



Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação Em Engenharia
Civil



Análise numérica de cascas de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço usando elementos finitos de casca e interface

Luís Eduardo Silveira Dias

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva

Ouro Preto, maio de 2016.

D541a Dias, Luís Eduardo Silveira.
Análise numérica de cascas de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço usando elementos finitos de casca e interface [manuscrito] / Luís Eduardo Silveira Dias. - 2016.
91f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Amilton Rodrigues da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PROPEC.
Área de Concentração: Construção Metálica.

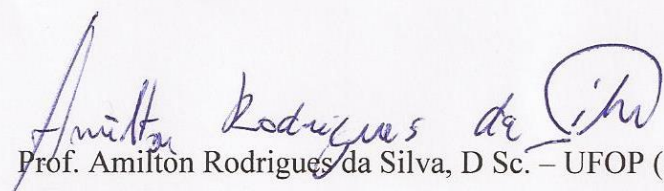
1. Estrutura mista - Conexão deformável. 2. Cascas (Engenharia). 3. Método dos Elementos Finitos. I. Silva, Amilton Rodrigues da. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

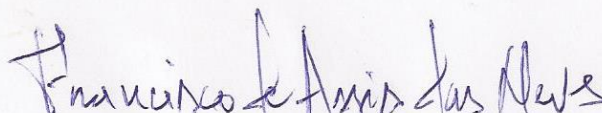
CDU: 624.016

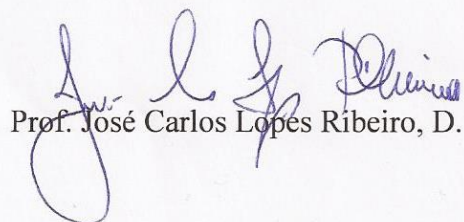
**ANÁLISE NUMÉRICA DE CASCAS DE CONCRETO LIGADAS COM
CONEXÃO DEFORMÁVEL A VIGAS DE AÇO USANDO
ELEMENTOS FINITOS DE CASCA E INTERFACE**

AUTOR: LUÍS EDUARDO SILVEIRA DIAS

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 06 de maio de 2016, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:


Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D Sc. – UFOP (Presidente)


Prof. Francisco de Assis das Neves, D. Sc. – UFOP


Prof. José Carlos Lopes Ribeiro, D. Sc. - UFV

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por sempre estar iluminando o meu caminho e me dando força nos momentos difíceis.

Ao meu orientador Amilton, que foi fundamental para o desenvolvimento do trabalho, pela brilhante assistência durante toda a orientação e por estar presente sempre em todos os momentos.

À minha família, em especial aos meus pais Sebastião e Marcionília, minha tia Leila, meus primos José Roberto e Eduardo, por todo apoio e o grande incentivo desde o começo do curso.

À Renata, pelo carinho, apoio, estímulo e paciência em todos os momentos.

Aos demais professores e funcionários do PROPEC que tive a oportunidade de conviver e pelo aprendizado devido ao excelente trabalho que desenvolvem.

Aos colegas de mestrado pela amizade, pelo companheirismo nos estudos, e também pelos momentos de lazer compartilhados. Em especial aos colegas Ígor, Lorrany, Keoma, Fabrício, Rafael e Everton.

À República Alambiki pela amizade, apoio e hospitalidade durante todo o curso.

À Rovia e ao André pelo suporte durante todo curso na solução de problemas relacionados ao PROPEC.

À FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

*“A vida me ensinou a nunca
desistir nem ganhar nem perder,
mas procurar evoluir..”
- Charlie Brown Junior*

Resumo da dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil

Análise numérica de cascas de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço usando elementos finitos de casca e interface

LUÍS EDUARDO SILVEIRA DIAS

Maio 2016

Orientador: Amilton Rodrigues da Silva

Com o crescente uso do aço na construção civil no Brasil, em especial na confecção de pilares e vigas em edifícios de múltiplos andares, é cada vez mais comum a presença de elementos mistos formados pela associação mecânica entre elementos de superfície de concreto e vigas de aço na construção civil. Geralmente essa associação mecânica é feita por conectores soldados ao elemento de aço e envolvidos pelo elemento de concreto. Devido à deformabilidade existente na ligação surgem deslocamentos relativos entre os elementos conectados. Esses deslocamentos poderão ser mais ou menos significativos dependendo da rigidez da ligação, ou seja, do número e do tipo de conectores utilizados.

Nesse trabalho foram desenvolvidos três elementos finitos de interface capazes de associar elementos planos de casca em três diferentes combinações: elementos em planos paralelos sobrepostos; planos ortogonais; e elementos paralelos pertencentes ao mesmo plano. Esses elementos de interface podem ser utilizados para evitar a sobreposição de áreas, ou alteração das dimensões da seção transversal, quando se utiliza um modelo de discretização em elementos de casca para uma análise estrutural qualquer. Eles também têm a função de ligar os elementos de cascas de uma seção mista e simular o comportamento mecânico da conexão deformável. Os elementos de interface deverão ter graus de liberdade compatíveis com os graus de liberdade dos elementos de cascas aos quais serão conectados. Nesse trabalho será utilizado o elemento de casca com nove nós, o elemento unidimensional e bidimensional de interface de seis nós e dezoito nós, respectivamente, sendo todos com cinco graus de liberdade por nó (a nível local).

Para viabilizar a montagem do arquivo de entrada de dados usando os elementos finitos propostos, foi desenvolvido um gerador de malha de elementos finitos. Por exemplo, para o caso de uma viga mista, definida a superfície de concreto, sua espessura, as posições das vigas de aço, forma e dimensões de sua seção transversal, o gerador de malha irá discretizar em elementos de casca a superfície de concreto e as vigas de aço inserindo elementos de interface nas regiões de contato entre as vigas de aço e a superfície de concreto.

Na validação dos elementos implementados foram utilizadas soluções analíticas, resultados numéricos obtidos de softwares comerciais e resultados experimentais e numéricos da literatura.

Palavras chaves: Estrutura mista, conexão deformável, elemento de casca, elemento de interface.

Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

Numerical analysis of concrete shells connected with deformable connection to steel beams using shell finite elements and interface

LUÍS EDUARDO SILVEIRA DIAS

May 2016

Advisor: Amilton Rodrigues da Silva

Due the increasing use of steel in civil construction in Brazil, especially in beams and columns confection of multistory buildings, it is becoming more common in constructions the mixed elements presence formed by mechanical association between concrete surface elements and steel beams. Normally this mechanical association is made by connectors welded to the steel element and surrounded by the concrete element. Due to the deformability that exists in the connection, relative displacements appear between the connected elements. Those displacements can exhibit different levels of significance depending on the connection stiffness, in other word, depending on number and the type of the connector used.

In this work, three interface finite elements were developed. They are able to associate flat shell elements in three different combinations: elements in overlapping parallel plane; orthogonal planes; and parallel elements belonging to the same plane. These interface elements can be used to prevent overlapping areas, or changes on the dimensions of the cross section when using a discretized model of shell elements for any structural analysis. They also have the function of connecting shells elements of a composite section and simulating the mechanical behavior of the deformable connection. The interface elements should have compatible degree of freedom related to the shell elements degree of freedom that they are going to be connected. In this work it is going to be used a shell element with nine nodes, the one-dimensional element six nodes interface and two-dimensional eighteen nodes interface, and all of them with five freedom levels by node (locally).

A mesh generator of finite elements was developed to facilitate file input mounting using finite elements proposed. For a composite beam case for example, after defined its concrete surface, its thickness, its position, its shape and its cross section dimensions; the mesh generator will discretize in shells elements the concrete surface and the steel beams by inserting interface elements in the contact regions between steel beams and the concrete surface.

Analytical solutions, numerical results obtaining from commercial software and numerical and experimental literature results were used to implemented elements validation.

Key words: mixed structure, deformable connection, shell element, interface element.

Sumário

Lista de Figuras.....	viii
Lista de Tabelas.....	xi
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Elementos Estruturais Mistos.....	2
1.3 Conexão do Elemento Estrutural Misto	4
1.4 Motivação e Objetivos	7
1.5 Metodologia	8
1.6 Apresentação	8
2 Revisão Bibliográfica	10
2.1 Vigas mistas com interação parcial	10
2.2 Pisos mistos	14
2.3 Elementos de interface	16
2.4 Elementos de casca	17
3 Implementação Computacional e Formulação dos Elementos Finitos.....	20
3.1 Implementação Computacional	20
3.2 Formulação do Elemento plano de Casca	21
3.3 Formulação do Elemento de Interface unidimensional	33
3.3 Formulação do elemento de interface bidimensional	46
4 Exemplos e Resultados	53
4.1 Viga de aço bi apoiada.....	53
4.2 Viga de aço do tipo cantoneira	57

4.3	Laje de Concreto.....	60
4.4	Viga de aço com perfil I.....	63
4.5	Ensaio Push Test.....	65
4.6	Piso Misto aço-concreto.....	70
4.7	Linha Elástica	74
4.7.1	Viga bi engastada com carga concentrada no meio do vão	76
4.7.2	Viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre.....	80
5	Considerações Finais.....	83
5.1	Comentários Gerais	83
5.2	Conclusões	84
5.3	Trabalhos Futuros.....	86
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88

Lista de Figuras

1.1	Força Cisalhante na interface aço concreto.....	4
1.2	Deformada da seção para interação total.....	5
1.3	Deformada da seção para interação Parcial.....	5
1.4	Tipos de conectores e comportamento na interface (adaptada de Oehlers e Bradford (1995))	6
1.5	Ilustração do <i>push-out test</i>	7
2.1	Laje Mista aço-concreto (unidades em mm) Nie <i>et. al.</i> (2008).....	15
3.1	Piso Misto discretizado por elementos de casca e de interface.....	21
3.2	Elemento de casca de nove nós.....	22
3.3	Área das barras de aço e largura de influência.....	25
3.4	Elemento finito retangular de nove nós.....	26
3.5	Tipos de Associação dos elementos de casca.....	34
3.6	Graus de Liberdade do elemento de interface.....	34
3.7	Deslizamento longitudinal na interface de contato.....	36
3.8	Deslizamento transversal.....	36
3.9	Separação vertical.....	36
3.10	Largura do elemento de interface na verificação de separação vertical.....	38
3.11	Relação força vertical por unidade de comprimento versus deslocamento relativo vertical.....	43
3.12	Variação do deslocamento relativo vertical para uma posição fixa ao longo do elemento de interface.....	44
3.13	Elemento bidimensional de interface associado aos elementos de casca.....	46
3.14	Graus de liberdade do elemento de interface.....	47
4.1	Viga de aço discretizada com elementos de casca de nove nós.....	53
4.2	Deformada considerando interação livre na direção x.....	55

4.3	Deformada considerando interação parcial na direção y.....	56
4.4	Deformada considerando interação livre na direção y.....	57
4.5	Viga de aço sob flexo-torção.....	58
4.6	Viga de aço sob flexo-torção.....	59
4.7	Deformada na cantoneira bi apoiada.....	59
4.8	Laje modelada com elementos de casca de nove nós.....	60
4.9	Laje modelada com elementos planos de casca e duas linhas de elementos de interface (a metade superior simulada por elementos planos de casca foi omitida da figura).	60
4.10	Laje modelada com elementos planos de casca e cinco linhas de elementos de interface (a metade superior simulada por elementos planos de casca foi omitida da figura).....	61
4.11	Laje modelada com 50 elementos planos de casca e 25 elementos de interface bidimensional.....	62
4.12	Deformada da laje usando elementos de casca e de interface.....	62
4.13	Perfil de aço discretizado com elementos de casca e de interface.....	63
4.14	Seção transversal com aumento da altura do perfil I.....	63
4.15	Deformada do perfil I.....	64
4.16	Dimensões dos elementos usados no ensaio Push Test (Lam e Ehab (2005)).....	66
4.17	Discretização usando os elementos finitos de casca e de interface.....	67
4.18	Gráficos obtidos da equação de Aribert (1992) e do ensaio experimental para o <i>Push-out Test</i>	68
4.19	Configuração deformada usando os elementos de casca e de interface.....	70
4.20	Laje Mista aço-concreto (unidades em mm) Nie <i>et. al.</i> (2008).....	71
4.21	Laje Mista aço-concreto com os elementos de casca e de interface implementados.....	72
4.22	Deformada da laje mista obtida através do gerador de malha desenvolvido.....	74
4.23	Seção transversal da viga mista.....	74
4.24	Viga Mista bi engastada.....	75
4.25	Viga mista engastada e livre.....	76
4.26	Linha elástica da viga mista bi engastada com $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$	77
4.27	Variação da tensão na fibra mais comprimida ao longo da largura da laje de concreto $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$	78

4.28	Linha elástica da viga mista bi engastada com $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$	78
4.29	Varição da tensão na fibra mais comprimida ao longo da largura da laje de concreto para $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$	79
4.30	Linha elástica da viga mista em balanço com $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$	80
4.31	Varição da tensão na fibra mais tracionada ao longo da largura da laje de concreto $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$	81
4.32	Linha elástica da viga mista em balanço com $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$	81
4.33	Varição da tensão na fibra mais tracionada ao longo da largura da laje de concreto para $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$	82

Lista de Tabelas

4.1	Deslocamento vertical com diferentes discretizações.....	54
4.2	Deslocamento vertical usando elementos de casca e de interface.....	54
4.3	Deslocamento vertical e deslizamento longitudinal.....	55
4.4	Separação vertical considerando interação parcial na direção y	56
4.5	Separação vertical considerando interação parcial na direção y	57
4.6	Flecha no ponto de aplicação da carga concentrada.....	59
4.7	Flecha máxima na laje.....	61
4.8	Deslocamento vertical considerando diferentes discretizações.....	64
4.9	Propriedades físicas do concreto para as amostras.....	68
4.10	Resultados para os elementos implementados e do ensaio experimental.....	69
4.11	Resultados obtidos por Nie <i>et.al.</i> (2008) e com os elementos de casca e de interface..	73

Capítulo 1

Introdução

Nesse capítulo serão apresentadas algumas considerações em relação às ferramentas computacionais que são usadas na análise estrutural, algumas características dos elementos estruturais mistos de aço e concreto e da respectiva conexão entre esses elementos, além da forma como o trabalho foi organizado, dos fatores motivacionais e os objetivos que levaram ao desenvolvimento do presente trabalho.

1.1 - Considerações Iniciais

O uso de ferramentas computacionais para a resolução de problemas de análise estrutural vem se tornando cada vez mais eficiente. Desde a década de 50, o uso da mecânica computacional para a solução dos fenômenos existentes na engenharia vem sendo cada vez mais utilizado. Um dos motivos é o grande avanço tecnológico dos computadores permitindo que as ferramentas de análise fiquem cada vez mais eficazes.

A principal ferramenta usada para a solução dos problemas físicos é uso de análises numéricas, que utilizam algoritmos. Diversos desses problemas são modelados matematicamente através de equações diferenciais parciais que só podem ser resolvidas analiticamente em situações ideais, nos casos gerais são usados métodos numéricos para a análise.

Um dos métodos utilizados para resolver os problemas físicos cujo modelo matemático é representado por equações diferenciais parciais é o método das diferenças finitas. Outro método muito usado em diversas pesquisas nas áreas da engenharia é o

Método dos Elementos Finitos (MEF). Esse método teve sua origem na análise estrutural transformando a solução do problema de equações diferenciais em um problema matricial.

Com o surgimento dos primeiros computadores digitais no início da década de 50, os métodos matriciais para análise estrutural tiveram um grande desenvolvimento. As primeiras aplicações envolviam apenas estruturas reticuladas, simuladas por elementos finitos unidimensionais que requeriam soluções matriciais de porte compatíveis com a capacidade dos computadores. Em algumas situações a aproximação do modelo real por elementos unidimensionais geravam respostas conservadoras. Uma crescente demanda por estruturas mais leves e a evolução dos computadores conduziram ao desenvolvimento de métodos numéricos que pudessem ser utilizados nas análises de problemas mais complexos.

Em um projeto de engenharia, a estrutura formada por elementos estruturais, lineares, planos ou sólidos, tem a finalidade de absorver todas as ações previstas em projeto e conduzi-las de forma segura e econômica para seus apoios externos. Na construção civil, esses elementos estruturais geralmente são de concreto armado, aço e madeira, podendo também ser uma combinação entre esses materiais, por exemplo, piso misto, viga mista e pilares mistos formados por elementos de concreto associados a perfis de aço. O uso desses elementos estruturais mistos vem ganhando espaço no mercado da construção civil no Brasil desde a década de 60.

1.2 – Elementos Estruturais Mistos

Os elementos estruturais mistos são formados por no mínimo dois materiais com características diferentes. Pode-se citar, por exemplo, o uso da madeira e do concreto, ou do aço e da madeira. Mas a principal referência quanto nos referimos a elementos estruturais mistos é para o uso do concreto e do aço, seja ele para lajes, vigas, painéis ou pilares. Os sistemas estruturais formados por elementos mistos aço-concreto busca a combinação desses materiais com objetivo de explorar as principais características mecânicas de cada material, tanto em termos estruturais como construtivos.

Segundo Queiroz *et. al.* (2001), as principais vantagens ligadas aos elementos estruturais mistos formados por aço e concreto quando comparadas com elementos de concreto armado são: a velocidade na execução das obras desprezando o uso de fôrmas e escoramentos; redução do peso próprio e do volume da estrutura; aumento da precisão dimensional da construção. De acordo com os mesmos autores, as principais vantagens em

relação ao uso apenas do aço são: redução considerável do aço estrutural; proteções contra incêndio e corrosão (se o aço estiver envolvido pelo concreto); aumento da rigidez da estrutura.

Nas primeiras construções mistas o concreto tinha função apenas de revestimento dos elementos de aço, protegendo-os contra agressividade do meio externo, como o efeito de altas temperaturas provocadas pela ação do fogo, e a corrosão do aço devido ao contato com a umidade e oxigênio. Como consequência natural do uso desse tipo de elemento estrutural, cresceu o interesse em considerar a contribuição do concreto na resistência do elemento estrutural misto. Hoje existem diversas normas técnicas e livros que trazem métodos de dimensionamento de vigas, colunas e lajes mistas.

Dentre os elementos estruturais mistos com conexão deformável, citados nos parágrafos anteriores, o piso misto formado por uma laje de concreto ligada por conectores mecânicos a vigas de aço é o mais comum na prática da construção civil. Geralmente esse elemento tem sua análise estrutural e dimensionamento baseados em modelos simplificados que podem gerar erros significativos. Uma forma de representar melhor o comportamento mecânico desse elemento estrutural é através de métodos numéricos como o método dos elementos finitos. Para isso pode-se modelar a laje de concreto e as vigas de aço por elementos planos de casca, e a conexão deformável por elementos de interface. Outros tipos de modelos por elementos finitos podem ser usados, diferenciando uns dos outros na qualidade da resposta e no custo computacional desses.

Silva (2010) cita que mesmo em vigas mistas isoladas o uso do elemento plano de casca para simular a laje de concreto consegue simular o efeito *shear lag* gerando assim resultados mais confiáveis, quando comparados com a análise feita usando elementos finitos de barra. O efeito *shear lag* consiste em uma variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto da viga mista. Esse efeito é mais relevante quanto maior for a largura da laje, e, portanto, não podendo ser representado quando a análise é feita através de elementos unidimensionais de barra.

De maneira geral, a crescente utilização de estruturas mistas é atribuída a diversos fatores, entre os quais a necessidade cada vez maior de grandes áreas livres por pavimento, que resulta em grandes vãos para as vigas, acréscimo de força vertical nos pilares e um maior espaçamento entre eles.

1.3 – Conexão do Elemento Estrutural Misto

Para que ocorra a ação conjunta entre os diferentes materiais nos elementos estruturais sob flexão simples, é necessário que na interface entre os diferentes materiais desenvolvam-se forças longitudinais de cisalhamento, como é mostrado na Figura 1.1 abaixo. Segundo Queiroz *et. al.* (2001) em vigas mistas aço-concreto a aderência natural entre os dois materiais, embora possa alcançar valores bastante elevados, não é normalmente levado em conta nos cálculos, devido à baixa ductilidade e a pouca confiabilidade desse tipo de conexão. Dessa forma, a interação entre o concreto e o perfil de aço deve ser garantida por meios mecânicos, sendo eles os conectores, as mossas, os ressaltos, entre outros, ou por atrito, como no caso de fôrmas de aço com cantos reentrantes, ou ainda pela repartição de cargas, como, por exemplo, os pilares mistos sujeitos apenas à força normal de compressão.

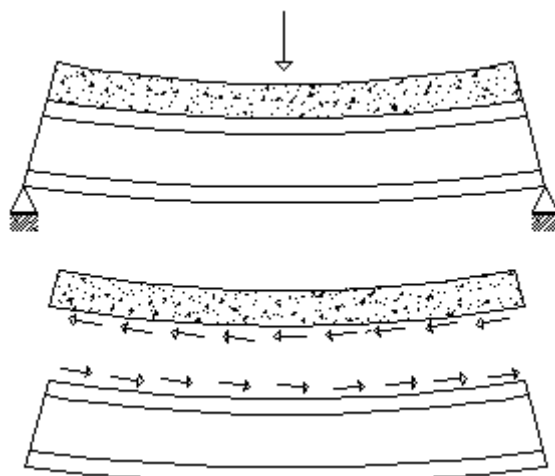


Figura 1.1 – Força Cisalhante na interface aço concreto.

Queiroz *et. al.* (2001) afirma que o comportamento misto é desenvolvido quando dois elementos estruturais são ligados de tal forma a se deformarem como um único elemento. Quando isso ocorre desenvolvem-se forças horizontais que tendem a encurtar a laje e alongar a face superior da viga de aço de tal forma que não haja deslizamento relativo significativo entre o aço e o concreto. Essa situação ocorre apenas quando se considera conectores com rigidez e resistência infinita e é denominada de interação total. A Figura 1.2 mostra a deformada da seção mista para interação total. Observa-se nessa figura que a seção gira mantendo-se plana e única ao longo de toda a sua altura.

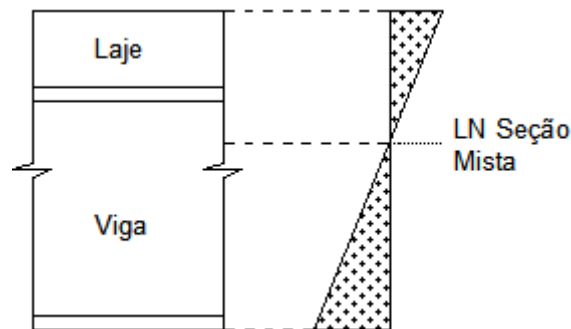


Figura 1.2 – Deformada da seção para interação total.

Brighenti *et. al.* (2014) destaca em seu trabalho a importância da conexão entre os materiais na análise estrutural de elementos mistos. Os conectores de cisalhamento deformáveis permitem o deslizamento entre os componentes estruturais e tal acoplamento imperfeito entre as camadas leva ao desenvolvimento da interação parcial. Na Figura 1.3 mostra-se a deformada da seção mista para interação parcial. Observa-se nessa figura uma descontinuidade da deformada na interface de contato entre os materiais. Essa descontinuidade representa o deslizamento entre os elementos e produz duas deformadas que podem ter rotações distintas dependendo da teoria de análise utilizada e da possibilidade de separação vertical entre os elementos.

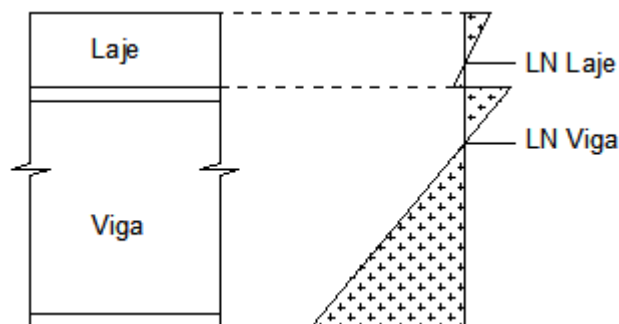


Figura 1.3 – Deformada da seção para interação Parcial.

Como se mostra na Figura 1.4, a relação força cortante por unidade de comprimento versus deslizamento relativo na interface de contato para conexões de cisalhamento deformáveis é normalmente não linear. Brighenti *et. al.* (2014) afirma que a não linearidade ocorre devido aos fenômenos mecânicos complexos que ocorrem na região de interface tais como: deformações plásticas no aço; esmagamento local do concreto, deformações devido aos efeitos reológicos do concreto. No entanto, uma relação linear, com base em uma rigidez constante da força de deslizamento, é normalmente utilizada para descrever aproximadamente o acoplamento mecânico. Ou seja, uma relação linear entre força cortante na interface de contato e o seu deslizamento relativo.

Os conectores de cisalhamento além de fazer a união dos elementos conectados devem também absorver o fluxo de cisalhamento que surge na interface sem que haja o deslizamento relativo significativo entre os elementos conectados, por isso é necessário analisar como varia o deslizamento com o acréscimo de carga conforme ilustrado na Figura 1.4.

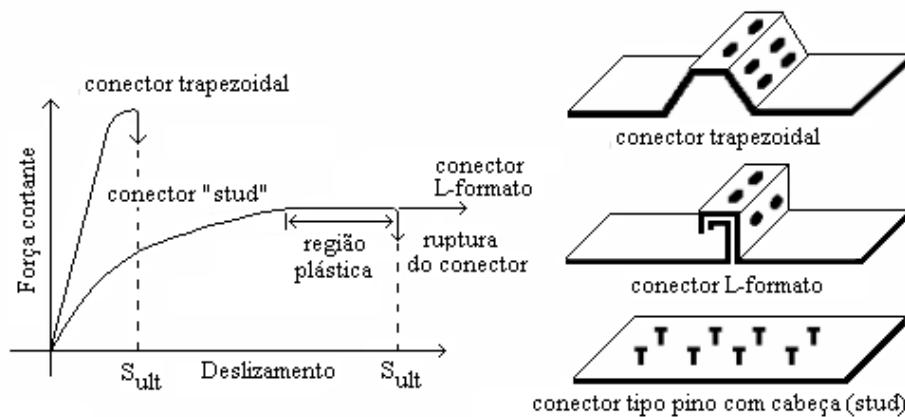


Figura 1.4 – Tipos de conectores e comportamento na interface (adaptada de Oehlers e Bradford (1995)).

Na Figura 1.4 observa-se como o deslizamento varia com o acréscimo de carga para três conectores diferentes. São apresentadas apenas duas curvas, já que o conector tipo L e o conector stud possuem comportamento semelhante. O conector trapezoidal possui um comportamento linear elástico até a sua carga última, sem apresentar a região plástica que é caracterizada pelo aumento da deformação sem variação da força aplicada.

Nota-se que a relação força cortante versus deslizamento ilustrada na Figura 1.4 para o conector do tipo *stud* apresenta um comportamento próximo do linear elástico em um primeiro momento e uma região plástica após certos níveis de deslizamento até o rompimento do conector. Esse comportamento plástico que permite a redistribuição de esforços e aviso de grandes deslocamentos antes da ruína. De acordo com Oehlers e Bradford (1995) a tensão de ruptura nos conectores ocorre para um deslizamento cerca de três vezes maior que o deslizamento de início de escoamento, por isso existe a preocupação em projetos de vigas mistas para que não haja o rompimento prematuro do conector devido ao deslizamento excessivo. Além disso, observa-se da Figura 1.4 que o conector trapezoidal apresenta uma tensão de ruptura bem maior que os demais, porém um comportamento menos dúctil, já que ela ocorre para níveis pequenos de deslizamento e sem uma deformação plástica antes da ruptura, a impedindo que haja grandes deslocamentos antes da ruína.

A NBR 8800 (2008) define procedimentos para o cálculo da resistência e deslizamento últimos de conectores do tipo pino com cabeça e os perfis U laminados ou formados a frio. No caso de outros conectores de cisalhamento que não estejam previstos em normas técnicas, pode-se determinar suas propriedades mecânicas e a relação força cortante versus deslizamento ilustrada na Figura 1.4 através de ensaio padronizado denominado “*push-out test*”, como é mostrado na Figura 1.5.

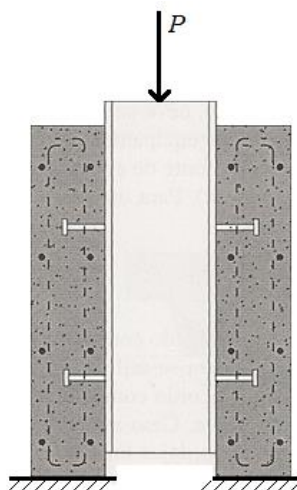


Figura 1.5 – Ilustração do *push-out test*.

1.4 – Motivação e Objetivos

Na maioria dos casos práticos a viga mista é uma simplificação do problema de placa associado a um elemento de viga. Tal simplificação facilita os cálculos, mas podem gerar erros na sua avaliação estrutural. Mesmo em situações de vigas mistas isoladas o problema da variação da tensão normal ao longo da largura do elemento de concreto, efeito conhecido na literatura como *shear lag*, que é tão mais significativo quanto maior for à largura da seção de concreto, pode gerar erros consideráveis quando se avalia esse elemento estrutural como uma união de dois elementos de viga. Tais considerações justificam a utilização de elementos planos de casca na simulação do comportamento mecânico do concreto nesses tipos de estruturas.

Já a simulação da viga de aço por elemento linear de viga fornece de maneira geral bons resultados. No entanto, quando a seção transversal do elemento de aço não é uma seção circular, ou seções vazadas de paredes finas, e o efeito de torção na viga for significativo, sugere-se o uso de elementos de casca para a simulação do comportamento mecânico da viga, podendo assim representar de forma precisa o efeito de empenamento da seção.

O objetivo desse trabalho é simular o comportamento estrutural de estruturas mistas com conexão deformável usando elementos planos de casca e elementos de interface que fazem a ligação entre os elementos de casca e simula uma possível conexão deformável. Os casos práticos de aplicação das ferramentas desenvolvidas nesse trabalho são os pisos de edifícios de múltiplos andares formados por lajes de concreto ligadas por conectores a vigas de aço. No entanto, a formulação implementada permitirá a análise geral de cascas de concretos ligadas por conexão deformável a vigas de aço.

1.5 – Metodologia

A metodologia de trabalho consiste no desenvolvimento e implementação dos elementos finitos descritos nos itens anteriores dentro do programa FEMOOP, *Finite Element Method Object Oriented Program* (Guimarães, 1992). Esse programa originou-se de trabalhos desenvolvidos no início da década de 90 na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) sob orientação do professor Luiz Fernando Martha, e tem como principal vantagem possuir seu código aberto permitindo ampliações e alterações sem grandes dificuldades.

O programa FEMOOP foi desenvolvido usando uma estrutura básica de POO, programação orientada a objetos, consistindo em uma hierarquia de classes responsáveis por cada faceta do sistema a ser desenvolvido. A partir dessa definição é possível determinar os métodos de cada classe e desenvolver o código utilizando a linguagem de programação C++, que tem um nível de padronização que permite utilização em diversas plataformas e compiladores (MS-Windows, Linux, vários sistemas operacionais do tipo UNIX), assegurando sua portabilidade.

1.6 – Apresentação

Este trabalho apresenta-se dividido em cinco capítulos. No segundo capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica sobre alguns trabalhos encontrados na literatura usando métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, e métodos analíticos para solução de vigas mistas e pisos mistos com interação parcial. Tem-se também nesse capítulo uma revisão sobre os elementos finitos de casca e de interface que já foram estudados e usados em análises numéricas de diversos autores.

No capítulo 3 há uma breve descrição da base de programação FEMOOP e da linguagem de programação C++ estruturada dentro da lógica de uma programação

orientada a objetos que foram usadas para o desenvolvimento do código. Ou seja, uma breve descrição de como foi feita a implementação computacional. Também nesse capítulo são apresentadas as três formulações usadas para a solução numérica de problemas de vigas mistas e pisos mistos com interação parcial. A primeira delas trata-se do elemento finito de casca de 9 nós com 5 graus de liberdade por nó a nível local baseado na teoria de placa de Rissner/Mindlin. A segunda trata-se do elemento de interface unidimensional de 6 nós e a terceira do elemento bidimensional de interface de 18 nós ambos responsáveis por representar a conexão deformável e unir os elementos de casca.

No capítulo 4 são expostos alguns exemplos envolvendo o uso de métodos numéricos com elementos finitos que já foram estudados por outros autores e comparados com os resultados obtidos usando os elementos de casca e de interface implementados no presente trabalho. Além disso, os resultados obtidos com os elementos finitos implementados também foram comparados com soluções analíticas e usando softwares comerciais como o SAP2000 (2013).

No capítulo 5 são expostas as principais conclusões que foram identificadas com o desenvolvimento desse trabalho, além de algumas sugestões para trabalhos futuros. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas que auxiliaram no desenvolvimento do trabalho e foram citadas ao longo do texto.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

A utilização de elementos estruturais com conexão deformável pode ser tão antiga quanto a utilização da madeira em obras de pequenas pontes, contenções, moradias, entre outras, uma vez que a união de peças de madeira para aumentar a rigidez do elemento estrutural gera uma nova estrutura com conexão deformável. Já em termos de elementos mistos aço-concreto, as primeiras estruturas surgiram em 1894 nos Estados Unidos (Griffis, 1994). Segundo De Nardim (1999), em 1914, na Inglaterra, os elementos estruturais mistos começaram a ser estudados.

2.1 – Vigas mistas com interação parcial

Uma das primeiras e mais citadas obras sobre a interação parcial de vigas mistas é a de Newmark *et. al.* (1951). Os autores determinaram soluções analíticas para casos particulares de vigas mistas baseadas na análise elástica de pequenas deformações considerando a teoria de viga de Euler Bernoulli para representar a deformação das camadas da viga. Desde então existe um grande número de pesquisas realizadas tentando avaliar os diversos parâmetros que envolvem os elementos estruturais mistos.

O desenvolvimento de formulações usando elementos finitos para a solução das equações diferenciais que governam o problema de vigas mistas com interação parcial tem

chamado à atenção de muitos pesquisadores nas últimas décadas. Esses elementos são baseados em aproximações na representação dos deslocamentos ou dos campos de força e podem apresentar diferentes configurações, sendo algumas mais precisas, porém mais caras computacionalmente, como os elementos tridimensionais. Diante dessa realidade, Silva (2010) afirma que elementos finitos unidimensionais do tipo viga-coluna podem ser bastante econômicos em termos computacionais e capaz de simular bem o comportamento de uma viga mista para os propósitos práticos.

Goodman *et. al.* (1968) e Ayoub (2001) desenvolveram uma formulação para análise de vigas mistas com interação parcial levando em consideração a teoria de viga de Euler Bernoulli que desconsidera a deformação por cisalhamento, ou seja, assume-se a hipótese de que o plano perpendicular ao eixo da viga antes da flexão permanecerá plano e perpendicular ao eixo da viga após a deformação.

Dall'Asta e Zona (2002 e 2004) desenvolveram uma família de elementos finitos baseados em deslocamentos para análise não linear de vigas mistas com conexão deformável. Essa formulação baseada em deslocamento, por ser mais fácil de ser implementada que a formulação baseada em forças, é a mais encontrada na literatura. Porém, a formulação baseada em forças produz em certas situações resultados mais precisos. Estudos nessa linha de pesquisa com base em forças, podem ser encontradas em alguns trabalhos na literatura, como, por exemplo, Ayoub e Filippou (2002).

Gara *et. al.* (2006) propõem três novos elementos finitos com uma formulação baseada na teoria de viga de Euler-Bernoulli para análise de vigas mistas com conexão deformável que sejam capazes de representar o deslizamento longitudinal e vertical entre as camadas. No modelo proposto por Gara *et. al.* (2006), ele adota uma relação constitutiva entre a força cortante por unidade de comprimento versus o deslocamento bi linear para o deslocamento vertical na interface e uma relação constitutiva linear para o deslocamento longitudinal. Além disso, os elementos unidimensionais de viga são lineares, com a não linearidade apenas na conexão entre os elementos. Os módulos de elasticidade tanto, do perfil de aço quanto das barras de reforço da laje de concreto, obedecem a Lei de Hooke.

Ranzi *et. al.* (2006) desenvolveram um modelo para análise de vigas mistas com duas camadas considerando a interação parcial tanto na direção longitudinal quanto na direção vertical. Os autores usaram o princípio dos trabalhos virtuais e o método dos elementos finitos baseado em deslocamento para a formulação de um elemento de viga de 14 graus de liberdade, sendo três graus de liberdade para deslocamentos axiais e quatro para os deslocamentos transversais para cada camada. Os autores fizeram um estudo

paramétrico para avaliar diferentes combinações entre a conexão longitudinal e vertical. Assim como no presente trabalho, é usado para conexão deformável um modelo constitutivo linear para a relação força cortante por unidade de comprimento versus deslocamento relativo longitudinal, e um modelo bi linear para representar o comportamento deformável na direção vertical. Nesse modelo bi linear é considerada uma rigidez muito alta para impedir a interpenetração entre os materiais.

Ranzi *et. al.* (2007) e Ranzi (2008) desenvolveram uma formulação para análise de vigas mistas de aço-concreto, onde a teoria de viga de Euler Bernoulli é usada para modelar a laje de concreto enquanto que a viga de aço é modelada pela teoria de viga de Timoshenko. Segundo Chakrabarti *et. al.* (2011), na teoria de viga de Timosheko, qualquer plano perpendicular ao eixo da viga antes da flexão continua sendo plano, mas não necessariamente perpendicular ao eixo da viga após a deformação. Com isso, é incorporado o efeito da deformação transversal por cisalhamento, simplesmente tomando a rotação adicional desses planos como a deformação por cisalhamento que leva a uma distribuição uniforme das tensões de cisalhamento ao longo da altura da viga. No entanto, sabe-se da resistência dos materiais que essa distribuição das tensões de cisalhamento não é uniforme, sendo, por isso, utilizado o fator de correção de cisalhamento que depende da seção transversal. No caso de seção retangular esse fator é 5/6.

Battini *et. al.* (2009) apresentam uma nova formulação não linear usando elementos finitos para a análise de vigas mistas com duas camadas considerando o deslizamento entre elas. No modelo são considerados os efeitos de segunda ordem sendo usado o método corrotacional na análise, o que significa que o movimento do elemento é decomposto em duas partes: um movimento de corpo rígido que define as coordenadas locais do sistema e uma parcela referente a uma pequena deformação em relação ao sistema de coordenadas local. A formulação baseia-se na solução exata das equações que regem o problema de vigas mistas com conexão deformável. Como na formulação o autor leva em consideração o efeito da deformação por cortante pode ocorrer o efeito de *curvature locking* (em uma tradução livre seria travamento devido à curvatura, podendo ser: resultados numéricos espúrios que ocorrem quando as curvaturas dos elementos tendem a ser iguais), porém com o uso de polinômios de baixa ordem dos elementos isso pode ser evitado.

O modelo proposto por Guezouli *et. al.* (2014) leva em consideração os deslocamentos relativos longitudinal e transversal, ou seja, deslizamento e separação vertical na interface de contato entre os materiais. Para evitar a interpenetração entre os materiais e representar uma possível separação vertical entre esses, é necessária uma

análise não linear do problema. Existem vários métodos para resolver o problema de contato, ou seja, a separação vertical e a interpenetração entre os materiais. Guezouli *et. al.* (2014) citam como exemplo os métodos da penalidade e dos multiplicadores de Lagrange, descritos de forma sucinta no parágrafo seguinte.

No primeiro, um fator de penalidade dado por um valor numérico muito elevado é inserido na formulação para evitar o deslocamento relativo vertical negativo, ou seja, interpenetração entre os materiais. No entanto, esse valor muito alto pode levar a um mau condicionamento do sistema, podendo ser necessárias muitas iterações para a convergência da análise. No segundo, são introduzidas variáveis adicionais, os multiplicadores de Lagrange, que cumprem exatamente a restrição de contato. Apesar da vantagem proporcionada pela execução exata da condição de restrição, o método coloca algumas dificuldades devido ao esforço adicional necessário para resolver os multiplicadores. Além disso, as equações para os multiplicadores de Lagrange introduzem zeros na diagonal do sistema de equações e geram também um incremento no tamanho da matriz.

A combinação do método da penalidade e o método dos Multiplicadores de Lagrange levam ao chamado Método de Lagrange Aumentado (ALM). Com este método, o fator de penalidade não precisa chegar a um valor alto para obter a convergência do processo iterativo. Já para os casos de cargas especiais, pode acontecer do contato com a interface não seja apenas "nó a nó", sendo referente a uma parte do comprimento do elemento finito. O "*Flying Node Concept*" (FNC) é um novo método proposto por Guezouli *et. al.* (2014) para fazer os ajustes necessários e chegar à solução final do problema.

Santos *et. al.* (2013) focaram seu estudo para vigas mistas com duas camadas e consideraram a interação parcial e o cisalhamento na interface de contato entre elas. Para isso usaram a teoria de viga de Timoshenko, porém quando se usa o método dos elementos finitos baseado em deslocamento para a solução de problemas com interação parcial usando a teoria de viga de Timoshenko podem ocorrer dois fenômenos que levam ao enrijecimento da estrutura conhecidos na literatura por *shear locking* e *slip locking*. O *shear locking*, ou travamento por cisalhamento, ocorre devido a uma inconsistência na interpolação do deslocamento vertical e rotação. Já o *slip locking*, ou travamento por deslizamento, ocorre devido ao acoplamento entre os campos de deslocamento transversal e axial que pode levar a oscilações erradas para o deslizamento quando os polinômios interpoladores desses deslocamentos não se casam. Os autores propõem então uma formulação de elementos finitos baseado no equilíbrio híbrido para a análise de vigas

mistas usando a teoria de viga Timoshenko com interação parcial. Esta formulação baseia-se em um princípio variacional de energia complementar envolvendo apenas as variáveis força e momento como campos fundamentais desconhecidos e conduz a soluções estaticamente admissíveis. Ao contrário das formulações tradicionais de elementos finitos baseados em deslocamento, o esquema proposto pelos autores é naturalmente livre de ambos os fenômenos de travamento citados acima.

Brighenti *et. al.* (2014) apresentam uma formulação de um elemento finito para a análise de vigas de seção transversal mista considerando ligação deformável entre os diferentes materiais. Os autores usam o método da rigidez direta, baseada na solução teórica do problema e através da introdução de diferentes deslocamentos nodais axiais para cada material da seção transversal nas extremidades da viga.

Gara *et. al.* (2014) propõem um novo modelo de viga de ordem superior para análise de vigas mistas com interação parcial entre a laje de concreto e a viga de aço. O modelo pode ser considerado como uma generalização da formulação de Newmark que leva em consideração a deformação por cisalhamento e o empenamento da seção transversal mista. Como é levado em consideração, o empenamento as funções de forma são obtidas considerando elementos de paredes finas em equilíbrio. Três funções diferentes são introduzidas: uma para considerar a ação de membrana na laje de concreto devido ao fluxo longitudinal de cisalhamento na ligação e outras duas funções para o elemento de aço, para avaliar separadamente o empenamento devido à componente de força cortante resistida pela viga de aço e para o fluxo de cisalhamento na interface. As equações de equilíbrio são obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais e é aplicado o método da rigidez para a solução do problema. Este método fornece a solução exata sem a necessidade de qualquer discretização da viga.

2.2 – Pisos mistos

No presente trabalho considera-se o piso misto como sendo uma estrutura formada por uma laje de concreto ligada por conectores a vigas de aço. Apesar da grande utilização na construção civil não existem na literatura muitos estudos numéricos e experimentais referentes aos pisos mistos. A grande maioria dos estudos se concentra em uma simplificação do problema que é a viga mista.

Um dos trabalhos mais relevantes para o estudo dos pisos mistos é o de Nie *et. al.* (2008), que traz uma nova definição de largura efetiva para os cálculos de resistência final

de vigas mistas submetidas a um momento de flexão usando uma distribuição de tensão retangular comumente aceita. Essa nova definição assegura que a capacidade à flexão da viga mista simplificada (largura efetiva sob distribuição de tensão retangular) é o mesmo que o da viga mista real (largura real da laje sob distribuição real de tensão). Através de um estudo experimental e da análise de elementos finitos, as distribuições de deformações e tensões através da laje de concreto foram examinadas e expressas por fórmulas simplificadas. A partir dessas os autores conseguem calcular os momentos de flexão tendo como variáveis a largura efetiva da laje e a altura da distribuição retangular da tensão de compressão.

O exemplo analisado experimentalmente e numericamente por Nie *et. al.* (2008) e depois usado por Silva (2010) para comparação dos seus resultados, consiste em uma laje de concreto ligada por meio de conectores a três vigas de aço longitudinais e duas transversais com apoios nas interseções dessas vigas, como mostra a Figura 2.1. A estrutura da Figura 2.1 foi levada à ruptura através de três macacos hidráulicos em série apoiados sobre as três vigas longitudinais com um incremento de carga de 2 kN. Durante o teste os autores monitoraram deslocamento, deformação e deslizamento. No entanto, devido à alta rigidez da conexão e o fato desta não provocar efeitos significativos no estado limite último da estrutura, o deslizamento não foi avaliado.

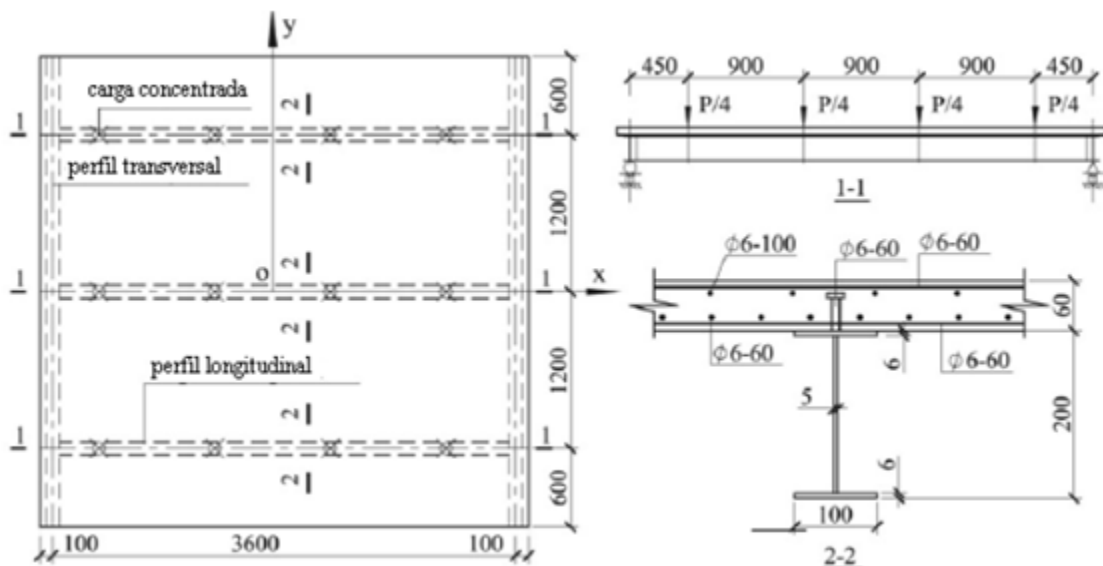


Figura 2.1 – Laje Mista aço-concreto (unidades em mm) Nie *et. al.* (2008).

Na análise numérica do problema da Figura 2.1 Nie *et. al.* (2008) usaram o programa de computador comercial ANSYS (2014). Nessa análise a laje de concreto foi

discretizada por elementos cúbicos de oito nós, o perfil de aço por elementos de casca com quatro nós e a conexão foi simulada por elementos de mola não lineares.

Silva (2010) avaliou numericamente simulando o comportamento mecânico da laje de concreto por elementos de placa, a viga de aço por elementos lineares de viga, e a conexão deformável por elementos de interface. O autor comparou os seus resultados com os resultados numéricos e experimentais de Nie *et. al.* (2008) observando a proximidade entre eles.

Izzuddin *et. al.* (2004) desenvolveram um elemento de casca para simular lajes mistas, ou seja, lajes de concreto reforçadas por chapas de aço dobradas a frio, conhecida no meio técnico por *steel decks*. A formulação, assim como no presente trabalho, é baseada na teoria de placa de Rissner/Mindlin, mas com uma modificação que torna o elemento proposto capaz de simular a geometria ortotrópica e a descontinuidade do material entre as nervuras adjacentes. O elemento proposto por Izzuddin *et. al.* (2004) leva em conta o efeito das nervuras sobre as ações de membrana e de flexão transversal em relação à orientação da nervura, a influência da não linearidade geométrica devido aos grandes deslocamentos e rotações, e a resposta do concreto sujeito a variação das deformações e temperatura elevada. Além disso, o elemento proposto leva em conta a não linearidade física do concreto avaliando os efeitos da tensão de ruptura e plastificação e o comportamento não linear à compressão.

2.3 – Elementos de interface

O elemento de interface foi inicialmente desenvolvido para trabalhar em conjunto com elementos bi e tridimensionais com o objetivo de representar uma fina camada de material ou o contato entre dois materiais distintos, como o caso da interação solo-estrutura. O primeiro trabalho encontrado na literatura sobre elementos de interface foi proposto por Goodman *et. al.* (1968), comumente chamado de GTB (Goodman, Taylor e Brekke), uma homenagem a seus autores. Nesse trabalho o elemento de interface GTB é capaz de simular o deslizamento e a separação entre dois corpos em contato.

Com o objetivo de representar dois materiais distintos, Kaliakin e Li (1995) utilizaram elementos bidimensionais de interface para modelar o problema de contato existente entre o solo e uma sapata de fundação. Já Carol *et. al.* (2001) utilizaram o elemento de interface para analisar o processo de fissuração em elementos de concreto. Nesse caso o elemento de interface representa o contato entre o agregado graúdo e a

argamassa e também entre elementos da argamassa, onde provavelmente irão ocorrer as aberturas de fissuras.

Para solução do problema de viga mista com conexão deformável Silva (2006) e Souza e Silva (2007) desenvolveram um elemento de interface capaz de simular o deslizamento e separação vertical na interface de contato entre os materiais da seção mista. O elemento de interface implementado trabalha em conjunto com elementos unidimensionais de viga implementados considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, não linearidade física dos materiais e a possibilidade de seções transversais genéricas.

Pela grande abrangência existente nos parâmetros que envolvem a conexão entre os elementos, e com o intuito de avaliar as diferentes situações que podem ocorrer na conexão, Souza e Silva (2009) apresentaram uma família de elementos de interface de espessura nula desenvolvidos para simulação de vigas mistas com conexão deformável longitudinal, ou deslizamento entre camadas. A proposta desses elementos incluem formulações a serem empregadas com a teoria de viga de Euler-Bernoulli, teoria de viga de Timoshenko, quantidades diferentes de nós nos elementos, e diferentes processos de integração dos deslocamentos ao longo do elemento.

Souza e Silva (2010) apresentaram uma solução analítica para vigas mistas com múltiplas camadas. Essa solução é usada para verificar a capacidade do elemento de interface em simular problemas de vigas mistas com mais de um plano de cisalhamento.

Silva (2010) implementou um elemento de interface capaz de simular a conexão deformável entre materiais distintos e associar um elemento de placa a um elemento unidimensional de viga com graus de liberdade compatíveis com o elemento de placa. Para a análise não linear física e geométrica da placa de concreto, o autor usa uma formulação semelhante à de Huang *et. al.* (1999). Diferentes dos casos de vigas mistas, nesse problema o elemento de interface apresenta deslocamentos relativos longitudinal, transversal e vertical.

2.4 – Elementos de casca

Conforme já citado, um dos elementos estruturais com conexão deformável mais comum na engenharia civil é a viga mista formada por uma laje de concreto ligada através de meios mecânicos a um perfil de aço. Geralmente esse elemento é analisado através de elementos unidimensionais de viga e elementos de interface para simular a conexão deformável, ou apenas por um elemento de viga capaz de representar os elementos

estruturais e os deslocamentos relativos entre eles. Uma forma de representar melhor o comportamento mecânico desse elemento estrutural é modelar a laje por elementos planos de casca.

Silva (2010) cita algumas vantagens que se pode obter quando se utiliza o elemento plano de casca para a discretização da laje de concreto. Entre elas cita-se, a representação de pisos de edifícios de andares múltiplos de uma forma única, sem a necessidade de utilizar a aproximação de uma largura efetiva para cada viga mista. Outra vantagem é a representação da variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto da viga mista. Esse efeito, denominado *shear lag* na literatura, não pode ser representado quando a análise é feita através de elementos unidimensionais de viga.

Existe um número grande de publicações que descrevem as características de elementos estruturais formados por cascas. Pereira (2005) define um elemento de casca como um corpo onde uma das dimensões é muito menor que as outras duas. Esse fato permite reduzir um problema tridimensional em um problema bidimensional, e dessa forma, o deslocamento de qualquer ponto no interior da casca pode ser expresso em termos das componentes do deslocamento da superfície média. Essa superfície será neutra, ou seja, não apresenta comportamento de membrana, em problemas de cascas homogêneas não associadas a outros elementos e com carregamento perpendicular ao plano tangente à superfície média.

Segundo Batoz *et. al.* (2000), a primeira análise de uma estrutura formada por cascas usando o método dos elementos finitos foi realizada por um conjunto de elementos planos de casca para aproximar a forma verdadeira da casca. A rigidez da membrana e da flexão eram sobrepostas ao nível do elemento. O acoplamento entre membrana e flexão é realizado pelo conjunto, transformando os graus de liberdade locais para os globais. Devido à simplicidade da formulação, da eficácia computacional e da flexibilidade em aplicações (cascas e estruturas de placas dobradas), elementos planos de casca são usados extensivamente na prática.

Segundo Hughes (1987), a teoria de Reissner/Mindlin, que inclui a deformação transversal por cisalhamento, abriu o caminho para vários esquemas de interpolação dos deslocamentos nodais, já que nesse caso translações e rotações são interpolados independentemente. Devido a isso, recentemente, os elementos de cascas com formulação baseada nos deslocamentos têm sido obtidos com base na teoria de Reissner/Mindlin, que se mostraram superiores aos elementos planos da teoria clássica de Kirchhoff nas análises numéricas de cascas espessas. No caso de cascas finas a deformação por cortante tende a

ser muito pequena podendo gerar problemas de avaliação dessas nos elementos da teoria de Reissner/Mindlin, efeito esse chamado na literatura de *shear locking*. Para evitar isso, recomenda-se uma discretização um pouco maior quando se tem cascas finas.

Muitos autores tratam o elemento de casca como sendo uma generalização do elemento de placa, uma vez que esse apresenta seis graus de liberdade por nó. Estendendo o estudo para as cascas com não linearidade geométrica, Crisfield (2000) afirma que em uma formulação convencional para uma placa, tem localmente cinco graus de liberdade, incluindo, além das duas rotações e o deslocamento perpendicular ao plano, dois deslocamentos axiais, que serão responsáveis pelo efeito de segunda ordem.

Segundo Batoz *et. al.* (2000), os elementos de casca podem ser classificados em três categorias, sendo elas os elementos curvos, elementos curvos isoparamétricos (elementos degenerados) e elementos planos de casca. Os elementos curvos são baseados em teorias consistentes de cascas podendo dar uma melhor aproximação para a verdadeira forma da casca e fornecer o acoplamento entre os efeitos de membrana e flexão do elemento. No entanto, existem algumas dificuldades a serem superadas para a correta representação do movimento de corpo rígido e evitar problemas de membrana e travamento por cisalhamento.

Capítulo 3

Implementação Computacional e Formulação dos Elementos Finitos

Nesse capítulo será apresentado a maneira como foi feita a implementação computacional do código desenvolvido e as formulações para o elemento de casca e de interface unidimensional e bidimensional.

3.1 – Implementação Computacional

Os elementos a serem desenvolvidos nesse trabalho serão implementados computacionalmente usando como base o programa FEMOOP (Guimarães, 1992). Esse programa utiliza a linguagem de programação C++ sendo estruturados dentro da lógica de uma programação orientada a objetos para o desenvolvimento dos seus códigos. Quando é usada a POO, é possível à criação de novas classes sem o entendimento total da estrutura e do funcionamento global do programa. Além disso, é possível usar os códigos e as classes já implementadas, se atendo apenas à maneira correta de acessar as informações de cada classe e como incluir novos elementos. Uma das características mais importantes desse programa é a capacidade de trabalhar com elementos finitos de vários tipos e características diferentes (Martha *et. al.*, 2002).

Nesse trabalho o problema de estruturas mistas formadas por elementos de superfície de concreto ligados por conexão deformável a vigas de aço será simulado por elementos finitos planos de casca e elementos de interface. Na implementação desses novos elementos no FEMOOP serão criadas novas classes, sendo que essas serão filhas de

outras classes existentes no programa e irão herdar as funções (os métodos e propriedades) já existentes. Uma observação importante na implementação é a determinação de quais graus de liberdade por nó serão usados e a ligação entre a ordem dos graus de liberdade do problema para a ordem usada no FEMOOP.

A seguir são apresentadas as formulações do elemento plano de casca e do elemento de interface usando para isso o princípio dos trabalhos virtuais e o método dos elementos finitos baseado em deslocamentos. Esses elementos serão utilizados, por exemplo, na simulação numérica do problema da Figura 3.1 que mostra a discretização de um piso misto formado por uma laje de concreto ligada a duas vigas de aço de perfil I. Nessa discretização foi usado o elemento plano de casca para a laje de concreto e as vigas de aço, e o elemento de interface para fazer a ligação entre os elementos de casca e simular uma possível conexão deformável no contato entre a laje de concreto e as vigas de aço. Para facilitar a modelação de exemplos práticos como o mostrado na Figura 3.1 e a visualização dos resultados, um gerador de malha estruturada foi desenvolvido pelos autores.

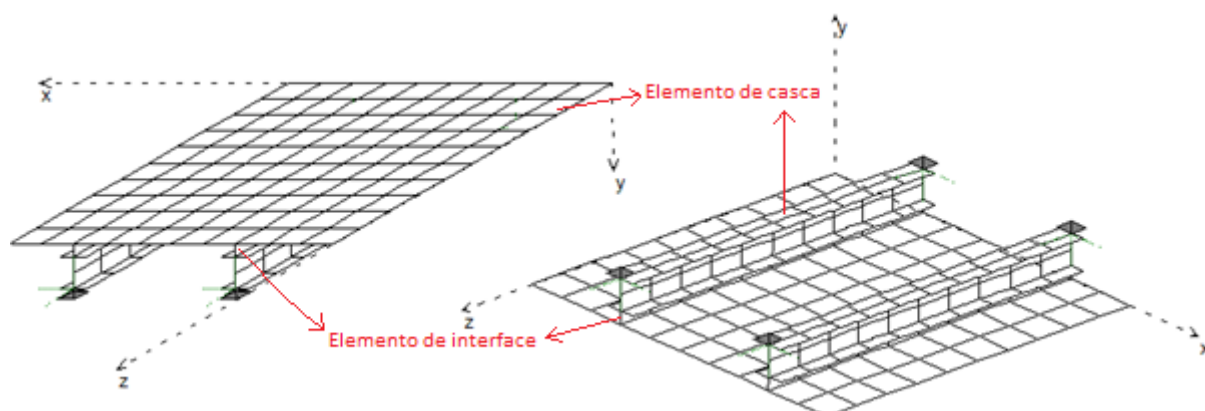


Figura 3.1 – Piso Misto discretizado por elementos de casca e de interface.

3.2 – Formulação do Elemento plano de Casca

O elemento plano de casca implementado nesse trabalho é o elemento retangular de nove nós com cinco graus de liberdade por nó a nível local. Além dos graus de liberdade típicos do elemento de placa, deslocamento de translação na direção de z e rotações em torno dos eixos x e y , esse elemento plano de casca apresenta translações nas direções dos eixos x e y , como mostra a Figura 3.2.

Considerando as hipóteses cinemáticas da teoria de placa de Rissner-Mindlin que diz que seções inicialmente planas e ortogonais à configuração indeformada permanecem

planas após deformações, porém não mais ortogonais. As equações dos deslocamentos para o elemento são:

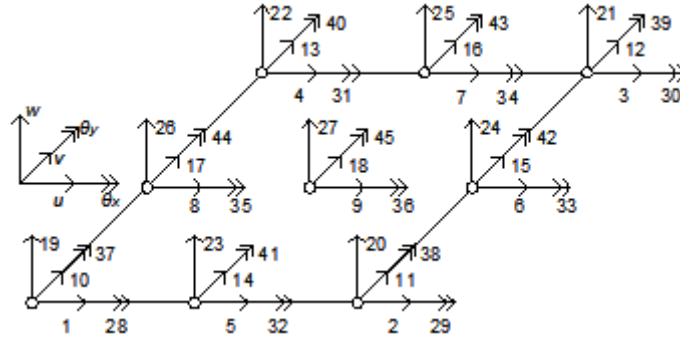


Figura 3.2 – Elemento de casca de nove nós.

$$u(x,y,z) = u^0(x,y) + z\theta_y(x,y) \quad (3.1)$$

$$v(x,y,z) = v^0(x,y) - z\theta_x(x,y) \quad (3.2)$$

$$w(x,y,z) = w^0(x,y) \quad (3.3)$$

Nas equações (3.1) a (3.3), u^0 , v^0 e w^0 representam os deslocamentos de translação da superfície média (ou uma superfície de referência qualquer) do elemento de casca nas direções x , y e z . θ_x e θ_y representam as rotações das seções em relação aos eixos x e y . z é a posição da fibra em relação à superfície média ao longo da espessura do elemento plano de casca onde se deseja avaliar os deslocamentos. Para facilitar a notação, o subscrito zero será omitido nas equações seguintes.

Aplicando a relação deformação-deslocamento de Green-Lagrange nas equações (3.1) a (3.3) dos deslocamentos, desprezando a variação de w com z , e considerando pequenas mudanças de configurações, obtêm-se as equações das deformações dadas pelas equações. (3.4) a (3.8).

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - z\theta_{x,y} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + z\theta_{y,y} + v_{,x} - z\theta_{x,x}) \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\theta_y + w_{,x}) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(-\theta_x + w_{,y}) \quad (3.8)$$

Considerando material homogêneo, isotrópico e linear, e a aproximação de que a tensão normal na direção z é nula, chega-se à relação tensão deformação dada pela equação (3.9). Nessa equação $\lambda = \nu E / (1 - \nu^2)$ e $G = 0,5E / (1 + \nu)$, onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e ν o seu coeficiente de Poisson.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível ao elemento de casca deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3.10)$$

onde, δ é o operador variacional, σ_{ij} é o estado tensional real em um ponto qualquer no elemento plano de casca, e $\delta \varepsilon_{ij}$ é o estado de deformação virtual em um ponto qualquer no elemento plano de casca, ou seja, a deformação obtida devido ao campo de deslocamento virtual aplicado ao elemento. Aplicando o operador variacional nas equações (3.4) a (3.8) das deformações chega-se às equações (3.11) a (3.15) abaixo.

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x} + z \delta \theta_{y,x} \quad (3.11)$$

$$\delta \varepsilon_y = \delta v_{,y} - z \delta \theta_{x,y} \quad (3.12)$$

$$\delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\delta u_{,y} + z \delta \theta_{y,y} + \delta v_{,x} - z \delta \theta_{x,x}) \quad (3.13)$$

$$\delta \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\delta \theta_y + \delta w_{,x}) \quad (3.14)$$

$$\delta\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(-\delta\theta_x + \delta w_{,y}) \quad (3.15)$$

Substituindo as equações (3.11) a (3.15) na expressão do princípio dos trabalhos virtuais, equação (3.10), e desprezando a tensão normal na direção z , chega-se à equação (3.16) abaixo para o trabalho virtual interno.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \iiint_V [(\delta u_{,x} + z\delta\theta_{y,x})\sigma_x + (\delta v_{,y} - z\delta\theta_{x,y})\sigma_y + (\delta u_{,y} + z\delta\theta_{y,y} + \delta v_{,x})\tau_{xy} - \\ - z\delta\theta_{x,x}\tau_{xy} + (\delta\theta_y + \delta w_{,x})\tau_{xz} + (\delta w_{,y} - \delta\theta_x)\tau_{yz}]dV \end{aligned} \quad (3.16)$$

Na equação (3.16) a integral é escrita ao longo do volume indeformado do elemento plano de casca. Como os variacionais dos deslocamentos são constantes em relação à espessura do elemento de casca (eixo z) e definindo os esforços N_x , N_y , N_{xy} , Q_{xz} , Q_{yz} , M_y , M_x e M_{xy} , como mostrado nas equações (3.17) a (3.21) abaixo, chega-se a equação (3.22) para o trabalho virtual interno do elemento plano de casca.

$$N_x = \int_h \sigma_x^c dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (\sigma_x^s(z_i) - \sigma_x^c(z_i)) \quad (3.17)$$

$$N_y = \int_h \sigma_y^c dz + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (\sigma_y^s(z_i) - \sigma_y^c(z_i)) \quad (3.18)$$

$$M_y = \int_h z\sigma_x^c dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (\sigma_x^s(z_i) - \sigma_x^c(z_i)) z_i \quad (3.19)$$

$$M_x = \int_h z\sigma_y^c dz + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (\sigma_y^s(z_i) - \sigma_y^c(z_i)) z_i \quad (3.20)$$

$$Q_{xz} = k \int_h \tau_{xz} dz, \quad Q_{yz} = k \int_h \tau_{yz} dz, \quad N_{xy} = \int_h \tau_{xy} dz, \quad M_{xy} = \int_h z\tau_{xy} dz \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \iint_A (\delta u_{,x} N_x + \delta\theta_{y,x} M_y + \delta v_{,y} N_y - \delta\theta_{x,y} M_x + \delta u_{,y} N_{xy} + \delta\theta_{y,y} M_{xy} + \\ + \delta v_{,x} N_{xy} - \delta\theta_{x,x} M_{xy} + \delta\theta_y Q_{xz} + \delta w_{,x} Q_{xz} - \delta\theta_x Q_{yz} + \delta w_{,y} Q_{yz}) dA \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para a definição dos esforços internos, equações (3.17) a (3.21), é necessário à consideração da contribuição das barras de reforço para a resistência da laje de concreto. Para isso é feito o somatório do número de camadas de barras na seção (n_x ou n_y , dependendo da direção) levando em conta a área da barra (A_{xi}) disposta na direção x e distribuída com um espaçamento (S_{xi}) ao longo da direção y , o mesmo acontecendo para as barras dispostas na direção y , conforme ilustrado na Figura 3.3. $\sigma_x^s(z_i)$ e $\sigma_x^c(z_i)$ são, respectivamente, as tensões no aço e no concreto no centro da camada de barras dispostas na direção x . Nos somatórios das equações (3.17) a (3.20) essas tensões são consideradas positivas ou negativas, isso porque, onde a área de aço está sendo acrescentada a área de concreto deve ser retirada. A distância z_i representa a distância do centro da barra ao centro da seção transversal, quando o elemento plano de casca estiver sendo representado por uma superfície plana média. O índice c faz referência ao material concreto e o índice s faz referência ao aço das barras de reforço.

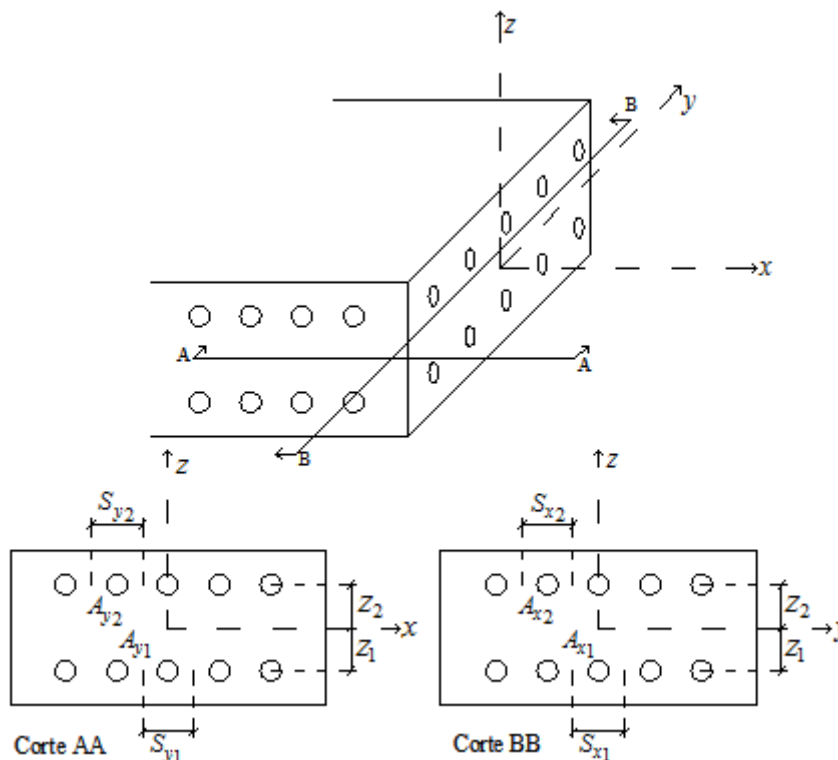


Figura 3.3 – Área das barras de aço e largura de influência.

Na equação (3.21), o fator k corresponde a uma correção no cálculo do esforço cortante devido à aproximação de que seções planas permanecem planas após deformações, ou seja, a tensão cisalhante é constante ao longo da espessura do elemento

plano de casca. O valor de k comumente usado é de $5/6$, mas depende da forma da seção transversal.

Na aproximação por elementos finitos, baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais (\mathbf{q}). Sendo usada na formulação a teoria de placa de Reissner/Mindlin, os deslocamentos de translações e rotações podem ser interpolados independentemente. Dessa forma, sendo considerado um elemento com nove nós, três na direção ξ e três na direção η , devem ser adotadas funções de forma dadas por polinômios biquadráticos, como mostrado nas equações (3.23) a (3.28) abaixo. Nessas equações, ξ e η representam as coordenadas paramétricas do elemento finito retangular usado e ilustrado na Figura 3.4.

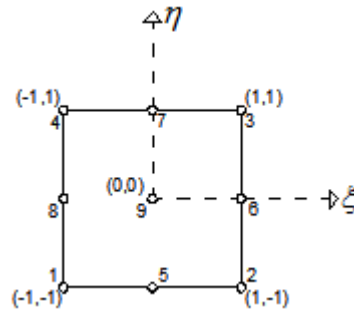


Figura 3.4 – Elemento finito retangular de nove nós.

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad \dots \quad u_9 \quad v_1 \quad \dots \quad v_9 \quad w_1 \quad \dots \quad w_9 \quad \theta_{x1} \quad \dots \quad \theta_{x9} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad \theta_{y9}\}^T$$

$$N_{1..4} = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - \xi_i) (\eta - \eta_i) \quad (3.23)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1) (1 - \xi^2) \quad (3.24)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2) \quad (3.25)$$

$$N_7 = \frac{1}{2} \eta (\eta - 1) (1 - \xi^2) \quad (3.27)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) (1 - \eta^2) \quad (3.27)$$

$$N_9 = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \quad (3.28)$$

As funções de interpolação dadas pelas equações (3.23) a (3.28), serão representadas pelo vetor coluna Φ de nove termos descrito a seguir.

$$\Phi^T = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9)$$

A partir das funções de interpolação dada pelas expressões (3.23) a (3.28) é possível determinar as equações aproximadas dos deslocamentos associadas aos deslocamentos nodais \mathbf{q} .

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & sim & & \Phi^T & \mathbf{O}^T \\ & & & & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (3.29)$$

Na expressão (3.29), \mathbf{q} é um vetor coluna com seus termos dados por quarenta e cinco deslocamentos nodais e \mathbf{O} é um vetor coluna nulo com nove elementos. Sendo os deslocamentos u , v , w , θ_x e θ_y funções dos deslocamentos nodais, os seus variacionais podem ser escritos a partir da seguinte expressão: $\delta a = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} \right)$, sendo \mathbf{q} o vetor dos deslocamentos nodais, ∂ o operador diferencial e a substituído por u , v , w , θ_x e θ_y . Substituindo esses variacionais na equação (3.22) chega-se ao trabalho virtual de um elemento plano de casca dado pela equação (3.30) abaixo.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \iint_A & \left[\delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_x + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_y + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_y - \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_x + \right. \\ & + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} - \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \\ & \left. + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} - \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} \right] dA \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sendo \mathbf{f}_{ext} o vetor de forças externas nas direções dos graus de liberdade do elemento plano de casca, o trabalho virtual externo é dado por $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$. O vetor de forças externas no elemento é dado pelas forças externas aplicadas diretamente na direção

dos graus de liberdade do elemento, e as forças nodais equivalentes obtidas a partir do carregamento externo atuando ao longo do elemento. Da condição $\delta W_{ext} = \delta W_{int}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_A \left[\delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_x + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_y + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_y - \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_x + \right. \\ \left. + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} - \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \right. \\ \left. + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} - \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} \right] dA = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{ext} \end{aligned}$$

Sabendo que a expressão acima deve ser válida para qualquer campo de deslocamento virtual compatível ($\delta \mathbf{q}$), tem-se: $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$, onde \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas dado pela expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{int} = \iint_A \left[N_x \left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + M_y \left(\frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_y \left(\frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_x \left(\frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xy} \left(\frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\ \left. + M_{xy} \left(\frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xy} \left(\frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_{xy} \left(\frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\ \left. + Q_{xz} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) + Q_{xz} \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + Q_{yz} \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) - Q_{yz} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \quad (3.31) \end{aligned}$$

O vetor de forças internas para o elemento plano de casca da equação (3.31) pode ser reescrito na forma apresentada pela equação (3.32) abaixo.

$$\mathbf{f}_{int} = \iint_A \begin{bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_{xy} \Phi_{,x} + N_y \Phi_{,y} \\ Q_{xz} \Phi_{,x} + Q_{yz} \Phi_{,y} \\ -M_{xy} \Phi_{,x} - M_x \Phi_{,y} - Q_{yz} \Phi \\ M_y \Phi_{,x} + M_{xy} \Phi_{,y} + Q_{xz} \Phi \end{bmatrix} dA \quad (3.32)$$

Utilizando o método de Newton-Rapshon na solução do problema $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$ é necessária a determinação da derivada dessa expressão em relação aos deslocamentos

nodais, obtendo assim a matriz de rigidez tangente. Sendo \mathbf{f}_{ext} constante em relação aos deslocamentos nodais, a matriz de rigidez tangente é dada por, $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{q}}$.

$$\mathbf{K} = \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dA \quad (3.33)$$

Na expressão (3.33), a derivada do esforço axial atuante na seção em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial \left(\int_A \sigma_x dz \right)}{\partial \mathbf{q}} + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} \left(\frac{\partial \sigma_x^s(z_i)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \sigma_x^c(z_i)}{\partial \mathbf{q}} \right) = \int_h \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} \left(\frac{\partial \sigma_x^s(z_i)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \sigma_x^c(z_i)}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= \int_h \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} \right) dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} \left(\frac{\partial \sigma_x^s}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x(z_i)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \sigma_x^c}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x(z_i)}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} &= \int_h \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} \right) dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \frac{\partial \varepsilon_x(z_i)}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Da equação (3.9) tem-se $\sigma_x = (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y$, logo as derivadas em relação às deformações ε_x e ε_y são dadas por $\lambda + 2G$ e λ , respectivamente. No caso das barras de aço e do concreto retirado para a consideração dessas, é considerado tensões apenas na direção longitudinal ao eixo da barra, ou seja, estado uniaxial de tensões, logo as derivadas

serão dadas pelos módulos de elasticidade longitudinal dos materiais. Já as derivadas das deformações lineares em relação aos deslocamentos nodais são dadas pelas expressões (3.35) e (3.36) abaixo.

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{z \partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ z \Phi_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{z \partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \Phi_{,y} \\ \mathbf{O} \\ -z \Phi_{,y} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Substituindo as expressões (3.35) e (3.36) na derivada dos deslocamentos nodais (equação 3.34) e lembrando que os vetores coluna que representam as funções de forma são constantes em relação ao eixo perpendicular ao plano do elemento de casca (espessura do elemento), tem-se:

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \int (\lambda + 2G) dz \\ \Phi_{,y} \int \lambda dz \\ \mathbf{O} \\ -\Phi_{,y} \int \lambda z dz \\ \Phi_{,x} \int (\lambda + 2G) z dz \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ z_i \Phi_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x} (\lambda + 2G) h \\ \Phi_{,y} \lambda h \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ z_i \Phi_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Na expressão (3.38), h é a espessura do elemento plano de casca e a superfície de referência é tomada na superfície média do elemento plano de casca, dessa forma, as integrais ao longo da espessura de funções ímpares serão nulas. As demais variáveis já foram descritas ao longo dessa seção. De forma análoga à descrita para o esforço axial, pode-se chegar às expressões (3.39) a (3.42) para as derivadas em relação aos deslocamentos nodais dos outros esforços atuantes na seção.

$$\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,x}\lambda h \\ \Phi_{,y}(\lambda + 2G)h \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (E_s - E_c) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \\ z_i \Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,y}(\lambda + 2G)\frac{h^3}{12} \\ \Phi_{,x}\lambda\frac{h^3}{12} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (E_s - E_c) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ z_i \Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \\ z_i^2 \Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,y}\lambda\frac{h^3}{12} \\ \Phi_{,x}(\lambda + 2G)\frac{h^3}{12} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \begin{bmatrix} z_i \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ z_i^2 \Phi_{,x} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Phi_{,y}Gh \\ \Phi_{,x}Gh \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x}kGh \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,y}kGh \end{bmatrix}, \frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,y}kGh \\ -\Phi_{,x}kGh \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,x}G\frac{h^3}{12} \\ \Phi_{,y}G\frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

As expressões dos esforços atuantes no contorno do elemento N_x , N_y , N_{xy} , Q_{xz} , Q_{yz} , M_x , M_y , M_{xy} , que aparecem no vetor de forças internas dado na equação (3.32) podem ser obtidas a partir do vetor de deslocamento. Essas expressões são necessárias na solução de um problema não linear.

$$N_x = \int_h \sigma_x^c dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (\sigma_x^s(z_i) - \sigma_x^c(z_i)) = \int_h [(\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y] dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (\sigma_x^s(z_i) - \sigma_x^c(z_i))$$

$$N_x = \int_h [(\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y] dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \varepsilon_x(z_i)$$

$$N_x = \mathbf{q}^T \left[\int_h (\lambda + 2G) \begin{pmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ z\Phi_{,x} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \\ z\Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} dz + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \begin{pmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ z_i\Phi_{,x} \end{pmatrix} \right] \quad (3.43)$$

$$N_x = \mathbf{q}^T \left[\begin{pmatrix} \Phi_{,x}(\lambda + 2G)h \\ \Phi_{,y}\lambda h \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \begin{pmatrix} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ z_i\Phi_{,x} \end{pmatrix} \right] \quad (3.44)$$

De forma análoga à descrita para o esforço axial, pode-se chegar às expressões (3.45) a (3.48) para os demais esforços atuantes na seção.

$$N_y = \mathbf{q}^T \left[\begin{pmatrix} \Phi_{,x}\lambda h \\ \Phi_{,y}(\lambda + 2G)h \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (E_s - E_c) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \\ z_i\Phi_{,y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \quad (3.45)$$

$$M_x = \mathbf{q}^T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,y}(\lambda + 2G)\frac{h^3}{12} \\ \Phi_{,x}\lambda\frac{h^3}{12} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{ny} \frac{A_{yi}}{S_{yi}} (E_s - E_c) \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \Phi_{,y} \\ 0 \\ z_i^2 \Phi_{,y} \\ 0 \end{bmatrix} \right] \quad (3.46)$$

$$M_y = \mathbf{q}^T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,y}\lambda\frac{h^3}{12} \\ \Phi_{,x}(\lambda + 2G)\frac{h^3}{12} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{nx} \frac{A_{xi}}{S_{xi}} (E_s - E_c) \begin{bmatrix} z_i \Phi_{,x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_i^2 \Phi_{,x} \end{bmatrix} \right] \quad (3.47)$$

$$M_{xy} = \mathbf{q}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_{,x}G\frac{h^3}{12} \\ \Phi_{,y}G\frac{h^3}{12} \end{pmatrix}, N_{xy} = \mathbf{q}^T \begin{pmatrix} \Phi_{,y}Gh \\ \Phi_{,x}Gh \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q_{xz} = \mathbf{q}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_{,x}kGh \\ 0 \\ \Phi kGh \end{pmatrix}, Q_{yz} = \mathbf{q}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_{,y}kGh \\ -\Phi kGh \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

3.3 – Formulação do Elemento de Interface unidimensional

Nesta seção será apresentada a formulação do elemento de interface unidimensional responsável por simular a conexão deformável entre a laje de concreto e a viga de aço que são representados por elementos planos de cascas cuja formulação foi apresentada na seção anterior. A associação de casca pode ser feita de três maneiras diferentes, podendo ser feita por dois planos paralelos ou um plano perpendicular ao outro conforme ilustrado na Figura 3.5 abaixo.

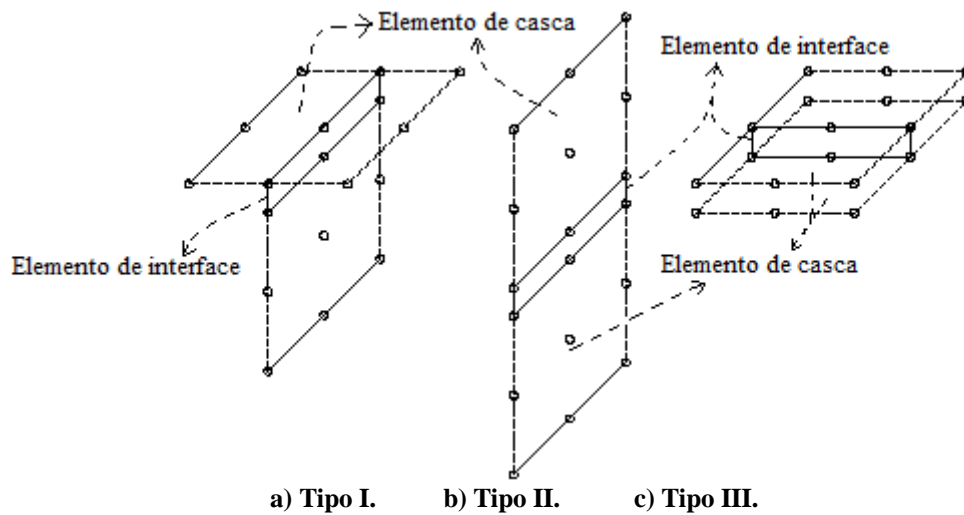


Figura 3.5 – Tipos de Associação dos elementos de casca.

A Figura 3.5 ilustra o elemento de interface de seis nós com 5 graus de liberdade por nó. Na Figura 3.6 é mostrada a sequência dos graus de liberdade para a formação do vetor dos deslocamentos nodais. Assim como o elemento de casca, o elemento de interface implementado apresenta a nível local 5 graus de liberdade por nó. No entanto, a possibilidade de simulação de estruturas formadas por planos não colineares exige que o sexto grau de liberdade seja inserido para montagem da matriz de rigidez global do problema, tanto para o elemento de interface quanto para o elemento plano de casca.

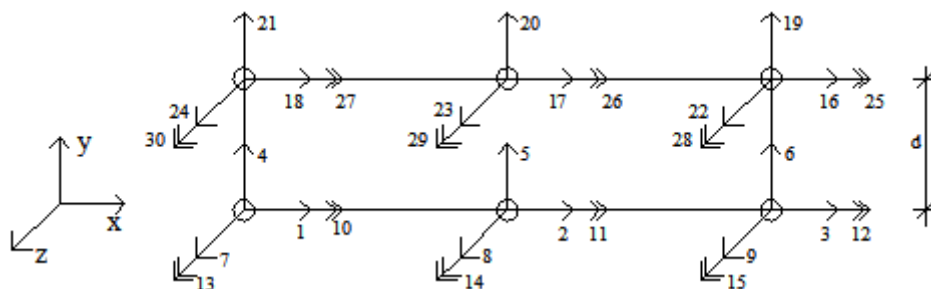


Figura 3.6 – Graus de Liberdade do elemento de interface.

A distância vertical d entre os nós inferiores e superiores do elemento de interface depende do tipo do elemento de interface e das posições das superfícies de referência. No tipo I, essa distância será dada pela metade da espessura do elemento plano de casca perpendicular ao elemento de interface. No tipo II, essa distância será nula. No tipo III, essa distância será dada pela soma das metades das espessuras dos elementos planos de casca. Em todos os casos anteriores foi considerada superfície de referência no plano médio do elemento de casca.

Apesar de que no tipo I e III a distância entre os nós inferiores e superiores do elemento de interface não ser nula, isso acontece por questão de geometria, o elemento representa mecanicamente apenas o contato entre os dois elementos de casca conectados a ele, ou seja, sua espessura física real é nula. Escolhendo posições específicas para as superfícies de referência dos elementos de cascas conectados ao elemento de interface consegue-se geometricamente espessura nula para todos os tipos, mas não há necessidade disso.

Como o elemento de interface representa fisicamente apenas o contato entre os elementos de casca, as equações dos deslocamentos relativos que acontecem nessa interface devem ser definidas. A equação do deslocamento relativo longitudinal (s_l), transversal (s_t), e vertical (s_v), direções x , z e y mostrada nas Figuras 3.7 a 3.9, são dadas abaixo.

$$s_l(x) = u_2(x, z, y = -h_2/2) - u_1(x, z, y = h_1/2) \quad (3.49)$$

$$s_t(x) = w_2(x, z, y = -h_2/2) - w_1(x, z, y = h_1/2) \quad (3.50)$$

$$s_v(x) = v_2(x, y, z) - v_1(x, y, z) \quad (3.51)$$

Nas equações descritas em (3.49) a (3.51), $u_\alpha(x, y, z) = u_\alpha^0(x) - y\theta_{z\alpha}(x)$, $w_\alpha(x, y, z) = w_\alpha^0(x) + y\theta_{x\alpha}(x)$, e $v_\alpha(x, y, z) = v_\alpha^0(x) - z\theta_{x\alpha}(x)$ são as equações dos deslocamentos na direção x , z e y ao longo dos elementos planos de casca abaixo ($\alpha = 1$) e acima ($\alpha = 2$) do elemento de interface analisado. Portanto,

$$s_l(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + h_2/2 \theta_{z2}(x) + h_1/2 \theta_{z1}(x) . \quad (3.52)$$

$$s_t(x) = w_2^0(x) - w_1^0(x) - h_2/2 \theta_{x2}(x) - h_1/2 \theta_{x1}(x) \quad (3.53)$$

$$s_v(x, z) = v_2^0(x) - v_1^0(x) + z[\theta_{x1}(x) - \theta_{x2}(x)] \quad (3.54)$$

Nas equações (3.52) a (3.54), u_1^0 , u_2^0 , v_1^0 , v_2^0 , w_1^0 e w_2^0 representam os deslocamentos de translação da superfície média (ou uma superfície de referência qualquer) dos elementos planos de casca nas direções x , y e z . θ_x e θ_y representam as

rotações das seções em relação aos eixos x e y , conforme ilustrado nas Figuras 3.7 a 3.9 que representam os deslizamentos longitudinal, transversal e vertical respectivamente.

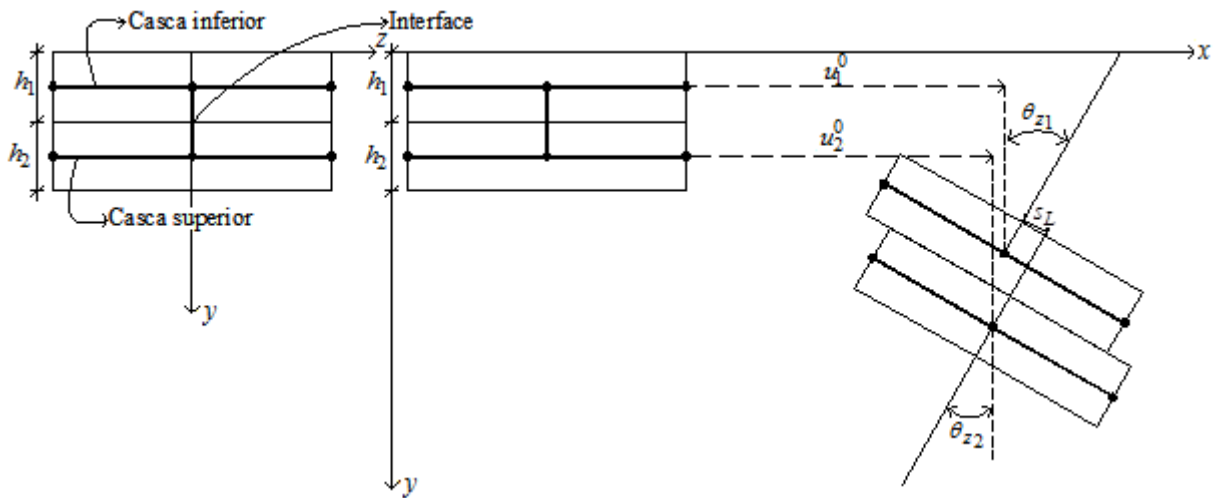


Figura 3.7 – Deslizamento longitudinal na interface de contato.

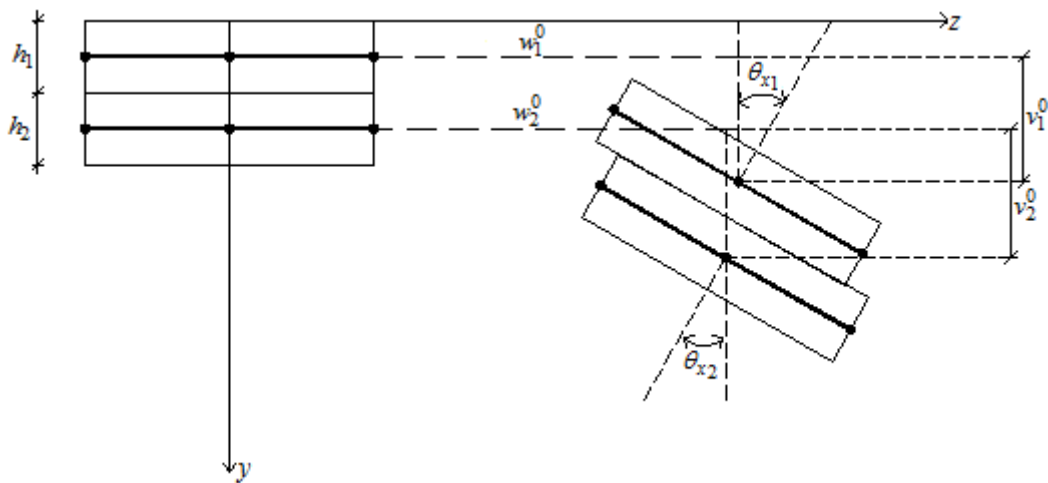


Figura 3.8 – Deslizamento transversal.

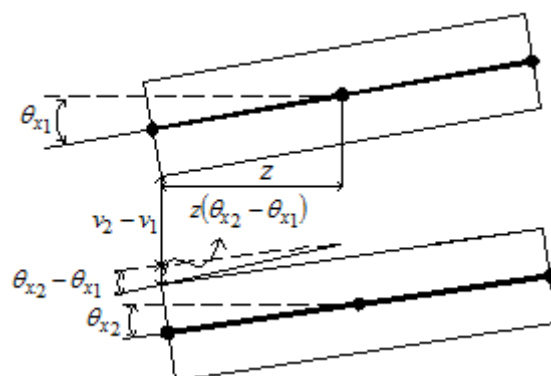


Figura 3.9 – Separação vertical.

Os valores de h_1 e h_2 nas equações (3.52) a (3.54) acima dependem do tipo de elemento de interface. Para o tipo 1, com elemento plano de casca perpendicular estando acima do elemento de interface, h_2 é a distância do plano de referência do elemento de casca perpendicular até a interface de contato, e h_1 é zero. Para o tipo 2, tem-se h_1 e h_2 nulos. Para o tipo 3, h_2 é a distância do plano de referência do elemento plano de casca superior até a interface de contato, e h_1 é a distância do plano de referência do elemento de casca inferior até a interface de contato.

Os deslocamentos relativos apresentados nas Equações (3.52) a (3.54) estão relacionados a uma deformação da conexão na interface de contato, ou seja, a uma força por unidade de comprimento que surge nessa interface. Considerando uma relação linear entre as forças por unidade de comprimento na direção de u (S_b), v (V_b) e w (N_b), em relação a seus respectivos deslocamentos relativos e, sendo E_{S_b} , E_{V_b} e E_{N_b} , respectivamente, as rigidezes de deformação do elemento de interface na direção dos deslocamentos u , v e w , então:

$$S_b = E_{S_b} s_l, V_b = E_{V_b} s_t \text{ e } N_b = E_{N_b} s_v. \quad (3.55)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento de interface da Figura 3.6 deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} (S_b \delta s_l + V_b \delta s_t + N_b \delta s_v) d\Omega \quad (3.56)$$

Na equação (3.56), s_l e s_t variam somente ao longo do eixo do elemento de interface (eixo x), já s_v varia também ao longo do eixo z . Na formulação a seguir será considerado que o eixo z varia de $-b_1$ a b_2 , sendo esses valores dados pelas espessuras dos elementos paralelos ao elemento de interface ou pelas larguras dos elementos perpendiculares ao elemento de interface, sempre adotando o menor valor, a Figura 3.10 ilustra esses valores para o elemento de interface do tipo 3. Esses valores são importantes quando se permite uma separação vertical na interface de contato, nesses casos eles evitam que haja a interpenetração entre os elementos acima e abaixo da interface de contato. Com

essas considerações pode-se reescrever a equação do trabalho virtual chegando-se então a equação (3.57).

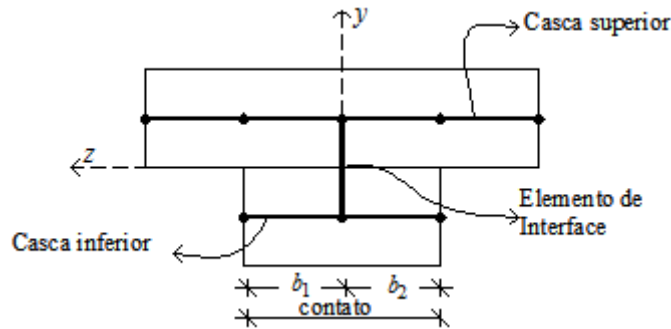


Figura 3.10 – Largura do elemento de interface na verificação de separação vertical.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L (S_b \delta s_l + V_b \delta s_t) dx + \int_L \left(\int_{-b_1}^{b_2} N_b \delta s_v dz \right) dx \quad (3.57)$$

Os variacionais dos deslocamentos relativos horizontal, transversal e vertical do elemento de interface são dados pelas equações abaixo. Nessas equações foi omitido o índice 0 que indica deslocamento no plano de referencia adotado.

$$\delta s_l = \delta u_2 - \delta u_1 + \frac{h_2}{2} \delta \theta_{z_2} + \frac{h_1}{2} \delta \theta_{z_1}. \quad (3.58)$$

$$\delta s_t = \delta w_1 - \delta w_2 + \frac{h_2}{2} \delta \theta_{x_2} + \frac{h_1}{2} \delta \theta_{x_1}. \quad (3.59)$$

$$\delta s_v = \delta v_2 - \delta v_1 + z(\delta \theta_{x_1} - \delta \theta_{x_2}). \quad (3.60)$$

Substituindo a variação dos deslocamentos relativos na Equação (3.57) do trabalho virtual, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [(S_b (\delta u_2 - \delta u_1) + V_b (\delta w_1 - \delta w_2) + N_b^1 (\delta v_2 - \delta v_1) + \frac{h_1}{2} V_b \delta \theta_{x_1} + N_b^2 \delta \theta_{x_1} + \frac{h_2}{2} S_b \delta \theta_{z_1} + [\frac{h_2}{2} V_b - N_b^2] \delta \theta_{x_2} + \frac{h_2}{2} S_b \delta \theta_{z_2})] dx \quad (3.61)$$

Na equação (3.61), $N_b^1 = \int_b N_b dz$ e $N_b^2 = \int_b N_b z dz$ representam as forças verticais

ao longo da largura (eixo z) na interface de contato entre os materiais.

Na aproximação por elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais (\mathbf{q}). Para o elemento em questão foram adotadas funções de forma dadas por polinômios quadráticos como mostrado nas equações (3.62) a (3.64).

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1). \quad (3.62)$$

$$N_2 = (1 - \xi^2). \quad (3.63)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1). \quad (3.64)$$

As funções de interpolação dadas pelas equações (3.62) a (3.64), serão representadas pelo vetor coluna Φ de três termos dado pela equação (3.65).

$$\Phi^T = (N_1 \quad N_2 \quad N_3) \quad (3.65)$$

A partir das funções de interpolação dada pela expressão (3.65) é possível determinar as equações aproximadas dos deslocamentos associadas aos deslocamentos nodais \mathbf{q}_α .

$$\begin{Bmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \\ w_\alpha \\ \theta_{x\alpha} \\ \theta_{y\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & sim & & \Phi^T & \mathbf{O}^T \\ & & & & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q}_\alpha \quad (3.66)$$

Nas expressões acima o índice α faz referência as seções acima e abaixo da interface, \mathbf{O} é um vetor coluna nulo com três elementos, e os graus de liberdade do elemento mostrado na Figura 3.6 são divididos em vetores como dado abaixo.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{u_1} &= [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T, \quad \mathbf{q}_{u_2} = [u_4 \quad u_5 \quad u_6]^T, \quad \mathbf{q}_{v_1} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T, \quad \mathbf{q}_{v_2} = [v_4 \quad v_5 \quad v_6]^T, \\ \mathbf{q}_{w_1} &= [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T, \quad \mathbf{q}_{w_2} = [w_4 \quad w_5 \quad w_6]^T, \quad \mathbf{q}_{\theta_{x1}} = [\theta_{x1} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{x3}]^T, \\ \mathbf{q}_{\theta_{x2}} &= [\theta_{x4} \quad \theta_{x5} \quad \theta_{x6}]^T, \quad \mathbf{q}_{\theta_{z1}} = [\theta_{z1} \quad \theta_{z2} \quad \theta_{z3}]^T \text{ e } \mathbf{q}_{\theta_{z2}} = [\theta_{z4} \quad \theta_{z5} \quad \theta_{z6}]^T. \end{aligned}$$

O vetor dos deslocamentos nodais para o elemento de interface de seis nós e cinco graus de liberdade por nó é dado pela equação (3.67) a seguir.

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{q}_{u_1}^T \quad \mathbf{q}_{v_1}^T \quad \mathbf{q}_{w_1}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{x1}}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{z1}}^T \quad \mathbf{q}_{u_2}^T \quad \mathbf{q}_{v_2}^T \quad \mathbf{q}_{w_2}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{x2}}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{z2}}^T \right]^T \quad (3.67)$$

Sendo os deslocamentos u , v , w , θ_x e θ_y funções dos deslocamentos nodais, os seus variacionais podem ser escritos a partir da seguinte expressão: $\delta a = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} \right)$, sendo \mathbf{q} o vetor dos deslocamentos nodais, ∂ o operador diferencial e a substituído por u , v , w , θ_x e θ_y . Obtidos os variacionais a partir dessa expressão chega-se a expressão (3.68) para o trabalho virtual de um elemento de interface associado a dois elementos planos de casca.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_L [S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_b^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + V_b \left(\frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} \right) + \\ + \left[\frac{h_1}{2} V_b + N_b^2 \right] \frac{\partial \theta_{x1}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{h_1}{2} S_b \frac{\partial \theta_{z1}}{\partial \mathbf{q}} + \left[\frac{h_2}{2} V_b - N_b^2 \right] \frac{\partial \theta_{x2}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{h_2}{2} S_b \frac{\partial \theta_{z2}}{\partial \mathbf{q}}] dx \quad (3.68) \end{aligned}$$

O trabalho virtual externo é obtido por $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$. Onde \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externa nodais. Geralmente as forças externas são transmitidas para os elementos de interface através dos elementos planos de casca a ele associado. Da condição de $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \int_L [S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + V_b \left(\frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_b^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + \frac{h_1}{2} V_b \frac{\partial \theta_{x1}}{\partial \mathbf{q}} + \\ + N_b^2 \frac{\partial \theta_{x1}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{h_1}{2} S_b \frac{\partial \theta_{z1}}{\partial \mathbf{q}} + \left[\frac{h_2}{2} V_b - N_b^2 \right] \frac{\partial \theta_{x2}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{h_2}{2} S_b \frac{\partial \theta_{z2}}{\partial \mathbf{q}}] dx = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.69) \end{aligned}$$

A expressão acima deve ser válida para qualquer campo de deslocamento virtual compatível. Portanto, ela pode ser escrita na forma $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$, onde, \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas dado abaixo.

$$\mathbf{f}_{int} = \int_L (S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + V_b \left(\frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_b^1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}} \right) + \frac{h_1}{2} V_b \frac{\partial \theta_{x1}}{\partial \mathbf{q}} + N_b^2 \frac{\partial \theta_{x1}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{h_1}{2} S_b \frac{\partial \theta_{z1}}{\partial \mathbf{q}} + \left(\frac{h_2}{2} V_b - N_b^2 \right) \frac{\partial \theta_{x2}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{h_2}{2} S_b \frac{\partial \theta_{z2}}{\partial \mathbf{q}}) dx \quad (3.70)$$

Substituindo na expressão (3.70) as derivadas das equações dos deslocamentos, descritas na expressão (3.66), em relação aos deslocamentos nodais \mathbf{q} , chega-se ao vetor de forças internas na forma vetorial dada pela equação (3.71). Utilizando o método de Newton-Rapshon na solução do problema $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$ é necessária a determinação da derivada dessa expressão em relação aos deslocamentos nodais, obtendo assim a matriz de rigidez tangente. Sendo \mathbf{f}_{ext} constante em relação aos deslocamentos nodais, a matriz de

rigidez tangente é dada por, $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{q}}$, e apresentada na equação (3.71) abaixo.

$$\mathbf{f}_{int} = \int_L \left\{ \begin{array}{c} -S_b \Phi \\ -N_b^1 \Phi \\ V_b \Phi \\ \left(\frac{h_1}{2} V_b + N_b^2 \right) \Phi \\ \frac{h_1}{2} S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ N_b^1 \Phi \\ -V_b \Phi \\ \left(\frac{h_2}{2} V_b - N_b^2 \right) \Phi \\ \frac{h_2}{2} S_b \Phi \end{array} \right\} dx, \mathbf{K} = \int_L \left[\begin{array}{c} -\Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[\frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ \frac{h_1}{2} \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[\frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ \frac{h_2}{2} \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{array} \right] dx \quad (3.71)$$

Na expressão (3.71), $\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}}$ é a derivada da força cisalhante por unidade de comprimento atuante ao longo da direção x na interface de contato, em relação aos deslocamentos nodais. A seguir é mostrada a sequência de raciocínio para a determinação desse vetor.

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial(E_{S_b} s_l)}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \frac{\partial s_l}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.72)$$

Na expressão acima, E_{S_b} é a rigidez da conexão deformável na direção longitudinal. Caso a relação força cisalhante por unidade de comprimento versus deslocamento relativo longitudinal (deslizamento na direção x) não seja linear, tem-se: $E_{S_b} = \frac{\partial S_b}{\partial s_l}$. Já a derivada do deslocamento relativo longitudinal em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_l}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \theta_{z2}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \theta_{z1}}{\partial \mathbf{q}} = \\ &= \left[-\Phi^T \quad \mathbf{O}^T \quad \mathbf{O}^T \quad \mathbf{O}^T \quad \frac{h_1}{2} \Phi^T \quad \Phi^T \quad \mathbf{O}^T \quad \mathbf{O}^T \quad \mathbf{O}^T \quad \frac{h_2}{2} \Phi^T \right]^T \end{aligned} \quad (3.73)$$

Na expressão (3.73), \mathbf{O} é um vetor coluna com três termos nulos. Substituindo a expressão (3.73) em (3.72), tem-se:

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} -\Phi E_{S_b} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \frac{h_1}{2} \Phi E_{S_b} \\ \Phi E_{S_b} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \frac{h_2}{2} \Phi E_{S_b} \end{array} \right\} \quad (3.74)$$

De forma análoga ao raciocínio usado para a determinação $\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}}$ pode-se obter a derivada dos demais esforços atuantes em relação aos deslocamentos nodais, ou seja:

$$\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi E_{V_b} \\ \frac{h_1}{2} \Phi E_{V_b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Phi E_{V_b} \\ \frac{h_2}{2} \Phi E_{V_b} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Phi \int_{-b1}^{b2} E_{N_b} dz \\ 0 \\ \Phi \int_{-b1}^{b2} E_{N_b} z dz \\ 0 \\ 0 \\ \Phi \int_{-b1}^{b2} E_{N_b} dz \\ 0 \\ -\Phi \int_{-b1}^{b2} E_{N_b} z dz \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Phi \int_{-b1}^{b2} E_{N_b} z dz \\ 0 \\ \Phi \int_{-b1}^{b2} E_{N_b} z^2 dz \\ 0 \\ 0 \\ \Phi \int_{-b1}^{b2} E_{N_b} z dz \\ 0 \\ -\Phi \int_{-b1}^{b2} E_{N_b} z^2 dz \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Nas expressões (3.74) e (3.75) acima, E_{S_b} , E_{V_b} e E_{N_b} são as tangentes das curvas força por unidade de comprimento versus deslocamento relativo nas direções de x , z e y , respectivamente. Para o cálculo das integrais que aparecem nessas expressões será considerado uma curva bi linear para a relação força vertical por unidade de comprimento (N_b) versus deslocamento relativo vertical (s_v), como mostra a Figura 3.11 abaixo. Para evitar a interpenetrabilidade entre os elementos planos de casca conectados pelo elemento de interface, ou seja, s_v negativo é considerado uma rigidez muito alta para a parte negativa da curva bi linear ($E_{N_{b2}} = 10^9$).

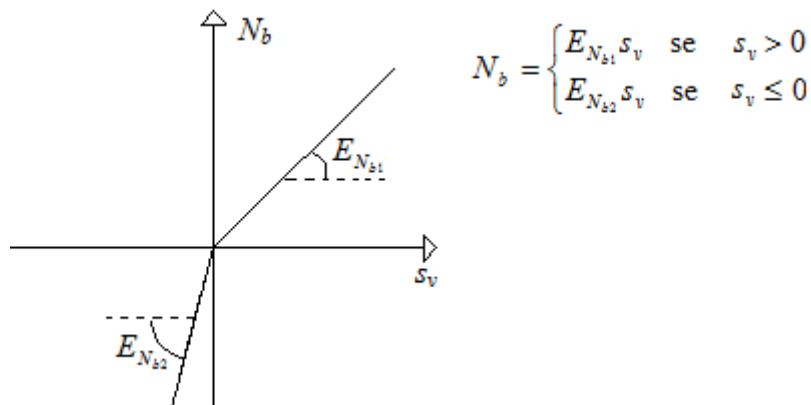


Figura 3.11 – Relação força vertical por unidade de comprimento versus deslocamento relativo vertical.

Na equação (3.51) observa-se que o deslocamento relativo vertical varia linearmente ao longo do eixo z (direção da largura de contato entre os elementos planos de casca conectados ao elemento de interface) mantido uma posição longitudinal fixa, ou seja, um valor de x constante. A Figura 3.12 mostra uma situação possível para a variação do deslocamento relativo vertical ao longo do eixo z da largura do contato entre os elementos planos de casca. Apesar da alta rigidez imposta para evitar os deslocamentos relativos verticais negativos, eles poderão acontecer com valores pequenos. Dessa forma, para o cálculo das integrais que aparecem nas expressões descritas em (3.75) acima usando a curva bi linear da Figura 3.11, deve-se dividir o intervalo de integração em duas partes sempre que ocorrer z_i entre $-b_1$ e b_2 . Abaixo são apresentadas as equações para o cálculo das integrais considerando as diferentes possibilidades.

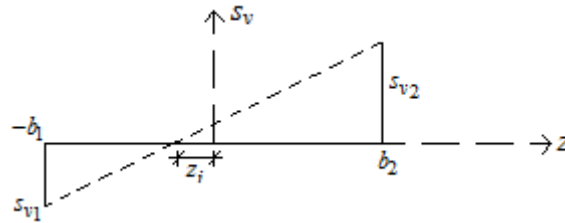


Figura 3.12 – Variação do deslocamento relativo vertical para uma posição fixa ao longo do elemento de interface.

No primeiro caso, o deslocamento relativo vertical tem o mesmo sinal ao longo de toda a largura de contato entre os elementos planos de casca, ou seja, $z_i < -b_1$ ou $z_i > b_2$. Considerando $K_v = E_{N_{b_1}}$ se $s_v > 0$ ou $K_v = E_{N_{b_2}}$ se $s_v < 0$, chegam-se as equações (3.76) a (3.78) para as integrais.

$$\int_{-b_1}^{b_2} E_{N_b} dz = K_v (b_1 + b_2) \quad (3.76)$$

$$\int_{-b_1}^{b_2} E_{N_b} z dz = K_v \left(\frac{b_2^2 - b_1^2}{2} \right) \quad (3.77)$$

$$\int_{-b_1}^{b_2} E_{N_b} z^2 dz = K_v \left(\frac{b_2^3 + b_1^3}{3} \right) \quad (3.78)$$

No segundo caso, o deslocamento relativo vertical muda de sinal ao longo da largura de contato entre os elementos planos de casca, ou seja, $-b_1 < z_i < b_2$. Considerando $K_{v1} = E_{N_{b1}}$ e $K_{v2} = E_{N_{b2}}$ se $s_{v1} > 0$ ou $K_{v1} = E_{N_{b2}}$ e $K_{v2} = E_{N_{b1}}$ se $s_{v1} < 0$, chegam-se as equações (3.79) a (3.81) para as integrais.

$$\int_{-b1}^{b2} E_{N_b} dz = K_{v1}(z_i + b_1) + K_{v2}(b_2 - z_i) \quad (3.79)$$

$$\int_{-b1}^{b2} E_{N_b} z dz = K_{v1} \frac{(b_2^2 - z_i^2)}{2} + K_{v2} \frac{(z_i^2 - b_1^2)}{2} \quad (3.80)$$

$$\int_{-b1}^{b2} E_{N_b} z^2 dz = K_{v1} \frac{(b_2^3 - z_i^3)}{3} + K_{v2} \frac{(z_i^3 + b_1^3)}{3} \quad (3.81)$$

No vetor de forças internas, descrito pela equação (3.71), aparecem os esforços internos N_{b1} e N_{b2} que dependem da curva bi linear que representa a relação força vertical versus deslocamento relativo vertical na interface de contato entre os elementos planos de casca. De forma análoga às integrais obtidas acima, são apresentadas a seguir as equações para o cálculo desses esforços considerando as diferentes possibilidades.

No primeiro caso, o deslocamento relativo vertical tem o mesmo sinal ao longo de toda a largura de contato entre os elementos planos de casca, ou seja, $z_i < -b_1$ ou $z_i > b_2$. Considerando $K_v = E_{N_{b1}}$ se $s_v > 0$ ou $K_v = E_{N_{b2}}$ se $s_v < 0$, chegam-se nas equações (3.82) e (3.83) para os esforços.

$$N_b^1 = \int_{-b1}^{b2} N_b dz = K_v (b_1 + b_2) (v_2(x) - v_1(x)) \quad (3.82)$$

$$N_b^2 = \int_{-b1}^{b2} N_b z dz = K_v \left(\frac{b_1^3 + b_2^3}{3} \right) (\theta_{x1}(x) - \theta_{x2}(x)) \quad (3.83)$$

No segundo caso, o deslocamento relativo vertical muda de sinal ao longo da largura de contato entre os elementos planos de casca, ou seja, $-b_1 < z_i < b_2$.

Considerando $K_{v1} = E_{N_{b1}}$ e $K_{v2} = E_{N_{b2}}$ se $s_{v1} > 0$ ou $K_{v1} = E_{N_{b2}}$ e $K_{v2} = E_{N_{b1}}$ se $s_{v1} < 0$, chegam-se às equações (3.84) a (3.85) para os esforços.

$$N_b^1 = \int_{-b1}^{b2} N_b dz = [K_{v1}(z_i + b_1) + K_{v2}(b_2 - z_i)](v_2(x) - v_1(x)) + \left[K_{v2} \left(\frac{b_2^2 - z_i^2}{2} \right) + K_{v1} \left(\frac{z^2 - b_1^2}{2} \right) \right] (\theta_{x1}(x) - \theta_{x2}(x)) \quad (3.84)$$

$$N_b^2 = \int_{-b1}^{b2} N_b z dz = \left[K_{v1} \left(\frac{z_i^2 - b_1^2}{2} \right) + K_{v2} \left(\frac{b_2^2 - z_i^2}{2} \right) \right] (v_2(x) - v_1(x)) + \left[K_{v2} \left(\frac{b_2^3 - z_i^3}{3} \right) + K_{v1} \left(\frac{z^3 + b_1^3}{3} \right) \right] (\theta_{x1}(x) - \theta_{x2}(x)) \quad (3.85)$$

3.3 – Formulação do elemento de interface bidimensional

Nessa seção será apresentada a formulação do elemento de interface bidimensional de dezoito nós responsável por simular a conexão deformável e fazer a ligação entre elementos planos de cascas paralelos de nove nós conforme ilustra a Figura 3.13 abaixo.

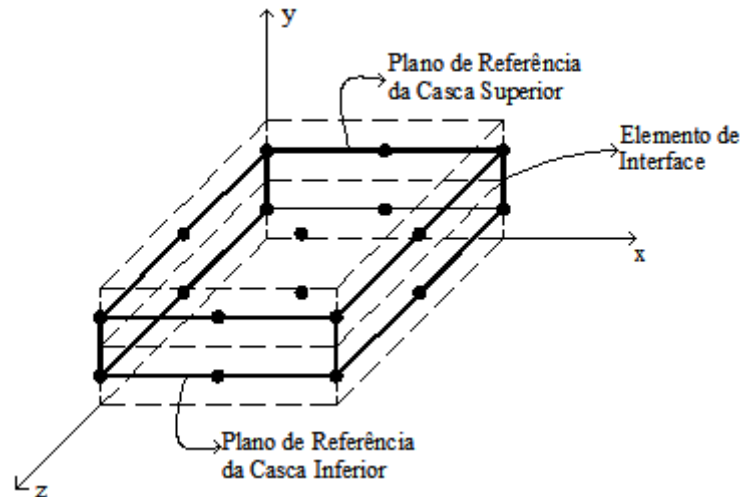


Figura 3.13 – Elemento bidimensional de interface associado aos elementos de casca.

A mesma premissa adotada quanto à compatibilidade dos graus de liberdade entre os elementos de casca e de interface unidimensional é adotada para a formulação do elemento bidimensional. Além disso, o número de graus de liberdade a nível local e global para os elementos mostrados na seção anterior são os mesmos para o elemento em questão.

Na Figura 3.14 é mostrada a sequência dos graus de liberdade para a formação do vetor dos deslocamentos nodais.

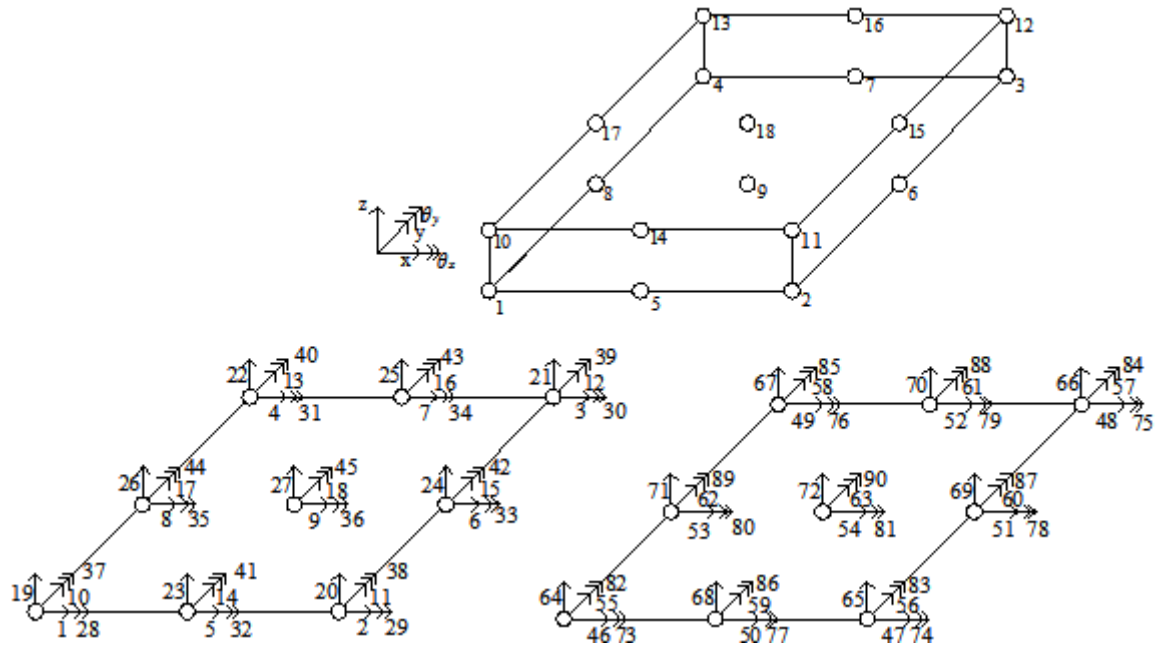


Figura 3.14 – Graus de liberdade do elemento de interface.

Como o elemento de interface bidimensional tem, além da função de simular fisicamente o contato entre os elementos planos de casca, a função de conectar as superfícies de referência dos elementos planos de cascas acima e abaixo dele, então a distância vertical entre os nós inferiores e superiores do elemento de interface depende das posições das superfícies de referência. No caso de superfícies de referências adotadas no plano médio do elemento de casca, essa distância será dada pela soma das metades das espessuras dos elementos planos de casca abaixo e acima do elemento de interface. Apesar dessa distância não ser nula, a sua espessura física real é sempre nula.

Como o elemento de interface representa fisicamente apenas o contato entre os elementos de casca, devem ser definidas as equações dos deslocamentos relativos que acontecem nessa interface. De forma análoga ao elemento de interface unidimensional, ou seja, tomando a diferença entre as equações dos deslocamentos na direção x , y e z ao longo dos elementos de casca abaixo e acima do elemento de interface analisado, chega-se às equações para os deslocamentos relativos nas direções x , y e z do elemento de interface bidimensional.

$$s_l(x, y) = u_2^0(x, y) - u_1^0(x, y) - \frac{h_2}{2} \theta_{y2}(x, y) - \frac{h_1}{2} \theta_{y1}(x, y) \quad (3.86)$$

$$s_r(x, y) = v_1^0(x, y) - v_2^0(x, y) + \frac{h_2}{2} \theta_{x2}(x, y) + \frac{h_1}{2} \theta_{x1}(x, y) \quad (3.87)$$

$$s_v(x, y) = w_2^0(x, y) - w_1^0(x, y) \quad (3.88)$$

Nas equações (3.86) a (3.88), s_l , s_t e s_v são os deslocamentos relativos nas direções x , y e z , respectivamente. u_1^0 e u_2^0 representam os deslocamentos de translação na direção x da superfície média (ou uma superfície de referência qualquer) dos elementos de casca abaixo e acima, respectivamente, do elemento de interface. Da mesma forma, v_1^0 e v_2^0 representam os deslocamentos de translação na direção y , w_1^0 e w_2^0 representam os deslocamentos de translação na direção z , θ_{x1} e θ_{x2} representam as rotações das seções em relação ao eixo x , e θ_{y1} e θ_{y2} representam as rotações das seções em relação ao eixo y . h_1 e h_2 são as espessuras dos elementos planos de casca abaixo e acima, respectivamente, do elemento de interface. Nas equações a seguir o índice 0 será omitido para facilitar as notações.

Os deslocamentos relativos apresentados nas equações (3.86) a (3.88) estão relacionados a uma deformação da conexão na interface de contato, ou seja, a uma força por unidade de área que surge nessa interface. Considerando uma relação linear entre essas forças na direção de u (S_b), v (V_b) e w (N_b), em relação a seus respectivos deslocamentos relativos e, sendo E_{S_b} , E_{V_b} e E_{N_b} , respectivamente, as rigidezes de deformação do elemento de interface na direção dos deslocamentos u , v e w , então:

$$S_b = E_{S_b} s_l, V_b = E_{V_b} s_t \text{ e } N_b = E_{N_b} s_v. \quad (3.89)$$

As equações dadas em (3.89) são iguais àsquelas definidas para o elemento de interface unidimensional, no entanto, nesse caso os esforços S_b , V_b e N_b são forças por unidade de área enquanto que no elemento unidimensional eles são forças por unidade de comprimento.

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento de interface bidimensional deformável da Figura 3.14 tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_A (S_b \delta s_l + V_b \delta s_t + N_b \delta s_v) dA \quad (3.90)$$

Os variacionais dos deslocamentos relativos horizontal, transversal e vertical do elemento de interface são dados pelas equações abaixo.

$$\delta s_l = \delta u_2 - \delta u_1 - \frac{h_2}{2} \delta \theta_{y2} - \frac{h_1}{2} \delta \theta_{y1} \quad (3.91)$$

$$\delta s_t = \delta v_1 - \delta v_2 + \frac{h_2}{2} \delta \theta_{x2} + \frac{h_1}{2} \delta \theta_{x1} \quad (3.92)$$

$$\delta s_v(x, y) = \delta w_2 - \delta w_1 \quad (3.93)$$

Substituindo a variação dos deslocamentos relativos na equação (3.90) do trabalho virtual, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_A [S_b(\delta u_2 - \delta u_1) + V_b(\delta v_1 - \delta v_2) + N_b(\delta w_2 - \delta w_1) - \frac{h_2}{2} S_b \delta \theta_{y2} + \frac{h_1}{2} S_b \delta \theta_{y1} + \frac{h_1}{2} V_b \delta \theta_{x1} + \frac{h_2}{2} V_b \delta \theta_{x2}] dA \quad (3.94)$$

Na aproximação por elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais (\mathbf{q}). Como os graus de liberdade inferiores e superiores são interpolados independentemente e a ordem desses seguiu a mesma ordem usada para o elemento plano de casca apresentado no item 3.1, então as funções de interpolação para o elemento de interface bidimensional são as mesmas adotadas para o elemento plano de casca. A partir dessas funções de interpolação dada pelas expressões (3.23) a (3.28) é possível determinar as equações aproximadas dos deslocamentos associadas aos deslocamentos nodais \mathbf{q} .

$$\begin{Bmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \\ w_\alpha \\ \theta_{x\alpha} \\ \theta_{y\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & & \Phi^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ & \text{sim} & & \Phi^T & \mathbf{O}^T \\ & & & & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q}_\alpha \quad (3.95)$$

Nas expressões acima, o índice α faz referência às seções acima e abaixo da interface, \mathbf{O} é um vetor coluna nulo com nove elementos, e os graus de liberdade do elemento mostrado na Figura 3.14 são divididos em vetores como dado abaixo.

$$\mathbf{q}_{u_1} = [u_1 \quad \dots \quad u_9]^T, \quad \mathbf{q}_{u_2} = [u_{10} \quad \dots \quad u_{18}]^T, \quad \mathbf{q}_{v_1} = [v_1 \quad \dots \quad v_9]^T, \quad \mathbf{q}_{v_2} = [v_{10} \quad \dots \quad v_{18}]^T,$$

$$\mathbf{q}_{w_1} = [w_1 \quad \dots \quad w_9]^T, \quad \mathbf{q}_{w_2} = [w_{10} \quad \dots \quad w_{18}]^T, \quad \mathbf{q}_{\theta_{x1}} = [\theta_{x1} \quad \dots \quad \theta_{x3}]^T,$$

$$\mathbf{q}_{\theta_{x2}} = [\theta_{x9} \quad \dots \quad \theta_{x18}]^T, \quad \mathbf{q}_{\theta_{y1}} = [\theta_{y1} \quad \dots \quad \theta_{y9}]^T \text{ e } \mathbf{q}_{\theta_{y2}} = [\theta_{y10} \quad \dots \quad \theta_{y18}]^T.$$

O vetor dos deslocamentos nodais para o elemento de interface de nove nós e cinco graus de liberdade por nó é dado pela equação (3.96) a seguir.

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{q}_{u_1}^T \quad \mathbf{q}_{v_1}^T \quad \mathbf{q}_{w_1}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{x1}}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{y1}}^T \quad \mathbf{q}_{u_2}^T \quad \mathbf{q}_{v_2}^T \quad \mathbf{q}_{w_2}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{x2}}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_{y2}}^T \right]^T \quad (3.96)$$

Seguindo a mesma sequência da formulação do elemento de interface unidimensional da seção anterior, chega-se a expressão abaixo para o vetor de forças internas e a matriz de rigidez do elemento de interface bidimensional.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_A \begin{Bmatrix} -S_b \Phi \\ +V_b \Phi \\ -N_b \Phi \\ \frac{h_1}{2} V_b \Phi \\ -\frac{h_1}{2} S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ -V_b \Phi \\ N_b \Phi \\ \frac{h_2}{2} V_b \Phi \\ -\frac{h_2}{2} S_b \Phi \end{Bmatrix} dA, \quad \mathbf{K} = \int_A \begin{Bmatrix} -\Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \frac{h_1}{2} \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\frac{h_1}{2} \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \frac{h_2}{2} \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\frac{h_2}{2} \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{Bmatrix} dA \quad (3.97)$$

Na expressão (3.97), os esforços S_b , V_b e N_b são obtidos diretamente da curva força por unidade de área versus deslocamento relativo. Já as derivadas desses esforços em relação aos deslocamentos nodais são definidas a seguir. Elas foram obtidas de forma análoga aquela usada para as derivadas dos esforços em relação aos deslocamentos nodais do elemento de interface unidimensional.

Na expressão (3.97), $\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}}$ é a derivada da força cisalhante por unidade de área atuante ao longo da direção x na interface de contato, em relação aos deslocamentos nodais. A seguir é mostrada a sequência de raciocínio para a determinação desse vetor.

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial(E_{S_b} s_l)}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \frac{\partial s_l}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.98)$$

Na expressão acima, E_{S_b} é a rigidez da conexão deformável na direção longitudinal, caso a relação força cisalhante por unidade de área versus deslocamento relativo longitudinal (deslizamento na direção x) não seja linear, tem-se: $E_{S_b} = \frac{\partial S_b}{\partial s_l}$. Já a derivada do deslocamento relativo longitudinal em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_l}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \theta_{y2}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial \theta_{y1}}{\partial \mathbf{q}} = \\ &= \left[-\Phi^T \quad \mathbf{O}^T \quad \mathbf{O}^T \quad \mathbf{O}^T \quad -\frac{h_1}{2} \Phi^T \quad \Phi^T \quad \mathbf{O}^T \quad \mathbf{O}^T \quad \mathbf{O}^T \quad -\frac{h_2}{2} \Phi^T \right]^T \end{aligned} \quad (3.99)$$

Na expressão (3.99), \mathbf{O} é um vetor coluna com nove termos nulos. Substituindo a expressão (3.99) em (3.98), tem-se:

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} -\Phi E_{S_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{h_1}{2} \Phi E_{S_b} \\ \Phi E_{S_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{h_2}{2} \Phi E_{S_b} \end{Bmatrix} \quad (3.100)$$

De forma análoga ao raciocínio usada para a determinação $\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}}$ pode-se obter a derivada dos demais esforços atuantes em relação aos deslocamentos nodais, ou seja:

$$\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \\ \frac{h_1}{2} \Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \\ \frac{h_2}{2} \Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \text{ e } \frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi E_{N_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi E_{N_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.101)$$

Capítulo 4

Exemplos e Resultados

Nessa seção serão utilizados resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura para elementos mistos aço-concreto com interação parcial, resultados obtidos de softwares comerciais, e resultados analíticos para a validação dos elementos implementados no capítulo 3 desse trabalho.

4.1 – Viga de aço bi apoiada

Nesse exemplo será avaliado o uso do elemento plano de casca de nove nós para representar uma viga de aço com 5 metros de comprimento, bi apoiada, submetida a uma carga de 100 kN no meio do vão, conforme ilustra a Figura 4.1. A viga de aço possui seção transversal retangular com espessura de 3 cm e altura de 30 cm. O módulo de elasticidade longitudinal do aço é de 200 GPa e a solução foi comparada com a solução analítica usando a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

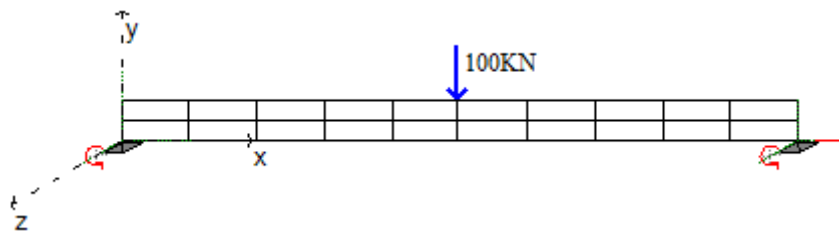


Figura 4.1 – Viga de aço discretizada com elementos de casca de nove nós.

Na Tabela 4.1 é apresentada a flecha no meio do vão considerando três discretizações diferentes da viga, 4, 10 e 20 elementos de casca de nove nós. Nessa tabela é apresentada uma

comparação dessas flechas com a flecha obtida considerando a solução analítica obtida a partir da teoria de viga de Euler-Bernoulli.

Tabela 4.1 – Deslocamento vertical com diferentes discretizações

Item	Elementos	Discretização em x	Discretização em y	Desloc. (cm)	Item Avaliado	Erro
1	4	2	2	-1,54590	1 - 4	-19,86%
2	10	5	2	-1,91542	2 - 4	-0,70%
3	20	10	2	-1,94502	3 - 4	+0,83%
4	Solução Analítica		$\delta=PL^3/48EI$	-1,92901		

Da Tabela 4.1, observa-se que o aumento da discretização de 4 para 10 elementos gera um aumento considerável na flecha. No entanto, o aumento de 10 para 20 elementos já se tem uma diferença pequena na resposta, indicando a convergência da análise usando elementos planos de casca de nove nós para um valor muito próximo ao obtido pela discretização de 20 elementos. Observa-se também na Tabela 4.1, que existe uma diferença pequena (0,83%) entre a solução considerando elemento de casca e a solução analítica considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, isso acontece devido à diferença entre as teorias usadas, já que para o elemento plano de casca é usada a teoria de placa de Rissner-Mindlin (que incorpora a flecha devido ao cisalhamento).

Para verificar o elemento de interface do tipo 2 implementado nesse trabalho, a viga da Figura 4.1 será dividida longitudinalmente em duas partes iguais. Essas partes serão ligadas pelo elemento de interface que tem a função de associar dois elementos planos de casca e simular a conexão deformável na interface de contato. Em uma primeira análise foram considerados valores elevados para as rigidezes longitudinal, transversal e vertical da conexão ($E_{sb} = E_{vb} = E_{nb} = 10^9 KPa$), simulando assim a interação total entre as duas partes, o que levaria a uma resposta igual aquela obtida sem a utilização do elemento de interface. Esses resultados estão ilustrados na tabela 4.2 e confirmam o que se era esperado, ou seja, uma diferença muito pequena quando usamos ou não o elemento de interface.

Tabela 4.2 – Deslocamento vertical usando elementos de casca e de interface

Item	Elementos casca	Elementos Interface	Discretização em x	Discretização em y	Desloc. (cm)	Item Avaliado	Erro
1	20	10	10	2	-1,946	1--2	0,059%
2	20	0	10	2	-1,945		

Para simular a interação parcial, as rigidezes serão alteradas de modo que haja o deslocamento relativo nas direções longitudinal, vertical e transversal, para assim conseguirmos simular os problemas reais de estruturas com conexão deformável avaliando o problema de contato existente. Para o primeiro caso foi considerado a interação total na direção transversal e vertical, $E_{vb} = E_{Nb} = 10^9 \text{ KPa}$, e interação livre na direção longitudinal, $E_{sb} = 10^{-3} \text{ KPa}$, ou seja, deslizamento longitudinal permitido.

A Tabela 4.3 apresenta o deslocamento vertical no meio do vão para os elementos acima e abaixo da interface de contato e o deslizamento longitudinal nos apoios. Na Figura 4.2 é mostrado a deformada da viga onde se pode observar facilmente o deslizamento longitudinal entre os elementos acima e abaixo da interface de contato.

Tabela 4.3 – Deslocamento vertical e deslizamento longitudinal

E_{vb} (KPa)	E_{Nb} (KPa)	E_{sb} (KPa)	Flecha Inferior (cm)	Flecha Superior (cm)	Deslizamento na Extremidade (mm)
10^9	10^9	10^{-3}	-7,70	-7,70	6,95
Solução Analítica			$\delta = -7,71$		

Nota-se que os resultados utilizando os elementos de casca e de interface implementados nesse trabalho e o resultado obtido pela teoria de viga de Euler-Bernoulli ficaram bem próximos mostrando a confiabilidade dos elementos implementados. Na determinação da solução analítica foi utilizada a condição de que as flechas são iguais para os elementos acima e abaixo da interface de contato e considerada a aproximação de que a parte do carregamento concentrado transmitido do elemento superior para o inferior é dado por uma força P (a ser determinada) concentrada no meio do vão.

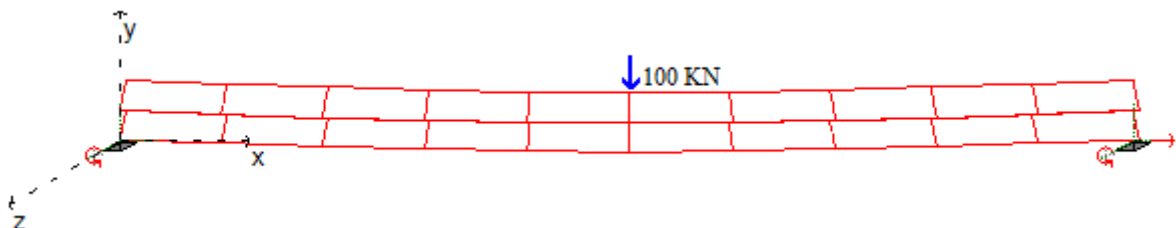


Figura 4.2 – Deformada considerando interação livre na direção x.

Para o segundo caso, foi considerada a interação livre na direção longitudinal, interação total na direção transversal, e interação parcial na direção vertical. A interação

parcial na direção vertical é obtida através de uma relação força por unidade de comprimento versus deslocamento relativo vertical bi linear com módulos de rigidez diferentes para a parte negativa e positiva da curva. Essa não linearidade ocorre devido ao contato entre parte superior e inferior da viga, então, para que não haja a interpenetração entre os elementos (deslocamento vertical relativo negativo) usa-se então um módulo de rigidez elevado ($E_{Nb} = 10^9 \text{ KPa}$) para a parte negativa da equação bi linear. Já para a parte positiva é usada uma rigidez menor ($E_{Nb} = 8 \times 10^5 \text{ KPa}$) permitindo parcialmente a separação vertical (deslocamento vertical relativo positivo) entre os elementos.

Na Tabela 4.4 observa-se a flecha no meio do vão para os elementos acima e abaixo da interface de contato. Nesse exemplo o carregamento nodal se encontra na face inferior da viga e é feita uma análise não linear. Na Figura 4.3 é mostrado a deformada da viga. Nessa figura os deslocamentos foram amplificados para que se pudesse observar a separação vertical entre os elementos e, conseqüentemente, as suas distintas curvaturas.

Tabela 4.4 – Separação vertical considerando interação parcial na direção y

E_{Nb} (KPa) $S_v < 0$	E_{Nb} (KPa) $S_v > 0$	E_{Vb} (KPa)	E_{Sb} (KPa)	Flecha Inferior (cm)	Flecha Superior (cm)	Separação Vertical (cm)
10^9	8×10^5	10^9	10^{-3}	-8,207	-7,214	0,993

Como pode ser observado na Figura 4.3, devido à interação parcial vertical e ao carregamento aplicado no meio do vão na parte inferior da viga, há uma maior tendência de separação vertical próximo ao ponto de aplicação da carga concentrada e uma tentativa de interpenetração entre as partes da viga próximo aos apoios.

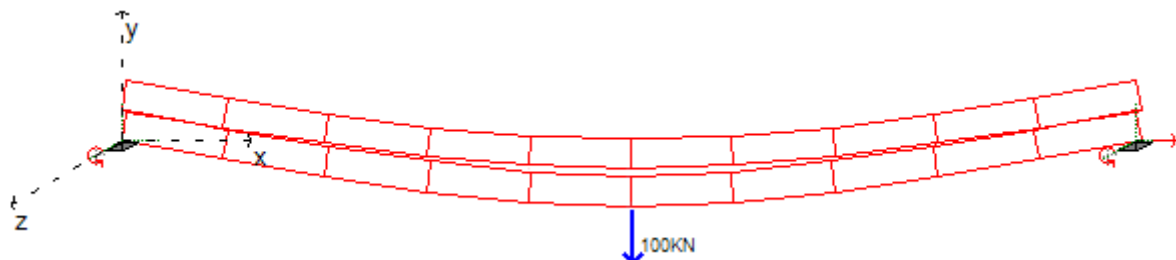


Figura 4.3 – Deformada considerando interação parcial na direção y.

Para a última análise desse exemplo, foi considerado que a viga tenha interação livre no sentido longitudinal e vertical e interação total no sentido transversal. A interação livre no sentido vertical adotada aqui permite a separação vertical para os deslocamentos

positivos ($E_{Nb} = 10^{-3} \text{ KPa}$) e não permite a interpenetração entre as duas vigas ($E_{Nb} = 10^9 \text{ KPa}$) para os deslocamentos negativos. Como o carregamento é aplicado na parte inferior da viga e essa não consegue transmitir esse esforço para a viga superior devido à interação livre para a separação vertical, espera-se que apenas a viga de baixo contribua para resistir ao esforço aplicado.

Na Tabela 4.5 observam-se os valores das flechas no meio do vão para o elemento acima e abaixo da interface usando uma análise não linear e os elementos planos de casca e interface implementados. Na Tabela 4.5 observa-se também a flecha usando a teoria de viga de Euler Bernoulli para uma viga de 15 cm de altura, observa-se a proximidade entre as flechas para as diferentes teorias. Na Figura 4.4 é ilustrada a deformada da viga. Nela observa-se que apenas a viga inferior trabalha.

Tabela 4.5 – Separação vertical considerando interação parcial na direção y

E_{Nb} (KPa) $S_v < 0$	E_{Nb} (KPa) $S_v > 0$	E_{Vb} (KPa)	E_{Sb} (KPa)	Flecha Inferior (cm)	Flecha Superior (cm)
10^9	10^{-3}	10^9	10^{-3}	-15,388	0
Solução Analítica				$\delta = -15,432$	

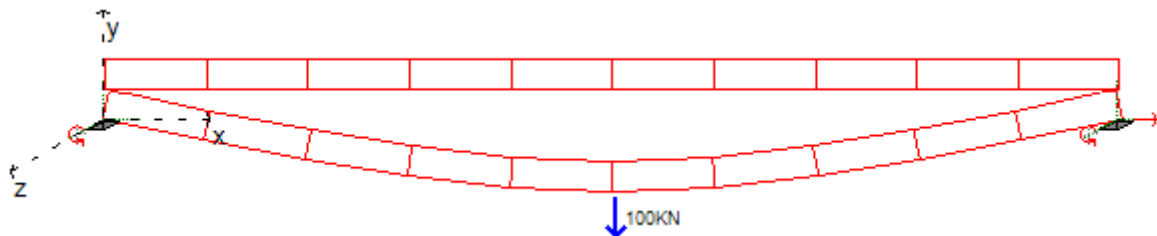


Figura 4.4 – Deformada considerando interação livre na direção y.

4.2 – Viga de aço do tipo cantoneira

Nesse exemplo será avaliado o uso do elemento de casca de nove nós e o elemento de interface do tipo 1 que faz a ligação entre os dois elementos planos de casca perpendiculares entre si. Serão feitas duas análises considerando uma viga com seção transversal do tipo cantoneira.

Na primeira, a viga encontra-se bi apoiada com os apoios nos 5 nós de cada extremidade da aba inferior e sendo aplicado um carregamento de 2 kN no meio do vão no nó mais externo da sua aba inferior, provocando então um esforço de flexo-torção na viga.

Na segunda análise a viga é considerada engastada em todos os nós de uma extremidade, e livre na outra extremidade, com a carga de 2 kN aplicada na sua extremidade livre na aba inferior e no nó mais externo, novamente provocando um esforço de flexo-torção na viga conforme ilustrado na Figura 4.5.

A viga é de aço, com 5 metros de comprimento, módulo de elasticidade de 200 GPa, e possui seção transversal com abas iguais de 40 cm de largura e 2 cm de espessura. Ambos os casos estão ilustrados na Figura 4.5 abaixo.

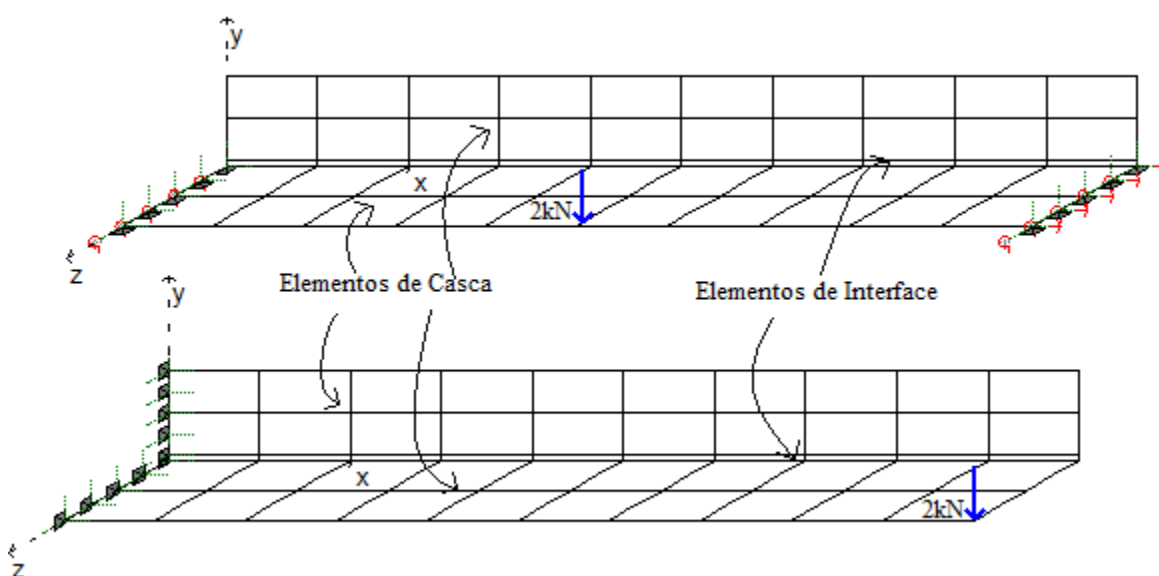


Figura 4.5 – Viga de aço sob flexo-torção.

Na Tabela 4.6 observam-se os resultados obtidos para ambos os casos citados acima considerando análise usando apenas elementos planos de casca, outra usando elementos planos de casca e de interface, além dos resultados obtidos através do software comercial SAP2000 usando na análise o elemento *Shell Thick* que leva em consideração a deformação por cisalhamento. Os deslocamentos ilustrados na Tabela 4.6 foram avaliados no ponto de aplicação da carga. Os elementos planos de casca e interface implementados nesse trabalho foram inseridos no programa de elementos finitos FEMOOP (Guimarães, 1992).

Nota-se que os resultados são próximos indicando que os elementos de casca e de interface implementados apresentam resultados satisfatórios para ambos os casos. Na análise com elementos planos de casca e interface foi considerada interação total longitudinal, transversal e vertical ($E_{sb} = E_{Nb} = E_{vb} = 10^9 \text{ KPa}$).

Tabela 4.6 – Flecha no ponto de aplicação da carga concentrada

Software	Elementos de casca	Elementos de Interface	Discretização em x	Discretização em y ou z	Flecha máxima (cm)
Cantoneira bi-apoiada					
SAP	40	0	10	2	-0,26121
FEMOOP	40	0	10	2	-0,26516
FEMOOP	40	10	10	2	-0,26993
Cantoneira engastada e livre					
SAP	40	0	10	2	-1,21238
FEMOOP	40	0	10	2	-1,22248
FEMOOP	40	10	10	2	-1,26758

Observa-se também que quando a análise é feita usando apenas elementos planos de casca ocorre um deslocamento menor comparado com o resultado obtido pela associação do elemento de interface com o elemento plano de casca. Isso pode ser explicado pela sobreposição de massas na ligação entre as duas abas da cantoneira que irá aumentar a inércia da seção transversal reduzindo o deslocamento vertical, quando a simulação é feita apenas com elementos planos de casca. A utilização do elemento de interface evita essa sobreposição. Esse efeito é melhor analisado no exemplo 4 dessa seção. Nas Figuras 4.6 e 4.7 pode ser observar as deformadas das vigas bi apoiada e engastada-livre.

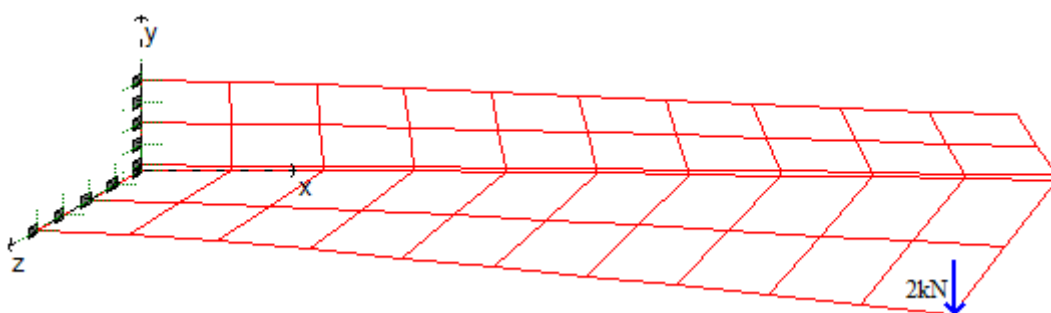


Figura 4.6 – Viga de aço sob flexo-torção.

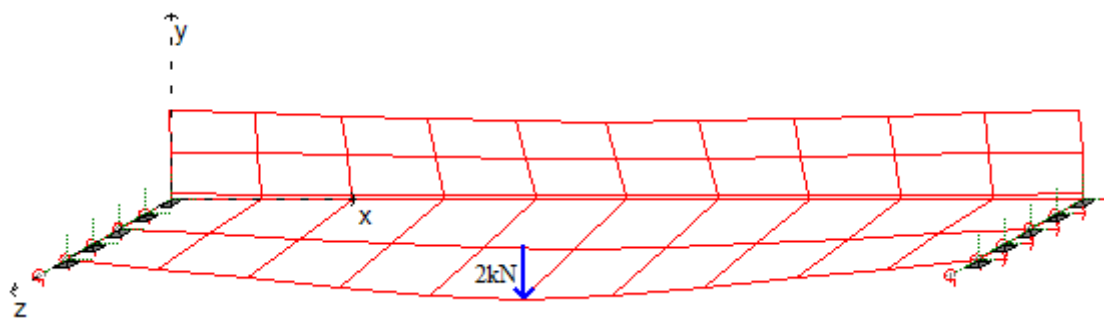


Figura 4.7 – Deformada na cantoneira bi apoiada.

4.3 – Laje de Concreto

Nesse exemplo será analisado o elemento de casca de nove nós associado ao elemento de interface do tipo 3. O exemplo trata-se de uma laje de concreto, com módulo de elasticidade de 35.4 GPa, de 5 m de comprimento por 3 m de largura e espessura de 10 cm. A laje encontra-se apoiada nos seus vértices e submetida a uma carga concentrada de 20 kN no centro, conforme ilustra a Figura 4.8.

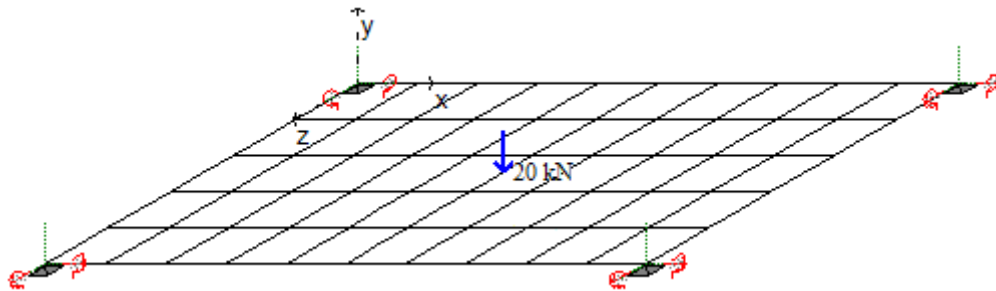


Figura 4.8 – Laje modelada com elementos de casca de nove nós.

A simulação numérica da laje de concreto foi feita de sete formas diferentes sendo que na primeira foi usado apenas o elemento plano de casca de nove nós implementado no capítulo 3 desse trabalho, como mostra a Figura 4.8. Em seguida a laje de concreto de 10 cm de espessura foi dividida em duas lajes iguais de 5 cm de espessura cada, sendo a ligação entre elas feita pelo elemento de interface unidimensional do tipo 3 e bidimensional. A ligação através dos elementos de interface unidimensional foi feita de três formas diferentes como descritas a seguir.

Na primeira foram usadas duas linhas de elementos de interface, sendo 5 elementos de interface na direção z e 10 em x , interceptando no centro da laje, como é mostrado na Figura 4.9.

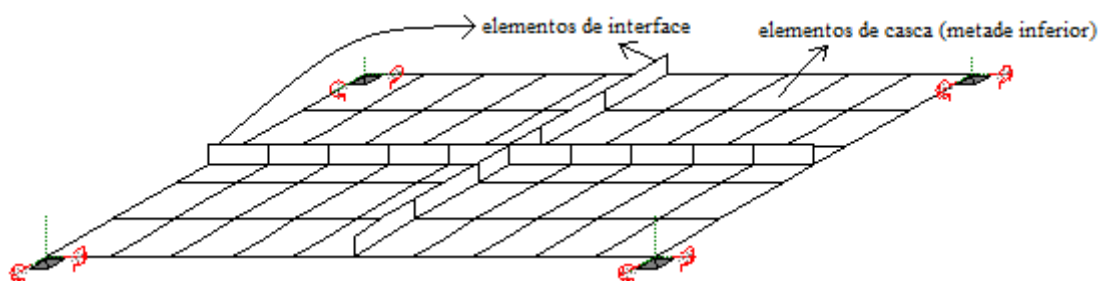


Figura 4.9 – Laje modelada com elementos planos de casca e duas linhas de elementos de interface (a metade superior simulada por elementos planos de casca foi omitida da figura).

Na segunda, foi acrescentada a essas duas linhas mais quatro linhas de elementos de interface no contorno da laje, totalizando 45 elementos de interface, como mostrado na

Figura 4.10. E na terceira, além dos 45 elementos, foram adicionadas mais quatro linhas de elementos próximas ao contorno, a uma distância de 1 m na direção x e 0.6 m na direção y . A ligação usando o elemento de interface bidimensional foi feita com três discretizações diferentes, usando 1, 25 e 50 elementos, na Figura 4.11 é mostrado a discretização da laje para 25 elementos de interface conectados a 50 elementos planos de casca, 25 na metade inferior e 25 na metade superior. Também foi feita uma análise com o software comercial SAP2000 usando o elemento *Shell Thick*. Na Tabela 4.7 podem-se observar os resultados das análises descritas e o erro associado.

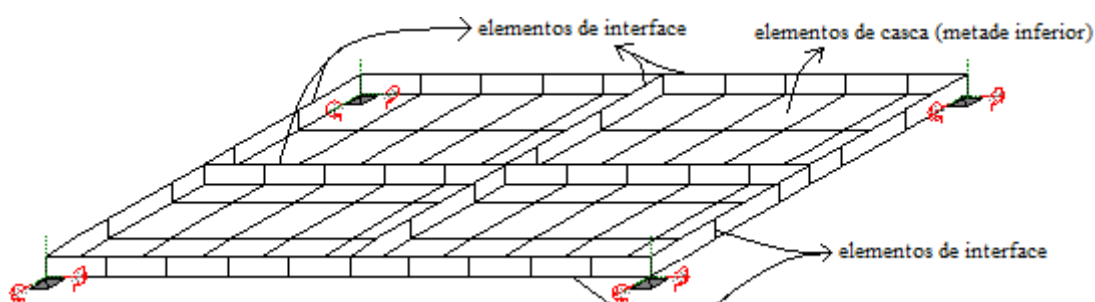


Figura 4.10 – Laje modelada com elementos planos de casca e cinco linhas de elementos de interface (a metade superior simulada por elementos planos de casca foi omitida da figura).

Da Tabela 4.7, nota-se que quando melhoramos a discretização de 100 elementos de casca *Shell Thick* do SAP2000 para 200 elementos, a flecha máxima aumenta significativamente, já aumentando de 200 para 400 a flecha máxima já não mostra mais variação significativa mostrando que esse deslocamento tende a convergir para próximo de 0,6357 cm, valor esse usado para comparação dos resultados obtidos pelos elementos implementados nesse trabalho. Na Tabela 4.7 é mostrado a aproximação dos resultados quando se faz análise usando apenas elementos planos de casca de nove nós implementado no capítulo 3 desse trabalho.

Tabela 4.7 – Flecha máxima na laje

Item	Software	Elementos de casca	Elm. interface unidimensional	Elm. Interface bidimensional	Desloc. (cm)	Item Avaliado	Erro
1	SAP	100	0	0	-0,1067	3--1	-83,21%
2	SAP	200	0	0	-0,6342	3--2	-0,23%
3	SAP	400	0	0	-0,6357		
4	FEMOOP	50	0	0	-0,6317	3--4	-0,63%
5	FEMOOP	100	15	0	-1,2141	3--5	+90,98%
6	FEMOOP	100	45	0	-0,6850	3--6	+7,76%
7	FEMOOP	100	75	0	-0,6442	3--7	+1,33%
8	FEMOOP	2	0	1	-0,4463	3--8	-29,79%
9	FEMOOP	50	0	25	-0,6073	3--9	-4,47%
10	FEMOOP	100	0	50	-0,6237	3--10	-1,89%

Para a análise com a placa dividida em duas partes iguais e a simulação feita por elementos planos de casca mais elementos de interface, os resultados são bons para cinco linhas de elementos de interface, são muito bons para nove linhas de elementos de interface e ruins para duas linhas de elemento de interface coincidentes com os eixos de simetria da placa. Esse erro muito alto acontece porque os elementos de interface estão apenas no meio do vão não conseguindo impedir o deslizamento entre as duas lajes no contorno delas, onde o deslizamento é máximo. Na Figura 4.12 observa-se a deformada das duas lajes conectadas com 45 elementos de interface. Nas análises com elementos de interface foram consideradas interação total longitudinal, transversal e vertical.

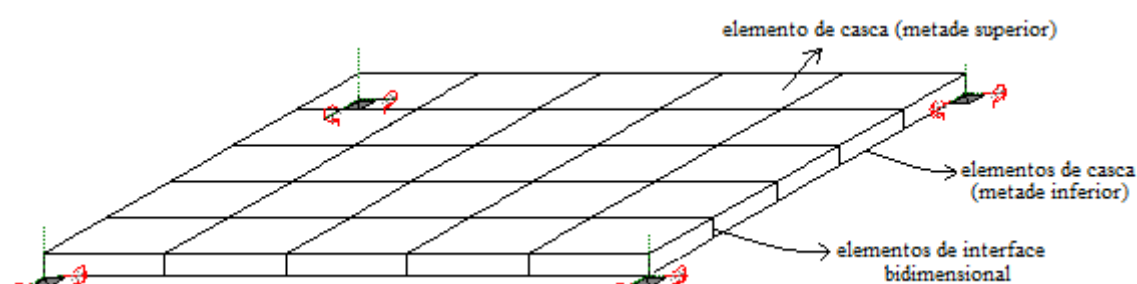


Figura 4.11 – Laje modelada com 50 elementos planos de casca e 25 elementos de interface bidimensional.

Quanto aos elementos de interface bidimensional a tabela mostra que um aumento da discretização de 1 para 25 elementos de interface leva a uma mudança significativa para a flecha máxima, já a alteração de 25 para 50 não apresenta mais uma variação significativa na resposta, concluindo que a flecha obtida usando na análise elementos planos de casca associados a elementos de interface bidimensional converge para um valor próximo de 0.6237 muito próximo do valor obtido pelo software SAP2000, que analisa a placa sem dividi-la em duas partes. Assim como nos elementos de interface unidimensional, foi considerado para os elementos de interface bidimensional interação total nas direções longitudinal, transversal e vertical.

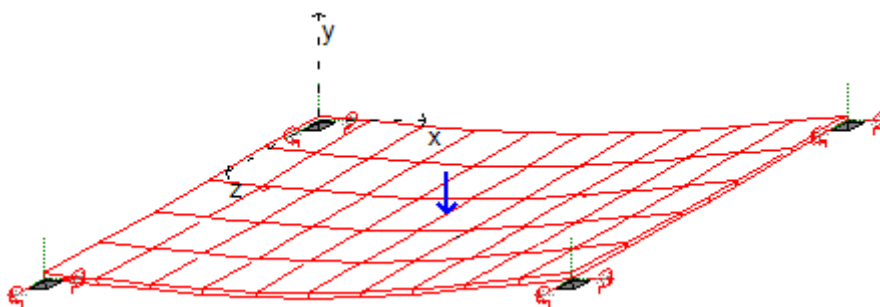


Figura 4.12 – Deformada da laje usando elementos de casca e de interface.

4.4 – Viga de aço com perfil I

Na Figura 4.13 é mostrado uma viga de 8 metros de comprimento bi apoiada nos nós da extremidade da mesa inferior sob uma carga de 200 kN no meio do vão. A viga tem seção transversal dada por um perfil I de aço ($E = 200\text{GPa}$, $\nu = 0.3$) com dimensões apresentadas na Figura 4.14.

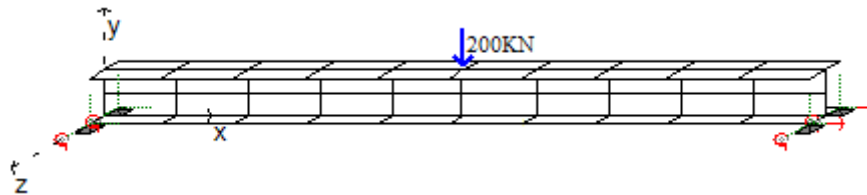


Figura 4.13 – Perfil de aço discretizado com elementos de casca e de interface.

Nesse exemplo, a viga da Figura 4.13 será analisada numericamente usando os elementos implementados no capítulo 3 desse trabalho e os elementos de sólido e de casca disponíveis no software SAP2000. Em uma das simulações será usado o elemento plano de casca de nove nós para discretizar a alma e as mesas da viga e o elemento de interface do tipo 1 para fazer a ligação entre os elementos da alma com a mesa. Nesse caso o elemento de interface não tem a função de simular uma conexão deformável, somente de fazer a ligação entre os elementos planos de casca mantendo suas posições e dimensões corretas. Ou seja, o elemento de interface faz a ligação da alma com a mesa evitando a sobreposição de áreas que acontece quando se usa apenas o elemento plano de casca. Na Figura 4.14 observa-se essa sobreposição de áreas através do aumento da altura da alma (Δx).

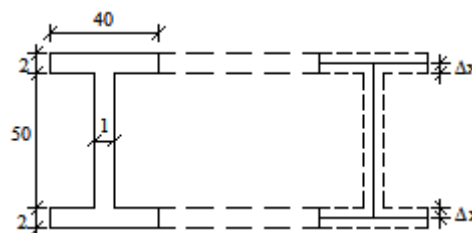


Figura 4.14 – Seção transversal com aumento da altura do perfil I.

Para comparar a diferença encontrada nas respostas das análises, com ou sem os elementos de interface, a viga da Figura 4.13 foi analisada usando o elemento sólido do software comercial SAP2000 para três diferentes discretizações. A avaliação da flecha máxima foi feita no local de aplicação da carga, ou seja, na mesa superior do perfil. Foi considerada em todas as análises a interação total entre a mesa e alma, com as rigidezes

sendo ($E_{Sb} = E_{Nb} = E_{Vb} = 10^9 \text{ KPa}$). Os diversos valores encontrados são mostrados na Tabela 4.8. Na Figura 4.15 dada observa-se a deformada da viga de perfil I obtida a partir do gerador de malha.

Tabela 4.8 – Deslocamento vertical considerando diferentes discretizações

Software	Elementos Sólidos	Elementos de casca	Elementos de Interface	Desloc. (cm)	Divisões do comprimento	Divisões das mesas	Divisões da alma
SAP	60	0	0	-1,031	10	2	2
SAP	240	0	0	-1,144	20	5	4
SAP	560	0	0	-1,244	40	5	4
SAP	0	60	0	-1,014	10	2	2
FEMOOP	0	15	0	-0,989	5	1	1
FEMOOP	0	60	0	-1,043	10	2	2
FEMOOP	0	15	5	-1,151	5	1	1
FEMOOP	0	60	10	-1,207	10	2	2

Nota-se na Tabela 4.8, que a flecha no ponto de aplicação da carga tende a convergir para um valor próximo a 1.244cm quando se usa uma análise feita por meio de elementos sólidos para os quais não existe a aproximação de sobreposição de áreas. No SAP2000 os elementos sólidos apresentam apenas 3 graus de liberdade por nó (apenas as translações) o que exige um refinamento grande da malha para se ter uma boa resposta.

As respostas obtidas pelo elemento de casca do SAP2000 (1.014cm) e pelo elemento plano de casca de nove nós implementado nesse trabalho (1.043cm), ambos usando uma mesma discretização, são praticamente iguais e razoavelmente menores que a flecha obtida na análise usando elementos sólidos. Já a flecha obtida usando elementos planos de casca associados aos elementos de interface, para a mesma discretização, apresenta um valor (1.207cm) maior que aquele encontrado usando apenas elementos de casca e bem próximo do valor obtido usando elemento sólido. Isso pode ser explicado pela sobreposição de massas na ligação entre a alma e mesa do perfil que acontece quando se usa apenas elementos de cascas na análise, levando ao aumento da inércia da seção transversal e consequente aumento de rigidez do perfil.

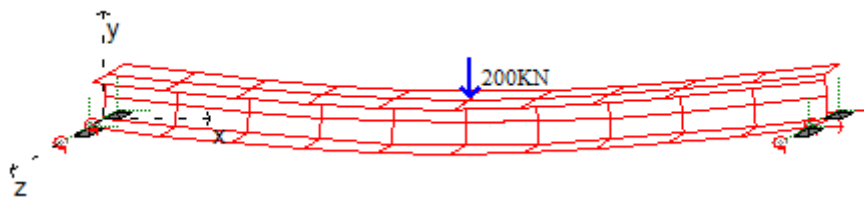


Figura 4.15 – Deformada do perfil I.

4.5 – Ensaio Push-out Test

Os elementos estruturais mistos formados pela união entre aço e concreto não apresentam a aderência ou o atrito suficiente para garantir que não haja o deslizamento relativo entre os mesmos quando submetidos a esforços predominantes de flexão, com isso é necessário a utilização de dispositivos mecânicos. Esses dispositivos garantem a interação entre os mesmos e a transmissão das forças de cisalhamento que surgem na interface de contato entre o aço e concreto. Porém, como foi visto no presente trabalho, mesmo com a utilização dos conectores, essa interação não é total e podem existir deslizamentos relativos significativos entre os materiais aumentando o deslocamento e gerando um acréscimo de esforços no elemento misto. Por isso é necessário quantificar a capacidade resistente do conector e conhecer o comportamento do mesmo quando associado a outros elementos estruturais.

Dentre os ensaios existentes para definição do comportamento mecânico de uma conexão deformável destaca-se o *Push-out test*. Nesse ensaio, é forçado um deslocamento relativo na interface de contato entre dois materiais ligados por um determinado tipo de conector, o qual se deseja estudar o comportamento, e são analisados a força cisalhante aplicada na interface com o deslizamento obtido nessa. Com esses dados pode-se criar uma curva força cisalhante por unidade de comprimento versus deslizamento. Como o ensaio *Push-out test* em escala real é um procedimento caro e demorado, existe a possibilidade de utilizar modelos numéricos para representar o comportamento dos elementos estruturais e obter a curva carga versus deslizamento que é necessária para a caracterização do conector em projetos de elementos estruturais mistos.

Com o intuito de encontrar um modelo numérico que possa fornecer a curva característica de uma conexão deformável, Lam e Ehab (2005) realizaram uma análise numérica e experimental para o ensaio *Push-out test* mostrado na Figura 4.16 abaixo. No ensaio uma carga crescente é aplicada em um perfil de aço tipo I (W 10 x 49) conectado a duas lajes de concreto de 619 mm de largura por 419 mm de altura e 6 cm de espessura, através de conectores do tipo stud de 19mm de diâmetro.

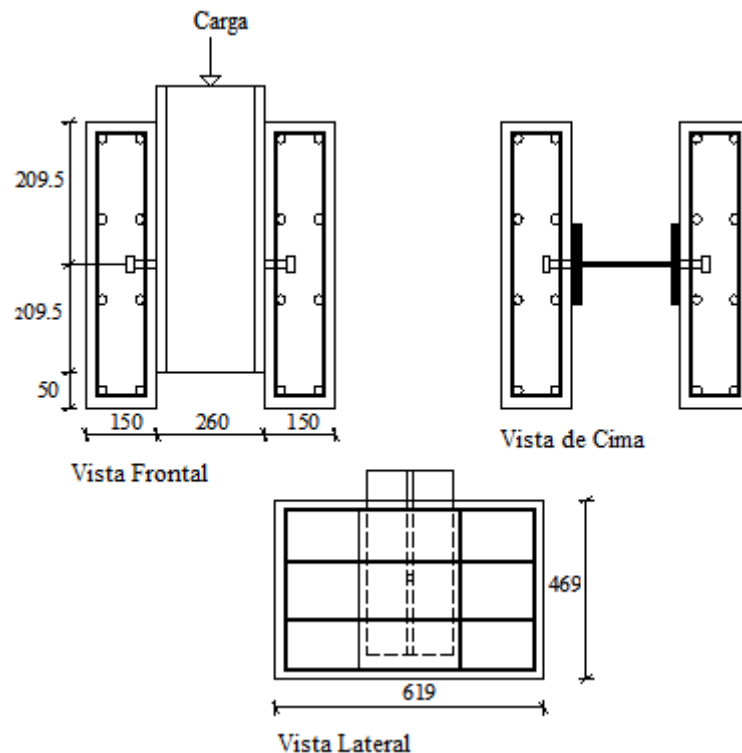


Figura 4.16 – Dimensões dos elementos usados no ensaio Push Test (Lam e Ehab (2005)).

Na análise numérica, os autores usaram o software Abaqus (2008) empregando elementos sólidos para representar a laje de concreto, o perfil de aço e o conector. Na análise foi considerado tanto para o concreto quanto para o aço um comportamento elasto-plástico. Para a determinação das propriedades físicas do concreto foram usadas as equações $\varepsilon_{yc} = 0.00024\sqrt{f_{cu}}$ (deformação de escoamento), $f_{yc} = 0.8f_{cu}$ (tensão de escoamento) e $E_c = f_{yc} / \varepsilon_{yc}$ (módulo de elasticidade longitudinal). Já para o aço foi considerado tensão de escoamento de 275 N/mm^2 para o perfil e barras de reforço e de 470.8 N/mm^2 para o conector. Sendo o módulo de elasticidade do aço considerado de 200000 N/mm^2 para todos.

Os autores realizaram quatro análises numéricas, quatro ensaios e os resultados obtidos para a curva força cisalhante por unidade de comprimento versus deslizamento foram comparados comprovando a eficácia do modelo numérico idealizado por eles.

Na Figura 4.17 é mostrado a discretização do problema analisado por Lam e Ehab (2005) usando os elementos planos de casca e de interface implementados nesse trabalho. As lajes de concreto e o perfil I de aço são simulados por elementos planos de casca, e a ligação entre esses elementos e a conexão deformável são simuladas pelo elemento de interface unidimensional do tipo 3.

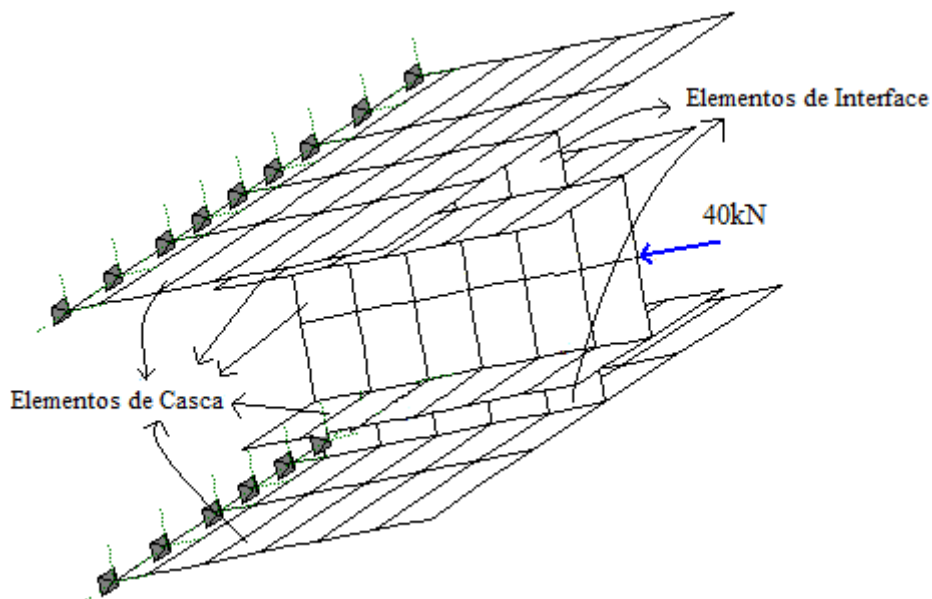


Figura 4.17 – Discretização usando os elementos finitos de casca e de interface.

Na análise usando os elementos implementados nesse trabalho, os autores utilizaram as curvas força cisalhante por unidade de comprimento versus deslizamento obtidas por Lam e Ehab (2005) para representar essa relação necessária para a definição da matriz de rigidez e do vetor de forças internas do elemento de interface. Dos ensaios experimentais foram retiradas as resistências últimas dos conectores e as curvas comparadas com as curvas geradas pela equação de Aribert (1992). Na equação (4.1) é apresentada a equação de Aribert (1992) que é geralmente usada para representar a rigidez da conexão.

$$S_b = S_{bu} \left(1 - e^{-C_1 s_l}\right)^{C_2} \quad (4.1)$$

Na equação (4.1), S_b é a força cortante por unidade de comprimento, s_l é o deslizamento, S_{bu} é a resistência última do conector por unidade de comprimento, e C_1 e C_2 são parâmetros responsáveis pela forma da curva, os quais foram determinados de maneira a proporcionar a melhor aproximação para a curva experimental. Na Figura 4.18 podem ser observados os gráficos obtidos em cada ensaio experimental e comparados com as curvas geradas pela equação de Aribert(1992).

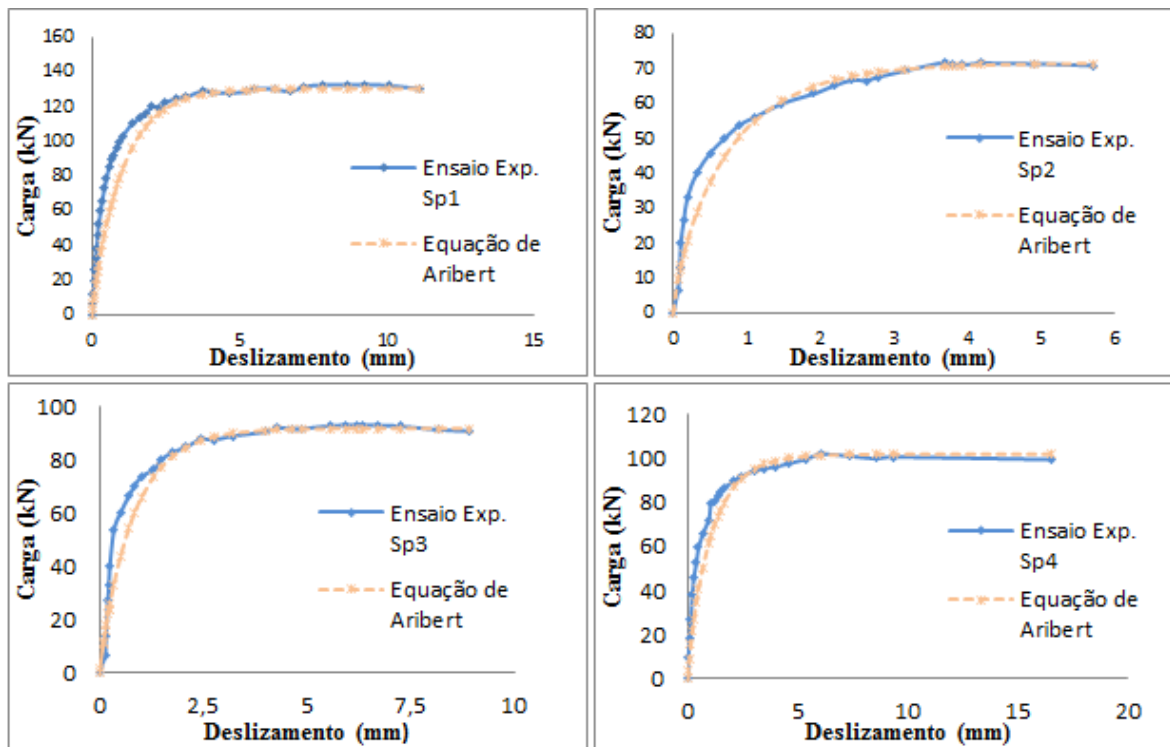


Figura 4.18 – Gráficos obtidos da equação de Aribert (1992) e do ensaio experimental para o *Push-out test*.

Na análise usando os elementos implementados nesse trabalho não é possível representar a curva carga deslizamento da Figura 4.18 por completo, já que os elementos planos de casca não permitem uma análise não linear física dos materiais. Portanto, a comparação dos resultados foi feita usando apenas um ponto dos trechos lineares das curvas carga deslizamento da Figura 4.18.

Na Tabela 4.9 observa-se a resistência do concreto para cada amostra e os respectivos módulos de elasticidade do concreto obtidos pelas equações descritas nessa seção.

Tabela 4.9 – Propriedades físicas do concreto para as amostras

Amostra	f_{cu} (N/mm ²)	ε_{yc}	f_{yc} (N/mm ²)	E (GPa)
Sp1	50	0.001697	40	23,5
Sp2	20	0.001073	16	14,9
Sp3	30	0.001315	24	18,2
Sp4	35	0.00142	28	19,7

Para representar as placas de concreto e o perfil de aço foram utilizados os elementos planos de casca de nove nós. A conexão deformável, representada pelos conectores, é simulada pelos elementos unidimensionais de interface de 6 nós ou pelos

elementos bidimensionais de interface de 18 nós. A carga foi aplicada no mesmo local do modelo numérico e experimental, ou seja, no meio da alma, sendo a laje engastada na extremidade oposta ao ponto de aplicação da carga. As rigidezes transversal e vertical do elemento de interface foram consideradas elevadas $E_{Nb} = E_{vb} = 10^9 \text{ kPa}$ indicando a interação total nessas direções. Já para a rigidez longitudinal de cada amostra foi utilizada a curva carga deslizamento da Figura 4.18 modelada pela equação (4.1), ou seja, a rigidez longitudinal é não linear e pode ser obtida pela derivada da equação (4.1), conforme apresentado na equação 4.2.

$$E_{Sb} = \frac{S_{bu} \left(1 - e^{-c_1 s_l}\right)^{c_2} c_2 c_1 e^{-c_1 s_l}}{1 - e^{-c_1 s_l}} \quad (4.2)$$

Os resultados para o deslizamento obtidos utilizando os elementos finitos implementados nesse trabalho e comparados com os resultados experimentais estão ilustrados na Tabela 4.10. Nessa tabela também são apresentados os parâmetros C_1 e C_2 e a Carga última S_{bu} da curva carga deslizamento para cada amostra. A carga última é dada em kN/m para o elemento de interface unidimensional, e para o elemento de interface bidimensional esse valor é dividido pela largura de contato, ou seja, largura da mesa do perfil I, considerando uma distribuição homogênea nessa direção, sendo assim dado em kN/m².

Tabela 4.10 – Resultados para os elementos implementados e do ensaio experimental

C_1 (mm ⁻¹)	C_2 (adm)	S_{bu} Interface 6 nós	S_{bu} Interface 18 nós	Amostra	Carga (kN)	δ (Exp.) (mm)	δ interface 6 nós (mm)	δ interface 18 nós (mm)
0,95	0,95	311,22	1225,27	Sp1	40	0,180	0,165	0,164
1,1	0,75	170,88	672,75	Sp2	30	0,148	0,127	0,126
1,2	0,95	219,09	862,55	Sp3	30	0,165	0,140	0,138
0,85	0,85	243,44	958,43	Sp4	40	0,203	0,197	0,194

Como pode ser revisto no capítulo 3 desse texto, as rigidezes longitudinal dos elementos de interface unidimensional e bidimensional são diferentes porque, para o elemento unidimensional de 6 nós, a variação da força cisalhante ocorre ao longo do comprimento do elemento, já para o elemento de 18 nós essa variação ocorre ao longo da área, ou seja, comprimento e largura do elemento bidimensional, por isso é necessário

dividir o valor da rigidez pela largura de contato do elemento que nesse caso é igual a largura da mesa do perfil.

Observando-se os resultados, nota-se que os elementos implementados são eficientes e conseguem representar bem o problema em questão. A diferença entre os resultados quando comparados com o ensaio experimental pode ser explicada pela incerteza na retirada dos dados das curvas experimentais, ou nos parâmetros de forma C_1 e C_2 que foram usados para modelar essas curvas. A Figura 4.19 abaixo ilustra a configuração deformada do perfil usando os elementos de casca e de interface unidimensional obtida pelo gerador de malha desenvolvido pelos autores.

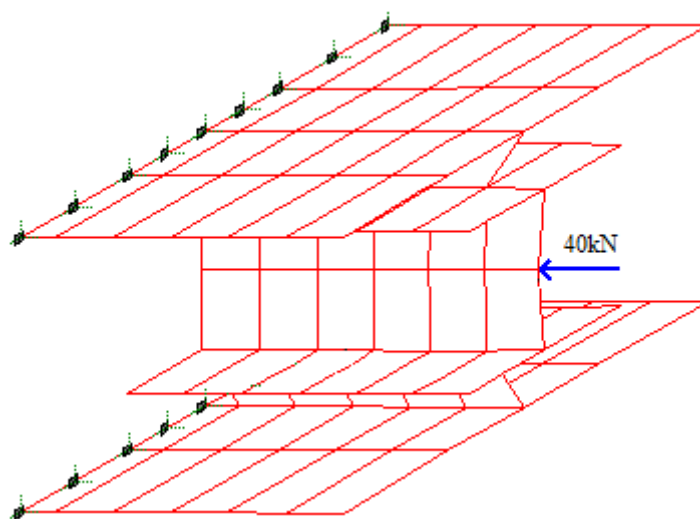


Figura 4.19 – Configuração deformada usando os elementos de casca e de interface.

4.6 – Piso Misto aço-concreto

Dentre os elementos estruturais mistos presentes na construção civil, como vigas, pilares, lajes e pisos mistos, destaca-se esse último pela sua ampla utilização e ausência de muitos estudos numéricos e experimentais na literatura. Um dos poucos trabalhos teórico e experimental encontrado na literatura é o piso formado por uma laje de concreto armado ligada por conectores a cinco vigas de aço de seção transversal I, sendo três longitudinais e duas transversais, estudado numericamente e experimentalmente por Nie *et. al.* (2008).

Conforme descrito no item 2.2 do presente trabalho no modelo estudado por Nie *et. al.* (2008), o carregamento foi aplicado através de três macacos hidráulicos com o incremento de 2kN até a ruptura. Durante o ensaio os deslocamentos, as deformações na laje e na viga de aço e o deslizamento na interface de contato foram monitorados, porém devido à alta rigidez na conexão e o deslizamento não afetar na carga última da estrutura

ele não foi avaliado. Na Figura 4.20 observa-se o piso misto com as seções transversais da laje, das cinco vigas de aço e as barras de reforço. O carregamento aplicado P é dividido igualmente em quatro pontos em cada viga e igualmente nas três vigas longitudinais.

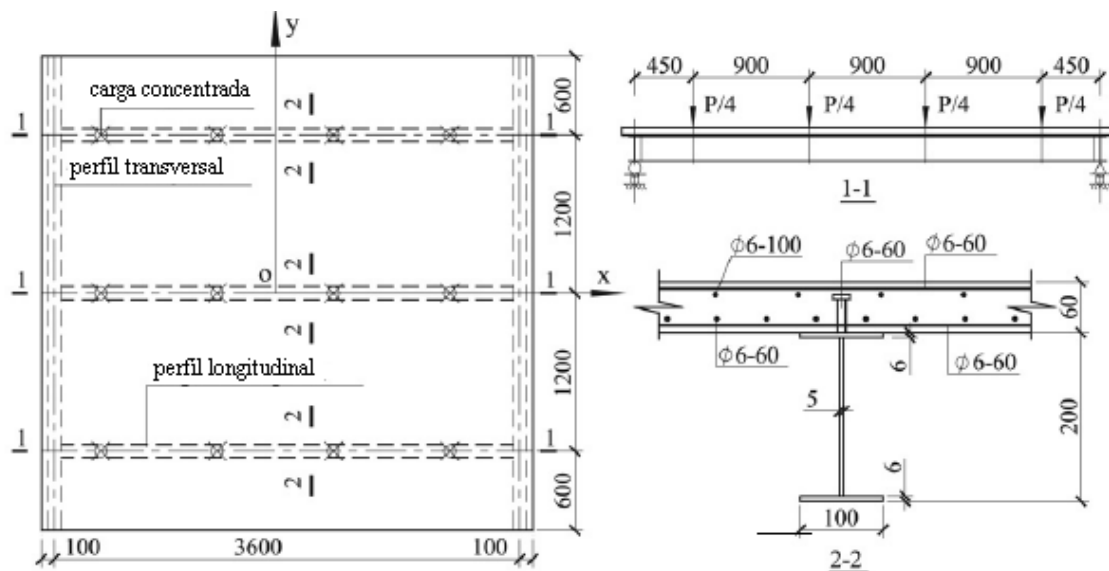


Figura 4.20 – Laje Mista aço-concreto (unidades em mm) Nie *et. al.* (2008).

Nesse trabalho a laje e o perfil de aço foram representados por elementos planos de casca de nove nós e os conectores foram representados por elementos unidimensionais e bidimensionais de interface de 6 e 18 nós respectivamente. Na Figura 4.21 observa-se o piso misto discretizado com esses elementos. Nessa discretização foi utilizado o gerador de malha estruturada desenvolvido pelos autores.

Assim como no exemplo anterior apenas o trecho linear do comportamento carga deslocamento do piso misto foi avaliado nesse trabalho. Apesar dos elementos implementados nesse trabalho terem sido inseridos em uma estrutura de programa que permite uma análise não linear, e a formulação definida no capítulo 3 desse trabalho para os elementos de interface e as barras de reforço permitir uma análise não linear física, na formulação dos elementos planos de casca não foi considerada essa possibilidade.

Dentre os resultados fornecidos por Nie *et. al.* (2008) é apresentada a curva carga deslocamento do piso misto. Essa curva apresenta um comportamento linear até um carregamento de aproximadamente 90kN aplicado em cada viga longitudinal dividido em quatro pontos equidistantes, como é mostrado na Figura 4.20. Para comparação dos resultados, o piso misto discretizado com os elementos implementados nesse trabalho foi analisado para um carregamento de 70 kN dividido em quatro pontos em cada viga

longitudinal, como mostrado na Figura 4.21. Nessa figura também são mostradas as condições de apoio e a posição desses nas vigas para a realização da análise numérica.

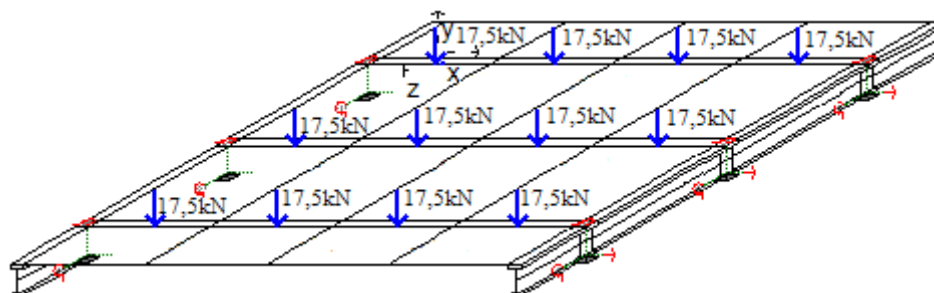


Figura 4.21 – Laje Mista aço-concreto com os elementos de casca e de interface implementados.

Para a curva tensão deformação do concreto foi adotada uma relação linear com módulo de elasticidade $E_c = 30000MPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.17$. Para o perfil de aço foram adotados o módulo de elasticidade $E_s = 206000MPa$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$. Já para o aço das barras de reforço foram adotados os mesmos parâmetros admitindo para tensão de escoamento o valor $f_y = 380MPa$. Os elementos implementados nesse trabalho permitem análise não linear física da conexão deformável e das armaduras, por isso para o aço das armaduras foi considerado uma relação tensão deformação elasto-plástica. Apesar de que o carregamento de 70kN aplicado o nível de tensão nas armaduras não atinge o nível de deformação plástica.

Para simular a conexão deformável entre os elementos de aço e concreto também foi utilizada a equação de Aribert (1992), equação (4.1), que descreve a rigidez longitudinal ao longo do eixo da viga. O deslizamento é representado por s_l e os valores dos parâmetros C_1 e C_2 são responsáveis pela forma da curva e foram considerados nesse trabalho e no trabalho de Nie *et. al.* (2008) os valores $C_1 = 0.7mm^{-1}$ e $C_2 = 0.56$. As demais variáveis presentes na equação dependem do tipo de elemento de interface implementado, já que um apresenta característica unidimensional e o outro bidimensional. Para o elemento de interface unidimensional o parâmetro S_b é a força por unidade de comprimento e S_{bu} é a resistência última do conector por unidade de comprimento. Para os elementos de interface bidimensional o parâmetro S_b é a força por unidade de área e S_{bu} é a resistência última do conector por unidade de área. A resistência última do

conector pode ser obtida por meio do ensaio *Push-out test* ou, para conectores já estudados, através de equações descritas em normas técnicas e em livros textos sobre o assunto.

Para a rigidez longitudinal e transversal da conexão deformável foi usada a curva descrita no parágrafo anterior com a resistência última do conector obtida através de equações fornecidas pela Norma NBR 8800 (2008). Para a conexão usando o elemento de interface de 6 nós, a variável S_{bu} foi determinada pela carga última resistente encontrada segundo prescrições da NBR 8800 (2008) dividida pelo comprimento de influência de 60 mm entre os conectores. Para a conexão usando o elemento de 18 nós, a resistência última do conector foi dividida pelo comprimento de influência e pela largura de contato na conexão deformável, que nesse caso é igual a largura da mesa do perfil, ou seja, 100 mm.

Para a rigidez vertical na interface de contato será desconsiderada a possibilidade de separação vertical, para isso será usada uma curva linear para a relação força versus deslocamento relativo com uma rigidez elevada ($E_{Nb} = 10^9 \text{ kPa}$), ou seja, interação total para o deslocamento vertical.

Nie *et. al.* (2008) apresentaram resultados numéricos e experimentais para a curva carga deslocamento do piso misto analisado. Na análise numérica os autores usaram o programa comercial ANSYS (2014) com a placa de concreto discretizada por elementos cúbicos, o perfil de aço por elementos de casca e a conexão foi simulada por elementos de mola. Na Tabela 4.11 observam-se os resultados obtidos para as análises numéricas usando os elementos desenvolvidos no presente trabalho e resultado do modelo experimental realizado por Nie *et. al.* (2008).

Tabela 4.11 – Resultados obtidos por Nie *et. al.* (2008) e com os elementos de casca e de interface

Carga kN	Exp. (mm)	FEMOOP	FEMOOP
		Unidimensional (mm)	Bidimensional (mm)
70	5,25	5,755	5,750

Nota-se que os resultados obtidos pelos elementos implementados foram praticamente iguais e relativamente próximos do resultado obtido do ensaio experimental mostrando a eficácia dos elementos implementados. A diferença entre os resultados obtidos usando os elementos implementados e ensaio experimental foi relativamente pequena e pode ser explicada devido a alguma incerteza durante o ensaio ou na retirada desse resultado do gráfico. Na Figura 4.22 observa-se a deformada do piso misto obtida através do gerador de malha a partir de uma análise usando os elementos planos de cascas e os elementos bidimensionais de interface.

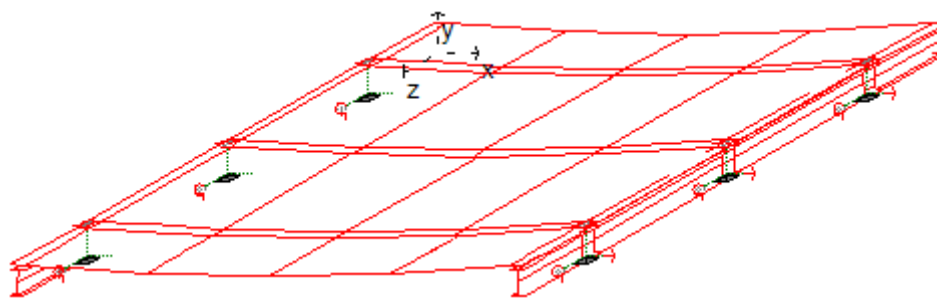


Figura 4.22 – Deformada da laje mista obtida através do gerador de malha desenvolvido.

4.7 – Linha Elástica

Conforme foi visto no presente trabalho, os elementos estruturais mistos têm como objetivo aproveitar as principais características de cada material com o intuito de obter estruturas mais resistentes, com maior aplicabilidade e mais vantagens quando comparadas com cada elemento de maneira separada.

Partindo do mesmo princípio e também buscando avaliar as possíveis situações quando ocorre um acoplamento imperfeito na conexão entre elementos de aço e concreto, levando então à interação parcial, Brighenti e Bottoli (2014) propõem um elemento finito unidimensional usando a teoria de viga de Euler-Bernoulli. Os autores propõem a formulação considerando o regime linear elástico, baseada em pequenos deslocamentos, sendo que os deslocamentos transversais e a rotação são os mesmos para ambas as camadas da seção e sem a necessidade de funções de forma para interpolar os deslocamentos axiais e rotações. Os autores usam o método da rigidez direta e introduzem diferentes deslocamentos nodais axiais nas duas extremidades do elemento, para cada parcela da seção transversal. Além disso, o elemento finito desenvolvido possui 8 graus de liberdade e permite avaliar o deslizamento entre os elementos da seção mista.

O exemplo avaliado por Brighenti e Bottoli (2014) é de uma viga mista com seção transversal composta por uma laje de concreto com o módulo de elasticidade de $13GPa$ e o perfil de aço IPE 300 com módulo de elasticidade de $200GPa$. A seção transversal com as dimensões é ilustrada na Figura 4.23.

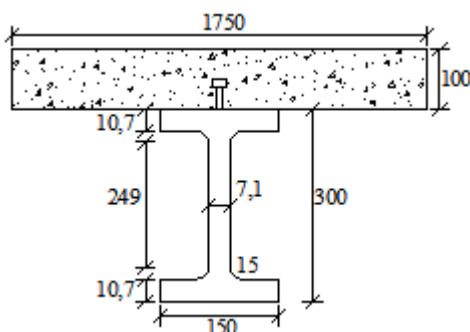


Figura 4.23 – Seção transversal da viga mista.

A viga mista de 10 m de comprimento está submetida a uma carga de 50 kN aplicada no meio do vão quando ela se encontra engastada nas duas extremidades e com a mesma carga de 50 kN aplicada na extremidade livre quando as condições de apoio das extremidades são engastada e livre, conforme ilustradas nas Figuras 4.24 e 4.25 respectivamente. A discretização usada para a laje na direção longitudinal foi de 4 divisões e na direção transversal 3, totalizando 12 elementos. Já para o perfil de aço foram usadas 4 divisões na direção longitudinal e sem divisões das mesas na direção transversal e da alma na direção vertical, totalizando 12 elementos. Tanto para os elementos de interface unidimensionais quanto bidimensionais foram usados 4 elementos.

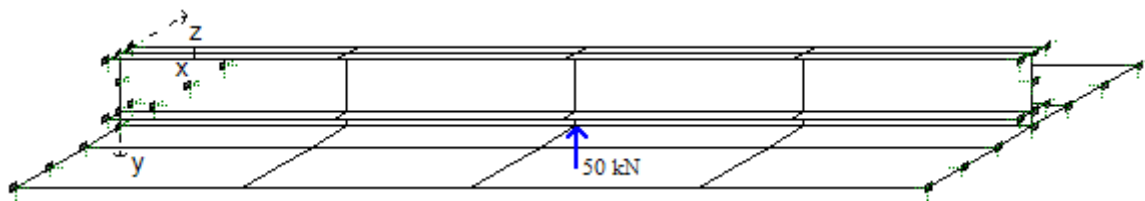


Figura 4.24 – Viga Mista bi engastada.

No exemplo avaliado por Brighenti e Bottoli (2014) os autores comparam os resultados obtidos por eles com os resultados obtidos pela solução analítica usando as equações de rigidez efetiva. O método da rigidez efetiva leva em consideração as propriedades geométricas dos materiais, os módulos de elasticidade do aço e do concreto além do parâmetro αL usado para quantificar o grau de interação entre os elementos. Este parâmetro varia de 0.1 a 100, sendo 100 a interação total e 0.1 a interação livre. As equações para o cálculo da rigidez longitudinal estão descritas abaixo nas equações 4.3 a 4.7.

$$EI_0 = E_1 I_1 + E_2 I_2 \quad (4.3)$$

$$EA_0 = E_1 A_1 + E_2 A_2 \quad (4.4)$$

$$EA_p = E_1 A_1 E_2 A_2 \quad (4.5)$$

$$EI_\infty = EI_0 + \frac{EA_p r^2}{EA_0} \quad (4.6)$$

$$K = \frac{\alpha L^2}{L^2} \left(\frac{EA_p EI_0}{EA_0 EI_\infty} \right) \quad (4.7)$$

Nas equações 4.2 a 4.6, o sub índice 1 indica os valores característicos do elemento inferior e o sub índice 2 do elemento superior, já os demais são apenas para nomenclatura. A variável E indica o módulo de elasticidade, a variável A indica a área da seção transversal do elemento, o r é a distância entre os centroides dos elementos da seção transversal, o parâmetro αL é um valor adimensional para caracterizar o grau de interação, o L é o comprimento da viga e o K é a rigidez longitudinal da conexão na interface entre os elementos.

Brighenti e Bottoli (2014) avaliam apenas a influencia da variação da rigidez longitudinal no deslocamento vertical ao longo do comprimento da viga. Os valores de rigidez longitudinal que são avaliados por Brighenti e Bottoli (2014) e no presente trabalho são $E_{SB} = 10^3 \text{ KPa}$ e $E_{SB} = 10^7 \text{ KPa}$. Esses valores de rigidez correspondem respectivamente a $\alpha L = 0.593$ e $\alpha L = 59.3$, sendo que o parâmetro αL varia de 0.1 a 100 e é responsável por quantificar o grau de interação entre os elementos ligados, sendo que 0.1 indica uma ligação quase livre, com uma rigidez muito baixa e 100 remete a interação total.

O exemplo foi dividido em duas etapas, sendo a primeira para a viga engastada em ambas as extremidades e outra para viga engastada e livre.

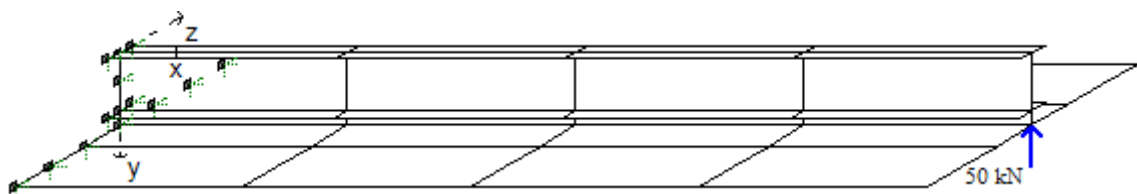


Figura 4.25 – Viga mista engastada e livre.

4.7.1 – Viga bi engastada com carga concentrada no meio do vão

Nas figuras nessa seção, Shell9+int6 é o resultado obtido simulando a viga mista através dos elementos planos de casca de nove nós e o elemento de interface de seis nós implementados nesse trabalho. Shell9+int18 é o resultado obtido simulando a viga mista através dos elementos de casca de nove nós e o elemento de interface de dezoito nós implementados nesse trabalho. BeamTQ+intTQ é o resultado obtido simulando a viga com

o elemento de barra BeamTQ de três nós e o elemento de interface intTQ de 6 nós, ambos elementos apresentados no trabalho de Souza e Silva (2007). O elemento BeamTQ é um elemento de viga de Timoshenko com interpolação quadrática para translação e rotação, já intTQ é um elemento de interface que faz a ligação entre os elementos de vigas de Timoshenko abaixo e acima da conexão deformável e simula essa conexão permitindo um deslocamento relativo longitudinal e vertical. REF é o resultado obtido pela referência Brighenti e Bottoli (2014). Nessa referência o problema é simulado usando a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

Nas Figuras 4.26 a 4.29 são mostrados os resultados obtidos para a linha elástica e para a variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto da viga mista bi engastada usando os elementos finitos descritos no parágrafo anterior.

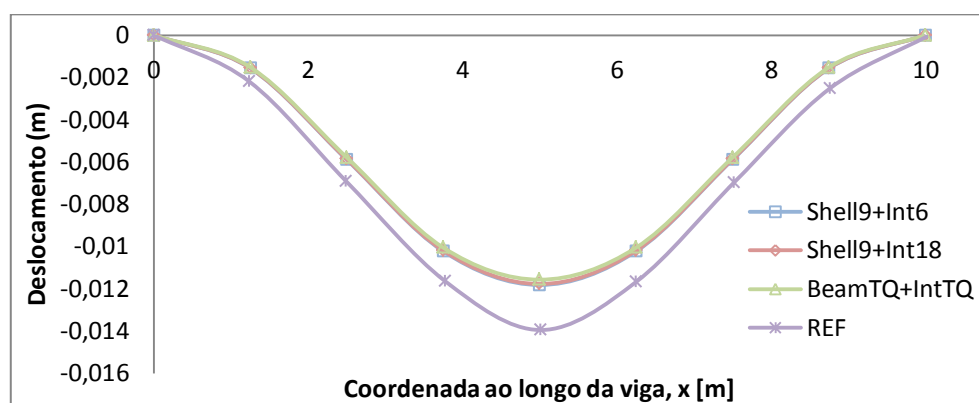


Figura 4.26 – Linha elástica da viga mista bi engastada com $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$.

Observa-se na Figura 4.26 que ambos os elementos de interface de 6 e 18 nós implementados nesse trabalho dão resposta praticamente idênticas entre si e em relação ao elemento de viga de Timoshenko beamTQ+intTQ implementados em Souza e Silva (2007). A diferença observada quando comparada com a resposta indicada por REF na Figura 4.26 deve-se ao fato da diferença entre as teorias usadas na simulação do problema. Já que ambas as análises shell9+int6, shell9+int18 e beamTQ+intTQ consideram em sua formulação a deformação devido ao efeito de cortante, o que não é considerada na análise REF. Os efeitos *shear lag* e Poisson, que são verificados quando o problema é simulado usando o elemento plano de casca e não aparecem quando o problema é simulado através de análise de viga, não são causadores dessa diferença porque as respostas são praticamente idênticas para a análise de viga de Timoshenko e a análise de placa de Reissner-Mindlin, observada nas respostas obtidas por beamTQ+intTQ e shell9+int6, respectivamente.

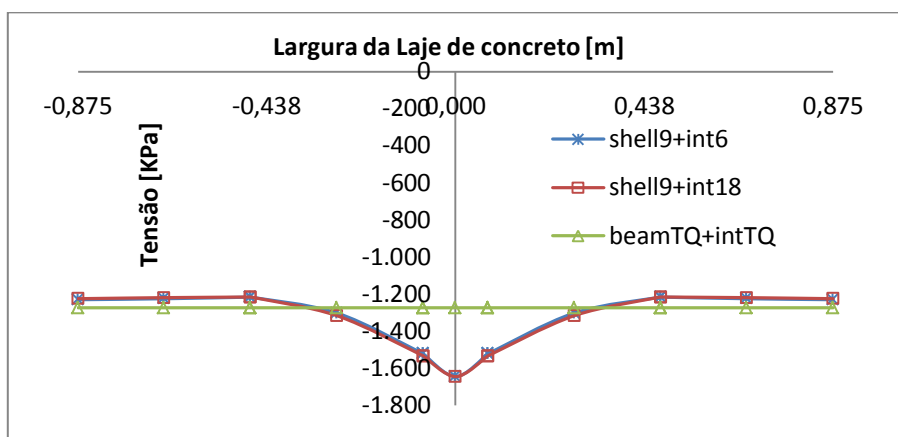


Figura 4.27 – Variação da tensão na fibra mais comprimida ao longo da largura da laje de concreto $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$.

Na Figura 4.27 é apresentada a variação, ao longo da largura da laje de concreto, da tensão normal à seção transversal da viga obtida na fibra mais comprimida. Percebe-se da figura que as respostas obtidas pelos elementos de interface implementados nesse trabalho são muito próximas. A resposta para análise beamTQ+intTQ não apresenta variação da tensão ao longo da largura porque simula o problema considerando a teoria de vigas com flexão em apenas um plano, dessa forma não há variação da deformação no plano perpendicular ao plano flexionado. Na Figura 4.27 nota-se também que apesar da análise de placa apresentar o efeito *shear lag* (variação da tensão normal ao longo da largura da seção transversal) a área limitada pelas curvas e o eixo horizontal são próximas gerando uma mesma contribuição da laje de concreto nas diferentes análises de viga e placas.

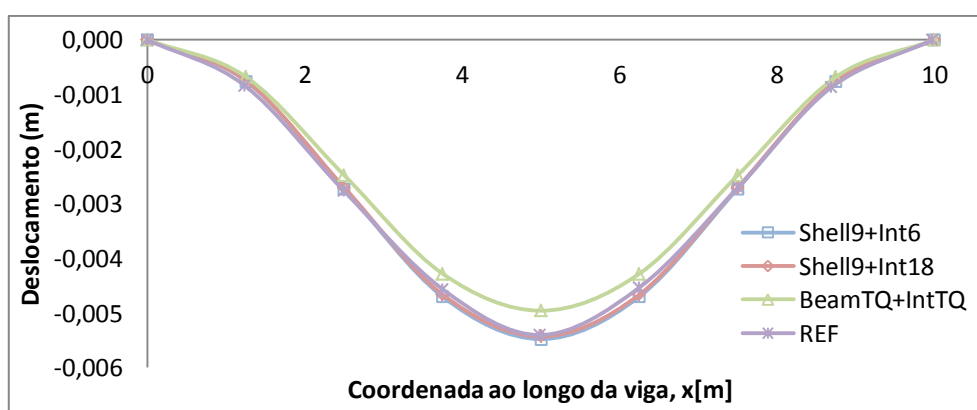


Figura 4.28 – Linha elástica da viga mista bi engastada com $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$.

De forma análoga à Figura 4.26, observa-se na Figura 4.28 que ambos os elementos de interface de 6 e 18 nós implementados nesse trabalho dão respostas praticamente

idênticas, porém apresentam uma diferença em relação ao elemento de viga de Timoshenko beamTQ+intTQ implementados em Souza e Silva (2007). Nesse caso, o efeito *shear lag* e Poisson foram significativos e causaram essa diferença, o que pode ser comprovado com o estudo da variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto para as análises usando-se elementos planos de casca e elementos de barra.

Na Figura 4.29 mostra-se que a área abaixo da curva da análise de placa é maior que a área abaixo da curva da análise de viga de Timoshenko para o mesmo esforço solicitante, mostrando assim uma rigidez maior quando o problema é simulado através da teoria de viga de Timoshenko, o que gerou uma flecha menor. Esse efeito que também ocorre para a teoria de viga de Euler-Bernoulli fez com que a flecha da análise REF diminuísse de tal forma que compensasse a diferença na resposta entre os elementos planos de casca e o elemento viga de Euler-Bernoulli evidenciada na Figura 4.26, e que foi explicada devido à diferença entre as teorias. Isso é verificado na Figura 4.28 com a proximidade das respostas obtidas pela teoria de placa de Reissner-Mindlin e a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

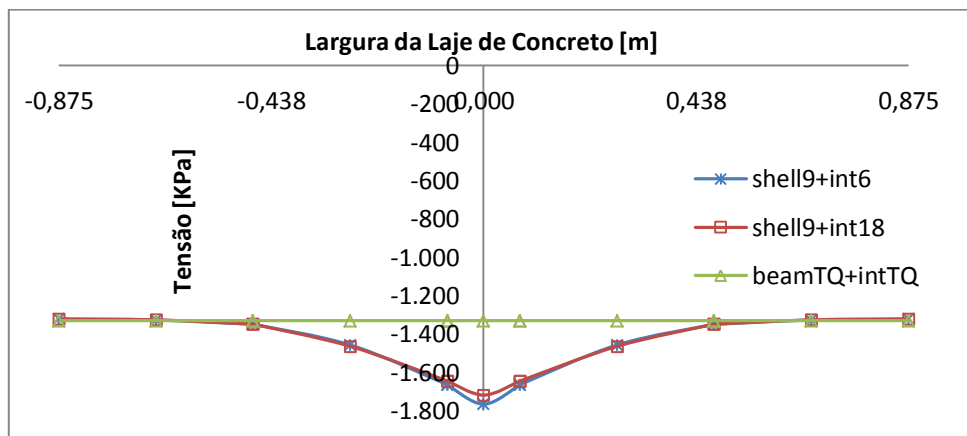


Figura 4.29 – Variação da tensão na fibra mais comprimida ao longo da largura da laje de concreto para $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$.

Assim como no exemplo de baixa rigidez da conexão deformável, observa-se na Figura 4.29 que a resposta da variação da tensão normal de compressão ao longo da largura da laje de concreto para alta rigidez deu praticamente a mesma para ambos os elementos de interface de 6 e 18 nós implementados nesse trabalho. Diferente do caso de baixa rigidez, agora a curva da análise de placa apresenta, além do efeito *shear lag*, uma área definida pela região limitada pela curva e o eixo horizontal bem maior que a mesma área para a curva da análise de viga de Timoshenko. Ou seja, deveria ser feito para análise de viga

uma redução na largura da laje de concreto de tal forma que a flecha e a área definida pela região limitada pela curva da teoria de viga e o eixo horizontal fossem os mesmos da análise de placa. Dessa forma, pode-se concluir que para a análise de viga há uma superestimação da rigidez à flexão da viga mista.

4.7.2 – Viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre

Nessa seção foram calculados os valores para flecha e a variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto para a viga engastada e livre, conforme ilustrado nas Figuras 4.30 a 4.33. Foram consideradas as mesmas rigidezes e os mesmos elementos implementados no presente trabalho e por Souza e Silva (2007) usados na seção 4.7.1. Os resultados encontrados foram comparados com os obtidos por Brighenti e Bottoli (2014) e expostos nos gráficos a seguir.

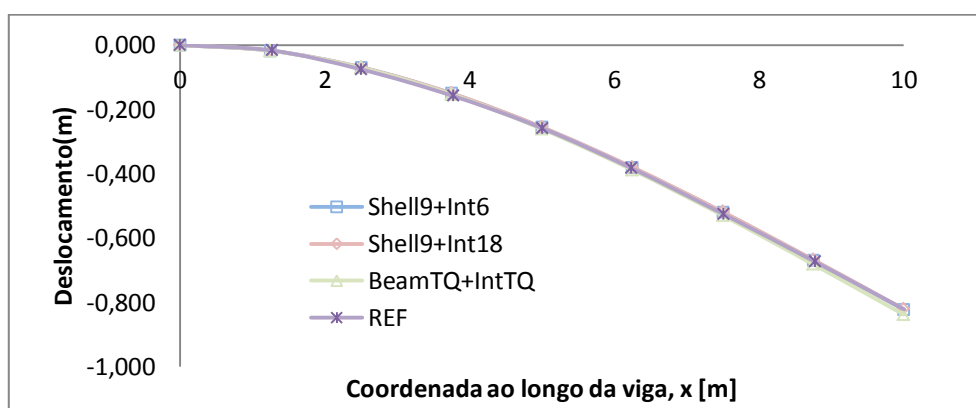


Figura 4.30 – Linha elástica da viga mista em balanço com $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$.

Observa-se na Figura 4.30 que a flecha ao longo da viga mista para rigidez longitudinal $E_{sb} = 10^3 \text{ kPa}$ apresenta resultados muito próximos para os elementos implementados no presente trabalho, o elemento implementado por Souza e Silva (2007) e os resultados obtidos por Brighenti e Bottoli (2014). Isso indica que mesmo usando diferentes teorias na formulação de cada elemento, análise de placa e de viga, não há influência do efeito *shear lag* e do efeito de Poisson. Observa-se também que diferentemente da viga bi engastada não há influência do efeito do cortante no cálculo da flecha.

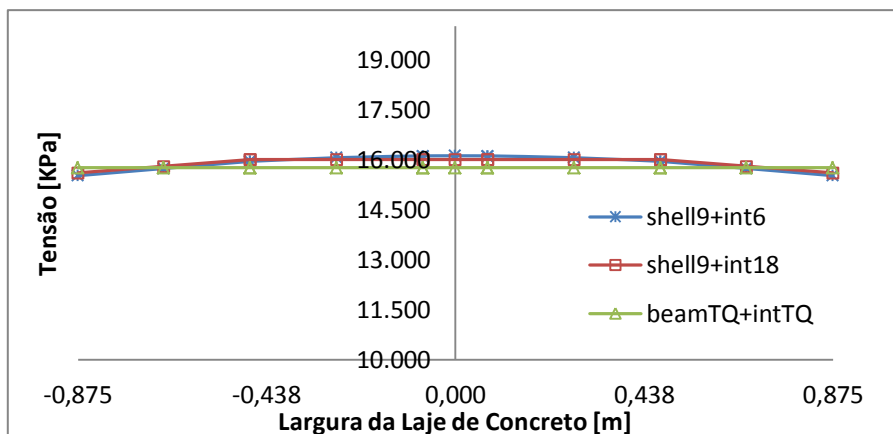


Figura 4.31 – Variação da tensão na fibra mais tracionada ao longo da largura da laje de concreto $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$.

A variação da tensão normal ao longo da largura da seção transversal é ilustrada no gráfico da Figura 4.31. Além de apresentar valores muito próximos para os elementos Shell9+int6 e Shell9+int18, observa-se uma variação pequena quando comparados com o elemento BeamTQ+intTQ que não leva em consideração essa variação. Isso mostra que o efeito *shear lag* não é relevante quando comparamos os resultados obtidos usando elementos de placa e de viga para a viga mista engastada e livre com a rigidez de $E_{sb} = 10^3 \text{ KPa}$.

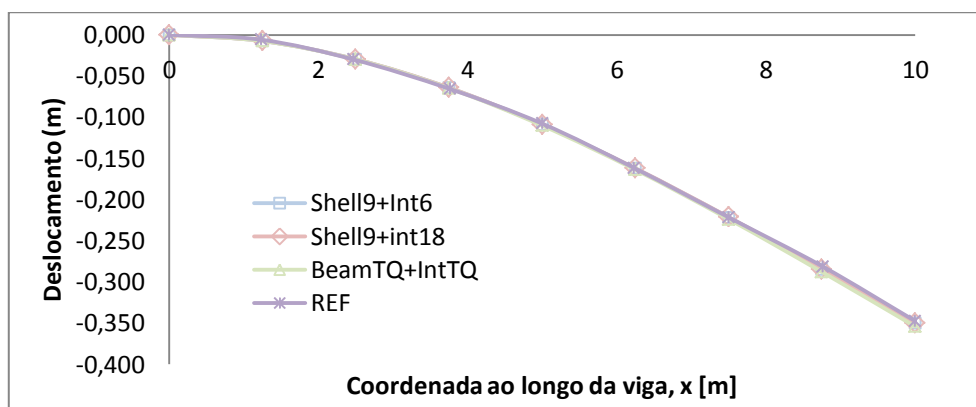


Figura 4.32 – Linha elástica da viga mista em balanço com $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$.

Também foram calculados os valores da flecha ao longo da viga mista com a rigidez longitudinal $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$ para os diferentes elementos implementados no presente trabalho e por Souza e Silva (2007) e comparados com os resultados obtidos por Brighenti e Bottoli (2014). Os resultados expostos no gráfico da Figura 4.32 mostram a eficiência dos elementos implementados nesse trabalho, já que os valores são bem

próximos. Além disso, nota-se que a consideração ou não do efeito do cortante não traz diferenças relevantes nos resultados para esse caso.

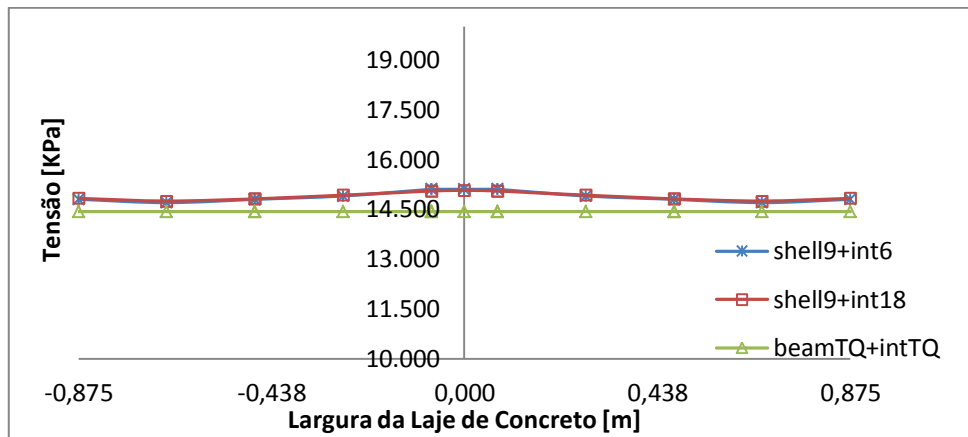


Figura 4.33 – Variação da tensão na fibra mais tracionada ao longo da largura da laje de concreto para $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$.

A Figura 4.33 apresenta os valores da variação de tensão normal ao longo da largura da laje de concreto para a viga engastada livre com rigidez longitudinal $E_{sb} = 10^7 \text{ KPa}$. Os resultados mostram que os elementos de interface de 6 e 18 nós implementados apresentam valores praticamente idênticos e que o efeito *shear lag* considerado na análise de placas não é relevante para esse caso, já que os valores de tensão obtidos pelos elementos implementados no presente trabalho não apresentam diferenças consideráveis quando comparados com os resultados obtidos pelo elemento de Sousa e Silva (2007).

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 – Comentários Gerais

No presente trabalho as formulações foram desenvolvidas e implementadas para análise numérica usando elementos finitos planos de casca e de interface podendo ser usados em diversas situações práticas. Porém, o estudo de caso que justificou o uso dos elementos desenvolvidos foi o de pisos mistos com conexão deformável, ou seja, lajes de concreto armado associadas a vigas de aço por meio de conectores mecânicos que permitem alguma deformação na conexão.

No capítulo 1 foi feita uma breve descrição de como os processos de análise estrutural foram se desenvolvendo ao longo dos anos, além de algumas definições e conceitos sobre as estruturas mistas e do acoplamento imperfeito que surge na conexão entre os materiais. Além disso, também é apresentado no capítulo 1 as motivações e os objetivos que levaram ao desenvolvimento do presente trabalho.

No capítulo seguinte foi feita uma revisão bibliográfica sobre diversos trabalhos na literatura envolvendo análise numérica e experimental de vigas mistas com interação parcial e pisos mistos. Foi realizada também uma revisão acerca de diversas pesquisas envolvendo o uso de análises numéricas usando elementos finitos de casca e de interface. Nota-se que existe um número elevado de pesquisadores trabalhando com estruturas mistas, mais precisamente com vigas mistas com conexão deformável e isso pode ser explicado devido à crescente utilização desse elemento estrutural na prática e por ser uma simplificação do piso misto.

No capítulo 3 são apresentadas as formulações dos elementos implementados pelos autores e uma breve descrição da base de programação FEMOOP (*Finite Element Method Object Oriented Program*) usada para a implementação dessas formulações. É implementado nesse capítulo o elemento finito de casca de nove nós com 5 graus de liberdade por nó a nível local considerando a teoria de placa de Rissner/Mindlin que pode ser considerada como uma generalização da teoria de Timoshenko. Na teoria de placa de Rissner/Mindlin é incorporado o efeito da deformação transversal por cisalhamento. De acordo com alguns pesquisadores essa teoria mostrou resultados mais realistas quando comparada com a teoria de clássica de Kirchoff, que não leva em consideração o efeito do cisalhamento, para análise de cascas mais espessas. Também são implementados nesse capítulo os elementos finitos de interface unidimensional e bidimensional capazes de simular fisicamente o contato entre os elementos planos de casca e unir as superfícies de referência dos elementos planos de casca acima e abaixo dele. O elemento de interface unidimensional apresentado possui 6 nós, já o elemento de interface bidimensional apresentado possui 18 nós, porém ambos apresentam 5 graus de liberdade a nível local e a espessura física real nula.

No capítulo 4 são apresentados vários exemplos numéricos e experimentais com o intuito de evidenciar a eficiência dos elementos finitos implementados. Os exemplos avaliados que já foram estudados por outros autores envolvem o uso de métodos numéricos aplicados a elementos finitos usando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, a teoria de Timoshenko, softwares comerciais como o Abaqus (2008) e ANSYS (2014), além de ensaios experimentais. Os resultados usando os elementos implementados também foram comparados com soluções analíticas de vigas mistas e com resultados utilizando o software comercial SAP2000 (2013), com intuito de abranger maiores possibilidades de exemplos e evidenciar ainda mais a eficiência dos elementos implementados.

5.2 – Conclusões

O caso prático que motivou os autores para o desenvolvimento deste trabalho são os pisos mistos com a conexão deformável entre a laje de concreto e as vigas de aço. Isso levou ao desenvolvimento de elementos planos de casca e de interface para a simulação do problema em questão, mas que pode ser estendido a diversos outros casos práticos que podem ser modelados com elementos planos de casca e de interface como, por exemplo, o de vigas mistas.

Geralmente os casos práticos de vigas mistas são simplificações de pisos mistos com o uso do conceito da largura efetiva de contribuição da laje de concreto. Porém mesmo quando se tem na prática uma viga mista isolada, o efeito *shear lag* da variação da tensão normal ao longo da largura da laje pode gerar erros significativos, quando é usada a teoria de viga para a sua análise estrutural. Sabe-se que esse efeito é mais relevante quanto maior for a largura da laje. Durante o trabalho foi possível avaliar a influência do efeito *shear lag* em alguns casos envolvendo vigas mistas. No exemplo 4.7, para viga bi engastada, quando a rigidez longitudinal é elevada o efeito *shear lag* é relevante na análise, podendo gerar erros quando o problema é analisado usando elementos unidimensionais de viga. Dessa forma é necessário que haja a correta contribuição da laje de concreto para a determinação da resistência da viga mista.

Muitas das vezes a conexão entre os elementos estruturais mistos é considerada como sendo totalmente rígida, sem a presença de deslizamentos relativos entre as camadas, porém sabe-se que isso não ocorre na prática. O deslizamento relativo entre as camadas muda significativamente o comportamento da estrutura. A análise possibilitando o deslizamento entre as camadas, em determinados casos, pode ser fundamental para a modelagem de um problema. Isso pode ser verificado no exemplo 4.1, já que foram utilizadas várias rigidezes diferentes para todas as direções (longitudinal, transversal e vertical) e observou-se como esse deslocamento variava ao longo da viga.

No exemplo 4.2 e 4.4 observou-se a importância da utilização do elemento de interface na associação dos elementos planos perpendiculares de casca. Quando a associação é feita sem os elementos de interface ocorre uma sobreposição de áreas dos elementos planos de casca conectados. Consequentemente a inércia da seção é aumentada e isso influencia diretamente no deslocamento da viga, levando a uma redução no deslocamento vertical. Com a utilização do elemento de interface essa redução não ocorre e o deslocamento da viga é mais próximo do real.

No exemplo 4.3 pode observar-se que apenas a colocação dos elementos de interface não indica que o problema esteja representado de maneira correta, uma avaliação dos locais onde ocorrem os maiores níveis de deslocamento, ou maiores deslizamentos entre as camadas é fundamental para que os elementos de interface sejam usados de maneira correta e representem bem o problema em questão.

No exemplo 4.5 e 4.6 os elementos planos de casca foram utilizados na representação de problemas reais que são muito utilizados na prática. No primeiro, o estudo das propriedades mecânicas dos conectores de cisalhamento deformáveis para a

construção da curva força cortante versus deslizamento é fundamental para a sua utilização em projetos de estruturas mistas. Com a utilização dos elementos planos de casca e de interface foi possível obter a curva representativa dessa relação. Já no exemplo 4.6, o estudo dos pisos mistos foi um dos fatores motivacionais que levou ao desenvolvimento desse trabalho, pela sua grande utilização e ausência de muitos estudos numéricos e experimentais na literatura. Como as respostas foram próximas das obtidas por Nie *et. al.* (2008), nota-se que a utilização dos elementos implementados pode ser estendida a outros casos práticos que envolvem associação de vários elementos e em planos diferentes.

A eficiência das formulações desenvolvidas e implementadas para simulação numérica de pisos mistos e vigas mistas com conexão deformável foram devidamente comprovadas com resultados obtidos em diversos exemplos numéricos, experimentais e analíticos encontrados na literatura. Pode se afirmar então que o objetivo desse trabalho foi alcançado com sucesso e esse também representou uma contribuição considerável no estudo de estruturas mistas com conexão deformável. Espera-se que com as ferramentas desenvolvidas no presente trabalho outras pesquisas possam ser produzidas.

5.3 – Trabalhos Futuros

Os elementos finitos de interface unidimensional e bidimensional implementados nesse trabalho permitem uma análise não linear do comportamento mecânico da conexão deformável. Já o elemento finito plano de casca desenvolvido para simular a laje de concreto e as vigas de aço tem como hipótese uma relação linear do comportamento mecânico desses materiais, não permitindo assim uma análise da capacidade última da estrutura simulada por esses elementos. Portanto, sugere-se para trabalhos futuros o desenvolvimento de novas formulações levando em consideração tanto a possibilidade do material não seguir a lei de Hooke (não linearidade física) quanto a possibilidade de grandes deslocamentos (não linearidade geométrica) na estrutura.

Sabe-se que as vibrações causadas pelas cargas dinâmicas são relevantes em qualquer tipo de estruturas, já que podem causar deslocamentos excessivos e oscilações superiores às permitidas por norma. Em pisos mistos com grandes vãos esse efeito dinâmico pode ser mais relevante caso a rigidez do elemento estrutural não seja elevada o suficiente para conter as oscilações excessivas. Sugere-se para trabalhos futuros a avaliação dos modos naturais de vibração do piso misto quando a conexão entre os elementos apresenta níveis de rigidez menores levando então a interação parcial.

Uma das formulações desenvolvidas nesse trabalho foi a do elemento plano de casca, porém sabe-se que existem outros tipos de elementos para simulação de casca como, por exemplo, os elementos curvos e os elementos curvos isoparamétricos. Sugere-se para trabalhos futuros o desenvolvimento da formulação e a implementação dos elementos curvos de casca, pois estes apresentam uma geometria diferenciada, com propriedades específicas que podem melhor representar alguns casos práticos específicos, como o de vigas curvas e abóbodas.

Outra sugestão para pesquisas futuras é o estudo dos fenômenos que ocorrem na solução de problemas com interação parcial quando é aplicado o método dos elementos finitos baseado em deslocamentos usando a teoria de Rissner/Mindlin. Esses fenômenos conhecidos como *shear-locking*, *slip-locking* levam ao enrijecimento da estrutura e podem levar a uma resposta errada caso não sejam devidamente tratados.

O caso prático que motivou o desenvolvimento deste trabalho são os pisos de edifícios de múltiplos andares formados por lajes de concreto ligadas por conectores a vigas de aço. Porém, no presente trabalho, não foi levado em consideração o efeito da fluência, ou deformação lenta, que pode ser definida como o aumento da deformação sob tensão constante. Esse efeito é relevante em estruturas de concreto, já que, ao contrário do aço, o concreto não é um material dúctil e o efeito da fluência pode levar a formação de fissuras, diminuição da capacidade resistente do elemento estrutural entre outros efeitos que comprometem a capacidade do elemento estrutural. Sugere-se então para trabalhos futuros a incorporação na formulação dos elementos implementados da consideração da fluência e consequente aumento de deformação que este efeito pode causar na estrutura, tornando a análise mais realista.

Durante o desenvolvimento desse trabalho, os autores notaram a necessidade do desenvolvimento de uma interface gráfica para facilitar a criação do arquivo de entrada e a visualização dos resultados. Para otimizar e melhorar a funcionalidade do FEMOOP em trabalhos futuros, pode-se fazer uma interface gráfica completa para o programa, com pré e pós-processamento gráfico, tornando a análise mais rápida e o software mais simples de ser usado por qualquer usuário para análises numéricas, usando não só os elementos finitos de casca e interface, mas também todos os outros elementos que já foram implementados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS. *Standard user's manual*. 6.8-1. ed. USA: Hibbitt, 2008.

ANSYS Help version 15.0, Ansys Inc. (2014).

Aribert J. M. (1992) Slip and uplift measurements along the steel and concrete interface of various types of composite beams. *In: Proceedings of the international workshop on needs in testing metals: Testing of metals for structures*. London: E. & FN Spon; 1992. p. 395–407.

Ayoub A. (2001) A two-field mixed variational principle for partially connected composite beams. *Finite Element Analyses*, v. 37, p. 929 – 959 (2001).

Ayoub, A. e Filippou, F. C. (2002) Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element. *Journal of Structural Engineering*, v. 126, p. 371 – 81 (2002).

Battini J., Nguyen Q., Hjjaj M. (2009). Non-linear finite element analysis of composite beams with interlayer slips. *Computers and Structures*, v. 87, p. 904 – 912 (2009).

Batoz J.L., Hammadi F., Zheng C., Zhong W. (2000) On the linear analysis of plates and shells using a new-16 degrees of freedom flat shell element. *Computers and Structures*, v.78, p. 11 – 20 (2000).

Brighenti R., Bottoli S. (2014) A novel finite element formulation for beams with composite cross-section. *International Journal of Mechanical Sciences*, v.89, p.112-122 (2014).

Carol I., López C. M., Roa O. (2001). Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 52, p. 193 – 215 (2001).

Chakrabarti A., Sheikh A.H., Griffith M., Oehlers D.J. (2011) Analysis of composite beams with partial shear interactions using a higher order beam theory. *Engineering Structures*, v.36, p.283 - 291, (2011).

Crisfield M. A. (2000) *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley & Sons Ltd. Bafins Lane, Chichester.

Dall'Asta A., Zona A. (2002) Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach, *Computers and Structures*, v.80, p. 2217–2228 (2002).

Dall'Asta, A. e Zona, A. (2004), Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of composite beams. *Computers and Structures*, v. 82, p. 2117 – 2130, (2004).

De Nardim S. (1999) *Estudo Teórico-Experimental de Pilares Mistos Compostos por Tubos de Aço Preenchidos com Concreto de Alta Resistência*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

- Gara, F., Ranzi, G. e Leoni, G. (2006) Displacement-based formulations for composite beams with longitudinal slip and vertical uplift, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 65, p. 1197 – 1220, (2006).
- Gara F., Carbonari S., Leoni G., Dezi L. (2014) A higher order steel–concrete composite beam model. *Engineering Structures*, v. 80, p.772 – 779, (2014).
- Goodman R. E., Taylor R. L., Brekke T. L. (1968). *A model for the mechanics of jointed rock*. J. Soil Mech. Fdns. Div., ASCE, v. 99, p. 637 – 659, (1968).
- Griffs L. G. (1994). The 1994 T. R. High Lecture: *Composite Frame Construction*. *National Steel Construction Conference*, AISC, v. 1, p. 1.1 - 1.72, New York.
- Guezouli S., Alhasawi A. (2014) A new concept for the contact the interface of steel-concrete composite beams. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.87, p.32 – 42, (2014).
- Guimarães, L. G. S. (1992). *Disciplina Orientada a Objetos para Análise e Visualização Bidimensional de Modelos de Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil.
- Huang Z., Burgess I. W., Plank R. J. (1999) Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Fire. *ACI Structural Journal*, v. 96, p. 127 – 135 (1999).
- Izzudin B. A., Tao X. Y., Elghazouli (2004). Realistic modeling of composite and reinforced Concrete floor slabs under extreme loading, *Journal of Structural Engineering*, v. 130, p. 1972 – 1984 (2004).
- Kaliakin V. N., Li J. (1995). Insight into deficiencies associated with commonly used zero thickness interface elements. *Computers and Geotechnics*, v. 17, p. 225 – 252 (1995).
- Hughes Thomas J. R. (1987) *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Lam D., Ehab E.(2005) Behavior of Headed Stud Shear Connectors in Composite Beam. *Journal of Structural Engineering*, v. 131, p. 96 – 107 (2005).
- Martha L. F., Parente Jr. E. (2002). An Object-Oriented Framework for Finite Element Programming. *Proceedings of Fifth World Congress on Computational Mechanics*, WCCM V, Vienna, Austria.
- NBR 8800 (2008) Projeto e Execução de Estruturas de Aço e Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, Rio de Janeiro, 2008.
- Newmark N. M., Siess C. P., Viest, I. M. (1951) Test and analysis of composite beam with incomplete interaction. *Proc Soc Exp Stress Anal*, v. 9, p. 75-92.

- Nie J., Fana J., Cai C.S. (2008) Experimental study of partially shear-connected composite beams with profiled sheeting. *Engineering Structures*, v. 30, p. 1 – 12 (2008).
- Oehlers, D. J. e Bradford, M. A. (1995) *Composite Steel and Concrete Structural Members: Fundamental Behaviour*. Pergamon Press, Oxford, 1995.
- Pereira, J. C (2005) *Curso de Estabilidade Estrutural*, Florianópolis.
- Queiroz, G. & Pimenta, R. J. & Mata, L. A. C. (2001). *Elementos das Estruturas Mistas Aço-Concreto*. Ed. O Lutador, Belo Horizonte.
- Ranzi, G., Gara, F. e Ansourian, P. (2006) General method of analysis for composite beams with longitudinal and transverse partial interaction, *Computers and Structures*, v. 84, p. 2373 – 84 (2006).
- Ranzi G., Zona A. (2007). A steel–concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component, *Eng. Struct*, v.29, p. 3026 – 3041 (2007).
- Ranzi G. (2008). Locking problems in the partial interaction analysis of multi-layered composite beams. *Eng Struct*, v. 30, p. 2900 – 11 (2008).
- Santos H. A. F. A., Silberschmidt V.V. (2014). Hybrid equilibrium finite element formulation for composite beams with partial interaction. *Computers and Structures*, v.108, p. 646 – 656 (2014).
- SAP 2000 *Analisis Reference Manual*, versão 16.0, Computers & Structures, Inc., Berkeley 1978-2013.
- Silva A. R. (2006) *Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial*, Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP.
- Sousa Jr. J. B. M., Silva, A. R. (2007) Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.43, p. 954 – 964 (2007).
- Silva A. R. (2010) *Análise Numérica de Elementos Estruturais com Interação Parcial*, Tese de Doutorado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP.
- Sousa Jr., João Batista M., Silva, A. R. (2009) A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 45, p. 305 – 314 (2009).
- Sousa Jr, João Batista M., SILVA, A. R. (2010) Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip. *Engineering Structures*, v. 32, p. 1671 – 1680 (2010).

Sousa Jr., João Batista M., Oliveira, Claudio E.M., SILVA, A. R. (2010) Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam columns with partial interaction. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 66, p. 772 – 779 (2010).

Zona A., Ranzi G. (2014) Shear connection slip demand in composite steel-concrete beams with solid slabs. *Journal of Constructional Steel Research*. v. 102, p. 266 – 281 (2014).