

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIA PARA IDENTIFICAÇÃO MODAL
AUTOMÁTICA DE ESTRUTURAS

RHARÃ DE ALMEIDA CARDOSO

OURO PRETO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL DA UFOP

2015

DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIA PARA IDENTIFICAÇÃO MODAL
AUTOMÁTICA DE ESTRUTURAS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos mínimos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Orientador: Alexandre Abrahão Cury

Coorientador: Flávio de Souza Barbosa

Ouro Preto

Departamento de Engenharia Civil da UFOP

2015

C268d

Cardoso, Rharã de Almeida.

Desenvolvimento de metodologia para identificação modal automática de estruturas [manuscrito] / Rharã de Almeida Cardoso. - 2015.

111f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Abrahão Cury.

Coorientador: Prof. Dr. Flávio de Souza Barbosa.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Identificação. 2. Diagrama de fluxo de dados. 3. Dinâmica. 4. Estabilidade. I. Cury, Alexandre Abrahão. II. Barbosa, Flávio de Souza. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 624.014

**DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIA PARA IDENTIFICAÇÃO
MODAL AUTOMÁTICA DE ESTRUTURAS**

AUTOR: RHARÃ DE ALMEIDA CARDOSO

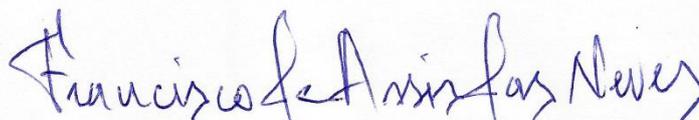
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 13 de março de 2015, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



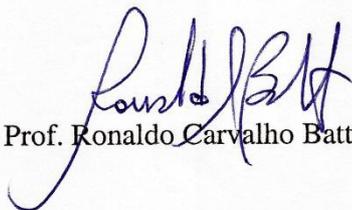
Prof. Alexandre Abrahão Cury, Dr. Eng. Civil – UFJF (Presidente)



Prof. Flávio de Souza Barbosa, D.Sc. – UFJF



Prof. Francisco de Assis das Neves, D.Sc. – UFOP



Prof. Ronaldo Carvalho Battista, Ph.D. – UFRJ

Dedicado a minha querida mãe.

AGRADECIMENTOS

Dedico meus sinceros agradecimentos:

- Ao professor Flávio Barbosa pelos anos de contribuição humana/científica;
- Ao professor Alexandre Cury pela excelência na transmissão do conhecimento;
- Aos mestres que lecionam no PROPEC. Especialmente ao professor Célio, Ricardo Azoubel, Ricardo Fiorotti, Arlene, Assis e Marcílio;
- À ex-secretária do PROPEC, Róvia, por simplificar os problemas burocráticos com competência e boa vontade;
- Ao Colégio Militar de Juiz de Fora pela qualidade do ensino oferecido durante sete anos de meu percurso;
- À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro durante os últimos dois anos;
- À Universidade Federal de Juiz de Fora pela formação qualificada e gratuita;
- Aos meus amigos de jornada em Ouro Preto, em especial, Rafael Zaltron e Marko Ruppert;
- Aos meus irmãos e mãe por propiciarem um ambiente caseiro sadio e alegre.

*If you want to find the secrets of the Universe,
think in terms of energy, frequency and
vibration.*

Nikola Tesla

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil

DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIA PARA IDENTIFICAÇÃO MODAL AUTOMÁTICA DE ESTRUTURAS

Rharã de Almeida Cardoso

Março/2015

Orientador: Alexandre Abrahão Cury

Coorientador: Flávio de Souza Barbosa

O monitoramento da integridade estrutural (*SHM – Structural Health Monitoring*) de estruturas é de grande importância prática para engenharia civil. Grandes obras como a ponte Rio-Niterói, no Brasil, a ponte Z24, na Suíça, ou o viaduto de Millau, na França, são monitoradas há algum tempo. De fato, algumas estruturas são monitoradas 24 horas por dia, 7 dias por semana, com o objetivo de fornecer medidas dinâmicas que possam ser usadas para a identificação de problemas estruturais tais como a presença de dano ou de vibração excessiva. Esta análise deve passar pelo processo denominado identificação modal, cujos dados de saída são chamados de parâmetros modais, nomeadamente frequências naturais, taxas de amortecimento e formas modais. Portanto, é fundamental que haja o desenvolvimento e a validação de ferramentas para a identificação automática destes parâmetros. Uma vez que o sucesso dos algoritmos de detecção de dano depende da precisão das estimativas dos parâmetros modais, é imperativo que o algoritmo de automatização da identificação seja eficiente e adequado para tratar as respostas da estrutura durante sua operação normal. A metodologia proposta neste trabalho se utiliza dos dados fornecidos por um algoritmo de identificação paramétrico (que gera um diagrama de estabilização), como o *SSI-DATA*, para determinar automaticamente os parâmetros dinâmicos da estrutura. A eficiência desta metodologia é atestada mediante sua aplicação a sinais gerados numericamente, a respostas de uma viga biapoiada ensaiada em laboratório e aos dados do monitoramento de uma ponte rodoviária.

Palavras-chave: Identificação Modal Automática, Diagrama de Estabilização, Dinâmica.

Abstract of Dissertation presented to PROPEC/UFOP as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering

DEVELOPMENT OF METHODOLOGY FOR AUTOMATIC MODAL IDENTIFICATION OF STRUCTURES

Rharã de Almeida Cardoso

March/2015

Advisor: Alexandre Abrahão Cury

Co-advisor: Flávio de Souza Barbosa

Structural health monitoring of civil infrastructures has great practical importance for engineers, owners and stakeholders. Numerous researches have been carried out using long-term monitoring, for instance the Rio-Niterói Bridge in Brazil, the former Z24 Bridge in Switzerland, the Millau Bridge in France, among others. In fact, some structures are monitored 24/7 in order to supply dynamic measurements that can be used for the identification of structural problems such as the presence of cracks, excessive vibration, damage identification or even to perform a quite extensive structural evaluation concerning its reliability and life cycle. The outputs of such an analysis, commonly entitled modal identification are the so-called modal parameters, i.e. natural frequencies, damping ratios and mode shapes. Therefore, the development and validation of tools for the automatic identification of modal parameters based on the structural responses during normal operation is fundamental, as the success of subsequent damage detection algorithms depends on the accuracy of the modal parameters estimates. The proposed methodology uses the data driven stochastic subspace identification method (SSI-DATA), which is then complemented by a novel procedure developed for the automatic analysis of the stabilization diagrams provided by the SSI-DATA method. The efficiency of the proposed approach is attested via experimental investigations on numerical data, on a simply supported beam tested in laboratory and on a motorway bridge.

Keywords: Automatic Modal Identification, Stabilization Diagram, Dynamics.

DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIA PARA IDENTIFICAÇÃO MODAL
AUTOMÁTICA DE ESTRUTURAS

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contexto e Motivação	1
1.2	Objetivos	10
1.3	Escopo do texto	10
2	Identificação Estocástica em Subespaços	12
2.1	Modelos e Identificação de Sistemas	12
2.2	Modelo de Espaço de Estados	13
2.2.1	Introdução e Contexto	13
2.2.2	Descrição	14
2.3	<i>SSI-DATA</i>	20
2.3.1	Introdução	20
2.3.2	Descrição	21
2.4	Comentários adicionais	24
3	Identificação Modal Automática	26
3.1	Introdução	26
3.2	Diagrama de Estabilização	26
3.3	Análise de <i>Cluster</i>	30
3.3.1	Exemplo Didático	30
3.3.2	Observações	37
3.4	Interpretação Automática do Diagrama de Estabilização	37
4	Metodologia Desenvolvida	43
4.1	Introdução	43
4.2	Metodologia de Referência	43

4.3	Metodologia Proposta	45
5	Aplicações.....	49
5.1	Introdução.....	49
5.2	Aplicação a sinais gerados numericamente.....	50
5.2.1	Introdução	50
5.2.2	Sinal sem ruído	51
5.2.3	Sinal com 10% de ruído	56
5.2.4	Sinal com 20% de ruído	61
5.3	Aplicação Prática – Viga Biapoiada	66
5.3.1	Introdução	66
5.3.2	Resultados	71
5.4	Aplicação Prática – Ponte PI-57.....	83
5.4.1	Introdução	83
5.4.2	Resultados	87
6	Conclusão	92
6.1	Análise dos Resultados	92
6.2	Contribuições.....	93
6.3	Trabalhos Futuros	94
	Referências Bibliográficas	96

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto e Motivação

Os chamados ensaios vibratórios fornecem sinais temporais que são usados na determinação dos parâmetros modais de um sistema dinâmico deformável, nomeadamente: frequências naturais, taxas de amortecimento e formas de vibração. Com o objetivo de se obter os históricos de resposta (sinais temporais), comumente utilizam-se pequenos dispositivos transdutores de aceleração (acelerômetros) ou, algumas vezes, extensômetros elétricos de resistência (*strain-gages*), defletômetros, vibrometria a laser, radar, dentre outros. Posteriormente, os históricos de resposta são enviados para um computador, onde servirão como dados de entrada para algoritmos responsáveis pela determinação dos parâmetros dinâmicos da estrutura, através de um processo denominado *identificação modal*.

Uma vez que existe um estreito relacionamento entre os parâmetros dinâmicos de uma estrutura e seu comportamento mecânico (rigidez, massa e amortecimento), utiliza-se a identificação modal como ferramenta útil, por exemplo, para: verificar e, se necessário, atualizar modelos numéricos de estruturas; calibrar dispositivos de controle de vibração; avaliar o estado de integridade estrutural; evitar problemas de ressonância; caracterizar estruturas existentes antes e depois da execução de projetos de reabilitação.

Por mais de meio século, a identificação experimental dos parâmetros modais de estruturas tem sido objeto de muita pesquisa. Na engenharia mecânica surgiram as primeiras caracterizações experimentais do comportamento dinâmico de estruturas, as quais eram relativamente pequenas e testadas em ambiente controlado de laboratório. Atualmente, esta abordagem é mais amplamente denominada Análise Modal Experimental (*EMA – Experimental Modal Analysis*). Os resultados de uma *EMA* são obtidos por meio de medições

das respostas dinâmicas estruturais devidas a carregamentos externos provocados, controlados ou não, mas que também podem ser medidos. Por conseguinte, os parâmetros modais são identificados a partir da relação entre os dados de entrada aplicados (carregamentos) e os dados de saída (resposta dinâmica). Desta forma, esta abordagem também ficou conhecida como *Input-Output Modal Analysis*.

Com o passar do tempo, desde suas primeiras aplicações práticas, a *EMA* acabou por tornar-se bem estabelecida no meio técnico-científico por ter sido fundada e desenvolvida sobre sólidas bases teóricas (Ewins, 2000) e apoiada por seu largo uso na prática, como por exemplo, nas indústrias automotiva e aeroespacial.

Naturalmente, as técnicas da *EMA* passaram a ser então utilizadas também na engenharia civil. Em estruturas de pequeno porte, tais como uma passarela de pedestres ou um pontilhão, a força de excitação pode ser provocada por um martelo de impacto, um vibrador de massa excêntrica, um vibrador eletrodinâmico ou qualquer outro dispositivo de excitação, desde que as informações sobre o carregamento, como a amplitude e a frequência, sejam medidas. Uma vez que se utilizem dispositivos excitadores, o ensaio recebe o nome de Teste de Vibração Forçada (*FVT – Forced Vibration Test*). A Figura 1 ilustra alguns dispositivos utilizados para este fim.

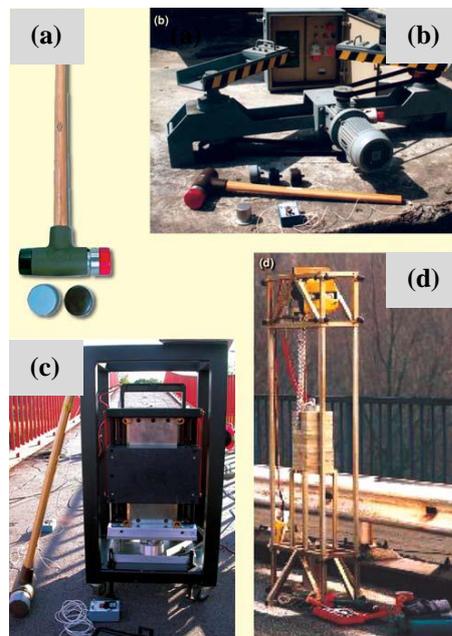


Figura 1: Dispositivos excitadores de pequeno porte. (a) martelo de impacto, (b) vibrador de massa excêntrica, (c) vibrador eletrodinâmico sobre células de carga e (d) dispositivo de excitação impulsiva para pontes. Extraído do trabalho de Cunha e Caetano (2006).

Entretanto, não é de se surpreender que a identificação modal de estruturas civis de grande porte ainda era difícil, já que a excitação forçada (com energia suficiente) de seus modos de vibração dependia de caros e pesados dispositivos, como os vibradores de grande amplitude mostrados nas Figuras 2 e 3.

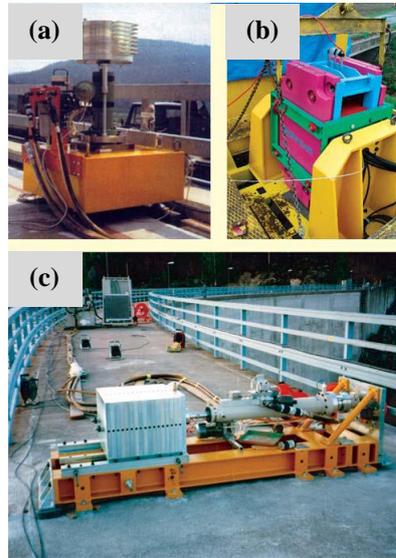


Figura 2: Dispositivos excitadores de grande porte. (a) vibrador servo-hidráulico excitando uma ponte verticalmente, (b) vibrador eletro-hidráulico e (c) vibrador servo-hidráulico excitando uma barragem lateralmente. Extraído do trabalho de Cunha e Caetano (2006).



Figura 3: (a) Ensaio dinâmico de vibração forçada na ponte pênsil de Yeongjong (a), Coreia do Sul, (<http://www.yeongjongbridge.com>) e na ponte estaiada de Tataru (b), Japão (<http://www.hsba.go.jp>).

Em alguns casos especiais, como na obra de ampliação do aeroporto da ilha de Madeira, artefatos únicos foram montados para forçar um nível considerável de vibração estrutural (Rodrigues, 2004). Como ilustra a Figura 4, uma estrutura provisória sustentada somente por cabos de aço ligados à laje da estrutura, mantinha aproximadamente 60 toneladas em suspensão. Desta forma, uma considerável quantidade de energia de deformação elástica

era armazenada na estrutura logo acima. De forma repentina, os cabos eram rompidos e então, subitamente, toda a energia de deformação elástica era liberada, o que iniciava a vibração livre da estrutura.



Figura 4: Dispositivo para excitação forçada com aproximadamente 60 toneladas, aeroporto da Ilha de Madeira.

Em consequência, diante dos desafios financeiros e logísticos que envolvem a manipulação de dispositivos excitadores de grandes estruturas civis, uma variação do teste de vibração forçada foi criada e denominada de Teste de Vibração Ambiente (*AVT – Ambient Vibration Test*), isto é, as forças excitadoras não mais seriam provocadas por pesados dispositivos, mas sim seriam consideradas as próprias forças presentes livremente no ambiente, tais como o vento ou o tráfego de veículos próximos ou sobre a estrutura.

Apesar das características atraentes envolvidas nos ensaios de vibração ambiente, o desafio inicial era que a composição de sensores e aparelhos de aquisição de dados fosse suficientemente sensível e, ao mesmo tempo estável, para registrar a resposta estrutural com amplitudes vibracionais bem menores do que as de costume encontradas nos ensaios de vibração forçada. Além disso, o espectro das fontes excitadoras do ambiente deveria abranger uma faixa larga o suficiente para que se garantisse que todos os modos de interesse pudessem ser identificados com precisão.

Assim sendo, observa-se que a vantagem da interferência dos diversos agentes ambientais mais comuns, como o vento e o tráfego de veículos, de fato se comporta, na maioria das vezes e em uma amostragem suficientemente grande, como uma fonte excitadora com o espectro de frequências semelhante ao de um ruído branco, ou seja, fornecem energia

ao sistema de forma bem distribuída, em um largo domínio de diferentes frequências. Além disso, felizmente, os avanços tecnológicos no campo dos transdutores e conversores A/D possibilitaram a medição precisa de pequenas amplitudes na resposta dinâmica de estruturas sujeitas à excitação de forças ambientais. Este fato foi crucial para que o *AVT* se pronunciasse como uma alternativa interessante e viável para a identificação modal na engenharia civil.

Além de dispensar o emprego dos pesados, e por vezes ineficientes, dispositivos de excitação, outra enorme vantagem do *AVT* com relação ao *FVT* reside no fato de que o funcionamento normal da estrutura, como uma ponte, não precisa ser interrompido ou modificado para que os testes aconteçam (Figuras 2 e 3). Pelo contrário, a medição da resposta estrutural ocorre em situações normais de operação, sem a necessidade de qualquer interferência no uso da estrutura, fato que permite avaliar a resposta sob níveis reais de solicitação em serviço, o que contribui também para se eliminar erros provenientes de comportamentos não-lineares¹.

Em outras palavras, os testes de vibração forçada podem se tornar problemáticos quando as estruturas a serem analisadas são de grande porte como edifícios, pontes ou barragens, pois a excitação controlada, e com energia suficiente, dos modos de vibração mais significantes, em muitos casos fica expressivamente difícil e onerosa. Some-se a isto o transtorno causado aos usuários durante a execução deste tipo de teste. Desta forma um cenário extremamente favorável ao uso do método de ensaios de vibração ambiente (*AVT*) acabará por se instalar, de maneira que sua qualidade operacional será claramente evidenciada e valorizada.

De qualquer maneira, seja qual for o tipo de teste dinâmico, *FVT* ou *AVT*, se o principal objetivo é a identificação precisa dos parâmetros modais somente a partir das respostas estruturais medidas, sem que a operação normal da estrutura seja comprometida, o processo passa a ser denominado, então, de Análise Modal Operacional (*OMA – Operational Modal Analysis*) ou, em oposição à análise modal *input-output*, *Output-Only Modal Analysis*. Normalmente, neste tipo de análise, assume-se, dentre outras coisas, a hipótese de que o carregamento tenha características de um ruído branco de média zero. Por isso, os ensaios para um *OMA* são, na grande maioria das vezes, aqueles de vibração ambiente.

¹ Resultantes, por exemplo, da colocação de grandes massas concentradas na estrutura como os *shakers* de alta potência.

Existe também uma terceira maneira de se abordar a análise modal de estruturas. Trata-se de uma extensão da Análise Modal Operacional, denominada Análise Modal Operacional com forças exógenas (*OMAX – Operational Modal Analysis in presence of eXogenous inputs*). Em outras palavras, trata-se de uma análise modal operacional que considera em seu modelo não só a presença de forças desconhecidas (estocásticas), mas também de forças conhecidas mensuráveis (determinísticas). A Tabela 1 resume as três abordagens para a análise modal de estruturas.

Tabela 1: Resumo dos tipos de análise modal em dinâmica das estruturas.

Tipo de análise modal	Precisa medir		Tipo de ensaio dinâmico indicado
	dados de entrada (carregamento)?	dados de saída (resposta dinâmica)?	
<i>EMA</i>	Sim	Sim	<i>FVT</i>
<i>OMA</i>	Não	Sim	<i>AVT</i>
<i>OMAX</i>	Sim	Sim	<i>FVT e AVT</i>

Atualmente, há um crescente aumento no interesse por parte de projetistas, construtores e proprietários de grandes estruturas no que diz respeito a testes dinâmicos e a programas de monitoramento da integridade estrutural (*SHM - Structural Health Monitoring*) baseados em dados de vibração. Isso pode ser explicado pela existência de um elevado número de estruturas civis de grande porte, tais como pontes, viadutos, barragens e grandes edifícios, que estão alcançando, devido à idade e a outros fatores, um alto grau de degradação estrutural. Em paralelo, existe, em muitos casos, a necessidade da validação de modelos numéricos do comportamento de novas estruturas com um alto grau de complexidade. Além disso, cada vez mais, são executados novos projetos de estruturas muito mais flexíveis, as quais são mais propensas a apresentar níveis excessivos de vibração devido a cargas dinâmicas ambientais (vento, pedestres, tráfego de veículos de alta velocidade, etc.).

Neste contexto, é comum o surgimento da necessidade de se instalar sistemas de monitoramento dinâmico contínuo, mais tradicionalmente em pontes e viadutos. Algumas dessas estruturas são monitoradas 24 horas por dia, 7 dias por semana, continuamente ou durante certos intervalos de tempo, com o intuito de permitir que os sensores dinâmicos (geralmente acelerômetros) possam fornecer dados que possibilitem a identificação em tempo real de problemas estruturais, tais como: vibração excessiva, presença de fissuras e comportamentos atípicos.

Existem vários trabalhos publicados que tratam da monitoração dinâmica de estruturas de grande vulto, como por exemplo, a ponte Rio-Niterói (Battista *et al.*, 2000), no Brasil, a Ponte Z24 (Maeck *et al.*, 2003), na Suíça, a ponte PI-57 (Cury *et al.*, 2012), na França, e o viaduto de Millau (Gautier *et al.*, 2005), também na França.

Pelos motivos previamente citados, a Análise Modal Operacional, a despeito da *EMA* e da *OMAX*, tem tido a preferência esmagadora no que diz respeito ao monitoramento dinâmico contínuo de estruturas civis. Contudo, a aquisição e processamento de dados em tempo real traz um desafio: a sua automatização.

Uma *OMA* pode ser realizada por meio de diferentes algoritmos, os quais evoluíram consideravelmente na última década. Porém, apesar do progresso notável, algumas melhorias, relativas à automatização do processo de monitoramento, ainda são possíveis. É neste ponto que o presente trabalho pretende contribuir. Portanto, somente serão abordados, doravante no texto, conceitos e métodos de identificação relacionados à Análise Modal Operacional.

Primeiramente, deve-se distinguir claramente o processo de estimativa dos parâmetros modais (*MPE – Modal Parameter Estimation*) do processo de acompanhamento dos parâmetros modais (*modal tracking*). O primeiro consiste na determinação dos parâmetros modais obtidos de uma única gravação de dados coletados, enquanto o segundo se refere ao acompanhamento da evolução dos parâmetros modais da estrutura ao longo do tempo e através de repetidos *MPE*. O presente trabalho trata exclusivamente do processo de estimativa dos parâmetros modais (*MPE*).

Existem diversos tipos de algoritmos, contidos no contexto da Análise Modal Operacional (ou *Output-only Modal Analysis*), capazes de realizar o processo de estimativa dos parâmetros modais (*MPE*). Estes algoritmos podem ser distribuídos em dois grupos de métodos: domínio da frequência e domínio do tempo. O primeiro trabalha a partir do espectro de frequências do sinal, enquanto o segundo recorre à própria série temporal deste sinal e realiza um ajuste destes dados a um modelo paramétrico.

Como sendo pertencentes ao grupo dos métodos do domínio da frequência pode-se citar a *FFT (Fast Fourier Transform)*, *FDD (Frequency Domain Decomposition)*, *EFDD (Enhanced Frequency Domain Decomposition)* e *P-LSCF (Poly-reference Least Squares Complex Frequency domain)*. Por outro lado, pode-se mencionar, como métodos do domínio

do tempo, o *RD* (*Random Decrement Method*), *ITD* (*Ibrahim Time Domain method*), *ERA* (*Eigensystem Realization Analysis*) e *SSI* (*Stochastic Subspace Identification*).

Por uma série de vantagens, as quais serão apresentadas no capítulo 2, o método de identificação modal para *OMA* mais largamente utilizado, inclusive em *softwares* comerciais, é o *SSI* (Identificação Estocástica em Subespaços).

Em linhas gerais, com relação às técnicas de identificação de sistemas paramétricos (métodos do domínio do tempo), podem-se enumerar dois passos para o processo de *MPE*:

1. Cálculo das estimativas dos modos para variadas ordens do modelo paramétrico, por meio de seu ajuste aos históricos de resposta;
2. Interpretação dos modos estimados, diferenciando modos espúrios (numéricos) de modos físicos.

O primeiro passo é realizado pelo algoritmo de identificação modal, por exemplo, o *SSI*, o qual gera uma série de estimativas para os modos de vibração para diversas ordens do modelo paramétrico. Estes resultados são normalmente dispostos em um diagrama de estabilização para que, no segundo passo, possa haver um discernimento entre os modos com significado físico e aqueles modos oriundos da tentativa do método em melhor ajustar o modelo paramétrico às séries temporais, mas que tem caráter apenas numérico e, portanto, são considerados espúrios.

A caracterização de um modo estimado como sendo espúrio ou físico, a princípio é realizada pela análise cuidadosa de um especialista da área, geralmente com o auxílio do diagrama de estabilização. Por isso, de fato, sem a automatização do processo de *MPE*, muita interação manual sobre um grande volume de dados de vibração coletados seria necessária, levando a uma impossibilidade prática de aplicação em programas de monitoramento contínuo. Portanto, especialmente durante a última década, diversos métodos visando à redução do número de parâmetros manualmente definidos têm sido desenvolvidos (Magalhães, 2010; Reynders *et al.*, 2012; Cabboi A, 2013). Quando o método não necessita nem sequer de um único parâmetro manualmente dado pelo usuário, nenhuma interação humana, então esse método é comumente denominado na literatura: *fully automated* (totalmente automatizado).

Em 2012, por exemplo, Reynders *et al.* publicou uma metodologia totalmente automática para a interpretação do diagrama de estabilização, ou seja, em sua proposta nenhum parâmetro precisa ser fornecido manualmente pelo usuário.

Apesar dessa grande conquista, a prática tem mostrado que, mesmo os mais sofisticados métodos totalmente automatizados, deveriam, em uma primeira instância permitir alguma interação crítica do usuário com o objetivo de se evitar que uma estrutura com comportamento único possa ser posteriormente “mal analisada” pelos algoritmos.

Infelizmente, não se pode garantir que um método de identificação modal totalmente automatizado funcione como esperado para qualquer estrutura civil. Uma vez que nem mesmo o uso da inteligência artificial cobriria a totalidade dos casos, recomenda-se fortemente a interação de um usuário com o sistema, de maneira que, num primeiro passo, calibrem-se alguns parâmetros, os quais garantirão o bom funcionamento do algoritmo para uma determinada estrutura específica.

Portanto, o desenvolvimento de novos métodos para automação do processo de *MPE* não necessita focar na eliminação de todos os parâmetros manualmente definidos, mas sim na construção de um método robusto e automático contendo alguns poucos parâmetros facilmente ajustáveis, cuja definição possa ser feita uma única vez, antes de se começar o processo automático repetitivo propriamente dito.

Neste cenário, surge a motivação para a realização do presente trabalho, o qual visa a implementação de uma metodologia capaz de identificar automaticamente os parâmetros modais de uma estrutura, de maneira que haja somente uma primeira decisão humana antes do início do processamento dos dados. Pretendeu-se que essa interação humana fosse mínima, porém suficiente para evitar resultados inesperados por parte do algoritmo de automatização.

Magalhães (2010) publicou um método automático cuja interação manual se restringe à definição de apenas dois parâmetros configuráveis. Cabe mencionar que seu trabalho, juntamente com o de Reynders *et al.* (2012), serviram como base para algumas das vias que levaram à concepção de uma metodologia original, cuja apresentação encontra-se no capítulo 4 deste trabalho.

1.2 Objetivos

O presente trabalho foca exclusivamente na criação de uma solução inovadora para realização do segundo passo do processo de *MPE*. Em outras palavras, busca-se criar uma metodologia capaz de avaliar um diagrama de estabilização de forma automática e precisa, de maneira que os resultados sejam os mesmos daqueles produzidos pela análise de um analista experiente. Esta metodologia deve fornecer o maior grau de automação do processo quanto possível, porém deve também permitir, em uma primeira calibragem, um mínimo grau de interação com o usuário.

Desta maneira, qualquer método de identificação modal que gere um diagrama de estabilização pode ser usado de maneira compatível com a metodologia proposta. Ou seja, o primeiro passo do processo *MPE* pode ser executado por qualquer método de identificação modal baseado em modelo paramétrico (métodos do domínio do tempo e o *p-LSCF*). Embora qualquer uma destas técnicas possa ser aplicada, por razões a serem discutidas oportunamente no texto, implementou-se e utilizou-se o método *SSI-DATA* (*Data-driven Stochastic Subspace Identification*).

1.3 Escopo do texto

O capítulo 1, o qual presentemente se lê, mostra uma visão geral do estado da arte dos métodos de identificação modal, bem como trata dos tipos de ensaios e das diferentes abordagens da análise modal. Além disso, este capítulo também ressalta o contexto de motivação do trabalho, estabelece seu objetivo e, ao final, traz a presente síntese dos assuntos a serem tratados nos capítulos subsequentes.

O leitor encontrará no capítulo 2 uma descrição do método de identificação modal a ser utilizado: *SSI-DATA*.

Posteriormente, após a exposição dos aspectos matemáticos do método de identificação modal a ser utilizado, o capítulo 3 posiciona o texto a respeito da necessidade da automatização de todo esse processo. Expõem-se, de maneira primordialmente qualitativa, alguns métodos de identificação modal automática encontrados na literatura e apontam-se vertentes que poderiam significar a melhoria dos mesmos.

No capítulo 4 é colocada a descrição da metodologia de identificação modal automática proposta neste trabalho.

Para comprovar a eficiência e a funcionalidade dos algoritmos desenvolvidos, a metodologia proposta é aplicada em dados de ensaios simulados numericamente e em dados obtidos de ensaios experimentais de estruturas reais. Os resultados destes testes encontram-se reunidos e analisados no capítulo 5.

Finalmente, as discussões sobre os resultados, as conclusões finais, as contribuições do trabalho e as sugestões de pesquisas futuras são delineadas no capítulo 6.

Capítulo 2

Identificação Estocástica em Subespaços

2.1 Modelos e Identificação de Sistemas

Um modelo dinâmico tem a capacidade de cobrir quase todos os fenômenos, sejam eles físicos, econômicos, industriais, técnicos, biológicos, dentre outros. Estes modelos podem ser de natureza intuitiva, verbal, mental ou gráfica (gráficos e tabelas). Porém, aqui o interesse está voltado exclusivamente para os modelos matemáticos, os quais são descritos por equações diferenciais (tempo contínuo) ou equações algébricas (tempo discreto). Estes modelos descrevem o comportamento dinâmico de um sistema como uma função, obviamente, do tempo. Eles existem em variadas áreas da ciência e são os principais responsáveis pela racionalização e entendimento dos fenômenos pesquisados.

A Figura 5 representa um sistema dinâmico. Todas as setas simbolizam sinais vetoriais e k é o índice de tempo discreto. Os vetores \mathbf{u}_k e \mathbf{y}_k são medidos/conhecidos, mas \mathbf{v}_k não. Em algumas aplicações, tanto \mathbf{u}_k quanto \mathbf{v}_k podem estar omissos. Os sinais de saída (e os de entrada) fornecem informação útil sobre o sistema desconhecido.

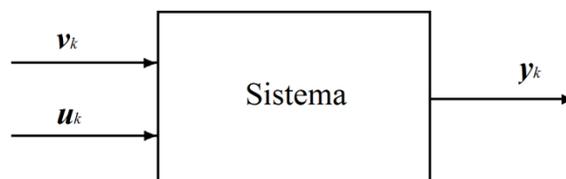


Figura 5: Sistema dinâmico com entrada determinística \mathbf{u}_k , entrada estocástica (perturbações) \mathbf{v}_k e saída \mathbf{y}_k .

Os modelos matemáticos, portanto, são utilizados para simulação de fenômenos, treinamento operacional, análises, monitoramento, detecção de falhas, previsões, otimização,

projetos de sistemas de controle, controle de qualidade, etc. Eles são de vital utilidade, principalmente, naquelas situações nas quais a experimentação com o sistema real é muito cara, muito perigosa, muito difícil ou simplesmente impossível.

Os físicos, especialmente, tem maior interesse em construir modelos matemáticos de sistemas reais baseando-se em parâmetros que signifiquem alguma grandeza física racional. Portanto, eles buscam aplicar leis físicas capazes de explicar cuidadosamente os mecanismos essenciais do fenômeno observado, desde que estas leis não sejam anuladas por algum experimento disponível. O equipamento matemático necessário é composto de equações diferenciais parciais não-lineares. Esta é a chamada abordagem analítica, que desenvolve o modelo rigorosamente a partir dos seus princípios primordiais.

Contudo, no contexto da engenharia, os modelos derivados desta maneira podem se mostrar de pouca praticidade, uma vez que se tornam extremamente complicados na medida em que o fenômeno observado é cada vez mais complexo. Por isso, os engenheiros não estão de fato interessados em modelos matemáticos que sejam fisicamente exatos a tal ponto. Ao invés disso, eles costumam optar por modelos que tenham uma garantia de efetividade nas aplicações da engenharia. Em outras palavras, se o modelo for preciso e eficiente, então isso basta. Os engenheiros, em contraste com os físicos matemáticos, estão dispostos a trocar a complexidade do modelo pela simplicidade que seja precisa e prática.

Desta maneira, uma alternativa viável para a engenharia surge com o desenvolvimento dos modelos baseados em espaços de estados. Estes modelos, mostrados na seção 2.2, constituem a base sobre a qual se desenvolve o método *SSI-DATA*, que será explicado mais adiante, na seção 2.3.

2.2 Modelo de Espaço de Estados

2.2.1 Introdução e Contexto

É comum verificar que nos ensaios de vibração forçada (*FVT*) a identificação do sistema seja realizada por variados algoritmos de identificação de sistemas determinísticos (*Input-Output Identification Methods*), ou seja, quando são conhecidos tanto os dados de entrada do sistema quanto os de saída (resposta). Porém, como explicado no capítulo 1, estes métodos tornam-se relativamente desvantajosos quando se adentra no cenário das aplicações

práticas da engenharia civil. Justamente por isso, este grupo de algoritmos de identificação de sistemas não será abordado neste trabalho.

Em contrapartida, se os dados de entrada do sistema são considerados aleatórios (desconhecidos), outra classe de algoritmos surge, tomando vantagem da necessidade de se medir apenas a resposta do sistema. Os métodos de identificação envolvendo estes algoritmos são aqueles aplicados à Identificação Modal Operacional (*Output-Only Modal Identification Methods*), os quais são relacionados aos ensaios de vibração ambiente (AVT).

Apesar das grandes vantagens já discutidas do método de Identificação Modal Operacional, algumas considerações matemáticas devem ser feitas com relação aos dados de entrada (aleatórios) do sistema. Todos estes algoritmos, os quais realizam a identificação de sistemas estocásticos, partem do pressuposto que a excitação provocada pelo ambiente abrange largas bandas de conteúdo de frequência com um caráter de ruído branco de média zero, fato que faz aparecer no processo de identificação modal algumas frequências adicionais sem significado físico. Além disso, é necessário assumir que os processos estocásticos sejam ergódicos². Para servir para a análise modal operacional, estas premissas devem ser atendidas na construção do modelo de espaço de estados, o qual será descrito na seção seguinte.

2.2.2 Descrição

Estes modelos nem sempre exprimem, através de suas matrizes, grandezas físicas conhecidas, porém a prática tem mostrado que sua simplicidade compensa com eficiência e aplicabilidade em diversos problemas de engenharia, como os de identificação modal e os de controle.

O modelo mostrado a seguir é discreto no tempo, linear e estacionário (não varia com o tempo). Apesar disso, surpreendentemente, muitos processos industriais aparentemente não-lineares podem ser descritos de maneira bem satisfatória por este tipo de modelo. Inclusive, ao longo das últimas décadas, os resultados tem se mostrado bastante precisos também no campo da identificação modal de estruturas da engenharia civil.

Seguindo a abordagem utilizada por Van Overschee e De Moor (1996), o modelo de espaço de estados determinístico-estocástico é descrito pelo seguinte conjunto de equações:

² Um processo estocástico ergódico é um processo estacionário no qual o valor esperado em um instante t (ou seja, a média em um número infinito de realizações) é igual ao valor médio temporal numa realização suficientemente longa do processo.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

com

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_q^T & \mathbf{v}_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S}_v \\ \mathbf{S}_v^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \delta_{pq} \geq 0 \quad (2.2)$$

onde E representa o operador estatístico de valor esperado, δ_{pq} é o delta de Kronecker e k , p e q são índices do vetor discreto do tempo representando um instante genérico. O número de instantes discretos de tempo, nos quais se fazem as leituras, é igual a s .

Neste modelo podem-se encontrar:

Vetores: $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^m$ e $\mathbf{y}_k \in \mathfrak{R}^l$ guardam, respectivamente, as medições no instante k dos m canais de entrada e dos l canais de saída do processo. O vetor $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado do processo em instante de tempo discreto k e contém os valores numéricos dos n estados. Já os vetores $\mathbf{v}_k \in \mathfrak{R}^l$ e $\mathbf{w}_k \in \mathfrak{R}^n$ armazenam sinais não mensuráveis. É assumido que são sequências de vetores de ruído branco, de média zero e estacionários.

Matrizes: $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é denominada matriz do sistema de ordem n . Ela descreve a dinâmica do sistema. $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ é a matriz dos dados de entrada que representa a transformação linear através da qual os dados de entrada influenciam o próximo estado. $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{l \times n}$ é a matriz dos dados de saída, a qual descreve como o estado interno é transferido para o mundo externo nas medidas \mathbf{y}_k . O termo com a matriz $\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{l \times m}$ é chamado de termo de passagem direta. As matrizes $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_v \in \mathfrak{R}^{n \times l}$ e $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{l \times l}$ são matrizes de covariância das sequências de ruídos \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k .

O par de matrizes $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ é considerado como sendo observável, ou seja, todos os modos do sistema podem ser observados e, portanto identificados, através dos dados de saída \mathbf{y}_k .

Todos os modos do sistema são excitados tanto pelos dados de entrada determinísticos \mathbf{u}_k como pelos dados de entrada estocásticos \mathbf{w}_k .

Este modelo pode ser representado esquematicamente pela Figura 6.

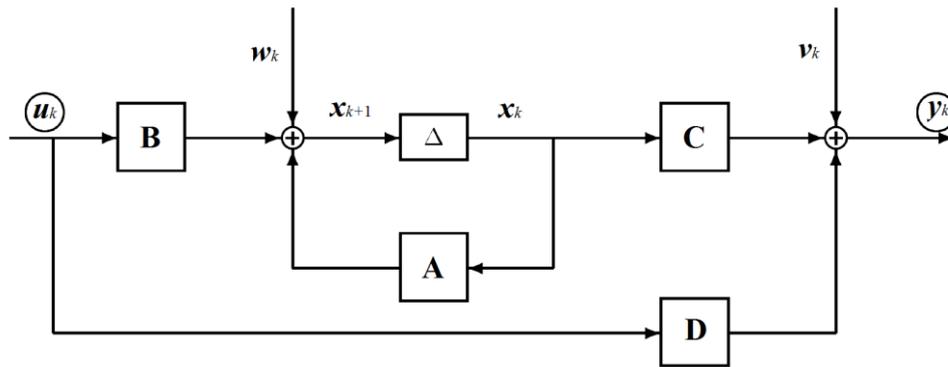


Figura 6: Sistema Combinado Estocástico-Determinístico (*input-output*).

Nesta figura, os sinais representados pelos vetores (circulados) u_k e y_k são dados medidos enquanto v_k e w_k são perturbações desconhecidas. O símbolo Δ representa um *delay*, um passo de tempo. A matriz A , que representa a dinâmica, produz inerentemente um *feedback* para o sistema. É considerado que u_k está disponível sem o ruído proveniente de sua medição.

Nos modelos de espaço de estados toda a descrição do comportamento dinâmico do sistema é reduzida a matriz A . Portanto, os autovalores e autovetores desta matriz descrevem todos os modos medidos, sejam eles advindos do sistema real, dos ruídos aleatórios ou dos erros nas medições dos sensores envolvidos. É por isso que se torna de vital importância a discriminação inteligente dos modos calculados em algum momento do processo de identificação para o correto julgamento de quais modos são espúrios e quais são válidos.

Este tipo de modelo de espaço de estados, o qual é representado na Figura 6, é o mais completo possível, pois toda natureza de dados, seja ela determinística ou estocástica, é levada em consideração. De maneira a adequar a modelagem pode-se assumir que o sistema seja:

- Puramente Determinístico (*input-output*): $w_k = v_k = \mathbf{0}$;
- Puramente Estocástico (*output-only*): $u_k = \mathbf{0}$;
- Combinado Determinístico-Estocástico (*input-output*): o mais completo, cuja representação encontra-se na Figura 6.

O primeiro tipo de sistema (puramente determinístico) assume que não há influência de ruídos desconhecidos, ou seja, estabelece-se que todos os dados de entrada e todos os dados de saída do sistema são conhecidos (determinísticos). No caso em que se trabalha com

a Análise Modal Experimental (*EMA* ou *Input-output Modal Analysis*), este tipo de sistema é o utilizado.

O terceiro tipo de sistema (determinístico-estocástico) considera, além dos dados de entrada e saída conhecidos (determinísticos), também uma parcela desconhecida (estocástica), denominada ruído, que influencia todo o sistema. Estas parcelas são simbolizadas pelos vetores de sinais w_k e v_k , os quais também podem ser entendidos, respectivamente, como dados de entrada estocásticos e dados de saída estocásticos. Este tipo de sistema é adequado para a Análise Modal Operacional com forças exógenas (*OMAX*).

Contudo, uma vez que se está interessado apenas na Análise Modal Operacional (*OMA* ou *Output-only Modal Analysis*), trabalhar-se-á com o segundo tipo de sistema: puramente estocástico. Em outras palavras, nestes sistemas, é assumido que todos os dados de entrada são desconhecidos. Ou seja, apenas os dados de saída são medidos. Portanto, o termo referente aos dados de entrada medidos u_k passa a ser nulo, degenerando a equação (2.1) para:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (2.3)$$

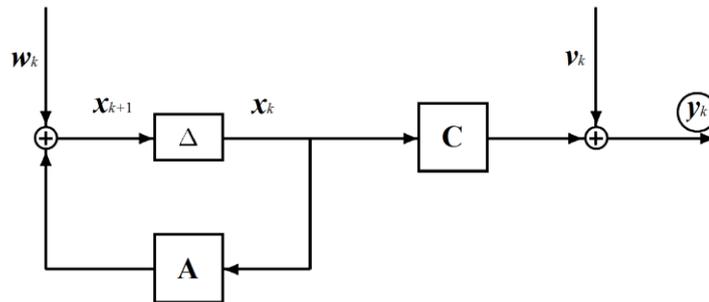


Figura 7: Sistema Puramente Estocástico (*output-only*)

A figura 7 ilustra esquematicamente um sistema puramente estocástico (*output-only*) estacionário com dados de saída y_k , estados x_k , perturbações desconhecidas (ruídos) de entrada w_k , de saída v_k e as matrizes A e C que o descreve. O símbolo Δ representa um *delay*. Nota-se que apenas os dados de saída (circulado) são medidos.

Com o auxílio desta mesma figura, é fácil perceber que um modelo de sistema puramente estocástico se enquadra muito bem no contexto dos ensaios de vibração ambiente. Mas, para que as deduções matemáticas que vêm a seguir sejam válidas, ressalta-se novamente que os dados de entrada w_k devem ter a característica de um sinal de ruído branco

de média zero. Felizmente, esta condição é geralmente atendida de forma satisfatória nos AVT, pois para amostras suficientemente grandes, a excitação ambiental (vento, veículos, pedestres, etc.) de fato se comporta de forma similar a um ruído branco.

Este processo estocástico é assumido como estacionário:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_k] &= \mathbf{0} \\ E[\mathbf{x}_k (\mathbf{x}_k)^T] &= \mathbf{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ou seja, a matriz de correlação $\mathbf{\Sigma}$ do vetor de estado, também denominada de matriz de covariância pelo fato de a sequência dos vetores ser de média zero, é constante e independente do instante de tempo k .

Após algumas manipulações algébricas, pode-se chegar às seguintes equações envolvendo as matrizes do sistema (\mathbf{A} e \mathbf{C}), as matrizes de covariância dos ruídos (\mathbf{Q} , \mathbf{R} e \mathbf{S}_v), a matriz de covariância de resposta ($\mathbf{\Lambda}_i$) e a matriz de covariância entre os vetores de estado no instante $k+1$ e a resposta no instante k (\mathbf{G}):

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_k (\mathbf{x}_k)^T] &= \mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \\ E[\mathbf{y}_{k+i} (\mathbf{y}_k)^T] &= \mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{C}\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \\ E[\mathbf{x}_{k+1} (\mathbf{y}_k)^T] &= \mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}^T + \mathbf{S}_v \end{aligned} \quad (2.5)$$

Considerando este último conjunto de equações (2.5), sem demonstrações, a seguinte igualdade pode ser estabelecida:

$$\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \quad (2.6)$$

As duas maneiras diferentes para o cálculo das matrizes do sistema (\mathbf{A} e \mathbf{C}), definidas no problema colocado pelas equações (2.3) a (2.6) e ilustrado na Figura 7, levam ao surgimento do que se chama método *SSI-COV* e *SSI-DATA*.

Finalmente, depois de aplicado um dos métodos para determinação de \mathbf{A} e \mathbf{C} , procede-se o cálculo das frequências naturais ω_i , taxas de amortecimento ξ_i e respectivos modos de vibração ϕ_i do sistema dinâmico. Este cálculo ocorre mediante extração dos autovalores μ_i e autovetores ψ_i de \mathbf{A} . Porém, como o cálculo destes autovalores μ_i ocorre na contagem de tempo discreto (com passos de tempo Δt), uma transformação para o tempo contínuo é necessária. Determinam-se então, de acordo com a equação (2.7), os autovalores de \mathbf{A} no tempo contínuo (λ_i).

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \quad (2.7)$$

É pertinente ressaltar que os autovalores (μ_i ou λ_i) de \mathbf{A} , também chamados de polos, são números complexos que aparecem predominantemente em pares conjugados.

As frequências naturais, como indica a equação (2.8), são simplesmente os módulos (amplitudes dos vetores no plano imaginário-real) dos polos de \mathbf{A} . Entenda-se $\text{Im}(\bullet)$ e $\text{Re}(\bullet)$ como a parte imaginária e real de \bullet , respectivamente.

$$\omega_i = |\lambda_i| = \sqrt{\text{Im}(\lambda_i)^2 + \text{Re}(\lambda_i)^2} \quad (\text{rad} / \text{s}) \quad (2.8)$$

Ou, mais convenientemente, em Hz:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (\text{Hz}) \quad (2.9)$$

De forma imediata, calculam-se também as taxas de amortecimento de acordo com:

$$\xi_i = \frac{-\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} \times 100 \quad (\%) \quad (2.10)$$

As formas modais de vibração ϕ_i são obtidas via multiplicação da matriz \mathbf{C} pelos autovetores ψ_i de \mathbf{A} , como mostra a equação (2.11) a seguir.

$$\phi_i = \mathbf{C}\psi_i \quad (2.11)$$

Nota-se que o vetor ϕ_i tem l linhas e pertence ao conjunto dos números complexos, pois ψ_i , que tem n linhas, também o faz. Para que se obtenham os valores das amplitudes modais com números reais deve-se realizar o seguinte procedimento para cada elemento do vetor:

- Calcula-se o ângulo de fase, transformando-o, se necessário para um valor equivalente contido no intervalo de 0 a 2π rad;
- Se o ângulo de fase estiver contido no intervalo de $\pi/2$ a $3\pi/2$, atribui-se (-1) para um fator de fase, caso contrário atribui-se (+1);
- Determina-se o valor do módulo do número complexo (elemento do vetor) e o multiplica pelo fator de fase calculado no passo anterior.

Neste ponto, finalmente, os três parâmetros dinâmicos do sistema já estão calculados para os diversos modos identificados. Nota-se que o número de modos é igual ao número de autovalores de \mathbf{A} que tenham par conjugado e tenham componente imaginária positiva. Por

esse motivo, uma vez que esta matriz é de ordem n (ordem do modelo), conclui-se que, no máximo, $n/2$ modos poderão ser identificados.

2.3 SSI-DATA

2.3.1 Introdução

Os algoritmos para identificação modal estocástica em subespaços podem ser divididos em dois grupos: *SSI-COV* e *SSI-DATA*. Ambos fazem uso do modelo de espaço de estados (*state-space model*). A principal diferença entre eles é que o primeiro baseia-se em um ajuste às funções de correlação da resposta e o segundo funciona por meio de um ajuste do modelo ao próprio histórico de resposta.

O problema de realização estocástica foi abordado pioneiramente de forma sistemática por Akaike (1974), Aoki (1987) e Arun e Kung (1990).

Para a realização dos cálculos subsequentes, é necessário organizar os dados de saída na chamada matriz de blocos de Hankel³. Esta matriz é composta pelas séries de resposta \mathbf{y}_k organizadas como mostrado na equação (2.12), apresentando $2i$ blocos de linhas e N colunas.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_{N-1} \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \cdots & \mathbf{y}_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{i-1} & \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-2} \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \mathbf{y}_{i+3} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{2i-1} & \mathbf{y}_{2i} & \mathbf{y}_{2i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{2i+N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Onde:

- O número de blocos de linhas (i) é um índice a ser definido, mas que deve ser pelo menos maior do que a máxima ordem n do sistema que se deseja identificar. Nota-se que, uma vez que cada bloco de linhas contém l (número de canais de saída) linhas, a matriz \mathbf{Y} consiste de $2li$ linhas.
- O número de colunas (N) é tipicamente igual a $s-2i+1$, o que implica que todos os dados amostrais são usados.

³ Uma matriz de Hankel é uma matriz simétrica em que os elementos de cada anti-diagonal são iguais.

Para as definições matemáticas a seguir, às vezes é feita a consideração de que N e s tendem ao infinito.

2.3.2 Descrição

O método *SSI-DATA* é o nome dado ao método de identificação estocástica em subespaços com ajuste direto às series de resposta de um sistema. Ele é resultante dos trabalhos pioneiros de Van Overschee e De Moor (1996) e Ljung (1999) primeiramente relacionados às áreas de eletrotécnica e engenharia de sistemas de controle.

A engenharia civil iniciou a aplicação deste método de identificação modal após as publicações de trabalhos desenvolvidos na Universidade Católica de Leuven na Bélgica (Peeters, 2000) e na Universidade de Aalborg na Dinamarca (Kirkegaard e Andersen, 1997). A partir daí inúmeras aplicações do método, tanto na engenharia mecânica quanto na civil, aconteceram, principalmente depois de sua inserção no software comercial ARTEMIS (SVS, 2002), o que impulsionou também sua popularidade na comunidade técnico-científica.

Como já foi mencionado, o método *SSI* baseia-se diretamente na análise de dados experimentais de séries temporais de resposta para realizar o ajuste do modelo e por isso é classificado como pertencente ao grupo dos métodos de identificação modal do domínio do tempo. E então, ao abordar este problema, o qual é descrito pelas equações (2.3) a (2.6) e pela Figura 7, foi visto que pode-se resolvê-lo por dois métodos distintos: *SSI-COV* e *SSI-DATA*. Ou seja, o problema inicial é o mesmo, muda-se apenas a maneira de como abordá-lo.

No método *SSI-COV*, o principal passo baseia-se na fatoração, via *SVD*, da matriz de Toeplitz das covariâncias da resposta em duas outras importantes matrizes: observabilidade e controlabilidade.

Diferentemente, o método *SSI-DATA* não trabalha explicitamente com a covariância dos dados de saída e se fundamenta em operações geométricas entre os subespaços definidos pelas matrizes de bloco de Hankel contendo os próprios dados das séries de resposta. Isto é, através de projeções ortogonais entre subespaços definidos pelos vetores-linha das matrizes de bloco de Hankel contendo a resposta em instantes diferentes de tempo, da decomposição destas projeções em valores singulares e de outras operações bem conhecidas da álgebra linear como a decomposição *QR*, é possível determinar as matrizes do sistema: **A** e **C**.

Por fim, uma vez determinadas as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} , recorre-se às equações (2.7) a (2.11) para o cálculo dos parâmetros modais do sistema.

Analogamente às matrizes de ponderação que multiplicam a matriz de Toeplitz no método *SSI-COV*, duas matrizes de ponderação também podem ser formuladas para dar origem às mesmas três variantes, porém, do método *SSI-DATA*. A diferença central é que estas matrizes não ponderam a matriz de Toeplitz das covariâncias, mas a matriz de uma projeção ortogonal do subespaço formados pelos vetores-linha das matrizes de bloco de Hankel formadas pelas séries de resposta do sistema. Matematicamente, a escolha das matrizes de ponderação determina a base do espaço no qual é realizada a avaliação das matrizes do sistema que é identificado.

A seguir serão fornecidos os detalhes de como se calculam as matrizes do sistema identificado. Cabe informar que esta é apenas uma das maneiras de se proceder ao cálculo. Existem outras abordagens dentro do método *SSI-DATA* que também permitem alcançar os mesmos objetivos.

1. Organizar a série de resposta y (a única grandeza medida) em uma matriz de Hankel \mathbf{Y} , a qual pode ser particionada em uma matriz de medidas do passado \mathbf{Y}_p e outra com medidas do futuro \mathbf{Y}_f . Ver equação (2.12).
2. Calcular a projeção ortogonal \mathbf{P} do espaço linha de \mathbf{Y}_f sobre o espaço linha de \mathbf{Y}_p :

$$\mathbf{P} = \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T (\mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_p^T)^\dagger \mathbf{Y}_p \quad (2.13)$$

onde \bullet^\dagger é a matriz pseudo-inversa (Moore-Penrose) de \bullet .

3. Realizar a decomposição em valores singulares (*SVD*) da projeção \mathbf{P} ponderada pelas matrizes \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 :

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{P} \mathbf{W}_2 = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (2.14)$$

4. Determinar a ordem n do Sistema por meio da inspeção do posto da matriz \mathbf{S} (número de valores singulares não-nulos) e particionar *SVD* de maneira a obter \mathbf{U}_1 e \mathbf{S}_1 :

$$\mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = (\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

5. Calcular a chamada matriz de observabilidade estendida \mathbf{O} :

$$\mathbf{O} = \mathbf{W}_1^{-1} \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \quad (2.16)$$

6. Conhecendo \mathbf{O} , determinar, num contexto de mínimos quadrados, a matriz dinâmica \mathbf{A} do sistema:

$$\mathbf{A} = \underline{\mathbf{O}}^{\dagger} \overline{\mathbf{O}} \quad (2.17)$$

onde $\underline{\mathbf{O}}$ significa \mathbf{O} sem as últimas l linhas (número de canais) e $\overline{\mathbf{O}}$ significa \mathbf{O} sem as primeiras l linhas;

7. Determinar a matriz \mathbf{C} como sendo a submatriz definida pelas primeiras l linhas de \mathbf{O} ;
 8. Finalmente, conhecendo \mathbf{A} e \mathbf{C} , pode-se calcular os parâmetros modais: frequências naturais, taxas de amortecimento e formas de vibração. Para isso, utilizam-se as equações (2.7) a (2.11).

Estes oito passos resumem bem a rotina do *SSI-DATA*, que pode ser entendida como sendo, essencialmente, um ajuste dos dados de saída do sistema a um modelo de espaço de estados, por meio da projeção geométrica do espaço linha das medidas do futuro sobre as medidas do passado.

Assim como no *SSI-COV*, o *SSI-DATA* também apresenta as mesmas variantes, dependendo das matrizes ponderadoras (\mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2) que forem adotadas. Podem-se encontrar, na literatura (Van Overschee e De Moor, 1996), informações sobre quais devem ser as matrizes ponderadoras de maneira que se obtenham as variantes citadas na literatura: *PC* (*Principal Components*), *UPC* (*Unweighted Principal Componentes*) e *CVA* (*Canonical Variate Analysis*).

É necessário apontar que, no caso de dados oriundos de estruturas civis reais, é muito difícil determinar a ordem do sistema através da inspeção dos valores singulares como colocado no quarto passo do algoritmo descrito acima. Isto é assim porque, de fato, não aparecem valores singulares com valores nulos, mas sim com valores que variam assintoticamente para zero. Ou seja, \mathbf{S} tem posto completo (*full rank*) nas situações práticas. Desta forma, um valor limiar seria necessário para caracterizar um valor singular como sendo nulo ou não. Portanto, ao invés de se criarem maneiras para se definir este limite, a ordem n do sistema é prontamente fornecida como entrada para o algoritmo. Isso permite que o algoritmo identifique o sistema (calcule as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C}), porém cria-se a seguinte dúvida: a ordem de modelo fornecida é adequada para representar o modelo real de maneira satisfatória? Como será visto no capítulo 3, a resposta para essa pergunta vem com o uso dos diagramas de estabilização.

2.4 Comentários adicionais

Comparando os métodos de *SSI* com aqueles baseados no domínio da frequência, podem-se tecer os seguintes comentários.

Os métodos de *SSI* trabalham diretamente com as séries temporais de resposta, sem que seja necessária qualquer transformada de Fourier para obter o espectro de frequência. Isso significa que não existirá perda de informação causada pela discretização temporal do sinal, fenômeno que ocorreria durante a transformação, para o domínio da frequência, de um sinal com uma alta taxa de amostragem⁴. Por este motivo, os métodos de *SSI* estão mais aptos a identificarem corretamente modos com frequências muito próximas umas das outras.

Pode-se dizer também que, a princípio, os métodos de *SSI* são mais adequados para o contexto da automação do processo de identificação, pois eles fornecem as estimativas dos modos como parâmetros oriundos de um ajuste (método dos mínimos quadrados linear) a um modelo de espaço de estados. Isso quer dizer que os parâmetros modais são prontamente fornecidos como dados de saída do algoritmo, eliminando a necessidade de ter que se encontrar, por exemplo, picos nos espectros de frequência. Entretanto, uma vez que a ordem ideal do modelo paramétrico não é conhecida *a priori*, devem-se ajustar os dados de resposta da estrutura a uma série de modelos com ordens variadas. A partir daí, surge a necessidade de uma avaliação sobre a qualidade destes modos estimados. Esta tarefa pode configurar-se como um problema manual, fato que caracterizaria uma desvantagem do método, ou pode, simplesmente, consistir em apenas mais um passo a ser executado automaticamente pelo computador. Neste caso, as rotinas implementadas devem ser capazes de distinguir corretamente modos físicos de modos espúrios (numéricos). O capítulo 4 versa exatamente sobre a metodologia proposta para este fim.

Mesmo havendo grandes semelhanças entre o *SSI-COV* e o *SSI-DATA* (Rodrigues, 2004), para as aplicações neste trabalho, optou-se por utilizar exclusivamente o *SSI-DATA*. Isso ficou decidido, principalmente, porque foi encontrada maior padronização e organização no material relacionado com este método, especialmente no livro escrito por Van Overschee e De Moor (1996). Este fato facilitou a implementação dos algoritmos. E, como foi mencionado no primeiro capítulo, este trabalho visa resolver o problema que surge da aplicação de qualquer

⁴ Quanto maior a taxa de aquisição do sinal temporal, menor a resolução em frequência após a transformada de Fourier.

método de identificação modal baseado em modelos paramétricos: a interpretação automática dos dados do diagrama de estabilização. Portanto, o método de identificação modal baseado no domínio do tempo a ser utilizado, seja ele qual for, serve apenas para produzir os dados que servirão de entrada para a metodologia proposta neste trabalho.

Por estes motivos, o presente capítulo não teve seu conteúdo levado aos detalhes e nem, tampouco, tratou de outros métodos que não fosse o método da identificação estocástica em subespaços (*SSI*).

Capítulo 3

Identificação Modal Automática

3.1 Introdução

Tendo vista os objetivos deste trabalho, o presente capítulo tratará somente dos métodos de identificação modal operacional do domínio do tempo. Foi dito, anteriormente no texto, que esta classe de métodos (paramétricos) é capaz de gerar o chamado diagrama de estabilização. Foi mencionado também que a interpretação automática destes dados consiste no principal desafio para a automatização do processo de identificação modal.

Na sequência, a seção 3.2 expõe algumas ideias relevantes a respeito dos diagramas de estabilização, explicando sua origem e necessidade.

Uma vez que as técnicas de análise de *cluster* constituem uma ferramenta útil para a mineração dos dados da identificação paramétrica (dispostos em diagramas de estabilização), julgou-se conveniente tratar o assunto na seção 3.3. A abordagem ao tema é feita de maneira didática e contextualizada, por meio da discussão de um exemplo simples.

Posteriormente, a seção 3.4 aborda alguns aspectos relacionados à interpretação automática dos dados comumente encontrados de maneira gráfica nestes diagramas. São citados diversos autores de metodologias de automatização.

3.2 Diagrama de Estabilização

Até o presente momento não foi feita nenhuma análise a respeito da ordem n que o modelo de espaço de estados deve ter para que a identificação dos parâmetros dinâmicos do sistema seja feita de maneira eficiente. Como será discutido a seguir, o fato é que esta escolha,

ao mesmo tempo em que constitui um desafio, repercute drasticamente na qualidade e autenticidade dos modos identificados.

Sabe-se de antemão, que a ordem do sistema deverá ser pelo menos duas vezes maior que o número de modos os quais é esperado que o sistema dinâmico tenha, porque, como mencionado no final da seção 2.2.2, os polos da matriz do sistema aparecem em pares complexos conjugados (cada par corresponde a um único modo calculado). Mas o problema é que *a priori* não há como saber ao certo o número esperado de modos físicos que o sistema contém apenas observando a estrutura em si e os dados experimentais. Este número é justamente uma das respostas que o processo de identificação deveria fornecer, mas ao mesmo tempo, uma boa estimativa deve ser feita para que seus cálculos forneçam resultados coerentes com a realidade, justamente porque os polos do sistema estocástico podem representar não só modos da estrutura analisada em si, mas também da excitação e/ou de origem numérica.

Para descartar os modos não físicos (espúrios) diversas ações podem ser tomadas. Para começar, a análise das taxas de amortecimento dos modos deve ser feita. Normalmente os modos estruturais são subamortecidos e, inclusive, com valores abaixo dos 10% (estruturas convencionais). Portanto, qualquer polo calculado que exceda certo limite máximo de amortecimento pode ser considerado espúrio. Segundo Andersen (1999), as ações ambientais, além de trabalharem em largas bandas de frequência, podem até acabar sendo modeladas com taxas de amortecimento crítico ou supercrítico (maior que 100%), o que facilita sua caracterização como sendo um modo indesejável para o processo de identificação.

Com o intuito de se definir a ordem adequada do sistema existem também alguns procedimentos mais formais, através dos quais modelos de diferentes ordens são calculados e comparados tendo por base critérios de qualidade como: o critério informativo de Akaike (*AIC*); o erro de predição final (*FPE*) também de Akaike; ou o comprimento descritivo mínimo (*MDL*) de Rissanen (Andersen, 1999; Ljung, 1999; Peeters, 2000). Estes critérios são, em sua essência, medidas do erro do modelo ajustado, mostrando que na medida em que se aumenta sua ordem, o erro decresce até um ponto que se torna assintótico, ou seja, cessa seu aumento significativo com a contínua expansão da ordem do modelo. Conclui-se então que a ordem correspondente a este limite (*threshold*) é a indicada para melhor representar o sistema.

Apesar de ser possível utilizar os critérios acima citados para auxílio na escolha da ordem do modelo a identificar, na prática verifica-se que nem sempre seu uso é muito fácil. É

necessário também ter em mente que na identificação modal o que se pretende é estimar as características modais do sistema estrutural em si e não do próprio modelo desse sistema. Com isso, para a análise de identificação modal com modelos paramétricos (domínio do tempo) surgiu uma nova ferramenta de maior utilidade prática do que as referidas anteriormente, que é o *diagrama de estabilização*.

Um diagrama de estabilização reúne os resultados da identificação para diversas ordens de modelos do mesmo sistema, de maneira que se tenha uma visualização gráfica, na maior parte das vezes, confortável para que sejam tiradas conclusões a respeito de quais modos são realmente válidos. Geralmente, nestes diagramas, o eixo das abscissas representa as frequências dos modos e o eixo das ordenadas representa a ordem do modelo usado para a identificação. A Figura 8 ilustra um diagrama de estabilização típico gerado pelo *SSI-DATA*.

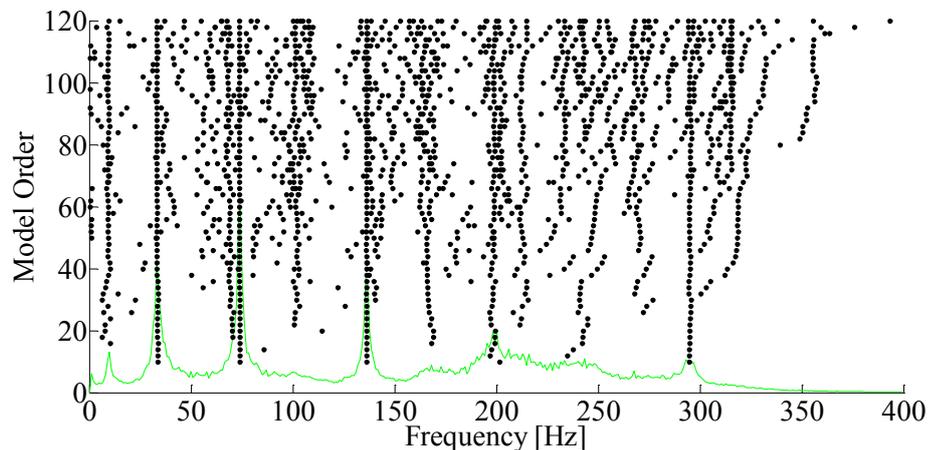


Figura 8: Diagrama de estabilização típico, gerado pelo algoritmo *SSI-DATA* (PC). Ao fundo, em verde, o espectro médio dos sinais temporais.

Neste tipo de diagrama, os polos de um modelo de determinada ordem são comparados com os polos de um modelo de ordem próxima. No caso das diferenças entre esses polos, em termos de frequência, taxas de amortecimento e formas modais, não excederem determinados limites pré-definidos, o polo é considerado como estável. Caso contrário será considerado instável. Definindo um determinado código de símbolos para a representação gráfica dos polos e plotando esses símbolos nas respectivas frequências para diversas ordens de modelo, obtém-se um diagrama de estabilização que mostra uma série de símbolos (pontos) estáveis alinhados ao longo de linhas verticais, nas frequências dos prováveis modos de vibração de um sistema. Ao mesmo tempo, surgem pontos dispersos em variadas frequências dependendo da ordem do modelo.

Nestes diagramas, é possível notar visualmente que os modos próprios do sistema estrutural com maiores amplitudes de vibração (mais facilmente excitados) se estabilizam logo para modelos de baixa ordem. Por outro lado, os modos pouco excitados (amplitudes quase da ordem dos ruídos) só se estabilizam para ordens mais elevadas. Consequentemente, é necessário considerar um modelo de ordem mais elevada para que seja possível a identificação dos modos pouco excitados, que não são tão evidentes nos dados experimentais medidos.

Também é verificado que os modos oriundos de ruído ou computacionais não chegam sequer a se estabilizar, podendo ser excluídos da possibilidade de serem modos próprios de vibração da estrutura. Além disso, antes mesmo da montagem do diagrama, é possível que se excluam polos que não surjam como pares de valores complexos conjugados ou, como já dito, tenham um coeficiente de amortecimento muito elevado. Desta maneira, estes polos indesejáveis podem ou não ser plotados no diagrama. No caso de se optar por visualizá-los é essencial que se utilize um símbolo que permita distingui-los nitidamente dos outros polos.

Portanto, a construção de um diagrama de estabilização implica em um ajuste do modelo para cada uma das diversas realizações estocásticas, considerando diferentes ordens. Assim, nessa construção é altamente recomendável que se evite a repetição de cálculos que são comuns para os modelos de diversas ordens (Peeters, 2000). Para tanto, procede-se com a escolha de uma ordem máxima para a montagem, que só ocorrerá uma única vez, das matrizes de Hankel, por exemplo, e então para ordens menores são utilizadas suas correspondentes submatrizes. Os cálculos então continuam até que todos os modelos da menor até à ordem máxima definida pelo usuário sejam ajustados e plotados no diagrama.

Nota-se, através do diagrama da Figura 8, que a determinação dos modos físicos do sistema não é direta, pois requer uma análise criteriosa de quais modos (pontos) estão representando o mesmo modo físico e de quais modos (pontos) estejam representando modos espúrios. Esta análise, quando não for feita manualmente por um analista experiente, deve ser realizada, preferencialmente, por algoritmos de mineração de dados, em específico aqueles de agrupamento (*clustering*). A seção seguinte introduz, exatamente, esta classe de algoritmos, cuja utilização é essencial para o processo de identificação automática dos modos físicos no diagrama de estabilização.

3.3 Análise de *Cluster*

A análise de *cluster* (Billard *et al.*, 2006) visa agrupar elementos de dados baseando-se na similaridade entre eles. Os grupos devem ser formados de maneira que se obtenha homogeneidade dentro de um mesmo grupo (*cluster*) e heterogeneidade entre eles. Trata-se de uma técnica comum na área de mineração de dados (*data mining*), juntamente com as técnicas de redes neurais artificiais e de algoritmos genéticos.

Existem dois tipos de métodos para análise de *cluster*: hierárquicos e não-hierárquicos (ou por particionamento). O primeiro tipo de método baseia-se na construção de uma árvore hierárquica denominada dendrograma. A outra classe de métodos consiste no conhecimento prévio de quantos *clusters* se deseja ter ao final, como exemplo, pode-se citar o método *k-means* (Billard *et al.*, 2006).

No contexto da interpretação dos dados de um diagrama de estabilização, a princípio, o número de modos de vibração (*clusters*) da estrutura não é conhecido, além disso, existe um número também desconhecido de *clusters* agrupando modos espúrios. Por isso, nestas aplicações, torna-se desfavorável a utilização dos métodos de *clusterização* por particionamento. Por este motivo, as descrições a seguir restringem-se somente aos métodos de *clusterização* hierárquica.

3.3.1 Exemplo Didático

Os m elementos (também chamados de indivíduos ou objetos), que constituem os dados a serem *clusterizados*, são vetores de qualquer dimensão, isto é, cada elemento pode ser um vetor n -dimensional. Isso equivale a dizer que cada objeto tem um conjunto de n características que o definem. São exatamente estas características individuais as responsáveis por tornar um objeto semelhante ou diferente do outro.

Para exemplificar, consideram-se seis indivíduos definidos por duas características ou propriedades. Em linguagem matemática, têm-se seis vetores bidimensionais. Imagine que as duas propriedades que caracterizam cada elemento sejam suas duas coordenadas cartesianas x e y , de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2: Conjunto de dados de exemplo a ser submetido à análise de *cluster*.

Elementos ($m = 6$)	Propriedades ($n = 2$)	
	Coordenada x	Coordenada y
1	1,0	1,0
2	1,0	1,5
3	3,0	4,0
4	4,0	3,0
5	3,5	3,5
6	1,5	2,5

Neste momento, deseja-se organizar os dados (conjunto de objetos) em grupos ou *clusters*. Obviamente, a meta é agrupar elementos semelhantes, os quais, neste exemplo, são caracterizados por suas coordenadas no plano xy .

Prontamente, de maneira a facilitar o procedimento subsequente, os dados observados podem ser organizados em uma matriz de dados $\mathbf{K} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. Essa matriz dispõe uma linha para cada elemento e uma coluna para cada propriedade. Desta forma, é fácil perceber que o índice da linha indica o próprio número (rótulo) do objeto. No caso do exemplo considerado, a partir da Tabela 2, obtém-se a matriz de dados com seis linhas e duas colunas, como mostra a equação (3.1).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,0 & 1,0 \\ 1,0 & 1,5 \\ 3,0 & 4,0 \\ 4,0 & 3,0 \\ 3,5 & 3,5 \\ 1,5 & 2,5 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Pode-se notar que, neste exemplo, os dados dispostos na matriz \mathbf{K} podem ser facilmente representados graficamente (Figura 9), já que cada objeto é um vetor bidimensional.

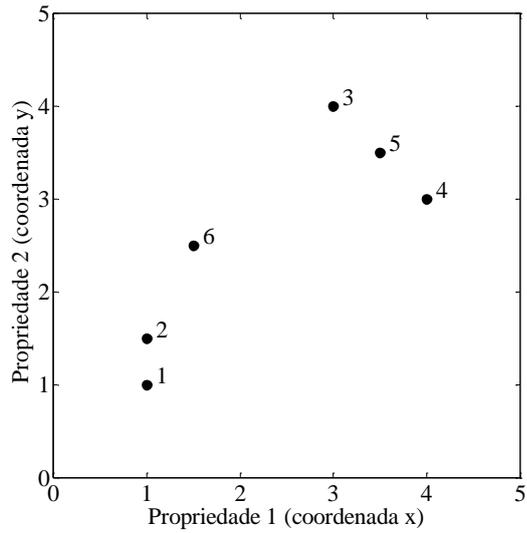


Figura 9: Representação gráfica dos dados a serem *clusterizados*.

Uma vez organizado o conjunto de dados, o primeiro procedimento a ser realizado na análise é a medição das distâncias (ou dissimilaridades) entre cada um dos elementos. Pergunta-se: como medir a distância entre dois destes objetos? Ora, neste caso do exemplo citado, a distância euclidiana é a forma mais natural de se fazer isso. Esta métrica é descrita pela equação (3.2), onde $d_{i,j}$ é a distância entre os objetos i e j , enquanto $K_{i,p}$ é o elemento da linha i e coluna p da matriz de dados \mathbf{K} .

$$d_{i,j} = \sqrt{\sum_{p=1}^n (K_{i,p} - K_{j,p})^2} \quad (3.2)$$

Agora que já foi definida a métrica para o cálculo das distâncias (dissimilaridades) entre os objetos, procede-se a montagem do que se chama *matriz de dissimilaridade*. Esta matriz, denotada por \mathbf{D} , é composta pelos valores $d_{i,j}$ como mostra a equação (3.3).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & \cdots & d_{1,m} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & \cdots & d_{2,m} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & \cdots & d_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m,1} & d_{m,2} & d_{m,3} & \cdots & d_{m,m} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

As matrizes de dissimilaridade, como explica o parágrafo seguinte, reúnem algumas propriedades notáveis.

A distância entre um objeto e ele mesmo é zero (maioria das métricas), portanto, a diagonal principal da matriz **D** tem seus elementos todos nulos. Adicionalmente, pode-se afirmar que ela é uma matriz quadrada, simétrica e não contém nenhum elemento negativo (não faz sentido distância menor que zero). Sua simetria advém do conceito de que a distância calculada de um elemento A para um elemento B deve ser exatamente igual à distância calculada do elemento B para o elemento A, ou seja, espera-se ter $d_{i,j} = d_{j,i}$.

Considerando novamente o exemplo ilustrativo, é possível aplicar a equação (3.2) aos dados da equação (3.1), para obter, conforme a equação (3.3), a matriz de dissimilaridade mostrada na equação (3.4).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0,500 & 3,606 & 3,606 & 3,536 & 1,581 \\ 0,500 & 0 & 3,202 & 3,354 & 3,202 & 1,118 \\ 3,606 & 3,202 & 0 & 1,414 & 0,707 & 2,121 \\ 3,606 & 3,354 & 1,414 & 0 & 0,707 & 2,549 \\ 3,536 & 3,202 & 0,707 & 0,707 & 0 & 2,236 \\ 1,581 & 1,118 & 2,121 & 2,549 & 2,236 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A partir do conhecimento da dissimilaridade entre todos os objetos, pode-se iniciar o processo de formação dos *clusters*. Como já dito, os métodos hierárquicos realizam esta tarefa por meio da construção de um dendrograma (árvore hierárquica), que pode ser realizada por meio de duas técnicas diferentes: aglomeração ou divisão. A primeira considera cada elemento como sendo um *cluster* e, a partir daí, agrega *clusters* que estejam suficientemente próximos, de maneira que, ao final, todos os objetos pertencerão a um único *cluster*. Em outras palavras, começa-se a montagem da árvore hierárquica pelas folhas até se chegar ao tronco. O processo de divisão faz o contrário, em uma primeira instância considera todos os objetos como sendo pertencentes a um mesmo *cluster* e, então, realizam-se sucessivas separações em *clusters* menores, até que haja um *cluster* para cada objeto. Cabe dizer que a técnica utilizada neste trabalho é a análise de *cluster* hierárquica por aglomeração. A Figura 10 mostra o dendrograma construído a partir da matriz de dissimilaridade da equação (3.4).

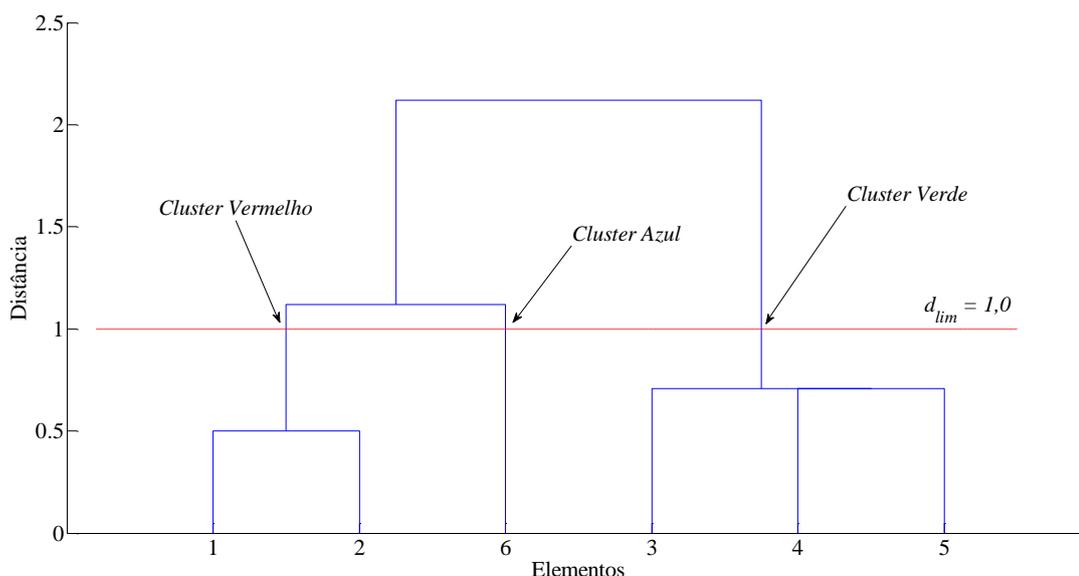


Figura 10: Árvore hierárquica (dendrograma) construída segundo o conceito de ligação simples e com os dados da matriz de dissimilaridade \mathbf{D} da equação (3.4).

Conforme pode ser visto na Figura 10, a distância entre os elementos 1 e 2 é simbolizada pela altura da linha horizontal que os une (forma um “U” de cabeça para baixo). Graficamente pode-se ver que essa distância corresponde a 0,5, o que pode ser confirmado pela matriz de dissimilaridades da equação (3.4). Ainda analisando o dendrograma da Figura 10, pode-se notar que há também a necessidade de um cálculo de distância entre *clusters* já formados. O processo de união entre dois *clusters* é chamado de ligação (*linkage*). Isso pode ser feito de várias maneiras, dentre as quais se podem citar duas das mais conhecidas: ligação simples (*single linkage*) e ligação completa (*complete linkage*).

Medir a distância entre dois *clusters*, considerando uma ligação simples, significa dizer que essa distância será aquela que seja a menor possível entre quaisquer dois elementos destes dois *clusters*. O dendrograma da Figura 10 foi gerado utilizando este conceito (*single linkage*). Observando esta figura é possível notar que a distância entre os *clusters* vermelho e azul é exatamente a distância dos elementos mais próximos pertencentes a estes mesmos *clusters*, ou seja, é exatamente a distância do objeto 2 (*cluster* vermelho) ao objeto 6 (*cluster* azul), que é de 1,118. Isto pode ser confirmado pela análise da matriz de dissimilaridades da equação (3.4).

Ao contrário, medir a distância entre dois *clusters* utilizando o conceito de ligação completa, significa dizer que esta distância será aquela que for a maior possível entre

quaisquer dois elementos destes *clusters*. Portanto, considerando uma ligação completa, a distância entre os *clusters* vermelho e azul da Figura 10 seria de 1,581, como mostra a matriz de dissimilaridades da equação (3.4). Conclui-se então que, dependendo do tipo de ligação (*linkage*) considerado, diferentes aspectos da árvore hierárquica são produzidos.

Continuando a análise do exemplo, é possível ver que o *cluster* nomeado azul (formado apenas pelo elemento 6) e o *cluster* vermelho (formado pelos elementos 1 e 2) estão distantes um do outro segundo um valor de 1,118 (altura da linha horizontal que une os dois *clusters*). Nota-se que em última instância, todos os elementos podem ser contidos em um único grande *cluster* (tronco) decorrente da união de dois outros *clusters* que estão afastados de, aproximadamente, 2,1 unidades um do outro.

Ainda observando a árvore hierárquica do exemplo, é fácil perceber que, como resultado final da análise, podem-se ter seis *clusters* ou, até mesmo, apenas um. Justamente para acabar com esse dilema é que se deve adotar uma técnica para a chamada “poda da árvore”. Esta é a principal diferença entre o método hierárquico e o *k-means*. Neste último, o número de *clusters* é sempre, necessariamente, um dado de entrada e, portanto, conhecido.

O fato é que existem algumas diferentes técnicas para realizar a poda da árvore. Podem-se citar as duas principais: através da definição de uma distância limite (d_{lim}) ou por meio do conhecimento do número de *clusters* a serem formados.

No exemplo, a poda da árvore para definição dos *clusters* foi realizada segundo uma distância limite $d_{lim} = 1,0$ (linha vermelha da Figura 10). Isso significa que todos os objetos, que estiverem afastados em 1,0 ou mais unidades de outro objeto mais próximo (*single linkage*), serão separados em *clusters* diferentes. Para se entender melhor, pode-se olhar a Figura 11, a qual representa os objetos agrupados em 3 *clusters* (vermelho, azul e verde) resultantes da poda da árvore em um valor de distância limite fixada em 1,0. Esta figura simboliza, graficamente, o término da análise de *cluster* do exemplo.

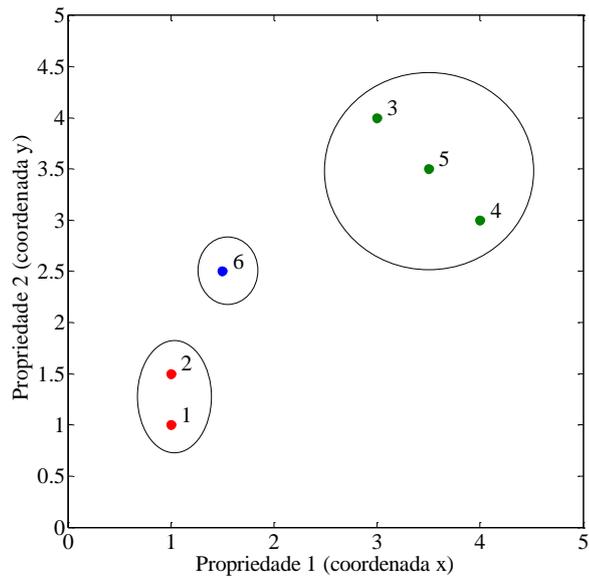


Figura 11: Representação gráfica dos *clusters* formados após a análise com $d_{lim} = 1,0$.

Como já mencionado, quando, *a priori*, não se sabe o número final de *clusters* que se deseja ter, a definição da distância limite torna-se imperativa. É fácil perceber que o resultado da análise torna-se diferente dependendo do valor adotado para este parâmetro. Por exemplo, considerando $d_{lim} = 1,2$ (Figura 12) para o mesmo dendrograma, ter-se-iam apenas dois *clusters* como resultado e não três. A Figura 13 ilustra a resposta da análise ao ser usar este novo valor de distância limite.

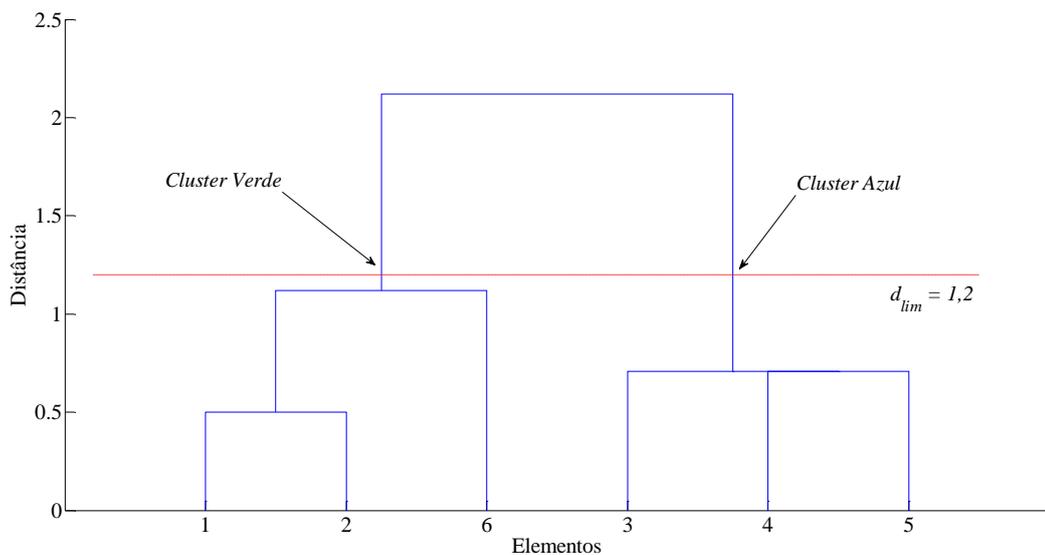


Figura 12: Mesmo dendrograma da Figura 10, porém, mostrando o novo nível de poda $d_{lim} = 1,2$.

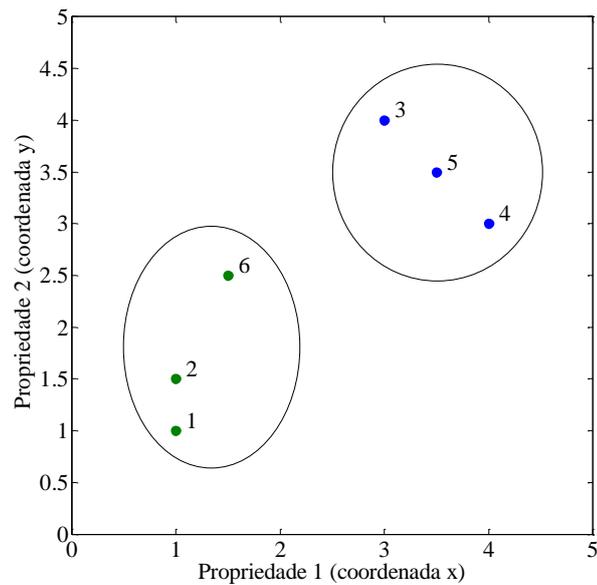


Figura 13: Representação gráfica dos *clusters* formados após a análise com $d_{lim} = 1,2$.

3.3.2 Observações

Conclui-se, portanto, que deve existir certo cuidado na definição do valor da distância limite (*threshold*), uma vez que sua pequena variação pode ocasionar resultados consideravelmente diferentes, como ilustrou este exemplo através das Figuras 9 a 13.

Dependendo do tipo de ligação (*single*, *complete* ou outra) e da métrica de distância, o resultado da *clusterização* hierárquica pode ser mais ou menos sensível ao valor de d_{lim} . Essa sensibilidade, como no exemplo tratado na subseção anterior, faz com que a escolha desse limite seja um momento crítico no processo. Portanto, uma vez que na grande maioria das aplicações práticas este valor não é de fácil definição por parte do usuário (pois costuma não representar nenhuma grandeza conhecida), é altamente recomendável que a metodologia desenvolvida seja menos sensível o possível a este parâmetro.

3.4 Interpretação Automática do Diagrama de Estabilização

Não é difícil notar que em uma primeira implementação, os algoritmos de identificação não são automáticos, pois em algum momento durante seu respectivo processo

de identificação, a decisão humana é necessária. Mais especificamente, em se tratando dos métodos de identificação por ajuste de parâmetros aos dados temporais (métodos do domínio do tempo), é comum que a intervenção humana seja feita, como foi discutido, mediante a apresentação na tela do diagrama de estabilização do modelo. Na sequência, um julgamento deve ser feito pelo analista dos dados com o objetivo de, entre outras coisas, filtrar possíveis modos espúrios.

Uma vez que o monitoramento (*OMA*) de estruturas civis demanda uma volumosa coleta de dados referente à sua resposta dinâmica, é vital que os algoritmos de identificação sejam tão automáticos quanto possível para assegurar que o processamento de dados seja feito de forma mais rápida, proporcionando uma monitoração precisa e contínua dos parâmetros dinâmicos estruturais.

De maneira geral, os esforços para a automatização do processo de identificação modal usando algoritmos paramétricos (do domínio do tempo como o *SSI* ou *ITD*) tem se concentrado em três aspectos complementares: a concepção ótima do algoritmo de identificação que possa produzir diagramas de estabilização os mais “limpos” possíveis; o estudo de parâmetros e critérios adicionais para uma seleção mais apurada dos modos estáveis; e o desenvolvimento generalizado de metodologias para que se realize a interpretação automática dos dados usualmente presentes num diagrama de estabilização.

Com relação ao aspecto da concepção de algoritmos que produzam diagramas de estabilização mais claros, um bom avanço pode ser notado com o desenvolvimento das variações (*PC*, *UPC*, *CVA*) dos métodos *SSI-COV*, *SSI-DATA* e, mais recentemente, a criação do método *p-LSCF* (*poly-reference Least Squares Complex Frequency Domain method*), o qual é baseado em um modelo paramétrico no domínio da frequência e possui uma versão *output-only* que foi apresentada por Peeters e Van Der Auweraer (2005).

No tocante aos parâmetros e critérios adicionais, tão necessários para a correta distinção dos modos físicos dos modos espúrios, Verboven *et al.* (2002) apresenta uma metodologia que serve para qualquer método de identificação modal: consiste na avaliação, por meio de parâmetros numéricos, da complexidade do modo próprio identificado (na grande maioria das aplicações práticas os modos físicos já são, de certa forma, esperados, portanto os modos identificados com alto grau de complexidade podem ser considerados como espúrios). Pode-se citar também o conceito de norma de transferência modal que é usado em conjunto

com método *SSI* e foi criado por Deraemaeker *et al.* (2008) em aplicação a dados simulados *output-only*.

Finalmente, depois da eliminação de todos, ou pelo menos uma parte, dos modos espúrios, surge a necessidade do desenvolvimento de metodologias com objetivo de se agrupar os polos (modos) dos modelos de diferentes ordens que estejam relacionados ao mesmo modo real físico.

É neste momento que as técnicas de agrupamento, ou *clustering*, são altamente recomendáveis, uma vez que ao se evitá-las, o procedimento de identificação recai normalmente na simples decisão de se adotar um modelo de ordem mais baixa para representar o sistema. Ora, pouca ou nenhuma garantia se teria de que todos os modos físicos estariam ali identificados, especialmente porque os modos pouco excitados geralmente aparecem em modelos de ordem mais elevada.

A análise de *cluster* pode considerar tantas propriedades dos modos (elementos) quanto se desejar. No caso em que se consideram apenas as propriedades de frequência natural e taxa de amortecimento, os dados podem ser dispostos num gráfico de forma semelhante ao exemplo da seção 3.3. Nos trabalhos de Verboven *et al.* (2002), Goethals *et al.* (2004) e de Brownjohn e Carden (2008) podem ser encontradas diversas técnicas de *clustering* não-hierárquicas que são baseadas no próprio diagrama de estabilização.

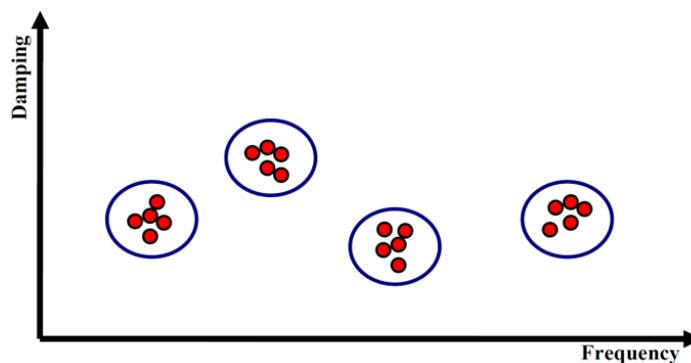


Figura 14: Esquema para ilustrar a aplicação de algoritmos de *clusterização*. Cada círculo azul define um grupo ou *cluster*. Cada ponto vermelho representa um polo do mesmo sistema modelado com diferentes ordens de modelo. Extraído do trabalho de Magalhães (2010).

Portanto, como pode ser observado no esquema da Figura 14, é natural que diversas métricas para se avaliar a distância entre os polos do sistema fossem criadas, para que o processo de eliminação de modos espúrios e de agrupamento possa ser realizado.

De forma semelhante aos autores citados nos parágrafos anteriores, Magalhães (2010), por exemplo, também definiu sua própria maneira de se medir a diferença (distância) entre os modos. Seu critério, ou métrica de distância, não leva em consideração as taxas de amortecimento, pois, segundo ele, estes valores não são úteis para se medir a diferença entre os polos, uma vez que eles apresentam uma alta dispersão e que modos diferentes podem de fato apresentar taxas de amortecimento iguais ou muito próximas. Com esta abordagem, ele propõe um parâmetro que simplesmente envolve as frequências f de cada modo e suas formas modais por meio do bem conhecido *MAC* (*Modal Assurance Criterion*), cujo cálculo é efetuado de acordo com a seguinte equação:

$$\text{MAC}_{i,j} = \left(\frac{|\phi_i^* \phi_j|}{\|\phi_i\| \|\phi_j\|} \right)^2 \quad (3.5)$$

onde ϕ_i e ϕ_j são os vetores das formas modais dos modos i e j . O vetor transposto conjugado do vetor \bullet é denotado por \bullet^* . O valor do MAC varia entre 0 (nenhuma correlação entre os vetores) e 1 (perfeita correlação entre os vetores).

Assim, a distância $d_{i,j}$ entre os modos i e j poderia ser calculada como:

$$d_{i,j} = \left| \frac{f_i - f_j}{f_j} \right| + (1 - \text{MAC}_{i,j}) \quad (3.6)$$

A Figura 15 ilustra os passos da metodologia proposta por Magalhães para a automatização da identificação modal operacional. Neste exemplo, ele considera dados simulados numericamente, de maneira que ele limitou a distância, dada pela equação (3.6), entre qualquer polo e seu adjacente do mesmo *cluster* a 0,001. Entretanto, ele deixa claro que as experimentações demonstram que um valor pequeno como este não seria adequado para uma análise com dados reais.

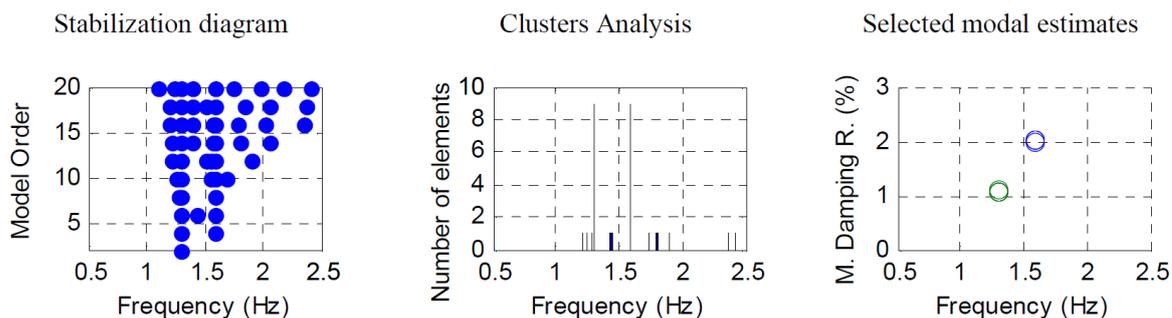


Figura 15: Passos da metodologia de identificação modal operacional automática proposta por Magalhães (2010).

Na Figura 15 podem ser encontrados: o diagrama de estabilização (à esquerda), onde cada ponto azul significa um polo identificado (estável ou instável) por modelos com ordens pares de 2 a 20; os grupos criados no processo de *clusterização* representados por sua frequência modal média (gráfico do meio); e, por último (à direita) os dois grupos que se destacaram com mais elementos (frequências próximas de 1,3 e 1,5 Hz) plotados em função da frequência média e da taxa de amortecimento média. Como relatado pelo autor, neste caso os polos dentro de cada um dos dois grupos sobressalentes apresentaram valores da taxa de amortecimento próximos e bem consistentes (em torno de 1 e 2%), indicando que a eliminação de *outliers* (valores atípicos ou aberrantes) não é necessária.

Há apenas alguns anos, após sua tese de doutorado, Reynders (2012) apresentou seu próprio método de identificação modal automática, cujas bases repousam sobre uma análise de *cluster* em três passos. Sua metodologia, basicamente, contém as seguintes metas: ser tão fisicamente intuitivo quanto possível; seguir o curso de uma análise manual; produzir resultados semelhantes àqueles encontrados pela análise manual; ser útil tanto no contexto *EMA* quanto no contexto *OMA*; e não conter parâmetros que precisam ser definidos ou calibrados pelo usuário. O seu método foi devidamente validado para um exemplo de aplicação em uma passarela de pedestres.

Sob a luz destas ideias e exemplos de metodologias propostas por diversos autores, pode-se afirmar que a automatização do processo de identificação modal deve sim existir, mas de maneira que o usuário/analista consiga definir alguns parâmetros iniciais que possam resultar num correto tratamento dos dados por parte dos algoritmos. Em outras palavras, deve-se haver um número mínimo necessário e suficiente de parâmetros iniciais configuráveis para

que o processo computacional de julgamento ou análise dos dados seja, idealmente, a simulação exata das atitudes as quais um analista experiente tomaria durante suas decisões.

Quando foi dito, no parágrafo anterior, “número mínimo necessário e suficiente”, deve-se entender que uma elevada quantidade de parâmetros iniciais resultaria em uma necessidade de conhecimento profundo por parte do usuário a respeito dos processos de automatização internos, o que seria definitivamente contra-produtivo para identificações de pequenos volumes de dados.

De forma bem nítida, pode-se notar que a criação de métricas relacionadas ao processo de eliminação de polos espúrios, ou ao processo de *clusterização*, é bastante subjetiva. Além disso, deve-se ressaltar que a eficiência da identificação modal operacional automática só pode ser alcançada quando se tem em mente o tipo de métrica que melhor se ajuste à situação específica da estrutura ensaiada. Portanto, o campo de pesquisa voltado ao desenvolvimento destas metodologias constitui uma vívida e constante fonte de novas publicações.

Capítulo 4

Metodologia Desenvolvida

4.1 Introdução

Para que se possa ter uma base para futuras comparações, o presente capítulo introduz, na seção 4.2, uma metodologia que servirá como referência. Esta metodologia foi inteiramente baseada na publicação de Magalhães (2010). Como já mencionado, ela também serviu de inspiração para alguns dos conceitos utilizados para o desenvolvimento da metodologia proposta neste trabalho, a qual é apresentada na seção 4.3.

4.2 Metodologia de Referência

Nesta abordagem, não há filtros aplicados previamente aos dados das estimativas dos modos, o que significa que o diagrama de estabilização ainda conteria modos certamente espúrios como, por exemplo, aqueles com taxas de amortecimento negativas ou muito altas. Este método é baseado em um algoritmo de *clusterização* hierárquica aglomerativo.

Primeiramente, a medida de dissimilaridade (distância) entre todos os pares de modos estimados é calculada. A “métrica” adotada para o cálculo desta distância é dada pela equação (3.6), rescrita a seguir:

$$d_{i,j} = \left| \frac{f_i - f_j}{f_j} \right| + (1 - \text{MAC}_{i,j}) \quad (4.1)$$

onde f_i e f_j são, respectivamente, as frequências naturais dos modos estimados i e j . A semelhança da forma de vibração entre estes dois modos é avaliada pelo bem conhecido MAC

(*Modal Assurance Criterion*). Além do mais, pode-se notar que esta métrica permite que $d_{i,j} \neq d_{j,i}$, o que leva a uma “curiosa” assimetria da matriz de dissimilaridade.

Os algoritmos de *clusterização* hierárquica diferem na maneira que eles computam a distância entre dois *clusters* já formados. Nesta metodologia, o conceito de ligação simples (*single linkage*) é usado, o que significa que a distância entre dois *clusters* será considerada como sendo igual a menor distância, também computada pela equação (4.1), existente entre os objetos destes dois *clusters*. Esta informação permite a construção da árvore hierárquica.

No passo seguinte, deve-se definir o nível para poda da árvore. Isto é, normalmente, dependente do número esperado de *clusters*. Porém, este número não é simples de ser previsto, devido à quantidade desconhecida de *clusters* agrupando modos espúrios. Assim, a estratégia alternativa é o uso de uma distância limite (*threshold*) d_{lim} . Tal limiar se caracteriza como o critério de poda dos ramos da árvore hierárquica, gerando *clusters* que são distantes entre si em uma quantidade maior que esse valor limite. Logo, quanto maior o valor da distância limite, menor o número resultante de *clusters* após a poda da árvore.

Neste ponto, tem-se cada *cluster* representando um único modo. Para decidir se este modo é espúrio ou não, os *clusters* são ranqueados de acordo com seus respectivos números de elementos. Assim, os n_m *clusters* com mais elementos são selecionados. Uma vez que os modos físicos são muito consistentes para modelos com diferentes ordens, seus *clusters* apresentam um número muito maior de elementos do que os *clusters* que contém modos espúrios, os quais tem um alto espalhamento entre modelos de diferentes ordens. Portanto, é esperado descobrir que os n_m modos selecionados são, de fato, físicos. Na prática, é comum perceber que o número de modos físicos n_m pode ser sugerido, por exemplo, através de uma análise preliminar simples no domínio da frequência.

Então, as taxas de amortecimento são levadas em conta por meio de uma análise de *outlier* dentro de cada *cluster* selecionado. Esta filtragem “interna” remove os modos estimados que tenham valores extremos de amortecimento, caracterizados por estarem fora do domínio definido por $\pm 2.698\sigma$ (desvio padrão) que abrangeria 99.3% das amostras numa distribuição Gaussiana.

Finalmente, como dado de saída da metodologia, cada *cluster* selecionado produz três valores médios correspondentes aos parâmetros modais identificados (frequência natural, taxa

de amortecimento e forma modal). O fluxograma da Figura 16 a seguir esquematiza os processos da metodologia citada.

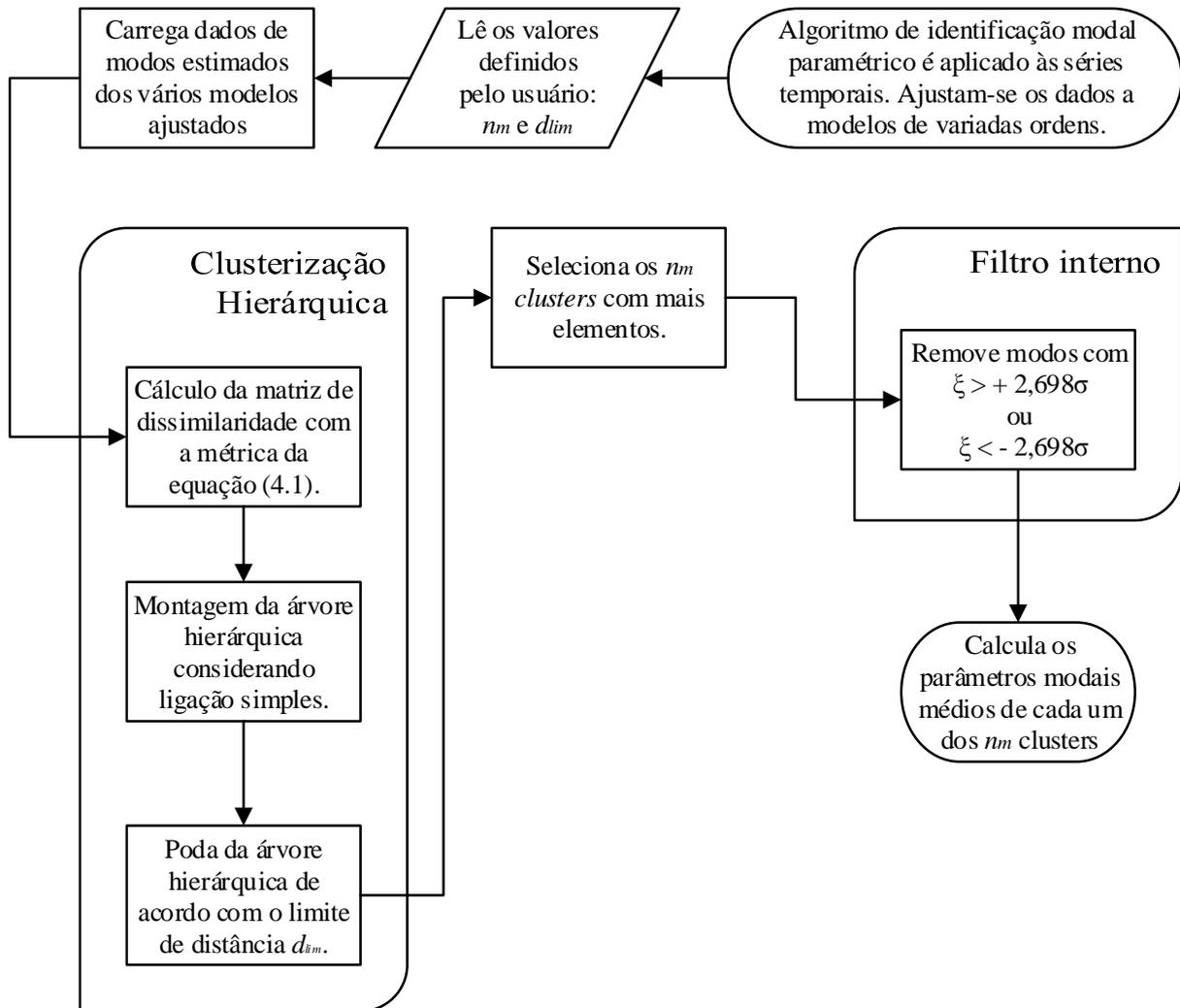


Figura 16: Fluxograma da metodologia de referência para automatização da identificação modal.

4.3 Metodologia Proposta

O método proposto neste trabalho também é baseado em um algoritmo de *clusterização* hierárquica. Entretanto, diferentemente da abordagem dada pela metodologia de referência, pretende-se evitar processamento desnecessário de dados e busca-se obter melhores resultados da análise de *cluster*. Assim, um pré-filtro é aplicado aos dados dos modos estimados, o que remove todos aqueles modos cuja taxa de amortecimento não esteja entre 0 e 15% (recomendado para estruturas de engenharia civil). Adicionalmente, o usuário

pode, opcionalmente, ter a eliminação de todos os modos com o coeficiente MPC⁵ menor que um determinado valor especificado m_{lim} . Finalmente, o usuário pode também ter a remoção de todos os modos que estejam fora de uma faixa especificada de frequências (semelhante a um filtro passa-banda).

Depois de ter os dados dos modos estimados processados pelo pré-filtro, a construção do diagrama de estabilização revela que uma quantidade significativa de modos foi removida, de forma que sua aparência se torne mais “limpa”. Dependendo da situação, e isso não é raro, os modos removidos podem até mesmo representar mais de 50% dos dados iniciais. Estes modos eliminados são considerados como sendo espúrios (ou indesejados) e, por isso, não serão processados pelo algoritmo subsequente de *clusterização*.

Para o cálculo da distância entre as estimativas de modos i e j , a nova métrica aqui proposta é dada por:

$$d_{i,j} = |f_i - f_j| + (1 - MAC_{i,j})c \quad (4.2)$$

onde c é uma constante que vale, arbitrariamente, 5 Hz. Este valor foi estabelecido após uma série de simulações realizadas.

Deve-se notar que, diferentemente da equação (4.1), a métrica proposta aqui pela equação (4.2) gera uma matriz de dissimilaridades perfeitamente simétrica, ou seja, $d_{i,j} = d_{j,i}$.

Uma vez calculada a matriz de dissimilaridades, procede-se a montagem da árvore hierárquica. Porém, diferentemente da metodologia de referência, a distância entre dois *clusters* é medida de acordo com uma ligação completa (*complete linkage*). Com esta informações, o dendrograma pode ser construído e a poda ocorre como na metodologia de referência: por meio de um valor limite para a distância d_{lim} .

De forma contrária ao que a metodologia de referência faz, aqui o filtro interno é aplicado em cada *cluster* antes de eles serem ranqueados de acordo com o seu número de elementos. Isto é feito para, de certa forma, penalizar os *clusters* com uma dispersão interna alta (mais prováveis de estarem representando modos numéricos) antes que eles possam ser classificados entre os n_m modos (com mais elementos) que serão selecionados como sendo

⁵ MPC significa *Modal Phase Collinearity*. É uma medida adimensional (varia de 0 a 1) que diz respeito à colinearidade dos elementos do vetor de forma modal no plano complexo. O valor 1 significa colinearidade perfeita. Detalhes podem ser encontrados no trabalho de Vacher et al. (2010). Reynders (2012) utilizou esta medida em seu método de identificação modal automática.

físicos. Assim, o filtro interno remove os modos *outliers* dentro de cada *cluster* considerando, não só taxa de amortecimento, como também a forma modal. São eliminados os modos estimados que tiverem taxas de amortecimento fora do domínio definido por $\pm 2.698\sigma$ e/ou tiverem um MAC menor que 0,8 medido com relação à forma modal média do *cluster*.

Depois deste processo de agrupamento (*clustering*), dependendo do valor de d_{lim} , é possível que diferentes *clusters* estejam representando o mesmo modo físico (fenômeno conhecido como *splitting*). Em outras palavras, um único modo físico pode ter sido “dividido” entre dois ou mais *clusters* diferentes. Evidentemente, este fenômeno deve ser evitado. Portanto, propõe-se um procedimento para reagrupar estes *clusters* separados indevidamente.

A rotina de reagrupamento é baseada no intervalo de confiança de frequências naturais. Cada *cluster* tem sua própria frequência média, seu limite superior e inferior de frequências delimitando certo intervalo de confiança. Todos os *clusters* são comparados dois a dois. Se o primeiro *cluster* tiver sua frequência média entre os limites de confiança dos segundo *cluster*, então é considerado possível que eles estejam representando o mesmo modo físico, portanto são selecionados para passarem por uma análise adicional: o MAC entre suas formas modais médias. Se este MAC for maior que 0.9, considera-se que estes *clusters* estejam representando o mesmo modo físico e, portanto, são agrupados em um único *cluster*.

Finalmente, os n_m *clusters* (modos) com mais elementos são selecionados como sendo físicos. Então, têm-se os dados de saída da metodologia, os quais consistem dos parâmetros dinâmicos médios de cada *cluster* (frequência natural, taxa de amortecimento e forma modal).

A Figura 17 apresenta o fluxograma da metodologia supracitada, evidenciando cada um de seus principais processos.

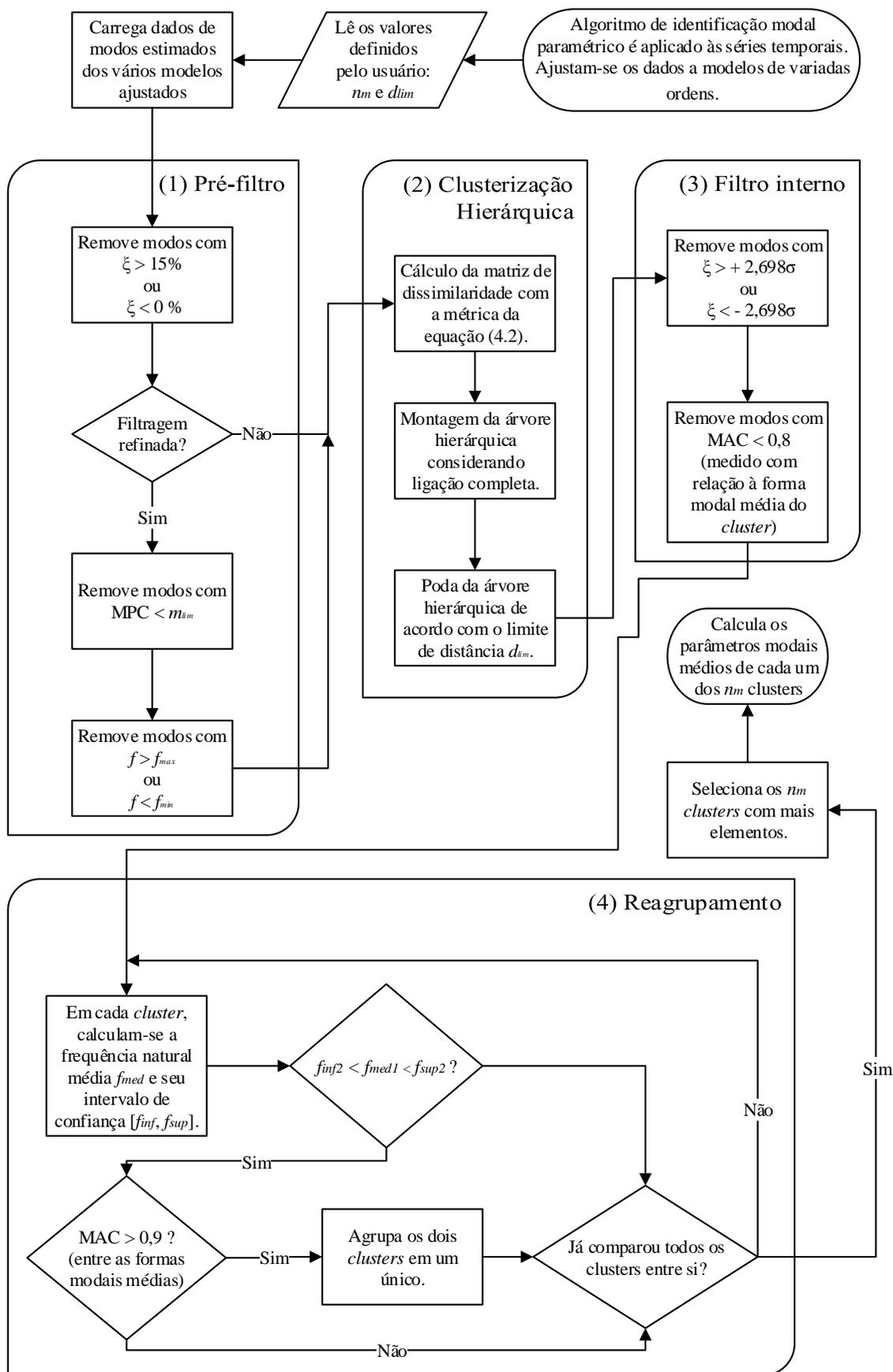


Figura 17: Fluxograma da metodologia proposta neste trabalho.

Capítulo 5

Aplicações

5.1 Introdução

Este capítulo reúne variadas aplicações do método proposto. Algumas delas aos sinais gerados numericamente (seção 5.2) e outras a sinais obtidos de estruturas reais (seções 5.3 e 5.4).

Na seção 5.2 pretende-se confirmar a eficiência da metodologia mesmo quando se tem modos com frequências muito próximas e sinais com um alto nível de ruído. Os sinais utilizados nesta aplicação foram gerados numericamente, justamente com o intuito de se promover este cenário desfavorável à identificação modal.

Na sequência, a seção 5.3 apresenta os resultados dos algoritmos quando sujeitos aos dados obtidos de um ensaio vibratório em uma viga biapoiada dentro de um laboratório. Objetiva-se mostrar que a metodologia proposta é eficiente na identificação mesmo quando há modos pouco excitados.

A seção 5.4 expõe os resultados da identificação modal para respostas dinâmicas de uma estrutura real de ponte. Visa-se expor a aplicabilidade da metodologia a estruturas de grande porte sujeitas somente a cargas ambientais.

Nas aplicações a sinais obtidos de estruturas reais (seções 5.3 e 5.4) serão feitas comparações entre o desempenho da metodologia de referência e o desempenho da metodologia proposta. Com isso, busca-se provar que a metodologia proposta não só funciona satisfatoriamente em casos práticos, como também apresenta uma robustez maior quando comparada com a metodologia de referência.

É importante mencionar que os gráficos colocados neste capítulo, em sua maioria, contêm textos na língua inglesa. O motivo é que eles foram gerados por algoritmos, cuja implementação foi feita já se pensando numa futura incorporação em um *software* com interface gráfica que fosse inteligível internacionalmente.

5.2 Aplicação a sinais gerados numericamente

5.2.1 Introdução

Encontram-se nesta seção, aplicações da metodologia desenvolvida a sinais gerados numericamente. Estes sinais são oriundos da simulação de uma estrutura qualquer (não importando sua geometria) com cinco pontos medidos.

Para representar os cinco sinais, a equação (5.1), que descreve a vibração livre amortecida de um sistema dinâmico com um grau de liberdade, foi utilizada cinco vezes variando-se alguns parâmetros. Nesta equação, ω_D representa a frequência natural amortecida que equivale, para pequenas taxas de amortecimento ζ , à própria frequência natural $\omega = 2\pi f$. Além disso, $y(t)$ é a amplitude do sinal no instante t , ρ é um fator de amplitude e θ é uma parcela de fase.

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 \rho_i \cos(\omega_{Di}t + \theta_i) e^{-\zeta_i \omega_i t} \quad (5.1)$$

As variáveis da equação anterior foram estabelecidas de maneira que se obtivessem dois modos de vibração com frequências naturais próximas. A Tabela 3 expõe os valores dos parâmetros dinâmicos do sistema hipotético.

Tabela 3: Parâmetros dinâmicos do sistema hipotético.

	f (Hz)	ζ (%)
Modo 1	20,80	1,00
Modo 2	20,90	2,00

As formas modais de vibração não serão analisadas nesta aplicação. O objetivo é verificar a capacidade do método em identificar corretamente estes modos próximos. Primeiro com o sinal puro (sem ruído) e em seguida com níveis de ruído branco cada vez maiores (10%

e 20%). Estes ruídos foram adicionados ao sinal de acordo com a equação (5.2). Nesta expressão, $y_{ruído}$ é o sinal com ruído, y_{max} é o valor máximo em módulo de y , β é o fator contendo o nível de ruído (por exemplo, $0,2 = 20\%$) e χ é um sinal gerado aleatoriamente pelo computador com amplitude variando de -1 a $+1$.

$$y_{ruído}(t) = y(t) + y_{max} \cdot \beta \cdot \chi(t) \quad (5.2)$$

Os vetores de resposta foram gerados considerando uma taxa de amostragem de 1000 Hz para os cinco canais, gerando o equivalente a 10 segundos de sinal. Em todos os casos mostrados a seguir, a metodologia proposta assumiu $d_{lim} = 1$ Hz e $n_m = 2$. Isto foi feito para que se tenha uma ideia da robustez do comportamento dos algoritmos, mesmo em situações variadas. Não foi realizada pré-filtragem refinada (ver Figura 17).

5.2.2 Sinal sem ruído

O histórico de 10 segundos dos cinco sinais gerados numericamente de acordo com o exposto em 5.2.1 pode ser visualizado integralmente na Figura 18.

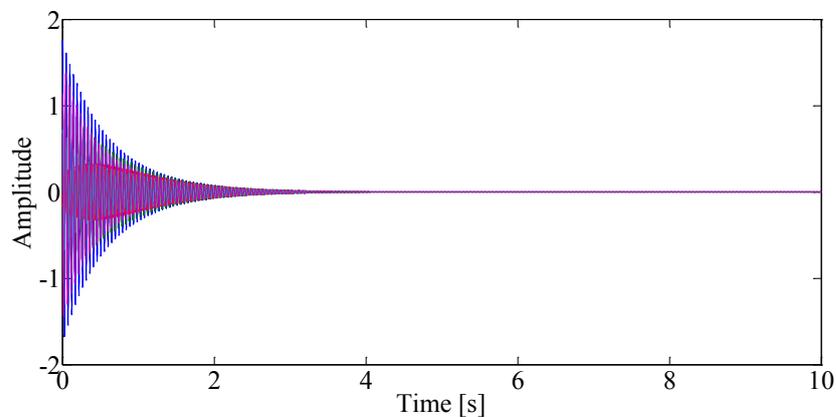


Figura 18: Histórico de resposta dos 5 canais (cores diferentes).

Estes sinais não apresentam ruído algum, como é possível verificar no detalhe da Figura 19. Portanto, apesar de se tratarem de modos com frequências próximas, é de se esperar que o algoritmo implementado neste trabalho não tenha maiores problemas na identificação.

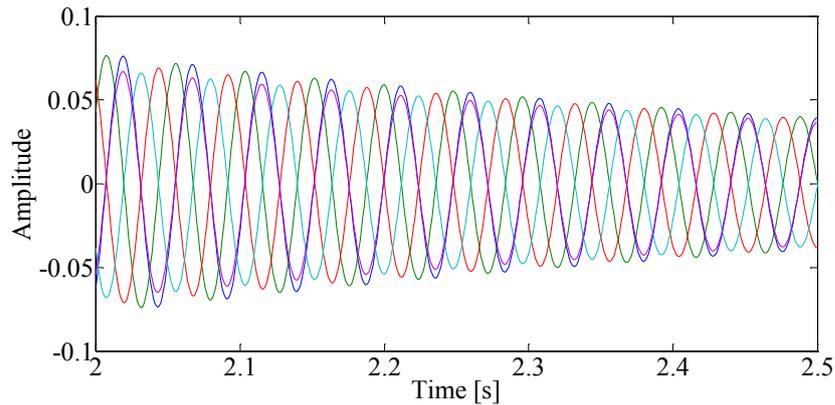


Figura 19: Histórico de resposta dos 5 canais (cores diferentes) com *zoom*.

Iniciar-se-á, então, o processo de identificação modal automática. Os dados de resposta do sistema (ilustrados acima) são fornecidos ao algoritmo como entrada para processamento. Ressalta-se que o fluxograma de tal algoritmo pode ser encontrado na Figura 17.

De maneira exagerada, o método *SSI-DATA (PC)* foi utilizado para identificar modelos com ordens variando unitariamente de 10 a 80. Uma vez que o sistema dinâmico só tem dois modos físicos, espera-se o surgimento de uma quantidade enorme de modos espúrios advinda do ajuste dos dados a modelos de ordens tão altas como estas. Portanto, este cenário criado coloca a capacidade de distinção da metodologia ainda mais à prova. Ressalta-se que este é exatamente o objetivo. De fato, neste caso numérico, um modelo de ordem 4 já seria o suficiente. A Figura 20 mostra, nitidamente, o grande número de modos estimados sem nenhum significado físico.

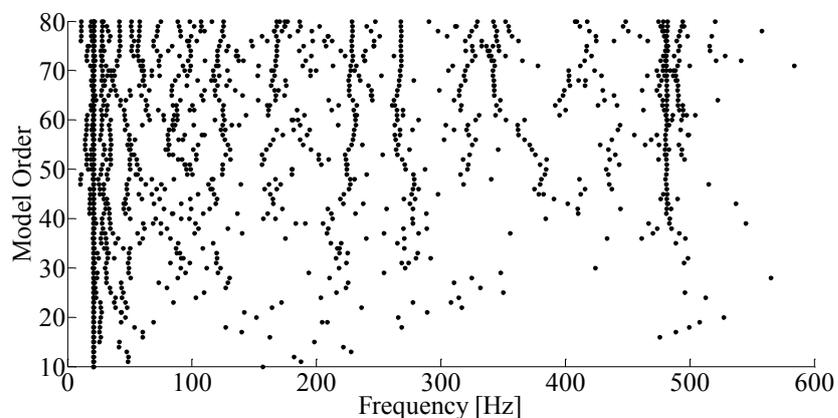


Figura 20: Diagrama de estabilização gerado pelo *SSI-DATA (PC)*.

Todavia, de maneira a deixar clara a precisão do algoritmo *SSI-DATA* implementado pelo autor, dois níveis de *zoom* do diagrama de estabilização são mostrados nas Figuras 21 e 22.

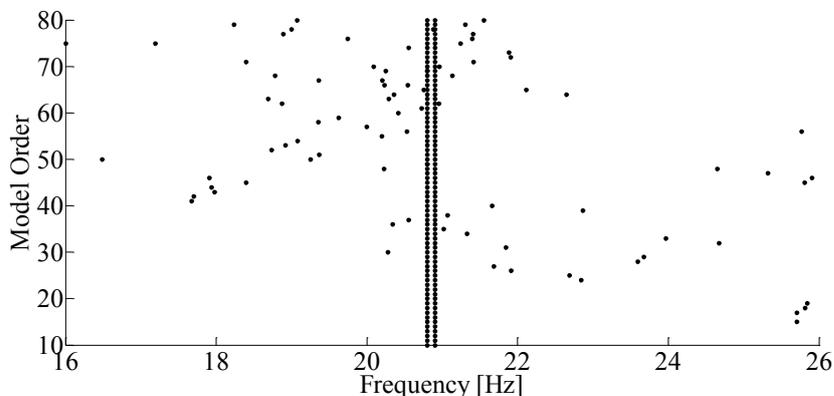


Figura 21: Diagrama de estabilização da Figura 20 com *zoom*.

Observa-se, através da Figura 22 que a as duas colunas de modos aparentemente estáveis está levemente deslocada do valor de frequência esperado (20,80 Hz e 20,90 Hz) . Isso ocorre devido à pequena, mas existente, diferença entre frequência natural amortecida e não amortecida. Como será visto mais adiante, este erro é, sem dúvida, desprezível.

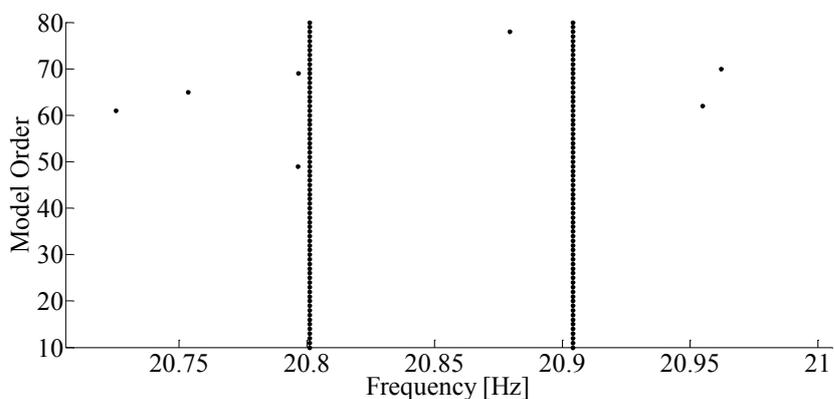


Figura 22: Diagrama de estabilização da Figura 20 com um nível ainda maior de *zoom*.

Neste momento, a metodologia desenvolvida começa a processar automaticamente os dados dos modos apresentados no diagrama de estabilização mostrado nas figuras anteriores. Os cálculos ocorrem em pouco menos de 1 segundo e fornecem o resultado final, o qual pode ser conferido visualmente nas figuras seguintes.

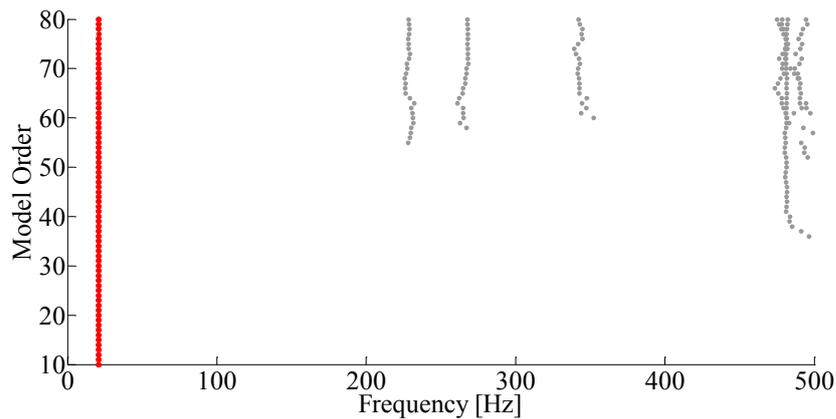


Figura 23: Diagrama de estabilização após processamento automático (pré-filtro, análise de *cluster*, filtragem interna e reagrupamento). Os modos vermelhos são os modos considerados físicos pelo algoritmo.

De antemão, é possível verificar a eficiência, para este caso, do pré-filtro que remove modos com taxas de amortecimento negativas ou maiores que 15%. Basta olhar a Figura 23 e se certificar que os 1004 modos removidos de um total de 1325 (75,8 %) promovem uma limpeza absolutamente considerável no diagrama de estabilização. Consequentemente, os dados a serem tratados pelo algoritmo de *clusterização* hierárquica se resumem a um quarto do total inicial. Desta forma, a velocidade de processamento é drasticamente aumentada. A “limpeza” fica ainda mais evidente quando se analisa este mesmo diagrama no intervalo de frequência definido pelo *zoom* da Figura 24.

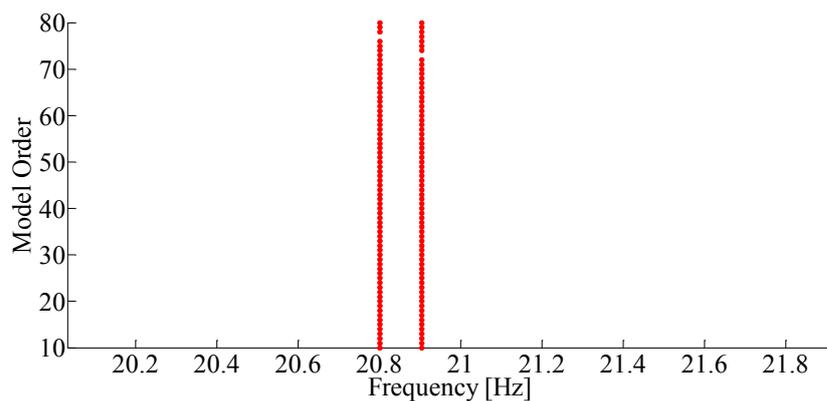


Figura 24: *Zoom* do diagrama de estabilização mostrado na Figura 23.

Para que o leitor perceba melhor o resultado fornecido pelos algoritmos implementados, a Figura 25 é apresentada. Ela torna possível ter uma ideia, de maneira gráfica, do resultado da *clusterização*.

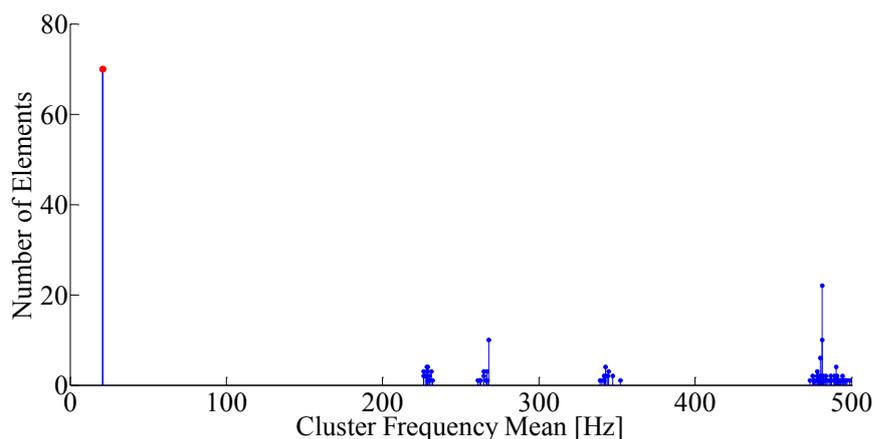


Figura 25: Número de elementos (modos estimados) por *cluster* formado. Cada haste corresponde a um *cluster* (modo). O eixo horizontal posiciona a representação do *cluster* de acordo com sua frequência média. As hastes com extremidade vermelha representam os n_m modos (*clusters*) considerados físicos de maneira automática.

Nota-se que a metodologia proposta agrupa, corretamente, os modos físicos em dois *clusters* com frequências médias, respectivamente iguais a 20,80 e 20,90 Hz, como pode ser visto na Figura 26.

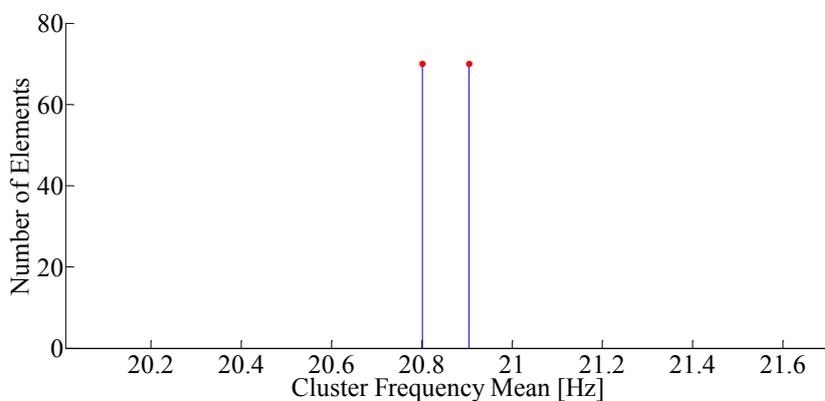


Figura 26: Detalhe da Figura 25, mostrando dois *clusters* (modos físicos) com 70 elementos cada um.

Para finalizar a análise dos resultados, a Figura 27 permite concluir que os dois *clusters* selecionados não apresentam dispersão alguma de seus modos (elementos) com relação à taxa de amortecimento e à frequência natural. Adicionalmente, já se pode perceber visualmente, que os dois parâmetros modais foram identificados corretamente.

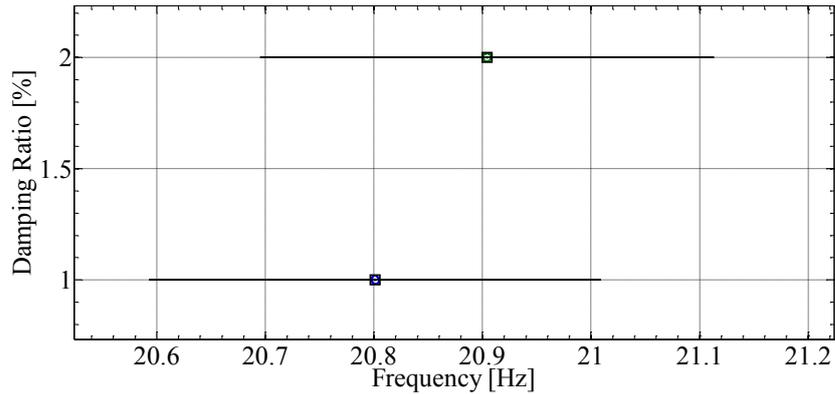


Figura 27: Gráfico com modos dos dois *clusters* segundo sua frequência natural e sua taxa de amortecimento.

Com o objetivo de resumir os resultados desta aplicação, a Tabela 4 pode ser construída. A terceira e quinta colunas mostram o desvio padrão do parâmetro dentro do *cluster*, juntamente com o erro do mesmo tomando como referência os valores da Tabela 3.

Tabela 4: Resumo da identificação modal. O desvio padrão é simbolizado por σ . Valores arredondados.

	f (Hz)	σ_f (Hz) / erro (%)	ζ (%)	σ_ζ (%) / erro (%)
Modo 1	20,80	0,000 / 0,00	1,00	0,00 / 0,00
Modo 2	20,90	0,000 / 0,00	2,00	0,00 / 0,00

5.2.3 Sinal com 10% de ruído

O mesmo sinal, gerado da maneira descrita na subseção 5.2.1 e mostrado na Figura 18, é agora acrescido de um ruído branco com 10 % da amplitude máxima do sinal puro. A Figura 28 apresenta os 10 segundos de dados dos 5 canais.

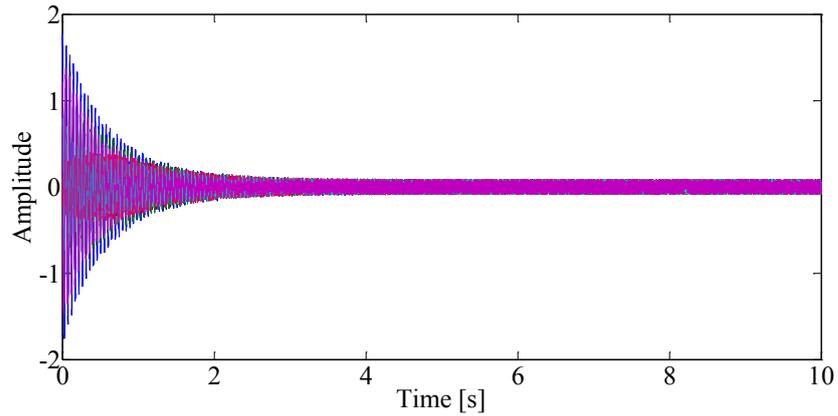


Figura 28: Histórico de resposta dos 5 canais (cores diferentes) com 10 % de ruído branco.

Comparando a Figura 19 com a Figura 29 é possível concluir que a razão sinal/ruído foi bastante diminuída. Espera-se, ainda sim, que o algoritmo de identificação desenvolvido seja capaz de detectar os dois modos com frequências próximas.

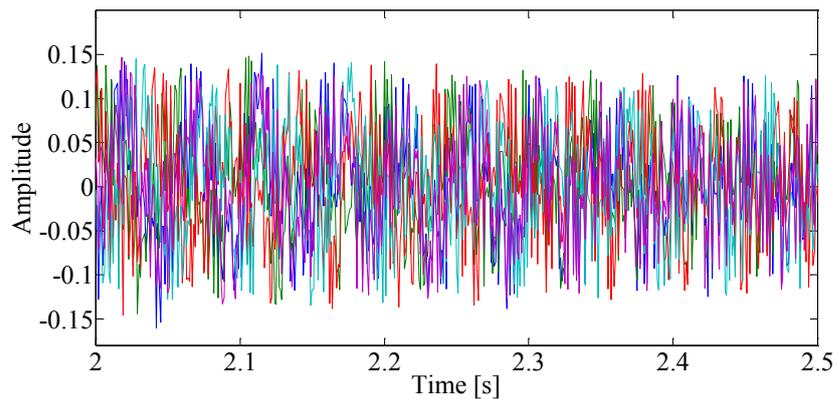


Figura 29: Trecho do histórico de resposta dos 5 canais (cores diferentes) com 10 % de ruído branco.

Da mesma forma que na aplicação anterior, o algoritmo *SSI-DATA (PC)* é aplicado aos históricos de resposta, o que permite a construção do diagrama de estabilização mostrado na Figura 30. Novamente, destaca-se que modelos de ordens muito maiores do que o necessário foram identificados. O motivo é a criação de um cenário mais desfavorável para operação dos algoritmos de interpretação automática dos modos (distinção de quais são espúrios e de quais são físicos).

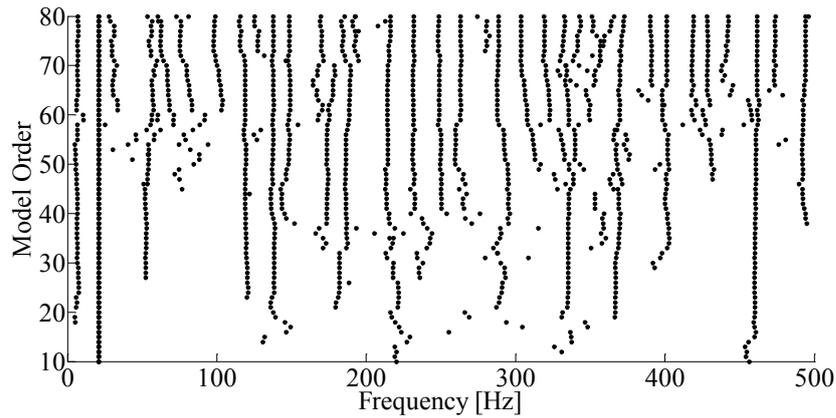


Figura 30: Diagrama de estabilização gerado pelo *SSI-DATA (PC)*.

Naturalmente, como se pode notar pela Figura 30, a quantidade de modos numéricos estimados é muito grande. Contudo, quando se observam os modos próximos a 20 Hz (Figura 31) tem-se a impressão de que os dois modos físicos foram também identificados (duas colunas bem definidas).

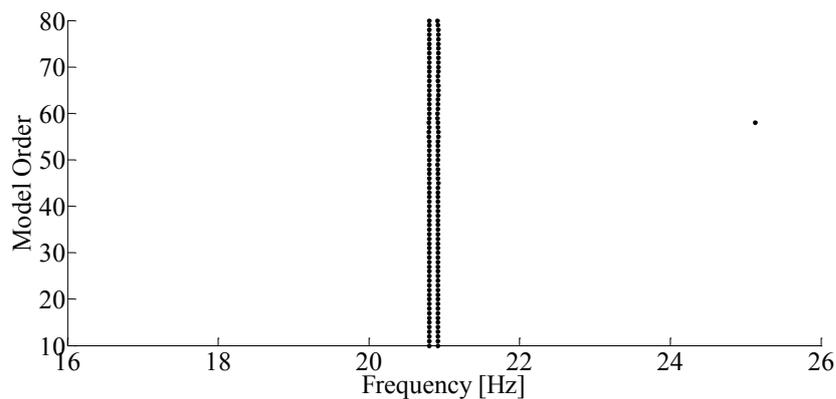


Figura 31: Diagrama de estabilização da Figura 30 com *zoom*.

Resta saber se a metodologia proposta será capaz de selecionar automaticamente somente os dois modos físicos dentre todos os demais. O processo de identificação então é iniciado, levando aproximadamente 9 segundos para realização de todos os cálculos. Os resultados são mostrados a seguir.

Primeiramente, observa-se, através da comparação da Figura 32 com a Figura 30, que alguns modos foram removidos pelo pré-filtro, mais precisamente 256 de 1538, ou seja, 17.23% do total. O filtro interno colaborou com a retirada de mais 9 modos *outliers*.

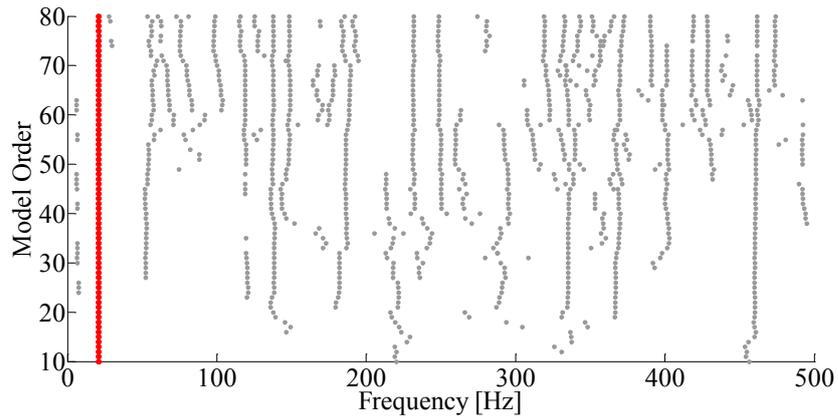


Figura 32: Diagrama de estabilização após processamento automático (pré-filtro, análise de *cluster*, filtragem interna e reagrupamento). Os modos vermelhos são os modos considerados físicos pelo algoritmo.

Com o detalhe da Figura 33, torna-se claro que o algoritmo foi, novamente, capaz de identificar corretamente os dois modos físicos.

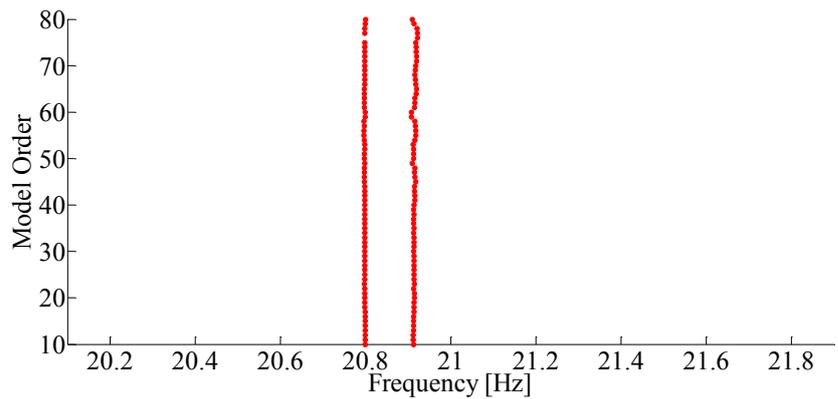


Figura 33: Zoom do diagrama de estabilização da Figura 32.

As Figuras 34 e 35 ilustram o resultado do processo de *clusterização*. As hastes com extremidades vermelhas representam os $n_m = 2$ modos considerados automaticamente como sendo físicos.

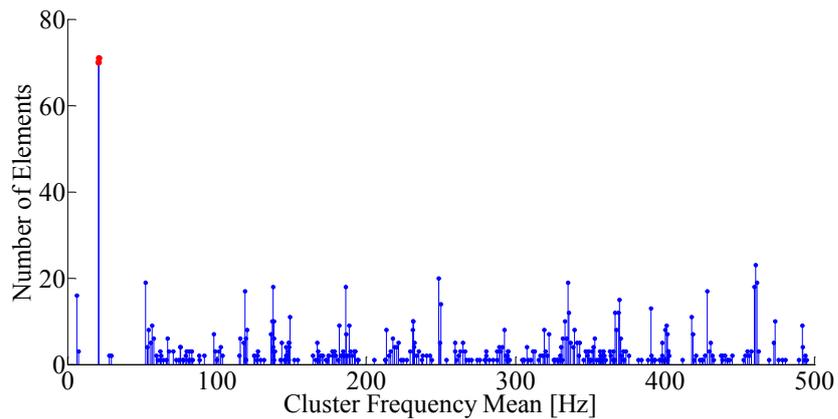


Figura 34: Número de elementos (modos estimados) por *cluster* formado. Cada haste corresponde a um *cluster* (modo). O eixo horizontal posiciona a representação do *cluster* de acordo com sua frequência média. As hastes com extremidade vermelha representam os n_m modos (*clusters*) considerados físicos de maneira automática.

É importante notar, através da Figura 34, que os dois *clusters*, que representam os únicos modos físicos, contêm um número muito maior de elementos do que os *clusters* de modos espúrios o fazem. Isso fica evidente pela pequena altura das hastes das centenas de *clusters* constituídos de modos numéricos.

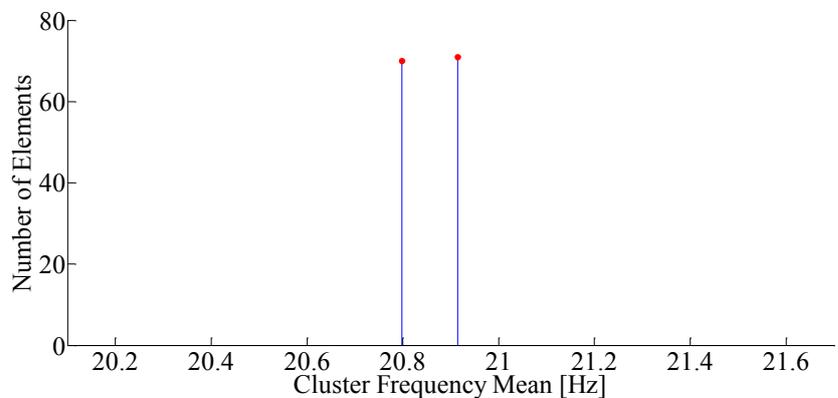


Figura 35: Detalhe da Figura 25, mostrando os dos dois *clusters* (modos físicos) com mais elementos.

O último gráfico, encontrado na Figura 36, é um diagrama de dispersão (frequência *versus* amortecimento) dos modos pertencentes aos dois *clusters* selecionados (modos físicos). Verifica-se visualmente a coerência e baixo desvio padrão dos parâmetros dinâmicos identificados automaticamente.

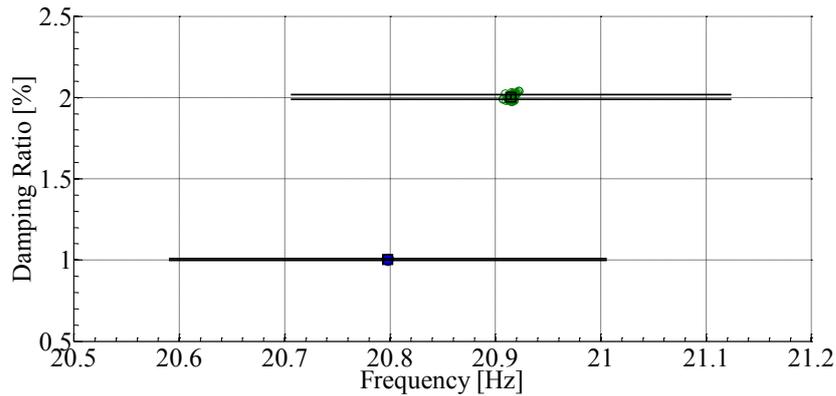


Figura 36: Gráfico com modos dos dois *clusters* segundo sua frequência natural e sua taxa de amortecimento.

Finalmente, por meio da Tabela 5, a qual resume os resultados da identificação modal automática, é fácil perceber que, mesmo trabalhando com um sinal com ruído considerável, os algoritmos foram capazes de determinar os parâmetros modais de maneira extremamente precisa.

Tabela 5: Resumo da identificação modal. O desvio padrão é simbolizado por σ . Valores arredondados.

	f (Hz)	σ_f (Hz) / erro (%)	ζ (%)	σ_ζ (%) / erro (%)
Modo 1	20,80	0,001 / 0,00	1,00	0,00 / 0,00
Modo 2	20,91	0,003 / 0,05	2,00	0,01 / 0,00

5.2.4 Sinal com 20% de ruído

Para encerrar as aplicações em sinais gerados numericamente, esta subseção leva a metodologia desenvolvida a encarar um cenário ainda pior. Neste caso, o sinal original, ilustrado nas Figuras 18 e 19, é agora poluído com 20 % de ruído branco. Em outras palavras, somar-se-á ao sinal puro, um ruído cuja amplitude equivale a um quinto da amplitude inicial de vibração. A inspeção da Figura 37 permite melhor entendimento destas magnitudes.

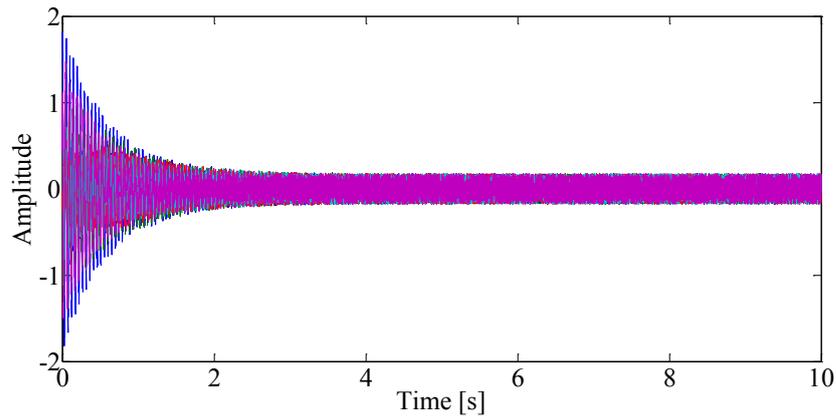


Figura 37: Histórico de resposta dos 5 canais (cores diferentes) com 20 % de ruído branco.

Nesta aplicação, além da dificuldade de se ter que identificar modos com frequências próximas, os algoritmos terão também que lidar com o alto nível de ruído. De fato, apenas o primeiro segundo dos sinais apresenta vibração com energia considerada suficiente para uma boa identificação perante o ruído.

Observa-se que, a partir do primeiro segundo de amostra, a intensidade do sinal da própria estrutura se torna extremamente menor que a intensidade do ruído. Isto pode ser constatado na Figura 38.

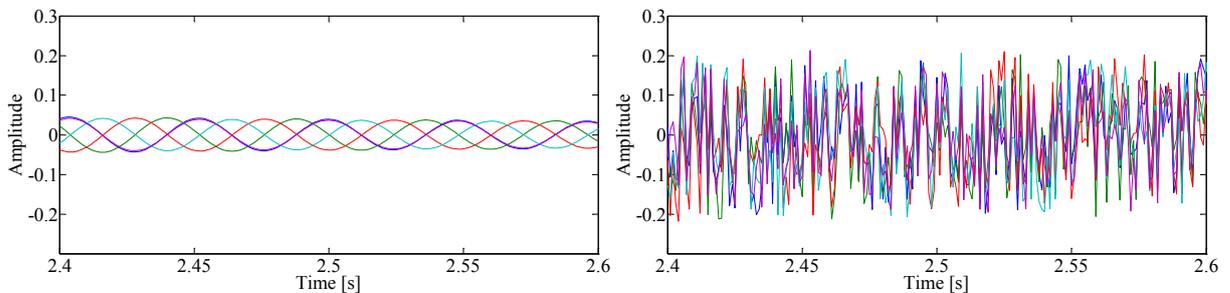


Figura 38: Sinal puro (à esquerda) e sinal com 20% de ruído (à direita).

Mesmo diante dos desafios deste cenário extremo produzido artificialmente, a metodologia é novamente colocada à prova. Primeiramente, o algoritmo *SSI-DATA* é aplicado para ajuste paramétrico de modelos com ordens variando de 10 a 80. Isto leva, como já mencionado, ao aparecimento de um imenso número de modos espúrios. A Figura 39 mostra o diagrama de estabilização resultante.

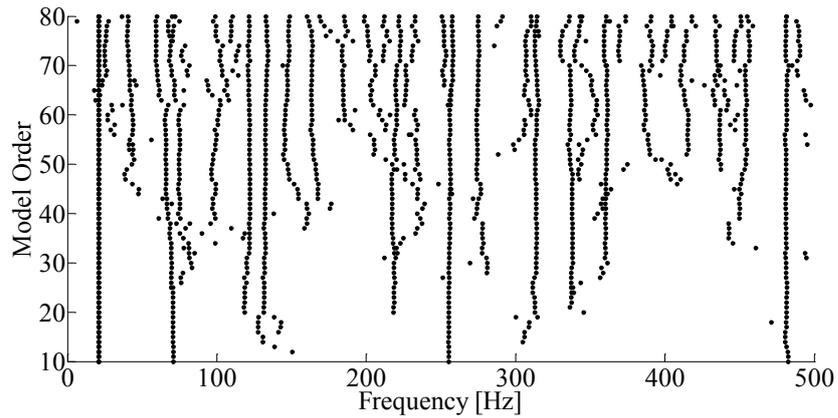


Figura 39: Diagrama de estabilização gerado pelo SSI-DATA (PC).

Em detalhe, as duas colunas praticamente verticais da Figura 40 indicam que os dois modos físicos foram possivelmente bem identificados.

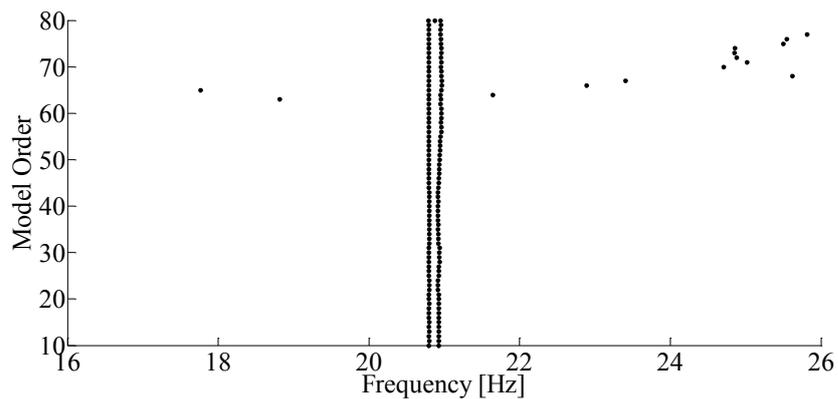


Figura 40: Diagrama de estabilização da Figura 39 com *zoom*.

Neste ponto, os dados dos modos estimados são submetidos à análise automática da metodologia proposta. O desempenho do pré-filtro foi um pouco menor comparando com as aplicações anteriores, pois apenas 14,26 % dos modos foram prontamente removidos (220 de 1543). Contudo, os resultados finais da análise, ilustrados pelas figuras a seguir, foram obtidos em menos de 10 segundos.

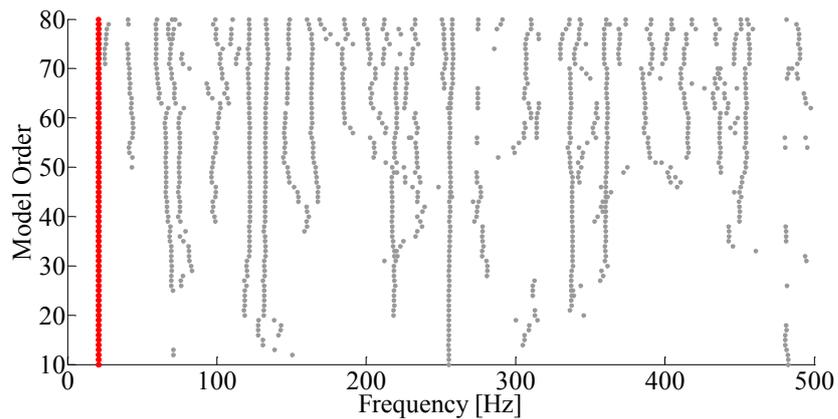


Figura 41: Diagrama de estabilização após processamento automático (pré-filtro, análise de *cluster*, filtragem interna e reagrupamento). Os modos vermelhos são os modos considerados físicos pelo algoritmo.

A Figura 41 já aponta que, mesmo com muitos modos espúrios, os poucos físicos (em vermelho) foram corretamente identificados pelos algoritmos de automatização. Isto fica melhor evidenciado pela Figura 42.

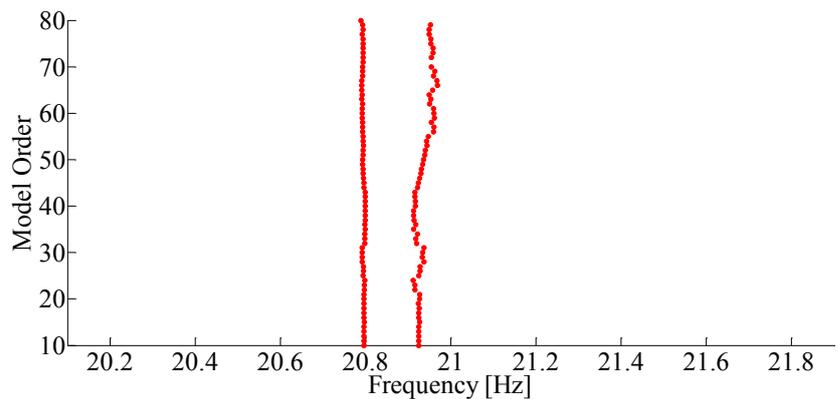


Figura 42: Zoom do diagrama de estabilização da Figura 41.

Além disso, pelo estudo da Figura 43, é fácil notar que a seleção de quais *clusters* estariam abrigando modos físicos foi, visivelmente, feita com grande robustez. Basta que se disponha de atenção para conferir a diferença de altura das hastes neste gráfico. Os dois *clusters* compostos de modos considerados físicos apresentam mais de 70 elementos, enquanto os demais não alcançam 40. A Figura 44 mostra um detalhe deste gráfico de hastes.

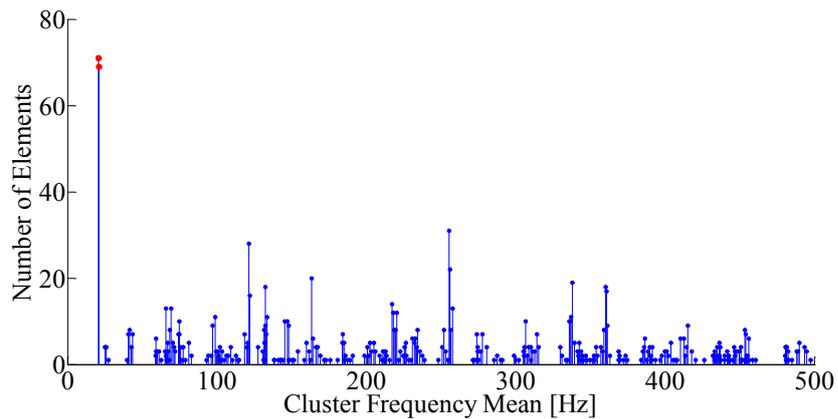


Figura 43: Número de elementos (modos estimados) por *cluster* formado. Cada haste corresponde a um *cluster* (modo). O eixo horizontal posiciona a representação do *cluster* de acordo com sua frequência média. As hastes com extremidade vermelha representam os n_m modos (*clusters*) considerados físicos de maneira automática.

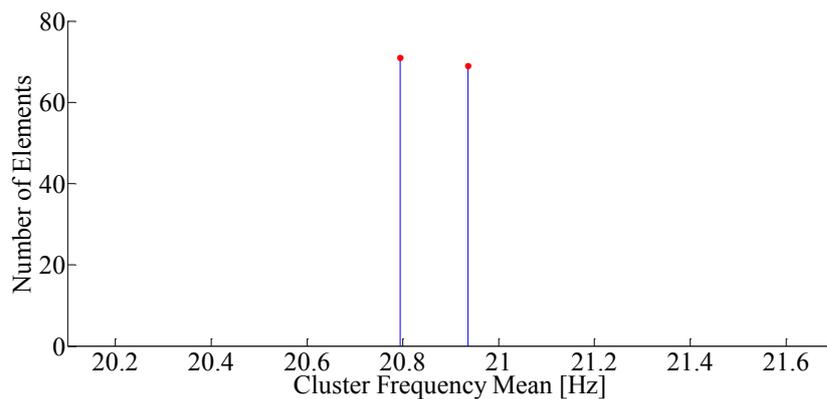


Figura 44: Detalhe da Figura 43, mostrando os dois *clusters* (modos físicos) com mais elementos.

No gráfico de dispersão (amortecimento *versus* frequência) exposto na Figura 45, encontram-se as representações dos modos considerados físicos. Conclui-se, mediante inspeção visual, que o primeiro modo foi um pouco melhor identificado do que o segundo, pois apresentou uma menor dispersão.

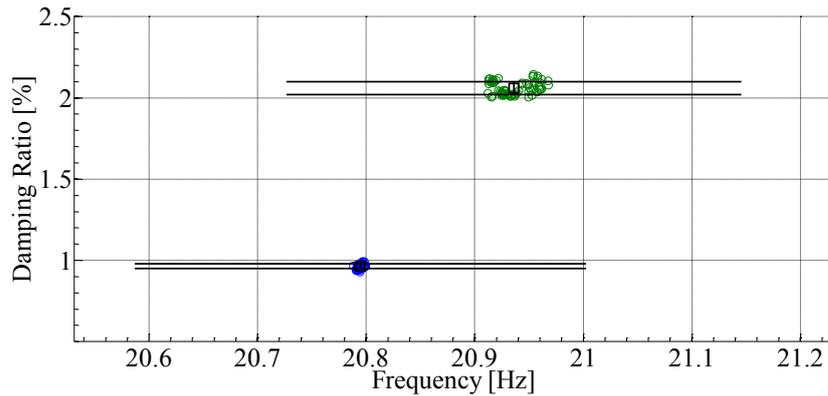


Figura 45: Gráfico com modos dos dois *clusters* segundo sua frequência natural e sua taxa de amortecimento.

Concluindo as aplicações a sinais gerados computacionalmente, pode-se observar, por meio da Tabela 6, que a metodologia proposta conseguiu alcançar seus objetivos propostos, pois foi capaz de identificar os modos corretamente, com erros toleráveis, mesmo baseando-se em sinais com presença maciça de ruído.

Tabela 6: Resumo da identificação modal. O desvio padrão é simbolizado por σ . Valores arredondados.

	f (Hz)	σ_f (Hz) / erro (%)	ζ (%)	σ_ζ (%) / erro (%)
Modo 1	20,79	0,003 / 0,05	0,96	0,00 / 4,00
Modo 2	20,94	0,017 / 0,19	2,06	0,01 / 2,91

5.3 Aplicação Prática – Viga Biapoiada

5.3.1 Introdução

Esta seção apresenta os testes experimentais (Alves *et al.*, 2015) conduzidos no laboratório da COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Trata-se do estudo de vibração forçada de uma viga de aço biapoiada, mostrada na Figura 46, utilizando um vibrador que produz excitação aleatória. O carregamento foi aplicado durante toda a duração do ensaio. A viga tem 1,46 m de comprimento com seção transversal retangular de 76,2 mm x 8,0 mm.



Figura 46: Viga de aço instrumentada.

Os sinais de resposta foram medidos por seis acelerômetros (PCB, 336C31) e canalizados a um equipamento condicionador de sinais Lynx ADS2002. A taxa de aquisição foi fixada em 4000 Hz para que se tivesse perfeita resolução temporal dos sinais. Pode se ter uma ideia geral do aspecto destas séries, cuja duração é de 25 segundos⁶, com a Figura 47.

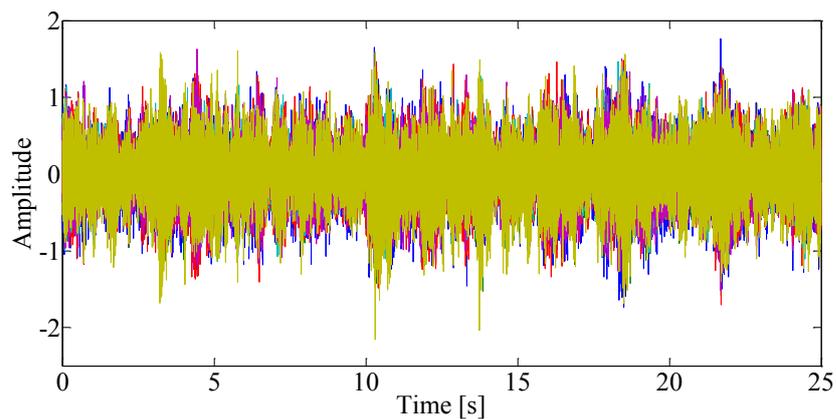


Figura 47: Histórico de resposta dos seis canais (cores diferentes).

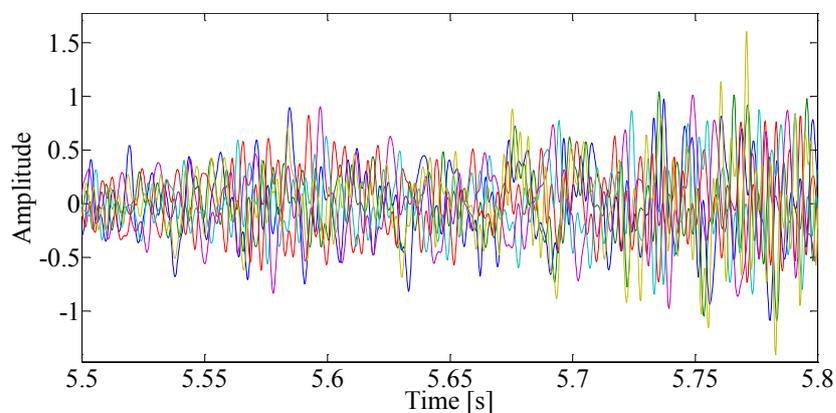


Figura 48: Trecho do histórico de resposta dos seis canais (cores diferentes).

⁶ Menciona-se, porém, que o ensaio registrou mais de 10 minutos de sinal.

A Figura 48 mostra um período de três décimos de segundo da amostra.

Através deste experimento, visa-se não só avaliar o desempenho da metodologia proposta, mas também fazer comparações com o desempenho da metodologia de referência. Portanto, a seguir, os dois métodos serão aplicadas aos mesmos dados. Lembra-se, porém, que primeiro se devem estabelecer os valores dos parâmetros manualmente definidos. Ou seja, como já ressaltado ao longo do texto, uma primeira análise humana, em maior ou menor grau, é de fato indispensável.

De maneira preliminar, foi realizada a *FFT* (*Fast Fourier Transform*) de cada um dos seis sinais temporais. Adicionalmente, um espectro de frequências médio também foi calculado. A Figura 49 reúne estes gráficos. Busca-se, pela inspeção destes espectros, uma sugestão para a definição do parâmetro n_m cuja escolha é arbitrariamente do usuário.

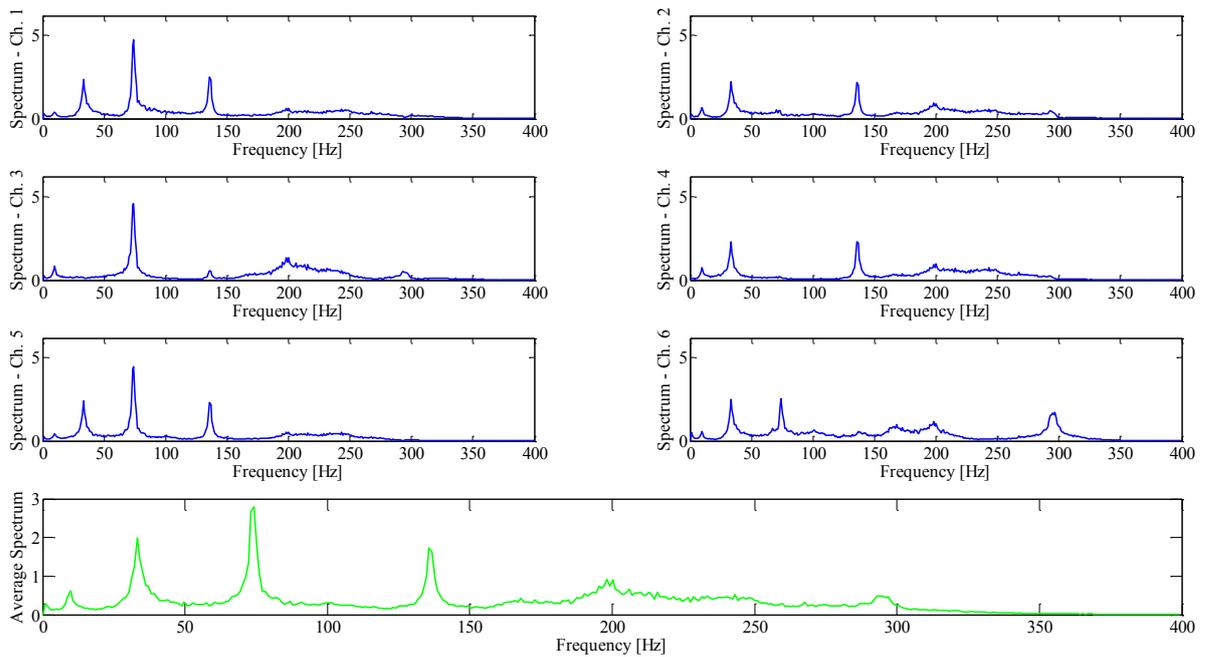


Figura 49: Espectros de frequência do sinal de cada canal (azul) e espectro médio de frequência (verde).

Após rápida análise visual da Figura 49, especialmente do espectro médio (verde), decidiu-se adotar $n_m = 5$. Em outras palavras, deseja-se que a metodologia proposta identifique automaticamente os cinco primeiros modos de vibração verticais da estrutura. Para todo efeito, cabe notar que a definição deste parâmetro não implica grandes decisões por parte do usuário, uma vez que este poderia adotar um valor maior de forma conservadora. Se fosse

este o caso, nem mesmo uma breve análise expedita no domínio da frequência precisaria ser feita. Porém, aqui neste trabalho, por sua característica expositiva, julgou-se conveniente a apresentação do sinal também no domínio da frequência, até mesmo para que se tenha uma noção da energia com a qual cada modo foi excitado, bem como para que se tenha uma referência, em termo de frequências, para validação dos modos a serem identificados pelos algoritmos de automatização.

É somente na definição da distância limite (d_{lim}) que se pode ter alguma dúvida maior. Este número, como não simboliza nenhuma grandeza física, é de difícil abstração pelo usuário. Contudo, a boa notícia é que, como será provado doravante no texto, a metodologia proposta é muito pouco sensível a este parâmetro. Por isso, assim como nas aplicações descritas na seção anterior (ensaios numéricos), o valor de d_{lim} continuará fixado em 1 Hz.

Procura-se mostrar com a presente aplicação, que a metodologia proposta não necessita de muito cuidado na definição de d_{lim} . Diferentemente, ver-se-á que a metodologia de referência apresenta sensibilidade muito maior com relação à escolha deste mesmo parâmetro. Vários valores foram tentados, de maneira a capacitar tal metodologia a identificar corretamente os cinco primeiros modos de vibração, porém, como será explicado oportunamente mais adiante, não houve sucesso devido ao *fenômeno de aglutinamento*⁷.

Em resumo, podem-se encontrar reunidos na Tabela 7, os parâmetros manualmente definidos para ambas as metodologias.

Tabela 7: Parâmetros definidos pelo usuário.

Metodologia	d_{lim}	n_m
Referência	0,01	8
Proposta	1 Hz	5

Novamente, a variante *PC* do método *SSI-DATA* foi aplicada aos históricos de resposta. Foram ajustados modelos com ordens pares de 10 a 120. O resultado pode ser visualizado por meio do diagrama de estabilização da Figura 50.

⁷ Diz-se que há o *fenômeno de aglutinamento*, nome proposto neste trabalho, quando o processo de *clusterização* agrupa, em um único *cluster*, vários modos com características dinâmicas muito diferentes, o que pode ser percebido pela alta dispersão dos pontos de um mesmo *cluster* no diagrama de estabilização ou no diagrama de amortecimento *versus* frequência.

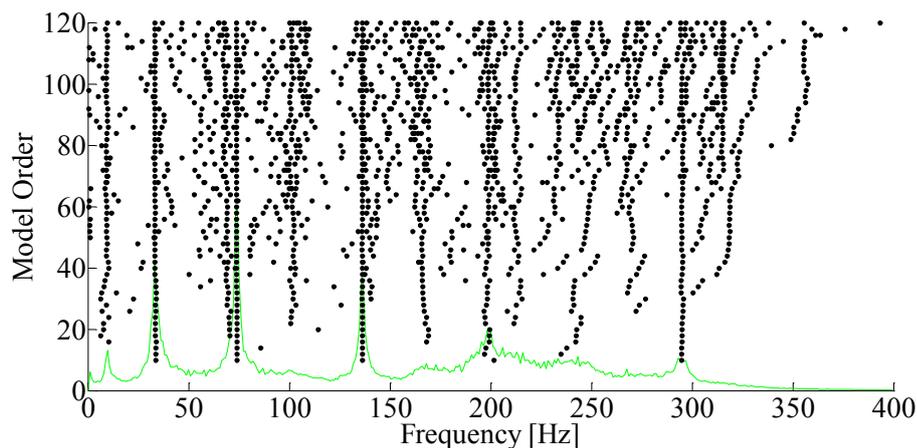


Figura 50: Diagrama de estabilização gerado pelo *SSI-DATA* (PC). Ao fundo, em verde, o espectro médio.

Antes de se partir para os resultados da análise automática dos dados contidos no diagrama de estabilização acima, podem-se tecer alguns comentários no tocante a sua qualidade. Por simples observação deste diagrama e dos espectros da Figura 49, é possível notar que existe um modo (talvez o primeiro), com frequência próxima a 10 Hz, que foi excitado com uma energia muito mais baixa que os demais. O mesmo se pode dizer do que parece ser também um modo com uma frequência próxima a 200 Hz. Este fato está diretamente ligado à verticalidade das colunas do diagrama de estabilização (Figura 50). Ao analisá-lo, nota-se que o modo com frequência próxima a 10 Hz apresenta uma dispersão grande entre modelos de diferentes ordens (parece não se estabilizar). De maneira ainda mais severa, percebe-se que a verticalidade da coluna do modo com frequência próxima a 200 Hz praticamente inexiste.

Neste contexto, ressalta-se novamente que a metodologia de identificação modal automática, tanto a de referência quanto a que foi proposta neste trabalho, recebe como dados de entrada exatamente os modos estimados pelo algoritmo de identificação modal paramétrico que, neste caso, foi o *SSI-DATA*. Consequentemente, se estas estimativas não forem suficientemente boas (diagrama de estabilização “ruim”), não há como esperar que os resultados da interpretação automática sejam surpreendentemente satisfatórios.

A seguir, descobrir-se-á qual a real capacidade das metodologias, estando sujeitas a este cenário prático, de se identificar corretamente os modos físicos (a princípio, os cinco primeiros verticais).

5.3.2 Resultados

As duas metodologias (de referência e proposta) são aplicadas aos dados das estimativas de modos representados no diagrama de estabilização da Figura 50. Os resultados podem ser conferidos, juntamente com suas análises, no decorrer desta subseção.

Primeiramente, é conveniente dar atenção ao resultado obtido pela metodologia proposta. De maneira ilustrativa, o diagrama da Figura 51 expõe de maneira geral como foi o processo de interpretação automática dos dados pelo algoritmo. Como solicitado pelo usuário, cinco modos foram identificados (colunas vermelhas), dentre os quais se encontram também os que foram excitados com uma energia mais baixa (próximos a 10 e 200 Hz). Deve-se mencionar que 1015 modos, do total de 1755 (57,83 %), foram prontamente removidos com aplicação do pré-filtro refinado ($m_{lim} = 0,9$). Conseqüentemente, conseguiu-se o aspecto muito mais limpo visível no diagrama da Figura 51, quando comparado com o inicial, mostrado na Figura 50.

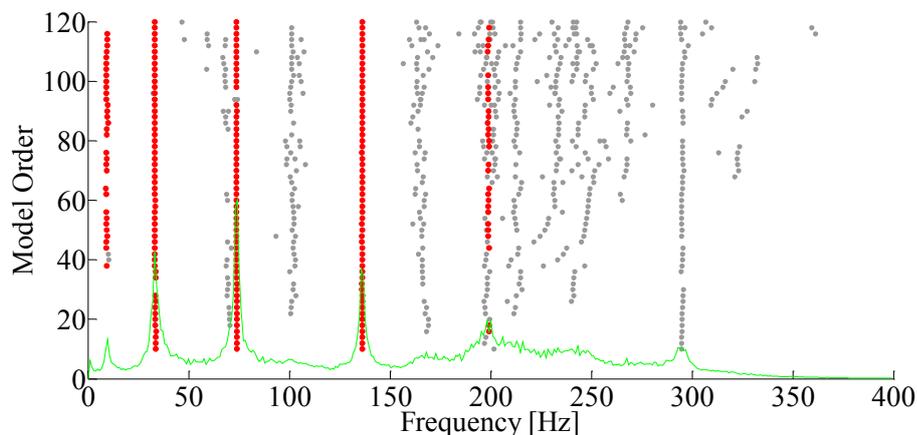


Figura 51: Diagrama de estabilização após processamento automático pela metodologia proposta. Os modos vermelhos são os modos considerados físicos pelo algoritmo. Ao fundo, em verde, o espectro médio.

O resultado completo alcançado pela metodologia proposta é a seguir colocado lado a lado com os resultados obtidos através da metodologia de referência. Em cada figura, o gráfico da esquerda corresponde à metodologia de referência, enquanto o gráfico da direita é fruto da metodologia proposta neste trabalho.

A Figura 52 evidencia em vermelho os modos considerados físicos pelos respectivos métodos. Logo se vê que algo não saiu bem com a metodologia de referência (diagrama da

esquerda), pois há uma dispersão inaceitável dos modos considerados como físicos. Este fato é comentado a seguir sob a luz da Figura 53.

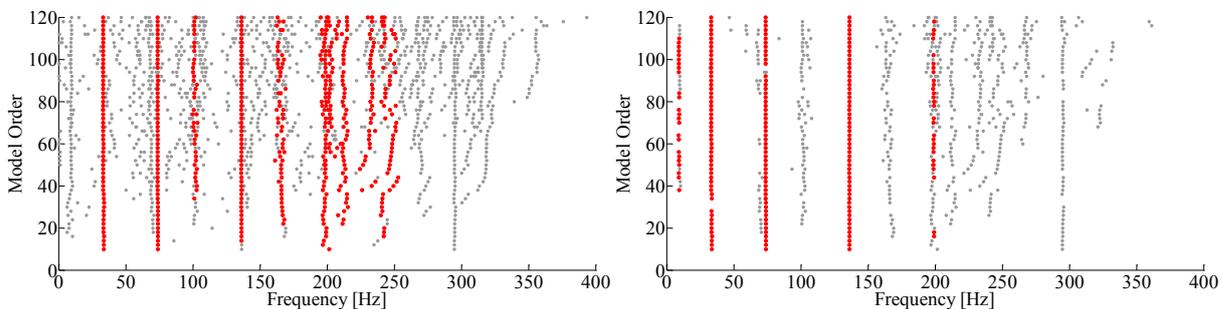


Figura 52: Diagramas de estabilização com modos físicos (vermelho) automaticamente detectados pela metodologia de referência (à esquerda) e pela metodologia original deste trabalho (à direita).

O que ocorreu com a identificação, por parte da metodologia de referência, foi o *fenômeno de aglutinamento* de modos com frequências mais altas. Isto acontece quando o limite de distância d_{lim} , o qual é usado na poda da árvore hierárquica, apresenta um valor mais elevado do que seria o “ideal”⁸. Quanto maior d_{lim} , menor será o número de *clusters* formados e, conseqüentemente, maior será o número de elementos por *cluster*. Na Figura 53 cada haste corresponde a um *cluster* (modo). O eixo horizontal posiciona a representação do *cluster* de acordo com sua frequência média. A altura da haste indica o seu número de elementos. As hastes com extremidade vermelha representam os n_m modos (*clusters*) considerados físicos de maneira automática

Ainda se tratando da metodologia de referência, observando as Figuras 52 e 53, se vê que mais de 150 elementos (modos) foram agrupados erroneamente em um *cluster* cuja frequência média está próxima de 200 Hz. Portanto, conclui-se que o valor de 0,01 assumido para d_{lim} foi alto demais. Alguém neste ponto poderia indagar: não bastaria então que apenas se abaixasse o valor de d_{lim} ? A resposta é não, pelos motivos a serem apresentados ao final desta subseção.

Em contrapartida, é evidente, pelos gráficos (à direita) das mesmas Figuras 52 e 53, que este fenômeno indesejado não ocorre com a metodologia proposta.

⁸ Na seção 3.3 deste trabalho pode ser encontrado um exemplo simples de *clusterização* que ilustra perfeitamente o problema envolvido na definição deste valor limite para poda da árvore hierárquica.

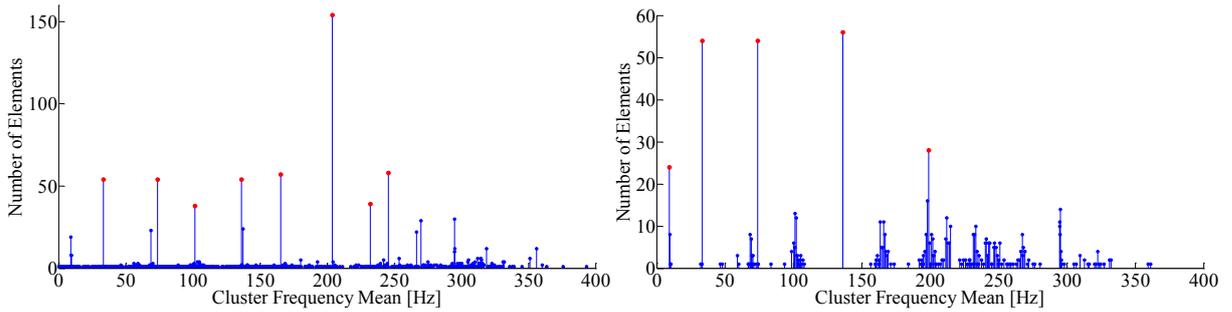


Figura 53: Número de elementos (modos estimados) por *cluster* formado. Resultados da metodologia de referência (à esquerda) e da metodologia proposta (à direita).

Ao se analisar os dados contidos na Figura 54 (gráfico à esquerda), fica ainda mais nítido que a metodologia de referência reuniu em um mesmo *cluster* (cor amarela) modos com frequências naturais extremamente diferentes. Isto também ocorre, visivelmente, com todos os outros *clusters* com frequências médias maiores que 150 Hz. Por outro lado, a análise do gráfico à direita (metodologia proposta), permite concluir que a dispersão em termos de frequência não é alta, porém, o primeiro *cluster* (azul) apresenta um desvio-padrão altíssimo em termos de taxa de amortecimento, indicando que este modo não foi muito bem identificado em termos deste parâmetro.

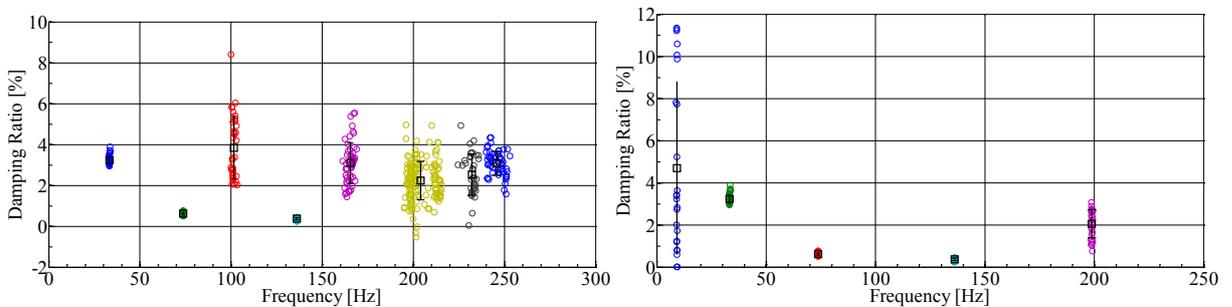


Figura 54: Gráfico de dispersão dos modos, considerados físicos, segundo suas respectivas taxas de amortecimento e frequências naturais. O quadrado e barras pretas marcam, respectivamente, a taxa de amortecimento média do *cluster* e o seu desvio-padrão. Resultados da metodologia de referência (à esquerda) e da metodologia proposta (à direita).

As Figuras 55 e 56 trazem o resumo dos resultados da identificação modal automática realizada pelas duas metodologias. Nelas é possível verificar todos os três parâmetros dinâmicos de cada modo identificado. A linha vermelha representa a forma modal média do *cluster* (média das linhas cinzas). Os textos adicionais explicitam as frequências naturais

médias e as taxas de amortecimento médias de cada *cluster*, juntamente com seus respectivos desvios-padrão.

Com base nessas duas figuras, pode-se afirmar o seguinte. A metodologia proposta (Figura 56) foi capaz de identificar corretamente os cinco primeiros modos verticais da viga, embora o primeiro modo (9,16 Hz) tenha tido uma identificação um tanto quanto imprecisa com relação à taxa de amortecimento. Contudo, mesmo com a baixa energia com a qual este modo possa ter sido excitado, a identificação em termos de frequência natural foi suficientemente precisa (desvio-padrão de 0,14 Hz). O quinto modo (198,87 Hz), da mesma maneira, apesar de ter sido pouco medido no sinal, teve sua identificação bem sucedida.

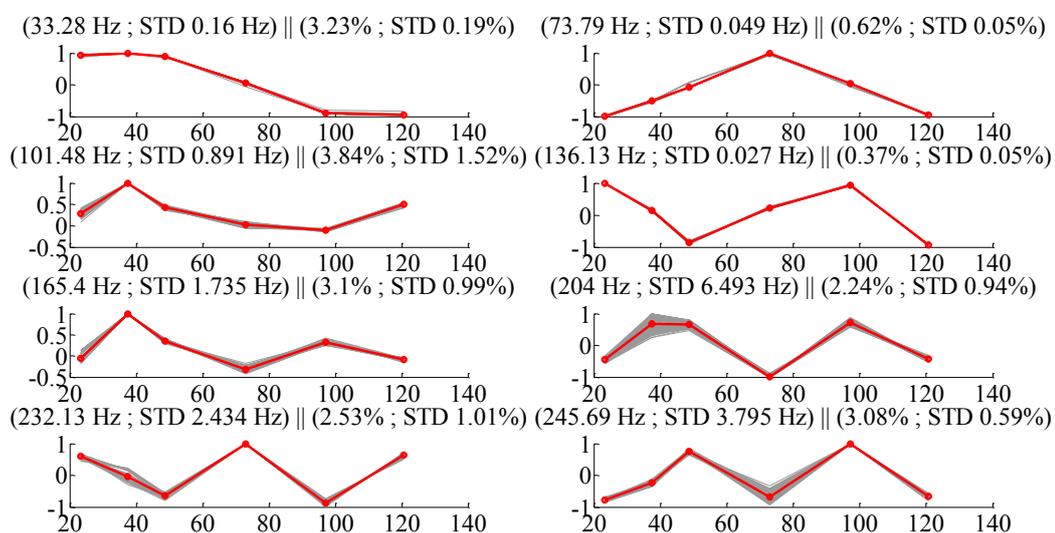


Figura 55: Representação das formas de vibração modais obtidas pela metodologia de referência.

Diferentemente, a metodologia de referência (Figura 55) não teve a capacidade de identificar o primeiro modo e nem tampouco detectou, a contento, o quinto. Ressalta-se que, para esta última metodologia, foram solicitados oito modos justamente para evitar que se “perdesse” algum que fosse físico, mas, ainda sim, isto aconteceu.

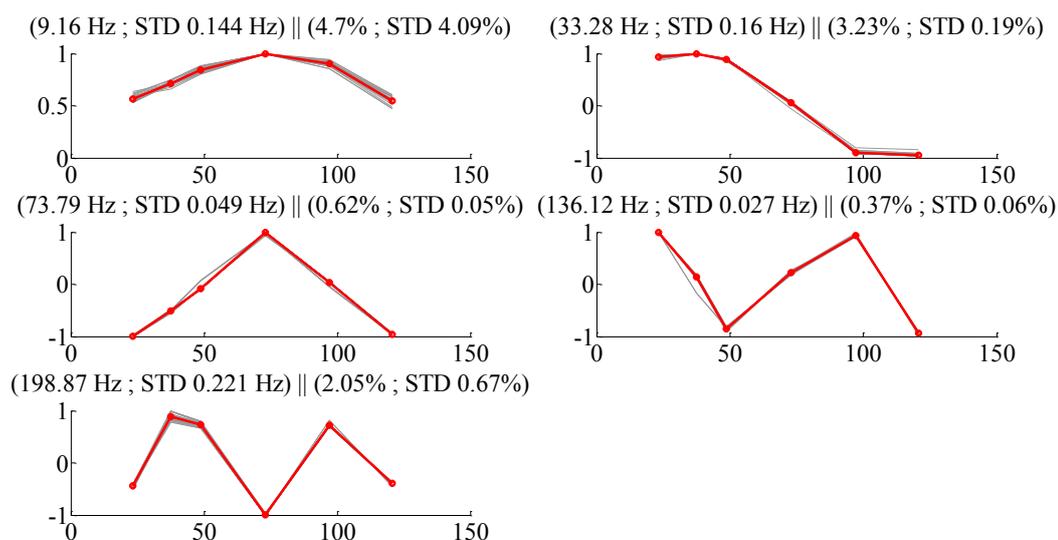


Figura 56: Representação das formas de vibração modais obtidas pela metodologia proposta.

A Tabela 8 reúne os resultados da identificação pelas duas metodologias. Salienta-se, em vermelho, os parâmetros identificados que tiveram um alto desvio-padrão *intra-cluster*. A seguir, será apontada a causa da falha do método de referência em tentar identificar o primeiro modo (9 Hz). Ao mesmo tempo, o motivo do alto desvio-padrão das frequências do quinto modo (200 Hz) será justificado através do conceito de *aglutinamento*.

Tabela 8: Resultado da identificação automática dos cinco modos verticais pelos dois métodos.

Modo	Metodologia de Referência		Metodologia Proposta	
	f (Hz) / σ (Hz)	ζ (%) / σ (%)	f (Hz) / σ (Hz)	ζ (%) / σ (%)
1	-	-	9,16 / 0,144	4,70 / 4,09
2	33,28 / 0,160	3,23 / 0,19	33,28 / 0,160	3,23 / 0,19
3	73,79 / 0,049	0,62 / 0,05	73,79 / 0,049	0,62 / 0,05
4	136,13 / 0,027	0,37 / 0,05	136,12 / 0,027	0,37 / 0,06
5	204,00 / 6,493	2,24 / 0,94	198,87 / 0,221	2,05 / 0,67

Vem-se, portanto, através das figuras seguintes, explicar as causas do *fenômeno de aglutinamento* na metodologia de referência. Busca-se responder a pergunta feita em algum parágrafo anterior nesta subseção: “não basta que se diminua o valor de d_{lim} para que se acabe com o *fenômeno de aglutinamento* nas frequências mais altas?”. Para responder a essa pergunta, isto é exatamente o que será feito. Serão adotados valores mais baixos que 0,01 para

verificar o que ocorre. Sendo assim, foram escolhidos, arbitrariamente, três valores: 0,001, 0,002 e 0,005.

Analisa-se primeiro o resultado para $d_{lim} = 0,005$, o qual pode ser visualizado na Figura 57. Percebe-se que, mesmo diminuindo este limite de distância pela metade (de 0,01 para 0,005), a metodologia de referência continua agrupando modos com frequências altas de maneira deliberadamente permissiva. Isto causa o aparecimento de *clusters* com muitos elementos, o que pode ser visto no gráfico de hastes. Neste gráfico, pode-se perceber que o *cluster* com frequência média de aproximadamente 200 Hz, aglutinou mais de oitenta modos, muitos dos quais apresentam frequências consideravelmente diferentes entre si. Ao mesmo tempo, observa-se que o *cluster*, que representaria o primeiro modo vertical (9 Hz), não conseguiu agrupar nem mais de 20 elementos, o que levou a sua exclusão do grupo dos n_m primeiros *clusters* com mais objetos (hastes com cabeça vermelha).

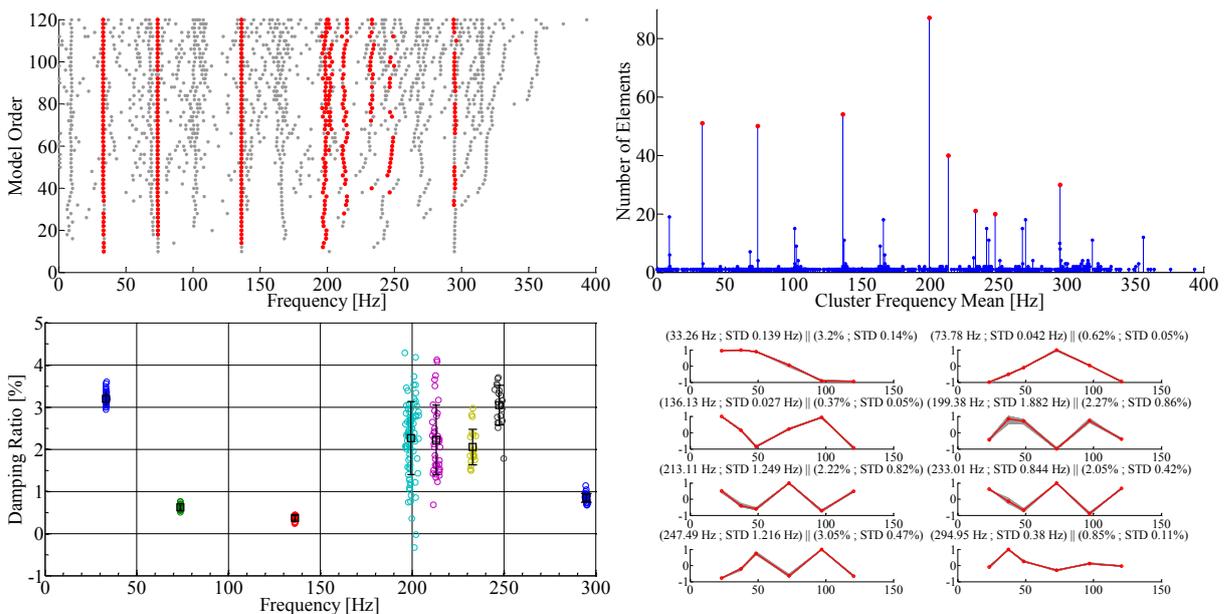


Figura 57: Resultado da identificação automática pela metodologia de referência ($n_m = 8$ e $d_{lim} = 0,005$).

Uma vez que o fenômeno de *aglutinamento* (nas frequências mais altas) persistiu (Figura 57), proceder-se-á a redução do valor da distância limite para 0,002. Para este caso, a Figura 58 mostra os resultados. Através dela é possível constatar que este fenômeno, enfim, não foi mais observado. No entanto, o primeiro modo vertical tornou-se ainda mais “invisível” para a metodologia, pois seu *cluster* agrupou, desta vez, menos que cinco elementos (ver gráfico de hastes). Isto é causado por um fenômeno indesejado, contrário ao *aglutinamento*, que começa a ocorrer: o fenômeno de *splitting* (ou divisão) mencionado no

capítulo 4. Nota-se que o modo com frequência natural de aproximadamente 294 Hz foi dividido em outros dois quase idênticos. Isto acontece quando o valor de d_{lim} é pequeno demais.

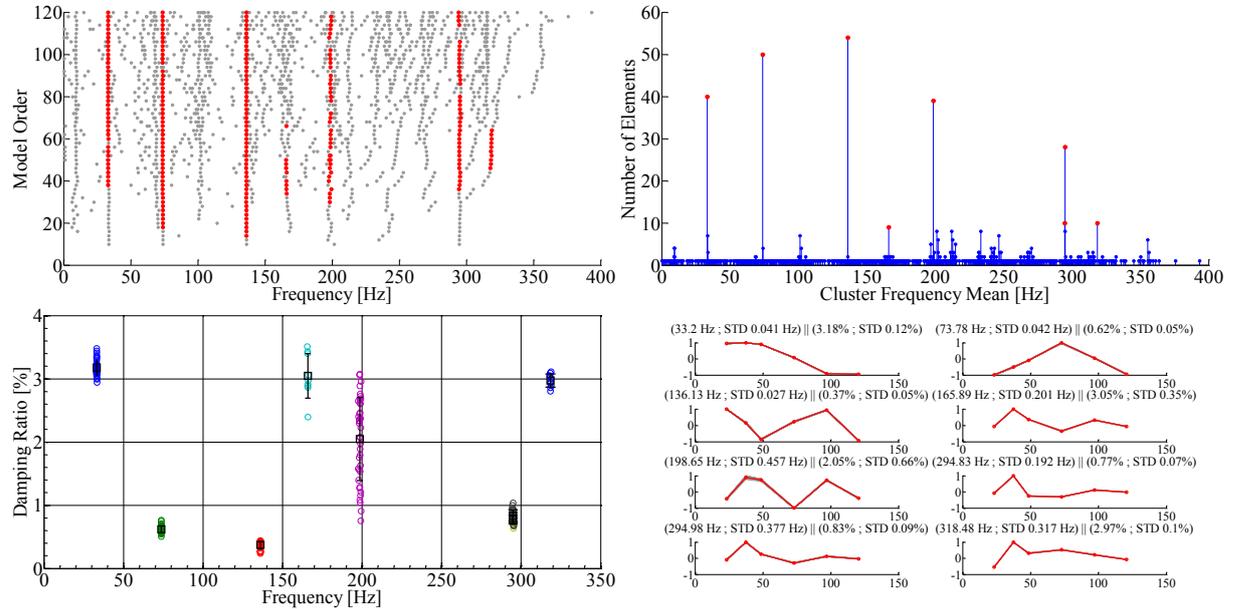


Figura 58: Resultado da identificação automática pela metodologia de referência ($n_m = 8$ e $d_{lim} = 0,002$).

Para finalizar, o valor de d_{lim} será reduzido para 0,001. A Figura 59 traz os resultados da metodologia de referência utilizando este limite. Novamente, o fenômeno de *aglutinamento* não ocorre, mas, em contrapartida, o fenômeno de *splitting* torna-se ainda mais evidente. Observando o gráfico de dispersão de frequência *versus* amortecimento desta figura, constata-se que o mesmo modo físico com frequência próxima a 200 Hz foi dividido em dois *clusters* diferentes. O mesmo acontece com o modo de frequência próxima a 300 Hz. Adicionalmente, olhando o gráfico de hastes, nota-se que o primeiro modo vertical não passou nem perto de ser identificado.

Em todo caso, o que se observa é que os *clusters* contendo modos com frequências mais altas estão mais sujeitos ao *aglutinamento*. Para se eliminar este efeito, foi realizada a diminuição do limite de distância até um valor que fosse adequado para este nível de frequência mais alta. Ao mesmo tempo, ao se fazer isto, este valor limite torna-se pequeno demais para agrupar corretamente os modos com frequências mais baixas, causando o fenômeno de *splitting*, cuja consequência é a criação de diversos *clusters*, com poucos elementos cada um, abrigando separadamente, modos que estariam representando o mesmíssimo modo físico. Isto pode ser notado nos gráficos de hastes por meio da constatação

da existência de diversas hastes menores situadas em frequências quase iguais. O efeito disso é a diminuição da chance de um destes *clusters* serem classificados entre os n_m *clusters* com mais elementos, fato ocorrido com o primeiro modo vertical (9 Hz), cuja identificação pela metodologia de referência foi impossível. Este parágrafo pode ser balizado pela análise dos gráficos de hastes das Figuras 53, 57, 58 e 59.

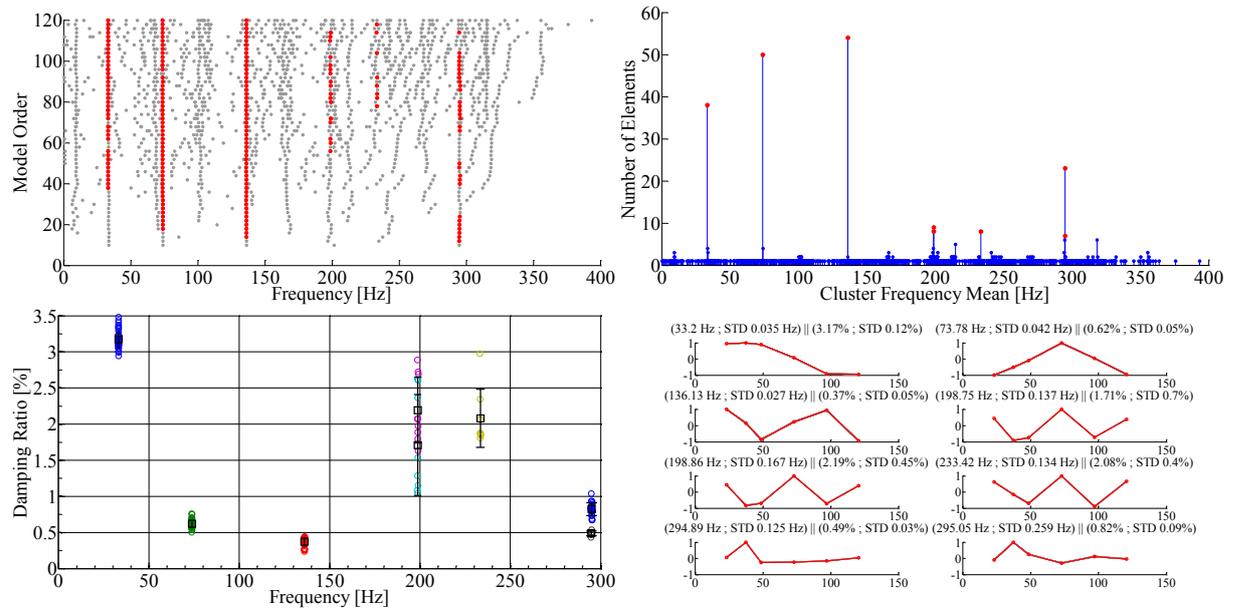


Figura 59: Resultado da identificação automática pela metodologia de referência ($n_m = 8$ e $d_{lim} = 0,001$).

De maneira sumária, a Tabela 9 traz os parâmetros dinâmicos de frequência natural e taxa de amortecimento, oriundos da identificação automática por parte da metodologia de referência, considerando os diferentes valores de d_{lim} . Observa-se que, apesar das tentativas de se fazer esta metodologia identificar o primeiro modo vertical, não houve sucesso. Além disso, pode ser notado que somente com $d_{lim} = 0,002$ foi possível identificar os quatro modos de maneira satisfatória, isto é, sem os fenômenos indesejáveis de *aglutinamento* ou *splitting*. Quando este limite foi maior que 0,002 houve considerável presença de *aglutinamento* e quando foi menor que 0,002 houve o fenômeno de *splitting* nos modos identificados. Evidentemente, esta sensibilidade do método não é desejável.

Tabela 9: Resumo dos resultados pela metodologia de referência para diversos valores de d_{lim} .

Modo	d_{lim}							
	0,01		0,005		0,002		0,001	
	f / σ (Hz)	ξ / σ (%)	f / σ (Hz)	ξ / σ (%)	f / σ (Hz)	ξ / σ (%)	f / σ (Hz)	ξ / σ (%)
1	-	-	-	-	-	-	-	-
2	33,28 / 0,160	3,23 / 0,19	33,26 / 0,139	3,20 / 0,14	33,20 / 0,041	3,18 / 0,12	33,20 / 0,035	3,17 / 0,12
3	73,79 / 0,049	0,62 / 0,05	73,78 / 0,042	0,62 / 0,05	73,78 / 0,042	0,62 / 0,05	73,78 / 0,042	0,62 / 0,05
4	136,13 / 0,027	0,37 / 0,05	136,13 / 0,027	0,37 / 0,05	136,13 / 0,027	0,37 / 0,05	136,13 / 0,027	0,37 / 0,05
5	204,00 / 6,493	2,24 / 0,94	199,38 / 1,882	2,27 / 0,86	198,65 / 0,457	2,05 / 0,66	198,75* / 0,137	1,71 / 0,70

* modo identificado com fenômeno de *splitting*. Ver Figura 59.

De maneira mais ilustrativa, a Figura 60 mostra como o desvio-padrão de frequências naturais variou, para cada modo, em função da escolha do valor de d_{lim} . Como foi mencionado nos parágrafos anteriores, 0,01 foi considerado um valor muito elevado para as frequências altas (quinto modo), o que ocasionou o *fenômeno de aglutinamento*. Na medida em que este limite é diminuído, tal problema vai desaparecendo e, ao mesmo tempo, a presença de *splitting* vai se tornando mais intensa.

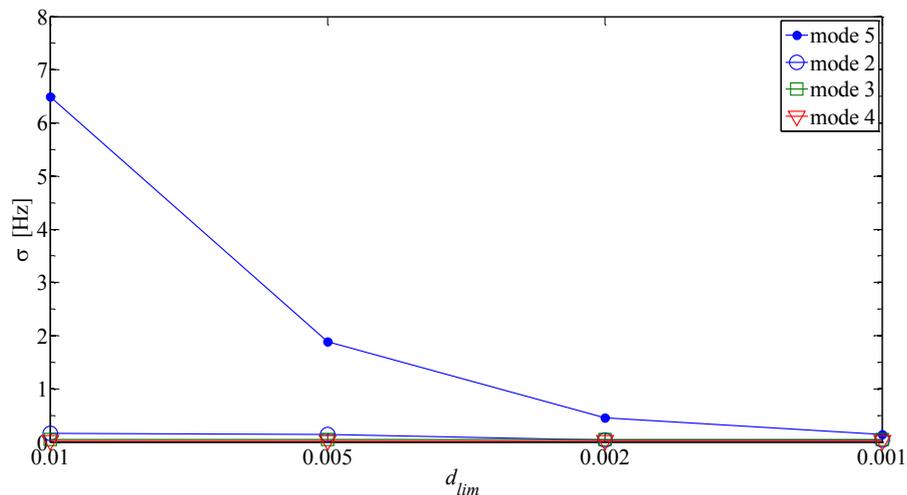


Figura 60: Desvio-padrão de frequências naturais dentro de cada *cluster* em função de d_{lim} . Metodologia de referência.

Como se vê na Figura 60 e nos gráficos de hastes da metodologia de referência, o *aglutinamento* parece ser função do nível de frequência, pois este fenômeno ocorre com mais intensidade nas frequências mais altas.

Ora, esta “diferenciação”, por parte do algoritmo, no tratamento dos modos com frequências mais altas pode ser diretamente explicada pela expressão da métrica usada, a qual será reescrita a seguir na equação (5.3).

$$d_{i,j} = \left| \frac{f_i - f_j}{f_j} \right| + (1 - \text{MAC}_{i,j}) \quad (5.3)$$

Durante as pesquisas para elaboração da metodologia proposta neste trabalho, buscando inovar com novos conceitos e visando melhorar o que já existe, foi percebido que a primeira parcela da métrica da equação (5.3) é inadequada para a medição de distâncias entre os modos no processo de *clusterização*. Foram detectados dois problemas com tal parcela. O primeiro é que, através desta razão, cria-se a possibilidade para que $d_{i,j} \neq d_{j,i}$, o que geraria uma matriz de dissimilaridade assimétrica. O segundo é que, uma vez que se trata de uma diferença relativa (adimensional) de frequências, o mesmo valor de distância pode significar um valor maior ou menor em termos absolutos (Hz) dependendo do nível de frequências (baixas ou mais altas). Isto faz com que o algoritmo trate de maneira diferente, modos com frequências diferentes.

Para explicar melhor esse fato, considere, por exemplo, quatro modos hipotéticos cujas respectivas frequências naturais são $f_1 = 9$ Hz, $f_2 = 10$ Hz, $f_3 = 55$ Hz e $f_4 = 56$ Hz. Adicionalmente, assume-se que $\text{MAC}_{1,2} = \text{MAC}_{3,4} = 0,9$. Com estas informações e com a equação (5.3), podem-se calcular as distâncias $d_{1,2}$ e $d_{3,4}$:

$$d_{1,2} = \left| \frac{9-10}{10} \right| + (1 - \text{MAC}_{1,2}) = 0,10 + (1 - 0,9) = 0,200 \quad (5.4)$$

$$d_{3,4} = \left| \frac{55-56}{56} \right| + (1 - \text{MAC}_{3,4}) \cong 0,0179 + (1 - 0,9) \cong 0,118 \quad (5.5)$$

As equações (5.4) e (5.5) mostram que a distância calculada entre os modos de frequências mais altas (f_3 e f_4) é quase metade do valor (0,118/0,200) da distância calculada entre os modos de frequências mais baixas (f_1 e f_2). Observa-se, porém, que as diferenças absolutas de frequências são exatamente as mesmas nos dois cálculos (10 Hz – 9 Hz = 56 Hz –

55 Hz = 1 Hz). Adicionalmente, a diferença entre as formas modais são também as mesmas para os dois cálculos ($MAC_{1,2}=MAC_{3,4}=0,9$). Portanto, considerando frequências e formas de vibração, os dois cálculos, intuitivamente, deveriam fornecer os mesmos valores de distância. Isso não acontece com essa métrica. Esta é, precisamente, a causa do *fenômeno de aglutinamento* no processo de *clusterização* dos modos com frequências mais altas. Por serem considerados como estando mais próximos (distância de 0,118), os modos com frequências mais altas (f_3 e f_4) serão agrupados mais facilmente do que o par de modos com frequências baixas (f_1 e f_2).

Todo este problema foi solucionado, de maneira simples, com a criação da métrica inédita apresentada neste trabalho, a qual se encontra incorporada nas rotinas da metodologia proposta. Sua expressão, mostrada na equação (4.2), é reescrita a seguir:

$$d_{i,j} = |f_i - f_j| + (1 - MAC_{i,j})c \quad (5.6)$$

Nesta métrica, de maneira contrária à métrica da equação (5.3), a distância entre dois modos é calculada segundo uma diferença absoluta de frequências. Adicionalmente, um fator ponderador c é aplicado à parcela relativa à forma modal. Este fator, como já exposto no capítulo 4, foi estabelecido com o valor de 5 Hz. Portanto, comparativamente, utilizando os mesmos quatro modos hipotéticos, calculam-se as distâncias $d_{1,2}$ e $d_{3,4}$ com o uso desta métrica:

$$d_{1,2} = |9 - 10| \text{ Hz} + (1 - 0,9)5 \text{ Hz} = 1 \text{ Hz} + 0,5 \text{ Hz} = 1,5 \text{ Hz} \quad (5.7)$$

$$d_{3,4} = |55 - 56| \text{ Hz} + (1 - 0,9)5 \text{ Hz} = 1 \text{ Hz} + 0,5 \text{ Hz} = 1,5 \text{ Hz} \quad (5.8)$$

Exatamente como se intencionou, com a métrica proposta, foram obtidos os mesmos valores para as distâncias entre os modos de frequências baixas (f_1 e f_2) e os modos de frequências altas (f_3 e f_4). Isto significa uniformidade no cálculo de distâncias, independentemente do nível de frequência.

Além disso, conseguiu-se também, com esta inovação, que a sensibilidade do processo, com relação ao valor da distância limite, fosse consideravelmente menor. Para ilustrar esta verdade, a Figura 61 mostra como o desvio-padrão de frequências do quinto modo (próximo a 200 Hz) varia com a adoção de diversos valores de d_{lim} . São perfilados os resultados da metodologia de referência (azul) e da metodologia proposta (vermelho).

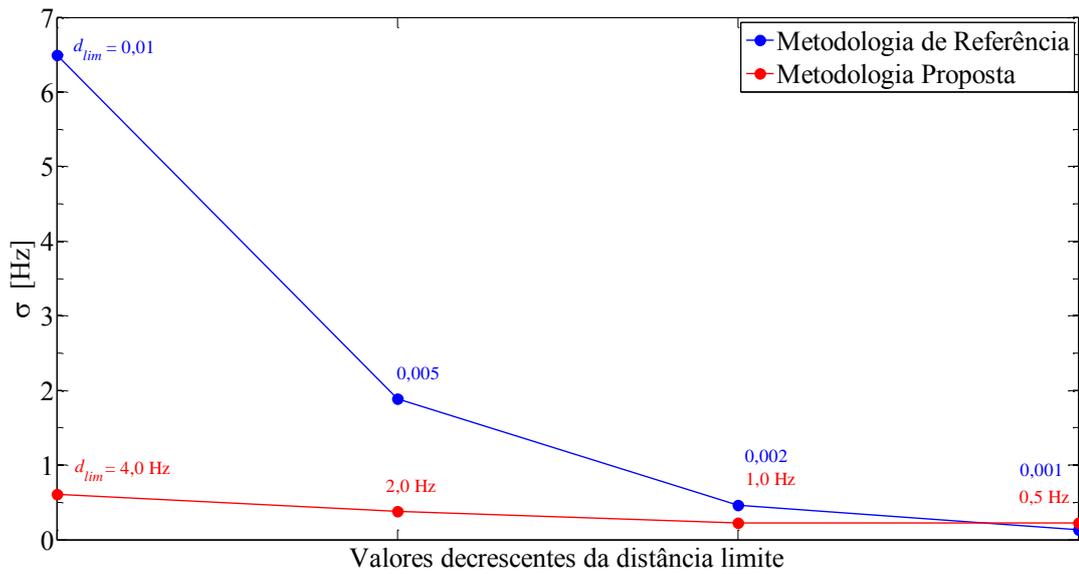


Figura 61: Desvio-padrão (intra-cluster) de frequências do quinto modo identificado para diversos valores de d_{lim} .

De maneira a finalizar esta subseção, foram gerados, de forma complementar, os resultados da metodologia proposta para outros valores de d_{lim} (Tabela 10). De maneira mais conservadora, foi adotado $n_m = 9$ nestes cálculos.

Tabela 10: Resultados da metodologia proposta para diversos valores de d_{lim} .

Modo	d_{lim}							
	4,0 Hz		2,0 Hz		1,0 Hz		0,5 Hz	
	f / σ (Hz)	ζ / σ (%)	f / σ (Hz)	ζ / σ (%)	f / σ (Hz)	ζ / σ (%)	f / σ (Hz)	ζ / σ (%)
1	9,28 /	4,89 /	9,28 /	4,89 /	9,16 /	4,70 /	9,18 /	4,56 /
	0,257	3,79	0,257	3,79	0,144	4,09	0,118	4,13
2	33,29 /	3,28 /	33,28 /	3,23 /	33,28 /	3,23 /	33,20 /	3,17 /
	0,183	0,31	0,160	0,19	0,160	0,19	0,044	0,12
3	73,79 /	0,62 /	73,79 /	0,62 /	73,79 /	0,62 /	73,79 /	0,62 /
	0,049	0,05	0,049	0,05	0,049	0,05	0,049	0,05
4	136,12 /	0,37 /	136,12 /	0,37 /	136,12 /	0,37 /	136,12 /	0,37 /
	0,027	0,06	0,027	0,06	0,027	0,06	0,027	0,06
5	198,67 /	2,10 /	199,00 /	2,04 /	198,87 /	2,05 /	198,87 /	2,05 /
	0,605	0,72	0,375	0,74	0,221	0,67	0,221	0,67

Tendo findado as análises referentes a este experimento, pode-se concluir que a metodologia proposta não só atendeu às expectativas previstas, como também de fato

apresentou, consideravelmente, maior robustez na identificação automática, quando comparada com a metodologia de referência.

5.4 Aplicação Prática – Ponte PI-57

5.4.1 Introdução

A PI-57 é uma ponte de *deck* duplo localizada próximo a cidade de Senlis, na França, atravessando o rio Oise e dando suporte à A1 *motorway* – autoestrada que conecta Paris a Lille (Figura 62).



Figura 62: Ponte PI-57 atravessando o rio Oise, França.

Esta ponte, uma obra de arte com 116,5 m de comprimento, foi construída em concreto protendido pós-tensionado no ano de 1965. Ela consiste de três vãos contínuos de 18,00 m, 80,50 m e 18,00 m, como se pode ver pelo corte longitudinal da Figura 63. Os dois vãos laterais realizam o papel de contrapeso.

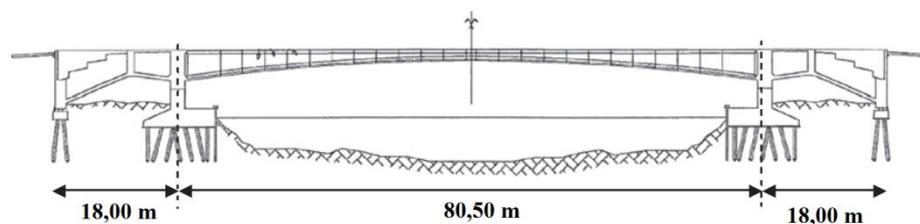


Figura 63: Corte longitudinal da ponte.

Os testes dinâmicos (Cury *et al.*, 2012) foram efetuados sob excitação ambiente do tráfego de veículos transeuntes. Dezesesseis acelerômetros⁹ verticais foram instalados no *deck* da ponte de acordo com o exposto na Figura 64.

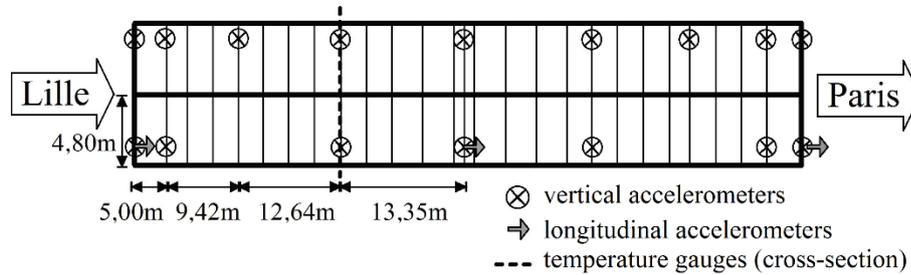


Figura 64: Disposição, em planta, dos acelerômetros no *deck* da ponte monitorada.

Para que fossem gravados os históricos de aceleração, um controlador programável de dados Gantner E-PAC DL foi usado e conectado a um *flash drive USB* de 8 GB. Os dados foram transferidos por um modem TCP/IP. As acelerações foram filtradas para o intervalo de 0 a 30 Hz e a taxa de amostragem foi estabelecida em 250 Hz. A cada 3h, 5 minutos de sinal eram gravados.

Uma vez que, neste trabalho, não se está interessado no acompanhamento dos parâmetros modais (*modal tracking*), apenas uma amostra de 5 minutos foi utilizada para se testar as metodologias. Desta amostra, somente dois minutos foram recolhidos e repassados aos algoritmos de identificação. A Figura 65 expõe o trecho do sinal a ser processado.

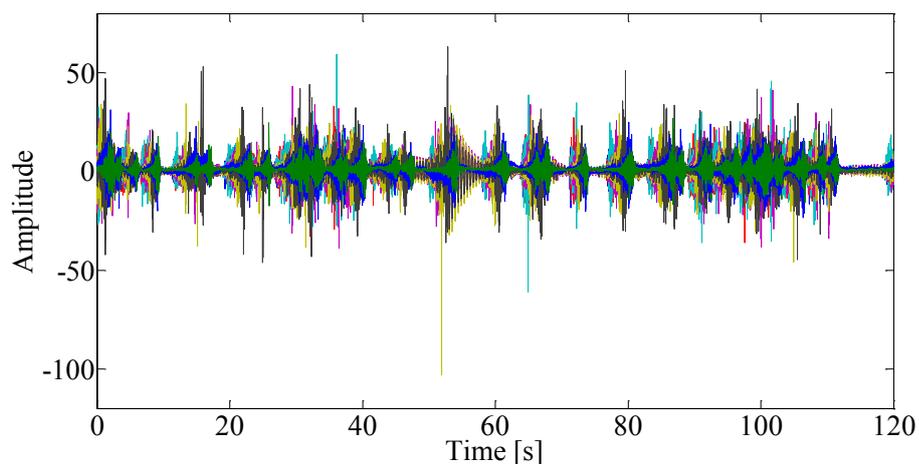


Figura 65: Histórico de acelerações dos 16 canais (cores diferentes).

⁹ Bruel & Kjaer 4507B-005 com sensibilidade de 1 V/g, frequência de trabalho de 0,4 a 6000 Hz, máximo nível operacional de aceleração de $\pm 5g$, temperatura de trabalho de -54 a 100°C.

A Figura 66 mostra o sinal dos acelerômetros em detalhe. A inspeção visual deste histórico sugere a existência de um nível considerável de ruído.

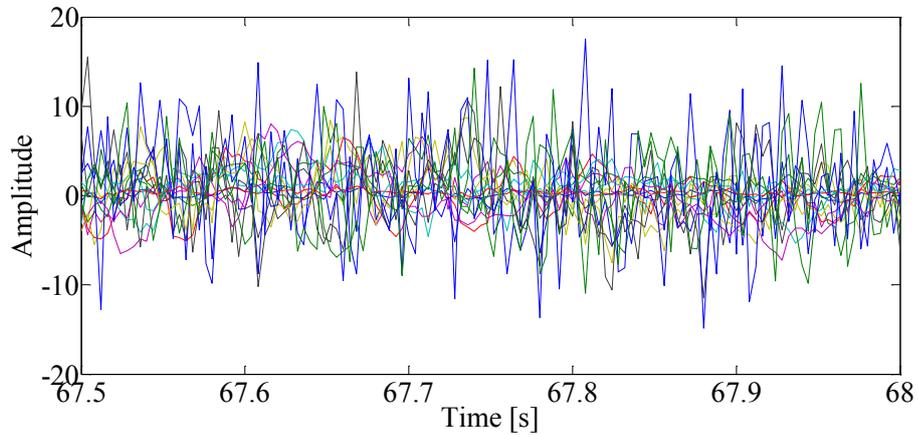


Figura 66: Trecho de meio segundo do sinal processado. Histórico dos dezesseis canais (cores diferentes).

Da mesma forma como realizado no ensaio da seção anterior, calculou-se o espectro de frequências do sinal. A *FFT* foi realizada sobre os dezesseis históricos para fornecer informações pertinentes para as análises e comparações a serem feitas adiante no texto. A Figura 67 ilustra o conteúdo de frequência destes sinais pela exposição dos espectros de dois dos históricos de aceleração. Pode-se notar que, de fato, há um nível considerável de ruído branco.

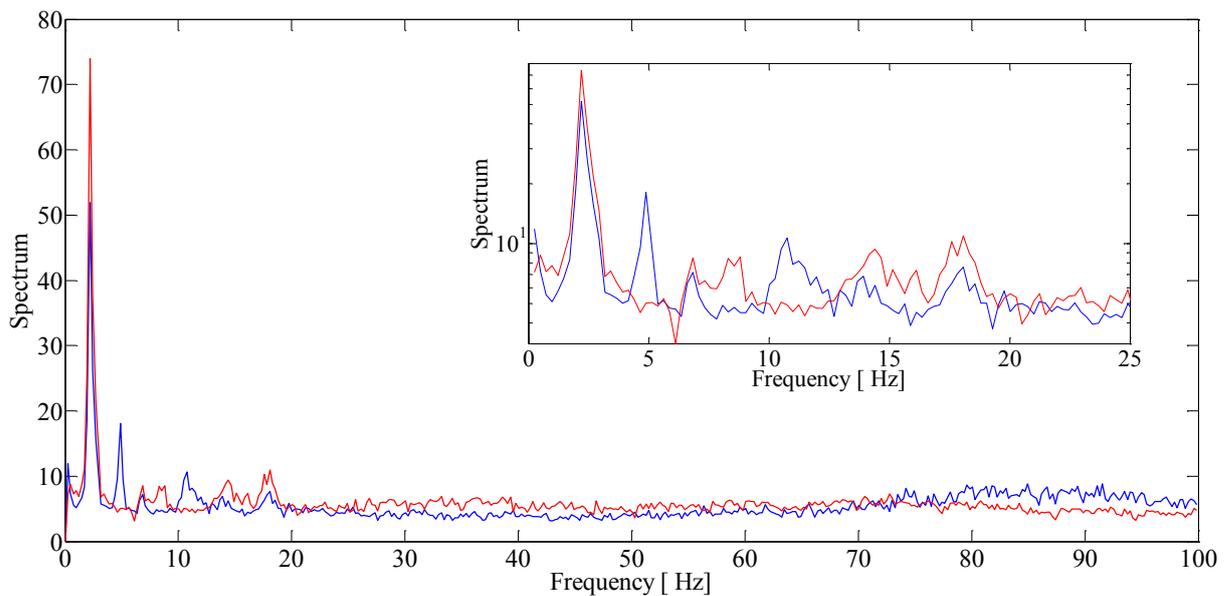


Figura 67: Espectros de frequências de dois canais analisados. Em detalhe uma ampliação com escala *log*.

Cabe mencionar novamente que o cálculo dos espectros não é obrigatório para a identificação modal automática por parte das rotinas. Aqui, estes gráficos servem apenas como referência adicional para balizar considerações, comparações e comentários oportunos.

Como vem sendo feito nos outros ensaios, os históricos foram processados pelo *SSI-DATA (PC)*, o qual forneceu, para este caso, estimativas de modos para modelos de ordem 10 a 80. A figura 68 mostra o diagrama de estabilização oriundo deste ajuste paramétrico. No total foram estimados 1470 modos em variadas ordens de modelo.

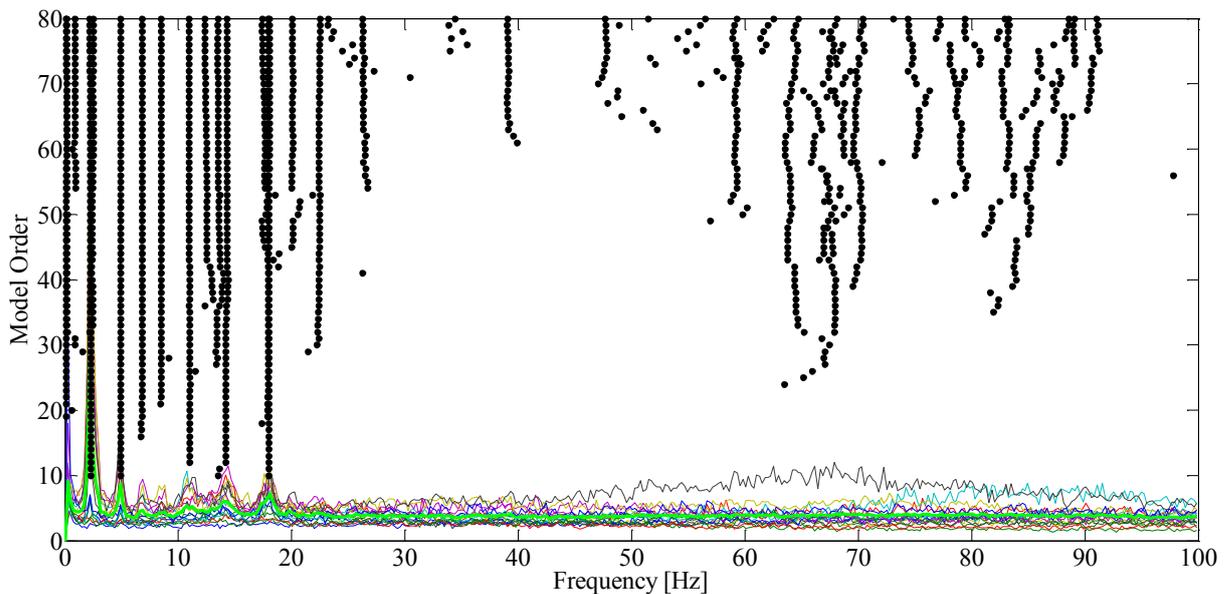


Figura 68: Diagrama de estabilização fornecido pelo *SSI-DATA (PC)*. As linhas na parte inferior correspondem aos 16 espectros calculados de cada canal. A linha verde representa a média destes espectros.

Para que se tenha uma melhor visualização da parte relevante do diagrama (trecho inicial com frequência até 30 Hz), efetuou-se uma ampliação do mesmo, a qual pode ser conferida por meio da Figura 69.

Com o auxílio deste gráfico ficaram estabelecidos os parâmetros de entrada das metodologias (de referência e proposta), como mostra a Tabela 11. Foram solicitados aos algoritmos de automatização que identificassem os seis modos mais relevantes ($n_m = 6$).

A metodologia de referência, por sua maior sensibilidade, provocou a necessidade de se testar alguns valores de d_{lim} para que se descobrisse um que fosse adequado. Este valor, após três tentativas, ficou estabelecido em 0,05.

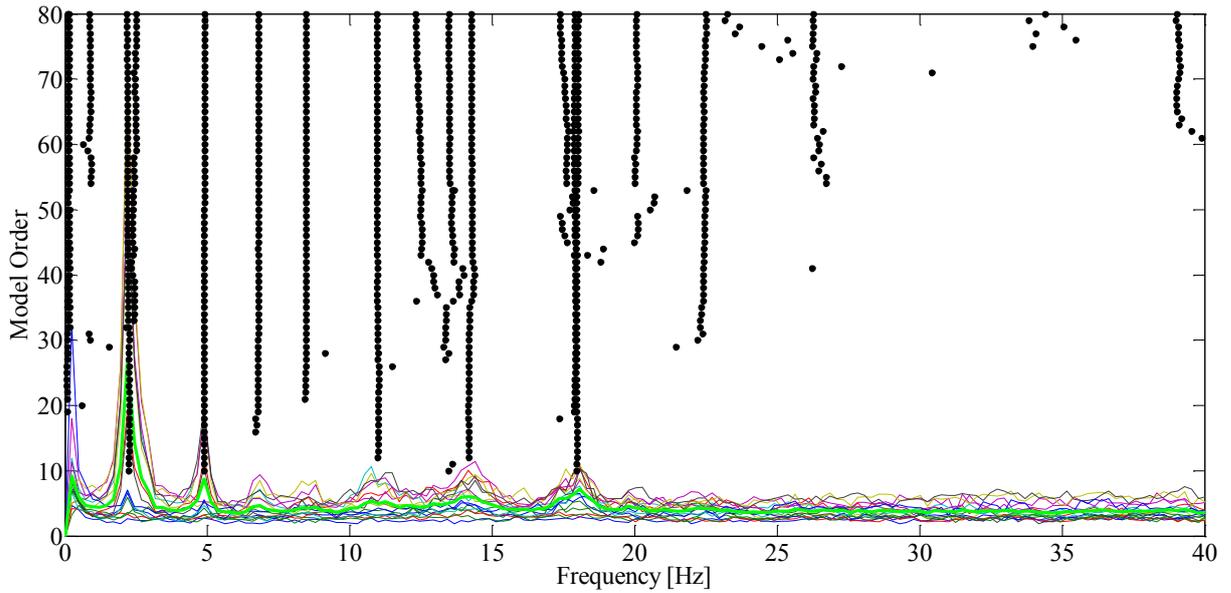


Figura 69: Ampliação do diagrama de estabilização fornecido pelo *SSI-DATA (PC)*. As linhas na parte inferior correspondem aos 16 espectros dos canais. A linha verde grossa representa a média destes espectros.

Diferentemente, a metodologia proposta, por sua maior robustez, permitiu que não houvesse qualquer mudança no valor deste limite, isto é, foi assumido o mesmo valor usado em todas as aplicações mostradas até então neste trabalho: 1 Hz. Esta menor sensibilidade traz, certamente, um maior conforto ao usuário.

Tabela 11: Parâmetros definidos pelo usuário.

Metodologia	d_{lim}	n_m
Referência	0,05	6
Proposta	1 Hz	6

5.4.2 Resultados

As duas metodologias receberam os dados dos 1470 modos estimados e realizaram a sua interpretação automática para identificação dos seis modos físicos solicitados. Busca-se, com esta aplicação, evidenciar novamente o caráter eficiente da metodologia proposta. Por isso, para que se tenha alguma base, comparações entre as duas abordagens serão feitas ao longo desta seção. Por conveniência, apenas os modos com frequência natural menor que 40 Hz serão tratados pelas rotinas.

Primeiramente, alguma atenção merece ser dada ao resultado obtido pela metodologia proposta. Seu pré-filtro refinado ($m_{lim} = 0,8$) removeu exatos 1041 modos (considerados como

certamente espúrios), o que corresponde a 70,82% do total inicial. Esta limpeza fica evidente ao se analisar o diagrama de estabilização resultante na Figura 70. É nítida a presença de exatas seis colunas, as quais foram consideradas, automaticamente, como sendo modos físicos. O espectro médio, representado pela linha verde, mostra coerência com o diagrama.

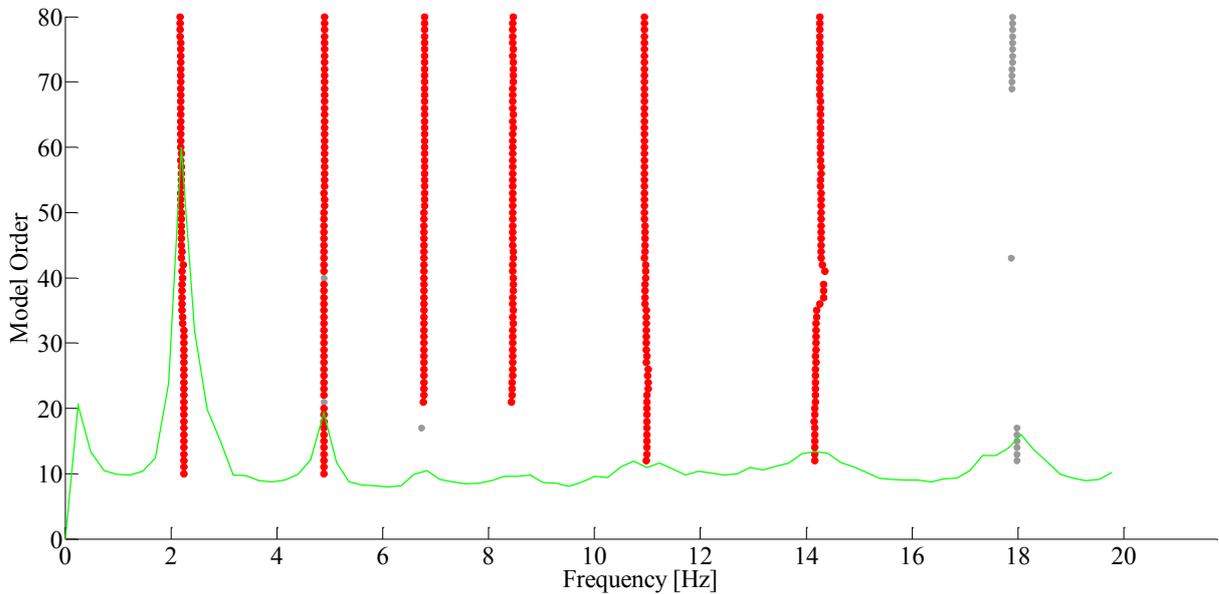


Figura 70: Diagrama de estabilização após processamento automático pela metodologia proposta. Os modos vermelhos são os modos considerados físicos pelo algoritmo. Ao fundo, em verde, o espectro médio de frequências.

A seguir, será exposto o resultado completo das duas metodologias. Para melhor comparação, como foi feito na aplicação da seção anterior, estes resultados serão colocados lado a lado. Os gráficos à esquerda são oriundos da metodologia de referência, enquanto os da direita são provenientes da metodologia proposta neste trabalho.

De maneira a organizar melhor os dados visuais, os gráficos serão apresentados todos juntos de maneira concisa. Além disso, como a discussão de seus significados já foi feita de maneira exaustiva nas seções anteriores, as conclusões gerais, aqui, são realizadas de maneira mais direta, isto é, sem que seja feita uma análise pormenorizada (o que seria desnecessário) de cada gráfico individualmente.

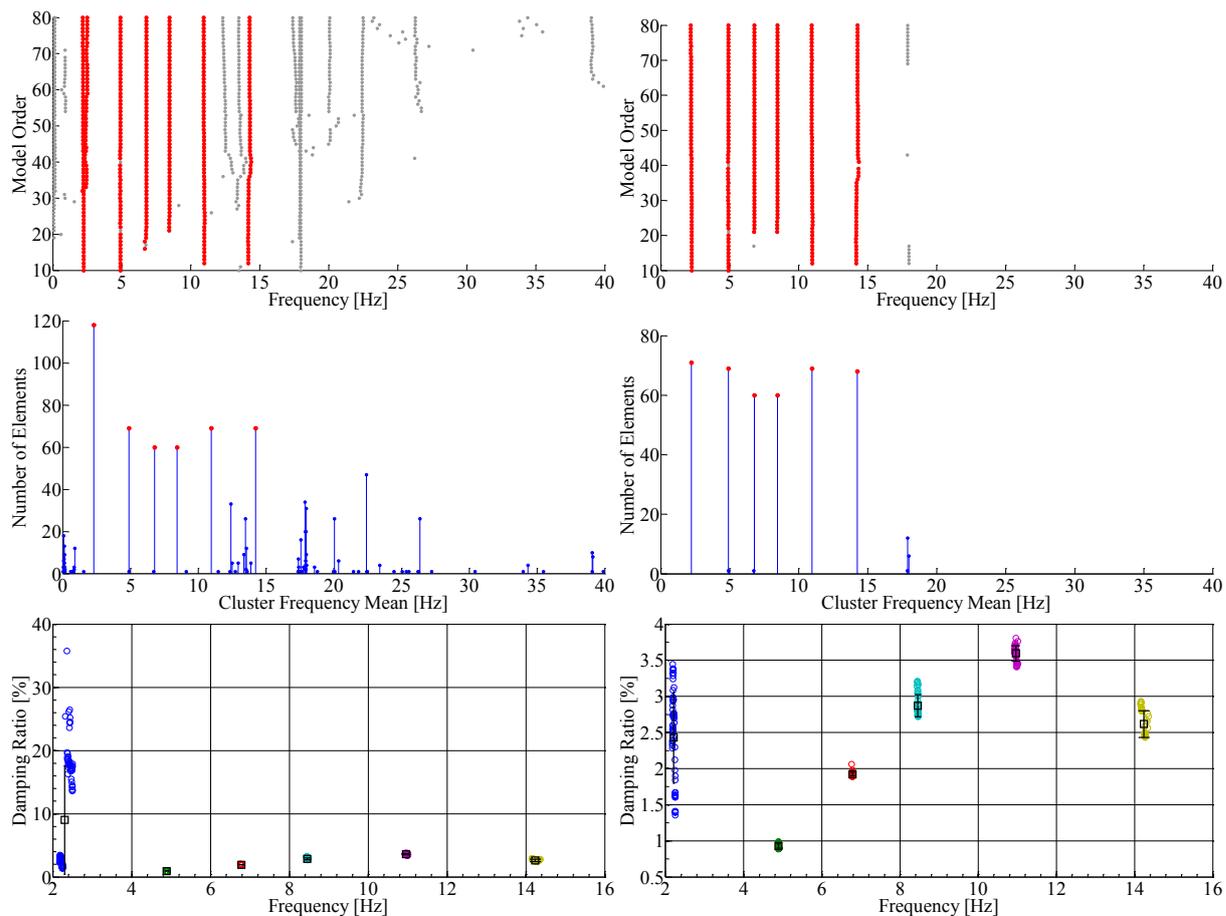


Figura 71: Resultados da metodologia de referência (gráficos à esquerda) e da metodologia proposta (gráficos à direita).

De cima para baixo na Figura 71: diagrama de estabilização após identificação automática (modos considerados físicos em vermelho); gráfico de hastes indicando o número de elementos por *cluster* formado (n_m *clusters* em vermelho); e diagrama frequência *versus* amortecimento dos modos selecionados automaticamente como sendo físicos.

Pode-se notar, pela Figura 71, que ambas as metodologias foram capazes de identificar os seis modos solicitados. Inclusive, os resultados para as formas de vibração, mostrados na Figura 72, foram tecnicamente idênticos. Nos gráficos desta figura, a linha azul corresponde ao lado superior em planta da ponte (9 acelerômetros verticais), enquanto a linha vermelha corresponde ao lado inferior em planta da mesma (7 acelerômetros verticais). Ver Figura 64.

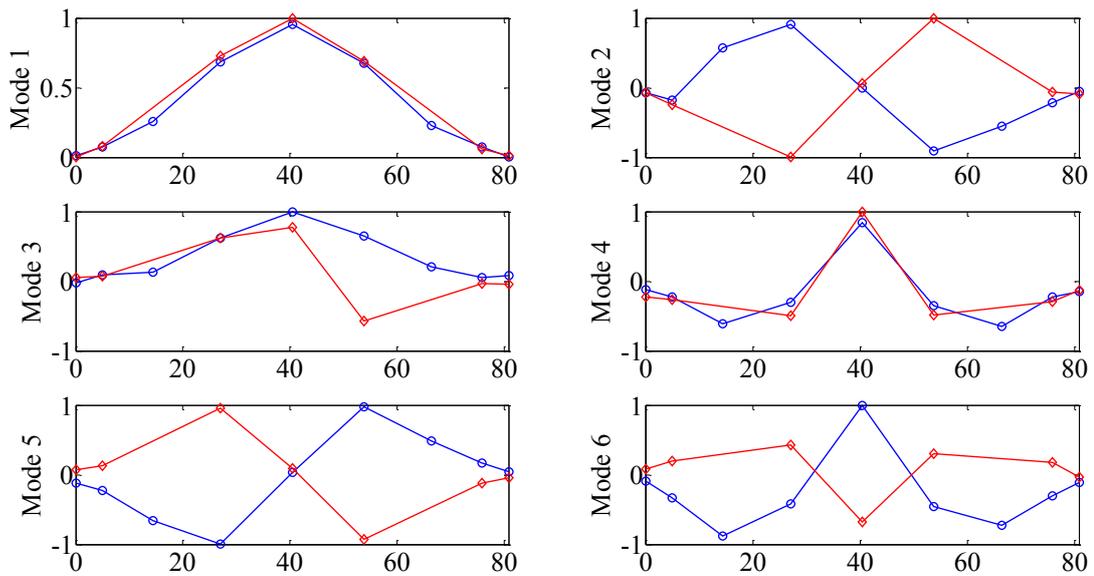


Figura 72: Formas modais de vibração obtidas na identificação automática por ambas as metodologias.

Finalmente, as frequências naturais e taxas de amortecimento identificados pelos dois métodos, podem ser encontrados, de forma resumida e organizada, na Tabela 12, juntamente com os respectivos desvios-padrão.

Tabela 12: Resultados da identificação modal automática por ambas as metodologias.

Modo	Metodologia de Referência		Metodologia Proposta	
	f (Hz) / σ (Hz)	ζ (%) / σ (%)	f (Hz) / σ (Hz)	ζ (%) / σ (%)
1	2,30 / 0,118	9,02 / 8,58	2,21 / 0,027	2,43 / 0,64
2	4,89 / 0,003	0,93 / 0,03	4,89 / 0,003	0,93 / 0,03
3	6,78 / 0,004	1,92 / 0,02	6,78 / 0,004	1,92 / 0,02
4	8,46 / 0,006	2,87 / 0,15	8,46 / 0,006	2,87 / 0,15
5	10,96 / 0,022	3,60 / 0,11	10,96 / 0,022	3,60 / 0,11
6	14,24 / 0,054	2,62 / 0,18	14,24 / 0,052	2,62 / 0,18

A tabela anterior mostra que os resultados obtidos pelas duas metodologias são exatamente os mesmos, com exceção do primeiro modo, o qual foi identificado de forma menos precisa pela metodologia de referência.

Em poucas linhas, pode-se concluir que a metodologia proposta foi mais eficiente devido, principalmente, à aplicação de seu pré-filtro, o qual removeu prontamente (antes de serem tratados pelos algoritmos) nada menos que 70% dos modos. Este fato gera um aumento

drástico na velocidade de processamento dos dados restantes. A comparação entre os diagramas de estabilização das duas metodologias na Figura 71 evidencia o aspecto mais limpo daquele correspondente a metodologia proposta.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Análise dos Resultados

Este trabalho versou sobre a implementação de uma metodologia original para identificação modal automática de estruturas. Tal metodologia foi utilizada para tratar dados gerados numericamente, dados obtidos de ensaio de laboratório e sinais registrados em ensaios de uma estrutura real de ponte rodoviária em operação.

Em todas as aplicações estudadas o método proposto obteve resultados satisfatórios. Cada uma destas aplicações, colocadas no capítulo 5, traz à luz algum aspecto específico do comportamento dos algoritmos implementados.

A aplicação aos sinais gerados numericamente mostrou que, mesmo em situações com muito ruído, a identificação de modos com frequências naturais próximas ocorre de maneira automática, descomplicada e precisa.

O ensaio, em laboratório, da viga biapoiada apontou outras características positivas do método proposto. Nesta aplicação, as rotinas implementadas provaram ser capazes de identificar modos pouco excitados de maneira satisfatória. Além disso, testes adicionais sobre estes mesmos sinais mostraram que a metodologia proposta detém um comportamento de baixa sensibilidade com relação ao parâmetro d_{lim} (distância limite para poda da árvore hierárquica). Este fato constitui um importante avanço na direção de se conseguir uma maior robustez no processo de automatização.

Os sinais obtidos nos ensaios de vibração ambiente realizados na ponte PI-57, na França, foram usados para se colocar a metodologia proposta em um cenário prático real. O resultado desta aplicação também foi satisfatório. O desempenho do algoritmo de

identificação paramétrico implementado (*SSI-DATA*) produziu diagramas de estabilização mais “limpos” e, conseqüentemente, mais fáceis de serem interpretados automaticamente.

Nas duas aplicações práticas descritas neste trabalho, a metodologia de referência serviu como base para um nível mais profundo de julgamento a respeito da qualidade dos resultados do método proposto. Nos dois casos, este julgamento permite concluir que o desempenho da metodologia apresentada neste trabalho, para os casos estudados, mostrou resultados ligeiramente superiores que aqueles de referência.

6.2 Contribuições

Talvez, o objetivo alcançado com maior proeminência tenha sido a conquista da característica de insensibilidade do método com relação aos parâmetros informados pelo usuário. Foi visto que o número de modos desejados n_m pode ser assumido de maneira conservadora sem maiores cuidados. Todavia, caso se deseje adotar um número mais consciente, foi mostrado que uma simples análise visual do espectro de frequência é suficiente. Também foi discutido a problemática envolvida na adoção de um valor para a distância limite d_{lim} . Com a aplicação da métrica aqui desenvolvida, o presente trabalho conseguiu minimizar consideravelmente o impacto da escolha desta grandeza nos resultados finais, especialmente quando existem modos de frequências altas a serem identificados. Isto pode ser constatado claramente na aplicação aos dados da viga ensaiada em laboratório.

Uma contribuição notável deste trabalho consiste no fato da metodologia proposta ser capaz de identificar, automaticamente, modos com frequências próximas¹⁰. Como comentado na seção 2.4, os algoritmos de identificação baseados no domínio da frequência apresentam considerável dificuldade em identificar corretamente tais modos.

De maneira conclusiva, indica-se o sucesso da metodologia proposta pelo seguinte fato: em todos estes variados cenários de aplicações aos quais ela foi submetida, em nenhum momento houve a necessidade de se adotar um valor de d_{lim} diferente de 1 Hz. Em outras palavras, isso demonstra que o processo de automatização apresentado tende a ser robusto. Portanto, diz-se que o objetivo principal desta pesquisa foi alcançado. Sua publicação à comunidade científica foi iniciada em janeiro de 2015, com a submissão de um artigo para o

¹⁰ Por exemplo, em situações nas quais se deseja investigar problemas de fadiga em estruturas reticuladas com muitos elementos, é essencial a identificação de modos de vibração locais, cujas frequências, não raramente, podem estar muito próximas daquelas de modos globais ou de outros modos locais.

congresso internacional *SEM/IMAC XXXIII (Society for Experimental Mechanics)* e para os editores de periódicos do *ICE VL (Institution of Civil Engineers – Structures and buildings)*.

Entende-se então que o produto desta dissertação contribui para o panorama global das metodologias de automatização da identificação modal. Uma vez que o método proposto é compatível com os dados gerados por qualquer algoritmo de identificação paramétrico, o seu campo de ação pode se tornar ainda maior.

Em todas as aplicações deste trabalho, a metodologia de automatização identificou os parâmetros dinâmicos para uma única coleta de dados no tempo (*MPE*). Contudo, deve-se ressaltar que é direta a extensão de sua abordagem para identificação de um conjunto de dados recebidos em tempo real durante um monitoramento contínuo. Inclusive, lembra-se que esta é a motivação maior por trás do desenvolvimento de metodologias de automatização.

6.3 Trabalhos Futuros

É certo que existem pontos sobre os quais se deve dispender ainda mais trabalho de desenvolvimento. Em específico, pode-se citar:

- a necessidade de se testar o método em ainda mais variadas situações práticas;
- a incorporação das rotinas da metodologia em um programa computacional autoportante, com interface gráfica amigável para o usuário;
- a otimização dos algoritmos já implementados, visando aumento da velocidade de processamento.
- a inclusão e articulação das rotinas do método em um sistema mais amplo que inclua identificação de danos;
- o teste dos algoritmos desenvolvidos em sistemas de aquisição de dados em tempo real;
- a proposição de novas métricas de medição de distâncias para um processo de *clusterização* ainda mais eficiente ou adequado para certas situações;

- a inclusão de mais filtros para remoção de modos espúrios dos diagramas de estabilização;
- a aplicação de novas técnicas de mineração de dados ao conjunto de modos estimados do diagrama de estabilização, tais como: redes neurais, algoritmos genéticos e *clusterização não-hierárquica k-means*.

Referências Bibliográficas

Alves V., Cury A., Roitman N., Magluta C., Cremona C., "Novelty detection for SHM using raw acceleration measurements", Structural Control and Health Monitoring, DOI:10.1002/stc.1741, (2015).

Andersen P., Brincker R., Peeters B., De Roeck G., Hermans, L., Kramer, C., "Comparison of System Identification Methods Using Ambient Bridge Test Data", IMAC XVII, Kissimmee, USA, (1999).

Akaike H., "Stochastic Theory of Minimal Realization", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 19, p. 667-674, (1974).

Aoki M., "State Space Modelling of Time Series", Springer Verlag, (1987).

Arun K. S., Kung S. Y., "Balanced Approximation of Stochastic Systems", SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 11, p. 42-68, (1990).

Ashkenazi V., Roberts G., "Experimental Monitoring of the Humber Bridge Using GPS". Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Civil Engineering, Vol. 120, p. 177-182, (1997).

Askegaard V., Mossing P., "Long Term Observation of RC-Bridge Using Changes in Natural Frequencies", Nordic Concrete Research, N. 7, p. 20-27, (1988).

Asmussen J. C., "Modal Analysis Based on the Random Decrement Technique - Application to Civil Engineering Structures". PhD thesis, Aalborg University/Denmark, (1998).

Balmès E., Leclère J. M., "Structural Dynamics Toolbox, For Use With MATLAB", User's Guide, Version 5.0, (<http://www.sdtools.com/Publications.html>), (2002).

- Battista R. C., Pfeil M. S., “*Reduction Of Vortex-Induced Oscillations Of Rio-Niterói Bridge By Dynamic Control Devices*”. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 84(3): Pp. 273-288, (2000).
- Battista R. C., “*Structural monitoring of the world largest span steel box-girder bridge*”. *Proceedings of EUROLYN*, (2005).
- Béliveau J. G., Chater S., “*System Identification of Structures from Ambient Wind Measurements*”, 8th WCEE, San Francisco, USA, Vol. IV, p. 307-314, (1984).
- L. Billard, E. Diday, “*Symbolic Data Analysis*”, Wiley & Sons, Chichester, UK, (2006).
- Brownjohn J. M. W., Carden P., “*Real-time operation modal analysis of Tamar Bridge*”. In *Proceedings of IMAC 26, International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, USA, (2008).
- Brincker R., Andersen P., Zhang L., “*Modal identification and damage detection on a concrete highway bridge by frequency domain decomposition*”, SEWC, Yokohama, Japan, (2002).
- Cabboi A., Magalhães F., Gentile C., Cunha A., “*Automatic operational modal analysis: challenges and practical application to a historical bridge*”. 6th ECCOMAS Conference on Smart Structures and Materials, (2013).
- Caetano E., Cunha A., “*Ambient Vibration Test and Finite Element Correlation of the New Hintze Ribeiro Bridge*”. *IMAC XXI*, Kissimmee, USA, (2003).
- Caetano E., “*Dynamics of Cable-Stayed Bridges: Experimental Assessment of Cable-Structure Interaction*”. *Tese de Doutoramento*, FEUP, Portugal, (2000).
- Clough R. W., Penzien J., “*Dynamics of Structures*”, third edition, Computers and Structures, Inc., (1995).
- Cole H. A., “*On-the-line Analysis of Random Vibrations*”, AIAA Paper No.68-288, (1968).
- Cole H. A., “*On-Line Failure Detection and Damping Measurements of Aerospace Structures by Random Decrement Signature*”. NASA CR-2205, (1973)

Cremona C., Gautier Y., Moretti O., “*Experimental modal analysis of the Millau bridge*”. In proceedings of the EVACES, (2000).

Cunha A., Caetano E., “*Experimental modal analysis of civil engineering structures*”, Sound and Vibration, Vol. 6, No. 40, p. 12-20, (2006).

Cunha A., Caetano E., Magalhães F., Moutinho C., “*From input-output to output-only modal identification of civil engineering structures*”, SAMCO, (2006).

Cury A. A., “*MIDaS – Um sistema computacional baseado em aplicações web para identificação modal de sistemas dinâmicos deformáveis*”, dissertação de mestrado pela Universidade Federal de Juiz de Fora, (2010).

Cury A., Cremona C., Dumoulin J., “*Long-term monitoring of a PSC box girder bridge: Operational modal analysis, data normalization and structural modification assessment*”, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 33, November, Pages 13–37, (2012).

Dally J. W., Riley W. F., McConnell K. G., “*Instrumentation for Engineering Measurements*”. Second edition, John Wiley & Sons, USA, (1993).

De Roeck G., Peeters B., Ren W. X., “*Benchmark Study on System Identification through Ambient Vibration Measurements*”. IMAC XVIII, San Antonio, USA, (2000).

De Roeck G., Peeters B., Maeck j., “*Dynamic monitoring of civil engineering structures*”. Computational Methods for Shell and Spatial Structures IASS-IACM, (2000).

Deraemaeker A., Reynders E., De Roeck G., Kullaa J., “*Vibration-based structural health monitoring using output-only measurements under changing environment*”. Mechanical Systems and Signal Processing, 22(1), 34-56, (2008).

Ewins D. J., “*Modal testing: Theory, practice and application*”. In Research Studies Press, (2000).

Gautier Y., Cremona C., Moretti O., “*Experimental Modal Analysis Of The Millau Bridge*”, Proceedings of the EVACES (Experimental Vibration Analysis For Civil Engineering Structures), (2005).

Goethals I., Vanluyten B., De Moor B., “*Reliable spurious mode rejection using self learning algorithms*”. In Proceedings of ISMA, International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgium, (2004).

Ibrahim S. R., “*Random decrement technique for modal identification of structures*”. Journal of Spacecraft and Rockets, 14(11):696-700, (1977).

Ibrahim S. R., “*The use of random decrement technique for identification of structural modes of vibration*”. AIAA Paper, 77:1-9, (1977).

Jensen J. L., Brincker R., Krenk S., “*Estimation of correlation functions by the random decrement technique*”. In proceedings of IMAC 10, 610-615, (1994).

Jensen J. L., Brincker R., Krenk S., “*Estimation of correlation functions by the random decrement technique*”. In proceedings of IMAC 9, 14-18, (1991).

Jensen J. L., Brincker R., Krenk S., “*Spectral estimation by the random decrement technique*”. In Proceedings of the 9th International Conference on Experimental Mechanics, (1990).

Kirkegaard P. H., Andersen P., “*State Space Identification of Civil Engineering Structures from Output Measurements*”, IMAC XV, Kissimmee, USA, (1997).

Kulla J., “*System Identification of Heritage Court Tower Using Stochastic Subspace Method*”. IMAC XVIII, San Antonio, USA, (2000).

Ljung L., Glad T., “*Modeling of dynamic systems*”, Prentice Hall, (1994).

Ljung L., “*System Identification – Theory for the User*”. Second edition, Prentice Hall, USA, (1999).

Maeck, J., De Roeck, G., “*Damage Assessment Using Vibration Analysis On The Z24-Bridge*”, Mechanical Systems and Signal Processing, 17 (1), 133-142, (2003).

Magalhães F., “*Operational modal analysis for testing and monitoring of bridges and special structures*”, tese de doutorado pela Universidade do Porto, (2010).

MathWorks Inc., MatLab 2010b, (<http://www.mathworks.com>).

Mikulcik E. C., Ibrahim S. R., “*A method for the direct identification of vibration parameters from the free responses*”. *Journal of Sound and Vibration*, 113(1):47-57, (1987).

Peeters B., De Roeck G., “*Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis*”, vol. 13, no. 6, p. 855-878, (1999).

Peeters B., “*System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*”. PhD Thesis, Department of Civil Engineering, K. U. Leuven, Belgium, (2000).

Peeters B., Van Der Auweraer H., “*PolyMax: a Revolution in Operational Modal Analysis*”. In *Proceedings of IOMAC, International Operational Modal Analysis Conference*, Copenhagen, Denmark, (2005).

Pfeil M. S., Battista R. C., “*Reduction of vortex-induced oscillations of rio Niteroi bridge by dynamic control devices*”. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 84(3):273-288, (2000).

Rainieri C., Fabbrocino G., Cosenza E., “*Fully automated OMA: an opportunity for smart SHM systems*”, proceedings of the IMAC-XXVII, (2009).

Reynders E., Houbrechts J., De Roeck G., “*Fully automated (operational) modal analysis*”, *Mechanical Systems and Signal Processing* 29, p. 228-250, (2012).

Reynders E., “*System identification and modal analysis in structural mechanics*”. PhD thesis, Department of Civil Engineering, KU Leuven, (2009).

Reynders E., “*System Identification Methods for (operational) modal analysis: review and comparison*”, CIMNE, Barcelona, (2012).

Rodrigues J., “*Identificação modal estocástica: métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil*”, tese de doutorado pela Universidade do Porto, (2004).

Sage A. P., Melsa J. L., “*An Introduction to Probability and Stochastic Processes*”. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, (1973).

SVS, “*ARTEMIS Extractor*”. Version 3.1, Structural Vibration Solution, Aalborg, Denmark (<http://www.svibs.com>), (2002).

Van Overschee P., De Moor B., “*Subspace identification for linear systems: theory, implementation and applications*”, Kluwer Academic Publishers, (1996).

Verboven P., Parloo E., Guillaume P., Van Overmeire M., “*Autonomous Structural Health Monitoring - Part I: Modal Parameter Estimation and Tracking*”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16(4), 637-657, (2002).