



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE  
PÓRTICOS METÁLICOS PLANOS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

**BRUNO MÁRCIO AGOSTINI**

Orientador: Prof. Dr. Marcílio Sousa da Rocha Freitas  
Coorientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Profª. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências da Engenharia Civil na área de concentração Construção Metálica.

Ouro Preto, Dezembro de 2014

A275a Agostini, Bruno Márcio.  
Análise de confiabilidade estrutural de pórticos metálicos planos com  
ligações semirrígidas [manuscrito] / Bruno Márcio Agostini. - 2014.  
121f.: il.: grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Sousa da Rocha Freitas.  
Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.  
Coorientadora: Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.  
Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Confiabilidade (Engenharia). 2. Ligações metálicas. 3. Pórticos estruturais.  
I. Freitas, Márcio Sousa da Rocha. II. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota.  
III. Silva, Andréa Regina Dias da. IV. Universidade Federal de Ouro Preto.  
V. Título.

CDU: 624.072

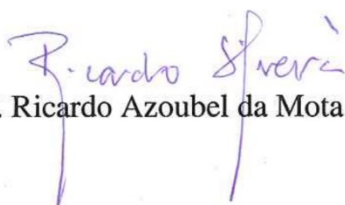
# ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE PÓRTICOS METÁLICOS PLANOS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

AUTOR: BRUNO MÁRCIO AGOSTINI

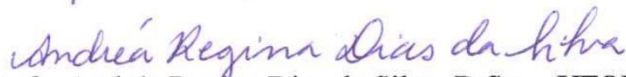
Esta tese foi apresentada em sessão pública e aprovada em 18 de dezembro de 2014, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



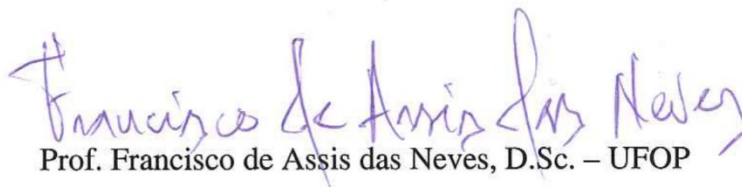
Prof. Marcilio Sousa da Rocha Freitas, D.Sc. – UFOP (Presidente)



Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D.Sc. – UFOP



Profa. Andréa Regina Dias da Silva, D.Sc. – UFOP



Prof. Francisco de Assis das Neves, D.Sc. – UFOP



Prof. Flávio Teixeira de Souza, D.Sc. – IFMG



Prof. André Luis Riqueira Brandão, D.Sc. – UNIFEI

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus.

Ao meu orientador, prof. Marcílio Sousa da Rocha Freitas.

Ao meu coorientador, prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

À minha coorientadora, Profa. Andréa Regina Dias da Silva.

À minha esposa Josy e à minha filha Lívia.

Ao meu pai, Miguel Agostini (in memoriam) e à minha mãe, Izabel Rezende Agostini.

Aos meus irmãos, Juarez (in memoriam), Lucas, Raquel e Tiago.

Aos colegas de curso.

Ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil (PROPEC).

À Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).

Ao IF Sudeste MG-Câmpus São João del-Rei.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFOP.

Resumo da Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

## **ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE PÓRTICOS METÁLICOS PLANOS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS**

**Bruno Márcio Agostini**

Dezembro/2014

*Orientadores:* Marcílio Sousa da Rocha Freitas  
Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Andréa Regina Dias da Silva

A aplicação da teoria de confiabilidade no cálculo de estruturas envolve a avaliação da probabilidade de violação de determinado estado limite. O presente trabalho busca calcular o nível de segurança de estruturas projetadas com a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica e da flexibilidade das ligações, ao ser fixado o estado limite de serviço com base em deslocamento. Tradicionalmente, as normas têm adotado coeficientes parciais de segurança para lidar com a presença de incertezas. Entretanto, o uso desses coeficientes não permite o conhecimento das reais chances de ocorrência de uma falha. Do ponto de vista prático e científico é necessária uma abordagem mais consistente, fundamentada na teoria de confiabilidade, para uma melhor quantificação da segurança estrutural. Esse trabalho é o início da busca para a determinação do nível de segurança de estruturas projetadas com base em análise avançada, utilizando a teoria de confiabilidade estrutural. Para alcançar os objetivos criou-se um programa computacional denominado Módulo de Confiabilidade Estrutural (MCE). O MCE utiliza o método First-Order Reliability Method (FORM) para a realização da análise de confiabilidade. Para realização de análise estrutural avançada de estruturas de aço ou mista adotou-se o programa Computational System for Advanced Structural Analysis (CS-ASA), (Silva, 2009b). A criação do MCE foi realizada visando obter um programa com funcionamento acoplado ao CS-ASA. O processo de validação do MCE envolveu a comparação entre resultados obtidos utilizando-se o programa criado e os gerados por outros autores. Os resultados obtidos para as estruturas analisadas indicam a eficácia da implementação realizada. Esses resultados sugerem baixa influência da não linearidade geométrica e considerável influência da semirrígidez das ligações para a confiabilidade de estruturas, tendo em vista o estado limite de serviço estabelecido em função de deslocamento.

Palavras-chave: Confiabilidade (Engenharia), Ligações Metálicas, Pórticos Estruturais.

Abstract of Thesis presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Civil Engineering

**STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSIS FOR  
PLANS STEEL FRAMES WITH SEMI-RIGID CONNECTIONS**

**Bruno Márcio Agostini**

December/2014

*Advisors:* Marcílio Sousa da Rocha Freitas  
Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Andréa Regina Dias da Silva

The application of reliability theory for structures calculation involves the assessment of probability of violation for determined limit state. This study aims to calculate the security level of structures designed considering effects of geometric nonlinearity and flexibility of connections with the establishment of service limit state based on displacement. Traditionally, the standards have adopted partial safety factors to deal with the presence of uncertainties. However, the use of these coefficients does not allow to know real chances of a failure. From a practical and scientific point of view a more consistent approach is required, based on reliability theory, to improve the quantification of structural safety. This work is the beginning of search for determining the security level for structures designed with advanced analysis and structural reliability concepts. In order to achieve the goals was created a computer program called Structural Reliability Module (MCE). The MCE uses the First-Order Reliability Method (FORM) for performing reliability analysis. To perform advanced structural analysis of steel or mixed structures was adopted the program Computational System for Advanced Structural Analysis (CS-ASA), (Silva, 2009b). The creation of MCE was done to obtain a program operation coupled to the CS-ASA. The MCE validation process involved the comparison of results obtained by the program created and those produced by other authors. Results obtained for the analyzed structures indicate effectiveness of the implementation performed. These results suggest low influence of geometric nonlinearity and considerable influence of semi-rigid connections for the reliability of structures, in view of serviceability limit state established according to displacement.

Key words: Reliability (Engineering), Steel Connections, Structural Frames.

## LISTA DE TABELAS

5.1	Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias.....	85
5.2	Resultados da análise de confiabilidade.....	85
5.3	Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias.....	87
5.4	Resultados da análise de confiabilidade.....	87
5.5	Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias.....	89
5.6	Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática linear.....	89
5.7	Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática não linear geométrica.....	89
5.8	Propriedades das ligações semirrígidas.....	90
5.9	Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática não linear geométrica e ligação semirrígida (curva 1).....	91
5.10	Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática não linear geométrica e ligação semirrígida (curva 2).....	91
5.11	Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática não linear geométrica e ligação semirrígida (curva 3).....	91
5.12	Valores de $\beta$ segundo Haldar e Mahadevan (2000b) e determinados no presente trabalho, utilizando ligação rígida e semirrígida entre viga e coluna.....	91
5.13	Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias.....	93
5.14	Resultados da análise de confiabilidade para deslocamento lateral do nó 3 (estado limite de serviço).....	94
5.15	Resultados da análise de confiabilidade para deslocamento vertical do nó 4 (estado limite de serviço).....	94
5.16	Valores de $\beta$ segundo Haldar e Mahadevan (2000b) e determinados no presente trabalho.....	95
5.17	Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias.....	96
5.18	Resultados da análise de confiabilidade para deslocamento lateral do nó 1 obtidos por análise linear e não linear geométrica (estado limite de serviço).....	96
5.19	Valores de $\beta$ segundo Haldar e Mahadevan (2000b) e determinados no presente trabalho.....	97

A-A.1	Expressões para a PDF, CDF, média e desvio padrão de distribuições de probabilidade contínuas utilizadas em engenharia estrutural.....	107
A-C.1	Características das variáveis aleatórias.....	112
A-C.2	Resultados da análise de confiabilidade de sistemas.....	112
A-C.3	Continuação dos resultados da análise de confiabilidade de sistemas.....	112
A-C.4	Características das variáveis aleatórias.....	114
A-C.5	Resultados da análise de confiabilidade de sistemas.....	114
A-C.6	Continuação dos resultados da análise de confiabilidade de sistemas.....	115



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Funções densidade de probabilidade $f_R(r)$ e $f_S(s)$ (adaptado de Ang e Tang, 1984).	17
2.2	(a) efeito da posição relativa entre $f_R(r)$ e $f_S(s)$ em $P_f$ e (b) efeito da dispersão em $f_R(r)$ e $f_S(s)$ em $P_f$ (adaptado de Ang e Tang, 1984).....	18
2.3	Região de falha, superfície de falha e região de segurança no espaço das variáveis reduzidas (adaptado de Ang e Tang, 1984).....	20
2.4	Distância da origem à superfície de falha no espaço das variáveis reduzidas (adaptado de Ang e Tang, 1984).....	22
2.5	Representação do método FORM indicando o índice de confiabilidade $\beta$ , ponto de projeto $\mathbf{V}^*$ e função de falha $g(\mathbf{V})$ no espaço das variáveis reduzidas (adaptado de Sagrilo, 2004).....	25
2.6	Representação gráfica de sistema em série (adaptado de Sagrilo, 1994).....	31
2.7	Representação gráfica de sistema em paralelo (adaptado de Sagrilo, 1994).....	33
2.8	Pórtico (a), mecanismos de formação de rótulas plásticas (b), (c) e (d) e representação por um modelo em série e paralelo (e) (adaptado de Li e Li, 2007).....	34
3.1	Solução incremental iterativa, Silva (2009b).....	39
3.2	Caminhos de equilíbrio e pontos de bifurcação e limite.....	41
3.3	Representação gráfica dos efeitos P- $\Delta$ e P- $\delta$ devidos ao deslocamento lateral da estrutura e curvatura dos membros (Silva, 2009b).....	44
3.4	Referencial lagrangiano total (Silveira e Galvão, 2011).....	45
3.5	Referencial lagrangiano atualizado (Silveira e Galvão, 2011).....	46
3.6	Representação da decomposição corrotacional (adaptado de Silva, 2011).....	47
3.7	Seção transversal antes e após a deformação (Galvão, 2000).....	48
3.8	Elemento de pórtico (Galvão, 2000).....	52
3.9	Curvas momento rotação para diferentes tipos de ligações (adaptado de Chan e Chui, 2000).....	59
3.10	Configurações indeformada (a) e deformada (b) do elemento finito de pórtico composto por molas fictícias (Silva, 2009b).....	62
3.11	Esforços e rotações nodais no elemento híbrido de pórtico plano (adaptado de Pinheiro, 2003).....	65

3.12	Deslocamentos nodais do elemento híbrido na configuração deformada (Silva, 2009b).....	65
4.1	Tipos de análises e efeitos considerados no programa CS-ASA desenvolvido por Silva, (2009b).....	74
4.2	Sequência de operações para integração da biblioteca IMSL™ (Visual Numerics®, 2006) ao projeto criado no ambiente Microsoft Visual Studio 2010 (Microsoft Corporation, 2010).....	76
4.3	Arquivos da entrada de dados e da saída de resultados: CS-ASA (Silva, 2009b) (linha contínua), módulo de confiabilidade estrutural (linha tracejada).....	77
4.4	Exemplo de parte inicial do arquivo de entrada 1 do CS-ASA (Silva, 2009b), com alteração para realização de análise de confiabilidade estrutural.....	77
4.5	Exemplo do arquivo de entrada 2 do CS-ASA (Silva, 2009b): solução linear (a), e solução não linear (b).....	79
4.6	Nova funcionalidade do programa CS-ASA (Silva, 2009b): análise de confiabilidade (tracejado).....	81
4.7	Fluxograma do MCE.....	82
5.1	Pórtico plano com três barras (análise linear): geometria, carregamento e discretização.....	84
5.2	Pórtico plano com quatro barras (análise linear): geometria, carregamento e discretização.....	86
5.3	Pórtico plano com três barras e ligações semirrígidas: geometria, carregamento e discretização.....	88
5.4	Curvas momento-rotação das ligações semirrígidas.....	90
5.5	Pórtico plano com sete barras: geometria, carregamento e discretização.....	93
5.6	Pórtico plano com onze barras: geometria, carregamento e discretização.....	96
A-C.1	Viga biapoiada: geometria e carregamento.....	111
A-C.2	Pórtico plano: geometria, carregamento e discretização.....	113
A-C.3	Modos de falha (a), (b) e (c) do pórtico plano, relacionados, de forma respectiva, às funções de falha $G_1(U)$ , $G_2(U)$ e $G_3(U)$ .....	114

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>1.1 Considerações iniciais</b> .....	1
<b>1.2 Justificativas e objetivos</b> .....	2
<b>1.3 Organização do trabalho</b> .....	3
<b>2 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL</b> .....	4
<b>2.1 Níveis dos métodos de projeto</b> .....	4
<b>2.2 Tipos de variáveis</b> .....	5
2.2.1 Variável aleatória discreta.....	5
2.2.2 Variável aleatória contínua.....	6
<b>2.3 Valores característicos de uma variável aleatória</b> .....	7
<b>2.4 Distribuições de probabilidade contínuas</b> .....	9
<b>2.5 Variáveis aleatórias conjuntas</b> .....	9
2.5.1 Funções de variáveis aleatórias.....	11
<b>2.6 Valores característicos de variáveis aleatórias conjuntas</b> .....	11
2.6.1 Média e variância de uma função geral.....	13
2.6.2 Média e variância de um produto de variáveis aleatórias lognormais	14
<b>2.7 Distribuição normal equivalente</b> .....	14
<b>2.8 Estado limite</b> .....	15
<b>2.9 Probabilidade de falha</b> .....	16
<b>2.10 Índice de confiabilidade</b> .....	18
<b>2.11 Função de desempenho</b> .....	20
<b>2.12 First-order second-moment (FOSM)</b> .....	21
<b>2.13 Advanced FOSM (AFOSM)</b> .....	21
<b>2.14 First-order reliability method (FORM)</b> .....	23
<b>2.15 Second-order reliability method (SORM)</b> .....	25
<b>2.16 Método de simulação Monte Carlo</b> .....	26
<b>2.17 Medidas de sensibilidade</b> .....	28
<b>2.18 Confiabilidade de sistemas</b> .....	29
2.18.1 Sistema em série.....	30

2.18.2 Sistema em paralelo.....	32
2.18.3 Sistema em série e paralelo.....	33
<b>3 ANÁLISE ESTÁTICA CONSIDERANDO A NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA E A FLEXIBILIDADE DA LIGAÇÃO.....</b>	<b>35</b>
<b>3.1 Aspectos gerais e introdutórios.....</b>	<b>35</b>
<b>3.2 Aspectos importantes para uma análise não linear de estruturas.....</b>	<b>36</b>
<b>3.3 Estratégias de incremento de carga e de iteração.....</b>	<b>38</b>
<b>3.4 Não linearidade geométrica.....</b>	<b>44</b>
3.4.1 Relações deformação-deslocamento.....	47
3.4.2 Funcional de energia .....	49
3.4.3 Formulação do elemento finito.....	52
<b>3.5 Flexibilidade da ligação.....</b>	<b>56</b>
<b>4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....</b>	<b>69</b>
<b>4.1 Módulo de confiabilidade estrutural.....</b>	<b>69</b>
<b>4.2 Integração do módulo de confiabilidade estrutural ao programa     CS-ASA (Silva, 2009b).....</b>	<b>74</b>
<b>5 EXEMPLOS.....</b>	<b>83</b>
<b>5.1 Exemplo 1 - Pórtico plano com três barras.....</b>	<b>84</b>
<b>5.2 Exemplo 2 - Pórtico plano com quatro barras.....</b>	<b>86</b>
<b>5.3 Exemplo 3 - Pórtico plano com três barras e ligações semirrígidas.....</b>	<b>88</b>
<b>5.4 Exemplo 4 - Pórtico plano com sete barras.....</b>	<b>92</b>
<b>5.5 Exemplo 5 - Pórtico plano com onze barras.....</b>	<b>95</b>
<b>6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>98</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>101</b>
<b>APÊNDICE A - DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE.....</b>	<b>107</b>
<b>APÊNDICE B - ALGORITMO PARA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE PELO MÉTODO FORM.....</b>	<b>109</b>

<b>APÊNDICE C - APLICAÇÕES ENVOLVENDO ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS.....</b>	<b>111</b>
<b>APÊNDICE D - EXEMPLO DO ARQUIVO DE ENTRADA 1.....</b>	<b>116</b>
<b>APÊNDICE E - EXEMPLO DO ARQUIVO DE ENTRADA 2 (Solução não linear).....</b>	<b>117</b>
<b>APÊNDICE F - EXEMPLO DE ARQUIVO DE ENTRADA 4 (DADOS PARA ATENDER AO MÓDULO DE CONFIABILIDADE).....</b>	<b>118</b>
<b>APÊNDICE G - EXEMPLO DE ARQUIVO DE SAÍDA DE RESULTADOS PROVENIENTES DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE.....</b>	<b>119</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em um projeto estrutural procura-se a solução mais econômica e segura possível. Isso significa que a estrutura deve apresentar-se resistente, estável, durável e econômica. Por outro lado, sabe-se que o risco é inerente às estruturas pois as incertezas estão sempre presentes nas variáveis envolvidas (geometria, ações, propriedades dos materiais) e até mesmo nas simplificações de hipóteses adotadas para o modelo estrutural. Sendo assim, só é possível assegurar um desempenho em termos probabilísticos, ou seja, pela probabilidade de falha.

Tradicionalmente busca-se obter a confiabilidade de sistemas estruturais através da utilização de coeficientes de segurança e da adoção de suposições conservadoras nos métodos de cálculo. A fim de evoluir nesse processo emprega-se a Teoria da Confiabilidade Estrutural com o objetivo de melhor avaliar e obter a segurança estrutural. Um aspecto importante dessa teoria é a consideração dos parâmetros de projeto como variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade adequadas.

A confiabilidade estrutural está relacionada mais precisamente com a variabilidade das variáveis envolvidas no comportamento da estrutura. Essa variabilidade apresenta-se nos sistemas estruturais sob a forma de incertezas. De forma a contribuir para o entendimento dos tipos de incertezas, apresenta-se a seguir uma classificação conforme Melchers (1999):

- a) incertezas fenomenológicas: associadas à ocorrência de eventos imprevisíveis, devido ao desconhecimento de qualquer aspecto de um possível comportamento estrutural sob condições de serviço ou condições extremas;
- b) incertezas de avaliação: associadas à definição e à quantificação do desempenho do sistema estrutural, bem como à caracterização dos estados limites;
- c) incertezas do modelo: associadas às simplificações e às hipóteses adotadas na modelagem do sistema estrutural, ao emprego de novos materiais, ao uso de técnicas construtivas. Esse tipo de incerteza é devido, em geral, à falta de conhecimento, mas pode ser reduzida com pesquisa ou aumento da informação disponível;
- d) incertezas estatísticas: associadas à extrapolação dos parâmetros estatísticos extraídos de populações finitas;
- e) incertezas devidas a fatores humanos: associadas aos erros humanos ou à intervenção humana no comportamento do sistema estrutural;

- f) incertezas físicas: associadas à aleatoriedade inerente às variáveis de projeto. Podem ser reduzidas com aumento dos dados disponíveis, ou em alguns casos, com o controle de qualidade.

A confiabilidade pode ser prevista com base nos modelos mecânicos que governam a falha e na descrição estatística das variáveis de resistência e de solicitação. O enfoque probabilístico adotado para a análise de confiabilidade de estruturas se deve ao fato de que importantes parâmetros envolvidos são de natureza aleatória. Um exemplo seria a ação do vento sobre uma estrutura. Adicionalmente, entende-se que devido à necessidade de se avaliar a aleatoriedade relacionada, por exemplo, à tensão de escoamento do aço, ao módulo de elasticidade, às tensões residuais, às imperfeições geométricas e às solicitações diversas, é que se parte para a realização de uma análise de confiabilidade.

Entende-se que o uso da teoria da confiabilidade deve ser ampliado para possibilitar uma melhor avaliação da probabilidade de falha e conseqüente obtenção de estruturas mais seguras.

## **1.2 JUSTIFICATIVAS E OBJETIVOS**

Verifica-se atualmente o desenvolvimento da indústria da construção civil com a aplicação de materiais mais resistentes e de novas técnicas construtivas. Paralelamente a esse desenvolvimento ocorre a demanda crescente por estruturas mais econômicas, o que implica na adoção de coeficientes parciais de segurança que atendam ao mínimo admitido em normas. Para atender a essas exigências, torna-se cada vez mais necessária a utilização de ferramentas de análise que considerem o comportamento não linear da estrutura e dos materiais, uma vez que a busca por economia implica no emprego de elementos mais esbeltos e também na consideração da resistência limite do material, o que aumenta a probabilidade da manifestação de efeitos não lineares. Diante dessa realidade existe o questionamento natural do atendimento à segurança estrutural por parte dessas estruturas. Nesse contexto é que se justifica a inserção da avaliação de confiabilidade estrutural de estruturas projetadas com a consideração, em certo nível, de comportamentos não lineares, denominada também de análise avançada.

A pesquisa em questão está vinculada ao estudo e implementação computacional conjunta de teorias existentes relacionadas à confiabilidade estrutural e também relacionadas à análise avançada de estruturas. A realização dessa pesquisa é um primeiro passo do grupo na busca da avaliação da segurança estrutural de pórticos metálicos projetados com análise avançada.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um programa computacional para a análise de confiabilidade estrutural. Esse programa será composto por módulos interligados que realizarão a análise de confiabilidade e a análise estrutural de pórticos planos metálicos. A análise de confiabilidade será realizada com base no método FORM. Já para a análise estrutural de pórticos planos será utilizado o programa CS-ASA (Silva, 2009b), desenvolvido por pesquisadores da UFOP, o qual possui recursos para considerar o comportamento semirrígido das ligações, a não linearidade física e também geométrica na análise da estrutura. Para o presente trabalho, os comportamentos não linear geométrico da estrutura e semirrígido das ligações serão levados em conta, de forma conjunta, na análise de confiabilidade.

### **1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

O presente texto foi dividido em uma parte introdutória, Capítulo 1, que busca apresentar algumas considerações iniciais e aspectos gerais sobre o tema proposto para a tese, posteriormente tem-se uma justificativa para a escolha do tema em questão e os objetivos que se pretende alcançar. O Capítulo 2 foi elaborado buscando-se apresentar a teoria de Confiabilidade Estrutural relacionada aos objetivos. No Capítulo 3 estão descritos os aspectos relativos à teoria de Análise Avançada pertinentes ao presente trabalho. Compondo o Capítulo 4 tem-se a primeira parte tratando especificamente do módulo criado, e a segunda parte que explica como foi realizado o acoplamento entre o Módulo de Confiabilidade Estrutural (MCE) e o Programa de Análise Estrutural CS-ASA (Silva, 2009b) O Capítulo 4 também aborda aspectos de utilização do MCE. No Capítulo 5 apresentam-se exemplos de análise de confiabilidade estrutural assim como as interpretações e comparações dos resultados. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões referentes ao presente trabalho.



## **CAPÍTULO 2**

### **CONFIABILIDADE ESTRUTURAL**

O presente capítulo abordará aspectos teóricos envolvendo a confiabilidade estrutural, assim como resultados de implementações computacionais relacionadas com esse assunto. Buscou-se com essa abordagem criar a base para a implementação computacional de um método de análise de confiabilidade estrutural acoplado a um programa de análise estrutural.

#### **2.1 NÍVEIS DOS MÉTODOS DE PROJETO**

Os métodos de confiabilidade estrutural são divididos em níveis, de acordo com o volume de informação disponível sobre o problema estrutural. Assim sendo, os métodos que utilizam o formato de tensões admissíveis são chamados de Métodos de Nível 0, pois utilizam um fator de segurança para as tensões elásticas. Os métodos semi-probabilísticos empregam um valor característico para cada variável incerta, como o Método dos Estados Limites, e são nomeados Métodos de Nível I. Nos Métodos de Nível II utilizam-se dois valores (usualmente média e variância) para cada variável incerta com o objetivo de obter um índice de confiabilidade. Os Métodos de Nível III utilizam a função densidade de probabilidade das variáveis incertas para a determinação da probabilidade de falha da estrutura (usada como medida de sua confiabilidade). Por fim, os Métodos de Nível IV combinam a confiabilidade de estruturas com a otimização de estruturas, atendendo, portanto, não somente a critérios de segurança, mas também de economia.

Para as futuras análises previstas no presente trabalho será utilizado um método que se enquadra na denominação Método de Nível III. Essa escolha se justifica, pois ao utilizar funções densidade de probabilidade tem-se melhor representação do comportamento aleatório de determinada variável, o que contribuirá para uma melhor previsão do comportamento da estrutura.

## 2.2 TIPOS DE VARIÁVEIS

Em termos de probabilidade existem dois tipos de eventos ou experimentos: determinísticos e não determinísticos. Quando existe uma previsão dos resultados é caracterizado o primeiro tipo de experimento. De outra forma, quando os resultados não são previsíveis, tem-se um evento não determinístico ou aleatório. Esse último tipo de evento somente pode ser previsto em termos de uma probabilidade de ocorrência. Associado a esses tipos de eventos, determinísticos ou não, tem-se respectivamente as variáveis determinísticas e as variáveis randômicas ou aleatórias. Com relação às variáveis aleatórias existe a subdivisão em discretas e contínuas. Quando a variável pode assumir valores aleatórios dentro de um conjunto enumerável é dita discreta, mas se a variável pode assumir qualquer valor dentro de um conjunto não enumerável, é dita contínua.

### 2.2.1 VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

A probabilidade de uma variável aleatória discreta  $X$  assumir um valor específico  $X_i$  pode ser determinada com base na função massa de probabilidade  $f_X(X_i)$ , como explicitado a seguir:

$$P(X = X_i) = f_X(X_i) \quad (2.1)$$

A função massa de probabilidade deve satisfazer aos axiomas da probabilidade caracterizados por:

$$0 \leq f_X(X_i) \leq 1 \quad (2.2a)$$

$$\sum_{i=1}^N f_X(X_i) = 1 \quad (2.2b)$$

A função de probabilidade acumulada ou Cumulative Density Function (CDF) de uma variável aleatória discreta é definida a seguir. Utiliza-se a CDF para determinar a probabilidade da variável aleatória  $X$  assumir um valor menor ou igual a  $X_i$ , ou seja:

$$F_X(X_i) = P(X \leq X_i) = \sum_{j=1}^i f_X(X_j) \quad (2.3)$$

## 2.2.2 VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

Se existe a necessidade de definir a probabilidade de uma variável aleatória  $X$  contínua assumir um valor dentro de certo intervalo, é necessário conhecer a função densidade de probabilidade  $f_X(X)$  ou Probability Density Function (PDF) dessa variável, isto é:

$$P(X_1 \leq X \leq X_2) = \int_{X_1}^{X_2} f_X(X) dX \quad (2.4)$$

Para que a função  $f_X(X)$  seja considerada uma PDF, é necessário o atendimento das equações:

$$P(X_0 \leq X \leq X_1) = \int_{X_0}^{X_1} f_X(X) dX \quad (2.5a)$$

$$P(-\infty \leq X \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) dX = 1 \quad (2.5b)$$

$$f_X(X) \geq 0, \text{ para qualquer } X \quad (2.5c)$$

A CDF de uma variável aleatória contínua é definida conforme:

$$F_X(X_0) = P(X \leq X_0) = \int_{-\infty}^{X_0} f_X(X) dX \quad (2.6)$$

A CDF de uma variável aleatória contínua é uma função não decrescente em que  $P(X \leq X_1) \leq P(X \leq X_2)$  sendo  $X_1 \leq X_2$ . Outro aspecto intrínseco a uma CDF é que  $F_X(-\infty) = 0$  e  $F_X(+\infty) = 1$ .

Cabe também ressaltar que uma função PDF pode ser obtida a partir da derivada primeira de sua CDF:  $f_X(X) = dF_X(X) / dX$ .

## 2.3 VALORES CARACTERÍSTICOS DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

A utilização de valores característicos como média, valor quadrado médio, variância, desvio padrão, coeficiente de variação e coeficiente de assimetria é necessária para a descrição de uma população ou amostra. A determinação desses valores característicos ocorre a partir do emprego do conceito de expectância ou esperança.

A expectância da função  $g(X)$  da variável aleatória  $X$  é caracterizada matematicamente conforme apresentado a seguir:

$$E\langle g(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(X) dX \quad (2.7)$$

em que  $f_X(X)$  é a PDF da variável aleatória  $X$ .

A determinação da média ( $\mu$ ), primeiro momento em relação à origem, ocorre por meio da Equação (2.7) com  $g(X) = X$ . Assim, tem-se a expressão para o cálculo da média de uma população ( $\mu_X$ ) de uma variável aleatória  $X$  que é dado por:

$$\mu_X = E\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X f_X(X) dX \quad (2.8)$$

O valor quadrado médio, segundo momento em relação à origem, também é obtido a partir da Equação (2.7) porém agora com  $g(X) = X^2$ . A expressão para o cálculo do valor quadrado médio está descrita abaixo:

$$E\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f_X(X) dX \quad (2.9)$$

A variância de uma população (*var* ou  $\sigma^2$ ), segundo momento em relação à média, está definida matematicamente a seguir:

$$\sigma^2 = E\langle (X - \mu_X)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_X)^2 f_X(X) dX \quad (2.10)$$

O desvio padrão para uma variável aleatória é obtido com o cálculo da raiz quadrada da variância. Assim como a média, o desvio padrão também possui a mesma unidade da variável aleatória em questão, isto é:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma^2} \quad (2.11)$$

O coeficiente de variação ( $\delta$ ) é também um valor característico de uma variável aleatória definido pela razão entre o desvio padrão e a média, resultando portanto, numa grandeza adimensional, ou seja:

$$\delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (2.12)$$

Finalizando, tem-se a expressão para o cálculo do coeficiente de assimetria  $\lambda_X$  de uma população, que é a medida do terceiro momento em relação à média obtida por:

$$\lambda_X = E\langle (X - \mu_X)^3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_X)^3 f_X(X) dX \quad (2.13)$$

Assim, uma distribuição simétrica tem  $\lambda = 0$ . Para  $\lambda > 0$  tem-se uma distribuição com cauda maior a direita da média e para  $\lambda < 0$  uma distribuição com cauda maior a esquerda da média.

## 2.4 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE CONTÍNUAS

No Apêndice A são apresentadas as expressões das distribuições comumente utilizadas em confiabilidade estrutural como, por exemplo, normal, lognormal e extremo tipo 1. Nesse apêndice são fornecidas as funções PDF com suas respectivas CDF, média, desvio padrão e também parâmetros específicos.

## 2.5 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONJUNTAS

Frequentemente existe a presença de duas ou mais variáveis aleatórias na solução de problemas de engenharia. Em geral são encontrados dois tipos de situações: ocorrência conjunta de variáveis aleatórias que podem ser correlacionadas ou não, e ocorrência de variáveis aleatórias para as quais se conhece a relação com outras variáveis aleatórias básicas.

De forma semelhante ao tratamento dado a uma única variável aleatória, a função densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é definida conforme:

$$P(x < X < x + dx, y < Y < y + dy) = f_{x,y}(x, y) dx dy \quad (2.14)$$

A função densidade de probabilidade acumulada é definida da seguinte forma:

$$F_{x,y}(x, y) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{x,y}(x, y) dx dy \quad (2.15)$$

Para que a função  $f_{x,y}(x,y)$  conjunta seja considerada uma PDF é necessário que:

$$f_{x,y}(x, y) \geq 0 \quad \text{p/ qualquer } x \text{ e } y \quad (2.16a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x, y) dx dy = 1 \quad (2.16b)$$

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{x,y}(x, y) dx dy \quad (2.16c)$$

Se existir a necessidade de determinar a PDF conjunta das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  a partir da CDF conjunta utiliza-se a derivada parcial como indicado na equação abaixo:

$$f_{x,y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{x,y}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

De outra forma, é possível obter a PDF conjunta das variáveis  $X$  e  $Y$  a partir das funções  $f_x(x)$  e  $f_y(y)$  quando  $X$  e  $Y$  são estatisticamente independentes, ou seja:

$$f_{x,y}(x, y) = f_x(x) f_y(y) \quad (2.18)$$

Caso seja de interesse determinar as distribuições marginais  $f_x(x)$  e  $f_y(y)$  de cada uma das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  conhecendo-se  $f_{x,y}(x,y)$ , emprega-se as equações:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x, y) dy \quad (2.19a)$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x, y) dx \quad (2.19b)$$

### 2.5.1 FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Frequentemente ocorrem problemas de engenharia em que uma variável dependente é função de uma ou mais variáveis aleatórias independentes. Suponha uma variável aleatória  $X$ . Se  $Z$  é definida como uma variável dependente em termos de uma função  $Z = g(X)$ , então  $Z$  também é uma variável aleatória. Se a variável  $X$  é definida por uma PDF  $f_X(x)$  contínua e a função  $g(X)$  também é contínua então  $Z = g(x)$  é uma variável aleatória com uma PDF  $f_Z(z)$ , que pode ser determinada perante certas condições. Uma situação usual em que  $Z = g(x)$  é uma combinação linear de constantes reais  $a_i$  e variáveis aleatórias  $X_i$  normais estatisticamente independentes:

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (2.20)$$

### 2.6 VALORES CARACTERÍSTICOS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONJUNTAS

A covariância entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é definida também com base em expectância, isto é:

$$\text{cov}(X, Y) = E\langle (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \rangle = E\langle XY \rangle - E\langle X \rangle E\langle Y \rangle \quad (2.21)$$

As expectâncias  $E\langle XY \rangle$ ,  $E\langle X \rangle$  e  $E\langle Y \rangle$  são obtidas por meio das seguintes equações:



$$E\langle XY \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} XY f_{XY}(x, y) dx dy \quad (2.22a)$$

$$E\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X f_X(x) dx = \mu_X \quad (2.22b)$$

$$E\langle Y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Y f_Y(y) dy = \mu_Y \quad (2.22c)$$

Quando as variáveis  $X$  e  $Y$  são estatisticamente independentes  $E\langle XY \rangle = E\langle X \rangle E\langle Y \rangle = \mu_X \mu_Y$ , logo tem-se  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

O coeficiente de correlação  $\rho_{XY}$  é definido como a covariância normalizada perante os desvios padrão das variáveis  $X$  e  $Y$ , isto é:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.23)$$

Se o coeficiente de correlação é zero significa que não existe uma relação linear entre  $X$  e  $Y$ . No entanto isso não é uma garantia da inexistência de outro tipo de relação entre essas variáveis. O valor de  $\rho_{XY}$  varia entre -1 e 1. O sinal positivo ou negativo de  $\rho_{XY}$  reflete na inclinação da reta interpolada a partir de valores de  $X$  e  $Y$ .

A média e a variância são determinadas para o caso da Equação (2.20) em que a função  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  é uma combinação linear, através das expressões:

$$\mu_Z = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i} \quad (2.24)$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j) \quad (2.25)$$

A variância também pode ser obtida a partir dos coeficientes de correlação e desvios padrão, conforme indicado:

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \rho_{X_i, X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \quad (2.26)$$

Se as variáveis aleatórias forem estatisticamente não correlacionadas a variância será obtida utilizando-se a equação abaixo:

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (2.27)$$

### 2.6.1 MÉDIA E VARIÂNCIA DE UMA FUNÇÃO GERAL

Para a função  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , em que  $g(X_i)$  é uma função qualquer das variáveis aleatórias  $X_i$ , uma aproximação da média e da variância de  $Z$  podem ser obtidas através da linearização de  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  em torno das médias das variáveis aleatórias utilizando-se série de Taylor. Nesse caso,  $Z$  assume a forma:

$$Z = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^n \left( (x_i - \mu_{x_i}) \frac{\partial g(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_i} \right)_{\mu_{x_i}} \quad (2.28)$$

já as aproximações de  $\mu_z$  e  $\sigma_z^2$  são definidas, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$\mu_z = E\langle Z \rangle \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (2.29)$$

$$\sigma_z^2 = Var(z) \approx \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_i} \right|_{\mu_{X_i}} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (2.30)$$

## 2.6.2 MÉDIA E VARIÂNCIA DE UM PRODUTO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS LOGNORMAIS

Seja o produto  $Z=X_1X_2,\dots,X_n$ , em que  $X_i$  são variáveis lognormal estatisticamente independentes. Para esse produto tem-se  $\ln(Z)$  definido conforme indicado:

$$\ln(Z) = \ln(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \ln X_i \quad (2.31)$$

Se  $X_i$  é lognormal, então  $\ln X_i$  é normal, e portanto a média e a variância podem ser determinadas conforme exposto a seguir:

$$\mu_{\ln Z} = \mu_{\ln X_1} + \mu_{\ln X_2} + \dots + \mu_{\ln X_n} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{\ln Z}^2 = \sigma_{\ln X_1}^2 + \sigma_{\ln X_2}^2 + \dots + \sigma_{\ln X_n}^2 \quad (2.33)$$

## 2.7 DISTRIBUIÇÃO NORMAL EQUIVALENTE

Em algumas situações é necessário obter uma distribuição normal equivalente num ponto  $x^*$  para uma variável aleatória  $X$ , cuja distribuição de probabilidade não é normal. Para isso igualam-se as PDFs e CDFs da distribuição normal e da distribuição da variável  $X$  no ponto  $x^*$ . Esse procedimento é indicado abaixo:

$$\Phi\left(\frac{x^* - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) = F_X(x^*) \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{\sigma_X^N} \varphi\left(\frac{x^* - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) = f_X(x^*) \quad (2.35)$$

Na Equação (2.34) o termo  $\Phi(\ )$  representa a CDF da distribuição normal padrão e, na Equação (2.35), o termo  $\varphi(\ )$  representa a PDF da distribuição normal padrão.

Resolvendo o sistema de equações formado por (2.34) e (2.35) chega-se no desvio padrão e na média da distribuição normal equivalente, ou seja:

$$\sigma_X^N = \frac{\varphi\{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\}}{f_X(x^*)} \quad (2.36)$$

$$\mu_X^N = x^* - \sigma_X^N \Phi^{-1}[F_X(x^*)] \quad (2.37)$$

Nas equações anteriores o termo  $\Phi^{-1}[\ ]$  representa a inversa da CDF da distribuição normal padrão.

## 2.8 ESTADO LIMITE

O estado limite é a situação crítica em que a estrutura torna-se não segura. De outra forma, pode-se dizer que a estrutura, ou parte dela, não satisfaz a uma condição específica do projeto estrutural. Existem dois tipos de estado limite: ruptura e serviço.

O estado limite de ruptura, ou último, para a estrutura ou para os membros da estrutura inclui:

- a) perda de equilíbrio global ou local quando avaliada como corpo rígido;

- b) superação do limite de resistência do material devido à ação de cargas estáticas ou dinâmicas;
- c) formação de mecanismo em parte da estrutura ou para toda a estrutura;
- d) perda de estabilidade global ou local devido à ocorrência de flambagem.

O estado limite de serviço para a estrutura ou para os membros da estrutura inclui:

- a) deformação estrutural que afete a utilização normal da estrutura;
- b) fissuração que afete a utilização normal da estrutura e sua durabilidade;
- c) vibração estrutural excessiva afetando a utilização.

Outras situações também podem ocorrer e afetar a utilização da estrutura. Normalmente, tendo em vista as definições relacionadas ao estado limite, entende-se que a estrutura será considerada confiável somente quando atender às seguintes condições:

- a) capacidade de resistir a todos os tipos de carregamento na fase de construção e utilização;
- b) manter desempenho em condições normais de uso;
- c) durabilidade;
- d) manter integridade estrutural durante e após terremotos, quando aplicável, e incêndios.

Portanto, para que determinada estrutura seja caracterizada como confiável ou não é necessário que a mesma atenda a diferentes estados limites. Adicionalmente e principalmente para o caso da presente tese é necessário levar em conta a variabilidade das variáveis que afetam o atendimento do estado limite. Normalmente a confiabilidade é avaliada quanto ao atendimento de um estado limite de deslocamento em serviço e quanto ao atendimento a um estado limite último de resistência.

## **2.9 PROBABILIDADE DE FALHA E CONFIABILIDADE ESTRUTURAL**

Para Li e Li (2007), a confiabilidade estrutural é a medida probabilística da integridade estrutural e da viabilidade de utilização. Segundo esses autores, também pode ser definida como a probabilidade da estrutura satisfazer a requisitos de desempenho definidos para determinado tempo e perante condições específicas. O termo tempo na afirmação anterior diz respeito ao

período, normalmente em anos, em que a estrutura será considerada confiável; desde que as condições para as quais a estrutura foi projetada não se alterem.

Se a resistência estrutural ( $R$ ) e o efeito do carregamento ( $S$ ) são variáveis aleatórias, uma estrutura absolutamente confiável, em que a probabilidade de falha ( $P_f$ ) é igual a zero ou a confiabilidade ( $C$ ) é igual a um, não existe. Do ponto de vista da probabilidade, o objetivo do projeto estrutural é tornar  $C$  suficientemente grande ou tornar  $P_f$  suficientemente pequeno.

Na teoria clássica da confiabilidade, as ações estruturais  $S$  e a resistência  $R$  são modeladas por variáveis aleatórias. O objetivo da análise de confiabilidade é assegurar o evento ( $R > S$ ) durante toda vida útil da estrutura. Essa garantia é possível somente em termos de probabilidade:  $P(R > S)$ .

Na representação mais simples, a falha ocorre se  $R$  for menor do que  $S$ . A probabilidade de falha  $P_f$  será portanto:  $P(R < S)$ . A partir da  $P_f$  define-se confiabilidade  $C$ :  $C = 1 - P_f$ .

Para as funções de  $R$  e  $S$  conhecidas, contínuas e estatisticamente independentes, a  $P_f$  pode ser calculada utilizando-se a equação a seguir:

$$P_f = P(R < S) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds \quad (2.38)$$

com  $F_R(s)$  sendo a CDF de  $R$  e  $f_S(s)$  a PDF de  $S$ .

A equação anterior é a integração em relação a  $s$ , e pode ser explicada com base na Figura 2.1 como segue: se  $S = s$ , a probabilidade condicional de falha seria  $F_R(s)$ ; mas desde que  $S = s$  (ou mais precisamente  $s < S < s + ds$ ) esteja associada com a probabilidade  $f_S(s)ds$ , a integração sobre todos os valores de  $S$  resulta na Equação (2.38).

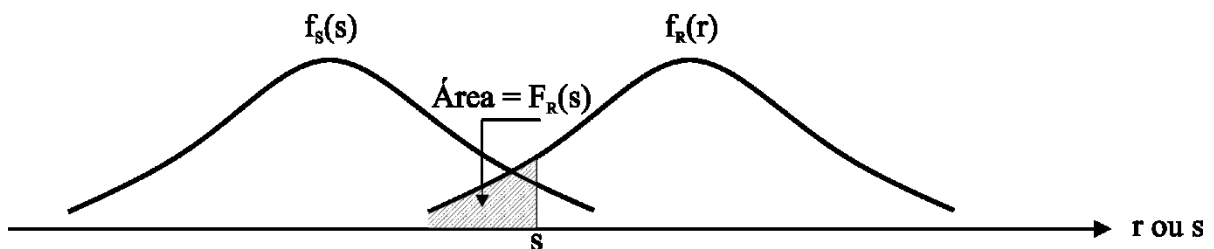


Figura 2.1 - Funções densidade de probabilidade  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  (adaptado de Ang e Tang, 1984)

Com relação à sobreposição, observa-se que essa região depende das posições relativas de  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$ , como pode ser visto na Figura 2.2a. Quando as duas curvas ficam mais afastadas

a  $P_f$  diminui, e quando as duas curvas ficam mais próximas a  $P_f$  aumenta. Outro aspecto diz respeito ao fato da região de sobreposição depender do grau de dispersão de  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$ , como mostra a Figura 2.2b. Mantidos os valores das médias e aumentando-se a dispersão de  $f_R(r)$  ou de  $f_S(s)$ , ou de ambas, observa-se que a região de sobreposição aumenta.

As relações entre as cargas e as resistências são muito importantes. A probabilidade de falha como consequência das cargas excederem as resistências pode ser modelada por meio da teoria da probabilidade, pois as cargas e as resistências apresentam variabilidade podendo, portanto, serem modeladas por funções densidade de probabilidade (Lafraia, 2001).

O cálculo da confiabilidade ou da probabilidade de falha utilizando a Equação (2.38) requer que as funções densidade de probabilidade  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  sejam conhecidas. Na prática, essa informação nem sempre está disponível ou é difícil de ser obtida devido à insuficiência de dados ou devido à variação para diferentes ações estruturais e estados limites. Outra dificuldade seria manipular a integração numérica no contexto iterativo típico de um dimensionamento. No entanto, frequentemente as informações disponíveis são suficientes para estimar o primeiro e segundo momentos (média e variância) das variáveis aleatórias (Ang e Tang, 1984). Com base na média e variância das variáveis de projeto consideradas aleatórias, é possível obter uma estimativa da confiabilidade.

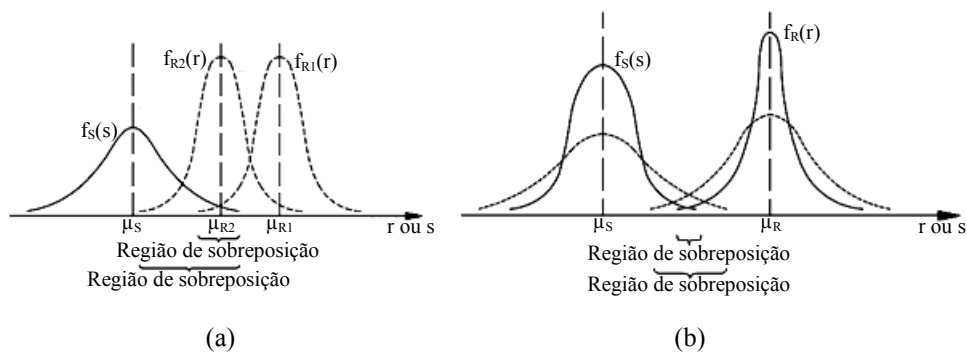


Figura 2.2 - (a) Efeito da posição relativa entre  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  em  $P_f$  e (b) efeito da dispersão em  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  em  $P_f$  (adaptado de Ang e Tang, 1984)

## 2.10 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE

Quando não existir informações sobre as distribuições de probabilidade a confiabilidade pode ser medida em função do primeiro e do segundo momento (média e variância,

respectivamente) das variáveis de cálculo, obtendo-se o índice de confiabilidade ( $\beta$ ). Caso as formas apropriadas das distribuições sejam conhecidas, a probabilidade correspondente pode ser avaliada com base nas distribuições normais equivalentes (Ang e Tang, 1984).

Retornando à função  $Z = R - S$  e como  $R$  e  $S$  são variáveis aleatórias,  $Z$  é também uma variável aleatória. Se  $R$  e  $S$  são normais tem-se que:

$$P_f = P(Z \leq 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta) \quad (2.39)$$

em que  $\mu_Z = \mu_R - \mu_S$ ,  $\sigma_Z = (\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2}$ ,  $\Phi(\cdot)$  é a CDF da distribuição normal padrão e  $\beta$  é o índice de confiabilidade de Cornell, definido a seguir:

$$\beta_C = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (2.40)$$

O índice de confiabilidade foi introduzido na tentativa de se evitar as dificuldades conceituais e práticas (problemas na avaliação numérica da probabilidade de falha, falta de dados e erros de modelagem) com o uso da Equação (2.38). Em sua implementação inicial, o índice de confiabilidade  $\beta$  foi avaliado simplesmente em função das médias e dos desvios-padrão da resistência e das ações estruturais, como indicado na Equação (2.40). Posteriormente,  $\beta$  passou a ser calculado utilizando-se uma aproximação de primeira ordem da média e da variância obtidas linearizando-se  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  em torno das médias das variáveis aleatórias estatisticamente não correlacionadas e utilizando-se Série de Taylor. Esse procedimento recebeu a denominação First-Order Second-Moment (FOSM). Em seguida, esse método, aprimorado, passou a ser calculado num ponto (ponto de projeto) na superfície de falha no espaço das variáveis reduzidas (Equações 2.41, 2.42, 2.43, 2.44 e 2.45) e recebeu a denominação Advanced FOSM (AFOSM); com validade para funções de performance lineares e não lineares. Mais tarde, as técnicas para incorporar informações sobre as distribuições de probabilidade foram desenvolvidas, conduzindo aos métodos analíticos de confiabilidade First-Order Reliability Method (FORM) e Second-Order Reliability Method (SORM). Esses métodos serão abordados com maior detalhe na sequência do capítulo.



## 2.11 FUNÇÃO DE DESEMPENHO

A função de desempenho pode ser expressa das seguintes formas:  $Z = R - S$  ou  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Nesse último caso  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são  $n$  variáveis aleatórias básicas de  $R$  e  $S$ . A função  $g(X_i)$  descreve a relação entre  $R$  e  $S$  e as variáveis aleatórias básicas. A falha de uma estrutura ou elemento estrutural é caracterizada quando  $g(X_i) < 0$ , a sobrevivência ou segurança quando  $g(X_i) > 0$ , e o estado limite quando  $g(X_i) = 0$ , que define a superfície de falha. Diante desses conceitos define-se também a  $P_f$  como  $P[g(X_i) \leq 0]$ .

A Figura 2.3 ilustra geometricamente a equação do estado limite,  $g(X_1, X_2) = 0$ , que é uma superfície n-dimensional e pode ser chamada de “superfície de falha”. De um lado desta superfície está a região de segurança,  $g(X_1, X_2) > 0$ , enquanto do outro lado, a região de falha,  $g(X_1, X_2) < 0$  (Ang e Tang, 1984).

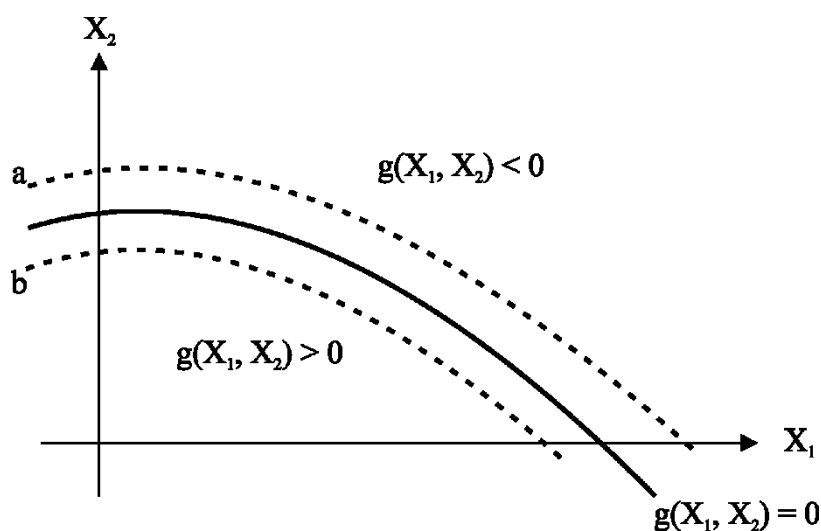


Figura 2.3 - Região de falha, superfície de falha e região de segurança no espaço das variáveis reduzidas (adaptado de Ang e Tang, 1984)

Analisando a Figura 2.3, se a superfície de falha,  $g(X_1, X_2) = 0$ , se afasta (linha tracejada “a”) ou se aproxima (linha tracejada “b”) da origem, a região de segurança  $g(X_1, X_2) > 0$  aumenta ou diminui, respectivamente. Portanto, a posição da superfície de falha em relação à origem das variáveis reduzidas determinará a segurança ou a confiabilidade do sistema.

## 2.12 FIRST-ORDER SECOND-MOMENT (FOSM)

Considerando a função  $Z = R - S$  ou  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  e as expressões (2.28), (2.29) e (2.30), define-se o índice de confiabilidade  $\beta = \mu_Z / \sigma_Z$  e, portanto, o método FOSM para o cálculo da confiabilidade.

Cabe ressaltar que a função  $g(X_i)$  é linearizada nos valores médios das variáveis aleatórias podendo ocorrer erros significativos caso essa função seja não linear. Outro problema é a possibilidade de ocorrer resultados diferentes com a utilização de formulações mecanicamente equivalentes do mesmo problema como  $Z = R / S$ . Outra fonte de erros é a desconsideração do tipo de distribuição das variáveis aleatórias envolvidas. Esperam-se bons resultados para esse método quando estão envolvidas variáveis aleatórias com distribuição normal e a função  $g(X_i)$  sendo linear.

## 2.13 ADVANCED FOSM (AFOSM)

Para a função de desempenho  $Z = R - S$ , com  $R$  e  $S$  normais, é possível obter-se um valor para  $\beta$  introduzindo-se as seguintes variáveis reduzidas  $s$  e  $r$ :

$$s = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (2.41)$$

$$r = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (2.42)$$

A partir da função de desempenho  $Z = R - S$  e utilizando as equações anteriores, obtém-se a função de desempenho conforme:

$$Z = (\sigma_R r + \mu_R) - (\sigma_S s + \mu_S) \quad (2.43)$$

O estado limite  $Z = 0$ , em termos das variáveis reduzidas, resulta em:

$$s = r \frac{\sigma_R}{\sigma_S} + \frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_S} \quad (2.44)$$

que é uma linha reta como representado na Figura 2.4. A distância, indicada na Figura 2.4, da superfície de falha (linear) à origem, é uma medida de confiabilidade. Essa distância, também denominada  $\beta$ , é determinada utilizando-se a equação a seguir:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (2.45)$$

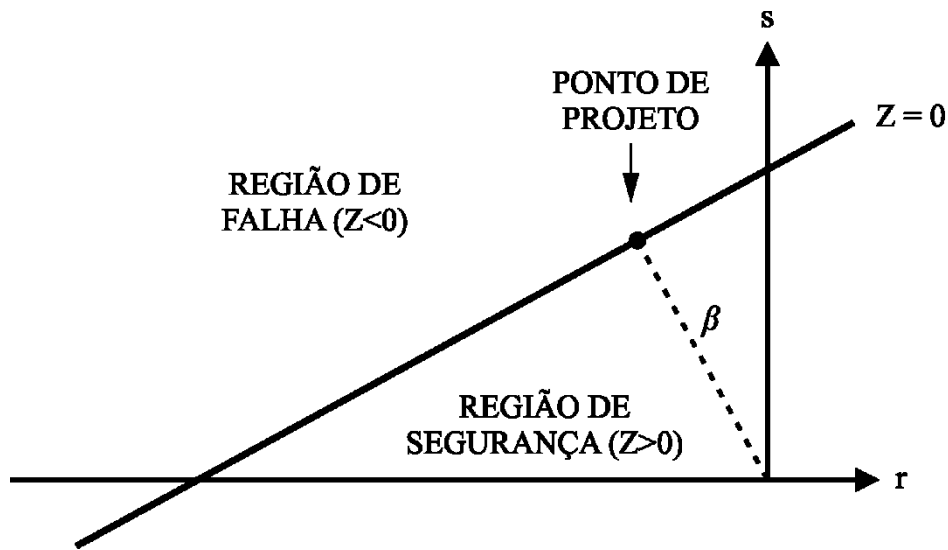


Figura 2.4 - Distância da origem à superfície de falha no espaço das variáveis reduzidas (adaptado de Ang e Tang, 1984)

A posição da superfície de falha pode ser representada pela distância mínima da superfície  $g(X_i) = 0$  até a origem das variáveis reduzidas (Ang e Tang, 1984). Segundo Shinozuka (1983), o ponto na superfície de falha com distância mínima até a origem é o ponto mais provável de falha. Essa distância mínima pode ser usada como uma medida de confiabilidade.

Caso a função de desempenho seja não linear, utiliza-se também a Equação (2.45) para o cálculo do índice de confiabilidade  $\beta$ . Nesse caso  $\beta$  é obtido aproximando-se a superfície de falha por uma tangente a essa superfície no ponto de menor distância à origem (ponto de

projeto). Reforçando, quando a função de desempenho é do tipo  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , não linear, e com variáveis aleatórias básicas não correlacionadas o índice de confiabilidade também é definido como a menor distância da origem à superfície de falha nas coordenadas reduzidas. Nessa situação utiliza-se um algoritmo numérico para obter-se  $\beta$ .

Tratando-se de distribuições não normais para as variáveis aleatórias básicas também é possível utilizar-se o método AFOSM, desde que seja determinada a cada iteração do algoritmo numérico uma distribuição normal equivalente naquele ponto.

## 2.14 FIRST-ORDER RELIABILITY METHOD (FORM)

O método FORM também calcula a confiabilidade com base na distância da função de falha linearizada até a origem do espaço reduzido das variáveis normais padrão estatisticamente independentes. De uma forma geral, o método FORM apresenta vantagens com relação a outros métodos, quando o objetivo é obter uma aproximação para a probabilidade de falha. Algumas vantagens são consideradas principais, pois têm definido o uso desse método analítico nas avaliações de confiabilidade: boa precisão, não apresenta dificuldades de programação e pouco tempo de processamento computacional. Na sequência do texto apresenta-se, de acordo com Sagrilo (2004), as etapas que compõem o método FORM.

Uma das etapas desse método é a transformação das variáveis  $\mathbf{U}$ , cujas distribuições são quaisquer, podendo ser dependentes entre si ou não, em variáveis  $\mathbf{V}$  normais padrão estatisticamente independentes. Embora existam diferentes possibilidades para essa transformação utiliza-se normalmente a transformação de Nataf (Melchers, 1999) definida por:

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{U} - \mathbf{m}) \quad (2.46)$$

em que  $\mathbf{m}$  é o vetor com as médias das variáveis  $\mathbf{U}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  é uma matriz diagonal contendo os desvios padrões das variáveis  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{L}^{-1}$  com  $\mathbf{L}$  sendo a matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação de  $\mathbf{U}$ .

Nesse momento, a função de desempenho  $G(\mathbf{U})$  é escrita em função das variáveis no espaço  $\mathbf{V}$ , portanto  $g(\mathbf{V})$ . A superfície de falha definida por  $g(\mathbf{V}) = 0$  é aproximada por uma

superfície linear coincidente com a superfície  $g(\mathbf{V})$  no ponto em que se tem a menor distância até a origem do sistema reduzido.

Caso existam variáveis  $U_i$  e  $U_j$  com distribuições de probabilidade qualquer, porém dependentes entre si segundo o coeficiente de correlação  $\rho_{ij}$ , determina-se o coeficiente de correlação equivalente  $\rho^{E_{ij}} = F\rho_{ij}$  entre as distribuições normais equivalentes. O termo  $F$  assume valor dependente de  $\rho_{ij}$  e dos coeficientes de variação das variáveis  $U_i$  e  $U_j$ .

Outra etapa importante desse método é a busca ao ponto de menor distância até a origem do sistema reduzido, também denominado ponto de projeto e representado da seguinte forma:  $\mathbf{V}^*$ . Para obter o ponto  $\mathbf{V}^*$  é necessário seguir o procedimento de otimização indicado a seguir:

$$\text{minimizar } |\mathbf{V}| \quad |g(\mathbf{V})=0 \quad (2.47)$$

O problema de otimização apresentado na Equação (2.47) pode ser resolvido por diferentes algoritmos. Utiliza-se comumente o algoritmo denominado HLRF, desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) e aprimorado por Rackwitz e Fiessler (1978). O processo iterativo gerado por esse algoritmo caminha em busca do ponto  $\mathbf{V}^*$  resolvendo a seguinte equação:

$$\mathbf{V}^{i+1} = \frac{1}{|\nabla g(\mathbf{V}^i)|^2} \left[ \nabla g(\mathbf{V}^i)^T \mathbf{V}^i - g(\mathbf{V}^i) \right] \nabla g(\mathbf{V}^i) \quad (2.48)$$

com  $\nabla g(\mathbf{V}^i)$ ,  $\mathbf{V}^i$  e  $g(\mathbf{V}^i)$  obtidos utilizando-se:

$$\nabla g(\mathbf{V}^i) = (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla G(\mathbf{U}^i) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{V}^i = \mathbf{J}(\mathbf{U} - \mathbf{m}) \quad (2.50)$$

$$g(\mathbf{V}^i) = G(\mathbf{U}^i) \quad (2.51)$$

Nas Equações (2.49) e (2.50),  $\mathbf{J}$  é o jacobiano da transformação  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$ , e  $\mathbf{m}$  é a matriz coluna contendo as médias equivalentes das variáveis aleatórias envolvidas.

O algoritmo HLRF (Hasofer e Lind, 1974; Rackwitz e Fiessler, 1978) converge para o ponto  $V^*$  na superfície de falha. Ao ser obtido o ponto de projeto  $V^*$  determina-se a menor distância,  $\beta$ , calculando o módulo do vetor que interliga a origem do sistema reduzido ao ponto  $V^*$ . Durante o processo iterativo checa-se a variação relativa do valor de  $\beta$  e interrompe-se o processo quando essa variação é inferior a um valor aceitável (por exemplo,  $1 \times 10^{-4}$ ). De posse do índice de confiabilidade  $\beta$ , a probabilidade de falha pode ser obtida utilizando-se a Equação (2.39).

A Figura 2.5 fornece uma representação gráfica do método analítico FORM com indicação das principais variáveis calculadas na aplicação desse método. No Apêndice B apresenta-se o algoritmo utilizado para a aplicação do método FORM.

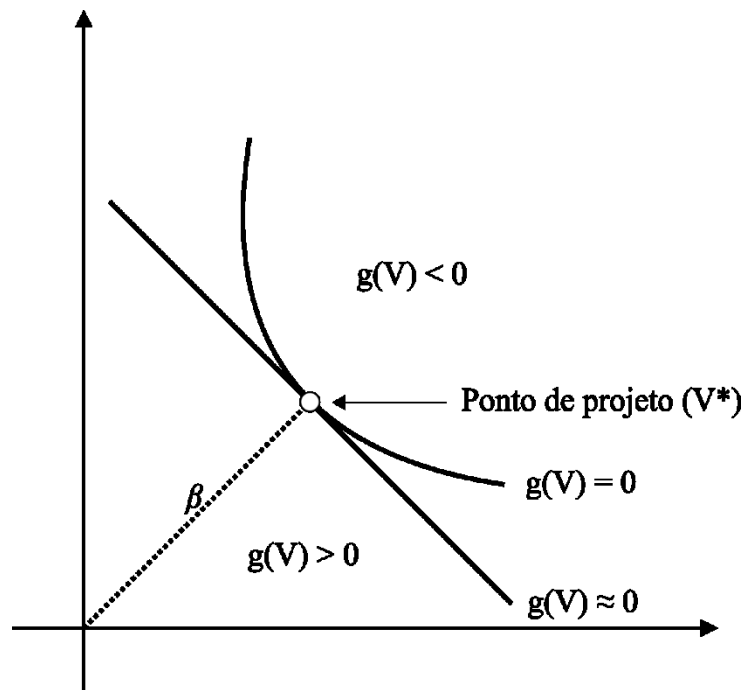


Figura 2.5 - Representação do método FORM indicando o índice de confiabilidade  $\beta$ , ponto de projeto  $V^*$  e função de falha  $g(V)$  no espaço das variáveis reduzidas (adaptado de Sagrilo, 2004)

## 2.15 SECOND-ORDER RELIABILITY METHOD (SORM)

O método SORM segue a mesma ideia do método FORM, a menos da aproximação da superfície de falha no espaço das variáveis reduzidas. Essa aproximação é feita por uma

superfície quadrática no ponto de projeto. No caso do método FORM a aproximação é por uma superfície linear.

Segundo Sagrilo (2004) o cálculo da probabilidade de falha pelo método SORM é normalmente realizado utilizando-se a equação proposta por Breitung (1984) apresentada a seguir:

$$P_f = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta \kappa_i)^{-1/2} \quad (2.52)$$

Na equação anterior o termo  $\kappa_i$  representa as curvaturas principais da superfície de falha no ponto de projeto e o termo  $n$  representa o número de variáveis aleatórias na análise.

## 2.16 MÉTODO DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO

O método de simulação Monte Carlo utiliza amostragem artificial para a solução de experimentos aleatórios onde se tem conhecimento das distribuições de probabilidade das variáveis envolvidas. Dentre suas várias aplicações, tem sido adotado para determinar a confiabilidade de sistemas estruturais (Pulido *et al.*, 1992).

O método de simulação Monte Carlo evoluiu como uma técnica eficiente para engenheiros com conhecimentos básicos de probabilidade e estatística que buscavam avaliar a confiabilidade de sistemas complicados. Assim como o método FORM, a utilização dessa técnica de simulação é destinada ao cálculo da probabilidade de falha de sistemas com funções de estado limite explícitas ou implícitas com relação às variáveis aleatórias envolvidas no problema. Uma grande parte dos métodos existentes é destinada ao cálculo da  $P_f$  em casos que a função de estado limite é explícita com relação às variáveis aleatórias envolvidas no problema. A técnica de simulação Monte Carlo possui seis passos essenciais:

- a) definição do problema em termos de todas as variáveis aleatórias;
- b) estabelecimento das características de probabilidade de todas as variáveis aleatórias em termos das PDF com os correspondentes parâmetros;
- c) geração de valores dessas variáveis aleatórias;
- d) avaliação determinística do problema para cada conjunto de valores gerados;

- e) obter informações de probabilidade após realizado um número  $N$  de avaliações determinísticas para cada conjunto de valores gerados;
- f) determinação da eficiência da simulação.

Percebe-se nos passos descritos que a utilização desse método de simulação exige a geração de  $N$  amostras independentes para cada uma das variáveis aleatórias envolvidas no problema. Cada conjunto de amostras independentes representa uma realização do problema. Ao resolver deterministicamente o problema por  $N$  vezes produz-se  $N$  pontos de amostragem. Esses pontos podem ser utilizados para obter, por exemplo, a PDF e CDF conjuntas e também a  $P_f$  do problema.

A probabilidade de falha pode ser determinada, utilizando o método Monte Carlo, com a aplicação da integral definida a seguir, com  $f_X(X)$  sendo a função densidade de probabilidade conjunta, ou seja:

$$P_f = \int_{g(X) \leq 0} \dots \int f_X(X) dX \quad (2.53)$$

O valor de  $P_f$  também pode ser determinado por:

$$P_f = \frac{N^\circ \text{ de simulações em que } g(X) \leq 0}{N} \quad (2.54)$$

A determinação da variância, para valores pequenos da probabilidade de falha, é obtida a partir da seguinte equação:

$$Var(P_f) = P_f \frac{(1-P_f)}{N} \approx \frac{P_f}{N} \quad (2.55)$$

Para as estruturas usuais a probabilidade de falha  $P_f$  é pequena, geralmente da ordem de  $10^{-3}$  a  $10^{-5}$ , e, como a sua variância é expressa de forma inversamente proporcional ao número total de simulações, o valor de  $N$  deve ser elevado para que se possa obter aproximações aceitáveis de  $P_f$ . Se consideramos  $P_f = 10^{-5}$ , significa que para  $10^5$  eventos tem-se 1 falha, e, portanto,  $10^5$  realizações ou ciclos de simulação seriam necessários para captar esse



comportamento. Haldar e Mahadevan (2000a) recomendam  $10^9$  ciclos de simulação para uma estimativa confiável. Para reduzir o número de ciclos de simulação trabalha-se com redução de variância (Subia, 1991; Oliveira, 1997; Freitas, 1998; Melchers, 1999).

Em alguns casos é necessário determinar a probabilidade de falha de uma estrutura quando uma parte ou a totalidade das variáveis aleatórias envolvidas são correlacionadas. Nesse caso é necessário realizar a conversão para variáveis não correlacionadas e também modificar a função de desempenho para variáveis não correlacionadas. Der Kiureghian e Liu (1986) sugerem utilizar a relação empírica  $\rho^{E_{ij}} = F\rho_{ij}$  apresentada no item 2.14.

Ang e Tang (1984) sugerem a utilização do método FORM ou simulação Monte Carlo para a determinação de  $P_f$ . Para Nowak e Collins (2000), a técnica de simulação Monte Carlo para determinação de  $\beta$  ou da probabilidade de falha é o caminho mais indicado quando se trabalha com funções de desempenho complicadas.

## 2.17 MEDIDAS DE SENSIBILIDADE

Em análises práticas de confiabilidade costuma-se determinar algumas medidas denominadas “de sensibilidade” que fornecem suporte para nortear a análise de confiabilidade. Dentre as medidas de sensibilidade existentes, citam-se: fator de importância, fator de omissão e fatores de sensibilidade paramétricos (Sagrilo, 2004). Essas medidas podem ser obtidas diretamente de valores já calculados ao longo da análise de confiabilidade pelo método FORM. Por ter maior emprego, apresentam-se na sequência as equações necessárias para a obtenção do fator de importância, ou seja:

$$I_i = \alpha_i^2 \quad (2.56)$$

$$\alpha_i = \frac{\nabla g(\mathbf{V}^*)_i}{|\nabla g(\mathbf{V}^*)|} \quad (2.57)$$

Nas equações anteriores o termo  $\alpha_i$  (índice de sensibilidade) é o cosseno diretor, com relação à variável  $V_i$ , do vetor normal à superfície de falha no ponto de projeto e no espaço das

variáveis reduzidas. O termo  $\nabla g(\mathbf{V}^*)_i$  na Equação (2.57) refere-se à componente do gradiente da função de falha no espaço das variáveis reduzidas avaliado no ponto de projeto  $\mathbf{V}^*$ .

O fator de importância e o índice de sensibilidade indicam a importância relativa de cada variável aleatória no valor final da probabilidade de falha. Em situações que resultam em valores baixos (próximo de zero), a variável aleatória em questão pode ser considerada como determinística na análise de confiabilidade. Por outro lado valores próximos da unidade indicam grande importância da variável para a confiabilidade da estrutura analisada.

## 2.18 CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

A confiabilidade estrutural inclui a confiabilidade de membros, ligações e do conjunto formado pela interligação entre membros por meio das ligações. A confiabilidade estrutural de determinado elemento estrutural (barra ou ligação) baseia-se no estado limite de ruptura do elemento. De outra forma, a confiabilidade do conjunto estrutural baseia-se no estado limite de ruptura desse conjunto ou sistema estrutural. Sagrilo (2004) enfatiza que componentes e sistemas na análise de confiabilidade estrutural tem uma conotação diferente da análise estrutural propriamente dita. Esse mesmo autor exemplifica o caso de uma única viga pertencente a uma determinada estrutura ser entendida como um sistema na análise de confiabilidade estrutural, pois essa viga pode falhar, por exemplo, devido à flexão, flambagem lateral, etc. Entretanto, na análise estrutural essa viga é um componente integrante da estrutura, que nesse caso é o sistema. Para Sagrilo (2004), a denominação componente deve ser empregada para identificar cada hiper-plano tangente aos pontos de mínimo sobre a superfície de falha do problema em questão.

De acordo com as propriedades do material e características do carregamento aplicado, os elementos que compõem a estrutura podem ser divididos em frágeis ou dúcteis. Elementos estruturais frágeis ou dúcteis contribuirão de forma diferente para a confiabilidade do conjunto estrutural. Um elemento estrutural frágil perde sua função quando a ruptura ocorre. Um exemplo nesse sentido é a ruptura de uma coluna de concreto armado submetida a compressão. Um elemento estrutural dúctil mantém sua função ao longo do processo de carregamento. Exemplifica-se esse comportamento para um elemento estrutural metálico cujo aço de que é

composto apresenta um patamar de escoamento quando submetido a tração. Nesse caso o elemento estrutural manterá sua função mesmo diante da ocorrência do escoamento do aço.

Sagrilo (2004) e Almeida (2008) afirmam que para o cálculo da  $P_f$  de sistemas deve-se determinar isoladamente a  $P_f$  de cada modo de falha utilizando-se o método FORM. Posteriormente avalia-se a probabilidade de toda a estrutura falhar levando em consideração a existência de todos os modos de falha.

Tratando-se de sistemas estruturais, adotam-se normalmente três diferentes modelos de falha para avaliação da probabilidade de falha de um sistema estrutural: em série; paralelo; e em série e paralelo. Na sequência do texto esses modelos são abordados.

### 2.18.1 SISTEMA EM SÉRIE

Quando a ruptura de qualquer elemento estrutural resulta na ruptura do conjunto estrutural, representa-se essa estrutura por um modelo em série. Nesse caso não importa se a estrutura é composta por elementos estruturais dúcteis ou frágeis. De acordo com Li e Li (2007), as estruturas estaticamente determináveis podem ser representadas por um modelo em série. Matematicamente, a probabilidade de falha de um sistema em série é definida como a união dos modos de falha individuais, ou seja:

$$P_f = P\left\{\bigcup_{i=1}^k [g_i(\mathbf{V}) \leq 0]\right\} = \sum_{i=1}^k P_i - \sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k P_{ij} + \sum_{i=1}^l \sum_{j>i}^l \sum_{k>j}^l P_{ijk} - \dots \quad (2.58)$$

sendo que

$$P_i = P[g_i(\mathbf{V}) \leq 0] = \Phi(-\beta_i) \quad (2.59)$$

$$P_{ij} = P\{P[g_i(\mathbf{V}) \leq 0] \cap P[g_j(\mathbf{V}) \leq 0]\} = \Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{ij}) \quad (2.60)$$

e  $P_{ijk}$ , na Equação (2.58), podendo ser desprezado. Os termos  $\beta_i$  e  $\beta_j$  são os índices de confiabilidade de cada um dos modos de falha e o termo  $\rho_{ij}$  refere-se à correlação entre os modos de falha dado por  $\rho_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j$  em que  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  são os vetores normais nos pontos de mínimo de cada um dos modos de falha. O termo  $\Phi(\cdot)$  é a função cumulativa de probabilidades normal padrão. Já  $\Phi(\cdot, \cdot, \rho)$  é a função cumulativa bidimensional normal padrão que pode ser calculada conforme descrito a seguir:

$$\Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{ij}) = \Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_j) + \int_0^{\rho_{ij}} \varphi(-\beta_i, -\beta_j, \rho) d\rho \quad (2.61)$$

com  $\varphi(\cdot, \cdot, \rho)$  sendo a função densidade de probabilidade bidimensional padrão a ser calculada conforme:

$$\varphi(-\beta_i, -\beta_j, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_i^2 + \beta_j^2 - 2\rho\beta_i\beta_j}{1-\rho^2} \right) \right]} \quad (2.62)$$

A Figura 2.6 representa essa união de forma gráfica, sendo que cada índice de confiabilidade  $\beta_i$  é obtido de forma independente para cada modo de falha representado pela função de falha  $g_i(\mathbf{V})$ .

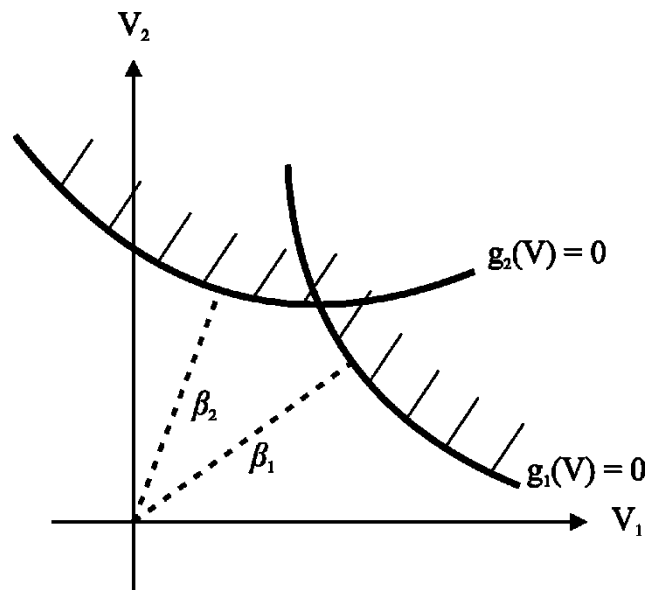


Figura 2.6 - Representação gráfica de sistema em série (adaptado de Sagrilo, 1994)

No Apêndice C apresentam-se dois exemplos envolvendo análise de confiabilidade de sistemas em série. Essas aplicações foram realizadas com o objetivo de criar base para a continuação do desenvolvimento do presente trabalho.

### 2.18.2 SISTEMA EM PARALELO

Se após a ruptura de um elemento estrutural, ou mais de um elemento estrutural, a estrutura é capaz de manter sua função somente pela atuação dos membros íntegros ou com alguma contribuição dos membros que sofreram ruptura, essa estrutura pode ser representada por um modelo em paralelo. Estruturas redundantes podem ser representadas por um modelo em paralelo. A confiabilidade estrutural de uma estrutura representada por um modelo em paralelo é influenciada pelo tipo de ruptura, frágil ou dúctil, dos elementos que compõem a estrutura. Conforme afirma Li e Li (2007), embora não exista contribuição dos elementos frágeis após a ruptura dos mesmos, a sequência de ruptura dos elementos estruturais deve ser considerada ao avaliar-se a confiabilidade estrutural. Quanto à avaliação da confiabilidade estrutural envolvendo elementos dúcteis, somente importa o modo de ruptura global uma vez que os elementos dúcteis são capazes de manter sua função após a falha. Matematicamente, a probabilidade de falha de um sistema em paralelo é definida como a intersecção dos modos de falha individuais (Equação 2.63). De acordo com Sagrilo (2004), a avaliação da probabilidade de falha de um sistema em paralelo, utilizando o método FORM, é mais complicada e menos precisa se comparada a um sistema em série. Mas, para o caso de dois componentes (hiperplano tangente aos pontos de mínimo sobre a superfície de falha) a  $P_f$  pode ser calculada utilizando-se a Equação (2.64), em que  $\Phi(\cdot, \cdot, \rho)$  é a função cumulativa bidimensional normal padrão (Equação 2.61). A Figura 2.7 representa essa intersecção de forma gráfica sendo que cada índice de confiabilidade  $\beta_i$  é obtido independentemente para cada modo de falha representado pela função de falha  $g_i(\mathbf{V})$ .

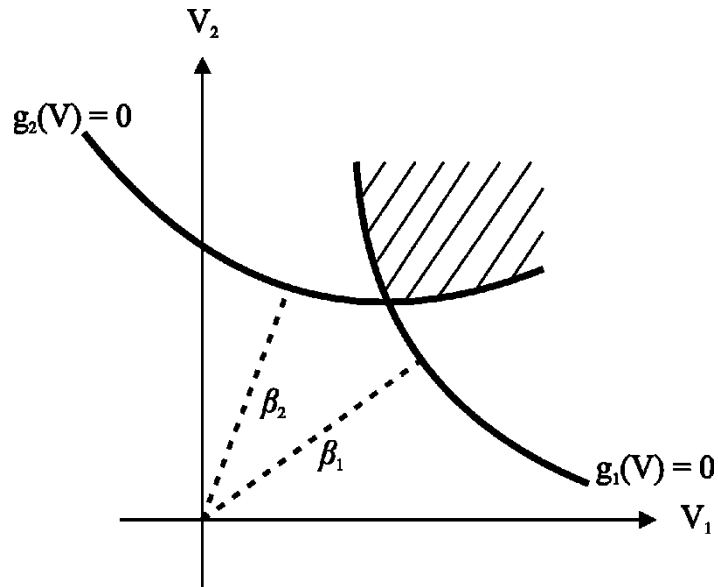


Figura 2.7 - Representação gráfica de sistema em paralelo (adaptado de Sagrilo, 1994)

$$P_f = P\left\{\bigcap_{i=1}^j [g_i(\mathbf{V}) \leq 0]\right\} \quad (2.63)$$

$$P_{ij} = \Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{ij}) \quad (2.64)$$

### 2.18.3 SISTEMA EM SÉRIE E PARALELO

Se o modo de ruptura final de uma estrutura redundante, que inclui elementos dúcteis, não é único, a estrutura pode ser representada por um modelo em série e paralelo. Para estruturas fracamente redundantes e que incluem elementos frágeis, esse modelo não deve ser aplicado, mas sim o modelo de ruptura em série. A Figura 2.8 indica um pórtico com cargas concentradas aplicadas nos nós de número 2 e 3, e também apresenta três modos de falha que podem ocorrer pela formação de rótulas plásticas em diferentes nós. Se existir a manifestação de um dos três modos de falha, a estrutura terá um colapso. Portanto, o pórtico da Figura 2.8a pode ser representado por um modelo em série (Figura 2.8e) incluindo três diferentes modelos em paralelo (Figuras 2.8b, c, d), os quais recebem a classificação paralelo pois necessitam da

formação de quatro ou três rótulas plásticas para a ocorrência do modo de falha. Sagrilo (2004) denomina os sistemas em série e paralelo como mistos.

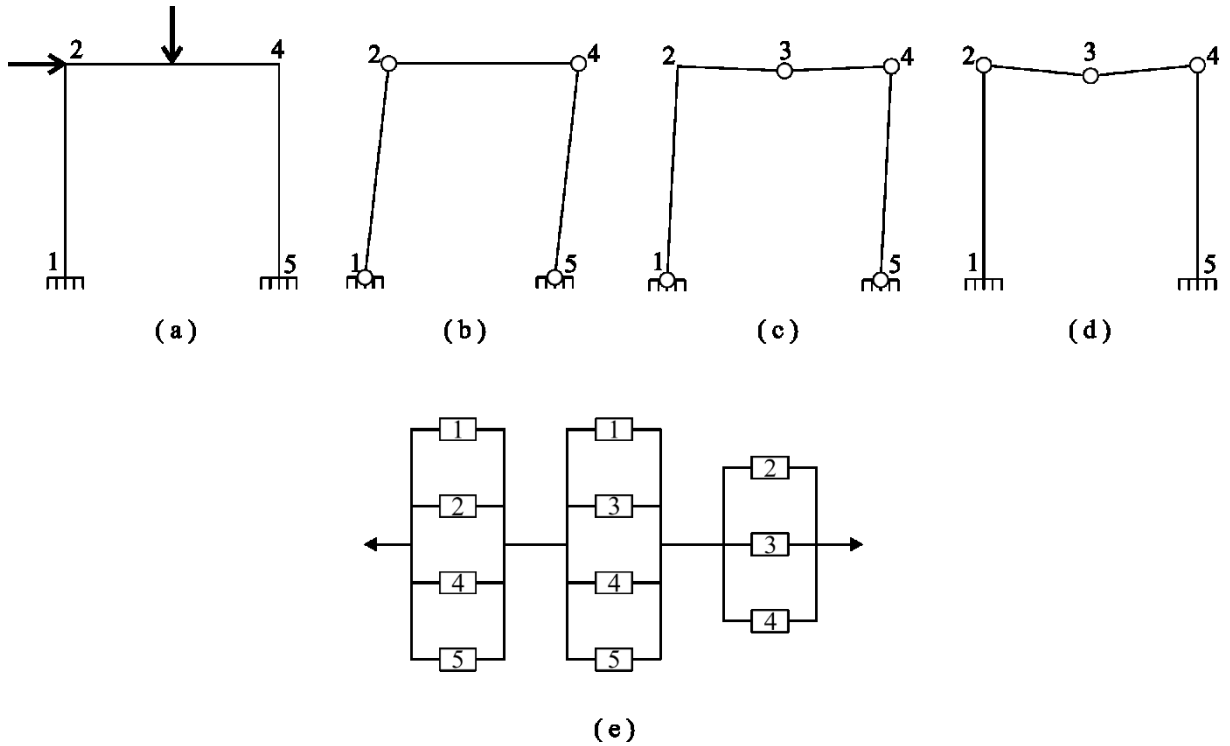


Figura 2.8 - Pórtico (a), mecanismos de formação de rótulas plásticas (b), (c) e (d) e representação por um modelo em série e paralelo (e) (adaptado de Li e Li, 2007)

## **CAPÍTULO 3**

# **ANÁLISE ESTÁTICA CONSIDERANDO A NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA E A FLEXIBILIDADE DA LIGAÇÃO**

O presente capítulo abordar aspectos teóricos envolvendo formulações que consideram a não linearidade geométrica e a flexibilidade das ligações na análise estrutural de pórticos planos metálicos. Busca-se com essa abordagem criar entendimento para a realização de análise de confiabilidade estrutural com a inclusão dos efeitos resultantes da não linearidade geométrica e da flexibilidade das ligações.

### **3.1. ASPECTOS GERAIS**

De uma forma geral, verifica-se atualmente que a realização de projetos de construções civis é baseada em análise elástica linear. Esse tipo de análise considera a geometria inicial ou indeformada da estrutura para a obtenção dos deslocamentos e esforços internos. Sabe-se, no entanto, que ao longo do processo de carregamento (ou solicitação) da estrutura ocorrem deslocamentos que alteram a geometria inicial da estrutura e contribuem de alguma forma para que determinado esforço ocorra em maior valor. Portanto, o comportamento real pode ocorrer de uma forma que não foi prevista. Reforçando as considerações feitas anteriores Silva (2009b) ressalta que quase todas as estruturas se comportam de forma não linear antes de atingirem seus limites de resistência.

A análise avançada de estruturas é caracterizada quando efeitos não lineares são considerados na formulação do elemento estrutural. Dentre as fontes de não linearidade cita-se a não linearidade geométrica. Para essa fonte de não linearidade citada tem-se, por exemplo, a manifestação dos efeitos  $P-\Delta$  e  $P-\delta$  que ocorrem, respectivamente, ao nível da estrutura e do elemento estrutural. Esses efeitos ocorrem quando são verificados deslocamentos laterais tanto



para a estrutura como para um determinado elemento de forma que sob a presença de uma força normal passam a atuar sob a estrutura ou elemento momentos fletores adicionais. Outro aspecto que gera comportamento não linear refere-se à flexibilidade da ligação entre elementos estruturais. Admite-se que determinada ligação comporta-se de maneira intermediária aos extremos normalmente considerados: rotulada ou engastada. Portanto ao ser realizada uma análise avançada busca-se incluir a atuação desses novos esforços oriundos da mudança da geometria da estrutura ou elemento e a flexibilidade das ligações por meio de relações momento-rotação.

De acordo com Silva (2009b), o conhecimento do comportamento real de uma estrutura é essencial para a concepção de estruturas mais leves e esbeltas sem afetar o seu padrão de segurança e de qualidade, no entanto torna-se necessário utilizar teorias mais complexas, que incluem formulações não lineares, evitando simplificações no processo de análise/projeto.

Nos itens que seguem esse capítulo serão apresentados aspectos teóricos relacionados à análise avançada de estruturas no que diz respeito à não linearidade geométrica e flexibilidade das ligações, de forma a estabelecer subsídios para análises previstas envolvendo confiabilidade estrutural.

### **3.2 ASPECTOS IMPORTANTES PARA UMA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS**

Dentre os métodos numéricos existentes na área de análise estrutural destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) por incorporar, por exemplo, características como eficiência, aplicabilidade, versatilidade e abrangência. Azevedo (2003) afirma que o nível de desenvolvimento desse método atingiu um ponto que permite sua utilização por parte da maioria dos projetistas de estruturas. Esse mesmo autor afirma ainda que o desenvolvimento do MEF é tão significativo que outros métodos deixaram de ser utilizados na prática. Nesse método divide-se uma estrutura com vários graus de liberdade em várias partes sendo que cada uma dessas partes possuirá um número adequado de graus de liberdade os quais conduzirão a um conjunto de equações. Esse particionamento do domínio do problema em subdomínios interligados, elementos finitos, com conectividade entre esses elementos estabelecida por meio de pontos nodais define os graus de liberdade que conduzirão às equações a serem resolvidas.

Quanto maior o número de elementos finitos gerados, o grau de exatidão da solução tende a aumentar. Mas, o que ocorre em termos práticos é o ajuste do número de elementos finitos que compõem a estrutura de forma que uma solução aceitável seja alcançada.

Uma vez que o presente trabalho diz respeito a estruturas reticuladas planas, o elemento finito a ser adotado será o de pórtico com pontos nodais  $i$  e  $j$ , sendo que em cada ponto nodal serão considerados três graus de liberdade (dois deslocamentos e uma rotação). Considerações necessárias para o elemento de pórtico relativas à não linearidade geométrica e flexibilidade das ligações serão realizadas nos tópicos específicos a esses aspectos, na sequência desse capítulo.

Normalmente, algumas hipóteses são adotadas na modelagem do elemento de pórtico para estruturas metálicas: os elementos são inicialmente retos e prismáticos com as seções transversais permanecendo planas após a deformação, os perfis são compactos, não se admite flambagem lateral ou torcional, as deformações no elemento são assumidas pequenas mas grandes rotações e deslocamentos de corpo rígido são permitidos, o encurtamento axial devido à curvatura oriunda de flexão do membro é desprezada.

Tratando-se de análise não linear de estruturas é necessária a adoção de metodologias que envolvem processos incrementais e iterativos de forma que seja possível a atualização da geometria da estrutura como também a degradação da rigidez das ligações. Conforme apresentado em Silva (2009b), a partir da variação da energia potencial total  $\Pi$  do sistema composta pela soma da energia interna de deformação elástica  $U$  e do potencial das cargas externas  $\Omega$  e também levando-se em conta a contribuição de cada elemento finito integrante da modelagem do sistema estrutural obtém-se a expressão geral:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r - {}^t\mathbf{F}_i \quad (3.1)$$

A Equação (3.1) deve ser atendida durante o processo de iteração para que o equilíbrio do sistema estrutural seja estabelecido. Na Equação (3.1) tem-se: o termo  $\mathbf{K}$  que é a matriz de rigidez do sistema estrutural dependente dos deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$  e dos esforços internos axial e de flexão de cada elemento caracterizados como  $\mathbf{P}$ , o termo  $\mathbf{F}_i$  sendo o vetor das forças internas no passo de carga  $t$ , o termo  $\mathbf{F}_r$  define a direção do carregamento externo atuante com a intensidade estabelecida pelo parâmetro de carga  $\lambda$  no passo de carga  $t+\Delta t$ . Além dos efeitos da não linearidade geométrica que resultam numa matriz  $\mathbf{K}$  função de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{K}=f(\mathbf{U},\mathbf{P})$ , podem ser incluídos também os efeitos da flexibilidade das ligações. Esse efeito é caracterizado pelo

parâmetro  $S_c$  que representa os valores de rigidez das ligações semirrígidas. Com a inclusão dos efeitos citados anteriormente a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  passa a ser função dos parâmetros que representam esses efeitos conforme indicado a seguir:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, S_c) \quad (3.2)$$

Cabe ressaltar que existem outras fontes de não linearidade, como inelasticidade do material, efeitos devidos a tensões residuais, imperfeições iniciais, formação de rótulas inelásticas devido a efeitos de flambagem, que ao serem consideradas passaram também a englobar os termos que compõem a Equação (3.2).

### 3.3 ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA E DE ITERAÇÃO

A análise estrutural não linear demanda a solução de sistemas de equações comumente resolvidos de forma incremental e iterativa. Na Figura 3.1 tem-se uma representação esquemática de diferentes parâmetros que compõem a solução incremental iterativa, a qual será explicitada a seguir. A etapa incremental, também denominada solução predita, se inicia na seleção de um incremento de carga  $\Delta\lambda^0$  a partir da última configuração de equilíbrio da estrutura com posterior determinação do incremento de deslocamento  $\Delta\mathbf{U}^0$ . Na outra etapa do processo de solução é estabelecido um processo iterativo a partir da solução predita ( $\Delta\lambda^0, \Delta\mathbf{U}^0$ ) de forma a obter solução que estabeleça o equilíbrio entre forças internas e externas conforme representa as seguintes expressões:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, S_c) \cong \mathbf{F}_e \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, S_c) \cong \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.3b)$$

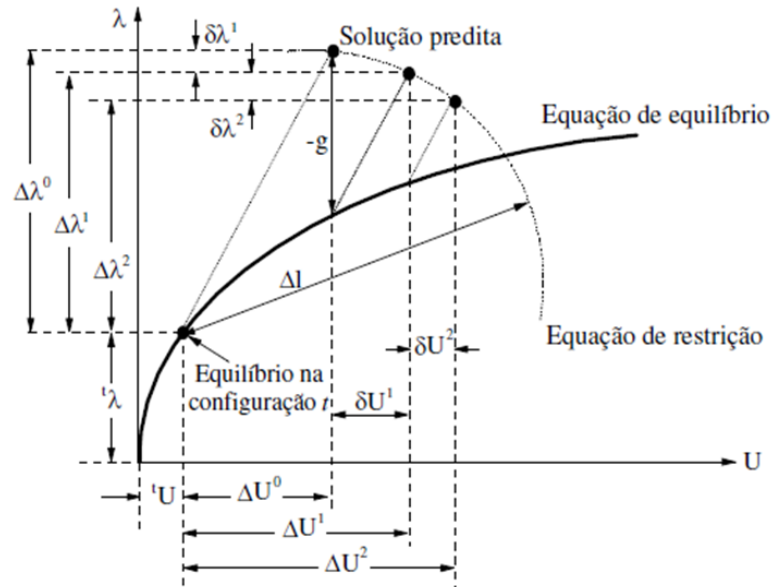


Figura 3.1 - Solução incremental iterativa (Silva, 2009b)

De forma a realizar explanação a respeito das fases incremental e predita de solução do problema de análise não linear de estruturas faz-se algumas considerações e explicações estabelecidas por Silva (2009b):

- são conhecidos o campo de deslocamento e estado de tensão da estrutura no passo de carga  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga  $t+\Delta t$ ;
- $k$  é referido como um contador do número de iterações. Para  $k = 0$ , tem-se a solução incremental predita. Para  $k = 1, 2, \dots$  tem-se o ciclo iterativo de Newton-Raphson;
- $\lambda$  e  $U$  definem o parâmetro de carga e deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$  e  $\Delta U$  caracterizam os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$  e  $\delta U$  são as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidas durante o processo iterativo.

O processo para a obtenção da solução incremental predita consiste inicialmente na determinação da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  com base na última configuração de equilíbrio da estrutura. De posse dessa matriz determina-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais  $\delta U_r$  por meio da equação:

$$\delta U_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r \quad (3.4)$$

Para a continuidade desse processo é necessário a definição de  $\Delta\lambda^0$ . Para essa definição existem diferentes estratégias que possibilitam a definição automática de  $\Delta\lambda^0$ . Essas estratégias estabelecem em geral uma restrição ao problema por meio de uma equação. A dissertação desenvolvida por Rocha (2000) aborda essas estratégias de forma específica. Cita-se na sequência as estratégias descritas na dissertação de Rocha (2000). Estratégias baseadas na relação  $I_d/I_{p,a}$ : que relaciona o número de iterações desejadas pelo usuário com o número necessário para convergência do passo de carga anterior, incremento direto do parâmetro de carga, incremento do comprimento de arco, incremento de uma componente de deslocamento selecionada e incremento do trabalho externo. Outras estratégias de incremento têm como base o parâmetro de rigidez generalizado do sistema (GSP). Deve-se atentar para o sinal do incremento de carga que pode ser positivo ou negativo. Em Silva (2009b) são apresentados três critérios para a escolha desse sinal. De posse de  $\Delta\lambda^0$  determina-se os deslocamentos nodais incrementais tangenciais  $\Delta\mathbf{U}^0$  com o escalonamento do vetor  $\delta\mathbf{U}_r$  conforme indicado na sequência:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (3.5)$$

Conhecendo-se  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$  atualiza-se os parâmetros de carga e deslocamento com base nas expressões:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.6a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.6b)$$

Uma vez definida a solução predita inicia-se o ciclo de iterações de Newton-Raphson. O método de Newton-Raphson é inserido na análise com o objetivo de obter a solução do sistema de equações não lineares de forma numérica. Existem dois esquemas para esse método: padrão e modificado. No primeiro esquema o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante já no segundo ocorre a variação desse parâmetro de forma que seja possível a obtenção de toda a trajetória de equilíbrio ultrapassando os pontos limite e de bifurcação, possíveis de ocorrer simultaneamente, ou não, ao longo da trajetória. Os pontos limites são pontos de máximo ou mínimo (carga ou deslocamento) ao longo de um caminho não linear de equilíbrio. Os pontos

de bifurcação definem o momento da trajetória onde ocorre a interseção de dois ou mais caminhos de equilíbrio. No gráfico carga ( $\lambda$ )-deslocamento ( $u$ ) da Figura 3.2 indica-se esquematicamente a ocorrência dos pontos de bifurcação e limite ao longo dos caminhos de equilíbrio.

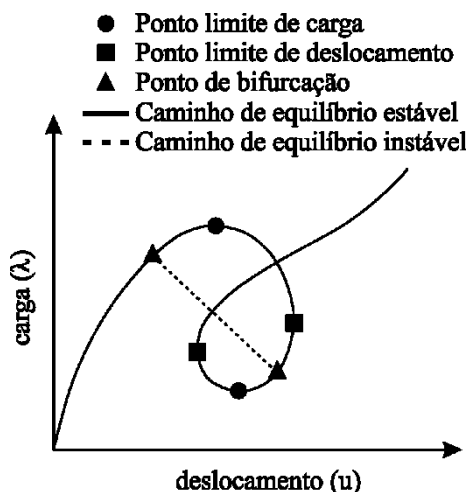


Figura 3.2 - Caminhos de equilíbrio e pontos de bifurcação e limite

Utilizando a técnica que permite a variação de  $\lambda$ , a mudança nos deslocamentos nodais será determinada com base na seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{k}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (3.7)$$

sendo  $\mathbf{g}(\ )$  o vetor gradiente, função dos deslocamentos nodais totais da iteração anterior e do valor atual do parâmetro de carga a ser atualizado de acordo com a equação abaixo:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.8)$$

com o termo  $\delta\lambda^k$  dessa equação sendo a correção do parâmetro de carga. No decorrer do processo iterativo o vetor  $\mathbf{g}(\ )$  deve se anular caracterizando um novo ponto de equilíbrio da estrutura.

Durante o ciclo iterativo utiliza-se, com base na equação (3.7), a equação de equilíbrio abaixo:

$$\mathbf{k}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.9)$$

O termo  $\delta\mathbf{U}^k$ , referente ao vetor deslocamento nodal iterativo, pode ser decomposto em duas parcelas, ou seja:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.10)$$

com as equações para o cálculo dessas parcelas apresentadas a seguir:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{k}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.11a)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = -\mathbf{k}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (3.11b)$$

Para a Equação (3.11a),  $\delta\mathbf{U}_g$  é a correção ao aplicar o método de Newton-Raphson mantendo-se constante o parâmetro de carga. Para (3.11b)  $\mathbf{F}_r$  é o vetor de forças de referência e  $\delta\mathbf{U}_r$  é igual ao vetor de deslocamentos tangenciais mantido inalterado no processo iterativo assim como a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Por outro lado o termo  $\delta\lambda^k$  na Equação (3.10) deve ser corrigido. Para isso existem diferentes estratégias de iteração como apresentado em Rocha (2000): iteração baseada na carga constante, iteração baseada no deslocamento constante, iteração baseada no trabalho externo constante, iteração baseada no comprimento de arco constante, iteração baseada na resposta ponderada constante, iteração baseada na norma mínima dos deslocamentos residuais, iteração baseada na norma mínima das forças desequilibradas, iteração baseada no resíduo ortogonal, iteração baseada no deslocamento generalizado.

Após a determinação de  $\delta\lambda^k$  e  $\delta\mathbf{U}^k$  de forma iterativa, ocorre a atualização das variáveis incrementais  $\Delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{U}^k$  pelas seguintes expressões:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.12a)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.12b)$$

Obtidos  $\Delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{U}^k$  determina-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais, de forma respectiva, utilizando-se:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (3.13a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (3.13b)$$

Com base no parâmetro de carga e nos deslocamentos nodais totais poderá ocorrer o início de novo ciclo incremental iterativo.

Para a interrupção do processo iterativo é necessário o atendimento das seguintes equações:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (3.14a)$$

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (3.14b)$$

A Equação (3.14a) é avaliada no início da iteração corrente com base em dados da iteração anterior, calculando a razão entre as normas Euclidianas do vetor das forças desequilibradas e do vetor de incremento de carregamento externo. A Equação (3.14b) é verificada ao final de cada iteração corrente, com o cálculo da razão entre as normas Euclidianas do vetor dos deslocamentos residuais iterativos e do vetor dos deslocamentos incrementais. O termo  $\zeta$  é um fator de tolerância a ser estabelecido.

Silva (2009a) afirma que além das clássicas formulações incrementais iterativas existem as formulações baseadas na aproximação assintótica clássica e assintótica modal. A formulação assintótica clássica resulta da aplicação direta da teoria clássica da estabilidade consistindo numa forma paramétrica das equações de equilíbrio escritas em termos de expansões de séries de potência. A análise assintótica modal consiste na solução do problema não linear geométrico por meio de combinações modais com um número reduzido de equações com relação ao método incremental clássico.



### 3.4 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Ao explorar a não linearidade geométrica faz-se necessário apresentar os principais aspectos relacionados com a ocorrência de seus efeitos ao longo do processo de carregamento da estrutura:

- relação deformação-deslocamento não linear;
- grande deformação ou grandes deslocamentos e rotações com relação à configuração de referência;
- deslocamento lateral da estrutura e curvatura dos membros, representados na Figura 3.3 (resultarão respectivamente nos efeitos de segunda ordem denominados P- $\Delta$  e P- $\delta$ );
- diminuição da rigidez estrutural e aumento da deformação;
- imperfeições geométricas iniciais tanto de caráter local com origem na fabricação, armazenamento e transporte do elemento estrutural como global com origem na montagem da estrutura.

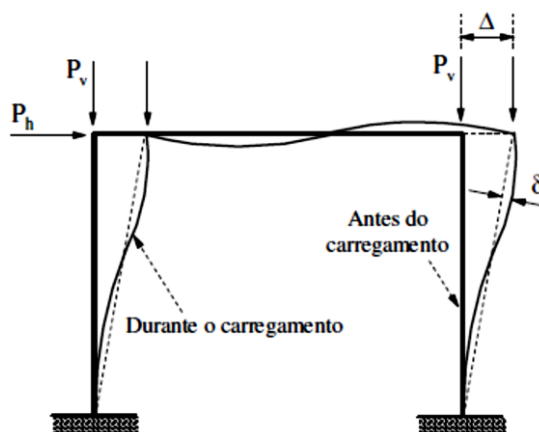


Figura 3.3 - Representação gráfica dos efeitos P- $\Delta$  e P- $\delta$  devidos ao deslocamento lateral da estrutura e curvatura dos membros (Silva, 2009b)

O conhecimento dos esforços adicionais oriundos das fontes de não linearidade citadas anteriormente é fundamental para a realização de análise mais realística do comportamento estrutural. De forma a viabilizar essa análise é necessário empregar formulações baseadas na teoria da elasticidade não linear e no Método dos Elementos Finitos. Os elementos normalmente utilizados ao aplicar esse método têm com base principal as teorias de barra de Euler-Bernoulli e Timoshenko. De acordo com Azevedo (2003) designa-se por Euler-Bernoulli a formulação

do elemento finito de viga em que se considera que as seções transversais se mantêm planas e perpendiculares ao eixo da barra após a deformação, não ocorrendo por outro lado a consideração da deformação devida ao esforço cortante. Também de acordo com Azevedo (2003), a formulação do elemento de viga de Timoshenko considera que as seções se mantêm planas, mas ocorre a suposição de que após a deformação as seções transversais não se mantêm perpendiculares ao eixo da viga.

A adoção de referenciais específicos para levar em conta de forma apropriada a atualização da geometria da estrutura ocorre com a utilização de referenciais Lagrangianos total ou atualizado. Ao ser adotado o referencial Lagrangiano total (RLT) a configuração de referência corresponderá àquela da posição inicial da estrutura quando descarregada. No gráfico da Figura 3.4b indica-se a mudança de posição e deformação de um elemento reticulado referenciado ao sistema de eixos X e Y totais de forma que os parâmetros de deslocamento e força indicados no gráfico da Figura 3.4a são acumulados. Quanto ao referencial Lagrangiano atualizado (RLA) representado na Figura 3.5b observa-se que ao longo do processo de mudança de posição e deformação do elemento estrutural reticulado ocorre a definição de novos eixos coordenados de forma que a configuração de referência corresponde à última configuração de equilíbrio determinada. Já na figura 3.5a, representa-se os parâmetros de carga e deslocamento parciais para o referencial RLA. Bathe (1996) afirma que tanto o referencial Lagrangiano total como o atualizado incluem todos os efeitos não lineares devido a grandes deslocamentos. Com base em outros autores Silva (2009b) afirma que há uma tendência que os resultados obtidos em referencial Lagrangiano total se afastem do comportamento real à medida que a configuração deformada se distancia da original devido aos deslocamentos de corpo rígido e utilização de funções de interpolação simplificadas.

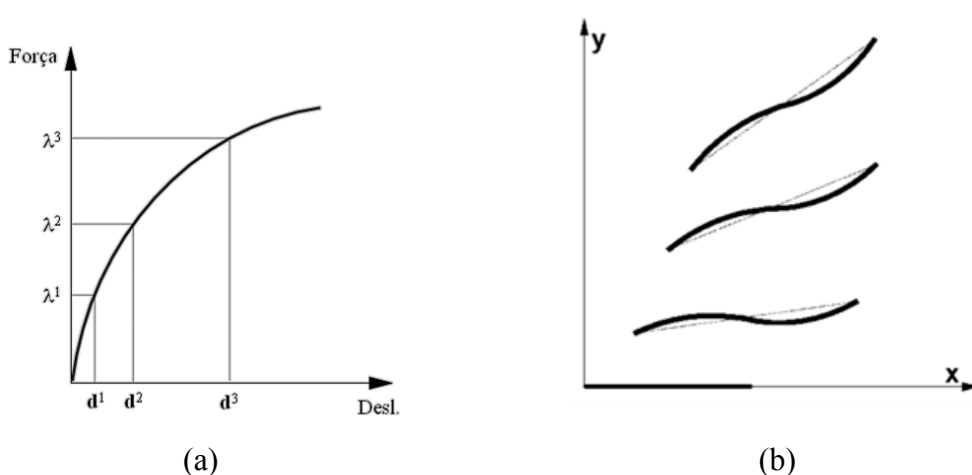


Figura 3.4 - Referencial Lagrangiano total (Silveira e Galvão, 2011)

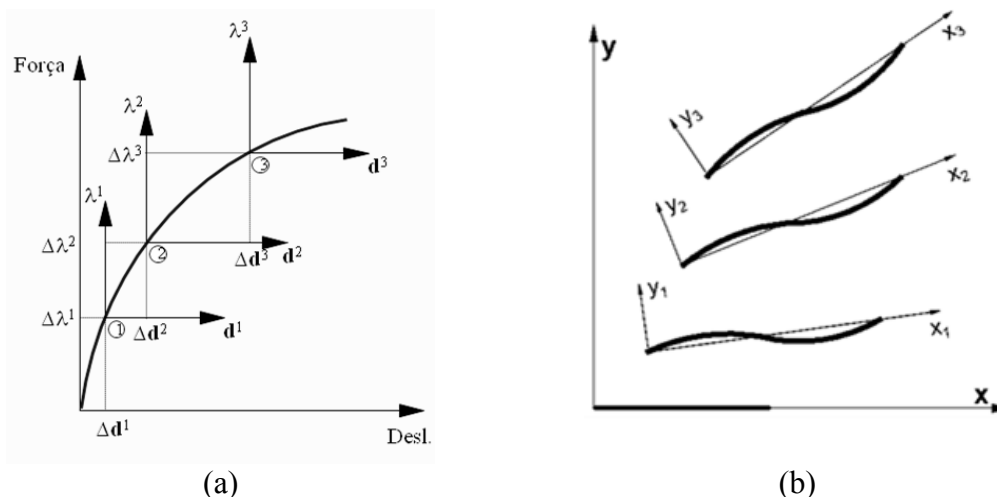


Figura 3.5 - Referencial lagrangiano atualizado (Silveira e Galvão, 2011)

Utiliza-se também o referencial corrotacional na definição de formulações para análise não linear de estruturas. O trabalho desenvolvido por Silva (2011) adota a formulação corrotacional para a realização de análise não linear de pórticos planos. Conforme esse autor, a formulação corrotacional tem origem no teorema da decomposição polar, estabelecido na Mecânica dos Meios Contínuos, o qual estabelece que a deformação total de uma superfície contínua pode ser decomposta em movimento de corpo rígido e deformação relativa (ver Figura 3.6). Felippa (2001) *apud* Silva (2011) afirma que a formulação Lagrangiana total ainda é a mais utilizada ao passo que o interesse pela formulação Lagrangiana atualizada vem decaindo e sua utilização substituída pela corrotacional. Complementando a afirmação anterior, Menin (2006) acrescenta que a formulação corrotacional é a mais recente em utilização na análise não linear geométrica de estruturas. Silva (2009a) salienta que o sistema de referência corrotacional possui a peculiaridade de poder ser utilizado em associação com os sistemas de referência: RLT e RLA. Esse autor afirma que depois de obtidos os deslocamentos no referencial corrotacional realiza-se a transformação para o sistema global da estrutura, que pode ser referido à configuração inicial indeformada (RLT) ou à última configuração calculada (RLA).

Diferentes formulações para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas são encontradas na literatura com variações no tipo de referencial adotado, embasamento nas teorias de viga de Euler-Bernoulli ou Timoshenko, consideração do tensor de Green-Lagrange completo ou simplificado e forma de cálculo do vetor de forças internas. Galvão (2000) implementou formulações propostas por Alves (1995), Yang e Kuo (1994), Torkamani *et al.* (1997) e Pacoste e Eriksson (1997). Em suas conclusões Galvão (2000) destaca a formulação linearizada-simplificada de Yang e Kuo (1994) pois apesar de ser baseada em equação de

equilíbrio linearizada e relações deformação-deslocamento simplificadas não apresentou problemas de convergência nos problemas por ele analisados. A forma incremental de obtenção do vetor de forças internas, também proposta por Yang e Kuo (1994), foi considerada por Galvão (2000) mais eficiente na obtenção de trajetórias de equilíbrio não lineares que apresentam trechos com mudanças bruscas de direção. O trabalho de Silva (2009b) apresenta três formulações (SOF-1, SOF-2, SOF-3) baseadas respectivamente nas propostas de Alves (1995), Yang e Kuo (1994) e Pacoste e Eriksson (1997). Segundo Silva (2009b) essas formulações resultaram em trajetórias de equilíbrio bastante semelhantes ao ser adotado um mesmo número de elementos finitos.

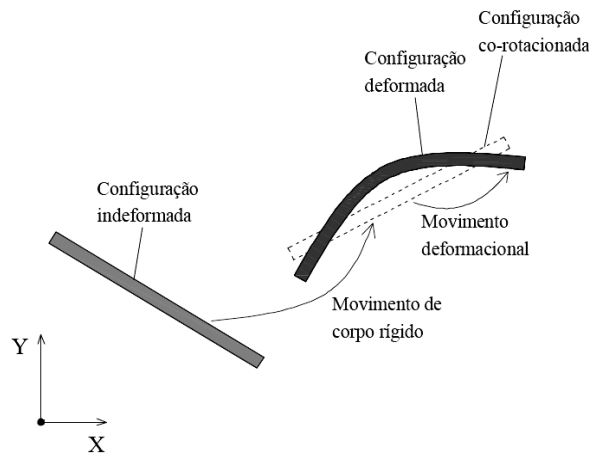


Figura 3.6 - Representação da decomposição corrotacional (adaptado de Silva, 2011)

### 3.4.1 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

As deformações axiais e cisalhantes incrementais são consideradas na forma completa do tensor de Green-Lagrange e expressas, de forma respectiva, por:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.15)$$

$$\Delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\Delta \bar{u}}{dy} + \frac{d\Delta v}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta \bar{u}}{dy} \cdot \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right) + \left( \frac{d\Delta v}{dy} \frac{d\Delta v}{dx} \right) \right] \quad (3.16)$$

Na Figura 3.7 tem-se a seção transversal antes e após a deformação com  $\Delta\bar{u}$  sendo o deslocamento axial de um ponto distante  $y$  da linha neutra da seção.

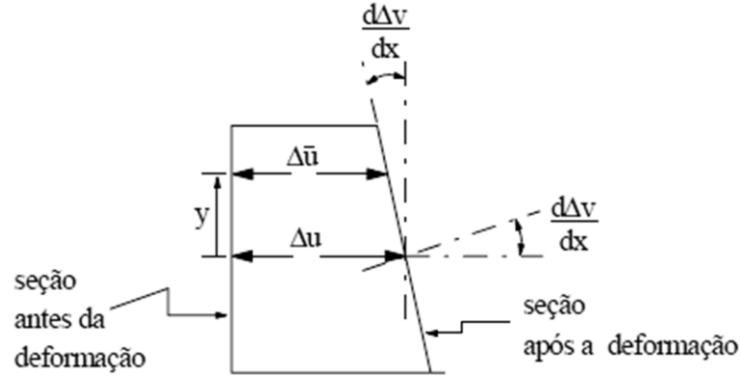


Figura 3.7 - Seção transversal antes e após a deformação (Galvão, 2000)

Com base na hipótese da seção transversal permanecer plana após a deformação como estabelecido na teoria de vigas de Euler-Bernoulli formula-se a seguinte equação:

$$\Delta\bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (3.17)$$

sendo  $\Delta u$  devido aos esforços extencionais atuantes ao longo da seção transversal e constantes ao longo da mesma. Já o termo  $[y(d\Delta v/dx)]$  é devido aos esforços de flexão que variam linearmente com a distância à linha neutra.

Ao substituir a Equação (3.17) nas Equações (3.15) e (3.16) obtém-se as seguintes deformações incrementais:

$$\Delta\epsilon_{xx} = \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right) - \left( y \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.18)$$

$$\Delta\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \left( - \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \right) + y \left( \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right) \right] \quad (3.19)$$

com  $\Delta\epsilon_{xx}$  composta por parcelas linear e não linear e  $\Delta\epsilon_{xy}$  por parcelas não lineares.

Os esforços axial, cortante e momento fletor iniciais, resultantes da última configuração de equilíbrio  $t$  do processo de solução incremental utilizando RLA serão obtidos, nessa mesma sequência, com as integrações descritas a seguir:

$${}^tP = \int_A {}^t\sigma_{xx} dA \quad (3.20)$$

$${}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA \quad (3.21)$$

$${}^tM = \int_A {}^t\sigma_{xx} y dA \quad (3.22)$$

Com base na hipótese das seções planas, obtém-se as tensões axiais incrementais empregando-se a lei constitutiva expressa abaixo:

$$\Delta\sigma_{xx} = E\Delta\varepsilon_{xx} \quad (3.23)$$

em que o termo  $E$  refere-se ao módulo de elasticidade longitudinal do material.

De outra forma as tensões cisalhantes incrementais são obtidas com base em condições de equilíbrio resultando em:

$$\Delta\tau_{xy} = \frac{E}{2} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d^3\Delta v}{dx^3} + \frac{E}{2} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \quad (3.24)$$

com o termo  $h$  referindo à altura da seção transversal.

### 3.4.2 FUNCIONAL DE ENERGIA

O incremento do funcional de energia  $\Delta\Pi$  para a configuração  $(t + \Delta t)$  é obtido a partir da soma das parcelas incrementais devidas à energia de deformação  $\Delta U$ :

$$\Delta U = \int_V \left( {}^t\sigma_{xx}\Delta\varepsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy} \right) dV + \int_V \left( \frac{E}{2}\Delta\varepsilon_{xx}^2 + 2\Delta\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy} \right) dV \quad (3.25)$$

e a energia potencial das forças externas  $\Delta V$ :

$$\Delta V = -\int_S F_i \Delta u_i ds = -\left[ \int_S {}^tF_i \Delta u_i ds + \int_S \Delta F_i \Delta u_i ds \right] \quad (3.26)$$

Yang e Kuo (1994) propuseram três formulações para elementos finitos não lineares: linearizada, linearizada com cálculo do vetor de forças internas através da matriz de rigidez externa, linearizada-simplificada com termos de ordem elevada. Para a primeira formulação citada, e devido ao fato de que as deformações incrementais são pequenas, os autores desprezaram as parcelas não lineares das deformações incrementais, resultando na seguinte parcela incremental da energia de deformação:

$$\Delta U = \int_V \left( {}^t\sigma_{xx}\Delta\varepsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy} \right) dV + \int_V \left( \frac{E}{2}\Delta\varepsilon_{xx}^2 \right) dV \quad (3.27)$$

Seguindo tem-se a igualdade:

$$\int_V \left( {}^t\sigma_{xx}\Delta\varepsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy} \right) dV = \int_S {}^tF_i \Delta u_i ds \quad (3.28)$$

Tendo em vista a igualdade definida na Equação (3.28) estabelece-se o funcional de energia para a configuração de equilíbrio ( $t+\Delta t$ ) como:

$$\Delta \Pi = U_l + U_\sigma - \int_S \Delta F_i \Delta u_i ds \quad (3.29)$$

com  $U_l$  gerando a parcela linear da matriz de rigidez e dado por:

$$U_l = \int_V \left( \frac{E}{2} \Delta \epsilon_{xx}^2 \right) dV \quad (3.30)$$

e o termo  $U_\sigma$  com origem nas deformações iniciais gerando a matriz de deformações iniciais e expresso por:

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_0^L {}^tP \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L {}^tM \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L {}^tQ \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} dx \quad (3.31)$$

Para a formulação linearizada-simplificada despreza-se o termo  $(d\Delta \bar{u}/dx)^2$  da Equação (3.15) e devido a isso a Equação (3.31) resulta em:

$$U_{\sigma-s} = \frac{1}{2} \int_0^L {}^tP \left[ \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L {}^tQ \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} dx \quad (3.32)$$

Tratando-se da formulação de ordem elevada citada anteriormente as parcelas não lineares das deformações incrementais são mantidas o que resultará na adição dos termos  $U_1$  e  $U_2$  ao funcional de energia  $\Delta \Pi$  da Equação (3.29) obtendo-se portanto, o seguinte funcional:

$$\Delta \Pi = U_l + U_\sigma + U_1 + U_2 - \int_S \Delta F_i \Delta u_i ds \quad (3.33)$$

com  $U_1$  e  $U_2$  definidos respectivamente por:

$$U_1 = \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( \frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) + \frac{3EI}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + EI \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d\Delta u}{dx} \right] dx \quad (3.34)$$



$$\begin{aligned}
U_2 = & \int_0^L \left[ \frac{EA}{8} \left( \frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right)^2 + \frac{EI}{8} \left( \frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) \left( \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) \right] dx + \\
& + \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) + EI \frac{d\Delta u^2}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \right] dx^2
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Os termos  $U_1$  e  $U_2$  originarão a parcela não linear da matriz de rigidez que são funções lineares e quadráticas dos deslocamentos nodais incrementais.

### 3.4.3 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

O elemento finito de pórtico adotado pelos autores Yang e Kuo (1994) está representado na Figura 3.8. Esse elemento é reto e limitado por dois nós em suas extremidades sendo que as deformações ocorrem no plano de definição da estrutura. O ângulo  $\alpha$  indicado na Figura 3.8 define a rotação dos eixos locais  $xy$  com relação aos eixos globais  $XY$ . A simbologia empregada na Figura 3.8 refere-se aos deslocamentos nodais incrementais.

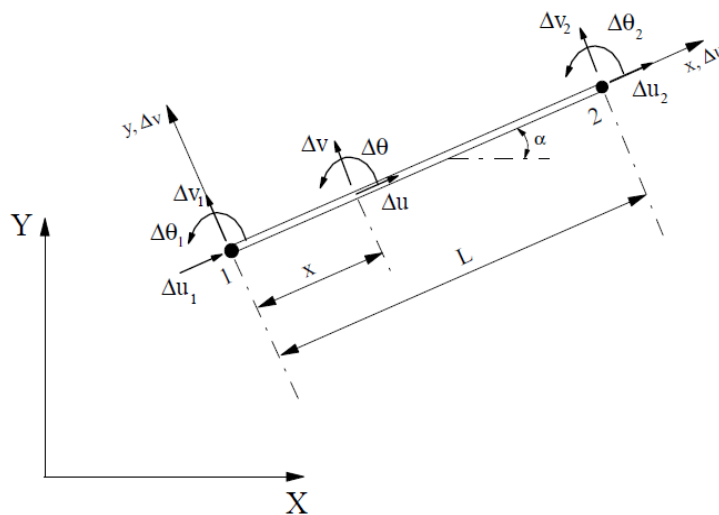


Figura 3.8 - Elemento de pórtico (Galvão, 2000)

Com a utilização do método dos elementos finitos relaciona-se os deslocamentos aos deslocamentos nodais  $\Delta u$  e  $\Delta v$  que ocorrem na direção dos eixos  $x$  e  $y$  locais por meio das seguintes funções de interpolação:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.36a)$$

$$H_2 = \frac{x}{L} \quad (3.36b)$$

$$H_3 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.36c)$$

$$H_4 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.36d)$$

$$H_5 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.36e)$$

$$H_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.36f)$$

com  $\Delta u$  e  $\Delta v$  obtidos respectivamente em função dos deslocamentos nodais por:

$$\Delta u = H_1 \Delta u_1 + H_2 \Delta u_2 \quad (3.37)$$

$$\Delta v = H_3 \Delta v_1 + H_4 \Delta \theta_1 + H_5 \Delta v_2 + H_6 \Delta \theta_2 \quad (3.38)$$

Galvão (2000) afirma com base em Alves (1995) e Silveira (1995) que o funcional de energia apresentado na Equação (3.33) pode ser expresso em função dos deslocamentos e forças nodais como:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = \Delta \mathbf{u}^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K}_L + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \Delta \mathbf{u} + \\ + \Delta \mathbf{u}^T {}^t \mathbf{F}_i - \Delta \mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta t}) \lambda \mathbf{F}_r \end{aligned} \quad (3.39)$$

sendo que o termo  $\Delta \mathbf{u}$  refere-se ao vetor de deslocamentos nodais incrementais definido por:

$$\Delta \mathbf{u}^T = \{\Delta u_1, \Delta v_1, \Delta \theta_1, \Delta u_2, \Delta v_2, \Delta \theta_2\}.$$

Os termos das matrizes  $\mathbf{K}_L$ ,  $\mathbf{K}_\sigma$ ,  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  presentes na Equação (3.39) são obtidos a partir de diferenciação das equações de energia interna de deformação  $U_L$ ,  $U_\sigma$ ,  $U_1$  e  $U_2$  (Equações 3.30, 3.31, 3.34 e 3.35) dada por:

$$\mathbf{k}_{L(i,j)} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (3.40a)$$

$$\mathbf{k}_{\sigma(i,j)} = \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (3.40b)$$

$$\mathbf{k}_{1(i,j)} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j \partial \Delta u_k} \Delta u_k \quad (3.40c)$$

$$\mathbf{k}_{2(i,j)} = \frac{\partial^4 U_2}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j \partial \Delta u_k \partial \Delta u_1} \Delta u_k \Delta u_1 \quad (3.40d)$$

com as matrizes  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  obtidas quando for empregada a formulação de ordem elevada.

O termo  ${}^t\mathbf{F}_i$  presente na Equação (3.39) refere-se ao vetor de forças internas nodais definido por:  $\mathbf{F}_i^T = \{P_1, Q_1, M_1, P_2, Q_2, M_2\}$ . Também nessa equação o termo  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r$  refere-se ao vetor total de forças externas atuante no elemento para a configuração de equilíbrio “ $t+\Delta t$ ”.

Estabelecendo-se a primeira variação da energia potencial total do elemento e igualando a zero essa variação tem-se para a condição de equilíbrio:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r = {}^t\mathbf{F}_i + \Delta\mathbf{F}_i \quad (3.41)$$

sendo o termo  $\Delta\mathbf{F}_i$  referente ao vetor de forças internas incrementais e definido como:

$$\Delta\mathbf{F}_i = \left[ \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \right] \Delta\mathbf{u} \quad (3.42)$$

O vetor  $\Delta\mathbf{F}_i$  pode ser obtido a partir de dois procedimentos diferentes propostos por Yang e Kuo (1994). O primeiro baseia-se no vetor de deslocamentos naturais incrementais  $\Delta\mathbf{u}_n$  (deslocamentos que efetivamente causam deformação). No segundo procedimento ocorre a

definição de uma matriz de rigidez externa. Em ambos os procedimentos objetiva-se minimizar inconsistências em caso de ocorrência de rotações de corpo rígido. Como vetor de forças desequilibradas tem-se o vetor  $\mathbf{g}$  definido por:

$$\mathbf{g} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda\mathbf{F}_r - {}^t\mathbf{F}_i \quad (3.43)$$

Para a configuração de equilíbrio  $t+\Delta t$  o vetor de forças internas no referencial local é calculado empregando-se a equação:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \Delta\mathbf{F}_i \quad (3.44)$$

e para o referencial global emprega-se:

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_{ig} = \mathbf{R}_a^T {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i \quad (3.45)$$

sendo que  $\mathbf{R}_a$  refere-se à matriz de rotação do referencial global para o local atualizada na última iteração.

A matriz de rigidez do elemento no sistema local de coordenadas para as formulações em ordem elevada e linearizada são definidas respectivamente conforme apresentado nas equações a seguir:

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{u}) + \frac{1}{6}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \quad (3.46)$$

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (3.47)$$

Para o sistema global de coordenadas a matriz de rigidez do elemento é obtida a partir da equação:

$$\mathbf{k}_{eg} = {}^t\mathbf{R}^T \mathbf{k}_e {}^t\mathbf{R} \quad (3.48)$$

com o emprego da matriz de rotação  ${}^t\mathbf{R}$  atualizada na configuração  $t$  e função somente do ângulo  $\alpha$  indicado na Figura 3.8.

De forma a avaliar o comportamento da estrutura em estudo é necessário contabilizar a contribuição de cada elemento finito em relação ao referencial global, comum a todos os elementos finitos estabelecendo-se portanto as seguintes expressões para matriz de rigidez e vetor de forças internas:

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{k}_{eg} \quad (3.49)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i = \sum {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_{ig} \quad (3.50)$$

### 3.5 FLEXIBILIDADE DA LIGAÇÃO

As ligações que compõem as estruturas metálicas são projetadas com a função de interligar os membros estruturais proporcionando a transferência de forças e momentos. A importância das ligações deve-se ao fato de apresentarem interferência direta no desempenho e no custo das estruturas metálicas.

As ligações são classificadas em rígidas, semirrígidas e rotuladas. Essa classificação possui origem no comportamento da própria ligação. Nas ligações idealizadas como rígidas ocorre transferência integral de momentos não sendo verificada rotação relativa entre viga e coluna. Por outro lado nas ligações rotuladas não ocorre transferência de momento entre viga e coluna, de forma que cada um desses elementos comporta-se independentemente. Já no caso das ligações semirrígidas, tem-se um comportamento mais próximo do real: existe a transferência parcial de momento o que também significa dizer que a ligação possui alguma rigidez. Ao considerar uma ligação como rígida ou rotulada ocorre simplificação do processo de análise, mas deixa-se de simular o comportamento real da estrutura a qual apresentará comportamento diferente do idealizado. A maior parte das ligações usadas na prática atual

apresenta o comportamento semirrígido gerando influência substancial na estabilidade global do sistema estrutural e na distribuição de esforços entre os elementos estruturais. Os experimentos realizados por Jones *et al.* (1980, 1983) e Nethercort *et al.* (1998) comprovam que uma ligação rotulada possui alguma rigidez assim como uma ligação rígida possui algum grau de flexibilidade. Nethercort *et al.* (1998) afirmam que na prática todas as ligações são semirrígidas o que reforça a importância de se idealizar uma ligação como semirrígida em situações de análise estrutural. Pinheiro (2003) afirma que as hipóteses extensamente utilizadas de ligações entre viga e coluna perfeitamente rígidas ou rotuladas são praticamente irrealizáveis. Silva (2009b) expõe que diferentes pesquisas têm sido realizadas com objetivo de desenvolver métodos avançados de análise que considerem o comportamento semirrígido da ligação. Adicionalmente essa autora afirma que as normas NBR 8800 (1986; 2008), AISC (1986; 1994), BS 5950 (1990) e Eurocode 3 (1990; 1992) passaram a tratar as ligações de uma forma mais realística. As afirmações anteriores de diferentes autores refletem um entendimento da necessidade de consideração adequada da ligação para fins de análise estrutural.

As curvas momento-rotação indicadas na Figura 3.9 representam o comportamento de diferentes tipos de ligações. Inicialmente fica visível, com base na Figura 3.9, um padrão de comportamento não linear das diferentes ligações após ser ultrapassado o trecho inicial. Nesse trecho inicial verifica-se uma tendência dos diferentes tipos de ligações em reagir de forma linear diante da atuação de momento fletor. Devido a essa resposta linear define-se a rigidez inicial  $S_{Cini}$ . A ocorrência de resposta não linear das ligações está vinculada a fatores como concentração de tensões, imperfeições geométricas, tensões residuais e descontinuidades nos elementos que compõem a ligação. Observa-se também nas curvas da Figura 3.9 a existência de comportamento assintótico ao final do processo de carregamento, caracterizando o momento último  $M_u$ . Com o prosseguimento do processo de carregamento depois de constatado o momento último ocorrerá a ruptura da ligação e portanto a anulação da rigidez.

Com o objetivo de levar em conta na análise estrutural o comportamento momento-rotação da ligação, é necessário incorporar equações específicas no processo de análise. Essas equações são formuladas com o momento fletor  $M$  atuante na ligação em função da rotação relativa  $\varphi_c$  e expressa por:

$$M = f(\varphi_c) \tag{3.51a}$$

ou, de forma inversa, com  $\varphi_c$  em função de  $M$  :

$$\varphi_c = g(M) \quad (3.51b)$$

A obtenção das curvas momento-rotação ocorre com a realização de ensaios experimentais, simulação numérica ou por meio de modelos teóricos calibrados com base nos ensaios ou simulações citadas.

A rigidez da ligação definida anteriormente para a fase inicial da curva momento-rotação pode ser obtida por meio de ensaio experimental específico para cada tipo de ligação ou também matematicamente para diferentes pontos dessa curva com a aplicação da seguinte equação:

$$S_c = \frac{dM}{d\varphi_c} \quad (3.52)$$

Para definir se a ligação apresentará comportamento rígido ou flexível é necessário o estabelecimento de parâmetro que relacione  $S_c$  à rigidez do elemento conectado à própria ligação. Para isso Chen (2000) estabeleceu o fator fixo de rigidez  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{3EI}{S_c L}} \quad (3.53)$$

Esse fator pode variar entre 0 e 1 sendo que quando nulo a ligação comporta-se como uma rótula e ao assumir o valor 1 tem-se um comportamento extremamente rígido da ligação. Na Equação (3.53) o termo  $EI$  refere-se à rigidez a flexão do elemento conectado à ligação e o termo  $L$  refere-se ao comprimento desse elemento.

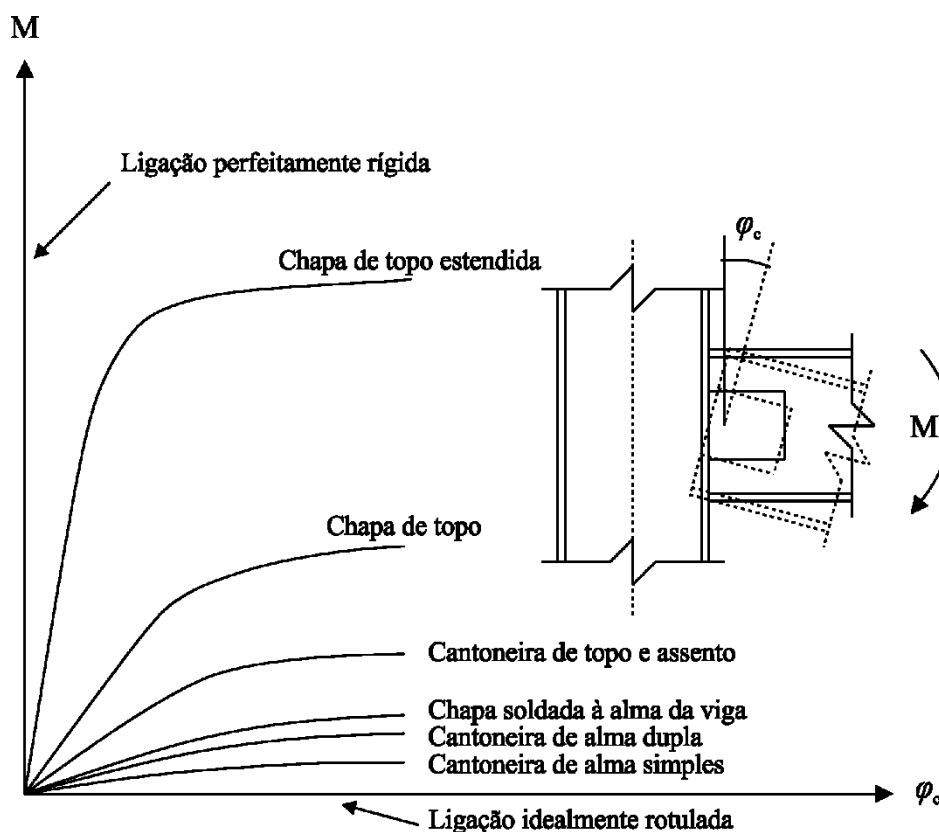


Figura 3.9 - Curvas momento rotação para diferentes tipos de ligações (adaptado de Chan e Chui, 2000)

Seguindo com a abordagem a respeito das curvas momento-rotação, tem-se estabelecido uma classificação para os diferentes modelos propostos para representar essas curvas. Pinheiro (2003) sugere a seguinte divisão: modelos analíticos, matemáticos e mistos. O primeiro modelo citado refere-se à geração de uma curva momento-rotação baseada nas propriedades geométricas e disposição dos elementos que compõem a ligação e a partir desse ponto são realizadas análises numéricas com a utilização, por exemplo, do método dos elementos finitos para a obtenção de uma curva  $M-\varphi_c$ . Mas, como destaca Chan e Chui (2000) o custo e o tempo envolvidos são quase sempre excessivos para aplicações práticas uma vez que existindo diferenças no tipo de ligação, nas propriedades geométricas ou disposição de partes componentes da ligação haverá a necessidade de ser gerada uma nova curva  $M-\varphi_c$ . O modelo matemático para se obter uma curva  $M-\varphi_c$  tem como pressuposto o ajuste de determinada função seguindo resultados experimentais. Esse modelo apresenta maior aceitação devido à maior simplicidade para se obter uma curva  $M-\varphi_c$ . O aspecto simplicidade está vinculado à utilização de funções simples e à disponibilidade de resultados experimentais. O terceiro modelo citado é alcançado por uma combinação dos modelos analíticos e matemáticos de forma que a função que representa a curva  $M-\varphi_c$  possui termos oriundos do ajuste de curvas e também de



características e propriedades geométricas. Como já indicado anteriormente a tendência é pela adoção dos modelos matemáticos. Cita-se portanto alguns exemplos desses modelos: linear, bilinear, trilinear, multilinear, polinomial, B-spline cúbico, exponencial, exponencial modificado, potências com quatro parâmetros (Richard-Abbott, 1975). Pinheiro (2003) e Alvarenga (2010) citam diferentes fontes bibliográficas que abordam esses modelos matemáticos. Em seu trabalho, Pinheiro (2003) implementou as seguintes funções para descrever o comportamento não linear das ligações semirrígidas: linear, exponencial, exponencial modificado e Richard-Abbott. No trabalho de Silva (2009b) também foi utilizado o modelo matemático multilinear para descrever o comportamento da ligação além dos quatro modelos adotados por Pinheiro (2003). Para Silva (2009b) o modelo multilinear agrega a possibilidade de incorporação de curva momento-rotação obtida experimentalmente e ainda possibilita contornar dificuldades relativas a inexistência de modelo específico para certo tipo de ligação. Dentre as justificativas apresentadas por Pinheiro (2003) e Silva (2009b) para a adoção dos modelos citados tem-se a boa eficiência computacional, primeiras derivadas sempre positivas, precisão e o bom ajuste a dados experimentais. Especificamente para o modelo linear Pinheiro (2003) ressalta que sua utilização está vinculada a recomendações normativas para a utilização da rigidez inicial.

Outro passo para a inclusão do comportamento das ligações na análise de estruturas metálicas é a modelagem da ligação semirrígida. Uma abordagem para essa inclusão é a definição da ligação semirrígida como um elemento de mola a ser posicionado no ponto de conexão entre viga e coluna. Ao ser conectado o elemento de mola em cada extremidade do elemento finito de pórtico define-se o elemento finito híbrido representado na Figura 3.10a para a configuração indeformada e na Figura 3.10b para a configuração deformada. De acordo com Pinheiro (2003) esse elemento híbrido foi proposto por Chan e Chui (2000). Na sequência desse texto apresenta-se a formulação proposta por Chan e Chui (2000). Embora existam outras formulações, como exemplo cita-se Chen e Lui (1991) e Sekulovic e Salatic (2001) analisadas por Pinheiro (2003) e Silva (2009b), apresenta-se a formulação de Chan e Chui (2000). Essa opção é justificada tendo em vista as conclusões de Pinheiro (2003) que indicam uma equivalência entre as formulações citadas anteriormente, mas evidencia a constatação de resultados extremamente precisos para a formulação de Chan e Chui (2000). Algumas considerações e hipóteses apresentadas em Pinheiro (2003) e Silva (2009b) são necessárias para a modelagem da ligação semirrígida:

- a) o efeito do esforço de torção deve ser considerado quando são analisadas estruturas espaciais. Uma vez que o presente trabalho aborda estruturas planas o efeito desse esforço é desconsiderado;
- b) embora os esforços axiais e cisalhantes sejam transmitidos pela ligação, os efeitos desses esforços na ligação são desconsiderados tendo em vista a pouca contribuição para a deformação das ligações (Chen, Goto e Liew; 1996). Resta portando os efeitos devido ao momento fletor;
- c) por hipótese o elemento de mola possui comprimento nulo;
- d) cada elemento de mola pode assumir um valor específico de rigidez a qual é definida por  $S_{ci}$  e  $S_{cj}$  respectivamente para as extremidades  $i$  e  $j$ ;
- e) os índices  $c$  e  $b$  presentes nas indicações de momento e rotação na configuração deformada da Figura 3.10 referem-se respectivamente à extremidade do elemento de mola conectado à coluna ou à viga;
- f) a formulação é desenvolvida em referencial Lagrangiano atualizado.

Tendo em vista que a rotação da ligação para sua extremidade conectada à coluna,  $\theta_c$ , é diferente daquela que ocorre na extremidade conectada à viga,  $\theta_b$ , define-se as rotações relativas  $\Delta\phi_{ci}$  e  $\Delta\phi_{cj}$  já na forma incremental como:

$$\Delta\phi_{ci} = \Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi} \quad (3.54a)$$

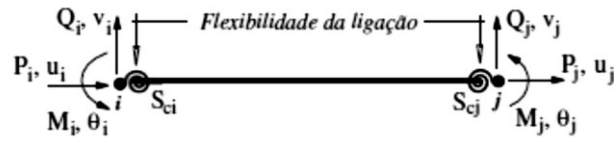
$$\Delta\phi_{cj} = \Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj} \quad (3.54b)$$

Com base na Equação (3.52) formula-se as seguintes equações:

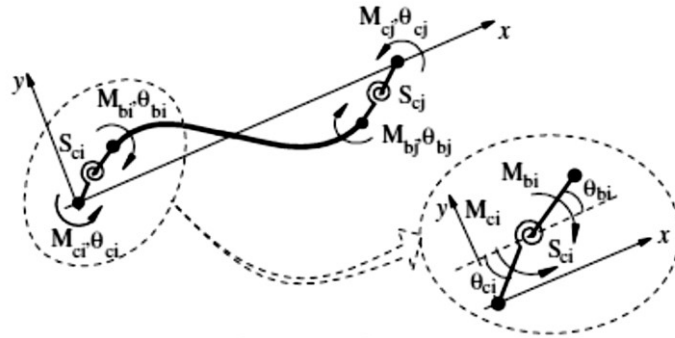
$$\Delta M_{ci} = S_{ci} \Delta\phi_{ci} \quad (3.55a)$$

$$\Delta M_{cj} = S_{cj} \Delta\phi_{cj} \quad (3.55b)$$

sendo  $\Delta M_{ci}$  e  $\Delta M_{cj}$  os momentos fletores atuantes nas extremidades  $i$  e  $j$  do elemento de mola.



(a) Configuração indeformada



(b) Configuração deformada

Figura 3.10 - Configurações indeformada (a) e deformada (b) do elemento finito de pórtico composto por molas fictícias (Silva, 2009b)

Como o equilíbrio de momento deve ser verificado estabelece-se, com base nas Equações (3.54) e (3.55), as expressões:

$$\Delta M_{ci} = S_{ci} (\Delta \theta_{ci} - \Delta \theta_{bi}) \quad (3.56a)$$

$$\Delta M_{bi} = -S_{ci} (\Delta \theta_{ci} - \Delta \theta_{bi}) \quad (3.56b)$$

$$\Delta M_{cj} = S_{cj} (\Delta \theta_{cj} - \Delta \theta_{bj}) \quad (3.56c)$$

$$\Delta M_{bj} = -S_{cj} (\Delta \theta_{cj} - \Delta \theta_{bj}) \quad (3.56d)$$

Rearranjando as Equações (3.56a, b, c, d) na forma matricial têm-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (3.57a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{cj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.57b)$$

com as matrizes 2x2 sendo as matrizes de rigidez para os elementos de mola das extremidades  $i$  e  $j$ .

Dando sequência à formulação do elemento de pórtico híbrido de Chan e Chui (2000) são apresentados os passos necessários para a reestruturação da matriz de rigidez do elemento de pórtico obtida de uma formulação geometricamente não linear. A partir, por exemplo, da formulação geometricamente não linear proposta por Yang e Kuo (1994) apresentada na seção 3.4 desse texto obtém-se matriz de rigidez para o elemento de pórtico com ligações rígidas. Com a presença dos elementos de mola nas extremidades do elemento finito de pórtico a matriz de rigidez precisa ser modificada. Para as seções do elemento híbrido conectadas aos elementos de mola e tendo em vista a matriz de rigidez não linear 6x6 tem-se a seguinte relação de rigidez:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Adicionando-se apropriadamente a rigidez dos elementos de mola (Equações 3.57a, b) à rigidez do elemento de pórtico não linear (Equação 3.58) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} & 0 \\ 0 & k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Nesse momento do desenvolvimento da relação de rigidez do elemento híbrido procede-se à multiplicação matricial da primeira e quarta linhas da Equação (3.59) gerando:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

Da mesma forma é realizada a multiplicação da segunda e terceira linhas da Equação (3.59) obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

porém, assume-se que as cargas são aplicadas nos nós globais resultando no valor nulo para  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$ .

Analisando as Equações (3.60) e (3.61) detecta-se que o vetor formado pelos termos  $\Delta\theta_{bi}$  e  $\Delta\theta_{bj}$ , pode ser obtido da Equação (3.61). Ao isolar esse vetor e substituí-lo na Equação (3.60) chega-se à equação:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

A partir das Figuras 3.10 e 3.11 e também devido ao equilíbrio de forças verticais e momentos e ainda pelo fato de  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$  serem nulos, o que resulta nas seguintes igualdades para os momentos incrementais  $\Delta M_i = \Delta M_{ci}$  e  $\Delta M_j = \Delta M_{cj}$ , tem-se a equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

Na Equação (3.63) os termos  $\Delta Q_i$  e  $\Delta Q_j$  referem-se às forças cisalhantes incrementais e o termo  $L$  é o comprimento do elemento de pórtico na configuração de equilíbrio de referência  $t$ .

Ao substituir a Equação (3.62) na Equação (3.63) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.64)$$

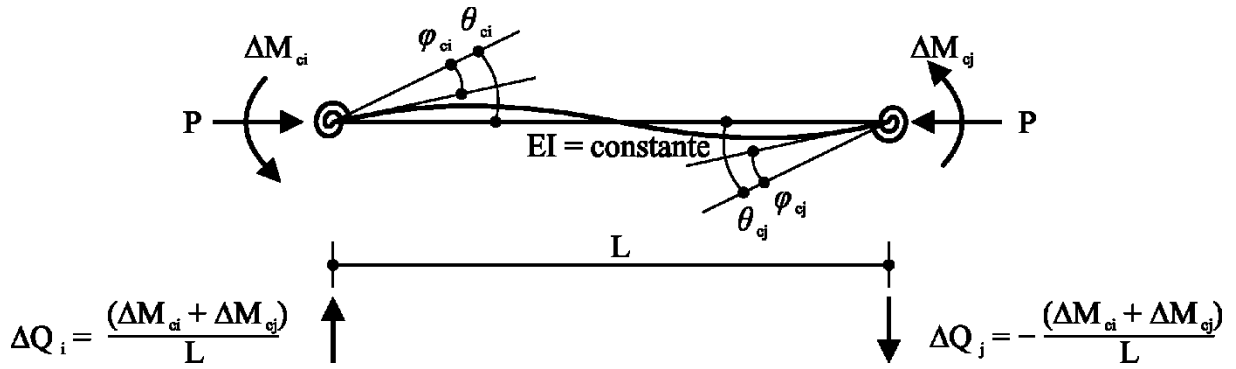


Figura 3.11 - Esforços e rotações nodais no elemento híbrido de pórtico plano (adaptado de Pinheiro, 2003)

A partir da Figura 3.12 tem-se  $\alpha = (\Delta v_j - \Delta v_i)/L$ . Com  $\Delta v_i$  e  $\Delta v_j$  sendo os deslocamentos verticais incrementais para os nós  $i$  e  $j$  formula-se:

$$\Delta\theta_{ci} = \Delta\theta_i - \alpha \quad (3.65a)$$

$$\Delta\theta_{cj} = \Delta\theta_j - \alpha \quad (3.65b)$$

sendo a forma matricial das Equações (3.65a, b) dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

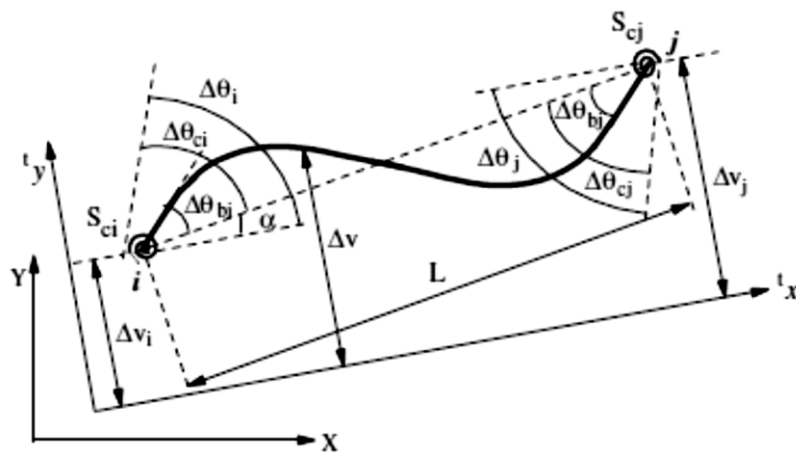


Figura 3.12 - Deslocamentos nodais do elemento híbrido na configuração deformada (Silva, 2009b)

Uma vez determinada a Equação (3.66), a mesma é substituída na Equação (3.64), gerando:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \right) \quad (3.67)$$

Após realizada as operações matriciais na Equação (3.67) tem-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(2,2)} & k_{(2,3)} & k_{(2,5)} & k_{(2,6)} \\ k_{(3,2)} & k_{(3,3)} & k_{(3,5)} & k_{(3,6)} \\ k_{(5,2)} & k_{(5,3)} & k_{(5,5)} & k_{(5,6)} \\ k_{(6,2)} & k_{(6,3)} & k_{(6,5)} & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (3.68)$$

cujos elementos  $k_{(m,n)}$  da matriz 4x4 incluem os efeitos da flexibilidade das ligações e da não linearidade geométrica.

Reformulando-se a Equação (3.68) obtém-se para o elemento híbrido de pórtico a seguinte equação de equilíbrio completa:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta P_j \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1,1)}^* & k_{(1,2)}^* & k_{(1,3)}^* & k_{(1,4)}^* & k_{(1,5)}^* & k_{(1,6)}^* \\ k_{(2,1)}^* & k_{(2,2)} & k_{(2,3)} & k_{(2,4)}^* & k_{(2,5)} & k_{(2,6)} \\ k_{(3,1)}^* & k_{(3,2)} & k_{(3,3)} & k_{(3,4)}^* & k_{(3,5)} & k_{(3,6)} \\ k_{(4,1)}^* & k_{(4,2)}^* & k_{(4,3)}^* & k_{(4,4)}^* & k_{(4,5)}^* & k_{(4,6)}^* \\ k_{(5,1)}^* & k_{(5,2)} & k_{(5,3)} & k_{(5,4)}^* & k_{(5,5)} & k_{(5,6)} \\ k_{(6,1)}^* & k_{(6,2)} & k_{(6,3)} & k_{(6,4)}^* & k_{(6,5)} & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_j \\ \Delta \theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

Os elementos  $k_{(m,n)}^*$  presentes na matriz 6x6 da relação força-deslocamento expressa na Equação (3.69) são elementos não lineares de segunda ordem que não foram influenciados pela presença dos elementos de mola.

A matriz de rigidez no sistema local de coordenadas presente na Equação de equilíbrio (3.69) deve ser transformada para o sistema global de coordenadas. Na seção 3.4.3 essa transformação é apresentada de acordo com a formulação geometricamente não linear de Yang e Kuo (1994).

A análise de segunda ordem com a degradação de rigidez da ligação é suficientemente precisa para pórticos com resistência parcial da ligação semirrígida, desde que a capacidade de momento último da ligação seja definida abaixo do momento de início de escoamento de determinada seção transversal do membro (Gizejowski *et al.*; 2006). Para pórticos com ligações semirrígidas com resistência elevada é necessário avaliar a degradação de rigidez da ligação, mas também a degradação da resistência da seção transversal devido ao escoamento do material (Gizejowski *et al.*; 2006). Esse aspecto está relacionado com a inelasticidade do material. Para o presente trabalho não será incluído nas análises previstas o efeito devido à inelasticidade do material. Com essa inclusão teríamos uma análise estrutural considerada avançada.

Um aspecto a ser tratado nesse ponto diz respeito ao conceito de análise avançada. Esse conceito tem sido estabelecido dentro de um mesmo consenso por diferentes autores. Apresenta-se na sequência definições relativas à análise avançada.

Liew, White e Chen (1993) afirmam: é uma análise inelástica de segunda ordem que representa uma forma de se avaliar tanto o comportamento da estrutura metálica, quanto o seu dimensionamento, visto que fica estabelecido o limite ou de resistência ou de flambagem, do sistema estrutural como um todo, e assim se tornam desnecessárias verificações isoladas de resistência ou de estabilidade no próprio plano, para as partes componentes.

Alvarenga (2005) define análise avançada como uma forma de análise estrutural em que se faz também a verificação da resistência e da estabilidade das barras e do conjunto, estabelecendo uma carga limite real, de maneira que não são necessárias outras verificações de barras. No mesmo trabalho esse autor apresenta atributos e requisitos de uma análise avançada de forma a qualificar a análise inelástica de segunda ordem como avançada.

Silva (2009b) afirma que quando os efeitos oriundos da não linearidade geométrica ( $P-\Delta$ ,  $P-\delta$  e imperfeições geométricas), não linearidade física (escoamento gradual e tensões residuais) e relação não linear momento-rotação das ligações semirrígidas são considerados de forma conjunta, tem-se caracterizada uma análise avançada de estruturas metálicas.

O atual estágio de desenvolvimento da informática possibilita a realização de análises mais rigorosas incluindo os efeitos da não linearidade geométrica, a inelasticidade do material, as tensões residuais, as imperfeições geométricas, a flexibilidade das ligações e demais



parâmetros relevantes no estudo do equilíbrio e da resistência das estruturas. Silva (2010) afirma que a literatura na área de estruturas de aço tem definido essas análises rigorosas como Análises Avançadas.

Diante das diferentes definições percebe-se que a Análise Estrutural considerada Análise Avançada é composta pela integração de diferentes efeitos. Dentre os principais temos a não linearidade geométrica, a flexibilidade da ligação e a inelasticidade do material. É importante destacar que o presente trabalho inclui os efeitos da não linearidade geométrica e da flexibilidade da ligação. Como já ressaltado o presente trabalho é um passo para a realização de análise de confiabilidade estrutural de estruturas projetadas com base em análise avançada. Essa análise deverá tratar as variáveis relacionadas com a não linearidade geométrica, a flexibilidade da ligação e a inelasticidade do material como variáveis aleatórias.

## **CAPÍTULO 4**

### **IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E INTEGRAÇÃO AO CS-ASA (Silva, 2009b)**

Visando a realização de análise de confiabilidade de pórticos metálicos planos com ligações semirrígidas partiu-se para a implementação de um módulo computacional a ser acoplado ao programa CS-ASA (Silva, 2009b). O presente capítulo aborda as etapas do desenvolvimento do módulo de confiabilidade estrutural. Também são apresentadas as interferências realizadas junto ao programa CS-ASA (Silva, 2009b) de forma a viabilizar o acoplamento do MCE criado. Os aspectos relacionados à utilização desse módulo são abordados ao longo do atual capítulo.

#### **4.1 MÓDULO DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL**

Ao longo do curso de Doutorado do PROPEC/UFOP foram construídas as bases para o desenvolvimento de um programa para análise de confiabilidade estrutural. Citam-se como principais exemplos as aplicações apresentadas no Apêndice C e também o trabalho de Agostini e Freitas (2011).

Para a criação do programa computacional, que envolve a presente tese, utilizou-se a linguagem de programação Fortran 95, no ambiente de programação Microsoft Visual Studio 2010 (Microsoft Corporation, 2010), e o Compilador Fortran XE 13.1 da Intel® (Intel Corporation, 2013). O programa foi criado na estrutura de programação denominada módulo. O MCE foi projetado para uma integração com as rotinas estatísticas e matemáticas da biblioteca numérica para Fortran, IMSL™, versão 6.0, (Visual Numerics®, 2006) assim como para uma integração com o programa de análise estrutural CS-ASA, na versão desenvolvida por Silva (2009b).

O método de análise de confiabilidade escolhido para implementação foi o FORM (ver Apêndice B). Dentre os aspectos que contribuíram para a escolha desse método citam-se: boa precisão, facilidade de programação, eficácia no processamento computacional e possibilidade de utilização dos resultados em implementações futuras envolvendo Simulação Monte Carlo com Amostragem por Importância.

O Módulo de Confiabilidade foi criado para trabalhar com função de falha (equação de estado limite) não analítica. A independência de funções analíticas permite a análise de confiabilidade de diferentes tipos de estruturas. Dentre esses tipos citam-se pórticos planos, os quais estão incluídas nos tipos de estruturas passíveis de análise pelo CS-ASA (Silva, 2009).

A condição de não atendimento a determinado estado limite está vinculada a um único modo de falha, relacionado a um deslocamento específico. Essa condição é verificada ao ser acionada a função de avaliação de estado limite, a qual foi criada para compor o módulo de confiabilidade. Essa função, ao ser chamada, recebe o valor do deslocamento limite ( $dl$ ) para o nó e direção em análise assim como o deslocamento calculado ( $dc$ ) em cada chamada à solução não linear do programa CS-ASA (Silva, 2009b). De posse desses deslocamentos, a equação  $G(u)=1 - (dc / dl)$  é avaliada. O resultado dessa avaliação é retornado para a sequência de cálculo do método FORM para subsidiar a determinação de gradientes.

O módulo de confiabilidade implementado não realiza análise de confiabilidade de sistemas. Ressalta-se que o termo sistemas refere nesse momento às estruturas que possuem mais de uma função de falha ou função de estado limite. O item 2.18 do presente trabalho aborda conceitos envolvendo a confiabilidade de sistemas e no Apêndice C apresentam-se aplicações. Esse tipo de análise poderá ser adicionado futuramente ao módulo de confiabilidade criado para integrar o programa CS-ASA (Silva, 2009b).

O método FORM demanda o cálculo de gradientes da função de falha para cada uma das variáveis aleatórias. O algoritmo criado utiliza o processo de diferenças finitas central para o cálculo de gradientes (ver passo 5 do Apêndice B) da função de falha. O processo consiste na alteração do valor de cada variável aleatória por um pequeno acréscimo (direita) e decréscimo (esquerda). Para cada acréscimo ou decréscimo ocorre uma chamada ao programa de elementos finitos CS-ASA (Silva, 2009b) para o fornecimento de deslocamentos. De posse do deslocamento para o nó e direção em análise, o módulo de confiabilidade realiza chamada à subrotina referente à função de falha (equação de estado limite). Os resultados (direita e esquerda) da avaliação da função de falha viabilizarão o cálculo do gradiente dessa função para

a variável aleatória em questão. Esse processo é realizado para todas as variáveis aleatórias presentes na análise de forma a compor o vetor gradiente de cada iteração do método FORM.

No presente estágio de desenvolvimento do programa, limitou-se o número de variáveis aleatórias existentes na análise a treze, as quais devem ser não correlacionadas. Essas treze variáveis podem ser definidas da seguinte forma: um módulo de elasticidade, duas áreas de seção transversal, dois momentos de inércia, três ações permanentes e cinco ações acidentais.

As variáveis de projeto consideradas aleatórias na análise precisam ser tratadas como tal. Nesse caso é necessário que se defina o tipo de distribuição (ver Apêndice A). A implementação realizada permite considerar como variáveis aleatórias o carregamento (concentrado ou distribuído), propriedade do material (módulo de elasticidade) e as propriedades geométricas da seção transversal (área e momento de inércia). Visando modelar essas variáveis, foram implementadas as distribuições: normal, lognormal e extremo do tipo 1 (Máximo). Para essas duas últimas distribuições foram criadas duas subrotinas denominadas: *lognormal\_normalequivalente* e *tipo1max\_normalequivalente*. Essas subrotinas possuem vínculo com o módulo de confiabilidade e função específica para o cálculo de média e desvio padrão equivalentes ao de uma distribuição normal. As equações relacionadas com a determinação da média e desvio padrão equivalentes foram apresentadas no item 2.7 do presente trabalho. As funções IMSL™ (Visual Numerics®, 2006) utilizadas nas subrotinas *lognormal\_normalequivalente* e *tipo1max\_normalequivalente* foram: “anorpr” (avalia a PDF da distribuição normal padrão) e “anorin” (avalia a inversa da CDF da distribuição normal padrão). Ressalta-se que a estrutura criada para o MCE permite a inserção de outros tipos de variável aleatória.

Para a realização de análise de confiabilidade é necessário que o arquivo de entrada 4 seja criado. A leitura desse arquivo de texto é realizada somente pelo Módulo de Confiabilidade. No Apêndice F apresenta-se um exemplo de arquivo de entrada de dados utilizado para as análises de confiabilidade realizadas. O significado de cada um dos parâmetros que compõem o arquivo de entrada 4 é apresentado a seguir, na sequência da primeira para a última linha do arquivo:

- a) método de análise: conforme já exposto, a análise de confiabilidade ocorre por meio do método FORM. Essa variável foi inserida para viabilizar, desde já, a inserção futura de diferentes métodos de análise de confiabilidade ao módulo de confiabilidade;

- b) número de iterações para o método FORM: a fim de interromper propositalmente o processo iterativo que envolve esse método, o usuário precisa definir o número de iterações;
- c) tolerância para interrupção do processo iterativo que envolve o método FORM: o Módulo de Confiabilidade calcula um valor de tolerância de acordo com a equação que compõe o passo 10 da sequência do FORM, apresentada no Apêndice B, e compara com o valor fornecido como dado de entrada, o qual foi fixado em  $1 \times 10^{-4}$  nas análises realizadas;
- d) deslocamento limite em análise: valor de deslocamento a ser informado e relacionado ao estado limite de serviço;
- e) parâmetro numérico de diferenças finitas para a realização de acréscimos à direita e à esquerda: para o cálculo de gradientes envolvendo cada uma das variáveis aleatórias é necessário fixar um parâmetro que altera o valor da variável. O valor  $1 \times 10^{-5}$  foi adotado nas análises realizadas;
- f) indicador da existência de variável correlacionada: um parâmetro numérico (0 ou 1) é informado, sendo que, 0, corresponde a não existência de variáveis correlacionadas e, 1, corresponde à existência de correlação entre variáveis. Até o presente estágio de desenvolvimento do programa deve-se informar somente o valor zero, de forma que o programa irá gerar automaticamente, com base no número de variáveis aleatórias, uma matriz identidade caracterizando a não existência de correlação;
- g) tipo de variável aleatória, valores de média e desvio padrão: essas três informações são fornecidas no arquivo de entrada 4 em uma única linha, para cada uma das variáveis aleatórias.

O processo de cálculo tem início na estrutura original do programa CS-ASA (Silva, 2009b), com a leitura do arquivo de entrada 1. Assim que é identificada a opção por realização de uma análise de confiabilidade, o controle da análise é transmitido para o MCE. A partir de então, a sequência de cálculo é baseada no método FORM.

O MCE possui maior volume de cálculos na etapa que envolve a determinação do vetor gradiente da função de falha. Na obtenção desse vetor utiliza-se o processo de diferenças finitas central. Essa etapa demanda a realização de  $2nva+1$  chamadas à solução não linear (subrotina *solnl*) do programa CS-ASA (Silva, 2009b), com *nva* significando número de variáveis aleatórias e o termo “+1” correspondendo à avaliação da função de falha para os valores atuais

das variáveis aleatórias, que compõem o vetor  $\mathbf{U}$ . Para cada iteração do método FORM ocorre a avaliação da função de falha para os valores atuais das variáveis aleatórias. O resultado dessa avaliação caminha para um valor próximo de zero indicando a convergência do método. Para cada uma das  $2nva+1$  chamadas à subrotina *solnl* a solução não linear é realizada até atingir o carregamento aplicado.

As etapas que envolvem a determinação do ponto de partida no espaço reduzido utilizando a transformação de Nataf (Melchers, 1999) e também a determinação do ponto de projeto no espaço reduzido por meio do Algoritmo HLRF (Hasofer e Lind, 1974; Rackwitz e Fiessler, 1978) demandaram cálculos matriciais que foram viabilizados com as seguintes funções da biblioteca IMSL™ (Visual Numerics®, 2006): “.x.” (realiza a multiplicação entre duas matrizes), “.t.” (determinação de matriz transposta), “.i.” (determinação de matriz inversa).

Equações para a determinação de índices de sensibilidade e fatores de importância também foram inseridas no MCE. A seção 2.17 do presente trabalho apresenta as equações implementadas assim como aborda aspectos teóricos relativos. O cálculo dessas medidas de sensibilidade é realizado a cada iteração do método FORM. Para a implementação realizada, não ocorre eliminação de variáveis aleatórias que apresentam baixos índices de sensibilidade.

No decorrer da realização da análise de confiabilidade, o Módulo de Confiabilidade constrói um arquivo com os resultados da análise (ver Apêndice G). Nesse arquivo estão presentes os parâmetros informados no arquivo de entrada 4, vetor  $\mathbf{U}$  composto pelas médias no espaço original (ponto de partida), e, para cada iteração que envolve o método FORM tem-se impressos: número da iteração, tipo da variável aleatória, média e desvio padrão equivalentes para cada uma das variáveis aleatórias, nó escolhido para monitoramento, grau de liberdade escolhido para monitoramento, deslocamento calculado para o nó e direção de monitoramento utilizando valores atuais das variáveis aleatórias, resultado da avaliação da função de falha, vetor gradiente da função de falha, índices de sensibilidade e fatores de importância para cada variável aleatória, soma dos fatores de importância, índice de confiabilidade, vetor  $\mathbf{U}$  atualizado, e tolerância calculada. Uma vez atingida a tolerância ou o número máximo de iterações do FORM, é impresso também o índice de confiabilidade final e a probabilidade de falha da estrutura com relação ao estado limite definido. Para o cálculo da probabilidade de falha utilizou-se a função “anordf” (avalia a CDF da distribuição normal padrão) da biblioteca IMSL™ (Visual Numerics®, 2006).

## 4.2 INTEGRAÇÃO DO MÓDULO DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL AO PROGRAMA CS-ASA (Silva, 2009b)

O CS-ASA (Silva, 2009b) é um programa para análise estrutural baseado no Método dos Elementos Finitos capaz de realizar análises numéricas avançadas estáticas e dinâmicas de estruturas metálicas, como ilustrado na Figura 4.1.

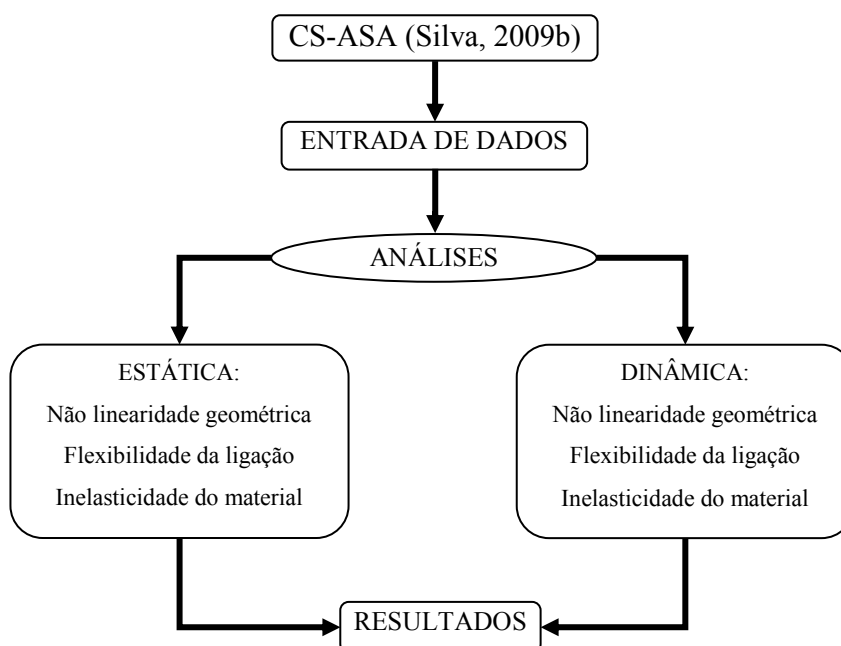


Figura 4.1 - Tipos de análises e efeitos considerados no programa CS-ASA desenvolvido por Silva, 2009b

A base computacional inicial do CS-ASA (Silva, 2009b) foi desenvolvida por Silveira (1995), o qual orientou outros pesquisadores na inserção de diferentes formulações nessa base computacional inicial. Mais recentemente, e utilizando a linguagem de programação Fortran 90/95, Silva (2009b) expandiu a base computacional e integrou as formulações já desenvolvidas. Para a inserção do MCE foi adotada a versão desenvolvida por Silva (2009b).

A organização das rotinas do CS-ASA (Silva, 2009b) em módulos facilita a expansão do sistema. Um exemplo dessa expansão é o próprio MCE que vem sendo exposto no presente trabalho. O programa CS-ASA (Silva, 2009b) possui diversas funcionalidades envolvendo elementos finitos reticulados planos. Dentre essas funcionalidades cita-se como exemplo a realização de análises com a consideração da não linearidade geométrica, flexibilidade da ligação e inelasticidade do aço. As análises de confiabilidade pretendidas com o presente

trabalho envolverão a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica e da flexibilidade das ligações. Como já afirmado, as variáveis relacionadas especificamente com a flexibilidade das ligações serão consideradas como determinísticas na análise de confiabilidade.

O fato do programa CS-ASA (Silva, 2009b) ser desenvolvido no âmbito do PROPEC/UFOP foi decisivo na escolha desse sistema para a inserção do MCE. Uma vez que se tem acesso irrestrito ao código fonte torna-se mais viável a inserção de um novo módulo. Adicionalmente, a possibilidade de ajustes nas rotinas que integram o CS-ASA (Silva, 2009b), para viabilizar a análise de confiabilidade, influenciou na decisão. O grande conhecimento do código fonte, por parte dos pesquisadores do PROPEC, tornou-se fator de relevância para a integração de um novo módulo. Um outro fator relevante para a escolha do programa CS-ASA (Silva, 2009b) refere-se ao grande número de testes e validações pelos quais já passou o referido programa, tornando-o confiável. Cabe destacar ainda que a possibilidade de integração com a biblioteca IMSL™ (Visual Numerics®, 2006) de funções matemáticas e estatísticas para Fortran contribuiu para a definição de utilização do programa CS-ASA (Silva, 2009b). Essa integração, assim que viabilizada, veio a acrescentar agilidade na programação e confiança nos resultados.

Para a realização da integração com a biblioteca IMSL™ (Visual Numerics®, 2006) foi necessário realizar ajustes na configuração do projeto criado no ambiente do Microsoft Visual Studio 2010 (Microsoft Corporation, 2010). Para essa configuração seguiu-se as orientações disponibilizadas no site da Intel® (Lionel, 2011). A sequência das operações realizadas está listada nos tópicos apresentados na Figura 4.2.

De forma a indicar o pacote da biblioteca IMSL™ (Visual Numerics®, 2006) a ser utilizado adicionou-se, no início do código fonte do MCE, o seguinte comando: INCLUDE 'link\_fnl\_static.h'. Também adicionou-se a seguinte instrução: !DEC\$ OBJCOMMENT LIB: 'libiomp5md.lib'. Tanto o comando como a instrução apresentadas anteriormente foram inseridas com base nas orientações disponíveis no site da Intel® (Lionel, 2011).

Um outro ajuste a ser feito junto ao Microsoft Visual Studio 2010 (Microsoft Corporation, 2010) diz respeito à seleção da plataforma Win32 ou x64. Para isso deve ser acessada a janela “Configuration Manager” através da guia “Build” e configurar a plataforma de acordo com o tipo de máquina que está sendo utilizada.



- a) abrir o projeto criado no Microsoft Visual Studio 2010 (Microsoft Corporation, 2010);
- b) selecionar Tools > Options...;
- c) em Options, selecionar Intel Composer XE > Visual Fortran > Compilers;
- d) selecionar a plataforma para a qual serão feitas alterações. Por padrão a guia "Win32" para a arquitetura IA-32 fica selecionada. Selecione "x64" pra uma arquitetura Intel® 64;
- e) confirmar a versão do compilador indicada na guia selecionada;
- f) em Libraries, à direita, clicar no botão "...";
- g) adicionar no final da lista:  
\$(FNL\_DIR)\IA32\lib (para a arquitetura IA-32) ou  
\$(FNL\_DIR)\Intel64\lib (para a arquitetura Intel 64);
- h) clicar em Ok;
- i) em Includes, à direita, clicar no botão "...";
- j) adicionar no final da lista:  
\$(FNL\_DIR)\IA32\include\dll (para a arquitetura IA-32) ou  
\$(FNL\_DIR)\Intel64\include\dll (para a arquitetura Intel 64);
- k) clicar em Ok;
- l) clicar em OK na parte inferior da janela Options.

Figura 4.2 - Sequência de operações para integração da biblioteca IMSL™ (Visual Numerics®, 2006) ao projeto criado no ambiente Microsoft Visual Studio 2010 (Microsoft Corporation, 2010)

O CS-ASA (Silva, 2009b) trabalha com os arquivos de entrada 1, 2 e 3. O arquivo 1 (Apêndice D) traz informações gerais como tipo de análise, coordenadas, carregamentos, propriedade de material e de seções. O arquivo 2 (Apêndice E) contém os parâmetros relacionados com a estratégia de solução não linear. O arquivo 3 refere-se à análise dinâmica, a qual não foi abordada no presente trabalho. Integrando os arquivos de saída do CS-ASA (Silva, 2009b) foi criado o “arquivo 4.out” (Apêndice G), o qual traz tanto a impressão dos dados de entrada relacionados com a análise de confiabilidade como também os resultados dessa análise. Na Figura 4.3 estão indicados os arquivos de entrada e saída de dados referentes ao CS-ASA (Silva, 2009b), com destaque, em caixa tracejada, para o “arquivo de entrada 4” e “arquivo 4.out”, os quais estão vinculados ao módulo de confiabilidade criado.

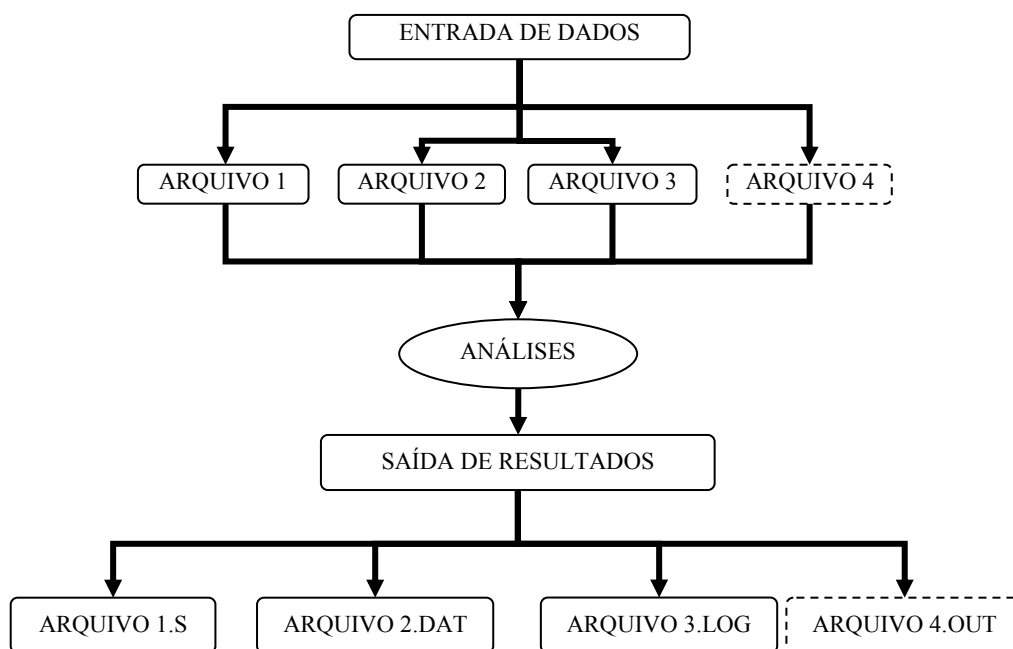


Figura 4.3 - Arquivos da entrada de dados e da saída de resultados: CS-ASA (Silva, 2009b) (linha contínua), módulo de confiabilidade estrutural (linha tracejada)

Com o intuito de viabilizar a análise de confiabilidade por meio do CS-ASA (Silva, 2009b), foram inseridas no arquivo 1 duas novas linhas para entrada de dados. A primeira delas traz a informação da opção pela realização de análise de confiabilidade. Caso a opção pela análise de confiabilidade seja definida é realizada a leitura da segunda linha, a qual possui informações que visam caracterizar o módulo de elasticidade, área da seção transversal, momento de inércia da seção transversal ou carregamento como variáveis aleatórias, ou não. Após essa caracterização, o Módulo de Confiabilidade determina automaticamente o número de variáveis aleatórias. Caso não seja definida a análise de confiabilidade, a leitura do arquivo 1 prossegue normalmente para a realização de um dos diferentes tipos de análise que compõem o CS-ASA (Silva, 2009b). Na Figura 4.4 indica-se em tracejado as linhas inseridas no arquivo de entrada de dados 1 do CS-ASA (Silva, 2009b) necessárias para a realização de uma análise de confiabilidade.

PÓRTICO LIVRO Haldar e Mahadevan (2000b) ex 8.2 página 229 tab 8.5 Ex 2 tese	...Título
Estática	...Tipo de análise
por	...Modelo estrutural
1	...Tipo de solução (0 - linear; 1 - não linear)
1	...(0 - não realiza análise de confiabilidade; 1 - realiza análise de confiabilidade)
1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0	...E, A, A2, I, I2, CP, CP2, CP3, CA, CA2, CA3, CA4, CA5 (0: variável não aleatória - 1: variável aleatória)
0	...Ligações (0 - rígidas; 1 - semirrígida linear; 2 - semirrígida não linear)
5 4 2 2 3 1 1 1 2	...npoin,nelem,nnode,ndime,ndofn,nmats,npmat,nsecs,npsec

Figura 4.4 - Exemplo de parte inicial do arquivo de entrada 1 do CS-ASA (Silva, 2009b), com alteração para realização de análise de confiabilidade estrutural

Embora já destacado, reafirma-se que o MCE é parte integrante do sistema computacional CS-ASA (Silva, 2009b). A esse programa, então, foi inserido o MCE de forma que o processo de análise é iniciado a partir do módulo principal do programa CS-ASA (Silva, 2009b). Assim que ocorre a caracterização da opção por realização de uma análise de confiabilidade, o processo de cálculo passa a ser gerenciado pelo MCE. Com a gerência do processo de análise, o módulo criado realiza chamadas à subrotina *m\_load* e também à subrotina *solnl*, pertencentes ao programa CS-ASA (Silva, 2009b). A subrotina *m\_load* tem a função de realizar a montagem do vetor de cargas nodais. Já a subrotina *solnl* tem a função de obter a solução não linear e linear da estrutura em análise. Ressalta-se que a presença da chamada a essas subrotinas no MCE tem a função de obter a resposta estrutural em termos de deslocamentos. Com a posse de valores de deslocamentos, são realizados cálculos para a determinação de gradientes da função de falha. No estágio atual do Módulo de Confiabilidade Estrutural, utiliza-se os deslocamentos calculados pelo CS-ASA (Silva, 2009b) para avaliar a confiabilidade da estrutura quanto ao atendimento a determinado estado limite de serviço. Em versões futuras, o programa CS-ASA (Silva, 2009b) poderá fornecer resultados que possibilitem a análise de confiabilidade para determinado estado limite último.

Para a determinação de deslocamentos com base em análise linear da estrutura utilizou-se, no arquivo 2 de entrada de dados, o valor “um” (1) no campo que define o incremento inicial do parâmetro de carga (*faci*), o valor “um” (1) para o número de incrementos de carga (*ninc*), o valor “dois” (2) para o número máximo de iterações desejadas (*nitmax*) e o valor 0,1 para: o fator de convergência (*betok*). Dessa forma, tem-se uma análise linear a partir da subrotina *solnl*. Como exemplo, a Figura 4.5(a) indica exatamente os campos em que devem ser alterados para se obter uma análise linear. Já na Figura 4.5(b) indica-se valores desses campos para a realização de análise não linear com dez passos de carga. Em Prado (2012) são apresentados maiores detalhes sobre os parâmetros indicados na Figura 4.5.

Um fator a ser ajustado no arquivo de entrada 1 diz respeito, de forma específica, ao carregamento. Quando é feita a opção por análise de confiabilidade, devem ser fornecidos no arquivo 1, para as intensidades, valores unitários com indicação de sentido. A intensidade real de cada carga, uma vez considerada como variável aleatória, é fornecida no arquivo de entrada 4, como média. Esse aspecto ligado ao carregamento está relacionado à montagem do vetor de cargas na primeira iteração do método FORM. Essa montagem ocorre por meio de uma única chamada à subrotina *m\_load*. Como no decorrer do processo iterativo do FORM ocorrem alterações nos valores das intensidades do carregamento, utilizou-se a estratégia de adotar

valores unitários para os carregamentos no arquivo de entrada 1 e armazenar o vetor formado pelos valores unitários. Assim, é realizada apenas uma única leitura do arquivo de entrada 1. A cada novo valor de intensidade para determinada variável aleatória de carregamento gerado no processo iterativo do método FORM, o vetor armazenado é multiplicado por esse valor de intensidade. Quanto às outras variáveis aleatórias (módulo de elasticidade, área e momento de inércia), devem ser fornecidos os mesmos valores de média tanto no arquivo de entrada 1 quanto no arquivo de entrada 4.

Até o presente estágio de desenvolvimento do MCE também devem ser ajustadas, porém junto ao código do MCE, as expressões de diferenças finitas relativas às ações permanentes e acidentais. Isso é necessário para que a alteração (diferenças finitas) de cada valor dos vetores *qdl* (ações permanentes) e *qfi* (ações acidentais), pertencentes aos argumentos das subrotinas *mload* e *solnl*, ocorra nas posições adequadas desses vetores. Salienta-se que esse ajuste deve ser feito para cada tipo de estrutura analisada.

12	12
%PRINCIPAL	%PRINCIPAL
0 1 <b>{1 1 2}</b> 1 1 <b>{1.e-1}</b>	0 1 <b>{0.1 10 10}</b> 1 1 <b>{1.e-4}</b>
%REANAL	%REANAL
0	0
%RELATO	%RELATO
4	4
%SCREEN	%SCREEN
10	10
%END	%END
(a)	(b)

Figura 4.5 - Exemplo do arquivo de entrada 2 do CS-ASA (Silva, 2009b): solução linear (a), e solução não linear (b)

Visando a realização de uma análise de confiabilidade considerando a semirrigidez da ligação, fez-se necessária a realização de intervenção junto ao programa CS-ASA (Silva, 2009b). Essa intervenção ocorreu especificamente no modelo de Richard e Abbott (1975), o qual já estava implementado no programa CS-ASA (Silva, 2009b). Esse modelo também é conhecido como modelo de potência com quatro parâmetros, os quais são definidos como: rigidez inicial (*k*), rigidez devido ao encruamento (*k<sub>p</sub>*), parâmetro definindo a curvatura do diagrama (*n*) e o momento de referência (*M<sub>0</sub>*). A escolha por adequar esse modelo ocorreu em função da disponibilidade de resultados dos autores Haldar e Mahadevan (2000b) relacionados ao próprio modelo de Richard Abbott (1975). Também, conforme afirma Pinheiro (2003), esse

modelo fornece sempre uma rigidez positiva, possui boa eficiência computacional e é um dos mais utilizados para representação de ligações semirrígidas. Logo, tem-se um aspecto vantajoso presente ao adequar esse modelo de ligação para ser utilizado também em análises de confiabilidade.

A intervenção referida anteriormente diz respeito à inclusão da matriz  $ilgs0$  junto aos argumentos da subrotina  $solnl$ . A matriz  $ilgs0$  armazena os parâmetros iniciais que caracterizam cada uma das ligações semirrígidas existentes na estrutura analisada, de forma que não são alterados ao longo do processo de análise da estrutura. Uma vez que o modelo de Richard e Abbott (1975) admite comportamento não linear da ligação, e portanto a degradação da rigidez das ligações, foi necessário disponibilizar as características iniciais de cada ligação, por meio da matriz  $ilgs0$ . Dessa forma, a cada nova chamada à subrotina  $solnl$ , a partir do MCE, a matriz  $ilgs$  recebe os valores armazenados em  $ilgs0$ . A matriz  $ilgs$  recebe, ao longo do processo incremental-iterativo os valores degradados dos parâmetros referentes a cada ligação. Sendo assim, os valores contidos em  $ilgs$  ao final do processo incremental-iterativo estão degradados. Logo, devem ser atualizados a partir de  $ilgs0$ , caso ocorra uma nova chamada à subrotina  $solnl$ . Como já destacado, essa nova chamada está relacionada ao método das diferenças finitas presente no método FORM que compõe o MCE.

Ressalta-se que é possível realizar análise de confiabilidade considerando as ligações presentes na estrutura como semirrígidas, mas com comportamento momento-rotação linear. Para isso, é necessário apenas editar o arquivo de entrada 1 de forma a estabelecer a presença desse tipo de ligação, caracterizada por um único parâmetro: a rigidez inicial  $S_c$ . Nesse caso não existe degradação da rigidez da ligação, logo, os valores de rigidez inicial que caracterizam as ligações, e estão presentes nas matrizes  $ilgs$  e  $ilgs0$  serão iguais e não serão alterados ao longo do processo incremental-iterativo. Devido a esse fato não foram necessárias intervenções no código do programa CS-ASA (Silva, 2009b) de forma a adequar o modelo de ligação com comportamento momento-rotação linear.

Na Figura 4.6 tem-se um fluxograma que indica em caixa tracejada a nova funcionalidade do CS-ASA (Silva, 2009b): análise de confiabilidade pelo método FORM. Um ponto importante da Figura 4.6 é a interação entre a análise de confiabilidade e a análise estática, indicada em seta dupla. Essa interação ocorre somente com comando partindo do MCE.

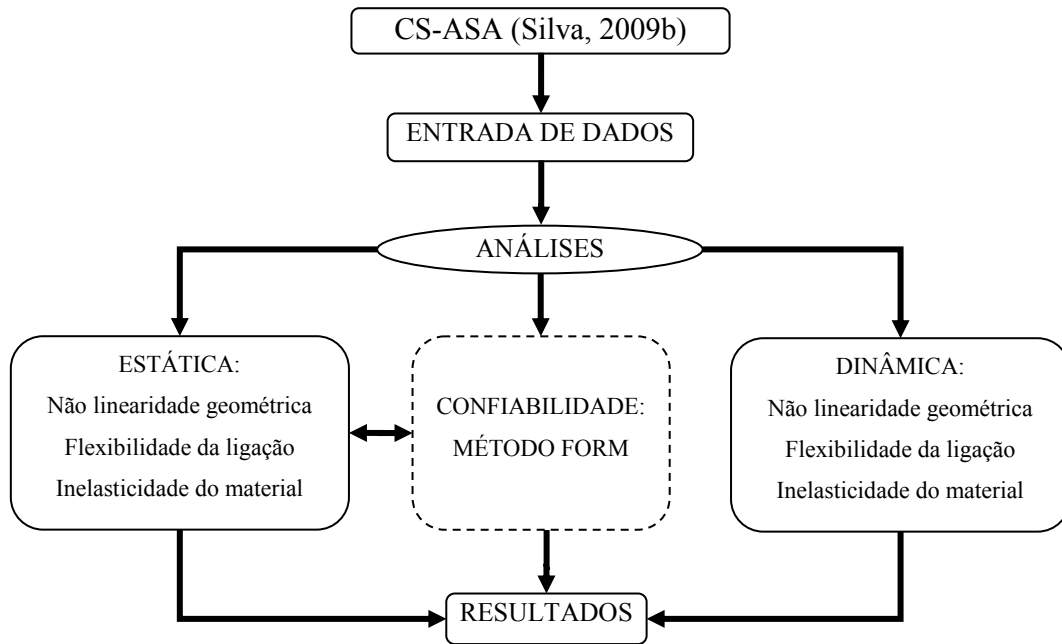


Figura 4.6 – Nova funcionalidade do programa CS-ASA (Silva, 2009b): análise de confiabilidade (tracejado)

Na sequência do texto apresenta-se na Figura 4.7 um fluxograma do MCE com a indicação mais específica dos pontos de interação com o programa CS-ASA (Silva, 2009b) que ocorrem para:

- a) montagem do vetor de cargas de referência (somente na 1ª iteração do método FORM);
- b) avaliação da função de falha para os valores atuais das variáveis aleatórias que compõem o vetor  $\mathbf{U}$ ;
- c) determinação do vetor gradiente da função de falha no espaço original utilizando diferenças finitas central.

Ressalta-se que somente para os pontos de interação “b” e “c”, indicados acima, ocorre a realização de análise estrutural elástica linear ou não linear.

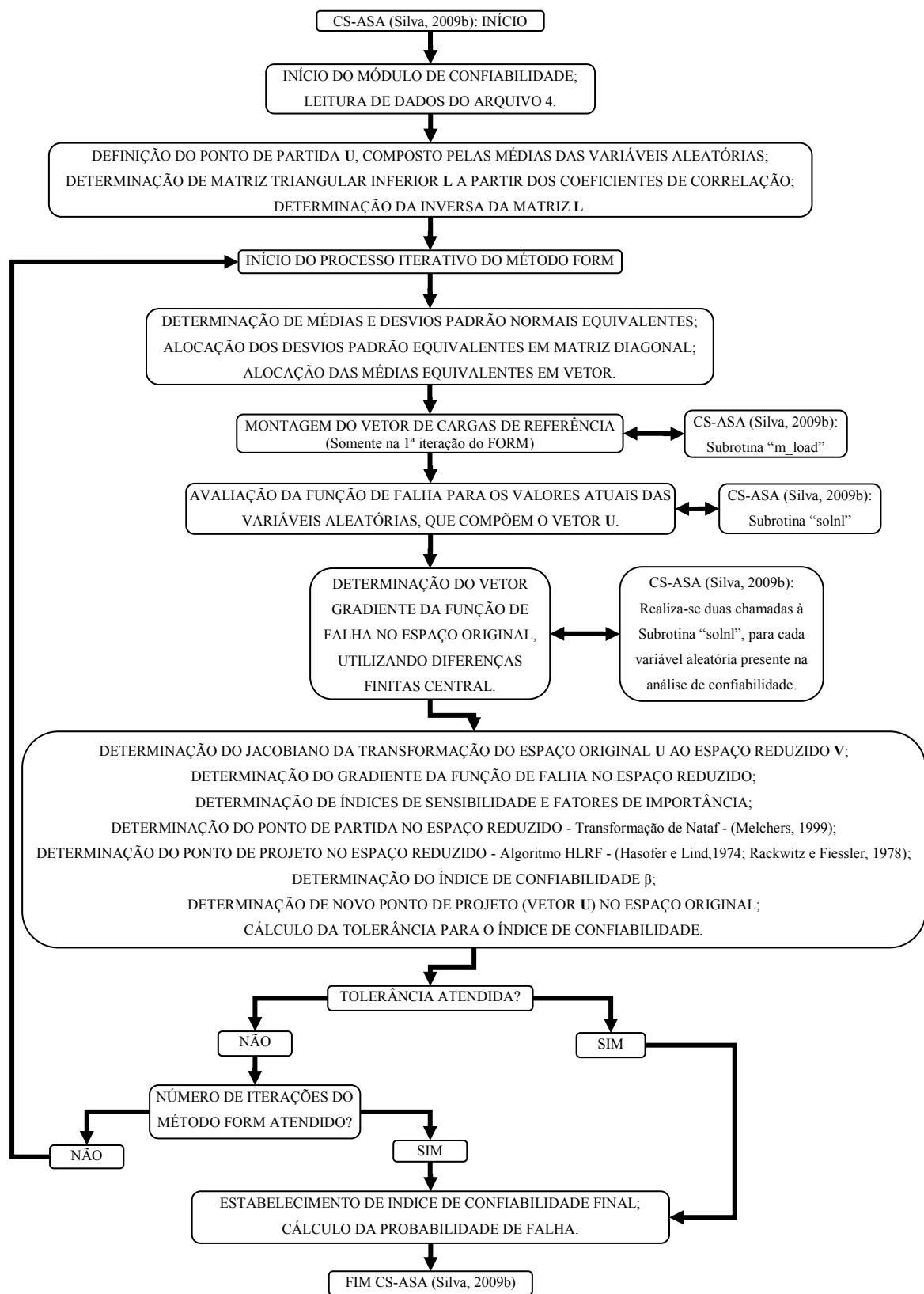


Figura 4.7 - Fluxograma do MCE

## CAPÍTULO 5

### EXEMPLOS

De forma a validar o MCE criado junto ao programa CS-ASA (Silva, 2009b), comparou-se primeiramente os resultados da análise de confiabilidade de duas estruturas analisadas por Haldar e Mahadevan (2000b) e Agostini e Freitas (2011). Essa comparação foi realizada para os dois primeiros exemplos apresentados na sequência do presente capítulo. Para os demais exemplos realizaram-se comparações com os resultados encontrados por Haldar e Mahadevan (2000b), os quais utilizaram o método denominado Stochastic Finite Element Method (SFEM) na realização de análises de confiabilidade. Esse método é uma extensão do método dos elementos finitos clássico para a obtenção de soluções estáticas e dinâmicas de problemas envolvendo elementos finitos caracterizados por propriedades aleatórias (Gao, 1994; Stefanou, 2008).

Previamente aos exemplos 5.1 e 5.2 apresentam-se algumas considerações relativas ao trabalho de Agostini e Freitas (2011). O foco desse trabalho foi a realização de análise de confiabilidade estrutural de pórticos planos com base em análise estática linear. Esse objetivo foi atendido com a utilização do software Mathcad<sup>®</sup> (Parametric Technology Corporation, 2007) para o desenvolvimento de programa computacional. O programa criado teve como bases o método analítico FORM e o método dos deslocamentos. A implementação do método analítico FORM foi realizada conforme algoritmo apresentado em Sagrilo (2004). Para a implementação do método dos deslocamentos para determinação de esforços e deslocamentos de pórticos planos utilizou-se o algoritmo proposto por Soriano (2005). A tarefa principal foi acoplar esses dois métodos de forma a concretizar a análise de confiabilidade estrutural de pórticos planos. Adicionalmente foram incorporadas expressões para a determinação de índices de sensibilidade e também para a determinação da probabilidade de falha. Para a determinação do gradiente da função de falha no espaço original ( $\nabla g(U_i)$ ) e conseqüentemente o gradiente da função de falha no espaço reduzido ( $\nabla g(V_i)$ ) foi utilizado o método das diferenças finitas. O procedimento adotado é considerado um Método de Nível III devido à utilização da função densidade de probabilidade das variáveis incertas para a determinação da probabilidade de falha da estrutura. Quanto à definição do tipo de função densidade de probabilidade adotada para



cada tipo de variável aleatória presente nos exemplos apresentados em Agostini e Freitas (2011), seguiu-se conforme estabelecido em Haldar e Mahadevan (2000b). No que diz respeito ao processo iterativo de determinação do ponto de projeto utilizou-se o algoritmo HLRF (Hasofer e Lind, 1974; Rackwitz e Fiessler, 1978).

## 5.1 EXEMPLO 1: PÓRTICO PLANO COM TRÊS BARRAS

O primeiro exemplo refere-se ao pórtico plano indicado na Figura 5.1. Nesse exemplo, Haldar e Mahadevan (2000b) definiram, com base em prescrições Load and Resistance Factor Design (LRFD) (AISC, 1994), o mesmo tipo de perfil metálico (W10 x 15) para todos os três elementos que compõem o pórtico. Seguindo a mesma nomenclatura adotada por Haldar e Mahadevan (2000b), tem-se na Figura 5.1 a indicação do carregamento atuante composto pelo vento ( $W$ ), peso próprio ( $D$ ) e sobrecarga ( $L$ ).

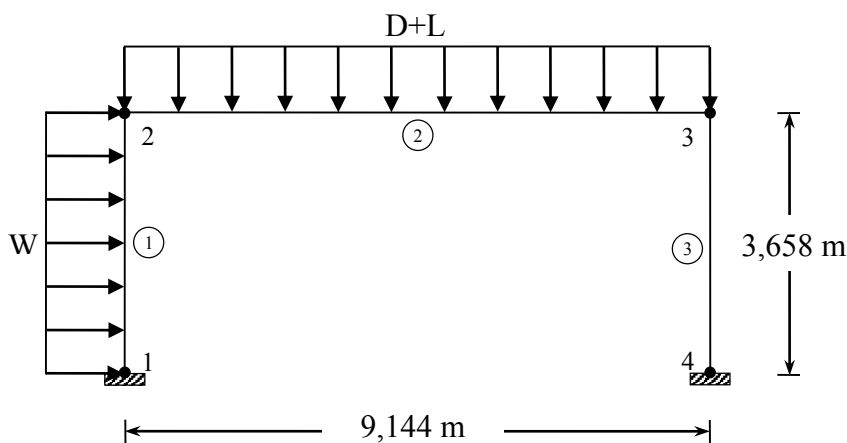


Figura 5.1 - Pórtico plano com três barras (análise linear): geometria, carregamento e discretização

Quanto às propriedades do material e da seção transversal tem-se: módulo de elasticidade ( $E$ ), área da seção transversal ( $A$ ) e momento de inércia ( $I$ ), únicos para todos os elementos. As variáveis referentes ao carregamento ( $W$ ,  $D$  e  $L$ ), propriedade do material ( $E$ ) e propriedades das seções transversais ( $A$  e  $I$ ) foram consideradas como aleatórias. O número de iterações e as unidades das variáveis foram mantidos conforme descrito em Haldar e Mahadevan (2000b), para propiciar comparação entre resultados. O estado limite para esse problema foi definido com relação ao deslocamento horizontal do nó 2 fixado em 0,009144 m

(altura/400). Para o cálculo de deslocamentos utilizou-se análise linear. Na Tabela 5.1 estão descritos os valores das médias, coeficientes de variação e tipos de distribuição para as variáveis aleatórias envolvidas no problema.

Tabela 5.1 - Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias

Variável	Unidade	Média	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
<i>D</i>	kN/m	6,42	0,10	Normal
<i>L</i>	kN/m	0,73	0,25	Ext. Tipo 1
<i>W</i>	kN/m	5,99	0,37	Ext. Tipo 1
<i>A</i>	m <sup>2</sup>	0,00284516	0,05	Normal
<i>I</i>	m <sup>4</sup>	0,00002867846	0,05	Normal
<i>E</i>	MPa	199948,01	0,06	Normal

A Tabela 5.2 apresenta os resultados obtidos na análise de confiabilidade vinculada ao presente trabalho como também os resultados dos autores Agostini e Freitas (2011) e Haldar e Mahadevan (2000b).

Tabela 5.2 - Resultados da análise de confiabilidade

Variável	Índice de sensibilidade			Valor inicial da variável			Valor final da variável		
	Haldar e Mahadevan (2000b)	Agostini e Freitas (2011)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Agostini e Freitas (2011)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Agostini e Freitas (2011)	Presente trabalho
<i>D</i>	0,01	0,00	0,00	6,42	6,42	6,42	8,39	8,39	8,39
<i>L</i>	0,00	0,00	0,00	0,73	0,73	0,73	0,73	0,70	0,92
<i>W</i>	0,98	0,98	0,98	5,99	5,99	5,99	1,77	1,77	1,77
<i>A</i>	-0,00	-0,00	-0,00	2845,16e-6	2845,16e-6	2845,16e-6	2819,35e-6	2844,67e-6	2844,67e-6
<i>I</i>	-0,14	-0,14	-0,14	2867,85e-8	2867,85e-8	2867,85e-8	2844,12e-8	2844,54e-8	2844,88e-8
<i>E</i>	-0,17	-0,17	-0,17	199948,01	199948,01	199948,01	197564,43	197558,01	197582,85
Função de performance	-	-	-	0,110	0,305	0,302	-0,00001	-0,00003	-0,00002
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	-	-	-	1,412	1,39	1,187	1,189	1,176
Probabilidade de falha	-	-	-	-	-	-	0,117	0,117	0,120
Nº de iterações	-	-	-	-	-	-	3	3	3

Analisando os índices de sensibilidade apresentados na Tabela 5.2 nota-se grande influência do carregamento *W*, o qual atua na direção do deslocamento que define o estado limite da estrutura da Figura 5.1. Também com base nos índices de sensibilidade presentes na Tabela 5.2 detecta-se uma menor influência do momento de inércia *I* e módulo de elasticidade *E* para a confiabilidade da estrutura. O sinal positivo para o índice de sensibilidade da carga *W* (Tabela 5.2) indica que um aumento desse carregamento diminuirá o índice de confiabilidade  $\beta$ . Já o sinal negativo dos índices de sensibilidade de *I* e *E* (Tabela 5.2) indicam que um menor

valor de  $I$  ou  $E$  diminuirá o índice de confiabilidade  $\beta$ . Ainda na Tabela 5.2 percebe-se o baixo número de iterações necessárias para a obtenção da convergência do método FORM.

## 5.2 EXEMPLO 2: PÓRTICO PLANO COM QUATRO BARRAS

Nesta seção será analisado o pórtico plano da Figura 5.2. Nessa figura estão indicadas as dimensões lineares dos elementos, tipos de apoios e carga atuante. As siglas adotadas para o carregamento, propriedades do material e propriedades da seção transversal são as mesmas definidas no exemplo 1. A estrutura da Figura 5.2 é composta somente por perfis W 16 x 67 com dimensionamento realizado pelos autores Haldar e Mahdevan (2000b) também com base em prescrições LRFD (AISC, 1994). A Tabela 5.3 apresenta os valores nominais das variáveis aleatórias envolvidas na análise, como também as relações entre valor médio e nominal das variáveis aleatórias, coeficiente de variação e tipo de distribuição.

Avaliou-se a confiabilidade do pórtico com relação ao deslocamento vertical limite em serviço do nó 3, fixado em 0,0254 m (vão/360), sendo que para o cálculo de deslocamentos utilizou-se análise linear. Os resultados obtidos na análise de confiabilidade realizada no presente trabalho, por Agostini e Freitas (2011) e pelos autores Haldar e Mahadevan (2000b) estão descritos na Tabela 5.4 de forma que possam ser comparados. Também, nos Apêndices D, E, F e G, apresenta-se informações específicas referentes aos arquivos de entrada e saída do exemplo 2.

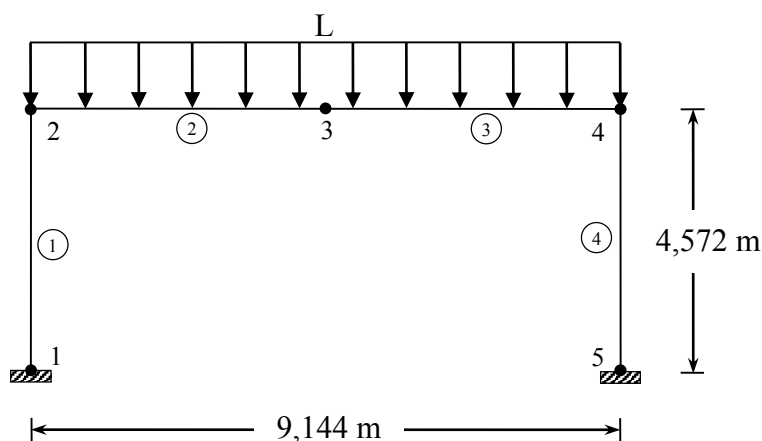


Figura 5.2 - Pórtico plano com quatro barras (análise linear): geometria, carregamento e discretização

Tabela 5.3 - Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias

Variável	Unidade	Valor nominal	Média/Valor nominal	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
<i>L</i>	kN/m	16,05	1,00	0,25	Ext. Tipo 1
<i>A</i>	m <sup>2</sup>	0,01271	1,00	0,05	Lognormal
<i>I</i>	m <sup>4</sup>	0,0003970848	1,00	0,05	Lognormal
<i>E</i>	MPa	199948,04	1,00	0,06	Lognormal

Tabela 5.4 - Resultados da análise de confiabilidade

Variável	Índice de sensibilidade			Valor inicial da variável			Valor final da variável		
	Haldar e Mahadevan (2000b)	Agostini e Freitas (2011)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Agostini e Freitas (2011)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Agostini e Freitas (2011)	Presente trabalho
<i>L</i>	0,9627	0,9623	0,9624	16,05	16,05	16,05	54,25	54,22	54,03
<i>A</i>	-0,0041	-0,0041	-0,0043	0,01271	0,01271	0,01271	0,012684	0,012682	0,012681
<i>I</i>	-0,1709	-0,1717	-0,1713	3,97084e-4	3,97084e-4	3,97084e-4	3,8094e-4	3,8086e-4	3,8094e-4
<i>E</i>	-0,2099	-0,2108	-0,2106	199948,04	199948,04	199948,04	188098,43	188038,40	188080,45
Função de performance	-	-	-	0,7326	0,7328	0,7328	-0,0003	-0,0003	-0,0003
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	-	-	11,06	11,07	11,07	4,71	4,72	4,70
Probabilidade de falha	-	-	-	-	-	-	-	1,196e-6	1,280e-6
Nº de iterações	-	-	-	-	-	-	4	4	4

Com base nos resultados apresentados na Tabela 5.4 nota-se a grande influência do carregamento distribuído *L* para a confiabilidade da estrutura da Figura 5.2, evidenciada pelo valor elevado de seu índice de sensibilidade. Comparando-se os resultados indicados na Tabela 5.4 referentes aos valores iniciais e aos valores finais das variáveis percebe-se concordância com os resultados obtidos por outros autores.

Os resultados referentes aos exemplos 5.1 e 5.2, apresentados anteriormente, validam o MCE criado. Analisando-se as Tabelas 5.2 e 5.4, relativas aos exemplos 5.1 e 5.2 respectivamente, constata-se que os resultados obtidos no presente trabalho estão de acordo com os resultados encontrados por Agostini e Freitas (2011) e também por Haldar e Mahadevan (2000b). Comparando-se, por exemplo, o índice de confiabilidade  $\beta$  indicados nas Tabelas 5.2 e 5.4, verifica-se que os resultados podem ser considerados iguais em termos práticos.

Na sequência do presente capítulo apresentam-se outras três estruturas analisadas com a utilização do MCE. Os valores encontrados nas análises dos exemplos 5.3, 5.4 e 5.5 serão apresentados juntamente com os resultados obtidos por Haldar e Mahadevan (2000b). Para esses exemplos realizou-se análise de confiabilidade estrutural com base em análise linear e análise não linear geométrica. Dentre as principais considerações para a realização de análise não linear geométrica tem-se: adoção de formulação de segunda ordem SOF2 (Silva 2009b), utilização de estratégia de incremento constante de carga, utilização de estratégia de iteração a carga constante, fixação do incremento inicial do parâmetro de carga com o valor de dez por cento da carga total, divisão do carregamento em 10 incrementos e adoção do Método Newton-Raphson padrão. No caso específico do exemplo 3, além da realização de análise linear e análise

não linear geométrica também foi considerada a influência da flexibilidade da ligação entre viga e coluna no valor do índice de confiabilidade.

O número de iterações do método FORM, adotado nas análises do presente trabalho, foi definido com o mesmo valor indicado na bibliografia de referência. No entanto, nas análises em que o número de iterações do método FORM resultou em valor inferior ao da bibliografia de referência, apresentou-se o valor gerado pelo MCE, como consequência de uma tolerância de interrupção igual a  $1 \times 10^{-4}$ .

### 5.3 EXEMPLO 3: PÓRTICO PLANO COM TRÊS BARRAS E LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

A estrutura da Figura 5.3 refere-se ao exemplo 3 e é similar ao exemplo 2, com exceção da presença do carregamento distribuído  $D$  e da carga concentrada  $W$ . As propriedades estatísticas das variáveis aleatórias consideradas na análise do pórtico do exemplo 3 estão descritas na Tabela 5.5. Para esse exemplo realizou-se análise de confiabilidade estrutural tanto com base em análise linear como não linear geométrica, sendo que os resultados dessas duas situações estão apresentados, de forma respectiva, nas Tabelas 5.6 e 5.7. O estado limite analisado refere-se ao deslocamento lateral do nó número dois, limitado a  $0,0114$  m (altura/400) em serviço.

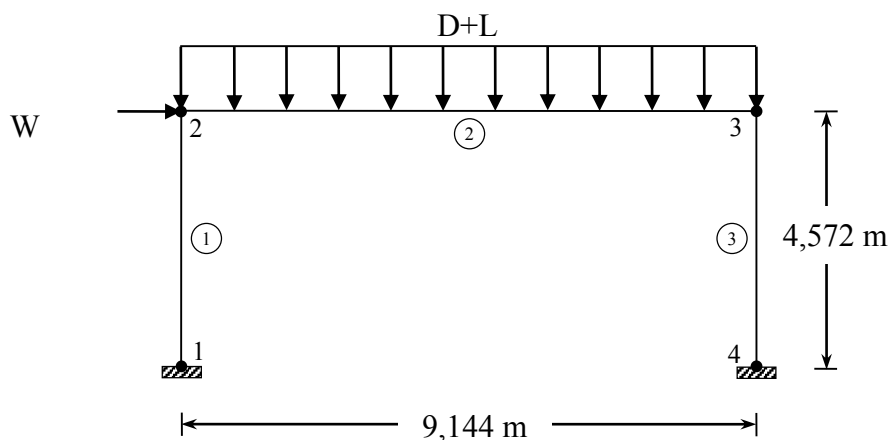


Figura 5.3 - Pórtico plano com três barras e ligações semirrígidas: geometria, carregamento e discretização

Tabela 5.5 - Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias

Variável	Unidade	Valor nominal	Média/ Valor nominal	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
<i>E</i>	MPa	199948,04	1,00	0,06	Lognormal
<i>A</i>	m <sup>2</sup>	0,01271	1,00	0,05	Lognormal
<i>I</i>	m <sup>4</sup>	0,0003970848	1,00	0,05	Lognormal
<i>D</i>	kN/m	43,78	1,05	0,10	Lognormal
<i>L</i>	kN/m	16,05	1,00	0,25	Ext. Tipo 1
<i>W</i>	kN	28,91	0,78	0,37	Ext. Tipo 1

Tabela 5.6 - Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática linear

Variável	Índice de sensibilidade		Valor inicial da variável		Valor final da variável	
	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho
<i>E</i>	-0,2183	-0,2024	199948,04	199948,04	190490,57	187695,36
<i>A</i>	-0,0051	-0,0050	0,01271	0,01271	0,012697	0,012678
<i>I</i>	-0,1769	-0,1637	0,0003970848	0,0003970848	0,0003854594	0,0003804941
<i>D</i>	0,0044	0,0047	45,97	45,97	46,08	45,85
<i>L</i>	0,0035	0,0060	16,05	16,05	16,25	15,50
<i>W</i>	0,9597	0,9655	22,55	22,55	143,81	113,08
Função de performance	-	-	0,8071	0,8062	-0,0009	-0,0002
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	-	12,84	12,76	5,96	5,06
Probabilidade de falha	-	-	-	-	-	2,057e-7
Nº de iterações	-	-	-	-	4	4

Tabela 5.7 - Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática não linear geométrica

Variável	Índice de sensibilidade		Valor inicial da variável		Valor final da variável	
	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho
<i>E</i>	-0,0275	-0,2037	199948,04	199948,04	195550,36	187706,14
<i>A</i>	-0,0007	-0,0049	0,01271	0,01271	0,012697	0,012679
<i>I</i>	-0,1609	-0,1649	0,0003970848	0,0003970848	0,0003805562	0,0003804954
<i>D</i>	0,0086	0,0081	45,97	45,97	46,11	45,93
<i>L</i>	0,0068	0,0063	16,05	16,05	16,74	15,50
<i>W</i>	0,9865	0,9650	22,55	22,55	130,96	111,85
Função de performance	-	-	0,7989	0,8044	-0,0008	-0,00000002
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	-	12,54	12,61	5,47	5,03
Probabilidade de falha	-	-	-	-	-	2,488e-7
Nº de iterações	-	-	-	-	6	5

Analisando os resultados indicados nas Tabelas 5.6 e 5.7 percebe-se certa proximidade entre os resultados da análise de confiabilidade, gerada com base em análise linear e não linear geométrica. Haldar e Mahadevan (2000b) também constataram esse fato, no entanto os resultados do presente trabalho indicam menor variação do índice de confiabilidade com a consideração da não linearidade geométrica.

Adicionalmente e a partir dos índices de sensibilidade detecta-se a grande dependência do estado limite analisado com a carga *W*, e de forma mais discreta com relação ao momento de inércia. Por fim salienta-se que o número de iterações e o valor final da função de falha indicam boa convergência do MCE.

Também com base no exemplo 3 (Figura 5.3), foram realizadas análises de confiabilidade considerando a presença de ligações semirrígidas nos pontos de ligação entre viga e coluna, portanto, nós 2 e 3. As análises referidas nesse momento foram realizadas considerando um comportamento momento-rotação não linear da ligação, com a utilização do modelo matemático de Richard Abbott (1975). Três comportamentos diferentes de ligação foram adotados e estão indicados na Tabela 5.8 e na Figura 5.4, como curvas 1, 2 e 3. Para cada análise, as ligações presentes nos nós 2 e 3 possuíam o mesmo comportamento.

Tabela 5.8 - Propriedades das ligações semirrígidas

Variável	Curva 1	Curva 2	Curva 3
$k(\text{kN.m/rad})$	$1,1298 \times 10^6$	$1,4688 \times 10^5$	$5,6492 \times 10^4$
$k_p(\text{kN.m/rad})$	$1,1298 \times 10^5$	$1,1298 \times 10^4$	$1,1298 \times 10^3$
$M_0(\text{kN.m})$	508,43	451,94	338,95
$n$	0,5	1,0	1,5

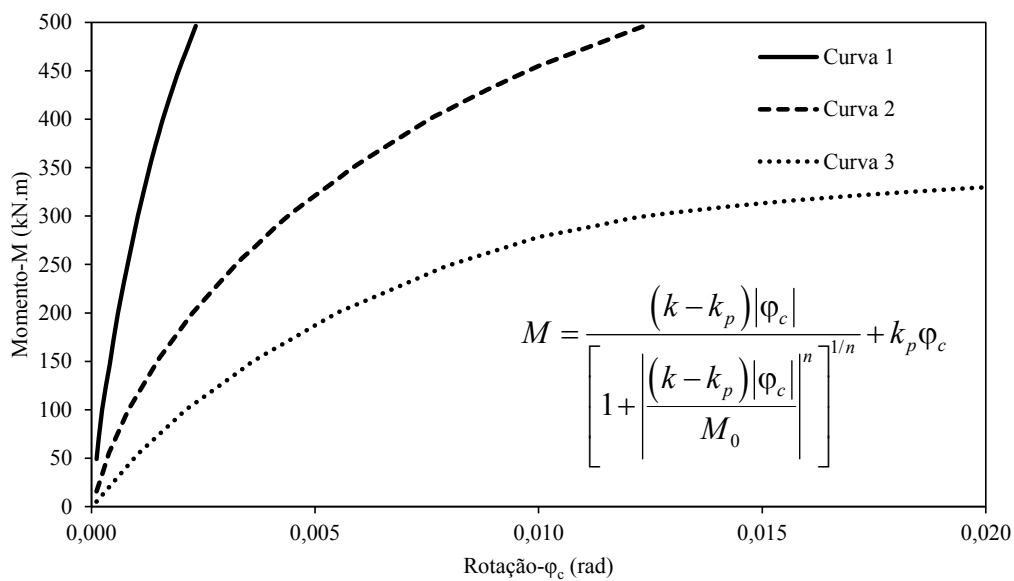


Figura 5.4 - Curvas momento-rotação das ligações semirrígidas

Nas Tabelas 5.9, 5.10 e 5.11 estão apresentados, de forma respectiva para as curvas 1, 2 e 3, os resultados da análise de confiabilidade realizada com a consideração da presença de ligação semirrígida na estrutura. Ressalta-se que as propriedades indicadas na Tabela 5.8 foram inseridas na análise com comportamento determinístico e não como aleatório. Portanto, como variáveis aleatórias manteve-se aquelas indicadas na Tabela 5.5. A bibliografia utilizada para comparação: Haldar e Mahadevan (2000b), por sua vez, realizou análise de confiabilidade considerando comportamento aleatório das variáveis indicadas na Tabela 5.8.

Tabela 5.9 - Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática não linear geométrica e ligação semirrígida (curva 1)

Variável	Índice de sensibilidade	Valor inicial da variável	Valor final da variável
<i>E</i>	-0,1960	199948,04	188354,23
<i>A</i>	-0,0047417	0,01271	0,01268
<i>I</i>	-0,1587	0,0003970848	0,0003813867
<i>D</i>	0,009346	45,97	45,95
<i>L</i>	0,00814	16,05	15,54
<i>W</i>	0,9676	22,55	109,21
Função de performance	-	0,7987	-0,000115
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	12,14	4,93
Probabilidade de falha	-	-	4,1138e-7
Nº de iterações	-	-	4

Tabela 5.10 - Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática não linear geométrica e ligação semirrígida (curva 2)

Variável	Índice de sensibilidade	Valor inicial da variável	Valor final da variável
<i>E</i>	-0,1792	199948,04	189840,12
<i>A</i>	-0,0042829	0,01271	0,01268
<i>I</i>	-0,1451	0,0003970848	0,0003834094
<i>D</i>	0,012188	45,97	46,00
<i>L</i>	0,010107	16,05	15,56
<i>W</i>	0,9729	22,55	101,81
Função de performance	-	0,7829	-0,0000456
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	10,94	4,66
Probabilidade de falha	-	-	1,5657e-6
Nº de iterações	-	-	4

Tabela 5.11 - Resultados da análise de confiabilidade, com base em análise estática não linear geométrica e ligação semirrígida (curva 3)

Variável	Índice de sensibilidade	Valor inicial da variável	Valor final da variável
<i>E</i>	-0,1630	199948,04	191314,86
<i>A</i>	-0,003646	0,01271	0,01268
<i>I</i>	-0,1322	0,0003970848	0,0003853952
<i>D</i>	0,011894	45,97	45,98
<i>L</i>	0,009421	16,05	15,54
<i>W</i>	0,9776	22,55	92,84
Função de performance	-	0,7618	-0,0000155
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	9,60	4,33
Probabilidade de falha	-	-	7,3658e-6
Nº de iterações	-	-	4

Tabela 5.12 - Valores de  $\beta$  segundo Haldar e Mahadevan (2000b) e determinados no presente trabalho, utilizando ligação rígida e semirrígida entre viga e coluna

	$\beta$ Ligação rígida (análise não linear)		$\beta_1$ (Curva 1)		$\beta_2$ (Curva 2)		$\beta_3$ (Curva 3)	
	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho
Deslocamento lateral do nó 2 (estado limite de serviço)	5,47	5,03	5,17	4,93	4,47	4,66	4,06	4,33

Quanto aos resultados apresentados nas Tabelas 5.9 a 5.11, compara-se, num primeiro momento, com os resultados encontrados para a análise de confiabilidade da mesma estrutura, no entanto, sem a consideração de ligações semirrígidas: Tabela 5.7. Esperava-se que o índice de confiabilidade sofresse uma queda em seu valor ao adicionar ligações semirrígidas na estrutura. Essa queda foi de fato encontrada. Com o comportamento de ligação, para os nós 2 e 3, representado pela curva 1 obteve-se  $\beta = 4,93$  (Tabela 5.9-Curva 1), valor esse inferior ao



encontrado quando adotou-se somente ligações rígidas:  $\beta = 5,03$  (Tabela 5.7). Para os comportamentos menos rígidos das ligações dos nós 2 e 3, representados pelas curvas 2 e 3, a queda do índice de confiabilidade foi mais evidente e já esperada:  $\beta = 4,66$  (Tabela 5.10-Curva 2) e  $\beta = 4,33$  (Tabela 5.11-Curva 3). Entende-se que com a presença de ligações semirrígidas, o deslocamento lateral do nó 2 resulta em maior valor para um mesmo nível de carregamento o que reflete diretamente no índice de confiabilidade.

Num segundo momento é importante destacar a queda do índice de confiabilidade quando o comportamento das ligações semirrígidas dos nós 2 e 3 passa de mais rígido para menos rígido. Essa queda pode ser percebida na Tabela 5.12 para os resultados referentes ao presente trabalho. Essas diferenças no valor do índice de confiabilidade  $\beta$  também foram detectadas por Haldar e Mahadevan (2000b) e também seguindo a mesma tendência comentada anteriormente. Esses autores afirmam ainda não ser adequada a idealização das ligações como perfeitamente rígidas e sugerem investigação cuidadosa, mesmo para estado limite de serviço, em pórticos modelados com ligações semirrígidas. Hadianfard e Razani (2003) também encontraram resultados em suas análises de confiabilidade que indicam diferenças substanciais de comportamento para estruturas modeladas com ligações semirrígidas, comparadas àquelas modeladas com ligações idealmente rotuladas ou rígidas. Hadianfard e Razani (2003) afirmam que para a obtenção de resultados mais confiáveis é necessário considerar o comportamento semirrígido das ligações nas análises de confiabilidade.

Para uma terceira fase de análise chama-se atenção para a diferença entre os valores de  $\beta$  apresentados na Tabela 5.12, retirados das Tabelas 5.9, 5.10 e 5.11, com aqueles encontrados por Haldar e Mahadevan (2000b). Atribui-se a diferença entre esses valores à consideração das propriedades que determinam o comportamento das ligações indicadas na Tabela 5.8 como aleatórias por parte dos autores Haldar e Mahadevan (2000b) e como determinísticas no presente trabalho.

#### **5.4 EXEMPLO 4: PÓRTICO PLANO COM SETE BARRAS**

O quarto exemplo diz respeito ao pórtico plano apresentado na Figura 5.5. Na Tabela 5.13 estão indicadas as características das variáveis aleatórias envolvidas, sendo que  $A_v$  e  $I_v$  correspondem à área e momento de inércia das vigas e,  $A_c$  e  $I_c$  referem-se às colunas. A estrutura

do pórtico em questão é composta por perfis W 18 x 55 para as vigas e W 14 x 68 para as colunas, com dimensionamento efetuado pelos autores Haldar e Mahdevan (2000b) seguindo prescrições LRFD (AISC, 1994). Como estado limite nesse exemplo foram estabelecidos os deslocamentos horizontal do nó 3 e vertical do nó 4 fixados respectivamente em 0,0183 m (altura/400) e 0,0203 m (vão/360) em serviço. Os resultados apresentados nas Tabelas 5.14 e 5.15 dizem respeito a ambos os estados limites, com consideração de análise linear e não linear geométrica. Já na Tabela 5.16 tem-se uma comparação entre os resultados disponibilizados por Haldar e Mahadevan (2000b) e os obtidos no presente trabalho para o exemplo 4.

Tabela 5.13 - Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias

Variável	Unidade	Valor nominal	Média/ Valor nominal	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
$E$	MPa	199948,04	1,00	0,06	Lognormal
$A_v$	m <sup>2</sup>	0,010452	1,00	0,05	Lognormal
$A_c$	m <sup>2</sup>	0,012903	1,00	0,05	Lognormal
$I_v$	m <sup>4</sup>	0,0003704460	1,00	0,05	Lognormal
$I_c$	m <sup>4</sup>	0,0003009353	1,00	0,05	Lognormal
$D$	kN/m	43,78	1,05	0,10	Lognormal
$L$	kN/m	16,05	1,00	0,25	Ext. Tipo 1
$W$	kN	57,03	0,78	0,37	Ext. Tipo 1

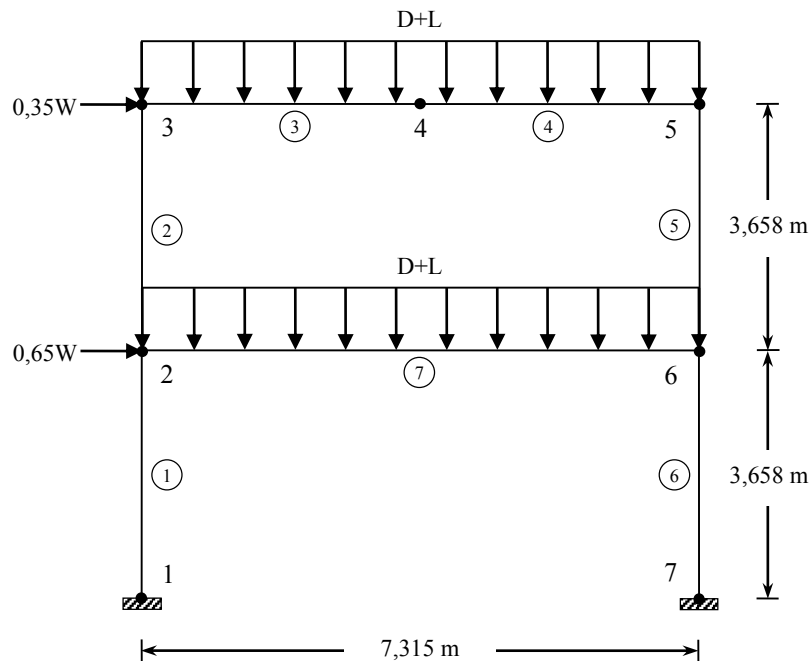


Figura 5.5 - Pórtico plano com sete barras: geometria, carregamento e discretização

Tabela 5.14 - Resultados da análise de confiabilidade para deslocamento lateral do nó 3 (estado limite de serviço)

Variável	Índice de sensibilidade		Valor inicial da variável		Valor final da variável	
	Análise linear	Análise não linear geométrica	Análise linear	Análise não linear geométrica	Análise linear	Análise não linear geométrica
<i>E</i>	-0,1805	-0,1825	199948,04	199948,04	191725,95	191734,29
<i>A<sub>v</sub></i>	-0,0019	-0,0019	0,010452	0,010452	0,010435	0,010435
<i>A<sub>e</sub></i>	-0,0010	-0,0009	0,012903	0,012903	0,012884	0,012885
<i>I<sub>v</sub></i>	-0,0713	-0,0721	0,0003704460	0,0003704460	0,0003651216	0,0003651226
<i>I<sub>e</sub></i>	-0,0762	-0,0771	0,0003009353	0,0003009353	0,0002963376	0,0002963387
<i>D</i>	0,0023	0,0068	45,97	45,97	45,78	45,85
<i>L</i>	0,0049	0,0053	16,05	16,05	15,46	15,46
<i>W</i>	0,9780	0,9775	44,48	44,48	15,09	14,87
Função de performance	-	-	0,7143	0,7098	-0,000004	0,000004
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	-	7,35	7,20	3,71	3,67
Probabilidade de falha	-	-	-	-	1,017e-4	1,213e-4
Nº de iterações	-	-	-	-	4	4

Diante da análise dos resultados das Tabelas 5.14 e 5.15 percebe-se pouca diferença de valores para a análise de confiabilidade realizada com base em análise linear e não linear geométrica. Entende-se que essa pouca diferença ocorre pois os parâmetros de geometria, carregamento e propriedade do material que compõem a estrutura em questão, não propiciam a ocorrência de deslocamentos que gerem considerável manifestação de não linearidade geométrica dentro do estado limite de serviço. Haldar e Mahadevan (2000b) afirmam que para os casos linear e não linear e estado limite de serviço, os índices de confiabilidades obtidos, e indicados na Tabela 5.16, são muito similares pois a deformação estrutural para o caso linear não apresenta diferenças significantes se comparada ao caso não linear.

Tabela 5.15 - Resultados da análise de confiabilidade para deslocamento vertical do nó 4 (estado limite de serviço)

Variável	Índice de sensibilidade		Valor inicial da variável		Valor final da variável	
	Análise linear	Análise não linear geométrica	Análise linear	Análise não linear geométrica	Análise linear	Análise não linear geométrica
<i>E</i>	-0,4022	-0,4040	199948,04	199948,04	181652,25	181724,64
<i>A<sub>v</sub></i>	-0,0042	-0,0041	0,010452	0,010452	0,010430	0,010431
<i>A<sub>e</sub></i>	-0,0254	-0,0253	0,012903	0,012903	0,012823	0,012824
<i>I<sub>v</sub></i>	-0,2034	-0,2047	0,0003704460	0,0003704460	0,0003555872	0,0003556153
<i>I<sub>e</sub></i>	-0,1023	-0,1027	0,0003009353	0,0003009353	0,0002946156	0,0002946484
<i>D</i>	0,4012	0,4054	45,97	45,97	53,48	53,50
<i>L</i>	0,7904	0,7870	16,05	16,05	35,82	35,40
<i>W</i>	-0,0004	-0,00008	44,48	44,48	41,76	41,77
Função de performance	-	-	0,3893	0,3873	0,0000005	0,0000006
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	-	5,47	5,41	3,91	3,87
Probabilidade de falha	-	-	-	-	4,697e-5	5,395e-5
Nº de iterações	-	-	-	-	6	6

Tabela 5.16 - Valores de  $\beta$  (estado limite de serviço) segundo Haldar e Mahadevan (2000b) e determinados no presente trabalho

	$\beta$ (análise linear)		$\beta$ (análise não linear geométrica)	
	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho
Deslocamento lateral do nó 3	1,93	3,71	1,88	3,67
Deslocamento vertical do nó 4	4,40	3,91	4,41	3,87

Especificamente com relação aos índices de sensibilidade indicados na Tabela 5.14 fica evidente a grande influência da carga  $W$  para a confiabilidade da estrutura analisada, o que faz sentido em termos físicos pois um possível acréscimo dessa carga terá impacto direto no deslocamento lateral do nó três. Também de forma específica, no entanto com relação aos índices de sensibilidade indicados na Tabela 5.15, percebe-se a maior influência das cargas  $D$  e  $L$ , módulo de elasticidade e momento de inércia da viga, para a confiabilidade da estrutura. Nesse caso possíveis alterações de  $D$ ,  $L$ ,  $E$  ou  $I_v$  afetarão de forma mais acentuada o deslocamento vertical do nó quatro, o qual está vinculado ao estado limite estabelecido.

## 5.5 EXEMPLO 5: PÓRTICO PLANO COM ONZE BARRAS

O quinto exemplo é composto pelo pórtico apresentado na Figura 5.6, com disposição assimétrica de seus elementos. As propriedades estatísticas das variáveis relacionadas à estrutura em questão estão indicadas na Tabela 5.17 com os índices “ $v$ ” e “ $c$ ” para área e momento de inércia significando, respectivamente, viga e coluna. O deslocamento lateral do nó número um foi limitado em 0,0254 m, configurando portanto o estado limite de serviço considerado no exemplo 5. Na Tabela 5.18 são apresentados os resultados da análise de confiabilidade realizada no presente trabalho, tanto com base em análise linear como não linear geométrica. Já na Tabela 5.19 tem-se um resumo para os índices de confiabilidade  $\beta$  determinados a partir de análise linear e não linear geométrica incluindo valores obtidos por Haldar e Mahadevan (2000b).

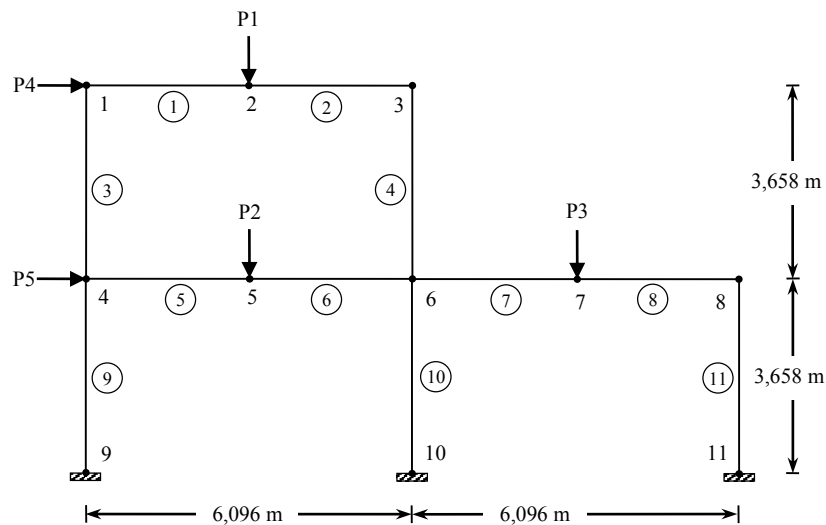


Figura 5.6 - Pórtico plano com onze barras: geometria, carregamento e discretização

Tabela 5.17 - Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias

Variável	Unidade	Média	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
$E$	MPa	199948,04	0,06	Lognormal
$A_v$	m <sup>2</sup>	0,007613	0,05	Lognormal
$A_c$	m <sup>2</sup>	0,011419	0,05	Lognormal
$I_v$	m <sup>4</sup>	0,0002151916	0,05	Lognormal
$I_c$	m <sup>4</sup>	0,0001431836	0,05	Lognormal
$P1$ (Permanente)	kN	44,48	0,10	Lognormal
$P2$ (Permanente)	kN	88,96	0,10	Lognormal
$P3$ (Permanente)	kN	88,96	0,10	Lognormal
$P4$ (Vento)	kN	44,48	0,37	Ext. Tipo 1
$P5$ (Vento)	kN	22,24	0,37	Ext. Tipo 1

Tabela 5.18 - Resultados da análise de confiabilidade para deslocamento lateral do nó 1 obtidos por análise linear e não linear (estado limite de serviço)

Variável	Índice de sensibilidade		Valor inicial da variável		Valor final da variável	
	Análise linear	Análise não linear	Análise linear	Análise não linear	Análise linear	Análise não linear
$E$	-0,182986	-0,183625	199948,04	199948,04	194716,96	194731,43
$A_v$	-0,001573	-0,001566	0,007613	0,007613	0,007602	0,07602
$A_c$	-0,001099	-0,000923	0,011419	0,011419	0,011403	0,011404
$I_v$	-0,065100	-0,065437	0,0002151916	0,0002151916	0,0002133527	0,0002133548
$I_c$	-0,084845	-0,085225	0,0001431836	0,0001431836	0,0001416446	0,0001416474
$P1$	-0,001382	-0,000862	44,48	44,48	44,25	44,25
$P2$	0,008176	0,008469	88,96	88,96	88,68	88,69
$P3$	0,003952	0,004246	88,96	88,96	88,60	88,60
$P4$	0,973712	0,973498	44,48	44,48	91,69	91,21
$P5$	0,082917	0,083330	22,24	22,24	22,32	22,31
Função de performance	-	-	0,4763	0,4743	-0,0000002	-0,0000002
Índice de confiabilidade ( $\beta$ )	-	-	3,289	3,262	2,254	2,240
Probabilidade de falha	-	-	-	-	1,208e-2	1,255e-2
Nº de iterações	-	-	-	-	4	4

Tabela 5.19 - Valores de  $\beta$  segundo Haldar e Mahadevan (2000b) e determinados no presente trabalho

	$\beta$ (análise linear)		$\beta$ (análise não linear geométrica)	
	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho	Haldar e Mahadevan (2000b)	Presente trabalho
Deslocamento lateral do nó 1 (estado limite de serviço)	2,283	2,254	2,274	2,240

Comparando-se os resultados encontrados no presente trabalho com aqueles encontrados por Haldar e Mahadevam (2000b) e indicados na Tabela 5.19 detecta-se boa concordância entre os valores.

Analisando os resultados apresentados nas Tabelas 5.18 e 5.19 percebe-se, principalmente, que a consideração de não linearidade geométrica não resultou em grandes diferenças no índice de confiabilidade, índices de sensibilidade e valores finais das variáveis. Assim como já observado para os exemplos anteriores, entende-se que para o carregamento incidente, propriedade do material e características geométricas da estrutura do exemplo 5, não ocorrem grandes manifestações dos efeitos da não linearidade geométrica diante do estado limite em questão. Percebe-se também, com base nos índices de sensibilidade indicados na Tabela 5.18, que a carga P4 e o módulo de elasticidade são as variáveis com maior influência na confiabilidade da estrutura do exemplo 5.

## **CAPÍTULO 6**

### **CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

Ao longo do presente trabalho buscou-se apresentar os passos percorridos para a realização de análise de confiabilidade estrutural de pórticos planos projetados com a consideração da não linearidade geométrica e flexibilidade da ligação. A parte introdutória incluindo objetivos e justificativas foi apresentada no Capítulo 1. O desenvolvimento do texto teve início com a apresentação de aspectos teóricos relativos à Análise de Confiabilidade (Capítulo 2) e também Análise Estática de Estruturas Metálicas Reticuladas Planas considerando a Não Linearidade Geométrica e a Flexibilidade da Ligação (Capítulo 3). Continuando a parte de desenvolvimento textual, apresentou-se no Capítulo 4 os aspectos relativos ao Módulo de Confiabilidade Estrutural, como também os pontos relativos à integração entre esse módulo e o programa CS-ASA (Silva, 2009b). Finalizando a parte de desenvolvimento tem-se o Capítulo 5 que é composto por exemplos de análises de confiabilidade, com apresentação de resultados obtidos a partir da implementação realizada, assim como análises desses resultados.

Diante de um direcionamento atual para a adoção de metodologias de análise estrutural que incluam efeitos não lineares no processo de cálculo, realizou-se estudo para avaliar a confiabilidade desse tipo de conduta. Trata-se, como relatado no texto, de estudo envolvendo a avaliação da confiabilidade estrutural para o estado limite de serviço (deslocamento), de estruturas analisadas com a consideração da não linearidade geométrica e flexibilidade da ligação. Ao realizar essas considerações tem-se um resultado mais real do comportamento estrutural, o que proporciona um projeto mais eficaz. Nesse caso, entretanto, passa a ser importante a avaliação da confiabilidade estrutural de forma a validar essa metodologia de inclusão direta de efeitos não lineares no projeto da estrutura. Essa validação, por sua vez inclui a confiabilidade estrutural, a qual tem norteado as atuais buscas para a determinação da probabilidade de falha de estruturas. Buscou-se portanto no presente trabalho dar um grande passo para a avaliação da confiabilidade estrutural de estruturas projetadas com análise avançada.

Para a concretização desse objetivo, uma das investigações realizadas buscou responder qual a influência da realização de análise linear ou não linear geométrica na confiabilidade de pórticos metálicos planos. Como apresentado, o índice de confiabilidade  $\beta$  representa o nível de confiabilidade de determinada estrutura. Para as cinco análises de confiabilidade realizadas, as quais envolveram somente o estado limite de serviço, não foram detectadas grandes diferenças nos índices de confiabilidade das estruturas analisadas quando levou-se em conta a não linearidade geométrica. Justifica-se esse comportamento com base no fato de que o estado limite analisado foi o de serviço e, devido a isso, os deslocamentos obtidos para as estruturas analisadas proporcionaram baixa manifestação de efeitos devidos à não linearidade geométrica. No entanto, ficou evidenciado com base nos exemplos analisados, uma diminuição do índice de confiabilidade  $\beta$  quando inseriu-se os efeitos da não linearidade geométrica.

A outra investigação realizada envolveu a avaliação da influência da flexibilidade da ligação na confiabilidade da estrutura. Ressalta-se que foi realizada análise não linear geométrica com a consideração de ligações semirrígidas entre viga e coluna. Quanto aos parâmetros relacionados ao comportamento das ligações, reitera-se que entraram como determinísticos na análise de confiabilidade. A consideração da semirrígidez da ligação ocorreu especificamente para o exemplo 3 e nessa análise detectou-se considerável diminuição do valor do índice de confiabilidade com a diminuição da rigidez da ligação, partindo de uma estrutura com ligações idealmente rígidas. Ressalta-se que foi considerado o estado limite de serviço para a determinação do índice de confiabilidade  $\beta$  da estrutura analisada com a presença de ligações semirrígidas. Os resultados obtidos no presente trabalho em que foi adotado o estado limite de serviço sugerem, principalmente, a necessidade de consideração do comportamento semirrígido das ligações na realização de análise de confiabilidade de pórticos metálicos planos.

A partir dos argumentos apresentados, apresenta-se algumas características relativas ao MCE criado:

- a) convergência em todas as análises realizadas no presente trabalho;
- b) integração com a biblioteca IMSL™ (Visual Numerics®, 2006) de funções matemáticas e estatísticas;
- c) possibilidade de inclusão de outras funcionalidades relativas à confiabilidade estrutural;
- d) funcionamento integrado ao programa de análise estrutural CS-ASA (Silva, 2009b), o que viabiliza a implementação futura de outros efeitos de segunda ordem.



A continuidade do presente trabalho de pesquisa inclui passos futuros para a realização de análise de confiabilidade de estruturas projetadas com análise avançada. Nesse sentido, sugere-se:

- a) inclusão da não linearidade física na análise de confiabilidade;
- b) consideração dos efeitos devidos às imperfeições geométricas e tensões residuais;
- c) consideração do estado limite último na análise de confiabilidade;
- d) inclusão da aleatoriedade relativa aos parâmetros que caracterizam a flexibilidade da ligação e a não linearidade física;
- e) inserção de outras funções de distribuições de probabilidade;
- f) inclusão de outros métodos de análise de confiabilidade como SORM e Monte Carlo;
- g) implementação do Método da Diferenciação Direta como alternativa ao Método das Diferenças Finitas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agostini, B.M., Freitas, M.S.R. (2011). Procedimento para avaliação da confiabilidade estrutural de pórticos planos. *XXXII CILAMCE - Iberian latin american congress on computational methods in engineering*. Ouro Preto – MG.

AISC (1986). *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. American institute of steel construction, AISC, 1st edn., Chicago, IL.

AISC (1994). *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. American institute of steel construction, AISC, 2nd edn., Chicago, IL.

Almeida, A.F. (2008). *Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ.

Alvarenga, A.R. (2005). *Aspectos importantes da análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG.

Alvarenga, A.R. (2010). *As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG.

Alves, R.V. (1995). *Instabilidade não linear elástica de estruturas reticuladas espaciais*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, Rio de Janeiro-RJ.

Ang, A.H.S., Tang, W.H. (1984). *Probability concepts in engineering planning and design – decision, risk and reliability*. John Wiley & Sons, v.II, 562p., EUA.

Azevedo, A.F.M. (2003). Método dos elementos finitos. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Portugal, (<http://www.fe.up.pt/~alvaro>)

Bathe, K.J. (1996). *Finite element procedures*. New Jersey, Prentice-Hall.

- Breitung, K. (1984). Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of engineering mechanics (ASME)*, v.110, n°3, p.357-366.
- BS 5950 (1990). *Structural use of steelwork in buildings*. Part 1. British standards institution, London, England.
- Chan, S.L., Chui, P.P.T. (2000). Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections. *Elsevier*, Oxford.
- Chen, W.F., Lui, E.M., (1991). *Stability design of steel frames*. CRC Press, Boca Raton, Flórida.
- Chen, W.F., Goto, Y., Liew, J.Y.R. (1996). *Stability design of semi-rigid frames*. John Wiley & Sons Inc., USA.
- Chen, W.F. (2000). *Practical analysis for semi-rigid frame design*. Singapore: World Scientific.
- Der Kiureghian, A., Liu, P. L. (1986). Structural reliability under incomplete probability information. *Journal of engineering mechanics (ASME)*, v.112, n°1, p.85-104.
- Eurocode 3 (1990). *Design of steel structures*. v.1, Eurocode edited draft.
- Eurocode 3 (1992). *Design of steel structures. Part1-1: General rules and rules for buildidngs*. European committee for standardization, Brussels, Belgium.
- Freitas, M.S.R. (1998). *Combinação de modelos probabilísticos e possibilísticos para a análise de confiabilidade estrutural*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, Rio de Janeiro-RJ.
- Galvão, A.S. (2000). *Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG.
- Gao, L. (1994). *Stochastic finit element method for the reliability analisys of nonlinear frames with PR connections*. Dissertation (Doctor of Philosophy)-University of Arizona, USA
- Gizejowski, M.A., Barszcz, A.M., Branicki, C.J., Uzoegbo, H.C. (2006). Review of analysis methods for inelastic design of steel semi-continuous frames. *Journal of constructional steel research* 62, p.81–92, Elsevier.

Hadianfard, M.A., Razani, R. (2003). Effects of semi-rigid behavior of connections in the reliability of steel frames. *Structural safety* v.25, p.123-138.

Haldar, A., Mahadevan, S. (2000a). *Probability, reliability and statistical methods in engineering design*. John Wiley & Sons, England.

Haldar, A., Mahadevan, S. (2000b). *Reliability assessment using stochastic finite element analysis*. John Wiley & Sons, England.

Hasofer, A.M., Lind, N. C., (1974). An exact and invariant first-order reliability format. *Journal of engineering mechanics*, v.100, p.111-121.

Intel Corporation (2013). *Intel® fortran compiler XE 13.1*.

Jones, S.W., Kirby, P.A., Nethercot, D.A., (1980). Effect of semi-rigid connections on steel column strength. *Journal of constructional steel research*, v.1, p.38-46.

Jones, S.W., Kirby, P.A., Nethercot, D.A., (1983). The analysis of frames with semi-rigid connections-a state of the art report. *Journal construction steel research*, v.3(2), p.2-13.

Lafraia, J.R.B. (2001). *Manual de confiabilidade, manutenibilidade e disponibilidade*. Qualitymark, Petrobras, 388p., Rio de Janeiro.

Li, G.Q., Li, J.J. (2007). *Advanced analysis and design of steel frames*. John Wiley & Sons Ltd, 371p., England.

Liew, J.Y.R., White, D.W, Chen, W.F, (1993). Second-order refined plastic-hinge analysis for frame design. Part I-II. *ASCE Journal of structural division*, v.119(11), p.3196-3237.

Lionel, S. (2011). Installing and using the IMSL Libraries. Disponível em: <<https://software.intel.com/en-us/articles/installing-and-using-the-imsl-libraries>>. Acesso em: 6 setembro 2014.

Machado, F.C.S. (2005). *Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG.

Madsen, H.O., Krenk, S., Lind, N.C. (2006). *Methods of structural safety*. Dover Publications, 407p. Mineola, New York.

Melchers, R.E. (1999). *Structural reliability analysis and prediction*. 2. ed. John Wiley & Sons Ltd, 431p., England.

Menin, R.C.G. (2006). *Aplicação da descrição co-rotacional na análise não linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade de Brasília, Brasília-DF.

Microsoft Corporation (2010). *Microsoft Visual Studio 2010*. Version 10.0.30319.

NBR 8800 (1986). *Projeto e execução de estruturas em aço de edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.

NBR 8800 (2008). *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.

Nethercot, D.A., Li, T.Q., Ahmad, B., (1998). Unified classification system for beam to column connections. *Journal of constructional steel research*, v.45(1), p.39-65.

Nowak, A.S., Collins, K.R. (2000). *Reliability of structures*. Boston: McGraw-Hill.

Oliveira, R.A. (1997). *Confiabilidade de sistemas estruturais pelo método de integração Monte Carlo com amostragem por importância*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, Rio de Janeiro-RJ.

Pacoste, C., Eriksson, A., (1997). Beam elements in instability problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.144, p.163-197.

Parametric Technology Corporation (2007). *Mathcad 14.0*. 140 Kendrick Street, Needham, MA 02494 USA.

Pinheiro, L. (2003). *Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semirrígidos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG.

Prado, I.M., (2012). *CS-ASA Preprocessor: Programa Gráfico Interativo de Pré-Processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG.

Pulido, J.E., Jacobs, T.L, Prates De Lima, E.C. (1992). Structural reliability using Monte Carlo simulation with variance reduction techniques on elastic-plastic structures. *Computer and structures*, p. 419-430.

Rackwitz, R., Fiessler, B., (1978). Structural reliability under combined random load sequences. *Computer and structures*, v.9, p.489-494.

Richard, R.M., Abbott, B.J., (1975). Versatile elastic-plastic stress-strain formula. *Journal of the engineering mechanics division*, v.101(4), p. 511-515.

Rocha, G. (2000). *Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não linear de estruturas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG.

Sagrilo, L.V.S. (1994). *Análise de confiabilidade estrutural utilizando os métodos analíticos FORM e SORM*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, Rio de Janeiro-RJ.

Sagrilo, L.V.S. (2004). *Confiabilidade estrutural – COPPE/UFRJ*. Notas de Aula, Rio de Janeiro-RJ.

Sekulovic, M., Salatic, R., (2001) Nonlinear analysis of frames with flexible connections. *Computers & structures*, v.79(11), p.1097-1107.

Shinozuka, M. (1983). Basic analysis of structural safety. *Journal of structural engineering*. ASCE v.109 n.3 p.721-740.

Silva, A.A. (2009a). *Análise não linear assintótica modal da instabilidade de estruturas reticuladas*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, Rio de Janeiro-RJ.

Silva, A.R.D. (2009b). *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG.

Silva, R.G.L. (2010). *Análise inelástica avançada de pórticos planos de aço considerando as influências do cisalhamento e de ligações semirrígidas*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG.

Silva, S.S. (2011). *Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação co-rotacional e plasticidade por camadas*. Dissertação de mestrado em estruturas e construção civil. Universidade de Brasília, Brasília-DF.

Silveira, R.A.M. (1995). *Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-PUC-Rio, Rio de Janeiro-RJ.

Silveira, R.A.M., Galvão, A. (2011). *Formulações geometricamente não-lineares para estruturas reticuladas*. Notas de aula da disciplina Tópicos avançados em estruturas metálicas I. UFOP, Ouro Preto-MG.

Soriano, H.L. (2005). *Análise de estruturas: formulação matricial e implementação computacional*. v.2, Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Stefanou, G. (2008). The stochastic finite element method: past, present and future. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. v.198, p.1031-1051.

Subia, J.E.P. (1991). *Confiabilidade de sistemas estruturais pelo método de Monte Carlo com técnica de redução de variância*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil)-Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, Rio de Janeiro-RJ.

Torkamani, M.A.M., Sonmez, M., Cao, J., (1997). Second-order elastic plane-frame analysis using finite-element method. *Journal of structural engineering*, v.12(9), p.1225-1235.

Visual Numerics® (2006). *IMSL™ Fortran numerical library*. Version 6.0. Houston, USA.

Yang, Y.B., Kuo, S.R. (1994). *Theory & analysis of nonlinear framed structures*. Singapore: Prentice Hall.

## APÊNDICE A – DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Tabela A-A.1 – Expressões para a PDF, CDF, média e desvio padrão de distribuições de probabilidade contínuas utilizadas em engenharia estrutural

Tipo de distribuição	PDF - $f_X(x)$	CDF - $F_X(x)$	Média - ( $\mu_X$ )	Desvio padrão - ( $\sigma_X$ )
Uniforme	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & p/a \leq x \leq b \\ 0 & p/x \leq a \text{ e } x \geq b \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & p/x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & p/a \leq x \leq b \\ 1 & p/x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Normal ou Gaussiana	$\frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]$ $p/ -\infty \leq x \leq +\infty$	$\Phi\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)$	$\mu_X$	$\sigma_X$
Lognormal	$\frac{1}{X \cdot \sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]$ $p/ 0 < x < \infty$ $\sigma_Y = \sqrt{\ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2\right]}$ , $\mu_Y = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2}\sigma_Y^2$	$\Phi\left(\frac{\ln X - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$	$\exp\left(\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right)$	$\sqrt{\mu_X^2 [\exp(\sigma_Y^2) - 1]}$
Extremo Tipo1- Máximo (Gumbel)	$\alpha \cdot e^{-\alpha(X-u)} \cdot \exp[-e^{-\alpha(X-u)}]$ $\alpha$ = parâmetro de forma $u$ = parâmetro de localização	$\exp[-e^{-\alpha(X-u)}]$	$u + \frac{0,5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\alpha \cdot \sqrt{6}}$



Tabela A-A.1 – Expressões para a PDF, CDF, média e desvio padrão de distribuições de probabilidade contínuas utilizadas em engenharia estrutural (continuação)

<b>Tipo de distribuição</b>	<b>PDF - <math>f_X(x)</math></b>	<b>CDF - <math>F_X(x)</math></b>	<b>Média - (<math>\mu_X</math>)</b>	<b>Desvio padrão - (<math>\sigma_X</math>)</b>
Extremo tipo I-Mínimo	$\alpha \cdot e^{\alpha(X-u)} \cdot \exp[-e^{\alpha(X-u)}]$	$1 - \exp[-e^{\alpha(X-u)}]$	$u - \frac{0,5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha \cdot 6}}$
Tipo II - Máximo	$\frac{K}{V} \cdot \left(\frac{V}{X}\right)^{K+1} \exp\left[-\left(\frac{V}{X}\right)^K\right]$ $K = \text{parâmetro de forma}$ $V = \text{parâmetro de localização}$	$\exp\left[-\left(\frac{V}{X}\right)^K\right]$	$V \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{K}\right)$	$V \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{K}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{K}\right)}$
Tipo III-Máximo (Weibull)	$\frac{k}{w-u} \cdot \left(\frac{w-X}{w-u}\right)^{k-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{w-X}{w-u}\right)^k\right]$ $p/X \leq w$ $k = \text{parâmetro de forma}$ $u = \text{parâmetro de escala}$ $w = \text{limite superior}$	$\exp\left[-\left(\frac{w-X}{w-u}\right)^k\right]$ $p/X \leq w$ e $k \geq 0$	$w - (w-u) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	$(w-u) \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$
Tipo III-Mínimo (Weibull)	$\frac{k}{u-w} \cdot \left(\frac{X-w}{u-w}\right)^{k-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{X-w}{u-w}\right)^k\right]$ $p/X \geq w$ $w = \text{limite inferior}$	$1 - \exp\left[-\left(\frac{X-w}{u-w}\right)^k\right]$ $p/X \geq w$	$w + (u-w) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	$(u-w) \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$

## APÊNDICE B – ALGORITMO FORM

1 – Calcular os coeficientes de correlação normais equivalentes e montar matriz com esses coeficientes. Obter matriz triangular inferior  $\mathbf{L}$  por decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação normais equivalentes. Determinar a matriz  $\mathbf{\Gamma}$  a partir da inversa da matriz triangular inferior  $\mathbf{L}$ .

2 – Definir ponto de partida para os elementos que compõem o vetor  $\mathbf{U}$  (utiliza-se normalmente as médias no espaço original);

3 – Determinar as médias e os desvios padrões das distribuições normais equivalentes no ponto de partida utilizando as expressões (2.36) e (2.37);

4 – Montar a matriz  $\mathbf{\sigma}$  e o vetor  $\mathbf{m}$  compostos pelos desvios padrões e médias das distribuições normais equivalentes respectivamente;

5 – Avaliar a função de falha  $G(\mathbf{U})$ , o Jacobiano e o gradiente de  $g(\mathbf{V})$  no espaço reduzido através das expressões:

$$g(\mathbf{V}) = G(\mathbf{U})$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\sigma}^{-1}$$

$$\nabla g(\mathbf{V}) = (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla G(\mathbf{U})$$

6 – Obter o ponto de partida no espaço reduzido utilizando-se transformação de Nataf (Melchers, 1999):

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}(\mathbf{U}-\mathbf{m})$$

7 – Determinar o novo ponto  $\mathbf{V}^{i+1}$  através do algoritmo HLRF (Hasofer e Lind, 1974; Rackwitz e Fiessler, 1978) (ver expressões 2.47 a 2.50);

8 – Determinar o índice de confiabilidade pela expressão:

$$\beta = |\mathbf{V}^{i+1}|$$

9 – Obter o novo ponto  $\mathbf{U}^{i+1}$  no espaço original utilizando a expressão:

$$\mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U} + (\mathbf{J}^{-1})^T (\mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{V})$$

10 – Repetir os passos 3 a 9 utilizando  $\mathbf{U}^{i+1}$  como ponto de partida até obter a convergência que será alcançada quando a equação abaixo for atendida:

$$\frac{|\mathbf{V}^{i+1}| - |\mathbf{V}|}{|\mathbf{V}^{i+1}|} \leq \textit{tolerância}$$

11 – Alcançada a convergência determinar a probabilidade de falha pela expressão:

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

## APÊNDICE C – APLICAÇÕES ENVOLVENDO ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

Apresenta-se na sequência duas aplicações envolvendo confiabilidade estrutural. Essas aplicações envolvem confiabilidade de sistemas, o método FORM, tratamento de variáveis aleatórias e cálculo de  $P_f$  de sistemas. Para a solução dos problemas utilizou-se o software Mathcad® (Parametric Technology Corporation, 2007) para implementar o método FORM e as equações para análise de confiabilidade de sistemas.

A primeira aplicação, também analisada por Sagrilo (2004), diz respeito à viga biapoiada da Figura 2.9. As propriedades mecânicas do material da viga foram consideradas idênticas ao longo da viga. A viga biapoiada em questão está sujeita a uma carga uniformemente distribuída  $w$ . Assumindo que pode haver falhar por flexão, cisalhamento ou combinação de flexão e cisalhamento, são definidas respectivamente três funções de falha (Sagrilo, 2009):  $G_1(U) = M_0 - (1/8) w L^2$ ;  $G_2(U) = V_0 - (1/2) w L$  e  $G_3(U) = 1 - (M/M_0 + V/V_0)$ . As falhas por flexão, cisalhamento e combinação desses dois esforços foram consideradas respectivamente no centro do vão, nas extremidades da viga e na seção onde se tem a máxima combinação entre flexão e cisalhamento, de forma que resultou  $G_3(U) = 1 - [(w L^2 / 8 M_0) + (w L / 2 V_0)]$ . Nas equações para  $G_1(U)$ ,  $G_2(U)$  e  $G_3(U)$  tem-se  $U = (w, M_0, V_0)$  como grandezas aleatórias cujas características estão definidas na Tabela 2.1, com  $w$  sendo a intensidade da carga distribuída,  $M_0$  a capacidade resistente a flexão e  $V_0$  a capacidade resistente ao cisalhamento da viga. Calculou-se a probabilidade de falha assumindo a viga como um sistema em série sendo que o não atendimento a qualquer dos três estados limites em questão indica a ruptura da viga. Nas Tabelas 2.2 e 2.3 apresenta-se os resultados obtidos juntamente com os apresentados em Sagrilo (2004). Comparando-se os resultados para a viga do exemplo 1 constata-se concordância entre os valores obtidos no presente trabalho e os resultados de Sagrilo (2004).

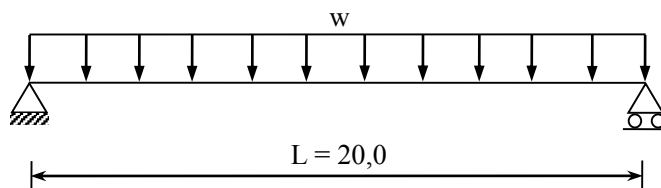


Figura A-C.1 – Viga biapoiada: geometria e carregamento

Tabela A-C.1 - Características das variáveis aleatórias

Variável	Média	Desvio padrão	Distribuição
$w$	6,00	1,50	Normal
$M_0$	470,00	47,00	Normal
$V_0$	159,00	23,85	Normal

Tabela A-C.2 - Resultados da análise de confiabilidade de sistemas

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$P_{f1}$	$P_{f2}$	$P_{f3}$
Sagrilo (2004)	1,921	3,514	1,573	(0,847; -0,531; 0,000)	(0,532; 0,000; -0,847)	(0,891; -0,440; -0,109)	0,0274	0,0002209	0,0579
Presente trabalho	1,921	3,514	1,572	(0,847; -0,531; 0,000)	(0,532; 0,000; -0,846)	(0,889; -0,443; -0,115)	0,0270	0,0002209	0,0580

Tabela A-C.3 - Continuação dos resultados da análise de confiabilidade de sistemas

	$\rho_{12}$	$\rho_{13}$	$\rho_{23}$	$P_{f12}$	$P_{f13}$	$P_{f23}$	$P_{fsistema}$	$\beta_{equivalente}$
Sagrilo (2004)	0,451	0,989	0,567	0,00008882	0,0273	0,0001655	0,0579	1,573
Presente trabalho	0,451	0,989	0,571	0,00008882	0,0270	0,0001669	0,0580	1,572

Analisando os resultados apresentados na Tabela 2.2 percebe-se que o menor índice de confiabilidade obtido, no caso  $\beta_3 = 1,572$ , que está vinculado ao estado limite que representa a combinação entre os esforços de flexão e cisalhamento, acarretou a maior probabilidade de falha. Ainda com base na Tabela 2.2 constata-se dentre os índices de sensibilidade  $\alpha_3$  o valor 0,889, que indica maior dependência do carregamento distribuído  $w$  com o estado limite que envolve os dois esforços. Dentre os índices de sensibilidade  $\alpha_2$  da Tabela 2.2, relacionados ao modo de falha 2 (cisalhamento), tem-se o valor zero indicando nenhuma contribuição do momento  $M_0$ . Da mesma forma, o valor zero dentre os índices de sensibilidade  $\alpha_1$  da Tabela 2.2, indica que não há contribuição do esforço cortante no modo de falha que envolve o momento fletor. Para a Tabela 2.3 detecta-se maior correlação entre os modos de flexão e por combinação de flexão e cisalhamento, no caso  $\rho_{13} = 0,989$ , indicando maior contribuição do esforço de flexão no modo de falha que envolve a combinação dos dois esforços. Quanto à probabilidade de falha do sistema encontrou-se valor idêntico ao obtido para a terceira função

de falha indicando que o estado limite representado pela função  $G_3(U)$  possui maior probabilidade de ocorrer.

A segunda aplicação refere-se ao pórtico apresentado na Figura 2.10, onde estão indicadas a altura  $h$  com valor 5m, o vão de 10m e os pontos de aplicação das forças horizontal  $F_H$  e vertical  $F_V$ . Trata-se de uma estrutura que pode apresentar três modos de falha distintos indicados nas Figuras 2.11a, b e c, e caracterizados de forma respectiva pelas seguintes funções de falha (Madsen *et al.* 2006):  $G_1(U) = Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_5 - F_H h$ ;  $G_2(U) = Z_1 + 2 Z_3 + 2 Z_4 + Z_5 - F_H h - F_V h$ ;  $G_3(U) = Z_2 + 2 Z_3 + Z_4 - F_V h$ . Nas equações para  $G_1(U)$ ,  $G_2(U)$  e  $G_3(U)$  tem-se  $U = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, F_H, F_V)$  como grandezas aleatórias cujas características estão indicadas na Tabela 2.4, sendo que  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$  referem-se aos momentos plásticos resistentes dos nós 1, 2, 3, 4 e 5. Assim como Madsen *et al.* (2006), considerou-se o pórtico como um sistema em série para o cálculo da probabilidade de falha, sendo que o não atendimento a qualquer dos três estados limites em questão indica a ruptura do pórtico. Nas Tabelas 2.5 e 2.6 são apresentados os resultados obtidos com o presente estudo e também os resultados obtidos por Madsen *et al.* (2006). Comparando-se os resultados obtidos constata-se concordância entre os valores obtidos no presente trabalho e os encontrados por Madsen *et al.* (2006).

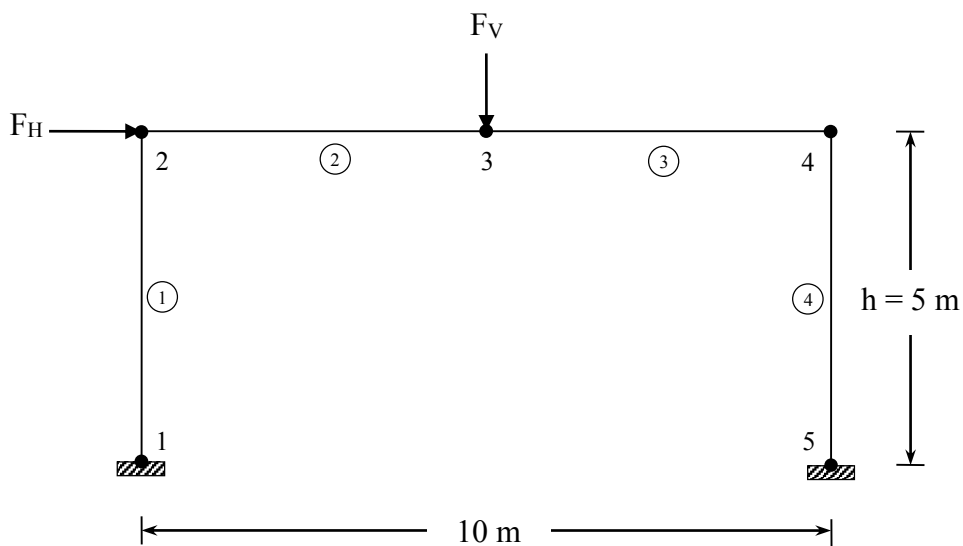


Figura A-C.2 - Pórtico plano: geometria, carregamento e discretização

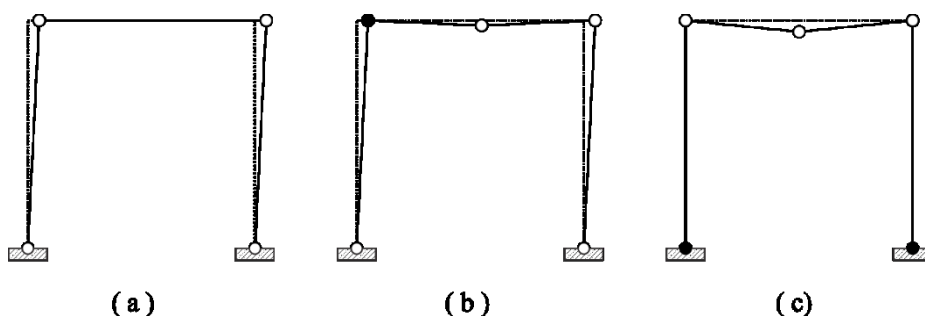


Figura A-C.3 - Modos de falha (a), (b) e (c) do pórtico plano, relacionados, de forma respectiva, às funções de falha  $G_1(U)$ ,  $G_2(U)$  e  $G_3(U)$

Tabela A-C.4 - Características das variáveis aleatórias

Variável	Média	Desvio padrão	Distribuição
$Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$	134,90 kNm	13,49 kNm	Lognormal
$F_H$	50,00 kN	15,00 kN	Lognormal
$F_V$	40,00 kN	12,00 kN	Lognormal

Tabela A-C.5 - Resultados da análise de confiabilidade de sistemas

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$P_{f1}$	$P_{f2}$	$P_{f3}$
Madsen <i>et al.</i> (2006)	2,71	2,88	3,44	(-0,084; -0,084; 0,000; -0,084; -0,084; 0,986; 0,000)	(-0,077; 0,000; -0,150; -0,150; -0,077; 0,827; 0,509)	(0,000; -0,084; -0,164; -0,084; 0,000; 0,000; 0,979)	0,00336	0,00199	0,000291
Presente trabalho	2,71	2,88	3,44	(-0,082; -0,082; 0,000; -0,082; -0,082; 0,986; 0,000)	(-0,077; 0,000; -0,151; -0,151; -0,077; 0,819; 0,522)	(0,000; -0,084; -0,164; -0,084; 0,000; 0,000; 0,979)	0,00337	0,00197	0,000294

Analisando os resultados apresentados na Tabela 2.5 é possível perceber principalmente que o modo de falha representado matematicamente pela função  $G_1(U)$  resultou no menor índice de confiabilidade, no caso  $\beta_1 = 2,71$  e portanto na maior probabilidade de falha, no caso  $P_{f1} = 0,00337$ . E analisando a Tabela 2.5 os índices de sensibilidade do modo de falha 1 ( $\alpha_1$ ) detecta-se o valor 0,986 dentre os sete valores apresentados revelando que o modo de falha

representado por  $G_1(U)$  e indicado na Figura 2.11a é mais sensível a força horizontal  $F_H$ . Já os resultados na Tabela 2.6, para a probabilidade de falha do sistema ( $P_{f\text{sistema}}$ ) e índice de confiabilidade equivalente ( $\beta_{\text{equivalente}}$ ), referentes à estrutura da Figura 2.10 e modos de falha das Figuras 2.11a, b e c, indicam que diante da possibilidade de ocorrência dos três modos tem-se uma maior  $P_f$ , logo, um menor valor de  $\beta$  para a estrutura.

Tabela A-C.6 - Continuação dos resultados da análise de confiabilidade de sistemas

	$\rho_{12}$	$\rho_{13}$	$\rho_{23}$	$P_{f12}$	$P_{f13}$	$P_{f23}$	$P_{f\text{sistema}}$	$\beta_{\text{equivalente}}$
Madsen <i>et al.</i> (2006)	0,841	0,014	0,536	0,000924	0,00000114	0,0000425	0,00467	2,60
Presente trabalho	0,833	0,014	0,549	0,000886	0,00000115	0,0000457	0,00470	2,60



## APÊNDICE D - EXEMPLO DO ARQUIVO DE ENTRADA I

```

PÓRTICO LIVRO Haldar e Mahadevan (2000b) ex 8.2 página 229 tab 8.5 Ex 2 tese
estática
por
1
1
1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 ...ModElastLong, Area, Area2, MomInerc, MomInerc2, CarregPerm, CarregPerm2, CarregPerm3, CarregAcid, CarregAcid2, CarregAcid3, CarregAcid4, CarregAcid5 (0:Naleat - 1:A)
0
5 4 2 2 3 1 1 1 2
coor
ppor
5
1 1 0.0 0.0
2 1 0.0 4.572
3 1 4.572 4.572
4 1 9.144 4.572
5 0 9.144 0.0
boun
1 1 1 1 1
5 0 1 1 1
elem
1 1 2 0
2 2 3 0
3 3 4 0
4 4 5 0
mate
199948040000.0
1
1 4
seca
0.01271 0.0003970848
1
1 4
graf
0 3 3
2
load
1
0 1
2
2 2 -1. -1. 0 1 0 1
3 2 -1. -1. 0 1 0 1
end
...Titulo
...Tipo de análise
...Modelo estrutural
...Tipo de solução (0 - linear; 1 - não-linear)
...(0 - não realiza análise de confiabilidade; 1 - realiza análise de confiabilidade)
...Ligações (0 - rígidas; 1 - semi-rígida linear; 2 - semi-rígida não linear)
...npoin,nelem,nnode,ndime,ndofn,nmats,npmat,nsecs,npsec
...MACRO-COMANDO
...MACRO-COMANDO
...npoin (total de nós da malha)
...no,ng,x,y
...no,ng,x,y
...no,ng,x,y
...no,ng,x,y
...no,ng,x,y
...MACRO-COMANDO
...no,ng,dx,dy,rotz
...no,ng,dx,dy,rotz
...MACRO-COMANDO
...el,noi,noj,lx
...el,noi,noj,lx
...el,noi,noj,lx
...el,noi,noj,lx
...MACRO-COMANDO
...Módulo de Elastascicidade Longitudinal (E)
...ngelm
...kell,kel2
...MACRO-COMANDO
...Área (A), Momento de Inércia(I)
...ngelm
...kell,kel2
...MACRO-COMANDO
...autopl,npl,ndl
...grau de liberdade
...MACRO-COMANDO
...número de casos de carregamento(nc)
...cargano, cargaelem
...Número de elementos carregados
...elemento, valor fixo carga distrib., intens. nó esq., intens. no dir., cos x, cos y, posiç. relat., posiç. relat.
...elemento, valor fixo carga distrib., intens. nó esq., intens. no dir., cos x, cos y, posiç. relat., posiç. relat.

```

## APÊNDICE E – EXEMPLO DO ARQUIVO DE ENTRADA II (Solução linear)

```
12                                     ...formulação de 2ª ordem (2-SOF1, 11-SOF2L, 12-SOF2, 3-SOF3)
%PRINCIPAL
0  1  1  1  2  1  1  1.e-1          ...einc,eite,faci,ninc,nitmax,iterty,cconv,betok
%REANAL
0                                     ...ires
%RELATO
4                                     ...rel(4-imprime variáveis durante o processo iterativo, 0-não imprime)
%SCREEN
10                                    ...kwinc(intervalo de passo de carga para impressão de resultados na tela)
%END
```

```
2--> SOF1: Alves(1993)
11--> SOF2L: Yang e Kuo (1994)
12--> SOF2: Yang e Kuo (1994)
3--> SOF3: Pacoste e Eriksson (1997)
```

```
einc: estratégia de incremento de carga
0: incremento constante
1: incremento direto do parâmetro de carga
2: incremento de uma componente de deslocamento
3: incremento do comprimento de arco
4: incremento do trabalho externo
5: incremento do deslocamento generalizado
6: incremento de trabalho (Yang)
```

```
eite: estratégia de iteração
1: carga constante
2: deslocamento constante
31: comprimento do arco cilíndrico
32: comprimento do arco esférico
33: comprimento do arco linear (Riks)
34: comprimento do arco linear (Ramm)
4: trabalho constante
5: norma mínima dos deslocamentos residuais
7: resposta ponderada constante
8: deslocamento generalizado
```

```
faci: incremento inicial do parâmetro de carga
ninc: número de incrementos de carga
nitmax: número máximo de iterações desejadas
iterty: método de solução não linear (1: Newton-Raphson padrão, 2: Newton-Raphson modificado)
cconv: critério de convergência (1: Carga, 2: deslocamento, 3: carga e deslocamento)
betok: fator de convergência
```

## APÊNDICE F – EXEMPLO DE ARQUIVO DE ENTRADA IV

```
1 ...Método de análise: 1=FORM, 2=amostragem por importância
4 ...Número de iterações para o método FORM
1.e-4 ...Tolerância para interrupção do processo iterativo do método FORM
-0.0254 ...Deslocamento limite para o nó e direção em análise (entrar com sinal negativo caso deslocamento for p/baixo ou p/esquerda)
1.e-5 ...Parâmetro para o método das diferenças finitas
0 ...Existe variável correlacionada (sim:1, não:0)
2 19994.804e+7 1199.688e+7 ...MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL: Tipo de variável aleatória(rvtype: 1=normal, 2=lognormal, 3= ext. tipol), média(mean), desvio padrão(stdeav)
2 1271.0e-5 6355.0e-7 ...ÁREA DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS DOS ELEMENTOS: Tipo de variável aleatória(rvtype: 1=normal, 2=lognormal, 3= ext. tipol), média(mean), desvio padrão(stdeav)
2 3970.848e-7 1985.424e-8 ...MOMENTO DE INÉRCIA DOS ELEMENTOS: Tipo de variável aleatória(rvtype: 1=normal, 2=lognormal, 3= ext. tipol), média(mean), desvio padrão(stdeav)
3 16050.0 4012.5 ...CARREGAMENTO ACIDENTAL (L): Tipo de variável aleatória(rvtype: 1=normal, 2=lognormal, 3= ext. tipol), média(mean), desvio padrão(stdeav)
```

# APÊNDICE G – EXEMPLO DE ARQUIVO DE SAÍDA DE RESULTADOS PROVENIENTES DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

\*\*\*\*\*

CS-ASA - Módulo de Confiabilidade Estrutural  
 Autores: Bruno Márcio Agostini  
 Marcílio Sousa da Rocha Freitas  
 Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
 Andrea Regina Dias da Silva

Universidade Federal de Ouro Preto  
 Escola de Minas  
 Departamento de Engenharia Civil  
 Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil (PROPEC)  
 Área de Concentração: Construção Metálica

\*\*\*\*\*

PÓRTICO LIVRO Haldar e Mahadevan (2000b) ex 8.2 página 229 tab 8.5 Ex 2 tese

\*\*\*\*\*

Parâmetros da análise de confiabilidade:

Método de análise de confiabilidade escolhido = FORM  
 Número de variáveis aleatórias = 4  
 Número de iterações (FORM) = 4  
 Tolerância para interromper FORM = 1.0000000000000000E-004  
 Deslocamento limite para o nó e direção em análise = -2.5400000000000000E-002  
 Parâmetro para o método das diferenças finitas = 1.0000000000000000E-005  
 Não existem variáveis correlacionadas

Número da variável aleatória	Tipo de variável aleatória	Média	Desvio padrão
1	2	1.999E+11	1.200E+10
2	2	1.271E-02	6.355E-04
3	2	3.971E-04	1.985E-05
4	3	1.605E+04	4.012E+03

-----  
 U( 1 ) = 199948040000.000  
 U( 2 ) = 1.2710000000000000E-002  
 U( 3 ) = 3.9708480000000000E-004  
 U( 4 ) = 16050.0000000000

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*  
 INÍCIO DA ITERAÇÃO 1 DO MÉTODO FORM  
 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

-----  
 Número da variável aleatória= 1  
 Variável aleatória: lognormal  
 Média= 199948040000.000  
 Desvio padrão= 11996880000.0000  
 Média equivalente= 199588779952.523  
 Desvio padrão equivalente= 11986103815.9477

-----  
 Número da variável aleatória= 2  
 Variável aleatória: lognormal  
 Média= 1.2710000000000000E-002  
 Desvio padrão= 6.3550000000000000E-004  
 Média equivalente= 1.269413232633798E-002  
 Desvio padrão equivalente= 6.351033494547023E-004

-----  
 Número da variável aleatória= 3  
 Variável aleatória: lognormal  
 Média= 3.9708480000000000E-004  
 Desvio padrão= 1.9854240000000000E-005  
 Média equivalente= 3.965890634128601E-004  
 Desvio padrão equivalente= 1.984184787549572E-005

-----  
 Número da variável aleatória= 4  
 Variável aleatória: tipo 1  
 Média= 16050.0000000000  
 Desvio padrão= 4012.5000000000  
 Média equivalente= 15369.6547282800  
 Desvio padrão equivalente= 3836.56637194913

-----  
 Nó escolhido para monitoramento (ndl) = 3  
 Grau de liberdade escolhido para monitoramento (glno) = 2  
 Deslocamento do nó escolhido (dl0) = -6.788090450899719E-003

-----  
 Avaliação da função de falha (gv0) = 0.732752344452767

-----  
 gradGu( 1 ) = 1.336585522806916E-012  
 gradGu( 2 ) = 0.505676004173368  
 gradGu( 3 ) = 656.838321585272  
 gradGu( 4 ) = -1.665094427101948E-005

-----  
 Alfa 1 = -0.238617874044462  
 Fator de importância 1 = 5.693848981349861E-002  
 Alfa 2 = -4.783490690176070E-003  
 Fator de importância 2 = 2.288178318300114E-005  
 Alfa 3 = -0.194119329537847  
 Fator de importância 3 = 3.768231410022307E-002  
 Alfa 4 = 0.951502135732283  
 Fator de importância 4 = 0.905356314303096

-----  
 Soma dos fatores de importância = 1.000000000000000

```

-----
Beta          1 = 11.0706465054001
-----
Unext(        1 ) = 167925639263.568
Unext(        2 ) = 1.266049958092675E-002
Unext(        3 ) = 3.539484069722666E-004
Unext(        4 ) = 55783.0619383980
-----
Tolerância calculada= 0.983444055236368
*****
***** INÍCIO DA ITERAÇÃO          2 DO MÉTODO FORM
*****
-----
Número da variável aleatória= 1
Variável aleatória: lognormal
Média= 199948040000.000
Desvio padrão= 11996880000.0000
Média equivalente= 196933031532.131
Desvio padrão equivalente= 10066486000.9256
-----
Número da variável aleatória= 2
Variável aleatória: lognormal
Média= 1.271000000000000E-002
Desvio padrão= 6.355000000000000E-004
Média equivalente= 1.269409760699585E-002
Desvio padrão equivalente= 6.326298732979100E-004
-----
Número da variável aleatória= 3
Variável aleatória: lognormal
Média= 3.970848000000000E-004
Desvio padrão= 1.985424000000000E-005
Média equivalente= 3.942101303971819E-004
Desvio padrão equivalente= 1.768637441402381E-005
-----
Número da variável aleatória= 4
Variável aleatória: tipo 1
Média= 16050.0000000000
Desvio padrão= 4012.5000000000
Média equivalente= -14564.3138535158
Desvio padrão equivalente= 15149.6149965242
-----
Nó escolhido para monitoramento (ndl) = 3
Grau de liberdade escolhido para monitoramento (glno) = 2
Deslocamento do nó escolhido (dl0) = -3.157303054622679E-002
-----
Avaliação da função de falha (gv0) = -0.243032698670346
-----
gradGu(        1 ) = 7.418286230975300E-012
gradGu(        2 ) = 2.31892717801056
gradGu(        3 ) = 3436.55080001470
gradGu(        4 ) = -2.233151810444755E-005
-----
Alfa          1 = -0.212297753878759
Fator de importância          1 = 4.507033630196614E-002
Alfa          2 = -4.170620997713258E-003
Fator de importância          2 = 1.739407950656673E-005
Alfa          3 = -0.172792744169495
Fator de importância          3 = 2.985733243762447E-002
Alfa          4 = 0.961797763139894
Fator de importância          4 = 0.925054937180903
-----
Soma dos fatores de importância = 1.00000000000000
-----
Beta          2 = 4.78051985477706
-----
Unext(        1 ) = 186716619038.051
Unext(        2 ) = 1.268148439928866E-002
Unext(        3 ) = 3.796004928110945E-004
Unext(        4 ) = 55091.9994815830
-----
Tolerância calculada= -0.238433614199365
*****
***** INÍCIO DA ITERAÇÃO          3 DO MÉTODO FORM
*****
-----
Número da variável aleatória= 1
Variável aleatória: lognormal
Média= 199948040000.000
Desvio padrão= 11996880000.0000
Média equivalente= 199164774138.888
Desvio padrão equivalente= 11192931823.4519
-----
Número da variável aleatória= 2
Variável aleatória: lognormal
Média= 1.271000000000000E-002
Desvio padrão= 6.355000000000000E-004
Média equivalente= 1.269413591423009E-002
Desvio padrão equivalente= 6.336784593269696E-004
-----
Número da variável aleatória= 3
Variável aleatória: lognormal
Média= 3.970848000000000E-004
Desvio padrão= 1.985424000000000E-005
Média equivalente= 3.962201823972580E-004
Desvio padrão equivalente= 1.896817816199699E-005
-----
Número da variável aleatória= 4
Variável aleatória: tipo 1

```

```

Média= 16050.000000000
Desvio padrão= 4012.5000000000
Média equivalente= -13926.5433472870
Desvio padrão equivalente= 15011.5873346690
-----
Nó escolhido para monitoramento (ndl) = 3
Grau de liberdade escolhido para monitoramento (glno) = 2
Deslocamento do nó escolhido (dl0) = -2.617948477002202E-002
-----
Avaliação da função de falha (gv0) = -3.068837677252056E-002
-----
gradGu( 1 ) = 5.534467647056919E-012
gradGu( 2 ) = 1.97682370046865
gradGu( 3 ) = 2656.23477597385
gradGu( 4 ) = -1.875729864332619E-005
-----
Alfa 1 = -0.211652289043243
Fator de importância 1 = 4.479669145724462E-002
Alfa 2 = -4.279964254887123E-003
Fator de importância 2 = 1.831809402311148E-005
Alfa 3 = -0.172145366142999
Fator de importância 3 = 2.963402708450726E-002
Alfa 4 = 0.962055592657839
Fator de importância 4 = 0.925550963364225
-----
Soma dos fatores de importância = 1.00000000000000
-----
Beta 3 = 4.70468103548151
-----
Unext( 1 ) = 188019339405.469
Unext( 2 ) = 1.268137624926619E-002
Unext( 3 ) = 3.808580628057306E-004
Unext( 4 ) = 54018.3733657243
-----
Tolerância calculada= -2.255328220246698E-002
*****
INÍCIO DA ITERAÇÃO 4 DO MÉTODO FORM
*****
Número da variável aleatória= 1
Variável aleatória: lognormal
Média= 199948040000.000
Desvio padrão= 11996880000.0000
Média equivalente= 199247090815.635
Desvio padrão equivalente= 11271024819.8475
-----
Número da variável aleatória= 2
Variável aleatória: lognormal
Média= 1.271000000000000E-002
Desvio padrão= 6.355000000000000E-004
Média equivalente= 1.269413580587450E-002
Desvio padrão equivalente= 6.336730552009650E-004
-----
Número da variável aleatória= 3
Variável aleatória: lognormal
Média= 3.970848000000000E-004
Desvio padrão= 1.985424000000000E-005
Média equivalente= 3.962731606044654E-004
Desvio padrão equivalente= 1.903101741579456E-005
-----
Número da variável aleatória= 4
Variável aleatória: tipo 1
Média= 16050.000000000
Desvio padrão= 4012.5000000000
Média equivalente= -12937.5076948113
Desvio padrão equivalente= 14794.7729793483
-----
Nó escolhido para monitoramento (ndl) = 3
Grau de liberdade escolhido para monitoramento (glno) = 2
Deslocamento do nó escolhido (dl0) = -2.540733667703743E-002
-----
Avaliação da função de falha (gv0) = -2.888455526546263E-004
-----
gradGu( 1 ) = 5.334081157394392E-012
gradGu( 2 ) = 1.91786019080228
gradGu( 3 ) = 2569.43308468860
gradGu( 4 ) = -1.856609802912661E-005
-----
Alfa 1 = -0.210648939538461
Fator de importância 1 = 4.437297572867821E-002
Alfa 2 = -4.258125301248110E-003
Fator de importância 2 = 1.813163108112930E-005
Alfa 3 = -0.171330850371839
Fator de importância 3 = 2.935426028913738E-002
Alfa 4 = 0.962421234362118
Fator de importância 4 = 0.926254632351103
-----
Soma dos fatores de importância = 1.00000000000000
-----
Beta 4 = 4.70326786983439
-----
Unext( 1 ) = 188080453841.595
Unext( 2 ) = 1.268144516974980E-002
Unext( 3 ) = 3.809376835195251E-004
Unext( 4 ) = 54031.4001247802
-----
Tolerância calculada= -2.162347650236573E-004
Beta final = 4.70326786983439
Probabilidade de falha = 1.280150770223775E-006

```