

Universidade Federal de Ouro Preto - Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# ANÁLISE AVANÇADA VIA MRPR DE ESTRUTURAS MISTAS DE AÇO E CONCRETO

**Ígor José Mendes Lemes**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Campus Morro do Cruzeiro  
Ouro Preto, MG - Brasil  
Março, 2015

L552a

Lemes, Igor José Mendes.

Análise avançada via MRPR de estruturas mistas de aço e concreto  
[manuscrito] / Igor José Mendes Lemes. - 2015.

101f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Coorientadora: Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

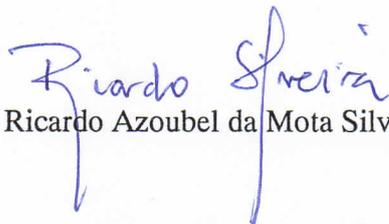
1. Aço - Estruturas. 2. Concreto. 3. Resistência de materiais. I. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. II. Silva, Andréa Regina Dias da. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 627.07:624.016

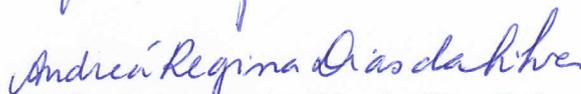
# ANÁLISE AVANÇADA VIA MRPR DE ESTRUTURAS MISTAS DE AÇO E CONCRETO

AUTOR: ÍGOR JOSÉ MENDES LEMES

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 20 de março de 2015, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



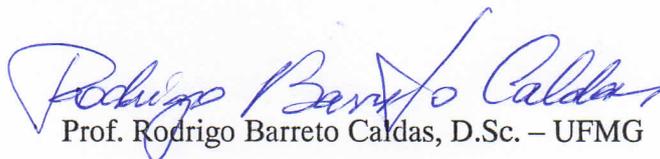
Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D.Sc. – UFOP (Presidente)



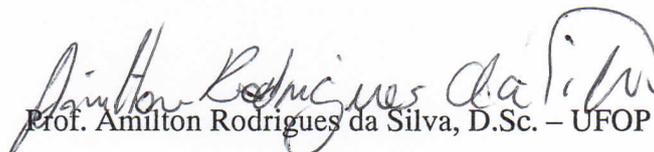
Profa. Andréa Regina Dias da Silva, D.Sc. – UFOP



Prof. Paulo Anderson Santana Rocha, D.Sc. – UFOP



Prof. Rodrigo Barreto Caldas, D.Sc. – UFMG



Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D.Sc. – UFOP

Aos meus pais, meu irmão e  
meus orientadores.

# Agradecimentos

A Deus, por guiar meus passos e nunca me deixar caminhar sozinho.

Aos meus pais Dimas e Maria, pela enorme dedicação, incentivo e ensinamentos passados ao longo de toda minha vida.

Ao meu irmão Guto, pelos auxílios, incentivo e momentos de descontração.

Aos meus orientadores, professor Ricardo e professora Andréa, pela excelente orientação, amizade e disposição durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores Márcio Eduardo e Amilton, pelas orientações lúcidas durante a graduação e o incentivo à utilização de métodos numéricos na resolução de problemas de engenharia.

Ao professor Paulo Rocha, que desde a graduação me auxilia no desenvolvimento de diversos estudos, inclusive neste.

Ao professor Hisashi Inoue, pelo auxílio no uso de softwares comerciais.

Ao professor Ronald Ziemian pelos breves e preciosos conselhos.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação profissional e também pessoal, desde o ensino básico até os dias atuais. Em especial àqueles com quem convivi durante o mestrado: Francisco Célio, Arlene, Geraldo, Marcílio e João Batista.

Ao Gilney, pelas ajudas precisas no CS-ASA e pela disposição em ajudar no desenvolvimento desta dissertação.

Aos colegas de mestrado, em especial Renato, Vinícius, Rafael, Ramon e Murillo pelos estudos, amizade, ajuda e momentos de descontração.

À Róvia e ao André, por estarem sempre dispostos a resolver os problemas do dia a dia da pós graduação.

À CAPES e à UFOP, pelo auxílio financeiro.

*“A mente que se abre a novas ideias  
jamais voltará ao seu tamanho original.”*

— ALBERT EINSTEIN

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil

## ANÁLISE AVANÇADA VIA MRPR DE ESTRUTURAS MISTAS DE AÇO E CONCRETO

Ígor José Mendes Lemes

Março, 2015

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

O presente trabalho tem como finalidade a implementação e a avaliação de estratégias numéricas para realizar análises estáticas avançadas de estruturas mistas de aço e concreto. Utilizam-se formulações não lineares baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF) acopladas ao Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). Consideram-se simultaneamente os efeitos de segunda ordem e da plasticidade, em termos nodais, em sistemas estruturais como vigas, pilares e pórticos. A perda gradual da rigidez à flexão, via MRPR, é determinada através da localização da combinação de esforços solicitantes dentro da curva de resistência, que relaciona esforço normal e momento fletor. Fez-se necessária então a definição dos limites de início de plastificação e da capacidade resistente da seção. Para tal, métodos simplificados, utilizando normas de projeto, e uma formulação generalizada, baseada na compatibilidade de deformações, foram introduzidos ao sistema computacional CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*). Utiliza-se o método iterativo de Newton-Raphson acoplado, ou não, a estratégias de continuação para a solução das equações não lineares global e local (a nível da seção transversal). Por fim, apresentam-se análises numéricas avançadas de sistemas estruturais de aço, de concreto e mistos de aço e concreto através da formulação implementada. Os resultados obtidos são comparados com respostas numéricas e experimentais presentes na literatura.

**Palavras-Chave:** Estruturas Mistas, Análise Avançada, Curva de Resistência, MRPR

Abstract of Dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering

## ADVANCED ANALYSIS VIA RPHM OF STEEL-CONCRETE COMPOSITE STRUCTURES

Ígor José Mendes Lemes

March, 2015

Advisors: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

*This dissertation presents the computational implementation and evaluation of numerical strategies to perform advanced static analysis of composite steel-concrete structures. Nonlinear finite element formulations coupled with Refined Plastic Hinge Method (RPHM) are used. Second order effects and nodal concentrated plasticity are simultaneously considered in structural systems such as beams, columns and frames. In RPHM approach, the gradual decrease of nodal stiffness is determined by the location of internal forces combination within the full yield curve relating axial force and bending moment. Therefore, it is necessary to define the full and initial yield section interaction curves, and thus simplified method using design codes and a generalized formulation based on strain compatibility method were introduced and implemented on the computer system CS-ASA (Computational System for Advanced Structural Analysis). The Newton-Raphson method with path-following strategies is adopted to solve nonlinear global and local (in cross section level) equations. Finally, advanced nonlinear analysis of steel, concrete and composite steel-concrete structural systems are performed through the presented numerical formulation and the results obtained here are compared with experimental and numerical data given in the literature.*

**Keywords:** Composite Structures, Advanced Analysis, Yield Curves, RPHM

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b> . . . . .	xii
<b>Lista de Tabelas</b> . . . . .	xv
<b>Lista de Siglas</b> . . . . .	xvi
<b>Lista de Símbolos</b> . . . . .	xviii
<b>1 Considerações Iniciais</b> . . . . .	1
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	5
1.3 Sistema Computacional - CS-ASA . . . . .	6
1.4 Estado da Arte . . . . .	7
1.4.1 Análise experimental . . . . .	8
1.4.2 Análise numérica . . . . .	10
1.4.3 Curvas de resistência . . . . .	11
1.5 Organização do Trabalho . . . . .	13
<b>2 Fundamentos para Análise Avançada de Estruturas Mistas</b> . . . . .	15
2.1 Introdução . . . . .	15
2.2 Comportamento dos Materiais . . . . .	16
2.3 Interação entre os Materiais . . . . .	20
2.4 Efeitos Geometricamente Não Lineares . . . . .	22
2.5 Análise da Não Linearidade dos Materiais . . . . .	24
2.5.1 Métodos numéricos para análise não linear física . . . . .	25
2.5.2 Método da Rótula Plástica Refinado - MRPR . . . . .	26
2.6 Relações Momento-Curvatura . . . . .	27

2.7	Curvas de Resistência . . . . .	28
2.7.1	Norma Européia EUROCODE 4 . . . . .	29
2.7.2	Norma Americana AISC/LRFD . . . . .	32
2.7.3	Norma Britânica BS 5400-5 . . . . .	34
2.7.4	Compatibilidade de Deformações . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Metodologia Numérica para Análise Avançada de Estruturas Mistas</b>	<b>38</b>
3.1	Introdução . . . . .	38
3.2	Solução do Problema Estático Não Linear . . . . .	39
3.2.1	Solução incremental predita . . . . .	40
3.2.2	Ciclo de iterações . . . . .	41
3.3	Formulação de Elementos Finitos . . . . .	43
3.4	Compatibilidade de Deformações . . . . .	49
3.4.1	Relação momento-curvatura . . . . .	51
3.4.2	Curvas de resistência e de início de plastificação . . . . .	53
3.5	Aproximações e Métodos Normativos . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Análises e Resultados</b> . . . . .	<b>58</b>
4.1	Introdução . . . . .	58
4.2	Relação Momento-Curvatura . . . . .	59
4.3	Curvas de Resistência . . . . .	60
4.3.1	Seção em concreto armado . . . . .	60
4.3.2	Seção mista de aço e concreto . . . . .	62
4.3.3	Seção de aço . . . . .	64
4.4	Vigas Mistas Isoladas . . . . .	65
4.5	Pilares Mistos Isolados . . . . .	68
4.5.1	Seções retangulares preenchidas com concreto - TRP . . . . .	69
4.5.2	Seções circulares preenchidas com concreto - TCP . . . . .	71
4.6	Pórticos Mistos de Aço e Concreto . . . . .	74
4.6.1	Pórtico simples metálico/misto . . . . .	75
4.6.2	Pórtico simples com pilares metálicos e viga mista . . . . .	81
4.6.3	Pórtico em concreto armado . . . . .	83

<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	86
5.1	Introdução	86
5.2	Conclusões	87
5.3	Sugestões para Trabalhos Futuros	88
	<b>Referências</b>	89
	<b>Apêndice A – Modificações na Entrada de Dados</b>	98
A.1	Considerações Iniciais	98
A.2	Modificações Realizadas	98
A.2.1	Dados gerais	98
A.2.2	Dados do método da compatibilidade de deformações	99
A.2.3	Dados para análise via métodos normativos	99

# Lista de Figuras

1.1	Ironbridge, rio Svern em Coalbrookdale Inglaterra (ELLER, 2011) . . . . .	2
1.2	Seções usuais para pilares mistos . . . . .	3
1.3	<i>Empire State Building</i> (WEBPAGE, commons.wikimedia.org) . . . . .	4
1.4	<i>Chrysler Building</i> (WEBPAGE, ny-pictures.com) . . . . .	4
1.5	Garagem América - São Paulo (WEBPAGE, arcoweb.com.br) . . . . .	5
1.6	Edifício Avenida Central - Rio de Janeiro (WEBPAGE, flickr.com) . . . . .	5
1.7	Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados . . . . .	7
2.1	Relações constitutivas - aço . . . . .	17
2.2	Relação constitutiva - concreto . . . . .	19
2.3	Domínios de deformação do concreto no ELU (NBR6118, 2014) . . . . .	20
2.4	Conector tipo placas de aço perfuradas (SOUZA, 2014) . . . . .	21
2.5	Conector tipo pino com cabeça/ <i>studbolt</i> (SOUZA, 2014) . . . . .	21
2.6	Conector tipo perfil U laminado (SOUZA, 2014) . . . . .	21
2.7	Tipos de interação entre os materiais . . . . .	22
2.8	Efeitos de segunda ordem $P-\delta$ e $P-\Delta$ . . . . .	23
2.9	Distribuição de deformações e tensões na seção transversal (SILVA, 2009) . . . . .	24
2.10	Discretização em fatias . . . . .	26
2.11	Discretização em fibras . . . . .	26
2.12	Elemento finito de viga-coluna com molas fictícias referenciado ao sistema corrotacional (SILVA, 2009) . . . . .	27
2.13	Diagrama momento-curvatura (adaptado de Silva (2009)) . . . . .	28
2.14	Curva de resistência: pilares curtos EUROCODE-4 (2004) . . . . .	29

2.15	Combinação de esforços para obter os pontos da curva de resistência, adaptado de EUROCODE-4 (2004) e Oehlers e Bradford (1999) . . . . .	30
2.16	Curva de resistência: pilares curtos AISC/LRFD (2010) . . . . .	33
2.17	Curva de resistência com $K_3 = 0$ . . . . .	34
2.18	Curva de resistência com $K_3 \neq 0$ . . . . .	34
2.19	Fluxograma: processo <i>quasi-Newton</i> acoplado à falsa posição (LIU <i>et al.</i> , 2012a) . . . . .	37
3.1	Elemento finito adotado (SILVA, 2009) . . . . .	45
3.2	Violação da curva de resistência . . . . .	50
3.3	Campo de deformações tridimensional (sem flexão em torno do eixo $y$ ) . . . . .	50
3.4	Campo de deformações bidimensional . . . . .	52
3.5	Relação constitutiva do concreto com deformação de início de plastificação alterada (FONG; CHAN, 2012) . . . . .	55
3.6	Distribuição de deformações e tensões na seção . . . . .	56
4.1	Relações momento-curvatura de uma seção parcialmente revestida . . . . .	59
4.2	Seção em concreto armado analisada - dimensões em mm . . . . .	60
4.3	Capacidade resistente da seção de concreto armado . . . . .	61
4.4	Seção mista analisada - dimensões em mm . . . . .	62
4.5	Capacidade resistente da seção mista . . . . .	63
4.6	Comparação: MCD x Curvas de resistência de normas . . . . .	64
4.7	Perfil W200x46,1 - dimensões em mm . . . . .	64
4.8	Capacidade resistente da seção metálica W200x46 . . . . .	65
4.9	Viga mista tubular retangular com flexão pura . . . . .	66
4.10	Trajatórias de equilíbrio - vigas mistas retangulares . . . . .	68
4.11	Modelo idealizado para análise de pilares isolados com excentricidade . . . . .	70
4.12	Trajatórias de equilíbrio - pilares C1, C2 e C3 . . . . .	72
4.13	Trajatória de equilíbrio - pilar M5 . . . . .	74
4.14	Pórtico simples: geometria, discretização e seções transversais . . . . .	76
4.15	Trajatórias de equilíbrio do pórtico simples . . . . .	77
4.16	Índice de plastificação dos membros da estrutura . . . . .	78
4.17	Degradação da rigidez $S_h$ da mola fictícia . . . . .	79
4.18	Forças internas no nó 9 do pórtico analisado . . . . .	80

4.19	Pórtico com viga mista: geometria, carregamento e discretização . . . . .	81
4.20	Trajectoria de equilíbrio do pórtico simples . . . . .	82
4.21	Diagramas de esforços e deformada para $\lambda = 1,085$ . . . . .	82
4.22	Pórtico simples de concreto armado . . . . .	83
4.23	Trajectoria de equilíbrio . . . . .	84
4.24	Índice de plastificação dos membros da estrutura . . . . .	84
4.25	Forças internas no topo dos pilares e curvas de resistência e de início de plastificação . . . . .	85
4.26	Diagrama de esforços . . . . .	85
A.1	Arquivo de dados 1: MCD . . . . .	100
A.2	Arquivo de dados 1: normas . . . . .	101

# Lista de Tabelas

3.1	Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear . . . . .	44
3.2	Coefficientes da Equação 3.38 . . . . .	50
3.3	Estratégia numérica para obtenção da relação momento-curvatura . . . . .	54
4.1	Propriedades dos materiais . . . . .	60
4.2	Propriedades dos materiais . . . . .	62
4.3	Momentos resistentes para carga axial $P = -170$ kN para cada discretização .	63
4.4	Propriedades do aço . . . . .	64
4.5	Propriedades geométricas e dos materiais dos espécimes . . . . .	66
4.6	Comparação entre os momentos últimos obtidos em kNm . . . . .	67
4.7	Propriedades geométricas e dos materiais . . . . .	70
4.8	Cargas últimas obtidas (em kN) e comparações com a literatura . . . . .	71
4.9	Cargas últimas obtidas com o EUROCODE-4 (2004) . . . . .	72
4.10	Cargas últimas obtidas com a AISC/LRFD (2010) . . . . .	72
4.11	Geometria e dados dos materiais . . . . .	73
4.12	Cargas últimas obtidas usando o MCD e comparações com a literatura . . . .	74
A.1	Variáveis adicionadas ou renomeadas gerais . . . . .	99
A.2	Variáveis adicionadas ou renomeadas para o MCD . . . . .	100
A.3	Variáveis adicionadas ou renomeadas para o uso de normas de projeto . . . .	101

# Lista de Siglas

AISC	<i>American Institute of Steel Construction</i>
ASSHTO	<i>American Association of State Highway Officials</i>
BS	<i>British Standard</i>
CCT	Concreto com a resistência a tração considerada
CG	Centroide geométrico
CP	Centroide plástico
CS-ASA	<i>Computational System for Advanced Structural Analysis</i>
CST	Concreto sem a resistência a tração considerada
ELU	Estado Limite Último
EUROCODE	Normas europeias para projetos estruturais e geotécnicos de obras civis
GSP	<i>Generalized Stiffness Parameter</i>
LN	Linha neutra
LNP	Linha neutra plástica
LRFD	<i>Load and Resistance Factor Design</i>
MCD	Método da Compatibilidade de Deformações
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRP	Método da Rótula Plástica
MRPR	Método da Rótula Plástica Refinado
MZP	Método da Zona Plástica
NBR	Norma Brasileira
PHF	<i>Plastic Hinge Formulation</i>

PPR	Perfil I parcialmente revestido
PTR	Perfil I totalmente revestido
RLT	Referencial Lagrangiano Total
RLA	Referencial Lagrangiano Atualizado
SHPR	Seção hexagonal parcialmente revestida
SOF	<i>Second Order Formulation</i>
TCP	Perfil tubular circular preenchido com concreto
TCPI	Perfil tubular circular preenchido com concreto e com perfil I no centro
TRP	Perfil tubular retangular preenchido com concreto

# Lista de Símbolos

$\alpha_1$	fator que considera a interação das barras longitudinais com o concreto
$\alpha_2$	fator que considera os efeitos de duração da carga e cargas cíclicas
$\alpha_c$	fração de contribuição do concreto na resistência BS5400-5
$A_a$	área do perfil metálico
$A_b$	área total das barras longitudinais
$A_c$	área de concreto na seção transversal
$A_{comp}$	área da seção mista homogeneizada
$A_i$	área da i-ésima fatia
$A_p$	área degradada da seção transversal
$b$	largura da seção
$b_f$	largura da mesa da seção metálica
$C_2$	coeficiente de redução da capacidade resistente do concreto AISC/LRFD
$\delta$	translação na direção axial do elemento, no nó final (j)/imperfeição inicial
$\delta\lambda$	correção do parâmetro de carga
$\delta M_{pr}$	correção do momento fletor para não violar a curva de resistência
$\delta\mathbf{U}$	correção dos deslocamentos nodais
$\delta\mathbf{U}_g$	correção do vetor de deslocamentos nodais
$\delta\mathbf{U}_r$	vetor de deslocamentos nodais
$\Delta$	variação/imperfeição geométrica
$\Delta\lambda$	incremento do parâmetro de carga
$\Delta\lambda^0$	incremento inicial do parâmetro de carga
$\Delta t$	variação do passo de carga
$\Delta\mathbf{u}$	vetor de deslocamentos incrementais no sistema local
$\Delta\mathbf{u}_c$	vetor de deslocamentos incrementais no sistema corrotacional

$\Delta U$	incremento de deslocamentos nodais
$\Delta U^0$	incremento inicial do vetor de deslocamentos nodais
$d$	dimensão da seção perpendicular ao eixo de flexão
$d_c$	distância da linha neutra à face mais comprimida do concreto
$d_n$	profundidade da linha neutra na seção
$d_r$	distância entre as barras longitudinais perpendicular ao eixo de flexão
$d_s$	espessura da seção de concreto externa ao perfil envolvido
$d_w$	altura da alma comprimida
$D_e$	diâmetro externo do tubo circular de aço
$\varepsilon$	deformação
$\varepsilon_0$	deformação axial no centroide plástico da seção
$\varepsilon_1$	deformação limite do regime elástico do aço
$\varepsilon_2$	deformação inicial do regime de encruamento do aço
$\varepsilon_a$	deformação no perfil de aço
$\varepsilon_b$	deformação na armadura
$\varepsilon_c$	deformação no concreto
$\varepsilon_{ci}$	deformação de plastificação à compressão do concreto
$\varepsilon_{cin}$	deformação de início de plastificação à compressão do concreto
$\varepsilon_{cr}$	deformação de fissuração do concreto
$\varepsilon_{cu}$	deformação última à compressão do concreto
$\varepsilon_i$	deformação axial nas fatias da seção
$\varepsilon_s$	deformação do aço
$\varepsilon_y$	deformação de escoamento do aço
$\varepsilon_{yd}$	deformação de escoamento de cálculo do aço
$\varepsilon_u$	deformação última do aço
$e$	excentricidade
$E_a$	módulo de elasticidade do aço dos perfis
$E_{a2}$	o módulo de elasticidade do aço dos perfis na fase de encruamento
$E_b$	módulo de elasticidade do aço das barras
$E_{b2}$	o módulo de elasticidade do aço das barras na fase de encruamento
$E_c$	módulo de elasticidade tangente do concreto
$E_{cs}$	módulo de elasticidade secante do concreto

$(EI)_{comp}$	rigidez a flexão da seção mista homogeneizada
$E_T$	módulo de elasticidade tangente
$E_{tr}$	módulo de elasticidade do concreto à tração
$\phi$	curvatura da seção
$\phi_n$	coeficiente de segurança da AISC/LRFD
$\phi_x$	curvatura em torno do eixo x
$\phi_y$	curvatura em torno do eixo y
$f_c$	resistência do concreto à compressão
$\mathbf{f}_c$	vetor de forças no sistema corrotacional
$f_{cd}$	resistência de cálculo do concreto à compressão
$f_{ck}$	resistência característica do concreto à compressão
$f_{cr}$	resistência à fissuração do concreto
$\mathbf{f}_{ext}$	vetor de forças externas da seção
$f_{ij}$	termos da matriz de rigidez da seção transversal
$\mathbf{f}_{int}$	vetor de forças internas da seção
$\mathbf{f}_l$	vetor de forças nodais de elemento no sistema local
$\mathbf{f}_{ps}$	vetor de correção dos esforços internos
$f_u$	resistência última do aço dos perfis
$f_{ub}$	resistência última do aço das barras
$f_y$	resistência de escoamento do aço dos perfis
$f_{yb}$	resistência de escoamento do aço das barras
$f_{ybd}$	resistência de escoamento de cálculo do aço das barras longitudinais
$f_{yd}$	resistência de escoamento de cálculo do aço do perfil metálico
$\mathbf{F}$	vetor de forças desequilibradas da relação momento-curvatura
$\mathbf{F}'$	matriz de rigidez tangente da relação momento-curvatura
$\mathbf{F}_i$	vetor de forças internas - problema global
$\mathbf{F}_r$	vetor de referência, indicador da direção da carga incremental
$\gamma$	coeficiente de redução da resistência de concretos não confinados
$\mathbf{g}$	vetor de forças desequilibradas globais
$\eta$	coeficiente de redução da rigidez homogeneizada
$h$	altura da seção
$h_n$	altura da seção mista que resiste ao esforço axial aplicado (EUROCODE 4)

$I_{comp}$	momento de inércia da viga mista homogeneizada sob momento positivo
$I'_{comp}$	momento de inércia da viga mista homogeneizada sob momento negativo
$k$	contador do número de iterações
$k_{ij}$	termos da matriz de rigidez
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez tangente da estrutura
$\mathbf{K}_1$	matriz de funções lineares dos deslocamentos nodais incrementais
$K_1$	coeficiente de introdução do efeito de instabilidade na resistência (BS5400-5)
$\mathbf{K}_2$	matriz de funções quadráticas dos deslocamentos nodais incrementais
$K_2$	coeficiente que considera a curvatura do elemento (BS5400-5)
$K_3$	coef. que relaciona a instabilidade e os momentos no pilar (BS5400-5)
$\mathbf{K}_c$	matriz de rigidez de elemento no sistema corrotacional
$\mathbf{K}_e$	matriz de rigidez de elemento no sistema local
$\mathbf{K}_{eg}$	matriz de rigidez de elemento no sistema global
$\mathbf{K}_\sigma$	matriz de rigidez geométrica
$\lambda$	fator de incremento de carga
$L$	comprimento do elemento
$\mu$	parâmetro de redução da rigidez flexional do concreto devido a fissuração
$m$	fator de resistência de concretos confinados em seções circulares (BS5400-5)
$M$	Momento fletor
$M_a$	Momento resistente da seção mista no ponto A (EUROCODE 4)
$M_b$	Momento resistente da seção mista no ponto B (EUROCODE 4)
$M_c$	Momento resistente da seção mista no ponto C (EUROCODE 4)
$M_C$	momento fletor último obtido numericamente por <a href="#">Caldas (2004)</a>
$M_{CS-ASA}$	momento fletor último obtido numericamente pelo programa CS-ASA
$M_d$	Momento resistente da seção mista no ponto D (EUROCODE 4)
$M_e$	Momento resistente da seção mista no ponto E (EUROCODE 4)
$M_{er}$	momento fletor de início de plastificação
$M_i$	momento fletor no nó inicial (i) no sistema corrotacional
$M_{in}$	momento fletor de início de plastificação aproximado
$M_{int}$	momento fletor interno
$M_j$	momento fletor no nó final (j) no sistema corrotacional
$M_n$	momento nominal

$M_{pl,Rd}$	momento fletor resistente de cálculo da seção mista, sem esforço axial
$M_{pr}$	momento fletor de plastificação
$M_{Rd}$	momento fletor resistente para flexo-compressão uniaxial (BS5400-5)
$M_{Sd}$	momento fletor solicitante para flexo-compressão uniaxial (BS5400-5)
$M_{ue}$	momento fletor último medido experimentalmente por <a href="#">Han (2004)</a>
$M_y$	momento fletor resistente em torno do eixo x - <i>quasi-Newton</i>
$M_z$	momento fletor resistente em torno do eixo y - <i>quasi-Newton</i>
$n_{fat}$	número de fatias presentes na seção transversal
$N$	esforço axial
$N_a$	carga resistente de compressão da seção mista no ponto A (EUROCODE 4)
$N_b$	carga resistente de compressão da seção mista no ponto B (EUROCODE 4)
$N_c$	carga resistente de compressão da seção mista no ponto C (EUROCODE 4)
$N_d$	carga resistente de compressão da seção mista no ponto D (EUROCODE 4)
$N_e$	carga resistente de compressão da seção mista no ponto E (EUROCODE 4)
$N_{in}$	esforço axial de início de plastificação aproximado
$N_{int}$	esforço axial interno
$N_{pl,c}$	esforço resistente nominal de compressão (AISC/LRFD)
$N_{pl,Rd}$	carga axial resistente de compressão da seção mista
$N_{pl,t}$	esforço resistente nominal de tração (AISC/LRFD)
$N_{pm,Rd}$	carga axial resistente de compressão da seção de concreto isolada
$N_{Rd}$	carga axial resistente para flexo-compressão uniaxial BS5400-5
$N_x$	carga axial resistente da seção - <i>quasi-Newton</i>
$N_{xd}$	carga axial solicitante - <i>quasi-Newton</i>
<b>P</b>	vetor de forças internas
$P$	esforço axial
$P_{AISC}$	carga última obtida considerando o AISC/LRFD
$P_{EC4}$	carga última obtida considerando o EUROCODE4
$P_{FG}$	carga última da trajetória de equilíbrio obtida por <a href="#">Fong e Chan (2012)</a>
$P_{Liu}$	carga última da trajetória de equilíbrio obtida por <a href="#">Liu et al. (2012b)</a>
$P_{MDC}$	carga última da trajetória de equilíbrio obtida com o CS-ASA via MDC
$P_{Test}$	carga última experimental ( <a href="#">BRIDGE, 1976</a> )/( <a href="#">NEOGI et al., 1969</a> )
$P_u$	esforço axial último resistente

$\theta_i$	rotação no nó inicial (i)
$\theta_j$	rotação no nó final (j)
$\theta_n$	orientação da linha neutra
$Q$	esforço cortante
$\mathbf{R}$	matriz de rotação
$\sigma$	tensão normal
$S_h$	rigidez rotacional das molas fictícias
$t$	espessura da parede do tubo de aço/passos de carga anterior
$t_1$	passo de carga corrente
$t_f$	espessura da mesa da seção metálica
$t_w$	espessura da alma da seção metálica
$\mathbf{T}_{cl}$	matriz de transformação do sistema corrotacional para o local
$Tol$	tolerância - processo iterativo local
$u$	grau de liberdade de translação no eixo x
$\mathbf{U}$	vetor de deslocamentos nodais
$v$	grau de liberdade de translação no eixo y
$\mathbf{X}$	vetor de deformações
$y_a$	posição do centroide plástico da área de aço
$y_b$	posição do centroide plástico da área da barra
$y_c$	posição do centroide plástico da área de concreto
$y_{CP}$	posição do centroide plástico da seção referenciado a um sistema qualquer
$y_i$	distância entre os centroides plásticos da i-ésima fatia e da seção mista
$Z_a$	módulo resistente plástico do perfil metálico
$Z_{an}$	módulo resistente plástico reduzido do perfil metálico
$Z_b$	módulo resistente plástico das barras
$Z_{bn}$	módulo resistente plástico reduzido das barras
$Z_c$	módulo resistente plástico da seção de concreto
$Z_{cn}$	módulo resistente plástico reduzido da seção de concreto
$\zeta$	tolerância do processo iterativo global
$\zeta_1$	erro calculado pelo critério de forças
$\zeta_2$	erro calculado pelo critério de deslocamentos

# Capítulo 1

## Considerações Iniciais

### 1.1 Introdução

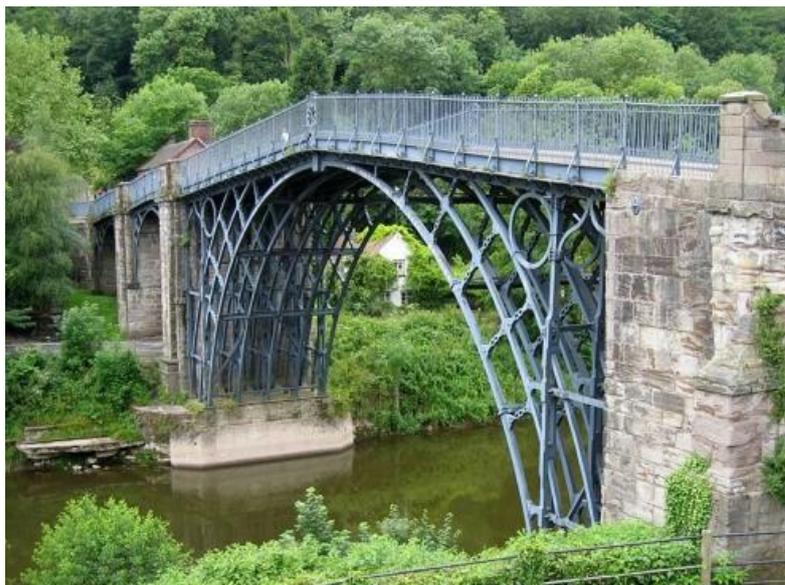
Na concepção dos projetos estruturais de engenharia, os projetistas iniciam os cálculos baseados em três premissas: segurança, tempo (elaboração e execução da obra) e economia. Para se atingir um equilíbrio entre essas variáveis há uma gama de materiais e métodos disponíveis no mercado. De forma isolada, dentre os materiais mais usados na construção civil, destacam-se o concreto e o aço.

Inicialmente, os elementos metálicos (ferro fundido) foram utilizados para fins militares e adorno em construções. Com a revolução industrial na Europa, estruturas de grande porte começaram a ser confeccionadas com elementos metálicos. Segundo [Chamberlain \(2004\)](#), a primeira importante obra construída foi a Ironbridge sobre o rio Svern em Coalbrookdale (Inglaterra) em 1779, que é ilustrada na Figura 1.1.

A evolução do processo de produção de materiais permitiu a mistura do ferro com outros elementos químicos. A mistura com o carbono produziu o aço. A obtenção de um material com alta resistência e ductilidade, proporcionou a conformação de formas mais variadas para as seções transversais e conseqüentemente tornou seu uso mais propício.

Apesar de muitas vantagens como componente estrutural, o aço apresenta problemas quando exposto às intempéries, o que causa a corrosão do material, e ao fogo. Dessa forma, o concreto foi primeiramente usado para revestir e proteger os perfis metálicos. Embora o concreto tivesse uma participação em termos estruturais, sua contribuição na capacidade resistente e rigidez dos elementos era desprezada.

A ideia de proteção dos pilares metálicos impulsionou o surgimento dos primeiros pilares mistos de aço e concreto que, desde então, evoluíram e hoje apresentam variações

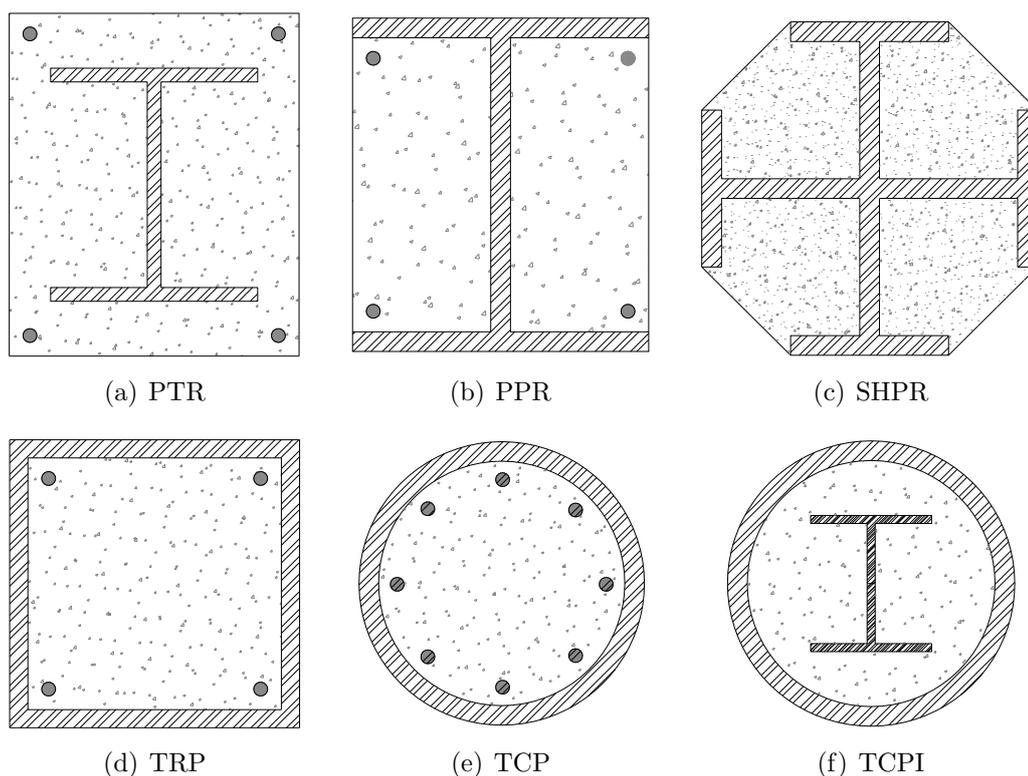


**Figura 1.1** – Ironbridge, rio Svern em Coalbrookdale Inglaterra ([ELLER, 2011](#))

no arranjo e composição destes materiais. Desta forma, além dos pilares preenchidos, existem outros tipos de pilares mistos que diferem daqueles pela posição que o concreto estrutural ocupa na seção transversal. Em função dessa posição, os pilares mistos podem ser classificados em revestidos e preenchidos ([NARDIN, 2003](#)). São ilustradas na Figura 1.2 algumas dessas seções: totalmente revestida (PTR), perfil I parcialmente revestido (PPR), seção hexagonal parcialmente revestida (SHPR), perfil tubular retangular preenchido com concreto (TRP), tubo circular preenchido (TCP) e tubo circular preenchido com um perfil I (TCPI).

As vigas mistas, segundo [Pfeil e Pfeil \(2009\)](#) passaram a ter grande utilização após a Segunda Guerra Mundial. Anteriormente, assim como os pilares, o concreto das lajes era desprezado na avaliação da capacidade resistente do vigamento. Porém, era observado que esse modelo construtivo apresentava flechas menores do que as vigas convencionais de aço apenas. Após a guerra, a carência de aço estimulou o estudo das vigas metálicas e lajes de concreto como um elemento único.

Segundo [Caldas \(2004\)](#) apud [Griffis \(1994\)](#) surgiram em 1894, nos Estados Unidos, as primeiras vigas metálicas revestidas com concreto, e entre 1920 e 1930 foram construídos os primeiros arranha-céus como *Empire State Building* e o *Chrysler Building*, (Figuras 1.3 e 1.4). [Dias \(1993\)](#) fez um levantamento histórico sobre as primeiras construções com elementos mistos no Brasil, destacando que essas ocorreram nos anos 60 nas cidades de São Paulo-SP, Rio de Janeiro-RJ, Porto Alegre-RS e Volta Redonda-RJ. Entre as obras



**Figura 1.2** – Seções usuais para pilares mistos

citadas, destacam-se o edifício garagem América (1957) na capital paulista, como construção pioneira no país utilizando essa tipologia estrutural, e o edifício Avenida Central no Rio de Janeiro como um dos mais altos da época (1961), com 112m de altura. Essas importantes construções são ilustradas nas Figuras 1.5 e 1.6, respectivamente.

O primeiro registro de normas contendo especificações para o projeto de estruturas mistas é de 1930, pelo *New York City Building Code*. Malite (1990) lembra ainda que, em 1944, o assunto foi introduzido nas normas da *American Association of State Highway Officials* (ASSHTO). No Brasil, as estruturas mistas foram normatizadas em 1986 em uma versão mais antiga da NBR8800 (2008), que no entanto se limitava a abordar apenas vigas mistas (FIGUEIREDO, 1998). Anteriormente, o projeto de estruturas mistas era apresentado em versões menos recentes da NBR14323 (2013).

A associação do aço e do concreto visa, fundamentalmente, o melhor aproveitamento físico e mecânico dos materiais (DENAVIT, 2012). Assim, as estruturas mistas de aço e concreto apresentam vantagens no que diz respeito à capacidade resistente, rigidez, proteção dos elementos metálicos (incêndio e corrosão), custo benefício, ductilidade, etc. Griffis (1986) relata que os elementos de concreto geralmente oferecem propriedades de amortecimento consideráveis para o sistema estrutural, enquanto os componentes de aço



**Figura 1.3** – *Empire State Building* (WEBPAGE, [commons.wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org))



**Figura 1.4** – *Chrysler Building* (WEBPAGE, [ny-pictures.com](https://ny-pictures.com))

proporcionam a redução do peso total da estrutura e conseqüentemente dos custos relacionados à fundação. Além disso, esse tipo de estrutura também possui vantagens durante a execução. Durante a cura do concreto, esse pode ser suportado por perfis metálicos e fôrmas, reduzindo gastos com escoramentos e aumentando o espaço livre de circulação na obra.

A análise estrutural mais realística inclui os efeitos não lineares no processo de cálculo. Destacam-se as não linearidades geométrica (as cargas verticais aplicadas na forma deformada da estrutura geram ou amplificam os esforços de momento fletor) e do material (proveniente da relação constitutiva não seguir a lei de Hooke). Quando esses efeitos são considerados de forma conjunta, surge uma metodologia denominada Análise Avançada. Quando os fatores que influenciam substancialmente no comportamento estrutural são incluídos nos modelos numéricos e formulações, a análise torna-se confiável. Diversos pesquisadores abordam essa metodologia de solução de problemas estruturais para elementos de aço, de concreto e mistos de aço e concreto, como será apresentado na seção 1.4 deste trabalho.



**Figura 1.5** – Garagem América - São Paulo ([WEBPAGE, arcoweb.com.br](#))



**Figura 1.6** – Edifício Avenida Central - Rio de Janeiro ([WEBPAGE, flickr.com](#))

## 1.2 Objetivos

No contexto da análise estática não linear de estruturas, este trabalho tem como objetivo introduzir conceitos relacionados às estruturas mistas de aço e concreto à base computacional CS-ASA, que é um sistema computacional para análise numérica avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) ([SILVA, 2009](#)). Dessa forma, busca-se acoplar efeitos não lineares geométricos e físicos com o intuito de obter computacionalmente uma análise realista do comportamento de estruturas mistas. Para tal, são necessárias modificações nos parâmetros de rigidez das formulações geometricamente não lineares presentes no CS-ASA, além de curvas de resistência (também abordadas na literatura como curvas de interação normal-momento ou curvas de falha) condizentes com essa tipologia estrutural. Os pontos de falha são obtidos tanto por metodologias apresentadas em normas de projeto como por formulações generalizadas. Destaca-se que serão analisados elementos estruturais reticulados com carregamento atuando no plano da estrutura (problema bidimensional).

Ressalta-se, por fim, que o presente trabalho vai de encontro com os objetivos do PRO-PEC/Deciv/EM/UFOP e está relacionado com as seguintes linhas de pesquisa: Mecânica Computacional e Comportamento e Dimensionamento de Estruturas.

### 1.3 Sistema Computacional - CS-ASA

A base computacional utilizada neste trabalho é o CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), que foi desenvolvido por [Silva \(2009\)](#). Trata-se de um sistema computacional inicialmente idealizado para estruturas metálicas, que é capaz de realizar análise numérica avançada estática e dinâmica de estruturas baseado no MEF. Implementado em linguagem *Fortran 90/95* ([CHAPMAN, 2003](#)), o CS-ASA é todo estruturado em módulos (classes). Dessa forma, a introdução de novas funcionalidades é facilitada, uma vez que se alteram apenas rotinas internas a módulos específicos.

[Silveira \(1995\)](#) desenvolveu uma base computacional para investigação da instabilidade elástica de colunas, arcos e anéis com restrições unilaterais de contato. Desde então, diferentes pesquisas foram realizadas a partir dessa mesma base, porém em programas independentes. Para este trabalho destacam-se as implementações feitas por:

- [Galvão \(2000\)](#): formulações geometricamente não lineares;
- [Machado \(2005\)](#) e [Gonçalves \(2013\)](#): modelagem do comportamento inelástico de estruturas de aço;
- [Rocha \(2000\)](#) e [Maximiano \(2012\)](#): estratégias de incremento de carga e interação;
- [Silva \(2009\)](#): criação do CS-ASA.

Para análise estática não linear via CS-ASA, a entrada de dados é feita em dois arquivos de texto. No primeiro são fornecidas as informações referentes ao tipo de análise, da estrutura (geometria e condições de contorno), dos materiais, das seções e dos carregamentos. No segundo arquivo são definidos a formulação não linear a ser utilizada, as estratégias de incremento de carga e iteração, o incremento inicial do parâmetro de carga, o método de *Newton-Raphson* (padrão ou modificado) e o critério de convergência. Após o processamento, a saída e impressão dos resultados também são feitas em formato de arquivos de texto.

Com esta dissertação, foram introduzidas as condições necessárias para que a plataforma CS-ASA possa realizar análises não lineares física (materiais) e geométrica de estruturas mistas. Na Figura 1.7 são ilustradas as funcionalidades do programa, e em vermelho é destacado o produto deste trabalho.

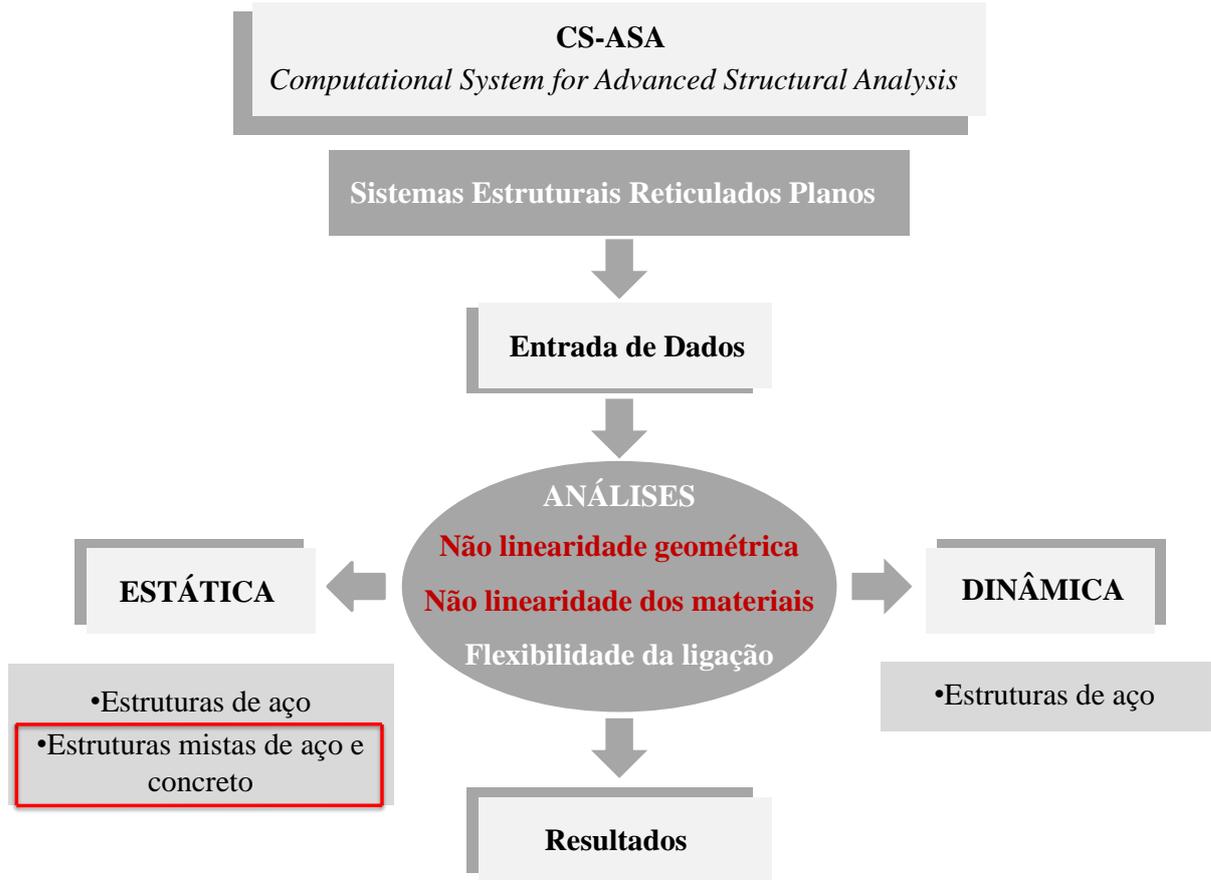


Figura 1.7 – Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados

## 1.4 Estado da Arte

A necessidade de compreender a forma como as estruturas mistas de aço e concreto se comportam tem motivado estudos sobre o tema. [Iu et al. \(2009\)](#) destacam que apesar do uso generalizado de sistemas mistos de aço e concreto, procedimentos numéricos precisos para a sua análise e concepção não evoluíram da mesma forma como para estruturas de aço. Como consequência, as referências normativas possuem falhas quando aplicadas ao projeto seguro e econômico de estruturas mistas. [Landesmann \(2010\)](#) cita que normas como o [AISC/LRFD \(2005\)](#), [EUROCODE-4 \(2004\)](#) e a [NBR8800 \(2008\)](#), não são capazes de descrever o comportamento real da estrutura quando os deslocamentos são grandes e o comportamento não linear se torna relevante. Além disso, [Weng e Yen \(2002\)](#) demonstram experimentalmente que as diferentes formas como as normas de projeto abordam as estruturas mistas também podem se aproximar ou distanciar do comportamento estrutural real. [Fong \(2012\)](#) destaca que muitas normas tendem a recomendar o uso de uma análise de segunda ordem e um método de projeto de modo a obter resultados mais precisos e de

maneira eficiente.

Diversos estudos sobre o tema deste trabalho foram realizados, tanto no contexto experimental quanto numérico. A seguir são apresentadas algumas pesquisas de destaque.

### 1.4.1 Análise experimental

Nos trabalhos de [Neogi \*et al.\* \(1969\)](#) e [Bridge \(1976\)](#) são realizados ensaios experimentais em pilares mistos tubulares preenchidos, sem armaduras longitudinais, e rotulados em suas extremidades. Os trabalhos se diferenciam pelas seções transversais utilizadas, TCP e TRP, respectivamente. São apresentadas as cargas limites das curvas carga  $x$  deslocamento (medidos na altura média do pilar) além das respectivas trajetórias de equilíbrio.

Seções PPR submetidas a cargas predominantemente de flexão foram analisadas por [Kindmann \*et al.\* \(1993\)](#). Motivados pelo conservadorismo do [EUROCODE-4 \(1992\)](#), que coibia o uso de armaduras longitudinais entre os flanges do perfil, os autores realizaram 13 experimentos a fim de avaliar o comportamento de vigas I parcialmente revestidas com barras de reforço. Os resultados obtidos ressaltaram o aumento na capacidade resistente e a redução dos deslocamentos. São então deduzidos métodos para avaliação dos esforços resistentes máximos e da rigidez dos elementos mistos. Essa pesquisa se tornou relevante a ponto de provocar mudanças na referida norma.

Um estudo de pilares esbeltos foi realizado por [Mirza \*et al.\* \(1996\)](#). Dezesseis espécimes com seção constituída por placas formando um perfil I, sendo esse totalmente revestido por concreto foram carregados até o colapso. A interação entre o aço e o concreto também foi estudada. Essa interação era promovida por chapas metálicas maciças ou perfuradas dispostas no lado externo das mesas do perfil. Códigos normativos e simulações via MEF foram utilizados para comparação.

[Muñoz e Hsu \(1997\)](#) ensaiaram 4 pilares mistos (3 esbeltos e 1 curto) com seções PTR submetidos à flexão composta oblíqua. Foram examinados parâmetros globais tais como: os efeitos da excentricidade, diferentes propriedades do aço e do concreto e as curvas carga-deslocamento; e parâmetros locais: a esbeltez da seção e a relação momento-curvatura na capacidade máxima do elemento. Os resultados experimentais são confrontados com resultados numéricos, baseados no Método das Diferenças Finitas (MDF) ([MUÑOZ, 1994](#)), implementados pelos próprios autores.

Testes experimentais em pilares mistos esbeltos foram também realizados por [Wang](#)

(1999). Seções TRP e PTR foram estudadas. As cargas foram posicionadas de forma excêntrica para causar uma curvatura simples, referente ao primeiro modo de flambagem de elementos biapoiados. O objetivo do trabalho era avaliar as metodologias de códigos normativos europeus para elementos esbeltos sob flexão composta. Em um segundo momento, o autor avaliou um novo método de projeto para pilares mistos baseado na abordagem da norma britânica [BS5950 \(1990\)](#) para elementos metálicos.

[Varma et al. \(2002\)](#) estudaram o comportamento à flexão de pilares mistos TRP confeccionados com materiais de alta resistência. Os parâmetros avaliados foram: a esbelteza das paredes, o escoamento do tubo de aço e a carga axial. Em seus testes, os autores verificaram que, quando o momento último foi alcançado, efeitos de instabilidade localizados nos tubos, escoamento do aço e o esmagamento do concreto ocorreram. Assim como em outros estudos experimentais, os autores descrevem a proximidade entre os resultados obtidos em laboratório com as considerações do [ACI-318 \(1999\)](#). Seguindo essa mesma linha de experimentos, destacam-se [Liu et al. \(2003\)](#), [Liu \(2004\)](#) e [Liu \(2006\)](#).

[Han \(2004\)](#) testou e implementou um modelo para análise de vigas TRP. São fornecidas curvas momento-deflexão para as vigas ensaiadas além dos resultados numéricos obtidos pelo próprio autor. Além disso, dados medidos em laboratório, como a capacidade resistente e a rigidez à flexão são comparados com normas de projeto.

[Kim et al. \(2012\)](#) analisaram perfis PTR utilizando materiais de alta resistência. Observou-se que as deformações de escoamento dos aços utilizados foram maiores do que as deformações de compressão últimas do concreto, implicando no esmagamento desse de forma precoce. Esse efeito poderia não ser observado caso as cargas fossem aplicadas durante um longo período de tempo, para que ocorresse a fluência do concreto. Por utilizar aços de alta resistência, o comportamento à flexão dos espécimes foi caracterizado como dúctil.

[Soliman et al. \(2013\)](#) realizaram um estudo de pilares PTR comparando a capacidade axial dos protótipos ensaiados com diversos códigos normativos. Além da seção PTR tradicional, uma seção tubular circular preenchida e envolvida com concreto também é analisada.

No Brasil, segundo [Caldas \(2004\)](#) apud [Nardin e Debs \(2002\)](#), [Gomes \(1994\)](#) foi o primeiro pesquisador a estudar o comportamento de pilares mistos preenchidos. Nesse trabalho são avaliadas a aderência, a retração e a deformação lenta do concreto. Desde

então, diversos trabalhos sobre o tema se destacam, tais como: [Figueiredo \(1998\)](#), [Nardin \(1999\)](#), [Alva \(2000\)](#), [Nardin e Debs \(2007\)](#), entre outros. Já o estudo de [Machado \(1998\)](#) aborda o comportamento de vigas mistas PPR e foi desenvolvido no Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto.

### 1.4.2 Análise numérica

Um modelo para análise de pórticos metálicos com vigas mistas foi proposto por [Liew et al. \(2001\)](#). A rigidez à flexão das vigas é avaliada por meio das relações momento-curvatura tanto para regiões de momento positivo quanto para momento negativo. Os autores também simulam o deslizamento na interface entre a laje de concreto e o perfil metálico através do cálculo da rigidez à flexão pelas considerações da [AISC/LRFD \(1993\)](#). [Kim e Kim \(2002\)](#) utilizaram a formulação de [Liew et al. \(1993b\)](#), baseada no MRPR com o módulo de elasticidade tangente para a simulação da degradação da rigidez, para modelar computacionalmente o comportamento não linear físico de pórticos com vigas constituídas por lajes apoiadas sobre perfil I. Nesse trabalho, os autores simplificaram o cálculo de parâmetros referentes à capacidade resistente e à rigidez utilizando a [AISC/LRFD \(1993\)](#). Considerando as vigas mistas biapoiadas, [Liang et al. \(2005\)](#) analisaram numericamente o efeito do cisalhamento nesses elementos. O objetivo principal do trabalho era avaliar a contribuição do concreto no esforço resistente ao cisalhamento, uma vez que muitos códigos normativos o desprezam. Além disso, foi proposta uma curva de interação momento fletor-esforço cisalhante. Já [Manfredi et al. \(1999\)](#) avaliaram exclusivamente o comportamento não linear de vigas mistas em regiões de momento negativo.

[Lakshmi e Shanmugam \(2002\)](#) estudaram pilares mistos tubulares de aço e concreto biapoiados submetidos a cargas excêntricas em um ou nos dois eixos. Para isso foi desenvolvida uma metodologia semianalítica para descrever o comportamento desses elementos, resolvendo o problema não linear por meio de um esquema incremental e iterativo baseado no método do deslocamento generalizado ([YANG; SHIEH, 1990](#)). Considerando conjuntamente os efeitos não lineares geométricos e físicos [Ellobody e Young \(2011\)](#), usando o [ABAQUS \(2008\)](#), e [Gonçalves e Carvalho \(2014\)](#), desenvolvendo sua formulação, aplicaram o MEF, 3D e 2D, respectivamente, na avaliação da flambagem de pilares mistos PTR. Já [An e Han \(2014\)](#) simularam seções TCP e envolvidas com concreto à combinação de carga axial e de momento fletor. Os autores também propuseram uma metodologia

simplificada de obtenção das curvas de resistência, abordadas adiante.

Baseado em uma formulação de deslocamentos do MEF, [Caldas \(2004\)](#) implementou procedimentos de análise de elementos estruturais reticulados mistos de aço e concreto com seções arbitrárias. Nesse trabalho é realizada análise avançada através do método da Zona Plástica. Na avaliação da capacidade resistente, o método de *Newton-Raphson* padrão foi utilizado para construção das curvas de resistência e a degradação da rigidez foi simulada por meio do módulo de elasticidade tangente dos materiais. Dando continuidade ao trabalho de [Caldas \(2004\)](#), [Muniz \(2005\)](#) generalizou o comportamento dos materiais. Na referida pesquisa, qualquer relação constitutiva pode ser utilizada na formulação, desde que descrita como funções polinomiais. Além disso, o autor implementou elementos referidos ao sistema corrotacional, onde apenas os deslocamentos que realmente causam deformação são avaliados.

Na abordagem dos efeitos da não linearidade do material, diversos autores utilizaram o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). [Iu et al. \(2009\)](#) desenvolveram uma formulação capaz de determinar a capacidade resistente de elementos mistos submetidos a cargas axiais excêntricas considerando o encruamento do aço. [Chan et al. \(2010\)](#), [Liu et al. \(2012b\)](#) e [Fong e Chan \(2012\)](#) também utilizaram o MRPR ([CHAN; CHUI, 2000](#)) para simulação do efeito não linear físico de estruturas mistas, considerando elementos finitos não retilíneos facilitando a inclusão de imperfeições geométricas iniciais. Basicamente, esses três trabalhos se diferenciam pelas curvas de resistência, abordado no item 1.4.3 desta dissertação. Já [Landesmann \(2010\)](#) simula a degradação da rigidez, via MRPR, por meio do módulo tangente, como proposto por [Liew et al. \(1991\)](#).

Formulações não lineares estáticas e dinâmicas tridimensionais baseadas no MEF para avaliar o comportamento de pilares e pórticos mistos foram utilizadas por [Denavit \(2012\)](#). O autor validou sua metodologia comparando-a com ensaios experimentais desenvolvidos também no mesmo trabalho. Por fim, são avaliadas seções preenchidas e seções envolvidas com concreto.

### 1.4.3 Curvas de resistência

Um dos primeiros estudos realizados para avaliar numericamente a capacidade resistente de estruturas mistas foi realizado por [El-Tawil et al. \(1995\)](#). Os autores desenvolveram um programa gráfico interativo denominado COSBIAN, capaz de modelar seções

mistas de aço e concreto totalmente revestidas submetidas à flexão composta oblíqua. Um modelo de fibras foi utilizado. Com a obtenção das deformações nas fibras, determinam-se as tensões por meio das relações constitutivas. São também apresentadas comparações dos resultados obtidos com normas de projeto americanas como o [ACI-318 \(1992\)](#) e o [AISC/LRFD \(1993\)](#).

[Chen et al. \(2001\)](#) desenvolveram uma metodologia tridimensional generalizada para seções arbitrárias utilizando o processo iterativo *quasi-Newton* acoplado ao método da falsa posição. Uma das maiores contribuições desse trabalho é a utilização do centroide plástico como origem do sistema de referência das fibras geradas pela discretização. Além disso, são apresentadas equações analíticas para obtenção das tensões na seção.

Assim como [El-Tawil et al. \(1995\)](#), [Weng e Yen \(2002\)](#) analisaram as diferentes abordagens das normas americanas [ACI-318 \(1999\)](#) e [AISC/LRFD \(1993\)](#), mas de forma experimental e estatística. São estudadas seções PTR. Os pesquisadores utilizaram 78 resultados obtidos em laboratório presentes na literatura e avaliaram estatisticamente a precisão dos métodos normativos ante a capacidade resistente real.

[Sfakianakis \(2002\)](#) analisou seções em concreto armado utilizando um modelo de fibras alternativo que emprega computação gráfica para a integração dos esforços normais sobre a área da seção. Não há procedimentos iterativos na sua metodologia, assim não há possibilidade de problemas de convergência, tornando o procedimento rápido.

[Choi et al. \(2006\)](#) estudaram elementos de viga-coluna com seções tubulares. Os autores propuseram um novo método de obtenção da curva de resistência para a norma americana [AISC/LRFD \(2001\)](#) considerando a contribuição do concreto na flexão, até então desprezada na referida norma. Um estudo paramétrico, envolvendo a esbeltez local (paredes) do tubo e da relação entre as resistências à compressão do concreto e de escoamento do aço ( $f_c/f_y$ ) foi feito, sendo o momento último obtido por meio de um modelo de fibras. Por fim, a nova metodologia se mostra menos conservadora ante as prescrições da norma americana quando comparada a resultados experimentais. Em seguida, [Choi et al. \(2008\)](#) analisaram o efeito de confinamento de concreto de alta resistência em seções TRP.

[Liu et al. \(2012a\)](#) utilizaram dois procedimentos para determinar as superfícies de resistência de seções arbitrárias tridimensionais. Um dos métodos utilizados segue a proposta de [Chen et al. \(2001\)](#) sendo a integração realizada seguindo a relação constitutiva

do concreto. Esse procedimento é utilizado por [Chan \*et al.\* \(2010\)](#) para a determinação da curva de início de plastificação. O outro método é denominado como método do bloco de tensão equivalente, onde o trecho da seção de concreto comprimido apresenta uma distribuição constante de tensões. Nas duas situações é utilizado o processo iterativo *quasi-Newton* acoplado ao método da falsa posição.

Em sua tese de doutorado, [Fong \(2012\)](#) acoplou o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) ao procedimento proposto pelo [EUROCODE-4 \(2004\)](#), descrito no item [2.7.1](#). Assim, com carregamentos axiais de compressão pré-definidos, as posições das linhas neutras foram determinadas pelo procedimento iterativo *quasi-Newton* baseado no método da falsa posição ([CHEN \*et al.\*, 2001](#)). Com as combinações N-M determinadas, os pontos são conectados por segmentos retilíneos que podem levar em consideração as imperfeições geométricas global e local.

Utilizando o método iterativo de *Newton-Raphson* assim como [Caldas \(2004\)](#), [Chioresan \(2013\)](#) obteve a superfície de falha de seções mistas considerando tanto a tração no concreto quanto o encruamento do aço. Nesse trabalho, o autor demonstra analiticamente as expressões dos termos da matriz de rigidez e do vetor de forças internas da seção utilizados no processo iterativo.

## 1.5 Organização do Trabalho

O estudo sobre os fundamentos necessários para realizar análises avançadas de estruturas mistas será apresentado no Capítulo [2](#). São enfatizados o comportamento dos materiais isoladamente e os meios de interação entre eles. Além disso, conceitos para análise não linear geométrica serão discutidos, juntamente com as metodologias para análise não linear física (materiais) e obtenção da capacidade resistente dos elementos.

No Capítulo [3](#), as estratégias de solução do problema estático não linear serão destacadas primeiramente. Em seguida, a formulação de elementos finitos incluindo os efeitos não lineares e a obtenção das curvas de resistência, generalizadas ou por procedimentos normativos serão discutidas.

A verificação e a validação da formulação implementada serão apresentadas no Capítulo [4](#), que se encontra dividido em cinco subtópicos: relações momento-curvatura, curvas de resistência, vigas, pilares e pórticos mistos. Os exemplos testados serão comparados

com respostas numéricas e experimentais presentes na literatura e com métodos normativos.

No Capítulo 5 serão apresentados comentários e conclusões referentes à metodologia apresentada ao longo da dissertação. Destacam-se também novos caminhos que se abrem para pesquisas futuras ao final deste trabalho.

Por fim, no Apêndice A apresentam-se as modificações no arquivo de entrada 1 da plataforma CS-ASA. Além disso, são nomeadas as novas variáveis para os dois procedimentos incluídos na base computacional. Isso é feito com o intuito de facilitar a utilização das funcionalidades do CS-ASA para análise de estruturas mistas.

# Fundamentos para Análise Avançada de Estruturas Mistas

## 2.1 Introdução

A utilização de materiais de alta resistência na construção civil implica em seções transversais menores e, conseqüentemente, em elementos mais esbeltos. Assim, as estruturas tendem a apresentar baixa rigidez e, como resultado, os sistemas estruturais podem ter alta deslocabilidade.

Formulações numéricas foram desenvolvidas ao longo dos últimos anos com o objetivo de descrever as não linearidades física e geométrica. Isso, aliado às estratégias de solução dos problemas não lineares cada vez mais eficientes, motivam a busca por resultados mais precisos.

A obtenção da resistência de elementos confeccionados com materiais heterogêneos, como o concreto, não é trivial. As diversas formas de abordagem desse tema nas normas de projeto geram discussões e pesquisas a fim de se determinar a verdadeira capacidade resistente da seção (WENG; YEN, 2002). Motivados por tal fato, alguns pesquisadores apresentam metodologias numéricas baseadas na compatibilidade de deformações para se ter resultados mais realistas.

Ao longo deste capítulo apresentam-se os fundamentos para a análise não linear física (materiais) e geométrica de estruturas mistas de aço e concreto.

## 2.2 Comportamento dos Materiais

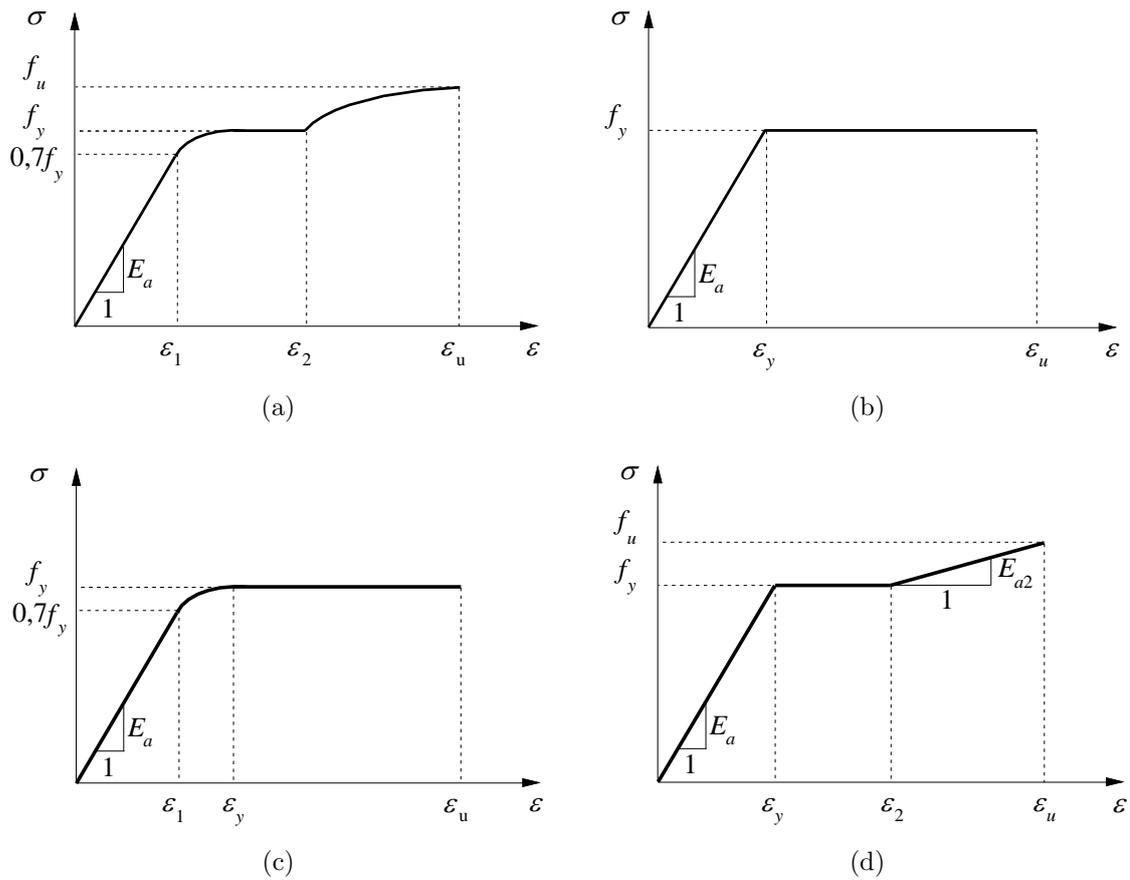
O comportamento estrutural dos materiais é descrito através das respectivas relações tensão-deformação. Essa representação é obtida ensaiando corpos de prova tanto ao esforço axial de tração quanto de compressão. Na literatura estão presentes alguns modelos aproximados para as relações constitutivas de aço e concreto como: [Mander \*et al.\* \(1986\)](#), [Vecchio e Collins \(1986\)](#), [EUROCODE-2 \(2004\)](#), [ACI-318 \(2008\)](#), [Iu \*et al.\* \(2009\)](#), [Chan \*et al.\* \(2010\)](#), [Chiorean \(2013\)](#) e [NBR6118 \(2014\)](#).

Três fases distintas são visíveis na relação tensão-deformação real do aço ilustrada na Figura 2.1. Na fase elástica o comportamento do material é linear, seguindo a lei de Hooke. Essa fase inicial é limitada pela deformação  $\varepsilon_1$  marcando o ponto de início de escoamento do material. É comum encontrar na literatura relações constitutivas que consideram implicitamente o efeito das tensões residuais próximo à resistência ao escoamento,  $f_y$ . O segundo trecho é denominado como fase de escoamento, onde a seção submetida ao ensaio se plastifica gradualmente, atingindo a deformação  $\varepsilon_2$ . E por fim, a fase de encruamento é aquela em que o material volta a resistir a um aumento de tensão até atingir o valor de resistência à ruptura,  $f_u$ . Embora o aço apresente limite de deformação maior do que o apresentado na Figura 2.1(a), na análise da capacidade resistente do elemento busca-se a máxima tensão obtida no ensaio. Essa, por sua vez, é obtida quando o material atinge a deformação,  $\varepsilon_u$ . Uma característica do aço é a isotropia, ou seja, seu comportamento à tração é igual ao de compressão. Assim, na Figura 2.1 é mostrado apenas o trecho referente ao primeiro quadrante da relação constitutiva. Três aproximações abordadas em modelos numéricos são apresentadas nas Figuras 2.1(b), 2.1(c) e 2.1(d).

Na Figura 2.1(b) é ilustrado o modelo elástico-perfeitamente plástico, que é bastante utilizado por pesquisadores como [Fong e Chan \(2012\)](#), [Liu \*et al.\* \(2012a\)](#), [Gonçalves e Carvalho \(2014\)](#) e [Caldas \(2004\)](#) (esse último, somente para os perfis metálicos). Esse modelo é descrito pelo seguinte conjunto de equações:

$$\sigma = \begin{cases} -f_y, & \text{se } -\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_y \\ E_a \varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y, & \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $f_y$  é a resistência de escoamento (também válida para as barras),  $\varepsilon_u$  é a deformação última,  $\varepsilon_y$  é a deformação de escoamento, e  $E_a$  é o módulo de elasticidade, sendo todos



**Figura 2.1** – Relações constitutivas - aço

os parâmetros referentes ao aço.

Outra aproximação da relação constitutiva do aço, menos usual na análise de estruturas mistas, porém mais real, é apresentada na Figura 2.1(c). Caldas (2004) utiliza esse comportamento para descrever o aço das armaduras na seção de concreto. Nesse modelo a transição entre os regimes elástico e plástico ocorre através de um trecho não linear, considerando implicitamente os efeitos das tensões residuais, como mostrado a seguir:

$$\sigma = \begin{cases} -f_y, & \text{se } -\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_y \\ (c + \sqrt{c^2 + 45|\varepsilon| - 0,49})(-f_y), & \text{se } -\varepsilon_y < \varepsilon \leq -\varepsilon_1 \\ E_a \varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_1 \\ (c + \sqrt{c^2 + 45\varepsilon - 0,49})f_y, & \text{se } \varepsilon_1 \leq \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y, & \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (2.2)$$

em que:

$$c = 0.7 - 22,5 \frac{f_y}{E_a} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_1 = 0,7 \frac{f_y}{E_a} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = 0,002 + \frac{f_y}{E_a} \quad (2.5)$$

Chiorean (2013) utiliza um modelo semelhante ao ilustrado na Figura 2.1(d), que considera o encruamento do aço, porém todos os trechos apresentam inclinação variável. Para descrever tal relação utiliza-se a expressão:

$$\sigma = \begin{cases} -f_y - E_{a2}(\varepsilon - \varepsilon_2), & \text{se } -\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_2 \\ -f_y, & \text{se } -\varepsilon_2 < \varepsilon \leq -\varepsilon_y \\ E_a \varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y, & \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon < \varepsilon_2 \\ f_y + E_{a2}(\varepsilon + \varepsilon_2), & \text{se } \varepsilon \geq \varepsilon_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

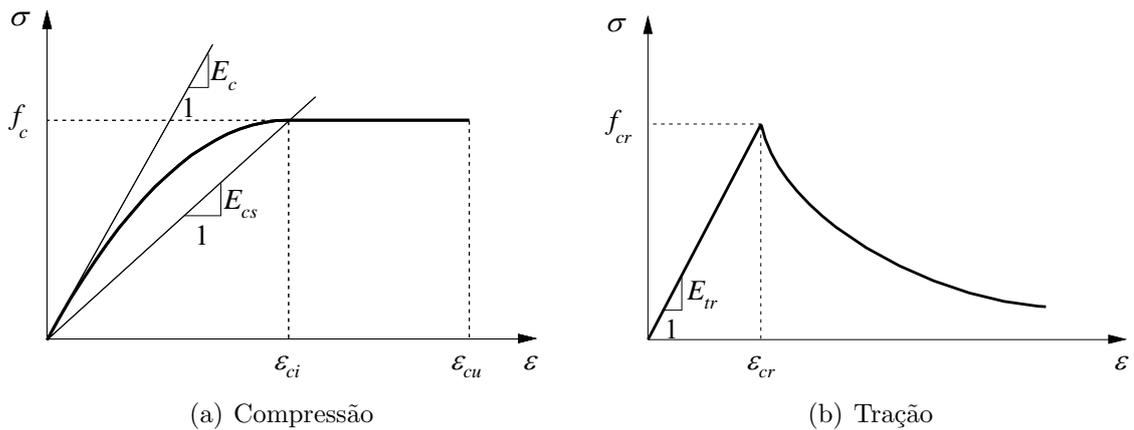
em que  $\varepsilon_2$  é a deformação de início de encruamento do aço, e  $E_{a2}$  é o módulo de elasticidade do aço na fase de encruamento.

Diferentemente do aço, o concreto tem propriedades mecânicas distintas na tração e na compressão. Quando tracionado, esse material apresenta resistência máxima,  $f_{cr}$ , aproximadamente dez vezes menor do que na compressão,  $f_c$ . Destaca-se, também, que ao atingir a resistência  $f_{cr}$  inicia-se o processo de fissuração (*cracking*). Para deformações maiores do que  $\varepsilon_{cr}$ , deformação de início de fissuração, o concreto perde resistência. Assim, diversos pesquisadores e até mesmo normas de projeto desconsideram sua contribuição quando tracionado. A Figura 2.2 ilustra a relação constitutiva do concreto tanto na compressão (KENT; PARK, 1971) quanto na tração, essa última proposta por Vecchio e Collins (1986). Seguindo as recomendações da NBR6118 (2014) para compressão, os valores de deformação limite do trecho parabólico,  $\varepsilon_{ci}$ , e de deformação última,  $\varepsilon_{cu}$ , podem ser variáveis, e dessa forma não se limita ao uso de concretos de classe até C50.

O comportamento do concreto à compressão é definido pelas seguintes equações:

$$\sigma = \begin{cases} \left[ \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 \right] f_c, & \text{se } \varepsilon_{ci} < \varepsilon \leq 0 \\ -f_c, & \text{se } \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ci} \end{cases} \quad (2.7)$$

sendo  $\varepsilon_{ci}$  a deformação limite do trecho de comportamento não linear do concreto,  $\varepsilon_{cu}$  a deformação última do concreto à compressão, e  $f_c$  a resistência do concreto à compressão.



**Figura 2.2** – Relação constitutiva - concreto

Para o caso da Figura 2.2(b), o comportamento à tração do concreto é descrito por:

$$\sigma = \begin{cases} E_{tr}\varepsilon, & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{1 + \sqrt{500\varepsilon}}, & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (2.8)$$

em que  $\varepsilon_{cr}$  é a deformação de fissuração do concreto,  $f_{cr}$  é a resistência à fissuração do concreto, igual a  $1,4(f_c/10)^{2/3}$ ,  $E_{tr}$  é o módulo de elasticidade do concreto à tração,  $\alpha_1$  é o fator que considera a interação das barras longitudinais com o concreto, e  $\alpha_2$  é o fator que considera os efeitos de duração da carga e cargas cíclicas.

O Estado Limite Último (ELU) de elementos em concreto armado, submetidos à combinação de esforços axial e de momento fletor, é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção pertencer a um dos domínios definidos na Figura 2.3.

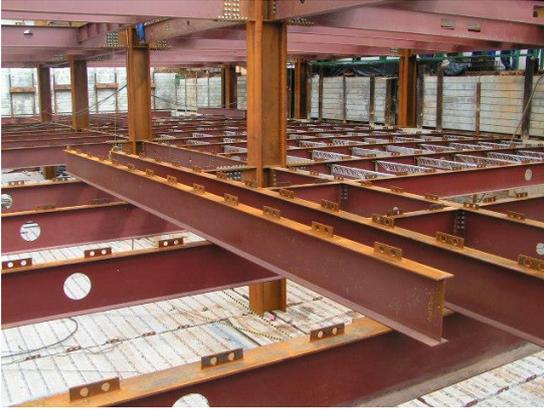
A NBR6118 (2014) define que a ruptura convencional por deformação plástica excessiva ocorre em:

- reta *a*: tração uniforme;
- domínio 1: tração não uniforme, sem compressão;
- domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ( $\varepsilon_c < \varepsilon_{cu}$  e com o máximo alongamento permitido).

Ou por ruptura convencional por encurtamento limite do concreto:

- domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ( $\varepsilon_b \geq \varepsilon_{yd}$ );





**Figura 2.4** – Conector tipo placas de aço perfuradas (SOUZA, 2014)



**Figura 2.5** – Conector tipo pino com cabeça/*studbolt* (SOUZA, 2014)

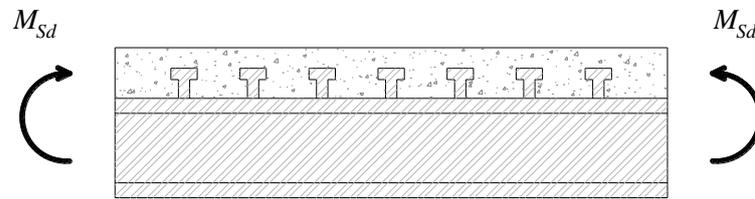


**Figura 2.6** – Conector tipo perfil U laminado (SOUZA, 2014)

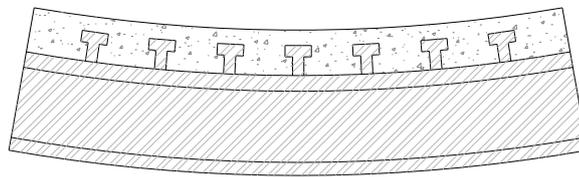
um número suficiente de conectores de cisalhamento, para que não ocorra deslizamento na interface dos materiais, como ilustrado na Figura 2.7(b). Para análise de elementos reticulados é comum adotar esse tipo de interação, como pode ser visto nos trabalhos: Caldas (2004), Iu *et al.* (2009), Liu (2013), Fong e Chan (2012), Chiorean (2013) e Gonçalves e Carvalho (2014).

Quando os materiais trabalham de forma conjunta, porém a conexão entre eles é deformável, a interação é dita parcial. Dessa forma, ocorre deslizamento na interface implicando no comportamento não monolítico do elemento mostrado na Figura 2.7(c). Segundo Caldas (2004) apud Spacone e El-Tawil (2004), a interação parcial é um problema inerente às estruturas mistas e influenciam principalmente nos estados limites de

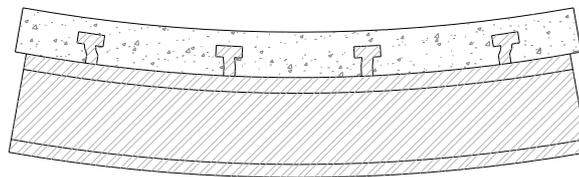
utilização, dissipação de energia, distribuições locais de tensão e estados limites últimos. As conexões deformáveis foram objetos de estudos de Faella *et al.* (2002), Silva (2006), Oliveira (2009) e Silva (2010).



(a) Elemento submetido à flexão simples



(b) Deformada do elemento com interação total

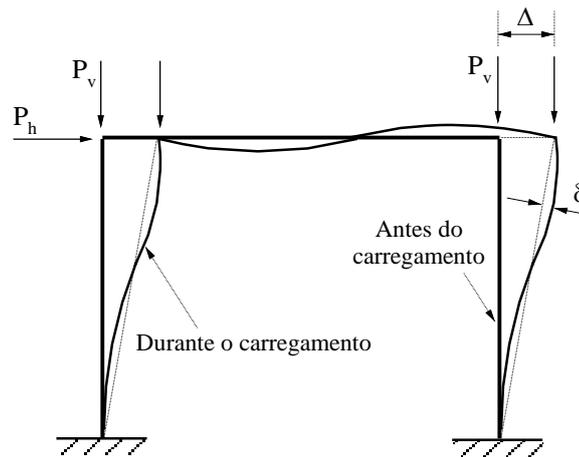


(c) Deformada do elemento com interação parcial

**Figura 2.7** – Tipos de interação entre os materiais

## 2.4 Efeitos Geometricamente Não Lineares

O comportamento não linear de um sistema estrutural pode aparecer devido aos grandes deslocamentos, originando excentricidades de cargas verticais em relação à posição original do elemento. Os efeitos de segunda ordem, como são conhecidos, tratam da amplificação das cargas de flexão antes inexistentes, que passam a ser notórias na avaliação do comportamento da estrutura. Esse efeito também está relacionado às equações de equilíbrio que consideram a configuração deformada e às relações deformação-deslocamento. Trata-se de uma importante fonte de não linearidade no problema estrutural e exige for-



**Figura 2.8** – Efeitos de segunda ordem  $P-\delta$  e  $P-\Delta$

mulações numéricas adequadas para sua consideração (SILVA, 2009). A Figura 2.8 ilustra os efeitos de segunda ordem a nível local,  $P-\delta$ , e global,  $P-\Delta$ .

No contexto dos referenciais Lagrangiano (total e atualizado) e corrotacional, três formulações geometricamente não lineares estão presentes na plataforma computacional CS-ASA.

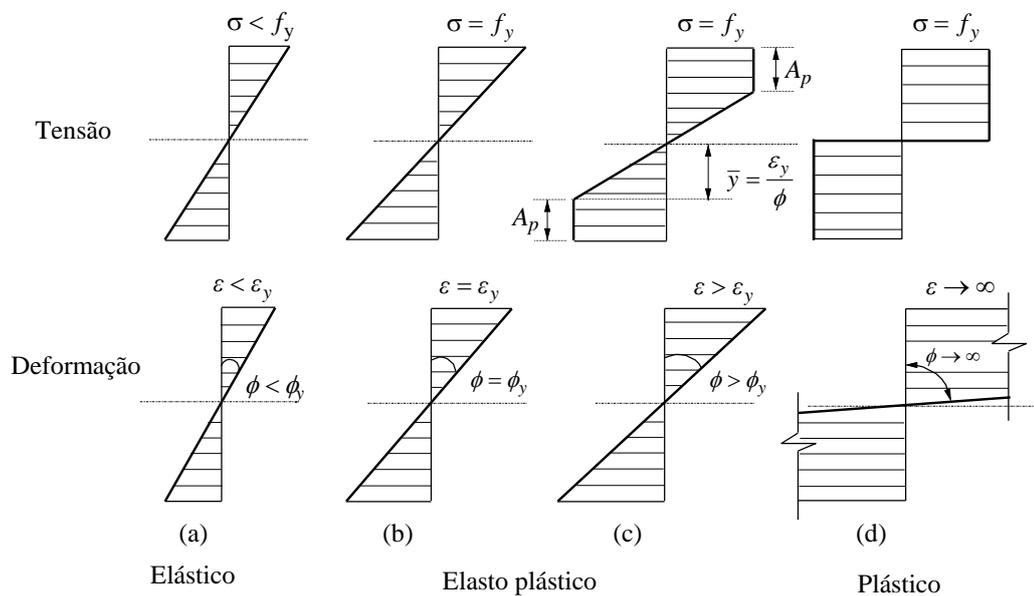
Baseados na teoria de Bernoulli-Euler, dois modelos, utilizando o referencial Lagrangiano atualizado, SOF-1 (*Second Order Formulation 1*) e SOF-2, seguem as metodologias não lineares de elementos finitos propostas por Alves (1993) e Yang e Kuo (1994), respectivamente. Nessas formulações, os efeitos não lineares são introduzidos na matriz de rigidez convencional através das matrizes  $\mathbf{K}_\sigma$ ,  $\mathbf{K}_1$ , e  $\mathbf{K}_2$ , sendo  $\mathbf{K}_\sigma$  matriz de rigidez geométrica,  $\mathbf{K}_1$  é função linear dos deslocamentos nodais incrementais enquanto os termos na matriz  $\mathbf{K}_2$  são funções quadráticas.

Segundo Galvão (2000), na formulação SOF-2, pode-se assumir que as deformações incrementais são tão pequenas que as parcelas não lineares destas são desprezadas. Isto implica na SOF-2 linearizada, que é assim denominada, pois os termos de ordem elevada são ignorados.

A terceira formulação geometricamente não linear presente no CS-ASA utiliza o referencial Lagrangiano Total. Intitulada SOF-3, e baseada na teoria de Timoshenko, essa é uma das cinco formulações propostas por Pacoste e Eriksson (1997).

## 2.5 Análise da Não Linearidade dos Materiais

A não linearidade física, devido ao material, provém da relação tensão-deformação apresentar trechos não lineares, não obedecendo a lei de Hooke. Para um determinado carregamento e usando uma distribuição linear de deformações na seção transversal, nota-se que determinados pontos podem iniciar o processo de degradação da rigidez (área  $A_p$ ), enquanto outros trechos permanecem em regime elástico. A Figura 2.9 ilustra a evolução do campo de deformações à medida que um carregamento arbitrário aumenta em uma seção de aço com comportamento elasto plástico perfeito.



**Figura 2.9** – Distribuição de deformações e tensões na seção transversal (SILVA, 2009)

A abordagem da relação entre o momento e a curvatura da seção,  $\phi$ , indica os pontos onde as deformações de escoamento,  $\varepsilon_y$  e a resistência de escoamento,  $f_y$ , ocorrem. Enquanto nenhum ponto da seção apresenta deformações maiores ou iguais à  $\varepsilon_y$  o regime é caracterizado como elástico. Quando a deformação axial,  $\varepsilon$ , iguala ou ultrapassa  $\varepsilon_y$  os pontos com maior solicitação escoam e perdem rigidez (elasto plástico), como ilustrado pela área  $A_p$  na Figura 2.9. O processo de plastificação ocorre até que toda a seção seja degradada, ou seja, todas as faixas da seção apresentam deformações axiais elevadas, caracterizando valores elevados para curvatura.

Há algumas formas numéricas bastante eficientes presentes na literatura para o acompanhamento da degradação da rigidez da seção. Entre elas destacam-se:

- a utilização das deformações das fibras da seção para obter, por meio da relação

constitutiva do material, o módulo de elasticidade tangente;

- a inclusão de uma superfície ou curva que indique o início do processo de plastificação no diagrama normal-momento;
- a rigidez à flexão é obtida pela tangente à relação momento-curvatura.

O acompanhamento da perda de rigidez da seção é limitado pela superfície ou curva de resistência da mesma. Esse limite implica na degradação completa da rigidez à flexão e conseqüentemente na formação das rótulas plásticas.

### 2.5.1 Métodos numéricos para análise não linear física

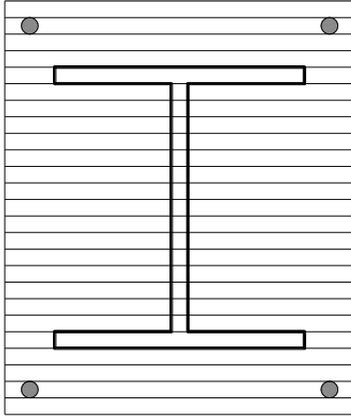
No contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), duas metodologias são utilizadas para simulação da não linearidade dos materiais em sistemas estruturais. São elas:

- Método da zona plástica (MZP);
- Método da rótula plástica (MRP).

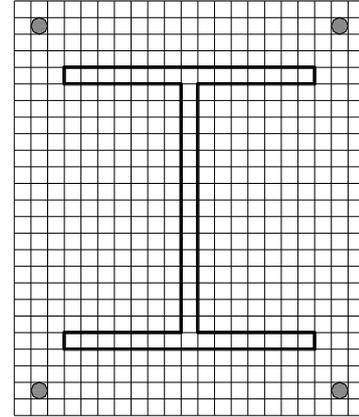
O MZP monitora os efeitos da não linearidade dos materiais ao longo do comprimento do elemento finito, sendo então caracterizado como método de plasticidade distribuída. Além do refinamento da malha global, divisão da estrutura em elementos finitos, esse método exige o refinamento local, ou seja, a discretização da seção transversal. Dependendo da dimensão do problema, essa discretização pode ser em fatias (problemas bidimensionais) ou em fibras (problemas tridimensionais), conforme ilustrado nas Figuras 2.10 e 2.11.

Chen e Kim (1997) definem o MZP como “exato”, já que não se faz necessário verificar a capacidade resistente de cada membro isoladamente. Isso porque os efeitos não lineares físicos e geométricos e as tensões residuais são consideradas explicitamente.

É importante ressaltar o esforço computacional intenso que o MZP requer. Assim, Gonçalves (2013) ressalta que a aplicação desse método é restrita à simulação de estruturas simples para comparação com resultados experimentais e/ou como calibração de novas metodologias de análise.



**Figura 2.10** – Discretização em fatias



**Figura 2.11** – Discretização em fibras

Já o MRP considera que os efeitos não lineares dos materiais ocorrem somente nos nós do sistema estrutural discretizado. Assim, os elementos permanecem em regime elástico caracterizando o MRP como método de análise concentrada. Torna-se essencial a sensibilidade do analista na discretização do sistema, uma vez que o mesmo deverá alocar os nós da malha de MEF em posições estratégicas.

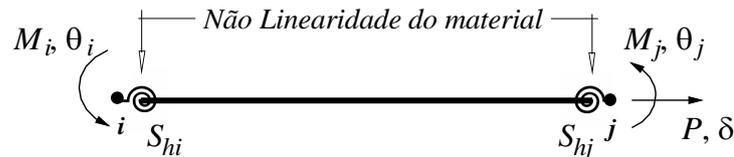
Por ser um método de análise concentrada, o MRP é mais eficiente que o MZP em termos de tempo de execução. Além de ressaltar tal eficiência, [Ziemian \(1993\)](#) exalta que a precisão dos resultados obtidos com o MRP são satisfatórios no contexto da Análise Avançada de estruturas de aço.

Dentro do MRP há duas abordagens diferentes. Uma considera que, até que a capacidade resistente da seção seja atingida, a mesma permanece em regime elástico, ou seja, trata-se de uma análise elástica-perfeitamente plástica. Esse modelo difere da realidade, já que a transição do regime elástico para o plástico ocorre gradualmente. Assim, surge a segunda metodologia, denominada Método da Rótula Plástica Refinado - MRPR, e que é utilizada neste trabalho. Na Seção [2.5.2](#), a seguir, são descritas características peculiares a respeito do MRPR.

## 2.5.2 Método da Rótula Plástica Refinado - MRPR

Segundo [Gonçalves \(2013\)](#), alguns pesquisadores refinaram o MRP buscando aumentar a eficiência sem perder a sua simplicidade. O refinamento ocorre introduzindo ao modelo uma das formas descritas no início do item [2.5](#): pelo módulo de elasticidade tangente ([CALDAS, 2004](#)); por uma curva de início de plastificação ([FONG, 2012](#)); ou pela rigidez

tangente à relação momento-curvatura (CHIOREAN, 2013). Assim, molas fictícias de comprimento nulo são dispostas nas extremidades do elemento finito, como mostrado na Figura 2.12, onde também são ilustrados os esforços internos,  $M_i$ ,  $M_j$  e  $P$ , os respectivos graus de liberdade  $\theta_i$ ,  $\theta_j$  e  $\delta$ , referentes ao sistema corrotacional e a rigidez das molas  $S_{hi}$  e  $S_{hj}$ , usada para simular a degradação da rigidez a flexão.



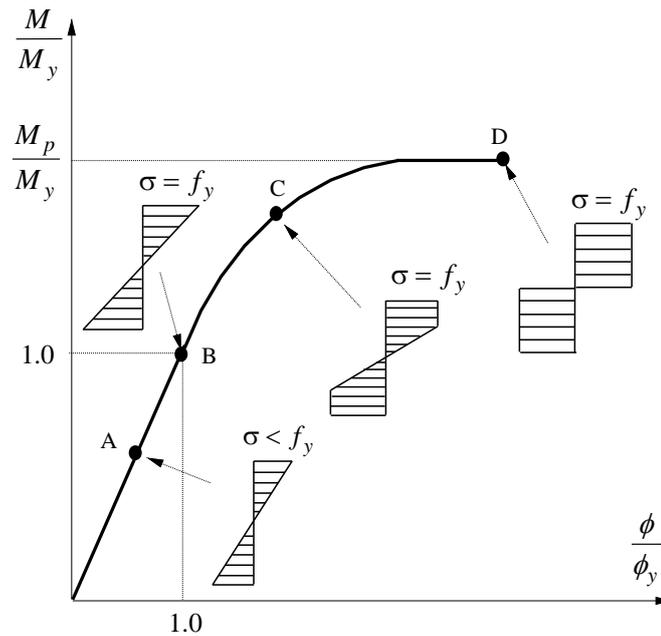
**Figura 2.12** – Elemento finito de viga-coluna com molas fictícias referenciado ao sistema corrotacional (SILVA, 2009)

Tanto o MRP como o MRPR têm como princípio a modificação dos termos referentes aos graus de liberdade de rotação na matriz de rigidez. Nesse contexto, duas formulações estão presentes no CS-ASA: a formulação nomeada PHF-1 (*Plastic-hinge formulation 1*) é baseada na metodologia desenvolvida por Liew *et al.* (1993a)/Liew *et al.* (1993b); e a formulação PHF-2 (nos conceitos de Chan e Chui (2000)).

No presente trabalho, seguindo a metodologia proposta por Fong e Chan (2012), Liu *et al.* (2012a) e Liu *et al.* (2012b), a formulação PHF-2 é modificada com a introdução de curvas de resistência compatíveis com os modelos de estruturas mistas. É importante salientar que nesses trabalhos uma discretização da seção também é realizada, principalmente para avaliação da contribuição do concreto na capacidade resistente do elemento.

## 2.6 Relações Momento-Curvatura

A relação momento-curvatura é uma representação do comportamento da seção transversal para um dado esforço axial. Pode-se então definir em qual regime a seção se encontra para diferentes valores de momento fletor. A Figura 2.13 ilustra tal situação para uma seção de aço com comportamento elasto plástico perfeito. A curva ilustra a perda de rigidez gradativa da seção ressaltando 4 pontos: A (regime elástico), B (início de plastificação), C (regime elasto-plástico) e D (regime plástico). Conclui-se que ao aplicar uma carga axial, o valor do momento no ponto D, ponto de máximo na relação momento-curvatura, indica o momento de resistente da seção, assim esse par de valores (N-M) é tido como um dos pontos da curva de resistência.



**Figura 2.13** – Diagrama momento-curvatura (adaptado de [Silva \(2009\)](#))

[Caldas \(2004\)](#) cita que relações momento-curvatura obtidas a partir de seções que sejam constituídas de concreto com relação tensão-deformação com trechos descendentes também apresentam ramos descendentes. Numericamente, é necessária uma estratégia de incrementos de momentos fletores que seja capaz de passar pelo ponto limite de carga D para obter os trechos descritos.

A negligência da resistência à tração do concreto poderia levar a uma perda na uniformidade das curvas momento-curvatura devido à queda brusca de resistência à formação de fissuras no início do processo de fissuração. Além disso, a consideração da resistência à tração do concreto aumenta um pouco o valor do momento máximo, muitas vezes de forma insignificante ([CHIOREAN, 2013](#)).

## 2.7 Curvas de Resistência

A superfície/curva de resistência, comumente chamada na literatura de curva de interação normal-momento, é o lugar geométrico dos pontos  $(N, M_y$  e  $M_z)$  ou  $(N$  e  $M)$  que correspondem à resistência última da seção. A superfície ou curva depende da geometria da seção, dos materiais empregados e dos limites de deformação fixados como últimos ([CALDAS, 2004](#)).

A definição da resistência de elementos mistos de aço e concreto submetidos aos esfor-

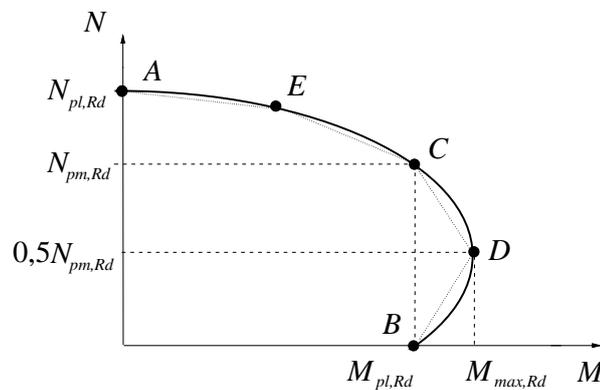
ços axial,  $N$ , e de momento fletor,  $M$ , simultaneamente não é tão simples como no caso de elementos de aço. Isso se deve ao comportamento não linear e anisotrópico do concreto, descrito no item 2.2. Para tornar o procedimento mais prático, as normas de projeto buscam simplificações no processo de obtenção das curvas de resistência propondo equações que relacionam  $N$  e  $M$ .

### 2.7.1 Norma Européia EUROCODE 4

O EUROCODE-4 (2004) considera que a curva de resistência pode ser definida por meio de duas metodologias:

- metodologia geral: aplicável a qualquer tipo de seção transversal;
- metodologia simplificada: limita-se a seções duplamente simétricas e sem variações ao longo da altura do elemento.

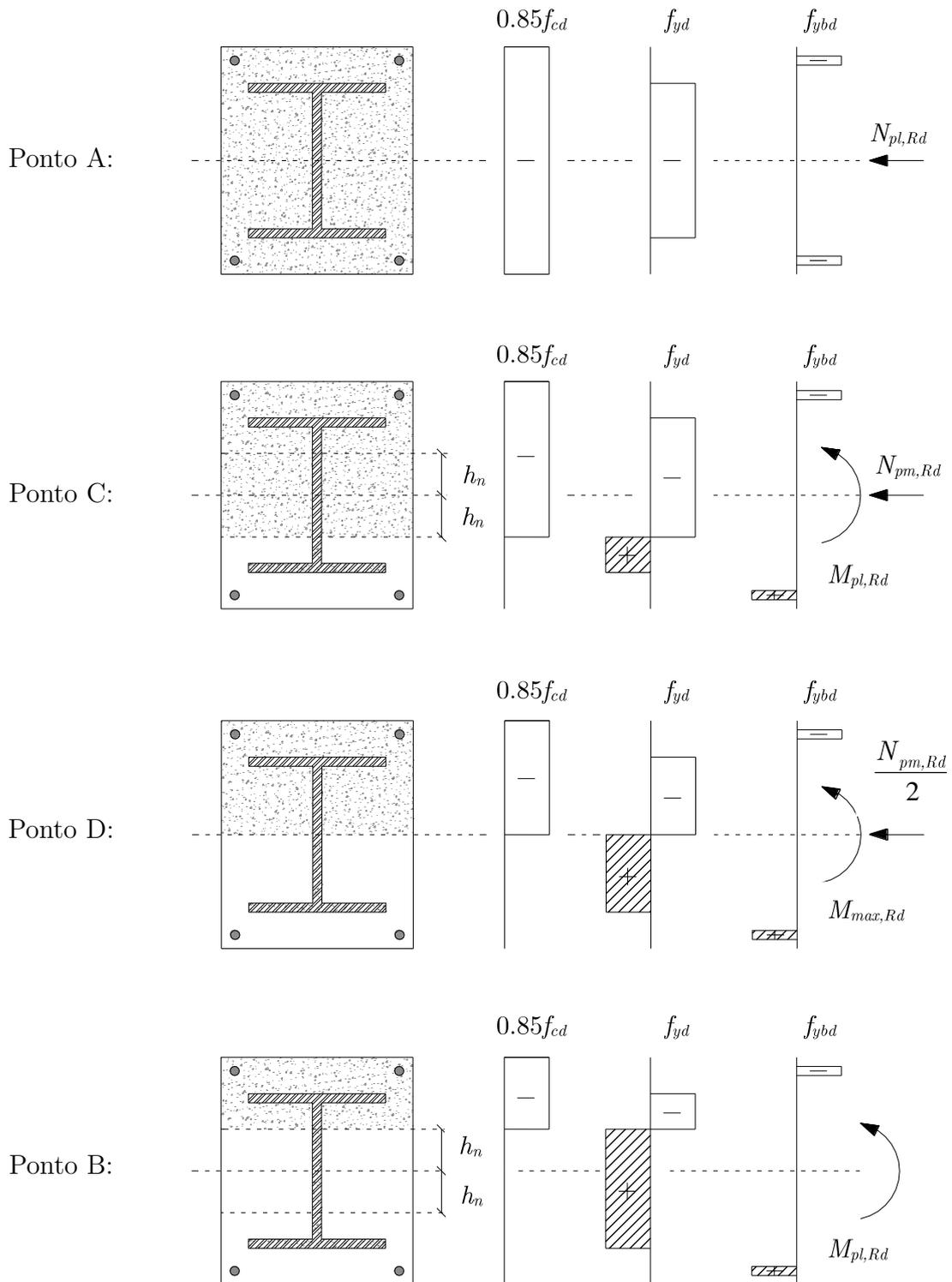
Pelo método simplificado, a curva de resistência é definida por meio de uma poligonal de quatro pontos,  $ACDB$ , ou cinco pontos,  $AECDB$ , como ilustrado na Figura 2.14. Esses pontos são obtidos por meio de posições da linha neutra previamente definidas.



**Figura 2.14** – Curva de resistência: pilares curtos EUROCODE-4 (2004)

O ponto A é definido considerando que o elemento está submetido simplesmente ao esforço axial de compressão. Considera-se então que a linha neutra está em “*menos infinito*”, implicando em uma distribuição uniforme de tensões na seção, conforme ilustrado na Figura 2.15.

Com base nessa distribuição, definem-se os esforços resistentes:



**Figura 2.15** – Combinação de esforços para obter os pontos da curva de resistência, adaptado de [EUROCODE-4 \(2004\)](#) e [Oehlers e Bradford \(1999\)](#)

$$Ponto \ A : \begin{cases} N_a = N_{pl,Rd} = A_a f_{yd} + A_b f_{ybd} + \gamma A_c f_{cd} \\ M_a = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

sendo  $N_{pl,Rd}$  a carga axial resistente de compressão da seção mista sem esforço de flexão associado,  $f_{yd}$  a resistência de escoamento de cálculo do aço do perfil,  $f_{ybd}$  a resistência de escoamento de cálculo do aço das barras,  $f_{cd}$  a resistência de cálculo do concreto à compressão, e  $\gamma$  coeficiente de redução da resistência à compressão para concretos não confinados.

O segundo ponto da curva de interação, ponto  $C$ , é definido aplicando uma carga axial de compressão igual à carga resistente da seção de concreto isolada,  $N_{pm,Rd}$ . Em seguida é possível determinar qual a fração da seção mista é necessária para resistir a essa carga por meio do parâmetro  $h_n$ , que indica a metade da altura da seção que resiste apenas ao esforço axial de compressão (Figura 2.15, pontos C e B). A fração restante fica responsável por resistir aos esforços de flexão. A distribuição de tensões plásticas, devido à combinação de esforços é mostrada na Figura 2.15.

Considerando que a área da seção de altura  $2h_n$  resiste apenas à compressão, pode-se calcular os módulos resistentes plásticos reduzidos, nas áreas da extremidade, e obter os esforços resistentes, axial e de flexão como descrito:

$$\text{Ponto } C : \begin{cases} N_c = N_{pm,Rd} = \gamma A_c f_{cd} \\ M_c = M_{pl,Rd} = Z_{an} f_{yd} + Z_{bn} f_{ybd} + \gamma \frac{Z_{cn}}{2} f_{cd} \end{cases} \quad (2.10)$$

em que  $N_{pm,Rd}$  é carga axial resistente de compressão da seção de concreto isolada,  $M_{pl,Rd}$  é o momento fletor resistente de cálculo da seção mista,  $Z_{an}$ ,  $Z_{bn}$  e  $Z_{cn}$  são os módulos resistentes plásticos reduzidos do perfil metálico, das armaduras e da seção de concreto, respectivamente, calculados com base no valor de  $h_n$ .

O ponto  $D$  caracteriza a condição em que a linha neutra coincide com o centroide plástico da seção transversal mista. Para que tal situação ocorra, o [EUROCODE-4 \(2004\)](#) determina que uma carga axial de compressão de intensidade igual à metade da capacidade resistente da seção de concreto isolada seja aplicada. Ilustra-se na Figura 2.15 a distribuição de tensões resultantes das cargas aplicadas.

Dessa forma, a capacidade resistente da seção é calculada como segue:

$$\text{Ponto } D : \begin{cases} N_d = \frac{N_{pm,Rd}}{2} = \gamma \frac{A_c}{2} f_{cd} \\ M_d = Z_a f_{yd} + Z_b f_{ybd} + \gamma \frac{Z_c}{2} f_{cd} \end{cases} \quad (2.11)$$

em que  $Z_a$  é o módulo resistente plástico do perfil metálico,  $Z_b$  é o módulo resistente plástico das barras, e  $Z_c$  é o módulo resistente plástico da seção de concreto.

O último ponto da curva, ponto B, descreve a situação em que o elemento está submetido à flexão pura, como ilustrado na Figura 2.15, juntamente com a distribuição de tensões. O EUROCODE-4 (2004) considera que a capacidade resistente à flexão nesse ponto é igual ao momento resistente calculado no ponto C,  $M_c$ , e assim escreve-se:

$$\text{Ponto B : } \begin{cases} N_b = 0 \\ M_b = M_c = M_{pl,Rd} \end{cases} \quad (2.12)$$

## 2.7.2 Norma Americana AISC/LRFD

Dois métodos simplificados são descritos na norma americana além da possibilidade do uso do Método da Compatibilidade de Deformação (MCD). O primeiro deles apresenta metodologia semelhante à do EUROCODE-4 (2004) discutida na seção 2.7.1. Ainda há a possibilidade de simplificar esse método por um modelo bilinear dado pelos pontos *ACB* na curva de resistência ilustrada na Figura 2.14. O segundo analisa a capacidade resistente de seções mistas duplamente simétricas com as mesmas equações dos elementos puramente metálicos. O que diferencia os modelos de estruturas metálicas e mistas é a determinação do esforço normal resistente,  $N_{pl,Rd}$ , e do momento de último resistente da seção,  $M_{pl,Rd}$ . Pode-se plotar a curva de resistência, ilustrada na Figura 2.16, com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{N}{N_{pl,Rd}} + \frac{8M}{9M_{pl,Rd}} = 1,0 \quad \text{para} \quad \frac{N}{N_{pl,Rd}} \geq 0,2 \\ \frac{N}{2N_{pl,Rd}} + \frac{M}{M_{pl,Rd}} = 1,0 \quad \text{para} \quad \frac{N}{N_{pl,Rd}} < 0,2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

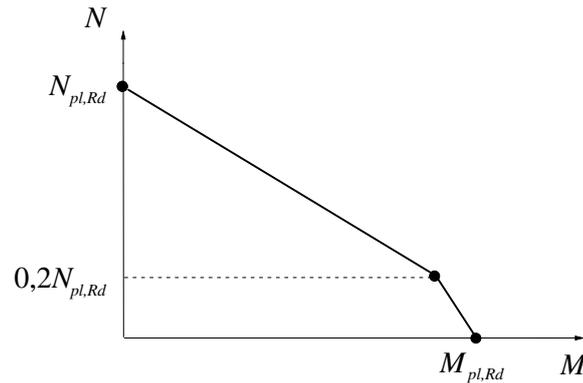
sendo  $N$  e  $M$  as cargas solicitantes normal e de momento fletor, e  $N_{pl,Rd}$  e  $M_{pl,Rd}$  os respectivos esforços resistentes.

Para perfis de aço totalmente envolvidos por concreto, a AISC/LRFD (2010) define a resistência nominal à compressão,  $N_{pl,c}$ , e à tração,  $N_{pl,t}$ , respectivamente, como:

$$N_{pl,c} = f_y A_a + f_{yb} A_b + 0,85 f_c A_c \quad (2.14)$$

$$N_{pl,t} = f_y A_a + f_{yb} A_b \quad (2.15)$$

sendo  $A_a$  a área do perfil metálico,  $A_b$  a área total das barras longitudinais,  $A_c$  a área de



**Figura 2.16** – Curva de resistência: pilares curtos [AISC/LRFD \(2010\)](#)

concreto da seção mista,  $f_y$  a resistência de escoamento do aço do perfil,  $f_{yb}$  a resistência de escoamento do aço das armaduras, e  $f_c$  a resistência do concreto à compressão.

Para a determinação do esforço nominal resistente de flexão,  $M_n$ , a norma propõe o uso de uma das três metodologias descritas a seguir:

- a superposição de tensões elásticas na seção mista (momento elástico);
- a distribuição de tensões plásticas na seção do perfil isoladamente (momento plástico);
- a distribuição de tensões plásticas ou o método de compatibilidade de deformações na seção mista.

Para o cálculo do esforço axial resistente de seções preenchidas por concreto devido ao efeito de confinamento modifica-se apenas a Equação 2.14, escrevendo:

$$N_{pl,c} = f_y A_a + C_2 f_c \left( A_c + A_b \frac{E_a}{E_c} \right) \quad (2.16)$$

em que  $C_2$  é igual à 0,85 para seções retangulares e 0,95 para circulares,  $E_a$  é o módulo de elasticidade do aço, e  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto.

Nesse caso, o momento nominal resistente é calculado com a distribuição de tensões plásticas na seção mista.

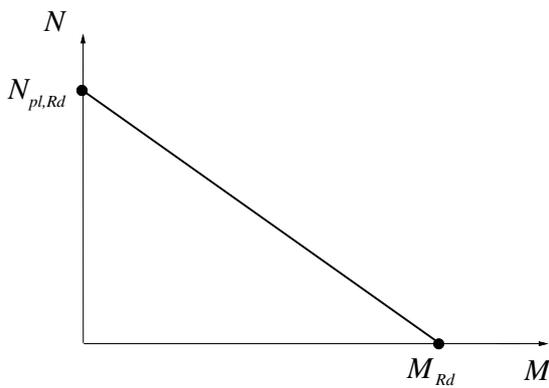
Por fim, os esforços resistentes de cálculo,  $N_{pl,Rd}$  e  $M_{pl,Rd}$ , são definidos por  $\phi_n N_{pl,c}$  ou  $\phi_n N_{pl,t}$  para o esforço axial e  $\phi_n M_n$  para o momento fletor. Pela [AISC/LRFD \(2010\)](#),  $\phi_n$  é o coeficiente de minoração da resistência.

### 2.7.3 Norma Britânica BS 5400-5

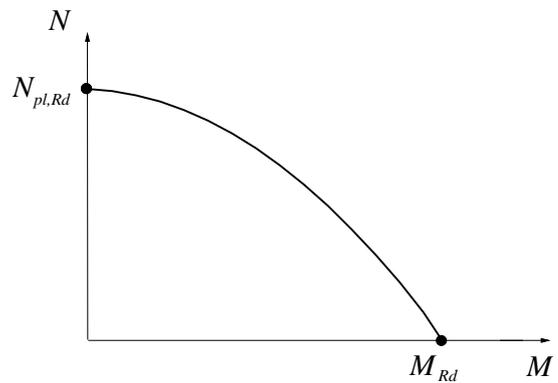
As possíveis curvas da norma britânica ilustradas nas Figuras 2.17 e 2.18 são obtidas por meio da expressão:

$$N_{Rd} = N_{pl,Rd} \left[ K_1 - (K_1 - K_2 - 4K_3) \frac{M_{Sd}}{M_{Rd}} - 4K_3 \left( \frac{M_{Sd}}{M_{Rd}} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

em que  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  são coeficientes que correlacionam a instabilidade global, a curvatura do elemento e o eixo de flexão, e  $M_{Rd}$  é o momento resistente de cálculo.



**Figura 2.17** – Curva de resistência com  $K_3 = 0$



**Figura 2.18** – Curva de resistência com  $K_3 \neq 0$

Para avaliar a capacidade resistente da seção isoladamente, deve-se considerar que o elemento estrutural seja classificado como compacto. Assim, o coeficiente  $K_1$  é tomado como 1. Já os parâmetros  $K_2$  e  $K_3$  são calculados de forma específica para cada tipo de seção. Para tubos circulares preenchidos com concreto, a norma BS5400-5 (1979) define as seguintes expressões para o cálculo de  $K_2$  e  $K_3$ :

$$K_2 = \frac{115 + 30(1,8 - \alpha_c)}{105} (0,9\alpha_c^2 + 0,2) \quad (2.18)$$

$$K_3 = 0,04 - \frac{\alpha_c}{15} \quad (2.19)$$

em que:

$$\alpha_c = \frac{0,45A_c \left( f_{cd} + 9,47f_{yd} \frac{t}{D_e} \right)}{N_{pl,Rd}} \quad (2.20)$$

sendo  $t$  a espessura da parede do tubo de aço e  $D_e$  o respectivo diâmetro externo.

Para os demais tipos de seção, tem-se para  $K_2$ :

$$K_2 = \frac{90 + 25(1,8 - \alpha_c)}{75} (0,9\alpha_c^2 + 0,2) \quad (2.21)$$

sendo:

$$\alpha_c = \frac{0,45A_c f_{cd}}{N_{pl,Rd}} \quad (2.22)$$

No caso da seção total ou parcialmente revestida estar submetida à flexão em torno do eixo de menor inércia, toma-se  $K_3$  igual a 0,425. Para flexão em torno do eixo de maior inércia ou em seções retangulares preenchidas, adota-se conservadoramente  $K_3$  igual a 0.

A capacidade resistente à compressão, sem influência do momento fletor para seções envolvidas (PTR) ou preenchidas retangulares (TRP), é dada por:

$$N_{pl,Rd} = 0,91A_a f_{yd} + 0,87A_b f_{ybd} + 0,45A_c f_{cd} \quad (2.23)$$

sendo  $A_a$ ,  $A_b$  e  $A_c$  as áreas do perfil metálico, das barras longitudinais, e de concreto da seção mista, respectivamente; e  $f_y$  a resistência de escoamento do aço do perfil,  $f_{yb}$  a resistência de escoamento do aço das barras, e  $f_c$  a resistência do concreto à compressão.

No caso dos elementos curtos que apresentam seção tubular circular, a resistência à compressão é calculada como:

$$N_{pl,Rd} = 0,91A_a (0,76f_{yd}) + 0,45A_c \left( f_{cd} + 9,47f_{yd} \frac{t}{D_e} \right) \quad (2.24)$$

O momento fletor resistente de cálculo é definido com base no tipo de seção (envolvidas e preenchidas retangulares e circulares), assim como os coeficientes  $K_2$  e  $K_3$ , e posição da linha neutra. Assim, a norma [BS5400-5 \(1979\)](#) fornece equações para cada um dos casos descritos a seguir. Para seção envolvida por concreto com a LN fora da seção de aço, o momento resistente é calculado como:

$$M_{Rd} = 0,91f_{yd}A_a \frac{(d - d_c)}{2} + 0,87f_{ybd} \frac{A_b}{2} d_r \quad (2.25)$$

em que  $d$  é a dimensão da seção perpendicular ao eixo de flexão,  $d_r$  é a distância entre as barras longitudinais perpendicular ao eixo de flexão, e  $d_c$  distância da linha neutra à face mais comprimida do concreto.

No caso da seção ser total ou parcialmente revestida com concreto sob flexão em torno do eixo de maior inércia, e a linha neutra estar posicionada dentro da mesa do perfil metálico, o momento resistente é dado por:

$$M_{Rd} = 0,91f_{yd} \left[ A_a \frac{(d - d_c)}{2} - b_f d_s (d_c - d_s) \right] + 0,87f_{ybd} \frac{A_b}{2} d_r \quad (2.26)$$

sendo  $b_f$  a largura da mesa da seção metálica e  $d_s$  a espessura da seção de concreto externa ao perfil envolvido.

E, se a linha neutra estiver na alma do perfil de aço, tem-se:

$$M_{Rd} = 0,91f_{yd} \left[ A_a \frac{(d - d_c)}{2} - b_f t_f (d_s - d_w) - t_w d_w (d_c - d_w) \right] + 0,87f_{ybd} \frac{A_b}{2} d_r \quad (2.27)$$

na qual,  $t_f$  é espessura da mesa da seção metálica,  $t_w$  é espessura da alma da seção metálica e  $d_w$  é altura da alma comprimida.

O momento resistente para a flexão em torno do eixo de menor inércia em seções total ou parcialmente revestidas é dado como:

$$M_{Rd} = 0,91f_{yd} \left[ A_a \frac{(d - d_c)}{2} - 2t_f d_s (d_c - d_s) \right] + 0,87f_{ybd} \frac{A_b}{2} d_r \quad (2.28)$$

Caso a seção seja tubular retangular preenchida com concreto, a norma [BS5400-5 \(1979\)](#) define para o momento resistente a seguinte expressão:

$$M_{Rd} = 0,91f_{yd} \left[ A_a \frac{(d - d_c)}{2} + b_f t_f (t_f + d_c) \right] \quad (2.29)$$

Por fim, tem-se que para seções circulares o momento resistente é calculado como:

$$M_{Rd} = 0,91f_{yd} Z_a (1 + 0,01m) \quad (2.30)$$

em que  $m$  é obtido através de um ábaco ([BS5400-5, 1979](#)), correlacionando o diâmetro e a espessura da parede do tubo ( $D_e/t$ ), e a razão entre a resistência do concreto à ruptura e a resistência de escoamento do aço.

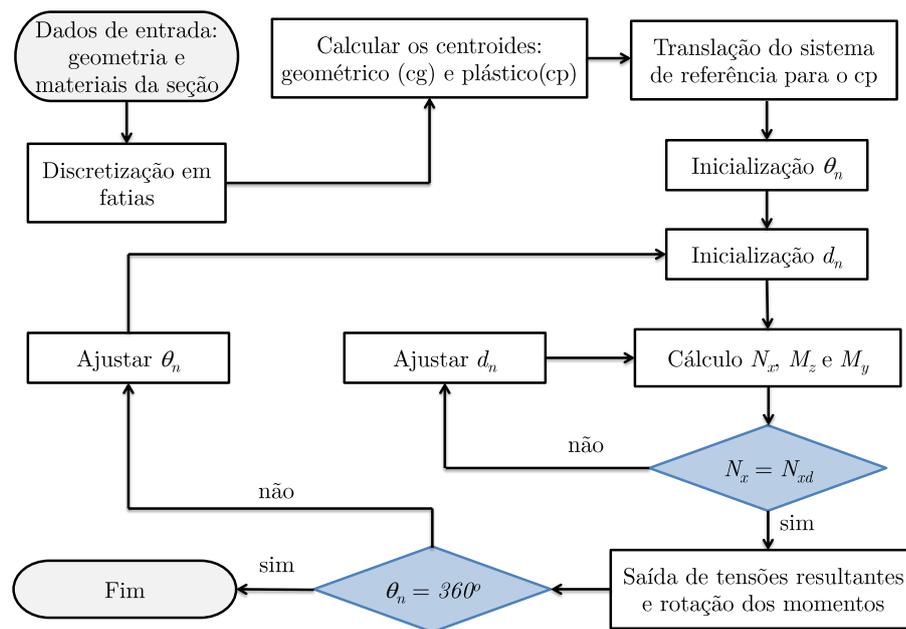
## 2.7.4 Compatibilidade de Deformações

Esse método busca acoplar a configuração deformada da seção às relações constitutivas dos materiais que a compõem. Deve-se definir então uma forma de discretização para que

as deformações da seção sejam captadas da forma mais eficiente possível. A divisão da área em fatias ou fibras, apresentadas no item 2.5.1, apresentam bons resultados, mas são sensíveis ao grau de refinamento imposto pelo analista.

São encontradas na literatura pesquisas que utilizam basicamente dois processos iterativos para obtenção das curvas/superfícies de resistência: métodos *quasi-Newton* e o método de *Newton-Raphson*.

Adeptos dos métodos *quasi-Newton*, [Chen et al. \(2001\)](#), [Chan et al. \(2010\)](#) e [Liu et al. \(2012a\)](#) utilizam esse procedimento de solução para problemas não lineares acoplado ao método da falsa posição. O processo consiste na determinação da posição da linha neutra ( $d_n$ ) e sua orientação ( $\theta_n$ , no caso de problemas tridimensionais), que são os parâmetros ajustados no ciclo iterativo. Com isso, pode-se obter os esforços internos resistentes. A Figura 2.19 ilustra esse procedimento e maiores detalhes podem ser vistos em [Liu et al. \(2012a\)](#).



**Figura 2.19** – Fluxograma: processo *quasi-Newton* acoplado à falsa posição ([LIU et al., 2012a](#))

Já a obtenção da curva/superfície de resistência pelo método de *Newton-Raphson* usa como variáveis de ajuste a deformação axial na posição do centroide plástico,  $\varepsilon_0$ , e as curvaturas,  $\phi_x$  e  $\phi_y$ . Pode-se então, determinar a deformação axial em qualquer fatia da discretização da seção e utilizar as relações constitutivas dos materiais para o somatório de tensões. Tal procedimento será descrito detalhadamente no próximo capítulo.

# Metodologia Numérica para Análise Avançada de Estruturas Mistas

### 3.1 Introdução

As metodologias numéricas se destacam como valiosas ferramentas de auxílio aos projetistas e analistas estruturais. De fato, as equações diferenciais provenientes dos problemas da engenharia estrutural são inviáveis de serem solucionadas analiticamente.

Um dos métodos numéricos de maior destaque é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste, basicamente, na divisão do problema contínuo em subdomínios (elementos) conectados por meio de pontos nodais. O resultado dessa divisão é conhecido na literatura como malha. Quanto maior for o refinamento dessa malha, melhor será a resposta numérica obtida, porém o esforço computacional pode-se tornar um contraponto. A solução aproximada do problema estrutural via MEF é obtida nos pontos nodais descrevendo tanto o comportamento global da estrutura quanto a nível de elemento.

Nesse contexto surgiu o CS-ASA ([SILVA, 2009](#)), que foi inicialmente desenvolvido para análise avançada tanto estática quanto dinâmica de estruturas metálicas. Intervenções foram realizadas nessa plataforma no sentido de viabilizar análises não lineares geométricas e dos materiais de estruturas mistas.

Destaca-se que ao longo deste capítulo serão discutidas, além da formulação de MEF, Seção 3.3, as estratégias de incremento de carga e iteração no item 3.2 e as curvas de resistência e início de plastificação, tanto para uma metodologia generalizada, item 3.4, quanto para as curvas de normas de projeto, seção 3.5.

## 3.2 Solução do Problema Estático Não Linear

Segundo [Silva \(2009\)](#), no estudo do comportamento não linear de uma estrutura, a atualização constante da matriz de rigidez é necessária para obtenção do estado de equilíbrio devido às alterações em sua geometria e não linearidade dos materiais. Quando esses dois primeiros fatores são levados em conta no problema de engenharia estrutural, eles são introduzidos na matriz de rigidez,  $\mathbf{K}$ , como:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_h) \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{P}$  são as forças internas, e  $\mathbf{S}_h$  é o parâmetro de avaliação do comportamento não linear dos materiais.

Numericamente, o processo de solução do problema estático não linear, por uma estratégia incremental e iterativa, pode ser dividido em duas etapas: solução incremental predita e o ciclo de iterações. O processo consiste em, para cada incremento de carga dado, obter o equilíbrio entre forças internas e externas da seguinte forma:

$$\lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_h) \cong 0 \quad (3.2)$$

sendo  $\mathbf{F}_i$  o vetor de forças internas,  $\mathbf{F}_r$  o vetor de referência em que somente sua direção é importante e  $\lambda$  o fator de carga.

Métodos eficientes de solução de sistemas não lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio (primário ou secundário) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos críticos (pontos limites de carga e de deslocamento e/ou pontos de bifurcação que possam existir ([SILVEIRA, 1995](#))).

A seguir são descritos alguns dos passos fundamentais das etapas do procedimento de solução de problemas estáticos não lineares. Porém, inicialmente são feitas, a seguir, algumas observações a respeito da notação adotada:

- considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga  $t + \Delta t$ ;
- $k$  é o contador do número de iterações. A primeira fase, solução incremental predita, ocorre em  $k = 0$ , e o ciclo iterativo para valores de  $k \neq 0$ ;

- $\lambda$  e  $\mathbf{U}$  definem o parâmetro de carga e deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{U}$  são respectivamente os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}$  correspondem às correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o procedimento iterativo.

### 3.2.1 Solução incremental predita

Considerando que todas as variáveis do problema estrutural sejam conhecidas na configuração  $t$ , monta-se, nesse ponto, a matriz de rigidez tangente,  $\mathbf{K}$ . O vetor de deslocamentos nodais  $\delta\mathbf{U}_r$  pode então ser obtido através da equação:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r \quad (3.3)$$

O incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , é determinado automaticamente por meio de uma das diversas estratégias de incremento de carga e iteração que estão presentes no CS-ASA, e podem ser vistas em [Silveira \(1995\)](#), [Rocha \(2000\)](#), [Silva \(2009\)](#) e [Maximiano \(2012\)](#). Essa seleção pode estar condicionada a uma equação de restrição adicional imposta ao problema. Para este trabalho, será utilizada a técnica do deslocamento generalizado ([YANG; KUO, 1994](#)). Assim,  $\Delta\lambda^0$  é calculado como:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{\left| \frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) ({}^1\delta\mathbf{U}_r)}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) (\delta\mathbf{U}_r)} \right|} = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{|GSP|} \quad (3.4)$$

em que o índice 1 indica os valores de  $\Delta\lambda^0$  e  $\delta\mathbf{U}_r$  obtidos no primeiro passo de carga e GSP (*Generalized Stiffness Parameter*) representa o parâmetro de rigidez generalizado do sistema. O sinal da equação anterior depende apenas dos vetores  ${}^t\delta\mathbf{U}_r$  (passo de carga anterior) e  $\delta\mathbf{U}_r$  (passo de carga corrente). Segundo [Silva \(2009\)](#) apud [Yang e Kuo \(1994\)](#), o parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanecerá sempre positivo.

Com a determinação de  $\Delta\lambda^0$ , os deslocamentos nodais totais incrementais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ , são obtidos escalonando-se  $\delta\mathbf{U}_r$ , ou seja:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r \quad (3.5)$$

Os parâmetros de carga e de deslocamentos nodais totais podem ser atualizados por meio das seguintes expressões:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.6)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.7)$$

em que  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{U}$  descrevem o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga.

Como as Equações 3.6 e 3.7 nem sempre determinam um ponto de equilíbrio do sistema, é necessário então ajustá-las para que tal condição seja atingida. Isso é feito por meio do ciclo de iterações descrito a seguir.

### 3.2.2 Ciclo de iterações

A maioria dos métodos de resolução de problemas estruturais não lineares é baseada no método de *Newton-Raphson* (CRISFIELD, 1991). O processo iterativo é repetido até que a condição imposta pela Equação 3.2 seja atingida pela seguinte expressão:

$$\mathbf{g} = \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_h) \quad (3.8)$$

sendo  $\mathbf{g}$  o vetor de forças residuais, que indica o desequilíbrio de forças do sistema estrutural. Quando esse vetor se anula pode-se afirmar que o equilíbrio foi atingido.

No esquema tradicional do método de *Newton-Raphson* o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante ao longo de todo o processo iterativo. Dessa forma, a trajetória de equilíbrio pode ser obtida até que um ponto limite e/ou de bifurcação seja atingido. A liberdade de variação de  $\lambda$  possibilita que toda a trajetória de equilíbrio seja traçada, e assim, a equação de equilíbrio passa a ser escrita da seguinte forma (BATOZ; DHATT, 1979):

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k\right), k \geq 1 \quad (3.9)$$

Sendo uma variável agora, o parâmetro de carga para a iteração corrente  $k$  é calculado como:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.10)$$

A correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda^k$ , é definida por meio de uma estratégia de

iteração. Neste trabalho, foi utilizada a estratégia da norma mínima dos deslocamentos residuais proposta por Chan (1988), em que  $\delta\lambda^k$  é definido por:

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (3.11)$$

sendo  $\delta\mathbf{U}_g^k$  a correção obtida da aplicação do método de *Newton-Raphson* com a estratégia convencional de incremento de  $\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}_r^k$  o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de  $\mathbf{F}_r$ .

Substituindo as Equações 3.8 e 3.10 em 3.9, tem-se:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = [(\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)}] = \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.12)$$

Observe então que o vetor de deslocamentos nodais iterativos,  $\delta\mathbf{U}^k$ , expresso na equação anterior, pode ser escrito como a soma de duas parcelas, como:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.13)$$

em que:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = (\mathbf{K}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.14)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = (\mathbf{K}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{F}_r \quad (3.15)$$

O vetor de deslocamentos iterativos,  $\delta\mathbf{U}_r^k$ , será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais,  $\delta\mathbf{U}_r$ , definido na Equação 3.3, quando for utilizado o método de *Newton-Raphson* modificado, uma vez que a matriz de rigidez é mantida constante ao longo do processo iterativo.

As variáveis incrementais são atualizadas da seguinte forma após a obtenção das soluções iterativas:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.16)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.17)$$

e, por fim, as variáveis totais:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (3.18)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (3.19)$$

Para que o equilíbrio seja atingido é necessário que um critério de convergência seja satisfeito. Dessa forma, o usuário deve fornecer na entrada de dados uma tolerância aceitável,  $\zeta$ , para o processo iterativo ser interrompido. No CS-ASA há dois critérios de convergência, sendo o primeiro deles baseado no equilíbrio das forças presentes no sistema, e é calculado como:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (3.20)$$

sendo representado pela razão das normas Euclidianas do vetor de forças residuais e do vetor de incremento de carregamento externo.

O segundo critério de convergência tem como parâmetro de análise os deslocamentos, e é definido como:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (3.21)$$

em que o numerador é tido pela norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos, e o denominador pela norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, obtidos após a correção do processo iterativo.

A Tabela 3.1 descreve sequencialmente os procedimentos, descritos nesta seção, realizados no processo de solução do problema estático não linear.

### 3.3 Formulação de Elementos Finitos

Em análises geometricamente não lineares é usual e eficiente o uso dos referenciais Lagrangianos: Total (RLT) e Atualizado (RLA).

Na abordagem total (RLT), a configuração de referência corresponde ao estado original da estrutura descarregada, ou seja, os deslocamentos são sempre medidos em relação à configuração inicial indeformada da estrutura (CRISFIELD, 1991).

No RLA, os deslocamentos causados por uma carga em  $t_1$  são medidos em relação à última configuração de equilíbrio,  $t$ . Pode-se dizer então, que o referencial é móvel, sendo transferido para a posição que o elemento ocupa no passo de carga anterior ao passo corrente. Nesse caso, as rotações podem ser divididas em partes menores e podem ser melhor aproximadas pelas funções de interpolação (SILVA, 2009). Esse referencial é adotado na formulação de elementos finitos apresentada a seguir.

**Tabela 3.1** – Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear

---



---

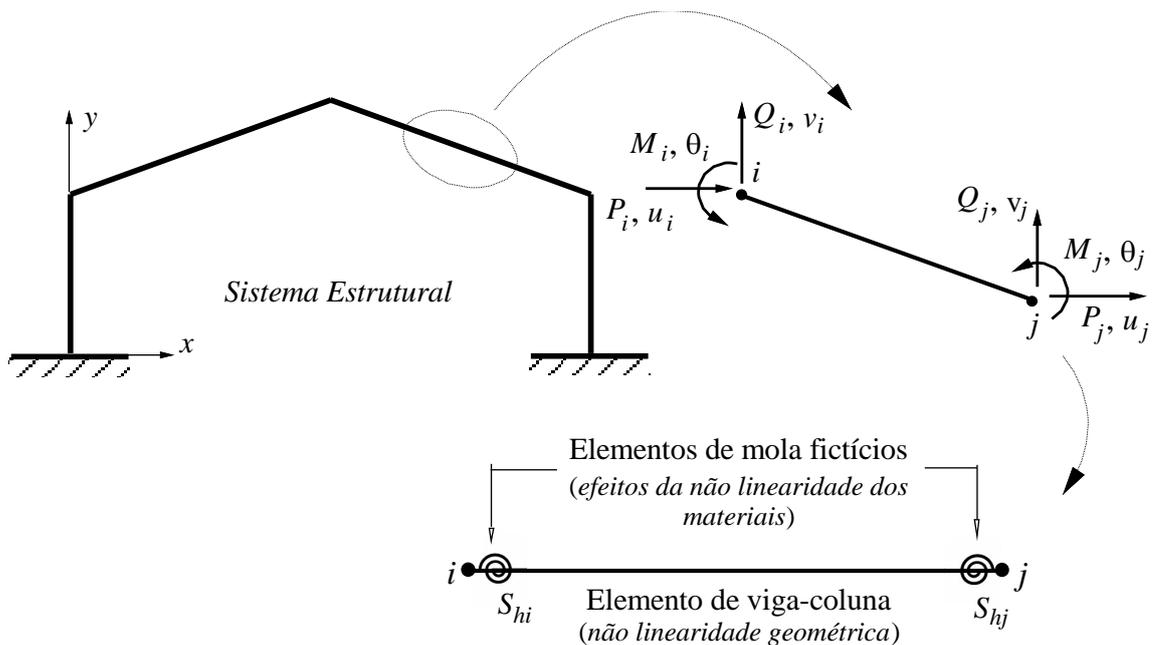
1.	Leitura dos dados gerais da estrutura e do tipo de análise	
2.	Montagem do vetor de cargas de referência, $\mathbf{F}_r$ (direção da carga externa aplicada)	
3.	$t = 0$	
4.	$t_1 = t$	
5.	Considera-se a condição inicial ${}^t\mathbf{U} = \mathbf{0}$ e ${}^t\lambda = 0$	
6.	<b>para</b> cada incremento de carga <b>faça</b>	▷ <b>PROCESSO INCREMENTAL</b>
7.	$t = t_1$	▷ Passo de carga anterior
8.	$t_1 = t + 1$	▷ Passo de carga corrente
9.	Monta-se a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}$ (Equação 3.36)	
10.	Resolve: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$	
11.	<b>se</b> $t_1 = 1$ <b>então</b>	
12.	$\Delta\lambda^0 = (\Delta\lambda^0)_1$	
13.	<b>senão</b>	
14.	Define: $\Delta\lambda^0$ (Equação 3.4)	
15.	<b>fim se</b>	
16.	Determina: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r$	
17.	Atualiza as variáveis na configuração $t_1$ : ${}^{t_1}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda_0$ e ${}^{t_1}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$	
18.	<b>para</b> $k \leftarrow 1, nmax$ <b>faça</b>	▷ <b>PROCESSO ITERATIVO</b>
19.	Avalia o vetor de forças internas: ${}^{t_1}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$	
20.	Calcula o vetor de forças residuais: $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{t_1}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{t_1}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$	
21.	<b>se</b> $\ \mathbf{g}^{(k-1)}\  \div \ \Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\  \leq \text{tolerância}$ <b>então</b>	
22.	Pare o processo iterativo e siga para linha 32	
23.	<b>fim se</b>	
24.	<b>se</b> Newton-Raphson padrão <b>então</b>	
25.	Atualiza a matriz $\mathbf{K}$	
26.	<b>fim se</b>	
27.	Calcula a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$ (Equação 3.11)	
28.	Correção dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$	
29.	Atualizam-se as variáveis incrementais e totais: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{k-1} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{k-1} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$ ${}^{t_1}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{t_1}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$	
30.	<b>fim para</b>	
31.	Atualiza a variável $S_h$ e outras que forem necessárias	
32.	<b>fim para</b>	

---



---

Adota-se um elemento clássico de viga-coluna com seis graus de liberdade, sendo três deles em cada um dos nós de extremidade. Cada nó pode realizar duas translações, uma no eixo  $x$ , e outra no  $y$ , além da rotação em torno do eixo ortogonal ao plano  $xy$ ,  $z$ , como mostrado na Figura 3.1. Neste trabalho a abordagem da não linearidade dos materiais é feita no contexto do Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). Como descrito no item 2.5.2, molas fictícias de comprimento nulo e rigidez  $S_h$  são dispostas nas extremidades, nós, do elemento.



**Figura 3.1** – Elemento finito adotado (SILVA, 2009)

É importante destacar algumas considerações envolvendo a formulação de elementos finitos adotada neste trabalho, isto é:

- todos os elementos são inicialmente retos e prismáticos e a seção transversal permanece plana após a deformação;
- são desprezados os efeitos de instabilidade locais, como a flambagem nas chapas componentes dos perfis de aço, assim a seção pode desenvolver sua capacidade total de rotação plástica;
- os efeitos de instabilidade globais que podem acontecer em problemas tridimensionais, como a flambagem lateral ou torcional, são ignorados considerando um sistema de travamento no eixo  $z$ ;

- grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos;
- as deformações originadas pelo cisalhamento são ignoradas;
- interação total entre os elementos de aço e concreto.

Em diversos estudos, tais como Chan *et al.* (2010), Fong e Chan (2012) e Liu (2013), a formulação proposta por Chan e Chui (2000) é utilizada para análise não linear física de estruturas mistas. Essa formulação é baseada no MRPR utilizando referencial Lagrangiano atualizado e corrotacional. Esse último é definido por um sistema de eixos ortogonais, conectados às extremidades dos elementos, que translada conjuntamente com as deformações. Pode-se afirmar que tanto a matriz de rigidez quanto o vetor de forças internas são obtidos no campo de deslocamentos naturais, aqueles que realmente causam deformação. O elemento de viga-coluna no referido sistema pode ser visto na Figura 2.12.

No MRPR, a rigidez das molas fictícias é definida no regime elástico como  $10^{16}$ , e no plástico como  $10^{-10}$ . A degradação da rigidez quando em regime elasto plástico, pode ser acompanhado pela equação:

$$S_h = \frac{(EI)_{comp}}{L} \left( \frac{M_{pr} - M}{M - M_{er}} \right) \quad (3.22)$$

em que  $L$  é o comprimento do elemento finito;  $M_{pr}$  e  $M_{er}$  são, respectivamente, os momentos resistente último e de início de plastificação; e  $(EI)_{comp}$  é a rigidez a flexão da seção mista homogeneizada que, para seções duplamente simétricas é dada por:

$$(EI)_{comp} = \eta [(EI)_a + (EI)_b + (\mu EI)_c] \quad (3.23)$$

em que os subscritos  $a$ ,  $b$  e  $c$  referem-se, respectivamente, ao perfil de aço, às armaduras e ao concreto;  $\mu$  o fator de redução da rigidez flexional de concreto devido à fissuração; e  $\eta$  um coeficiente de redução da rigidez global. Esses últimos são tidos como dados de entrada, já que há uma gama de possibilidades de valores disponíveis na literatura. No caso de lajes apoiadas sobre perfis I, Liew *et al.* (2001) apud Viest *et al.* (1997) definem a seguinte expressão:

$$(EI)_{comp} = E_a (0, 4I_{comp} + 0, 6I'_{comp}) \quad (3.24)$$

sendo  $I_{comp}$  e  $I'_{comp}$  os momentos de inércia da seção mista em regiões de momento positivo e de momento negativo, respectivamente, e  $E_a$  é módulo de elasticidade do aço do perfil.

A relação de equilíbrio do elemento finito na forma incremental, no sistema corrotacional, é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA_{comp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & S_{hi} - \frac{S_{hi}^2(k_{jj} + S_{hj})}{\beta} & \frac{S_{hi}S_{hj}k_{ij}}{\beta} \\ 0 & \frac{S_{hi}S_{hj}k_{ji}}{\beta} & S_{hj} - \frac{S_{hj}^2(k_{ii} + S_{hi})}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

ou ainda, na sua forma compacta, tem-se:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (3.26)$$

na qual,  $\Delta P$ ,  $\Delta M_i$  e  $\Delta M_j$  são os incrementos de força axial e de momento fletor;  $\Delta L$ ,  $\Delta \theta_i$  e  $\Delta \theta_j$  são os incrementos de deformação axial e rotação nodais, respectivamente; e  $\beta = (S_{hi} + k_{ii})(S_{hj} + k_{jj}) - k_{ij}k_{ji} > 0$ .

Já os parâmetros  $k_{ii}$ ,  $k_{ij}$ ,  $k_{ji}$  e  $k_{jj}$  são termos da matriz de rigidez que dependem da formulação geometricamente não linear. Optou-se, neste trabalho, pela formulação SOF-2 linearizada, proposta por [Yang e Kuo \(1994\)](#) e assim tem-se, para os coeficientes da matriz de rigidez as expressões:

$$k_{ii} = k_{jj} = \frac{4(EI)_{comp}}{L} + \frac{2PL}{15} + \frac{4P(I_{comp})}{L(A_{comp})} \quad (3.27)$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \frac{2(EI)_{comp}}{L} - \frac{PL}{30} + \frac{2P(I_{comp})}{L(A_{comp})} \quad (3.28)$$

sendo  $I_{comp}$  e  $A_{comp}$  as propriedades geométricas da seção mista homogeneizada. Deve-se notar que a inércia pode ser obtida isolando  $I_{comp}$  na Equação 3.23 ou na Equação 3.24, e a área é definida como:

$$A_{comp} = A_a + \frac{(EA)_b + (EA)_c}{E_a} \quad (3.29)$$

em que  $A_a$  é a área do perfil de aço,  $(EA)_b$  e  $(EA)_c$  são as rigidezes axiais das barras e do concreto, respectivamente; e  $E_a$  o módulo de elasticidade do aço.

Definidos no sistema corrotacional, os termos das Equações 3.25 e 3.26 devem ser transformados para o sistema de coordenadas local e em seguida para o sistema global. O

vetor de forças nodais do elemento,  $\mathbf{f}_l$ , é obtido no sistema local por meio da expressão:

$$\mathbf{f}_l = \mathbf{T}_{cl}\mathbf{f}_c \quad (3.30)$$

em que  $\mathbf{f}_c$  é o vetor de forças no sistema corrotacional e  $\mathbf{T}_{cl}$  é a matriz de transformação:

$$\mathbf{T}_{cl}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

E, na forma incremental,  $\Delta\mathbf{f}_l$ , é dado por:

$$\Delta\mathbf{f}_l = \Delta(\mathbf{T}_{cl}\mathbf{f}_c) = \mathbf{T}_{cl}\Delta\mathbf{f}_c + \Delta\mathbf{T}_{cl}\mathbf{f}_c \quad (3.32)$$

Chan e Chui (2000) definem que a parcela  $\Delta\mathbf{T}_{cl}\mathbf{f}_c$ , referente ao trabalho realizado pelas forças nodais básicas, da Equação 3.32, pode ser substituída por  $\mathbf{N}\Delta\mathbf{u}$ , sendo a matriz  $\mathbf{N}$  calculada como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P/L & 0 & 0 & -P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P/L & 0 & 0 & P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Relacionando os deslocamentos nodais incrementais no sistema local,  $\Delta\mathbf{u}$ , e no sistema corrotacional,  $\Delta\mathbf{u}_c$ , tem-se:

$$\Delta\mathbf{u}_c = \mathbf{T}_{cl}^T\Delta\mathbf{u} \quad (3.34)$$

Usando agora a forma simplificada da relação força-deslocamento no sistema corrotacional (Equação 3.26) na Expressão 3.34 e substituindo na Equação 3.32, chega-se a:

$$\Delta\mathbf{f}_l = (\mathbf{T}_{cl}\mathbf{K}_c\mathbf{T}_{cl}^T + \mathbf{N})\Delta\mathbf{u} = \mathbf{K}_e\Delta\mathbf{u} \quad (3.35)$$

na qual  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez de elemento no sistema local. Essa matriz, por fim, é transformada para o sistema global da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{eg} = \mathbf{R}^T\mathbf{K}_e\mathbf{R} \quad (3.36)$$

sendo  $\mathbf{R}$  a matriz de rotação, dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Em uma seção plastificada, ou seja, com a combinação de esforços  $N$  e  $M$  sobre a curva de resistência, numericamente o aumento da força axial externa resulta no desequilíbrio do sistema. As cargas atuantes naquela seção ultrapassam o limite de resistência da mesma. Isso é contornado na formulação utilizada por meio da estratégia denominada *return mapping*. Aqui, é feita uma alteração na relação força-deslocamento do elemento (Equação 3.25) para que as equações de resistência última da seção não sejam violadas, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (EA)_{comp}/L & 0 & 0 \\ 0 & c_1 K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_2 K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho_i \\ \rho_j \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

que, na forma compacta pode ser escrita como:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_{ch} \Delta \mathbf{u}_c + \Delta \mathbf{f}_{ps} \quad (3.39)$$

sendo  $K_{22} = k_{c(2,2)} - k_{c(2,3)}k_{c(3,2)}/k_{c(3,3)}$  e  $K_{33} = k_{c(3,3)} - k_{c(2,3)}k_{c(3,2)}/k_{c(2,2)}$ , em que  $k_{c(m,n)}$  é o termo que corresponde à linha  $m$  e à coluna  $n$  na matriz de rigidez  $\mathbf{K}_c$  (Equação 3.25). O vetor  $\Delta \mathbf{f}_{ps}$  é o vetor de correção dos esforços internos, e  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\rho_i$  e  $\rho_j$  são mostrados na Tabela 3.2, onde é apresentado o parâmetro  $\delta M_{pr}$ . Como pode ser visto na Figura 3.2 esse translado caracteriza o retorno de  $M$  à curva de interação, mantendo o esforço axial,  $P$ , constante.

### 3.4 Compatibilidade de Deformações

Ao submeter um elemento estrutural a esforços externos, este se deforma gerando forças internas para equilibrar o sistema. Essa deformação, a nível da seção transversal,

Tabela 3.2 – Coeficientes da Equação 3.38

Rótula Plástica	Parâmetros			
	$c_1$	$c_2$	$\rho_1$	$\rho_2$
Extremidade $i$	0	1	$\delta M_{pri}$	$\delta M_{pri} (k_{c(3,2)}/k_{c(2,2)})$
Extremidade $j$	1	0	$\delta M_{prj} (k_{c(2,3)}/k_{c(3,3)})$	$\delta M_{prj}$
Extremidades $i$ e $j$	0	0	$\delta M_{pri}$	$\delta M_{prj}$

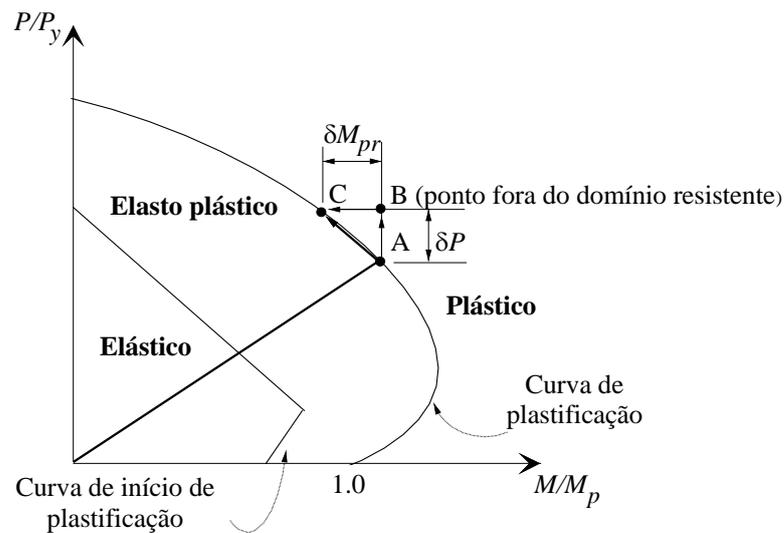
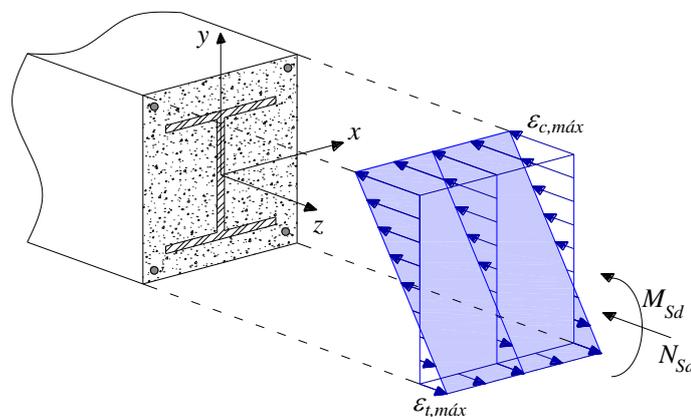


Figura 3.2 – Violação da curva de resistência

é abordada no Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). Supondo que todos os materiais presentes no elemento atuem conjuntamente (interação total), pode-se supor que o campo de deformações é linear, como ilustrado na Figura 3.3. Além disso, a seção permanece plana após a deformação, como ilustrado pelo plano azul nessa mesma figura.

Figura 3.3 – Campo de deformações tridimensional (sem flexão em torno do eixo  $y$ )

### 3.4.1 Relação momento-curvatura

Neste trabalho, optou-se por utilizar o método iterativo de *Newton-Raphson* para a obtenção da relação momento-curvatura. Para um valor fixo de esforço axial,  $N$ , são dados incrementos no momento fletor solicitante,  $M$ , até que o momento último resistente seja atingido. Uma estratégia de incrementos constantes foi utilizada, uma vez que, não interessam, em termos da capacidade resistente da seção, ramos descendentes na relação momento-curvatura.

Para descrever de forma eficiente a distribuição de deformações bidimensional a discretização da seção em fatias, ilustrada na Figura 2.10, é bastante eficiente. O propósito dessa divisão é captar a deformação axial,  $\varepsilon$ , no centroide plástico CP de cada fatia e então, através das relações constitutivas dos materiais, obter as respectivas tensões. Duas variáveis são substanciais para empregar essa metodologia: a área das fatias e sua respectiva posição. Essa segunda é referenciada ao CP, já que alguns pesquisadores (CALDAS, 2004; CHEN *et al.*, 2001; SFAKIANAKIS, 2002) apontam que dessa forma, tanto para o método de *Newton-Raphson* quanto para os métodos *quasi-Newton*, os problemas de convergência são minimizados.

Segundo Roik e Bergmann (1990), a posição do CP da seção é obtida através da seguinte expressão:

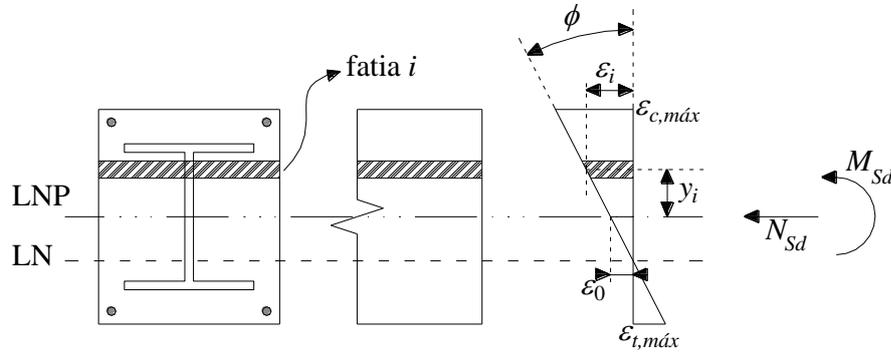
$$y_{CP} = \frac{y_c A_c \gamma f_{cd} + y_a A_a f_{yd} + y_b A_b f_{ybd}}{A_c \gamma f_{cd} + A_a f_{yd} + A_b f_{ybd}} \quad (3.40)$$

com  $A_c$ ,  $A_a$  e  $A_b$  sendo as áreas de concreto, do perfil metálico e da armadura longitudinal;  $\gamma$  é um coeficiente que indica se o concreto está confinado ( $\gamma = 1,0$ ) ou não ( $\gamma = 0,85$ );  $y_c$ ,  $y_a$  e  $y_b$  são as coordenadas do centroide, das respectivas áreas, no eixo das ordenadas, em relação a um sistema de referência; e  $f_{cd}$ ,  $f_{yd}$  e  $f_{ybd}$  são a resistência de cálculo do concreto, as resistências de escoamento de cálculo do perfil e das armaduras, respectivamente. Liu *et al.* (2012a) e Chen *et al.* (2001) utilizam a Equação 3.40, porém com  $\gamma$  igual a 1 para qualquer situação.

A Figura 3.4 ilustra a distribuição de deformações na seção mista para uma combinação de esforços axial e de momento fletor. Observando a Figura 3.4, a deformação axial na  $i$ -ésima fatia,  $\varepsilon_i$ , é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \phi y_i \quad (3.41)$$

em que  $y_i$  é a distância entre os centroides plásticos (CP) da fatia analisada e da seção transversal,  $\varepsilon_0$  é a deformação axial no CP da seção e  $\phi$  a respectiva curvatura.



**Figura 3.4** – Campo de deformações bidimensional

Para notação matricial adotada a seguir, as variáveis  $\varepsilon_0$  e  $\phi$  serão posições do vetor de deformações  $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \quad \phi]^T$ . Chiorean (2013) ressalta que adotando  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  na primeira iteração, a convergência é atingida rapidamente. Numericamente, pode-se dizer que o equilíbrio da seção é obtido quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0 \quad (3.42)$$

em que o vetor de forças externas  $\mathbf{f}_{ext}$  é dado pelo esforço axial,  $N$ , e de momento fletor,  $M$ , ou seja:

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Já o vetor de forças internas é dado por expressões integrais clássicas para o esforço axial,  $N_{int}$ , e momento fletor,  $M_{int}$ . Uma vez conhecidas as áreas,  $A_i$ , e posições,  $y_i$ , de cada fatia, a integral passa a ser o somatório descrito como:

$$\mathbf{f}_{int} = \begin{bmatrix} N_{int} = \int_A \sigma[\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)] dA \\ M_{int} = \int_A \sigma[\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)] y dA \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} N_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fat}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] A_i \\ M_{int} \cong \sum_{i=1}^{n_{fat}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] y_i A_i \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

na qual,  $n_{fat}$  é o número de fatias geradas pela discretização da seção.

Embora seja eficiente iniciar o processo com  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , a convergência só é atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. Assim, para a iteração seguinte,

$k + 1$ , o vetor de deformações é dado por:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \mathbf{F}' (\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{X}^k) \quad (3.45)$$

na qual  $\mathbf{F}'$  é a matriz de rigidez tangente da seção transversal ou matriz Jacobiana do problema não linear expresso na Equação 3.42, isto é:

$$\mathbf{F}' = \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N_{int}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_{int}}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

sendo os termos de  $\mathbf{F}'$  determinados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[ \int_A \sigma (\varepsilon (\varepsilon_0, \phi)) dA \right] = \int_A E_T dA = \sum_{i=1}^{n_{fat}} E_{T,i} A_i \\ f_{12} &= \frac{\partial N_{int}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \int_A \sigma (\varepsilon (\varepsilon_0, \phi)) dA \right] = \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fat}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[ \int_A \sigma (\varepsilon (\varepsilon_0, \phi)) y dA \right] = \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fat}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{22} &= \frac{\partial M_{int}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \int_A \sigma (\varepsilon (\varepsilon_0, \phi)) y dA \right] = \int_A E_T y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_{fat}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que  $E_T$  são os módulos de elasticidade tangentes dos materiais presentes na seção transversal.

O critério de convergência adotado neste trabalho foi proposto por [Chiorean \(2013\)](#) e é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas,  $\mathbf{F}$ , e do vetor de forças externas,  $\mathbf{f}_{ext}$ . Assim, escreve-se:

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}_{ext}\|} \leq Tol \quad (3.48)$$

com  $Tol$  sendo a tolerância, que é assumida aqui  $10^{-5}$ , como proposto também por [Chiorean \(2013\)](#).

Na Tabela 3.3 é detalhado o processo de obtenção da relação momento-curvatura.

### 3.4.2 Curvas de resistência e de início de plastificação

Quando, para um dado esforço axial, é atingido o momento máximo da relação momento-curvatura, tem-se a plastificação total da seção. Define-se então, que esse par de esforços é um ponto da curva de resistência.

**Tabela 3.3** – Estratégia numérica para obtenção da relação momento-curvatura

---



---

1.	Leitura dos dados da seção transversal e dos materiais
2.	Discretização da seção em fatias
3.	Obtenção do centroide plástico CP (Equação 3.40)
4.	Translação do sistema de referência para o CP
5.	Inicialização: $\mathbf{X} = \mathbf{0}$
6.	<b>para</b> cada incremento de momento fletor <b>faça</b>
7.	Monta-se $\mathbf{f}_{ext}$
8.	<b>para</b> $k \leftarrow 1, n_{max}$ <b>faça</b>
9.	Determina-se $\varepsilon$ (Equação 3.41)
10.	Monta-se $\mathbf{f}_{int}$ (Equação 3.44)
11.	Calcula-se $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ (Equação 3.42)
12.	<b>se</b> $\ \mathbf{F}\  \div \ \mathbf{f}_{ext}\  \leq Tol$ <b>então</b>
13.	Pare o processo iterativo e siga para linha 19
14.	<b>fim se</b>
15.	Monta-se a matriz de rigidez tangente da seção $\mathbf{F}'$ (Equação 3.46)
16.	Verificação da singularidade de $\mathbf{F}'$
17.	<b>se</b> $\mathbf{F}'$ é singular <b>então</b>
18.	Momento último resistente encontrado - Parar processo
19.	<b>fim se</b>
20.	Correção do vetor de deformações $\mathbf{X}$ (Equação 3.45)
21.	<b>fim para</b>
22.	<b>fim para</b>

---



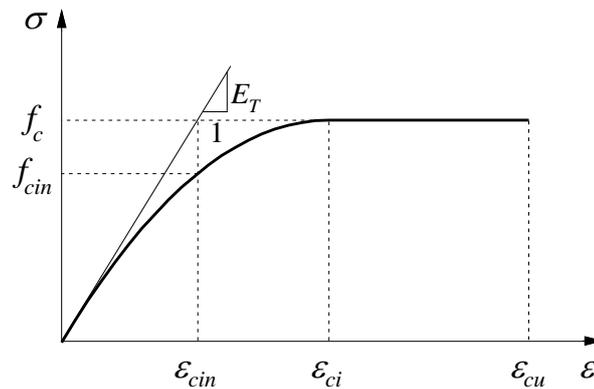
---

A curva de início de plastificação também é obtida da relação momento-curvatura. Quando a primeira fatia da seção apresenta deformação axial,  $\varepsilon$ , maior que a deformação de início de escoamento do aço (do perfil e das barras longitudinais) e/ou a deformação de início de plastificação do concreto, assim a fatia inicia o processo de degradação e conseqüentemente a seção perde rigidez. Nesse instante, a relação momento-curvatura passa a apresentar comportamento não linear. O momento responsável por esse fato é tido como momento de início de plastificação.

### 3.5 Aproximações e Métodos Normativos

Paralelo ao MCD também foram implementadas as curvas de resistência para estruturas mistas da [AISC/LRFD \(2010\)](#), [BS5400-5 \(1979\)](#) e [EUROCODE-4 \(2004\)](#). Na sequência, foi desenvolvida uma metodologia simplificada para a determinação da curva de início de plastificação da seção e, assim, viabilizar o uso do MRPR com curvas de resistência de normas de projeto.

[Fong e Chan \(2012\)](#) propuseram que uma deformação de início de degradação para o concreto, aproximada, pode ser determinada relacionando a lei de Hooke com a relação constitutiva do concreto, como ilustrada na Figura 3.5. Dessa forma, os esforços isolados axial,  $N_{in}$ , e de momento fletor,  $M_{in}$ , que implicam no início de degradação da rigidez à flexão da seção são determinados desprezando a resistência à tração do concreto.



**Figura 3.5** – Relação constitutiva do concreto com deformação de início de plastificação alterada ([FONG; CHAN, 2012](#))

Através da Figura 3.5, verifica-se que a deformação de início de plastificação,  $\varepsilon_{cin}$ , pode ser obtida por meio da derivada do diagrama tensão-deformação, ou, em outras palavras, o módulo de elasticidade tangente ( $E_T$ ), no ponto  $\varepsilon = 0$ . Assim, a derivada do trecho parabólico, Equação 2.7, é dada por:

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon_{ci}} f_c + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{ci}^2} f_c \quad (3.49)$$

Fazendo  $\varepsilon$  nulo, tem-se:

$$E_{T,0} = \frac{2f_c}{\varepsilon_{ci}} \quad (3.50)$$

Limitando o regime linear fictício até o valor de  $f_c$ , consegue-se, através do isolamento

de  $\varepsilon$  na equação da lei de Hooke e usando o módulo de elasticidade fornecido pela Equação 3.50, encontrar a deformação de início de plastificação do concreto,  $\varepsilon_{cin}$ , ou seja:

$$f_c = E_{T,0}\varepsilon_{cin} \rightarrow \varepsilon_{cin} = \frac{f_c}{E_{T,0}} \rightarrow \varepsilon_{cin} = \frac{f_c}{2f_c/\varepsilon_{ci}} \rightarrow \varepsilon_{cin} = \frac{\varepsilon_{ci}}{2} \quad (3.51)$$

Vale ressaltar que o valor de  $\varepsilon_{cin}$  também pode ser usado na definição da curva de início de plastificação via MCD, como feito em Fong e Chan (2012).

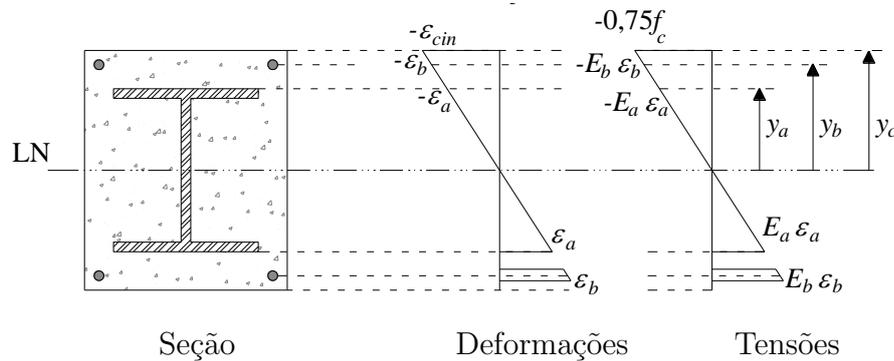
Com essa deformação, e a Equação 2.7, é possível determinar a tensão normal de início de plastificação do concreto. Como o valor de  $\varepsilon$  na Equação 2.7 deve ser negativo, escreve-se:

$$\sigma(\varepsilon_{ci}) = \left[ \frac{2(-\varepsilon_{ci}/2)}{\varepsilon_{ci}} + \left( \frac{-\varepsilon_{ci}/2}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 \right] f_c = (-1 + 0,5^2) f_c = -0,75f_c \quad (3.52)$$

E assim, o esforço axial de compressão para que a seção comece a plastificar é dado por:

$$N_{in} = E_a\varepsilon_{cin}A_a + E_b\varepsilon_{cin}A_b - 0,75f_cA_c \quad (3.53)$$

O momento fletor para início de plastificação é determinado quando a fibra de concreto comprimida mais afastada do centroide plástico atinge a tensão  $0,75f_c$ . Essa suposição é válida, uma vez que, o concreto inicia a plastificação antes do aço (FONG; CHAN, 2012). A Figura 3.6 ilustra a distribuição de deformações e tensões em uma seção mista usual desprezando a resistência à tração do concreto.



**Figura 3.6** – Distribuição de deformações e tensões na seção

Com base na Figura 3.6, o momento de início de degradação da rigidez a flexão,  $M_{in}$ , é calculado como:

$$M_{in} = \frac{E_a\varepsilon_a I_a}{y_a} + \frac{E_b\varepsilon_b I_b}{y_b} + \frac{0,75f_c (I_c/2)}{y_c} \quad (3.54)$$

na qual os subíndices  $a$ ,  $b$  e  $c$  representam, respectivamente, o aço do perfil, das barras e o concreto;  $E$  é o módulo de elasticidade;  $\varepsilon$  é a deformação na fibra mais afastada, na posição  $y$ ;  $I$  é o momento de inércia; e  $f_c$  é a resistência máxima à compressão no concreto.

# Análises e Resultados

### 4.1 Introdução

Neste capítulo as estratégias numéricas apresentadas nos capítulos anteriores são utilizadas visando o estudo de sistemas estruturais mistos de aço e concreto. Os exemplos aqui abordados são divididos em cinco grupos: relações momento-curvatura, curvas de resistência, vigas, pilares e pórticos. Ressalta-se que os resultados encontrados são comparados com os apresentados na literatura, obtidos de forma numérica e/ou experimental. Além disso, é feito um estudo comparativo entre as metodologias de obtenção da capacidade resistente descritas em normas de projeto e o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD).

Assim, tanto as recomendações normativas quanto o MCD são utilizados. Nesse último, a metodologia apresentada por [Chiorean \(2013\)](#) foi introduzida no CS-ASA ([SILVA, 2009](#)), o que significa que os pontos da curva de resistência são encontrados por meio dos pontos limites das relações momento-curvatura.

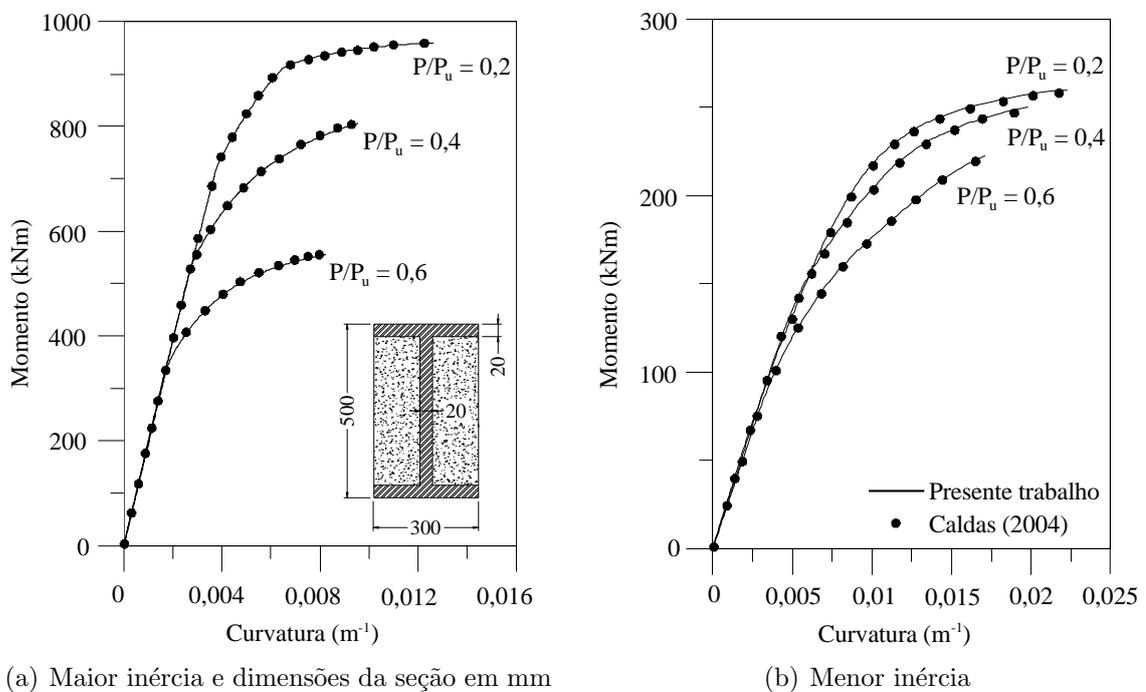
A solução do problema não linear de estruturas mistas é obtida utilizando a estratégia do deslocamento generalizado e a norma mínima dos deslocamentos residuais no processo incremental e iterativo. Dessa forma, é possível passar por pontos limites que possam vir a existir nas trajetórias de equilíbrio. Destaca-se que em todos os problemas aqui estudados foi utilizado o método de *Newton-Raphson* modificado com tolerância de  $10^{-5}$ .

## 4.2 Relação Momento-Curvatura

O objetivo deste primeiro exemplo é a construção da relação momento-curvatura de uma seção mista parcialmente revestida (PPR), ilustrada na Figura 4.1(a), que foi inicialmente analisada por Caldas (2004). O aço do perfil metálico, I, possui módulo de elasticidade de 205 GPa e resistência de escoamento de 250 MPa. O concreto utilizado foi confeccionado para atingir uma resistência de compressão característica,  $f_{ck}$ , de 20 MPa quando o mesmo apresentar deformação inferior a  $-0,002$ . Os coeficientes de ponderação da resistência do aço e do concreto são tomados, respectivamente, como 1,10 e 1,40.

As cargas axiais fixas aplicadas na seção para a construção de cada uma das relações momento-curvatura são frações da carga axial última resistente denominada  $P_u$ , tais como 20%, 40% e 60%. Considerando um campo de deformações uniforme igual a  $-0,002$  em todas as 15 fatias da seção discretizada, tem-se  $P_u = -6382,177$  kN. Ressalta-se que a tração no concreto foi desprezada e foi adotada uma relação constitutiva elástica-perfeitamente plástica, com  $\varepsilon_u$  tomado igual a 0,01, para descrever o comportamento do aço.

Os resultados obtidos são ilustrados nas Figuras 4.1(a) e 4.1(b) para os eixos de maior e menor inércia, respectivamente.



**Figura 4.1** – Relações momento-curvatura de uma seção parcialmente revestida

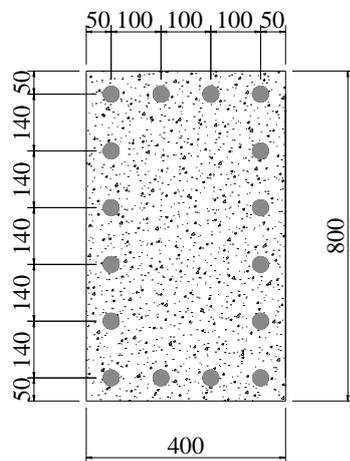
Pode-se observar na Figura 4.1 uma boa convergência entre os resultados obtidos

pelo presente trabalho e por Caldas (2004). A metodologia apresentada na seção 3.4.1 é semelhante à implementada por Caldas (2004). Esse autor utiliza para essa mesma análise a curvatura como variável incremental, e além disso, seu critério de parada do processo incremental e iterativo é definido pelos domínios de deformação do concreto. Pode-se destacar que, a verificação da singularidade da matriz de rigidez da seção para finalizar o processo, é eficiente.

## 4.3 Curvas de Resistência

### 4.3.1 Seção em concreto armado

Liu *et al.* (2012a) estudaram, por meio de métodos *quasi-Newton*, a capacidade resistente da seção de concreto armado ilustrada na Figura 4.2. As propriedades dos materiais que compõem a seção são apresentadas na Tabela 4.1. A tração no concreto é desprezada na análise denominada CST (concreto sem tração) e considerada na CCT (concreto com tração), e o aço tem seu comportamento descrito por meio de uma relação tensão-deformação elástica perfeitamente plástica.

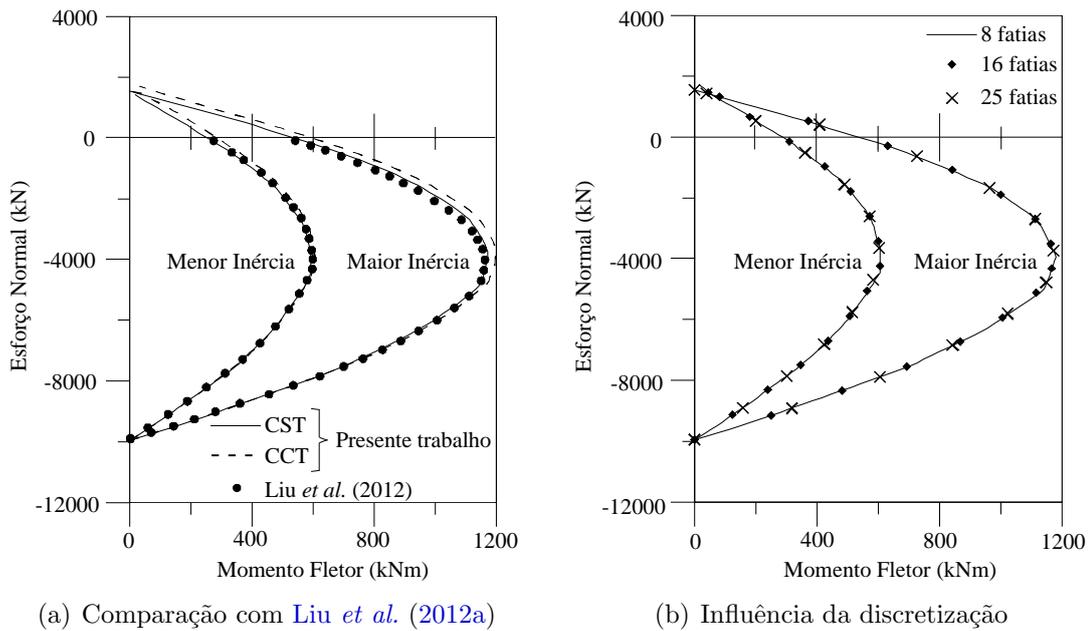


**Figura 4.2** – Seção em concreto armado analisada - dimensões em mm

**Tabela 4.1** – Propriedades dos materiais

Concreto	$f_{ck}$	40 MPa
	$E_c$	35 GPa
	$\gamma_c$	1,5
Barras de aço	$f_{ys}$	355 MPa
	$E_b$	205 GPa
	$\gamma_s$	1,15
	$\phi$	32 mm

O objetivo deste exemplo é avaliar a capacidade resistente da seção de concreto armado no Estado Limite Último (ELU), para a combinação de esforços normal e momento fletor, tanto no eixo de maior quanto no de menor inércia. Verifica-se na Figura 4.3(a) uma boa convergência nos resultados encontrados no presente trabalho com o disponível na literatura. A diferença dos procedimentos de solução do problema não linear, o método



**Figura 4.3** – Capacidade resistente da seção de concreto armado

de *Newton-Raphson* (presente trabalho) e o Método *quasi-Newton* (LIU *et al.*, 2012a), ressaltado no item 2.7.4, não produz significativa divergência na capacidade resistente da seção. Nota-se que a consideração da tração na relação constitutiva do concreto amplifica a resistência da seção em aproximadamente 2% na região acima do esforço normal de compressão igual a 5000 kN.

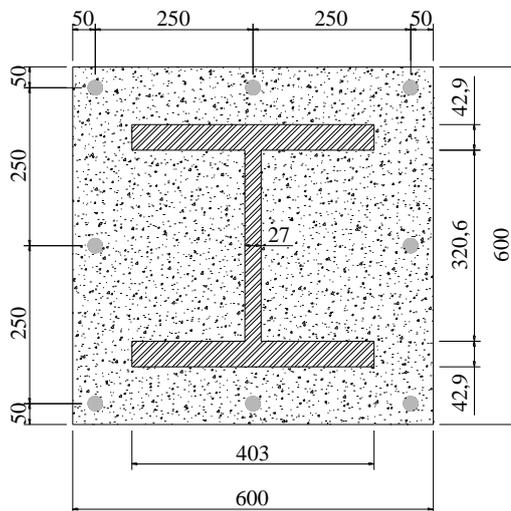
Além da comparação com o resultado presente na literatura, um estudo da sensibilidade à discretização é feito. O objetivo desse estudo é avaliar o número mínimo de fatias para que a resposta seja aceitável e, assim, reduzir o número de *loops* necessários para a montagem da matriz de rigidez e o vetor de forças internas da seção, descritos no item 3.4.1. Essa avaliação se torna importante na simulação de sistemas estruturais com grande número de nós, uma vez que é necessária a obtenção das curvas de resistência em cada ponto nodal da estrutura.

Foram testadas três discretizações: 8, 16 e 25 fatias. Como ilustrado na Figura 4.3(b) pode-se concluir que a capacidade resistente obtida com o menor índice de refinamento já é suficiente. Outra conclusão que deve ser ressaltada é que índices de refinamento menores que 8 fatias não satisfazem o critério de parada proposto. Isso ocorre pois as fatias intermediárias não atingem valores de deformação suficientes para a singularização da matriz de rigidez. Pode-se afirmar que para um número de fatias inferior a oito, a curva de resistência seria determinada quando uma fatia apresentar deformação superior

à deformação última de um dos materiais componentes da seção. Em outras palavras, parte da seção ainda estaria em regime elástico.

### 4.3.2 Seção mista de aço e concreto

Neste exemplo uma seção de aço totalmente revestida (PTR) é estudada (Figura 4.4). As propriedades dos materiais componentes da seção são dadas na Tabela 4.2. Os resultados obtidos são confrontados com os fornecidos por Liu *et al.* (2012a). Além disso, são feitas comparações com as metodologias apresentadas em normas de projeto como as do EUROCODE-4 (2004) e AISC/LRFD (2010), e a metodologia simplificada para a curva de início de plastificação, apresentada no item 3.5.



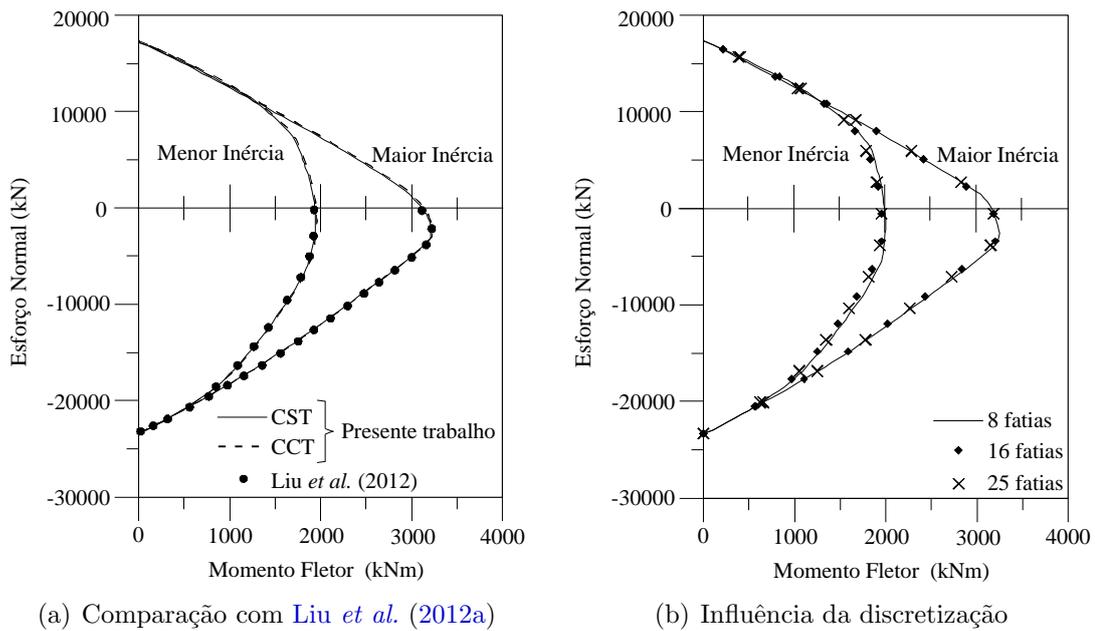
**Figura 4.4** – Seção mista analisada - dimensões em mm

**Tabela 4.2** – Propriedades dos materiais

Concreto	$f_{ck}$	35 MPa
	$E_c$	34 GPa
	$\gamma_c$	1,5
Barras de aço	$f_{ys}$	460 MPa
	$E_b$	205 GPa
	$\gamma_s$	1,15
	$\phi$	32 mm
Perfil	$f_y$	355 MPa
	$E_a$	200 GPa
	$\gamma_s$	1,05

Assim como no exemplo anterior, a metodologia apresentada no Capítulo 3 é satisfatória se comparada com o resultado de Liu *et al.* (2012a), como visto na Figura 4.5(a). Na literatura, a curva de resistência é apresentada apenas no trecho referente à combinação do esforço axial de compressão e de momentos positivos, ou seja, o quarto quadrante. É importante salientar que a consideração da resistência à tração no concreto não é significativa, pois a análise dos pontos das curvas indica um acréscimo médio de 0,5% na resistência nos trechos em que parte da seção encontra-se tracionada.

Novamente foram realizadas simulações para diferentes discretizações da seção, como visto na Figura 4.5(b). Diferentemente da seção em concreto armado, uma pequena



**Figura 4.5** – Capacidade resistente da seção mista

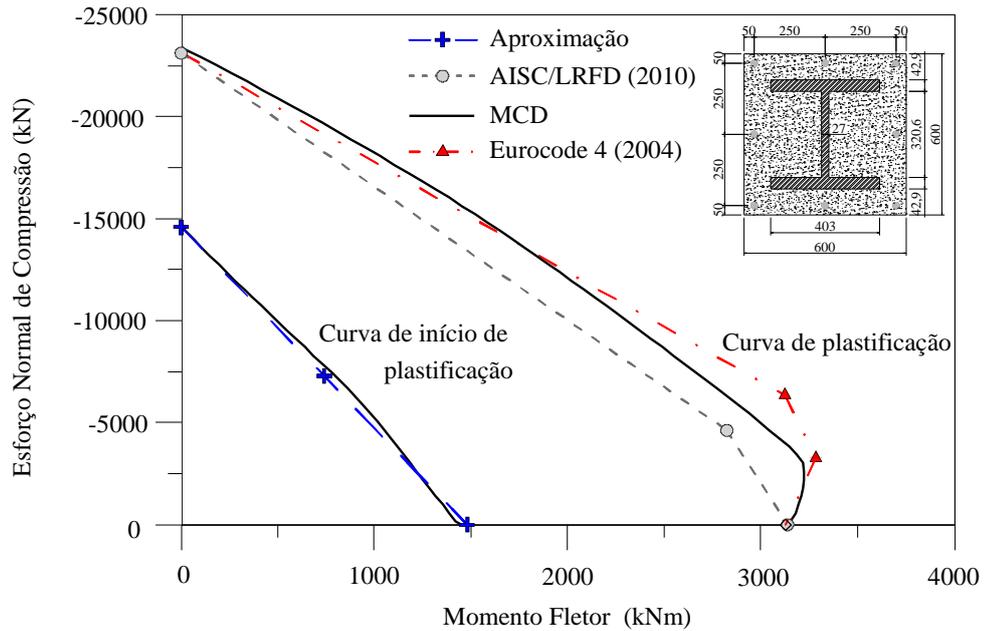
divergência ocorre nos trechos próximos à carga axial nula. Quanto menor o refinamento, nota-se que a Capacidade resistente é levemente superestimada, como mostrado na Tabela 4.3.

**Tabela 4.3** – Momentos resistentes para carga axial  $P = -170$  kN para cada discretização

Eixo	$M_{Rd,8}/M_{Rd,16}$	$M_{Rd,8}/M_{Rd,25}$	$M_{Rd,16}/M_{Rd,25}$
Maior I	1,003	1,005	1,002
Menor I	1,017	1,017	1,0

Na Figura 4.6 são ilustradas as curvas de resistência obtidas com o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), pelo EUROCODE-4 (2004) e pelo AISC/LRFD (2010), além da curva de início de plastificação aproximada, item 3.5. Vale ressaltar que ao mesmo tempo que o AISC/LRFD (2010) é conservador, o EUROCODE-4 (2004) apresenta pontos (C e D, definidos em 2.7.1) com resistência superior ao MCD.

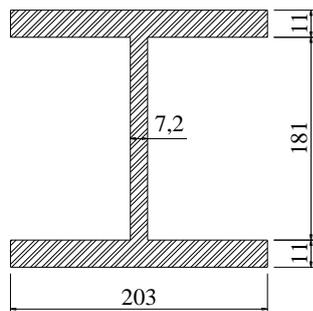
Na mesma Figura também é mostrada a boa convergência entre a curva de início de plastificação por aproximação linear, e a obtida pelo MCD. Assim, pode-se acoplá-la aos métodos normativos viabilizando as análises via Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR).



**Figura 4.6** – Comparação: MCD x Curvas de resistência de normas

### 4.3.3 Seção de aço

Por ser uma formulação generalizada, é possível, através do MCD, analisar a capacidade resistente de perfis de aço. Neste exemplo, é feita a análise do perfil W200x46,1 ilustrado na Figura 4.7. As propriedades do aço utilizadas são mostradas na Tabela 4.4.



**Figura 4.7** – Perfil W200x46,1 - dimensões em mm

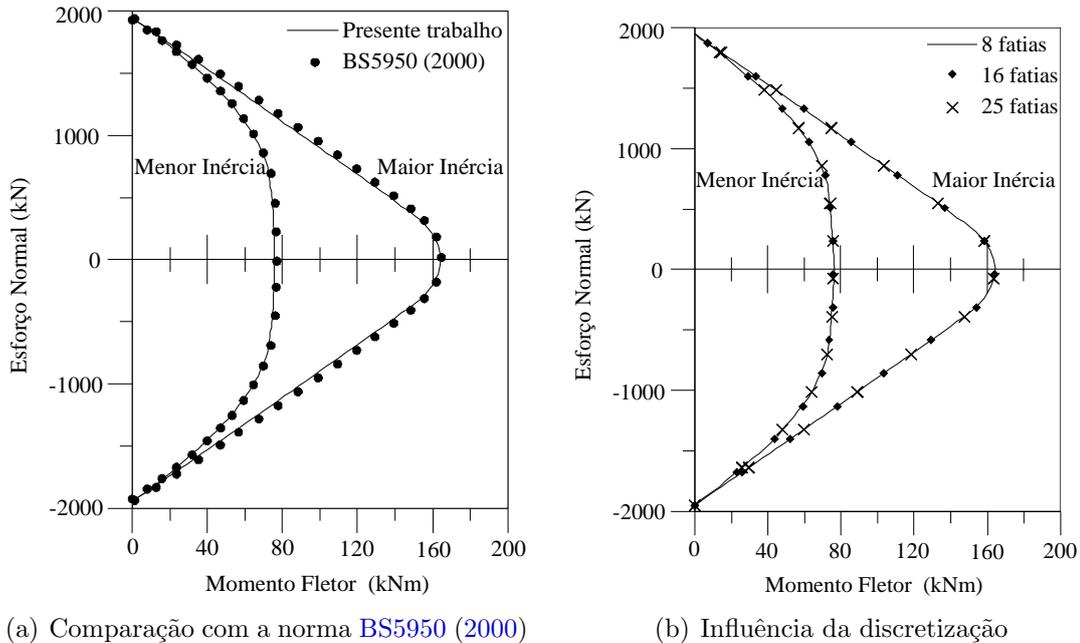
**Tabela 4.4** – Propriedades do aço

Perfil de aço	$f_y$	355 MPa
	$E_a$	200 GPa
	$\gamma_s$	1,05

A comparação, agora, é feita com a curva obtida pela norma britânica [BS5950 \(2000\)](#) como pode ser visto na Figura 4.8(a). Nota-se novamente uma boa aproximação dos resultados apresentados. Vale ressaltar que para análise de seções metálicas, embora o MCD seja eficiente, recomenda-se utilizar as curvas de norma. Isso se deve ao tempo de execução gasto pelo programa para realizar um ciclo incremental e iterativo em cada ponto nodal da estrutura para obter a capacidade resistente via MCD. No caso das normas de

estruturas de aço, são fornecidas expressões simplificadas com boa precisão, agilizando o processo.

O estudo da influência da discretização é novamente realizado. A diferença entre os valores obtidos para 8, 16 e 25 fatias é praticamente nulo, como observado na Figura 4.8(b).

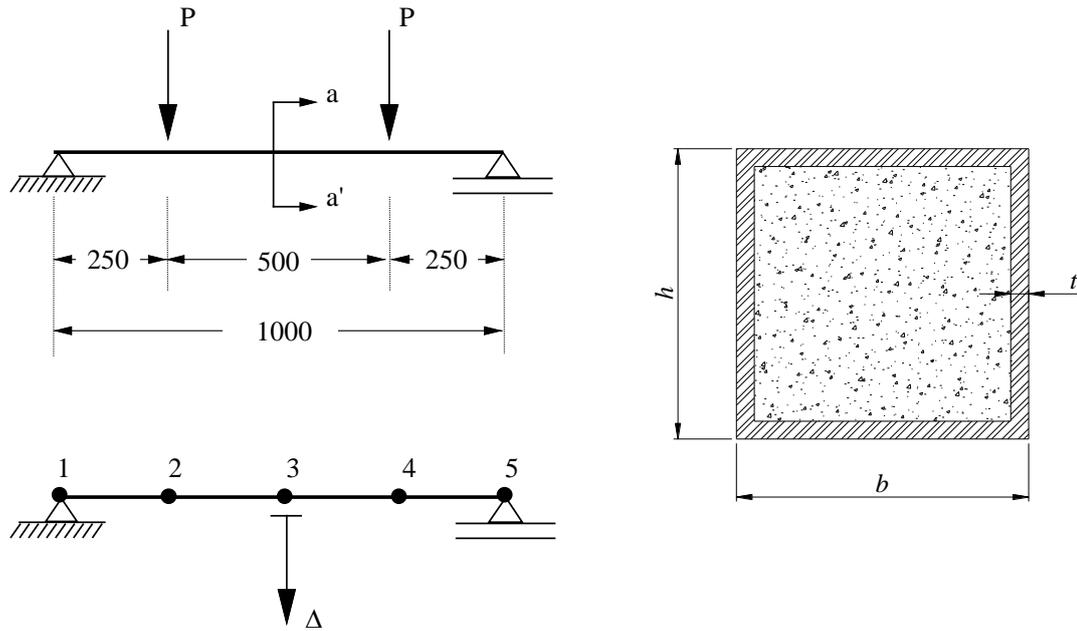


**Figura 4.8** – Capacidade resistente da seção metálica W200x46

## 4.4 Vigas Mistas Isoladas

O comportamento de elementos estruturais com esforços predominantemente de flexão é abordado aqui. Estudos experimentais em vigas tubulares preenchidas (TRP) foram realizados por Han (2004) e são utilizados para validação das formulações implementadas, assim como foi feito por Caldas (2004).

Han (2004) realizou ensaios experimentais em vigas TRP. O experimento consiste em carregar vigas biapoiadas com cargas incrementais, no sentido gravitacional, igualmente espaçadas gerando flexão pura na região central do protótipo. Os espécimes apresentavam vão livre de 1000 mm e as cargas foram posicionadas a 250 mm de cada apoio, como mostrado na Figura 4.9. Para análise via MEF, a viga foi discretizada em 4 elementos finitos com comprimento de 250 mm. A capacidade resistente foi obtida por meio do MCD com a seção dividida em 25 fatias. Assim, como em Caldas (2004), os resultados de Han (2004)



(a) Viga mista analisada e discretização

(b) Seção transversal - corte a-a'

**Figura 4.9** – Viga mista tubular retangular com flexão pura

são utilizados para validação das formulações implementadas na base computacional CS-ASA. A Tabela 4.5 mostra dados geométricos e dos materiais usados em cada um dos protótipos ensaiados.

**Tabela 4.5** – Propriedades geométricas e dos materiais dos espécimes

Espécime	$h$ (mm)	$b$ (mm)	$t$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$f_y$ (MPa)
RB1	120	120	3,84	18,3	330,1
RB2	120	120	3,84	23,6	330,1
RB3	120	120	5,86	21,0	321,1
RB4	120	120	5,86	26,8	321,1
RB5	150	120	2,93	23,1	293,8
RB6	120	90	2,93	23,1	293,8
RB7	120	90	2,93	23,1	293,8
RB8	120	90	2,93	23,1	293,8

Segundo a modelagem de Caldas (2004), adota-se um comportamento elasto plástico perfeito, com módulo de elasticidade igual a 200 GPa e  $\varepsilon_u = 0,01$ , para o aço. A tração do concreto é desprezada e o trecho não linear de sua relação constitutiva é limitado pela deformação  $\varepsilon_{ci}$  de -0,002 e -0,0035 para  $\varepsilon_{cu}$ . Essa mesma deformação é utilizada para

indicar o início de plastificação do concreto, desconsiderando a proposta de [Fong e Chan \(2012\)](#), ressaltada no item 3.5.

O patamar encontrado em todas as oito trajetórias de equilíbrio numéricas, Figura 4.10, descreve a distribuição homogênea de tensões na seção transversal, o que caracteriza a plastificação quase que completa da seção. Nessa região observa-se um leve ganho de carga para grandes deslocamentos, caracterizando que as fibras próximas à linha neutra (LN) permaneciam em regime elástico, sendo que as mais afastadas ainda não tinham atingido a deformação última.

A comparação entre as respostas numéricas apresenta diferença média de 1%, mostrado na Tabela 4.6. Ressalta-se que [Caldas \(2004\)](#) utiliza o Método da Zona Plástica (MZP) com o mesmo refinamento adotado neste trabalho.

[Han \(2004\)](#) relata que o momento último foi medido para uma deformação de tração no aço igual à 0,01. Uma vez descrito que o comportamento do aço é determinante, a divergência entre os resultados obtidos pelo CS-ASA,  $M_{CS-ASA}$ , e por [Caldas \(2004\)](#),  $M_C$ , em relação aos experimentais pode estar relacionada ao encruamento do aço. A utilização de uma relação tensão-deformação que considere esse efeito, amplificará os momentos últimos obtidos numericamente, aproximando-os dos valores medidos em laboratório,  $M_{ue}$ . A consideração do efeito das tensões residuais no perfil de aço poderiam ajustar o início do comportamento não linear apresentado nas trajetórias de equilíbrio.

**Tabela 4.6** – Comparação entre os momentos últimos obtidos em kNm

Espécime	$M_{ue}$	$M_C$	$M_{CS-ASA}$	$M_{CS-ASA}/M_{ue}$	$M_{CS-ASA}/M_C$
RB1	29,34	27,9	27,57	0,940	0,988
RB2	30,16	28,4	28,10	0,932	0,989
RB3	40,90	39,3	39,13	0,957	0,996
RB4	41,43	39,8	39,58	0,955	0,994
RB5	31,40	28,0	27,58	0,878	0,985
RB6	20,20	16,7	16,53	0,818	0,990
RB7	28,40	23,5	23,08	0,812	0,982
RB8	18,40	13,1	13,03	0,708	0,994
Média				0,875	0,990
Desvio Padrão				0,089	0,005

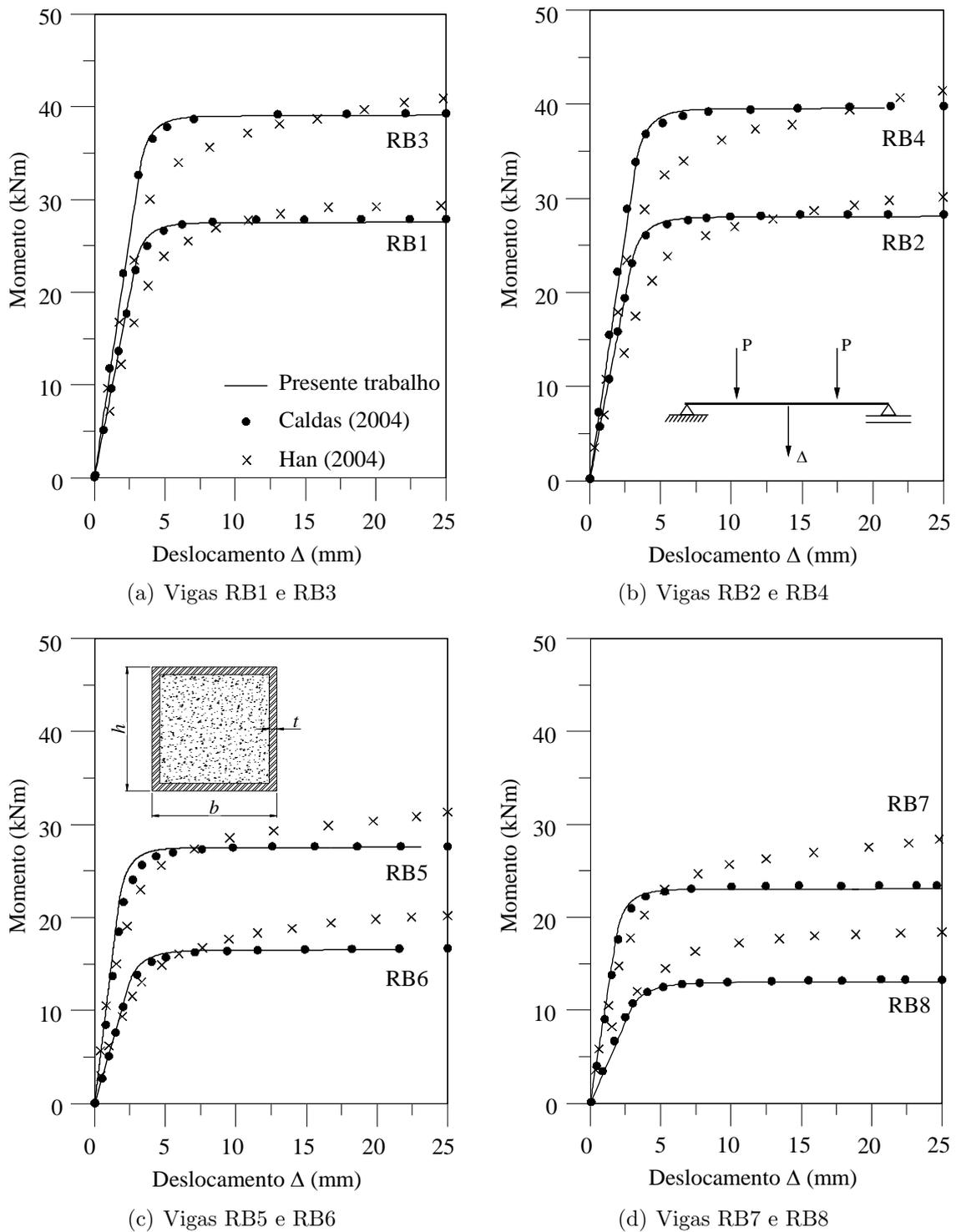


Figura 4.10 – Trajetórias de equilíbrio - vigas mistas retangulares

## 4.5 Pilares Mistos Isolados

Neste tópico são apresentadas simulações numéricas de dez pilares mistos isolados, com seção tubular retangular (TRP) e circular (TCP), cujas respostas são encontradas na literatura. Os elementos estudados são resultados de ensaios experimentais de [Bridge](#)

(1976) e Neogi *et al.* (1969).

Seguindo a recomendação de Liu *et al.* (2012b) para todos os pilares aqui analisados, é considerada uma imperfeição geométrica inicial de forma senoidal com amplitude  $\delta = L/1000$  no centro do vão. A carga de compressão,  $P$ , é aplicada no topo do pilar com uma excentricidade,  $e$ , ocasionando flexão. Gonçalves e Carvalho (2014) propõem que o apoio da base do pilar apresente a mesma excentricidade que o carregamento. Dessa forma, o modelo estrutural para as análises de pilares mistos isolados é ilustrado na Figura 4.11. É adotada para as simulações numéricas realizadas aqui, uma discretização global com 4 elementos finitos igualmente espaçados na vertical. Em termos locais, para padronização, foram utilizadas 16 fatias nas seções de todos os pilares.

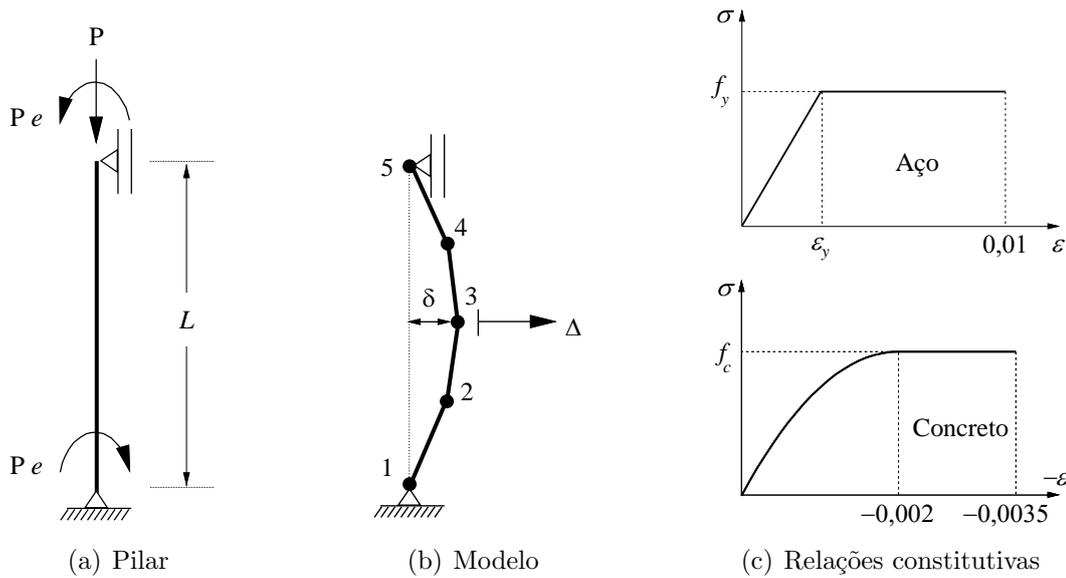
Nas análises, utilizando o MCD, considera-se a relação tensão-deformação elástica-perfeitamente plástica para o aço, limitada pela deformação última igual à 0,01 (Figura 4.11(c)). Para o concreto, o diagrama parábola-retângulo é adotado. O trecho não linear da relação constitutiva é limitado pela deformação  $\varepsilon_{ci}$  tida como -0,002. E, por fim, não é permitido que o mesmo ultrapasse uma deformação de compressão última,  $\varepsilon_{cu}$ , igual a -0,0035.

As simulações são realizadas considerando conjuntamente as não linearidades física e geométrica, caracterizando-as como análises avançadas. As trajetórias de equilíbrio são traçadas relacionando a carga axial de compressão aplicada,  $P$ , e o deslocamento horizontal,  $\Delta$ , no centro do pilar. Por fim, os resultados obtidos pelo CS-ASA são comparados com os disponíveis na literatura.

#### 4.5.1 Seções retangulares preenchidas com concreto - TRP

Em um primeiro momento são apresentados pilares TRP que foram inicialmente estudados por Bridge (1976). O referido autor realizou testes experimentais em oito pilares com cargas excêntricas e seus resultados têm sido estudados por vários pesquisadores tais como: Liu *et al.* (2012b), Fong e Chan (2012), Gonçalves e Carvalho (2014) e outros para a verificação de seus métodos e formulações.

Fong e Chan (2012) apresentam as trajetórias de equilíbrio de três dos oito pilares ensaiados por Bridge (1976). Os protótipos se diferenciam basicamente pela sua geometria, excentricidade da carga e propriedades dos materiais constituintes. O pilar denominado C1 apresenta menor comprimento, maior seção transversal e materiais mais resistentes do



**Figura 4.11** – Modelo idealizado para análise de pilares isolados com excentricidade

que as demais. Já os pilares C2 e C3 são semelhantes, apresentando diferença apenas na excentricidade da carga vertical aplicada. Esses dados são apresentados na Tabela 4.7. Foi adotado o módulo de elasticidade do aço igual a 205 GPa. Para o concreto, o módulo de elasticidade secante é facilmente obtido pela relação entre a resistência máxima de compressão e a deformação  $\varepsilon_{ci}$ .

**Tabela 4.7** – Propriedades geométricas e dos materiais

Espécime	$L(\text{mm})$	$e(\text{mm})$	$b(\text{mm})$	$h(\text{mm})$	$t(\text{mm})$	$f_y(\text{kN/mm}^2)$	$f_c(\text{kN/mm}^2)$
C1	2130	38	203,7	203,9	9,96	0,291	0,0302
C2	3050	38	152,5	152,3	6,48	0,254	0,035
C3	3050	64	152,5	152,3	6,48	0,254	0,035

As trajetórias de equilíbrio obtidas com o CS-ASA são ilustradas, juntamente com os resultados da literatura, na Figura 4.12(a). As curvas de resistência são determinadas por meio do MCD, do EUROCODE-4 (2004) e da AISC/LRFD (2010). Também são apresentadas as cargas últimas atingidas pelos pilares C1, C2 e C3, experimentalmente ( $P_{Test}$ ), por Fong e Chan (2012) ( $P_{FG}$ ) e pelo CS-ASA ( $P_{MCD}$ ), na Tabela 4.8. Pode-se verificar a boa convergência entre os resultados obtidos no presente trabalho e os apresentados na literatura.

As trajetórias de equilíbrio ilustram que o comportamento do elemento estrutural ao

longo do histórico de carregamento, obtido de forma numérica, retrata o comportamento real obtido em laboratório por [Bridge \(1976\)](#). Em termos estatísticos, verifica-se uma diferença média entre os resultados numéricos (CS-ASA) e experimentais de apenas 3%. Destaca-se também a pequena dispersão dos resultados através do desvio padrão, Tabela 4.8.

As mesmas conclusões podem ser feitas em relação aos resultados de [Fong e Chan \(2012\)](#). Embora esses autores também utilizem o MRPR, sua formulação geométrica não linear é diferente e pode ser colocada como fator condicionante para descrever a diferença dos resultados.

**Tabela 4.8** – Cargas últimas obtidas (em kN) e comparações com a literatura

Espécime	$P_{Test}$	$P_{FG}$	$P_{MCD}$	$P_{MCD}/P_{Test}$	$P_{MCD}/P_{FG}$
C1	1956	1938,7	1956,32	1,000	1,009
C2	680	723,5	699,18	1,028	0,966
C3	513	548,6	544,16	1,060	0,992
Média				1,029	0,989
Desvio padrão				0,030	0,0216

Na Figura 4.12(b) são apresentadas as trajetórias de equilíbrio obtidas com as curvas de resistência do [AISC/LRFD \(2010\)](#) e do [EUROCODE-4 \(2004\)](#).

Como descrito em várias referências na literatura e observado na seção 4.3.2, as análises utilizando as recomendações do [AISC/LRFD \(2010\)](#) são conservadoras para estruturas mistas. Como consequência, as cargas máximas encontradas por simulações usando a norma americana,  $P_{AISC}$ , são menores do que as das análises considerando o [EUROCODE-4 \(2004\)](#) e o MCD. Já a norma europeia, em média, superestima a carga última,  $P_{EC4}$ , do elemento estrutural, também observado na seção 4.3.2, porém em termos estatísticos, apresenta resultados mais próximos ao MCD, como mostrado nas Tabelas 4.9 e 4.10.

#### 4.5.2 Seções circulares preenchidas com concreto - TCP

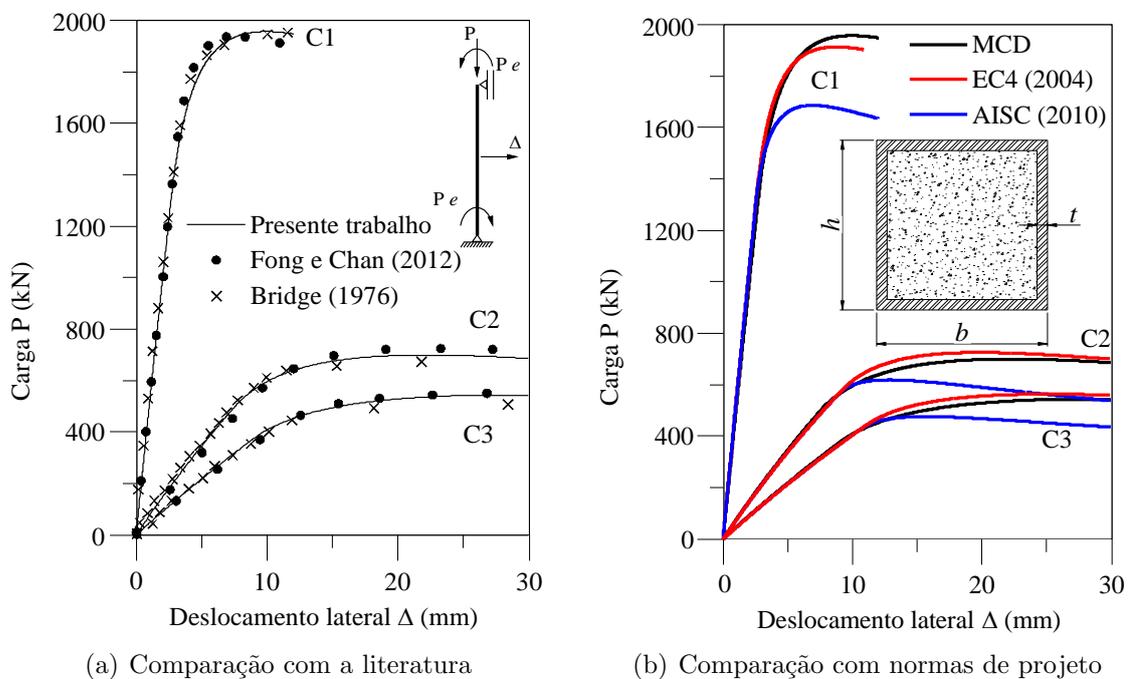
Utilizando o MCD para calcular a resistência da seção, são simulados sete pilares TCP (Figura 4.11), que foram inicialmente analisados experimentalmente por [Neogi et al. \(1969\)](#). [Liu et al. \(2012b\)](#) e [Fong e Chan \(2012\)](#) utilizam os resultados obtidos em

**Tabela 4.9** – Cargas últimas obtidas com o [EUROCODE-4 \(2004\)](#)

Espécime	$P_{EC4}$	$P_{EC4}/P_{Test}$	$P_{EC4}/P_{FG}$	$P_{EC4}/P_{MCD}$
C1	1912,56	0,978	0,987	0,978
C2	725,18	1,067	1,002	1,037
C3	563,33	1,098	1,027	1,035
Média		1,048	1,005	1,017
Desvio padrão		0,062	0,020	0,034

**Tabela 4.10** – Cargas últimas obtidas com a [AISC/LRFD \(2010\)](#)

Espécime	$P_{AISC}$	$P_{AISC}/P_{Test}$	$P_{AISC}/P_{FG}$	$P_{AISC}/P_{MCD}$
C1	1685,70	0,862	0,870	0,862
C2	618,39	0,909	0,855	0,884
C3	476,12	0,928	0,868	0,875
Média		0,900	0,864	0,874
Desvio padrão		0,034	0,008	0,011

**Figura 4.12** – Trajetórias de equilíbrio - pilares C1, C2 e C3

laboratório para testarem suas formulações baseadas no MRPR.

As propriedades geométricas e físicas usadas nas análises são mostradas na Tabela

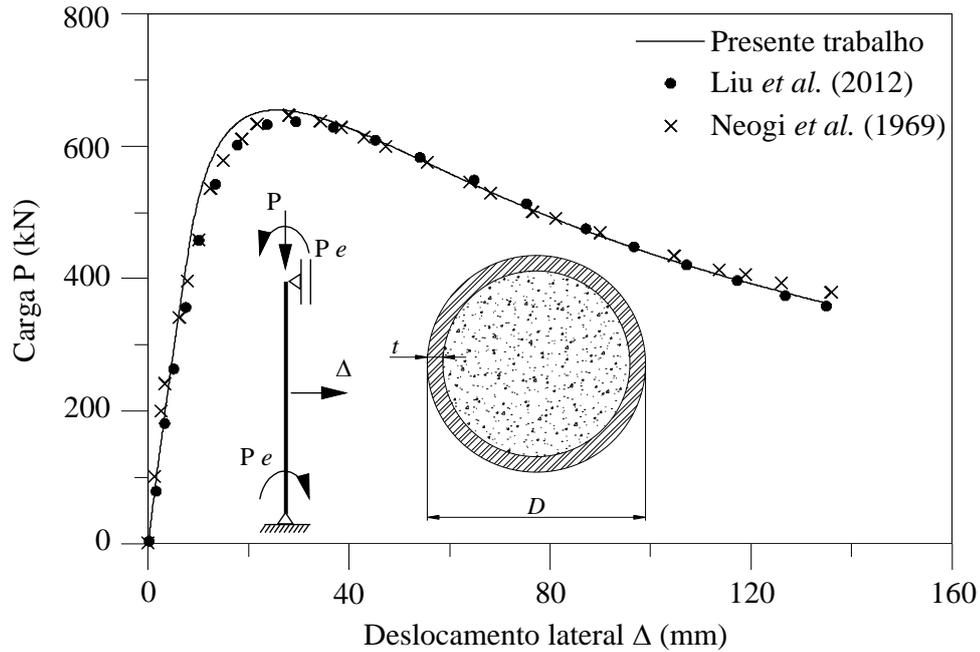
4.11. O módulo de elasticidade do aço é tomado igual a 207 GPa para todos os pilares. Segundo Liu *et al.* (2012b), Neogi *et al.* (1969) não fornece o módulo de elasticidade do concreto, assim o mesmo é definido conforme as recomendações do ACI-318 (2008).

**Tabela 4.11** – Geometria e dados dos materiais

Espécime	$L(\text{mm})$	$e(\text{mm})$	$D(\text{mm})$	$t(\text{mm})$	$f_y(\text{kN/mm}^2)$	$f_{cu}(\text{kN/mm}^2)$
M1	3048	47,6	169,4	5,11	0,309	0,05553
M2	3048	38,1	169,2	5,26	0,309	0,054
M3	3048	47,6	168,9	5,66	0,295	0,04247
M4	3048	47,6	168,4	6,55	0,298	0,038
M5	3048	47,6	169,4	7,19	0,312	0,032
M6	3048	38,1	169,4	7,29	0,312	0,03318
M7	3022,6	47,6	168,9	8,81	0,323	0,03306

Na Figura 4.13 é comparada a trajetória de equilíbrio do pilar M5 obtida com o CS-ASA, com as fornecidas por Neogi *et al.* (1969) e Liu *et al.* (2012b). Observando a referida figura, nota-se que no início das trajetórias há uma ligeira diferença, em que o modelo simulado no CS-ASA se apresenta mais rígido. Algumas fontes que podem causar tal divergência são: a formulação não linear geométrica, os refinamentos global e local, além de algumas variáveis como as deformações limites das relações constitutivas. Esse último item relaciona-se a uma possível diferença na capacidade resistente do elemento. Após o ponto limite de carga ser atingido, as trajetórias numéricas são praticamente coincidentes.

Assim como no exemplo anterior, na Tabela 4.12 são apresentadas as cargas últimas atingidas em cada uma das simulações e comparadas com os resultados da literatura. A baixa diferença média calculada em relação aos resultados experimentais,  $P_{Test}$ , (0,4%) aponta para a confiabilidade das análises numéricas apresentadas para pilares circulares preenchidos por concreto sob flexão composta normal. Ressalta-se que a comparação com os resultados numéricos obtidos por Liu *et al.* (2012b),  $P_{Liu}$ , também apresentam pequena divergência. Salienta-se que na Tabela 4.12 o valor da carga limite obtido com o CS-ASA é denotado  $P_{MCD}$ .



**Figura 4.13** – Trajetória de equilíbrio - pilar M5

**Tabela 4.12** – Cargas últimas obtidas usando o MCD e comparações com a literatura

Espécime	$P_{Test}$	$P_{Liu}$	$P_{MCD}$	$P_{MCD}/P_{Test}$	$P_{MCD}/P_{Liu}$
M1	622	607,3	628,5	1,010	1,035
M2	702	695,1	698,7	0,995	1,005
M3	600	590,1	586,5	0,978	0,994
M4	625	621,3	628,3	1,005	1,011
M5	653	642,8	655,3	1,003	1,019
M6	739	732,9	733,9	0,993	1,001
M7	758	756,1	750,7	0,990	0,993
Média				0,996	1,008
Desvio padrão				0,0107	0,0149

## 4.6 Pórticos Mistos de Aço e Concreto

Foram realizadas, nas seções anteriores, análises de membros estruturais isolados como vigas e pilares. Nesta seção serão apresentadas simulações numéricas de pórticos metálicos, de concreto e mistos, considerando de forma conjunta, as não linearidades física (materiais) e geométricas. Não são usuais na literatura estudos que vão além das trajetórias de equilíbrio para estruturas mistas. Assim, é proposto neste trabalho estender as análises possibilitando um maior entendimento do comportamento estrutural. Apresentam-se

estudos do processo de formação de rótulas plásticas através da degradação da rigidez das molas fictícias, e também a forma como a seção se comporta dentro do seu domínio de resistência, plotando-se os esforços internos e as curvas de início de plastificação e de resistência.

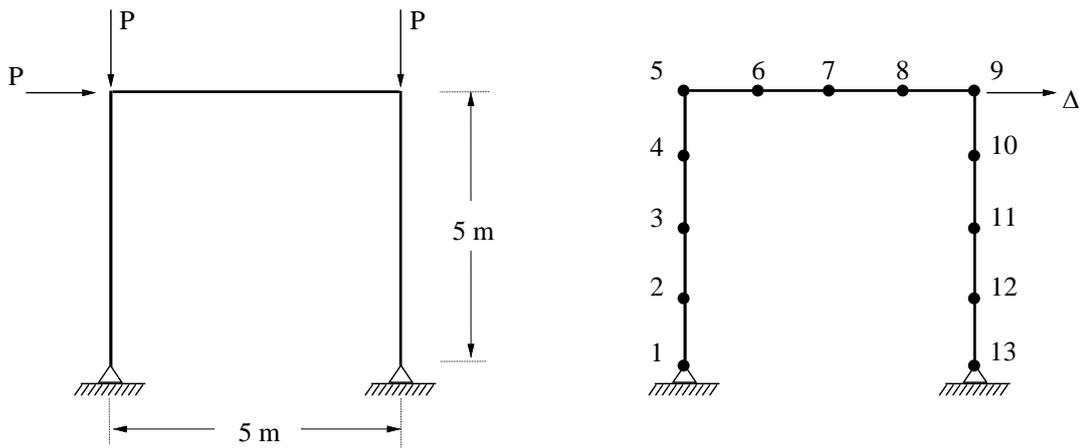
#### 4.6.1 Pórtico simples metálico/misto

O pórtico ilustrado na Figura 4.14 foi inicialmente proposto por Liew *et al.* (2001) em um estudo de sistemas estruturais metálicos com vigas mistas. Os autores estudaram o ganho de rigidez e capacidade resistente proporcionado pela inclusão da laje de concreto na viga em relação a um sistema puramente metálico. Já *Iu et al.* (2009) propuseram revestir totalmente os pilares com concreto. Posteriormente, Chiorean (2013) validou suas formulações comparando as curvas carga-deslocamento obtidas por ele com as presentes na literatura.

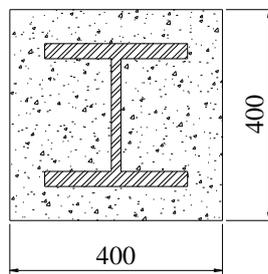
A estrutura em questão é um pórtico simples de altura e vão iguais a 5 metros, sendo os pilares constituídos com perfis W12x50 e perfil W12x27 para a viga. Quando considerado o efeito da laje de concreto, a mesma apresenta altura igual a 102 mm e largura de 1219 mm. Os pilares são totalmente revestidos em uma terceira análise, apresentando seção mista quadrada de base igual a 400 mm. São aplicadas cargas incrementais verticais no topo dos pilares, e horizontal no topo do pilar esquerdo. É considerado que o pórtico não apresenta imperfeições geométricas iniciais.

Serão realizadas as três análises presentes na literatura: estrutura puramente de aço, com a viga mista e o sistema estrutural totalmente misto. Uma quarta análise é proposta neste trabalho (pilares mistos e viga metálica). As trajetórias de equilíbrio para esses sistemas são definidas através da variação da carga incremental em relação ao deslocamento no topo do pilar direito. Considera-se para o aço uma resistência de escoamento  $f_y$  igual a 248,2 MPa e um módulo de elasticidade tomado como 200 GPa. No pórtico metálico adotou-se a relação tensão-deformação descrita pela Equação 2.2 e, para os demais casos, o comportamento elástico-perfeitamente plástico. A resistência característica do concreto à compressão,  $f_c$ , adotada é de 16 MPa e o módulo de elasticidade secante é calculado relacionando  $f_c$  e a deformação  $\varepsilon_{ci}$  tida como -0,002. Não é permitido que o concreto ultrapasse a deformação de -0,0035, definida como  $\varepsilon_{cu}$ .

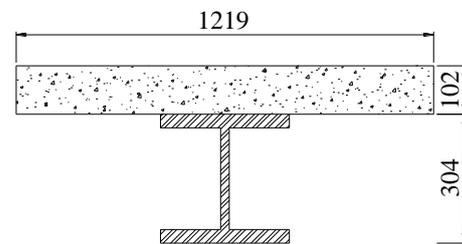
Na Figura 4.15 são apresentadas as curvas carga-deslocamento para os três casos acima



(a) Pórtico: geometria, carregamento e discretização



(b) Pilares: W12x50 revestido com concreto (dados em mm)



(c) Viga: laje de concreto apoiada sobre perfil W12x27 (dados em mm)

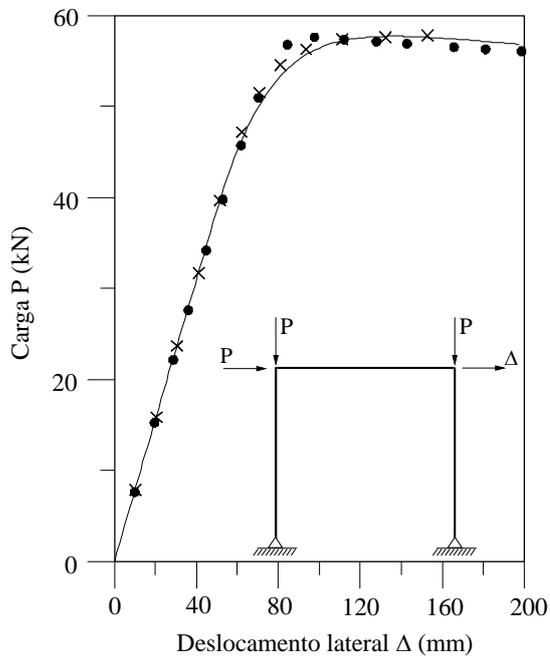
**Figura 4.14** – Pórtico simples: geometria, discretização e seções transversais

descritos, além da análise proposta neste trabalho. Para o pórtico com pilares mistos ligados por uma viga metálica, a trajetória de equilíbrio é ilustrada na Figura 4.15(d).

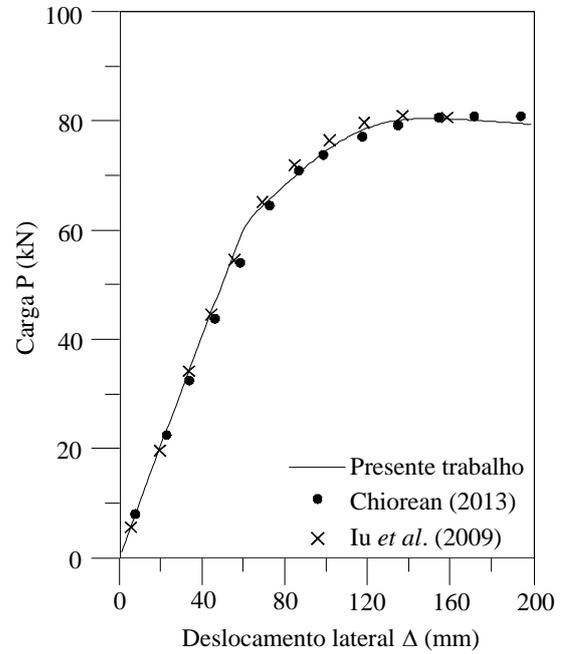
As respostas obtidas pelo CS-ASA se mostram condizentes com a literatura. O MRPR utilizado neste trabalho e por [Iu et al. \(2009\)](#) apresentam boa convergência com o MZP, testado por [Chiorean \(2013\)](#).

O comportamento do pórtico metálico é ilustrado na Figura 4.15(a). Nota-se que as trajetórias de equilíbrio obtidas por [Iu et al. \(2009\)](#) e pelo CS-ASA são praticamente coincidentes. Nesses dois trabalhos, adotaram-se relações tensão-deformação como a descrita pela Equação 2.2. [Chiorean \(2013\)](#) aborda o comportamento do aço como elástico-perfeitamente plástico, justificando, assim, o ponto limite encontrado para um deslocamento menor do que as demais curvas.

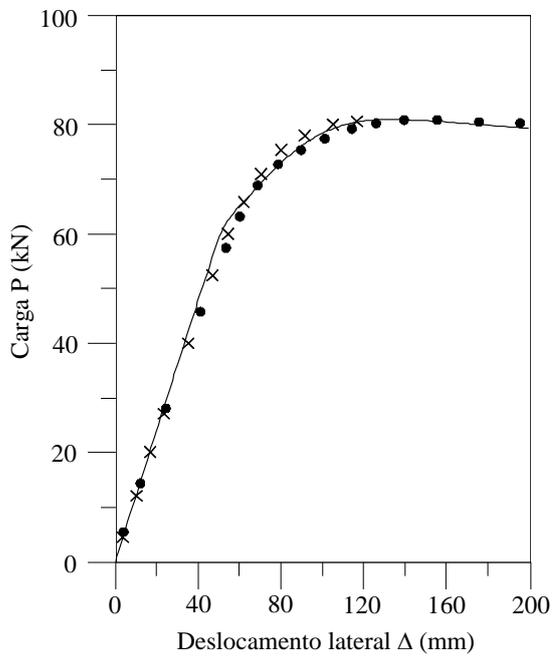
Nas Figuras 4.15(b) e 4.15(c) pode-se observar uma perda de rigidez quase que instantânea do sistema estrutural, próximo à carga  $P$  igual a 60 kN. Esse fato está relacionado à formação da primeira rótula plástica do pórtico, Figura 4.16, que ocorre na viga, próximo



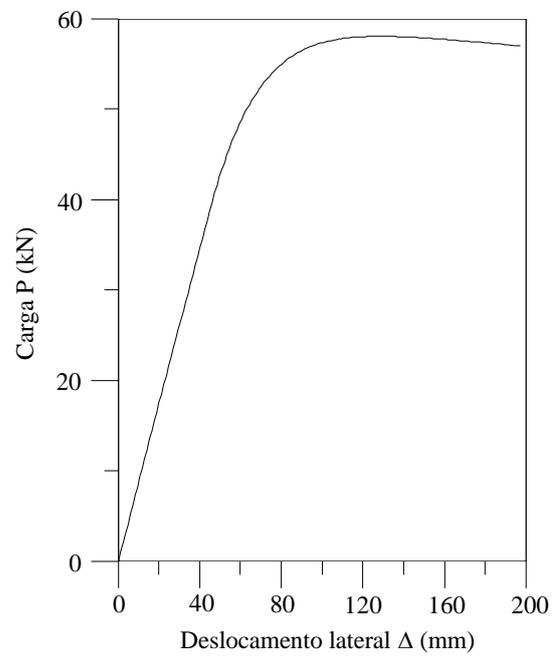
(a) Pórtico em aço



(b) Pórtico com viga mista e pilares metálicos



(c) Pórtico misto

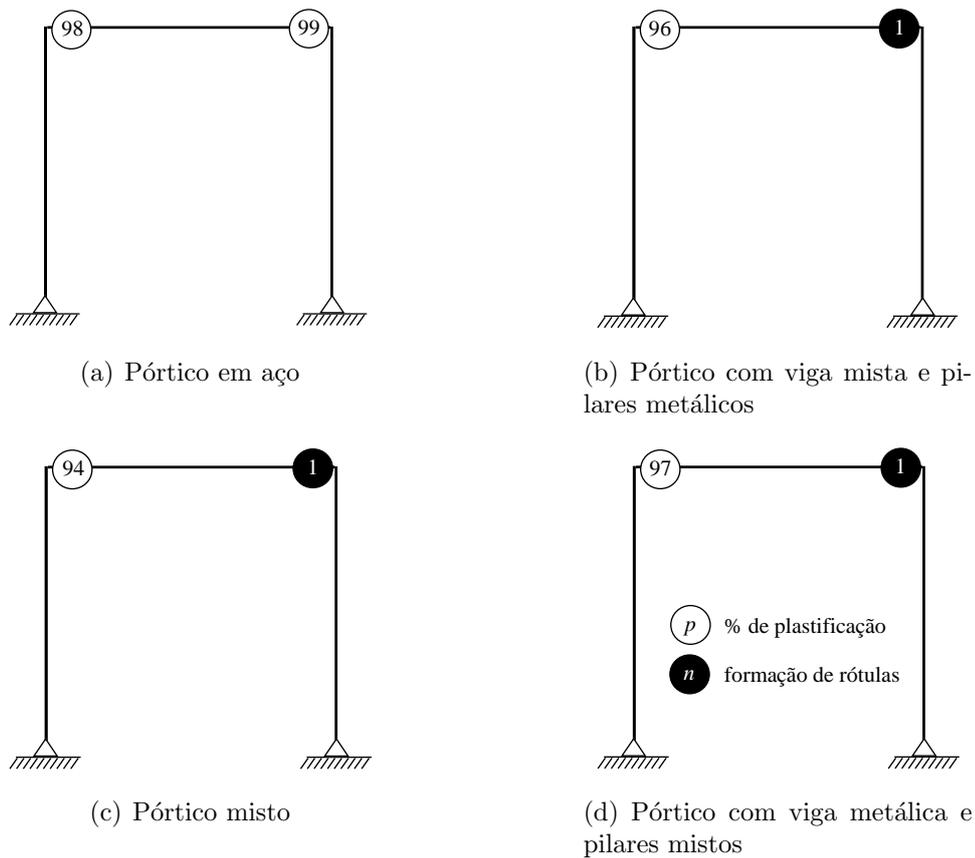


(d) Pórtico com viga metálica e pilares mistos

**Figura 4.15** – Trajetórias de equilíbrio do pórtico simples

à junção com o pilar da direita. Esse trecho está sob efeito de momento negativo, ou seja, a contribuição da laje de concreto é praticamente nula, uma vez que não há armaduras longitudinais. A rapidez com que a plastificação ocorre se deve à relação constitutiva adotada para o aço. Com comportamento elástico-perfeitamente plástico, as curvas de resistência e de início de plastificação são muito próximas, implicando na redução do trecho de degradação da rigidez, abordado mais adiante.

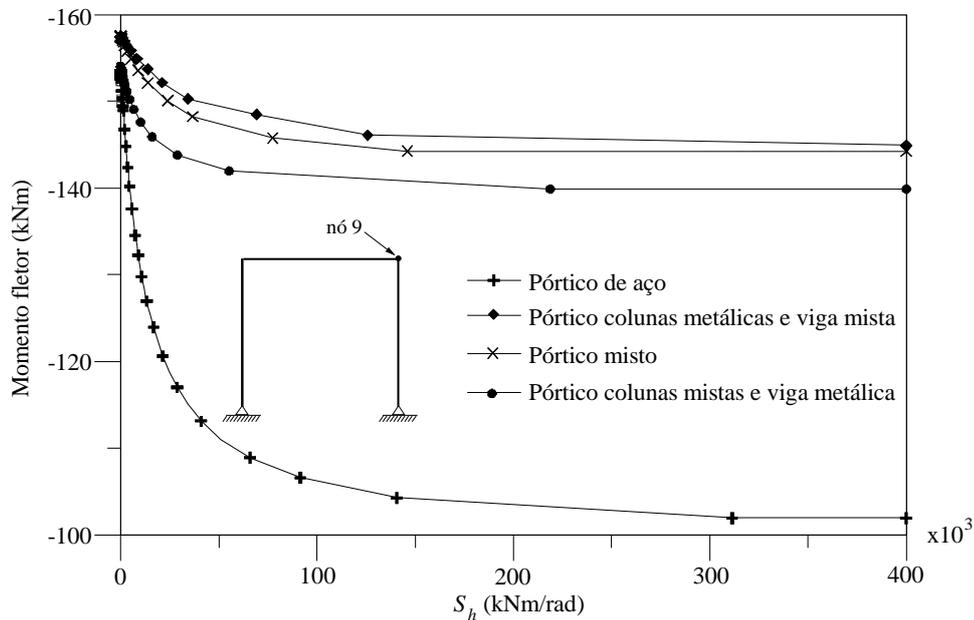
De forma geral, pode-se afirmar que, em qualquer um dos 4 pórticos testados neste tópico, a falha se dá pela viga. São ilustrados na Figura 4.16 os pontos onde ocorre a formação de rótulas plásticas, indicadas pelo círculo totalmente preenchido, e os demais pontos onde houve degradação da rigidez. A porcentagem de plastificação é mostrada dentro dos círculos sem preenchimento.



**Figura 4.16** – Índice de plastificação dos membros da estrutura

Na Figura 4.17 são ilustradas as formas como ocorrem as degradações das rigidezes das molas fictícias no nó 9 da estrutura em relação ao momento fletor. O intervalo de valores adotado para os eixos foi definido com o objetivo de deixar o gráfico com fácil visualização, uma vez que para valores menores de momento fletor, a rigidez da mola

tende ao infinito. Nessa figura, os valores de momento de início e de plastificação total podem ser observados para cada um dos casos simulados.

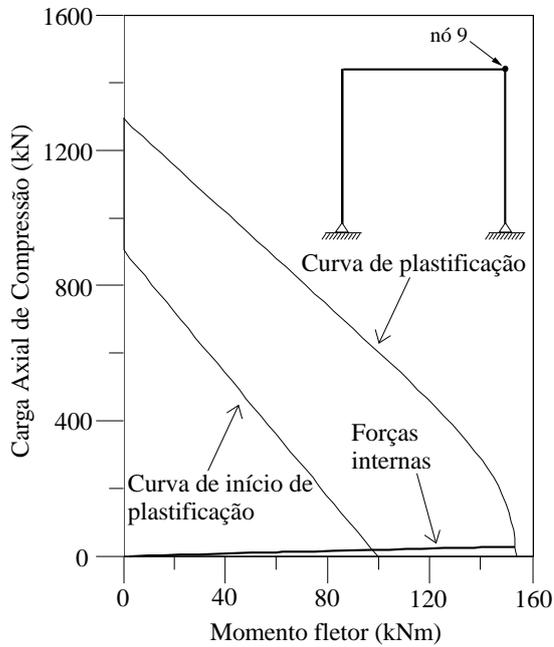


**Figura 4.17** – Degradação da rigidez  $S_h$  da mola fictícia

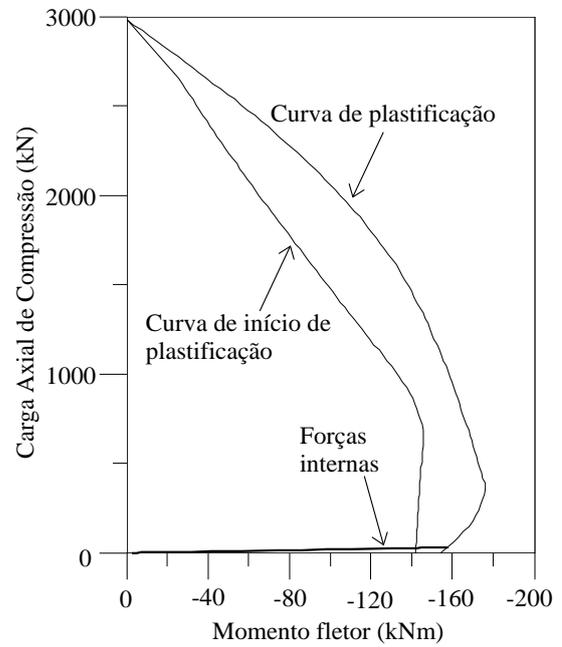
A plastificação se inicia quando a relação momento  $\times S_h$  deixa de ser paralela ao eixo das abscissas. Ressalta-se que as curvas dos pórticos com vigas mistas se encontram para valores muito grandes de  $S_h$ , caracterizando o mesmo momento de início de plastificação. Quando a rigidez  $S_h$  se anula, o momento resistente último é atingido, ou seja, a combinação de esforços internos se encontra sobre a curva de resistência.

Os esforços internos, no nó 9, resultantes do histórico de carregamento da estrutura são mostrados juntamente com as curvas de resistência e de início de plastificação na Figura 4.18. Nota-se, como esperado, o comportamento linear próximo ao eixo das abscissas, com cargas axiais pequenas.

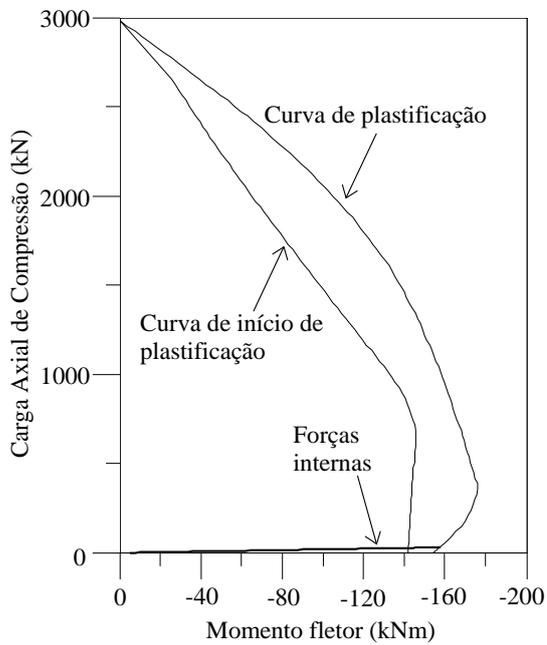
Nas Figuras 4.18(a) e 4.18(d) são ilustradas as curvas obtidas pelo MCD utilizando a relação constitutiva descrita pelas Equações 2.2 e 2.1, respectivamente. Como já dito anteriormente, a adoção de uma relação tensão-deformação elástica-perfeitamente plástica para o aço implica na proximidade das curvas de início e final de plastificação. Isso também pode ser observado utilizando  $\varepsilon_{cin}$  igual a -0,002 para o concreto (desconsiderando a proposta de Fong e Chan (2012) apresentada no item 3.5). Dessa forma, o processo de degradação da rigidez inicia e termina de forma rápida. Esse mesmo comportamento é adotado para descrever as resistências ilustradas nas Figuras 4.18(b) e 4.18(c).



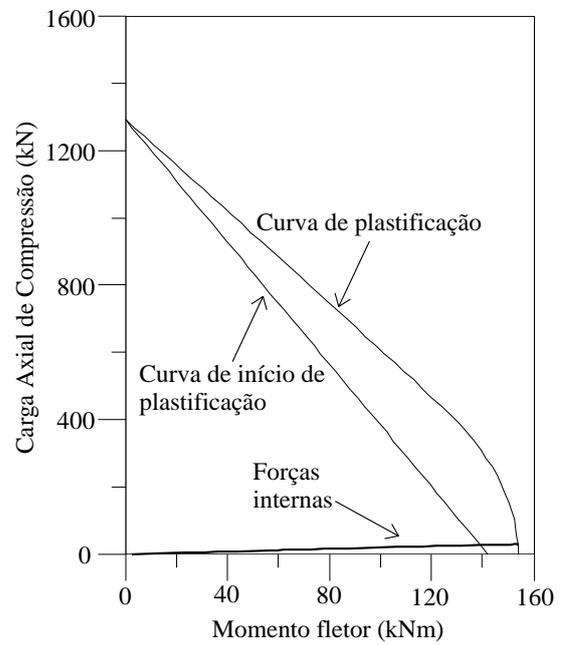
(a) Pórtico em aço



(b) Pórtico com viga mista e pilares metálicos



(c) Pórtico misto

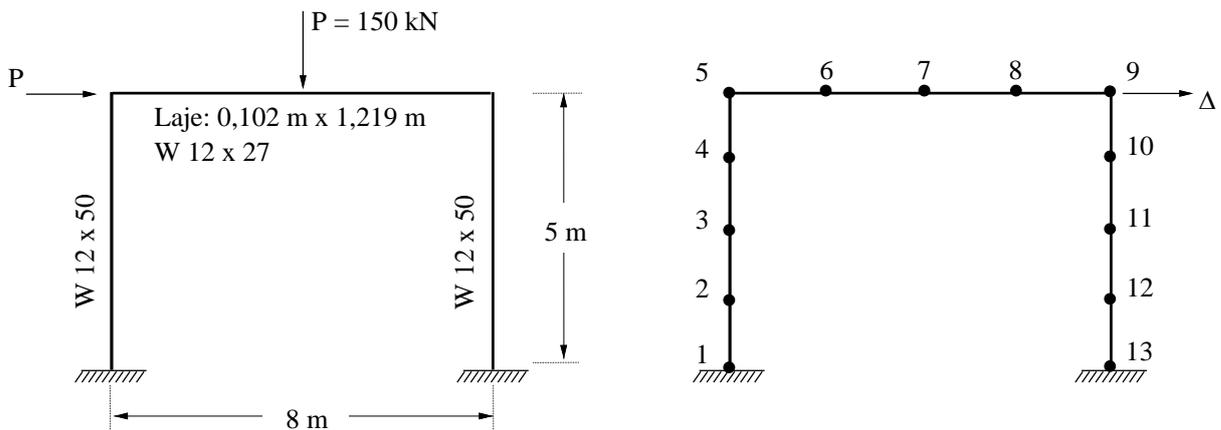


(d) Pórtico com viga metálica e pilares mistos

**Figura 4.18** – Forças internas no nó 9 do pórtico analisado

#### 4.6.2 Pórtico simples com pilares metálicos e viga mista

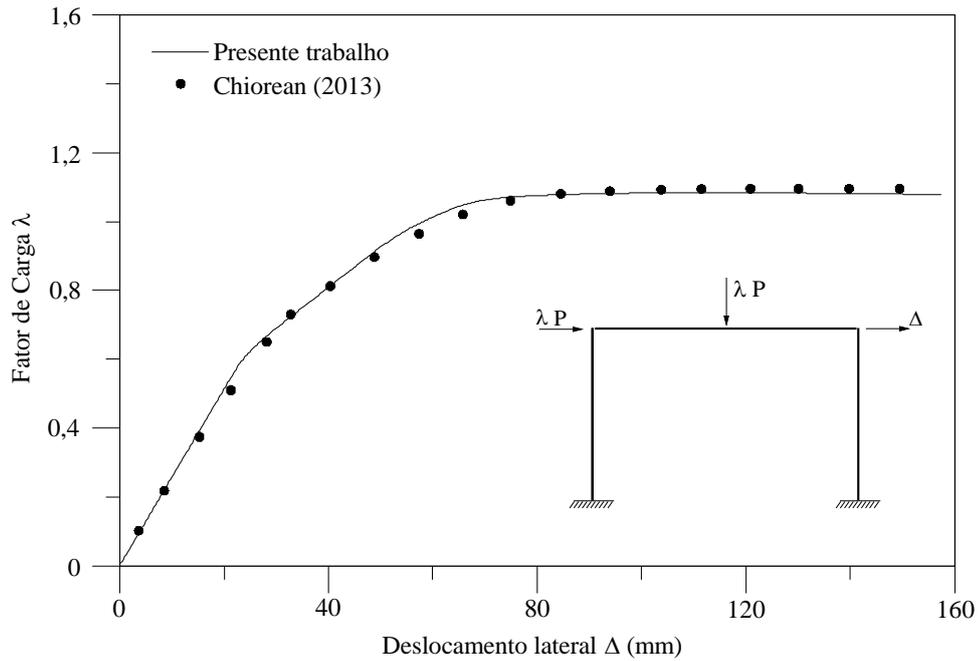
Huu e Kim (2012) analisaram um pórtico semelhante ao sistema constituído por pilares metálicos e viga mista, com interação total, simulado no exemplo anterior. São alterados o vão livre, que passa a ser de 8 metros, as condições de contorno e a posição da carga gravitacional, como ilustrado na Figura 4.19. Os pilares são perfis metálicos W12x50 e a viga tem a seção apresentada na Figura 4.14(c). O sistema estrutural é modelado usando concreto com resistência à compressão  $f_c$  igual a 16 MPa e o aço com resistência de escoamento  $f_y$  e módulo de elasticidade iguais a 252,4 MPa e 200 GPa, respectivamente. As curvas de resistência são definidas através do MCD desprezando a tração no concreto e sua deformação de início de plastificação na compressão é tomada igual a -0,002. O aço é descrito por um comportamento elasto plástico perfeito, como proposto por Chiorean (2013). Cargas concentradas de igual intensidade, 150 kN, são aplicadas proporcionalmente no centro do vão livre da viga e no topo do pilar posicionado à esquerda.



**Figura 4.19** – Pórtico com viga mista: geometria, carregamento e discretização

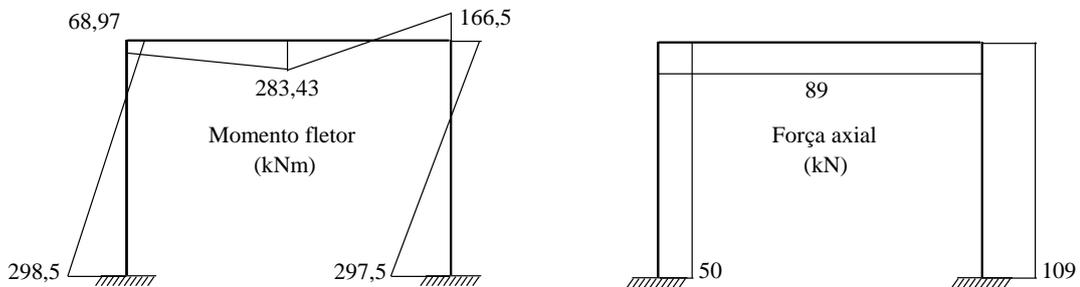
Na Figura 4.20, o fator de carga,  $\lambda$ , que relaciona a carga realmente aplicada com a carga de referência de 150 kN e o deslocamento lateral no topo do pilar direito são comparados com dados apresentados por Chiorean (2013). Vê-se que as simulações via MRPR, acoplado ao MCD, estão condizentes com procedimentos mais exatos, como o MZP (CHIOREAN, 2013). Novamente, observa-se uma perda de rigidez brusca próximo ao fator de carga igual a 0,6. O motivo para tal observação é o mesmo descrito no item anterior, uma rótula se forma na viga próxima à conexão com o pilar da direita.

As Figuras 4.21(a) e 4.21(b) mostram, respectivamente, os diagramas de esforços internos e a deformada do pórtico, referentes à carga máxima atingida na análise,  $\lambda = 1,085$ .

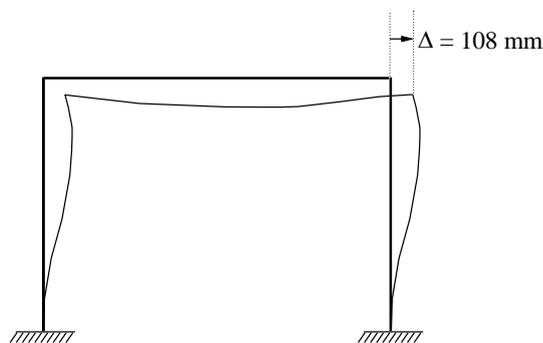


**Figura 4.20** – Trajetória de equilíbrio do pórtico simples

Pode-se observar o momento fletor de 166,5 kNm atuando no nó 9, onde ocorre a formação da rótula plástica. A rótula se forma quando a combinação de esforços normal-momento extrapola o limite de resistência indicado pela curva de plastificação total da seção.



(a) Diagramas de momento fletor e esforço normal

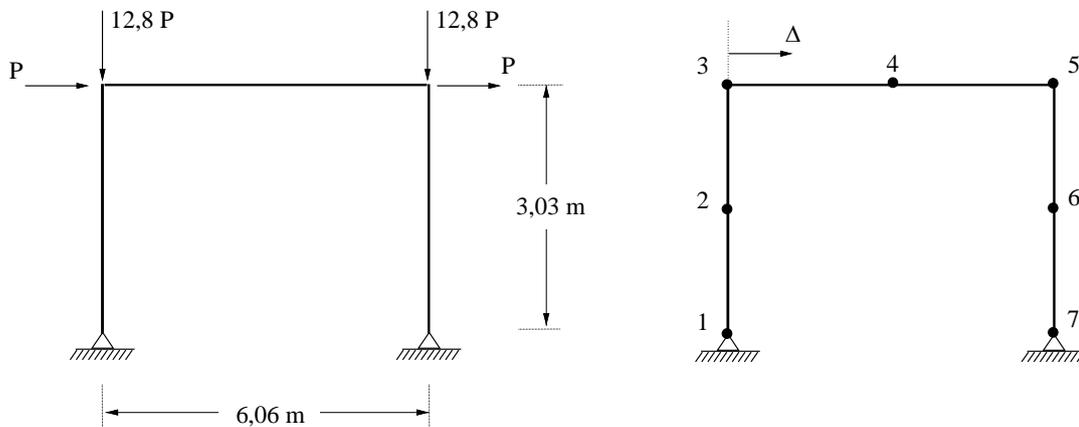


(b) Deformada do sistema estrutural

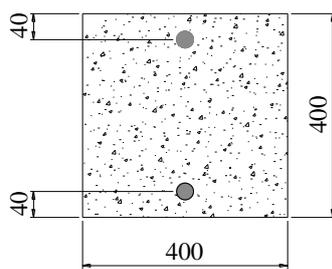
**Figura 4.21** – Diagramas de esforços e deformada para  $\lambda = 1,085$

### 4.6.3 Pórtico em concreto armado

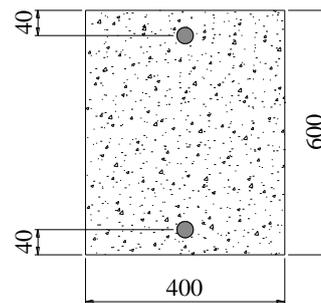
Analisado por pesquisadores como Garcia (1974), Melo (2000) e Caldas (2004), o pórtico em concreto armado, ilustrado na Figura 4.22, é estudado nesta última seção do capítulo. Trata-se de um pórtico biapoiado simples com altura de 3,03 m e espaçamento entre os pilares de 6,06 m. Os pilares apresentam seção transversal quadrada com dimensões 0,4x0,4 m com duas barras, generalizando armaduras positivas e negativas, cada uma com área de 15,1 cm<sup>2</sup>, dispostas como mostrado na Figura 4.22(b). A viga tem seção semelhante, porém retangular de 0,4x0,6 m, com armaduras de área 16,71 cm<sup>2</sup> cada. São aplicadas cargas verticais, de intensidade 12,8 P, e horizontais, P, no topo dos dois pilares.



(a) Geometria, carregamentos e discretização



(b) Pilares (dados em mm)

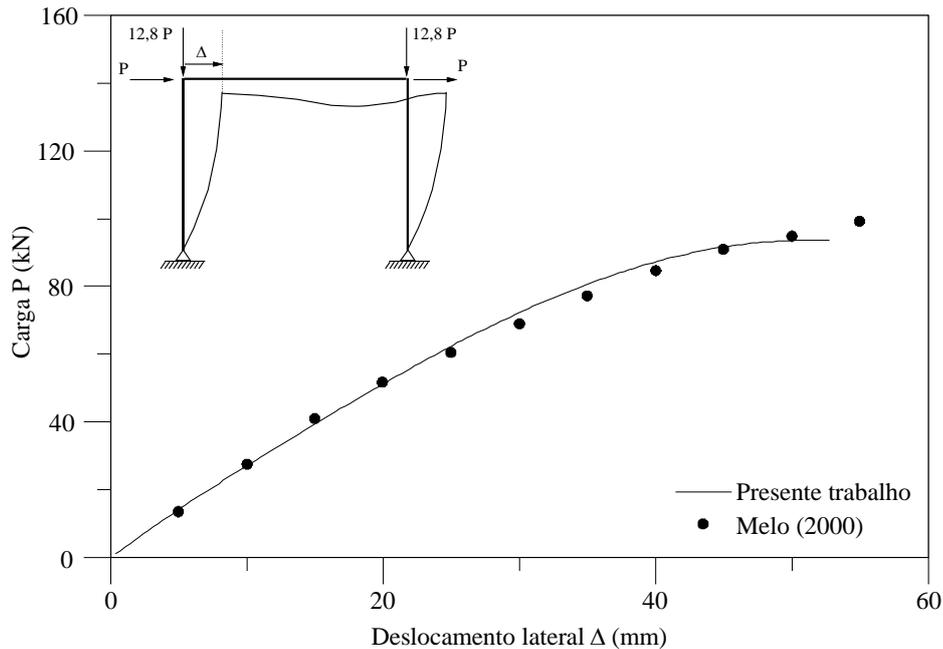


(c) Viga (dados em mm)

**Figura 4.22** – Pórtico simples de concreto armado

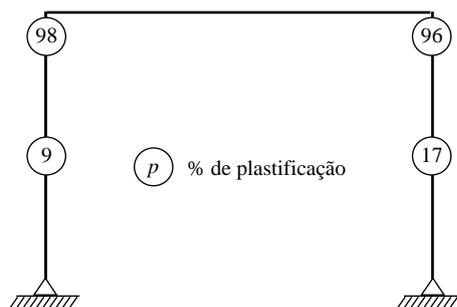
O aço das barras, com comportamento elástico-perfeitamente plástico, apresenta módulo de elasticidade de 210 GPa e resistência de escoamento de 420 MPa. Para o concreto com resistência à compressão máxima de 20 MPa, foi adotada a deformação de início de plastificação proposta por Fong e Chan (2012), descrita no item 3.5, e a resistência à tração foi considerada.

A análise em questão consiste em avaliar o deslocamento no topo do pilar da esquerda em relação ao aumento da carga incremental  $P$ , Figura 4.23. Melo (2000) encontra um valor para a carga última de 99,95 kN, enquanto o CS-ASA apresenta o valor de 93,71 kN. Vários fatores podem ser destacados para justificar a diferença nas cargas últimas. Um deles, e talvez o mais importante, é o método de análise não linear física, uma vez que Melo (2000) utiliza o MZP.



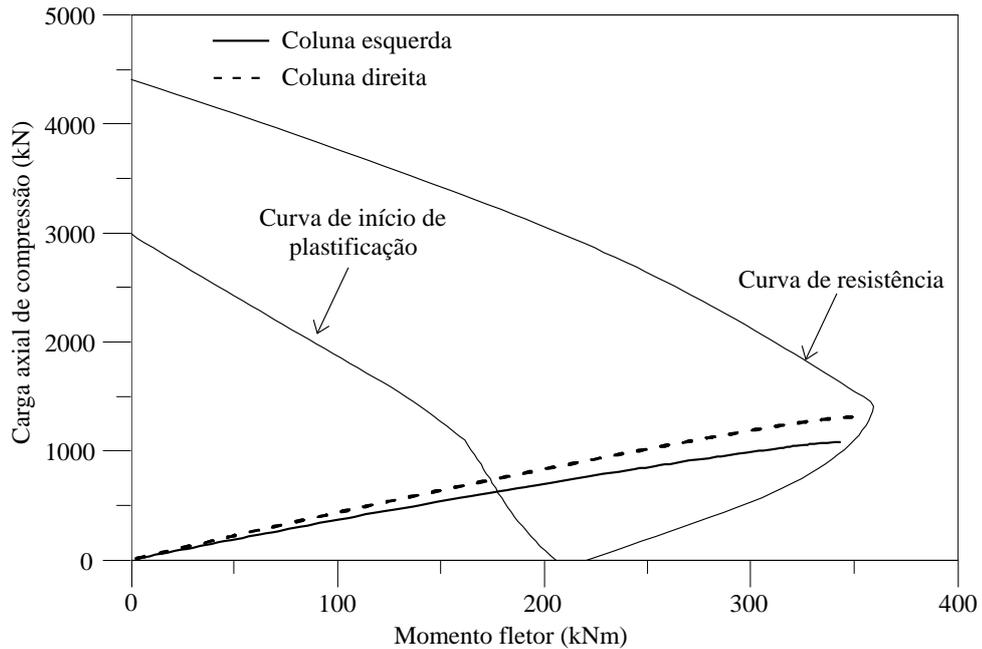
**Figura 4.23** – Trajetória de equilíbrio

Melo (2000) afirma que o ponto limite de carga obtido em sua trajetória está ligado à falha do concreto no topo do pilar da direita. A simulação realizada com o CS-ASA indica que no topo dos dois pilares a degradação da rigidez ocorre de forma praticamente simultânea, porém a primeira rótula plástica tende a se formar no pilar da esquerda, como ilustrado na Figura 4.24.

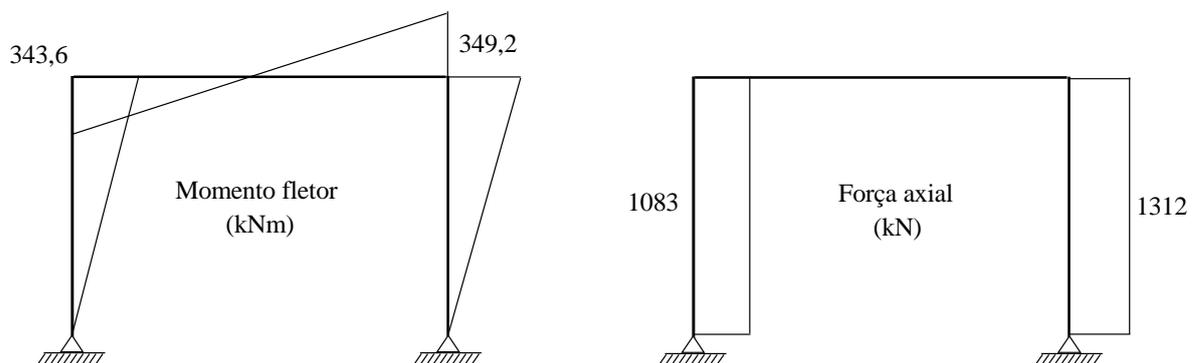


**Figura 4.24** – Índice de plastificação dos membros da estrutura

É notável a forte influência da carga axial nessa análise. Observa-se na Figura 4.25 que os esforços internos dos dois pilares caem na região de controle de fissuração da curva de resistência. Esse trecho é caracterizado pelo aumento conjunto da capacidade resistente ao momento fletor e ao esforço axial de compressão. Conclui-se que o pilar com menor solicitação axial apresenta menor resistência ao momento fletor, como pode ser visto relacionando a Figura 4.25 com a Figura 4.26.



**Figura 4.25** – Forças internas no topo dos pilares e curvas de resistência e de início de plastificação



**Figura 4.26** – Diagrama de esforços

# Considerações Finais

## 5.1 Introdução

No presente trabalho foram abordadas metodologias de análise avançada de estruturas mistas de aço e concreto. Essa tipologia estrutural enrijece o sistema estrutural reduzindo deslocamentos e tornando a não linearidade do material relevante na obtenção de cargas últimas. Apresentam-se então métodos normativos e generalizados para avaliação da capacidade resistente dos elementos.

A base computacional utilizada nessa dissertação foi o programa CS-ASA ([SILVA, 2009](#)), inicialmente desenvolvido para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas. As condições necessárias para simulação numérica de sistemas estruturais mistos de aço e concreto foram introduzidas no programa por meio do conceito de rigidez generalizada ([CHAN \*et al.\*, 2010](#)) e pelas curvas de resistência ([CALDAS, 2004](#); [EUROCODE-4, 2004](#); [AISC/LRFD, 2010](#); [CHIOREAN, 2013](#)). Foram então utilizadas as formulações não lineares presentes na plataforma computacional CS-ASA para análise estrutural estática.

Para validar as implementações realizadas nesse trabalho foram feitas simulações de problemas clássicos da literatura e comparados com resultados numéricos, utilizando o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) e o Método da Zona Plástica (MZP) e experimentais. Nos próximos itens são apresentadas, respectivamente, as conclusões das simulações realizadas no Capítulo 4 e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 5.2 Conclusões

Nos vários exemplos simulados no capítulo anterior, pode-se observar uma convergência satisfatória entre os resultados aqui obtidos com dados numéricos e/ou experimentais presentes na literatura. Conclui-se assim que as implementações desenvolvidas foram bem sucedidas, proporcionando ao CS-ASA uma nova funcionalidade: *Análise Avançada de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*.

Nos casos analisados, a metodologia generalizada para obtenção das curvas de resistência torna possível a avaliação do Estado Limite Último (ELU), de elementos submetidos à flexão composta normal, com seções de aço, de concreto e mistas de aço e concreto. Embora utilizando variáveis de controle diferentes, os métodos de *Newton-Raphson* (CHIOREAN, 2013) e *quasi-Newton* (CHEN *et al.*, 2001) convergem para valores próximos. Na análise de estruturas mistas, os métodos normativos podem tanto superestimar quanto subestimar a capacidade resistente da seção, uma vez que o MCD é mais realista. Observa-se claramente o conservadorismo do AISC/LRFD (2010) ante uma avaliação mais realista, proporcionada pelo Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). Essa característica é oposta à observada na curva de resistência do EUROCODE-4 (2004).

O uso do MRPR acoplado à curvas de resistência propostas por normas de projeto foi testado. Fez-se necessária a introdução de uma curva simplificada para indicar o início da degradação da rigidez à flexão da seção. A metodologia proposta se apresentou compatível com o MCD, nas simulações aqui realizadas, utilizando a proposta de Fong e Chan (2012) para deformação limite do regime elástico do concreto.

O uso de relações tensão-deformação elástica-perfeitamente plásticas, densconsiderando as tensões residuais, para o aço e a consideração da deformação  $\varepsilon_{ci}$  como limite do comportamento elástico do concreto, implica na redução do trecho elasto plástico no diagrama Normal-Momento. Consequentemente a degradação da rigidez ocorre de forma acentuada. Tal rigidez foi determinada por meio de equações baseadas no conceito de homogeneização da seção.

É importante destacar que na avaliação de elementos mistos em que deformações de tração são dominantes, o efeito do encruamento pode ser determinante. Essa observação se torna relevante em comparações de modelos numéricos e experimentais de elementos puramente fletidos. O campo de deformações pode extrapolar o limite do patamar de escoamento e entrar no regime de encruamento, voltando a ganhar resistência à medida que

as deformações aumentam. No item 4.4 é visível essa diferença, uma vez que os modelos numéricos utilizam uma relação constitutiva elástica-perfeitamente plástica. Quando as deformações de compressão prevalecem, item 4.5, a deformação última do concreto à compressão é dominante e os modelos constitutivos numéricos dos materiais apresentam melhor proximidade com dados experimentais.

### 5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Alguns trabalhos podem ser desenvolvidos a partir da base apresentada nesta dissertação. A seguir, são descritas possíveis pesquisas futuras e alguns trabalhos relevantes para consulta:

- Análise de elementos mistos de aço e concreto considerando o deslizamento na interface dos materiais, interação parcial (FAELLA *et al.*, 2002; SILVA, 2006; OLIVEIRA, 2009; SILVA, 2010);
- Análise dinâmica de estruturas mistas (EL-TAWIL; DEIERLEIN, 2001; CHEN *et al.*, 2010; CHEN *et al.*, 2014; SKALOMENOS *et al.*, 2014);
- Análise avançada tridimensional (LIEW *et al.*, 2001; IU *et al.*, 2009; DENAVIT, 2012; FONG; CHAN, 2012; BLEYER; BUHAN, 2013);
- Análise não linear de estruturas em situação de incêndio (IU; CHAN, 2004; CALDAS, 2008; LANDESMANN, 2011; WASTNEY, 2012);
- Introdução de modelos de plasticidade distribuída, Método da Zona Plástica (CALDAS, 2004);
- Simulação de pórticos mistos com ligação semirrígida (FANG *et al.*, 1999; TAO *et al.*, 2010);
- Colapso progressivo em estruturas mistas (IZZUDDIN *et al.*, 2008; FU, 2010);
- Análise avançada de elementos estruturais com restrições de contato impostas por um meio elástico, como o solo, por exemplo;
- Avaliação numérica da confiabilidade de estruturas mistas, dando continuidade à tese recém concluída de Agostini (2014).

# Referências

- ABAQUS. *Standard user's manual*. 6.8-1. ed. USA: Hibbitt, 2008. 10
- ACI-318. Building code requirements for reinforced concrete. *American Concrete Institute, Detroit, MI*, 1992. 12
- ACI-318. Building code requirements for structural concrete. *American Concrete Institute, Detroit, MI*, 1999. 9, 12
- ACI-318. Building code requirements for structural concrete an commentary. *American Concrete Institute, Detroit, MI*, 2008. 16, 73
- AGOSTINI, B. M. *Análise de confiabilidade estrutural de pórticos metálicos planos com ligações semirrígidas*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014. 88
- AISC/LRFD. Load and resistance factor design specification for structural steel buildings. *American Institute of Steel Construction, Chicago, IL*, 1993. 10, 12
- AISC/LRFD. Manual of steel construction - load and resistance factor design. *American Institute of Steel Construction, Chicago, IL*, 2001. 12
- AISC/LRFD. Manual of steel construction-load and resistance factor design specification for structural steel buildings. *American Institute of Steel Construction, Chicago, IL*, 2005. 7
- AISC/LRFD. Specification for structural steel buildings. *American Institute of Steel Construction, Chicago, IL*, 2010. xiii, xv, 32, 33, 55, 62, 63, 70, 71, 72, 86, 87, 98
- ALVA, G. *Sobre o projeto de edifícios em estrutura mista aço-concreto*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000. 10
- ALVES, R. Formulação para análise não-linear geométrica em referencial lagrangiano atualizado. In: *3º Seminário de Doutorado*. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1993. 23
- AN, Y. F.; HAN, L. H. Behavior of concrete-encased cfst columns under combined compression and bending. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 101, p. 314–330, 2014. 10

- BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 1262–1267, 1979. [41](#)
- BLEYER, J.; BUHAN, P. de. Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3d composite frame structures. *Computers and Structures*, v. 129, p. 86–98, 2013. [88](#)
- BRIDGE, R. Concrete filled steel tubular columns. *Civil Engineering Transactions*, v. 18, n. 2, p. 127–133, 1976. [xxii](#), [8](#), [69](#), [71](#)
- BS5400-5. Steel, concrete and composite bridges - part 5: Code of practice for design of composite bridges. *British Standard Institution*, 1979. [34](#), [35](#), [36](#), [55](#)
- BS5950. Structural use of steelwork in buildings - part 1: Code of practice for design in simple and continuous construction- hot rolled sections. *British Standards Institution*, 1990. [9](#)
- BS5950. Structural use of steel in buildings - part 1: Code of practice for design - rolled and welded sections. *British Standards Institution*, 2000. [64](#), [65](#)
- CALDAS, R. B. *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2004. [xxi](#), [2](#), [9](#), [11](#), [13](#), [16](#), [17](#), [20](#), [21](#), [26](#), [28](#), [51](#), [59](#), [60](#), [65](#), [66](#), [67](#), [83](#), [86](#), [88](#)
- CALDAS, R. B. *Análise numérica de estruturas de aço, concreto e mistas em situação de incêndio*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. [88](#)
- CHAMBERLAIN, Z. M. *Estruturas de Aço*. Passo Fundo, RS, 2004. [1](#)
- CHAN, S. L. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 26, p. 2657–2669, 1988. [42](#)
- CHAN, S. L.; CHUI, P. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Oxford: Elsevier, 2000. [11](#), [27](#), [46](#), [48](#)
- CHAN, S. L.; LIU, S.; LIU, Y. Advanced analysis of hybrid frame structures by refined plastic hinge approach. In: UY, B.; TAO, Z.; MASHIRI, F.; ZHU, X.; MIRZA, O.; TAN, E. L. (Ed.). *Steel and Composite Structures - Proceedings of 4th International Conference*. [S.l.], 2010. [11](#), [13](#), [16](#), [37](#), [46](#), [86](#)
- CHAPMAN, S. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. 2. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003. [6](#)
- CHEN, C.; WANG, C.; SUN, H. Experimental study on seismic behavior of full encased steel-concrete composite columns. *Journal of Structural Engineering*, v. 140, n. 6, 2014. [88](#)
- CHEN, S.; TENG, J. G.; CHAN, S. L. Design of biaxially loaded short composite columns of arbitrary section. *Journal of Structural Engineering*, v. 127, n. 6, p. 678–685, 2001. [12](#), [13](#), [37](#), [51](#), [87](#)

- CHEN, W.; KIM, S. *LRF D Steel Design using Advanced Analysis*. Boca Raton, Flórida, EUA: CRC Press, 1997. 25
- CHEN, Y.; WANG, T.; YANG, J.; ZHAO, X. Test and numerical simulation of partially encased composite columns subject to axial and cyclic horizontal loads. *International Journal of Steel Structures*, v. 10, n. 4, p. 385–393, 2010. 88
- CHIOREAN, C. G. A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3d composite steel-concrete frame structures. *Engineering Structures*, v. 57, p. 125–152, 2013. 13, 16, 18, 21, 27, 28, 52, 53, 58, 75, 76, 81, 86, 87
- CHOI, Y. H.; FOUTCH, D. A.; LAFAVE, J. M. New approach to aisc p-m interaction curve for square concrete filled tube (cft) beam-columns. *Engineering Structures*, v. 28, p. 1586–1598, 2006. 12
- CHOI, Y. H.; KIM, K. S.; CHOI, S.-M. Simplified p-m interaction curve for square steel tube filled with high-strength concrete. *Thin-Walled Structures*, v. 46, p. 506–515, 2008. 12
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. USA: John Wiley & Sons Inc., 1991. 41, 43
- DENAVIT, M. *Characterization of behavior of steel-concrete composite members and frames with applications for design*. 2012. 727 f. Tese (Doutorado) — Graduate College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America, 2012. 3, 11, 88
- DIAS, L. A. M. *Edificações de aço no Brasil*. São Paulo: Zigurate, 1993. 2
- EL-TAWIL, S.; DEIERLEIN, G. G. Nonlinear analysis of mixed steel-concrete frames. ii: implementation and verification. *Journal of Structural Engineering*, v. 127, n. 6, p. 656–665, 2001. 88
- EL-TAWIL, S.; SANZ-PICÓN, C.; DEIERLEIN. Evaluation of aci 318 and aisc (lrfd) strength provisions for composite beam-columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 34, p. 103–123, 1995. 11, 12
- ELLER, P. R. *Pré-dimensionamento de vigas mistas de aço e concreto para pontes de pequeno porte*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. xii, 2
- ELLOBODY, E.; YOUNG, B. Numerical simulation of concrete encased steel composite columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 67, p. 211–222, 2011. 10
- EUROCODE-2. Design of concrete structures - part 1-1: General rules and rules for buildings. *Comite Européen de Normalisation, CEN prEN*, 2004. 16
- EUROCODE-4. Final draft prenv 1994-1-1: European prestandard. *Comite Européen de Normalisation, CEN prEN*, 1992. 8
- EUROCODE-4. Design of composite steel and concrete structures. *Comite Européen de Normalisation, CEN prEN*, 2004. xii, xiii, xv, 7, 13, 29, 30, 31, 32, 55, 62, 63, 70, 71, 72, 86, 87, 98

- FAELLA, C.; MARTINELLI, E.; NIGRO, E. Steel and concrete composite beam with flexible shear connection: "exact" analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Computers and Structures*, v. 80, p. 1001–1009, 2002. [22](#), [88](#)
- FANG, L.; CHAN, S.; WONG, Y. Strength analysis of semi-rigid steel-concrete composite frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 52, p. 269–291, 1999. [88](#)
- FIGUEIREDO, L. M. B. *Projeto e construção de pilares mistos de aço-concreto*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1998. [3](#), [10](#)
- FONG, M. *Second-order analysis of imperfect light-weight and composite structures*. Tese (Doutorado) — The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, 2012. [7](#), [13](#), [26](#)
- FONG, M.; CHAN, S. L. Advanced analysis of steel-concrete composite beam-columns by refined plastic-hinge method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 12, n. 6, 2012. [xiii](#), [xxii](#), [11](#), [16](#), [21](#), [27](#), [46](#), [55](#), [56](#), [67](#), [69](#), [70](#), [71](#), [79](#), [83](#), [87](#), [88](#)
- FU, F. 3d nonlinear dynamic progressive collapse analysis of multistorey steel composite frame buildings - parametric study. *Engineering Structures*, v. 32, p. 3974–3980, 2010. [88](#)
- GALVÃO, A. S. *Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2000. [6](#), [23](#)
- GARCIA, L. *Análise não linear de pórticos planos de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1974. [83](#)
- GOMES, N. *Pilares mistos tubulares de aço e concreto*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994. [9](#)
- GONÇALVES, G. A. *Modelagem do comportamento inelástico de estruturas de aço: Membros sob flexão em torno do eixo de menor inércia*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2013. [6](#), [25](#), [26](#)
- GONÇALVES, R.; CARVALHO, J. An efficient geometrically exact beam element for composite columns and its application to concrete encased steel i-sections. *Engineering Structures*, v. 75, p. 213–224, 2014. [10](#), [16](#), [21](#), [69](#)
- GRIFFIS, L. The 1994 t. r. high lecture: Composite frame construction. In: AISC. *National Steel Construction Conference*. New York, 1994. v. 1, p. 1.1–1.72. [2](#)
- GRIFFIS, L. G. Some design considerations for composite-frame structures. *Engineering Journal*, v. 23, p. 59–65, 1986. [3](#)
- HAN, L. H. Flexural behavior of concrete-filled steel tubes. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 60, p. 313–337, 2004. [xxii](#), [9](#), [65](#), [67](#)

- HUU, C. N.; KIM, S. E. Practical nonlinear analysis of steel-concrete composite frames using fiber-hinge method. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 74, p. 90–97, 2012. [81](#)
- IU, C.; BRADFORD, M.; CHEN, W. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. *Engineering Structures*, v. 31, p. 799–813, 2009. [7](#), [11](#), [16](#), [21](#), [75](#), [76](#), [88](#)
- IU, C. K.; CHAN, S. L. A simulation-based large deflection and inelastic analysis of steel frames under fire. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 60, p. 1495–1524, 2004. [88](#)
- IZZUDDIN, B.; VLASSIS, A.; ELGHAZOULI, A.; NETHERCOT, D. Progressive collapse of multi-storey buildings due to sudden column loss - part i: Simplified assessment framework. *Engineering Structures*, v. 30, n. 5, p. 1308–1328, 2008. [88](#)
- KENT, D.; PARK, R. Flexural members with confined concrete. *Journal of Structural Division*, v. 97, n. 7, p. 1969–90, 1971. [18](#)
- KIM, C. S.; PARK, H. G.; CHUNG, K. S.; CHOI, I. R. Eccentric axial load testing for concrete-encased steel columns using 800 mpa steel and 100 mpa concrete. *Journal of Structural Engineering*, v. 138, n. 8, p. 1019–1031, 2012. [9](#)
- KIM, Y.; KIM, S. E. Advanced analysis accounting for composite beam effect. *Steel Structures*, v. 2, p. 103–109, 2002. [10](#)
- KINDMANN, R.; BERGMANN, R.; CAJOT, L.; SCHLEICH, J. Effect of reinforced concrete between the flanges of steel profile of partially encased composite beams. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 27, p. 107–122, 1993. [8](#)
- LAKSHMI, B.; SHANMUGAM, N. Nonlinear analysis of in-filled steel-concrete composite columns. *Journal of Structural Engineering*, v. 128, n. 7, p. 922–933, 2002. [10](#)
- LANDESMANN, A. Plastic-hinge approach for inelastic analysis of steel-concrete framed structures. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 66, p. 323–334, 2010. [7](#), [11](#)
- LANDESMANN, A. Inelastic analysis of semi-rigid composite structures under fire conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 33, n. 4, 2011. [88](#)
- LIANG, Q. Q.; UY, B.; BRADFORD, M. A.; RONAGH, H. Strength analysis of steel-concrete composite beams in combined bending and shear. *Journal of Structural Engineering*, v. 131, n. 10, p. 1593–1600, 2005. [10](#)
- LIEW, J.; CHEN, H.; SHANMUGAM, N. Inelastic analysis of steel frames with composite beams. *Journal of Structural Engineering*, v. 127, n. 2, p. 194–202, 2001. [10](#), [46](#), [75](#), [88](#)
- LIEW, J.; WHITE, D.; CHEN, W. Beam-column design in steel frameworks. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 18, n. 4, p. 269–308, 1991. [11](#)
- LIEW, J.; WHITE, D.; CHEN, W. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 1. *Journal of Structural Division*, v. 119, n. 11, p. 3196–3216, 1993. [27](#)

- LIEW, J.; WHITE, D.; CHEN, W. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *Journal of Structural Division*, v. 119, n. 11, p. 3217–3237, 1993. [10](#), [27](#)
- LIU, D. Behavior of high strength rectangular concrete-filled steel hollow section columns under eccentric loading. *Thin-Walled Structures*, v. 42, p. 1631–1644, 2004. [9](#)
- LIU, D. Behavior of eccentric loaded high-strength rectangular concrete-filled steel tubular columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 62, p. 839–846, 2006. [9](#)
- LIU, D.; GHO, W.-M.; YUAN, J. Ultimate capacity of high-strength rectangular concrete-filled steel hollow section stub columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 59, p. 1499–1515, 2003. [9](#)
- LIU, S. W. *Second order design and advanced analysis of hybrid steel and concrete framed structures*. Tese (Doutorado) — Department of Civil and Environmental Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, 2013. [21](#), [46](#)
- LIU, S. W.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames part 1: Cross-section analysis technique and second-order analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 70, p. 326–336, 2012. [xiii](#), [12](#), [16](#), [27](#), [37](#), [51](#), [60](#), [61](#), [62](#), [63](#)
- LIU, S. W.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames part 2: Refined plastic hinge and advanced analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 70, p. 337–349, 2012. [xxii](#), [11](#), [27](#), [69](#), [71](#), [73](#)
- MACHADO, F. C. S. *Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2005. [6](#)
- MACHADO, R. M. *Estudo teórico-experimental de elementos estruturais de perfis de aço mistos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 1998. [10](#)
- MALITE, M. *Sobre cálculo de vigas mistas aço-concreto: ênfase em edifícios*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1990. [3](#)
- MANDER, J.; PRIESTLEY, M.; PARK, R. Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of Structural Engineering*, v. 114, n. 8, p. 1804–1826, 1986. [16](#)
- MANFREDI, G.; FABBROCINO, G.; COSENZA, E. Modeling of steel-concrete composite beams under negative bending. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 125, n. 6, p. 654–662, 1999. [10](#)
- MAXIMIANO, D. P. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2012. [6](#), [40](#)

- MELO, A. M. C. de. *Projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000. 83, 84
- MIRZA, S.; HYTTINEN, V.; HYTTINEN, E. Physical tests an analysis of composite steel-concrete beam columns. *Journal os Structural Engineering*, v. 122, n. 11, p. 1317–1326, 1996. 8
- MUNIZ, C. F. D. G. *Modelos Numéricos pata Análise de Elementos Estruturais Mistos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2005. 11
- MUÑOZ, P. R. *Behavior of Biaxially Loaded Concrete-Encased Composite Columns*. Tese (Doutorado) — Faculty of New Jersey Institute of Technology, New Jersey, 1994. 8
- MUÑOZ, P. R.; HSU, C.-T. T. Behavior of biaxially loaded concrete encased composite columns. *Journal os Structural Engineering*, v. 123, n. 9, p. 1163–1171, 1997. 8
- NARDIN, S. de. *Estudo teórico-experimental de pilares mistos compostos por tubos de aço preenchidos com concreto de alta resistência*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999. 10
- NARDIN, S. de. *Pilares mistos preenchidos: estudo da flexo-compressão e de ligações viga-pilar*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003. 2
- NARDIN, S. de; DEBS, A. E. Estudo da capacidade resistente de pilares preenchidos via investigação experimental. In: *II Congresso Internacional da Construção Metálica, CICOM*. [S.l.: s.n.], 2002. 9
- NARDIN, S. de; DEBS, A. E. Axial load behavior of concrete-filled steel tubular columns. *Proceedings of the Institution of Civil Engineer - Structures and Buildings*, v. 160, p. 13–22, 2007. 10
- NBR14323. Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios em situação de incêndio. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, 2013. 3
- NBR6118. Projeto de estruturas de concreto - procedimento. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, 2014. xii, 16, 18, 19, 20
- NBR8800. Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, 2008. 3, 7
- NEOGI, P.; SEN, H.; CHAPMAN, J. Concrete-filled tubular steel columns under eccentric loading. *The Structural Engineer*, v. 47, n. 5, p. 187–195, 1969. xxii, 8, 69, 71, 73
- OEHLERS, D.; BRADFORD, M. *Elementary behavior of composite steel and concrete structural members*. Oxford, U.K.: Butterworth-Heinemann, 1999. xiii, 30
- OLIVEIRA, C. H. M. *Análise não-linear geométrica de vigas-colunas com interação parcial*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2009. 22, 88

- PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. Beam elements in instability problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 144, p. 163–197, 1997. [23](#)
- PFEIL, W.; PFEIL, M. *Estruturas de Aço: Dimensionamento Prático de Acordo com a NBR8800:2008*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. [2](#)
- ROCHA, G. *Estratégias numérica para análise de elementos estruturais esbeltos metálicos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil, 2000. [6](#), [40](#)
- ROIK, K.; BERGMANN, R. Design method for composite columns with unsymmetrical cross-sections. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 15, p. 153–168, 1990. [51](#)
- SFAKIANAKIS, M. G. Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete section of arbitrary shape by fiber model and computer graphics. *Advances in Engineering Software*, v. 33, p. 227–242, 2002. [12](#), [51](#)
- SILVA, A. R. D. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. 2009. 322 f. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil, 2009. [xii](#), [xiii](#), [5](#), [6](#), [23](#), [24](#), [27](#), [28](#), [38](#), [39](#), [40](#), [43](#), [45](#), [58](#), [86](#)
- SILVA, A. R. da. *Análise numérica de vigas mistas com interação parcial*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2006. [22](#), [88](#)
- SILVA, A. R. da. *Análise numérica de elementos estruturais com interação parcial*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. [22](#), [88](#)
- SILVEIRA, R. A. M. *Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1995. [6](#), [39](#), [40](#)
- SKALOMENOS, K. A.; HATZIGEORGIOU, G. D.; BESKOS, D. E. Parameter identification of three hysteretic model for the simulation of response of cft columns to cyclic loading. *Engineering Structures*, v. 61, p. 44–60, 2014. [88](#)
- SOLIMAN, K.; ARAFA, A.; ELRAKIB, T. M. Review of design code of concrete encased steel short columns under axial compression. *Housing and Building National Research Centre (HBRC) Journal*, v. 9, p. 134–143, 2013. [9](#)
- SOUZA, D. Á. de. Estruturas mistas de aço e concreto. *56º Congresso Brasileiro do Concreto*, 2014. [xii](#), [21](#)
- SPACONE, E.; EL-TAWIL, S. Nonlinear analysis of steel-concrete composite structures: State of the art. *Journal os Structural Engineering*, v. 130, n. 2, p. 159–168, 2004. [21](#)
- TAO, Z.; HAN, L.; WANG, W.; DU, T. Behavior of semi-rigid frames with concrete-filled steel tubular columns and steel beams. In: UY, B.; TAO, Z.; MASHIRI, F.; ZHU, X.; MIRZA, O.; TAN, E. L. (Ed.). *Steel and Composite Structures - Proceedings of 4th International Conference*. [S.l.], 2010. [88](#)

- VARMA, A. H.; RICLES, J. M.; SAUSE, R.; LU, L. W. Experimental behavior of high strength square concrete-filled steel tube beam-columns. *Journal of Structural Engineering*, v. 128, n. 3, p. 309–318, 2002. 9
- VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. Modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *Journal of American Concrete Institute*, v. 83, n. 2, p. 219–231, 1986. 16, 18
- VIEST, I.; COLACO, J.; FURLONG, R.; GRIFFIS, L.; LEON, R.; WYLLIE, L. *Composite construction design for buildings*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1997. 46
- WANG, Y. Tests on slender composite columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 49, p. 25–41, 1999. 9
- WASTNEY, C. *Performance of unprotected steel and composite steel frames exposed to fire*. Dissertação (Mestrado) — University of Canterbury, Christchurch, Nova Zelândia, 2012. 88
- WEBPAGE. arcoweb.com.br. <<http://arcoweb.com.br/projetodesign/arquitetura/fragmentos-do-real-10-bienal-internacional-de-arquitetura-de-sao-paulo>>. Acessado em 18/12/2014. xii, 5
- WEBPAGE. commons.wikimedia.org. <[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Empire\\_State\\_Building\\_\(HDR\).jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Empire_State_Building_(HDR).jpg)>. Acessado em 18/12/2014. xii, 4
- WEBPAGE. flickr.com. <<https://www.flickr.com/photos/rosamar/13995197031/>>. Acessado em 18/12/2014. xii, 5
- WEBPAGE. ny-pictures.com. <[http://ny-pictures.com/nyc/photo/picture/26613/chrysler\\_pointing\\_upwards\\_beautiful\\_sky](http://ny-pictures.com/nyc/photo/picture/26613/chrysler_pointing_upwards_beautiful_sky)>. Acessado em 18/12/2014. xii, 4
- WENG, C. C.; YEN, S. Comparisons of concrete-encased composite column strength provisions of aci code and aisc specification. *Engineering Structures*, v. 24, p. 59–72, 2002. 7, 12, 15
- YANG, Y.; KUO, S. *Theory & analysis of nonlinear framed structures*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994. 23, 40, 47
- YANG, Y.; SHIEH, M. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, v. 28, n. 12, p. 2110–2116, 1990. 10
- ZIEMIAN, R. D. Verification and benchmarking problems: Examples of frames studies used to verify advanced method of inelastic analysis. In: WHITE, D.; CHEN, W. (Ed.). *Plastic Hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames: An assessment of the state of art*. [S.l.], 1993. 26

# Apêndice A

## Modificações na Entrada de Dados

### A.1 Considerações Iniciais

As orientações para modificações na entrada de dados para análise de estruturas mistas de aço e concreto são apresentadas neste apêndice. Foram incluídas variáveis referentes à contribuição do concreto na rigidez e na resistência dos elementos. Na próxima seção serão ilustrados um arquivo de entrada e seus respectivos parâmetros, tanto para uma análise via Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), quanto para curvas de resistência de métodos normativos.

### A.2 Modificações Realizadas

A introdução de novos parâmetros ao arquivo de dados 1 do CS-ASA pode ser dividida em três partes: dados gerais (independem do meio de avaliação da resistência do elemento), dados do MCD e dados para análise por meio de normas de projeto ([EUROCODE-4, 2004](#); [AISC/LRFD, 2010](#)).

#### A.2.1 Dados gerais

A realização de análises de estruturas mistas de aço e concreto é determinada através dos dados passados na tela de execução do programa. Após determinada, são disponibilizadas ao usuário, na mesma tela, opções de métodos para determinação da resistência dos elementos presentes no sistema estrutural.

No arquivo de dados de entrada 1, que contém características do sistema, como tipo de análise, geometria, materiais componentes e dados do carregamento foram introduzidas, ou renomeadas as variáveis apresentadas na Tabela A.1, e podem ser visualizados nas Figuras A.1 e A.2.

**Tabela A.1** – Variáveis adicionadas ou renomeadas gerais

Variável	Descrição
$nobr$	número de linhas de barras longitudinais paralelas ao eixo de flexão
$E_a$	módulo de elasticidade do aço dos perfis
$E_b$	módulo de elasticidade do aço das barras
$E_c$	módulo de elasticidade do concreto
$f_y$	resistência de escoamento do aço do perfil
$f_{ys}$	resistência de escoamento do aço das barras
$f_{cd}$	resistência à compressão de cálculo do concreto
$\mu$	parâmetro de redução da rigidez flexional do concreto - fissuração
$\eta$	parâmetro de redução da rigidez flexional global
$ba$	área total de uma linha de barras longitudinais
$y_b$	distância de uma linha de armaduras à extremidade inferior da seção

### A.2.2 Dados do método da compatibilidade de deformações

Nesse método é necessário fornecer dados das relações constitutivas e do número de fatias para a discretização da seção. O nome dado as variáveis e um exemplo de arquivo de entrada são mostrados na Tabela A.2 e na Figura A.1, respectivamente.

### A.2.3 Dados para análise via métodos normativos

Diferentemente do MCD, onde as propriedades geométricas são calculadas de forma automatizada, as curvas de resistência por métodos normativos requerem as propriedades já calculadas. Essa é a única diferença na entrada de dados entre as duas opções.

**Tabela A.2** – Variáveis adicionadas ou renomeadas para o MCD

Variável	Descrição
$nol$	número de fatias (discretização da seção)
$\epsilon_{ci}$	deformação de plastificação do concreto à compressão
$\epsilon_{cu}$	deformação última do concreto à compressão
$\epsilon_u$	deformação última do aço
$st$	tipo de seção (metálica, mista, concreto)
$op$	opção de considerar ou não a resistência à tração no concreto

```

PORTICO CHIOREAN - VIGA MISTA E COLUNAS METÁLICAS - ARTIGO(2013) ANALISE NAO LINEAR INELASTICA
estatica                                     ...tipo de analise
por                                           ...modelo estrutural
1                                             ...tipo de solucao (0 - linear; 1 - não-linear)
0                                             ...ligações semi-rígidas
2                                             ...analise plastica refinada (1-elastoplastica)
0 0
13 12 2 2 3 1 11 2 7 16 1 ...npoin,nelem,nnode,ndime,ndofn,nmats,npmat,nsecs,npsec nol,nobr
coord                                         ...MACRO-COMANDO
ppor                                         ...MACRO-COMANDO
13                                            ...npoin
1 1 0.d0 0.d0 ...no,x,y
5 1 0.d0 5.d0
9 1 8.d0 5.d0
13 1 8.d0 0.d0
boun                                         ...MACRO-COMANDO
1 1 1 1 1 ...no,ng,dx,dy,mz
13 1 1 1 1
elem                                         ...MACRO-COMANDO
1 1 2 1 ...el,noi,noj,lx
12 12 13 1
mate                                         ...MACRO-COMANDO
2.d5 0.d0 0.8d4 252.4d0 0.d0 16.d0 1.d0 1.d0 ...Ea, Eb, Ec, fyd, fys, fcd, mu, eta
0.002d0 0.00806d0 0.01d0 ...eci, ecu, eu
1 ...ngelm
1 12 ...kel1,kel2
seca                                         ...MACRO-COMANDO
0.2052d0, 0.01671506d0, 0.2762d0, 0.0094966d0, 1.d0, 0.d0, 0.d0 ...bf,tf,h0,tw,eixo -> perfil I
1 2 ...st, op
0.0d0 0.0d0 ...Ba,yb
2 ...ngelm
1 4 ...kel1,kel2
9 12
0.102d0, 1.219d0, 0.1651d0, 0.0099493d0, 0.28541d0,0.0067518d0, 4.d0 ...hc,bc,bf,tf,h0,tw,st -> viga mista
4 2 ...st, op
0.0d0 0.0d0 ...Ba,yb
1 ...ngelm
5 8 ...kel1,kel2
graf                                         ...MACRO-COMANDO
0 9 9 ...autopl,npl,ndl
load                                         ...MACRO-COMANDO
1 ...nc - numero de casos de carregamento
1 0 ...iplod,iedge
5 1.d0 0.d0 0.d0 ...no,px,py,mz
7 0.d0 -1.d0 0.d0
13 0.d0 0.d0 0.d0
end

```

**Figura A.1** – Arquivo de dados 1: MCD

**Tabela A.3** – Variáveis adicionadas ou renomeadas para o uso de normas de projeto

Variável	Descrição
$nol$	número de fatias (discretização da seção)
$A_a$	área do perfil metálico
$A_b$	área total das armaduras
$A_c$	área do concreto
$I_a$	Inércia do perfil metálico
$I_b$	Inércia total das barras
$I_c$	Inércia do concreto
$Z_a$	módulo resistente plástico do perfil metálico
$Z_b$	módulo resistente plástico total das barras
$Z_c$	módulo resistente plástico

```

COLUNA BRIDGE - ARTIGO(1976) ANALISE NAO LINEAR INELASTICA
estatica ...tipo de analise
por ...modelo estrutural
1 ...tipo de solucao (0 - linear; 1 - não-linear)
0 ...ligações semi-rígidas
2 ...analise plastica refinada (1-elastoplastica)
0 0
5 4 2 2 3 1 8 1 16 0 ...npoin,nelem,nnode,ndime,ndofn,nmats,npmat,nsecs,npsec,nobr
coor ...MACRO-COMANDO
ppor ...MACRO-COMANDO
5 ...npoin
1 1 0.d0 0.d0 ...no,x,y
2 1 1.506d0 532.5d0
3 1 2.13d0 1065.0d0
4 1 1.506d0 1597.5d0
5 1 0.d0 2130.0d0
boun ...MACRO-COMANDO
1 1 1 1 0 ...no,ng,dx,dy,mz
5 1 1 0 0
elem ...MACRO-COMANDO
1 1 2 1 ...el,noi,noj,lx
4 4 5 1
mate ...MACRO-COMANDO
2.05d2 0.0d0 2.6d1 0.291d0 0.0d0 0.0302d0 0.6d00 1.d00 ...Ea, Eb, Ec, fyd, fys, fcd, mu, eta
1 ...ngelm
1 4 ...kel1,ke12
seca ...MACRO-COMANDO
7.723d3 0.d0 33.811d3 48.526d6 0.0d0 95.374d6 5.620d5 0.0d0 1.555d6 ...Aa,Ab,Ac,Ia,Ib,Ic,Za,Zb,Zc
203.7 203.9 9.96 ...bf,d,t -> seção tubular retangular
1 ...ngelm
1 4 ...kel1,ke12
graf ...MACRO-COMANDO
0 3 3 ...autopl,npl,ndl
load ...MACRO-COMANDO
1 ...nc - numero de casos de carregamento
1 0 ...iplod,iedge
1 0.0d0 1.d0 -38 ...no,px,py,mz
5 0.0d0 -1.d0 38
end

```

**Figura A.2** – Arquivo de dados 1: normas