



Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil



**ANÁLISE DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS COM  
SEÇÃO TRANSVERSAL DE PAREDE FINA  
ABERTA RAMIFICADA UTILIZANDO A  
TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS  
(*Generalized Beam Theory* – GBT)**

Andréa Gonçalves Rodrigues das Dôres

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcílio Sousa da Rocha Freitas (EM/UFOP/PROPEC)

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Dinar Reis Zamith Camotim (DECivil/IST/UTL/PT)

Ouro Preto – 2014

D695a Dôres, Andréa Gonçalves Rodrigues das.

Análise de elementos estruturais com seção transversal de parede fina aberta ramificada utilizando a Teoria Generalizada de Vigas (*Generalized Beam Theory – GBT*) [manuscrito] / Andréa Gonçalves Rodrigues das Dôres – 2014.

xxviii. 240f. : il. color.. graf., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Marcílio Souza da Rocha Freitas.

Co-orientador: Prof. Dr. Dinar Reis Zamith Camotim.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estrutura Metálica.

1. Construção metálica - Teses. 2. Teoria Generalizada de Vigas (GBT) – Teses.  
3. Análise de estruturas – Teses. 4. Estudos paramétricos – Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

CDU: 624

Catálogo: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)


**ANÁLISE DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS COM SEÇÃO  
TRANSVERSAL DE PAREDE FINA ABERTA RAMIFICADA  
UTILIZANDO A TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS**

**AUTORA: ANDRÉA GONÇALVES RODRIGUES DAS DÓRES**

Esta tese foi apresentada em sessão pública e aprovada em 13 de fevereiro de 2014, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. Márcilio Sousa da Rocha Freitas (Orientador / UFOP)



Prof. Dr. Dinar Reis Zamith Camotim (Orientador / IST/UL)



Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (UFOP)



Prof. Dr. Pedro Manuel de Castro Borges Dinis (IST/UL)



Prof. Dr. Cilmar Donizeti Basaglia (UNICAMP)



# **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a concretização deste trabalho.

Ao Prof. Marcílio Freitas, pela dedicação, colaboração, constante incentivo e disponibilidade em me orientar, meu reconhecimento e gratidão.

Ao Prof. Dinar Camotim, minha admiração e respeito. A motivação para o desenvolvimento da tese deve-se à brilhante apresentação sobre a Teoria Generalizada de Vigas a que tive oportunidade de assistir no Auditório da Escola de Minas. Obrigada pela paciência, disponibilidade, gentileza, atenção, sugestões e principalmente pelos ensinamentos transmitidos.

Ao Prof. Borges Dinis e Prof. Rui Bebiano, pela partilha de conhecimentos.

Aos professores do DECIV/PROPEC/EM/UFOP, que muito contribuíram para minha formação pessoal e profissional.

Aos meus pais e minha irmã, pelo apoio e incentivo sempre recebidos, fundamentais para a conclusão de mais uma etapa.

Aos amigos e colegas de curso, obrigada pelo companheirismo.



## RESUMO

O presente trabalho apresenta uma visão geral da formulação da Teoria Generalizada de Vigas (*Generalized Beam Theory* – GBT) utilizada para avaliar o comportamento de elementos estruturais com seções transversais de parede fina abertas ramificadas arbitrárias.

Não obstante os processos produtivos potencializem fabricar perfis formados a frio com tipologias geométricas diversificadas de seções transversais, paradoxalmente se observa que o pleno aproveitamento desse recurso pelo mercado da construção civil encontra limitações. A preferência por perfis de séries comerciais consagradas (*U*, *Ue*, *Z*, *Ze*, *rack*, cantoneira ou cartola) e seções compostas usuais (*I* ou *Ie*) pode ser explicada pelo fato de o comportamento estrutural e os fenômenos de instabilidade característicos desses perfis tradicionais terem sido objeto de criteriosas investigações que, em decorrência, resultaram na sua incorporação às normas técnicas vigentes.

Por sua vez, a análise de elementos estruturais formados por seções de parede fina com geometrias não convencionais constitui um novo campo de pesquisa, o qual pode ser alavancado com a GBT, especialmente em razão de sua natureza modal, clareza na interpretação da resposta estrutural e eficiência computacional, vantagens não disponibilizadas pelos métodos numéricos tradicionais.

O âmbito deste trabalho centra-se em demonstrar a versatilidade da GBT, exemplificando as possibilidades de: (i) associar perfis para originar novas seções compostas, com geometrias diferenciadas, ainda não estudadas; (ii) empregá-la como alternativa perfeitamente viável para solucionar problemas de interesse prático em Engenharia Civil, para os quais invariavelmente se recorre a técnicas numéricas e/ou a ensaios experimentais; (iii) embasar futuras revisões das normatizações, em especial a ABNT NBR 14762:2010.

Para isso, realizam-se estudos paramétricos com base em análises de estabilidade de: (i) painéis enrijecidos longitudinalmente, sujeitos à compressão axial, utilizados em vigas-caixão de pontes; (ii) colunas comprimidas formadas por seções compostas; (iii) bi-vigas de pontes mistas rodoviárias de pequeno vão.

*Palavras-chave: Teoria Generalizada de Vigas (GBT); perfis formados a frio; seções transversais abertas ramificadas; seções compostas; estudos paramétricos.*



# ABSTRACT

This work addresses an overview of the Generalized Beam Theory (GBT) formulation developed to analyse thin-walled members with arbitrarily branched open cross-sections.

Although the manufacturing process of cold-formed steel profiles involves forming cross-sections with different geometric types, the use of this resource by the civil construction market has limitations. The preference for typical shapes (*C and Z-sections, rack, angle or hat*) and traditional built-up cross-sections (*I-sections*) can be explained by the fact that the structural behaviour and the instability phenomena of these profiles had been investigated thoroughly and, consequently, incorporated to the normative prescriptions.

Thus, the analysis of thin-walled members with unconventional geometries of cross-sections constitutes a new field of research, which can be expanded with the GBT, mainly due to its modal nature, clarity in the interpretation of structural response and computational efficiency. These advantages are not provided by traditional numerical methods.

The scope of this work focuses on demonstrating the versatility of the GBT, illustrating the possibilities of using it: (i) to analyse new built-up cross-sections, with varied geometries, yet not studied; (ii) as a perfectly viable alternative to solve problems of practical interest in Civil Engineering, for which numerical techniques and/or experimental essays are employed; (iii) future revisions of codes, such as ABNT NBR 14762:2010.

The results of a parametric study to evaluate the buckling behaviour of stiffened panels, built-up cross-sections and two-girder bridges are presented.

*Keywords: Generalized Beam Theory (GBT); cold-formed steel; open branched cross-sections; built-up cold-formed steel members; parametric study.*



# SUMÁRIO

<b>Resumo</b> .....	vii
<b>Abstract</b> .....	ix
<b>Lista de Figuras</b> .....	xv
<b>Lista de Tabelas</b> .....	xxiii
<b>Lista de Símbolos</b> .....	xxv

## **CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

1.1 Considerações gerais.....	1
1.2 Fenômenos de instabilidade.....	3
1.3 Métodos de análise .....	8
1.4 Âmbito, Objetivos e Justificativa.....	11
1.5 Organização do Texto .....	12

## **CAPÍTULO 2 – TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS**

2.1 Introdução .....	15
2.2 Revisão da literatura.....	15
2.3 Fundamentos da GBT .....	20

## **CAPÍTULO 3 – ANÁLISE DA SEÇÃO**

3.1 Introdução.....	39
3.2 Discretização nodal .....	40
3.3 Funções elementares de deslocamentos .....	43
3.3.1 Funções elementares de deslocamentos axiais $u_k(s)$ .....	44
3.3.2 Funções elementares de deslocamentos transversais de membrana $v_k(s)$ .....	45
3.3.3 Funções elementares de deslocamentos de flexão $w_k(s)$ .....	49
3.4 Modos de deformação e propriedades modais .....	52
3.5 Exemplos ilustrativos .....	62

3.5.1 Seção E.....	62
3.5.2 Seção T.....	72

## **CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DA BARRA**

4.1 Introdução .....	83
4.2 Análise da barra.....	84
4.3 Solução exata.....	86
4.4 Participação modal.....	89
4.5 Exemplos ilustrativos .....	90
4.5.1 Análises de estabilidade .....	91
4.5.1.1 Coluna biapoiada submetida à compressão axial uniforme.....	91
4.5.1.2 Viga biapoiada submetida à flexão pura.....	105
4.5.2 Análises de vibração .....	112
4.5.2.1 Vibração livre de barra.....	112
4.5.2.2 Coluna biapoiada submetida à compressão axial uniforme.....	120

## **CAPÍTULO 5 – ESTUDOS PARAMÉTRICOS**

5.1 Introdução .....	123
5.2 Paineis enrijecidos.....	125
5.2.1 Revisão da literatura.....	128
5.2.2 Fenômenos de instabilidade.....	130
5.2.3 Parâmetros físicos e geométricos .....	133
5.2.4 Modelo estrutural.....	136
5.2.5 Análises de estabilidade e resultados.....	138
5.3 Seções compostas.....	161
5.3.1 Revisão da literatura.....	162
5.3.2 Parâmetros físicos e geométricos .....	164
5.3.3 Análises de estabilidade e resultados.....	164
5.4 Bi-Vigas.....	168

5.4.1 Parâmetros físicos e geométricos.....	168
5.4.2 Análises de estabilidade e resultados.....	170
<b>CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS</b>	
<b>FUTUROS</b> .....	173
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	177
<b>ANEXO 3.A – RESOLUÇÃO DO PROBLEMA HIPERESTÁTICO</b>	
<b>PELO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS</b> .....	197
<b>ANEXO 5.A – ANÁLISES DE ESTABILIDADE DE</b>	
<b>PAINEIS ENRIJECIDOS</b> .....	207
<b>ANEXO 5.B – ANÁLISES DE ESTABILIDADE DE</b>	
<b>SEÇÕES COMPOSTAS</b> .....	231



# LISTA DE FIGURAS

1.1– Processos de fabricação dos perfis formados a frio. (a) Perfilagem (Vrany, 2010). (b) Dobramento (Sabbagh <i>et al.</i> , 2011).....	2
1.2– Influência do número de enrijecedores na instabilidade da seção (Silvestre <i>et al.</i> , 2006a) .....	3
1.3– Instabilidade global de colunas: (a) Flexão. (b) Torção. (c) Flexo-torção (Almeida, 2007).....	4
1.4– Instabilidade lateral com torção.....	5
1.5– Modos de deformação de um perfil U enrijecido: (a) <i>Modos globais</i> : (1) Extensão axial. (2) Flexão em torno do eixo de maior inércia. (3) Flexão em torno do eixo de menor inércia. (4) Torção. (b) <i>Modos distorcionais</i> : (5) Simétrico. (6) Antissimétrico. (c) <i>Modos locais de placa</i> .....	6
1.6– Perfil U enrijecido submetido à compressão: configurações dos modos de instabilidade.....	7
1.7– Perfil cartola: (a) Malha de elementos finitos de casca. (b) Malha de faixas finitas	9
1.8– (a) Configuração deformada de uma seção transversal de parede fina aberta ramificada genérica. (b) MFF: discretização nodal. (c) GBT: discretização modal (Camotim <i>et al.</i> , 2010).....	10
2.1– (a) Barra com seção de parede fina aberta ramificada, sistema de coordenadas e componentes de deslocamentos. (b) Elemento infinitesimal de placa.....	21
2.2– Placa genérica: (a) Configuração inicial. (b) Configuração deformada (segundo as hipóteses de Kirchhoff e Love) (Silvestre, 2005) .....	22
2.3– Decomposição do deslocamento axial de um elemento infinitesimal de placa em parcelas de membrana e de flexão (Silvestre e Camotim, 2010).....	24
2.4– (a) Força externa aplicada à barra com seção de parede fina aberta ramificada. (b) Decomposição das componentes de força $q_x$ , $q_s$ e $q_z$ .....	33
3.1– Seção transversal: (a) Aberta. (b) Aberta ramificada. (c) Fechada. (d) Fechada multicelular. (e) Arbitrárias.....	39
3.2– Seção transversal aberta ramificada: (a) Nós naturais (●). (b) Nós de extremidade (□) .....	41
3.3– Escolha do circuito principal: (a) Conveniente. (b) Inapropriada.....	41
3.4– Seção transversal aberta ramificada: circuito principal (1), circuitos secundários (2) e circuito terciário (3).....	42

<b>3.5</b> – Seção transversal aberta ramificada: classificação dos nós.....	42
<b>3.6</b> – Representação esquemática de um nó de bifurcação de uma seção transversal aberta arbitrária (Dinis <i>et al.</i> , 2006).....	43
<b>3.7</b> – Discretização nodal e funções elementares de deslocamentos associadas.....	44
<b>3.8</b> – Representação esquemática da determinação das funções elementares de deslocamentos axiais a partir da imposição de um deslocamento axial unitário ( $U = 1$ ) em cada nó independente.....	45
<b>3.9</b> – (a) Imposição de deslocamento axial unitário em um nó independente. (b) Deslocamentos transversais de membrana.....	47
<b>3.10</b> – Representação esquemática da determinação de deslocamentos transversais de membrana ( $v_r$ , $v_{r-1}$ e $v_{rd..1}$ ) a partir da imposição de deslocamento axial unitário no nó de bifurcação $r$ ( $u_r(s_r) = 1$ ) (Dinis <i>et al.</i> , 2006).....	48
<b>3.11</b> – Relações geométricas entre deslocamentos.....	49
<b>3.12</b> – Imposição de deslocamento de flexão unitário ( $w = 1$ ): (a) Nó intermediário. (b) Nó de extremidade .....	50
<b>3.13</b> – Representação esquemática da determinação de deslocamentos de flexão ( $w_r$ , $w_{r-1}$ e $w_{rd}$ ) a partir da imposição de deslocamento axial unitário no nó de bifurcação $r$ (Dinis <i>et al.</i> , 2006).....	51
<b>3.14</b> – Configurações dos modos globais e perfis de deslocamentos axiais $u_k(s)$ (Basaglia <i>et al.</i> , 2008) .....	57
<b>3.15</b> – Seção E: dimensões e espessuras das placas.....	62
<b>3.16</b> – Circuitos: (a) principal (1) e secundário (2). (b) Orientação.....	63
<b>3.17</b> – (a) Discretização nodal. (b) Classificação dos nós. (c) Funções de deslocamentos associadas.....	63
<b>3.18</b> – (a) Identificação das placas. (b) Numeração dos nós.....	64
<b>3.19</b> – Imposição de funções de deslocamentos axiais unitários .....	64
<b>3.20</b> – Ângulo de inclinação entre as placas.....	65
<b>3.21</b> – Perfis de deslocamentos axiais $u_k(s)$ .....	67
<b>3.22</b> – Modos de deformação: configurações deformadas no plano da seção.....	68
<b>3.23</b> – Seção T: dimensões e espessuras das placas.....	72
<b>3.24</b> – (a) Circuito principal (1) e circuitos secundários (2). (b) Orientação.....	72
<b>3.25</b> – (a) Discretização nodal. (b) Classificação dos nós. (c) Funções de deslocamentos associadas.....	73
<b>3.26</b> – (a) Identificação das placas. (b) Numeração dos nós.....	73



<b>3.27</b> –Imposição de funções de deslocamentos axiais unitários no circuito principal.....	74
<b>3.28</b> – Perfis de deslocamentos axiais $u_k(s)$ .....	75
<b>3.29</b> – Modos de deformação: configurações deformadas no plano da seção.....	76
<b>4.1</b> – Barra genérica: (a) Carregamentos. (b) Seção transversal (Silvestre e Camotim, 2002c) .....	87
<b>4.2</b> – Valor máximo de amplitude para a barra bipoiada.....	90
<b>4.3</b> – (a) Coluna submetida à compressão axial uniforme. (b) Diagrama de carga aplicada.....	91
<b>4.4</b> – Análise de estabilidade da coluna bipoiada comprimida: (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal ( $n_s = 1$ ).....	93
<b>4.5</b> – Análise de estabilidade da coluna bipoiada comprimida: valores de $P_{cr}$ .....	94
<b>4.6</b> – CUFSM: análise de estabilidade da coluna bipoiada comprimida.....	94
<b>4.7</b> – GBT: modos de instabilidade.....	97
<b>4.8</b> – CUFSM: modos de instabilidade.....	98
<b>4.9</b> – Análise de estabilidade da coluna bipoiada comprimida: variação de $P_{cr}$ com $L$ para $1 \leq n_s \leq 3$ .....	99
<b>4.10</b> – Análise de estabilidade da coluna bipoiada comprimida: (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 1$ ).....	100
<b>4.11</b> – Análise de estabilidade da coluna bipoiada comprimida: (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 2$ ).....	101
<b>4.12</b> – Análise de estabilidade da coluna bipoiada comprimida: (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 3$ ).....	102
<b>4.13</b> – GBT: modos de instabilidade ( $L = 100$ cm).....	104
<b>4.14</b> – CUFSM : modos de instabilidade ( $L = 100$ cm) .....	104
<b>4.15</b> – CUFSM: Análise de estabilidade da coluna comprimida: variação de $P_{cr}$ com $L$ ( $1 \leq n_s \leq 3$ ).....	105
<b>4.16</b> – (a) Viga submetida à flexão. (b) Diagrama de carga aplicada.....	106
<b>4.17</b> – Análise de estabilidade da viga bipoiada submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: variação de $M_{cr}$ com $L$ ( $1 \leq n_s \leq 3$ ).....	107
<b>4.18</b> – CUFSM: Análise de estabilidade da viga bipoiada submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: variação de $M_{cr}$ com $L$ ( $n_s = 1$ ).....	107
<b>4.19</b> – Análise de estabilidade da viga submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: (a) Variação de $M_{cr}$ com $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 1$ ) .....	108

4.20 – Análise de estabilidade da viga submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: (a) Variação de $M_{cr}$ com $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 2$ ).....	109
4.21 – Análise de estabilidade da viga submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: (a) Variação de $M_{cr}$ com $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 3$ ).....	110
4.22 – GBT: modos de instabilidade ( $L = 8.5\text{ cm}$ ).....	111
4.23 – CUFSM: modos de instabilidade ( $L = 8.5\text{ cm}$ ).....	111
4.24 – Vibração livre: (a) Variação de $\omega_f$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal ( $n_s = 1$ ) .....	113
4.25 – Vibração livre: variação da frequência com o comprimento ( $1 \leq n_s \leq 3$ ).....	116
4.26 – Participação modal: (a) $n_s = 1$ . (b) $n_s = 2$ . (c) $n_s = 3$ .....	117
4.27 – GBT: modos de vibração ( $L = 10\text{ cm}$ ).....	118
4.28 – (a) Influência do nível de compressão no comportamento de vibração da coluna carregada. Participação modal ( $n_s = 1$ ): (b) $N = 0$ e $N = 0.9 P_b$ .....	122
5.1 – Seção transversal típica de um painel enrijecido (Byklum e Amdahl, 2002).....	126
5.2 – Seção transversal em caixão: (a) Ferreira (2011). (b) <a href="http://www.mto.gov.on.ca">www.mto.gov.on.ca</a> .....	126
5.3 – (a) Tabuleiro misto em caixão. Seção: (b.1) Unicelular. (b.2) Multicelular. (b.3) Múltiplo (Mendes, 2010).....	127
5.4 – Configuração dos modos de instabilidade dos painéis enrijecidos: (a) global induzida pela placa. (b) global induzida pelo enrijecedor. (c) local da placa. (d) lateral-torsional do enrijecedor (Wang <i>et al.</i> , 2006) .....	132
5.5 – Diagrama de carga $x$ deformação para modos distintos de instabilidade de um painel enrijecido (adaptado de Rivera, 2011) .....	133
5.6 – Painel enrijecido: (a) Dimensões geométricas. (b) Seção transversal.....	134
5.7 – Tipologia dos enrijecedores: (a) Seção em I. (b) Seção em L. (c) Seção em T.....	135
5.8 – Modelo estrutural: painel com enrijecedores em T (Rivera, 2011).....	137
5.9 – Painel enrijecido em T submetido à compressão uniaxial.....	137
5.10 – Modos de deformação de um painel enrijecido em T: configurações deformadas no plano da seção.....	139
5.11 – Modos de deformação de um painel enrijecido em L: configurações deformadas no plano da seção.....	140
5.12 – Modos de deformação de um painel enrijecido em I: configurações deformadas no plano da seção.....	141
5.13 – Modos de deformação de um painel enrijecido em T: configurações deformadas fora plano da seção.....	142

5.14 – Modos de deformação de um painel enrijecido em L: configurações deformadas fora do plano da seção.....	142
5.15 – Modos de deformação de um painel enrijecido em I: configurações deformadas fora do plano da seção .....	142
5.16 – Modelo <b>SP1</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I	145
5.17 – Modelo <b>SP1-T</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal.....	146
5.18 – Modelo <b>SP1-L</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal.....	147
5.19 – Modelo <b>SP1-I</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação.. (c) Participação modal.....	148
5.20 – Modelo <b>SP1</b> : Variação de $P_{cr}$ com $L$ (CUFSM) .....	149
5.21 – Modelo <b>SP1</b> : Modos de instabilidade.....	150
5.22 – Valores de carga crítica para os painéis enrijecidos ( $L = 1000\text{ cm}$ ).....	151
5.23 – Valores de carga crítica para os painéis enrijecidos em T ( $L = 1000\text{ cm}$ ).....	151
5.24 – Valores de carga crítica para os painéis enrijecidos em L ( $L = 1000\text{ cm}$ ).....	152
5.25 – Valores de carga crítica para os painéis enrijecidos em I ( $L = 1000\text{ cm}$ ).....	152
5.26 – Variação de $P_{cr}$ com $L$ para painéis enrijecidos em T.....	154
5.27 – <b>SP1-T</b> : Configuração dos modos de instabilidade e participação modal.....	157
5.28 – <b>SP1-L</b> : Configuração dos modos de instabilidade e participação modal.....	158
5.29 – <b>SP1-T</b> : Instabilidade global induzida pelo enrijecedor.....	158
5.30 – <b>SP8-T</b> : Instabilidade lateral-torsional do enrijecedor.....	159
5.31 – <b>SP10-T</b> : Instabilidade local da placa entre o enrijecedor.....	159
5.32 – <b>SP3-T</b> : Instabilidade lateral-torsional do enrijecedor.....	161
5.33 – <b>SP10-T</b> : Instabilidade global induzida pelo enrijecedor.....	161
5.34 – Seção composta.....	164
5.35 – Seções compostas: variação de $P_{cr}$ com $L$ .....	167
5.36 – Sistema estrutural: bi-viga (Ferraz, 2009).....	168
5.37 – Bi-viga: dados geométricos.....	169
5.38 – (a) Variação de $M_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal: <b>BV01</b> . (d) <b>BV02</b> .....	171
5.39 – GBT: Modelo <b>BV01</b> – modos de instabilidade .....	172
3.A.1 – Modelo estrutural adotado para análise da seção transversal. (a) Barra engastada e rotulada. (b) Barra biengastada.....	198

<b>3.A.2</b> – Momentos devidos ao deslocamento ortogonal recíproco nas extremidades da barra: (a) biengastada. (b) engastada e rotulada.....	199
<b>3.A.3</b> – (a) Seção transversal: elemento genérico de barra (b) Momentos ( $m_r$ e $m_{r+1}$ ) provocados pela imposição de um deslocamento axial unitário ( $u_r = 1$ ) em um nó natural independente (Dinis <i>et al.</i> , 2006).....	201
<b>3.A.4</b> – (a) Seção transversal. (b) Momentos ( $m_{p-1}$ e $m_{p+1}$ ) devidos à imposição do deslocamento de flexão unitário ( $w_p = 1$ ) em um nó intermediário (Dinis <i>et al.</i> , 2006) .....	202
<b>3.A.5</b> – Linha elástica e funções de forma para a barra isolada biengastada descarregada de seção transversal constante .....	203
<b>3.A.6</b> – Linha elástica e funções de forma para a barra isolada engastada e rotulada descarregada de seção transversal constante .....	203
<b>3.A.7</b> – Funções elementares de deslocamentos: (a) Nós naturais. (b) Nós intermediários (Dinis <i>et al.</i> , 2006).....	204
<b>5.A.1</b> – Modelo <b>SP2</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I	208
<b>5.A.2</b> – Modelo <b>SP2</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	209
<b>5.A.3</b> – Modelo <b>SP3</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I	210
<b>5.A.4</b> – Modelo <b>SP3</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	211
<b>5.A.5</b> – Modelo <b>SP4</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I	212
<b>5.A.6</b> – Modelo <b>SP4</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	213
<b>5.A.7</b> – Modelo <b>SP5</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I	214
<b>5.A.8</b> – Modelo <b>SP5</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	215
<b>5.A.9</b> – Modelo <b>SP6</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I	216
<b>5.A.10</b> – Modelo <b>SP6</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	217
<b>5.A.11</b> – Modelo <b>SP7</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L.(d) I	218
<b>5.A.12</b> – Modelo <b>SP7</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	219
<b>5.A.13</b> – Modelo <b>SP8</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I.....	220
<b>5.A.14</b> – Modelo <b>SP8</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	221
<b>5.A.15</b> – Modelo <b>SP9</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L.(d) I	222
<b>5.A.16</b> – Modelo <b>SP9</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	223
<b>5.A.17</b> – Modelo <b>SP10</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I.....	224
<b>5.A.18</b> – Modelo <b>SP10</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	225
<b>5.A.19</b> – Modelo <b>SP11</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I.....	226

<b>5.A.20</b> – Modelo <b>SP11</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	227
<b>5.A.21</b> – Modelo <b>SP12</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I.....	228
<b>5.A.22</b> – Modelo <b>SP12</b> : modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I.....	229
<b>5.B.1</b> – Modelo <b>SC10</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal.....	231
<b>5.B.2</b> – Modelo <b>SC30</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal.....	232
<b>5.B.3</b> – Modelo <b>SC60</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal.....	233
<b>5.B.4</b> – Modelo <b>SC90</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal.....	234
<b>5.B.5</b> – Modelo <b>SC10</b> : modos de instabilidade.....	235
<b>5.B.6</b> – Modelo <b>SC30</b> : modos de instabilidade.....	235
<b>5.B.7</b> – Modelo <b>SC60</b> : modos de instabilidade.....	236
<b>5.B.8</b> – Modelo <b>SC90</b> : modos de instabilidade.....	236
<b>5.B.9</b> – Modelo <b>SCI</b> : (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal.....	237
<b>5.B.10</b> – Modelo <b>SC90</b> ( $t_f = 2.5 \text{ mm}$ ): (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal.....	238
<b>5.B.11</b> – Modelo <b>SC10</b> ( $b_e = 20 \text{ mm}$ ): (a) Variação de $P_{cr}$ com $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal.....	239



# LISTA DE TABELAS

1.1 – Estruturas de aço formado a frio na construção.....	1
3.1 – Matrizes <b>C</b> , <b>D</b> , <b>B</b> e <b>Q</b> .....	69
3.2 – Matriz <b>X</b> <sub>1</sub> .....	70
3.3 – Matriz <b>X</b> <sub>2</sub> .....	70
3.4 – Matriz <b>R</b> (x 10 <sup>-4</sup> ) .....	71
3.5 – Propriedades geométricas: seção E .....	71
3.6 – Matrizes <b>C</b> , <b>D</b> , <b>B</b> e <b>Q</b> .....	77
3.7 – Matriz <b>X</b> <sub>1</sub> .....	78
3.8 – Matriz <b>X</b> <sub>2</sub> .....	79
3.9 – Matriz <b>R</b> (x 10 <sup>-4</sup> ) .....	80
3.10 – Propriedades geométricas: seção T.....	81
4.1 – Equações da GBT.....	84
4.2 – Problemas de autovalores/autovetores.....	88
4.3 – Equações matriciais.....	89
4.4 – Cargas críticas de bifurcação.....	95
4.5 – Participação dos modos individuais ( $n_s = 1$ ).....	96
4.6 – Participação de todos os modos de deformação ( $n_s = 1$ ).....	103
4.7 – Participação modal ( $L = 1000\text{ cm}$ ) .....	119
5.1 – Dimensões geométricas .....	135
5.2 – Parâmetros adimensionais.....	136
5.3 – Carga de bifurcação ( $L = 100\text{ cm}$ ).....	149
5.4 – Valores de carga crítica de bifurcação ( $L = 1000\text{ cm}$ ) .....	153
5.5 – Seções compostas.....	166
5.6 – Parâmetros geométricas: perfis I .....	169
5.7 – Variação de $M_{cr}$ .....	170





# LISTA DE SÍMBOLOS

## Caracteres latinos

$A$	área da seção transversal
$B, C, D, Q, R, X$	matrizes da GBT
$a$	comprimento longitudinal da placa
$b$	comprimento transversal da placa ou espaçamento entre enrijecedores longitudinais
$B_{ik}$	matriz de rigidez linear associada à flexão transversal
$b_r$	comprimento do elemento de placa $r$
$b_p$	comprimento do elemento de placa $p$
$b_f, b_e$	comprimento do flange
$C_{ik}$	matriz de rigidez linear associada ao empenamento
$CG$	centro de gravidade
$CS$	centro de cisalhamento
$CT$	centro de torção
$D_{ik}$	matriz de rigidez linear associada à torção
$d$	deslocamento
$d_k$	vetor de amplitude de cada modo de deformação
$E$	módulo de elasticidade longitudinal
$e$	espessura
$F, K_G^{-1}$	matriz de flexibilidade
$f_y$	tensão de escoamento do aço
$G$	módulo de elasticidade transversal
$g$	matriz de rigidez geométrica
$h_w$	comprimento da alma
$I$	coeficiente de rigidez à flexão
$I_1, I_2, I_y, I_z$	momentos de inércia em torno dos eixos principais $Y$ e $Z$
$I_w$	constante de empenamento
$i, j, k$	número do modo
$J$	constante de torção (Saint-Venant)
$k$	matriz de rigidez

$\mathbf{K}_G$	matriz de rigidez global
$\mathbf{k}_e$	matriz de rigidez elementar
$L$	comprimento
$M$	momento fletor
$M_b$	momento de bifurcação
$M_{cr}$	momento crítico
$M_j$	momento estático
$\mathbf{m}$	matriz de massa
$m$	massa
$m_r, m_p$	momentos de engastamento perfeito
$N$	carga axial
$N_1, N_2, N_3, N_4$	funções de forma
$ND$	número de nós dependentes
$NE$	número de nós de extremidade
$NW$	número de funções de deslocamentos axiais
$n$	número total de placas
$n_d$	número total de modos de deformação
$n_s$	número de semi-comprimentos de onda
$P_b$	carga axial de compressão
$P_{cr}$	carga crítica de bifurcação
$\mathbf{Q}_{ik}$	matriz de inércia associada a movimentos de translação e rotação fora do plano da seção
$q, q_x, q_y, q_z$	força genérica e respectivas componentes segundo os eixos longitudinal, transversal e normal
$q$	potencial das forças externas
$\mathbf{R}_{ik}$	matriz de inércia associada a movimentos de translação e rotação no plano da seção
$r$	nós naturais
$r_{d.k}$	nós dependentes
$r_a$	razão entre a área do enrijecedor e da placa
$r_s$	raio de giração polar
$S$	centro de cisalhamento
$s$	linha média
$T$	energia cinética

$t$	tempo
$t_w, t_f, t_e$	espessura da alma, do flange e do enrijecedor
$U$	energia de deformação
$\bar{U}$	matriz das componentes de deformação
$u$	deslocamento axial
$V$	energia potencial
$v$	deslocamento transversal de membrana
$w$	deslocamento de flexão
$u, v, w$	componentes do campo de deslocamentos segundo o sistema de eixos local ( $x, y, z$ )
$u_k(s), v_k(s), w_k(s)$	perfis de deslocamentos ao longo da linha média
$W$	tensão resultante
$W_i^\sigma$	resultantes das tensões normais
$W_i^\tau$	resultantes das tensões tangenciais
$W_r$	placa
$w_r^i$	deslocamentos de flexão na extremidade inicial do elemento de placa $r$
$w_r^f$	deslocamentos de flexão na extremidade final do elemento de placa $r$
$X_{cg}, Y_{cg}$	coordenadas do centro de gravidade
$\bar{X}_{jik}$	matriz de rigidez geométrica associada a tensões normais
$\bar{X}_{jik}^\tau$	matriz de rigidez geométrica associada a tensões tangenciais
$X, Y, Z$	sistema de eixos global
$x, s, z$	sistema de eixos local
$\tilde{Y}$	matriz de transformação global
$Y_s, Z_s$	coordenadas do centro de corte

### Caracteres gregos

$\alpha$	razão de aspecto (a/b)
$\alpha_i, \beta_i$	coeficientes adimensionais
$\alpha, \beta$	ângulo relativo entre as placas

$\beta_y, \beta_z$	parâmetros de assimetria
$\delta$	translação
$\Delta$	deslocamento transversal
$\varepsilon$	deformação
$\varepsilon^F$	deformação de flexão
$\varepsilon^M$	deformação de membrana
$\phi_k$	função de amplitude de deslocamentos
$\gamma$	distorção
$\gamma$	rigidez relativa à flexão
$\lambda$	parâmetro de carga, autovalor
$\lambda_{cr}$	valor crítico do parâmetro de carga
$\lambda_{plt}$	esbeltez da placa
$\lambda_p$	esbeltez do painel
$\lambda_{st}$	esbeltez do enrijecedor
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\theta$	rotação
$\Theta$	torção
$\rho$	densidade de massa
$\Pi$	potencial das forças externas aplicadas
$\sigma$	tensão normal
$\sigma^F$	tensão de flexão
$\sigma^M$	tensão de membrana
$\sigma^\tau$	tensão de cisalhamento
$\phi_k$	função de amplitude de deslocamentos
$\tau$	tensão tangencial
$\omega$	frequência
$\omega_f$	frequência natural de vibração

# CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Nos últimos anos, a indústria da construção civil tem sido impulsionada pela demanda por elementos estruturais de aço formados a frio que propiciam otimizar projetos, minimizar custos, combinar maior resistência e rigidez e reduzir o peso das estruturas.

A versatilidade das formas geométricas das seções transversais e das dimensões dos perfis e chapas, precisão construtiva, compatibilidade com outros materiais e sustentabilidade sintetizam outras vantagens de utilização dos sistemas construtivos em aço leve em diversas tipologias de edificações, exemplificadas na Tabela 1.1.

**Tabela 1.1** – Estruturas de aço formado a frio na construção

- 
- Estocagem e armazenamento industrial, prateleiras e mezaninos
  - Coberturas, estruturas espaciais e treliças
  - Ampliação e recuperação estrutural
  - Edificações residenciais, comerciais e industriais
  - Torres de transmissão
  - Reservatórios e galpões
  - Estruturas secundárias de pontes
  - Formas para concreto
  - Estruturas mistas: lajes, vigas e colunas
  - *Light Steel Framing*
  - Vedação e painéis de fechamento
- 

Fonte: Veríssimo (2008)

Produzidos a partir da conformação mecânica de chapas finas de aço à temperatura ambiente pelo processo de perfilagem em matrizes rotativas (Fig. 1.1 – a) ou por dobramento em prensa (Fig. 1.1 – b), os perfis formados a frio caracterizam-se por apresentar diferenciada relação largura-espessura, o que lhes confere peculiaridades em relação ao comportamento estrutural, que é influenciado por um conjunto de fenômenos de deformabilidade, alguns inexistentes ou pouco relevantes nos perfis de chapas soldadas ou laminados a quente.

(a)



(b)



Fig. 1.1 – Processos de fabricação dos perfis formados a frio. (a) Perfilagem (Vrany, 2010). (b) Dobramento (Sabbagh *et al.*, 2011)

Em se tratando de barras comprimidas, a elevada esbeltez dos perfis torna-os suscetíveis à ocorrência do modo de falha por instabilidade sob carregamentos frequentemente menores do que aqueles que correspondem à plastificação total ou parcial da seção transversal (Rondal *et al.*, 1992).

É ainda conveniente fazer distinção entre perfis com seções transversais abertas ou fechadas por haver diferenças acentuadas quanto à deformabilidade à torção.

A existência ou não de enrijecedores também exerce influência considerável nos fenômenos de instabilidade, visto que o aumento da rigidez dos elementos<sup>1</sup> contribui para incrementar a resistência à deformação no próprio plano da seção (Fig. 1.2).

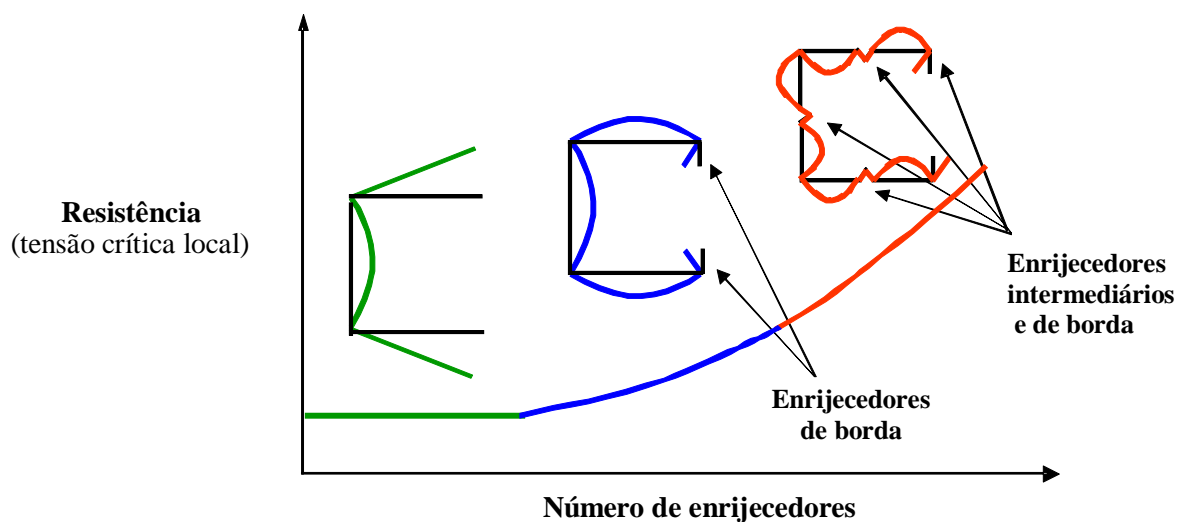


Fig. 1.2 – Influência do número de enrijecedores na instabilidade da seção (Silvestre *et al.*, 2006a)

## 1.2 FENÔMENOS DE INSTABILIDADE

A análise e o dimensionamento de estruturas constituídas por perfis formados a frio requer considerar necessariamente os fenômenos de instabilidades da barra como num todo, dos elementos componentes do perfil e de suas interações.

A *instabilidade global* caracteriza-se pela ocorrência de deformação do eixo da barra. Os elementos que compõem a seção praticamente não se deformam e não so-

<sup>1</sup> *Elemento*: parte constituinte de um perfil formado a frio: mesa, alma, enrijecedor (ABNT NBR 14762:2010). Neste trabalho, utiliza-se com a mesma acepção *placa*, *parede* ou *chapa*.

frem qualquer tipo de distorção, apenas deslocamentos de corpo rígido no próprio plano da seção, em geral duas translações e uma rotação em torno do centro de torção.

São exemplos clássicos:

- (i) a instabilidade de colunas comprimidas por:
  - (a) *flexão* em torno de um dos eixos principais de inércia da seção transversal devido a um esforço de compressão maior que o crítico (Fig. 1.3 – a).
  - (b) *torção*, característica de barras com seção transversal cruciforme, quando as quatro placas flambam por flexão simultaneamente e no mesmo sentido (Fig. 1.3 – b).
  - (c) *flexo-torção*, que ocorre em barras com seções monossimétricas, nas quais a posição do centroide não coincide com a do centro de torção, submetidas a um esforço de compressão atuando no centro de gravidade (Fig. 1.3 – c).

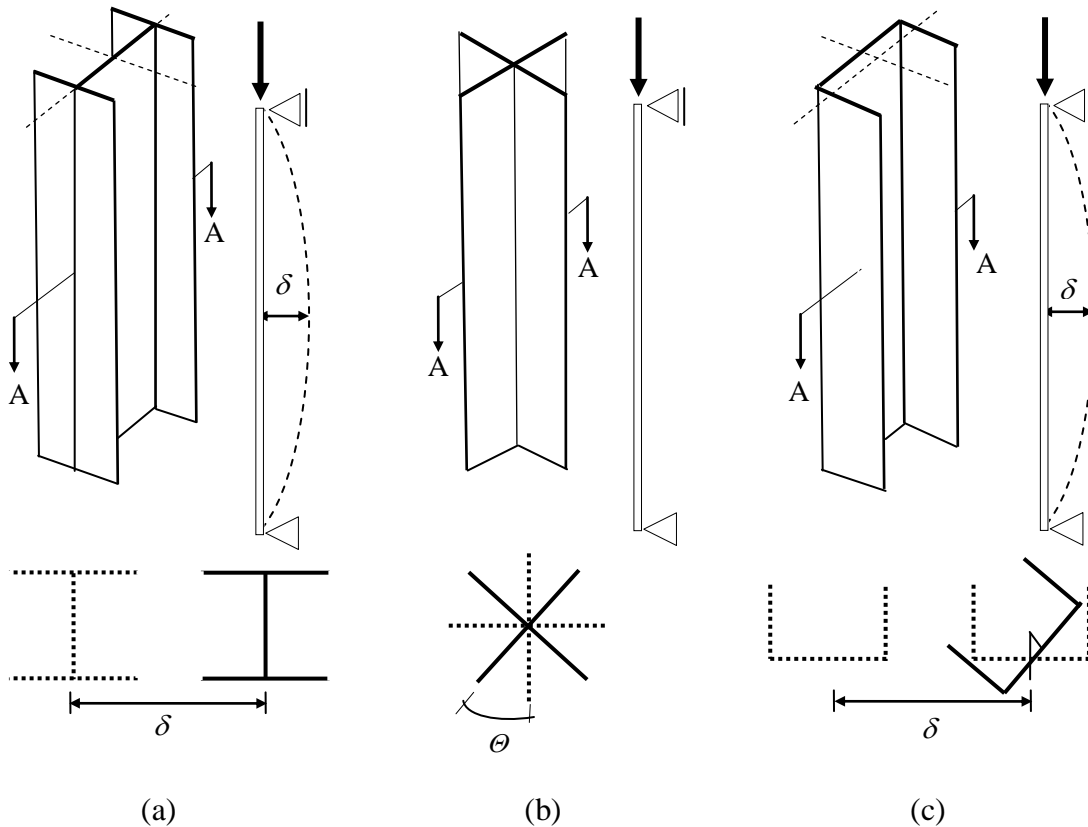


Fig. 1.3 – Instabilidade global de colunas: (a) Flexão. (b) Torção. (c) Flexo-torção (Almeida, 2007)



- (ii) a instabilidade lateral com torção em vigas submetidas à flexão, caracterizada pela translação na direção ortogonal ao plano de carregamento e rotação em torno do eixo longitudinal que passa pelo centro de torção da seção (Fig. 1.4).

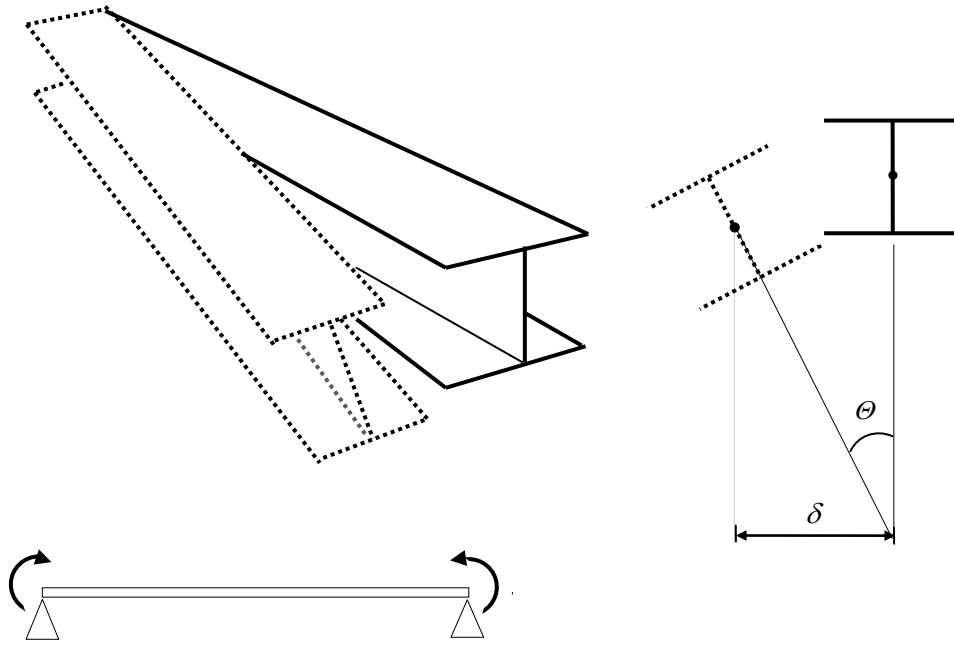


Fig. 1.4 – Instabilidade lateral com torção

Os fenômenos de *instabilidade local*<sup>2</sup> classificam-se em duas categorias distintas, associadas aos *modos distorcionais* e aos *modos locais de placa*.

Ressalta-se que:

- (i) os *modos distorcionais* apresentam relevância em perfis com enrijecedores de borda do tipo *U*, *Z*, cartola e *rack*, sendo mais pronunciados nos formados por aços de elevada resistência mecânica.

---

<sup>2</sup>Comumente a designação *modos locais* refere-se indistintamente tanto aos *modos distorcionais* quanto aos *modos locais de placa*.

As deformações caracterizam-se pela ocorrência de flambagem por torção de parte da seção e, em função da necessidade de compatibilizar as rotações nas arestas que interligam as placas, advêm deformações por flexão das placas adjacentes com deslocamentos na região das dobras e ângulos formados nas arestas, alterando significativamente a configuração inicial da seção (Fig. 1.5 – b).

- (ii) os *modos locais de placa* associam-se a deslocamentos por flexão da placa mais esbelta (alma), sendo acompanhados pelas placas restantes por razões de compatibilidade.

O eixo longitudinal permanece na configuração indeformada, sem que haja deslocamentos na posição original das arestas da seção ou mudança nos ângulos formados entre as placas adjacentes (Fig. 1.5 – c).

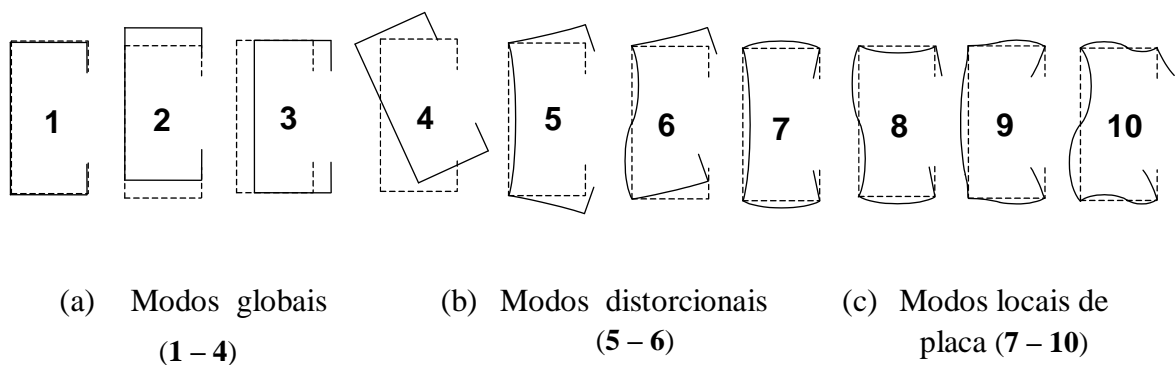


Fig. 1.5 – Modos de deformação de um perfil U enrijecido: (a) *Modos globais*: (1) Extensão axial. (2) Flexão em torno do eixo de maior inércia. (3) Flexão em torno do eixo de menor inércia. (4) Torção. (b) *Modos distorcionais*: (5) Simétrico. (6) Antissimétrico. (c) *Modos locais de placa*

Em uma barra pode predominar apenas um modo crítico de instabilidade/vibração ou modos mistos (Fig. 1.6). A ocorrência está condicionada à geometria (forma e dimensões da seção transversal), propriedades do material, comprimento da barra, condições de contorno e carregamento, imperfeições geométricas iniciais e excentricidades (Yu, 2000).

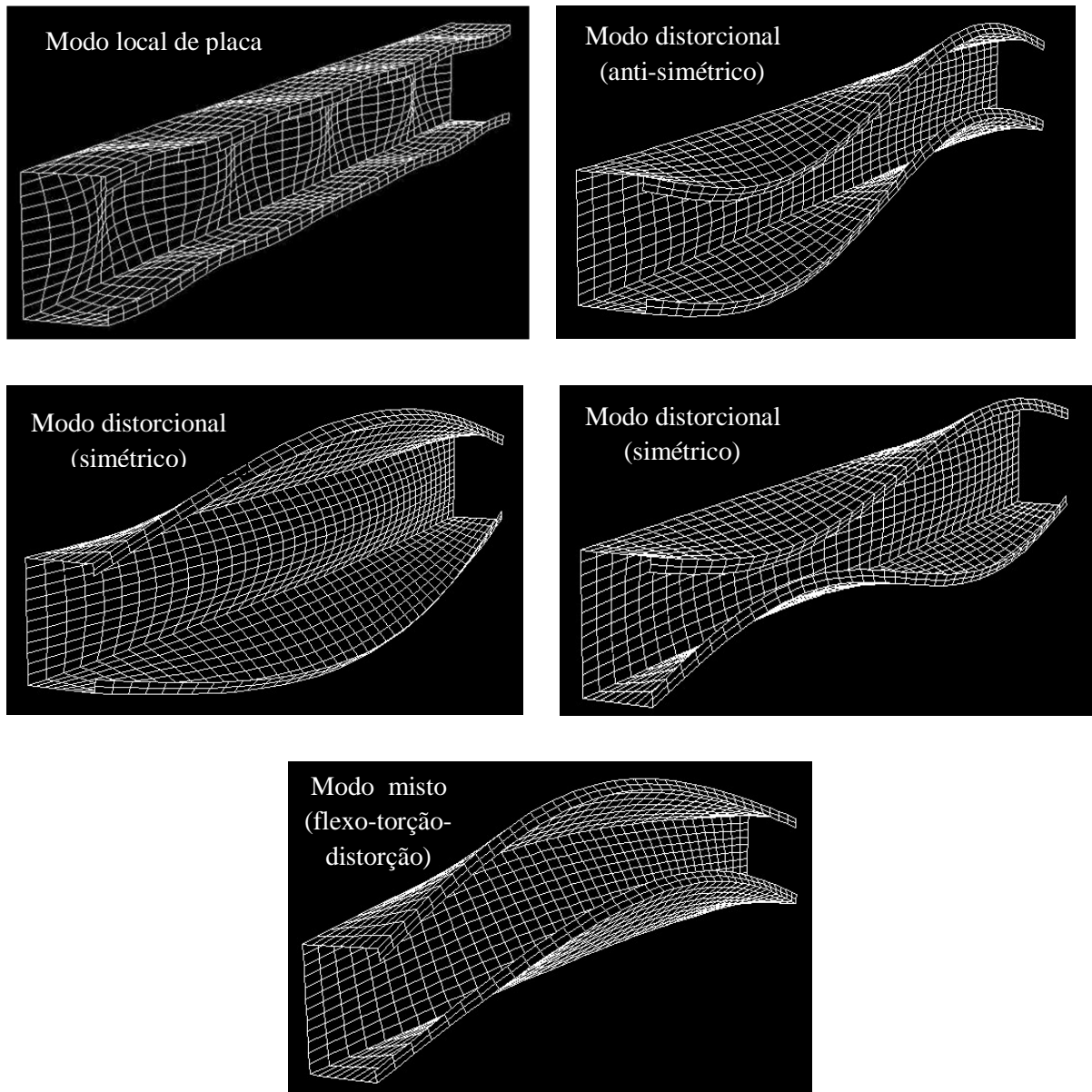


Fig. 1.6 – Perfil U enrijecido submetido à compressão: configurações dos modos de instabilidade

Prola (2002) estabelece a seguinte correlação entre os modos de instabilidade preponderantes, a carga crítica e o comprimento de colunas submetidas à compressão:

- (i) o *modo de instabilidade local de placa* predomina em barras curtas e chapas muito finas.

- (ii) o *modo de instabilidade distorcional* prevalece em barras com esbeltez intermediária.
- (iii) o *modo de instabilidade global* é típico de barras longas com elevado índice de esbeltez.

Essa correspondência também pode ser estendida aos modos de vibração.

A caracterização adequada do comportamento de elementos estruturais formados a frio implica utilizar métodos de análise que permitam considerar a influência individual ou conjunta dos fenômenos de instabilidade preponderantes e os fatores que condicionam sua ocorrência e interação.

### 1.3 MÉTODOS DE ANÁLISE

Tradicionalmente para análise de elementos estruturais com seções de parede fina são empregados o *Método dos Elementos Finitos* (MEF) (Zienkiewicz e Taylor, 1997) ou o *Método das Faixas Finitas* (MFF) (Cheung e Tham, 1998). Outra alternativa perfeitamente viável consiste na utilização da *Teoria Generalizada de Vigas* (GBT).

Ressalta-se que em termos de interpretação dos resultados e da eficiência computacional, a GBT oferece recursos adicionais que não estão disponíveis no MEF ou MFF. Uma única equação geral com um número reduzido de graus de liberdade possibilita descrever separadamente cada um dos movimentos de corpo rígido (extensão axial, flexão em torno do eixo de maior inércia, flexão em torno do eixo de menor inércia e torção), distorcionalis e locais de placa, contabilizar o fator de participação de cada um dos modos puros de deformação, cujo número depende da geometria da seção transversal e sua discretização, ou ainda combinar modos e avaliar o grau de interação entre eles.

Basicamente o MEF, o MFF e a GBT diferem quanto à forma como se efetua a discretização da deformada da seção transversal.

O MEF destaca-se por modelar adequadamente o comportamento de quaisquer elementos estruturais com seção transversal de parede fina e simular com rigor os fenômenos de instabilidade. A estrutura é subdividida em elementos finitos (Fig. 1.7 – a) e, no interior de cada elemento, aproxima-se o campo de deslocamentos

por uma combinação linear de funções *locais*, cujos coeficientes são os deslocamentos ou as rotações nodais. Os graus de liberdade são definidos por compatibilidade, envolvendo deslocamentos ou rotações nodais dos diversos elementos finitos.

O MFF aplica-se a estruturas com configurações geométricas regulares, condições de contorno e carregamentos mais simples. Na direção transversal, a barra com seção transversal de parede fina é subdividida em faixas finitas longitudinais de largura constante (Fig. 1.7 – b) e o campo de deslocamentos aproximado por meio de funções de forma geralmente polinomiais. Na direção longitudinal, os deslocamentos ao longo da linha média da seção são aproximados por funções de forma *locais*, constituídas por expressões analíticas que satisfazem as condições de contorno. As amplitudes dessas funções ( $\alpha_k(x)$ ,  $k = 1 + \dots n$ ) são os graus de liberdade correspondentes aos deslocamentos ( $d_i$ ,  $i = 1 + \dots n$ ) ou às rotações nodais ( $\theta_i$ ,  $i = 1 + \dots n$ ) (Fig. 1.8 – b).

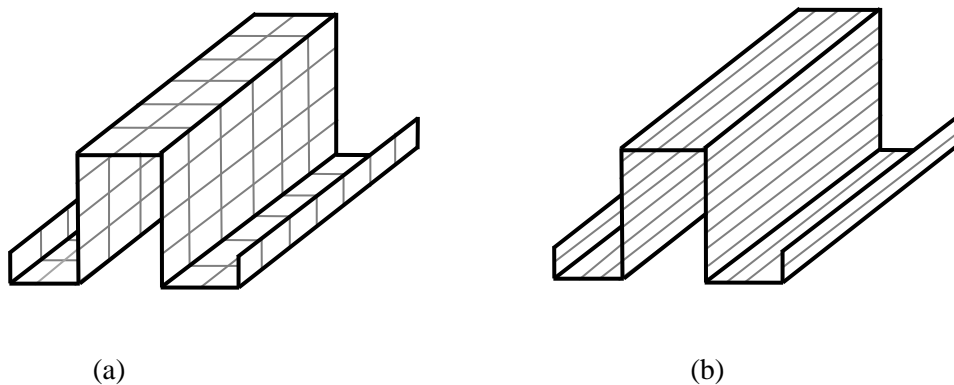


Fig. 1.7 – Perfil cartola: (a) Malha de elementos finitos. (b) Malha de faixas finitas

Para obter resultados mais precisos tanto no MEF quanto no MFF, é necessário aumentar relativamente o número de elementos finitos ou de faixas finitas do modelo estrutural, o que se traduz em acréscimo de graus de liberdade, número de modos de flambagem e esforço computacional. Embora o MEF propicie lidar com quaisquer tipologias geométricas de seções transversais, condições de contorno ou carregamentos, a identificação dos modos de instabilidade não ocorre de imediato. Há que se considerar

as dificuldades em interpretar os resultados fornecidos, quase sempre com significado físico pouco ou nada óbvio.

O modelo de discretização adotado na GBT aproxima o campo de deslocamentos por meio de funções de forma definidas ao longo de toda a linha média da seção como uma combinação de modos de deformação (globais e locais). Os graus de liberdade são os deslocamentos *modais* (ao invés de nodais) que permitem avaliar o comportamento estrutural, tendo em vista os fatores de participação de cada modo de deformação na configuração deformada da barra ( $\beta_i(x)$ ,  $i = 1 + \dots n$  e  $\beta_j(x)$ ,  $j = 1 + \dots n$ ) (Fig. 1.8 – c).

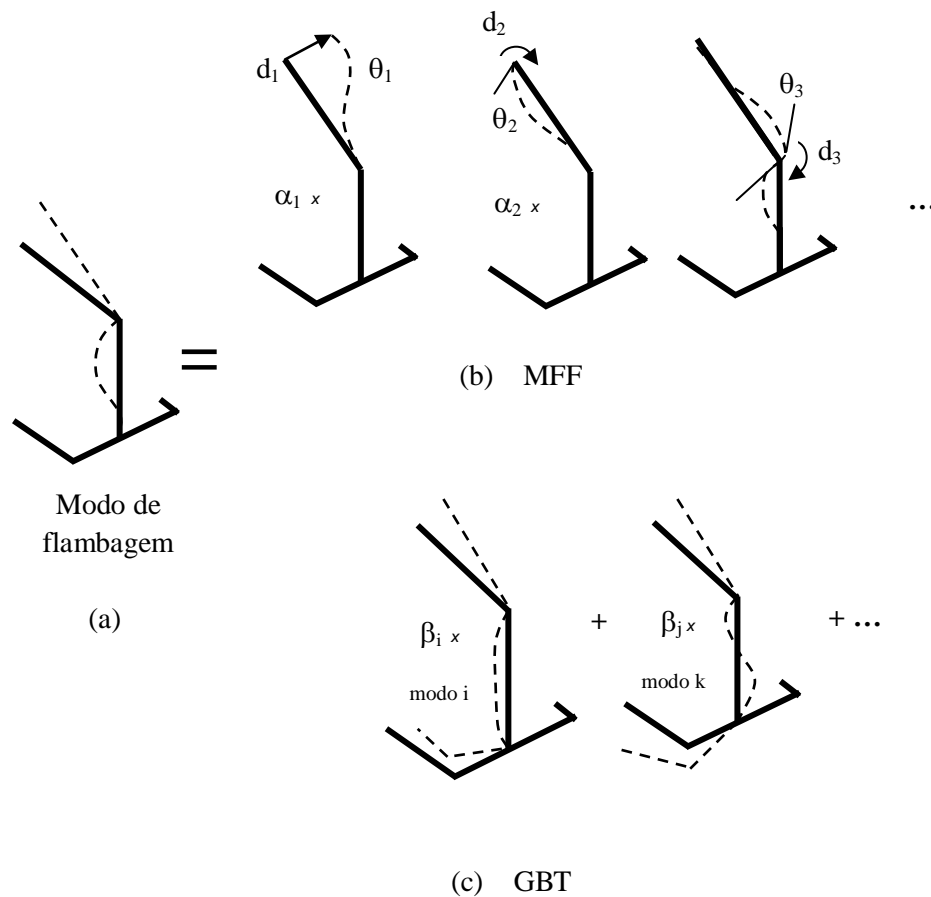


Fig. 1.8 – (a) Configuração deformada de uma seção transversal de parede fina aberta ramificada genérica. (b) MFF: discretização nodal. (c) GBT: discretização modal (adaptado de Camotim *et al.*, 2010)

## 1.4 ÂMBITO, OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

A opção por soluções construtivas leves e os avanços nos processos de fabricação dos perfis formados a frio têm propiciado inovações constantes que não raro incluem seções transversais com novas geometrias, para as quais os fenômenos de instabilidade evidenciam-se de formas distintas.

A caracterização do comportamento estrutural e a busca por soluções de cálculo e métodos de dimensionamento econômicos e eficazes, inclusive para embasar as prescrições normativas existentes, justificam o desenvolvimento de pesquisas na área, especialmente para seções com geometrias complexas, constituídas por materiais diversos como aço, alumínio ou compósitos.

Devido às características únicas de decomposição modal e clareza da resposta estrutural, a GBT tem atraído a atenção de vários pesquisadores, remetendo ao desenvolvimento de novas formulações e aplicações em análises de barras com seções transversais de parede fina.

O propósito deste trabalho consiste em:

- (i) realizar implementações computacionais com base na GBT para avaliar o comportamento de elementos estruturais com seções transversais de parede fina abertas ramificadas em análises de estabilidade (determinação de cargas de bifurcação e modos de instabilidade) e de vibração (determinação das frequências próprias e modos de vibração) em regime elástico.

Os resultados obtidos com os *softwares* MAPLE 14 (Waterloo Maple Inc., 2007) e MATLAB (MathWorks Inc., 2012) a partir de formulações desenvolvidas pela equipe do Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa (DECivil/IST/UTL) (Dinis *et al.*, 2006) e pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (Patrício, 2012) são devidamente validados com o programa GBTUL 1.0  $\beta$  (Bebiano *et al.*, 2008) e o CUFISM v.3.1 ([www.ce.jhu.edu/bschafer/cufism](http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufism)).

- (ii) efetuar estudos paramétricos para investigar o comportamento de elementos estruturais de parede fina por meio de análises de estabilidade de:

- a) painéis enrijecidos longitudinalmente sujeitos a carregamento de compressão axial (Ferreira, 2011).
- b) colunas biapoiadas submetidas à compressão axial formadas por seção composta aberta ramificada (Georgieva *et al.*, 2012c).
- c) bi-vigas de pontes mistas rodoviárias de pequeno vão (Ferraz, 2009).

Dessa forma, espera-se poder colaborar para uma melhor compreensão do comportamento de estruturas leves e fornecer subsídios para o seu dimensionamento de forma mais eficaz.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

A tese está estruturada de maneira a sistematizar as formulações da GBT para analisar o comportamento de elementos estruturais constituídos por perfis formados a frio com seções transversais abertas ramificadas em regime elástico.

O presente capítulo faz uma breve exposição sobre a GBT, apresentando as motivações e o escopo do trabalho. Os fenômenos de instabilidades associados a seções transversais de parede fina também são abordados. Uma comparação entre os principais métodos de análise estrutural (MEF e MFF) realça as potencialidades da GBT.

O **Capítulo 2** delinea o histórico do desenvolvimento da GBT e apresenta os conceitos e os princípios básicos adotados na sua formulação.

O **Capítulo 3** descreve os procedimentos relativos à *análise da seção* transversal de parede fina aberta ramificada, explicitando a metodologia desenvolvida por Dinis *et al.* (2006). Apresenta-se, para fins de ilustração, como é realizada a obtenção das matrizes da GBT e determinada a configuração dos modos de deformação de seções compostas abertas ramificadas do tipo *E* e *T*.

O **Capítulo 4** explicita a *análise da barra* e mostra particularmente para colunas e vigas biapoiadas como encontrar a solução exata da equação diferencial de equilíbrio da GBT. Ilustra-se a aplicação da GBT em análises de: (i) estabilidade e vibração de uma coluna biapoiada sob compressão axial; (ii) estabilidade de uma viga biapoiada submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia; (iii) vibração livre (sem qualquer tipo de carregamento atuando na barra). Em todos os exemplos, os elementos estruturais



são formados pelo perfil  $T$ , cuja discretização nodal, propriedades modais e matrizes da GBT foram apresentadas no capítulo anterior.

**O Capítulo 5** apresenta estudos paramétricos efetuados visando demonstrar a aplicação da GBT a problemas de interesse prático em engenharia civil e realçar sua competitividade em relação aos métodos tradicionais de análise de estruturas de parede fina. Avaliam-se: (i) painéis enrijecidos longitudinalmente sujeitos à carregamento de compressão axial, comumente utilizados em vigas-caixão de pontes, investigando como a utilização de enrijecedores do tipo barra,  $L$  e  $T$  interfere na capacidade resistente, principalmente no que se refere à verificação dos modos de instabilidade predominantes e suas interações (Ferreira, 2011); (ii) colunas comprimidas formadas por seções compostas com geometria não convencional (Georgieva *et al.*, 2012c); (iii) bi-vigas utilizadas em pontes mistas rodoviárias de pequeno vão formadas por perfis I assimétricos sob flexão (Ferraz, 2009).

**O Capítulo 6** aponta as principais conclusões e sugestões para futuras pesquisas.



# CAPÍTULO 2 – TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS

## 2.1 INTRODUÇÃO

Apresenta-se neste capítulo uma síntese histórica sobre o desenvolvimento da Teoria Generalizada de Vigas (GBT). Enfatiza-se o expressivo número de publicações e as aplicações inéditas da GBT pela equipe do DECivil/IST/PT, evidenciando a importante contribuição de Camotim *et al.* (2005) e a formulação implementada por Dinis *et al.* (2006) para analisar barras com quaisquer seções transversais de parede fina abertas ramificadas.

Os conceitos básicos, as hipóteses simplificativas, a representação do campo de deslocamentos, as relações constitutivas e o princípio variacional utilizado para estabelecer o sistema de equações diferenciais de equilíbrio da GBT e suas respectivas condições de contorno são abordados na seção 2.3, seguindo a metodologia proposta por Silvestre (2005).

A formulação descrita permite efetuar análises de estabilidade e de vibração de elementos estruturais com seções transversais de parede fina abertas ramificadas ou não, constituídas por materiais isotrópicos, em regime linear elástico.

A identificação e o significado físico das grandezas envolvidas na aplicação da GBT comparados com a teoria de vigas de Vlasov confirmam a versatilidade da GBT.

## 2.2 REVISÃO DA LITERATURA

A Teoria Generalizada de Vigas (*Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*) foi desenvolvida em 1966 por Richard Schardt, professor da Universidade Técnica de Darmstadt (Alemanha), para analisar o comportamento de elementos estruturais prismáticos com seções transversais de paredes finas, tendo como princípios norteadores a teoria da distorção de barras prismáticas de Vlasov (1959), denominada

Método das Coordenadas Generalizadas, e a teoria clássica de placas (Born, 1954; Girkmann, 1959).

A designação *GBT convencional* refere-se à formulação original (Schardt, 1966). Engloba análises de primeira ordem (linear), de estabilidade e de vibração de barras com seções transversais de parede fina, constituídas por materiais elásticos e isotrópicos, em sua maioria abertas (sem ramificações) e algumas análises de seções fechadas (retangulares e circulares) sob diferentes condições de carregamento e condições de contorno (Schardt, 1966, 1970, 1989, 1994a, 1994b; Sedlacek, 1968; Schardt e Steingass, 1970).

Praticamente todas as teses e relatórios técnicos concernentes à GBT, cujas referências podem ser acessadas em [www.vtb.info](http://www.vtb.info), permaneceram disponibilizados apenas em alemão durante décadas. Em 1994, foram publicados dois artigos em inglês sobre a GBT (Schardt, 1994a, 1994b).

Coube então a J. M. Davies, na época professor da Universidade de Salford (Inglaterra), ao reconhecer o seu vasto potencial de aplicação da teoria (Schardt, 1983), o mérito de difundir em língua inglesa a formulação original da GBT para a comunidade técnico-científica, suscitando o interesse de outros pesquisadores. Davies e colaboradores empregaram-na extensivamente para investigar o comportamento de flambagem de barras constituídas por perfis formados a frio em análises de primeira e segunda ordem (Davies e Leach, 1992, 1994a, 1994b; Leach e Davies, 1996; Davies e Jiang, 1998; Kesti e Davies, 1999; Davies, 1998 e 2000).

A partir de então o domínio de aplicação da GBT vem se ampliando consideravelmente no que diz respeito à diversidade de aplicações e ao surgimento de novas formulações, principalmente as implementadas pelo grupo de pesquisa da Universidade Técnica de Lisboa (DECivil/IST) para análises:

- (i) de primeira e segunda ordem de barras constituídas por materiais ortotrópicos (Silvestre e Camotim, 2002a, 2002b, 2002c).
- (ii) do comportamento geometricamente não linear de elementos de parede fina em aço e materiais compósitos (Silvestre e Camotim, 2003a, 2003b).
- (iii) de flambagem por distorção em barras com seções *U*, *Z*, cartola e *rack*, incluindo formulações analíticas (Silvestre e Camotim, 2003c, 2004c).

- (iv) do comportamento de vibração de seções transversais de paredes finas abertas constituídas por materiais ortotrópicos (Silvestre e Camotim, 2004b).
- (v) de flambagem de perfis de aço formados a frio, abrangendo a formulação de um elemento finito genérico para resolver o sistema de equações da GBT (Silvestre, 2005).
- (vi) de barras com seções transversais de paredes finas: abertas ramificadas (Dinis *et al.*, 2006); circulares e tubulares (Silvestre, 2007); elípticas (Silvestre, 2008); fechadas (uni ou multicelulares) (Gonçalves *et al.*, 2004); arbitrárias (Gonçalves *et al.*, 2009).
- (vii) estruturais de vigas de parede fina com seção deformável (Gonçalves, 2007).
- (viii) lineares, de estabilidade e geometricamente não lineares de pórticos e estruturas aporticadas metálicas formados por barras de parede fina (Basaglia *et al.*, 2007, 2008, 2009a, 2009b, 2010, 2011).
- (ix) de flambagem e pós-flambagem de painéis cilíndricos reforçados com materiais compósitos (Silva *et al.*, 2010).
- (x) do comportamento de perfis formados a frio, utilizando vários elementos finitos de barra fisicamente não lineares (Gonçalves e Camotim, 2011).
- (xi) de flambagem e pós-flambagem de cantoneiras de abas iguais e seções cruciformes (Dinis *et al.*, 2011b)
- (xii) do comportamento pós-flambagem de pórticos com seção de parede fina com a implementação numérica de um elemento finito de viga especialmente desenvolvido (Basaglia *et al.*, 2012).
- (xiii) do comportamento de flambagem local, global e distorcional de vigas submetidas a cargas transversais aplicadas em vários pontos da seção transversal fora do centro de cisalhamento (Basaglia e Camotim, 2012).
- (xiv) lineares de estabilidade de seções transversais de paredes finas formadas por placas laminadas constituídas por materiais anisotrópicos (Silvestre e Camotim, 2012b).
- (xv) dos mecanismos de deformação de estruturas tubulares de parede fina, formadas por seção transversal poligonal com uma única célula, utilizadas

em torres de linhas de transmissão, antenas e mastros (Gonçalves e Camotim, 2013).

- (xvi) elastoplásticas de primeira ordem de elementos com seções transversais de paredes finas que experimentam deformações arbitrárias, constituídos por materiais não-lineares (Abambres *et al.*, 2013a).

Outras importantes contribuições relativas ao desenvolvimento da GBT devem ser creditadas a:

- (i) Möller (1982): formulação para efetuar análises lineares em barras com seções fechadas (uni e multicelulares) e desenvolvimento de uma metodologia aplicável a seções ramificadas simples.
- (ii) Mörschardt (1990): metodologia exclusiva para análise linear de barras com seção I.
- (iii) Lepistö *et al.* (1996): análises de primeira ordem e de estabilidade em placas e barras comprimidas com seção  $U$  e cartola.
- (iv) Baláz (1999): estudo da influência da distorção em barras com seções fechadas e investigação do comportamento estrutural de uma viga simplesmente apoiada com seção tubular (quadrada).
- (v) Halme (2002): método alternativo para determinar os modos de deformação da GBT.
- (vi) Simões da Silva e Simão (2004a, 2004b): análise da estabilidade e do comportamento de flambagem e pós-flambagem de perfis formados a frio.
- (vii) Rendek e Baláz (2004): análise de vigas com seções fechadas (uni e multicelulares).
- (viii) Degée e Boissonade (2004): análise de barras com seções abertas e ramificações bem simples em algumas placas, sem inclusão de nós intermediários.
- (ix) Simão (2007): modelos analíticos baseados na GBT para descrição do comportamento crítico e pós-crítico de elementos estruturais com seções com quaisquer geometrias, submetidos à compressão ou à flexão.
- (x) Jonsson e Andreassen (2009, 2012): novas técnicas para resolução do problema de autovalores e obtenção dos modos distorcionais.

- (xi) Nedelcu (2010): análise de barras com seções transversais abertas com geometria variável ao longo do comprimento.
- (xii) Casafont *et al.* (2009, 2011): análise preliminar de perfis formados a frio utilizando a GBT e o Método dos Elementos Finitos (FEM).
- (xiii) Ranzi e Luongo (2011): aplicação do método semivariacional de Kantorovich para determinar os modos de deformação convencionais da GBT em barras com seções transversais com geometria genérica (abertas, parcialmente fechadas e fechadas).
- (xiv) Freitas (2011): desenvolvimento e implementação de elementos finitos de barra fisicamente não lineares baseados na GBT, empregando funções de interpolação de Lagrange (lineares) e de Hermite (cúbicas).
- (xv) Amaral (2011): estudo dos fenômenos de instabilidade em vigas mistas com apresentação de expressão analítica baseada na GBT para cálculo de momentos críticos.
- (xvi) Luo *et al.* (2011): elaboração de modelos computacionais com base na GBT para estudar a flambagem distorcional de barras compostas por perfis *U* enrijecidos fletidas em torno do eixo de menor inércia.
- (xvii) Patrício (2012): análise da instabilidade bifurcacional e resistência de barras com seção de parede fina fechada em losango sob flexão e estudo da influência do modo distorcional.
- (xviii) Nogales (2013): análises de perfis prismáticos com seção transversal de paredes finas abertas ramificadas.
- (xix) De Miranda *et al.* (2013): nova formulação da GBT levando em conta os efeitos do cisalhamento, utilizando a técnica de decomposição modal única para ambos os modos de flexão e corte.

Em particular, constituem referências essenciais para o desenvolvimento desta tese os trabalhos relativos à análise:

- (i) de barras com seções transversais de paredes finas abertas constituídas por materiais isotrópicos que sintetiza, de forma bastante esclarecedora, as formulações da GBT desenvolvidas inicialmente por Schardt e apresenta um conjunto de exemplos de aplicação a análises lineares de primeira ordem,

estabilidade e vibração para barras constituídas por perfis com várias seções transversais abertas: *U* enrijecido, *Z* enrijecido, sigma e *rack* (Silvestre, 2005).

- (ii) de barras com seções transversais de paredes finas abertas e ramificadas, com quaisquer números de nós de bifurcação e de ramificações, que explicita toda a metodologia envolvida na aplicação da GBT para perfis com seções transversais abertas arbitrárias (Dinis *et al.*, 2006; Camotim *et al.*, 2007, Gonçalves *et al.*, 2010).
- (iii) de estabilidade e de vibração de barras com seções abertas sem e com ramificações por meio do programa GBTUL 1.0  $\beta$ , disponibilizado em [www.civil.ist.utl.pt/gbt](http://www.civil.ist.utl.pt/gbt), utilizada para validar os exemplos estudados e checar as formulações implementadas (Bebiano *et al.*, 2008).
- (iv) dinâmicas de perfis de parede fina, cujo comportamento estrutural pode ser governado pela deformação local ou global, em que se apresentam minuciosamente os fundamentos teóricos da GBT e as novas formulações específicas para seções transversais abertas arbitrárias (Bebiano, 2010).
- (v) aplicada a problemas de vibração de colunas carregadas, que detalha os procedimentos relativos à análise dinâmica e ao comportamento de vibração dos perfis formados a frio (Silvestre *et al.*, 2003a, 2003b, 2004b, 2006b) e vibração livre (Bebiano *et al.*, 2007, 2008, 2009, 2010).
- (vi) dos modos de instabilidade em colunas com seções do tipo *T*, cruciformes e cantoneira simples de abas iguais que propicia complementar a compreensão do comportamento de seções transversais abertas ramificadas mais complexas (Dinis *et al.*, 2012).

### 2.3 FUNDAMENTOS DA GBT

Para fins de elucidação, considera-se uma barra prismática com seção transversal de parede fina aberta genérica (Fig. 2.1).

O sistema de coordenadas globais é representado por *X-Y-Z* e o sistema de eixos local por *x-s-z*. Em cada placa, *x* (paralelo a *X*) define o comprimento (*L*) da barra; *s* (na direção transversal) relaciona-se ao plano médio das placas que compõem a seção; *z*



(ortogonal ao plano médio) é medido segundo a direção da espessura ( $e$ ) de cada placa;  $t$  indica a variável de natureza temporal.

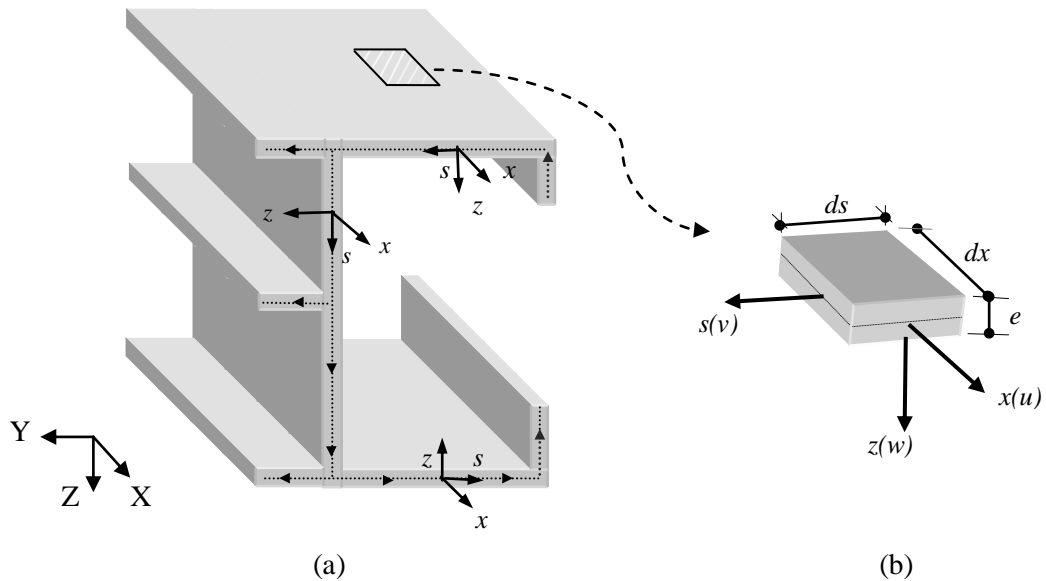


Fig. 2.1 – (a) Barra com seção de parede fina aberta ramificada, sistema de coordenadas e componentes de deslocamentos. (b) Elemento infinitesimal de placa

As componentes do campo de deslocamentos ( $U$ ) associadas ao sistema de eixos local  $(x-s-z)$  são expressas ao longo da linha média ( $s$ ) num determinado intervalo de tempo ( $t$ ) por  $u(x, s, z, t)$ ,  $v(x, s, z, t)$  e  $w(x, s, z, t)$ .

Na forma vetorial:

$$U = \begin{bmatrix} u(x, s, z, t) \\ v(x, s, z, t) \\ w(x, s, z, t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

As hipóteses simplificativas e os princípios em que se baseia a GBT convencional admitem que:

- (i) as barras prismáticas são constituídas por material linear elástico e isotrópico.
- (ii) as barras são formadas por seções de paredes finas, retilíneas, de espessura constante mas muito pequena quando comparada às dimensões das demais placas que compõem a seção.

- (iii) as relações entre deslocamentos e deformações para pequenos deslocamentos são lineares.
- (iv) as fibras normais ao plano médio de cada placa na configuração indeformada mantêm-se retas, perpendiculares ao plano médio e são inextensíveis ( $\varepsilon_{zz} = 0$ ) (Kirchhoff, 1883; Love, 1927), o que conduz ao desenvolvimento em cada placa de um estado plano de deformação.
- (v) a tensão normal na direção  $z$  é nula ( $\sigma_{zz} = 0$ ) (Kirchhoff, 1883; Love, 1927), o que remete ao estado plano de tensão em cada placa.
- (vi) as fibras paralelas aos eixos  $x$  e  $s$  no plano médio ( $s$ ) de cada placa permanecem normais entre si após a deformação ( $\gamma_{xs} = 0$ ) (Vlasov, 1959), o que implica, segundo a teoria de flexão de vigas de Navier, considerar distorções de membrana nulas ( $\gamma_{xs}^M = 0$ ).
- (vii) as fibras pertencentes ao plano médio de cada placa não sofrem qualquer extensão durante a deformação, o que significa que a extensão transversal de membrana é nula ( $\varepsilon_{ss}^M = 0$ ).

A Fig. 2.2 representa o perfil transversal no plano ( $x$ - $z$ ) de uma placa genérica e suas configurações (inicial e deformada). Designa-se respectivamente por  $(u, v, w)$  e  $(u^P, v^P, w^P)$  os deslocamentos dos pontos  $O$  ( $x, y, z = 0, t$ ) e  $P$  ( $x, y, z \neq 0, t$ ).

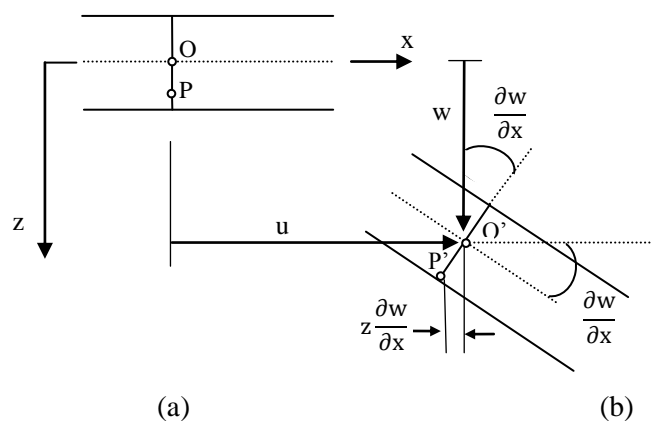


Fig. 2.2 – Placa genérica: (a) Configuração inicial. (b) Configuração deformada (segundo as hipóteses de Kirchhoff e Love) (Silvestre, 2005)

Em razão de se considerar que as fibras normais ao plano médio permanecem retas e não variam de comprimento durante a deformação, a extensão de uma fibra normal ao plano médio da placa na direção  $z$  é nula:

$$\varepsilon_{zz} = w_{,z}^P = 0 \quad (2.2)$$

em que  $(.)_{,z} \equiv \partial(\cdot)/\partial z$ .

Por conseguinte,  $w^P$  independe de  $z$ :

$$w^P(x, s, z, t) = w(x, s, t) \quad (2.3)$$

Admitir que as fibras normais ao plano médio da placa na configuração indeformada mantêm-se normais mesmo após a deformação implica o anulamento das distorções nos planos  $xz$  e  $sz$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= u_{,z}^P + w_{,x}^P = 0 \\ \gamma_{sz} &= v_{,z}^P + w_{,s}^P = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Introduzindo a expressão (2.3) em (2.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} u^P(x, s, z, t) &= u(x, s, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v^P(x, s, z, t) &= v(x, s, t) - z \frac{\partial w}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Assim a determinação do campo de deslocamentos para qualquer elemento infinitesimal de placa é definido no plano médio e envolve parcelas de membrana  $u(x, s, t)$  e  $v(x, s, t)$  e parcelas de flexão  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$  e  $\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)$  (Fig. 2.3).

Reescrevendo o vetor de deslocamentos (expressão 2.1), tem-se:

$$U = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v - z \frac{\partial w}{\partial s} \\ w \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

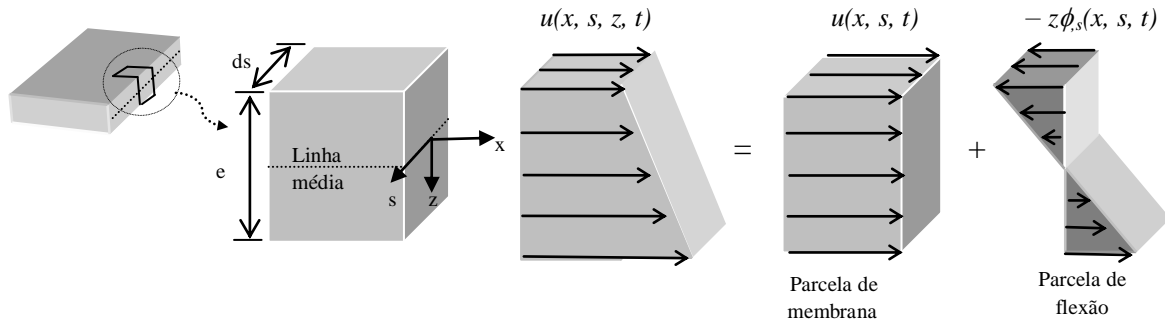


Fig. 2.3 – Decomposição do deslocamento axial de um elemento infinitesimal de placa em parcelas de membrana e de flexão (Silvestre e Camotim, 2010)

Portanto:

- (i) o campo de deslocamentos ( $u^P$ ,  $v^P$ ,  $w^P$ ) de um ponto  $P$  na placa genérica é representado por:

$$\begin{aligned}
 u^P(x, s, z, t) &= u(x, s, t) - z\phi_{,x}(x, s, t) = u(x, s, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 v^P(x, s, z, t) &= v(x, s, t) - z\phi_{,s}(x, s, t) = v(x, s, t) - z \frac{\partial w}{\partial s} \\
 w^P(x, s, z, t) &= w(x, s, t)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

em que  $(\cdot)_{,x} \equiv \partial(\cdot)/\partial x$  e  $(\cdot)_{,s} \equiv \partial(\cdot)/\partial s$ .

- (ii) as relações deformações-deslocamentos lineares associadas ao campo de deslocamentos ( $u^P$ ,  $v^P$ ,  $w^P$ ) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= u_{,x}^P \\
 \varepsilon_{ss} &= v_{,s}^P \\
 \gamma_{xs} &= u_{,s}^P + v_{,x}^P
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Introduzindo as expressões (2.3) e (2.5) em (2.8), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^M + \varepsilon_{xx}^F \\
 \varepsilon_{ss} &= \varepsilon_{ss}^M + \varepsilon_{ss}^F \\
 \gamma_{xs} &= \gamma_{xs}^M + \gamma_{xs}^F
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

em que  $(.)^F$  e  $(.)^M$  indicam respectivamente os termos de flexão e de membrana. Dessa forma, as relações cinemáticas relevantes estabelecidas entre as deformações e os deslocamentos lineares são expressas por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^F &= -ZW_{,xx} & \varepsilon_{xx}^M &= -u_{,x} \\
 \varepsilon_{ss}^F &= -ZW_{,ss} & \varepsilon_{xx}^M &= -v_{,s} \\
 \gamma_{xs}^F &= -2ZW_{,xs} & \gamma_{xs}^M &= u_{,s} + v_{,x}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Em decorrência da adoção da hipótese de Navier ( $\gamma_{xs}^M = 0$ ) e pelo fato de a deformação de membrana ao longo da linha média da seção ser nula ( $\varepsilon_{ss}^M = 0$ ), a expressão (2.10) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^F &= -ZW_{,xx} & \varepsilon_{xx}^M &= -u_{,x} \\
 \varepsilon_{ss}^F &= -ZW_{,ss} & \varepsilon_{xx}^M &= 0 \\
 \gamma_{xs}^F &= -2ZW_{,xs} & \gamma_{xs}^M &= 0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

A componente não linear de deformação de membrana num ponto  $P$  genérico é dada por:

$$2\varepsilon_{xx}^{NL} = (u_{,x}^P)^2 + (v_{,x}^P)^2 + (w_{,x}^P)^2 \tag{2.12}$$

Considerando que, para pequenas deformações e rotações moderadas  $(u_{,x}^P)^2 = 0$ , e introduzindo a parcela de membrana da expressão (2.5) em (2.12), obtém-se:

$$\varepsilon_{xx}^{NL} = \frac{1}{2}(v_{,x})^2 + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \tag{2.13}$$

A componente não linear associada a distorções de membrana é dada por:

$$\gamma_{xx}^{NL} = w_{,s}w_{,x} + v_{,s}v_{,x} \quad (2.14)$$

- (iii) as relações constitutivas para materiais isotrópicos em cada placa submetida a um estado plano de tensão e deformação são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

nas quais as constantes elásticas do material são representadas por  $E$  (módulo de elasticidade);  $G$  (módulo de distorção);  $\nu$  (coeficiente de Poisson).

- (iv) as expressões para as componentes de tensão-deslocamentos são indicadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^F &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w_k \phi_{k,xx} + \nu w_{k,ss} \phi_k) \\ \sigma_{ss}^F &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w_{k,ss} \phi_k + \nu w_k \phi_{k,xx}) \\ \sigma_{xs}^F &= -\frac{Ez}{1+\nu} w_{k,s} \phi_{,x} \\ \sigma_{xx}^M &= \frac{E}{1-\nu^2} u_k \phi_{k,xx} \\ \sigma_{ss}^M &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} u_k \phi_{k,xx} \\ \sigma_{xs}^M &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para obter uma representação do campo de deslocamentos consistente com o Método das Coordenadas Generalizadas, Schardt (1966) expressou cada componente de deslocamento  $u(x, s, t)$ ,  $v(x, s, t)$  e  $w(x, s, t)$  como uma combinação linear de dois tipos de funções:

$$u(x, s, t) = \sum u_k(s, t) \cdot \phi_{k,x}(x, t) \quad (2.17)$$

$$v(x, s, t) = \sum v_k(s, t) \cdot \phi_k(x, t) \quad (2.18)$$

$$w(x, s, t) = \sum w_k(s, t) \cdot \phi_k(x, t) \quad (2.19)$$

em que se aplica a convenção de soma ao índice  $k$ . As funções de deslocamentos axiais  $u_k(s, t)$ , transversais de membrana  $v_k(s, t)$  e de flexão  $w_k(s, t)$  representam os perfis de deslocamentos ao longo da linha média da seção<sup>3</sup>. As funções  $\phi_k(x, t)$ , incógnitas do problema, descrevem a evolução das amplitudes modais ao longo do comprimento da barra ( $0 \leq x \leq L$ ) num dado instante de tempo ( $t$ ).

Procedendo à separação de variáveis,

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}(s, t)\phi(x, t) \quad (2.20)$$

obtem-se:

- (i) a matriz  $\bar{\mathbf{U}}$  que reúne as componentes de cada um dos modos de deformação:

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(s, t) \\ \mathbf{v}^T(s, t) \\ \mathbf{w}^T(s, t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

- (ii) o vetor  $\phi(x, t)$  que agrupa as funções de amplitude:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1(x, t) \\ \vdots \\ \phi_n(x, t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

---

<sup>3</sup> Na expressão (2.17), a presença de  $\phi_{k,x}(x, t)$  deve-se à adoção da hipótese de distorções de membrana nulas em cada parede da seção ( $\gamma_{xs}^M = u_{,s} + v_{,x} = 0$ ) e objetiva preservar a coerência entre a GBT e a teoria clássica de vigas. Em razão disso, as equações diferenciais de equilíbrio exibem nas duas teorias ordens de diferenciação distintas: extensão axial (1ª ordem), flexão e/ou torção (4ª ordem). Em relação à coordenada longitudinal (axial)  $x$ , os deslocamentos axiais são de ordem superior à dos restantes deslocamentos ( $u_{,s} = -v_{,x}$ ).

As equações de equilíbrio podem ser obtidas a partir do emprego do Princípio de Hamilton, que estipula que a variação da energia cinética ( $\delta T$ ) e da energia potencial ( $\delta V$ ) de um sistema conservativo evoluem de uma configuração inicial para a final num intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$  de forma a tornar estacionário o valor do funcional:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta V) dt = 0 \quad (2.23)$$

Como a variação da energia potencial de um sistema conservativo é dada pela adição de parcelas em que  $U$  representa a energia de deformação e  $\Pi$  o potencial das forças externas:

$$\delta V = \delta U + \delta \Pi = 0 \quad (2.24)$$

pode-se reescrever a expressão (2.24) da seguinte forma:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U + \delta \Pi - \delta T) dt = 0 \quad (2.25)$$

Portanto:

- (i) a primeira variação da energia de deformação ( $\delta U$ ) pode ser obtida da soma de termos associados à rigidez linear e aos efeitos geometricamente não lineares resultantes das forças aplicadas equilibrados por uma distribuição de tensões normais ( $\sigma_{xx}^0$ ):

$$\delta U = \delta U^L + \delta U^{NL} \quad (2.26)$$

Os termos lineares são expressos por combinações de tensões e deformações (de flexão e membrana):

$$\begin{aligned} \delta U^L &= \int_L \int_b \int_e (\sigma_{xx}^F \delta \varepsilon_{xx}^F + \sigma_{ss}^F \delta \varepsilon_{ss}^F + \sigma_{xs}^F \delta \gamma_{xs}^F + \sigma_{xx}^M \delta \varepsilon_{xx}^M) dz ds dx = \\ &= \delta U_{xx}^F + \delta U_{ss}^F + \delta U_{xs}^F + \delta U_{xx}^M \end{aligned} \quad (2.27)$$



em que  $L$  indica o comprimento da barra;  $b$  refere-se à soma das larguras  $b_i$  das  $n$  placas que formam a seção;  $e$  representa a espessura de cada placa;  $\delta U_{xx}^F$  corresponde à energia associada ao trabalho realizado pelas tensões  $\sigma_{xx}^F$  quando ocorrem as deformações  $\delta \varepsilon_{xx}^F$ .

O produto entre as respectivas componentes de tensão e deformação são indicados por  $\delta U_{ss}^F$ ,  $\delta U_{xs}^F$  e  $\delta U_{xx}^M$ .

Os trabalhos virtuais efetuados pelas tensões normais de flexão longitudinal ( $\delta U_{xx}^F$ ), tensões normais de flexão transversal ( $\delta U_{ss}^F$ ), tensões tangenciais de torção ( $\delta U_{xs}^F$ ) e tensões normais de membrana longitudinais ( $\delta U_{xx}^M$ ) exprimem-se, nessa ordem, por:

$$\begin{aligned} \delta U_{xx}^F = \int_L (C_{ik}^2 \phi_{k,xxxx} + D_{ik}^2 \phi_{k,xx}) \delta \phi_i dx + (C_{ik}^2 \phi_{k,xx} + \\ + D_{ik}^2 \phi_k) \delta \phi_{i,x} \Big|_0^L - (C_{ik}^2 \phi_{k,xxx} + D_{ik}^2 \phi_{k,x}) \delta \phi_i \Big|_0^L \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\delta U_{ss}^F = \int_L (B_{ik} \phi_k + D_{ki}^2 \phi_{k,xx}) \delta \phi_i dx \quad (2.29)$$

$$\delta U_{xs}^F = - \int_L D_{ik}^1 \phi_{k,xx} \delta \phi_i dx + D_{ik}^1 \phi_{k,x} \delta \phi_i \Big|_0^L \quad (2.30)$$

$$\delta U_{xx}^M = \int_L (C_{ik}^1 \phi_{k,xxxx} + (C_{ik}^1 \phi_{k,xx} \delta \phi_{i,x} - C_{ik}^1 \phi_{k,xxx}) \delta \phi_i \Big|_0^L \quad (2.31)$$

em que os tensores  $C_{ik}^2$ ,  $D_{ik}^2$ ,  $D_{ki}^2$ ,  $B_{ik}$  e  $D_{ik}^1$  resultam da integração das componentes de deslocamento  $w_k$  e suas derivadas e  $C_{ik}^1$ , da integração das componentes de deslocamento  $u_k$ :

$$C_{ik}^2 = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \int_s e^3 w_i w_k ds \quad (2.32)$$

$$D_{ik}^2 = \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} \int_s e^3 w_i w_{k,ss} ds \quad (2.33)$$

$$D_{ki}^2 = \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} \int_S e^3 w_k w_{i,ss} ds \quad (2.34)$$

$$B_{ik} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \int_S e^3 w_{i,ss} w_{k,ss} ds \quad (2.35)$$

$$D_{ik}^1 = \frac{G}{3} \int_S e^3 w_{i,s} w_{k,s} ds \quad (2.36)$$

$$C_{ik}^1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_S e u_i u_k ds \quad (2.37)$$

A expressão final da primeira variação da energia de deformação relativa aos termos lineares ( $\delta U^L$ ) é dada por:

$$\begin{aligned} \delta U^L = \delta U_{xx}^F + \delta U_{ss}^F + \delta U_{xs}^F + \delta U_{xx}^M = \int_L (C_{ik} \phi_{k,xxxx} - \\ -D_{ik} \phi_{k,xx} + B_{ik} \phi_k) \delta \phi_i dx + W_i^\tau \delta \phi_i \Big|_0^L + W_i^\sigma \delta \phi_{i,x} \Big|_0^L \end{aligned} \quad (2.38)$$

em que os tensores  $C_{ik}$  e  $D_{ik}$  são definidos, respectivamente, por:

$$C_{ik} = C_{ik}^1 + C_{ik}^2 \quad (2.39)$$

$$D_{ik} = D_{ik}^1 - (D_{ik}^2 + D_{ki}^2) \quad (2.40)$$

sendo os esforços generalizados resultantes das tensões normais ( $W_i^\sigma$ ) e tangenciais ( $W_i^\tau$ ) expressos por:

$$W_i^\sigma = C_{ik} \phi_{k,xx} + D_{ik}^2 \phi_k \quad (2.41)$$

$$W_i^\tau = -W_{i,x}^\sigma + D_{ik}^1 \phi_{k,x} \quad (2.42)$$

- (ii) a primeira variação da energia de deformação associada aos termos não lineares ( $\delta U^{NL}$ ) é expressa por:

$$\begin{aligned}\delta U^{NL} &= \int_L \int_b \int_e (\sigma_{xx}^0 \delta \varepsilon_{xx}^{NL} + \tau_{xs}^F \gamma_{xs}^{NL}) dz ds dx = \\ &= \delta U_{\sigma}^{NL} + \delta U_{\tau}^{NL}\end{aligned}\quad (2.43)$$

em que  $\delta U_{\sigma}^{NL}$  refere-se às tensões longitudinais uniformes e  $\delta U_{\tau}^{NL}$  às tensões de cisalhamento.  $\sigma_{xx}^0$  representa a distribuição de tensões normais.

Relativamente a análises de estabilidade, tem-se:

$$\begin{aligned}\delta U^{NL} &= \int_L \int_b \int_e (\sigma_{xx}^0 \delta \varepsilon_{xx}^{NL}) dz ds dx = \\ &= - \int_L \left[ X_{jik} (\phi_{j,xx}^0 \phi_{k,x})_{,x} \right] dx \delta \phi_i + \left[ X_{jik} \phi_{j,xx}^0 \phi_{k,x} \delta \phi_i \right]_0^L\end{aligned}\quad (2.44)$$

em que  $\phi_{j,xx}^0$  representa a função de amplitude devido às tensões aplicadas e o tensor  $X_{jik}$  é dado por:

$$X_{jik} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \int_s e u_j (v_i v_k + w_i w_k) ds \quad (2.45)$$

- (iii) a primeira variação da energia cinética ( $\delta T$ ) do movimento no ponto genérico  $P (u^P, v^P, w^P)$  é dada por:

$$\begin{aligned}\delta T &= \int_L \int_b \int_e (\rho u_{,t}^P \delta u_{,t}^P + \rho v_{,t}^P \delta v_{,t}^P + \rho w_{,t}^P \delta w_{,t}^P) dz ds dx \\ &= \delta T^T + \delta T^R\end{aligned}\quad (2.46)$$

em que  $\rho$  representa a densidade do material e  $(.)^T$  e  $(.)^R$  indicam, respectivamente, os termos de translação e rotação:

$$\delta T^T = \iint_{L \Gamma} (Q_{ik}^1 \phi_{k,xxxt} - R_{ik}^1 \phi_{k,tt}) dt dx \delta \phi_i - \quad (2.47)$$

$$- \int_L (Q_{ik}^1 \phi_{k,xxxt} - R_{ik}^1 \phi_{k,tt}) dx \delta \phi_i \Big|_0^\Gamma + (Q_{ik}^1 \phi_{k,xt}) \delta \phi_{i,t} \Big|_0^L$$

$$\delta T^R = \iint_{L \Gamma} (Q_{ik}^2 \phi_{k,xxxt} - R_{ik}^2 \phi_{k,tt}) dt dx \delta \phi_i - \quad (2.48)$$

$$- \int_L (Q_{ik}^2 \phi_{k,xxxt} - R_{ik}^2 \phi_{k,tt}) dx \delta \phi_i \Big|_0^\Gamma + (Q_{ik}^2 \phi_{k,xt}) \delta \phi_{i,t} \Big|_0^L$$

em que os tensores  $Q_{ik}^1$ ,  $R_{ik}^1$ ,  $Q_{ik}^2$  e  $R_{ik}^2$  são indicados, respectivamente, por:

$$Q_{ik}^1 = \rho \int_s e u_i u_k ds \quad (2.49)$$

$$R_{ik}^1 = \rho \int_s e (v_i v_k + w_i w_k) ds \quad (2.50)$$

$$Q_{ik}^2 = \frac{\rho}{12} \int_s e^3 w_i w_k ds \quad (2.51)$$

$$R_{ik}^2 = \frac{\rho}{12} \int_s e^3 w_{i,s} w_{k,s} ds \quad (2.52)$$

(iv) a expressão da primeira variação do potencial das forças externas ( $\delta \Pi$ ) é dada por:

$$\delta \Pi = \int_L \int_b (q_x \delta u + q_s \delta v + q_z \delta w) ds dx \quad (2.53)$$

em que  $q_x$ ,  $q_s$  e  $q_z$  representam as componentes da força genérica aplicada ao longo da linha média da seção na direção das componentes de deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  (Fig. 2.4).

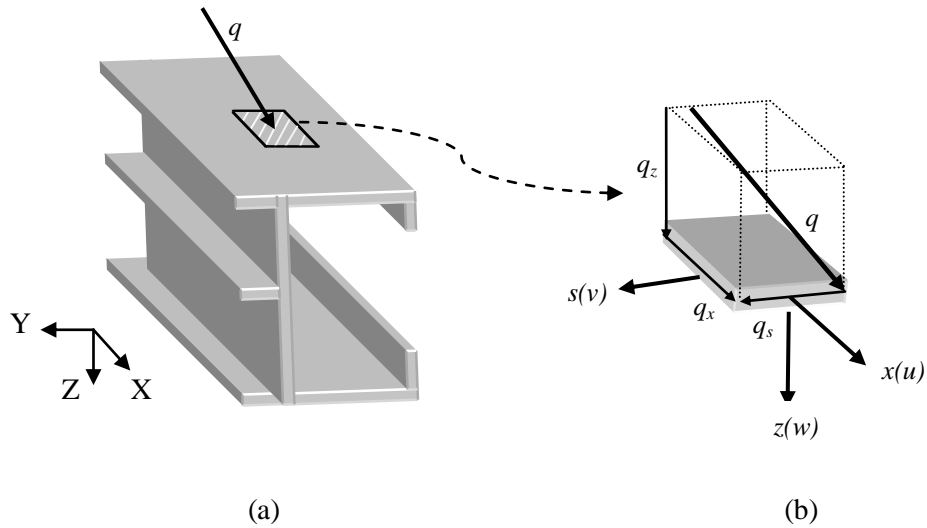


Fig. 2.4 – (a) Força externa aplicada à barra com seção transversal de parede fina aberta ramificada. (b) Decomposição das componentes de força  $q_x$ ,  $q_s$  e  $q_z$

Observando que a primeira variação da diferença entre a energia potencial ( $\delta U + \delta \Pi$ ) e a energia cinética ( $\delta T$ ) é nula no intervalo de tempo  $[0, T]$ , reagrupando os termos da energia de deformação ( $\delta U$ ), energia cinética ( $\delta T$ ) e potencial das forças externas ( $\delta \Pi$ ) e considerando arbitrárias as variações  $\delta \phi_i$ , obtém-se o sistema de equações diferenciais de equilíbrio da GBT:

$$C_{ik} \phi_{k,xxxx} - D_{ik} \phi_{k,xx} + B_{ik} \phi_k - q_i - X_{jik} (\phi_{j,xx}^0 \phi_{k,x})_{,x} - Q_{ik} \phi_{k,xx} + R_{ik} \phi_k = 0 \quad (2.54)$$

e as respectivas condições de contorno da barra:

$$\left[ W_i^T + \int_L (q_u u_i ds + X_{jik} \phi_{j,xx}^0 \phi_{k,x}) \right] \delta \phi_i \Big|_0^L = 0$$

$$W_i^\sigma \delta \phi_{i,x} \Big|_0^L = 0 \quad (2.55)$$

$$\int_L (Q_{ik} \phi_{k,xtt} - R_{ik} \phi_{k,t}) dx \delta \phi_i \Big|_0^L - (Q_{ik} \phi_{k,xt}) \delta \phi_{i,t} \Big|_0^L = 0$$

sendo  $i \geq 1$ ,  $1 \leq j \leq 4$  e  $k = 1, \dots, n + 1$ .

As resultantes das tensões normais ( $W_i^\sigma$ ) e tangenciais ( $W_i^\tau$ ) que atuam na seção transversal da barra são dadas por:

$$\begin{aligned} W_i^\sigma &= C_{ik} \phi_{k,xx} + D_{ik}^2 \phi_k \\ W_i^\tau &= -C_{ik} \phi_{k,xxx} + (D_{ik}^1 - D_{ik}^2) \phi_{k,x} \end{aligned} \quad (2.56)$$

As expressões finais dos tensores que figuram na equação fundamental da GBT, obtidos por integração ao longo da linha média da seção dos deslocamentos e de suas derivadas, são dadas por:

$$C_{ik} = C_{ik}^1 + C_{ik}^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_s e u_i u_k ds + \frac{E}{12(1-\nu^2)} \int_s e^3 w_i w_k ds \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} D_{ik} &= D_{ik}^1 - (D_{ik}^1 + D_{ki}^2) = \\ &= \frac{Ge^3}{3} \int_s w_{i,s} w_{k,s} ds - \frac{\nu E e^3}{12(1-\nu^2)} \int_s (w_i w_{k,ss} + w_k w_{i,ss}) ds \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$B_{ik} = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \int_s w_{i,ss} w_{k,ss} ds \quad (2.59)$$

$$q_i = \int_s (q_v v_i + q_w w_i - q_{u,x} u_i) ds \quad (2.60)$$

$$X_{jik} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_s e u_j (v_i v_k + w_i w_k) ds \quad (2.61)$$

$$Q_{ik} = Q_{ik}^1 + Q_{ik}^2 = \rho e \int_s u_i u_k ds + \int_s \frac{\rho e^3}{12} w_i w_k ds \quad (2.62)$$

$$R_{ik} = \rho e \int_s (v_i v_k + w_i w_k) ds + \int_s \frac{\rho e^3}{12} w_{i,s} w_{k,s} ds \quad (2.63)$$

Ressalta-se que, com o intuito de preservar a consistência entre a GBT e a teoria clássica de vigas, Schardt considerou a seguinte relação constitutiva simplificativa entre tensões normais e extensões longitudinais de membrana:

$$\sigma_{xx}^M = E \varepsilon_{xx}^M \quad (2.64)$$

o que implica desprezar o efeito de Poisson ao determinar qualquer deformação na barra provocada por tensões longitudinais de membrana. Em razão disso, os tensores  $C_{ik}$  e  $X_{jik}$  são reescritos como:

$$C_{ik} = E \int_s \left( e u_i u_k + \frac{1}{12} e^3 w_i w_k \right) ds \quad (2.65)$$

$$X_{jik} = E \int_s e u_j (v_i v_k + w_i w_k) ds \quad (2.66)$$

As funções de amplitudes  $\phi_k(x, t)$ , definidas ao longo do comprimento da barra ( $0 \leq x \leq L$ ) no intervalo de tempo ( $0 \leq t \leq \tau$ ), podem ser obtidas de forma exata ou aproximada, sendo expressas por:

$$\phi_k(x, t) = \phi_k(x) Y(t) \quad (2.67)$$

em que a função  $Y(t)$  depende da natureza da análise (estática ou dinâmica).

Para:

- (i) análise de estabilidade

$$Y(t) = 1 \quad (2.68)$$

- (ii) análise de vibração livre associada ao movimento harmônico

$$Y_{,tt} + \omega^2 Y = 0 \quad (2.69)$$

O sistema de equações de equilíbrio da GBT permite analisar o comportamento de estabilidade e de vibração em regime elástico de elementos estruturais com seção transversal de parede fina aberta ramificada.

Introduzindo as funções de amplitude  $\phi_k(x, t)$  (expressão 2.67) no sistema de equações de equilíbrio (expressão 2.54) e condições de contorno (expressão 2.55), tem-se para:

(i) análise de estabilidade

$$C_{ik}\phi_{k,xxxx} - D_{ik}\phi_{k,xx} + B_{ik}\phi_k - \lambda W_j^0 X_{jik}\phi_{k,xx} = 0 \quad (2.70)$$

$$(W_i^\tau - X_{jik}\lambda W_j^0\phi_{k,x})\delta\phi_i|_0^L = 0 \quad W_i^\sigma\delta\phi_{i,x}|_0^L = 0 \quad (2.71)$$

em que  $\lambda$  representa o parâmetro de carga aplicada.

Admitindo como válida a seguinte relação entre  $\phi_{k,xx}$  e a resultante das tensões normais de pré-encurvadura ( $W_j^0$ ):

$$W_j^0 = C_{jj}\phi_{k,xx} \quad (2.72)$$

$X_{jik}$  passa a ser definido por:

$$X_{jik} = \frac{E}{C_{jj}} \int_b eu_j(v_i v_k + w_i w_k) ds \quad (2.73)$$

(ii) análise de vibração

$$C_{ik}\phi_{k,xxxx} - D_{ik}\phi_{k,xx} + B_{ik}\phi_k - X_{pik}(W_p^0\phi_{k,x})_{,x} - \omega^2(R_{ik}\phi_k - Q_{ik}\phi_{k,xx}) = 0 \quad (2.74)$$

$$(W_i^\tau + X_{jik}\lambda W_j^0\phi_{k,x} - \omega^2 Q_{ik}\phi_{k,x})\delta\phi_i|_0^L = 0 \quad W_i^\sigma\delta\phi_{i,x}|_0^L = 0 \quad (2.75)$$

em que  $\omega$  representa o parâmetro de frequência de vibração da barra.

(iii) análise de vibração livre de barras, sem tensões normais ( $W_p^0 = 0$ )

$$C_{ik}\phi_{k,xxxx} - D_{ik}\phi_{k,xx} + B_{ik}\phi_k - \omega^2(R_{ik}\phi_k - Q_{ik}\phi_{k,xx}) = 0 \quad (2.76)$$

$$(W_i^\tau - \omega^2 Q_{ik}\phi_{k,x})\delta\phi_i|_0^L = 0 \quad W_i^\sigma\delta\phi_{i,x}|_0^L = 0 \quad (2.77)$$



Recorrendo unicamente a relações geométricas que permitem exprimir os deslocamentos transversais de membrana  $v_k(s)$  e de flexão  $w_k(s)$  e as forças generalizadas em função dos deslocamentos axiais  $u_k(s)$ , é possível:

- (i) realizar a representação modal do campo de deslocamentos que ocorrem na seção.
- (ii) definir e calcular as matrizes associadas, expressas pelos tensores que figuram nas expressões (2.57) a (2.63), os quais caracterizam o comportamento mecânico da seção (relações entre deformações e esforços generalizados).
- (iii) resolver o sistema de equilíbrio da GBT (expressão 2.54) e as condições de contorno (expressão 2.55), o que resulta num problema de autovalores (determinação dos parâmetros de carga ou das frequências naturais de vibração) e autovetores (determinação dos modos de instabilidade ou de vibração correspondentes) para o qual podem ser empregadas soluções analíticas, que fornecem soluções exatas para alguns casos mais simples, ou métodos aproximados.
- (iv) representar a deformação global da seção por meio de uma combinação linear dos modos de deformação cujos coeficientes são os graus de liberdade do problema e pelo respectivo fator de participação modal.

Esses processos englobam necessariamente duas etapas:

- (i) *análise da seção transversal aberta*, ramificada ou não, que consiste em realizar a discretização nodal da seção, obter as funções de deslocamentos, identificar os modos de deformação e determinar as propriedades mecânicas associadas a cada um deles, conforme apresentado no **Capítulo 3**.
- (ii) *análise da barra*, que compreende a definição das condições de contorno e do carregamento, comprimento, propriedades materiais do elemento estrutural e seleção modal para resolução do sistema de equações de equilíbrio que conduz à determinação dos comportamentos de estabilidade ou de vibração das barras (elementos estruturais) da seção como indicado no **Capítulo 4**.

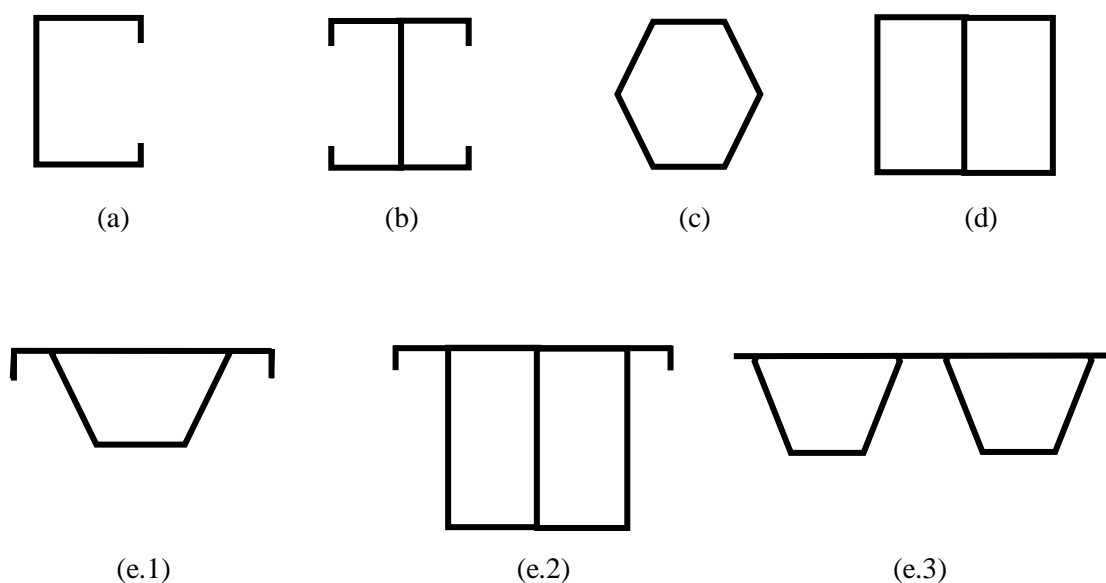


# CAPÍTULO 3 – ANÁLISE DA SEÇÃO

## 3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo explica como realizar a discretização nodal da seção transversal aberta sem ou com ramificações, apresentando detalhadamente os passos essenciais para obtenção das funções elementares de deslocamentos axiais, transversais de membrana e de flexão que definem a configuração deformada da seção e as operações matriciais requeridas para identificação das propriedades mecânicas e modos de deformação.

O nível de complexidade da análise da seção transversal depende unicamente da geometria da seção (se aberta ou fechada, com ou sem ramificações) (Fig. 3.1). É importante salientar que a determinação das funções de deslocamentos axiais  $u_k(s)$ , transversais de membrana  $v_k(s)$  e de flexão  $w_k(s)$  é exclusiva, dependendo de cada tipo de seção a ser analisada.



Apesar da multiplicidade de formas geométricas das seções transversais, a formulação apresentada é aplicável somente a seções transversais abertas (Fig. 3.1 – a) e abertas ramificadas (Fig. 3.1 – b). Por esse motivo, o enfoque deste capítulo centra-se unicamente nas seções com tais características, cuja formulação é explicitada por Dinis *et al.* (2006).

### 3.2 DISCRETIZAÇÃO NODAL

A discretização nodal consiste basicamente em identificar os *nós naturais* (localizados na interseção das placas) e de *extremidade* da seção e arbitrar uma quantidade razoável de *nós intermediários* (dispostos entre os nós naturais de cada placa ao longo de sua extensão).

Merecem atenção especial as seções transversais abertas ramificadas nas quais a existência de *nós de bifurcação* (que interceptam mais de duas placas) requer reclassificar os nós naturais ou de extremidade como *independentes* e *dependentes*, após a seleção prévia de um *circuito principal* e de demais circuitos, de forma a assegurar a compatibilidade entre os deslocamentos transversais de membrana nos nós de bifurcação de acordo com a hipótese de Vlasov (distorções de membrana nulas).

De forma geral, uma seção transversal de parede fina aberta ramificada pode ser vista como uma sequência de placas interconectadas, formada por um circuito principal (constituído pelo maior número possível de placas não ramificadas, excluindo as placas alinhadas que compartilham um mesmo nó de bifurcação) e por circuitos remanescentes (que agregam as placas ramificadas restantes que compõem a seção).

Após definir o circuito principal, para cada novo circuito, iniciando a partir de um nó de bifurcação pertencente ao circuito anterior de ordem  $n$ , acrescenta-se outro de ordem  $n + 1$ .

É possível selecionar, entre várias possibilidades, circuitos com combinações específicas mais convenientes do que outras. No circuito principal, todos os nós naturais são considerados independentes. No circuito secundário, o primeiro nó da placa ramificada, localizado imediatamente após o correspondente nó de bifurcação, é considerado nó dependente.

Na maioria dos casos, cada nó dependente liga-se sempre a um nó independente ou a dois outros nós independentes. Ratifica-se que o número de nós independentes e dependentes é sempre o mesmo para qualquer combinação apropriada de circuitos selecionados, sendo o número de nós dependentes dado por  $ND = NE - 2$ , em que  $NE$  representa o número de nós de extremidade da seção.

Para esclarecer o procedimento de discretização nodal, considera-se o perfil com seção transversal do tipo Y, composto por dez placas, cinco nós naturais e seis nós de extremidade (Fig. 3.2).

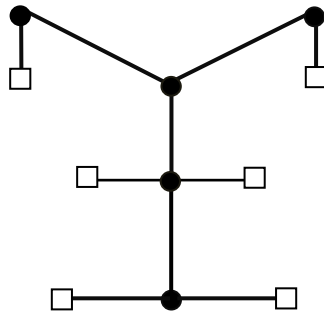


Fig. 3.2 – Seção transversal aberta ramificada: (a) Nós naturais (●). (b) Nós de extremidade (□)

Para escolha do circuito principal (em negrito) são indicadas duas possibilidades convenientes (Fig. 3.3 – a.1 e a.2). Um exemplo de escolha inapropriada recai na seleção de placas alinhadas (Fig. 3.3 – b).

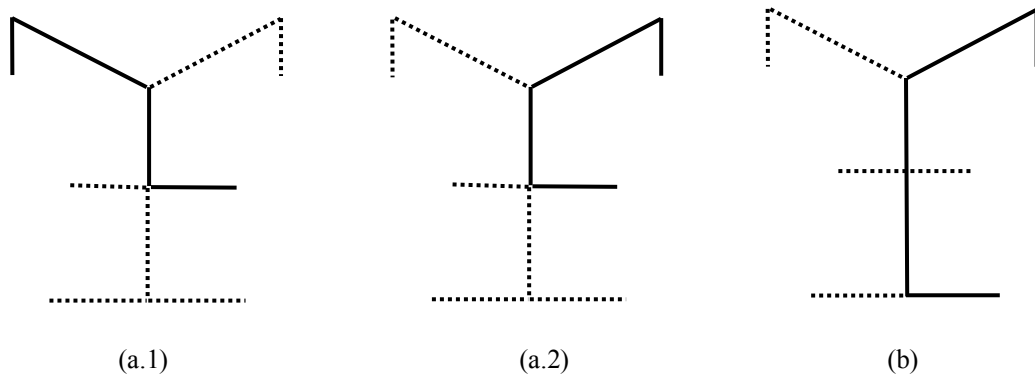


Fig. 3.3 – Escolha do circuito principal: (a) Conveniente. (b) Inapropriada

Após a seleção do circuito principal, definem-se os circuitos secundários (que reúnem o maior número possível de placas ramificadas imediatamente após os nós de bifurcação) e os circuitos de ordem superior (que se seguem logo após os circuitos secundários) (Fig. 3.4).

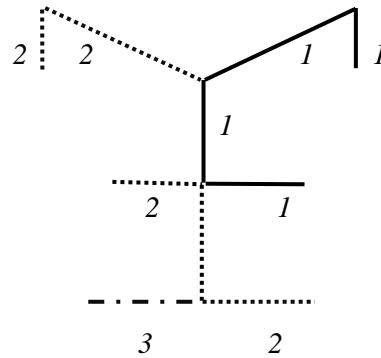


Fig. 3.4 – Seção transversal aberta ramificada: circuito principal (1), circuitos secundários (2) e circuito terciário (3)

Identificam-se a seguir os nós independentes e dependentes e arbitra-se a quantidade desejada de nós intermediários.

No circuito principal, todos os nós são independentes. Nos demais circuitos, o primeiro nó (natural ou de extremidade) imediatamente após o nó de bifurcação é dependente. Os nós (naturais ou de extremidade) que se seguem após os nós dependentes são sempre considerados independentes (Fig. 3.5).

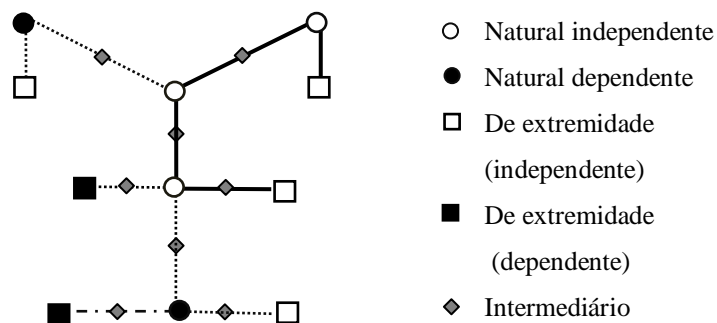


Fig. 3.5 – Seção transversal aberta ramificada: classificação dos nós

O próximo passo consiste em determinar as funções elementares de deslocamentos.

### 3.3 FUNÇÕES ELEMENTARES DE DESLOCAMENTOS

Considera-se a representação esquemática de uma seção transversal de parede fina aberta genérica (Fig. 3.6).

Do nó de bifurcação  $r$  emergem  $(k + 2)$  placas ( $W_{r-1}$ ,  $W_r$ ,  $W_{r1}$ , ...,  $W_{rd.k}$ ) de comprimento  $(b_{r-1}$ ,  $b_r$ ,  $b_{r1}$ , ...,  $b_{rd.k}$ ) ligadas aos dois nós independentes  $(r - 1$  e  $r + 1)$  e a  $k$  nós dependentes ( $r_{d.1}$  ...  $r_{d.k}$ , ...,  $d = 1$ ...  $k$ ).

As inclinações das placas com a direção horizontal são indicadas por  $\alpha_{r-1}$ ,  $\alpha_r$ ,  $\alpha_{rd.1}, \dots, \alpha_{rd.k}$ .

É conveniente adotar para a análise uma orientação consistente com o eixo  $s$ , ao longo da linha média, direcionado do nó de bifurcação para as outras extremidades das placas.

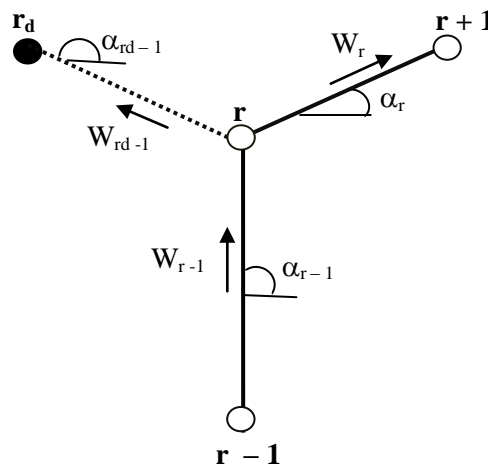


Fig. 3.6 – Representação esquemática de um nó de bifurcação de uma seção transversal aberta arbitrária (Dinis *et al.*, 2006)

A quantidade dos modos de deformação da seção a serem obtidos da análise associam-se ao número de funções elementares de deslocamentos axiais unitárias ( $u_k(s) = 1$ ) impostas nos nós independentes e de funções elementares de deslocamentos de flexão unitárias ( $w_k(s) = 1$ ) impostas nos nós intermediários e de

extremidade. Aos nós dependentes não se associa nenhum tipo de função elementar de deslocamento (Fig. 3.7).

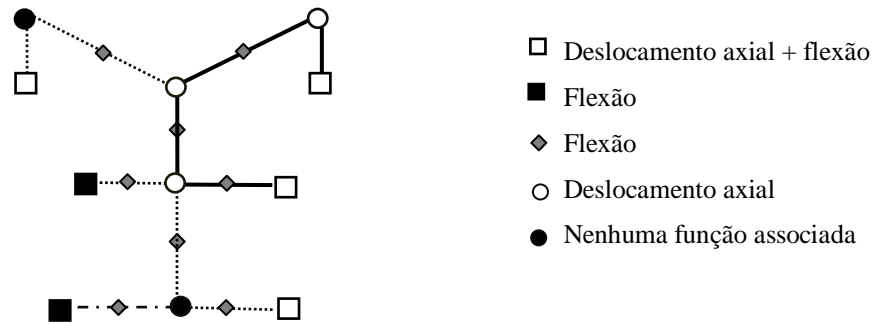


Fig. 3.7 – Discretização nodal e funções elementares de deslocamentos associadas

### 3.3.1 FUNÇÕES ELEMENTARES DE DESLOCAMENTOS AXIAIS $u_k(s)$

No circuito principal, para determinar as funções elementares de deslocamentos axiais no plano médio de cada uma das placas da seção, impõe-se de acordo com a definição dos circuitos sucessivamente em cada nó independente ( $r-1$ ,  $r$  e  $r+1$ ) um valor unitário de deslocamento axial ( $u_r(s_r) = 1$ ), admitindo variação linear nas placas adjacentes e valores nulos nos demais nós.

Nos demais circuitos, visando assegurar a compatibilidade dos deslocamentos transversais de membrana nos nós de bifurcação e satisfazer as hipóteses simplificativas de Vlasov adotadas na formulação da GBT, os deslocamentos axiais associados aos nós dependentes ( $r_d$ ) no plano médio de cada uma das placas da seção, em geral não nulos, são calculados a partir dos valores do:

- (i) deslocamento axial ( $u_r$ ) no nó independente adjacente à placa ramificada.
- (ii) deslocamento transversal de membrana para a placa ramificada ( $v_{rd,k}$ ).
- (iii) comprimento da placa ramificada ( $b_{rd,k}$ ).

sendo expressos por:

$$u_{rd,k} = u_r - v_{rd,k} \cdot b_{rd,k} \quad (3.1)$$

Admite-se variação linear das funções ao longo da linha média das placas.



Observando a expressão (3.1), conclui-se que somente após determinar os deslocamentos transversais de membrana para a placa ramificada ( $v_{rd,k}$ ) ficam completamente definidas as funções de deslocamentos axiais da seção (Fig. 3.8).

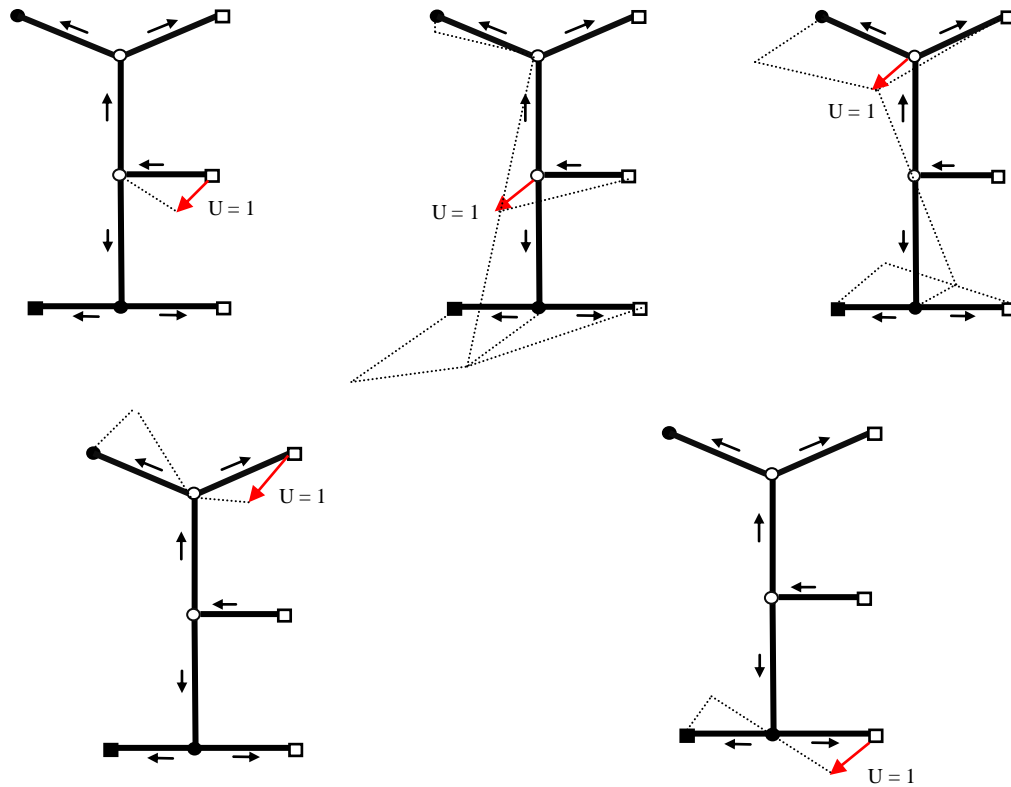


Fig. 3.8 – Representação esquemática da determinação das funções elementares de deslocamentos axiais a partir da imposição de um deslocamento axial unitário ( $U = 1$ ) em cada nó independente

### 3.3.2 FUNÇÕES ELEMENTARES DE DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS DE MEMBRANA $v_k(s)$

A imposição de deslocamentos axiais implica necessariamente considerar os deslocamentos transversais de membrana nas placas da seção. Para determiná-los, admite-se a hipótese de distorções de membrana nulas, o que implica a determinação da posição relativa das placas após a deformação (Silvestre, 2005).

No circuito principal, as funções de deslocamentos transversais de membrana  $v_r(s)$  em qualquer segmento transversal do plano médio das placas ( $s$ ) são expressas em termos de deslocamentos axiais e exibem valor constante e independente de  $s$ :

$$V_{r(s)} = - \frac{\Delta u_r}{b_r} \quad (3.2)$$

em que  $b_r$  representa o comprimento da placa e  $\Delta u_r$  a variação dos valores dos deslocamentos axiais.

Especificamente para as placas  $r-1$ ,  $r$  e  $r+1$ , os deslocamentos transversais de membrana valem:

$$\begin{aligned} V_{r-1} &= - \frac{u_r - u_{r-1}}{b_{r-1}} \\ V_r &= - \frac{u_{r+1} - u_r}{b_r} \\ V_{r+1} &= - \frac{u_{r+2} - u_{r+1}}{b_{r+1}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Considerando o deslocamento axial unitário imposto no nó  $r$  ( $u_r(s_r) = 1$ ), mantendo nulos os deslocamentos axiais nos nós adjacentes ( $u_{r-1} = 0$  e  $u_{r+1} = 0$ ), as expressões (3.2 e 3.3) simplificam-se para:

$$\begin{aligned} V_{r-1} &= - \frac{1}{b_{r-1}} \\ V_r &= \frac{1}{b_r} \\ V_{r+1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que os valores positivos indicam deslocamentos coincidentes com a orientação arbitrada que tem como referencial o sistema local de eixos.

A Fig. 3.9 esquematiza a determinação dos deslocamentos transversais de membrana que ocorrem no elemento infinitesimal de placa pertencente ao circuito principal.

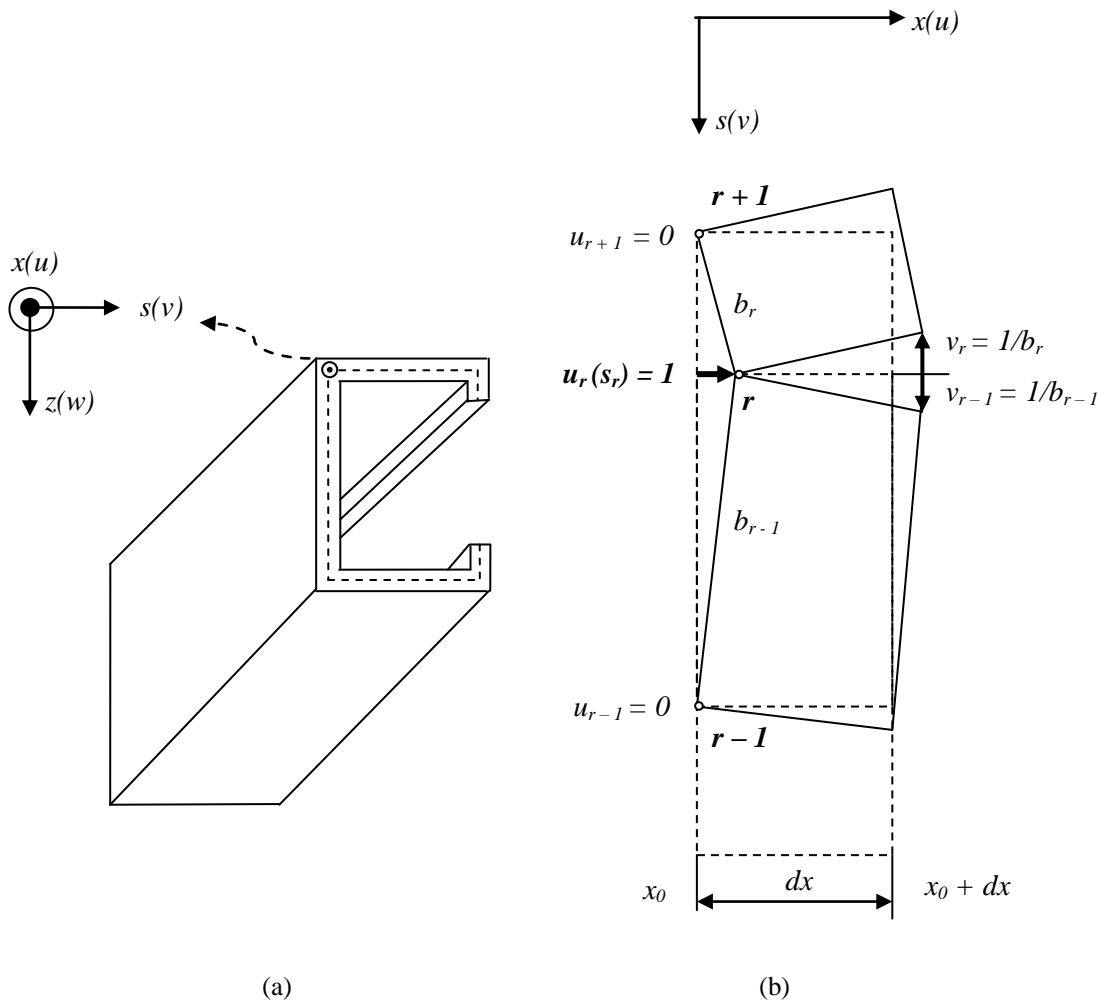


Fig. 3.9 – (a) Imposição de deslocamento axial unitário em um nó independente. (b) Deslocamentos transversais de membrana

Para as placas dos demais circuitos, o valor do deslocamento transversal de membrana ( $v_{rd,k}$ ) para a placa ramificada depende da posição final do nó de bifurcação  $r$  após a imposição do deslocamento axial unitário  $u_{s(s_r)} = 1$ , o que requer definir inicialmente os deslocamentos transversais de membrana ( $v_r$  e  $v_{r-1}$ ) no plano médio das placas do circuito principal ( $W_r$  e  $W_{r-1}$ ) e os ângulos relativos ( $\alpha = \alpha_{r-1} - \alpha_r$  e  $\beta = \alpha_{rd,k} - \alpha_r$ ) entre placas adjacentes ao nó de bifurcação  $r$ . A orientação arbitrada para o circuito principal segue o sentido horário (Fig. 3.10).

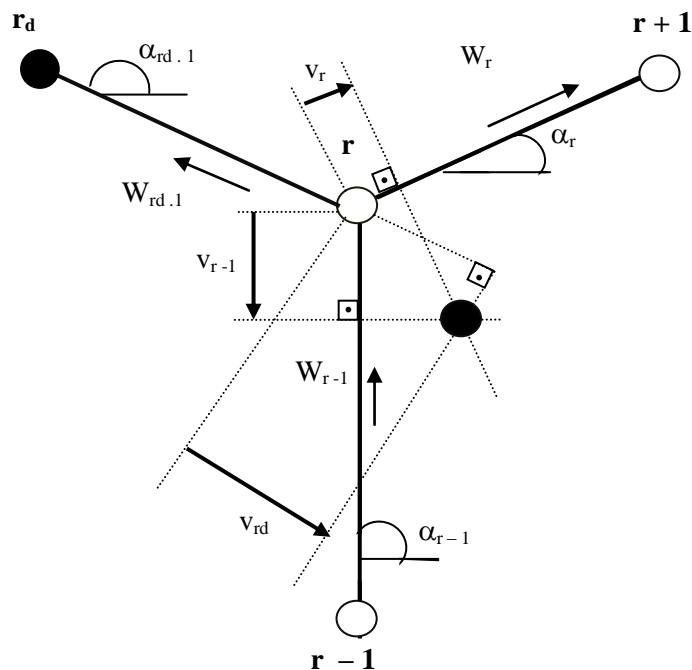


Fig. 3.10 – Representação esquemática da determinação de deslocamentos transversais de membrana ( $v_r$ ,  $v_{r-1}$  e  $v_{rd.1}$ ) a partir da imposição de deslocamento axial unitário no nó de bifurcação  $r$  ( $u_r(s_r) = 1$ ) (Dinis *et al.*, 2006)

A expressão do deslocamento transversal de membrana ( $v_{rd.1}$ ), medido perpendicularmente ao plano médio da placa ramificada, válida apenas para  $v_r \neq 0$ , é dada por:

$$v_{rd.1} = v_r \left[ \cos(\beta) - \text{sen}(\beta) \cdot \left( -\frac{v_{r-1}}{v_r \text{sen}(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\alpha)} \right) \right] \quad (3.5)$$

Se  $v_r = 0$ , recomenda-se alternar as placas ( $W_r$  e  $W_{r-1}$ ) adjacentes ao nó de bifurcação  $r$ . A expressão do deslocamento transversal de membrana ( $v_{rd.1}$ ) medido perpendicularmente ao plano médio ( $s$ ) da placa ramificada pode ser facilmente deduzida a partir das relações geométricas entre deslocamentos (Fig. 3.11), sendo dada por:

$$v_{rd.1} = -v_{r-1} \left[ \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \left( -\frac{v_r}{v_{r-1} \sin(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\alpha)} \right) \right] \quad (3.6)$$

$$v_{rd.1} = -v_{r-1} \left[ \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \left( \frac{1}{\tan(\alpha)} \right) \right]$$

Valores negativos indicam sentido contrário à orientação arbitrada para os circuitos.

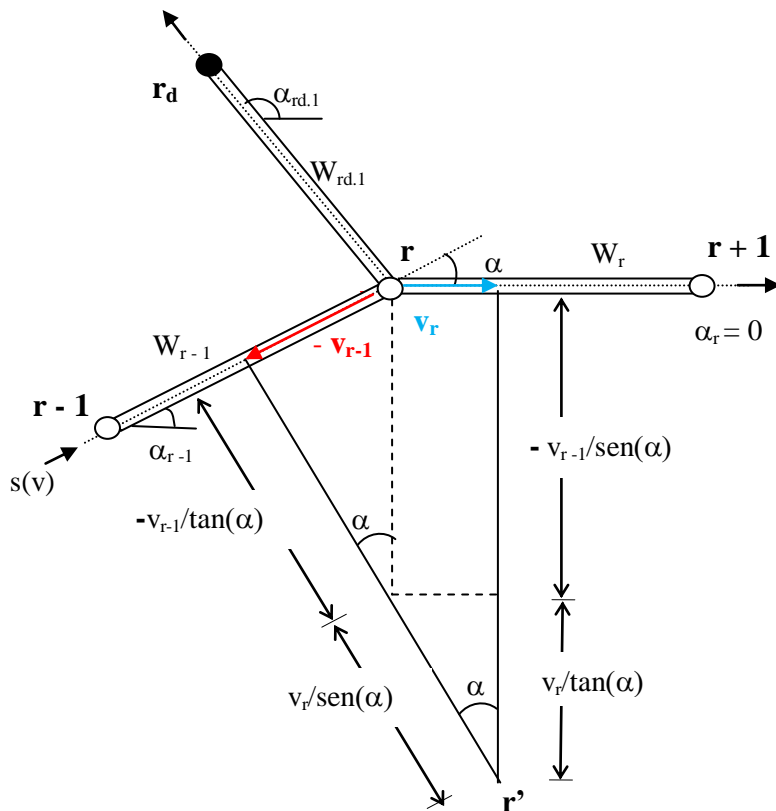


Fig. 3.11 – Relações geométricas entre deslocamentos

### 3.3.3 FUNÇÕES ELEMENTARES DE DESLOCAMENTOS DE FLEXÃO $w_k(s)$

As funções elementares de deslocamentos de flexão correlacionam-se aos:

- (i) deslocamentos de flexão de valor unitário  $w_k(s) = 1$ , impostos sucessivamente em cada um dos nós de extremidade e nos nós

intermediários, descritos por uma função cúbica no plano médio de cada segmento de placa, com valores nulos nos demais nós (Fig. 3.12).

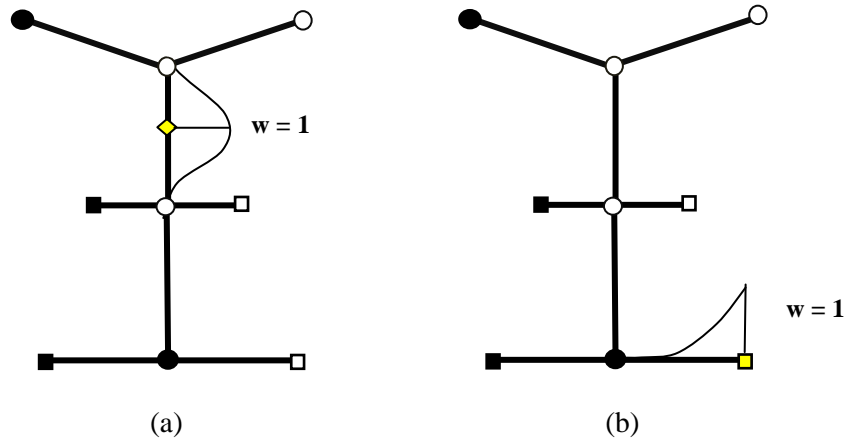


Fig. 3.12 – Imposição de deslocamento de flexão unitário ( $w = 1$ ): (a) Nó intermediário.  
(b) Nó de extremidade

- (ii) deslocamentos provocados pelos deslocamentos axiais, observando a hipótese adotada na formulação da GBT de que as placas que compõem a seção transversal de um perfil não sofrem qualquer extensão durante a deformação ( $\varepsilon_{SS}^M = 0$ ).

Para obter os valores dos deslocamentos de flexão nas extremidades inicial e final de cada placa em termos dos deslocamentos axiais impostos, consideram-se as relações estabelecidas a partir dos ângulos relativos ( $\alpha = \alpha_{r-1} - \alpha_r$  e  $\beta_{rd} = \alpha_{rd-1} - \alpha_r$ ) formados entre as placas adjacentes ao nó de bifurcação  $r$  e as decorrentes dos deslocamentos transversais das placas ( $v_{r-1}$ ,  $v_r$  e  $v_{rd.1}$ ) medidos perpendicularmente ao plano médio de cada uma das placas. A orientação arbitrada para o circuito principal segue o sentido horário (Fig. 3.13).

No circuito principal, os deslocamentos de flexão nas extremidades inicial e final de cada placa são dados por:

$$w_{r-1} = \frac{v_r}{\text{sen}(\alpha)} - \frac{v_{r-1}}{\text{tan}(\alpha)} \quad (r \leq n) \quad (3.7)$$

$$w_r = \frac{v_r}{\text{tan}(\alpha)} - \frac{v_{r-1}}{\text{sen}(\alpha)} \quad (r \geq 2) \quad (3.8)$$

Nas extremidades das placas do circuito secundário, os deslocamentos de flexão ( $w_{rd,i}$ ) (válidos para  $v_r \neq 0$ ) são expressos por:

$$w_{rd,1} = v_r \left[ \text{sen}(\beta) + \text{cos}(\beta) \cdot \left( -\frac{v_{r-1}}{v_r \text{sen}(\alpha)} + \frac{1}{\text{tan}(\alpha)} \right) \right] \quad (3.9)$$

Se  $v_r = 0$ , tem-se:

$$w_{rd,1} = -v_{r-1} \left[ \text{sen}(\beta) + \text{cos}(\beta) \left( \frac{1}{\text{tan}(\alpha)} \right) \right] \quad (3.10)$$

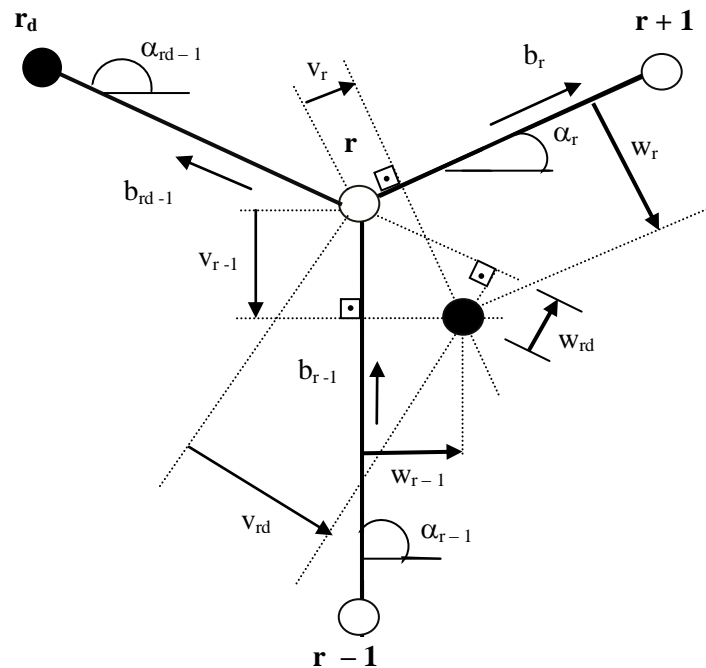


Fig. 3.13 – Representação esquemática da determinação de deslocamentos de flexão ( $w_r$ ,  $w_{r-1}$  e  $w_{rd}$ ) a partir da imposição de deslocamento axial unitário no nó de bifurcação  $r$  (Dinis *et al.*, 2006)

A imposição do conjunto de deslocamentos axiais e por conseguinte de deslocamentos transversais de membrana obriga a seção transversal a deformar-se. Por razões de equilíbrio e para assegurar a compatibilidade entre os deslocamentos, surgem momentos desequilibrados e rotações nas extremidades de cada uma das placas que a compõem.

A determinação das rotações ou dos deslocamentos recai na resolução de um problema estaticamente indeterminado, cuja solução exige o emprego de um dos métodos clássicos de análise de estruturas.

A aplicação do Método dos Deslocamentos para a resolução do problema constituído por um conjunto de placas estaticamente indeterminadas está indicada detalhadamente no Anexo 3.A.

### **3.4 MODOS DE DEFORMAÇÃO E PROPRIEDADES MODAIS**

Após conhecer as funções elementares de deslocamentos axiais  $u_k(s)$ , de deslocamentos transversais de membrana  $v_k(s)$  e de flexão  $w_k(s)$ , é possível calcular as componentes das matrizes que figuram no sistema de equações de equilíbrio da GBT (expressão 2.54).

Observa-se que as funções  $v_k(s)$  e  $w_k(s)$  não se associam ainda a grandezas com significado físico evidente e o sistema de equações diferenciais que corresponde à equação fundamental da GBT apresenta matrizes totalmente preenchidas, não diagonalizadas, o que o torna fortemente acoplado.

Por essa razão, Schardt (1966, 1989) propôs um procedimento algébrico, empregando um sistema de coordenadas alternativo para diagonalizar simultaneamente as matrizes e desacoplá-las ao máximo, o que significa tornar cada equação independente das restantes, relacionando-a a um único modo puro de deformação. As amplitudes desses diversos modos são os novos graus de liberdade cujos coeficientes caracterizam os modos de deformação da seção.

Para tal, é necessário realizar a resolução sequencial de três problemas de autovalores/autovetores que fornece o conjunto de funções ortogonais que representam os modos de:



(i) *Deformação local*

$$(\mathbf{B} - \lambda_k \mathbf{C}) d_k = 0 \quad (3.11)$$

As matrizes  $\mathbf{C}$  (expressão 2.57) e  $\mathbf{B}$  (expressão 2.59) exercem um papel primordial na caracterização da deformabilidade da seção relacionada respectivamente ao empenamento (deslocamento axial) e à deformação local (flexão transversal).

A diagonalização simultânea de  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}$  define os autovetores que correspondem aos deslocamentos que ocorrem no próprio plano da seção associados aos *modos distorcionais* ( $\lambda_k > 0$ ,  $k = 5 \dots n + 1$ ) e aos *modos locais de placa* ( $\lambda_k > 0$ ,  $k = n + 2 \dots n + m + 1$ ). Para  $\lambda_k = 0$ ,  $k = 1 \dots 4$ , os autovetores associados aos movimentos de corpo rígido da seção (*extensão axial, flexão em torno dos eixos de maior e menor inércia e torção*) permanecem ainda indeterminados, pois a submatriz formada pelas quatro primeiras linhas e colunas de  $\mathbf{C}$  ainda se encontra cheia. Ressalta-se que as quatro primeiras linhas e colunas de  $\mathbf{B}$ , relacionadas com a curvatura de flexão transversal das paredes da seção, são identicamente nulas, assim sua diagonalização está trivialmente assegurada. Tendo em vista uma nova diagonalização parcial da submatriz  $\mathbf{C}$  (4 x 4) para reduzir sua arbitrariedade, faz-se necessário resolver outro problema auxiliar de autovalores/autovetores, envolvendo as matrizes  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ .

(ii) *Torção*

$$(\mathbf{D} - \lambda_k \mathbf{C}) d_k = 0 \quad (3.12)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  (expressão 2.58) correlaciona-se com a rigidez da seção à rotação por torção. A diagonalização das matrizes  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  permite definir apenas o autovetor ( $\lambda_4 > 0$ ) associado à rotação de corpo rígido da seção no próprio plano (modo de torção).

Para  $\lambda_k = 0$ ,  $k = 1 \dots 3$ , os autovetores associados aos movimentos de corpo rígido da seção sem rotação (*extensão axial e flexão em torno dos eixos de maior e menor inércia*) permanecem indeterminados, o que significa que todas as componentes da submatriz que contém as três primeiras linhas e colunas de  $\mathbf{C}$  permanecem cheias. Na submatriz  $\mathbf{D}$ , as três primeiras linhas e colunas são identicamente nulas (diagonalização trivial). Desacoplar totalmente a matriz  $\mathbf{C}$  requer a resolução de um último problema de autovalores/autovetores, desta vez compreendendo as matrizes  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{X}$ .

(iii) *Extensão axial e flexão em torno dos eixos principais de inércia*

$$(\mathbf{X} - \lambda_k \mathbf{C}) d_k = 0 \quad (3.13)$$

A diagonalização das matrizes  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{X}^4$  completa o processo de diagonalização de  $\mathbf{C}$  e fornece para  $\lambda_I = 0$  o autovetor associado a deslocamentos nulos da seção transversal no seu próprio plano (modo de extensão axial).

Para  $\lambda_2 > \lambda_3 > 0$ , os autovetores correspondem aos modos de flexão em torno dos eixos de maior e menor inércia.

Determinados os autovetores, a matriz de transformação global  $\tilde{\mathbf{Y}}$  permite:

- (i) obter a representação do campo de deslocamentos dos modos de deformação ortogonais da seção, reunindo as submatrizes de transformação com seus respectivos autovetores relativas a cada uma das três etapas de diagonalização ( $\tilde{\mathbf{Y}}_{III}$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}_{II}$  e  $\tilde{\mathbf{Y}}_I$ ).

$$\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{\mathbf{Y}}_{III} \quad \tilde{\mathbf{Y}}_{II} \quad \tilde{\mathbf{Y}}_I] \quad (3.14)$$

- (ii) determinar todos os modos de deformação.

$$\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{U} \tilde{\mathbf{Y}} \quad \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{V} \tilde{\mathbf{Y}} \quad \tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Y}} \quad (3.15)$$

- (iii) calcular as novas componentes matriciais e vetoriais da GBT.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{Y}} & \tilde{\mathbf{B}} &= \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{Y}} & \tilde{\mathbf{D}} &= \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \tilde{\mathbf{X}} &= \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{Y}} & \tilde{\mathbf{R}} &= \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{Y}} & \tilde{\mathbf{Q}} &= \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.16)$$

---

<sup>4</sup> Na expressão (2.73):  $X_{jik} = \frac{E}{C_{jj}} \int_b e u_j (v_i v_k + w_i w_k) ds$ , em que  $j = 1 \dots 4$ , fazendo

$k = I$  e  $u_1(s) \equiv u_1 = 1$ , tem-se  $C_{11} = Ee \int_s 1 ds$ , que equivale à área da seção transversal.

Dessa forma, a matriz  $\mathbf{X}$  passa a definida por  $X_{jik} = \frac{e}{A} \int_s u_j (v_i v_k + w_i w_k) ds$ .

No novo referencial, o sistema de equações de equilíbrio da GBT e as condições de contorno passam a ser expressos por:

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{,xxxx} - \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{,xx} + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{X}}_k(\tilde{\mathbf{W}}_k^0\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{,x})_{,x} - \omega^2(\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{,xx}) = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

$$(\tilde{\mathbf{W}}^T + \tilde{\mathbf{W}}_k^0\tilde{\mathbf{X}}_k\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{,x} - \omega^2\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{,x} + \tilde{q}_u\tilde{\mathbf{U}}^T\mathbf{e}_0)^T\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}|_0^L = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

$$(\tilde{\mathbf{W}}_i^\sigma)^T\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{,x}|_0^L = \mathbf{0}$$

As matrizes<sup>5</sup>  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  agregam as propriedades geométricas relevantes associadas respectivamente ao trabalho realizado pelas resultantes das tensões normais ( $W_i^\sigma$ ) e tangenciais ( $W_i^T$ ) combinadas com as constantes elásticas do material ( $E$ ,  $G$  e  $\nu$ ).

Comparando as grandezas envolvidas na aplicação da GBT com a teoria de Vlasov, verifica-se que as quatro primeiras componentes da diagonal principal da matriz  $\mathbf{C}$  correlacionam-se aos modos globais de deformação (Fig. 3.14), representados por:

- (i) MODO 1:  $C_{11} = A$  (área da seção transversal)
- (ii) MODO 2:  $C_{22} = I_z$  (momento de inércia: flexão em torno do eixo de maior inércia)
- (iii) MODO 3:  $C_{33} = I_y$  (momento de inércia: flexão em torno do eixo de menor inércia)
- (iv) MODO 4:  $C_{44} = I_w$  (constante de empenamento)

---

<sup>5</sup> Para fins de simplificação, passa-se a indicar a partir de então ao longo do texto a notação das matrizes da GBT sem o uso do til (~), em negrito.

Dessa forma, a matriz  $C$  assume papel preponderante na caracterização da deformabilidade associada ao deslocamento axial das placas da seção.

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & I_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & I_y & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & & I_w & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & & & C_{55} & 0 & 0 & \dots \\ & \text{sim.} & & & & C_{66} & 0 & \dots \\ & & & & & & C_{77} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Os esforços generalizados associados às resultantes das tensões normais uniformes ao longo da barra ( $\sigma_{xx}$ ), relativos aos modos globais, correspondem a:

$$\sigma_{xx}(X, Y, Z) = -\frac{N(X)}{A} + \frac{M_Y(X)}{I_z} Z - \frac{M_Z(X)}{I_y} Y + \frac{M_\omega(X)}{I_\omega} \quad (3.21)$$

representados por:

- (i) MODO 1:  $W_1 = N$  (esforço normal)
- (ii) MODO 2:  $W_2 = M_z$  (flexão em torno de Z) (3.22)
- (iii) MODO 3:  $W_3 = M_y$  (flexão em torno de Y)
- (iv) MODO 4:  $W_4 = \Theta$  (torção em torno do centro de cisalhamento)

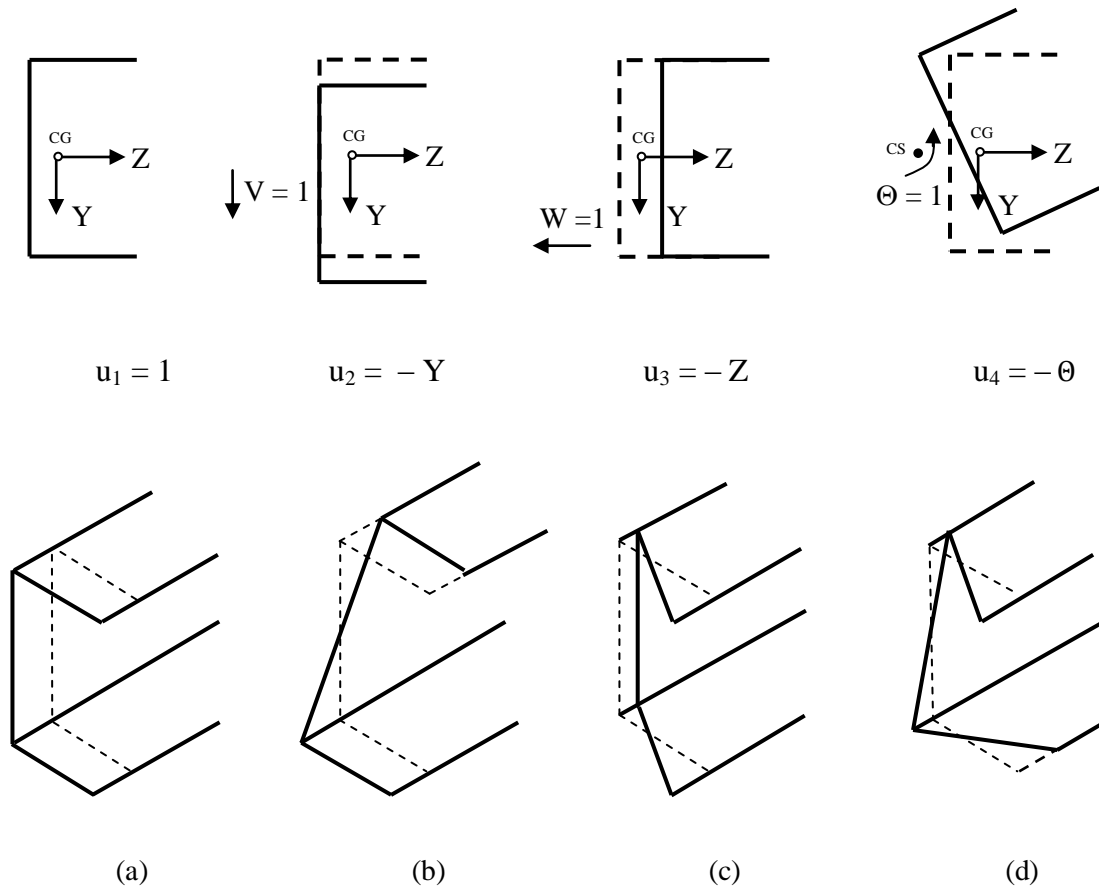


Fig. 3.14 – Configurações dos modos globais e perfis de deslocamentos axiais  $u_k(s)$   
(Basaglia *et al.*, 2008)

A matriz  $\mathbf{D}$  associa-se à rigidez à torção, expressa pela componente  $D_{44}$  que corresponde à constante de torção de Saint-Venant ( $J$ ).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & D_{25} & D_{26} & D_{27} & \dots \\
 & & 0 & 0 & D_{35} & D_{36} & D_{37} & \dots \\
 & & & J & D_{45} & D_{46} & D_{47} & \dots \\
 & & & & D_{55} & D_{56} & D_{57} & \dots \\
 & sim. & & & & D_{66} & D_{67} & \dots \\
 & & & & & & D_{77} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Com relação à forma,  $\mathbf{D}$  não se encontra completamente diagonalizada. No contexto de uma análise linear, é possível desprezar as componentes de  $\mathbf{D}$  com valores muito inferiores aos da diagonal principal, ignorando o acoplamento de primeira ordem segundo o critério proposto por Schardt (1989):

$$\frac{D_{ij}^2}{|D_{ij}D_{ij}|} \ll 1 \quad (3.24)$$

A matriz  $\mathbf{B}$  relaciona-se com a rigidez à deformação local (flexão transversal) das placas da seção, apresentando-se totalmente diagonalizada.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & & & B_{55} & 0 & 0 & \dots \\ & & \text{sim.} & & & B_{66} & 0 & \dots \\ & & & & & & B_{77} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

As matrizes  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{X}_3$  e  $\mathbf{X}_4$  representam propriedades geométricas não lineares da seção associadas a resultantes das tensões normais ( $W_i^\sigma$ ) e tangenciais ( $W_i^\tau$ ) que atuam na barra.

As componentes da matriz  $\mathbf{X}_1$  relacionam-se a um diagrama de tensões normais constantes, associadas ao modo 1 ( $u_1 \neq 0$  e  $w_1 = 0$ ), que representa o esforço normal (compressão):

- (i)  $X_{122} = 1$
  - (ii)  $X_{144} = r_s^2$  ( $r_s$  é o raio de giração polar da seção em relação ao CS)
  - (iii)  $X_{124} = -Z_s$  (coordenada do CS)
  - (iv)  $X_{134} = Y_s$  (coordenada do CS)
- (3.26)

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \mathbf{1} & 0 & -\mathbf{Z}_s & X_{125} & X_{126} & X_{127} & \dots \\ & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{Y}_s & X_{135} & X_{136} & X_{137} & \dots \\ & -\mathbf{Z}_s & \mathbf{Y}_s & r_s^2 & X_{145} & X_{146} & X_{147} & \dots \\ & & & & X_{155} & X_{156} & X_{125} & \dots \\ & \text{sim.} & & & & X_{166} & X_{167} & \dots \\ & & & & & & X_{177} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

As componentes da matriz  $\mathbf{X}_2$  traduzem as propriedades associadas a um diagrama de tensões com variação linear em  $Y$ , correspondente ao modo 2 ( $u_2 \neq 0$  e  $w_2 \neq 0$ ):

- (i)  $X_{244} = -\beta_Z$  (parâmetro que traduz a assimetria dos campos de deslocamentos  $u_k(s)$  associado ao modo 2) (3.28)
- (ii)  $X_{234} = -1$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & X_{225} & X_{226} & X_{227} & \dots \\ & & 0 & -\mathbf{1} & X_{235} & X_{236} & X_{237} & \dots \\ & & -\mathbf{1} & -\beta_Z & X_{245} & X_{246} & X_{247} & \dots \\ & & & & X_{255} & X_{256} & X_{257} & \dots \\ & \text{sim.} & & & & X_{266} & X_{267} & \dots \\ & & & & & & X_{277} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$\mathbf{X}_3$  representa a matriz geométrica cujas componentes correspondem a um diagrama de tensões com variação linear em  $Z$ , devido ao modo 3 ( $u_3 \neq 0$  e  $w_3 \neq 0$ ):

- (i)  $X_{244} = -\beta_Y$  (parâmetro que traduz a assimetria dos campos de deslocamentos  $u_k(s)$  associado ao modo 3) (3.30)
- (ii)  $X_{234} = -1$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & -1 & X_{225} & X_{226} & X_{227} & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & X_{235} & X_{236} & X_{237} & \dots \\ & -1 & 0 & -\boldsymbol{\beta}_Y & X_{245} & X_{246} & X_{247} & \dots \\ & & & & X_{255} & X_{256} & X_{257} & \dots \\ & & sim. & & & X_{266} & X_{267} & \dots \\ & & & & & & X_{277} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

As componentes de  $\mathbf{X}_4$  representam a matriz geométrica que corresponde a um diagrama de tensões com variação linear em  $\omega$ , devido ao modo 4 ( $u_4 \neq 0$  e  $w_4 \neq 0$ ):

(i)  $X_{444} = -\beta_\omega$  (parâmetro que traduz a assimetria dos campos de deslocamentos  $u_k(s)$  associado ao modo 4) (3.32)

$$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & X_{225} & X_{226} & X_{227} & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & X_{235} & X_{236} & X_{237} & \dots \\ & 0 & 0 & -\boldsymbol{\beta}_\omega & X_{245} & X_{246} & X_{247} & \dots \\ & & & & X_{255} & X_{256} & X_{257} & \dots \\ & & sim. & & & X_{266} & X_{267} & \dots \\ & & & & & & X_{277} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

A matriz  $\mathbf{Q}$  é diagonal e suas componentes permitem contabilizar a influência das forças de inércia de rotação e translação. Representam as propriedades de massa associadas a acelerações na direção perpendicular ao plano da seção:

(i)  $Q_{11} = \rho A$   
(ii)  $Q_{22} = \rho I_z$  (3.34)  
(iii)  $Q_{33} = \rho I_y$   
(iv)  $Q_{44} = \rho I_w$



Comparando as componentes da matriz  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{Q}$ , obtém-se a relação:

$$\mathbf{Q} = \frac{E}{\rho A} \mathbf{C} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \rho I_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & \rho I_y & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & & \rho I_w & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & & & Q_{55} & 0 & 0 & \dots \\ & sim. & & & & Q_{66} & 0 & \dots \\ & & & & & & Q_{77} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A matriz  $\mathbf{R}$  é simétrica, mas não diagonal. Suas componentes exprimem as propriedades de massa associadas a acelerações no plano da seção:

- (i)  $R_{22} = \rho A$
- (ii)  $R_{33} = \rho A$
- (iii)  $R_{44} = \rho A r_s^2$
- (iv)  $R_{24} = \rho A Z_s$
- (v)  $R_{34} = -\rho A Y_s$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_{15} & R_{16} & R_{17} & \dots \\ & \rho A & 0 & \rho A Z_s & R_{25} & R_{26} & R_{27} & \dots \\ & & \rho A & -\rho A Y_s & R_{35} & R_{36} & R_{37} & \dots \\ & & & \rho A r_s^2 & R_{45} & R_{46} & R_{47} & \dots \\ & sim. & & & R_{55} & R_{56} & R_{57} & \dots \\ & & & & & R_{66} & R_{67} & \dots \\ & & & & & & R_{77} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

As componentes do carregamento externo aplicado ao longo da linha média segundo os eixos locais são representadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_x &= [q_{x1} \quad q_{x2} \quad q_{x3} \dots]^T \\ \mathbf{q}_{s,z} &= [0 \quad q_{s2} \quad q_{s3} \dots]^T \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para  $k \geq 5$ , a formulação da GBT permite incorporar à análise os modos distorcionais e locais de placa. Essa singularidade confere competitividade à GBT ao concorrer com outros métodos de análise estrutural e não encontra equivalência na teoria de Vlasov, evidentemente limitada aos quatro modos globais (de corpo rígido).

### 3.5 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

#### 3.5.1 SEÇÃO E

Com o objetivo de exemplificar a análise de uma seção transversal aberta ramificada constituída por materiais elásticos isotrópicos, considera-se um perfil formado a frio composto pela seção transversal em  $E$  (Fig. 3.15) que utiliza aço estrutural com as seguintes propriedades:  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  e  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ .

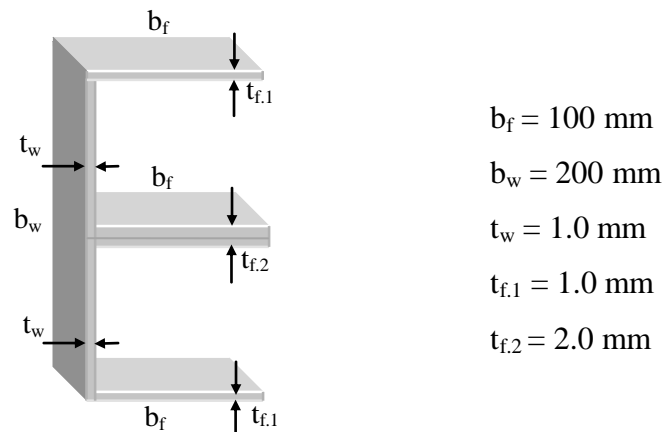


Fig. 3.15 – Seção E: dimensões e espessuras das placas

Os circuitos e os sentidos definidos para a análise são mostrados na Fig. 3.16.

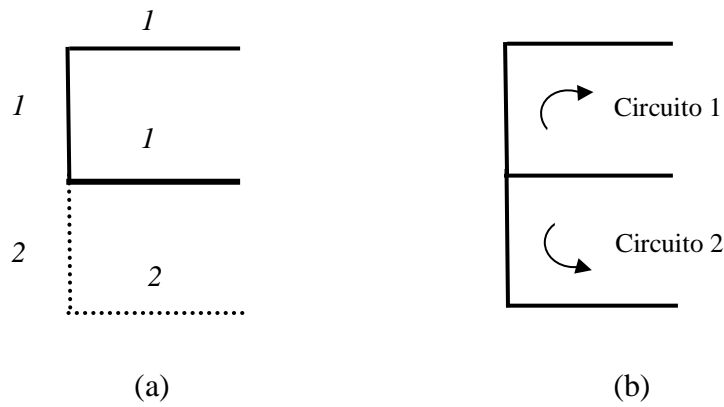


Fig. 3.16 – Circuitos: (a) principal (1) e secundário (2). (b) Orientação

Na discretização da seção, além de dois nós independentes, um dependente e três nós de extremidade (independentes), arbitra-se mais um nó intermediário em cada placa (Fig. 3.17). Em decorrência da classificação dos nós, as funções de deslocamentos axiais totalizam cinco e as funções de flexão, oito.

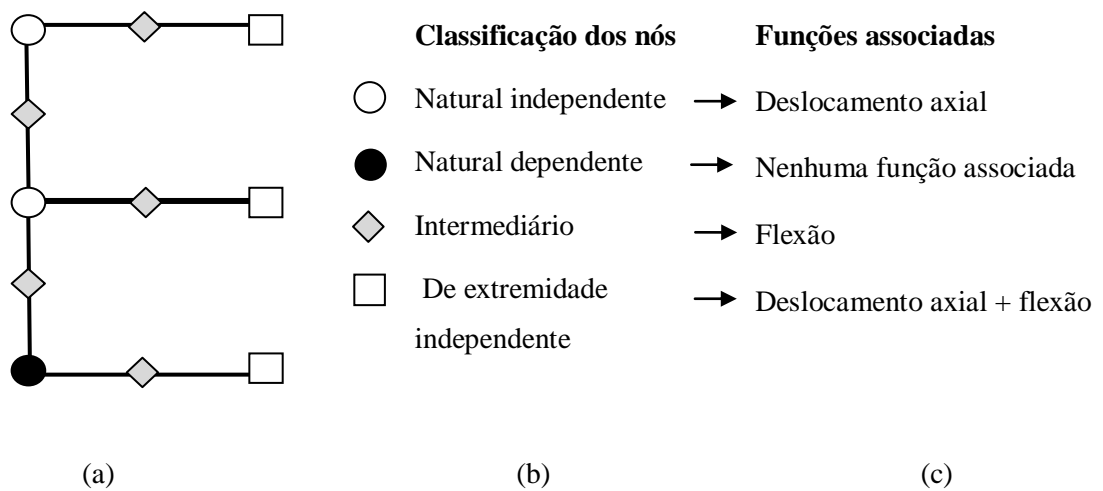


Fig. 3.17 – (a) Discretização nodal. (b) Classificação dos nós. (c) Funções de deslocamentos associadas

A Fig. 3.18 mostra a identificação das placas e a numeração das funções que segue a orientação arbitrada para os circuitos.

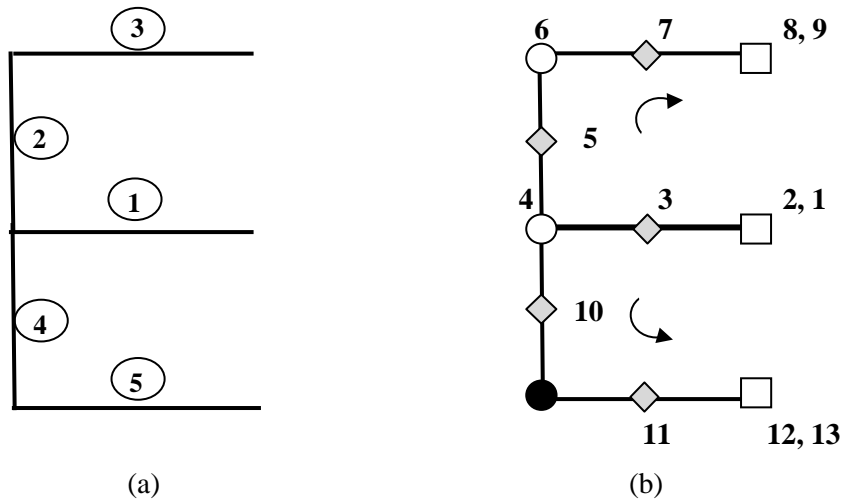


Fig. 3.18 – (a) Identificação das placas. (b) Numeração dos nós

A representação das funções elementares de deslocamentos axiais unitárias impostas em cada nó independente é apresentada na Fig. 3.19. Admite-se variação linear ao longo do plano médio das placas que compõem a seção.

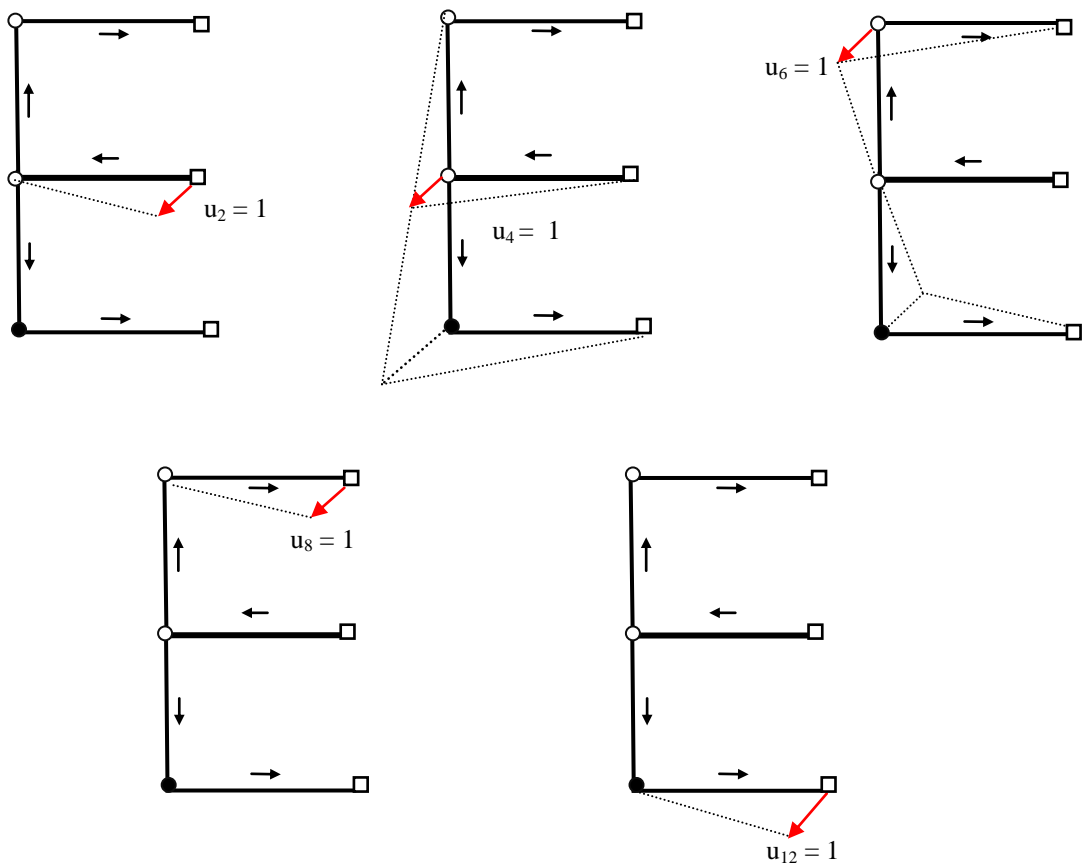


Fig. 3.19 – Imposição de funções de deslocamentos axiais unitários

Para a determinação das componentes dos deslocamentos transversais de membrana ao longo do plano médio das placas 1, 2 e 3 pertencentes ao circuito principal, utilizam-se as expressões (3.3). Para o circuito secundário, empregam-se as expressões (3.5) ou (3.6).

Na determinação das componentes dos deslocamentos de flexão nas extremidades inicial e final das placas 1, 2 e 3 aplicam-se respectivamente as expressões (3.7) e (3.8). Para as placas 4 e 5, usa-se a expressão (3.9) ou (3.10).

O ângulo de inclinação que cada placa faz com a horizontal obedece aos sentidos (horário e anti-horário) convencionados (Fig. 3.20).

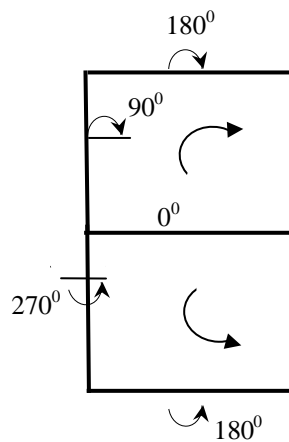


Fig. 3.20 – Ângulo de inclinação entre as placas

Determinadas as funções de deslocamentos axiais, transversais de membrana e de flexão e efetuados os procedimentos de montagem (expressões 2.54 a 2.63) e diagonalização das matrizes da GBT (expressões 3.11 a 3.13), obtêm-se treze modos de deformação.

As configurações deformadas  $u_k(s)$  fora do plano da seção estão indicadas na Fig. 3.21, ao passo que configurações deformadas  $v_k(s)$  e  $w_k(s)$  no plano da seção são mostradas na Fig. 3.22.

Nota-se que:

- (i) os quatro primeiros modos (**1** – extensão axial; **2** – flexão em torno do eixo de maior inércia; **3** – flexão em torno do eixo de menor inércia; **4** – torção) compreendem os movimentos *globais* (de corpo rígido) da seção.
- (ii) os modos restantes abrangem um único modo *distorcional* (**5**) e oito modos *locais de placa* (**6 – 13**).
- (iii) O número de modos distorcionais (*ND*) depende exclusivamente da geometria da seção transversal. Sua quantificação pode ser conferida com a expressão  $ND = NW - 4$ , em que *NW* indica o número de funções de deslocamentos axiais (Fig. 3.17). Portanto, a seção *E* possui apenas um modo distorcional ( $NW - 4 = 5 - 4 = 1$ ).
- (iv) os modos locais de placa não estão associados a deslocamentos longitudinais da seção.

Para finalizar a primeira etapa de aplicação da GBT, relativa ao procedimento de *análise da seção*, apresentam-se as matrizes **C**, **B**, **D**, **Q**, **X<sub>1</sub>**, **X<sub>2</sub>** e **R** (Tabelas 3.1 a 3.4) que figuram no sistema de equações de equilíbrio (expressão 3.17) e condições de contorno (expressão 3.18). Observa-se que as matrizes:

- (i) de rigidez geométrica **X<sub>1</sub>** e **X<sub>2</sub>** associam-se, respectivamente, ao esforço de compressão e ao momento fletor em torno do eixo de maior inércia, requeridas para efetuar análises de estabilidade, como será explicitado no próximo capítulo que trata da segunda etapa de aplicação da GBT, ou seja, a *análise da barra*.
- (ii) de massa **Q** e **R** relacionam-se, respectivamente, às forças de inércia que atuam no plano da seção e na direção perpendicular a esse mesmo plano, necessárias à aplicação à análise de vibração (**Capítulo 4**).

A determinação prévia das propriedades geométricas da seção (Prović, 1999) indicadas na Tabela 3.5 (área, momentos de inércia, coordenadas do centro de gravidade e de cisalhamento, constante de empenamento, constante de torção de Saint-

Venant, módulo de distorção e raio de giração polar) permite checar o significado físico das componentes matriciais da GBT associadas aos modos de corpo rígido ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) com as grandezas correlatas da teoria de Vlasov.

Comprova-se que as componentes diagonais das matrizes  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  estão associadas respectivamente à:

- (i) rigidez axial:  $C_{11}/E = A$
- (ii) rigidez à flexão:  $C_{22}/E = I_z$ ;  $C_{33}/E = I_y$
- (iii) torção:  $C_{44}/E = I_w$
- (iv) rigidez à torção:  $D_{44}/G = J$

Em relação às componentes de  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , os valores podem ser conferidos diretamente com as expressões 3.27 a 3.38.

Assim:

- (i)  $X_{122} = X_{133} = I$ ;  $X_{144} = r_s^2$ ;  $X_{124} = -Z_c$ ;  $X_{134} = Y_s$
- (ii)  $X_{244} = -\beta_z$ ;  $X_{234} = -1$
- (iii)  $Q_{11} = \rho A$ ;  $Q_{22} = \rho I_z$ ;  $Q_{33} = \rho I_y$ ;  $Q_{44} = \rho I_w$
- (iv)  $R_{22} = \rho A$ ;  $R_{33} = \rho A$ ;  $R_{44} = \rho A r_s^2$ ;  $R_{24} = \rho A Z_s$ ;  $R_{34} = -\rho A Y_s$

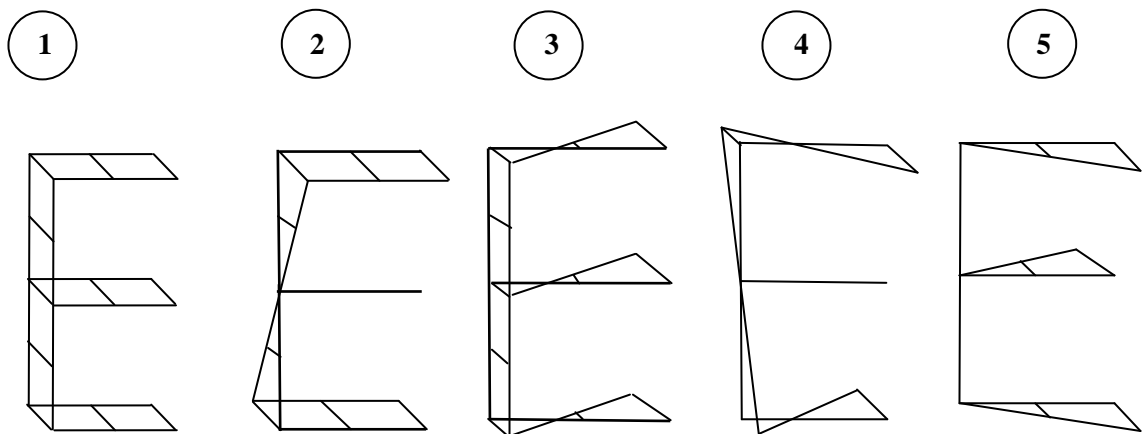


Fig. 3.21 – Perfis de deslocamentos axiais  $u_k(s)$

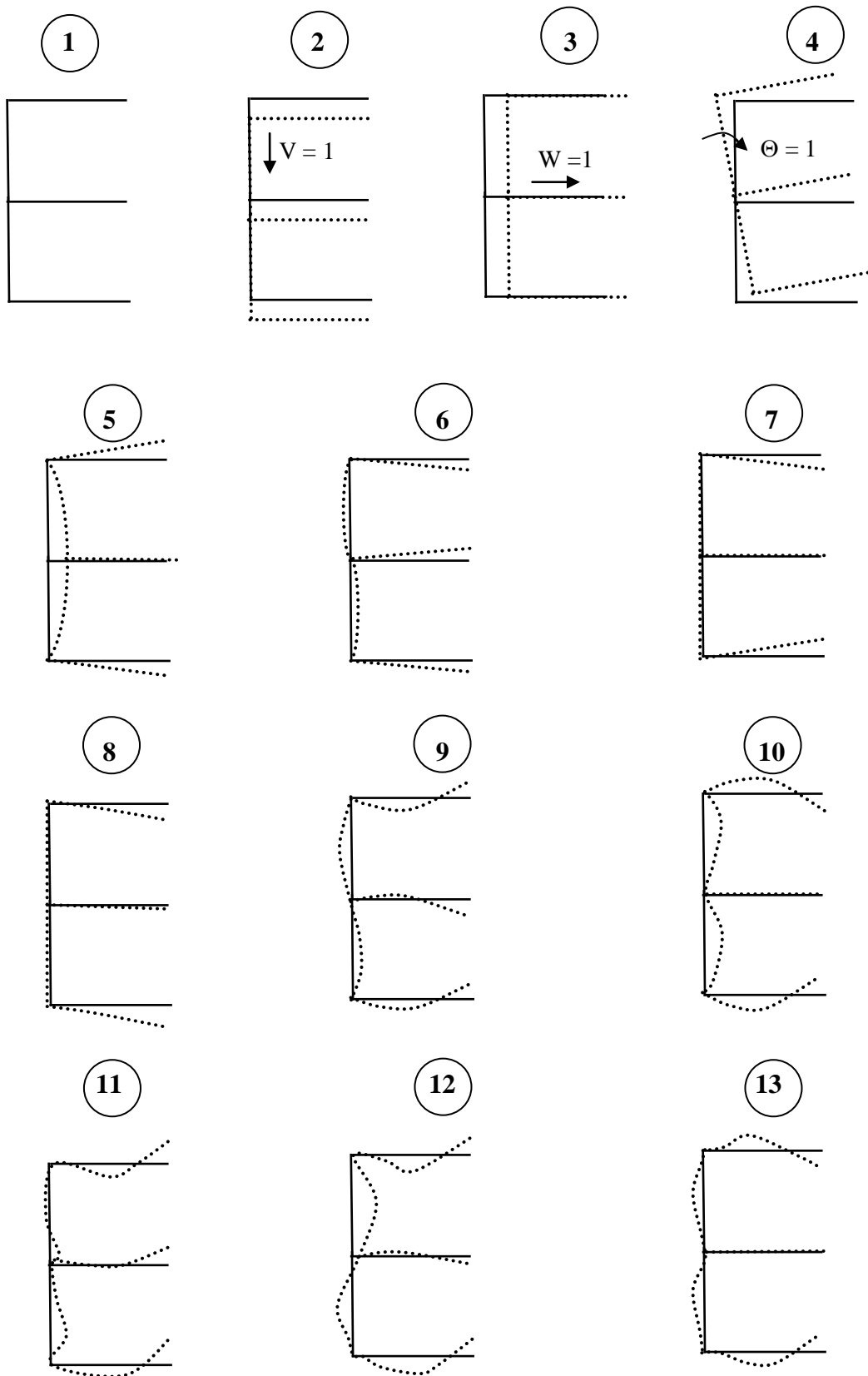


Fig. 3.22 – Modos de deformação: configurações deformadas no plano da seção



**Tabela 3.1 – Matrizes  $C$ ,  $D$ ,  $B$  e  $Q$**

TEORIA DE VLASOV				
MODO MATRIZ	$\frac{C_{ii}}{E}$	$\frac{B_{ii}}{E}$	$\frac{D_{ii}}{J}$	$\frac{Q_{ii}}{\rho} \equiv \frac{C_{ii}}{E}$
<b>1</b>	6.00 (A)	0.	0.	6.00 (A)
<b>2</b>	266.6758 (I <sub>Z</sub> )	0.	0.	266.6758 (I <sub>Z</sub> )
<b>3</b>	66.6684 (I <sub>Y</sub> )	0.	0.	66.6684 (I <sub>Y</sub> )
<b>4</b>	2917.5051 (I <sub>w</sub> )	0.	400.00E-04 (J)	2917.5051 (I <sub>w</sub> )
<b>5</b>	1.33334	0.00022E-04	0.9714E-04	1.33334
<b>6</b>	0.00258	0.00458E-04	3.0053E-04	0.00258
<b>7</b>	0.00053	0.00322E-04	0.6776E-04	0.00053
<b>8</b>	0.00057	0.00364E-04	0.7381E-04	0.00057
<b>9</b>	0.00174	0.34252E-04	15.3799E-04	0.00174
<b>10</b>	0.00077	0.18973E-04	7.11381E-04	0.00077
<b>11</b>	0.00114	0.35024E-04	14.2898E-04	0.00114
<b>12</b>	0.00098	0.49593E-04	10.7893E-04	0.00098
<b>13</b>	0.00088	0.44403E-04	9.2239E-04	0.00088

**Tabela 3.2 – Matriz  $X_1$**

TEORIA DE VLASOV												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	1.000	-	-7.083	-	-0.063	-	-0.170	0.0171	-	0.1015	0.0502	-
-		1.000	-	0.0083	-	-0.0134	-	-	-0.1270	-	-	0.137
-			105.73	-	-0.8352	-	1.7501	0.9668	-	-0.158	-0.977	-
-				0.0181	-	-0.0309	-	-	-0.0026	-	-	-
-					0.1508	-	0.0469	-0.0164	-	-0.0064	0.0093	-
-						0.0960	-	-	-	-	-	-
-							0.0975	-	-	-	-	-
-		<i>sim.</i>						0.2406	-	0.0809	-0.0315	-
-									0.1394	-	-	-
-										0.1177	0.0358	-
-											0.1636	-
-												0.1595

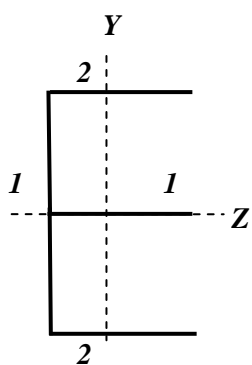
**Tabela 3.3 – Matriz  $X_2$**

TEORIA DE VLASOV												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-0.0112	-	0.0332	-	-	0.0125	-	-	0.0151
-	-	-	-1.000	-	0.0040	-	0.0016	-0.0226	-	-0.0071	0.0153	-
-	-	-1.000	-	0.1997	-	-0.3433	-	-	0.0506	-	-	-0.1772
-				-	0.0045	-	0.0069	0.0003	-	-0.0003	-0.0007	-
-					-	-0.0140	-	-	-0.0018	-	-	0.0005
-						-	-0.0215	-0.0164	-	-	0.0007	-
-							-	-	0.0008	-	-	-0.0008
-		<i>sim.</i>						-	0.0275	-	-	0.0025
-									-	0.0204	0.0078	-
-										-	-	0.0133
-											-	0.0266
-												-

**Tabela 3.4 – Matriz  $R$  ( $\times 10^{-4}$ )**

TEORIA DE VLASOV												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	471.00	-	-3336.11	-	-29.449	-	80.068	8.043	-	47.805	23.648	-
-		471.00	-	3.925	-	-6.291	-	-	59.821	-	-	-64.235
-			49797.22	-	393.428	-	-824.34	455.34	-	-74.371	-460.18	-
-				8.546	-	-14.542	-	-	1.227	-	-	-0.001
-					71.047	-	22.097	7.725	-	3.018	-4.391	-
-						45.207	-	-	0.002	-	-	0.002
-							45.944	-1.796	-	0.249	0.378	-
-		<i>sim.</i>						113.34	-	38.124	-14.85	-
-									65.674	-	-	0.0006
-										55.481	16.88	-
-											77.08	-
-												75.144

**Tabela 3.5 – Propriedades geométricas: seção E**



$$A = 6.00 \text{ cm}^2$$

$$z_{CG} = 3.3333 \text{ cm}$$

$$I_z = 266.6758 \text{ cm}^4$$

$$y_{CG} = 10.00 \text{ cm}$$

$$I_y = 66.6667 \text{ cm}^4$$

$$Z_s = 7.0831 \text{ cm}$$

$$I_w = 2917.5 \text{ cm}^6$$

$$Y_s = 0$$

$$J = 0.04 \text{ cm}^4$$

$$r_s^2 = 105.725 \text{ cm}^2$$

$$\beta_z = 0$$

$$\beta_y = 17.50$$

### 3.5.2 SEÇÃO T

A seguir, apresenta-se outro exemplo de análise de seção composta aberta ramificada do tipo *T* (Fig. 3.23).

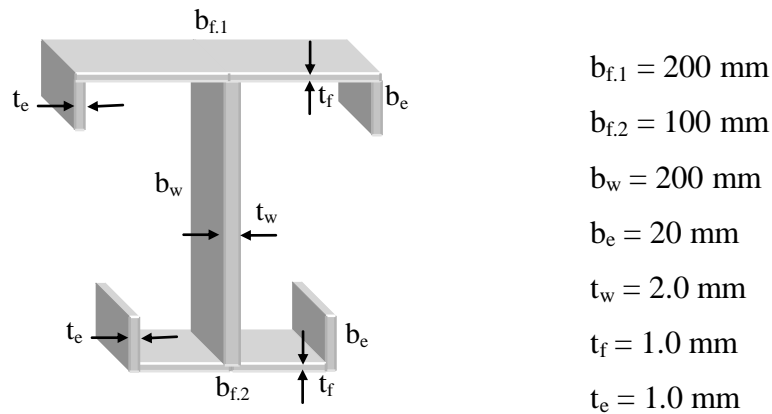


Fig. 3.23 – Seção T: dimensões e espessuras das placas

As propriedades do aço estrutural são:  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  e  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ .

A definição dos circuitos e a orientação arbitrada para a análise são mostrados na Fig. 3.24.

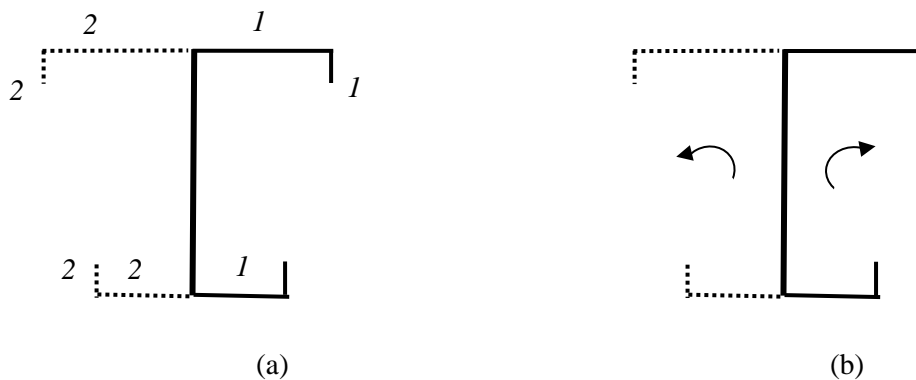


Fig. 3.24 – (a) Circuito principal (1) e circuitos secundários (2). (b) Orientação

A discretização nodal, a classificação dos nós e as funções de deslocamentos associadas estão indicados na Fig. 3.25.

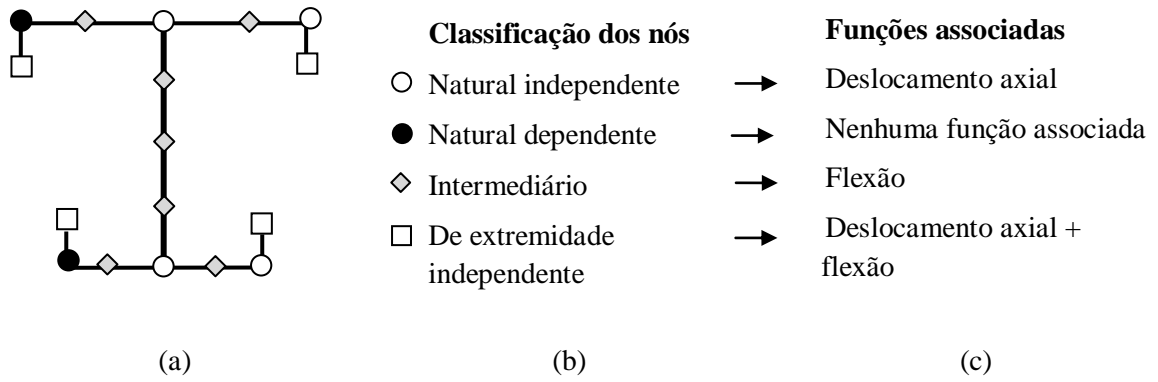


Fig. 3.25 – (a) Discretização nodal. (b) Classificação dos nós. (c) Funções de deslocamentos associadas

A identificação das placas e a numeração das funções de deslocamentos associadas à classificação dos nós estão ilustradas na Fig. 3.26.

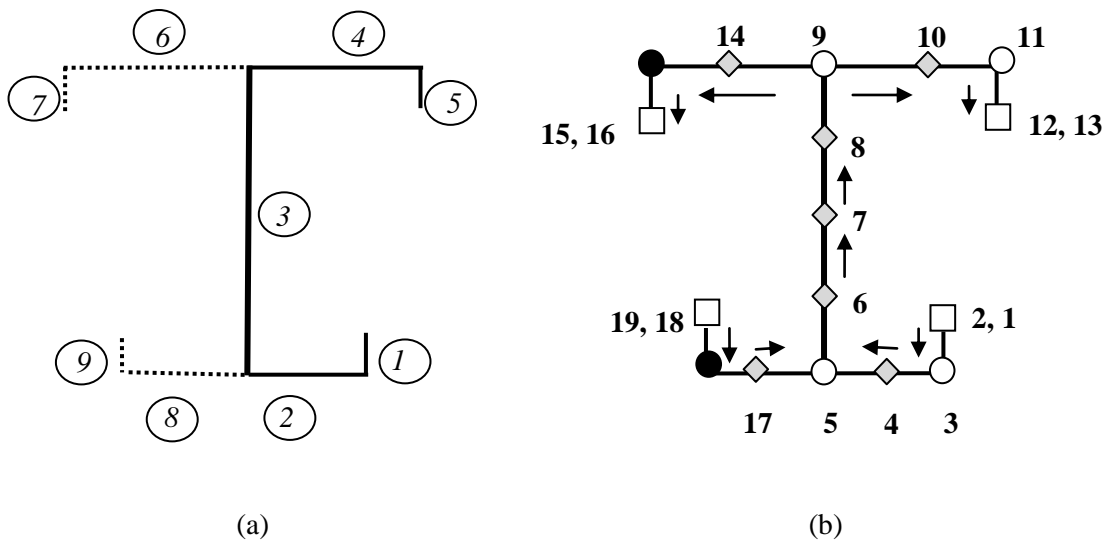


Fig. 3.26 – (a) Identificação das placas. (b) Numeração dos nós

A representação das funções elementares de deslocamentos axiais unitárias impostas em cada nó independente é apresentada na Fig. 3.27.

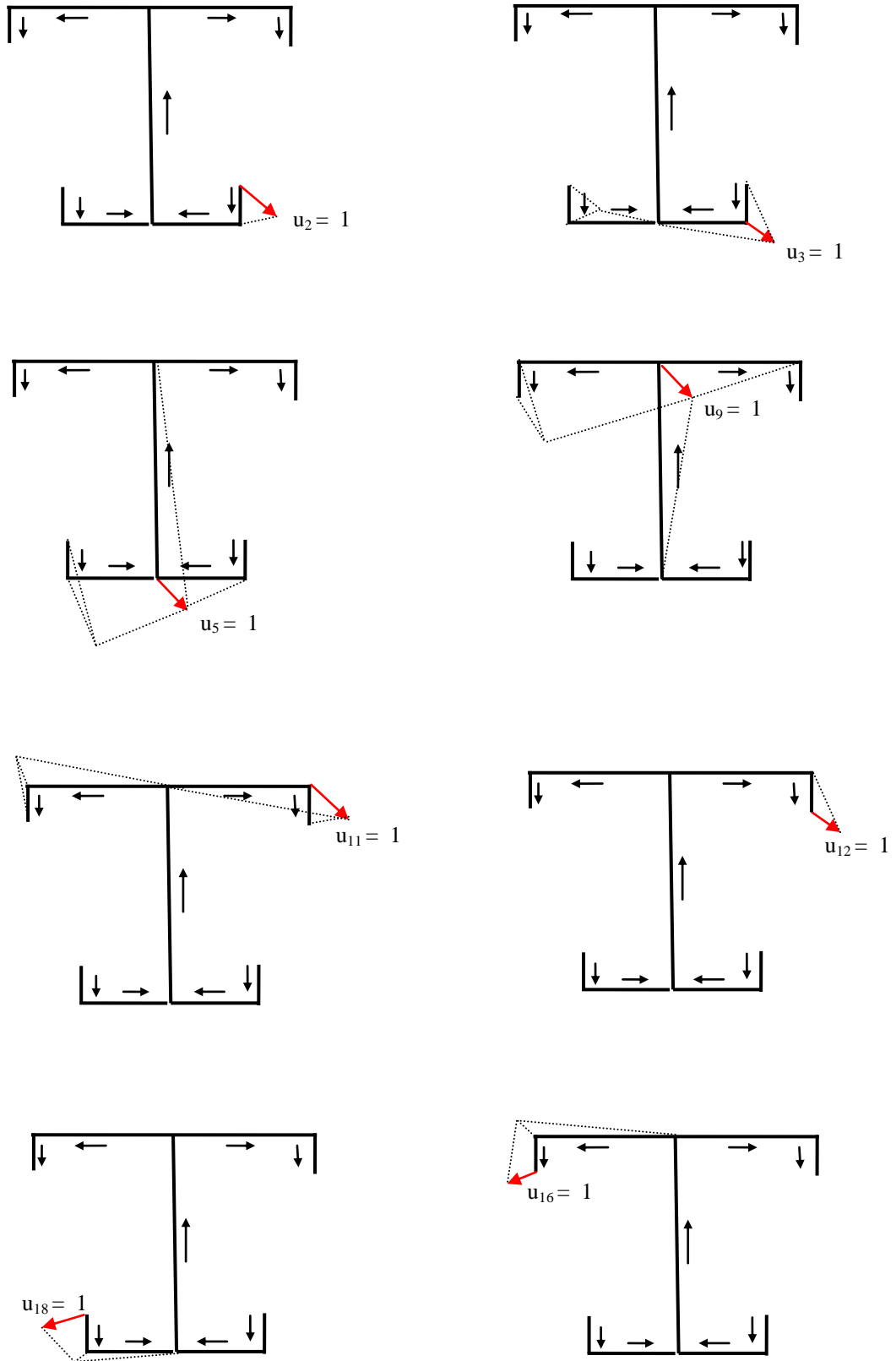


Fig 3.27 – Imposição de funções de deslocamentos axiais unitários

As funções de deslocamentos axiais, transversais de membrana e de flexão são obtidas utilizando as expressões 3.1 a 3.10. A obtenção das matrizes da GBT segue os procedimentos indicados nas expressões 2.54 a 2.63.

Apresenta-se a representação dos perfis de deslocamentos axiais (Fig. 3.28) e as configurações relevantes das deformadas que ocorrem no plano da seção (Fig. 3.29). As funções associadas de deslocamentos axiais totalizam oito e as funções de flexão, onze. Os modos de deformação obtidos somam dezenove: modos *globais* (1 – 4), *distorcionais* (5 – 8) e *locais de placa* (9 – 19).

No que diz respeito ao significado das grandezas envolvidas na aplicação da GBT, a comparação entre as componentes das matrizes  $C$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $Q$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  e  $R$  (Tabelas 3.6 a 3.9) e as propriedades geométricas da seção (Tabela 3.10) comprova ser a GBT consistente com a teoria de Vlasov, obviamente limitada aos quatro modos de corpo rígido, conforme explicitado na seção 3.4.

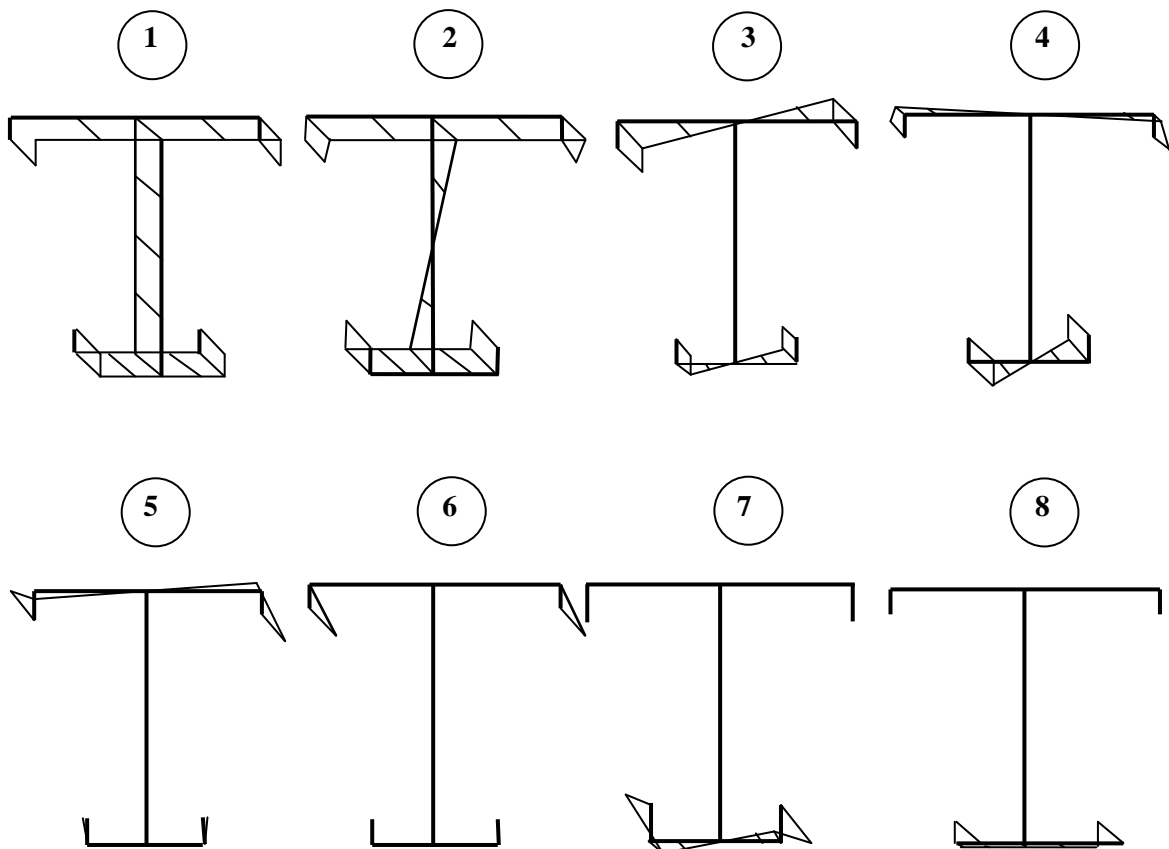


Fig 3.28 – Perfis de deslocamentos axiais  $u_k(s)$

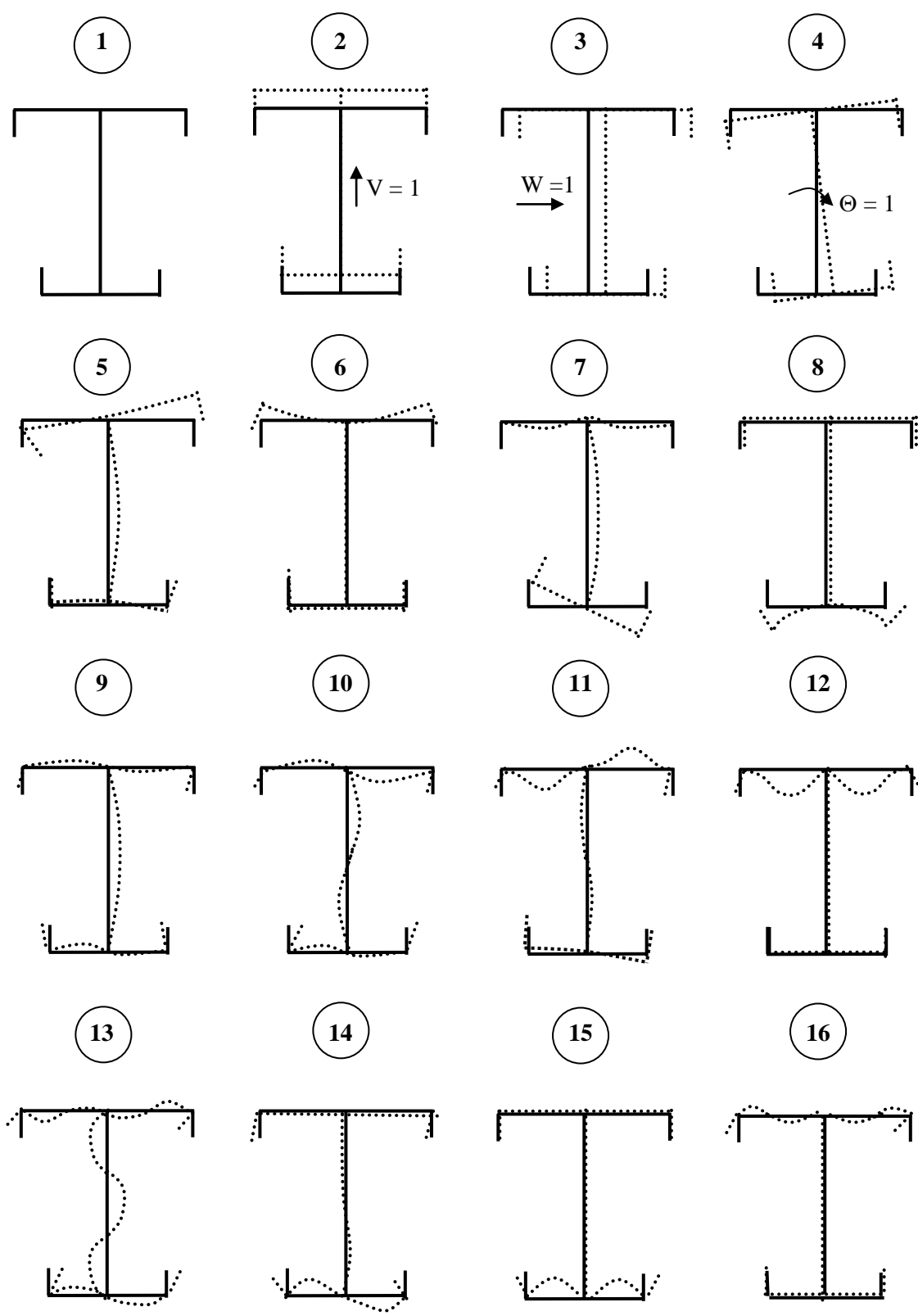


Fig 3.29 – Modos de deformação: configurações deformadas no plano da seção



**Tabela 3.6 – Matrizes  $C$ ,  $B$ ,  $D$  e  $Q$**

		<b>TEORIA DE VLASOV</b>			
<b>MODO</b>	<b>MATRIZ</b>	$\frac{C_{ii}}{E}$	$\frac{B_{ii}}{E}$	$\frac{D_{ii}}{J}$	$\frac{Q_{ii}}{\rho} \equiv \frac{C_{ii}}{E}$
<b>1</b>	7.80 (A)	0.	0.	0.	7.80 (A)
<b>2</b>	485.5822 (I <sub>Z</sub> )	0.	0.	0.	485.5822 (I <sub>Z</sub> )
<b>3</b>	125.0154 (I <sub>Y</sub> )	0.	0.	0.	125.0154 (I <sub>Y</sub> )
<b>4</b>	6894.6823 (I <sub>w</sub> )	0.	0.0066 (J)	0.0066 (J)	6894.6823 (I <sub>w</sub> )
<b>5</b>	1.51E-01	1.47E-07	4.38E-01	4.38E-01	1.51E-01
<b>6</b>	1.36E-01	1.51E-07	2.78E-01	2.78E-01	1.36E-01
<b>7</b>	1.57E-01	1.22E-06	1.75 E-04	1.75 E-04	1.57E-01
<b>8</b>	1.37E-01	1.25E-06	7.48E-05	7.48E-05	1.37E-01
<b>9</b>	7.10E-03	7.44E-06	9.72 E-04	9.72 E-04	7.10E-03
<b>10</b>	5.94E-03	6.43E-05	3.24 E-03	3.24 E-03	5.94E-03
<b>11</b>	1.10E-03	2.29E-05	8.35 E-04	8.35 E-04	1.10E-03
<b>12</b>	8.83E-04	1.96E-05	7.19 E-04	7.19 E-04	8.83E-04
<b>13</b>	6.31E-03	3.83E-04	7.92E-03	7.92E-03	6.31E-03
<b>14</b>	1.83E-04	2.81E-05	4.88 E-04	4.88 E-04	1.83E-04
<b>15</b>	1.56E-04	2.64E-05	4.39 E-04	4.39 E-04	1.56E-04
<b>16</b>	1.63E-04	3.08E-05	4.47 E-04	4.47 E-04	1.63E-04
<b>17</b>	1.60E-04	3.13E-05	4.42 E-04	4.42 E-04	1.60E-04
<b>18</b>	2.58E-04	1.67E-04	7.91 E-04	7.91 E-04	2.58E-04
<b>19</b>	3.12E-04	2.55E-04	9.65E-04	9.65E-04	3.12E-04

Tabela 3.7 – Matriz  $X_i$

TEORIA DE VLASOV																		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	1.000	-	0.000	0.000	-0.080	0.000	0.058	0.000	0.000	0.000	0.145	0.000	0.000	-0.025	0.000	0.016	0.000	-0.052
-	-	1.000	6.024	0.048	0.000	0.118	0.000	0.308	-0.024	-0.026	0.000	-0.095	-0.028	0.000	-0.020	0.000	-0.022	0.000
-	0.000	6.024	114.56	0.972	0.000	0.895	0.000	2.406	-0.446	1.006	0.000	0.000	-0.468	0.000	0.070	0.000	-0.278	0.000
				0.050	0.000	0.009	0.000	0.036	0.040	0.037	0.000	0.012	0.000	0.000	-0.002	0.000	-0.002	0.000
					0.032	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.029	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000
						0.070	0.000	0.072	-0.018	0.004	0.000	-0.013	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.018	0.000
							0.025	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.014
								0.256	0.027	0.026	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
									0.310	0.094	0.000	0.041	-0.006	0.000	-0.004	0.000	0.000	0.000
										0.132	0.000	0.035	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
											0.124	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
												0.263	-0.017	0.000	0.010	0.000	0.005	0.000
			sum.										0.024	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000
														0.022	0.000	0.000	0.000	0.000
															0.023	0.000	0.000	0.000
																0.022	0.000	0.000
																	0.033	0.000
																		0.044

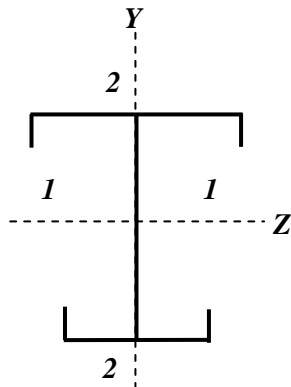
Tabela 3.8 – Matriz  $X_5$

TEORIA DE VLASOV																		
<i>J</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	0.000	-0.010	0.000	-0.009	0.000	0.000	0.000	0.020	0.000	0.000	0.004	0.000	0.002	0.000	0.009
-	-	-	-1.000	0.001	0.000	-0.009	0.000	-0.006	0.018	-0.006	0.000	-0.003	0.004	0.000	-0.003	0.000	0.004	0.000
-	-	-1.000	-12.44	0.091	0.000	-0.088	0.000	-0.089	0.276	0.086	0.000	0.123	0.078	0.000	0.000	0.000	0.042	0.000
				0.006	0.000	-0.001	0.000	0.001	0.007	0.005	0.000	0.002	0.000	0.000	-0.016	0.000	0.031	0.000
					0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
						-0.009	0.000	-0.002	0.005	-0.076	0.000	0.003	-0.046	0.000	0.000	0.000	0.003	0.000
							-0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.023	0.000	0.000	0.000	0.002
								-0.003	0.017	0.003	0.000	0.002	-0.061	0.000	-0.037	0.000	0.036	0.000
									0.014	0.019	0.000	-0.007	0.001	0.000	-0.093	0.000	-0.080	0.000
										0.017	0.000	0.009	0.000	0.000	-0.026	0.000	0.000	0.000
											0.017	0.000	0.000	0.000	0.000	0.033	0.000	0.000
												-0.005	0.004	0.000	0.001	0.000	-0.002	0.000
													-0.004	0.000	0.046	0.000	0.000	0.000
														-0.004	0.000	0.000	0.000	-0.034
															0.003	0.000	0.000	0.000
																0.003	0.000	0.000
																	-0.006	0.000
																		-0.008

Tabela 3.9 – Matriz  $R$  ( $\times 10^{-7}$ )

TEORIA DE VLASOV																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
-	-	-	-	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-	608.40	-	-	0.00	-48.92	0.00	35.37	0.00	0.00	0.00	88.25	0.00	0.00	-14.98	0.00	9.47	0.00	-31.84	0.00
-	-	608.40	3664.83	29.45	0.00	71.95	0.00	187.34	-14.87	-15.59	0.00	-37.57	-17.28	0.00	-12.15	0.00	-13.57	0.00	0.00
-	-	3664.8	69702.4	591.22	0.00	344.32	0.00	1483.8	-271.6	611.97	0.00	50.92	-284.5	0.00	42.68	0.00	-169.1	0.00	0.00
				30.53	0.00	5.50	0.00	22.02	24.08	22.60	0.00	7.42	0.35	0.00	-1.03	0.00	-1.23	0.00	0.00
					19.24	0.00	-0.47	0.00	0.00	0.00	-17.73	0.00	0.00	0.05	0.00	-0.68	0.00	0.09	0.00
						42.47	0.00	43.70	-11.14	2.59	0.00	-7.89	0.79	0.00	-0.08	0.00	-11.03	0.00	0.00
							15.51	0.00	0.00	0.00	0.34	0.00	0.00	-0.34	0.00	0.05	0.00	-8.63	0.00
								159.95	16.23	16.06	0.00	2.68	1.94	0.00	-1.44	0.00	-0.93	0.00	0.00
									188.49	57.06	0.00	25.16	-3.79	0.00	-2.17	0.00	1.63	0.00	0.00
										80.19	0.00	21.36	1.45	0.00	0.20	0.00	-0.68	0.00	0.00
											75.20	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00
			sim.									159.84	-10.44	0.00	5.83	0.00	3.26	0.00	0.00
													14.86	0.00	0.13	0.00	0.88	0.00	0.00
														13.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
															13.71	0.00	-0.03	0.00	0.00
																13.64	0.00	0.00	0.00
																	20.25	0.00	0.00
																		26.60	0.00

**Tabela 3.10** – Propriedades geométricas: seção T



$$\text{Área} = 7.80 \text{ cm}^2$$

$$z_{CG} = 0$$

$$I_z = 485.5795 \text{ cm}^4$$

$$y_{CG} = 11.2821 \text{ cm}$$

$$I_y = 125.01 \text{ cm}^4$$

$$Z_s = 0$$

$$I_w = 6894.68 \text{ cm}^6$$

$$Y_s = 6.024 \text{ cm}$$

$$J = 0.0660 \text{ cm}^4$$

$$r_s^2 = 114.56 \text{ cm}^2$$

$$\beta_z = -12.4425$$

$$\beta_y = 0$$



# CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DA BARRA

## 4.1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo explicita os procedimentos requeridos para efetuar a *análise da barra*, constituída por um perfil com seção transversal de parede fina aberta ramificada, etapa que envolve a definição do carregamento e das condições de contorno seguida da resolução das equações de equilíbrio da GBT, o que pode ser feito através de métodos apropriados (exatos ou aproximados).

As formulações apresentadas possibilitam realizar análises: (i) geometricamente lineares ou de primeira ordem (determinação das configurações deformadas e diagramas de tensões); (ii) de estabilidade (determinação das cargas de bifurcação e configuração dos correspondentes modos de instabilidade); (iii) de vibração livre (sem carga) e com carga (determinação das frequências e configuração dos respectivos modos de vibração).

Tendo como objetivo demonstrar a aplicabilidade e as potencialidades da GBT, efetuam-se como exemplos ilustrativos análises de: (i) estabilidade de uma coluna biapoiada sob compressão axial e (ii) de uma viga biapoiada submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia; (iii) vibração livre de uma barra; (iv) vibração de uma coluna biapoiada sob compressão axial (seção 4.5). As colunas, vigas e barras analisadas são formadas pelo perfil com seção transversal em T, cuja discretização nodal, propriedades modais e matrizes da GBT estão indicadas no **Capítulo 3**.

Em virtude de o comportamento dos perfis formados a frio ao instabilizar local ou globalmente depender essencialmente do comprimento da barra, apresentam-se gráficos que exprimem a variação da carga de bifurcação ou das frequências com o comprimento além das configurações dos respectivos modos de instabilidade ou modos de vibração, o que permite extrair importantes conclusões. Em suma, os resultados fornecidos consistem basicamente na determinação de: (i) cargas críticas de bifurcação e modos de instabilidade; (ii) valores de frequências e modos de vibração; (iii) diagramas de participação modal.

Para fins de validação dos resultados, utilizam-se fórmulas analíticas e os programas GBTUL 1.0  $\beta$  e CUFSM v.3.1. Objetivando mostrar a diversidade dos resultados que se pode obter, evidencia-se nas análises de estabilidade e de vibração livre exclusivamente para o caso de barras biapoias para as quais se admite um único semi-comprimento de onda: (i) a equivalência entre os respectivos diagramas de participação modal, o que implica ter modos de instabilidade e vibração com configurações idênticas; (ii) a relação entre o modo de instabilidade associado à carga de bifurcação e os modos de vibração de barras.

## 4.2 ANÁLISE DA BARRA

A análise da barra abrange um conjunto de operações, descritas por Silvestre e Camotim (2002a, 2002b), que corresponde à seleção modal, ao estabelecimento e à resolução das equações de equilíbrio da GBT e condições de contorno.

Os sistemas de equações de equilíbrio da GBT aplicáveis a análises lineares, de estabilidade ou vibração são indicados a seguir (Tabela 4.1).

**Tabela 4.1 – Equações da GBT**

ANÁLISE	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	
Linear	$C_{ik}\phi_{k,xxxx} - D_{ik}\phi_{k,xx} + B_{ik}\phi_k - q_i = 0$	(4.1)
Estabilidade	$C_{ik}\phi_{k,xxxx} - (D_{ik} - \lambda W_k X_{pik})\phi_{k,xx} + B_{ik}\phi_k = 0$	(4.2)
Vibração livre	$C_{ik}\phi_{k,xxxx} - (D_{ik} - \omega^2 Q_{ik})\phi_{k,xx} + (B_{ik} - \omega^2 R_{ik})\phi_k = 0$	(4.3)
Vibração com carga	$C_{ik}\phi_{k,xxxx} - (D_{ik} - \lambda W_k X_{pik} - \omega^2 Q_{ik})\phi_{k,xx} + (B_{ik} - \omega^2 R_{ik})\phi_k = 0$	(4.4)



Nas expressões 4.1 a 4.4, as matrizes  $C$ ,  $B$  e  $D$  associam-se às propriedades mecânicas da seção;  $q$  relaciona-se ao carregamento externo (estático ou dinâmico);  $W_k$  refere-se a grandezas relativas ao sistema de forças aplicadas associadas à distribuição de tensões longitudinais uniformes;  $X$  representa as propriedades geométricas não lineares;  $Q$  e  $R$  simbolizam as propriedades de massa;  $\lambda$  indica o parâmetro de carga;  $\omega$  representa a frequência natural de vibração. As variáveis são as funções de amplitude  $\phi_k(x)$  associadas a cada modo de deformação.

A GBT proporciona a opção de analisar a instabilidade de barras associada a apenas um único modo de deformação (modo individual – uma equação) ou aos modos mais relevantes combinados entre si (modo misto – sistema com  $n$  equações).

A seleção modal é particularmente vantajosa por propiciar reduzir o número de graus de liberdade do problema. No entanto, deve ser feita de forma criteriosa para preservar a exatidão dos resultados. Bebiano (2010) destaca que:

- (i) a inserção exclusiva de modos globais (**1 – 4**) fornece resultados idênticos aos da teoria de Vlasov.
- (ii) para a análise de estabilidade, o modo **1** (extensão axial) nunca é relevante para a solução do problema, mas pode ser necessário incluí-lo numa análise de vibração livre para captar os modos de vibração relacionados.
- (iii) para análises de estabilidade de colunas que envolvem simetria da seção transversal e do carregamento, os modos de deformação ímpares (sempre simétricos) nunca podem ser desconsiderados.

A solução do sistema de equações de equilíbrio da GBT pode ser obtida de forma:

- (i) *analítica*, situação em que se conhecem as expressões exatas da variação longitudinal dos modos de deformação, ou seja, as funções  $\phi_k(x)$ . Nesse caso, podem-se obter fórmulas explícitas que fornecem os valores exatos dos esforços e/ou tensões associadas a esses modos.
- (ii) *aproximada*, recorrendo a métodos numéricos, que discretizam o campo de deslocamentos através de combinações lineares de funções de forma pré-definidas, tais como o Método das Diferenças Finitas (Schardt, 1989; Leach, 1989; Davies e Leach, 1996); Galerkin (Silvestre e Camotim, 2002);

Rayleigh-Ritz (Simão e Simões da Silva, 2004) ou Método dos Elementos Finitos (Silvestre, 2005).

### 4.3 SOLUÇÃO EXATA

A solução exata do sistema de equações de equilíbrio e condições de contorno abrange os seguintes casos:

- (i) *análises lineares de barras com quaisquer condições de contorno, admitindo que cada equação envolve apenas um único modo de deformação ( $n_d = 1$ )*

Essa situação corresponde a ter modos de deformação perfeitamente desacoplados, em que todas as componentes não diagonais de  $\mathbf{D}_{ik}$  podem ser negligenciadas (expressão 3.23).

A solução global corresponde à superposição das soluções de cada uma das equações (expressão 4.1) resolvidas individualmente para cada modo de deformação  $k$  ( $1 \dots n_d$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{11}\phi_{1,xxxx} - \mathbf{D}_{11}\phi_{1,xx} + \mathbf{B}_{11}\phi_1 &= \mathbf{q}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{C}_{kk}\phi_{k,xxxx} - \mathbf{D}_{kk}\phi_{k,xx} + \mathbf{B}_{kk}\phi_k &= \mathbf{q}_k \end{aligned} \quad (4.5)$$

- (ii) *análises de vibração livre de barras e de estabilidade com quaisquer condições de contorno, desde que cada equação envolva um único modo de deformação ( $n_d = 1$ )*

A resolução da expressão (4.2) fornece as resultantes das tensões de bifurcação  $W_p = \lambda_b W_k$  ( $1 \leq p \leq 4$ ), o valor crítico do parâmetro de carga ( $\lambda_{cr}$ ) e os correspondentes modos de instabilidade  $\phi_k(x)$ .

A resolução da expressão (4.3) ou (4.4) conduz às frequências naturais de vibração ( $\omega$ ) e aos modos de vibração associados  $\phi_k(x)$ .

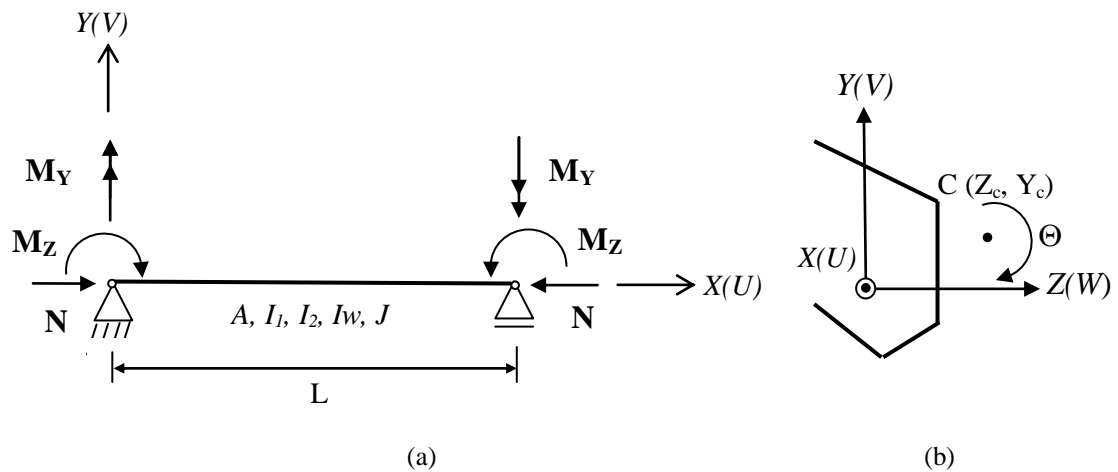


Fig. 4.1 – Barra genérica: (a) Carregamentos. (b) Seção transversal (Silvestre e Camotim, 2002c)

Dependendo da combinação de forças e/ou momentos aplicados uniformemente ao longo do comprimento da barra (Fig. 4.1), o sistema de equações de equilíbrio permite efetuar análises de estabilidade global em:

(a) Colunas:  $W_1 = \lambda_{cr}P$ ,  $W_2 = 0$  e  $W_3 = 0$

(b) Vigas

(b.1) flexão em torno do eixo Z:  $W_1 = 0$ ,  $W_2 = \lambda_{cr}M_Z$  e  $W_3 = 0$

(b.2) flexão em torno do eixo Y:  $W_1 = 0$ ,  $W_2 = 0$  e  $W_3 = \lambda_{cr}M_Y$

(b.3) flexão desviada:  $W_1 = 0$ ,  $W_2 = \lambda_{cr}M_Z$  e  $W_3 = \lambda_{cr}M_Y$

(c) Colunas-vigas

(c.1) flexão composta em torno do eixo Z:  $W_1 = \lambda_{cr}P$ ,  $W_2 = \lambda_{cr}M_Z$  e  $W_3 = 0$

(c.2) flexão composta em torno do eixo Y:  $W_1 = \lambda_{cr}P$ ,  $W_2 = 0$  e  $W_3 = \lambda_{cr}M_Y$

(c.3) flexão composta desviada:  $W_1 = \lambda_{cr}P$ ,  $W_2 = \lambda_{cr}M_Z$  e  $W_3 = \lambda_{cr}M_Y$

(iii) *análises de estabilidade e de vibração de barras biapoizadas*

Nesse caso, as funções de amplitude  $\phi_k(x)$  relacionadas aos modos de deformação  $k$  ( $1 \dots n_d$ ) que participam dos modos de instabilidade da barra são expressas por funções sinusoidais:

$$\phi_k(x) = d_k \sin\left(\frac{n_s \pi x}{L}\right) \quad (4.6)$$

em que  $d_k$  representa a amplitude do modo de deformação  $k$ ;  $n_s$  indica o número de semi-comprimentos de onda da respectiva variação longitudinal ( $L$ ).

Substituindo a expressão (4.6) no sistema de equações diferenciais da GBT e efetuando as operações necessárias, definem-se problemas de autovalores ( $\lambda$  ou  $\omega$ ) e autovetores ( $d_k$ ), conforme indicado na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2 – Problemas de autovalores/autovetores**

Estabilidade	$\left( \mathbf{C} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \mathbf{B} + \lambda_p \mathbf{X} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 \right) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \sin\left(\frac{n_s \pi x}{L}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$	
Vibração livre	$\left( \mathbf{C} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \mathbf{B} - \omega^2 (\mathbf{R} + \mathbf{Q} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2) \right) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \sin\left(\frac{n_s \pi x}{L}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$	
Vibração carregada	$\left( \begin{array}{l} \mathbf{C} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \mathbf{B} + \lambda_p \mathbf{X} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 - \\ - \omega^2 (\mathbf{R} + \mathbf{Q} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2) \end{array} \right) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \sin\left(\frac{n_s \pi x}{L}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$	

Reescrevendo as expressões (4.7) a (4.9), obtêm-se as seguintes equações matriciais (Tabela 4.3):

**Tabela 4.3 – Equações matriciais**

Estabilidade	$(\mathbf{k} + \lambda \mathbf{g})\mathbf{d} = 0$	(4.10)
Vibração livre	$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m})\mathbf{d} = 0$	(4.11)
Vibração carregada	$(\mathbf{k} + \mathbf{g} - \omega^2 \mathbf{m})\mathbf{d} = 0$	(4.12)

em que  $\mathbf{k}$  representa a matriz de rigidez;  $\mathbf{g}$ , a matriz de rigidez geométrica;  $\mathbf{m}$ , a matriz de massa, todas com dimensão  $(n_d \times n_d)$  correspondendo a todos os modos de deformação ou a quaisquer combinações de números de modos de deformação definidos na seleção modal;  $\mathbf{d}$  indica o vetor de amplitudes do modo de deformação.

Cada componente de  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{m}$  é expressa por:

$$k_{ik} = C_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + D_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + B_{ik} \quad (4.13)$$

$$g_{ik} = W_p X_{pik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 \quad (4.14)$$

$$m_{ik} = R_{ik} + Q_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 \quad (4.15)$$

#### 4.4 PARTICIPAÇÃO MODAL

Na GBT, a configuração deformada da seção transversal é definida como uma combinação de modos de deformação essenciais à compreensão da natureza comportamental dos elementos estruturais de parede fina.

A análise do fator de participação modal permite estimar o percentual relativo de contribuição de cada modo puro de deformação ou da combinação de modos na configuração deformada da seção, selecionar os que desempenham papel preponderante ou simplesmente reduzir o número de graus de liberdade durante o processo de análise.

A porcentagem de participação de um determinado modo ( $k$ ) é quantificada pela razão entre a amplitude correspondente ( $\phi_k$ ) e a soma para o número de modos participantes ( $n_d$ ) de todas as outras amplitudes modais ( $\phi_i$ ) que variam ao longo do comprimento da barra ( $L$ ):

$$p_k = \frac{\int_0^L |\phi_k(x)| dx}{\sum_{i=1}^{n_d} \int_0^L |\phi_i(x)| dx} \times 100\% \quad (4.16)$$

Como para barras biapoizadas o valor máximo de amplitude ( $\phi_{k_{max}}$ ) ocorre no meio do vão (Fig. 4.2), a expressão (4.16) simplifica-se para:

$$p_k = \frac{\phi_{k_{max}}}{\sum_{i=1}^{n_d} \phi_i} \times 100\% \quad (4.17)$$

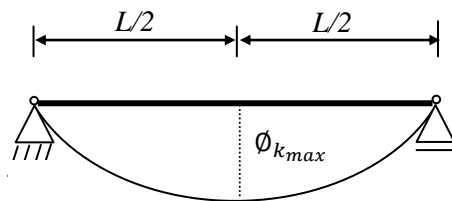


Fig. 4.2 – Valor máximo de amplitude para a barra biapoizada

#### 4.5 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Para exemplificar a análise de elementos estruturais com seção transversal aberta ramificada constituída por materiais isotrópicos, estuda-se a:

- (i) estabilidade e vibração de uma coluna biapoizada submetida à compressão axial.
- (ii) estabilidade e vibração de uma viga biapoizada sob flexão em torno do maior eixo de inércia.
- (iii) vibração livre de barra.
- (iv) vibração de uma coluna biapoizada submetida à compressão axial.

Os elementos estruturais são compostos por dois perfis Ue assimétricos, tendo como particularidade o fato de a espessura da alma ( $t_w = 2.0 \text{ mm}$ ) ser o dobro da espessura das mesas ( $t_f = 1.0 \text{ mm}$ ).

Ressalta-se que os processos relativos à *análise da seção* foram previamente determinados no **Capítulo 3** (subseção 3.5.2).

#### 4.5.1 ANÁLISES DE ESTABILIDADE

##### 4.5.1.1 COLUNA BIPOIADA SUBMETIDA À COMPRESSÃO AXIAL

Para determinação das cargas de bifurcação e modos de instabilidade da coluna biapoada comprimida formada pelo perfil T (Fig. 4.3), utiliza-se a expressão (4.7).

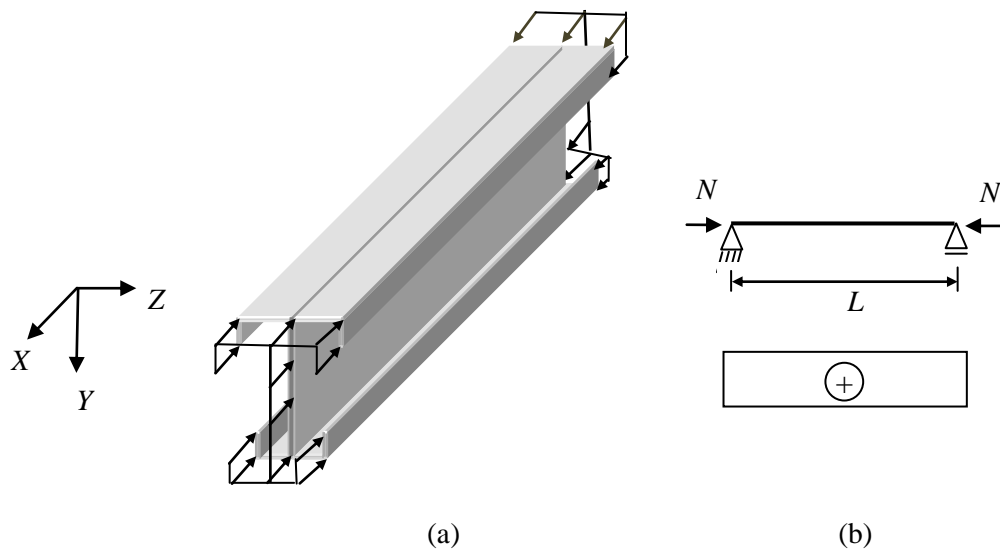


Fig. 4.3 – (a) Coluna submetida à compressão axial. (b) Diagrama de carga aplicada

A resultante das tensões normais aplicadas à seção associa-se às componentes da matriz  $X_I$  relativas ao esforço de compressão axial:  $W_I \equiv \lambda P_b$ . Para o modo de instabilidade associado a um único modo de deformação todas as componentes

diagonais de  $X_I$  são diferentes de zero. Assim o valor da carga de bifurcação ( $P_b$ ) relativa ao modo individual ( $k$ ) pode ser expresso analiticamente por:

$$P_b = \frac{1}{X_{kk}} \left[ C_k \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + D_k + B_k \left( \frac{L}{n_s \pi} \right)^2 \right] \quad (4.18)$$

para a qual se evidencia que:

- (i)  $C_k$ , que representa o trabalho das tensões normais longitudinais, diminui com o comprimento da barra ( $L$ ) e aumenta com o número de semi-comprimentos de onda ( $n_s$ ).
- (ii) A parcela de  $P_b$  relacionada a  $D_k$ , que corresponde ao trabalho das tensões tangenciais, independe de  $L$  e  $n_s$ .
- (iii)  $B_k$ , relativa ao trabalho das tensões normais transversais, aumenta com o valor de  $L$  e diminui com  $n_s$ .

Na *análise da barra*, consideram-se modos de instabilidade com configurações sinusoidais (solução exata), exibindo um único semi-comprimento de onda ( $n_s = 1$ ).

Os resultados (Fig. 4.4) fornecem para vários comprimentos de colunas (curtas, médias ou longas) ( $0 \leq L \leq 1500 \text{ cm}$ ):

- (i) a *carga crítica de bifurcação* ( $P_{cr}$ ), que requer a combinação simultânea de todos os modos puros de deformação (**1 – 19**) cuja quantificação é obtida em função da discretização nodal adotada (**Capítulo 3**).
- (ii) a *carga de bifurcação* ( $P_b$ ) para modos individuais previamente selecionados (**2 – 12**).
- (iii) o *diagrama de participação modal*, que permite visualizar a contribuição de cada modo (**2 – 12**) para a configuração deformada da coluna.

Observa-se que:

- (i) A curva crítica apresenta segmentos distintos praticamente coincidentes em determinados intervalos com as curvas dos modos individuais **12, 9, 5, 4 e 3**.



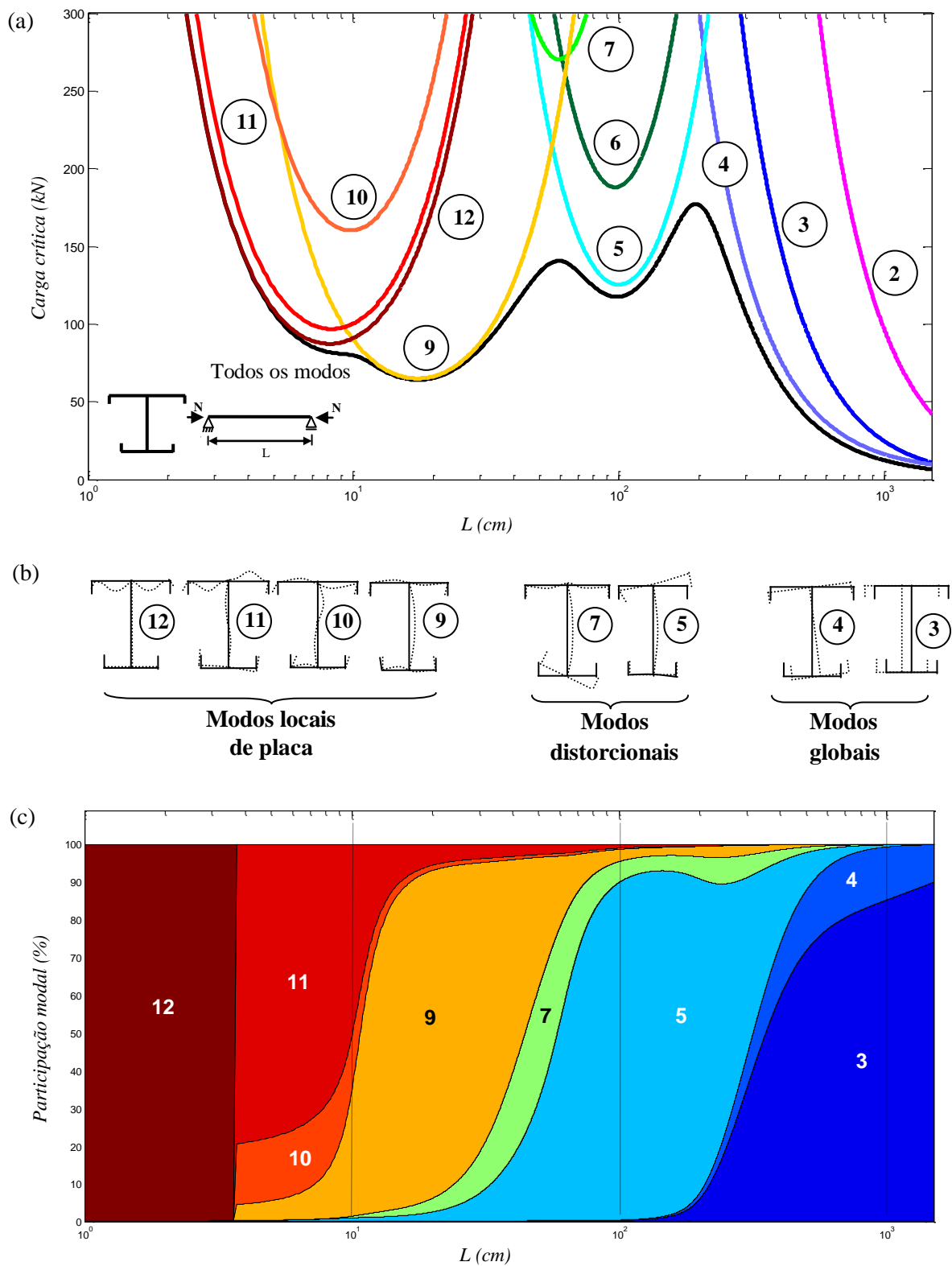


Fig. 4.4 – Análise de estabilidade da coluna biapoada comprimida: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal ( $n_s = 1$ )

- (ii) Para  $L = 9\text{ cm}$  e  $L = 17\text{ cm}$ , a curva crítica exibe dois valores mínimos bem definidos, associados respectivamente à predominância de modos locais de placa,  $P_{cr} \cong 77.34\text{ kN}$  (**MLP**  $\equiv$  **12**) e  $P_{cr} \cong 64.16\text{ kN}$  (**MLP**  $\equiv$  **9**). Essa característica é típica de seções transversais que possuem enrijecedores de borda. Em  $L = 99\text{ cm}$ , o valor mínimo equivale a  $P_{cr} \cong 117.5\text{ kN}$  e está associado ao modo distorcional crítico (**MD**  $\equiv$  **5**) (Fig. 4.5).

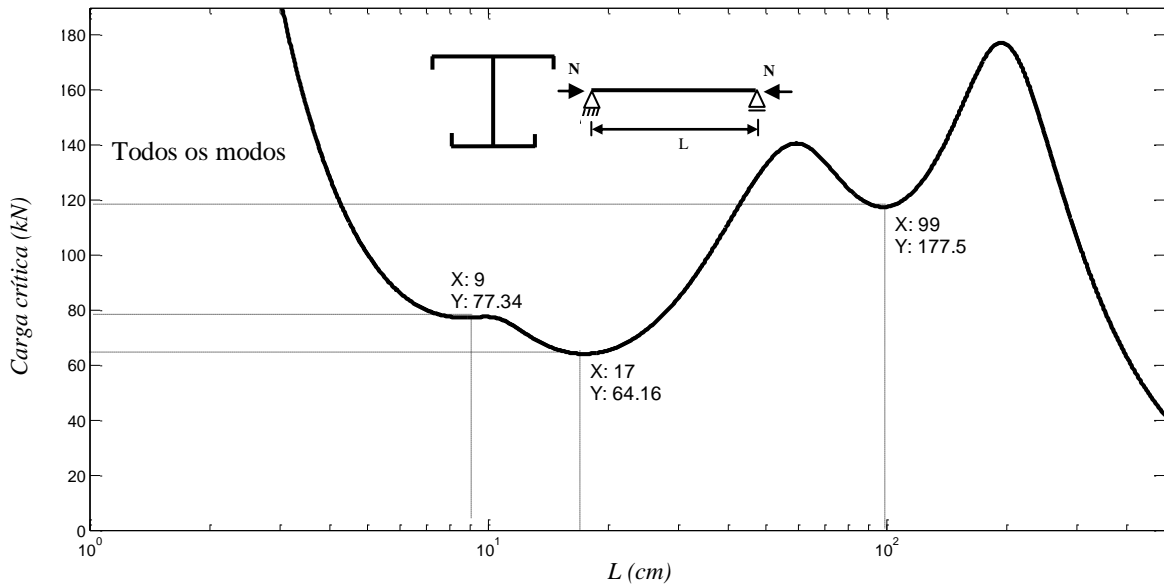


Fig. 4.5 – Análise de estabilidade da coluna biapoada comprimida: valores de  $P_{cr}$

- (iii) A comparação entre os resultados obtidos via GBT e os fornecidos pelo CUFSM indica ótima correlação entre as cargas críticas de bifurcação (Fig. 4.6, Tabela 4.4).

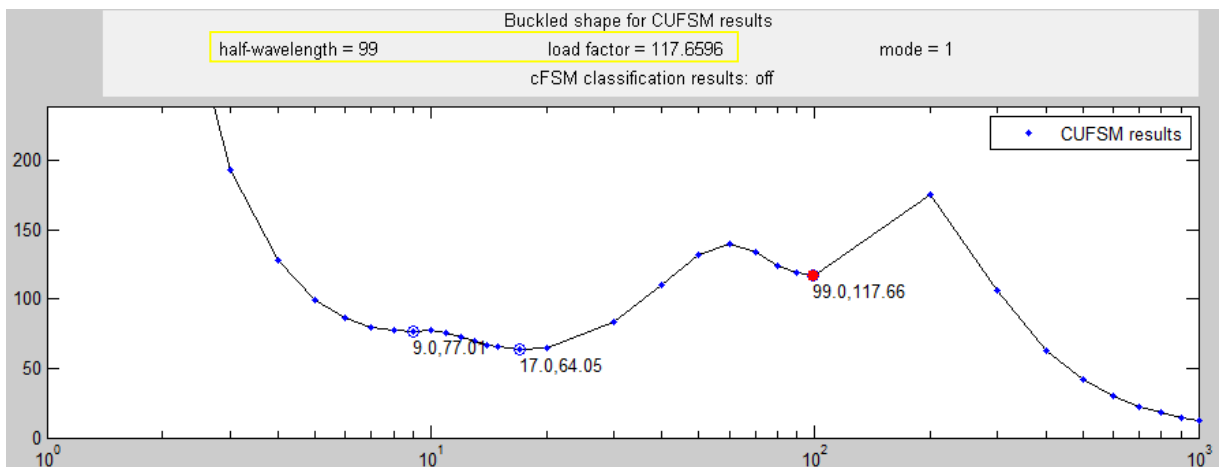


Fig. 4.6 – CUFSM: análise de estabilidade da coluna biapoada comprimida

**Tabela 4.4** – Cargas críticas de bifurcação

<b>Comprimento (L)</b>	<b>GBT</b> <i>P<sub>cr</sub></i> (kN)	<b>CUFSM</b> <i>P<sub>cr</sub></i> (kN)	$\frac{P_{cr}(GBT)}{P_{cr}(CUFSM)}$
<b>10</b>	77.5751	76.5405	1.0135
<b>25</b>	72.7396	75.5444	0.9629
<b>50</b>	132.9312	132.0696	1.0065
<b>75</b>	129.0762	128.3608	1.0056
<b>100</b>	117.5776	117.3477	1.0020
<b>200</b>	176.7901	175.6990	1.0062
<b>300</b>	107.0235	106.5550	1.0044
<b>500</b>	41.8485	41.8210	1.0007
<b>1000</b>	12.3686	12.3783	0.9992
<b>1500</b>	6.5820	6.5876	0.9991

- (iv) A Fig. 4.4 mostra ainda que ocorrem ainda interações em maior ou menor grau entre os modos de instabilidade, o que se traduz num comportamento misto, por exibir simultaneamente características de natureza local/distorcional (**MLPD**  $\equiv 9 + 7 + 5$ ) ou ainda combinar modos mistos de flexão-torção-distorção (**MFTD**  $\equiv 3 + 4 + 5$ ) ou de flexo-torção (**MFTD**  $\equiv 3 + 4$ ). Para exemplificar, considera-se o comprimento  $L = 500\text{ cm}$ , para o qual  $P_{cr} \cong 41.85\text{ kN}$ . Nele preponderam modos mistos de instabilidade por flexo-torção-distorção com a participação de 71.75% (modo **3**), 16.05% (modo **4**) e 10.05% (modo **5**) e 2.15% (outros modos) (Tabela 4.5).

(v) No segmento final, a curva crítica decresce continuamente, variando gradualmente de modos de instabilidade globais por flexo-torção (**MFT**  $\equiv$  **3 + 4**) até ocorrer a instabilidade por flexão em torno do eixo de menor inércia (**MF**  $\equiv$  **3**) com a crescente participação modal de **3**. Para  $L = 1000\text{ cm}$ , os valores da carga de bifurcação ( $P_b$ ) praticamente coincidem com o da carga crítica que vale  $P_{cr} \cong 12.37\text{ kN}$ . Nesse intervalo prepondera o modo de instabilidade global por flexo-torção (**MF**  $\equiv$  **3 + 4**), visto que as contribuições modais correspondem a 85.25% (modo **3**), 14.08% (modo **4**), 0.53% (modo **5**) e 0.14% (modos restantes), conforme indicado na Tabela 4.4. Para  $L = 1500\text{ cm}$ , a curva crítica exibe o valor de  $P_{cr} \cong 6.58\text{ kN}$ . O diagrama de participação modal revela a preponderância da contribuição do modo **3** (89.96%), apenas 9.95% do modo **4** e a participação insignificante dos demais modos (Tabela 4.5).

**Tabela 4.5** – Participação dos modos individuais ( $n_s = I$ )

<b>L (cm)</b> <b>Modo</b>	<b>100</b>	<b>500</b>	<b>1000</b>	<b>1500</b>
<b>2</b>	-	-	-	-
<b>3</b>	0.32	71.75	82.25	89.96
<b>4</b>	0.09	16.05	14.08	9.95
<b>5</b>	89.55	10.05	0.53	0.07
<b>6</b>	-	-	-	-
<b>7</b>	5.51	1.48	0.09	0.014
<b>8</b>	-	-	-	-
<b>9</b>	3.22	0.63	0.04	0.005
<b>10</b>	0.33	0.001	0.001	0.0004
<b>11</b>	0.98	0.046	0.001	0.0002
<b>12</b>	-	-	-	-

- (vi) Empregando a fórmula de flambagem da coluna de Euler, obtém-se os valores:  $P_{cr} = 24.68 \text{ kN}$  ( $L = 1000 \text{ cm}$ ) e  $P_{cr} = 10.96 \text{ kN}$  ( $L = 1500 \text{ cm}$ ). Comparativamente, os resultados fornecidos pela GBT evidenciam que a coluna instabiliza para valores bastante inferiores aos da coluna de Euler (em torno de 50% para  $L = 1000 \text{ cm}$  e 60% para  $L = 1500 \text{ cm}$ ).
- (vii) Para representação da configuração dos modos de instabilidade de colunas com diversos comprimentos ( $L = 20, 100$  e  $500 \text{ cm}$ ) (Fig. 4.7), utiliza-se o aplicativo *View3DScene* v.3.10.1.

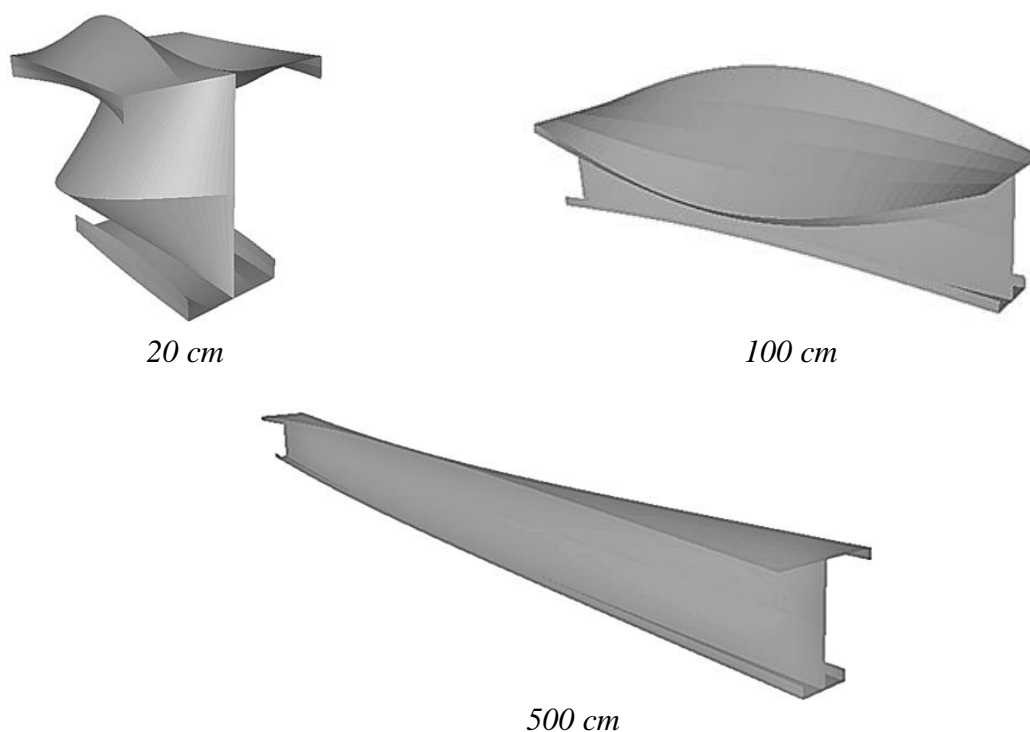


Fig. 4.7 – GBT: modos de instabilidade

Nota-se a similitude na representação dos modos de instabilidade obtidos via CUFSM para os comprimentos seleccionados ( $L = 20, 100$  e  $500 \text{ cm}$ ) (Fig.4.8).

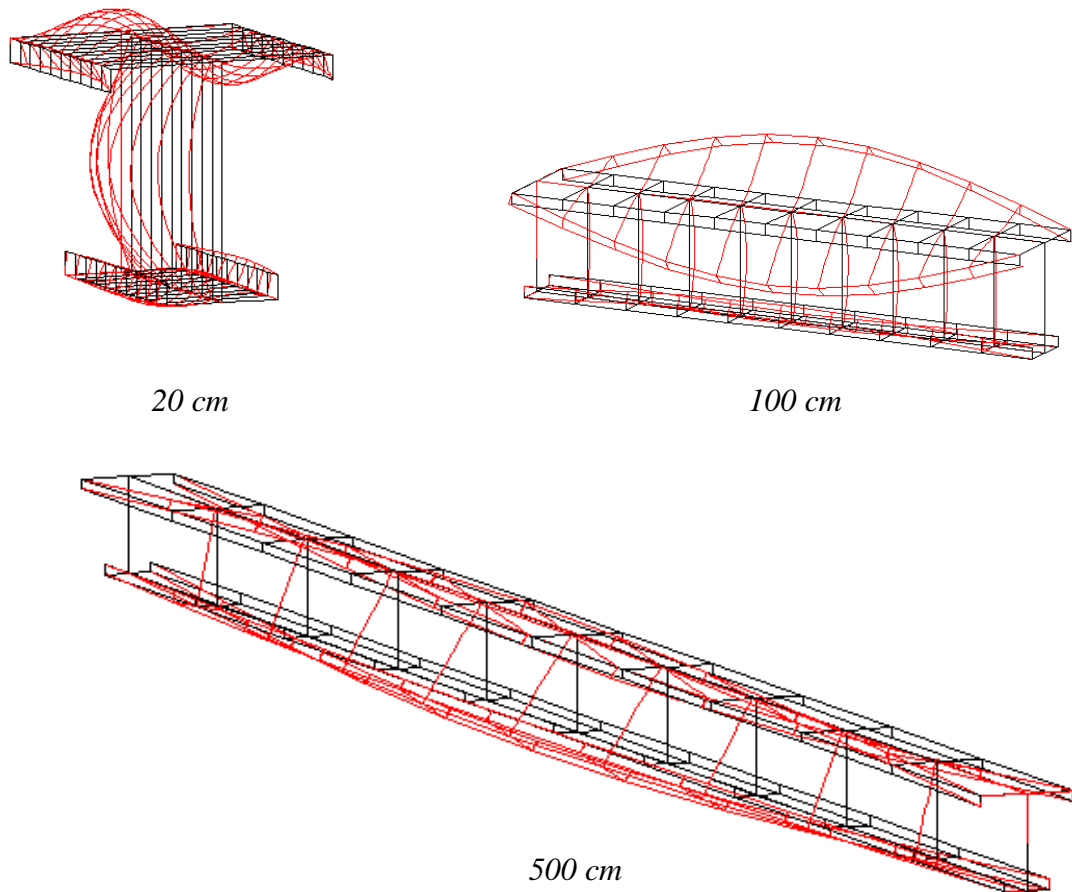


Fig. 4.8 – CUFSM: modos de instabilidade

Avalia-se também a influência do número de semi-comprimentos de onda nos modos críticos de instabilidade local da coluna submetida à compressão axial.

Para  $1 \leq n_s \leq 3$ , a Fig. 4.9 permite confirmar que as curvas críticas apresentam vários mínimos com valores idênticos ( $P_{cr} \cong 64.16 \text{ kN}$ ,  $P_{cr} \cong 77.34 \text{ kN}$  e  $P_{cr} \cong 117.50 \text{ kN}$ ), que independem do número de semi-comprimentos de onda e são equivalentes aos mesmos valores encontrados quando se considera um único semi-comprimento de onda ( $n_s = 1$ ).

Nota-se que:

- (i) A coluna instabiliza em modos locais de placa com uma ( $9 \leq L \leq 17 \text{ cm}$ ), duas ( $18 \leq L \leq 36 \text{ cm}$ ) e três semi-ondas ( $27 \leq L \leq 54 \text{ cm}$ ) associadas respectivamente a dois mínimos ( $P_{cr} \cong 77.34 \text{ kN}$  e  $P_{cr} \cong 64.16 \text{ kN}$ ).

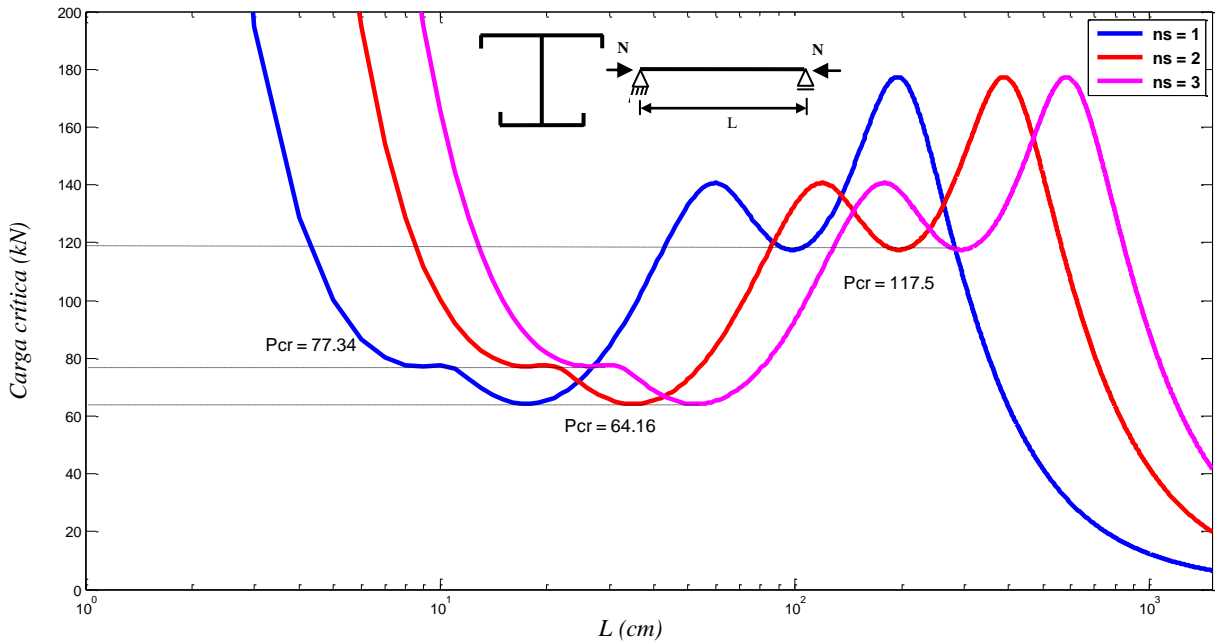


Fig. 4.9 – Análise de estabilidade da coluna biapojada comprimida: variação de  $P_{cr}$  com  $L$  para  $1 \leq n_s \leq 3$

- (ii) Os modos distorcionais predominam com uma ( $L = 99 \text{ cm}$ ), duas ( $L = 195 \text{ cm}$ ) e três semi-ondas ( $L = 300 \text{ cm}$ ) com valor constante de  $P_{cr} \cong 117.5 \text{ kN}$ .
- (iii) Em  $L = 1500 \text{ cm}$ , a carga crítica de bifurcação vale:
  - (a)  $n_s = 1, P_{cr} \cong 6.58 \text{ kN}$
  - (b)  $n_s = 2, P_{cr} \cong 20.12 \text{ kN}$
  - (c)  $n_s = 3, P_{cr} \cong 41.85 \text{ kN}$
- (iv) Os gráficos que indicam a variação da carga de bifurcação com o comprimento da coluna e os respectivos diagramas de participação modal são apresentados para  $n_s = 1$  (Fig. 4.10),  $n_s = 2$  (Fig. 4.11),  $n_s = 3$  (Fig. 4.12).
- (v) Na Tabela 4.6, indicam-se os percentuais de participação de todos os modos de deformação para vários comprimentos da coluna ( $L = 100, 500, 1000$  e  $1500 \text{ cm}$ ) e um único semi-comprimento de onda. Conclui-se obviamente que para obter resultados satisfatórios acerca do comportamento estrutural e reduzir o número de graus de liberdade, basta privilegiar na seleção modal apenas a inclusão dos modos de instabilidade preponderantes.

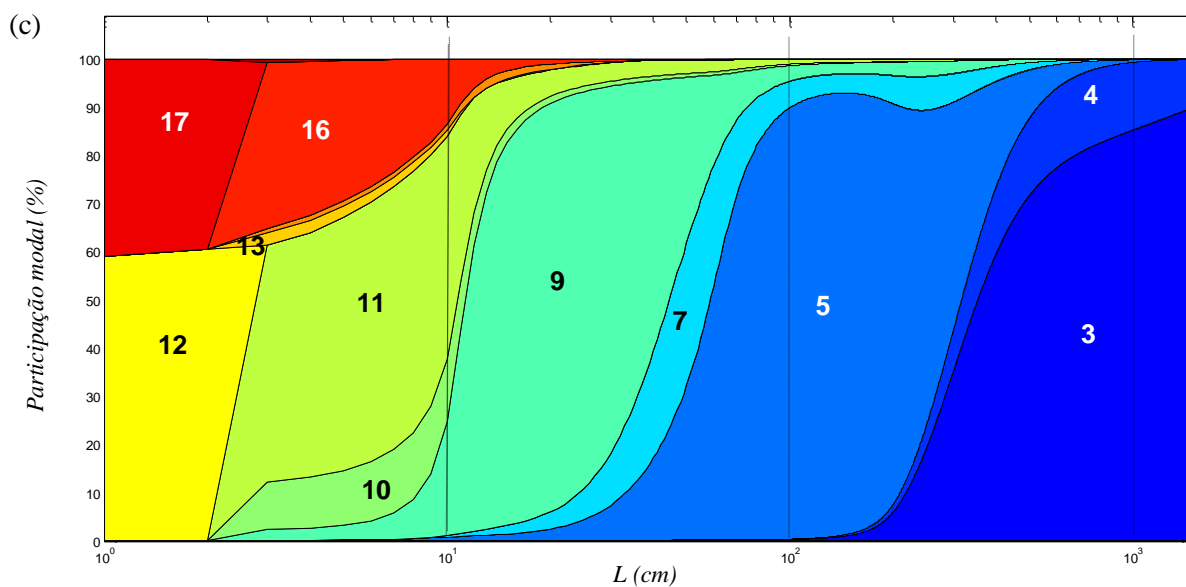
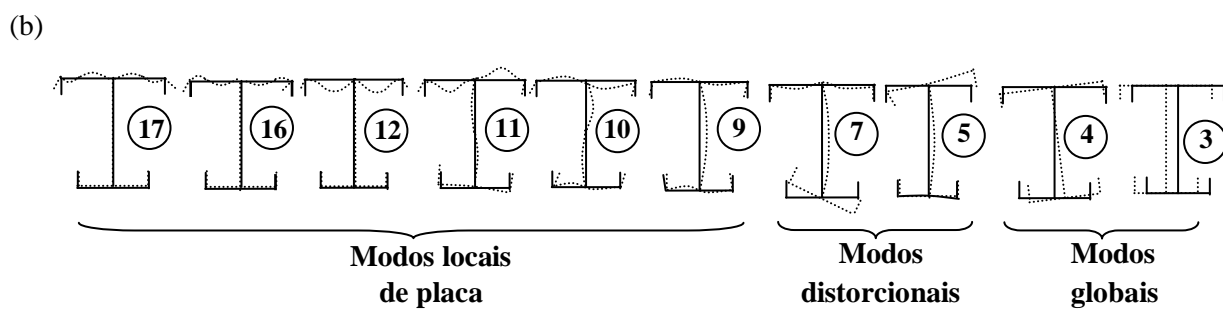
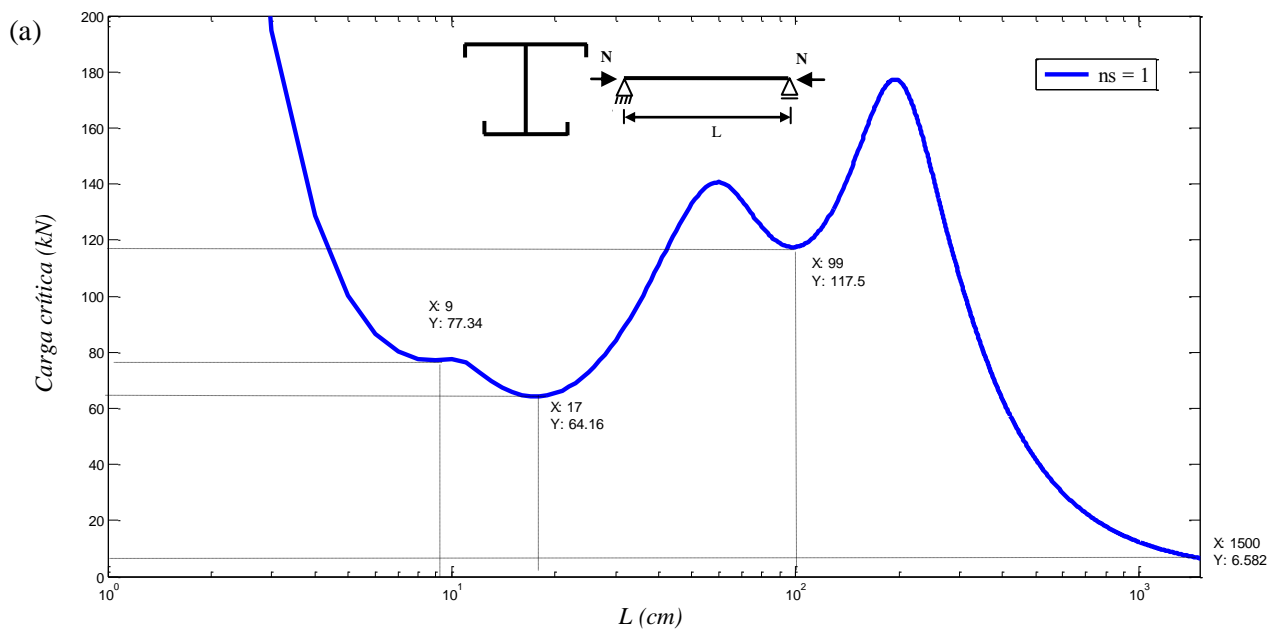


Fig. 4.10 – Análise de estabilidade da coluna biportal comprimida: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 1$ )



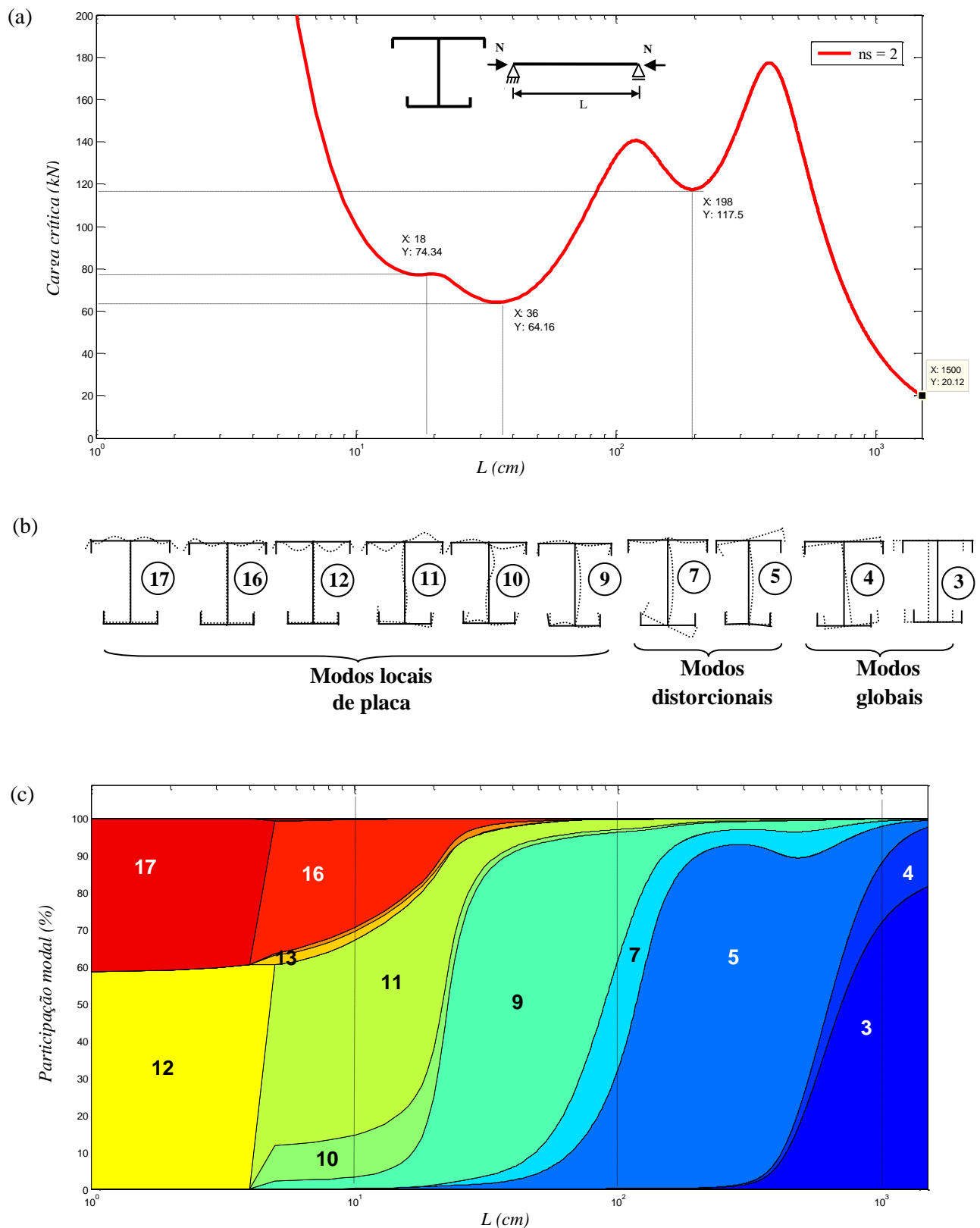


Fig. 4.11 – Análise de estabilidade da coluna biapoiada comprimida: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 2$ )

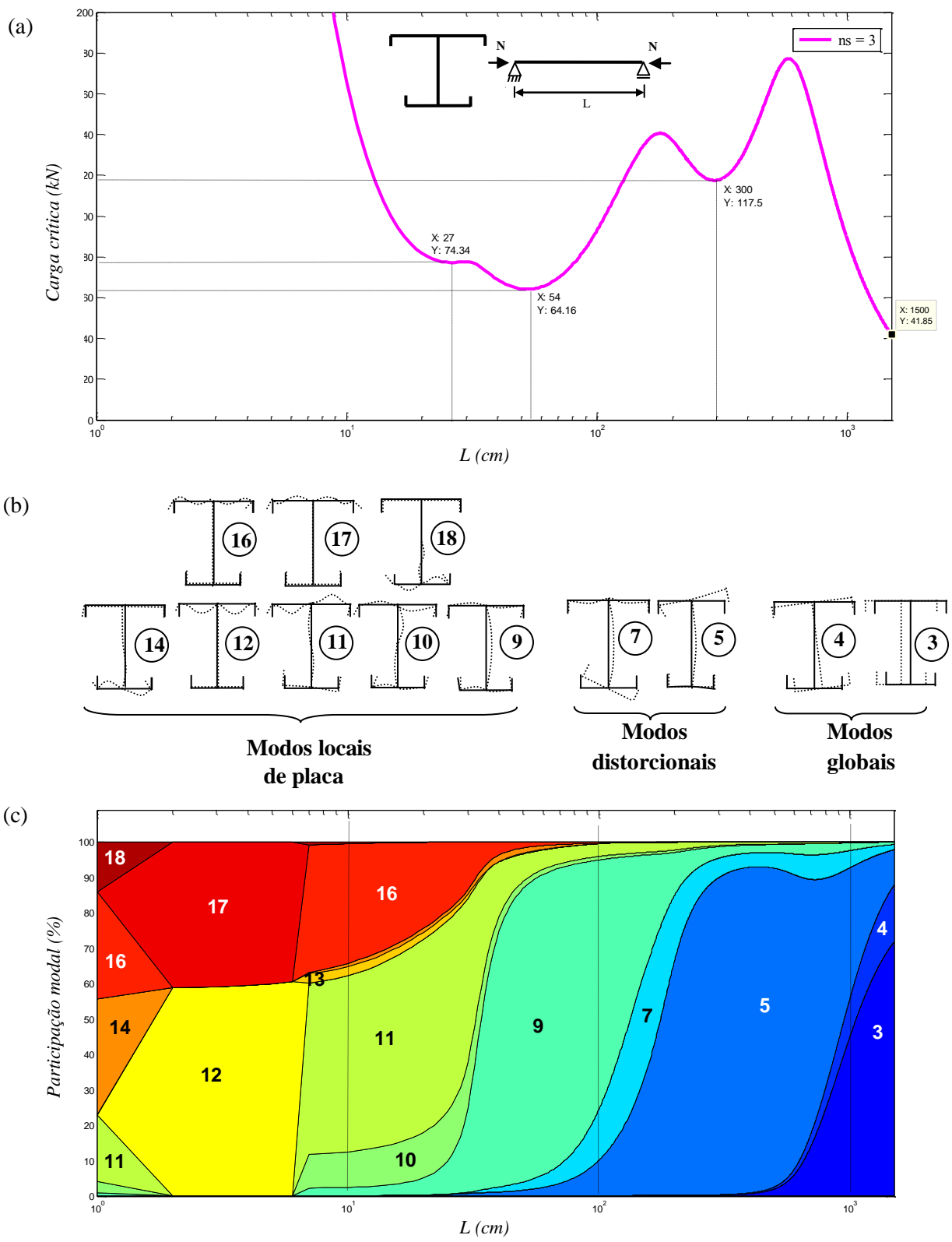


Fig. 4.12 – Análise de estabilidade da coluna biapoiada comprimida: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 3$ )

**Tabela 4.6** – Participação de todos os modos de deformação $(n_s = 1)$ 

<b>L (cm)</b> <b>Modo</b>	<b>100</b>	<b>500</b>	<b>1000</b>	<b>1500</b>
<b>2</b>	-	-	-	-
<b>3</b>	0.3176	71.7126	85.2511	89.9614
<b>4</b>	0.0950	16.0447	14.0778	9.9503
<b>5</b>	89.5061	10.0439	0.5325	0.0661
<b>6</b>	-	-	-	-
<b>7</b>	5.5075	1.4776	0.0936	0.0148
<b>8</b>	-	-	-	-
<b>9</b>	3.2180	0.6252	0.0361	0.0049
<b>10</b>	0.3330	0.0019	0.0011	0.0004
<b>11</b>	0.9760	0.0456	0.0013	0.0002
<b>12</b>	-	-	-	-
<b>13</b>	0.0193	0.0016	0.0006	0.0002
<b>14</b>	0.0035	0.0417	0.0051	0.0015
<b>15</b>	-	-	-	-
<b>16</b>	0.0153	0.0008	0.0001	-
<b>17</b>	-	-	0.0005	-
<b>18</b>	0.0087	0.0044	-	0.0001
<b>19</b>	-	-	-	-

Para  $L = 100\text{ cm}$  e  $1 \leq n_s \leq 3$ , a configuração dos modos de instabilidade está ilustrada na Fig. 4.13 (GBT) e na Fig. 4.14 (CUFSM).

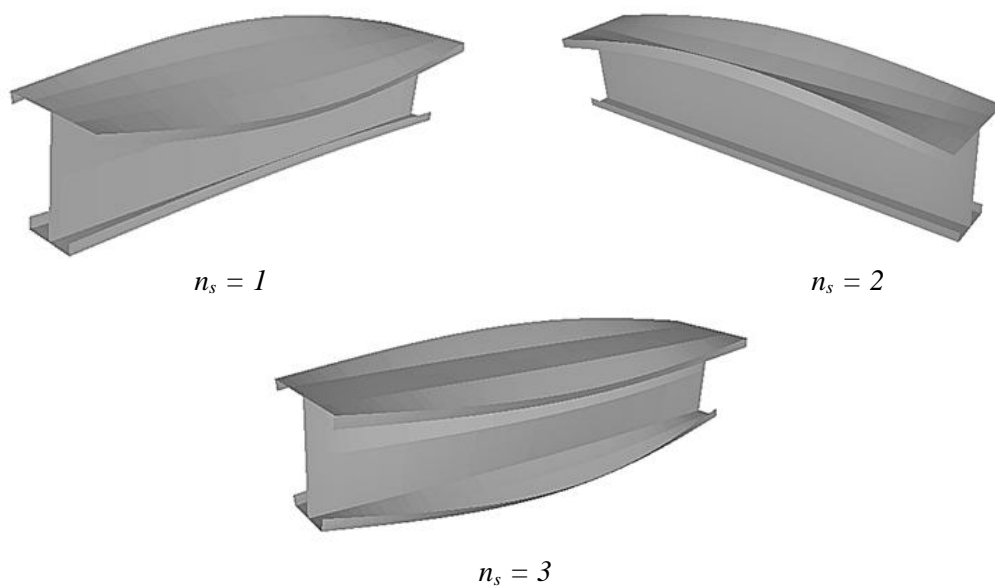


Fig. 4.13 – GBT: modos de instabilidade ( $L = 100\text{ cm}$ )

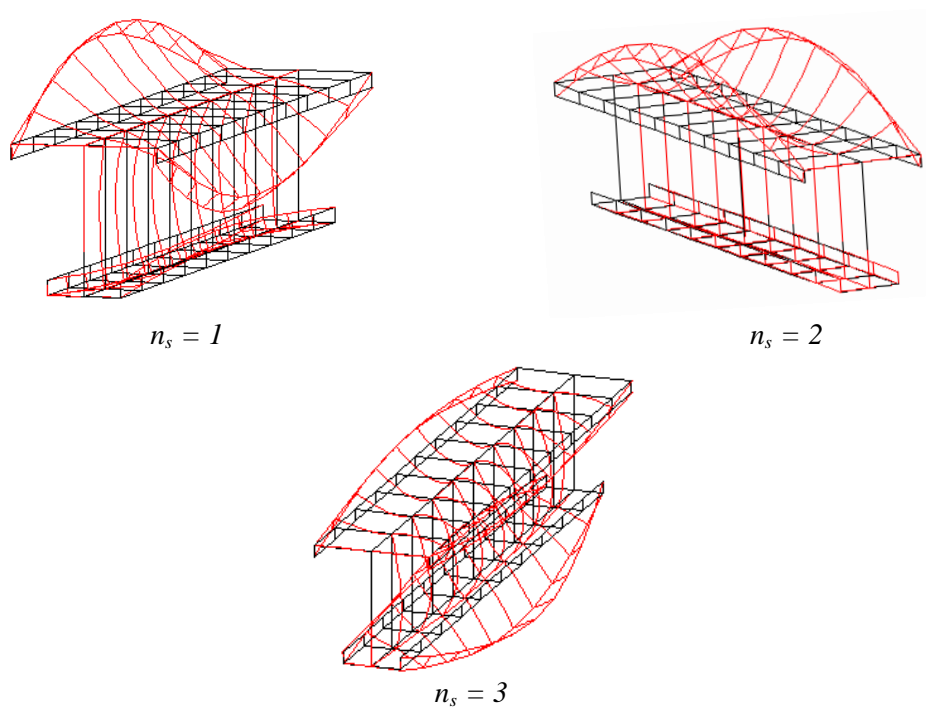


Fig. 4.14 – CUFSM : modos de instabilidade ( $L = 100\text{ cm}$ )

A variação da carga de bifurcação com o comprimento da coluna obtida via CUFSM é mostrada na Fig. 4.15.

Em  $L = 1500 \text{ cm}$ , obtêm-se os seguintes valores:

(a)  $n_s = 2: P_{cr} \cong 23.67 \text{ kN}$

(b)  $n_s = 3: P_{cr} \cong 42.49 \text{ kN}$

que indicam boa correlação com os resultados da GBT.

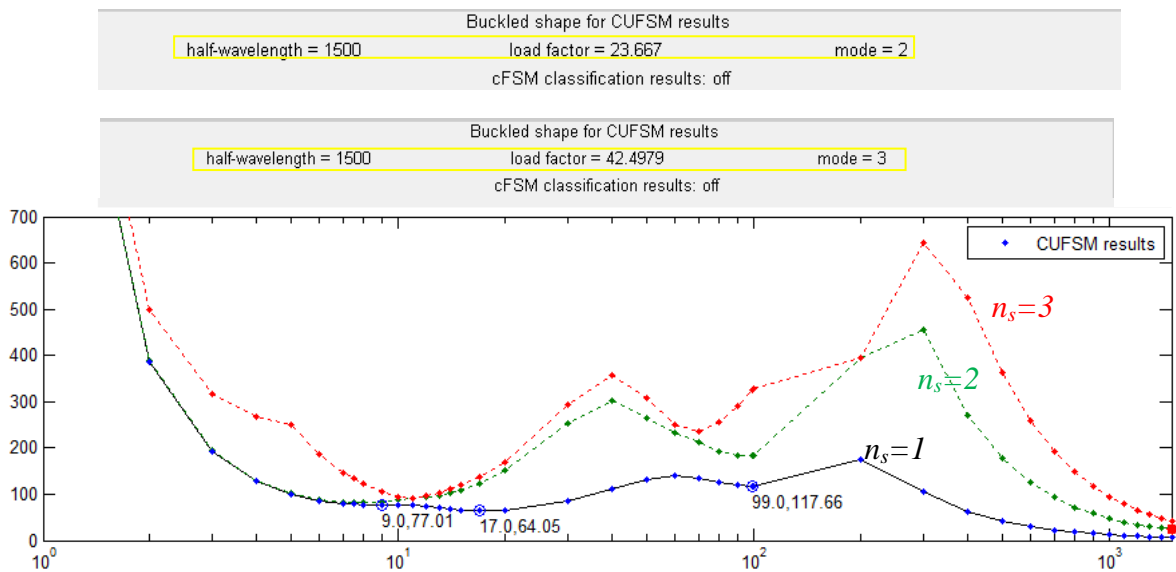


Fig. 4.15 – CUFSM: Análise linear de estabilidade da coluna comprimida: variação de  $P_{cr}$  com  $L$  ( $1 \leq n_s \leq 3$ )

#### 4.5.1.2 VIGA BIAPOIADA SUBMETIDA À FLEXÃO PURA

Ilustra-se a seguir a aplicação da GBT para estudar a instabilidade lateral de uma viga biapoada, formada pelo mesmo perfil T, submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia (Fig. 4.16).

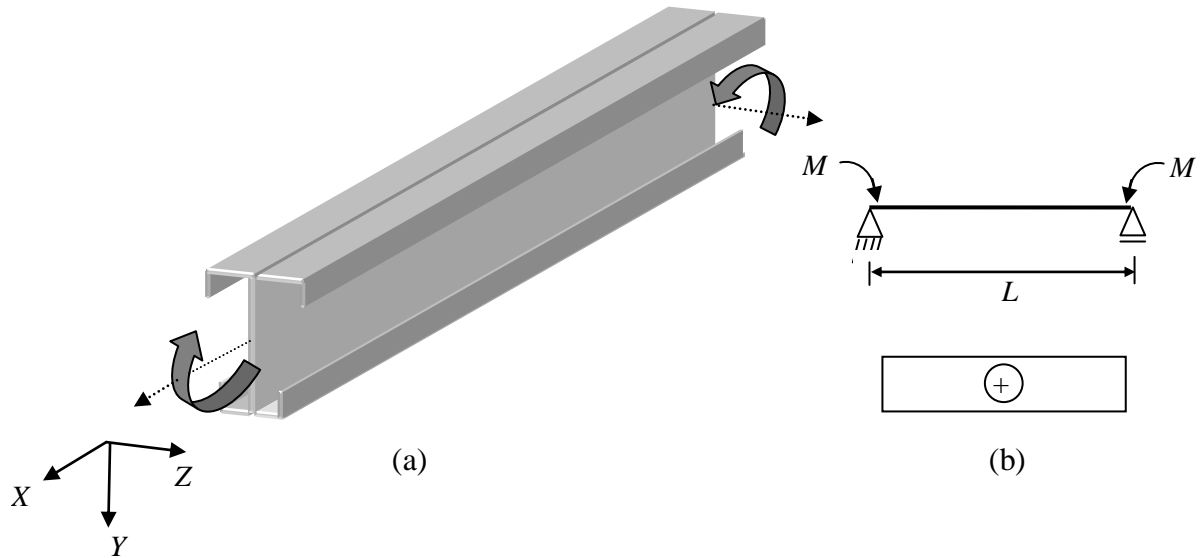


Fig. 4.16 – (a) Viga submetida à flexão. (b) Diagrama de carga aplicada

Para a resolução analítica do sistema de equações diferenciais (expressão 4.2), observa-se que a resultante das tensões aplicadas ( $W_2 \equiv M_Z$ ) associa-se às componentes da matriz  $X_2$  (Tabela 3.8), que representa o diagrama de tensões com variação linear em  $Y$  (devido ao modo 2). Silvestre (2005) destaca que especificamente para vigas: (i) o modo de instabilidade não pode ser constituído por um único modo de deformação (todas as componentes de  $X_2$  são nulas), (ii) o acoplamento só pode ocorrer entre modos pares e ímpares.

Como solução exata do problema, apresenta-se o gráfico que traduz a variação dos momentos críticos de bifurcação ( $M_{cr}$ ) com o comprimento da viga, incluindo todos os modos de deformação ( $1 - 19$ ) e várias semi-ondas ( $1 \leq n_s \leq 3$ ) (Fig. 4.17).

Pode-se concluir que:

- (i) As curvas relativas a todos os modos exibem valores mínimos locais para os quais os momentos críticos possuem valores idênticos ( $M_{cr} \cong 560.5 \text{ kN.m}$  e  $M_{cr} \cong 988.8 \text{ kN.m}$ ) independentemente do número de semi-ondas considerado na análise.
- (ii) Em relação à primeira, as demais curvas deslocam-se horizontalmente para valores crescentes de comprimento.

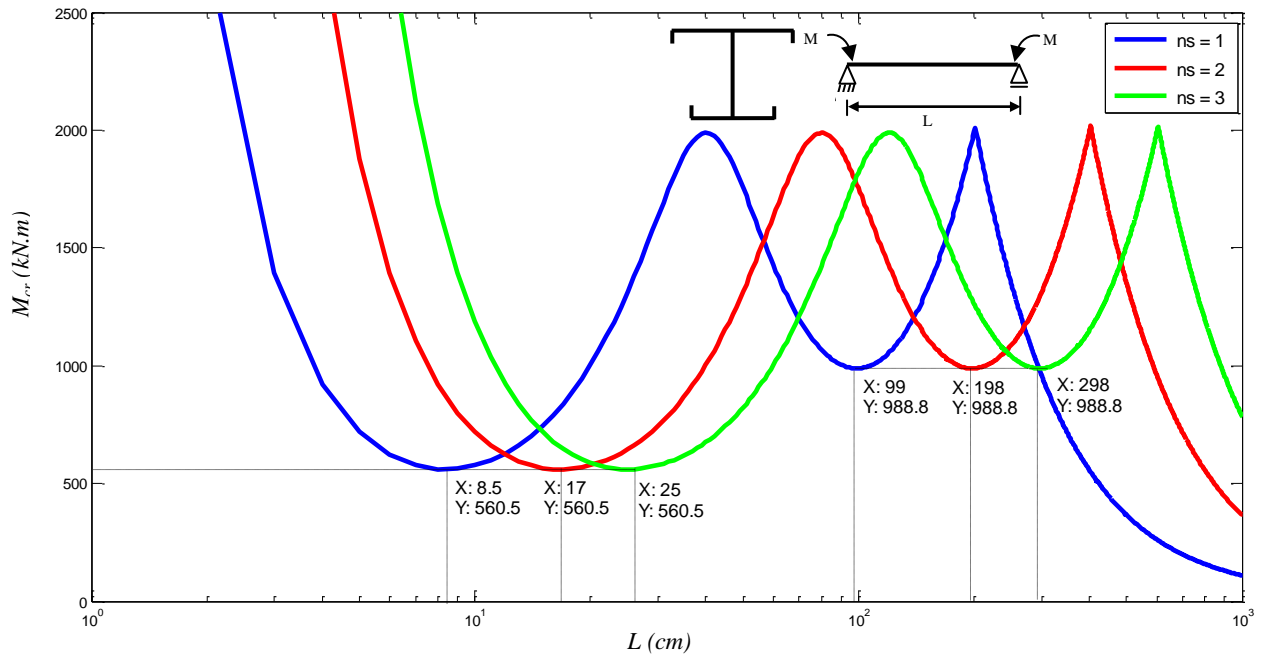


Fig. 4.17 – Análise de estabilidade da viga biapoada submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: variação de  $M_{cr}$  com  $L$  ( $1 \leq n_s \leq 3$ )

(iii) Os valores obtidos via CUFSM ( $M_{cr} \cong 558.24 \text{ kN.m}$  e  $M_{cr} \cong 990.56 \text{ kN.m}$ ) (Fig. 4.18) apresentam boa correlação com os resultados da GBT.

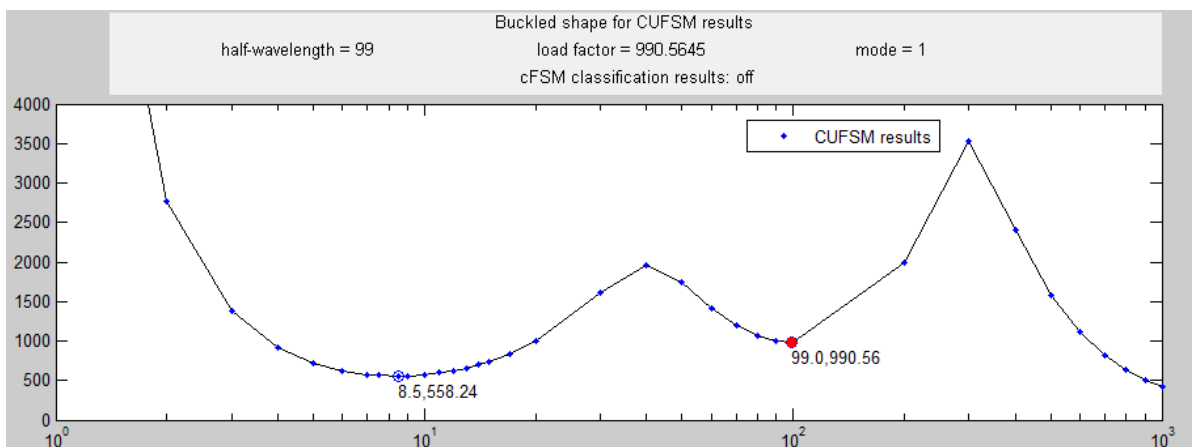


Fig. 4.18 – CUFSM: Análise linear de estabilidade da viga biapoada submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: variação de  $M_{cr}$  com  $L$  ( $n_s = 1$ )

- (iv) Diferentemente das colunas, a instabilidade de vigas envolve a participação de maior número de modos de deformação e transição abrupta entre eles.
- (v) Na Fig. 4.19, para  $L \leq 40 \text{ cm}$  predominam modos locais na instabilidade da viga. Entre  $40 \leq L \leq 200 \text{ cm}$ , destaca-se a crescente participação dos modos distorcionais **5 e 7**. Entre  $200 \leq L \leq 1000 \text{ cm}$ , ocorre **MDFT**  $\equiv 7 + 5 + 3 + 4$ . A partir de  $L \geq 1000 \text{ cm}$ , predominam **MFT**  $\equiv 3 + 4$ .

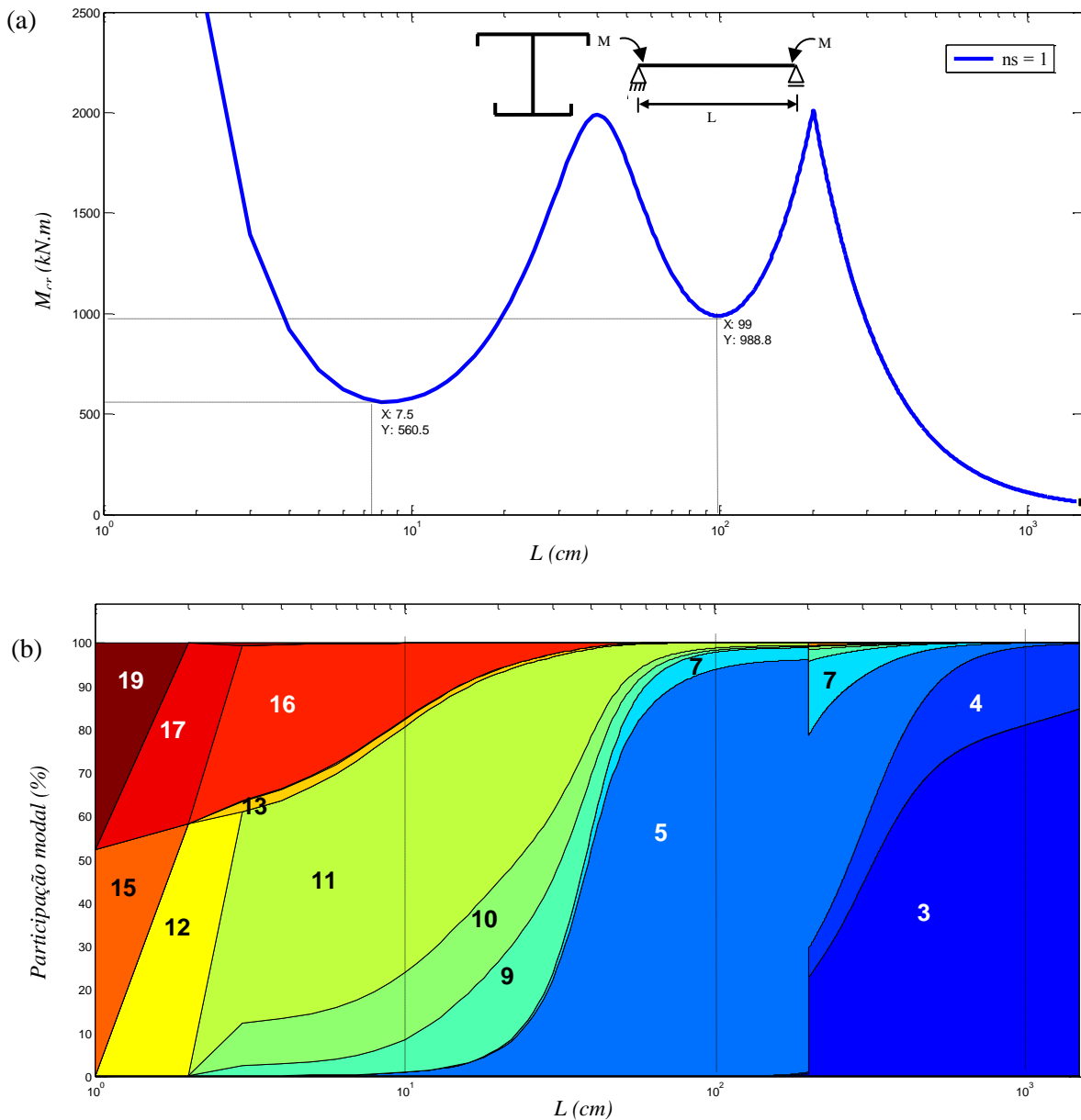


Fig. 4.19 – Análise de estabilidade da viga submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: (a) Variação de  $M_{cr}$  com  $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 1$ )



(vi) Na Fig. 4.20, para  $L \leq 50 \text{ cm}$  predominam modos locais de  $\text{MLP} \equiv 11 + 10 + 9 + \text{outros}$ . Entre  $50 \leq L \leq 400 \text{ cm}$ , observa-se a crescente participação dos modos distorcionais 5 e 7. A partir de  $L \geq 400 \text{ cm}$ , prevalece o  $\text{MDFT} \equiv 7 + 5 + 3 + 4$  com o gradual aumento da participação dos modos 3 e 4 e decréscimo na participação de 5 e 7.

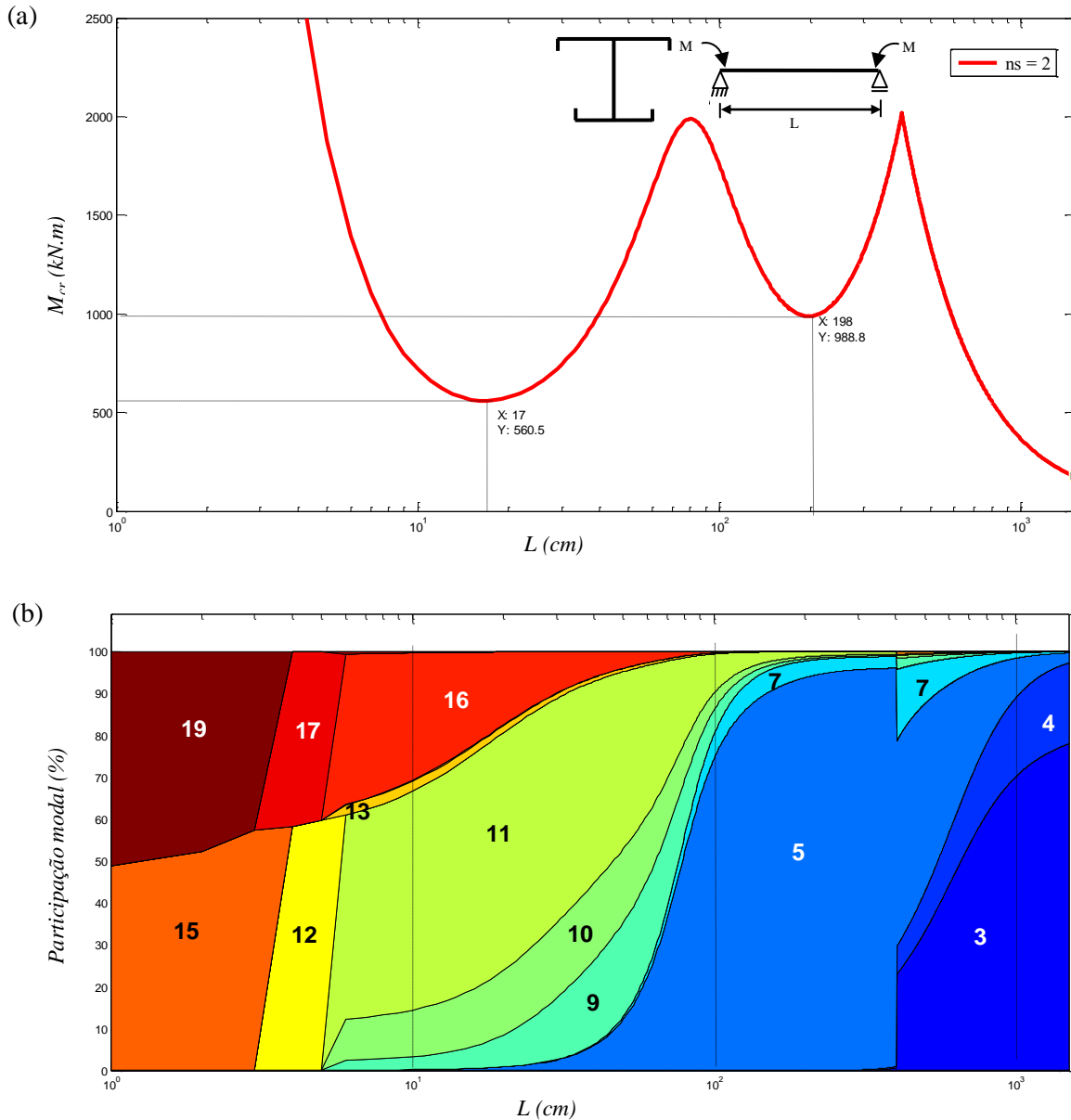


Fig. 4.20 – Análise de estabilidade da viga submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: (a) Variação de  $M_{cr}$  com  $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 2$ )

(vii) Na Fig. 4.21, entre  $20 \leq L \leq 100 \text{ cm}$ , destacam-se modos locais de placa. Entre  $100 \leq L \leq 600 \text{ cm}$ , prevalece o modo distorcional **5**. A partir de  $L \geq 600 \text{ cm}$ , predominam **MDFT**  $\equiv 7 + 5 + 3 + 4$ .

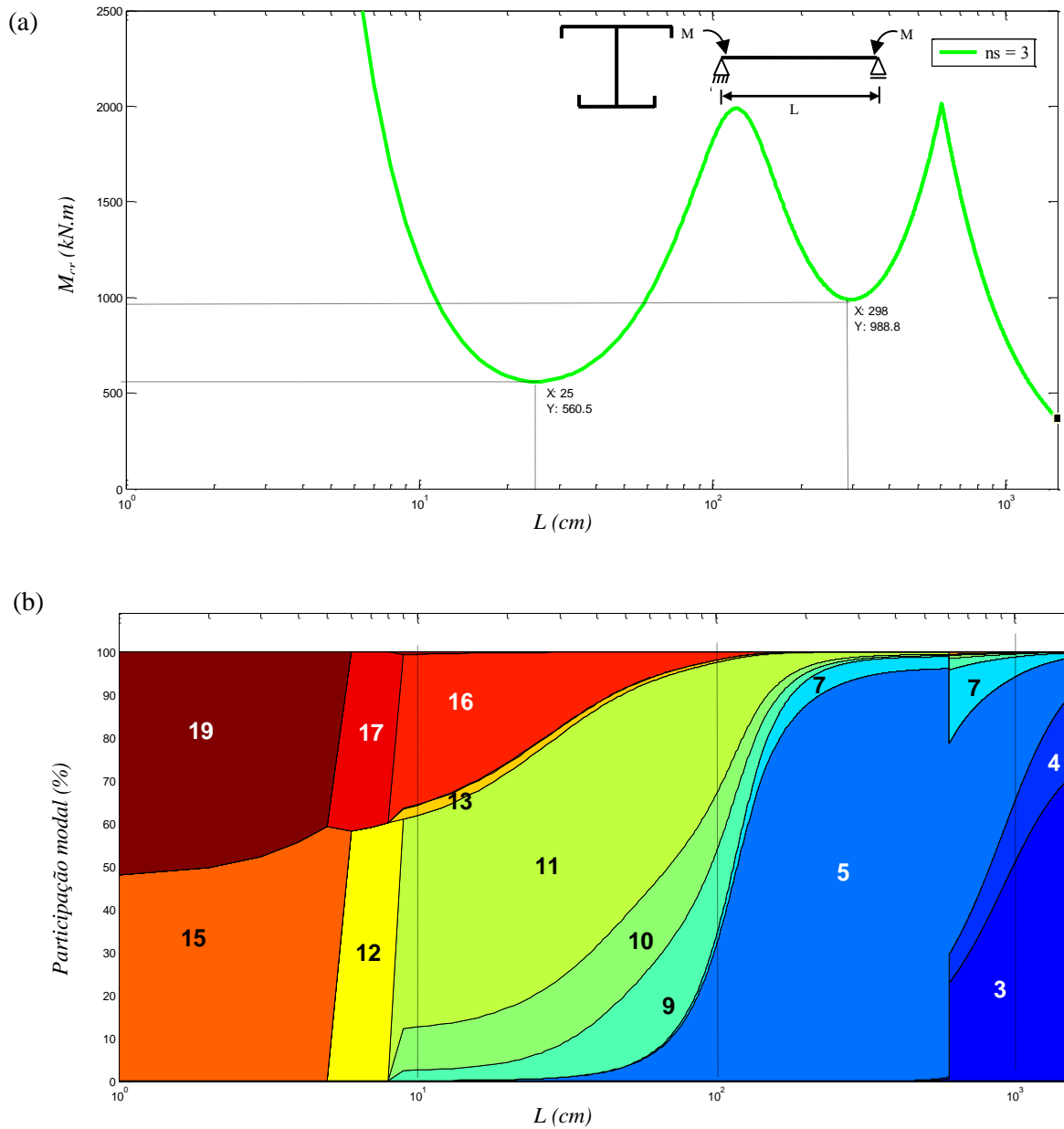


Fig. 4.21 – Análise de estabilidade da viga submetida à flexão em torno do eixo de maior inércia: (a) Variação de  $M_{cr}$  com  $L$ . (b) Participação modal ( $n_s = 3$ )

A configuração dos modos de instabilidade para  $1 \leq n_s \leq 2$  e  $L = 8.5 \text{ cm}$  está ilustrada na Fig. 4.22 (GBT) e na Fig. 4.23 (CUFSM).

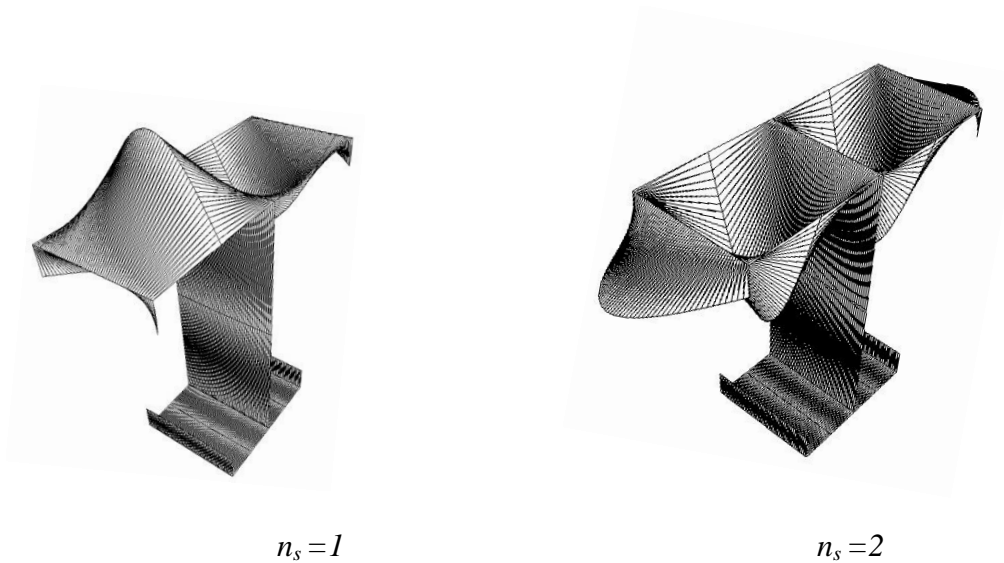


Fig. 4.22 – GBT: modos de instabilidade ( $L = 8.5 \text{ cm}$ )

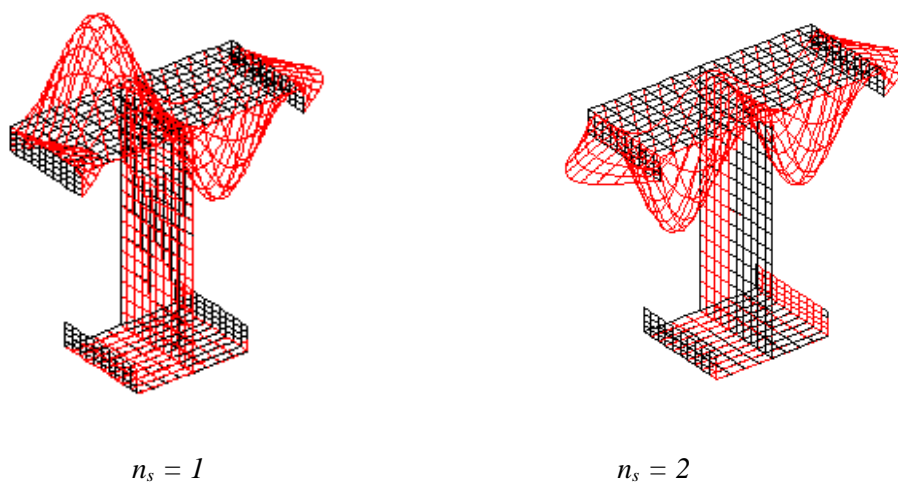


Fig. 4.23 – CUFSM: modos de instabilidade ( $L = 8.5 \text{ cm}$ )

## 4.5.2 ANÁLISES DE VIBRAÇÃO

### 4.5.2.1 VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRA

Exemplifica-se agora o comportamento de vibração livre<sup>6</sup> de uma barra biapoada formada pelo mesmo perfil T.

Para resolução do problema, utilizam-se as expressões (4.8) ou (4.11). Silvestre (2005) observa que o modo de vibração pode:

- (i) coincidir com um modo de deformação, o que requer considerar que todas as componentes diagonais das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  sejam diferentes de zero.
- (ii) corresponder a uma combinação de vários modos de deformação pares ou ímpares.

As curvas associadas aos modos individuais  $k$  e a  $n_s$  semi-ondas podem ser obtidas a partir da expressão analítica:

$$\omega_{k.n_s} = \sqrt{\frac{C_k \left(\frac{n_s \pi}{L}\right)^4 + D_k \left(\frac{n_s \pi}{L}\right)^2 + B_k}{Q_k \left(\frac{n_s \pi}{L}\right)^2 + R_k}} \quad (4.19)$$

Os gráficos (Fig. 4.24) traduzem para modos de vibração com configuração sinusoidal e uma única semi-onda: (i) a variação da primeira frequência natural de vibração ( $\omega_f = \omega_l$ ) com o comprimento da barra ( $0 \leq L \leq 1000 \text{ cm}$ ) totalmente descarregada incluindo simultaneamente todos os modos de deformação (**1 – 19**); (ii) modos individuais (**2 – 12**); (iii) o correspondente diagrama que permite avaliar o grau de participação de cada modo de vibração da barra.

Ressalta-se que:

- (i) Em alguns segmentos a curva crítica, referente a todos os modos de vibração, praticamente coincide com **5, 4, 3** e **2**. As curvas relativas aos modos individuais **2, 3** e **4** decrescem monotonicamente com o comprimento da barra e tendem para valores nulos no trecho final.

---

<sup>6</sup> Na *vibração livre*, não atua na barra nenhum carregamento.

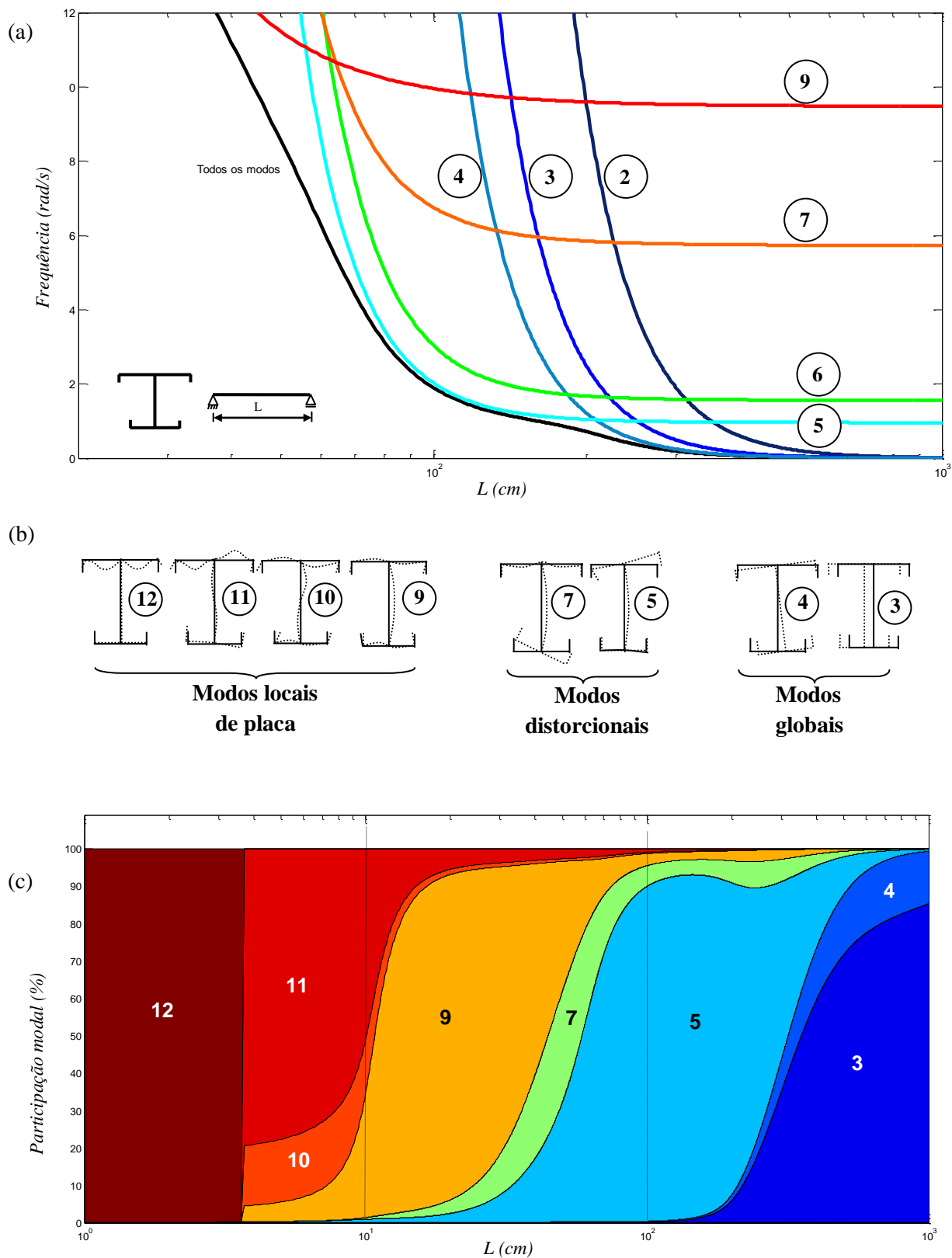


Fig. 4.24 – Vibração livre: (a) Variação de  $\omega_f$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de vibração. (c) Participação modal ( $n_s = 1$ )

- (ii) Para  $L \leq 10 \text{ cm}$ , a barra vibra exclusivamente em modos locais de placa ( $\text{MLP} \equiv 12 + 11 + 10 + 9$ ).
- (iii) Entre  $10 \leq L \leq 100 \text{ cm}$ , ocorre a transição para os modos distorcionais (7 e 5) com o decréscimo gradual de participação dos modos locais de placa (9 e 10).
- (iv) Para  $L \geq 100 \text{ cm}$ , observa-se a crescente participação dos modos globais 3 e 4, com decréscimo do modo distorcional 5.
- (v) Em barras longas, as curvas relativas aos modos individuais 9, 7, 6 e 5 (Fig. 4.24 – a) tendem à horizontal. Esse indicativo sugere que os valores das frequências associadas aos modos de vibração de ordem superior independem do comprimento da barra (Silvestre e Camotim, 2006).

A comparação entre os diagramas de participação modal relativos à análise de estabilidade da coluna biapoida submetida à compressão axial (Fig. 4.4 –c) e de vibração livre da barra (Fig. 4.24 – c) mostra configurações iguais e conseqüentemente graus de participação idênticos (Tabelas 4.5 e 4.6).

Essa semelhança é explicitada por Silvestre (2005) que demonstra ser essa condição exclusiva para colunas e barras biapoiadas, para as quais a solução pode ser obtida de forma exata, o que implica considerar que os modos de instabilidade da coluna ( $P_b = \lambda_l W_l$ ) e de vibração livre da barra possuem a forma sinusoidal com uma única semi-onda ( $n_s = 1$ ). Nesse caso podem ser negligenciadas na equação (4.8) as componentes da matriz  $\mathbf{Q}$  de tal forma que:

$$\mathbf{R}_{ik} + \mathbf{Q}_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 \cong \mathbf{R}_{ik} \quad (4.20)$$

e estabelecida a seguinte relação entre as matrizes  $\mathbf{X}_I$  e  $\mathbf{R}$ :

$$-\rho \mathbf{A} \mathbf{X}_{1ik} = \mathbf{R}_{ik} \quad (4.21)$$

Em termos das matrizes da GBT, a equação (4.10) passa a ser reescrita como:

$$\left[ \mathbf{C}_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D}_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \mathbf{B}_{ik} \right] \mathbf{d} - \frac{P_b}{\rho A} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 \mathbf{R}_{ik} \mathbf{d} = 0 \quad (4.22)$$

e a equação (4.11) toma a seguinte forma:

$$\left[ \mathbf{C}_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D}_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \mathbf{B}_{ik} \right] \mathbf{d} - \omega^2 \mathbf{R}_{ik} \mathbf{d} = 0 \quad (4.23)$$

Comparando as expressões (4.22) e (4.23), chega-se à expressão (4.24) que permite relacionar a carga de bifurcação às frequências:

$$\omega^2 \rho A = P_b \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 \quad (4.24)$$

Em decorrência, observa-se serem:

- (i) diretamente proporcionais as cargas de bifurcação (expressão 4.22) e os quadrados das primeiras frequências naturais de vibração (expressão 4.23).
- (ii) iguais os autovetores que correspondem aos modos de instabilidade e de vibração.

Considerando que os modos de vibração podem exibir vários semi-comprimentos de onda ( $1 \leq n_s \leq 3$ ), apresenta-se a seguir:

- (i) a variação das frequências ( $w_f$ ) com o comprimento da barra ( $L$ ) considerando todos os modos de vibração (**1-19**) (Fig. 4. 25).;
- (ii) as respectivas participações modais (Fig. 4.26).
- (iii) as configurações dos correspondentes modos de vibração ( $L = 10cm$  e  $85cm$ ) (Fig. 4.27).

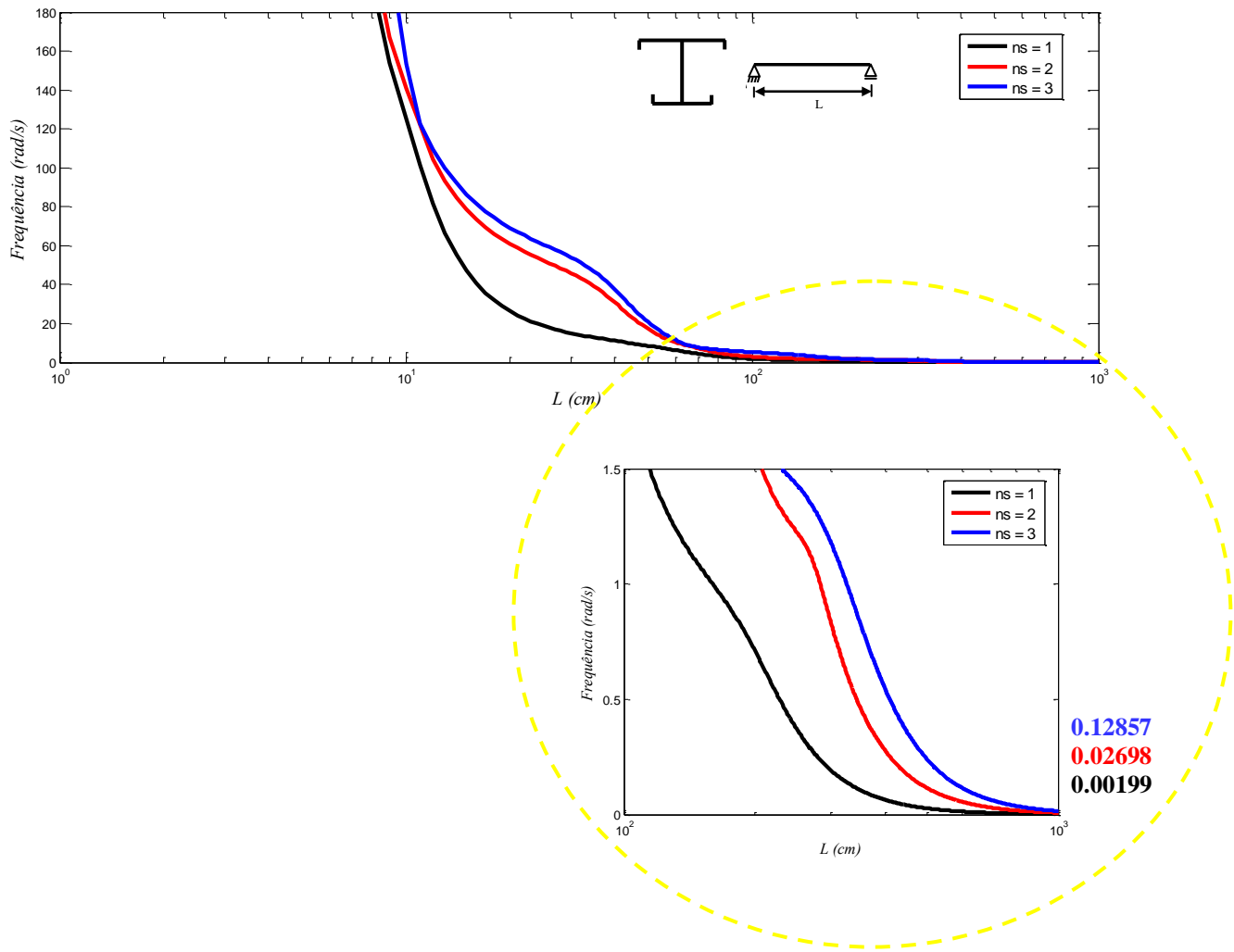


Fig. 4.25 – Vibração livre: variação da frequência com o comprimento ( $1 \leq n_s \leq 3$ )

Observa-se que:

- (i) À medida que o comprimento da barra aumenta, as curvas que traduzem as frequências decrescem monotonicamente, tendem a zero e praticamente tornam-se coincidentes no segmento final. As transições mais abruptas, que ocorrem para modos de ordem superior, associam-se a mudanças de natureza dos modos de vibração. As composições modais tornam-se mais complexas, revelando forte influência de alguns desses modos na configuração deformada da barra. A hipótese de indeformabilidade da seção no seu próprio plano permanece válida apenas para os modos de vibração mais baixos.



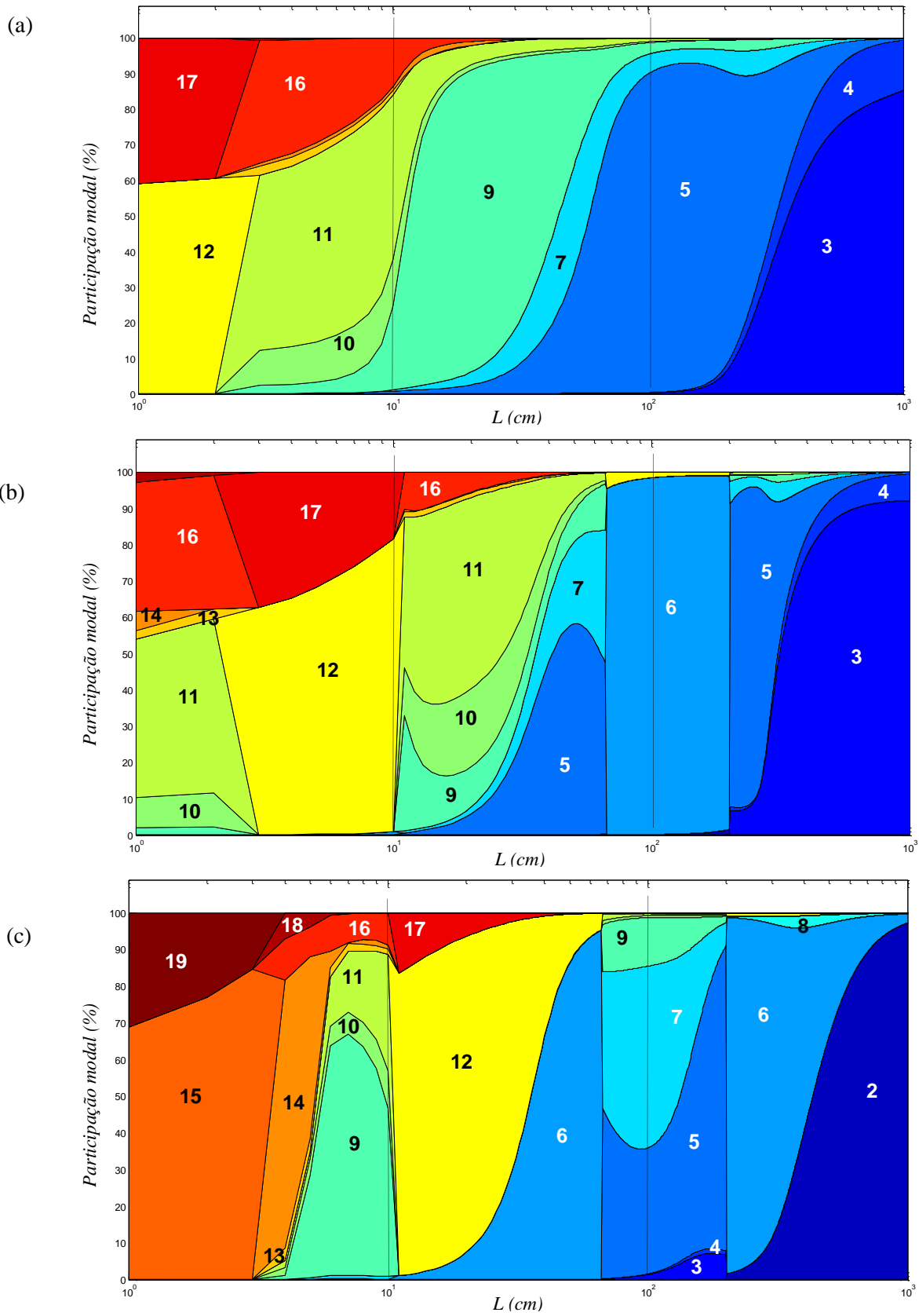


Fig. 4.26 – Participação modal: (a)  $n_s = 1$ . (b)  $n_s = 2$ . (c)  $n_s = 3$

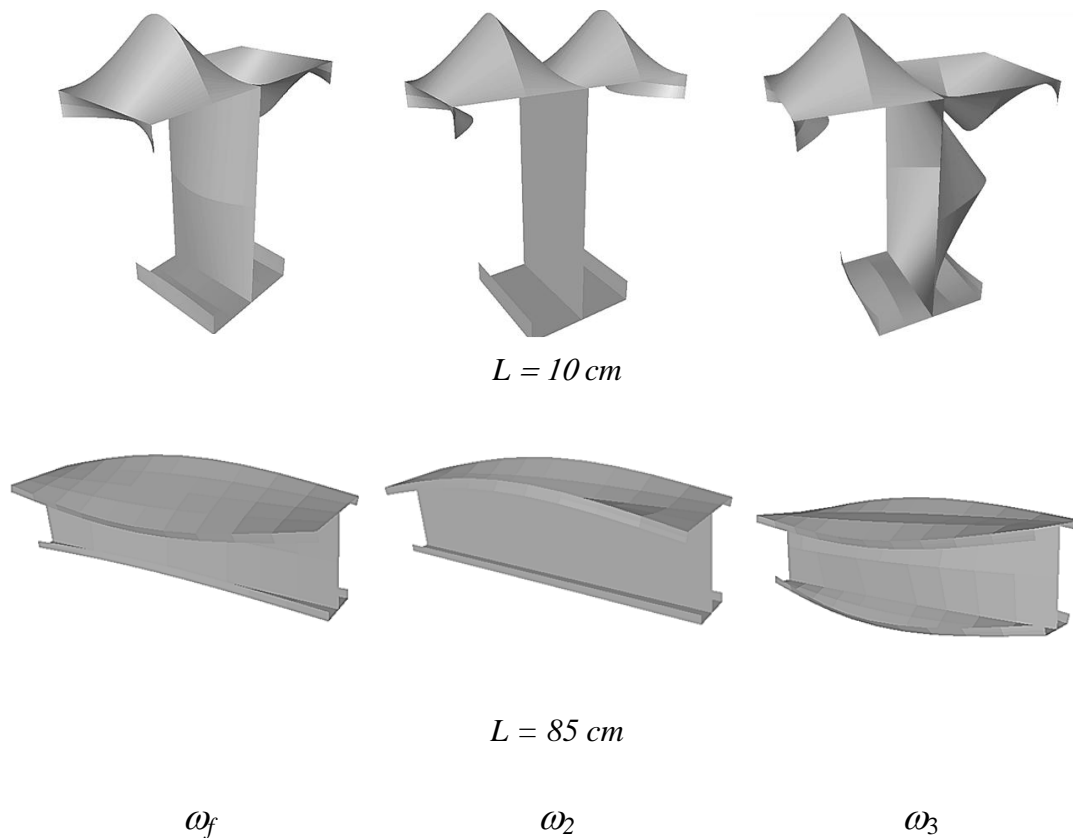


Fig. 4.27 – GBT: modos de vibração ( $1 \leq n_s \leq 3$ )

- (ii) Embora tenham sido utilizadas combinações de funções sinusoidais com  $1 \leq n_s \leq 3$ , observa-se que, diferentemente da estabilidade de colunas em que os modos críticos de instabilidade podem exibir várias semi-ondas, os modos fundamentais de vibração exibem sempre uma única semi-onda ( $n_s = 1$ ). Em razão disso, a curva relativa a todos os modos de vibração (Fig. 4.24 – a) e a referente à frequência natural de vibração  $\omega_f$  (associada a  $n_s = 1$ ) (Fig. 4.25) são iguais (Silvestre, 2005).
- (iii) A expressão analítica (Clough e Penzien, 1993) para determinação da frequência natural de vibração:

$$\omega_f = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_2}{\rho A}} \quad (4.25)$$

fornece para  $L = 1000 \text{ cm}$  o valor de  $\omega_f = 0.001994 \text{ rad/s}$ , perfeitamente coincidente com o resultado encontrado (Fig. 4.25).

- (iv) Os percentuais de participação modal para  $L = 1000 \text{ cm}$  e  $1 \leq n_s \leq 3$  estão indicados na Tabela 4.7.

**Tabela 4.7** – Participação modal ( $L = 1000 \text{ cm}$ )

<b>Modo</b>	$n_s = 1$	$n_s = 2$	$n_s = 3$
<b>2</b>	-	-	97.2432
<b>3</b>	85.2511	92.1249	-
<b>4</b>	14.0778	7.3653	-
<b>5</b>	0.5325	0.3930	-
<b>6</b>	-	-	2.4965
<b>7</b>	0.0936	0.0710	-
<b>8</b>	-	-	0.2199
<b>9</b>	0.0361	0.0303	-
<b>10</b>	0.0011	0.0009	-
<b>11</b>	0.0013	0.0102	-
<b>12</b>	-	-	0.0331
<b>13</b>	0.0006	0.0005	-
<b>14</b>	0.0051	0.0014	-
<b>15</b>	-	-	0.0036
<b>16</b>	0.0001	0.0024	-
<b>17</b>	0.0005	-	0.0028
<b>18</b>	-	0.0001	-
<b>19</b>	-	-	0.009

- (v) Conforme mostra a Fig. 4.26 – a, quando  $n_s = 1$ , as participações modais e o comportamento de vibração livre da barra são idênticos aos resultados fornecidos pela análise de estabilidade da coluna biapoçada submetida à compressão axial (Fig. 4.10). Em barras muito curtas ( $L \leq 10$  cm) predominam essencialmente modos locais de placa. Entre  $10 \leq L \leq 170$  cm destacam-se modos mistos (**MLPD**  $\equiv 11 + 9 + 7 + 5 + \text{outros}$ ). Para  $170 \leq L \leq 300$  cm, preponderam **MLPDF**  $\equiv 5 + 7 + \text{um pouco de } 9$ , com a crescente participação de **3 + 4**. Para  $300 \leq L \leq 850$  cm, predominam **MFTD**  $\equiv 3 + 4 + 5$ . Para  $L \geq 850$  cm, destaca-se praticamente o **MFT**  $\equiv 3 + 4$ .
- (vi) Com relação à Fig. 4.26 – b ( $n_s = 2$ ), para  $L \leq 30$  cm sobressaem os modos locais de placa. Entre  $30 \leq L \leq 65$  cm predominam modos distorcionais e locais de placa (**MLPD**  $\equiv 11 + 10 + 9 + 5 + 7$ ). Entre  $65 \leq L \leq 210$  cm prevalece o **MD**  $\equiv 6$ . Entre  $210 \leq L \leq 500$  cm, prepondera o modo **5** com a crescente participação de **3 + 4**. Para  $L \geq 500$  cm, prevalecem os modos de globais de flexo-torção (**MFT**  $\equiv 3 + 4$ ).
- (vii) Na Fig. 4.26 – c ( $n_s = 3$ ), os modos globais **3** e **4** praticamente deixam de participar dos modos de vibração. Para barras curtas, sobressai uma combinação de vários modos locais de placa (**MLP**  $\equiv 9$  a **19**). Entre  $30 \leq L \leq 65$  cm, governam modos mistos. Entre  $65 \leq L \leq 200$  cm, os modos mistos combinam características dos modos locais de placa, distorcionais e globais (**9 + 7 + 5 + 4 + 3**). Entre  $200 \leq L \leq 500$  cm, prevalece o **MD**  $\equiv 6 + 8$ . Para  $L \geq 500$  cm, destacam **MDF**  $\equiv 2 + 6 + 8$  com a tendência ao decréscimo da participação de **6** e **8** e incremento de **2** (97.25% para  $L = 1000$  cm).

#### 4.5.2.2 COLUNA BIAPOIADA SUBMETIDA À COMPRESSÃO AXIAL

Considerando que uma análise efetiva do comportamento dos elementos estruturais com seção transversal de parede fina deve levar em conta os carregamentos atuantes, analisa-se também o comportamento de vibração de uma coluna biapoçada

submetida à compressão axial ( $W_l \equiv N$ ) formada pelo mesmo perfil T. Utiliza-se o sistema de equações (expressão 4.9) para obter a solução exata do problema.

Os resultados contabilizam para diferentes percentuais de cargas de bifurcação ( $0 \leq N \leq 0.9 P_b$ ) associados a modos de instabilidade com uma única semi-onda ( $n_s = 1$ ) a variação da frequência com o comprimento da coluna ( $0 \leq L \leq 1000$  cm) (Fig. 4.28 – a). Nota-se que:

- (i) As curvas decrescem monotonicamente com o comprimento. Os afastamentos mais pronunciados são observados para os maiores níveis de compressão. O acréscimo do incremento de compressão provoca ainda decréscimos significativos nos valores das frequências que tendem para o modo crítico.
- (ii) Para  $N = 0$ , a curva respectiva corresponde à análise de vibração livre da barra (Fig. 4.26 – a). Em termos das matrizes da GBT, Silvestre (2005) comprova que essa afirmação pode ser verificada a partir da comparação entre a equação (4.26), válida para barras carregadas ( $N \neq 0$ ):

$$\left[ \mathbf{C}_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D}_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \mathbf{B}_{ik} \right] \mathbf{d} - \left( \frac{N}{\rho A} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \omega_{p.N}^2 \right) \mathbf{R}_{ik} \mathbf{d} = 0 \quad (4.26)$$

e a equação (4.27), empregada para barras não carregadas ( $N = 0$ ):

$$\left[ \mathbf{C}_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^4 + \mathbf{D}_{ik} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 + \mathbf{B}_{ik} \right] \mathbf{d} - \omega_p^2 \mathbf{R}_{ik} \mathbf{d} = 0 \quad (4.27)$$

Em decorrência, obtém-se a expressão (4.28) que permite correlacionar diretamente as frequências com o nível de compressão na coluna:

$$\omega_{p.N}^2 + \frac{N}{\rho A} \left( \frac{n_s \pi}{L} \right)^2 = \omega_p^2 \quad (4.28)$$

- (iii) Observa-se a coincidência existente entre os diagramas de participação modal para  $N = 0$  e  $N = 0.9 P_b$  (Fig. 4.28 – b).

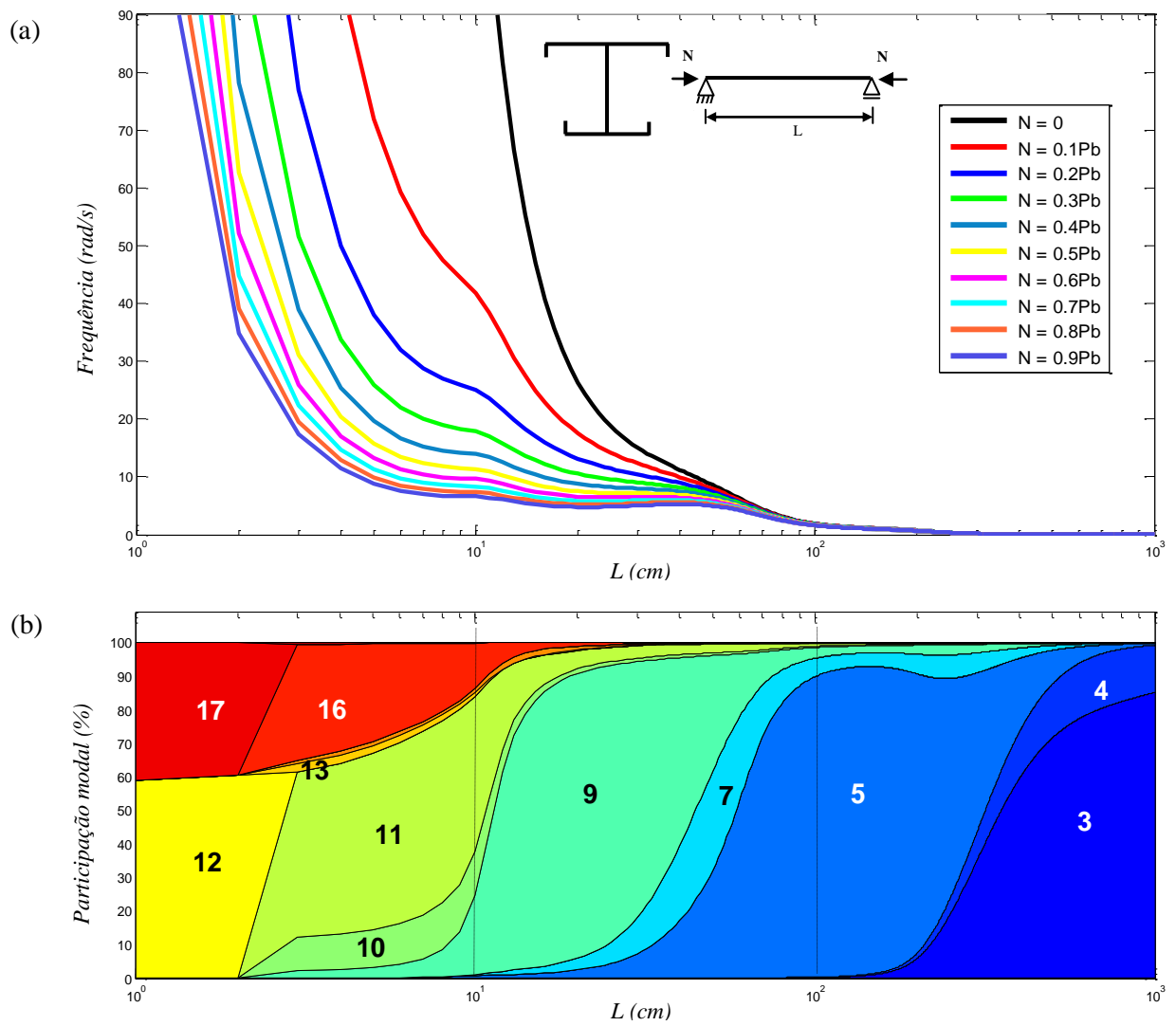


Fig. 4.28 – (a) Influência do nível de compressão no comportamento de vibração da coluna carregada. (b) Participação modal ( $n_s = 1$ ):  $N = 0$  e  $N = 0.9Pb$

# CAPÍTULO 5 – ESTUDOS PARAMÉTRICOS

## 5.1 INTRODUÇÃO

O campo de aplicação dos perfis formados a frio vem expandindo significativamente nos últimos anos, motivado em parte pelos avanços tecnológicos nos processos produtivos que otimizam a fabricação de chapas com conformações diferenciadas (a exemplo do UltraSteel<sup>®</sup> ou ProSTUD<sup>®</sup>) e seções transversais com tipologias geométricas inovadoras (*LiteSteel Beam* ou *Hollow Flanges Sections*).

O emprego de elementos estruturais constituídos por seções compostas (formadas pela associação de dois ou mais perfis), quando um único perfil é insuficiente para suportar o carregamento a ser aplicado, é usual. Notadamente, essa solução reúne múltiplas vantagens, principalmente por aumentar a rigidez da estrutura e melhorar a resistência a deslocamentos fora do plano da seção. No entanto, as combinações comumente recaem nas seções transversais convencionais, de séries comerciais (cantoneiras, *U*, *Ue*, *Z*, *Ze* ou cartola), com opção preferencial pelos perfis *I* ou *Ie*. Apesar do vasto potencial, o uso de seções compostas com geometrias complexas (abertas ou fechadas, ramificadas ou não) envolve ainda muitas incertezas, visto que as normatizações apresentam limitações, não conseguindo abarcar toda a vasta gama de geometrias que se pode combnar e as peculiaridades que as envolvem. Em razão disso, as prescrições normativas quase sempre se mostram bastante conservadoras (Jeyaragan, 2009; Magnucka-Blandzi, 2011; Mansour, 2012; Pham *et al.*, 2012; Haidarali e Nethercot, 2012a, b; Georgieva *et al.*, 2012c).

Um exemplo de uso consagrado de seções compostas são os painéis enrijecidos. Em superestruturas modernas de pontes e viadutos, em especial para vencer grandes vãos ou em situações em que seja importante maximizar a esbeltez e obter estruturas leves e bastante resistentes, a solução construtiva recai na utilização de tabuleiros em caixão mistos ou inteiramente em aço formando uma placa ortotrópica. Para reduzir problemas associados à instabilidade, utilizam-se seções transversais em caixão (único ou múltiplo) formadas por painéis enrijecidos. Uma série de incidentes ocorridos na década de 1970 em diferentes etapas construtivas de pontes com tabuleiros metálicos

em caixão suscitou importantes investigações sobre o comportamento de flambagem desses elementos que resultaram na implantação de novas regras de dimensionamento. Ainda assim, para estimar a resistência estrutural dos painéis enrijecidos, a aplicabilidade das prescrições normativas (BS 5400–3:2000; DIN 18800–3:1990; RPM–95:1996; AASHTO–LRFD–BDS:2007; EN 1993–1–5:2006) ou de métodos analíticos e empíricos (Herzog, 1987; Paik e Thayamballi, 1997; Paik *et al* 2008) é limitada no que concerne a condições de contorno, propriedades do material, tipologias dos enrijecedores e comportamento pós-flambagem, persistindo ainda algumas inconsistências que podem conduzir a resultados imprecisos e desfavoráveis em relação à segurança (Chujutalli, 2010; Rivera, 2011; Ferreira, 2011; Paulo, 2011; Araújo, 2012; Guerreiro, 2012; Brubak *et al.*, 2013).

Por esses motivos, a busca por novas soluções, economicamente viáveis e seguras, requer certamente o desenvolvimento de mais pesquisas na área. Na literatura consultada (subseções 5.2.1, 5.3.1 e 5.4), a maioria dos trabalhos se vale do Método dos Elementos Finitos, Método das Faixas Finitas e/ou Método das Diferenças Finitas para analisar painéis enrijecidos, seções compostas e bi-vigas. Essa constatação motivou o desenvolvimento deste capítulo, que visa a estender o domínio de aplicação da GBT a seções compostas, abertas e ramificadas, com geometrias diferenciadas, bem como reforçar sua competitividade para analisar elementos estruturais, para os quais rotineiramente se empregam métodos numéricos e/ou testes experimentais. É indubitável que as vantagens propiciadas pela GBT em identificar modos de deformação, isolar modos críticos e determinar a participação modal fornecem perspectivas de avanços ainda mais significativos em projetos, aplicações e análises dessas estruturas de parede fina, constituindo um vasto campo de investigação a ser explorado.

No presente capítulo, realizam-se estudos paramétricos recorrendo à formulação da GBT, especialmente desenvolvida para seções transversais de parede fina abertas ramificadas (**Capítulo 3**), para investigar a partir de análises de estabilidade o comportamento de:

- (i) painéis reforçados longitudinalmente por enrijecedores em T, L e barra (I) submetidos a carregamento de compressão axial, para os quais se avaliam diferentes parâmetros, obtidos da análise estatística de dados reais, coletados



por Ferreira (2011), com base em um levantamento feito sobre pontes metálicas com viga em caixão construídas na União Europeia (seção 5.2).

- (ii) colunas biapoiadas formadas por seções compostas com geometria não convencional, constituída por perfis *Ue* duplos e opostos, para as quais se investiga como a presença de enrijecedores em forma de V dispostos na ligação das mesas com a alma afeta a maximização da resistência à compressão e exerce influência nos modos de instabilidade. Os resultados são comparados com os de uma seção composta tradicional do tipo *Ie* (seção 5.3).
- (iii) bi-vigas de pontes mistas rodoviárias de pequenos vãos submetidas à flexão em torno do eixo de maior inércia, constituídas por duas vigas metálicas em I assimétricas e tabuleiro em concreto, cujos dados geométricos são fornecidos por Ferraz (2009) (seção 5.4).

Uma breve consideração sobre cada tipo de seção a ser estudada, seguida de revisão da literatura, precede a apresentação dos resultados das análises, que fornecem:

- (i) a variação das cargas de bifurcação com o comprimento dos elementos estruturais.
- (ii) os diagramas de participação modal.
- (iii) os modos de instabilidade característicos, ressaltando as transições observadas entre eles de forma isolada e suas interações.

Para fins de validação, conferem-se os resultados obtidos via GBT com os fornecidos pelo CUFISM v.3.1.

## 5.2 PAINEIS ENRIJECIDOS

Os painéis enrijecidos são componentes estruturais leves, constituídos por elementos de paredes finas, formados basicamente por uma placa de base, geralmente reforçada por enrijecedores paralelos na direção longitudinal, dispostos com espaçamentos iguais entre si e apoiados em elementos estruturais de maior rigidez como reforços transversais intermediários e longarinas, os quais contribuem substancialmente para incrementar a resistência, a rigidez e a estabilidade do conjunto (Fig. 5.1).

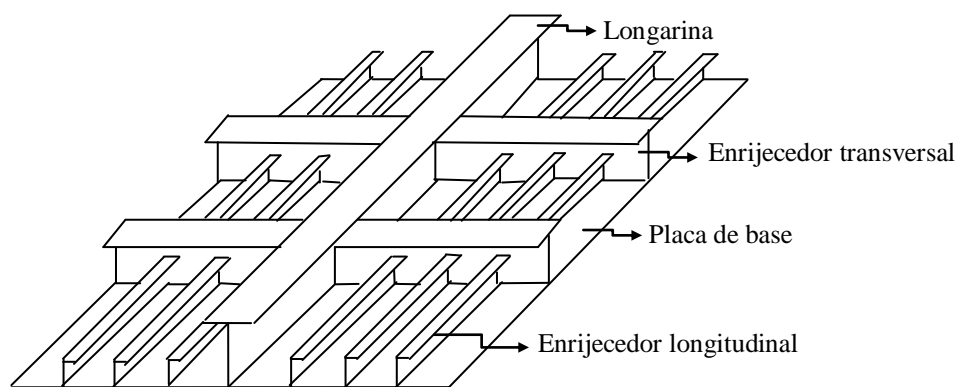


Fig. 5.1 – Seção transversal típica de um painel enrijecido (Byklum e Amdahl, 2002)

Em razão da eficiência estrutural, os painéis enrijecidos são parte integrante de vários sistemas estruturais: *offshore*, oceânicos, aeroespaciais, industriais, silos e tanques, elevados, viadutos, passarelas e pontes (Fig. 5.2).

(a)



(b)

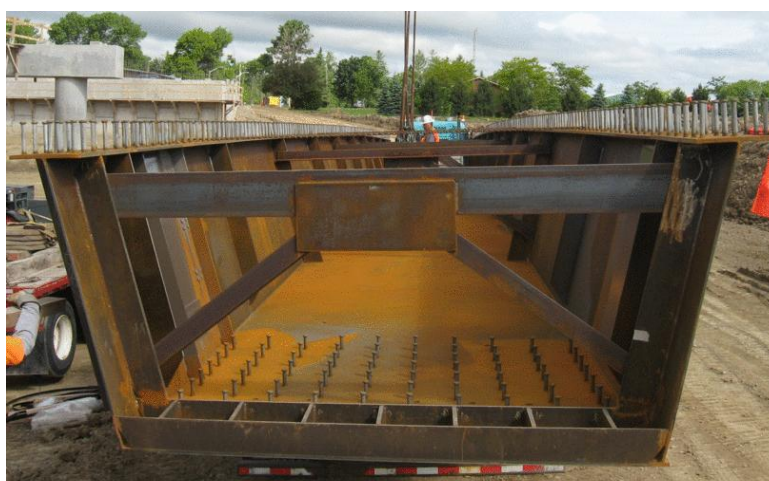


Fig. 5.2 – Seção transversal em caixão: (a) Ferreira (2011). (b) [www.mto.gov.on.ca](http://www.mto.gov.on.ca)

Em vigas-caixão da superestrutura de pontes e viadutos com grandes vãos, sobretudo largos ou em curvatura, as razões para o emprego dos painéis enrijecidos deve-se à maior precisão nos processos construtivos, rapidez de execução, possibilidade de se usar a mesa superior como laje do tabuleiro, maior resistência a momentos fletores conferida pela adoção da mesa inferior geralmente mais larga, eficiência estrutural particularmente em relação à grande resistência à torção e ao comportamento aerodinâmico, facilidade de manutenção, aproveitamento do espaço interior para passagem de serviços, alta resistência à corrosão, aspectos estéticos, dentre outros.

Os componentes de um tabuleiro misto em caixão estão ilustrados na Fig. 5.3.

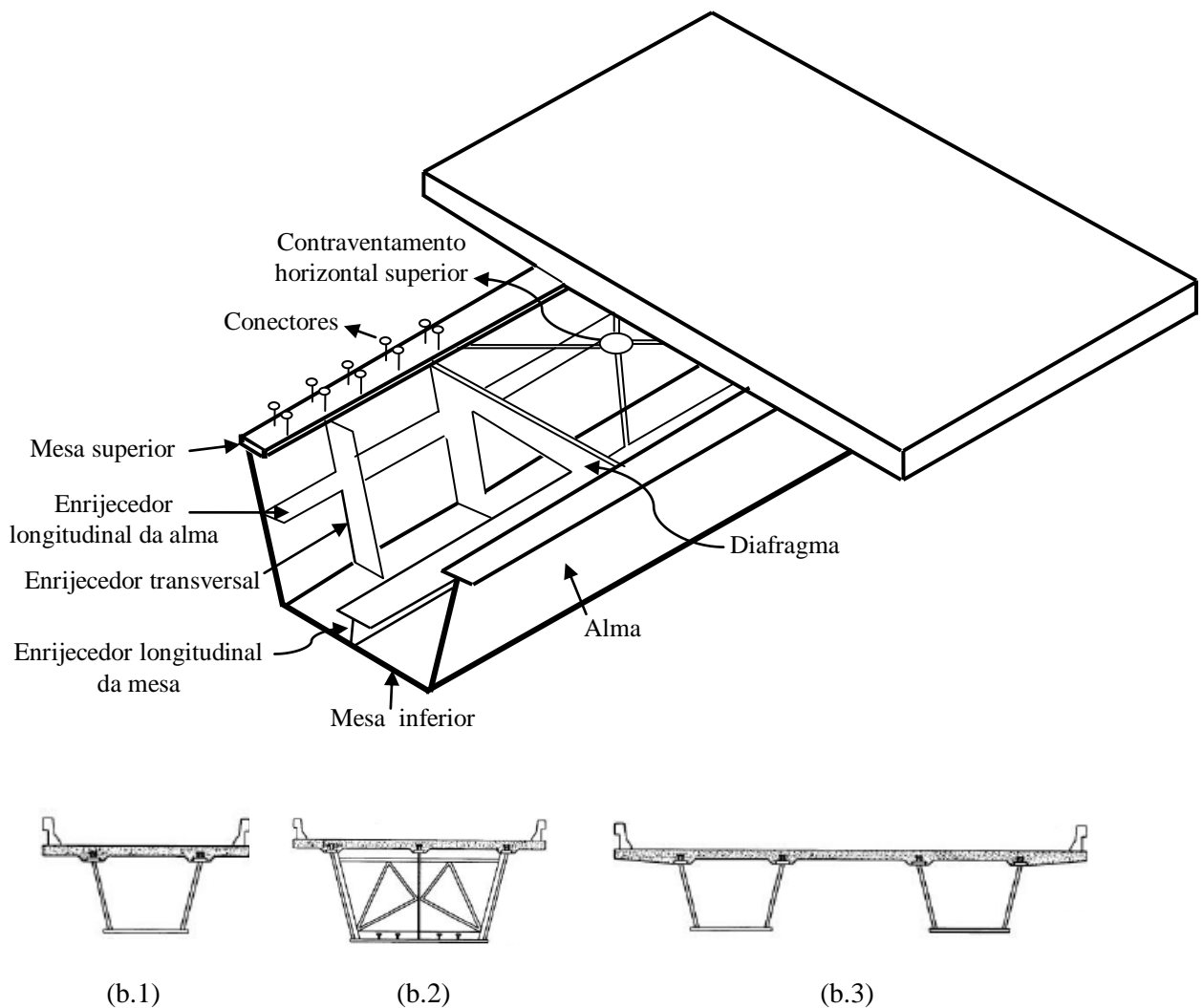


Fig. 5.3 – (a) Tabuleiro misto em caixão. Seção: (b.1) Unicelular. (b.2) Multicelular. (b.3) Múltiplo (Mendes, 2010)

### 5.2.1 REVISÃO DA LITERATURA

O comportamento estrutural dos painéis enrijecidos sob condições específicas de carregamento e de contorno tem sido objeto de diversos estudos:

- (i) Winter (1947): desenvolvimento de expressões analíticas para estudo da resistência de placas e painéis enrijecidos sujeitos a carregamentos atuando no plano da seção.
- (ii) Timoshenko e Gere (1961): estudo dos mecanismos de flambagem de painéis enrijecidos.
- (iii) Faulkner (1975): estudo analítico para obter a carga crítica de flambagem de painéis com enrijecedores do tipo T e barra.
- (iv) Smith (1975) e Murray (1986): realização de testes em escala real de painéis enrijecidos soldados.
- (v) Carlsen (1980): estudo paramétrico de painéis com enrijecedores em forma de T sob carregamento uniaxial pelo Método das Diferenças Finitas.
- (vi) Smith (1991): estudo da magnitude das imperfeições iniciais e tensões residuais nos painéis enrijecidos, estabelecendo níveis de classificação dos efeitos em leves, médios e graves.
- (vii) Hu *et al.* (1993): utilização do Método dos Elementos Finitos para modelar painéis enrijecidos sob diferentes tipos de carregamentos e condições de contorno com a finalidade de avaliar para as normas de projetos existentes o modo de flambagem lateral-torsional.
- (viii) Ghavami (1994): realização de testes em painéis enrijecidos com extremidades simplesmente apoiadas sob compressão uniaxial, utilizando como enrijecedores perfis do tipo barra (I), L e T em disposição única ou múltipla, no sentido transversal e longitudinal.
- (ix) Hughes *et al.* (1996): apresentação de expressões para o cálculo de tensões críticas para diferentes modos de flambagem.
- (x) Hu *et al.* (1997): ensaio de painéis enrijecidos em escala real sob compressão uniaxial e flexão.
- (xi) Paik *et al.* (1998): emprego do Método dos Elementos Finitos para analisar o comportamento para grandes deflexões elastoplásticas de painéis com enrijecedores do tipo barra sob compressão axial.

- (xii) Grondin *et al.* (1999): estudo paramétrico para determinação das condições de falha por *tripping* dos enrijecedores do tipo T sob esforços de compressão e carregamentos distintos (compressão e flexão).
- (xiii) Byklum e Amdahl (2002): análises não lineares de flambagem e pós-flambagem de painéis enrijecidos de aço e alumínio.
- (xiv) Sheikh *et al.* (2003): estudo de variáveis geométricas, material, carga e deformação que afetam o comportamento e a carga crítica de flambagem de painéis enrijecidos.
- (xv) Grondin *et al.* (2006): realização de testes experimentais em painéis com enrijecedores tipo T em escala real. Validação das análises numéricas com modelos de elementos finitos.
- (xvi) Orozoco (2009): análises comparativas entre o Método da Chapa Ortotrópica e o Método dos Elementos Finitos para estudo de painéis enrijecidos submetidos a carregamentos lateralmente uniformes presentes em estruturas navais.
- (xvii) Cardoso (2009): análise de um silo metálico de aço com o propósito de verificar a resistência e a importância da incorporação de enrijecedores com a finalidade de aprimorar o desempenho estrutural.
- (xviii) Chutjutalli (2010): estudo da flambagem torsional de enrijecedores em painéis de navios-tanques submetidos à compressão axial.
- (xix) Oliveira (2010): modelagem e simulação numérica em painéis enrijecidos, que compõem a fuselagem de aeronaves, sujeitos à compressão.
- (xx) Taisi (2010): investigação sobre como a espessura e a localização dos enrijecedores influenciam a carga crítica de flambagem de painéis enrijecidos submetidos à compressão axial.
- (xxi) Ruela (2010): estudo comparativo da flambagem de painéis reforçados utilizando ligações rebitadas e soldadas por fricção.
- (xxii) Rivera (2011): análise da carga de flambagem e modos de falha de uma chapa reforçada de uso naval submetida a diferentes temperaturas utilizando o MEF e parâmetros adimensionais.

- (xxiii) Amante *et al.* (2011): estudo das imperfeições de fabricação apresentadas na forma de tensões residuais e distorções em estruturas oceânicas.
- (xxiv) Paulo (2011): simulação numérica do comportamento mecânico de estruturas reforçadas em alumínio com o emprego do MEF.
- (xxv) Ferreira (2011): estudo numérico, experimental e analítico que permitiu identificar os parâmetros que influenciam a resposta e a resistência de painéis enrijecidos e analisar as lacunas existentes nas regras de dimensionamento nas normas europeia (EN 1993-1-5:2006) e americana (AASHTO-LRFD-BDS:2007).
- (xxvi) Benson (2011): estudo dos mecanismos de colapso de painéis enrijecidos em alumínio usados como componentes estruturais navais.
- (xxvii) Guerreiro (2012): estudo da resistência estrutural de painéis enrijecidos do convés de um navio que sofreu deformações em serviço via MEF.
- (xxviii) Araújo (2012): estudo comparativo de painéis enrijecidos em liga de alumínio ou em aço de construção naval, dimensionados para idêntica capacidade de carga.
- (xxix) Brubak *et al.* (2013): utilização do método semi-analítico para análise de painéis enrijecidos sob diferentes condições de contorno e dimensões de placa e enrijecedores.

### **5.2.2 FENÔMENOS DE INSTABILIDADE**

O comportamento estrutural dos painéis enrijecidos é relativamente complexo. Quando submetido predominantemente a esforços de compressão, atuando na direção longitudinal paralela aos enrijecedores, um painel enrijecido pode exibir uma variedade de modos de instabilidade que podem atuar de forma isolada ou combinada entre si.

Para fins de sistematização, os fenômenos de instabilidade classificam-se como de natureza *global* (caracterizados pela flambagem simultânea da placa e do enrijecedor como num todo) ou *local* (associados a diversas formas de flambagem isolada que podem ocorrer no enrijecedor ou na placa entre os enrijecedores). Distinguem-se:

- (i) *instabilidade global induzida pela placa entre enrijecedores*: predominante em painéis com placa e enrijecedores demasiadamente esbeltos que flambam integralmente em conjunto, permanecendo os enrijecedores no lado convexo da placa (Fig. 5.4 – a).
- (ii) *instabilidade global induzida pelo enrijecedor*: caracterizada pela flambagem de um enrijecedor demasiadamente esbelto juntamente com uma placa robusta, permanecendo o enrijecedor no lado côncavo da placa (Fig. 5.4 – b).
- (iii) *instabilidade local da placa entre enrijecedores* (Fig. 5.4 – c): preponderante em painéis com enrijecedores significativamente mais rígidos que permanecem indeformados até que a placa entre eles flambe localmente, sem que haja movimento das interseções dos elementos constituintes do painel.
- (iv) *instabilidade local da alma do enrijecedor*: impera em enrijecedores que possuem valores elevados para o quociente altura e espessura da alma.
- (v) *instabilidade local do flange do enrijecedor*: ocorre em enrijecedores com dimensões inadequadas das mesas.
- (vi) *instabilidade lateral-torsional do enrijecedor (tripping)*: predominante em painéis com enrijecedores com elevada rigidez à flexão e baixa rigidez à torção. O flange tende a flambar localmente, mas como o enrijecedor está fixado à placa, ocorre sua rotação em relação à linha de ligação com a placa, resultando numa configuração final fora do seu plano original, em que o enrijecedor se distorce em consonância com a placa (Cardoso, 2009) (Fig. 5.4 – d).

As curvas que traduzem o comportamento estrutural típico de um painel enrijecido para modos de instabilidade distintos (Fig. 5.5) mostram que, mesmo depois de ter ocorrido a flambagem global no regime elástico, o painel ainda consegue suportar cargas adicionais até atingir a resistência máxima.

Na instabilidade local da placa, ocorre numa redistribuição de carga da placa para os enrijecedores, o que resulta num comportamento da curva carga-deformação similar

ao da instabilidade global, observando-se um maior decréscimo de carga à medida que a deformação aumenta.

Ao contrário de outros modos, a curva relativa à instabilidade lateral-torsional do enrijecedor evidencia como ocorre de forma repentina a perda da capacidade resistente do painel após atingir o valor máximo de carga. O enrijecedor perde totalmente sua rigidez, transferindo para a placa a responsabilidade de suportar toda a carga atuante, situação grave que acarreta o comprometimento da integridade do painel e pode levá-lo abruptamente ao colapso (Guerreiro, 2012).

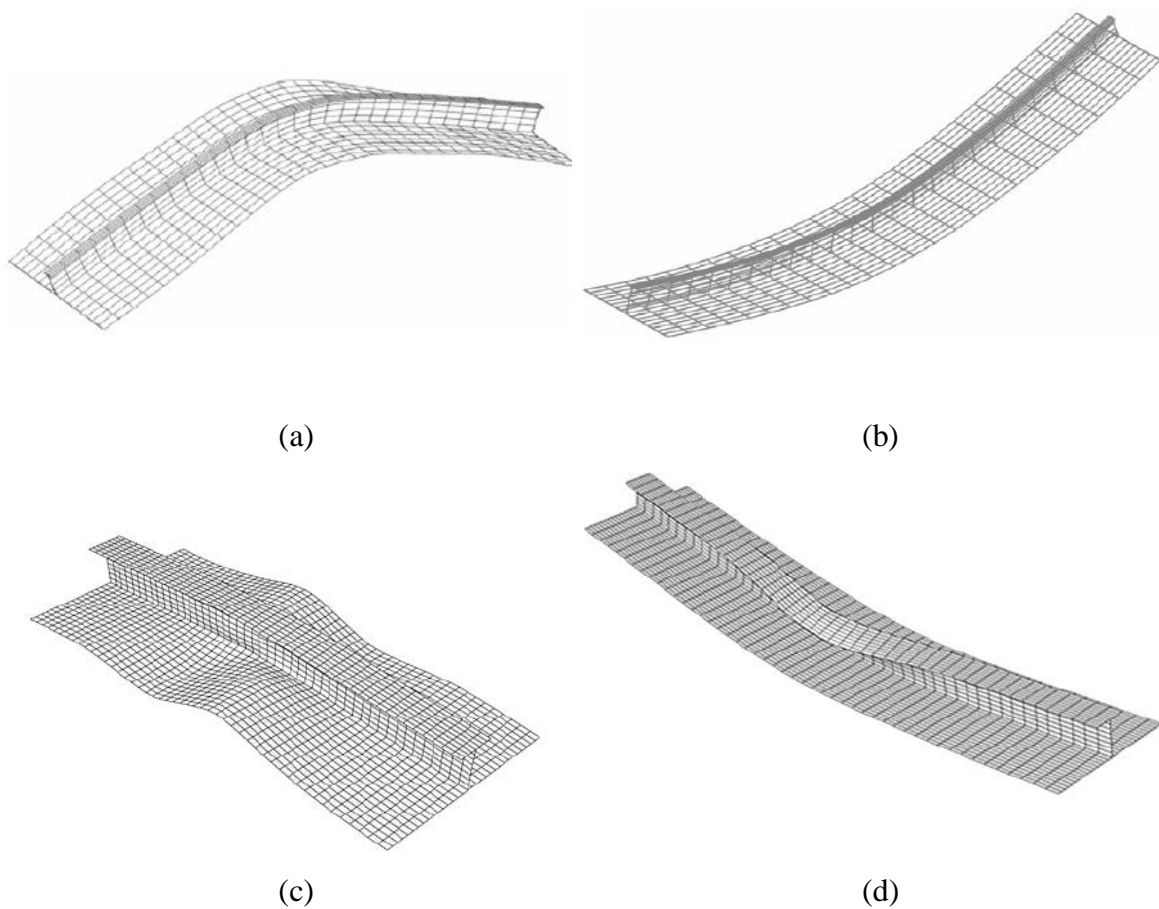


Fig. 5.4 – Configuração dos principais modos de instabilidade de painéis enrijecidos: (a) global induzida pela placa. (b) global induzida pelo enrijecedor. (c) local da placa. (d) lateral-torsional do enrijecedor (Wang *et. al*, 2006)



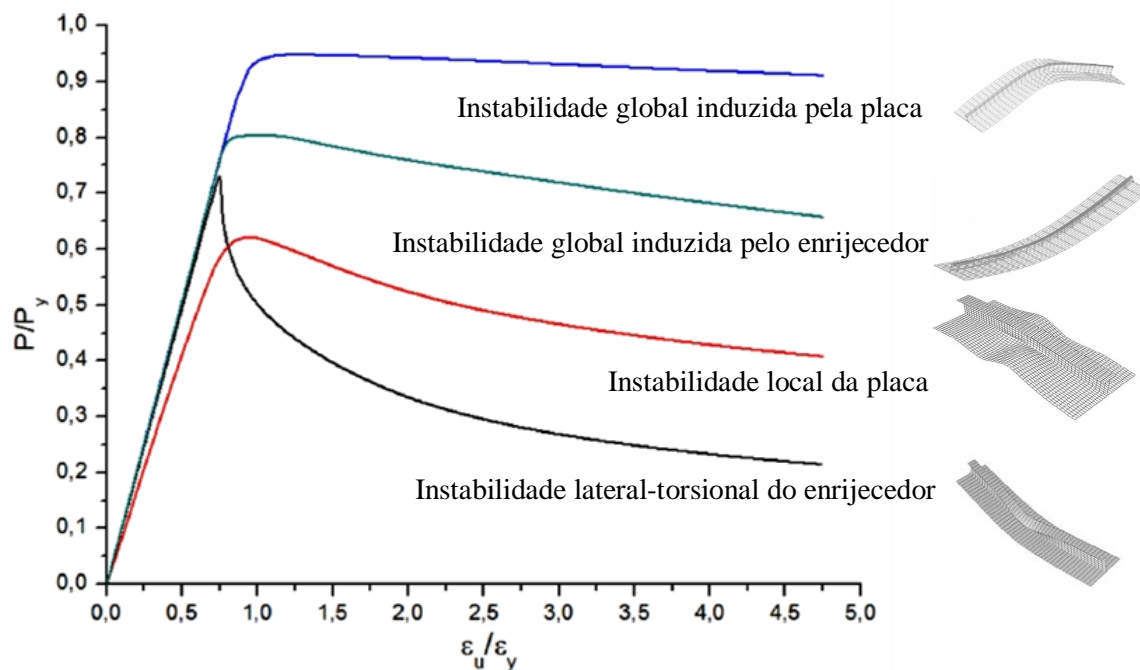


Fig. 5.5 – Diagrama de carga  $\times$  deformação para modos distintos de instabilidade (adaptado de Rivera, 2011)

### 5.2.3 PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS

A configuração geométrica (dimensões, comprimentos e espessuras da placa e enrijecedores) (Fig. 5.6), propriedades mecânicas do material (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e tensão de escoamento), condições de contorno, carregamento e imperfeições geométricas iniciais geradas durante o processo de fabricação exercem considerável influência nos fenômenos de instabilidade e de colapso de um painel enrijecido.

O conjunto de parâmetros propostos para diferentes relações geométricas de enrijecedores e placas, os quais servem para subsidiar os modelos estruturais estudados neste capítulo, tem como referencial o trabalho de Ferreira (2011), que reuniu uma coletânea de dados, num total de 29 amostras, em artigos técnicos sobre painéis enrijecidos de superestruturas de pontes com viga-caixão em aço construídas na União Europeia. As variáveis:

- (i) comprimento longitudinal do painel enrijecido:  $a$
- (ii) comprimento transversal do painel enrijecido:  $b$

- (iii) espessura da placa de base do painel enrijecido:  $t_p$
- (iv) largura da placa de base (medida entre os enrijecedores):  $b_p$
- (v) largura do flange do perfil do enrijecedor:  $b_f$
- (vi) espessura do flange do perfil do enrijecedor:  $t_f$
- (vii) altura da alma do perfil do enrijecedor:  $h_w$
- (viii) espessura da alma do perfil do enrijecedor:  $t_w$

permitem definir os seguintes parâmetros adimensionais:

- (i) esbeltez da placa entre enrijecedores:  $\lambda_{pl} = b/t_p$
- (ii) esbeltez do painel:  $\lambda_p = b_p/t_p$
- (iii) esbeltez do enrijecedor:  $\lambda_{st} = h_w/t_w$
- (iv) esbeltez do flange:  $\lambda_f = b_f/t_f$
- (v) razão entre as áreas do enrijecedor ( $A_{st}$ ) e da placa:  $r_a = A_{st}/(bt_p)$

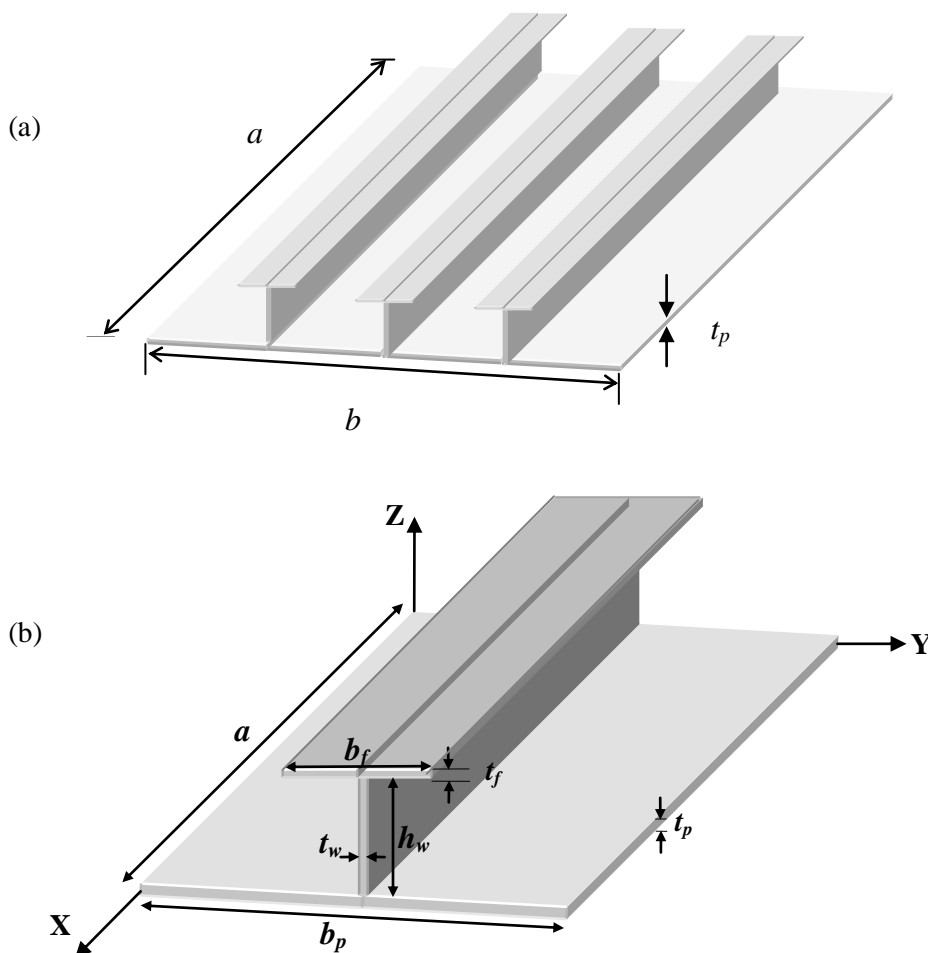


Fig. 5.6 – Painel enrijecido: (a) Dimensões geométricas. (b) Seção transversal

Neste trabalho, analisam-se painéis com enrijecedores com seções transversais em forma de I (também designado por barra ou lâmina), L (cantoneira ou ângulo) e T (Fig. 5.7).

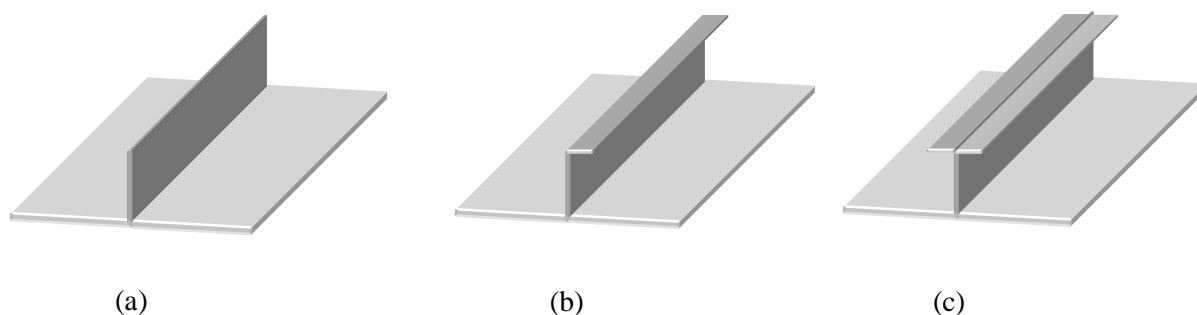


Fig. 5.7 – Tipologia dos enrijecedores: (a) Seção em I. (b) Seção em L. (c) Seção em T

**Tabela 5.1 – Dimensões geométricas**

<b>Painel</b>	<b>PLACA</b>				<b>ENRIJECEDOR</b>			
	<i>a</i> (cm)	<i>b</i> (cm)	<i>t<sub>p</sub></i> (cm)	<i>b<sub>p</sub></i> (cm)	<i>h<sub>w</sub></i> (cm)	<i>t<sub>w</sub></i> (cm)	<i>b<sub>f</sub></i> (cm)	<i>t<sub>f</sub></i> (cm)
<b>SP1</b>	90-900	180	2.0	90	9.4	2.0	26.6	2.0
<b>SP2</b>	90-900	180	3.0	90	15.3	3.0	20.7	3.0
<b>SP3</b>	90-900	180	2.0	60	10.6	1.6	11.9	1.6
<b>SP4</b>	90-900	180	1.2	45	7.6	1.0	5.7	1.2
<b>SP5</b>	90-900	180	1.2	45	3.8	1.2	19.6	1.6
<b>SP6</b>	90-1080	180	1.2	45	6.2	1.2	17.9	1.6
<b>SP7</b>	90-1440	180	1.2	45	10.9	1.2	9.2	2.5
<b>SP8</b>	90-1800	180	1.2	45	15.8	0.8	8.0	3.0
<b>SP9</b>	90-900	180	2.0	45	6.6	1.0	26.7	2.0
<b>SP10</b>	90-900	180	2.0	45	5.3	1.6	39.8	2.2
<b>SP11</b>	90-900	180	1.2	30	4.0	0.8	15.3	1.2
<b>SP12</b>	90-900	180	1.2	30	6.9	1.2	11.1	1.2

Fonte: Ferreira (2011)

**Tabela 5.2 – Parâmetros adimensionais**

<b>Painel</b>	$\lambda_{plt}$ ( $b/t_p$ )	$\lambda_p$ ( $b_p/t_p$ )	$\lambda_{st}$ ( $h_w/t_w$ )	$\lambda_f$ ( $b_f/t_f$ )	$r_a$ ( $A_{st}/bt_p$ ) (Enrijecedor T)
<b>SP1</b>	90	45	4.7	13.3	0.2
<b>SP2</b>	60	30	5.1	6.9	0.2
<b>SP3</b>	90	30	6.6	7.4	0.1
<b>SP4</b>	150	37.5	7.6	4.8	0.1
<b>SP5</b>	150	37.5	3.2	12.3	0.2
<b>SP6</b>	150	37.5	5.2	11.2	0.2
<b>SP7</b>	150	37.5	9.1	3.7	0.2
<b>SP8</b>	150	37.5	19.8	2.7	0.2
<b>SP9</b>	90	22.5	6.6	13.4	0.2
<b>SP10</b>	90	22.5	3.3	18.1	0.3
<b>SP11</b>	150	25	5.0	12.8	0.1
<b>SP12</b>	150	25	5.8	9.3	0.1

#### 5.2.4 MODELO ESTRUTURAL

A existência de um plano de simetria segundo a direção longitudinal de um painel enrijecido sujeito à compressão permite que seja modelada apenas metade desse comprimento, ou seja, uma faixa que corresponde a uma placa de comprimento  $b_p$  e espessura  $t_p$  com um enrijecedor centralizado (Fig. 5.8).

Dessa forma, a resposta em cada subpainel é igual, o que contribui para reduzir significativamente o esforço computacional (Guerreiro, 2012; Araújo, 2012).

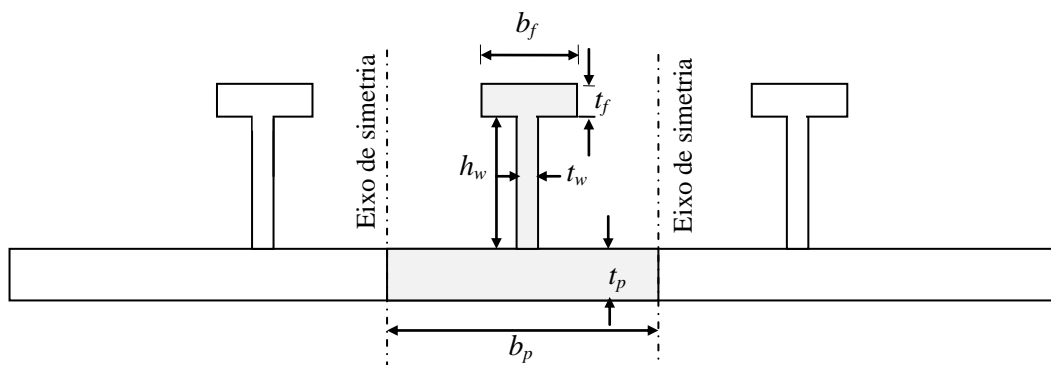


Fig. 5.8 – Modelo estrutural: painel com enrijecedores em T (Rivera, 2011)

Para simular de forma mais realística o comportamento de um painel enrijecido sujeito à carga de compressão atuando na direção  $x$ , de acordo com o sistema de referência global de eixos adotado ( $X$ - $Y$ - $Z$ ) (Fig. 5.9), é suficiente considerar como condições de contorno que as bordas carregadas estejam simplesmente apoiadas e as demais bordas livres por não receberem nenhum tipo de carregamento. De acordo com Paik *et al.* (2008), Ferreira (2011), Guerreiro (2012) e Brubak *et al.* (2013), a imposição de um menor número de restrições apresenta melhor correlação inclusive com resultados de testes experimentais, produzindo efeitos mais conservadores em favor da segurança por resultar numa avaliação excessiva das flechas e tensões induzidas na chapa em função de serem inseridas menos restrições.

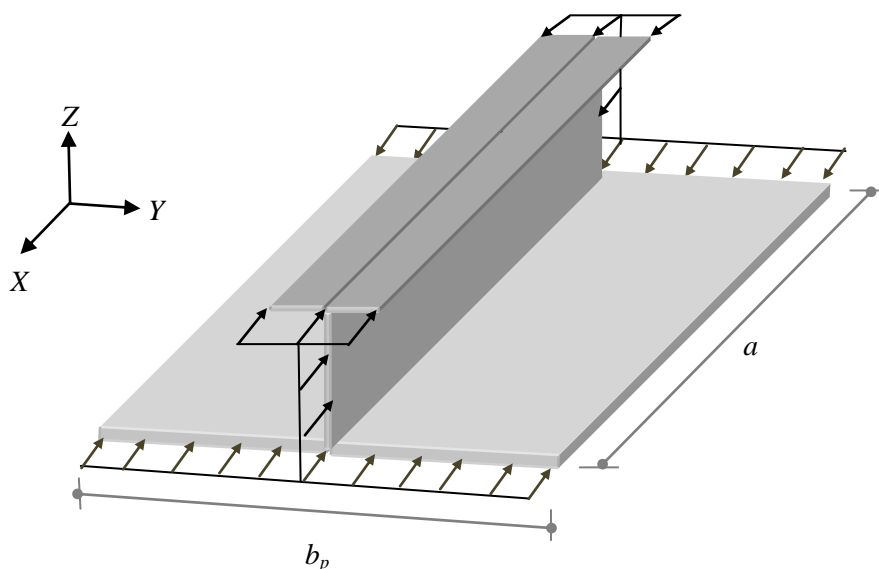


Fig. 5.9 – Painel enrijecido em T submetido à compressão axial

### 5.2.5 ANÁLISES DE ESTABILIDADE E RESULTADOS

Com o propósito de averiguar quais fatores governam o comportamento estrutural de painéis enrijecidos submetidos à compressão axial e influem nos modos de instabilidade, efetuam-se estudos paramétricos. Procede-se a um total de 36 análises de estabilidade de cada um dos modelos representativos de painéis com enrijecedores em T, L e barra (I), designados respectivamente por **SP1-T**, **SP1-L**, **SP1-I**,... **SP12-T**, **SP12-L**, **SP12-I**, cujas dimensões geométricas são indicadas na Tabela 5.1. Consideram-se modos de instabilidade com configurações sinusoidais (solução exata), exibindo um único semi-comprimento de onda ( $n_s = 1$ ) e aço estrutural com as seguintes propriedades mecânicas:  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0.3$  e  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. Posteriormente, objetivando uma análise conjunta dos parâmetros adimensionais (Tabela 5.2), agrupam-se os modelos representativos em:

- (i) **GRUPO 1:** esbeltez da placa entre enrijecedores ( $\lambda_{plt}$ )
  - (a) SP2:  $\lambda_{plt} = 60$
  - (b) SP1, SP3, SP9 e SP10:  $\lambda_{plt} = 90$
  - (c) SP4, SP5, SP6, SP7, SP8, SP11 e SP12:  $\lambda_{plt} = 150$
- (ii) **GRUPO 2:** esbeltez do painel ( $\lambda_p$ )
  - (a) SP9 e SP10:  $\lambda_p = 22.5$
  - (b) SP11 e SP12:  $\lambda_p = 25$
  - (c) SP2 e SP3:  $\lambda_p = 30$
  - (d) SP4, SP5, SP6, SP7 e SP8:  $\lambda_p = 37.5$
  - (e) SP1:  $\lambda_p = 45$
- (iii) **GRUPO 3:** razão das áreas do enrijecedor e da placa ( $r_a$ )
  - (a) SP3, SP4, SP11 e SP12:  $r_a = 0.1$
  - (b) SP1, SP2, SP5, SP6, SP7, SP8 e SP9:  $r_a = 0.2$
  - (c) SP10:  $r_a = 0.3$

Em função da discretização nodal adotada na *análise da seção*, em que se arbitram três nós intermediários em cada placa, ilustram-se as principais representações

das configurações deformadas dos modos individuais *no plano* (Fig. 5.10, 5.11 e 5.12) e *fora do plano da seção* (Fig. 5.13, 5.14 e 5.15).

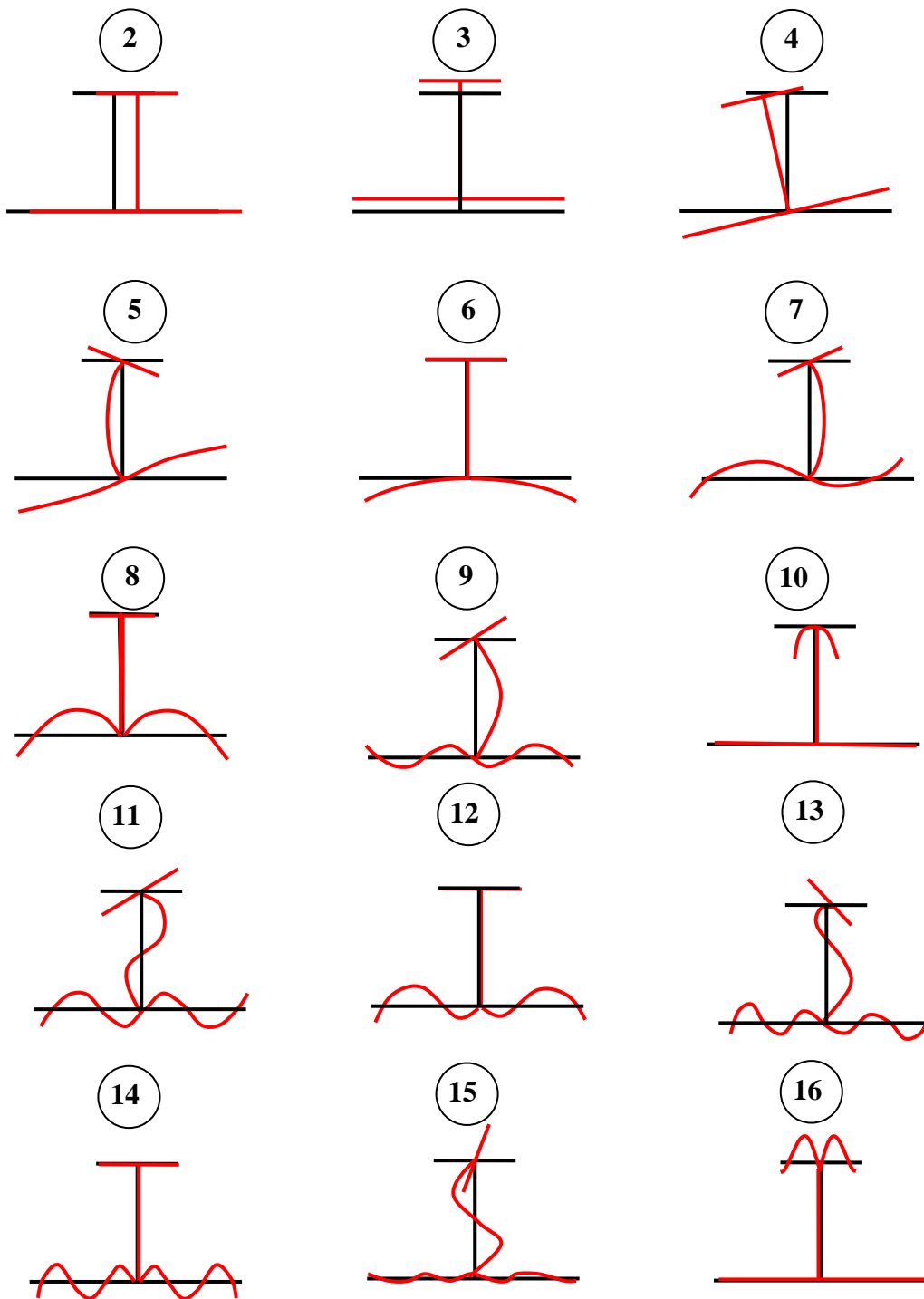


Fig. 5.10 – Modos de deformação de um painel enrijecido em T: configurações deformadas no plano da seção

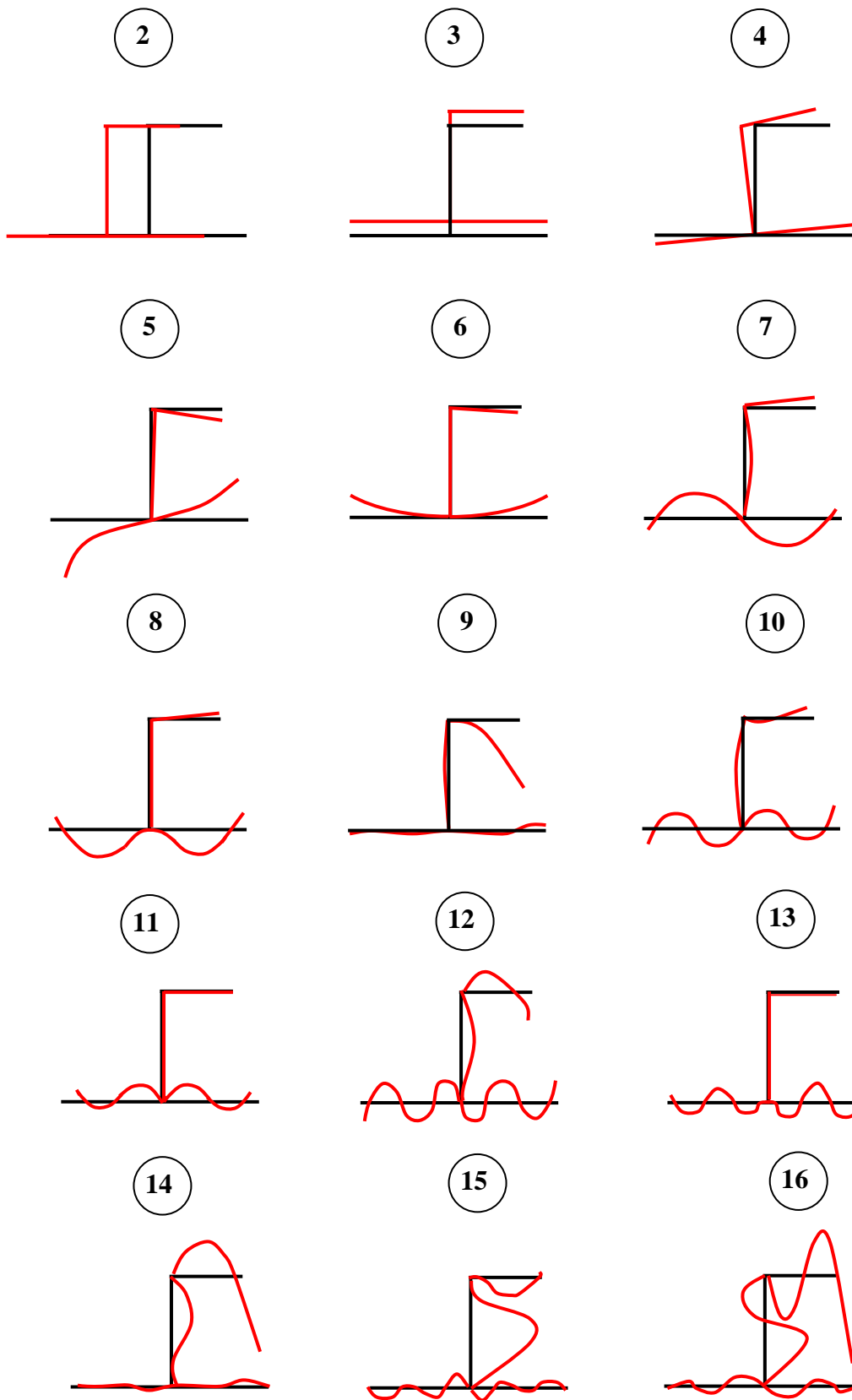


Fig. 5.11 – Modos de deformação de um painel enrijecido em L: configurações deformadas no plano da seção



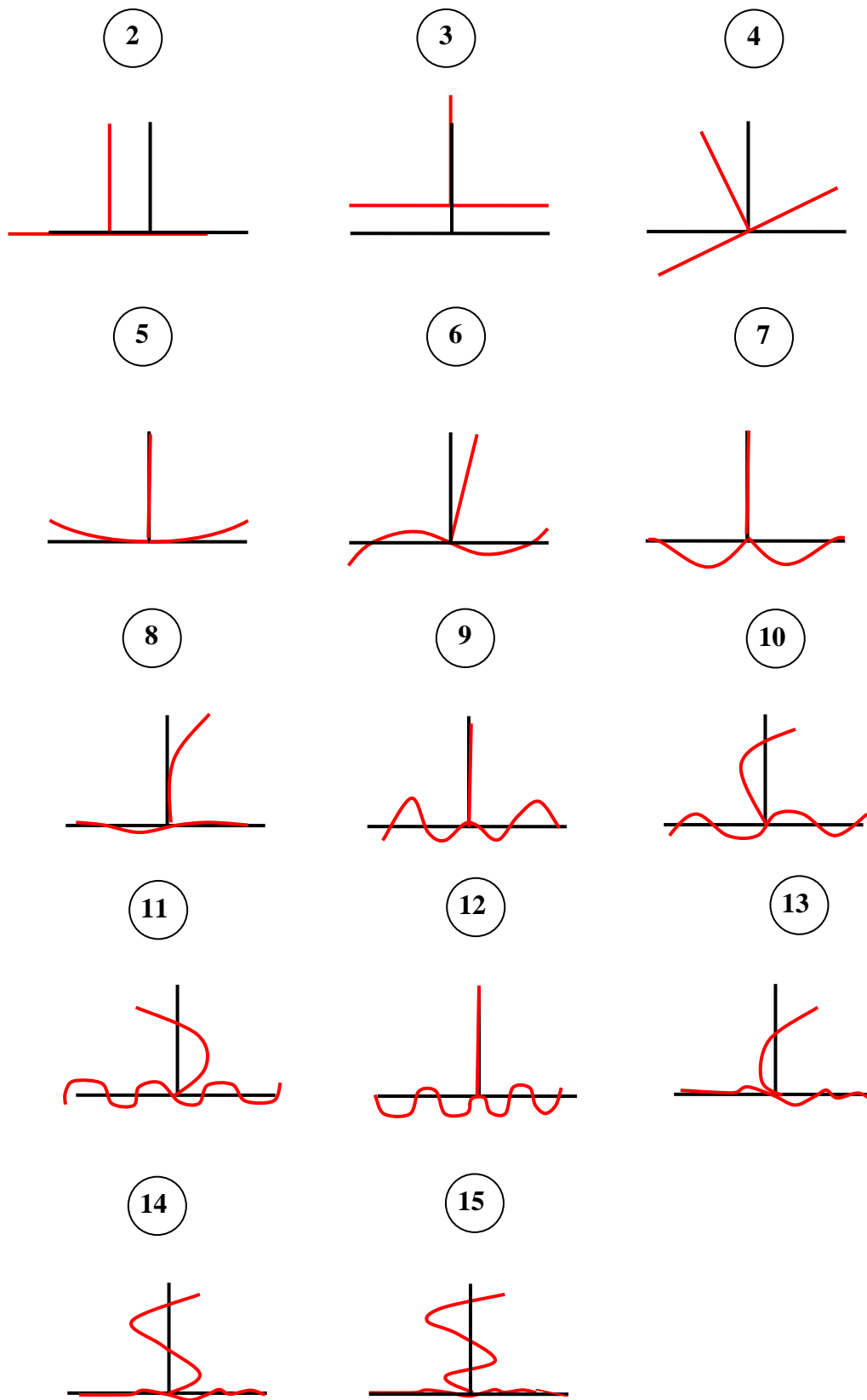


Fig. 5.12 – Modos de deformação de um painel enrijecido em I: configurações deformadas no plano da seção

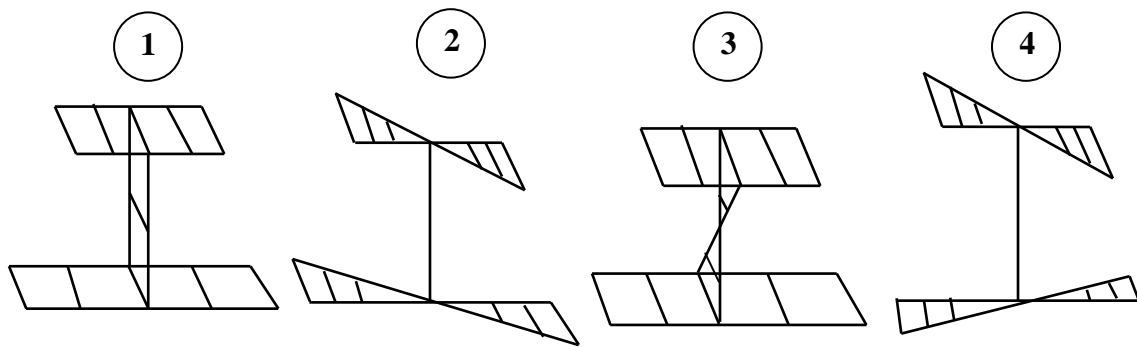


Fig. 5.13 – Modos de deformação de um painel enrijecido em T: configurações deformadas fora do plano da seção

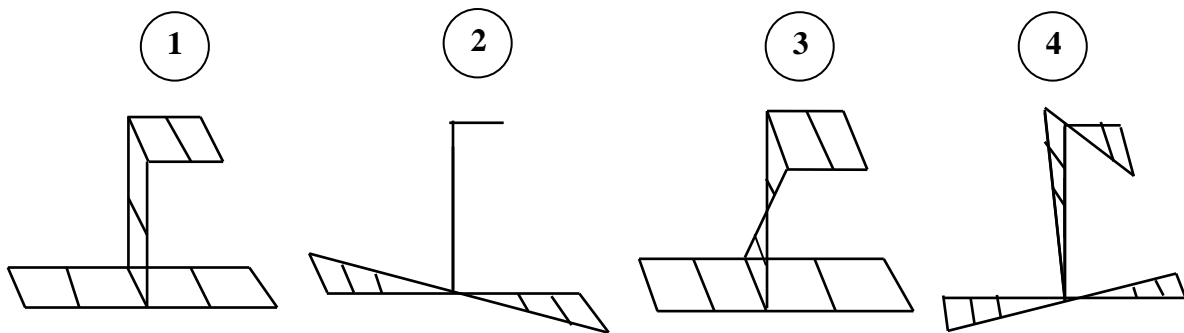


Fig. 5.14 – Modos de deformação de um painel enrijecido em L: configurações deformadas fora do plano da seção

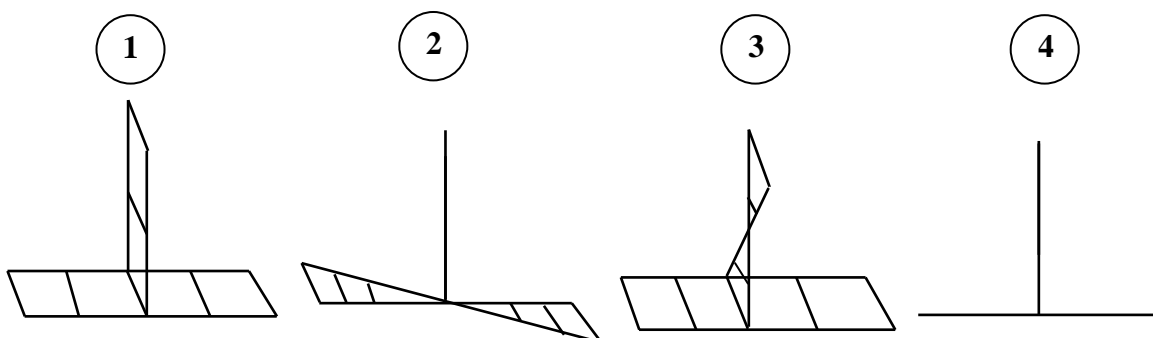


Fig. 5.15 – Modos de deformação de um painel enrijecido em I: configurações deformadas fora do plano da seção

Com a finalidade de explicitar como foram conduzidas os estudos paramétricos, exemplificam-se nesta subseção para os modelos **SP1-T**, **SP1-L** e **SP1-l**:

- (i) a variação das cargas críticas de bifurcação ( $P_{cr}$ ) com o comprimento do painel ( $0 \leq L \leq 1000 \text{ cm}$ ), incluindo todos os modos de deformação.
- (ii) os respectivos diagramas de participação modal.

Em função dos gráficos obtidos (Fig. 5.16), selecionam-se os modos preponderantes, tendo em vista realizar uma avaliação mais específica acerca do comportamento estrutural.

Conclui-se que os valores das cargas críticas de bifurcação podem ser obtidos satisfatoriamente a partir da seleção dos seguintes modos individuais, como indicado em **SP1-T** (Fig. 5.17), **SP1-L** (Fig. 5.18) e **SP1-l** (Fig. 5.19):

- (i) **SP1-T: 3, 4, 5, 6, 7 e 9**
- (ii) **SP1-L: 3, 4, 5 e 6**
- (iii) **SP1-l: 3, 4, 5 e 7**

Observa-se que:

- (i) Obviamente a geometria da seção transversal do perfil utilizado como enrijecedor (T, L ou l) exerce grande influência sobre os fenômenos de instabilidade dos painéis enrijecidos, sendo a prevalência de determinado(s) modo(s) potencializada pela tipologia do enrijecedor.
- (ii) Independentemente do comprimento e dimensões, os painéis enrijecidos em T, L e l não exibem modos distorcionais, mas apenas modos de deformação *globais* (**1 – 4**) e modos *locais de placa* ( $5 \leq k \leq n_d$ ), cujo número ( $n_d$ ) depende da discretização nodal (*análise da seção*).
- (iii) As representações das deformadas no plano da seção (Fig. 5.10 a 5.12) mostram que, excepcionalmente, quando se consideram *apenas modos individuais*:
  - (a) a instabilidade local do flange do enrijecedor pode ser caracterizada pelos modos **10** e **16** (painel enrijecido em T) e modo **9** (painel enrijecido em L) .

- (b) a instabilidade lateral-torsional do enrijecedor associa-se aos modos **5, 7, 9, 11, 13, 15** (painel enrijecido em T); **7, 10, 12, 14, 15, 16** (painel enrijecido em L) ; **6, 10, 11, 13, 14, 15** (painel enrijecido em l).
- (c) no caso de painéis com enrijecedores do tipo barra (**SP1-I... SP12-I**), Paik *et al.* (1998) admitem como equivalentes os conceitos relativos aos fenômenos de instabilidade lateral-torsional do enrijecedor e local da alma do enrijecedor, como pode ser observado em **10, 11, 13, 14 e 15**.
- (iv) **SP1-T**: Para  $L = 100\text{ cm}$ , os modos mistos ( $\text{MLPT} \equiv 5 + 7 + 9 + 4$ ) contam com a participação de 95.19% (modo **5**), 3.15% (modo **7**), 1.10% (modo **4**) e 0.56% (modo **9**). Ressalta-se que com base nas especificações da norma europeia (EN 1993-1-5:2006), Ferreira (2011) reconhece a ocorrência de instabilidade local da placa entre enrijecedores para o painel **SP1-T**, como indica a Fig. 5.22. Em  $L = 400\text{ cm}$ , prevalecem  $\text{MLPF} \equiv 3 + 6$ , com 91.04% (modo **3**). Em  $L = 1000\text{ cm}$ , tem-se 99.54% (modo **3**) e 0.47% (modo **6**).
- (v) **SP1-L**: evidencia-se uma combinação dos modos **7 + 6 + 5** + um pouco de **4**, com aumento gradual da participação de **3**. Em  $L = 100\text{ cm}$ , tem-se a seguinte participação modal: 78.89% (modo **6**), 6.25% (modo **5**), 4.65% (modo **3**) e 10.21% (outros modos).
- (vi) **SP1-I**: mostra-se extremamente suscetível à ocorrência de modos de torção ( $\text{MT} \equiv 4$ ) e/ou flexão ( $\text{MF} \equiv 3$ ). Para  $L = 100\text{ cm}$ , predomina o modo **4** (98.89%). Em  $L = 400\text{ cm}$ , ocorrem  $\text{MLPF} \equiv 3 + 5$ , com a participação de 97.17% (modo **3**).

Para checagem dos resultados, os valores da carga de bifurcação relativos ao comprimento  $L = 100\text{ cm}$  são comparados com o CUFSM (Tabela 5.3 e Fig. 5.20).

As configurações dos modos de instabilidade estão ilustradas na Fig.5.21.

Os resultados das análises efetuadas para os demais modelos (**SP2 a SP12**) podem ser conferidos no Anexo 5.A.

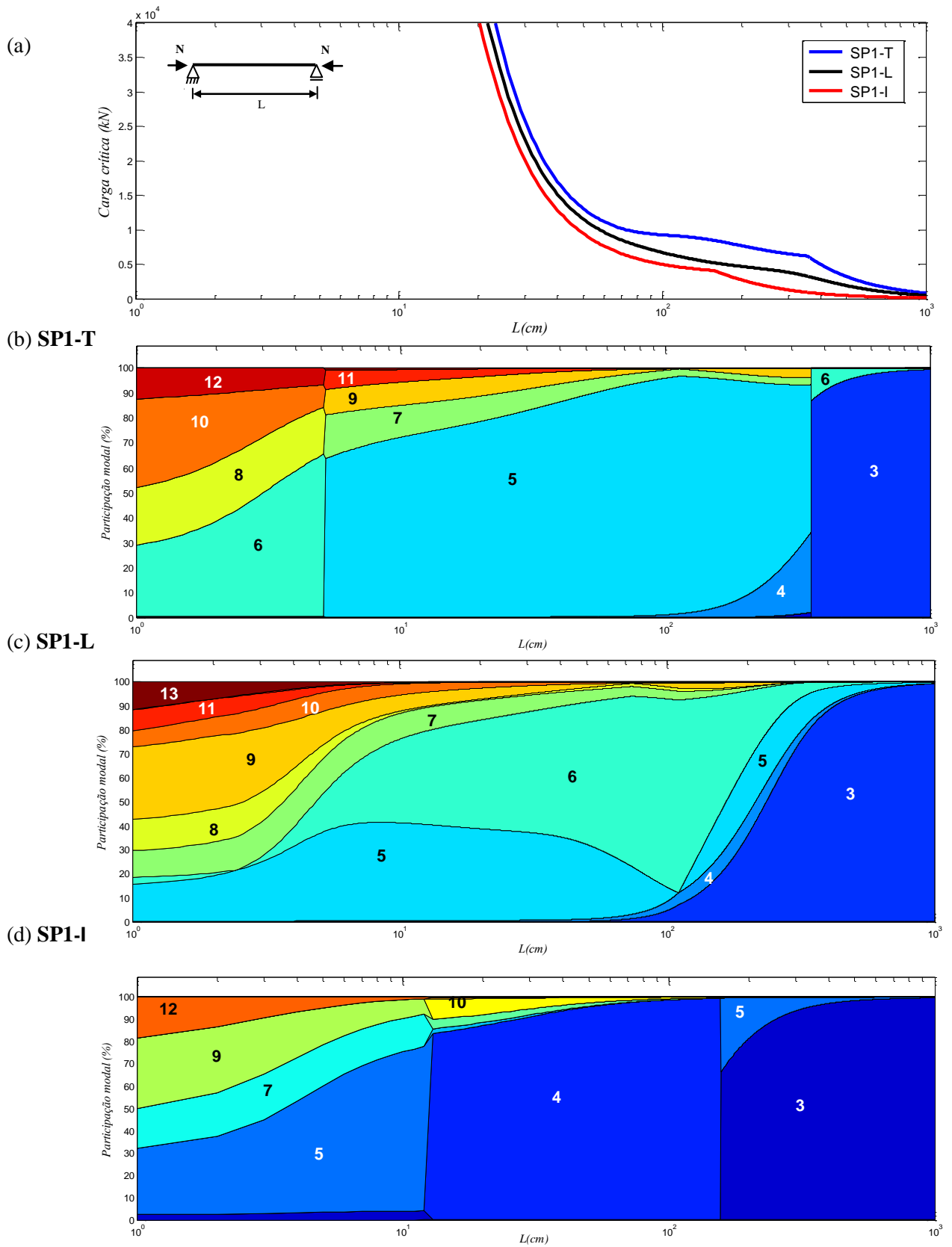


Fig. 5.16 – Modelo SP1: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I

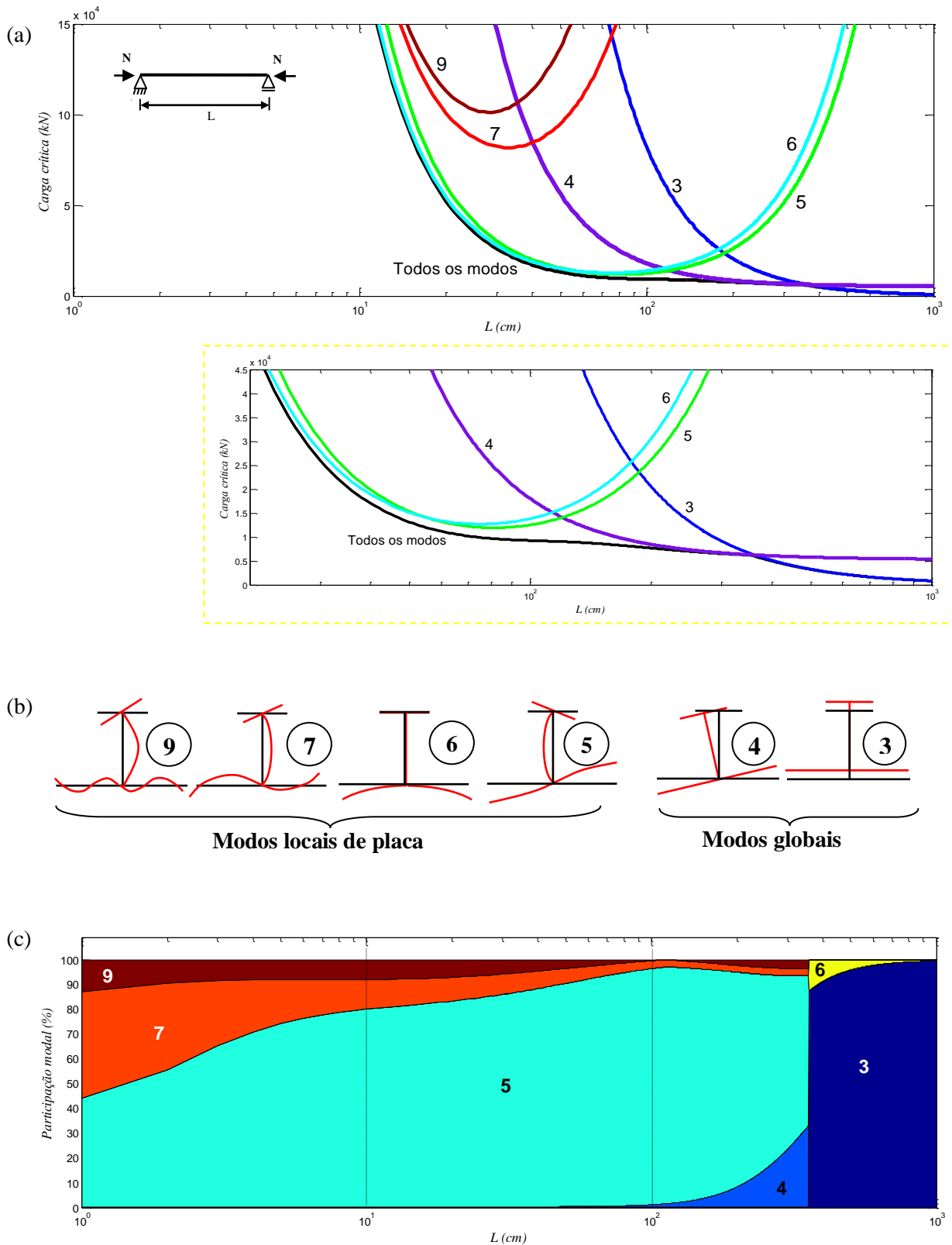


Fig. 5.17 – Modelo **SP1-T**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação (c) Participação modal

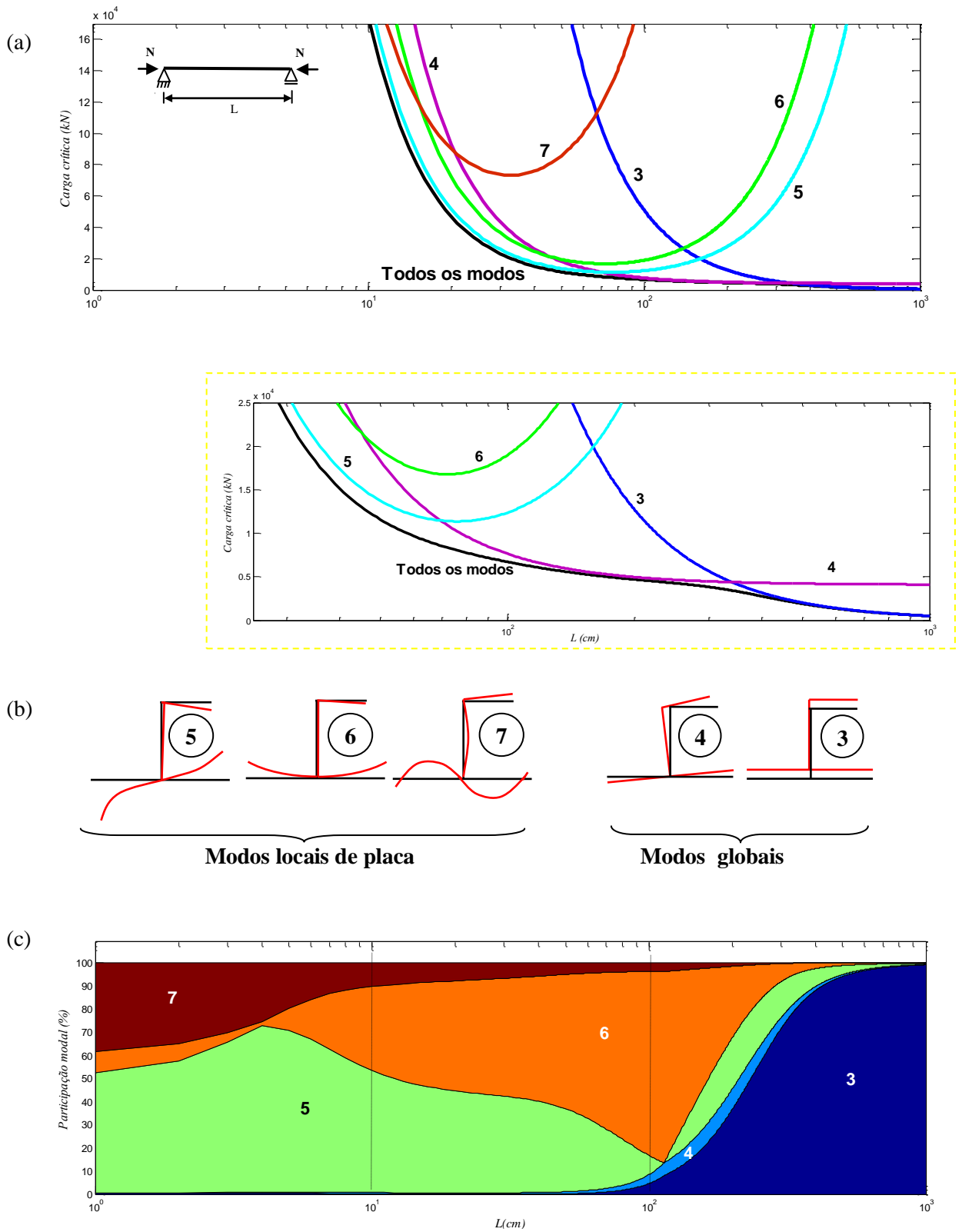


Fig. 5.18 – Modelo **SP1-L**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal

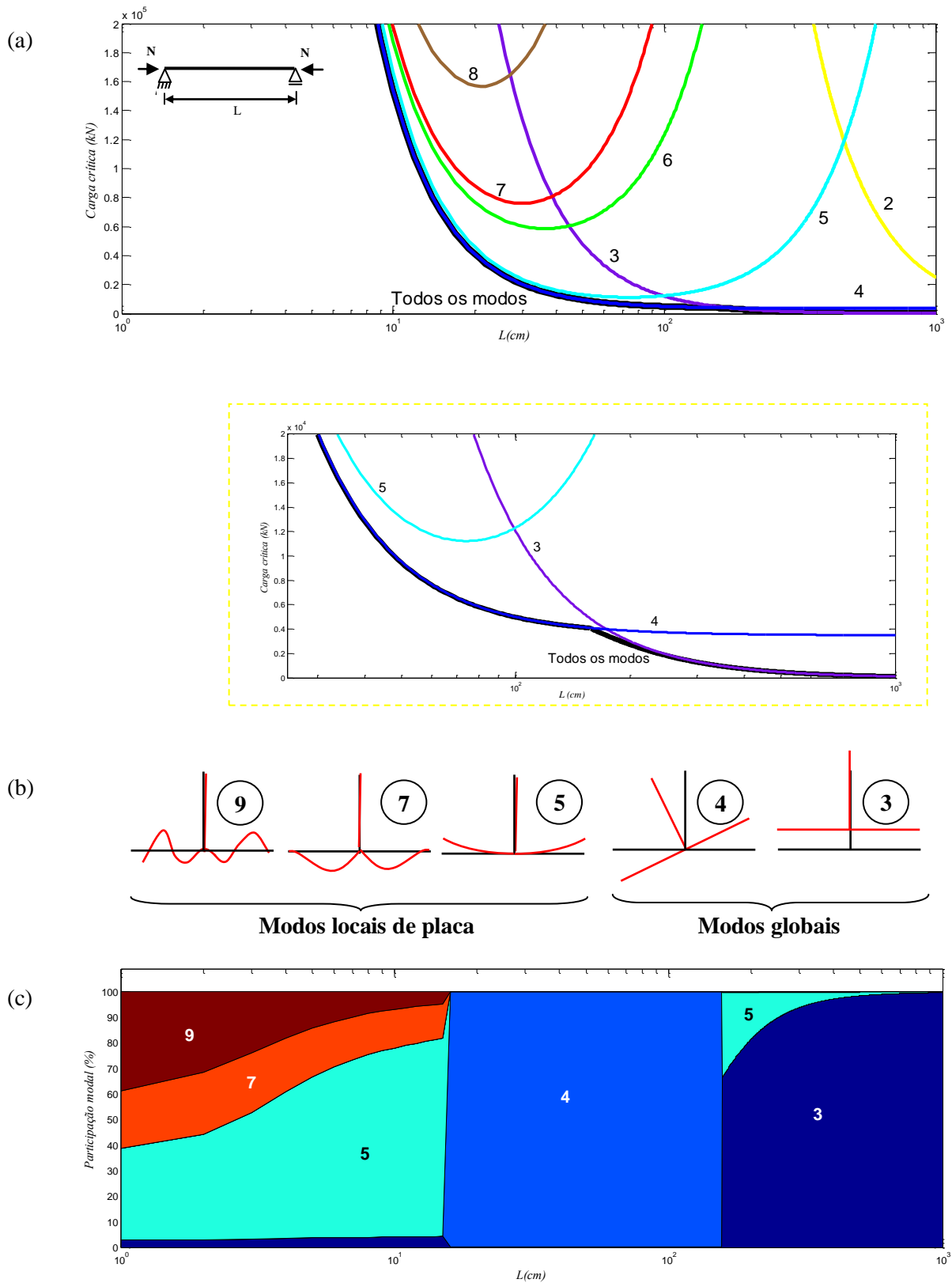


Fig. 5.19 – Modelo SP1-I: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal



**Tabela 5.3** – Carga de bifurcação ( $L = 100\text{ cm}$ )

Painel	GBT	CUFSM	$\frac{P_{cr}(GBT)}{P_{cr}(CUFSM)}$
SP1-T	9259.6638	9074.0957	1.0205
SP1-L	6709.1851	6621.0938	1.0133
SP1-I	4980.6378	4948.0254	1.0066

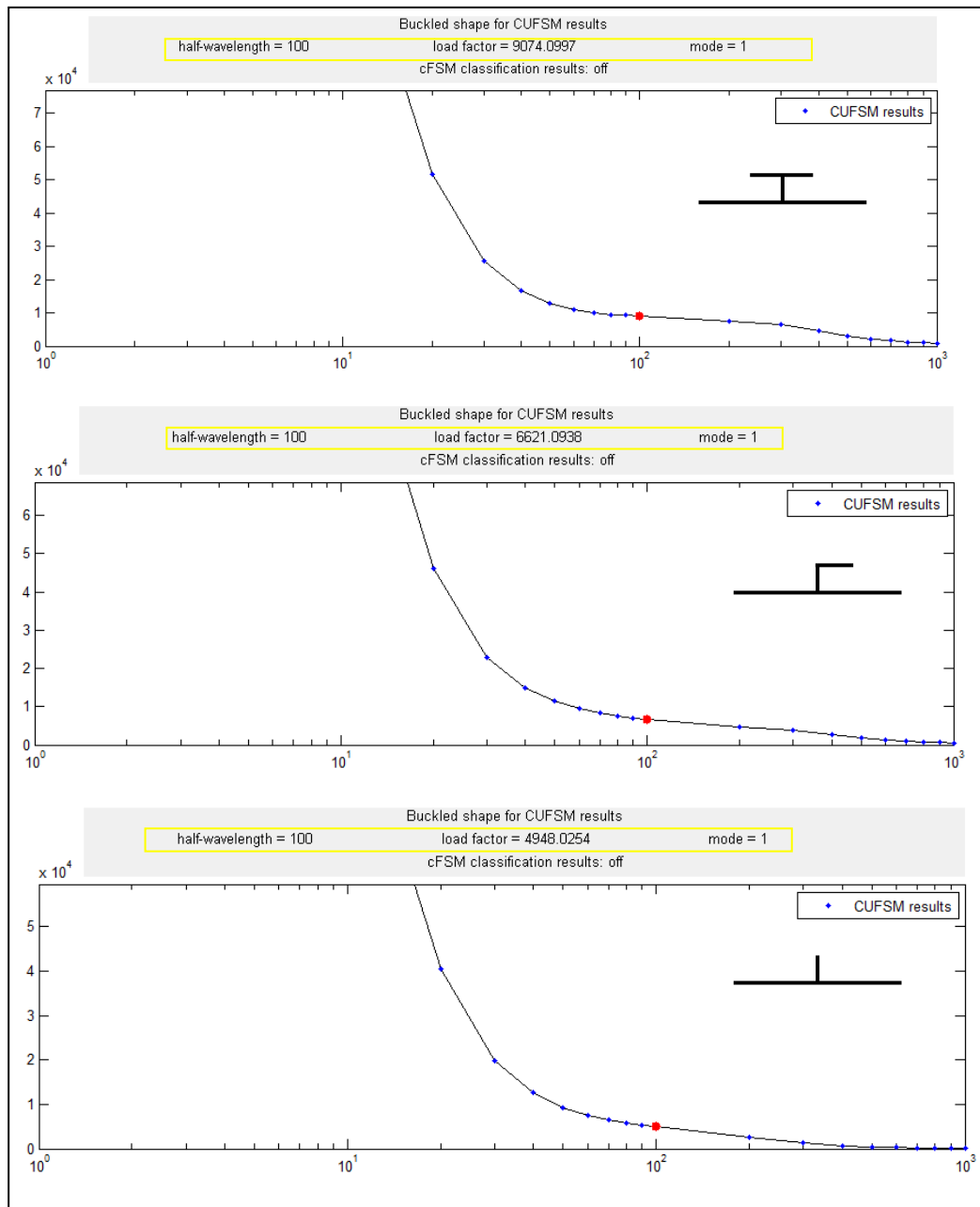


Fig. 5.20 – Modelo SP1: Variação de  $P_{cr}$  com  $L$  (CUFSM)

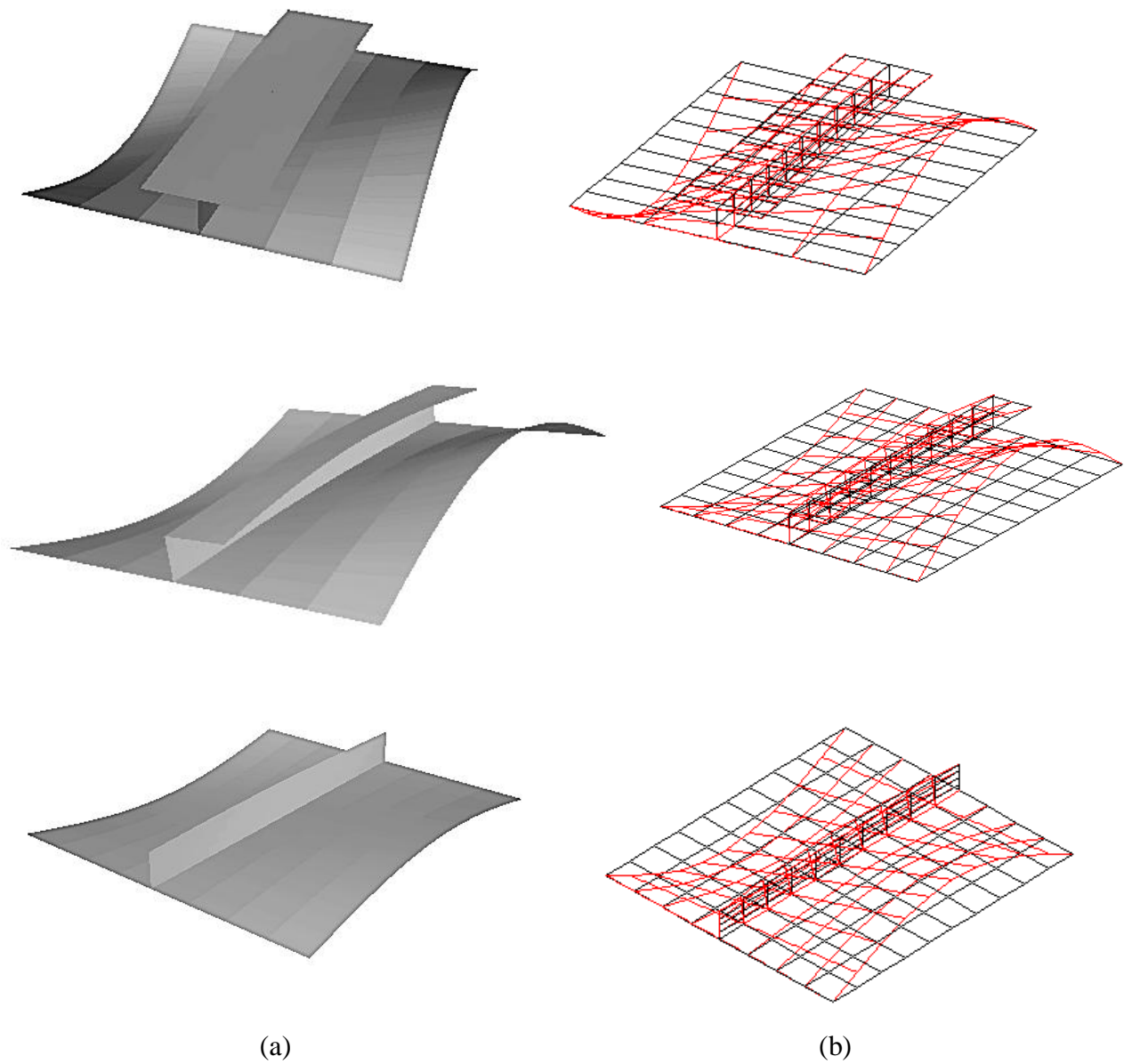


Fig. 5.21 – Modelo **SP1**: modos de instabilidade ( $L=100\text{ cm}$ ). (a) GBT. (b) CUFSM

Em relação aos valores críticos das cargas de bifurcação (Tabela 5.4) para todos os modelos **SP1-T**, **SP1-L**, **SP1-I**,... **SP12-T**, **SP12-L**, **SP12-I**, observa-se que os painéis com enrijecedores em barra apresentam menor capacidade de carga, ao passo que os reforçados em T demonstram maior eficiência estrutural (Fig. 5.22 a 5.26).

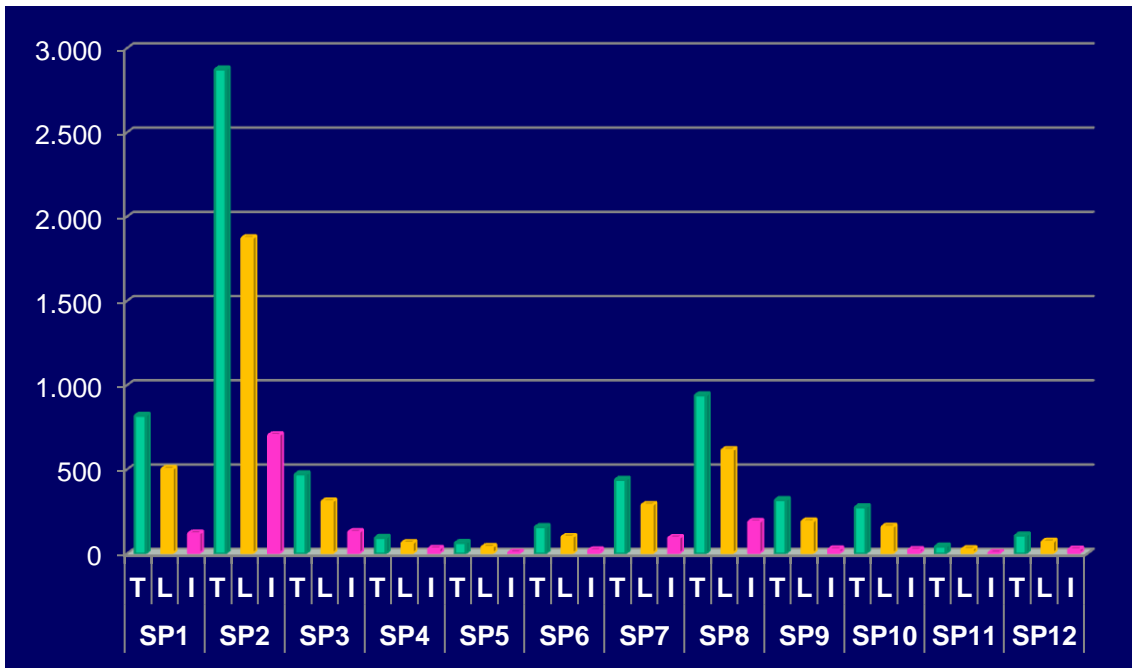


Fig. 5.22 – Valores de carga crítica para os painéis enrijecidos ( $L = 1000\text{ cm}$ )

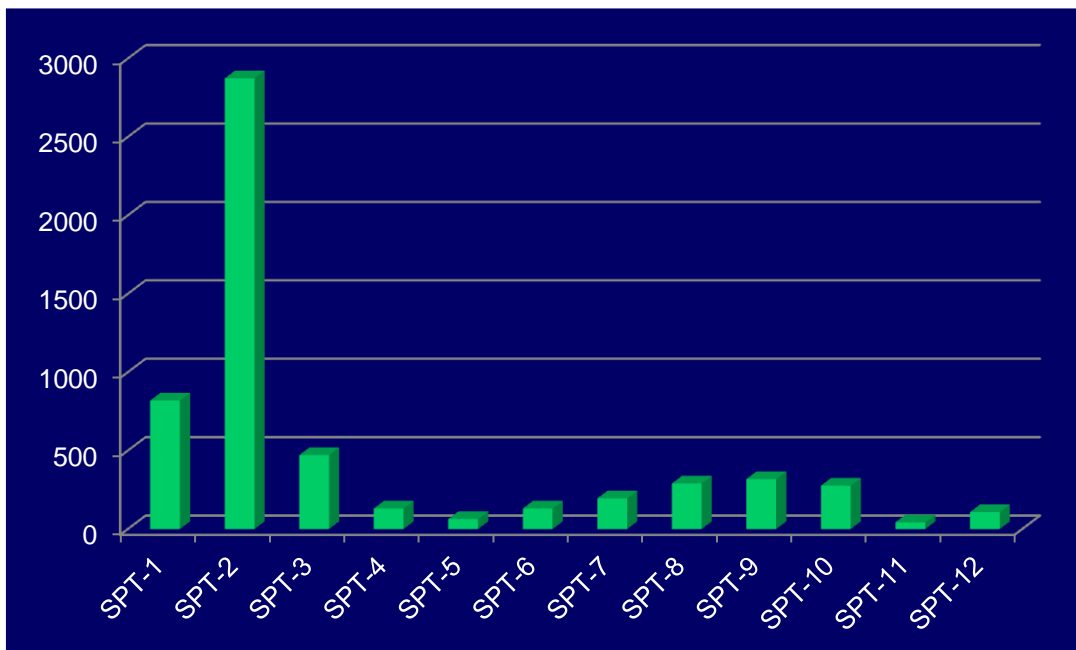


Fig. 5.23 – Valores de carga crítica para os painéis enrijecidos em T ( $L = 1000\text{ cm}$ )

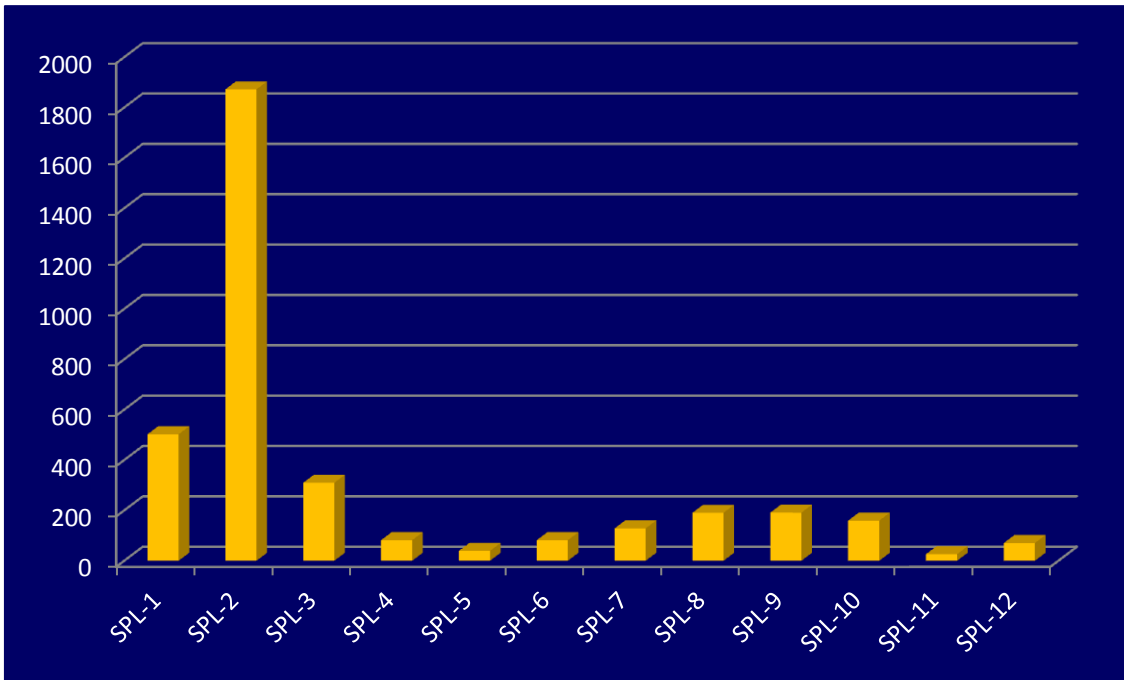


Fig. 5.24 – Valores de carga crítica para os painéis enrijecidos em L ( $L = 1000\text{ cm}$ )

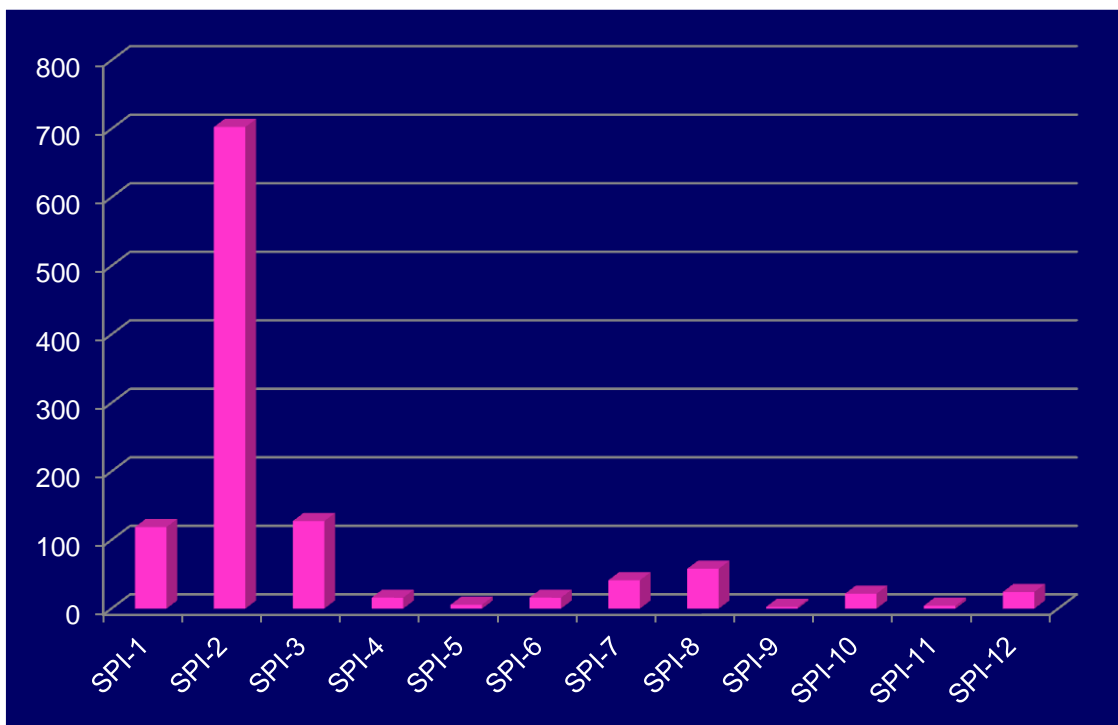


Fig. 5.25 – Valores de carga crítica para os painéis enrijecidos em I ( $L = 1000\text{ cm}$ )

**Tabela 5.4** – Valores de carga crítica de bifurcação ( $L = 1000\text{ cm}$ )

Painel enrijecido		$P_{cr}$ ( $kN$ )	Varição (%) em relação ao valor máximo em cada modelo
SP1	T	819.0321	-
	L	502.3715	61.34
	I	119.0444	14.53
SP2	T	2873.5998	-
	L	1872.2288	65.15
	I	702.7769	24.46
SP3	T	470.9064	-
	L	309.7303	65.77
	I	127.7406	27.13
SP4	T	93.9032	-
	L	63.0542	67.15
	I	28.8711	30.75
SP5	T	63.4867	-
	L	39.3165	61.93
	I	5.6439	8.89
SP6	T	157.9083	-
	L	98.8272	62.59
	I	19.3183	12.23
SP7	T	438.8791	-
	L	288.8522	65.82
	I	92.9832	21.19
SP8	T	939.6820	-
	L	614.5094	65.40
	I	188.2555	20,03
SP9	T	318.4031	-
	L	191.0571	60.00
	I	25.143	7.90
SP10	T	276.1194	-
	L	159.3364	57.71
	I	21.7055	7.86
SP11	T	42.8339	-
	L	26.1851	61.37
	I	4.2281	9.87
SP12	T	107.6817	-
	L	70.4128	65.39
	I	24.3192	22.58

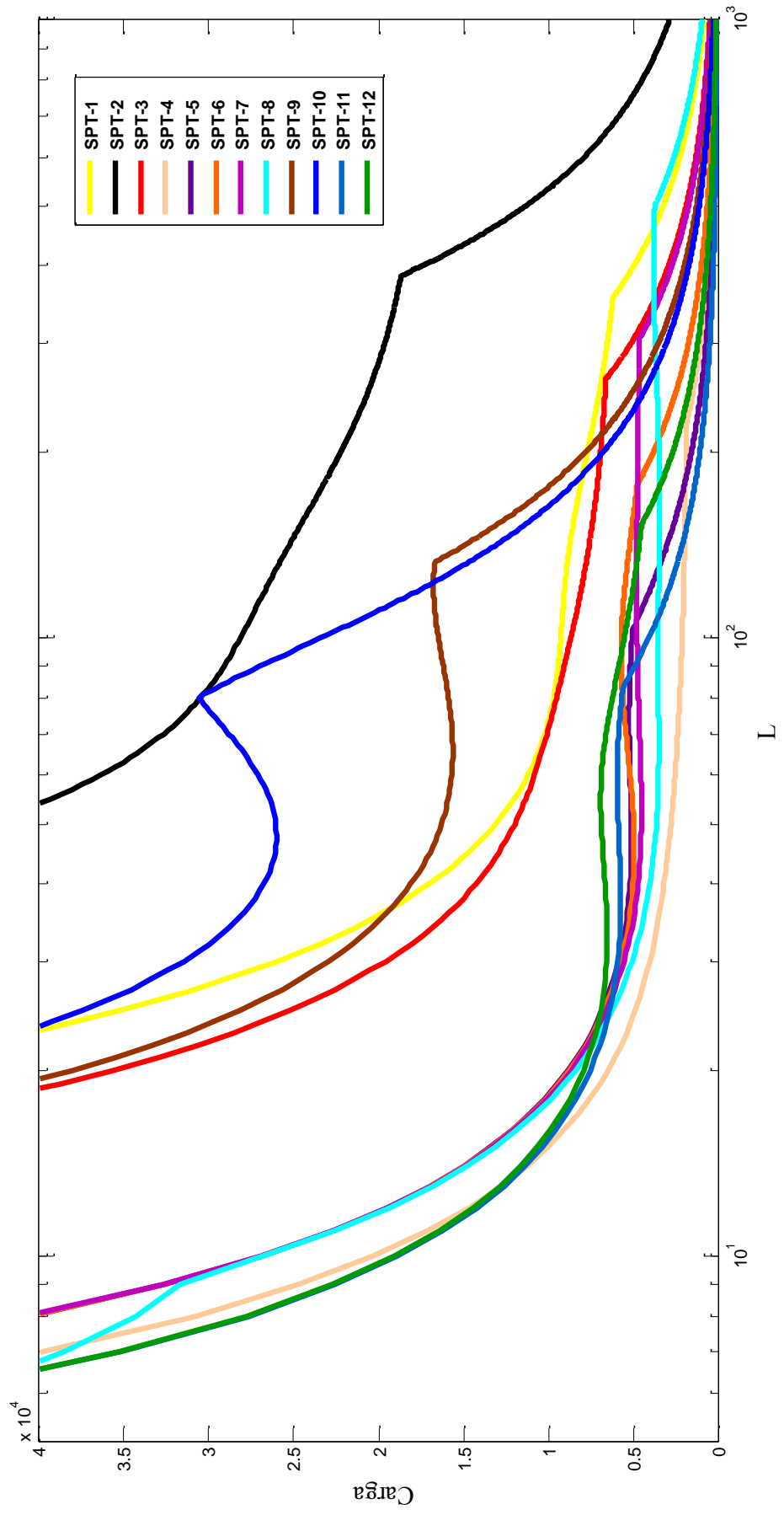


Fig. 5.26 – Variação de  $P_{cr}$  (kN) com  $L$ (cm) para painéis enrijecidos em T

Uma análise dos resultados em geral mostra que o conjunto dos parâmetros investigados possibilita traduzir com precisão o comportamento estrutural dos painéis enrijecidos, mostrando-se relevantes tanto para definir a capacidade de carga do painel quanto para indicar a prevalência de um determinado modo de instabilidade e de suas interações.

Observa-se que:

(i) **GRUPO 1:** esbeltez da placa entre enrijecedores ( $\lambda_{plt}$ )

- (a) A esbeltez da placa entre enrijecedores ( $\lambda_{plt}$ ) influencia diretamente a capacidade de carga do painel. Sua diminuição acentua o acréscimo da carga crítica de bifurcação:

$\lambda_{plt}$	<b>PAINEL ENRIJECIDO</b>		$P_{cr}$ (kN)
<b>60</b>	<b>SP2</b>	<b>T</b>	2873.5998
		<b>L</b>	1872.2288
		<b>I</b>	702.7769
<b>90</b>	<b>SP3</b>	<b>T</b>	470.9064
		<b>L</b>	309.7303
		<b>I</b>	127.7406
<b>150</b>	<b>SP7</b>	<b>T</b>	438.8791
		<b>L</b>	288.8522
		<b>I</b>	92.9832

- (b) Para painéis com a mesma esbeltez da placa entre enrijecedores ( $\lambda_{plt}$ ) e esbeltez do painel ( $\lambda_p$ ), o decréscimo da capacidade de carga é tanto quanto mais pronunciado se também for acompanhado do acréscimo da esbeltez do flange enrijecedor ( $\lambda_f$ ):

(b.1)  $\lambda_{plt} = 150$  e  $\lambda_p = 37.5$ : **SP6-T** ( $\lambda_f = 11.2$ ): 157.91kN

**SP7-T** ( $\lambda_f = 3.7$ ): 438.88kN

(ii) **GRUPO 2:** esbeltez do painel ( $\lambda_p$ )

- (a) Para painéis com a mesma esbeltez ( $\lambda_p$ ), a diminuição do espaçamento da placa entre o enrijecedor ( $b_p$ ) influencia a capacidade resistente:

(a.1)  $\lambda_p = 30$ : **SP2-T** ( $b_p = 90 \text{ cm}$ ,  $P_{cr} = 2873.60kN$ )

**SP3-T** ( $b_p = 60 \text{ cm}$ ,  $P_{cr} = 470.91kN$ )

(b) Para painéis com a mesma esbeltez ( $\lambda_p$ ), o incremento na espessura da placa ( $t_p$ ) influencia o comportamento estrutural por impor uma maior restrição à rotação da placa em relação a sua linha de interseção com o enrijecedor:

(b.1)  $\lambda_p = 30$ : **SP2-T** ( $t_p = 3.0 \text{ cm}$ ,  $P_{cr} = 2873.60kN$ )

**SP3-T** ( $t_p = 2.0 \text{ cm}$ ,  $P_{cr} = 470.91kN$ )

(iii) **GRUPO 3**: razão entre as áreas do enrijecedor e da placa ( $r_a$ )

(a) Para painéis com  $\lambda_{plt}$  e  $\lambda_p$  iguais, a razão entre as áreas do enrijecedor e da placa afeta diretamente a carga de bifurcação, que apresenta maior valor para o painel com maior esbeltez do enrijecedor ( $h_w/t_w$ ).

(a.1)  $r_a = 0.1$ : **SP11-T** ( $h_w/t_w = 5.0$ ):  $42.83kN$

**SP12-T** ( $h_w/t_w = 5.8$ ):  $107.68kN$

(a.2)  $r_a = 0.2$ : **SP5-T** ( $h_w/t_w = 3.2$ ):  $63.49kN$

**SP8-T** ( $h_w/t_w = 19.8$ ):  $939.68kN$

(iv) Uma comparação entre a classificação teórica dos modos de instabilidade (Fig. 5.4) e as configurações dos modos de instabilidade (Anexo 5.A) permite confirmar que a classificação dos fenômenos de instabilidade, apresentada na subseção 5.2.2, obviamente não abarca todas as peculiaridades que envolvem o comportamento estrutural dos painéis enrijecidos. Por sua vez, na GBT, a seleção modal permite identificar com precisão os fenômenos de instabilidade de forma isolada e captar, de forma bastante clara, as transições ocorridas entre eles, utilizando graus de liberdade reduzidos. Além disso, o fator de participação modal é um importante indicador para determinação dos modos preponderantes.

(v) Os diagramas de participação modal (Anexo 5.A) permitem confirmar que os fenômenos de instabilidade obedecem, de forma geral, à seguinte hierarquia: a instabilidade local da placa entre enrijecedores precede a



instabilidade lateral-torsional dos enrijecedores que, por sua vez, conduz à instabilidade global (Chutjutalli, 2010).

- (vi) A fronteira entre os modos de instabilidade local e global pode ser explicada a partir do deslocamento do centroide da seção transversal em função da redução da largura efetiva da placa. Como resultado, gera-se uma excentricidade da carga, submetendo a placa a uma compressão crescente que propicia a ocorrência da instabilidade global. Esse efeito é mais pronunciado em painéis longos (Rivera, 2011).

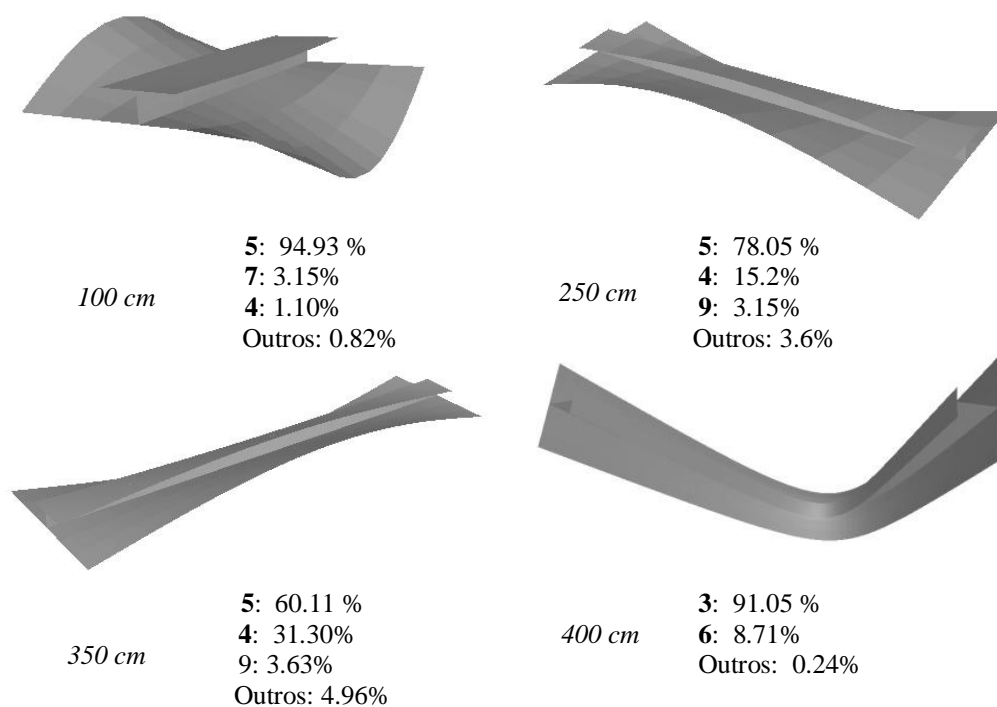
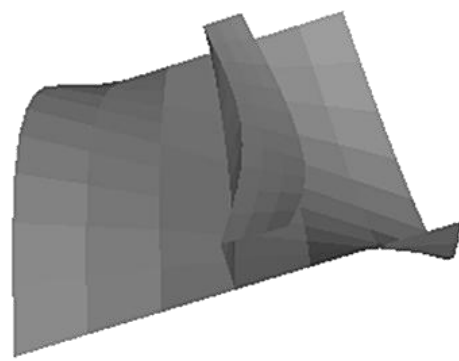


Fig. 5.27 – **SP1-T**: Configuração dos modos de instabilidade e participação modal

- (vii) Os painéis que evidenciam problemas de instabilidade local (a exemplo dos painéis com enrijecedores assimétricos do tipo cantoneira **SP1-L...** **SP12-L**) estão mais suscetíveis a uma simultaneidade de modos distintos de instabilidade, dependendo principalmente das dimensões das placas e dos enrijecedores. Nesse caso, o painel tende ao colapso de forma semelhante à que ocorre na instabilidade lateral-torsional do enrijecedor (Fig. 5.28).



200 cm

**Modo 3:** 35.78 %  
**4:** 8.59%  
**5:** 21.74%  
**6:** 30.07%  
 Outros: 3.82%

Fig. 5.28 – **SP1-L**: Configuração dos modos de instabilidade e participação modal

(viii) Quanto maior for a esbeltez da alma ( $h_w/t_w$ ) e menor a esbeltez do flange ( $b_f/t_f$ ), maior será a instabilidade no painel:

- (a) **SP1:**  $h_w/t_w = 4.7$ ;  $b_f/t_f = 13.3$
- (b) **SP4:**  $h_w/t_w = 7.6$ ;  $b_f/t_f = 4.8$
- (c) **SP7:**  $h_w/t_w = 9.1$ ;  $b_f/t_f = 3.7$
- (d) **SP8:**  $h_w/t_w = 19.8$ ;  $b_f/t_f = 2.7$

Para exemplificar, indica-se a configuração do modo de instabilidade global induzida pelo enrijecedor e a correspondente participação modal para **SP1-T** ( $L = 400$  cm) (Fig. 5.29).



**Modo 3:** 91.05 %  
**6:** 8.71%  
 Outros: 0.24%

Fig. 5.29 – **SP1-T**: Instabilidade global induzida pelo enrijecedor

Por sua vez, o acréscimo esbeltez da alma ( $h_w/t_w$ ) e decréscimo da esbeltez do flange ( $b_f/t_f$ ) induzem à instabilidade lateral-torsional do enrijecedor em **SP8-T** ( $L = 400\text{ cm}$ ) (Fig. 5.30).

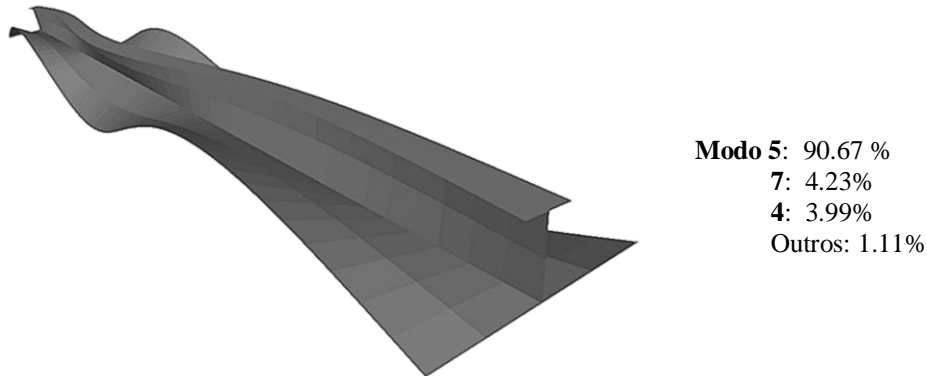
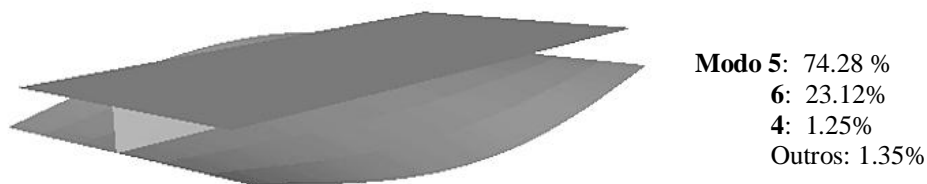


Fig. 5.30 – **SP8-T**: Instabilidade lateral-torsional do enrijecedor

- (ix) A adoção de enrijecedores com almas menos esbeltas (**SP1**, **SP5**, **SP10** e **SP11**) pode prevenir a ocorrência de uma possível instabilidade local da alma.
- (x) O acréscimo da espessura do flange e da alma do enrijecedor proporcionalmente com a espessura da placa (**SP2**) é uma possível solução para evitar a instabilidade lateral-torsional do enrijecedor. No entanto, aumentar demasiadamente o flange pode conduzir à predominância de modos locais, a exemplo do que ocorre com **SP9** ( $b_f = 26.7\text{ cm}$ ) (Fig. 5.A.15) e **SP10** ( $b_f = 39.8\text{ cm}$ ) (Fig. 5.A.17).



$L = 80\text{ cm}$

Fig. 5.31 – **SP10-T**: Instabilidade local da placa entre o enrijecedor

- (xi) Para reduzir a probabilidade de ocorrência de instabilidade lateral-torsional do enrijecedor, é conveniente aumentar a rigidez à torção e diminuir o valor do momento de inércia do enrijecedor. A opção por um enrijecedor com momento de inércia reduzido potencializa a ocorrência de colapso do painel por flambagem global, como se verifica em **SP11-I** (Fig. 5.A.19).
- (xii) O modo de instabilidade preponderante em um painel enrijecido submetido à compressão axial também depende da rigidez à torção do enrijecedor (Grondin *et al.*, 2006; Danielson *et al.*, 1990). Paik *et al.* (1997) propôs um parâmetro indicador do grau de rigidez torsional em relação à rigidez à flexão da placa de base do painel que pode ser obtido através da expressão (5.4):

$$\zeta_s = \frac{GJ_s}{b_p D} \quad (5.4)$$

em que  $G$  é o módulo de cisalhamento;  $D$  a rigidez à flexão da placa;  $b_p$  a largura da placa entre enrijecedores;  $J$  o momento de torção do enrijecedor.

Para um enrijecedor do tipo T, tem-se:

$$J_s = \frac{1}{3} (h_w t_w^3 + b_f t_f^3) \quad (5.5)$$

$$\zeta_s = \frac{1.4 (h_w t_w^3 + b_f t_f^3)}{b_p t_p^3} \quad (5.6)$$

Aplicando a expressão (5.6) aos modelos representativos, obtém-se o grau de rigidez torsional:

(a) **SP3-T:**  $\zeta_s = 0.23 (\lambda_p = 30, \lambda_{plt} = 90)$

(b) **SP10-T:**  $\zeta_s = 1.26 (\lambda_p = 23, \lambda_{plt} = 90)$

Esses dados condizem perfeitamente com os resultados fornecidos pela GBT. Apresenta-se a seguir a configuração do modos de instabilidade em para os modelos **SP3-T** (Fig. 5.32) e **SP10-T** (Fig. 5.33), para o qual não se evidenciam problemas com a instabilidade lateral-torsional do enrijecedor.

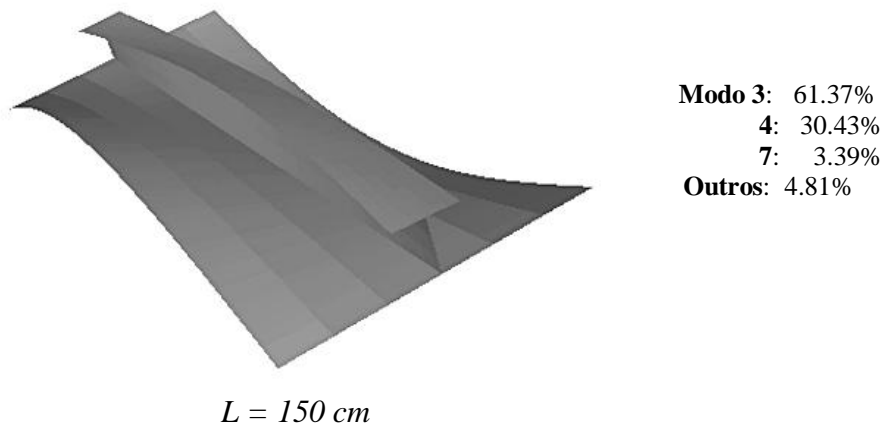


Fig. 5.32 – **SP3-T**: Instabilidade lateral-torsional do enrijecedor

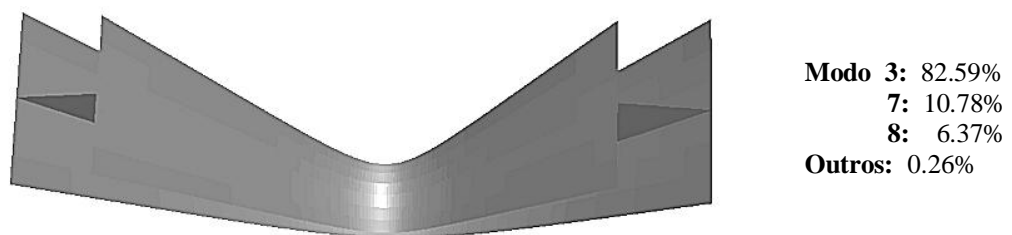


Fig. 5.33 – **SP10-T**: Instabilidade global induzida pelo enrijecedor

### 5.3 SEÇÕES COMPOSTAS

Embora os processos de fabricação dos perfis formados a frio possibilitem criar seções transversais com uma multiplicidade de formas e dimensões geométricas e combiná-las para formar seções compostas, certos aspectos do comportamento estrutural, especificações de resistência e rigidez efetiva de seções com geometrias inovadoras não são suficientemente conhecidos e previstos nas normas vigentes.

### 5.3.1 REVISÃO DA LITERATURA

O comportamento de elementos estruturais formados por seções compostas tem fomentado importantes pesquisas:

- (i) Elhajj *et al.* (1996): estudo da capacidade resistente de vigas constituídas por seções compostas por perfis U.
- (ii) Wardener *et al.* (2002): estudo do comportamento de seções do tipo *Hollow Flange*.
- (iii) Di Lorenzo *et al.* (2002): investigação do comportamento de vigas constituídas por perfis com seções compostas e sistemas de ligação adequados.
- (iv) Serrete (2004): análise de vigas com seção caixão formadas a partir de seções U submetidas a carregamento excêntrico.
- (v) Gardner e Nethercot (2004): análise de estruturas do tipo *Hollow Flange* em aço inoxidável.
- (vi) Stone e LaBoube (2005): investigação de seções compostas por perfis U e I enrijecidos comparada com especificações da norma americana.
- (vii) Mahaarachchi e Mahendran (2005, 2006): ensaios experimentais e análises numéricas para seções do tipo *Lite Steel Beam e Hollow Flange Channel*.
- (viii) Morais *et al.* (2005): análise teórico-experimental de ligações parafusadas em perfis formados a frio em viga do tipo caixa composta por perfis U enrijecidos e vigas compostas por perfis cartola duplos.
- (ix) Sultana (2007): estudo do comportamento à flexão de vigas caixão, compostas por perfis U.
- (x) Young e Chen (2008): ensaios de colunas de aço formado a frio construída com seções fechadas e enrijecedores intermediários.
- (xi) Maia e Malite (2008): análise teórico-experimental de barras compostas por dupla cantoneira de aço formadas a frio submetidas à compressão.
- (xii) Jeyaragan *et al.* (2009): análise do comportamento à flexão do *Lite Steel Beam* e investigação sobre a instabilidade por distorção lateral.
- (xiii) Xu *et al.* (2009): análise de elementos finitos para investigar a resistência à flexão de seções compostas em caixão utilizadas em construções

comerciais e residenciais na América do Norte. Utilização de testes experimentais para validação dos resultados.

- (xiv) Whittle e Ramseyer (2009): realização de testes experimentais em colunas comprimidas formadas por seções fechadas utilizando perfis U e comparação dos dados obtidos com a norma AISI 2001.
- (xv) Yu e LaBoube (2010): estudo comparativo de seções compostas por perfis cartola utilizando a norma AISI.
- (xvi) Almeida (2010): ensaios experimentais de vigas biapoiadas constituídas por perfis formados a frio compostos pela junção de dois perfis U enrijecidos.
- (xvii) Zhou *et al.* (2010): estudo experimental sobre o comportamento mecânico de barras aço formados a frio com seções compostas por perfis U e Ue.
- (xviii) Georgieva *et al.* (2011): estudo do comportamento real de barras submetidas à flexão com seções compostas por meio de dispositivo óptico.
- (xix) Leal (2011): desenvolvimento de modelos numéricos em elementos finitos para investigar o comportamento estrutural de perfis de aço formados a frio compostos por dupla cantoneira com seção T submetidos à compressão.
- (xx) Ting e Lau (2011): estudo teórico-experimental de colunas formadas por seções compostas por perfis U usando o Método da Largura Efetiva e o Método da Resistência Direta.
- (xxi) Kimura e Munaiar Neto (2011): estudo do comportamento estrutural de perfis formados a frio com seção transversal composta por cantoneiras duplas em situação de incêndio.
- (xxii) Pham *et al.* (2012): estudo da flambagem elástica por cisalhamento em perfis U formados a frio com enrijecedores complexos na alma através do Método das Faixas Finitas semi-analítico.
- (xxiii) Georgieva *et al.* (2012a): Estudo numérico sobre compressão e flexão de seções compostas por perfis Z.
- (xxiv) Georgieva *et al.* (2012b, 2012c): estudo de colunas de aço formado a frio com seções compostas inovadoras do tipo U, Z e W, utilizando o Método da Resistência Direta e o programa CUFSM.

- (xxv) Haidarali e Nethercot (2012): estudo dos mecanismos de flambagem local e distorcional de vigas constituídas por perfis formados a frio com mesas enrijecidas (seções Z).

### 5.3.2 PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS

Objetivando efetuar o estudo paramétrico de uma seção composta de parede fina aberta ramificada com geometria não convencional (Fig. 5.34), define-se como parâmetro a ser analisado a dimensão do enrijecedor  $b_s$  (em forma de V), disposto na ligação das mesas com a alma.

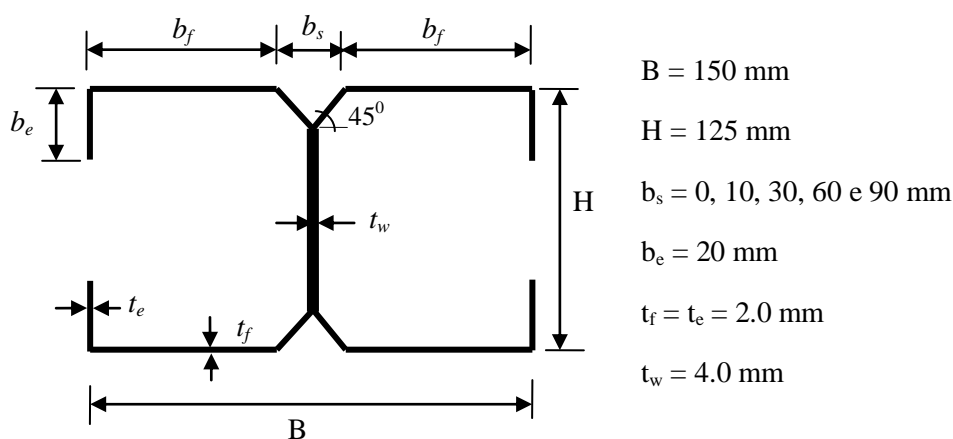


Fig. 5.34 – Seção composta

Consideram-se as seguintes propriedades para o aço estrutural:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  e  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ .

### 5.3.3 ANÁLISES DE ESTABILIDADE E RESULTADOS

Realizam-se inicialmente análises de estabilidade para os modelos representativos **SC10**, **SC30**, **SC60** e **SC90**, assim nomeados em razão das dimensões de  $b_s = 10, 30, 60$  e  $90 \text{ mm}$  (Anexo 5.B).



Para fins de comparação dos resultados, principalmente no que tange à maximização da resistência à compressão, procede-se também à análise de uma seção, composta formada por um perfil I duplamente simétrico ( $b_s = 0$ ), designada por **SCI**.

Outras modificações testadas consistem em:

- (i) aumentar a espessura das placas do modelo **SC90** ( $t_f = 2.5 \text{ mm}$ )
- (ii) usar enrijecedores de borda para os modelos **SC10** ( $b_e = 20 \text{ mm}$ ) e **SCI** ( $b_e = 20 \text{ mm}$ ).

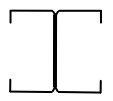
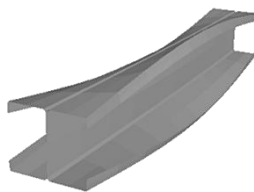
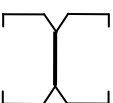
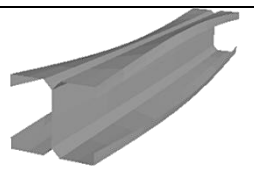
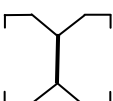

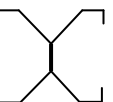

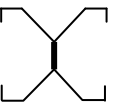

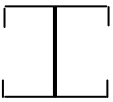
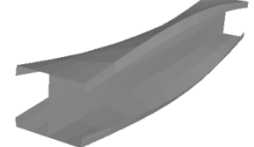
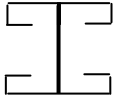


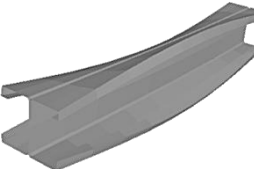
Além da configuração dos modos de instabilidade e dos correspondentes percentuais de participação modal, indica-se na Tabela 5.5 os valores da carga crítica de bifurcação obtidos via GBT e CUFSM ( $L = 100 \text{ cm}$ ).

A Fig. 5.35 apresenta a variação da carga crítica de bifurcação com o comprimento para todos os modelos estudados.

Observa-se que:

- (i) Os modelos **SC10**, **SC30**, **SC60**, **SC90** e **SCI** ( $b_e = 20 \text{ mm}$ ) apresentam oito modos distorcionais (**5 – 12**).
- (ii) **SCI** apresenta apenas quatro modos distorcionais (**5 – 8**).
- (iii) **SC10** ( $b_e = 20 \text{ mm}$ ) possui doze modos distorcionais (**5 – 16**).
- (v) Os percentuais de participação revelam prevalência (acima de 94.17%) dos seguintes modos:
  - (a) **5**: **SC10**, **SCI** e **SCI** ( $b_e = 20 \text{ mm}$ )
  - (b) **6**: **SC60**, **SC90** ( $t_f = 2.0 \text{ mm}$ ) e **SC90** ( $t_f = 2.5 \text{ mm}$ )
  - (c) **7**: **SC30** e **SC10** ( $b_e = 20 \text{ mm}$ )
- (vi) Considerando os valores de carga de bifurcação, a diferença de **SCI** em relação a **SC10** é de aproximadamente 3.27%.
- (vii) O incremento na espessura das placas que compõem o modelo **SC90** ( $t_f = 2.5 \text{ mm}$ ) implica variação da carga de bifurcação aproximadamente 60.27% maior do que **SC90** ( $t_f = 2.0 \text{ mm}$ ).

**Tabela 5.5 – Seções compostas**

	MODELO	GBT $P_{cr}$ (kN)	CUFSM $P_{cr}$ (kN)	$\frac{P_{cr}(GBT)}{P_{cr}(CUFSM)}$	CONFIGURAÇÃO DO MODO DE INSTABILIDADE ( $L = 100cm$ )	PARTICI- PAÇÃO MODAL
	SC10	1095.0	1095.77	0.999		5: 96.5% 3: 2.71% 13: 0.51%
	SC30	1062.74	1062.78	1.000		7: 96.82% 3: 2.36% 17: 0.46%
	SC60	1074.0	1071.59	1.002		6: 94.13% 2: 4.02% 10: 1.55%
	SC90 ( $t_f = 2.0mm$ )	864.8	856.01	1.010		6: 95.78% 2: 4.01%
	SC90 ( $t_f = 2.5mm$ )	1434.65	1407.44	1.019		6: 94.17% 2: 5.65%
	SCI	1131.0	1131.42	1.000		5: 95.14% 3: 2.80% 9: 1.33%
	SCI ( $b_e = 20 mm$ )	1100.0	1100.2	1.000		5: 94.17% 3: 2.66% 9: 1.93%
	SC10 ( $b_e = 20 mm$ )	1074.0	1074.74	0.999		7: 94.98% 3: 2.60% 11: 1.97%

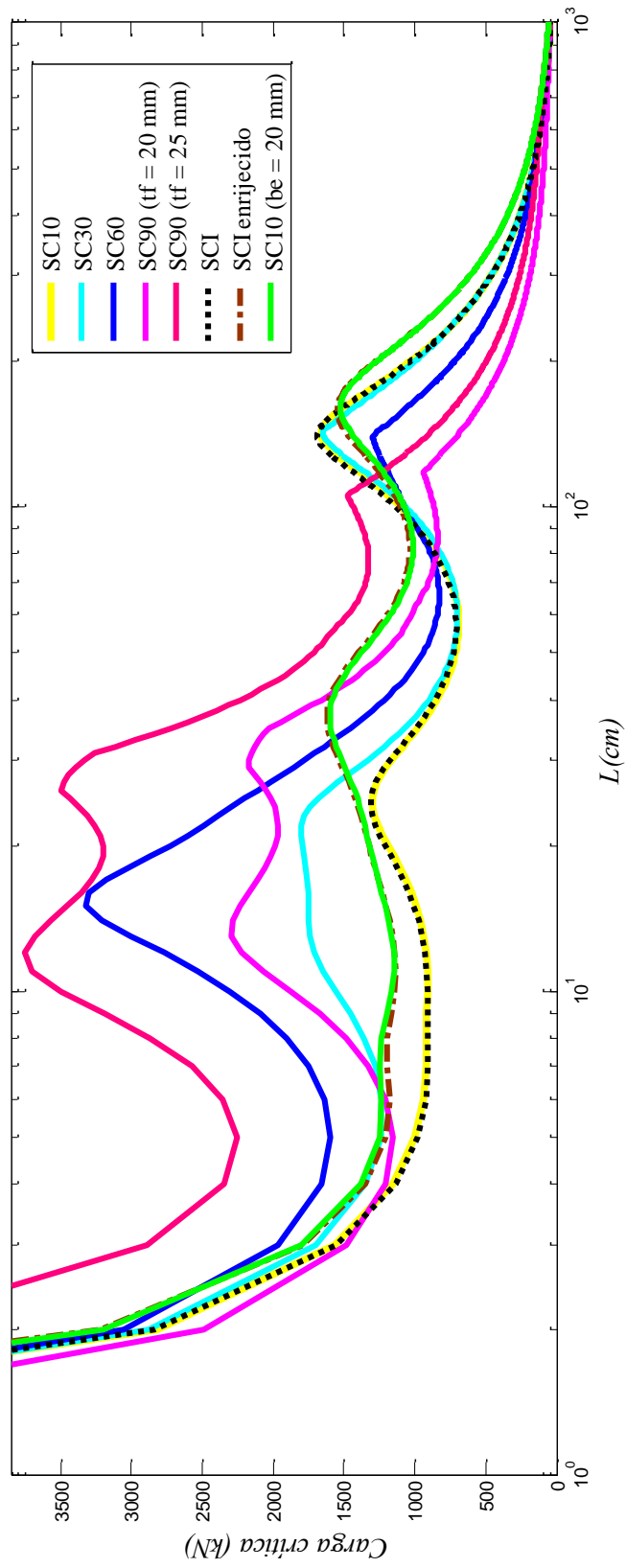


Fig. 5.35 – Seções compostas: variação de  $P_{cr}$  com  $L$

## 5.4 BI-VIGAS

Ilustra-se a seguir a aplicação da GBT para análise de um sistema bi-viga, tradicionalmente utilizado em pontes mistas de pequenos vãos, em geral até cerca de 70 m (Fig. 5.36).



Fig. 5.36 – Sistema estrutural: bi-viga (Ferraz, 2009)

A solução bi-viga consiste em duas vigas longitudinais principais travadas por vigas transversais que funcionam como elementos de contraventamento, mas que podem também suportar a laje.

O emprego de geometrias simples que contribuem para a facilidade de execução, os baixos custos de manutenção, a pequena altura dos tabuleiros e o emprego de sistemas de contraventamentos simples são alguns fatores que favorecem sua ampla utilização (Ferraz, 2009).

### 5.4.1 PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS

Para definição das variáveis a serem empregadas no estudo paramétrico, consideram-se os dados geométricos fornecidos por Ferraz (2009) para dimensionamento de vãos simplesmente apoiados de pontes mistas rodoviárias para a qual se utiliza a solução bi-viga com altura máxima de  $h_w \leq 1100 \text{ mm}$ , limitada às dimensões comerciais dos perfis, tabuleiro com largura  $B = 10.7 \text{ m}$ ,

faixa de rodagem de  $6,00\text{ m}$  e espessura da laje de concreto igual a  $h_c = 250\text{ mm}$ , para fins de simplificação considerada constante em toda a seção transversal e modelada com o peso equivalente em aço (Fig. 5.37).

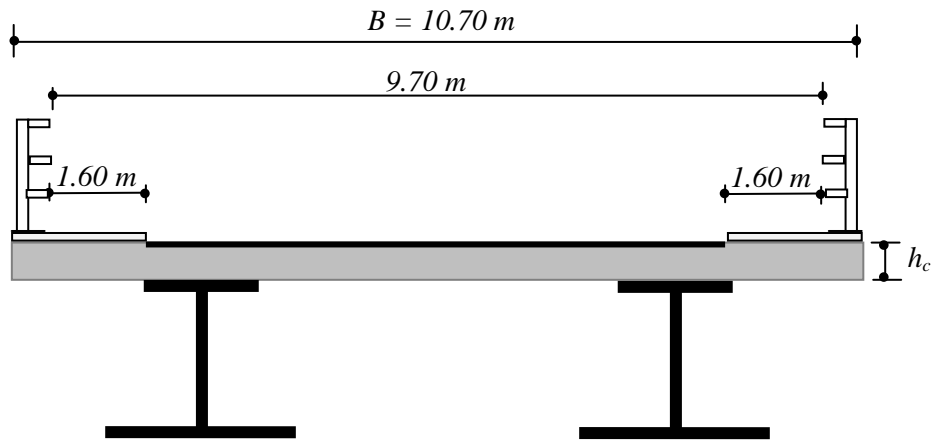


Fig. 5.37 – Bi-viga: dados geométricos

As seções transversais são constituídas por perfis I assimétricos, formados por chapas soldadas, com mesa inferior com maior área que a superior e alma constituída por uma chapa de pequena espessura (Tabela 5.6).

**Tabela 5.6 – Parâmetros geométricos: perfis I**

Modelo	Vão (m)	$b_s$ (cm)	$t_s$ (cm)	$h_w$ (cm)	$t_w$ (cm)	$b_i$ (cm)	$t_i$ (cm)
<b>BV01</b>	25	50	3.5	105.0	1.8	80	6
<b>BV02</b>	25	50	3.5	105.0	3.0	80	6

Utiliza-se aço estrutural com as seguintes propriedades:  $E = 210\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  e  $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$ .

### 5.4.2 ANÁLISES DE ESTABILIDADE E RESULTADOS

Os resultados da análise de estabilidade das bi-vigas biapoiadas submetidas à flexão pura (Fig. 5.38), para as quais o parâmetro investigado consiste na variação da espessura da alma, mostram que:

- (i) Para o modelo **BV01**, predominam os modos locais de placa (**7 – 15**) para  $L \leq 10$  m. A partir de  $L \geq 10$  m, decresce o percentual de participação de  $MLP \equiv \mathbf{12} + \mathbf{11} + \mathbf{10} + \mathbf{9} + \mathbf{8} + \mathbf{7} + \mathbf{outros}$ , evidenciam-se  $MD \equiv \mathbf{5} + \mathbf{6}$  e aumenta gradualmente a participação do modo global **3**.

Em  $L = 10$  m, por exemplo, tem-se a seguinte contribuição: modo **3** (1.22%), **5** (12.08%), **6** (7.30%), **7** (33.12%), **8** (32.89%), **9** (10.07%), **10** (1.39%) e **11** (1.65%).

- (ii) Para o modelo **BV02**, tem-se a seguinte participação modal ( $L = 10$  m): **7** (39.86%); **8** (39.59%); **9** (12.11%), **10** (1.67%) e **11** (1.98%).

- (iii) Embora não se trate das tradicionais estruturas constituídas por perfis formadas a frio, a GBT propicia fornecer boas estimativas acerca do comportamento de elementos estruturais com seções transversais de parede fina. Os resultados indicam boa correlação com o CUFSM (Tabela 5.7).

**Tabela 5.7 – Variação de  $M_{cr}$**

<b>Modelo</b>	$L$ (m)	GBT	CUFSM	$\frac{M_{cr}(GBT)}{M_{cr}(CUFSM)}$
<b>BV01</b>	25	6304.9	6301.9	1.000
<b>BV02</b>	25	6926.5	7157.0	0.968

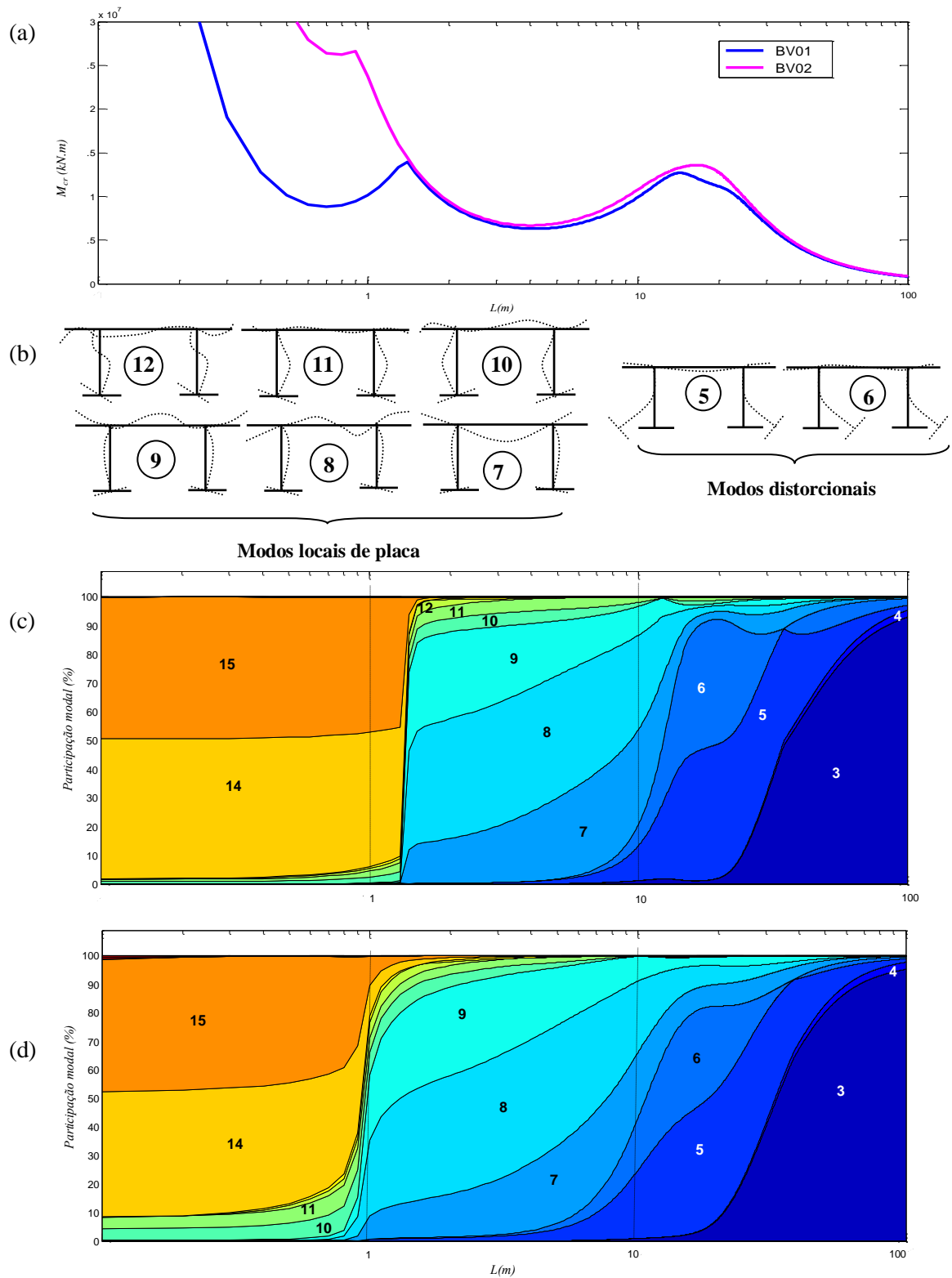


Fig. 5.38 – (a) Variação de  $M_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal: **BV01**. (d) **BV02**

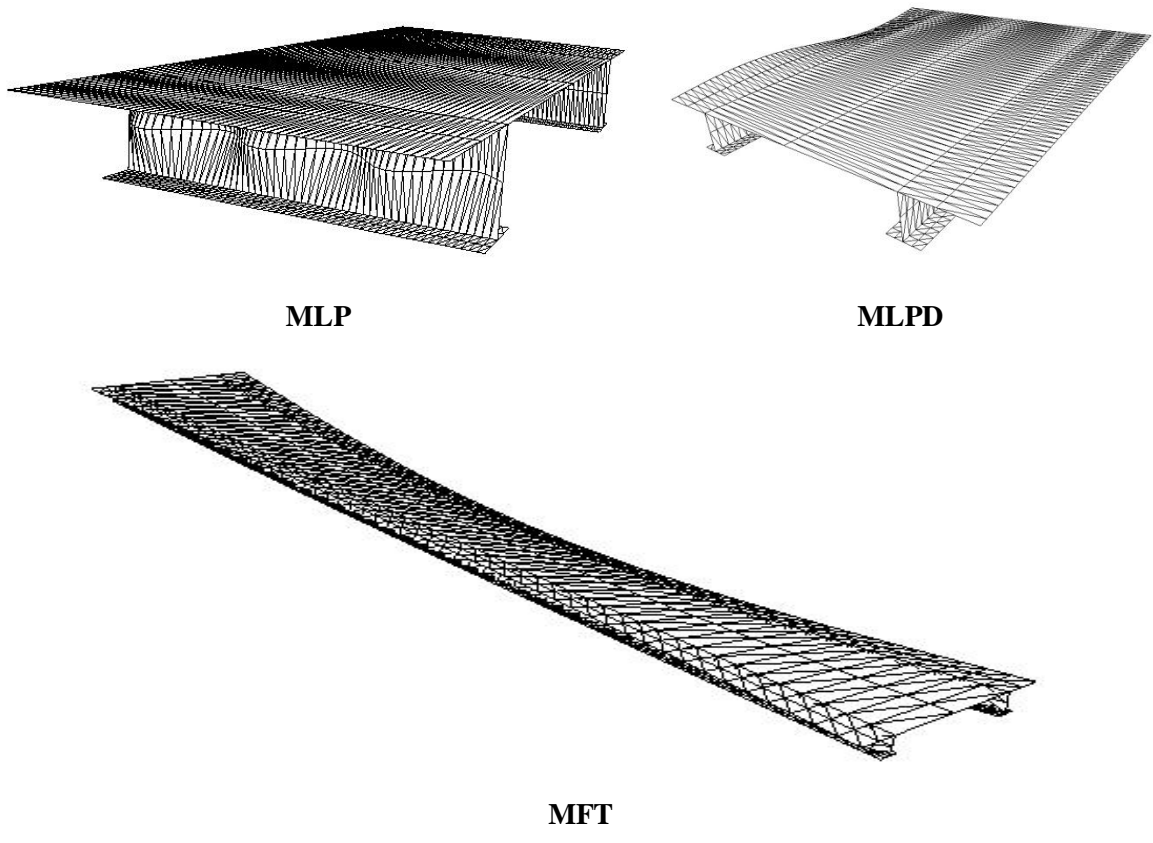


Fig. 5.39 – GBT: Modelo **BV01** – modos de instabilidade



# CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

Neste trabalho procede-se por meio da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) à análise de elementos estruturais de parede fina com seção transversal aberta ramificada.

O **Capítulo 1** aborda a natureza dos fenômenos de instabilidade que podem afetar o comportamento das seções transversais de parede fina. Uma comparação entre os tradicionais métodos de análise realça a versatilidade da GBT em relação ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e ao Método das Faixas Finitas (MFF).

O histórico de desenvolvimento da GBT, os fundamentos, as hipóteses simplificativas, a representação do campo de deslocamentos, as relações constitutivas e o princípio variacional utilizado para estabelecer o sistema de equações diferenciais de equilíbrio da GBT convencional e as respectivas condições de contorno são apresentados no **Capítulo 2**.

Os procedimentos requeridos para uma análise estrutural baseada na GBT englobam necessariamente duas etapas:

- (i) *análise da seção transversal*, que consiste em realizar a discretização nodal, obter as funções de deslocamentos, identificar os modos de deformação e determinar matrizes que contêm as propriedades mecânicas associadas a cada um deles, conforme apresentado no **Capítulo 3**.
- (ii) *análise da barra*, que compreende a definição das condições de contorno e do carregamento, comprimento, propriedades materiais do elemento estrutural e seleção modal para resolução do sistema de equações de equilíbrio que conduz à determinação dos modos de deformação finais da seção, como indicado no **Capítulo 4**. As implementações computacionais com base na GBT são utilizadas para realizar análises de estabilidade e de vibração de barras biapoias com condições de carregamentos específicos para as quais se consideram soluções exatas obtidas a partir de funções sinusoidais. Os resultados fornecem os valores de bifurcação das resultantes

das tensões (cargas ou momentos fletores), frequências, modos de instabilidade e de vibração e correspondentes participações modais.

No **Capítulo 5** realizam-se a partir de análises de estabilidade estudos paramétricos de: (i) painéis enrijecidos longitudinalmente sujeitos a esforços de compressão axial; (ii) colunas biapoiadas comprimidas formadas por seção composta; (iii) bi-vigas submetidas à flexão em torno do eixo de maior inércia utilizadas em pontes mistas rodoviárias de pequeno vão. Para fins de validação, comparam-se os resultados obtidos da GBT com o CUFMS v.3.1. O conjunto dos parâmetros investigados possibilita traduzir com precisão o comportamento estrutural dos elementos estruturais estudados, mostrando-se relevantes tanto para definir a capacidade de carga quanto para indicar a prevalência de um determinado modo de instabilidade e de suas interações.

Em todos os casos estudados, realçam-se as vantagens inerentes à GBT, possibilidades não disponíveis no MEF ou MFF, em termos de interpretação dos resultados do comportamento estrutural e da eficiência computacional relacionadas à:

- (i) perfeita compreensão da mecânica envolvida no comportamento estrutural.
- (ii) decomposição modal, que possibilita analisar separadamente cada um dos modos puros de deformação, representados pelos modos de corpo rígido (extensão axial, flexão em torno do eixo de maior inércia, flexão em torno do eixo de menor inércia e torção), modos distorcionais e modos locais de placa, cujo número depende da geometria da seção transversal e sua discretização, ou ainda selecionar ou combinar modos e avaliar o grau de interação entre eles em função do fator de participação modal.
- (iii) utilização de um número reduzido de graus de liberdade.

Nesse contexto, a GBT propicia perspectivas de avanços ainda mais significativos na caracterização do comportamento estrutural de seções transversais de parede fina e na busca por soluções de cálculo e métodos de dimensionamento econômicos e eficazes.

Como recomendações para trabalhos futuros, sugere-se estender a utilização da GBT a análises de seções transversais de parede fina abertas ramificadas, dando continuidade à linha de pesquisa:

- (i) Empregar a formulação de elementos finitos para analisar barras com seção transversal de parede fina aberta ramificada com diferentes condições de contorno e cargas variáveis (solução aproximada).
- (ii) Analisar elementos formados por seções transversais abertas ramificadas com novas tipologias geométricas, sob distintas condições de contorno e carregamentos, constituídas por materiais diversos (aço, inox, alumínio ou compósitos), objetivando contribuir para futuras revisões das normatizações existentes, em especial a ABNT NBR 14762:2010, ou para fins de otimização estrutural.
- (iii) Desenvolver modificações na formulação da GBT que permitam avaliar o comportamento de elementos estruturais com seção transversal de parede fina aberta ramificada sob temperaturas elevadas e verificar seu desempenho em situação de incêndio.

Outro tema correlato a ser sugerido inclui realizar análises de barras constituídas por seções transversais fechadas.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABAMBRES, M.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. GBT-based first-order analysis of elastic-plastic thin-walled steel members exhibiting strain-hardening. *The IES Journal. Part A: Civil & Structural Engineering*, v.6, n.2, 119-134, 2013a.
- ABAMBRES, M.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Physically non-linear GBT analysis of thin-walled members. *Computers & Structures*, 2013b (no prelo).
- ÁDÁNY, S.; SCHAFER, B.W. *Understanding and classifying local, distortional and global buckling in open thin-walled members*. Montreal: Structural Stability Research Council, p.1-20, 2005.
- ÁDÁNY, S.; SCHAFER, B.W. Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: derivation. *Thin-Walled Structures*, v.44, n.5, p.563-584, 2006.
- ÁDÁNY, S.; SCHAFER, B.W. A full modal decomposition of thin-walled, single branched open cross-section members via the Constrained Finite Strip Method. *Journal Construct. Steel Res.*, v.64, n.1, p.12-29, 2008.
- ÁDÁNY, S.; SILVESTRE, N.; SCHAFER, B.W.; CAMOTIM, D. GBT and cFSM: two modal approaches to the buckling analysis of unbranched thin-walled members. *Int. J. Adv. Steel Construct.*, v.5, n.2, p.195-223, 2009.
- AISI. North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members. Washington: American Iron and Steel Institute, 2007.
- ALMEIDA, S.J.C. de. *Análise numérica de perfis de aço formados a frio comprimidos considerando imperfeições geométricas iniciais*. São Carlos: EESC/USP, 2007. Dissertação de Mestrado.
- AMANTE, D.A.; ESTEFEN, S.F. Buckling Strength of Damaged Stiffened Panels. *ASME*, 2011.
- AMARAL, J.P.R. do. *Encurvadura em vigas mistas: estudo do modelo em "U" invertido*. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa/Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2011. Dissertação de Mestrado.
- AMDAHL, J. Buckling and ultimate strength of marine structures. In: *Buckling of Stiffened Plates*. 2009. <http://www.ivt.ntnu.no/imt>.
- ANAPAYAN, T.; MAHENDRAN, M.; MAHAARACHCHI, D. Section moment capacity tests of LiteSteel beams. *Thin Walled Structures*, v.49, n.4, p.502-512, 2011.

- ARAÚJO, M.G.M. de. *Estudo comparativo de painéis reforçados em liga de alumínio ou em aço de construção naval*. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa/Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2012. Dissertação de Mestrado.
- BALÁŽ, I. Dünnwandige Stäbe mit offenem oder geschlossenem deformierbarem Querschnitt. *Stahlbau*, v.68, p.70-77, 1999.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. GBT-based analysis of the local and global buckling of cold-formed steel frames. *Proceedings of Structural Stability Research Council 2007 Annual Stability Conference, SSR2007 – New Orleans*, p.391-412, 2007.
- BASAGLIA, D.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT. *Thin-Walled Structures*, v.46, p.79-101, 2008.
- BASAGLIA, D.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Comportamento de pós-encurvadura de barras e pórticos de aço: aplicação da Teoria Generalizada de Vigas (GBT). *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, v.6, n.1, 2009a.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. GBT-based local, distortional and global buckling analysis of thin-walled steel frames. *Thin-Walled Structures*, v.47, n.11, p.1246-1264, 2009b.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. GBT-based buckling analysis of thin-walled steel frames with arbitrary loading and support conditions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v.10, n.3, p.365-385, 2010.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Non-linear GBT formulation for open-section thin walled members with arbitrary support conditions. *Computers and Structures*, v.89, n.21, p.1906-1919, 2011.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D. Enhanced Generalised Beam Theory buckling formulation to handle transverse load application effects. *International Journal of Solids and Structures*, v.50, n.3-4, p.531-547, 2012.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Torsion warping transmission at thin-walled frame joints: kinematics, modelling and structural response. *Journal of Constructional Steel Research*, v.69, n.1, p.39-53, 2012.
- BEBIANO R.; SILVESTRE N.; CAMOTIM, D. GBT formulation to analyze the buckling behaviour of thin-walled members under non-uniform bending. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v.7, n.1, p.23-54, 2007.
- BEBIANO, R.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM; D. *GBTUL 1.0  $\beta$  - Buckling and vibration analysis of thin-walled members. GBT theoretical background*. Portugal: DECivil/IST/UTL, 2008. [www.civil.ist.utl.pt](http://www.civil.ist.utl.pt).

- BEBIANO, R.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Local and global vibration of thin-walled members subjected to compression and non-uniform bending. *Journal of Sound and Vibration*, v.315, n.3, p.509-535, 2008.
- BEBIANO, R.A.S. *Stability and dynamics of thin-walled members application of Generalised Beam Theory*. Lisboa: UTL/IST, 2010. Tese de Doutorado.
- BENSON, S. *Progressive collapse assessment of lightweight ship structures*. UK: Newcastle University, 2011. Tese (Ph.D.).
- BEER, F.P.; JOHNSTON, J.R. *Resistência dos Materiais*. 3.ed. 1995.
- BORN, J.S ; HORVAY, G. Thermal stresses in rectangular strips. *J. Appl. Phys.*, v.22, p. 401-406, 1955.
- BRUBAK, L.; ANDERSEN, H.; HELLESLAND, J. Ultimate strength prediction by semi-analytical analytical analysis of stiffened plates with various boundary conditions. *Thin Walled Structures*, v.62, p.28-36, 2013.
- BYKLUM, E.; AMDAHL, J. Influência das distorções de fabricação no comportamento estrutural de painéis enrijecidos de plataforma semi-submersível sob compressão axial. In: *The Second International Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics*, Busan, Coreia, 2002.
- CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; GONÇALVES, R.; DINIS, P.B. GBT analysis of thin-walled members: new formulations and applications. In: *Thin-Walled Structures: Recent Advances and Future Trends in Thin-Walled Structures Technology*. LOUGHLAN, J. (Ed.). Canopus Publishing Ltd., Bath, p.137-168, 2004.
- CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; DINIS, P.B. Numerical analysis of cold-formed steel members. *Int. J. Steel Struct.*, v.5, n.1, p.63–78, 2005.
- CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; GONÇALVES, R.; DINIS, P. B. GBT-based structural analysis of thin-walled members: overview, recent progress and future developments. *Advances in Engineering Structures, Mechanics and Construction*, SMCD 2006 – Waterloo, 14-17, p.187-204, 2006.
- CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; DINIS, P.B., BEBIANO, R.; BASAGLIA, C. Recent progress in the numerical analysis of thin-walled steel members and frames. *Proceedings of International Symposium on Innovative Design of Steel Structures*. YOUNG, B. (Ed.), Hong Kong, 10/11, p.63-104, 2006.
- CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; BEBIANO, R. *GBT local and global vibration analysis of thin-walled members, analysis and design of plated structures*. SHANMUGAM, N.E.; WANG, C.M. (Eds.). Cambridge: Woodhead Publishing, v.2, p.36-76, 2007.

- CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; BASAGLIA, C.; BEBIANO, R. GBT-based buckling analysis of thin-walled members with non-standard support conditions. *Thin-Wall Struct.*, v.46, n.7–9, p.800-815, 2008a.
- CAMOTIM, D.; DINIS, P.B.; SILVESTRE, N. Local/distortional mode interaction in lipped channel steel columns: post-buckling behaviour, strength and DSM design. *Proc. of 5<sup>th</sup> International Conference on Thin-Walled Structures (ICTWS 2008 - Brisbane, 18-20/6)*, p.99-114, 2008b.
- CAMOTIM, D. *et al.* GBT buckling analysis of thin-walled steel frames: a state-of-the-art report. *Thin Walled Structures*, v.48, n.10-11, p.726-743, 2010.
- CAMOTIM, D.; ANDRADE, A.; BASAGLIA, C. Some thoughts on a surprising result concerning the lateral-torsional buckling of monosymmetric I-section beams. *Thin-Walled Structures*, v.60, p.216-221, 2012.
- CAMOTIM, D.; BASAGLIA, C. Buckling analysis of thin-walled steel structures using Generalized Beam Theory (GBT): state-of-the-art report. *Steel Construction*, v.6, n.2, p.117-131, 2013.
- CARDOSO, D.C.T. *Resistência e desempenho estrutural de painéis enrijecidos de aço. Aplicação em silos metálicos enrijecidos*. RJ: UFRJ/COPPE, 2009. Dissertação de Mestrado.
- CARLSEN, C.A. A parametric study of collapse of stiffened plates in compression. *The Structural Engineer*, v.58, n.2, p.33–40, 1980.
- CASAFONT, M.; MARIMON, F.; PASTOR, M. Calculation of pure distortional elastic buckling loads of members subjected to compression via the Finite Element Method. *Thin-Walled Struct.*, n.47, p.701-709, 2009.
- CASAFONT, M.; MARIMON, F.; PASTOR, M.; FERRER, M. Linear buckling analysis of thin-walled members combining the Generalised Beam Theory and the Finite Element Method. *Computers & Structures*, 2011.
- CHEUNG, Y.K.; THAM, L.G. *The Finite Strip Method*. Boca Raton: CRC Press, 1998.
- CHODRAUI, G.M.B. *Flambagem por distorção da seção transversal em perfis de aço formados a frio submetidos à compressão centrada e à flexão*. São Carlos: USP, 2003. Dissertação de Mestrado.
- CHODRAUI, G.M.B. *Análise teórica e experimental de perfis de aço formados a frio submetidos à compressão*. São Carlos: USP, 2006. Tese de Doutorado.
- CHUJUTALLI, J.A.H. *Flambagem torsional de enrijecedores em painéis de navios tanques submetidos à compressão axial*. RJ: UFRJ/COPPE, 2010. Dissertação de Mestrado.



- CLARKE, J. L. (Ed.). *Structural design of polymer composites – EUROCOMP. Design code and background document*. London: E & FN Spon, 1996.
- CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. *Dynamics of structures*. 2.ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1993.
- CORREIA, J.R. *et al.* First-order, buckling and post-buckling behaviour of GFRP pultruded beams. Part 1: Experimental study. *Computers & Structures*, v.89, n.21, p.2052-2064, 2011.
- DANIELSON, D.A.; KIHIL, D.P.; HODGES, D.H. Tripping of thin-walled plating stiffeners in axial compression. *Thin-Walled Structures*, v.10, p.121-142, 1990.
- DAVIES, J.M.; LEACH, P. Some applications of Generalized Beam Theory. *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures (St. Louis, USA, 20-21/10)*. YU, W.W.; LABOUBE, R. (Eds.). University of Missouri-Rolla, p.479-501, 1992.
- DAVIES, J.M.; LEACH, P. First-order Generalised Beam Theory. *Journal of Constructional Steel Research*, v.31, n.2-3, p.187-220, 1994a.
- DAVIES, J. M.; LEACH, P. ; HEINZ, D. Second-order Generalised Beam Theory. *Journal of Constructional Steel Research*, v.31, n.2-3, p.221-241, 1994b.
- DAVIES, J.M. Generalised Beam Theory (GBT) for coupled instability problems. In: RONDAL, J. (Ed.). *Coupled Instabilities in Metal Structures: Theoretical and Design Aspects*. Nova Iorque: Springer, 1998. 372p.
- DAVIES, J.M. Recent research advances in cold-formed steel structures. *Journal of Constructional Steel Research*, v.55, n.1, p.267-288, 2000.
- DAVIES, J.M.; JIANG, C. Design for distortional buckling. *Journal of Constructional Steel Research*, v.46, n.1, p.174-175, 1998.
- DE MIRANDA, S. GUTIÉRREZ, A.; MILETTA, R.; UBERTINI, F. A Generalized Beam Theory with shear deformation. *Thin-Walled Structures*, v.67, p.88-100, 2013.
- DEGÉE, H.; BOISSONNADE, N. An investigation on the use of GBT for the study of profiles with branched cross-sections. *Proceedings of Fourth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, CIMS'04 - Rome, 27-29/9, 2004*.
- DI LORENZO, G.; LANDOLFO, R. Study of innovative built-up cold-formed beams. *Proceedings of the 16th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*. University of Missouri-Rolla, 2002.

- DINIS, P.B.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily ‘branched’ open cross-sections. *Thin-Walled Structures*, v.44, p.20-38, 2006.
- DINIS, P.B.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. FEM-based analysis of the local-plate/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel columns. *Computers & Structures*, v.85, n.19-20, p.1461-1474, 2007.
- DINIS, P.B.; GONÇALVES, R.; CAMOTIM, D. On the local and global buckling behavior of cold-formed steel hollow-flange channel beams. *Proceedings of the Fifth International Conference on Thin-Walled Structures (ICTWS 2008 – Gold Coast, Austrália, 18-20/06)*. MAHENDRAN, M. (Ed.), v.I, p.425-432, 2008.
- DINIS, P.B.; YOUNG, B.; CAMOTIM, D. On the effect of local/distortional mode interaction on the post-buckling behaviour and ultimate strength of fixed-ended lipped channel columns. *Proc.70 IJSSD Symposium on Progress in Structural Stability and Dynamics*, Hong Kong, p.191-198, 2009.
- DINIS, P.B.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. On the local and global post-buckling behaviour and strength of thin-walled angle columns and beams. In: *Book of Abstracts of 7th European Solid Mechanics Conference*, p.7-11, 2009.
- DINIS, P.B.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. On the local and global buckling behaviour of angle, T-section and cruciform thin-walled members. *Thin-Walled Structures*, v.48, n.10-11, p.786-797, 2010.
- DINIS, P.B.; CAMOTIM D. Local/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel beams. *Thin-Walled Structures*, v. 48, n.10-11, p.771-785, 2010.
- DINIS, P. B.; CAMOTIM, D. Post-buckling behaviour and strength of cold-formed steel lipped channel columns experiencing distortional/global interaction. *Computers and Structures*, v.89, n.3-4, p 422-434, 2011a.
- DINIS, P.B.; CAMOTIM, D. Buckling, post-buckling and strength of equal-leg angle and cruciform columns: similarities and differences. *Proceedings of the 6<sup>th</sup> European conference on steel and composite structures (EUROSTEEL 2011-Budapest, 31/8 -2/9)*, p.105-110, 2011b.
- DINIS, P.B; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. On the mechanics of thin-walled angle column instability. *Thin-Walled Structures*, v.52, p.80-89, 2012.
- ELHAJJ, N. R.; BIELAT, K.; CRANDELL, J. *Commentary on the prescriptive method for residential cold-formed steel framing*. DIANE Publishing, 1996.
- EN 1993-1-3:2006. Eurocode 3 – Design of Steel Structures, Part 1-3: General rules – Supplementary rules for cold formed thin gauge members and sheeting, 2006.

- ESTEFEN, T.P. *Influência das distorções de fabricação no comportamento estrutural de painéis enrijecidos de plataforma semi-submersível sob compressão axial*. RJ: UFRJ/COPPE, 2009. Dissertação de Mestrado.
- FAULKNER, D. A review of effective plating for use in the analysis of stiffened plating in bending and compression. *Journal of Ship Research*, v.19, n.1, p.1-17, 1975.
- FENA, R.P.T. *Interacção entre instabilidade local e distorcional em colunas de aço enformadas a frio de seção em "hat"*. Lisboa: IST/UTL, 2011. Dissertação de Mestrado.
- FERRAZ, A.M.S. *Dimensionamento óptimo de pontes mistas rodoviárias de pequeno vão*. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2009. Dissertação de Mestrado.
- FERREIRA, P.M.P.S. *Stiffened compression flanges of steel box girder bridges: post-buckling behaviour and ultimate strength*. Lisboa: IST/UTL, 2011. Tese de Doutorado.
- FREITAS, I.I.C.S.G. de. *Formulação fisicamente não-linear da Teoria Generalizada de Vigas*. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa/Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2011. Dissertação de Mestrado.
- GARDNER, L.; NETHERCOT, D.A. Numerical modeling of stainless steel structural components-A consistent approach. *Journal of Structural Engineering*, v.130, n.10, p. 1586-1601, 2004.
- GEORGIEVA, I. *et al.* Strength and stiffness characteristics of built-up members of cold-formed steel profiles—experiments and numerical investigation. *Progress in Steel and Composite Structures*, v.1, n.1, 2011.
- GEORGIEVA, I.B.; SCHUEREMANS, L.; PYL, L.; VANDEWALLE, L. Experimental investigation of built-up double-Z members in bending and compression. *Thin Walled Structures*, v.53, n.4, p.48-57, 2012a.
- GEORGIEVA, I.B.; SCHUEREMANS, L.; PYL, L. Composed columns from cold-formed steel Z-profiles. Experiments and code-based predictions of the overall resistance. *Engineering Structures*, v.37, n.4, p.125-134, 2012b.
- GEORGIEVA, I.; SCHUEREMANS, L.; VANDEWALLE, L.; PYL, L. Design of built-up cold-formed steel columns according to the direct strength method. *Procedia Engineering* 40, p.119-124, 2012c.
- GHAVAMI, K. Experimental study of stiffened plates in compression up to collapse. *Journal of Constructional Steel Research*, v.28, n.2, p.197-221, 1994.
- GIRKMANN, K. *Flächentragwerke*. 5.ed. Viena: Springer Verlag , 1959.

- GONÇALVES, R.M. *Análise de vigas de parede fina com secção deformável*. Lisboa: IST/UTL, 2007. Tese (Ph.D.)
- GONÇALVES, R.; CAMOTIM, D.; DINIS, P. B. Generalised beam theory to analyse the buckling behaviour of aluminium or stainless steel open and closed thin-walled members. *Thin-walled structures: advances in research, design and manufacturing technology, Ictws 2004-Loughborough, 22-24/6*. Institute of Physics Publishing, Bristol, 2004. p.843-852.
- GONÇALVES, R. M.; CAMOTIM, D. GBT - local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns. *Computers and Structures*, v.82, n.17-19, p.1473-1484, 2004.
- GONÇALVES R.; CAMOTIM, D. Thin-walled member plastic bifurcation analysis using Generalized Beam Theory. *Advances in Engineering Software*, v.38, n.8-9, p.637-646, 2007.
- GONÇALVES, R.; DINIS P.B.; CAMOTIM, D. GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections. *Thin-Walled Structures*, v. 47, n.5, p.583-600, 2009.
- GONÇALVES, R.; RITTO-CORRÊA, M.; CAMOTIM, D. A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of generalized beam theory. *Comput. Mech.*, v.46, p.759–781, 2010.
- GONÇALVES, R.; LE GROGNEC, P.; CAMOTIM, D. GBT-based semi-analytical solutions for the plastic bifurcation of thin-walled members. *International Journal of Solids and Structures*, v.47, n.1, p.34-50, 2010.
- GONÇALVES, R.; CAMOTIM, D. Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members. *Thin-Walled Structures*, v.49, n.10, p.1237-1245, 2011.
- GONÇALVES, R.; CAMOTIM, D. Geometrically non-linear Generalised Beam Theory for elastoplastic thin-walled metal members. *Thin-Walled Structures*, v.51, p.121-129, 2012.
- GONÇALVES, R.; CAMOTIM, D. Elastic buckling of uniformly compressed thin-walled regular polygonal tubes. *Thin-Walled Structures*, p.71, n.35-45, 2013.
- GRONDIN, G.Y.; ELWI, A.E.; CHENG, J.J.R. Buckling of stiffened steel plates – a parametric study. *Journal of Constructional Steel Research*, v.50, p.151-175, 1999.
- GRONDIN, G.; WANG, C.; ELWI, A. Interaction buckling failure of stiffened steel plates. *Structural Engineering Report No. 264*. Canadá: Universidade de Alberta, 2006.

- GUERREIRO, J.F.G. Estudo da resistência estrutural remanescente de painéis reforçados sujeitos à encurvadura. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa/Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2012. Dissertação de Mestrado.
- JAVARONI, C. E. *Perfis de aço formados a frio submetidos à flexão: análise teórico-experimental*. São Carlos: EESC/USP, 1999. Tese de Doutorado.
- JEYARAGAN, S.; MAHENDRAN, M. Experimental studies of the flexural behaviour of back to back LiteSteel beams. *Research Rep.* Brisbane, Austrália: Queensland Univ. of Technology, 2009.
- JIANG, C. *Stability analysis of light gauge steel members using the Finite Element Method and the Generalized Beam Theory*. UK: University of Salford, 1994. Tese (Ph.D.)
- JIANG, C.; DAVIES, J.M. Design of thin-walled purlins for distortional buckling. *Thin-Walled Structures*, v.29, n.1-4, p.189–202, 1997.
- JÖNSSON, J.; ANDREASSEN, M.J. Distortional modes of thin-walled beams. In: *7th EUROMECH Solid Mechanics Conf.* Lisboa, Portugal, 2009.
- JÖNSSON, J.; ANDREASSEN, M.J. Semi-discretization approach to Generalized Beam Theory and analytical solutions of the Generalized Column Equations. *8<sup>th</sup> European Solid Mechanic Conference*. HOLZAPFE, G.A. L.; OGDEN, R. W. (Eds.). Graz, Áustria, 2012.
- Haidarali, M. R.; Nethercot, D. A. Local and distortional buckling of cold-formed steel beams with edge-stiffened flanges. *Journal of Constructional Steel Research*, v.73, p.31-42, 2012a.
- Haidarali, M.R.; Nethercot, D. A. Local and distortional buckling of cold-formed steel beams with both edge and intermediate stiffeners in their compression flanges. *Thin-Walled Structures*, v.54, p.106-112, 2012b.
- HALME, T. Generalised Beam Theory in the analysis of thin-walled compressed members. *Stability and ductility of steel structures: Professor Ótto Halász Memorial Session*. Budapest, 2002.
- HERZOG, M.A.M. Simplified design of unstiffened and stiffened plates. *Journal of Structural Engineering*, v.113, n.10, p.2111-2124, 1987.
- HU, S.Z.; CHEN, Q.; PEGG, N.; ZIMMERMAN, T.J.E. Ultimate collapse tests of stiffened-plate ship structural units. *Marine Structures*, v.10, n.8, p. 587-610, 1997.
- HU, S.Z.; JIANG, L. A finite element simulation of the test procedure of stiffened panels. *Marine structures*, v.11, n.3, p.75-99, 1998.

- HUGHES, O. F.; MA, M. Inelastic analysis of panel collapse by stiffener buckling. *Computers & structures*, v.61, n.1, p.107-117, 1996.
- KESTI, J.; DAVIES, J.M. Local and distortional buckling of thin-walled short columns. *Thin-Walled Structures*, v.34, n.2, p.115-134, 1999.
- KIMURA, E.F.A.; MUNAIAR NETO, J. Comportamento estrutural de perfis formados a frio com seção transversal composta de cantoneiras duplas em situação de incêndio. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, v.13, n.59, p.33-36, 2011. Edição especial ENDOSET 2011. ISSN: 1809-5860.
- KIRCHHOFF, G.; HENSEL, K. *Vorlesungen über mathematische Physik: Bd. Mechanik*. 3.ed. BG: Teubner, 1883.
- LANDOLFO, R. *et al.* Laser welded built-up cold-formed steel beams: Experimental investigations. *Thin-Walled Structures*, v.46, n.7, p.781-791, 2008.
- LEACH, P. The calculation of modal cross-section properties for use in the Generalized Beam Theory. *Thin-Walled Structures*, v.19, n.1, p.61-79, 1994.
- LEACH, P.; DAVIES, J.M. An experimental verification of the generalized beam theory applied to interactive buckling problems. *Thin-Walled Structures*, v.25, n.1, p.61-79, 1996.
- LEAL, D.F. *Sobre perfis de aço formados a frio compostos por dupla cantoneira com seção "T" submetidos à compressão*. São Carlos: USP, 2011. Dissertação de Mestrado.
- LEPISTÖ, J.; NIKULA, S.; NIEMI, E. Optimum design of cold-formed sections using generalized beam theory. *Coupled Instabilities in Metal Structures*, p.101-108, 1996.
- LI, Z.; SCHAFER, B.W. Application of the finite strip method in cold-formed steel member design. *Journal of Constructional Steel Research*, v.66, n.8-9, p.971-980, 2010.
- LOUGHLAN, J. *Thin-Walled Structures: Advances in Research, Design and Manufacturing Technology*. CRC Press, 2004. 970p.
- LOVE, A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4.ed. Cambridge: University Press, 1927.
- LUO, H.G.; GUO, Y.J.; XU, Y. Distortional Buckling of Cold-Formed Thin-Walled Channel Beams in Combined Compression and Minor Axis Bending. *Advanced Materials Research*, v.163-167, p. 507-510. 2011.
- MAIA, W.F.; MALITE, M. *Sobre a estabilidade de cantoneiras de aço formadas a frio submetidas à compressão*. São Carlos: USP, 2008.

- MAHAARACHCHI, D.; MAHENDRAN, M. Material properties, residual stresses and geometric imperfections of LiteSteel beam sections. *Research Rep*, 2005, 5.
- MAHAARACHCHI, D.; MAHENDRAN, M. *Lateral distortional buckling behaviour of a new cold-formed hollow flange channel section*. 2006.
- MAHENDRAN, M.; MAHAARACHCHI, D. *Development, behaviour and design of LiteSteel Beams*. 2006.
- MAGNUCKA-BLANDZI, E. Effective shaping of cold-formed thin-walled channel beams with double-box flanges in pure bending. *Thin-Walled Structures*, v.49, n.1, p.121-128, 2011.
- MANSOUR, K. *Experimental analysis of cold-formed Z-purlin and sheeting interaction*. Budapest: Budapest University of Technology and Economics, 2012. Tese (Ph.D.).
- MapleSoft. Maple versão 14.
- MARTINS, A.; DINIS, P. B.; CAMOTIM, D. On the post-buckling behavior of cold-formed steel lipped channel beams affected by local-plate/distortional buckling mode interaction. In: *Proceedings of SSRC Annual Stability Conference (New Orleans)*, p.413-435, 2007.
- MathWorks. MATLAB R2006b.
- MENDES, T.A.A. *Tabuleiros mistos aço-betão com dupla ação mista*. Lisboa: IST/UTL, 2010. Dissertação de Mestrado.
- MÖLLER, R. *Zur berechnung prismatischer strukturen mit beliebigem nicht formtreuem querschnitt Bericht nr. 2*. Darmstadt: Institut für Statik, Technische Hochschule, 1982.
- MORAIS, C. S. et al. Análise teórico-experimental de ligações parafusadas em perfis formados a frio. *Revista Escola de Minas*, v. 58, n.4, p.347-353, 2005. <http://www.scielo.br/pdf/rem/v58n4/a058.pdf>.
- MÖRSCHARDT, S. *Die verallgemeinerte technische biegetheorie für faltwerke mit kragteilen*. Festschrift Richard Schardt, Darmstadt: Technische Hochschule, v.51, p. 259–275, 1990.
- MURRAY, T.M. Stability of gable frame panel zone plates. *Proceedings of the Structural Stability Research Council Annual Technical Session*, 1986, 317-325.
- NATÁRIO, P.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Localized web buckling analysis of beams subjected to concentrated loads using GBT. *Thin-Walled Structures*, 2012.

- NEDELCO, M. GBT formulation to analyse the behavior of thin-walled members with variable cross-section. *Thin-Walled Structures*, n.48, n.8, p.629-638, 2010.
- NEDELCO, M. GBT-based buckling mode decomposition from finite element analysis of thin-walled members, *Thin-Walled Structures*, v.54, p.156-163, 2012.
- NOGALES, A.M. *Analysis of a branched cross-section through the Generalized Beam Theory*. 2013.
- ORDINAS, P. *Análisis de perfiles de sección abierta y pared delgada mediante la Teoría de la Viga Generalizada*. Espanha: Universitat Politècnica de Catalunya, 2010. Tese de Doutorado. upcommons.upc.edu.
- OLIVEIRA, S.D.G. *Modelação e simulação numérica em estruturas aeronáuticas reforçadas*. PT: Universidade de Aveiro, 2010. Dissertação de Mestrado.
- OROZCO, J.C.G. *Contribuição ao estudo de painéis reforçados: comparação entre o método da chapa ortotrópica e método dos elementos finitos*. SP: USP, 2009. Dissertação de Mestrado.
- PAIK, J.K.; THAYAMBALLI, A.K. An empirical formulation for predicting the ultimate compressive strength of stiffened panels. *Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference*, p.328-338, 1997.
- PAIK, J.K.; THAYAMBALLI, A.K.; LEE, W.H. A numerical investigation of tripping. *Marine Structures*, v.11, p. 159-183, 1998.
- PAIK, J.K.; KIM, B.J.; SEO, J.K. Methods for ultimate limit state assessment of ships and ship-shaped offshore structures: Part II: stiffened panels. *Ocean Engineering*, v.35, n.2, p.271-280, 2008.
- PALAU, E. C. *Estudio teórico y experimental de los modos de pandeo de perfiles estructurales de acero de chapa delgada, conformados en frío, de sección abierta y con perforaciones sometidos a compresión*. Espanha: Universidade Politècnica da Catalunya, 2009. Dissertação de Mestrado. upcommons.upc.edu.
- PATRÍCIO, T.T. *Análise de vigas de seção fechada em losango de parede fina sob flexão*. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 2012. Dissertação de Mestrado.
- PAULO, R.M.F. *Simulação numérica do comportamento mecânico de estruturas reforçadas*. PT: Universidade de Aveiro, 2011. Dissertação de Mestrado.
- PHAM, S.H.; PHAM, C.H.; HANCOCK, G.J. *Shear buckling of thin-walled channel sections with complex stiffened webs*. Research Report R924. Sidney: School of Civil Engineering, 2012.
- PHAM, C.H.; HANCOCK, G.J. Elastic buckling of cold-formed channel sections in shear. *Thin-Walled Structures*, 2012.



- PINTO, A.E.M.R. *Estabilidade local de perfis de aço enformados a frio*. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2010. Dissertação de Mestrado.
- PROKIC, A. Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open profile. *Advances in Engineering Software*, n.30, p.109-119, 1999.
- PROLA, L.C. *Estabilidade local e global de elementos estruturais de aço enformados a frio*. Lisboa: IST/UTL. 2002. Tese de Doutorado.
- RANZI, G.; LUONGO, A. A new approach of thin-walled member analysis in the framework of GBT. *Thin-Walled Structures*, v.49, p.1404-1414, 2011.
- REIS, A.; CAMOTIM, D. *Estabilidade Estrutural*. Portugal: MacGraw-Hill, 2001.
- RENDEK, Stanislav; BALÁŽ, Ivan. Distortion of thin-walled beams. *Thin-Walled Structures*, v.42, n.2, p.255-277, 2004.
- RIVERA, M.R.M. Flambagem de painéis de aço enrijecidos em diferentes temperaturas. RJ: UFRJ/COPPE, 2011. Dissertação de Mestrado.
- RONDAL, J. *Determination theoretique des contraintes residuelles dans les elements en acier profiles a froid*. Fonds National de la Recherche Scientifique, 1992.
- RONDAL, J.; DUBINA, D. Residual stresses and the behaviour of cold-formed steel structures. *Proc. of 17<sup>th</sup> Czech and Slovak International Conference on Steel Structures and Bridges*, Bratislava, Slovakia, September 7-9, p.193-197, 1994.
- RONDAL, J. Cold formed steel members and structures: General Report. *Journal of Constructional Steel Research*, v.55, n.1-3, p.155-158, 2000.
- RUELA, H. H. *Um estudo comparativo entre painéis reforçados planos: ligação rebitada versus FSW*. São José dos Campos: ITA, 2010.
- SABBAGH, A. B. *et al.* Ductile moment-resisting frames using cold-formed steel sections: an analytical investigation. *Journal of Constructional Steel Research*, v.67, n.4, p.634-646, 2011.
- SANTOS, W. S. *Interação flambagem global – flambagem local em pilares metálicos de seção I duplamente simétricos sob compressão uniforme*. Vitória: UFES, 2002. Dissertação de Mestrado.
- SCHAFFER, B.W., ÁDÁNY, S. Understanding and classifying local, distortional and global buckling in open thin-walled members. *Proceedings of the annual technical session and meeting*, Structural Stability Research Council, Canadá, p.27-46, 2005.

- SCHAFFER, B.W. *Elastic buckling analysis of thin-walled members by Finite Strip Analysis. CUFSM v.3.1.* EUA: Johns Hopkins University, 2006. <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>
- SCHAFFER, B. *Thin-walled structures. Generalized Beam Theory (GBT): GBTUL a new user friendly code for GBT calculations.* Baltimore: John Hopkins University, 2010.
- SCHAFFER, B.W. Cold-formed steel structures around the world. A review of recent advances in applications, analysis and design. *Steel Construction* 4, n.3, p.141-149, 2011.
- SCHAFFER, B.W.; CAMOTIM, D. Special Issue on Cold-Formed Steel Structures. *Journal of Structural Engineering*, v.139, n.5, p.637-639, 2013.
- SCHARDT, R. Eine Erweiterung der Technischen Biegetheorie zur Berechnung prismatischer Falwerke. *Der Stahlbau*, v.35, p.161-171, 1966.
- SCHARDT, R. Anwendung der Erweiterten Technischen Biegetheorie auf die Berechnung prismatischer Falwerke und Zylinderschalen nach Theorie I. und II. Ordnung. *IASS-Symposium on Folded Plates and prismatic Structures*, v.I, Wien, 1970.
- SCHARDT, R. The generalized beam theory, instability and plastic collapse of steel structures. In: *Proceedings of the M.R. Horne Conference*, University of Manchester, p. 469-75, 1983.
- SCHARDT, R. *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie.* Germany: Springer Verlag; 1989.
- SCHARDT, R. Generalised Beam Theory – an adequate method for coupled stability problems. *Thin-Walled Structures*, n.19, p.161–180, 1994a.
- SCHARDT, R. Lateral-torsional and distortional buckling of channel and hat-sections. *Journal of Constructional Steel Research*, v.31, n.2-3, p.243-265, 1994b.
- SCHARDT, R.; STEINGASS, J. Eine Erweiterung der Technischen Biegelehre für die Berechnung dünnwandiger geschlossener Kreiszyinderschalen. *Der Stahlbau*, v.39, 1970.
- SEDLACEK, G. Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für Stäbe mit dünnwandigem, prismatischem Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung. Dissertation, TU Berlin, 1968. Fortschritt-Berichte. *VDI-Zeitschrift Reihe*, v.4, n.8, 1968.
- SEDLACEK, G. *Die Anwendung der erweiterten Biege– und Verdrehtheorie auf die Berechnung von Kastenträgern mit verformbarem Querschnitt.* Straße Brücke Tunnel, 1971.

- SERRETTE, R.L. Performance of edge-loaded cold formed steel built-up box beams. *Practice Periodical on Structural Design and Construction, ASCE*, v.9, n.3, p.170-174, 2004.
- SHEIKH, I. A.; GRONDIN, G. Y.; ELWI, A. E. Stiffened steel plates under uniaxial compression. *Journal of Constructional Steel Research*, v.58, n.5, p.1061-1080, 2002.
- SHEIKH, I.; GRONDIN, G.; ELWI, A. Stiffener tripping in stiffened steel plates. *Structural Engineering Report n.236*. Canadá: University of Alberta, 2003.
- SILVA, A.C. *Estudo de ligações parafusadas em perfis formados a frio*. Ouro Preto: UFOP/DECIV, 2006. Dissertação de Mestrado.
- SILVA, N.M.F.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D.; DEGENHARDT, R. On the use of Generalized Beam Theory to assess the buckling and post-buckling behavior of laminated CFRP cylindrical stiffened panels. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v.10, n.4, p.737-760, 2010.
- SILVA, N.M.F.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; CORREIA, J.R.; BRANCO, F. A. First-order, buckling and post-buckling behaviour of GFRP pultruded beams. Part 2: Numerical simulation. *Computers & Structures*, v.89, n.21, p.2065-2078, 2011.
- SILVA, N.M.F.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. GBT cross-section analysis of thin-walled members with arbitrary cross-sections: a novel approach. *Proceedings of Fifth International Conference on Thin-Walled Structures. ICTWS 2008 –Brisbane, 18-20/6, 2008*.
- SILVA, V. P.; RODRIGUES, F. C.; FAKURY, R. H.; PANNONI, F. D. A real fire in a social interest apartment: a case study. *Revista Escola de Minas*, v.60, n.2, p.315-324, 2007.
- SILVESTRE, N. Generalised beam theory to analyse the buckling behaviour of circular cylindrical shells and tubes. *Thin-walled structures*, v.45, n.2, p.185-198, 2007.
- SILVESTRE, N. Non-classical effects in FRP composite tubes. Part B. *Composites Engineering*, v.40, n.8, p.681-697, 2009.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. First-order Generalised Beam Theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, v.40, n.9, p.755-789, 2002a.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Second-order Generalised Beam Theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-Walled Structures*, v.40, n.9, p.791-820, 2002b.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Aplicação da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) ao estudo da estabilidade de barras com secção de parede fina. *Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*, n.50, p.21-40, 2002c.

- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Nonlinear Generalized Beam Theory for cold-formed steel members. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v.3, n.4, p.461-490, 2003a.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. GBT-based computational approach to analyse the geometrically non-linear behaviour of steel and composite thin-walled members. In: *Computational Methods in Engineering and Science*. IU, V.P.; LAMAS, L.N.; LI, Y.P.; MOK, K.M. (Eds.). Computational Methods in Engineering and Science: Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference EPMESC IX, Macao, China, 25-28, p.3-15, 2003b.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members: Part I - derivation and Part II - validation and application. 2003c.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. GBT buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members, *Computers and Structures*, v.81, n.18-19, p.1889-1904, 2003d.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Influence of shear deformation on the local and global buckling behavior of composite thin-walled members. In: *Thin-Walled Structures: Advances in Research, Design and Manufacturing Technology (ICTWS 2004)*, LOUGHLAN, J. (Ed.). Bristol: Institute of Physics Publishing, p.659–668, 2004a.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Generalised Beam Theory to analyse the vibration behavior of orthotropic thin-walled members. In: *Thin-Walled Structures: Advances in Research, Design and Manufacturing Technology (ICTWS 2004)*. LOUGHLAN, J. (Ed.). Bristol: Institute of Physics Publishing, p.919–926, 2004b.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Distortional buckling formulae for cold-formed steel rack section members. *Steel and Composite Structures*, v.4, n.1, 2004c.
- SILVESTRE, N. M. R. *Teoria Generalizada de Vigas - formulações, implementação numérica e aplicações*. Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa/Instituto Superior Técnico, 2005. Tese (Ph.D.).
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. *Análise e dimensionamento de estruturas de aço enformadas a frio*. Apontamentos de Apoio à Disciplina de Análise e Dimensionamento de Elementos Estruturais de Aço Enformadas a Frio, Aço-Inox e Alumínio, 1<sup>o</sup> Curso de Mestrado em Construção Metálica e Mista. Lisboa: DECivil, IST, 2006a.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Local-plate and distortional post-buckling behavior of cold-formed steel lipped channel columns with intermediate stiffeners. *Journal of Structural Engineering*, v.132, n.4, p.529-540, 2006b.

- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D.; DINIS, P.B. Aplicação do método da resistência direta a colunas e vigas de aço enformadas a frio com seção em C afetadas por interação entre instabilidade local de placa e distorcional. *Revista Escola de Minas*, v.60, n.2, p.341-354, 2007.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D.; DINIS, P.B. Direct strength prediction of lipped channel columns experiencing local-plate/distortional interaction. *Advanced Steel Construction - an International Journal*, v.5, n.1, p.45-67, 2009.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. On the mechanics of distortion in thin-walled open sections. *Thin-Walled Structures*, v.48, n.7, p.469-481, 2010.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D.; SILVA, N. F. Generalized beam theory revisited: from the kinematical assumptions to the deformation mode determination. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v.11, n.5, p.969-997, 2011.
- SILVESTRE, N.; DINIS, P.B.; CAMOTIM, D. Developments on the design of cold-formed steel angles. *Journal of Structural Engineering*, 2012a.
- SIMÃO, F.P.S.S. *et al.* Post-buckling bifurcational analysis of thin-walled prismatic members in the context of the Generalized Beam Theory. 2007.
- SIMÃO, P.; SIMÕES DA SILVA, L. A numerical scheme for post-buckling analysis of thin-walled members in the context of GBT. *Advances in Computational & Experimental Engineering & Science. Proceedings of the 2004 International Conference on Computational & Experimental Engineering & Science*, 26-29, Madeira, Portugal, p.2079-2086, 2004a.
- SIMÃO, P.; DA SILVA, L. S. A unified energy formulation for the stability analysis of open and closed thin-walled members in the framework of the Generalized Beam Theory. *Thin-Walled Structures*, v.42, n.10, p.1495-1517, 2004b.
- SIMÃO, F.P.S.S.D. *Post-buckling bifurcational analysis of thin-walled prismatic members in the context of the Generalized Beam Theory*. Coimbra: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 2007. Tese (Ph.D.).
- SMITH, C. S. Compressive strength of welded steel ship grillages. *Naval Construction Research Establishment Dunfermline*, Scotland, 1975.
- SMITH, C.S. Strength of stiffened plating under combined compression and lateral pressure, *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects*, v.133, p.131-147, 1991.
- SOARES, C.H. *Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio em situação de incêndio*. BH: UFMG, 2002. Dissertação de Mestrado.

- STONE, T.A.; LABOUBE, R.A. Behavior of cold-formed steel built-up I-sections. *Thin-Walled Structures*, v.43, n.12, p.1805-1817, 2005.
- SULTANA, P. *Predictions of flexural behaviour of built-up cold-formed steel sections*. Canadá: University of Waterloo, 2007.
- TAIG, G.; RANZI, G.; LUONGO, A. GBT analysis of thin-walled members: A new cross-sectional formulation. In: *Australasian Structural Engineering Conference 2012: The past, present and future of Structural Engineering*, Engineers Australia, 2012. p. 1.
- TAISI, N. Determination of thickness and stiffener locations for optimization of critical buckling load of stiffened plates. *Scientific Research and Essays*, v.5, n.9, p. 897-910, 2010. [www.academicjournals.org/SRE](http://www.academicjournals.org/SRE)
- TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. *Theory of elastic stability*. Tata McGraw-Hill Education, 1961.
- TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. *Mecânica dos sólidos. Livros Técnicos e Científicos*, 1994.
- TING, C.H.T.; LAU, H.H. Compression test on cold-formed steel built-up back-to-back channels stub columns. *Advanced Materials Research*, 2011, 201: 2900-2903.
- TOSCANO, P. H. *Aplicación de la Teoría de la Viga Generalizada al análisis de un perfil abierto de paredes delgadas*. Espanha: Universitat Politècnica de Catalunya, junho 2009. Dissertação de Mestrado. [upcommons.upc.edu](http://upcommons.upc.edu).
- VERÍSSIMO, H.A.G. *Dimensionamento de elementos estruturais de aço enformados a frio de acordo com o Eurocódigo 3*. Lisboa: IST, 2008. Dissertação de Mestrado. [www.engenhariacivil.com/dimensionamento-ec3-estruturas-aco-leve](http://www.engenhariacivil.com/dimensionamento-ec3-estruturas-aco-leve)
- VLASOV, B.Z. *Thin-Walled Elastic Bars*. Moscou: Fizmatgiz, 1959.
- VRANY, T. Effect of loading on the rotational restraint of cold-formed purlins. *Thin-Walled Structures*, v.44, p.1287-1292, 2006.
- VRANY, T. Roll-forming of profiled sheeting. In: *Cold-Formed Structures. C9 Design of steel structures for renewable energy systems*. Praga: Czech Technical University, 2010. <http://steel.fsv.cvut.cz/suscos/PP/2E12-04-Cold-formed%20structures.pdf>.
- WARDENIER, J.; PACKER, J.A.; ZHAO, X.L. *Hollow sections in structural applications*. Rotterdam: Bouwen met Staal, 2002.
- WHITTLE, J.; RAMSEYER, C. Buckling capacities of axially loaded, cold-formed, built-up C-channels. *Thin-Walled Structures*, v.47, n.2, p.190-201, 2009.

- WINTER, G. Strength of thin steel compression flanges. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, v.12, p.527-554, 1947.
- XU, L.; SULTANA, P.; ZHOU, X. Flexural strength of cold-formed steel built-up box sections. *Thin-Walled Structures*, v.47, n.6, p.807-815, 2009.
- YOUNG, B.; CHEN, J. Design of cold-formed steel built-up closed sections with intermediate stiffeners. *Journal of Structural Engineering*, v.134, n.5, p.727-737, 2008.
- YOUNG, B.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. Cold-Formed steel lipped channel columns influenced by local-distortional interaction: strength and DSM design. *Journal of Structural Engineering*, 2012.
- YU, W.W. *Cold Formed Steel Design*. 3.ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2000.
- YU, W.W.; LABOUBE, R.A. *Cold-formed steel design*. Wiley, 2010.
- YU, C.; SCHAFER, B.W. Local buckling tests on cold-formed steel beams. *ASCE, J. Struct. Eng.*, v.129, n.12, p.1596–1606, 2003.
- ZHAO, X.L. *Cold-formed tubular members & connections: structural behavior & design*. Lavoisier, 2005.
- ZHAO, X.L.; HANCOCK, G.J. Square and rectangular hollow sections under transverse end-bearing force. *Journal of Structural Engineering*, v.121, n.9, p.1323-1329, 1995.
- ZHAO, W. Behaviour and design of cold-formed steel sections with hollow flanges. Brisbane, Austrália: School of Civil Engineering, Queensland University of Technology, 2005. Tese (Ph.D.).
- ZHOU, T.H.; NIE, S.F.; LIU, X.B.; LI, G.Y. Experimental study on mechanical behavior of cold-formed steel three limbs built-up section members. *Advanced Materials Research*, p.163-167, 2010.
- ZIENKIEWICK, O.C.; TAYLOR, R.L. *The Finite Element Method*. Londres: McGraw-Hill, 1997.





## ANEXO 3.A – RESOLUÇÃO DO PROBLEMA HIPERESTÁTICO PELO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

Para resolução de uma estrutura hiperestática, teoricamente tanto o Método das Forças quanto o Método dos Deslocamentos podem ser utilizados, já que ambos utilizam o Princípio da Superposição dos Efeitos para obter as equações fundamentais.

Para seções transversais abertas *não ramificadas*, Schardt (1966) utilizou o Método das Forças, o qual envolve somente uma incógnita hiperestática por nó, que são os momentos fletores transversais por unidade de comprimento axial.

Para as seções transversais abertas *ramificadas*, Dinis *et al.* (2006) optaram pela conveniência da adoção do Método dos Deslocamentos que proporciona significativa redução do esforço computacional. Como existe mais de uma redundante por nó de bifurcação, o grau de indeterminação cinemática é sempre menor que o de indeterminação estática. Dessa forma, a cada nó de bifurcação associam-se a  $(k - 1)$  incógnitas estáticas (momentos) e a apenas uma única incógnita cinemática (rotação), independentemente do número de placas que dele emergem. As deslocabilidades, incógnitas do problema, são as componentes de deslocamentos e rotações nodais que definem a configuração deformada da estrutura.

O modelo utilizado para representar o elemento estrutural equivale a uma viga contínua com geometria idêntica à da seção transversal. Conforme preconizado pelo Método dos Deslocamentos, no sistema principal bloqueiam-se as deslocabilidades internas da estrutura original com vínculos rígidos fictícios. Para as deslocabilidades externas, utilizam-se apoios adicionais de primeiro gênero (Fig. 3.A.1). Admitem-se válidas as hipóteses relativas à idealização do comportamento de barras (Timoshenko e Gere, 1994; Beer e Johnston, 1996).

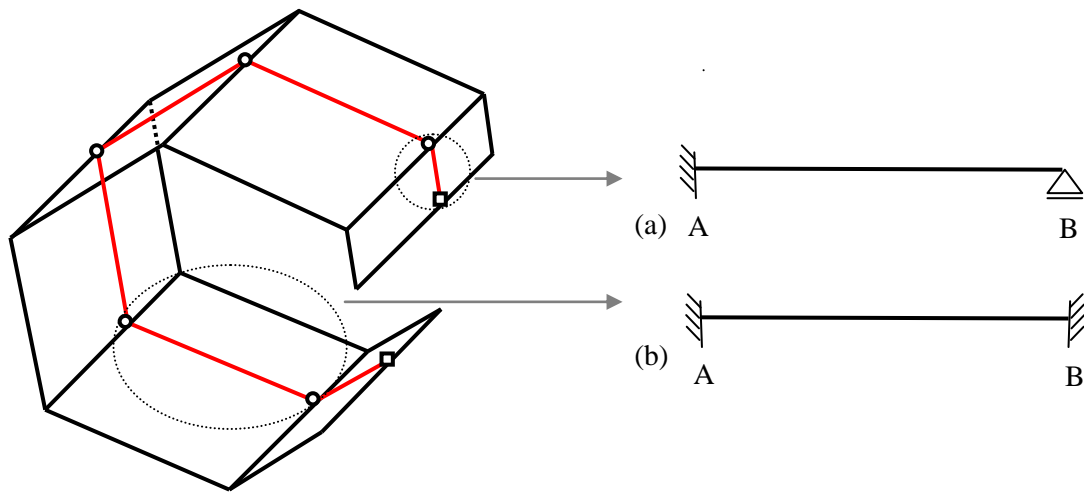


Fig. 3.A.1 – Modelo estrutural adotado para análise da seção transversal. (a) Barra engastada e rotulada. (b) Barra biengastada

Ao definir os esforços atuantes em uma barra genérica, desprezam-se usualmente as deformações devidas aos esforços normais e cortantes.

Dessa forma, no referencial local, a matriz de rigidez elementar ( $k_e$ ) é expressa em função dos coeficientes de rigidez ( $k_A$  e  $k_B$ ).

Para:

- (a) *Barras engastadas e rotuladas* (Fig. 3.A.1 – a): a rigidez rotacional no nó A engastado vale:

$$k_A = + \frac{3EI}{b_r} \quad (3.A.1)$$

- (b) *Barras biengastadas* (Fig. 3.A.1 – b): a rigidez no nó A que sofre o giro causado pela deslocabilidade rotacional vale:

$$k_A = + \frac{4EI}{b_r} \quad (3.A.2)$$

Como o coeficiente de transmissão é igual a 1/2, a rigidez no nó oposto B da mesma barra é dada por:

$$k_B = + \frac{2EI}{b_r} \quad (3.A.3)$$

A matriz de rigidez global ( $K_G$ ) traduz as contribuições das rigidezes ( $k_e$ ) dos ( $n_{el}$ ) elementos para a estrutura integrada:

$$K_G = \sum_{e=1}^{n_{el}} k_e \quad (3.A.4)$$

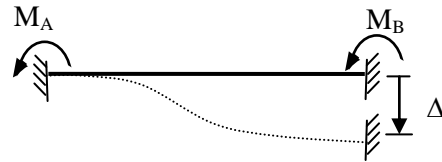
Como não há carregamento externo atuante, as deformações independentes que ocorrem em uma barra genérica devem-se:

- (i) à translação da barra que se mantém retilínea e paralela à posição original, sem provocar esforços.
- (ii) ao deslocamento linear de uma das extremidades da barra em relação à outra ao longo da direção perpendicular ao seu eixo sem rotação das extremidades (deslocamento ortogonal recíproco). Nessa situação, a barra se comporta como uma viga biengastada que sofreu um recalque vertical de apoio.
- (iii) à rotação de cada uma das extremidades da barra que se comporta como uma viga biengastada em que um dos engastes sofreu um recalque angular.

A solução final resulta da superposição de uma série de soluções cinematicamente determinadas (configurações deformadas conhecidas) que satisfazem as condições de compatibilidade e de equilíbrio da estrutura.

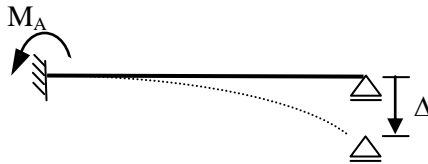
Para cada barra, devem ser determinados:

- (i) os momentos devidos aos deslocamentos ortogonais recíprocos de uma das extremidades da barra em relação à outra (Fig. 3.A.2).
- (ii) as rotações nodais.
- (iii) as elásticas correspondentes.



(a)

$$M_A = M_B = + \frac{6EI\Delta}{b_r^2}$$



(b)

$$M_A = + \frac{3EI\Delta}{b_r^2}$$

Fig. 3.A.2 – Momentos devidos ao deslocamento ortogonal recíproco nas extremidades da barra: (a) biengastada. (b) engastada e rotulada

Os momentos devidos aos deslocamentos ortogonais recíprocos provocados pela imposição de deslocamentos axiais unitários ( $u_r(s_r) = 1$ ) são calculados com base nos deslocamentos de flexão nas extremidades inicial ( $w_r$ ) e final ( $w_{r+1}$ ) de cada placa (Fig. 3.A.3).

Para:

(i) Barras biengastadas

$$m_r = \frac{6K_r}{b_r^2} (w_r - w_{r+1}) \tag{3.A.5}$$

$$m_{r+1} = -\frac{6K_r}{b_r^2} (w_r - w_{r+1})$$

(ii) Barras engastadas e rotuladas

$$m_r = \frac{3K_r}{b_r^2} (w_r - w_{r+1}) \tag{3.A.6}$$

$$m_{r+1} = 0$$

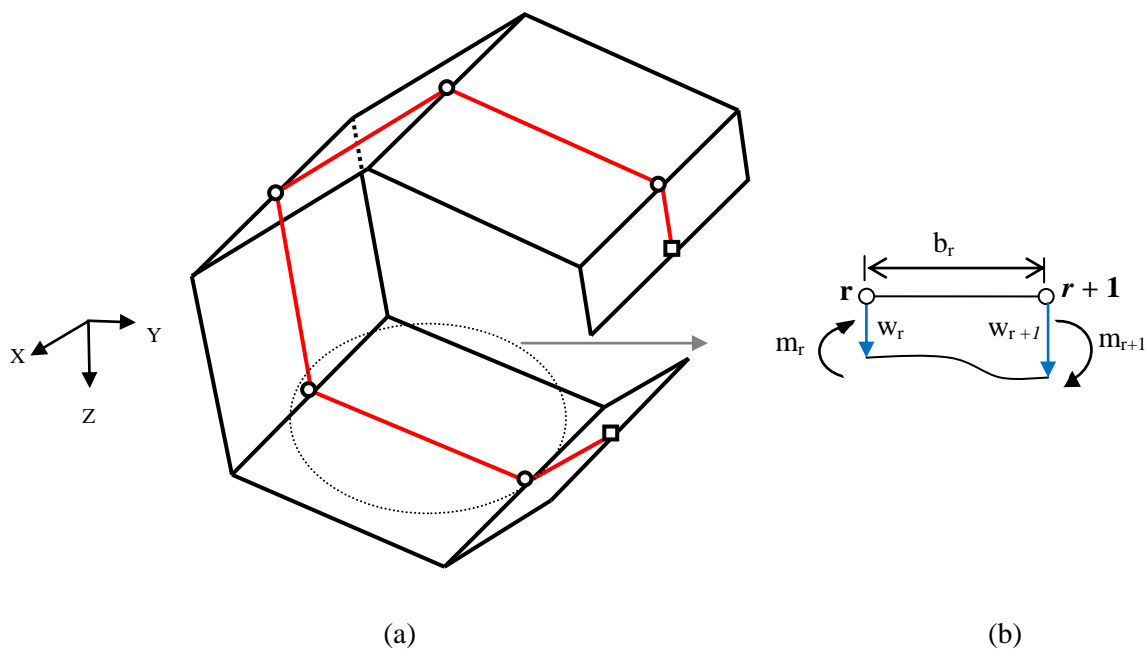


Fig. 3.A.3 – (a) Seção transversal: elemento genérico de barra. (b) Momentos ( $m_r$  e  $m_{r+1}$ ) provocados pela imposição de um deslocamento axial unitário ( $u_r = 1$ ) em um nó natural independente (Dinis *et al.*, 2006)

No cálculo dos momentos devidos aos deslocamentos ortogonais recíprocos, provocados pela imposição de *deslocamentos de flexão unitários* ( $w_p(s_p) = 1$ ), observa-se que a inclusão do nó intermediário subdivide a placa em dois elementos:  $b_p$  e  $b_{p-1}$  (Fig 3.A.4).

Para:

(a) Barras biengastadas

$$m_{p-1} = -\frac{6K_p}{b_{p-1}^2}, \quad m_p = 0 \quad \text{e} \quad m_{p+1} = \frac{6K_p}{b_{p-1}^2} \quad (3.A.7)$$

(b) Barras engastadas e rotuladas

$$m_{p-1} = -\frac{3K_p}{b_{p-1}^2}, \quad m_p = 0 \quad \text{e} \quad m_{p+1} = 0 \quad (3.A.8)$$

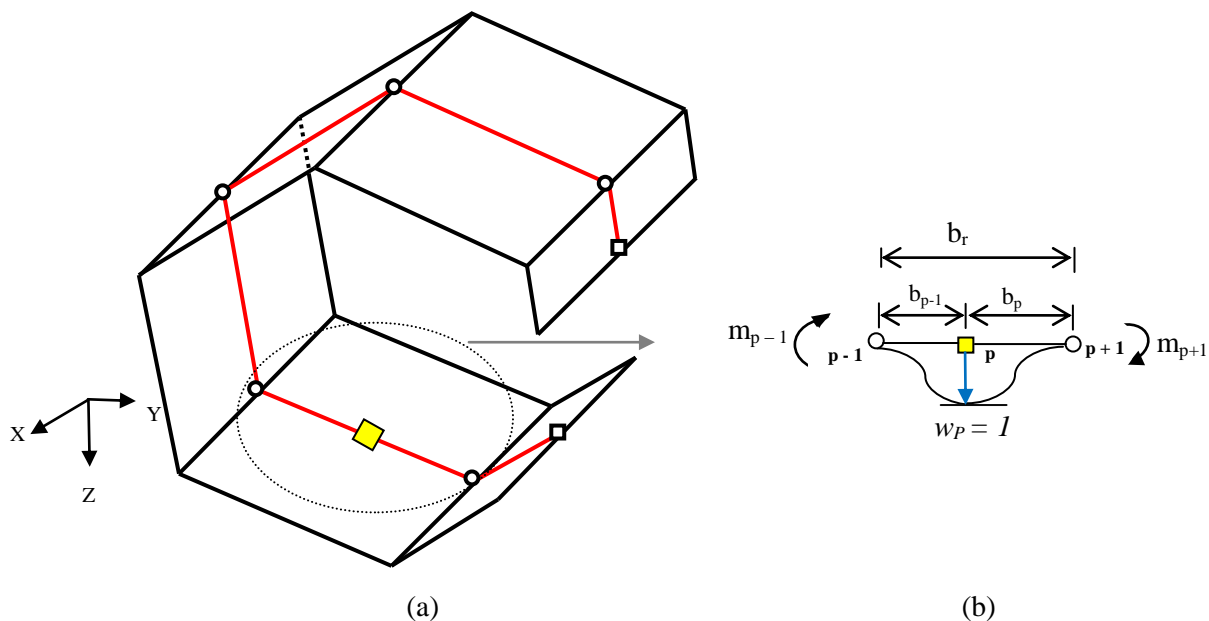


Fig. 3.A.4 – (a) Seção transversal. (b) Momentos ( $m_{p-1}$  e  $m_{p+1}$ ) devidos à imposição do deslocamento de flexão unitário ( $w_p = 1$ ) em um nó intermediário (Dinis *et al.*, 2006)

A resolução do sistema de equações do Método dos Deslocamentos conduz à matriz de rotações nodais  $\theta$ :

$$\theta = -K_G^{-1}M \quad (3.A.9)$$

em que  $K_G^{-1}$  representa a matriz de flexibilidade (inversa da matriz de rigidez global) e  $M$  indica a matriz de momentos devidos aos deslocamentos ortogonais recíprocos da estrutura.

As configurações deformadas elementares das barras da estrutura correspondem às elásticas, resultantes da imposição de deslocamentos ou rotações unitárias em cada uma das extremidades da barra.

Utilizam-se as funções de forma  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  e  $N_4$  definidas pelos polinômios cúbicos de Hermite para aproximar as funções de amplitudes modais para cada barra isolada descarregada de seção transversal constante (Fig. 3.A.5 e 3.A.6).

Observa-se que  $\xi = x/L$ , sendo os valores de  $x$  expressos pelas funções de deslocamentos axiais de acordo com o sistema local de eixos.

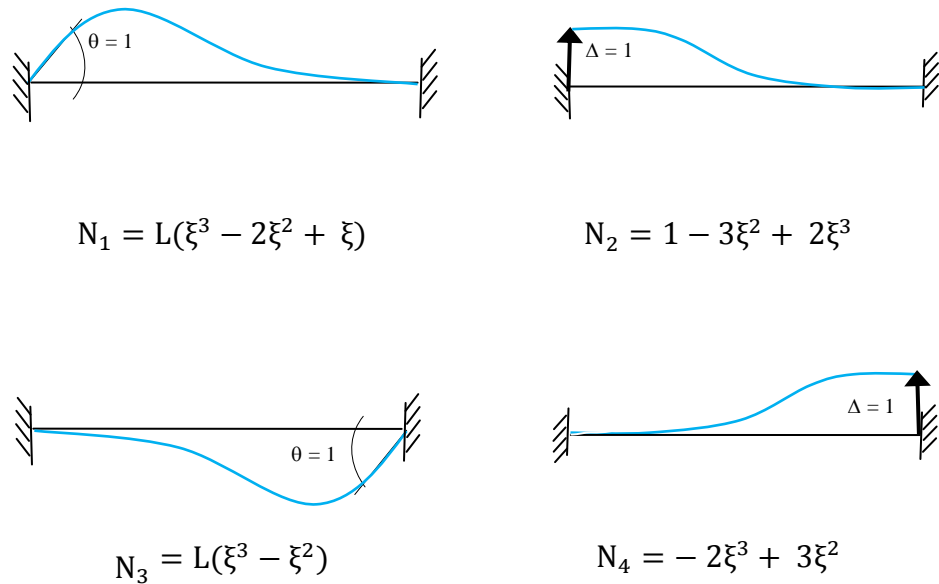


Fig. 3.A.5 – Linha elástica e funções de forma para a barra isolada biengastada descarregada de seção transversal constante

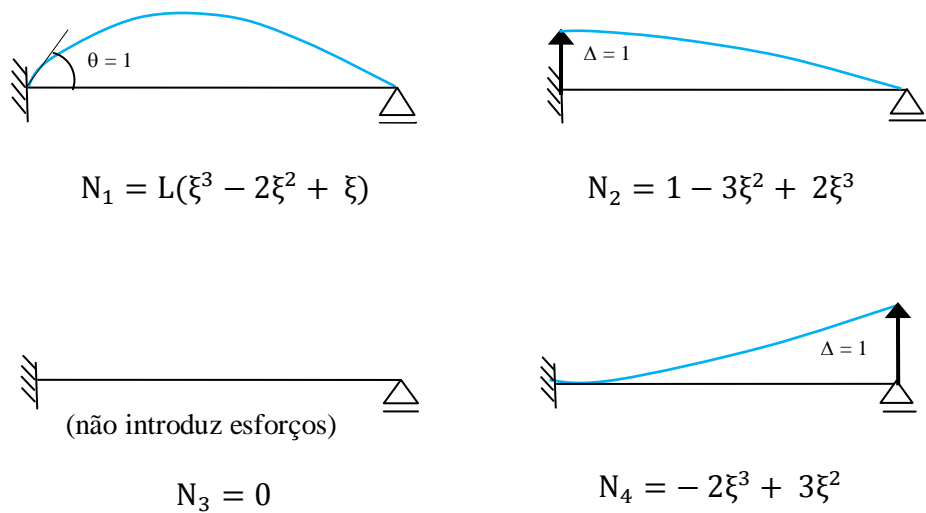


Fig. 3.A.6 – Linha elástica e funções de forma para a barra isolada engastada e rotulada descarregada de seção transversal constante

As funções elementares de deslocamentos de flexão provocadas pela imposição dos deslocamentos unitários axiais e de flexão uma placa genérica (Fig. 3.A.7) são obtidas, adicionando-se as parcelas:

- (i) correspondentes às configurações deformadas resultantes dos deslocamentos de flexão calculados nas extremidades inicial ( $w^i$ ) e final ( $w^f$ ) de cada placa e suas respectivas funções de forma ( $N_2$  e  $N_4$ ).
- (ii) associadas a rotações nodais nas extremidades inicial ( $\theta_i$ ) e final ( $\theta_f$ ) de cada placa e suas respectivas funções de forma ( $N_1$  e  $N_3$ ).

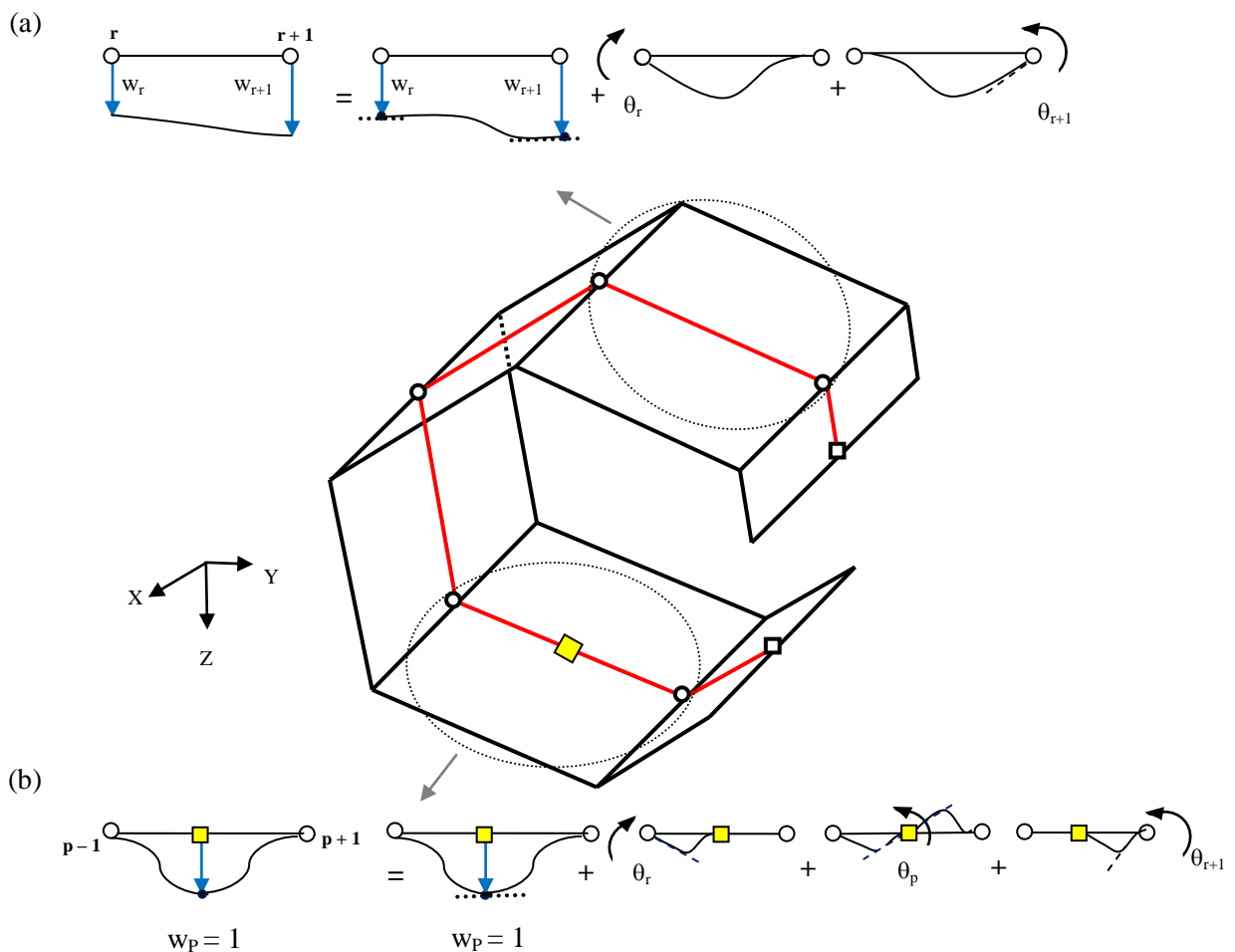


Fig. 3.A.7 – Funções elementares de deslocamentos: (a) Nós naturais. (b) Nós intermediários (Dinis *et al.*, 2006)



A expressão final do campo de deslocamentos de flexão é dada por:

$$W(r,k) = \theta_i N_1 + w^i N_2 + \theta_j N_3 + w^f N_4 \quad (3.A.10)$$

Em notação matricial:

$$W = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{bmatrix} \theta_i \\ w^i \\ \theta_j \\ w^f \end{bmatrix} \quad (3.A.11)$$



## ANEXO 5.A – ANÁLISES DE ESTABILIDADE DE PAINÉIS ENRIJECIDOS

Apresentam-se as seguir para os modelos representativos de painéis enrijecidos, **SP2** a **SP12**, cujos parâmetros físicos e geométricos estão indicados nas Tabelas 5.3 e 5.4, os resultados das diversas análises de estabilidade realizadas com base na GBT.

Admitem-se como condições de carregamento esforços de compressão axial aplicados na direção paralela aos enrijecedores (Fig. 5.9). Como condições de contorno, considera-se que as bordas carregadas estejam simplesmente apoiadas e as demais bordas livres por não receberem nenhum tipo de carregamento. Por esse motivo, podem ser considerados modos de instabilidade com configurações sinusoidais (solução exata) e um único semi-comprimento de onda ( $n_s = 1$ ).

Os dados obtidos integram os estudos paramétricos apresentados no **Capítulo 5** (subseção 5.2.6).

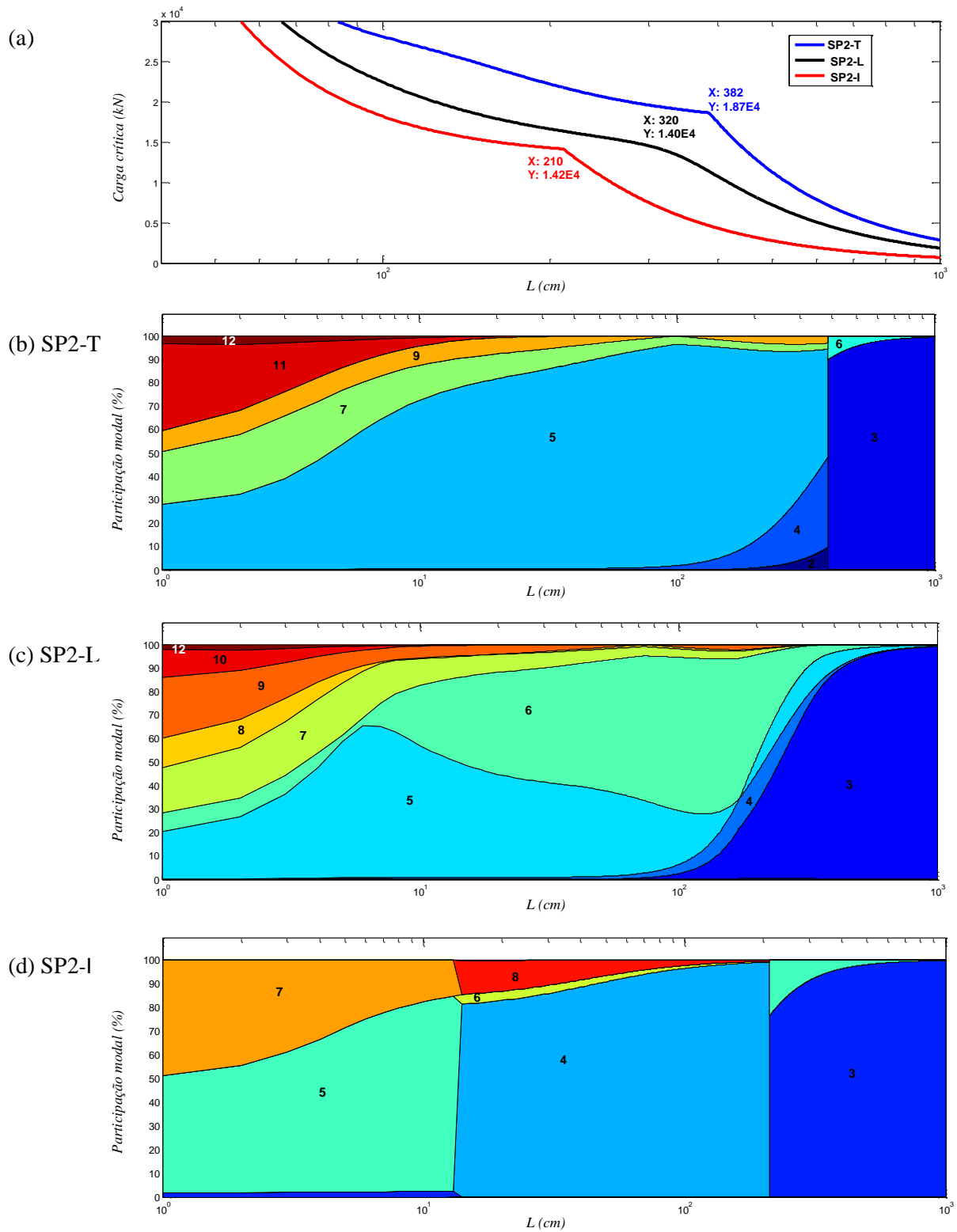


Fig. 5.A.1 – Modelo SP2: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I

- (a) **SP2-T**: Para  $L = 100 \text{ cm}$ , tem-se participação de 94.45% (modo **5**), 3.62% (modo **7**), 1.80% (modo **4**). Para  $L = 250 \text{ cm}$ ,  $\text{MLPFT} \equiv 5 + 4 + 9 + 7 + 2$  (o modo **5** contribui com 72.24% e o modo **4** com 19.03%).
- (b) **SP2-L**: Para  $L = 100 \text{ cm}$ , predominam modos mistos  $\text{MLPT} \equiv 6 + 5 + \text{um pouco de } 4 \text{ e } 3$ . Para  $L = 400 \text{ cm}$ ,  $\text{MLPFT} \equiv 3 + 4 + 5 + 6$ . Nesse comprimento, evidencia-se a instabilidade lateral-torsional do enrijecedor.
- (c) **SP2-I**: Para  $L = 100 \text{ cm}$ , o  $\text{MT} \equiv 4$  praticamente governa o comportamento do painel, com 96.39% de participação modal. Em  $L = 250 \text{ cm}$ , predomina  $\text{MF} \equiv 3$ .

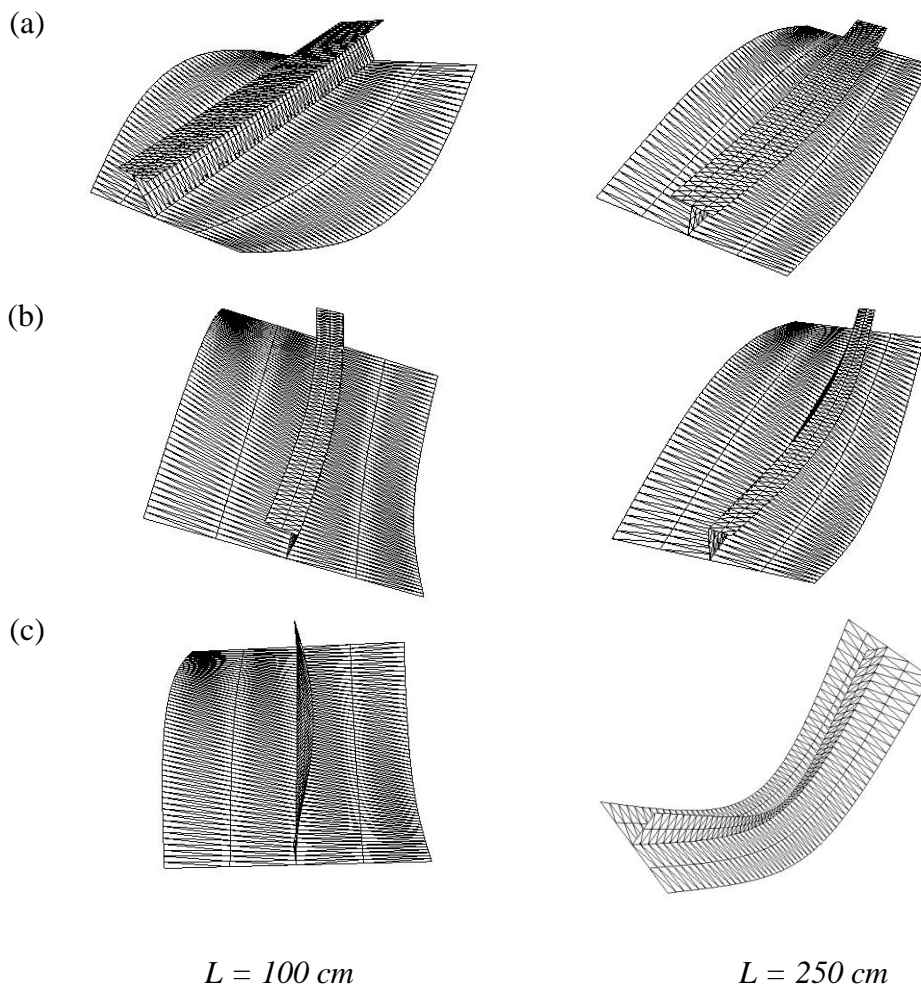


Fig. 5.A.2 – Modelo **SP2**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I

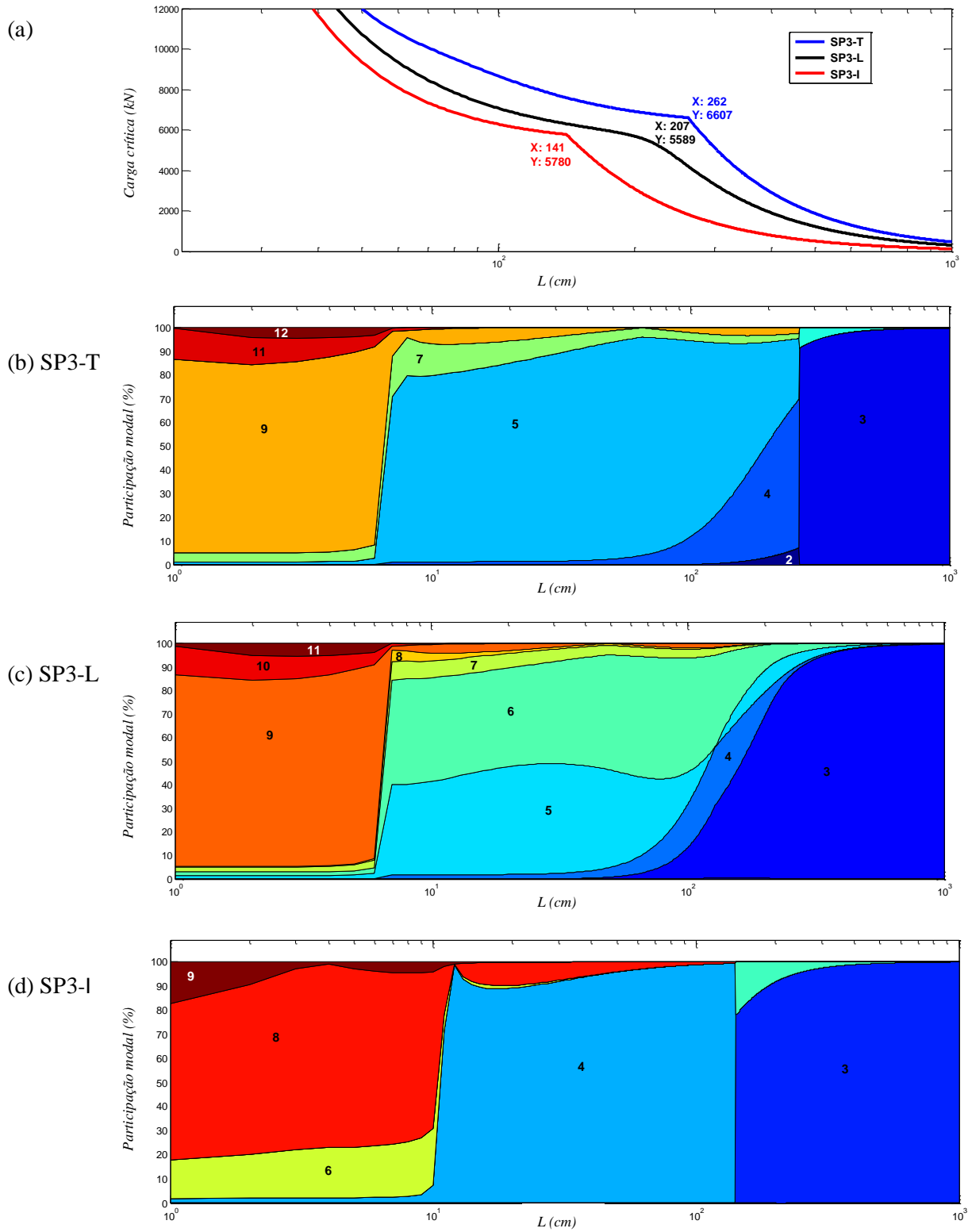


Fig. 5.A.3 – Modelo **SP3**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I

- (a) **SP3-T:** Para  $L = 50 \text{ cm}$ , predominam  $\text{MLPT} \equiv 5 + 7 + \text{um pouco de } 4 + \text{outros}$  com a participação de 90.91% (modo 5), 4,95% (modo 7) e 2.43% (modo 4). Em  $L = 95 \text{ cm}$ , prevalecem  $\text{MLPT} \equiv 5 + 7 + 4 + \text{outros}$ , com a participação de 83.99% (modo 5), 10.12% (modo 4) e 3.49% (modo 7). Para  $L \geq 300 \text{ cm}$ ,  $\text{MLPF} \equiv 3 + 6$  conta com o seguinte fator de participação: 94.33% (modo 3) e 5.53% (modo 6).
- (b) **SP3-L:** Para  $L = 50 \text{ cm}$ ,  $\text{MLPT} \equiv 7 + 6 + 5 + \text{outros}$ , com a participação de 49.51% (modo 6). Em  $L = 95 \text{ cm}$ ,  $\text{MFLT} \equiv 6 + 4 + 5 + \text{outros}$ , com a participação de 49.51% (modo 6), 16.68% (modo 4) e 16.5% (modo 5).
- (c) **SP3-I:** Para  $L = 50 \text{ cm}$ , prevalecem  $4 + 8 + 6$ , com 95,72% (modo 4), 4.04% (modo 8) e 0.14% (modo 6). A partir de  $L \geq 200 \text{ cm}$ ,  $\text{MF} \equiv 3$ .

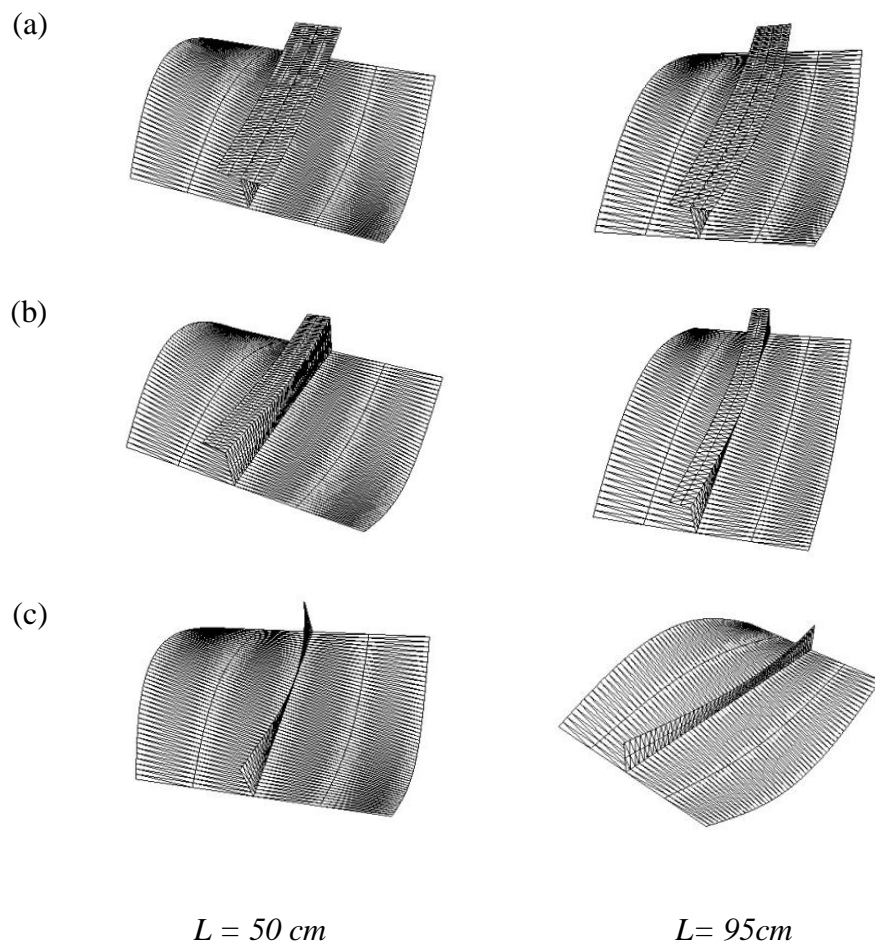


Fig. 5.A.4 – Modelo **SP3**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I

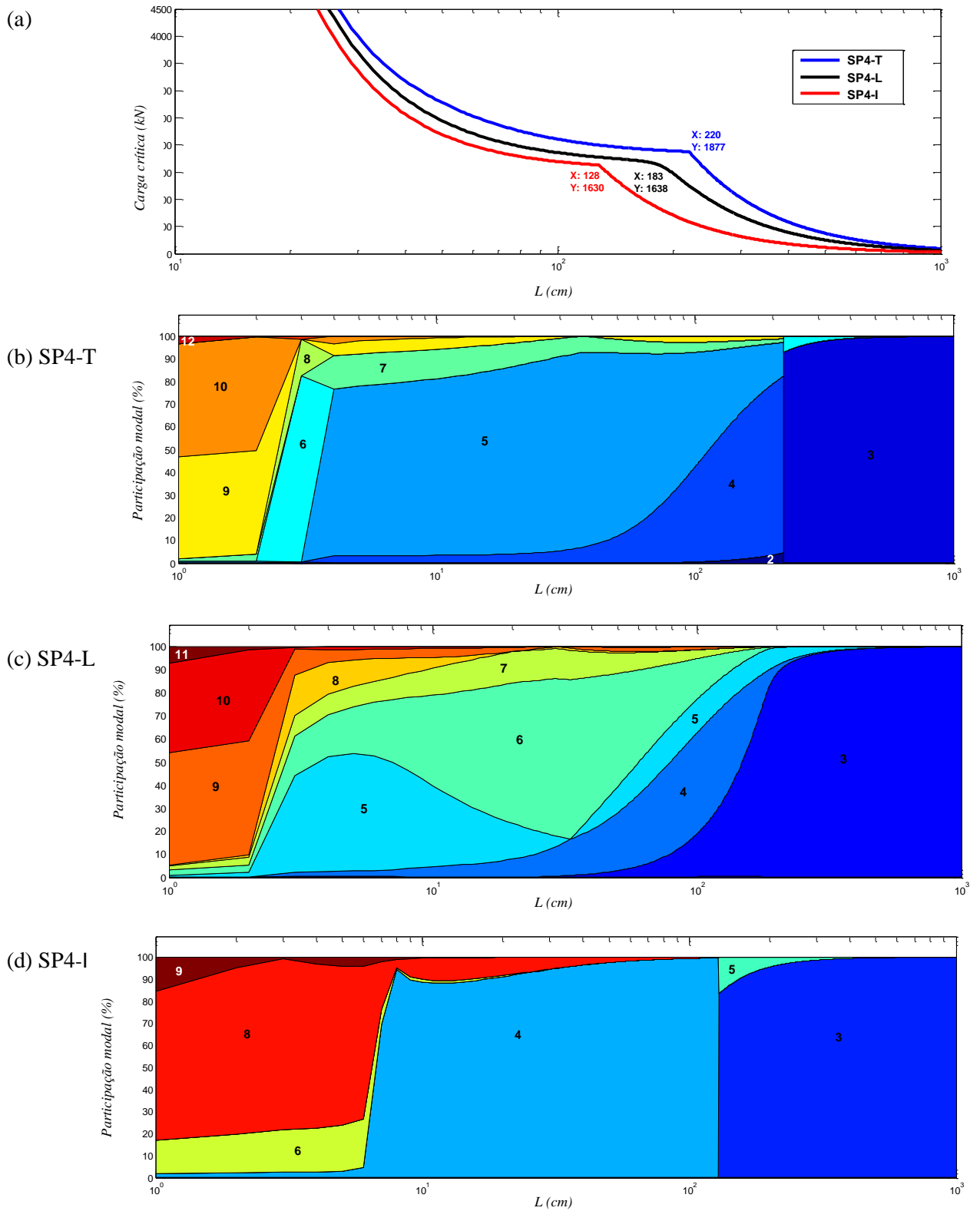


Fig. 5.A.5 – Modelo SP4: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I



- (a) **SP4-T:** Para  $L = 200 \text{ cm}$ , predominam  $\text{MLPT} \equiv 5 + 7 + 4 + \text{outros}$ , com a participação de 75.27% (modo 4) e 17.82% (modo 5). A partir de  $L \geq 230 \text{ cm}$ , predomina o modo 3.
- (b) **SP4-L:** Para  $L = 50 \text{ cm}$ , predominam  $\text{MLPT} \equiv 7 + 6 + 5 + 4 + \text{outros}$ , com a participação de 48.93% (modo 6); 25.13% (modo 4) e 11.35% (modo 5). Em  $L = 100 \text{ cm}$ , o modo 4 contribui com 43.77%; modo 3 (18.59%) e modo 6 (17.61%) para a instabilidade do painel.
- (c) **SP4-I:** Para  $L = 50 \text{ cm}$ , predomina quase que exclusivamente  $\text{MF} \equiv 4$  (99.47%). Para  $L = 200 \text{ cm}$ , predominam  $\text{MLPFT} \equiv 3 + 5 + \text{outros}$ , com a seguinte participação modal: 3 (88.21%) e 5 (7.73%).

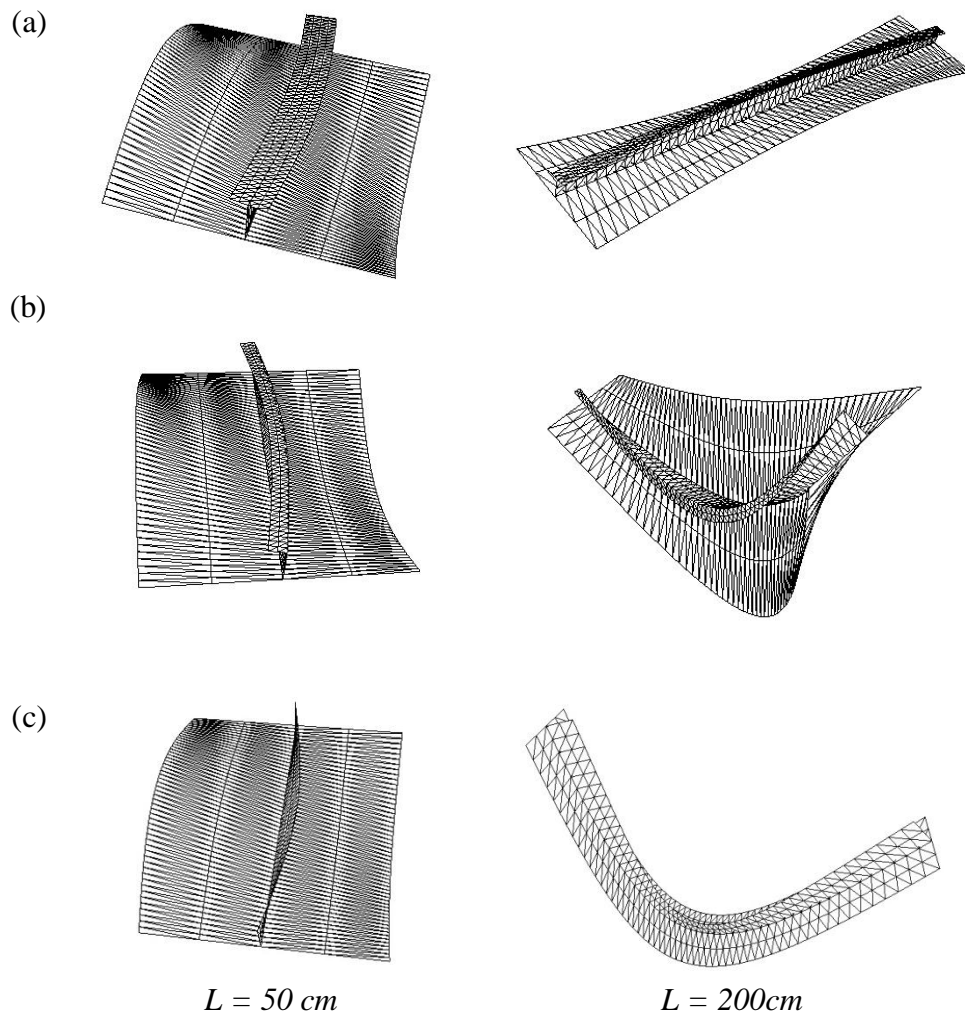


Fig. 5.A.6 – Modelo **SP4**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I

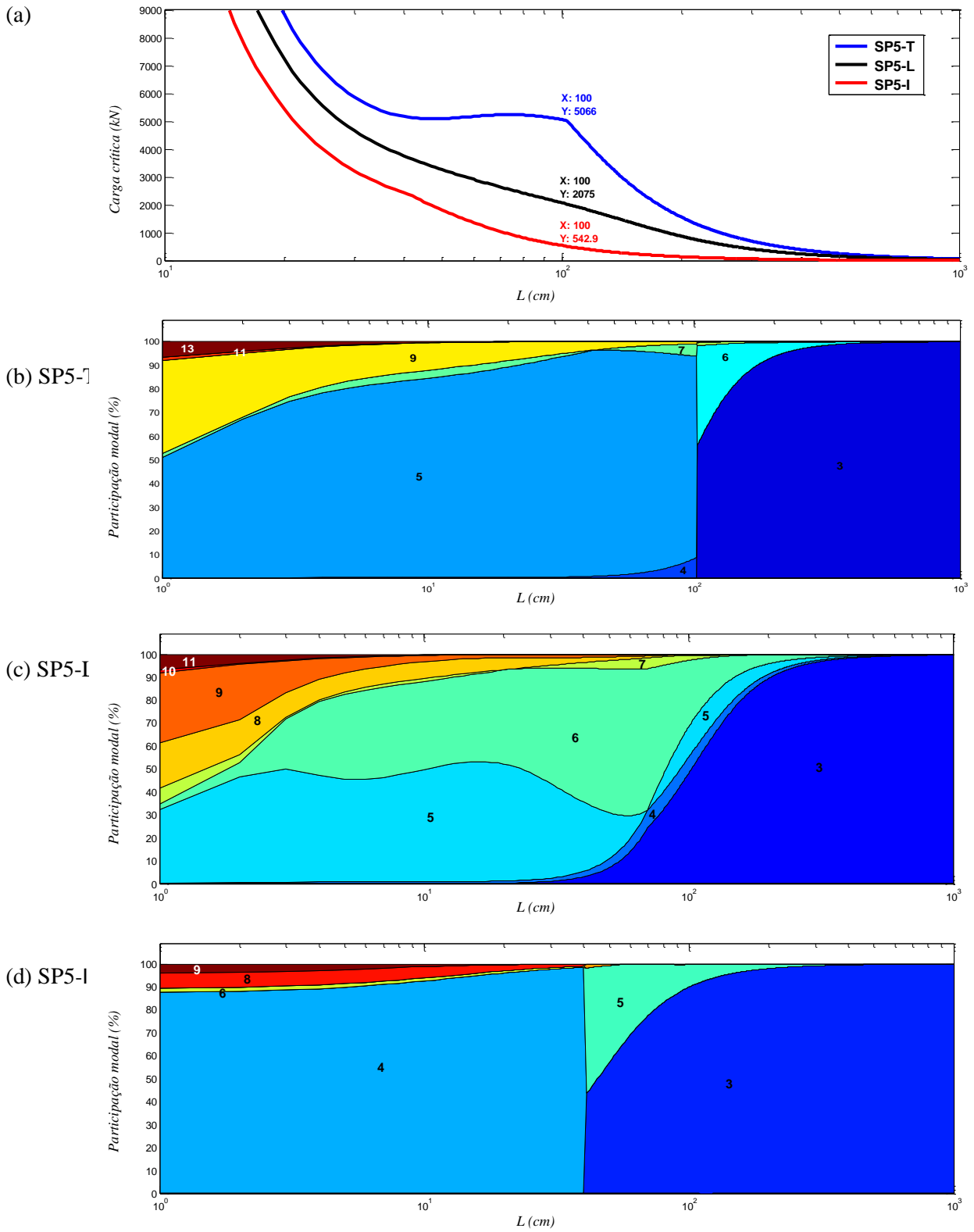


Fig. 5.A.7 – Modelo SP5: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I

- (a) **SP5-T**: Para  $L \leq 100$  cm, predominam modos locais de placa (**MLPT**  $\equiv 5 + 7 + 4$ ). Em  $L = 150$  cm, o modo **3** contribui com 84.52% para a instabilidade do painel.
- (b) **SP5-L**: Em  $L = 65$  cm, é interessante notar a ocorrência de um modo misto, caracterizado pela seguinte participação modal: **6** (62.85%), **3** (18.68%), **4** (6.71%) e outros (11.76%). Para  $L = 90$  cm, a participação modal conta com os modos **3** (40.03%), **6** (37.02%), **5** (11.48%) e outros (11.47%).
- (c) **SP5-I**: Para  $L \leq 200$  cm, o painel instabiliza em modos mistos. Para  $L \geq 200$  cm, predomina exclusivamente o modo **3**.

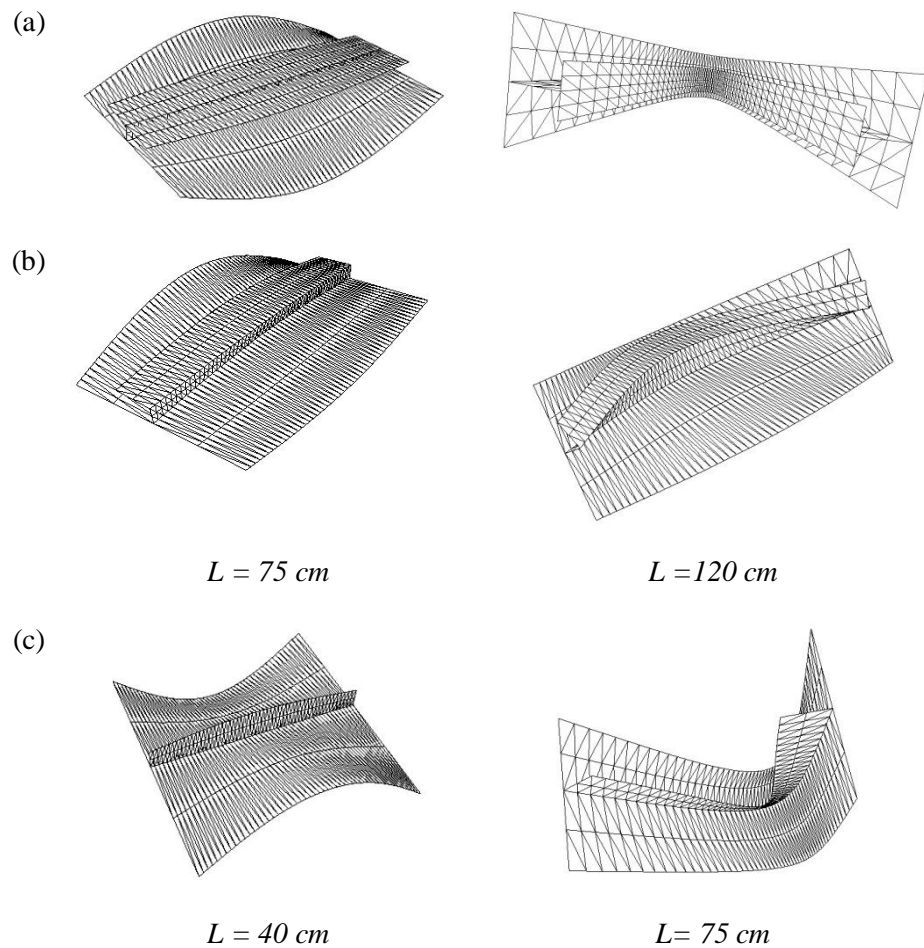


Fig. 5.A.8 – Modelo **SP5**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I

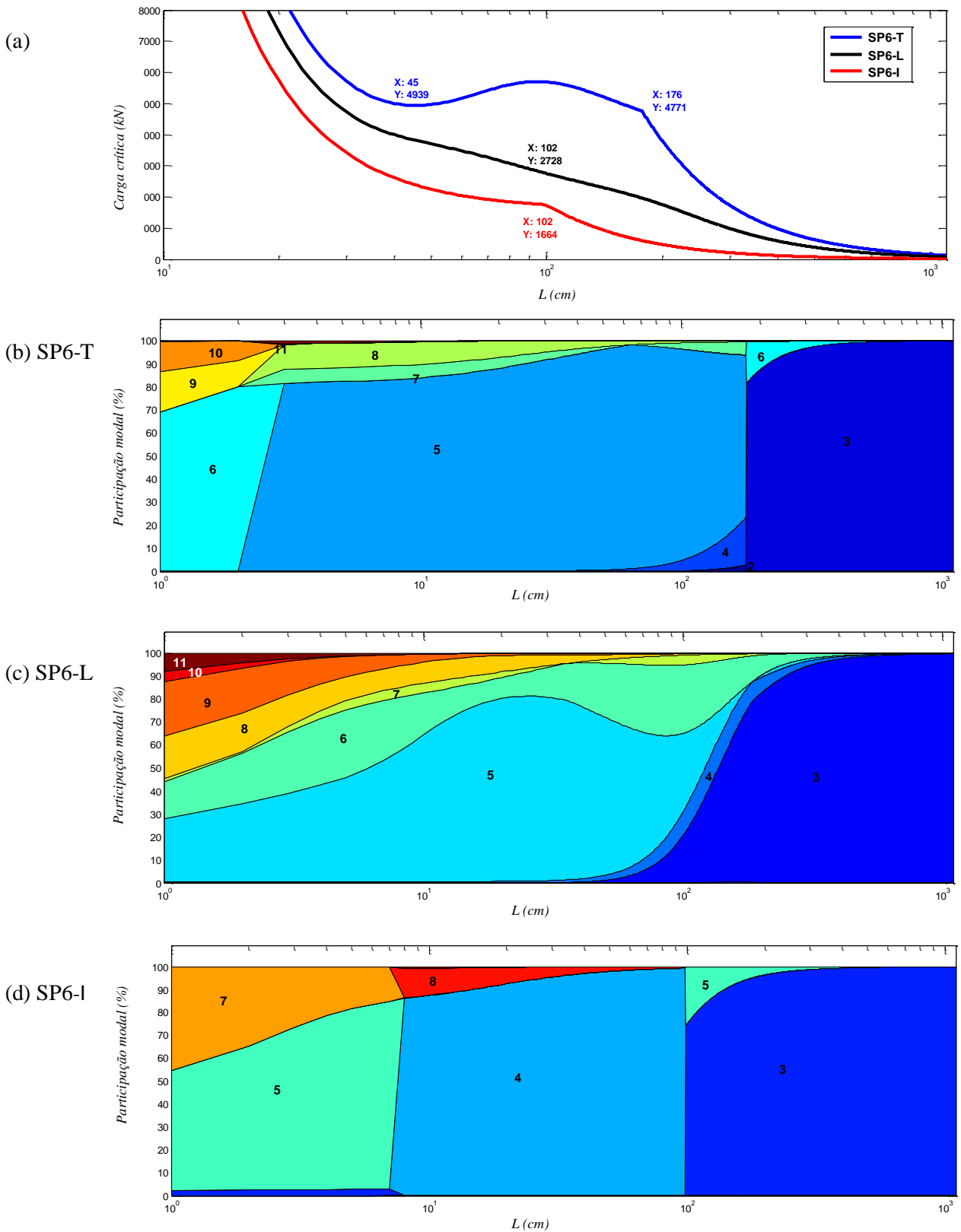


Fig. 5.A.9 – Modelo SP6: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I

- (a) **SP6-T**: Em  $L = 40 \text{ cm}$ , ocorrem apenas modos locais de placa (**MLP**  $\equiv 5 + 8 + 7$ ): 93.89% (modo **5**); 3.49% (modo **8**) e 2.22% (modo **7**). A partir de  $L \geq 170 \text{ cm}$ , prevalece **MF**  $\equiv 3$ .
- (b) **SP6-L**: Entre  $45 \leq L \leq 300 \text{ cm}$ , ocorrem modos mistos. Para  $L = 130 \text{ cm}$ , por exemplo, predominam **MLPFT**  $\equiv 3 + 4 + 5 + 6 + \text{outros}$ : 44.18% (modo **3**); 12.71% (modo **4**); 15.33% (modo **5**); 23.75% (modo **6**); 3.26% (modo **7**). Para  $L = 250 \text{ cm}$ , há a participação dos modos **3** (90.13%); **6** (4.34%); **4** (3.61%) e outros.
- (c) **SP6-I**: O painel possui três segmentos bem delimitados. Entre  $10 \leq L \leq 100 \text{ cm}$ , predominam **MLPT**  $\equiv 4 + 8$ . Entre  $100 \leq L \leq 300 \text{ cm}$ , prevalece **MLPF**  $\equiv 3 + 5$ . A partir de  $L \geq 300 \text{ cm}$ , **MF**  $\equiv 3$ .

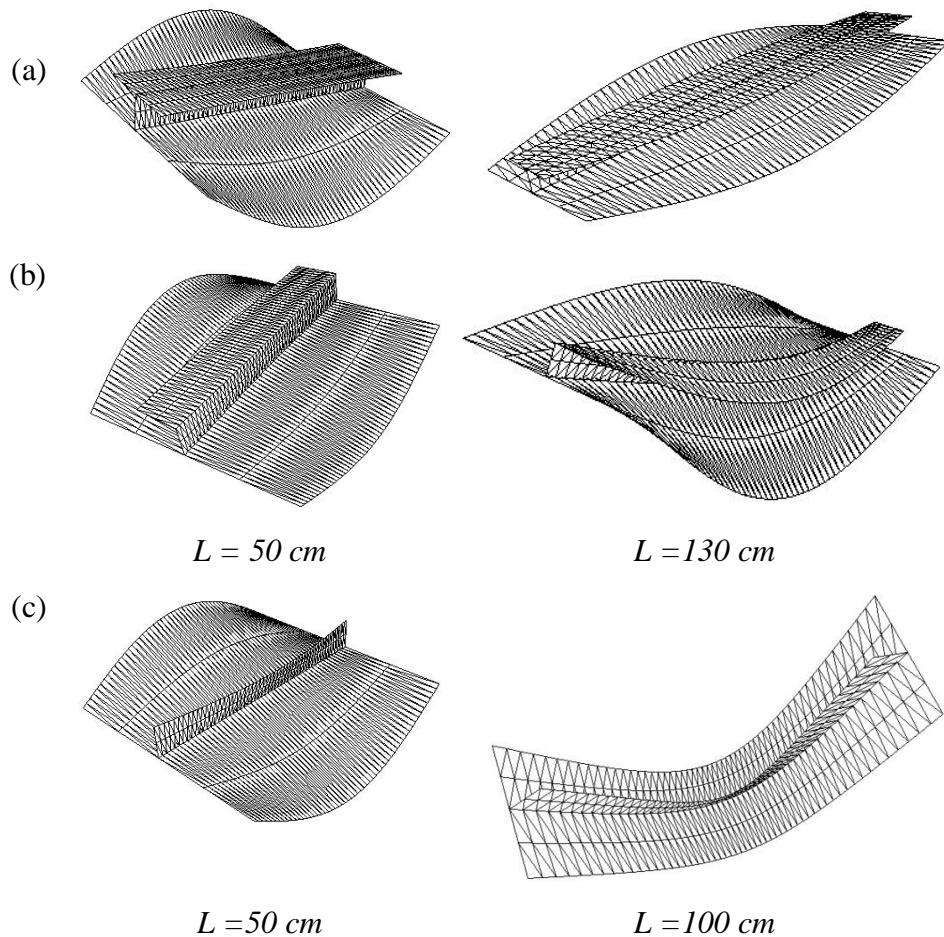


Fig. 5.A.10 – Modelo **SP6**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L (c) I

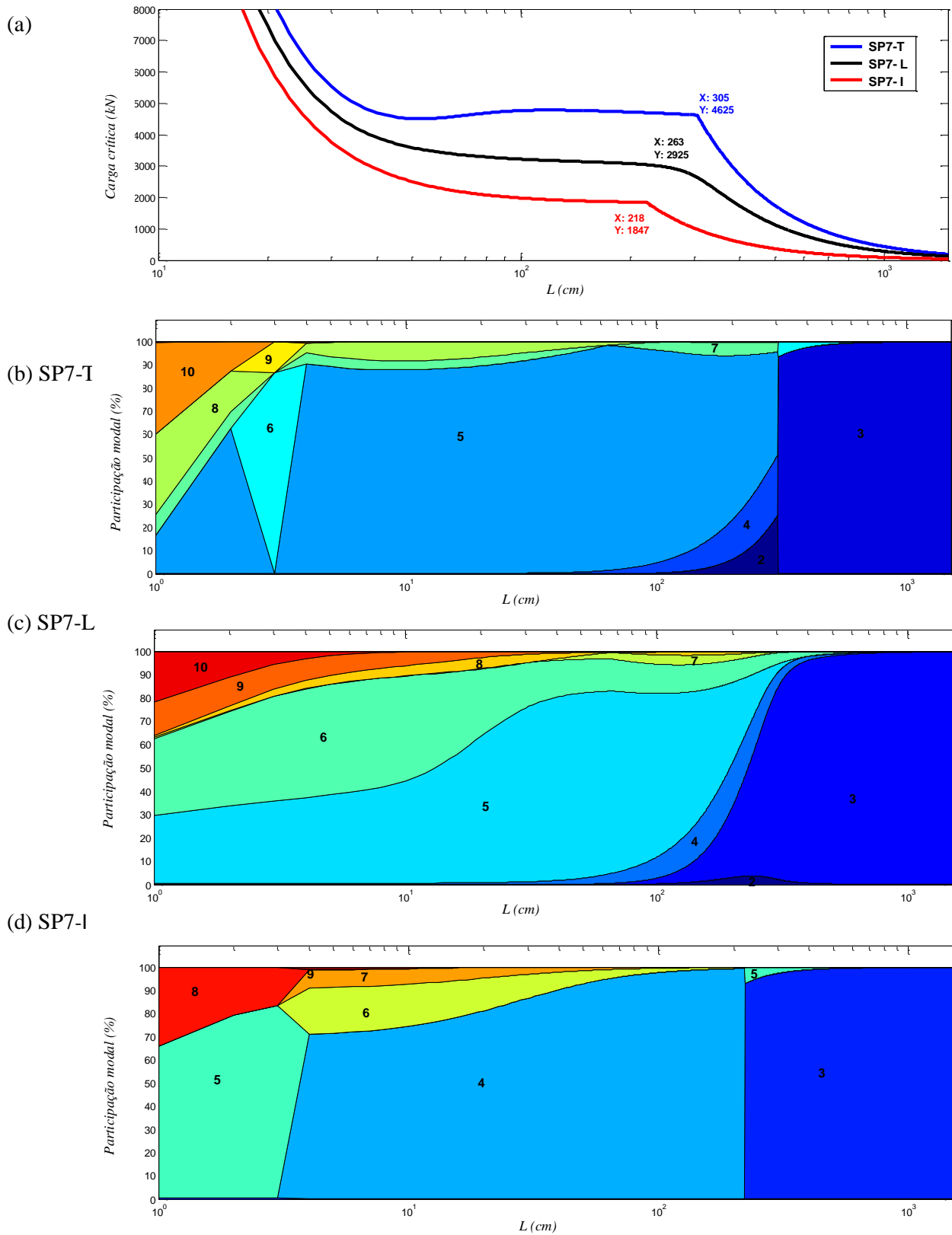


Fig. 5.A.11 – Modelo SP7: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b)T. (c) L. (d) I

- (a) **SP7-T**: Para  $L \leq 100$  cm, prevalecem modos locais de placa. Entre  $100 \leq L \leq 350$  cm, ocorrem modos mistos ( $\text{MLPFT} \equiv 5 + 7 + 4 + 2$ ). Em  $L = 200$  cm, por exemplo, tem-se a seguinte participação modal: **5** (70.81%), **4** (16.92%) e **2** (6.14%). Para  $L = 300$  cm, modo **5** (45.5%), **4** (25.85%), **2** (24.06%). Em  $L = 350$  cm, predomina o modo **3** (95.88%).
- (b) **SP7-T**: Entre  $55 \leq L \leq 400$  cm, ocorrem modos mistos, com a crescente participação de **4** e **3**. Em  $L = 180$  cm, predomina  $\text{MLPFT} \equiv 7 + 6 + 5 + 4 + 3$ , com a seguinte participação: **5** (64.77%); **4** (12.16%), **6** (11.69%). Para  $L = 220$  cm,  $\text{MLPFT} \equiv 3 + 5 + 4 + \text{outros}$ : modo **3** (40.56%), **5** (26.43%); **4** (17.92%).
- (c) **SP7-I**: O painel apresenta comportamento bem definido: para  $L \leq 230$  cm, predomina o modo **4**. A partir desse comprimento, prevalece  $\text{MF} \equiv 3$ .

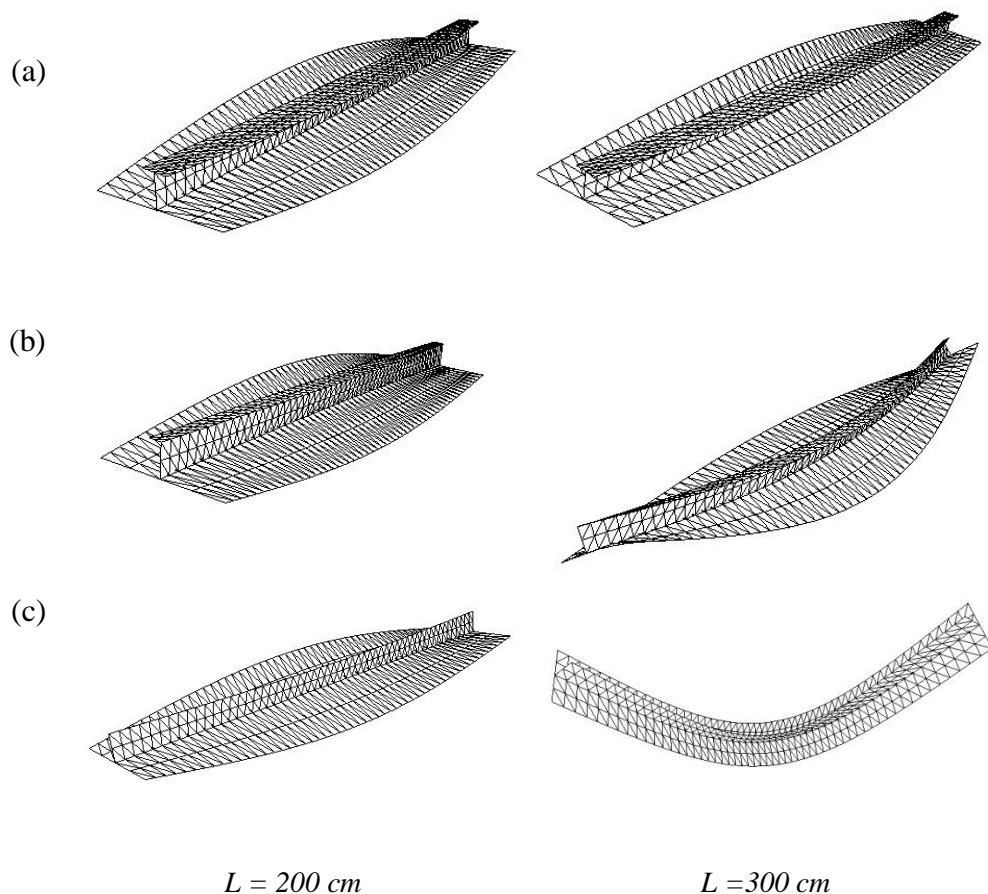


Fig. 5.A.12 – Modelo **SP7**: modos de instabilidade: (a) T . (b) L . (c) I

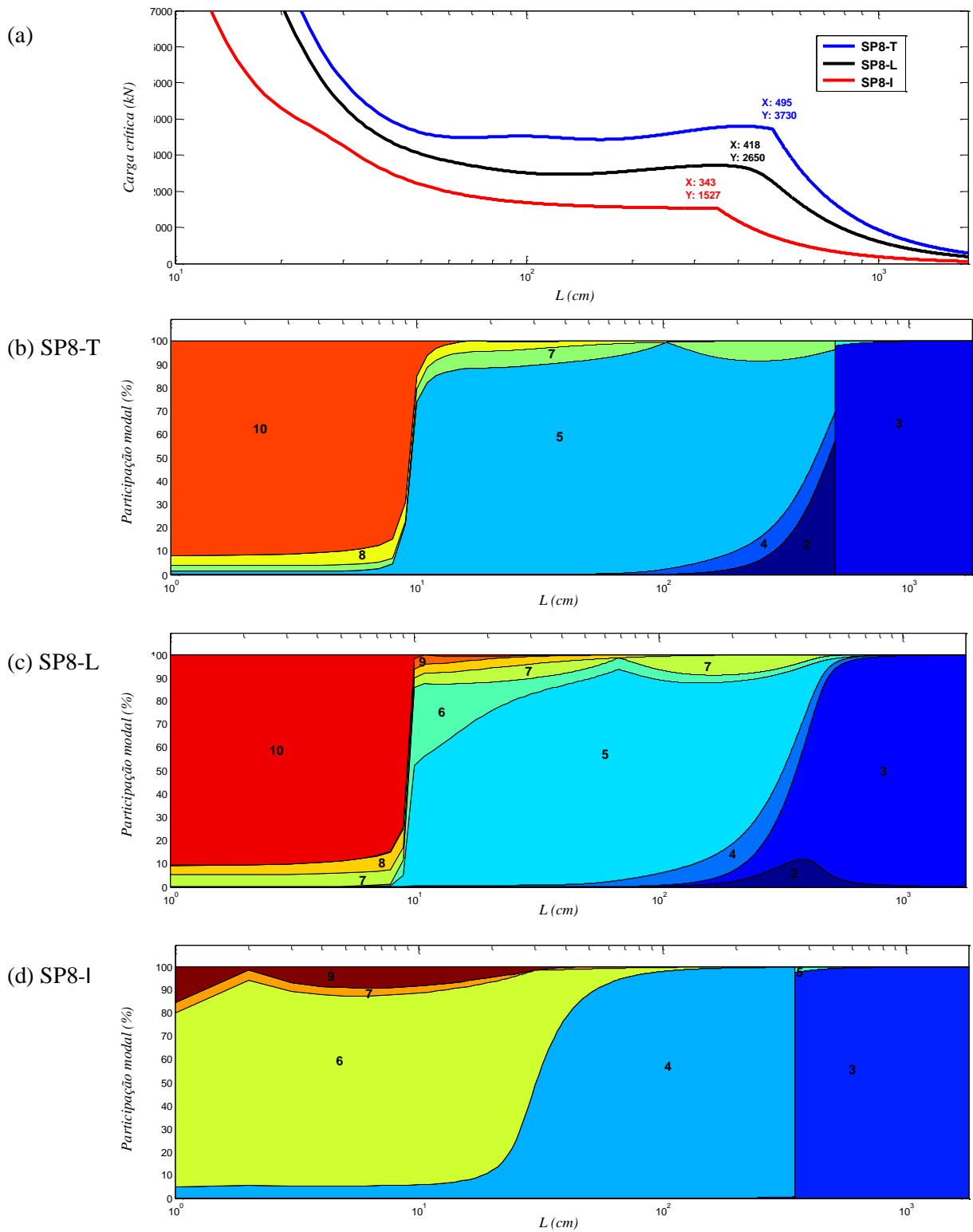


Fig. 5.A.13 – Modelo **SP8**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b)T. (c) L. (d) I



- (a) **SP8-T**: Para  $L \leq 75 \text{ cm}$ , predominam modos locais de placa. No intervalo entre  $75 \leq L \leq 550 \text{ cm}$ , prevalecem modos mistos, com a crescente participação de **4** e **2**. Para  $L \geq 550 \text{ cm}$ , governa o modo **3**.
- (b) **SP8-L**: Para  $L \leq 100 \text{ cm}$ , ocorrem modos locais de placa. Entre  $100 \leq L \leq 400 \text{ cm}$ , observam-se modos mistos (**7**, **5**, **6**, **4**, **3** e **2**). Em  $L = 400 \text{ cm}$ , conta-se com a participação de: **3** (51.76%), **5** (20.21%), **2** (11.77%) e **4** (11.44%).
- (c) **SP8-I**: Entre  $100 \leq L \leq 350 \text{ cm}$ ,  $\text{MT} \equiv 4$ . Para  $L \geq 350 \text{ cm}$ ,  $\text{MT} \equiv 3$ .

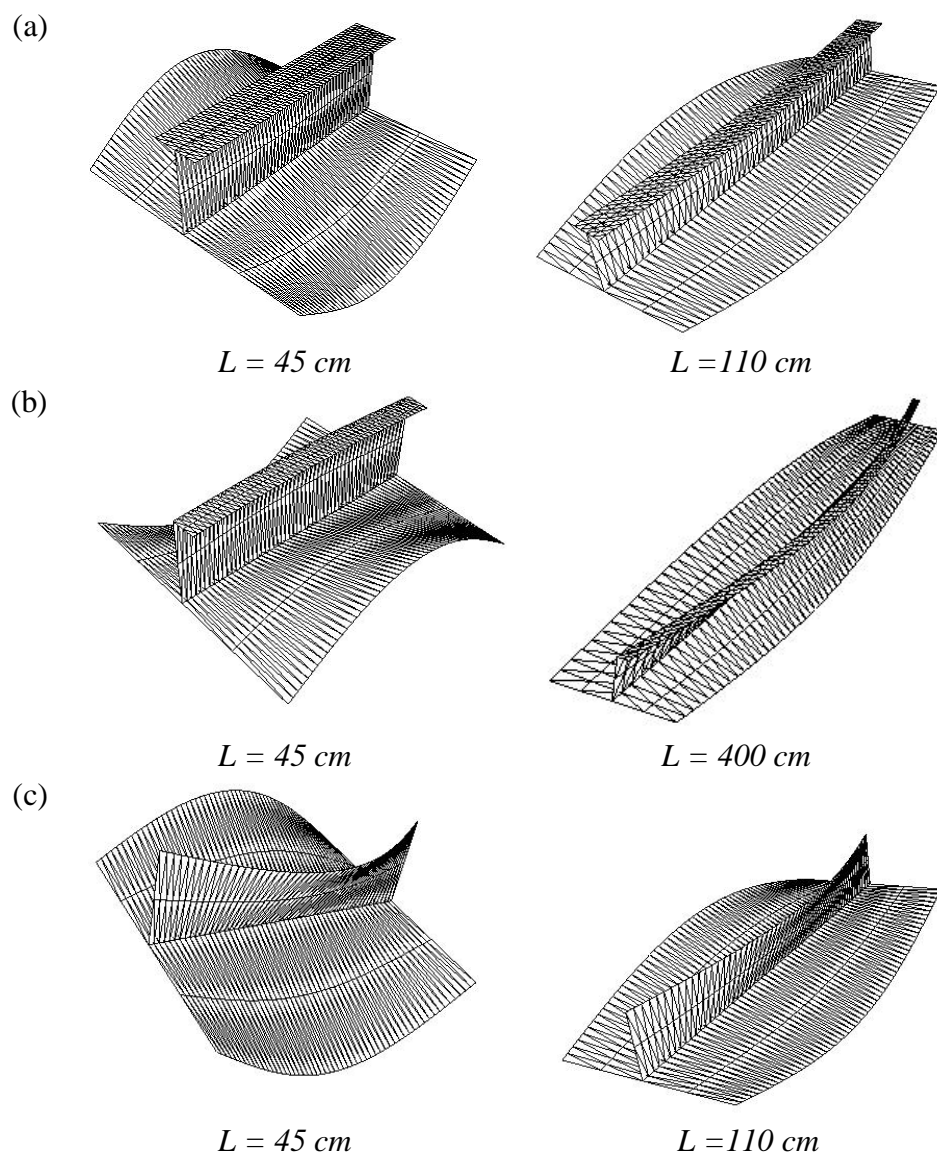


Fig. 5.A.14 – Modelo **SP8**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I

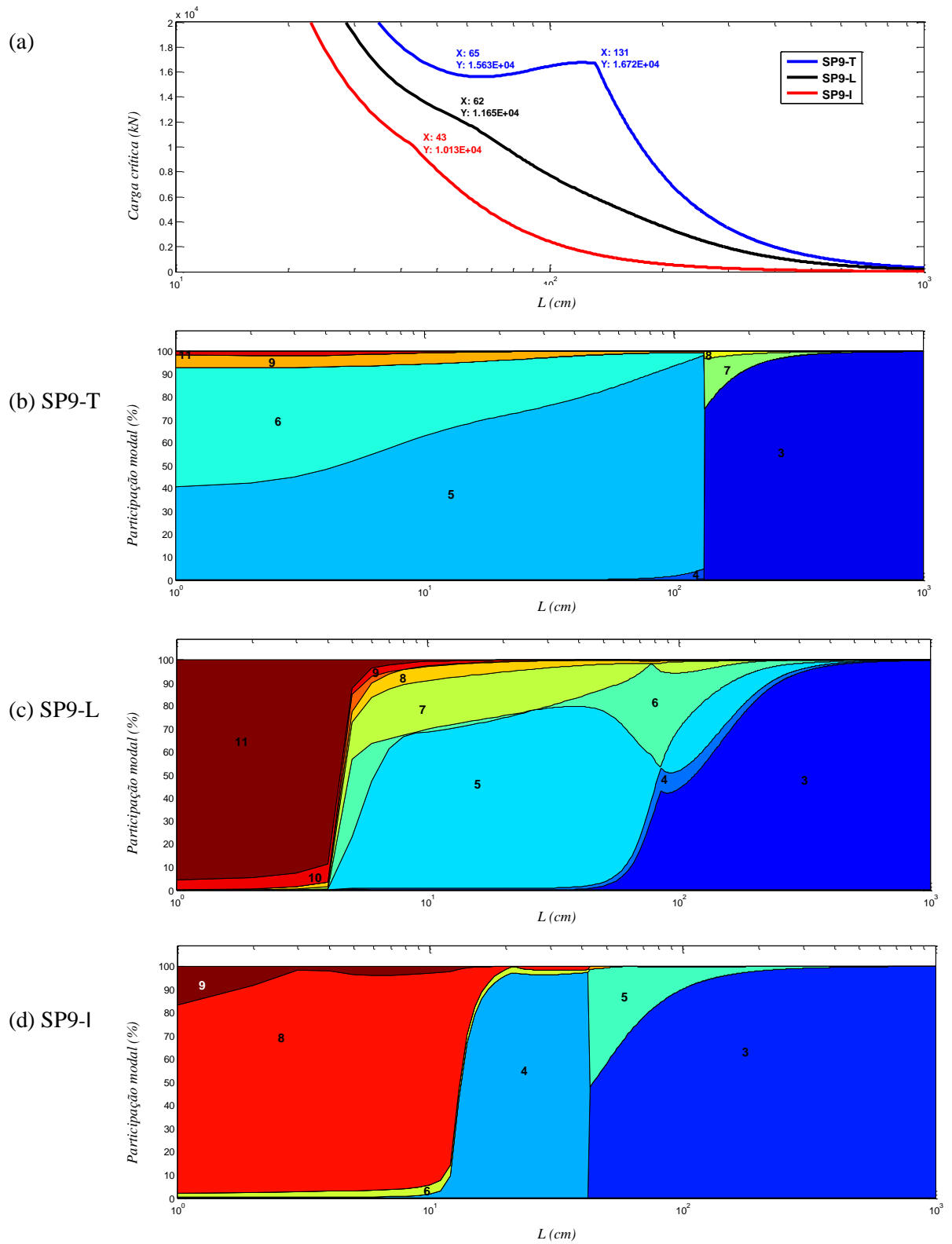


Fig. 5.A.15 – Modelo **SP9**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b)T. (c) L. (d) I

- (a) **SP9-T**: Para  $L \leq 135 \text{ cm}$ , predominam os modos **5 + 6 + 9 + outros**. Em  $L = 90 \text{ cm}$ , tem-se a seguinte contribuição: **5** (91.27%); **6** (6.63%) e **4** (1.24%). Para  $L \geq 135 \text{ cm}$ , cresce a participação de **3**.
- (b) **SP9-L**: Para  $L \leq 65 \text{ cm}$ , ocorrem apenas modos locais. Entre  $65 \leq L \leq 400 \text{ cm}$ , **MLPFT**  $\equiv 7 + 6 + 5 + 4 + 3$ . A partir de  $L \geq 400 \text{ cm}$ , **MF**  $\equiv 3$ .
- (c) **SP9-I**: Para  $L \leq 45 \text{ cm}$ , ocorrem **MLPT**  $\equiv 8 + 6 + 9 + 4$ . Entre  $45 \leq L \leq 200 \text{ cm}$ , predominam **5 + 3**. A partir de  $L \geq 200 \text{ cm}$ , o painel flamba devido ao **MF**  $\equiv 3$ .

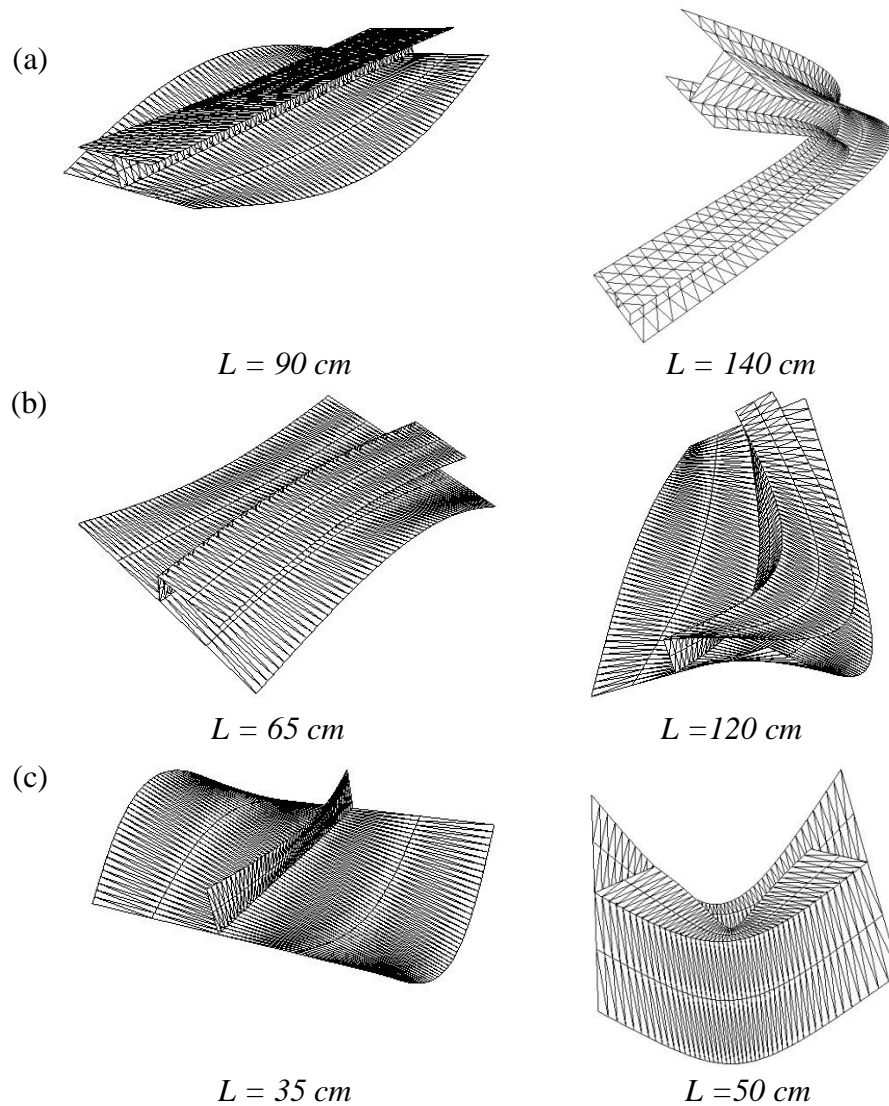


Fig. 5.A.16 – Modelo **SP9**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I

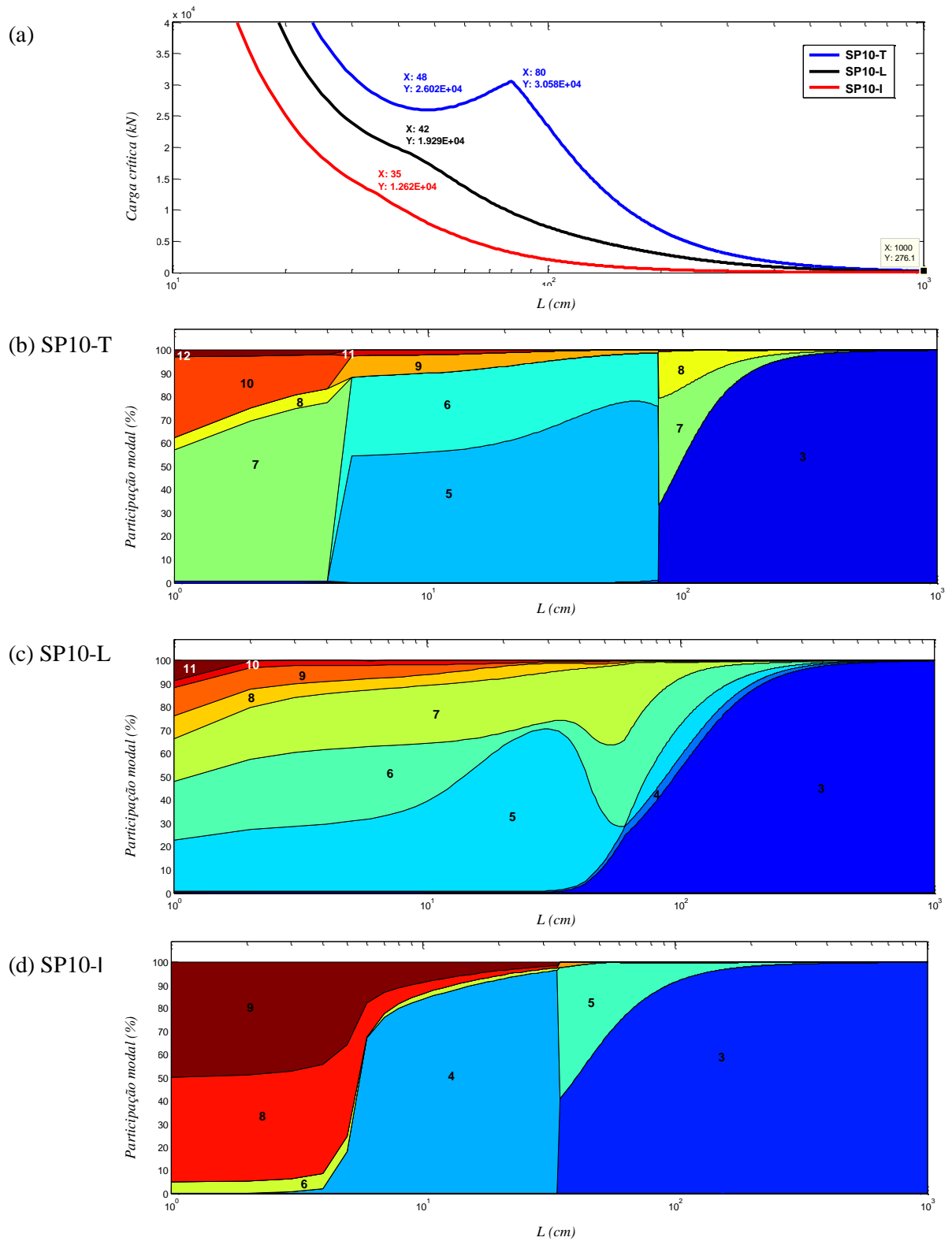


Fig. 5.A.17 – Modelo **SP10**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b)T. (c) L. (d) I

- (a) **SP10-T**: Para  $L \leq 80$  cm, ocorrem **MLPT**  $\equiv 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 +$  outros, sendo inexpressiva a participação do modo 4. Entre  $80 \leq L \leq 300$  cm, **MLPF**  $\equiv 3 + 7 + 8$ . A partir de  $L \geq 300$  cm, predomina **3**.
- (b) **SP10-L**: Predominam modos locais para  $L \leq 40$  cm. Entre  $40 \leq L \leq 400$  cm, ocorrem modos mistos. Para  $L \geq 400$  cm, **MF**  $\equiv 3$ .
- (c) **SP10-I**: Entre  $35 \leq L \leq 200$  cm, prevalecem **MLPF**  $\equiv 3 + 5$ . A partir de  $L \geq 200$  cm, **MF**  $\equiv 3$ .

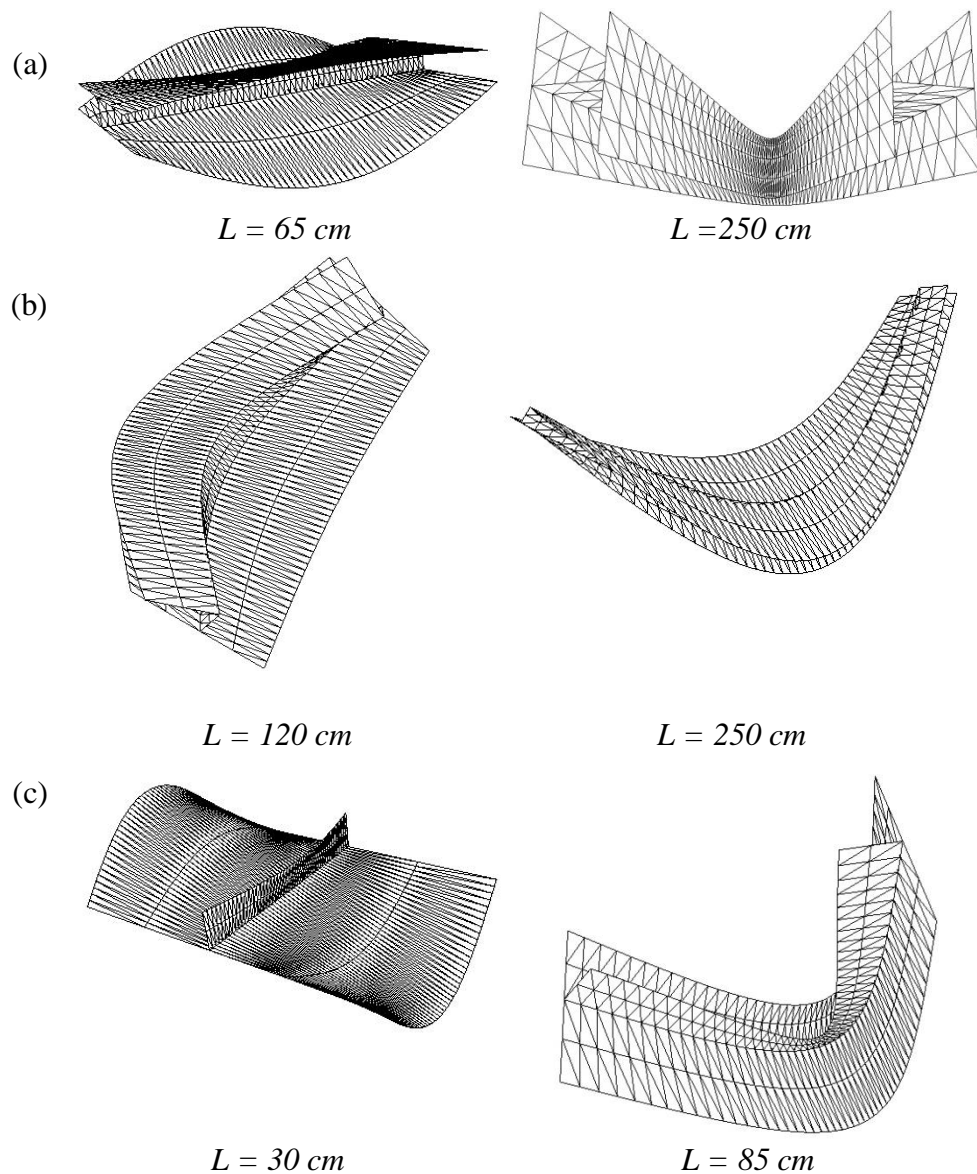
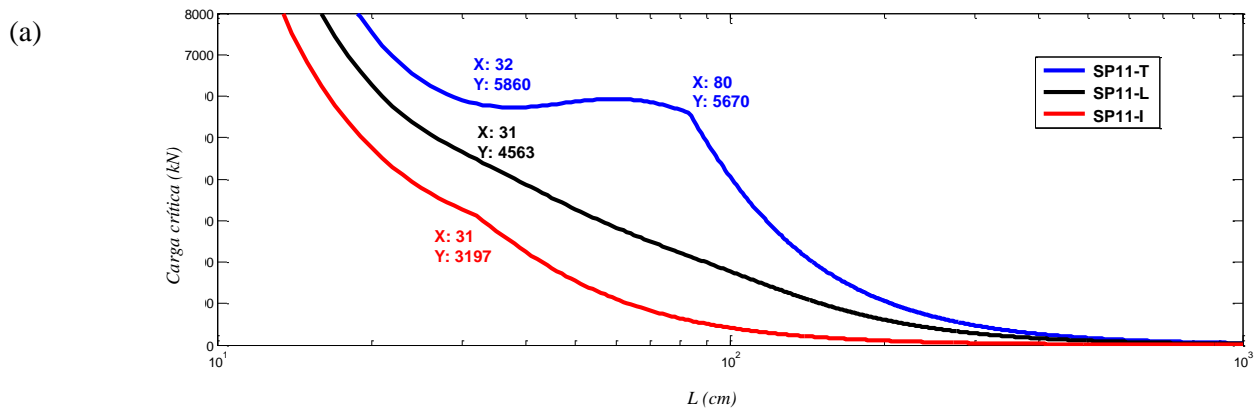
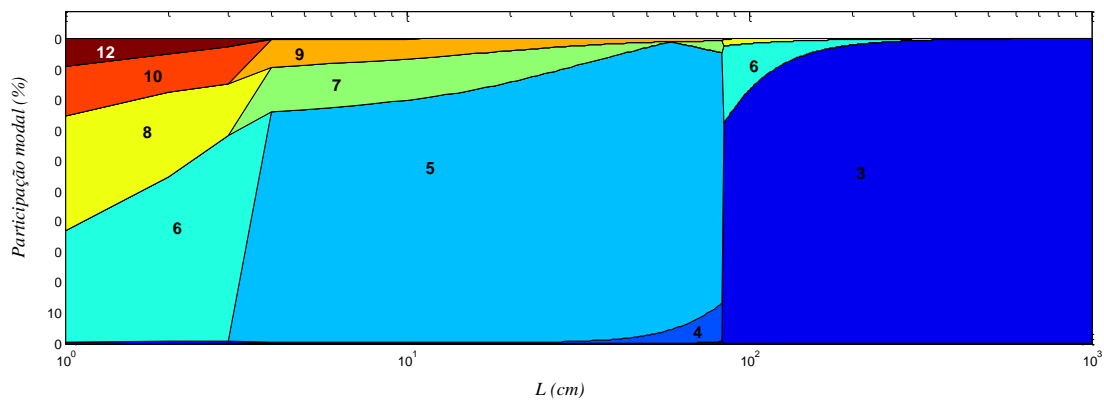


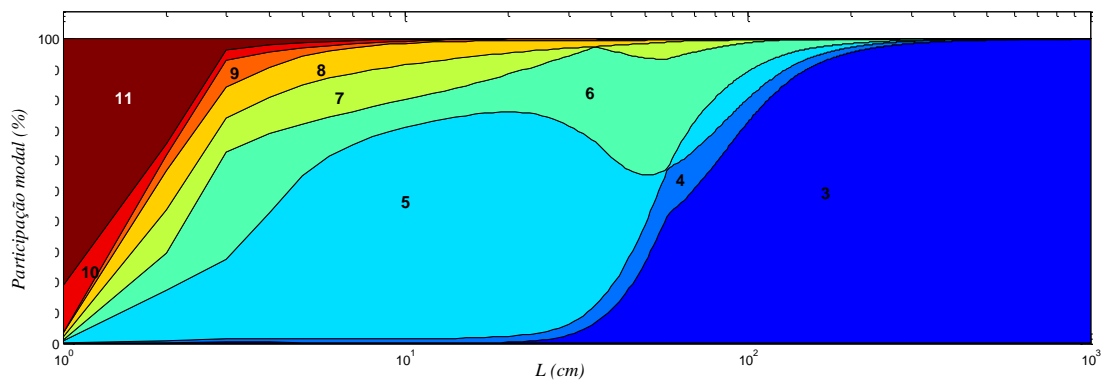
Fig. 5.A.18 – Modelo **SP10**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I



(b) SP11-T



(c) SP11-L



(d) SP11-I

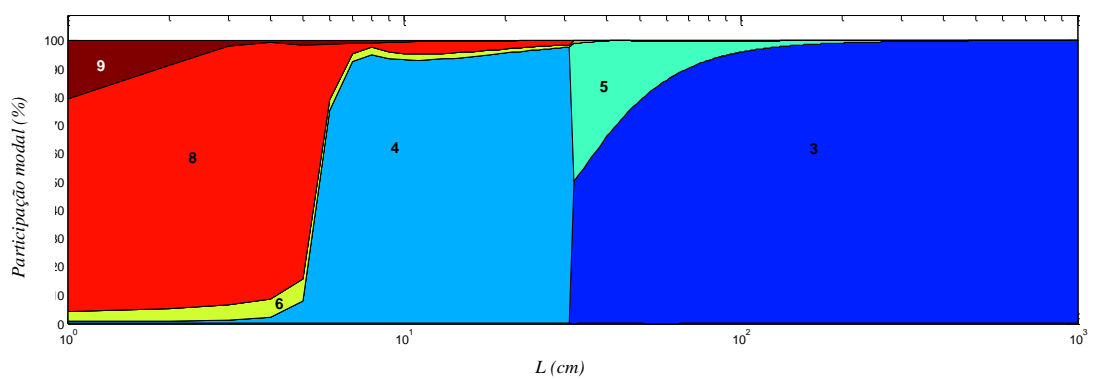


Fig. 5.A.19 – Modelo **SP11**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I

- (a) **SP11-T**: Em  $L = 80 \text{ cm}$ , ocorrem **MLPT**  $\equiv 5 + 7 + 9 + \text{um pouco de } 4$  ( $\leq 1.4\%$ ). Para  $L \geq 80 \text{ cm}$ , prevalece o modo **3**.
- (b) **SP11-L**: Entre  $24 \leq L \leq 200 \text{ cm}$ , ocorrem **MLPT**  $\equiv 5 + 6 + 7 + 8 + 4$ . Para  $L \geq 200 \text{ cm}$ , **MF**  $\equiv 3$ .
- (c) **SP11-I**: O painel apresenta três segmentos com comportamentos distintos. Em  $L = 30 \text{ cm}$ , prevalece **MT**  $\equiv 4$ . Para  $L \geq 30 \text{ cm}$ , o painel flamba devido ao **MF**  $\equiv 3$ .

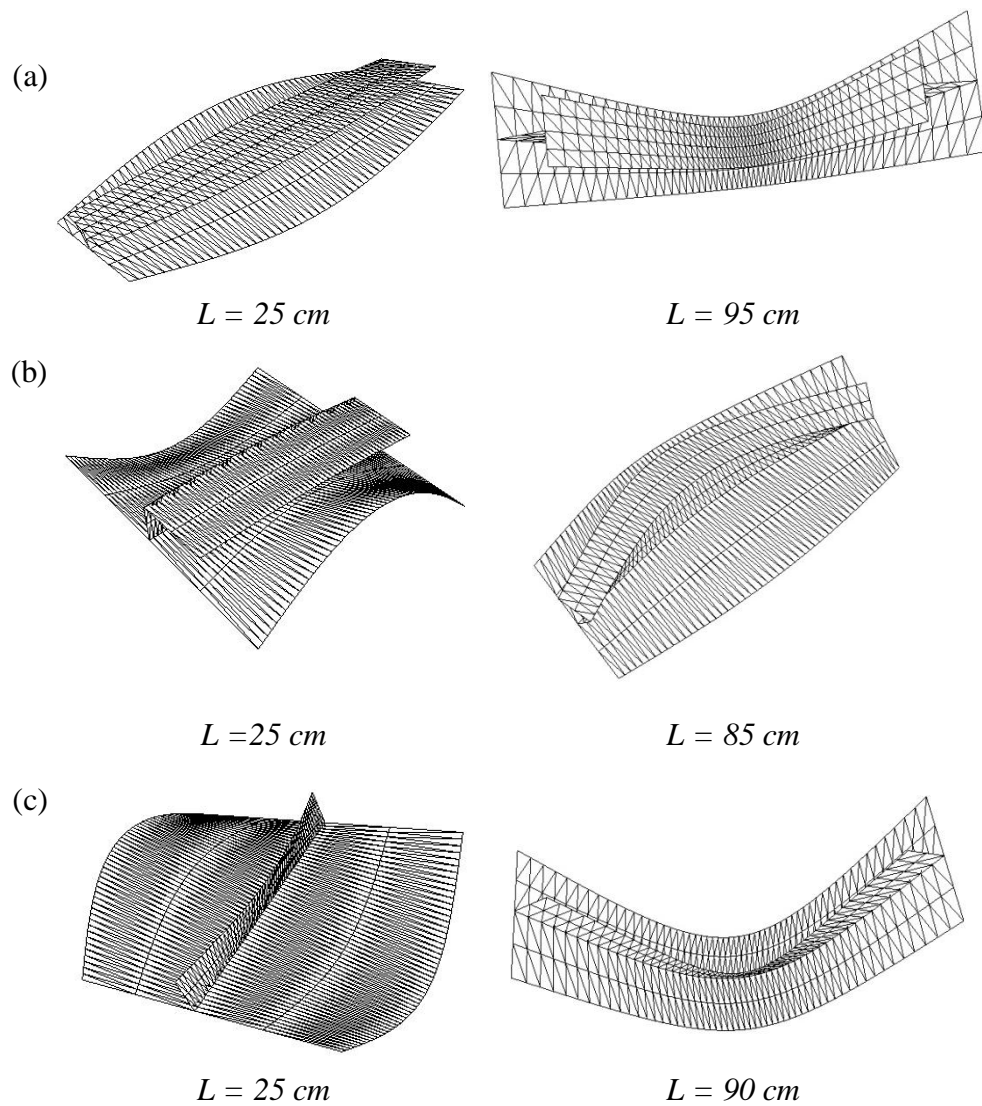


Fig. 5.A.20 – Modelo **SP11**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I

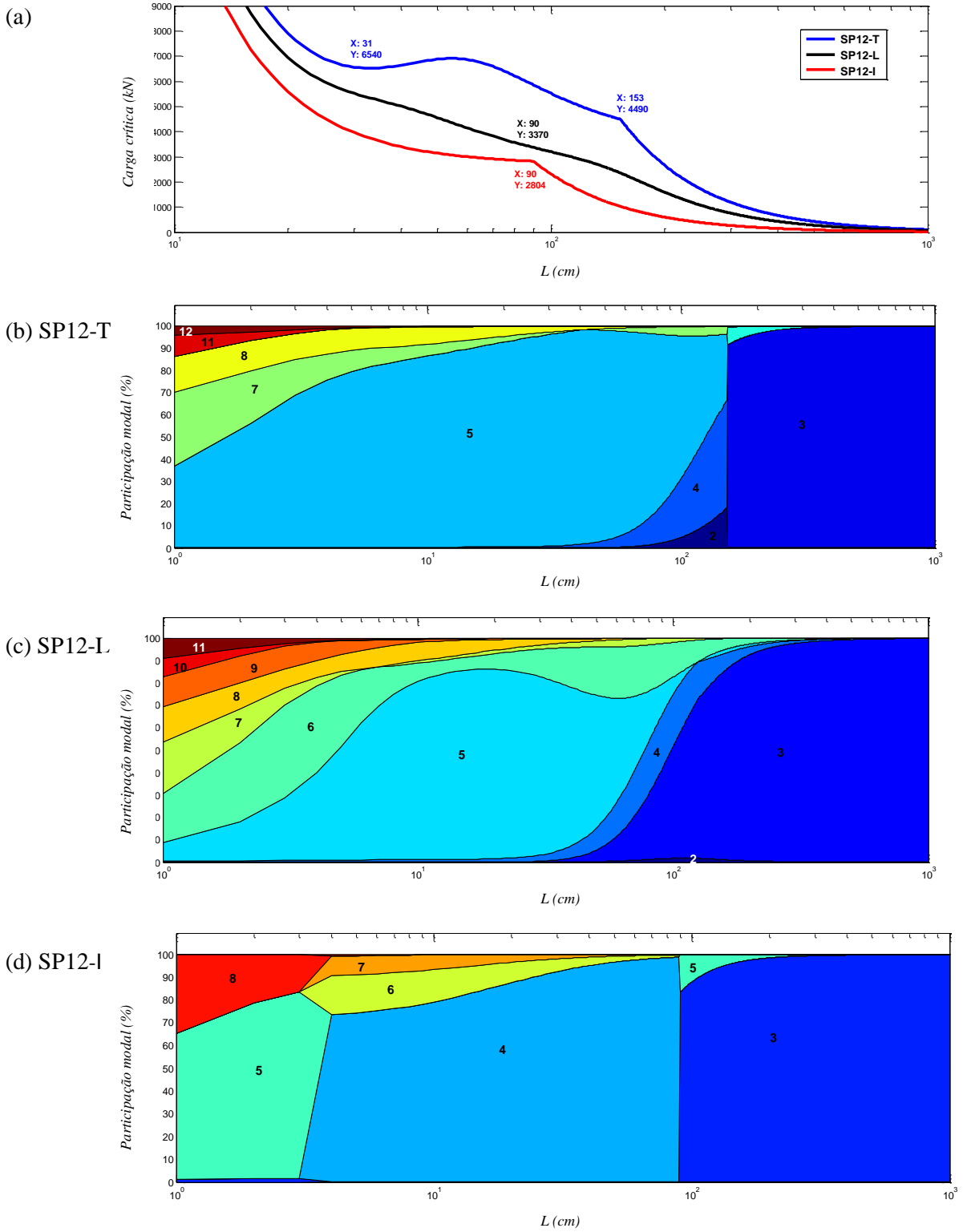


Fig. 5.A.21 – Modelo **SP12**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . Participação modal: (b) T. (c) L. (d) I



- (a) **SP12-T**: Para  $L \leq 50$  cm, predominam apenas modos locais (**MLP**  $\equiv 8 + 7 + 5 + 4 + 2$ ). Entre  $50 \leq L \leq 160$  cm, ocorrem modos mistos (**MLP**  $\equiv 7 + 5 + 4 + 2$ ). Em  $L = 80$  cm, por exemplo, tem-se: modo **5** (79.14%), **4** (14.87%) e **7** (3.19%). Para  $L \geq 160$  cm, predominam **MLPF**  $\equiv 3 + 6 + 10$ , com a participação de: **3** (92.84%), **6** (6.87%) e **10** (0.26%).
- (b) **SP12-L**: Entre  $50 \leq L \leq 200$  cm, ocorrem **MLPFT**  $\equiv 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2$ . A partir de  $L \geq 200$  cm, **MF**  $\equiv 3$ .
- (c) **SP12-I**: Em  $L = 30$  cm, o modo **4** participa com 92.21%. Em  $L = 90$  cm, 83.46% deve-se ao **MF**  $\equiv 3$ .

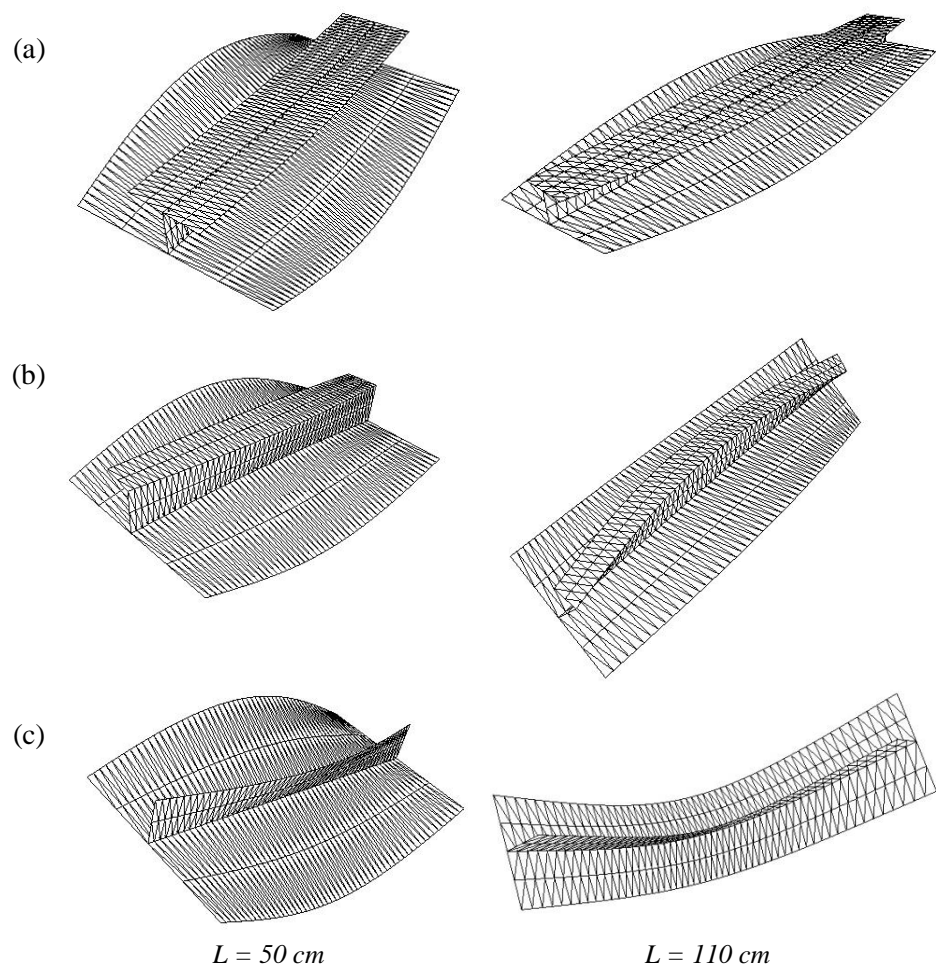


Fig. 5.A.22 – Modelo **SP12**: modos de instabilidade: (a) T. (b) L. (c) I



## ANEXO 5.B – ANÁLISES DE ESTABILIDADE DE SEÇÕES COMPOSTAS

Apresentam-se os resultados das análises de estabilidade das colunas biapoiadas submetidas à compressão, representadas pelos modelos **SC10**, **SC30**, **SC60**, **SC90** ( $t_f = 2.0\text{mm}$ ), **SC90** ( $t_f = 2.5\text{mm}$ ), **SCI** e **SC10** ( $b_e = 20\text{mm}$ ) (subseção 5.3.3). Ilustram-se a seguir as configurações dos modos de instabilidade (GBT e CUFSM).

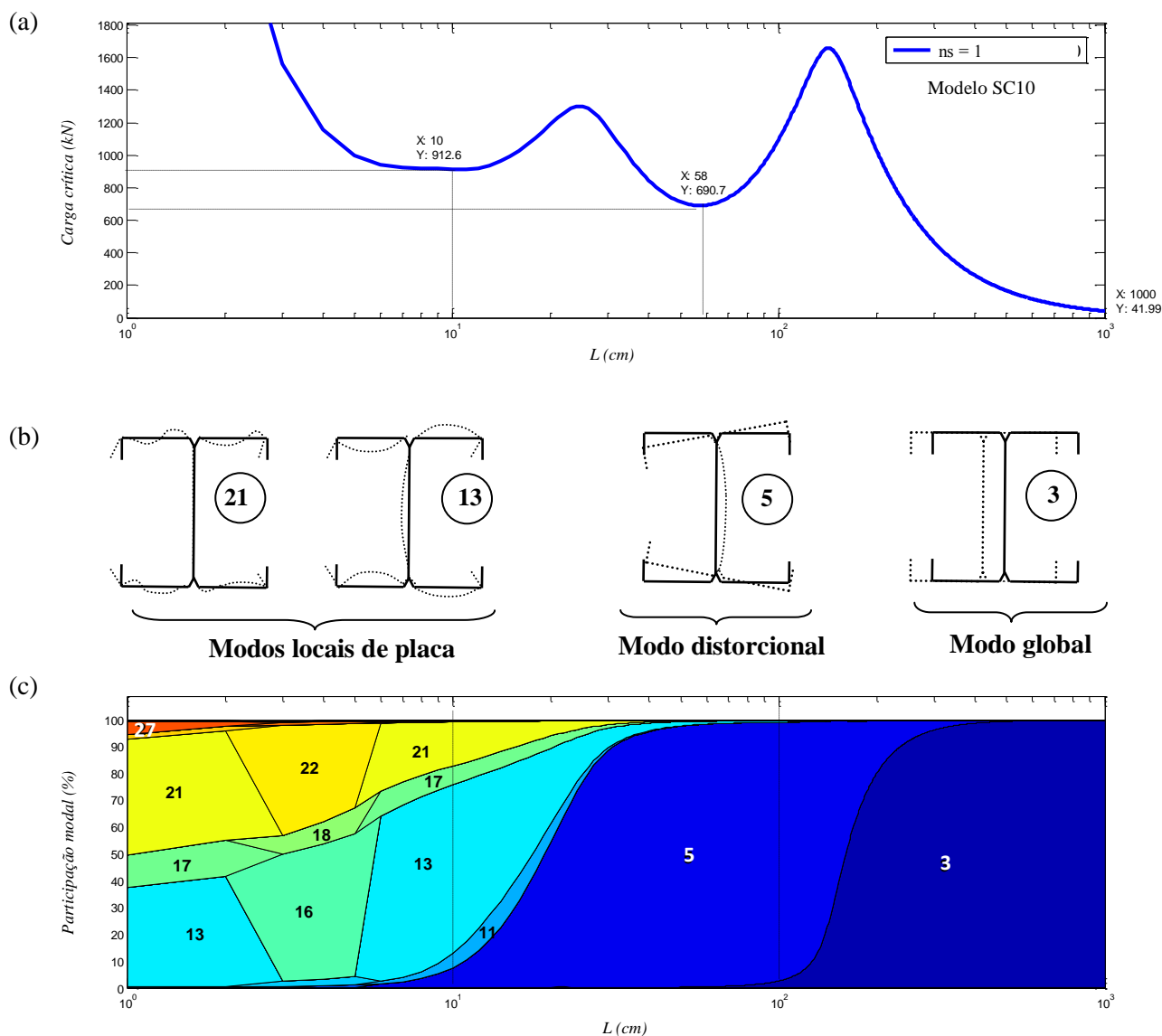


Fig. 5.B.1 – Modelo **SC10**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal

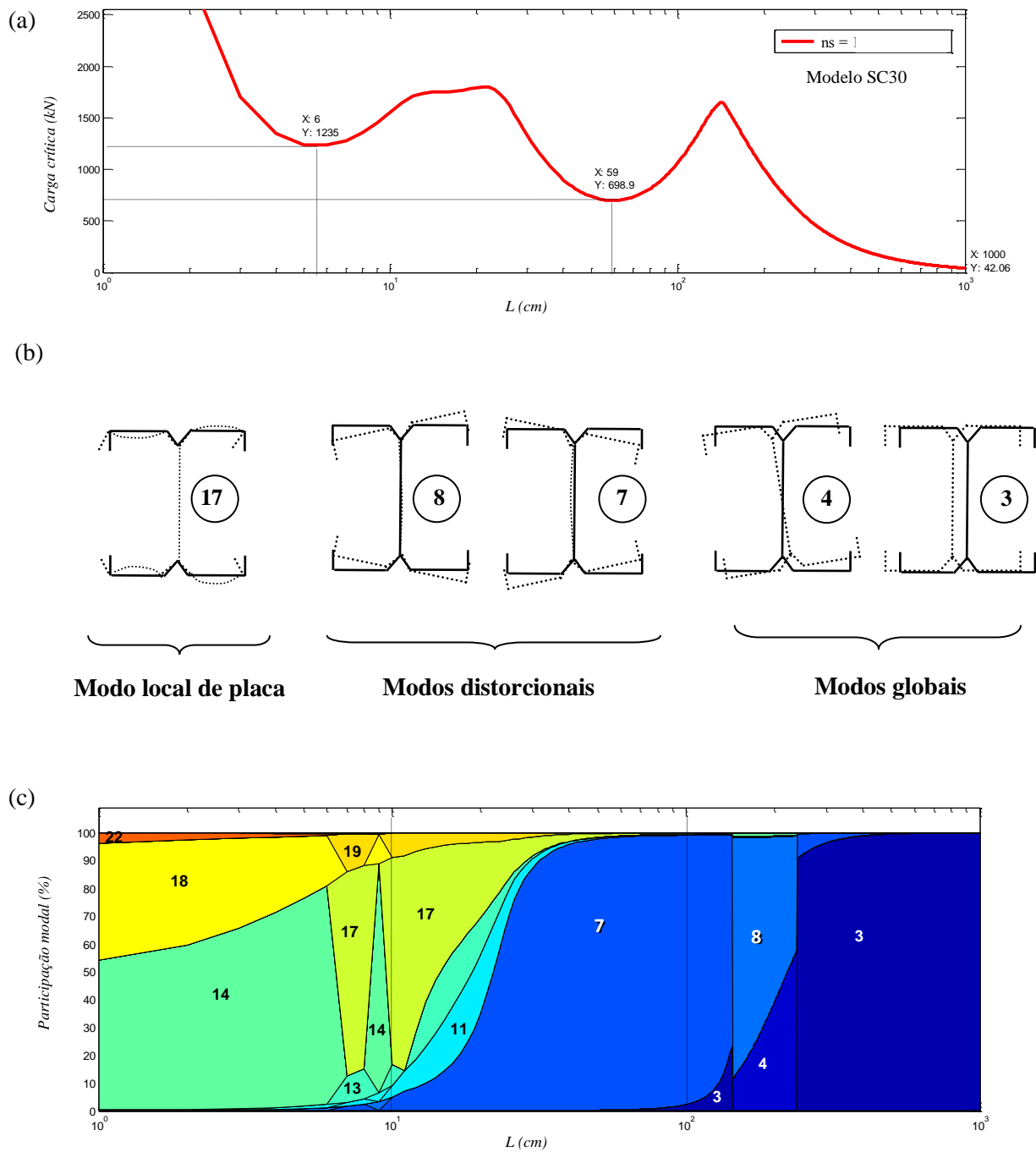


Fig. 5.B.2 – Modelo **SC30**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal

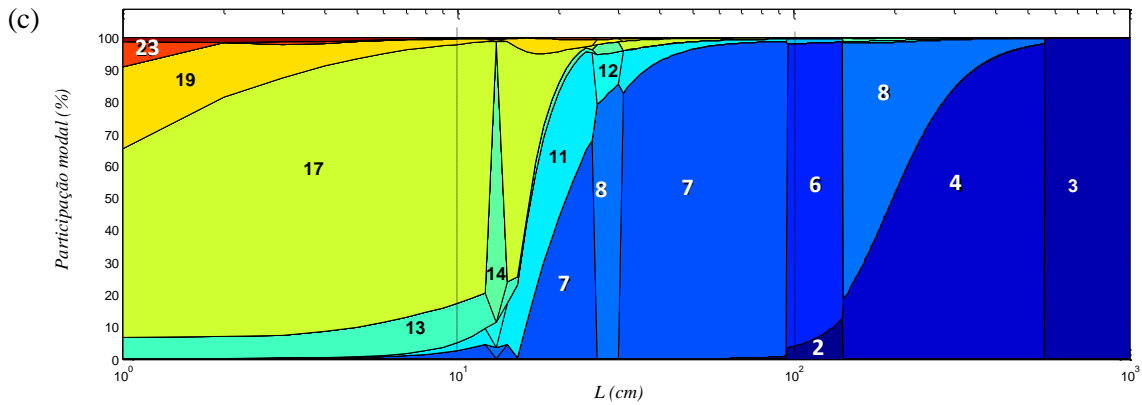
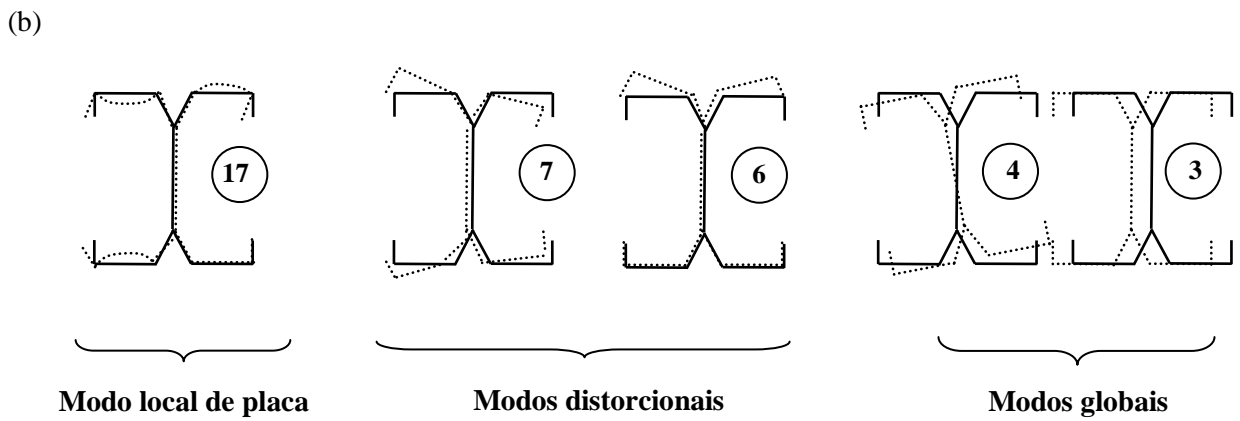
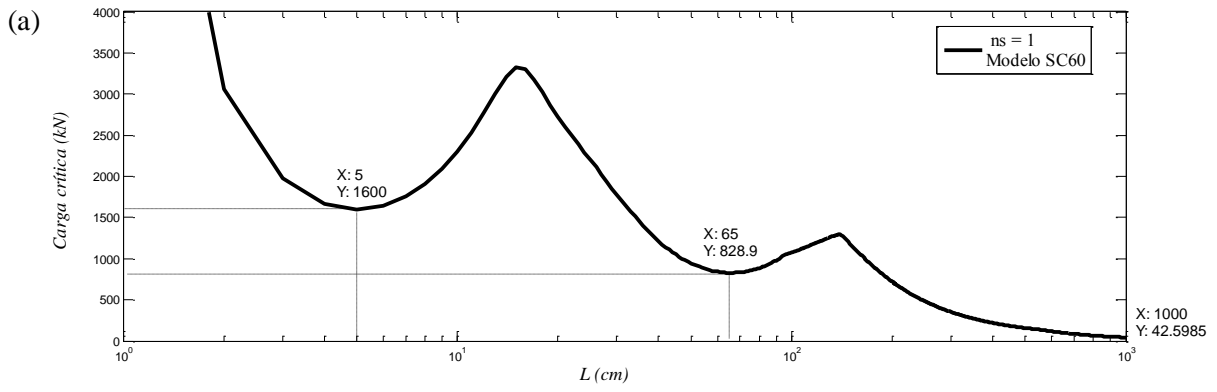


Fig. 5.B.3 – Modelo **SC60**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal

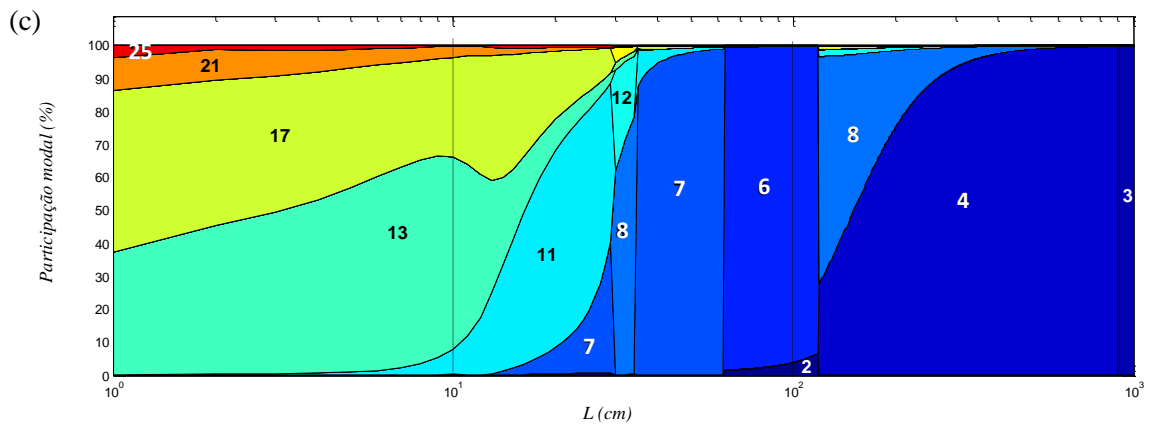
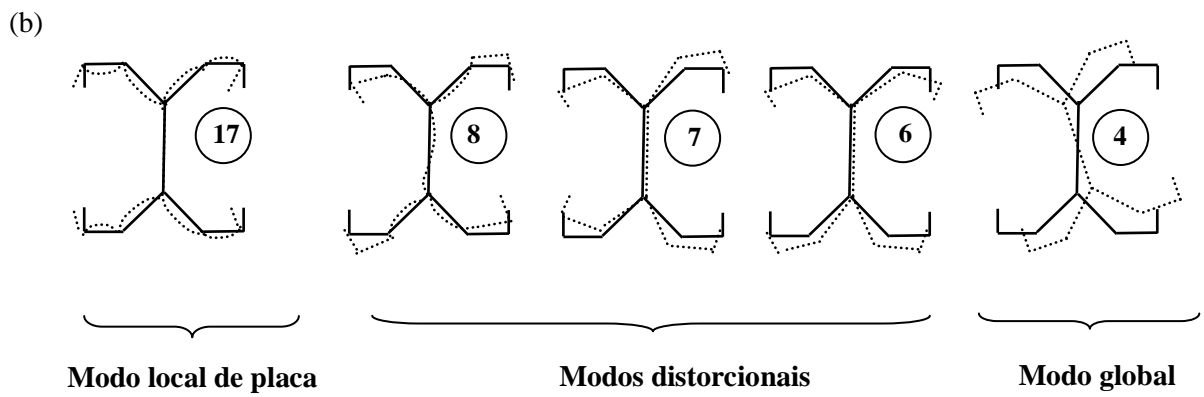
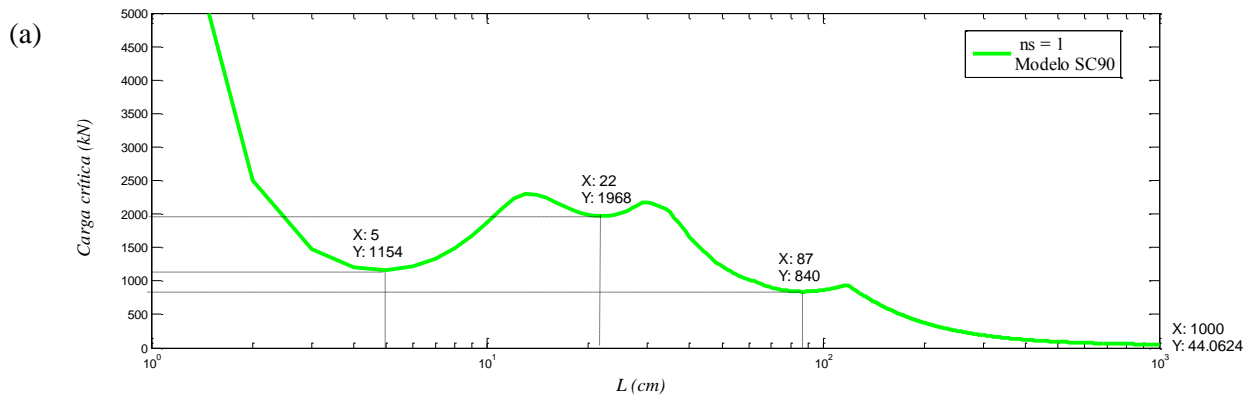


Fig. 5.B.4 – Modelo **SC90**: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal

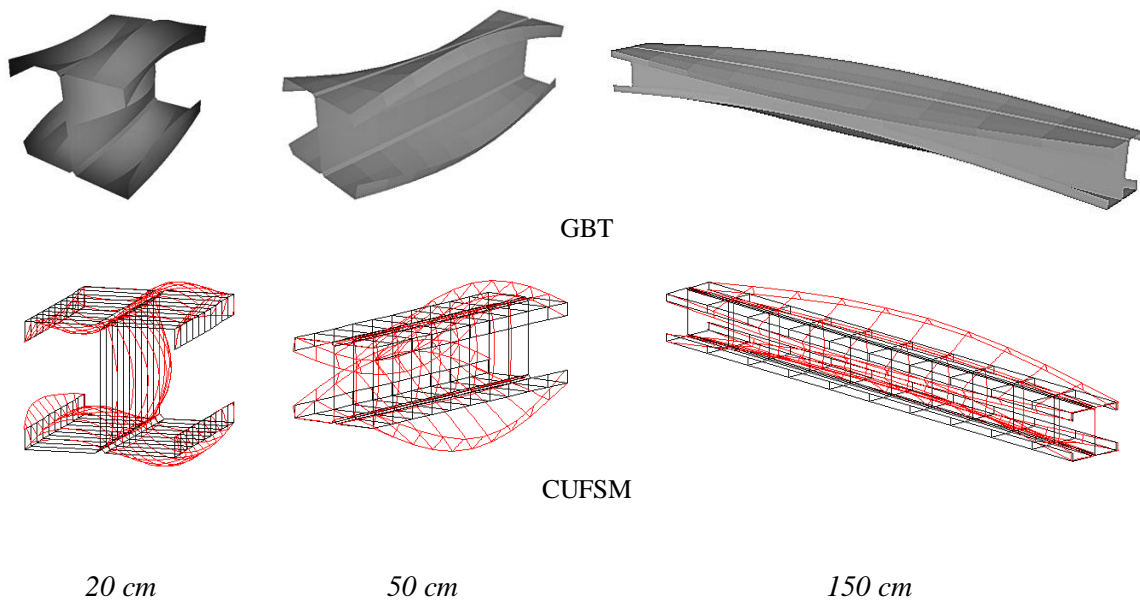


Fig. 5.B.5 – Modelo **SC10**: modos de instabilidade

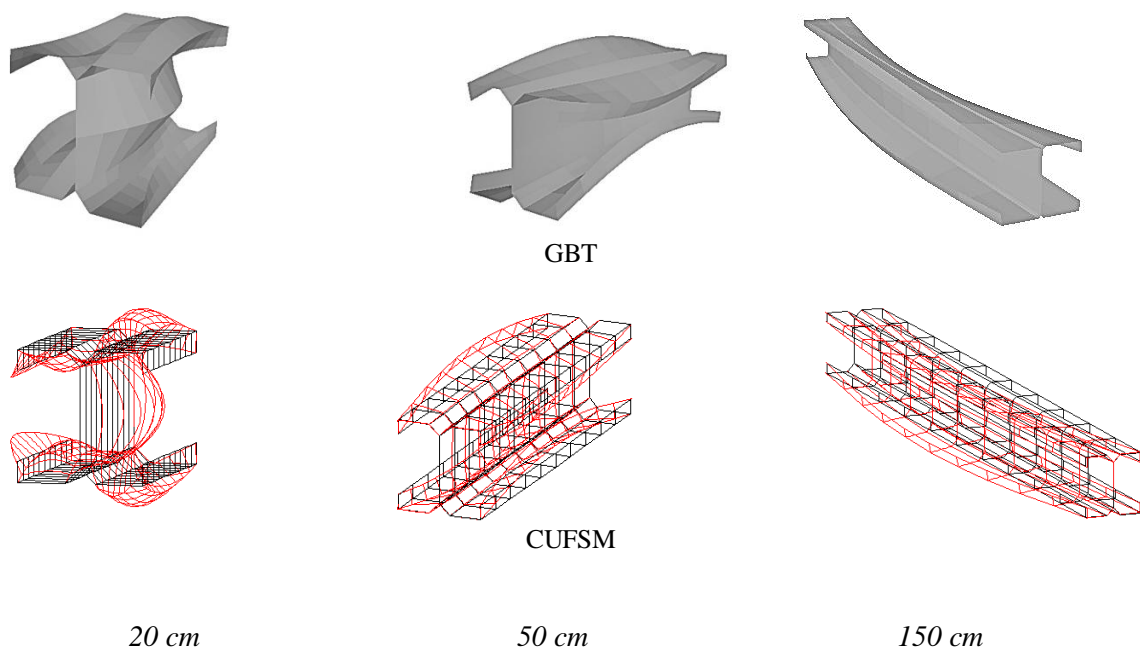


Fig. 5.B.6 – Modelo **SC30**: modos de instabilidade

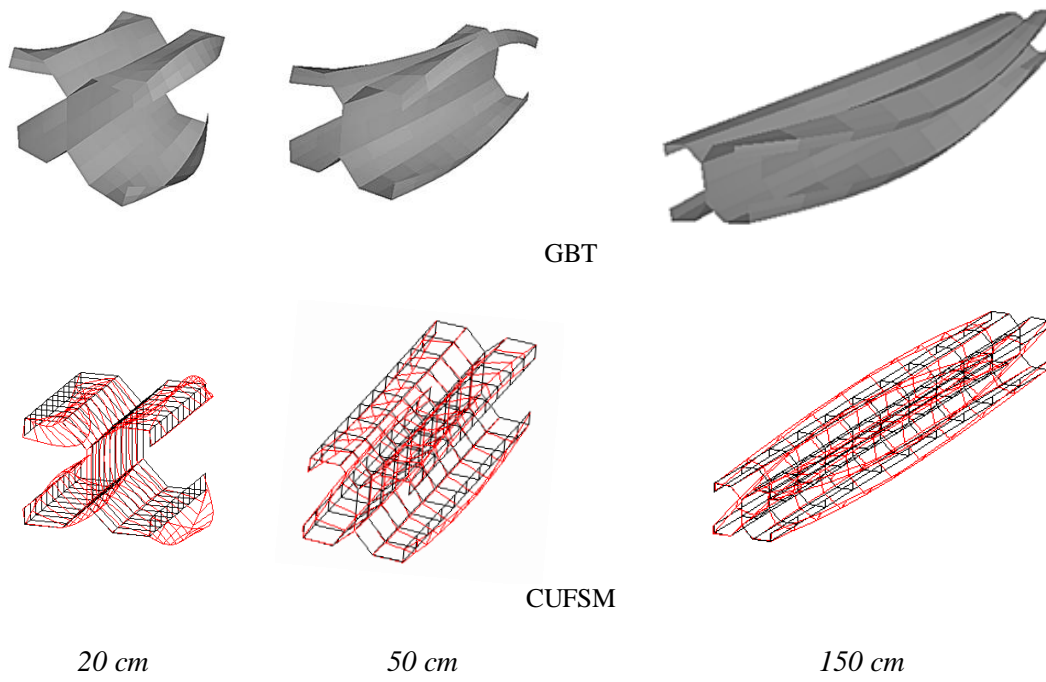


Fig. 5.B.7 – Modelo **SC60**: modos de instabilidade

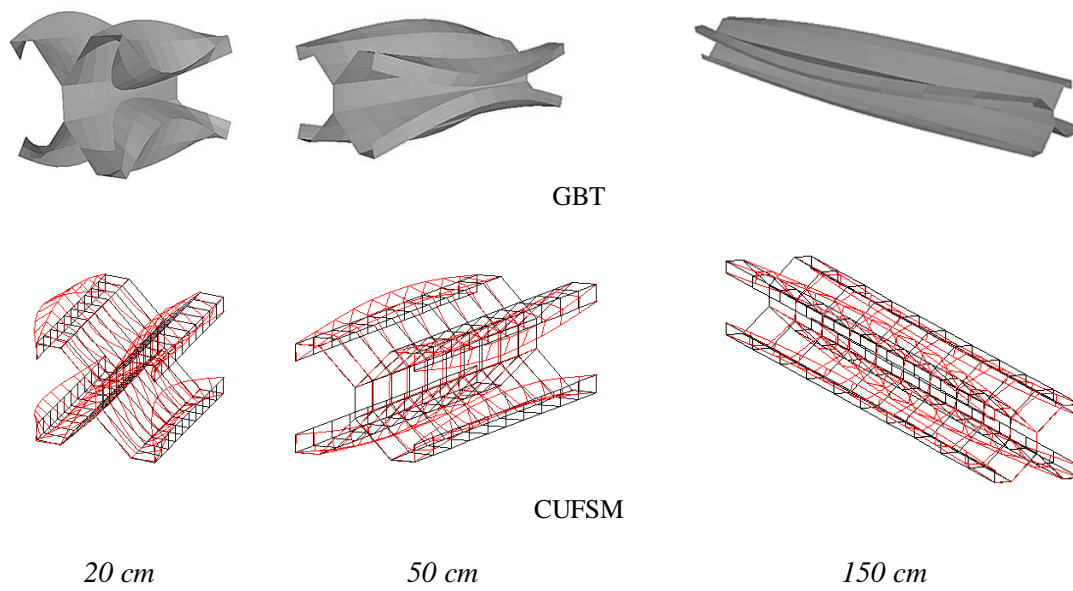


Fig. 5.B.8 – Modelo **SC90**: modos de instabilidade



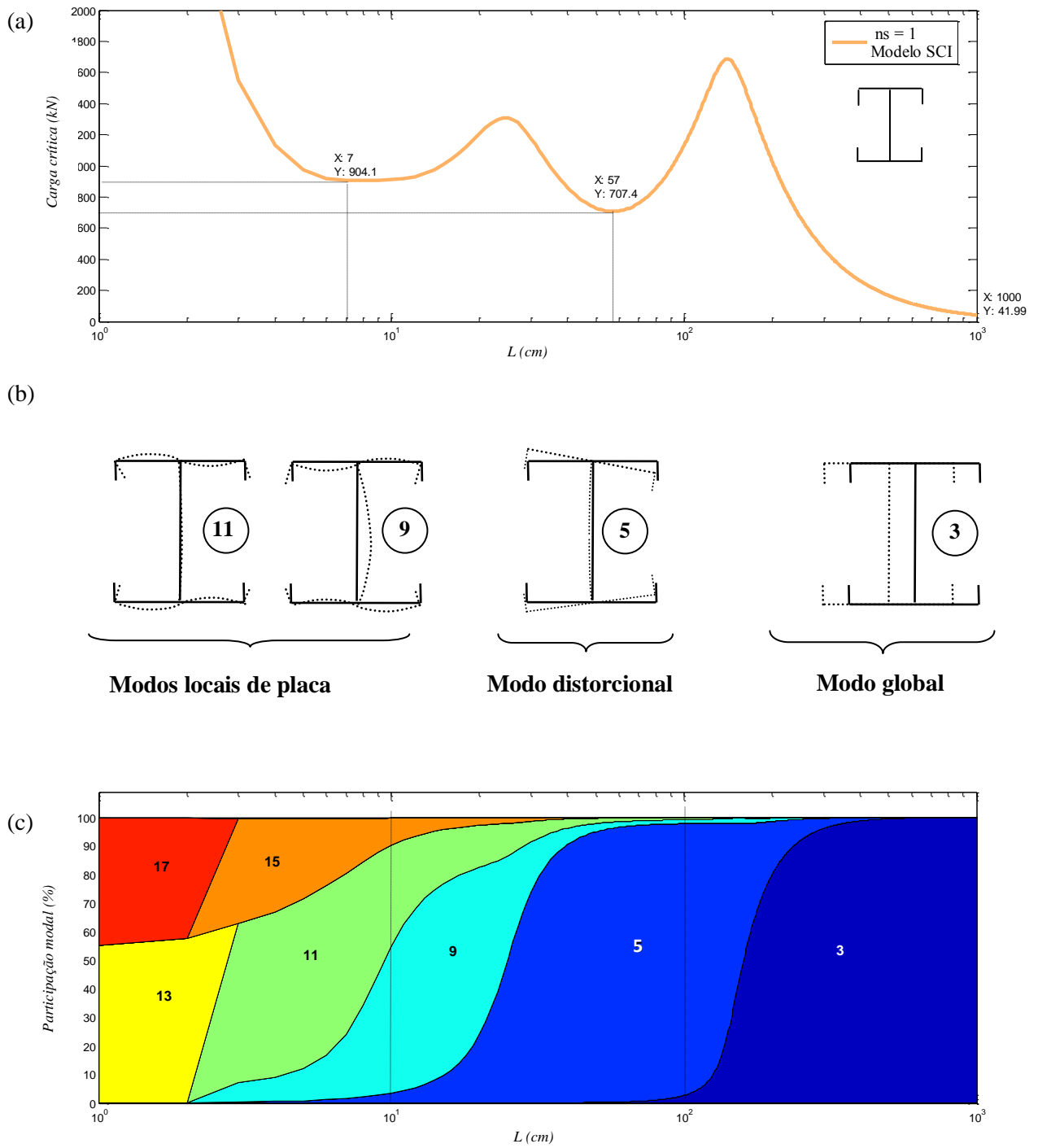


Fig. 5.B.9 – Modelo SCI: (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal

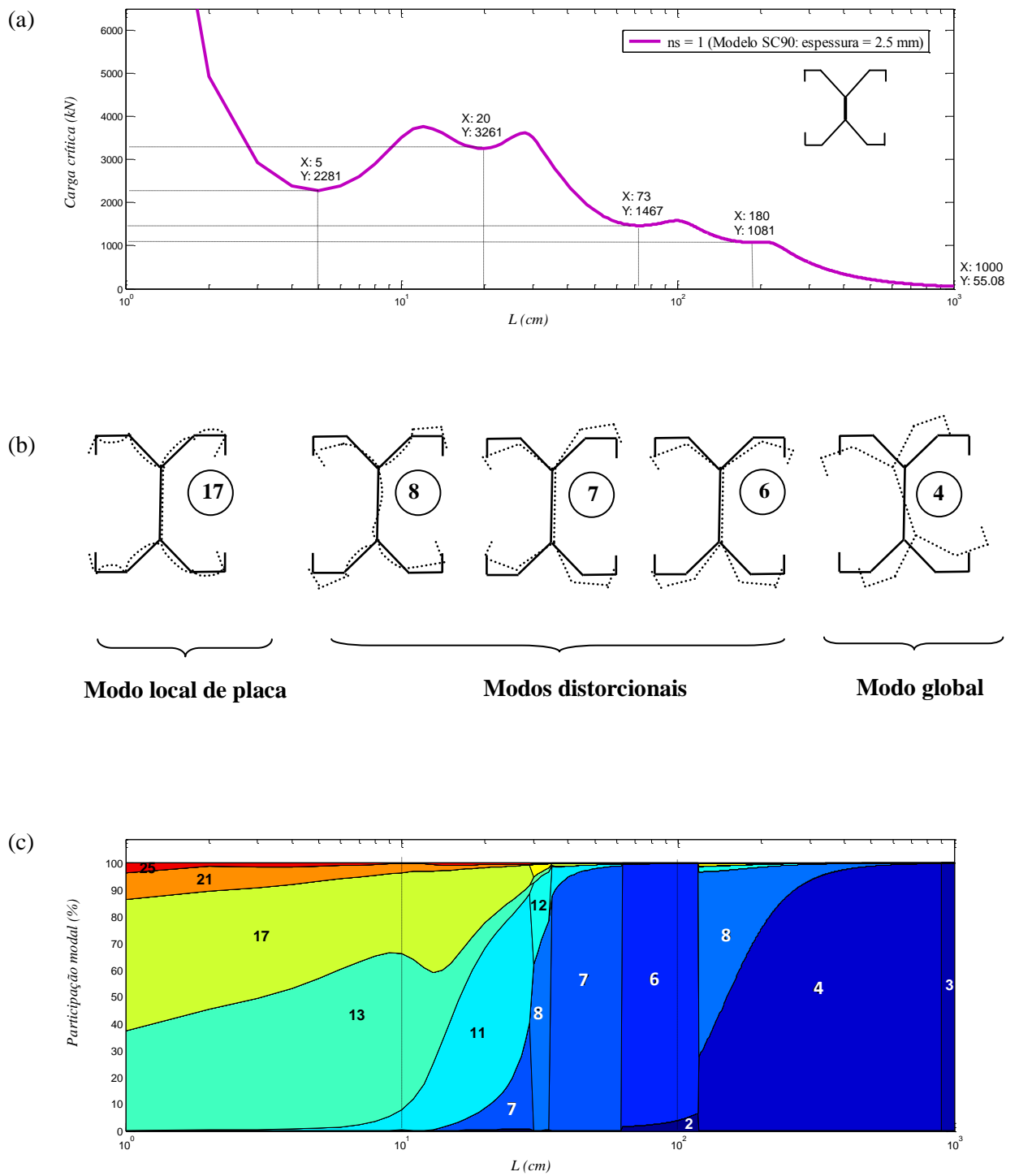


Fig. 5.B.10 – Modelo **SC90** ( $t_f = 2.5$  mm): (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal

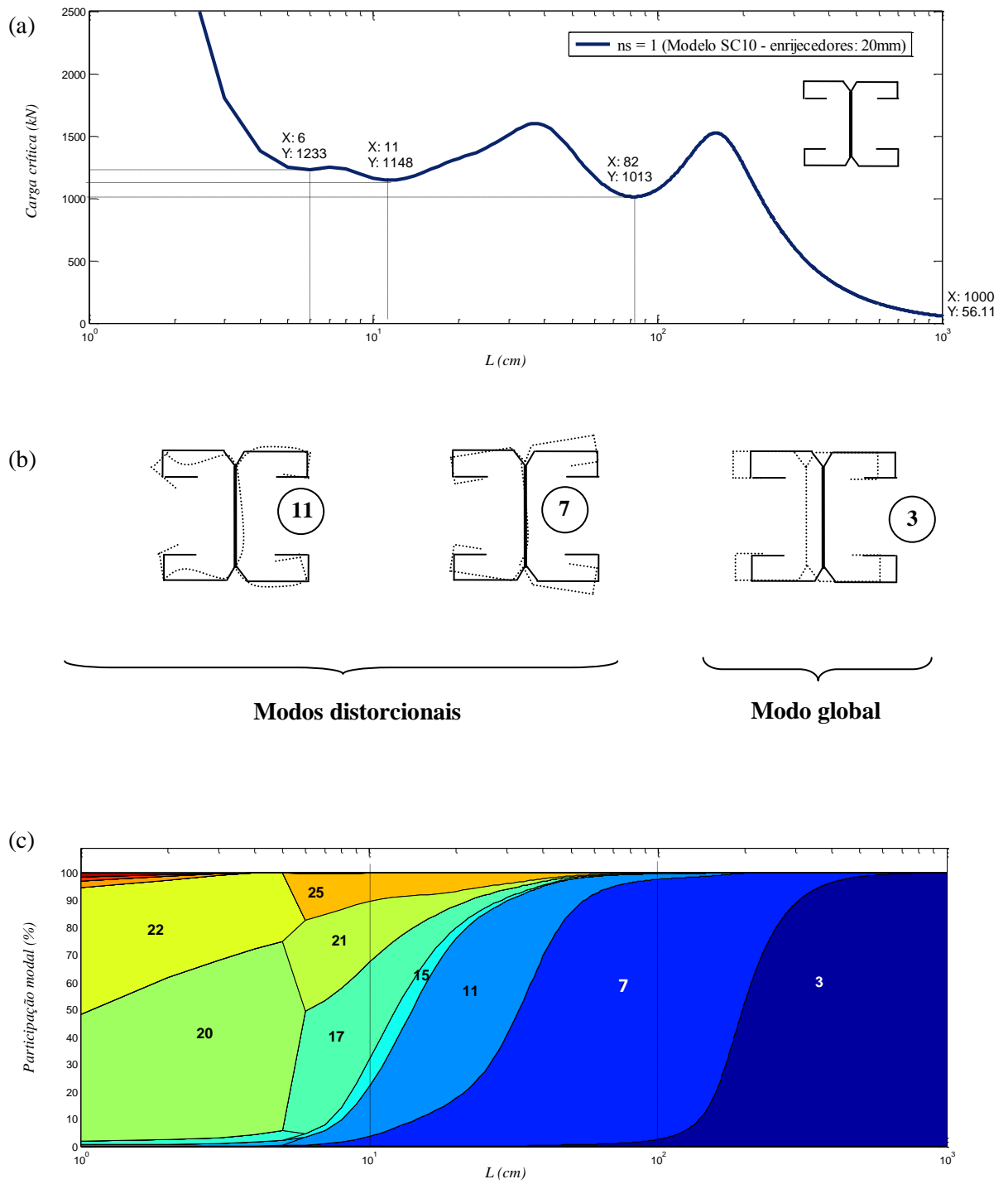


Fig. 5.B.11 – Modelo **SC10** ( $b_e = 20 \text{ mm}$ ): (a) Variação de  $P_{cr}$  com  $L$ . (b) Principais modos puros de deformação. (c) Participação modal

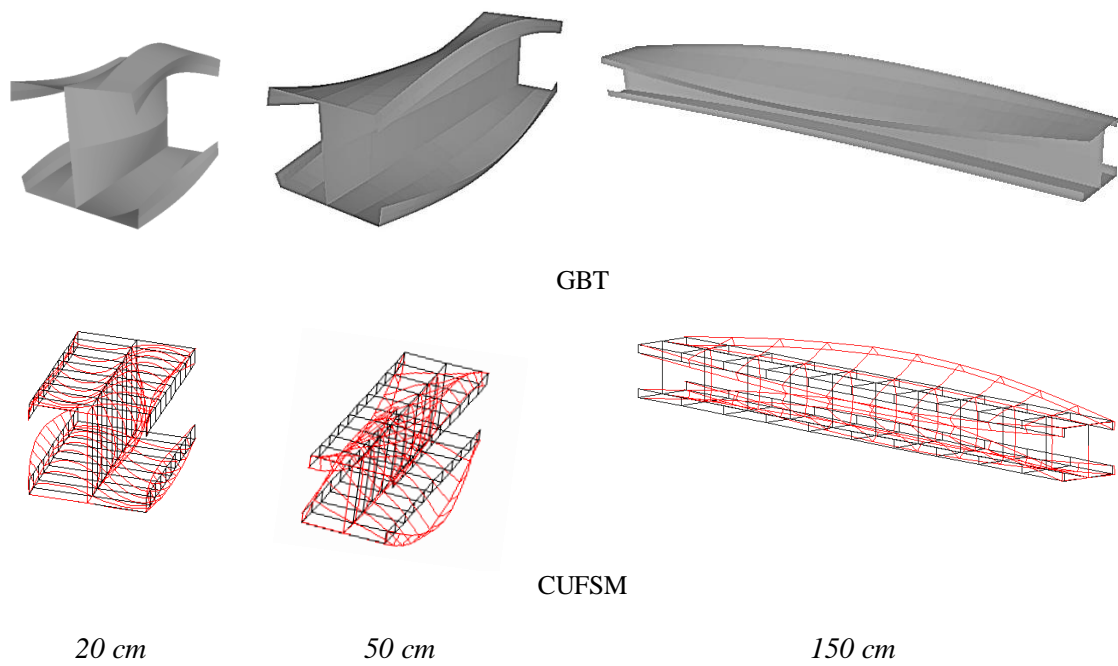


Fig. 5.B.12 – Modelo **SCI**: modos de instabilidade

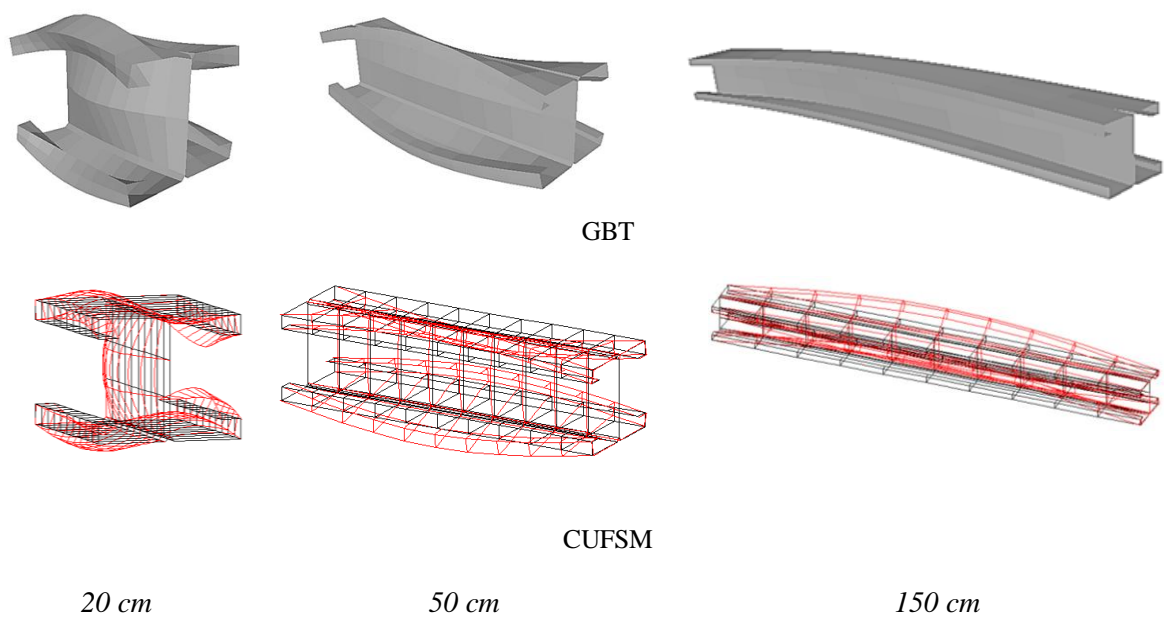


Fig. 5.B.13 – Modelo **SC10** ( $b_e = 20 \text{ mm}$ ): modos de instabilidade