

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Análise numérica via Ansys do equilíbrio não linear e estabilidade elástica de estruturas com restrições de contato

Laura Camelo Santos

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Ouro Preto, Agosto de 2016

Agradecimentos

À minha família, por todo o apoio incondicional. Em especial aos meus pais, Patrícia e Aurélio, e ao meu irmão Rodrigo, vocês são a minha base.

Ao meu orientador, prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, por ter acreditado e confiado em mim até quando eu mesma não mais acreditava. Sem o seu suporte e ensinamentos eu não chegaria até aqui, minha gratidão é imensurável.

Aos amigos, por entenderem minha ausência e me incentivarem a continuar na busca do conhecimento.

Ao Eduardo, pelo incentivo e paciência.

Ao meu primo Artur, que mesmo tão pequeno me ensina tanto sobre força e amor.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC), em especial ao prof. Francisco Célio.

À FAPEMIG pela ajuda financeira.

Resumo da dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Análise numérica via Ansys do equilíbrio não linear e estabilidade elástica de estruturas com restrições de contato

Laura Camelo Santos

Agosto/2016

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Elementos estruturais em contato com o solo ou rocha funcionam como suporte para o próprio solo ou como elementos a serem suportados pelo solo. Em ambos os casos é importante avaliar as movimentações do sistema de maneira conjunta para promover a otimização de projetos, tornando-os mais eficientes e competitivos. Como exemplos clássicos dessa classe de problemas, destacam-se: tubulações enterradas, vigas baldrame, túneis, cascas de proteção em ambientes agressivos (usinas nucleares), elementos de fundação, entre outros. Adicionalmente, a partir do constante desenvolvimento tecnológico e da necessidade de redução de custos em obras, as estruturas vêm se tornando mais esbeltas e, conseqüentemente, sujeitas a apresentarem problemas de instabilidade. A medida que o elemento estrutural se torna mais esbelto, a não linearidade geométrica se torna cada vez mais relevante dando origem a vários fenômenos que não são encontrados em sistemas lineares. Nesse contexto, esta dissertação tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma metodologia numérica de solução não linear, através da plataforma computacional ANSYS, de problemas de equilíbrio e estabilidade elástica envolvendo alguns tipos de estruturas com restrições de contato impostas por bases elásticas, que representam aqui o solo ou rocha. As principais características deste trabalho são: i. a utilização do método dos elementos finitos (MEF) na discretização do problema de contato em questão; ii. a modelagem do meio através do modelo discreto de molas seguindo hipóteses de base elástica de Winkler; iii. a possibilidade de análise considerando as restrições bilaterais (sistema estrutura-base fixo) e as restrições unilaterais de contato (possibilidade de perda de contato do sistema estrutura-base). As fontes de não linearidade do sistema são a geométrica (no caso da estrutura) e as condições de contorno (no caso de contato unilateral). É elaborado um roteiro passo a passo que permite a utilização do *software* ANSYS para a solução desses problemas de contato. Através de vários exemplos apresentados envolvendo vigas, colunas, arcos e anéis com restrições de contato, foi possível testar, validar e verificar a eficiência da metodologia numérica proposta nesta dissertação. Os resultados obtidos aqui apresentaram boa concordância com aqueles da literatura. As conclusões referentes à metodologia numérica proposta e análises realizadas são apresentadas no final do trabalho, assim como as sugestões de pesquisas visando dar continuidade a esta dissertação.

Abstract of Thesis presented as part of the requirements for the degree of Master of Civil Engineering.

Numerical analysis via ANSYS of the nonlinear equilibrium and elastic stability of structures with contact constraints

Laura Camelo Santos

August/2016

Advisor: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Structural elements in contact with soil or rock acts as support for the soil itself or as elements to be supported by the soil. In both cases it is important to evaluate the system movements jointly to promote design optimization, making them more efficient and competitive. As classic examples of this class of problems, include: buried pipes, grade beams, protective shells in harsh environments (nuclear power plants), foundation elements, among others. Additionally, from the constant technological development and the need of cost reduction in construction, the structures are becoming slenderer and therefore subject to problems of instability. As the structural element becomes slenderer, the geometric nonlinearity becomes increasingly relevant, giving rise to several phenomena that are not found in linear systems. In this context, this work has as main objective the development of a numerical methodology of nonlinear solution, by ANSYS computational platform, of equilibrium and elastic stability problems involving some types of structures with contact constraints imposed by elastic basis, which represents here the soil or rock. The main characteristics of this work are: i. the use of the finite element method (FEM) in the discretization of the contact problem; ii. modeling the medium through discrete springs model following the hypotheses of Winkler; iii. the possibility of analysis considering the bilateral contact (fixed structure-soil system) and unilateral contact constraints (possibility of loss of contact in the structure-soil system). The sources of nonlinearity of the system are the geometric (in the case of the structure) and the boundary conditions (in the case of unilateral contact). It is developed a step by step guide that allows the use of ANSYS software for the solution of these contact problems. Through several examples presented involving beams, columns, arches and rings with contact constraints, it was possible to test, validate and verify the efficiency of the numerical methodology proposed in this dissertation. The results here showed good agreement with those of literature. The conclusions with regard in the numerical methodology proposed and performed analyzes are presented at the end of the work, as well as the suggestions aiming to continue this dissertation.

Sumário

Lista de Figuras	IX
Lista de Tabelas	XIII
Lista de Símbolos	XIV
1 Introdução	1
1.1 Considerações Gerais	1
1.2 Objetivos	5
1.3 Organização do Trabalho.....	6
2 A Interação Entre Solo e Estrutura: Revisão da Literatura	8
2.1 Introdução	8
2.2 Problemas de Contato no Contexto do PROPEC	9
2.3 Modelos para Representação do Solo	11
2.3.1 Modelo de Winkler e a Adaptação ao Modelo Discreto no ANSYS .	12
2.3.2 Modelos de Base Elástica com Dois Parâmetros	14
2.3.3 Outros Modelos de Base	15
2.4 Metodologias Numéricas para Solução do Problema de Contato	17
2.5 Análises Dinâmicas na Interação Solo-Estrutura	20
2.6 Problemas de Contato via ANSYS	22
3 Formulação Geral do Problema de Contato e Modelagem Numérica Adotada	24
3.1 Introdução	24
3.2 Formas de Contato: Bilateral e Unilateral	24
3.3 Elementos Finitos Utilizados	26
3.4 Formulação Geral do Problema de Contato	30
3.5 Metodologia de Solução Numérica via ANSYS	35

3.5.1	Equação de Equilíbrio do Sistema	37
3.5.2	Estratégia de Solução Não Linear	38
4	Exemplos de Aplicação e Validação	42
4.1	Introdução	42
4.2	Vigas com Restrições de Contato	43
4.3	Colunas Esbeltas com Restrições de Contato	47
4.3.1	Colunas em Contato Bilateral com Apoio Elástico Discreto Intermediário	47
4.3.2	Colunas em Contato Bilateral com Base do Tipo Winkler	53
4.3.3	Colunas em Contato Unilateral com Base do Tipo Winkler	59
4.4	Arcos com Restrições Unilaterais de Contato	64
4.4.1	Estrutura de Suporte da Base Elástica	65
4.4.2	Estrutura Suportada pela Base Elástica	70
4.4.3	Arco Circular Suportando a Base Elástica	74
4.5	Anel com Restrições Unilaterais de Contato	78
5	Conclusões e Sugestões	83
5.1	Conclusões	83
5.2	Sugestões para Futuras Pesquisas	85
	Referências Bibliográficas	86
Anexo A	Problemas de Estabilidade Estrutural com Contato via ANSYS	96
A.1	Introdução	96
A.2	O Software Computacional ANSYS	96
A.2.1	O Ambiente de Trabalho	98
A.2.2	A <i>Árvore de Funções</i>	99
A.2.3	Preparação do Ambiente de Trabalho	100
A.3	Pré-Processamento: Geometria e Malha de Elementos Finitos	101
A.3.1	Apresentação do problema	101
A.3.2	Estratégias de Introdução da Geometria do Problema	103
A.3.3	Criando a Malha de Elementos Finitos	106

A.4	Análise de Flambagem Linearizada: <i>Eigen Buckling</i>	112
	A.4.1 Aplicando as Condições de Apoio e Carregamento	113
	A.4.2 Carga Crítica: Resolvendo o Problema de Autovalor	115
	A.4.3 Pós-Processamento: Visualização de Resultados	118
A.5	Análise Não Linear	121
	A.5.1 Aplicando o Carregamento	122
	A.5.2 Controle da Solução Não Linear	123
A.6	Pós-Processamento: Visualização de Resultados	128
A.7	Observações Importantes	135
	A.7.1 Emprego da Técnica do Comprimento de Arco	135
	A.7.2 Problemas com Restrições Unilaterais de Contato	137

Lista de Figuras

1.1	Tubulação enterrada (metálica.com.br)	1
1.2	Túnel (gottardo2016.ch/en)	2
1.3	Estruturas de contenção (sete.eng.br)	2
1.4	Elementos de fundação: estacas (piniweb.pini.com.br)	3
1.5	Elementos de fundação: baldrame (construcaomercado.pini.com.br)	3
2.1	Modelo de Winkler	12
2.2	Discretização do Modelo de Winkler no ANSYS	13
2.3	Modelos de base elástica com dois parâmetros	15
2.4	Representação do modelo elastoplástico do solo (Machado, 2013)	16
3.1	Possibilidades de contato estrutura-meio	25
3.2	Tipos de restrições de contato (Machado, 2013)	26
3.3	Elemento <i>BEAM3</i> (ANSYS, 2009)	27
3.4	Elemento <i>COMBIN14</i> (ANSYS, 2009)	28
3.5	Elemento <i>LINK10</i> (ANSYS, 2009)	29
3.6	Modelagem de coluna em contato com base elástica	30
3.7	Modelo numérico via MEF e configurações de equilíbrio do problema	31
3.8	Elementos finitos escolhidos no software ANSYS para modelagem dos problemas de contato (detalhes no Anexo A)	38
3.9	Solução incremental-iterativa acoplando o Método do Comprimento de Arco	39
4.1	Viga biapoiada em contato com o meio elástico	44
4.2	Trajетórias de equilíbrio do sistema viga-base elástica	45
4.3	Comportamento do sistema viga-base elástica para $K = 9$	46
4.4	Coluna em contato com apoio elástico discreto intermediário	48
4.5	Colunas com diversas condições de apoio	49

4.6	Coluna biapoiada com apoio elástico intermediário	51
4.7	Coluna engastada-livre com apoio elástico intermediário	51
4.8	Coluna engastada-apoiada com apoio elástico intermediário	52
4.9	Coluna biengastada com apoio elástico intermediário	52
4.10	Coluna biapoiada em contato bilateral com base elástica de Winkler	53
4.11	Coluna sujeita a imperfeição geométrica inicial senoidal $n = 1$	54
4.12	Trajatórias de equilíbrio da coluna biapoiada com restrições bilaterais de contato.....	55
4.13	Imperfeições geométricas iniciais senodais para colunas biapoiadas	56
4.14	Trajatórias de equilíbrio para a coluna biapoiado considerando diferentes valores para n e $K = 15,6$	58
4.15	Trajatórias de equilíbrio para a coluna biapoiada considerando diferentes valores para n e $K = 47$	59
4.16	Coluna biapoiada em contato unilateral com base elástica de Winkler	60
4.17	Trajatórias de equilíbrio para a coluna biapoiada considerando diferentes valores de K	61
4.18	Trajatória de equilíbrio, deformada e reação da base, $K = 50$	62
4.19	Configurações deformadas da coluna, $K = 1000$	63
4.20	Reação da base elástica R_b , $K = 1000$	64
4.21	Arco suportando a base elástica	65
4.22	Padrão de deformação do arco	66
4.23	Caminhos de equilíbrio para 10, 20 e 40 EFs	67
4.24	Caminhos de equilíbrio do arco para diferentes valores de rigidez k da base	69
4.25	Configurações deformadas para $k = 10^5$ e $k = 10^9$	70
4.26	Arco suportado pela base elástica	71
4.27	Padrão de Deformação	71
4.28	Caminhos de equilíbrio do arco para diferentes valores de k da base	72
4.29	Configurações deformadas do arco, $k = 10^4$	74
4.30	Arco circular suportando a base elástica	75
4.31	Caminhos de equilíbrio do arco para $k = 0$	76
4.32	Caminhos de equilíbrio do arco para diferentes valores de k	77
4.33	Configurações deformadas do arco para diferentes valores de k	77
4.34	Anel circular confinado por meio elástico	79
4.35	Trajatória de equilíbrio do anel circular confinado	81

4.36	Deformada do anel circular confinado em base elástica rígida	81
4.37	Variação do parâmetro de carga crítica, $\Lambda_{m\acute{a}x}$, em função da rigidez da base elástica k	82
A.1	Possibilidades de análises estruturais no ANSYS	97
A.2	Área de trabalho do ANSYS	99
A.3	Fases de solução de um problema no ANSYS	99
A.4	Árvore de Funções do ANSYS nas fases de desenvolvimento do modelo	100
A.5	Preparação do ambiente de trabalho	101
A.6	Coluna em contato bilateral com base elástica de Winkler	102
A.7	Desenho de geometria no AUTOCAD (2014)	103
A.8	Importando geometria no formato .iges para o ANSYS	104
A.9	Formato do código do ANSYS para inserção de geometria	105
A.10	Inserindo a geometria no formato .txt no ANSYS	106
A.11	Escolha dos elementos finitos no ANSYS	107
A.12	Definindo as constantes reais	108
A.13	Definindo o material	109
A.14	Atribuição de propriedades de elementos	110
A.15	Definição do número de elementos por segmento de linha	111
A.16	Criando elementos a partir das linhas	112
A.17	Modelo de elementos finitos pronto para aplicação de cargas e restrições	113
A.18	Aplicando as condições de contorno	113
A.19	Aplicando o carregamento	114
A.20	Modelo em elementos finitos com cargas e restrições	114
A.21	Selecionando o comando <i>Prestress ON</i>	116
A.22	O comando <i>Solve>> Current LS</i>	116
A.23	O comando <i>FINISH</i>	117
A.24	Entrando no tipo de análise <i>Eigen Buckling</i>	117
A.25	Número de modos que se deseja obter na solução	117
A.26	O comando <i>Expansion Pass</i>	118
A.27	Número de modos que se deseja visualizar	118
A.28	Listagem de resultados (ANSYS, 2009)	119
A.29	Comandos para visualização da deformada da estrutura	120
A.30	Primeiro modo de flambagem da estrutura	120

A.31 Deletando o carregamento anterior	122
A.32 Aplicação do carregamento	123
A.33 <i>Load Step, Substep e Time</i>	124
A.34 Opções básicas de análise	125
A.35 Opções de análise não linear	126
A.36 Opções avançadas de análise não linear	126
A.37 Definindo as opções do Newton-Raphson	127
A.38 Comando <i>Solve>> Current LS</i>	127
A.39 Selecionar variáveis para obtenção de trajetória de equilíbrio-Parte I	129
A.40 Selecionar variáveis para obtenção de trajetória de equilíbrio-Parte II	129
A.41 Procedimento para traçar a curva de equilíbrio da estrutura	130
A.42 Gráfico da trajetória de equilíbrio da coluna biapoiada em contato bilateral com base de Winkler	130
A.43 Listagem dos resultados	131
A.44 <i>Results Summary</i>	131
A.45 Leitura de resultados em <i>Substep</i> específico	132
A.46 Processo de plotagem da deformada da coluna	133
A.47 Plotagem da deformada da estrutura <i>Substep</i> = 100	133
A.48 Listagem de resultados	134
A.49 A configuração deformada da estrutura para o último <i>Substep</i> (Fator de escala = 10)	135
A.50 Opções de Comprimento de Arco	136
A.51 Definindo a <i>Real Constant</i> do elemento <i>LINK10</i>	138

Lista de Tabelas

3.1	Estratégia de solução não linear adotada	41
4.1	Influência da malha no valor de P_{cr} da coluna	56
4.2	Valores da carga crítica considerando $K = 15,6$	57
4.3	Valores da carga crítica considerando $K = 47$	58
4.4	Carga crítica $\Lambda_{m\acute{a}x}$ ($P_{m\acute{a}x}R^2/EI$) para diferentes malhas de EFs ($k = 10^5$)	67
4.5	Carga limite máxima $\Lambda_{m\acute{a}x}$ ($P_{m\acute{a}x}R^2/EI$) para diferentes valores de k da base.....	68
4.6	Carga limite máxima $\Lambda_{m\acute{a}x}$ ($P_{m\acute{a}x}R^2/EI$) para diferentes valores de k	73
4.7	Carga limite mínima $\Lambda_{m\acute{i}n}$ ($P_{m\acute{i}n}R^2/EI$) para $k = 2,5 \cdot 10^4$	73

Lista de Símbolos

A	Área da seção transversal da estrutura
A_{ANSYS}	Área da seção transversal do elemento LINK10
A^s	Área de cisalhamento
A, B, C	Coefficientes da restrição de Comprimento de Arco
c	Distância do apoio discreto ao topo da coluna
c_b	Parâmetro adimensional de c
C_b	Parâmetro de rigidez
C_v	Coefficiente de amortecedor
C_1	Coefficiente 0 ou 1 da matriz de rigidez local do elemento LINK10
C_{ijkl}	Propriedades dos materiais da estrutura
E	Módulo de elasticidade
E_{LINK10}	Módulo de elasticidade do elemento LINK10
E_{solo}	Módulo de elasticidade do solo
\mathbf{F}_e	Vetor de forças externas
F_i	Componentes das forças externas atuantes nas regiões S_f
\mathbf{F}_i	Vetor de forças internas generalizadas
\mathbf{F}_r	Vetor de forças externas de referência
\mathbf{g}	Vetor gradiente: diferença entre os vetores de forças externas e internas
G	Parâmetro de rigidez cisalhante da camada incompressível
I	Momento de inércia
k	Parâmetro de rigidez adimensional da base elástica de Winkler
K	Parâmetro de rigidez elástico da base elástica de Winkler
\mathbf{K}_T	Matriz de rigidez tangente do sistema solo-estrutura
K_{ANSYS}	Parâmetro de rigidez das molas discretas aplicado no ANSYS

\mathbf{K}^e_L	Matriz de rigidez local de elemento
K_x	Parâmetro de rigidez do apoio elástico discreto na direção x
k_x	Parâmetro adimensional de K_x
L	Comprimento da estrutura ou do elemento
L_{elem}	Comprimento de influência de cada mola em relação a estrutura analisada
L_{LINK10}	Comprimento do elemento LINK10
n_j	Normal
n	Número de semi-ondas do modo de deformação da coluna
\mathbf{P}	Vetor de forças internas resultantes de cada elemento finito do sistema
P_{cr}	Carga crítica da coluna
P_e	Carga crítica de Euler
$P_{mín}$	Carga mínima da trajetória de equilíbrio
$P_{máx}$	Carga máxima da trajetória de equilíbrio
P	Carga concentrada
q	Carregamento uniforme
r_b	Intensidade da reação normal da base no modelo contínuo de Winkler
R_b	Reação das molas discretas
R_B	Parâmetro adimensional de R_b
R	Raio médio da estrutura em arco ou anel
S	Região de contorno formado por S_c , S_f e S_u
S_c	Região de contato entre corpos
S_f	Região de forças externas prescritas
S_u	Região de deslocamentos prescritos
S_{jk}	Componentes cartesianas do tensor Piola Kirchoff II
T	Intensidade da tração na membrana elástica
U_e	Energia armazenada na estrutura
U_b	Energia armazenada na base elástica
U	Amplitude da senóide
\mathbf{U}	Vetor de deslocamentos nodais
u, w	Deslocamento da estrutura em duas direções

V	Domínio contínuo do sólido elástico
V_f	Energia potencial do carregamento externo
w_b	Deslocamento normal da base elástica
x, y, z	Coordenadas cartesianas
δU_t	Vetor de deslocamentos tangenciais
δU	Vetor de deslocamentos nodais corrigidos
δU_g	Vetor de deslocamentos nodais gradiente
δU_r	Vetor de deslocamentos nodais de referência
$\delta \lambda$	Correção do parâmetro de carga
$\varepsilon_{\text{solo}}$	Deformação no solo
ε_{ij}	Deformação num ponto de coordenadas i e j
ϕ	Coefficiente de cisalhamento
φ	Distância entre estrutura e base elástica
λ	Intensidade do carregamento externo aplicado
λF	Carregamento genérico
ν	Coefficiente de Poisson
σ_{solo}	Tensão no solo
σ_{lim}	Tensão limite do solo
σ_{ij}	Componentes do tensor de Cauchy
Δu_i	Incrementos de deslocamentos da estrutura
ΔS_{ij}	Componentes incrementais do tensor de Piola Kirchoff II
$\Delta \varepsilon_{ij}$	Componentes do tensor de incremento de deformação de Green-Lagrange
Δe_{ij}	Componentes do tensor infinitesimal
$\Delta \eta_{ij}$	Componente de deformação não linear
Δr_{bi}	Incremento da reação da base
Δu_{bi}	Incremento dos deslocamentos da base
$\Delta \lambda^0$	Acréscimo de carga
Δl	Incremento do Comprimento de Arco
ΔU^0	Deslocamentos nodais incrementais
Γ	Relação entre carga crítica da coluna e a carga crítica de Euler (P_{cr}/P_e)
Λ	Parâmetro adimensional de carga
$\Lambda_{\text{máx}}$	Parâmetro máximo adimensional de carga obtido na trajetória de equilíbrio

$\Lambda_{\text{mín}}$	Parâmetro mínimo adimensional de carga obtido na trajetória de equilíbrio
Π	Funcional de energia do sistema
∇	Operador Laplaciano

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

Elementos estruturais em contato com o solo ou rocha funcionam como suporte para o próprio solo ou como elementos a serem suportados pelo solo. Em ambos os casos, é importante avaliar as movimentações do sistema de maneira conjunta para a obtenção de um projeto estrutural-geotécnico mais eficiente e competitivo.

Na Figura 1.1 é apresentada uma das soluções mais comuns em infraestrutura urbana: tubos pré-moldados de concreto que são, atualmente, o principal recurso utilizado para construção de galerias de drenagem e esgoto em todo o mundo. As tubulações enterradas são muito utilizadas também para transporte de gás natural (gasodutos), implementação de sistemas de combate ao incêndio, linhas telefônicas, elétricas, fibra ótica, entre outros.



Figura 1.1 Tubulação enterrada (metálica.com.br)

Construções subterrâneas, como o caso dos túneis mostrado na Figura 1.2, são uma alternativa valiosa para se descongestionar as grandes cidades, transferindo, por exemplo, parte do transporte público para o subsolo. Podem também servir de alternativas construtivas para rodovias e ferrovias, facilitando acessos e encurtando distâncias entre localidades, além de sua aplicação histórica na mineração.



Figura 1.2 Túnel (gottardo2016.ch/en)

As estruturas de contenção de solo são também exemplos clássicos e recorrentes na engenharia civil. A aplicação de estacas metálicas como suporte do solo é apresentada na Figura 1.3.

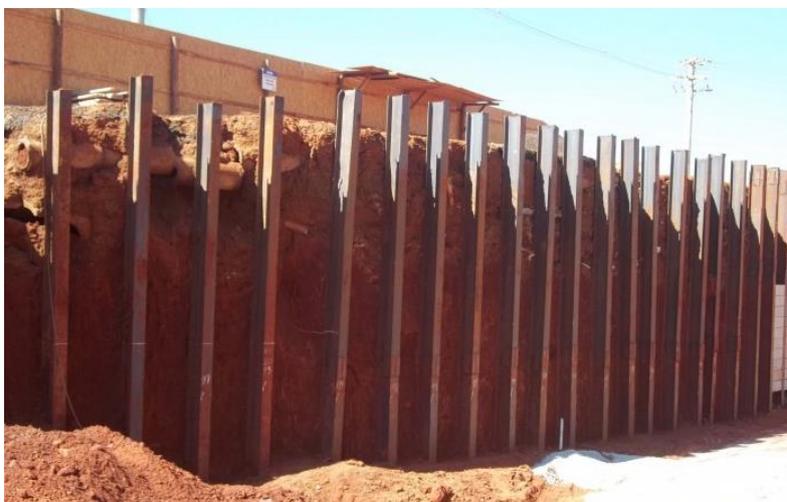


Figura 1.3 Estruturas de contenção (sete.eng.br)

Por último, elementos de fundação como vigas baldrames, tubulões e estacas (Figuras 1.4 e 1.5) em contato com o solo caracterizam esses problemas de contato.



Figura 1.4 Elementos de fundação: estacas (piniweb.pini.com.br)



Figura 1.5 Elementos de fundação: baldrames (construcaomercado.pini.com.br)

O solo é um material natural originado da desagregação/decomposição de rochas. Ele pode ser classificado como residual ou transportado em função da sua localização em relação à rocha que o deu origem (ou rocha mãe). Da mesma forma, sua composição mineralógica também está diretamente relacionada à rocha mãe. O solo é um material heterogêneo

podendo apresentar partículas sólidas de diferente graduação, ou tamanho médio de grão, tais como os pedregulhos, areias, siltes e argilas. Do ponto de vista físico, o solo pode ser considerado como um conjunto de partículas sólidas agrupadas de forma que vão existir espaços vazios, ou poros, os quais podem ou não estar preenchidos por fluídos no estado líquido ou gasoso.

O estudo do comportamento mecânico de estruturas em contato com o solo é naturalmente complexo. No entanto, podem ser desenvolvidos modelos simplificados para aproximar seu comportamento. Esses modelos, apesar de não representar com exatidão o comportamento do meio, podem oferecer respostas suficientemente satisfatórias para a solução de diversos problemas da engenharia (Abreu, 2016).

No presente trabalho, o solo é representado como um meio elástico, homogêneo e isotrópico. A partir de modelos de molas discretas conectadas à estrutura, tenta-se simular, de maneira simplificada, a interação entre estrutura e meio. Existem duas formas de contato nesse tipo de simulação: quando a estrutura e o meio não perdem contato, as molas discretas reagem tanto às solicitações de compressão quanto de tração, e o contato é chamado de bilateral; e quando existe a possibilidade de perda de contato entre os corpos, as molas discretas respondem somente à solicitação de compressão, nessa situação o contato é chamado de unilateral.

As estruturas devem também ser apropriadamente estudadas. A partir do desenvolvimento tecnológico e da necessidade de redução de custos em obras, as estruturas vêm se tornando mais esbeltas e, conseqüentemente, sujeitas a apresentarem problemas de instabilidade. A medida que o elemento estrutural se torna mais esbelto, a não linearidade geométrica se torna cada vez mais relevante e dá origem a vários fenômenos que não são encontrados em sistemas lineares. Tais fenômenos estão relacionados à existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos críticos (pontos limites e pontos de bifurcação) ao longo do caminho não linear de equilíbrio, onde a estrutura pode exibir saltos dinâmicos (Silveira, 1995).

A não linearidade geométrica deve ser incluída nos problemas que envolvem grandes deslocamentos. Para essas condições, a configuração deformada da estrutura deve ser utilizada para dedução das equações de equilíbrio. Esse efeito não linear é introduzido na teoria da elasticidade através das equações de equilíbrio e pela inclusão de termos de ordem superior das relações deformação-deslocamento (Silveira, 1995).

Nesta dissertação, através do emprego do *software* comercial Swanson Analysis Systems, Inc., ANSYS (2009), foram desenvolvidos modelos de elementos finitos

bidimensionais para a solução de problemas de estabilidade de estruturas esbeltas, tais como vigas, colunas, arcos e anéis, em contato com o meio elástico. Foram consideradas a não linearidade geométrica e, para o caso do contato unilateral entre os corpos, a não linearidade das condições de contorno.

A próxima seção apresenta os principais objetivos desta dissertação e justifica sua contribuição científica. A organização dos capítulos subsequentes é apresentada na Seção 1.3.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo a elaboração de um estudo sobre o equilíbrio e a estabilidade de elementos estruturais com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas pelo solo ou rocha. A aplicação do estudo é, conforme os exemplos apresentados na seção anterior, muito grande.

É desenvolvida uma metodologia de solução numérica, via método dos elementos finito (MEF), utilizando o ANSYS, para análise desses problemas. São considerados dois tipos de restrições de contato na solução numérica dos problemas de interesse: as restrições bilaterais e as restrições unilaterais de contato. Adicionalmente, os efeitos da não linearidade geométrica da estrutura são incluídos nas análises e não são considerados os efeitos das forças de atrito entre os corpos.

É desenvolvido um passo a passo com explicações detalhadas sobre como se realiza a modelagem de problemas de contato bidimensionais em um *software* extremamente poderoso numérica e graficamente. O ANSYS é um programa de simulações computacionais multidisciplinar, envolvendo diferentes campos da engenharia. Por ser tão amplo, passa a ser um programa de difícil entendimento para desenvolvimento de análises. É necessário, assim, ter o controle correto sobre o programa, desde a concepção da geometria, escolhas de elementos finitos, até o controle da solução não linear. É necessário também entender seu pós-processamento e como deve ser realizada a análise e a coleta de resultados.

Deve-se destacar que na literatura atual, as informações sobre a solução de problemas estruturais dessa natureza utilizando o ANSYS, quando encontradas, são pouco detalhadas. Isso faz com que muitos usuários migrem para outras plataformas, com a perda da oportunidade de se utilizar os benefícios dessa ferramenta. A partir deste trabalho, tenta-se mudar essa percepção.

1.3 Organização do Trabalho

Esta dissertação está inserida na linha de pesquisa de *Mecânica Computacional* do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) do Departamento de Engenharia Civil (Deciv) da Escola de Minas (EM) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) e tem por objetivo a aplicação de métodos numéricos, como o MEF, na obtenção das respostas de sistemas estruturais em engenharia.

No Capítulo 2 realiza-se uma vasta pesquisa bibliográfica sobre problemas de contato, com informações atualizadas. O objetivo desse capítulo é revisitar alguns dos principais trabalhos publicados, a partir de 1940, sobre a interação entre solo e estrutura, e que tiveram papel relevante para o desenvolvimento desta pesquisa. Há ainda trabalhos publicados contendo análises mais complexas, que envolvem a aplicação de outras formulações para o solo, lineares e não lineares, e desenvolvimento de modelos tridimensionais. Atenção especial é dada em relação a publicações sobre problemas estruturais desenvolvidos através do programa ANSYS.

A formulação geral do problema de contato a ser resolvido é apresentada no Capítulo 3. Nele são enunciadas as equações e inequações básicas que regem o problema considerando grandes deslocamentos, e a estratégia de solução incremental-iterativa adotada, com a aplicação do Método de Newton-Raphson Padrão (MNRP) acoplado à técnica de Comprimento de Arco.

Testes para verificação da metodologia numérica proposta envolvendo problemas de vigas, colunas, arcos e anéis em contato com o meio são realizados no Capítulo 4. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com estudos anteriores realizados por Silveira (1995), Maciel (2012), Pires (2012), Silveira *et al.* (2013) e outros trabalhos da literatura.

No Capítulo 5 estão as principais conclusões sobre o emprego da metodologia desenvolvida para a solução dos diversos problemas estudados no Capítulo 4. São também fornecidas sugestões para desenvolvimento de trabalhos futuros, utilizando a plataforma ANSYS, na análise de problemas de contato.

Finalmente, o Anexo A proporciona ao leitor o conhecimento sobre o sistema computacional ANSYS. São realizadas considerações necessárias para o desenvolvimento de modelos bidimensionais para a simulação de sistemas de suporte solo-estrutura a partir de um exemplo prático de uma coluna em contato com uma base elástica em toda sua extensão.

Antes da conclusão deste capítulo, é importante ressaltar que esta dissertação é uma continuação direta do trabalho desenvolvido por Abreu (2016), que realizou simulações no ANSYS para avaliação do equilíbrio de problemas de contato solo-estrutura, mas sem incluir os efeitos geométricos não lineares.

Capítulo 2

A Interação entre Solo e Estrutura: Revisão da Literatura

2.1 Introdução

Estudos envolvendo a interação solo-estrutura são extremamente abrangentes e interdisciplinares, com esforços conjuntos de engenheiros estruturais e geotécnicos, geofísicos, matemáticos e tantos outros. Algumas linhas de pesquisas que exemplificam essa abrangência são (Kausel, 2010):

- estudo da resposta do domínio do solo à carregamentos dinâmicos ou estáticos;
- estudo do comportamento do solo devido às vibrações de origem sísmica;
- resposta de estruturas envolvidas total ou parcialmente pelo solo sob carregamentos estáticos, harmônicos ou transientes aplicados diretamente sobre elas;
- deformação adicional do solo na vizinhança de uma estrutura causada pelo acomodamento da própria estrutura no solo (interação inercial);
- aplicação de métodos numéricos para análise dos problemas mencionados acima. Dentre esses métodos, merecem destaque: método dos elementos finitos (MEF), o método dos elementos de contorno (MEC) e o método das diferenças finitas (MDF).

O objetivo deste capítulo é revisitar alguns trabalhos publicados sobre a interação entre solo e estrutura, e que tiveram papel de destaque no desenvolvimento dessa área de

pesquisa. Serão também mencionados os trabalhos que foram especificamente importantes para a elaboração desta dissertação.

Na Seção 2.2 apresenta-se os trabalhos desenvolvidos no âmbito da linha de pesquisa de *Mecânica Computacional* do PROPEC no contexto dos problemas de contato entre estrutura e solo (ou rocha). A Seção 2.3 apresenta os modelos mais utilizados na representação do solo e suas aplicações. Na Seção 2.4 são expostos alguns estudos que tratam de diferentes metodologias numéricas utilizadas para a solução dos problemas de contato de interesse. Já na Seção 2.5, estão algumas publicações relevantes sobre as análises dinâmicas envolvidas na interação solo-estrutura. Finalmente, na Seção 2.6, são destacados quatro trabalhos que utilizaram o *software* ANSYS para realizar diferentes tipos de análises de problemas de contato.

2.2 Problemas de Contato no Contexto do PROPEC

O orientador desta pesquisa destaca-se pelo desenvolvimento de metodologias de solução de problemas de contato que envolvem sistemas de suporte compostos por elementos estruturais e o solo (ou rocha). Em sua tese de doutorado, Silveira (1995) apresentou uma metodologia de solução numérica para resolver problemas de equilíbrio e estabilidade de elementos estruturais esbeltos, tais como vigas, colunas, arcos e anéis, com contato com bases elásticas ou apoios discretos que somente reagem quando comprimidos (restrições unilaterais de contato). O esquema de solução numérica proposto por Silveira (1995), é baseado numa estratégia incremental-iterativa e inclui, de forma conjunta, a não linearidade geométrica da estrutura e a não linearidade imposta pelas condições de contorno. A modelagem dos corpos em contato é realizada através do método dos elementos finitos (MEF) adotando uma formulação Lagangiana. A partir desse trabalho, desenvolveram-se diversos outros estudos no PROPEC, que serão comentados a seguir.

Inicialmente a atenção foi direcionada ao estudo das placas em contato bilateral e unilateral com bases elásticas (Silva, 1998). No caso de contato bilateral, vale comentar que a base elástica oferece reação quando tracionada e quando comprimida. Nesse trabalho é apresentada, através de técnicas de programação matemática, uma metodologia de solução capaz de resolver problemas de equilíbrio de placas com restrições de contato, mas considerando pequenos deslocamentos no âmbito da elasticidade linear. Em seus exemplos, Silva (1998), considerou diferentes modelos de base elástica, incluindo os modelos com um ou dois parâmetros.

Pereira (2003) realizou um estudo de vigas considerando também as restrições de contato unilaterais e bilaterais através de duas metodologias distintas. Na primeira parte de seu trabalho, foi proposta uma solução baseada no emprego do método de Rayleigh-Ritz para solução de três casos particulares de vigas com restrições unilaterais de contato. Na segunda parte, a partir da discretização pelo MEF do sistema, o problema de contato foi tratado diretamente como um problema de minimização, envolvendo suas variáveis originais, sujeitas às restrições de desigualdade e a uma condição de complementaridade. A partir de duas formulações, primal e dual, as equações para solução de problemas de contato foram escritas na forma de um problema de complementaridade linear (PCL) e resolvidas através do algoritmo de Lemke (Lemke, 1968; Cottle e Dantzig, 1968). Silveira (1995) e Silva (1998) trataram o problema de contato dessa mesma maneira.

Mais recentemente, Maciel (2012), utilizando a arquitetura de programação do CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; Silva, 2009), desenvolveu um novo módulo denominado CS-ASA/BC (*Bilateral Contact*), que permite estudar o equilíbrio e estabilidade elástica de elementos estruturais, considerando grandes deslocamentos, em contato bilateral com bases elásticas, que são representadas através de modelos discretos (molas elásticas) e contínuos (tipos Winkler e Pasternak). Na pesquisa de Maciel (2012) foram analisados vários problemas práticos da engenharia estrutural e geotécnica envolvendo vigas e colunas em contato bilateral com bases elásticas considerando ou não a não linearidade geométrica.

Também usando a estrutura do CS-ASA, Machado (2013), em sua tese de doutorado, desenvolveu uma ferramenta numérica computacional para o estudo de cascas cilíndricas isotrópicas com restrições de contato impostas por bases elásticas. O programa desenvolvido por Machado apresenta como principais características: o emprego do MDF para aproximar as derivadas das equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base elástica; e o tratamento e solução do problema de contato bilateral e unilateral através de técnicas de programação matemática. Machado adotou em seu trabalho a Teoria de Casca de Sanders (Silveira, 1990), que pode ser aplicada para cascas ou painéis cilíndricos muito ou pouco abatidos. Para aproximação do comportamento do solo, foram utilizados os modelos de base elástica de Winkler e de Pasternak.

A partir desses trabalhos e também como consequência do pós-doutoramento do orientador desta pesquisa na Universidade do Texas em Austin (Silveira, 2007), alguns artigos foram publicados em periódicos internacionais relevantes. Merecem destaque: Silveira *et al.* (2008a, 2008b, 2013, 2015) e Silva *et al.* (2001). Esses trabalhos são produtos

das pesquisas desenvolvidas no PROPEC no contexto dos problemas de interação solo-estrutura. Em Silveira *et al.* (2013) e (2008b), por exemplo, pode ser encontrada uma formulação mais geral, via MEF, e técnicas de programação matemática, para solução desses problemas. Já em Silveira *et al.* (2008a), foi usado o método de Ritz para a redução espacial e o método de Newton-Raphson para a solução das equações não lineares. Alguns exemplos numéricos realizados por Silveira *et al.* (2013) foram reproduzidos no Capítulo 4 deste trabalho. Em Silva *et al.* (2001) foi apresentada a metodologia numérica de solução de problemas de placas em contato unilateral com a base elástica. Por fim, Silveira *et al.* (2015), traz análises não lineares de estabilidade de pilares com restrições bilaterais de contato. Essas análises destacam a grande influência do modo da imperfeição geométrica inicial na avaliação da carga crítica de colunas. Além disso, é também avaliado nesse artigo como a rigidez estrutural pode ser influenciada pelo modelo representativo do solo.

A última dissertação defendida no âmbito do PROPEC nessa linha de pesquisa foi apresentada por Abreu (2016). Ele utilizou a plataforma ANSYS (2009) para desenvolver uma metodologia de solução de problemas de equilíbrio de vigas, colunas, arcos e anéis em contato com base elástica, mas considerando pequenos deslocamentos e material linear elástico. Utilizando o elemento *BEAM3* para modelagem da estrutura, o elemento *COMBIN14* para a modelagem da base elástica (quando o contato é bilateral) e o elemento *LINK10* para a modelagem da base elástica no caso das restrições unilaterais de contato. Esses elementos fazem parte da biblioteca de elementos do ANSYS. Abreu desenvolveu um passo a passo para solução de problemas lineares e bidimensionais de contato. A presente dissertação é uma continuação direta do trabalho de Abreu (2016), expandindo sua metodologia numérica, via ANSYS, à solução de problemas de equilíbrio não lineares e estabilidade elástica de estruturas com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por bases elásticas.

2.3 Modelos para Representação do Solo

O comportamento real do solo é bastante complexo devido a sua natureza heterogênea, anisotrópica e relação tensão-deformação não linear. A possibilidade de presença de água nos seus poros aumenta ainda mais sua complexidade (Dutta e Roy, 2002). Ao longo do tempo, foram desenvolvidos diversos modelos matemáticos simplificados para se tentar aproximar do comportamento do solo e, assim, poder obter respostas mais realistas na solução do problema de contato solo-estrutura.

Dutta e Roy (2002) apresentaram os principais modelos utilizados para representação do solo. Eles comentam sobre a importância de se escolher o modelo apropriado à análise em foco, e que para isso é essencial que se conheça as características reais do solo estudado.

Nesta seção serão apresentados alguns modelos utilizados para representação do solo, de maneira que ela é organizada da seguinte forma:

- o modelo de Winkler e o modelo de molas discretas, utilizado no presente trabalho (Seção 2.3.1);
- os modelos que se apresentam como versões melhoradas do modelo de Winkler (Seção 2.3.2);
- modelos mais avançados, com abordagem elastoplástica, não lineares e outras possibilidades, via MEF, para representação do meio (Seção 2.3.3).

2.3.1 Modelo de Winkler e a Adaptação ao Modelo Discreto no ANSYS

No modelo idealizado por Winkler (Winkler, 1867; Hetényi, 1946), o solo é representado por um colchão de molas independentes e estreitamente espaçadas entre si (Figura 2.1). Essa base elástica assume que o solo é homogêneo, isotrópico e com relação força-deslocamento linear, ou seja:

$$r_b = K w_b \quad (2.1)$$

em que K é o parâmetro de rigidez por unidade de comprimento da base elástica no meio contínuo de Winkler, r_b é a intensidade da reação normal por unidade de comprimento da base e w_b é o deslocamento normal que ocorre naquele ponto.

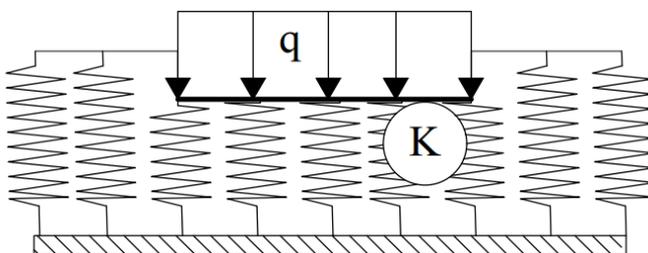


Figura 2.1 Modelo de Winkler

Maiores detalhes sobre a modelagem da base elástica realizada no presente trabalho, considerando-se as duas diferentes restrições de contato, encontram-se no Anexo A.

A maior crítica ao se utilizar o modelo contínuo de Winkler e sua modelagem em molas discretas, se dá pela falta de interação entre as molas e ao fato de se considerar a relação força-deslocamento como linear. Em muitos tipos de solo essas simplificações não podem se aplicar na prática. Na tentativa de se melhorar as hipóteses assumidas por Winkler, foram desenvolvidos outros modelos através da adição de mais parâmetros para, de alguma forma, representar a interação entre essas molas. Alguns desses modelos são apresentados na próxima subseção.

2.3.2 Modelos de Base Elástica com Dois Parâmetros

Como exemplo de bases elásticas de dois parâmetros, têm-se os modelos de Filonenko-Borodich (1940), Pasternak (1954), Kerr (1965), entre outros. Serão apresentados nesta subseção os dois primeiros modelos citados e alguns trabalhos publicados que utilizaram modelos com dois parâmetros em suas modelagens.

Para o modelo de Filonenko-Borodich (1940) e como descrito em Silva (1998), na tentativa de promover a interação entre as molas, é assumido que as mesmas são conectadas a uma membrana elástica sujeita a uma tração T constante (Figura 2.3(a)). Esse modelo é representado matematicamente pela seguinte equação:

$$r_b = Kw_b - T\nabla^2 w_b \quad (2.3)$$

sendo r_b , w_b e K já definidos anteriormente, T é a intensidade da tração por unidade de comprimento na membrana elástica e ∇^2 o operador de Laplace.

No modelo de Pasternak (1954), apresentado na Figura 2.3(b), a membrana elástica do modelo de Filonenko-Borodich é substituída por uma camada incompressível que resiste unicamente às deformações cisalhantes (Silva, 1998). A representação matemática do modelo é dada por:

$$r_b = Kw_b - G\nabla^2 w_b \quad (2.4)$$

com G representando o parâmetro de rigidez por unidade de comprimento, relativo ao cisalhamento da camada incompressível.

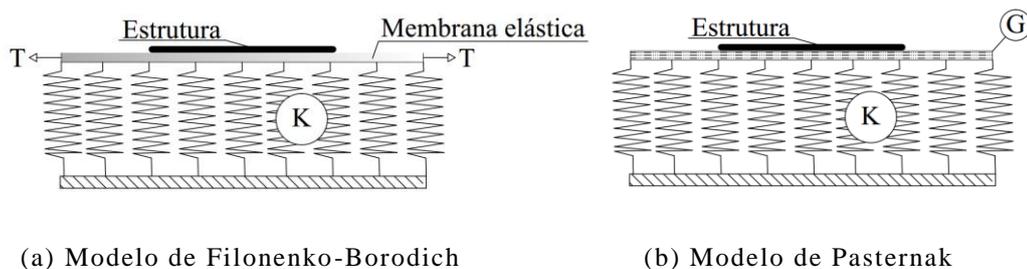


Figura 2.3 Modelos de base elástica com dois parâmetros

Existem diversos artigos publicados envolvendo a aplicação de bases elásticas de dois parâmetros, dentre eles vale citar: Zhaoua e Cook (1983), Alijanabi *et al.* (1990), Celep *et al.* (2011) e, mais recentemente, Limkatanyu *et al.* (2014).

2.3.3 Outros Modelos de Base

Os modelos com três ou mais parâmetros acrescentam a possibilidade de comportamentos diferenciados entre as camadas de solo superficiais e mais profundas, agindo como se mais de um modelo de um ou dois parâmetros fosse colocado de maneira sobreposta (Machado, 2013).

Modelos elastoplásticos foram desenvolvidos para adicionar a capacidade de plastificação do solo. A Figura 2.4 traz um esquema de representação do modelo elástico perfeitamente plástico. Liang *et al.* (2015), por exemplo, estudou o comportamento de pilares carregados lateralmente em base elastoplástica. Alsaleh e Shahrour (2009) analisaram a resposta de estacas sob sismos avaliando a influência da plasticidade do solo. Eles compararam os resultados obtidos com estudos que seguiam a abordagem clássica, de se considerar a base como elástica.

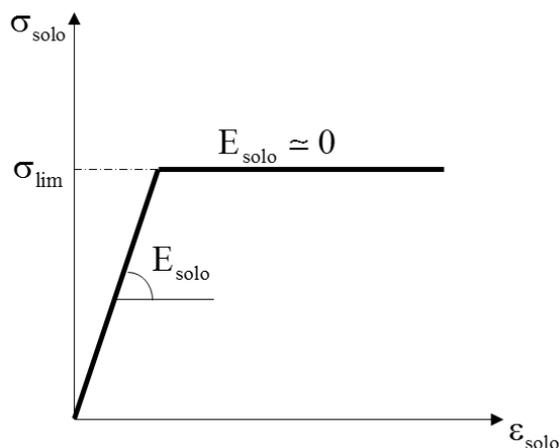


Figura 2.4 Representação do modelo elástico perfeitamente plástico do solo
(Machado, 2013)

Na tentativa de representar as propriedades reológicas do solo, foram desenvolvidos modelos mecânicos a partir da combinação de elementos elásticos, plásticos e viscosos, apresentando-se na literatura como modelos viscoelásticos. Oskar (2010) é um exemplo de estudo que considerou esse tipo de base na análise de vigas.

Mesmo não sendo tão populares quanto os modelos já citados, muito devido a sua complexidade e maior dificuldade de implementação, existem diversos trabalhos que se concentraram em modelos não lineares de solos no que diz respeito à sua rigidez e na sua relação tensão-deformação. Por exemplo, Muradova e Staveoulakis (2012) apresentaram um modelo de base elástica em que a rigidez é uma função do deslocamento dessa base, adicionando termos não lineares ao modelo de Winkler. Além disso, eles consideraram conjuntamente a esse modelo não linear de base, o modelo de Pasternak apresentado na seção anterior. Já Naggar e Novak (1995), apresentaram um modelo de base elástica não linear em que a sua rigidez é uma função dependente do seu deslocamento, do coeficiente de poisson e do módulo cisalhante, sendo esse módulo variável de acordo com o nível de tensão no solo. Estudos mais antigos como os realizados por Kondner (1963) e Duncan e Chang (1970) apresentaram relações hiperbólicas para a tensão-deformação dos solos.

Apesar da capacidade de maior aproximação do comportamento real do solo, esses modelos apresentam problemas comuns aos modelos mais simples no que se refere à determinação dos parâmetros constitutivos (Dutta e Roy, 2002; Machado, 2013). Isso faz com que muitos optem pela adoção dos modelos de base elástica de um ou dois parâmetros dependendo, claro, do estudo a ser aplicado.

Com o desenvolvimento das plataformas comerciais baseadas no método dos MEF, a introdução dos diversos tipos de não linearidades, modelos elastoplásticos, modelos elásticos não lineares, entre outros modelos de representação do solo (ou rocha), pode ser feita com maior facilidade. Essas plataformas possuem elementos finitos específicos desenvolvidos para atender a demanda de engenheiros estruturais e geotécnicos de se considerar em seus projetos a interação solo-estrutura. Os problemas de descontinuidade que podem ocorrer entre o solo e a estrutura podem ser sanados, por exemplo, através da implementação de elementos chamados de elementos de interface (Dutta e Roy, 2002).

O programa ANSYS (2009), utilizado no presente trabalho, é um exemplo dessas plataformas. Esse programa é muito utilizado atualmente por diversas empresas de desenvolvimento de projetos. A partir de ensaios mecânicos e do detalhamento e descrição de todas as propriedades do solo a ser analisado, escolhe-se a melhor abordagem numérica para sua representação e, assim, pode-se obter respostas mais confiáveis na solução do problema de interação entre solo e estrutura.

Nesta dissertação utilizou-se o modelo bidimensional mais simples de bases elásticas encontrados no ANSYS, seguindo as hipóteses de Winkler, como apresentado na Subseção 2.3.1 e no Anexo A. Atenção especial foi dada a análise geométrica não linear da estabilidade de alguns tipos de estruturas em contato com essas bases (Capítulo 4). A escolha dos parâmetros usados na modelagem da base elástica baseou-se em estudos anteriores encontrados na literatura.

2.4 Metodologias Numéricas para Solução do Problema de Contato

Na interação solo-estrutura existem diversos estudos cujo foco principal é o desenvolvimento da formulação numérica do problema. Serão apresentados aqui alguns desses estudos, onde serão destacadas publicações clássicas que apresentam desenvolvimentos analíticos e métodos numéricos, e também estudos realizados mais recentemente.

Para a solução de problemas de contato, é evidente a preferência de pesquisadores na utilização do MEF. Entretanto, vários artigos trazem também a aplicação de outros métodos na solução desse tipo de problema. Merecem destaque: o MEC, MDF, o Método de Rayleigh-Ritz, o Método de Galerkin, a combinação entre métodos diferentes, entre outros.

Hetenyi (1946) e Kerr (1964) são trabalhos clássicos que fornecem desenvolvimentos analíticos para a resolução de problemas de contato envolvendo vigas e colunas. Em Hetenyi

(1946), o modelo de base utilizado é o de Winkler, enquanto em Kerr (1964) o estudo é ampliado para outros tipos de bases elásticas, como Pasternak, Filonenko-Borodich e Reissner.

Os livros de Brush e Almroth (1975) e Simitzes e Hodges (2006) trazem as soluções analíticas do problema de colunas com imperfeições geométricas iniciais senoidais em contato com a base de Winkler, fornecendo a expressão da carga crítica dessas colunas em função do número de semi-ondas e do parâmetro de rigidez adimensional da base elástica. Alguns dos exemplos numéricos realizados por esses autores estão reproduzidos no Capítulo 4 do presente trabalho.

Bottega (1989) apresentou a solução analítica que descreve o comportamento de um anel dentro de uma cavidade que pode se contrair, verificando o efeito dessa contração em relação a carga de colapso da estrutura. Chai (1998) fez um estudo experimental-analítico em que se observa a deformação pós-crítica de colunas em contato bilateral com o meio elástico. Tzaros e Mistakidis (2011), considerando as restrições unilaterais de contato, desenvolveram um método analítico para solução de problemas de estabilidade de barras com imperfeições geométricas iniciais.

Os estudos realizados por Gunawan *et al.* (2005), Morfidis e Avramadis (2002), Mullapudi e Ayoub (2009), Naidu e Rao (1994), Nguyen e Duhamel (2008), Shoaie *et al.* (2014) e Ozdemir (2012), além de outros trabalhos já citados neste capítulo, utilizaram o MEF para a solução do problema de contato.

Morfidis e Avramadis (2002) desenvolveram um elemento de viga para ser utilizado na análise de estruturas mistas de concreto em contato com base elástica de um ou dois parâmetros. Gunawan *et al.* (2005) trazem a análise de cascas cilíndricas parcialmente enterradas no solo. Mullapudi e Ayoub (2009) desenvolveram um elemento finito inelástico para a análise de vigas em contato com base elástica de dois parâmetros. Naidu e Rao (1994) apresentaram formulações para o estudo de colunas em base elástica também de dois parâmetros. Nguyen e Duhamel (2008) fizeram a análise de vigas infinitas em contato com base de Winkler sujeitos a cargas harmônicas em movimento. Já Shoaie *et al.* (2014) desenvolveram um elemento de interface para a aplicação em problemas de contato. Ozdemir (2012) formulou um elemento finito de ordem superior a partir da teoria de placas de Mindlin para solução de problemas de placas em contato com a base de Winkler.

A partir da utilização do MEC para a solução de problemas de contato, os trabalhos de Ai e Han (2009) e Sapountzakis e Kampitsis (2011) são referências relevantes. O primeiro, traz a solução de pilares carregados axialmente em contato com uma base elástica

de várias camadas, cada uma com um valor de rigidez diferente. O segundo, faz a análise de vigas com carregamentos dinâmicos em contato unilateral com uma base viscoelástica de três parâmetros.

O trabalho já citado de Machado (2013) fornece várias referências sobre a utilização do MDF na solução do problema de interação entre solo e estrutura. Dentre os trabalhos mencionados por ele, vale aqui destacar: Mickens (2005), Ibanesco *et al.* (2009) e Nakagawa e Jiang (2003). Mickens (2005) utilizou o MDF na discretização do problema linear de placas apoiadas em base elástica. Ibanesco *et al.* (2009) analisaram placas apoiadas em estacas e destacaram a facilidade de implementação do MDF na solução de problemas de contato dessa natureza. E Nakagawa e Jiang (2003) estudaram problemas tempo-dependentes de paredes em contato com rochas moles.

Também destacado em Machado (2013), os trabalhos de Mittelbach (2002; 2007) e Vieira (2007) utilizaram o método combinado MEF e MDF, chamado de Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE) na avaliação do comportamento de silos. Ainda sobre métodos combinados para a solução de problemas de contato, tem-se em Matos Filho *et al.* (2005) a apresentação de um modelo numérico acoplando o MEF e o MEC para a análise da interação entre estaca e solo sujeitos a carregamentos horizontais e verticais.

Outra metodologia numérica observada em algumas publicações é o Método de Galerkin. Güler (2004), por exemplo, utilizou esse método para o estudo de placas circulares apoiadas em base elástica de Winkler e de Pasternak considerando as restrições unilaterais de contato. Celep *et al.* (2011) investigaram as respostas estáticas e dinâmicas de vigas considerando-se também as restrições unilaterais de contato com base elástica de Pasternak. O estudo realizado recentemente por Li e Zhao (2015) traz vigas mistas e anisotrópicas com possibilidade de deformação por cisalhamento sujeitas a vários tipos de carregamentos em contato com base elástica de dois parâmetros; essas vigas são avaliadas a partir de uma técnica de perturbação em duas etapas, acoplada ao método de Galerkin.

O artigo de Silveira *et al.* (2008a), citado na Seção 2.2, apresenta o método de Rayleigh-Ritz para a redução espacial e o método de Newton-Raphson para a solução das equações não lineares envolvidas nos problemas de contato. O uso do método de Rayleigh-Ritz é também identificado nos trabalhos de Shen (2009; 2012) e Guenfoud (2010). O último citado utilizou o método para a solução de problemas envolvendo placas em contato com o meio elástico. Os trabalhos de Shen (2009; 2012) analisaram o comportamento pós-crítico de cascas cilíndricas envoltas pelo meio elástico do tipo Pasternak.

Foram ainda observadas algumas publicações que utilizam métodos alternativos aos já mencionados para a solução do problema de contato. O trabalho já citado de Liang *et al.* (2015) apresentou uma alternativa de solução, baseada em uma abordagem variacional, na captura do comportamento de pilares carregados lateralmente em base elastoplástica. Borchani *et al.* (2015), a partir de método energético, estudam o comportamento dinâmico pós-crítico de barras biapoiadas em contato com base elástica. Utilizando o princípio da superposição dos efeitos e a integral de Fourier, Yu *et al.* (2012) estudaram as possíveis perturbações que podem ocorrer em tubulações enterradas devido a escavações de túneis em áreas próximas. Por último, Yang *et al.* (1995) apresentaram uma metodologia numérica simplificada, a partir da técnica de condensação, para a solução do problema de contato solo-estrutura.

2.5 Análises Dinâmicas na Interação Solo-Estrutura

Segundo Kausel (2010), a teoria da dinâmica envolvendo problemas de contato entre solo (ou rocha) e estruturas iniciou-se com o trabalho de Reissner (1936), que explora o comportamento de discos circulares em meio elástico sujeitos a carregamentos verticais tempo-harmônicos. A partir da década de 1960, com a chegada dos computadores aliados aos métodos numéricos mais versáteis, como o MEF, houve um grande avanço nesses estudos, que deixaram de ser tão teóricos e baseados em métodos puramente analíticos.

Apesar de não ser objeto de estudo desta dissertação, a análise dinâmica, dentro da área de pesquisa de interação solo-estrutura, é tratada com certo destaque nesta seção devido a sua enorme abrangência e aplicação em diferentes seguimentos, tais como: a engenharia *offshore*, que trata, entre outras coisas, da prospecção e exploração de petróleo no mar (Neto, 2013); a engenharia de minas, que trata do desmonte de rochas com uso de explosivos; a engenharia nuclear; a engenharia sísmica; análises de fundações de máquinas; predições das vibrações induzidas pelos meios de transportes e assim por diante. Serão citados a seguir alguns trabalhos publicados que exemplificam as diferentes aplicações práticas do tema:

- Birk e Behnke (2011) realizaram uma análise elastodinâmica de problemas de contato através de uma combinação entre o MEF e MEC. Apresentaram exemplos numéricos de estruturas de fundação circulares, como estacas, enterradas em solo homogêneo estratificados, no domínio da frequência;

- Clouteau *et al.* (2013) revisitaram os métodos numéricos e teóricos desenvolvidos nas últimas décadas sobre a interação dinâmica entre estruturas e o meio;
- Hammoud *et al.* (2010) apresentaram um método de acoplamento entre modelos discretos e contínuos para análises estáticas e dinâmicas considerando a interação solo-estrutura. Como exemplo de aplicação do método, foram obtidas respostas nas análises de problemas de trens de alta velocidade sobre trilhos;
- Maheshwari e Truman (2004) estudaram, a partir do MEF, o problema da interação entre solo, infraestrutura e superestrutura dividindo o problema em dois subsistemas: o primeiro deles, considerando a superestrutura; e o segundo, o solo e a infraestrutura. A resposta sísmica do sistema foi obtida por sucessivos esquemas incrementais e o solo foi considerado como não linear a partir de um avançado modelo plástico. O estudo foi usado em projetos de usinas nucleares complexos, onde uma análise rigorosa do conjunto se faz necessária devido ao alto grau de segurança exigido. Em relação a infraestrutura, foram analisados os casos de pilares isolados e em conjunto;
- Messast *et al.* (2006) desenvolveram um método discreto semi-analítico para a análise estática e dinâmica de estacas enterradas em solo viscoelástico sujeitas a carregamentos verticais. A estrutura foi considerada nesse trabalho como linear e elástica;
- Patil (2013) apresentou uma solução aprimorada, via MEF, para a análise dinâmica de pavimentos rígidos sujeitos a cargas em movimento (veículos). Nesse trabalho, a interação entre o veículo e pavimento foi incorporada na análise e para a modelagem do solo foram consideradas as hipóteses de Pasternak;
- Sáez *et al.* (2011) estudaram a influência da inelasticidade ao avaliar a vulnerabilidade sísmica de edifícios;
- Medina *et al.* (2015) apresentaram um procedimento para se estudar a influência do uso de colunas inclinadas na infraestrutura diante da resposta sísmica da superestrutura;
- Do *et al.* (2015) realizaram uma análise numérica bidimensional, via MEF, de revestimentos segmentados de túneis sujeitos a carregamentos sísmicos. Foi avaliada a influência das junções dos segmentos. A partir dos resultados obtidos, os autores mostraram que túneis construídos a partir de anéis segmentados podem ter um melhor desempenho que aqueles construídos a partir de um revestimento contínuo.

Foi destacado também a importância de se considerar as propriedades do solo que envolve o túnel de maneira correta e que seus efeitos em relação à estrutura não podem ser negligenciados.

2.6 Problemas de Contato via ANSYS

No presente trabalho, como já mencionado, utilizou-se o software ANSYS para a análise de problemas de contato solo-estrutura, em que se considera a não linearidade geométrica das estruturas e a modelagem do solo seguindo as hipóteses de Winkler. Nesta seção são apresentados alguns estudos que também utilizaram essa ferramenta computacional para conduzir pesquisas que envolvem a interação solo-estrutura. Evidencia-se aqui a grande aplicação do programa para a solução de problemas com diferentes níveis de complexidade.

- Bargi *et al.* (2011) realizaram um estudo sobre plataformas *offshore* em áreas sísmicas considerando os efeitos dinâmicos não lineares na interação solo-estrutura. Nesse estudo foi realizada uma análise tridimensional de uma plataforma fixa do tipo jaqueta instalada no Golfo Pérsico sujeita, simultaneamente, a carregamentos oriundos das movimentações do mar e de sismos;
- Sánchez *et al.* (2012) apresentaram um estudo da resposta não linear de estruturas de viadutos. O solo foi modelado a partir de estudo geotécnico realizado em solo mole localizado no Vale do México. Levou-se em consideração a resposta sísmica da estrutura considerando também as não linearidades físicas e geométricas e os efeitos da interação com o solo, com a possibilidade da perda de contato entre os corpos;
- Kalavathi e Muralidhar (2015) realizaram uma análise linear de colunas carregadas lateralmente em contato parcial com o solo. Nessa pesquisa foram utilizados os mesmos elementos finitos que foram aplicados nesta dissertação ao se considerar as restrições bilaterais de contato: elemento *BEAM3* para a modelagem da estrutura e elemento *COMBIN14* para a modelagem do meio elástico. Os resultados obtidos foram comparados com análises teóricas. É destacado pelos autores a simplicidade de aplicação do estudo em problemas estáticos;
- Máleková (2012) analisou alguns elementos finitos presentes na biblioteca de elementos do ANSYS, chamados de elementos de contato, utilizados para promover a interação entre a estrutura e o meio. Os elementos analisados pelo autor foram: *CONTAC52*, *CONTA173* e *TARGE170* (os dois últimos, utilizados de maneira

conjunta). A partir da análise de sapatas de concreto em contato com o solo, o autor analisou as vantagens e desvantagens de se utilizar esses elementos em análises tridimensionais. O meio elástico foi modelado de acordo com as hipóteses de Winkler e de Pasternak.

Capítulo 3

Formulação Geral do Problema de Contato e Modelagem Numérica Adotada

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta inicialmente a formulação geral do problema de contato solo-estrutura de interesse e a metodologia numérica usada, via *software* ANSYS (2009), na sua solução. Na modelagem da estrutura considera-se a possibilidade de grandes deslocamentos e rotações, mas com pequenas deformações (não linearidade geométrica). Já para o solo, como já informado, considera-se na sua modelagem a base elástica do tipo Winkler. Como já também mencionado, o contato entre estrutura e base elástica poderá ser bilateral ou unilateral.

Na próxima seção estão os conceitos relacionados com as restrições bilaterais e unilaterais de contato. Os elementos finitos utilizados, presente na biblioteca de elementos do ANSYS, são apresentados na Seção 3.3. As equações básicas que regem o problema estão na Seção 3.4. Por fim, na Seção 3.5 é apresentada a metodologia numérica utilizada na solução não linear do problema de contato, onde são mostrados a estratégia de incremento de carga e iteração adotadas.

3.2 Formas de Contato: Bilateral e Unilateral

Neste trabalho, o contato entre a estrutura e o meio (solo/rocha) pode ser considerado de duas formas: estrutura-meio completamente fixos, caracterizando o contato bilateral;

estrutura-meio livres, com possibilidade de acontecer a separação entre os corpos, caracterizando assim o contato unilateral. O material constituinte tanto do meio quanto da estrutura é considerado elástico, homogêneo e isotrópico.

Em problemas práticos da engenharia civil, ambas as formas de contato solo-estrutura podem acontecer dependendo das condições de contorno e de carregamento do sistema de suporte. Por exemplo, no caso de arcos estruturais usados na estabilização de túneis (Figura 3.1(a)), dependendo do carregamento aplicado e se a estrutura não estiver suficientemente presa ao meio, poderá acontecer a separação entre os corpos. Nesse caso, a modelagem do problema deve incluir a possibilidade de descolamento entre estrutura-meio, ou seja, as restrições unilaterais de contato devem ser consideradas. Já no caso dos pilares-estaca (elementos de fundação profunda; Figura 3.1(b)) totalmente enterrados no solo, ao serem solicitados, podem não perder contato com o meio, e assim a modelagem desse sistema de suporte deve ser feita considerando as restrições bilaterais de contato.

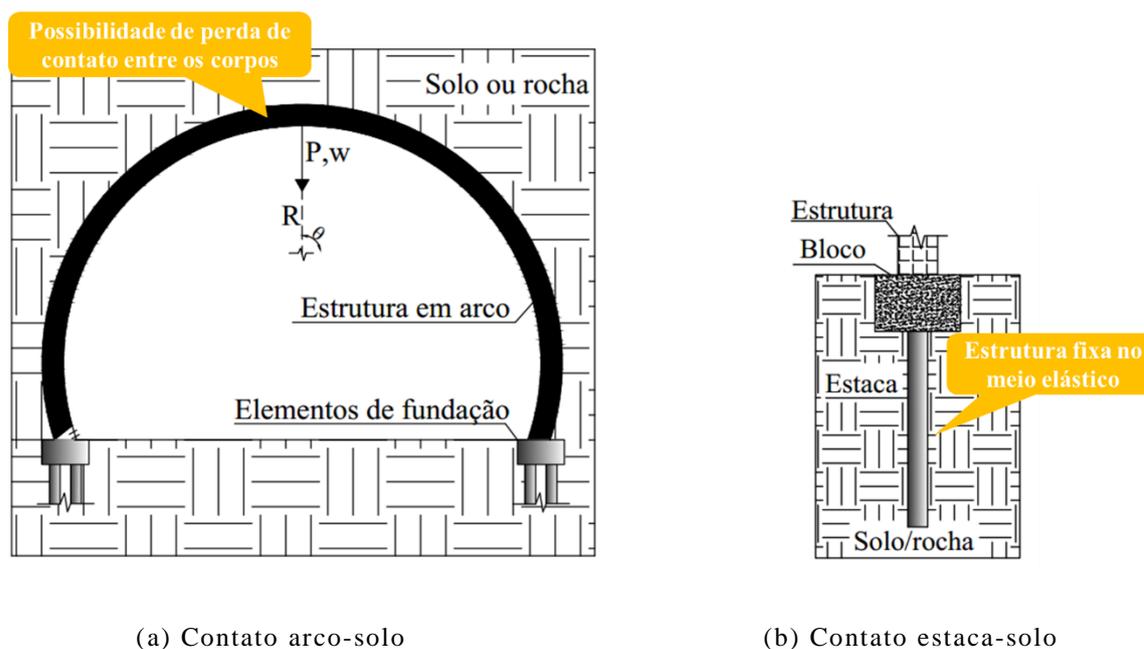


Figura 3.1 Possibilidades de contato estrutura-meio

A Figura 3.2 apresenta, de forma genérica, parte de uma estrutura em contato com o meio, no caso, representado por uma base elástica. Quando as restrições bilaterais de contato são consideradas (Figura 3.2(a)), como a base e a estrutura estão fixas, surgirão zonas de compressão e de tração na base. Nessa situação, a região de contato entre os corpos será

sempre conhecida. Agora, quando as restrições unilaterais de contato são incluídas na modelagem, zonas de descolamento entre estrutura e base poderão aparecer, como ilustrado na Figura 3.2(b), e não se conhece a priori a região de contato entre os corpos.

Resumindo, no caso do problema de contato bilateral, a não linearidade advém apenas da possibilidade de grandes deslocamentos e rotações na estrutura. Entretanto, no caso do problema de contato unilateral, existe adicionalmente a não linearidade associada às condições de contorno. Na próxima seção serão apresentadas as equações básicas que regem ambos os problemas de contato.

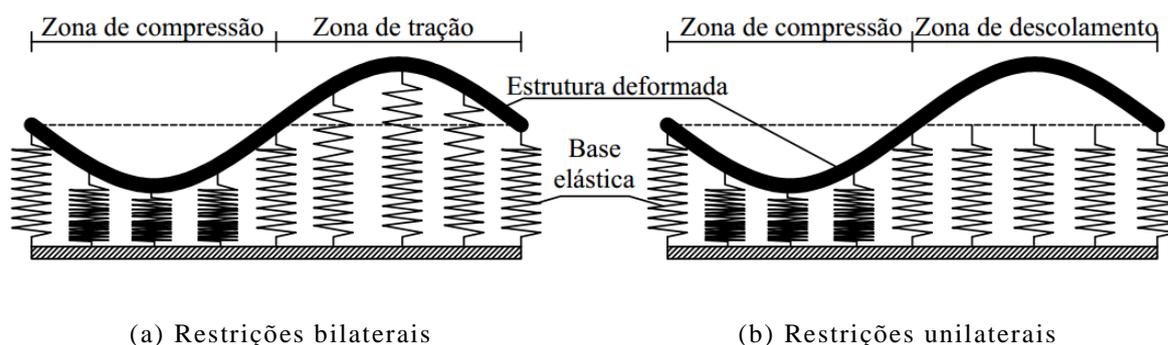


Figura 3.2 Tipos de restrições de contato (Machado, 2013)

3.3 Elementos Finitos Utilizados

Assim como feito por Abreu (2016), para a modelagem de problemas bidimensionais (2D), através do ANSYS, envolvendo contato com base elástica, trabalhou-se com três tipos de elementos, que são eles: *BEAM3*, *COMBIN14* e *LINK10*.

Para a modelagem da estrutura, nos casos de problemas de contato bilateral e unilateral, o elemento *BEAM3* foi escolhido. Para a simulação do modelo de molas discretas (base elástica) no caso do contato bilateral, utilizou-se o elemento *COMBIN14*. Já no caso do contato unilateral, a base elástica foi simulada pelo elemento *LINK10*. A seguir estão as descrições desses três elementos.

BEAM3: elemento uniaxial com capacidade de compressão, tração e flexão. Possui três graus de liberdade por nó: translação em x e y e rotação em z. O elemento é definido por dois nós, área da seção transversal (A), momento de inércia (I) e propriedades dos materiais: módulo de elasticidade (E) e coeficiente de poisson (ν). As informações sobre a altura da seção transversal, deformação inicial, massa adicional e deflexão por cisalhamento podem

ser utilizadas de acordo com o problema a ser estudado. O carregamento pode ser concentrado nos nós, distribuído pelo elemento e originado por efeitos de temperatura. Esse elemento permite a análise considerando grandes deslocamentos e tensões residuais. Na Figura 3.3 segue a representação esquemática da geometria do elemento *BEAM3*, localização de seus nós (i,j) e do sistema de coordenadas. A matriz de rigidez local (\mathbf{K}^e_L) do elemento é apresentada na Equação (3.1). O coeficiente Φ é determinado na Equação (3.2), sendo G e A^s , respectivamente, o módulo de cisalhamento e a área de cisalhamento.

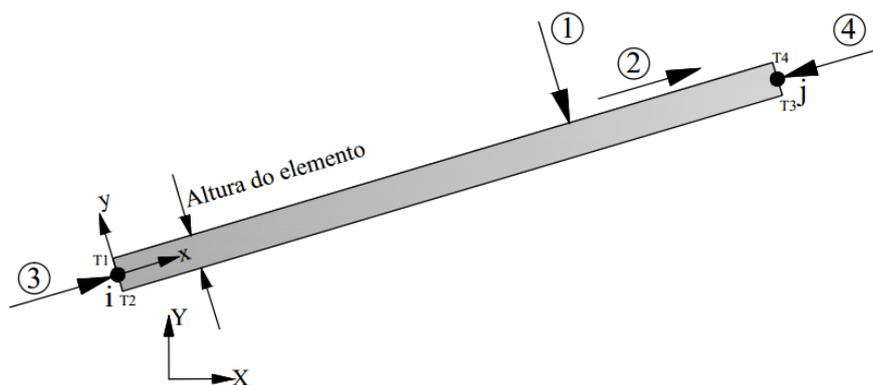


Figura 3.3 Elemento *BEAM3* (ANSYS, 2009)

$$\mathbf{K}^e_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\phi = \frac{12EI}{GA^sL^2} \quad (3.2)$$

COMBIN14: elemento com sistema mola-amortecedor uniaxial. Possui capacidade longitudinal ou torcional em problemas unidimensionais (1D), bidimensionais (2D) e

tridimensionais (3D). A opção longitudinal, utilizada no presente trabalho, fornece capacidade de tração-compressão com três graus de liberdade por nó: translação em x, y e z. Torção e flexão não são considerados. A opção torcional do sistema mola-amortecedor é puramente rotacional: rotação em x, y, e z. O elemento não possui massa e é definido por dois nós, rigidez da mola (K_{ANSYS}) e coeficiente de amortecedor (C_v). A capacidade de mola ou de amortecedor pode ser removida. Os dados de entrada são: as coordenadas dos dois nós (i,j), a rigidez da mola expressa em unidades de [força/comprimento] e o coeficiente de amortecimento expressos em [(força x tempo)/comprimento]. Nas modelagens realizadas desprezou-se o efeito do amortecedor, portanto, $C_v = 0$. Este elemento foi utilizado para simular as molas discretas dos problemas de contato bilateral (a base elástica responde às solicitações de tração e compressão). A Figura 3.4 apresenta a geometria do elemento *COMBIN14*, localização de seus nós (i,j) e do sistema de coordenadas. A matriz de rigidez local (\mathbf{K}_L^e) do elemento, desconsiderando o efeito amortecedor, é determinada através da Equação (3.3).

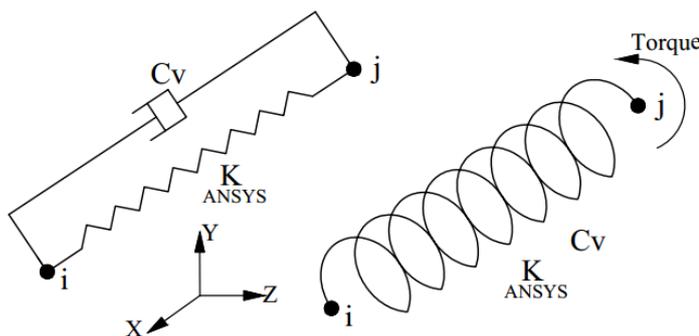


Figura 3.4 Elemento *COMBIN14* (ANSYS, 2009)

$$\mathbf{K}_L^e = \mathbf{K}_{ANSYS} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

LINK10: elemento que possui duas opções: somente tração ou somente compressão. Na opção de somente tração, a rigidez do elemento é nula em caso de compressão; para somente compressão, a rigidez do elemento se anula em caso de tração. O *LINK10* possui

três graus de liberdade por nó: translação nas direções x , y e z , e é definido por dois nós, área da seção transversal (A_{ANSYS}), coordenadas dos nós, módulo de elasticidade (E_{LINK10}) do material e comprimento do elemento (L_{LINK10}). São permitidas as análises não lineares, como a opção de grandes deslocamentos. Esse elemento foi utilizado para a modelagem de problemas unilaterais ativando a opção de somente compressão. A matriz de rigidez local do elemento (\mathbf{K}_L^e) é mostrada na Equação (3.4). Para o caso de somente compressão, quando o elemento é tracionado $C_1 = 0$, se o elemento é comprimido $C_1 = 1$. Essa característica faz com que sua matriz de rigidez seja definida como bilinear. A geometria do elemento, localização de seus nós (i , j) e seu sistema de coordenadas são apresentados na Figura 3.5.

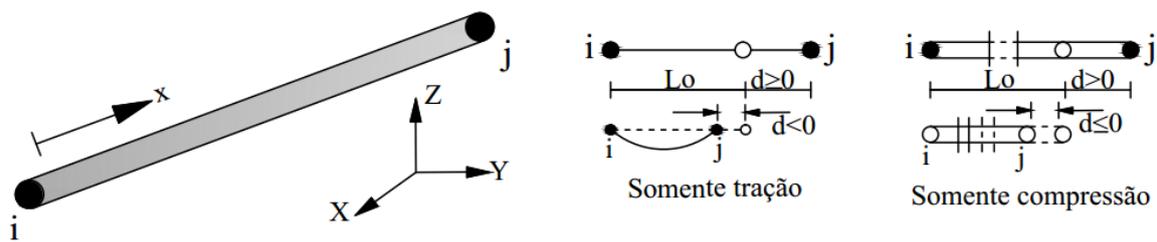


Figura 3.5 Elemento *LINK10* (ANSYS, 2009)

$$\mathbf{K}_L^e = \frac{A_{ANSYS} E_{LINK10}}{L_{LINK10}} \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

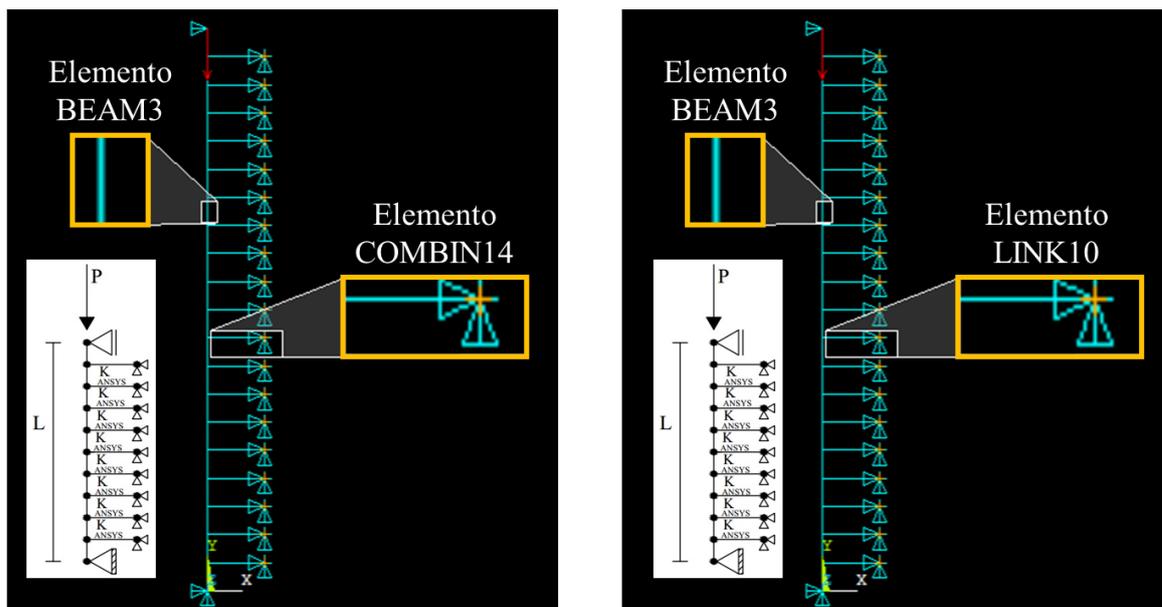
Como apresentada na Equação (3.4), a rigidez do elemento é dada pelos termos A_{ANSYS} , E_{LINK10} e L_{LINK10} . Ao comparar essa equação com a Equação (3.3), para compatibilização das rigidezes das molas discretas do contato bilateral e unilateral, escreve-se:

$$\mathbf{K}_{ANSYS} = \frac{A_{ANSYS} E_{LINK10}}{L_{LINK10}} \quad (3.5)$$

com A_{ANSYS} sendo o dado de entrada do elemento *LINK10* e deve ser, portanto, calculado como:

$$A_{ANSYS} = \frac{K_{ANSYS} L_{LINK10}}{E_{LINK10}} \quad (3.6)$$

A Figura 3.6 apresenta a modelagem de uma coluna no ANSYS para o caso de contato bilateral e unilateral. Nessa figura são especificados os elementos utilizados para representação da estrutura e da base elástica, além da representação das restrições de apoio e do carregamento aplicado.



(a) Problema de contato bilateral

(b) Problema de contato unilateral

Figura 3.6 Modelagem de coluna em contato com base elástica

3.4 Formulação Geral do Problema de Contato

Para apresentar a formulação geral do problema de contato, é apresentado na figura 3.7 a modelagem de um arco em contato unilateral com uma base elástica. Através da Figura 3.7(a) é possível observar a configuração indeformada do sistema de suporte estrutura-base, com sua discretização através do MEF, onde o solo é representado por molas discretas.

Como adotado por Silveira (1995), Galvão (2000), Silva (2009) e Maciel (2012), na estratégia de solução não linear do problema, considera-se aqui o referencial Lagrangiano atualizado. Nesse referencial, as variáveis do sistema são conhecidas nas configurações de equilíbrio $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$, e se deseja obter a solução em $t+\Delta t$. Isso quer dizer que a

configuração de referência para se obter a nova configuração de equilíbrio (configuração $t+\Delta t$; Figura 3.7(c)), é aquela anterior a ela (configuração t ; Figura 3.7(b)).

O carregamento aplicado no arco é representado genericamente por λF , sendo λ o parâmetro que controla a intensidade da carga aplicada. Sendo assim, ${}^0\lambda$, ${}^t\lambda$ e ${}^{t+\Delta t}\lambda$ representam a intensidade de F nas configurações de equilíbrio 0 , t e $t+\Delta t$, respectivamente.

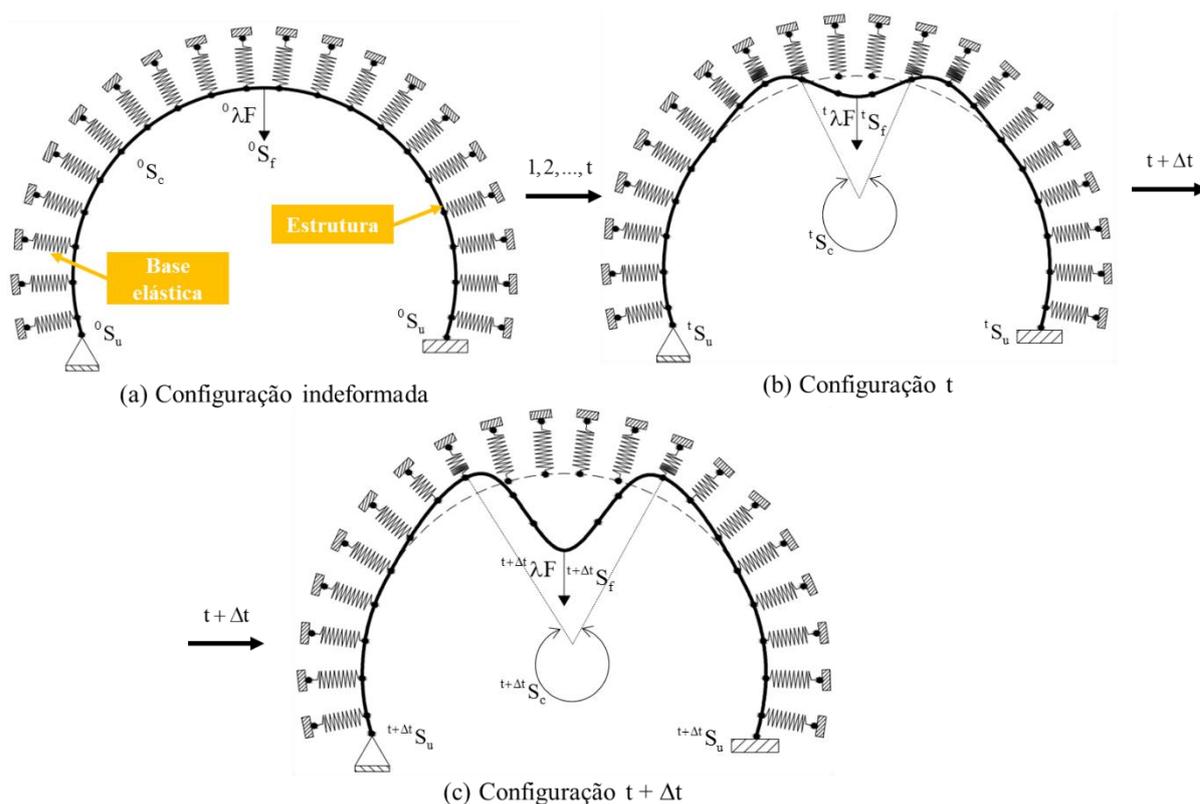


Figura 3.7 Modelo numérico via MEF e configurações de equilíbrio do problema

A estrutura e a base são representadas por corpos sólidos, elásticos e contínuos em cada configuração de equilíbrio i , ocupando um domínio iV ($i = 0, t, t+\Delta t$; Figura 3.7), cujo contorno iS é suposto regular e formado por três partes distintas: iS_u , iS_f e iS_c . Em S_u , os deslocamentos são conhecidos e S_f é a parte do contorno onde as forças de superfície são prescritas. A parte do contorno denominada S_c define a região de contato entre os corpos. Quando são consideradas as restrições bilaterais de contato, S_c é conhecida; entretanto, no contato unilateral, S_c é aquela região em que as condições de contorno podem ser “ambíguas”, isto é, os pontos de S_c de um dado corpo, após a aplicação do carregamento, podem entrar ou não em contato, permanecer em contato ou separar-se do outro corpo (Silveira, 1995).

Em análises que envolvem grandes deslocamentos e rotações com pequenas deformações, para se obter uma solução eficaz do problema não linear, a partir de uma estratégia incremental, é preciso adotar tensores de tensão e de deformação adequados. Esses medidores de tensão e de deformação devem ser simétricos, suas componentes não devem se alterar quando o corpo sofre deslocamento ou rotação de corpo rígido, e devem ser conjugados energeticamente (Bathe, 1983). Portanto, para a formulação geometricamente não linear, são adotados aqui o tensor de tensão Piola-Kirchhoff II e o tensor de deformação de Green-Lagrange. Assim, para o sistema estrutural em estudo, as equações de equilíbrio, as relações cinemáticas e as relações constitutivas são, respectivamente (Silveira, 1995; Maciel, 2012):

$$\Delta S_{ij,j} + \left(\Delta u_{i,j} \text{}^{t+\Delta t} S_{jk,i} \right)_{,k} = 0 \quad (3.7)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} \quad (3.8)$$

$$\Delta S_{ij} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (3.9)$$

em que Δu_i são os incrementos de deslocamento e ΔS_{ij} são as componentes incrementais do tensor de Piola-Kirchhoff II, incógnitas do problema; $\text{}^{t+\Delta t} S_{jk}$ são as componentes cartesianas do mesmo tensor para a configuração $t+\Delta t$; $\Delta \varepsilon_{ij}$ representa o tensor incremento de deformação de Green-Lagrange, Δe_{ij} caracteriza as componentes do tensor infinitesimal, ou seja:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \quad (3.10)$$

e $\Delta \eta_{ij}$ as componentes de deformação não lineares, que são dadas por:

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}) \quad (3.11)$$

Na equação (3.9) C_{ijkl} fornece as propriedades dos materiais da estrutura. A reação da base pode ser descrita genericamente através da equação abaixo:

$$\Delta r_{bi} = C_b \Delta u_{bi} \quad (3.12)$$

em que Δr_{bi} e Δu_{bi} são, respectivamente, os incrementos da reação e do deslocamento da base elástica e C_b é o seu parâmetro de rigidez.

As seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas em S_u e S_f :

$$\Delta u_i = \Delta \bar{u} \text{ em } S_u \quad (3.13)$$

$$F_i = {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} {}^{t+\Delta t} n_j \text{ em } S_f \quad (3.14)$$

A Equação (3.13) representa a condições de contorno essenciais do problema, com $\Delta \bar{u}$ sendo um valor prescrito em S_u . Já a Equação (3.14) fornece o equilíbrio de forças que deve existir no contorno de S_f e n_j é a normal.

No caso de contato bilateral entre os corpos, a condição de contorno na região de contato S_c deve ser:

$$\varphi = \Delta u_i - \Delta u_{bi} = 0 \quad \therefore \quad \Delta u_i = \Delta u_{bi} \text{ em } S_c \quad (3.15)$$

que significa que a distância entre os dois corpos em S_c , representada por φ , é nula. Isso significa que o deslocamento da estrutura e da base elástica são iguais na região de contato.

No caso de contato unilateral, a condição de compatibilidade em S_c , descrita em termos da distância φ entre estrutura e base elástica, é dada pela inequação:

$$\varphi = \Delta u_i - \Delta u_{bi} \geq 0 \quad (3.16)$$

que expressa fisicamente a condição de impenetrabilidade entre os corpos. Assim, para um ponto genérico em S_c , no caso de contato unilateral, podem ser observadas uma das seguintes situações:

- Caso ocorra o contato entre estrutura e base elástica:

$$\varphi = 0 \text{ e } \Delta r_{bi} \geq 0 \quad (3.17)$$

- Caso ocorra separação entre estrutura e base elástica:

$$\varphi > 0 \text{ e } \Delta r_{bi} = 0 \quad (3.18)$$

Assim, no caso de contato entre os corpos, a distância de separação entre eles é, portanto, nula e a base elástica terá reação; caso os corpos se separem, existirá uma distância entre eles e a reação da base elástica será nula.

A partir dessas considerações, conclui-se que as condições que definem de forma completa a situação de contato unilateral entre os corpos são dadas pela Inequação (3.16), pela inequação:

$$\Delta r_{bi} \geq 0 \quad (3.19)$$

e, através da relação de complementaridade entre φ e Δr_{bi} , ou seja,

$$\int_{S_c} \Delta r_{bi} \varphi dS_c = 0 \quad (3.20)$$

A solução do problema de contato considerando o contato unilateral entre os corpos pode ser obtida através da Equação (3.7), com o auxílio das Equações (3.8) e (3.9), respeitando-se as condições de contorno dadas pelas Equações (3.13) e (3.14), e Inequações (3.16) e (3.19), e ainda se respeitando a condição de complementaridade (3.20). Entretanto, a não linearidade geométrica, presente na Equação (3.8) e a não linearidade decorrente das restrições unilaterais, tornam a solução direta ou analítica desse problema uma tarefa bastante árdua.

Silveira (1995) demonstrou que o problema de minimização equivalente:

$$\text{Min } \Pi \quad (3.21)$$

$$\text{Sujeito a: } \varphi \geq 0, \text{ em } S_c \quad (3.22)$$

poderia ser empregado como ponto de partida de uma análise numérica via MEF. Em (3.21), Π é a energia potencial do sistema em estudo, que pode ser definida através da expressão:

$$\Pi = U_e + U_b + V_f \quad (3.23)$$

ou,

$$\Pi = \int_{tV} ({}^t\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\Delta S_{ij})\Delta\varepsilon_{ij} {}^t dV + \int_{tS_c} ({}^t r_{bi} + \frac{1}{2}\Delta r_{bi})\Delta u_{bi} {}^t dS_c - \int_{0S_f} F_i \Delta u_i {}^0 dS_f \quad (3.24)$$

Na Equação (3.23), U_e e U_b representam, respectivamente, a energia armazenada na estrutura e base elástica quando elas se movem da configuração de equilíbrio t até $t + \Delta t$. Já V_f é a energia potencial do carregamento externo. A restrição (3.22), como já definido em (3.16), impõe a condição de contato unilateral. Para se considerar as restrições bilaterais de contato, basta substituir a restrição (3.22) pela condição apresentada na Equação (3.15). Na equação anterior, Δu_i é o deslocamento incremental da estrutura; Δu_b é o deslocamento incremental da base elástica; ${}^t\sigma_{ij}$ são as componentes do tensor de Cauchy na configuração de referência t , que são conhecidas; ΔS_{ij} são as componentes do tensor tensão Piola-Kirchhoff II, incógnitas do problema; $\Delta \varepsilon_{ij}$ são as componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange; ${}^t r_b$ e Δr_b definem a reação da base na configuração t e seu incremento, respectivamente; e F_i representam as componentes das forças externas atuantes nas regiões S_f (Maciel, 2012).

3.5 Metodologia de Solução Numérica via ANSYS

Para o problema de contato em estudo, tem-se que, em geral, o primeiro passo para a obtenção da sua solução numérica consiste em reformulá-lo em espaços de aproximação. Para isso recorre-se aqui ao MEF, que é a técnica de discretização usualmente empregada na análise de problemas estruturais complexos, incluindo a classe de problemas tratados nesta dissertação.

Após a discretização do sistema solo-estrutura, a atenção é voltada para a seleção e escolha de metodologias que possibilitem o tratamento, de forma adequada, da restrição unilateral imposta à análise, e que normalmente requerem que o problema tenha dimensão finita. Como apresentado em Silveira (1995), entre as alternativas encontradas na literatura, pode-se destacar:

- a transformação do problema de contato em um problema de minimização sem restrição. Essa transformação depende diretamente da aplicação de métodos como multiplicadores de Lagrange e penalidades. O emprego desses métodos consiste, na maioria dos casos, em introduzir elementos especiais projetados para simular as condições de impenetrabilidade das superfícies;
- a transformação do problema de contato em um problema de minimização com restrição através do emprego de métodos de programação matemática (PM). Essa

alternativa — seguida no âmbito do PROPEC, por exemplo, em Silva (1998) e Machado (2013), e por Silveira (1995) e Holanda (2000) na PUC-Rio — permite obter a solução do problema de contato sem que as restrições unilaterais sejam eliminadas explicitamente da análise, sendo assim mantida a filosofia original do problema; e

- a adaptação de formulações usuais da mecânica estrutural — funcionais diferenciáveis e restrições bilaterais — ao caso do contato envolvendo restrições unilaterais. Os procedimentos resultantes, que são forçosamente de natureza incremental-iterativa, não têm garantias de convergência. Essa classe de procedimentos tem como atrativos: não introduzir conceitos novos; a adaptação de códigos já existentes para análises não-lineares; o tratamento de problema de contato como um tipo particular de problema não-linear; e a economia de tempo computacional se nenhuma mudança na região de contato acontece entre um passo e outro de carga. Como descrito também em Silveira (1995), os trabalhos de Chan e Tuba (1971) e Francavilla e Zienkiewicz (1975) destacam-se dentro desse contexto. Mais voltado ao campo de interesse desse trabalho, é importante mencionar o artigo de Stein e Wriggers (1984) onde foi efetuada uma análise da estabilidade de barras esbeltas usando o MEF com uma formulação Lagrangiana atualizada, aproximando-se simultaneamente a não-linearidade geométrica e a não-linearidade resultante das restrições unilaterais.

A metodologia numérica proposta no presente trabalho segue a terceira alternativa descrita anteriormente. Portanto, como características mais importantes da estratégia de solução adotada, tem-se:

- o emprego do MEF, através do *software* ANSYS (2009), em que elementos finitos foram convenientemente selecionados da biblioteca dessa plataforma computacional para modelagem da estrutura e base elástica; e
- o emprego de uma estratégia incremental-iterativa para solucionar o problema de equilíbrio não linear.

Detalhes da metodologia numérica utilizada estão no Anexo A. Nas subseções seguintes, entretanto, estão uma breve discussão sobre a obtenção do equilíbrio do problema não linear

de contato solo-estrutura de interesse e alguns detalhes sobre a estratégia incremental-iterativa adotada.

3.5.1 Equação de Equilíbrio do Sistema

Como descrito detalhadamente no Anexo A, Subseção 2.3.1 e Subseção 3.3, através da utilização do *software* ANSYS, após a definição da geometria do problema de contato e do tipo de material da estrutura e base, é necessário a escolha da malha de elementos finitos do sistema. Para isso, o elemento utilizado para a modelagem da estrutura é o *BEAM3* (Figura 3.4) e dependendo do tipo de restrição de contato, escolhe-se o elemento para modelagem da base elástica, isto é: no caso do problema de contato bilateral, utiliza-se o elemento *COMBIN14* (Figura 3.8(a)); e no caso do problema de contato unilateral, utiliza-se o elemento *LINK10* (Figura 3.8(b)). Para ambos os problemas, após se considerar a contribuição de cada elemento (da estrutura e da base), a condição satisfeita na configuração de equilíbrio $t + \Delta t$ pode ser descrita genericamente pela equação:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i \cong {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_e \quad (3.25)$$

ou,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c) \cong {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (3.26)$$

sendo ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$ o vetor de forças internas generalizadas na configuração $t + \Delta t$, que é função não linear dos deslocamentos nodais \mathbf{U} , das forças internas resultantes \mathbf{P} de cada elemento finito do sistema e de \mathbf{S}_c , que fornece a contribuição das regiões de contato entre os corpos, ou seja, a contribuição da base elástica. ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_e$ é o vetor de forças externas na configuração do sistema $t+\Delta t$. Veja que esse vetor é escrito de forma mais conveniente através do produto ${}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r$, em que \mathbf{F}_r é o vetor de cargas de referência (apenas a sua direção é importante) e ${}^{t+\Delta t}\lambda$ é uma grandeza escalar que representa a intensidade do carregamento externo aplicado.

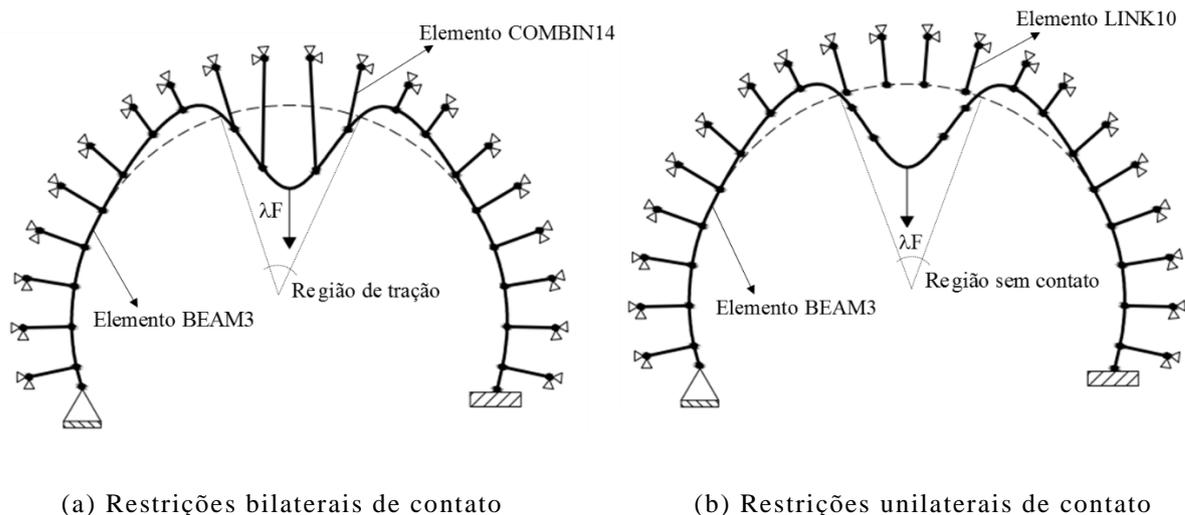


Figura 3.8 Elementos finitos escolhidos no software ANSYS para modelagem dos problemas de contato (detalhes no Anexo A)

3.5.2 Estratégia de Solução Não Linear

O procedimento numérico usado na solução de problemas de contato não linear descrito pela Equação (3.26) segue uma estratégia incremental-iterativa. Nessa abordagem, são identificadas duas fases distintas no processo, para cada incremento de carga: a primeira delas é chamada de fase predita e a segunda, a fase corretiva.

A fase predita envolve a obtenção dos deslocamentos nodais incrementais, $\Delta\mathbf{U}^0$, a partir de um determinado acréscimo de parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$. Caso a técnica do Comprimento de Arco seja acoplado ao processo de Newton-Raphson, como ilustrado na Figura 3.9, esse acréscimo de carga deve ser calculado obedecendo a seguinte equação (Crisfield, 1991; Silva, 2009; Pires, 2012; Anexo A):

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{U}_t^T \delta\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \quad (3.27)$$

sendo Δl o incremento do comprimento de arco; $\delta\mathbf{U}_t$ o vetor de deslocamento tangenciais, ou seja, $\delta\mathbf{U}_t = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}_r$, com \mathbf{K}_T definida como a matriz de rigidez tangente do sistema solo-estrutura e \mathbf{F}_r , como já informado, é o vetor de carregamento nodal de referência. Após o cálculo de $\Delta\lambda^0$ através da equação anterior, chega-se no vetor de deslocamentos nodais incrementais, $\Delta\mathbf{U}^0$, simplesmente escalonando-se $\delta\mathbf{U}_t$, isto é:

$$\Delta U^0 = \Delta \lambda^0 \delta U_t \quad (3.28)$$

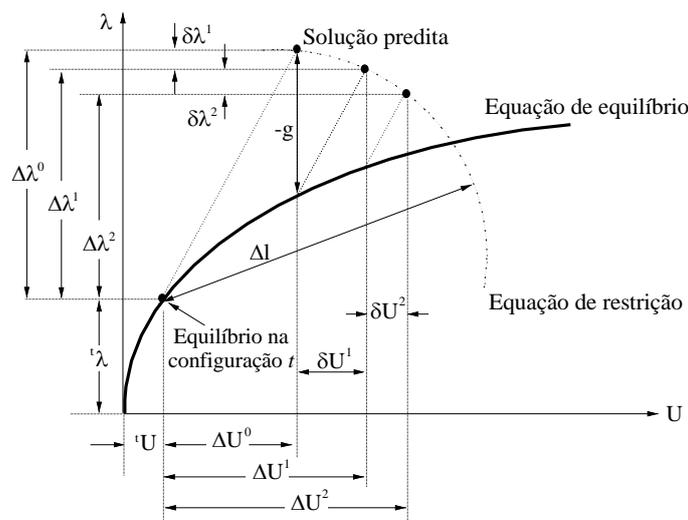


Figura 3.9 Solução incremental-iterativa acoplado o Método do Comprimento de Arco (Silva, 2009)

Ainda no processo de definição da solução predita, para o caso do problema de contato unilateral, é possível obter, após o cálculo de ΔU^0 , uma boa aproximação da região de contato entre os corpos (S_c^0) através da avaliação dos elementos de mola — a base elástica — que estão submetidos à compressão.

Após a definição da solução predita e dos elementos da base que estão comprimidos, entra-se na segunda fase de solução do problema, isto é, a fase corretiva da solução. Nessa fase será necessário corrigir as forças internas que serão obtidas através das correções e acréscimos dos deslocamentos nodais ao longo do processo iterativo. Esses acréscimos dos deslocamentos nodais são obtidos através de sucessivas correções, dada pela expressão:

$$\delta U^k = \delta U_g^k + \delta \lambda^k \delta U_r^k \quad (3.29)$$

em que k é o contador do número de iterações, $\delta U_g^k = -\mathbf{K}_T^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$ e $\delta U_r^k = \mathbf{K}_T^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$, com o vetor gradiente \mathbf{g} sendo a diferença entre os vetores das forças externa e internas. A correção do parâmetro de carga $\delta \lambda^k$, caso seja usada a restrição do Comprimento de Arco, é calculada resolvendo a equação do segundo grau:

$$A(\delta \lambda^k)^2 + B \delta \lambda^k + C = 0 \quad (3.30)$$

A definição dos coeficientes A, B e C, na equação anterior, pode ser encontrada, por exemplo, nas seguintes referências: Crisfield (1991), Silva (2009) e Pires (2012).

Em cada iteração, o equilíbrio do sistema de suporte é verificado comparando-se as forças internas obtidas na configuração $t+\Delta t$ com o carregamento externo aplicado nessa configuração, ou seja através da magnitude do vetor gradiente \mathbf{g} . Esse processo corretivo se repete até que o critério de convergência adotado seja satisfeito e o problema de contato esteja, portanto, em equilíbrio (ou seja, $\mathbf{g} \cong \mathbf{0}$). Adicionalmente, no caso de contato unilateral, é verificada a cada iteração a participação da base elástica no processo de solução através do mapeamento dos elementos de mola que estão comprimidos, com a consequente atualização da região ou regiões de contato entre os corpos S_c .

A Tabela 3.1, apresentada na página a seguir, fornece um resumo, na forma de algoritmo, dos procedimentos numéricos adotados via ANSYS para resolver o problema de contato não linear em questão.

Tabela 3.1 Estratégia de solução não linear adotada

	Definição da geometria, tipos de materiais e malha de elementos finitos:	
1:	Se contato bilateral: Estrutura – Elemento BEAM3 e Base elástica – Elemento COMBIN14 Se contato unilateral: Estrutura – Elemento BEAM3 e Base elástica – Elemento LINK10	
2:	Aplicação de carregamento na estrutura e definição de \mathbf{F}_r (vetor de cargas de referência)	
3:	Definição do incremento de carga inicial $(\Delta\lambda^0)_1$	
4:	Para cada incremento de carga:	▷ PROCESSO DE INCREMENTO DE CARGA
5:	$t \rightarrow$ Carregamento anterior $t + \Delta t \rightarrow$ Carregamento atual	
6:	Formação da matriz de rigidez do sistema: \mathbf{K}_T	
7:	Solução para o vetor de deslocamentos tangente $\delta\mathbf{U}_t : \mathbf{K}_T \delta\mathbf{U}_t = \mathbf{F}_r$	
8:	Se: $t = 1$ então: ${}^1\delta\mathbf{U}_t = \delta\mathbf{U}_t$ e $\Delta\lambda^0 = (\Delta\lambda^0)_1$ Senão: $\Delta\lambda^0 = \pm(\Delta\ell) / \sqrt{\delta\mathbf{U}_t^T \delta\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}$	
9:	Avaliação do vetor de deslocamentos incrementais $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_t$	
10:	Atualiza-se: ${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$	
	Se: Problema de contato unilateral	
	13.1: Avalia o estado de tensão dos elementos da base elástica: quais elementos da base estão comprimidos	
11:	13.2: Computa nova região de contato 0S_c	
	13.3: Vá para o passo 12	
	Senão: Vá para o passo 12	
12:	Iterações de Newton Raphson: $k=1,2,3\dots N_{\text{máx}}$	▷ PROCESSO DE ITERATIVO
13:	Avalia o vetor de forças internas: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$	
14:	Avalia o vetor de forças desequilibradas: $\mathbf{g}^{(k-1)}$	
15:	Checa a convergência: $\mathbf{g} \cong 0 \rightarrow$ SIM: Vá para o passo 20 NÃO: Vá para o próximo passo	
16:	Calcula-se: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$ onde, $\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}_T^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$, $\delta\mathbf{U}_r^k = -\mathbf{K}_T^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$ e $\delta\lambda^k \rightarrow A(\delta\lambda^k)^2 + B(\delta\lambda^k) + C = 0$	
17:	Atualiza-se as variáveis \rightarrow Incrementais: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$ Totais: ${}^t\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^t\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$	
	Se: Problema de contato unilateral:	
18:	Reavalia região de contato (quais elementos da base estão comprimidos): ${}^{t+\Delta t}S_c = {}^{t+\Delta t}S_c^{\text{nov}} e$ volte ao passo 12 Senão: Volte ao passo 12	
19:	Atualiza-se as coordenadas do sistema (coordenadas nodais e vetores de forças internas)	
20:	Novo incremento de carga: Vá para o passo 4	

Capítulo 4

Exemplos de Aplicação e Validação

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é verificar, através da análise de vários problemas de contato envolvendo estruturas e bases elásticas, a eficiência da metodologia numérica apresentada no Capítulo 3 e detalhada no Anexo A, que é baseada no emprego da plataforma ANSYS (2009).

Na Seção 4.2 é apresentado um estudo do equilíbrio não linear de uma viga biapoiada em contato com o solo. As análises de três problemas envolvendo colunas são realizadas na Seção 4.3, onde se consideram tanto as restrições de contato bilaterais (Subseções 4.3.1 e 4.3.2) quanto as unilaterais (Subseção 4.3.3). Os arcos em contato com o solo são estudados na Seção 4.4. E, finalmente, a Seção 4.5 traz o problema de um anel confinado em meio elástico, quando as restrições unilaterais de contato são consideradas.

As fontes de não linearidade dos problemas propostos são a geométrica, com a inclusão de grandes deslocamentos da estrutura, e a condição de contorno, pois existe a possibilidade de alteração da região de contato entre os corpos no caso de restrição unilateral.

Como já informado no capítulo anterior, a estratégia de iteração de Newton-Raphson Padrão (NRP) é utilizada, em cada passo de carga, para a solução numérica do problema estrutural-geotécnico não linear. Adicionalmente, com o intuito de se obter a resposta completa do sistema, passando por pontos críticos ao longo da trajetória de equilíbrio, acoplou-se ao método de NRP a técnica do Comprimento de Arco.

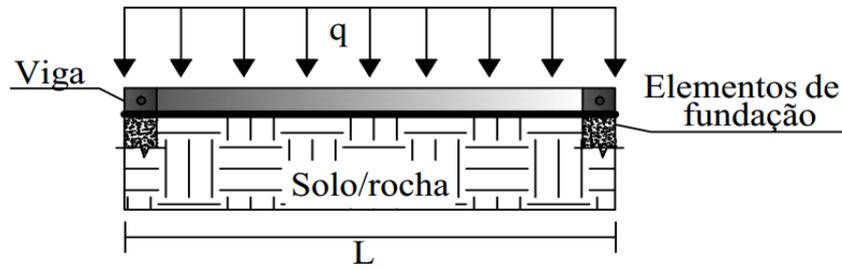
4.2 Vigas com Restrições de Contato

Vigas carregadas sobre o solo são comuns na engenharia civil. Um exemplo típico desse problema são as vigas baldrame, cuja função é promover a transferência de carga para os elementos de fundação (e/ou para o próprio solo), além do travamento dos mesmos. Esse tema vem sendo estudado por pesquisadores de todo o mundo com o objetivo de se chegar a modelos numéricos cada vez mais eficientes e próximos da realidade.

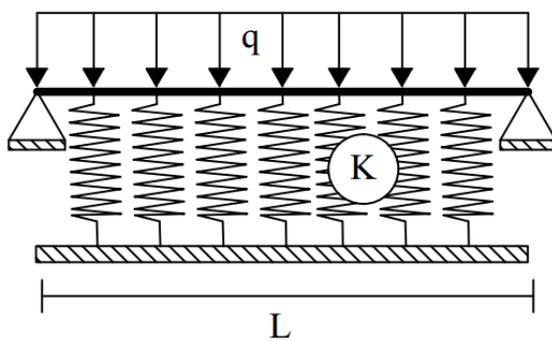
Horibe e Asano (2001), por exemplo, desenvolveram uma estratégia de solução baseada no MEC para o cálculo de grandes deflexões laterais de estruturas em contato com o meio elástico aproximado por dois parâmetros. Maciel (2012) conseguiu reproduzir os resultados obtidos por Horibe e Asano (2001) usando uma metodologia numérica para análise de problemas de equilíbrio estrutura-solo com grandes deslocamentos. Jang (2013) apresentou uma nova abordagem matemática para a análise de vigas “infinitas” em contato com bases elásticas considerando a aproximação de von Karman para a não linearidade geométrica. Mais recentemente, Borchani *et al.* (2015) estudaram o comportamento não linear de vigas em contato bilateral com o meio através de método energético.

O problema de contato analisado nesta seção é ilustrado na Figura 4.1(a). Trata-se de uma viga biapoiada de comprimento $L = 10$ e rigidez à flexão $EI = 100$ (unidades compatíveis), com carregamento uniformemente distribuído (q), em contato com o solo, que é representado aqui através do modelo contínuo de Winkler (Figura 4.1(b)). O modelo numérico adotado é apresentado na Figura 4.1(c) e utiliza 20 elementos finitos (EFs) para a viga. Note que as condições de contorno e de carregamento desse sistema impedem o aparecimento de regiões de perda de contato entre os corpos, havendo apenas a compressão do meio elástico (Figura 4.1(d)).

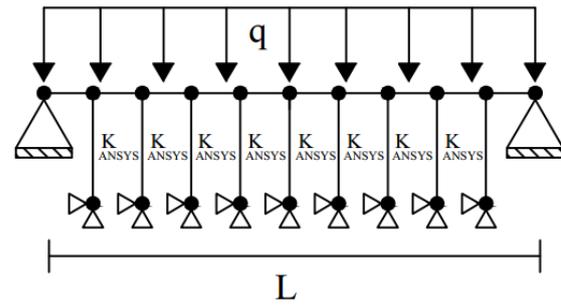
Esse problema foi inicialmente abordado por Horibe e Asano (2001) e depois por Maciel (2012), e os resultados desses trabalhos são usados na verificação dos resultados obtidos nesta dissertação, que são apresentados nas Figuras 4.2 e 4.3. Na primeira figura estão as trajetórias de equilíbrio da viga para diferentes valores do parâmetro de rigidez K da base elástica ($K_{ANSYS} = KL_{elem}$); a segunda traz as configurações deformadas da viga (Figura 4.3(a)) e a variação da reação da base elástica R_b para vários valores do carregamento q . Observe que para apresentação desses resultados, são utilizados os parâmetros adimensionais Λ e R_B , que são definidos como:



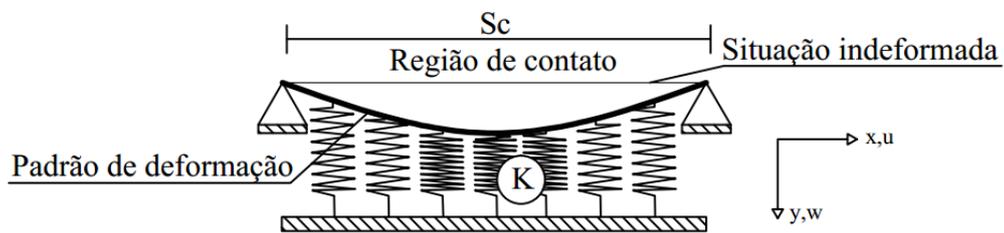
(a) Problema de engenharia



(b) Modelo de Winkler



(c) Modelagem em elementos finitos



(d) Configuração deformada da viga

Figura 4.1 Viga biapoiada em contato com o meio elástico

$$\Lambda = \frac{qL^3}{EI} \quad (4.1)$$

$$R_B = \frac{R_b L^2}{EI} \quad (4.2)$$

Através dos resultados apresentados nas Figuras 4.2 e 4.3 é possível fazer os seguintes comentários:

- para o caso da rigidez da base $K = 1$ (Figura 4.2), observe a boa concordância entre a trajetória aqui obtida com aquela da literatura (Horibe e Asano, 2001; Maciel, 2012), verificando inicialmente a modelagem realizada via ANSYS e apresentada no Anexo A;
- como esperado (Figura 4.2), não são observados pontos limites de carga ao longo do caminho de equilíbrio para os diversos valores de K estudados e, ao se aumentar a rigidez da base obtêm-se deflexões laterais w da viga cada vez menores para um mesmo valor de q ;
- as trajetórias de equilíbrio passam a ter comportamento quase linear para valores de rigidez K da base elástica elevados ($K = 30$ e $K = 50$; Figura 4.2) devido a menor influência dos termos de 2ª ordem;
- na Figura 4.3, em que se fixa o parâmetro de rigidez da base $K = 9$ nas análises, como também esperado, tanto a deflexão lateral da viga como a reação da base aumentam ao se elevar a magnitude do carregamento aplicado q . Não são observadas deflexões típicas do comportamento pós-crítico para o problema em estudo (diminuição de carregamento após alcance de carga crítica com o contínuo aumento das deformações) estando, portanto, coerente com o resultado obtido para a trajetória de equilíbrio que não apresentou pontos limites.

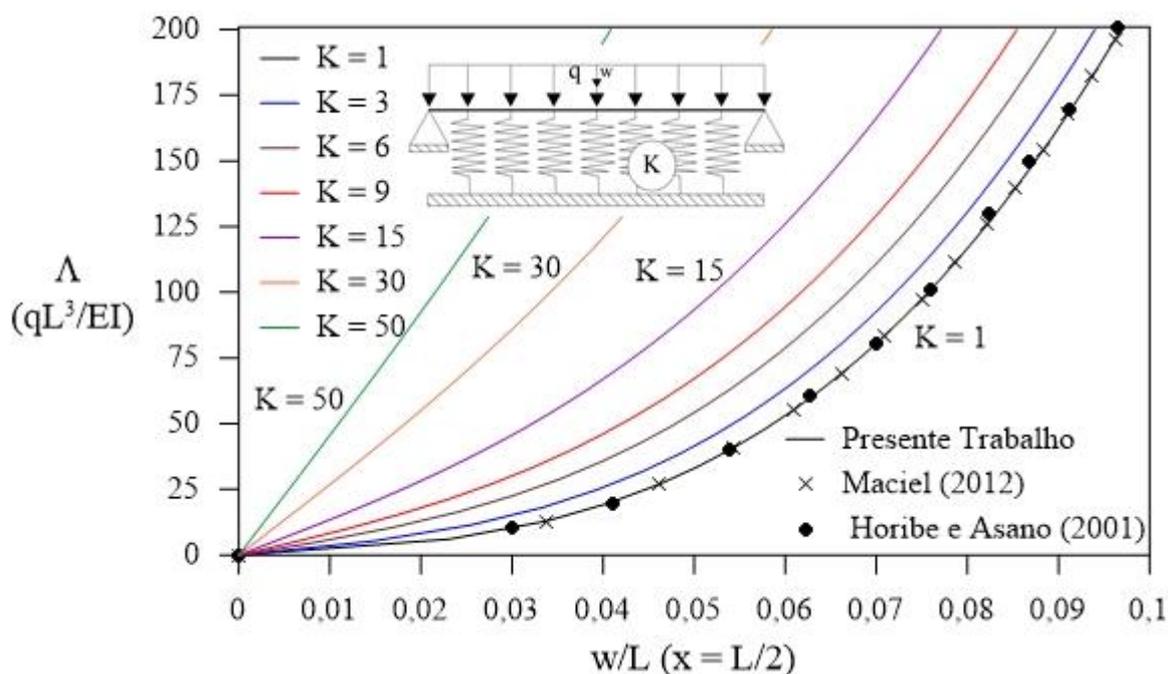
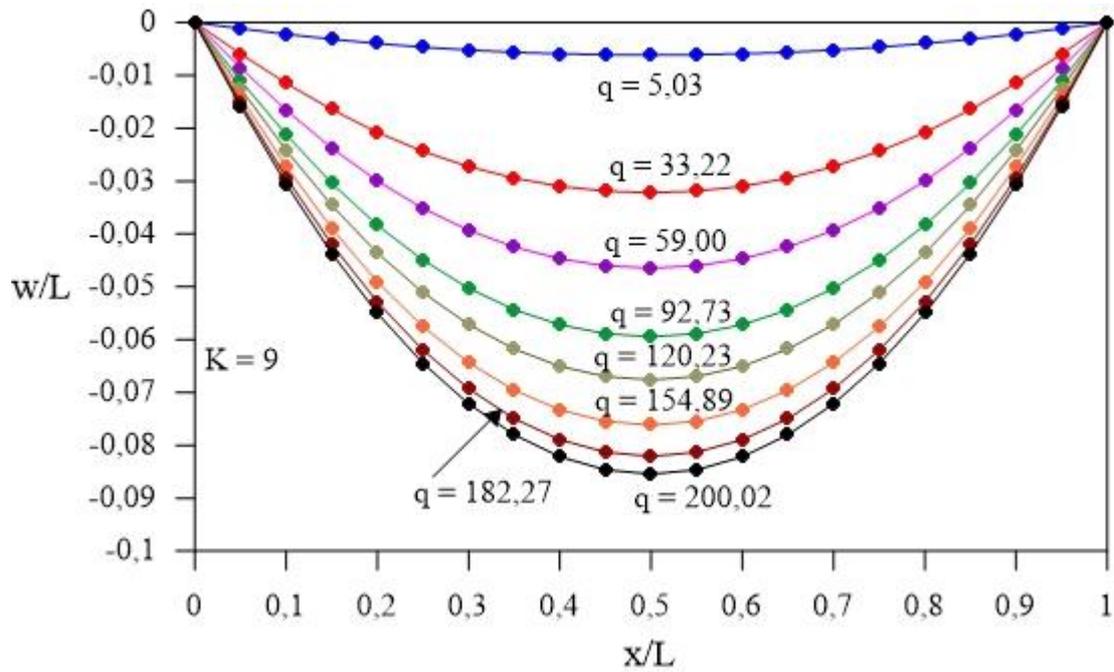
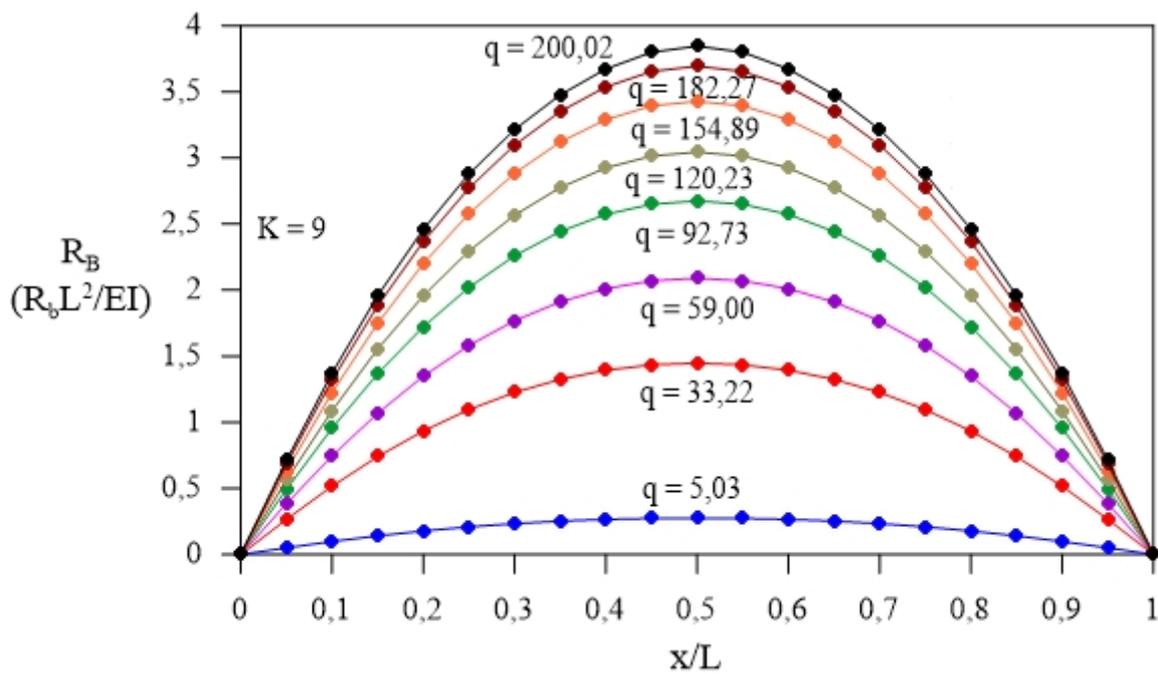


Figura 4.2 Trajetórias de equilíbrio do sistema viga-base elástica



(a) Configurações deformadas da viga

(b) Reação da base elástica R_B **Figura 4.3** Comportamento do sistema viga-base elástica para $K = 9$

4.3 Colunas Esbeltas com Restrições de Contato

Nesta seção é apresentado um estudo envolvendo a estabilidade de colunas em contato com o meio (solo ou rocha). São consideradas restrições bilaterais e unilaterais de contato, ou seja, estuda-se a influência da base elástica no comportamento estrutural quando esta responde às solicitações de compressão e tração e quando responde somente às solicitações de compressão. Os modelos discreto e contínuo de Winkler foram utilizados para aproximar o comportamento do solo. Além disso, levou-se em consideração os efeitos das imperfeições geométricas iniciais na coluna e a possibilidade de grandes deslocamentos da estrutura.

A interação entre colunas e o meio é comum na engenharia. Vale destacar dois exemplos clássicos: os elementos de fundação como as estacas, pré-moldadas ou moldadas *in loco*, e estruturas de contenção, como as estacas-prancha. Existem diversos estudos na literatura, considerando fontes de não linearidade distintas na modelagem desses problemas. Ahmed (2011) estudou pilares em contato com o solo sujeitos a carregamentos laterais considerando os efeitos não lineares tanto da estrutura quanto do próprio solo. Liang *et al.* (2015) também apresentaram uma alternativa de solução variacional para esse mesmo problema, utilizando o modelo de Winkler aplicado a solos elastoplásticos. Ochoa (2013) avaliou a estabilidade lateral de colunas esbeltas sujeitas a carregamentos axiais de compressão com contato total ou parcial com o meio elástico do tipo Winkler. O autor levantou uma discussão sobre os efeitos das ligações semirrígidas na carga de flambagem de colunas em cinco casos clássicos. Além desses trabalhos, que foram fundamentais para o entendimento do comportamento de colunas em contato com o solo, outros estudos foram utilizados para validação dos resultados que serão apresentados a seguir. Dentre eles, destacam-se: Brush e Almroth (1975) e Maciel (2012).

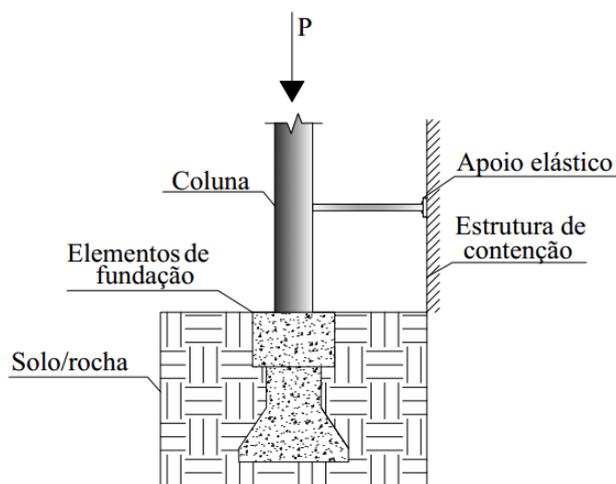
Esta parte da dissertação está dividida em três subseções. Na primeira delas, apresentada a seguir, é avaliada a carga crítica de colunas com várias condições de contorno em contato bilateral com um único apoio elástico discreto intermediário. A Subseção 4.3.2 traz o problema da estabilidade elástica de colunas biapoiadas em contato bilateral com uma base contínua do tipo Winkler em toda sua extensão. Finalmente, na Subseção 4.3.3, é realizado o estudo de colunas biapoiadas em contato unilateral com uma base.

4.3.1 Colunas em Contato Bilateral com Apoio Elástico Discreto Intermediário

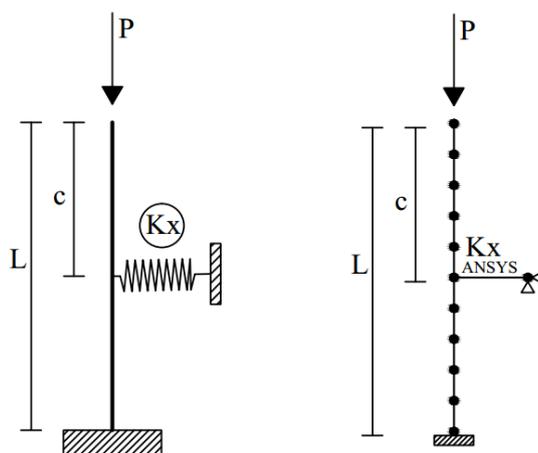
Uma coluna com apoio elástico discreto intermediário é exibida na Figura 4.4. Essa figura traz o problema de engenharia a ser analisado (Figura 4.4(a)), sua representação através do

modelo discreto de molas (Figura 4.4(b)) e a modelagem em elementos finitos utilizada (Figura 4.4(c)), em que K_x é a rigidez do apoio elástico intermediário, c é a distância do apoio elástico ao topo da coluna, L é o comprimento da coluna e P é a carga.

O problema a ser resolvido é um caso clássico na análise de estabilidade de colunas que já foi estudado por outros autores. Brush e Almroth (1975) obtiveram a solução analítica para o caso da coluna biapoiada. A partir de uma configuração levemente deformada, esses autores definiram a equação de equilíbrio crítico para a coluna, considerando as restrições bilaterais de contato.



(a) Problema de engenharia



(b) Modelo discreto (c) Modelagem em elementos finitos

Figura 4.4 Coluna em contato com apoio elástico discreto intermediário

Considerando ainda o contato bilateral entre os corpos, Maciel (2012) expandiu a análise de Brush e Almroth (1975) variando as condições de contorno da coluna, como mostrado na Figura 4.5.

Neste trabalho foi realizada uma investigação sobre a influência da posição c do apoio elástico e de sua rigidez (Kx) na carga crítica da coluna (P_{cr}).

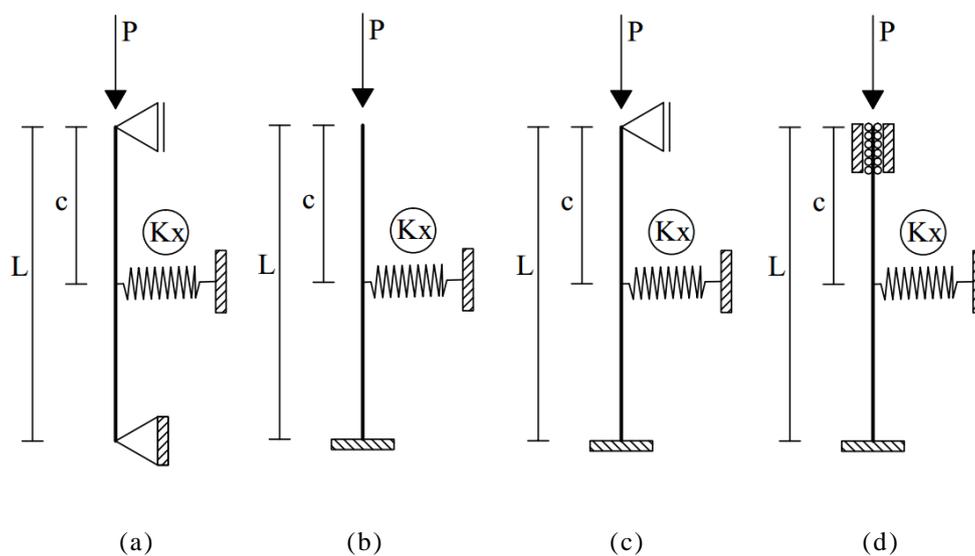


Figura 4.5 Colunas com diversas condições de apoio

A apresentação dos resultados foi feita com base em três parâmetros adimensionais, definidos a seguir:

$$kx = \frac{KxL^3}{EI} \quad (4.3)$$

$$c_b = \frac{c}{L} \quad (4.4)$$

$$\Gamma = \frac{P_{cr}}{P_e} \quad (4.5)$$

em que EI é a rigidez à flexão da barra e P_e é a carga crítica de Euler ($P_e = \pi^2 EI/L^2$).

Os resultados alcançados, em termos de carga crítica adimensional Γ , são apresentados nas Figuras 4.6-4.9 e comparados com aqueles obtidos por Brush e Almroth (1975) e Maciel (2012). Dessas figuras, pode-se fazer os seguintes comentários:

- todas as análises realizadas apresentaram uma boa concordância com os resultados de Brush e Almroth (1975) e Maciel (2012);
- no caso da coluna biapoiada (Figura 4.6), para $c_b = 0,5$ e valores de k_x superiores a 150, o apoio discreto elástico passa a se comportar como apoio rígido, obtendo valores de Γ próximos a 4. Isso corresponde à carga crítica da coluna biapoiada de comprimento $L/2$. Para valores de c_b diferentes de 0,5, é necessário que a rigidez da mola seja cada vez mais elevada para que a mesma possa se comportar como apoio rígido;
- analisando a coluna engastada-livre (Figura 4.7), com $c_b = 0$ e $k_x = 100$, chega-se numa carga crítica adimensional (Γ) igual a 2,05, que corresponde à carga crítica da coluna engastada-apoiada;
- a Figura 4.8 traz a coluna engastada-apoiada e mostra que para todos os valores de k_x analisados e $c_b = 0$, a carga crítica adimensional passa a ser $\Gamma = 2,05$. O segundo modo de flambagem dessa coluna é composto por duas semi-ondas, com o deslocamento nulo em $c_b = 0,36$, correspondendo ao ponto onde Γ é máximo para todos os valores de k_x analisados. Percebe-se que para valores de k_x superiores a $k_x = 220$, o apoio elástico discreto comporta-se como rígido no ponto em que $c_b = 0,36$;
- no caso da coluna biengastada (Figura 4.9), onde o deslocamento axial é livre na extremidade superior, necessita-se de valores de k_x bastante elevados para que o apoio elástico se aproxime do comportamento rígido e a carga crítica adimensional passa a ser, portanto, próxima a $\Gamma = 16$ (Carga crítica da coluna biengastada de comprimento $L/2$);
- de uma maneira geral, quanto maior é a carga de flambagem da coluna, maior será o valor da rigidez da mola discreta para que a mesma se comporte como um apoio rígido.

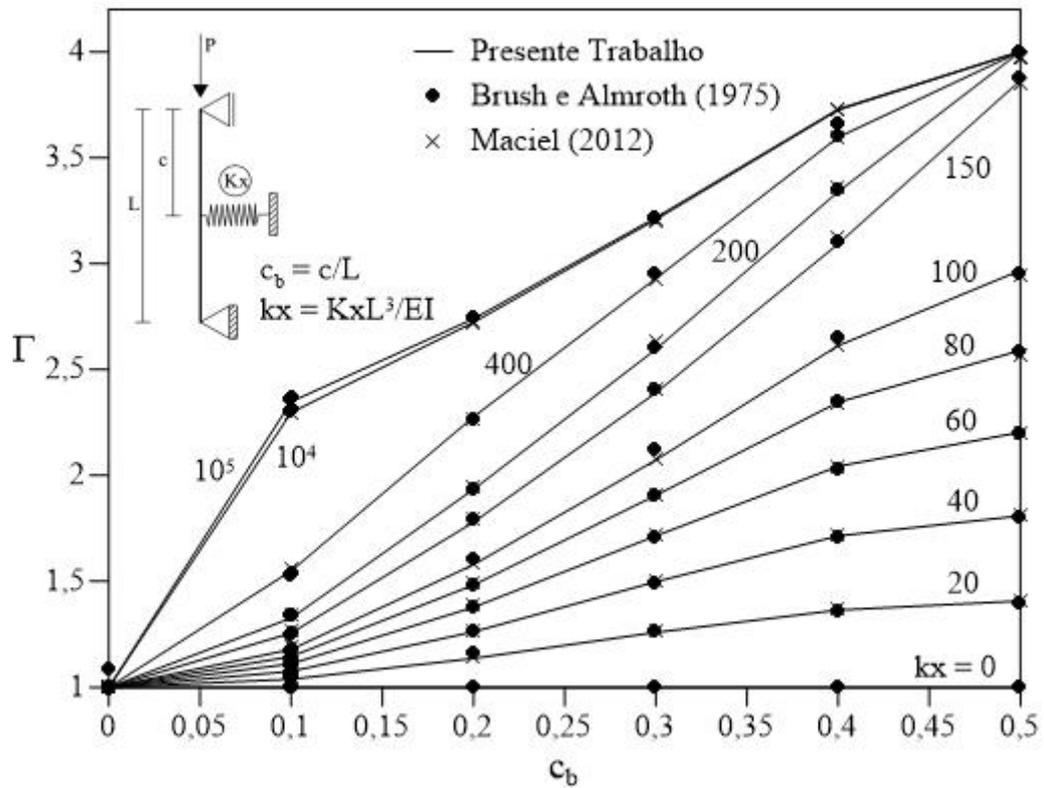


Figura 4.6 Coluna biapoada com apoio elástico intermediário

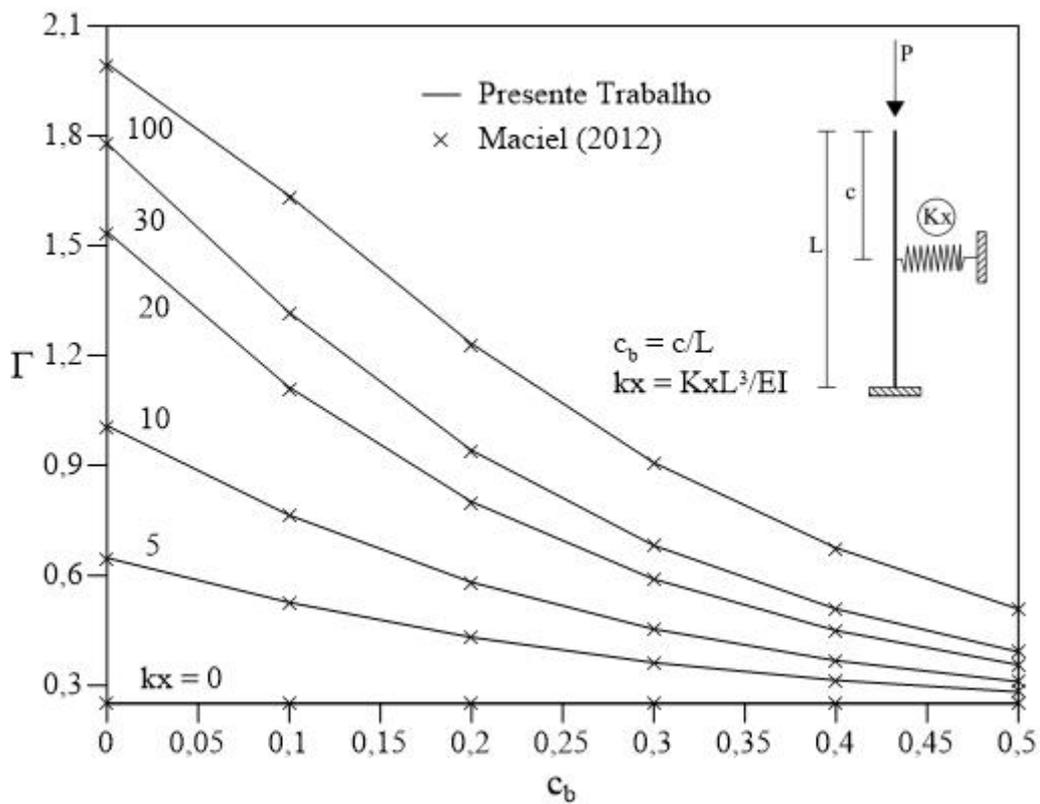


Figura 4.7 Coluna engastada-livre com apoio elástico intermediário

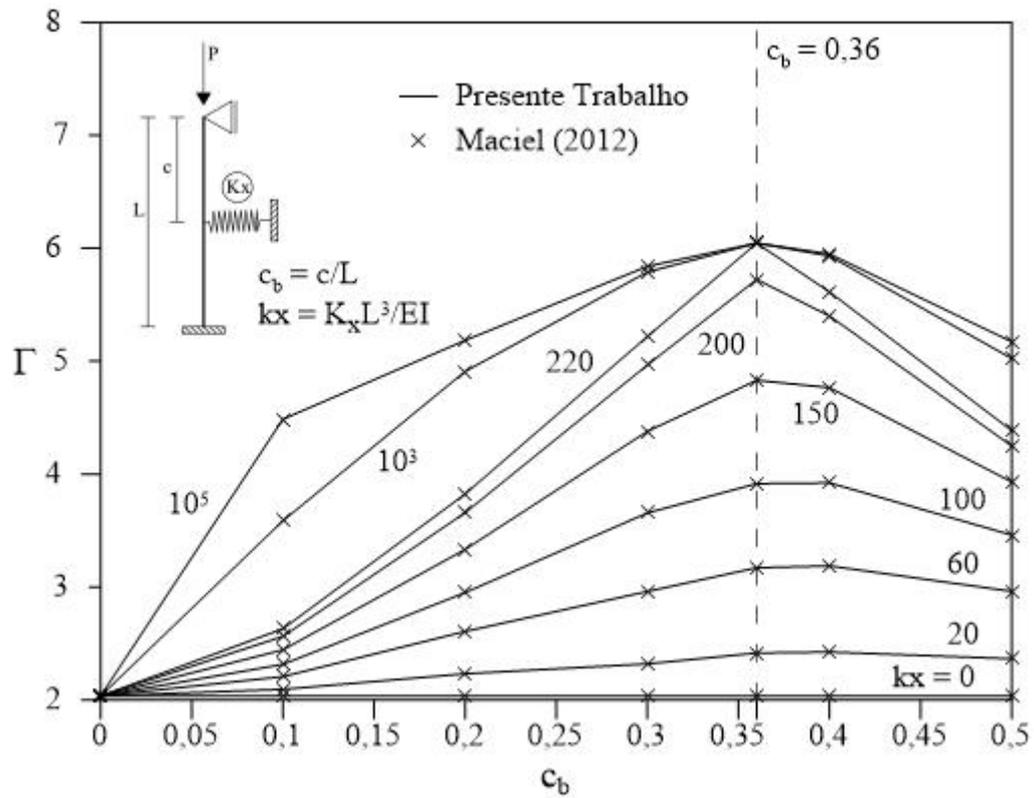


Figura 4.8 Coluna engastada-apoiada com apoio elástico intermediário

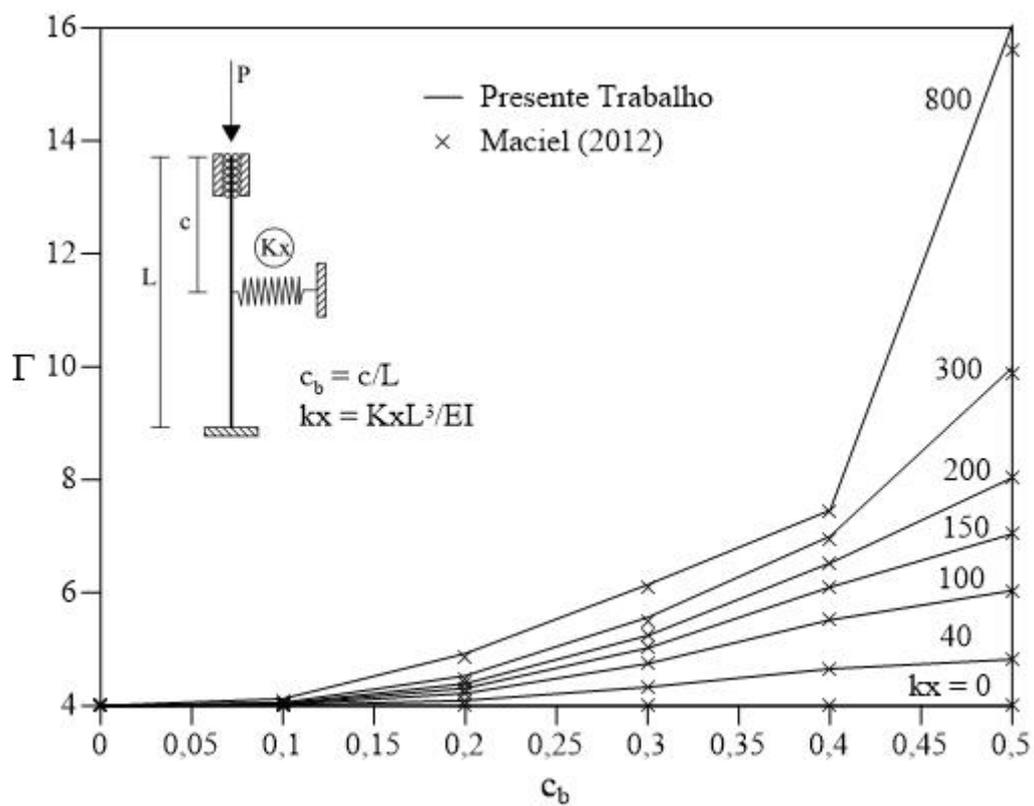
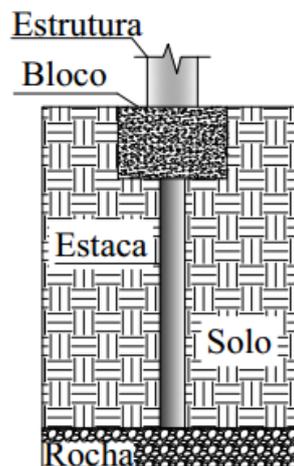


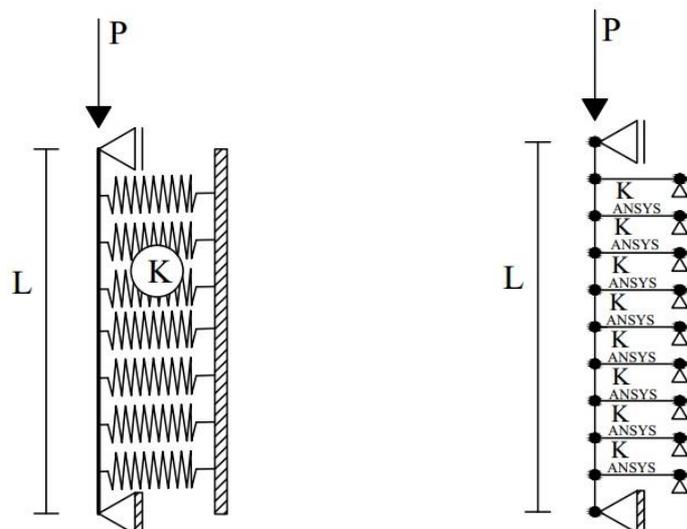
Figura 4.9 Coluna biengastada com apoio elástico intermediário

4.3.2 Colunas em Contato Bilateral com Base do Tipo Winkler

A análise realizada nesta subsecção é sobre a estabilidade de colunas esbeltas em contato ao longo de todo seu comprimento com a base elástica contínua do tipo Winkler. O problema a ser resolvido é apresentado na Figura 4.10, ou seja, essa figura traz o problema de engenharia a ser resolvido (Figura 4.10(a)), o emprego do modelo contínuo de Winkler na representação do solo (Figura 4.10(b)) e, na Figura 4.10(c), a modelagem em elementos finitos do problema.



(a) Estaca com restrições bilaterais de contato



(a) Modelo contínuo de Winkler

(b) Modelagem em elementos finitos

Figura 4.10 Coluna biapoada em contato bilateral com base elástica de Winkler

Brush e Almroth (1975) mostraram que o número de semi-ondas do modo de deformação a ser considerado na solução analítica tem papel fundamental no valor da carga crítica da coluna (P_{cr}). Eles então definiram uma expressão direta relacionando o número de semi-ondas n , o valor do parâmetro de rigidez adimensional k e o valor da carga crítica de Euler (P_e):

$$\frac{P_{cr}}{P_e} = n^2 + \frac{k}{n^2} \quad (4.6)$$

em que o parâmetro de rigidez adimensional k é dado por:

$$k = \frac{KL^4}{\pi^4 EI} \quad (4.7)$$

em que K é o valor da rigidez da base elástica no meio contínuo de Winkler, L e EI são, respectivamente, o comprimento e a rigidez à flexão da barra.

Inicialmente, avaliou-se a malha ideal de elementos finitos a ser utilizada nas modelagens que se seguem. Para o sistema estrutural em questão, considerou-se: $L = 5$, $EI = 100$ e $K = 10$ (em unidades compatíveis). Além disso, considerou-se a coluna com uma imperfeição geométrica inicial na forma de uma senoide, com uma semi-onda ($n = 1$), e valor da amplitude $U = 10^{-4}$ (Figura 4.11).

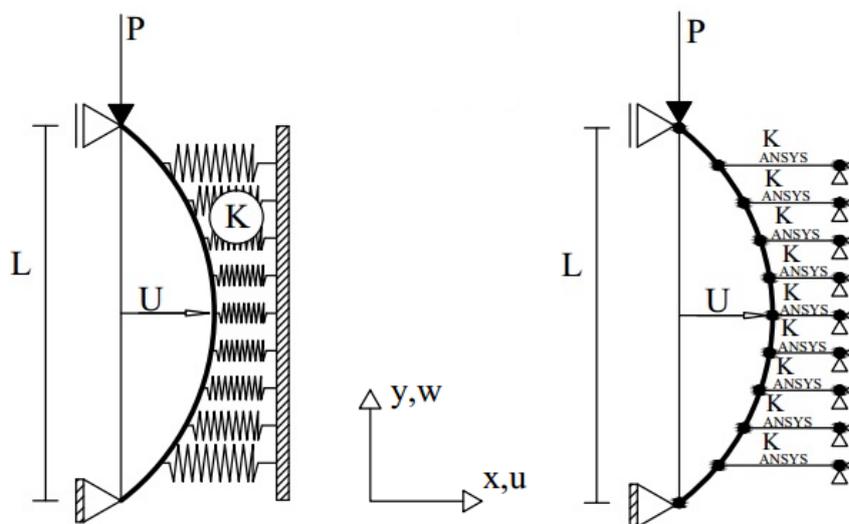


Figura 4.11 Coluna sujeita a imperfeição geométrica inicial senoidal $n = 1$

Foram adotadas malhas com 4, 6, 8, 10 e 20 elementos finitos (EFs) para a modelagem da estrutura. Como ilustrado na Figura 4.12, os caminhos de equilíbrio dessa coluna foram obtidos e as respostas foram calibradas levando-se em consideração o valor da carga crítica obtida por Brush e Almroth (1975) de $P_{cr} = 64,81$. Percebe-se que para malhas menos refinadas, de até 8 EFs, o valor da carga crítica encontrado é insatisfatório. Diante disso, nas modelagens que se seguem ao longo desta seção, utilizou-se o valor mínimo de 20 EFs para a modelagem de colunas.

A Tabela 4.1 compara as soluções encontradas para a carga crítica com os resultados de Maciel (2012) avaliando sua variação percentual e a variação percentual do presente trabalho ao comparar com o valor de referência de Brush e Almroth (1975). A variação diminui consideravelmente ao refinar a malha e, para 20 EFs, a resposta do presente trabalho foi ainda mais próxima do valor de referência que a obtida por Maciel (2012).

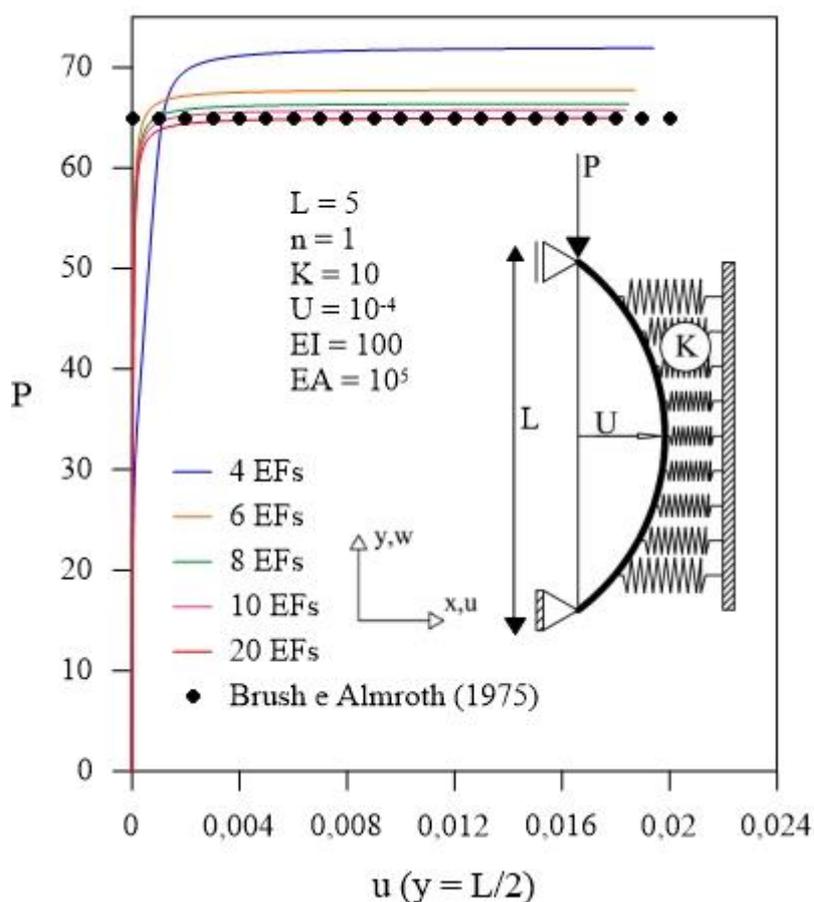


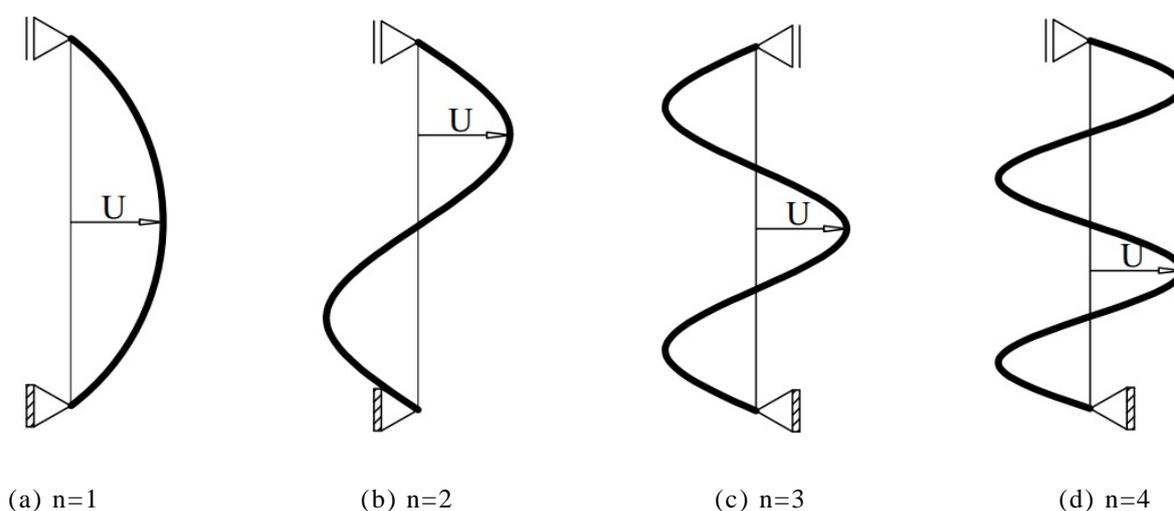
Figura 4.12 Trajetórias de equilíbrio da coluna biapoiada com restrições bilaterais de contato

Tabela 4.1 Influência da malha no valor de P_{cr} da coluna

Nº EFs	Presente Trabalho	Variação (%)	Maciel (2012)	Variação (%)
4	71,93	10,99%	41,96	35,26%
6	67,76	4,55%	65,48	1,03%
8	66,38	2,42%	64,57	0,37%
10	65,76	1,47%	64,56	0,39%
20	64,95	0,22%	64,63	0,28%

Valor de referência: $P_{cr} = 64,81$ (Brush e Almroth, 1975)

A partir deste momento, é assumido que o comprimento da coluna é $L = 10$ e mantém-se todas as outras propriedades geométricas da estrutura. Na sequência, avali-se o efeito da rigidez K da base elástica no modo crítico de instabilidade da coluna. Adotou-se os seguintes valores de $K = 15,6$ e 47 . Foram analisadas colunas com diferentes deformações iniciais senoidais: $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ e $U = 10^{-4}$ (Figura 4.13), o que permitiu o monitoramento das alterações no modo crítico de instabilidade. Mais uma vez, foram consideradas as restrições bilaterais de contato entre o solo e a estrutura.

**Figura 4.13** Imperfeições geométricas iniciais senoidais para colunas biapoimadas

Os resultados alcançados nessas análises estão nas Figuras 4.14 e 4.15 e Tabelas 4.2 e 4.3 de onde pode-se fazer as seguintes observações:

- para $K = 15,6$, o menor valor da carga crítica encontrada refere-se a $n = 2$. Ou seja, o modo crítico nesse caso ocorre com $n = 2$ e a carga crítica é $P_{cr} = 79,80$ (Tabela 4.2);
- ao se elevar a rigidez K da base para $K = 47$, o modo crítico passa a ocorrer em $n = 3$ e a carga crítica é $P_{cr} = 143,64$ (Tabela 4.3);
- como era de se esperar, com o aumento da rigidez K , a carga crítica também aumenta em todos os casos;
- para a base mais rígida ($K = 47$) a diferença da carga crítica para $n = 1$ e as demais, é muito superior àquela observada para a base mais flexível ($K = 15,6$);
- os resultados obtidos por Maciel (2012) considerando $K = 15,6$, $n = 2$ e $n = 3$ foram mais próximos dos valores de referência (Brush e Almroth, 1975) do que os resultados do presente trabalho. Para os demais valores de n , os resultados do presente trabalho apresentaram um percentual de variação menor (Tabela 4.2);
- para $K = 47$, os resultados encontrados foram, de modo geral, mais próximos daqueles de Brush e Almroth (1975) que aqueles de Maciel (2012). Única exceção ocorre para $n = 2$ (Tabela 4.3);
- de uma maneira geral, os resultados encontrados no presente trabalho foram ligeiramente superiores aos daqueles encontrados por Brush e Almroth (1975) e Maciel (2012);
- considerando que os valores percentuais das variações são satisfatórios, fica evidenciada a eficiência dos resultados e da formulação matemática via ANSYS apresentada no Anexo A.

Tabela 4.2 Valores da carga crítica considerando $K = 15,6$

Número de semi-ondas	Valor de referência Brush e Almroth (1975)	Maciel (2012) $K = 15,6$	Variação (%)	Presente Trabalho $K = 15,6$	Variação (%)
1	167,79	167,11	0,41%	167,75	0,02%
2	78,99	78,51	0,61%	79,80	1,03%
3	106,39	107,03	0,60%	108,00	1,51%
4	167,93	167,39	0,32%	167,66	0,16%

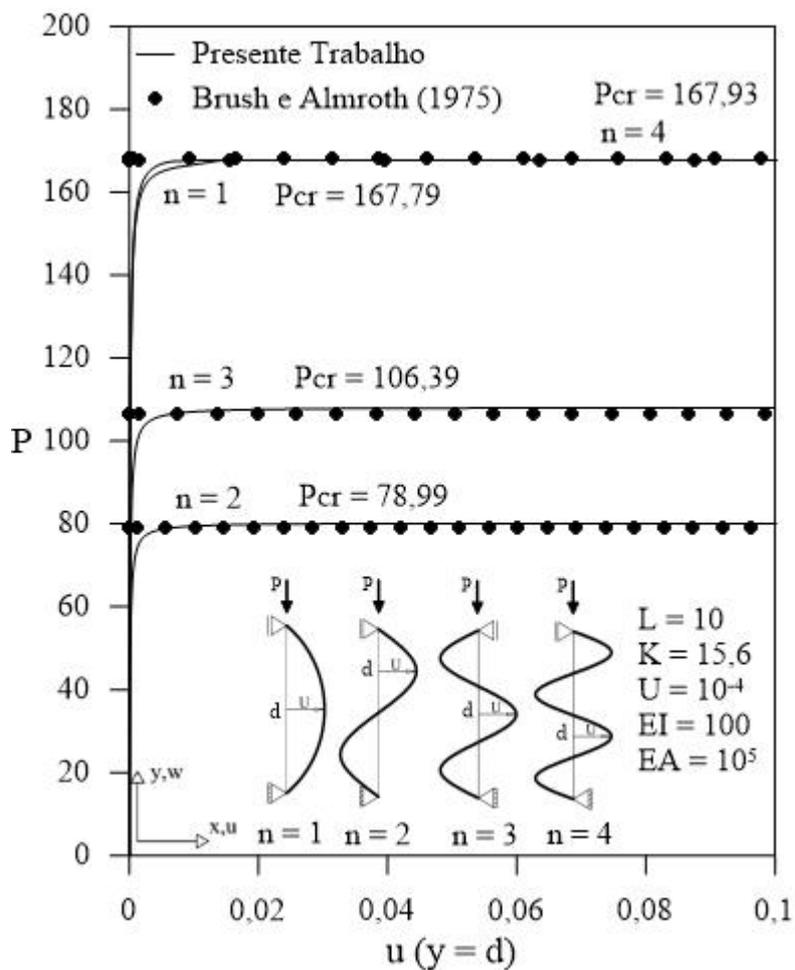


Figura 4.14 Trajetórias de equilíbrio para a coluna biapoiado considerando diferentes valores para n e $K = 15,6$

Tabela 4.3 Valores da carga crítica considerando $K = 47$

Número de semi-ondas	Valor de referência Brush e Almroth (1975)	Maciel (2012) $K = 48$	Varição (%)	Presente Trabalho $K = 48$	Varição (%)
1	486,08	480,47	1,15%	484,36	0,35%
2	158,53	157,68	0,54%	160,09	0,98%
3	143,74	141,41	1,62%	143,64	0,07%
4	187,86	188,00	0,17%	187,7	0,01%

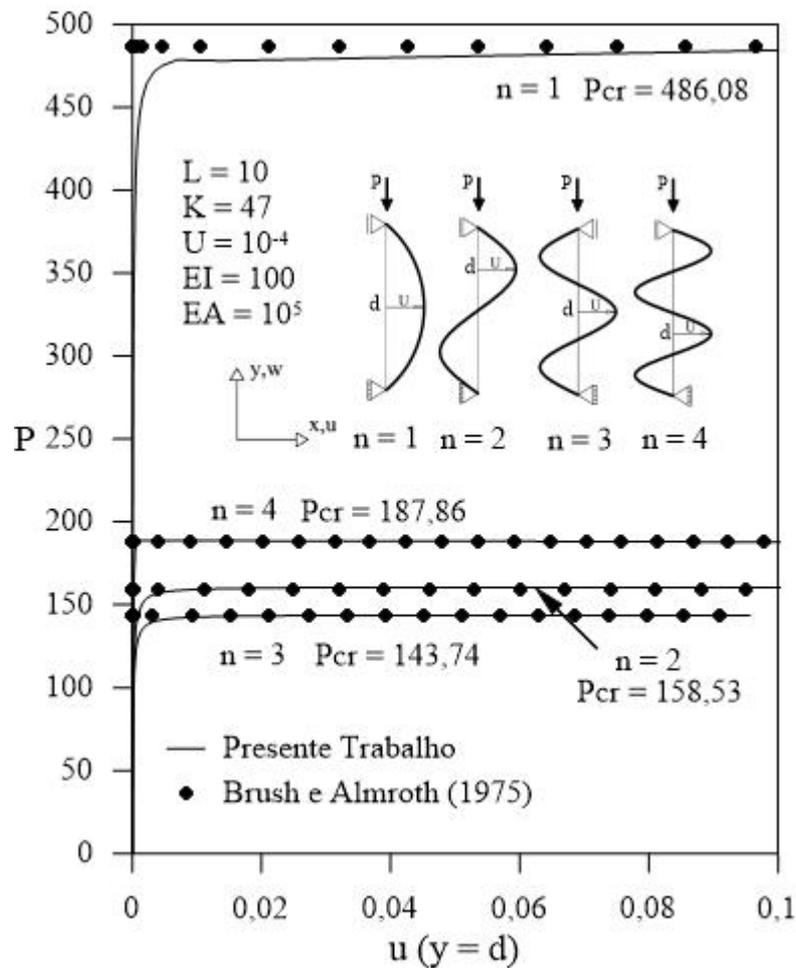


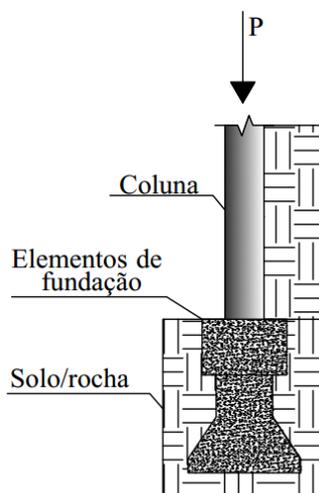
Figura 4.15 Trajetórias de equilíbrio para a coluna biapoiada considerando diferentes valores para n e $K = 47$

4.3.3 Colunas em Contato Unilateral com Base do Tipo Winkler

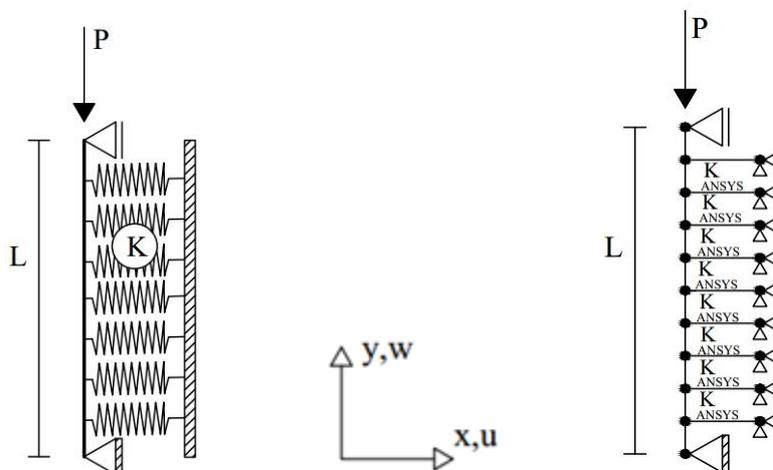
Finalmente, a última análise sobre colunas trata da estrutura em contato unilateral com o meio. Isto é, diferentemente do que foi apresentado nas subseções anteriores, a base elástica responde apenas às solicitações de compressão.

A Figura 4.16 traz o problema de engenharia, a representação do solo através do modelo contínuo de Winkler e a modelagem em elementos finitos realizada via ANSYS. Para as análises que seguem, considerou-se: $L = 5$, $EI = 1000$, $EA = 10^5$ (unidades compatíveis), uma imperfeição geométrica inicial senoidal de $n = 2$ e amplitude $U = 10^{-4}$. Foram obtidas trajetórias de equilíbrio da coluna para diferentes valores da rigidez K da base elástica e realizou-se estudos envolvendo a configuração deformada da estrutura assim como a reação da base elástica, R_b .

No tratamento dos resultados, a observação realizada na subseção anterior, referente a Equação (4.7), também é válida aqui. Todas as variáveis do problema estão em unidades compatíveis.



(a) Coluna com restrições unilaterais de contato



(a) Modelo contínuo de Winkler

(b) Modelagem em elementos finitos

Figura 4.16 Coluna biapoiada em contato unilateral com base elástica de Winkler

Os caminhos de equilíbrio da coluna para diferentes valores de rigidez K da base ($K = 0, K = 10, K = 50, K = 75, K = 500, K = 1000$) são mostradas na Figura 4.17 até se atingir o valor da carga crítica, P_{cr} . Nessa mesma figura também é mostrada a configuração inicial da coluna com sua imperfeição geométrica inicial para $n = 2$. Ao elevar o valor de K , P_{cr}

também aumenta. Para bases flexíveis, P_{cr} é atingida mais rapidamente no processo de solução incremental-iterativa. Para a base “super rígida”, $K = 1000$, a trajetória de equilíbrio vai até valores de deslocamentos próximos a $u = 0,03$, atingindo $P_{cr} = 2189,19$.

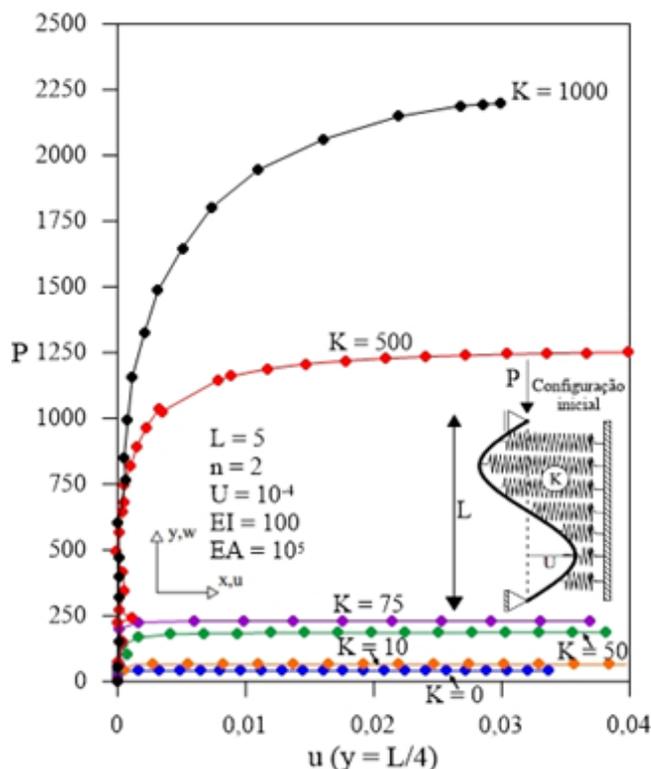
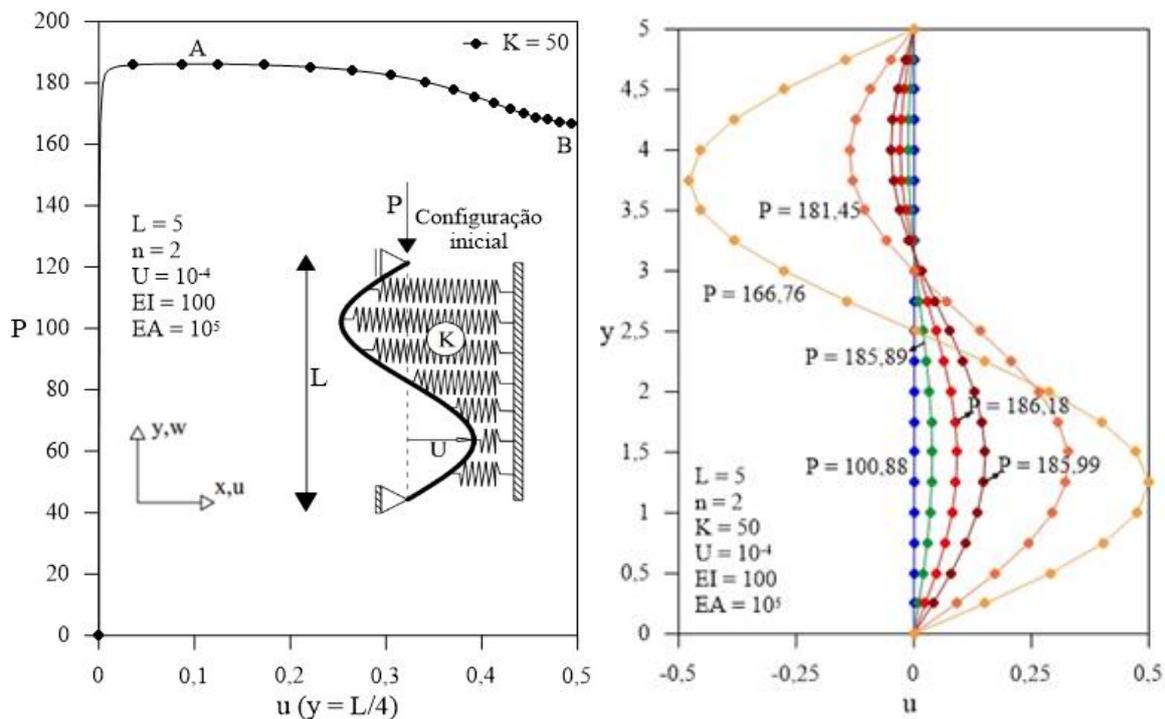
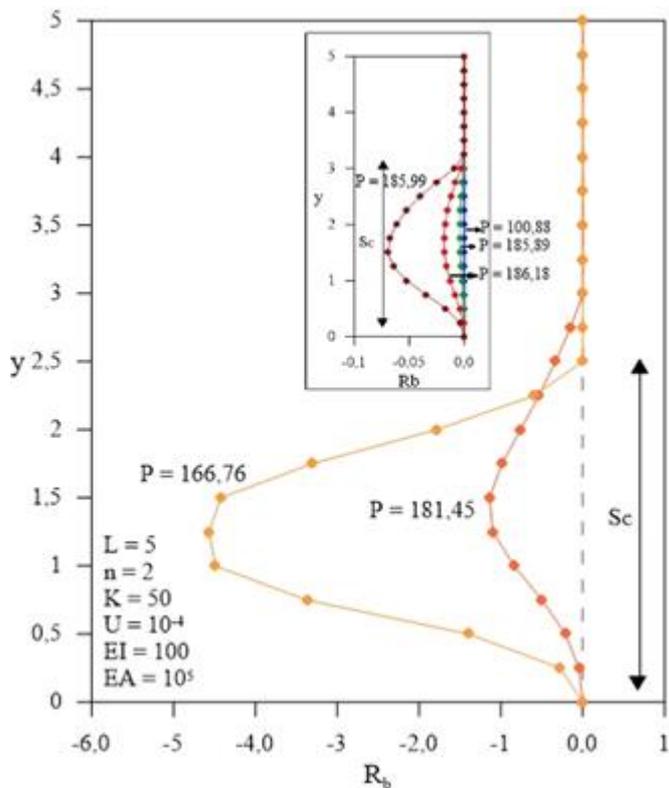


Figura 4.17 Trajetórias de equilíbrio para a coluna biapojada considerando diferentes valores de K

A Figura 4.18 evidencia o caso da base elástica para $K = 50$, destacando seu comportamento pós-crítico. A carga crítica é alcançada no ponto A quando $P_{cr} = 186,18$; o ponto B destaca o ponto de mínimo e de parada da trajetória de equilíbrio no valor $P_{\min} = 166,76$ (Figura 4.18(a)). As deformadas da estrutura para esse mesmo valor de $K = 50$ são mostradas na Figura 4.18(b) para cargas P próximas ao valor da carga crítica, $P_{cr} = 186,18$. Percebe-se que o comportamento estrutural se manteve próximo ao imposto pela deformação inicial de $n = 2$ e $U = 10^{-4}$. Após se atingir o valor da carga crítica em $P_{cr} = 186,18$, há um aumento significativo das deformações e um pequeno declínio da carga, caracterizando o comportamento pós crítico. Analisando a reação da base elástica, R_b , na Figura 4.18(c), é possível identificar claramente as regiões com e sem contato. Nas regiões de descolamento entre os corpos, R_b é nula.



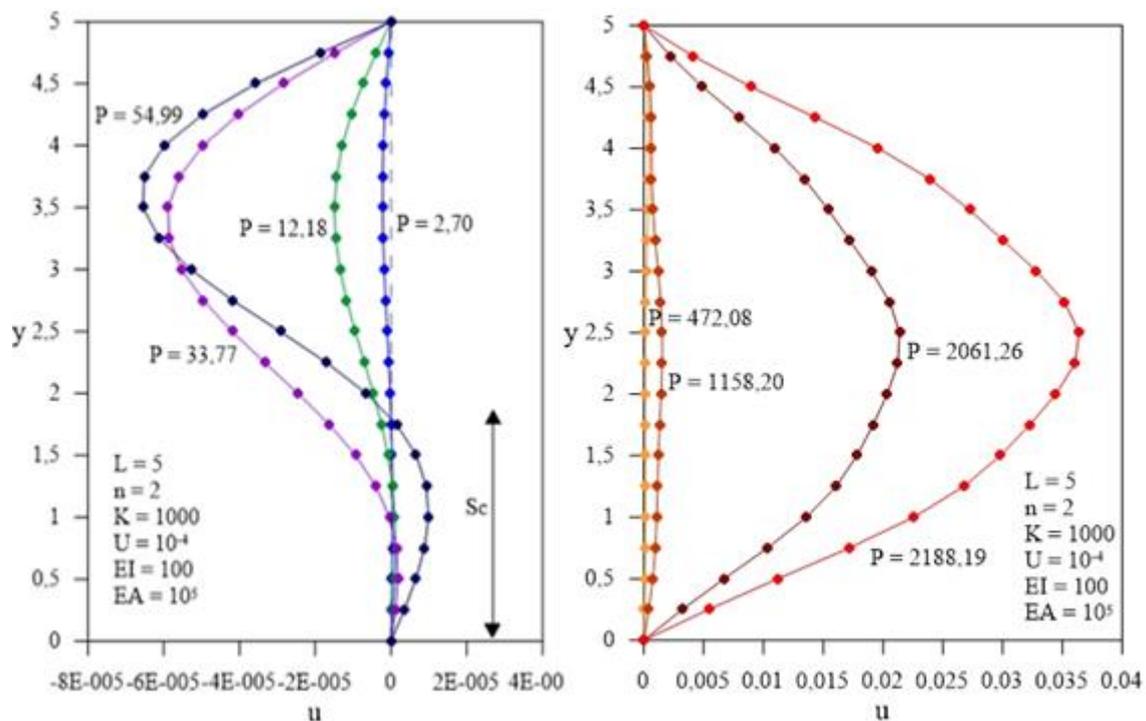
(a) Trajetórias de equilíbrio da estrutura, $K = 50$ (b) Deformada da estrutura, $K=50$



(c) Reação da base elástica R_b , $K = 50$

Figura 4.18 Trajetória de equilíbrio, deformada e reação da base, $K = 50$

Ao analisar a configuração deformada para a coluna em contato unilateral com a base elástica de $K = 1000$, observa-se, através da Figura 4.19(a), que a configuração da imperfeição geométrica inicial senoidal inicial se mantém somente no início da trajetória de equilíbrio, onde a carga ainda é muito pequena ($P = 54,99$), em comparação com a carga máxima ($P = 2189,19$) encontrada para essa coluna (Figura 4.19(b)). Com o avanço na curva de equilíbrio, para valores de carregamento superiores a $P = 54,99$, observa-se que a barra passa a apresentar configuração semelhante ao caso onde a imperfeição geométrica inicial é de $n = 1$ (Figura 4.13). Ou seja, os efeitos das imperfeições geométricas inicialmente impostos são rapidamente alterados devido à grande rigidez da base elástica. Por fim, fechando esta seção, com a Figura 4.20, é possível identificar as regiões de contato, Sc , da coluna com a base para valores próximos do carregamento máximo obtido ($P = 2189,99$). Devido à mudança de configuração deformada da estrutura, as regiões de contato passam a crescer à medida que aumenta o carregamento da estrutura.

(a) Configurações deformadas até $P = 54,99$

(b) Outras configurações deformadas

Figura 4.19 Configurações deformadas da coluna, $K = 1000$

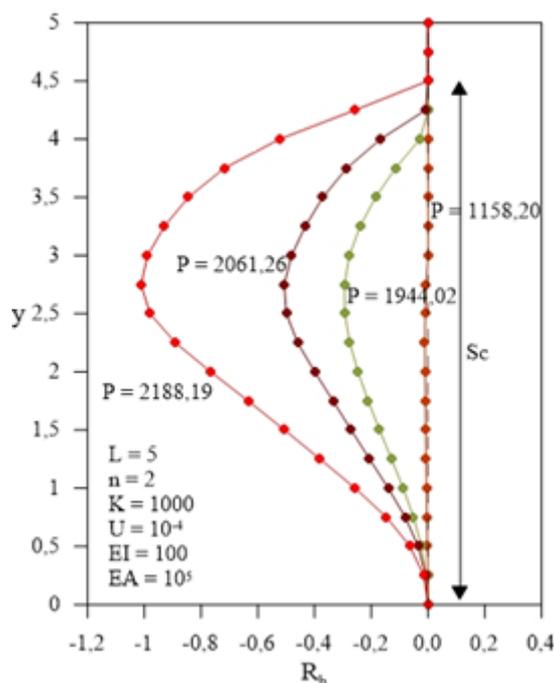


Figura 4.20 Reação da base elástica R_b , $K = 1000$

4.4 Arcos com Restrições Unilaterais de Contato

Serão analisados a seguir três problemas de estabilidade de arcos com características geométricas fortemente não lineares. São consideradas as restrições unilaterais de contato entre a base e a estrutura. Um dos principais objetivos é apresentar, analisar e comparar as trajetórias de equilíbrio obtidas.

A análise de arcos com restrições unilaterais com o meio adjacente é objeto recorrente de estudo de pesquisadores das áreas de estruturas e geotecnia. O estudo realizado por Silveira *et al.* (2013) abordou uma solução numérica para a análise do equilíbrio e estabilidade de estruturas esbeltas, tais como arcos e anéis, em contato unilateral com o meio. Os exemplos numéricos realizados ressaltam a influência da posição da base elástica e sua rigidez no comportamento não linear de estruturas curvas. Os problemas envolvendo arcos solucionados por Silveira *et al.* (2013) foram reproduzidos no presente trabalho e são detalhados nas Subseções 4.4.1 e 4.4.2.

Pires (2012) descreveu uma metodologia numérica para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995). Com essa metodologia, a autora apresenta diversos exemplos numéricos envolvendo a estabilidade de arcos com comportamento geometricamente não linear. Na Subseção 4.4.3 um desses exemplos é reproduzido com a adição da base elástica, admitindo-se as restrições unilaterais de contato.

Através da comparação dos resultados do presente trabalho com o estudo desses e de outros autores, foi possível calibrar os modelos e validar, mais uma vez, a metodologia numérica proposta nesta dissertação.

4.4.1 Estrutura de Suporte da Base Elástica

Na Figura 4.21 é apresentado o problema de contato a ser resolvido. Trata-se de um arco esbelto com as seguintes propriedades geométricas: $R = 100$, $\theta = 10^\circ$, $EI = 1,40$ e $EA = 420$ (unidades compatíveis). Esse arco encontra-se em contato com a base elástica de Winkler, suportando essa base.

O problema estrutural real, representando um túnel, é mostrado na Figura 4.21(a) e a representação do solo seguindo o modelo de Winkler é feito na Figura 4.21(b). Finalmente, a Figura 4.21(c) ilustra a modelagem matemática em elementos finitos (EFs) aqui utilizada.

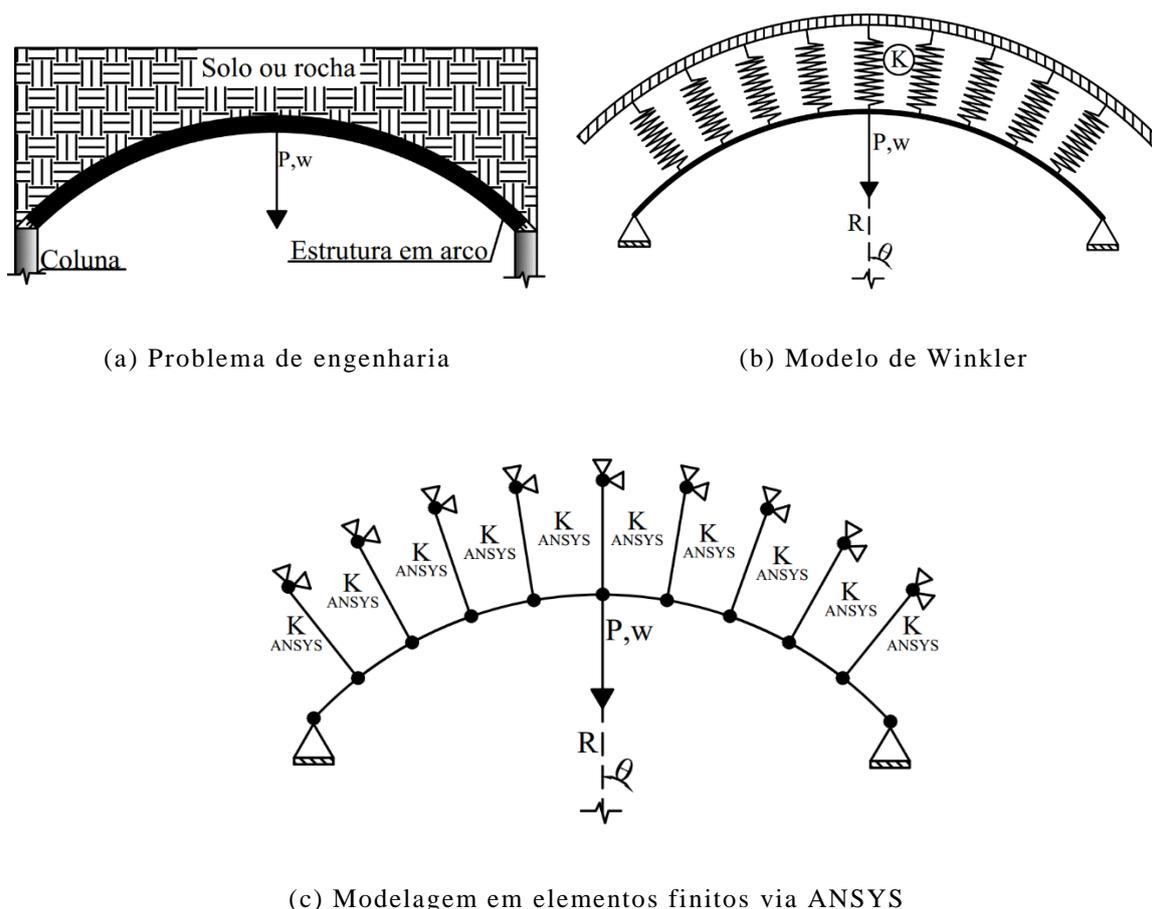


Figura 4.21 Arco suportando a base elástica

O padrão de deformação que se espera para o problema encontra-se na Figura 4.22. A medida que se aplica um carregamento concentrado no centro desse arco, surgem duas regiões de tração da base elástica e uma região central de descolamento entre os corpos. Essa possibilidade de descolamento é característica das restrições de contato unilaterais, ou seja, a base elástica só reage às solicitações de compressão e a região de contato não é conhecida previamente.

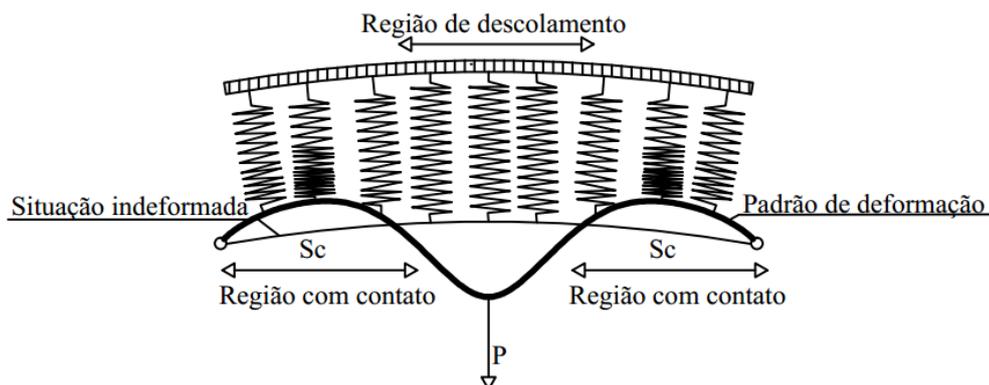


Figura 4.22 Padrão de deformação do arco

Como já visto nas seções anteriores deste capítulo, K representa a rigidez da base elástica no modelo contínuo de Winkler. K_{ANSYS} ($K_{ANSYS} = KL_{elem}$) é a rigidez de cada elemento de mola adotado. Optou-se pelo tratamento de resultados em formato adimensional, de modo que o valor da rigidez da base elástica no modelo de Winkler K e a carga P aplicada no centro do arco são representados da seguinte forma:

$$k = \frac{KR^4}{EI} \quad (4.8)$$

$$\Lambda = \frac{PR^2}{EI} \quad (4.9)$$

Inicialmente, foi realizada uma análise paramétrica através da variação do número de EFs. O intuito dessa análise é avaliar a melhor resposta, relacionada às trajetórias de equilíbrio, para as diferentes malhas adotadas, ou seja: 10, 20 e 40 EFs para o caso do arco abaixo de uma base elástica flexível ($k = 10^5$). Através da Figura 4.23 é possível observar que com 40 elementos pode-se obter uma resposta mais satisfatória. Testes foram realizados

com um refinamento ainda mais acentuado, entretanto, não foram observados diferenças relevantes nos resultados. Dessa forma, utilizou-se a modelagem com 40 elementos como base para as demais análises, incluindo aquelas das Subseções 4.4.2 e 4.4.3.

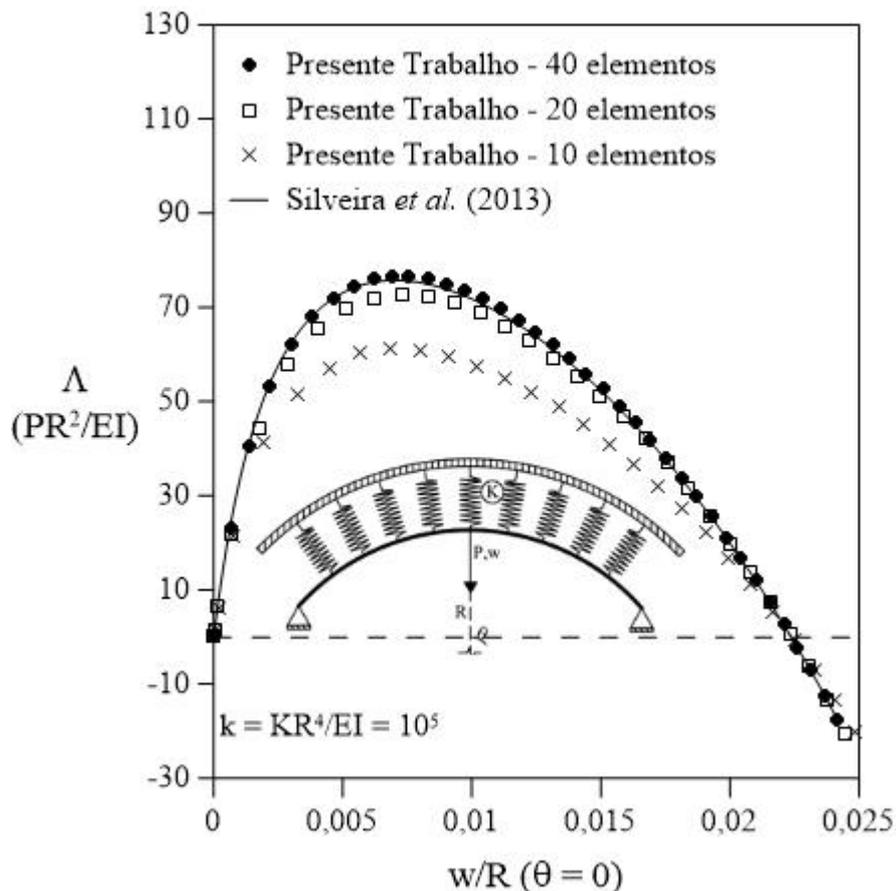


Figura 4.23 Trajetória de equilíbrio para 10, 20 e 40 EFs

Na Tabela 4.4 são apresentados os valores para a carga limite máxima ($\Lambda_{\text{máx}}$) com as diferentes malhas adotadas. Os resultados obtidos aqui são comparados com aquele de Silveira *et. al* (2013) que encontrou o valor da carga crítica $\Lambda_{\text{máx}} = 75,60$.

Tabela 4.4 Carga crítica $\Lambda_{\text{máx}}$ ($P_{\text{máx}} R^2/EI$) para diferentes malhas de EFs ($k = 10^5$)

Número de elementos	$\Lambda_{\text{máx}}$ Presente Trabalho	Variação (%)
10	61,15	19,11%
20	72,47	4,14%
40	76,63	0,85%
Valor de referência: $\Lambda_{\text{máx}} = 75,60$ (Silveira <i>et al.</i> , 2013)		

A Figura 4.24 apresenta as trajetórias de equilíbrio da estrutura para diferentes valores de rigidez k da base. Foram estudados quatro casos: $k = 0$ (inexistência de base elástica); $k = 10^5$ (base elástica flexível); $k = 10^7$ (base elástica semi-rígida); e $k = 10^9$ (base elástica rígida).

Para bases elásticas flexíveis os resultados encontrados foram bastante próximos (quase coincidentes) daqueles encontrados para o caso de base nula ($k = 0$). Com $k = 0$, o valor da carga crítica é $\Lambda_{\text{máx}} = 76,63$. Ao se introduzir a base elástica, para o valor de $k = 10^5$, o valor da carga limite máxima sofreu uma pequena alteração, passando a ser $\Lambda_{\text{máx}} = 76,24$. Com o aumento da rigidez da base elástica o comportamento do caminho de equilíbrio sofre alterações, com acréscimos no valor da carga crítica. Para $k = 10^7$, por exemplo, a carga crítica foi de $\Lambda_{\text{máx}} = 94,04$ e para $k = 10^9$ foi de $\Lambda_{\text{máx}} = 104,17$. Não foram observadas mudanças no valor dessa carga ao aumentar ainda mais a rigidez, tendo o valor de $\Lambda_{\text{máx}} = 104,17$ como limite.

Os resultados encontrados para a carga limite máxima $\Lambda_{\text{máx}}$ estão na Tabela 4.5. Observa-se através dessa tabela e da Figura 4.24 que a metodologia numérica proposta, via ANSYS, pode ser usada com sucesso para esse tipo de problema.

Tabela 4.5 Carga limite máxima $\Lambda_{\text{máx}}$ ($P_{\text{máx}} R^2/EI$) para diferentes valores de k da base

k	$\Lambda_{\text{máx}}$ Presente Trabalho	$\Lambda_{\text{máx}}$ Silveira <i>et al.</i> (2013)	Varição (%)
0	76,63	76,20	0,56%
10^5	76,24	75,60	0,85%
10^7	94,04	93,00	1,12%
10^9	104,17	103,00	1,14%

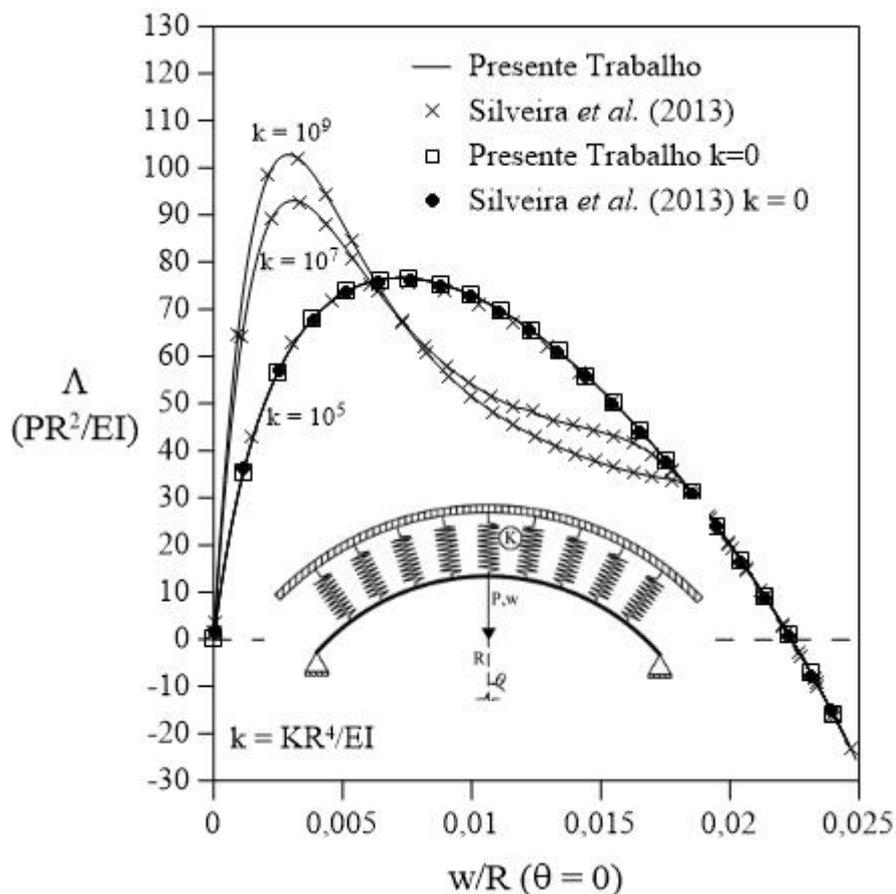


Figura 4.24 Trajetória de equilíbrio do arco para diferentes valores de rigidez k da base

As configurações deformadas do arco para valores diferentes de carga são mostradas na Figura 4.25. Foram comparadas as deformações para o caso da base flexível ($k = 10^5$) e da base rígida ($k = 10^9$). Pode ser observado que a dimensão da região de contato entre os corpos, S_c , se altera em função da rigidez da base. No entanto, observa-se que quanto mais flexível for a base, maior é a variação da perda de contato.

Através dessa figura é também possível analisar a influência do carregamento na deformação da estrutura. Ao se atingir a carga limite máxima ($\Lambda_{\text{máx}} = P_{\text{máx}} R^2/EI$), segue-se para carregamentos cada vez menores ($\Lambda = PR^2/EI$), com um aumento significativo da configuração deformada do arco. A região de contato S_c tende a diminuir cada vez mais até que se atinja o completo descolamento dos corpos.

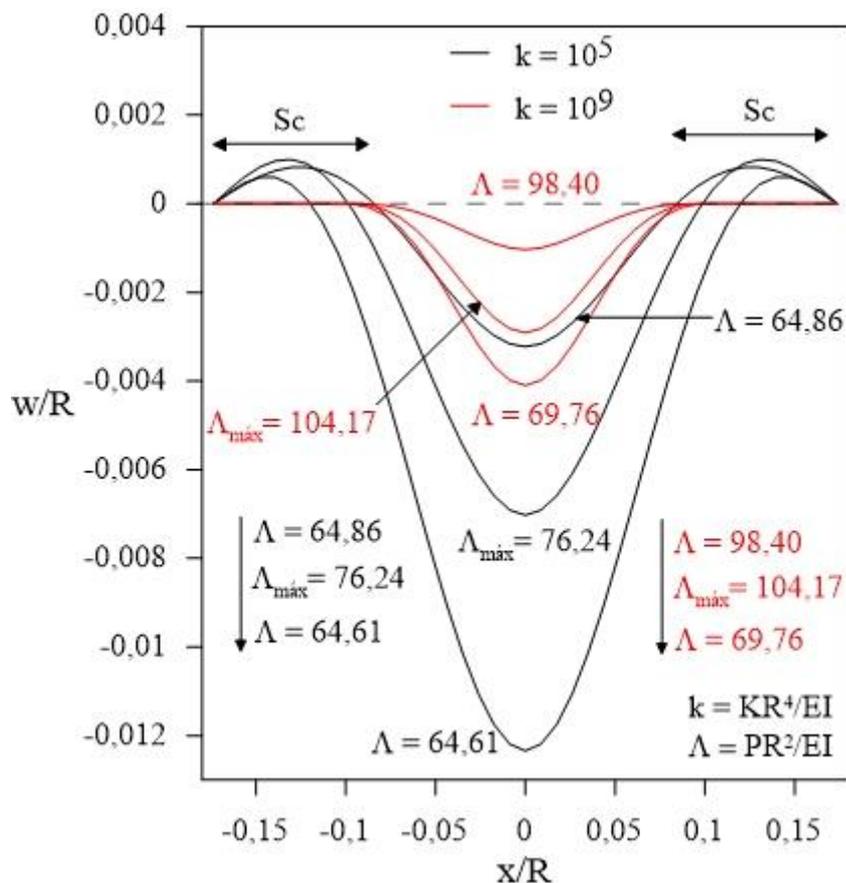


Figura 4.25 Configurações deformadas para $k = 10^5$ e $k = 10^9$

4.4.2 Estrutura Suportada pela Base Elástica

O arco estudado possui as mesmas propriedades geométricas que aquele da subseção anterior, porém agora ele é suportado pela base elástica. A Figura 4.26(a) traz o problema de engenharia envolvendo o elemento estrutural e o solo ou rocha que, na Figura 4.26(b), é representado pelo modelo contínuo de Winkler. O modelo de elementos finitos adotado, via ANSYS (2009), encontra-se na Figura 4.26(c).

É importante reafirmar que K_{ANSYS} ($K_{ANSYS} = KL_{elem}$) representa a rigidez de cada elemento de mola utilizado. Assim como na Subseção 4.4.1 os resultados foram tratados em formato adimensional (Equações (4.8) - (4.9)).

A estabilidade e as deformações desse arco foram avaliadas considerando a não linearidade geométrica da estrutura e as restrições unilaterais de contato entre os corpos. As respostas obtidas nesta subseção foram comparadas, mais uma vez, com Silveira *et al.* (2013). Comparou-se também os resultados com a solução modal proposta por Silveira (1995), que resolveu o mesmo problema.

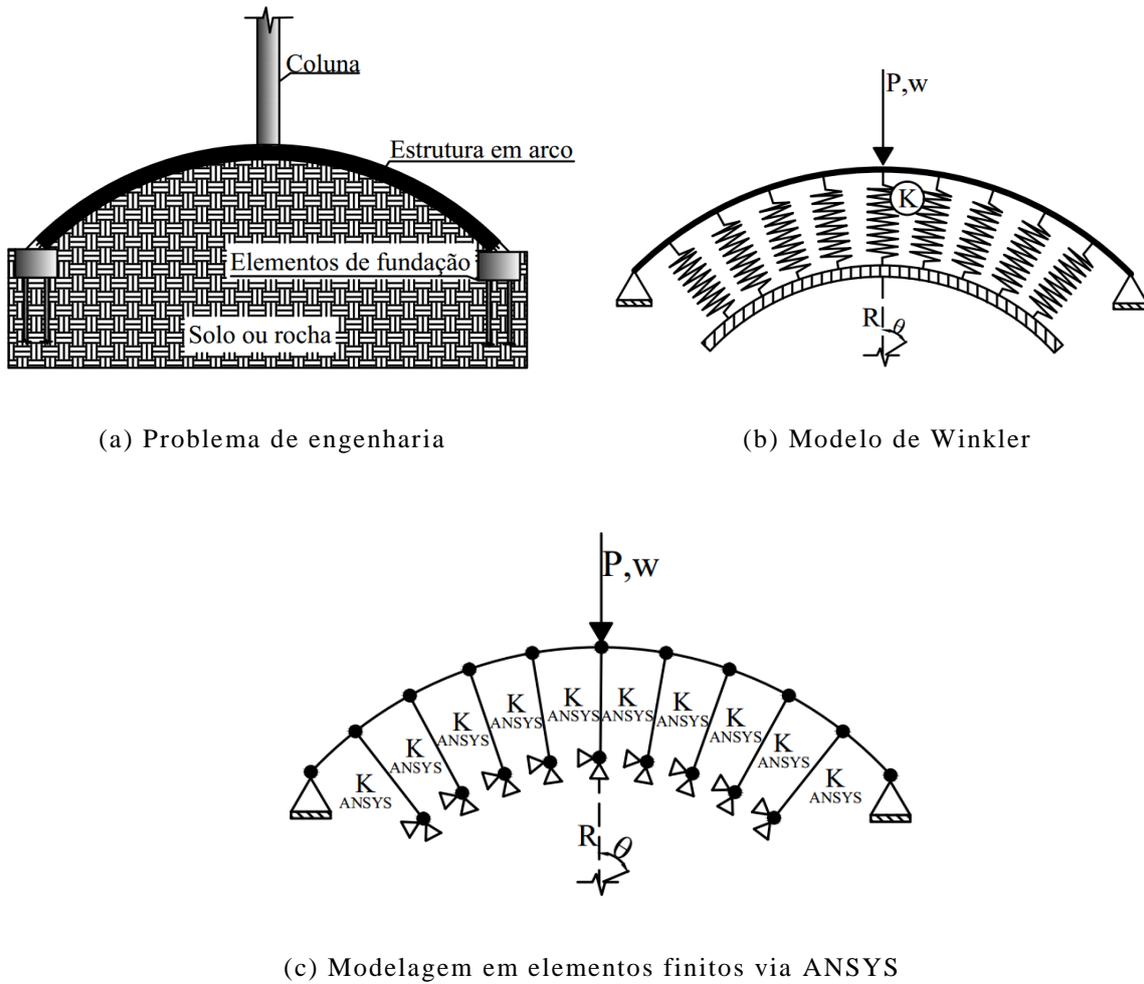


Figura 4.26 Arco suportado pela base elástica

O comportamento esperado da deformada da estrutura encontra-se na Figura 4.27. As respostas às solicitações de carregamento ocorrem de maneira inversa daquela observada na Subseção 4.2.1. Surgem, portanto, duas regiões de descolamento entre os corpos e uma região central em que a base elástica sofre compressão.

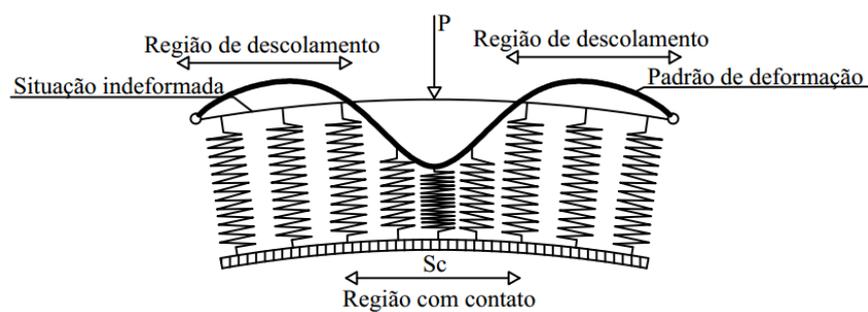


Figura 4.27 Padrão de Deformação

De acordo com a Figura 4.28, onde estão as trajetórias de equilíbrio do arco, pode-se observar que para valores de k inferiores a 10^4 não ocorrem mudanças no comportamento pré e pós-flambagem do arco, seguindo basicamente o que acontece no sistema sem fundação ($k = 0$). Apesar disso, a carga limite máxima sofre uma elevação ao se introduzir a base elástica flexível: para valores de $k = 0$ a carga crítica encontrada foi de $\Lambda_{\text{máx}} = 76,63$ e para $k = 10^4$, $\Lambda_{\text{máx}} = 83,93$.

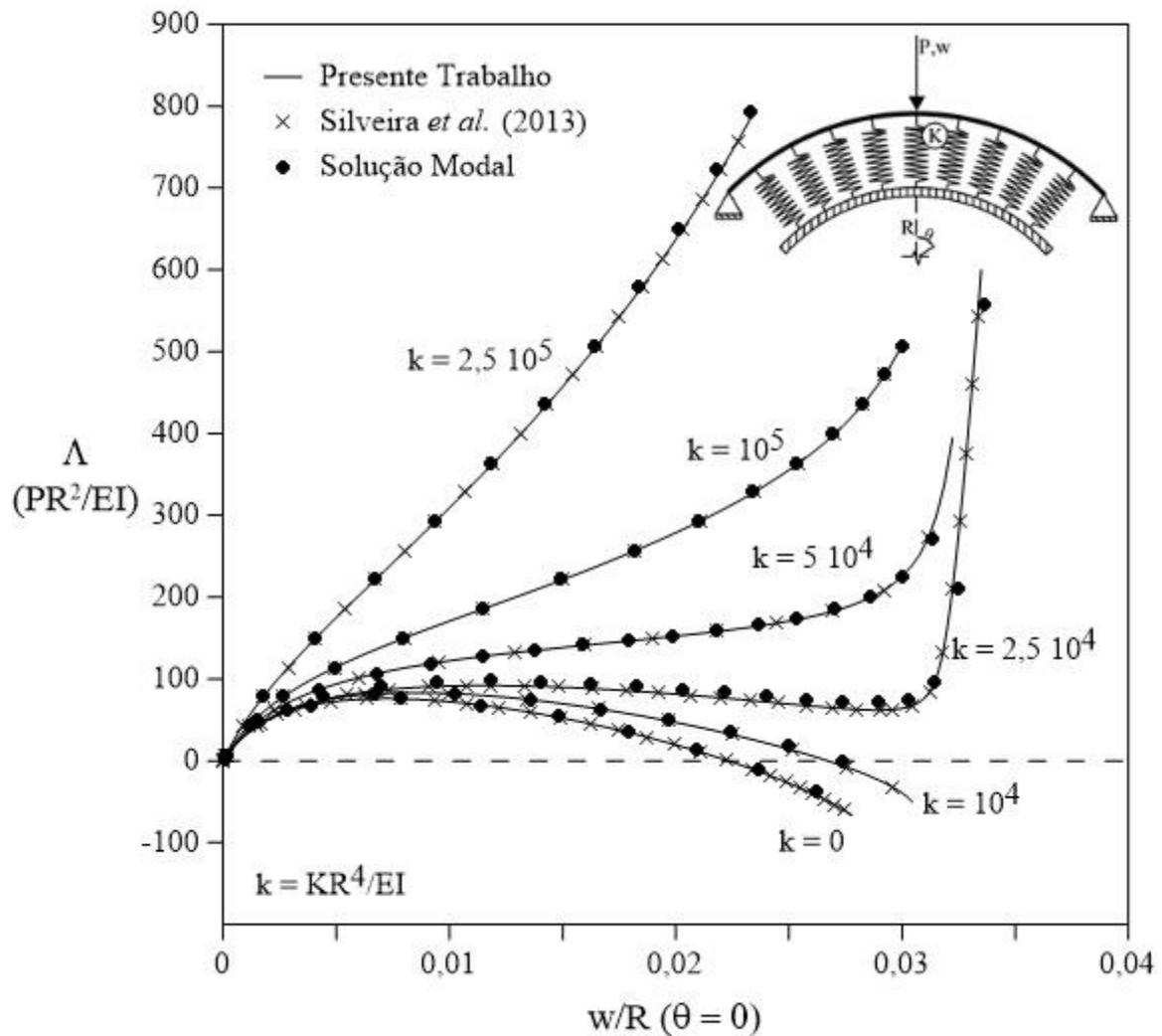


Figura 4.28 Trajetória de equilíbrio do arco para diferentes valores de k da base

Como pode ser observado na Figura 4.28, ao se aumentar um pouco a rigidez da base, $k = 2,5 \cdot 10^4$, o valor máximo da carga passa a ser 98,56 e, após passar por esse ponto crítico, surge um ponto de mínimo ($\Lambda_{\text{mín}} = P_{\text{mín}} R^2/EI$) na trajetória de equilíbrio, $\Lambda_{\text{mín}} = 66,57$. Ao se atingir o ponto de mínimo, o arco salta dinamicamente para uma nova configuração de equilíbrio estável. Vale destacar que foram realizadas análises das trajetórias de equilíbrio

para rigidez da base elástica k com valores superiores a 10^5 , porém, não foram observados quaisquer pontos críticos ao longo da trajetória de equilíbrio, que passou a ter comportamento próximo do linear.

As Tabelas 4.6 e 4.7 fornecem os valores dos pontos limites obtidos no presente trabalho, comparando-os com aqueles apresentados por Silveira *et al.* (2013) e com os resultados obtidos na solução modal de Silveira (1995). Verifique a boa concordância entre esses resultados.

Tabela 4.6 Carga limite máxima $\Lambda_{\text{máx}}$ ($P_{\text{máx}}R^2/EI$) para diferentes valores de k

k	$\Lambda_{\text{máx}}$ Presente Trabalho	$\Lambda_{\text{máx}}$ Silveira <i>et al.</i> (2013)	Variação (%)	$\Lambda_{\text{máx}}$ Solução Modal	Variação (%)
0	76,63	76,20	0,56%	76,01	0,82%
10^4	83,93	83,50	0,51%	83,35	0,70%
$2,5 \cdot 10^4$	98,56	98,20	0,37%	98,03	0,54%

Tabela 4.7 Carga limite mínima $\Lambda_{\text{mín}}$ ($P_{\text{mín}}R^2/EI$) para $k = 2,5 \cdot 10^4$

k	$\Lambda_{\text{mín}}$ Presente Trabalho	$\Lambda_{\text{mín}}$ Silveira <i>et al.</i> (2013)	Variação (%)	$\Lambda_{\text{mín}}$ Solução Modal	Variação (%)
$2,5 \cdot 10^4$	66,57	67,00	-0,64%	71,10	-6,37%

A análise da configuração deformada do arco em contato com uma base elástica flexível ($k = 10^4$) é apresentada na Figura 4.29. Através dessa figura é possível observar o comportamento pré e pós-flambagem da estrutura, com a região de contato S_c cada vez maior a medida que se aumenta a carga. Após o ponto limite de carga, observa-se o contato quase que total entre os corpos.

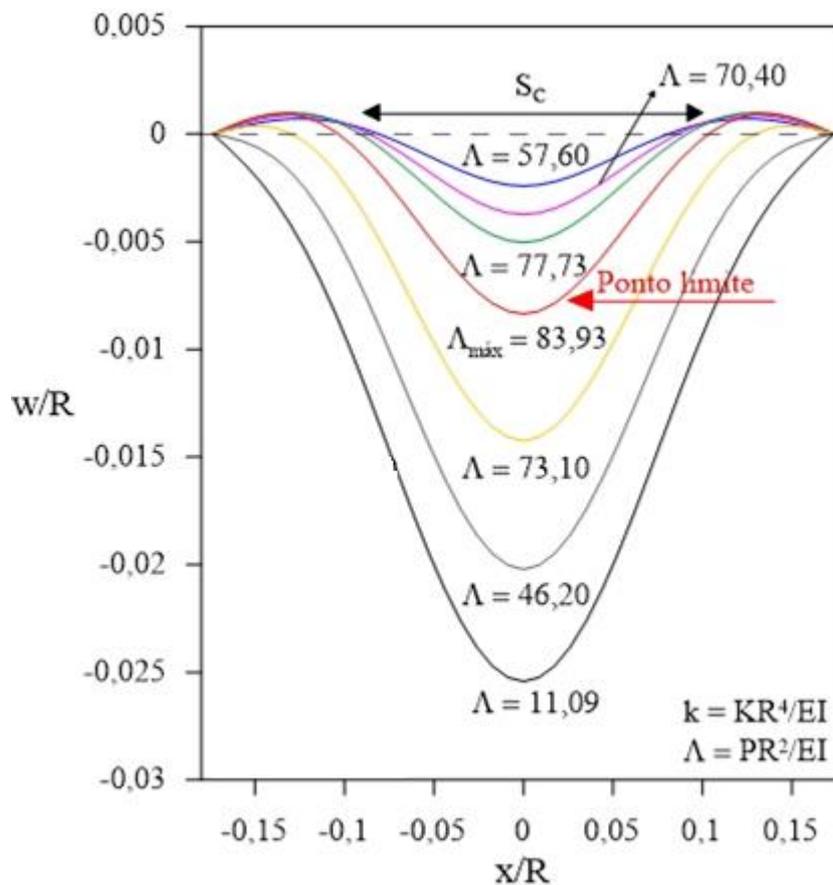
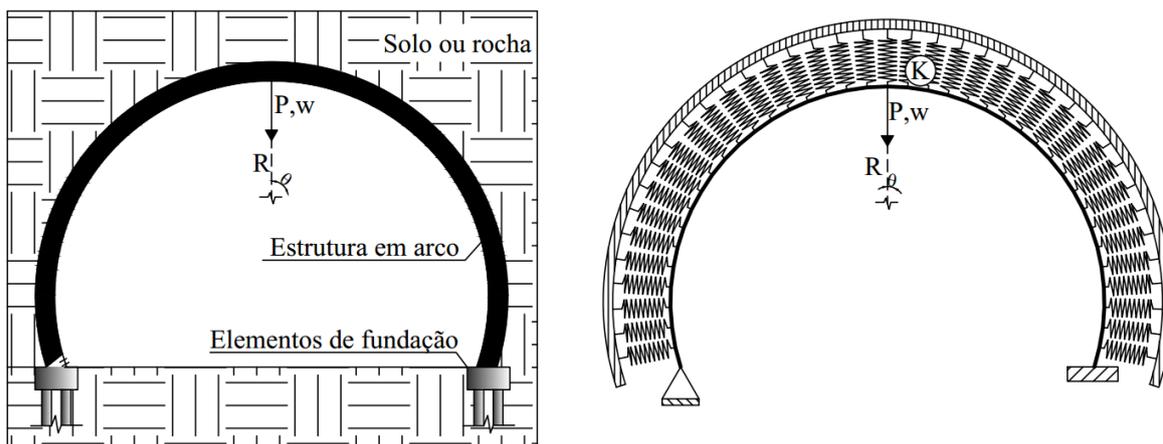


Figura 4.29 Configurações deformadas do arco, $k = 10^4$

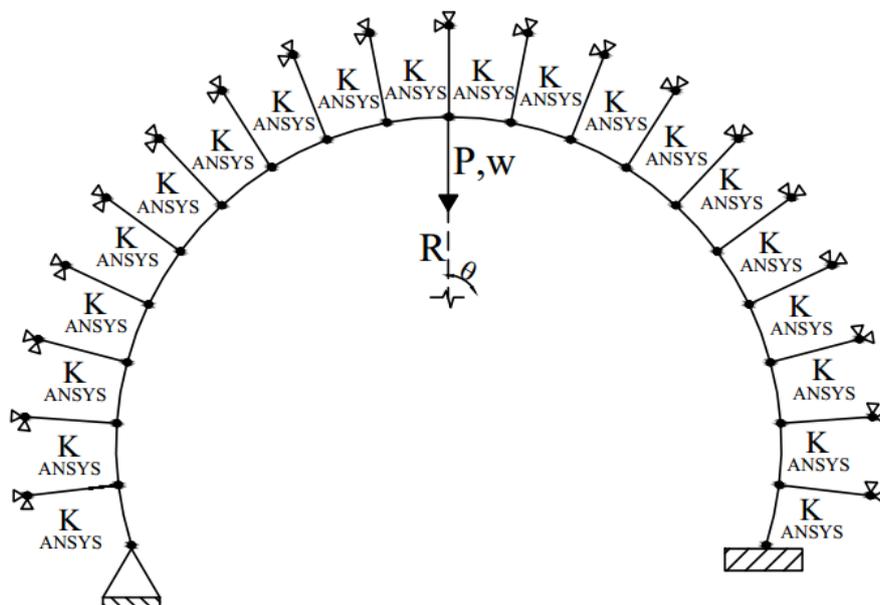
4.4.3 Arco Circular Suportando a Base Elástica

O arco estudado nesta subseção é apresentado na Figura 4.30. Suas propriedades geométricas, em unidades compatíveis, são: $R = 100$, $\theta = 235^\circ$, $EA = 1200$ e $EI = 100$. Esse mesmo problema foi estudado anteriormente por Pires (2012), Kouhia e Mikkola (1989) e Wood e Zienkiewicz (1977), mas sem considerar a base elástica. Os resultados apresentados por esses autores foram utilizados para a calibração do modelo e são mostrados na Figura 4.31.



(a) Problema de engenharia

(b) Modelo de Winkler



(c) Modelagem em elementos finitos via ANSYS

Figura 4.30 Arco circular suportando a base elástica

No presente trabalho, utilizou-se uma malha de 40 elementos finitos para a modelagem do arco rotulado-engastado. Inicialmente um estudo sem a base elástica ($k = 0$) foi realizado para validação dos resultados. Por fim, foram realizadas análises considerando o arco circular como sendo a estrutura de suporte da base elástica, para diferentes valores de rigidez k (10^2 ; 10^3 ; 10^4 e 10^5). Novamente, os resultados foram tratados de forma adimensional (Equações (4.8) - (4.9)) e K_{ANSYS} ($K_{ANSYS} = KL_{elem}$) é a rigidez de cada elemento de mola adotado (Figura 4.30(c)).

Na Figura 4.31 pode ser observada a boa concordância dos resultados aqui obtidos com aqueles estudos realizados anteriormente, sem considerar a base elástica ($k = 0$). Os pontos limites de carga (pontos A e B indicados na figura) são ultrapassados de forma eficiente, e o traçado completo da trajetória de equilíbrio é obtido, assim como apresentado em Pires (2012). Na curva carga-deslocamento é possível observar que os valores obtidos para o ponto crítico foram inferiores aos dos outros autores.

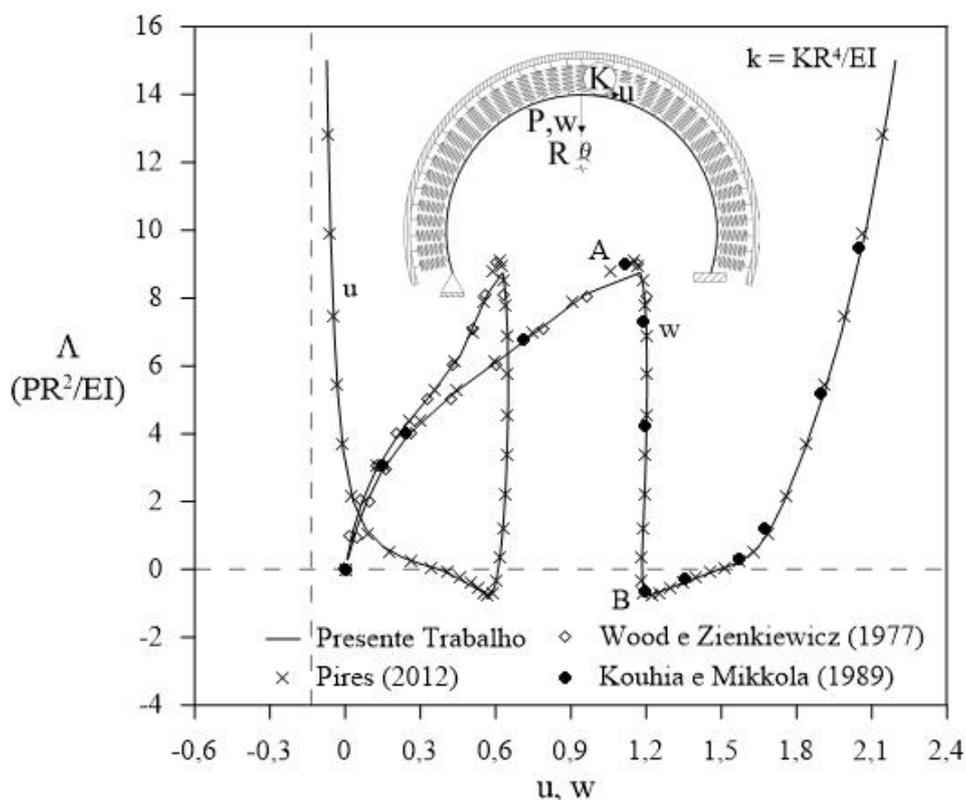


Figura 4.31 Trajetória de equilíbrio do arco para $k = 0$

Com a introdução da base elástica, a resposta do arco é alterada de forma considerável, ilustrado na Figura 4.32, onde são apresentadas as trajetórias de equilíbrio da estrutura para diferentes valores de k da base. Note que para a rigidez da base elástica k igual a 10^2 são identificados dois pontos limites: o ponto C, correspondente a $\Lambda_{\text{máx}} = 12,8$; e o ponto D, $\Lambda = 4,20$. A partir de $k = 10^3$, as trajetórias de equilíbrio se caracterizam por apresentarem apenas um ponto limite, sendo o ponto E referente a $\Lambda_{\text{máx}} = 21,30$ ($k = 10^3$), o ponto F a $\Lambda_{\text{máx}} = 32,50$ ($k = 10^4$) e o ponto G a $\Lambda_{\text{máx}} = 37,90$ ($k = 10^5$).

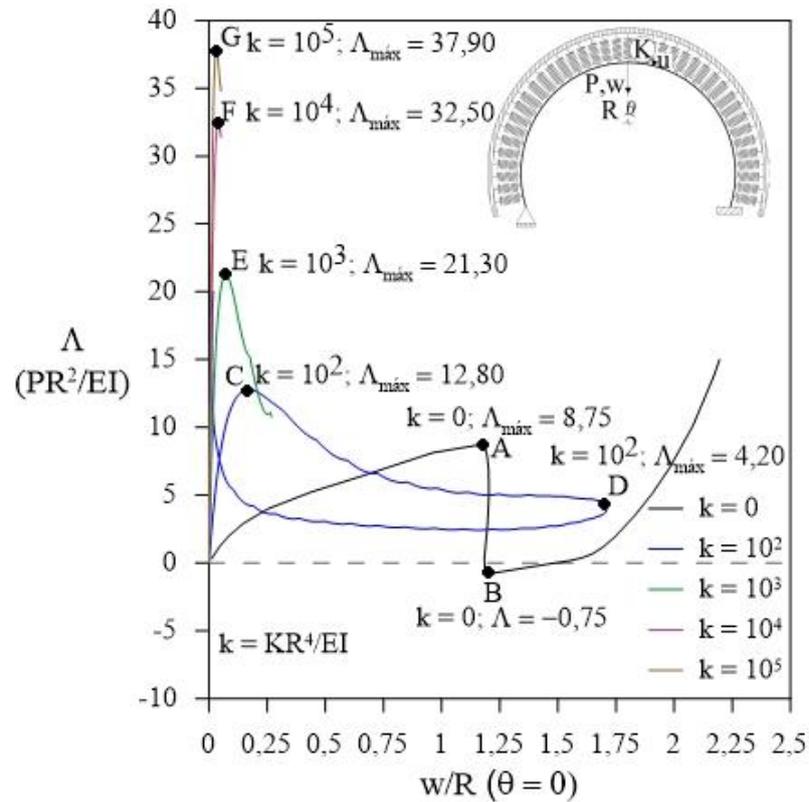


Figura 4.32 Trajetória de equilíbrio do arco para diferentes valores de k

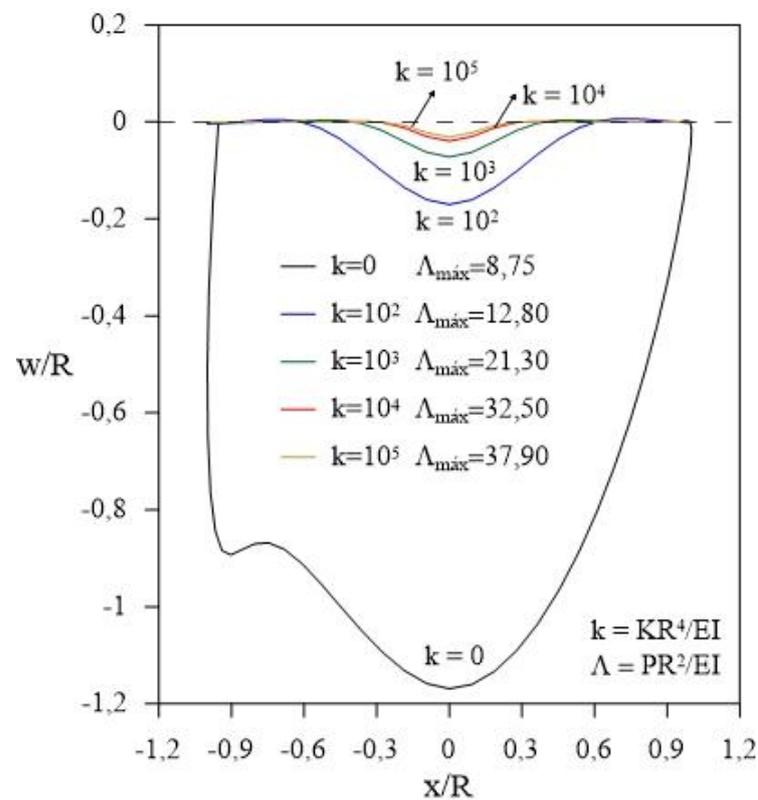


Figura 4.33 Configurações deformadas do arco para diferentes valores de k

Na Figura 4.33 estão as configurações deformadas da estrutura no momento em que o ponto limite de máximo é atingido para os diferentes valores de k (pontos A, C, E, F e G na Figura 4.32). Quando $k = 0$, a estrutura sofre grandes deslocamentos; com a introdução da base elástica, a região central do arco passa a perder contato com a base enquanto surgem pequenas regiões de compressão nas extremidades, com comportamento similar àquele observado na Subseção 4.4.1.

4.5 Anel com Restrições Unilaterais de Contato

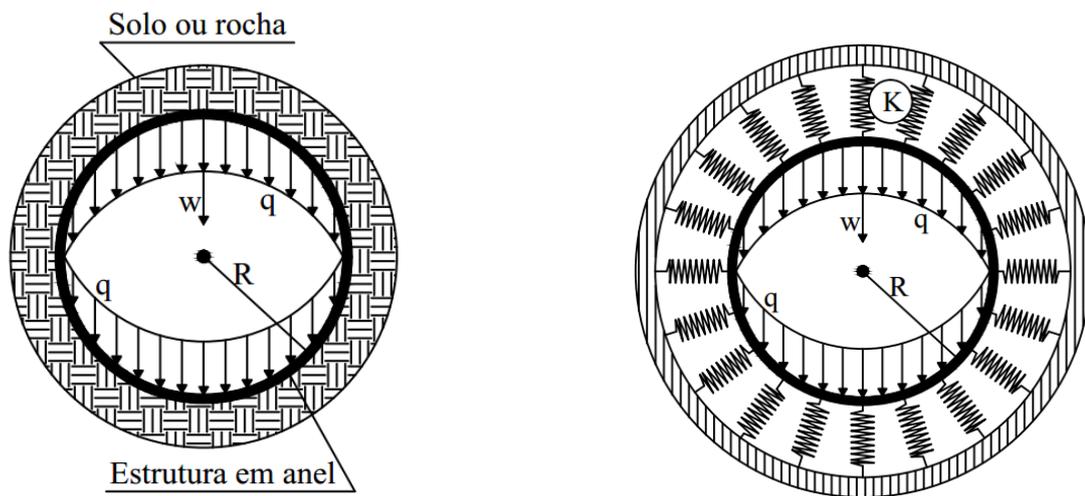
O último exemplo a ser abordado neste capítulo trata de um anel circular confinado em um meio elástico (solo ou rocha). O exemplo clássico de aplicação de anéis confinados é o das tubulações enterradas. Movimentações do solo e grandes carregamentos em superfície próxima a essas tubulações podem gerar deformações significativas e até levar ao seu colapso, por isso é importante fazer o estudo de sua estabilidade verificando a influência do meio.

Nesta seção é apresentado o anel a ser estudado e os resultados obtidos através das análises realizadas. Como nos exemplos anteriores: não se conhece *a priori* a região de contato entre os corpos devido às restrições unilaterais de contato; a não linearidade geométrica da estrutura é considerada. Essas são as duas fontes de não linearidade do problema.

O anel circular confinado é apresentado na Figura 4.34. Devido à simetria do problema, optou-se pela modelagem de apenas metade da estrutura, utilizando 50 EFs. A base elástica rígida é modelada a partir dos conceitos do modelo contínuo de Winkler e sua adaptação ao modelo de molas discretas (Figura 4.34 (b) e (c)). O carregamento (q) é aplicado ao longo de toda a estrutura, conforme ilustrado nessa figura. A seção transversal do anel é retangular e os parâmetros geométricos e físicos considerados, em unidades compatíveis, são: $EI = 30 \times 10^3$, $EA = 36 \times 10^6$ e $R = 10$. A forma como esse anel, dada as suas condições de contorno e carregamento, se deforma é apresentada na Figura 4.34(d). Veja que a região de perda de contato se localiza na extremidade superior do eixo de simetria do anel. Esse padrão de deformação ocorre quando o anel é submetido a uma pressão externa causada pelo movimento da base rígida confinante em direção ao centro do anel (Silveira, 1995).

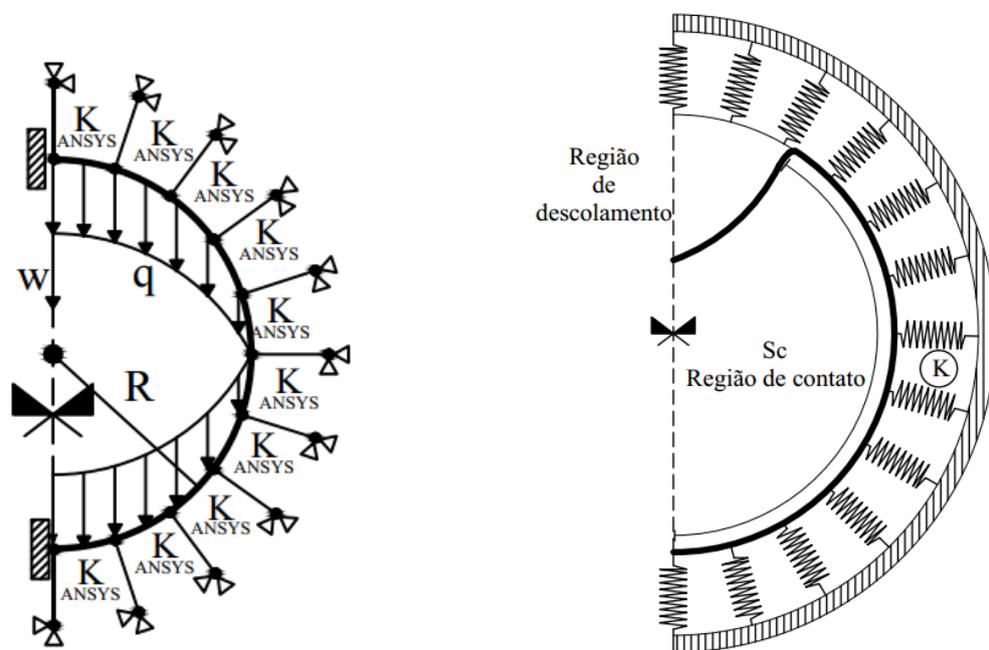
Esse mesmo anel foi objeto de estudos anteriores. O primeiro deles foi realizado por Pian *et al.* (1967) a partir do Método das Diferenças Finitas (MDF). Posteriormente, Stein e

Wriggers (1984) analisaram sua resposta pré-flambagem utilizando uma malha de 16 elementos finitos (EFs) e 100 incrementos de carga. Mais recentemente, Silveira *et al.* (2013) obteve a resposta pós-flambagem dessa estrutura para diversos valores de rigidez do meio elástico. Os resultados obtidos por esses autores no estudo da estabilidade do anel foram utilizados no presente trabalho para validação dos resultados.



(a) Problema de engenharia

(b) Modelo contínuo de Winkler



(b) Modelagem em elementos finitos

(c) Padrão de deformação

Figura 4.34 Anel circular confinado por meio elástico

Assim como fez Silveira *et al.* (2013) e outros pesquisadores, os resultados foram adimensionalizados. O valor da carga q é dado pelo parâmetro Λ ; a variação das deflexões w e u são adimensionalizadas em relação ao raio R do anel; e o valor da rigidez da base, que elástica no modelo contínuo de Winkler é K , fica aqui representado por k . Sendo assim, escreve-se:

$$\Lambda = \frac{qR^3}{EI} \quad (4.10)$$

$$k = \frac{KR^4}{EI} \quad (4.11)$$

Primeiramente, estudou-se a influência da rigidez da base elástica no caminho de equilíbrio da estrutura (Figura 4.35). Através dessa análise, destacam-se as seguintes observações:

- no caso da base elástica com $k = 1200$ (base mais flexível), houve um pequeno salto dinâmico do anel quando o parâmetro de carregamento Λ atingiu o valor de 26,50. Na sequência, a estrutura perdeu capacidade de carga e depois voltou a ter carregamentos crescentes, atingindo configurações de equilíbrio estável;
- as demais curvas de equilíbrio mantiveram o mesmo padrão, ou seja, ao atingir a carga crítica, a estrutura sofre a perda de capacidade de carga (configuração de equilíbrio instável), com o aumento dos deslocamentos;
- os resultados obtidos foram muito próximos daqueles de Silveira *et al.* (2013);
- atenção especial é dada para o caso em que a base elástica confinante é extremamente rígida ($k = 180000$). Nessa situação de base rígida, a Figura 4.36 traz as configurações deformadas da estrutura para pontos da trajetória de equilíbrio em que o anel se encontra em equilíbrio estável (antes de se atingir a carga crítica, $\Lambda = 30,51$ e $\Lambda = 60,04$), equilíbrio (ponto crítico, $\Lambda_{\text{máx}} = 81,77$) e equilíbrio instável (após atingir a carga crítica, $\Lambda = 70,29$ e $\Lambda = 55,15$).

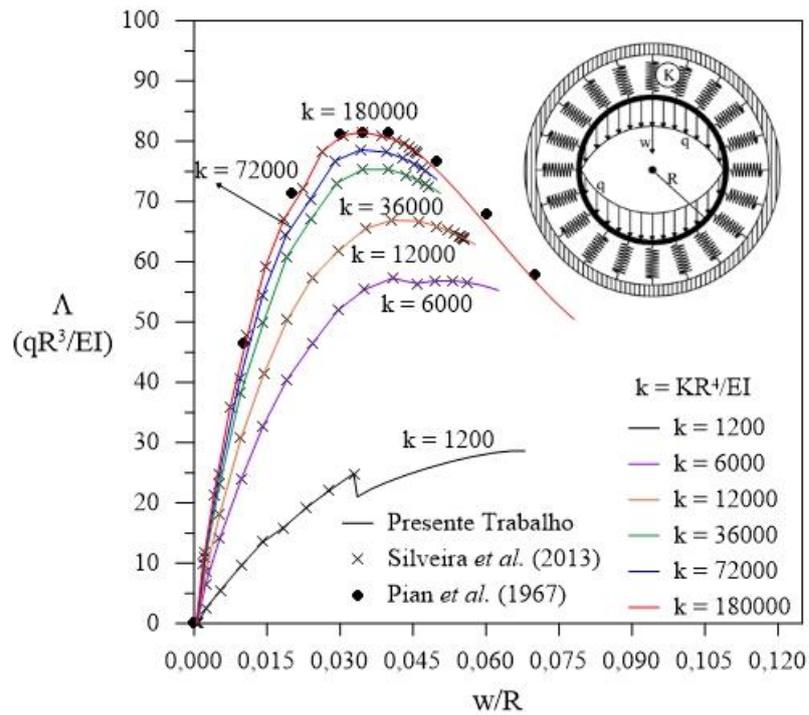


Figura 4.35 Trajetória de equilíbrio do anel circular confinado

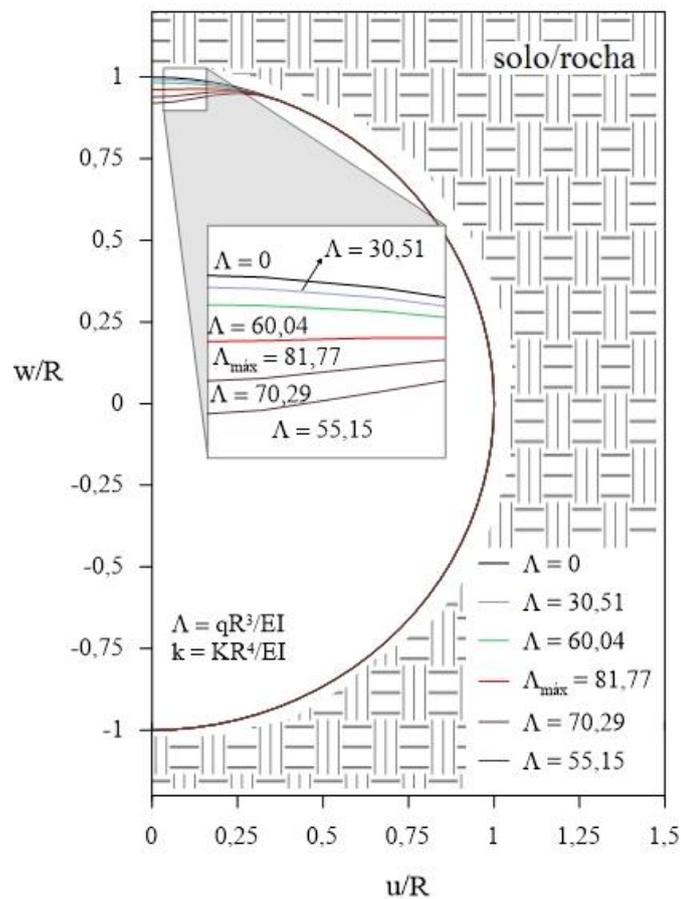


Figura 4.36 Deformada do anel circular confinado em base elástica rígida

Finalmente, na Figura 4.37, está a variação da carga crítica para os diferentes valores de rigidez da base elástica considerados. Para $k = 180000$ foi possível reproduzir os resultados de Pian *et al.* (1967), que considerou o meio confinante rígido, assim como feito também por Silveira *et al.* (2013).

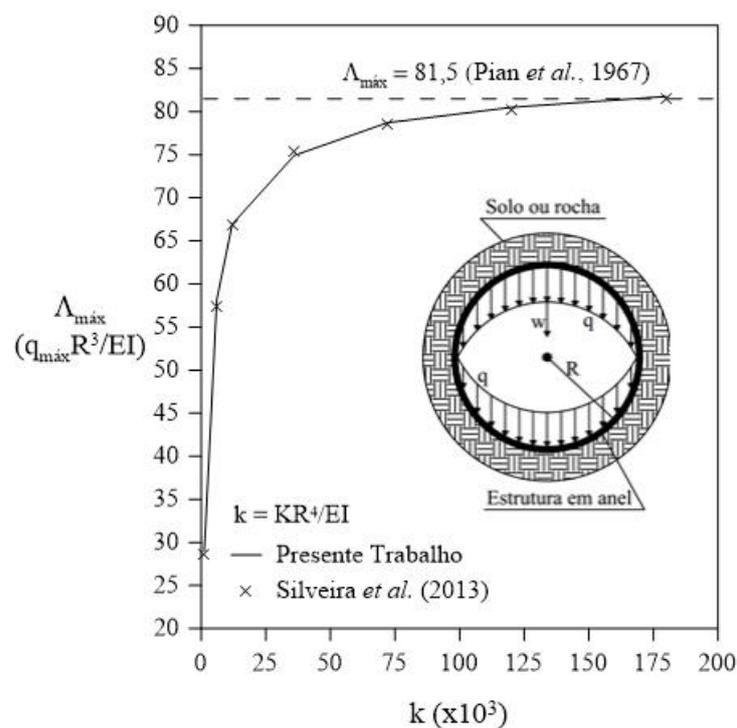


Figura 4.37 Variação do parâmetro de carga crítica, Λ_{\max} , em função da rigidez da base elástica k

Capítulo 5

Conclusões e Sugestões

5.1 Conclusões

Dar continuidade ao desenvolvimento de uma metodologia numérica via plataforma ANSYS (2009) para análise do equilíbrio e da estabilidade de estruturas esbeltas como vigas, colunas, arcos e anéis em contato com o solo/rocha foi o objetivo principal deste trabalho. Para aproximação do comportamento do solo, utilizou-se a base elástica do tipo Winkler e fez-se a adaptação para o emprego de molas discretas na realização das modelagens em elementos finitos utilizando o software ANSYS.

Nos problemas estudados no capítulo anterior foram consideradas as restrições bilaterais e unilaterais de contato entre os corpos. Considerou-se também a não linearidade geométrica da estrutura. Sabe-se que a medida que as estruturas se tornam cada vez mais esbeltas essa não linearidade se torna relevante, dando origem a fenômenos inexistentes em sistemas lineares, como a existência de configurações de equilíbrio estáveis e instáveis e de pontos críticos ao longo da trajetória não linear de equilíbrio.

Com o objetivo de validar metodologia numérica proposta, os resultados obtidos no Capítulo 4 foram comparados com estudos anteriores, inclusive com pesquisas anteriores desenvolvidas no âmbito do PROPEC.

A seguir são apresentadas conclusões gerais relacionadas com a utilização do *software* ANSYS e resultados encontrados na solução de problemas não lineares de equilíbrio e de estabilidade de estruturas em contato com bases elásticas:

- as simulações computacionais desenvolvidas para diferentes estruturas e sistemas de suporte, mostram a versatilidade da metodologia idealizada para análise dos problemas de contato de interesse desta dissertação;
- a facilidade de importação de geometria de problemas para o ANSYS é uma grande vantagem ao se escolher esse programa para a realização de análises estruturais. Com esse procedimento, erros na introdução da geometria do problema são evitados;
- a possibilidade da análise de flambagem linearizada, fornecida pelo *software* ANSYS, torna-se relevante quando não se conhece o caminho não linear de equilíbrio de estruturas, sendo um instrumento inicial para se estabelecer uma análise não linear incremental-iterativa em termos do carregamento aplicado. Além disso, a partir dessa análise de flambagem, pode-se introduzir as imperfeições geométricas (equivalentes aos modos de flambagem ou combinação destes) à estrutura para posteriormente realizar a análise não linear;
- é uma tarefa complicada realizar uma análise não linear corretamente através do *software* ANSYS sem um bom entendimento do seu funcionamento (solver não linear). A análise não linear deve ser totalmente controlada pelo usuário, conforme explicado no Anexo A;
- o tempo de processamento dos problemas envolvendo as restrições unilaterais de contato é, em média, duas vezes superior ao tempo de processamento para problemas de contato bilateral. Entretanto, em nenhum dos problemas estudados, esse tempo foi superior a três minutos em um notebook com processador Intel Core i7 e com 8 GB de memória RAM;
- para se obter a solução de todos os problemas, utilizou-se o método incremental-iterativo, sendo as iterações em cada passo de carga seguindo o método de Newton-Raphson Padrão acoplado à técnica de Comprimento de Arco, permitindo, assim, a variação do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo. Com essa estratégia, foi possível obter as diversas configurações de equilíbrio das estruturas;
- na análise de equilíbrio de vigas e estabilidade de colunas via ANSYS, necessitou-se de uma discretização de malha de pelo menos 10 elementos finitos para obtenção de uma resposta satisfatória;
- ao se analisar os arcos e anéis com restrições unilaterais de contato, foram adotadas malhas de pelo menos 40 elementos finitos para a obtenção de bons resultados.

5.2 Sugestões para Futuras Pesquisas

Para o desenvolvimento de futuras pesquisas, no sentido de dar continuidade a esta dissertação, recomenda-se:

- a introdução da não linearidade física (estrutura e base) nos problemas de contato abordados a partir da metodologia apresentada;
- a introdução do atrito no contato entre os corpos;
- a realização de análises dinâmicas (vibração livre e transientes) lineares e não lineares de problemas de contato utilizando os modelos de elementos finitos desenvolvidos;
- a utilização de outras abordagens na representação do solo, permitindo, assim, a implementação de modelos mais sofisticados;
- a extensão da metodologia numérica desenvolvida aqui via ANSYS para a análise de problemas 3D de estruturas em contato com o solo;
- por fim, a extensão da metodologia numérica proposta para o estudo de placas e cascas com restrições de contato.

Referências Bibliográficas

- Abreu, J.F.A.C., 2016. “*Estudo computacional via ANSYS de vigas, arcos e anéis com restrições de contato impostas por bases elásticas*”, *Dissertação de Mestrado*, PROPEC/Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Ahmed, M.N.H., 2011. “*Effects of Nonlinear Soil-Structure Interaction on Lateral Behavior of Pile Foundations*”, *Kyoto Univesity Research Information Repository*.
- Ai, Z.Y., Han, J., 2009. “*Boundary element analysis of axially loaded piles embedded in a multi layered soil*”, *Computers and Geotechnics*, v.36, pp. 427-434.
- Aljanabi, A.I.M., Farid, B.J.M., e Mohamad Ali, A.A.A., 1990. “*The interaction of plane frames with elastic foundation having normal and shear moduli of subgrade reactions*”, *Comput. Struct.* v. Xi, pp. 1047-1056.
- Alsaleh, A. Shahrour, I., 2009. “*Influence of plasticity on the seismic soil-micropiles-structure interaction*, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 29, pp. 574-578.
- Ansys, 2009. “*User’s Manual for revision 12*”, Swanson Analysis Systems Inc., Houston, PA.
- Bargi, K.S, Hosseuini, R., Tadayon, M.H., Srifian, H., 2011. “*Seismic Response of a Typical Fixed Jacket Type Offshore Platform (SPD1) under Sea Waves*”, *Open Journal of Marine Science*, pp. 36-42.
- Bathe, K.J., e Dvorkin, E.N., 1983. “*On the automatic solution of nonlinear finite element equations*”, *Computers and Structures*, v. 17(5-6), pp. 871-879.

- Birk, C., Behnke, R., 2011. “A modified scaled boundary finite element method for three-dimensional dynamic soil-structure interaction in layered soil”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- Borchani, W., Lajnef, N., Burgueño, R., 2015. “Energum method solution for the postbuckling response of an axially bilaterally constrained beam”, *Mechanics Research Communications MRC*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.10.004>.
- Bottega, W.J., 1989. “On the behavior of an elastic ring within a contracting cavity”, *Int. J. Mech. Sci.*, v. 31, No. 5, pp. 349–357. Pergamon.
- Brush, D.O e Almroth, B.O., 1975. “Buckling of bars, plates and shell”, *International student edition*.
- Budkowska, B.B., Szymezak, C., 1995. “Initial post-buckling behavior of piles partially embedded in soil”, *Computers & Structures*, v. 5, pp. 831-835.
- Celep, Z., Güler, K. e Demir, F., 2011. “Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load”, *Structural Engineering and Mechanics-ASCE*, v. 37, No. 1, pp. 61–77.
- Chai, H., 1998. “The post-buckling response of a bi-laterally constrained column”, *J. Mech. Phys. Solids*. v.46(7), pp.1155–1181.
- Chan, S.K. e Tuba, I.S., 1971. “A Finite Element Method for Contact Problems of Solids Bodies-Part I. Theory and Validation”, *Int. J. Mech. Sci.*, v.13, pp. 615-625.
- Clouteau, D., Cottreau, R., Lombaert, G., 2013. “Dynamics of structures coupled with elastic media – A review of numerical models and methods”, *Journal of Sound and Vibration*.
- Cottle, R. W. e Dantzig, G. B., 1968. “Complementary pivot theory of mathematical programming”, *Linear Algebra Appl.*, v. 1, pp. 103–125, Brunel, UK.
- Crisfield, M.A., 1981. “A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through”, *Computers and Structures*, v. 13, pp. 52-62.

- Crisfield, M.A., 1991. “*Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*”. v. 1, John Wiley and Sons Inc., USA.
- Do, N.A., Dias, D., Oreste, P., Maigre, I.D., 2015. “*2D numerical investigation of segmental tunnel lining under seismic loading*”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 72, pp. 66-76.
- Duncan J.M., Chang C.Y., 1970. “*Nonlinear analysis of stress and strain in soils*”, *JSoil Mech Found Eng Div Proc ASCE*, v.96(5), pp. 1629–53.
- Dutta, S. C. e Roy, R., 2002. “*A critical review on idealization and modeling for Interaction among soil-foundation-structure system*”, *Computers & Structures*, Vol. 80, pp. 1579–1594, Pergamon.
- Filonenko-Borodich M.M.,1940. “*Some approximate theories of elastic foundation*”, *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanica*, v.46, pp. 3–18.
- Francavilla, A. e Zienkiewicz, O.C., 1975. “*A note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems*”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.9, pp. 913-924.
- Galvão, A.S., 2000. “*Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*”, *Dissertação de Mestrado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Guenfoud, S., Bosakov, S.V., Laefer, D.F., 2010. “*A Ritz’s method based solution for the Contact problem of a deformable rectangular plate on na elastic quarter-space*”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 47, pp. 1822-1829.
- Güler, K., 2004. “*Circular elastic plate resting on tensionless Pasternak foundation*”, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, v. 130(10), pp. 1251–1254.
- Gunawan, H., Mikami, T., Kanie S. e Satom., 2005. “*Finite element analysis of cylindrical shells partially buried in elastic foundations*”, *Computer & Structures*, v. 83, pp. 1730–1741, Elsevier.

- Hammoud, M., Duhamel, D., Sab, K., 2010. “*Static and dynamic studies for coupling discrete and continuum media; application to a simple railway track model*”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 47 (2), pp. 276-290.
- Hetényi, M., 1946. “*Beams on Elastic Foundation*”, University of Michigan Press, Mich.
- Holanda, A. S., 2000. “*Análise do Equilíbrio e Estabilidade de Placas com Restrições de Contato*”, *Tese de Doutorado*, Pontifícia Universidade Católica–RJ.
- Horibe, T., e Asano, N., 2001. “*Large deflection analysis of beams on two-parameter elastic foundation using the boundary integral equation method*”, *JSME International Journal*. v.44(2), pp.231–236.
- Jang, T.S., 2013. “*A new semi-analytical approach of large deflections of Bernoulli-Euler-v. Karman beams on a linear elastic foundation: Nonlinear analysis of infinite beams*”, *International Journal of Mechanical Science*.
- Kalavathi, G.N., Muralidhar, 2015. “*Behavior of Piles under Lateral Loading Soil Structure Interaction*”, *Journal of Mechanical and civil Engineering*, v.12, pp. 68-74.
- Kausel E., 2010. “*Early history of soil-structure Interaction*”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v.30, 822-832.
- Kerr, A. D., 1964. “*Elastic and Viscoelastic Foundation Models*”, *J. Appl. Mech.*, ASME, v.31, p.491-498.
- Kim, J.S., Kim, M.K., Jung, S.D., 2015. “*Two-dimensional numerical tunnel model using a Winkler-based beam element and its application into tunnel monitoring systems*”, *Cluster Comput*, Springer.
- Kondner R.B., 1963. “*Hyperbolic stress–strain response: cohesive soil*”, *JSoil Mech Found Eng Div Proc ASCE*, v. 89(1), pp. 115–43.
- Kouhia, R. e Mikkola, M., 1989. “*Tracing the Equilibrium Path Beyond Simple Critical Points*”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28, pp. 2923-2941.

- Krenk, S., 1995. "An orthogonal residual Procedure for non-linear finite element equations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, pp. 823-839.
- Lemke, C. E., 1968. "On Complementary Pivot Theory", *Mathematics of Decision Sciences*, Edts. Dantzig, G. B. e Yenott, A. F., part 1, pp. 95-114, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA.
- Li, Z.M., Zhao, Y.X., 2015. "Nonlinear bending of shear deformable anisotropic laminated beams resting on two-parameter elastic foundations based on an exact bending curvature model", *J. Eng. Mech. ASCE*.
- Liang, F., Zhang, H., Yang, K., 2015. "A variational solution for nonlinear response of laterally loaded piles with elasto-plastic Winkler Spring model", *KSCE Journal of Civil Engineering*, v. 19(1), pp. 74-80.
- Limkatanyu, S., Sae-Long, W., Prachasaree W., Kwon, M., 2014. "Improved nonlinear displacement-based beam element on a two-parameter foundation", *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. Taylor & Francis.
- Machado, F.C.S., 2013. "Análise computacional via MDF de cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato", *Tese de Doutorado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Maciel, F.V., 2012. "Equilíbrio e estabilidade de elementos estruturais com restrições bilaterais impostas por bases elásticas", *Dissertação de Mestrado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Madenci E., Guven, I., 2006. "The Finite Element Method and Applications in Engineering Using Ansys", Springer.
- Maheshwari, B.K., Truman, K.Z., 2004. "3-D finite element nonlinear dynamic analysis for soil-pile-structure interaction", *13th World Conference on Earthquake Engineering*, No. 1570, Vancouver, Canada.
- Máleková V., 2012. "An analysis of contact elements of foundation structures", Scientific-technical union of mechanical engineering.

- Matos Filho, R., Mendonca, A.V, e Paiva, J.B., 2005. “*Static boundary element analysis of piles subjected to horizontal and vertical loads*”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 29, pp. 195–203.
- Medina, C., Padrón, L.A., Aznárez, J.J., Maeso, O., 2015. “*Influence of pile inclination angle on the dynamic properties and seismic response of piled structures*”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 69, pp. 196-206.
- Messast, S., Boumekik, A., Mansouri, M., 2006. “*Static and dynamic response of a pile foundation subjected to a vertical load*”, *Journal of Enineering and Applied Sciences*, v. 1(4), pp. 394-399.
- Mickens, R. E., 2005. “*Advances in the Applications of Nonstandard Finite Differnce Schemes*”, *World Scientific Publishing Co.*, USA.
- Mittelbach, F. R., 2002. “*Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Reservatórios Cilíndricos*”, *Dissertação de Mestrado*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Mittelbach, F. R., 2007. “*Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Dinâmica de Problemas Axissimétricos de Placas Delgadas e Espessas*”, *Tese de Doutorado*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Morfidis, K, e Avramidis, IE, 2002. “*Formulation of a generalized beam element on a twoparameter elastic foundation with semi-rigid connections and rigid offsets*”, *Comput. Struct*; v.80, pp. 1919–34.
- Mullapudi, R., e Ayoub, A.N., 2009. “*Nonlinear finite element modeling of beams on twoparameter foundations. Computers and Geotechnics*”, v.37, pp.334–342.
- Muradova, A.D., Staveoulakis, G.E., 2012. “*Buckling and postbuckling analysis of rectangular plates resting on elastic foundations with the use of the spectral method*”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, pp. 213-220.
- Naggar, M.H.E., Novak, M., 1995. “*Nonlinear lateral interaction in pile dynamics*”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineerig*, v.14, pp. 141-157.

- Naidu, N.R., e Rao, G.V., 1995. “*Stability behaviour of uniform columns on a class of two parameter elastic foundation*”, *Computers and Structures*. v.57, pp. 551-553.
- Nakagawa, M. e Jiang Y., 2003. “*Finite difference analysis considered the characteristic of time dependency for soft rock tunnel*”, *Proceedings of the Symposium on Rock Mechanics*, v. 32, pp.263-268, JST.
- Neto, N.A.G., 2013. “*Análise dinâmica não linear bidimensional de risers*”, *Dissertação de Mestrado*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.
- Nguyen, V.H., Duhamel, D., 2008. “*Finite elemento procedures for nonlinear structures in moving coordinates. Part II: Infinite beam under moving harmonic loads*”, *Computers & Structures*, v. 86, pp. 2056-2063.
- Ochoa, J.D.A., 2013. “*Stability of slender columns on an elastic foundation with generalised end conditions*”, *Ingeniería e Investigación*, v. 33, No. 3, pp. 34-40.
- Oskar H. M., 2010. “*Beam on viscoelastic foundation: na extension of Winkler’s model*”, *Arch. Appl. Mech.* v. 80, pp. 93-102.
- Ozdemir, Y.I., 2012. “*Development of a higher order finite element on a Winkler foundation*”, *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 48, pp. 1400-1408.
- Pasternak P.L., 1954. “*On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants*”, *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow, USSR*. 1954.
- Patil, V.A., Sawant, V.A., Deb, K., 2013. “*2-D finite elemento analysis of rigid pavement considering dynamic vehicle-pvment interaction effects*”, *Applied Mathemarical Modelling*, v. 37, pp. 1282-1294.
- Pereira, W.L.A., 2003 “*Formulações numéricas para análise de vigas em contato com bases elásticas*”, *Dissertação de Mestrado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

- Pian, T.H.H., Bucciarelli JR., L.L., 1967. “*Buckling of a radially constrained circular ring under distributed loading*”, *International Journal of Solids and Structures*, v3(5), pp. 715–730.
- Pires, D., 2012. “*Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*”, *Dissertação de Mestrado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Raissner, E., 1936. “*Sationare, axialsymmetrische, durch eine schuttelnde Masseerregte Schwingung eines homogenen elastischen Halbraum*”, *Ingenieur-Archiv*, VII (6), pp. 381-396.
- Riks, E., 1972. “*The application of Newton's methods to the problems elastic stability*”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 39, pp. 1060-1066.
- Sáez, E., Caballero, F.L., Razavi, A.M.F., 2011. “*Effect of the inelastic dynamic soil-structure interaction on the seismic vulnerability assessment*”, *Structural Safety*, v. 33, pp. 51-63.
- Sánchez, H.S., Espino E.L., Salas, C.C., 2012. “*Inelastic Response of 3D RC Frames of a Urban Viaduct Considering Interaction Soil-Structure Effect by Numerical Simulation*”, 15WCEE, Lisboa, Portugal.
- Sapountzakis, E.J., Kampitsis, A.E., 2010. “*Nonlinear analysis of shear deformable beam columns partially supported on tensionless Winkler foundation*”, *International Journal of Engineering, Science and Technology*. v. 2(4), pp. 31-53.
- Shen, H-S., 2009. “*Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium*”, *Int. J. of Mechanical Sciences*, v. 51, pp. 372–383, Elsevier.
- Shen, H-S., 2012. “*Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium*”, *Composite Structures*, v. 94, pp. 1144–1154, Elsevier.
- Shoaei, M.D., Huat, B.B.K., Jaafar, M.S., Alarni, A., 2014. “*Soil-Framed Structure Interaction Analysis- A New Interface Element*”, *Latin American Journal of Solids and Structures*.

- Silva, A.R.D., 1998. “*Análise de placas com restrições de contato*”, *Dissertação de Mestrado*, PROPEC/Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Silva, A.R.D., Silveira, R.A.M., Gonçalves, P.B., 2001. “*Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations*”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 2083-2100.
- Silva, A.R.D., 2009. “*Sistema computacional para a análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*”, *Tese de Doutorado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Silveira, R.A.M., 1990. “*Análise não linear geométrica de cascas cilíndricas isotrópicas e enrijecidas*”, *Dissertação de Mestrado*, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Silveira, R.A.M., 1995. “*Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*”, *Tese de Doutorado*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Silveira, R.A.M., 2007. “*Análise Avançada de Estruturas Metálicas*”, CNPq, Processo: 201166/2005-4, Modalidade: Pós-Doutorado no Exterior (PDE), Relatório Final de Pesquisa, 41p.
- Silveira, R.A.M., Pereira, W.L.A., Gonçalves, P.B., 2008a. “*Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact constraints by a Ritz type approach*”, *International Journal of Solids and Structures*, v.45, p.2629-2650.
- Silveira, R.A.M., Pereira, W.L.A., Gonçalves, P.B., 2008b. “*Constrained and unconstrained optimization formulations for structural elements in unilateral contact with an elastic foundation*”, *Mathematical Problems in Engineering*, p.1-15.
- Silveira, R.A.M., Nogueira, C.L., Gonçalves, P.B., 2013. “*A numerical approach for stability analysis of slender arches and rings under contact constraints*”, *International Journal of Solids and Structures*, v.50, p. 147-159.
- Silveira, R.A.M., Maciel, F.V., Silva, A.R.D., Machado, F.C.S., Nogueira, C.L., 2015. “*Nonlinear equilibrium and stability analysis of axially loaded piles under bilateral*

- contact constraints*”, *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, p. 250-270.
- Simitses, G.J., e Hodges, D.H., 2006. “*Fundamentals of Structural Stability*”, Elsevier, New York.
- Stein, E., Wriggers, P., 1984. “*Stability of rods with unilateral constraints, a finite element solution*”, *Computers and Structures*, v.19, p. 205–211.
- Tzaros, K.A., e Mistakidis, E.S., 2011. “*The unilateral contact buckling problem of continuous beams in the presence of initial geometric imperfections: An analytical approach based on the theory of elastic stability*”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 46(9), pp. 1265-1274.
- Vieira, A. P. G. (2007) – “*Método das Diferenças Finitas Energéticas Versus Método dos Elementos Finitos na Análise dos Efeitos de Perturbação de Bordo em Cascas Cilíndricas Axissimétricas*”, *Dissertação de Mestrado*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Winkler E., 1867. “*Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit*” Prag, Dominicus.
- Wood, R.D. e Zienkiewicz, O.C., 1977. “*Geometrically nonlinear finite element analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells*”, *Computers and Structures*, v. 7, pp. 725-735.
- Yang, Y.B., Kuo, S.R., Liang, M.T., 1995. “*A simplified procedure for formulation soil-structure interaction problems*”, *Computers & Structures*, v. 60, pp. 513-520.
- Yu, J., Zhang, C., Huang, M., 2013. “*Soil-pipe interaction due to tunneling: Assessment of Winkler modulus for underground pipelines*”, *Computers and Geotechnics*, v. 50, pp. 17-28.
- Zhaohua, F. e Cook, R. D., 1983. “*Beam elements on two parameter elastic foundation*”, *Journal of Eng. Mechanics*, v. 6, pp. 1390–1402.

Anexo A

Problemas de Estabilidade Estrutural com Contato via ANSYS

A.1 Introdução

Neste anexo é apresentada a metodologia numérica utilizada, através do software ANSYS (2009), para a solução de problemas de estabilidade de estruturas em contato com o solo. Através de um problema proposto, é desenvolvido um passo a passo desde a concepção da geometria do problema até a sua análise e coleta de resultados obtidos.

A apresentação da ferramenta computacional utilizada e de seu ambiente de trabalho são efetuadas na Seção A.2. A partir da Seção A.3 é iniciada a modelagem de um exemplo numérico, destacando as possibilidades de introdução da geometria e definição do modelo de elementos finitos. A análise linearizada da flambagem da estrutura é apresentada na Seção A.4. A Seção A.5 apresenta o solver não linear enquanto a Seção A.6 mostra como deve ser conduzido o pós-processamento no programa. Finalmente, a Seção A.7 traz observações relevantes quanto a estratégia de Comprimento de Arco (Riks, 1972; Crisfield, 1981) e ao procedimento de análise de problemas com restrições unilaterais de contato.

A.2 O Software Computacional ANSYS

O ANSYS é um programa de simulação computacional multidisciplinar para resolver problemas de engenharia em geral, tendo sua origem na década de 1970. Sendo constantemente desenvolvido e atualizado, é uma ferramenta extremamente poderosa para a

solução de problemas de diversas naturezas. Especificamente para a parte estrutural, existem sete tipos de análises possíveis: estática, modal, harmônica, transiente, espectral, flambagem linearizada e subestruturação. A Figura A.1 apresenta os tipos de análises estruturais possíveis. Em destaque nessa figura estão as análises realizadas no desenvolvimento deste trabalho: estática e flambagem linearizada.

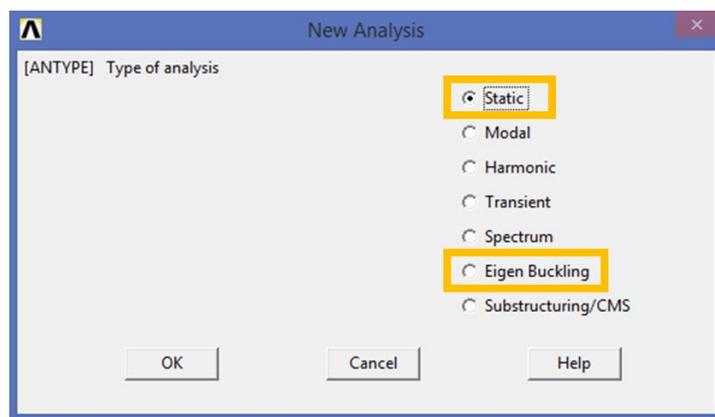


Figura A.1 Possibilidades de análises estruturais no ANSYS

A análise estática é realizada para a condição de carregamento estático. Aqui as análises podem ser lineares ou não lineares. As naturezas das não linearidades podem ser tanto físicas quanto geométricas. No ambiente de análise de flambagem linearizada do ANSYS, é possível calcular as cargas e os modos de flambagem de uma estrutura através de solução de um problema de autovalor. Maiores detalhes sobre esses dois tipos de análises serão fornecidos no decorrer deste anexo.

Por ser um programa tão amplo e complexo, é de fundamental importância o estudo e domínio dos conceitos de elementos finitos para que se possa utilizá-lo corretamente. Além disso, a leitura dos manuais fornecidos pelo próprio software, que estão em sua ferramenta interna chamada de *ANSYS HELP*, servem de guia para os procedimentos necessários na realização de simulações. Nesse local encontram-se explicações teóricas e práticas sobre as diversas possibilidades de simulações, além de conter a descrição de todos os elementos finitos disponíveis.

Entretanto, o *ANSYS HELP* muitas vezes é insuficiente para se obter o domínio necessário sobre o ANSYS. No presente trabalho utilizou-se também, como auxílio para o desenvolvimento das implementações computacionais, o livro *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS* (Madenci e Guven, 2006) e o trabalho de

Abreu (2016). Esse livro apresenta alguns exemplos interessantes para a análise não linear de estruturas enquanto Abreu (2016) realiza simulações de problemas lineares de contato envolvendo vigas, arcos e anéis através do ANSYS.

Nas Subseções que se seguem, A.2.1, A.2.2, e A.2.3 são apresentados o ambiente de trabalho do programa e os procedimentos necessários para iniciar uma simulação.

A.2.1 O Ambiente de Trabalho

O ambiente de trabalho do ANSYS é apresentado na Figura A.2. Nessa figura encontra-se em destaque os principais componentes do programa: *Menu de Utilidades*, *Entrada de Dados*, *Atalhos*, *Árvore de Funções*, *Janela Gráfica* e *Janela de Saída*. Uma visão geral sobre cada um desses componentes é fornecida abaixo:

- *Menu de Utilidades*: controle de arquivos, parâmetros, gráficos, listagem de dados e resultados, opções de plotagem e de coordenadas do modelo;
- *Entrada de Dados*: o ANSYS possui uma linguagem própria, todos os seus comandos podem ser inseridos diretamente nessa caixa de texto. Esses comandos podem ser visualizados em um menu de entrada de dados;
- *Atalhos*: contém os atalhos para os comandos mais utilizados do programa. O usuário tem a opção de adicionar ou remover atalhos de acordo com sua necessidade;
- *Janela Gráfica*: mostra a representação gráfica dos modelos criados. Além disso, nessa janela também são visualizados os resultados gráficos;
- *Árvore de Funções*: contém todas as funções do programa divididas pela fase de preparação e solução do problema (pré-processamento, processamento e pós-processamento). Todas as funções do *Menu de Utilidades* estão também presentes na *Árvore de Funções* também chamada de *Menu Principal*. Maiores detalhes encontram-se na Subseção A.2.2.
- *Janela de Saída*: recebe os comandos de saída do programa. Essa janela permanece sempre aberta posicionando-se atrás das outras, podendo ser trazida para frente quando necessário.



Figura A.2 Área de trabalho do ANSYS

A.2.2 A *Árvore de Funções*

A *Árvore de Funções* do ANSYS é, como descrita na subseção anterior, particionada de acordo com as fases de processamento do modelo a ser analisado. Essas fases encontram-se na Figura A.3: Pré-processamento, Processamento e Pós-processamento. Em cada fase especifica-se o nome das caixas de comandos correspondentes utilizadas pelo ANSYS.



Figura A.3 Fases de solução de um problema no ANSYS

Na Figura A.4 é apresentada a abertura da árvore para cada caixa de comando que são utilizadas desde o momento da criação do modelo em elementos finitos até a visualização dos seus resultados.

- o pré-processamento (caixa de comando *Preprocessor*) é onde ocorre a geração dos modelos: são escolhidos os elementos finitos que serão utilizados, a definição dos tipos de materiais e suas propriedades, geometria do problema e malha de elementos finitos;
- a fase de processamento (caixa de comando *Solution*), ou de solução do problema, é onde ocorre a aplicação das cargas e condições de apoio, define-se o tipo de análise, as estratégias de convergência e se obtém a solução do problema;
- o pós-processamento é dividido em duas caixas de comando: *General Postproc* e *TimeHist Postpro*. No *General Postproc* são visualizados os resultados em um determinado tempo (em análises transientes) ou para um determinado passo de carga. Para cada tempo (ou passo de carga) são acessados os resultados relacionados a deformações, reações, momentos fletores, entre outros. Já no *TimeHist Postpro* os resultados são apresentados em função do tempo (em análises transientes) ou do fator de carga.

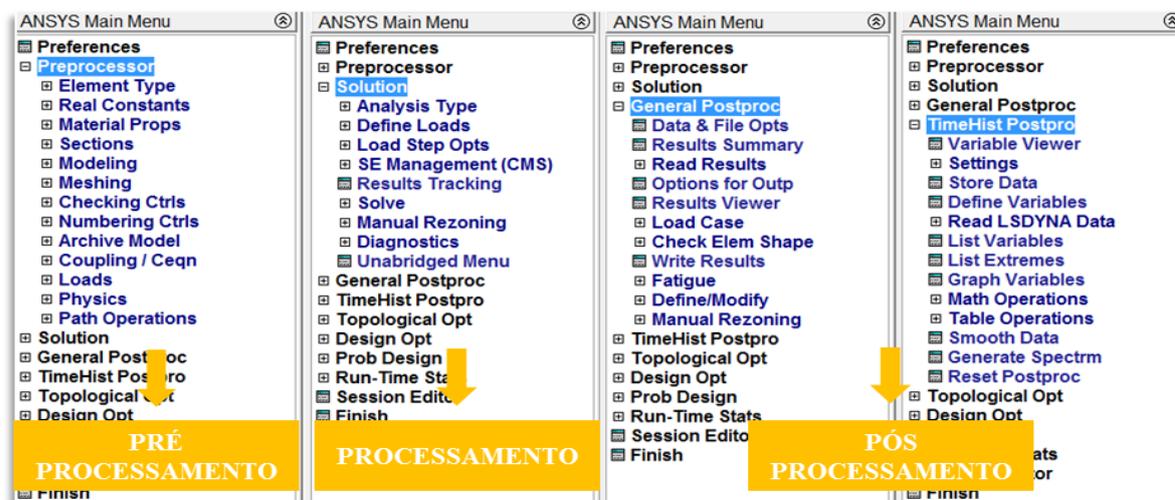


Figura A.4 *Árvore de Funções* do ANSYS nas fases de desenvolvimento do modelo

A.2.3 Preparação do Ambiente de Trabalho

Ao se abrir o *software* ANSYS, antes de iniciar a fase de pré-processamento, é necessário estabelecer o local de armazenamento dos arquivos e o nome do trabalho. Para definir o local de armazenamento dos arquivos, deve-se ir até o comando *File* do *Menu de Utilidades* e clicar em *Change Directory*. A pasta de trabalho é então escolhida pelo usuário;

o nome do trabalho é definido também pelo comando *File*, clicando em *Change Jobname* (Figura A.5).



Figura A.5 Preparação do ambiente de trabalho

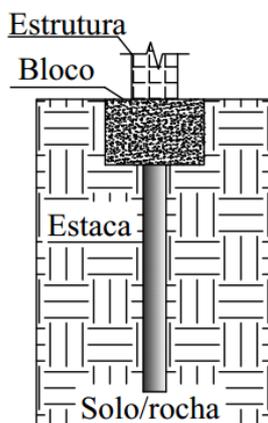
Agora o ambiente de trabalho está pronto para realizar todas as funções necessárias para se obter as respostas sobre o modelo que se deseja estudar. Nas seções que se seguem serão detalhados, a partir de um problema de estabilidade estrutural de coluna em contato com base elástica de Winkler, a concepção da geometria, a malha de elementos finitos, o método de solução aplicado e visualização dos resultados.

A.3 Pré-Processamento: Geometria e Malha de Elementos Finitos

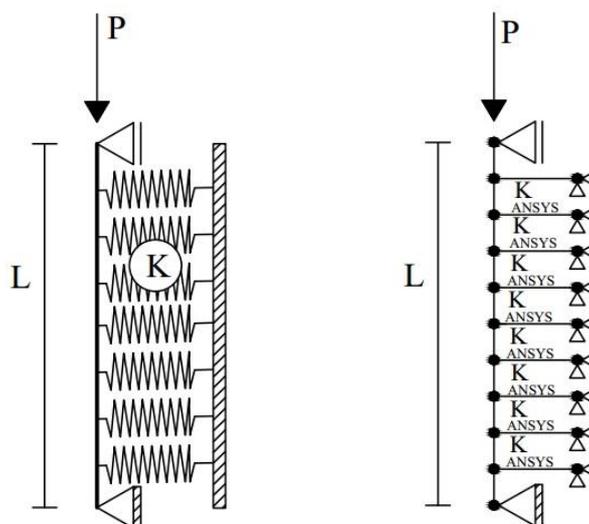
A.3.1 Apresentação do problema

O problema de estabilidade envolvendo uma coluna em contato bilateral com a base elástica de Winkler encontra-se na Figura A.6. Através da modelagem desse problema, será apresentada a estratégia de solução utilizada nesta dissertação através do *software* ANSYS. Os dados do modelo são: comprimento da coluna $L = 5$, rigidez à flexão $EI = 100$ e rigidez da base elástica no modelo contínuo de Winkler, $K = 10$ (em unidades compatíveis). Serão utilizados 20 elementos finitos (EFs) para a modelagem da estrutura. Essa coluna está sujeita

a uma imperfeição geométrica inicial senoidal com uma semi-onda ($n = 1$) de amplitude $U = 10^{-4}$.



(a) Estaca com restrições bilaterais de contato



(b) Modelo contínuo de Winkler

(c) Modelagem em elementos finitos

Figura A.6 Coluna em contato bilateral com base elástica de Winkler

A modelagem da base elástica através do modelo contínuo de Winkler (Figura A.6(b)) é o ponto de partida para se estabelecer a rigidez das molas no modelo discreto, utilizado no ANSYS (Figura A.6(c)). Sendo assim, escreve-se:

$$K_{\text{ANSYS}} = KL_{\text{elem}} \quad (\text{A.1})$$

em que K_{ANSYS} é a rigidez de cada mola do modelo discreto, K é a rigidez da base elástica no modelo contínuo de Winkler e L_{elem} é o comprimento de influência de cada mola na estrutura a ser analisada. Muitas vezes L_{elem} é o comprimento do próprio elemento finito da estrutura.

A.3.2 Estratégias de Introdução da Geometria do Problema

O ANSYS oferece várias possibilidades de introdução da geometria do problema. É possível preparar o modelo diretamente no *software*, utilizar um programa auxiliar ou mesmo escrever um arquivo .txt, utilizando a linguagem do ANSYS, informando as coordenadas do modelo. No presente trabalho optou-se pela preparação do modelo no *software* AUTOCAD (2014) para o caso dos problemas de arcos e anéis, já para vigas e colunas utilizou-se o arquivo de texto .txt.

A possibilidade de inserção da geometria diretamente pelo ANSYS foi evitada por conveniência. Consertar erros de inserção de coordenadas pode ser bastante trabalhoso empregando as ferramentas do próprio programa.

No *software* AUTOCAD (2014), deve-se desenhar as linhas correspondentes a cada elemento finito utilizado para a estrutura e para a base elástica. O desenho deve começar no ponto de origem do sistema de coordenadas do programa. A Figura A.7 apresenta a geometria do problema no AUTOCAD.

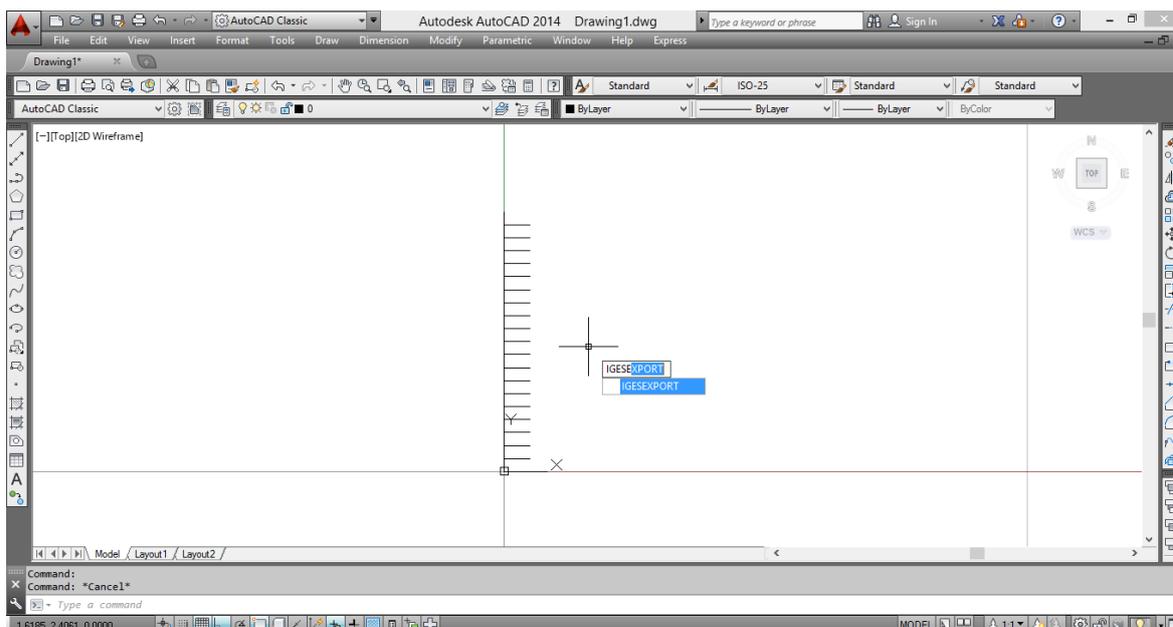


Figura A.7 Desenho de geometria no AUTOCAD (2014)

Com o desenho pronto, deve-se utilizar o comando *IGESEXP* para que possa ser gerado o arquivo *.iges*, que é compatível com o ANSYS. Esse arquivo deve ser salvo na pasta de trabalho que será utilizada para salvar os arquivos gerados pelo ANSYS.

Iniciando o ANSYS, após preparar a área de trabalho, deve-se selecionar o comando *File* da janela de *Menu de Utilidades* e prosseguir da seguinte forma:

- *File*>>*Import*>>*IGES...*
- *OK*>>*Browse*
- Selecionar o arquivo *.iges* criado no AUTOCAD>>*OK*

Pronto, a geometria do problema estará inserida no ANSYS. A Figura A.8 mostra esse procedimento detalhadamente. A ordem crescente dos comandos está enumerada de 1 a 5 na própria figura. Depois de selecionar o arquivo *.iges* na pasta de trabalho, a geometria surge na *Janela Gráfica* do ANSYS.

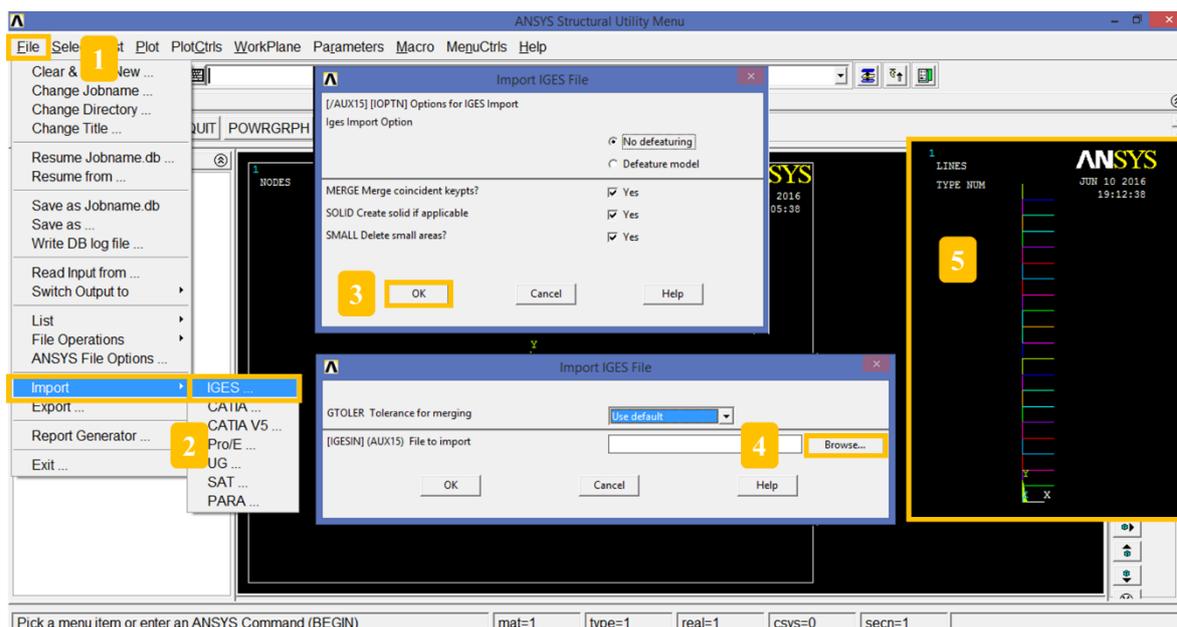


Figura A.8 Importando geometria no formato *.iges* para o ANSYS

Para inserir a geometria do problema em formato de texto (*.txt*), é necessário proceder como mostrado na Figura A.9. A linguagem utilizada pelo ANSYS pode ser aprendida através do *ANSYS HELP*. Utilizando essa linguagem, deve-se inserir as coordenadas dos *keypoints*, que equivalem às coordenadas dos nós que serão criados posteriormente. Parte-

se então para a inserção das linhas, que se dá em referência a numeração dos *keypoints* criados. Essas linhas serão os elementos do modelo após a geração da malha de elementos finitos. Tendo escrito todo o código de comandos, que aqui se deu no programa BLOCO DE NOTAS (2014), é preciso salvar o arquivo na pasta de trabalho criada para salvar os arquivos gerados pelo ANSYS.

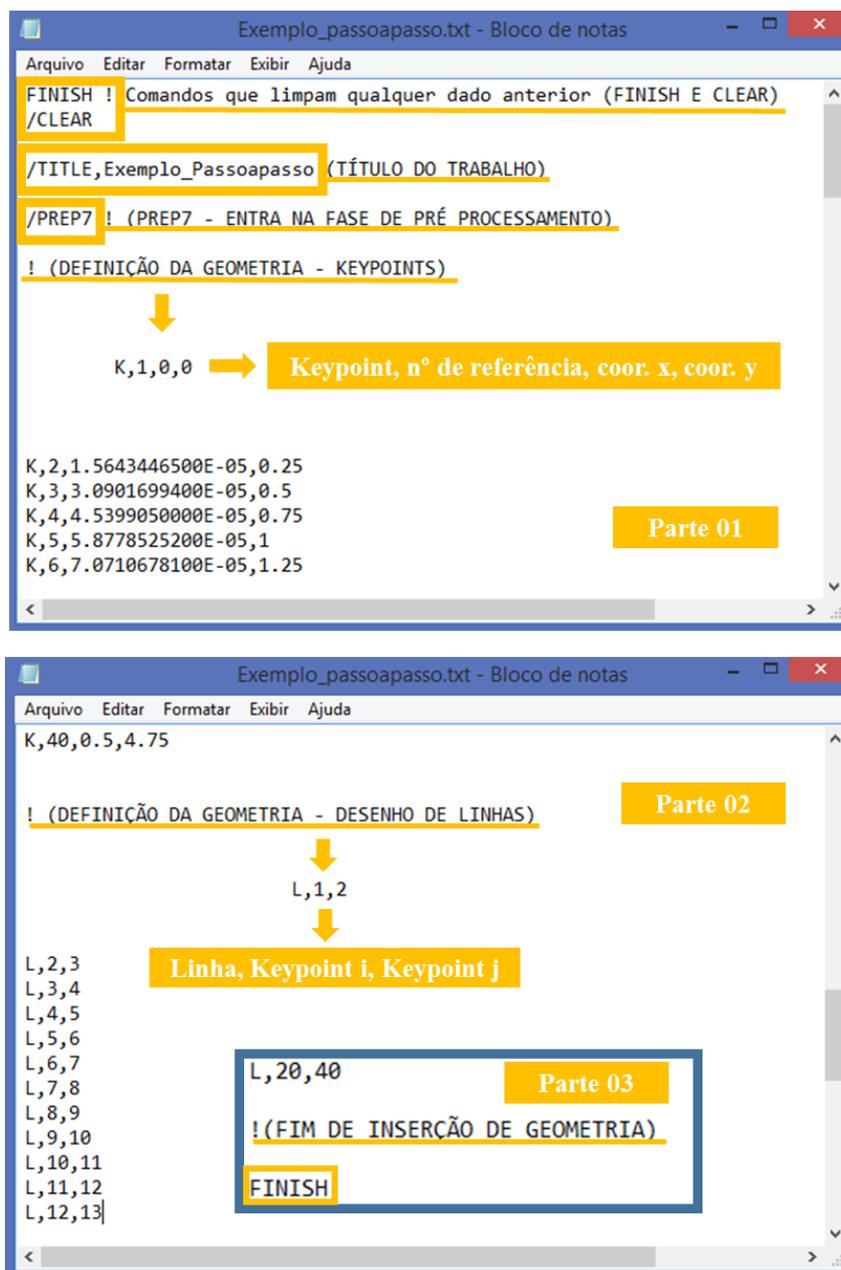


Figura A.9 Formato do código do ANSYS para inserção de geometria

No ANSYS, deve-se seleccionar o comando *File do Menu de Utilidades* e seguir com os comandos:

- *File>>Read Input From*
- Selecionar o arquivo .txt na pasta de trabalho salva no computador>>OK

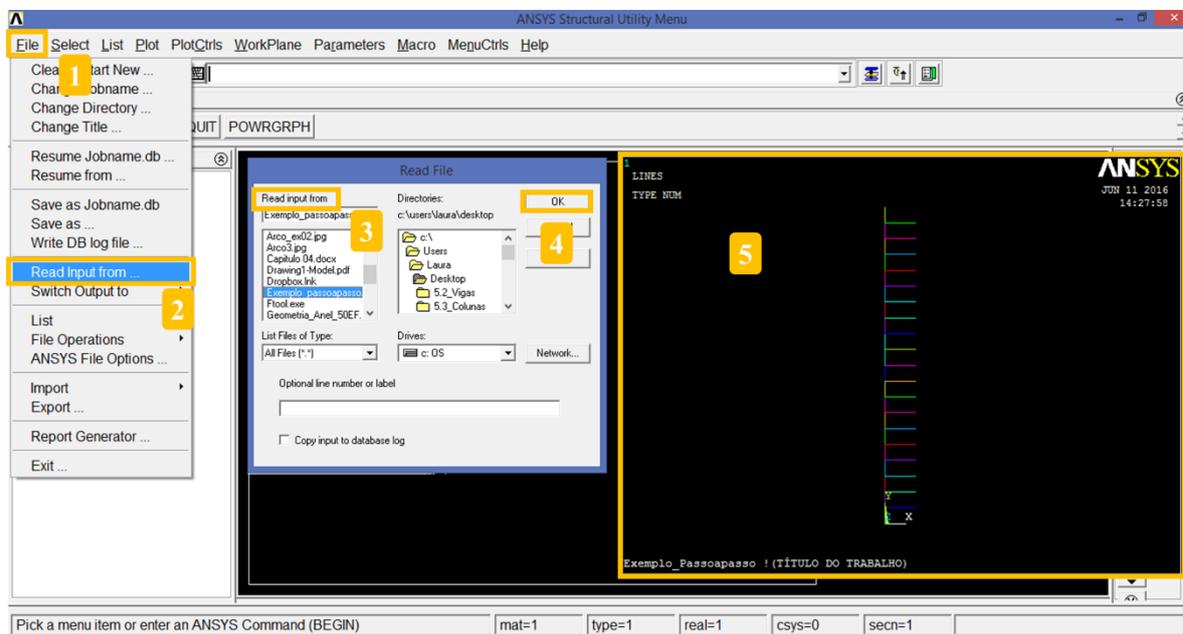


Figura A.10 Inserindo a geometria no formato .txt no ANSYS

A Figura A.10 ilustra o procedimento utilizado. Após selecionar o arquivo .txt e clicar em *OK* a geometria do problema aparece na *Janela Gráfica* do ANSYS.

A.3.3 Criando a Malha de Elementos Finitos

Com a geometria pronta é preciso definir a malha de elementos finitos do problema. Aqui é apresentada a sequência de comandos necessária para que isso ocorra.

Primeiramente, é preciso escolher os elementos finitos utilizados, que foram convenientemente selecionados da biblioteca de elementos do ANSYS e estão descritos na Seção 3.3 desta dissertação. Para o caso em questão, que se trata de problema de contato bilateral, os elementos são o *BEAM3* e o *COMBIN14*. Na *Árvore de Funções*, em *Preprocessor*, deve-se clicar em *Element Type*. A sequência de comandos é dada a seguir e através da Figura A.11 é possível identificar essa sequência no ANSYS.

- *Preprocessor>> Element Type>> Add/Edit/Delete*
- *Add...>> Beam>>2D elastic 3>>OK*
- *Add...>> Combination >> Spring-damper 1A>> OK>> Close*

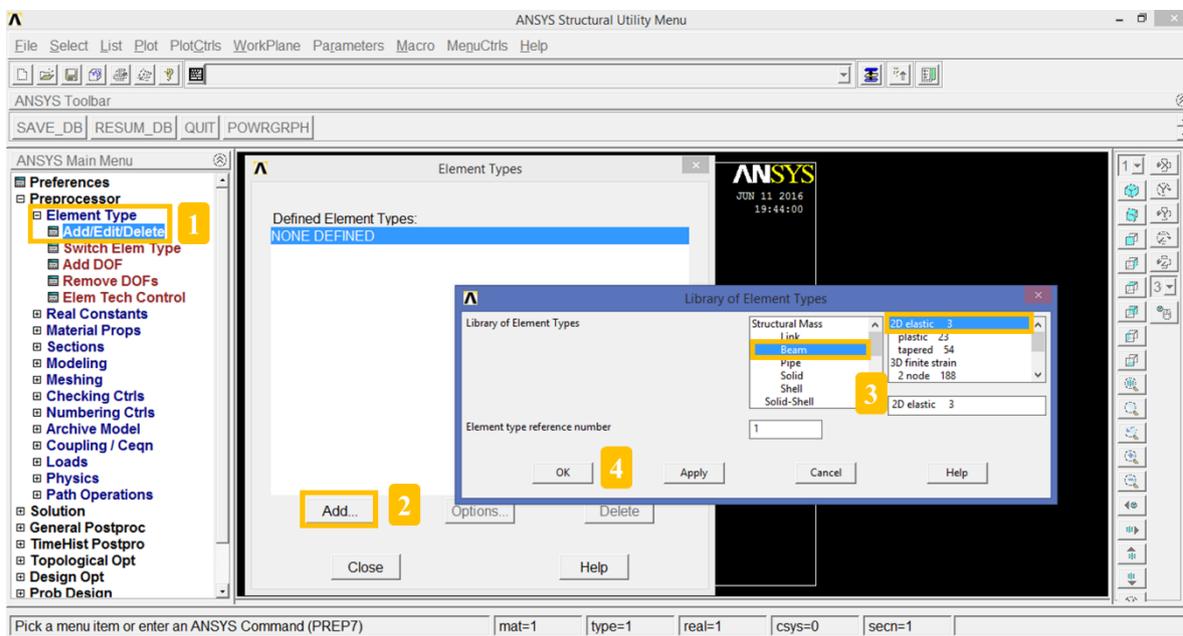


Figura A.11 Escolha dos elementos finitos no ANSYS

O próximo passo é a introdução das propriedades dos elementos (constantes reais), que no ANSYS são chamadas de *Real Constants*. São definidas duas constantes reais, uma para cada tipo de elemento utilizado. Para o *BEAM3* são definidas pelo usuário a área da seção transversal e seu momento de inércia; no caso do *COMBIN14*, é definida a rigidez da mola discreta. Os comandos são apresentados a seguir e a Figura A.12 ilustra sua aplicação para o caso do elemento *BEAM3*.

- *Preprocessor>> Real Constants>> Add/Edit/Delete*
- *Add...>>Type1 BEAM3>> OK*
- Digitar área da seção transversal em *AREA*
- Digitar momento de inércia em *IZZ*
- *OK*
- *Add...>> Type 2 COMBIN14>> OK*
- Digitar rigidez da mola discreta em *K>> OK>> Close*

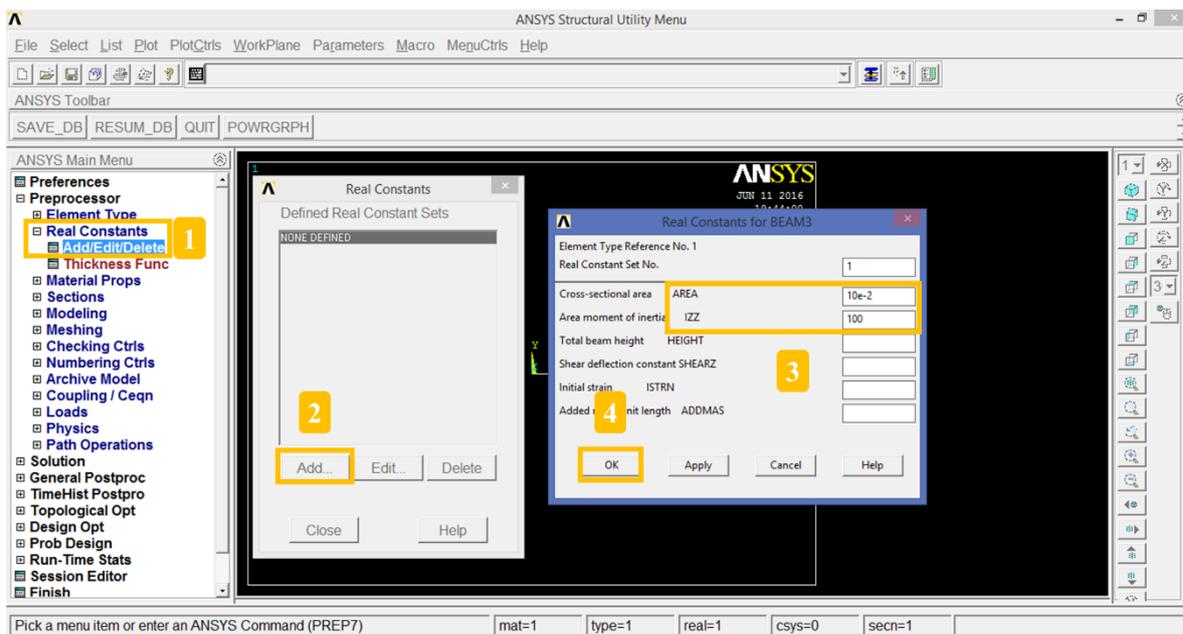


Figura A.12 Definindo as constantes reais

Prosseguindo, é momento de estabelecer as propriedades de cada material utilizado: módulo de elasticidade e coeficiente de poisson. No caso do presente trabalho, empregou-se apenas um tipo de material. O passo a passo da introdução das propriedades dos materiais é dado na sequência e é apresentado na Figura A.13.

- *Preprocessor*>> *Material Props*>> *Material Models*
- *Structural*>> *Linear*>> *Elastic*>> *Isotropic*
- Digitar módulo de elasticidade em *EX*
- Digitar o coeficiente de Poisson em *PRXY*>> *OK*

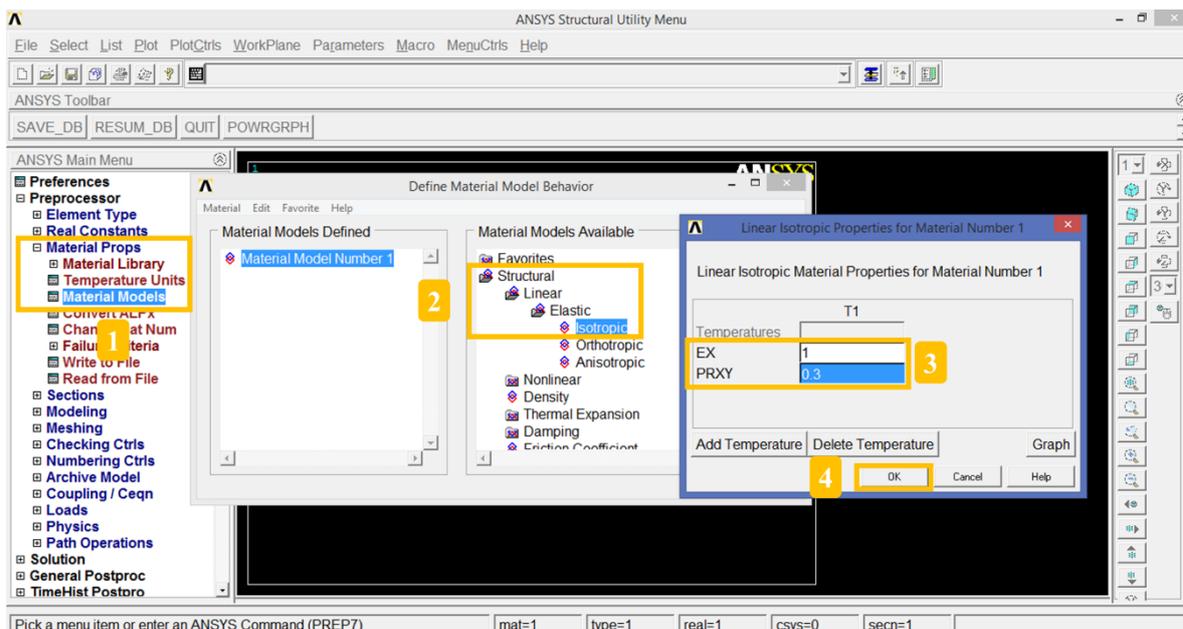


Figura A.13 Definindo o material

Com os parâmetros geométricos e dos materiais definidos, parte-se então à atribuição dessas propriedades ao modelo geométrico adotado. Atribui-se, a partir do procedimento listado a seguir, quais linhas se referem ao elemento *BEAM3* e quais se referem ao elemento *COMBIN14*, com suas respectivas constantes reais e tipos de materiais. A Figura A.14 demonstra essa aplicação no ANSYS para o caso do elemento *BEAM3*.

- *Árvore de Funções*>> *Preprocessor*>> *Meshing*>> *Mesh Attributes*>> *Picked Lines*
- Selecionar todas as linhas referentes à estrutura>> *Apply*
- Seleciona o tipo de material *MAT*>> *1*
- Seleciona a constante real *REAL*>> *1*
- Seleciona o elemento *TYPE*>> *1 BEAM3*>> *OK*
- *Árvore de Funções*>> *Preprocessor*>> *Meshing*>> *Mesh Attributes*>> *Picked Lines*
- Selecionar todas as linhas referentes à base elástica >> *Apply*
- Seleciona o tipo de material *MAT*>> *1*
- Seleciona a constante real *REAL*>> *2*
- Seleciona o elemento *TYPE*>> *2 COMBIN14*>> *OK*

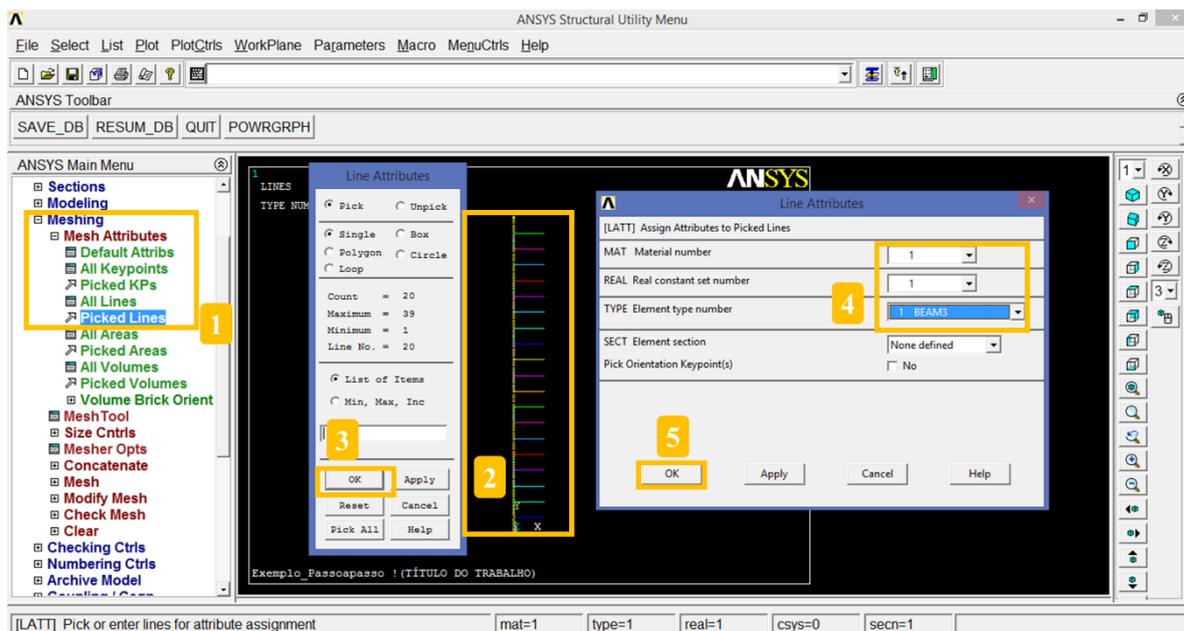


Figura A.14 Atribuição de propriedades de elementos

Parte-se agora para a criação da malha de elementos finitos do modelo. Antes, porém, deve-se escolher a quantidade de elementos desejada. Isso pode ser realizado de duas formas: primeiro, construindo o modelo geométrico já prevendo que um segmento de linha será um elemento (como foi realizado nesta dissertação); ou construindo o modelo geométrico com apenas um segmento de linha e posteriormente definindo a malha através da subdivisão desse segmento na quantidade de elementos desejada. Através do parâmetro *NDVIV* define-se o número de elementos por segmento de linha (para o caso aqui apresentado, $NDVI = 1$). Na sequência, clicar em *MESH* e selecionar todos os segmentos de linha do modelo geométrico, primeiramente para as linhas referentes à estrutura e em seguida para as linhas referentes à base elástica. Finalmente, a malha de elementos finitos é criada. As Figuras A.15 e A.16 mostram detalhadamente como esse processo é realizado; na Figura A.17 é apresentada a malha de elementos finitos criada. A sequência de comandos é:

- *Árvore de Funções*>> *Preprocessor*>> *Mesh Tool*
- *Global*>> *Set*>> *NDIV*>> Digitar 1
- *Mesh*>> Selecionar linhas quem referem-se à estrutura>> *Apply*
- Selecionar linhas referentes à base elástica>> *OK*
- *Close*

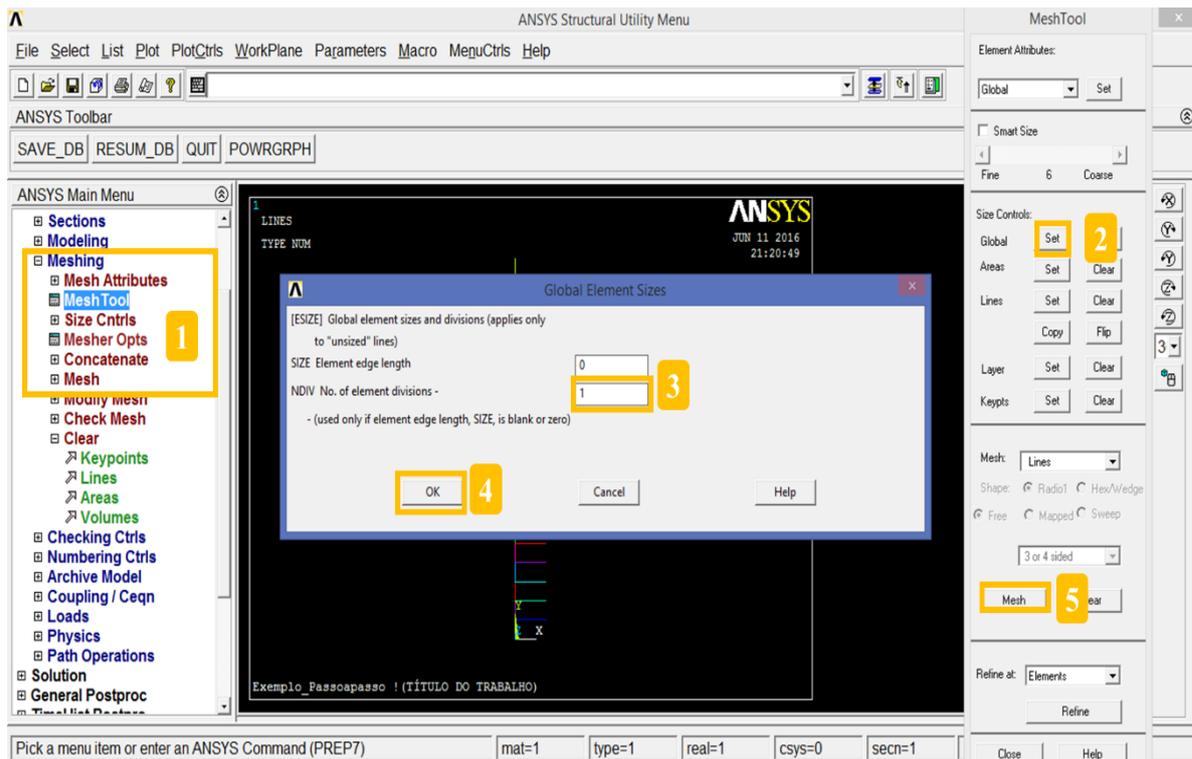


Figura A.15 Definição do número de elementos por segmento de linha

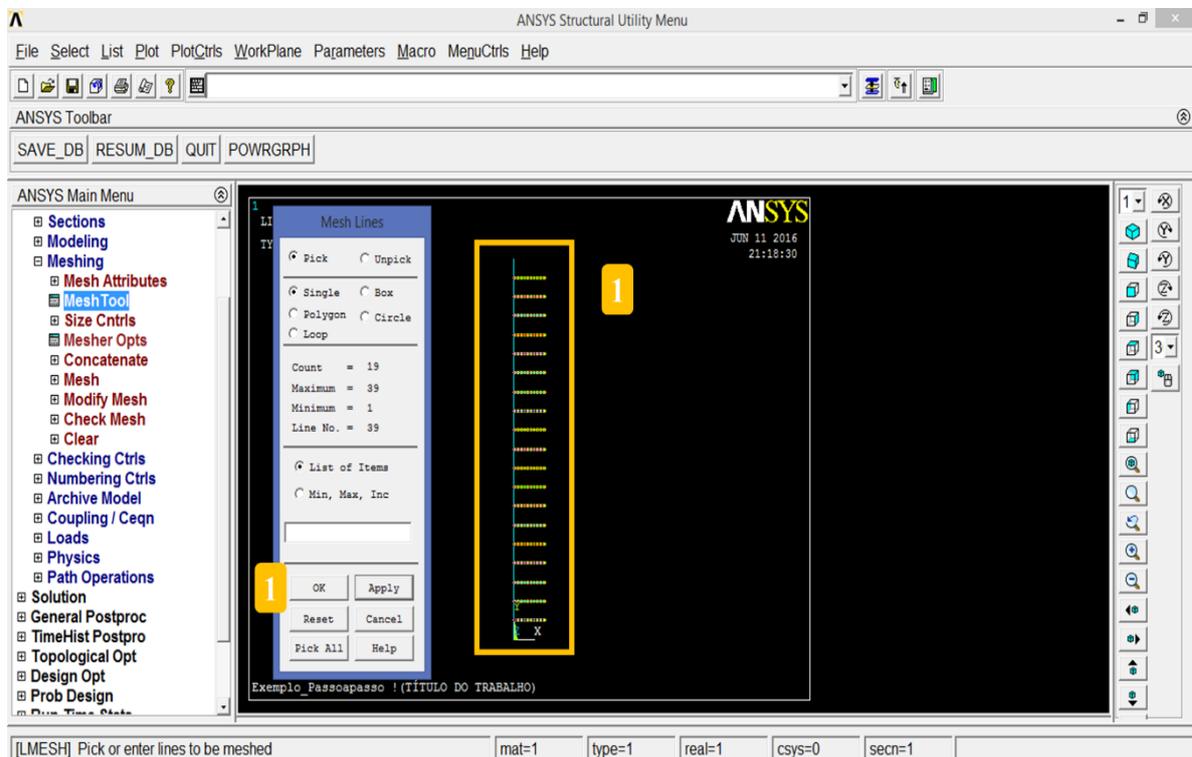


Figura A.16 Criando elementos a partir das linhas

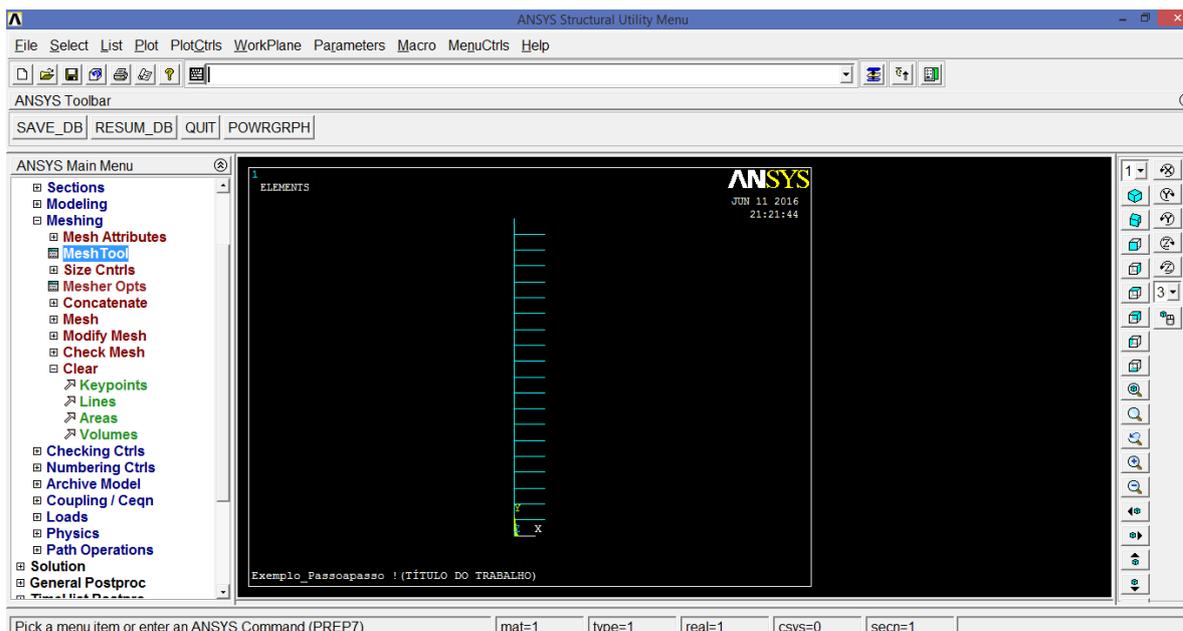


Figura A.17 Modelo de elementos finitos pronto para aplicação de cargas e restrições

A.4 Análise de Flambagem Linearizada: *Eigen Buckling*

O ANSYS permite que se faça a avaliação das cargas de flambagem de uma estrutura de forma direta, a partir da análise de seus autovalores e autovetores (cargas e modos de flambagem). Essa análise não fornece qualquer informação quanto ao comportamento pós-crítico do sistema, porém ela foi utilizada aqui para auxiliar a análise não linear, como será explicado mais detalhadamente na próxima seção, e para facilitar a determinação das trajetórias de equilíbrio dos problemas.

A análise das cargas de flambagem pelos autovalores (Subseção A.4.2), determina o carregamento crítico de estruturas elásticas perfeitas. Entretanto, em condições reais, com as diferentes fontes de não linearidade e imperfeições presentes no sistema, esses valores obtidos podem ser superestimados ou subestimados, sendo necessária, então, a realização da análise não linear (Seção A.5) para se obter soluções mais confiáveis.

Antes, porém, devem ser aplicadas as condições de bordo e de carregamento da estrutura (Subseção A.4.1). O carregamento aplicado, para se encontrar os modos de flambagem, deve ser unitário. O método de aplicação de cargas e restrições é válido para qualquer tipo de análise no ANSYS, incluindo para a análise estática não linear.

O carregamento aplicado será uma carga concentrada de compressão na extremidade superior da coluna ($FY = -1$). A aplicação do carregamento (Figura A.19) é similar a aplicação de condições de contorno e deve ser realizada conforme o escopo dado a seguir. A Figura A.20 apresenta o modelo em elementos finitos com as cargas e restrições que surge na *Janela Gráfica* do ANSYS.

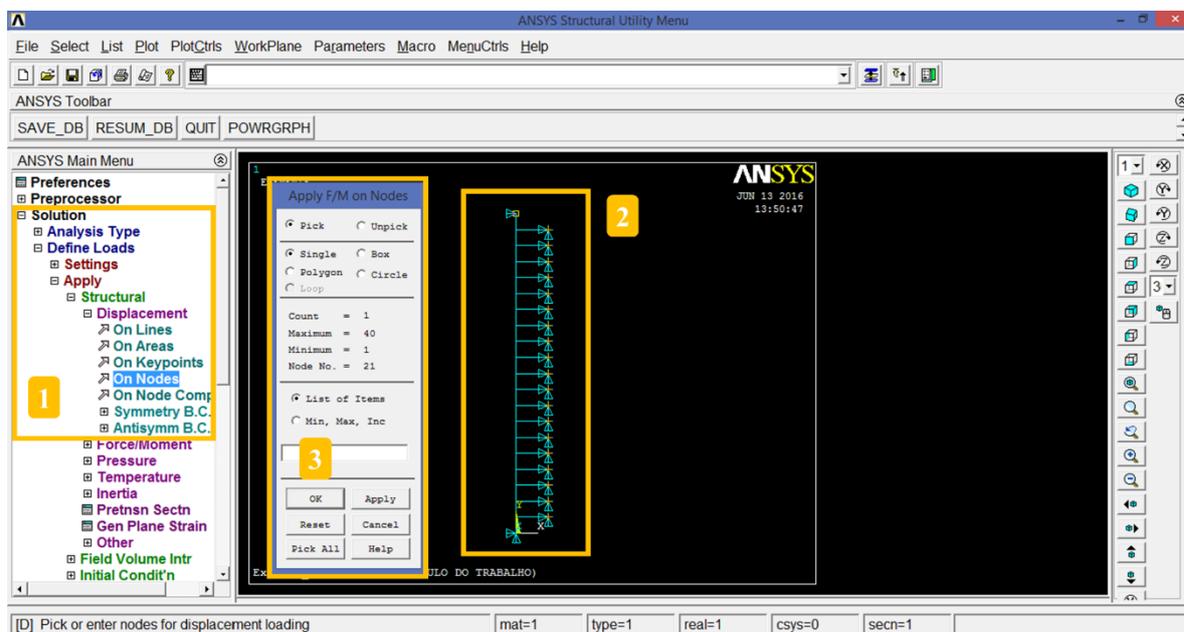


Figura A.19 Aplicando o carregamento



Figura A.20 Modelo em elementos finitos com cargas e restrições

- *Árvore de Funções*>> *Solution*>> *Define Loads*>> *Apply*
- *Structural*>> *Force Moment*>> *On Nodes*
- Selecionar o nó correspondente ao ponto de aplicação do carregamento>> *Apply*
- *Direction of force/mom*>> *FY*
- Em *VALUE* digitar o valor do carregamento>> -1>> *OK*

A.4.2 Carga Crítica: Resolvendo o Problema de Autovalor

Os efeitos das tensões devem estar acionados para serem utilizados na análise da flambagem linearizada. Na *Árvore de Funções*, em opções de análise, deve-se selecionar *Prestress ON*. A solução linear da estrutura é então obtida. Clicando em *FINISH* os resultados são salvos e pode-se promover outras análises a partir desta. Saindo da análise estática, seleciona-se a análise chamada de *Eigen Buckling*, que calculará as cargas e os respectivos modos de flambagem da estrutura. O número de modos que se deseja é informado ao programa e então o modelo deve ser rodado novamente. No exemplo dado, apenas o primeiro modo de flambagem foi escolhido.

Para poder visualizar os resultados, os modos devem ser extraídos antes, através da análise chamada de *Expansion Pass*. No pós-processamento é então possível visualizar o resultado e a deformada da estrutura. O escopo dos comandos dado a seguir contém os procedimentos necessários para realizar todos os passos da análise linearizada da flambagem da estrutura com indicação das respectivas figuras que ilustram esses passos:

- *Árvore de Funções*>> *Solution*>> *Analysis Type*>> *Analysis Options* (Figura A.21)
- *Prestress*>> *ON* (Figura A.21)
- *Solution*>> *Solve*>> *Current LS* (Figura A.22)
- *Árvore de Funções*>> *FINISH* (Figura A.23)
- *Árvore de Funções*>> *Solution*>> *Analysis Type* (Figura A.24)
- *New Analysis*>> *Eigen Buckling* (Figura A.24)
- *Solution*>> *Analysis Type*>> *Analysis Options* (Figura A.25)
- Em *NMODE* coloca-se o número de modos que se deseja obter>> 1>> *OK* (Figura A.25)
- *Solution*>> *Solve*>> *Current LS* (Figura A.22)
- *Árvore de Funções*>> *FINISH* (Figura A.23)
- *Solution*>> *Analysis Type*>> *Expansion Pass*>> *ON* (Figura A.26)

- *Solution>> Load Step Opts>> Expansion Pass>> Single Expand>> Expand Modes* (Figura A.27)
- Em *NMODE* digitar novamente o número de modos>> 1>> *OK* (Figura A.27)
- *Solution>> Solve>> Current LS* (Figura A.22)

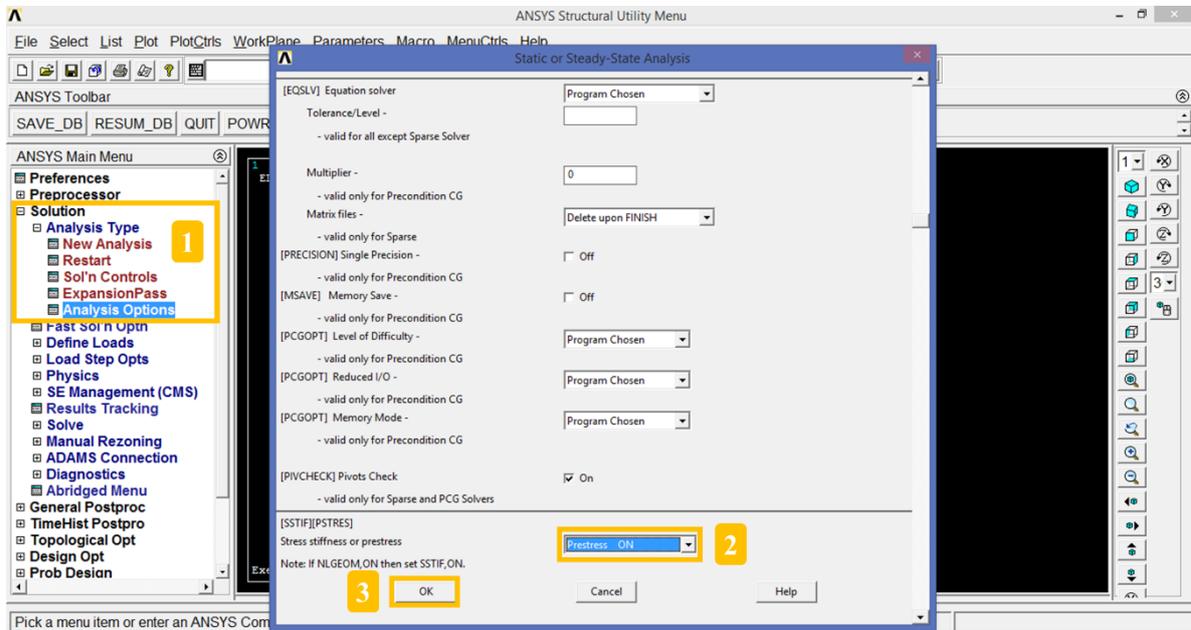


Figura A.21 Selecionando o comando *Prestress ON*

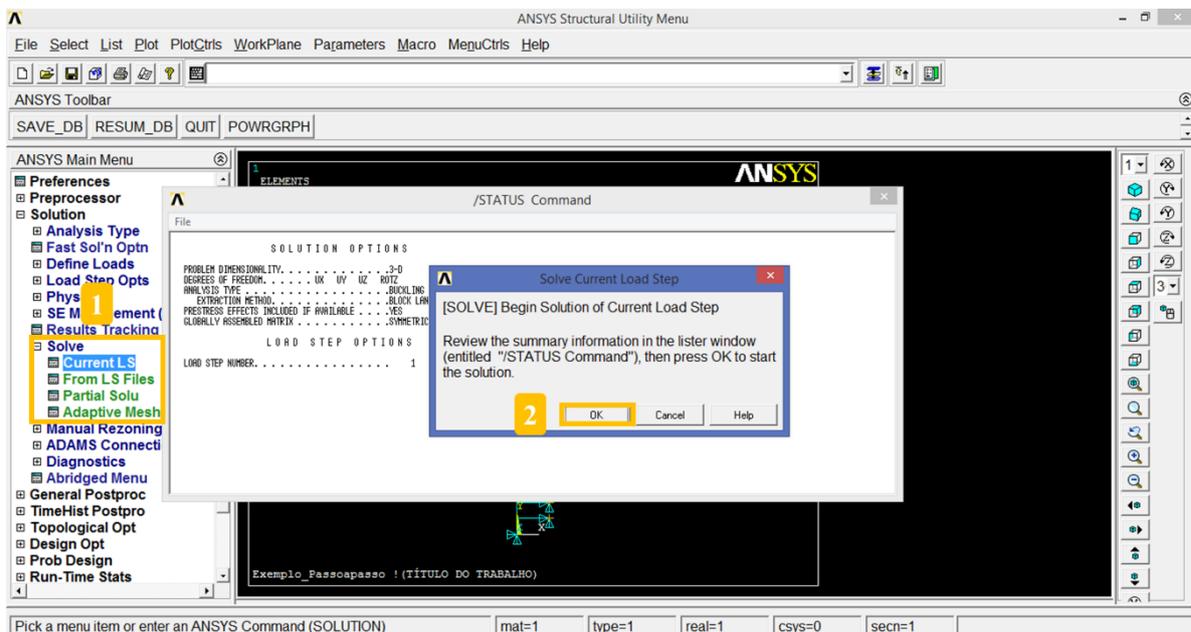


Figura A.22 O comando *Solve>> Current LS*

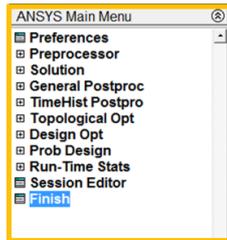


Figura A.23 O comando *FINISH*

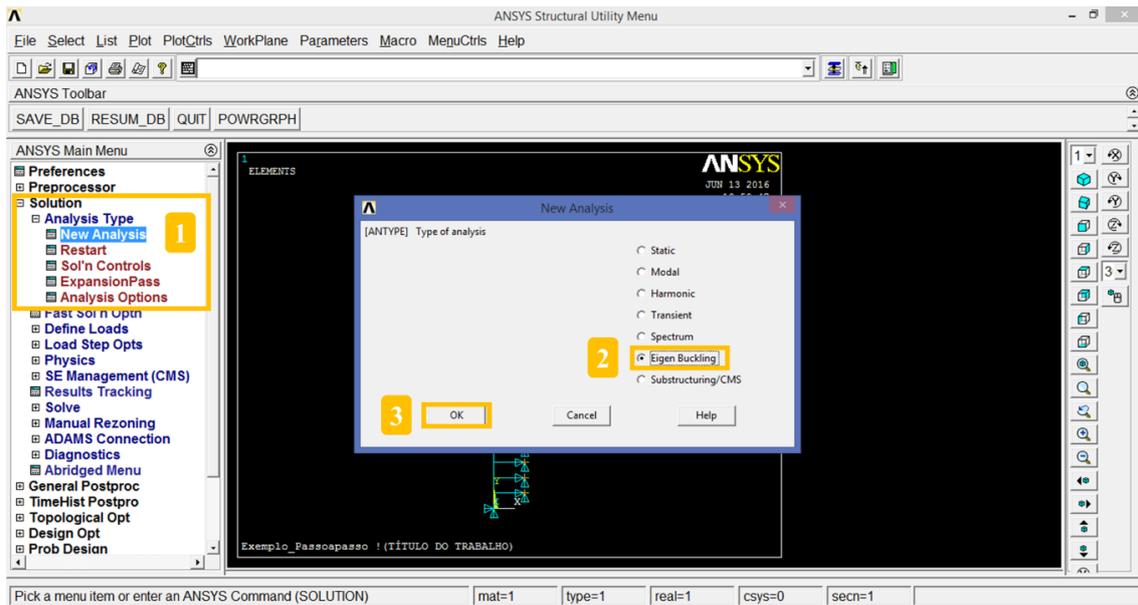


Figura A.24 Entrando no tipo de análise *Eigen Buckling*

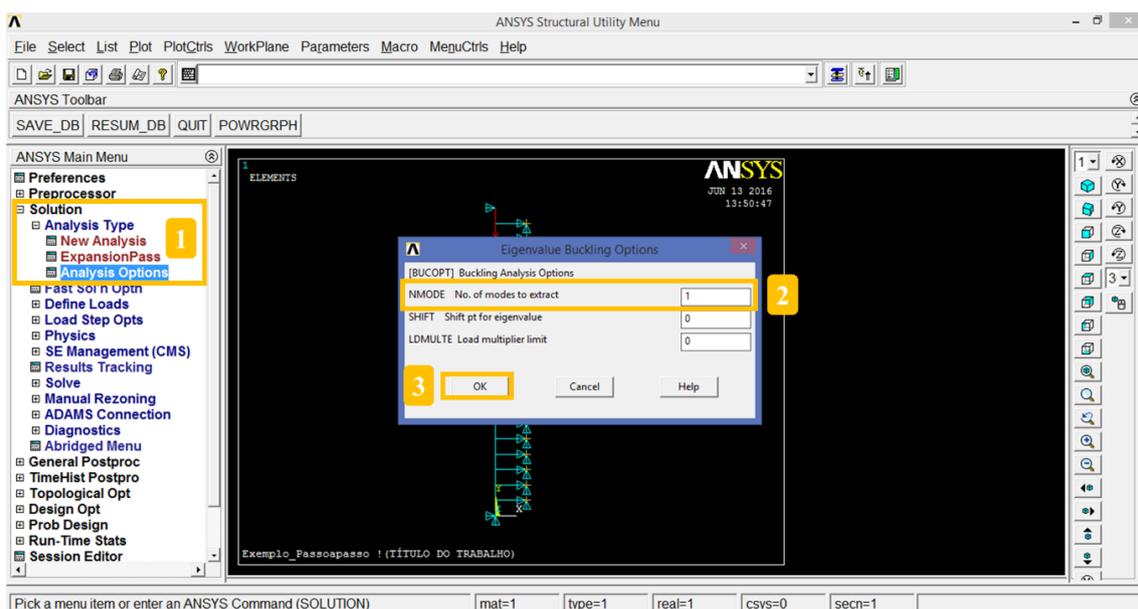


Figura A.25 Número de modos que se deseja obter na solução

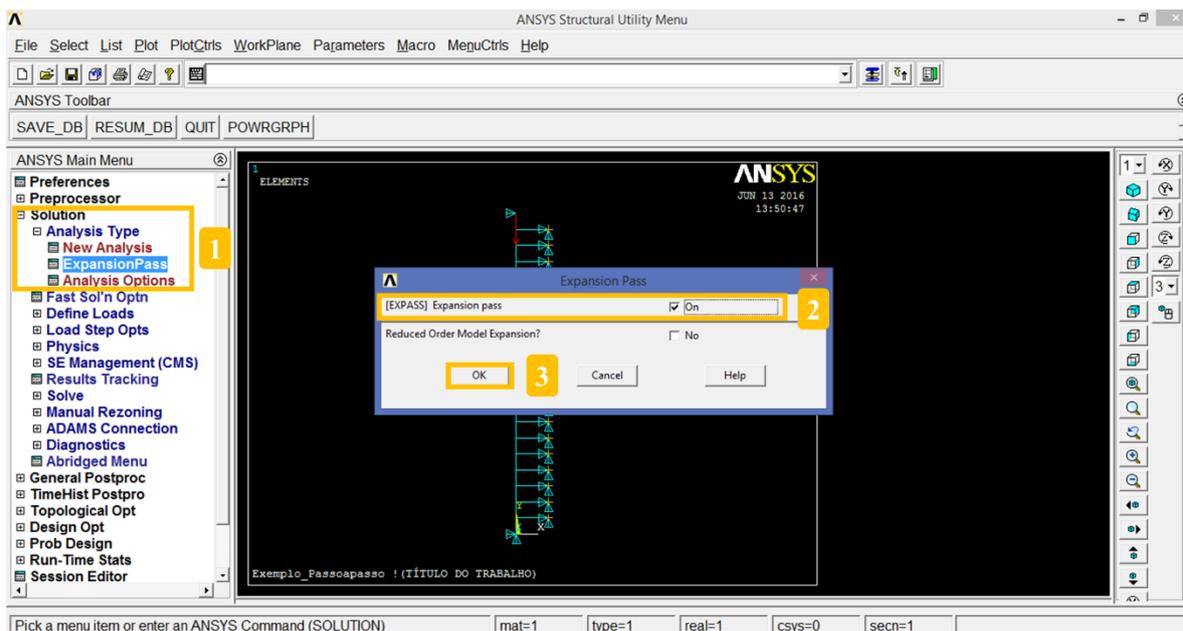


Figura A.26 O comando *Expansion Pass*

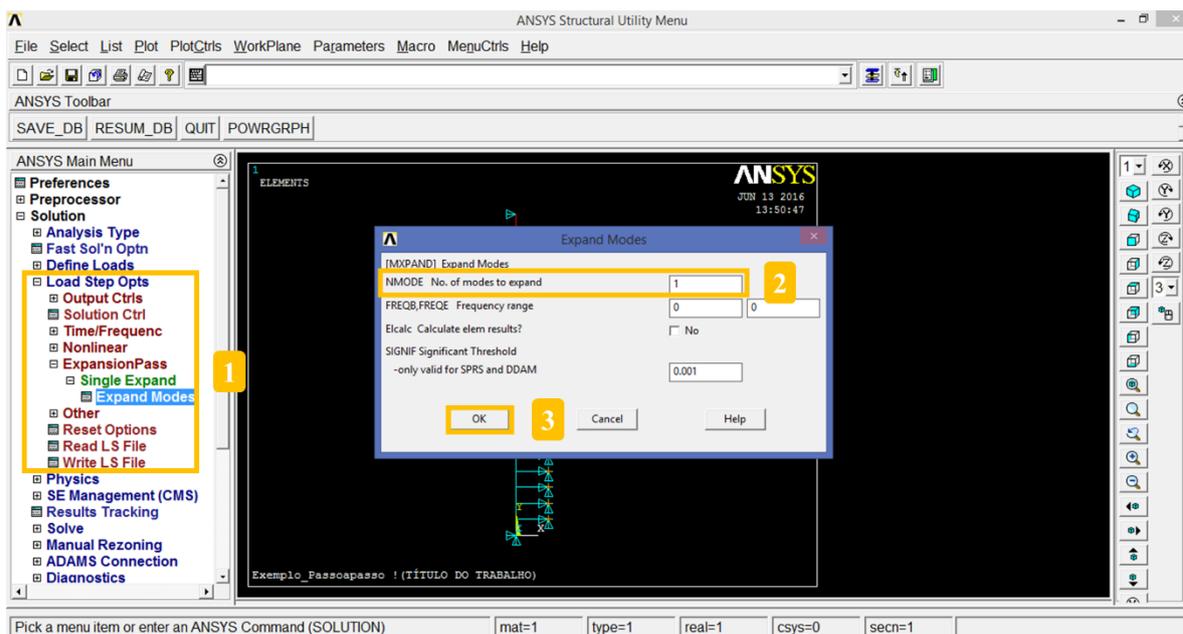


Figura A.27 Número de modos que se deseja visualizar

A.4.3 Pós-Processamento: Visualização de Resultados

Para visualizar os resultados, é necessário entrar no *General Postproc* que se localiza na *Árvore de Funções*. Em *List Results* são listadas as cargas de flambagem associadas a cada

modo extraído na análise. Como para o exemplo em questão apenas o primeiro modo foi selecionado, aparece apenas uma solução (Figura A.28).

- *Árvore de Funções*>> *General Postproc*
- *List Results*>> *Detailed Summary*

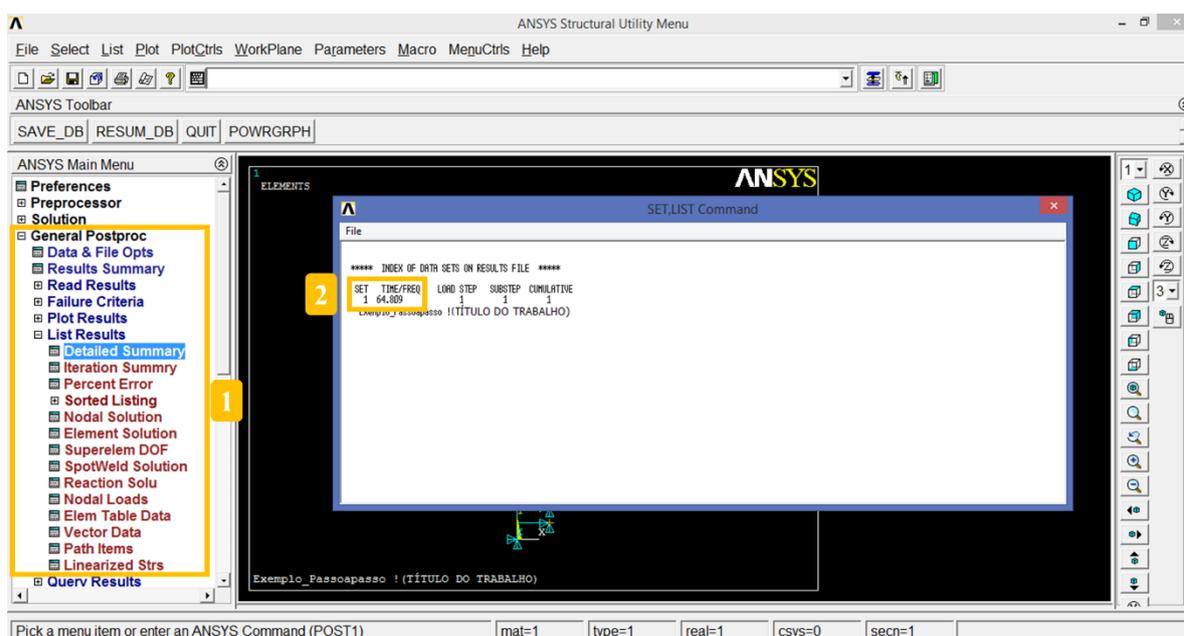


Figura A.28 Listagem de resultados

É possível visualizar também a deformada da estrutura (Figuras A.29 e A.30) através dos comandos a seguir:

- *Read Results*>> *Last Set*
- *General Postproc*>> *Plot Results*>> *Deformed Shape*

O resultado obtido para a carga associada ao primeiro modo de flambagem da estrutura foi de $P_{cr} = 64,809$. No Capítulo 4 os resultados desse e de outros problemas foram discutidos.

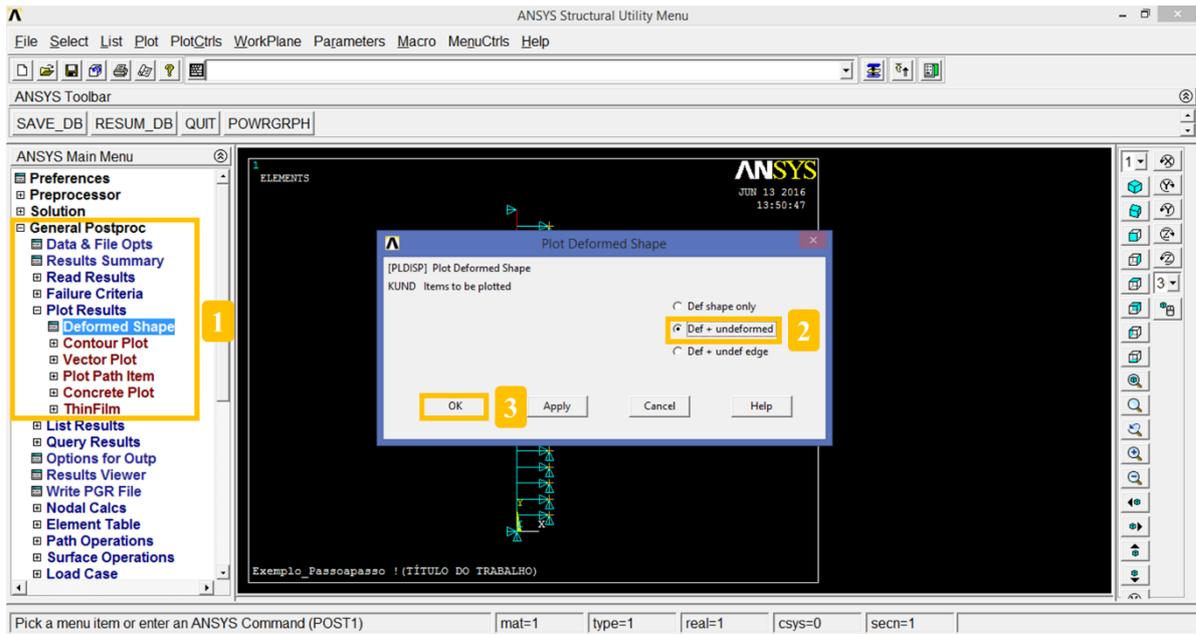


Figura A.29 Comandos para visualização da deformada da estrutura

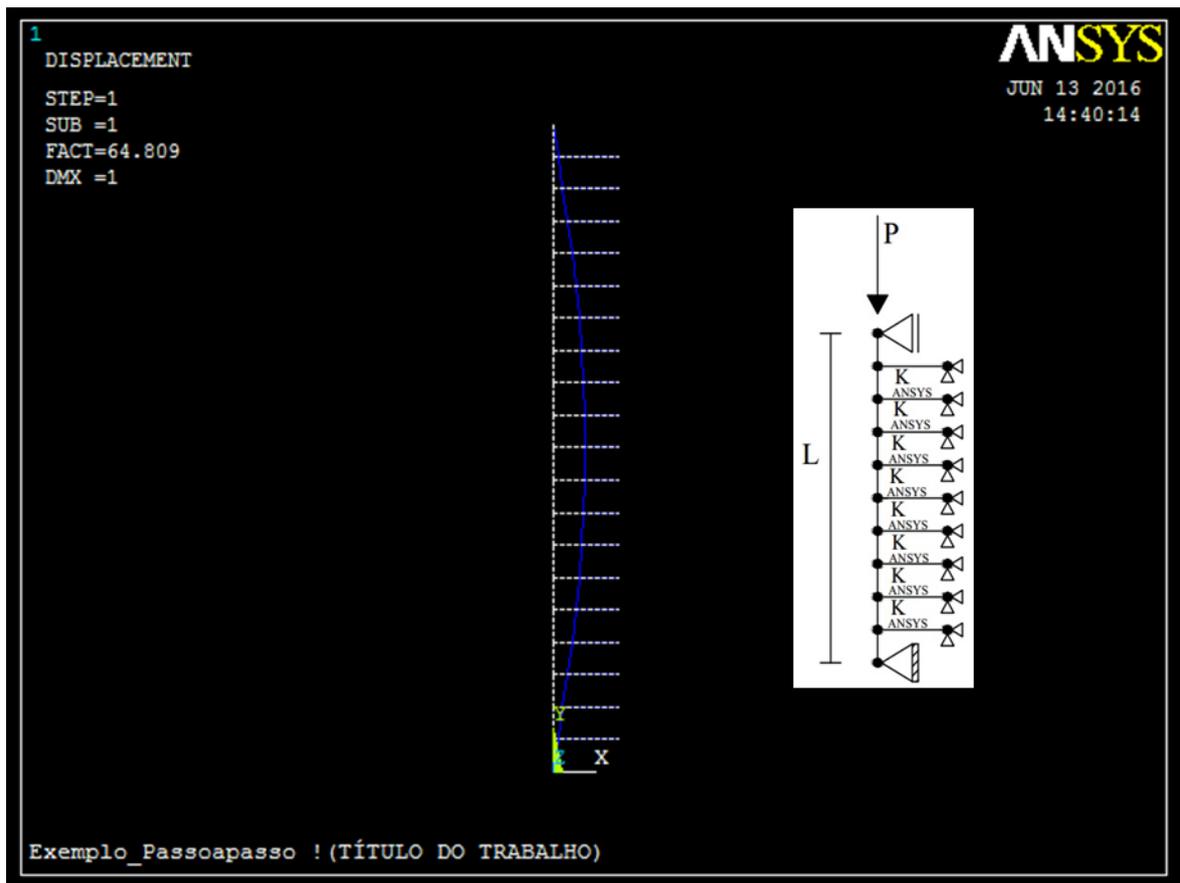


Figura A.30 Primeiro modo de flambagem da estrutura

A.5 Análise Não Linear

O ANSYS possui uma excelente capacidade de modelagem de problemas com diversas fontes de não linearidade. No presente trabalho, a não linearidade é de natureza geométrica e, para o caso do contato unilateral, é também associada às condições de contorno uma vez que a região de contato entre a estrutura e a base elástica não é conhecida previamente. A formulação do problema de contato bilateral e unilateral, considerando-se essas fontes de não linearidade, encontra-se no Capítulo 3 desta dissertação

Antes de se realizar a análise não linear, entretanto, é importante a realização do estudo da estabilidade linearizada, como apresentado na Seção A.4. Ao encontrar a carga crítica da coluna (apresentada na Figura A.6) através da resposta linearizada, pode-se escolher de maneira mais eficiente o carregamento total que será aplicado, de forma incremental, no processo de solução não linear. Em análises de estabilidade estrutural, a ferramenta de auxílio de modelagens do ANSYS, *ANSYS HELP*, instrui que a aplicação do carregamento deve ser entre 20% e 25% superior a carga crítica obtida na análise linear. Ao rodar o modelo, acontecerá uma das duas opções: (i) o processo de solução terminará antes de se atingir o carregamento total aplicado; (ii) o processo de solução terminará ao atingir o carregamento total aplicado.

Se o processo de solução terminar antes de se atingir o carregamento total aplicado, isso quer dizer que o carregamento máximo possível na análise numérica foi obtido. Caso o processo de solução termine quando o carregamento total é atingido, pode-se ainda aumentar o carregamento para continuar obtendo novas soluções.

Na realização de testes em modelos que já se conhece o comportamento da trajetória de equilíbrio, através de dados da literatura, por exemplo, pode-se pular o processo de análise linear a ir direto para a análise não linear, aplicando o carregamento máximo conhecido.

A estratégia de solução numérica, que inclui de maneira conjunta a não linearidade geométrica e a não linearidade das condições de contorno, é obtida de maneira incremental-iterativa. A configuração de equilíbrio da estrutura para um dado incremento de carga é aproximada partindo-se da predição de uma solução que tem como base a configuração de equilíbrio obtida no passo de carga anterior. O método iterativo de Newton-Raphson Padrão (NRP) foi utilizado acoplado a técnica de Comprimento de Arco (Riks, 1972; Crisfield, 1981), para variação dos incrementos de carga ao longo do ciclo iterativo. Ao acionar esse procedimento no ANSYS, é possível alcançar configurações de equilíbrio estáveis e instáveis e obter pontos críticos ao longo do caminho de equilíbrio.

Ao longo desta seção, o procedimento de análise não linear através do *software* ANSYS é detalhado para o exemplo da Figura A.6, que trata de uma coluna em contato bilateral com a base elástica. Esse mesmo procedimento foi utilizado em todas as modelagens realizadas e apresentados no Capítulo 4 desta dissertação. Na próxima subseção é explicado a forma de aplicação de carregamento na estrutura. É importante ressaltar que o procedimento para aplicação de cargas e restrições é exatamente o mesmo que aquele já apresentado na Subseção A.4.1 deste anexo. As opções que controlam a solução não linear são apresentadas na Subseção A.5.2. A Seção A.6 mostra diferentes formas de visualização de resultados, detalhando o pós-processamento da análise não linear.

A.5.1 Aplicando o Carregamento

Para realizar a solução não linear é preciso remover o carregamento unitário da análise de flambagem linearizada realizada anteriormente e descrita na Seção A.4. A Figura A.31 apresenta esse procedimento e a ordem dos comandos é mostrada abaixo:

- *Solution*>> *Define Loads*>> *Delete*
- *Structural*>> *Force/moment*>> *On Nodes*>> *Pick all*>> *OK*

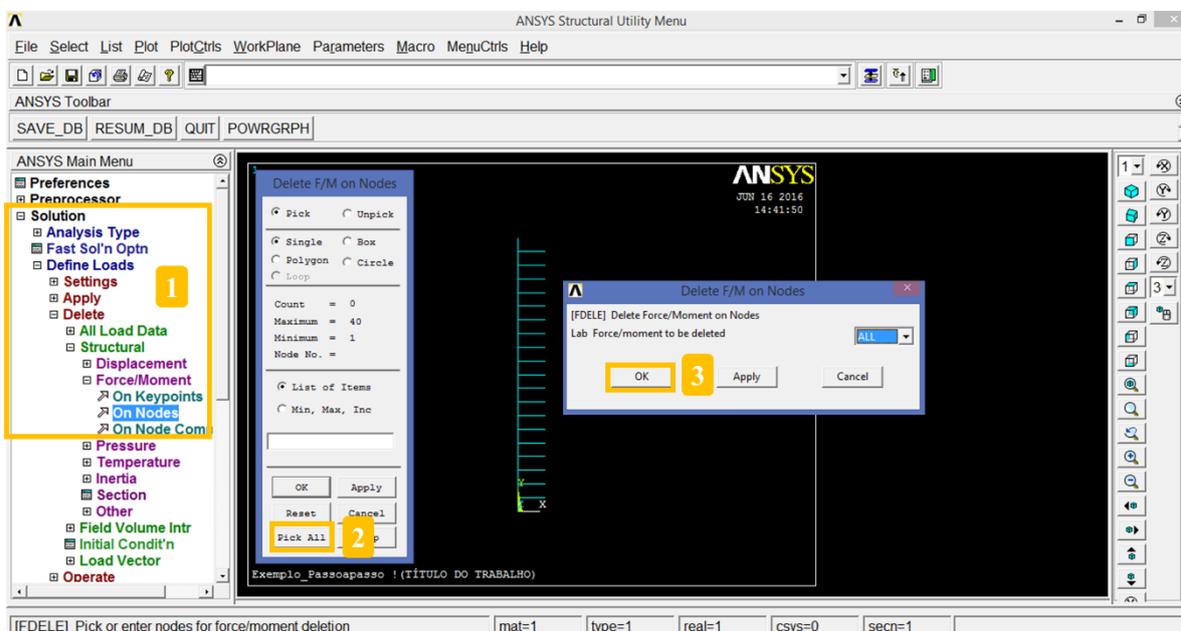


Figura A.31 Deletando o carregamento anterior

A aplicação do novo carregamento ocorre da mesma maneira que aquela apresentada na Figura A.19. O carregamento total é aplicado de forma incremental no processo de solução do problema e ele deve ser entre 20% e 25% superior a carga crítica obtida na análise linear realizada na Seção A.4. A sequência dos comandos é dada a seguir e a Figura A.32 ilustra novamente esse processo:

- *Solution*>> *Define Loads*>> *Apply*
- *Structural*>> *On Nodes*>> Selecionar o nó que receberá a carga
- *Direction of force/mom*>> *FY*>> Em *VALUE* digitar -80>> *OK*

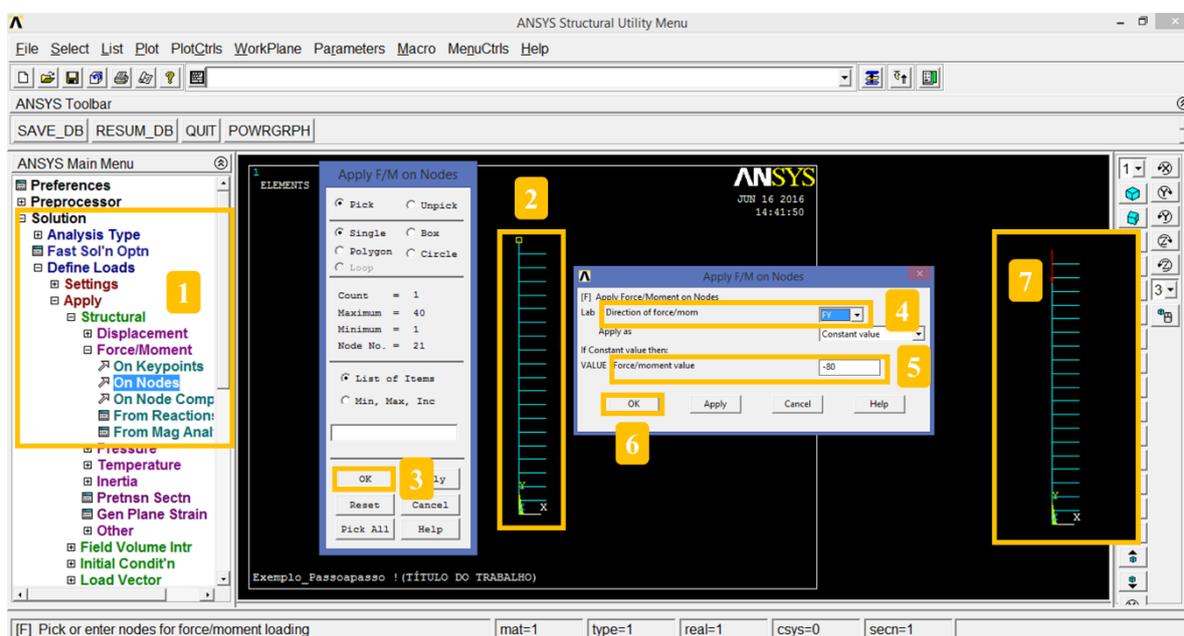


Figura A.32 Aplicação do carregamento

A.5.2 Controle da Solução Não Linear

O controle da solução não linear deve ser realizado conforme o escopo dado a seguir. A opção de grandes deslocamentos (*Large Displacement Static*) deve ser selecionada para a consideração da não linearidade geométrica.

No ANSYS a opção *Load Step* referencia o carregamento total aplicado à estrutura. Na solução estática não linear, “tempo” é uma medida da fração da carga total aplicada. Por exemplo, se o “tempo” vale 0,2 isso significa que nesse momento a estrutura está sujeita a 20% do seu carregamento total. O *Substep* é o número que referencia o “tempo” ou o fator

de carregamento da estrutura. A Figura A.33 mostra, através de um exemplo, como isso ocorre.

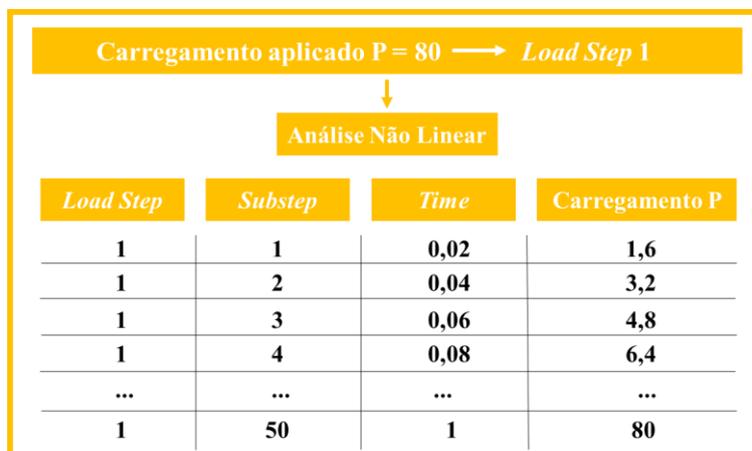


Figura A.33 *Load Step, Substep e Time*

O passo de carga inicial é definido pelo comando *Number of substeps*. Definindo, por exemplo, *Number of substeps* = 50 e com o carregamento aplicado à estrutura de $P = 80$, isso significa que a solução será iniciada para o carregamento $P = 80/50 = 1,6$. Deve-se estabelecer os incrementos máximos e mínimos de carga: em *Max no of substep*, define-se o incremento mínimo de carga. Seja *Max no of substep* = 100; isso quer dizer que o menor incremento de carga será $80/100 = 0,8$. Em *Min no of substep* define-se o incremento máximo de carga; para *Min no of substep* = 20, o incremento máximo de carga será de $80/20 = 4$.

Para que se possa visualizar os resultados para cada passo de carga deve-se informar que todas as soluções devem ser salvas em *Write Items to Results File*. Em soluções não lineares avançadas (em *Advanced NL*), seleciona-se a estratégia de Comprimento de Arco. Nas opções de análise, ativa-se os efeitos não lineares geométricos (em *NLEGEOM*) e aplica a definição de Newton-Raphson. Como opções do Newton-Raphson, existem aquelas apresentadas na Figura A.41. No presente trabalho a convergência foi obtida de maneira mais eficiente utilizando o Newton-Raphson Padrão (*Full N-R*).

Os comandos necessários para se determinar o controle da solução não linear são dados a seguir. Junto deles estão as referências das figuras que esclarecem o procedimento adotado diretamente no ANSYS.

- *Árvore de Funções*>> *Solution*>> *New Analysis*>> *Static*
- *Sol'n Controls*>> *Basic* (Figura A.34)
Analysis Options: Large Displacement Static
Number of substeps: 50
Max no of substep: 100
Min no of substep: 20
Write Items to Results File: All items
Frequency: Write Every Substep
- *Sol'n Controls*>> *Nonlinear* (Figura A.35)
Maximum number of iterarions: 1000
- *Sol'n Controls*>> *Advanced NL* (Figura A.36)
Activate arc-lenght method
- *Solution*>> *Analysis Options* (Figura A.37)
- *NLEGEOM*>> *ON* (Figura A.37)
- *NROPT*>> *Full N-R*>> *OK* (Figura A.37)
- *Solve*>> *Current LS*>> *OK* (Figura A.38)

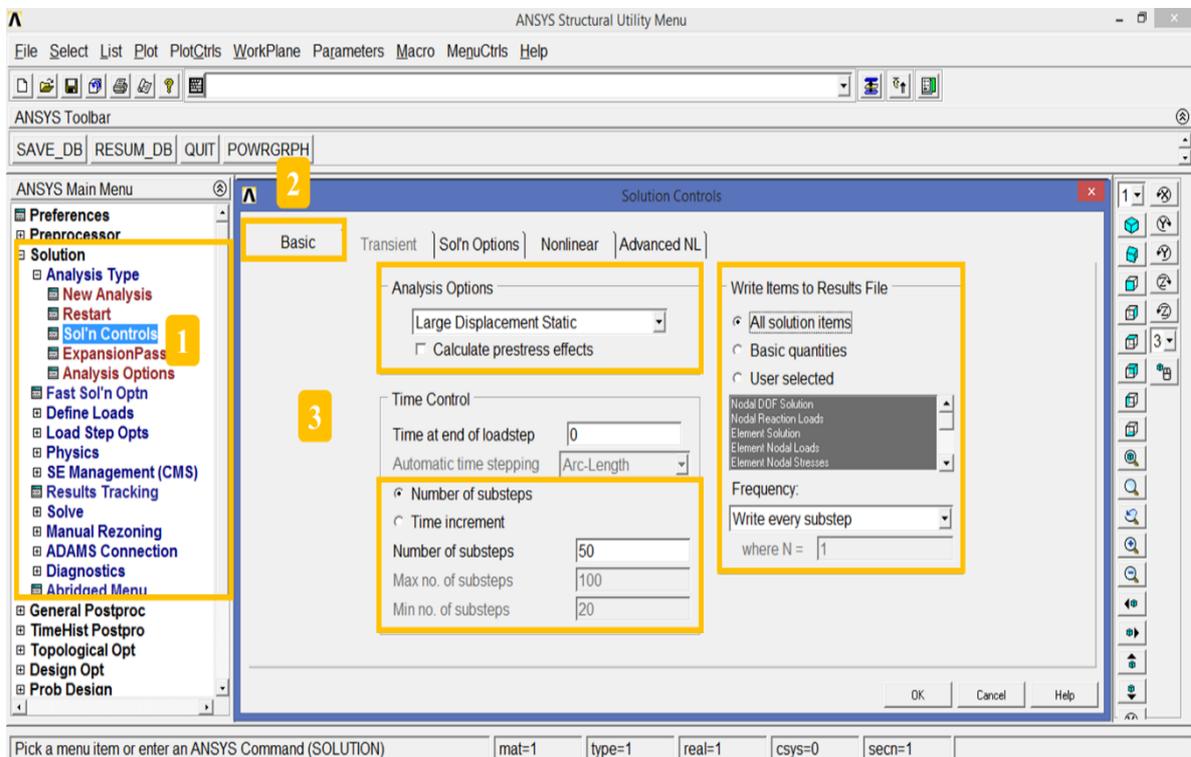


Figura A.34 Opções básicas de análise

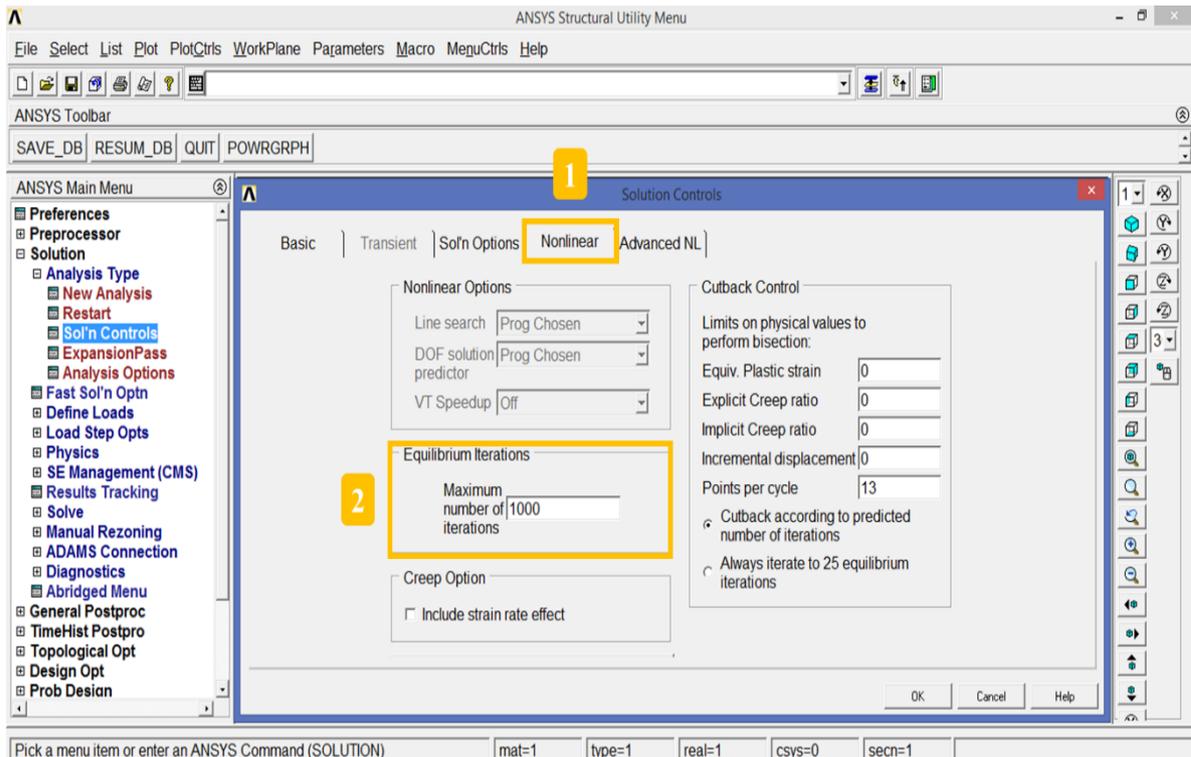


Figura A.35 Opções de análise não linear

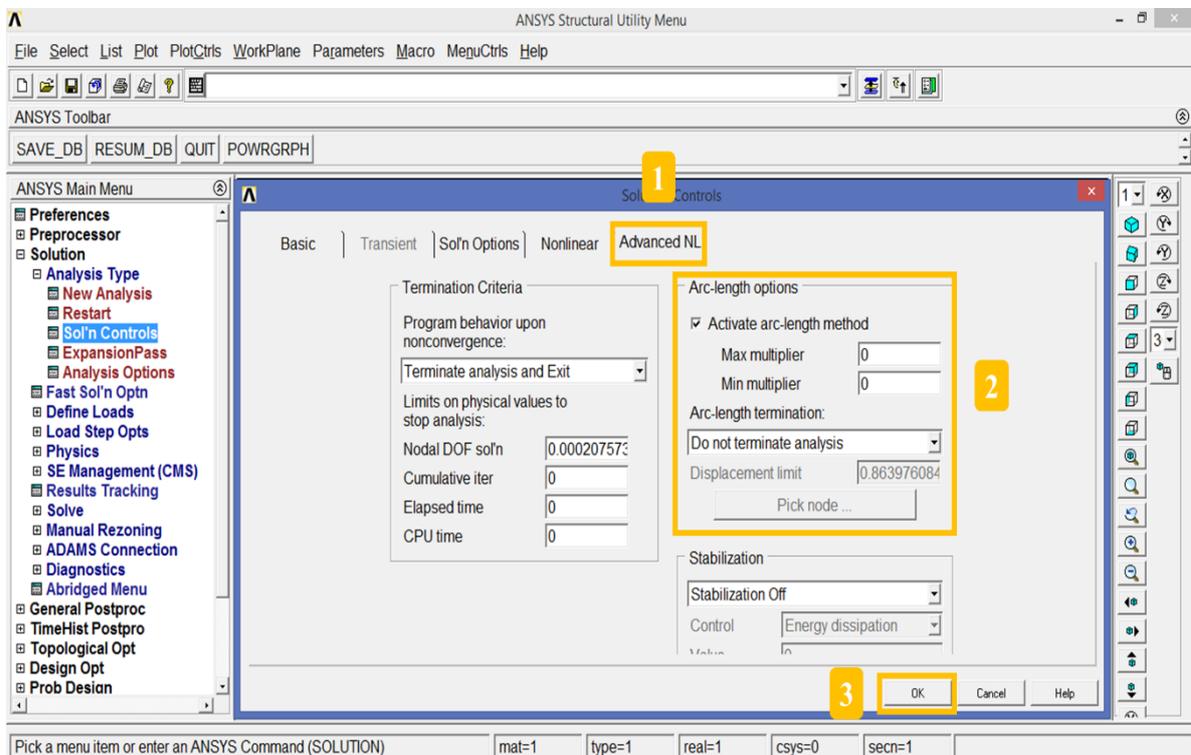


Figura A.36 Opções avançadas de análise não linear

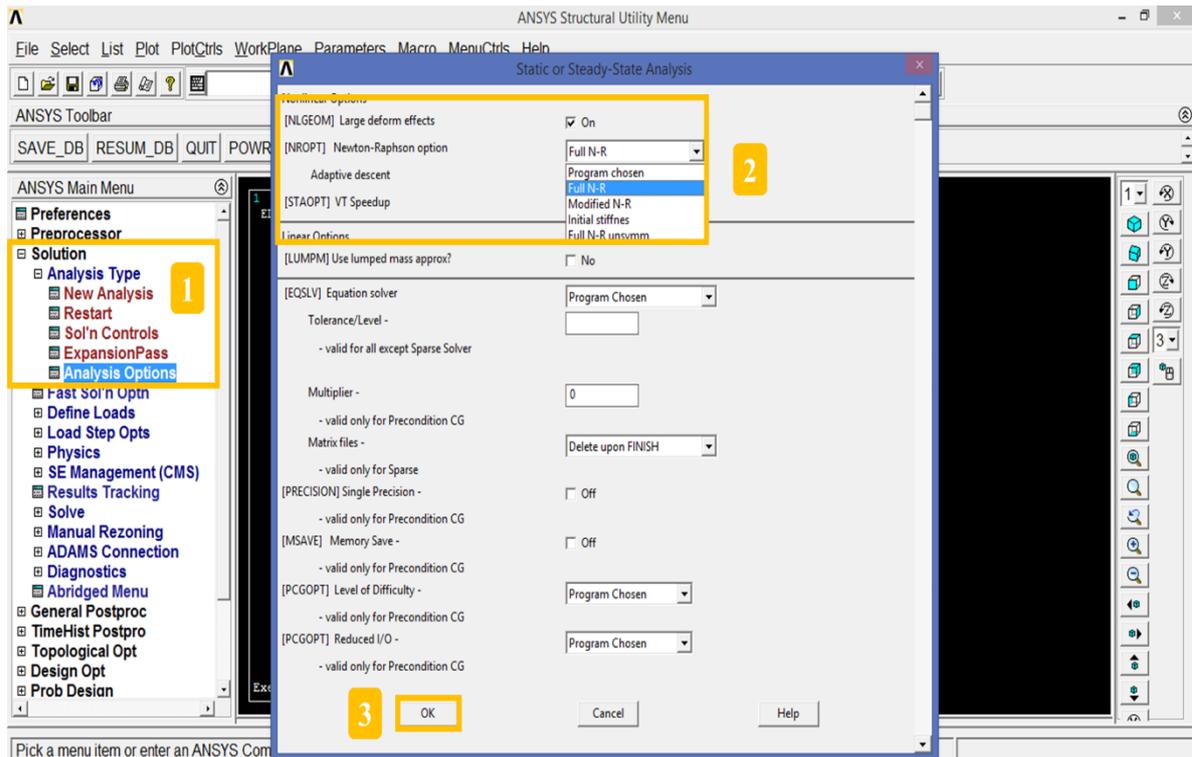


Figura A.37 Definindo as opções do Newton-Raphson

Com as configurações da análise não linear realizadas, basta rodar o modelo para a obtenção da solução do problema (Figura A.38).

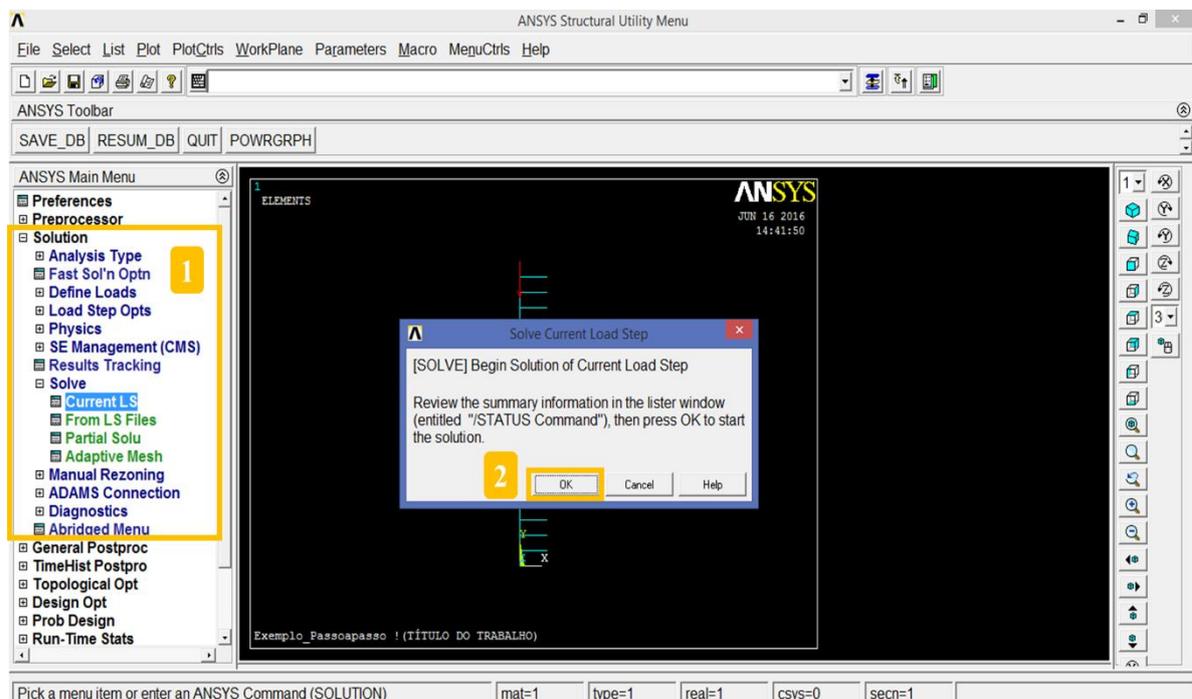


Figura A.38 Comando *Solve>> Current LS*

A visualização e a listagem dos resultados são apresentadas na próxima seção. Observações adicionais relativas à configuração do Comprimento de Arco (Riks, 1972; Crisfield, 1981) e modelagem do contato unilateral são realizadas na última seção deste anexo (Seção A.7).

A.6 Pós-Processamento: Visualização de Resultados

O pós-processamento, no ANSYS, como apresentado na Figura A.4, é obtido em duas etapas distintas da *Árvore de Funções*: *General Postproc* e *TimeHist Postpro*.

Em *General Postproc* é possível realizar a leitura dos resultados em cada *Substep* da solução, separadamente. Já em *TimeHist Postpro* a solução é dada em função de todos os *Substeps*, é onde se visualiza a trajetória de equilíbrio da estrutura.

Para o exemplo proposto da coluna em contato bilateral com a base elástica de Winkler (Figura A.6), deseja-se obter o caminho de equilíbrio, caracterizado pela variação do deslocamento na direção x no meio da coluna. Para isso, é preciso ir até a caixa de comandos *TimeHist Postpro* e seguir com os comandos dados a seguir. As indicações das figuras nas linhas de comando caracterizam aquelas que representam o procedimento diretamente no ANSYS. Ao fim do procedimento, aparecerá na *Janela Gráfica* o gráfico da trajetória de equilíbrio da estrutura (Figura A.42).

- *Árvore de Funções*>> *TimeHistPostpro*>> Clicar em + (Figura A.39)
- *Add Time-History Variable*>> *Nodal Solution*>> *DOF Solution* (Figura A.39)
- *X- Component of displacement*>> Selecionar o nó que se deseja>> *OK* (Figura A.39)
- *OK* (Figura A.39)
- *Time HistPostpro*>> Clicar em +>> *Arc Length Items* (Figura A.40)
- *Total Load Factor*>> *OK* (Figura A.40)
- Garantir que *UX* seja o eixo x do gráfico>> *Marcar X-Axis* (Figura A.41)
- Deixar selecionado em azul *Total Load Factor*; isso garante que o fator de carga seja o eixo y do gráfico (Figura A.41)
- *Time HistPostpro*>> Clicar no símbolo do gráfico>> *Close* (Figura A.41)

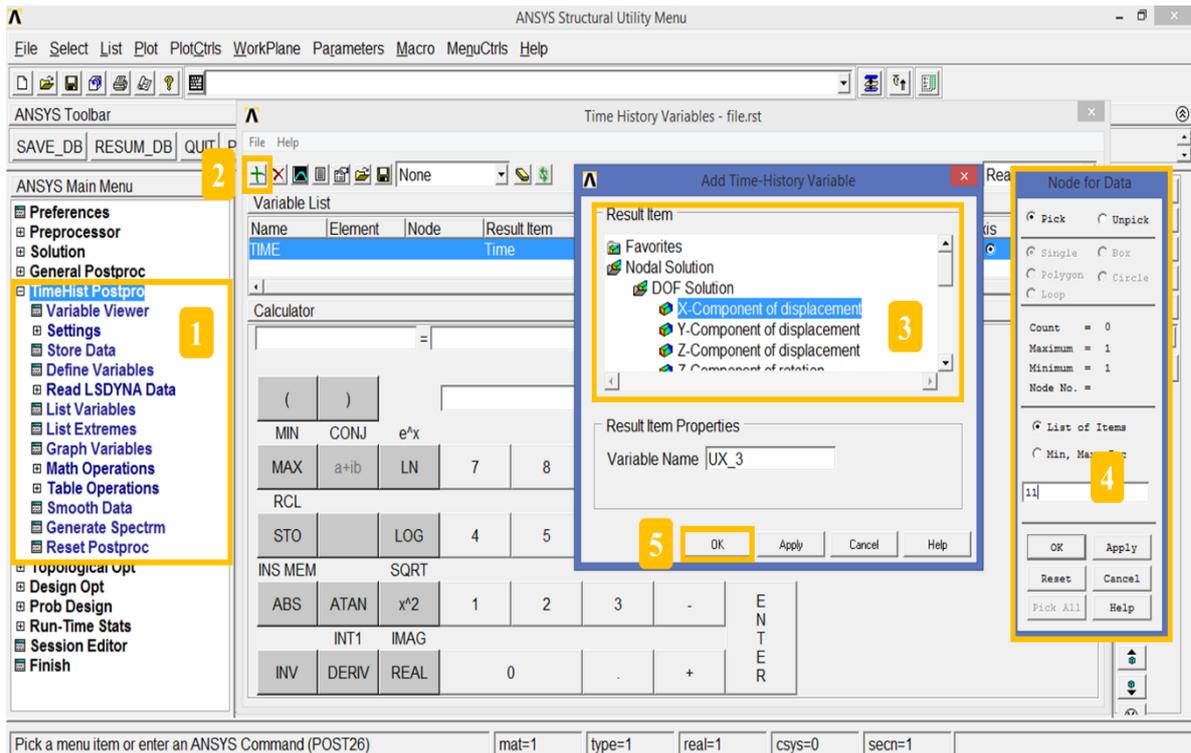


Figura A.39 Selecionar variáveis para obtenção de trajetória de equilíbrio-Parte I

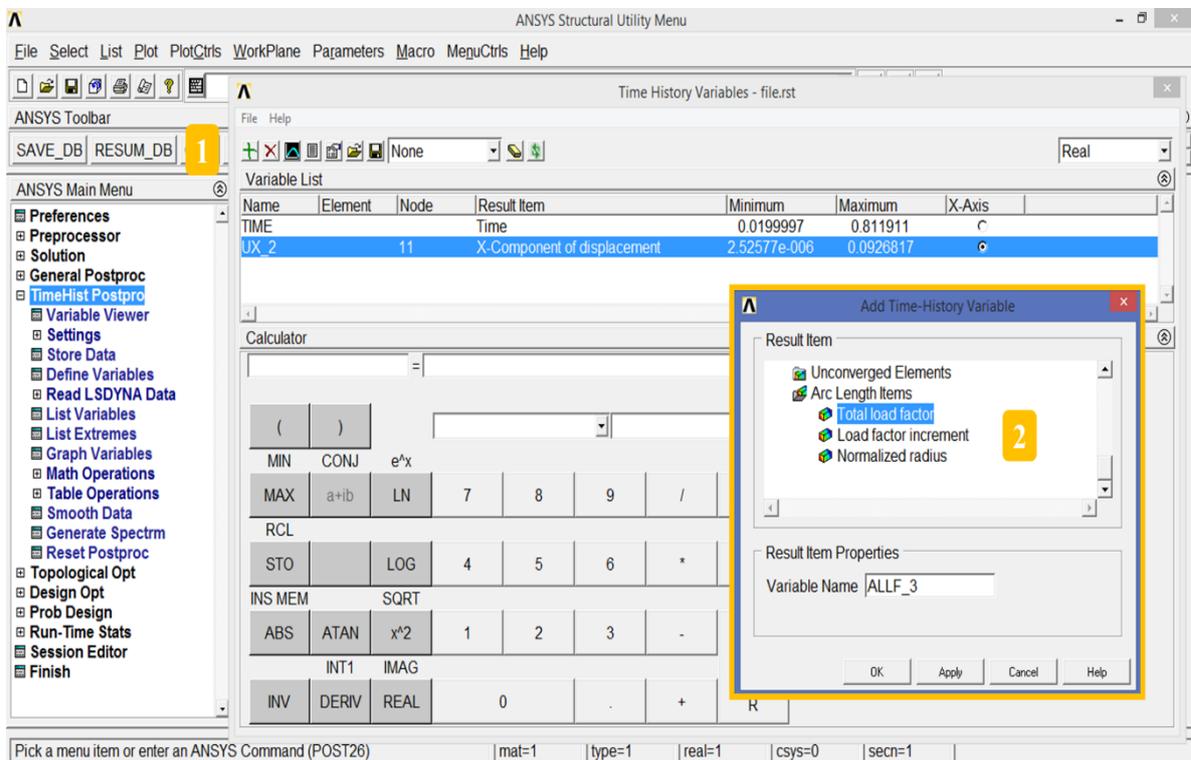


Figura A.40 Selecionar variáveis para obtenção de trajetória de equilíbrio-Parte II

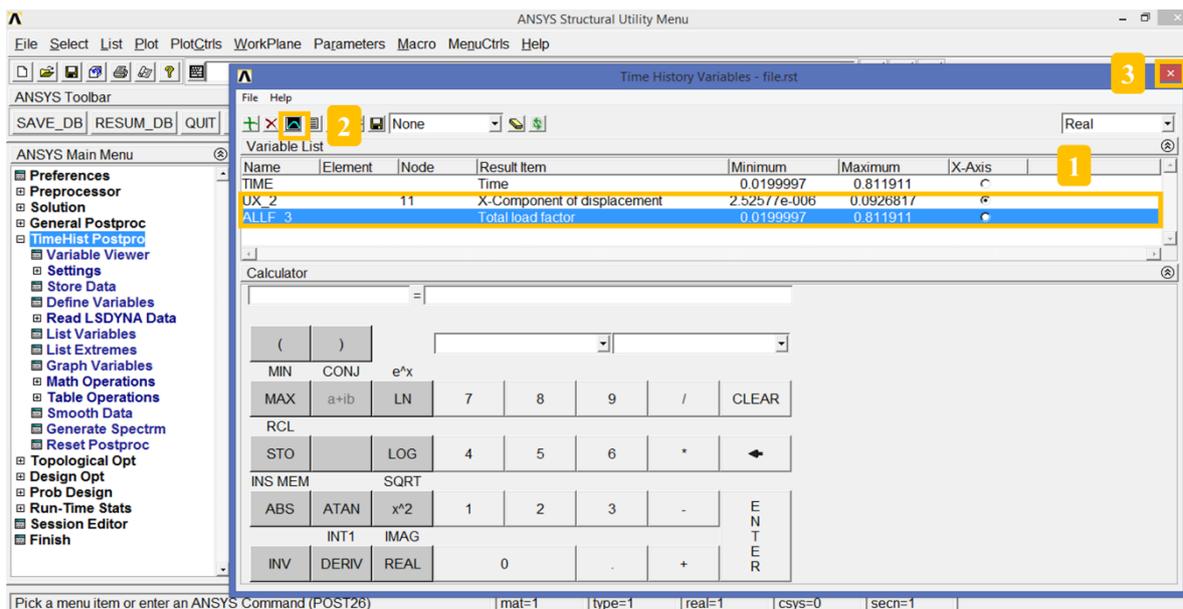


Figura A.41 Procedimento para traçar a curva de equilíbrio da estrutura

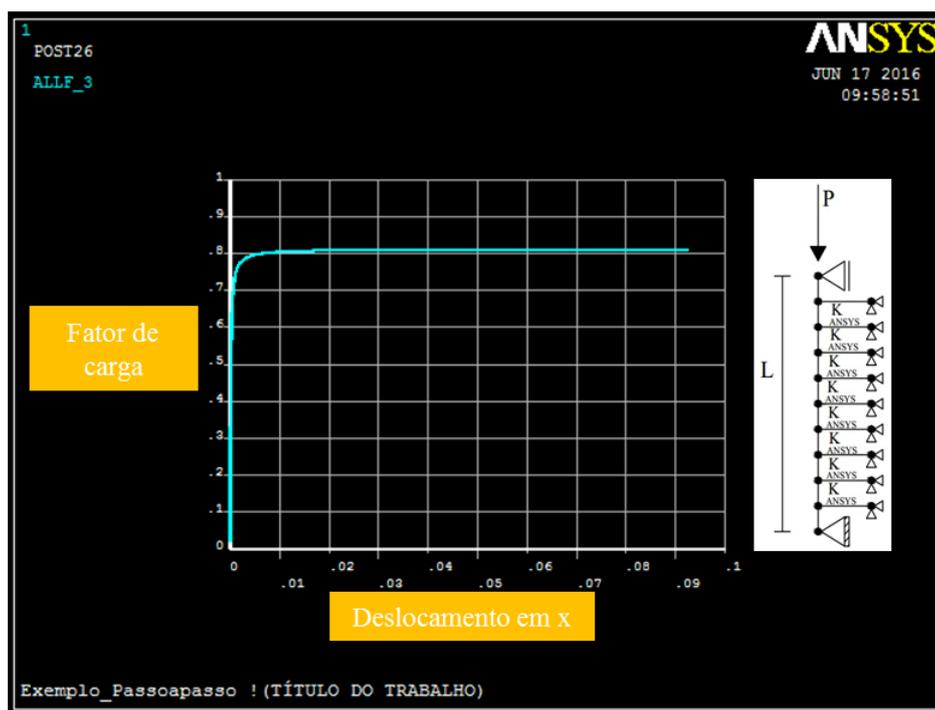


Figura A.42 Gráfico da trajetória de equilíbrio da coluna biapoada em contato bilateral com base de Winkler

É possível listar esses resultados e copiá-los para que se possa analisá-los em ferramentas computacionais auxiliares (Figura A.43). Isso é feito através dos procedimentos:

- *Árvore de Funções*>> *TimeHist Postpro*
- Selecionar a variável que se deseja>> Clicar no símbolo de “folha de caderno”

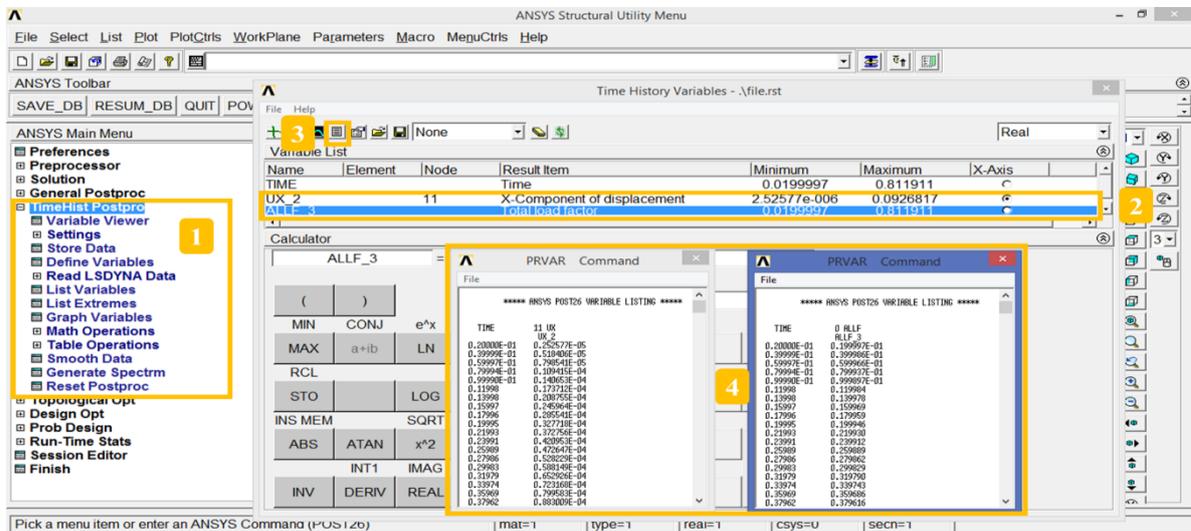


Figura A.43 Listagem dos resultados

Com o intuito de analisar todos os resultados como deslocamentos nodais, momentos fletores, esforço cortante, entre outros, para determinado *Substep* é preciso ir até a caixa de comandos da *Árvore de Funções* chamada de *General Postproc*. Em *Result Summary* são listados todos os *Substeps* com o *Time* (fator de carga) relativo a eles (Figura A.44).

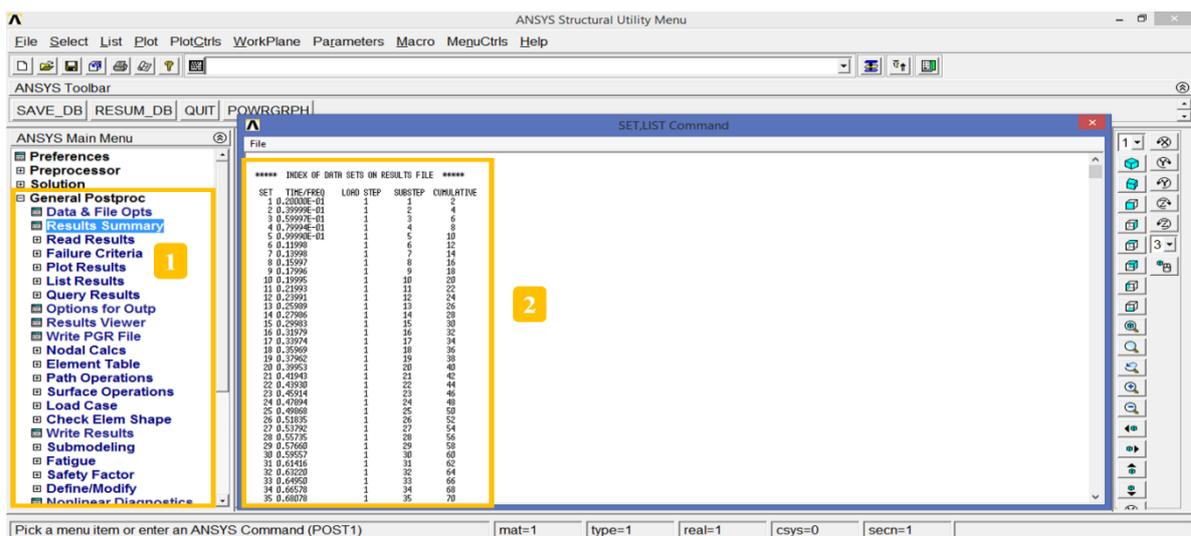


Figura A.44 Results Summary

Para visualização do *Substep* de número 100, relativo ao *Time* (fator de carga) de 0,801005 (ou seja, nesse momento a carga de compressão P aplicada na coluna é de $P = 80 \times 0,801005 = 64,0804$) é necessário informar ao ANSYS o *Substep* desejado para que o programa faça a leitura de seus resultados, ou seja:

- *Árvore de Funções*>> *General Postproc*>> *Read Results*
- Em *NSET* informar o número do *Substep* que se deseja, 100>> *OK*

Caso se queira fazer a leitura de qualquer outro *Substep*, basta proceder da mesma maneira. A Figura A.45 ilustra essa ação diretamente no ANSYS.

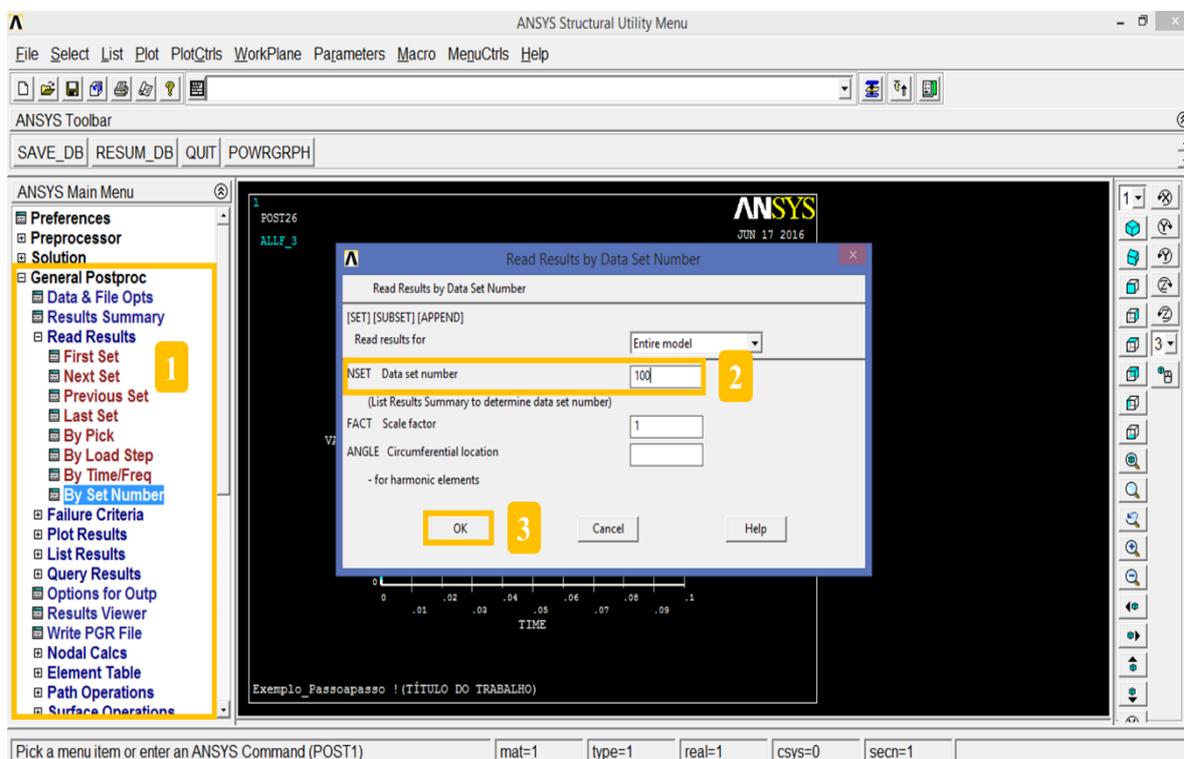


Figura A.45 Leitura de resultados em *Substep* específico

Agora, basta listar os resultados e visualizar a deformada da estrutura na *Janela Gráfica* do ANSYS para o *Substep* específico. A deformada da estrutura é dada de forma bem simples e direta. Existe também a opção de visualização da deformada com ou sem o traçado da posição indeformada da estrutura.

Para a apresentação gráfica da deformada da estrutura na *Janela Gráfica* do ANSYS deve-se proceder como mostrado na Figura A.46 e como descrito a seguir. A Figura A.47

apresenta o desenho da deformada da coluna em azul e com a posição indeformada tracejada, para *Substep* de número 100.

- *Árvore de Funções*>> *General Postproc*>> *Plot Results*
- *Deformed Shape*>> *Def + undeformed*>> *OK*

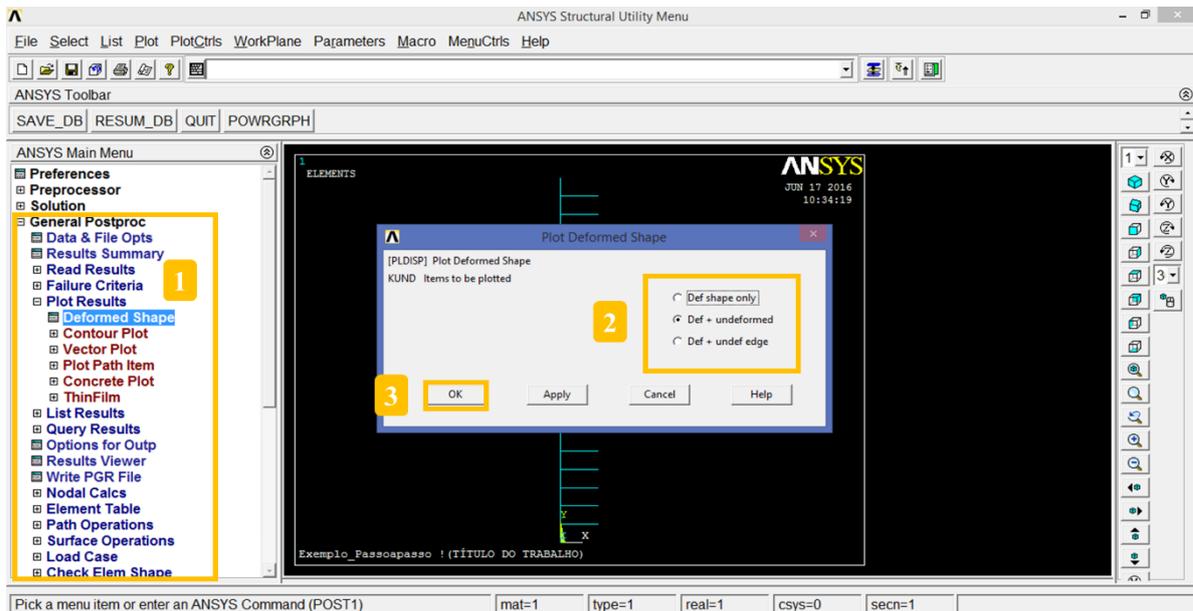


Figura A.46 Processo de plotagem da deformada da coluna

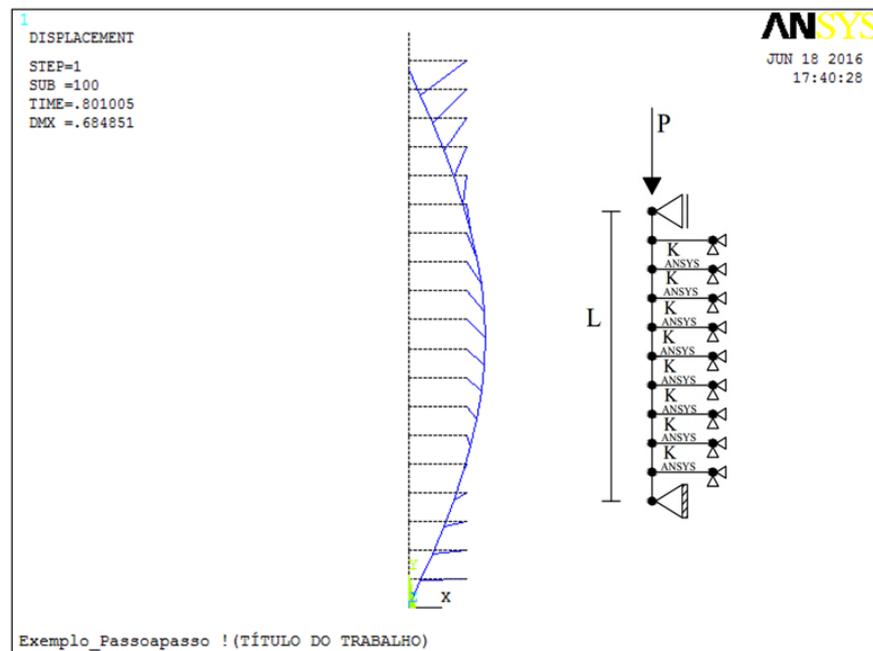


Figura A.47 Plotagem da deformada da estrutura *Substep* = 100

Para listagem dos resultados no determinado *Substep*, é necessário proceder da seguinte maneira, que também é exemplificada na Figura A.48:

- *Árvore de Funções*>> *General Postproc*>> *List Results*
- *Nodal Solutions*>> *Nodal Solutions*>> *X-displacement*>> *OK*

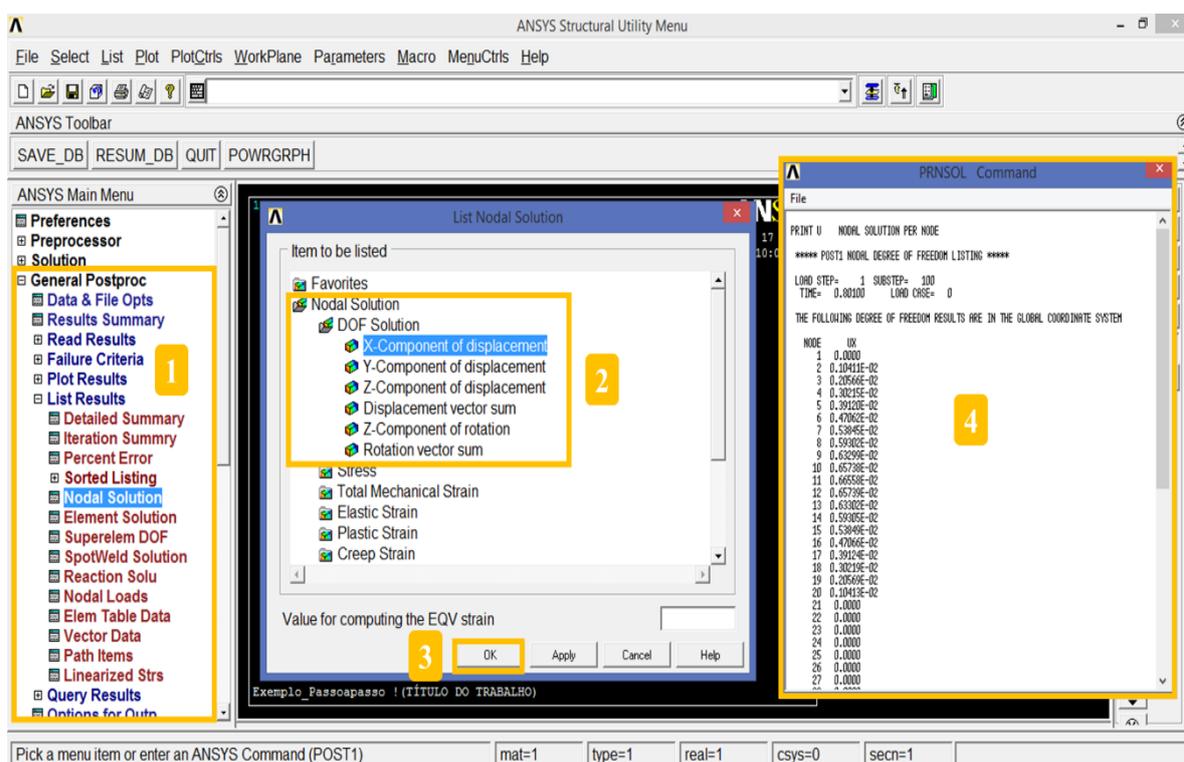


Figura A.48 Listagem de resultados

Nesse processo é exemplificado a listagem para todos os deslocamentos na direção x dos nós da estrutura. Para listar as demais soluções nodais basta proceder da mesma maneira escolhendo-se a variável que se deseja.

A Figura A.49 apresenta a deformada da estrutura para o último *Substep*, de número 1000, relativo ao fator de carga de 0,81191 e deslocamento máximo na direção x de 0,092757.

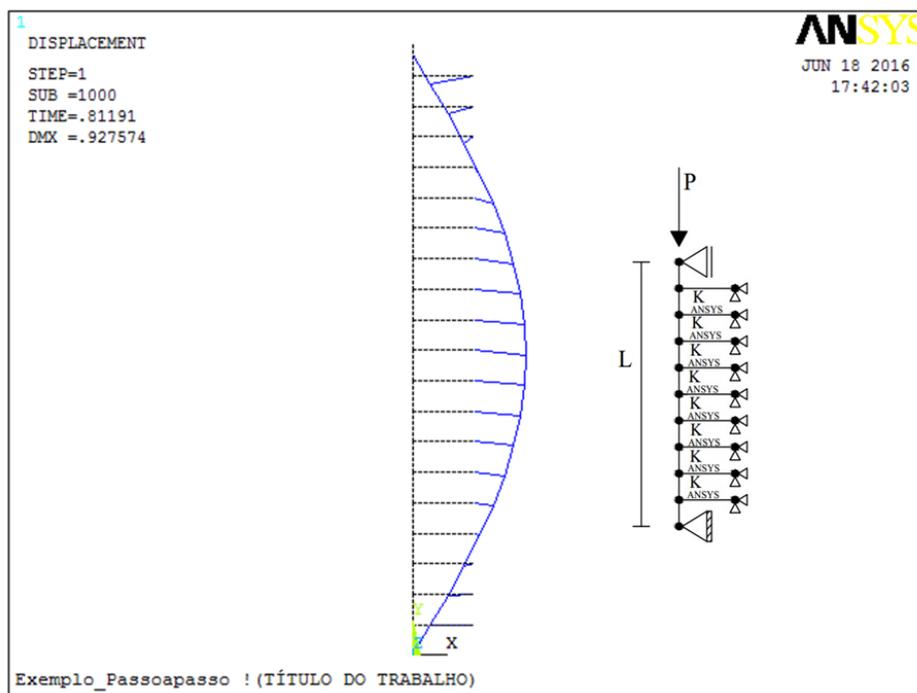


Figura A.49 A configuração deformada da estrutura para o último *Substep*
(Fator de escala = 10)

A.7 Observações Importantes

Esta seção destina-se a fazer observações relevantes em relação à configuração da estratégia de Comprimento de Arco (Riks, 1972; Crisfield, 1981) (Subseção A.7.1) e em relação à modelagem do problema de contato com as restrições unilaterais (Subseção A.7.2)

A.7.1 Emprego da Técnica do Comprimento de Arco

A técnica de Comprimento de Arco (Riks, 1972; Crisfield, 1981), aliado ao método iterativo de Newton-Raphson Padrão, permite que o parâmetro de carga varie durante o ciclo iterativo. Com essa estratégia foi possível obter as diversas configurações de equilíbrio estáveis e instáveis da estrutura e definir os pontos críticos ao longo da trajetória não linear de equilíbrio. O Capítulo 3 do presente trabalho descreve essa estratégia de solução incremental-iterativa.

O Comprimento de Arco é adotado para controle dos passos de carga ao longo da trajetória de equilíbrio. O ANSYS, no seu padrão *Default*, estabelece que o raio máximo do Comprimento de Arco é 25 e o mínimo, 5/1000. Para manter as configurações *Default* do programa, basta deixar a caixa de comando vazia ou digitar 0. Muitas vezes, ao alterar os

valores máximo e mínimo do raio, consegue-se um traçado mais satisfatório da trajetória de equilíbrio. Nesta dissertação, especialmente para os problemas de arcos e anéis que estão no Capítulo 4, utilizou-se como valores máximo e mínimo do raio do Comprimento de Arco como sendo 1 e 0,1, respectivamente. Para realizar essa alteração, deve-se proceder da seguinte forma:

- *Árvore de Funções*>> *Solution*>> *Analysis Type*
- *Sol'n Controls*>> *Advanced NL*>> *Arc-length options*
- Max multiplier*>> Definir o raio máximo 1
- Min mutilplier*>> Definir o raio mínimo 0,1

Através das opções do Comprimento de Arco (*Arc-length options*) é possível também estabelecer o término da análise em função do deslocamento nodal desejado. Em *Arc-length termination*, pode-se escolher qual deslocamento se deseja e depois clicando em *Pick node...* é necessário informar ao sistema qual será o nó responsável pelo controle de deslocamento para término da análise.

Após definir essas opções, basta seguir com os procedimentos descritos na Seção A.5 para realização da análise não linear. A Figura A.50 apresenta no ANSYS o local onde se define as opções de Comprimento de Arco.

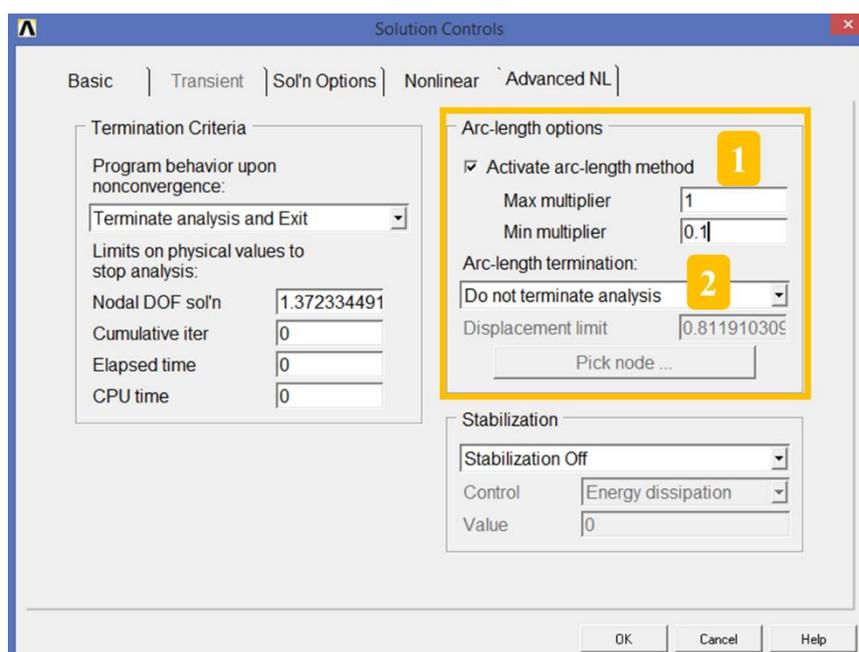


Figura A.50 Opções de Comprimento de Arco

A.7.2 Problemas com Restrições Unilaterais de Contato

Todo o processo de solução do problema descrito no início deste anexo e mostrado pela Figura A.6, apresenta o método de solução para a coluna em contato bilateral com a base elástica. A análise de flambagem linearizada e a estratégia para a solução não linear é exatamente a mesma para o caso do contato unilateral, onde a base elástica só responde às solicitações de compressão. A diferença ocorre apenas no momento da escolha dos elementos finitos utilizados e na definição de suas constantes reais (*Real Constants*).

No caso do problema de contato unilateral, o elemento escolhido para a modelagem das molas discretas é o *LINK10*. Para a estrutura, o elemento é o mesmo, *BEAM3*. Na *Árvore de Funções*, em *Preprocessor*, deve-se clicar em *Element Type*. A sequência de comandos a ser usada é a seguinte:

- *Árvore de Funções*>> *Preprocessor*>> *Element Type*>> *Add/Edit/Delete*
- *Add...*>> *Beam*>> *2D elastic 3*>> *OK*
- *Add...*>> *Link* >> *bilinear 10*>> *OK*>> *Close*

Na sequência, é necessário definir que os elementos atribuídos como *LINK10* somente reagirão aos esforços de compressão. Isso é feito através dos passos:

- *Árvore de Funções*>> *Preprocessor*>> *Element Type*>> *Add/Edit/Delete*
- Selecionar o elemento *LINK10*>> *Options*
Em *K2* selecionar *Longitude Motion*
Em *K3* selecionar *Compression Only*
- *OK*

A próxima etapa é a introdução das propriedades dos elementos (constantes reais), que no ANSYS são chamadas de *Real Constants*. São definidas duas reais constantes, uma para cada tipo de elemento utilizado. Para o *BEAM3* são definidas pelo usuário a área da seção transversal e seu momento de inércia; no caso do *LINK10*, é definida somente a área da seção transversal, A_{ANSYS} , dada pela Equação A.6. Os comandos são apresentados a seguir e mostrados na Figura A.51:

- *Preprocessor*>> *Real Constants*>> *Add/Edit/Delete*
- *Add...>>Type1 BEAM3>> OK*
- Digitar área da seção transversal em *AREA*
- Digitar momento de inércia em *IZZ*
- *OK*
- *Add...>> Type 2 LINK10>> OK*
- Digitar a área da seção transversal A_{ANSYS} em *AREA>> OK>> Close*

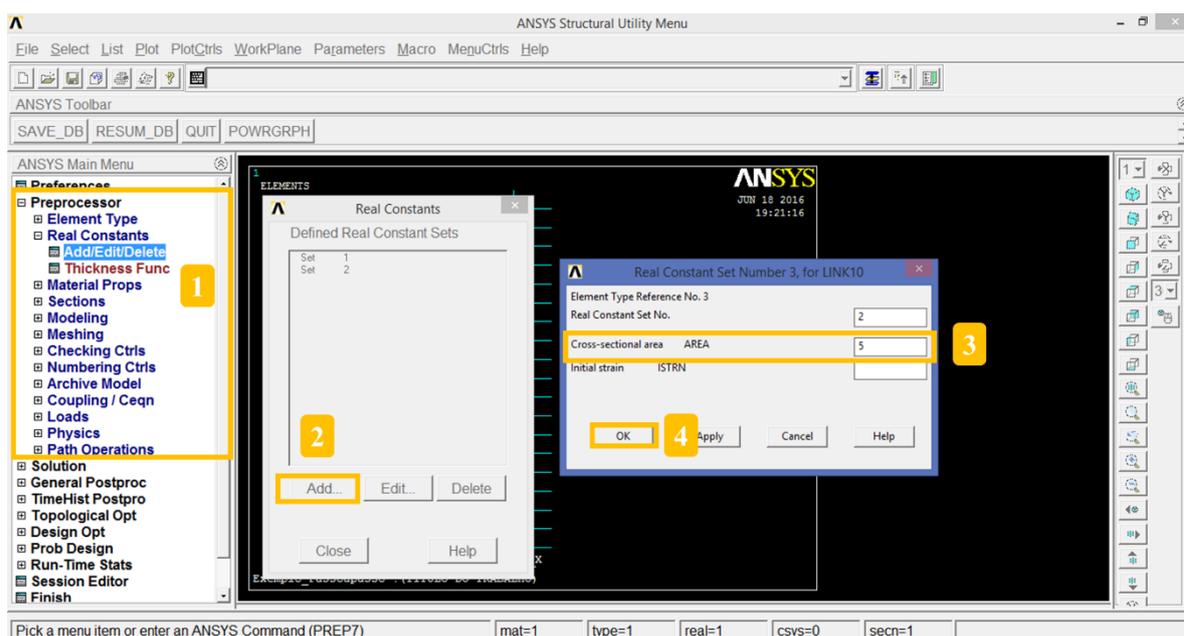


Figura A.51 Definindo a *Real Constant* do elemento *LINK10*

Na criação da malha, ao invés de se selecionar o elemento *COMBIN14* irá selecionar o elemento *LINK10*. O procedimento é o mesmo do descrito na Subseção A.3.4. Com a malha de elementos definida, a análise pode ser realizada como apresentada nas Seções A.4 e A.5.