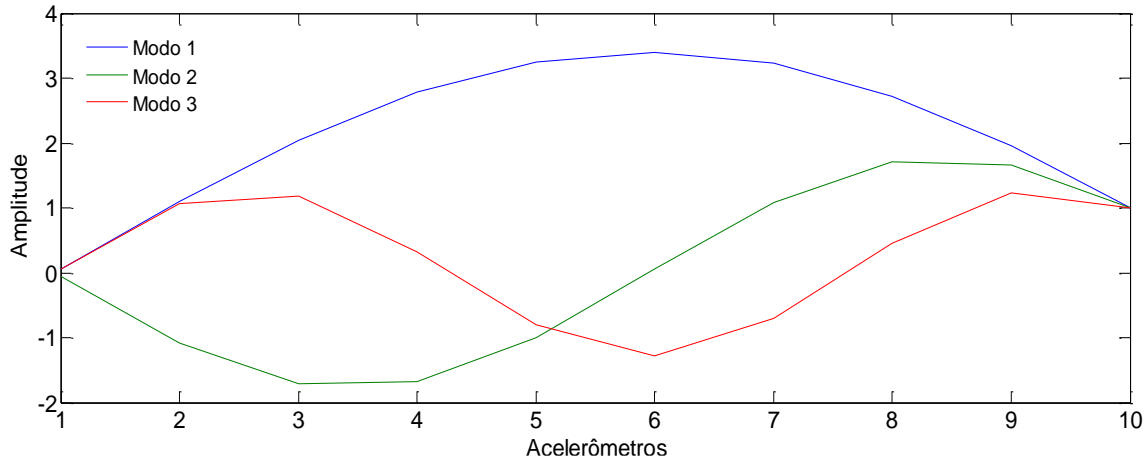
As frequências próprias obtidas pelos métodos PP e FDD não sofreram alterações devido ao acréscimo de 20% de ruído ao sinal. Portanto, os métodos são capazes de manter uma boa identificação mesmo com a presença de um nível de ruído considerável.

**Tabela 22 - Comparativo entre as taxas de amortecimento obtidas pelo PP e valores de referência para uma viga modelada computacionalmente com 20% de ruído**

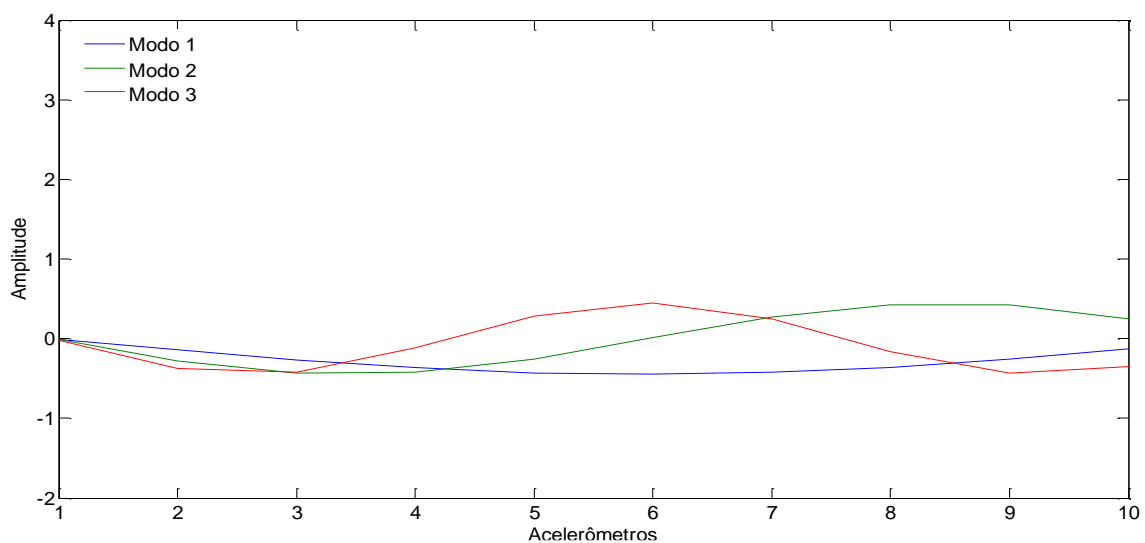
Taxas de amortecimento de referência (%)	PP (%)	Erros relativos (%)
0,50	7,37	1374,00
0,05	1,75	3400,00
0,05	0,78	1460,00

Os erros relativos referentes às estimativas das taxas de amortecimento pelo método PP permaneceram muito elevados e não representam as reais características da viga.

As formas modais de vibração identificadas pelo PP e FDD são mostradas nas Figuras 26 e 27, respectivamente.



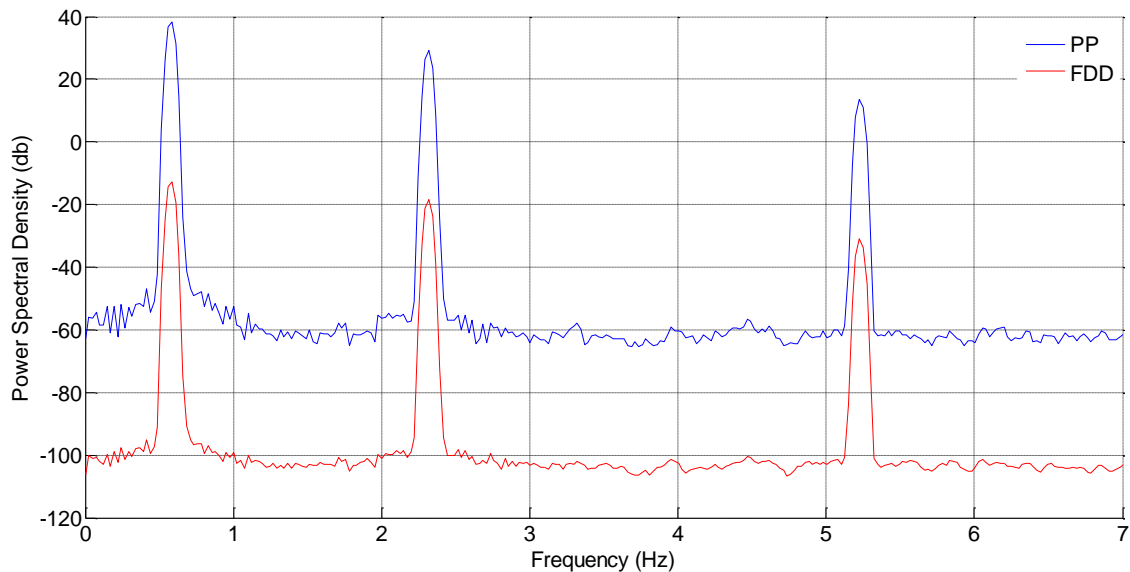
**Figura 26 - Modos de vibração obtidos pelo método PP para uma viga modelada computacionalmente com 20% de ruído**



**Figura 27 - Modos de vibração obtidos pelo método FDD para uma viga modelada computacionalmente com 20% de ruído**

As configurações modais obtidas por ambos os métodos também não foram comprometidas pela adição de 20% de ruído ao sinal, mantendo uma boa representação do comportamento da viga.

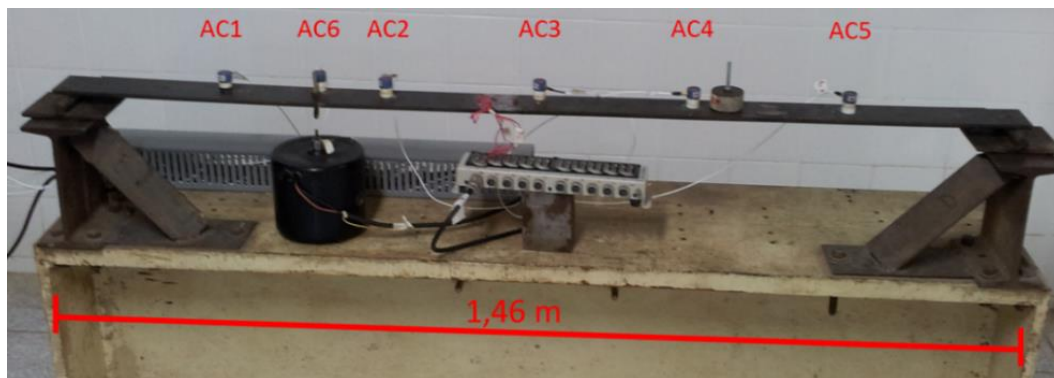
A Figura 28 apresenta os espectros identificados para ambos os métodos, considerando-se somente o caso do sinal com 20% de ruído, já que os demais resultados foram idênticos. Assim como nos casos anteriores, é possível perceber claramente os picos nas posições indicadas pelas frequências naturais identificadas.



**Figura 28 - Espectros gerados pelos métodos - Viga Modelada Computacionalmente**

#### 4.4. VIGA BIAPOIADA (COPPE)

A quarta aplicação refere-se aos ensaios realizados na COPPE/UFRJ (Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, da Universidade Federal do Rio de Janeiro) utilizando uma viga de aço simplesmente apoiada, como mostrado na Figura 29.



**Figura 29 - Viga de aço biapoada e instrumentada**

A viga tem 1,46 metros de comprimento e uma seção retangular (76,2 x 8.0 mm). A instrumentação foi realizada com seis acelerômetros piezoelétricos (PCB, 336C31), os dados foram registrados utilizando o sistema de aquisição de dados ADS2002 da marca Lynx e os acelerômetros posicionados conforme especificado na Tabela 23.

Tabela 23 - Posicionamento dos acelerômetros na estrutura

Distância da esquerda para a direita (cm)	Referência
0,0	Apoio esquerdo
23,2	AC1
37,5	AC6
48,6	AC2
73,0	AC3
97,1	AC4
120,7	AC5

Foram feitos dois tipos de ensaios dinâmicos: ensaios de impacto (com auxílio de um martelo de impacto) e ensaios de vibrações aleatórias (utilizando um excitador). Nos ensaios de impacto, o martelo de impacto foi utilizado a cada 10 segundos durante o tempo de ensaio. Já nos ensaios de vibração aleatória, o excitador foi utilizado durante todo o ensaio. Os dados foram registrados em quatro campanhas, sendo que em cada uma, três ensaios foram realizados. Totaliza-se, assim, 12 ensaios dinâmicos.

Cada ensaio teve, em média, dez minutos de duração, com frequência de aquisição de dados de 4000 Hz, ou seja, uma leitura a cada 0,00025 s. Isso significa que, para cada ensaio, 2,4 milhões de valores foram registrados. Na Figura 30, ilustra-se o sinal do ensaio dinâmico que utiliza impacto como excitação e, na Figura 31, o sinal do ensaio por vibração aleatória.

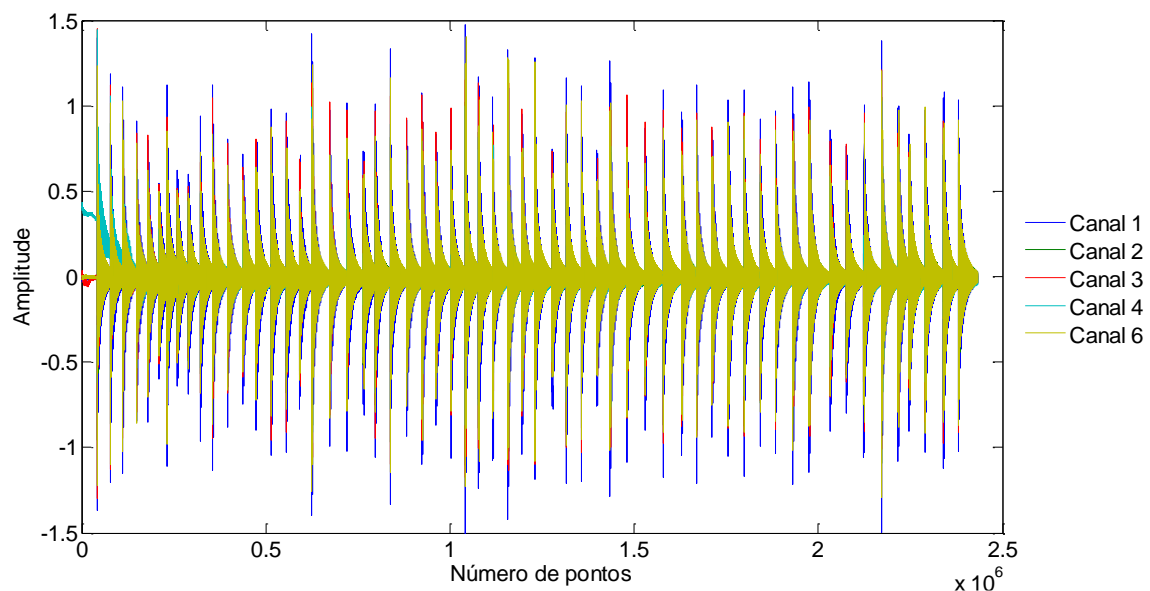
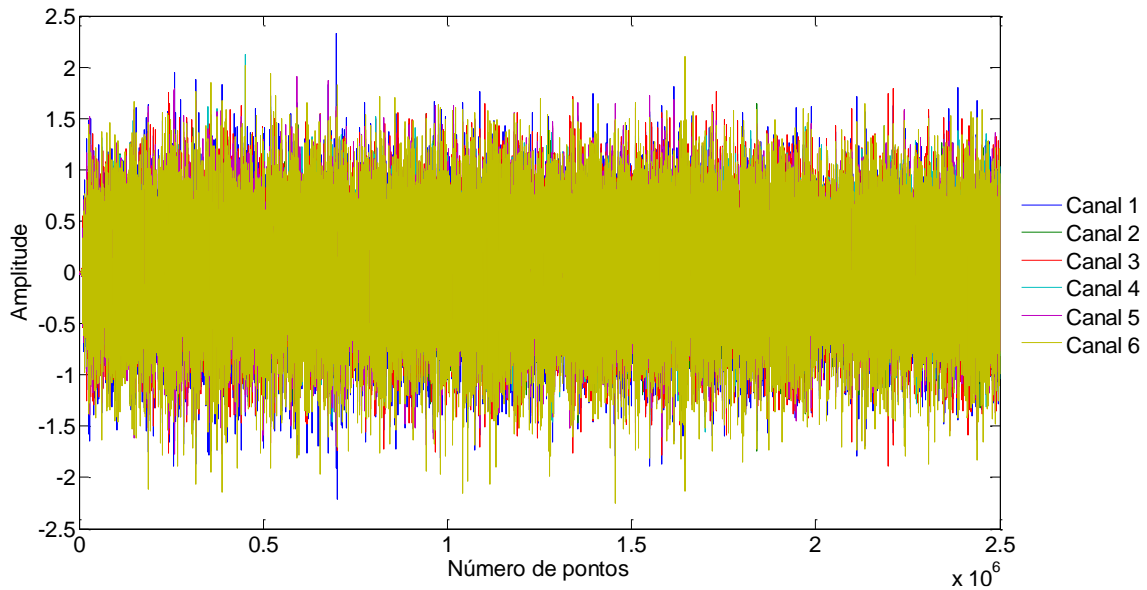


Figura 30 - Sinal do ensaio com excitação por impacto





**Figura 31 - Sinal do ensaio com excitação aleatória**

As propriedades geométricas da viga são descritas abaixo e os valores médios das frequências naturais identificadas analiticamente pela expressão (3.3) são apresentados na Tabela 24.

- Módulo de elasticidade longitudinal: 200 *GPa*;
- Momento de inércia da seção:  $3,25 \times 10^{-9} \text{m}^4$ ;
- Massa específica: 7850  $\text{Kg/m}^3$ ;
- Área da seção transversal:  $6,1 \times 10^{-4} \text{m}^2$ ;
- Comprimento da barra: 1,46 *m*.

**Tabela 24 - Frequências naturais de vibração identificadas analiticamente**

<b>i</b>	<b>Frequências (Hz)</b>
<b>1</b>	8,59
<b>2</b>	34,34
<b>3</b>	77,27
<b>4</b>	137,37
<b>5</b>	214,64

Até então, as simulações foram realizadas com sinais puramente numéricos e que, por mais que simulassem a presença de ruídos, permitiam identificar facilmente os picos de frequências naturais. Os espectros tinham os picos bem definidos e não causavam quaisquer dúvidas ao usuário.

No caso de ensaios em estruturas reais, como no presente estudo, foi observado que os dois métodos se demonstram completamente dependentes do conhecimento prévio do usuário, uma vez que vários picos aparecem na resposta frequencial. Assim, um usuário sem esse conhecimento prévio provavelmente teria a necessidade de selecionar todos os possíveis picos do espectro. No entanto, esse não é um problema

sem solução, pois, apesar de algumas vezes ser difícil a identificação dos picos que realmente são físicos, o usuário tem ao seu dispor informações que permitem detectar se o modo é espúrio ou não, a partir da forma modal e das taxas de amortecimento. Geralmente, para frequências espúrias, os modos apresentam formas atípicas e valores de taxa de amortecimento muito altos.

Nos dois tópicos seguintes são apresentados os parâmetros modais obtidos pelos métodos estudados para os ensaios realizados na COPPE/UFRJ de uma viga biapoiada sujeita a excitação aleatória e por impacto, respectivamente. Para ambos os casos, adotou-se uma frequência de amostragem igual a 4000 Hz e o canal de referência como sendo o de número 1.

#### 4.4.1. ENSAIO ALEATÓRIO

Os parâmetros modais identificados pelos métodos de análise são apresentados nas Tabelas 25 e 26. Na Tabela 25 é apresentado também um comparativo entre as frequências próprias obtidas para cada um dos métodos e os valores de referência calculados, bem como os erros relativos em valores absolutos de cada um deles.

**Tabela 25 - Comparativo das frequências naturais identificadas pelas técnicas para a estrutura submetida ao ensaio com excitação aleatória**

<b>Frequências de referência (Hz)</b>	<b>PP (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>	<b>FDD (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>
8,59	9,24	7,57	9,24	7,57
34,34	33,25	3,17	33,25	3,17
77,27	73,80	4,49	73,80	4,49
137,37	136,04	0,97	136,04	0,97
214,64	196,65	8,24	196,65	8,24

As frequências próprias resultantes ficaram próximas dos valores calculados analiticamente, de maneira geral. Apenas os resultados para o primeiro e o último modos de vibração tiveram resultados superiores a 5%.

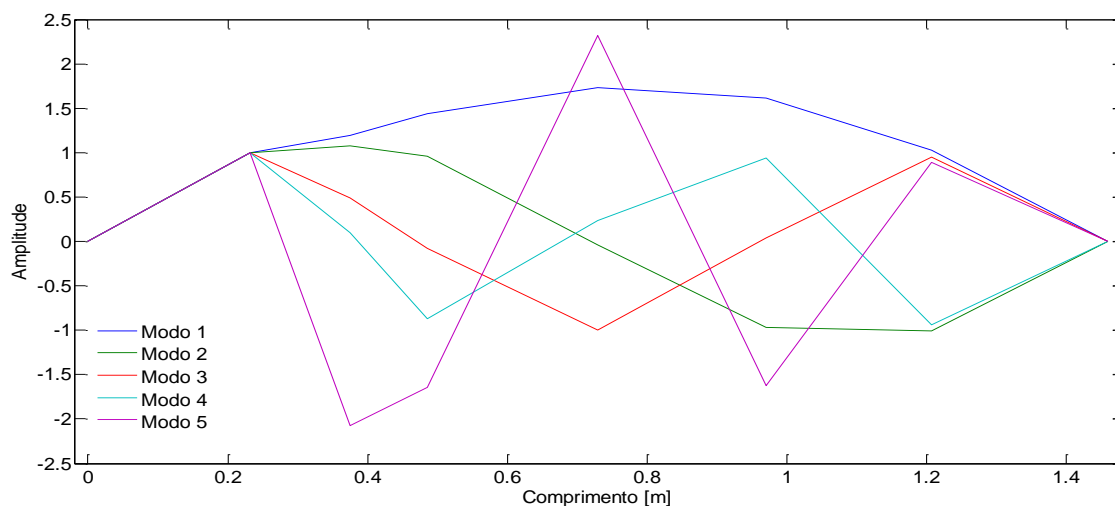
Observou-se também que, para o primeiro estudo de caso real, a variação do erro relativo foi maior. Tal fato já era esperado, pois casos reais contam com uma contribuição extra para os erros relativos: a presença de ruído colorido, isto é, que não possui média nula e desvio-padrão unitário.

**Tabela 26 - Valores das taxas de amortecimento obtidas pelo método PP para estrutura submetida ao ensaio com excitação aleatória**

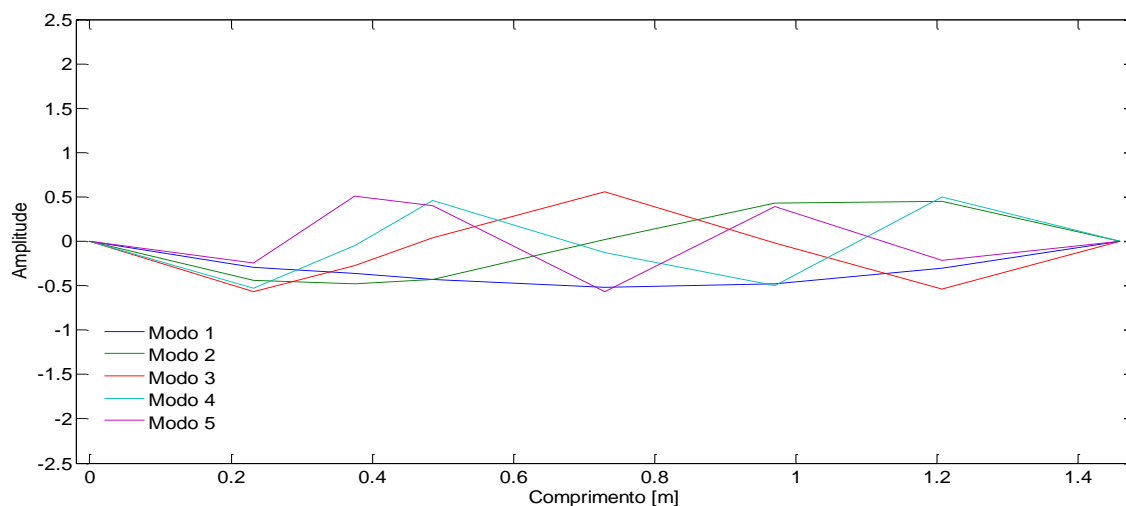
Taxas de amortecimento (%)	
1	0,10
2	0,05
3	0,01
4	0,01
5	0,01

Para as taxas de amortecimento da viga não foram encontrados valores de referência para comparação e avaliação dos valores obtidos pelo PP. Mas vale ressaltar que o resultado para as taxas de amortecimento é interessante, já que o método da meia potência superestima as taxas de amortecimento e os valores identificados pelo método são relativamente baixos.

As configurações modais obtidas pelos métodos PP e FDD são mostradas nas Figuras 32 e 33, respectivamente. As configurações modais obtidas por ambas as técnicas foram satisfatórias de maneira geral.

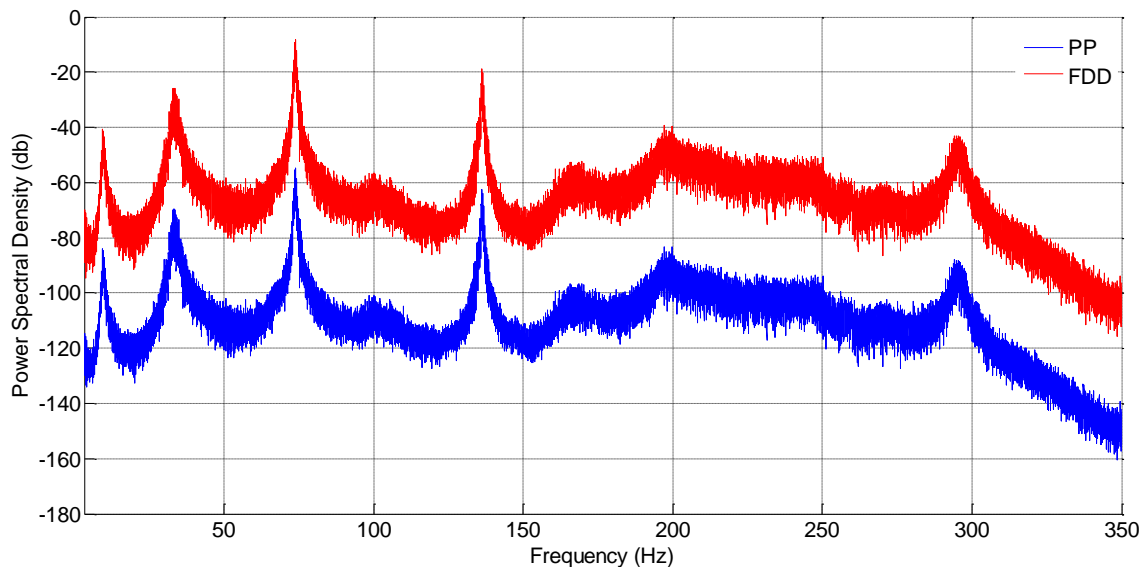


**Figura 32 - Formas modais obtidas pelo método PP (ensaio de excitação aleatória)**



**Figura 33 - Formas modais obtidas pelo método FDD (ensaio de excitação aleatória)**

A Figura 34 apresenta os espectros identificados para ambos os métodos. Diferentemente dos casos anteriores, percebe-se que a qualidade sinal/ruído fica bastante comprometida. No entanto, ainda é possível identificar os picos nas posições indicadas pelas frequências naturais identificadas.



**Figura 34 - Espectros gerados pelos métodos - Viga Biapoiada (COPPE) - ensaio de excitação aleatória**

#### 4.4.2. ENSAIO DE IMPACTO

Os resultados identificados pelo PP e FDD são apresentados nas Tabelas 27 e 28. Na Tabela 27 é mostrado ainda um comparativo entre os parâmetros obtidos por cada um dos métodos e os valores de referência e também os erros relativos, em valores absolutos, de cada um desses métodos.

**Tabela 27 - Comparativo das frequências naturais identificadas pelos métodos para estrutura submetida ao ensaio de impacto**

Frequências de referência (Hz)	PP (Hz)	Erros relativos (%)	FDD (Hz)	Erros relativos (%)
8,59	8,32	3,14	8,32	3,14
34,34	33,28	3,09	33,28	3,09
77,27	73,28	5,16	73,28	5,16
137,37	135,32	1,49	135,32	1,49
214,64	205,61	4,21	205,61	4,21

As frequências próprias resultantes ficaram muito próximas das obtidas pelos métodos PP e FDD para o ensaio da excitação aleatória. Os erros gerados nas estimativas das frequências naturais de vibração pelos métodos de análise foram relativamente baixos, sendo pouco superior a 5% apenas na identificação das frequências próprias referentes ao terceiro modo de vibração por ambos os métodos.

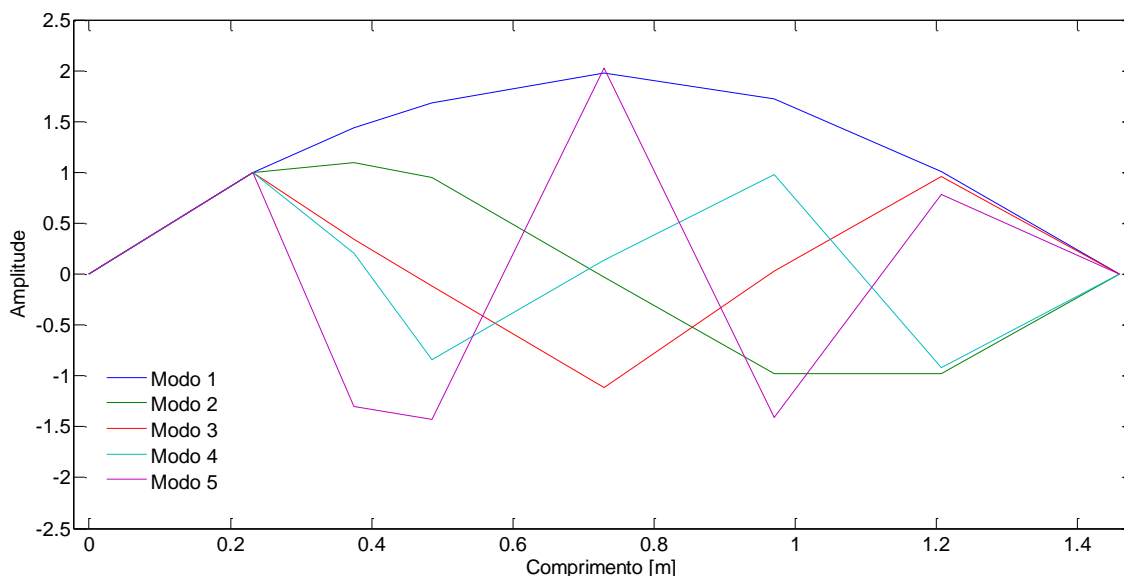
E como o erro gerado nesse caso não é necessariamente causado apenas pela identificação das técnicas, os resultados obtidos são aceitáveis.

**Tabela 28 - Valores das taxas de amortecimento obtidas pelo PP para a estrutura submetida ao ensaio de impacto**

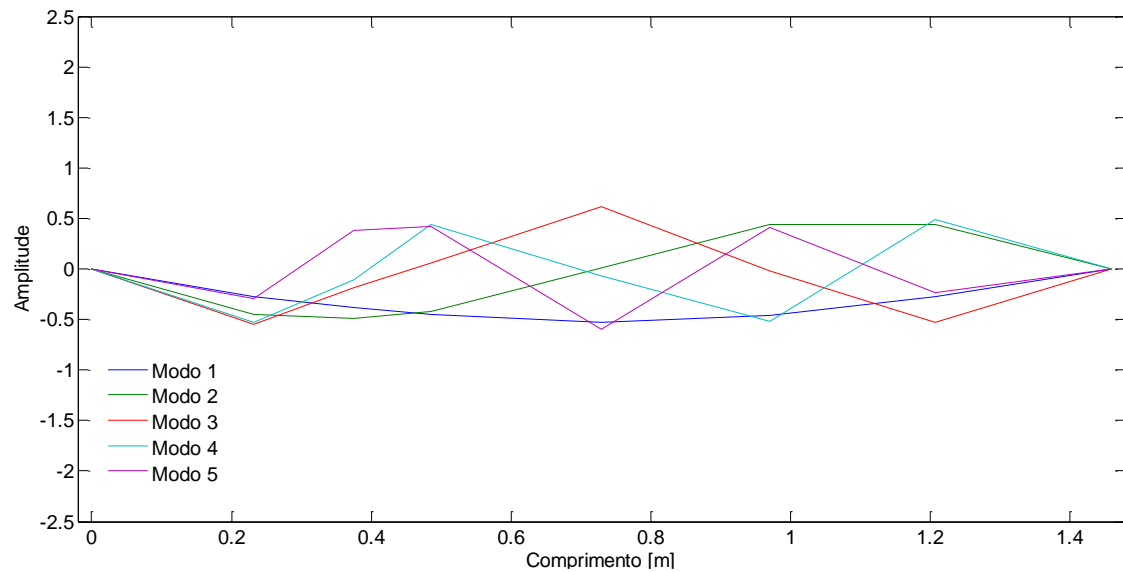
	Taxas de amortecimento (%)
1	0,25
2	0,05
3	0,01
4	0,01
5	0,01

As taxas de amortecimento também apresentaram valores próximos dos obtidos para o ensaio com excitação aleatória. Assim, os comentários sobre a identificação dos parâmetros modais para o ensaio de excitação aleatória também são válidos para esse caso.

As configurações modais identificadas pelos métodos PP e FDD são ilustradas nas Figuras 35 e 36, respectivamente.



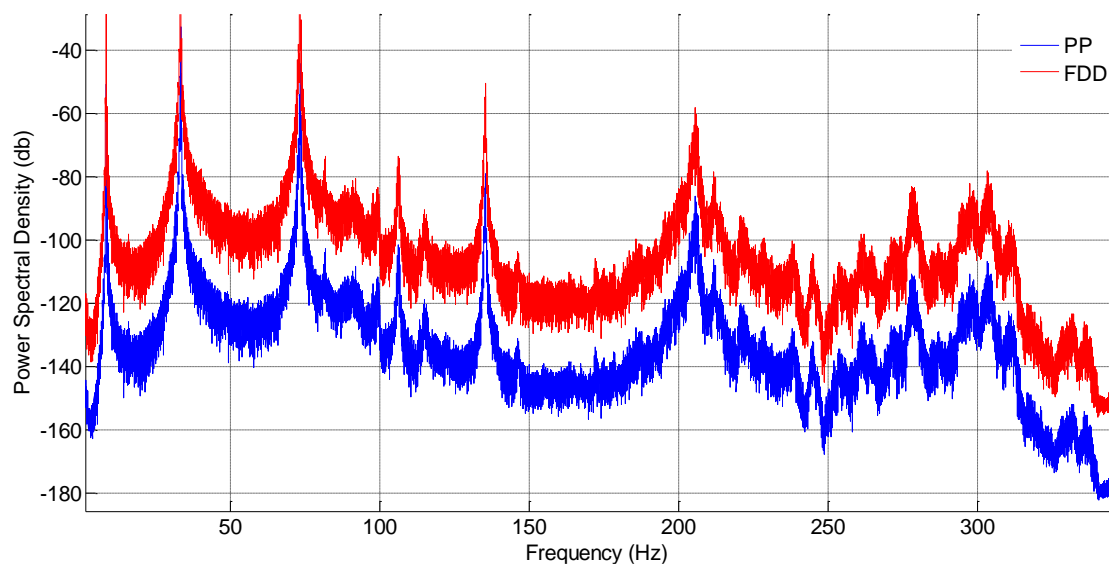
**Figura 35 - Formas modais de vibração identificadas pelo PP (ensaio de excitação por impacto)**



**Figura 36 - Formas modais de vibração obtidas pelo FDD (ensaio de excitação por impacto)**

Ambas as técnicas fizeram uma boa identificação das configurações modais de vibração da viga ensaiada, e apresentaram resultados ligeiramente melhores em relação aos obtidos para o ensaio de vibração aleatória.

Os espectros identificados para ambos os métodos são mostrados na Figura 37. Observações semelhantes ao caso anterior (ensaio por excitação aleatória) podem ser feitas. Aqui, novamente se nota um nível maior de ruído na resposta frequencial, sem comprometer, entretanto, a identificação dos picos.



**Figura 37 - Espectros gerados pelos métodos - Viga Biapoiada (COPPE) - ensaio de excitação por impacto**

#### 4.5. PONTE PI-57

A quinta aplicação refere-se à ponte PI-57, situada na cidade de *Morue*, no departamento de *Oise*, na França, que permite a estrada A1, que liga *Paris* à cidade de *Lille*, transpor o rio *Oise*. A ponte foi construída nos anos 1964 - 1965 em concreto protendido e é mostrada na Figura 38.



**Figura 38 - Ponte PI-57. Fonte: Cury (2010)**

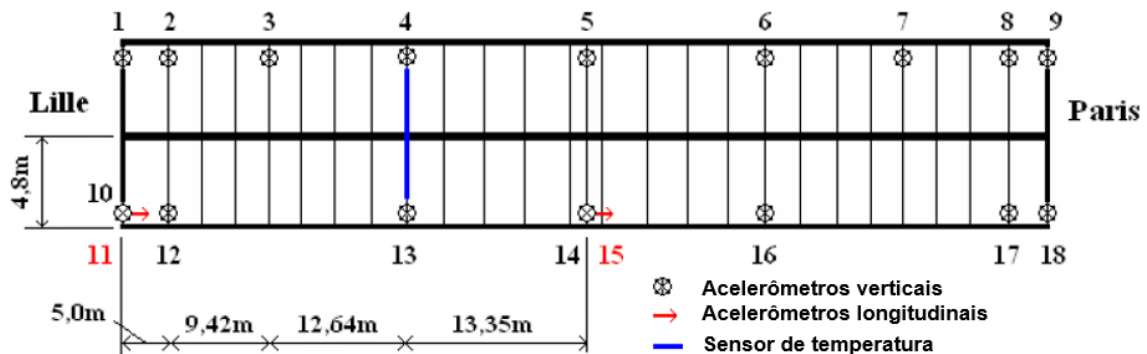
O monitoramento da estrutura foi realizado a partir de ensaios dinâmicos utilizando excitação ambiente (tráfego na estrada). A instrumentação foi feita com 16 acelerômetros colocados no interior do tabuleiro da ponte correspondente à direção *Lille-Paris*. Os acelerômetros utilizados são do tipo piezoelétricos 4507B-005 de *Bruël&Kjaër* (tecnologia IEPE, -54 a 100°C) de sensibilidade 1V/g,  $\pm 5g$  e foram posicionados com esquadros de fixação em alumínio, como esquematizado na Figura 39. A amostragem de sinais foi fixada em 250 Hz, durante um período de 5 minutos a cada 3 horas, totalizando 8 ensaios diários ao longo de vários meses.



**Figura 39 - Acelerômetros instrumentados na estrutura. Fonte: Cury (2010)**

O posicionamento dos acelerômetros é apresentado na Figura 40. O esquema de instrumentação utilizado permite somente a caracterização dos modos de flexão

vertical e de torção. No desenvolvimento deste trabalho somente os acelerômetros verticais foram utilizados.

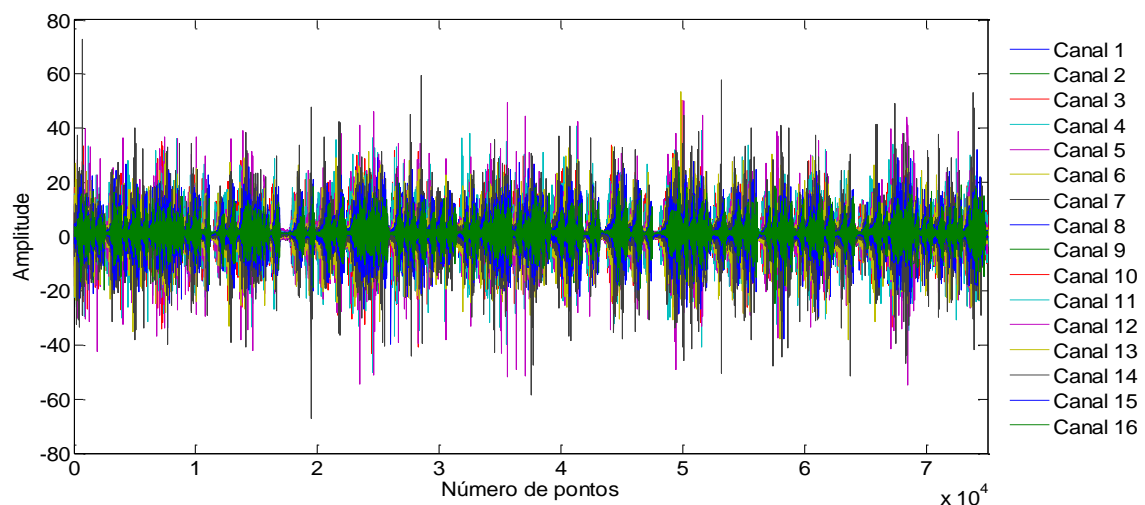


**Figura 40 - Posicionamento dos acelerômetros na estrutura. Fonte: Cury (2010)**

As frequências naturais de vibração da ponte em questão foram calculadas a partir de um modelo em elementos finitos desenvolvido na tese de Cury (2010) e encontram-se na Tabela 29, bem como as taxas de amortecimento (também encontradas no trabalho de Cury (2010)). O sinal correspondente ao ensaio realizado na Ponte PI-57 é mostrado na Figura 41.

**Tabela 29 - Parâmetros modais de referência para a Ponte PI-57**

i	Frequências (Hz)	Taxas de amortecimento (%)
1	2,23	2,27
2	4,89	1,65
3	6,84	3,05
4	8,48	2,74
5	11,00	3,10
6	14,05	3,16
7	16,69	3,14



**Figura 41 - Sinal registrado durante ensaio da Ponte PI-57**

Os dados de entrada para a simulação da Ponte PI-57 foram: sinal registrado durante o ensaio, taxa de amostragem (250 Hz) e canal de referência (14).



Os parâmetros modais identificados são apresentados nas Tabelas 30 e 31, nas quais também são feitos comparativos entre os resultados obtidos pelos métodos e os valores numéricos calculados por Cury (2010), contendo ainda os erros relativos em valores absolutos de cada um deles.

**Tabela 30 - Comparativo das frequências naturais para ponte PI-57**

<b>Frequências de referência (Hz)</b>	<b>PP (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>	<b>FDD (Hz)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>
2,23	2,14	4,04	2,14	4,04
4,89	4,94	1,02	4,98	1,84
6,84	6,90	0,88	6,90	0,88
8,48	8,66	2,12	8,67	2,24
11,00	11,02	0,18	11,08	0,73
14,05	14,27	1,57	14,27	1,57
16,69	17,97	7,67	17,97	7,67

Foram identificados os sete modos esperados. As estimativas das frequências naturais de vibração ficaram bastante próximas dos valores de referência calculados, com diferenças da ordem de décimos ou centésimos dependendo do modo de vibração e erros baixos para os seis primeiros modos. No entanto, o último modo apresentou diferença da ordem de unidade e erro relativo de quase 8%. Como o erro pode ser atribuído às falhas na identificação dos métodos e falhas no cálculo dos valores de referência, considera-se o resultado aceitável.

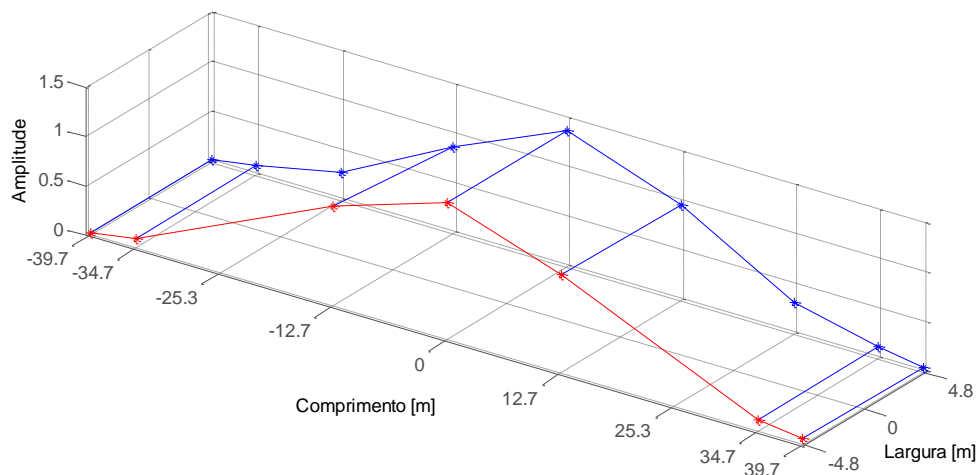
**Tabela 31 - Comparativo das taxas de amortecimento para ponte PI-57**

<b>Taxas de amortecimento de referência (%)</b>	<b>PP (%)</b>	<b>Erros relativos (%)</b>
2,27	1,88	17,18
1,65	0,57	65,45
3,05	0,48	84,26
2,74	0,43	84,31
3,10	0,48	84,52
3,16	0,25	92,09
3,14	0,18	94,27

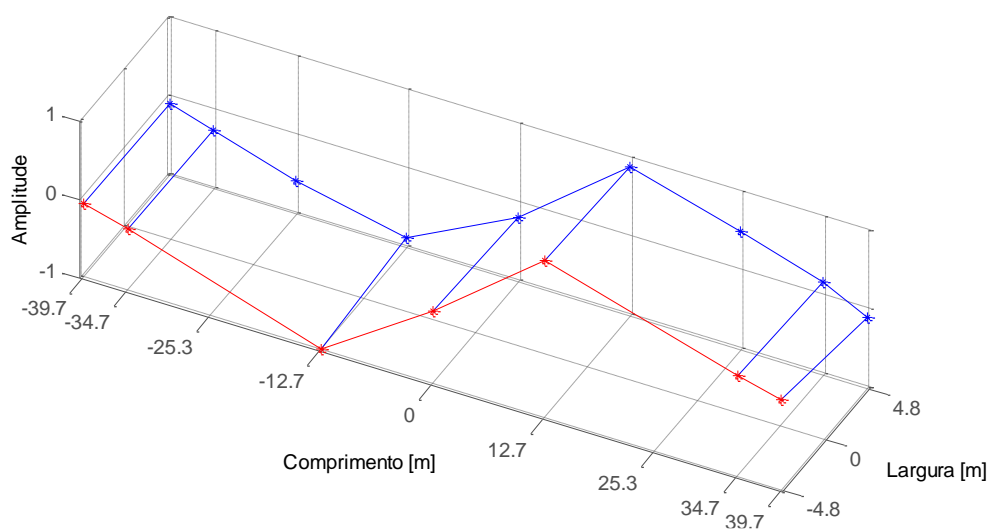
Notou-se que as taxas de amortecimento identificadas foram significativamente inferiores aos valores de referência e apresentaram erros elevados. Assim, tem-se que os valores obtidos para as taxas de amortecimento não caracterizam corretamente a estrutura analisada.

As formas modais de vibração da Ponte PI-57 identificadas pelo método *Peak Picking* são mostradas nas Figuras 42 a 48. Destaca-se que apenas as componentes

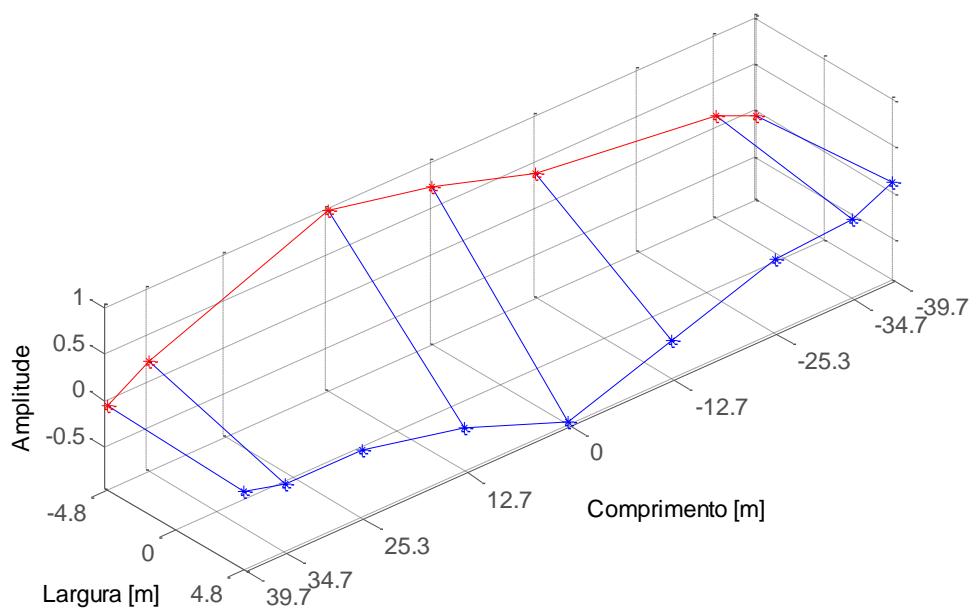
verticais de cada modo foram plotadas. Além disso, a linha azul corresponde à linha superior de acelerômetros mostrada no plano de instrumentação (Figura 40), enquanto a linha vermelha corresponde à linha inferior. Nesta última, não existem acelerômetros posicionados nas abscissas (-25,3 m e 25,3 m).



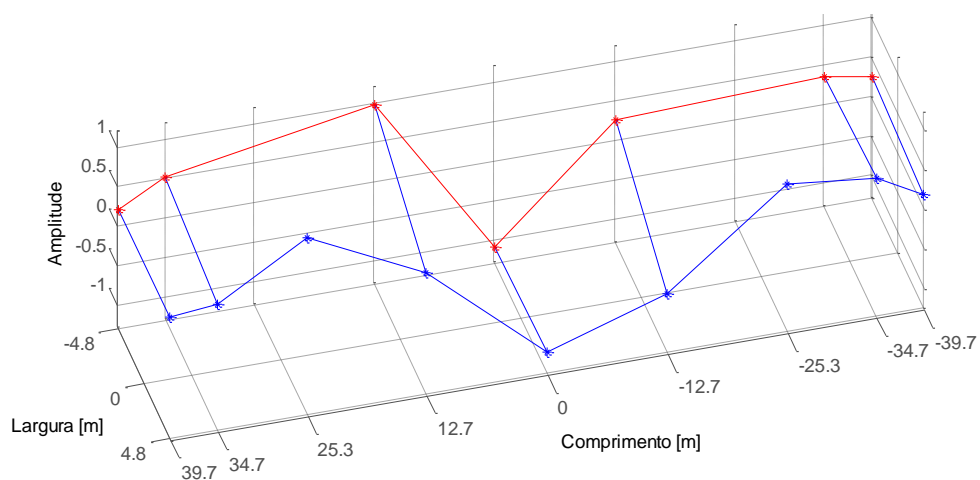
**Figura 42 - Primeiro modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Flexão**



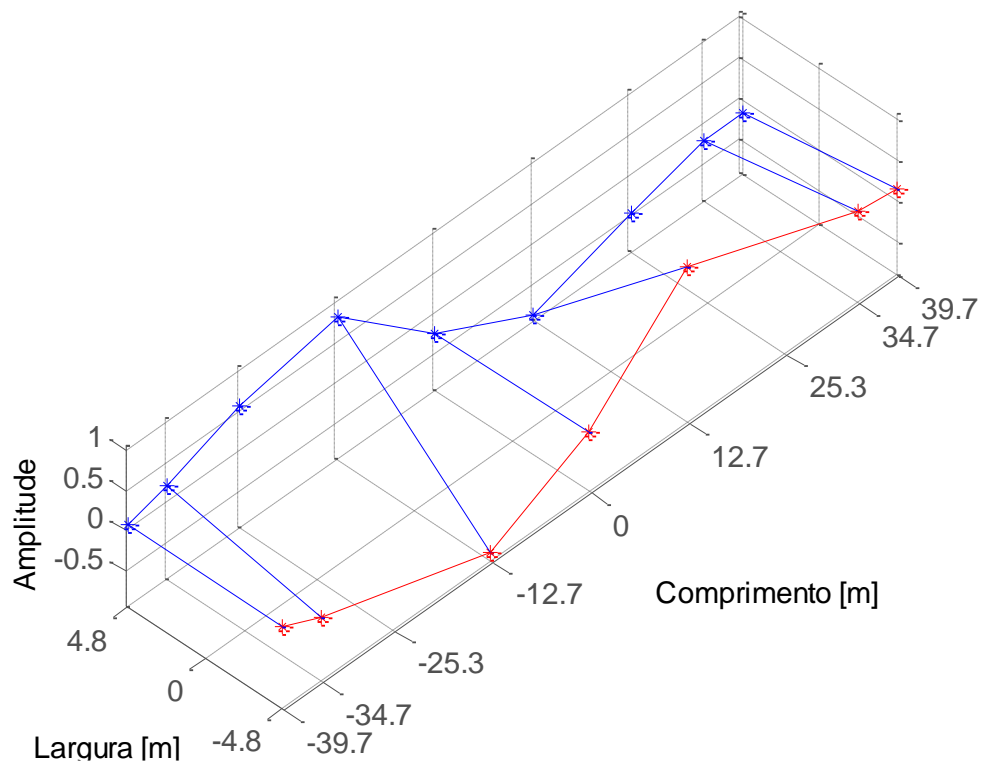
**Figura 43 - Segundo modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Flexão**



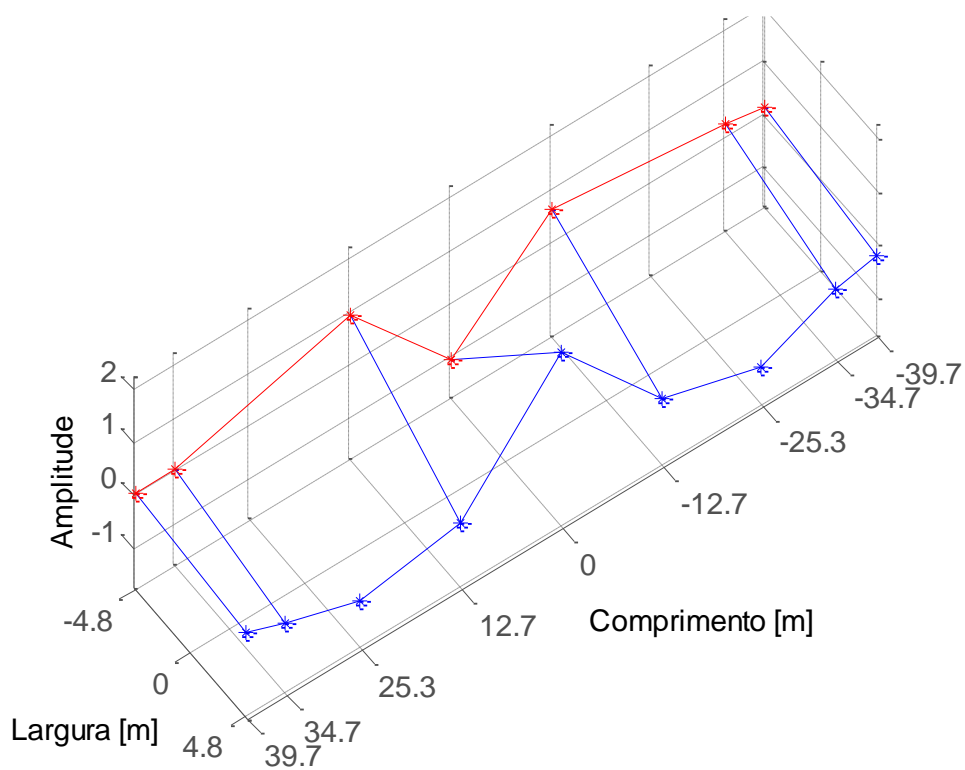
**Figura 44 - Terceiro modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Torção**



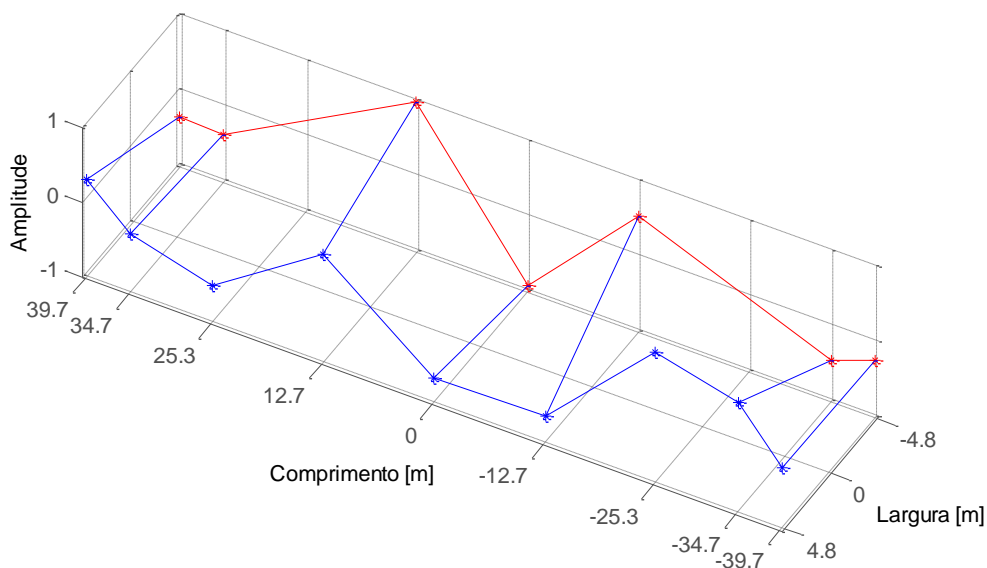
**Figura 45 - Quarto modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Flexão**



**Figura 46 - Quinto modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Torção**



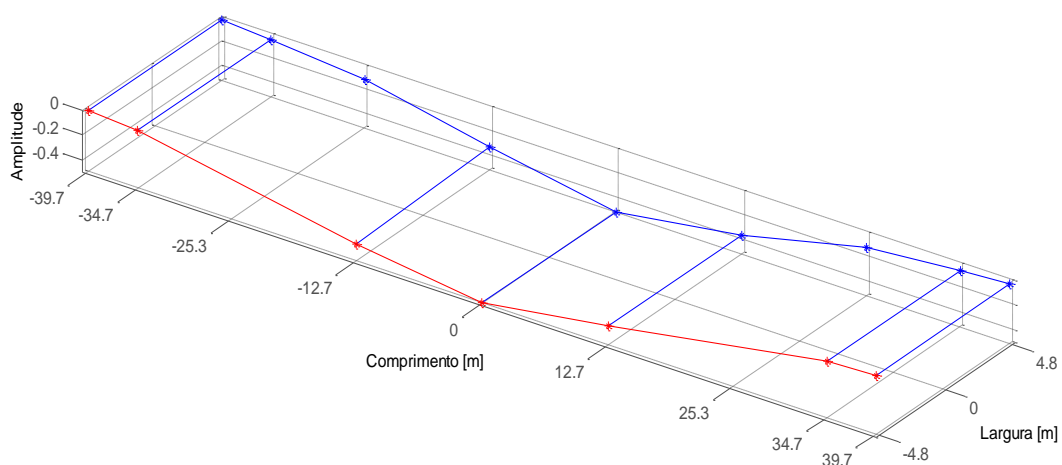
**Figura 47 - Sexto modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57- Flexo-Torção**



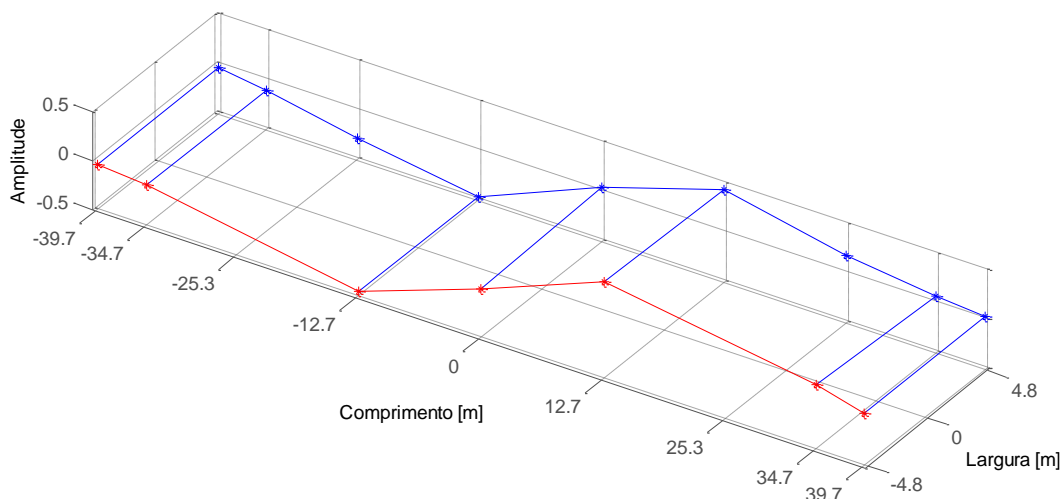
**Figura 48 - Sétimo modo próprio identificado pelo PP para ponte PI-57 - Flexo-Torção**

A identificação das formas modais pelo método *Peak Picking* foi muito boa. Observou-se, claramente, o comportamento da estrutura, alternando modos de flexão, torção e flexo-torção.

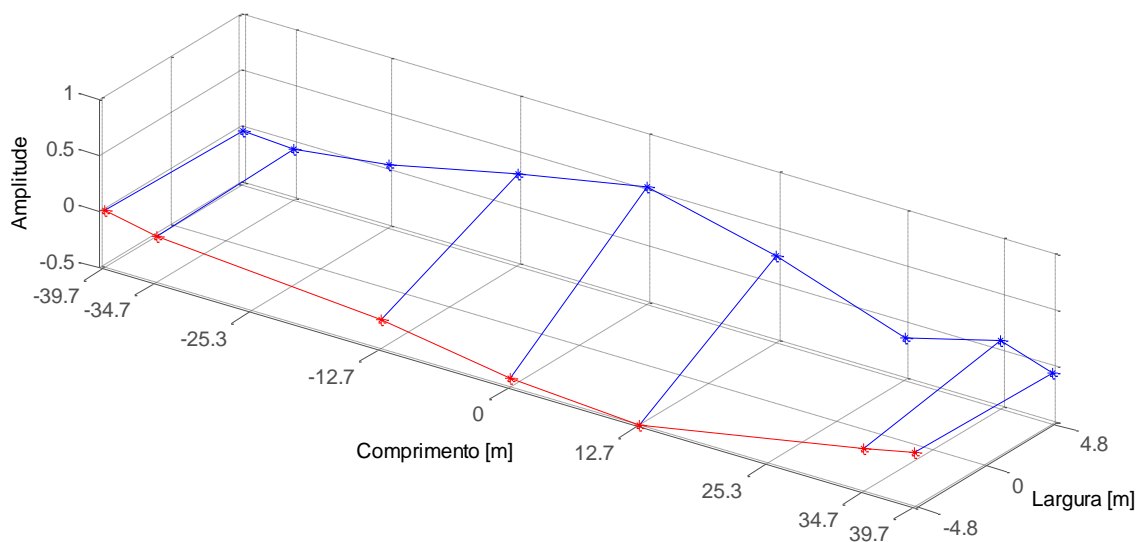
As configurações modais identificadas pelo método FDD são apresentadas nas Figuras 49 a 55.



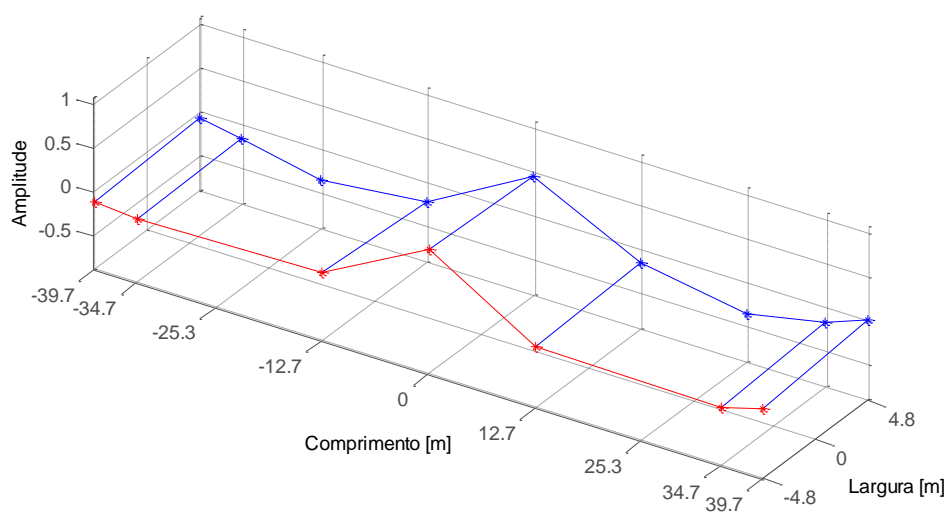
**Figura 49 - Primeiro modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexão**



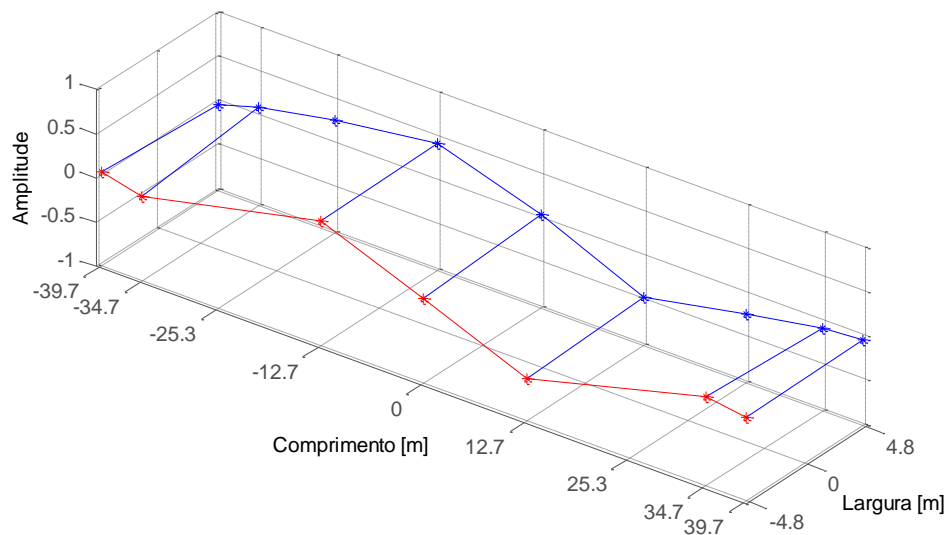
**Figura 50 - Segundo modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexão**



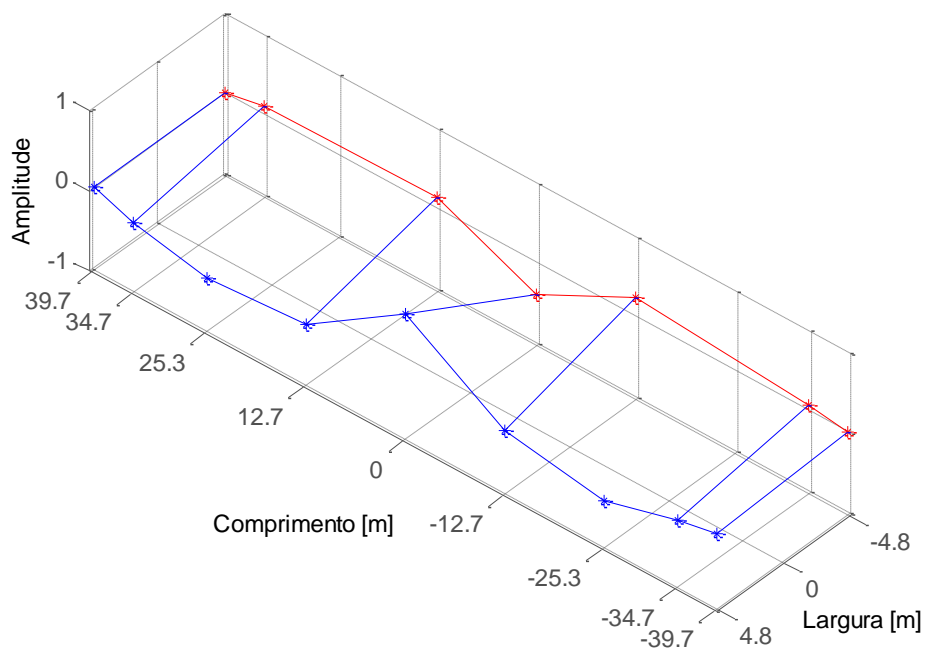
**Figura 51 - Terceiro modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Torção**



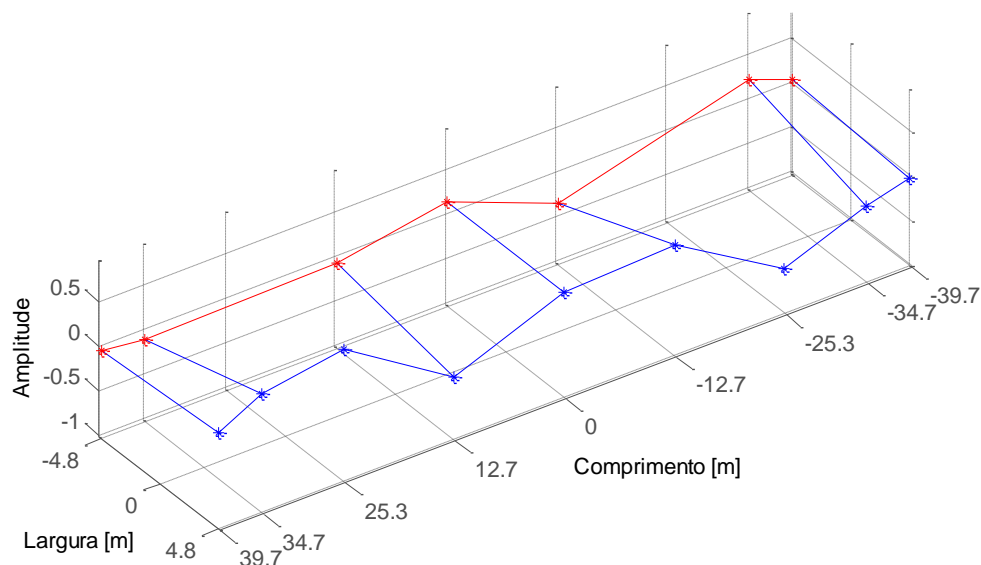
**Figura 52 - Quarto modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexão**



**Figura 53 - Quinto modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexão**



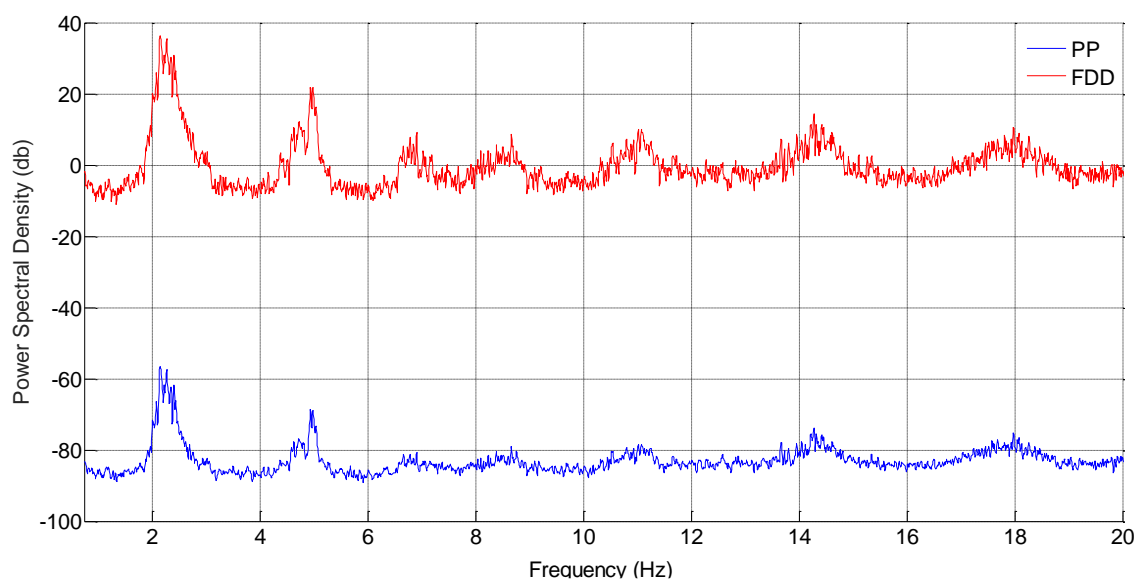
**Figura 54 - Sexto modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexo-Torção**



**Figura 55 - Sétimo modo próprio identificado pelo FDD para ponte PI-57 - Flexo-Torção**

As configurações modais obtidas pelo FDD não foram tão boas quanto às obtidas pelo PP. Por comparação com resultados de outros estudos que analisaram a mesma estrutura, como Cury (2010) e Yoshida (2016), e também com o resultado obtido pelo método anterior, tem-se que o FDD não fez uma identificação correta do quinto modo de vibração da ponte. As demais formas modais foram corretamente identificadas.

A Figura 56 apresenta os espectros identificados para ambos os métodos. Neste caso, apenas para as duas primeiras frequências é possível identificar os picos nas posições indicadas pelas frequências naturais identificadas. Nas demais, a relação sinal/ruído fica bastante comprometida, o que indica a necessidade de uma análise *a posteriori* por parte do usuário.



**Figura 56 - Espectros gerados pelos métodos - Ponte PI-57**



#### 4.6. VIADUTO FÉRREO PK 075+317

A última aplicação diz respeito a um viaduto férreo (Figura 57), situado no sudeste da França, no condado de *Yonne*, que liga as cidades de *Paris* e *Lyon*. Nele, circulam trens de alta velocidade, denominados TGVs.



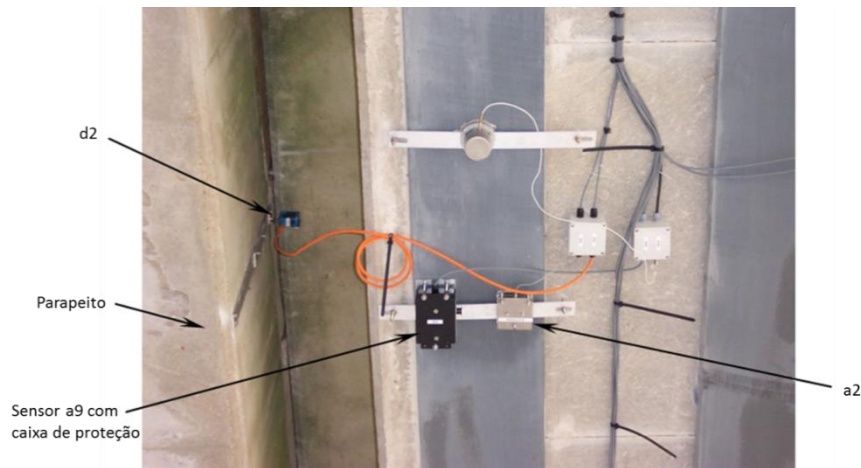
**Figura 57 - Visão geral do viaduto ferroviário. Fonte: Cury (2010)**

A estrutura do viaduto é mista (duas vigas metálicas revestidas de concreto) e tem 17,5 metros de comprimento. Instrumentação e medições foram realizadas apenas em um dos trilhos (trilho no qual circulam os trens no sentido *Paris - Lyon*).

Descrição da instrumentação:

- 3 sensores de deslocamento vertical localizados entre o parapeito e o trilho: cada sensor foi montado em um suporte fixo no parapeito e mediu o deslocamento relativo entre o parapeito supostamente fixo e o trilho;
- 8 acelerômetros verticais e 2 acelerômetros horizontais (longitudinal e lateral) sob o trilho: cada acelerômetro foi montado em um suporte fixado sob o trilho no nível das vigas;
- 2 sensores de passagem de trens: cada sensor mediu o carregamento no eixo na entrada e na saída da estrutura.

Os suportes foram fixados de forma que permitiam o ajuste e orientação individual dos sensores. As Figuras 58 e 59 ilustram a conexão, a partir de cabos, dos sensores de deslocamentos e dos acelerômetros ao sistema de aquisição.



**Figura 58 - Vista dos sensores a2, a9 e d2. Fonte: Cury (2010)**



**Figura 59 - Vista do sistema de aquisição de dados e dos cabos. Fonte: Cury (2010)**

O esquema de locação dos sensores é apresentado na Figura 60. No entanto, neste trabalho somente os acelerômetros verticais foram considerados.

A excitação para o ensaio foi a própria passagem dos trens sobre o trilho instrumentado. Os registros foram feitos continuamente durante um período de 3,5 segundos e a taxa de amostragem utilizada foi de 4096 Hz. Os valores utilizados como referência para o viaduto PK075+317 foram obtidos experimentalmente por Cremona (2004) *apud* Cury (2010) e estão na Tabela 32. O sinal referente ao ensaio é apresentado na Figura 61.

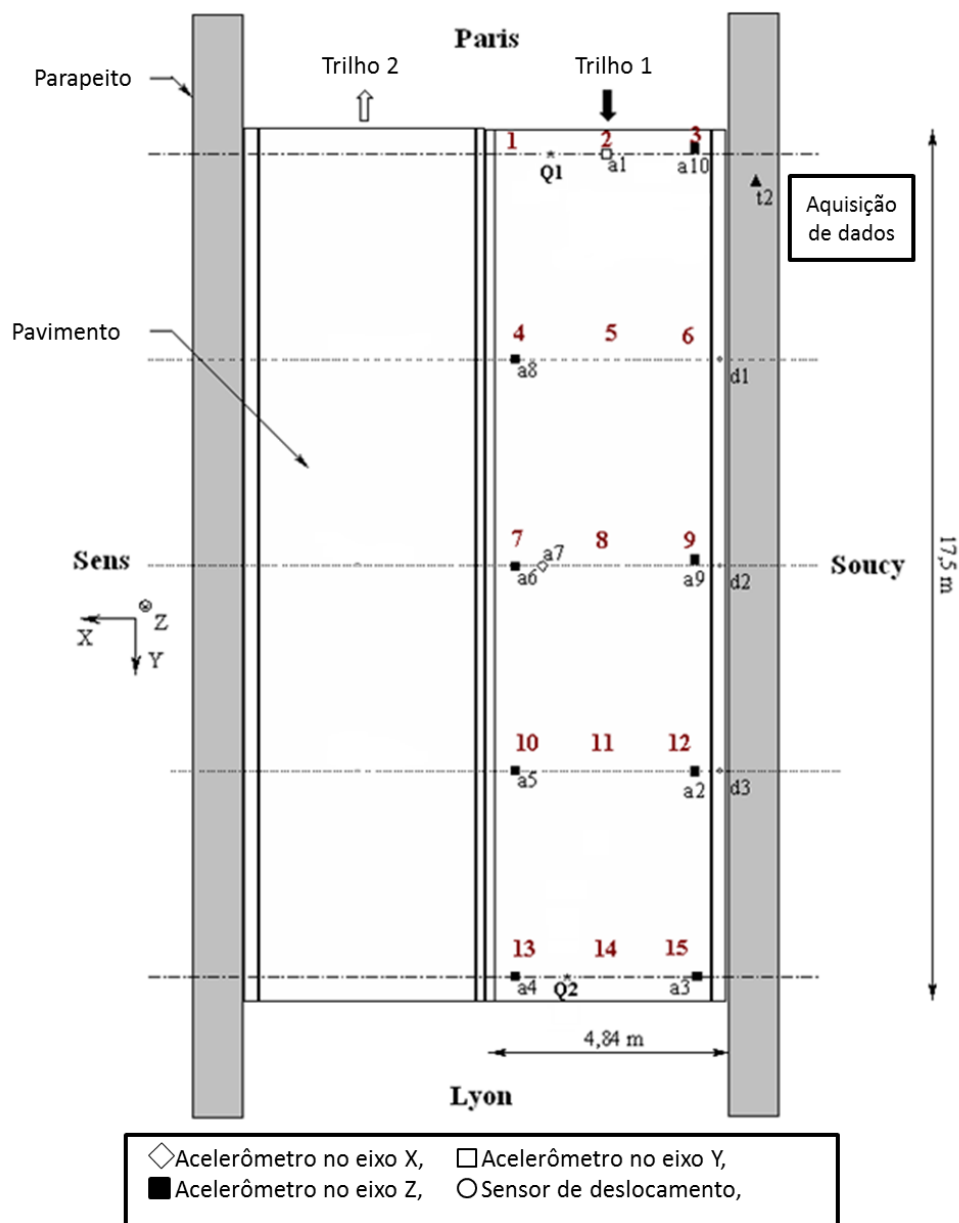
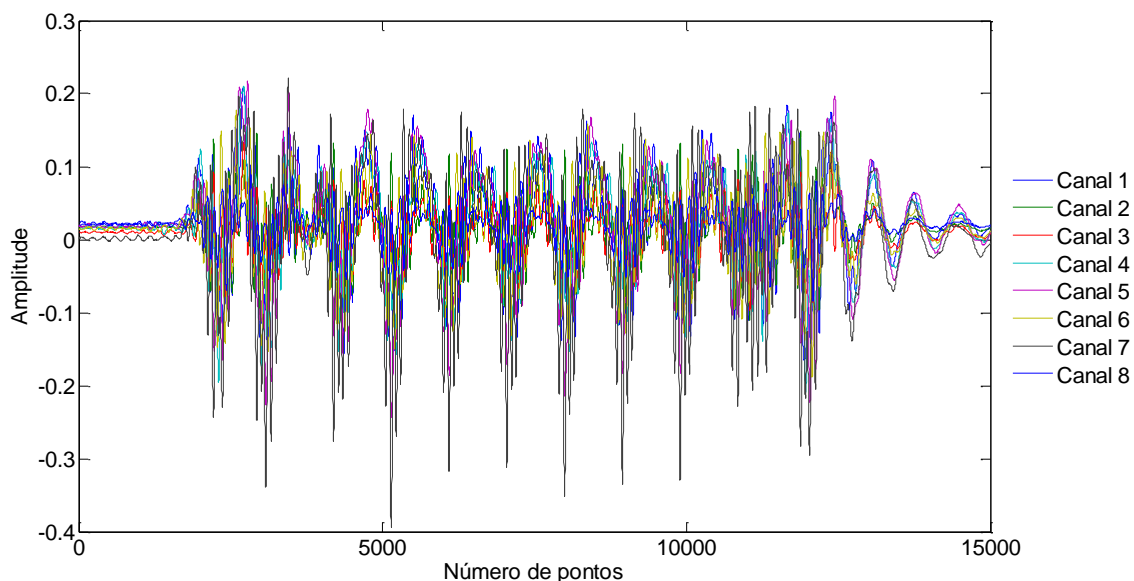


Figura 60 - Localização dos sensores. Fonte: Cury (2010)

Tabela 32 - Parâmetros modais de referência para o Viaduto PK075+317

I	Frequências (Hz)	Taxas de amortecimento (%)
1	5,84	2,62
2	8,74	1,60
3	13,09	1,15
4	16,95	1,08



**Figura 61 - Sinal registrado durante ensaio do Viaduto PK075+317**

No caso do viaduto férreo PK 075+317, os espectros gerados pelos métodos apresentaram picos que não se referiam a modos físicos. Após avaliar e determinar a partir das ferramentas disponíveis quais deles eram realmente físicos, os parâmetros modais do viaduto foram identificados por cada um dos métodos.

Os dados de entrada utilizados foram: sinal gerado durante ensaio, frequência de amostragem (4096 Hz) e canal de referência (4).

Os parâmetros modais identificados pelas simulações são mostrados nas Tabelas 33 e 34, nas quais também são feitos comparativos entre o resultado obtido pelas técnicas estudadas e os valores obtidos experimentalmente por Cremona (2004) *apud* Cury (2010). Os comparativos contêm ainda os erros relativos em valores absolutos dos resultados identificados por cada método.

**Tabela 33 - Comparativo das frequências naturais para o viaduto PK 075+317**

Frequências de referência (Hz)	PP (Hz)	Erros relativos (%)	FDD (Hz)	Erros relativos (%)
5,84	4,00	31,51	4,00	31,51
8,74	-	-	-	-
13,09	13,00	0,69	13,00	0,69
16,95	17,00	0,29	17,00	0,29

Todos os métodos de análise apresentaram erros elevados para a primeira frequência natural (31,51%). Nenhum dos métodos conseguiu identificar a segunda frequência própria. Os dois últimos modos apresentaram erros baixos, inferiores a 1%.

Desta forma, têm-se como resultados aceitáveis apenas os referentes aos dois últimos modos de vibração obtidos pelos métodos PP e FDD.

Tabela 34 - Comparativo das taxas de amortecimento para o viaduto PK 075+317

Taxas de amortecimento de referência (%)	PP (%)	Erros relativos (%)
2,62	43,94	1577,10
1,60	-	-
1,15	8,81	666,09
1,08	6,53	504,63

Todas as taxas de amortecimento identificadas geraram erros muito altos, especialmente a relacionada ao primeiro modo de vibração. Portanto, não caracterizam a estrutura. Os modos de vibração identificados pelo método PP são ilustrados nas Figuras 62 a 64.

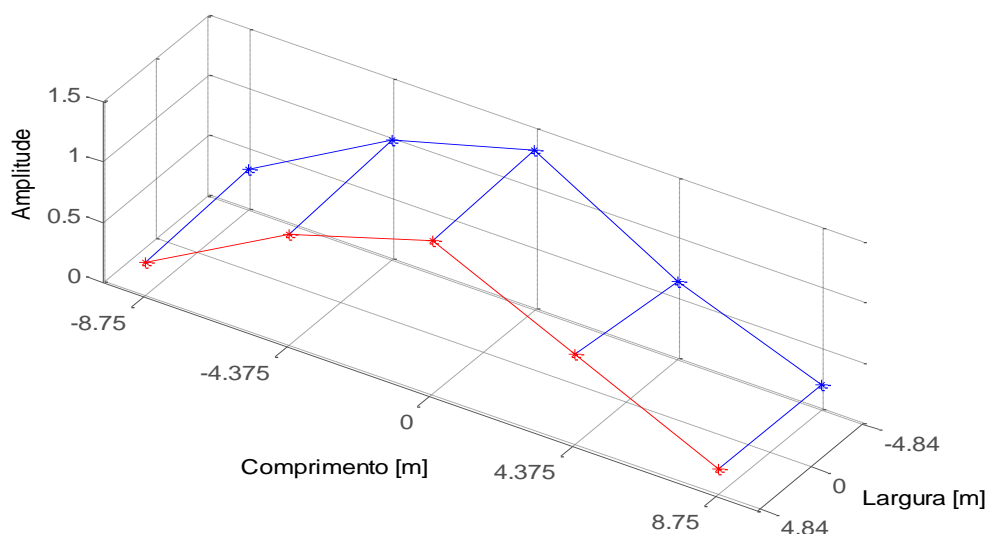


Figura 62 - Primeiro modo próprio identificado pelo PP para o viaduto PK 075+317 - Flexão

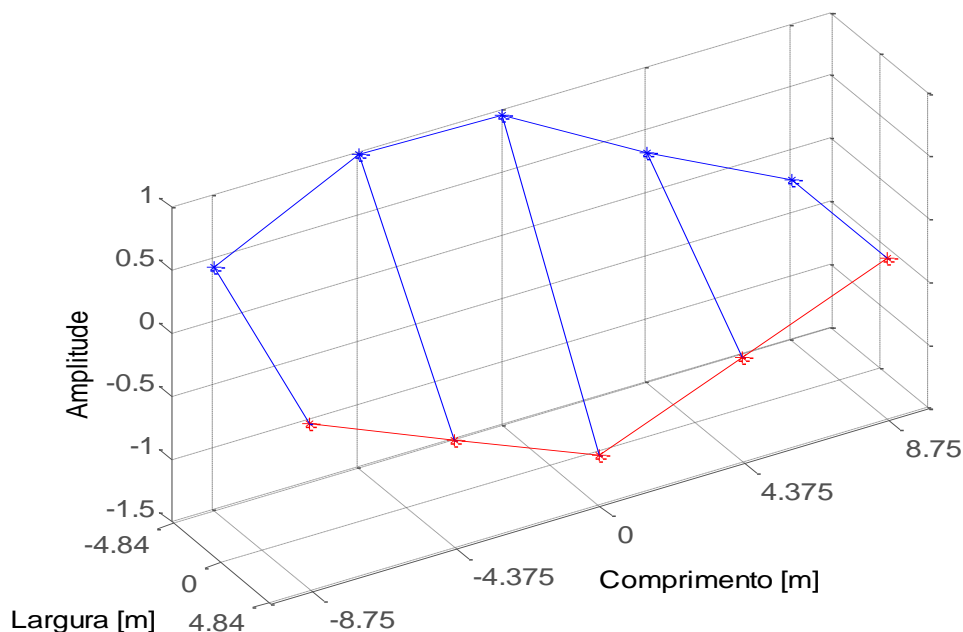
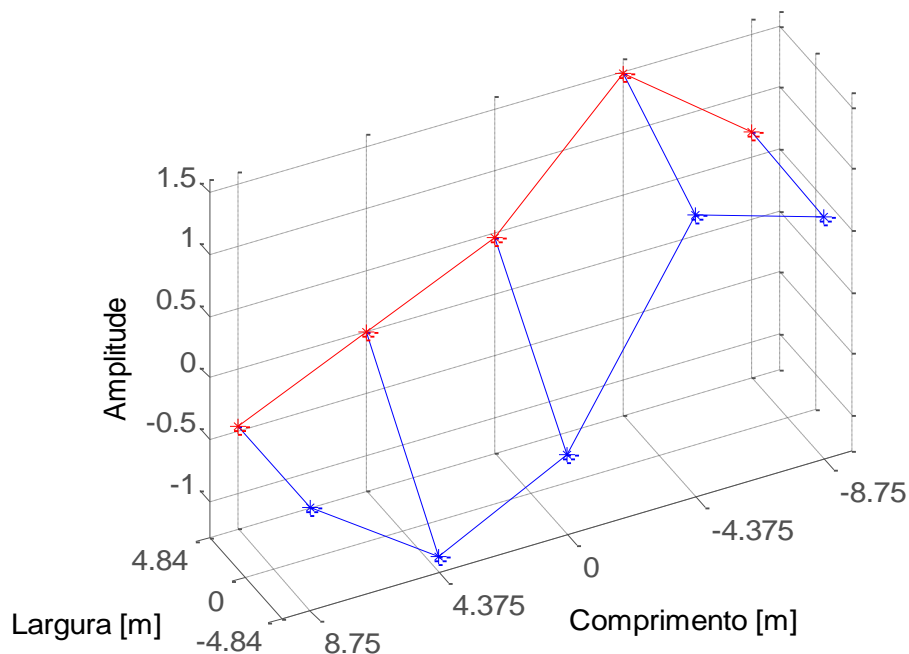


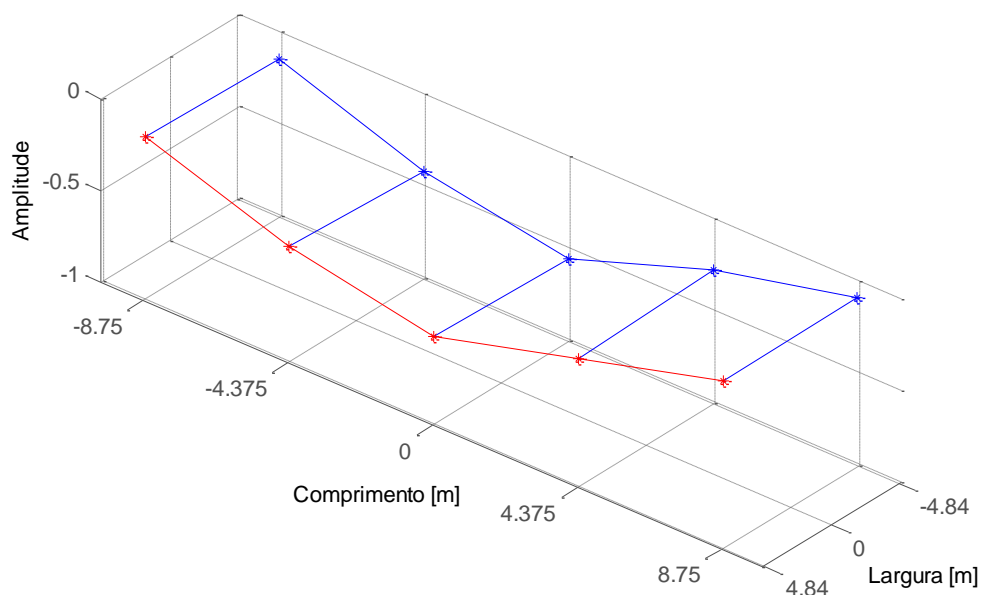
Figura 63 - Terceiro modo próprio identificado pelo PP para o viaduto PK 075+317 - Torção



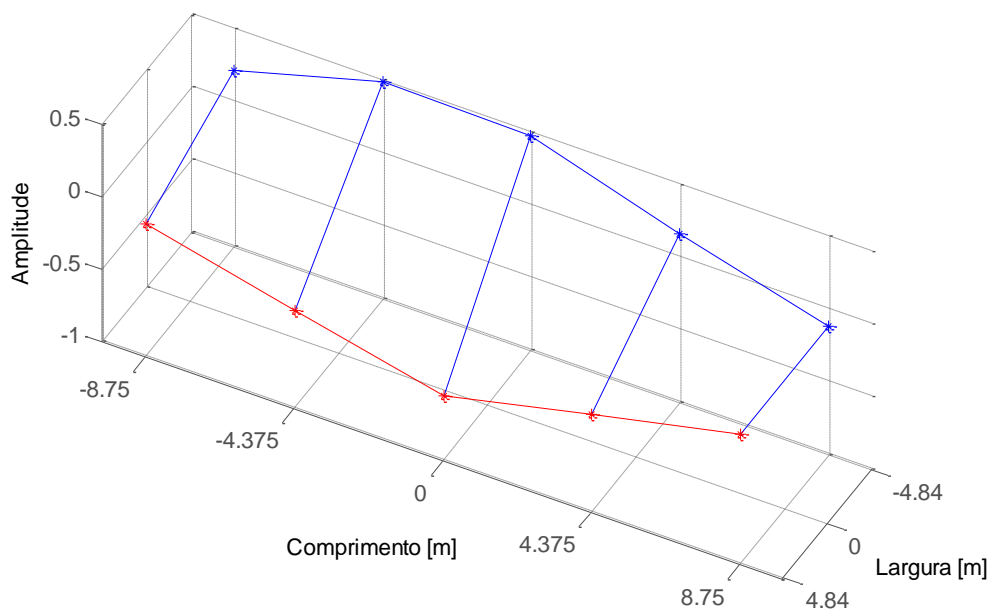
**Figura 64 - Quarto modo próprio identificado pelo PP para o viaduto PK 075+317 - Flexo-Torção**

Os três modos de vibração identificados apresentaram uma ótima representação do comportamento do viaduto sob excitação ambiente. Nitidamente, percebe-se a configuração de meia onda para o primeiro modo de vibração do viaduto e uma maior influência de torção no terceiro e quarto modos.

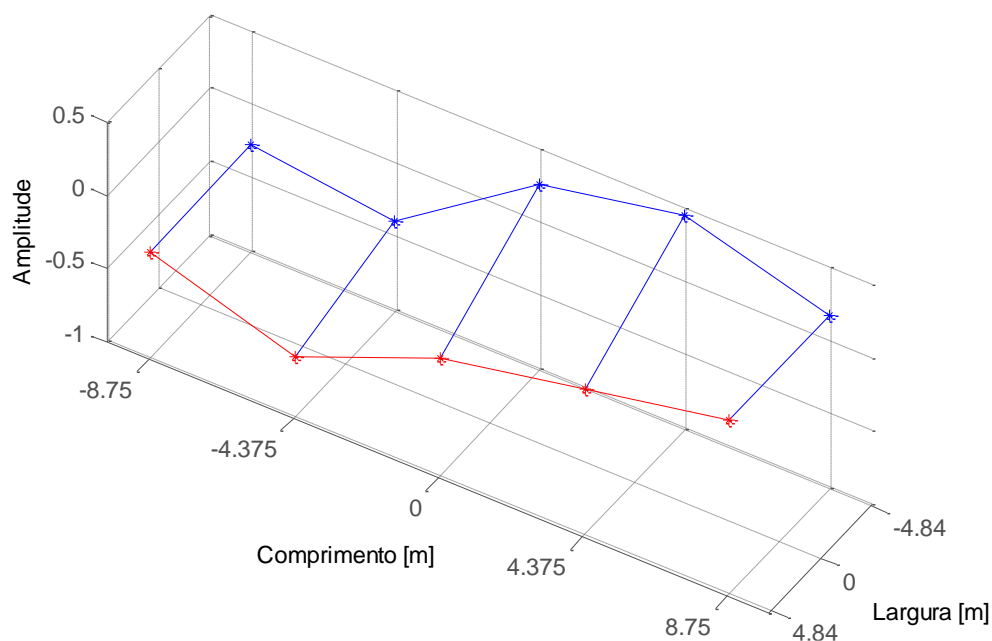
As formas modais de vibração obtidas pelo método FDD são apresentadas nas Figuras 65 a 67.



**Figura 65 - Primeiro modo próprio identificado pelo FDD para o viaduto PK 075+317 - Flexão**



**Figura 66 - Terceiro modo próprio identificado pelo FDD para o viaduto PK 075+317 - Torção**



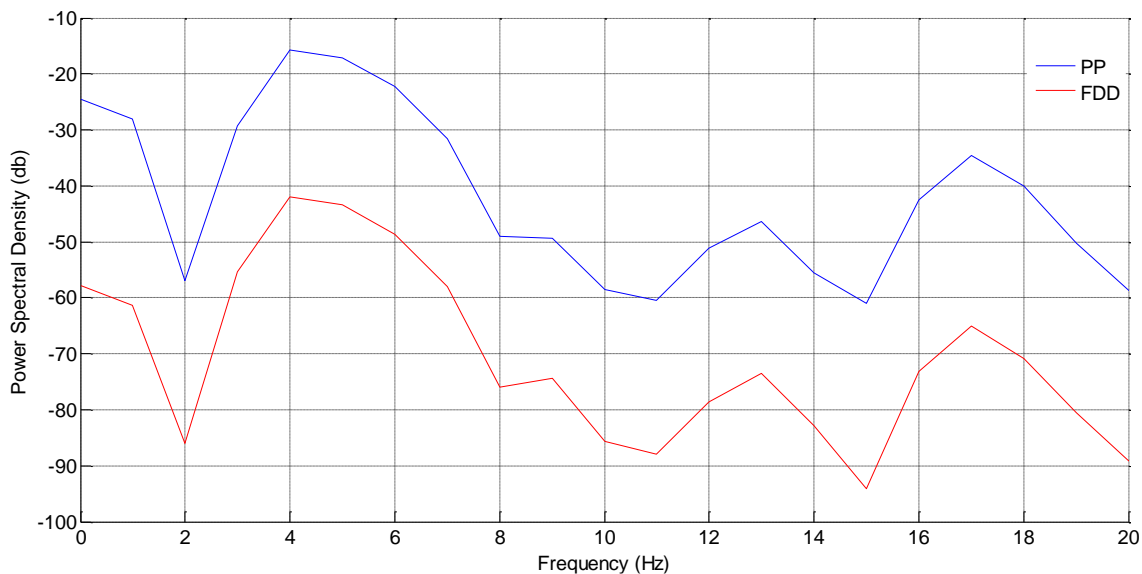
**Figura 67 - Quarto modo próprio identificado pelo FDD para o viaduto PK 075+317 - Flexo-Torção**

As configurações modais identificadas pelo FDD também foram adequadas e não apresentaram diferenças significativas em relação às formas modais obtidas pelo método PP.

O segundo modo do viaduto PK075+317 (para os dois métodos de análise) não foi identificado por não ser encontrado o pico referente ao modo de vibração nos espectros gerados pelos métodos.

A Figura 68 apresenta os espectros identificados para ambos os métodos. Aqui, apenas alguns picos são mais pronunciados, o que torna possível identificar apenas

algumas poucas frequências naturais. Além disso, percebe-se que a resolução frequencial é relativamente baixa.



**Figura 68 - Espectros gerados pelos métodos - Viaduto PK075+317**

## 5. COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS E DISCUSSÃO

No geral, o método PP fez uma boa identificação das frequências naturais de vibração para as aplicações simuladas e forneceu uma excelente representação das configurações modais. As taxas de amortecimento obtidas pelo método foram algumas vezes inferiores aos valores teóricos e, na grande maioria dos casos, apresentaram erros elevados e inaceitáveis.

Por outro lado, a partir dos resultados obtidos para a avaliação da capacidade de identificação dos métodos considerando diferentes resoluções frequenciais, pode ser notado que a identificação das taxas de amortecimento pelo método em questão é significativamente melhorada pelo refinamento da resolução frequencial, na qual os dados são tratados. E para uma resolução com valores inferiores a 0,020 Hz os resultados passam a ser aceitáveis e podem ser utilizados para uma caracterização adequada do comportamento de estruturas.

O método FDD fez identificações das frequências próprias muito próximas às identificações resultantes do *Peak Picking*, sendo idêntica para a maior parte das aplicações e suas variações. Quanto aos modos de vibração, o FDD fez, de maneira geral, uma identificação adequada das configurações modais de vibração das estruturas simuladas.

Com isso, infere-se que em relação às frequências naturais, tanto a identificação utilizando as médias normalizadas de densidade espectral de potência (PP), quanto à identificação utilizando a decomposição em valores singulares (FDD), resultam em



valores satisfatórios. E com o refinamento da resolução frequencial, a identificação das frequências naturais também é melhorada.

Em relação às formas modais de vibração, a identificação a partir das funções de transferência (PP) foi relativamente melhor que a identificação a partir da decomposição em valores singulares (FDD). Tal fato explica-se, possivelmente, pela utilização de um acelerômetro como referência nas funções de transferência. Desta forma, obtêm-se tantas opções para os modos de vibração quantos números de acelerômetros existirem no ensaio da estrutura, o que possibilita a obtenção de um resultado melhor para as configurações modais.

Por fim, quanto ao caso do viaduto PK075+317, que não teve o segundo modo de vibração identificado por nenhum dos métodos de análise, pode-se inferir que a causa esteja possivelmente associada a uma má excitação deste modo. Uma baixa excitação pode fazer com que a componente do modo na resposta temporal seja muito pequena e, ao ser levado para o domínio da frequência, essa componente apareça no espectro com baixa amplitude, o que dificulta/impede a sua identificação dependendo do método de análise utilizado. Para corroborar tal hipótese, ressalta-se o fato de que outros métodos – no domínio do tempo, especialmente – tenham sido capazes de identificá-lo (Yoshida, 2016).

## **6. CONCLUSÕES**

A presente dissertação apresentou simulações de seis casos, sendo três deles numéricos e três experimentais, para a avaliação de dois métodos de identificação modal no domínio da frequência, baseados apenas nas respostas dinâmicas estruturais.

A partir dos resultados obtidos pelos métodos para as seis aplicações analisadas, tem-se que, em termos de identificação das frequências naturais de vibração, tanto o PP quanto o FDD fizeram uma identificação satisfatória para os casos numéricos e reais, com ou sem quantidade significativa de ruído nos sinais simulados.

Em termos das configurações modais de vibração, o melhor método foi o PP, que apresenta uma variedade de opções para respostas das configurações modais por utilizar acelerômetros como referência para as estimativas dos modos de vibração.

Com relação às taxas de amortecimento, o método PP mostrou-se capaz de fazer uma identificação satisfatória apenas quando a resolução frequencial, em que os dados são trabalhados, tem valor inferior a 0,020 Hz. Desta forma, o método PP pode empregar a taxa de amortecimento como uma ferramenta que permite determinar se um modo é físico ou não, se a resolução frequencial for suficientemente refinada.

No que tange à sensibilidade dos métodos para a identificação de frequências naturais próximas, o limite de proximidade identificável para todas as técnicas utilizadas foi de 0,5 Hz (apenas foi possível obter a identificação com essa ordem de proximidade com uma resolução frequencial a partir de 0,10 Hz) e os métodos fizeram uma identificação aceitável para essa ordem de proximidade das frequências. Portanto, a identificação satisfatória desses métodos para frequências naturais de vibração com proximidade de 0,5 Hz e resolução frequencial de 0,10 Hz é suficiente para realizar uma boa análise experimental para estruturas de Engenharia Civil.

## **7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Como sugestões para trabalhos futuros, propõem-se:

- Um estudo que vise melhorar a identificação das taxas de amortecimento, para que se possam apresentar resultados aceitáveis e que contribuam para a caracterização da estrutura avaliada quando o valor da resolução frequencial for superior a 0,020 Hz.
- Avaliar a partir de qual nível de ruído presente no sinal as identificações das frequências naturais de vibração pelos métodos PP e FDD ficam comprometidas.
- Avaliar o ganho de qualidade, em termos da identificação modal, de outros métodos no domínio da frequência, tais como o Método de Polirreferência, o Método da Exponencial Complexa no Domínio da Frequência (Complex Exponential Frequency Domain - CEFD) e o Melhorado de Decomposição no Domínio da Frequência (Enhanced Frequency Domain Decomposition - EFDD).

## REFERÊNCIAS

Allemang, R. J.; Brown, D. L. **Experimental modal analysis and dynamic component synthesis – Vol III – Modal parameter estimation**. University of Cincinnati, 131p, Cincinnati, Ohio, USA, 1987.

Alves, V. N. **Estudo de novas estratégias para identificação de danos estruturais a partir de dados vibracionais**. Dissertação de mestrado - Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, 195 p, Ouro Preto-MG, 2012.

Barbosa, F.S. **Identification modale de structures sous sollicitation ambiante**. Technical report, Laboratoire National des Ponts et Chaussées, France, 2001.

Borges, A. S. **Análise modal baseada apenas na resposta - Decomposição no domínio da frequência**. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista - UNESP, 120 p, Ilha Solteira - SP, 2006.

Borges, J. G. O. **Identificação modal com utilização de métodos baseados na decomposição no domínio da frequência**. Dissertação de mestrado - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF, 114p, Goytacazes - RJ, 2010.

Brincker, R.; Zhang, L.; Andersen, P. **Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition**. IMAC XVIII - International Modal Analysis Conference, San Antonio, Texas, USA, 2000.

Brincker, R.; Ventura, C. E.; Andersen, P. **Damping estimation by frequency domain decomposition**. IMAC XIX- International Modal Analysis Conference, Kissimmee, USA, 2001.

Clough, R. W.; Penzien, J. **Dynamics of structures**. Computers & Structures, 3 ed. 752p, p. 169-235, 1995.

Cury, A. A. **MIDaS - Um sistema computacional baseado em aplicações web para identificação modal de sistemas dinâmicos deformáveis**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora - MG, 2008.

Cury, A. A. **Techniques d'anormalité appliquées à la surveillance de santé structurale**. Tese de Doutorado, Université Paris-Est, França, 2010.

Duarte, M. A. V.; Holanda, R. V.; Oliveira, E. L.; Pena, J. L. O. **Um estudo sobre a utilização de análise modal operacional com excitação transiente**. VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM, 9 p, Campina Grande - PB, 2010.

Felber, A. J. **Development of a Hybrid Bridge Evaluation System**. PhD Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1993.

França, M. L. S. **Análise Modal Experimental**. XIV Congresso Nacional de Iniciação Científica - CONIC-SEMESP, 11 p, São Paulo-SP, 2014.

Freitas, T. C. **Identificação de parâmetros modais utilizando apenas as respostas da estrutura - Identificação estocástica de subespaço e decomposição no domínio da frequência**. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista - UNESP, 133 p, Ilha Solteira - SP, 2008.

Glover, K.; Ljung, L. **Frequency domain versus time domain methods in system identification**. Automatica. Vol. 17, no. 1, 1981.

Júnior, O. A. N. **Identificação dos parâmetros modais utilizando apenas as respostas da estrutura - Identificação no domínio do tempo**. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista - UNESP, 122 p, Ilha Solteira - SP, 2006.

Magalhães, F. M. R. L. **Identificação modal estocástica para validação experimental de modelos numéricos**. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - FEUP, 234 p, Porto, 2004.

Maia, N. M. M.; Silva, J. M. M. **Modal analysis identification techniques**. Instituto Superior Técnico-Departamento de Engenharia Mecânica, 13 p, Lisboa, 2001.

MathWorks Inc., MatLab 2011a, (<http://www.mathworks.com>).

Mendes, P.; Oliveira, S. **Análise dinâmica de estruturas: Utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos**. Laboratório Nacional de Engenharia Civil - LNEC, 169 p, Lisboa, 2008.

Miguel, L. F. F. **Identificação de sistemas e avaliação da integridade de estruturas treliçadas**. Tese de doutorado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 184p, Porto Alegre - RS, 2007.

Nóbrega, P. G. B. **Análise dinâmica de estruturas de concreto: Estudo experimental e numérico das condições de contorno de estruturas pré-moldadas**. Tese de doutorado - Universidade de São Paulo - USP, 285 p, São Carlos - SP, 2004.

Paziani, F. T. **Identificação de parâmetros modais no domínio do tempo – Método ITD**. Dissertação de Mestrado - Universidade de São Paulo - USP, 140 p, São Carlos - SP, 2002.

Rodrigues, J. **Identificação modal estocástica: métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil**. Tese de doutorado - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - FEUP, 526 p, Porto, 2004.

Sczibor, V. **Identificação modal de uma estrutura aeronáutica via algoritmo de realização de sistemas**. Dissertação de Mestrado - Universidade de São Paulo - USP, 160 p, São Carlos - SP, 2002.

Silva, C. W. **Vibration Damping, control and design**. The University of British Columbia. Vancouver, Canadá, 2007.

Tavares, M. A. O. **Identificação modal e monitorização dinâmica de uma ponte em arco**. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - FEUP, 125 p, Porto, 2013.

Yoshida, L. M. **Estudo comparativo de técnicas de identificação modal no domínio do tempo aplicadas a estruturas de engenharia civil**. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, 90 p, Ouro Preto - MG, 2016.

Zhang, L.; Brincker, R.; Andersen, P. **An overview of operational modal analysis: Major development and issues.** 12p, 2005. Disponível em: <[http://www.svibs.com/solutions/literature/2005\\_10.pdf](http://www.svibs.com/solutions/literature/2005_10.pdf)>. Acessado em: 09/09/2015.

Zienkiewicz, O.; Taylor, R. **The Finite Element Method**, 5 ed., Butterworth-Hienemann, 2000.