



Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil



OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS 2D VIA MEC BASEADA EM UMA NOVA ABORDAGEM EVOLUCIONÁRIA

HÉLIO LUIZ SIMONETTI

Texto apresentado ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, para o Doutorado em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Orientadores: Prof. Dr. Valério Silva Almeida

Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves

Ouro Preto, Abril 2016

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS 2D VIA MEC
BASEADA EM UMA NOVA ABORDAGEM EVOLUCIONÁRIA**

Hélio Luiz Simonetti

Abril/2016

Orientadores: Prof. Dr. Valério Silva Almeida

Prof. Dr. Francisco de Assis da Neves

S598o

Simonetti, Hélio Luiz.

Otimização topológica de estruturas elásticas 2D via MEC baseada em uma nova abordagem evolucionária [manuscrito] / Hélio Luiz Simonetti. - 2016. 143f.: il.: color; grafs.

Orientador: Prof. Dr. Valério Silva Almeida.

Coorientador: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Otimização estrutural. 2. Metodos de elementos de contorno. 3. Espaços topológicos ordenados. I. Almeida, Valério Silva. II. Neves, Francisco de Assis das. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.


CDU: 681.5.015.23

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS 2D VIA MEC BASEADA EM UMA NOVA ABORDAGEM EVOLUCIONÁRIA


AUTOR: HÉLIO LUIZ SIMONETTI

Esta tese foi apresentada em sessão pública e aprovada em 1º de abril de 2016,
pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:


Prof. Francisco de Assis das Neves (Orientador - UFOP)


Prof. Valério Silva Almeida (USP/SP)


Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (UFOP)


Prof. Edson Denner Leonel (USP/SC)


Prof. Marcelo Greco (UFMG)

DEDICATÓRIA

Ao meu querido e estimado sogro, Clênio Ricardo Silva,

Homem de muita força e caráter.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a DEUS, por não permitir que desistisse deste projeto e por conseguir superar os momentos difíceis da vida.

Em segundo lugar, agradeço a minha esposa, Jacqueline, por ter sido uma mulher forte, sábia e companheira. O meu agradecimento a esta “MULHER” vai muita além dessas poucas linhas.

Às minhas filhas Marcella e Brunna, pelo carinho, incentivo e cobrança.

Aos meus orientadores, Professor Valério Silva Almeida e Francisco Assis das Neves, pelos ensinamentos e por acreditarem no meu trabalho. Em especial ao prof. Valério pelas vezes que me chamou a atenção dizendo “Hélio, você precisa programar” e hoje agradeço muito.

Aos Professores do programa de pós-graduação da UFOP, em especial, os professores Marcílio, João Batista, Ricardo Azoubel, Célio Araújo que participaram da construção do meu conhecimento.

A todos os meus familiares e amigos que estiveram comigo e compreenderam os motivos das minhas ausências devido a grande dedicação a este trabalho.

RESUMO

Esta tese apresenta uma nova abordagem para Otimização Topológica (OT) em problemas da elasticidade plana, usando o Método dos Elementos de Contorno (MEC). O problema de OT é resolvido com a técnica numérica denominada Evolutionary Structural Optimization (ESO) a qual é acoplada com a formulação do MEC usando campos de tensões iniciais como estratégia para criar as cavidades no domínio na OT. Deste modo, um campo de tensões iniciais é somado às tensões elásticas do problema inicial resultando em tensões nulas, simulando de maneira virtual uma cavidade, evitando assim a introdução de elementos no domínio da estrutura diminuindo sensivelmente o custo computacional. Além disso, o acoplamento ESO-MEC é aplicado na OT com uma técnica simples de criação de sub-regiões em torno de um ponto interno cuja tensão de von Mises atende o critério de remoção. Os resultados apresentados com as metodologias propostas mostraram a independência da malha, a ausência do tabuleiro de xadrez durante o processo iterativo e possuem uma aderência às respostas apresentadas na literatura, mostrando ser capaz de produzir configurações robustas para projetos de engenharia.

Palavras Chaves: Otimização Topológica, Otimização Estrutural Evolucionária, Método do Elementos de Contorno, Campo de tensões iniciais, Sub-região

ABSTRACT

This thesis presents a new approach to Topology Optimization (OT) in the plane elasticity problems using the Boundary Element Method (BEM). The topology optimization problem is solved with the numerical technique called Evolutionary Structural Optimization (ESO) that is coupled with the BEM formulation using initial stress fields as a strategy to create the cavities on the domain in the OT. Thus, an initial stress field is added to elastic stress of the initial problem resulting in zero stress, simulating virtual manner a cavity, thus avoiding the introduction of elements on the domain of the structure significantly decreasing the computational cost. The coupling (ESO-BEM) is also applied in the OT with a simple technique of creating sub-regions at around an internal point whose von Mises stress attends the removal criteria. The results presented with the proposed methodologies have shown the independence of the mesh, absence of the checkerboard during the iterative procedure and have an adherence to the responses presented in the literature, showing be able to produce robust configurations for engineering designs.

Keywords: Topological Optimization, Structural Optimization Evolutionary, Boundary Element Method, Initial stress field, Sub-region.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	XII
LISTA DE ABREVIATURAS.....	XIV
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XV
CAPÍTULO 1: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
1.1 Histórico.....	1
1.2 Métodos de Otimização.....	3
1.2.1 Introdução.....	3
1.2.2 Métodos Baseados em Gradientes.....	4
1.2.3 Otimização sem Restrições.....	4
1.2.4 Otimização com Restrições.....	5
1.2.5 Método dos Multiplicadores de Lagrange.....	6
1.2.6 Condições Kuhn-Tucker.....	6
1.2.7 Programação Linear (PL).....	7
1.2.8 Programação Linear Inteira (PLI).....	8
1.2.9 Programação Linear Sequencial.....	8
1.3 Otimização Estrutural.....	9
1.3.1 Otimização Paramétrica.....	10
1.3.2 Otimização de Forma.....	10
1.3.2.1 Otimização Topográfica.....	11
1.3.3 Otimização Topológica.....	11
1.4 Métodos de Otimização Topológica.....	14
1.4.1 Introdução.....	14
1.4.2 Método de Otimização Topológica via MEC.....	15
CAPÍTULO 2: SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE KELVIN E EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE PLANA.....	20
2.1 Introdução.....	20
2.2 Solução Fundamental de Kelvin.....	20
2.3 Equação Integral de Contorno para Elasticidade Plana.....	22
2.4 Equação Integral de Contorno para Pontos do Contorno.....	25
CAPÍTULO 3: MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	34
3.1 Introdução.....	34

3.2 Discretização Numérica.....	36
3.2.1 Funções de Interpolação.....	37
3.2.2 Formação do Sistema de Equações Algébricas.....	39
3.2.3 Elementos Lineares – Formação do Sistema de Equações.....	40
3.2.4 Pontos de Colocação.....	43
3.2.5 Deslocamentos em pontos internos.....	43
3.2.6 Tensões em pontos internos.....	44
3.2.7 Tensões nos nós do contorno e Deformações em pontos internos....	45
CAPÍTULO 4: OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO USANDO UMA ABORDAGEM SIMPLES DE SUB-REGIÃO.....	46
4.1 Introdução.....	46
4.2 Otimização Estrutural Evolucionária usando MEC	47
4.3 Criação de Cavidades.....	49
4.4 Exemplos Numéricos.....	51
4.4.1 Problema de duas Barra.....	51
4.4.2 Chapa quadrada.....	54
4.4.3 Viga Biapoiada.....	59
4.4.4 Viga em Balanço.....	60
CAPÍTULO 5: UMA NOVA ABORDAGEM PARA RESOLVER PROBLEMAS TOPOLÓGICOS USANDO CAMPO DE TENSÕES INICIAIS VIA MEC.....	63
5.1 Introdução.....	63
5.2 MEC usando Campo de Tensões Iniciais.....	64
5.2.1 Integral com Campo Inicial.....	64
5.2.2 Integração de Célula	67
5.2.3 Equações Algébricas para o MEC com Problemas de Campos de Tensões Iniciais.....	69
5.3 Algoritmo de Otimização com Campos Iniciais de Tensão.....	70
5.4 Exemplos Numéricos.....	74
5.4.1 Problema de Duas Barras.....	74
5.4.2 Viga Biapoiada.....	77
5.4.3 Viga Biapoiada com Dois Casos de Carga.....	79
5.4.4 Viga em Balanço.....	83
CAPÍTULO 6: CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	86
6.1 Conclusões.....	86

6.1.1 Otimização Topológica via MEC-Usando Sub-região.....	86
6.1.2 Otimização Topológica via MEC-Usando Campo de Tensões Iniciais.....	87
6.2 Sugestões para trabalhos outuros.....	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	89
ANEXOS.....	96
ANEXO I – Noções Elementares da Teoria da Elasticidade.....	96
ANEXO II – Teorema de Betti.....	110
ANEXO III – Delta de Dirac.....	112
ANEXO IV – Integrais Analíticas Não Singulares.....	116
ANEXO V – Integrais Analíticas Singulares.....	136
ANEXO VI - Condição de Hölder.....	142

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1-Tipos de Otimização	2
Figura 1.2- Reforçador.....	11
Figura 2.1- Problema Fundamental	21
Figura 2.2- Domínio Corpo Elástico Bidimensional	23
Figura 2.3- Contorno Expandido Bidimensional	25
Figura 2.4- Contorno não Suave	31
Figura 3.1- Elemento de Contorno	35
Figura 3.2- Discretização do Contorno.....	37
Figura 3.3- Funções de Forma do Elemento Linear	38
Figura 3.4- Malha formada para Elementos de Contorno Lineares.....	40
Figura 4.1- Criação da Cavidade Hexagonal	49
Figura 4.2- Fluxograma do Processo de Criação de Cavidades.	50
Figura 4.3- Histórico do Processo de Otimização	52
Figura 4.4- Domínio de Projeto, Topologia Ótimas e Fluxo de Tensão.....	53
Figura 4.5- Histórico de Otimização e Topologias Ótimas	53
Figura 4.6- Volume por Número de Iterações	54
Figura 4.7- Topologias Ótimas com a Formulação (SESO).....	55
Figura 4.8- Domínio de Projeto	55
Figura 4.9- Topologias Ótimas e Fluxo de Tensão.....	56
Figura 4.10- Volume por Número de Iterações	57
Figura 4.11- Tensão Máxima de von Mises por Número de Iterações.....	57
Figura 4.12- Topologia Ótima e Fluxo de Tensão.....	58
Figura 4.13- Volume por número de iterações....	58
Figura 4.14- Domínio Inicial de Projeto.....	59
Figura 4.15- Topologia Ótima e Fluxo de Tensão.....	59
Figura 4.16- Topologias Ótimas com a Formulação (SESO).....	60
Figura 4.17- Domínio de Projeto e Topologia Ótima - Formulação (SESO).....	60
Figura 4.18- Topologia ótima MEF e MEC-ESO	61
Figura 4.19- Volume por Número de Iterações	62
Figura 5.1- Modelo Elastoplástico – Parcelas de Tensões de Deformações	65

Figura 5.2- Coordenadas Cilíndricas	68
Figura 5.3- Estratégia para Simular a Cavidade no Problema Original	71
Figura 5.4- Ponderação da Tensão de von Mises	73
Figura 5.5- Geometria e Topologias Ótimas do Problema de Duas barras	75
Figura 5.6- Razão de Otimização e Volume por Iteração.....	76
Figura 5.7- Discretização e Geometria da Célula	76
Figura 5.8- Tensão Máxima de Von Mises por Número de Iterações.....	77
Figura 5.9- Domínio de Projeto	78
Figura 5.10- Histórico das Topologias e Fluxo de Tensões - Viga Biapoiada ...	78
Figura 5.11- Topologias Ótimas Formulação (SESO)	79
Figura 5.12- Geometria e Topologia Ótima	80
Figura 5.13- Topologias Ótimas Formulação MEC-Célula	80
Figura 5.14- Topologias Ótimas Formulação MEC-Célula	81
Figura 5.15- Topologias Ótimas Formulação MEC-Célula	82
Figura 5.16- Máxima tensão de von Mises por Número de iterações.....	83
Figura 5.17- Domínio de Projeto	83
Figura 5.18- Topologias Ótimas com Diferentes Abordagens	84
Figura 5.19- Volume por Número de Iterações	85

NOMENCLATURAS

OT	Topology Optimization
MLS	Method Level Set
MOT	Topology Optimization Method
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalization
ESO	Evolutionary Structural Optimization
SESO	Smoothing Evolutionary Structural Optimization
MEC	Method Element Boundary
IP	Performance Index
TSA	Topological Sensitivity Analysis
BCBTOA	Bacterial Chemotaxis Based Topology Optimization Algorithm
SA	Simulated Annealing
DAS	Design Sensitivity Analysis.
BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization
TVM	Von Mises Stress
BGMMA	Gradient Based Method of Moving Asymptotes
PBO	Performance-based Optimization
DFE	Extended Fixed Domain
MEF	Finite Element Method
HCA	Hybrid Cellular Automata
AG	Genetic Algorithm
MEC	Boundary Element Method
NIP	Number of Internal Points

VPC Value Principal Cauchy

LISTA DE SÍMBOLOS

E	Módulo de Elasticidade
V_i	Volume do Elemento i na i -ésima Iteração
V_0	Volume da Estrutura na Primeira Iteração
σ_0^{VM}	Tensão máxima de Von Mises na Primeira iteração
σ_i^{VM}	Tensão máxima de Von Mises do Elemento i na i -ésima Iteração
σ_{ij}^0	Tensor das Tensões Iniciais
σ_{ij}^e	Tensor das Tensões Elásticas
σ_{ij}	Tensor das Tensões
ϵ_{ij}^0	Tensor das Deformações Iniciais
ϵ_{ij}^e	Tensor das Deformações Elásticas
ϵ_{ij}	Tensor das Deformações
G	Módulo de Cisalhamento
$\{U\}$	Vetor de Variáveis Nodais de Deslocamento
$\{P\}$	Vetor de Forças de Superfícies
$\{\sigma^0\}$	Vetor das Tensões Iniciais
$[H]$	Matriz com Coeficientes de Integração
$[G]$	Matriz com Coeficientes de Integração
$[Q]$	Matriz com Coeficientes de Integração
$\eta(j)$	Função Ponderadora
ν	Coefficiente de Poisson
$\sigma_i^{\text{ponderado}}$	Tensão de Von Mises Ponderada do Elemento i
A_i	Área do Elemento i
A_j	Área do Elemento j
σ_j^{VM}	Tensão de Von Mises do elemento j

\bar{w}	Peso
N	Número de Elementos cujos Centroides estão no Interior da circunferência
R_{MAX}	Raio Máximo da Circunferência
R_{ij}	Distância entre os Centroides dos Elementos i e j
D_0	Matriz Constitutiva Inicial do Projeto
$D(j)$	Matriz Constitutiva do Ponto $j \in \Omega$
ρ	Densidade Volumétrica
Ω	Domínio da Estrutura
$f(\varepsilon)$	Função Reguladora
Γ	Conjunto dos Elementos que serão Removidos da Estrutura
$\bar{\Gamma}$	Conjunto dos Elementos que não serão Removidos da Estrutura
σ_x	Componente Normal do Tensor de Tensões na Direção x
σ_y	Componente Normal do Tensor de Tensões na Direção y
τ_{xy}	Componente de Tensão de Cisalhamento
σ_i	Tensão do Elemento i
σ_n	Tensão do Elemento j
u	Deslocamento Horizontal
v	Deslocamento Vertical
θ_z	Rotação Azimutal
σ_e^{VM}	Tensão de Von Mises Máxima do Elemento
$\sigma_{VM}^{MÁX}$	Tensão de Von Mises Máxima da Estrutura
RR	Razão de Rejeição
ER	Razão Evolucionária
q	Ponto Campo
s	Ponto Fonte
δ_{ki}	Delta de Dirac
$c_{ij}(s)$	Termo Livre
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\phi_k(\xi)$	Funções de Interpolação

$J_n(\xi)$	Jacobiano das Transformações de Coordenadas
$r_{,n}$	Derivada do Raio na Direção do Vetor Unitário Normal
L	Comprimento do Elemento de Contorno da Cavidade
U	Energia de Deformação
u_{ij}^*	Solução Fundamental para Deslocamentos
p_{ij}^*	Solução Fundamental para Forças
ε_{ij}^*	Solução Fundamental para Deformações
$\{f\}_i$	Vetor Corretor
C	Energia de Deformação
$\{F\}$	Vetor de Forças
[K]	Matriz de Rigidez
α_i	Número Sensibilidade

CAPÍTULO 1

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1 Revisão Bibliográfica

1.1 Histórico

Uma revisão bibliográfica se torna necessária para que se possa compreender o desenvolvimento histórico da otimização estrutural no âmbito da mecânica computacional. Tal revisão se faz necessária por se tratar de uma linha de pesquisa multidisciplinar.

As primeiras pesquisas relacionadas à otimização estrutural foram desenvolvidas por Maxwell (1872). O trabalho de Michell (1904) deu continuidade ao trabalho de Maxwell que visava buscar o critério de máxima rigidez com mínimo material para configuração estrutural de treliça submetida a um único carregamento sujeito a restrição de tensão.

A otimização estrutural dos anos 60 era restrita à otimização dimensional de estruturas de treliça. Só nos anos 70, alguns problemas de leiaute foram, também, resolvidos, como os de Hemp (1973) e o de Prager (1974), ambos para uma classe muito restrita de estruturas, vistos como uma extensão do conceito de otimização de estruturas de treliças, desenvolvido por Michell (1904).

Na década de 80, com a utilização do método dos elementos finitos (MEF), várias publicações foram produzidas podendo ser citados Cheng e Olhoff (1981), Khon e Strang (1986a) que investigaram a natureza do problema, correspondente à maximização da rigidez de placas delgadas considerando a espessura como variável de projeto, e concluíram que para este problema de otimização existe várias soluções ótimas locais. Rozvany *et al.* (1982) também chegaram à mesma conclusão.

Os problemas de otimização estrutural podem ser classificados em três categorias de acordo com o seu grau de complexidade: otimização paramétrica, forma e topológica. Nos problemas de otimização paramétrica, figura 1.1a, a forma da estrutura não muda, as variáveis projeto são propriedades da rigidez do elemento, como a área da secção transversal de barras e espessura de placas. Nos problemas de otimização de forma, figura 1.1b, a forma dos contornos dos segmentos e a posição dos furos é usada para extremar uma função objetivo. Nos problemas de Otimização Topológica (OT), figura 1.1c, as variáveis de projeto são as relações entre elementos e pontos nodais da estrutura discretizada chamada de conectividade entre elementos. Consiste em redistribuir e retirar material em partes da estrutura.

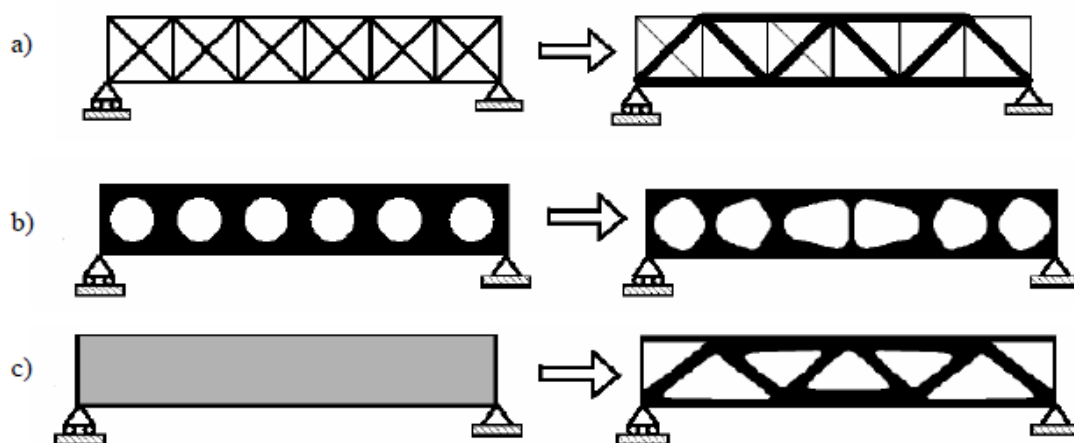


Figura 1.1 - Tipos de Otimização: a) otimização paramétrica,
b) otimização de forma c) otimização topológica.

Bendsøe e Sigmund (2002)

Em meados dos anos 80, os resultados das otimizações de forma e paramétricas começam a ser questionados, pois estes apresentavam grandes complexidade quando se desejava alterar a topologia (ou distribuição de material) de uma estrutura, uma vez que a mudança da topologia implica constante alteração, durante o processo de otimização, do modelo de elementos finitos associados à estrutura no início do processo, isto é, a cada iteração o problema físico é modificado e o algoritmo deve prever a atualização da malha de elementos finitos a cada iteração, o que é complexo. Com a necessidade de se aprimorar a otimização de forma, surge no final da década a OT, Bendsøe e Kikuchi (1988), com uma metodologia de domínio fixo estendido, inicialmente no método da Homogeneização.

A metodologia criada por Bendsøe e Kikuchi para OT foi inspirada nos trabalhos de Cheng e Olhoff (1981) e de Cheng e Olhoff (1982), que tratavam da otimização de

espessuras de chapas e placas, Lurie *et al.* (1982), Goodman *et al.* (1986) e Kohn e Strang (1986a), que estudaram a otimização para projetos de barras submetidas a torção construídas com dois materiais com diferentes proporções volumétricas e Rozvanay *et al.* (1982) que investigaram a formulação matemática para o problema de maximização da rigidez (com restrição de volume) de placas delgadas, onde a variável de projeto é a espessura, e concluíram que existem vários ótimos locais para este problema de otimização.

Além destes métodos, tem-se aplicado na resolução de problemas de OT às técnicas estocásticas, com destaque para o uso do algoritmo genético, Kane *et al.* (1994), Kawamura *et al.* (2002), Krishnamoorthy *et al.* (2002), Lagaros *et al.* (2002), e a técnica do Simulated Annealing, Kirkpatrick *et al.* (1983). Entretanto, a principal desvantagem destas técnicas aplicadas na OT é a busca da região ótima quando está associado à otimização de centenas ou até milhares de parâmetros, o que aumenta consideravelmente o tempo de processamento, muitas vezes inviabilizando sua aplicação.

1.2 Métodos de Otimização

1.2.1 Introdução

No campo de otimização estrutural, existem vários métodos que podem ser usados com sucesso para determinar o melhor conjunto de variáveis de projeto para proporcionar uma estrutura ótima. Ao classificar esses métodos, eles podem ser divididos em dois grupos: os métodos baseados em Gradiente e os Heurísticos.

A primeira categoria, métodos baseados em gradiente, faz uso do cálculo das derivadas da função objetivo (FO) e as restrições para procura do ótimo. No entanto, a hipótese é sempre de que o problema seja convexo, que uma solução mínima possa ser encontrada, e que esta solução exista. Existem alguns problemas em mecânica estrutural que não produzirão um problema de otimização convexa, Huang *et al.* (1997), Haftka *et al.* (1992). Isto porque o problema pode ser descontínuo. Por esta razão, outros métodos que são independentes dos gradientes das funções utilizadas são necessários, tais como os métodos heurísticos.

Os métodos de otimização baseados em procedimentos heurísticos foram desenvolvidos a partir de qualquer percepção intuitiva para o problema, ou a partir de argumentos plausíveis de metodologias de otimização baseadas em observações da natureza. Estes são os métodos baseados em regras relativamente simples e de senso

comum. Embora tais métodos proporcionam boas soluções ótimas, apresentam uma aparente falta de rigor matemático. Assim não se tem a garantia que uma solução ótima será alcançada. Uma característica da maioria destes métodos é que eles tem uma abordagem ascendente, diferentes do métodos a base de cálculos.

1.2.2 Métodos baseados em Gradientes

No campo da otimização, existem vários métodos que podem ser empregados com sucesso para determinar o melhor conjunto de variáveis de projeto que podem fornecer o valor mínimo ou máximo para uma função específica, Querin (1997). Quaisquer restrições colocadas na solução, também devem ser tomadas em consideração. Destes métodos, há duas formas básicas para a determinação do ótimo, usando um método de diferencial ou um método de pesquisa através do campo de projeto.

Cada um destes dois tipos de métodos podem ser ainda divididos em dois subgrupos, isto é, problemas com e sem restrições. Para problemas sem restrições, o método de cálculo diferencial fornece a melhor forma de alcançar uma solução ótima. Para problemas com restrições há uma escolha entre os métodos de cálculo diferencial (Lagrangianos e Kuhn-Tucker) ou métodos de pesquisa (programação linear e programação inteira-linear). A seguir uma breve explicação desses métodos de otimização.

1.2.3 Otimização sem restrições

O método mais comum de otimização sem restrições é o cálculo diferencial, neste tipo de otimização de uma função objetiva (FO) do tipo $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ com N variáveis de projeto $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$, tem o seu valor máximo ou mínimo dentro de um domínio de projeto R^N quando duas condições forem satisfeitas, em primeiro lugar, quando os pontos x^* em que as derivadas parciais N são todos iguais a zero, a equação 1.1 é válida.

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad (1.1)$$

A segunda condição é quando as segundas derivadas da FO nesses pontos x^* , denominada matriz hessiana de f (aqui representado por H), é positiva ou negativa definida. Isto determina se a FO atinge um mínimo ou um máximo nesse ponto. Assim, a matriz hessiana é representada pela equação 1.2.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(x^*) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Este parece ser um método muito elegante, no entanto, as condições de H para ser positiva ou negativa definida pode não ser sempre satisfeita, exigindo derivadas de ordens superiores da FO para satisfazer estas condições. Embora possa ser usado para localizar o ótimo de sistemas estruturais simples, a FO deve ser duas vezes diferenciável, algo que pode não ser sempre possível, especialmente quando se lida com domínios estruturais discretos.

1.2.4 Otimização com restrições

A maioria dos problemas de otimização estrutural práticos têm limitações ou restrições em algumas das variáveis de projeto ou de relações algébricas em termos destas variáveis de projeto, Haftka *et al.* (1992). A forma geral de um problema de otimização restrita com restrições de igualdade é dada abaixo:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) \\ &\text{sujeito} && g_i(x) = b_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, M \\ &&& x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde $f(x)$ é a FO $g_i(x)$ é a função de restrição que pode ou não ser linear x_j são as variáveis de projeto que podem ser inteiras.

A fim de resolver este problema, usam-se duas abordagens, se as restrições de igualdade podem ser resolvidas explicitamente para as variáveis M em termos das variáveis de projeto N, em seguida estas podem ser substituídas de volta à FO, simplificando o problema. A FO pode ser resolvida, como se fosse um problema irrestrito, este procedimento é chamado eliminação de variável ou método de substituição direta.

Se as restrições de igualdade não pode ser completamente eliminadas, uma abordagem para solucionar o problema é a utilização do método dos multiplicadores de Lagrange, Haftka *et al.* (1992). Se, por outro lado, o problema tem restrições de desigualdade, a condição de Kuhn-Tucker deve ser utilizada, Haftka *et al.* (1992).

1.2.5 Método dos Multiplicadores de Lagrange

Para o problema de otimização restrita do item 1.2.4, que tem restrições de igualdade, uma vez que cada função $g_i(x) = b_i$, o problema não é afetado se a FO $f(x)$ for substituída pela função Lagrangeana $L(x, \lambda)$, equação 1.4

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^M \lambda_i (g_i(x) - b_i) \quad (1.4)$$

Isto é verdadeiro para qualquer valor dos termos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_M$ que são denominados multiplicadores de Lagrange. A única coisa útil sobre esses multiplicadores é que, se forem encontrados o ponto x tal que $L(x, \lambda)$ é minimizada todas as restrições do $g_i(x) = b_i$ são satisfeitas e o problema restrito original também é resolvido.

Para encontrar os pontos $x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_M$ que minimizam a equação 1.4, encontra-se a derivada e iguala com as restrições de igualdade, de tal modo que:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, N \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, \dots, x_N) - b_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, M \quad (1.6)$$

Existem agora um sistema de $N+M$ equações com $N+M$ incógnitas que na maioria dos casos pode ser resolvido.

1.2.6 Condições Kuhn-Tucker

A forma geral de um problema de otimização restrita com restrições de desigualdade, equação 1.7, é representada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) \\ &\text{sujeito} && g_i(x) \leq b_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, M \\ &&& x_j \geq 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1.7)$$

Esta condição de otimização é tão comum que para resolver este problema criou um lagrangiano especial, conhecido como formulação de Kuhn-Tucker, para tratar este caso. Assim, uma variável de folga t_i é incluída nas equações de restrição de desigualdade para transformá-las em equações com restrição de igualdade. Ela é incorporada na equação de restrição desigualdade como segue:

$$g_i(x) + t_i^2 = b_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, M \quad (1.8)$$

A função Lagrangiana para este problema passa a ser então escrita como segue:

$$L(x, \lambda, t) = f(x) + \sum_{i=1}^M \lambda_i (g_i(x) + t_i^2 - b_i) \quad (1.9)$$

A equação 1.9 pode então ser diferenciada em relação às variáveis de projeto e de folga e equacionada com as novas restrições de igualdade, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, \lambda, t)}{\partial x_j} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, N \\ \frac{\partial L(x, \lambda, t)}{\partial t_i} &= 2\lambda_i t_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, M \\ \frac{\partial L(x, \lambda, t)}{\partial \lambda_i} &= g_i(x_1, x_2, \dots, x_N) + t_i^2 - b_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (1.10)$$

A partir destas equações, pode-se supor que o ponto x é um mínimo local de um problema desigualdade restrita somente se um conjunto de multiplicadores de Lagrange positivos λ existirem, de modo que a primeira destas equações de Lagrange seja satisfeita. Se um dos multiplicadores de Lagrange é zero, então essa restrição é considerada não-ativa.

Estes tipos de técnicas de otimização restrita são aquelas usadas no método de homogeneização, Bendsøe *et al.* (1990,1995), onde a função objetivo é a minimização do inverso da rigidez dos materiais.

1.2.7 Programação Linear (PL)

Um processo de otimização é dito linear se tanto a FO e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto x_i , ($i=1,2,\dots,N$), por exemplo, a equação 1.11.

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = c^T x \quad (1.11)$$

A condição para um mínimo dentro das funções de restrição é que a primeira derivada da função em relação às variáveis de projeto devem ser iguais a zero. No entanto, uma vez que na programação linear de todas as funções são lineares, sua derivadas são funções com termos constantes, que podem não ser necessariamente iguais a zero. Isto implica que a solução viável ideal pode não estar dentro do espaço de projeto viável, mas deve situar-se em seus limites. Uma vez que as relações de restrição também são funções lineares das variáveis de projeto, o projeto ótimo deve situar-se na intersecção de duas ou mais funções de restrição, a menos que a restrição de ligação seja paralela aos contornos da função objetivo.

Em geral o problema de PL é definido como:

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} && f(x) = c^T x \\
&\text{sujeito} && Ax = b_j \\
&&& x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Onde: c é um vetor coluna $N \times 1$, A é uma matriz $M \times N$, b é um vetor coluna $M \times 1$.

O método mais eficiente e confiável para resolver problemas de PL é o chamado método simplex, Beale (1988). A ideia do método simplex é diminuir continuamente o valor da FO, indo de uma solução básica viável para outra até que o valor mínimo da FO seja alcançado.

1.2.8 Programação Linear Inteira(PLI)

A solução do vetor x para a programação linear e problemas baseados em cálculos é assumida como sendo todos positivos e contínuas. Assim, a solução ótima poderia ter qualquer valor entre os limites superiores e inferiores das variáveis de projeto. Existem muitas situações de projeto no entanto, quando algumas ou todas as variáveis de projeto são restringidas a terem valores discretos. Por exemplo, atravessar áreas das secções, o número de camadas em um compósito laminado, etc. Este tipo de problema é chamado de programação linear inteira (PLI), Beale (1988). A forma padrão deste tipo de problema é:

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} && f(x) = c^T x \\
&\text{sujeito} && Ax = b_i \\
&&& x_i \in X_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{il}\} \quad \text{com } i \in I_d
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Onde I_d é o conjunto das variáveis de projeto que só podem assumir valores discretos e X_i é um conjunto de valores discretos admissíveis.

Os problemas de PLI também podem ter variáveis de projeto que indicam uma situação de tomada de decisão, tipo $\{0,1\}$. Por exemplo, num problema de criação de treliça, a presença ou ausência de determinado membro pode ser representada por um valor binário. Este tipo de problema é chamado de zero / um (*ILP binário*).

Pode parecer lógico obter uma solução inteira para um problema contínuo basta aproximar os valores ótimos do problema contínuo para um valor inteiro mais próximo, Saaty (1970). No entanto, tal método pode não garantir a solução inteira dentro das restrições.

1.2.9 Programação Linear Sequencial(PLS)

Existem problemas em que os cálculos da FO, restrições e derivadas é bem maior, em comparação com o custo computacional associado ao procedimento de otimização.

Para estes problemas, o melhor é simplificá-los redefinindo o problema original em um único problema aproximado. Um dos métodos mais populares é a Programação Linear Sequencial (PLS), Haftka *et al.*(1992).

Considere um problema típico de otimização dado por:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) \\ &\text{sujeito} && g_j(x) \leq b_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, M \\ &&& x_k \geq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1.14)$$

Para este método, uma solução teste inicial x_0 para o problema é requerida. A FO e as equações de restrições são então aproximadas por equações lineares usando uma expansão em série de Taylor sobre a solução teste inicial x_0 . O problema de otimização pode então ser representada por:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x_0) + \sum_{i=1}^N (x_i - x_{0,i}) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} \\ &\text{sujeito} && g_j(x_0) + \sum_{i=1}^N (x_i - x_{0,i}) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \\ &&& a_{li} \leq x_i - x_{0,i} \leq a_{ui} \end{aligned} \quad (1.15)$$

O último conjunto de restrições representam os limites inferiores e superiores, respectivamente, a_{li} e a_{ui} da movimentação de x_i . Se estes limites são pequenos, uma boa aproximação pode ser garantida. A solução final para o problema linearizado x_L , pode então ser tratada como um valor ótimo, e a solução inicial x_0 é substituída com x_L e o processo de otimização, em seguida, pode ser iniciado com esta nova solução.

O processo é então repetido, substituindo, assim, o problema de otimização original com uma sequência de problemas de programação linear.

1.3 Otimização Estrutural

A otimização estrutural consiste em encontrar a configuração ótima da distribuição da massa da estrutura no domínio da região viável do projeto, acatando certos critérios de projeto. A distribuição do material no domínio é alterada, avaliando as alterações em algum comportamento mecânico da estrutura, como exemplo: a flexibilidade, frequências naturais, tensões, entre outros, que são denominadas restrições de projeto e podem ser de igualdade ou desigualdade, Santana (2002), Bendsøe e Sigmund (2003) e Arora (2004).

Para isso, a otimização estrutural usa ferramentas computacionais para determinar de forma sistemática a configuração ótima. Assim, a distribuição do material de uma estrutura é avaliada considerando as condições de carregamento no contorno e as propriedades específicas do material como restrições.

A forma sistêmica de distribuição ótima do material é realizada por um algoritmo de otimização que torna o processo mais consistente seguindo um critério pré-definido. Caso contrário, seria necessária uma série de análises para encontrar a distribuição ótima. De acordo com as referências bibliográficas Kirsh (1990), Haftka e Grandhi (1986), a área de otimização estrutural pode ser dividida em três grandes categorias: otimização paramétrica, de forma (ou geométrica) e topológica.

1.3.1 Otimização Paramétrica

Nesta abordagem, a estrutura apresenta a forma e a topologia fixa, ou seja, variam-se as dimensões da seção transversal de seus componentes tais como: diâmetro espessura e altura, Vanderplaats (1994). Desta forma, uma vez estabelecido que certa seção transversal da estrutura seja circular, esta geometria não se altera, apenas o valor de seu diâmetro é otimizado segundo as funções de restrições.

1.3.2 Otimização de Forma

O método de otimização de forma começou a ser desenvolvido na década de 70 em aplicações na área de escoamento de fluido. Hoje se tem uma extensão desta pesquisa na área da engenharia estrutural, desenvolvendo a configuração ótima da estrutura pela variação da fronteira do domínio. Desse modo, varia-se a geometria pela fronteira sem alterar a topologia, isto é, o número de componentes de conexões da sua fronteira manter-se-á igual ao da estrutura inicial, sendo que o seu contorno pode ser aproximado por segmentos de curvas paramétricas do tipo splines, polinômios ou funções naturais que constituem as variáveis de projeto Haftka e Grandhi (1986), ver figura 1.1b.

Um problema frequente na otimização de forma é a distorção da malha, que muitas vezes dificulta os resultados devido a problemas de convergência da solução de elementos finitos. Salagame e Belegundu (1995), Steffens (2005) indicam a utilização de um processo de atualização de malha durante o processo de otimização.

Métodos baseados nos critérios de otimalidade por Berke e Khot (1987), abordagem de programação matemática Schmit (1981) e algoritmos heurísticos como Colônia de Abelhas Artificial Sonmez (2008), Algoritmos Genéticos Wu e Chow

(1995) e Soh e Yang (1996), tem sido efetivamente utilizados nos problemas de otimização de forma.

1.3.2.1 Otimização Topográfica

Uma forma especial de otimização de forma, denominada Otimização Topográfica, foi desenvolvida por Voth (1999) para otimizar reforços em estruturas de cascas. Esta técnica se aplica especificamente para projeto de reforçadores de placas e cascas. Combina a OT com a otimização paramétrica. Zhou et al. (2004) propõe uma abordagem integrada que combinar dimensionamento, forma e otimização de topologia em um único processo.

Consiste em encontrar a distribuição de um padrão de reforçador nas estruturas de placas e cascas, figura 1.2 ilustra o tipo de reforçador usado. As variáveis de projeto são os parâmetros indicados nesta figura. Assim, utiliza o conceito da otimização paramétrica no sentido de que não modifica a geometria do reforçador e utiliza a OT para encontrar a topologia ótima do reforçador ao longo da estrutura.

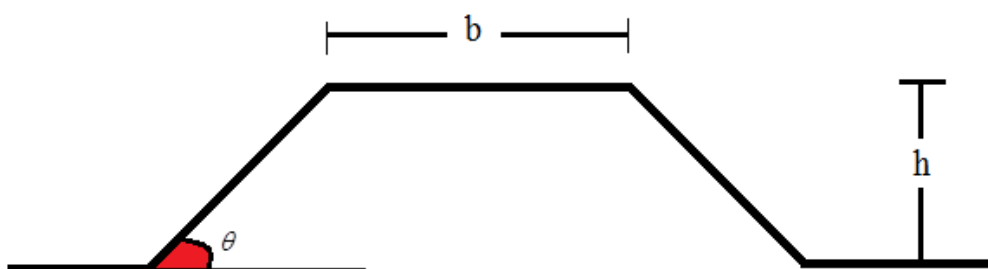


Figura 1.2 – Reforçador

1.3.3 Otimização Topológica

Diferentemente da otimização de forma, na qual as variáveis de projeto que definem o contorno são alteradas em cada iteração durante o processo de otimização, a OT apresenta como principais características a inserção de buracos e domínio fixo estendido (dimensões do projeto são mantidas fixas durante todo o processo iterativo); Bendsøe e Kikuchi (1988). Na procura pela solução ótima, a OT distribui o material por todo o domínio, de tal forma que se possa otimizar um dado critério – como o de tensão máxima da estrutura.

Na OT são obtidos os melhores resultados, pois a inserção de cavidades confere à estrutura melhor desempenho, se comparado às otimizações de forma e paramétrica, ver

figura 1.1.c. Pode-se dizer que a otimização de forma e a paramétrica são casos particulares da OT.

Desta forma, surgiram no meio acadêmico vários trabalhos com o desenvolvimento da OT. Em Canfield e Frecker (2000) encontra-se uma formulação do problema de OT via MEF, usando em seu domínio elementos de treliça com critério de otimalidade e a solução via Programação Linear Sequencial. Cho e Choi (2005) utilizam a OT combinada com a termo-elasticidade, sendo que a OT foi formulada a partir da aplicação do método DSA, *Design Sensitivity Analysis*.

Dentre os métodos de OT que consideram malhas variáveis durante o processo estão os métodos de Otimização Estrutural Evolutiva, conhecidos na literatura como (ESO), do inglês *Evolutionary Structural Optimization*. A ideia principal destes métodos consiste na proposição de um critério eficiente capaz de avaliar a contribuição de cada elemento na resposta do sistema e na heurística de remoção dos elementos que possuem a menor sensibilidade, ver Hilton e Sienz (1995), Xie e Steven (1996), Chu *et al.* (1996), Christie *et al.* (1998), Reynolds *et al.* (1999), Querin *et al.* (2000a), Querin *et al.* (2000b) e Rong *et al.* (2000).

O método ESO é muito sensível à taxa de remoção dos elementos da malha e isso introduz algumas desvantagens. Uma delas é a ocorrência de extremidades não suaves e de interconexões estruturais, dando origem a mecanismos e à concentração de tensão, Coutinho (2006).

Tovar (2005) estudou uma técnica que combina regras de evolução de células “autômatas” com análise estrutural por elementos finitos, do inglês *hybrid cellular automata (HCA)*. Esta técnica mostrou ser eficiente na resolução de problemas de OT para a obtenção de estruturas mais leves com máxima rigidez.

Pereira (2006) faz uma explanação sobre a OT em problemas de elasticidade envolvendo não-linearidade geométrica (grandes deslocamentos e rotações) e não-linearidade de material (hiperelasticidade não-linear quase-incompressível), aplicando o conceito de Análise de Sensibilidade Topológica (TSA) através de uma formulação Lagrangiana Total.

Porto e Pavanello (2007) investigam a influência dos parâmetros da otimização estrutural topológica, baseada na teoria da homogeneização, sobre seus resultados ótimos. Neste trabalho é estudada uma célula-base quadrada unitária de vazio central retangular, suas propriedades mecânicas são determinadas a partir de uma abordagem de homogeneização e do MEF. O tensor elástico é definido para cada elemento finito do

modelo estrutural global e a solução ótima do problema de minimização da energia potencial total é obtida através de um algoritmo iterativo baseado nos critérios de otimalidade.

A fim de encontrar o mínimo absoluto de uma função objetivo, sem ser sensível à posição de partida, um método de otimização global tem de ser empregado nos problemas de otimização estrutural. As técnicas de otimização Estocásticas, tais como Evolução Diferencial, que é um método heurístico baseado em estratégias evolutivas populacional, Firefly que é algoritmo meta-heurístico, é baseado em comportamentos encontrados na natureza, são muito adequadas a este respeito. Estas técnicas não são sensíveis ao ponto de partida, podem escapar dos pontos de ótimo local por permitirem movimento aleatório para cima, o que constitui uma grande vantagem. Outro aspecto positivo refere-se ao fato dessas técnicas não requererem as derivadas da função objetivo ou restrições, sendo um algoritmo de ordem zero.

Sonmez (2008) investiga as duas técnicas estocásticas mais populares de otimização: o Algoritmo Genético (AG) e Simulated Annealing (SA). AG são algoritmos de busca de ordem zero baseados no mecanismo de seleção natural das espécies. Combinam a sobrevivência do indivíduo mais adequado com um intercâmbio estruturado e aleatório de informações para formar um algoritmo de busca. A cada geração, um novo conjunto de indivíduos é criado usando parte dos antigos. As principais características deste método são: codificação dos parâmetros, a busca feita a partir de uma população de pontos (e não em um único ponto como dos algoritmos determinísticos), utilização somente da função objetivo e uso das regras probabilísticas de transição.

O Simulated Annealing (SA) simula o processo de recozimento. Teve seu algoritmo inspirado por estudos na mecânica estatística que trata do equilíbrio de um grande número de átomos em sólidos e líquidos a uma dada temperatura.

Guzmán *et al.* (2008) usam uma nova metodologia de otimização topológica que combina análise estrutural pelo MEF com uma estratégia de otimização inspirada no “*bacterial chemotaxis*”. O princípio do BCBTOA (*Bacterial Chemotaxis Based Topology Optimization Algorithm*) é bem simples. A estrutura evolui para uma configuração ótima por uma redistribuição sistemática de material no interior do domínio de projeto reforçando as áreas de sobrecarga e removendo o material onde este não é requerido. Inspirou-se no comportamento coletivo autônomo organizado mostrado pelas bactérias marinhas *thiovulum majus*. O domínio de projeto é construído pelo MEF

e representa o ambiente onde uma colônia de bactérias pode movimentar. O objetivo é que um número máximo de bactérias da colônia sobreviva. Assim, para aumentar a chance de sobrevivência de um número máximo de indivíduos da colônia, a cada iteração elas trocam informações sobre a concentração de nutrientes na sua atual localização. Com base nestas informações, as bactérias localizadas em posições com baixas concentrações de nutrientes movem-se para posições mais favoráveis.

1.4 Métodos de Otimização Topológica

1.4.1 Introdução

Os métodos de OT buscam a solução ótima, ou seja, um ponto extremo, através da variação do domínio, isto é, topologia da estrutura, no que diz respeito a estruturas contínuas. São divididos em duas grandes classes de abordagens, conforme Eschenauer e Olhoff (2001), a abordagem micro ou baseado no material e abordagem macro ou baseada na geometria.

A abordagem micro, a primeira desenvolvida, é baseada na existência de uma micro estrutura porosa, elemento volumétrico fundamental, que define as relações constitutivas do material em função da sua geometria e da densidade volumétrica de uma célula unitária representativa do material. Esta, por sua vez, é representada por variáveis contínuas sucessivamente distribuídas no espaço do domínio fixo estendido que consiste numa região do espaço onde pode existir a estrutura, um dado carregamento, uma dada fixação e certa quantidade de material, Stump (2006).

O domínio fixo estendido é discretizado por uma malha de elementos finitos que não se altera ao longo do processo de otimização e permite a determinação das respostas mecânicas. A otimização a definição de quais pontos da estrutura devem possuir ou não material. Deste modo, a distribuição das densidades é parametrizada permitindo que cada ponto do domínio fixo estendido possa variar entre (0) e (1), respectivamente, para ausência de material e presença de material. Os algoritmos baseados nesta técnica buscam a melhor forma de distribuir o material minimizando ou maximizando a função custo. Um exemplo para este grupo é o método SIMP (“*Simple Isotropic Material with Penalization*”) Bendsøe (1989), Rozvany *et al.* (1992).

Na abordagem macro (geométrica), a topologia da estrutura é modificada através da inserção de furos no domínio. Como exemplo deste grupo de OT pode-se citar o ESO, baseado no cálculo da função objetivo quando um elemento é removido da malha de elementos finitos, e o TSA (*Topological Sensitivity Analysis*), baseado em uma

função escalar, denominada Derivada Topológica, que fornece para cada ponto do domínio de definição do problema a sensibilidade da função custo quando um pequeno furo é criado, Labanowski *et al.* (2004).

1.4.2 Métodos de Otimização Topológica via MEC

Dentre os problemas de otimização estrutural, um dos mais desafiadores são aqueles que envolvem a OT, que continua sendo uma área ativa de pesquisa. Um método numérico muito utilizado na modelagem numérica de problemas de engenharia que envolve a otimização estrutural é o MEF. Neste método, considera-se que o domínio de integração é o domínio da região a ser analisada. Emprega-se uma função de aproximação para as variáveis envolvidas no problema que devem ser integradas em cada elemento e os valores das funções envolvidas, em um ponto qualquer do elemento, são interpolados a partir dos valores nodais. Assim, as integrais nos elementos podem ser calculadas numericamente. Desta forma, um sistema de equações algébricas é resolvido para os valores nodais incógnitos que podem ser forças internas, deslocamentos ou ambos, dependendo da formulação que se utiliza.

Outro método numérico muito utilizado é o MEC, que considera o domínio de integração o contorno da região do corpo em análise, pois aplica-se o teorema de Green para escrever o problema em termos de valores de contorno. Esse contorno é discretizado em elementos denominados elementos de contorno, onde seus campos de deslocamentos e forças de superfície também são representados por funções interpoladas lineares ou de maior ordem. Vale destacar que os deslocamentos só poderão ser calculados quando o problema de valor de contorno for previamente resolvido. Em alguns casos específicos, o MEC necessita da discretização do domínio em células para aproximação de variáveis que não foram eliminadas na dedução da equação integral. Os elementos e células devem ter um ou mais pontos nodais, sendo os valores das funções envolvidas interpolados, em cada elemento ou célula, a partir dos valores nodais, ver detalhes em Brebbia *et al.* (1984).

As integrais nos elementos e células podem ser calculadas numericamente, para as integrais singulares devem ser adotados procedimentos especiais devido as singularidades nos núcleos das integrais. Monta-se um sistema de equações algébricas que é resolvido para as incógnitas do problema. A partir dos valores conhecidos no contorno, podem ser calculados os valores em qualquer ponto do domínio analisado. Utiliza-se uma solução fundamental para o problema e os resultados em pontos internos,

das funções obtidas por derivação, são bastante precisos, pois são obtidos da derivada dos tensores da solução fundamental, que é exata.

Como a solução é necessária apenas sobre o contorno a técnica adequa-se bem a problemas de superfícies móveis como é o caso da OT. Outra vantagem do MEC é a redução na dimensionalidade da malha, isso reduz o tempo na preparação e processamento dos modelos. Outra vantagem é a possibilidade do tratamento de singularidades ou problemas externos (descontinuidades, concentrações de tensões, etc.), o que é altamente desejado e importante para a OT. Além disso, é possível associar o MEC a outros métodos, aumentando as possibilidades na simulação de problemas.

Apesar de ser um método apropriado para OT existem poucos trabalhos que acoplam a formulação do MEC a métodos de OT. A seguir, serão listados alguns trabalhos e um breve comentário sobre o procedimento utilizado por cada um.

Os trabalhos de Cervera (2003) e Cervera e Trevelyan (2005) abordam a OT de maneira semelhante, via a clássica técnica de sub-região. As cavidades são criadas nas regiões com menores valores de tensões para a remoção material ineficiente dessas regiões e, portanto, realizar mudanças topológicas. A diferença entre os dois trabalhos se resume no procedimento de como a geometria destes buracos é delineada. O primeiro trabalho emprega um ajuste de curva $B - Spline$, enquanto o último aplica uma variante desta, a NURBS – *non-uniform rational B - Spline*. Alguns exemplos clássicos da OT são apresentados para mostrar a eficiência da formulação.

Marczak (2007) aplica o conceito de derivada topológica em conjunto com o MEC para a identificação da topologia ótima. Esta derivada topológica é avaliada nos pontos internos da estrutura e para os menores valores obtidos geram-se cavidades circulares, eliminadas do projeto inicial.

Anflor (2007) aborda a OT via MEC para problemas governados pela equação Poisson. Em uma das metodologias apresentadas utiliza-se a derivada topológica (DT), adotando a energia potencial como função objetivo. O procedimento adotado é uma alternativa à técnicas de otimização, evitando soluções de projeto com densidade de material intermediária. Sólidos com comportamentos anisotrópicos são estudados sob condições de Robin, Neumann e Dirichlet. Uma transformação linear de coordenadas é utilizada para mapear o problema original e as condições de contorno para um novo domínio equivalente isotrópico onde procedimento de otimização é aplicado. A

metodologia mostrou-se eficiente para este tipo de problema já que o MEC dispensa o uso da malha de domínio.

Em Neches e Cisilino (2008), a análise via MEC é realizada utilizando uma formulação direta. O modelo é discretizado utilizando elementos lineares e uma distribuição de pontos internos sobre o domínio. A energia potencial total é selecionada como função de objetivo. A avaliação da derivada topológica em pontos internos é realizada como um procedimento de pós-processamento. Em seguida, o material é removido a partir do modelo, suprimindo os pontos internos com menores valores da derivada topológica. Um algoritmo de triangulação de Delaunay, capaz de detectar “buracos”, é utilizado para refazer a malha e a construção da nova geometria. O procedimento é repetido até que um critério de parada dada seja satisfeito. A estratégia proposta provou ser flexível e robusta. Exemplos são apresentados e os resultados são comparados com aqueles disponíveis na literatura.

Os trabalhos a seguir usam o acoplamento do Level Set Method (LSM) com o MEC para OT. Desta forma, mostrou-se necessário uma simples explanação deste método com o objetivo de facilitar o seu entendimento.

O método do conjunto-nível é uma abordagem de OT na qual as mudanças topológicas são realizadas através de movimento, fusão, expansão e evolução do conjunto-nível zero. É usualmente definida como a função distância com sinal de um ponto arbitrário do domínio de projeto. As regiões com diferentes valores desta função são colocadas com diferentes materiais, de acordo com a topologia descrita. No tradicional LSM a evolução dos contornos é governada pela velocidade de movimento e controlada por uma equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi. O LSM foi introduzido por Osher e Sethian (1988) como uma ferramenta numérica capaz de controlar frentes de propagação e fronteiras livres com velocidade curvatura-dependente. Deste modo, a curva ou superfície que forma implicitamente uma fronteira é expressa como um conjunto de pontos no nível zero de uma função ϕ , que contém a dimensão mais elevada. A partir desse ponto, a evolução da fronteira é acompanhada do progresso da função ϕ .

Abe *et al.* (2007) realizam a OT acoplando o LSM e o MEC, denominado pela sigla LSM-MEC. O LSM é utilizado como uma distância entre o contorno e os pontos do grid. O MEC é utilizado para calcular as tensões e deformações e os elementos de contorno são criados quando a distância é mínima, isto é, zero.

Yamada *et al.* (2013) usa o LSM acoplado ao MEC para OT de estruturas 3D e a função Level Set (LS) é usada para controlar o contorno ótimo da estrutura. As condições de contorno são expostas explicitamente. O funcional a ser otimizado contém um problema adjunto, problema real, a parcela da regularização LS e as restrições de volume. A análise de sensibilidade é utilizada para atualizar a função LS e os multiplicadores de Lagrange presentes. O procedimento é repetido até que as restrições sejam alcançadas e a função LS seja praticamente constante.

Vitório Jr. (2014) utiliza também o acoplamento MEC ao Método Level Set (LSM). O problema mecânico é resolvido utilizando as equações algébricas do MEC enquanto o problema de otimização é resolvido usando LSM. A função LS em nível zero representa a geometria do corpo e suas evoluções, o remalhamento é necessário para a reconstrução da geometria que é modificada em cada iteração. A topologia ótima é alcançada sem a necessidade da utilização de filtros.

Ullah *et al.* (2014) utiliza um procedimento de OT evolucionário com acoplamento de MEC-LSM. O método tem a capacidade de inserir cavidades automaticamente e o zero LS descreve as geometrias internas e externas da estrutura. A otimização é 2D e o contorno é representado por NURBS.

O presente trabalho lida com uma abordagem inédita no campo da otimização de topologia em problemas da elasticidade plana, utilizando o MEC. O problema de OT é resolvido com a técnica numérica denominada ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) a qual é acoplada com a formulação do MEC usando campos de tensões iniciais como estratégia para representar as regiões que devem ser eliminadas na OT.

As tensões iniciais são introduzidas no modelo por meio de uma combinação de dois problemas evitando assim a necessidade de considerar integrais de domínio ou uso da clássica estratégia de inserção de sub-regiões utilizando elementos de contorno para introduzir a cavidade. A adição destes dois problemas simula o problema real e a célula é então criada no entorno do ponto interno que atende o critério de retirada ESO. Deste modo, um campo de tensões iniciais é somada às tensões elásticas do problema inicial resultando em tensões nulas, simulando de maneira virtual uma cavidade.

Assim, durante o procedimento da OT criam-se células triangulares sobre os pontos internos que atendem ao critério de retirada ESO. Desta forma, a construção do sistema linear é realizada com a introdução iterativa de um termo de domínio, em termos de tensões iniciais, com a introdução de um vetor corretor. Os elementos do vetor corretor são criados com o sinal oposto e são adicionados ao vetor livre que está a

direita do sistema linear original. Assim, não há a necessidade de alteração da matriz de influência inicial, isso traz uma grande vantagem no custo computacional do problema em análise, pois essa matriz é não esparsa e a sua montagem com a inserção de novos elementos, como ocorre nos processos de otimização via MEC usando sub-região, produzindo um alto custo computacional. Desta forma, não há a interferência de novos elementos de contorno, o que altera de forma sensível o problema elástico inicial a ser resolvido.

Outra grande vantagem da presente formulação em relação aos métodos propostos, é que durante o processo iterativo, não há a necessidade de refazer a malha a cada passo, a precisão do MEC no cálculo das tensões internas proporciona a captura da configuração ótima realizando apenas otimização topologia sem a retirada de elementos no contorno, isto é, sem a otimização de forma. Destaca-se ainda que os problemas da OT como a dependência da malha e o tabuleiro de xadrez não apareceram na presente formulação.

CAPÍTULO 2

SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE KELVIN E EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE PLANA

2.1 Introdução

No ANEXO I deste trabalho encontram-se os conceitos básicos da teoria da elasticidade, necessários para o entendimento do conteúdo desta tese. Apresentam-se ainda os conceitos fundamentais do problema elástico e as simplificações dos estados planos de tensão e deformação, bem como suas particularidades.

Neste capítulo serão deduzidas as equações integrais do problema elástico a partir do teorema da reciprocidade de Betti (ANEXO II). O problema a ser tratado consiste em um meio elástico linear, onde é aplicada uma tensão unitária no ponto “s”, também denominado ponto fonte (source point), e mede-se o efeito desta tensão unitária em outro ponto qualquer “q” denominado ponto campo.

O domínio do problema a ser tratado é infinito e, assim como na literatura em geral, será empregado um asterisco (*) para indicar quando se tratar de variáveis associadas ao problema fundamental.

Para o desenvolvimento deste capítulo foram consultadas as seguintes bibliografias: Wittman (1983), Brebbia e Domingues (1992), Lopes (1996), Venturini (1988), Wutzow (2003), Almeida (2003), Ferreira (2007), Scuciato (2007) e Leite (2007).

2.2 Solução Fundamental de Kelvin

Fisicamente, a solução fundamental de Kelvin corresponde à obtenção das soluções das equações de equilíbrio para um corpo homogêneo e isotrópico de geometria arbitrária, sendo que os campos mobilizados de deslocamentos e tensões que ocorrem em um ponto “q” - ponto campo – devido a uma tensão unitária aplicada em “s” - ponto

fonte – (source point) na direção k . O termo tensão unitária está substituindo o termo tradicional *força unitária* pois, força unitária em problemas planos resulta em tensão infinita já que a área é nula. A figura 2.1 ilustra fisicamente o problema fundamental

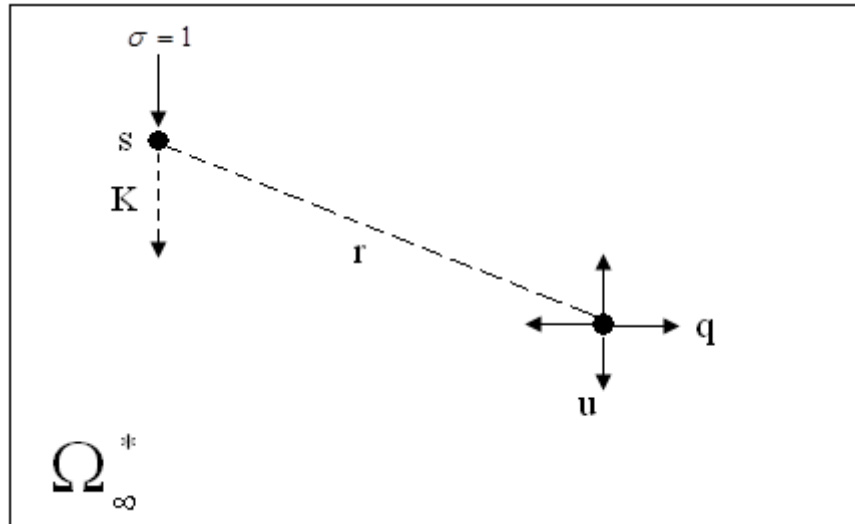


Figura 2.1 – Problema Fundamental

Com o objetivo de representar o carregamento unitário na equação de equilíbrio elástico a parcela b_i é escrita como uma distribuição de Dirac (ANEXO III) (δ_{ij}) e ponderada por um delta de Kronecker (δ_{ij}), que relaciona as direções k , de atuação da força, com a direção de efeito i . Assim, têm-se:

$$\sigma_{ij,j}(s) + \delta_{ij}(s,q)\delta_{ki} = 0 \quad (2.1)$$

Substituindo-se na Lei de Hooke (para o problema fundamental), a relação deformação/deslocamento e , em seguida, derivando-se em relação a x_j e substituindo-se o resultado na equação 2.1, obtém-se a:

$$\frac{1}{1-2\nu}u_{kj,ij}^* + u_{kj,jj}^* + \frac{\delta(s,q)\delta_{ki}}{G} = 0 \quad (2.2)$$

Para a elasticidade plana uma solução da equação 2.2 é obtida via vetor de Galerkin que substitui os deslocamentos por funções derivadas de segunda ordem e é dada por:

$$u_{ij}^*(s,q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] \quad (2.3)$$

onde o primeiro índice “i” refere-se à direção de aplicação da carga unitária e, o segundo, “j” à direção do deslocamento proposta.

Derivando-se a equação 2.3 em relação a x_k , reorganizando os termos e substituindo-se na relação deformação/deslocamento, tem-se, para o caso bidimensional, a equação:

$$\varepsilon_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_i \delta_{ij} + r_j \delta_{ik}) - r_i \delta_{jk} + r_i r_j r_k] \quad (2.4)$$

Aplicando-se a equação 2.4 na lei de Hooke pode-se obter para o caso bidimensional:

$$\sigma_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi G(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_i \delta_{ij} + r_j \delta_{ik} - r_i \delta_{jk}) + 2r_i r_j r_k] \quad (2.5)$$

Por fim, aplicando-se a equação 2.5 na fórmula de Cauchy, obtém-se a expressão da força de superfície para o problema fundamental que é dado pela expressão:

$$p_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] r_n + (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \quad (2.6)$$

2.3 Equação Integral de Contorno para Elasticidade Plana

Apresentam-se nesta seção as integrais básicas para resolução de problemas elásticos usando o MEC. Estas fórmulas serão deduzidas para o problema de estado plano de deformação, supondo que não existam descontinuidades no corpo.

Seja um domínio Ω , limitado por um contorno Γ , submetido a dois estados de carregamento: sendo o primeiro o problema em estudo e o segundo, o problema de Kelvin. Através do teorema de Betti, equação 2.7, que está fundamentado na condição que o trabalho realizado pelas tensões de um estado A, sobre as deformações de um estado B é igual ao trabalho das tensões do estado B sobre as deformações do estado A, admitindo-se o mesmo material em ambos os estados:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^B \varepsilon_{ij}^A d\Omega \quad (2.7)$$

em que os termos que contém símbolo * estão relacionados às variáveis do problema fundamental de Kelvin e os que não contem o símbolo * estão relacionadas ao problema real.

Na figura 2.2 ilustra-se o domínio de um corpo elástico isótropo bidimensional, Ω , em meio infinito, Ω_{∞}^* , definido por um contorno Γ , onde são

desenvolvidos o estado de deslocamentos, deformações e tensões mediante as ações aplicadas.

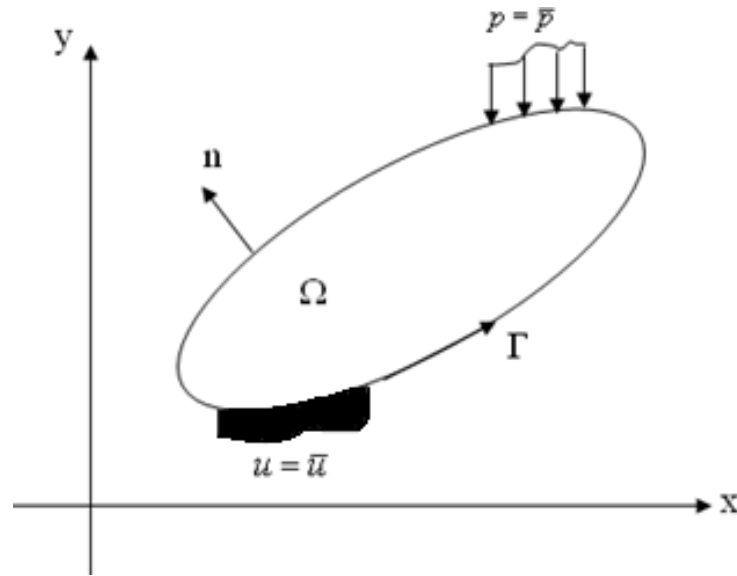


Figura 2.2 – Domínio corpo elástico bidimensional

Aplicando-se o teorema da reciprocidade de Betti (demonstrado no ANEXO II) e substituindo um dos estados do problema pelo problema fundamental e outro pelo problema real. Manipulando-se a equação 2.7 com o auxílio da relação deformação/deslocamento obtém-se à seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) u_{ij,k}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) u_{jk}(q) d\Omega \quad (2.8)$$

Integrando por partes a equação 2.7, obtém-se:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) u_{ij}^*(s, q) \eta_j d\Gamma = \\ - \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(q) u_j(s, q) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(q) u_j \eta_k(s, q) \eta_j d\Gamma \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo-se na equação 2.9 a equação 15 (ANEXO I), conhecida como equação Cauchy, para os dois estados em estudo, tem-se a:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega + \int_{\Gamma} p_j u_{ij}^*(s, q) d\Gamma = \\ - \int_{\Omega} \sigma_{ij,k}^*(q) u_j(s, q) d\Omega + \int_{\Gamma} u_j p_{ij}^*(s, q) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aplicando-se na expressão 2.10 a equação de equilíbrio para os dois estados, têm-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma = \\
& - \int_{\Omega} \delta(s, q) \delta_{ij} u_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_j p_{ij}^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\text{onde } \begin{cases} \sigma_{jk,k}(q) = -b_j \\ \sigma_{ijk,k}^* = -\delta(s, q) \delta_{ij} \end{cases} .$$

Rearranjando a equação 2.11 e resolvendo a primeira integral do segundo membro $\delta_{ij} u_j \int_{\Omega} \delta(s, q) d\Omega = \delta_{ij} u_j$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta(s, q) \delta_{ij} u_j d\Omega &= \int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j p_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega \\
\delta_{ij} u_j &= \int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j p_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega
\end{aligned} \tag{2.12}$$

como $\delta_{ij} u_j = u_i$ então :

$$u_i = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega$$

A equação 2.12 é denominada *Identidade Somigliana* e fornece os valores dos deslocamentos dos pontos internos em função dos valores de contorno e de forças de volume. Os termos u_{ij}^* e p_{ij}^* são valores de deslocamentos e forças de superfície conhecida, pois advém da resolução da equação diferencial parcial do problema elástico para certa combinação de condições de contorno. São expressões obtidas analiticamente. Caso não se considerem as forças de volume do problema em análise, a equação 2.12 simplifica-se como:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \tag{2.13}$$

que a não ser a parcela $u_i(s)$, as demais integrais são relativas apenas ao contorno.

Ao se aplicar a equação 2.10 na lei de Hooke obtém-se a equação integral de tensões para pontos internos cuja expressão é dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} p_{ik,i}^* + G(p_{ik,j}^* + p_{jk,i}^*) \right] u_k d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{ik,i}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] p_k d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{ik,i}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] b_k d\Omega
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Na equação 2.14 faz-se $b_k = 0$ (não considerando as forças de volume) obtendo-se a expressão para tensão de problemas elásticos bidimensionais.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} p_{ik,i}^* + G(p_{ik,j}^* + p_{jk,i}^*) \right] u_k d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{ik,i}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] p_k d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.15}$$

2.4 Equação Integral para Pontos do Contorno

A equação integral para pontos do contorno será deduzida a partir da Identidade Somigliana, equação 2.12. Na figura 2.3 apresenta-se um contorno expandido com um semicírculo de raio ε e seja s um ponto do contorno.

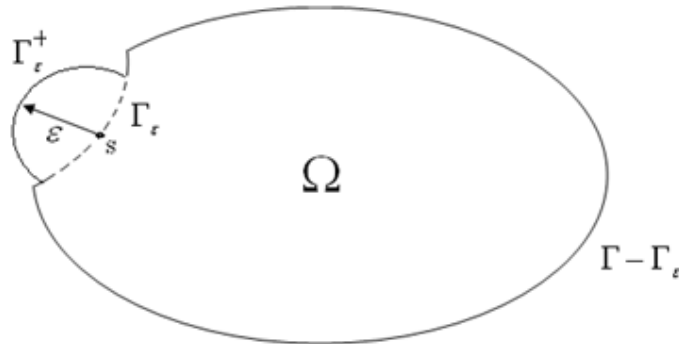


Figura 2.3 – Contorno expandido bidimensional

Com a inclusão do contorno Γ_ε , s torna-se um ponto do interno do domínio Ω . Assim, pode-se aplicar a Identidade Somigliana. Porém, para que seja utilizada, é necessário conhecer os valores dos deslocamentos e forças de superfície nos pontos pertencentes ao contorno. É possível calcular estes valores. Para isso, basta calcular o limite dessa expressão quando $s \in \Omega \rightarrow s \in \Gamma$.

Considerando a região circular no caso de problemas bidimensionais, ver figura 2.3, com contorno $\Gamma_{\varepsilon+}$, raio ε e centro s , têm-se o contorno expandido Γ^E que é dado por:

$$\Gamma^E = (\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}) + \Gamma_{\varepsilon+} \quad (2.16)$$

onde Γ_{ε} é a porção do contorno original que foi retirada. O comportamento das soluções fundamentais pode ser estudado tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e, por consequência, $\Gamma^E \rightarrow \Gamma$.

Assim, têm-se:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma^E} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma^E} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \quad (2.17)$$

Desmembrando-se a equação 2.13, utilizando-se o contorno expandido, obtém-se à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} u_i(s) = & - \int_{(\Gamma - \Gamma_{\varepsilon})} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma - \int_{(\Gamma_{\varepsilon+})} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \\ & + \int_{(\Gamma - \Gamma_{\varepsilon})} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma + \int_{(\Gamma_{\varepsilon+})} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para que $s \in \Gamma$ deve-se fazer $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja:

$$\begin{aligned} u_i(s) = & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma - \Gamma_{\varepsilon})} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma_{\varepsilon+})} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \right] \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma - \Gamma_{\varepsilon})} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma_{\varepsilon+})} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Analisando-se cada um dos limites expressos na equação 2.19, conclui-se que:

$$\text{i) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma - \Gamma_{\varepsilon})} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \right] = \int_{(\Gamma)} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma$$

Esta integral é avaliada na forma de uma integral imprópria, pois o tipo de singularidade presente é comumente denominada “singularidade fraca”. Nos problemas bidimensionais as singularidades são de ordem zero ($\ln(1/r)$). Portanto, é possível dividir essa integral em duas partes: uma singular e outra não singular. A parte não singular é integrada numericamente utilizando-se a quadratura de Gauss convencional

ou de forma analítica (ANEXO IV) desenvolvida neste trabalho. A parte singular é também integrada usando a quadratura de Gauss convencional, logarítmica ou como desenvolvida neste trabalho analiticamente (ANEXO V). Neste caso quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a

outra parcela do limite dada por $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma_\varepsilon)} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \right]$ tenderá a zero, pois, depende

do produto $r \ln\left(\frac{1}{r}\right) \rightarrow 0$ onde $r = |x(s) - x(p)|$ continuidade de Hölder (ANEXO VI),

uma vez que $r \rightarrow 0$.

$$\text{ii) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \right] = 0$$

Esta integral tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Esse resultado pode ser obtido empregando coordenadas polares para os casos bidimensionais.

$$\text{iii) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma - \Gamma_\varepsilon)} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \right] = \text{VPC} \left(\int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \right)$$

Esta integral tem singularidades de ordem zero (r^{-1}) em problemas bidimensionais. Neste caso, o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ não anulará estas integrais, ou seja, para resolvê-las devemos avaliar o (VPC) Valor Principal de Cauchy.

$$\begin{aligned} \text{iv) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{(\Gamma - \Gamma_\varepsilon)} p_{ij}^*(s, q) [u_j(q) - u_j(s)] d\Gamma \right\} \\ &+ u_j(s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} p_{ij}^*(s, q) d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Esta integral é regularizada pelo primeiro termo da expansão em série de Taylor em torno do ponto fonte, procedimento que conduz às duas parcelas de 2.20, onde a primeira integral do lado direito deve ser igual a zero pelo requisito de continuidade dos deslocamentos, isto é, obedece a condição de Hölder. A segunda integral gera um termo livre, dado por:

$$u_j(s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} p_{ij}^*(s, q) d\Gamma \right) = c_{ij}(s) u_j(s) \quad (2.21)$$

Finalmente, a equação integral de contorno para deslocamentos no contorno pode ser escrita na forma:

$$c_{ij}(s) u_j(s) = -VPC \left(\int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \right) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \quad (2.22)$$

onde $VPC \int_{\Gamma} (...) d\Gamma$ indica uma integral avaliada no sentido do Valor Principal de Cauchy. Para contornos bidimensionais “suaves”, como apresentado na figura 2.3, $c_{ij}(s)$ assume os seguintes valores: $c_{ij}(s) u_j(s) = \frac{1}{2} \delta_{ij} u_j(s)$. Estes valores podem ser obtidos analiticamente. Seja r a distância entre o ponto fonte s e um ponto p no contorno Γ_{ε^+} , usando-se coordenadas polares, tem-se às seguintes equações:

$$r = (\varepsilon \cos \theta) i + (\varepsilon \operatorname{sen} \theta) j \quad (2.23)$$

$$d\Gamma_{\varepsilon^+} = r d\theta = \varepsilon d\theta \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = r_{,1} \eta_1 + r_{,2} \eta_2 = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1 \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \cos \theta & \eta_2 &= \operatorname{sen} \theta \\ r_{,1} &= \cos \theta & r_{,2} &= \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituindo as equações 2.23 a 2.25, nas equações 2.6 e 2.21, respectivamente, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
c_{11}(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} p_{11}^*(s, q) d\Gamma \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\pi} \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu).1 + 2 \cos \theta \cos \theta] \varepsilon d\theta \right) + \right. \\
&\quad \left. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\pi} [(1-2\nu)(\cos^2 \theta - \cos^2 \theta)] \varepsilon d\theta \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\pi} \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu).1 + 2 \cos^2 \theta] \varepsilon d\theta \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu)\theta \Big|_0^{\pi} + (\text{sen } \theta \cos \theta + \theta) \Big|_0^{\pi} \right\} \\
&= -\frac{2\pi(1-\nu)}{4\pi(1-\nu)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
c_{12}(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} p_{12}^*(s, q) d\Gamma \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\pi} \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu).0 + 2 \cos \theta \text{sen } \theta] \varepsilon d\theta \right) + \right. \\
&\quad \left. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\pi} [(1-2\nu)(\cos \theta \text{sen } \theta - \cos \theta \text{sen } \theta)] \varepsilon d\theta \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\pi} [2 \cos \theta \text{sen } \theta] d\theta \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \int_0^{\pi} [\text{sen}(2\theta)] d\theta \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
c_{21}(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} p_{21}^*(s, q) d\Gamma \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^\pi \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu) \cdot 0 + 2\text{sen}\theta \cos\theta] \varepsilon d\theta \right) + \\ &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^\pi [(1-2\nu)(\text{sen}\theta \text{sen}\theta - \text{sen}\theta \cos\theta)] \varepsilon d\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.29) \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^\pi [2 \cos\theta \text{sen}\theta] d\theta \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \int_0^\pi [\text{sen}(2\theta)] d\theta \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{22}(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} p_{22}^*(s, q) d\Gamma \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^\pi \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu) \cdot 1 + 2\text{sen}\theta \text{sen}\theta] \varepsilon d\theta \right) + \\ &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^\pi [(1-2\nu)(\text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta)] \varepsilon d\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.30) \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^\pi [2\text{sen}^2\theta] d\theta \right) \right\} \\
&= -\frac{2\pi(1-\nu)}{4\pi(1-\nu)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pode-se então escrever o termo livre em função do delta de Kronecker, deste modo têm-se:

$$c_{ij}(s) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (2.31)$$

A equação 2.31 vale apenas para contornos suaves, mas em contornos não suaves, usam-se limites de integração diferentes do caso anterior, como será mostrado a seguir.

Nota-se na figura 2.4 que os limites de integração devem variar de φ_2 a φ_1 , que são os ângulos de varredura medidos do eixo para as tangentes t_1 a t_2 , respectivamente.

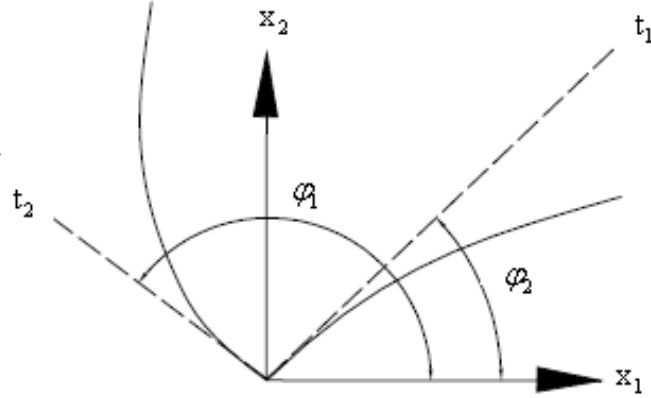


Figura 2.4 – Contorno não suave

Introduzindo-se os novos limites de integração nas equações de $c_{ij}(s)$ e resolvendo as integrais, têm-se:

$$\begin{aligned}
 c_{11}(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} p_{11}^*(s, q) d\Gamma \right) \\
 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu).1 + 2 \cos \varphi \cos \varphi] \varepsilon d\varphi \right) + \\ &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [(1-2\nu)(\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi)] \varepsilon d\varphi \right) \end{aligned} \right\} \\
 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [(1-2\nu) + 2 \cos \varphi \cos \varphi] d\varphi \right\} \tag{2.32} \\
 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu)\varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (\text{sen } \varphi \cos \varphi + \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right\} \\
 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} - \frac{\text{sen} 2\varphi_2 - \text{sen} 2\varphi_1}{8\pi(1-\nu)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{12}(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} p_{12}^*(s, q) d\Gamma \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu).0 + 2 \cos \varphi \text{sen} \varphi] \varepsilon d\varphi \right) + \\ &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [(1-2\nu)(\cos \varphi \text{sen} \varphi - \text{sen} \varphi \cos \varphi)] \varepsilon d\varphi \right) \end{aligned} \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\text{sen} 2\varphi] d\varphi \right\} \tag{2.33} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu)\varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (\text{sen} \varphi \cos \varphi + \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{1}{2} (-2\text{sen}^2 \varphi_2 + 2\text{sen}^2 \varphi_1) \right\} \\
&= \frac{\text{sen}^2 \varphi_1 - \text{sen}^2 \varphi_2}{4\pi(1-\nu)}
\end{aligned}$$

Como a matriz $c_{ij}(s)$ é simétrica então $c_{12}(s) = c_{21}(s)$

$$\begin{aligned}
c_{22}(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{(\Gamma_{\varepsilon^+})} p_{22}^*(s, q) d\Gamma \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu).1 + 2\text{sen} \varphi \text{sen} \varphi] \varepsilon d\varphi \right) + \\ &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [(1-2\nu)(\text{sen}^2 \varphi - \text{sen}^2 \varphi)] \varepsilon d\varphi \right) \end{aligned} \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [(1-2\nu) + 2\text{sen}^2 \varphi] d\varphi \right\} \tag{2.34} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu)\varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (-\text{sen} \varphi \cos \varphi + \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ 2(\varphi_2 - \varphi_1)(1-2\nu) - \frac{1}{2} (\text{sen} 2\varphi_2 - \text{sen} 2\varphi_1) \right\} \\
&= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} + \frac{\text{sen} 2\varphi_2 - \text{sen} 2\varphi_1}{8\pi(1-\nu)}
\end{aligned}$$

De forma matricial pode-se escrever:

$$c_{ij}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} - \frac{\text{sen}2\varphi_2 - \text{sen}2\varphi_1}{8\pi(1-\nu)} & \frac{\text{sen}^2\varphi_1 - \text{sen}^2\varphi_2}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\text{sen}^2\varphi_1 - \text{sen}^2\varphi_2}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} + \frac{\text{sen}2\varphi_2 - \text{sen}2\varphi_1}{8\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

A equação 2.35 é uma equação geral para pontos do contorno, isto é, através desta equação obtém-se aos valores de $c_{ij}(s)$ para os seguintes casos:

i) se o ponto fonte s é ponto de um contorno suave então:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 = \pi \\ \text{sen}\varphi_1 &= -\text{sen}\varphi_2 \text{ e } \cos\varphi_1 = -\cos\varphi_2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Substituindo-se 2.36 em 2.35, tem-se a:

$$c_{ij}(s) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

ii) se o ponto fonte s é ponto de um canto de 90° então:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\pi}{2} \text{ e } \varphi_2 = 0 \\ \text{sen}(2\varphi_1) &= 0 \text{ e } \text{sen}(2\varphi_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Substituindo-se 2.37 em 2.35, obtém-se à equação 2.38.

$$c_{ij}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{1}{4\pi(1-\nu)} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (2.38)$$

CAPÍTULO 3

MÉTODO DO ELEMENOS DE CONTORNO(MEC)

3.1 Introdução

Para que as equações integrais sejam calculadas numericamente, o contorno deve ser discretizado em uma série de elementos. Nestes elementos, tanto a geometria quanto a variação (campo) das incógnitas (deslocamentos, forças de superfícies) devem ser interpoladas a partir de uma série de pontos onde os valores incógnitos são considerados. Estes pontos são denominados nós e os valores que as incógnitas assumem nos mesmo são chamados de valores nodais. A figura 3.1 ilustra o elemento linear e o quadrático em coordenadas globais e locais. Para cada elemento é conveniente definir um sistema de coordenadas locais que segue a direção do elemento, zero no centro e igual ± 1 nas extremidades.

De acordo com o grau de aproximação da geometria, os elementos podem ser classificados em constantes, lineares, quadráticos, cúbicos ou de ordem superior (grau maior ou igual a quatro). Além disso, é possível admitir que os graus de aproximação de geometria e variáveis sejam diferentes, caracterizando os elementos isoparamétricos, subparamétrico ou superparamétricos.

Os elementos quadráticos isoparamétricos apresentam a melhor relação precisão/eficiência na maioria das aplicações envolvendo análise de tensões, Becker (1992). Para o objetivo desta tese, a utilização dos elementos lineares isoparamétricos foi suficiente.

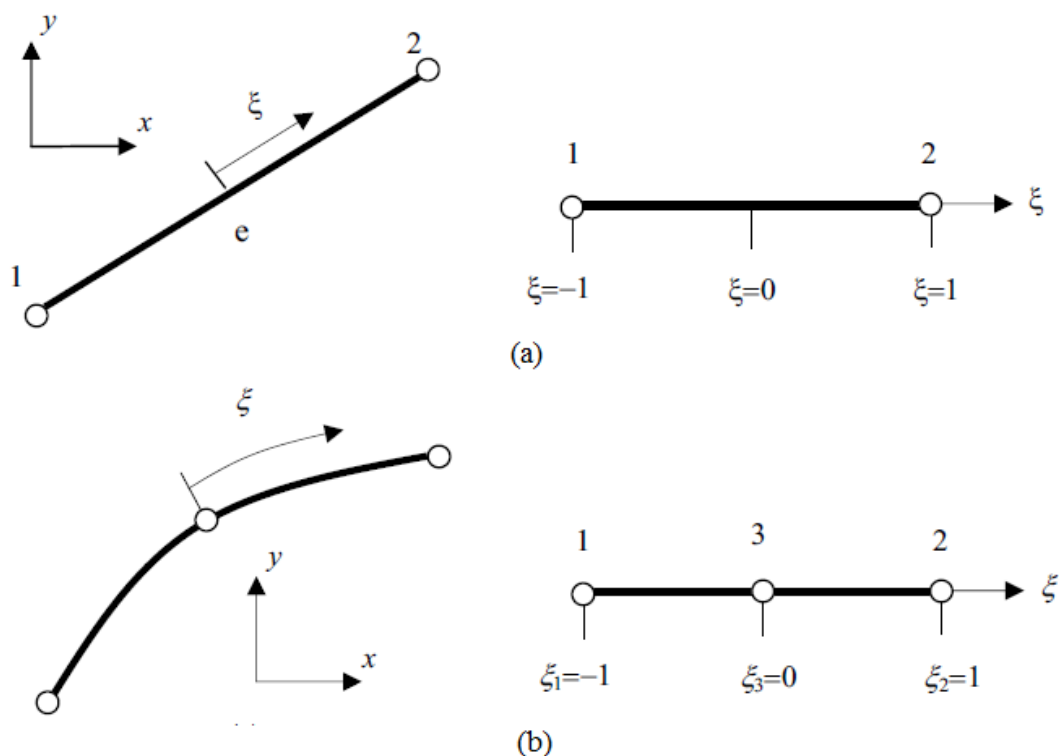


Figura 3.1 – Elementos de Contorno – (a) Linear – coordenadas globais e coordenadas locais (b) Quadrático-coordenadas globais e locais.

As equações integrais de contorno, desenvolvidas até o momento, só podem ser resolvidas analiticamente para problemas muito simples. Para problemas de geometria e carregamentos mais complexos, somente a utilização de métodos numéricos permite resolvê-las. Assim, vários métodos numéricos têm sido desenvolvidos visando à solução desses problemas. Entre eles, podem ser citados o Método de Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Métodos sem Malha (MESHLESS). O MDF trata a equação diferencial que rege um problema aproximando suas derivadas. Para isso, utiliza-se uma expansão em série de Taylor truncada, exprimindo as derivadas em termos de valores num certo número de pontos discretos. Isto resulta numa série de equações algébricas, as quais são aplicadas as condições de contorno para solução do problema. A principal dificuldade deste método está relacionada com as geometrias curvas e nas aplicações das condições de contorno irregulares. Além disso, surgiram métodos numéricos mais eficientes, por isso, está sendo pouco usado no meio científico apesar das aplicações em problemas viscoelásticos, resoluções de equações diferenciais parciais e integração temporal. O MEF encontra-se num estágio bastante avançado, constituindo-se, no método numérico

mais utilizado pelos engenheiros para solução de diversos tipos de problemas. No entanto, a imprecisão por vezes existente nos resultados para problemas tridimensionais, na modelagem de regiões infinitas e em problemas com contorno móveis proporcionou o aparecimento do MEC que foi desenvolvido como uma resposta às dificuldades apresentadas. Este método se apresenta como uma poderosa ferramenta para resolução de problemas físicos habituais das engenharias.

Devido à precisão e confiabilidade na modelagem de problemas de domínio infinito, precisão nas grandezas internas, sistema algébrico menor, mas não esparso e a redução da dimensionalidade e a facilidade de associar-se com outros métodos numéricos o MEC vem ganhando espaço e credibilidade nos principais centros de pesquisas, principalmente em áreas como: mecânica da fratura, mecânica das estruturas e mecânica dos solos.

No sentido de aliviar a necessidade de refazer a malha de problemas de deformação em movimento, tem havido um interesse significativo no desenvolvimento e aplicação dos métodos sem Malha (MESHLESS).

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos e a formulação do MEC. Para tanto, além das referências bibliográficas citadas no capítulo anterior, incluem-se ainda as seguintes referências: Telles (1987), Kane (1994), Hall (1994), Almeida (2003), Ferreira (2007).

3.2 Discretização Numérica

Para resolver numericamente a equação integral para o problema elástico através do MEC, o primeiro passo nesse procedimento é dividir o contorno em segmentos (elementos) com deslocamentos e forças de superfícies escritas em função de seus valores em uma série de pontos discretos sobre o contorno (nós), como ilustrado na figura 3.2.

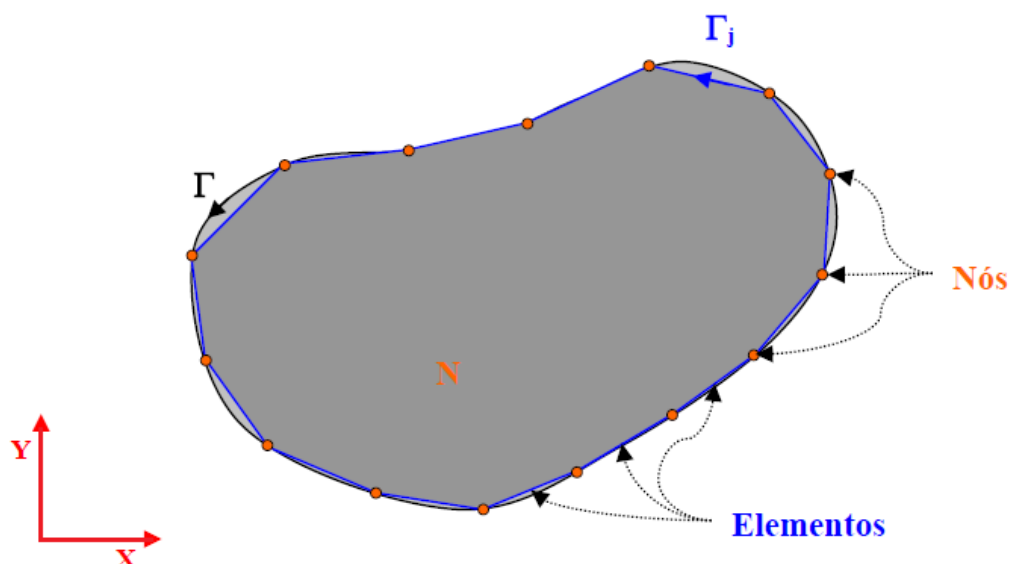


Figura 3.2 – Discretização do contorno, Ferreira (2007)

É importante lembrar que ao aproximar o contorno em elementos utilizam-se de dois tipos distintos de aproximação: as funções interpoladoras das variáveis do problema e as funções interpoladoras da geometria do contorno. Estas funções são as mesmas lagrangianas utilizadas na formulação do MEF.

Deste modo, podem-se classificar os elementos em constantes, lineares, quadráticos e de ordem superior, de acordo com o grau da função interpoladora. Além disso, pode-se admitir que o grau das funções interpoladoras de geometria e variáveis sejam diferentes, caracterizando os elementos subparamétricos, isoparamétricos e superparamétricos.

Assim, após a discretização a equação 2.22 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$[c]\{u\}^P + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [p^*]\{u\} d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*]\{p\} d\Gamma_j \right) \quad (3.1)$$

em que NE representa o número de elementos utilizados na discretização do contorno e P é o ponto fonte considerado e $[c]$ é matriz do termo livre.

3.2.1 Funções de Interpolação

A adoção de funções interpoladoras consiste em se utilizar uma função local parametrizada para cada elemento que assume valores unitários nos nós base, valores nulos nos demais nós base e valores entre 0 e 1 entre os nós. É adotado um sistema de coordenadas homogêneas como mostra a figura 3.3. Para desenvolvimento deste

trabalho adotou-se o elemento linear isoparamétrico. Nesse tipo de formulação o parâmetro geométrico, as incógnitas de deslocamentos e as forças de superfícies são aproximadas usando-se a mesma função de interpolação.

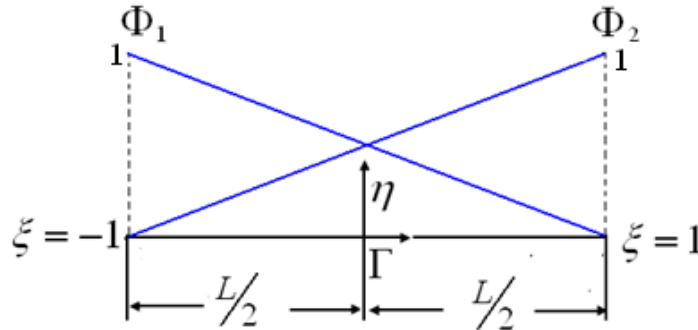


Figura 3.3 – Funções de forma do elemento linear

Em geral, estas funções de interpolação são derivadas de polinômios Lagrangianos, que são definidos, para grau $m-1$, como:

$$\phi_k(\xi) = \frac{\prod_{i=0, i \neq k}^m (\xi - \xi_i)}{\prod_{i=0, i \neq k}^m (\xi_k - \xi_i)} \quad (3.2)$$

As equações 3.3 e 3.4 representam as funções de interpolação para elementos lineares e são assim expressas:

$$\phi_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad (3.3)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.4)$$

Desta forma, podem-se escrever os deslocamentos, forças de superfície e a geometria da seguinte forma:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{u\}_n^j \quad (3.5)$$

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{p\}_n^j \quad (3.6)$$

$$\{\bar{x}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^1 \\ y^1 \\ x^2 \\ y^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{\bar{x}\}_n^j \quad (3.7)$$

Substituindo-se as equações 3.5 e 3.6 em 3.1 obtém-se a:

$$[c][\Phi]^P \{u\}_n^P + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [p^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{p\}_n^j \quad (3.8)$$

As integrais da equação 3.8 relacionam os deslocamentos do ponto de colocação, a força de superfície e deslocamentos nodais em qualquer elemento j . Por isso, são denominadas matrizes de influência e seus valores resultantes representar-se-ão por:

$$[H]^{pj} = \int_{\Gamma_j} [p^*][\Phi] d\Gamma_j \quad (3.9)$$

$$[G]^{pj} = \int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi] d\Gamma_j \quad (3.10)$$

Substituindo-se as equações 3.9 e 3.10 em 3.8 e considerando que:

$$[H] = \begin{cases} [H]^{pj} & \text{se } j \notin \Gamma \\ [H]^{pj} + [c][\Phi]^P & \text{se } j \in \Gamma \end{cases} \quad (3.11)$$

Obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{NE} [H]^{pj} \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} [G]^{pj} \{p\}_n^j \quad (3.12)$$

Que na sua forma tradicional é escrito como:

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} \quad (3.13)$$

3.2.2 Formação do Sistema de Equações

Para resolver o sistema linear apresentado na equação 3.13 é necessário à aplicação das condições de contorno. Para isto, o sistema matricial deve ser manipulado de tal forma que os valores incógnitos se concentrem de um lado e os valores prescritos do outro. Isto é feito trocando as colunas das matrizes $[H]$ e $[G]$, obtendo a seguinte forma.

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (3.14)$$

onde: $[A]$ é a matriz modificada formada pelas colunas de $[H]$ e $[G]$, $\{x\}$ é o valor das incógnitas, $\{b\}$ é vetor formado pelas colunas de $[H]$ e $[G]$ multiplicadas pelos valores prescritos.

Para resolver este sistema linear, utiliza-se um algoritmo de resolução de sistemas adequado, sabendo que esta matriz $[A]$ é não esparsa. Para o presente trabalho utilizou um algoritmo presente na biblioteca matemática da linguagem de programação FORTRAN para resolução de sistemas.

3.2.3 Formação do sistema de equações algébricas – Elementos Lineares

Com o objetivo didático de mostrar a formação do sistema linear para elementos lineares de contorno, utiliza-se um contorno triangular com três elementos lineares conforme figura 3.4

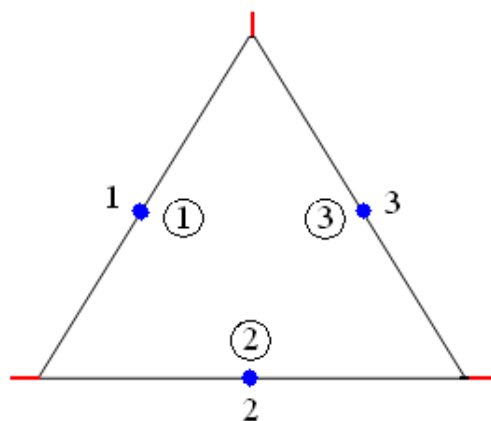


Figura 3.4 – Malha formada para Elementos de Contorno Lineares.

Fazendo uso da seguinte equação:

$$c_{ij}^p u_j^p + \sum_{n=1}^{NE} \sum_{\beta=1}^m H_{ij}^{pn\beta} u_j^{n\beta} = \sum_{n=1}^{NE} \sum_{\beta=1}^m G_{ij}^{pn\beta} p_j^{n\beta} \quad \text{para } p = 1, 2, \dots, NN \quad (3.15)$$

Onde NN representa o número total de nós do contorno, $H_{ij}^{pn\beta}$ e $G_{ij}^{pn\beta}$ são definidas em termos das integrais das soluções fundamentais sobre os segmentos de contorno Γ_n (com $d\Gamma_n = J_n(\xi)d\xi$, com $J_n(\xi)$ o jacobiano das transformações das coordenadas), dado pelas expressões:

$$H_{ij}^{n\beta} = \int_{-1}^1 N_{\beta}(\xi) p_{ij} J_n(\xi) d\xi \quad (3.16)$$

$$G_{ij}^{n\beta} = \int_{-1}^1 N_{\beta}(\xi) u_{ij} J_n(\xi) d\xi \quad (3.17)$$

O Jacobiano da transformação de coordenadas é dado por:

$$J_n(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (3.18)$$

Para resolver a equação 3.15 usa-se o método de colocação pontual, isto é, essa equação é avaliada nos pontos nodais x^k , para $k = 1, 2, \dots, NN$, onde NN representa o número total de nós de contorno, criando, desse modo, um sistema de equações algébricas que será resolvido após a aplicação das condições de contorno prescrita do problema. Mostra-se a seguir a aplicação da equação 3.15 na resolução de elementos lineares na malha triangular indicada na figura 3.4.

Aplicando a equação 3.28, quando o ponto fonte é o nó 1, tem-se:

$$c_{11}^1 u_1^1 + c_{12}^1 u_2^1 + \sum_{n=1}^{NE=3} (H_{11}^{1n1} u_1^{n1} + H_{12}^{1n1} u_2^{n1} + H_{11}^{1n2} u_1^{n2} + H_{12}^{1n2} u_2^{n2}) = \sum_{n=1}^{NE=3} (G_{11}^{1n1} p_1^{n1} + G_{12}^{1n1} p_2^{n1} + G_{11}^{1n2} p_1^{n2} + G_{12}^{1n2} p_2^{n2}) \quad (3.19)$$

$$c_{21}^1 u_1^1 + c_{22}^1 u_2^1 + \sum_{n=1}^{NE=3} (H_{21}^{1n1} u_1^{n1} + H_{22}^{1n1} u_2^{n1} + H_{21}^{1n2} u_1^{n2} + H_{22}^{1n2} u_2^{n2}) = \sum_{n=1}^{NE=3} (G_{21}^{1n1} p_1^{n1} + G_{22}^{1n1} p_2^{n1} + G_{21}^{1n2} p_1^{n2} + G_{22}^{1n2} p_2^{n2}) \quad (3.20)$$

Deste modo, a forma matricial dessas equações são expressas por:

$$\begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{NE=3} \begin{bmatrix} H_{11}^{1n1} & H_{12}^{1n1} & H_{11}^{1n2} & H_{12}^{1n2} \\ H_{21}^{1n1} & H_{22}^{1n1} & H_{21}^{1n2} & H_{22}^{1n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{NE=3} \begin{bmatrix} G_{11}^{1n1} & G_{12}^{1n1} & G_{11}^{1n2} & G_{12}^{1n2} \\ G_{21}^{1n1} & G_{22}^{1n1} & G_{21}^{1n2} & G_{22}^{1n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^{n1} \\ p_2^{n1} \\ p_1^{n2} \\ p_2^{n2} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Para o nó 2 tem se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 \\ c_{21}^2 & c_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{NE=3} \begin{bmatrix} H_{11}^{2n1} & H_{12}^{2n1} & H_{11}^{2n2} & H_{12}^{2n2} \\ H_{21}^{2n1} & H_{22}^{2n1} & H_{21}^{2n2} & H_{22}^{2n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} = \\ & \sum_{n=1}^{NE=3} \begin{bmatrix} G_{11}^{2n1} & G_{12}^{2n1} & G_{11}^{2n2} & G_{12}^{2n2} \\ G_{21}^{2n1} & G_{22}^{2n1} & G_{21}^{2n2} & G_{22}^{2n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^{n1} \\ p_2^{n1} \\ p_1^{n2} \\ p_2^{n2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para o nó 3 tem se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{11}^3 & c_{12}^3 \\ c_{21}^3 & c_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{NE=3} \begin{bmatrix} H_{11}^{3n1} & H_{12}^{3n1} & H_{11}^{3n2} & H_{12}^{3n2} \\ H_{21}^{3n1} & H_{22}^{3n1} & H_{21}^{3n2} & H_{22}^{3n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} = \\ & \sum_{n=1}^{NE=3} \begin{bmatrix} G_{11}^{3n1} & G_{12}^{3n1} & G_{11}^{3n2} & G_{12}^{3n2} \\ G_{21}^{3n1} & G_{22}^{3n1} & G_{21}^{3n2} & G_{22}^{3n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^{n1} \\ p_2^{n1} \\ p_1^{n2} \\ p_2^{n2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Assim, pode-se escrever ainda:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{11}^c & c_{12}^c \\ c_{21}^c & c_{22}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{NE=3} \begin{bmatrix} H_{11}^{cn1} & H_{12}^{cn1} & H_{11}^{cn2} & H_{12}^{cn2} \\ H_{21}^{cn1} & H_{22}^{cn1} & H_{21}^{cn2} & H_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} = \\ & \sum_{n=1}^{NE=3} \begin{bmatrix} G_{11}^{cn1} & G_{12}^{cn1} & G_{11}^{cn2} & G_{12}^{cn2} \\ G_{21}^{cn1} & G_{22}^{cn1} & G_{21}^{cn2} & G_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^{n1} \\ p_2^{n1} \\ p_1^{n2} \\ p_2^{n2} \end{Bmatrix} \quad c = 1, 2, \dots, NN \end{aligned}$$

Sabendo que alguns nós são comuns entre os elementos e que os deslocamentos são definidos de maneira única nesses nós, então, pode-se escrever o somatório à esquerda na equação anterior da seguinte maneira:

$$\sum_{n=1}^{NE=3} \left(\begin{bmatrix} H_{11}^{cn1} & H_{12}^{cn1} \\ H_{21}^{cn1} & H_{22}^{cn1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{cn2} & H_{12}^{cn2} \\ H_{21}^{cn2} & H_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} \right) \quad c = 1, 2, \dots, NN$$

Ao expandir este somatório e agrupar as contribuições dos nós comuns a cada elemento, isto é: o nó 2 do elemento 1 é o nó 1 do elemento 2, o nó 2 do elemento 2 é o

nó 3 do elemento 3 e o nó 2 do elemento 3 é o nó 1 do elemento 1, adotando uma notação do tipo nó pode-se escrever a equação geral da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} c_{11}^c & c_{12}^c \\ c_{21}^c & c_{22}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^c \\ u_2^c \end{Bmatrix} + \sum_{\gamma=1}^{NN=3} \begin{bmatrix} H_{11}^{c\gamma} & H_{12}^{c\gamma} \\ H_{21}^{c\gamma} & H_{22}^{c\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\gamma \\ u_2^\gamma \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{NE=3} \int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} G_{11}^{cn1} & G_{12}^{cn1} & G_{11}^{cn2} & G_{12}^{cn2} \\ G_{21}^{cn1} & G_{22}^{cn1} & G_{21}^{cn2} & G_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^{n1} \\ p_2^{n1} \\ p_1^{n2} \\ p_2^{n2} \end{Bmatrix} \quad e \ c = 1, 2, \dots, NN$$

Agrupando todos os deslocamentos incógnitos tem-se:

$$\sum_{\gamma=1}^{NN=3} \begin{bmatrix} H_{11}^{c\gamma} & H_{12}^{c\gamma} \\ H_{21}^{c\gamma} & H_{22}^{c\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\gamma \\ u_2^\gamma \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{NE=3} \int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} G_{11}^{cn1} & G_{12}^{cn1} & G_{11}^{cn2} & G_{12}^{cn2} \\ G_{21}^{cn1} & G_{22}^{cn1} & G_{21}^{cn2} & G_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^{n1} \\ p_2^{n1} \\ p_1^{n2} \\ p_2^{n2} \end{Bmatrix} \quad e \ c = 1, 2, \dots, NN$$

A equação anterior pode ser reescrita na forma $Hu = Gp$ com H uma matriz de ordem $2NN$, G uma matriz de ordem $2NN \times 4NE$, u é um vetor com $2NN$ componentes e p é um vetor com $4NE$ componentes.

3.2.4 Pontos de Colocação

Sabe-se que para montagem do sistema algébrico, quaisquer pontos de colocação serviriam. Para este caso, usa-se a técnica de subelementação para minimizar o erro das integrais numéricas. Um problema na resolução das integrais singulares que é o VPC (valor principal de Cauchy). No entanto, se estas integrais forem resolvidas analiticamente o resultado obtido será melhor do que resultado apresentado pela integração numérica, justificando, assim, o desenvolvimento das deduções dessas integrais.

3.2.5 Deslocamentos em pontos internos

Depois de resolvido o sistema algébrico determinando o valores de u e p no contorno os valores das forças e dos deslocamentos são conhecidos.

Usando a equação Somigliana calculam-se os deslocamentos e as tensões dos pontos internos em função dos deslocamentos e forças de superfícies nodais. Deste modo, os deslocamentos na forma discretizada podem ser calculados usando a equação 3.24.

$$u_i^p = \sum_{n=1}^{NE} \sum_{\beta=1}^m G^{pn\beta} p_j^{n\beta} - \sum_{\gamma=1}^{NN} H_{ij}^{p\gamma} u_j^\gamma \quad (3.24)$$

3.2.6 Tensões em pontos internos

Para calcular as tensões em pontos internos usam-se as equações constitutivas, transformadas com a aplicação da relação deformação/deslocamento dada pela expressão 3.25.

$$\sigma_{ij}^k = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} u_{l,l} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.25)$$

Manipulando-se os termos de deslocamentos da equação 3.25 na equação Somigliana e desprezando o termo de domínio, tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^k = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} p_k d\Gamma + \\ \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} u_k d\Gamma \end{aligned} \quad (3.26)$$

Reescrevendo a equação 3.26 na forma matricial obtém-se a expressão:

$$\{\sigma\}^p = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{NE} [D]^{ijk} \{p\}_n^k - \sum_{j=1}^{NE} [S]^{ijk} \{u\}_n^k \quad (3.27)$$

onde $[D]^{ijk}$ e $[S]^{ijk}$ são matrizes cuja expressão discretizada de seus elementos são determinadas por:

$$\begin{aligned} [D]^{ijk} = \begin{bmatrix} D_{111} & D_{211} \\ D_{112} & D_{212} \\ D_{122} & D_{222} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,i} \delta_{jk}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] d\Gamma \quad (3.28) \\ [S]^{ijk} = \begin{bmatrix} S_{111} & S_{211} \\ S_{112} & S_{212} \\ S_{122} & S_{222} \end{bmatrix} \\ = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{aligned} & 2r_{,n} \left[(1-2\nu) \delta_{jk} r_{,i} + \nu (\delta_{ji} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j}) + 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \\ & + 2\nu (n_j r_{,k} r_{,i} + n_k r_{,j} r_{,i}) \\ & + (1-2\nu) (n_i r_{,j} r_{,k} + n_k \delta_{ji} + n_j \delta_{ki}) - (1-4\nu) n_i \delta_{jk} \end{aligned} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.29)$$

Onde $r_{,n}$ indica a derivada do raio na direção do vetor unitário normal ao elemento. Deste modo, as tensões na forma discretizada podem ser calculados usando, respectivamente, as equações 3.30.

$$\sigma_{ij}^p = \sum_{n=1}^{NE} \sum_{\beta=1}^m D_{ijk}^{pn\beta} p_j^{n\beta} - \sum_{\gamma=1}^{NN} S_{ijk}^{p\gamma} u_j^{\gamma} \quad (3.30)$$

3.2.7 Tensões nos nós do contorno e deformações em pontos internos

Sabe-se que existem problemas de indeterminação dos valores de tensão para as extremidades dos elementos de contorno. Para efeito de pós-processamento, mapas de tensão e isolinhas de tensão são necessários que alguns valores de tensão sejam atribuídos às extremidades dos elementos. Tem-se, então, que isto implicaria num erro considerável. Entretanto, para análises e estudos dos resultados dos exemplos simulados, as tensões que são empregadas são aquelas encontradas em pontos internos ou em pontos localizados no contorno, não coincidindo estes sobre os nós do contorno. Assim, para determinar as deformações em pontos internos e do contorno conhecendo-se o vetor de tensões do ponto em questão, basta aplicar a lei de Hooke e se obtém as respectivas deformações do ponto.

CAPÍTULO 4

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA VIA MEC USANDO UMA ABORDAGEM SIMPLES DE SUB-REGIÃO

4.1 Introdução

Nas últimas duas décadas, ocorreram algumas discussões a respeito da validade do ESO (Evolutionary Structural Optimization) como um método de otimização em relação aos métodos de otimização que usam a sensibilidade de uma função objetivo. Isto, deve-se a sua heurística de remoção e/ou adição de material realizada com critério de tensões locais. Apesar disso, a técnica ESO vem se mantendo popular devido à sua simplicidade e extensa evidência empírica do fato de que suas soluções ótimas se assemelham às soluções obtidas pelos métodos clássicos mais rigorosos de otimização.

Esta tese lida com uma abordagem diferente no campo da otimização de topologia em problemas de elasticidade plana, utilizando o método dos elementos de contorno (MEC). O problema de otimização topológica é resolvido com a técnica numérica denominada ESO, a qual é acoplada com a formulação do MEC para cálculo das tensões em pontos internos que possibilitará o desenvolvimento de uma estratégia para representar as regiões que devem ser eliminadas durante a OT. A presente formulação apresenta algumas vantagens em relação aos métodos propostos, uma vez que não é necessário refazer a malha em cada passo, pois seu domínio é fixo. Desta forma, a velocidade do procedimento de otimização é bem maior que o Método Level Set (MLS) acoplados ao MEC. Destaca-se também que não houve necessidade da implementação e utilização de filtros, nem a necessidade de refinamento do grid para se

capturar a topologia ótima da estrutura, pois não há dependência da malha nesta formulação. O contorno é discretizado com elementos lineares e as cavidades são criadas automaticamente em pontos internos de baixa tensão e são sub-regiões convexas, neste trabalho, uma sub-região hexagonal cujas arestas são também elementos lineares de contorno.

4.2 Otimização Estrutural Evolucionária usando MEC

Nesta tese a OT será tratada na sua abordagem macro (geométrica), a topologia da estrutura é modificada através da inserção de vazios no domínio. Como exemplo deste grupo de OT pode-se citar o ESO, Xie and Steven (1996), Chu *et al.* (1996), Christie *et al.* (1998), Liang *et al.* (2000), Reynolds *et al.* (1999), Canfield and Frecker (2000), Querin, (1997), Querin *et al.* (2000a,b), Rong *et al.* (2000), Almeida *et al.* (2013), Simonetti *et al.* (2014). Neste método, o domínio é discretizado usando uma malha de elementos finitos e os elementos submetidos a um estado de tensão de menor intensidade para a estrutura são removidos com base em critérios heurísticos de modo que a configuração ótima em última análise é obtida na forma de um subconjunto ótimo de elementos finitos.

O procedimento utilizado por Xie e Steven (1996) foi adaptado para análise de Otimização Topológica via MEC. Assim, os parâmetros de interesse para o problema de otimização são avaliados num processo iterativo, a fim de diminuir o volume através da utilização do critério de tensão máxima da estrutura. Deste modo, a densidade não é levada em consideração, senão $\int_{\Omega} bu^* d\Omega$ deveria ser calculada. Uma malha inicial de elementos lineares de contorno circunscreve toda a estrutura, incluindo as condições de contorno (forças, deslocamentos, cavidades e outras condições iniciais) e é definido um número de pontos internos (NPI) preenchendo todo o domínio.

Assim, o problema é resolvido de forma evolucionária numa análise elástica usando MEC; a tensão de Von Mises é calculada em cada ponto interno. Deste modo, os pontos internos cuja tensão atende a desigualdade 4.1 devem ser eliminados do domínio. Consequentemente, para cada ponto interno que atende esta desigualdade, uma sub-região hexagonal, cujas arestas são elementos lineares de contorno é criada para fazer o buraco na estrutura.

$$\sigma_e^{vm} < RR_k \cdot (\sigma_{i,max}^{vm}) \quad (4.1)$$

$$RR_{k+1} = RR_k + ER \quad (4.2)$$

onde σ_e^{vm} representa a tensão máxima de von Mises do elementos, $\sigma_{i,max}^{vm}$ representa a tensão máxima de Von Mises da estrutura, RR é a razão de rejeição e ER a razão evolucionária. A razão evolucionária ER , definida na equação 4.2, é usada para controlar o processo de inclusão de uma sub-região.

Em cada iteração o problema é resolvido elasticamente considerando as sub-regiões inseridas no domínio “cavidade hexagonal”, utilizando o procedimento referido no passo 3 do algoritmo resumido mostrado adiante. O mesmo ciclo de remover as sub-regiões usadas pela desigualdade 4.1 é repetido até que não haja mais regiões que satisfaçam está desigualdade; quando isto ocorre, um estado de equilíbrio é atingido. Este procedimento é conhecido como "hard-kill" e pode ser interpretado como se segue:

$$D(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in \Gamma \\ 0 & \text{se } j \in \bar{\Gamma} \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $D(j)$ é a matriz constitutiva da sub-região $j \in \Omega$, D_0 é a matriz constitutiva inicial, $\Omega = \Gamma + \bar{\Gamma}$ é o domínio da estrutura, $\Gamma = \{\Omega / (\sigma_e^{vm} / \sigma_{max}^{vm}(\Omega)) \geq RR\}$ representa a quantidade de sub-regiões que não serão inseridas na estrutura (sólido), isto é, toda região onde não serão criadas as cavidades e $\bar{\Gamma} = \Omega - \Gamma = \{\Omega / (\sigma_e^{vm} / \sigma_{max}^{vm}(\Omega)) < RR\}$ é a quantidade de sub-regiões que serão inseridas nas estrutura para criação de buracos e remoção dos pontos internos.

Resumidamente, o algoritmo do procedimento evolucionário pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Análise de MEC – Discretizar o contorno com elementos lineares, gerar os pontos internos do domínio (NPI), definir o volume final desejado;
2. Resolver o problema elástico linear, aplicando as condições de contorno, essenciais e/ou naturais;
3. Determinar a tensão de Von Mises em todos os pontos internos e calcular a máxima tensão da estrutura;
4. Remover as sub-regiões que atendem a desigualdade $\sigma_e^{vm} < RR_k (\sigma_{i,max}^{vm})$;
5. Atualizar $RR = RR + ER$;
6. Enquanto $V_i > V_{final}$, repetir as etapas 3 a 6; (até que um estado de equilíbrio seja alcançado), plotar a topologia final.

4.3 Criação de Cavidades

A equação 4.2 além de controlar o processo evolutivo, na presente formulação de OT via MEC, controlará também a criação de cavidades.

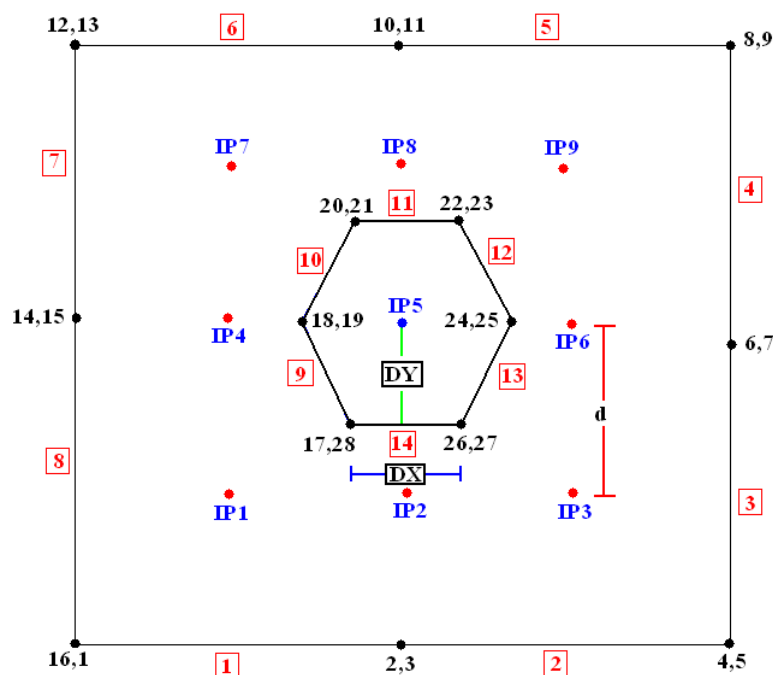


Figura 4.1 – Criação da Cavidade Hexagonal

Na figura 4.1 tem-se: DY é a distância do ponto interno IP5 ao elemento 14, DX é o comprimento do elemento 14 e d representa a distância entre dois pontos internos. Considerando o ponto interno IP5 atendendo a desigualdade 4.1 faz-se necessária a criação da sub-região em torno deste ponto, ver figura 4.1. Assim, os elementos 11 e 14 tem comprimento $L = DX$ e os outros elementos são calculados usando a expressão:

$$L = \sqrt{\left(\frac{DX}{2}\right)^2 + (DY)^2} \quad (4.4)$$

Deste modo, tomando $0 < DY < \frac{d}{2}$ as regiões adjacentes não se interceptarão evitando a necessidade de acoplamento dessas regiões. Considerando $DY = \frac{DX \cdot \sqrt{3}}{2}$ a sub-região será hexagonal regular. Se $DY = \frac{d}{2}$, então o hexágono não será regular, mas terá a maior área sem que haja a interseção de sub-regiões.

A seguir, através da figura 4.2, é apresentado um fluxograma com o processo de criação de cavidades.

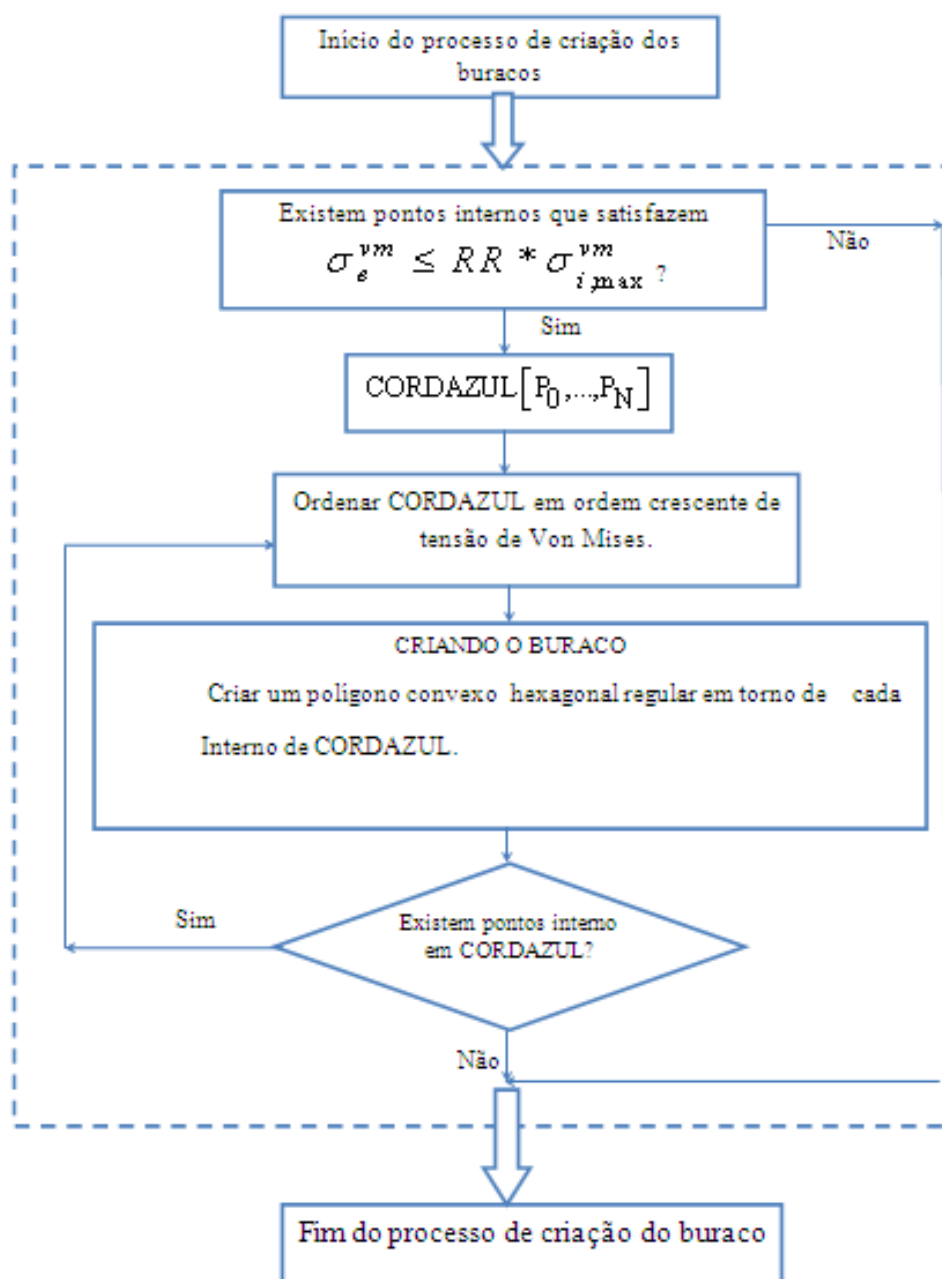


Figura 4.2 – Fluxograma do processo de criação de cavidades

Observa-se que com esta forma de criar buracos os problemas com a dependência da malha e o tabuleiro de xadrez, instabilidades numéricas frequentes nos problemas de OT usando elementos finitos, não ocorreram durante o processo de otimização. Destaca-se ainda que durante o procedimento de otimização não são retirados elementos da malha inicial de contorno, pois a eficiência do MEC para calcular as tensões em pontos internos proporciona um caminho para o ótimo como poderá ser verificado nos exemplos numéricos apresentados.

4.4 Exemplos Numéricos

O principal objetivo do desenvolvimento de técnicas de otimização é proporcionar aos engenheiros uma ferramenta avançada que pode ser utilizada na prática de projetos estruturais. A técnica apresentada nesta tese tem a capacidade de gerar uma configuração ótima de projeto. Denomina-se configuração ótima à aquela cuja volume final obtido equivale ao volume prescrito. Isso permite ao projetista adequar o projeto a um nível de desempenho estrutural, isto é, se o projeto atende os critérios de segurança, estético e de construção. Nesta tese constata-se que a técnica ESO via MEC pode ser usada para gerar modelos de topologias ótimas. Apresentam-se a seguir três exemplos numéricos, nos quais os parâmetros de otimização do método empregado foram o mesmo, a saber: $1.0\% < RR < 10.0\%$ e $1.05\% < ER < 3.0\%$. O critério de parada utilizado foi o volume restringido $0.28 * V_0 \leq V_f \leq 0.55 * V_0$. A sub-região hexagonal com cada aresta, representado um elemento linear, será inserida em torno do ponto interno que atende a inequação 4.1.

As integrais singulares do contorno são resolvidas analiticamente e as demais resolvem-se numericamente, via quadratura de Gauss, com o ponto fora do contorno a uma distância de $0,5 * L$, com L sendo o comprimento do elemento. Os campos de deslocamentos e forças de superfície nos elementos são aproximados com variação linear. Para o cálculo dos deslocamentos e das tensões internas, como as integrais não são singulares, seus valores são calculados numericamente por quadratura de Gauss empregando 5,7 e 12 pontos de Gauss.

4.4.1 Problemas de duas barras

O primeiro exemplo mostra a otimização de uma estrutura retangular sujeita a ação de uma carga concentrada de 100N no ponto médio da aresta lateral conforme figura 4.3a, que define o domínio inicial de projeto. As propriedades do material utilizado são: Módulo de Young $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$ e espessura $t = 1 \text{ mm}$. O contorno da estrutura foi discretizado com 59 elementos lineares e o domínio com 364 pontos internos. A carga concentrada 100N foi simulada por um carregamento distribuído em um elemento de comprimento 10mm, isto é, um carregamento de distribuído 10N/mm. O valor de (RR), razão de rejeição, foi de 2% e a razão evolucionária (ER) igual a 3%.

A figura 4.3b mostra a topologia ótima alcançada na iteração 18 com a presente formulação, a figura 4.3c mostra a topologia ótima final para projeto e a figura 4.3d mostra o fluxo de tensão da topologia ótima para projeto.

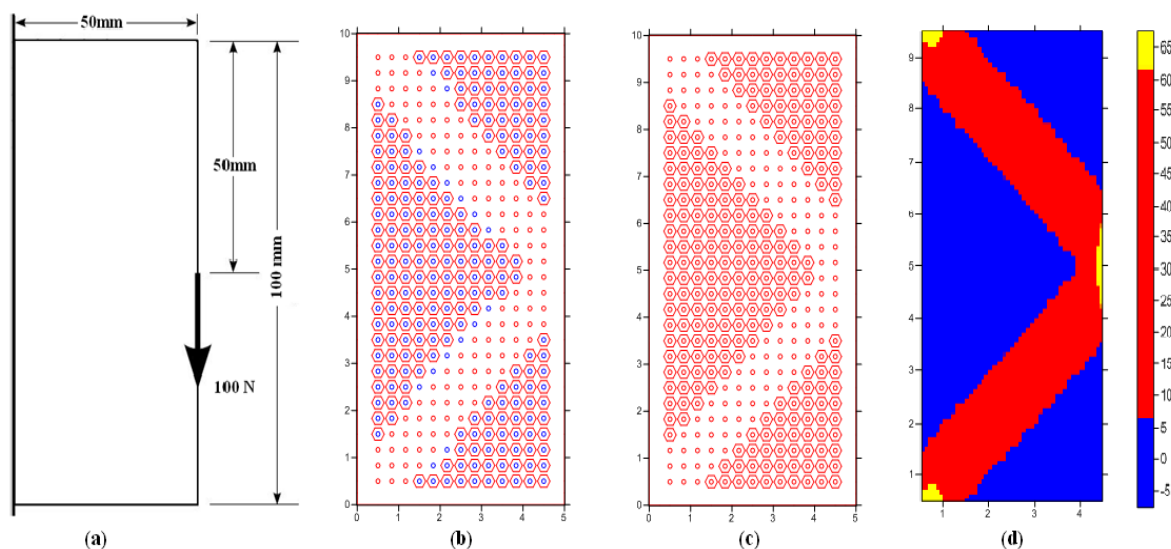


Figura 4.3– (a) Domínio inicial de projeto, (b) Topologia ótima com 59 elementos lineares de contorno (c) Topologia final para projeto e (d) Fluxo de Tensão na topología ótima.

Este problema foi proposto por Cervera (2003) usando como função objetivo a expressão definida pela equação 4.5.

$$f_U = UV \quad (4.5)$$

em que U é a energia de deformação e V o volume da estrutura.

O histórico do processo de otimização proposto por Cervera (2003) pode ser observado na figura 4.4. A topologia ótima alcançada na iteração 42 com uma razão de volume de $V/V_0 = 0.25$.

Destaca-se ainda que durante o processo otimização, o tabuleiro de xadrez, um dos gargalos da otimização topológica via Método dos Elementos Finitos (MEF) usando o método ESO não se configurou neste problema, com a presente formulação, como pode ser observado no histórico de otimização e no fluxo de tensão apresentado na figura 4.5. Neste exemplo, a sub-região hexagonal regular tem $L=0.15\text{cm}$, $DX=DY=0.129\text{cm}$ e $d=0.34\text{cm}$.

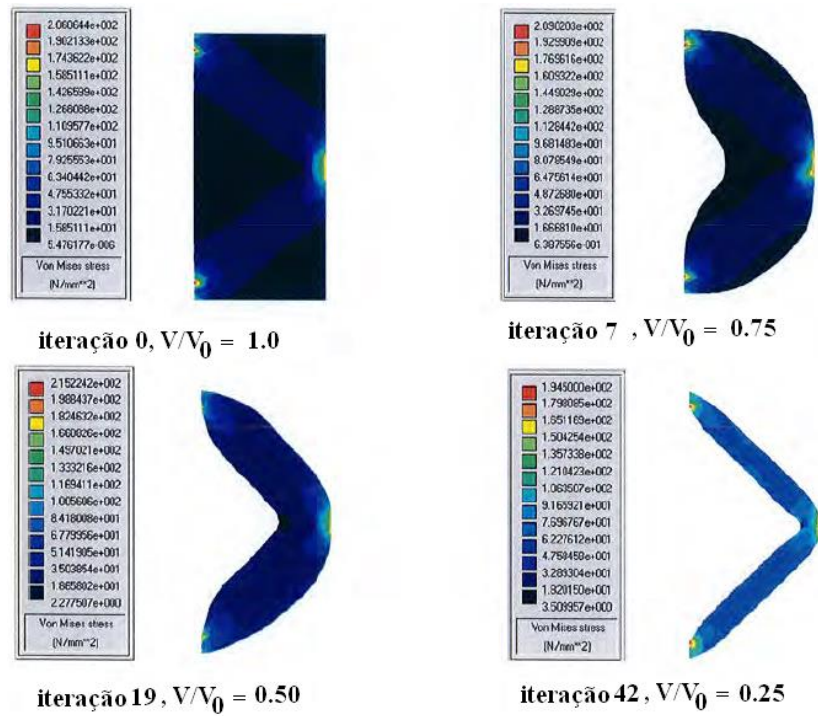


Figura 4.4 – Histórico do processo de otimização proposto por Cervera (2003).

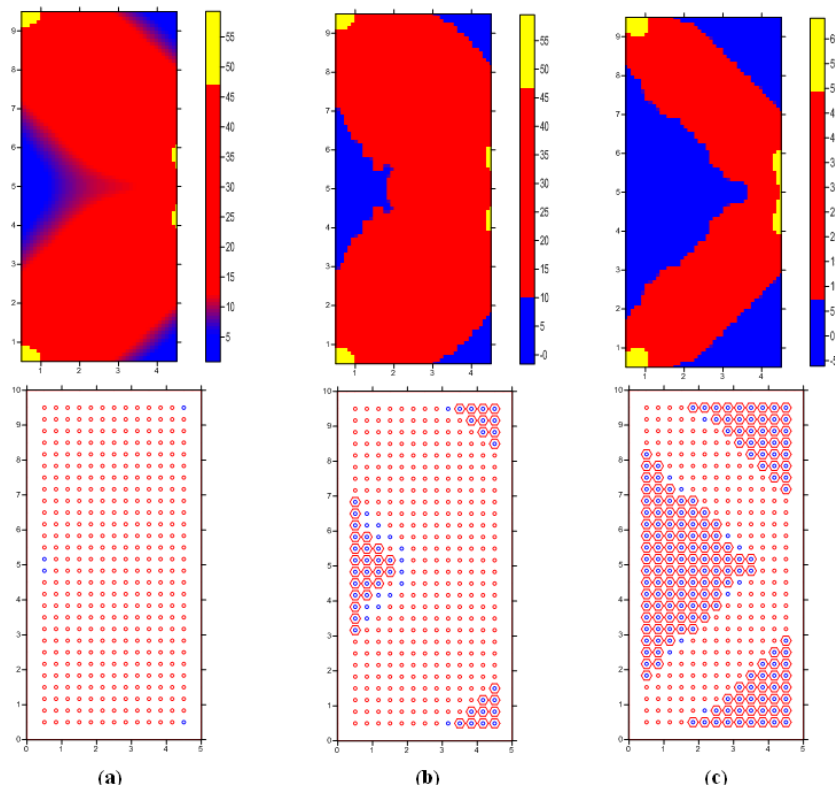


Figura 4.5 – Histórico de otimização com a presente formulação – (a) topologia na iteração 1, (b) topologia na iteração 6, (c) topologia na iteração 14.

O gráfico apresentado na figura 4.6 mostra a redução de volume de 67%. Vale destacar que no processo de otimização ESO via MEC usou para integração numérica a quadratura de Gauss com 5 pontos e a técnica de nós duplos na discretização do contorno.

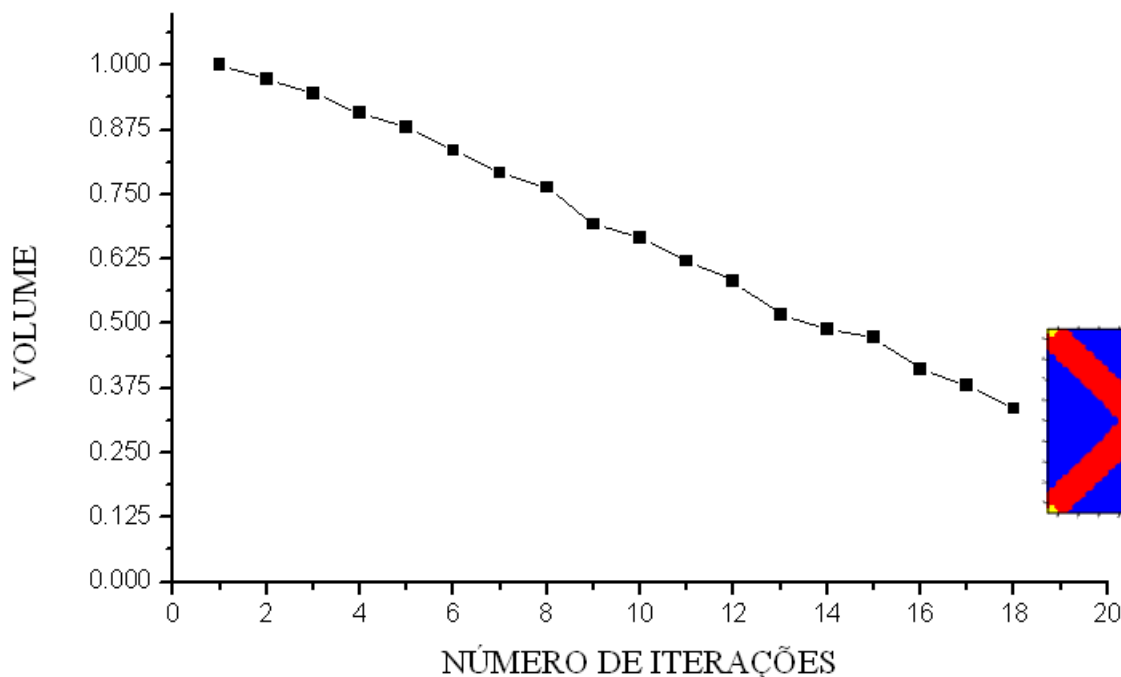


Figura 4.6 – Volume por número de iterações.

4.4.2 Chapa quadrada

Este exemplo se refere a um domínio quadrado e é proposto nesta tese com a técnica numérica de otimização topológica SESO de Simonetti *et al.* (2009,2014). O domínio inicial de projeto e as condições de contorno podem ser observados na figura 4.7. O procedimento SESO determina a topologia ótima mediante uma heurística de remoção suave, isto é, “soft-kill”. Assim, os elementos do domínio que atendem o critério de retirada uma parte e removido e a outra parte é ponderada e devolvida a estrutura. A topologia ótima é obtida quando um volume prescrito é alcançado. Destaca-se também que um índice de performance monitora todo o processo iterativo para que a configuração ótima seja viável para projeto. Um histórico do processo iterativo de otimização é apresentado na figura 4.8. A topologia ótima alcançada na iteração 119, com um volume final de 38,7% do volume inicial com custo computacional de 203 segundos. A razão de rejeição e a razão evolucionária utilizadas foram, respectivamente, iguais a 1% e 1,25%.

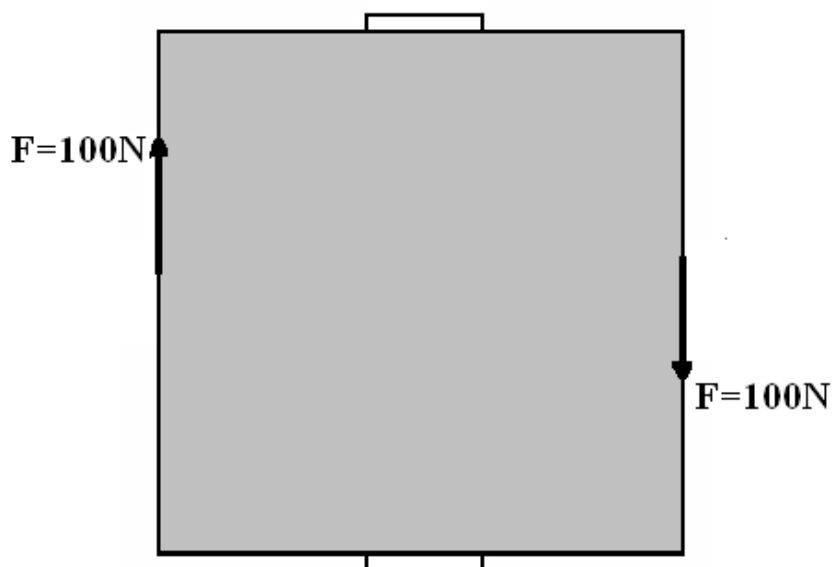


Figura 4.7 – Domínio inicial de projeto

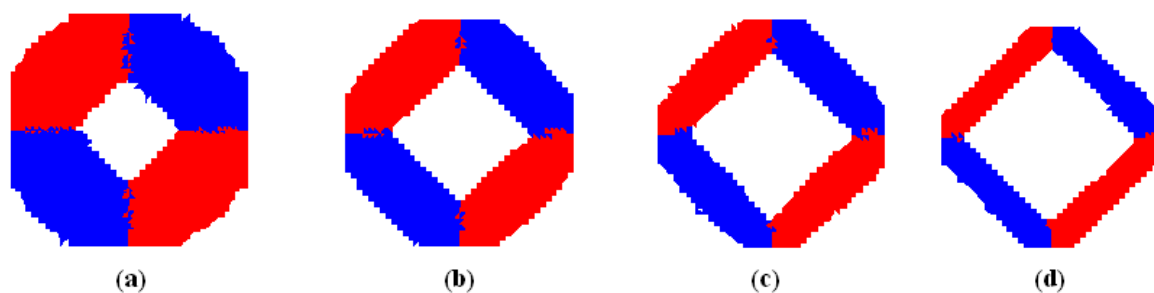


Figura 4.8 – (a) Topologia na iteração 30, (b) Topologia na iteração 60, (c) topologia na iteração 90, (d) Topologia ótima na iteração 119.

Para simular este exemplo usando a presente formulação o domínio quadrado de dimensões (100x100) mm foi discretizado com 361 pontos internos e o contorno com 72 elementos lineares integrados com 12 pontos de Gauss com parâmetros de otimização $RR=10\%$ e $ER=2\%$. As propriedades do material utilizado são: Módulo de Young $E=210\text{GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu=0.30$ e espessura 1mm. Um breve histórico do processo de otimização, incluindo a topologia ótima alcançada na iteração 11, com a razão de volume igual a $V/V_0=0.426$ e custo computacional igual a 2horas 38minutos utilizando um Pentium CPU P6100 (2 GHz) processador, figura 4.9.

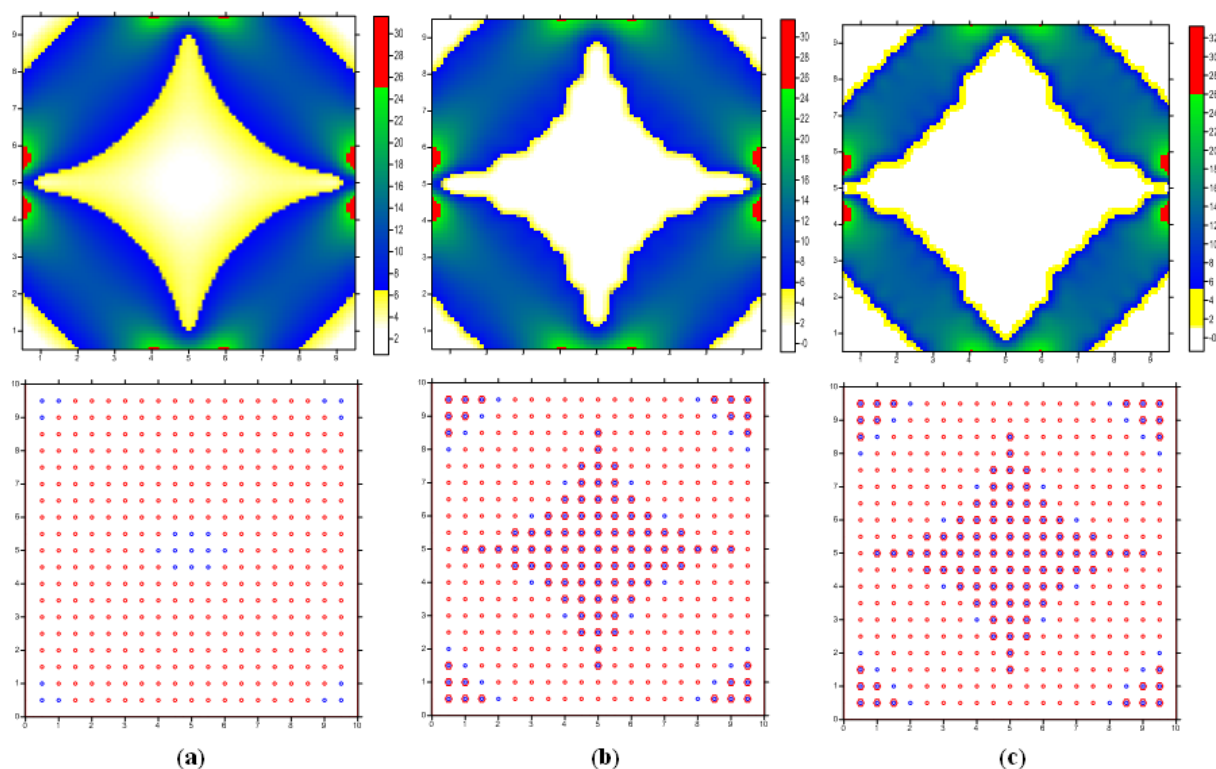


Figura 4.9 – (a) Topologia iteração 1 com $V/V_0 = 0.903$, (b) Topologia iteração 6 com $V/V_0 = 0.648$, (d) iteração 13 com $V/V_0 = 0.426$.

Para as integrais numéricas considerou-se a distância do ponto ao elemento igual a $0.5L$ e a distância do ponto no elemento de $0.15L$. Destaca-se que os elementos lineares têm comprimento igual a 1cm , exceto, nos cantos e onde o carregamento foi distribuído (10N/mm) tais elementos tem comprimento 0.25 cm .

Com o objetivo de analisar a influência da sub-região no processo iterativo de otimização a chapa quadrada foi simulada com três sub-regiões ($DX = DY = 0.05\text{cm}$), ($DX = DY = 0.10\text{cm}$), ($DX = DY = 0.20\text{cm}$) e $d = 0.50\text{cm}$. Destaca-se que a topologia ótima alcançada nos três casos são semelhantes e diferem apenas no volume final conforme pode ser verificado no gráfico da figura 4.10. O menor custo computacional ocorreu com ($DX = DY = 0.10\text{cm}$) e tempo de análise igual a $2,5$ horas. Ao dobrar a aresta da sub-região e conseqüentemente a distância do ponto interno ao vértice o custo computacional aumentou para $3,5$ horas. Quando a aresta da sub-região foi reduzida à metade o custo computacional passou para $5,4$ horas.

A figura 4.11 mostra a tensão máxima de Von Mises por número de iterações para as distâncias indicadas no gráfico acima ($DX=DY$) que estão em cm . Verificou-se que quanto maior a sub-região (maior a cavidade) maior a tensão máxima da estrutura.

Assim, quando as distâncias entre os pontos fontes e campo dos elementos das sub-regiões diminuem, isso afeta as integrais tanto de contorno como de domínio proporcionando uma suavização nas tensões.

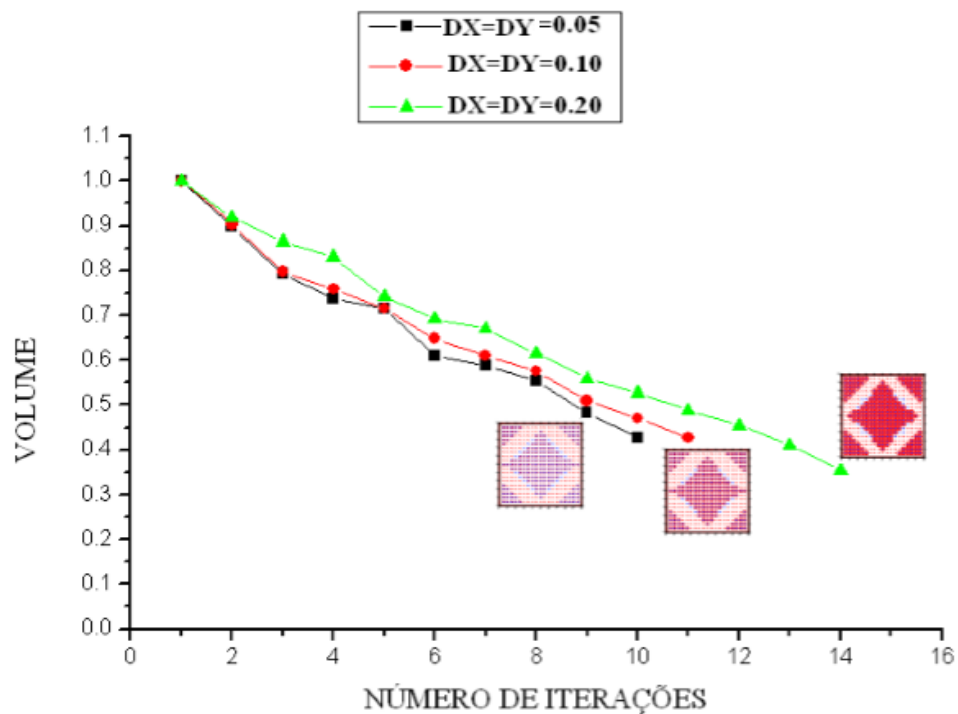


Figura 4.10 – Volume por número de iterações

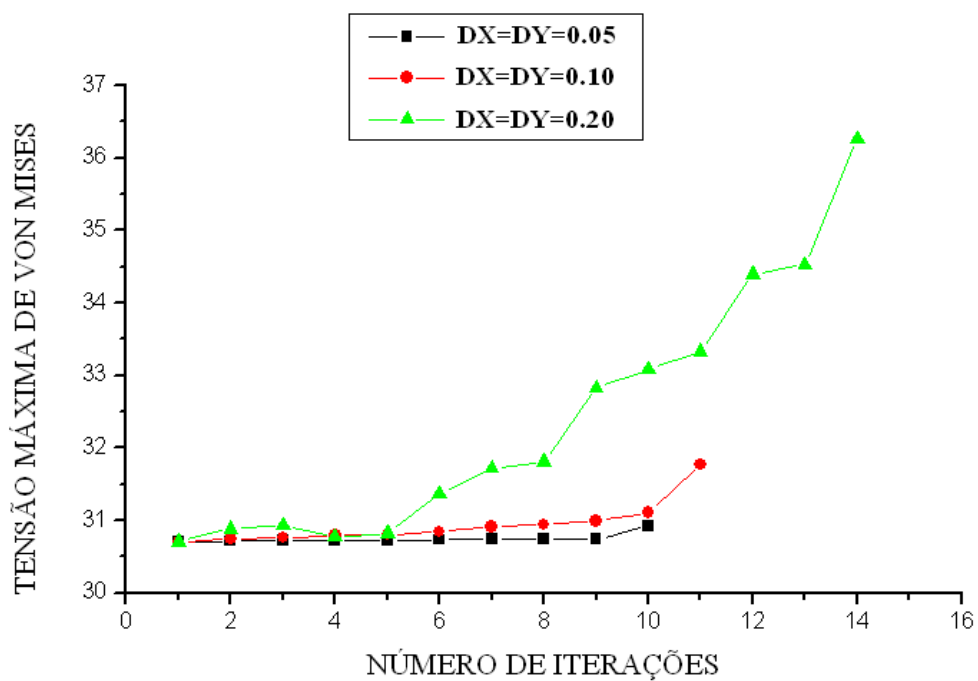


Figura 4.11 – Tensão máxima de Von Mises dada (kN/cm²) por número de iterações.

Com o objetivo de mostrar que a otimização topológica ESO via MEC apresentada elimina um dos gargalos da topologia, que é a dependência da malha, o exemplo de domínio quadrado foi simulado com 441 pontos internos mantendo todos os parâmetros de otimização iguais, inclusive a malha de contorno. A figura 4.12 mostra a otimização alcançada na iteração 11 com 50% do volume inicial.

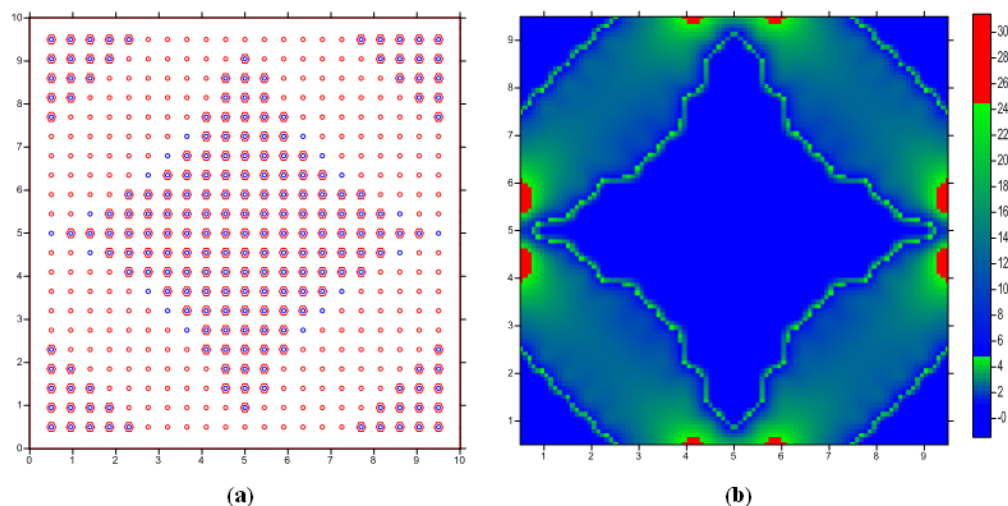


Figura 4.12 – (a) Topologia ótima e (b) fluxo de tensão na topologia ótima

A figura 4.13 mostra o gráfico do volume por iteração da estrutura com 441 e 361 pontos internos verificando uma convergência para volumes bem próximos o volume indicado no gráfico é $V/V_0 = 0.426$ para 441 pontos internos e $V/V_0 = 0.500$ para 361 pontos internos. Neste exemplo foi utilizado $DX=DY=0.10\text{cm}$ e $d=0.44\text{cm}$.

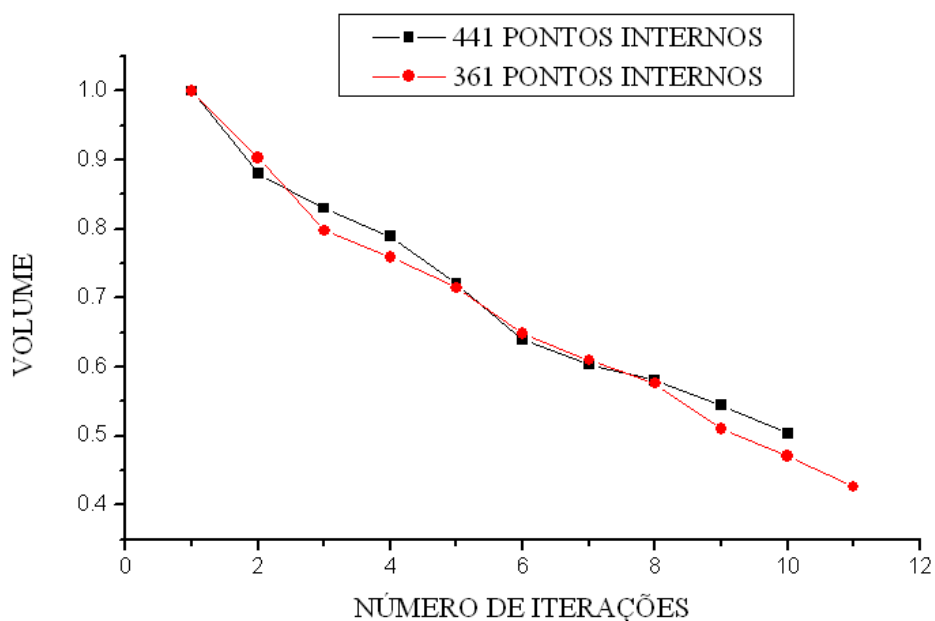


Figura 4.13 – Volume por número de iterações

4.4.3 Viga biapoiada

O domínio de projeto e as condições de contorno da viga biapoiada estão representadas na figura 4.14. Um carregamento distribuído de 5N/mm foi aplicado na parte central superior da viga em dois elementos lineares de 1.0cm cada um. O Módulo de Young $E=210\text{GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$ são usados na análise linear de elementos de contorno. O procedimento de otimização evolui para uma topologia ótima de volume final 28% do volume inicial com parâmetros de otimização $RR=5.75\%$ (razão de rejeição) e $ER=1.4\%$ (razão evolucionária).

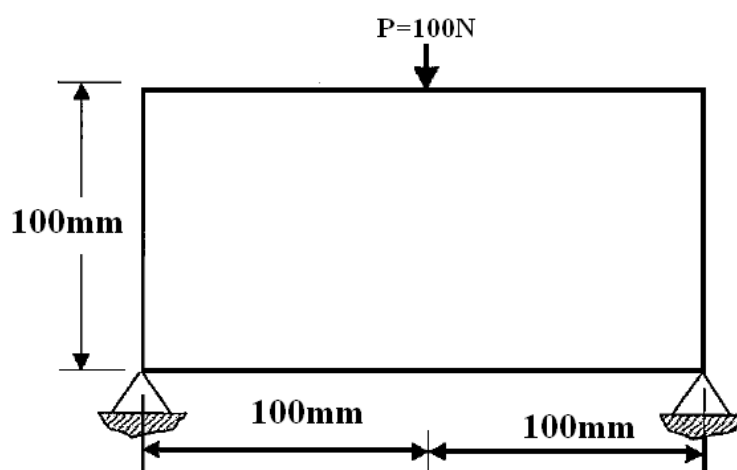


Figura 4.14 – Domínio inicial de projeto.

O método de otimização ESO via MEC proposto nesta tese usa 72 elementos lineares de contorno integrados com 12 pontos de Gauss e 200 pontos internos. Uma sub-região hexagonal com $DX=DY=0.40\text{cm}$ e $d=1.0\text{cm}$, é criada em cada ponto interno cuja tensão de von Mises atende ao critério de retirada. Assim, um buraco é criado com esta sub-região e os elementos lineares representados por suas arestas são inseridos na matriz constitutiva para entrarem no cálculo das tensões na próxima iteração. A figura 4.15a mostra a topologia ótima alcançada na iteração 15 enquanto as figuras 4.15b e 4.15c mostram, respectivamente, a topologia final para projeto e o fluxo de tensão na estrutura para a configuração ótima alcançada na iteração 15.

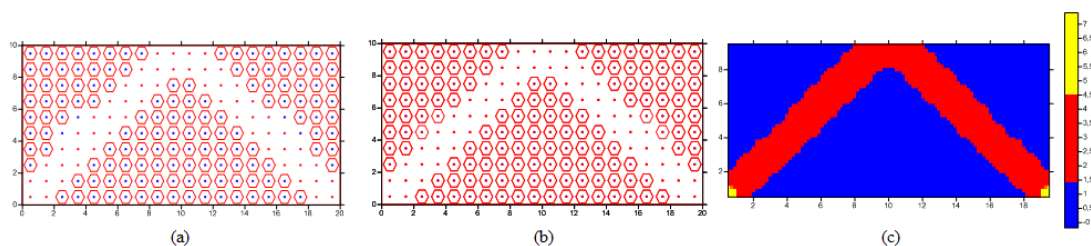


Figura 4.15 - (a) Topologia ótima, (b) configuração final para projeto (c) fluxo de tensão na iteração 13.

Este exemplo foi resolvido com a técnica numérica SESO via MEF, Simonetti *et al.* (2009,2014) para uma comparação dos resultados obtidos com a presente formulação usando MEC. A malha refinada de 60x30 totalizando 3600 elementos finitos triangulares, com RR=1% e ER=1.25% elementos finitos triangulares. A figura 4.16 mostra a topologia ótima com volume final de 33% do volume inicial, alcançada na iteração 140.

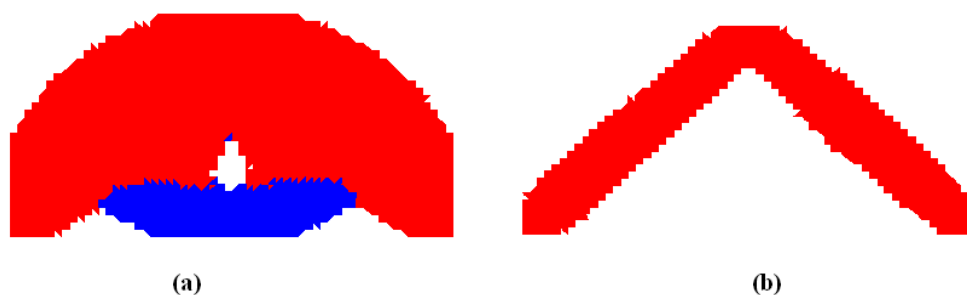


Figura 4.16 – (a) Topologia na iteração 33 e (b) Topologia ótima na iteração 140.

4.4.4 Viga em balanço

A figura 4.17a mostra a geometria e as condições de contorno para a viga em balanço, aplicou-se uma carga concentrada de 5.0kN no centro da extremidade livre. A espessura da viga é de 1.0mm. O modulo de Young é igual a $E=210\text{GPa}$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$. Este exemplo foi resolvido com a técnica SESO com parâmetros de otimização RR=1% e ER=1% e volume restringido em 30% do volume inicial. A figura 4.17b mostra a topologia ótima, na iteração 94, alcançada com a formulação SESO, Simonetti *et al.* (2009,2014), com critério de tensão máxima de von Mises.

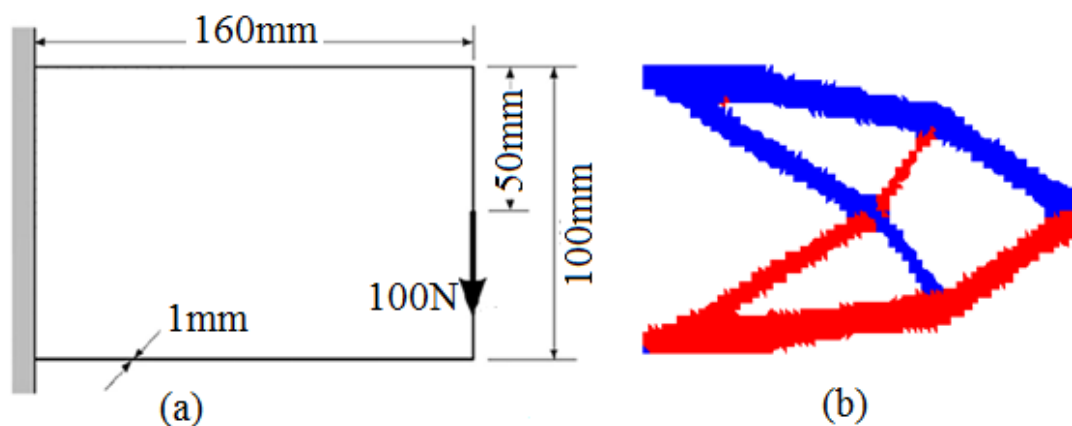


Figura 4.17 – (a) Domínio de projeto e (b) topologia ótima SESO com critério de von Mises

A Figura 4.18 compara o projeto ótimo obtido com a presente formulação, isto é, usando sub-região através do MEC - ESO com a configuração ótima proposta por Kim *et al.* (2002) que avaliaram este problema utilizando o clássico ESO em conjunto com uma formulação modificada do ICC (criação cavidade inteligente), em que a eliminação das novas cavidades criadas é controlada em cada passo. No entanto, o critério de parada é em volume final prescrito ($V=43.7\%$) e a otimização foi realizada usando elementos quadrilaterais com uma malha refinada de 64×40 , usando critério de von Mises.

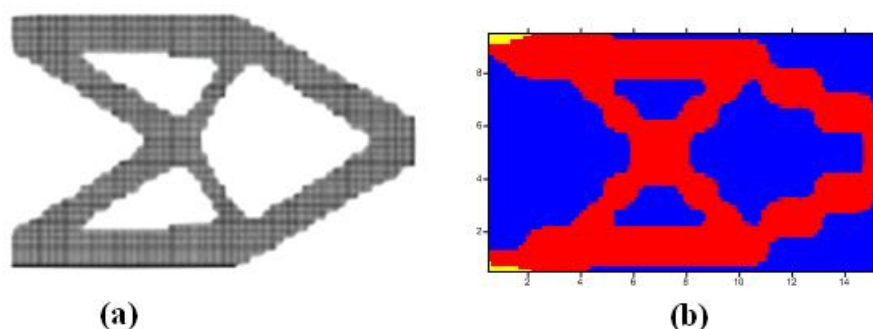


Figura 4.18 – Configurações ótimas – (a) Topologia ótima por Kim *et al.* (2002)
(b) Topologia ótima usando MEC-ESO.

Usando a presente formulação de otimização topológica via MEC com sub-região, a topologia ótima para projeto foi alcançada na iteração 21, figura 4.18b. A redução do volume foi de aproximadamente 71% em relação ao projeto inicial. O procedimento de otimização evolui com uma razão de rejeição de $RR=5\%$ e razão evolucionária $ER=1.05\%$. Como pode ser observado, figura 4.19, o volume via técnica numérica SESO, devido a sua heurística de retirada de elementos ineficientes da malha, tem um redução mais suave que o apresentado pela otimização topológica via MEC-ESO.

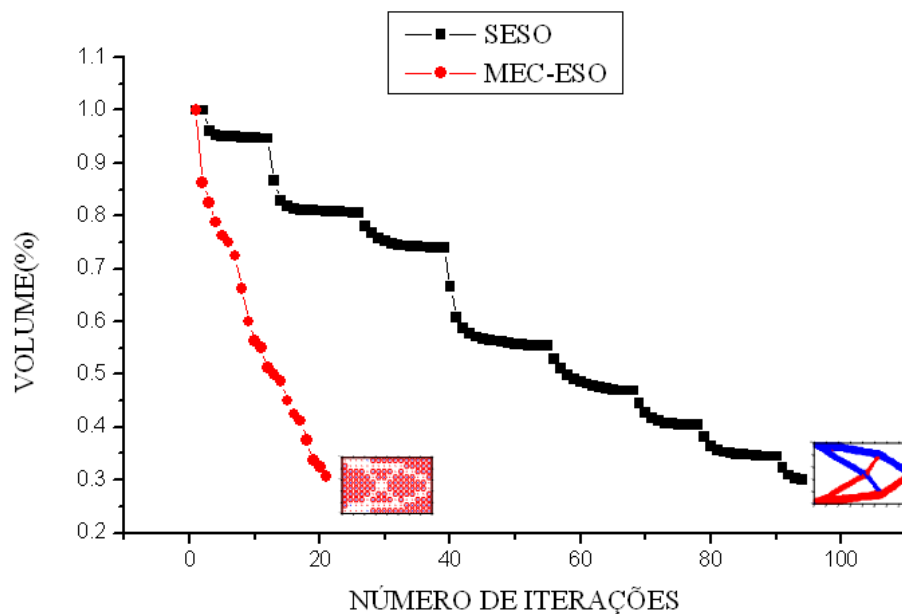


Figura 4.19 – Volume por número de iterações.

O método de otimização ESO-MEC proposto neste trabalho usa 64 elementos lineares de contorno integrados com 12 pontos de Gauss e 160 pontos internos. Uma região hexagonal com $DX=DY=0.40\text{cm}$ e $d=1.0\text{cm}$ é criada em cada ponto interno cuja tensão de Von Mises atende o critério de retirada.

CAPÍTULO 5

UMA NOVA ABORDAGEM PARA RESOLVER PROBLEMAS TOPOLÓGICOS USANDO CAMPO DE TENSÕES INICIAIS VIA MEC

5.1 Introdução

Esta tese apresenta uma abordagem inédita no campo da otimização de topologia em problemas da elasticidade plana, utilizando o MEC. O problema de otimização topológica é resolvido com a técnica numérica denominada ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), a qual é acoplada com a formulação do MEC usando campos de tensões iniciais como estratégia para representar as regiões que devem ser eliminada na OT.

As tensões iniciais são introduzidas no modelo por meio de uma combinação de dois problemas considerando apenas as integrais de domínio na célula evitando o uso da clássica estratégia de inserção de sub-regiões utilizando elementos de contorno para introduzir a cavidade. A adição destes dois problemas simula o problema real e a célula é então criada em torno do ponto interno que atende o critério de retirada ESO. Deste modo, um campo de tensões iniciais é somado às tensões elásticas do problema inicial resultando em tensões nulas, simulando de maneira virtual uma cavidade.

Assim, durante o procedimento da otimização topológica criam-se células triangulares para aqueles pontos internos que atendem ao critério de retirada ESO. Deste modo, a construção do sistema linear ao longo do processo de otimização é realizada com a introdução iterativa de um termo de domínio, em termos de tensões iniciais, por meio da inclusão de um vetor corretor. Os elementos deste vetor corretor (contendo os

termos de tensões iniciais) são criados com o sinal oposto e são adicionados ao vetor livre, posicionado no segundo membro do sistema de equações lineares original. Como não há a necessidade de alteração das matrizes de influência inicial durante o processo de otimização, reduz-se o custo computacional do problema em análise, uma vez que essa matriz é não esparsa e a sua montagem com a inserção de novos elementos, como ocorre nos processos de otimização via MEC usando sub-região, produz um alto custo computacional. Em vista disso, não havendo a interferência de novos elementos de contorno, visto que a malha inicial não é modificada, o problema elástico inicial a ser resolvido é alterado sensivelmente quando se compara o procedimento de solução aqui proposto com aqueles tradicionais usando o MEC com OT.

Outra grande vantagem da presente formulação em relação aos métodos propostos, é que durante o processo iterativo não há a necessidade de refazer a malha a cada iteração. A precisão do MEC no cálculo das tensões internas proporciona a captura da configuração ótima realizando apenas otimização de topologia sem a retirada de elementos no contorno, isto é, sem a otimização de forma. Destaca-se ainda que os problemas da otimização topológica como a dependência da malha e o tabuleiro de xadrez não apareceram na presente formulação.

5.2 MEC usando campo de tensões iniciais

A presença dos campos iniciais de tensões aplicada ao domínio do corpo é importante nos problemas, onde as variáveis do domínio têm um papel relevante no problema mecânico tal como a otimização topológica. Neste item, serão apresentadas as equações integrais de contorno para problemas de campos iniciais no domínio e as equações algébricas do MEC com campos de tensões iniciais. Para o procedimento da análise de contorno desenvolvida neste item foram consultadas as seguintes referências: Brebbia *et al.* (1984), Brebbia e Domingues (1992), Lopes (1996), Venturini (1988), Wutzow (2003), Botta (2003), Azevedo (2007).

5.2.1 Integral com campos iniciais

Considere-se que um sólido elástico isotrópico esteja submetido a um estado de tensão, e, ainda, submetido a um campo de tensões iniciais. Admite-se que este campo de tensões tenha provocado deformações, denotadas por deformações iniciais. No intuito de tentar visualizar o comportamento do sólido na presença de deformações iniciais, toma-se o exemplo da Teoria da Plasticidade, mostrado na figura 5.1.

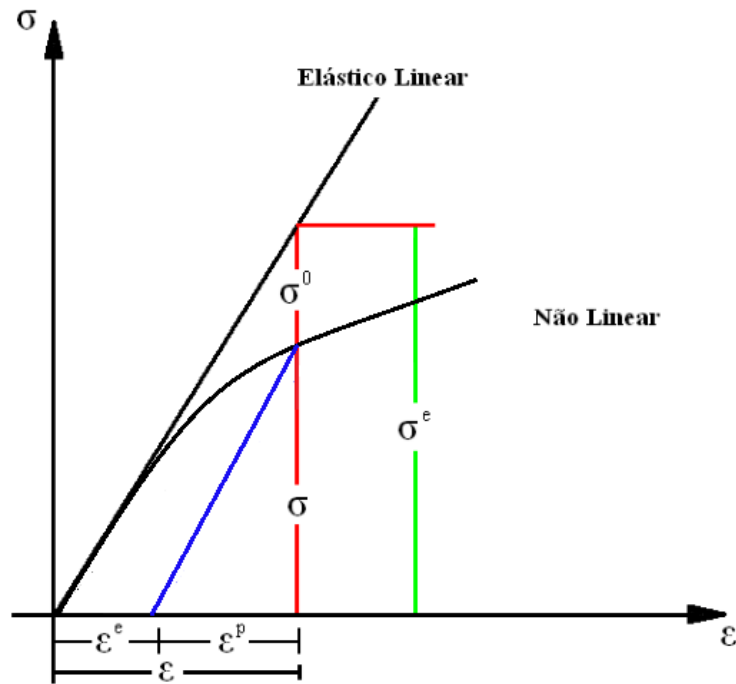


Figura 5.1 – Modelo Elastoplástico – Parcelas de Tensões de Deformações

Observando o gráfico, pode-se afirmar que a tensão elástica é igual a soma da tensão (σ) com a tensão inicial σ^0 , isto é:

$$\sigma^e = \sigma + \sigma^0 \quad (5.1)$$

Deste modo, escreve-se as componentes do tensor de tensões em um ponto “s” segundo a equação:

$$\sigma_{ij}(s) = \sigma_{ij}^e(s) - \sigma_{ij}^0(s) \quad (5.2)$$

onde σ_{ij} representa o tensor de tensões, σ_{ij}^e representa o tensor de tensões elásticas e σ_{ij}^0 o tensor de tensões iniciais.

Assim, os tensores com campo tensões iniciais preservam a relação constitutiva dada por:

$$\sigma_{ij}^0(s) = C_{ijkl} \varepsilon_{km}^0(s) \quad (5.3)$$

Desta forma, a lei de Hooke, sofre modificações uma vez que, utilizam-se as tensões obtidas a partir da diferença entre as deformações elásticas e tensões iniciais.

Assim, para um material elástico, tem-se:

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} [\varepsilon_{kk}(s) - \varepsilon_{kk}^0(s)] + 2G [\varepsilon_{ij}(s) - \varepsilon_{ij}^0(s)] \quad (5.4)$$

Manipulando matematicamente a equação 5.4, fazendo $\frac{2G}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^0(s) + 2G \varepsilon_{ij}^0(s) = \sigma_{ij}^0(s)$ obtém-se a seguinte equação em termos de deformações e tensões iniciais:

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(s) + 2G \varepsilon_{ij}(s) - \sigma_{ij}^0(s) \quad (5.5)$$

Manipulando matematicamente os termos do tensor de tensões e deformações para o problema real no teorema da reciprocidade de Betti e usando a solução fundamental de Kelvin obtém-se a identidade Somigliana em termos de tensão inicial. Assim, a equação integral de contorno para o problema elástico é dada por:

$$c_{ik}(s) u_k(s) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(s, p) u_k(p) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(s, p) p_k(p) d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{ikm}^*(s, q) \sigma_{km}^0(p) d\Omega \quad (5.6)$$

Quando o ponto q (ponto campo) está localizado na parte suave do contorno u_{ij}^* e p_{ij}^* são as soluções fundamentais dadas pelas equações:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_i r_j \right] \quad (5.7)$$

$$p_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_i r_j \right] r_n + (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \quad (5.8)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do corpo elástico e ν é o coeficiente de Poisson. Onde o primeiro índice “i” refere-se à direção de aplicação da carga unitária e, o segundo, “j” à direção do deslocamento proposta, r_i é a derivada do raio na direção “i” e n_i é o vetor normal.

Derivando-se a equação 5.7 em relação a x_k , reorganizando os termos e substituindo na relação deformação/deslocamento, tem-se, para o caso bidimensional, à equação:

$$\varepsilon_{ijk}^*(s, q) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) - r_i \delta_{jk} + r_i r_j r_{,k} \right] \quad (5.9)$$

Derivando-se o núcleo das integrais da equação 5.6 e aplicando a lei de Hooke generalizada, encontra-se a representação das integrais para tensão, Brebbia (1984):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) = & -\int_{\Gamma} S_{ijk}(s, q) u_k(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, q) p_k(q) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}(s, q) b_k(q) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} E_{ijkm}(s, q) \sigma_{km}^0(q) d\Omega - \frac{1}{8(1-\nu)} [2\sigma_{ij}^0(s) + (1-4\nu)\sigma_{nm}^0(s) \delta_{ij}] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Onde:

$$S_{ijk} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{array}{l} 2r_{,n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + \\ 2\nu(\eta_{i,r_j}r_{,k} + \eta_{j,r_i}r_{,k}) + (1-2\nu)(2\eta_{k,r_i}r_{,j} + \eta_{j,\delta_{ik}} + \eta_{i,\delta_{jk}}) \\ -(1-4\nu)\eta_k\delta_{ij} \end{array} \right\} \quad (5.11)$$

$$D_{ijk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)[\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad (5.12)$$

$$E_{ijkm} = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu)[\delta_{im}\delta_{jk} + \delta_{jm}\delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{km}] + \\ 2\nu(\delta_{ik}r_{,j}r_{,m} + \delta_{jm}r_{,i}r_{,k} + \delta_{im}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,m}) + \\ 2\delta_{km}r_{,i}r_{,j} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,m} \end{array} \right\} \quad (5.13)$$

As equações integrais (5.6) e (5.10) expressam o equilíbrio de um corpo elástico com condições de contorno apropriadamente definida. O termo relativo ao domínio pode ser usado para diferentes propostas: modelagem com efeito da temperatura; corrigindo campo de tensão de modelo não linear e problemas de propagação não linear de fissuras; delimitação de zona elástica, correção de parâmetros elásticos para simular materiais não homogêneos e anisotrópicos.

5.2.2 Integração de Célula

A consideração de campos iniciais introduz as integrais de domínio no equacionamento do problema. A maneira mais simples de calcular tais integrais é transformando-as em somatórias sobre unidades de domínio discretizadas, ou células. Neste trabalho, são utilizadas células triangulares e todas as equações de tensões são escritas para pontos pertencentes ao domínio. Ou seja, todos os nós das células não coincidem com seus respectivos vértices (ou nós geométricos), pois são “puxados” para o domínio da célula, passando a pertencerem ao domínio do corpo.

Desta forma, em cada célula tem-se:

$${}^m\sigma_{ij}^0(s) = \phi_k(s) \cdot {}^m\sigma_{ij}^{0k} \quad (5.14)$$

onde ${}^m\sigma_{ij}^0(s)$ representa a variável nodal da componente ij o tensor de tensões iniciais da célula m para o nó k , $\phi_k(s)$ são funções polinomiais, neste trabalho são adotadas funções de forma lineares.

A integral de domínio, com núcleo ε_{ijk}^* , proveniente da equação dos deslocamentos apresenta singularidade fraca ($1/r$). Para resolver esta integral usa-se um sistema cilíndrico de coordenadas, de modo que a integral de domínio seja reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_m} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \phi_m(p)^m \sigma_{jk}^{0k} d\Omega = \int_{\theta} \int_r \frac{\bar{\varepsilon}_{ijk}(s, p)}{r} \phi_m(r, \theta)^m \sigma_{jk}^{0k} r dr d\theta \quad (5.15)$$

onde $\bar{\varepsilon}_{ijk}(s, p) = r \varepsilon_{ijk}^*(s, p)$. As funções de forma $\phi_m(r, \theta)$ são escritas em função das coordenadas cartesianas dos nós definidos para cada célula. Assim, tem-se:

$$\phi_m(r, \theta) = \frac{a_m^0}{2A} + \omega_m [x(s) + r \cos \theta] + \eta_i [y(s) + r \sin \theta] \quad (5.16)$$

Onde $a_m^0 = x_j y_k - x_k y_j$, $\omega_m = y_i - y_k$, $\eta_i = x_k - x_j$ e $A = \frac{w_1 \eta_2 - w_2 \eta_1}{2} A$ é área da célula. Com $i=1,2,3$, $j=2,3,1$ e $k=3,1,2$.

A integral da equação 5.15 é resolvido primeiro em relação a r e depois em relação θ . A figura 5.2 ilustra o raio r e o ângulo θ da equação 5.16.

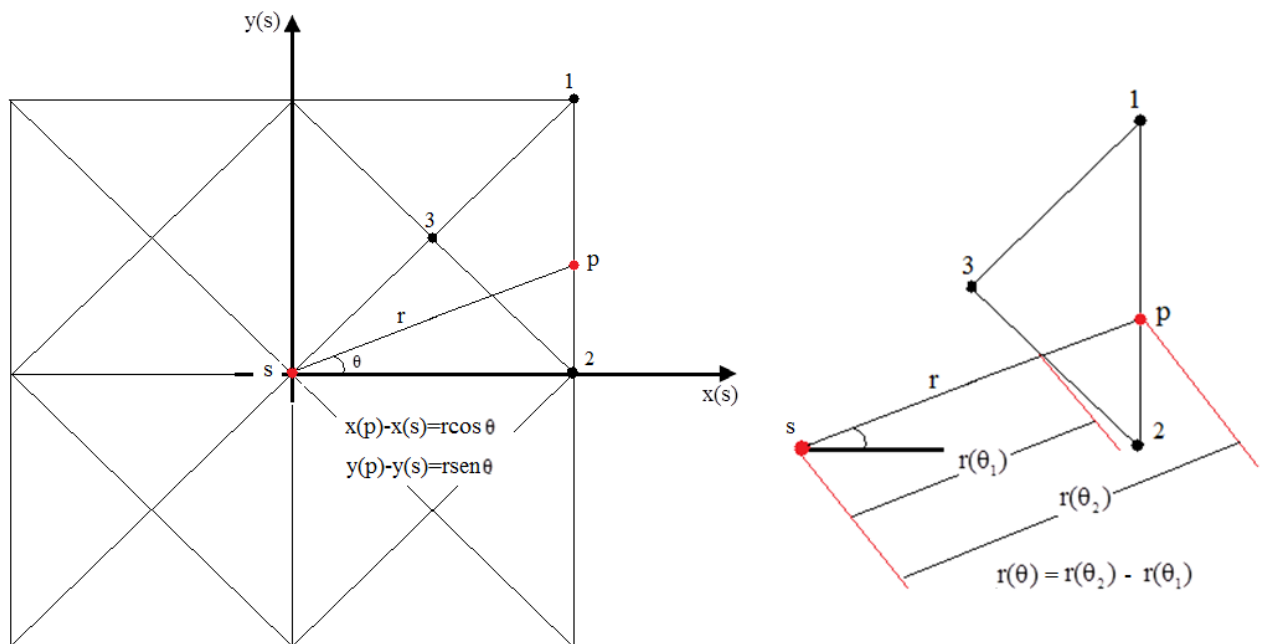


Figura 5.2 – Coordenadas Cilíndricas

A integral da equação 5.16 na equação 5.15 e integrando analiticamente em r , tem-se:

$$\int_{\theta} \left\{ \bar{\varepsilon}_{ijk}(s, p) \left[\begin{aligned} & \left[\frac{a_m^0}{2A} + (\omega_m x(s) + \eta_m y(s)) \right] r(\theta) \\ & + [\omega_m \cos \theta + \eta_m \sin \theta] \frac{r^2(\theta)}{2} \end{aligned} \right] \right\} d\theta \sigma_{jk}^{0m} \quad (5.17)$$

Mudando a variável de integração da equação 5.17 para o contorno da célula, obtém-se:

$$\int_{\Gamma_m} \left\{ \bar{\varepsilon}_{ijk}(s, p) \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{a_m^0}{2A} + (\omega_m x(s) + \eta_m y(s)) \right] r(\theta) \\ & + [\omega_m \cos \theta + \eta_m \sin \theta] \frac{r^2(\theta)}{2} \end{aligned} \right\} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_m \sigma_{jk}^{0m} \quad (5.18)$$

onde o diferencial $d\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_m$ e $d\Gamma_m$ é o diferencial no contorno da célula e $\frac{\partial r}{\partial \eta}$ representa a derivada do raio em relação ao vetor normal unitário η no ponto campo “p” e r a distância entre o ponto fonte “s” e o ponto campo “p”.

A integral representada pela equação 5.18 é resolvida numericamente usando a quadratura Gaussiana e equivale à somatória:

$$\sum_{q=1}^3 \sum_{n=1}^{NG} |J|_q \left\{ \bar{\varepsilon}_{ijk}(s, p) \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{a_m^0}{2A} + (\omega_m x(s) + \eta_m y(s)) \right] r(\theta) \\ & + [\omega_m \cos \theta + \eta_m \sin \theta] \frac{r^2(\theta)}{2} \end{aligned} \right\} \right\} w_n \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\xi_q \sigma_{jk}^{0m} \quad (5.19)$$

Com NG o número de pontos de Gauss, w_n a ponderação da integral numérica Gaussiana, ξ coordenadas adimensionais variando de [-1,1] e $|J|_q$ é o determinante do Jacobiano que no caso plano vale metade do lado de cada célula.

5.2.3 Equações Algébricas para o MEC com problemas de campos de tensões iniciais

A equação integral dos deslocamentos, equação 5.6, quando escrita na forma discretizada, pode ser escrito em uma forma algébrica, com coeficientes resultantes da integração numérica multiplicando variáveis nodais de contorno e de domínio, para cada ponto fonte “s”, segundo cada direção do sistema global de coordenadas cartesianas. Para a análise direta a equação 5.6 é transformada em um sistema de equações algébricas e é resolvido diretamente. Em seguida, é utilizada a forma discretizada da equação 5.10 para calcular o campo das tensões ao longo de todo o domínio. Usualmente, três conjuntos de equações algébricas são escritos depois de realizada a discretização.

$$[H] \cdot \{U\} = [G] \cdot \{P\} + [Q] \cdot \{\sigma^0\} \quad (5.20)$$

$$\{u\} = -[H'] \cdot \{U\} + [G'] \cdot \{P\} + [Q'] \cdot \{\sigma^0\} \quad (5.21)$$

$$\{\sigma\} = -[H''] \cdot \{U\} + [G''] \cdot \{P\} + [Q''] \cdot \{\sigma^0\} \quad (5.22)$$

Onde $[H]$, $[G]$, $[Q]$, $[H']$, $[G']$, $[Q']$, $[H'']$, $[G'']$ e $[Q'']$ são matrizes com coeficientes de integração. $\{U\}$, $\{P\}$ e $\{\sigma^0\}$ são vetores com as variáveis nodais de deslocamentos, forças de superfícies de contorno e tensão inicial de domínio.

A equação 5.20 não considera as forças de massa e é a representação algébrica dos deslocamentos para pontos de contorno; a equação 5.21 é a representação algébrica do deslocamento para pontos internos e a equação 5.22 é a representação algébrica da tensão para pontos de contorno.

As matrizes da equação algébrica 5.20 têm coeficientes que se originam das integrais da identidade de Somigliana, equação 5.6, calculadas sobre contorno e domínio discretizados. Esta equação tem uma integral singular de contorno $(1/r)$ cujo núcleo é a solução fundamental $p_{ij}^*(s, q)$ e deve ser integrada no sentido do valor principal de Cauchy. Esta integral resulta nos termos da matriz $[G]$.

5.3 Algoritmo de otimização com campos de tensões iniciais

A utilização do MEC no campo da otimização topológica possui poucas publicações devido à característica intrínseca do método, cuja formulação convencional se baseia apenas nos parâmetros de contorno, o que representa um procedimento complicado para lidar com o campo do domínio. Dentre os trabalhos desenvolvidos na área da OT usando MEC podemos citar: Ullah *et al.* (2015), Neches e Cisilino (2008), Marczak (2007), Cervera e Trevelyan (2005), Cervera (2003), Cerrolaza *et al.* (2000). A maioria destes artigos são baseadas no procedimento otimização heurística ou determinista e são formulados através da aplicação da técnica de sub-região convencional via MEC, através da remoção de regiões de baixa sensibilidade com a criação de cavidades. Mas, estas abordagens requerem o desenvolvimento de algoritmos de geometria complexa a fim de controlar a curvatura e tangência das mudanças do contorno utilizando, por exemplo, curvas B-spline ou curvas não uniformes NURBS.

A proposta desta tese é um avanço no campo da Otimização Topológica via MEC, pois é um método alternativo para superar estes inconvenientes, onde a presente estratégia é dividir o problema em duas partes: Na primeira parte, denominada de problema “0”, é resolvido o problema elástico, sem a presença de cavidades, aplicando as condições naturais e essenciais numa análise via MEC, obtendo os deslocamentos, forças de superfícies e tensões para o domínio (para todos os pontos internos) para o contorno. Na segunda parte, denominada de problema “1”, identifica-se cada ponto interno que deve ser ou não removido, e para cada ponto removido cria-se uma

poligonal fechada (célula) em seu entorno onde são aplicadas as tensões iniciais com o sinal oposto e o problema “1” é resolvido usando a equação 5.22. Assim, um novo campo de deslocamento e forças de superfícies é obtido. Estes dois problemas são adicionados e a resultante, é um campo de tensões nulas, que simula o problema real como se existisse uma cavidade. A figura 5.3 facilita a interpretação do procedimento mencionado.

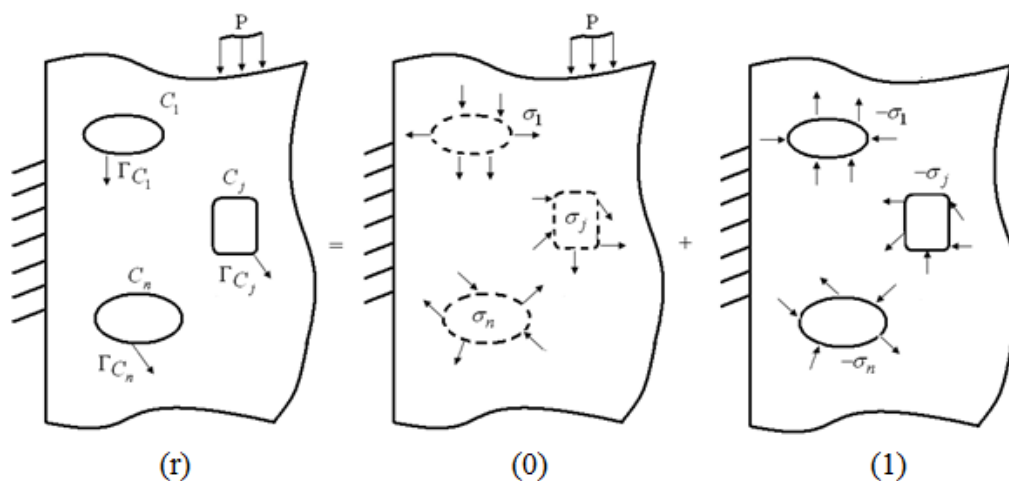


Figura 5.3 – Estratégia para simulação da cavidade do problema original

Em síntese, o procedimento descrito pode ser realizado pelo algoritmo a seguir:

Etapa 1) Resolver o problema “0”, isto é, resolve o problema elástico sem cavidades, usando a equação 5.20, depois de discretizar o contorno externo e definir uma quantidade representativa de pontos internos do domínio, resolve rapidamente o problema “0”: $[H] \cdot \{U\}^0 = [G]\{P\}^0$.

Etapa 2) Para cada cavidade conhecida “i”, a qual é definida por uma poligonal fechada usando células triangulares com funções de interpolação linear, é calculado o campo de tensões em cada região e, no contorno Γ_{C_i} , pela aplicação da equação 5.22: $\{\sigma\}_i = -[H'] \cdot \{U\}^0 + [G']\{P\}^0$ com $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ e n representa o número total de cavidades em cada iteração;

Etapa 3) No problema “1”, as tensões calculadas no passo 2, são prescritas com o sinal oposto no domínio e no contorno de cada cavidade “i”, isto é, prescreve-se em cada

contorno Γ_{C_i} as tensões iniciais $\{\sigma\}_i^0 = -\{\sigma\}_i$; que representa um vetor corretor no ultimo termo da equação 5.20, portanto: $\{f\}_i = [Q]\{\sigma^0\}_i$ com $(i = 1, 2, 3, \dots, \text{nip})$;

Etapa 4) Resolver o problema inicial discretizado considerando o vetor corretor

$$[H] \cdot \{U\} = [G] \cdot \{P\} + \sum_{i=1}^n \{f\}_i \text{ com } (i = 1, 2, 3, \dots, \text{nip}) ;$$

Etapa 5) Depois de calcular as incógnitas do contorno, etapa 4, a equação 5.22 pode ser

usada para encontrar as tensões. Assim: $\{\sigma\}_j = -[H']_j \cdot \{U\} + [G']_j \cdot \{P\} + \sum_{i=1}^n [Q']_j \{\sigma^0\}_i$ com $(j = 1, 2, 3, \dots, \text{nip})$; onde nip representa o número de pontos internos.

Este procedimento evita a criação de cavidades através da construção de sub-regiões em cada iteração e a conectividade entre os elementos destas sub-regiões, que é um algoritmo extremamente difícil de ser controlado. Dentre as vantagens que esta abordagem apresenta cita-se: a não necessidade de criação de nós adicionais, o que aumenta consideravelmente a operação computacional e tempo para a solução do sistema linear. Uma vez incorporada a influência de uma cavidade específica, não é necessário realizar a reavaliação da sua contribuição na iteração seguinte, já que esta foi introduzida pelo vetor corretor, que evita erros numéricos intrínsecos.

Estas vantagens destacadas podem trazer enormes benefícios se a arquitetura de computação paralela é utilizada, no fato de que a contribuição de cada cavidade pode ser feita de forma independente, como bem conhecido para um método numérico mais independente, o mais eficiente é o uso de computação paralela, isto é, um conjunto de processadores fisicamente próximos os quais têm como objetivo trabalhar conjuntamente para resolver um problema, no mesmo intervalo de tempo e se comunicam de forma confiável e previsível.

A Figura 5.4 mostra como o cálculo da média ponderada de tensão de von Mises em cada nó é realizada.

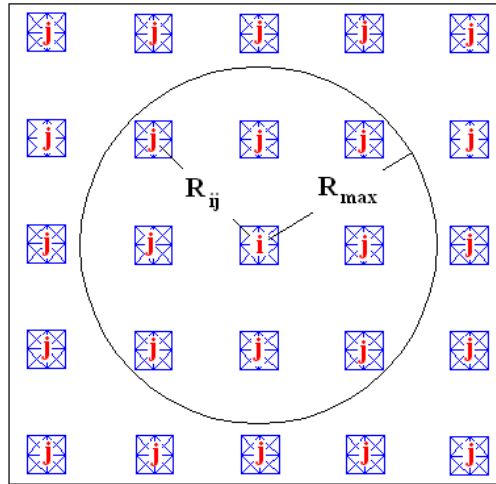


Figura 5.4 - Ponderação da tensão de von Mises.

A forma como a tensão sobre o ponto interno i é influenciada pela tensão do ponto interno j , dentro da circunferência de raio R_{MAX} , é dada pela equação 5.23.

$$\sigma_i^{\text{ponderado}} = \frac{\sigma_i^{\text{vm}} \cdot A_i + \bar{w} \cdot \sum_{j=1}^N \sigma_j^{\text{vm}} \cdot A_j}{A_i + \bar{w} \cdot \sum_{j=1}^N A_j} \quad (5.23)$$

O termo $\sigma_i^{\text{ponderado}}$ representa a tensão de von Mises para o nó “ i ”, que inicialmente possui uma tensão de von Mises σ_i^{vm} , A_i e A_j são, respectivamente, a área da célula i e j ; e σ_j^{vm} representa a tensão de von Mises para o nó “ j ”. A ponderação é realizada com o peso \bar{w} , equação 5.24 que pondera a distância entre os elementos j e o elemento i . Assim, os elementos j mais próximos de i tem um peso maior.

$$\bar{w} = \frac{\sum_{j=1}^N w_j}{\text{NIP}} \quad (5.24)$$

Onde:

$$w_j = \frac{R_{MAX} - R_{ij}}{R_{MAX}} \quad (5.25)$$

N é o número de pontos internos dentro da circunferência. Na equação 5.25, R_{MAX} é o raio da circunferência. Nos exemplos numéricos adotou-se um $R_{MAX} = 1.25\text{cm}$ e R_{ij} representa a distância entre os nós i e j .

5.4 Exemplos Numéricos

O principal objetivo do desenvolvimento de técnicas de otimização é proporcionar aos engenheiros ferramentas para a determinação de valores no problema envolvido que minimiza ou maximiza uma dada propriedade. A técnica apresentada nesta tese tem a capacidade de gerar uma configuração ótima de projeto. Consta-se que a técnica ESO via MEC com campo de tensões iniciais pode ser usada para gerar modelos de topologias ótimas. Apresentam-se a seguir quatro exemplos numéricos, nos quais os parâmetros de otimização do método empregado foram os mesmos, a saber: $0 \leq RR \leq 5\%$ e $0.25\% \leq ER \leq 2.0\%$. O critério de parada utilizado foi o volume restringido $0.28 * V_0 \leq V_f \leq 0.42 * V_0$. A célula criada no domínio circunscreve o ponto interno que atende o critério de retirada (inequação 5.1). A poligonal fechada que circunscreve o ponto interno é um polígono quadrangular regular ou não, que contém 16 células triangulares. As dimensões deste polígono nos exemplos apresentados são $(0.18 \times 0.18) \text{ cm}^2$ para o problema de duas barras, $(0.40 \times 0.40) \text{ cm}^2$ para a viga biapoiada, $(0.50 \times 0.50) \text{ cm}^2$ para o viga biapoiada com atuação de duas cargas e $(0,45 \times 0,45) \text{ cm}^2$ para a viga em balanço.

Nesta tese, foi definido um critério particular para a escolha dos nós das células com as variáveis de tensão inicial. Os nós são escolhidos para pertencer ao domínio do corpo. Para uma célula interna ao domínio, cujos lados não coincidem com o contorno do corpo, os nós são adotados na posição dos vértices do triângulo. Quando um dos lados coincide com o contorno, os nós são adotados internos ao domínio da célula. Assim, quando o tamanho da célula aumenta tem-se uma maior densidade de pontos próximos ao contorno e próximos aos contornos das células vizinhas proporcionando mais picos de tensões nas proximidades destes contornos. Desta forma, para uma célula menor, os pontos internos dentro do triângulo se aproximam do centroide da célula uniformizando os cálculos das integrais numéricas para tensões em pontos internos e consequente uma configuração ótima para o projeto é alcançada.

5.4.1 Problema de duas barras

O primeiro exemplo mostra a otimização de uma estrutura retangular sujeita a ação de uma carga concentrada de 100N no ponto médio da aresta lateral conforme a

figura 5.5a que define o domínio inicial de projeto. As propriedades do material utilizado são: Módulo de Young $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e espessura $t = 1 \text{ mm}$. Este problema foi proposto por Cervera (2003) usando como função objetivo a expressão definida pela equação 5.26.

$$f_U = UV \quad (5.26)$$

onde U é a energia de deformação e V o volume da estrutura.

O contorno da estrutura foi discretizado com 120 elementos lineares e o domínio com 171 pontos internos e 2736 células triangulares. O carregamento distribuído para simular a carga concentrada de 100N foi de 10N/mm. O valor de (RR), razão de rejeição, foi de 1% e a razão evolucionária (ER) também igual a 1.25%.

A topologia ótima foi alcançada na iteração 23, figura 5.5b, com um custo computacional de 1.48 segundos usando um Pentium CPU P6100 (2 GHz) processador. Comparando a topologia ótima com a configuração inicial de projeto houve uma redução de aproximadamente 62% do volume inicial. Nas figuras 5.5c e 5.5d estão representados, respectivamente, o fluxo de tensão da topologia ótima (iteração 23), com a presente formulação, e a topologia ótima alcançada por Cervera (2003) com uma redução de volume de 75%.

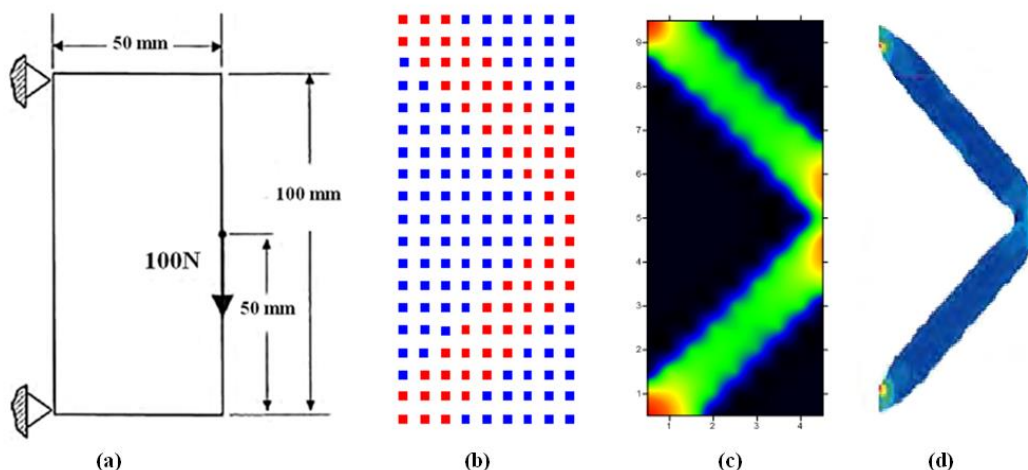


Figura 5.5 – (a) Geometria e posição da carga aplicada, (b) topologia ótima com 120 elementos lineares de contorno (c) Fluxo de tensão na topologia Ótima e (d) topologia ótima por Cervera (2003) .

Na figura 5.6a está representado o gráfico de uma taxa de otimização por iteração, esta taxa foi criada para assegurar o processo iterativo. Deste modo, ela

representa a razão entre a fração de volume removida pela tensão máxima de von Mises equivalente obtida considerando todos os pontos internos envolvidos na análise. A figura 5.6b mostra a fração de volume reduzido por iteração.

Em termos de redução de volume / peso, o projeto final tem uma redução de volume de 62% em relação ao projeto inicial. Nota-se que, apesar das posições dos pontos internos, a configuração ótima proposta é simétrica.

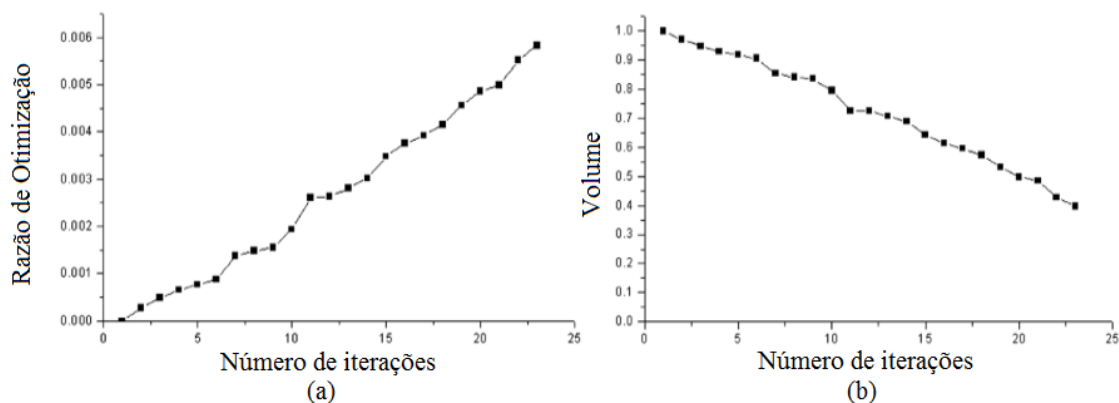


Figura 5.6 – (a) Razão de otimização do processo evolucionário (b) Volume por iteração.

A figura 5.7 mostra a geometria da célula definida para representar cada cavidade criada entorno do ponto interno enquanto o processo evolucionário avança e a discretização do contorno. Isto depois de implementada a formulação descrita nos itens 3 e 4.

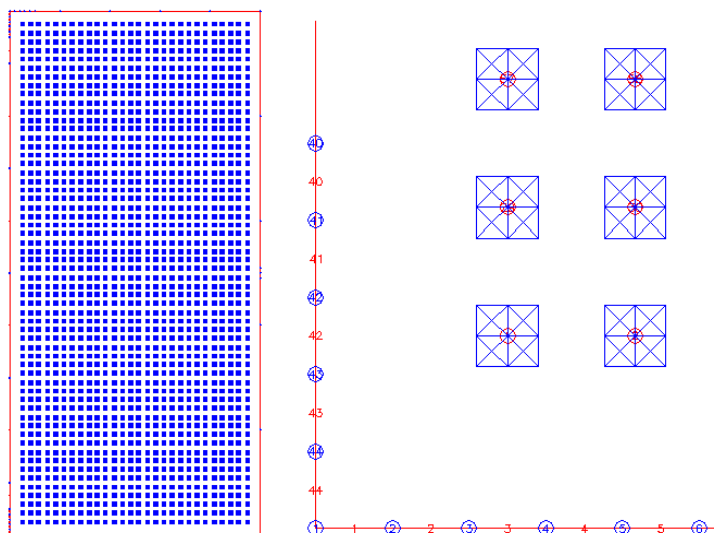


Figura 5.7 – Discretização do problema inicial e a geometria de cada região, formada por 16 células triangulares

Na figura 5.8 estão representadas as configurações ótimas para o problema de duas barras considerando diversos tamanhos de células. Nota-se que quanto maior o tamanho da célula menor é a tensão máxima de von Mises da estrutura. Verifica-se também que a tensão é mais uniforme quando o tamanho da célula é menor. Entretanto, a configuração final da OT é atendida para todos os casos indicados.

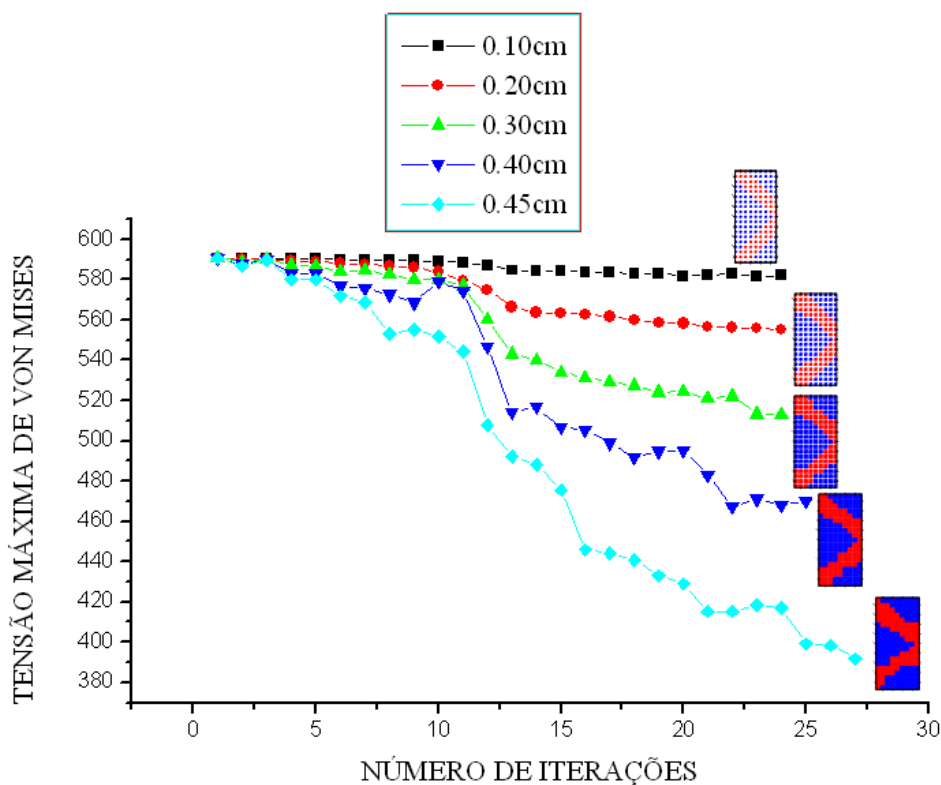


Figura 5.8 – Tensão máxima de Von Mises por número de iterações.

5.4.2 Viga biapoçada

A figura 5.9 mostra como domínio inicial de projeto um com comprimento de (200mm) e altura (100mm). Os dois cantos inferiores são fixos e o carregamento distribuído de 5N/mm é aplicado no meio do vão superior. O módulo de Young $E=210\text{GPa}$ e o coeficiente de Poisson $\nu=0.30$ são usados para análise via MEC. Para os parâmetros de otimização, razão de rejeição e razão evolucionária, utilizou-se o valor de 1%.

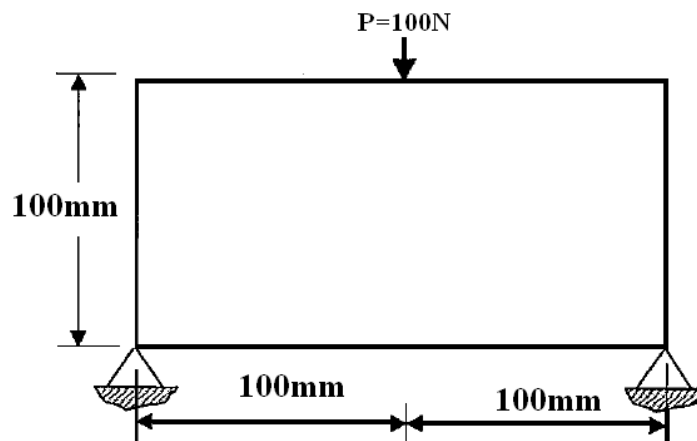


Figura 5.9 – Domínio de projeto

A figura 5.10 mostra o procedimento de otimização via MEC usando 66 elementos lineares, 200 pontos internos e 3200 células triangulares. As figuras 5.10a e 5.10b mostram, respectivamente, a topologia na iteração 12 e o fluxo de tensão na mesma iteração. Enquanto as figuras 5.10c e 5.10d mostram, respectivamente a topologia ótima na iteração 25 e o fluxo de tensão da topologia ótima.

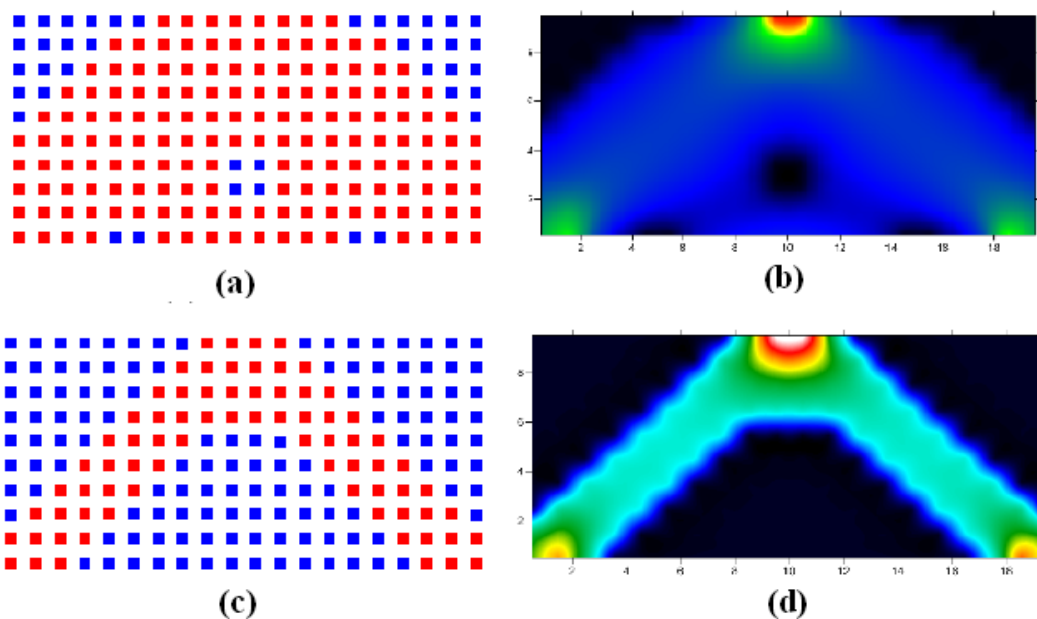


Figura 5.10 – Histórico das topologias com a presente formulação: (a) Topologia na iteração 12, (b) Fluxo de tensão na iteração 12, (c) Topologia ótima, iteração 25 e (d) Fluxo de tensão na iteração 25.

Na análise numérica via MEC, as integrais foram resolvidos com 12 pontos de Gauss e a distância adimensional de pontos de colocação para os nós de elementos era de 0,50. Vale destacar que foi utilizada uma estratégia de discretização nos cantos, onde a estrutura é fixada e na região onde a carga é distribuída para melhorar as configurações ótimas.

A viga apoiada deste exemplo foi resolvida também com a técnica numérica SESO através da análise de elementos finitos, Simonetti *et al.* (2009,2010,2014), a fim de comparar os resultados obtidos com a presente formulação usando o MEC com campo de tensões iniciais. Os parâmetros de otimização foram mantidos os mesmos e os resultados são mostrados na Figura 5.11. Esta estrutura foi modelada com uma malha fina 60x30 totalizando 3.600 elementos finitos triangulares e o volume final alcançado igual a 33% do volume inicial. A área final da configuração ótima proposta na presente formulação é igual a 34,3% da área inicial. A Figura 5.10a mostra a topologia na iteração 33 e a Figura 5.10b fornece a topologia ótima da viga apoiada usando a técnica numérica SESO.

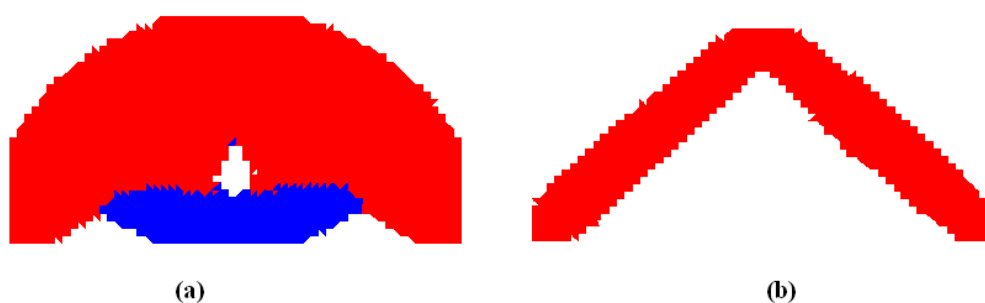


Figura 5.11 – (a) Topologia na iteração 33 e (b) Topologia ótima na iteração 140.

5.4.3 Viga biapoiada com dois casos de carga

A figura 5.12a mostra o domínio de projeto enquanto a figura 5.12b a configuração ótima proposta por Liang (2005). O módulo de Young é igual 28,567MPa o coeficiente de Poisson é igual a 0.15 e a espessura de 350 mm. Duas cargas concentradas de valor $P=2050\text{kN}$ são aplicadas na parte superior da estrutura. A viga biapoiada é modelada com uma malha refinada de 78x36 elementos finitos. A *Performance-based Optimization of Structures* (PBO) técnica com base no critério de desempenho do sistema foi aplicado com uma taxa de remoção de elemento de 2% durante o processo de otimização.

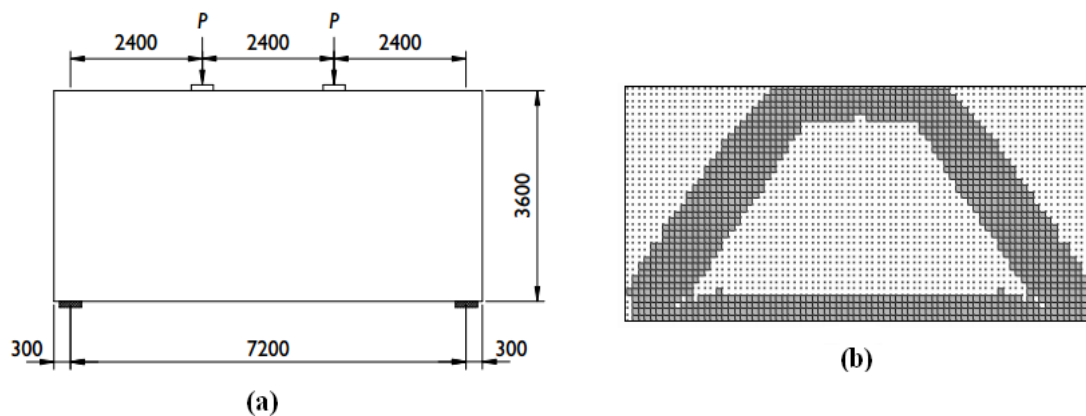


Figura 5.12 - (a) Geometria e posição das cargas aplicadas, (b) Topologia ótima por Liang [2005].

Este problema foi proposto com a presente formulação usando 92 elementos lineares de contorno, 646 pontos internos com um total de 10336 células triangulares e parâmetros de otimização $RR=ER=1\%$. A configuração ótima apresentada na figura 5.13b foi obtida com volume final de 45.8% na formulação apresentada por Liang (2005). A topologia apresentada na figura 5.13a (iteração 8) apresenta um volume de 90,7% do volume inicial enquanto a figura 5.13b mostra o fluxo de tensão nesta iteração. Na figura 5.13c encontra-se a topologia ótima obtida na iteração 31 e na figura 5.13d o fluxo de tensão desta topologia.

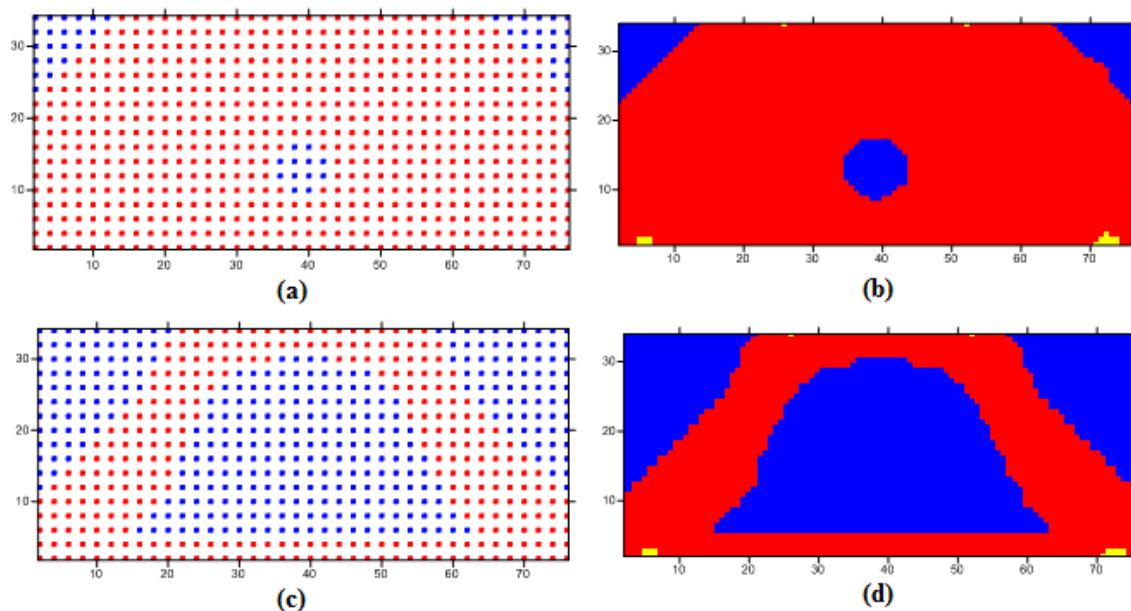


Figura 5.13 – Topologia ótima com a presente formulação: (a) Topologia na iteração 8 (volume 90.7%) – (b) Fluxo de tensão na iteração 8, (c) Topologia ótima na iteração 31 (Volume 42.7%), (d) fluxo de tensão na iteração ótima.

Com o objetivo de mostrar que a proposta de otimização topológica via MEC com campo de tensões iniciais não apresenta nenhuma dependência da discretização do domínio; este exemplo também foi resolvido com 92 elementos lineares de contorno, 796 pontos internos e 12.736 células triangulares e todos os parâmetros de otimização utilizados durante o procedimento evolucionário foram mantidos iguais. As figuras 5.14a e 5.14c mostram o histórico do processo evolucionário e a mesma topologia apresentada nas figuras 5.13a e 5.13c. A figura 5.14b mostra o fluxo de tensão para a topologia na iteração 8 enquanto a figura 5.14d apresenta o fluxo de tensão para a topologia ótima alcançada na iteração 33.

Geralmente, o contorno externo comporta-se de um modo semelhante, independentemente do tamanho do elemento. Assim, a convergência para a mesma topologia ocorre quando o tamanho de célula e os parâmetros de otimização são mantidos, independentemente do número de pontos internos. No entanto, observa-se que uma malha grossa, ou seja, menor número de pontos internos com células de maior tamanho proporciona um aumento da quantidade de pontos próximo ao contorno. Apesar das tensões serem menores nestes casos, existem muitos picos de tensão que, por sua vez, podem perturbar a estrutura ou causar um erro de domínio.

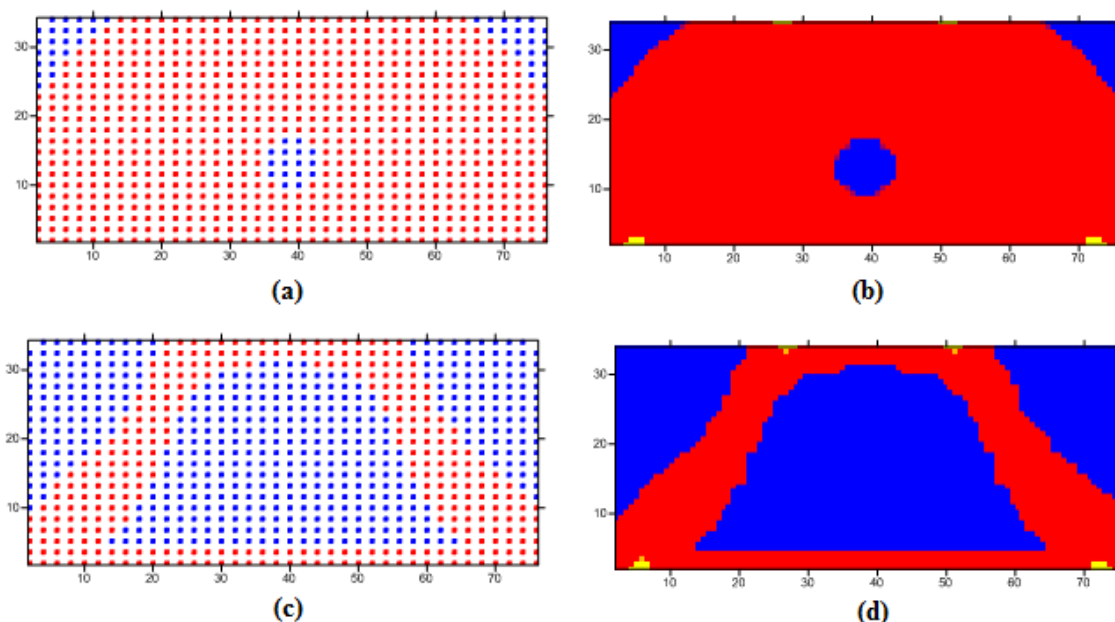


Figura 5.14 – Topologia ótima coma presente formulação: (a) Topologia na iteração 8 (volume 90.1%) – (b) Fluxo de tensão na iteração 8, (c) Topologia ótima na iteração 33 (Volume 39.1%), (d) fluxo de tensão na iteração ótima.

Com o objetivo de comprovar que a configuração ótima não apresenta nenhuma dependência da discretização do domínio; este exemplo também foi resolvido com duas malhas diferentes de pontos internos, a mesma malha de contorno e os mesmo parâmetros de otimização. A figura 5.15 mostra a topologia final com 121 e 1254 pontos internos totalizando, respectivamente, 1936 e 20064 células triangulares. As configurações apresentadas na figura 5.15 são semelhantes às configurações ilustradas nas figuras 5.13 e 5.14 e diferem apenas em seus volumes finais.

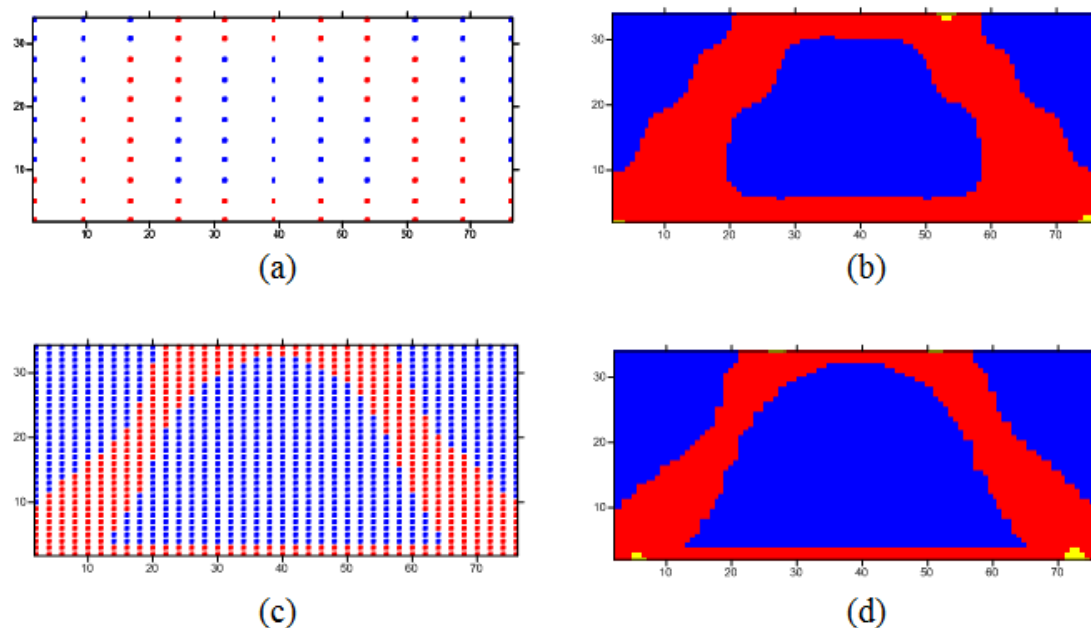


Figura 5.15 – Topologia ótima: (a) Topologia na iteração 46 (volume 43,3%) (b) Fluxo de tensão na iteração 46, (c) Topologia ótima na iteração 41 (Volume 31,2%), (d) fluxo de tensão na iteração ótima 41.

O gráfico da Figura 5.16 mostra a variação da tensão máxima de von Mises por número de iterações. Nota-se uma pequena diferença, cerca de 1,29% na tensão de von Mises, na configuração ótima, devido ao aumento da discretização de pontos internos de malha. Em ambos os casos analisados, as células triangulares tem uma área igual a 1.5625mm^2 .

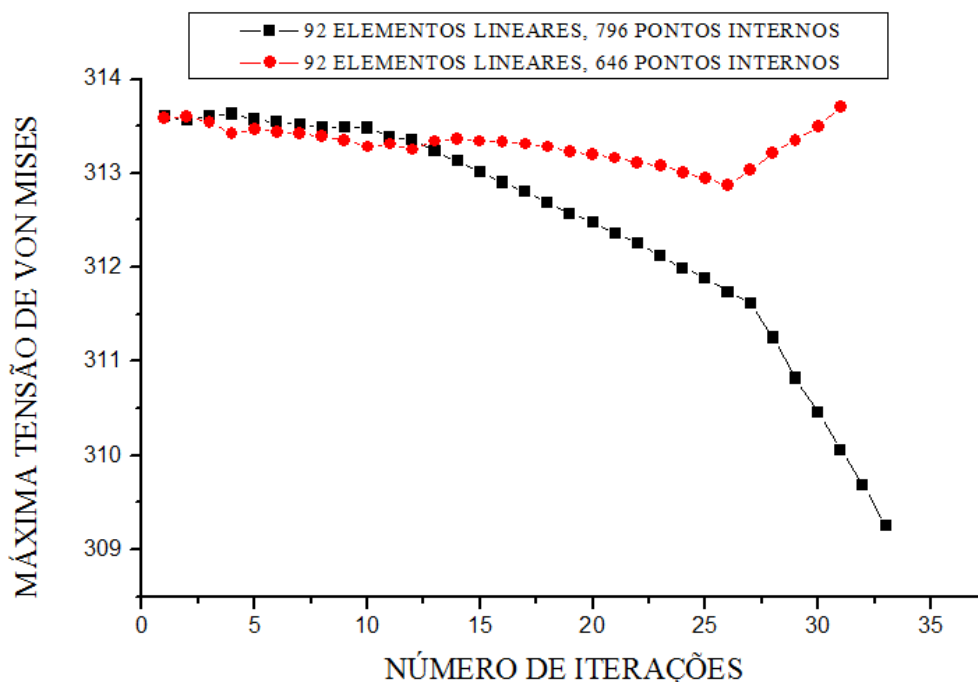


Figura 5.16 – Máxima tensão de von Mises por Número de iterações.

5.4.4 Viga em balanço

Na viga em balanço mostrada na figura 5.17, aplicou-se um carregamento de 100N distribuído em um elemento linear de comprimento 1cm no centro da extremidade livre. A espessura da viga é de 1mm. O módulo de Young é igual a $E=207\text{GPa}$ e o coeficiente de Poisson $\nu=0.30$. O procedimento de otimização usando MEC com campos de tensões iniciais foi aplicado a esta viga em balanço. O domínio da estrutura foi discretizado com 160 pontos internos e 61 elementos lineares de contorno e 2560 células triangulares. A configuração ótima apresentada, na figura 5.18, foi obtida com os parâmetros $RR = ER = 1\%$.

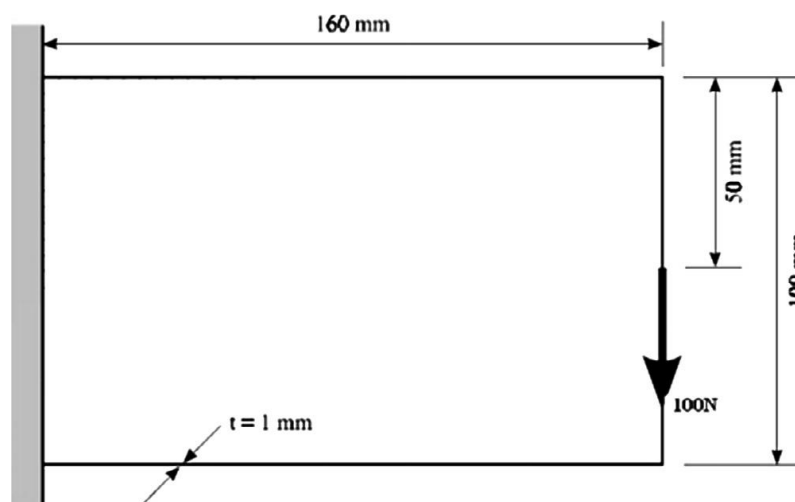


Figura 5.17 – Domínio de projeto

A Figura 5.18 compara o projeto ótimo obtido com a presente formulação, isto é, campo de tensões iniciais através MEC - ESO com a configuração ótima, analítica, proposta pela teoria de Rozvany (1995) e de uma solução ótima obtida por Chu *et al.* (1997) usando FE-ESO. A solução analítica mostrada na figura 5.18a é uma estrutura de treliça.

Figura 5.18b mostra a solução ótima obtida usando ESO sob restrição de rigidez. O projeto ótimo obtido com a abordagem atual encontra-se na figura 5.18d e mostra uma boa semelhança com a FE-ESO. Também demonstra uma boa semelhança com a figura 5.18c proposto por Cervera (2005) usando otimização estrutural evolucionária com base na representação dos elementos de contorno delineando a geometria com curvas b-spline. Figura 5.18e mostra o fluxo de tensão da configuração ótima para esta estrutura com a presente abordagem.

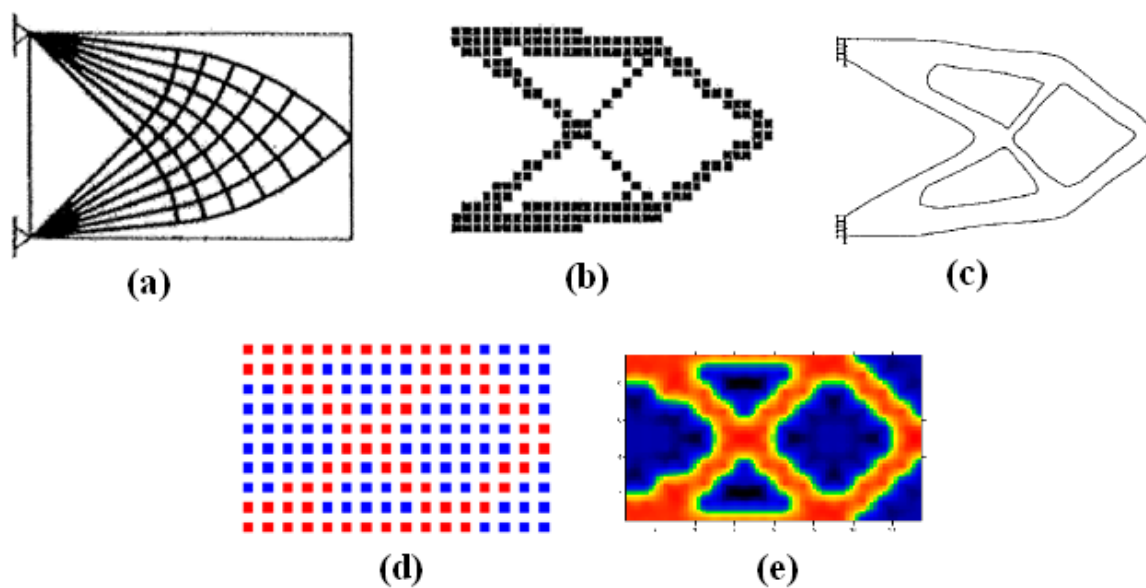


Figura 5.18 – Configurações ótimas – (a) Solução Analítica, (b) FE-ESO, (c) MEC-ESO, (d) Presente abordagem MEC-ESO e (e) Fluxo de tensão na topologia ótima.

A topologia ótima para o projeto é alcançada após 38 iterações. A redução do volume é de aproximadamente 63% em relação ao projeto inicial. A evolução do volume é apresentada na Figura 5.19. Como pode ser observado, o volume diminui suavemente ao longo do processo iterativo. Na primeira para a segunda iteração há uma pequena diminuição no volume devido à inserção dos dois buracos no início do processo de otimização.

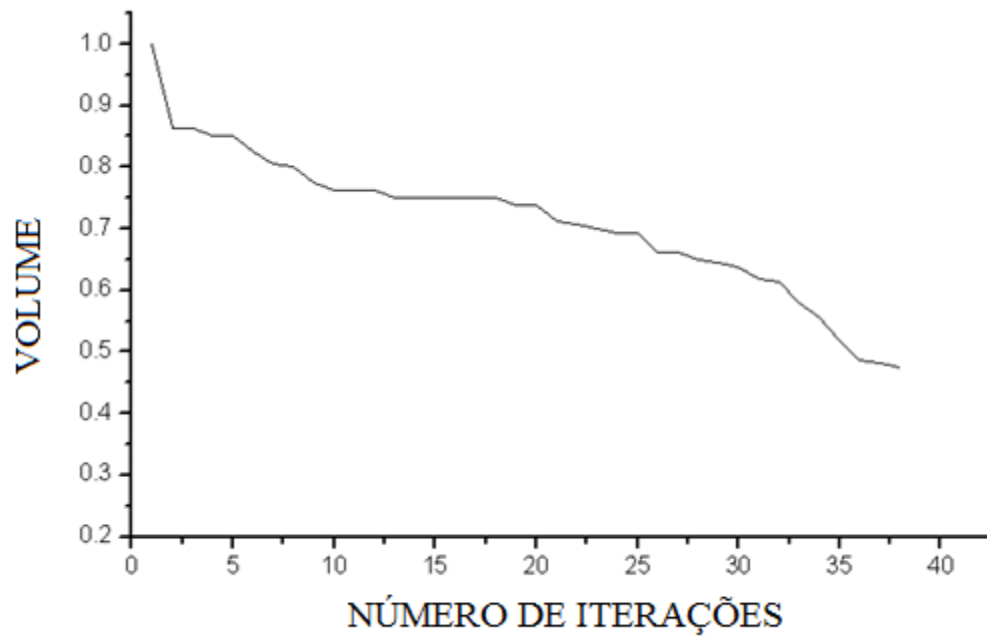


Figura 5.19 – Volume por número de iterações.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo serão apresentadas as principais conclusões sobre a pesquisa desenvolvida bem como as sugestões para trabalhos futuros no campo da otimização evolucionária estrutural.

6.1 Conclusões

As conclusões serão apresentadas na ordem em que aparecem no texto. Desta forma, as conclusões serão apresentadas em duas etapas: Otimização Topológica (OT) via MEC abordagem de sub-região e a OT via MEC com campo de tensões iniciais.

6.1.1 Otimização topológica via MEC – Usando sub-região

A formulação do MEC é acoplada ao ESO para cálculo das tensões em pontos internos como estratégia para representar as regiões que devem ser eliminadas durante a OT. Esta formulação apresenta algumas vantagens em relação aos métodos propostos, uma vez que não foi necessário refazer a malha em cada iteração pois seu domínio é fixo. Desta forma, a velocidade do procedimento de otimização é bem menor que os métodos MLS acoplados ao MEC. Destaca-se também que não houve necessidade da implementação e utilização de filtros nesta formulação. A partir dos exemplos analisados verificou-se que não existe a necessidade de refinamento no grid para se capturar a topologia ótima da estrutura, pois não há dependência da malha nesta formulação. As cavidades são criadas automaticamente em pontos internos de baixa tensão e são sub-regiões convexas, nesta tese, uma sub-região hexagonal cujas arestas são elementos lineares de contorno. Vale ressaltar que nesta técnica a otimização evolucionária resolve um sistema linear a cada iteração. Assim, o sistema linear além de não esparsa aumenta o número de variáveis a partir do aumento do número de cavidades, aumentando também o custo computacional. Esta formulação mostrou-se eficiente e eficaz na captura da topologia ótima para projetos de engenharia.

6.1.2 Otimização topológica via MEC – Usando campo de tensões iniciais

Nesta abordagem o problema de OT é resolvido com a técnica numérica denominada ESO a qual é acoplada com a formulação do MEC usando campos de tensões iniciais como estratégia para representar as regiões que devem ser eliminadas na OT. Nesta formulação há necessidade de considerar integrais de domínio. No entanto, não é usado a clássica estratégia de inserção de sub-regiões utilizando elementos de contorno para introduzir a cavidade. Deste modo, um campo de tensões iniciais é somado às tensões elásticas do problema inicial resultando em tensões nulas, simulando de maneira virtual uma cavidade. Conclui-se então que, não há a necessidade de alteração das matrizes de influência inicial. Desta forma, esta formulação apresenta uma grande vantagem no custo computacional do problema em análise, pois essa matriz é não esparsa e a sua montagem com a inserção de novos elementos, como ocorre nos processos de otimização via MEC usando sub-região, produz um alto custo computacional. Destaca-se ainda que os problemas da OT como a dependência da malha e o tabuleiro de xadrez não apareceram nos exemplos analisados com a presente formulação.

Por fim, a “subdiscretização” dos cantos, pontos de apoio, carregamento e a implementação de um filtro espacial de tensão capaz de minimizar as tensões dos pontos internos mais próximos proporcionam uma melhor evolução para o caminho ótimo. Desta forma, tanto a formulação usando sub-região como a de campo de tensões iniciais são menos sensíveis aos parâmetros de evolução RR e ER mas, são dependentes dos mesmos, como ocorre no procedimento de otimização topológica ESO via MEF.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

O procedimento de otimização estrutural evolucionária via MEC mostrou-se capaz de realizar otimização estrutural topológica. Assim, para pesquisas futuras das técnicas apresentadas neste trabalho, propõe-se:

- 1) Acoplar ao MEC a técnica numérica SESO;
- 2) Testar estratégias diferentes de integração da singularidade $\frac{1}{r}$;

- 3) A utilização da otimização estrutura evolucionária multiobjetiva, onde a retirada de elementos satisfaça simultaneamente a mais de um critério de projeto;
- 4) Testar um procedimento híbrido de otimização topológica via MEF e MEC, onde o cálculo das tensões são realizados via MEC no centroide de cada elementos finitos (ponto interno) e a retirada dos pontos internos realizada via técnica numérica SESO. Assim, poderia ser realizada otimização de forma e topologia;
- 5) Aplicar a técnica MEC-ESO com critério de frequência.
- 6) Implementar um critério de segurança ou desempenho. Uma vez que, o estado de tensão é constante e uma pequena falha pode levar a falha do corpo.

REFERÊNCIAS

BIBLIOGRÁFICAS

Abe, K.; Kazama, S.; Koro, K., A boundary element approach for topology optimization problem using the level set method. *Communications in numerical methods in Engineering*. v. 23, p. 405 – 416, (2007).

Almeida, V.S., Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF. 192f. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, (2003).

Almeida, V. S., Simonetti, H.L., Neto, L.O., Comparative analysis of strut-and-tie models using Smooth Evolutionary Structural Optimization. *Engineering Structure*, v. 56, p. 1665-1675 (2013).

Anflor, C. T. M., Otimização Evolucionária Topológica em Problemas Governados pela equação de Poisson empregando Método dos Elementos de Contorno, Tese de Doutorado, UFRGS, Porto Alegre, (2007).

Arora, J.S., “Introduction to Optimum Design”, Elsevier Inc., USA,(2004)

Azevedo, C. A. C., Formulação alternativa para a análise de domínios nãohomogêneos e inclusões anisotrópicas via MEC, Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, (2007).

Beale, E. M. L., 'Introduction to optimization,' *John Wiley & Sons*, (1988).

Bendsøe, M.P. e Kikuchi, N., “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197-224, (1988).

Bendsøe, M. P., Rasmussen, J., Rodrigues, H. C., 'Topology and boundary optimization as an integrated tool for computer aided design,' *Engineering Optimization in Design Processes, Proceedings of the International Conference*, Karlsruhe Nuclear Research Center, Germany, pp. 27 - 34, Sep 3-4, (1990).

Bendsøe, M. P., 'Optimization of structural topology, shape and material,' *Springer*, Berlin, (1995).

Bendsøe, M.P., Optimal Shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, v. 1, pp. 193-202. (1989).

Bendsøe, M.P. e Sigmund, O., *Topology Optimization*, Springer, Berlin, (2002).

Canfield, S. e Frecker, M., Topology Optimization of Compliant Mechanical Amplifiers for Piezoelectric Actuators, *Struct Multidisc Optim*, p.269-279, (2000).

Becker, A. A., *The Boundary Element Method in Engineering*, McGraw-Hill, (1992).

Brebbia, C.A.; Dominguez, J., *Boundary elements: and introductory course*. Computational Mechanics Publications, London, (1992).

Brebbia, C., Telles, J. e Wrobel, L. *Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag: Heidelberg, (1984).

Botta, A.S., Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, (2003).

Cerrolaza, M., Annicchiarico, W. and Martinez, M., Optimization of 2D boundary element models using b-splines and genetic algorithms, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 24, 427–440, (2000).

Cervera E., Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of B-spline geometry. PhD Thesis. University of Durham, Durham, UK, (2003).

Cervera, E. e Trevelyan, J., Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms. *Computers and Structures* 83, 1902–1916, (2005).

Cheng, K. T. e Olhoff, N., “An investigation concerning optimal design of solid elastic plates”, *International Journal of Solids Structures*, v.17, pp. 305-323, (1981).

Cheng, T.K. e Olhoff, N., Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates”, *International Journal of Solids Structures*, 18-2, pp. 153-169. (1982).

Cho, S. e Choi, J., Efficient Topology Optimization of Thermo-Elasticity Problems Using Coupled Field Adjoint Sensitivity Analysis Method, *Finite Element in Analysis and Design*, (2005).

Christie, W. C., Bettess, P. e Bull, J. W., Self-Designing Structures: A Practical Approach, *Engineering Computations*, v. 15, n. 1, p. 35-48, (1998).

Chu, D.N., Xie, Y.M., Hira, A. and Steven, G.P., “Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 21, pp. 239-251, (1996).

Chu, D.N., Xie, Y.M., Steven, G.P., On various aspects of evolutionary structural Optimization for problems with stiffness constraints. *Finite elements in Analysis & Design* 24:197-212, (1997).

Coutinho, K. D., Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais,

- Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Natal, RN, (2006).
- Eschenauer, H. A., Olhoff, N., Topology optimization of continuum structures. *Applied Mechanics Review*, v.54, n.4, pp 331-390, (2001).
- Ferreira, M. D.C. Análise Inversa em Sólidos Bidimensionais Utilizando o Método dos Elementos de Contorno, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, (2007).
- Goodman, J., Kohn, R.V. e Reyna, L., “Numerical Study of Relaxed Variational Problem from Optimal Design”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57, pp. 107-127, (1986).
- Guzmán, M.A., Delgado, A. e De Carvalho, J., Topology Optimization With Algorithm Base don Bacterial Chemotaxis, 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), (2008).
- Haftka, R.T. e Gandhi, R.V., “Structural Shape Optimization – A survey”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 57, pp. 91-106, (1986).
- Haftka, R. T., Gürdal Z., 'Elements of structural optimisation, 3rd ed.,' *Kluwer Academic Publishers*, Netherlands, (1992).
- Hall, W. S., The boundary element method, Dordrecht; Boston: Kluwer Academic. (1994).
- Hemp, W. S., Optimum Structures, Oxford: Claredon, p. 123, (1973).
- Hinton, E. and Sienz, J., “Fully stressed topological design of structures using an Evolutionary Procedure. *Engineering Computations*, v. 12, p. 229-44, (1995).
- Lagaros, M., Papadrakakis, M., Kokossalaris, G. Structural optimization using evolutionary algorithms. *Computers and Structures*, v. 80, p. 571-589, (2002).
- Labanowski, A. J. e Fancello, E. A e Novotny, A.A., Simp, Eso e Tsa: Uma Análise Comparativa de Métodos de Otimização Topológica para Elasticidade 2D, CILAMCE, (2004).
- Lurie, K. A., Federov, A.V. e Cherkaev, A.V., “Regularization of Optimal Design Problems for Bar and Plates, Parts I e II”, *Journal of optimizations and Theory and Applications*, 37-4, pp. 499-521,523-543, (1982).
- Kane, J.H., Boundary element analysis in engineering continuum mechanics, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, (1994).
- Kawamura, H., Ohmori, H., Kito, N. Truss topology optimization by a modified genetic algorithm. *Strucutre and multidisciplinary optimization*, v. 23, p. 467-472, (2002).

Kirkpatrick, S., Gelatt Jr., C. D., Vecchi, M. P. Optimization by Simulated Annealing, Science, 220, n. 4598, p. 671-680, (1983).

Kirsch, U., "On Singular Topologies in Optimum Structural Design", Structural Optimization, vol. 2, pp.133-142, (1990).

Kim, H., Querin, O.M., Steven, G.P., and Xie, Y.M., Improving efficiency of evolutionary structural optimization by implementing fixed grid mesh, Struct Multidisc Optim 24, 441–448, Springer-Verlag, (2003).

Kohn, R.V. e Strang, G., Optimal-design and relaxation of variational problems.1. Communications on Pure and Applied Mathematics, v.39, n.1,pp.112-137, (1986a).

Krishnamoorthy, P., Prasanna, P.V., Sudarshan. Objected-oriented framework for genetic algorithms with application to space truss optimization. Journal of computing in civil engineering, vol. 16, (2002).

Leite, L.G.S., Desenvolvimento de Modelos Numéricos para Análise de Problemas de Interação de Domínios Bidimensionais, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, (2007).

Liang, Q.Q., Xie, Y.M. and Steven, G.P., Optimal topology selection of continuum structures with displacement constraints. Comput. & Struct. 77: 635–44, (2000).

Liang, Q.Q., Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications, Spon Press, London, (2005).

Lopes Jr., M. C., Modelagem Numérica do Crescimento de Fraturas através do Método dos Elementos de Contorno, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, (1996).

Marczak, R.J., Optimization of elastic structures using boundary elements and a topological-shape sensitivity formulation. Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, ISBN 978-85-85769-30-7, (2007).

Maxwell, J. C., "On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Force", Trans. Royal Soc. Edinb., vol. 26/1, (1872).

Michell, A. G. M., "The limits of economy of material in frame structures", Philosophical Magazine, 8, pp. 589-597, (1904).

Neches, L.C. e Cislino, A. P. Topology optimization of 2D elastic structures using boundary elements, Engineering Analysis with Boundary Elements, volume 3 Issue 7, pp. 533-544, (2008).

Prager, W., A note on discretized michell structures. Comput. Meth. Appl.Mech., v. 3,p. 349–355,(1974).

Pereira, C.E.L. Análise de Sensibilidade Topológica em Problemas de Não-Linearidade Geométrica e Hiperelasticidade Não-Linear Quase-Incompressível, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, (2006).

Porto, E. D. e Pavanello, R., Influencia dos Parâmetros de Homogeneização sobre a solução estrutural topológica ótima, VIII Congresso Ibero Americano de Engenharia Mecânica, Peru, (2007).

Osher, S.; Sethian, J., Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, v. 79, p. 12–49, (1988).

Querin, O.M., Evolutionary Structural Optimization stress based formulation and implementation. PhD dissertation, University of Sydney, (1997).

Querin, O.M., Young, V., Steven, G.P. and Xie, Y.M., Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 189: 559–73, (2000).

Querin, O. M., Steven, G.P. e Xie, Y.M., Evolutionary Structural Optimization using Additive Algorithm, *Finite Element Analysis and Design*, v. 34, p. 291-308, (2000a).

Querin, O. M., Young, V., Steven, G.P. e Xie, Y.M., Computational Efficiency and Validation of Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, v.189, p. 559-73, (2000b).

Reynolds D., McConnachie J., Bettess P., Christie W. C, Bull J. W., Reverse adaptivity – a new evolutionary tool for structural optimization, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 45(5), p. 529-52, (1999).

Rong, J.H., Xie, Y.M., Yang, X.Y. and Liang, Q.Q., “Topology optimization of structures under dynamic response constraints”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, No. 2, pp.177-189, (2000).

Rozvany, G.I.N., Olhoff, N., Cheng, K. e Taylor, J.E., “On the Solid Plate Paradox in Structural Optimization”, *Journal of Structural Mechanics*, 10-1, pp. 1-32, (1982).

Rozvany, G.I.N., Zhou, M. e Berker, T. “Generalized shape optimization without homogenization”, *Structural Optimization*, Vol. 4, pp. 250-252, (1992).

Saaty, T. L., 'Optimization in integers and related extremal problems,' *McGraw-Hill*, New York, 1970.

Salagame, R. R. e Belegundu, A. D., “Shape Optimization with p-Adaptivity”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 33 (12), pp. 2399-2405, 1995.

Santana, H.M., Otimização topológica de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão. Dissertação (Mestrado). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, (2002).

Schmit, L.A., Structural synthesis – its genesis and development. AIAA J. 19, 1249–1263, (1981).

Scuciato, R. F., Estudo Teórico e Implementação Computacional do Método dos Elementos de Contorno Aplicados a Problemas Elastostáticos Lineares Bidimensionais, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, (2007).

Simonetti, H. L. *Otimização topológica de estruturas bidimensionais*. Dissertação (Mestrado em Ciências da Engenharia Civil) - Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2009.

Simonetti, H.L.; Almeida, V.S.; Neves, F.A. Seleção de Topologias Ótimas para Estruturas do Contínuo com minimização de Volume sujeita a restrição de tensão via “Smoothing ESO” (SESO); CILAMCE; Argentina; (2010).

Simonetti, H.L, Almeida, V.S., Neto, L.O., A smooth evolutionary structural optimization procedure applied to plane stress problem, *Engineering Structure*, v. 75, p. 248-258, (2014).

Soh, C.K.; Yang, J., Fuzzy controlled genetic algorithm search for shape optimization, *Journal of Computing in Civil Engineering*, v. 10, n. 2, p. 143-214, (1996).

Sonmez, F.O.. Structural Optimization Using Simulated Annealing, Departamento of Mechanical Engineering, Bogazici University, Turkey, pp. 282-306, (2008).

Steffens, L.M., Desenvolvimento de uma metodologia Integrada para Otimização de Forma e Mecânica de Fluídos, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, (2005).

Stump, F.V., Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional sujeitas a Restrição de Tensão, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da USP, São Paulo, Brasil, (2006).

Telles, J.C.F., A self-adaptative coordinate transformation for efficient numerical evaluations of general boundary element integrals. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.24, pp. 959-973, (1987).

Tovar, A., Optimización topológica con la técnica de los autómatas celulares híbridos, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 21, n.4, pp. 365-383, Bogotá, Colômbia, (2005).

Vanderplaats, G. N. e Salajegheh, E., “New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis”, *AIAA Journal*, vol. 27, nº 3, pp. 352-358, (1987).

Vitório Junior, P.C., Análise Level Set da otimização topológica de estruturas planas usa utilizando o Método dos Elementos de Contorno, Dissertação de Mestrado,

Programa de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, (2014).

Ullah, B.; Trevelyan, J.; Matthews, P.C., Structural optimization based on the boundary element and level set methods. *Computer and Structures*. v. 137, p. 14-30, (2014).

Ullah, B.; Trevelyan, J.; Matthews, P.C., A Boundary Element and Level Set Based Topology Optimisation using Sensitivity Analysis, 8th Ankara International Aerospace Conference, METU, Ankara TURKEY, September (2015).

Venturini, W. S., Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia, São Carlos, 349 p., Tese (Livre Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, (1988).

Voth, B., Using automatically generated shape variables to optimize stamped plates. Altair Internal Report Report, Troy, MI (1999).

Wittmann, F. H, Fracture mechanics of concrete. Amsterdam, Oxford, ed. (1983).

Wu, S. J. e Chow, P. T., Genetic algorithms for nonlinear mixed discrete- integer optimization problems via meta-genetic parameter optimization, *Engineering Optimization*, 24, pp. 137–159,(1995).

Wutzow, W.W., Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Chapa com Enrijecedores, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, Dissertação de Mestrado, São Carlos, (2003).

Xie, Y.M. and Steven, G.P., A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures* 49: 885–96, (1993).

Xie, Y.M.; Steven, G.P., Evolutionary structural optimization for dynamic problems. *Comp. & Struct.* 58, 1067–1073, (1996).

Yamada, T.; Shichi, S.; Matsumoto, T.; Takahashi, T.; Isakari, H., A level set-based topology optimization method using 3D BEM. *Advances in Boundary Element Techniques XIV*. p. 432 – 437, (2013).

Zhou, M., Pagaldipt, N., Thomas, H.L., Shyy, Y.K. An integrated Approach to Topology, Sizing and Shape Optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.26, p.308-318, (2004).

ANEXO I

NOÇÕES ELEMENTARES DA TEORIA DA ELASTICIDADE

1 Noções Elementares da Teoria da Elasticidade

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos básicos da teoria da elasticidade, necessários para o entendimento do conteúdo deste trabalho. Apresentam-se ainda os conceitos fundamentais do problema elástico e as simplificações dos estados planos de tensão e deformação, bem como suas particularidades.

1.1 Equações Básicas da Teoria da Elasticidade

A seguir serão apresentadas as hipóteses básicas que deverão ser respeitadas:

- i) é válida a geometria de pequenos deslocamentos;
- ii) o estado deformado do corpo pode ser escrito em função do estado indeformado (aproximação Lagrangiana);
- iii) o material que constitui o corpo é elástico linear, homogêneo e isotrópico.

O problema elástico, de maneira geral, pode ser resolvido tanto pelo método direto como pelo procedimento inverso.

No procedimento direto de resolução integram-se as equações diferenciais que governam o problema, determinando-se a solução mediante o atendimento às condições de contorno. Se forem escolhidos como incógnitas básicas os deslocamentos, utilizam-se as equações de equilíbrio escritas em termos dos deslocamentos, mediante substituição das tensões pelas deformações, via lei de Hooke, e destas pelos deslocamentos, através das relações deformação-deslocamento. Se forem escolhidas como variáveis básicas as tensões, as três equações de equilíbrio mostram-se insuficientes, e é necessário utilizar também as equações de compatibilidade, escritas em termos de tensões através da lei de Hooke. Em qualquer dos casos observados acima é necessário que sejam atendidas as condições de contorno.

No procedimento inverso, a solução, usualmente dada em tensão, é fixada a priori, atendendo às condições de equilíbrio e conduzindo a um campo de deformações compatível. Determinam-se então as forças de superfície correspondentes, pelas condições de contorno. Outra possibilidade seria fixar o campo de deslocamentos (atendo às equações de equilíbrio escritas em termos destes), determinando-se então as deformações e tensões (pelas relações de deformação).

1.1.1 Equações de Equilíbrio de Momentos

Na Figura 1 observa-se um corpo em equilíbrio. Sob a ação de forças externas, forças internas serão produzidas entre as partes do corpo.

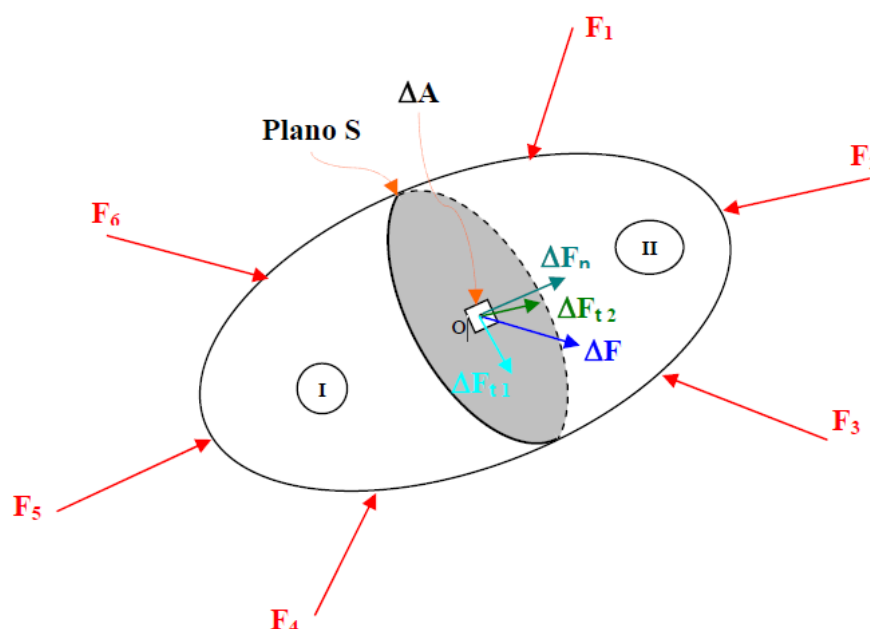


Figura 1 – Corpo em equilíbrio Ferreira (2007)

Para estudar estas forças imaginem que este corpo seja dividido em duas partes, conforme Figura 1. A secção transversal está passando pelo ponto onde será estudada a grandeza destas forças. As grandezas destas forças são definidas pela força que atua por unidade de área infinitesimal da superfície considerada, que são denominadas tensões.

Existem dois tipos de forças que podem atuar sobre um corpo. As forças distribuídas sobre a superfície do corpo, como pressão de um corpo sobre outro, pressão hidrostática que são denominadas *forças de superfície*. As forças distribuídas pelo volume de um corpo, tais como: forças gravitacionais, magnéticas, forças de inércia, são denominadas *forças de massa ou forças de volume*.

O estado de tensões em um ponto de um corpo tridimensional pode ser descrito pelas componentes de tensões que atuam em um paralelepípedo infinitesimal de lados dx , dy e dz , ver figura 2.

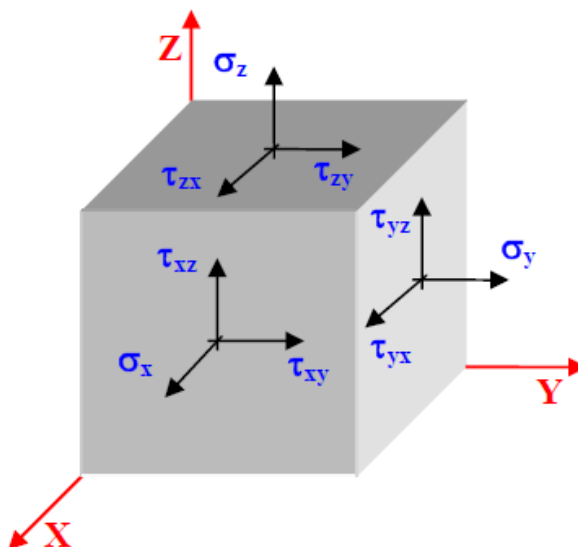


Figura 2 – Elemento infinitesimal, Ferreira (2007)

Nota-se que o estado de tensão em um ponto está completamente definido com nove componentes de tensão e se reduzem a seis, devido à simetria das tensões de cisalhamento.

Para consideração do equilíbrio do elemento, basta realizar a conservação do momento angular no CG (centro de gravidade) do elemento de diferencial $dV=dx dy dz$. As forças de massa, tais como peso próprio, podem ser desprezadas neste caso porque o elemento tem suas dimensões reduzidas e as forças de massa que agem sobre ele diminuem com o cubo das dimensões lineares, enquanto as forças de superfície diminuem com o quadrado das dimensões lineares. Portanto, estas forças são infinitésimos de ordem superior e podem ser desprezadas no cálculo do momento.

Para provar que as tensões cisalhantes de duas faces perpendiculares de um elemento cúbico são iguais tem-se:

$$\sum M_{CG} = 0 \quad (1)$$

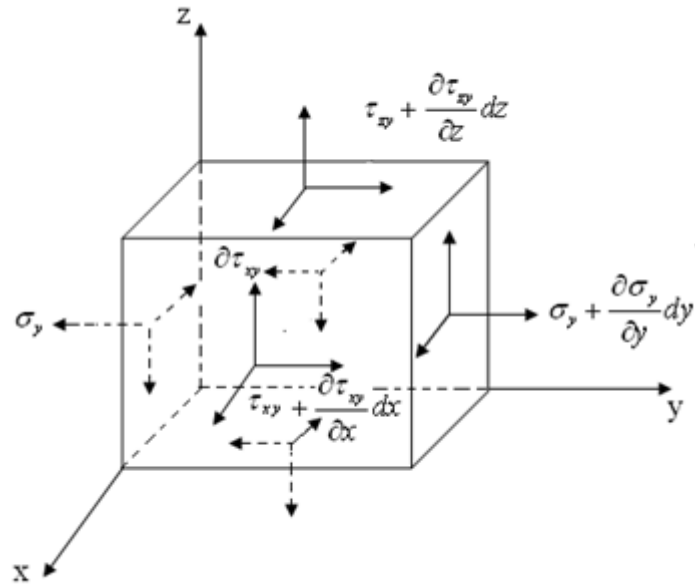


Figura 3 – Elemento em equilíbrio, Ferreira (2007)

Observa-se na Figura 3 que:

$$\begin{aligned}
 (\tau_{yz} dx dz) \frac{dy}{2} + (\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dz) dx dz \frac{dy}{2} &= (\tau_{zy} dy dx) \frac{dz}{2} + (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy) dy dx \frac{dz}{2} \\
 \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} &= \tau_{zy} dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{zy} dx dz \frac{dy}{2} \\
 \tau_{yz} dx dz dy &= \tau_{zy} dx dz dy \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy}
 \end{aligned}$$

Por analogia pode-se encontrar as outras duas relações. Assim, tem-se:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (4)$$

Portanto, para as duas faces perpendiculares de um elemento cúbico, as componentes da tensão de cisalhamento perpendiculares à linha de interseção destas faces são iguais.

1.1.2 Equações de Equilíbrio de Forças

Considerando o equilíbrio para o corpo apresentado na figura 3, pode-se escrever as equações diferenciais de equilíbrio fazendo $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ e $\sum F_z = 0$.

Para demonstrar uma dessas equações, por exemplo, tem-se:

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{estática})$$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_y dx dz - \tau_{zy} dx dy - \tau_{xy} dy dz + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dx dz + \\
 & \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dy dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy dz + b_y dx dy dz = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

Simplificando a equação 5 chega-se a:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0 \tag{6}$$

Por analogia, as equações nas outras duas direções são:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \tag{8}$$

Sendo b_x, b_y e b_z , as forças por unidade de volume atuam nas direções x, y e z .

Escrevendo as equações 6, 7 e 8 em notação indicial para todas as direções têm-se:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3 \tag{9}$$

As equações de equilíbrio devem ser satisfeitas em todos os pontos do corpo.

Assim, as componentes de tensão devem estar em equilíbrio com as forças externas.

1.1.3 Componentes de Forças de Superfície – Fórmula de Cauchy

As equações de equilíbrio devem ser satisfeitas em todos os pontos do corpo.

Assim, as componentes de tensão devem estar em equilíbrio com as forças externas.

No tratamento das condições de equilíbrio de um pequeno tetraedro, a força de volume pode ser desprezada como um infinitésimo de ordem superior. As forças que atuam no tetraedro podem então ser determinadas multiplicando-se as componentes de tensão pelas áreas das faces, ver figura 4.

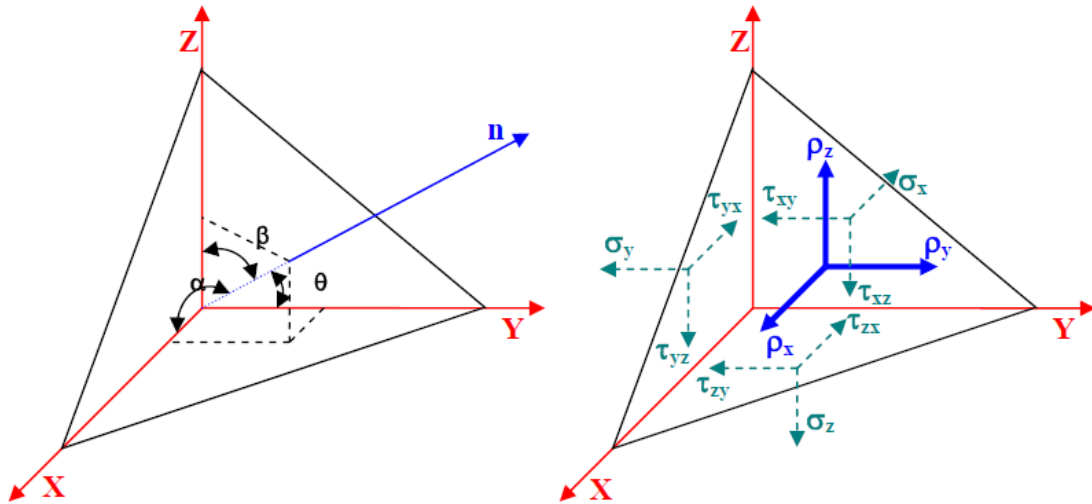


Figura 4 – Elemento de Superfície - (a) Estado de tensão em um ponto.
(b) Componentes do vetor força de superfície, Ferreira (2007)

Os cossenos diretores são dados pelas expressões indicadas em 10.

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(n, x) \\ n_y &= \cos(n, y) \\ n_z &= \cos(n, z) \end{aligned} \quad (10)$$

Considerando o plano zy , ver figura 5 tem-se que $\sum F_y = 0$ então

$$dAP_y = \sigma_y dAn_y + \tau_{xy} dAn_x + \tau_{yz} dAn_z \quad (11)$$

Dividindo a equação 11 por dA chega-se a:

$$P_y = \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x + \tau_{yz} n_z \quad (12)$$

Por analogia pode-se escrever as equações de P_x e P_z logo:

$$P_x = \sigma_x n_x + \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \quad (13)$$

$$P_z = \sigma_z n_z + \tau_{zy} n_y + \tau_{zx} n_x \quad (14)$$

Onde P_x, P_y e P_z são as forças de superfície “traction”. Assim, pode-se escrever:

Em notação indicial as equações 12, 13 e 14 podem ser escritas da seguinte forma:

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \text{ para } i, j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

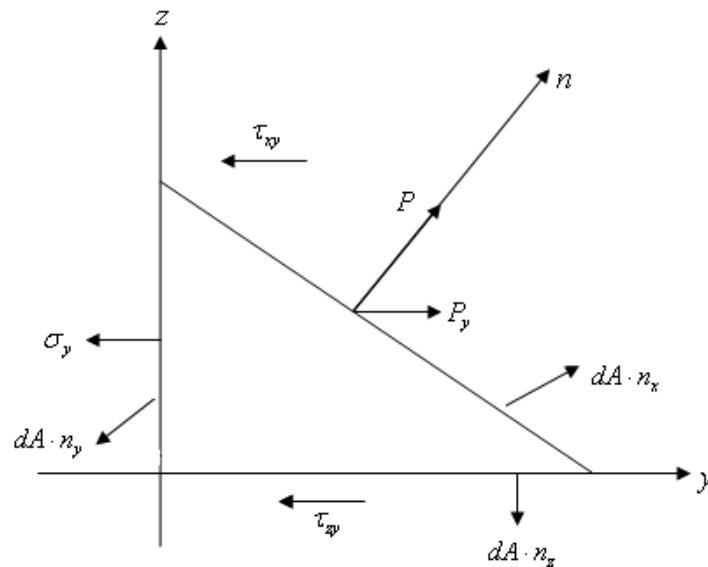


Figura 5 – Planificação do tetraedro (zy)

A equação 15 relaciona a tensão próxima do contorno com os valores de forças de superfície no contorno.

1.1.4 Relações deformação - deslocamento

Admitem-se as hipóteses de pequenas deformações, tais como usualmente ocorrem na engenharia estrutural. Assim, desprezam-se os quadrados e os produtos dos termos infinitesimais.

Considerando-se um elemento infinitesimal de diferencial $dV = dx dy dz$ de um corpo elástico. Se o corpo sofre uma deformação e u , v e w são as componentes do deslocamento num ponto qualquer, ver figura 6, os deslocamentos nas direções x , y e z são dadas por:

$$\begin{aligned}
 u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\
 v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \\
 w + \frac{\partial w}{\partial z} dz
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

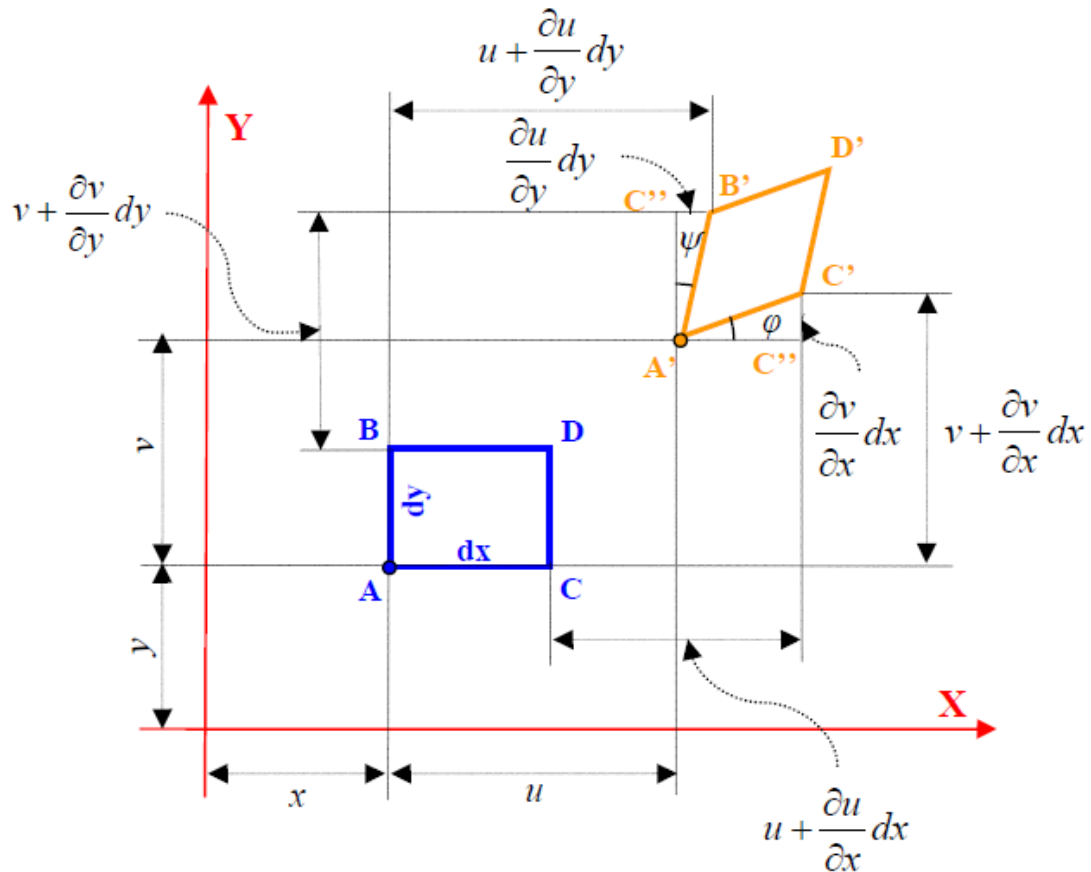


Figura 6 – Projeções das faces do elemento infinitesimal no plano xy.

Ferreira (2007)

Considerando a distorção do ângulo entre os elementos e que $\text{sen } \varphi \cong \varphi$ e $\text{cos } \varphi \cong 1$, podem-se escrever as equações das componentes de deformação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{17}$$

Usando notação indicial tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ para } i, j = 1, 2, 3 \quad (18)$$

1.1.5 Equações de compatibilidade de deformações

Diferenciando-se a equação $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ em x e y , reorganizando-se os termos em ordem de derivadas parciais e substituindo-se pelas três primeiras relações de 17, chega-se à expressão:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \\ -2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Procedendo-se de forma similar com as demais expressões deduz-se que:

$$-2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = 0 \quad (20)$$

$$-2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0 \quad (21)$$

Diferenciando-se a quarta expressão de 17 da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Rightarrow \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \Rightarrow \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \Rightarrow \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Diferenciando-se a primeira expressão de 17 em relação a y e z , organizando-se as derivadas parciais e substituindo-se os termos isolados anteriormente, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{25}$$

Procedendo-se de modo análogo com as demais expressões chega-se a:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \tag{27}$$

As equações 25 a 27 podem ser escritas em notação indicial como:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \text{ para } i,j,k,l=1,2,3 \tag{28}$$

1.1.6 Relação tensão-deformação

As relações lineares entre as componentes de tensão e as componentes de deformação são conhecidas geralmente como Lei de Hooke.

Considere-se um paralelepípedo submetido à ação da tensão normal σ_x uniformemente distribuído sobre duas faces opostas. O alongamento unitário do elemento até o limite de proporcionalidade é dado por:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \tag{29}$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young.

O efeito de Poisson que ocorre em materiais homogêneos e isotrópicos, atua como um (efeito bexiga), “aperta em uma direção e expande nas outras duas e vice-

versa”, isto é, o alongamento na direção x é acompanhado (de contrações) pelas componentes laterais de deformação. Existem materiais com espessuras cristalinas complexas que se comportam de maneira diferente (Materiais Anômalos).

$$\begin{cases} \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x \text{ para } 0 \leq \nu < \frac{1}{2} \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x \end{cases} \quad (30)$$

Assim, supondo-se que o paralelepípedo infinitesimal esteja submetido às tensões normais σ_x, σ_y e σ_z , uniformemente distribuídas sobre as faces, as componentes de deformação resultantes são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz} \end{aligned} \quad (32)$$

Invertendo-se as equações 31 e 32, escrevem-se as tensões normais em função das deformações. Para isso basta isolar as tensões principais σ_x, σ_y e σ_z . Assim, devem-se escrever as equações na forma matricial e resolver o sistema chegando-se às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x - \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y - \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z - \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xz} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yz}\end{aligned}\tag{34}$$

Sabe-se que o módulo de elasticidade transversal, G , e a constante de Lamé, λ , são dadas por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{35}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\tag{36}$$

Manipulando-se a primeira expressão de 33 e substituindo-se as equações 35 e 36, têm-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\end{aligned}\tag{37}$$

De maneira análoga, para as outras duas expressões de 33 chega-se a:

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\tag{38}$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\tag{39}$$

Em notação indicial com k , índice mudo, chega-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk} \delta_{ij} \text{ para } i, j, k = 1, 2, 3 \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}\end{aligned}\tag{40}$$

O símbolo δ_{ij} é conhecido como “delta de Kronecker”

1.1.7 Condições de Contorno

Em todo problema elástico, além das equações que devem ser satisfeitas no domínio, outras condições devem ser atendidas no contorno, isto é, um problema de valor de contorno envolve a aplicação de uma equação diferencial a um domínio Ω limitado por um contorno Γ . De maneira geral pode-se ter: forças prescritas, deslocamentos prescritos e prescrição mista.

i) forças prescritas

$$P_i(q) = \bar{p}_i(q) = \sigma_{ij}(q) \cdot n_j(q) \text{ com } q \in \Gamma_p \quad (41)$$

ii) deslocamentos prescritos

$$u_i(q) = \bar{u}_i(q) \text{ com } q \in \Gamma_u \quad (42)$$

iii) prescrição mista

$$\begin{aligned} u_i(q) &= \bar{u}_i(q) \text{ com } q \in \Gamma_{up} \\ P_i(q) &= \bar{p}_i(q) = \sigma_{ij}(q) \cdot n_j(q) \text{ com } q \in \Gamma_{up} \end{aligned} \quad (43)$$

1.2 Estados Planos

Para representar um problema elástico, podem-se adotar simplificações de modo que ele independa de uma de suas coordenadas, para que possa incidir num problema de estado plano de tensão ou de deformação.

1.2.1 Estado plano de deformação (EPD)

Quando uma das dimensões do corpo for muito maior que as outras duas, e o carregamento é unicamente perpendicular aos elementos longitudinais e não variam ao longo do comprimento, supõe-se que todas as secções transversais estão com as mesmas condições, de tal modo que a deformação na direção axial é impedida. As componentes u e v do deslocamento são funções de x e y , mas são independentes da coordenada longitudinal z . O estado de deformação fica representado apenas em função de $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e ε_{xy} , que é denominado estado plano de deformação, sendo estas componentes somente definidas no plano xy .

As relações constitutivas para este caso são dadas por 40, no entanto os índices variam apenas até 2. As tensões tangenciais na direção z são nulas e a tensão normal σ_z tem seus valores expressos em função de σ_x e σ_y .

1.2.2 Estado plano de tensão (EPT)

Quando uma das tensões do corpo for muito menor que as outras duas, e o carregamento é unicamente no plano destas, pode-se supor que as tensões ao longo da primeira direção são nulas. Ficando o estado de tensão representado apenas em função de σ_x, σ_y e τ_{xy} , que é denominado estado plano de tensão. Sendo admitido que estas três componentes sejam independentes de z e que não variam ao longo da espessura, são definidas no plano xy .

Neste caso as relações constitutivas podem ser obtidas a partir das relações do estado plano de deformação fazendo-se as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}v' &= \frac{\nu}{1+\nu} \\G' &= G \\E' &= (1+\nu)(1-\nu)E\end{aligned}\tag{44}$$

ANEXO II

Teorema de Betti

Considere um corpo em equilíbrio quando submetido a ação de dois estados de carregamento, cada um deles levando a um dos estados de tensão definido a seguir:

i) Para um estado de carregamento (1), tensões $\sigma_{ij}^{(1)}$ que dão origem ao conjunto de deformações $\varepsilon_{ij}^{(1)}$.

ii) Para um estado de carregamento (2), tensões $\sigma_{ij}^{(2)}$ que dão origem ao conjunto de deformações $\varepsilon_{ij}^{(2)}$.

O teorema de Betti (também conhecido como teorema do trabalho recíproco) estabelece que: o trabalho realizado pelas tensões do sistema (1) sobre as deformações do sistema (2) é igual a trabalho realizado pelas tensões do sistema (2) sobre as deformações do sistema (1), ou seja:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(2)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(2)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(1)} d\Omega \quad (1)$$

O teorema de Betti será demonstrado a seguir:

Usando-se a lei de Hooke, tem-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

que particularizada para um material isotrópico no estado plano de deformação é dada pela expressão:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (3)$$

Substituindo a equação (3) em $\sigma_{ij}^{(1)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(2)}$ obtém-se:

$$\sigma_{ij}^{(1)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(2)} = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{(1)} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^{(1)} \right) \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (4)$$

Aplicando a propriedade distributiva em (4) tem-se:

$$\sigma_{ij}^{(1)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{(1)} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^{(2)} + 2G\varepsilon_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (5)$$

como

$$\delta_{ij} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ii}^{(2)} = \varepsilon_{kk}^{(2)} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{kk}^{(1)} = \varepsilon_{ii}^{(1)} = \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (7)$$

Substituindo (6) e (7) em (5) obtém-se

$$\sigma_{ij}^{(1)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^{(1)} \varepsilon_{kk}^{(2)} + 2G \varepsilon_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (8)$$

Colocando em evidência o fator comum $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ chega-se a:

$$\sigma_{ij}^{(1)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(2)} = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^{(2)} + 2G \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) \varepsilon_{ij}^{(1)}$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (9)$$

ANEXO III

Distribuição Delta de Dirac

1 - O degrau unitário de Heaviside

Considere a seguinte função $f(x)$, contínua e seccionalmente diferenciável:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_0 \\ \frac{x-x_0}{x_1-x_0} & \text{se } x \in [x_0, x_1] \\ 1 & \text{se } x > x_1 \end{cases} \quad (1)$$

Esta função é conhecida como “rampa” limitada, sua derivada é conhecida em toda parte exceto nos pontos x_0 e x_1 .

$$\frac{d(f(x))}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_0 \\ \frac{1}{x_1-x_0} & \text{se } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{se } x > x_1 \end{cases} \quad (2)$$

Nas figuras 1 e 2 ilustra-se a função e sua derivada. Fazendo $x_1 \rightarrow x_0$, no limite chega-se a $H(x)$ denominado *degrau unitário*, proposto por Heaviside para descrever transições abruptas idealizadas. Sua “derivada” pode ser estimada a partir da derivada de $f(x)$, fazendo-se $x_1 \rightarrow x_0$. Essa construção está ilustrada nas figuras 4a e 4b.

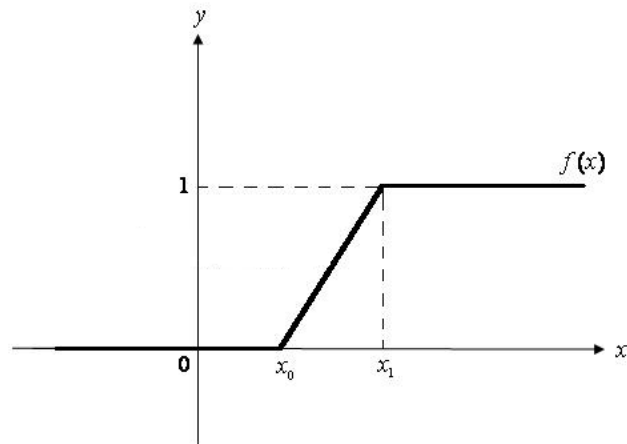


Figura 1 – função “rampa” limitada

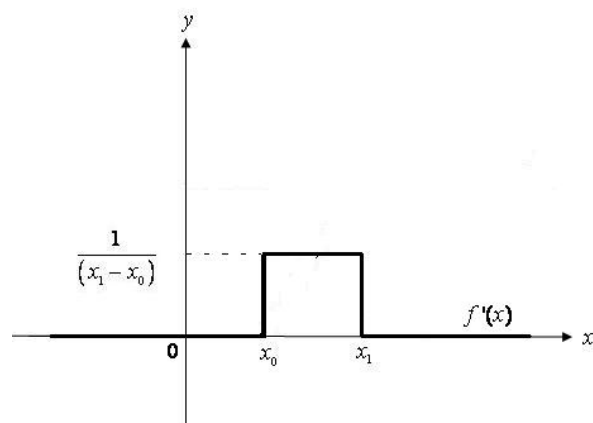


Figura 2 – A derivada da função “rampa” limitada

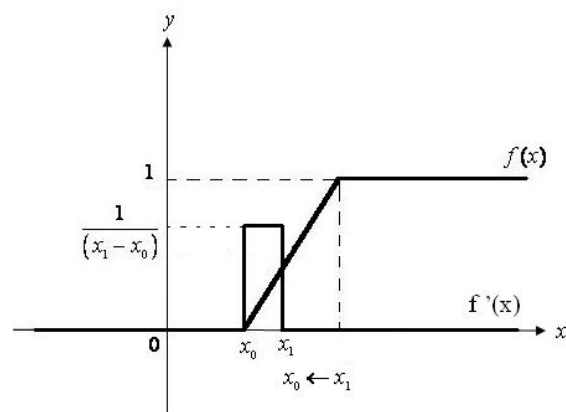


Figura 3 – Função rampa tendendo ao degrau unitário

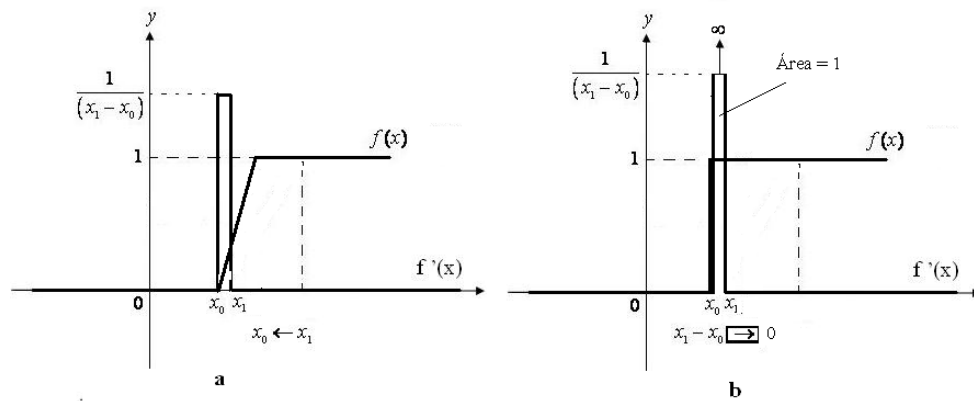


Figura 4 – 4a) Função rampa tendendo ao degrau unitário

4b) Situação limite

Nas figuras 4a e 4b verifica-se a evolução da função $f(x)$ transformando-se praticamente no degrau unitário de Heaviside, definido como:

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_0 \\ 1 & \text{se } x > x_0 \end{cases} \quad (3)$$

Nota-se que a altura do pulso aumenta à medida que $x_1 - x_0$ tende para zero, mas a sua área se mantém igual a 1, ver figura 4a. No estado limite, ver figura 4b, a largura do pulso torna-se nula e a altura tende ao infinito, mantendo sua área igual a 1.

2 - O Delta de Dirac

O Delta de Dirac passou a existir como consequência da derivação da função “Have Size” ou função degrau de Heaviside, conforme ilustrado na figura 1. É comum deparar com a seguinte definição para o Delta de Dirac:

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ \infty & \text{se } x = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

com $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) dx = 1$

No entanto a interpretação de tal definição não é correta, pois:

(i) não define uma função, já que ∞ não é um valor que se possa aplicar a um ponto do domínio.

(ii) Não é integrável já que é divergente em x_0 .

Assim, a definição mais correta para o Delta de Dirac em uma dimensão é dada por:

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= 0 \quad \text{se } x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx &= f(x_0) \end{aligned} \quad (5)$$

Esta definição é mais formal uma vez que contorna os problemas (i) e (ii), fazendo uso do domínio estendido \bar{R} dado para todo $-\infty < x < +\infty$, para contornar (1) e usando a integral para resolver o problema $\infty \cdot 0 = 1$.

O conceito da “função” Delta de Dirac pode ser estendido a domínios n -dimensionais. Considerando-se uma função f que depende da localização de cada ponto do corpo, define-se $\delta(p, Q)$, como a função Delta de Dirac, quando são válidas as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \delta(p, Q) &= \begin{cases} \infty & \text{se } p = Q \\ 0 & \text{se } p \neq Q \end{cases} \\ \int_{\Omega} f(Q) \delta(p, Q) d\Omega &= f(p) \end{aligned}$$

ANEXO IV

Integrais analíticas não singulares

Para assessorar na dedução das integrais, algumas constantes foram agrupadas de forma ordenada como segue:

$$k_1 = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \quad (1)$$

$$k_2 = (3-4\nu) \quad (2)$$

$$k_3 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (3)$$

$$k_4 = (1-2\nu) \quad (4)$$

$$k_5 = (1-4\nu) \quad (5)$$

$$k_6 = (3-4\nu) \quad (6)$$

$$k_7 = -\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \quad (7)$$

$$f_1 = \left(1 - \frac{y_s}{L}\right) \quad (8)$$

$$f_2 = \frac{y_s}{L} \quad (9)$$

As constantes f_1 e f_2 são as partes constantes das funções de forma que foram usadas para simplificar a apresentação dos resultados.

Para as integrais não singulares avaliou-se o ponto fonte em três posições, que são: ponto fonte fora do alinhamento do elemento, alinhado com o elemento, antes e depois do elemento, ver figura 1.

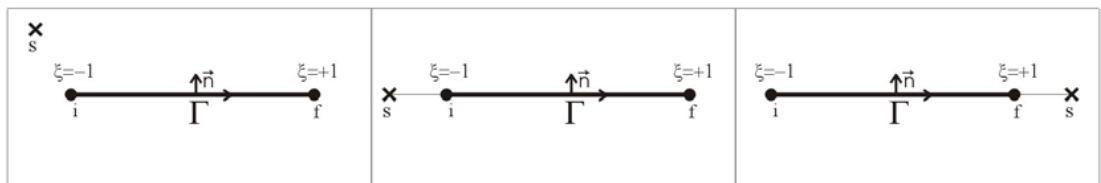


Figura 1 – Posições do ponto fonte para integração não singular

1 – Ponto fonte não alinhado com o elemento

Para a posição do ponto fonte não alinhado com o elemento, conforme ilustra a figura 2, serão apresentados todos os resultados das integrais analíticas para este caso.

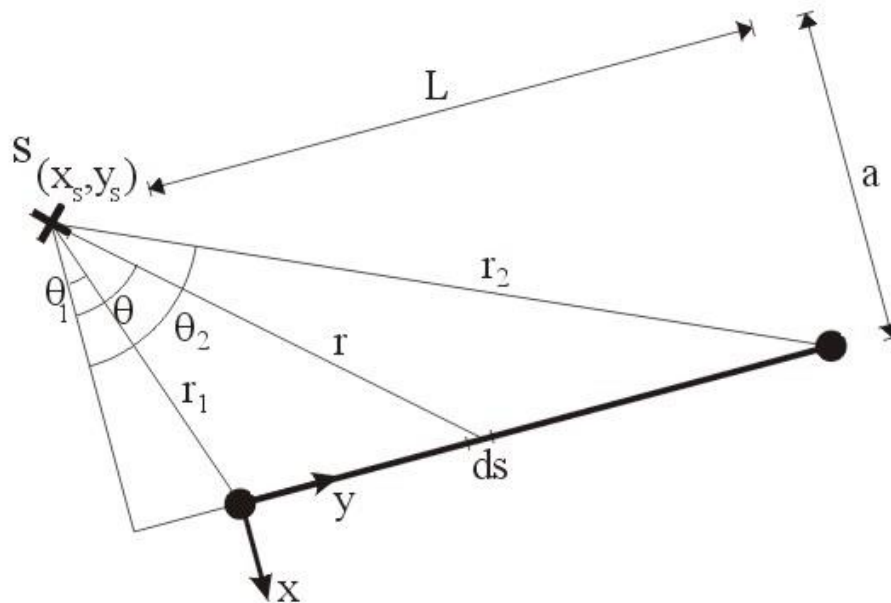


Figura 2 – Ponto fonte não alinhado com o elemento

Wutzow (2003)

Os resultados dos elementos da matriz $[H] = \begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 + H_{11}^2 & H_{12}^2 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 + H_{21}^2 & H_{22}^2 \end{bmatrix}$ estão

representados a seguir:

$$H_{11}^1 = k_3 \left\{ k_4 \left[\frac{a}{L} \ln(\cos(\theta_2)) + \theta_2 \cdot f_1 \right] + f_1 \cdot \left(\frac{\sin(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) + \frac{a}{L} \cos(\theta_2)^2 \right\} +$$

$$-k_3 \left\{ k_4 \left[\frac{a}{L} \ln(\cos(\theta_1)) + \theta_1 \cdot f_1 \right] + f_1 \cdot \left(\frac{\sin(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) + \frac{a}{L} \cos(\theta_1)^2 \right\}$$

$$H_{12}^1 = k_3 \left\{ k_4 \left[-f_1 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) + \frac{a}{L}(\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) \right] + \frac{a}{L} \left(\frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} - \theta_2 \right) - f_1 \cdot \cos(\theta_2)^2 \right\} +$$

$$-k_3 \left\{ k_4 \left[-f_1 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \frac{a}{L}(\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) \right] + \frac{a}{L} \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} - \theta_1 \right) - f_1 \cdot \cos(\theta_1)^2 \right\}$$

$$H_{21}^1 = k_3 \left\{ k_4 \left[f_1 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \frac{a}{L}(\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) \right] + \frac{a}{L} \left(\frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} - \theta_2 \right) - f_1 \cdot \cos(\theta_2)^2 \right\} +$$

$$-k_3 \left\{ k_4 \left[f_1 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \frac{a}{L}(\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) \right] + \frac{a}{L} \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} - \theta_1 \right) - f_1 \cdot \cos(\theta_1)^2 \right\}$$

$$H_{22}^1 = k_3 \left\{ k_4 \left[\frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) + \theta_2 \cdot f_1 \right] - f_1 \cdot \left(\frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} - \theta_2 \right) + \frac{a}{L} \text{sen}(\theta_2)^2 + \frac{2a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} +$$

$$-k_3 \left\{ k_4 \left[\frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \theta_1 \cdot f_1 \right] - f_1 \cdot \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} - \theta_1 \right) + \frac{a}{L} \text{sen}(\theta_1)^2 + \frac{2a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\}$$

$$H_{11}^2 = k_3 \left\{ k_4 \left[-\frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) + \theta_2 \cdot f_2 \right] + f_2 \cdot \left(\frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) - \frac{a}{L} \cos(\theta_2)^2 \right\} +$$

$$-k_3 \left\{ k_4 \left[-\frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \theta_1 \cdot f_2 \right] + f_2 \cdot \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) - \frac{a}{L} \cos(\theta_1)^2 \right\}$$

$$H_{12}^2 = k_3 \left\{ k_4 \left[-f_2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \frac{a}{L}(\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) \right] - \frac{a}{L} \left(\frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} - \theta_2 \right) - f_2 \cdot \cos(\theta_2)^2 \right\} +$$

$$-k_3 \left\{ k_4 \left[-f_2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \frac{a}{L}(\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) \right] - \frac{a}{L} \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} - \theta_1 \right) - f_2 \cdot \cos(\theta_1)^2 \right\}$$

$$H_{21}^2 = k_3 \left\{ k_4 \left[f_2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) + \frac{a}{L}(\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) \right] - \frac{a}{L} \left(\frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} - \theta_2 \right) - f_2 \cdot \cos(\theta_2)^2 \right\} +$$

$$-k_3 \left\{ k_4 \left[f_2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \frac{a}{L}(\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) \right] - \frac{a}{L} \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} - \theta_1 \right) - f_2 \cdot \cos(\theta_1)^2 \right\}$$

$$H_{22}^2 = k_3 \left\{ k_4 \left[-\frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) + \theta_2 \cdot f_2 \right] - f_2 \cdot \left(\frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) - \frac{a}{L} \text{sen}(\theta_2)^2 - \frac{2a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} +$$

$$-k_3 \left\{ k_4 \left[-\frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \theta_1 \cdot f_2 \right] - f_2 \cdot \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) - \frac{a}{L} \text{sen}(\theta_1)^2 - \frac{2a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\}$$

Os resultados das integrais da matriz $[G] = \begin{bmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 : G_{11}^2 & G_{12}^2 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1 : G_{21}^2 & G_{22}^2 \end{bmatrix}$ serão

apresentados a seguir:

$$G_{11}^1 = k_1 \left\{ k_2 \left[\left[f_1 \cdot \text{tg}(\theta_2) - \frac{a}{2L \cos(\theta_2)^2} \right] \text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_2)} \right) + f_1 \cdot (\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) + \frac{a}{4L \cos(\theta_2)^2} \right] - \theta_2 \cdot f_1 - \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} +$$

$$-k_1 \left\{ k_2 \left[\left[f_1 \cdot \text{tg}(\theta_1) - \frac{a}{2L \cos(\theta_1)^2} \right] \text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_1)} \right) + f_1 \cdot (\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) + \frac{a}{4L \cos(\theta_1)^2} \right] - \theta_1 \cdot f_1 - \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\}$$

$$G_{12}^1 = k_1 \left[f_1 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) + \frac{(\text{tg}(\theta_2) - \theta_2)}{L} \right] - k_1 \left[f_1 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \frac{(\text{tg}(\theta_1) - \theta_1)}{L} \right]$$

$$G_{21}^1 = G_{12}^1 = k_1 \left[f_1 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) + \frac{(\text{tg}(\theta_2) - \theta_2)}{L} \right] - k_1 \left[f_1 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \frac{(\text{tg}(\theta_1) - \theta_1)}{L} \right]$$

$$G_{22}^1 = k_1 \left\{ k_2 \left[\left(f_1 \cdot \text{tg}(\theta_2) - \frac{a}{2L \cos(\theta_2)^2} \right) \text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_2)} \right) + f_1 \cdot (\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) + \frac{a}{4L \cos(\theta_2)^2} \right] + \right. \\ \left. + f_1 \cdot (\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) + \frac{a \cdot \text{tg}(\theta_2)^2}{2L} + \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} + \\ - k_1 \left\{ k_2 \left[\left(f_1 \cdot \text{tg}(\theta_1) - \frac{a}{2L \cos(\theta_1)^2} \right) \text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_1)} \right) + f_1 \cdot (\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) + \frac{a}{4L \cos(\theta_1)^2} \right] + \right. \\ \left. + f_1 \cdot (\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) + \frac{a \cdot \text{tg}(\theta_1)^2}{2L} + \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\}$$

$$G_{11}^2 = k_1 \left\{ k_2 \left[\left(f_2 \cdot \text{tg}(\theta_2) + \frac{a}{2L \cos(\theta_2)^2} \right) \text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_2)} \right) + f_2 \cdot (\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) - \frac{a}{4L \cos(\theta_2)^2} \right] + \right. \\ \left. - f_2 \cdot \theta_2 + \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} + \\ - k_1 \left\{ k_2 \left[\left(f_2 \cdot \text{tg}(\theta_1) + \frac{a}{2L \cos(\theta_1)^2} \right) \text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_1)} \right) + f_2 \cdot (\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) - \frac{a}{4L \cos(\theta_1)^2} \right] + \right. \\ \left. - f_2 \cdot \theta_1 + \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\}$$

$$G_{12}^2 = k_1 \left[f_2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) + \frac{(\text{tg}(\theta_2) - \theta_2)}{L} \right] - k_1 \left[f_2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \frac{(\text{tg}(\theta_1) - \theta_1)}{L} \right]$$

$$G_{21}^2 = G_{12}^2 = k_1 \left[f_2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) + \frac{(\text{tg}(\theta_2) - \theta_2)}{L} \right] - k_1 \left[f_2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \frac{(\text{tg}(\theta_1) - \theta_1)}{L} \right]$$

$$G_{22}^2 = k_1 \left\{ k_2 \left[\left(f_2 \cdot \text{tg}(\theta_2) + \frac{a}{2L \cos(\theta_2)^2} \right) \text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_2)} \right) + f_2 \cdot (\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) + \frac{a}{4L \cos(\theta_2)^2} \right] + \right. \\ \left. + f_2 \cdot (\theta_2 - \text{tg}(\theta_2)) - \frac{a}{2L} \text{tg}(\theta_2)^2 - \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} + \\ - k_1 \left\{ k_2 \left[\left(f_2 \cdot \text{tg}(\theta_1) + \frac{a}{2L \cos(\theta_1)^2} \right) \text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_1)} \right) + f_2 \cdot (\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) - \frac{a}{4L \cos(\theta_1)^2} \right] + \right. \\ \left. + f_2 \cdot (\theta_1 - \text{tg}(\theta_1)) - \frac{a}{2L} \text{tg}(\theta_1)^2 - \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\}$$

Os resultados das integrais da matriz $[S] = \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 : S_{11}^2 & S_{12}^2 \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 : S_{21}^2 & S_{22}^2 \\ S_{31}^1 & S_{32}^1 : S_{31}^2 & S_{32}^2 \end{bmatrix}$ serão

apresentados a seguir:

$$S_{11}^1 = \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[(2k_4 + 4v) \left(\frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) - \left(2\text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \frac{3\text{sen}(2\theta_2)}{2} + 3\theta_2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (2k_4 - k_5) \theta_2 \right] - \frac{a}{L} \left[-(2k_4 + 4v) \cos(\theta_2)^2 + 2\cos(\theta_2)^4 - (2k_4 - k_5) \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\ - \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[(2k_4 + 4v) \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) - \left(2\text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \frac{3\text{sen}(2\theta_1)}{2} + 3\theta_1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (2k_4 - k_5) \theta_1 \right] - \frac{a}{L} \left[-(2k_4 + 4v) \cos(\theta_1)^2 + 2\cos(\theta_1)^4 - (2k_4 - k_5) \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_{12}^1 = & \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[-(k_4 + 2v) \cos(\theta_2)^2 + 2 \cos(\theta_2)^4 \right] + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[(k_1 + 2v) \left(\theta_2 - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right) - \left(-2 \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) \right] \right\} + \\
& - \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[-(k_4 + 2v) \cos(\theta_1)^2 + 2 \cos(\theta_1)^4 \right] + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[(k_4 + 2v) \left(\theta_1 - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right) - \left(-2 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$S_{21}^1 = S_{12}^1$$

$$\begin{aligned}
S_{22}^1 = & \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[(k_4 + 2v) \theta_2 - \left(-2 \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) \right] + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[-v \left(\text{sen}(\theta_2)^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right) - 2 \text{sen}(\theta_2)^4 - k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
& - \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[(k_4 + 2v) \theta_1 - \left(-2 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) \right] + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[-v \left(\text{sen}(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right) - 2 \text{sen}(\theta_1)^4 - k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{31}^1 = & \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[(2k_4 - k_5) \theta_2 - \left(-2 \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) \right] + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[-2 \text{sen}(\theta_2)^4 - (2k_4 - k_5) \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
& - \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[(2k_4 - k_5) \theta_1 - \left(-2 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) \right] + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[-2 \text{sen}(\theta_1)^4 - (2k_4 - k_5) \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{32}^1 = & \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[-(k_4 + 2v) \cos(\theta_2)^2 - 2\text{sen}(\theta_2)^4 \right] + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[(k_4 + 2v) \left(\theta_2 - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right) - \left(-2\cos(\theta_2) \text{sen}(\theta_2)^3 - \frac{3\text{sen}(2\theta_2)}{2} + 3\theta_2 \right) \right] \right\} + \\
& - \frac{k_7}{a} \left\{ f_1 \cdot \left[-(k_4 + 2v) \cos(\theta_1)^2 - 2\text{sen}(\theta_1)^4 \right] + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[(k_4 + 2v) \left(\theta_1 - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right) - \left(-2\cos(\theta_1) \text{sen}(\theta_1)^3 - \frac{3\text{sen}(2\theta_1)}{2} + 3\theta_1 \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11}^2 = & \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[(2k_4 + 4v) \left(\frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) - \left(2\text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \frac{3\text{sen}(2\theta_2)}{2} + 3\theta_2 \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (2k_4 - k_5) \theta_2 \right] - \frac{a}{L} \left[-(2k_4 + 4v) \cos(\theta_2)^2 + 2\cos(\theta_2)^4 - (2k_4 - k_5) \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
& - \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[(2k_4 + 4v) \left(\frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) - \left(2\text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \frac{3\text{sen}(2\theta_1)}{2} + 3\theta_1 \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (2k_4 - k_5) \theta_1 \right] + \frac{a}{L} \left[-(2k_4 + 4v) \cos(\theta_1)^2 + 2\cos(\theta_1)^4 - (2k_4 - k_5) \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{12}^2 = & \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[-(k_4 + 2v) \cos(\theta_2)^2 + 2 \cos(\theta_2)^4 \right] + \right. \\
& + \frac{a}{L} \left[(k_4 + 2v) \left(\theta_2 - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right) - \left(-2 \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) \right] \left. \right\} + \\
& - \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[-(k_4 + 2v) \cos(\theta_1)^2 + 2 \cos(\theta_1)^4 \right] + \right. \\
& + \frac{a}{L} \left[(k_4 + 2v) \left(\theta_1 - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right) - \left(-2 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$S_{21}^2 = S_{12}^2$$

$$\begin{aligned}
S_{22}^2 = & \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[(k_4 + 2v) \theta_2 - \left(-2 \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) \right] + \right. \\
& + \frac{a}{L} \left[-v \left(\text{sen}(\theta_2)^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right) - 2 \text{sen}(\theta_2)^4 - k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \left. \right\} + \\
& - \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[(k_4 + 2v) \theta_1 - \left(-2 \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) \right] + \right. \\
& + \frac{a}{L} \left[-v \left(\text{sen}(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right) - 2 \text{sen}(\theta_1)^4 - k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{31}^2 &= \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[(2k_4 - k_5)\theta_2 - \left(-2\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{L} \left[-2\text{sen}(\theta_2)^4 - (2k_4 - k_5)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
&\quad - \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[(2k_4 - k_5)\theta_1 - \left(-2\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)^3 + \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{L} \left[-2\text{sen}(\theta_1)^4 - (2k_4 - k_5)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} + \\
S_{32}^2 &= \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[-(k_4 + 2v)\cos(\theta_2)^2 - 2\text{sen}(\theta_2)^4 \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{L} \left[(k_4 + 2v) \left(\theta_2 - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right) - \left(-2\cos(\theta_2)\text{sen}(\theta_2)^3 - \frac{3\text{sen}(2\theta_2)}{2} + 3\theta_2 \right) \right] \right\} + \\
&\quad - \frac{k_7}{a} \left\{ f_2 \cdot \left[-(k_4 + 2v)\cos(\theta_1)^2 - 2\text{sen}(\theta_1)^4 \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{L} \left[(k_4 + 2v) \left(\theta_1 - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right) - \left(-2\cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_1)^3 - \frac{3\text{sen}(2\theta_1)}{2} + 3\theta_1 \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Os resultados das integrais da matriz $[D] = \begin{bmatrix} D_{11}^1 & D_{12}^1 : D_{11}^2 & D_{12}^2 \\ D_{21}^1 & D_{22}^1 : D_{21}^2 & D_{22}^2 \\ D_{31}^1 & D_{32}^1 : D_{31}^2 & D_{32}^2 \end{bmatrix}$ serão

apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}
D_{11}^1 &= k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[(k_4 + 1)\theta_2 + \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right] - \frac{a}{L} \left[-k_4\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\
&\quad + k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[(k_4 + 1)\theta_1 + \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right] - \frac{a}{L} \left[-k_4\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$D_{12}^1 = -k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] - \frac{a}{L} \left[-k_4 (\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right] \right\} +$$

$$+ k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] - \frac{a}{L} \left[-k_4 (\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right] \right\}$$

$$D_{21}^1 = -k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[-k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] - \frac{a}{L} \left[k_4 (\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right] \right\} +$$

$$+ k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[-k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] - \frac{a}{L} \left[k_4 (\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right] \right\}$$

$$D_{22}^1 = -k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[(k_4 + 1)\theta_2 - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right] - \frac{a}{L} \left[(-k_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} +$$

$$+ k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[(k_4 + 1)\theta_1 - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right] - \frac{a}{L} \left[(-k_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$D_{31}^1 = -k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[(-k_4 + 1)\theta_2 - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right] - \frac{a}{L} \left[(k_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} +$$

$$+ k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[(-k_4 + 1)\theta_1 - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right] - \frac{a}{L} \left[(k_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
D_{32}^1 = & -k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[(-k_4 - 2) \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] - \frac{a}{L} \left[k_4 (\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2\text{sen}(\theta_2)^5}{\cos(\theta_2)} + 2\text{sen}(\theta_2)^3 + \cos(\theta_2) + \frac{3\text{sen}(2\theta_2)}{2} - 3\theta_2 \right] \right\} + \\
& + k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[(-k_4 - 2) \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] - \frac{a}{L} \left[k_4 (\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2\text{sen}(\theta_1)^5}{\cos(\theta_1)} + 2\text{sen}(\theta_1)^3 + \cos(\theta_1) + \frac{3\text{sen}(2\theta_1)}{2} - 3\theta_1 \right] \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{11}^2 = & -k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[(k_4 + 1)\theta_2 + \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right] + \frac{a}{L} \left[-k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\
& + k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[(k_4 + 1)\theta_1 + \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right] + \frac{a}{L} \left[-k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{12}^2 = & -k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] + \frac{a}{L} \left[-k_4 (\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right] \right\} + \\
& + k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] + \frac{a}{L} \left[-k_4 (\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{31}^2 = & -k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[(-k_4 + 1)\theta_2 - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right] + \frac{a}{L} \left[(k_4 - 2) \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\
& + k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[(-k_4 + 1)\theta_1 - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right] + \frac{a}{L} \left[(k_4 - 2) \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$D_{21}^2 = -k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[-k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] + \frac{a}{L} \left[k_4 (\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} + \theta_2 \right] \right\} +$$

$$+ k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[-k_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] + \frac{a}{L} \left[k_4 (\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} + \theta_1 \right] \right\}$$

$$D_{22}^2 = -k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[(k_4 + 1)\theta_2 - \frac{\text{sen}(2\theta_2)}{2} \right] + \frac{a}{L} \left[(-k_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} +$$

$$+ k_3 \left\{ f_1 \cdot \left[(k_4 + 1)\theta_1 - \frac{\text{sen}(2\theta_1)}{2} \right] + \frac{a}{L} \left[(-k_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$D_{32}^2 = -k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[(-k_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] + \frac{a}{L} \left[k_4 (\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2\text{sen}(\theta_2)^5}{\cos(\theta_2)} + 2\text{sen}(\theta_2)^3 + \cos(\theta_2) + \frac{3\text{sen}(2\theta_2)}{2} - 3\theta_2 \right] \right\} +$$

$$+ k_3 \left\{ f_2 \cdot \left[(-k_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] - \frac{a}{L} \left[k_4 (\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2\text{sen}(\theta_1)^5}{\cos(\theta_1)} + 2\text{sen}(\theta_1)^3 + \cos(\theta_1) + \frac{3\text{sen}(2\theta_1)}{2} - 3\theta_1 \right] \right\} +$$

2 - Ponto fonte alinhado com o elemento, posicionado antes do mesmo.

Neste item avaliam-se as integrais não singulares analiticamente para o ponto fonte alinhado com o elemento, mas posicionado antes do mesmo. A figura 3 mostra geometricamente a posição do ponto fonte.

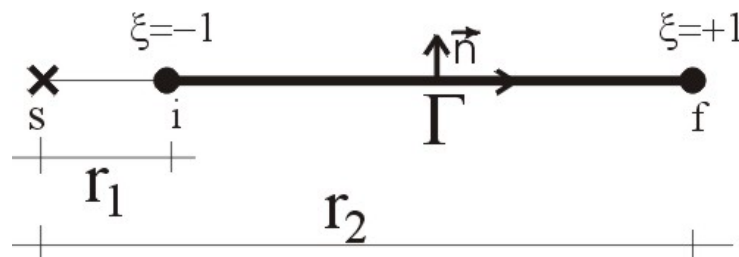


Figura 3 – Posição do ponto fonte (s) alinhado e antes do elemento.

Os resultados das integrais não singulares para este caso será apresentado a seguir:

$$H_{12}^1 = k_3 k_4 \left[f_1 \cdot \text{Ln} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{1}{L} (r_2 - r_1) \right]$$

$$H_{12}^2 = k_3 k_4 \left[f_2 \cdot \text{Ln} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{L} (r_2 - r_1) \right]$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^1 = H_{22}^2 = 0$$

Os resultados das integrais da matriz $[G] = \begin{bmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 : G_{11}^2 & G_{12}^2 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1 : G_{21}^2 & G_{22}^2 \end{bmatrix}$ serão

apresentados a seguir:

$$G_{11}^1 = k_1 \left\{ k_6 \cdot r_2 \left[f_1 (\text{Ln}(r_2) - 1) - \frac{(r_2)}{2L} \left(\text{Ln}(r_2) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} +$$

$$-k_1 \left\{ k_6 \cdot r_1 \left[f_1 (\text{Ln}(r_1) - 1) - \frac{(r_1)}{2L} \left(\text{Ln}(r_1) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

$$G_{11}^2 = k_1 \left\{ k_6 \cdot r_2 \left[f_2 (\text{Ln}(r_2) - 1) + \frac{(r_2)}{2L} \left(\text{Ln}(r_2) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} +$$

$$-k_1 \left\{ k_6 \cdot r_1 \left[f_2 (\text{Ln}(r_1) - 1) + \frac{(r_1)}{2L} \left(\text{Ln}(r_1) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\mathbf{G}_{22}^1 = \mathbf{k}_1 \left\{ \mathbf{k}_6 \cdot \mathbf{r}_2 \left[\mathbf{f}_1 (\mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2) - 1) - \frac{(\mathbf{r}_2)}{2\mathbf{L}} \left(\mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2) - \frac{1}{2} \right) \right] - \mathbf{r}_2 \left(\mathbf{f}_1 - \frac{\mathbf{r}_2}{2\mathbf{L}} \right) \right\} +$$

$$-\mathbf{k}_1 \left\{ \mathbf{k}_6 \cdot \mathbf{r}_1 \left[\mathbf{f}_1 (\mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1) - 1) - \frac{(\mathbf{r}_1)}{2\mathbf{L}} \left(\mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1) - \frac{1}{2} \right) \right] - \mathbf{r}_1 \left(\mathbf{f}_1 - \frac{\mathbf{r}_1}{2\mathbf{L}} \right) \right\}$$

$$\mathbf{G}_{22}^2 = \mathbf{k}_1 \left\{ \mathbf{k}_6 \cdot \mathbf{r}_2 \left[\mathbf{f}_2 (\mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2) - 1) + \frac{(\mathbf{r}_2)}{2\mathbf{L}} \left(\mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2) - \frac{1}{2} \right) \right] - \mathbf{r}_2 \left(\mathbf{f}_1 + \frac{\mathbf{r}_2}{2\mathbf{L}} \right) \right\} +$$

$$-\mathbf{k}_1 \left\{ \mathbf{k}_6 \cdot \mathbf{r}_1 \left[\mathbf{f}_1 (\mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1) - 1) + \frac{(\mathbf{r}_1)}{2\mathbf{L}} \left(\mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1) - \frac{1}{2} \right) \right] - \mathbf{r}_1 \left(\mathbf{f}_1 + \frac{\mathbf{r}_1}{2\mathbf{L}} \right) \right\}$$

$$\mathbf{G}_{12}^1 = \mathbf{G}_{21}^1 = \mathbf{G}_{12}^2 = \mathbf{G}_{21}^2 = 0$$

Os resultados das integrais da matriz $[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11}^1 & \mathbf{S}_{12}^1 : \mathbf{S}_{11}^2 & \mathbf{S}_{12}^2 \\ \mathbf{S}_{21}^1 & \mathbf{S}_{22}^1 : \mathbf{S}_{21}^2 & \mathbf{S}_{22}^2 \\ \mathbf{S}_{31}^1 & \mathbf{S}_{32}^1 : \mathbf{S}_{31}^2 & \mathbf{S}_{32}^2 \end{bmatrix}$ serão

apresentados a seguir:

$$\mathbf{S}_{11}^1 = \mathbf{k}_7 \left\{ \mathbf{f}_1 \cdot \left[(2\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5) \left(-\frac{1}{\mathbf{r}_2} \right) \right] - \frac{1}{\mathbf{L}} [(2\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5) \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2)] \right\} +$$

$$-\mathbf{k}_7 \left\{ \mathbf{f}_1 \cdot \left[(2\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5) \left(-\frac{1}{\mathbf{r}_1} \right) \right] - \frac{1}{\mathbf{L}} [(2\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5) \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1)] \right\}$$

$$\mathbf{S}_{12}^1 = \mathbf{k}_7 \left\{ \mathbf{f}_2 \cdot \left[(2\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5) \left(-\frac{1}{\mathbf{r}_2} \right) \right] + \frac{1}{\mathbf{L}} [(2\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5) \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2)] \right\} +$$

$$-\mathbf{k}_7 \left\{ \mathbf{f}_2 \cdot \left[(2\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5) \left(-\frac{1}{\mathbf{r}_1} \right) \right] + \frac{1}{\mathbf{L}} [(2\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5) \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{21}^1 &= \mathbf{k}_7 \left\{ \mathbf{f}_1 \cdot \left[(\mathbf{k}_4 + 2\nu) \left(-\frac{1}{\mathbf{r}_2} \right) \right] - \frac{1}{\mathbf{L}} [(\mathbf{k}_4 + 2\nu) \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2)] \right\} + \\
&\quad - \mathbf{k}_7 \left\{ \mathbf{f}_1 \cdot \left[(\mathbf{k}_4 + 2\nu) \left(-\frac{1}{\mathbf{r}_1} \right) \right] - \frac{1}{\mathbf{L}} [(\mathbf{k}_4 + 2\nu) \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1)] \right\} \\
\mathbf{S}_{22}^1 &= \mathbf{k}_7 (\mathbf{k}_4 + 2\nu) \left\{ - \left[\left(\frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{r}_2} \right) + \frac{1}{\mathbf{L}} \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2) \right] + \left[\left(\frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{r}_1} \right) + \frac{1}{\mathbf{L}} \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1) \right] \right\} \\
\mathbf{S}_{22}^2 &= \mathbf{k}_7 (\mathbf{k}_4 + 2\nu) \left\{ \left[\left(-\frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{r}_2} \right) + \frac{1}{\mathbf{L}} \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2) \right] - \left[\left(-\frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{r}_1} \right) + \frac{1}{\mathbf{L}} \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1) \right] \right\} \\
\mathbf{S}_{31}^1 &= \mathbf{S}_{11}^1 \\
\mathbf{S}_{31}^2 &= \mathbf{S}_{11}^2 \\
\mathbf{S}_{12}^1 &= \mathbf{S}_{21}^1 = \mathbf{S}_{32}^1 = \mathbf{S}_{12}^2 = \mathbf{S}_{21}^2 = \mathbf{S}_{32}^2 = 0
\end{aligned}$$

Os resultados das integrais da matriz $[D] = \begin{bmatrix} D_{11}^1 & D_{12}^1 \cdot D_{11}^2 & D_{12}^2 \\ D_{21}^1 & D_{22}^1 \cdot D_{21}^2 & D_{22}^2 \\ D_{31}^1 & D_{32}^1 \cdot D_{31}^2 & D_{32}^2 \end{bmatrix}$ serão

apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{12}^1 &= \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4 \left[(1 - \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2) - (1 + \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_1) - \frac{1}{\mathbf{L}} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right] \\
\mathbf{D}_{12}^2 &= \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4 \left[\frac{1}{\mathbf{L}} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{Ln} \left(\frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1} \right) \right] \\
\mathbf{D}_{32}^1 &= -\mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_4 + 2) \left[-\frac{1}{\mathbf{L}} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{Ln}(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) + \mathbf{Ln} \left(\frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1} \right) \right] \\
\mathbf{D}_{32}^2 &= -\mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_4 + 2) \left[\frac{1}{\mathbf{L}} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{Ln} \left(\frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1} \right) \right] \\
\mathbf{D}_{21}^1 &= -\mathbf{D}_{12}^1 \\
\mathbf{D}_{21}^2 &= -\mathbf{D}_{12}^2 \\
\mathbf{D}_{11}^1 &= \mathbf{D}_{22}^1 = \mathbf{D}_{31}^1 = \mathbf{D}_{11}^2 = \mathbf{D}_{22}^2 = \mathbf{D}_{31}^2 = 0
\end{aligned}$$

3 – Ponto fonte alinhado com o elemento, posicionado depois do mesmo.

Neste item avaliam-se as integrais não singulares analiticamente para o ponto fonte alinhado com o elemento, mas posicionado depois do mesmo. A figura 4 mostra geometricamente a posição deste ponto.

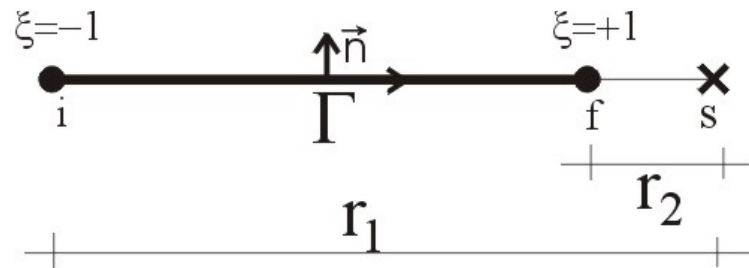


Figura 4 – Posição do ponto fonte (s) alinhado, posicionado depois do elemento.

Os resultados das integrais não singulares para este caso será apresentado a seguir:

$$H_{12}^1 = k_3 k_4 \left[f_1 \cdot \text{Ln} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{L} (r_2 - r_1) \right]$$

$$H_{12}^2 = k_3 k_4 \left[f_2 \cdot \text{Ln} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{1}{L} (r_2 - r_1) \right]$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^1 = H_{22}^2 = 0$$

Os resultados das integrais da matriz $[G] = \begin{bmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1; G_{11}^2 & G_{12}^2 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1; G_{21}^2 & G_{22}^2 \end{bmatrix}$ serão

apresentados a seguir:

$$G_{11}^1 = -k_1 \left\{ k_6 \cdot r_2 \left[f_1(\ln(r_2) - 1) + \frac{(r_2)}{2L} \left(\ln(r_2) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} + \\ + k_1 \left\{ k_6 \cdot r_1 \left[f_1(\ln(r_1) - 1) + \frac{(r_1)}{2L} \left(\ln(r_1) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

$$G_{11}^2 = -k_1 \left\{ k_6 \cdot r_2 \left[f_2(\ln(r_2) - 1) - \frac{(r_2)}{2L} \left(\ln(r_2) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} + \\ + k_1 \left\{ k_6 \cdot r_1 \left[f_2(\ln(r_1) - 1) - \frac{(r_1)}{2L} \left(\ln(r_1) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = -k_1 \left\{ k_6 \cdot r_2 \left[f_1(\ln(r_2) - 1) + \frac{(r_2)}{2L} \left(\ln(r_2) - \frac{1}{2} \right) \right] - r_2 \cdot f_1 - \frac{r_2^2}{2L} \right\} + \\ + k_1 \left\{ k_6 \cdot r_1 \left[f_1(\ln(r_1) - 1) + \frac{(r_1)}{2L} \left(\ln(r_1) - \frac{1}{2} \right) \right] - r_1 \cdot f_1 - \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{22}^2 = -k_1 \left\{ k_6 \cdot r_2 \left[f_2(\ln(r_2) - 1) - \frac{(r_2)}{2L} \left(\ln(r_2) - \frac{1}{2} \right) \right] - r_2 \cdot f_2 + \frac{r_2^2}{2L} \right\} + \\ + k_1 \left\{ k_6 \cdot r_1 \left[f_2(\ln(r_1) - 1) - \frac{(r_1)}{2L} \left(\ln(r_1) - \frac{1}{2} \right) \right] - r_1 \cdot f_2 + \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{21}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^2 = 0$$

Os resultados das integrais da matriz $[S] = \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 : S_{11}^2 & S_{12}^2 \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 : S_{21}^2 & S_{22}^2 \\ S_{31}^1 & S_{32}^1 : S_{31}^2 & S_{32}^2 \end{bmatrix}$ serão

apresentados a seguir:

$$S_{11}^1 = k_7 \left\{ f_1 \cdot \left[(2k_4 - k_5) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] - \frac{1}{L} [(2k_4 - k_5) \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-k_7 \left\{ f_1 \cdot \left[(2k_4 - k_5) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] - \frac{1}{L} [(2k_4 - k_5) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{11}^2 = k_7 \left\{ f_2 \cdot \left[(2k_4 - k_5) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] + \frac{1}{L} [(2k_4 - k_5) \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-k_7 \left\{ f_2 \cdot \left[(2k_4 - k_5) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] + \frac{1}{L} [(2k_4 - k_5) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{22}^1 = k_7 (k_4 + 2v) \left\{ \left[\left(\frac{f_1}{r_2} \right) - \frac{1}{L} \text{Ln}(r_2) \right] - \left[\left(\frac{f_1}{r_1} \right) - \frac{1}{L} \text{Ln}(r_1) \right] \right\}$$

$$S_{22}^2 = k_7 (k_4 + 2v) \left\{ \left[\left(\frac{f_2}{r_2} \right) + \frac{1}{L} \text{Ln}(r_2) \right] - \left[\left(\frac{f_2}{r_1} \right) + \frac{1}{L} \text{Ln}(r_1) \right] \right\}$$

$$S_{31}^1 = S_{11}^1$$

$$S_{31}^2 = S_{11}^2$$

$$S_{12}^1 = S_{21}^1 = S_{32}^1 = S_{12}^2 = S_{21}^2 = S_{32}^2 = 0$$

Os resultados das integrais da matriz $[D] = \begin{bmatrix} D_{11}^1 & D_{12}^1 : D_{11}^2 & D_{12}^2 \\ D_{21}^1 & D_{22}^1 : D_{21}^2 & D_{22}^2 \\ D_{31}^1 & D_{32}^1 : D_{31}^2 & D_{32}^2 \end{bmatrix}$ serão

apresentados a seguir:

$$D_{12}^1 = k_3 \cdot k_4 \left[(1-f_2) \cdot \text{Ln} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{L} (r_2 - r_1) \right]$$

$$D_{12}^2 = k_3 \cdot k_4 \left[f_2 \cdot \text{Ln} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{1}{L} (r_2 - r_1) \right]$$

$$D_{32}^1 = -k_3 (k_4 + 2) \left[\frac{1}{L} (r_2 - r_1) - f_2 \cdot \text{Ln} (r_2 \cdot r_1) + \text{Ln} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right]$$

$$D_{32}^2 = -k_3 (k_4 + 2) \left[\frac{1}{L} (r_2 + r_1) + f_2 \cdot \text{Ln} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right]$$

$$D_{21}^1 = -D_{12}^1$$

$$D_{21}^2 = -D_{12}^2$$

$$D_{11}^1 = D_{22}^1 = D_{31}^1 = D_{11}^2 = D_{22}^2 = D_{31}^2 = 0$$

ANEXO V

Integrais analíticas singulares

Para assessorar na dedução das integrais, algumas constantes foram agrupadas de forma ordenada como segue:

$$k_1 = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \quad (1)$$

$$k_2 = \frac{L}{16\pi G(1-2\nu)} \quad (2)$$

$$k_3 = \frac{G}{2\pi L(1-\nu)} \left\{ 2\nu(\eta_j r_{,k} r_{,i} + \eta_k r_{,j} r_{,i}) + (1-2\nu)(\eta_i r_{,j} r_{,k} + \eta_k \delta_{ji} + \eta_j \delta_{ki}) - (1-4\nu)\eta_i \delta_{jk} \right\} \quad (3)$$

$$k_4 = \frac{1}{4\pi L(1-\nu)} \left\{ -(1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,i} \delta_{jk}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (4)$$

As variáveis θ_1 e θ_2 são os cossenos diretores da normal ao elemento a ser integrado.

1 - Ponto fonte coincidindo com o primeiro nó do elemento de integração.

A seguir serão apresentados os resultados analíticos das integrais singulares, para o elemento de contorno linear, das matrizes H, G, S e D para o caso do ponto fonte coincidindo com o primeiro nó do elemento, conforme ilustra a figura 1.

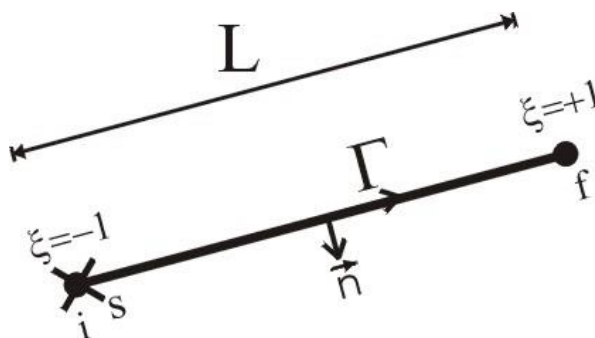


Figura 1 – Posição do ponto fonte (s) coincidindo

com o primeiro nó do elemento a ser integrado

Os resultados obtidos pelas integrais singulares para os elementos da matriz H são:

$$H_{12}^1 = k_1 (1 - \ln(L))$$

$$H_{12}^2 = -k_1$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

Os resultados obtidos pelas integrais singulares para os elementos da matriz G são:

$$G_{11}^1 = k_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + (\theta_2)^2 \right]$$

$$G_{22}^1 = k_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + (\theta_1)^2 \right]$$

$$G_{11}^2 = k_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + (\theta_2)^2 \right]$$

$$G_{22}^2 = k_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + (\theta_1)^2 \right]$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -k_1 \theta_1 \theta_2$$

2 - Ponto fonte coincidindo com o segundo nó do elemento de integração.

A seguir serão apresentados os resultados analíticos das integrais singulares, para o elemento de contorno linear, das matrizes H, G, S e D para o caso do ponto fonte interno ao elemento de integração, conforme ilustra figura 2.

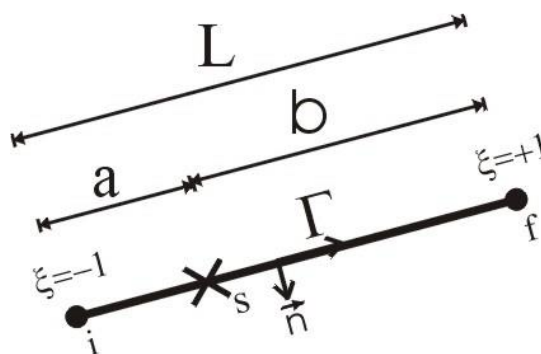


Figura 2 – Posição do ponto fonte (s) interno ao elemento a ser integrado

Os resultados obtidos pelas integrais singulares para os elementos da matriz H são:

$$H_{12}^1 = \frac{k_1}{L} \left[b \cdot \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) + L \right]$$

$$H_{12}^2 = \frac{k_1}{L} \left[a \cdot \text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right) + L \right]$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

Os resultados obtidos pelas integrais singulares para os elementos da matriz G são:

$$G_{11}^1 = \frac{2k_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{a^2}{2} \right) \text{Ln}(a) + \frac{b^2}{2} \text{Ln}(b) - \frac{1}{4}(a+b)(a+3b) + \frac{L^2}{2}(\theta_2)^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = \frac{2k_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{a^2}{2} \right) \text{Ln}(a) + \frac{b^2}{2} \text{Ln}(b) - \frac{1}{4}(a+b)(a+3b) + \frac{L^2}{2}(\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$G_{11}^2 = \frac{2k_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{b^2}{2} \right) \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \text{Ln}(a) - \frac{1}{4}(a+b)(b+3a) + \frac{L^2}{2}(\theta_2)^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^2 = \frac{2k_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{b^2}{2} \right) \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \text{Ln}(a) - \frac{1}{4}(a+b)(b+3a) + \frac{L^2}{2}(\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -k_2 \theta_1 \theta_2$$

Os resultados obtidos pelas integrais singulares para os elementos da matriz S são:

$$S_{ij}^1 = k_3 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right) - \frac{b}{a} - 1 \right]$$

$$S_{ij}^2 = k_3 \left[\text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{a}{b} - 1 \right]$$

Os resultados obtidos pelas integrais singulares para os elementos da matriz D são:

$$D_{ij}^1 = k_4 \left\{ b \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right) + 1 \right] + a \right\}$$

$$D_{ij}^2 = k_4 \left\{ a \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right) - 1 \right] - b \right\}$$

3 - Ponto fonte coincidindo com o segundo nó do elemento de integração.

A seguir serão apresentados os resultados analíticos das integrais singulares, para o elemento de contorno linear, das matrizes H e G para o caso do ponto fonte coincidindo com o segundo nó do elemento, conforme ilustra a figura 3.

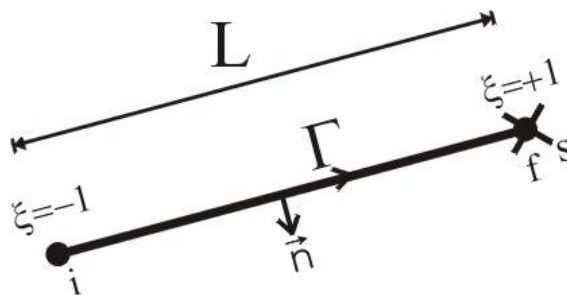


Figura 3 – Posição do ponto fonte (s) coincidindo com o segundo nó do elemento a ser integrado

Os resultados obtidos pelas integrais singulares para os elementos da matriz H são:

$$H_{12}^1 = k_1$$

$$H_{12}^2 = -k_1 (1 - \text{Ln}(L))$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

Os resultados obtidos pelas integrais singulares para os elementos da matriz G são:

$$G_{11}^1 = k_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + (\theta_2)^2 \right]$$

$$G_{22}^1 = k_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + (\theta_1)^2 \right]$$

$$G_{11}^2 = k_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + (\theta_2)^2 \right]$$

$$G_{22}^2 = k_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + (\theta_1)^2 \right]$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -k_1 \theta_1 \theta_2$$

ANEXO VI

Condição de Hölder

1 Introdução

Neste apêndice são apresentadas a definição de continuidade de Hölder e a justificativa para a aplicação dessa condição na equação integral de contorno. Assim, demonstra-se que a função $\varphi(r) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ que aparece na solução fundamental de Kelvin é Hölder contínua. Deste modo, para o desenvolvimento deste apêndice foram consultadas as seguintes bibliografias: Brebbia e Domingues (1984), Porto (2006), Santos (2010), Reis (2009).

2 Continuidade de Hölder

Definição: Seja L um contorno suave, φ uma função real de variável (real ou complexa) definida sobre L . Diz-se que φ satisfaz a condição de Hölder se para quaisquer x e y em L , tem-se:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq A\varepsilon^\alpha(x, y) \quad (1)$$

onde $A > 0$ é uma constante, denominada constante de Hölder, $0 < \alpha \leq 1$ é denominado índice Hölder e $\varepsilon(x, y) = |x - y|$.

Para que função $\varphi(x)$ atenda a condição de Hölder ela não pode crescer mais rápido que o fator $\varepsilon^\alpha(x, y)$ no ponto y . Quando $\varphi(x)$ satisfaz a condição de Hölder para os mesmos valores de A e α diz-se que $\varphi(y)$ é uma função do tipo $C^{0,\alpha}$.

A condição de Hölder pode também ser interpretada como um “meio termo” entre uma condição de a função aceitar o operador diferencial (ser “diferenciável”) e de

ser contínua. Ou seja, é uma condição mais restritiva que a mera continuidade de uma função, porém menos que o requisito de ser diferenciável.

3 Aplicação da continuidade de Hölder em Logaritmo

A definição usual diz que uma função f é Hölder-contínua se existem constantes $A > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ tais que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq A\varepsilon^\alpha(x, y)$ para quaisquer x e y no domínio, mas isso implica que f é limitada em qualquer intervalo limitado, mas isso não ocorre com $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, que certamente não é limitada no intervalo $(0,1)$. O problema então é mostrar que $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ é localmente Hölder contínua - de fato ela é derivável com derivada contínua, logo localmente Lipschitziana, ou seja, localmente Hölder-contínua com expoente $\alpha = 1$.

Para provar que $\varphi(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ é localmente Hölder contínua usa-se o teorema

do valor médio. Destarte enunciado:

Seja $\varphi(x)$ uma função, tal que:

- (i) seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$
- (ii) seja derivável no interlevalo fechado $[a, b]$

Então, existirá um número c no intervalo $[a, b]$, tal que

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} \quad (2)$$

Diz-se que $\varphi(x)$ é Lipschitz contínua se, e somente se, $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq A|x_2 - x_1|$ com $x_1, x_2 \in [a, b]$. De fato se $\varphi(x)$ é derivável em $[a, b]$ então existe A igual ao máximo de $|\varphi'(x)|$ para x em $[a, b]$. Pelo teorema do valor médio tem-se:

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \varphi'(c) \cdot (x_2 - x_1) \quad (3)$$

Aplicando o modulo nos dois membros da equação 3 e tomando A como o máximo em $[a, b]$, chega-se a:

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| &= |\varphi'(c) \cdot (x_2 - x_1)| \\ |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| &= |\varphi'(c)| |(x_2 - x_1)| \leq A \cdot |(x_2 - x_1)| \end{aligned} \quad (4)$$

logo $\varphi(x)$ é Lipschitziana com $\alpha=1$.

Em especial para a função $\varphi(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ tem-se $\varphi'(x) = -\frac{1}{x}$ então:

i) Se $x \in [1, \infty)$ implica que $x \geq 1$ logo $\frac{1}{x} \leq 1$. Usando a equação 4 chega-se

a:

$$\begin{aligned} |\ln(x_1) - \ln(x_2)| &= |\varphi'(c) \cdot (x_2 - x_1)| \\ |\ln(x_1) - \ln(x_2)| &= |\varphi'(c)| |(x_2 - x_1)| \leq 1 \cdot |(x_2 - x_1)| \end{aligned}$$

Deste modo, conclui-se que $A=1$ e $\alpha=1$ e $\varphi(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ é

Lipschitziana, portanto localmente Hölder, no intervalo $x \in [1, \infty)$.

ii) Se $x \in [a, 1)$ implica que $a \leq x < 1$ logo $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{x} > 1$. Usando a equação 4

tem-se:

$$\begin{aligned} |\ln(x_1) - \ln(x_2)| &= |\varphi'(c) \cdot (x_2 - x_1)| \\ |\ln(x_1) - \ln(x_2)| &= |\varphi'(c)| |(x_2 - x_1)| \leq \frac{1}{a} \cdot |(x_2 - x_1)| \end{aligned}$$

Assim sendo, conclui-se que $A = \frac{1}{a}$ e $\alpha=1$, portanto

$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ é Lipschitziana, portanto localmente Hölder, no intervalo

$x \in [a, 1)$ com $\alpha=1$.

Matematicamente não é correto dizer que a função deslocamento na integral de contorno é contínua de Hölder. O termo correto para uso é dizer que o deslocamento é localmente Hölder, uma vez que, esta função não atende a condição de Hölder no intervalo de $(0,1)$.