

Universidade Federal de Ouro Preto - Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Reticulados com Restrições de Contato

Leticia Reis Batista Rosas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Prof. Dra. Andréa Regina Dias da Silva
Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Campus Morro do Cruzeiro
Ouro Preto, MG - Brasil
Setembro, 2016

R789a Rosas, Leticia Reis Batista.
Análise dinâmica de sistemas estruturais reticulados com restrições de contato [manuscrito] / Leticia Reis Batista Rosas. - 2016.
86f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva.
Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.
Área de Concentração: Construção Metálica.

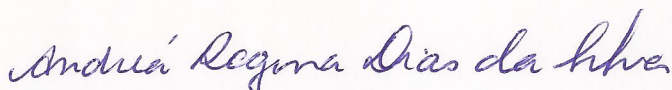
1. Projeto estrutural. 2. Interação solo-estrutura. 3. Análise funcional não-linear. I. Silva, Andréa Regina Dias da. II. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 624.014

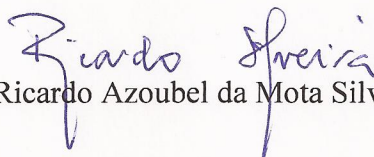
ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS COM RESTRIÇÕES DE CONTATO

AUTORA: LETÍCIA REIS BATISTA ROSAS

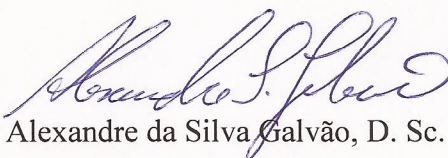
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 14 de setembro de 2016, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Andrea Regina Dias Silva, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D. Sc. – UFOP



Prof. Alexandre da Silva Galvão, D. Sc. – UFSJ



Prof. Kátia Inácio da Silva, D. Sc. – UFOP

*“Não é digno de saborear o mel aquele que se afasta da
colmeia por medo das picadelas das abelhas”*

William Shakespeare

Aos meus pais, Silvia e Eugênio.

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

À minha família, em especial meus pais, Silvia e Eugênio, por todo incentivo e apoio constante.

À minha orientadora, prof. Andréa Regina Dias da Silva, por sua dedicação em ensinar e ajudar durante a elaboração deste trabalho. Agradeço pela oportunidade e confiança.

Ao meu coorientador, prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, pela atenção e contribuição na realização deste trabalho.

Às amigas Jessica e Luma, pela convivência diária, apoio e companheirismo nesses dois anos.

Aos amigos de Ouro Preto, especialmente Everton, Thalita, Iara, Ígor e Marko, pelo companheirismo diário na UFOP. Muito obrigada pela amizade e todos os momentos de descontração e apoio.

À Sandra e sua família, pela grande amizade, apoio e carinho que sempre tiveram por mim.

Aos professores e colaboradores do PROPEC pelos ensinamentos.

Aos amigos e professores da UNEMAT – *Campus* de Sinop – MT.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação – PROPP da UFOP e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PROPEC, pelo suporte financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS COM RESTRIÇÕES DE CONTATO

Letícia Reis Batista Rosas

Setembro/2016

Orientadores: Andréa Regina Dias da Silva

Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Com o avanço da construção civil, tem-se projetado elementos estruturais cada vez mais esbeltos, o que os torna mais susceptíveis a problemas excessivos de vibrações. Em muitas situações, esses elementos estão apoiados em outros corpos, tais como o solo, que podem oferecer restrições de movimentos em algumas direções. Nesse contexto, a análise estática e dinâmica desses elementos considerando a interação com esse outro meio torna-se importante na concepção de um projeto estrutural. Este trabalho tem como objetivo realizar análise dinâmica de sistemas estruturais considerando sua interação com o solo. As análises são realizadas utilizando o sistema computacional CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), desenvolvido por Silva (2009). O solo é representado através do modelo de molas discretas e dos modelos contínuos de Winkler e Pasternak. São considerados os efeitos oriundos da não linearidade geométrica da estrutura e, em algumas análises, considera-se também o comportamento não linear do solo. A estratégia de modelagem utilizada baseia-se na aplicação do Método dos Elementos Finitos, e o problema de autovalor para determinação das frequências naturais é resolvido pelo método de Jacobi. O problema transiente não linear é resolvido através do método de integração de Newmark, em combinação com a estratégia incremental e iterativa de Newton-Raphson. Situações práticas envolvendo a interação entre o solo e a estrutura são avaliadas no decorrer do estudo, procurando evidenciar a influência do contato na trajetória de equilíbrio, na distribuição dos esforços, nas frequências naturais de vibração e na resposta transiente dessas estruturas.

Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

DYNAMIC ANALYSIS OF FRAMED STRUCTURES WITH CONTACT RESTRAINTS

Leticia Reis Batista Rosas

September/2016

Advisors: Andréa Regina Dias da Silva

Ricardo Azoubel da Mota Silveira

With the progress of construction, it has been designed thinner structural elements, which makes them more susceptible to excessive vibration problems. In many situations, these elements are supported by other means, such as soil, which may offer restriction of movement in some directions. In this context, static and dynamic analysis of these elements considering the interaction with another means becomes important at conception of a structural design. This work intends to develop dynamic analysis of structural systems considering their interaction with the ground. The analyzes were performed using the computer system CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), developed by Silva (2009). The soil was represented by the model of discrete springs, and continuous models of Winkler and Pasternak. It was felt the effects from the geometric nonlinearity of the structure and, in some analyzes, are also considered the non-linear behavior of the soil. The modeling strategy used is based on the application of the Finite Element Method, and the eigenvalue problem to determine the natural frequencies was resolved by the Jacobi method. The nonlinear transient problem was solved by the Newmark integration method in combination with the incremental and iterative Newton-Raphson strategy. Practical situations involving the interaction between soil and structure were evaluated during the study, showing the influence of contact in equilibrium path, the natural vibration frequency and transient response of these structures.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1. Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Objetivos	2
1.3 O Sistema Computacional CS-ASA	2
1.4 Revisão Bibliográfica	4
1.5 Organização do Trabalho	7
2. Interação entre o Solo e a Estrutura	9
2.1 Introdução	9
2.2 Modelo de Molas Discretas.....	12
2.3 Modelo de Winkler.....	13
2.4 Modelo de Pasternak	14
2.5 Modelo de Filonenko-Borodich	15
3. Formulação de Elementos Finitos	16
3.1 Introdução	16
3.2 Problema de Contato Bilateral	18
3.2.1 Discretização através do MEF.....	22
3.3 Modelagem do Solo.....	24
3.3.1 Modelo de molas discretas	24
3.3.2 Modelo de Winkler linear	26
3.3.3 Modelo de Winkler não linear.....	28
3.3.4 Modelos de Pasternak e Filonenko-Borodich	30
3.4 Modelagem da Estrutura.....	32
4. Metodologia para Análise Estática Não Linear	41
4.1 Introdução	41
4.2 Solução Incremental Predita	42
4.3 Ciclo de Iterações	43
4.4 Estratégias de Incremento de Carga e Iteração	45

4.4.1 Estratégias de Incremento de Carga	45
4.4.2 Estratégias de Iteração	48
5. Metodologia para Análise Dinâmica Não Linear	51
5.1 Introdução	51
5.2 Equações Gerais	52
5.3 Análise de Vibração.....	55
5.4 Análise Transiente Não Linear.....	57
6. Aplicações	61
6.1 Introdução	61
6.2 Viga Biapoiada Sobre Fundação Linear	61
6.3 Pórtico Plano Suportado por Pilares em Contato com o Solo	65
6.4 Arco Senoidal com Molas Discretas nas Extremidades	68
6.5 Viga Biapoiada Sobre uma Fundação Não Linear	71
6.6 Coluna em Contato com Fundações de Winkler e Pasternak	73
7. Considerações Finais	78
7.1 Conclusão.....	78
7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	79
Referências Bibliográficas	80

Lista de Figuras

1.1 Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados.....	3
2.1 Exemplos de estruturas em contato com o solo.....	10
2.2 Relação força-deslocamento da fundação.....	11
2.3 Curvas de deslocamento da base elástica.....	12
2.4 Modelo de molas discretas representando o solo.....	12
2.5 Modelo de Winkler representando a região de contato.....	13
2.6 Modelo de Pasternak representando a região de contato.....	14
2.7 Modelo de Filonenko-Borodich representando a região de contato.....	15
3.1 Efeitos de segunda ordem: global, $P-\Delta$, e local, $P-\delta$	17
3.2 Elemento de viga-coluna adotado.....	18
3.3 Problema de engenharia envolvendo contato bilateral.....	19
3.4 Molas discretas conectadas a um ponto i da estrutura.....	24
3.5 Modelo multilinear.....	26
3.6 Comportamento da seção transversal.....	34
3.7 Deslocamentos naturais do elemento.....	39
5.1 Elemento finito adotado.....	52
6.1 Viga biapoiada repousando sobre fundação elástica.....	62
6.2 Viga biapoiada sobre fundação elástica de comprimento variável.....	62
6.3 Frequência de vibração da viga biapoiada em função da variação do comprimento da fundação elástica (valor de m).....	63
6.4 Resposta no tempo para modelos de Winkler e molas discretas.....	64
6.5 Resposta no tempo para diferentes valores de k_1	64
6.6 Pórtico plano em contato com o solo.....	65
6.7 Variação da frequência com a magnitude do carregamento aplicado.....	68
6.8 Resposta transiente para diferentes valores de k_2	8
6.9 Arco senoidal abatido com molas discretas na extremidade.....	69
6.10 Trajetória de equilíbrio do arco com molas discretas de diferentes rigidezes.....	70

6.11	Vibração forçada do arco.....	70
6.12	Resposta transiente do arco	71
6.13	Viga sobre uma fundação não linear com carregamento distribuído	72
6.14	Trajectoria de equilíbrio da viga com diferentes valores de k_3	73
6.15	Coluna biapoiada em contato com fundação Pasternak	74
6.16	Trajectoria de equilíbrio	75
6.17	Vibração forçada	75
6.18	Trajectoria de equilíbrio da coluna em contato com fundação do tipo Winkler não linear.....	76
6.19	Frequências de vibração da coluna pré-carregada em contato com fundação do tipo Winkler linear e não linear	77

Lista de Tabelas

4.1 Metodologia de solução numérica para análise estática não linear	47
5.1 Metodologia de solução numérica para análise de vibração forçada	58
5.2 Metodologia de solução numérica para análise transiente não linear	60
6.1 Três primeiras frequências de vibração da viga biapoiada.....	62
6.2 Deslocamentos (m) e rotações (rad) do pórtico plano	66
6.3 Frequências naturais (Hz) do pórtico plano.....	67
6.4 Frequências naturais (Hz) do arco	71
6.5 Deslocamentos no centro do vão da viga ($L/2$).....	72
6.6 Frequências de vibração da coluna	76

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Os fenômenos físicos da natureza podem ser avaliados numericamente com certo grau de precisão, desde que o modelo físico-matemático adotado seja capaz de representá-lo, simulando adequadamente seu comportamento. Tal modelo geralmente pode ser expresso através de equações diferenciais ou integrais, mas dependendo do grau de complexidade, a solução de forma analítica pode ser inviável. Nesse contexto, os métodos numéricos tornam-se praticamente indispensáveis. Dentre esses, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), que vem sendo bastante aplicado na resolução de problemas complexos da mecânica estrutural.

Na análise estrutural, uma das áreas mais importantes é o estudo do comportamento estático e dinâmico de elementos estruturais tais como vigas, colunas, placas e cascas. Em muitas situações esses elementos estão apoiados em outros corpos, ou meios, que podem oferecer restrições de movimentos em algumas direções, como por exemplo, estruturas de fundações, pavimentos, tubulações enterradas, trilhos ferroviários, entre outros. Esse tipo de problema é denominado problema de contato, podendo ser caracterizado como unilateral ou bilateral. O contato bilateral considera que o meio de contato reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão. Uma modelagem mais realística do solo pode ser obtida considerando na sua formulação a reação apenas às solicitações de compressão, o que caracteriza o contato como unilateral.

Com o avanço da tecnologia dos materiais e da indústria da construção civil, surgem materiais com elevada resistência e novas técnicas construtivas, tornando-se possível projetar estruturas mais esbeltas e com a possibilidade de vencer vãos cada vez maiores. Sendo assim, o comportamento não linear das estruturas passa a ser relevante, e deve ser considerado nas análises estruturais. Como consequência, as estruturas mais esbeltas

tornam-se mais susceptíveis a problemas excessivos de vibrações, e por isso a análise estrutural dinâmica, além da estática, torna-se importante na concepção do projeto estrutural.

1.2 Objetivos

Tem-se por objetivo realizar a análise dinâmica de sistemas estruturais reticulados considerando a interação entre o solo e a estrutura, utilizando o sistema computacional CS-ASA (SILVA, 2009). Esse programa realiza a análise numérica avançada, estática e dinâmica, de estruturas baseado no Método dos Elementos Finitos. Destaca-se que com esse sistema é possível, atualmente, efetuar a análise estática não linear de sistemas estruturais elásticos em contato bilateral com um meio também elástico. Objetiva-se incluir no programa um modelo que simula o comportamento não linear do solo, e também realizar adaptações de estratégias de solução do problema dinâmico, considerando a interação entre o solo e a estrutura, e o efeito da não linearidade geométrica.

Destaca-se que este trabalho vai de encontro com os objetivos do PROPEC/DECIV/EM/UFOP e está relacionado com a linha de pesquisa *Mecânica Computacional*, que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia; e *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas Metálicas*, que visa estudar o comportamento das diversas partes de uma estrutura metálica.

1.3 O Sistema Computacional CS-ASA

Este trabalho utilizou o sistema computacional CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), apresentado por Silva (2009). Trata-se de um sistema que realiza análises estruturais avançadas, estáticas e dinâmicas, utilizando o Método dos Elementos Finitos. Foi desenvolvido em linguagem *Fortran 95* (CHAPMAN, 2003), e é organizado em módulos, de modo a permitir melhor produtividade nas implementações e melhor organização para inclusão de novas análises no sistema.

Através do CS-ASA é possível considerar os efeitos não lineares geométricos (ALVES, 1993; YANG e KUO, 1994; PACOSTE e ERIKSSON, 1997), a semirrigidez da ligação (CHAN e CHUI, 2000) e a inelasticidade do aço (LIEW, 1992; CHAN e CHUI, 2000). É importante destacar que o CS-ASA contempla o problema de contato para realizar análises estáticas lineares e não lineares, considerando o contato como bilateral, e os modelos lineares de molas discretas, Winkler e Pasternak. A Figura 1.1 ilustra os tipos de análises e efeitos

considerados no CS-ASA, e destaca a parte do sistema utilizada neste trabalho. Foi incluída a possibilidade de realizar a análise dinâmica de sistemas estruturais com restrições de contato do tipo bilateral, utilizando os modelos lineares de bases elásticas já implementados por Maciel (2012). Além disso, foram implementados modelos representativos do solo com comportamento não linear.

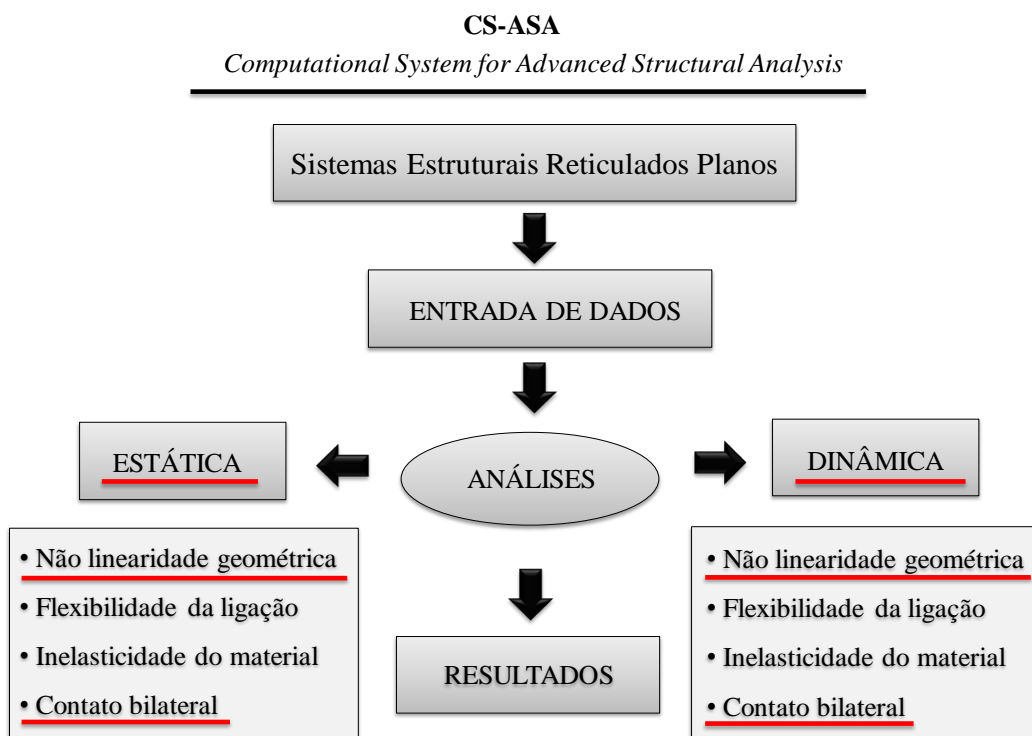


Figura 1.1 Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados

O processo de análise numérica realizado pelo CS-ASA segue as etapas de pré-processamento, análise e pós-processamento, tratadas normalmente de forma independente. No pré-processamento, a entrada de dados é feita através de três arquivos com formato texto, onde o usuário faz a modelagem do problema. No primeiro arquivo, o usuário define o tipo de análise, se linear ou não linear, estática ou dinâmica, e fornece os dados gerais da estrutura e da fundação, como as características geométricas e físicas, condições de contorno, carregamento e os parâmetros de rigidez do solo.

Se a análise for estática não linear, no segundo arquivo, o usuário define qual a formulação não linear a ser utilizada e insere informações sobre a metodologia de solução não linear. O terceiro arquivo é utilizado para análises dinâmicas, onde o usuário pode optar

por resolver as equações de movimento no domínio do tempo ou da frequência. No caso da análise no domínio do tempo, deve-se informar o número de passos de tempo, o incremento de tempo e a tolerância do processo iterativo. Neste arquivo o usuário também informa a formulação não linear a ser utilizada, define o carregamento dinâmico aplicado, o amortecimento e condições iniciais para deslocamento, velocidade e aceleração nodais.

O CS-ASA gera uma malha de elementos finitos para o modelo definido nesses arquivos de entrada, e a partir daí realiza as análises, fornecendo como resultado alguns arquivos de saída com extensões .S, .DAT e .LOG, que auxiliam o usuário na verificação dos resultados. Detalhes referentes a esses arquivos podem ser encontrados em Prado (2012).

1.4 Revisão Bibliográfica

Estudos sobre estruturas em contato com fundações elásticas já foram desenvolvidos no âmbito do PROPEC/UFOP, e pelos orientadores deste trabalho. Silveira (1995) desenvolveu uma metodologia de solução numérica não linear para resolver problemas de instabilidade de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato; Silveira e Gonçalves (1995) realizaram a análise estática não linear geométrica de arcos esbeltos com restrições unilaterais de contato; em Silva (1998) estão os fundamentos da solução numérica, via MEF, para problemas de equilíbrio de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato, considerando material elástico linear. Em Silveira *et al.* (2008a) foi usado o método de Ritz para a redução espacial e o método de Newton-Raphson para a solução das equações não lineares, sendo o problema de contato do tipo unilateral. Já em Pereira (2003) e Silveira *et al.* (2008b) o MEF foi usado para discretizar tanto a estrutura quanto o solo, e técnicas de programação matemática foram adotadas na solução do problema de otimização. Em Silveira *et al.* (2013) foi desenvolvido um estudo envolvendo arcos e anéis com restrições unilaterais de contato; nesse mesmo trabalho pode ser encontrada uma ampla pesquisa bibliográfica sobre análises de problemas envolvendo barras, placas, anéis e cascas cilíndricas com restrições de contato. Em Maciel (2012) e Silveira *et al.* (2015) é estudado o equilíbrio e estabilidade de barras em contato bilateral, via MEF, considerando os efeitos da não linearidade geométrica da estrutura. Outros trabalhos envolvendo esse tema podem ser encontrados na literatura, e alguns serão citados a seguir.

Um estudo de vibração livre de vigas sobre meio elástico modelado através de molas discretas foi realizado por Lai *et al.* (1992), utilizando o Método dos Elementos Finitos e considerando o contato com comportamento bilateral. Naidu e Rao (1995) realizaram uma

análise de vibração livre de vigas e colunas em uma fundação elástica não linear, usando uma formulação de elementos finitos. Uma análise semelhante foi feita por Thambiratnam e Zughe (1996a,b). Esses autores também realizaram análises dinâmicas considerando cargas móveis, estendendo para o caso de estruturas de via férrea.

Frequências de vibração livre foram analisadas por De Rosa (1995), com vigas de Timoshenko sobre uma fundação elástica de dois parâmetros. Foram deduzidas duas variantes da equação diferencial de movimento, em que o segundo parâmetro da base pode ser uma função da rotação da seção transversal.

Martins (1998) estudou analiticamente o problema de vibração flexional de vigas, pórticos e grelhas, bem como o problema de contato segundo os modelos de Winkler e Pasternak, utilizando a teoria de viga de Timoshenko.

Avramidis e Morfidis (2006) resolveram analiticamente uma viga Timoshenko em contato com uma base de três parâmetros. Fizeram também uma comparação entre bases de um, dois e três parâmetros através de elementos finitos, concluindo que a fundação do tipo Kerr fornece um melhor resultado. Para estimar os parâmetros do solo, propuseram um procedimento analítico baseado no modelo de Vlasov modificado. Já em Ruge e Birk (2007), foi feita a análise dinâmica de vigas “infinitas” de Euler-Bernoulli e Timoshenko repousando sobre uma fundação elástica do tipo Winkler. As análises foram feitas no domínio do tempo e da frequência, e é dada ênfase para o comportamento assintótico das expressões de rigidez para altas frequências.

Em Vaz (2008) foi apresentada uma metodologia para o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração de uma viga de Euler-Bernoulli de geometria variável, escalonada em várias partes, e com apoios elásticos nas extremidades. Os resultados foram gerados por um programa computacional desenvolvido pela autora e comparados com ensaios experimentais com vigas escalonadas em até três partes, de seção circular, além de resultados teóricos obtidos da literatura. O método apresentado elimina a necessidade do uso de malhas na solução de problemas dinâmicos e é capaz de gerar bons resultados. Já em Almeida (2012) foi realizado um estudo dinâmico comparativo entre as frequências naturais dos modelos de viga escalonada de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko, com diferentes condições de apoios elásticos e seções variando na forma e dimensão.

Um estudo sobre vigas de concreto armado repousando sobre uma fundação do tipo Winkler foi realizado por Al-Azzawi *et al.* (2010). A pesquisa foi realizada através de elementos finitos, utilizando o software ANSYS, e considera as não linearidades do material, geométrica e da fundação elástica.

Sapountzakis e Kampitsis (2010) fizeram análise dinâmica não linear de vigas-coluna em uma fundação elástica de Winkler. O contato foi considerado unilateral e bilateral, e utilizou-se um método baseado em elementos de contorno. A aplicação desse método produz um sistema não linear acoplado de equações de movimento, e a solução do sistema é feita de forma iterativa, utilizando um método de aceleração média em combinação com o método de Newton-Raphson modificado. O modelo proposto leva em conta os efeitos de flexão e deformações por cisalhamento.

Muñoz (2010) realizou a análise dinâmica de vigas prismáticas de comprimento “infinito” repousando sobre fundação elástica do tipo Winkler, submetida à ação de cargas móveis e forças axiais de compressão. A viga foi descrita pelas teorias de Euler-Bernoulli (teoria clássica) e de Rayleigh (considerando inércia rotacional). Foi proposto um método aproximado baseado no método de Galerkin para análise do problema linear e não linear, e o autor considerou a não linearidade da fundação. Muñoz e Gonçalves (2010) realizaram a análise dinâmica não linear de sistemas estruturais reticulados considerando a interação entre o solo e a estrutura. Levou-se em conta o comportamento não linear do solo e a não linearidade geométrica da estrutura. O solo foi representado por molas unidimensionais com comportamento elastoplástico, e o problema foi resolvido via MEF.

Utilizando também o método de Galerkin para discretizar o problema não linear, Celep *et al.* (2011) estudaram a vibração de vigas sobre fundação elástica, unilateral, de dois parâmetros segundo o modelo de Pasternak, e sujeitas à força concentrada no meio do vão e carregamento uniformemente distribuído.

Bhattiprolu *et al.* (2013) desenvolveram uma metodologia de solução para uma viga biapoiada em contato com uma fundação viscoelástica não linear, considerando contato bilateral e unilateral, sob carregamentos estáticos e dinâmicos. Vigas com contato unilateral também foram estudadas por Torbacki (2008), que realizou análise estática utilizando um modelo representativo do solo de dois parâmetros, através do MEF.

Mais recentemente, Ghannadial e Mofid (2015) propuseram a solução analítica para vibração livre de vigas Timoshenko sobre base elástica variável do tipo Winkler usando funções de Green.

Em Muñoz (2015) foi desenvolvida uma metodologia de análise não linear dinâmica de sistemas estruturais reticulados sob excitações de base, considerando a não linearidade geométrica da estrutura e apoios, representados por molas unidimensionais, com comportamento elastoplástico na resposta. O problema no espaço foi resolvido por discretização do sistema em elementos finitos. Para a análise em frequência, foi apresentada

uma metodologia baseada no método do balanço harmônico e no método de Galerkin, juntamente com técnicas de continuação, para a obtenção de curvas de ressonância não lineares.

Foram encontrados na literatura alguns trabalhos envolvendo a interação entre o solo e a estrutura onde foi considerada a não linearidade dessa fundação. Chandra *et al.* (1987) propôs um polinômio com um termo não linear cúbico para representar a reação da fundação elástica, levando-se em conta o comportamento não linear do solo. Shen (1995) usou esse modelo para análise estática de placas imperfeitas, e, mais recentemente, o mesmo autor utilizou esse modelo na análise do comportamento termomecânico de placas em contato com o solo (SHEN, 2000). Outro trabalho relevante usando esse modelo foi desenvolvido por Holanda (2000), que estudou o equilíbrio e a estabilidade de placas apoiadas em fundações elásticas lineares e não lineares, considerando ainda a não linearidade geométrica da estrutura. Tsiatas (2010) também utilizou esse método para modelar o solo e realizar a análise não linear, mas aplicado a vigas de seção não uniforme.

1.5 Organização do Trabalho

Esta dissertação está organizada em sete capítulos. Ao longo do trabalho são apresentados os fundamentos teóricos para compreensão das formulações e metodologias de solução utilizadas. Inicialmente, no Capítulo 2, são apresentados os fundamentos teóricos sobre o problema de contato bilateral e unilateral. Nesse capítulo também constam os fundamentos teóricos dos modelos utilizados para simular o comportamento do solo.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação de elementos finitos para modelagem do solo através do contato bilateral, e em seguida as formulações do modelo discreto e dos modelos contínuos de Winkler e Pasternak. Logo após, é explicada a formulação utilizada para modelar a estrutura, considerando os efeitos da não linearidade geométrica. Na descrição das formulações, é mostrada a obtenção dos vetores de forças internas e da matriz de rigidez do elemento finito em contato com o solo.

A seguir, o Capítulo 4 trata da metodologia para análise estática não linear desses sistemas estruturais, destacando-se as estratégias de incremento de carga e iteração usadas no processo de solução não linear incremental-iterativo. O Capítulo 5 traz a metodologia para análise numérica dinâmica, abordando a equação básica de movimento e sua discretização. É apresentada a metodologia para obtenção das frequências de vibração livre

e forçada, e também a metodologia de solução do problema transiente através do método de integração de Newmark.

O Capítulo 6 destina-se à aplicação das formulações apresentadas nos capítulos anteriores, através de cinco exemplos que validam as formulações. Os resultados são comparados com soluções numéricas encontradas na literatura, ou com os resultados obtidos através do software SAP2000.

Por fim, no Capítulo 7, são feitas algumas observações e conclusões referentes à pesquisa. Também são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros, com o objetivo de continuar as pesquisas sobre o tema deste trabalho.

Capítulo 2

Interação Entre Solo e Estrutura

2.1 Introdução

Com o intuito de otimizar sistemas de fundação de estruturas, inúmeros esforços têm sido feitos para avançar na modelagem de solos, bem como na simulação da interação entre o solo e a fundação. O estudo dessa interação é muito importante, devido à dificuldade em representar tanto o comportamento da estrutura quanto o do solo. O contato entre esses dois corpos é muito comum na engenharia, e estruturas de fundações, trilhos de trem, tubulações enterradas, muros de contenção, túneis, são algumas situações onde tal interação acontece. A Figura 2.1 ilustra alguns desses casos.

A interação entre solo e estrutura pode ser tratada como bilateral ou unilateral. No caso onde o solo reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão, o contato é denominado como bilateral, e no caso onde o solo reage apenas às solicitações de compressão, o contato é denominado unilateral (SILVA, 1998). A diferença entre os dois casos pode ser compreendida através da Figura 2.2. Na Figura 2.2a, nota-se que a fundação oferece reação às solicitações de tração e compressão e, ainda, a relação constitutiva força F - deslocamento v é linear, indicando que a rigidez do solo permanece constante. Já na Figura 2.2c, tem-se o caso bilateral onde o solo tem comportamento não linear. Em 2.2b e 2.2d tem-se o contato unilateral — reação do meio apenas aos esforços de compressão — e o comportamento linear e não linear para o solo, respectivamente.

No caso do contato bilateral, admite-se que o meio de contato trabalha integralmente com a estrutura, ou seja, a região de contato entre os corpos é conhecida à priori, uma vez que não acontecerá a perda de contato. Já no caso unilateral, a definição da região de contato entre os corpos vai depender da configuração deformada da estrutura, para uma determinada solicitação. Sendo assim, mesmo considerando a hipótese de pequenos deslocamentos e material elástico, o problema será não linear no caso unilateral.



(a) Tubulação enterrada
<http://www.geraldoresende.com.br>



(b) Trilhos de trem
www.eurorailways.com



(c) Contenção em túnel
<http://www.panoramio.com/user/693202>



(d) Viaduto
<http://www.st.rs.gov.br/>

Figura 2.1 Exemplos de estruturas em contato com o solo

Como destacado, o comportamento real do solo tem difícil descrição, e por isso diferentes modelos matemáticos foram desenvolvidos para representá-lo. Dutta e Roy (2002) reuniram em seu trabalho uma revisão dos modelos mais comuns de meios elásticos com um, dois e três parâmetros que são usados para descrever o comportamento do solo ao longo do processo de carregamento da estrutura. Wang *et al.* (2005) realizaram um estudo semelhante, reunindo uma revisão sobre modelos de fundações elásticas de um ou dois parâmetros em contato com vigas e placas. Em seu estudo, também foi realizada uma revisão sobre os métodos de solução, entre eles: diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno.

Os modelos considerados mais simples são os que apresentam apenas um parâmetro definindo as propriedades do material da fundação elástica. Dentre esses modelos, destacam-se o de molas discretas dispostas ao longo da região de contato (SILVEIRA, 1995; SILVA, 1998; PEREIRA, 2003; MACIEL, 2012) e o modelo de Winkler (HETÉNYI, 1946;

SILVA, 1998; MACIEL, 2012). O modelo de Winkler corresponde a uma camada formada por molas estreitamente espaçadas e independentes entre si. Ambos não consideram a interação entre as molas, o que significa que, se uma base é submetida a uma carga distribuída em sua superfície, as molas localizadas fora da região carregada não serão afetadas. Por esse motivo, esses modelos não representam precisamente as características de alguns tipos de fundações, pois o solo é, na realidade, um corpo contínuo e, portanto, deve existir uma curva de deflexão contínua. Os modelos com dois parâmetros definindo o comportamento do solo, como os de Pasternak, Filonenko-Borodich e Vlasov, já consideram as interações entre as molas, o que melhora o modelo proposto por Winkler. Esses modelos são ilustrados na Figura 2.3 e serão comentados com detalhes nas seções seguintes.

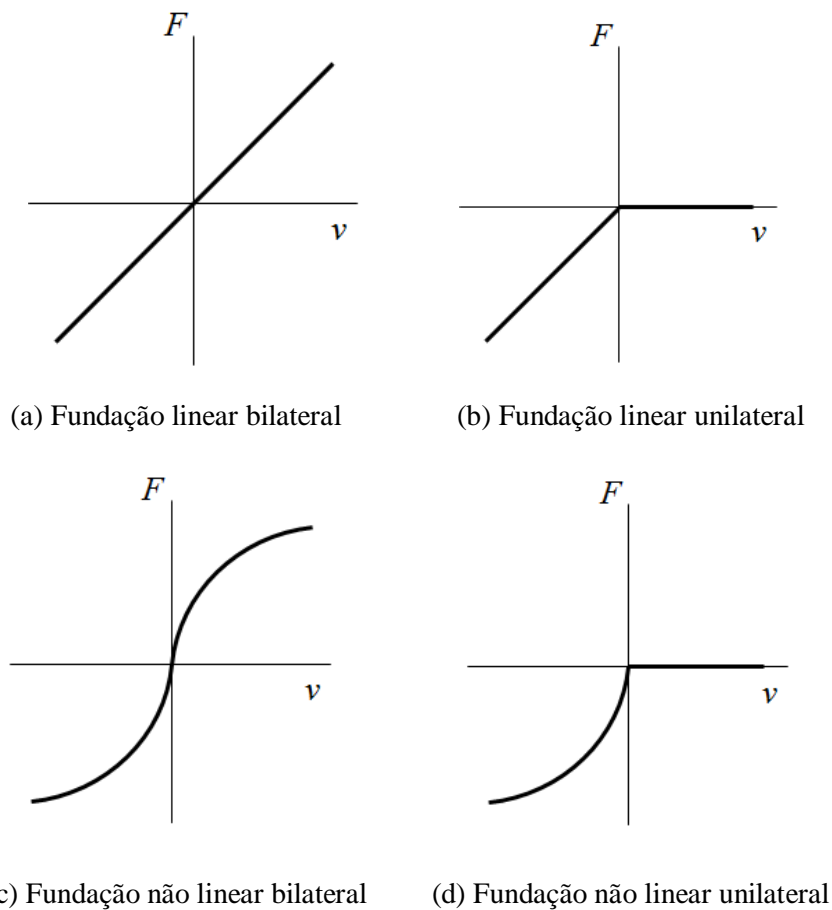


Figura 2.2 Relação força-deslocamento da fundação

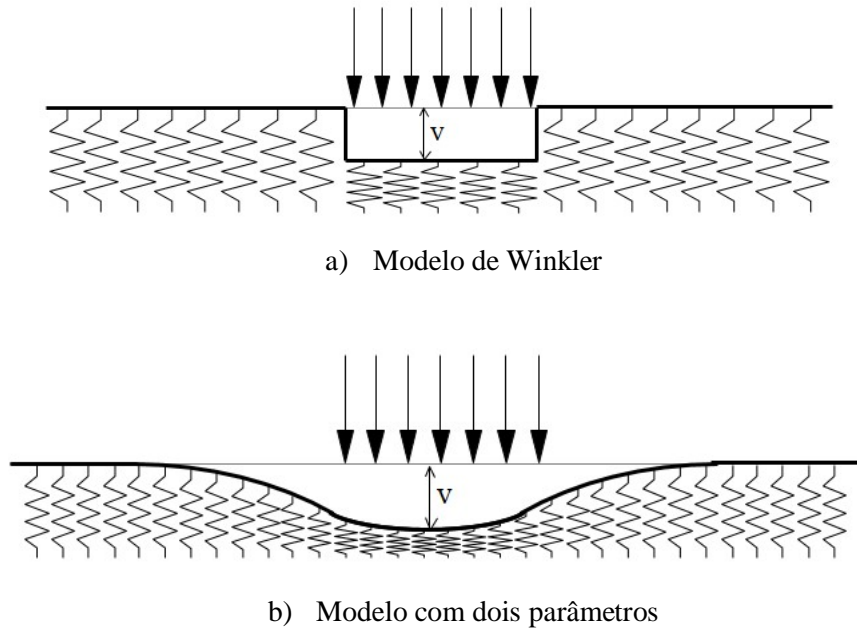


Figura 2.3 Curvas de deslocamento da base elástica

2.2 Modelo de Molas Discretas

Esse modelo representativo do solo é constituído por molas discretas dispostas ao longo da região de contato. As molas são independentes entre si e, portanto, não é considerada qualquer interação entre as mesmas.

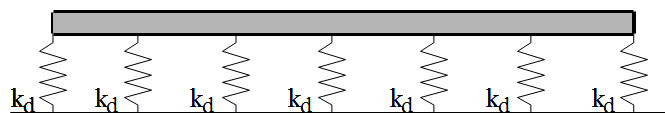


Figura 2.4 Modelo de molas discretas representando o solo

Na discretização via MEF, a malha deve ser escolhida de forma que os nós coincidam com o posicionamento das molas. Para a reação da base elástica, tem-se a seguinte expressão:

$$r_b = k_d v_b |_{(x_i, y_i)} \quad (2.1)$$

onde r_b e v_b são, respectivamente, a reação e o deslocamento da base elástica, k_d é o parâmetro de rigidez da mola, dado em unidade de força por comprimento, e (x_i, y_i)

representa a posição dos nós da estrutura e da base elástica que estão em contato. A Figura 2.4 ilustra uma viga repousando sobre uma fundação desse modelo.

2.3 Modelo de Winkler

O modelo de Winkler (WINKLER, 1867) representa a região de contato através de um sistema de molas estreitamente espaçadas e independentes entre si (Figura 2.5). Nesse modelo, a reação exercida em um dado ponto da região de contato é assumida como proporcional ao deslocamento vertical da estrutura nesse mesmo ponto, independente dos deslocamentos em outras partes da estrutura em contato, e pode ser expressa por:

$$r_b = k_1 v_b \quad (2.2)$$

onde r_b e v_b são, respectivamente, a reação da base e o deslocamento, k_1 é o parâmetro de rigidez da mola, dado em unidade de força por área.

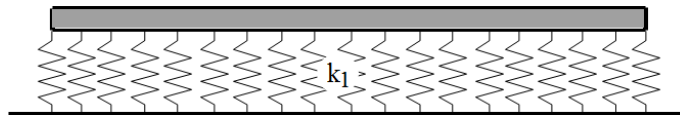


Figura 2.5 Modelo de Winkler representando a região de contato

A maior dificuldade em aplicar o modelo de Winkler é quantificar o valor do parâmetro de rigidez do solo. Em termos práticos, o valor de k_1 é determinado através de ensaios de carregamento de placas *in-situ* (*plate load tests*), onde é aplicado um carregamento vertical e perpendicular à placa e medido seu deslocamento. Assume-se que a reação da base é proporcional ao deslocamento da estrutura em um determinado ponto, e considera-se o solo como um material elástico que obedece à Lei de Hooke. A partir do ensaio obtém-se a curva carga-deslocamento, e o valor de k_1 é o módulo secante do gráfico (KAMESWARA RAO, 2011). Há certa dificuldade em determinar o valor de k_1 pois seu valor não depende só das características de deformação do solo, mas também do tamanho da placa utilizada. Um estudo referente ao tamanho da placa pode ser encontrado em Chandra *et al.* (1987).

A partir do valor do parâmetro de rigidez de Winkler, k_1 , obtém-se o valor do parâmetro de rigidez para o modelo discreto, k_d , através da seguinte transformação:

$$k_d = \frac{k_1 L}{n_{ef}} \quad (2.3)$$

onde L é o comprimento da estrutura que está em contato com o solo, e n_{ef} é o número de elementos finitos que a compõem. Essa equação é válida para estruturas com apoios em suas extremidades.

Existe a possibilidade de considerar o comportamento não linear do solo através do modelo de Winkler. Um polinômio com um termo não linear cúbico foi proposto por Chandra *et al.* (1987) para representar a reação da fundação elástica, incluindo um parâmetro k_3 . A Figura 2.2 ilustra a diferença entre os casos de fundação linear e não linear. Nesse modelo, a reação da fundação é dada por:

$$r_b = k_1 v_b \pm k_3 v_b^3 \quad (2.4)$$

em que k_3 é o segundo parâmetro de rigidez da parcela não linear. O sinal positivo, ou negativo, na equação anterior está relacionado a uma fundação com ganho ou perda de rigidez, respectivamente.

2.4 Modelo de Pasternak

O modelo de Pasternak (PASTERNAK, 1954) considera que as molas são conectadas por uma camada incompressível que se deforma apenas sob tensões de cisalhamento, como mostra a Figura 2.6. Esse modelo procura estabelecer certa interação entre as molas usadas no modelo de Winkler. Tem-se:

$$r_b = k_1 v_b - G \nabla^2 v_b \quad (2.5)$$

onde G representa o parâmetro de rigidez cisalhante da camada.

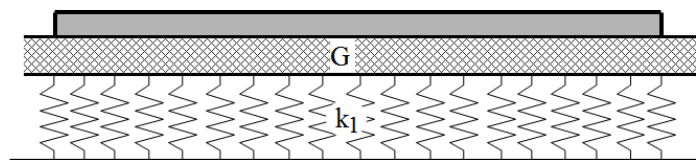


Figura 2.6 Modelo de Pasternak representando a região de contato

2.5 Modelo de Filonenko-Borodich

Esse modelo, ilustrado na Figura 2.7, assume que as molas são conectadas a uma membrana elástica sujeita a um campo constante de tração T , procurando estabelecer certa interação entre as molas. Matematicamente, é representado pela expressão:

$$r_b = k_1 v_b - T \nabla^2 v_b \quad (2.6)$$

onde T é a intensidade do campo de tração na membrana.

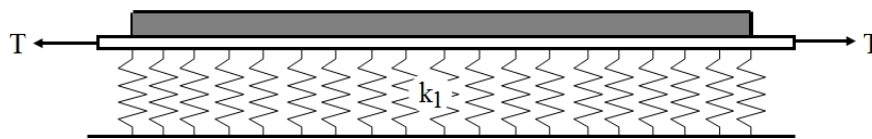


Figura 2.7 Modelo de Filonenko-Borodich representando a região de contato

Observa-se certa equivalência entre as expressões para reação da fundação dos modelos de Pasternak e Filonenko-Borodich. Dessa forma, nos capítulos seguintes, o segundo parâmetro da fundação (T ou G) será denotado por k_2 .

Capítulo 3

Formulação de Elementos Finitos

3.1 Introdução

Grande parte das normas que se baseiam no modelo de resistência última têm adotado certas medidas para que seja considerada a não linearidade. Isso ocorre porque, em geral, os projetos têm sido criados considerando a estrutura com comportamento elástico linear e, sendo assim, as equações de equilíbrio são formuladas com base na configuração indeformada da estrutura. Dessa forma, assume-se que as deformações são pequenas, e seus efeitos são insignificantes na resposta e equilíbrio da estrutura.

No entanto, uma análise elástica linear não é capaz de reproduzir o comportamento de estruturas sob situações de carregamento limite ou condições não usuais de carregamento, pois as estruturas geralmente comportam-se de forma não linear antes de atingirem seus limites de resistência. Dessa forma, tem sido feita uma busca por uma modelagem estrutural que retrate de forma mais realística o comportamento das estruturas, e a consideração apropriada dos efeitos relacionados às não linearidades afeta significativamente a qualidade dos resultados obtidos nas análises.

Dentre as fontes de não linearidade, destacam-se a não linearidade física e a não linearidade geométrica. A primeira ocorre quando o material que compõe a estrutura não apresenta uma relação tensão-deformação linear, ou seja, não obedece à Lei de Hooke. Nesse caso, as equações constitutivas são mais complexas, e é considerada a perda de rigidez do material à medida que a estrutura é carregada. Esse efeito não é considerado neste trabalho, mas pode ser consultado em trabalhos como os de Chan e Chui (2000), Machado (2005), Silva (2009) e Lemes (2015).

A não linearidade geométrica surge em casos onde ocorre a modificação da geometria da estrutura ao longo do seu processo de deformação, ou seja, em estruturas com deslocamentos relativamente grandes, onde a deflexão lateral de um membro pode

ocasionar o aparecimento de momentos fletores adicionais. Diz-se que a estrutura tem comportamento geometricamente não linear, conhecido também como efeitos de segunda ordem. Nesse caso, consideram-se os efeitos $P-\Delta$ (global) e $P-\delta$ (local), oriundos das deformações da estrutura à medida que é carregada. Esses efeitos são exemplificados na Figura 3.1.

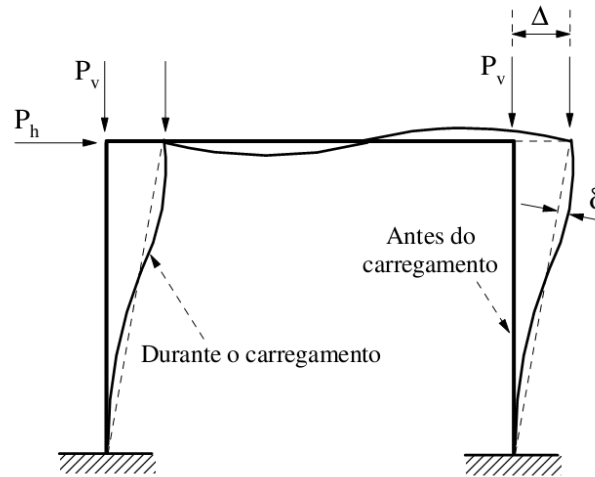


Figura 3.1 Efeitos de segunda ordem: global, $P-\Delta$, e local, $P-\delta$ (SILVA, 2009)

A seguir, na próxima seção, será apresentada a metodologia utilizada para a modelagem do solo através da formulação de contato bilateral, e a modelagem da estrutura considerando os efeitos geometricamente não lineares. As formulações utilizadas são baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF), onde procura-se discretizar (dividir) o meio contínuo em subdomínios (elementos), que são interligados por pontos nodais, onde define-se os graus de liberdade a serem determinados. Em geral, os resultados obtidos pelo MEF são mais precisos quanto maior for o refinamento da malha, conduzindo à solução exata do problema. Entretanto, deve-se adotar uma malha de elementos finitos que obtenha resultados com boa precisão, dentro do tempo de análise esperado.

A Figura 3.2 traz o elemento finito de viga-coluna adotado neste trabalho, e mostra também os deslocamentos e forças nodais no sistema global de coordenadas. Trata-se de um elemento reticulado plano, limitado pelos nós i e j , que se deforma no plano da estrutura. Cada um desses nós possui três graus de liberdade, que são os deslocamentos axial u , e transversal v , e a rotação θ . São indicadas também as forças nodais.

Algumas considerações quanto à geometria e deformação são feitas na modelagem desse elemento de viga-coluna, e são válidas para a análise da maioria dos sistemas estruturais em aço. Assume-se que os elementos são inicialmente retos e que suas seções transversais permanecem planas após a deformação. Os perfis são compactos, não havendo problemas de flambagem local, e os membros da estrutura são contraventados de forma que a influência da flambagem lateral ou torção seja insignificante. É desprezado também o encurtamento axial nos membros sujeitos à flexão, ocasionado pela curvatura. São consideradas pequenas tensões e deformações, mas são permitidos grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido.

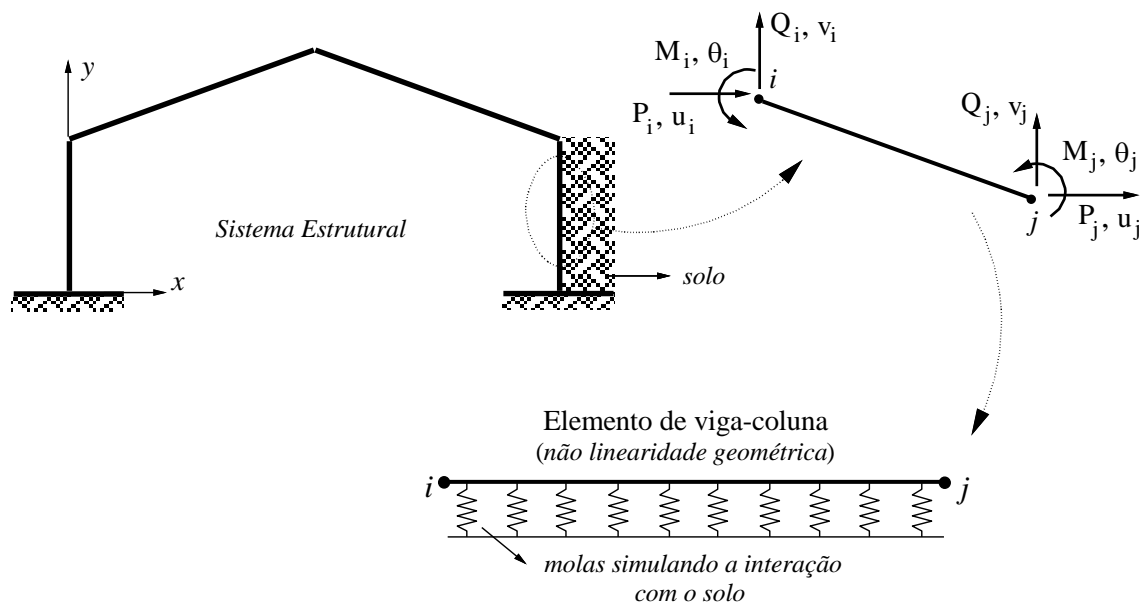


Figura 3.2 Elemento de viga-coluna adotado

3.2 Problema de Contato Bilateral

Considere inicialmente um problema de engenharia qualquer, como o ilustrado na Figura 3.3a, onde pode ser observada uma estaca em contato bilateral com o solo. O modelo matemático para esse problema estrutural está ilustrado na Figura 3.3b. Considere ainda que as variáveis estáticas e cinemáticas do sistema sejam conhecidas nas configurações de equilíbrio $0, \Delta t, \dots, t$, e que deseja-se obter a solução em $t+\Delta t$ tomando-se a configuração t como referência (Figura 3.3c).

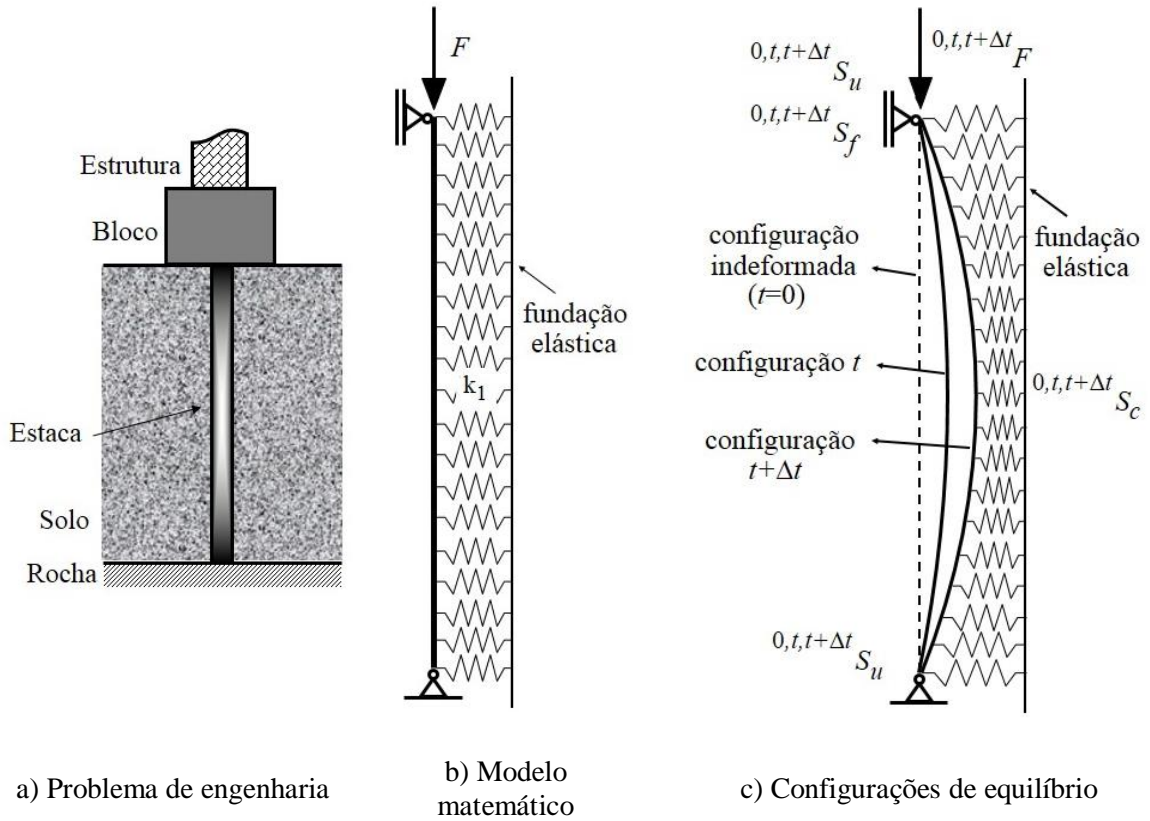


Figura 3.3 Problema de engenharia envolvendo contato bilateral

Observa-se na Figura 3.3c que na configuração de equilíbrio i ($i = 0, t, t+\Delta t$) a coluna ocupa o domínio iV , cujo contorno é composto de três partes: iS_u , iS_f e iS_c . Assim, S_u define a parte do contorno onde os deslocamentos são conhecidos, e S_f a parte onde as forças de superfície são prescritas. A parte do contorno denominada S_c representa a região onde a estrutura está em contato com o solo.

Ressalta-se que essas análises envolvem grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações. Nesse caso, de acordo com Silveira (1995), o sucesso de uma estratégia incremental de solução está diretamente relacionado à adoção adequada de tensores de tensão e deformação, que devem ser conjugados energeticamente. Neste trabalho, a formulação de contato bilateral utiliza o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff II e o tensor de deformação de Green-Lagrange. Assim, as equações de equilíbrio, relações cinemáticas e relações constitutivas, respectivamente, são dadas por:

$$\Delta S_{ij,j} + (\Delta u_{i,j} \quad {}^{t+\Delta t} S_{jk,i})_{,k} = 0 \quad (3.1)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} \quad (3.2)$$

$$\Delta S_{ij} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

onde a notação indicial é utilizada com a convenção de somatório. Nessas equações, Δu_i são os deslocamentos incrementais e ΔS_{ij} são as componentes incrementais do tensor de Piola-Kirchhoff II, que são as incógnitas do problema; ${}^{t+\Delta t}S_{jk}$ são as componentes cartesianas do mesmo tensor na configuração $t+\Delta t$. O tensor C_{ijkl} fornece as propriedades dos materiais. O tensor de deformações incremental de Green-Lagrange é dado por $\Delta \varepsilon_{ij}$, e Δe_{ij} e $\Delta \eta_{ij}$ correspondem às componentes do tensor infinitesimal de Cauchy, sendo:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \quad (3.4)$$

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{k,i} n_j + \Delta u_{k,j} n_i) \quad (3.5)$$

Para corpos elásticos, deve-se satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\Delta u_i = \Delta \bar{u} \quad \text{em } S_u \quad (3.6)$$

$$F_i = {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} {}^{t+\Delta t} n_j \quad \text{em } S_f \quad (3.7)$$

$$\varphi = \Delta u_i - \Delta u_{bi} = 0 \quad \therefore \Delta u_i = \Delta u_{bi} \quad \text{em } S_c \quad (3.8)$$

A Equação (3.6) representa as condições de contorno essenciais do problema, onde $\Delta \bar{u}$ tem um valor prescrito em S_u . A Equação (3.7) fornece o equilíbrio de forças existente em S_f e n_j é a normal unitária. A Equação (3.8) indica que a distância entre a estrutura e a base é nula, ou seja, o deslocamento da base é correspondente ao deslocamento da estrutura na região de contato. Vale lembrar que a região de contato pode se estender por todo o domínio do sistema, ou ser concentrada em algumas regiões ou pontos.

A resposta da fundação na região de contato foi apresentada no Capítulo 2 para cada modelo representativo do solo. Essa reação é descrita, genericamente, através da equação:

$$\Delta r_{bi} = C_b \Delta u_{bi} \quad (3.9)$$

onde Δr_{bi} e Δu_{bi} são, respectivamente, os incrementos de reação e deslocamento do solo, e C_b corresponde ao seu parâmetro de rigidez.

Portanto, para um dado incremento de carga, a solução do problema de contato bilateral é obtida resolvendo a Equação (3.1), usando as Equações (3.2) e (3.3). Deve-se impor as condições de contorno das Equações (3.6) e (3.7). É necessário impor a condição

para deslocamentos da Equação (3.8) e considerar a reação da base conforme a Equação (3.9).

Parte-se agora para a formulação do problema de minimização equivalente, como proposto por Maciel (2012), para que o problema de contato bilateral possa ser convenientemente solucionado através do Método dos Elementos Finitos. O problema proposto pode ser solucionado através de:

$$\text{Min } \Pi \quad (3.10)$$

$$\text{Sujeito a: } \varphi = 0, \text{ em } S_c \quad (3.11)$$

sendo Π a energia potencial do sistema, definida como:

$$\Pi = U_e + U_b + V_f \quad (3.12)$$

ou,

$$\Pi = \int_{tV} ({}^t\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\Delta S_{ij})\Delta\varepsilon_{ij} {}^t dV + \int_{tS_c} ({}^t r_{bi} + \frac{1}{2}\Delta r_{bi})\Delta u_{bi} {}^t dS_c - \int_{0S_f} F_i \Delta u_i {}^0 dS_f \quad (3.13)$$

Na Equação (3.12), U_e e U_b definem a quantidade de energia armazenada pela estrutura e fundação elástica, respectivamente, para se moverem da configuração de equilíbrio t para a $t+\Delta t$. A energia potencial do carregamento externo é representada por V_f , que é assumido como independente da deformação da estrutura. A restrição da Equação (3.11) indica que o contato é do tipo bilateral. Na Equação (3.13), Δu_i é o deslocamento incremental da estrutura, Δu_b é o deslocamento incremental da fundação elástica, ${}^t\sigma_{ij}$ são as componentes do tensor de Cauchy na configuração t , ΔS_{ij} são as componentes do tensor de tensão de Piola-Kirchhoff II, $\Delta\varepsilon_{ij}$ são as componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange, ${}^t r_b$ e Δr_b definem a reação da base e seu incremento na configuração t , e F_i representa as forças externas atuantes nas regiões S_f .

Substituindo as Equações (3.2), (3.3) e (3.9) em (3.13), chega-se à nova expressão para a energia potencial do sistema, dada por:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{tV} C_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} \Delta\varepsilon_{ij} {}^t dV + \int_{tV} {}^t\sigma_{ij} \Delta e_{ij} {}^t dV + \int_{tV} {}^t\sigma_{ij} \Delta \eta_{ij} {}^t dV + \\ & + \frac{1}{2} \int_{tS_c} C_{bi} \Delta u_{bi}^2 {}^t dS_c + \int_{tS_c} {}^t r_{bi} \Delta u_{bi} {}^t dS_c - \int_{0S_f} F_i \Delta u_i {}^0 dS_f \end{aligned} \quad (3.14)$$

A seguir, apresenta-se a metodologia numérica para solução do problema de contato bilateral através do Método dos Elementos Finitos. O domínio dos corpos (estrutura e solo) e seu contorno são substituídos por uma malha de elementos finitos, chegando-se a uma equação de equilíbrio não linear que rege o problema.

3.2.1 Discretização através do MEF

Considere o elemento finito genérico apresentado na Figura 3.2. Em geral, seus deslocamentos incrementais, $\Delta \mathbf{u}$, podem ser relacionados aos deslocamentos nodais incrementais, $\Delta \hat{\mathbf{u}}$, através das funções de interpolação de Hermite, contidas na matriz \mathbf{H} , como segue:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (3.15)$$

O tensor de deformações de Green-Lagrange pode ser escrito na forma matricial:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta} \quad (3.16)$$

onde $\Delta \mathbf{e}$ e $\Delta \boldsymbol{\eta}$ relacionam-se com os deslocamentos nodais incrementais segundo as expressões:

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_L \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (3.17)$$

$$\Delta \boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}_{NL} \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (3.18)$$

sendo \mathbf{B}_L a matriz deformação-deslocamento para deformações e deslocamentos infinitesimais, cujas componentes são obtidas combinando-se e diferenciando-se as linhas de \mathbf{H} . A matriz \mathbf{B}_{NL} depende não somente de \mathbf{H} , como também é função dos deslocamentos nodais incrementais $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ (BATHE, 1996). Substituindo as Equações (3.17) e (3.18) em (3.16), chega-se às componentes incrementais do tensor de Green-Lagrange em função dos deslocamentos nodais:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (3.19)$$

A forma incremental matricial da Equação (3.3), onde é definido o tensor de Piola-Kirchhoff II para a estrutura, é dada por:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.20)$$

sendo \mathbf{C} a matriz constitutiva.

Para a fundação elástica, tem-se as seguintes equações matriciais:

$$\Delta \mathbf{u}_b = \mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.21)$$

$$\Delta \mathbf{r}_b = \mathbf{C}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.22)$$

em que $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b$ é o vetor dos deslocamentos nodais da fundação elástica, onde no contato bilateral é igual ao vetor de deslocamentos nodais da estrutura no elemento considerado; e \mathbf{B}_b é a matriz que contém as funções de interpolação. A Equação (3.22) apresenta a forma discreta da Equação (3.9), sendo que \mathbf{C}_b é a matriz contendo os parâmetros de rigidez do solo.

Substituindo as equações apresentadas nessa subsecção no indicador variacional (Equação 3.14), chega-se à expressão:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = & \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[\int_{t\bar{V}} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C}_B \mathbf{B}_L \, {}^t d\bar{V} \right] \Delta \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[\int_{t\bar{V}} (\mathbf{B}_L^T \mathbf{C}_B \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{C}_B \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{C}_B \mathbf{B}_{NL}) \, {}^t d\bar{V} \right] \Delta \hat{\mathbf{u}} + \\ & + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[\int_{t\bar{V}} \mathbf{B}_L^T \, {}^t \boldsymbol{\sigma} \, {}^t d\bar{V} \right] + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[\int_{t\bar{V}} \mathbf{B}_{NL}^T \, {}^t \boldsymbol{\sigma} \, {}^t d\bar{V} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[\int_{t\bar{S}_c} \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \, {}^t d\bar{S}_c \right] \Delta \hat{\mathbf{u}} + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[\int_{t\bar{S}_c} \mathbf{B}_b^T \mathbf{r}_b \, {}^t d\bar{S}_c \right] - \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[\int_{0\bar{S}_f} \mathbf{H}^T \, {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} \, {}^0 d\bar{S}_f \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Fazendo a primeira variação do indicador variacional acima, em relação a um campo de deslocamentos nodais cinematicamente compatíveis, e considerando a contribuição de cada elemento finito do sistema estrutural em estudo, chega-se na equação de equilíbrio, dada por:

$$[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_b] \Delta \mathbf{U} + {}^t \mathbf{F}_{ie} + {}^t \mathbf{F}_{ib} = {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.24)$$

onde $\Delta \mathbf{U}$ corresponde ao vetor de deslocamentos nodais incrementais, que deve ser calculado através da estratégia incremental-iterativa que será apresentada no próximo capítulo; \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_b são, respectivamente, as matrizes de rigidez da estrutura e fundação elástica; ${}^t \mathbf{F}_{ie}$ e ${}^t \mathbf{F}_{ib}$ são os vetores de forças internas da estrutura e fundação elástica na configuração de equilíbrio t ; e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_r$ é o carregamento nodal equivalente aplicado ao sistema em $t+\Delta t$. A metodologia para obtenção dessas matrizes será descrita a seguir.

3.3 Modelagem do Solo

Nesta seção são apresentadas as formulações utilizadas na modelagem da fundação elástica, baseadas no Método dos Elementos Finitos. Os modelos detalhados a seguir foram previamente descritos no Capítulo 2.

3.3.1 Modelo de molas discretas

Esse modelo é representado por molas discretas e independentes, ligadas aos pontos nodais da malha de elementos finitos da estrutura. Por esse motivo, a discretização tem grande importância nas análises feitas com esse modelo, pois quanto mais refinada for a malha de elementos finitos, melhor será a precisão dos resultados.

A intensidade da reação da mola é diretamente proporcional ao deslocamento, ou rotação, da mola no ponto nodal i do modelo (Figura 3.4), como segue:

$$r_{xi} = k_{xi}u_i \quad (3.25)$$

$$r_{yi} = k_{yi}v_i \quad (3.26)$$

$$M_{\theta i} = k_{\theta i}\theta_i \quad (3.27)$$

em que r_{xi} , r_{yi} e $M_{\theta i}$ são as reações; u_i , v_i e θ_i são os deslocamentos nodais da estrutura no ponto nodal i , e k_{xi} , k_{yi} e $k_{\theta i}$ são os parâmetros de rigidez das molas conectadas a esse ponto.

Considerando as Equações (3.25) a (3.27), pode-se escrever a energia interna de deformação armazenada pela base:

$$U_{bi} = \frac{1}{2}k_{xi}u_i^2 + \frac{1}{2}k_{yi}v_i^2 + \frac{1}{2}k_{\theta i}\theta_i^2 \quad (3.28)$$

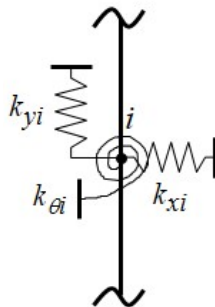


Figura 3.4 Molas discretas conectadas a um ponto i da estrutura.

As componentes da matriz de rigidez da base elástica podem ser obtidas diretamente da energia de deformação, considerando os deslocamentos nodais no sistema global de coordenadas:

$$k_{b(m,n)} = \frac{\partial^2 U_b}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n} \quad (3.29)$$

A matriz de rigidez da fundação elástica, segundo o modelo de molas discretas, fica organizada da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{bi} = \begin{bmatrix} k_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta i} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Nessa equação, \mathbf{K}_{bi} é a matriz de rigidez da fundação elástica associada ao ponto nodal i . Finalmente, para obter a matriz de rigidez global, diagonal, da base elástica deve-se considerar a contribuição de todos os m pontos nodais em contato com a fundação, ou seja:

$$\mathbf{K}_b = \sum_m \mathbf{K}_{bi} \quad (3.31)$$

Essa matriz será somada à matriz de rigidez da estrutura, formando a matriz de rigidez do sistema. As componentes diagonais nulas que podem estar presentes nessa matriz estão associadas às deslocabilidades dos pontos nodais onde não há restrições impostas pelas molas, ou não há contato com o solo.

Para esse modelo de fundação, o vetor de forças internas nodais incrementais é dado por:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib} = \mathbf{K}_b \Delta \mathbf{U} \quad (3.32)$$

O modelo de molas discretas apresentado anteriormente considera as molas com comportamento linear, onde o parâmetro de rigidez do solo permanece constante durante toda análise. Sabe-se que o solo é um material cujo comportamento tem difícil descrição, e que uma relação constitutiva linear não é capaz de simular de forma mais realística esse comportamento. Por isso, para considerar a não linearidade das molas, foi implementado um modelo multilinear, constituído por um conjunto de segmentos de reta. Tal modelo permite que o usuário forneça alguns pontos de uma curva força-deslocamento, ou momento-rotação, obtida experimentalmente.

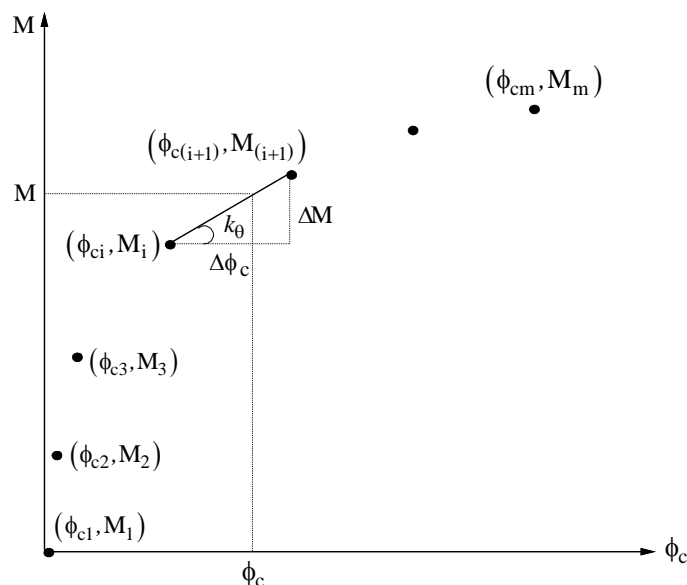


Figura 3.5 Modelo multilinear

São definidos m pares ordenados, como mostrado na Figura 3.5 e, através de um processo simples de interpolação linear, obtém-se a rigidez do solo naquele instante, para um dado deslocamento, ou rotação da mola. Esse recurso permite simular de forma mais realística o comportamento do solo, e é possível acompanhar sua degradação de rigidez durante a análise.

3.3.2 Modelo de Winkler linear

O modelo contínuo de Winkler assume que o solo pode ser representado através de um conjunto de molas independentes, estreitamente espaçadas, equivalente a uma fundação líquida. A reação da fundação é dada por:

$$\Delta r_b = k_1 \Delta u_b \quad (3.33)$$

onde Δr_b e Δu_b são, respectivamente, a reação da fundação elástica e o incremento de deslocamento transversal; k_1 é o parâmetro de rigidez das molas.

Para o elemento finito apresentado na Figura 3.2, a energia interna de deformação para esse modelo é dada por:

$$U_b = \frac{k_1 L}{2} \int_0^L \Delta u_b^2 dx \quad (3.34)$$

sendo L o comprimento do elemento.

O incremento de deslocamento, Δu_b , pode ser relacionado com os valores nodais desse elemento, $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b$, como segue:

$$\Delta u_b = \mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.35)$$

na qual \mathbf{B}_b é a matriz que contém as funções de interpolação de Hermite, organizadas da seguinte forma:

$$H_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.36)$$

$$H_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.37)$$

$$H_3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.38)$$

$$H_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{B}_b^T = [0 \quad H_1 \quad H_2 \quad 0 \quad H_3 \quad H_4] \quad (3.40)$$

Ao substituir (3.35) em (3.34), e sabendo que $\mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b = \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{B}_b^T$, obtém-se a forma discreta da energia de deformação:

$$U_b = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_b^e \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.41)$$

na qual \mathbf{K}_b^e é a matriz de rigidez da fundação elástica para o elemento considerado, cuja expressão é dada por:

$$\mathbf{K}_b^e = \mathbf{C}_b \int_0^L \mathbf{B}_b^T \mathbf{B}_b dx \quad (3.42)$$

onde L é o comprimento do elemento finito, e \mathbf{C}_b é a matriz constitutiva do solo, em que, para o caso de Winkler linear, $\mathbf{C}_b = k_l$.

Ao substituir a Equação (3.40) na equação anterior, obtém-se as componentes da matriz de rigidez da fundação elástica do elemento, simétrica, como segue:

$$\begin{aligned}
k_{b(2,2)}=k_{b(5,5)} &= \frac{13C_b L}{35}; k_{b(2,3)} = -k_{b(5,6)} = \frac{11C_b L^2}{210}; k_{b(2,5)} = \frac{9C_b L}{70}; \\
k_{b(2,6)} = -k_{b(3,5)} &= -\frac{13C_b L^2}{420}; k_{b(3,3)}=k_{b(6,6)} = \frac{C_b L^3}{105}; e k_{b(3,6)} = -\frac{C_b L^3}{140}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Finalmente, para obter a matriz de rigidez global, da fundação elástica deve-se considerar a contribuição de todos os m elementos na região de contato, chegando a:

$$\mathbf{K}_b = \sum_m \mathbf{K}_b^e \tag{3.44}$$

Da Equação (3.24), ao se considerar o modelo de Winkler, verifica-se a contribuição da fundação elástica para as forças internas incrementais. Para o elemento, pode-se reescrever da seguinte forma:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e = \mathbf{K}_b^e \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \tag{3.45}$$

sendo $\Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e$ o vetor de forças internas incrementais da base, para o elemento considerado.

Por fim, deve-se somar a contribuição de todos os elementos da região de contato, transformando do sistema local para o sistema global através da matriz de rotação, \mathbf{R}^e , da seguinte forma:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib} = \sum_m \left(\mathbf{R}^{eT} \Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e \right) \tag{3.46}$$

3.3.3 Modelo de Winkler não linear

Alguns materiais, como o solo, não podem ser verdadeiramente representados por um conjunto de molas lineares. Por isso, Chandra *et al.* (1987) propôs um polinômio com um termo não linear cúbico para representar a reação da fundação elástica, levando-se em conta o comportamento não linear do solo, presumindo que as não linearidades não são de ordem superior. O modelo foi testado através de ensaios de placa, onde os autores concluíram que é capaz de representar o comportamento não linear do solo com bastante precisão. Mais recentemente, esse modelo foi utilizado por Shen (1995 e 2000), Holanda (2000) e Tsiatas (2010).

A relação força-deslocamento é dada pela seguinte expressão:

$$r_b = k_1 v_b \pm k_3 v_b^3 \tag{3.47}$$

onde k_1 é o parâmetro de rigidez de Winkler, k_3 é o parâmetro de rigidez da parcela não linear, e v_b é a deflexão transversal do elemento.

Na equação anterior, o sinal positivo corresponde a uma fundação com ganho de rigidez (ou *hardening foundation*), e o sinal negativo está relacionado a uma fundação com perda de rigidez (ou *softening foundation*). Nos exemplos apresentados neste trabalho foi considerado o modelo de Winkler não linear com perda de rigidez, baseando-se na suposição de que a maioria dos solos apresenta esse comportamento à medida que é solicitado por cargas externas.

Como apresentado para o modelo de Winkler linear, em uma análise não linear por elementos finitos, é necessário calcular o vetor de forças internas e a matriz de rigidez. O vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{F}_{ib} = \int_V \mathbf{B}_b^T r_b \, dV \quad (3.48)$$

em que \mathbf{F}_{ib} é o vetor de forças internas da base, e \mathbf{B}_b é a matriz contendo as funções de interpolação (Equação 3.40).

A matriz de rigidez é dada pela derivada da força interna em relação ao vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{u} . Sendo assim, tem-se:

$$\mathbf{K}_b^e = \frac{\delta \mathbf{F}_{ib}}{\delta \mathbf{u}} = \int_0^L \mathbf{B}_b^T \frac{\delta r_b}{\delta \mathbf{u}} \, dx \quad (3.49)$$

Aplicando-se a regra da cadeia para resolver a derivada, chega-se a expressão final da matriz de rigidez da fundação:

$$\mathbf{K}_b^e = \int_0^L \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \, dx \quad (3.50)$$

Nota-se que a equação anterior é igual a Equação (3.42). No caso do modelo de Winkler não linear, a matriz constitutiva \mathbf{C}_b é dada por:

$$\mathbf{C}_b = k_1 - 3k_3 w^2 \quad (3.51)$$

Na equação anterior, w corresponde ao deslocamento no ponto central do elemento. Para obter seu valor, os deslocamentos nodais, $\hat{\mathbf{u}}$, foram aproximados através das funções de interpolação apresentadas nas Equações (3.36) a (3.39). Substituindo nessas equações o valor de $x=L/2$, chega-se a:

$$\mathbf{B}_a^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Portanto, o deslocamento no ponto central do elemento é dado por:

$$w = \mathbf{B}_a^T \hat{\mathbf{u}} \quad (3.53)$$

Em uma análise não linear, o valor de w é atualizado a cada incremento, obtendo-se um novo valor para \mathbf{C}_b . Portanto, é necessário recalculer a matriz de rigidez da base elástica a cada incremento de carga Δt , pois ela não é constante no modelo de Winkler não linear. O vetor de forças internas para esse caso é o mesmo do modelo de Winkler linear, que é escrito novamente abaixo:

$$\Delta t \mathbf{F}_{ib}^e = \mathbf{K}_b^e \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.54)$$

3.3.4 Modelos de Pasternak e Filonenko-Borodich

São modelos que procuram estabelecer certa interação entre as molas, melhorando o modelo de Winkler linear através da introdução de um parâmetro de rigidez adicional. Como já mencionado no Capítulo 2, o modelo de Pasternak assume que as molas são conectadas por uma camada que se deforma apenas sob tensões de cisalhamento. Já o modelo de Filonenko-Borodich assume que as molas são conectadas por uma membrana sujeita a um campo de tração. Para esses modelos, a relação incremental de força-deslocamento é dada por:

$$\Delta r_b = k_1 \Delta u_b - k_2 \nabla^2 \Delta u_b \quad (3.55)$$

onde k_1 é o parâmetro de rigidez elástico transversal, igual ao modelo de Winkler. O valor de k_2 , segundo o modelo de Pasternak, corresponde ao parâmetro de rigidez cisalhante da camada. Para o modelo de Filonenko-Borodich, o valor de k_2 corresponde a intensidade do campo de tração atuante na membrana.

Considerando novamente o elemento finito da Figura 3.2, a energia interna de deformação para esses modelos é dada por:

$$U_b = \frac{k_1}{2} \int_0^L \Delta u_b^2 dx + \frac{k_2}{2} \int_0^L \left(\frac{d\Delta u_b}{dx} \right)^2 dx \quad (3.56)$$

De forma análoga à apresentada na Seção 3.3.2, considera-se que o incremento de deslocamento Δu_b pode se relacionar com os valores nodais desse elemento, $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b$, através das funções de forma, e sabendo que $\mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b = \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{B}_b^T$, tem-se:

$$\frac{d\Delta u_b}{dx} = \frac{d\mathbf{B}_b}{dx} \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.57)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{B}_b}{dx} \right) \Delta \hat{\mathbf{u}}_b = \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \left(\frac{d\mathbf{B}_b^T}{dx} \right) \quad (3.58)$$

Portanto, a energia interna de deformação da fundação elástica será:

$$U_b = \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_{b1}^e \Delta \hat{\mathbf{u}}_b + \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_{b2}^e \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.59)$$

sendo \mathbf{K}_{b1}^e a matriz de rigidez do modelo de Winkler, calculada pela Equação (3.42), e \mathbf{K}_{b2}^e é dada por:

$$\mathbf{K}_{b2}^e = k_2 \int_0^L \mathbf{B}_{b,x}^T \mathbf{B}_{b,x} dx \quad (3.60)$$

com $\mathbf{B}_{b,x}$ sendo a derivada de \mathbf{B}_b em relação a x .

Assim, efetuando-se as derivações e integrações necessárias, obtém-se as componentes da matriz \mathbf{K}_{b2}^e simétrica:

$$\begin{aligned} k_{b2(2,2)} = k_{b2(5,5)} = \frac{6k_2}{5L}; k_{b2(2,3)} = -k_{b2(5,6)} = \frac{k_2}{10}; k_{b2(2,5)} = -\frac{6k_2}{5L}; \\ k_{b2(2,6)} = -k_{b2(3,5)} = -\frac{k_2}{10}; k_{b2(3,3)} = k_{b2(6,6)} = \frac{2k_2L}{15}; e k_{b2(3,6)} = -\frac{k_2L}{30} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Finalmente, para obter a matriz de rigidez global da fundação elástica deve-se considerar a contribuição de todos os m elementos na região de contato, chegando a:

$$\mathbf{K}_b = \sum_m \left(\mathbf{K}_{b1}^e + \mathbf{K}_{b2}^e \right) \quad (3.62)$$

Portanto, para esses modelos, o vetor de forças internas nodais incrementais é dado por:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e = \left(\mathbf{K}_{b1}^e + \mathbf{K}_{b2}^e \right) \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.63)$$

Como nos modelos anteriores, deve-se considerar a contribuição de todos os m elementos finitos na região de contato, transformando o vetor de forças internas para o sistema global de coordenadas através da matriz de rotação, \mathbf{R}^e , da seguinte forma:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib} = \sum_m \left(\mathbf{R}^{eT} \Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e \right) \quad (3.64)$$

3.4 Modelagem da Estrutura

Foi utilizada uma formulação proposta por Yang e Kuo (1994), já existente no CS-ASA, que inclui os efeitos da não linearidade geométrica. Na análise não linear incremental utilizou-se a formulação em referencial Lagrangiano atualizado para descrever o movimento de corpos sólidos, onde a configuração de referência corresponde à última configuração de equilíbrio determinada. Portanto, ao final de cada incremento de carga, o referencial é transferido para a última configuração de equilíbrio calculada, t . Segundo Bathe (1996), essa formulação inclui os efeitos não lineares devido à grandes deslocamentos e tem boa eficiência numérica.

Com essa abordagem, o caminho de carregamento de um corpo sólido é dividido em três configurações de equilíbrio: a configuração inicial, $t = 0$, a última configuração deformada, t , e a configuração deformada corrente, $t + \Delta t$. Assume-se que na configuração t são conhecidas as variáveis de estado, como tensões, deformações e deslocamentos. Considerando que o carregamento externo que atuou na configuração t tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor, o processo incremental determina essas variáveis para o corpo na configuração $t + \Delta t$.

Nesta formulação é utilizada a teoria de barra de Euler-Bernoulli, que assume que as seções transversais, perpendiculares ao eixo da barra antes da flexão, continuam planas, perpendiculares ao eixo e indeformadas após a flexão.

Adota-se duas componentes de tensão, axial e cisalhante de Cauchy, e duas componentes de deformação associadas, que são os incrementos de deformação de Green-Lagrange atualizados, sendo elas:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx} \quad (3.65)$$

$$\Delta \varepsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + \Delta \eta_{xy} \quad (3.66)$$

onde:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta\bar{u}}{dx} \quad (3.67)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta\bar{u}}{dy} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (3.68)$$

$$\Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta\bar{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.69)$$

$$\Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta\bar{u}}{dy} \frac{d\Delta\bar{u}}{dx} + \frac{d\Delta v}{dy} \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (3.70)$$

sendo $\Delta\bar{u}$ o deslocamento axial de um ponto cuja distância da linha neutra é igual a y , e Δv é o deslocamento vertical desse ponto, como mostra a Figura 3.6.

Portanto, tem-se a seguinte expressão para $\Delta\bar{u}$:

$$\Delta\bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (3.71)$$

em que a primeira parcela, Δu , é uma consequência dos esforços extencionais atuantes e é constante ao longo da seção, e a segunda parcela, $y(d\Delta v/dx)$, é devida aos esforços de flexão, com variação linear com a distância à linha neutra.

Substituindo (3.71) em (3.67), (3.68), (3.69), e (3.70), tem-se as seguintes relações:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \quad (3.72)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] = 0 \quad (3.73)$$

$$\Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left(\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.74)$$

$$\Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} + y \left(\frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right) \right] \quad (3.75)$$

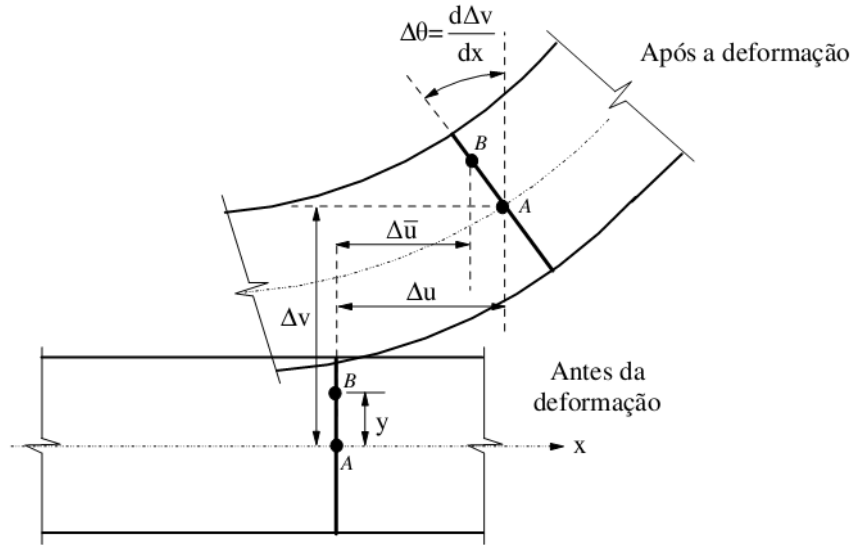


Figura 3.6 Comportamento da seção transversal (SILVA, 2009)

Segundo Galvão (2000), para uma referencial Lagrangiano atualizado, é muito importante definir para o elemento finito o estado de tensões ou deformações na última configuração de equilíbrio obtida no processo de solução incremental, t . Assim, os esforços iniciais resultantes são calculados através da integração das tensões de Cauchy:

$${}^tP = \int_A {}^t\tau_{xx} dA \quad (3.76)$$

$${}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA \quad (3.77)$$

$${}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (3.78)$$

sendo tP o esforço axial, tQ o esforço cortante e tM o momento fletor. Segundo Galvão (2000), os esforços cortante e momento fletor podem ser reescritos como:

$${}^tM = -M_i + \frac{(M_i + M_j)}{L} x \quad (3.79)$$

$${}^tQ = -\frac{(M_i + M_j)}{L} \quad (3.80)$$

Considerando a hipótese de Bernoulli, apenas as tensões axiais, $\Delta\tau_{xx}$, podem ser obtidas pela lei constitutiva $\Delta\tau_{xx} = E\Delta\varepsilon_{xx}$. As tensões cisalhantes incrementais devem ser

determinadas através de condições de equilíbrio. Considerando h a altura da seção transversal, tem-se:

$$\Delta\tau_{xx} = \Delta\tau_{xy}^l + \Delta\tau_{xy}^{nl} = \frac{E}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left(\frac{d^3\Delta v}{dx^3} + \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \right) \quad (3.81)$$

O funcional de energia na configuração atual $t+\Delta t$ é definido por:

$$\Delta\Pi = \Delta U + \Delta V \quad (3.82)$$

onde o incremento de energia de deformação, ΔU , é definido como:

$$\Delta U = \int_V \int_{\varepsilon_{ij}^t}^{\varepsilon_{ij}^t + \Delta\varepsilon_{ij}} (\Delta\tau_{ij} d\varepsilon_{ij}) dV \quad (3.83)$$

Considerando-se as deformações axiais e cisalhantes, escreve-se (GALVÃO, 2000; SILVA, 2009):

$$\Delta U = \iint_V \left[\left({}^t\tau_{xx}\Delta\varepsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy} \right) + \left(\frac{E}{2\Delta\varepsilon_{xx}^2} + 2\Delta\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy} \right) \right] dV \quad (3.84)$$

O incremento da energia potencial das forças externas, ΔV , é definido como:

$$\Delta V = -\int_s f_i \Delta u_i ds = -\int_s {}^t f_i \Delta u_i ds - \int_s \Delta f_i \Delta u_i ds \quad (3.85)$$

A seguir, serão feitas duas diferentes considerações, que originarão duas formulações não lineares de elementos finitos, chamadas de formulação linearizada e formulação com termos de ordem elevada. Na primeira, assume-se que as deformações incrementais são tão pequenas que pode-se desprezar as parcelas não lineares. Dessa forma, a Equação (3.84) pode ser reescrita como:

$$\Delta U = \iint_V \left({}^t\tau_{xx}\Delta\varepsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy} \right) + \left(\frac{E}{2\Delta\varepsilon_{xx}^2} \right) dV \quad (3.86)$$

De acordo com Alves (1993), observa-se a seguinte condição:

$$\int_V \left({}^t\tau_{xx}\Delta\varepsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy} \right) dV = \int_s f_i \Delta u_i ds \quad (3.87)$$

Realizando algumas operações algébricas, pode-se chegar ao funcional de energia na configuração $t+\Delta t$, definido como:

$$\Delta\Pi = U_L + U_\sigma - \int_s \Delta f_i \Delta u_i ds \quad (3.88)$$

onde:

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{t_V} E \Delta e_{xx}^2 dV \quad (3.89)$$

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_0^L {}^t P \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L {}^t M \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L {}^t Q \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} dx \quad (3.90)$$

Na formulação com termos de ordem elevada, as parcelas não lineares das deformações incrementais não são desprezadas. Nesse caso, o funcional de energia é definido como:

$$\Delta\Pi = U_L + U_\sigma + U_1 + U_2 - \int_s \Delta f_i \Delta u_i ds \quad (3.91)$$

sendo U_L e U_σ os mesmos definidos anteriormente, e U_1 e U_2 são definidos por:

$$U_1 = \int_0^L \left[\frac{EA}{2} \left(\frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) + \frac{3EI}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + EI \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d\Delta u}{dx} \right] dx \quad (3.92)$$

$$U_2 = \int_0^L \left[\frac{EA}{8} \left(\frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right)^2 + \frac{EI}{8} \left(\frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) \right] dx^2 +$$

$$+ \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) + EI \frac{d\Delta u^2}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \right] dx^2 \quad (3.93)$$

A seguir, será mostrado o procedimento para obtenção da matriz de rigidez e vetor de forças internas. Usando novamente o elemento finito da Figura 3.2 e aproximando-se, através das funções de interpolação de Hermite, os deslocamentos incrementais Δu (função linear) e Δv (função cúbica), segundo Silveira (1995) e Galvão (2000), pode-se reescrever o funcional $\Delta\Pi$ em função dos deslocamentos nodais do elemento, considerando apenas a estrutura sem contato, chegando-se a:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi = \Delta\mathbf{u}^T & \left[\frac{1}{2}\mathbf{K}_L + \frac{1}{2}\mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{6}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{u}) + \frac{1}{24}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \right] \Delta\mathbf{u} + \\ & + \Delta\mathbf{u}^T {}^t\mathbf{f}_{ie} - \Delta\mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta t})\lambda\mathbf{f}_r \end{aligned} \quad (3.94)$$

em que as componentes das matrizes \mathbf{K}_L , \mathbf{K}_σ , \mathbf{K}_1 , e \mathbf{K}_2 podem ser obtidas diretamente da energia interna de deformação, através da diferenciação dos termos em (3.89), (3.90), (3.92) e (3.93), ou seja:

$$k_{L(m,n)} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n} \quad (3.95)$$

$$k_{\sigma(m,n)} = \frac{\partial^2 U_\sigma}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n} \quad (3.96)$$

$$k_{1(m,n)} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n \partial \Delta u_k} \Delta u_k \quad (3.97)$$

$$k_{2(m,n)} = \frac{\partial^4 U_2}{\partial \Delta u_m \partial \Delta u_n \partial \Delta u_k \partial \Delta u_p} \Delta u_k \Delta u_p \quad (3.98)$$

O vetor de forças internas incremental da estrutura pode ser obtido através da Equação (3.94), estabelecendo a primeira variação da energia potencial total igual a zero, obtendo-se:

$$\Delta\mathbf{f}_{ie} = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{u}) + \frac{1}{6}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \right] \Delta\mathbf{u} \quad (3.99)$$

Calcula-se então o vetor de forças internas da estrutura na configuração de equilíbrio $t+\Delta t$:

$$({}^{t+\Delta t})\mathbf{f}_{ie} = {}^t\mathbf{f}_{ie} + \Delta\mathbf{f}_{ie} \quad (3.100)$$

A matriz de rigidez do elemento da estrutura em coordenadas locais, \mathbf{K}_e , obtida a partir da Equação (3.94), é dada por:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{u}) + \frac{1}{6}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \quad (3.101)$$

onde, no caso da formulação linearizada, não consideram-se os termos \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 . Os elementos de todas as matrizes da Equação (3.101) podem ser encontrados detalhadamente no trabalho de Silva (2009).

Na equação anterior, \mathbf{K}_L é a matriz elástica linear convencional, e \mathbf{K}_σ é a matriz de tensões iniciais, ou matriz de rigidez geométrica, cujos termos dependem das forças nodais iniciais. Os elementos da matriz \mathbf{K}_1 são funções lineares dos deslocamentos nodais incrementais, e os elementos da matriz \mathbf{K}_2 são funções quadráticas. Os efeitos de segunda ordem são introduzidos na análise através das matrizes \mathbf{K}_σ , \mathbf{K}_1 , e \mathbf{K}_2 , que estabelecem a mudança na rigidez do elemento.

No caso de sistemas onde avalia-se a interação entre o solo e a estrutura, a matriz de rigidez da estrutura deve ser somada à matriz de rigidez da fundação (solo), \mathbf{K}_b , e o mesmo deve ser feito com o vetor de forças internas. Portanto:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_b \quad (3.102)$$

$$\Delta \mathbf{f}_{is} = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K}_b \Delta \mathbf{u} \quad (3.103)$$

nas quais \mathbf{K}_s é a matriz de rigidez do sistema. A obtenção da matriz \mathbf{K}_b foi descrita na seção anterior desse capítulo.

Tentando minimizar inconsistências devido ao aparecimento de forças indevidas que surgem devido à deslocamentos de corpo rígido, Galvão (2000), Silva (2009) e Maciel (2012) reescreveram o vetor de forças internas, utilizando os chamados deslocamentos naturais incrementais, $\Delta \hat{\mathbf{u}}_n$, ou seja, os deslocamentos que efetivamente causam deformação, como ilustrado na Figura 3.5. Tem-se, portanto, suas componentes:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_n^T = \left[0 \quad 0 \quad \phi_i \quad \delta \quad 0 \quad \phi_j \right] \quad (3.104)$$

Utilizando as relações geométricas mostradas na Figura 3.7, pode-se escrever:

$$\delta = {}^{(t+\Delta t)}L - {}^tL \quad (3.105)$$

$$\phi_j = \Delta \theta_j - \alpha \quad (3.106)$$

$$\phi_i = \Delta \theta_i - \alpha \quad (3.107)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\Delta v_j - \Delta v_i}{{}^tL} \right) \quad (3.108)$$

A matriz de rigidez, \mathbf{K} , e o vetor de forças internas, \mathbf{F}_i , do sistema estrutural, considerando a interação da estrutura com uma base elástica, são obtidos somando-se a contribuição de cada um dos m elementos finitos utilizados na discretização, ou seja:

$$\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{K}_{sg} \quad (3.112)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i = \sum_m {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_{isg} \quad (3.113)$$

sendo \mathbf{K}_{sg} e \mathbf{f}_{isg} a matriz e o vetor de forças internas de cada elemento no sistema global de coordenadas.

Capítulo 4

Metodologia para Análise Estática Não Linear

4.1 Introdução

Nesse capítulo serão abordados os fundamentos para a análise estática não linear de sistemas estruturais em contato com o solo através do método dos elementos finitos (MEF). Em uma análise não linear, a matriz de rigidez do sistema estrutural deve ser atualizada a cada incremento para alcançar o equilíbrio devido às alterações que ocorrem na geometria. Portanto, é necessário realizar uma análise incremental não linear que incorpore procedimentos iterativos em cada passo incremental.

No processo incremental, pode-se identificar duas fases: predita e corretiva. A primeira delas envolve a solução dos deslocamentos incrementais através das equações de equilíbrio da estrutura, a partir de um determinado acréscimo de carregamento. Já a fase corretiva, como o próprio nome induz, faz a correção das forças internas incrementais, obtidas dos acréscimos de deslocamentos pela utilização do processo iterativo. Posteriormente, as forças internas são comparadas com o carregamento externo, obtendo-se a quantificação do desequilíbrio existente entre tais forças. Esse processo corretivo é feito até que a estrutura esteja em equilíbrio, segundo um critério de convergência determinado. Para explicar melhor a metodologia de análise não linear, é necessário fazer algumas observações sobre a notação adotada:

- Considera-se que o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura e da base elástica são conhecidos no passo de carga t , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio no passo de carga $t+\Delta t$;

- k é o contador do número de iterações em um determinado passo de carga. Quando $k=0$, tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo de Newton-Raphson;
- λ e \mathbf{U} são o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{U}$ são os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{U}$ definem as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

4.2 Solução Incremental Predita

Para obter a solução incremental predita, deve-se inicialmente montar a matriz de rigidez tangente do sistema estrutural, \mathbf{K} , já com a contribuição da fundação elástica, usando informações da última configuração de equilíbrio. Logo após, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais, $\delta\mathbf{U}_r$:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r \quad (4.1)$$

É possível realizar a seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, por meio de uma estratégia de incremento de carga. As estratégias usadas neste trabalho serão descritas mais adiante neste capítulo. Após definir o incremento inicial, chega-se no vetor de deslocamentos nodais incrementais tangenciais, $\Delta\mathbf{U}^0$, escalonando-se $\delta\mathbf{U}_r$, como segue:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (4.2)$$

Logo após, atualiza-se o parâmetro de carga e os deslocamentos totais, como segue:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (4.3)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (4.4)$$

onde ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{U}$ definem o ponto de equilíbrio no último passo de carga.

As Equações (4.3) e (4.4) nem sempre são capazes de satisfazer a condição de equilíbrio do sistema, e então são necessárias novas iterações para restaurar o equilíbrio. Esse processo será descrito a seguir.

4.3 Ciclo de Iterações

Quando utiliza-se o método tradicional de Newton-Raphson, o parâmetro de carga λ é mantido constante durante o ciclo de iterações. No entanto, quando se pretende obter a trajetória de equilíbrio de forma completa, passando possivelmente por pontos limites, é necessária uma estratégia que permita a variação do parâmetro de carga em cada iteração. Seguindo a técnica proposta por Batoz e Dhatt (1979) e utilizada por Silva (2009), onde a variação de carga é permitida, a mudança dos deslocamentos nodais é dada por:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (4.5)$$

em que \mathbf{g} representa o vetor gradiente, ou vetor de forças desequilibradas, que deve ser anulado ao longo do ciclo iterativo, indicando que foi atingido o equilíbrio. A matriz de rigidez, \mathbf{K} , deve conter a contribuição da estrutura e da fundação elástica que representa o solo.

Como indicado na Equação (4.5), o vetor gradiente é função dos deslocamentos nodais totais, $\mathbf{U}^{(k-1)}$, calculados na última iteração e do parâmetro de carga total corrente, λ^k , que também é uma incógnita do problema, escrita na forma:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad (4.6)$$

em que $\delta \lambda^k$ é a correção do parâmetro de carga.

O vetor \mathbf{g} na iteração corrente será:

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{F}_i^{(k-1)} - \left(\lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \right) \mathbf{F}_r \quad (4.7)$$

Portanto, pode-se reescrever a Equação (4.5) como:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U} = - \left[\mathbf{F}_i^{(k-1)} - \left(\lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \right) \mathbf{F}_r \right] \quad (4.8)$$

onde, nas duas equações anteriores, o vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{F}_i^{(k-1)} = \mathbf{F}_{ie}^{(k-1)} + \mathbf{F}_{ib}^{(k-1)} \quad (4.9)$$

em que os vetores $\mathbf{F}_{ie}^{(k-1)}$ e $\mathbf{F}_{ib}^{(k-1)}$ representam, respectivamente, a contribuição da estrutura e da fundação elástica na montagem do vetor de forças internas. O produto $\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r$ representa o vetor das forças externas atuantes na última iteração. A Equação (4.8) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (4.10)$$

Dessa equação são obtidos os deslocamentos nodais iterativos, que podem ser decompostos em duas parcelas, da seguinte forma:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (4.11)$$

sendo $\delta\mathbf{U}_g^k$ a correção do deslocamento proveniente das forças desequilibradas do sistema, e $\delta\mathbf{U}_r^k$ é o vetor de deslocamentos iterativos resultante da aplicação do vetor de cargas de referência.

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (4.12)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (4.13)$$

Após a obtenção da solução iterativa ($\delta\lambda^k$ e $\delta\mathbf{U}^k$), é feita a atualização das variáveis incrementais e totais, como segue:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (4.14)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (4.15)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (4.16)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (4.17)$$

Esses procedimentos são repetidos até que um dos dois critérios de convergência implementados no CS-ASA (Silva, 2009) seja respeitado. O primeiro é baseado em relações de forças, e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior. Ele é definido como:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (4.18)$$

onde o numerador representa a norma euclidiana do vetor de forças desequilibradas da iteração anterior, e o denominador é a norma euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo. O fator de tolerância, ζ , é fornecido pelo usuário como dado de entrada.

O segundo critério de convergência é baseado em deslocamentos, e é sempre verificado ao final da iteração corrente. Seu valor é dado por:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (4.19)$$

em que o numerador é a norma euclidiana dos deslocamentos iterativos e o denominador é a norma euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo.

A Tabela 4.1 apresenta o algoritmo com os detalhes da estratégia adotada para a solução do problema não linear, considerando o contato bilateral. A seguir, serão descritas as estratégias de incremento de carga e iteração usadas neste trabalho.

4.4 Estratégias de Incremento de Carga e Iteração

Como já mencionado, o método de Newton-Raphson, em sua formulação clássica, não é capaz de ultrapassar os pontos limites de carga e deslocamento, e pontos de bifurcação, ao longo da trajetória de equilíbrio do problema. Nesse contexto, são necessárias algumas estratégias de incremento de carga e de iteração, usadas como ferramentas na análise não linear. Nesta seção serão apresentadas as estratégias que se mostraram mais eficientes na solução não linear dos problemas de contato bilateral apresentados no Capítulo 6. No entanto, estão presentes no CS-ASA várias outras opções, implementadas por Silva (2009).

4.4.1 Estratégias de Incremento de Carga

Na solução incremental predita objetiva-se avaliar $\Delta\lambda^0$, para obter $\Delta\mathbf{U}^0$ através da Equação (4.2). Uma estratégia eficiente deve atender a três funções: fornecer grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear; fornecer pequenos incrementos quando a resposta for fortemente não linear; e ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento inicial, introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximo e mínimo forem ultrapassados. As estratégias usadas neste trabalho são descritas a seguir:

1. Comprimento de arco

Essa estratégia foi idealizada por Riks (1972), Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982), que utiliza a restrição de comprimento de arco, ou seja:

$$\Delta \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{U} + (\Delta \lambda)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (4.20)$$

onde Δl representa o incremento do comprimento de arco.

Procurando atender à restrição anterior na etapa de solução predita, onde $\Delta \lambda = \Delta \lambda^0$ e $\Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{U}^0$, e ainda considerando a Equação (4.2), após manipulações algébricas chega-se na expressão para o parâmetro de carga inicial:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \quad (4.21)$$

Crisfield (1981) sugere que os termos de carga sejam desprezados, então a Equação (4.21) é reescrita como:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r}} \quad (4.22)$$

O incremento do comprimento de arco Δl pode ser obtido através da expressão:

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

em que I_d é o número de iterações, fornecido pelo usuário no arquivo de entrada; $I_{p,a}$ é o número de iterações necessário para a convergência do processo no passo de carga anterior; e $\Delta l_{p,a}$ é o comprimento de arco no passo de carga anterior.

Crisfield (1981) propôs que a seguinte equação deveria ser satisfeita ao longo do ciclo iterativo:

$$\Delta \mathbf{U}^{Tk} \Delta \mathbf{U}^k = \Delta l^2 \quad (4.24)$$

em que o sobrescrito k representa a iteração corrente.

Substituindo a Equação (4.16) na expressão anterior, e realizando as manipulações algébricas necessárias, chega-se na equação cuja solução fornece o valor do parâmetro de carga corretivo $\delta \lambda^k$ procurado. Sua expressão é dada por:

$$A \delta \lambda^k + B \delta \lambda^k + C = 0 \quad (4.25)$$

Tabela 4.1 Metodologia de solução numérica para análise estática não linear

1. Dados gerais: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos, rigidez da fundação elástica, entre outros

2. Define o vetor de cargas nodais de referência, \mathbf{F}_r

3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida, t : ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^t\lambda$

4. Solução predita: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$

4.1 Calcula-se a matriz de rigidez tangente do sistema: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_b$

4.2 Resolve: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$

4.3 Define $\Delta\lambda^0$ (Seção 4.4)

4.4 Calcula: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$

4.5 Atualiza as variáveis na configuração $t+\Delta t$:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad \text{e} \quad {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$$

5. Processo iterativo de Newton-Raphson: $k=1, 2, 3, \dots$

5.1 Calcula-se o vetor de forças internas:

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = ({}^t\mathbf{F}_{ie} + {}^t\mathbf{F}_{ib}) + \mathbf{K}_e\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \mathbf{K}_b\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$$

5.2 Calcula o vetor de forças desequilibradas:

$$\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_{ie}^{(k-1)} + {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_{ib}^{(k-1)} - {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r$$

5.3 Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças, ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SIM (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*

5.4 Atualiza a matriz de rigidez tangente do sistema (\mathbf{K})

5.5 Corrige o parâmetro de carga, $\Delta\lambda^k$ (Seção 4.4)

5.6 Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$, com:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad \text{e} \quad \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-(k-1)} \mathbf{F}_r$$

5.7 Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos, ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SIM (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*

SIM (Critério de forças e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6, apenas se houve convergência no item 5.3*

5.8 Atualiza o parâmetro de carga, λ , e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :

a) *Incremental:* $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$

b) *Total:* ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$

5.9 Retorna ao passo 5

6. Realiza um novo incremento de carga e retorna ao item 4

No trabalho de Silva (2009) encontram-se os valores das constantes A , B , e C , e também um procedimento que permite a escolha do melhor valor para o parâmetro de carga entre as raízes da Equação (4.25).

2. Deslocamento generalizado

A estratégia de incremento baseado no deslocamento generalizado foi proposta por Yang e Kuo (1994). A equação de restrição abaixo deve ser respeitada tanto na fase predita quanto no ciclo de correções:

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k + k_I \delta \lambda^k = H^k \quad (4.26)$$

onde \mathbf{C} é uma matriz de constantes, k_I também é constante, e H é um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco ou trabalho externo). Diferentes estratégias de incremento de carga e iteração são obtidas em função dos valores dessas variáveis.

Seguindo a metodologia encontrada em Silva (2009) para essa estratégia, são atribuídos valores para os parâmetros da equação anterior na definição da solução incremental predita, como segue:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \Delta \lambda_1^0 \sqrt{|GSP|} \quad (4.27)$$

em que GSP corresponde ao parâmetro de rigidez generalizado do sistema, dado por:

$$GSP = \frac{\left({}^1 \delta \mathbf{U}_r^T \right) {}^1 \delta \mathbf{U}_r}{\left({}^t \delta \mathbf{U}_r^T \right) \delta \mathbf{U}_r} \quad (4.28)$$

Nas Equações (4.27) e (4.28) o subscrito e o sobrescrito 1 estão relacionados com o primeiro passo de carga, e o sobrescrito t representa a última configuração de equilíbrio.

A escolha do sinal positivo ou negativo nas Equações (4.21), (4.22) e (4.27) seguiu os critérios de escolha implementados no CS-ASA, que estão definidos em Silva (2009).

4.4.2 Estratégias de Iteração

Nesta subseção serão apresentadas as estratégias de iteração, ou equações de restrição, utilizadas na análise dos exemplos numéricos, contidos no Capítulo 6.

1. Iteração a carga constante

Essa estratégia caracteriza o método tradicional de controle de carga, onde o parâmetro de carga permanece constante durante o ciclo iterativo. A equação de restrição é dada por:

$$\delta\lambda^k = 0 \quad (4.29)$$

Assim, a Equação (4.11) é reduzida aos deslocamentos fornecidos pelo método de Newton-Raphson convencional. Essa estratégia é útil até o ponto de limite, pois, ao ser atingido esse ponto, o incremento de carga não proporciona o retorno à trajetória de equilíbrio.

2. Iteração a comprimento de arco cilíndrico

Essa estratégia foi inicialmente estudada por Wempner (1971) e Riks (1972), e impõe a condição de comprimento de arco constante a cada iteração. Crisfield (1981) propôs que, a cada iteração, a seguinte equação fosse satisfeita:

$$\left(\Delta\mathbf{U}^k\right)^T \Delta\mathbf{U}^k = \Delta l^2 \quad (4.30)$$

Substituindo a Equação (4.16) em (4.30) chega-se em uma equação quadrática dada por:

$$A\left(\delta\lambda^k\right)^2 + B\delta\lambda^k + C = 0 \quad (4.31)$$

em que seus coeficientes A , B e C são:

$$A = \left(\delta\mathbf{U}_r^k\right)^T \delta\mathbf{U}_r^k \quad (4.32)$$

$$B = 2\left(\delta\mathbf{U}_r^k\right)^T \left(\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k\right) \quad (4.33)$$

$$C = \left(\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k\right)^T \left(\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k\right) - \Delta l^2 \quad (4.34)$$

Novamente o resultado será composto por duas raízes, e a escolha do valor de $\delta\lambda$ segue os passos descritos em Silva (2009).

3. Iteração baseada no deslocamento generalizado

Usando a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro GSP, foi mostrado que a Equação (4.26) deveria ser imposta. Segundo Silva (2009), durante o ciclo iterativo é assumido que o parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, ou seja, $H_k=0$ para $k>0$. Portanto, essa equação pode ser reescrita como:

$$\delta\lambda^k = -\frac{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T\delta\mathbf{U}_g^k}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T\delta\mathbf{U}_r^k} \quad (4.35)$$

sendo essa a expressão para a correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

Capítulo 5

Metodologia para Análise Dinâmica Não Linear

5.1 Introdução

Em um problema estático, suas equações diferenciais são independentes do tempo. Já no problema dinâmico ou transiente, o tempo passa a ser importante e as forças de inércia tornam-se relevantes na análise. Um estudo dinâmico diz respeito aos movimentos oscilatórios de um corpo e às forças a ele associadas. Assim, a ação de um motor sobre sua base, a ação do vento ou ondas do mar, terremotos ou explosões sobre estruturas são exemplos desses casos em que o equilíbrio dos sistemas só é verificado com a consideração de forças inerciais. Esses sistemas mecânicos estão sujeitos a vibrações, e por isso é importante analisar seu comportamento oscilatório.

Existem duas classes gerais de vibração: a livre e a forçada. A vibração livre acontece quando um sistema oscila na ausência da ação de forças externas, recebendo contribuições de todos os modos de vibração do sistema. A vibração forçada ocorre sob a excitação de tais forças. Quando a solitação atuante no sistema é oscilatória, ele vibra na frequência da excitação e, se essa frequência coincidir com uma das frequências naturais do sistema, ocorre o estado de ressonância. Esse fenômeno pode resultar em amplas oscilações e causar o colapso de estruturas e, por isso, o cálculo das frequências naturais no estudo de vibrações é de fundamental importância.

No caso de estruturas em contato com o solo, o comportamento dinâmico é alterado de acordo com a rigidez dessa fundação. Sabe-se que quanto mais rígido for o sistema, maiores são as suas frequências de vibração, e que o contato com o solo torna esse sistema mais rígido. Portanto, torna-se também importante o estudo da resposta transiente e das frequências de vibração ao se considerar a interação entre esses dois corpos.

Os sistemas estruturais estão, em geral, sujeitos a certo grau de amortecimento, que ocorre devido à perda de energia por atrito, ar, ou outras resistências, ou seja, quando o sistema dissipa energia durante a oscilação. Na ausência de reposição de energia, a vibração do sistema é reduzida gradualmente. Se esse amortecimento é fraco, terá pouca influência e geralmente não é considerado no cálculo das frequências naturais. No entanto, o amortecimento é de grande importância ao limitar a amplitude de oscilação na ressonância.

Este capítulo trata da metodologia utilizada para resolver o problema dinâmico não linear. Ressalta-se que o elemento finito usado na discretização do problema estrutural foi apresentado no Capítulo 3.

5.2 Equações Gerais

A resposta dinâmica de um sistema estrutural é governada por equações diferenciais que podem ser obtidas a partir do *Teorema dos Deslocamentos Virtuais*. Considerando o elemento finito da Figura 5.1, que é o mesmo utilizado na análise estática, e impondo-lhe o equilíbrio é possível estabelecer a seguinte relação:

$$\int_0^L \left[\delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}^T c(x) \dot{\mathbf{u}} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \right] dx = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_e(t) \quad (5.1)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ são os deslocamentos virtuais, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ são as deformações virtuais; $\boldsymbol{\sigma}$ são as tensões no elemento em equilíbrio com \mathbf{F}_e , que são as forças externas aplicadas; ρ é a densidade e $c(x)$ é o coeficiente de amortecimento viscoso distribuído ao longo do comprimento L do elemento.

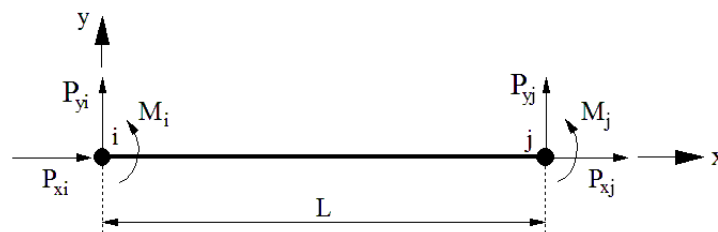


Figura 5.1 Elemento finito adotado

O campo de deslocamentos \mathbf{u} , a velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ e a aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$, podem ser aproximados através das funções de forma de Hermite, $\mathbf{H}(x)$, e dos parâmetros nodais incrementais, \mathbf{u}^e e suas derivadas, como segue:

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{H}(x)\mathbf{u}^e(t) \quad (5.2)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(x,t) = \mathbf{H}(x)\dot{\mathbf{u}}^e(t) \quad (5.3)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(x,t) = \mathbf{H}(x)\ddot{\mathbf{u}}^e(t) \quad (5.4)$$

Então avalia-se as deformações no elemento através da expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,t) = \mathbf{B}(x)\mathbf{u}^e(t) \quad (5.5)$$

em que \mathbf{B} é a matriz deformação-deslocamento obtida diferenciando-se e combinando-se de forma apropriada as funções de forma contidas da matriz \mathbf{H} .

Combinando-se as equações anteriores, chega-se então à forma aproximada e discreta da Equação (5.1), em qualquer instante t :

$$\delta\mathbf{u}^{eT} \left[\int_0^L \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \ddot{\mathbf{u}}^e + \int_0^L c(x) \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \dot{\mathbf{u}}^e + \int_0^L \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dx - \mathbf{F}_e \right] = 0 \quad (5.6)$$

Como a variação dos deslocamentos $\delta\mathbf{u}$ é arbitrária, chega-se à equação de movimento na forma matricial clássica, no sistema local de coordenadas, para o elemento finito considerado:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_e^e(t) \quad (5.7)$$

na qual \mathbf{M}^e corresponde à matriz de massa consistente do elemento, definida pela Equação (5.8); \mathbf{C}^e é a matriz de amortecimento viscoso consistente, definida pela Equação (5.9); e \mathbf{F}_i^e representa o vetor de forças internas para o elemento finito considerado. Esse vetor, para problemas não lineares, é calculado de forma incremental.

$$\mathbf{M}^e = \int_0^L \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \quad (5.8)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_0^L c(x) \mathbf{H}^T \mathbf{H} dx \quad (5.9)$$

Além da matriz de massa consistente, existe ainda um método mais simples de se avaliar a matriz de massa de um elemento finito. É conhecido como método da massa

concentrada, e supõe que as propriedades inerciais são concentradas nos nós do elemento. No entanto, de acordo com Galvão (2004), uma abordagem utilizando a matriz de massa consistente oferece maior precisão da resposta, e uma convergência mais rápida quando se utiliza um processo iterativo de solução. Desenvolvendo a Equação (5.8) chega-se a:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & sim. & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

onde A é a área da seção transversal, L o comprimento do elemento, e ρ é a densidade.

Devido à ausência de informações relacionadas aos mecanismos de amortecimento de estruturas, há uma certa dificuldade na definição de parâmetros associados à matriz de amortecimento, e por isso, em geral, as forças de amortecimento não são consideradas. No entanto, neste trabalho, a matriz de amortecimento é estabelecida como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, como segue:

$$\mathbf{C}^e = \mu_1 \mathbf{M}^e + \mu_2 \mathbf{K}^e \quad (5.11)$$

sendo μ_1 e μ_2 os coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh.

De acordo com Silva (2009), o amortecimento de Rayleigh leva à seguinte relação entre taxa modal de amortecimento, ξ , e frequência, ω :

$$\xi = \mu_1 \frac{1}{2\omega} + \mu_2 \frac{\omega}{2} \quad (5.12)$$

Os coeficientes μ_1 e μ_2 podem ser obtidos considerando duas taxas de amortecimento, ξ_m e ξ_n , referentes a duas frequências distintas, ω_m e ω_n , e resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_m} & \omega_m \\ \frac{1}{\omega_n} & \omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Usualmente, admite-se que $\xi_m = \xi_n = \xi$. Sendo assim, e resolvendo o sistema acima, chega-se a uma equação simplificada para calcular os coeficientes de proporcionalidade:

$$\begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_m + \omega_n} \begin{Bmatrix} \omega_m \omega_n \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

A matriz de massa, representada pela Equação (5.8), é definida no sistema local de coordenadas e deve ser transformada para o referencial global através da matriz de rotação entre os dois sistemas, apresentada no Capítulo 3. A matriz de amortecimento é obtida diretamente através da Equação (5.11), utilizando as matrizes de massa e rigidez já no sistema global. A transformação do vetor de forças internas para o sistema global já foi comentada no Capítulo 3.

Finalmente, somando-se a contribuição de cada elemento finito usado na modelagem do problema, tem-se a equação de equilíbrio dinâmico dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (5.15)$$

onde \mathbf{F}_{ext} corresponde ao vetor de forças externas.

5.3 Análise de Vibração

As frequências naturais são propriedades do sistema estrutural e dependem da sua distribuição de rigidez e massa. Os modos de vibração descrevem as configurações que o sistema em vibração assume sob determinadas frequências naturais. Cada modo está associado a uma frequência natural, e não possui qualquer relação com a amplitude dos movimentos oscilatórios.

É fundamental analisar as frequências no estudo da estabilidade de sistemas estruturais com trajetórias de equilíbrio fortemente não lineares. Segundo Bazant e Cedolin (1991), se uma configuração de equilíbrio apresenta pelo menos uma das frequências com valor imaginário, ela é instável. Se houver uma frequência nula, o equilíbrio é indiferente ou crítico. Caso contrário, a configuração é considerada estável.

A vibração livre ocorre exclusivamente pelas energias potencial e cinemática existentes no sistema na ausência da ação de forças externas. Desprezando o efeito do amortecimento, a equação de movimento do sistema estrutural em vibração livre é definida como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.16)$$

na qual \mathbf{M} corresponde à matriz de massa e \mathbf{K} à matriz de rigidez que, nos casos onde há problema de contato, é a soma da matriz de rigidez da estrutura com a matriz de rigidez da

fundação elástica. Os vetores \mathbf{U} e $\ddot{\mathbf{U}}$ correspondem a deslocamento e aceleração, respectivamente. Admitindo-se as respostas das equações (5.2)-(5.4), chega-se à equação característica do problema (5.18), na forma de um problema de autovalor generalizado:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\phi} \text{sen}(\omega t) \quad (5.17)$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

em que ω^2 é o autovalor que representa o quadrado das frequências naturais de vibração em rad/s, e $\boldsymbol{\phi}$ é o autovetor que representa o modo de vibração, contendo as amplitudes do movimento associadas aos graus de liberdade nodais da estrutura.

Notando que $\boldsymbol{\phi}$ não pode ser nulo, essa solução só se torna possível se o seu determinante for nulo, portanto:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (5.19)$$

Essa equação fornece um polinômio característico e suas raízes definem as frequências de vibração do sistema. Usando (5.18), com cada uma dessas frequências, são obtidos os modos de vibração. Vale ressaltar que o número de modos de vibração é igual ao número de graus de liberdade do sistema estrutural. No entanto, para sistemas com elevado número de graus de liberdade, essa forma de resolver o problema de autovalor não é eficiente. Por isso, é vantajoso utilizar algoritmos computacionais que fornecem, de uma só vez, todas as frequências naturais e modos de vibração. Neste trabalho, utiliza-se o método de Jacobi, que pode ser encontrado em Tedesco *et al.* (1998).

Quando se considera a influência do pré-carregamento estático (vibração forçada), em uma análise não linear onde leva-se em conta os efeitos geométricos, a solução para a Equação (5.18) não pode ser obtida diretamente. Isso ocorre porque a matriz de rigidez é não linear devido às alterações na geometria da estrutura à medida que é carregada. Por isso, é necessário conhecer a configuração de equilíbrio, para um determinado nível de carregamento, antes de determinar as frequências naturais. Portanto, é realizado o procedimento incremental-iterativo para resolver o problema estático não linear, conforme descrito no Capítulo 4. Ao final do ciclo iterativo, após ter sido estabelecido o equilíbrio do sistema, determinam-se as frequências naturais e os modos de vibração pelo método de Jacobi. A Tabela 5.1 apresenta as etapas a serem seguidas nesse processo.

5.4 Análise Transiente Não Linear

Para a realização da análise transiente, é importante a aplicação de métodos numéricos de solução através da utilização de um algoritmo de integração, que se classificam em técnicas de integração implícitas e explícitas. Os métodos explícitos obtêm a solução do problema dinâmico no tempo $t+\Delta t$, considerando o equilíbrio do sistema no instante t . Nos algoritmos implícitos, além de considerar a história ao longo de tempos passados, algumas condições de equilíbrio precisam ser satisfeitas em $t+\Delta t$. Nesses algoritmos é requerida usualmente a solução de um sistema de equações não lineares em cada passo de tempo, onde a solução do problema é obtida através de sucessivas soluções de sistemas de equações algébricas lineares, utilizando em geral algoritmos iterativos do tipo Newton-Raphson. O método de Newmark (Newmark, 1959) é um dos mais populares métodos de integração implícitos, baseado na variação linear da aceleração ao longo do intervalo de integração. De acordo com o processo de integração de Newmark, a expressão para a velocidade no final de cada intervalo é dada por:

$${}^{(t+\Delta t)}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t}{2} \left({}^t\ddot{\mathbf{U}} + {}^{(t+\Delta t)}\ddot{\mathbf{U}} \right) \quad (5.20)$$

Para se obter ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}$ em função de parâmetros do instante anterior, utiliza-se expansão em série de Taylor, desprezando os termos de quarta ordem ou superiores, e utilizando a hipótese de variação linear da aceleração, chegando a:

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + {}^t\ddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^2}{3} + {}^{(t+\Delta t)}\ddot{\mathbf{U}}\frac{\Delta t^2}{6} \quad (5.21)$$

As Equações (5.20) e (5.21) são as fórmulas de Newmark para variação linear da aceleração no intervalo de tempo considerado. O emprego dos parâmetros β e γ nessas expressões, cujos valores determinam a eficiência e estabilidade do algoritmo, leva às fórmulas gerais do método de Newmark:

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 + \beta {}^{(t+\Delta t)}\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 \quad (5.22)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}}(1-\gamma)\Delta t + {}^{(t+\Delta t)}\ddot{\mathbf{U}}\gamma\Delta t \quad (5.23)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \left({}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U} - \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} \right) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (5.24)$$

Tabela 5.1 Metodologia de solução numérica para análise de vibração forçada

1. Dados gerais: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos, rigidez da fundação elástica, entre outros

2. Define o vetor de cargas nodais de referência, \mathbf{F}_r

3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida, t : ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^t\lambda$

4. Solução predita: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$

4.1 Calcula-se a matriz de rigidez tangente do sistema: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_b$

4.2 Resolve: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$

4.3 Define $\Delta\lambda^0$ (Seção 4.4)

4.4 Calcula: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$

4.5 Atualiza as variáveis na configuração $t+\Delta t$:

$$({}^{t+\Delta t})\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad \text{e} \quad ({}^{t+\Delta t})\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$$

5. Processo iterativo de Newton-Raphson: $k=1, 2, 3, \dots$

5.1 Calcula-se o vetor de forças internas:

$$({}^{t+\Delta t})\mathbf{F}_i^{(k-1)} = \left({}^t\mathbf{F}_{ie} + {}^t\mathbf{F}_{ib} \right) + \mathbf{K}_e \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \mathbf{K}_b \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$$

5.2 Calcula o vetor de forças desequilibradas:

$$\mathbf{g}^{(k-1)} = ({}^{t+\Delta t})\mathbf{F}_{ie}^{(k-1)} + ({}^{t+\Delta t})\mathbf{F}_{ib}^{(k-1)} - ({}^{t+\Delta t})\lambda \mathbf{F}_r$$

5.3 Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças, ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SIM (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 5.10*

5.4 Atualiza a matriz de rigidez tangente do sistema (\mathbf{K})

5.5 Corrige o parâmetro de carga, $\Delta\lambda^k$ (Seção 4.4)

5.6 Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$, com:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad \text{e} \quad \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-(k-1)} \mathbf{F}_r$$

5.7 Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos, ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SIM (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 5.10*

SIM (Critério de forças e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item*

5.10, apenas se houve convergência no item 5.3

5.8 Atualiza o parâmetro de carga, λ , e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :

a) *Incremental:* $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$

b) *Total:* $({}^{t+\Delta t})\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e $({}^{t+\Delta t})\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$

5.9 Retorna ao passo 5

5.10 Determina as frequências naturais e os correspondentes modos de vibração

a) Atualiza a matriz de rigidez tangente \mathbf{K} e a matriz de massa \mathbf{M}

b) Decompõe a matriz \mathbf{M} usando o método de Cholesky: $\mathbf{M} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$

c) Obtém a matriz $\mathbf{A} = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{K} \mathbf{S}^{-1}$

d) Resolve o problema de autovalor padrão resultante $\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$ usando o método de Jacobi (Tedesco *et al.*, 1998), obtendo os autovalores (ω^2) e os correspondentes autovetores

6. Realiza um novo incremento de carga e retorna ao item 4

Para $\beta=1/6$ e $\gamma=1/2$ tem-se o método da aceleração linear, onde considera-se que a aceleração varia linearmente no intervalo de tempo. Para que os deslocamentos, velocidades e acelerações sejam conhecidos no instante $t+\Delta t$, é necessário satisfazer as equações de equilíbrio dinâmico nesse instante:

$$\mathbf{M}^{(t+\Delta t)}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}^{(t+\Delta t)}\dot{\mathbf{U}} + {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i = {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r \quad (5.25)$$

onde \mathbf{F}_r é o vetor que define a direção e o sentido do carregamento externo, e λ é o parâmetro de carga que estabelece a intensidade desse vetor no instante considerado. Desenvolvendo as equações, chega-se a um sistema simplificado de equações, descrito como:

$$\hat{\mathbf{K}}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}} \quad (5.26)$$

na qual $\hat{\mathbf{K}}$ é a matriz de rigidez efetiva e $\hat{\mathbf{F}}$ é o vetor de forças efetivos, expressos por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r + \mathbf{M} & \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} {}^t\mathbf{U} + \frac{1}{\beta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] + \\ & + \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} {}^t\mathbf{U} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

Newmark (1959) propôs os valores de $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ para se ter um algoritmo incondicionalmente estável, com aceleração constante no intervalo, definida pela média das acelerações nos instantes extremos do intervalo.

Sabe-se que para o caso não linear, a matriz de rigidez se modifica. Sendo assim, o método de Newmark é usado juntamente com a estratégia incremental e iterativa de Newton-Raphson, mostrada no capítulo anterior, para produzir a resposta dinâmica não linear de sistemas estruturais. Os passos a serem seguidos são descritos na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 Metodologia de solução numérica para análise transiente não linear

-
1. Dados gerais: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos, rigidez da fundação elástica, entre outros
 2. Define o vetor de cargas nodais de referência, \mathbf{F}_r
 3. Consideram-se os deslocamentos, ${}^t\mathbf{U}$, velocidades, ${}^t\dot{\mathbf{U}}$, e acelerações, ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$, no instante t
 4. Para cada instante $t+\Delta t$
 - 4.1 Calcula-se a matriz de rigidez do sistema: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_b$, a matriz de massa, \mathbf{M} , e amortecimento, \mathbf{C}
 - 4.2 Usando os parâmetros do método, γ e β , determinam-se as constantes:
$$a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}; a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}; a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right); a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right);$$

$$a_6 = a_0; a_7 = -a_2; a_8 = -a_3; a_9 = \Delta t(1 - \gamma); a_{10} = \alpha\Delta t$$
 - 4.3 Monta-se a matriz de rigidez efetiva: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$
 - 4.4 Determina o vetor de cargas efetivo:
$$\hat{\mathbf{F}} = ({}^{t+\Delta t})\lambda\mathbf{F}_r + \mathbf{M}(a_2{}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3{}^t\ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C}(a_4{}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5{}^t\ddot{\mathbf{U}}) - {}^t\mathbf{F}_i$$
 - 4.5 Obtém o vetor de deslocamentos nodais incrementais: $\hat{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}}$
 5. Processo iterativo de Newton-Raphson: $k=1, 2, 3, \dots$
 - 5.1 Avalia os deslocamentos, velocidades e acelerações:
$$({}^{t+\Delta t})\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k; ({}^{t+\Delta t})\dot{\mathbf{U}}^k = a_1\Delta\mathbf{U}^k - a_4{}^t\dot{\mathbf{U}} - a_5{}^t\ddot{\mathbf{U}};$$

$$({}^{t+\Delta t})\ddot{\mathbf{U}}^k = a_0\Delta\mathbf{U}^k - a_2{}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3{}^t\ddot{\mathbf{U}}$$
 - 5.2 Atualiza as coordenadas nodais
 - 5.3 Calcula o vetor de forças internas: $({}^{t+\Delta t})\mathbf{F}_i^k = ({}^t\mathbf{F}_{ie} + {}^t\mathbf{F}_{ib}) + \mathbf{K}_e\Delta\mathbf{U}^k + \mathbf{K}_b\Delta\mathbf{U}^k$
 - 5.4 Calcula o vetor de forças residuais:
$$({}^{t+\Delta t})\mathbf{R}^{(k+1)} = ({}^{t+\Delta t})\lambda\mathbf{F}_r - (\mathbf{M}({}^{t+\Delta t})\ddot{\mathbf{U}}^k + \mathbf{C}({}^{t+\Delta t})\dot{\mathbf{U}}^k + ({}^{t+\Delta t})\mathbf{F}_i^k)$$
 - 5.5 Corrige os deslocamentos: $\hat{\mathbf{K}}\delta\mathbf{U}^{(k+1)} = ({}^{t+\Delta t})\mathbf{R}^{(k+1)}$
 - 5.6 Atualiza o vetor de deslocamentos incrementais: $\Delta\mathbf{U}^{(k+1)} = \Delta\mathbf{U}^k + \delta\mathbf{U}^{(k+1)}$
 - 5.7 Verifica a convergência do processo iterativo, usando:
$$\frac{|\Delta\mathbf{U}^{(k+1)}|}{|{}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k+1)}|} \leq \xi, \text{ sendo } \xi \text{ um fator de tolerância}$$
 - 5.8 Obtém os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo $t+\Delta t$

$$({}^{t+\Delta t})\mathbf{U}^{(k+1)} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k+1)}; ({}^{t+\Delta t})\dot{\mathbf{U}}^{(k+1)} = a_1\Delta\mathbf{U}^{(k+1)} - a_4{}^t\dot{\mathbf{U}} - a_5{}^t\ddot{\mathbf{U}};$$

$$({}^{t+\Delta t})\ddot{\mathbf{U}}^{(k+1)} = a_0\Delta\mathbf{U}^{(k+1)} - a_2{}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3{}^t\ddot{\mathbf{U}}$$
 6. Para o próximo instante:
 - 6.1 Avalia o vetor de forças internas: $({}^{t+\Delta t})\mathbf{F}_i^{(k+1)} = ({}^t\mathbf{F}_{ie} + {}^t\mathbf{F}_{ib}) + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k+1)}$
 - 6.2 Retorna ao item 4
-

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Introdução

Serão apresentados nesse capítulo cinco exemplos de validação das formulações apresentadas nos capítulos anteriores, envolvendo interação entre o solo e a estrutura. O contato foi considerado como bilateral, e o solo foi modelado através dos modelos de molas discretas, Winkler e Pasternak. Foi considerada em todos os exemplos a não linearidade geométrica da estrutura, e em alguns casos considerou-se também o comportamento não linear do solo. O objetivo é mostrar o efeito da interação entre o solo e a estrutura nas respostas.

Em todas as análises foram seguidas as metodologias apresentadas nos Capítulos 4 e 5 para análise estática e dinâmica, respectivamente. O método de Newton-Raphson foi utilizado no processo de solução não linear. Adotou-se um critério de convergência baseado em cargas e deslocamentos, e uma tolerância de 10^{-4} nas análises estáticas e dinâmicas.

6.2 Viga Biapoiada Sobre Fundação Linear

Considere a viga biapoiada ilustrada na Figura 6.1. As propriedades geométricas e físicas dessa estrutura são: comprimento $L = 6.096$ m, área $A = 185.81 \times 10^{-3}$ m², momento de inércia $I = 1.44 \times 10^{-3}$ m⁴, módulo de elasticidade $E = 2.483 \times 10^{10}$ N/m², e densidade $\rho = 446.08$ kg/m. A viga está apoiada em uma fundação elástica com rigidez $k_1 = 16.554$ MN/m². Esse exemplo foi estudado também por Timoshenko e Young (1974), Lai *et al.* (1992), Thambiratnam e Zhuge (1996a) e, mais recentemente, por Sapountzakis e Kampitsis (2010). O solo foi representado pelo modelo de Winkler ($k_2 = 0$).

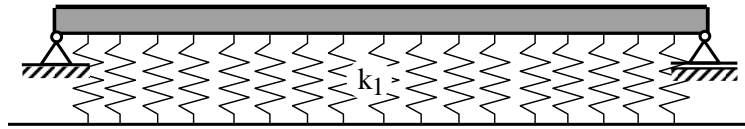


Figura 6.1 Viga biapoiada repousando sobre fundação elástica

Foi realizada uma análise de vibração livre dessa estrutura e as três primeiras frequências de vibração foram comparadas com os resultados disponíveis na literatura. Nessa análise, a discretização utilizada foi de 10 elementos finitos. Observa-se que a metodologia utilizada neste trabalho conduziu a resultados satisfatórios, conforme apresentado na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 Três primeiras frequências de vibração da viga biapoiada

Frequência (Hz)	Timoshenko e Young (1974)	Lai <i>et al.</i> (1992)	Thambiratnam e Zhuge (1996a)	Sapountzakis e Kampitsis (2010)	Presente estudo
f_1	32.9032	32.9049	32.9033	32.7946	32.9123
f_2	56.8135	56.8220	56.8193	56.5476	56.8499
f_3	112.908	111.9730	111.9610	110.7220	112.0392

Considerando agora a mesma viga, mas sobre uma fundação de comprimento variável, foram analisadas as duas primeiras frequências de vibração. Nesse estudo, o parâmetro m (ilustrado na Figura 6.2) variou de zero (sem a presença do meio elástico) a um (toda a estrutura apoiada sobre a fundação).

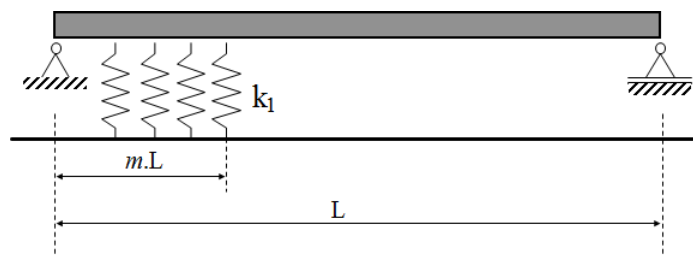


Figura 6.2 Viga biapoiada sobre base elástica de comprimento variável

Os resultados são expostos na Figura 6.3. Nela também estão indicados os modos de vibração para a condição $m = 0.5$, ou seja, metade da viga em contato com o solo. O mesmo exemplo foi modelado no software SAP2000 para comparação dos resultados. Nesse caso, percebe-se que com o aumento de m , ou seja, aumento da área de contato, maiores são as frequências de vibração, pois o sistema se torna mais rígido.

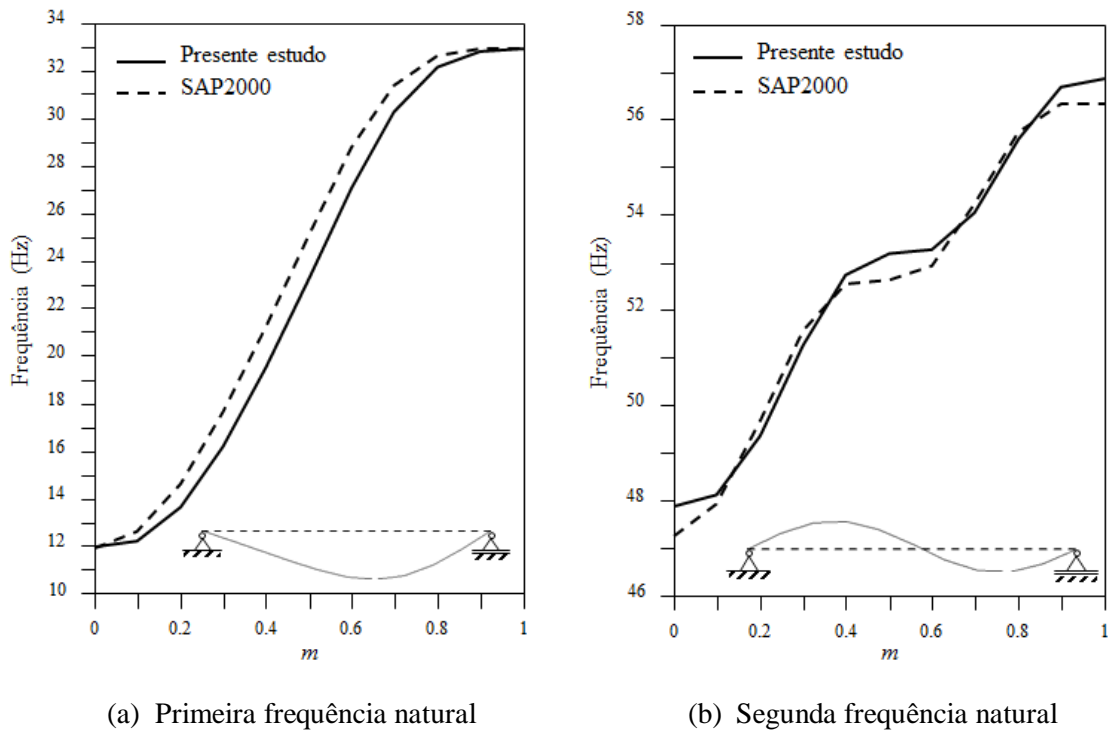


Figura 6.3 Frequência de vibração da viga biapojada em função da variação do comprimento da fundação elástica (valor de m)

Realizando a análise transiente, a Figura 6.4 exibe o histórico de deslocamento vertical obtido no centro do vão da viga ($L/2$). A viga foi submetida a uma carga de impacto, conforme ilustrado nessa mesma figura. O incremento de tempo utilizado foi de 10^{-4} . Foram utilizados os modelos de molas discretas e Winkler, e observa-se a equivalência no resultado dos dois modelos. Essa figura exibe também a resposta obtida por Sapountzakis e Kampitsis (2010), onde verifica-se a concordância com os resultados obtidos neste trabalho. O deslocamento foi expresso dividido pelo comprimento da viga (v/L).

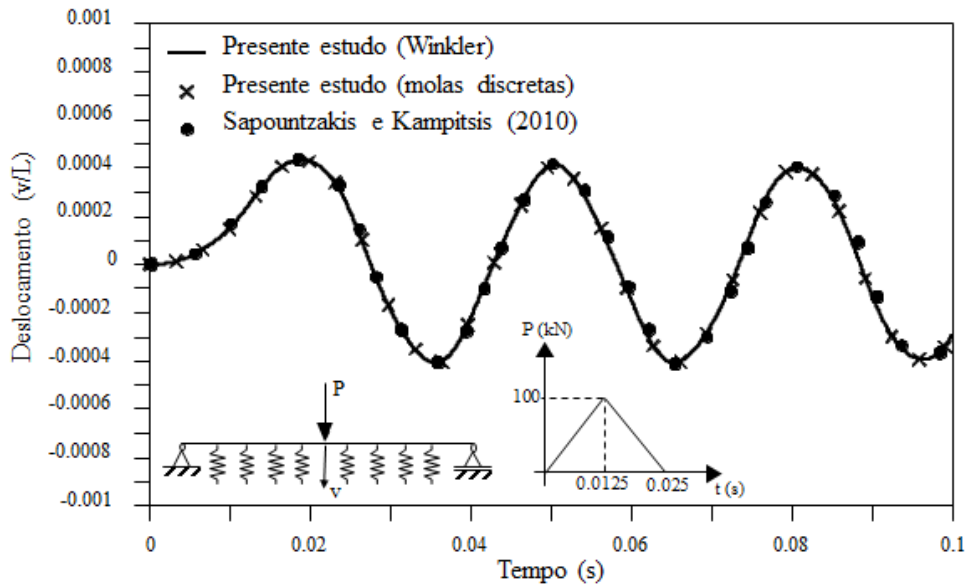


Figura 6.4 Resposta no tempo para modelos de Winkler e molares discretas

Para verificar a influência da rigidez da fundação elástica na resposta transiente da viga, a mesma análise foi realizada utilizando diferentes fundações, avaliadas pelo parâmetro k_1 . O histórico de deslocamento no centro da viga foi avaliado e ilustrado na Figura 6.5. Nota-se que as fundações mais rígidas (maiores valores de k_1) ocasionaram menores deslocamentos e menores períodos de vibração.

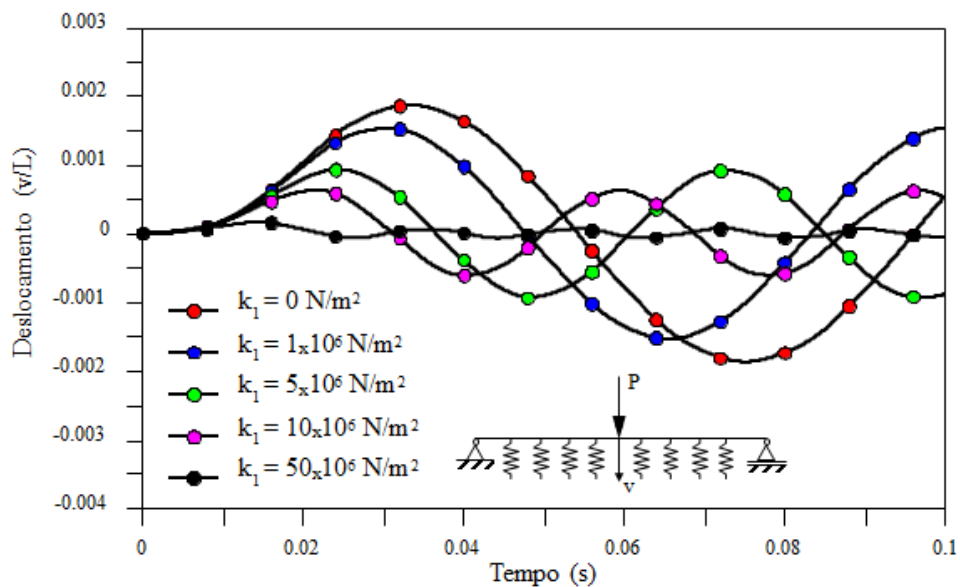


Figura 6.5 Resposta no tempo para diferentes valores de k_1

6.3 Pórtico Plano Suportado por Pilares em Contato com o Solo

Considere o pórtico mostrado na Figura 6.6a. A estrutura é composta de seis membros: dois pilares de concreto (*ec* e *fd*) conectados por uma viga também de concreto (*cd*); e os membros *ab*, *ca* e *db* feitos de aço estrutural W14 x 26. Os pilares de concreto têm módulo de elasticidade $E = 25998.75$ MPa, densidade $\rho = 1886.88$ kg/m, e seção transversal circular de área $A = 0.7854$ m². A viga de concreto possui módulo de elasticidade $E = 25998.75$ MPa, densidade $\rho = 600$ kg/m, e seção transversal quadrada de área $A = 0.25$ m². Os membros em aço estrutural apresentam área da seção transversal $A = 4.961 \times 10^{-3}$ m², momento de inércia $I = 101.9767 \times 10^{-6}$ m⁴, módulo de elasticidade $E = 206842.72$ MPa, e densidade $\rho = 38.86$ kg/m. O solo foi representado através dos modelos de Winkler e Pasternak, com parâmetros de rigidez $k_1 = 2.0684$ MN/m² e $k_2 = 3200$ kN. A Figura 6.6b ilustra o modelo estrutural utilizado.

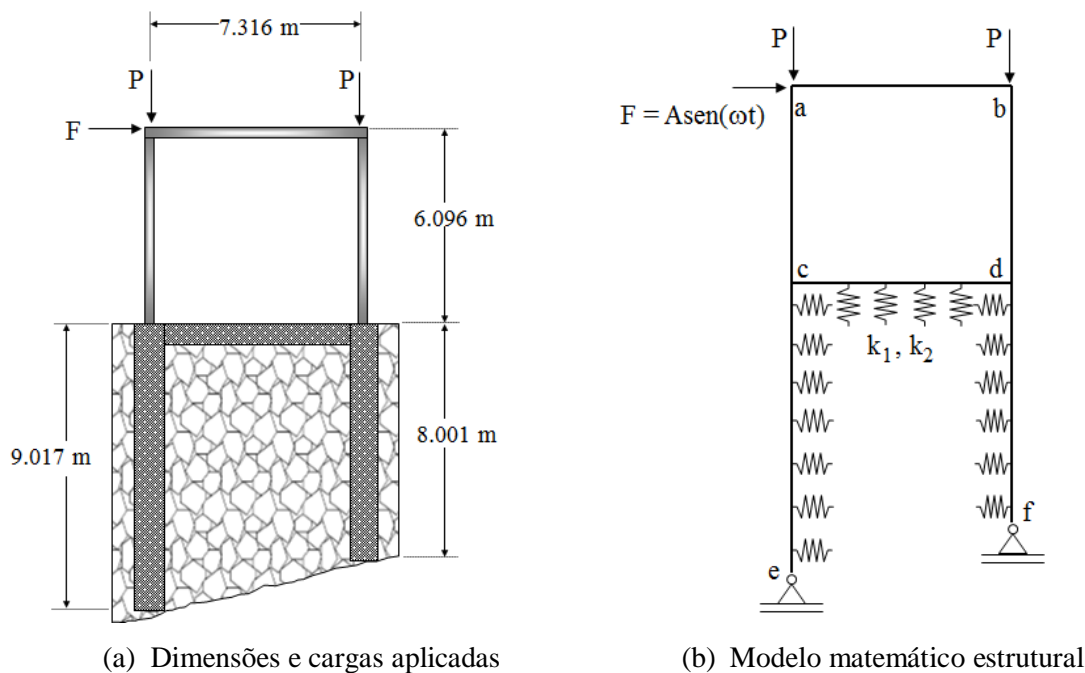


Figura 6.6 Pórtico plano em contato com o solo

A Tabela 6.2 apresenta os deslocamentos e rotações nos nós *a*, *b*, *c* e *d* causados pelo carregamento estático aplicado ($P = 889,64$ kN), assumindo que as ligações desses nós são rígidas. O pórtico foi dividido em 6 elementos finitos. Foram utilizados três valores para o parâmetro k_2 , e os resultados foram comparados com os obtidos por

Arboleda-Monsalve *et al.* (2008). Pode-se observar que os deslocamentos e rotações diminuem com o aumento do parâmetro k_2 .

Tabela 6.2 Deslocamentos (m) e rotações (rad) do pórtico plano

Deslocamentos e Rotação		Arboleda-Monsalve <i>et al.</i> (2008)	Presente Estudo	Arboleda-Monsalve <i>et al.</i> (2008)	Presente Estudo	Arboleda-Monsalve <i>et al.</i> (2008)	Presente Estudo
		$k_2 = 0$		$k_2 = 4448$ kN		$k_2 = 13345$ kN	
Deslocamento Horizontal	u_a	0.0219	0.0214	0.0214	0.0208	0.0206	0.0201
	u_b	0.0217	0.0212	0.0211	0.0206	0.0204	0.0199
	u_c	0.0028	0.0028	0.0025	0.0025	0.0021	0.0021
	u_d	0.0028	0.0028	0.0025	0.0025	0.0021	0.0021
Deslocamento Vertical	v_a	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063
	v_b	-0.0064	-0.0064	-0.0064	-0.0064	-0.0064	-0.0064
	v_c	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004
	v_d	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004
Rotação	θ_a	-0.0067	-0.0049	-0.0067	-0.0049	-0.0066	-0.0048
	θ_b	0.0040	0.0022	0.0040	0.0022	0.0040	0.0022
	θ_c	-0.0005	-0.0005	-0.0004	0.0004	-0.0003	-0.0003
	θ_d	-0.0006	-0.0005	-0.0005	0.0004	0.0021	-0.0004

Realizou-se também a análise de vibração livre dessa estrutura, adotando os modelos de Winkler ($k_2 = 0$) e Pasternak ($k_2 = 3200$ kN) para modelagem do solo. Os resultados para os 5 primeiros modos são apresentados na Tabela 6.3. Para o modelo de Winkler, as respostas foram comparadas com aquelas obtidas através da modelagem no software SAP2000, e também com aquelas encontradas por Arboleda-Monsalve *et al.* (2008). Vale ressaltar que, para o modelo de Pasternak, esses autores consideraram a existência de ligações semirrígidas nos nós c e d , com fatores fixos de rigidez (γ) de 0.2 e 0.9 respectivamente. No CS-ASA, programa utilizado como base computacional deste trabalho, já existe a possibilidade de considerar ligações semirrígidas, permitindo realizar essa análise para fins comparação. Maiores detalhes sobre a formulação dessas ligações são encontradas em Silva (2009). Foram obtidos resultados com boa concordância, conforme exposto na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 Frequências naturais (Hz) do pórtico plano

Modos	$k_2 = 0$			$k_2 = 3200 \text{ kN}$	
	Arboleda-Monsalve <i>et al.</i> (2008)	SAP2000	Presente estudo	Arboleda-Monsalve <i>et al.</i> (2008)	Presente estudo
1	4.587	4.766	4.654	4.519	4.678
2	5.516	5.756	5.574	5.526	5.717
3	5.890	6.285	6.122	5.703	6.226
4	8.754	9.458	9.900	7.257	8.071
5	24.866	25.049	29.201	25.213	29.469

A Figura 6.7 apresenta a variação da frequência de vibração da estrutura com a magnitude do carregamento aplicado, para cinco diferentes valores de rigidez das ligações nos nós *c* e *d*. Essa análise foi realizada supondo o solo representado através do modelo de Winkler ($k_1 = 2.068 \text{ MN/m}^2$ e $k_2 = 0$). Ressalta-se que a carga crítica é encontrada quando a frequência de vibração se anula ($\omega=0$). Dessa forma, para uma ligação com rigidez $\gamma = 0$, obteve-se a carga crítica de 980.561 kN. Conforme a rigidez da ligação aumenta, o sistema torna-se evidentemente mais rígido, e a frequência natural também sofre um pequeno acréscimo de 4.061 Hz para 4.657 Hz. Como esperado, as cargas críticas para ligações mais rígidas são mais elevadas. O valor da carga crítica obtido para uma ligação perfeitamente rígida ($\gamma = 1$) foi de 3886.142 kN. Nota-se boa concordância das respostas obtidas neste trabalho com os resultados encontrados na literatura.

Realizou-se também a análise transiente do pórtico, considerando um carregamento harmônico $F = A \text{ sen}(\omega t)$, onde A corresponde a aceleração da gravidade (9.807 m/s^2) e ω representa a primeira frequência natural do sistema (4.654 Hz). A Figura 6.8 apresenta a resposta transiente, considerando os deslocamentos no nó *a*. O incremento de tempo utilizado foi de 10^{-3} . É possível observar como o segundo parâmetro da fundação elástica (k_2) influencia na resposta. Quanto maior o valor de k_2 , o sistema torna-se mais rígido e causa menores amplitudes de deslocamentos, sem alterar significativamente os períodos de vibração.

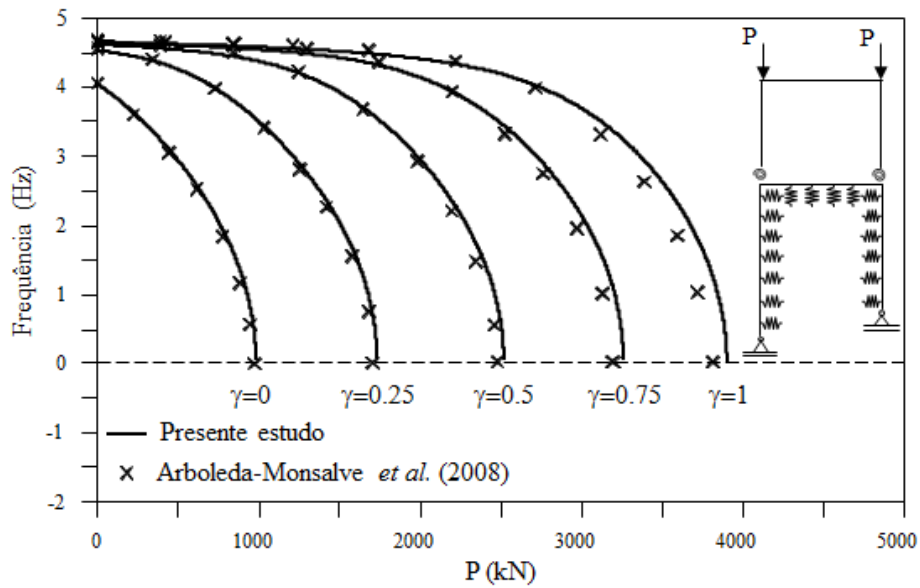


Figura 6.7 Variação da frequência com a magnitude do carregamento aplicado

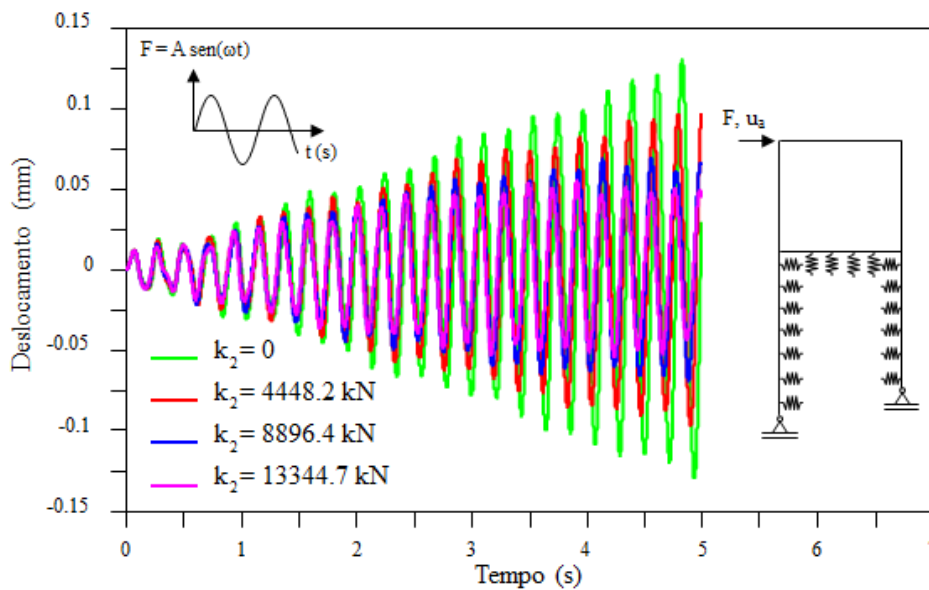


Figura 6.8 Resposta transitória para diferentes valores de k_2

6.4 Arco Senoidal com Molas Discretas nas Extremidades

O terceiro problema estudado refere-se a um arco esbelto senoidal submetido a um carregamento uniformemente distribuído, P , como ilustrado na Figura 6.9. Esse tipo de estrutura pode apresentar um comportamento fortemente não linear, dependendo das condições de apoio e do carregamento aplicado.

Para as análises, considerou-se o contato através de molas rotacionais discretas posicionadas nas extremidades do arco. O mesmo arco foi estudado por Galvão (2004) e Silva (2009), onde foram inseridas ligações semirrígidas nas extremidades. Nota-se certa equivalência entre a formulação de ligações semirrígidas lineares apresentada em Silva (2009), e a formulação para molas discretas rotacionais apresentada neste trabalho. Portanto, utilizando o mesmo valor de rigidez para as molas, foi possível estabelecer um comparativo em relação aos resultados obtidos por essa autora.

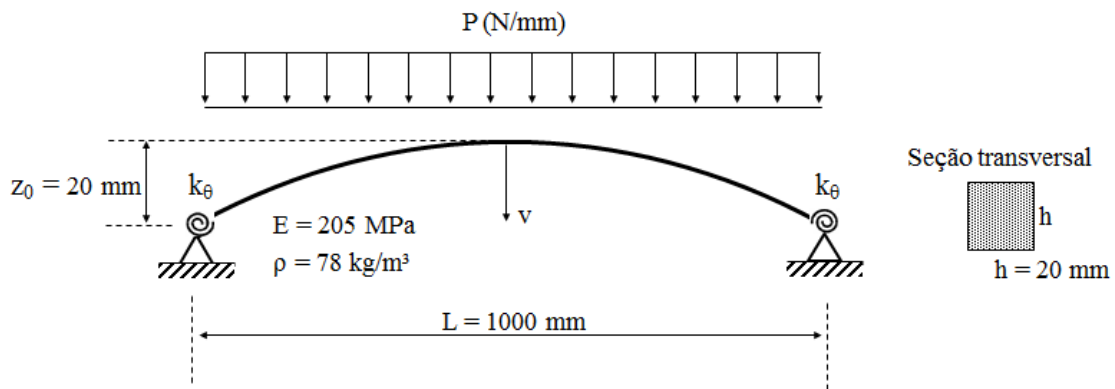


Figura 6.9 Arco senoidal abatido com molas discretas nas extremidades

Inicialmente, foram avaliadas a trajetória de equilíbrio e o efeito do pré-carregamento estático na vibração do arco. A trajetória de equilíbrio é apresentada na Figura 6.10, variando-se a rigidez das molas. O arco foi discretizado em 16 elementos finitos, e o incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda_0$, foi considerado igual a 0.1. É possível identificar na trajetória a presença de dois pontos limites de carga para cada uma das molas com menores valores de rigidez, indicados na Figura 6.10. Para as molas mais rígidas não existem esses pontos, e o arco apresenta trajetória de equilíbrio não linear sempre crescente.

A Figura 6.11 exibe a relação entre a carga P e a menor frequência de vibração do arco, considerando novamente as molas com diferentes valores de rigidez. Pode-se observar a existência de frequências de vibração com valor imaginário, o que, como dito no Capítulo 5, indica a existência de configurações de equilíbrio instáveis nesses trechos da trajetória. Observa-se a existência de trajetórias instáveis entre os pontos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 . Nota-se que esses trechos coincidem com aqueles onde foram observados os pontos limites de carga na trajetória de equilíbrio.

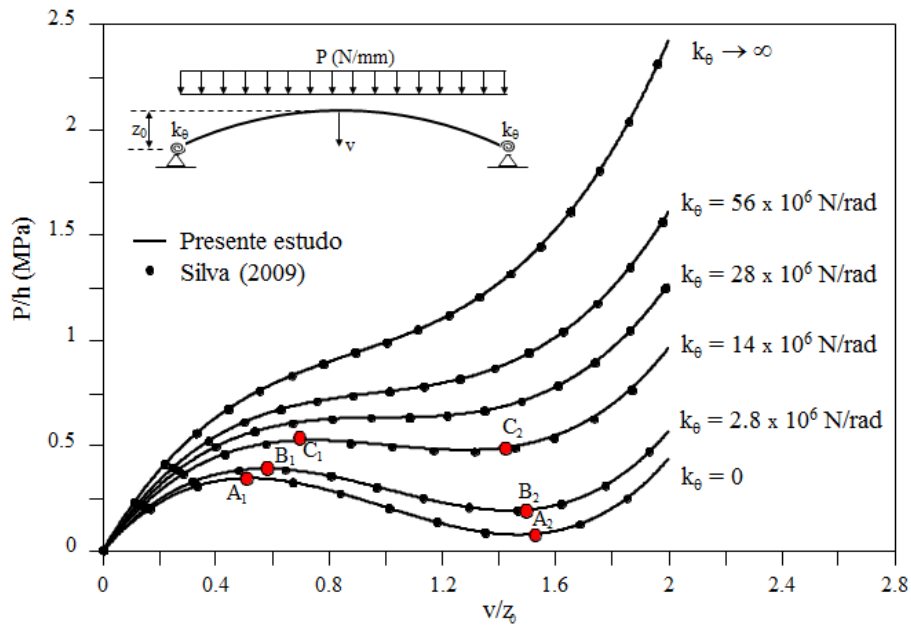


Figura 6.10 Trajetória de equilíbrio do arco com molas discretas de diferentes rigidezes

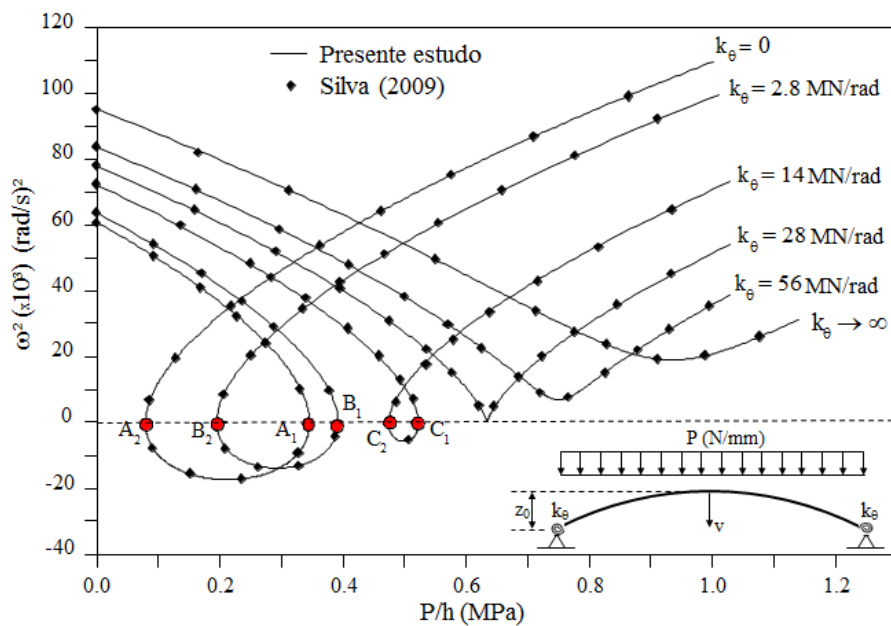


Figura 6.11 Vibração forçada do arco

A resposta no tempo foi verificada, considerando as molas na extremidade do arco com rigidez de 2.8 MN/rad. Foi adotada uma carga $P = 1000$ N localizada no centro do vão ($L/2$), cujo valor foi mantido constante durante o tempo de análise. Foi considerado ainda um leve amortecimento, com taxa $\xi = 0.01$ referente aos dois primeiros modos. O incremento de tempo utilizado foi de 10^{-3} . Na Figura 6.12 é apresentada a resposta transiente do arco. Houve

boa concordância quanto a amplitude dos deslocamentos obtidos, em comparação com os resultados da modelagem no SAP2000.

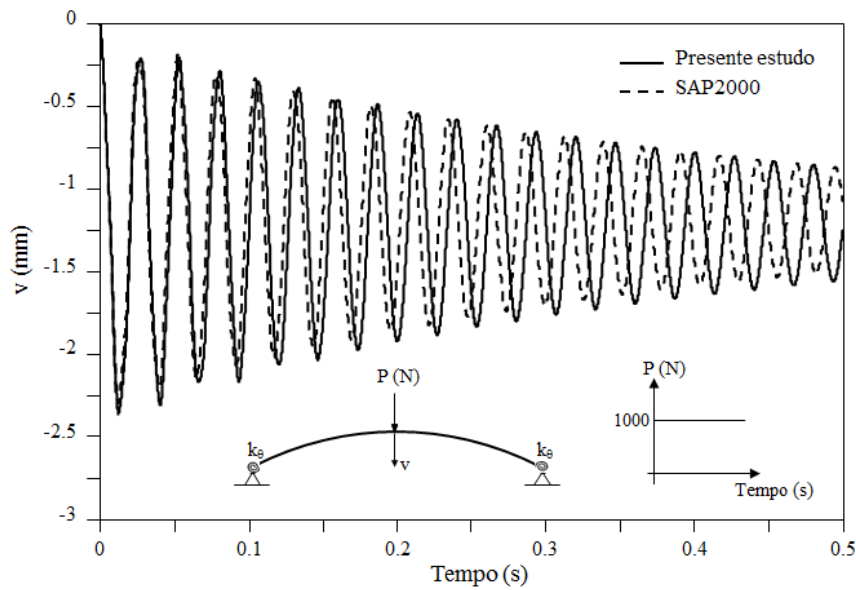


Figura 6.12 Resposta transiente do arco

As frequências de vibração livre também foram comparadas com os resultados do SAP2000, considerando as molas com rigidez de 2.8 MN/rad. Os resultados são apresentados na Tabela 6.4, onde nota-se boa concordância.

Tabela 6.4 Frequências naturais (Hz) do arco

Modos	Presente estudo (a)	SAP2000 (b)	a/b
1	40.210	40.207	1.000
2	62.093	94.508	0.657
3	136.467	136.090	1.003
4	240.526	298.650	0.805
5	374.391	371.130	1.009

6.5 Viga Biapoiada Sobre uma Fundação Não Linear

Nesta subseção, uma viga biapoiada em contato com o solo é usada principalmente para ilustrar o efeito do comportamento não linear do solo na resposta da estrutura. O sistema estrutura-fundação estudado é ilustrado na Figura 6.13. Nesse problema o solo é representado pelos modelos de Winkler linear e não linear, e também pelo modelo de

Pasternak. Tsiatas (2010) estudou a viga em questão, determinando seu deslocamento vertical no centro do vão ($L/2$). Foi adotado um módulo de elasticidade de 2.9 GPa e seção retangular de 10 cm por 20 cm. A viga foi dividida em 20 elementos finitos.

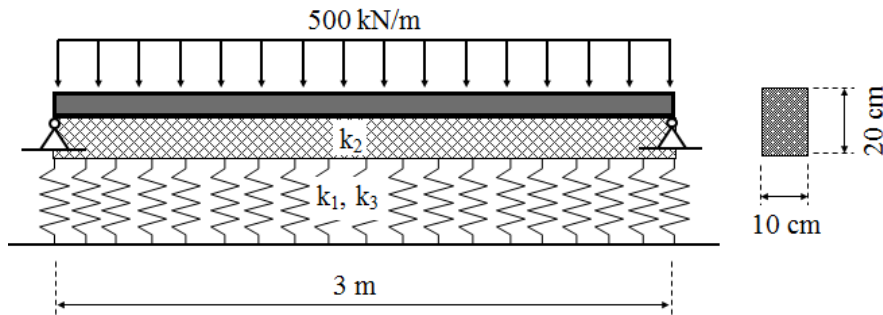


Figura 6.13 Viga sobre uma fundação não linear com carregamento distribuído

Estão expostos na Tabela 6.5 os deslocamentos obtidos para uma carga distribuída de 500 kN/m, considerando diferentes valores para k_1 , k_2 e k_3 . Os deslocamentos foram comparados com os apresentados por Tsiatas (2010). Pode-se notar a boa concordância entre os resultados, o que valida a formulação implementada neste trabalho para o modelo de Winkler não linear. Os resultados indicam que, para o caso onde não há contato com o solo ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$), os deslocamentos são maiores. Quando considerou-se o contato do tipo Winkler linear ($k_1 = 1000 \text{ kN/m}^2$; $k_2 = k_3 = 0$) os deslocamentos foram reduzidos, pois o contato com o solo agrega rigidez ao sistema.

Tabela 6.5 Deslocamentos (m) no centro do vão da viga ($L/2$)

	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$	$k_1 = 1000$ $k_2 = 0$ $k_3 = 0$	$k_1 = 1000$ $k_2 = 0$ $k_3 = -1000$	$k_1 = 1000$ $k_2 = 1000$ $k_3 = 0$	$k_1 = 1000$ $k_2 = 1000$ $k_3 = -1000$
Presente estudo	0.3228	0.2597	0.2564	0.2053	0.2037
Tsiatas (2010)	0.3127	0.2555	0.2526	0.2015	0.2001

Note que quando considera-se o contato do tipo Winkler não linear, o parâmetro k_3 aparece com sinal negativo ($k_1 = 1000 \text{ kN/m}^2$; $k_2 = 0$; $k_3 = -1000 \text{ kN/m}^4$). O sinal negativo indica que nesse exemplo foi considerada uma fundação não linear com ganho de rigidez. Por isso, ao incluir o parâmetro k_3 negativo, os deslocamentos diminuíram. Observa-se

também que os deslocamentos foram ainda menores quando combinaram-se os efeitos, incluindo os três parâmetros da fundação na análise.

Para analisar a influência do sinal negativo ou positivo do parâmetro k_3 , é apresentada na Figura 6.14 a trajetória de equilíbrio da viga obtida controlando o deslocamento vertical no centro do vão ($L/2$). Utilizou-se $k_1 = 1000 \text{ kN/m}^2$, e o valor de k_3 variando de -10000 N/m^4 a 10000 kN/m^4 . Vale lembrar que, na grande maioria dos casos, o meio de contato sofre perda de rigidez à medida que é solicitado, e por isso geralmente utiliza-se k_3 com sinal positivo.

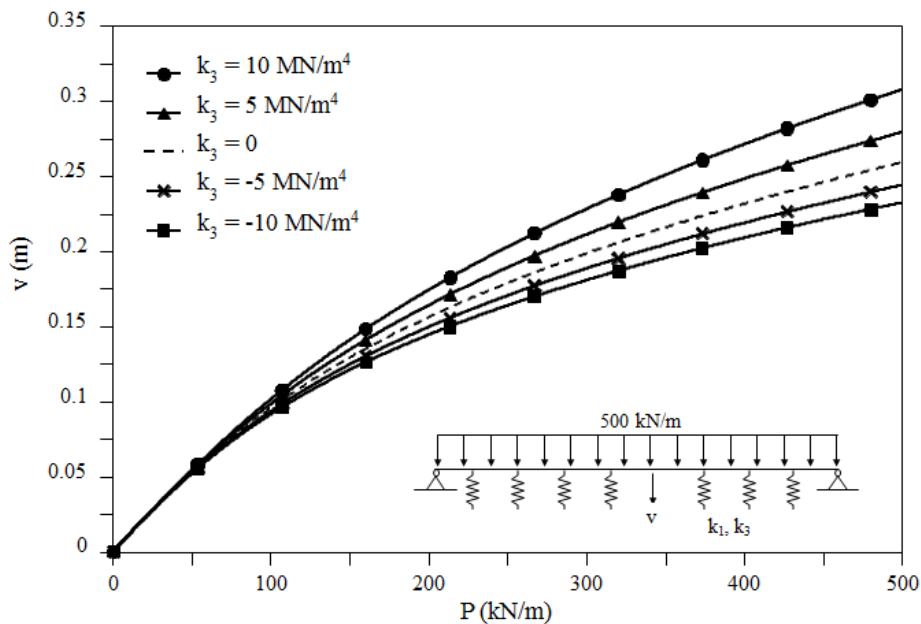


Figura 6.14 Trajetória de equilíbrio da viga com diferentes valores de k_3

Nota-se que nos casos onde a fundação está sujeita a perda de rigidez — onde o parâmetro não linear é positivo — há maiores deslocamentos. Quando o parâmetro k_3 tem valor negativo, indicando uma fundação com ganho de rigidez, os deslocamentos são menores.

6.6 Coluna em Contato com Fundações de Winkler e Pasternak

Por fim, foi estudada a coluna da Figura 6.15, em contato com uma fundação do tipo Pasternak. Esse mesmo exemplo foi abordado por Naidu e Rao (1995), Shen (2011) e Maciel (2012). Trata-se de uma coluna biapoiada com as seguintes propriedades: $L = 31.4$

m e $EI = 100 \text{ Nm}^2$. Para a fundação elástica foram utilizados os parâmetros de rigidez adimensionais $\beta_1 = k_1 L^4 / (EI)$ e $\beta_2 = k_2 L^2 / (\pi^2 EI)$.

Na discretização, uma malha com 20 elementos finitos foi usada e, nas duas primeiras análises, considerou-se a coluna em contato com uma fundação do tipo Pasternak (parâmetro $\beta_3 = 0$, nesse caso). Foi considerada também uma imperfeição na coluna, na forma senoidal de uma semi-onda. Foram utilizadas ainda cinco combinações dos parâmetros adimensionais da base: $\beta_1 = \beta_2 = 0$; $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0$; $\beta_1 = 100$ e $\beta_2 = 0$; $\beta_1 = 100$ e $\beta_2 = 0.5$; e $\beta_1 = 100$ e $\beta_2 = 2.5$. A carga de compressão também foi adimensionalizada através da expressão $\Omega = PL^2/EI$.

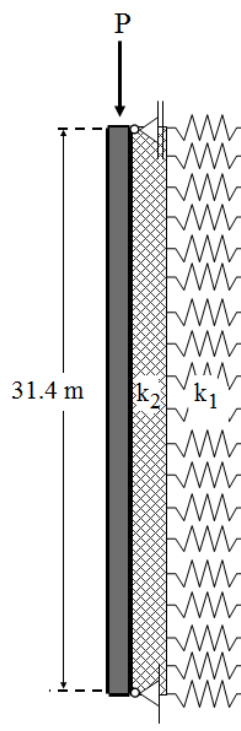


Figura 6.15 Coluna biapoiada em contato com fundação Pasternak

A trajetória de equilíbrio da coluna, com os deslocamentos em $y = L/2$, é mostrada na Figura 6.16, e observa-se boa concordância com a resposta analítica apresentada por Naidu e Rao (1995). É possível perceber que quanto mais alto o valor da rigidez da fundação elástica, maior o valor da carga crítica. No primeiro caso, onde $\beta_1 = \beta_2 = 0$, tem-se o problema clássico de estabilidade da coluna, onde não há contato entre a estrutura e o solo. Nos demais casos, onde há o contato, nota-se que a carga crítica é maior, pois a interação com o solo contribui para manter a estabilidade e aumentar a rigidez do sistema estrutura-fundação.

Também foi realizada a análise de vibração forçada da coluna, cujo resultado é ilustrado na Figura 6.17. Nota-se que a frequência de vibração da estrutura pré-carregada foi influenciada pela rigidez da fundação elástica, indicando o ganho de rigidez causado pela interação entre o solo e a estrutura. Como já observado, quanto mais rígida a fundação elástica, maiores são as frequências de vibração. Nota-se que as frequências tendem a zero para um carregamento coincidente ao da carga crítica, que foi evidenciada na trajetória de equilíbrio. Portanto, quanto mais próximo da carga crítica de flambagem, menores são as frequências de vibração, tendendo a zero.

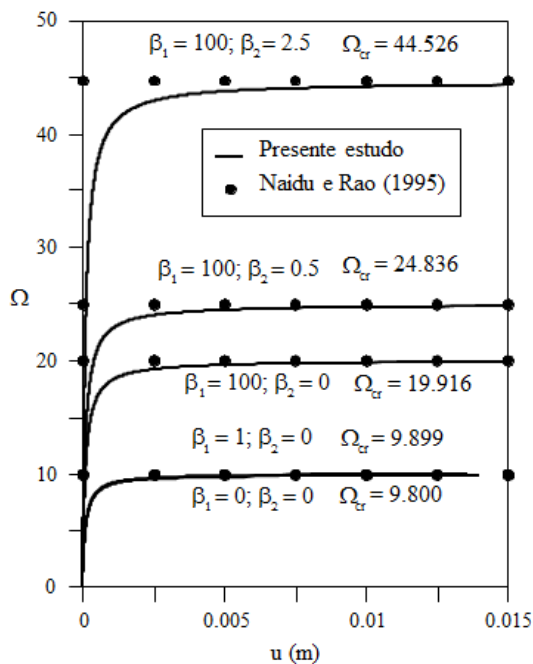


Figura 6.16 Trajetória de equilíbrio

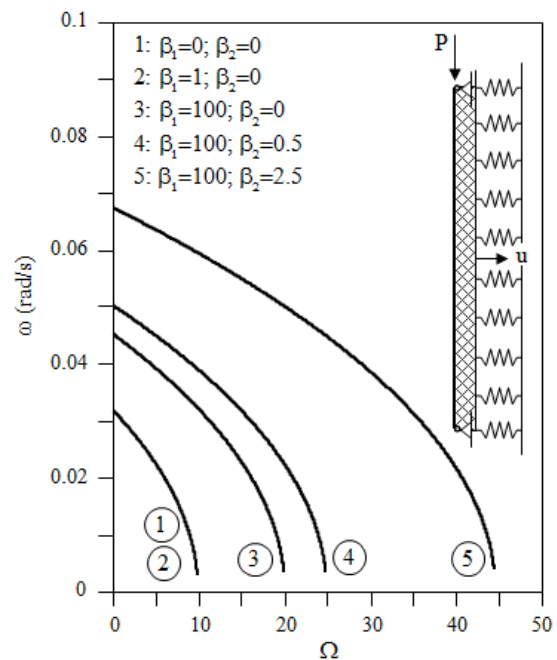


Figura 6.17 Vibração forçada

A vibração livre da coluna também foi analisada para o caso onde $\beta_1=100$ e $\beta_2=0$, e os resultados foram comparados com os obtidos pelo software SAP2000. Conforme a Tabela 6.6, verifica-se a boa concordância entre as respostas.

A mesma coluna foi estudada considerando a fundação do tipo Winkler não linear. Foi adotado o valor de $\beta_1 = 100$ e variou-se o valor de β_3 , sendo $\beta_3 = k_3L^6/(EI)$. A Figura 6.18 exibe a trajetória de equilíbrio para esse caso, onde é possível observar a influência do parâmetro não linear do solo na resposta. Para baixos valores de k_3 , sua influência é pouco significativa. No entanto, quanto maior o valor de k_3 , mais não linear será a trajetória de equilíbrio da coluna.

Tabela 6.6 Frequências de vibração da coluna

Frequência ($\times 10^{-3}$ Hz)	SAP2000	Presente estudo
f_1	7.1743	7.1744
f_2	20.789	20.789
f_3	45.627	45.630
f_4	80.759	80.779

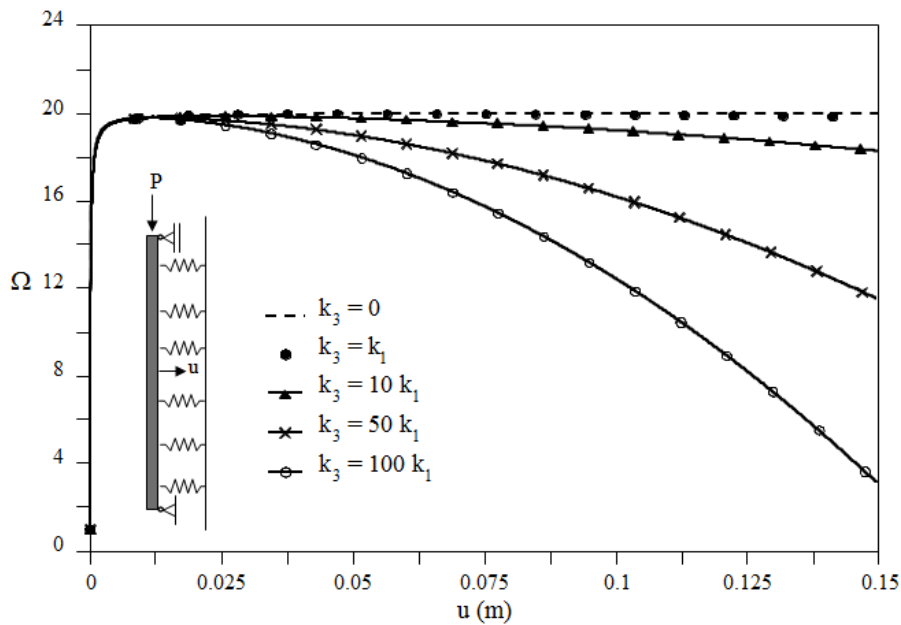
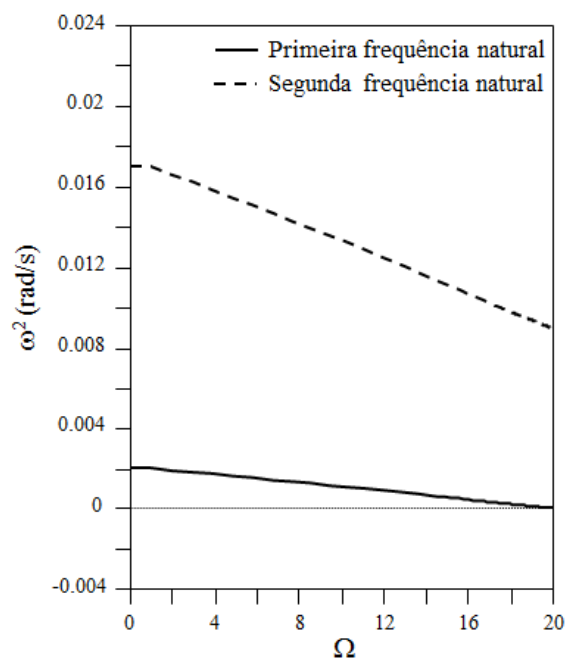
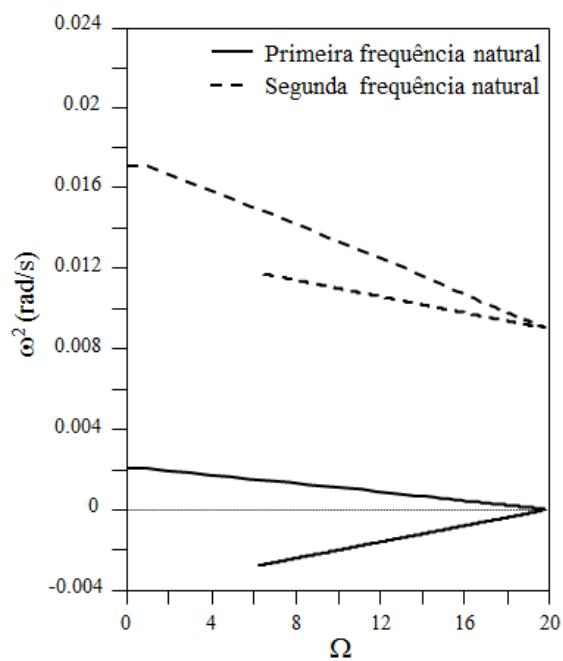


Figura 6.18 Trajetória de equilíbrio da coluna em contato com fundação do tipo Winkler não linear

Foram analisadas as duas primeiras frequências de vibração da coluna pré-carregada. Considerou-se o contato segundo o modelo de Winkler linear, com $\beta_1 = 100$ e $\beta_3 = 0$. Também foram analisadas as frequências para o modelo de Winkler não linear, com valor de $k_3 = 100 k_1$. Os resultados estão apresentados na Figura 6.19, onde pode-se observar que a primeira frequência tende a zero quando a carga aplicada se aproxima da carga crítica. Ao considerar o modelo de Winkler não linear (Figura 6.19b), nota-se a existência de frequência com valor imaginário, indicando um comportamento instável após atingir a carga crítica da coluna.



(a) Winkler linear ($k_3 = 0$)



(b) Winkler não linear ($k_3 = 100 k_1$)

Figura 6.19 Frequências de vibração da coluna pré-carregada em contato com fundação do tipo Winkler linear e não linear

Capítulo 7

Considerações Finais

7.1 Conclusão

Este trabalho realizou a análise estática e dinâmica de sistemas estruturais reticulados, considerando os efeitos da interação entre o solo e a estrutura. O sistema computacional CS-ASA (SILVA, 2009) foi utilizado como base para as implementações e análises. Incluiu-se no programa a possibilidade de simular o comportamento não linear do solo através do modelo de Winkler, acrescentando ao modelo um segundo parâmetro. Além disso, foram feitas todas as adaptações necessárias ao programa para possibilitar a análise dinâmica de sistemas estruturais envolvendo o problema de contato bilateral, simulando o comportamento do solo através do modelo discreto, e dos modelos contínuos de Winkler, Pasternak e Filonenko-Borodich. Destaca-se também que, em todas as análises, foi considerado o efeito da não linearidade geométrica da estrutura.

A metodologia de solução do problema estático não linear fundamentou-se no emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF) e do método de Newton-Raphson. O problema dinâmico foi resolvido no domínio do tempo, onde a análise transiente não linear foi feita através do método de integração de Newmark, em combinação com a estratégia incremental e iterativa de Newton-Raphson. O problema de autovalor para determinação das frequências naturais foi resolvido pelo método de Jacobi. Houve boa concordância entre as respostas obtidas, em comparação com os resultados disponíveis na literatura, o que permite afirmar que as formulações foram implementadas corretamente, e que a metodologia utilizada é eficiente. Através das análises não lineares apresentadas no Capítulo 6, pode-se concluir:

- a) O modelo de molas discretas foi capaz representar o comportamento do solo de modo satisfatório. Se o sistema for bem discretizado, o modelo discreto conduz a resultados muito próximos do modelo contínuo, que é mais preciso;

- b) Quanto ao modelo não linear de Winkler, comprovou-se a possibilidade de considerar o meio de contato com perda ou ganho de rigidez à medida que é carregado. Ao considerar um meio com ganho de rigidez, os deslocamentos provocados na estrutura tornam-se menores. Consequentemente, ao considerar uma fundação com perda de rigidez, os deslocamentos tornam-se maiores. Portanto, adotando valores adequados para os parâmetros do solo, é possível simular de forma satisfatória seu comportamento através desse modelo;
- c) Ao se utilizar o modelo de Pasternak, foi verificado que o segundo parâmetro torna o sistema mais rígido. Quanto maior o seu valor, menores são os deslocamentos provocados na estrutura;
- d) Nas análises de vibração livre foi possível concluir que a interação entre o solo e a estrutura torna o sistema mais rígido, aumentando as frequências naturais. Ou seja, quanto mais rígida é a fundação, maiores são as frequências naturais do sistema, independente do modelo adotado para simular o comportamento do solo;
- e) Nas análises de vibração da estrutura pré-carregada nota-se que as frequências tendem a zero quando aproxima-se da carga crítica. Verificou-se também a existência de trechos de equilíbrio instável em alguns casos, onde as frequências assumem valor imaginário;
- f) Na análise transiente verificou-se que os deslocamentos no tempo foram menores quanto maior a rigidez da fundação, tanto para o modelo de Winkler quanto para o de Pasternak;

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Nesta seção são destacadas algumas sugestões para pesquisas futuras:

- a) Realizar a análise transiente para modelos não lineares de fundação;
- b) Simular o comportamento histerético para permitir a análise da interação entre o solo e a estrutura sob cargas cíclicas;
- c) Realizar análise estática considerando o contato unilateral;
- d) Realizar análise dinâmica considerando o contato unilateral;
- e) Realizar análise dinâmica do problema de contato bilateral e unilateral incluindo os efeitos da inelasticidade do material;
- f) Estudar a ressonância em sistemas estruturais em contato com o solo;
- g) Estudar a resposta dinâmica de estruturas em contato com o solo sob efeitos sísmicos.

Referências Bibliográficas

AL-AZZAWI, A.A.; MAHDY, A.H.; FARHAN, O. S., 2010. *Finite element analysis of deep beams on nonlinear elastic foundations*. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics, v.4, pp. 13-42.

ALMEIDA, A.C, 2012. *Análise dinâmica de uma viga escalonada de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko com apoios elásticos variáveis*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Instituto de Engenharia Mecânica, UNIFEI, Itajubá, MG, Brasil.

ALVES, R.V., 1993. *Formulação para análise não-linear geométrica em referencial Lagrangiano atualizado*. 3º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

ARBOLEDA-MONSALVE, L.G.; ZAPATA-MEDINA, D.G.; ARISTIZABAL-OCHOA, J.D., 2008. *Timoshenko beam-column with generalized end conditions on elastic foundation: Dynamic-stiffness matrix and load vector*. Journal of Sound and Vibration, v.310, pp. 1057-1079.

AVRAMIDIS, I.E.; MORFIDIS, K., 2006. *Bending of beams on three-parameter elastic foundation*. International Journal of Solids and Structures, v.43, pp. 357-375.

BAZANT, Z.; CEDOLIN, L. *Stability of Structures*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1991.

BATHE, K.J. *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice-Hall, 1996.

BATOZ, J.L.; DHATT, G., 1979. *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*. International Journal for Numerical Methods on Engineering, v.14, pp. 1262-1267.

BHATTIPROLU, U.; BAJAJ, A.K.; DAVIES, P., 2013. *An efficient solution methodology to study the response of a beam on viscoelastic and nonlinear unilateral foundation: Static response*. International Journal of Solids and Structures, v.50, pp. 2328-2339.

- CELEP, Z.; GÜLER, K.; DEMIR, F., 2011. *Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load*. Structural Engineering and Mechanics, v.37, pp. 61-77.
- CHAN, S.L.; CHUI, P.P.T., 2000. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Elsevier, Oxford.
- CHANDRA, S.; MADHAV, M.R.; IYENGAR, N.G.R., 1987. *A new model for nonlinear subgrades*. Mathematical Modelling, v.8, pp. 513-518.
- CHAPMAN, S.J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn.
- CRISFIELD, M.A., 1981. *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through*. Computers and Structures, v.13, pp. 52-62.
- DE ROSA, M.A., 1995. *Free vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation*. Computer and Structures, v.57, pp. 151-156.
- DUTTA, S.C.; ROY, R., 2002. *A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system*. Computer and Structures, v.80, pp. 1579-1584.
- GALVÃO, A.S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- GALVÃO, A.S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semirrígidas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- GHANNADIASL, A.; MOFID, M., 2015. *An analytical solution for free vibration of elastically restrained Timoshenko beam on an arbitrary variable Winkler foundation and under axial load*. Latin American Journal of Solids and Structures, v.12, *in press*.
- HETÉNYI, M., 1946. *Beams on Elastic Foundation*. University of Michigan Press, Mich.

HOLANDA, A.S., 2000. *Análise do equilíbrio e estabilidade de placas com restrições de contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

KAMESWARA RAO, N.S.V. *Foundation design – theory and practice*. John Wiley & Sons. Singapura, 2011.

LAI, Y.C.; TING, B.Y.; LEE, W.; BECKER, B.R., 1992. *Dynamic response of beams on elastic foundation*. J. Struct. Eng, v.118, pp. 853-858.

LEMES, I.J.M., 2015. *Análise avançada via MRPR de estruturas mistas de aço e concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

LIEW, J.Y.R., 1992. *Advanced Analysis for Frame Design*. Ph.D. Thesis, Purdue University, West Lafayette, IN.

MACHADO, F.C.S., 2005. *Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

MACHADO, F.C.S., 2013. *Análise computacional via MDF de cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

MACIEL, F.P., 2012. *Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais Impostas por Bases Elásticas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

MARTINS, J.F., 1998. *Influência da inércia de rotação e da força cortante nas frequências naturais e na resposta dinâmica de estruturas de barras*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.

MAXIMIANO, D.P., 2012. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

MUÑOZ, L.F.P., 2010. *Análise dinâmica de vigas apoiadas em fundação elástica sob a ação de cargas móveis*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MUÑOZ, L.F.P., 2015. *Análise dinâmica não linear de pórticos sob excitação de base considerando interação solo-estrutura*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MUÑOZ, L.F.P.; GONÇALVES, P.B., 2010. *Análise dinâmica de vigas apoiadas em fundação sob a ação de cargas móveis*. *Mecânica Computacional*, v.29, PP. 1505-1523.

NAIDU, N.R.; RAO, G.V., 1995. *Stability behavior of uniform columns on a class of two parameter elastic foundation*. *Computers and Structures*, v.57, pp. 551-553.

NEWMARK, N.M., 1959. *A method of computation for structural dynamics*. *Journal of Engineering Mechanics Division*, v.85, pp. 67-94.

PACOSTE, C.; ERIKSSON, A., 1997. *Beam elements in instability problems*. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.144, pp. 163-197.

PASTERNAK, P. L., 1954. *On a New Method Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants*. *Gousuedarstvennoe Izadatesvo Literaturi po Stroitelstvuri Arkhitekture*.

PEREIRA, W.L.A., 2003. *Formulações numéricas para análise de vigas em contato com bases elásticas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

PRADO, I.M., 2012. *CS-ASA Preprocessor: sistema gráfico interativo de pré-processamento para análise avançada de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

RAMM, E., 1981. *Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points*. *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89.

- RAMM, E., 1982. *The Riks/Wempner Approach - An extension of displacement control method in non-linear analysis*. Non-linear Computational Mechanics, ed. E. Hinton et al., Pineridge, Swansea, pp. 63-86.
- RIKS, E., 1972. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, v.39, pp. 1060-1066.
- RUGE, P.; BIRK, C., 2007. *A comparison of infinite Timoshenko and Euler-Bernoulli beam models on Winkler foundation in the frequency- and time-domain*. *Journal of Sound and Vibration*, v.304, pp. 932-947.
- SAPOUNTZAKIS, E.J.; KAMPITSIS, A.E., 2010. *Nonlinear dynamic analysis of Timoshenko beam-columns partially supported on tensionless Winkler foundation*. *Computer and Structures*, v.88, pp. 1206-1219.
- SHEN, H., 1995. *Postbuckling analysis of orthotropic rectangular plates on nonlinear elastic foundations*. *Engineering Structures*, v.17, pp. 407-412.
- SHEN, H., 2000. *Thermomechanical postbuckling of imperfect shear deformable laminated plates on elastic foundations*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.189, pp. 761-784.
- SHEN, H., 2011. *A novel technique for nonlinear analysis of beams on two-parameter elastic foundations*. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v.11 n6, pp. 999-1014.
- SILVA, A.R.D., 1998. *Análise de placas com restrições de contato*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SILVA, A.R.D., 2009. *Sistema computacional para a análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- SILVEIRA, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SILVEIRA, R.A.M.; GONÇALVES, P.B., 1995. *Análise não-linear geométrica de arcos esbeltos com restrições unilaterais*. Anais do COBEM-CIDIM/95. Belo Horizonte, MG, Brasil.

SILVEIRA, R.A.M.; PEREIRA, W.L.A.; GONÇALVES, P.B., 2008a. *Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact constraints by a Ritz type approach*. Int. Journal of Solids and Structures, v.45, pp. 2629-2650.

SILVEIRA, R.A.M.; PEREIRA, W.L.A.; GONÇALVES, P.B., 2008b. *Constrained and unconstrained optimization formulation for structural elements in unilateral contact with and elastic foundation*. Mathematical Problems in Engineering, v.2008. pp. 1-15.

SILVEIRA, R.A.M.; NOGUEIRA, C.L.; GONÇALVES, P.B., 2013. *A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender arches and rings under contact constraints*. Int. Journal of Solids and Structures, v.50, pp. 147-159.

SILVEIRA, R.A.M.; MACIEL, F.V.; SILVA, A.R.D.; MACHADO, F.C.S.; NOGUEIRA, C.L., 2015. *Nonlinear Equilibrium and Stability Analysis of Axially Loaded Piles Under Bilateral Contact Constraints*. Latin American Journal of Solids and Structures, v.12, pp. 250-270.

TEDESCO, J.W.; MCDUGAL, W.G.; ROSS, C.A. *Structural dynamics: Theory and applications*. Addison-Wesley, Menlo Park, CA. 1999.

THAMBIRATNAM, D.; ZHUGE, Y., 1996a. *Free vibration analysis of beams on elastic foundation*. Computers and Structures, v.60, pp. 971-980.

THAMBIRATNAM, D.; ZHUGE, Y., 1996b. *Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads*. Journal of Sound and Vibration, v.198(2), pp. 149-169.

TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D.H. *Vibration problems in engineering*. 4. ed. Wiley, New York. 1974.

TORBACKI, W., 2008. *Numerical analysis of beams on unilateral elastic foundation*. Achieves of Materials Science and Engineering, v.29, pp. 109-112.

TSIATAS, G.C. 2010 *Nonlinear analysis of non-uniform beams on nonlinear elastic foundation*. Acta Mechanica, v. 209, pp. 141–152.

VAZ, J.C., 2008. *Análise do comportamento dinâmico de uma viga de Euler-Bernoulli escalonada com apoios elasticamente variáveis*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Instituto de Engenharia Mecânica, UNIFEI, Itajubá, MG, Brasil.

WANG, Y.H.; THAM, L.G.; CHEUNG, Y.K., 2005. *Beams and plates on elastic foundations: a review*. Progress in Structural Engineering and Materials, v.7, pp. 174-182.

WEMPNER, G.A., 1971. *Discrete approximations related to nonlinear theories of solids*. International Journal of Solids and Structures, v.7, pp. 1581-1599.

WINKLER, E., 1867. *Die Lehre Von der Elasticitaet und Festigkeit*. Prag, Dominucus.

YANG, Y.B.; KUO, S.B. *Theory & analysis of nonlinear framed structures*. Prentice Hall. 1994.