

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **Formulações Corrotacionais 2D para Análise Geometricamente Não Linear de Estruturas Reticuladas**

**Jéssica Lorrany e Silva**

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários á obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Ouro Preto, Agosto de 2016

S586f

Silva, Jéssica Lorrany e.

Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas [manuscrito] / Jéssica Lorrany e Silva. - 2016.

115f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Coorientadora: Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Análise estrutural (Engenharia). 2. Estabilidade estrutural. 3. Modelos matemáticos. 4. Método dos elementos finitos. I. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. II. Silva, Andréa Regina Dias da. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

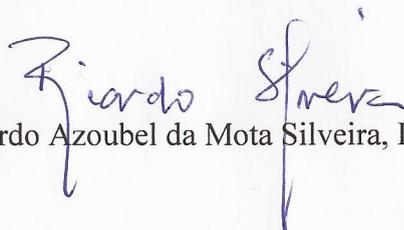
CDU: 624.04

Catálogo: [www.sisbin.ufop.br](http://www.sisbin.ufop.br)

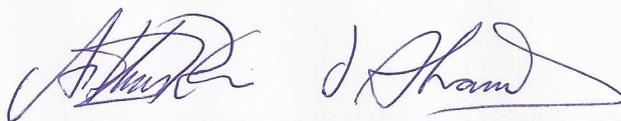
**FORMULAÇÕES CORROTACIONAIS 2D PARA ANÁLISE  
GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS**

**AUTORA: JÉSSICA LORRANY E SILVA**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 25 de agosto de 2016, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Arthur Ribeiro de Alvarenga, D. Sc. – Pós-Doc /UFOP



Prof. Alexandre da Silva Galvão, D. Sc. – UFSJ

Aos meus pais e ao meu orientador.

# Agradecimentos

A Deus por estar sempre ao meu lado, me guiando e me trazendo paz.

Aos meus pais, Itamar e Arminda, pela confiança, apoio incondicional, valores transmitidos e por serem sempre meu porto seguro. Ao meu irmão, Matheus, pelo amor e paciência.

Ao Renan, pelo grande incentivo e compreensão em todos os momentos.

Ao meu orientador, prof. Ricardo Silveira, pela preciosa orientação, dedicação e pela amizade.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) pelos ensinamentos, em especial à profa. Andréa Silva.

Ao Ígor, pelas ajudas indispensáveis no CS-ASA e pela disposição em ajudar no desenvolvimento desta dissertação.

À todos os amigos que me ajudaram nas disciplinas e também na elaboração da pesquisa. Em especial ao pessoal da sala do mestrado e doutorado, Iara, Everton e Marko Rupert, pela ajuda e momentos de descontração.

Às amigas Luma e Letícia pela boa convivência diária nesses dois anos.

À UFOP, pela ajuda financeira.

À todos, que de alguma forma, me apoiaram na realização deste trabalho.

*“Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.”*

*---ALBERT EINSTEIN*

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

## **FORMULAÇÕES CORROTACIONAIS 2D PARA ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS**

**Jéssica Lorrany e Silva**

Agosto/2016

*Orientadores:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Andréa Regina Dias da Silva

Com o propósito de tornar os sistemas estruturais mais econômicos tem-se um aumento da utilização de estruturas cada vez mais esbeltas em várias áreas da engenharia. Para a concepção de estruturas mais esbeltas, a realização de análises não lineares geométricas, em que os efeitos de segunda ordem são explicitamente incluídos, torna-se cada vez mais comum. Nesse âmbito, com esta dissertação tem-se a finalidade principal o desenvolvimento de formulações para estruturas reticuladas 2D, que consideram o comportamento não linear geométrico, dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos. As implementações foram realizadas no programa computacional CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), com o qual é possível a realização de análises avançadas de estruturas considerando vários efeitos não lineares. As formulações de elementos finitos geometricamente não lineares implementadas aqui estão adaptadas à metodologia de solução que usa o método de Newton-Raphson acoplado às estratégias de incremento de carga e de iteração. Essas estratégias permitem a ultrapassagem de pontos críticos (bifurcação e limite) ao longo da trajetória de equilíbrio. Vale enfatizar a adoção nessas formulações não lineares de elementos finitos do referencial corrotacional, que permite a separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e os deformacionais. Nesse tipo de abordagem, somente os deslocamentos que causam deformações estão presentes e, dessa forma, os deslocamentos e rotações medidos nesse sistema local corrotacional podem ser considerados pequenos e permitem a consideração de medidas de deformação lineares sem perda de precisão. Essas formulações utilizam a teoria de viga de Euler-Bernoulli e também a teoria de Timoshenko. Os resultados obtidos no presente trabalho foram avaliados através do estudo de problemas estruturais clássicos de estabilidade fortemente não lineares encontrados na literatura.

**Palavras-Chave:** Análise Não Linear Geométrica, Referencial Corrotacional, Estruturas Esbeltas.

Abstract of Dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

## **2D CO-ROTATIONAL FORMULATIONS FOR GEOMETRICAL NONLINEAR ANALYSIS OF STEEL FRAMED STRUCTURES**

**Jéssica Lorrany e Silva**

August/2016

*Advisors:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Andréa Regina Dias da Silva

*In order to make the most economical structural systems has been an increased use of slender structures in many areas of engineering. For the design of slender structures, becomes increasingly common, the adoption of nonlinear geometric analysis, wherein the second order effects are explicitly included. In this context, the main purpose with this dissertation was the development of formulations for 2D frames structures, considering the geometric non-linear behavior within the Finite Element Method. Implementations were done in the computer program CS-ASA (Computational System for Advanced Structural Analysis), which performs advanced analysis of structures including several nonlinear effects. The formulations of geometrically nonlinear finite element implemented here were adapted to methodology solution that applies the Newton-Raphson method coupled with the load increment and iteration strategies. These strategies allow the trespass of critical points (bifurcation and limit) along the equilibrium path. It is worth to mention that the adoption of these non-linear finite element formulations with Co-rotational System, allowed the explicit separation between the natural displacements and rigid body motion. In this approach, only the displace that cause deformations are present, therefore, the measured displacements and rotations in this Co-rotational local system may be considered small and allowed the linear deformation measurements more precisely. These formulations apply the beam theory Euler-Bernoulli and also the Timoshenko's theory. The answers of this study were evaluated by the study of strongly nonlinear classical stability structural problems found in the literature.*

**Keywords:** Geometrical Nonlinear Analysis, Co-rotational System, Slender Structures

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais .....	1
1.2 Sistema Computacional CS-ASA e Objetivos .....	4
1.3 Objetivos .....	6
1.4 Revisão Bibliográfica.....	8
1.5 Organização do Trabalho .....	10
<b>2 Problema Geométrico Não Linear</b>	<b>11</b>
2.1 Introdução .....	11
2.2 Formulação do Elemento Finito Não Linear .....	11
2.2.1 Equações Básicas .....	12
2.2.2 Discretização do Sistema Estrutural.....	13
2.3 Metodologia de Solução .....	15
2.3.1 Processo Incremental – Solução Predita .....	18
2.3.2 Processo iterativo – Solução Corretiva .....	19
2.4 Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração .....	23
2.4.1 Estratégias de Incremento de Carga .....	25
2.4.2 Estratégias de Iteração .....	29
<b>3 Formulações Geométricas Não Lineares</b>	<b>34</b>
3.1 Introdução .....	34
3.2 Referencial Corrotacional .....	34
3.2.1 Matriz de Rigidez Tangente .....	40
3.3 Teoria de Viga.....	42
3.4 Formulação SOF-4.....	42

3.4.1	Elemento de Euler-Bernoulli: SOF-4/EB.....	42
3.4.2	Elemento de Timoshenko: SOF-4/T .....	46
3.5	Formulação SOF-5 .....	50
3.5.1	Função de Deslocamento Consistente.....	51
3.5.2	Deformação Cisalhante Consistente .....	55
<b>4</b>	<b>Análises e Resultados Numéricos</b>	<b>60</b>
4.1	Introdução .....	60
4.2	Exemplos Clássicos .....	61
4.2.1	Pilar Engastado-Livre .....	61
4.2.2	Viga Engastada-Livre Sob Carga Concentrada na Extremidade .....	64
4.2.3	Viga Engastada-Livre Sob Momento Fletor na Extremidade .....	66
4.2.4	Arco Senoidal .....	67
4.3	Teoria de Viga .....	71
4.3.1	Influência da Esbeltez .....	71
4.3.2	Pórtico de Williams.....	72
4.4	Eficiência da Formulação com a Teoria de Timoshenko.....	74
4.4.1	Pórtico de Lee .....	75
4.5	Eficiência da Formulação com a Teoria de Euler-Bernoulli.....	79
4.5.1	Arco Circular Parcialmente Carregado .....	79
4.6	Problemas Fortemente Não Lineares .....	80
4.6.1	Arco Circular Rotulado-Engastado .....	82
4.6.2	Arco Abatido Birrotulado .....	83
4.6.3	Arco Circular Birrotulado .....	88
4.7	Trajatórias de Equilíbrio com Ponto de Bifurcação.....	90
4.7.1	Arco Biengastado Sob Pressão Radial .....	93
4.7.2	Roorda Frame .....	96
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>100</b>
5.1	Introdução .....	100
5.2	Conclusão .....	101
5.3	Sugestões para Futuras Pesquisas .....	102
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>104</b>

# Lista de Figuras

1.1	Efeitos de segunda ordem: P- $\Delta$ e P- $\delta$ (SILVA, 2009).....	2
1.2	CS-ASA: sistema computacional para análise estática e dinâmica de estruturas (SILVA, 2009) .....	6
1.3	Novas formulações de segunda ordem implementadas CS-ASA: SOF-4 e SOF-5 .	7
2.1	Solução incremental-iterativa com a restrição do comprimento de arco (PIRES, 2012) .....	16
2.2	Trajectoria de equilíbrio (PIRES, 2012).....	17
2.3	Método de Newton-Raphson (PIRES, 2012) .....	19
2.4	A técnica do fluxo normal (PIRES, 2012).....	21
2.5	Os vetores $\delta U_r$ e $\delta U$ da iteração k na técnica do fluxo normal (PIRES, 2012) ....	22
3.1	Relação entre sistema local e global.....	36
4.1	Coluna engastada-livre .....	62
4.2	Trajectorias de equilíbrio de pilar engastado-livre para diferentes formulações e análise de convergência.....	63
4.3	Viga engastada-livre .....	64
4.4	Trajectorias de equilíbrio de viga engastada-livre para diferentes formulações e análise de convergência.....	65
4.5	Viga engastada-livre .....	67
4.6	Trajectorias de equilíbrio de viga engastada-livre/momento fletor para diferentes formulações e análise de convergência .....	68
4.7	Arco senoidal: geometria e carregamento .....	69
4.8	Trajectorias de equilíbrio de arco senoidal para diferentes formulações e análise de convergência .....	70
4.9	Valores da relação $v_T/v_{EB}$ com variação da esbeltez .....	72

4.10	Pórtico de Willians: geométrica e seção transversal .....	73
4.11	Curva carga-deslocamento vertical .....	74
4.12	Pórtico de Lee: geometria e carregamento .....	75
4.13	Trajatória de equilíbrio para o Pórtico de Lee com 8 elementos.....	77
4.14	Trajatória de equilíbrio para o Pórtico de Lee com 16 elementos.....	77
4.15	Curva carga-rotação.....	78
4.16	Configuração deformada e seus respectivos pontos limites .....	78
4.17	Arco circular parcialmente carregado: geometria e carregamento.....	79
4.18	Curva carga-deslocamento vertical .....	81
4.19	Configuração deformada e seus respectivos pontos limites .....	81
4.20	Arco circular rotulado-engastado: geometria e carregamento.....	82
4.21	Trajatória de equilíbrio do arco abatido birrotulado.....	85
4.22	Arco abatido birrotulado: geometria e carregamento.....	86
4.23	Trajatória de equilíbrio do arco circular abatido .....	87
4.24	Trajatória de equilíbrio: $P \times u$ e $P \times \theta$ .....	88
4.25	Arco circular birrotulado: geometria e carregamento.....	89
4.26	Trajatória de equilíbrio sistema perfeito.....	91
4.27	Trajatória de equilíbrio sistema imperfeito .....	92
4.28	Trajatória de equilíbrio sistema imperfeito .....	93
4.29	Arco biengastado sob pressão radial: geometria e carregamento.....	94
4.30	Curva carga-deslocamento vertical .....	95
4.31	Curva carga-rotação.....	95
4.32	Roorda Frame: geometria e carregamento.....	96
4.33	Curva carga-rotação.....	97
4.34	Comparação dos resultados apresentados para o caminho de equilíbrio não linear com resultados teóricos e experimentais.....	99
4.35	Comparação dos resultados numéricos, teóricos e experimentais para cargas limite .....	99

# Lista de Tabelas

2.1	Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear .....	24
4.1	Erro relativo do deslocamento $v$ e $u$ .....	66
4.2	Valores limites de carga, $P$ ( $N/cm$ ) .....	69
4.3	Tempo de processamento da análise do arco circular rotulado-engastado .....	84
4.4	Valores pontos limites de carga e deslocamento .....	86

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

A utilização de materiais mais resistentes, o emprego de novas técnicas construtivas e a utilização de recursos computacionais cada vez mais avançados vêm contribuindo com projetos mais arrojados, em que sistemas estruturais mais leves e esbeltos são adotados. A medida que se aumenta a esbeltez de um elemento estrutural, este se torna cada vez mais sujeito a sofrer flambagem, isto é, apresentar grandes deflexões laterais que tendem a ocorrer antes da ruptura física do material. Essas características fazem com que o comportamento não linear das estruturas passe a ser relevante e deva ser considerado nas análises.

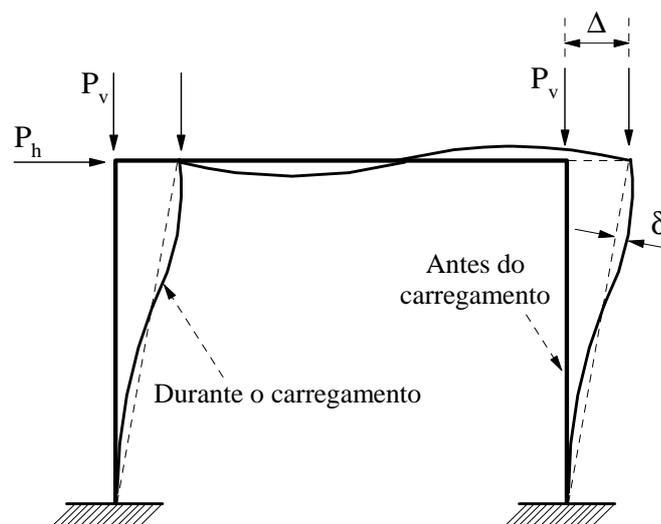
Em alguns casos, os projetos de estruturas ainda são desenvolvidos considerando a geometria da estrutura perfeita e utilizando a análise elástica linear. As equações de equilíbrio são formuladas baseando-se na configuração inicial indeformada da estrutura e assume-se que as deformações, deslocamentos e rotações são pequenas. Uma desvantagem da análise elástica linear tem sido sua incapacidade de retratar o comportamento real de estruturas sob condições não usuais de carregamento ou de carregamento limite. No entanto, face o aumento de esbeltez, as estruturas podem apresentar comportamento não linear relevante antes mesmo de atingirem seus limites de resistência.

Com o emprego de recursos computacionais avançados e a utilização de formulações numéricas adequadas é possível simular um comportamento mais aproximado de uma estrutura real considerando os efeitos não lineares, que podem basicamente ser divididos em: físico e geométrico.

A não linearidade física está diretamente associada ao comportamento mecânico dos materiais constituintes da estrutura. Em algumas situações, pode existir uma degradação da

resistência do material, que passa a não apresentar comportamento elástico linear (não segue a lei de Hooke). Assim, a perda da capacidade resistente da estrutura durante a análise deve ser considerada de forma que, a partir de certo valor do carregamento aplicado, alguns elementos ou partes que a compõem perdem a capacidade de recuperar a sua forma inicial quando descarregados, acumulando deformações permanentes chamadas deformações plásticas.

A não linearidade geométrica, entretanto, surge devido a modificações da geometria da estrutura que pode aparecer ao longo do processo de carregamento e deformação do corpo. Segundo Silva (2009) e Alvarenga (2005, 2010), a presença de imperfeições geométricas iniciais devido as tolerâncias de fabricação e/ou montagem, bem como a movimentação horizontal dos andares induzidos por esforços de vento (e similares) tem como consequência o aparecimento de momentos fletores adicionais, em virtude da presença de esforços normais. Esse tipo de comportamento são os chamados efeitos de segunda ordem, isto é, os efeitos  $P-\Delta$  (global) e  $P-\delta$  (local, a nível de elemento), que são oriundos das imperfeições iniciais e/ou das deformações da estrutura à medida que é carregada. Esses efeitos são exemplificados na Figura 1.1. Trata-se de uma importante fonte de não linearidade no problema estrutural, principalmente nos sistemas estruturais esbeltos, e empregando formulações numéricas propostas sua avaliação é mais rigorosa. Esta dissertação se insere exatamente nesse contexto, como será esclarecido na próxima seção.



**Figura 1.1** Efeitos de segunda ordem:  $P-\Delta$  e  $P-\delta$  (SILVA, 2009)

Para a consideração dos efeitos geométricos não lineares, duas formulações têm sido propostas para descrever o movimento de corpos sólidos (GALVÃO, 2004): a Euleriana e a Lagrangiana. Na formulação Euleriana, as coordenadas utilizadas como referência são as coordenadas espaciais, isto é, aquelas associadas ao corpo deformado. Esse referencial tem sido amplamente adotado nas análises de problemas de mecânica dos fluidos, onde a atenção é focada no movimento dos pontos materiais ao longo de um volume específico de controle.

Já na formulação Lagrangiana, as coordenadas dos pontos materiais, ou seja, aquelas associadas ao corpo antes de sua deformação, são utilizadas como as coordenadas de referência. Esse referencial é particularmente apropriado para análises não lineares do tipo passo-a-passo (incremental), onde o interesse está centrado na história de deformação de cada ponto do corpo durante o processo de carregamento. Posto isso, destaca-se que o presente trabalho se restringe às formulações do tipo Lagrangiana, tendo-se em vista que a maioria das formulações de elementos finitos com não linearidade geométrica encontradas na literatura baseiam-se nesse tipo de referencial. Dois tipos de referencial Lagrangiano podem ser identificados: referencial Lagrangiano total (RLT) e referencial Lagrangiano atualizado (RLA).

Como descrito em Silva (2009), o desenvolvimento de metodologias incrementais para análise não linear começa com a divisão do caminho de carregamento de um corpo sólido em um certo número de configurações de equilíbrio. Três configurações para o corpo podem ser estabelecidas em termos de um sistema de coordenadas cartesianas: a configuração inicial,  $t = 0$ ; a última configuração deformada,  $t$ ; e a configuração deformada corrente,  $t + \Delta t$ . Assume-se que todas as variáveis de estado, tais como, tensões, deformações e deslocamentos, juntamente com a história de carregamento, são conhecidas na configuração  $t$ . A partir daí, tem-se como objetivo a formulação de um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração  $t + \Delta t$ . Isso é feito considerando que o carregamento externo que atuou na configuração  $t$  tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de  $t$  para  $t + \Delta t$  é comumente referido como um passo incremental. Caso seja adotada a formulação RLT, toma-se sempre como referência a configuração inicial,  $t = 0$ ; já no RLA, a última configuração deformada do sistema estrutural,  $t$ , é tomada como referência. No Capítulo 2 deste trabalho estão os detalhes da metodologia incremental adotada para análise não linear dos problemas estruturais de interesse.

Além desses dois referenciais para as análises não lineares, pode ser utilizado também o referencial Corrotacional (RCR), que segundo Hsiao *et al.* (1987), Battini (2002) e Santana (2015), pode ser adaptado tanto à formulação RLT quanto à RLA. Nesta dissertação adotam-se descrições cinemáticas através do RCR, que se baseia na separação explícita entre os deslocamentos devido ao movimento de corpo rígido e deformacionais (Capítulo 3). Nesse tipo de abordagem, via método dos elementos finitos (MEF), somente os movimentos que causam deformações estão presentes. Portanto, os deslocamentos e rotações medidos nesse sistema referencial podem ser considerados pequenos, e as medidas de deformação lineares podem ser utilizadas sem perda de precisão. Adicionalmente, nesta dissertação, as descrições cinemáticas através do RCR serão adaptadas à formulação RLA, em que se tomará como referência, como já descrito, a configuração deformada do sistema estrutural em,  $t$ .

Portanto, no contexto do MEF e dos referenciais RCR e RLA, nesta dissertação se mostra o desenvolvimento e implementação computacional de novas formulações geometricamente não lineares (BATINNI, 2002; TANG *et al.*, 2015), baseadas nas teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, para serem usadas em análises de sistemas estruturais reticulados planos fortemente não lineares. Essas implementações são realizadas na base computacional do CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; SILVA, 2009), que é um programa para análise numérica avançada estática e dinâmica de estruturas. Na próxima seção se fornecem os detalhes da base computacional adotada, o CS-ASA, bem como apresentam-se os objetivos específicos com esta pesquisa.

## 1.2 O Sistema Computacional CS-ASA

Como parte da tese de doutorado do orientador desta pesquisa (Silveira, 1995), foi desenvolvido um programa computacional para a análise da estabilidade elástica de colunas, arcos e anéis esbeltos com restrições unilaterais de contato impostas por bases elásticas (solo ou rocha). O produto dessa tese foi então dividido em dois sistemas computacionais: um para análise de problemas de contato solo-estrutura e outro, mais específico, para análise/projeto de estruturas metálicas. Será feito a seguir um breve relato dos desenvolvimentos computacionais envolvendo apenas o módulo que resultou no sistema CS-ASA (SILVA, 2009).

As primeiras intervenções no módulo de análise/projeto de estruturas metálicas aconteceram através de Galvão (2000) e Rocha (2000), com o desenvolvimento de várias

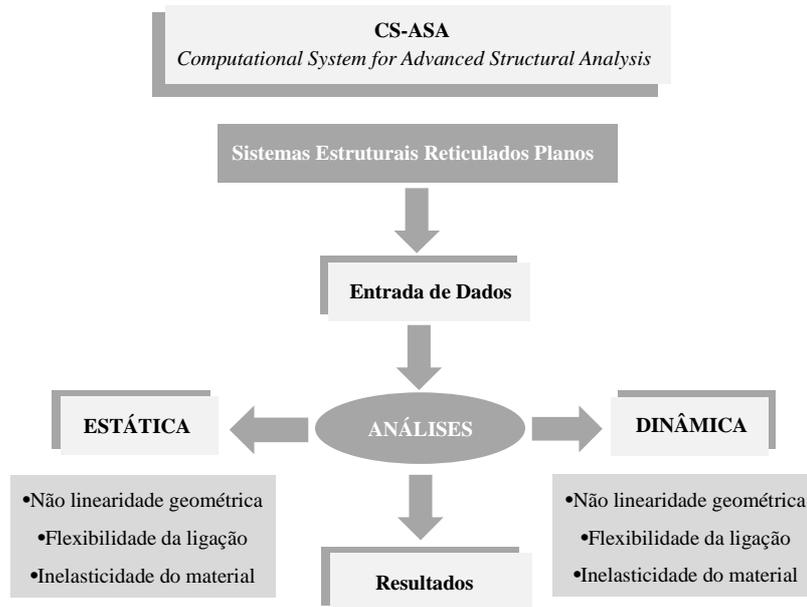
formulações de segunda ordem e estratégias numéricas visando a continuidade do traçado das trajetórias de equilíbrio. Manzi (2001) implementou elementos finitos curvos para modelagem de arcos e anéis; e Pinheiro (2003) contribuiu com formulações de elementos finitos semirrígidos para simulação de pórticos planos com ligações flexíveis. Galvão (2004) iniciou o desenvolvimento das rotinas de dinâmica linear e não linear para estudo de vibrações de estruturas metálicas. A inclusão de formulações inelásticas aconteceu com Machado (2005) através do método da rótula plástica (plasticidade concentrada). Rocha (2006) e Santos (2007) utilizaram um elemento finito híbrido de pórtico plano na modelagem de efeitos não lineares acoplados. Silva (2009) unificou os desenvolvimentos supracitados e gerou o sistema CS-ASA como apresentado na Figura 1.2, que, como já relatado, realiza análises numéricas avançadas estáticas e dinâmicas de estruturas reticuladas planas, baseadas no MEF.

Este sistema foi todo escrito em linguagem *Fortran* (CHAPMAN, 2003). Na atual versão o sistema foi organizado de forma modular, com módulos independentes que proporciona aumento na produtividade da programação, além de facilitar a expansão do sistema com novas funcionalidades.

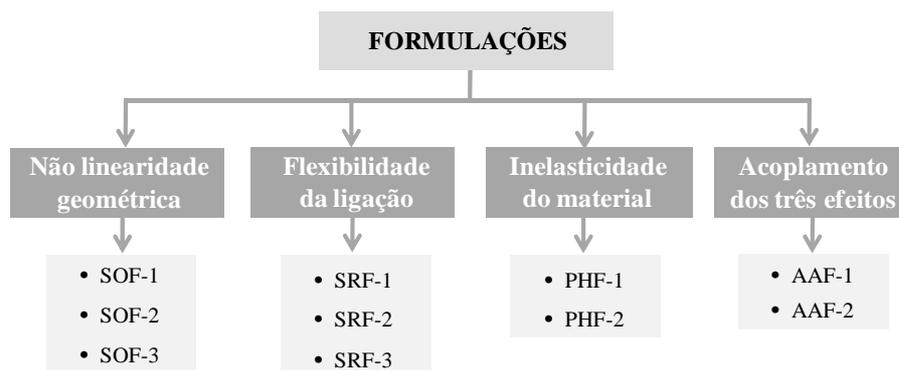
Essa expansão, inclusive, vem acontecendo com a conclusão de algumas dissertações e teses no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFOP (PROPEC/UFOP). Por exemplo, Pires (2012) propôs que uma condição de perpendicularidade — técnica do fluxo normal — fosse satisfeita ao longo do processo iterativo de solução não linear para superar certas inconsistências da estratégia iterativa do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995). Também, Prado (2012) desenvolveu um pré-processador gráfico para o CS-ASA. Gonçalves (2013) implementou uma nova equação para o módulo tangente proposta por Ziemian e McGuire (2002) com o intuito de verificar como a degradação da rigidez da seção varia em função do esforço normal e do momento fletor em torno do eixo de menor inércia. Este autor também adicionou as superfícies de resistência que avaliam de maneira adequada a interação entre esforço normal e momento fletor no eixo de menor inércia.

Lemes (2015) desenvolveu o módulo para análise avançada de estruturas de concreto e mistas. Mais especificamente, ele definiu, baseado no método dos elementos de contorno, as propriedades geométricas da seção mista; introduziu no CS-ASA o conceito de rigidez generalizada para a análise não linear e cálculo da resistência da seção, considerando ou não a tração no concreto; implementou as curvas de interação esforço normal-momento fletor para o início do escoamento e plastificação; simulou a perda gradual de rigidez nodal

utilizando o método da rótula plástica refinado, para análise inelástica de estruturas mistas de aço e concreto.



(a) Análises e efeitos considerados



(b) Formulações implementadas

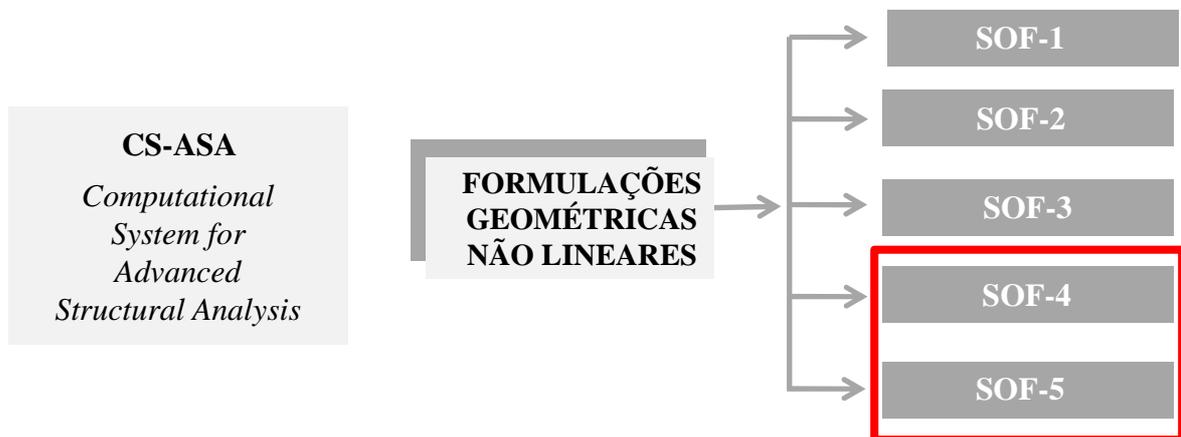
**Figura 1.2** CS-ASA: sistema computacional para análise estática e dinâmica de estruturas (SILVA, 2009)

### 1.3 Objetivos

Nesta dissertação contribuiu-se também para a expansão do sistema computacional CS-ASA, mais especificamente, pretendeu-se:

- inserir outras formulações corrotacionais de elementos de barras com as duas teorias de viga, a clássica de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko (Figura 1.3). Como ilustrado nessa figura, as novas formulações implementadas foram denominadas

- SOF-4 (*Second-Order Formulation 4*; BATTINI, 2002) e SOF-5 (*Second-Order Formulation 5*; TANG *et al.*, 2015), cujos detalhes são apresentados no Capítulo 3;
- aumentar o leque de opções de formulações de segunda ordem do CS-ASA (Figura 1.2b) e dessa forma viabilizar análises de sistemas estruturais esbeltos fortemente não lineares, evitando a presença de problemas numéricos de convergência ao longo do processo de solução incremental [em trabalhos anteriores, como PIRES (2012), não foi possível resolver alguns problemas com as formulações SOF-1 (ALVES, 1993b) e SOF-2 (YANG E KUO, 1994), que se baseiam na teoria clássica e RLA; ou a solução do problema só foi alcançada com um número muito de grande de elementos finitos para a formulação SOF-3 (PACOSTE E ERIKSSON, 1997), que se baseia na teoria de Timoshenko e RLT];
  - incluir na base do CS-ASA elementos finitos não lineares de barra que considerem em sua formulação a teoria de Timoshenko e RLA;
  - adaptar a metodologia de solução não linear incremental-iterativa disponível no CS-ASA às novas formulações de segunda ordem SOFs (Capítulo 2); e
  - testar a eficiência das formulações SOFs inseridas através da solução de problemas clássicos e fortemente não lineares presentes na literatura (os chamados *benchmarks*).



**Figura 1.3** Novas formulações de segunda ordem implementadas no CS-ASA: SOF-4 e SOF-5

Por fim, este trabalho pode ser considerado uma expansão das pesquisas do Galvão (2000), Rocha (2000), Pires (2012), Santana (2015) e da tese de doutorado de Silva (2009). Este trabalho está inserido na interface das seguintes linhas de pesquisa do PROPEC/UFOP:

- *Mecânica Computacional*: cujo objetivo é o estudo e o desenvolvimento de métodos e técnicas que possibilitem avanços na solução de problemas de engenharia;
- *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas*: que estuda o comportamento linear e não linear das diversas partes de uma estrutura, com o consequente dimensionamento.

## 1.4 Revisão Bibliográfica

É crescente o interesse de pesquisadores e engenheiros pelas análises geometricamente não lineares de estruturas. As formulações relacionadas aos elementos finitos de viga-coluna para a modelagem de estruturas reticuladas planas e espaciais tem merecido atenção especial, pois geram análises mais rápidas e eficazes dos problemas reais de engenharia.

Nesse contexto, vários pesquisadores têm desenvolvido formulações de segunda ordem em que são usados os referencias RLT, RLA e RCR. Alves (1993a; 1993b), usando um elemento de viga-coluna não linear, comparou os resultados obtidos nos referencias RLT e RLA. Yang e Kuo (1994) propuseram um vetor de forças internas que pode ser calculado através dos deslocamentos naturais (corrotacionais, RCR) incrementais. Já Pacoste e Eriksson (1995; 1997) desenvolveram elementos finitos não lineares no RLT baseados em relações deformação-deslocamento expressas por funções trigonométricas.

Das formulações que utilizam o referencial RCR, pode-se ressaltar: a proposta por Crisfield (1991), que baseou-se nas relações de transformação entre os sistemas corrotacional e global; a formulação desenvolvida em RLT por Pacoste e Eriksson (1997), que abordaram o uso de pequenos deslocamentos no sistema local; e Battini (2002), que implementou uma formulação RCR para estudar problemas de instabilidade elástica e inelástica de estruturas planas e espaciais, partindo das formulações corrotacionais de Crisfield (1990) e Pacoste e Eriksson (1997). Ele propôs modificações na forma de parametrização das rotações finitas e incluiu um sétimo grau de liberdade para consideração de ligações rígidas. Xu e Mirmiran (1997) também utilizou a abordagem corrotacional com uma formulação no RLA. Mais recentemente, Tang *et al.* (2015) apresentaram uma formulação que utiliza-se o RCR sem os efeitos de “locking” que pode surgir no uso de outras formulações. Esses pesquisadores consideraram as duas teorias de viga (clássica e Timoshenko). Vale lembrar que a teoria de Timoshenko considera o efeito devido à deformação cisalhante na seção transversal no cálculo da rigidez da estrutura. Formulações

não lineares que também se basearam no RCR foram propostas por Iwakuma (1990), Lee *et al.* (1994) e Petrolito (1995).

Como já mencionado, no PROPEC e no contexto das formulações geometricamente não lineares, merecem destaque as dissertações de Galvão (2000), Santana (2015) e a tese de doutorado de Silva (2009). Em sua dissertação de mestrado, Galvão (2000) implementou e testou diversas formulações de elementos de viga-coluna com não linearidade geométrica. Silva (2009) unificou essas formulações, adicionou a análise dinâmica e como produto final foi desenvolvido o CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*). Mais recentemente, Santana (2015) avaliou o comportamento não linear geométrico de sistemas estruturais reticulados planos através do desenvolvimento de um sistema computacional gráfico interativo, via MATLAB/GUI, denominado AFA-OPSM (*Advanced Frame Analysis - Ouro Preto School of Mines*). Os resultados desse último trabalho são usados nesta dissertação para validar as implementações realizadas.

Com o propósito de produzir metodologias de solução não lineares obtendo resultados precisos e com processamento rápido, diversos trabalhos têm sido publicados com a finalidade de se determinar a melhor estratégia de solução não linear, apresentando diferentes estratégias de incremento de carga e iteração. Como trabalhos precursores nessa área, pode-se citar: Argyris (1965), que desenvolveu um método incremental para solução não-linear; Mallet e Marçal (1968), que utilizaram iterações do tipo Newton para contornarem os possíveis erros nas aproximações incrementais; Zienkiewicz (1971), que apresentou uma modificação no método de Newton-Raphson, fazendo com que a matriz de rigidez só fosse atualizada a cada passo de carga; e Riks (1979), que propôs um método fundamentado no *comprimento de arco* capaz de calcular pontos limites de carga e deslocamento. Mais recentemente, tem-se: Yang e Kuo (1994) que apresentou uma metodologia de solução não linear baseada em um parâmetro de deslocamento generalizado; Krenk (1995), que elaborou uma nova estratégia de iteração, introduzindo duas condições de ortogonalidade: a primeira entre o vetor de cargas residuais e o incremento de deslocamento e outra entre o incremento de forças internas e o vetor de deslocamentos iterativos; Crisfield (1997), que introduziu procedimentos numéricos que permitem avaliar com precisão os pontos críticos existentes e obter as trajetórias de equilíbrio secundárias. No PROPEC/UFOP, merecem destaque: a dissertação de Rocha (2000), que realizou um estudo comparativo de diversas estratégias de iteração e incremento de carga através da análise não linear de exemplos numéricos de sistemas reticulados planos; e Pires (2012), que apresentou

uma alternativa de estabilização da estratégia do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995).

A complementação desta revisão bibliográfica será feita nos próximos capítulos da dissertação, que serão brevemente descritos na próxima seção.

## **1.5 Organização do Trabalho**

Esta dissertação é formada por cinco capítulos. Nos próximos capítulos serão apresentados os princípios teóricos das formulações implementadas no sistema computacional CS-ASA (Capítulos 2 e 3) e os resultados obtidos através do estudo de vários sistemas estruturais esbeltos (Capítulo 4), onde os efeitos de segunda ordem são relevantes.

Primeiramente, no Capítulo 2, apresenta-se uma metodologia numérica generalizada para análise estática não linear, via MEF, de sistemas estruturais reticulados planos. Na sequência do capítulo são encontradas as estratégias de incremento de carga e de iteração usadas na solução dos problemas do Capítulo 4.

No Capítulo 3 estão as novas formulações de elementos finitos não lineares implementadas no CS-ASA. Inicialmente, é retratado o RCR escolhido para o desenvolvimento das formulações de segunda ordem SOF-4 e SOF-5. Por fim, são detalhadas as formulações, com especial atenção à obtenção do vetor das forças internas e matriz de rigidez do elemento de barra. Os trabalhos de Battini (2002) e Tang *et al.* (2015) foram as principais referências para as formulações SOF-4 e SOF-5, respectivamente.

No Capítulo 4 se faz a validação das implementações realizadas através da análise da estabilidade elástica de vários sistemas estruturais clássicos e fortemente não lineares, cujas respostas são encontradas na literatura.

Finalizando, no Capítulo 5, estão algumas observações e conclusões referentes à pesquisa realizada com esta dissertação. Em seguida, com o intuito de dar continuidade a este trabalho, são feitas sugestões para desenvolvimento de futuras etapas.

# Capítulo 2

## Problema Geométrico Não Linear

### 2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma metodologia numérica, baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), para análise estática não linear de sistemas estruturais reticulados planos. Na próxima seção é apresentada uma formulação generalizada de um elemento finito não linear de viga-coluna. A Seção 2.3 traz a estratégia de solução adotada neste trabalho para resolver, passo a passo, o problema estrutural de equilíbrio não linear e estabilidade. Por fim, na Seção 2.4 estão as estratégias de incremento de carga e de iteração presentes na base do CS-ASA e usadas na solução dos exemplos apresentados no Capítulo 4.

### 2.2 Formulação do Elemento Finito Não Linear

As equações diferenciais que surgem provenientes dos problemas de engenharia estrutural são inexequíveis de serem solucionadas de forma analítica, por serem equações muito complexas devido a consideração do comportamento não linear que uma estrutura pode apresentar.

Um dos métodos de maior destaque para resolução dessas equações é o MEF devido a sua eficiência e aplicabilidade. Esse método faz a discretização de um problema contínuo e fornece soluções numéricas aproximadas. A discretização do problema contínuo refere-se a divisão deste meio em subdomínios (elementos), que são interligados através de pontos nodais onde são definidos os graus de liberdade a serem determinados, e o resultado dessa divisão é conhecido na literatura como malha.

Em geral, os resultados numéricos obtidos pelo MEF tornam-se, geralmente, melhores quanto maior for o refinamento da malha, dentro de certas condições de convergência. Porém, o esforço computacional pode se tornar um contraponto. Deve-se então adotar um número de elementos que leve a uma solução satisfatória dentro da precisão desejada e do tempo de processamento aceitável.

O referencial Lagrangiano foi adotado neste trabalho e, de acordo com Silva (2009), o desenvolvimento de metodologias incrementais para análise não linear começa com a divisão do caminho de carregamento de um corpo sólido em um certo número de configurações de equilíbrio. Como já destacado no capítulo anterior, três configurações para o corpo são estabelecidas em termos de um sistema de coordenadas cartesianas: a configuração inicial,  $t = 0$ ; a última configuração deformada,  $t$ ; e a configuração deformada corrente,  $t + \Delta t$ . Sabendo que as variáveis de estado da estruturas são conhecidas na configuração  $t$ , tem-se então como objetivo o emprego de um processo incremental para se determinar as variáveis na configuração  $t + \Delta t$ . Isso é feito considerando que o carregamento externo, que atuou na configuração  $t$ , tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de  $t$  para  $t + \Delta t$  é comumente referido como um passo incremental.

### **2.2.1 Equações Básicas**

O MEF pode ser considerado como uma aplicação (a nível do elemento finito) de um método energético, tais como o princípio dos trabalhos virtuais, o princípio da energia potencial total estacionária ou o princípio de Hamilton. Cada um desses princípios pode originar diferentes soluções aproximadas de problemas, portanto a formulação do MEF em um elemento viga-coluna pode ser obtida de vários modos.

O princípio da energia potencial total estacionária, que é aplicado a problemas de equilíbrio estático, fornece a configuração de equilíbrio de um sistema estrutural. Segundo Cook *et al.* (1989), esse princípio estabelece que entre todas as configurações admissíveis de um sistema conservativo, aquelas que satisfazem as condições de equilíbrio tornam a energia potencial estacionária. Um sistema estrutural é chamado conservativo quando o trabalho realizado pelos esforços internos e externos é independente do caminho percorrido pela estrutura ao passar da condição de equilíbrio inicial (ou de referência) para outra configuração qualquer. Essa nova configuração, para

ser considerada admissível, deve satisfazer as relações de compatibilidade e condições de contorno essenciais do sistema (SILVA, 2009).

A energia potencial total do sistema,  $\Pi$ , é composta por duas parcelas, a energia interna de deformação elástica,  $U$ , e a energia potencial das cargas externas,  $\Omega$ , ou seja,

$$\Pi = U + \Omega \quad (2.1)$$

Segundo Yang e Kuo (1994), a energia armazenada na estrutura para mover-se da configuração de equilíbrio  $t$  para  $t + \Delta t$  pode ser escrita, assumindo uma notação indicial, como:

$$U = \int_{\omega_V} \left( \omega \tau_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \right) \Delta \epsilon_{ij} \omega dV \quad (2.2)$$

em que  $\tau_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões,  $\Delta \epsilon_{ij}$  representam as componentes do tensor de incremento de deformações de Green-Lagrange,  $C_{ijkl}$  é o tensor com relações constitutivas, e o sobrescrito  $\omega$  refere-se a uma configuração de referência conhecida, que dependendo do tipo de referencial Lagrangiano, pode ser a posição indeformada,  $t=0$  (RLT), ou a última configuração de equilíbrio,  $t$ , conhecida (RLA).

Através das componentes dos deslocamentos incrementais,  $\Delta d_i$  ( $i=1,2$ ), as componentes cartesianas do tensor de Green-Lagrange para as deformações podem ser expressas como:

$$\Delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta d_{i,j} + \Delta d_{j,i}) + \frac{1}{2} \Delta d_{k,i} \Delta d_{k,j} \quad (2.3)$$

Ao considerar que o carregamento externo atuante é dependente do estado de deformação do corpo, tem-se que a energia potencial das cargas externas é definida como:

$$\Omega = - \int_S F_i \Delta d_i dS \quad (2.4)$$

com  $S$  sendo a região onde as forças externas,  $F_i$ , são aplicadas.

## 2.2.2 Discretização do Sistema Estrutural

O vetor dos deslocamentos incrementais ( $\Delta \mathbf{d}$ ) no elemento finito de viga-coluna, em um ponto qualquer, pode ser descrito através do vetor de deslocamentos nodais incrementais

$(\Delta \mathbf{u})$  e  $\mathbf{H}$ , que representa a matriz que contém as funções de interpolação do sistema estrutural, de acordo com a seguinte equação:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} \quad (2.5)$$

Já o tensor de Green-Lagrange na forma incremental, de acordo com a Equação (2.3), em função dos deslocamentos nodais incrementais, é dado por:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}) \Delta \mathbf{u} \quad (2.6)$$

em que  $\mathbf{B}_l$  é a parcela linear da matriz deformação-deslocamento, isto é, obtida para pequenas deformações e deslocamentos infinitesimais, definida pela diferenciação e combinação apropriada dos elementos das linhas de  $\mathbf{H}$ . Já matriz deformação-deslocamento não linear  $\mathbf{B}_{nl}$ , além de depender de  $\mathbf{H}$ , é função também dos deslocamentos incrementais.

Substituindo as Equações (2.5) e (2.6) em (2.1), chega-se à expressão do indicador variacional  $\Pi$ , na forma discretizada. Estabelecendo a variação de  $\Pi$  em relação a um campo de deslocamentos nodais incrementais cinematicamente compatíveis e, levando em conta a contribuição de cada elemento finito usado na modelagem do sistema estrutural, chega-se na seguinte expressão (SILVA, 2009):

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_r - {}^t \mathbf{F}_i \quad (2.7)$$

com  $\mathbf{K}$  sendo a matriz de rigidez do sistema estrutural, que é função dos deslocamentos nodais do sistema,  $\mathbf{U}$ , e das forças internas em cada elemento,  $\mathbf{P}$  (força axial e momento fletor);  $\mathbf{F}_i$  representa o vetor de forças internas e  $\mathbf{F}_r$  é o vetor de forças externas que está em função do parâmetro de carga  $\lambda$ .  $\mathbf{F}_r$  define a direção do carregamento externo atuante e a intensidade desse carregamento, na configuração de equilíbrio  $t + \Delta t$ , é representada pelo parâmetro  $\lambda$ .

A equação anterior deve ser satisfeita durante um determinado processo iterativo, que pode ser do tipo Newton, para que o equilíbrio no sistema estrutural em estudo seja obtido. Ao longo desse processo, a matriz de rigidez deve ser atualizada constantemente para que o estado de equilíbrio do sistema seja capturado com as alterações na geometria (SILVA, 2009). Os detalhes da metodologia numérica adotada neste trabalho para a solução de (2.7) serão descritos na próxima seção.

## 2.3 Metodologia de Solução Numérica

A estratégia de solução de problemas estáticos não linear, por um processo incremental e iterativo, pode ser dividida em duas fases: fase predita e fase corretiva. A etapa designada como fase predita, engloba a solução dos deslocamentos incrementais, devido a um acréscimo de carregamento, através das equações de equilíbrio da estrutura. A fase corretiva, por sua vez, tem como objetivo a correção das forças internas incrementais obtidas pelos ajustes nos deslocamentos obtidos na fase predita, pela utilização de um processo iterativo. Essas forças internas corrigidas são comparadas com o carregamento externo, de forma que se tem uma quantificação do desequilíbrio existente entre forças internas e externas. A etapa corretiva é realizada até que a estrutura esteja em equilíbrio, de acordo com os critérios de convergência adotados, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}) \cong {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_e, \text{ ou, } {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}) \cong {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (2.8)$$

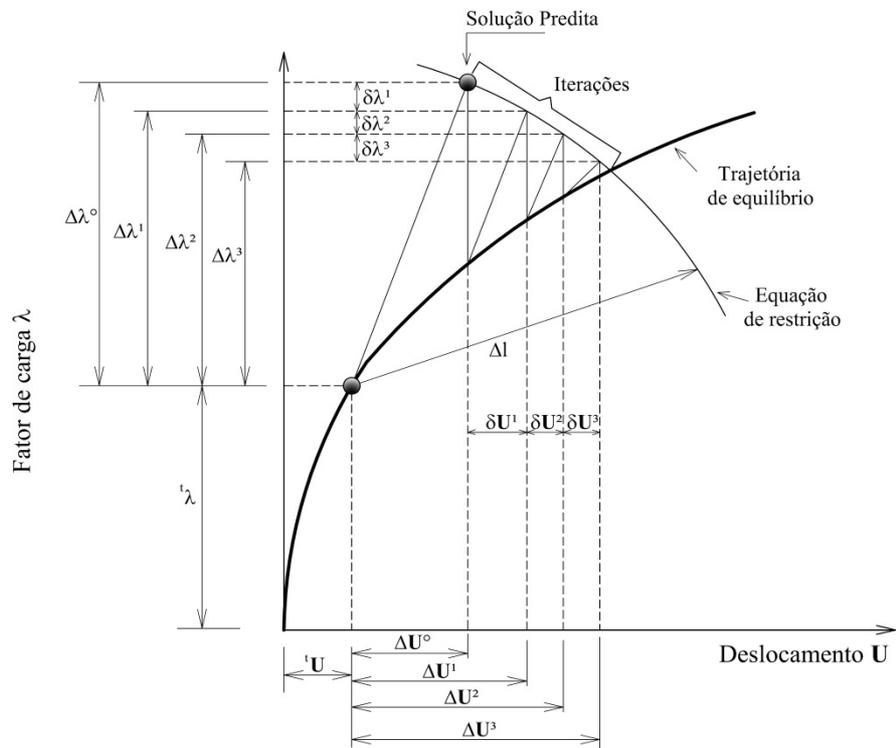
sendo  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$  o vetor das forças internas que é função dos deslocamentos,  $\mathbf{U}$ , nos pontos nodais da estrutura, e das forças internas,  $\mathbf{P}$ ;  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas e  $\lambda$  é o parâmetro de carga responsável pela proporção de  $\mathbf{F}_r$ , que é o vetor forças de referência.

Portanto, com base em uma configuração de equilíbrio conhecida — parâmetro de carga  ${}^t\lambda$  e deslocamentos  ${}^t\mathbf{U}$ , em um passo de carga  $t$  —, uma nova configuração de equilíbrio deve ser obtida em  $t+\Delta t$ .

Por se tratar de um processo numérico, uma estimativa inicial do incremento do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$  é necessária. Essa estimativa procura satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema, que pode ser determinada por diversas estratégias de incrementos de cargas existentes. Com  $\Delta\lambda^0$  determinado, uma estimativa inicial do incremento de deslocamentos  $\Delta\mathbf{U}^0$  é calculada (fase predita).

A partir dessas estimativas,  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$ , um processo iterativo é iniciado objetivando corrigir essa solução incremental inicialmente assumida visando restaurar o equilíbrio da estrutura. O processo iterativo usado neste trabalho segue a estratégia de Newton-Raphson. Essa etapa do processo de solução é chamada aqui de fase corretiva, em que se obtém os sub-incrementos de carga  $\delta\lambda^k$ , e os vetores deslocamentos  $\delta\mathbf{U}^k$ , até que, em uma iteração  $k$ , um estado de equilíbrio seja atingido. Como nas iterações realizadas envolvem não só os deslocamentos nodais, mas também o parâmetro de carga, uma equação de restrição adicional é requerida. A Figura 2.1 ilustra o processo iterativo

para um acréscimo de carga, destacando a busca por um ponto de equilíbrio a partir da configuração anterior, e respeitando a restrição de comprimento de arco (Crisfield, 1991).



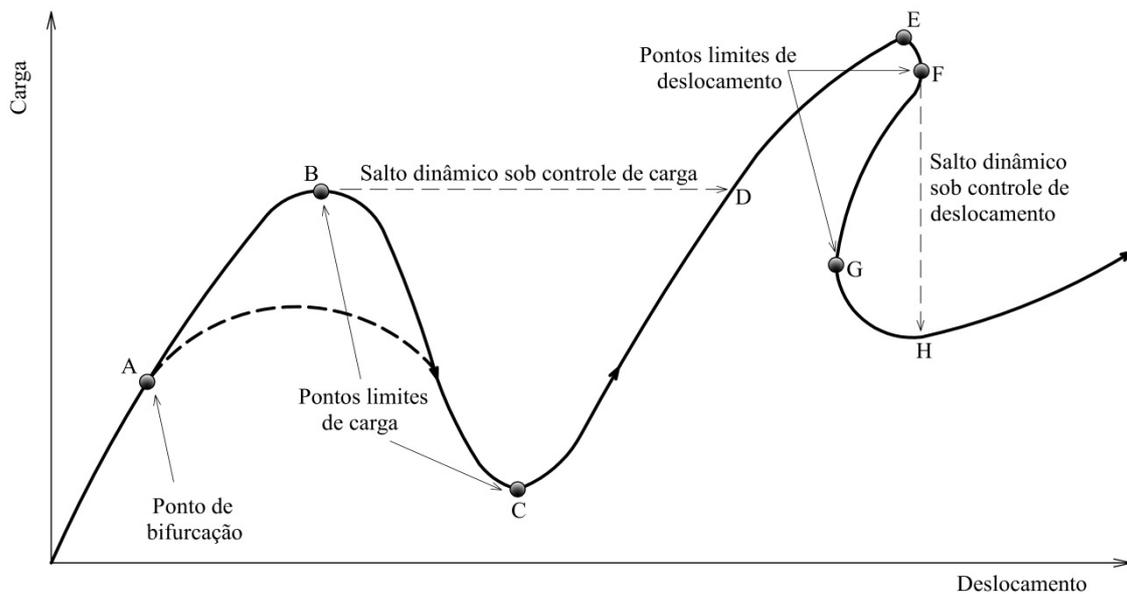
**Figura 2.1** Solução incremental-iterativa com a restrição do comprimento de arco (PIRES, 2012)

As trajetórias de equilíbrio, ou curvas carga-deslocamento, são usualmente adotadas para representar o comportamento não linear de um dado sistema estrutural. Cada ponto dessa curva, que é caracterizada na Figura 2.2, representa uma configuração de equilíbrio estático que satisfaz a Equação (2.8).

Uma metodologia eficiente de solução de equações algébricas não lineares deve ser capaz de lidar com problemas numéricos comuns encontrados nas análises não lineares, traçando toda a trajetória de equilíbrio do sistema. O procedimento deve identificar e passar por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir ao longo da curva.

De um modo geral, podem ser destacados três pontos críticos: pontos limites de carga, pontos limites de deslocamento e pontos de bifurcação (Figura 2.2). Os pontos limites de carga ocorrem quando a rigidez do sistema se torna pequena em relação a uma componente de deslocamento. Dessa forma, se apenas o controle de carga é utilizado, quando a resposta se aproxima desses pontos, o sistema pode sofrer grandes

deslocamentos, caracterizado por um salto dinâmico. Este fenômeno é chamado de *snap-through*. Os pontos limites de deslocamento ocorrem quando a rigidez do sistema se torna elevada. Nesse caso, se apenas o controle de deslocamento é utilizado, o sistema pode sofrer uma variação instantânea da carga aplicada, caracterizada por outro tipo de salto dinâmico (conhecido como *snap-back*). Enfim, quando a partir de um ponto de equilíbrio na curva, duas ou mais configurações são possíveis têm-se um ponto de bifurcação. Todos esses pontos críticos estão representados na Figura 2.2.



**Figura 2.2** Trajetória de equilíbrio (PIRES, 2012)

Segundo Crisfield (1991), as respostas de uma estrutura antes de se alcançar os pontos críticos podem ser suficientes para propósitos de projeto. Entretanto, a determinação da resposta do sistema no intervalo pós-crítico é essencial quando se deseja estudar o seu comportamento não linear, ou mesmo verificar se ele é sensível a imperfeição inicial. Além disso, a resposta no intervalo pós-crítico confirma a passagem pelo ponto limite e permite o conhecimento da carga crítica.

Alguns dos passos principais da metodologia numérica para a análise não linear adotada neste trabalho são apresentados adiante. Antes, porém, é necessário fazer algumas observações relacionadas à notação a ser empregada:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura no passo de carga  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio no passo de carga  $t + \Delta t$ ;

- $k$  se refere ao contador do número de iterações. Para  $k=0$ , tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo de Newton-Raphson;
- $\lambda$  e  $\mathbf{U}$  definem o parâmetro de carga e o vetor de deslocamentos nodais totais, respectivamente;
- $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{U}$  caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e o vetor dos deslocamentos nodais medidos a partir da última configuração de equilíbrio; e
- $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}$  denotam as correções do parâmetro de carga e o vetor dos deslocamentos nodais, respectivamente, obtidos durante o processo iterativo.

### 2.3.1 Processo Incremental - Solução Predita

Como mencionado anteriormente, nesta etapa do processo de solução considera-se que todas as variáveis do problema estrutural sejam conhecidas na configuração  $t$ , podendo assim ser montada a matriz de rigidez tangente,  $\mathbf{K}$ . O vetor de deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{U}_r$ , é então obtido através da expressão:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r \quad (2.9)$$

A determinação do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , deve ser feita através de estratégias de incremento de carga que serão apresentadas na Seção 2.4. Para o primeiro passo de carga, entretanto, deve-se fornecer o valor de  $\Delta\lambda^0$ .

Com a definição de  $\Delta\lambda^0$ , os deslocamentos nodais incrementais tangenciais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ , são obtidos escalonando-se  $\mathbf{U}_r$ , ou seja:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (2.10)$$

Uma vez conhecida a solução predita, faz-se a atualização do parâmetro de carga total e do vetor de deslocamentos nodais total:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (2.11)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (2.12)$$

em que  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{U}$  definem o ponto de equilíbrio do sistema no último passo de carga.

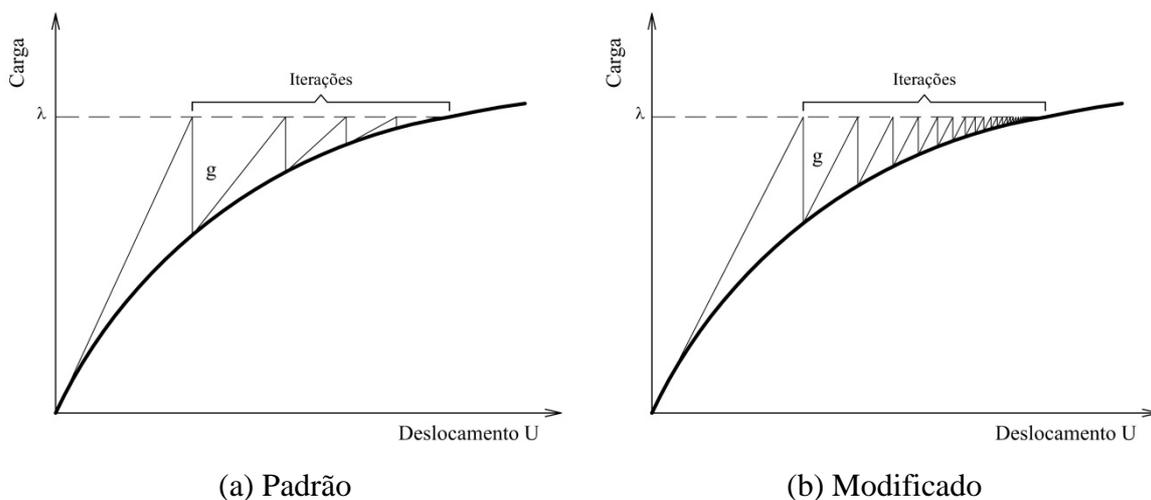
Como as equações anteriores nem sempre estabelecem o equilíbrio da estrutura, iterações serão necessárias com o objetivo de restaurar esse equilíbrio. Será descrito a seguir como é realizado o ciclo de iterações da solução corretiva.

### 2.3.2 Processo Iterativo – Solução Corretiva

A maioria dos métodos de resolução de problemas estruturais não lineares são baseado no método de Newton-Raphson (Crisfield, 1991), que tem como objetivo determinar as raízes (ou zeros) de uma equação não linear. Nesse método, supõe-se que, dada uma estimativa inicial para a raiz, o problema consiste em determinar uma sequência de correções, até que seja atingida a solução com uma precisão desejada.

No método de Newton-Raphson, a cada iteração, a inclinação da reta tangente é modificada, como representada na Figura 2.3a para um sistema com um grau de liberdade. Esse método converge quadraticamente se a solução inicial  ${}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$  estiver próxima o suficiente da solução do sistema de equações (2.8). Além disso, a inversa da matriz de rigidez,  $\mathbf{K}$ , deve existir em todas as iterações necessárias até a convergência ser atingida. Já no método de Newton-Raphson modificado (Figura 2.3b), acontece uma alteração da técnica padrão original, onde a inclinação da reta tangente obtida na primeira iteração é mantida constante. No contexto da análise estrutural, a matriz de rigidez permanece inalterada. Dessa forma, o número de iterações necessárias quando se utiliza o método modificado deve ser maior que o da técnica padrão.

As equações de equilíbrio (2.8) podem ser reescritas, para dar início ao desenvolvimento das iterações de Newton-Raphson, da seguinte forma:



**Figura 2.3** Método de Newton Raphson (PIRES, 2012)

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}) \quad (2.13)$$

sendo  $\mathbf{g}$  o vetor de forças residuais, que indica o desequilíbrio de forças do sistema estrutural. Esse vetor deve se anular para um novo ponto de equilíbrio do sistema.

Ao longo das iterações de Newton-Raphson, o parâmetro de carga  $\lambda$  é usualmente tomado constante. Contudo, caso se pretenda acompanhar todo o traçado da trajetória de equilíbrio, com possíveis passagens pelos pontos críticos, é necessário que o parâmetro de carga seja ajustado a cada iteração. Dessa forma, deve-se seguir a teoria proposta por Batoz e Dhatt (1979), onde é permitido que o parâmetro de carga seja variável. Dessa forma, a mudança nos deslocamentos nodais é dada pela equação seguinte:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (2.14)$$

em que o vetor gradiente  $\mathbf{g}$  fica definido em função dos deslocamentos nodais totais,  $\mathbf{U}^{(k-1)}$ , que foram calculados na última iteração, e do valor do parâmetro de carga total corrente,  $\lambda^k$ , que agora também é uma incógnita. Esse parâmetro é calculado de acordo com:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad (2.15)$$

na qual  $\delta \lambda^k$  é a correção definida por meio de uma estratégia de iteração (equação adicional imposta ao problema). Substituindo a Equação (2.15) em (2.14), tem-se:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = -\left[ \mathbf{F}_i^{(k-1)} - (\lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k) \mathbf{F}_r \right] = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r \quad (2.16)$$

sendo  $\mathbf{F}_i$  o vetor das forças internas,  $\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r$  representa o vetor total das forças externas que atuaram na última iteração e os índices  $k$  e  $k-1$  indicam, respectivamente, as iterações corrente e anterior.

Observe que o vetor de deslocamentos nodais iterativos,  $\delta \mathbf{U}^k$ , expresso na equação anterior, pode ser escrito como a soma de duas parcelas, isto é:

$$\delta \mathbf{U}^k = \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (2.17)$$

em que:

$$\delta \mathbf{U}_g^k = -\left[ \mathbf{K}^{(k-1)} \right]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (2.18a)$$

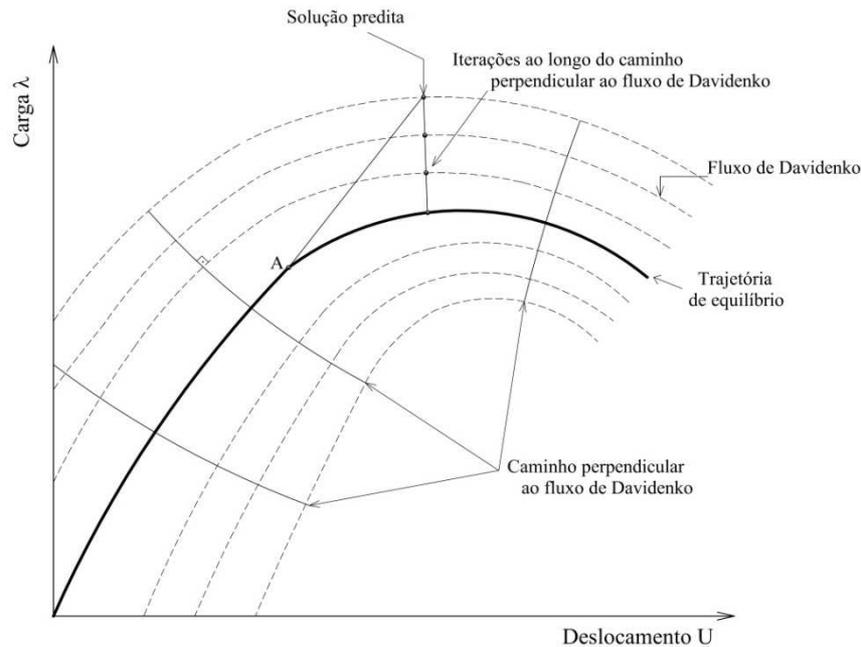
$$\delta \mathbf{U}_r^k = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{F}_r \quad (2.18b)$$

Note que o vetor de deslocamentos iterativos,  $\delta \mathbf{U}_r^k$ , será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais  $\mathbf{U}_r$ , calculado pela Equação (2.9), se iterações de Newton-Raphson modificadas forem usadas, em que a matriz de rigidez é mantida constante ao longo do processo iterativo, como mencionado anteriormente, com ganho no processo computacional.

Caso seja empregada a técnica do fluxo normal (PIRES, 2012), o equilíbrio entre forças internas e externas é alcançado realizando iterações sequenciais de Newton-Raphson, padrão ou modificado, ao longo de um caminho normal às curvas descritas pela Equação (2.13), como ilustrado na Figura 2.4. Conforme Allgower e Georg (1980), esse conjunto de curvas é conhecido na literatura como fluxo de Davidenko. Com essa técnica, a expressão (2.17), usada para obter o vetor de deslocamentos nodais iterativos,  $\delta \mathbf{U}^k$ , fica agora:

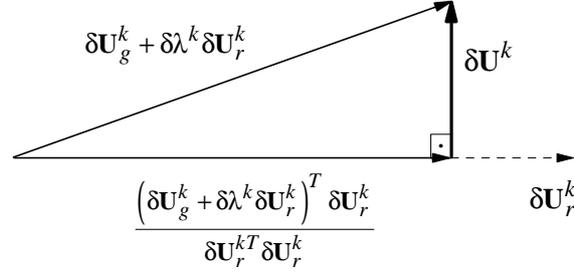
$$\delta \mathbf{U}^k = \left( \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \right) - \frac{\left( \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \right)^T \delta \mathbf{U}_r^k}{\left( \delta \mathbf{U}_r^k \right)^T \delta \mathbf{U}_r^k} \delta \mathbf{U}_r^k \quad (2.19)$$

sendo a única solução de norma euclidiana mínima da Equação (2.13), segundo Watson *et al.* (1997).



**Figura 2.4** A técnica do fluxo normal (PIRES, 2012)

Usando a Equação (2.19), os vetores  $\delta\mathbf{U}$  e  $\delta\mathbf{U}_r$  na iteração corrente são sempre perpendiculares, uma vez que o segundo termo da diferença vetorial é a projeção do primeiro na direção do vetor  $\delta\mathbf{U}_r^k$ , como mostra a Figura 2.5.



**Figura 2.5** Os vetores  $\delta\mathbf{U}_r$  e  $\delta\mathbf{U}$  da iteração  $k$  na técnica do fluxo normal (PIRES, 2012)

Após a obtenção das correções  $\delta\lambda^k$  e  $\delta\mathbf{U}^k$ , faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema, ou seja:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (2.20)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.21)$$

Por fim, o parâmetro de carga total e os deslocamentos nodais totais do processo incremental são também atualizados:

$${}^{t+\Delta t}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (2.22)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (2.23)$$

Em um processo iterativo, a solução numérica encontrada nunca é exata. Deve-se então adotar um critério de convergência para que o processo termine numa solução próxima da exata. Para que o equilíbrio seja considerado aceitável, um dos dois, ou os dois critérios de convergência contidos na plataforma CS-ASA devem ser respeitados. Um dos critérios presentes no CS-ASA é baseado no equilíbrio das forças do sistema, e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior. Esse critério é definido a seguir:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (2.24)$$

sendo representado pela razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas e do vetor de incremento de carregamento externo, e  $\zeta$  é o fator de tolerância aplicável fornecido pelo usuário na entrada de dados.

O outro critério de convergência obedece às relações de deslocamento, e é definido de acordo com a relação:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (2.25)$$

sendo o numerador a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos; e o denominador é a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo, e  $\zeta$  segue a mesma definição do critério de convergência anterior.

Na Tabela 2.1 descrevem-se, sequencialmente, os procedimentos descritos nesta seção. As estratégias de incremento de carga e de iteração são apresentadas nas próximas seções.

## 2.4 Estratégias de Incremento de Carga e Iteração

Esta seção apresenta as estratégias de incremento de carga e de iteração usadas como ferramentas numéricas para a obtenção de informações fundamentais numa análise não linear, implementadas no sistema computacional. O emprego dessas técnicas tem como objetivo obter o traçado da trajetória de equilíbrio do sistema estrutural que indica as regiões de ganho e de perda de rigidez e, em seguida, faz a determinação de pontos limites de carga (*snap-through*) e de deslocamento (*snap-back*). E também faz-se a indicação, através da introdução de imperfeições geométricas aleatórias, suficientemente pequenas, de possíveis pontos de bifurcação.

Na Seção 2.4.1 as estratégias de incremento de carga e os critérios usados na definição do sinal desse incremento são detalhados e, na Seção 2.4.2, apresentam-se as estratégias de iteração implementadas no sistema computacional utilizado.

**Tabela 2.1** Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear

- 
1. Leitura dos dados relevantes na análise, como: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros referentes ao tipo de análise
  2. Montagem do vetor de cargas nodais de referência,  $\mathbf{F}_r$ , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado
  3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida,  $t$ :  ${}^t\mathbf{U}$  e  ${}^t\lambda$
  4. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:**  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$ 
    - 4a. Monta-se a matriz de rigidez tangente:  $\mathbf{K} = \mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{P})$  (Equação 3.29)
    - 4b. Define estimativa inicial de deslocamentos tangenciais:  $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
    - 4c. Define o parâmetro de carga  $\lambda$ . Utiliza-se o valor de  $\lambda$  informado pelo usuário quando  $t = 1$  (primeiro passo de carga); os demais são determinados usando-se uma estratégia de incremento de carga (Seção 2.4.1)
    - 4d. Determina:  $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$
    - 4e. Atualiza as variáveis na configuração  $t + \Delta t$ :  
 ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
  5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:**  $k = 1, 2, 3, \dots$ 
    - 5a. Avalia o vetor de forças internas:  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$  (Capítulo 3)
    - 5b. Calcula o vetor de forças residuais:  
 $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$
    - 5c. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças (Equação 2.24):  
**SE SIM** (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
    - 5d. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  [utiliza-se as variáveis atualizadas (forças internas, deslocamentos e matriz de transformação da iteração corrente) ]
    - 5e. Obtém a correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda^k$ , usando uma estratégia de iteração (Seção 2.4.3)
    - 5f. Determina o vetor dos sub-incrementos dos deslocamentos nodais (utiliza-se também as variáveis atualizadas da iteração corrente):  $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$ , com:  
 $\delta\mathbf{U}_g^k = -[\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}$  e  $\delta\mathbf{U}_r^k = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{F}_r$
    - 5g. Atualiza o parâmetro de carga,  $\lambda$ , e o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ :
      - a) *Incremental:*  $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
      - b) *Total:*  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
    - 5h. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente  
**SE SIM** (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*  
**SE SIM** (Critério de força e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6, apenas se houve a convergência no item 5c*
    - 5i. Retorna ao passo 5 (o processo segue até que o equilíbrio do sistema seja atingido, ou até que um número máximo de iterações seja alcançado)
  6. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4**
-

### 2.4.1 Estratégias de Incremento de Carga

Para obtenção da solução incremental predita, após a determinação de um novo ponto de equilíbrio do sistema, é essencial a definição do valor incremental do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$ . No primeiro passo de carga em uma análise estrutural, entretanto, esse o valor  $\Delta\lambda^0$  é fornecido pelo usuário do CS-ASA em um dos arquivos de entrada de dados.

Para definição desse parâmetro utiliza-se, como mencionado anteriormente, as estratégias de incremento de carga que retratam o grau de não linearidade do sistema estrutural em estudo.

Para que uma estratégia de incremento automático de carga seja eficiente e acompanhe o comportamento do sistema estrutural, ela deve satisfazer os seguintes critérios: gerar grandes incrementos quando a resposta do sistema apresentar comportamento aproximadamente linear, fazendo com que o custo computacional para determinação dos pontos de equilíbrio seja pequeno; de forma contrária, deve fornecer pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear; e, por fim, deve também ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximo e mínimo são ultrapassados. São descritas a seguir as estratégias de incremento de carga utilizadas neste trabalho na solução dos problemas apresentados no Capítulo 4 e que estão na base do CS-ASA. Essas estratégias procuram satisfazer os requerimentos descritos neste parágrafo.

#### 1. *Estratégias Baseadas na Relação $I_d/I_{p,a}$*

Uma forma muito utilizada na prática computacional para medir o grau de não linearidade do sistema é baseado no emprego da relação entre o número de iterações desejadas para convergência do processo iterativo corrente  $I_d$ , especificado pelo usuário do programa, e o número de iterações que foram necessárias para a convergência no passo de carga anterior,  $I_{p,a}$ . ou seja:

$$\left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^\xi \quad (2.26)$$

em que  $\xi$  é um expoente utilizado para otimização e estabilidade numérica, cujo valor encontra-se usualmente entre 0,5 e 1.

Das estratégias baseadas na relação anterior que estão implementadas no CS-ASA, apenas a relacionada ao comprimento de arco cilíndrico foi usada nesta dissertação.

Assim, na definição do incremento de comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente, Crisfield (1991) sugere a seguinte expressão:

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (2.27)$$

em que  $\Delta l_{p,a}$  e  $\Delta l$  representam os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior (valor conhecido) e no corrente (incógnita), respectivamente.

O incremento inicial do parâmetro de carga pode ser definido pela expressão:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r}} \quad (2.28)$$

quando a condição de restrição escrita para a solução incremental inicial for:

$$\left( \Delta \mathbf{U}^0 \right)^T \Delta \mathbf{U}^0 = \Delta l^2 \quad (2.29)$$

Porém, se a equação de restrição proposta por Riks (1972), for imposta à solução incremental predita, isto é:

$$\left[ \Delta \mathbf{U}^0 \right]^T \Delta \mathbf{U}^0 + \left( \Delta \lambda^0 \right)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (2.30)$$

a expressão do incremento inicial será dado pela seguinte expressão:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \quad (2.31)$$

Quando se utiliza as estratégias de iteração de comprimento de arco cilíndrico ou esférico (Crisfield, 1991), as estratégias de incremento de carga correspondentes devem ser utilizadas para se evitar problemas numéricos devido a inconsistência entre o tamanho dos incrementos e da superfície de controle.

## 2. Estratégia Baseada no Parâmetro de Rigidez GSP

Foi proposto por Yang e Kuo (1994) uma equação de restrição, que deve ser respeitada nas duas etapas de solução não linear, a etapa da solução predita e no ciclo de iterações. De acordo com esses pesquisadores, a equação de restrição imposta ao problema é da forma:

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k + k_1 \delta \lambda^k = H_k \quad (2.32)$$

sendo  $\mathbf{C}$  uma matriz dos quais seus elementos são constantes,  $k_1$  também é constante e  $H$  é um parâmetro incremental que pode ser de deslocamento, comprimento de arco ou trabalho externo. Dependendo do valor adotado para esses parâmetros, pode-se obter diferentes estratégias de incremento de carga e de iteração.

Para se chegar na expressão do parâmetro de carga, deve-se utilizar a Equação de restrição (2.32) e também a Equação (2.16). Formar-se então, um sistema de equações com  $N+1$  incógnitas, onde  $N$  é a dimensão do vetor de deslocamentos e o 1 refere-se ao parâmetro de carga  $\lambda$ . Através de manipulações algébricas e matriciais, chega-se a:

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_r^k + k_1} \left( H_k - \mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (2.33)$$

Yang e Shieh (1990) sugeriram os seguintes valores para  $\mathbf{C}$  e  $k_1$ :

$$\mathbf{C} = {}^t \delta \mathbf{U}_r \Delta \lambda^0 \text{ e } k_1 = 0 \quad (2.34)$$

em que  ${}^t \delta \mathbf{U}_r$  é o vetor de deslocamentos nodais tangenciais do passo de carga anterior. Assim, chega-se a uma nova expressão para  $\delta \lambda$ :

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_r^k} \left( H_k - \Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (2.35)$$

Adotando-se na equação anterior,  $k = 0$ ,  $\delta \lambda^0 = \Delta \lambda^0$ ,  $\delta \mathbf{U}_g^0 = 0$  e  $\delta \mathbf{U}_r^0 = \delta \mathbf{U}_r$ , a solução incremental inicial  $\Delta \lambda^0$ , fica:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{H_0}{{}^t \delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r}} \quad (2.36)$$

O valor do parâmetro incremental  $H_0$  pode ser determinado, no caso de deslocamento generalizado, usando a equação anterior e assumindo que no primeiro passo de carga o valor de  $\Delta \lambda^0$  foi fornecido pelo usuário. Esse método de solução é também conhecido como estratégia de controle de deslocamento generalizado. Tem-se então:

$$H_0 = (\Delta \lambda_1^0)^2 ({}^1 \delta \mathbf{U}_r^T) ({}^1 \delta \mathbf{U}_r) \quad (2.37)$$

Com a substituição de (2.37) em (2.36), chega-se a:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) {}^1\delta\mathbf{U}_r}{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r}} \quad (2.38)$$

Pode-se ainda reescrever a equação do parâmetro de rigidez generalizado do sistema (*Generalized Stiffness Parameter, GSP*) da seguinte forma:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (2.39)$$

com:

$$\text{GSP} = \frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) {}^1\delta\mathbf{U}_r}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r} \quad (2.40)$$

Para a determinação correta do sinal da Equação (2.38), utiliza-se o critério baseado no sinal do parâmetro GSP. Esse critério será apresentado a seguir. Como já destacado, para o primeiro incremento,  $\Delta\lambda^0$  é um valor prescrito e  $\text{GSP} = 1$ .

### 3. Sinal do Incremento do Parâmetro de Carga

Deve ser realizado uma escolha do sinal correto do incremento inicial de carga para o sucesso do traçado da trajetória do equilíbrio. Nas Equações (2.28), (2.31) e (2.39), observa-se que o sinal do incremento inicial de carga pode ser positivo ou negativo. Este trabalho segue um dos seguintes procedimentos para a escolha do sinal de  $\Delta\lambda^0$ :

- *Critério 1*

Crisfield (1991) propôs que o sinal será positivo sempre que a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  (no início do incremento) for positiva definida. Em outra definição equivalente, Crisfield sugere que o sinal de  $\Delta\lambda^0$  deva seguir aquele do incremento anterior, exceto quando o determinante da matriz de rigidez tangente mudar de sinal. Porém, Meek e Tan (1984) ressalta que esse procedimento pode falhar em estruturas exibindo múltiplos autovalores negativos. Para essa situação é aconselhável adotar o critério descrito a seguir.

- *Critério 2*

Proposto por Bergan *et al.* (1978), os pontos limites da trajetória de equilíbrio podem ser detectados através do sinal do incremento do trabalho externo. Se o sinal do incremento

do trabalho externo corrente for diferente daquele do passo de carga anterior, modifica-se o sinal de  $\Delta\lambda^0$ . Clarke e Hancock (1990) comenta que esse critério pode tornar-se inseguro na vizinhança de pontos limites de deslocamento.

- *Critério 3*

Segundo Yang e Kuo (1994), o sinal do parâmetro de rigidez corrente depende apenas dos vetores  $\delta U_r$  (passo de carga anterior) e  $\delta U_r$  (passo de carga corrente). O parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanecerá sempre positivo.

## 2.4.2 Estratégias de Iteração

Durante o ciclo iterativo, a determinação do sub-incremento do parâmetro de carga,  $\delta\lambda$ , deve ser tal que o algoritmo de solução seja capaz de passar por pontos críticos e percorrer toda a trajetória de equilíbrio do sistema. Essa escolha depende de uma dada estratégia de iteração ou equação de restrição adicional imposta ao problema.

Uma estratégia de iteração deve ser eficiente computacionalmente, ou seja, para um dado passo de carga, a configuração de equilíbrio do sistema estrutural em estudo deve ser obtida da forma mais rápida possível. Deve-se ressaltar que nenhuma estratégia apresenta a mesma eficiência computacional na solução de problemas fortemente não lineares (SILVA, 2009).

Na sequência desta seção são apresentadas algumas das estratégias de iteração presentes no CS-ASA e que foram usadas nesta dissertação, ou seja: carga constante; comprimento de arco cilíndrico; norma mínima dos deslocamentos residuais; iteração baseada no deslocamento generalizado e iteração baseada no resíduo ortogonal.

### 1. *Iteração à Carga Constante*

Essa estratégia de iteração é caracterizada pelo método tradicional de controle de carga, onde o incremento do parâmetro de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo. Assim, escreve-se simplesmente que o sub-incremento não varia, ou seja:

$$\delta\lambda^k = 0 \tag{2.41}$$

Dessa forma, a Equação (2.17) é reduzida aos deslocamentos fornecidos pelo método de Newton-Raphson. Essa estratégia de iteração, como já comentado, apresenta

dificuldade em passar por pontos limites de carga. Quando um ponto de máximo local de carga está próximo de ser atingido e o esquema de solução tenta incrementar novamente o parâmetro de carga, o número máximo de iterações pode ser alcançado sem a convergência do processo indicando a ultrapassagem desse ponto, ou mesmo acontece um salto dinâmico (*snap-through*).

## 2. Iteração ao Comprimento de Arco Cilíndrico

Através de vários exemplos numéricos, Crisfield (1981, 1991) e Ramm (1981; 1982) observaram que, em problemas práticos com número elevado de variáveis, o parâmetro de carga na Equação (2.30) tinha pequeno efeito. Crisfield então, propôs que a cada iteração, a seguinte equação fosse satisfeita:

$$(\Delta \mathbf{U}^k)^T \Delta \mathbf{U}^k = \Delta l^2 \quad (2.42)$$

com  $\Delta l$  sendo o comprimento de arco e  $\Delta \mathbf{U}^k$  o vetor de deslocamentos nodais incrementais na iteração corrente.

Substituindo a Equação (2.21) na equação anterior, chega-se numa equação quadrática em  $\delta \lambda$ , ou seja:

$$A(\delta \lambda^k)^2 + B \delta \lambda^k + C = 0 \quad (2.43)$$

com os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  sendo definidos da seguinte forma:

$$A = (\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k \quad (2.44a)$$

$$B = 2(\delta \mathbf{U}_r^k)^T (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k) \quad (2.44b)$$

$$C = (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k)^T (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k) - \Delta l^2 \quad (2.44c)$$

A solução (2.43) apresenta duas raízes,  $\delta \lambda_1$  e  $\delta \lambda_2$ , e deve-se então se escolher a solução que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior,  $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$ , isto é:

$$\Delta \mathbf{U}_1^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda_1^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (2.45a)$$

$$\Delta \mathbf{U}_2^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda_2^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (2.45b)$$

Essa escolha deve prevenir que o processo de solução retorne, evitando que a mesma regreda ao longo do caminho já calculado.

Um procedimento bastante simples, a ser seguido e usado neste trabalho, consiste em achar o menor ângulo entre  $\Delta \mathbf{U}^k$  e  $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$ . Isso equivale a achar o máximo cosseno do ângulo:

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \Delta \mathbf{U}^k}{\Delta l^2} = \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k)}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2}^k \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \delta \mathbf{U}_r^k}{\Delta l^2} \quad (2.50)$$

De acordo com Meek e Tan (1984) e Silveira (1995), na solução da Equação (2.43) poderá ser obtidas raízes imaginárias, se  $B^2 - 4AC < 0$ . Isso ocorrerá quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto.

### 3. Iteração à Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais

Chan (1988) apresentou uma estratégia de iteração bastante eficiente, definida como o Método dos Deslocamentos Residuais (MDR). Nessa estratégia, ao invés de se usarem restrições geométricas e de energia, como na seção anterior, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas. Vale ressaltar que esse é o objetivo principal do ciclo iterativo.

Para implementar o MDR, deve-se reescrever, numa dada iteração  $k$ , a componente  $j$  do vetor de deslocamentos  $\delta \mathbf{U}$ , na forma:

$$e_j = \delta \mathbf{U}^k(j) = \delta \mathbf{U}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k(j) \quad (2.51)$$

em que  $e_j$  é considerado como um dado erro. Chan então propôs que a condição de mínimos quadrados desse erro, para um sistema de  $m$  graus de liberdade, poderia ser expressa de acordo com:

$$\frac{d \left( \sum_{j=1}^m (e_j)^2 \right)}{d \delta \lambda^k} = 0 \quad (2.52)$$

A equação anterior é equivalente à condição da norma mínima dos deslocamentos residuais, escrita numa forma mais adequada como:

$$\frac{d \left[ (\delta \mathbf{U}^k)^T \delta \mathbf{U}^k \right]}{d \delta \lambda^k} = 0 \quad (2.53)$$

Substituindo, então, a Equação (2.17) na expressão anterior, e depois derivando em relação a  $\delta \lambda$ , chega-se a:

$$\delta \lambda^k = - \frac{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_g^k}{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k} \quad (2.54)$$

#### 4. *Iteração Baseada no Deslocamento Generalizado*

Com a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro GSP foi mostrado que, de acordo com o trabalho de Yang e Kuo (1994), a seguinte expressão deveria ser considerada para o parâmetro de carga ao longo da solução não linear:

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\Delta \lambda^0 (\delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_r^k} \left( H_k - \Delta \lambda^0 (\delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (2.55)$$

Na obtenção da solução incremental predita ( $k = 0$ ), os referidos pesquisadores definiram que o parâmetro incremental  $H_0$  (no caso, deslocamento generalizado) deveria ser obtido de acordo com a Equação (2.37). Durante o ciclo iterativo é assumido que esse parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, ou seja,  $H_k = 0$  para  $k > 0$ . Dessa forma, pode-se rescrever (2.55) como:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_g^k}{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r^k} \quad (2.56)$$

que é a expressão procurada para a correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

#### 5. *Iteração Baseada no Resíduo Ortogonal*

Proposta por Krenk (1995), essa estratégia é utilizada para correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo. A ideia é que a cada iteração de equilíbrio, a magnitude da carga seja ajustada de tal forma que o vetor de forças desequilibradas seja ortogonal ao incremento corrente de deslocamento. A estratégia impõe a condição física de que, para esse nível de carga, o incremento de deslocamento tenha um valor ótimo, ou seja, não modifica o vetor de forças desequilibradas. A condição de ortogonalidade é formulada

diretamente em termos de forças e deslocamentos, sendo os passos básicos dessa metodologia descritos a seguir.

No início de cada iteração  $k$ , existe ainda um desequilíbrio entre forças internas e externas. Nessa situação, o vetor de forças externas é  $({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)}) \mathbf{F}_r$ , e o vetor dos deslocamentos incrementais  $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$  é conhecido, permitindo o cálculo das forças internas,  $\mathbf{F}_i({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k-1)})$ . O objetivo será obter o vetor de forças externas que melhor se ajuste às forças internas de forma a minimizar o desequilíbrio existente entre essas grandezas. Esse vetor de forças externas corrigido pode ser escrito como:  $({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r$ .

A correção do parâmetro de carga na iteração corrente,  $\delta\lambda^k$ , é calculada considerando: a existência de forças residuais faz com que seja necessário o cálculo adicional de deslocamentos,  $\delta\mathbf{U}^k$ . Assumindo, então, que os deslocamentos incrementais da iteração anterior,  $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$ , são a melhor aproximação na direção dos deslocamentos incrementais da iteração corrente,  $\Delta\mathbf{U}^k$ , tem-se que a magnitude desse vetor se modificará de acordo com a projeção do vetor resíduo na direção dos deslocamentos. Sendo assim, os deslocamentos incrementais aumentarão ou diminuirão de acordo com o sinal do produto escalar,  $\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$ , onde:

$$\tilde{\mathbf{g}} = ({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}) \quad (2.57)$$

sendo  $\tilde{\mathbf{g}}$  o vetor de forças residuais, que é obtido corrigindo as forças externas para produzir, como supracitado, um melhor ajuste às forças internas.

O vetor de deslocamentos incrementais  $\Delta\mathbf{U}^k$  terá valor ótimo se a seguinte condição de ortogonalidade for satisfeita, ou seja:

$$\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} = \mathbf{0} \quad (2.58)$$

Substituindo a Equação (2.57) na anterior, chega-se na expressão procurada para a correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo:

$$\delta\lambda^k = - \frac{\left(\mathbf{g}^{(k-1)}\right)^T \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}}{\mathbf{F}_r^T \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}} \quad (2.59)$$

# Capítulo 3

## Formulações Geométricas Não Lineares

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior se apresentou uma metodologia numérica geral para análise estática não linear de estruturas. Várias estratégias de incremento de carga e de iteração para a solução do problema não linear foram também apresentadas.

Neste capítulo particulariza-se a metodologia numérica geral proposta e mostra como os efeitos geométricos não lineares são considerados nas formulações de elementos finitos desenvolvidas. Primeiramente, na próxima seção, será retratado o referencial Corrotacional (RCR) utilizado no desenvolvimento das formulações dos elementos. Em seguida, as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko são apresentadas com suas particularidades. As Seções 3.3 e 3.4 trazem as novas formulações geométricas não lineares, SOF-4 e SOF-5, implementadas no sistema computacional CS-ASA.

Essas formulações não lineares, que são específicas para a modelagem de sistemas estruturais reticulados planos, são baseadas nos trabalhos de Battini (2002) e Tang *et al.* (2015).

### 3.2 Referencial Corrotacional

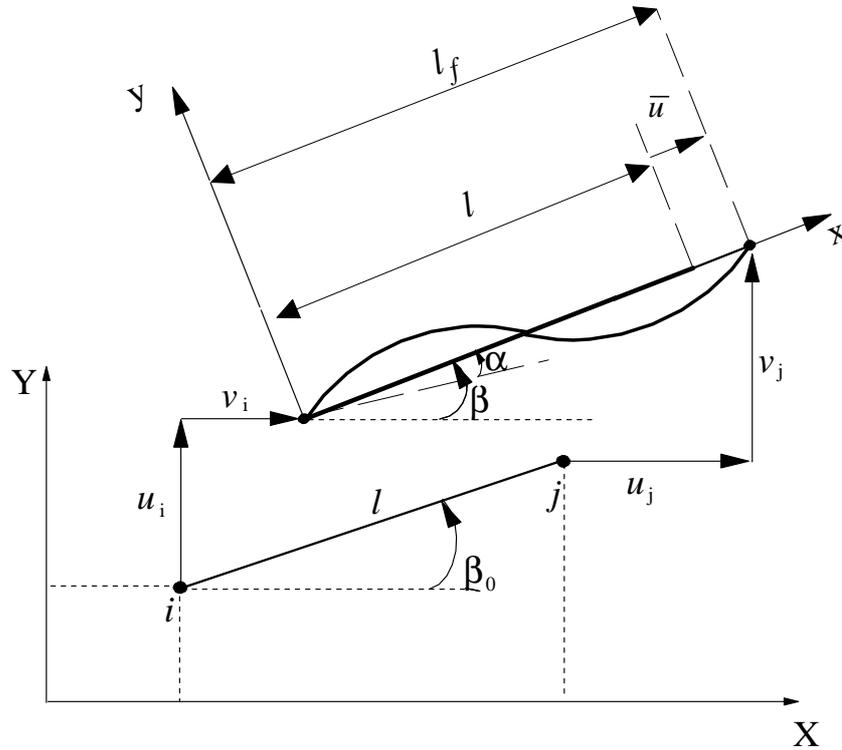
A formulação corrotacional teve origem no teorema de decomposição polar desenvolvido no âmbito da mecânica dos meios contínuos (REDDY, 2004). O mesmo foi estudado pela primeira vez por Cauchy em 1827 e, posteriormente, em problemas geológicos por Biot (1965). Outros avanços desta descrição cinemática se deram na indústria aeronáutica e aeroespacial nas décadas de 50 e 60 do século passado.

O conceito de descrição cinemática corrotacional foi introduzido no contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF) através de Argyris (1965). Esse foi o precursor do conceito de decomposição do movimento, o qual foi inicialmente denominado de “aproximação natural”. Wemper (1969) também aplicou o mesmo conceito no estudo de rotações finitas de cascas flexíveis. Belytschko e Hsieh (1973) usaram essa abordagem para vigas submetidas a grandes rotações e propuseram um método baseado em um sistema de coordenadas curvilíneas denominadas “*convected coordinates*”. Oran e Kassimali (1976) estudaram grandes deformações e a estabilidade de pórticos estruturais. Fraeijs de Veubeke (1976) desenvolveu uma formulação corrotacional para análise dinâmica de estruturas na indústria aeronáutica. Belytschko e Glaum (1979) introduziram o termo corrotacional para se referir ao movimento do sistema de coordenadas local anexado ao elemento, e esta terminologia é adotada na maior parte dos artigos publicados em questão.

O aumento do interesse no estudo desse referencial aconteceu na última década e outras contribuições importantes podem ser destacadas, tais como: Crisfield (1990) que apresentou formulações consistentes para a análise não linear geométrica de pórticos espaciais; Crisfield e Shi (1994) que propuseram uma metodologia para a análise dinâmica não linear de treliças planas; e Pacoste (1998) que estudou a instabilidade de cascas utilizando elementos finitos triangulares. Battini (2002) também desenvolveu elementos finitos de barras para análises elásticas e inelásticas usando formulação corrotacional. O trabalho desse último pesquisador foi uma importante referência para as recentes pesquisas de Oliveira (2015) e Santana (2015). Tang *et al.* (2015) propôs um novo elemento finito de viga-coluna utilizando um RCR e envolvendo o conceito de deformação consistente.

De acordo com Battini (2002), a aproximação corrotacional é vista como um caminho alternativo para uma análise eficiente de elementos finitos não lineares. A principal ideia, nesse contexto, é a decomposição do movimento do elemento em duas parcelas: uma associada ao movimento de corpo rígido do elemento e a outra parte associada aos chamados ‘deslocamentos naturais’ visto que podem ser relacionados diretamente às deformações. A movimentação do elemento é medida através do uso do sistema de coordenadas cartesianas locais (X, Y), que terão uma rotação e translação em conjunto com o elemento (Figura 3.1). A alteração da configuração indeformada original do elemento para uma configuração deformada atual pode então ser dividida em duas etapas: a primeira relacionada com o movimento de corpo rígido, incluindo rotação e

translação do elemento; a segunda etapa consiste na deformação relativa em um sistema de coordenadas locais que produz energia.



**Figura 3.1** Relação entre sistema de coordenadas local e global

O propósito desta seção é apresentar a relação entre o sistema de coordenadas local e global que será utilizado para as devidas atualizações nas análises dos sistemas estruturais. As relações cinemáticas e a notação adotada serão baseadas na Figura 3.1. Para o elemento finito mostrado nessa figura, o vetor de deslocamentos nodais global é definido por:

$$\mathbf{u}_g = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T \quad (3.1)$$

Já o vetor de deslocamentos naturais nodais no sistema local é dado por:

$$\mathbf{u}_l = [\bar{u} \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{\theta}_j]^T \quad (3.2)$$

As componentes desse último vetor podem ser expressas baseadas nos termos dos deslocamentos no sistema de referência global, conforme:

$$\bar{u} = l_f - l \quad (3.3a)$$

$$\bar{\theta}_i = \theta_i - \alpha \quad (3.3b)$$

$$\bar{\theta}_j = \theta_j - \alpha \quad (3.3c)$$

sendo  $l_f$  o comprimento do elemento atualizado e  $l$  o valor do comprimento inicial do elemento analisado. Esses comprimentos são calculados de acordo com:

$$l = \left[ (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

$$l_f = \left[ (x_j + u_j - x_i - u_i)^2 + (y_j + v_j - y_i - v_i)^2 \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

Já o ângulo  $\alpha$ , presente em (3.3b) e (3.3c), é a rotação do corpo rígido do elemento, e pode ser definido através das expressões:

$$\text{sen}(\alpha) = c_o s - s_o c \quad (3.6a)$$

$$\text{cos}(\alpha) = c_o c - s_o s \quad (3.6b)$$

com:

$$c_o = \text{cos}(\beta_0) = \frac{1}{l} (x_j - x_i) \quad (3.7a)$$

$$s_o = \text{sen}(\beta_0) = \frac{1}{l} (y_j - y_i) \quad (3.7b)$$

$$c = \text{cos}(\beta) = \frac{1}{l_f} (x_j + u_j - x_i - u_i) \quad (3.7c)$$

$$s = \text{sen}(\beta) = \frac{1}{l_f} (y_j + v_j - y_i - v_i) \quad (3.7d)$$

em que  $\beta$  representa o valor do ângulo de orientação do elemento (ângulo entre o eixo axial local e o eixo horizontal global), de modo que na configuração inicial o mesmo é dado por  $\beta_0$ .

A rotação de corpo rígido,  $\alpha$ , também pode ser calculada como o incremento de rotação entre a orientação atual e inicial, ou seja:

$$\alpha = \beta - \beta_0 = \arctan \left[ \frac{(y_j + v_j - y_i - v_i)}{(x_j + u_j - x_i - u_i)} + \frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)} \right] \quad (3.8)$$

Algumas restrições em relação ao valor da rotação de corpo rígido são apresentadas em Battini (2002). Assim, considerando que  $|\alpha| < \pi$ , chegam-se às seguintes definições para o ângulo  $\alpha$ :

$$\text{se } \sin(\alpha) \geq 0 \text{ e } \cos(\alpha) \geq 0 \quad \alpha = \sin^{-1}(\sin(\alpha)) \quad (3.9a)$$

$$\text{se } \sin(\alpha) \geq 0 \text{ e } \cos(\alpha) < 0 \quad \alpha = \cos^{-1}(\cos(\alpha)) \quad (3.9b)$$

$$\text{se } \sin(\alpha) < 0 \text{ e } \cos(\alpha) \geq 0 \quad \alpha = \pi - \sin^{-1}(\sin(\alpha)) \quad (3.9c)$$

$$\text{se } \sin(\alpha) < 0 \text{ e } \cos(\alpha) < 0 \quad \alpha = -\cos^{-1}(\cos(\alpha)) \quad (3.9d)$$

Os deslocamentos virtuais locais são obtidos através da diferenciação parcial das Equações (3.3a), (3.3b) e (3.3c), de modo que:

$$\delta \bar{u} = c(\delta u_j - \delta u_i) + s(\delta v_j - \delta v_i) \quad (3.10a)$$

$$\delta \bar{\theta}_i = \delta \theta_i - \delta \alpha = \delta \theta_i - \delta \beta \rightarrow (\alpha = \beta - \beta_0) \quad (3.10b)$$

$$\delta \bar{\theta}_j = \delta \theta_j - \delta \alpha = \delta \theta_j - \delta \beta \quad (3.10c)$$

Na sequência, com a diferenciação da Equação (3.7d), obtém-se:

$$\delta \beta = \frac{1}{cl_f^2} \left[ (\delta v_j - \delta v_i) l_f - (y_j + v_j - y_i - v_i) \delta l_f \right] \quad (3.11)$$

E com a substituição de (3.10a) na equação anterior:

$$\delta \beta = \frac{1}{cl_f} \left[ (\delta v_j - \delta v_i) - sc(\delta u_j - \delta u_i) - s^2(\delta v_j - \delta v_i) \right] \quad (3.12)$$

que pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\delta \beta = \frac{1}{l_f} \begin{bmatrix} s & -c & 0 & -s & c & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_g \quad (3.13)$$

Com o desenvolvimento das Equações (3.10a), (3.10b) e (3.10c), chegam-se nos deslocamentos virtuais locais em funções dos deslocamentos virtuais globais, isto é:

$$\delta \bar{u} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0] \delta \mathbf{u}_g \quad (3.14a)$$

$$\delta \bar{\theta}_i = \delta \theta_i - \frac{1}{l_f} [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0] \delta \mathbf{u}_g \quad (3.14b)$$

$$\delta \bar{\theta}_j = \delta \theta_j - \frac{1}{l_f} [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0] \delta \mathbf{u}_g \quad (3.14c)$$

que numa forma mais compacta matricial fica:

$$\delta \mathbf{u}_l = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_g \quad (3.15)$$

com a matriz de transformação  $\mathbf{B}$  dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/l_f & c/l_f & 1 & s/l_f & -c/l_f & 0 \\ -s/l_f & c/l_f & 0 & s/l_f & -c/l_f & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A matriz  $\mathbf{B}$  é o resultado da multiplicação da matriz de transformação  $\mathbf{T}$  (transposta), que tem a função de converter o sistema de coordenadas local para o referencial corrotacional, por  $\mathbf{R}$ , que é a matriz de rotação que relaciona o sistema global e o sistema local (SILVA, 2009). Essas matrizes são definidas a seguir:

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_f & 1 & 0 & -1/l_f & 0 \\ 0 & 1/l_f & 0 & 0 & -1/l_f & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17b)$$

A relação entre o vetor de forças internas local,  $f_l$ , e o global,  $f_g$ , é obtida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), ou seja:

$$\delta V = \delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{f}_g = \delta \mathbf{u}_l^T \mathbf{f}_l = \delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (3.18)$$

em que foi usada a Equação (3.15). Da equação anterior, tem-se a relação entre as forças internas no sistema de referência global e o sistema local é dada por:

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (3.19)$$

com o vetor de forças internas local  $\mathbf{f}_l = [N \quad M_i \quad M_j]^T$ , em que  $N$  e  $M_i$  e  $M_j$  são a força axial e os momentos fletores, respectivamente. Esses esforços internos locais dependem da teoria de viga adotada, como será visto na Seção 3.3.

### 3.2.1 Matriz de Rigidez Tangente

A matriz de rigidez tangente global,  $\mathbf{K}_g$ , pode ser definida através da diferenciação das forças internas globais em relação aos deslocamentos nodais globais, isto é:

$$\mathbf{K}_g = \frac{\partial \mathbf{f}_g}{\partial \mathbf{u}_g} \quad (3.20)$$

Assim, fazendo a diferenciação da Equação (3.19) em relação aos deslocamentos nodais globais, tem-se:

$$\delta \mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{f}_l + N \delta \mathbf{b}_1 + M_i \delta \mathbf{b}_2 + M_j \delta \mathbf{b}_3 \quad (3.21)$$

em que:

$$\mathbf{b}_1 = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \quad (3.22a)$$

$$\mathbf{b}_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T - \frac{\mathbf{z}}{l_f} \quad (3.22b)$$

$$\mathbf{b}_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T - \frac{\mathbf{z}}{l_f} \quad (3.22c)$$

Com a introdução dos vetores:

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \quad (3.23)$$

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T \quad (3.24)$$

e fazendo a derivação das equações anteriores em relação a  $\beta$ , obtém-se:

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{z} \delta \beta \quad (3.25a)$$

$$\delta \mathbf{z} = -\mathbf{r} \delta \beta \quad (3.25b)$$

Com as definições anteriores, é possível reescrever as Equações (3.10a) e (3.13) da seguinte forma:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u}_g \quad (3.26a)$$

$$\delta \beta = \frac{\mathbf{z}^T}{l_f} \delta \mathbf{u}_g \quad (3.26b)$$

Note então as Equações (3.22a), (3.22b) e (3.22c), podem agora ser definidas da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{b}_1 = \delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{z} \mathbf{z}^T}{l_f} \delta \mathbf{u}_g \quad (3.27a)$$

$$\delta \mathbf{b}_2 = \delta \mathbf{b}_3 = -\frac{\delta \mathbf{z}}{l_f} + \frac{\mathbf{z} \delta l_f}{l_f^2} = \frac{1}{l_f^2} [\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T] \delta \mathbf{u}_g \quad (3.27b)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (3.21) pode ser avaliado através da relação de equilíbrio local do elemento, isto é:

$$\delta \mathbf{f}_l = \mathbf{K}_l \delta \mathbf{u}_l = \mathbf{K}_l \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_g \quad (3.28)$$

em que  $\mathbf{K}_l$  é a matriz de rigidez no sistema de referência local, que depende da teoria de viga adotada.

Finalmente, com o emprego das Equações (3.20), (3.21), (3.27a, b) e (3.28), chega-se na expressão final da matriz de rigidez tangente global do elemento:

$$\mathbf{K}_g = \underbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B}}_{\mathbf{K}_e} + \underbrace{\frac{\mathbf{z} \mathbf{z}^T}{l_f} N + \frac{1}{l_f^2} [\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T]}_{\mathbf{K}_{geo}} (M_i + M_j) \quad (3.29)$$

As Equações (3.19) e (3.29) apresentam a relação entre os valores locais e globais das forças internas e matriz de rigidez tangente, respectivamente. Essas relações são independentes da teoria de viga adotada. O primeiro termo da Equação (3.29) representa

a matriz de rigidez elástica ( $\mathbf{K}_e$ ), já os últimos três termos representam a matriz de rigidez geométrica ( $\mathbf{K}_{geo}$ ), onde são levados em conta os efeitos de segunda ordem do sistema estrutural. As forças internas do elemento, a matriz de rigidez e a matriz de transformação,  $\mathbf{B}$ , devem ser atualizadas constantemente durante todo o processo de resolução do sistema (Método de Newton- Raphson), ou seja, a cada incremento e ao longo do processo iterativo.

### 3.3 Teoria de Vigas

As teorias de vigas existentes têm um significado importante nas formulações não lineares. A teoria clássica de Euler-Bernoulli é considerada mais simples, pois os efeitos devidos às deformações cisalhantes na seção transversal da barra são desprezados no cálculo da rigidez da estrutura. Nesse caso, estima-se que a seção transversal plana antes da deformação da viga continuará sendo plana e perpendicular ao eixo neutro da viga.

A outra teoria de viga é a de Timoshenko, onde a deformação cisalhante na seção transversal da barra é levada em consideração no processo de solução do problema. Considera-se, entretanto, que a deformação por cisalhamento é constante ao longo da seção transversal. Segundo Oñate (2013), essa teoria de viga é aplicável em vigas com esbeltezes menores ( $\lambda = L/h < 10$ ; em que  $L$  é o comprimento da barra e  $h$  é a altura da seção transversal), e que ela se torna especialmente adequada à medida que a altura da seção transversal viga aumenta. Considera-se que as seções transversais planas e perpendiculares ao eixo neutro se mantêm planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo neutro deformado. Segundo Timoshenko *et al.* (1974), a teoria de Timoshenko é considerada mais acurada.

### 3.4 Formulação SOF-4

#### 3.4.1 Elemento de Euler-Bernoulli: SOF-4/EB

Este elemento baseia-se na teoria clássica de viga. Em sua formulação são usadas uma função de interpolação linear para o deslocamento axial,  $u$ , e uma função cúbica para aproximar o deslocamento vertical,  $v$ , isto é:

$$u = \frac{x}{l} \bar{u} \quad (3.30a)$$

$$v = x \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 \bar{\theta}_i + \frac{x^2}{l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \bar{\theta}_j \quad (3.30b)$$

O tensor de deformação de Green-Lagrange é normalmente utilizado em problemas estruturais modelados com elemento de barra, em lugar do tensor de deformação linear, quando se deve considerar grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações. Através desse tensor consegue-se separar os movimentos de corpo rígido dos movimentos que causam deformações no material (WRIGGERS, 2008). Com os deslocamentos apresentados nas equações anteriores, as únicas componentes não nulas desse tensor, utilizando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, são dadas a seguir:

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - \kappa y + \phi y^2 \quad (3.31)$$

com a curvatura  $\kappa$  e a deformação segunda ordem  $\phi$  dadas por:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} \quad (3.32)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 \quad (3.33)$$

em que  $d\theta/dx$  representa o gradiente de rotação, que é aqui considerado pequeno, de modo que a deformação específica de segunda ordem  $\phi$  pode ser desprezada. Assim, a deformação total na direção axial é dada por:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} - \kappa y \quad (3.34)$$

Com a substituição das Equações (3.30a) e (3.30b) em (3.32) e (3.34) é possível definir as deformações específicas axial  $\epsilon$  e a curvatura  $\kappa$  da seguinte forma:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} - \kappa y = \frac{\bar{u}}{l} + y \left[ \left( \frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right) \bar{\theta}_i + \left( \frac{2}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right) \bar{\theta}_j \right] \quad (3.35)$$

$$\kappa = \frac{d^2 v}{dx^2} = \left( -\frac{4}{l} + 6\frac{x}{l^2} \right) \bar{\theta}_i + \left( -\frac{2}{l} + 6\frac{x}{l^2} \right) \bar{\theta}_j \quad (3.36)$$

Para os elementos do sistema estrutural, assume-se que o material segue o comportamento de Saint-Venant, onde existe uma relação linear entre o tensor de deformação de Green Lagrange e o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff. Apesar dessa suposição não ser adequada para materiais submetidos a grandes deformações, para elementos estruturais esbeltos sujeitos a grandes deslocamentos e rotações, como barras e placas, a mesma pode ser aplicada com sucesso (WRIGGERS, 2008). Assim, as componentes axial,  $\sigma$ , do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é dado por:

$$\sigma = E\varepsilon = E \left( \frac{du}{dx} - \kappa y \right) \quad (3.37)$$

em que  $E$  representa o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Como as forças internas locais do elemento são calculadas utilizando o teorema do trabalho virtual, tem-se:

$$\delta V = \int_V \sigma \delta \varepsilon dV \quad (3.38)$$

Substituindo então a Equação (3.35) na expressão anterior, obtém-se:

$$\delta V = \int_V \sigma \left[ \frac{\delta \bar{u}}{l} + y \left( \frac{4}{l} - 6\frac{x}{l^2} \right) \delta \bar{\theta}_i + y \left( \frac{2}{l} - 6\frac{x}{l^2} \right) \delta \bar{\theta}_j \right] dV \quad (3.39)$$

que ainda pode ser reescrita como:

$$\delta V = N \delta \bar{u} + M_i \delta \bar{\theta}_i + M_j \delta \bar{\theta}_j \quad (3.40)$$

com nos esforços internos atuantes em uma seção sendo definidos de acordo com:

$$N = \int_V \frac{\sigma}{l} dV \quad (3.41a)$$

$$M_i = \int_V \sigma y \left( \frac{4}{l} - 6\frac{x}{l^2} \right) dV \quad (3.41b)$$

$$M_j = \int_V \sigma y \left( \frac{2}{l} - 6\frac{x}{l^2} \right) dV \quad (3.41c)$$

A integração das expressões anteriores sobre o volume do elemento, considerando rigidez axial ( $EA$ ) e rigidez de flexão ( $EI$ ) constantes ao longo do eixo  $x$ , produz componentes mais simples do vetor de forças internas, os quais são dados por:

$$N = \frac{EA}{l} \bar{u} \quad (3.42a)$$

$$M_i = \frac{EI}{l} (4\bar{\theta}_i + 2\bar{\theta}_j) \quad (3.42b)$$

$$M_j = \frac{EI}{l} (4\bar{\theta}_j + 2\bar{\theta}_i) \quad (3.42c)$$

sendo  $I$  o momento de inércia da seção transversal e  $A$  a área da seção transversal.

Para se determinar a matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local corrotacional é necessário que seja efetuada a derivação das forças internas locais (Equações 3.41a, 3.41b e 3.41c), em relação aos deslocamentos locais. Portanto, sabendo que a componente axial do tensor de tensão é dada por:

$$\sigma = E\varepsilon = E \left[ \frac{\bar{u}}{l} + y \left( \frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right) \bar{\theta}_i + y \left( \frac{2}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right) \bar{\theta}_j \right] \quad (3.43)$$

chegam-se nas componentes da matriz de rigidez local do elemento:

$$K_{i_{11}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{l^2} \int_V E dV \quad (3.44a)$$

$$K_{i_{22}} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_i} = \int_V y^2 \left[ \frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right]^2 dV \quad (3.44b)$$

$$K_{i_{33}} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_j} = \int_V y^2 \left[ \frac{2}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right]^2 dV \quad (3.44c)$$

$$K_{i_{12}} = K_{i_{21}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{l} \int_V Ey \left[ \frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right] dV \quad (3.44d)$$

$$K_{i_{13}} = K_{i_{31}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{l} \int_V Ey \left[ \frac{2}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right] dV \quad (3.44e)$$

$$K_{l_{23}} = K_{l_{32}} = \frac{\partial M_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \theta_i} = \frac{1}{l} \int_V E y^2 \left[ \frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right] \left[ \frac{2}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right] dV \quad (3.44f)$$

Para cada uma dessas componentes da matriz, caso seja realizada a integração sobre o volume do elemento, e considerando, como anteriormente, a rigidez axial ( $EA$ ) e a rigidez de flexão ( $EI$ ) constantes ao longo do eixo  $x$ , chega-se a:

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

### 3.4.2 Teoria de Timoshenko: SOF-4/T

Para um elemento de viga formulado segundo a teoria de viga de Timoshenko, utiliza-se funções de interpolação lineares para aproximar os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ , em um sistema de coordenadas locais corrotacional. Dessa forma, escreve-se para essas componentes de deslocamento:

$$u = \frac{x}{l} \bar{u} \quad (3.46a)$$

$$v = 0 \quad (3.46b)$$

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \bar{\theta}_i + \frac{x}{l} \bar{\theta}_j \quad (3.46c)$$

O tensor de deformação de Green-Lagrange é utilizado novamente, e com os deslocamentos definidos através das equações anteriores, as únicas componentes não nulas desse tensor de deformações são:

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - \kappa y + \phi y^2 \quad (3.47)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma \quad (3.48)$$

em que  $\gamma$  é a deformação cisalhante e a deformação segunda ordem sendo  $\phi$  é dada por:

$$\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 \quad (3.49)$$

que pode ser desprezada da análise se o gradiente  $d\theta/dx$  for considerado pequeno.

Seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, ou seja, substituindo as Equações (3.46a), (3.46b) e (3.46c) nas expressões das deformações específicas axial  $\varepsilon$ , de flexão  $\kappa$  e cisalhantes  $\gamma$ , chega-se a:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - \kappa y = \frac{\bar{u}}{l} - \frac{\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_i}{l} y \quad (3.50)$$

$$k = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_i}{l} \quad (3.51)$$

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta = - \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \bar{\theta}_i - \frac{x}{l} \bar{\theta}_j \quad (3.52)$$

Assume-se, mais uma vez, que o material tem comportamento elástico, onde existe uma relação linear entre o tensor de deformação de Green Lagrange e o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff. Assim, a componente axial,  $\sigma$ , e transversal,  $\tau$ , são dadas por:

$$\sigma = E\varepsilon = E \left( \frac{du}{dx} - \kappa y \right) \quad (3.53)$$

$$\tau = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma \quad (3.54)$$

em que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal.

Considera-se que a deformação cisalhante  $\gamma$ , Equação (3.52), é constante ao longo de toda a seção transversal. Essa hipótese não condiz com a realidade devido às condições de contorno do elemento. Deve-se então multiplicar o módulo de elasticidade transversal,  $G$ , pelo coeficiente de correção do cisalhamento,  $k$ . Segundo Cowper (1966), esse coeficiente é adimensional, depende da forma da seção transversal e do coeficiente de Poisson,  $\nu$ , do material, e que é introduzido considerando o fato que a tensão cisalhante e a deformação cisalhante não são distribuídas uniformemente sobre a seção transversal do elemento. Cowper (1966) propõe equações para o cálculo do coeficiente de correção de

cisalhamento  $k$  para diferentes geometrias de seções transversais, como a seção circular, retangular, semicírculo, perfil I, entre outros.

Como na seção anterior, as forças internas resultantes locais do elemento são calculadas usando o teorema dos trabalhos virtuais, mas incluindo agora o efeito devido à deformação cisalhante na seção transversal. Dessa forma, tem-se:

$$\delta V = \int_V (\sigma \delta \epsilon + \tau \delta \gamma) dV \quad (3.55)$$

em que  $\delta \epsilon$  e  $\delta \gamma$  são obtidos através da derivação das Equações (3.50) e (3.52), isto é:

$$\delta V = \int_V \left\{ \frac{\sigma}{l} \left[ \delta \bar{u} - z (\delta \bar{\theta}_j - \delta \bar{\theta}_i) \right] - \tau \left[ \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \delta \bar{\theta}_i + \frac{x}{l} \delta \bar{\theta}_j \right] \right\} dV \quad (3.56)$$

A equação anterior pode ser reescrita como:

$$\delta V = N \delta \bar{u} + M_i \delta \bar{\theta}_i + M_j \delta \bar{\theta}_j \quad (3.57)$$

com  $N$ ,  $M_i$  e  $M_j$  sendo as forças internas resultantes no sistema local do elemento considerado. A partir do tensor de tensões e das relações constitutivas, escreve-se para essas forças internas:

$$N = \int_V \frac{\sigma}{l} dV = \int_A \sigma dA \quad (3.58a)$$

$$M_i = \int_V \left( \frac{\sigma}{l} y - \frac{\tau}{2} \right) dV = \int_A \sigma y dA - \frac{l}{2} \int_A \tau dA \quad (3.58b)$$

$$M_j = \int_V \left( -\frac{\sigma}{l} y - \frac{\tau}{2} \right) dV = -\int_A \sigma y dA - \frac{l}{2} \int_A \tau dA \quad (3.58c)$$

Como consequência da utilização da baixa ordem das funções de interpolação, uma variação de rigidez espúria surge quando é feita a integração direta da Equação (3.57). A deformação cisalhante,  $\gamma$ , gera um efeito conhecido como travamento por cisalhamento (“*shear-locking*”). Para evitar esse problema, utiliza-se a integração reduzida, em que apenas um ponto de Gauss é utilizado, localizado no meio do elemento ( $x = l/2$ ). Enfim, com essa integração e assumindo que a rigidez axial,  $EA$ , e a rigidez à flexão,  $EI$ , são constantes, chega-se a:

$$N = \frac{EA}{l} \bar{u} \quad (3.59a)$$

$$M_i = \frac{EI}{l} (\bar{\theta}_i - \bar{\theta}_j) + \frac{1}{4} kGA l (\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j) \quad (3.59b)$$

$$M_j = \frac{EI}{l} (\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_i) + \frac{1}{4} kGA l (\bar{\theta}_j + \bar{\theta}_i) \quad (3.59c)$$

As componentes da matriz de rigidez tangente do elemento, no sistema local Corrotacional, são obtidas através da derivação dessas forças internas locais em relação aos deslocamentos locais, ou seja:

$$K_{i_1} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{l} \int_V E dV \quad (3.60a)$$

$$K_{i_2} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{1}{l} \int_V E y^2 dV + \frac{1}{2} \int_V kG \left(1 - \frac{x}{l}\right) dV \quad (3.60b)$$

$$K_{i_3} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{1}{l} \int_V E y^2 dV + \frac{1}{2l} \int_V kG x dV \quad (3.60c)$$

$$K_{i_2} = K_{i_2} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{l^2} \int_V E y dV \quad (3.60d)$$

$$K_{i_3} = K_{i_3} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{l^2} \int_V E y dV \quad (3.60e)$$

$$K_{i_2} = K_{i_2} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{1}{l^2} \int_V E y^2 dV + \frac{1}{2} \int_V kG \left(1 - \frac{x}{l}\right) dV \quad (3.60f)$$

E finalmente, efetuando-se a integração dessas componentes da matriz, e considerando novamente que a rigidez axial,  $EA$ , e a rigidez à flexão,  $EI$ , são constantes ao longo do elemento, chega-se a:

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l} + \frac{1}{4}kGA l & -\frac{EI}{l} + \frac{1}{4}kGA l \\ 0 & -\frac{EI}{l} + \frac{1}{4}kGA l & \frac{EI}{l} + \frac{1}{4}kGA l \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

### 3.5 Formulação SOF-5

Um novo elemento de viga-coluna não linear capaz de considerar a deformação cisalhante, e no contexto de deformação consistente, foi proposto por Tang *et al.* (2015). Utilizando funções de interpolações de deslocamento tradicionais, que são de baixa ordem de interpolação, como nas formulações apresentadas nas seções anteriores, o elemento viga-coluna pode apresentar um aumento de rigidez espúrio. Como consequência, quando o elemento estiver sujeito a grandes deformações, pode acontecer o efeito de travamento de membrana, conhecido como “*membrane locking*”. Adicionalmente, a medida que o elemento se torna mais esbelto, a deformação cisalhante,  $\gamma$ , também pode gerar o efeito conhecido como travamento por cisalhamento (“*shear locking*”), como já comentado. Para eliminar esses efeitos, as equações diferenciais de equilíbrio de forças são usadas para se obter as funções de interpolação.

No MEF tradicional, baseado em deslocamento, as funções de interpolações são obtidas considerando os graus de liberdade nodais do elemento. Esse tipo de procedimento pode produzir comportamento rígido excessivo do elemento restringindo sua deformação. Diferentes estratégias podem ser usadas para eliminar o efeito de “*locking*”, como a integração reduzida e o emprego de uma ordem mais elevada das funções de interpolação, porém esses procedimentos apresentam bons resultados quando geralmente é utilizado um número grande de elementos na modelagem do sistema estrutural.

O entendimento do comportamento de um membro (pilar ou viga), a eficiência computacional e a facilidade de modelagem do sistema estrutural requerem que a análise seja feita com a adoção do menor número de elementos por membro possível. Esse requisito torna inadequados, para uma análise estrutural precisa e eficiente, os métodos convencionais para solucionar os efeitos de “*locking*” supracitados.

O efeito de “*membrane locking*”, por exemplo, pode surgir quando um elemento de viga-coluna com interpolação de deslocamento axial de baixa ordem é usado em uma análise geométrica não linear. Note, entretanto, que um elemento viga-coluna não linear clássico usa uma interpolação linear para o deslocamento axial,  $u$ , e uma interpolação cúbica para o deslocamento transversal,  $v$ . O emprego desse elemento, segundo Tang *et al.* (2015), pode não representar de forma adequada a deformação de membrana constante ao longo do elemento, e dará origem ao efeito de “*membrane locking*”, causando erro considerável.

Um elemento finito que segue a teoria de Timoshenko, o efeito de “*shear locking*” estará presente quando a viga se torna esbelta e se adota uma interpolação linear para deslocamento transversal e rotação. Para remediar esse efeito, com essas interpolações lineares, reduz-se a integração das componentes da matriz de rigidez a um ponto na quadradura de Gauss, como realizado na seção anterior. Contudo, esse procedimento não é preciso o suficiente quando se utilizam poucos elementos por membro.

### **3.5.1 Função de deslocamento consistente**

O emprego de uma função de interpolação linear para aproximar deslocamento axial no elemento não permite a representação de forma adequada o estado de deformação axial constante ao longo do elemento, contribuindo para o aparecimento do efeito de “*membrane locking*”. Contudo, em uma análise linear, a interpolação linear é coerente com a teoria de deformação linear, pois a deformação axial é independente do deslocamento transversal. Porém, em uma análise não linear, há o acoplamento da deformação axial e da deformação à flexão da barra. Assim a função de interpolação linear axial restringe o correspondente deslocamento axial devido ao deslocamento transversal. Assim, a hipótese de se utilizar interpolação linear para  $u$  não é consistente com a teoria de deformação não linear.

Para eliminar o efeito de “*membrane locking*” e estabelecer uma função de interpolação consistente para aproximar o deslocamento axial, deve-se utilizar a equação de equilíbrio axial para se determinar uma aproximação adequada para  $u$ , que deve ser baseada na função de interpolação de deslocamento transversal cúbica. Esse procedimento será mostrado em seguida.

Através do PTV, pode-se chegar nas equações de equilíbrio do elemento. Portanto, escreve-se inicialmente:

$$\int_0^l N \delta \epsilon dx + \int_0^l M \delta \kappa dx = \sum_{i=1}^3 F_i \delta u_i \quad (3.62)$$

com  $N$  e  $M$  sendo o esforço axial e momento fletor, respectivamente, atuantes em um ponto arbitrário ao longo do elemento de viga, e são dados por:

$$N = EA \epsilon \quad (3.63)$$

$$M = EI \kappa \quad (3.64)$$

Se o tensor de deformação de Green for empregado e a curvatura seguir a teoria de Euler-Bernoulli, pode-se escrever:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (3.65)$$

$$\kappa = -\frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.66)$$

Com a substituição das quatro equações anteriores em (3.62), chega-se na expressão do PTV em função dos deslocamentos e de suas variações virtuais, ou seja:

$$\begin{aligned} & \int_0^l EA \left[ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \left( \frac{d\delta u}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{d\delta v}{dx} \right) dx + \\ & + \int_0^l EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} dx - \sum_{i=1}^3 F_i \delta u_i = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Fazendo agora a integração por partes da equação anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^l EA \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \delta u dx + \\ & + \int_0^l \left[ EA \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - EI \frac{d^4 v}{dx^4} \right] \delta v dx = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

E como  $\delta u$  e  $\delta v$  são variações arbitrárias em  $u$  e  $v$ , respectivamente, a equação de equilíbrio na direção axial é obtida analisando-se o primeiro termo de (3.68), isto é:

$$EA \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = EA \frac{d\varepsilon}{dx} = 0 \quad (3.69)$$

Assume-se então que o deslocamento axial  $u$  possa ser dividido em  $u_a$  (deslocamento puramente extensional da seção) e em um induzido pela flexão da seção,  $u_b$ , ou seja:

$$u = u_a + u_b \quad (3.70)$$

com:

$$u_a = \frac{x}{l} \bar{u} \quad (3.71)$$

e com deslocamento axial induzido pela flexão da seção,  $u_b$ , devendo satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$u_b = 0 \quad \text{em} \quad x = 0, l \quad (3.72)$$

Para se encontrar a expressão que define  $u_b$ , deve-se utilizar a Equação (3.69), ou seja:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{du_a}{dx} + \frac{du_b}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 = \text{Constante} \quad (3.73)$$

e na sequência fazer a sua a integração com a utilização das condições de contorno. Como resultado desse processo, escreve-se:

$$u_b(x) = \frac{x}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (3.74)$$

Da expressão anterior pode-se concluir que a função de interpolação do deslocamento axial, uma vez considerada a parcela induzida pela flexão, deve ser um polinômio de quinto grau, caso a função de aproximação do deslocamento transversal,  $v$ , seja um polinômio de terceira ordem, como é usualmente adotada. Mantendo a deformação axial constante, pode-se afirmar que a ordem da função de interpolação do deslocamento axial deve obedecer a equação  $1 + (n-1)^2$ , em que  $n$  é a ordem da função para  $v$ .

Têm-se então que as novas funções de interpolações de deslocamento são dadas por:

$$v(x) = x\bar{\theta}_i - \frac{x^2(2\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j)}{l} + \frac{x^3(\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j)}{l^2} \quad (3.75)$$

$$u(x) = \frac{x}{l}\bar{u} + \frac{x}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (3.76)$$

Considerando essas novas aproximações para  $u$  e  $v$ , escreve-se para a deformação axial:

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{l} + \frac{2\bar{\theta}_i^2 - \bar{\theta}_i\bar{\theta}_j + 2\bar{\theta}_j^2}{30} \quad (3.77)$$

Assim, para o elemento viga-coluna prismático, elástico e com cargas conservativas aplicadas no nós do elemento, a sua energia potencial pode ser expressa com a soma da energia de deformação  $U$  e do trabalho externo realizado  $\Omega$ , como segue:

$$\Pi = U - \Omega = \frac{1}{2} EA \int_0^l \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^l \kappa^2 dx - \sum \mathbf{f}_i \mathbf{u}_i \quad (3.78)$$

Através do princípio da estacionaridade da energia potencial, escreve-se:

$$\delta \Pi = \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_i} - \mathbf{f}_i \right) \delta \mathbf{u}_i = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_i} - \mathbf{f}_i = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_i = 0 \quad (3.79)$$

sendo a matriz de rigidez do elemento definida a seguir:

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_j}, \quad \text{com } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.80)$$

Finalmente, baseado-se nas duas expressões anteriores, tem-se que a relação final entre as forças internas  $N$ ,  $M_i$  e  $M_j$ , e deslocamentos são dadas por (SOF-5/EB):

$$N = EA \left( \frac{\bar{u}}{l} + \frac{2\bar{\theta}_i^2 - \bar{\theta}_i\bar{\theta}_j + 2\bar{\theta}_j^2}{30} \right) \quad (3.81a)$$

$$M_i = \left( \frac{4EI}{l} + \frac{4NI}{30} \right) \bar{\theta}_i + \left( \frac{2EI}{l} - \frac{NI}{30} \right) \bar{\theta}_j \quad (3.81b)$$

$$M_j = \left( \frac{2EI}{l} - \frac{NI}{30} \right) \bar{\theta}_i + \left( \frac{4EI}{l} + \frac{4NI}{30} \right) \bar{\theta}_j \quad (3.81c)$$

E as componentes da matriz de rigidez:

$$K_{i1} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{l} \quad (3.82a)$$

$$K_{i22} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EA\bar{u}}{30} + \frac{EAl}{900} (24\bar{\theta}_i^2 - 12\bar{\theta}_i\bar{\theta}_j + 9\bar{\theta}_j^2) \quad (3.82b)$$

$$K_{i33} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EA\bar{u}}{30} + \frac{EAl}{900} (9\bar{\theta}_i^2 - 12\bar{\theta}_i\bar{\theta}_j + 24\bar{\theta}_j^2) \quad (3.82c)$$

$$K_{i2} = K_{i21} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{30} (4\bar{\theta}_i - \bar{\theta}_j) \quad (3.82d)$$

$$K_{i3} = K_{i31} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{30} (-\bar{\theta}_i + 4\bar{\theta}_j) \quad (3.82e)$$

$$K_{i23} = K_{i32} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{2EI}{l} - \frac{EA\bar{u}}{30} + \frac{EAl}{450} (-3\bar{\theta}_i^2 + 9\bar{\theta}_i\bar{\theta}_j - 3\bar{\theta}_j^2) \quad (3.82f)$$

Essa formulação é definida aqui como a SOF-5/EB.

### 3.5.2 Deformação cisalhante consistente

Nesta seção propõe-se que elemento viga-coluna seja formulado agora de acordo com a teoria de viga de Timoshenko, SOF-5/T. Primeiramente, considera-se que as funções de aproximação do deslocamento transversal e da rotação, não possam provocar do “*shear locking*”, sendo derivadas através dos graus de liberdade nodais e das equações de equilíbrio do elemento. Assim a função de interpolação do deslocamento axial consistente e a deformação axial constante podem ser obtidas usando a função de aproximação do deslocamento transversal, ou seja, através das Equações (3.70) e (3.73). Por fim, as

expressões das forças internas e a matriz de rigidez podem ser derivadas através do princípio de estacionaridade da energia potencial do sistema.

De acordo com a hipótese de viga de Timoshenko, a deformação cisalhante  $\gamma$  e a curvatura  $\kappa$  são dadas por:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta \quad (3.83)$$

$$\kappa = -\frac{d\theta}{dx} \quad (3.84)$$

E os correspondentes momento fletor e força cisalhante interna por:

$$M = EI\kappa \quad (3.85)$$

$$Q = kGA\gamma \quad (3.86)$$

As equações diferenciais de equilíbrio do elemento podem ser obtidas através PTV, e são escritas a seguir:

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (3.87)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (3.88)$$

Com a substituição de (3.83)-(3.86) nas equações anteriores, chegam-se nas equações de equilíbrio em termos de deslocamentos e rotações, ou seja:

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + kGA \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) = 0 \quad (3.89a)$$

$$kGA \left( \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \right) = 0 \quad (3.89b)$$

Se uma função de interpolação cúbica é adotada para aproximar o deslocamento transversal,  $v$ , e através da Equação (3.89b), pode-se escrever:

$$v = (l-x)x \frac{(l+6bl-x)\bar{\theta}_i - (6bl+x)\bar{\theta}_j}{(1+12b)l^2} \quad (3.90)$$

$$\theta = \frac{(l-x)(l+12bl-3x)\bar{\theta}_i + x(-2l+12bl+3x)\bar{\theta}_j}{(1+12b)l^2} \quad (3.91)$$

com:

$$b = \frac{EI}{kGA l^2} \quad (3.92)$$

Conhecidas as aproximações para os deslocamentos e a rotação, chega-se de forma consistente na expressão da deformação axial do elemento de viga-coluna, incluindo o efeito cisalhante, isto é:

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{l} + \frac{2\beta_1 \bar{\theta}_i^2 - \beta_2 \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j + 2\beta_1 \bar{\theta}_j^2}{30} \quad (3.93)$$

com:

$$\beta_1 = \frac{1+15b+90b^2}{(1+12b)^2} \quad (3.94a)$$

$$\beta_2 = \frac{1+60b+360b^2}{(1+12b)^2} \quad (3.94b)$$

A energia potencial do elemento, incluindo a parcela da energia de deformação cisalhante, fica:

$$\Pi = U - \Omega = \frac{1}{2} EA \int_0^l \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^l \kappa^2 dx + \frac{1}{2} kGA \int_0^l \gamma^2 dx - \sum \mathbf{f}_l \mathbf{u}_l \quad (3.95)$$

Finalmente, considerando a condição de estacionaridade de  $\Pi$ , chegam-se nas componentes das forças internas (Equações (3.79)), que são apresentadas a seguir:

$$N = EA \left( \frac{\bar{u}}{l} + \frac{2\beta_1 \bar{\theta}_i^2 - \beta_2 \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j + 2\beta_1 \bar{\theta}_j^2}{30} \right) \quad (3.96a)$$

$$M_i = \left( \alpha_1 \frac{4EI}{l} + \beta_1 \frac{4NI}{30} \right) \bar{\theta}_i + \left( \alpha_2 \frac{2EI}{l} - \beta_2 \frac{NI}{30} \right) \bar{\theta}_j \quad (3.96b)$$

$$M_j = \left( \alpha_2 \frac{2EI}{l} + \beta_2 \frac{NI}{30} \right) \bar{\theta}_i + \left( \alpha_1 \frac{4EI}{l} - \beta_1 \frac{4NI}{30} \right) \bar{\theta}_j \quad (3.96c)$$

em que:

$$\alpha_1 = \frac{1+3b}{1+12b} \quad (3.97a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1-6b}{1+12b} \quad (3.97b)$$

Já as componentes da matriz de rigidez tangente no sistema local do elemento são dadas por (Equação (3.80)):

$$K_{i_{11}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{l} \quad (3.98a)$$

$$K_{i_{22}} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_i} = \alpha_1 \frac{4EI}{l} + \beta_1 \frac{4EA\bar{u}}{30} + \frac{EAl}{900} (24\beta_1^2 \bar{\theta}_i^2 - 12\beta_1\beta_2 \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j + (8\beta_1^2 + \beta_2^2) \bar{\theta}_j^2) \quad (3.98b)$$

$$K_{i_{33}} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_j} = \alpha_1 \frac{4EI}{l} + \beta_1 \frac{4EA\bar{u}}{30} + \frac{EAl}{900} ((8\beta_1^2 + \beta_2^2) \bar{\theta}_i^2 - 12\beta_1\beta_2 \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j + 24\beta_1^2 \bar{\theta}_j^2) \quad (3.98c)$$

$$K_{i_{12}} = K_{i_{21}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{30} (4\beta_1 \bar{\theta}_i - \beta_2 \bar{\theta}_j) \quad (3.98d)$$

$$K_{i_{13}} = K_{i_{31}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{30} (-\beta_2 \bar{\theta}_i + 4\beta_1 \bar{\theta}_j) \quad (3.98e)$$

$$K_{i_{23}} = K_{i_{32}} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_i} = \alpha_2 \frac{2EI}{l} - \beta_2 \frac{EA\bar{u}}{30} + \frac{EAl}{450} (-3\beta_1\beta_2 \bar{\theta}_i^2 + (8\beta_1^2 + \beta_2^2) \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j - 3\beta_1^2 \bar{\theta}_j^2) \quad (3.98f)$$

Os parâmetros  $\alpha_i$  ( $i = 1,2$ ) e  $\beta_i$  ( $i = 1,2$ ) representam os efeitos linear e não linear, respectivamente, devido a deformação cisalhante. Se a deformação cisalhante for negligenciada, o parâmetro  $b$  desaparece e os parâmetros correspondentes  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  serão iguais a 1. Assim, as forças internas (Equação (3.96)) e a matriz de rigidez tangente

(Equação (3.98)) seriam degeneradas para as forças internas e matriz de rigidez que seriam obtidas através da hipótese de viga de Euler-Bernoulli.

# Capítulo 4

## Análises e Resultados Numéricos

### 4.1 Introdução

O objeto com este capítulo é validar as formulações para análise estática geometricamente não linear de estruturas reticuladas que foram apresentadas no capítulo anterior. O método utilizado para a resolução dos sistemas não lineares, juntamente com as estratégias de incremento de carga e iteração são descritas em cada exemplo apresentado.

Na seção 4.2 serão estudados alguns exemplos estruturais clássicos nos quais a solução numérica obtida neste trabalho será comparada com resultados analíticos e números encontrados na literatura. Um estudo com relação ao refinamento da malha também será realizado.

Em seguida na seção 4.3, fez-se um estudo com relação a teoria de viga adotada, Euler-Bernoulli e de Timoshenko. O propósito é mostrar a importância da consideração da deformação devido ao cisalhamento com relação a esbeltez do elemento analisado. A seção 4.4 e 4.5 irá mostrar a eficiência das formulações implementadas agora comparadas com as formulações já existentes no CS-ASA.

Alguns problemas estruturais são fortemente não lineares, na seção 4.6 verifica-se a capacidade das formulações implementadas em analisar esses sistemas. E por fim, mostram-se exemplos que apresentam pontos de bifurcação e a aptidão de identificá-los.

## 4.2 Exemplos Clássicos

Esta seção tem como objetivo validar as formulações de elementos finitos não lineares estudadas e implementadas nesse trabalho. Para este propósito serão abordados exemplos clássicos de problemas de equilíbrio e estabilidade estrutural que possuem resultados analíticos e números encontrados na literatura.

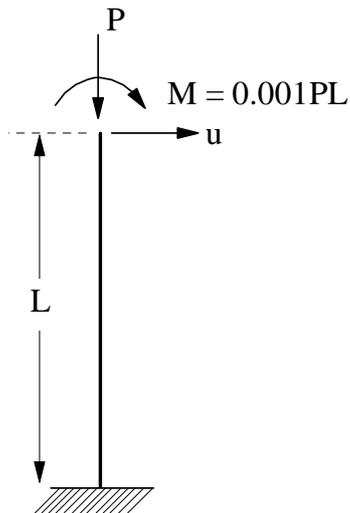
O pilar engastado-livre (Figura 4.1) e a viga em balanço mostrada na Figura 4.3, possui solução analítica apresentada por Southwell (1941) e Timoshenko e Gere (1982), respectivamente. As análises serão realizadas com todas as formulações estudadas, considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli e também de Timoshenko.

O exemplo da viga engastada-livre submetida a um momento fletor na extremidade, ilustrada na Figura 4.5, apresenta um comportamento fortemente não linear e será comparado com a solução numérica apresentada por Bathe e Bolourchi (1979). E por fim, o último exemplo apresentado nessa seção consiste em um arco senoidal abatido com carga uniformemente distribuída (Figura 4.7). Este sistema pode ser encontrado na literatura em vários trabalhos, como por exemplo Bergan (1980), Galvão (2000), Silva (2009) e Pires (2012).

### 4.2.1 Pilar Engastado-Livre

Este exemplo trata-se de um pilar ilustrado na Figura 4.1, onde uma das extremidades está engastada e a outra livre, submetida a uma carga vertical  $P$  aplicada no seu topo associada a uma pequena excentricidade ( $M = 0.001 PL$ ), introduzida com o objetivo de evitar dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação. O pilar tem comprimento  $L$ , rigidez à flexão  $EI$ , e coeficiente de forma  $k = 1$ . O módulo de elasticidade transversal,  $G$ , é considerado como sendo a metade do módulo de elasticidade,  $E$  ( $\nu = 0$ ). Discretizou-se o pilar em oito, seis, quatro, dois e um elemento finito.

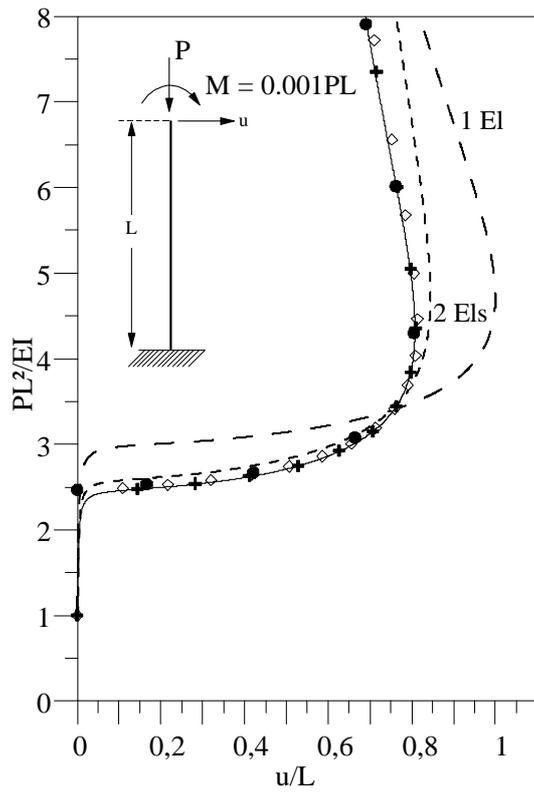
Na presente análise utilizou-se o método de Newton-Raphson modificado, juntamente com a estratégia de incremento de comprimento de arco e para a estratégia de iteração adotou-se a técnica da norma mínima dos deslocamentos residuais. O critério de convergência escolhido foi o baseado no equilíbrio das forças presentes no sistema, com tolerância  $\zeta = 10^{-3}$  e o incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , para o primeiro passo incremental foi considerado igual a  $0.2EI/(PL^2)$  com  $P = 1$ .



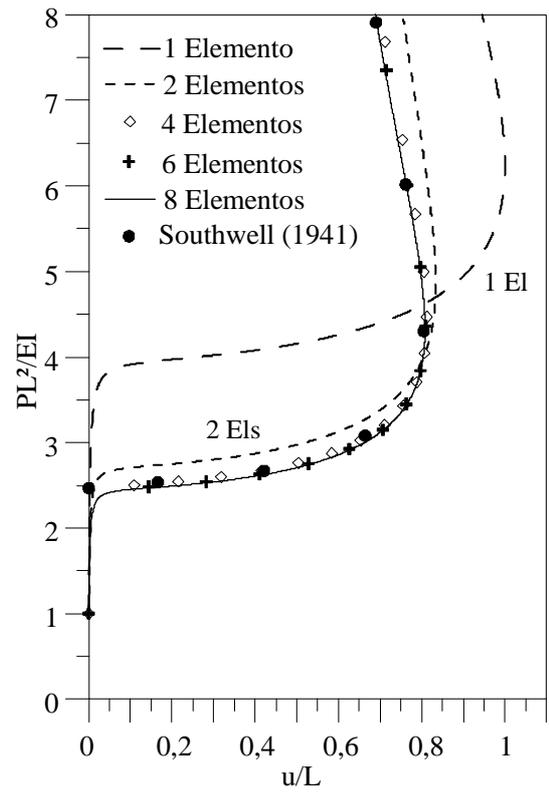
**Figura 4.1** Pilar engastada-livre

Para avaliar a qualidade dos resultados obtidos, utilizou-se a solução analítica apresentada por Southwell (1941). Os caminhos não lineares de equilíbrio obtidos para SOF-4 e SOF-5, com a teoria de viga de Euler-Bernoulli e também a de Timoshenko, estão ilustrados na Figura 4.2. Observa-se que o problema analisado apresenta em sua trajetória de equilíbrio uma região de grandes deslocamentos horizontais,  $u$ , e cargas praticamente constantes, seguido ainda por um ponto limite de deslocamento.

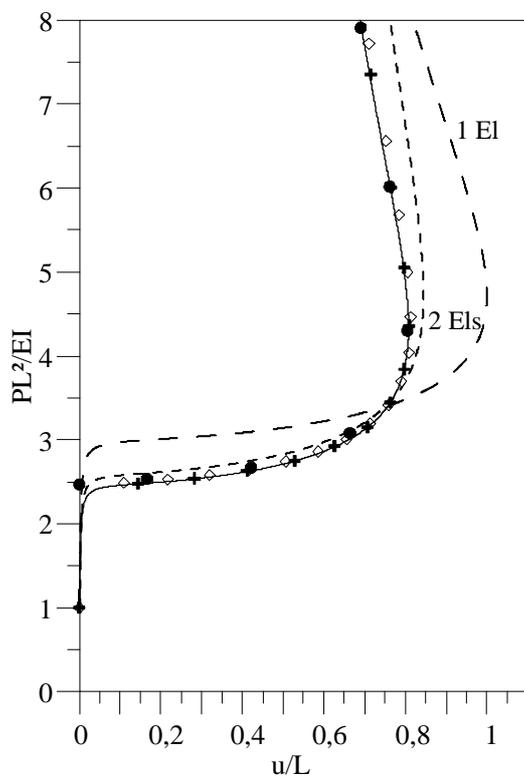
Através da Figura 4.2 percebe-se que os resultados encontrados para esse sistema, discretizado em 6 ou mais elementos, estão muito próximos da solução analítica dada por Southwell (1941), o que comprova a eficiência das formulações na solução desse problema. Nota-se que para a formulação SOF-4/T (Figura 4.2b), a convergência é mais lenta do que para as formulações baseadas na teoria de Euler-Bernoulli e também para SOF-5/T. Crisfield (1991) justifica esse fenômeno devido a consideração, na formulação SOF-4, de funções de interpolação de baixa ordem para o deslocamento horizontal,  $u$ . Isso não acontece na SOF-5, pois como mencionado anteriormente, utiliza-se uma função de interpolação para o deslocamento horizontal de ordem mais elevada.



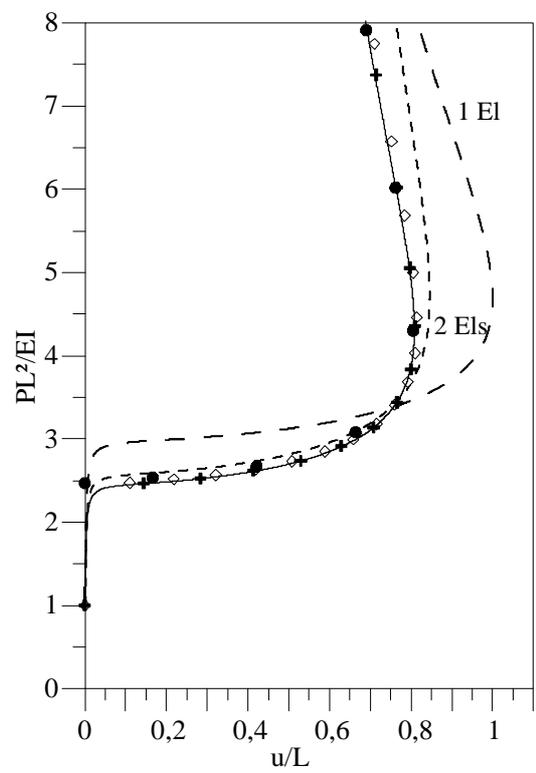
(a) Formulação SOF-4/EB



(b) Formulação SOF-4/T



(c) Formulação SOF-5/EB

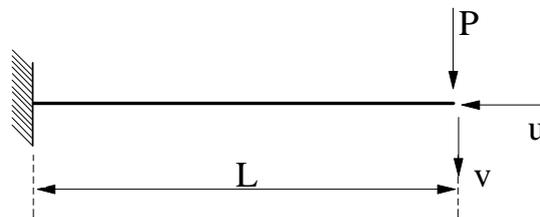


(d) Formulação SOF-5/T

**Figura 4.2** Trajetórias de equilíbrio de pilar engastado-livre para diferentes formulações e análise de convergência

### 4.2.2 Viga Engastada-Livre Sob Carga Concentrada na Extremidade

O segundo exemplo é frequentemente usado para validar modelos numéricos pelo fato de se conhecer os resultados analíticos. Esses resultados apresentados por Timoshenko e Gere (1982), serão usados para comprovar a eficiência das formulações do presente trabalho. Têm-se uma viga engastada livre submetida a uma carga concentrada  $P$ , conforme Figura 4.3. A viga possui comprimento  $L = 1\text{ m}$ , seção transversal com área  $A = 10^{-2}\text{ m}^2$ , momento de inércia  $I = 10^{-5}\text{ m}^4$ , módulo de elasticidade  $E = 10^7\text{ kN/m}^2$ , coeficiente de forma  $k = 1$  e o módulo de elasticidade transversal,  $G$ , considerado como sendo a metade de  $E$  ( $\nu = 0$ ).

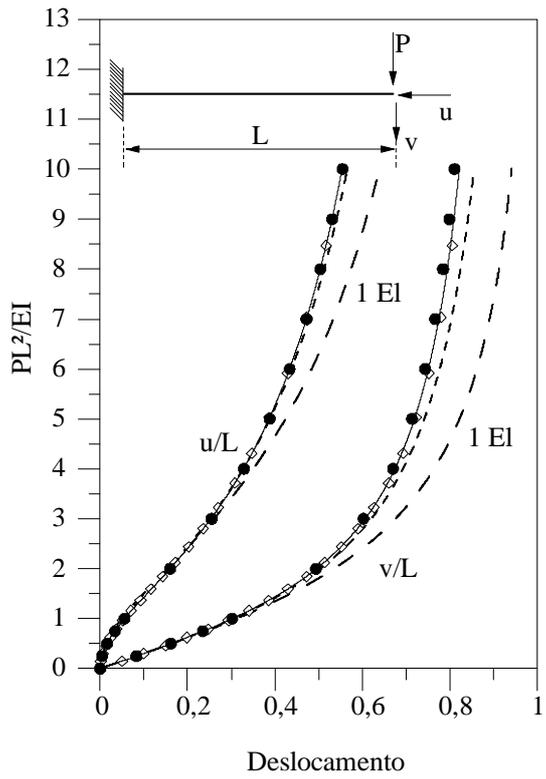


**Figura 4.3** Viga engastada-livre sob carga concentrada na extremidade

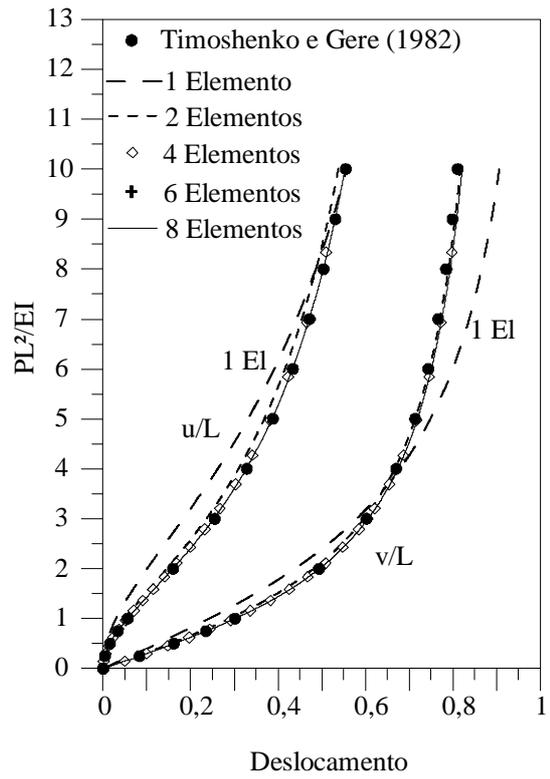
O método de Newton-Raphson modificado foi usado para execução destas análises. Como estratégia de incremento de carga usou-se o comprimento de arco e para a estratégia de iteração a técnica da norma mínima dos deslocamentos residuais foi adotada. O critério de convergência escolhido foi o baseado no equilíbrio das forças, com tolerância  $\zeta = 10^{-3}$  e o incremento inicial do parâmetro de carga foi  $\Delta\lambda^0 = 0,1$ .

Foi realizado um estudo sobre a influência do número de elementos usados na discretização do problema. Como pode ser visto na Figura 4.4 todas as formulações mostraram bons resultados quando o elemento possui uma malha de quatro elementos ou mais.

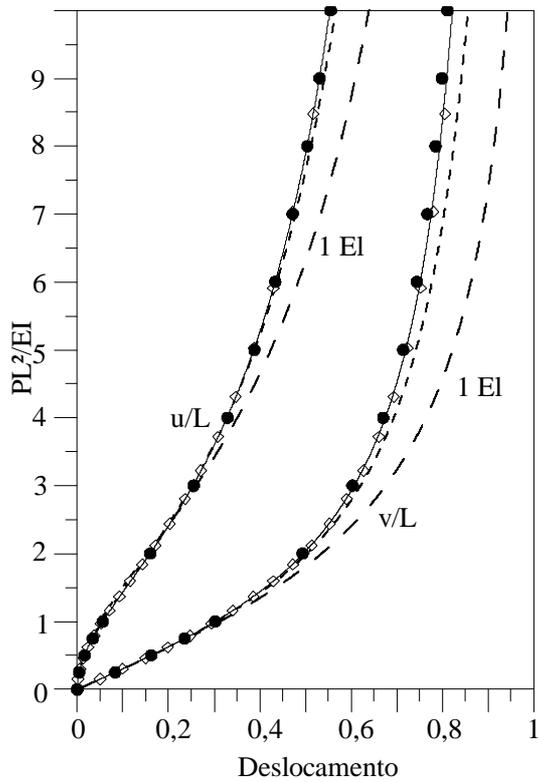
Na Tabela 4.1 apresentam-se os valores dos erros relativos do deslocamento vertical,  $v$ , e horizontal,  $u$ , comparados com a solução analítica apresentados por Timoshenko e Gere (1982). Observa-se que com o aumento da discretização do sistema analisado o erro torna-se menor. Para todas as formulações estudadas e implementadas os resultados apresentados são bons.



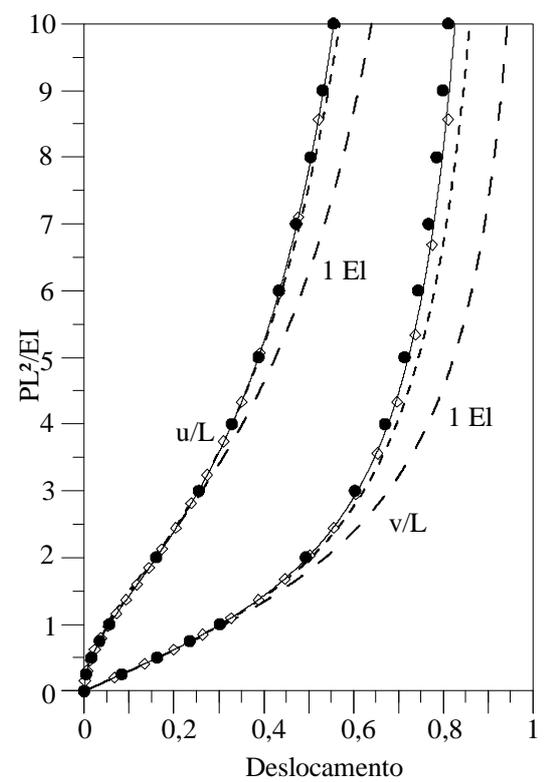
(a) Formulação SOF-4/EB



(b) Formulação SOF-4/T



(c) Formulação SOF-5/EB



(d) Formulação SOF-5/T

**Figura 4.4** Trajetórias de equilíbrio de viga engastada-livre sob carga concentrada para diferentes formulações e análise de convergência

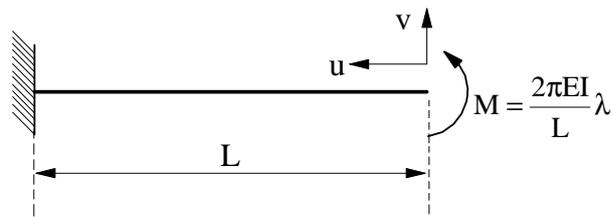
**Tabela 4.1** Erro relativo dos deslocamentos  $v$  e  $u$ 

<b>Deslocamento vertical (<math>v</math>)</b>				
Número de elementos	SOF-4/EB	SOF-4/T	SOF-5/EB	SOF-5/T
1	0,161	0,117	0,161	0,162
2	0,055	0,008	0,055	0,059
4	0,019	0,010	0,019	0,023
6	0,013	0,012	0,013	0,018
<b>Deslocamento horizontal (<math>u</math>)</b>				
Número de elementos	SOF-4/EB	SOF-4/T	SOF-5/EB	SOF-5/T
1	0,150	0,003	0,150	0,153
2	0,019	-0,029	0,020	0,024
4	-0,001	-0,007	-0,001	0,003
6	-0,001	-0,001	-0,001	0,002

### 4.2.3 Viga Engastada-Livre Sob Momento Fletor na Extremidade

A viga analisada está engastada em uma das extremidades e livre em outra, tem comprimento  $L$ , seção transversal retangular e está submetida a momento fletor na extremidade livre, como ilustrado na Figura 4.5. A viga possui, rigidez à flexão  $EI$ , e coeficiente de forma  $k = 1$ . O módulo de elasticidade transversal,  $G$ , é considerado como metade do módulo de elasticidade,  $E$  ( $\nu = 0$ ). Esse exemplo clássico foi analisado por vários pesquisadores, entre os quais se encontram Bathe e Bolourchi (1979), Simo e Vu-Quoc (1986), Crisfield (1990) e Gummadi e Palazotto (1998), para testar a precisão das metodologias por eles propostas. Nesse estudo, o momento fletor aplicado na extremidade foi aumentado variando o parâmetro de carga  $\lambda$  de 0.0 a 2.0. Para  $\lambda = 2.0$ , tem-se que a viga se deforma com a extremidade livre rotacionando  $720^\circ$ .

O método de Newton-Raphson modificado, agregado a estratégia de iteração conhecida como norma mínima dos deslocamentos residuais, foi usado. Adotou-se o incremento automático do comprimento de arco para definir o incremento inicial do parâmetro de carga. O critério de convergência escolhido foi o baseado nos deslocamentos, com tolerância  $\zeta = 10^{-3}$  e o incremento inicial do parâmetro de carga foi  $\Delta\lambda^0 = 0,1$ .



**Figura 4.5** Viga engastada-livre sob momento fletor na extremidade

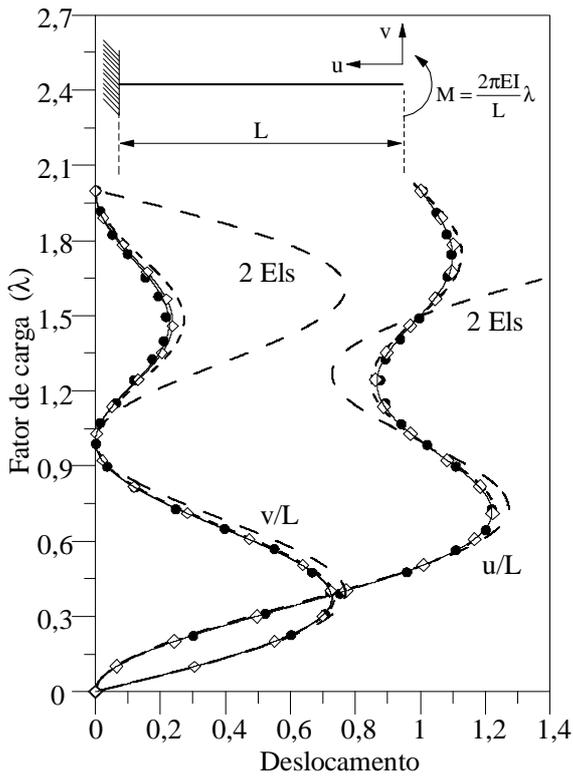
Foi realizado aqui um estudo sobre a influência do número de elementos usados na modelagem da viga, para todas as formulações estudadas. Na Figura 4.6 mostra-se as trajetórias de equilíbrio obtidas. Utilizou-se malhas de dois, quatro, seis e oito elementos finitos. São ilustradas a variação dos deslocamentos horizontal,  $u$ , e vertical,  $v$ , da extremidade livre da viga com o parâmetro de carga,  $\lambda$ . Os resultados são comparados aos de Bathe e Bolourchi (1979).

A viga discretizada com apenas dois elementos apresenta a variação de  $u$  e  $v$ , com uma discrepância relativamente grande comparada aos resultados do Bathe e Bolourchi (1979). Quando a análise foi realizada usando quatro elementos ou mais observa-se uma aproximação dos resultados.

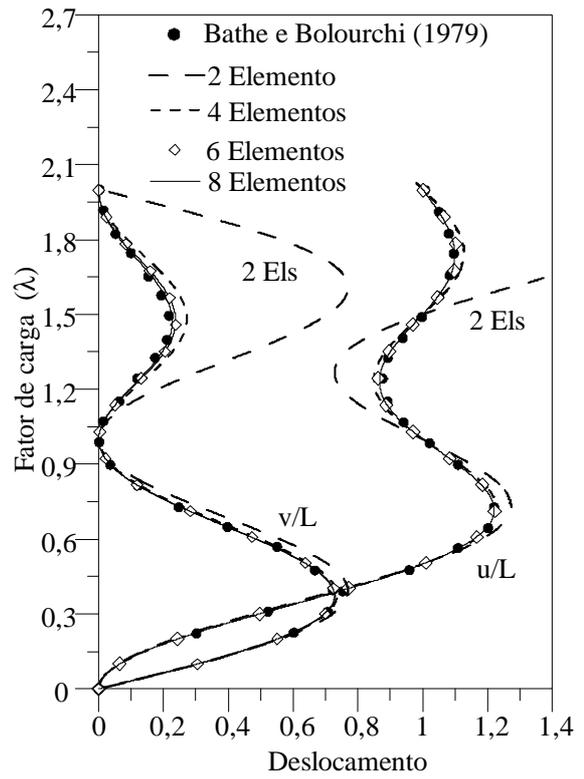
#### 4.2.4 Arco Senoidal

O exemplo a ser tratado nesta seção, consiste em um arco senoidal biapoado submetido a um carregamento uniformemente distribuído,  $P$ . Na Figura 4.7 ilustra-se o sistema estrutural descrito, e apresenta suas propriedades físicas e geométricas.

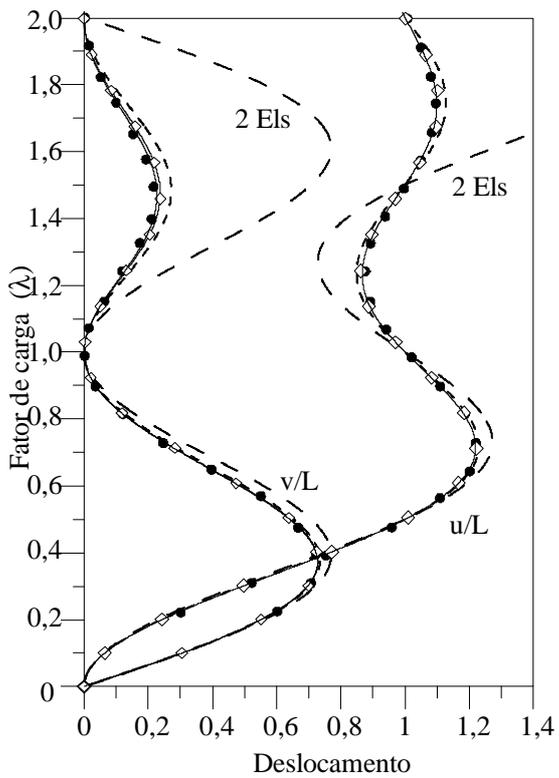
Esse sistema pode ser encontrado na literatura como, por exemplo, nos trabalhos de Bergan (1980), Galvão (2004), Silva (2009) e Pires (2012). Galvão (2004) utilizou o arco senoidal para validar algumas formulações de elementos finitos e apresentou um estudo da influência de imperfeições nas condições de apoio e de carregamento na estabilidade desse arco. Silva (2009) realizou uma análise de vibração não linear, na qual a relação entre a frequência de vibração livre e a amplitude da resposta foi observada. Uma avaliação sobre o tipo, *hardening* ou *softening*, e grau de não linearidade do arco considerando diferentes condições de apoio foi feita. Pires (2012) analisou as trajetórias de equilíbrio desse arco senoidal, obtidas utilizando a estratégia do resíduo ortogonal no processo convencional de solução e a mesma estratégia associada ao fluxo normal.



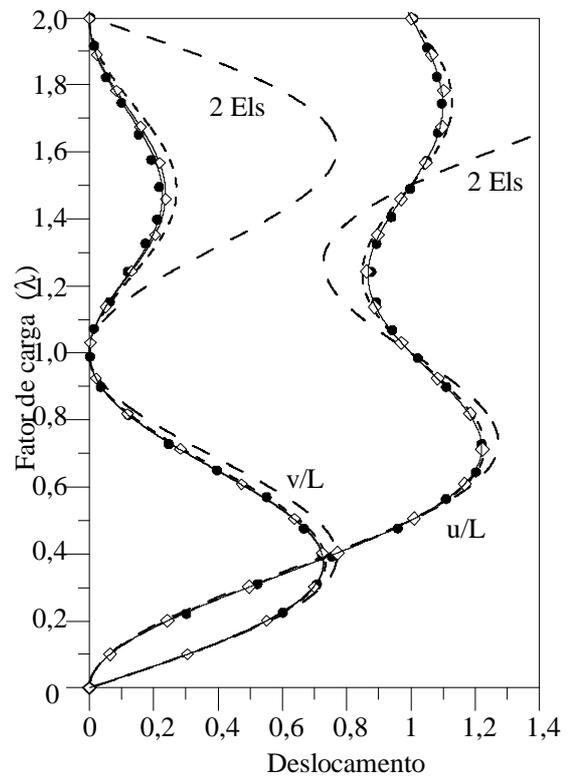
(a) Formulação SOF-4/EB



(b) Formulação SOF-4/T



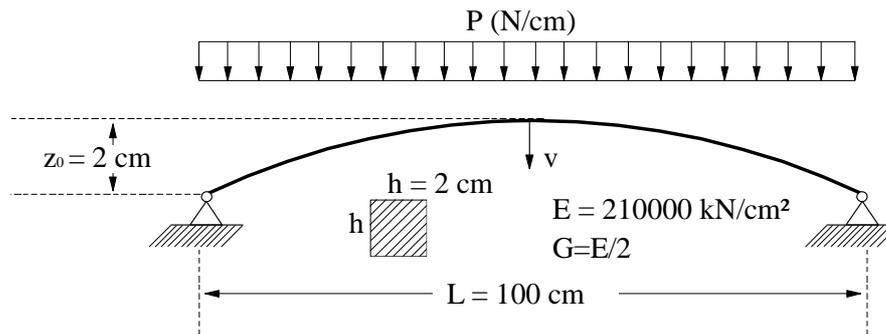
(c) Formulação SOF-5/EB



(d) Formulação SOF-5/T

**Figura 4.6** Trajetórias de equilíbrio de viga engastada-livre sob momento fletor para diferentes formulações e análise de convergência

A solução não-linear foi obtida utilizando a estratégia de iteração comprimento de arco cilíndrico, com o método Newton-Raphson modificado. O incremento automático do comprimento de arco foi adotado como controlador do valor inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . Considerou-se para o primeiro incremento  $\Delta\lambda^0 = 5$ . O critério de convergência escolhido obedece às relações de deslocamento e para controlar a convergência foi adotada uma tolerância  $\zeta = 10^{-4}$ .



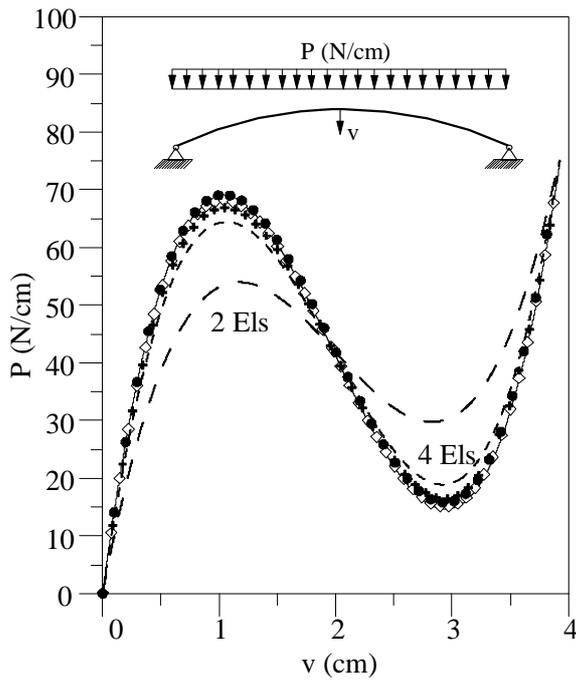
**Figura 4.7** Arco senoidal: geometria e carregamento

Na Figura 4.8 apresentam-se as trajetórias de equilíbrio obtidas usando as formulações SOF-4 e SOF-5. Realizou-se o estudo paramétrico do sistema analisado com dois, quatro, seis, oito e dezesseis elementos. Para comparação, foram usados os resultados numéricos alcançados por Bergan (1980). Percebe-se que com o aumento do número de elementos utilizados para análise, os resultados foram se aproximando dos de Bergan (1980). Os valores alcançados estão um pouco discrepantes apenas quando a discretização foi feita com dois e quatro elementos, os demais estão bem próximos.

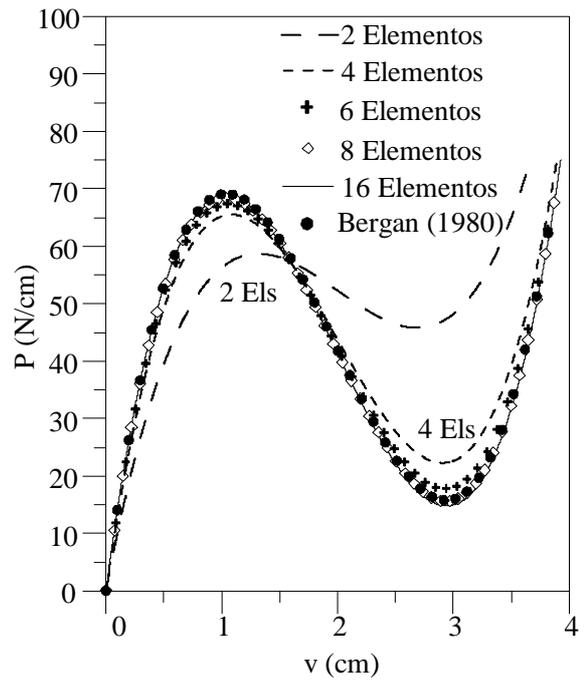
No caminho não linear, como observa-se na curva carga-deslocamento vertical ilustrado na Figura 4.8, apresenta-se dois pontos limites de carga. Na Tabela 4.2 apresentam-se os valores desses pontos que são comparados àqueles obtidos por Bergan (1980). Observa-se que os valores estão bem próximos dos resultados utilizados como referência.

**Tabela 4.2** Valores limites de carga,  $P$  (N/cm)

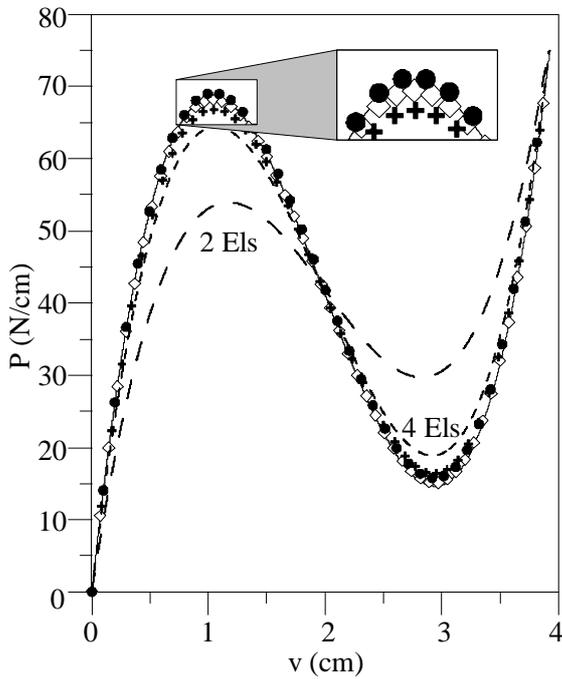
Bergan (1980)	SOF-4/EB	SOF-4/T	SOF-5/EB	SOF-5/T
69,8	68,637	68,697	68,637	68,614
14,8	14,609	14,768	14,609	14,570



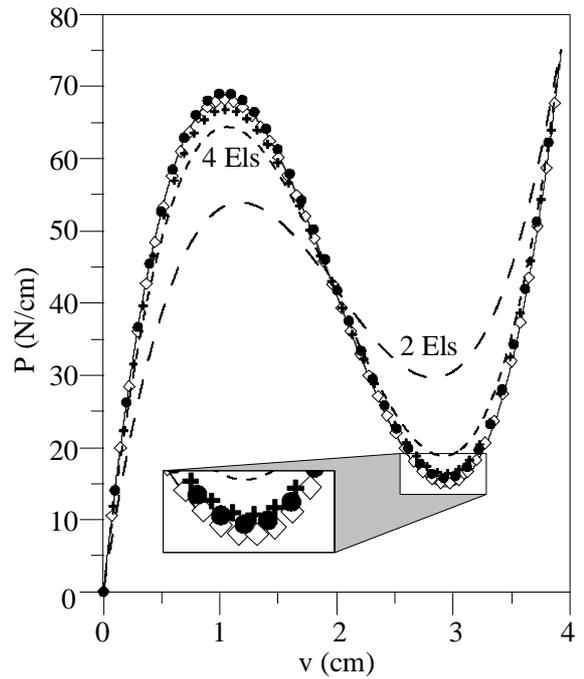
(a) Formulação SOF-4/EB



(b) Formulação SOF-4/T



(c) Formulação SOF-5/EB



(d) Formulação SOF-5/T

**Figura 4.8** Trajetórias de equilíbrio de arco senoidal para diferentes formulações e análise de convergência

## 4.3 Teoria de Viga

Nesta seção será realizado um estudo com relação a teoria de viga adotada na formulação que irá analisar os elementos estruturais. Primeiramente será feito um estudo com uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra (Figura 4.3), variando a altura da seção transversal e mantendo o valor do seu comprimento,  $L$ , obtendo uma variação na sua esbeltez. O segundo exemplo trata-se de um problema clássico conhecido como pórtico de Williams, que apresenta uma seção circular vazada (Figura 4.11). Nessa seção transversal as deformações cisalhantes têm muita influência no deslocamento vertical do elemento estrutural.

### 4.3.1 Influência da Esbeltez

O primeiro exemplo tem como objetivo estudar a influência da esbeltez da seção com relação a teoria de viga adotada. O sistema estudado será uma viga engastada livre submetida a uma carga concentrada  $P$ , conforme Figura 4.3. A viga possui comprimento  $L = 1\text{ m}$ , módulo de elasticidade  $E = 10^7\text{ kN/m}^2$ , coeficiente de forma  $k = 1$  e o módulo de elasticidade transversal,  $G$ , foi considerado como sendo a metade de  $E$  ( $\nu = 0$ ).

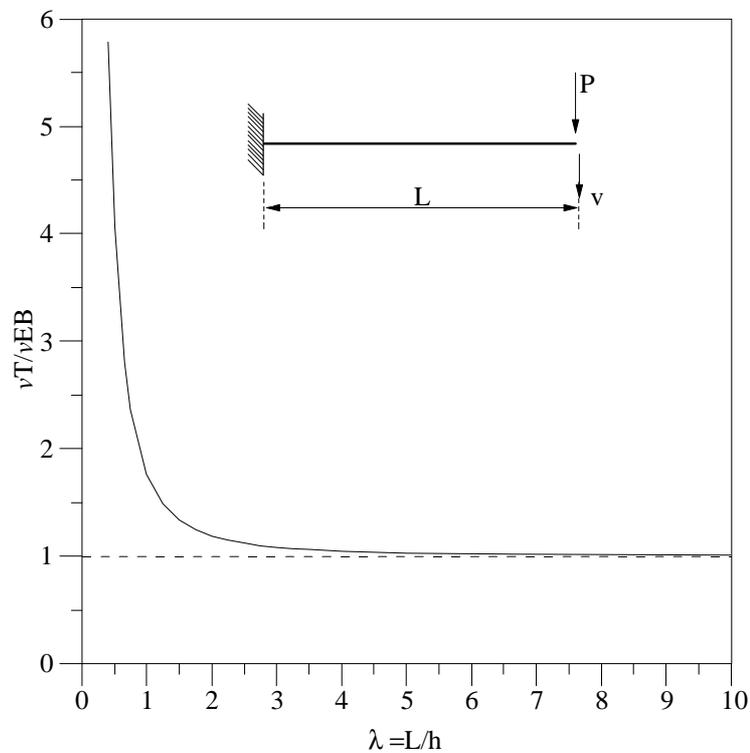
O método de Newton-Raphson modificado foi usado na presente análise, como estratégia de incremento de carga usou-se a comprimento de arco e para a estratégia de iteração a técnica da norma mínima dos deslocamentos residuais. O critério de convergência escolhido foi o baseado no equilíbrio das forças, com tolerância  $\zeta = 10^{-3}$  e o incremento inicial do parâmetro de carga foi  $\Delta\lambda^0 = 0,1$ .

O gráfico apresentado na Figura 4.9, tem como ordenada a divisão do valor do deslocamento vertical utilizando a teoria de viga de Timoshenko ( $\nu T$ ), pelo deslocamento vertical considerando a teoria clássica ( $\nu EB$ ). O valor de  $\nu T/\nu EB$  varia em função da esbeltez da seção transversal. Observa-se, que quando a esbeltez,  $\lambda$ , é pequena, o valor de  $\nu T/\nu EB$  é maior que 1. Isso acontece pois, quando se tem um elemento delgado a teoria de Timoshenko é mais aplicável, em virtude da consideração das deformações devido ao cisalhamento na seção transversal e, assim, os deslocamentos,  $\nu T$ , apresentam valores maiores que  $\nu EB$ .

Quando a esbeltez do elemento analisado se aproxima de 10, o valor de  $\nu T/\nu EB$  tende a 1, pois os deslocamentos começam a apresentar valores próximos, utilizando teorias de viga diferentes. Se estivesse acontecendo o efeito de “*shear locking*” o valor de

$\nu T$  iria tender a zero quando a esbeltez fosse grande, pois iria acontecer um travamento por cisalhamento no elemento. Mas como esse efeito foi remediado nas formulações estudadas neste trabalho, isso não acontece.

Conclui-se então, que a teoria de Timoshenko deve ser preferencialmente utilizada quando o elemento apresentar uma pequena esbeltez, ou seja, um elemento com o valor de  $h$  (altura) grande. Nas formulações estudadas o efeito de “*shear locking*” foi reparado, utilizando apenas um ponto de Gauss nas integrações da formulação SOF-4 e para a SOF-5 utilizou-se funções de interpolação para o deslocamento horizontal de quinto grau, consistentes com a teoria de deformação não linear. Assim a teoria de Timoshenko pode ser também utilizada nas análises de elementos esbeltos.

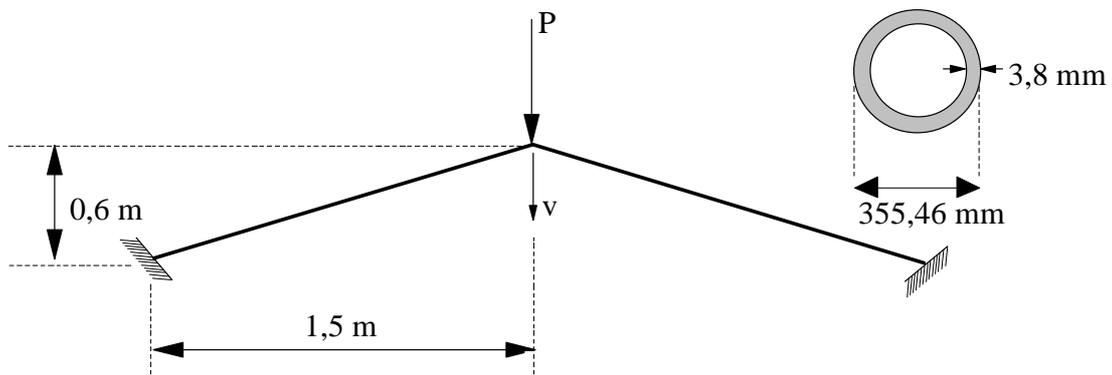


**Figura 4.9** Valores da relação  $\nu T/\nu EB$  com variação da esbeltez

### 4.3.2 Pórtico de Williams

Será analisado o pórtico abatido biengastado, composto por duas barras e submetido a uma carga concentrada  $P$ . As barras dessa estrutura possuem uma seção transversal circular vazada como representado na Figura 4.10. O módulo de elasticidade do material é  $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e o coeficiente de forma  $k = 0,5$ .

Este problema possui resultados analíticos e experimentais apresentados por Williams (1964), sendo frequentemente utilizados para validar modelos numéricos (WOOD e ZIENKIEWICS, 1977; ALVES, 1993a; YANG e KUO, 1994; PACOSTE e ERIKSSON, 1997). Porém a seção transversal adotada nesses referidos trabalhos é retangular, o que diferencia do exemplo tratado nessa seção. Tang *et al.* (2015) também utilizou esse exemplo para validar suas formulações. Esta estrutura apresenta um caminho de equilíbrio acentuadamente não linear com perda de estabilidade por ponto limite associada.



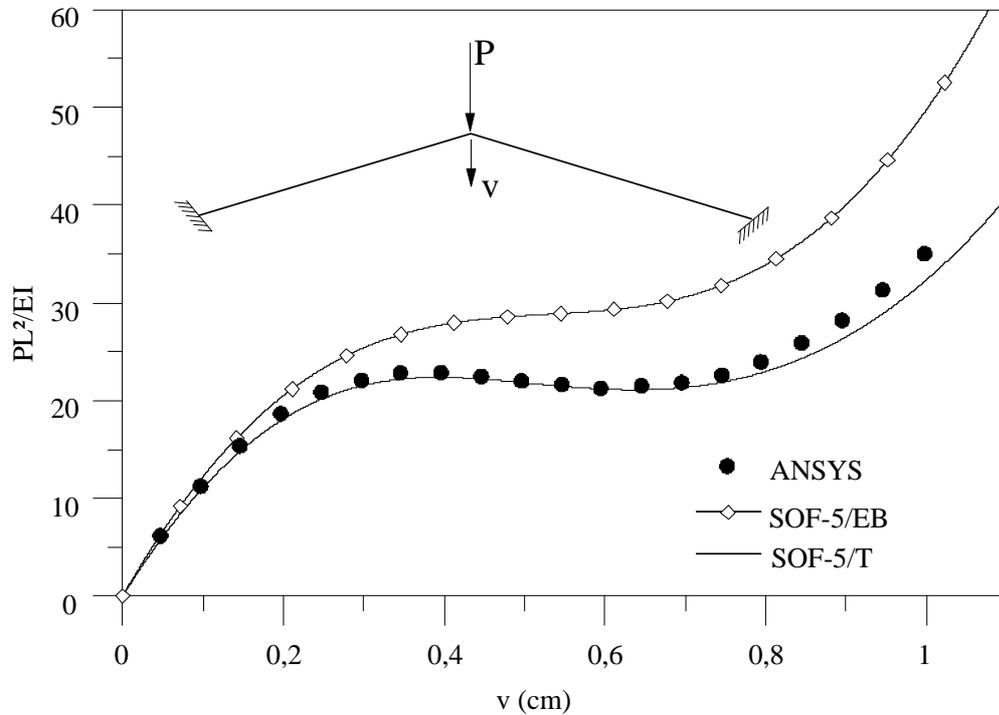
**Figura 4.10** Pórtico de Williams: geométrica e seção transversal

Na presente análise utilizou-se a formulação SOF-5 e para a obtenção da solução não-linear adotou-se a estratégia de iteração comprimento de arco cilíndrico, com o método Newton-Raphson modificado. O incremento automático do comprimento de arco foi adotado como controlador do valor inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . O primeiro incremento de carga foi  $\Delta\lambda^0 = 0,1$ . O critério de convergência escolhido foi o baseado no equilíbrio das forças e para controlar a convergência a tolerância foi  $\zeta = 10^{-3}$ .

Os resultados obtidos nessa análise estão representados na Figura 4.11, adotou-se dez elementos para discretizar a seção. Para demonstrar a precisão e a eficiência, os resultados serão comparados com os valores apresentados por Tang *et al.* (2015), obtidos pelo software comercial ANSYS utilizando vinte elementos, chamado de “188 Beam”. A seção transversal neste exemplo é circular vazada que enfatiza o efeito da deformação devido ao cisalhamento.

Observa-se na Figura 4.11, que os resultados obtidos pela formulação SOF-5/T tem resultados semelhantes com os do software ANSYS. E os valores da SOF-5/EB apresentam uma discrepância em relação aos demais. Conclui-se então, que a consideração

da deformação cisalhante é importante nesse exemplo, pois esse comportamento pós-flambagem, conforme apresentado no ANSYS, só ocorre quando a deformação por cisalhamento é considerada.



**Figura 4.11** Curva carga-deslocamento vertical

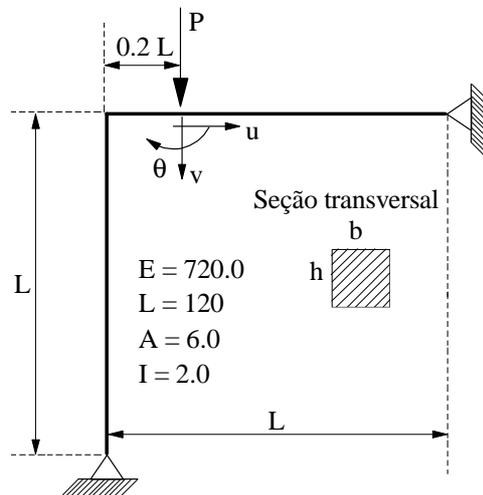
#### 4.4 Eficiência da Formulação com a Teoria de Timoshenko

A plataforma CS-ASA que foi utilizada para fazer as implementações do presente trabalho, já contém a formulação para análises não lineares geométricas (SOF-3), baseadas nos estudos de Pacoste e Eriksson (1995; 1997). A formulação referida utiliza um Referencial Lagrangiano Total (RLT), possui relações deformação-deslocamento não lineares através de funções trigonométricas e é fundamentada na teoria de viga de Timoshenko. Faz-se então uma comparação com relação a eficiência das formulações SOF-4 e SOF-5 empregando também a teoria de Timoshenko e como mencionado anteriormente, baseado em um referencial Corrotacional (RCR). O exemplo trata-se de uma estrutura conhecida como pórtico de Lee, ilustrado na Figura 4.12.

#### 4.4.1 Pórtico de Lee

Este exemplo corresponde a uma estrutura frequentemente usada para validar formulações de elementos finitos e estratégias de solução não linear. O problema a ser analisado nesta seção, é conhecido como Pórtico de Lee, ilustrado na Figura 4.12. O sistema é composto por um pilar e uma viga, com o comprimento  $L = 120 \text{ cm}$  e apoios de segundo gênero em ambas as extremidades. A seção transversal dos elementos possui área  $A = 6 \text{ cm}^2$ , momento de inércia  $I = 2 \text{ cm}^4$  e coeficiente de forma  $k = 1$ . O material que compõe as barras possui módulo de elasticidade  $E = 720 \text{ kN/cm}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . O carregamento externo consiste de uma carga vertical  $P = 1 \text{ kN}$  aplicada a  $24 \text{ cm}$  da extremidade esquerda da viga.

Essa estrutura foi primeiramente estudada e resolvida analiticamente por Lee *et al.* (1968), e também foi analisada numericamente por Schweizerhof e Wriggers (1986), Simo e Vu-Quoc (1986), Lee (1988), Coulter e Miller (1988), Chen e Blandford (1993), Pacoste e Eriksson (1997), Galvão (2004), Silva (2009) e Santana (2015), considerando o material elástico. Os autores Cichon (1984), Hsiao *et al.* (1988) e Park e Lee (1996) utilizaram este exemplo para validar suas formulações, considerando o material com comportamento elasto-plástico.



**Figura 4.12** Pórtico de Lee: geometria e carregamento

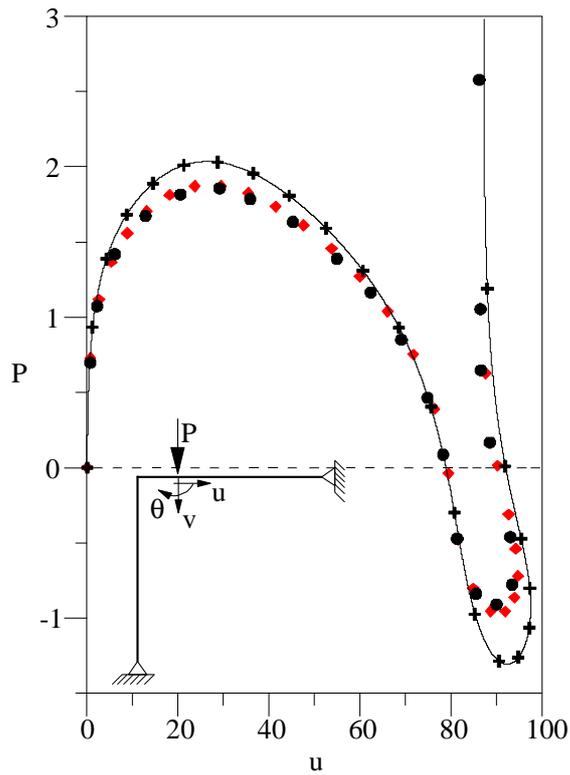
A análise foi realizada utilizando o método de Newton-Raphson modificado, acoplado à estratégia de iteração de deslocamento generalizado. Para controle do fator de carga usou-se o parâmetro de rigidez GSP. O incremento inicial do parâmetro de carga foi

$\Delta\lambda^0 = 10^{-3}$  e tolerância  $\zeta = 10^{-3}$ . O critério de convergência escolhido foi o baseado no equilíbrio das forças.

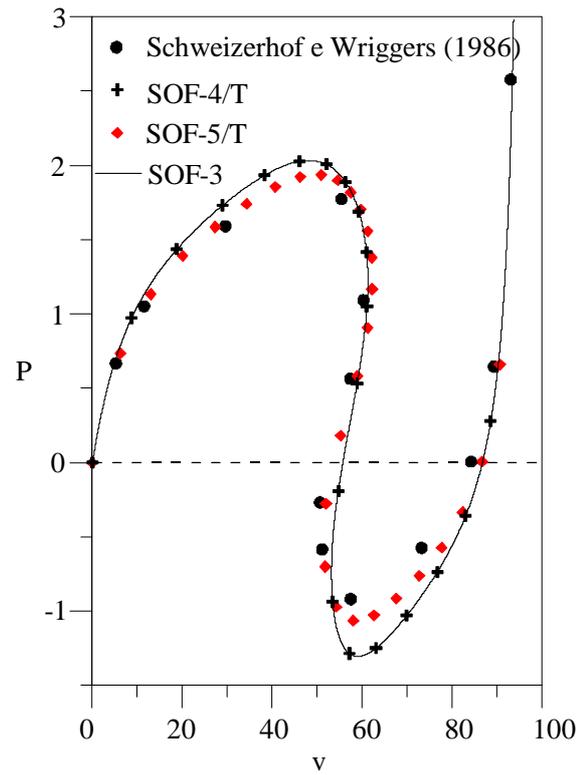
Primeiramente fez-se uma análise discretizando todo o pórtico em oito elementos, quatro em cada um dos membros, com a formulação SOF-3 e também a SOF-4/T e SOF-5/T. A Figura 4.13 apresenta o gráfico de carga-deslocamento controlando o deslocamento vertical,  $v$ , e horizontal,  $u$ , do ponto de aplicação da carga. Observa-se que os resultados obtidos com a formulações SOF-5/T do presente trabalho estão mais próximas dos valores fornecidos por Schweizerhof e Wriggers (1986), que são usados como referência. Já os resultados obtidos pela SOF-3 e também pela SOF-4/T, praticamente coincidem, apresentam uma certa discrepância dos valores usados como referência. Isso pode ser explicado devido ao aparecimento do fenômeno de travamento conhecido como “*shear locking*”, pois a estrutura analisada é esbelta. Nessas formulações esse fenômeno é remediado com a integração reduzida utilizando apenas um ponto de Gauss, porém esse processo funciona bem somente quando o sistema analisado é discretizado em um número maior de elementos. Isso não acontece na SOF-5/T pois esse fenômeno é corrigido com a utilização de uma função de interpolação do deslocamento horizontal consistente com a teoria de deformação não linear, utilizando uma função de quinto grau.

Na Figura 4.14 apresenta-se os caminhos não lineares de equilíbrio do pórtico de Lee composto por dezesseis elementos finitos, novamente para as três formulações. Observa-se que as curvas apresentadas pelas formulações SOF-3 e SOF-4/T estão mais próximas dos resultados usados como referência. Os valores alcançados pela SOF-5/T estão ainda mais próximos da solução de Schweizerhof e Wriggers (1986).

As curvas carga-deslocamento obtidas controlando a rotação,  $\theta$ , do ponto de aplicação da carga são ilustradas na Figura 4.15. Vê-se novamente a coincidência dos resultados entre SOF-3 e SOF-4/T. Quando a discretização do elemento é maior, a diferença desses resultados com a formulação SOF-5/T diminui. Conclui-se que, a SOF-5/T apresenta melhores resultados independente da malha utilizada, devido a forma mais eficiente de remediar o efeito de “*shear locking*”.

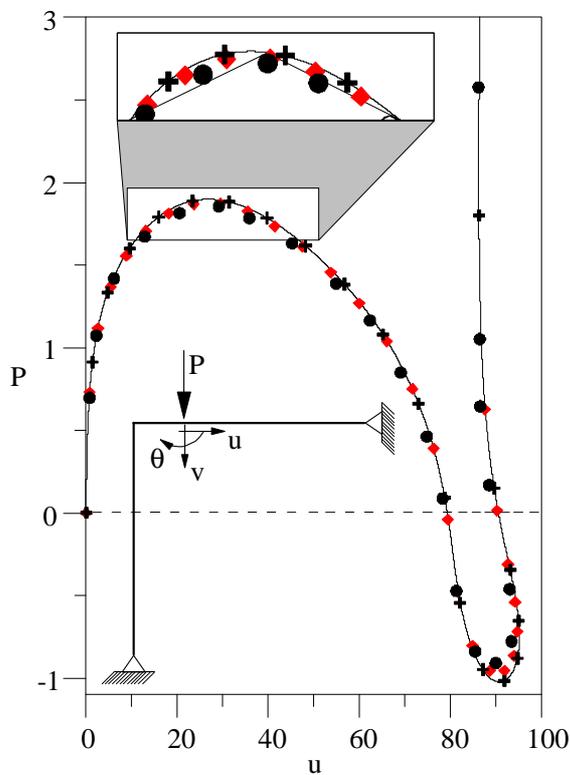


(a) Deslocamento horizontal,  $u$

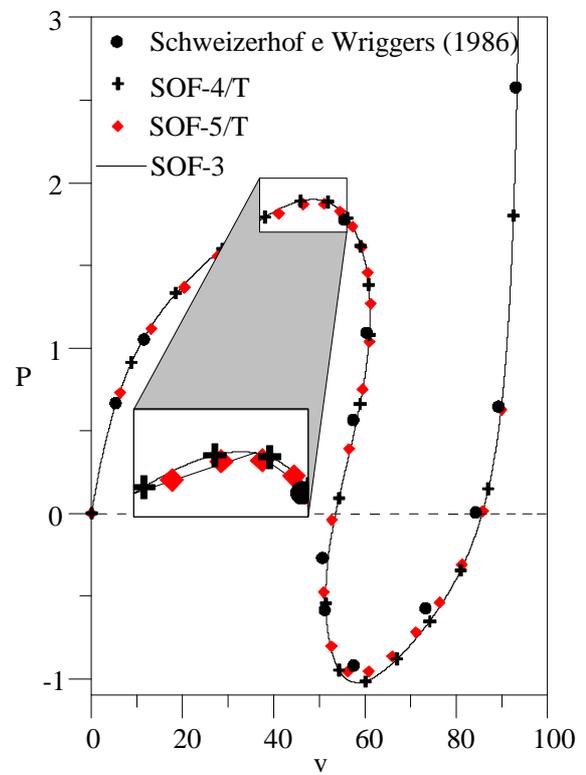


(b) Deslocamento vertical,  $v$

**Figura 4.13** Trajetória de equilíbrio para o Pórtico de Lee com 8 elementos

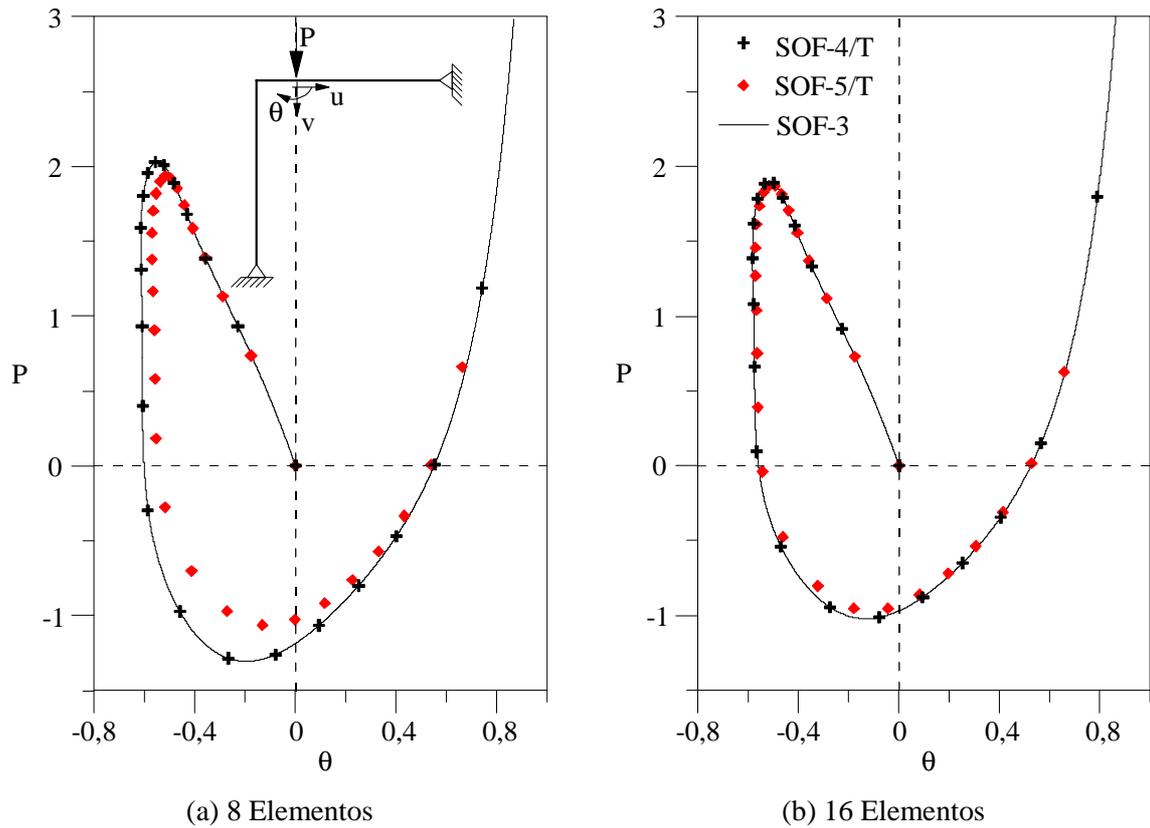


(a) Deslocamento horizontal,  $u$



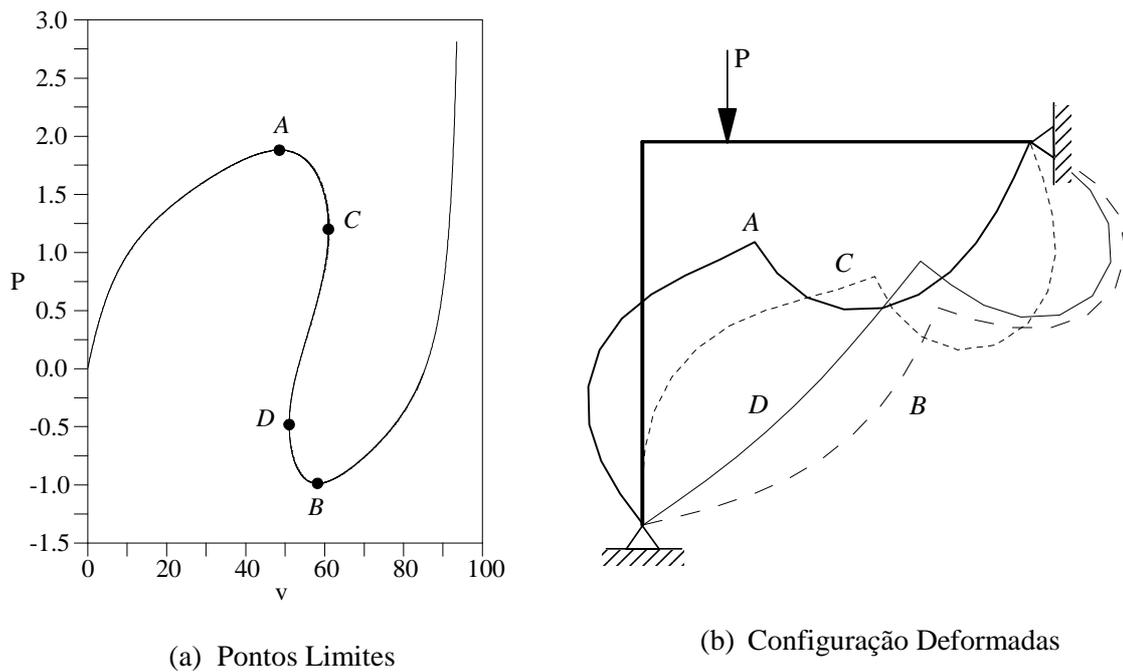
(b) Deslocamento vertical,  $v$

**Figura 4.14** Trajetória de equilíbrio para o Pórtico de Lee com 16 elementos



**Figura 4.15** Curva carga-rotação

A trajetória de equilíbrio apresenta dois pontos limites de carga (pontos *A* e *B*) e dois pontos limites de deslocamento (pontos *C* e *D*). As configurações deformadas da estrutura e a localização dos pontos limites estão ilustrados na Figura 4.16.



**Figura 4.16** Configuração deformada e seus respectivos pontos limites

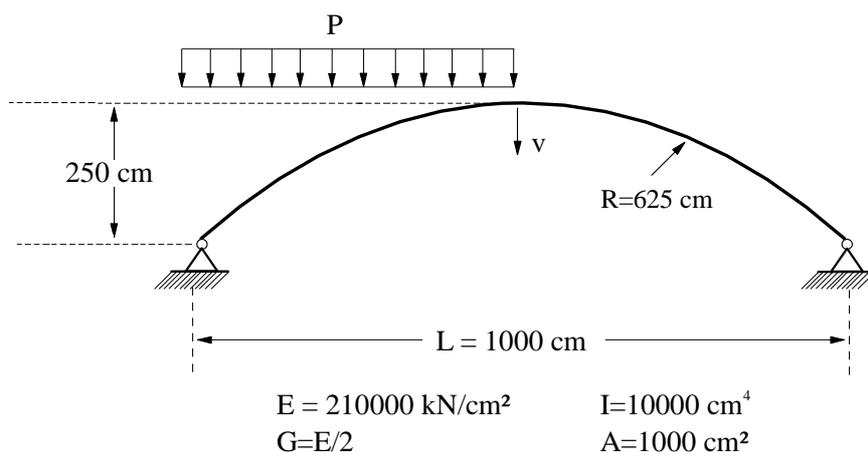
## 4.5 Eficiência da Formulação com a Teoria de Euler-Bernoulli

Pretende-se agora comprovar a eficiência das formulações implementadas no presente trabalho, como na seção anterior, comparando seus resultados com os valores fornecidos pela formulação presente no CS-ASA que adotam a teoria de viga clássica.

A formulação geometricamente não linear para análise de sistemas estruturais reticulados planos, da plataforma CS-ASA (SOF-2), é definida em Referencial Lagrangiano Atualizado (RLA) e segue os fundamentos que foi proposto por Yang e Kuo (1994). Na análise incremental, ao final de cada passo de carga, o referencial é transferido para a nova posição, ou configuração de equilíbrio, recém calculada. No presente trabalho adotou-se o RCR, que utiliza um sistema de eixos ortogonais ligado aos extremos dos elementos, que se movimenta simultaneamente com as deformações. Assim, o movimento do elemento durante o processo de carregamento é dividido em movimento de corpo rígido e na deformação pura.

### 4.5.1 Arco Circular Parcialmente Carregado

O exemplo analisado será um arco circular biapoiado submetido a um carregamento uniformemente distribuído em metade de sua extensão. Tal estrutura é ilustrada na Figura 4.17. Para realizar a análise estática, foram adotados vinte elementos finitos na modelagem do arco.



**Figura 4.17** Arco circular parcialmente carregado: geometria e carregamento

Na presente análise utilizou-se a formulação SOF-4/EB e para resolução do sistema não linear optou-se pelo método de Newton-Raphson padrão. Como estratégia de iteração

adotou-se o deslocamento generalizado. O parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , foi controlado através do parâmetro de rigidez GSP. A intensidade da carga distribuída,  $P$ , para o primeiro incremento foi considerada igual a  $10^{-1}$ . O critério de convergência escolhido foi o baseado no equilíbrio das forças e para controlar a convergência a tolerância foi  $\zeta = 10^{-4}$ .

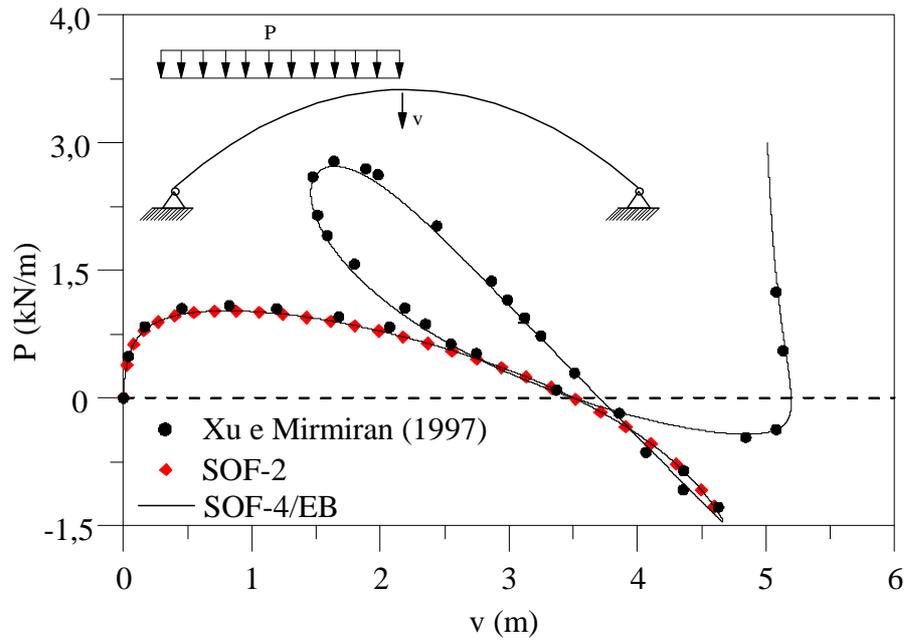
As variações do deslocamento vertical do centro do arco com a carga são mostradas na Figura 4.18. Os resultados encontrados aqui foram comparados aos obtidos numericamente por Xu e Mirmiran (1997). É possível verificar o comportamento fortemente não linear do arco parcialmente carregado. A curva apresenta três pontos limites de deslocamento e quatro pontos limites de carga, e somente com a utilização da formulação do presente trabalho, esses pontos foram ultrapassados possibilitando o traçado completo do caminho de equilíbrio. A formulação SOF-2 se mostrou incapaz de obter todo o caminho de equilíbrio, alcançando apenas pontos próximos ao segundo ponto limite de carga.

Na formulação do presente trabalho tem-se a atualização das coordenadas, deslocamentos, forças internas e matriz de transformação em todas as iterações que acontecem em cada incremento de carga. Isso não ocorre na SOF-2, essas variáveis só são atualizadas no final de cada incremento de carga, quando o ponto de equilíbrio é encontrado. A diferença na atualização dessas variáveis juntamente com o referencial que descreve o movimento de corpos sólidos adotado, explica a dificuldade dessa formulação em traçar toda a trajetória de equilíbrio.

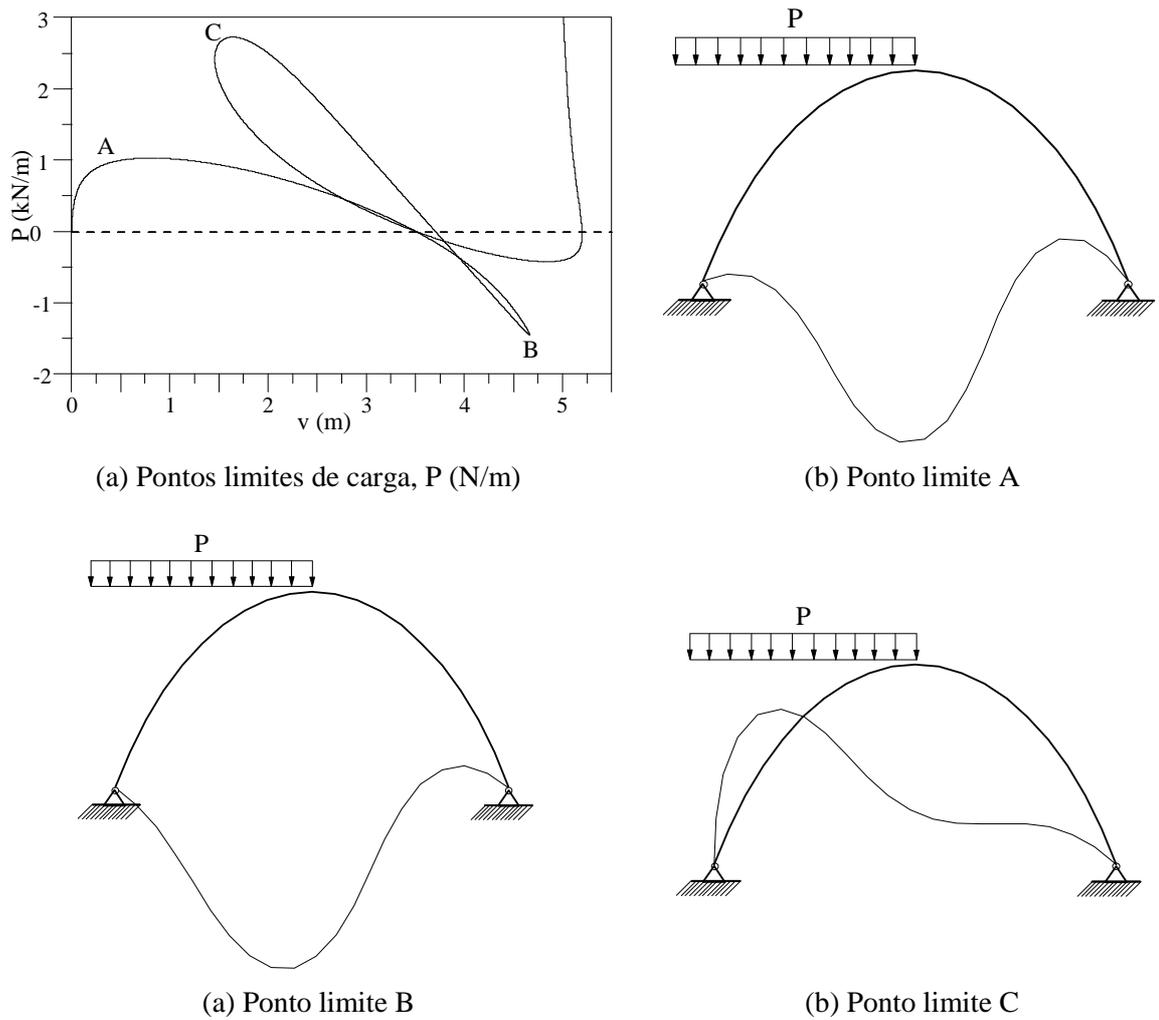
Na Figura 4.19 mostra-se a localização de três pontos limites de carga e a configuração deformada da estrutura.

## 4.6 Problemas Fortemente Não Lineares

Procura-se nesta seção verificar a capacidade das formulações não-lineares implementadas nesse trabalho em analisar problemas estruturais fortemente não-lineares. Soluções numéricas ou analíticas, encontradas na literatura, serão utilizadas para testar a eficiência computacional dessas formulações.



**Figura 4.18** Curva carga-deslocamento vertical



**Figura 4.19** Configurações deformada e seus respectivos pontos limites

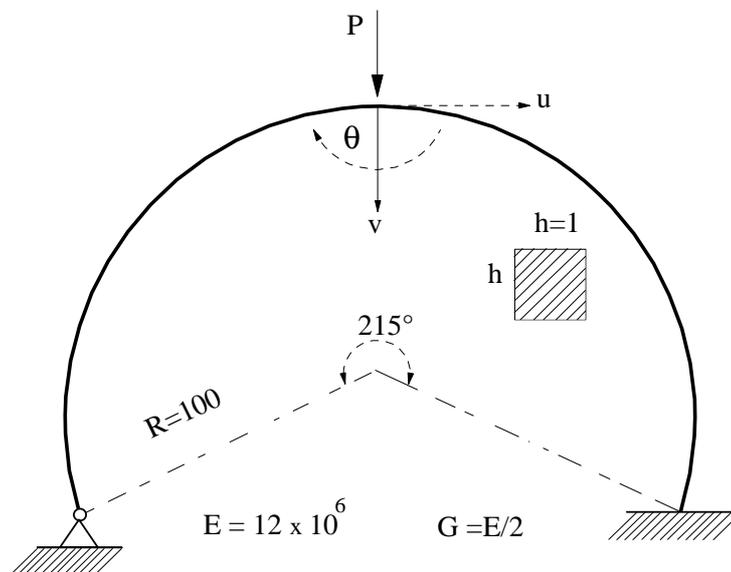
Para análise do arco circular rotulado-engastado, ilustrado na Figura 4.20, serão usados como referência a solução analítica para o primeiro ponto limite apresentada em Wood e Zienkiewicz (1977) e os resultados numéricos fornecidos por Kouhia e Mikkola (1989).

Com a intenção de ratificar as observações dos exemplos anteriores serão utilizadas todas as formulações implementadas neste trabalho na análise do arco abatido mostrado na Figura 4.22, usando como referência os resultados extraídos de Yang e Kuo (1994). E por fim, o exemplo de arco circular birrotulado, que apresenta um comportamento fortemente não-linear é mostrado na Figura 4.25.

#### 4.6.1 Arco Circular Rotulado-Engastado

O arco circular rotulado-engastado submetido à carga pontual centrada em seu eixo de simetria é ilustrado na Figura 4.20 e será analisado nesta seção.

O mesmo sistema estrutural foi analisado por Wood e Zienkiewicz (1977) que forneceram a solução analítica para o problema até o primeiro ponto limite de carga. Kouhia e Mikkola (1989) apresentaram resultados numéricos obtidos através de um modelo formado por 64 elementos. Além desses autores, outros podem ser destacados: Cardona e Huespe (1999), Battini *et al.* (2003), Galvão (2000), Makinen *et al.* (2011) e Pires (2012).



**Figura 4.20** Arco circular rotulado-engastado: geometria e carregamento

Para realização desta análise adotou-se uma malha composta por trinta e dois elementos finitos. A carga  $P$  foi assumida igual a  $\Delta\lambda^0 = 10^{-1}$  para iniciar a análise. Para o

processo iterativo, optou-se pelo método de Newton-Raphson modificado. A obtenção da solução não-linear teve o auxílio da estratégia de iteração comprimento de arco cilíndrico, e do incremento automático do comprimento de arco para controlar o valor inicial do parâmetro de carga. O critério de convergência escolhido foi o baseado no equilíbrio das forças e a tolerância foi  $\zeta = 10^{-4}$ .

As trajetórias de equilíbrio obtidas controlando os deslocamentos horizontal,  $u$ , vertical,  $v$ , e rotação,  $\theta$ , no centro do arco são mostradas na Figura 4.21. Os resultados obtidos analiticamente por Wood e Zienkiewicz (1977) e, numericamente, por Kouhia e Mikkola (1989) são usados para comparação. Observa-se que com todas as formulações implementadas os pontos limites de carga são ultrapassados com eficiência, possibilitando o traçado completo da trajetória de equilíbrio. Os resultados alcançados estão muito próximos aos da literatura.

Fez-se um estudo relacionado ao tempo de processamento da análise em relação ao método de Newton-Raphson adotado, padrão ou modificado, para diferentes combinações de estratégias de iteração e de incremento de carga. Essa avaliação está apresentada na Tabela 4.3. Pode-se observar, que quando utiliza-se o método de Newton-Raphson modificado o tempo de processamento é menor para todas as combinações de estratégias de incrementos de carga e de iteração. Isso acontece pois na técnica padrão a inversa da matriz de rigidez,  $\mathbf{K}$ , deve existir em todas as iterações até a convergência ser atingida. No método modificado, a matriz de rigidez permanece inalterada durante o processo iterativo, necessitando de mais iterações para encontrar um ponto de equilíbrio, porém não é preciso calcular a inversa de  $\mathbf{K}$  em cada etapa desse processo. Para os resultados apresentados na Figura 4.21 utilizam-se a combinação de estratégias de carga e iteração, mencionado anteriormente, que obtiveram a análise em um período de tempo mais curto.

#### **4.6.2 Arco Abatido Birrotulado**

O próximo exemplo abordado é ilustrado na Figura 4.22, juntamente com suas propriedades físicas e geométricas. Trata-se de um arco circular abatido usado para verificar a capacidade das duas formulações na análise de problemas fortemente não lineares. Este arco circular birrotulado será analisado considerando duas condições de carregamento. Primeiramente, o arco estará submetido a uma carga vertical de magnitude  $P$  aplicada no seu eixo de simetria (sistema perfeito) e, em seguida, a uma carga excêntrica

representada por essa força  $P$  associada a uma carga momento  $M$  de valor  $2P$  (sistema imperfeito).

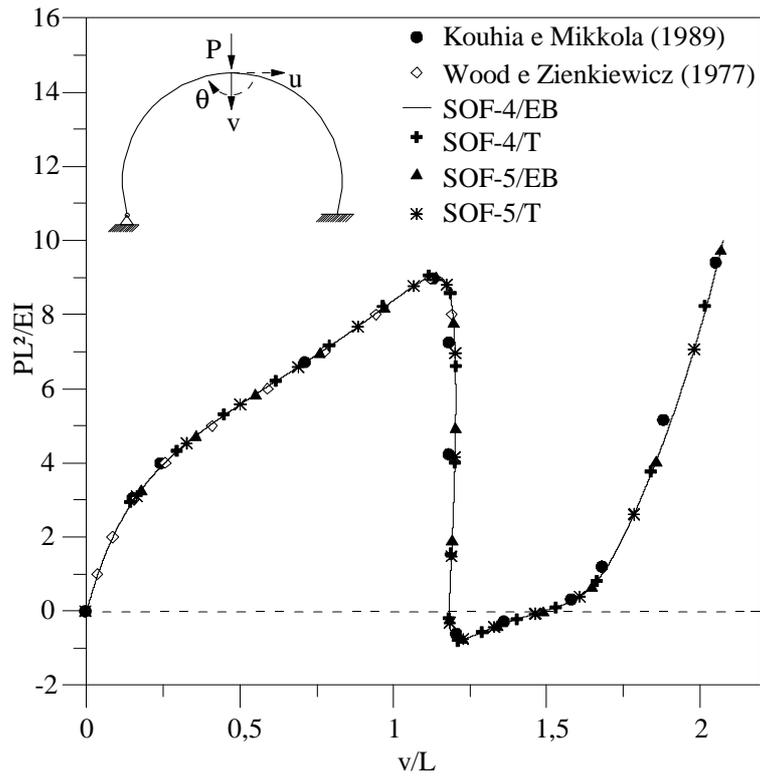
A estrutura foi discretizada em dez elementos finitos. Porém, para análise considerando o sistema perfeito apenas metade do arco foi usado na modelagem com o deslocamento horizontal e a rotação do ponto nodal coincidente com o eixo de simetria impedidos.

O método de Newton-Raphson modificado acoplado à estratégia de iteração conhecida como comprimento de arco cilíndrico foi adotado no processo de solução não linear. O parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$  foi controlado através da estratégia de comprimento de arco, com seu valor inicial igual a  $0,5 \times 10^{-3}$ . O critério de convergência baseado nas forças foi adotado e para controlar a convergência a tolerância usada foi  $\zeta = 10^{-4}$ .

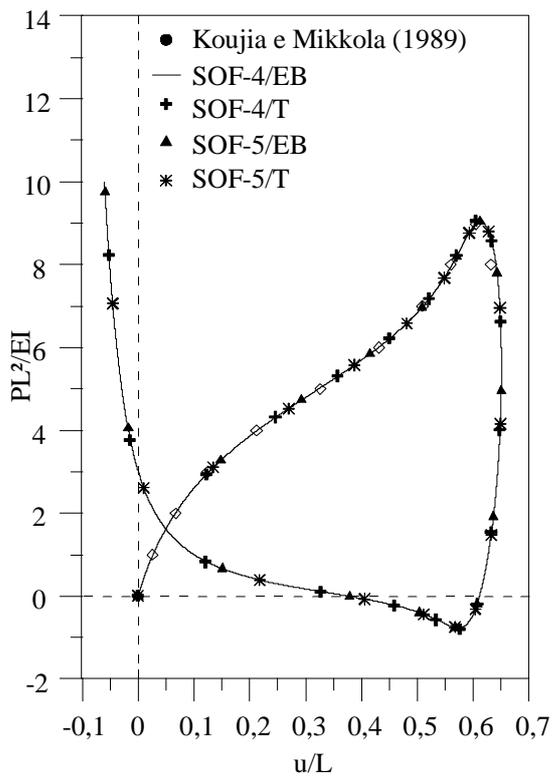
Na Figura 4.23 apresentam-se as curvas carga-deslocamento vertical,  $v$ , do ponto onde a carga externa atua, para as duas condições de carregamento consideradas. Observa-se que o sistema possui um comportamento altamente não linear. A análise foi realizada com as duas formulações implementadas considerando a teoria de Euler-Bernoulli e, também, a teoria de viga de Timoshenko. Usou-se os resultados de Yang e Kuo (1994) para comparação dos resultados alcançados.

**Tabela 4.3** Tempo de processamento da análise do arco circular rotulado-engastado

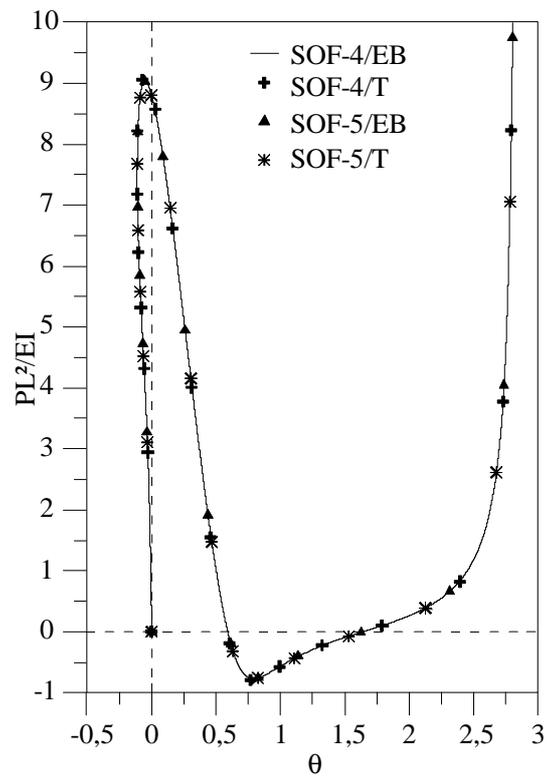
Estratégia de incremento de carga	Estratégia de iteração	Tempo (min)	
		NR-Padrão	NR-Modificado
Comprimento de Arco	Comprimento de Arco Cilíndrico	10,68	6,79
Deslocamento Generalizado	Deslocamento Generalizado	10,40	7,23
Comprimento de Arco	Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais	10,10	7,13
Deslocamento Generalizado	Resíduo Ortogonal (com Fluxo Normal)	10,88	7,29



(a) Deslocamento vertical,  $v$

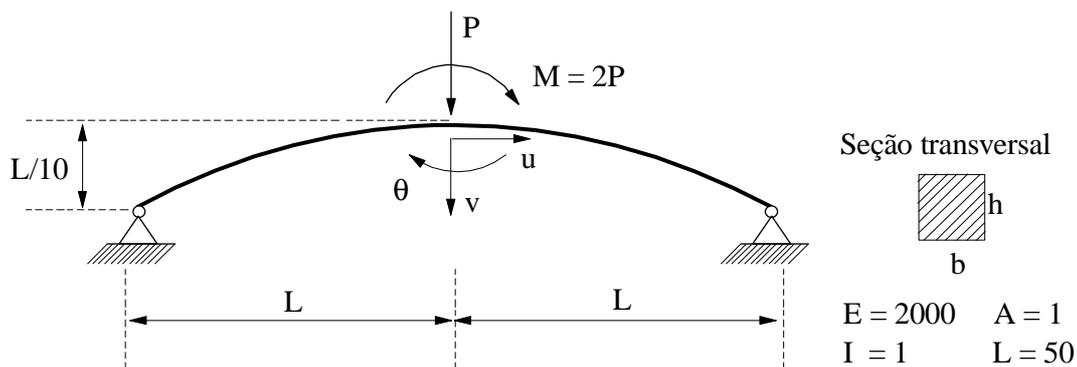


(b) Deslocamento horizontal,  $u$



(c) Rotação,  $\theta$

**Figura 4.21** Trajetória de equilíbrio do arco abatido birrotulado



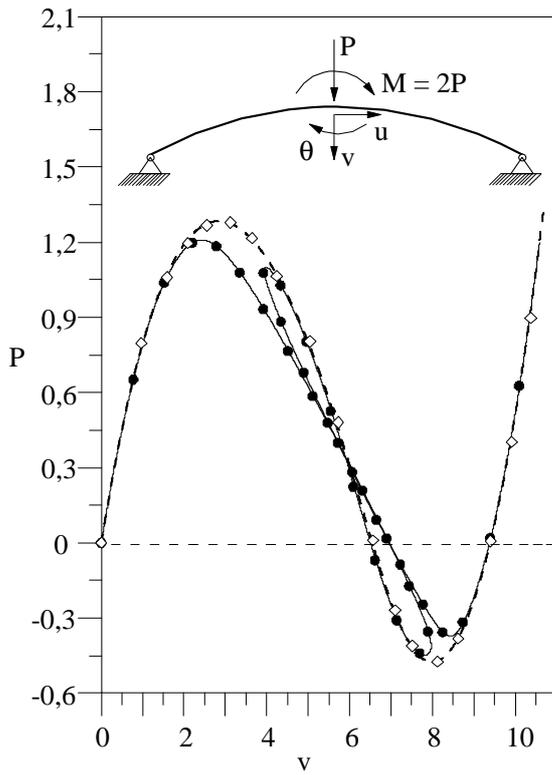
**Figura 4.22** Arco abatido birrotulado: geometria e carregamento

Para realçar o comportamento fortemente não linear da estrutura analisada, na Figura 4.24 mostra-se a variação do deslocamento horizontal,  $u$ , e da rotação,  $\theta$ , do ponto nodal central da estrutura, quando submetida ao carregamento excêntrico. Nessa figura os resultados foram obtidos usando a formulação SOF-5/T.

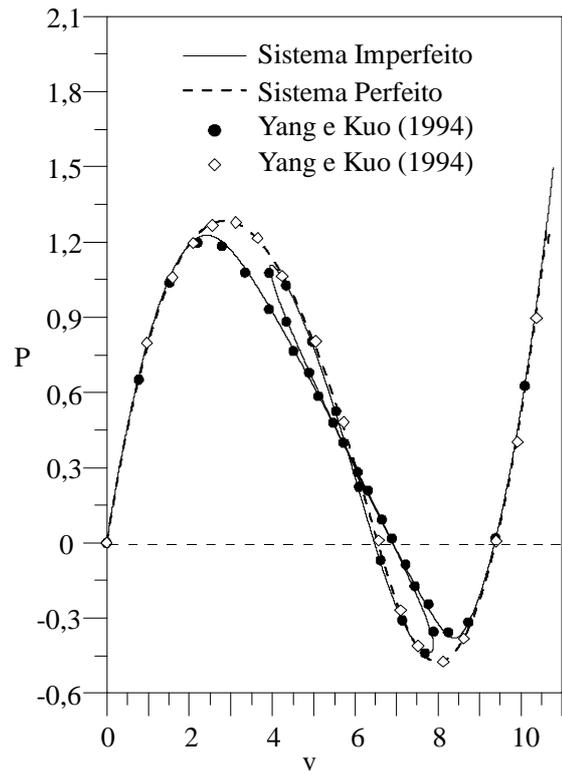
No caso da carga excêntrica, a trajetória de equilíbrio apresenta quatro pontos limites de carga e dois pontos limites de deslocamento. Na Tabela 4.4 apresentam-se os valores para os pontos limites de carga e deslocamento que são comparados àqueles obtidos por Yang e Kuo (1994). Nota-se que os resultados alcançados com as formulações são praticamente idênticos e em boa concordância com os de Yang e Kuo (1994).

**Tabela 4.4** Valores pontos limites de carga e deslocamento

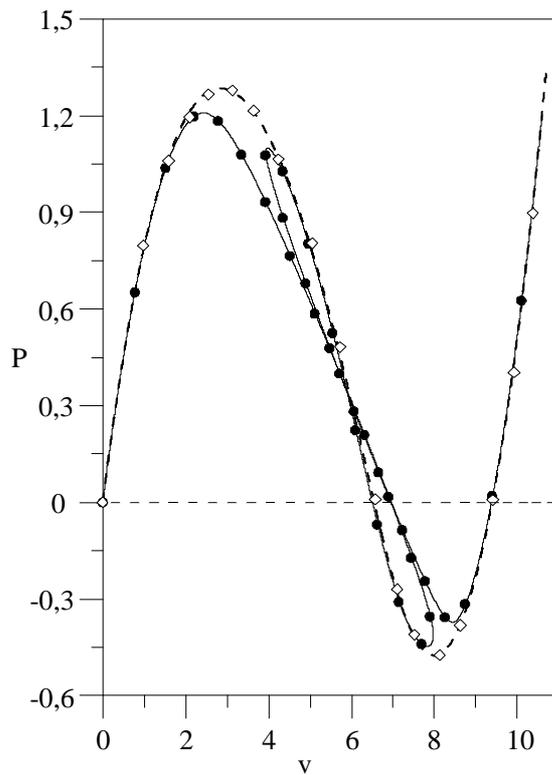
Ponto Limite	Yang e Kuo (1994)	SOF-4/EB	SOF-4/T	SOF-5/EB	SOF-5/T
Carga	1,200	1,208	1,228	1,208	1,202
	-0,473	-0,447	-0,438	-0,447	-0,449
	1,100	1,101	1,108	1,101	1,098
	-0,365	-0,372	-0,380	-0,372	-0,369
Deslocamento	8,08	7,97	7,89	7,97	8,00
	3,91	3,94	3,94	3,94	3,94



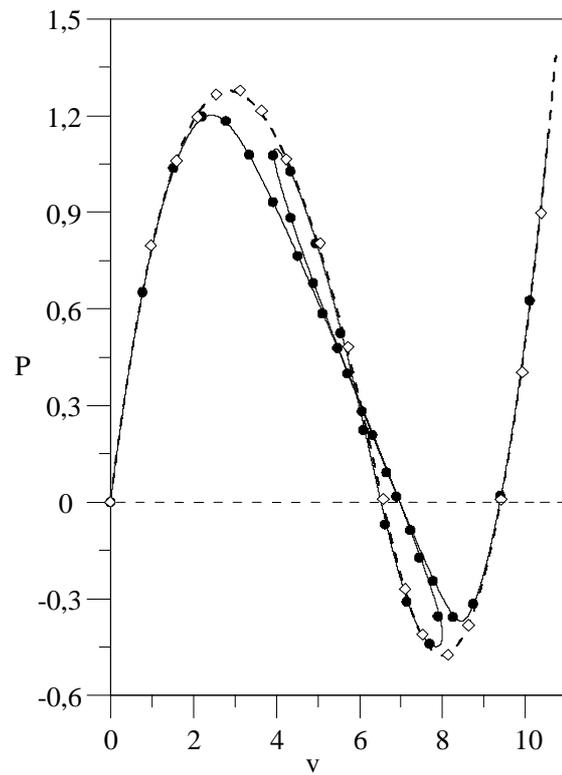
(a) SOF-4/EB



(b) SOF-4/T

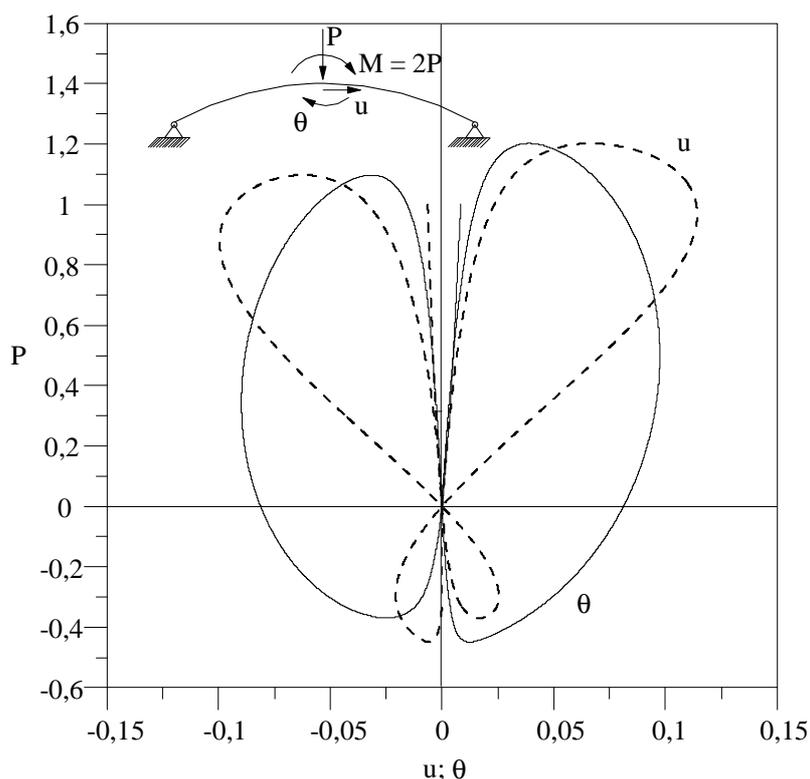


(c) SOF-5/EB



(d) SOF-5/T

**Figura 4.23** Trajetória de equilíbrio do arco circular abatido



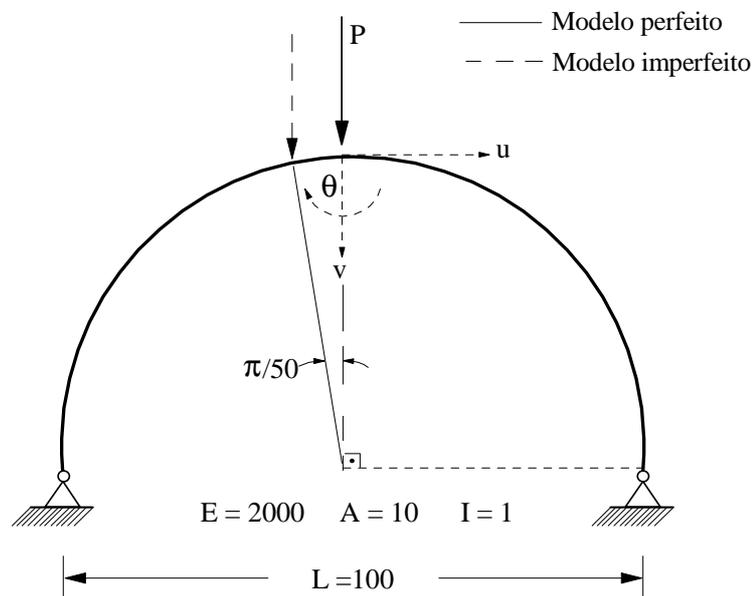
**Figura 4.24** Trajetória de equilíbrio:  $P \times u$  e  $P \times \theta$

### 4.6.3 Arco Circular Birrotulado

O próximo exemplo que será analisado neste trabalho, trata-se de um arco circular biarticulado. O arco possui raio  $R = 50 \text{ cm}$  sujeito a uma carga centrada vertical  $P = 1 \text{ kN}$ , como mostrado na Figura 4.25. A seção transversal dos elementos da estrutura possui área  $A = 10 \text{ cm}^2$ , inércia  $I = 1 \text{ cm}^4$  e coeficiente de forma  $k = 1$ . Já o material dos elementos possui módulo de elasticidade  $E = 2000 \text{ kN/cm}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . O arco foi discretizado em cinquenta elementos e todas as formulações estudadas foram usadas na análise dos sistemas perfeito e imperfeito. Com este exemplo tem-se o objetivo de verificar e comparar, mais uma vez, a eficiência computacional das formulações implementadas.

Esse sistema estrutural, foi inicialmente estudado por Harrison (1978), e mais tarde por Yang e Kuo (1994). Mais recentemente o mesmo foi analisado por Galvão (2000) e Santana (2015) para validar as formulações implementados em seus trabalhos. Pires (2012) utilizou este arco para comparar a solução não linear do sistema utilizando a estratégia do resíduo ortogonal no processo convencional de solução e a mesma estratégia associada ao fluxo normal.

Como no exemplo anterior da seção 4.6.2, o sistema estrutural em questão foi analisado considerando duas configurações de carregamento. Na primeira, a carga pontual é aplicada no eixo de simetria do arco (sistema perfeito); na segunda situação, essa carga foi deslocada e aplicada no ponto nodal mais próximo ao eixo de simetria do arco de modo a produzir o efeito da imperfeição (sistema imperfeito). O sistema imperfeito é definido tomando a carga vertical deslocada de  $\pi/50$  rad com relação ao centro do arco. Considerando a simetria do modelo, para realizar a análise do sistema perfeito, apenas metade do arco foi discretizada. Nesse caso, restringiu-se o deslocamento axial e a rotação do ponto de aplicação da carga.



**Figura 4.25** Arco circular birrotulado: geometria e carregamento

Para realizar a análise não-linear deste problema foram utilizadas, juntamente com o método de Newton-Raphson padrão, a estratégia de iteração deslocamentos generalizados e a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro GSP. O critério de convergência escolhido foi o baseado no equilíbrio das forças presentes no sistema, com tolerância  $\zeta = 10^{-3}$  e o incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , para o primeiro passo incremental foi considerado igual a  $10^{-3}$ .

Nas Figuras 4.26 e 4.27 apresentam-se as trajetórias de equilíbrio considerando o deslocamento vertical para o sistema perfeito e imperfeito, respectivamente, obtidos com as formulações não lineares implementadas. Esses resultados foram comparados com os valores alcançados por Santana (2015). O sistema imperfeito apresenta também uma

componente de deslocamento horizontal e uma rotação do nó central, devido à perda de simetria, ilustrado na Figura 4.28.

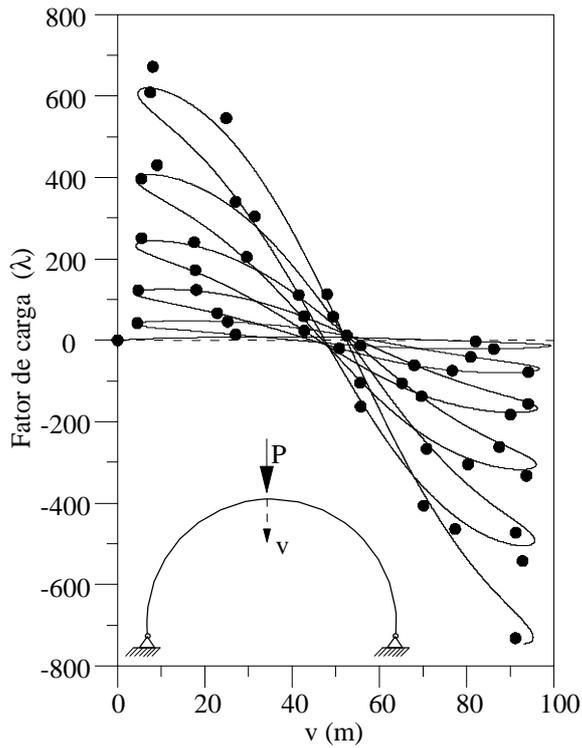
O sistema perfeito e o imperfeito apresentam um comportamento cíclico durante o processo de carregamento. Tem-se em cada ciclo durante esse processo o aumento da carga e rigidez da estrutura. Forma-se uma ondulação em cada ciclo de carregamento na configuração deformada e assim os esforços a flexão acompanham essas ondulações (Figuras 4.26 e 4.27).

Para o sistema perfeito, tem-se pequenas deformações nos elementos no início do carregamento, assim os resultados encontrados estão próximos dos presentes na literatura, embora o sistema já apresente grandes deslocamentos. Já nos ciclos finais, a amplitude das ondulações diminui, assim os elementos sofrem grandes deformações de flexão, apresentando uma pequena divergência nos resultados obtidos. Isso pode ser justificado devido a utilização do tensor de deformações de Green-Lagrange e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, que não são adequados para materiais sujeitos a grandes deformações.

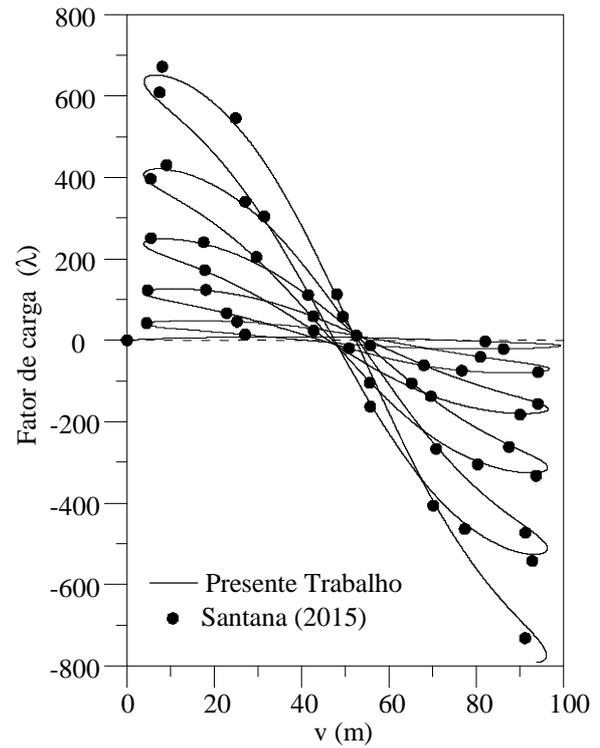
No caso do arco imperfeito, o número de ondulações formadas até que os limites de carga da análise sejam atingidos é pequeno, os elementos estão sujeitos a pequenas deformações, o que explica o bom ajuste com os dados presentes na literatura. Observa-se que a capacidade de carga e a rigidez são consideravelmente menores se comparadas às do sistema perfeito.

## **4.7 Trajetórias de Equilíbrio com Pontos de Bifurcação**

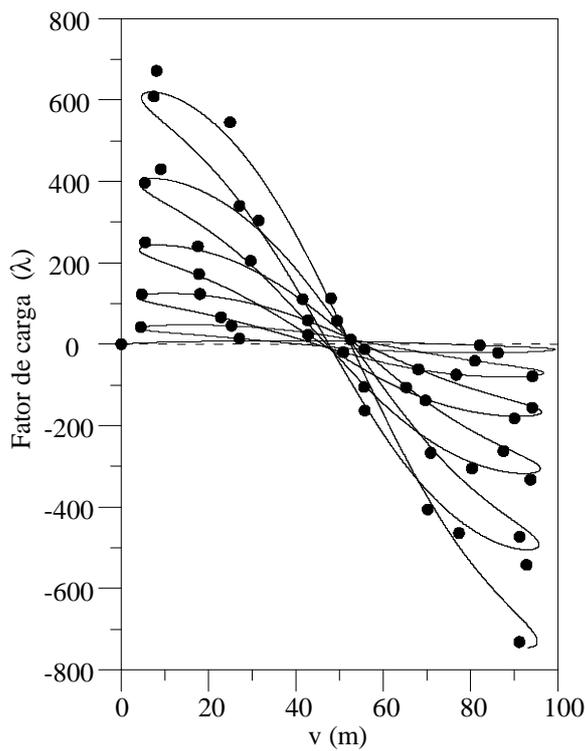
O objetivo desta seção é validar as implementações computacionais deste trabalho mostrando que a mesma pode identificar e passar pelos pontos críticos, em especial, os pontos de bifurcação, nas análises dos sistemas estruturais. Os pontos de bifurcação surgem quando nas trajetórias de equilíbrio tem-se duas ou mais configurações possíveis, a partir de um ponto de equilíbrio.



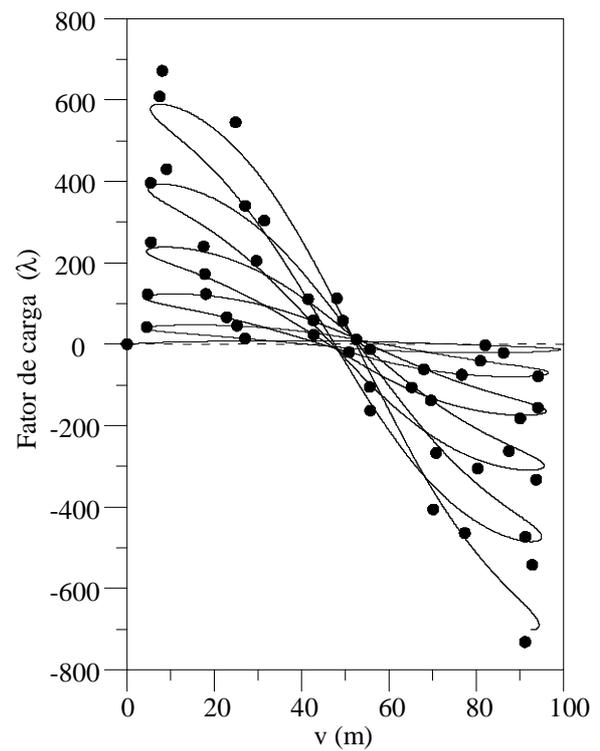
(a) SOF-4/EB



(b) SOF-4/T

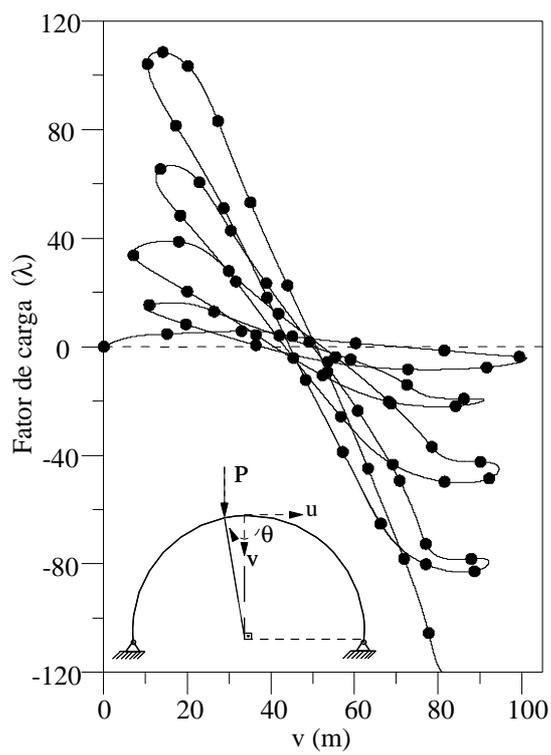


(c) SOF-5/EB

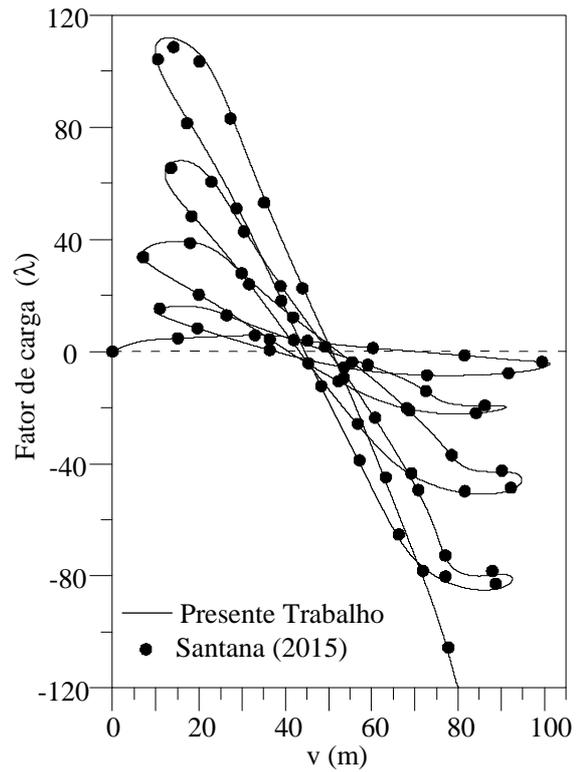


(d) SOF-5/T

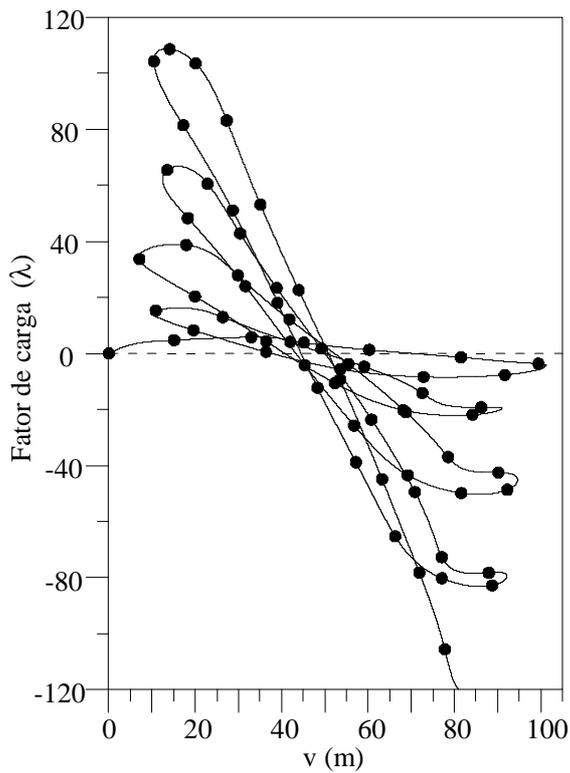
**Figura 4.26** Trajetória de equilíbrio sistema perfeito



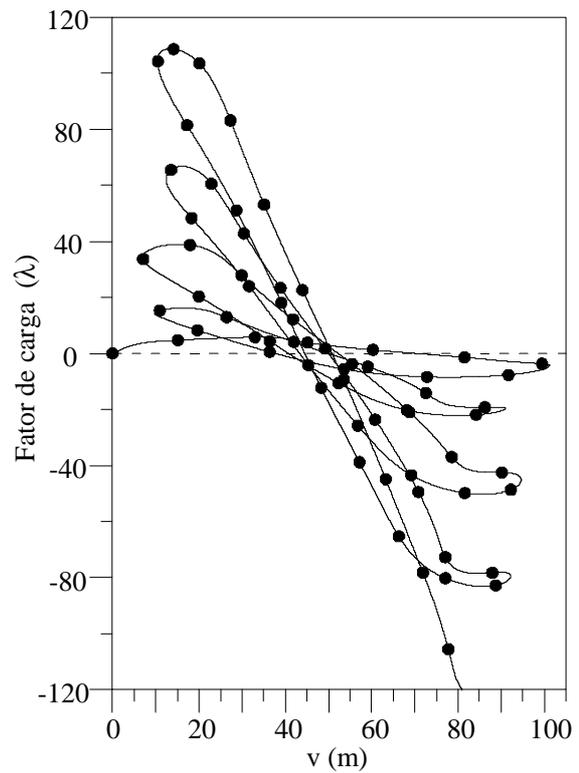
(a) SOF-4/EB



(b) SOF-4/T

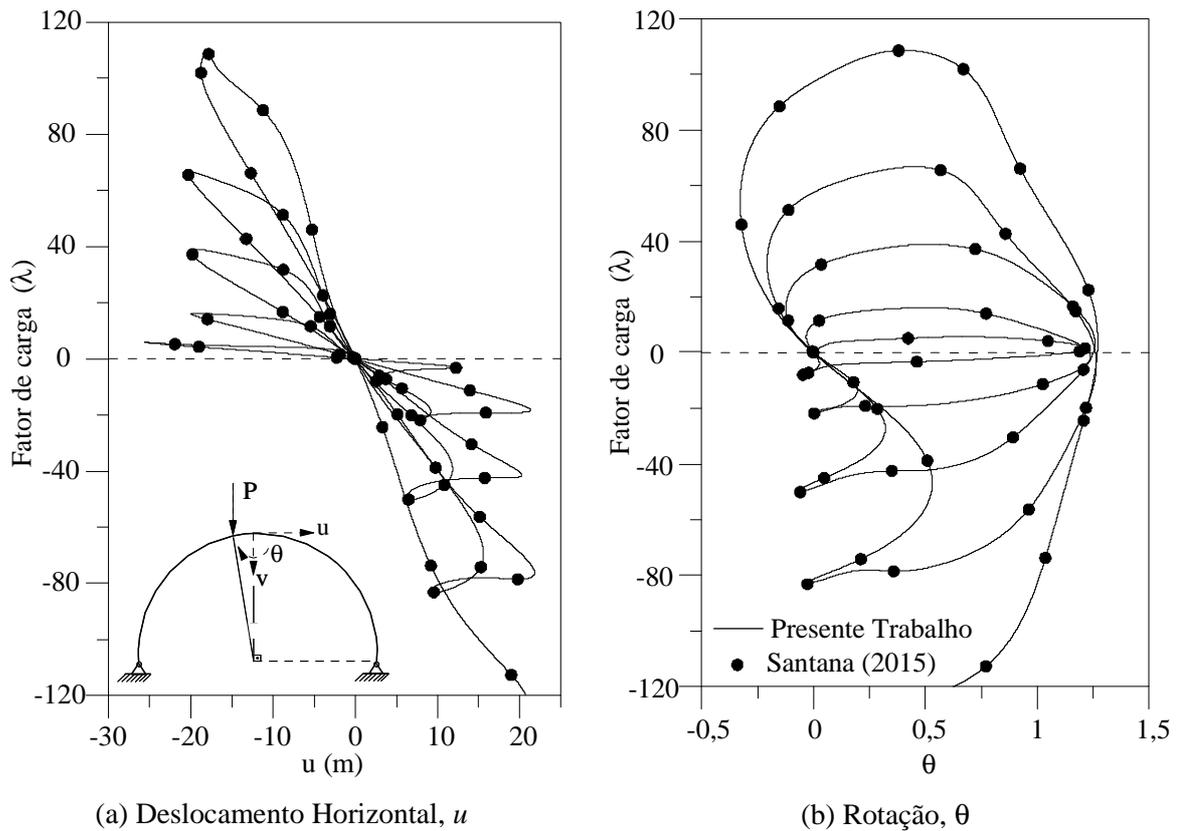


(c) SOF-5/EB



(d) SOF-5/T

**Figura 4.27** Trajetória de equilíbrio sistema imperfeito



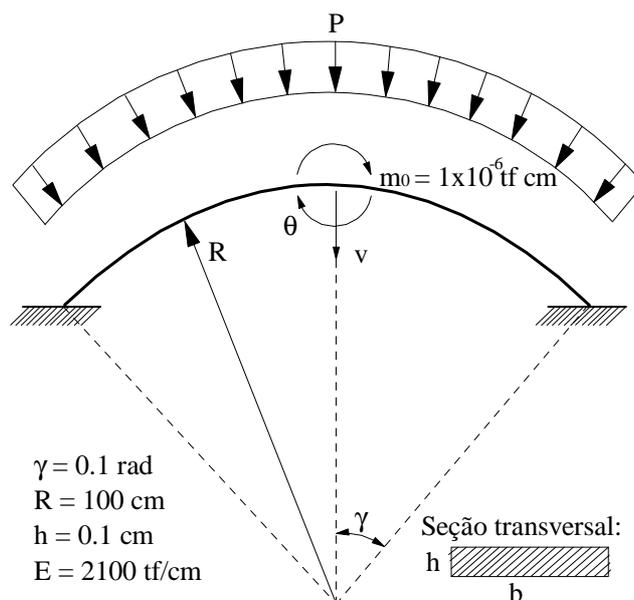
**Figura 4.28** Trajetória de equilíbrio sistema imperfeito

Será analisado um arco biengastado sob pressão radial, ilustrado na Figura 4.29. Para comparar os resultados obtidos será utilizada a solução analítica apresentada por Kerr e Soifer (1969). Em seguida tem-se o pórtico conhecido como *Roorda Frame*, ilustrado na Figura 4.32. Galvão *et al.* (2005) fez um estudo sobre a influência de parâmetros geométricos e condições de contorno na resposta de pórticos em L.

#### 4.7.1 Arco Biengastado Sob Pressão Radial

Este primeiro exemplo envolve um arco circular biengastado submetido a uma pressão radial uniforme. Na Figura 4.29 apresentam-se as características geométricas e do material para o sistema estrutural analisado.

Como parâmetro utilizou-se os resultados analíticos obtidos por Kerr e Soifer (1969). Antonini (1986), Alves (1993b) e Galvão (2000) também analisaram esse arco em seus respectivos trabalhos, para validar suas formulações numéricas.

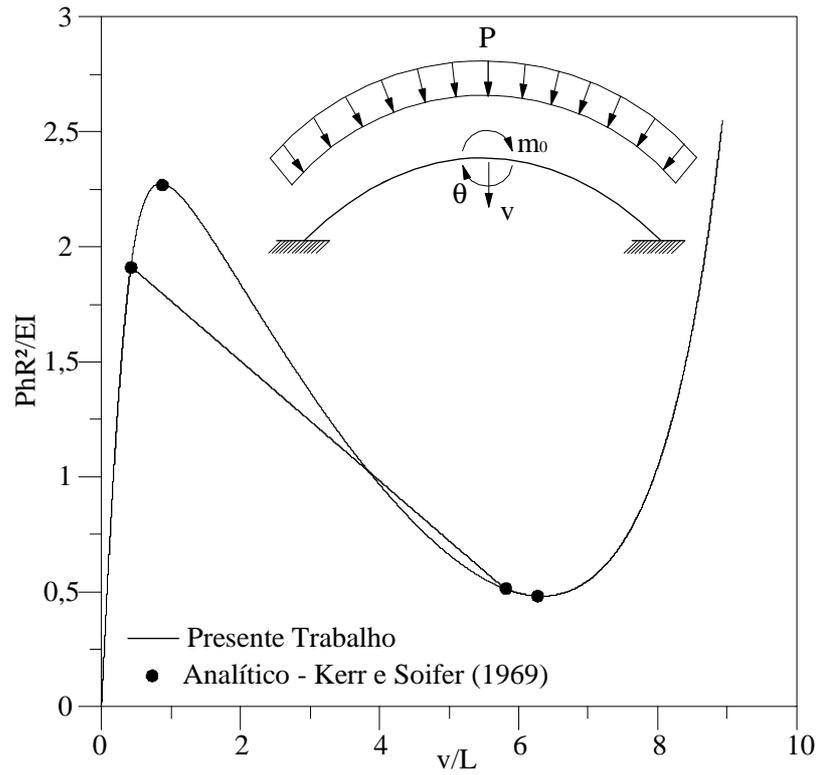


**Figura 4.29** Arco biengastado sob pressão radial: geometria e carregamento

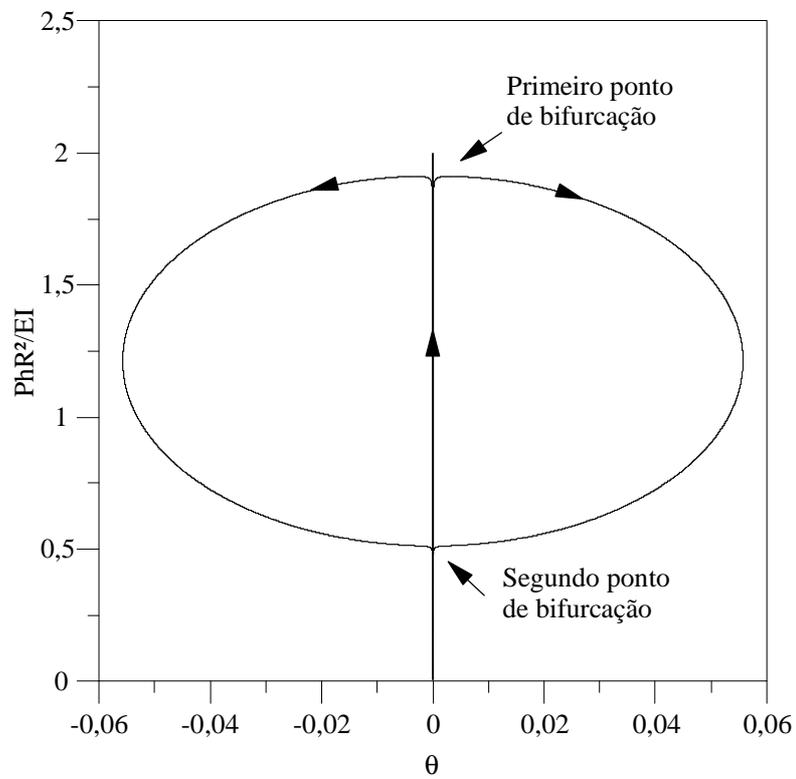
A análise foi realizada com a formulação SOF-5/EB, juntamente com o método de Newton-Raphson modificado. Como estratégia de incremento de carga adotou-se a comprimento de arco e para a estratégia de iteração a comprimento de arco cilíndrico. O critério de convergência escolhido foi o baseado no equilíbrio das forças, com tolerância  $\zeta = 10^{-3}$  e o incremento inicial do parâmetro de carga foi  $\Delta\lambda^0 = 10^{-7}$ .

Primeiramente considerou-se o arco perfeitamente simétrico, utilizando apenas metade do arco. Incluíram-se restrições à rotação e ao deslocamento horizontal, tornando esse modelo compatível. Em seguida, considerou-se toda estrutura com sessenta elementos e uma carga inicial tipo momento,  $m_0$ .

Na Figura 4.30 mostra-se uma trajetória de equilíbrio fortemente não linear. Perante a ação de pequenas perturbações assimétricas, identifica-se, ao longo do caminho não-linear de equilíbrio, um ponto de bifurcação. Na presente análise, estas pequenas perturbações são introduzidas por um momento inicial,  $m_0$ . A curva carga-rotação (Figura 4.31), apresenta o local onde acontece esses pontos de bifurcação. Conclui-se que as formulações implementadas nesse trabalho são capazes de identificar e passar por esses pontos críticos.



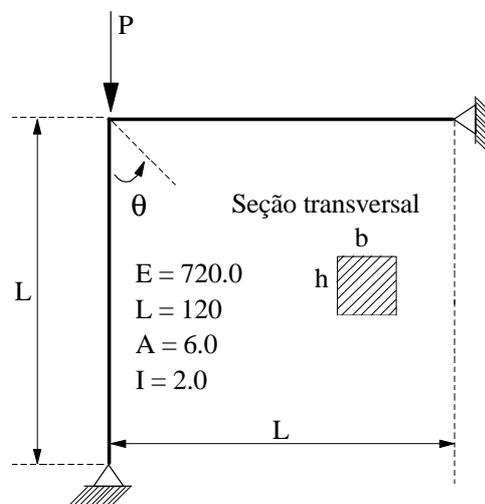
**Figura 4.30** Curva carga-deslocamento vertical



**Figura 4.31** Curva carga-rotação

### 4.7.2 Roorda Frame

Por fim será analisado o pórtico conhecido como *Roorda Frame*, ilustrado na Figura 4.32. O pórtico em  $L$  é composto por uma viga e um pilar de comprimento  $L = 120 \text{ cm}$ , com apoios de segundo gênero em ambas as extremidades. A seção transversal dos elementos possui área  $A = 6$ , momento de inércia  $I = 2$  e coeficiente de forma  $k = 1$ . O módulo de elasticidade do material adotado foi  $E = 720$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . O *Roorda Frame* está submetido a uma carga  $P$  na extremidade do pilar. Utilizou-se uma malha de vinte elementos finitos (dez em cada barra) para discretizar o sistema estrutural analisado.



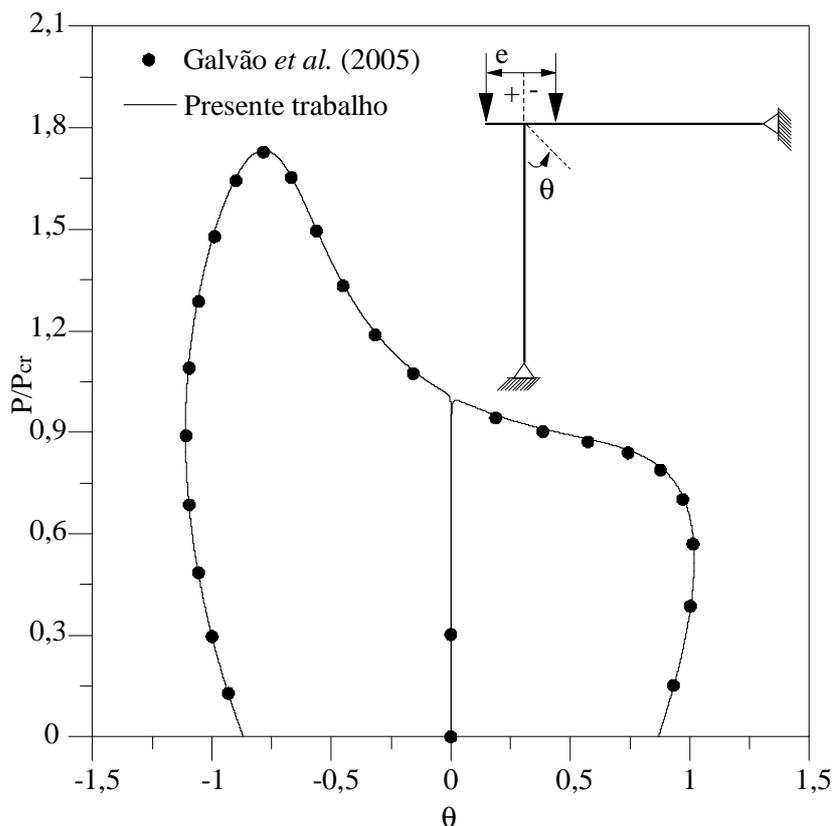
**Figura 4.32** Roorda Frame: geometria e carregamento

Para realização desta análise utilizou-se a formulação SOF-4/EB. A resolução do sistema não linear foi realizada com auxílio do método de Newton-Raphson modificado. Como estratégia de incremento de carga usou-se o comprimento de arco e para a estratégia de iteração o comprimento de arco cilíndrico. O critério de convergência escolhido foi o baseado nos deslocamentos, com tolerância  $\zeta = 10^{-3}$  e o incremento inicial do parâmetro de carga foi  $\Delta\lambda^0 = 10^{-2}$ .

Galvão *et al.* (2005) fez um estudo sobre a influência de parâmetros geométricos e condições de contorno na resposta de pórticos em  $L$ . Este referido trabalho será utilizado como referência para comparar os resultados obtidos pela formulação do presente trabalho. Na Figura 4.33 apresenta-se a trajetória de equilíbrio controlada pela rotação do sistema estrutural, sendo que os valores positivos de  $\theta$  representam as rotações anti-horárias da

articulação. Observa-se que os resultados obtidos equivalem aos encontrados por Galvão *et al.* (2005).

Para obtenção do ponto de bifurcação apresentado na Figura 4.33, inseriu-se um pequeno deslocamento no ponto de aplicação da carga, para o lado direito e esquerdo do *Roorda Frame*. O sistema estrutural analisado apresenta um caminho fundamental de equilíbrio seguido de uma bifurcação assimétrica. Essa bifurcação é caracterizada por uma dada inclinação inicial do caminho de equilíbrio pós-crítico, que irá variar de acordo com o valor adotado para o deslocamento no ponto de aplicação de carga. Observa-se que a deformação para a direita produz curvaturas na viga menores que o lado esquerdo da trajetória de equilíbrio. Quando a flambagem do pilar acontece para a direita, a mesma produz compressão sobre a viga, reduzindo a sua rigidez. Porém quando a flambagem do pilar é para à esquerda, ela provoca forças de tração sobre a viga, aumentando a sua rigidez. Isto explica porque os pórticos em L exibem uma resposta pós-flambagem assimétrica.



**Figura 4.33** Curva carga-rotação

Koiter (1967) através da aplicação de uma pequena perturbação no sistema, obteve a seguinte aproximação para o caminho inicial de pós-flambagem:

$$\frac{P}{P_{cr}} = 1 - 0,3805\theta \quad (4.1)$$

onde  $P_{cr} = 1,407\pi^2 EI / L^2$  é a carga crítica do *Roorda Frame*.

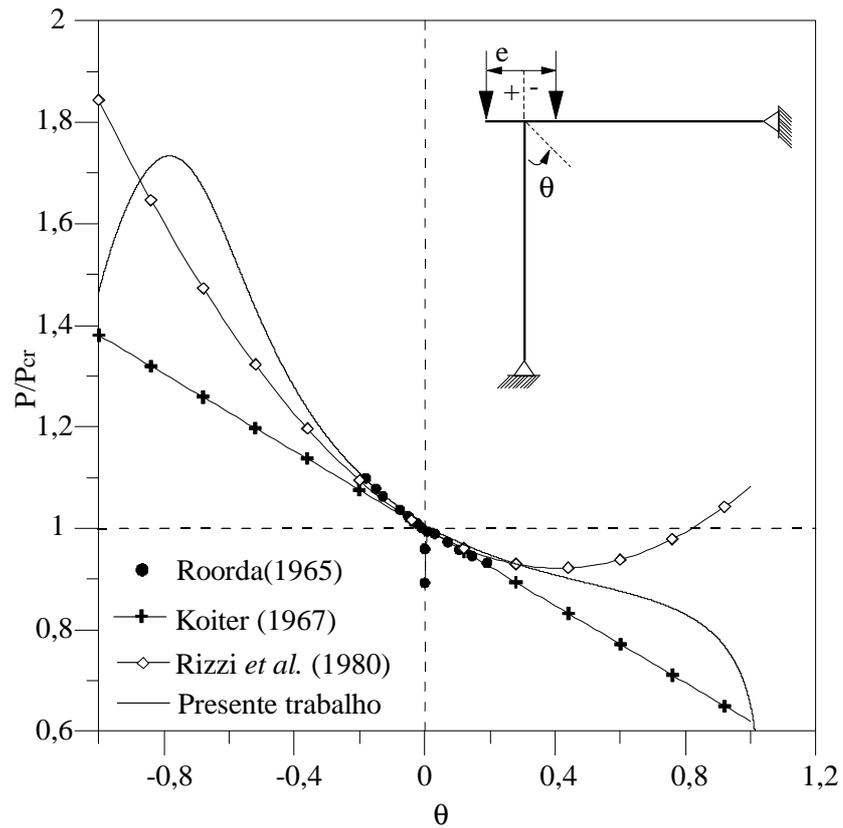
A Equação (4.1) representa a inclinação do caminho real de pós-flambagem no ponto de bifurcação. Uma aproximação mais refinada da resposta pós-flambagem foi obtida por Rizzi *et al.* (1980), considerando a curvatura inicial do caminho pós-flambagem, além da inclinação:

$$\frac{P}{P_{cr}} = 1 - 0,3805\theta + 0,4638\theta^2 \quad (4.2)$$

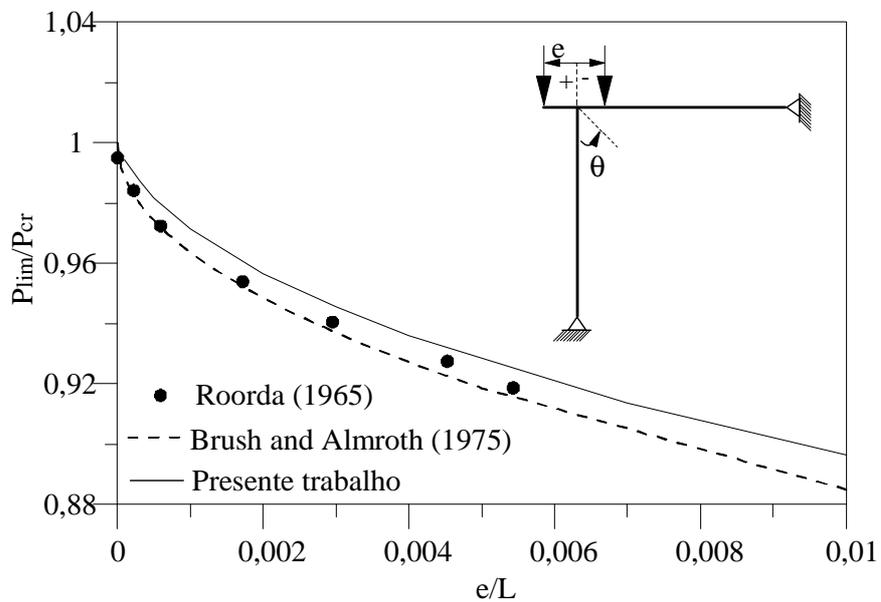
Na Figura 4.34 apresentam-se os resultados teóricos de Koiter (1967) e Rizzi *et al.* (1980), os dados experimentais alcançados por Roorda (1965), além dos valores obtidos no presente trabalho. Observa-se que existe uma concordância entre todas as soluções para pequenos valores do ângulo de rotação,  $\theta$ . Quando o valor do ângulo de rotação aumenta a diferença entre os resultados numéricos e as soluções analíticas aproximadas também aumentam. Os resultados do presente trabalho e os valores experimentais estão próximos, isso comprova a acurácia da solução atual.

As normas para concepção de projetos requerem que colunas com carregamentos aplicados podem ter uma excentricidade de  $0,3L$  ou mais (GALVÃO *et al.*, 2005). No entanto, uma redução na carga limite não tem sido considerada na prática para concepção de pórticos, o que pode levar a uma superestimação da capacidade de carga. Alguns pórticos podem apresentar uma inclinação inicial maior do que os valores analisados com relação a sua geometria por Roorda (1965) e Koiter (1967). A variação da carga limite em função do parâmetro de imperfeição ( $e/L$ ) é mostrada na Figura 4.35. O presente resultado é comparado com os dados experimentais obtidos por Roorda (1965) e também pela solução analítica aproximada de Brush and Almorth (1975) dada por:

$$\frac{P_{lim}}{P_{cr}} = 1 - 1,15\sqrt{\frac{e}{L}} \quad (4.3)$$



**Figura 4.34** Comparação dos resultados apresentados para o caminho de equilíbrio não linear com resultados teóricos e experimentais



**Figura 4.35** Comparação dos resultados numéricos, teóricos e experimentais para cargas limite

# Capítulo 5

## Considerações Finais

### 5.1 Introdução

O presente trabalho teve a finalidade de desenvolver formulações para estruturas reticuladas 2D, que consideram o comportamento não linear geométrico, dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF). A descrição cinemática utilizada foi o referencial Corrotacional (RCR), que está baseado na separação explícita entre os deslocamentos dos movimentos de corpo rígido e os naturais que geram deformação. As formulações estudadas e implementadas aqui utilizaram a teoria de viga de Euler-Bernoulli e também a de Timoshenko. O sistema de equações de equilíbrio não lineares foi solucionado com o auxílio de um algoritmo de solução que utiliza-se o método de Newton-Raphson, associado à estratégias de iteração e de incremento de carga.

O efeito da não linearidade geométrica considerado nas formulações implementadas no presente trabalho, torna-se relevante nos membros sujeitos a esforços axiais de compressão e contribui para a diminuição da rigidez estrutural aumentando a deformação do sistema.

A base computacional utilizada nessa dissertação foi o programa CS-ASA (SILVA, 2009), inicialmente desenvolvido para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas. Mais recentemente, Lemes (2015) introduziu a possibilidade da análise avançada estática de estruturas mistas.

Para validar as implementações realizadas nesse trabalho e analisar a sua eficiência, estudaram-se vários exemplos de problemas estruturais, que foram comparados com resultados numéricos e analíticos encontrados na literatura. Nas próximas seções são

apresentados, respectivamente, algumas conclusões referentes ao trabalho desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros.

## 5.2 Conclusões

Os resultados das análises não lineares realizadas em vários exemplos simulados no capítulo anterior, apresentando diferentes geometrias e condições de carregamento, foram comparados com as soluções numéricas e/ou analíticas disponíveis na literatura. Observa-se uma convergência satisfatória entre os resultados aqui obtidos, o que permite afirmar que as formulações não lineares foram implementadas corretamente e as metodologias de solução adotadas são eficientes e podem ser usadas para avaliar a instabilidade elástica de estruturas metálicas reticuladas planas.

As formulações estudadas e implementadas no presente trabalho (SOF-4 e SOF-5) são baseadas na teoria de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, definidas em referencial Corrotacional. Os resultados obtidos, ao serem comparados àqueles encontrados na literatura, comprovaram a eficiência de cada uma dessas formulações. A discretização do sistema estrutural, evidentemente, teve influência na resposta.

Contudo, em análises de estruturas espessas e também sistemas com seções transversais que enfatizam o efeito da deformação devido ao cisalhamento, como a seção circular vazada apresentada no item 4.3.2, as formulações baseadas na teoria de viga de Timoshenko apresentam resultados mais coerentes com as soluções obtidas em outras referências.

O efeito de “*shear locking*” surge quando se tem estruturas esbeltas e as formulações utilizadas são baseadas na teoria da viga de Timoshenko. No presente trabalho esse efeito foi remediado de formas diferentes para as duas formulações estudadas. Como já mencionado anteriormente, na SOF-4/T tem-se a integração reduzida, utilizando apenas um ponto de Gauss. Na SOF-5/T a função de interpolação de deslocamento horizontal é consistente com a teoria de deformação não linear, utilizando assim uma função de interpolação quinto grau e não mais uma função linear, onde acontece um acoplamento da deformação axial e a deformação devido a flexão. Esse método permite que os sistemas estruturais com menor discretização que em outras formulações apresentem bons resultados. Na seção 4.4 pode-se observar a diferença nos resultados obtidos, utilizando uma pequena malha, para as formulações estudadas aqui e também a SOF-3, que se encontra na plataforma CS-ASA. Os valores alcançados pela SOF-5/T estão mais próximos dos valores encontrados

na literatura, mostrando que a mesma é mais eficiente. Vale destacar que a SOF-3 também procura impedir o “*shear locking*” com a integração reduzida, por isso os resultados são coincidentes com os valores da SOF-4/T.

Na Seção 4.5 comparou-se a formulação implementada nesse trabalho com a SOF-2 encontrada na base computacional CS-ASA, ambas baseadas na teoria de viga clássica. A SOF-2 não conseguiu ultrapassar todos os pontos limites da trajetória de equilíbrio, já a formulação do presente trabalho foi capaz de traçar a caminho completo de equilíbrio, apresentando resultados muito próximos dos da literatura. Justificou-se esse fato, pela diferença na atualização das variáveis durante a análise e também o referencial que descreve o movimento dos corpos sólidos adotado. A atualização das variáveis na SOF-2 é feita no final de cada passo de carga, com um referencial Lagrangiano Atualizado (RLA). Já no presente trabalho utiliza-se o RCR e a atualização é realizada em cada iteração, que acontece dentro do processo incremental.

As formulações SOF-4 e SOF-5 mostraram-se eficazes na obtenção das trajetórias de equilíbrio, mesmo aquelas que apresentam vários pontos limites de carga, deslocamento e de bifurcação, como apresentado nas seções 4.7 e 4.8. Os métodos de Newton-Raphson padrão e modificado bem como as diversas estratégias de solução não linear mostraram-se eficientes na solução das equações não lineares de equilíbrio, dentro de uma tolerância e uma taxa de convergência satisfatória.

### **5.3 Sugestões para Futuras Pesquisas**

Algumas sugestões para trabalhos futuros são destacadas nesta seção. Em algumas delas, citam-se também as referências que podem ser consultadas.

- Pré e pós-processador gráficos para o programa CS-ASA;
- Análise avançada usando a norma brasileira NBR 8800 (LANDESMANN e BATISTA, 2005);
- Acoplamento das formulações geometricamente não lineares de elementos finitos desenvolvidas, para as estruturas de concreto e mistas de aço e concreto (LEMES, 2015);
- Acoplamento da não linearidade física para estruturas metálicas, de concreto e mistas de aço e concreto. Formulações que fazem uso do método da rótula plástica e do método da

zona plástica podem ser empregadas (PARK e LEE, 1996; OVUNC e REN, 1996; SAJE *et al.*, 1998; ALVARENGA, 2005);

- Acoplamento das formulações não lineares de elementos finitos para a inclusão das ligações semirrígidas (CHAN E CHUI, 2000; ZIEMIAN E MCGUIRE, 2002; SUROVEK, 2011; ZUBYDAN, 2011; CHENG E CHEN, 2013);
- Utilização de um modelo mais realista para avaliação das rigidezes axial, flexional e cisalhante para os elementos de concreto e mistos de aço e concreto através da teoria de Timoshenko (CALDAS, 2004; LIANG *et al.*, 2005; STRAMANDINOLI, 2007; CHIOREAN, 2013; LEMES *et al.*, 2016);
- Análise avançada tridimensional (LIEW *et al.*, 2001; PINHEIRO, 2003; IU *et al.*, 2009; DENAVIT, 2012; FONG e CHAN, 2012; BLEYER e BUHAN, 2013);
- Análise inelástica de segunda ordem de elementos estruturais com restrições de contato impostas por um meio elástico, como o solo, por exemplo;

# Referências Bibliográficas

- Allgower, E.L., e Georg K., 1980. Homotopy methods for approximating several solutions to nonlinear systems of equations. In: Forster W, editor. *Numerical solution of highly nonlinear problems*. Amsterdam, New York: North-Holland, pp. 253-70.
- Alvarenga, A.R., 2005. *Aspectos Importantes na Análise Avançada com Zona Plástica de Portais Planos de Aço*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Alvarenga, A.R., 2010. *As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Alves, R.V., 1993a. *Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Total*. 1º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Alves, R.V., 1993b. *Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado*. 3º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Antonini, R.C., 1986. *Uma Formulação Discretizada da Teoria da Estabilidade Elástica para Análise Estrutural via Elementos Finitos*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- Argyris, J.H., 1965. Continua and discontinua. Proceedings 1st conference an matrix methods in structural mechanics. AFFDL-TR-66-80, *Air Force Institute of Technology Dayton, Ohio-USA*.

- Batelo, E.A.P., 2014. *Análise dinâmica avançada de estruturas de aço sob cargas extremas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Battini, J.M., 2002. *Co-rotational beam elements in instability problems*. Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology – Department of Mechanics, Stockholm / Sweden.
- Battini, J.M., Pacoste, C., e Eriksson, A., 2003. Improved minimal augmentation procedure for the direct computation of critical points. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, pp. 2169-2185.
- Bathe, K.J., e Bolourchi, S., 1979. Large displacement analysis of three dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 961-986.
- Batoz, J.L., e Dhatt, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262-1267.
- Belytschko, T. & Hsieh, B.J., 1973. Non-linear transient finite element analysis with co-ordinated co-coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 255-271.
- Belytschko, T. & Galum, L., 1979. Application of high order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. *Computers and Structures*, vol. 10, pp. 175-182.
- Bergan, P.G., 1980. Solution algorithms for nonlinear structural problems. *Computers & Structures*, vol. 12, pp. 497-509.
- Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Krakeland, B., e Soreide, T., 1978. Solution techniques for non-linear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, pp. 1677-1696.
- Biot, M.A., 1965. The mechanics of incremental deformations. *McGraw-Hill*, New York, USA.
- Bleyer, J. e Buhan, P., 2013. Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3d composite frame structures. *Computers and Structures*, vol. 129, pp. 86-98.

- Brush, D.O. e Almroth, B.O., 1975. *Buckling of Bars, Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York.
- Caldas, R.B., 2004. *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Cardona, A., e Huespe, A., 1999. Evaluation of simple bifurcation points and post-critical path in large finite rotation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 175, pp. 137-156.
- Cauchy, A.L., 1827. Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices. *Oeuvres*, vol. 2, n° 7, pp. 141-145.
- Chan, S.L., 1988. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 2657-2669.
- Chan, S.L., e Chui, P.P.T., 2000. *Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford.
- Chapman, S.J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn.
- Chen, H., e Blandford, G.E., 1993. Work-increment-control method for nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 909-930.
- Cheng, X. e Chen, Y., 2013. Experimental study on H-shaped steel beam-columns with large width-thickness ratios under cyclic bending about weak-axis. *Engineering Structures*, vol. 49, pp. 264-274.
- Chiorean, C.G., 2013. A Computer Method for Nonlinear Inelastic Analysis of 3D Composite Steel-Concrete Frame Structures. *Engineering Structures*, vol. 57, pp. 125-152.
- Cichon, C., 1984. Large displacements in-plane analysis of elastic-plastic frames. *Computers & Structures*, vol. 19, pp. 737-745.

- Clarke, M.J., e Hancock, M.J., 1990. A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, pp. 1365-1391.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Coulter, B.A., e Miller, R.E., 1988. Numerical analysis of a generalized plane elastica with non-linear material behavior. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 617-630.
- Cowper, G.R., 1966. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, pp. 335-340.
- Crisfield, M.A., 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures*, vol. 13, pp. 52-62.
- Crisfield, M.A., 1990. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 81, pp. 131-150.
- Crisfield, M.A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. vol. 1, John Wiley & Sons Inc., USA.
- Crisfield, M.A., 1997. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. vol. 2, John Wiley & Sons Inc., USA.
- Crisfield, M.A., e Shi, J., 1994. A co-rotational element/time-integration strategy for nonlinear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 1897-1913.
- Denavit, M., 2012. *Characterization of behavior of steel-concrete composite members and frames with applications for design*. Tese (Doutorado) - Graduate College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America.
- Fraeijs de Veubeke, B.M., 1976. The dynamics of flexible bodies. *International Journal Engineering Science*, Pergamon Press, pp. 895-913.

- Fong, M., 2012. *Second Order analysis of imperfect light-weight and composite beam-columns by refined plastic hinge method*. Tese de Doutorado, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong.
- Galvão, A.S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Galvão, A.S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Galvão, A.S., Gonçalves, P.B., e Silveira, R.A.M., 2005. Post-buckling behavior and imperfection sensitivity of L-frames. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 5, pp. 19-38.
- Gonçalves, G.A., 2013. *Modelagem do comportamento inelástico de estruturas de aço: membros sob flexão em torno do eixo de menor inércia*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Gummadi, L.N.B., e Palazotto, A.N., 1998. Large strain analysis of beams and arches undergoing large rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 33(4), pp. 615-645.
- Harrison, H.B., 1978. Post-buckling behavior of elastic circular arches. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 65, part 2, pp. 283-298.
- Hsiao, K.M., Horng, H.J., e Chen, Y.R., 1987. A co-rotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. *Computers & Structures*, vol. 27 n° 6, pp. 769-781.
- Hsiao, K.M., Hou, F.Y., e Spiliopoulos, K.V., 1988. Large displacement analysis of elasto-plastic frames. *Computers & Structures*, vol. 28, pp. 627-633.
- Iu, C.; Bradford, M. e Chen, W., 2009. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. *Engineering Structures*, vol. 31, pp. 799-813.

- Iwakuma, T., 1990. Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation. *Computers & Structures*, vol. 34, n° 2, p. 239-250.
- Kerr, A.D. e Soifer, M.J., 1969. The Linearization of Prebuckling State and Its Effect on the Determined Instability Loads. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 36, pp. 775-783.
- Krenk, S., 1995. An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, p. 823-839.
- Koiter, W.T., 1967. Post-buckling analysis of simple two-bar frame. *Recent Progresses in Applied Mechanics*, eds. B. Broberg, J. Hult and F. Niordson (Almqvist and Wiksell, Sweden).
- Kouhia, R. e Mikkola, M., (1989). Tracing the Equilibrium Path Beyond Simple Critical Points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 2923-2941.
- Landesmann, A., e Batista, E.M., 2005. Advanced analysis of steel framed buildings using the Brazilian standard and Eurocode-3. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 61, pp. 1051-1074.
- Lee, J.D., 1988. Finite element procedures for large strain elastic-plastic theories. *Computers & Structures*, vol. 28, n° 3, pp. 395-406.
- Lee, S., Manuel, F.S., e Rossow, E.C., 1968. Large deflections and stability of elastic frames. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, EM2, pp. 521-547.
- Lee, S.S.; Koo, J.S.; Choi, J.M., 1994. Variational formulation for Timoshenko beam element by separation of deformation mode. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, p. 599-610.
- Lemes, Í.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.

- Lemes, Í.J.M.; Silva, A.R.D., Silveira, R.A.M. e Rocha, P.A.S., 2016. Numerical analysis of nonlinear behavior of steel concrete composite structures. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais* (aceito para publicação).
- Liang, Q.Q.; UY, B.; Bradford, M.A.; Ronagh, H., 2005. Strength analysis of steel concrete composite beams in combined bending and shear. *Journal of Structural Engineering*, vol. 131, n° 10, pp. 1593-1600.
- Liew, J.; Chen, H. e Shanmugam, N., 2001. Inelastic analysis of steel frames with composite beams. *Journal of Structural Engineering*, vol. 127, n° 2, pp. 194-202.
- Manzi, E.N, 2001. *Formulações de Elementos Finitos Curvos para Análise de Arcos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Machado, F.C.S., 2005. *Análise Inelástica de Segunda-ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Mäkinen, J., Kouhia, R., Fedoroff, A., e Marjamäki, H., 2011. Direct computation of critical equilibrium states for spatial beams and frames. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 89, pp. 135–153.
- Mallett, R.H. e Marcal, P.V., 1968. Finite Element Analysis of Nonlinear Structures. *Journal of the Structural Division*. Proc. ASCE, vol. 94, n° ST9, p. 2081-2103.
- Meek, J.L., e Tan, H.S., 1984. Geometrically nonlinear analysis of space by an incremental iterative technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. vol. 47, pp. 261-282.
- Oliveira, C.E.M., 2015. *The influence of geometrically nonlinear effects on the progressive collapse of reinforced concrete structures*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Oñate, E., 2013. *Structural Analysis with the Finite Element Method*. vol. 1, International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Spain.
- Oran, C. e Kassimali, A., 1976. Large deformations of framed structures under static and dynamic loads. *Computers & structures*, vol.6, pp. 539-547.

- Ovunc, B.A. e Ren, T., 1996. Nonlinearities in the Analysis of Frames. *Computers & Structures*, vol. 61, n° 6, pp. 1177-1184.
- Pacoste, C., 1998. Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses. *Computed. Method in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 156, pp. 75-110.
- Pacoste, C., e Eriksson, A., 1995. Element behavior in post-critical plane frame analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 125, pp 319-343.
- Pacoste, C., e Eriksson, A., 1997. Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 144, pp. 163-197.
- Park, M.S., e Lee, B.C., 1996. Geometrically non-linear and elastoplastic three-dimensional shear flexible beam element of Von-Mises-type hardening material. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39(3), pp. 383-408.
- Petrolito, J., 1995. Stiffness Analysis of Beam Using a Higher-Order Theory. *Computers & Structures*, vol. 55, n° 1, p. 33-39.
- Pinheiro, L., 2003. *Análises Não Lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-Rígidos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Pires, D.M., 2012. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Powell, G., e Simons, J., 1981. Improved iteration strategy for nonlinear structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 1455-1467.
- Prado, Í.M., 2012. *CS-ASA Preprocessor: Sistema Gráfico Iterativo de Pré-processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

- Ramm, E., 1981. *Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89.
- Ramm, E., 1982. The Riks / Wempner Approach — An extension of displacement control method in non-linear analysis. *Non-linear Computational Mechanics*, ed. E. Hinton et al., Pineridge, Swansea, pp. 63-86.
- Reddy, J.N., 2004. An introduction to nonlinear finite element analysis. *Oxford University Press*. Oxford, U.K.
- Riks, E., 1972. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, pp. 1060-1066.
- Riks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, pp. 529-551.
- Rizzi, N., Di Carlo, A. e Pignataro, M., 1980. A parametric post-buckling analysis of an asymmetric two-bar frame. *J. Struct. Mech.* vol. 8, pp. 435-448.
- Rocha, G., 2000. *Estratégias Numéricas para Análise de Elementos Estruturais Esbeltos Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Rocha, P.A.S., 2006. *Análise inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semi-rígidas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Rodrigues, P.F.N., 2000. *Ferramentas Numéricas para a Análise Não-linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de Petróleo Offshore*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Roorda, J., 1965. *The Instability of Imperfect Elastic Structures*, PhD Thesis, University College London, England.
- Saje, M.; Turk, G.; Kalagasidu, A. e Vratanaar, B., 1998. A Kinematically Exact Finite Element Formulation of Elastic-Plastic Curved Beams. *Computers & Structures*, vol. 67, pp. 197-214.

- Santana, M.V.B., 2015. *Desenvolvimento de sistema computacional via MATLAB/GUI para análise geometricamente não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Santos, M.N., 2007. *Emprego de Elemento Finito Híbrido na Análise Não-linear de Estruturas Metálicas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Schweizerhof, K.H., e Wriggers, P., 1986. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, pp. 269-279.
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Simo, J.C., e Vu-Quoc, L., 1986. A three-dimensional finite strain rod model: Part 2: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, pp. 79-116.
- Southwell, R.V., 1941. *An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. 2nd Ed., Oxford University Press, Oxford, England.
- Stramandinoli, R.S.B., 2007. *Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil- PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Surovek, A.E., 2011. *Guidelines for the use of direct second-order inelastic analysis in steel frame design*. SEI-ASCE, Reston, VA.

- Tang, Y.Q., Zhou, Z.H. & Chan, S.L., 2015. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. *World Scientific Publishing Company*, vol. 15, n° 5, pp. 1450068.
- Timoshenko, S., Young, D.H. & Weaver, J.W., 1974. *Vibration Problems in Engineering*. 1. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois.
- Timoshenko, S.P. e Gere, J.E., 1982. *Mecânica dos Sólidos*. Livros Técnicos e Científicos, vol 01.
- Watson, L.T., Billups, S.C., e Morgan, A.P., 1987. Algorithm 652: HOMPACT: A suite of codes for globally convergent homotopy algorithms, *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 13(3), pp. 281-310.
- Wempner, G.A., 1969. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 5, pp.117-153.
- Wempner, G.A., 1971. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, pp. 1581-1599.
- Williams, F.W., 1964. An Approach to the Nonlinear Behavior of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 17, n° 4, pp. 451-469, 1964.
- Wood, R.D. e Zienkiewicz, O.C., 1977. Geometrically nonlinear finite element analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells. *Computers and Structures*, vol. 7, pp. 725-735.
- Wriggers, P., 2008. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer.
- Xu, Z. e Mirmiran, A. (1997). Looping Behavior of Arches Using Corotational Finite Element. *Computers & Structures*, vol. 62, n° 6, pp. 1059-1071.
- Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.
- Yang, Y.B., e Shieh, M.S., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 28 n° 12, pp. 2110-2116.

Ziemian, R.D. e McGuire, W., 2002. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. *Journal of Structural Engineering*, vol. 128, pp. 1301-1307.

Zienkiewicz, O.C., 1971. *The Finite Element in Engineering Science*. McGraw-Hill, London.

Zubydan, A.H., 2011. Inelastic second order analysis of steel frame elements flexed about minor axis. *Engineering Structures*, vol. 33, pp. 1240-1250.