

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE DE SÓLIDOS E COMPÓSITOS 3D GERAIS VIA ALGORITMO DE
SUBESTRUTURAÇÃO GENÉRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO**

Carlos Roberto da Silva Júnior

ORIENTADOR: Prof. Francisco Célio de Araújo, Dr. – Ing.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.
Área de concentração: Construção Metálica.

Ouro Preto, novembro de 2013.

S586a

Silva Júnior, Carlos Roberto da.

Análise de sólidos e compósitos 3D gerais via algoritmo de subestruturação genérica do método dos elementos de contorno [manuscrito] /Carlos Roberto da Silva Júnior - 2013.

xv, 105f.: il. color.; grafs.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de concentração: Construção Metálica.

1. Mecânica dos sólidos - Teses. 2. Métodos de elementos de contorno - Teses. 3. Compósitos poliméricos - Teses. I. Araújo, Francisco Célio de. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

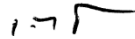
CDU: 624.014:678.7

Catálogo: sisbin@sisbin.ufop.br

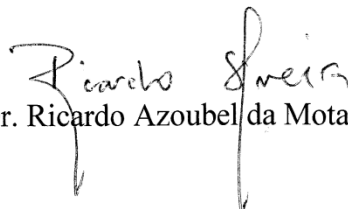
**ANÁLISE DE SÓLIDOS E COMPÓSITOS 3D GERAIS VIA
ALGORITMO DE SUBESTRUTURAÇÃO GENÉRICA DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

AUTOR: CARLOS ROBERTO DA SILVA JÚNIOR

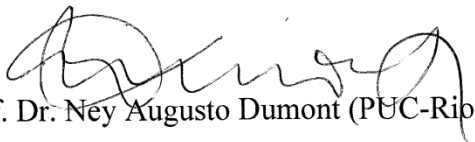
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 08 de novembro de 2013, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo (Orientador / UFOP)



Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (UFOP)



Prof. Dr. Ney Augusto Dumont (PUC-Rio)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos
aqueles que contribuíram para
a sua realização

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, pelo amor e pelas oportunidades a mim concedidas.

A minha família, pelo amor e pelo apoio incondicional ao longo dos anos, em especial a minha mãe Cecília e as minhas irmãs Cleide e Soraia que jamais mediram esforços em me ajudar naquilo de que necessitava.

Ao meu professor e orientador Francisco Célio de Araújo pela amizade, pelas oportunidades e por todo o conhecimento que adquiri durante o tempo em que trabalhamos juntos.

Aos professores do PROPEC, por me ajudarem a subir degraus indispensáveis na escalada a que me propus.

Aos colegas de curso pelo companheirismo e pelos momentos de descontração.

EPÍGRAFE

Quanto mais eu sinta, quanto mais eu sinta como várias pessoas,
Quanto mais personalidade eu tiver,
Quanto mais intensamente, estridentemente as tiver,
Quanto mais simultaneamente sentir com todas elas,
Quanto mais unificadamente diverso, dispersadamente atento,
Estiver, sentir, viver, for,
Mais possuirei a existência total do universo,
Mais completo serei pelo espaço inteiro fora.
Mais análogo serei a Deus, seja ele quem for,
Porque, seja ele quem for, com certeza que é Tudo,
E fora d'Ele há só Ele, e Tudo para Ele é pouco.

(FERNANDO PESSOA)

RESUMO

Neste trabalho, o algoritmo subregião-por-subregião (SBS), desenvolvido em trabalhos anteriores, é empregado para calcular tensões em pontos de contorno ou interface de sólidos e compósitos 3D genéricos. Em pontos internos, esquemas de integração são utilizados. Para pontos de contorno ou de interface, a lei de Hooke é aplicada diretamente ao longo de um sistema de referência local mutuamente ortogonal para o ponto considerado. De fato, em domínios de parede fina, somente tensões de contorno são necessárias. Como o algoritmo SBS permite a consideração de um número genérico de subregiões, a técnica aplica-se à análise de tensões em quaisquer compósitos e sólidos incluindo a análise microestrutural (grão-por-grão) de materiais. A montagem e manipulação algébrica das matrizes de contorno para as muitas subregiões do modelo tornam a formulação robusta para lidar com modelos de grande ordem como em análises microestruturais de compósitos genéricos. Para isso, *solvers* de Krylov são incorporados no algoritmo SBS. Programas computacionais para obter malhas a partir do programa comercial ANSYS 13 também foram desenvolvidos. A visualização dos resultados foi realizada através dos programas VisIt e Pos3D e algumas subrotinas foram implementadas para imprimir os resultados em formatos especiais como o formato *‘.vtk’* (*Visualization Tool Kit*). Para mostrar o desempenho da técnica empregada, vigas, placas, interações solo-estrutura e modelos para volumes representativos 3D (RVEs) de compósitos reforçados com nanotubos de carbono (CNT) são analisados e comparações são feitas com o programa comercial ANSYS 13.

ABSTRACT

In this work, the subregion-by-subregion (SBS) algorithm, developed in previous works, is employed to evaluate stresses at boundary or interfacial points of generic 3D composites and solids. At inner points, regular boundary integration schemes are employed. For boundary or interfacial points, the Hooke's law along with global-to-local axis-rotation transformations is directly applied. In fact, in thin-walled domain parts, only boundary stresses are needed. As the SBS algorithm allows the consideration of a generic number of subregions, the technique applies to the stress analysis in any composite and solid, including the microstructural (grain-by-grain) modeling of materials. The independent assembly and algebraic manipulation of the BE matrices for the many substructures involved in the model, makes the formulation very suitable for dealing with large-order models, as typically happens in the 3D microstructural analysis of generic composites. For that, Krylov *solvers* are embedded in the SBS algorithm. Computer programs to get general meshes from the commercial software ANSYS 13 were also developed. The visualization of results was performed by the VisIt and Pos3D programs, and some subroutines to print out the results in special file formats as the '.vtk'(Visualization Tool Kit) format were also written. To show the performance of the technique, beams, plates, soil-structure interactions and models for 3D representative volume elements (RVEs) of carbon-nanotube (CNT) composites are analyzed. The results obtained are compared to those calculated using the ANSYS 13 software.

SUMÁRIO

Resumo.....	VI
Abstract.....	VII
Lista de figuras	X
Lista de tabelas	XV
Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1 Motivações.....	5
1.1.1 Análise microestrutural de materiais policristalinos e concreto	6
1.1.2 Interação solo-estrutura e solo-duto.....	7
1.1.3 Fibra de vidro, aramida e carbono	8
1.1.4 Aplicações em madeira.....	9
Capítulo 2 - O Método dos Elementos de Contorno	10
2.1 Equações da elastostática.....	11
2.2 Representação integral das soluções elastostáticas.....	13
2.3 Soluções fundamentais	15
2.4 Consideração de ξ sobre o contorno	16
2.5 Regiões estendendo-se ao infinito	17
2.6 Discretização.....	18
2.7 Integração	21
2.7.1 Integrais não singulares	21
2.7.2 Integrais fracamente singulares	21
2.7.3 Integrais fortemente singulares.....	21
2.7.4 Integrais quase-singulares.....	22
2.7.5 Procedimentos numéricos	22
2.7.5.1 Transformação de coordenadas polares triangulares	23
2.7.5.2 Transformação cúbica de Telles.....	26
2.7.5.3 Processo combinado.....	26
Capítulo 3 - Acoplamento EC/EC	28
3.1 Generalidades	28
3.2 Pré-processamento	29
3.2.1 Generalidades	29
3.2.2 Refinamento da malha	30
3.2.2.1 Geração de malha com o software comercial ANSYS 13	32

3.2.3	Acoplamento	34
3.2.4	Condições de contorno	34
3.3	Processamento	35
3.3.1	Generalidades	35
3.3.2	Preparação do domínio de integração	36
3.3.3	Montagem das matrizes H e G.....	36
3.3.4	Pesquisa de acoplamento	37
3.3.5	Introdução das condições de contorno.....	37
3.3.6	Acoplamento EC/EC	38
3.3.7	Matriz do sistema acoplado	39
3.3.8	<i>Solvers</i> de Krylov	41
3.3.9	Cálculo de tensões	43
3.4	Pós-processamento	46
Capítulo 4 - Aplicações		48
4.1	Problema 1 - Viga engastada e livre sob flexão simples	48
4.2	Problema 2 - Viga metálica esbelta biengastada sob flexão simples.....	59
4.3	Problema 3 - Viga parede engastada e livre sob flexão simples.....	64
4.4	Problema 4 - Placa espessa sob flexão e engastada nas extremidades	74
4.5	Problema 5 - Interação solo-fundação	85
4.6	Problema 6 - Interação solo-tubulão.....	91
4.7	Problema 7 - Compósito reforçado com nanotubos de carbono.....	98
Capítulo 5 - Conclusões.....		101
5.1	Conclusões	101
5.2	Aspectos Futuros	102
Referências bibliográficas		103

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

Figura 1.1 - Modelo microestrutural com 1000 grãos.....	6
Figura 1.2 - Microestrutura do concreto.....	6
Figura 1.3 - Fundação do Burj Khalifa (a) e arranha-céu Burj Khalifa (b).....	7
Figura 1.4 - Reforço de estruturas em concreto armado com fibra de carbono.....	8
Figura 1.5 - Elemento estrutural em MLC (a) e passarela de pedestre em MLC (b).....	9

CAPÍTULO 2

Figura 2.1 - Corpo e suas condições de contorno.....	11
Figura 2.2 - Domínio elástico infinito.....	15
Figura 2.3 - Ponto fonte ξ sobre o contorno.....	16
Figura 2.4 - Domínio infinito.....	18
Figura 2.5 - Discretização do contorno.....	19
Figura 2.6 - Subdivisão do elemento de contorno em subelementos de integração.....	23
Figura 2.7 - Subdivisão do elemento de contorno em regiões triangulares.....	24
Figura 2.8 - Mapeamento em coordenadas polares triangulares.....	24
Figura 2.9 - Mapeamento em coordenadas naturais η_1 e η_2	25
Figura 2.10 - Posição final dos pontos de integração após processo de transformação em coordenadas polares triangulares.....	25
Figura 2.11 - Posição final dos pontos de integração após transformação cúbica de Telles....	27
Figura 2.12 - Posição final dos pontos de integração após processo combinado.....	27

CAPÍTULO 3

Figura 3.1 - Processo de subestruturação.....	29
Figura 3.2 - Elemento contínuo quadrangular de 4 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).....	31
Figura 3.3 - Elemento contínuo triangular de 3 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).....	31
Figura 3.4 - Elemento contínuo quadrangular de 8 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).....	31
Figura 3.5 - Elemento contínuo triangular de 6 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).....	31
Figura 3.6 - Elemento contínuo quadrangular de 9 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).....	32

Figura 3.7 - Refinamento de malha em progressão geométrica.	32
Figura 3.8 (a) - Fluxograma do processo de geração de malhas através do programa ANSYS 13.	33
Figura 3.8(b) - Programas para a geração de malha e montagem do 'input file'	34
Figura 3.9 - Elementos de interface entre subdomínios Ω_1 e Ω_2	34
Figura 3.10 - Formato das condições de contorno.	35
Figura 3.11 - Fluxograma do processamento de dados realizado pelo NAESY.	35
Figura 3.12 - Ilustração do recurso de cópia de subregiões.	36
Figura 3.13 - Nós acoplados entre subdomínios Ω_1 e Ω_2	37
Figura 3.14 - Decomposição do domínio (subestruturação).	38
Figura 3.15 - Incógnitas do problema.	40
Figura 3.16 - Elementos descontínuos.	41
Figura 3.17 - Sistema de referência local mutuamente ortogonal no nó de contorno.	43
Figura 3.18 - Construção do sistema de referência local mutuamente ortogonal no nó de contorno.	45
Figura 3.19 - Elemento descontínuo quadrangular de 8 nós.	46

CAPÍTULO 4

Figura 4.1 - Problema 1: Viga engastada e livre sob flexão simples.	48
Figura 4.2 - Problema 1: Malha de elementos de contorno (a) e deformada (b) (NAESY).	49
Figura 4.3 - Problema 1: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).	49
Figura 4.4 - Problema 1: Deslocamentos u_y ao longo do eixo da viga.	50
Figura 4.5 - Problema 1: Tensão σ_{zz} ao longo da altura y da seção engastada.	50
Figura 4.6 - Problema 1: Tensão σ_{zz} ao longo da viga.	51
Figura 4.7 - Problema 1: Superfície para as tensões σ_{zz} ao longo da seção engastada da viga (NAESY).	51
Figura 4.8 - Problema 1: Superfície para as tensões σ_{zz} ao longo da seção engastada da viga (ANSYS 13).	52
Figura 4.9 - Problema 1: Tensão τ_{yz} ao longo da altura y da seção engastada.	53
Figura 4.10 - Problema 1: Tensão τ_{yz} ao longo da viga.	54
Figura 4.11 - Problema 1: Superfície para as tensões τ_{yz} ao longo da seção engastada da viga (NAESY).	54
Figura 4.12 - Problema 1: Superfície para as tensões τ_{yz} ao longo da seção engastada da viga (ANSYS 13).	55
Figura 4.13 - Problema 1: Tensão σ_1 ao longo da altura y da seção engastada.	56
Figura 4.14 - Problema 1: Tensão σ_1 ao longo da viga.	56
Figura 4.15 - Problema 1: Tensão σ_3 ao longo da altura y da seção engastada.	57
Figura 4.16 - Problema 1: Tensão σ_3 ao longo da viga.	58

Figura 4.17 - Problema 2: Viga metálica esbelta biengastada sob flexão simples.....	60
Figura 4.18 - Problema 2: Malha de elementos de contorno (a) e deformada (b) (NAESY)...	60
Figura 4.18(c) - Problema 2: Detalhes do refinamento para a seção engastada.....	60
Figura 4.19 - Problema 2: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).....	61
Figura 4.20 - Problema 2: Deslocamentos u_y ao longo do eixo da viga.....	61
Figura 4.21 - Problema 2: Tensão σ_{zz} ao longo da altura y da seção central da viga.....	62
Figura 4.22 - Problema 2: Tensão σ_{zz} ao longo da viga.	62
Figura 4.23 - Problema 2: Tensão de von Mises ao longo da altura y da seção central da viga.	63
Figura 4.24 - Problema 2: Tensão de von Mises ao longo da viga.....	64
Figura 4.25 - Problema 3: Viga parede engastada e livre sob flexão simples.....	65
Figura 4.26 - Problema 3: Malha de elementos de contorno (a) e deformada (b) (NAESY)...	65
Figura 4.27 - Problema 3: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).....	65
Figura 4.28 - Problema 3: Deslocamentos u_y ao longo do comprimento da viga.	66
Figura 4.29 - Problema 3: Tensão σ_{zz} ao longo da altura y da seção engastada.....	66
Figura 4.30 - Problema 3: Tensão σ_{zz} ao longo da viga.	67
Figura 4.31 - Problema 3: Superfície para as tensões σ_{zz} ao longo da seção engastada da viga (NAESY).	68
Figura 4.32 - Problema 3: Superfície para as tensões σ_{zz} ao longo da seção engastada da viga (ANSYS 13).....	68
Figura 4.33 - Problema 3: Tensão τ_{yz} ao longo da altura y da seção engastada.....	69
Figura 4.34 - Problema 3: Tensão τ_{yz} ao longo da viga.....	70
Figura 4.35 - Problema 3: Superfície para as tensões τ_{yz} ao longo da seção engastada da viga (NAESY).	70
Figura 4.36 - Problema 3: Superfície para as tensões τ_{yz} ao longo da seção engastada da viga (ANSYS 13).....	71
Figura 4.37 - Problema 3: Tensão σ_1 ao longo da altura y da seção engastada.....	72
Figura 4.38 - Problema 3: Tensão σ_1 ao longo da viga.	72
Figura 4.39 - Problema 3: Tensão σ_3 ao longo da altura y da seção engastada.....	73
Figura 4.40 - Problema 3: Tensão σ_3 ao longo da viga.	74
Figura 4.41 - Problema 4: Placa espessa sob flexão e engastada nas extremidades.....	75
Figura 4.42(a) - Problema 4: Linhas superiores que contêm os nós onde tensões foram comparadas.	75
Figura 4.42(b) - Problema 4: Linhas inferiores que contêm os nós onde tensões foram comparadas.	75
Figura 4.43 - Problema 4: Malha de elementos de contorno (a) e deformada (b) (NAESY)...	76
Figura 4.44 - Problema 4: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).....	76
Figura 4.45 - Problema 4: Deslocamentos u_y na linha inferior ao longo do eixo x.....	76

Figura 4.46 - Problema 4: Tensão σ_{xx} (linha superior).....	78
Figura 4.47 - Problema 4: Tensão σ_{xx} ao longo da placa (superfície superior).....	78
Figura 4.48 - Problema 4: Tensão σ_{xx} (linha inferior).....	80
Figura 4.49 - Problema 4: Tensão σ_{xx} ao longo da placa (superfície inferior).....	80
Figura 4.50 - Problema 4: Deslocamentos u_y na linha inferior ao longo do eixo z.....	81
Figura 4.51 - Problema 4: Tensão σ_{zz} (linha superior).....	82
Figura 4.52 - Problema 4: Tensão σ_{zz} ao longo da placa (superfície superior).....	82
Figura 4.53 - Problema 4: Tensão σ_{zz} (linha inferior).....	84
Figura 4.54 - Problema 4: Tensão σ_{zz} ao longo da placa (superfície inferior).....	84
Figura 4.55 - Problema 5: Interação solo-fundação e suas dimensões.....	86
Figura 4.56 - Problema 5: Malha de elementos de contorno nas regiões superior (a) e inferior (b) da fundação.....	86
Figura 4.57 - Problema 5: Malha de elementos de contorno para o solo (a) e ‘enclosing elements’ (b).....	86
Figura 4.58 - Problema 5: Malha de elementos 3D (tetraédricos e piramidais) para fins de visualização de resultados.....	87
Figura 4.59 - Problema 5: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).....	87
Figura 4.60 - Problema 5: Aspecto da deformada do modelo 2D de contorno (a) e 3D (b).....	88
Figura 4.61 - Problema 5: Deslocamentos u_y ao longo da fundação e do solo (NAESY).....	88
Figura 4.62 - Problema 5: Deslocamentos u_y ao longo da fundação e do solo (ANSYS 13).....	89
Figura 4.63 - Problema 5: Tensão σ_{yy} ao longo da fundação e do solo (NAESY) - (à direita o bulbo de tensões).....	89
Figura 4.64 - Problema 5: Bulbo de tensões para um plano logo abaixo da fundação de coordenada z igual a 7 se estendendo de uma profundidade de 0.3m a 5m (NAESY).....	90
Figura 4.65 - Problema 5: Tensão σ_{yy} ao longo da fundação e do solo (ANSYS 13) - (à direita o bulbo de tensões).....	90
Figura 4.66 - Problema 6: Interação solo-tubulão e suas dimensões (a) e caracterização do tubulão (b).....	92
Figura 4.67 - Problema 6: Malha de elementos contorno para o tubulão (a) e para o solo (b).....	92
Figura 4.68 - Problema 6: ‘Enclosing elements’.....	93
Figura 4.69 - Problema 6: Malha de elementos 3D (tetraédricos e piramidais) para fins de visualização de resultados.....	93
Figura 4.70 - Problema 6: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).....	93
Figura 4.71 - Problema 6: Deslocamentos u_y ao longo do tubulão e do solo (NAESY).....	94
Figura 4.72 - Problema 6: Deslocamentos u_y ao longo do tubulão e do solo (ANSYS 13).....	94
Figura 4.73 - Problema 6: Tensão σ_{yy} ao longo do tubulão e do solo (NAESY).....	95
Figura 4.74 - Problema 6: Tensão σ_{yy} ao longo do tubulão e do solo (ANSYS 13).....	95
Figura 4.75 - Problema 6: Tensão τ_{xy} ao longo do tubulão e do solo (NAESY).....	96

Figura 4.76 - Problema 6: Tensão τ_{xy} ao longo do tubo e do solo (ANSYS 13).....	96
Figura 4.77 - Problema 6: Tensão τ_{yz} ao longo do tubo e do solo (NAESY).....	97
Figura 4.78 - Problema 6: Tensão τ_{yz} ao longo do tubo e do solo (ANSYS 13).....	97
Figura 4.79 - Problema 7: Compósito reforçado com nanotubos de carbono.	99
Figura 4.80 - Problema 7: Malha de elementos de contorno (NAESY).....	99
Figura 4.81 - Problema 7: Primeira tensão principal (σ_1) ao longo do compósito (NAESY).	100

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 4

Tabela 4.1 - Problema 1: Valores de σ_{zz} ao longo da altura y da seção engastada.....	50
Tabela 4.2 - Problema 1: Valores de τ_{yz} ao longo da altura y da seção engastada.....	53
Tabela 4.3 - Problema 1: Valores de σ_1 ao longo da altura y da seção engastada.....	55
Tabela 4.4 - Problema 1: Valores de σ_3 ao longo da altura y da seção engastada.....	57
Tabela 4.5 - Problema 2: Valores de σ_{zz} ao longo da altura y da seção central da viga.....	61
Tabela 4.6 - Problema 2: Valores das tensões de von Mises ao longo da altura y da seção central da viga.....	63
Tabela 4.7 - Problema 3: Valores de σ_{zz} ao longo da altura y da seção engastada.....	66
Tabela 4.8 - Problema 3: Valores de τ_{yz} ao longo da altura y da seção engastada.....	69
Tabela 4.9 - Problema 3: Valores de σ_1 ao longo da altura y da seção engastada.....	71
Tabela 4.10 - Problema 3: Valores de σ_3 ao longo da altura y da seção engastada.....	73
Tabela 4.11 - Problema 4: Valores de σ_{xx} ao longo da linha superior indicada na Fig. 4.42 (a).	77
Tabela 4.12 - Problema 4: Valores de σ_{xx} ao longo da linha inferior indicada na Fig. 4.42 (b).	79
Tabela 4.13 - Problema 4: Valores de σ_{zz} ao longo da linha superior indicada na Fig. 4.42 (a).	81
Tabela 4.14 - Problema 4: Valores de σ_{zz} ao longo da linha inferior indicada na Fig. 4.42 (b).	83

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

A engenharia sempre se preocupou em transformar diversos materiais presentes na natureza em bens duráveis, seguros e que, de alguma forma, facilitariam a realização de diversos tipos de tarefas no cotidiano dos seres humanos. Desde os primórdios do homem, o engenhar vem evoluindo. Temos hoje um grande conjunto de conhecimentos nesta vasta área, denominada engenharia. Isso se tornou possível devido a melhor compreensão da natureza por parte do homem, que passou a compreender melhor a matéria e, através de observações e experimentos, elaborou leis e teorias que justificassem seu comportamento. Em meados do século XX, a engenharia experimentou um período de altas taxas de desenvolvimento, impulsionada pelo elevado desenvolvimento científico em conjunto com o surgimento do computador digital que tem possibilitado ao homem realizar um elevado número de operações matemáticas em um intervalo de tempo muito pequeno. De fato, o computador digital desempenhou e desempenha um papel fundamental para a engenharia bem como para as diversas atividades realizadas em nosso planeta.

Vivemos hoje em um mundo extremamente competitivo, globalizado e com alta tecnologia. A engenharia, de uma forma geral, precisou se adaptar ao longo dos anos a esse contexto e preocupa-se atualmente em produzir bens não somente duráveis e seguros, mas também econômicos, tecnológicos e procurando atender ao conceito de desenvolvimento sustentável no qual a natureza não é vista somente como fonte de recursos mas também como o espaço em que vivemos.

Buscando atender a estes novos requisitos, ou seja, economia, tecnologia e desenvolvimento sustentável, a engenharia busca otimizar o uso de materiais, beneficiá-los com menor consumo energético através do desenvolvimento de novas tecnologias e procura atender a medidas sustentáveis como reciclagem de materiais e fontes de energia renováveis e limpas. Em se tratando de sistemas estruturais, percebe-se que a busca por estruturas mais leves e ao mesmo tempo mais resistentes está cada vez mais intensa nos dias atuais. Nesse contexto, a engenharia moderna tem dedicado especial esforço tanto em modelos que caracterizem de forma precisa o comportamento estrutural quanto em pesquisa e desenvolvimento de novos materiais, com aplicações tecnológicas que apresentem propriedades especiais tais como baixa densidade, elevada rigidez e resistência, resiliência, entre outras.

Em se tratando da análise estrutural e de sólidos, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) (Zienkiewicz e Taylor, 2005; Bathe, 1982; Fish e Belytschko, 2007; Crisfield, 1986; Weaver e Johnston, 1984; Logan, 1993) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia, Telles e Wrobel, 1984; Brebbia e Dominguez, 1987; Kane, 1992; Beer e Watson, 1992; Chen e Zhou, 1992; Hall, 1994; Banerjee, 1994; Bonnet, 1999). O MEF é um método de domínio muito explorado pela comunidade científica mundial e bem difundido comercialmente de modo que diversos pacotes comerciais se encontram presentes no mercado tais como ANSYS, SAP2000, ABAQUS, MS-NASTRAN, LS-DYNA, etc. O MEC é um método baseado em discretização de contorno e, por ser um método mais novo, (década de 70; Alexander H. D. Cheng e Daisy T. Cheng, 2005), quando comparado ao MEF (década de 50) e apresentar aspectos matemáticos mais complexos, conta com uma menor popularidade e é menos difundido comercialmente. Apesar de não ser tão explorado como o MEF, o número de artigos relacionado ao MEC vem crescendo, realçando sempre suas diversas vantagens em relação ao MEF para determinados tipos de aplicação, principalmente em análises tridimensionais. Também já existem alguns softwares comerciais baseados no MEC, como o BEASY (<http://www.beasy.com>).

O aumento da capacidade de processamento de dados dos computadores permitiu aos engenheiros considerar análises avançadas do comportamento estrutural de sistemas estruturais genéricos. Dentre as opções de análise, podemos citar a análise não-linear geométrica, onde esforços são determinados considerando-se a configuração deformada da estrutura, análises dinâmicas que possibilitam a consideração de carregamentos dinâmicos e conseqüentemente respostas dinâmicas, não-linearidade do material como em membros estruturais em aço, onde é possível aproveitar o acréscimo de resistência da seção transversal do membro a partir da plastificação de parte da seção, e critérios de delaminação e fissuração. Todas as opções de análise já citadas permitem o desenvolvimento de projetos com maior confiabilidade, melhor aproveitamento de materiais, uma grande economia de recursos financeiros e contribuição para a sustentabilidade do planeta.

Por outro lado, estruturas leves e resistentes exigem o emprego de materiais especiais tais como materiais compósitos em geral. A utilização desse tipo de material vem crescendo nas últimas décadas, especialmente na indústria automobilística, naval, náutica, aeronáutica e aeroespacial. Dentre os vários materiais compósitos existentes, podemos citar as fibras de vidro, carbono e aramida, compósitos laminados formados por camadas finas de propriedades

diferentes, compósitos reforçados com nanotubos de carbono, entre outros. A inserção de nanotubos de carbono melhora propriedades das matrizes poliméricas de modo que a inserção de 1% em peso aumenta de 36 a 42% a rigidez e em 25% a resistência do compósito (Qian et al., 2000).

A análise de materiais compósitos considerando-se sua microestrutura trata-se de um tema recente e de grande interesse por parte de diversos segmentos industriais (G. Cailletaud et al., 2003). Como consequência, muitas pesquisas têm sido realizadas de modo a desenvolver métodos precisos, eficientes e confiáveis para a análise microestrutural. A análise microestrutural de materiais oferece enormes desafios à engenharia dos quais podem ser citados a determinação de propriedades do material, tensões e deformações, critérios de falha avançados tais como fissuração e delaminação, etc., a partir da modelagem de suas partículas constituintes.

A análise tridimensional tem se mostrado mais adequada para descrever precisamente o comportamento de volumes representativos de compósitos (Araújo e Gray, 2008). Surgem, porém, dificuldades na geração de malha de problemas com geometrias irregulares, além do grande número de graus de liberdade que gera um enorme sistema de equações e intenso esforço computacional. Diante desse problema, o MEC 3D constitui-se de uma promissora alternativa, visto que lida apenas com os contornos das diferentes fases do compósito, o que acarreta uma modelagem mais fácil, além de um número bem menor de graus de liberdade comparado à correspondente análise via MEF e conseqüentemente um sistema de equações e esforço computacional menores.

Para obter propriedades efetivas como módulos de elasticidade longitudinal E e transversal G de materiais metálicos como cobre, níquel e ouro e materiais cerâmicos por exemplo, um trabalho recente (I. Benedetti e M.H. Aliabadi, 2013), apresenta uma formulação integral tridimensional para a análise microestrutural de materiais policristalinos a partir da microestrutura anisotrópica dos grãos constituintes. Problemas com volumes representativos compostos de vários grãos com diferentes orientações (anisotrópicos) foram simulados computacionalmente e os resultados obtidos apresentaram excelente concordância com os presentes na literatura científica.

Volumes representativos de materiais compósitos não homogêneos constituídos por fases distintas e também o processamento computacional de sistemas com um elevado número de

graus de liberdade, constituem problemas com elevado nível de dificuldade para serem resolvidos. Uma alternativa para esse problema reside em um processo denominado Método de Decomposição de Domínio (MDD), subestruturação, onde o domínio do problema é decomposto em um determinado número de subregiões, estabelecendo-se condições de interface que regem o acoplamento entre elas. A decomposição de domínio aliada a *solvers* iterativos como os *solvers* de Krylov, possibilita desenvolver ferramentas extremamente eficientes para a resolução de problemas modelados via estratégias de subestruturação. Uma vantagem dessa estratégia é tratar o problema de forma localizada em cada subregião eliminando a necessidade de montar e realizar transformações na matriz global do sistema. Outra vantagem é a exclusão dos muitos blocos de coeficientes nulos das matrizes de coeficientes. Esses fatos tornam a resolução do problema muito mais eficiente com enorme redução de memória alocada e tempo de processamento. Além disso, a subestruturação constitui uma ferramenta que possibilita de forma espontânea o processamento paralelo do problema, ou seja, o processamento é particionado e cada parte é destinada a um processador.

Ao subestruturar o problema, estratégias de acoplamento entre as demais subestruturas do problema precisam ser desenvolvidas. No caso do MEC, embora a discretização em elementos de contorno seja mais fácil em relação à de elementos finitos, aspectos relativos ao tratamento de descontinuidades de forças de contorno oferecem grandes dificuldades, especialmente em arestas e cantos pertencentes às interfaces entre as subregiões. Diante das dificuldades, formulações do MEC baseadas em elementos descontínuos são mais adequadas, pois a modelagem do problema torna-se mais fácil e as descontinuidades de fluxo podem ser solucionadas de uma forma mais simples. Em contrapartida, é necessário enfrentar o problema das integrais quase-singulares, visto que os nós funcionais, originados de um pequeno deslocamento dos nós geométricos, encontram-se bem próximos das arestas do elemento. Embora existam dificuldades no que diz respeito às integrais quase-singulares, os elementos descontínuos são fundamentais para resolver problemas subestruturados.

Inspirada na técnica de elemento por elemento (Hughes T. J. R., Levit I., Winget L., 1983) largamente empregada em formulações do MEF para resolução de problemas de grande porte, a técnica de subregião por subregião (SBS) (Araújo, F. C., Silva K. I., Telles J. C. F., 2006) trata-se de uma robusta técnica de subestruturação para o MEC. No algoritmo SBS, *solvers* iterativos de Krylov foram empregados no processo de resolução do sistema de equações, que

não são montados em matriz global explícita, mas armazenados de forma isolada uns dos outros.

No presente trabalho, novas opções de análise, como o cálculo de tensões em pontos no contorno, foram incluídas no código computacional SBS (subregião por subregião). Trabalhos relativos à geração de modelos e malhas e visualização de resultados também foram feitos. Diversas aplicações foram realizadas tais como vigas maciças, de parede fina, vigas parede, placas, interação solo-estrutura, volumes representativos de materiais compósitos reforçados com nanotubos de carbono, etc. Além disso, verificações relativas ao desempenho do algoritmo SBS e a convergência dos *solvers* iterativos de Krylov também foram realizadas.

Este trabalho é composto de cinco capítulos onde, no primeiro, é feita uma introdução ao trabalho, o segundo capítulo apresenta aspectos gerais sobre o métodos dos elementos de contorno (MEC), no terceiro capítulo é feita uma descrição detalhada do algoritmo SBS, no quarto capítulo são apresentadas as aplicações realizadas e no quinto capítulo têm-se as conclusões. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas.

1.1 MOTIVACÕES

Essa seção apresenta importantes aplicações deste trabalho que estão diretamente relacionadas a problemas de acoplamento em geral. De uma forma mais específica, serão abordados materiais policristalinos e compósitos gerais, assim como alguns problemas de acoplamento tais como solo-estrutura, solo-duto, etc.

A utilização de materiais compósitos vem crescendo de forma constante nos últimos anos segundo a Abmaco (Associação Brasileira de Materiais Compósitos). As principais indústrias que demandam produtos em materiais compósitos são a da construção civil, automotiva, aeronáutica, aeroespacial, naval, náutica e a de esporte e lazer. As análises da interação solo-estrutura e do solo-duto também vêm recebendo grandes contribuições de modo que alguns pacotes comerciais como o TQS (www.tqs.com.br), cotidianamente empregados em escritórios de cálculo de engenharia, já permitem a sua consideração no cálculo e dimensionamento. A seguir apresentam-se áreas de interesse.

1.1.1 Análise microestrutural de materiais policristalinos e concreto

Em (I. Benedetti, M. H. Aliabadi, 2013), apresenta-se uma formulação integral tridimensional para a análise microestrutural de materiais policristalinos tais como metais e cerâmicas. O objetivo é obter propriedades efetivas do material como módulos de elasticidade longitudinal E e transversal G a partir da microestrutura anisotrópica dos grãos constituintes (Fig. 1.1, I. Benedetti, M. H. Aliabadi, 2013). O material do qual são constituídos os grãos é tomado como sendo linear-elástico e anisotrópico. O modelo numérico para cada cristal é obtido usando o Método dos elementos de contorno (MEC) para elasticidade anisotrópica tridimensional, o que exige a determinação de funções de Green para meios anisotrópicos.

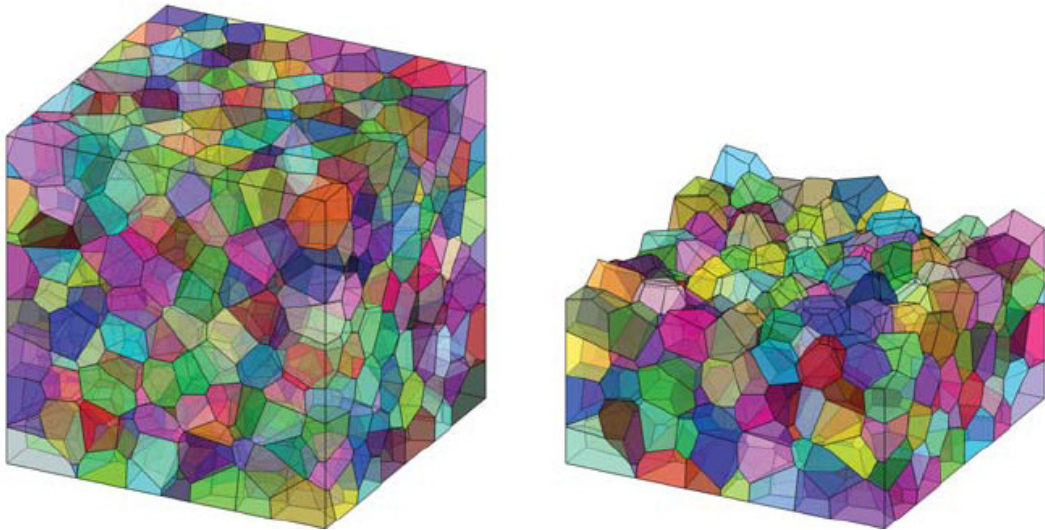


Figura 1.1 - Modelo microestrutural com 1000 grãos.

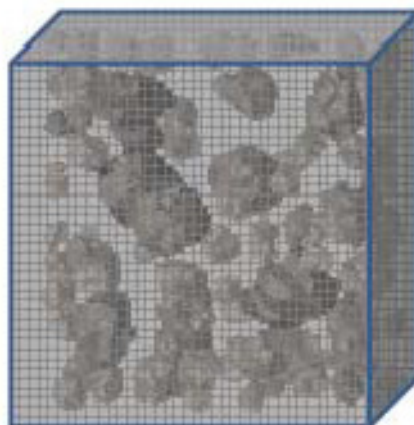


Figura 1.2 - Microestrutura do concreto.

A análise microestrutural do concreto é um tema recente e presente em diversos trabalhos publicados em periódicos (Wriggers e Moftah, 2006; Z.M. Wang, A.K.H. Kwan, H.C. Chan,

1999). A justificativa da consideração da microestrutura do concreto (Fig. 1.2, www.cfg.cornell.edu) está relacionada à determinação de propriedades efetivas do material, avaliação de sua degradação, mecanismos de fratura, além de aspectos relativos ao próprio desenvolvimento e à evolução do material no que diz respeito a adições minerais de, por exemplo, escórias e materiais silicosos ao cimento, melhorando em muito as propriedades do concreto. O objetivo é conseguir um alto desempenho, relacionado principalmente à resistência mecânica e à durabilidade, ao baixo custo através da redução do consumo de cimento e à sustentabilidade devido ao aproveitamento de resíduos industriais, até então sem potenciais de aplicações, reduzindo a poluição ambiental e a emissão de gases na atmosfera.

1.1.2 Interação solo-estrutura e solo-duto

As interações solo-estrutura e solo-duto são problemas de acoplamento com elevado grau de complexidade. Em se tratando da interação solo-estrutura, existem diversos modelos simplificados destinados à sua simulação computacional tais como modelos de molas. Muitos, porém são limitados diante das enormes dificuldades originadas, por exemplo, da heterogeneidade, anisotropia e comportamento altamente não-linear de determinados tipos de solos. A consideração da interação solo-estrutura é de fundamental importância porque permite o cômputo de esforços adicionais atuantes sobre a estrutura devido aos recalques, levando em conta, inclusive, sua rigidez que também influencia a resposta final do problema. Além disso, a verificação da compatibilidade de deslocamentos é realizada ao longo do processo de solução, o que não se verifica em análises convencionais em que o projetista estrutural realiza o cálculo e dimensionamento sob a hipótese de apoios indeslocáveis, e o engenheiro de fundações estima os recalques com base nas reações presentes no projeto estrutural e compara-os com recalques admissíveis.

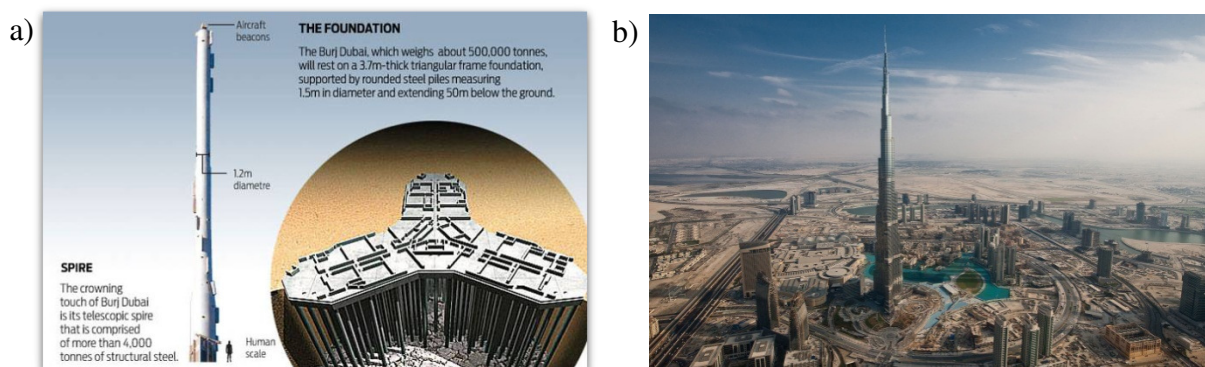


Figura 1.3 - Fundação do Burj Khalifa (a) e arranha-céu Burj Khalifa (b).

Como exemplos de problemas de interação solo-estrutura de grande escala, têm-se projetos de fundações bloco-estaca de edifícios muito altos como o Burj Khalifa (Fig. 1.3 (b), <http://adrenaline.uol.com.br>) que possui 163 andares, 828m de altura e é uma das estruturas mais altas já construída pelo homem. Para sustentar uma estrutura desse porte, uma fundação de 500.000 toneladas precisou ser construída, compõe-se de 194 estacas de concreto de 1.5m de diâmetro e 50m de altura, todas conectadas a uma placa de concreto maciça de 3.75m de espessura como mostrado na Fig. 1.3 (a).

Um outro problema que também está relacionado ao solo é a interação solo-duto muito comum, por exemplo, em saneamento e tubulações subterrâneas de petróleo como as utilizadas pela Petrobrás. A interação solo-duto também se trata de um problema de acoplamento onde o solo exerce um papel de suporte aos tubos e, assim, quando recalcam, causam alterações nos esforços atuantes e podem causar sérios danos às tubulações. Os recalques ocorrem principalmente devido à liquefação dos solos, mas podem também estar relacionados a movimentos de deslizamento e falha.

A simulação da interação solo-estrutura bem como solo-duto oferece enormes desafios à engenharia de modo que muitos trabalhos têm sido realizados a respeito destes tipos de problema para conseguir uma resposta mais precisa, realística e confiável.

1.1.3 Fibra de vidro, aramida e carbono

Tecidos em fibra de vidro, aramida e carbono são muito úteis na construção civil por apresentarem características como alta resistência à tração, baixo percentual de alongamento

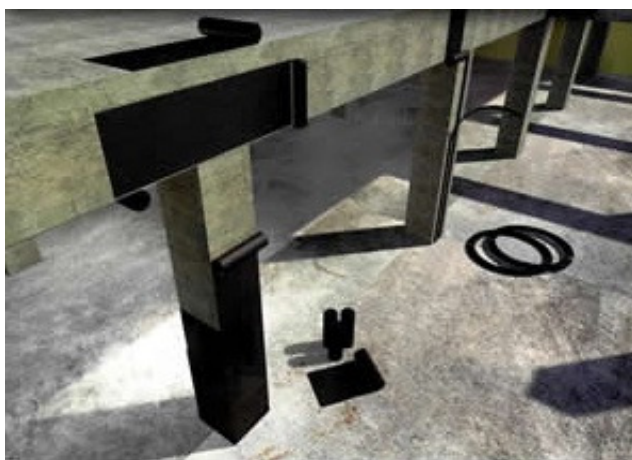


Figura 1.4 - Reforço de estruturas em concreto armado com fibra de carbono.

além da proteção contra ataque de álcalis e até mesmo de mofo. Sua aplicação é geralmente destinada a reforços e reparos em estruturas diversas. Como exemplo, tem-se o reforço de estruturas em concreto armado com fibra de carbono (Fig. 1.4, Revista Composites & Plásticos de Engenharia, nº 77). Ressalta-se que já existem manuais para o cálculo de estruturas de concreto armado com reforços em compósitos de fibras de carbono, porém são de natureza prática de modo que muitas pesquisas têm sido realizadas sobre o tema (Revista Composites & Plásticos de Engenharia, nº 77).

1.1.4 Aplicações em madeira

A madeira é um material compósito natural, constituído por fibras coladas umas às outras através de resinas. É bastante utilizada na construção civil, seja para confecção de fôrmas, isolamento de áreas, móveis e decoração, etc. A utilização da madeira em seu estado natural vem diminuindo cada vez mais em função das restrições de órgão ligados ao meio ambiente que proíbem a extração de madeira sem autorização prévia. A escassez de madeira natural tem incentivado o uso de componentes derivados da madeira, tais como aglomerados, compensados e MDF.

Uma aplicação da madeira é em estruturas compostas por madeiras laminadas coladas (MLC) (Fig. 1.5 (a), <http://portaldamadeira.blogspot.com.br>) onde tábuas de madeira, geralmente de pinus, são coladas, utilizando-se colas de alta resistência. As vantagens são muitas como, por exemplo, grande resistência mecânica e rigidez, baixo peso (densidade baixa), baixa condutibilidade e ausência de dilatação térmica, além de uma bela arquitetura proporcionada pela madeira. A Fig.1.5 (b) mostra um exemplo de estrutura feita em madeira laminada colada.

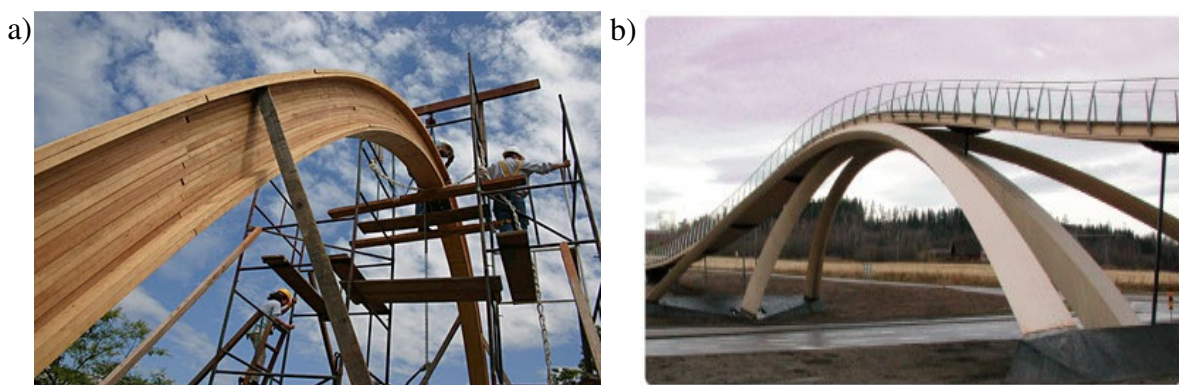


Figura 1.5 - Elemento estrutural em MLC (a) e passarela de pedestre em MLC (b)

CAPÍTULO 2 – O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método numérico para análise de diversos problemas em engenharia e é baseado em formulações integrais de contorno. Partindo-se de soluções que satisfaçam identicamente as EDPs no domínio do problema e parcialmente as suas condições de contorno essenciais e naturais, é possível, via relações de reciprocidade, estabelecer a representação integral de contorno para um determinado problema. Isso significa que o MEC está relacionado apenas a variáveis de contorno e permite o cômputo de respostas em pontos interiores no domínio através da resposta no contorno apenas. Sendo assim, o MEC apresenta diversas vantagens quando comparado a métodos de domínio como o Método dos Elementos Finitos. Dentre as vantagens podemos citar:

- Redução do problema em uma dimensão visto que o MEC é formulado sobre o contorno do problema;
- mais facilidade na geração de malhas, já que discretiza-se apenas o contorno;
- conveniência para análise de meio contínuo (principalmente 3D);
- os sistemas de equações gerados são menores, com redução de memória alocada e esforço computacional;
- eficiência em problemas envolvendo concentração de tensões e
- condições de irradiação automaticamente satisfeitas tornando o método conveniente para modelar domínios abertos como interação solo-estrutura, escoamento em superfície livre, problemas em geologia, acústica, etc.

O MEC apresenta algumas desvantagens como:

- Matriz cheia e não simétrica;
- cálculo de integrais singulares e
- comercialmente menos utilizado.

2.1 EQUAÇÕES DA ELASTOSTÁTICA

Dentre as variáveis presentes em um problema de elasticidade estão deslocamentos, deformações e tensões. No total, elas são quinze, sendo três componentes de deslocamentos, seis de deformações e seis de tensões.

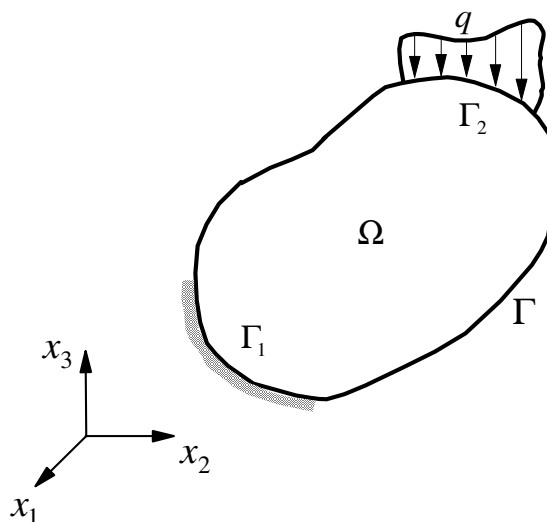


Figura 2.1 - Corpo e suas condições de contorno.

Considerando-se o corpo de domínio Ω da Fig. 2.1 submetido a um carregamento q em Γ_2 e a restrições de deslocamentos em Γ_1 , temos três equações de equilíbrio válidas em todo o domínio do problema que são dadas por:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0, \quad (2.1)$$

com $b_j(\mathbf{x})$ representando a componente da força de corpo por unidade de volume segundo x_j .

Para determinar as quinze incógnitas do problema elastostático são necessárias mais doze equações que vêm das seis relações deformação-deslocamento

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (2.2)$$

em que ε_{kl} é o tensor de deformações sob a hipótese de linearidade geométrica, e das seis relações tensão-deformação dadas pela lei de Hooke generalizada

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.3)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensão de Cauchy e c_{ijkl} é um tensor que contém oitenta e um termos que são reduzidos a dois, considerando-se um material isotrópico linear-elástico. Assim, a lei de Hooke pode ser expressa da forma:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.4)$$

em que:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ e é o módulo de elasticidade transversal;}$$

E é o módulo de elasticidade longitudinal;

ν é o coeficiente de Poisson.

As três equações de equilíbrio juntamente com as seis relações deformação-deslocamento e as seis relações tensão-deformação constituem um sistema de equações com as quinze incógnitas do problema da elasticidade.

Considerando-se uma formulação baseada em deslocamentos, as quinze equações podem ser reduzidas ao conjunto de equações diferenciais da Eq. (2.5), substituindo-se as relações deformação-deslocamento nas relações tensão-deformação e em seguida, levando-as à equação de equilíbrio Eq. (2.1) que fornece:

$$G u_{i,jj} + \left(\frac{G}{1-2\nu} \right) u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (2.5)$$

ou em forma vetorial:

$$G \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \left(\frac{G}{1-2\nu} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

As Eqs. (2.5) ou (2.6) são conhecidas como equações de Navier onde o problema da elasticidade é descrito em função apenas das três componentes de deslocamento. Encontrando-se as três funções de deslocamento para um dado problema com condições de contorno prescritas de deslocamentos e forças é possível obter as deformações por meio das relações deformação-deslocamento e as tensões através das relações tensão-deformação.

2.2 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DAS SOLUÇÕES ELASTOSTÁTICAS

A representação integral das soluções elastostáticas pode ser obtida a partir de teoremas de reciprocidade, tais como o teorema de Betti–Rayleigh para problemas elastostáticos, ou partindo-se da expressão geral de resíduos ponderados.

Considerando-se um estado tensional aproximado $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ para as equações de equilíbrio (2.1), os erros presentes no domínio e no contorno são dados pelas expressões:

$$r'_j(\mathbf{x}) = \sigma_{ij,i} + b_j \neq 0, \text{ se } \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.7)$$

$$r''_j(\mathbf{x}) = u_j(\mathbf{x}) - \bar{u}_j(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ se } \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (2.8)$$

$$r'''_j(\mathbf{x}) = p_j(\mathbf{x}) - \bar{p}_j(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ se } \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (2.9)$$

Para distribuir estes erros no domínio Ω e no contorno Γ (Γ_1 e Γ_2) são utilizadas respectivamente as funções de ponderação $u'_j(\mathbf{x})$, $f_j(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x})$ que permitem escrever a expressão de resíduos ponderados como:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,i} + b_j) u'_j(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_1} [u_j(\mathbf{x}) - \bar{u}_j(\mathbf{x})] f_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [p_j(\mathbf{x}) - \bar{p}_j(\mathbf{x})] g_j(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (2.10)$$

Sabendo-se que $(\sigma_{ij} u'_j)_{,i} = \sigma_{ij,i} u'_j + \sigma_{ij} u'_{j,i}$, obtém-se com auxílio do teorema da divergência $\left(\int_{\Omega} f_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} f_i n_i d\Gamma \right)$ que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,i} u'_j d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u'_j)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u'_{j,i} d\Omega = \int_{\Gamma} u'_j \sigma_{ij} n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u'_{j,i} d\Omega \quad (2.11)$$

Admitindo-se que a função de ponderação $u'_j(\mathbf{x})$ é um campo de deslocamentos do meio elástico-linear ao qual o tensor de deformações $\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(u'_{i,j} + u'_{j,i})$ está associado e considerando-se ainda a simetria do tensor de tensões, obtém-se:

$$\sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} u'_{i,j} + \sigma_{ij} u'_{j,i}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ji} u'_{j,i} + \sigma_{ij} u'_{j,i}) = \sigma_{ij} u'_{j,i} \quad (2.12)$$

Levando-se o resultado da Eq. (2.12) na Eq. (2.11), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,i} u'_j d\Omega = \int_{\Gamma} u'_j p_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon'_{ij} d\Omega \quad (2.13)$$

Para um tensor isotrópico de 4ª ordem $c_{ijmn} = c_{mnij}$ e assim é possível escrever:

$$\sigma_{ij} \epsilon'_{ij} = c_{ijmn} \epsilon_{mn} \epsilon'_{ij} = \epsilon_{mn} c_{ijmn} \epsilon'_{ij} = \epsilon_{mn} c_{mnij} \epsilon'_{ij} = \epsilon_{mn} \sigma'_{mn} = \sigma'_{ij} \epsilon_{ij} \quad (2.14)$$

Substituindo a Eq. (2.14) na Eq. (2.13) conclui-se que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,i} u'_j d\Omega = \int_{\Gamma} u'_j p_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma'_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega \quad (2.15)$$

Baseando-se ainda na Eq. (2.12) pode-se, por analogia, escrever:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma'_{ij,i} u_j d\Omega &= \int_{\Gamma} u_j p'_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma'_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega \\ \int_{\Omega} \sigma'_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega &= \int_{\Gamma} u_j p'_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma'_{ij,i} u_j d\Omega \end{aligned} \quad (2.16)$$

Levando a Eq. (2.16) na Eq. (2.15) resulta em:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,i} u'_j d\Omega = \int_{\Gamma} u'_j p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j p'_j d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma'_{ij,i} u_j d\Omega \quad (2.17)$$

que levada à Eq. (2.10) fornece:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u'_j p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j p'_j d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma'_{ij,i} u_j d\Omega + \int_{\Omega} u'_j b_j d\Omega + \\ \int_{\Gamma} [u_j(\mathbf{x}) - \bar{u}_j(\mathbf{x})] f_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [p_j(\mathbf{x}) - \bar{p}_j(\mathbf{x})] g_j(x) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Tomando como funções de ponderação $f_j(\mathbf{x}) = p'_j(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x}) = -u'_j(\mathbf{x})$, a Eq. (2.18) adquire a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} u'_j p_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u'_j p_j d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p'_j u_j d\Gamma - \int_{\Gamma_2} p'_j u_j d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma'_{ij,i} u_j d\Omega \\ + \int_{\Omega} u'_j b_j d\Omega + \int_{\Gamma_1} [u_j(\mathbf{x}) - \bar{u}_j(\mathbf{x})] p'_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [p_j(\mathbf{x}) - \bar{p}_j(\mathbf{x})] [-u'_j] d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_1} u'_j p_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u'_j \bar{p}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p'_j \bar{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_2} p'_j u_j d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma'_{ij,i} u_j d\Omega + \int_{\Omega} u'_j b_j d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Considerando-se ainda as funções de ponderação como sendo as soluções fundamentais em uma região Ω^* com contorno Γ^* , eventualmente infinita, ou seja, considerando-se que

$u'_j(\mathbf{x}) = u_{jk}^*(\mathbf{x} - \xi)$, $p'_j(\mathbf{x}) = p_{jk}^*(\mathbf{x} - \xi)$ e $\sigma'_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma_{ijk}^*(\mathbf{x} - \xi) = -\delta(\mathbf{x} - \xi)\delta_{jk}$, onde o índice k se refere à direção na qual o pulso unitário atua, segue da Eq. (2.19) que:

$$\int_{\Gamma_1} u_{jk}^* p_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_{jk}^* \bar{p}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_{jk}^* \bar{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_2} p_{jk}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ijk,i}^* u_j d\Omega + \int_{\Omega} u_{jk}^* b_j d\Omega = 0$$

$$\therefore u_j(\xi)\delta_{jk} = \int_{\Gamma_1} u_{jk}^* p_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_{jk}^* \bar{p}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_{jk}^* \bar{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_2} p_{jk}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{jk}^* b_j d\Omega \quad (2.20)$$

A Eq. (2.20) é a representação integral da solução de problemas elastostáticos em um ponto ξ qualquer e é conhecida como *identidade de Somigliana*. A partir da Eq. (2.20) é possível derivar o Método dos Elementos de Contorno.

2.3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Dado um domínio Ω^* elástico infinito com contorno Γ^* cujas forças de corpo são dadas por:

$$\mathbf{b}^*(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}, \xi)\mathbf{e}_j \quad (2.21)$$

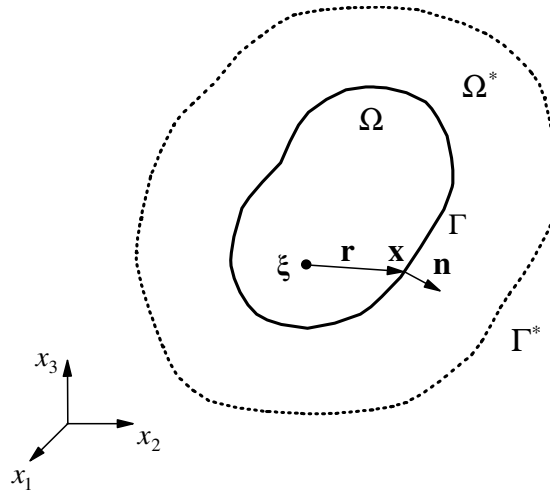


Figura 2.2 - Domínio elástico infinito.

conforme Fig. 2.2, e sendo \mathbf{e}_j um vetor unitário na direção do eixo coordenado \mathbf{x}_j , com $j = 1, 2, 3$ (caso 3D), a solução fundamental é devida a Kelvin (Love, 1944), e resulta da resolução da seguinte equação diferencial:

$$G \nabla^2 \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \xi) + \left(\frac{G}{1-2\nu} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \xi) + \delta(\mathbf{x}, \xi)\mathbf{e}_j = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

ou em notação indicial:

$$G \mathbf{u}_{ij,kk}^* + \left(\frac{G}{1-2\nu} \right) \mathbf{u}_{kj,ki}^* + \delta(\mathbf{x}, \xi) \delta_{ij} = 0 \quad (2.23)$$

com j indicando a direção de atuação da carga.

A resolução da Eq. (2.23) fornece a seguinte solução fundamental para problemas tridimensionais:

$$\mathbf{u}_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G\nu} \{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \} \quad (2.24)$$

Considerando-se a Eq. (2.24) é possível obter as forças de contorno a partir de sua derivada direcional como:

$$p_{ij}^*(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \quad (2.25)$$

2.4 CONSIDERAÇÃO DE ξ SOBRE O CONTORNO

Para que a solução em um ponto de campo x do domínio Ω possa ser determinada, são necessárias as soluções fundamentais bem como as soluções para as variáveis de campo no contorno do problema. A obtenção das variáveis de campo é possibilitada, considerando-se o ponto fonte ξ sobre o contorno conforme a Fig. 2.3.

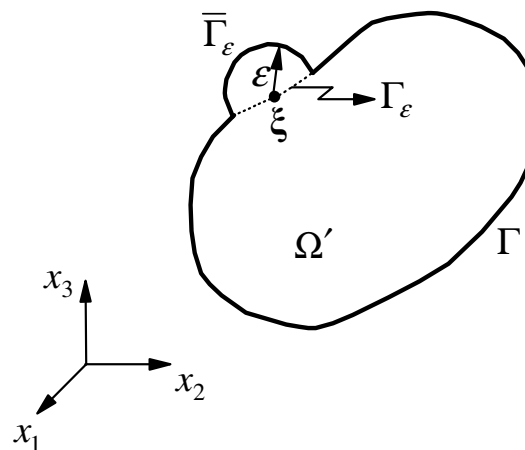


Figura 2.3 - Ponto fonte ξ sobre o contorno.

A consideração do ponto fonte ξ sobre o contorno faz surgir, porém, integrais singulares devido às singularidades das soluções fundamentais e a equação integral passa a ser escrita da forma:

$$\begin{aligned}
u_i(\xi)\delta_{ik} = & \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) p_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})}_{\text{integral fracamente singular}} - \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})}_{\text{integral fortemente singular}} \\
& - \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) b_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x})}_{\text{integral fracamente singular}}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

A integral fortemente singular da Eq. (2.26) é dada por:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma}_{\text{valor principal de Cauchy}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma \\
&= V.P. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma + u(\xi) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) d\bar{\Gamma}_\varepsilon \right]
\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde V.P. significa Valor Principal de Cauchy. Substituindo a Eq. (2.27) na Eq.(2.26) é possível escrever a equação integral de contorno como:

$$c_{ik}(\xi) u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) p_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) b_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \tag{2.28}$$

em que $c_{ik}(\xi)$, denominado “Jump term”, depende apenas da geometria do contorno onde o ponto fonte se encontra e é dado por:

$$c_{ik}(\xi) = \delta_{ik} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) d\bar{\Gamma}_\varepsilon \tag{2.29}$$

2.5 REGIÕES ESTENDENDO-SE AO INFINITO

Para um problema envolvendo domínios infinitos, o procedimento consiste em tomar o contorno de uma parcela finita do domínio e então estendê-la ao infinito (Fig. 2.4) de modo que a equação integral, admitindo $b_i(x) = 0$, pode ser escrita da forma:

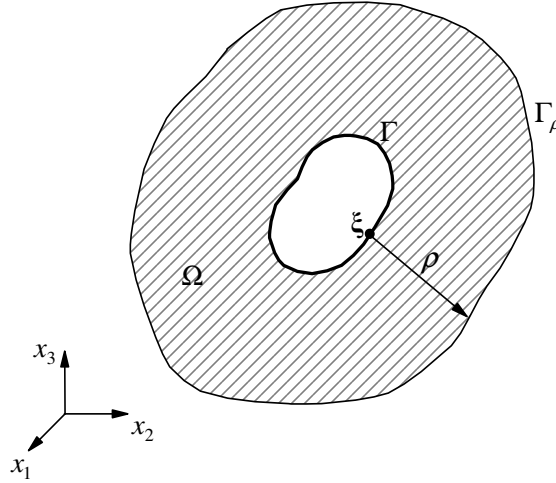


Figura 2.4 - Domínio infinito.

$$\begin{aligned}
 c_{ik}(\xi)u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi)u_i(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi)p_i(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi)p_i(\mathbf{x})d\Gamma \\
 &\quad - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi)u_i(\mathbf{x})d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Para problemas tridimensionais a resposta em termos de deslocamentos e forças é:

$$u_i(\mathbf{x}) = O(\rho^{-1}) \quad , \quad p_i(\mathbf{x}) = O(\rho^{-2}) \quad , \quad d\Gamma_{\rho} = O(\rho^2) d\varphi d\theta \tag{2.31}$$

e assim, as integrais impróprias na Eq. (2.30) anulam-se independentemente uma da outra e as condições de regularidade são satisfeitas, ou seja:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_{\rho}} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi)p_i(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma_{\rho}} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi)u_i(\mathbf{x})d\Gamma \right\} = 0 \tag{2.32}$$

2.6 DISCRETIZAÇÃO

Para que um problema contínuo que não apresente uma solução analítica possa ser resolvido, seus infinitos graus de liberdade precisam ser substituídos por um número finito de graus de liberdade. A esse processo, denominado discretização, o domínio no caso do MEF ou o contorno, em se tratando do MEC, precisa ser dividido em elementos que apresentem um número finito de graus de liberdade (Fig. 2.5). Assim, ao discretizar o problema, os

deslocamentos e as forças no contorno precisam ser interpolados em função de valores nodais e as expressões podem ser, por exemplo, da forma:

$$\begin{cases} u_i^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^Q \int_{\Gamma_i} h_q u_{iq}^{(n)} \\ p_i^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^Q \int_{\Gamma_i} h_q p_{iq}^{(n)} \end{cases} \quad (2.33)$$

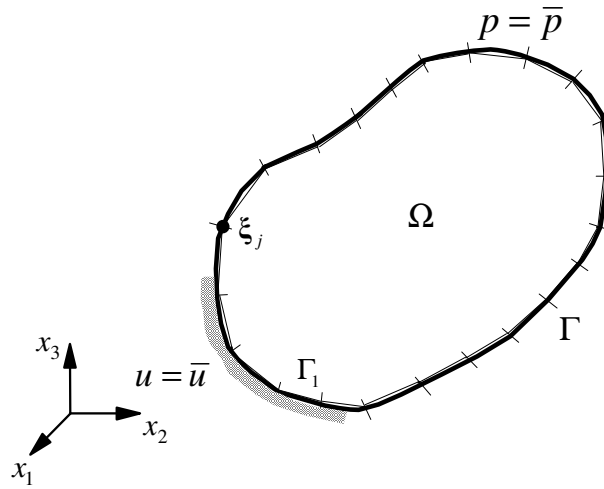


Figura 2.5 - Discretização do contorno.

Desse modo, a equação integral de contorno discretizada pode ser escrita como:

$$c_{ik}(\xi)u_i(\xi) + \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) \sum_{q=1}^Q \int_{\Gamma_i} h_q u_{iq}^{(n)} d\Gamma_n = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) \sum_{q=1}^Q \int_{\Gamma_i} h_q p_{iq}^{(n)} d\Gamma_n \quad (2.34)$$

onde h_q é a função de forma, em coordenadas naturais, correspondente ao nó q , $u_{iq}^{(n)}$ e $p_{iq}^{(n)}$ são, respectivamente, a i -ésima componente de deslocamento e tensão de q , e Q é o número de nós por elemento de contorno.

Tomando o ponto ξ em cada nó presente no contorno do problema, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} c(\xi_1) & & & 0 \\ & c(\xi_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c(\xi_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} & \cdots & \mathbf{h}_{1N} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \cdots & \mathbf{h}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{N1} & \mathbf{h}_{N2} & \cdots & \mathbf{h}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \cdots & \mathbf{g}_{1N} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \cdots & \mathbf{g}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{N1} & \mathbf{g}_{N2} & \cdots & \mathbf{g}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

As submatrizes e subvetores presentes nas Eqs. (2.35) são da ordem da dimensão do problema, ou seja, de ordem 2 para problemas bidimensionais e 3 para tridimensionais. Os coeficientes \mathbf{h}_{ij} e \mathbf{g}_{ij} são obtidos através das integrais:

$$\mathbf{h}_{ij} = \int_{\Gamma_n} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) h_q d\Gamma_n \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_{ij} = \int_{\Gamma_n} u^*(\mathbf{x}, \xi) h_q d\Gamma_n \quad (2.36)$$

A Eq. (2.35) pode ser reescrita da forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{11} & \hat{\mathbf{h}}_{12} & \cdots & \hat{\mathbf{h}}_{1N} \\ \hat{\mathbf{h}}_{21} & \hat{\mathbf{h}}_{22} & \cdots & \hat{\mathbf{h}}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{N1} & \hat{\mathbf{h}}_{N2} & \cdots & \hat{\mathbf{h}}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \cdots & \mathbf{g}_{1N} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \cdots & \mathbf{g}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{N1} & \mathbf{g}_{N2} & \cdots & \mathbf{g}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

onde:

$$\hat{\mathbf{h}}_{ii} = \mathbf{c}_{ii} + \mathbf{h}_{ii} \quad (2.38)$$

Na forma matricial pode-se representar a Eq.(2.37) da forma:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (2.39)$$

onde \mathbf{H} e \mathbf{G} são as matrizes dos coeficientes \mathbf{h}_{ij} e \mathbf{g}_{ij} conforme Eqs. (2.36) respectivamente, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{p} o vetor de forças nodais.

Ao introduzir as condições de contorno prescritas, as Eqs. (2.39) dão origem ao sistema de equações:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.40)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz cheia e não simétrica obtida a partir das matrizes \mathbf{H}^* e \mathbf{G}^* , \mathbf{x} é o vetor de incógnitas, e \mathbf{b} é obtido pelo produto da matriz \mathbf{G}^* pelo vetor de fluxos \mathbf{p}^* .

O símbolo * significa que alterações podem ser feitas nas matrizes ou vetores citados para ter os valores de contorno incógnitos no lado esquerdo e prescritos no lado direito (trocas de colunas entre as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} e de posições entre os vetores \mathbf{u} e \mathbf{p}).

Ao resolver o sistema de equações presente na Eq. (2.40), todos os valores incógnitos no contorno podem ser determinados e, a partir deles, podem ser obtidos valores em qualquer ponto no domínio via integração.

2.7 INTEGRACÃO

A Equação integral de contorno Eq. (2.28) apresenta núcleos fracamente singulares $(u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi))$ e núcleos fortemente singulares $(p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi))$. As integrais destes núcleos podem ser não-singulares, fracamente singulares, fortemente singulares e quase-singulares.

2.7.1 **Integrais não singulares**

As integrais não singulares ocorrem quando o ponto fonte ξ não pertence ao elemento a ser integrado. Desse modo, tanto para os núcleos fracamente singulares quanto para os núcleos fortemente singulares a quadratura de Gauss pode ser aplicada e fornece bons resultados. Ressalta-se que quanto maior for a distância do ponto fonte ao elemento a ser integrado (valor de r) maior a eficácia da quadratura de Gauss.

2.7.2 **Integrais fracamente singulares**

Ocorrem na integração de núcleos fracamente singulares (singularidade r^{-1}) quando o ponto fonte ξ está sobre o elemento a ser integrado. Nesse caso são utilizados algoritmos especiais que fornecem resultados mais precisos e aumentam a eficiência do processo de integração.

2.7.3 **Integrais fortemente singulares**

Ocorrem na integração de núcleos fortemente singulares (singularidade r^{-2}) quando o ponto fonte ξ está sobre o elemento a ser integrado. Estas integrais fornecem os valores dos

$$\hat{\mathbf{h}}_{ii} = \mathbf{c}_{ii} + \mathbf{h}_{ii} = \begin{cases} -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{h}_{ij} & \rightarrow \text{Domínios finitos} \\ \mathbf{I} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{h}_{ij} & \rightarrow \text{Domínios infinitos} \end{cases} \quad (2.41)$$

coeficientes h_{ij} e não convergem no sentido ordinário, existindo apenas no sentido do valor principal de Cauchy. Assim, estas integrais são calculadas implicitamente, estabelecendo-se a condição de deslocamento de corpo rígido na Eq. (2.39), onde obtém-se a Eq. (2.41).

2.7.4 Integrais quase-singulares

As integrais quase-singulares surgem quando o ponto ξ encontra-se muito próximo do contorno como em problemas de domínios esbeltos (paredes muito finas) ou quando elementos de contorno descontínuos são utilizados. Para avaliação de tais integrais, algoritmos especiais têm sido objeto de muitas pesquisas por parte da comunidade científica nacional e internacional de forma que esta dificuldade seja contornada. Em (Araújo e Gray, 2008), algoritmos especiais para o cômputo destas integrais são apresentados realçando sua eficácia através dos resultados obtidos.

2.7.5 Procedimentos numéricos

Considerando-se as integrais citadas anteriormente, o código computacional SBS utiliza, de uma forma geral, a quadratura padrão de Gauss para o cálculo dos coeficientes das matrizes de contorno. O analista pode escolher o número de pontos de integração a ser utilizado durante a análise assim como subdividir os elementos de modo a obter maior precisão no cálculo dos coeficientes das matrizes de contorno. A Fig. 2.6 mostra como funciona o processo de subdivisão do elemento de contorno em subelementos de integração.

Em se tratando de integrais quase singulares e fracamente singulares, procedimentos especiais de integração são utilizados de modo a obter uma maior eficiência, eficácia e precisão no cômputo das integrais. Assim, o código computacional SBS conta com quatro procedimentos numéricos para a avaliação de integrais de contorno que são:

- 1 - Quadratura Gaussiana padrão;
- 2 - transformação de coordenadas polares triangulares;
- 3 - transformação cúbica de Telles e
- 4 - processo combinado.

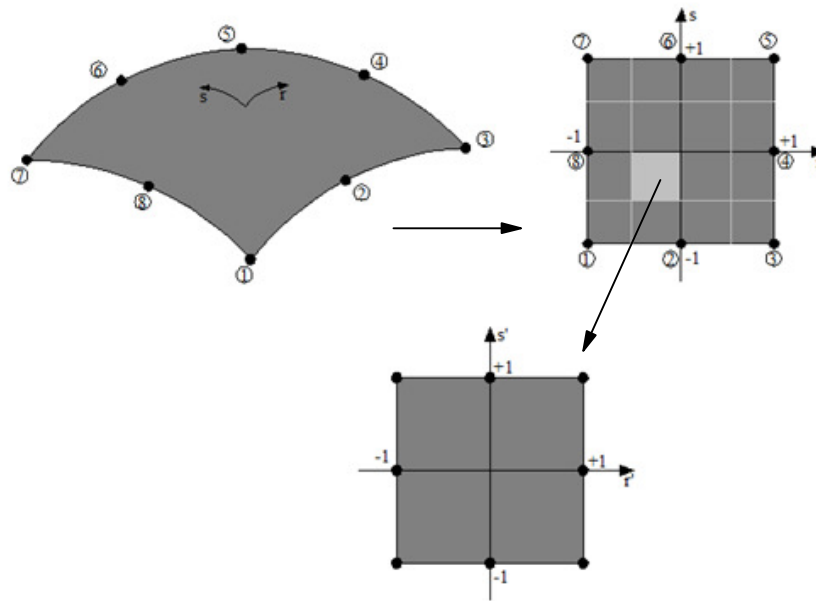


Figura 2.6 - Subdivisão do elemento de contorno em subelementos de integração.

Os processos 2, 3 e 4 têm como base a quadratura padrão de Gauss (processo 1) e o objetivo é melhorar a precisão do cálculo das integrais quase singulares e fracamente singulares. A seguir, os procedimentos 2, 3 e 4 serão apresentados de forma sucinta para mostrar apenas aspectos gerais desses procedimentos.

2.7.5.1 Transformação de coordenadas polares triangulares

Esse procedimento consiste de uma sequência de mapeamentos de coordenadas que resultam ao final em uma melhor distribuição dos pontos de Gauss. Assim, o cômputo das integrais quase singulares e fracamente singulares torna-se mais eficaz e com uma maior precisão.

Com o elemento de contorno já mapeado em coordenadas naturais r e s (Fig. 2.6), realiza-se então a subdivisão do elemento em duas ou três regiões triangulares, dependendo da posição do ponto singular conforme Fig. 2.7. Cada subdomínio triangular é então mapeado em coordenadas polares triangulares em um quadrado de lado unitário (Fig. 2.8) através da Eq. (2.42). Nesse mapeamento, um nó é colapsado.

$$r_i(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{q=1}^3 h_q^* \hat{r}_{iq} \quad (2.42)$$

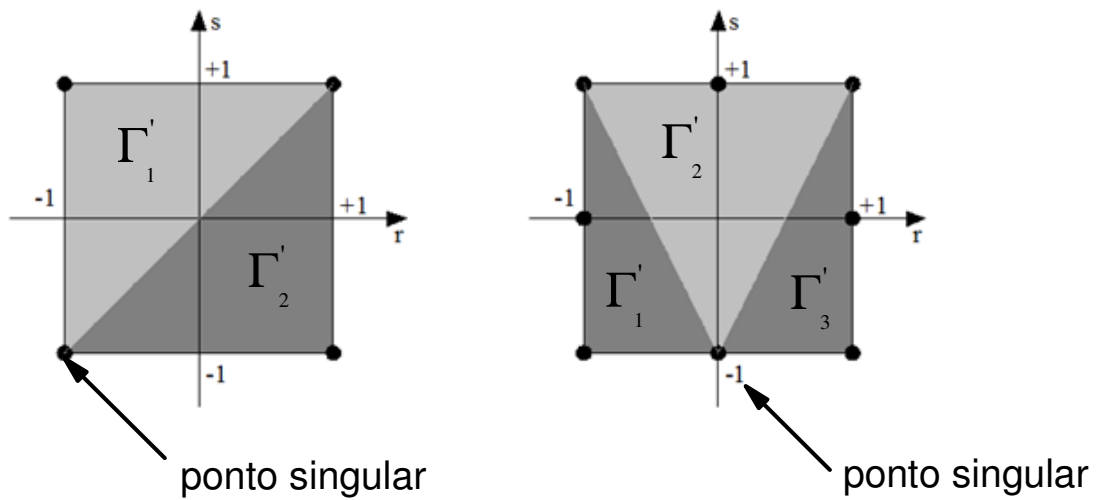


Figura 2.7 - Subdivisão do elemento de contorno em regiões triangulares.

onde r_i , $i=1,2$, representa as coordenadas naturais r e s , ζ_1, ζ_2 as coordenadas polares triangulares, h_q^* são as funções de interpolação da transformação e \hat{r}_{iq} a componente i do vetor de coordenadas do q -ésimo nó do elemento.

As funções de interpolação são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned}
 h_1^*(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_1) \\
 h_2^*(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_1(1 - \zeta_2) \\
 h_3^*(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_1\zeta_2
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

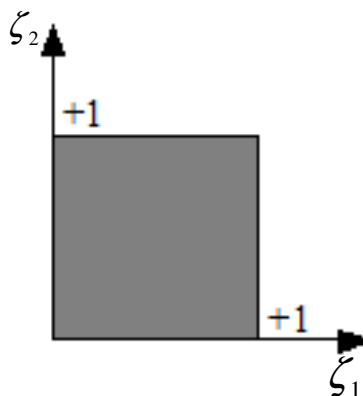


Figura 2.8 - Mapeamento em coordenadas polares triangulares.

Em seguida, cada quadrado de lado unitário é então mapeado novamente em coordenadas naturais (η_1 e η_2) como mostra a Fig. 2.9 e a quadratura de Gauss é aplicada. Todas as transformações citadas geram ao final uma nova e melhor distribuição de pontos ilustrada na Fig. 2.10. Por fim, o analista tem a possibilidade de subdividir o elemento inicial em subelementos de integração (Fig. 2.6) para em seguida aplicar o procedimento. Isso possibilita melhorar ainda mais a integração ao longo do elemento.

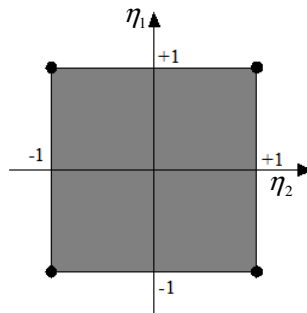


Figura 2.9 - Mapeamento em coordenadas naturais η_1 e η_2 .

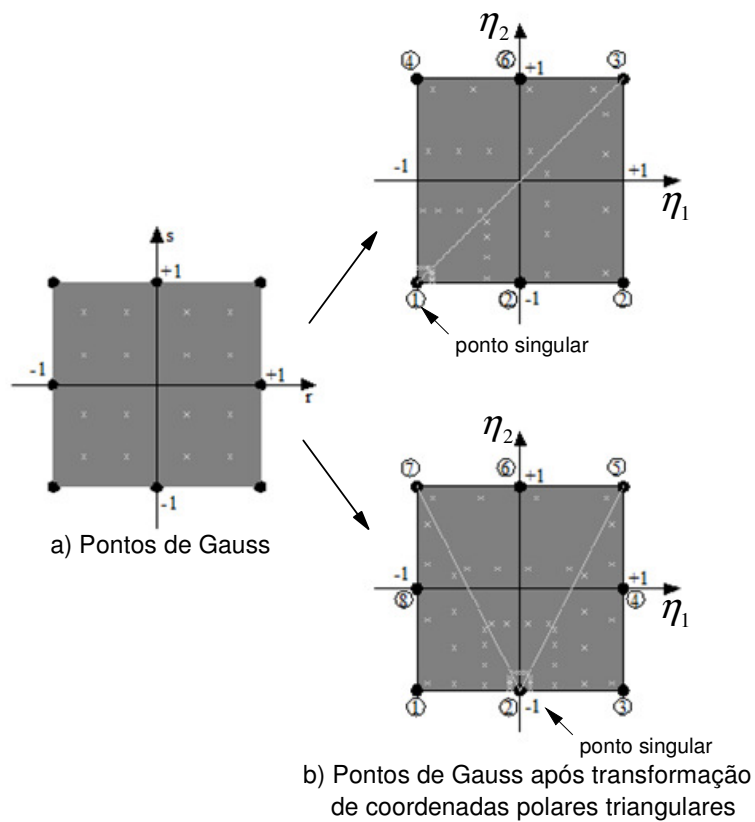


Figura 2.10 - Posição final dos pontos de integração após processo de transformação em coordenadas polares triangulares.

2.7.5.2 Transformação cúbica de Telles

A transformação cúbica de Telles é uma transformação polinomial que realiza, a partir da distribuição padrão da quadratura Gaussiana, uma nova distribuição dos pontos de integração através de um polinômio de 3^o grau. Ao fim desse procedimento, os pontos de integração tendem a concentrar-se próximo ao ponto singular, permitindo uma avaliação mais precisa das integrais quase singulares e fracamente singulares.

Considerando-se a integral singular S da Eq. (2.44), a transformação de Telles consiste em adotar uma expressão polinomial cúbica para a variável η como mostra a Eq. (2.45).

$$S = \int_{-1}^{+1} f(\eta) d\eta \quad (2.44)$$

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (2.45)$$

sendo γ a representação da posição original dos pontos de Gauss.

Os coeficientes a , b , c , e d da Eq. (2.45) são obtidos considerando-se as seguintes condições:

$$\left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\bar{\eta}} = 0; \quad \left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0; \quad \eta(1) = 1; \quad \eta(-1) = -1; \quad (2.46)$$

em que $\bar{\eta}$ representa o ponto onde a função $\eta(\gamma)$ é singular.

A distribuição final dos pontos, resultante da transformação de Telles, é apresentada na Fig. 2.11 onde é possível ver que os pontos de integração tendem a aproximar-se dos pontos singulares.

2.7.5.3 Processo combinado

O processo combinado é uma combinação dos processos 2 e 3 apresentados anteriormente. Nesse processo, a transformação de coordenados polares triangulares é realizada e em seguida aplica-se a transformação de Telles para a direção η_1 onde a singularidade está presente. Ao final, tem-se uma distribuição de pontos como mostra a Fig. 2.12. O processo combinado gera uma distribuição de pontos ainda mais próxima do ponto singular e, assim, o cômputo das integrais por este processo fornece, de uma forma geral, resultados melhores.

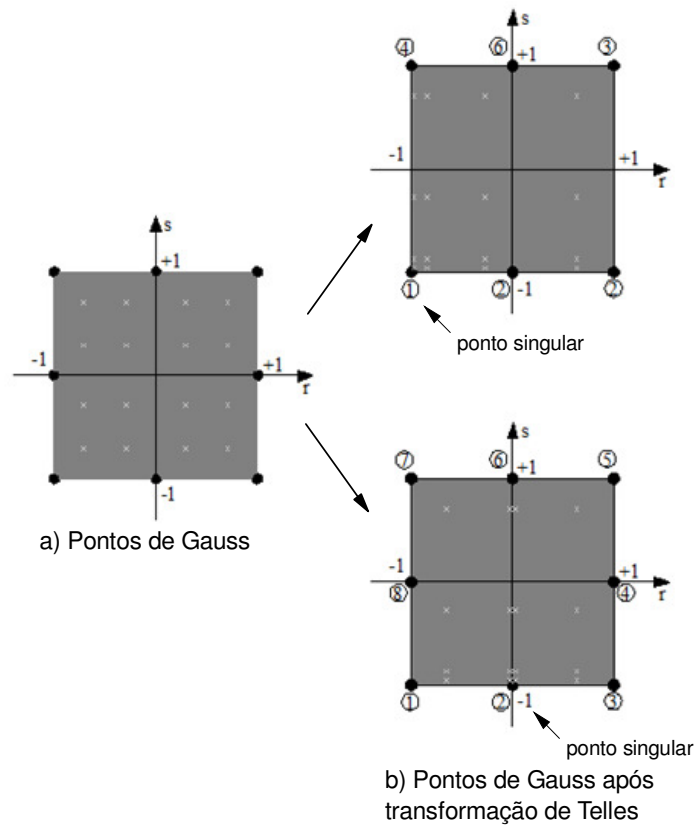


Figura 2.11 - Posição final dos pontos de integração após transformação cúbica de Telles.

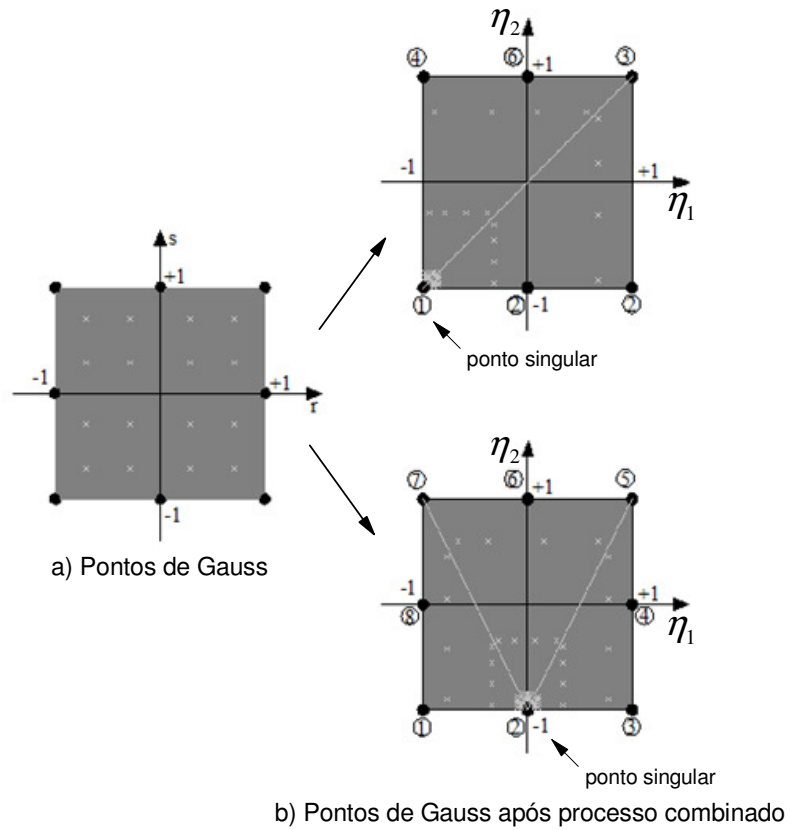


Figura 2.12 - Posição final dos pontos de integração após processo combinado.

3.1 GENERALIDADES

A mecânica dos sólidos permite aos engenheiros analisar e resolver uma série de problemas nos quais corpos sólidos estão presentes. Todos os corpos sólidos apresentam uma determinada geometria com suas respectivas dimensões, condições de contorno e são compostos por um ou diversos tipos de materiais. O comportamento que os corpos sólidos apresentam depende então de suas geometrias, materiais e condições de contorno.

Considerando aspectos geométricos ou de materiais, podemos ter problemas de grande ordem onde o domínio do problema apresenta grandes dimensões ou o material do corpo não pode ser considerado homogêneo e isotrópico, ou seja, o material é heterogêneo, compondo-se de várias fases, e anisotrópico com propriedades distintas em diferentes direções. Como exemplos de problemas de grande ordem, podemos citar a análise de desmoronamento de taludes submarinos por empresas petrolíferas, como a Petrobras, onde o domínio do problema é muito grande e também análises microestruturais de materiais policristalinos ou materiais constituídos de camadas de diferentes propriedades físicas.

Esses tipos de problema normalmente fornecem um grande volume de dados e exigem grande capacidade de processamento e por isso precisam ser decompostos em uma soma de problemas menores de modo que seja possível a sua resolução. Isso significa que o domínio do problema precisa ser decomposto em domínios menores (subdomínios), e, além disso, é necessário conhecer como eles se relacionam entre si, ou seja, como estão acoplados e quais as leis que descrevem esse acoplamento. O processamento computacional desses tipos de problemas é normalmente realizado por diversos processadores e constituem o chamado processamento paralelo. Nesse processamento, cada processador pode processar dados de um ou mais subdomínios e assim, a solução de um grande problema é decomposta em soluções de cada uma de suas partes constituintes.

Para analisar problemas, cujos domínios precisam ser decompostos, é necessário estabelecer uma estratégia de subestruturação ou decomposição de domínio (Método de Decomposição de Domínio) onde além da divisão do domínio em partes menores deve-se estabelecer de alguma forma como estas partes estão acopladas.

Estratégias que permitem acoplar domínios heterogêneos como em elementos de estruturas granulares, domínios homogêneos por partes como é o caso de domínios constituídos de camadas homogêneas distintas, etc., são chamadas estratégias de acoplamento. Neste trabalho, a estratégia de acoplamento para o MEC é denominada estratégia de acoplamento EC/EC.

Em (Araújo, Alberto e Dors, 2003; Araújo et al., 2004; Araújo, Silva e Telles, 2006; Araújo e Gray, 2008; Araújo, d'Azevedo e Gray, 2010 e 2011) é descrita a técnica Subregião-por-Subregião (SBS), que trata-se de uma técnica robusta de subestruturação para o MEC inspirada na técnica Elemento-por-Elemento, largamente empregada em formulações do MEF para resolução de problemas de grande ordem (Hughes T. J. R., Levit I., Winget L., 1983).

A subestruturação consiste em decompor o domínio do problema em subregiões tal como ilustrado na Fig. 3.1 e estabelecer condições de interface que regem o acoplamento entre as mesmas.

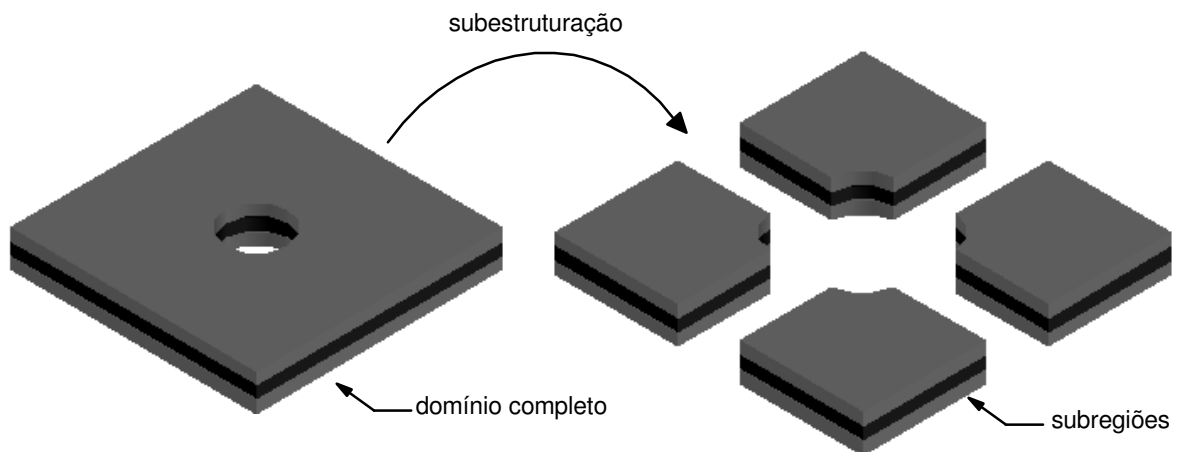


Figura 3.1 - Processo de subestruturação.

3.2 PRÉ-PROCESSAMENTO

3.2.1 Generalidades

O algoritmo computacional SBS está presente no programa computacional, desenvolvido em linguagem de programação FORTRAN 90, NAESY (Numerical Analysis of Engineering Systems) e publicado em diversos artigos (Araújo, Alberto e Dors, 2003; Araújo, Dors, Martins e Mansur, 2004; Araújo, Silva e Telles, 2006; Araújo e Gray, 2008; Araújo, d'Azevedo e Gray, 2010 e 2011). O NAESY conta com um módulo de pré-processamento (NAESYmeshgenerator), também em linguagem de programação FORTRAN 90, que gera

modelos de elementos de contorno e prepara um arquivo de dados que será posteriormente analisado pelo NAESY. Existem diferentes opções de modelagem no pré-processamento e essas opções podem estar relacionadas ao refinamento de malha, condições acoplamento e condições de contorno.

3.2.2 Refinamento da malha

Durante o pré-processamento, é possível escolher sistemas de referência, tipos de super elementos e elementos de contorno, além de refinamentos que seguem progressões geométricas de razão q .

Como sistemas de referência possíveis de serem adotados têm-se os sistemas cartesianos, cilíndricos e esféricos. Estabelecidos os sistemas de referência, é necessária a determinação dos vértices e dos super elementos do modelo. São três as opções de super elementos (Figs. 3.2, 3.4 e 3.6 respectivamente):

- Elemento contínuo quadrangular de 4 nós – q4_3dbe;
- elemento contínuo quadrangular de 8 nós – q8_3dbe e
- elemento contínuo quadrangular de 9 nós – q9_3dbe.

Para o refinamento da malha, estão disponíveis as seguintes opções de elemento que podem ser contínuos ou descontínuos (Figs. 3.2-3.6):

- Elemento contínuo quadrangular de 4 nós – q4_3dbe;
- elemento contínuo quadrangular de 8 nós – q8_3dbe;
- elemento contínuo quadrangular de 9 nós – q9_3dbe;
- elemento contínuo triangular de 3 nós – q3_3dbe e
- elemento contínuo triangular de 6 nós – q6_3dbe.

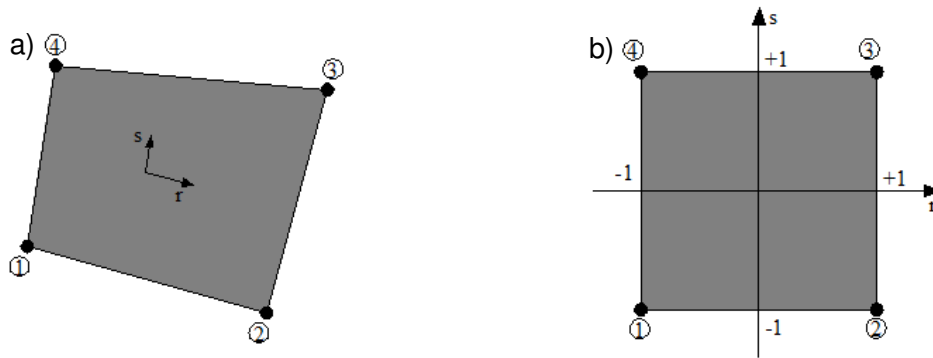


Figura 3.2 - Elemento contínuo quadrangular de 4 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).

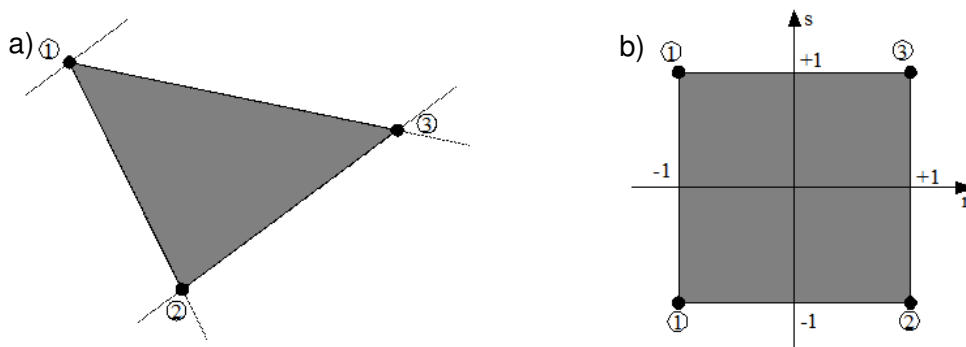


Figura 3.3 - Elemento contínuo triangular de 3 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).

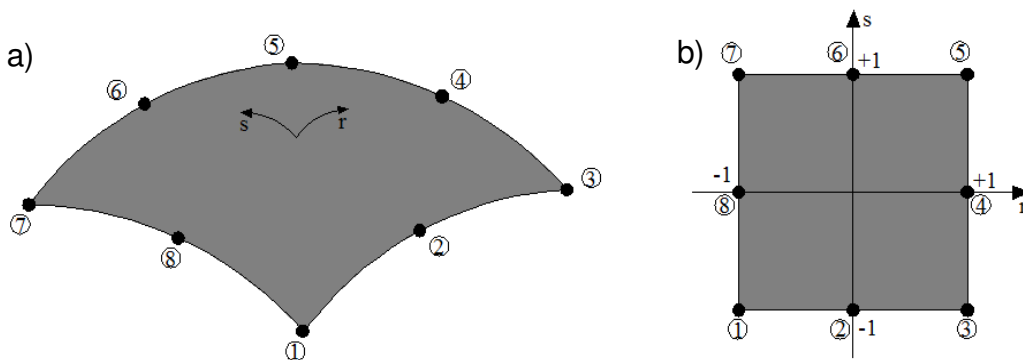


Figura 3.4 - Elemento contínuo quadrangular de 8 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).

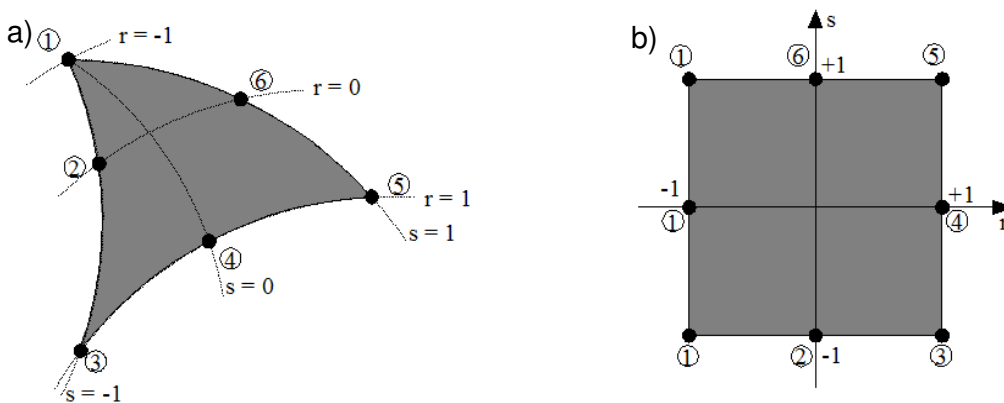


Figura 3.5 - Elemento contínuo triangular de 6 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).

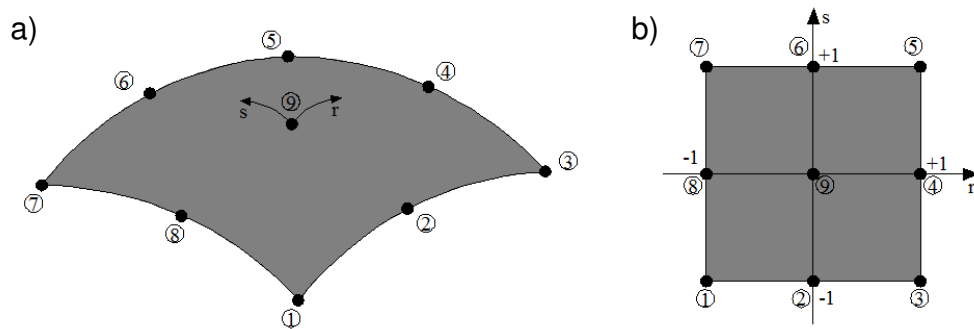


Figura 3.6 - Elemento contínuo quadrangular de 9 nós (a) e sua representação em coordenadas naturais (b).

Em determinados problemas, é necessário um maior refinamento em determinadas regiões e para realizar esse tipo de refinamento tem-se a opção de refinar a malha seguindo uma progressão geométrica de razão q para a distância entre elementos. A Fig. 3.7 mostra como é o aspecto de um refinamento de malha deste tipo.

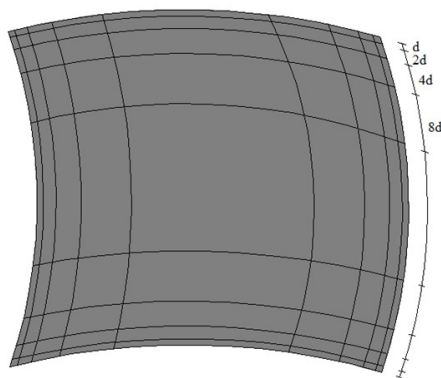


Figura 3.7 - Refinamento de malha em progressão geométrica.

3.2.2.1 Geração de malha com o software comercial ANSYS 13

Durante este trabalho o software ANSYS 13 (<http://www.ansys.com>) também foi utilizado para geração de malhas que podem ser estruturadas e não estruturadas. Para utilizar o programa ANSYS 13, como gerador de malha, foi necessário desenvolver 2 programas que possibilitassem este intercâmbio e estes programas foram escritos em linguagem de programação FORTRAN 90. Os programas desenvolvidos, PROCESS_SAT e PROCESS_FEM, em conjunto com o NAESYmeshgenerator, processam os dados gerados no programa ANSYS 13 e geram um arquivo de dados para posterior análise pelo NAESY. O programa PROCESS_SAT processa as malhas de contorno, e o PROCESS_FEM separa pontos internos e pontos de contorno e compatibiliza os resultados obtidos pelos modelos de contorno com modelos 3D (gerados para fins de visualização de respostas em pontos

internos), ou seja, o problema é resolvido via MEC, e os resultados são associados aos respectivos nós no modelo 3D que contém os nós do modelo de contorno e nós internos e tem ainda as conectividades de elementos 3D como elementos tetraédricos e piramidais. Por fim, o PROCESS_FEM gera um arquivo em formato '.vtk' (*Visualization Tool Kit*) para posterior visualização de resultados relativos ao problema.

Em algumas aplicações, foi utilizado também o software AutoCAD 2012 (<http://www.autodesk.com>) para a geração de modelos. O programa AutoCAD 2012 fornece uma enorme gama de comandos para geração de diversos tipos de geometrias e, neste trabalho, realizou-se um intercâmbio entre os softwares AutoCAD 2012 e ANSYS 13 onde o modelo era gerado no AutoCAD 2012 e o refinamento de malha realizado pelo software ANSYS 13. A Fig. 3.8 (a) mostra mais detalhes de como é realizado todo o processo de geração de malhas em que, ao final, é construído o 'input file' com todos os dados necessários à análise pelo programa NAESY.

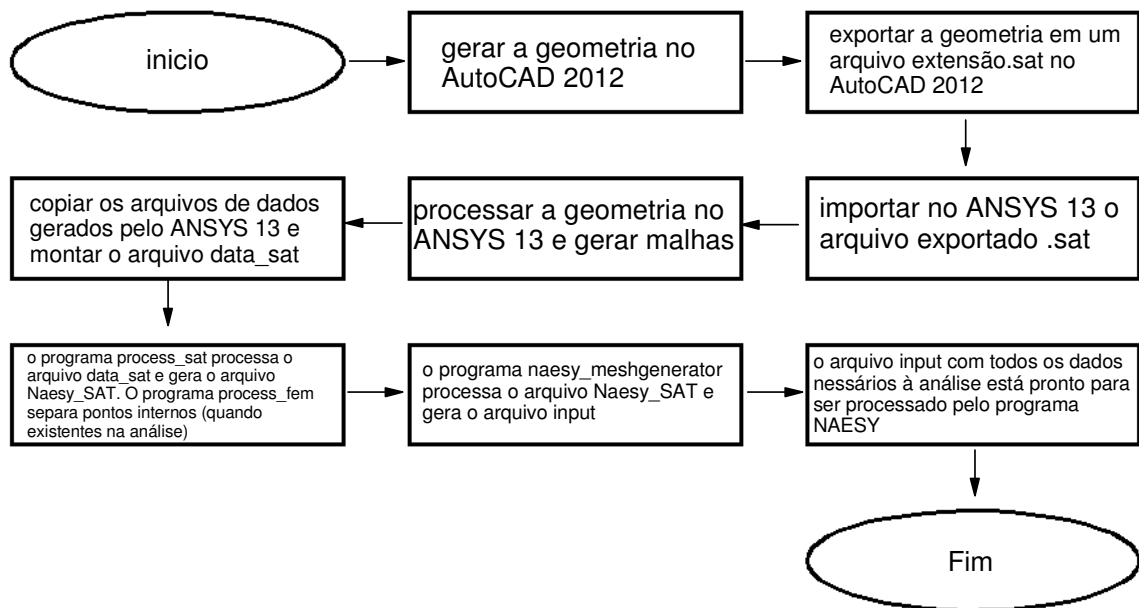


Figura 3.8 (a) - Fluxograma do processo de geração de malhas através do programa ANSYS 13.

A utilização desses programas tornou possível a modelagem numérica de problemas com geometrias mais complexas, além de fornecer grande flexibilidade no que diz respeito ao aspecto das malhas. A Fig. 3.8(b) mostra os programas que são utilizados para processo geral geração de malhas e montagem do arquivo de entrada de dados 'input file' para posterior análise pelo NAESY.

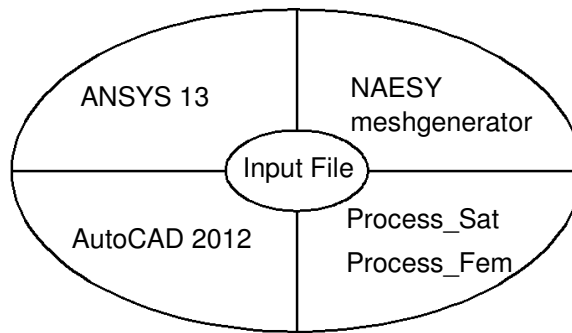


Figura 3.8(b) - Programas para a geração de malha e montagem do 'input file'.

3.2.3 Acoplamento

Ao modelar o problema subestruturado, é necessário estabelecer quais elementos são de interface, ou seja, elementos comuns a duas ou mais subregiões, e como é o acoplamento nessas interfaces (Fig. 3.9). Para estabelecer o acoplamento, existem códigos baseados em zeros e uns que permitem considerar diferentes acoplamentos. O código é composto por três números que indicam em quais direções os deslocamentos estão restringidos. O primeiro, o segundo e o terceiro número correspondem ao código referente às direções globais x , y e z respectivamente. Assim, o código 111, por exemplo, indica restrições de deslocamentos nas direções x , y e z .

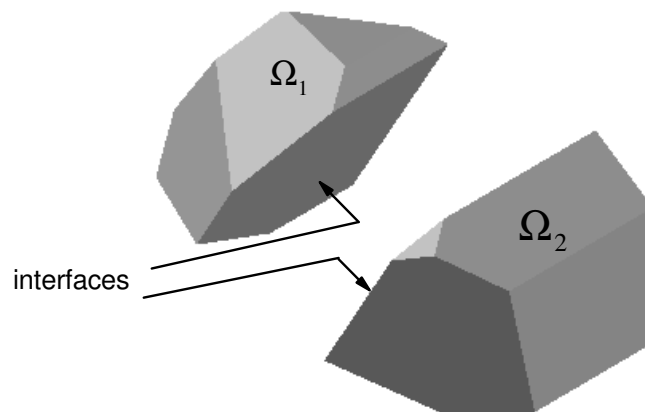


Figura 3.9 - Elementos de interface entre subdomínios Ω_1 e Ω_2 .

3.2.4 Condições de Contorno

Existem duas opções de condições de contorno possíveis de serem adotadas. A condição de contorno de força ou deslocamento pode ser constante ao longo de um dado elemento ou pode ser fornecida para os nós de um elemento específico. As condições de contorno, assim como

as de interface, são fornecidas por meio de zeros e uns (Fig. 3.10). Para as condições de contorno, o número 1 significa deslocamento prescrito e o número 0 significa força prescrita.

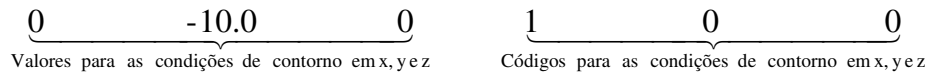


Figura 3.10 - Formato das condições de contorno.

3.3 PROCESSAMENTO

3.3.1 Generalidades

Todo o processamento dos problemas analisados, via algoritmo SBS, é realizado pelo programa computacional NAESY. Ao iniciar o processamento, o NAESY já conta com um arquivo de entrada de dados gerado no pré-processamento onde estão presentes todos os dados dos procedimentos de integração a serem utilizados, da geometria, dos materiais, condições de acoplamento e das condições de contorno. O NAESY então faz a leitura desses dados, processa e gera resultados que são impressos em arquivos de saída de dados.

Para ilustrar melhor como se dá todo o processamento, apresenta-se abaixo um fluxograma, ilustrando, de uma forma mais detalhada, todas as etapas do processamento (Fig. 3.11).

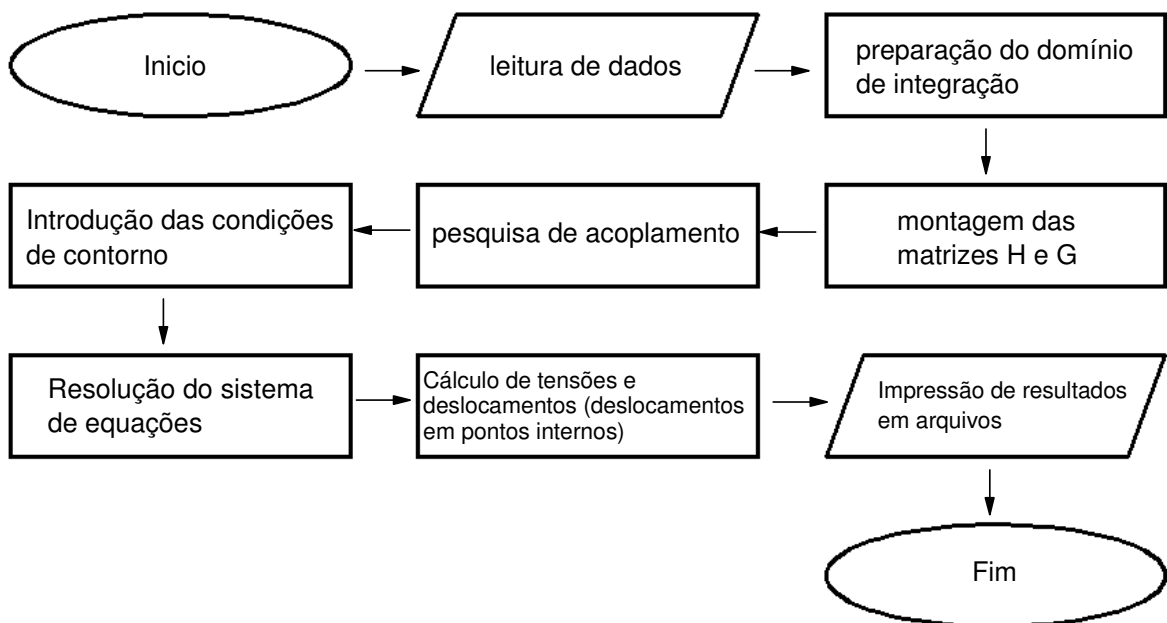


Figura 3.11 - Fluxograma do processamento de dados realizado pelo NAESY.

3.3.2 Preparação do domínio de integração

A primeira etapa do processamento realizado pelo programa NAESY consiste em preparar o domínio de integração. O NAESY prepara o domínio de integração considerando o número de procedimentos de integração a serem utilizados durante a análise e que estão presentes no arquivo de entrada de dados. Para cada procedimento, é possível estabelecer a dimensão da integração, o número de pontos em cada dimensão e ainda a possibilidade de subdividir o domínio de integração em subelementos de forma a obter melhor precisão nos resultados.

3.3.3 Montagem das matrizes **H** e **G**

Preparado o domínio de integração, dá-se início então à leitura de dados das subregiões. A partir dos dados lidos, o NAESY pode realizar modificações nos elementos para a consideração de elementos descontínuos, caso tenham sido declarados no pré-processamento e assim deslocar os vértices do modelo original e determinar os nós funcionais (nós a serem utilizados durante a análise). Antes de iniciar a montagem das matrizes **H** e **G**, o NAESY verifica se cópias de uma determinada subregião devem ser feitas através de uma variável presente no arquivo de entrada de dados. Essa opção é de grande utilidade pois facilita a modelagem de determinados tipos de problemas subestruturados onde ocorrem repetições de subregiões ao longo do domínio, ou seja, subregiões idênticas em posições diferentes ao longo do domínio. A Fig 3.12 ilustra um problema de interação solo-fundação onde, a partir de um único conjunto solo-fundação, geraram-se mais três conjuntos solo-fundação idênticos.

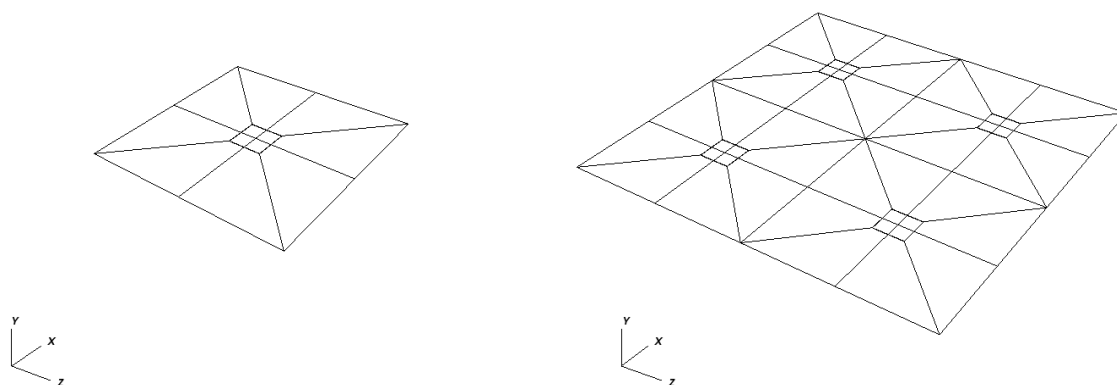


Figura 3.12 - Ilustração do recurso de cópia de subregiões.

Após o processamento da geometria do problema, o NAESY inicia o processo de montagem das matrizes **H** e **G** para cada subregião. Os coeficientes \mathbf{h}_{ij} e \mathbf{g}_{ij} são então determinados via integração e os coeficientes \mathbf{h}_{ji} são determinados implicitamente como descrito no capítulo 2.

Se são feitas cópias de uma dada subregião, as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são apenas copiadas, o que reduz o esforço computacional e tempo de processamento.

3.3.4 Pesquisa de acoplamento

Assim que todas as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} de todas as subregiões tenham sido determinadas, o NAESY realiza uma pesquisa de acoplamento, ou seja, através dos dados da geometria e das interfaces de todas as subregiões que foram estabelecidas no pré-processamento ele identifica quais os graus de liberdade entre as subregiões estão acoplados (Fig. 3.13) e armazena-os em vetores dentro do programa. Dessa forma, se um nó pertence a uma interface de uma dada subregião, é possível saber qual é este nó em outra subregião que contém a mesma interface e ainda quais são os graus de liberdade associados.

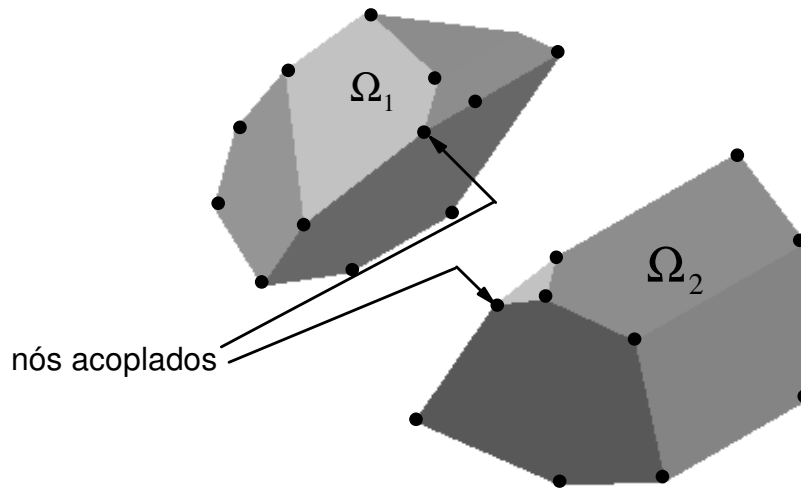


Figura 3.13 - Nós acoplados entre subdomínios Ω_1 e Ω_2 .

3.3.5 Introdução das condições de contorno

Com todas as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} já determinadas, dá-se início à introdução das condições de contorno. O NAESY neste momento já possui todas as condições de contorno armazenadas em um vetor e opera então troca de colunas entre as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} e a troca de posições entre os vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} . Dessa forma, ao final do processo obtém-se um sistema de equações algébricas da forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.1}$$

como mostrado na seção discretização do capítulo 2.

3.3.6 Acoplamento EC/EC

Em suma, a SBS é uma técnica muito eficaz e eficiente para a análise de problemas subestruturados, ou seja, problemas cujos domínios foram decompostos (Fig. 3.14) e todas as condições de acoplamento são conhecidas. No caso da técnica SBS, cada subregião é tratada separadamente pelos seguintes subsistemas independentes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_1 &= \mathbf{G}_1 \mathbf{p}_1 \\
 \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_2 &= \mathbf{G}_2 \mathbf{p}_2 \\
 &\vdots \\
 \mathbf{H}_i \mathbf{u}_i &= \mathbf{G}_i \mathbf{p}_i \\
 &\vdots \\
 \mathbf{H}_{ns} \mathbf{u}_{ns} &= \mathbf{G}_{ns} \mathbf{p}_{ns}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

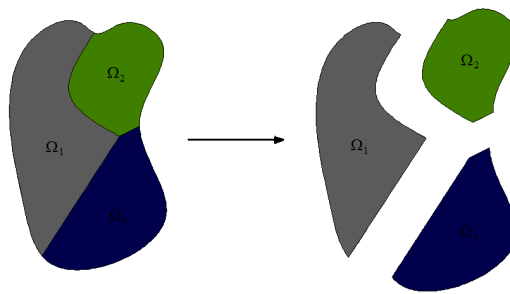


Figura 3.14 – Decomposição do domínio (subestruturação).

onde ns é o número de subregiões, \mathbf{H}_i e \mathbf{G}_i são as submatrizes do MEC para a i -ésima subregião, \mathbf{u}_i e \mathbf{p}_i são os vetores de deslocamentos e forças nodais respectivamente.

As condições de acoplamento são:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j \quad (\text{compatibilidade}) \text{ e,}
 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{p}_i = -\mathbf{p}_j \quad (\text{equilíbrio})
 \tag{3.4}$$

A condição de compatibilidade da Eq. (3.3) impõe que os deslocamentos de um nó, pertencente a duas ou mais subregiões, sejam iguais e, assim, não ocorre deslizamento entre as subregiões. A Eq. (3.4) representa o princípio da ação e reação (3ª lei de Newton) onde a força que atua em um nó de uma subregião i é igual em módulo e direção à força que atua em outra subregião j que contém o mesmo nó, mas os sentidos são contrários de modo que o

equilíbrio seja estabelecido. As condições de acoplamento das Eqs. (3.3) e (3.4) são, portanto, condições de acoplamento lineares

3.3.7 Matriz do sistema acoplado

Tomando os sistemas da Eq. (3.2) e inserindo as condições de acoplamento e as condições de contorno, a matriz global do sistema acoplado adquire então a seguinte forma na qual:

$$\begin{array}{c}
 \Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3 \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \Omega_1 & \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \text{A}_{10} & \text{H}_{12} & \text{H}_{13} \\
 \hline
 \text{H}_{21} & \text{A}_{20} & \text{G}_{21} & \text{H}_{23} \\
 \hline
 \text{H}_{31} & \text{H}_{32} & \text{A}_{30} & \text{G}_{31} & \text{G}_{32} \\
 \hline
 \end{array} & \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 \text{G}_{12} & \text{G}_{13} \\
 \hline
 \text{G}_{23} & \\
 \hline
 \text{G}_{31} & \text{G}_{32} \\
 \hline
 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \text{x}_{10} \\
 \text{u}_{12} \\
 \text{u}_{13} \\
 \hline
 \text{x}_{20} \\
 \text{p}_{21} \\
 \text{u}_{23} \\
 \hline
 \text{x}_{30} \\
 \text{p}_{31} \\
 \text{p}_{32} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} = \text{RHS} \quad (3.5)$$

blocos não-nulos
 blocos nulos

A_{i0} significa colunas das matrizes \mathbf{H} ou \mathbf{G} referentes aos graus de liberdade relacionados ao contorno da subregião i , \mathbf{H}_{ij} e \mathbf{G}_{ij} colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} referentes aos graus de liberdade relacionados às interfaces entre subregiões vizinhas, \mathbf{x}_{i0} incógnitas de contorno e \mathbf{u}_{i0} e \mathbf{p}_{i0} incógnitas de deslocamentos e forças respectivamente, referentes às interfaces entre subregiões.

Como se pode observar pelo sistema de equações da Eq. (3.5), existe uma grande quantidade de blocos nulos na matriz, o que acarreta um enorme consumo de memória alocada unicamente para armazenamento de zeros. Para contornar esse problema, a técnica SBS utiliza *solvers* iterativos de Krylov no processo de solução que permitem tratar o problema de forma localizada sem montagem da matriz global, ou seja, cada sistema de equações da Eq. (3.2) é montado, armazenado e manipulado separadamente durante a solução do sistema acoplado, assim como as condições de contorno e de interface. Os produtos matriz-vetor e vetor-vetor são realizados para cada sistema de equações de cada subregião, sendo que ao

longo do processo iterativo as condições de contorno são atualizadas para solucionar o problema.

Existem duas versões da técnica SBS, a primeira baseada em produtos matriz-vetor não estruturados (UNSMVP) e a segunda em produtos matriz estruturados (SMVP). A realização de produtos matriz-vetor estruturados é uma maneira de reduzir o número de testes condicionais para identificar o tipo de condições de contorno associadas a cada grau de liberdade de cada modelo de elementos de contorno. Devido à sua maior eficiência, são utilizados produtos matriz-vetor estruturados.

Em se tratando de problemas acoplados, a utilização de elementos de contorno contínuos oferece grandes dificuldades no que se refere a arestas e a cantos de interfaces onde estão presentes descontinuidades de fluxos/forças. Através da Fig. 3.15, observa-se que quatro incógnitas estão presentes, ou seja, $u_i = u_j = u_k = u_l = u_m = u_n$, $p_i = -p_j$, $p_k = -p_l$, $p_m = -p_n$, porém existem somente três equações linearmente independentes, uma para cada subregião. Em (Araújo F. C. et al., 2004), uma estratégia foi desenvolvida para contornar este problema, porém a estratégia é bastante trabalhosa visto que é baseada na criação de subdomínios fictícios sem o acréscimo de novas incógnitas de modo que o número de incógnitas se iguale ao número de equações. O fato de ser muito trabalhosa, fez surgir novos trabalhos com elementos descontínuos, pois a utilização de elementos contínuos se mostrou realmente inconveniente, principalmente em casos tridimensionais.

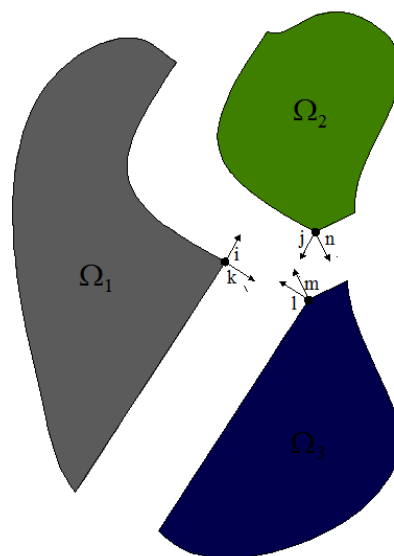


Figura 3.15 - Incógnitas do problema.

Elementos descontínuos são elementos cujos nós geométricos são deslocados de uma pequena distância da aresta do elemento para seu interior. Desse modo, em domínios acoplados, apenas nós de acoplamento são obtidos no modelo, o que torna a estratégia SBS consideravelmente mais simples como pode ser visto na Fig. 3.16. No entanto, integrais quase-singulares surgem devido à grande proximidade dos nós geométricos deslocados (nós funcionais) das arestas. Tais integrais merecem especial atenção de modo que a comunidade científica tem se esforçado para desenvolver algoritmos capazes de calcular essas integrais com uma boa precisão. Em (Araújo e Gray, 2008), algoritmos, para o cômputo de integrais quase-singulares em casos 3D, são desenvolvidos.

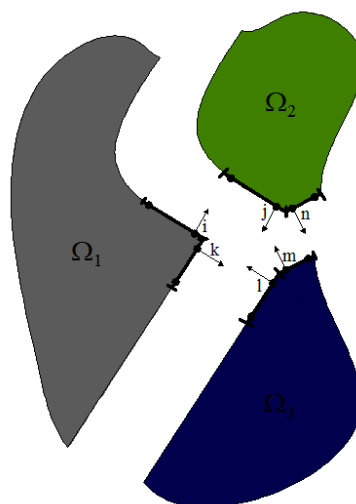


Figura 3.16 - Elementos descontínuos.

3.3.8 Solvers de Krylov

No fim do processo de discretização de problemas em engenharia, obtêm-se sistemas de equações algébricas. Para resolver esses sistemas, são necessários *solvers* que podem ser classificados como diretos ou iterativos. *Solvers* diretos baseiam-se na transformação da matriz global do sistema, exigindo, portanto, sua montagem completa. *Solvers* iterativos realizam apenas produtos matriz-vetor e vetor-vetor, verificando a convergência da solução segundo uma tolerância previamente estabelecida e, ao contrário de *solvers* diretos, não exigem a montagem da matriz global do sistema de equações, o que é fundamental em problemas de acoplamento.

Solvers iterativos são ferramentas muito úteis na resolução de problemas com um grande número de graus de liberdade (milhões por exemplo). Para muitos problemas já analisados em

trabalhos como (Araújo F. C., d'Azevedo E. F. e Gray L. J., 2011), utilizando-se *solvers* de Krylov, vê-se que o número de iterações necessárias para alcançar uma resposta com boa precisão é bem inferior à ordem do sistema de equações. Apesar disso, *solvers* iterativos podem apresentar problemas de convergência e, por isso, diversos testes devem ser realizados para comprovar sua eficácia e eficiência.

Por apresentarem diversas vantagens na resolução de problemas acoplados quando comparados com *solvers* diretos, *solvers* iterativos foram implementados no NAESY e sucintamente abordados neste trabalho, especificamente, *solvers* iterativos de Krylov. Apesar de não garantirem convergência da solução, devido à aritmética finita dos computadores, o uso de *solvers* iterativos em problemas subestruturados se mostra mais adequado, pois permite eliminar completamente os blocos de zeros do sistema de equações por não ser necessária a montagem da matriz global do problema. Isso implica uma enorme redução de memória alocada já que a grande quantidade de zeros, muito comum na matriz global de problemas acoplados, é completamente eliminada. Além disso, a eficiência do processo de solução aumenta bastante, não exigindo algoritmos especiais para armazenamento da matriz global do sistema de equações.

Os *solvers* iterativos, baseados no espaço de Krylov, são denominados *solvers* iterativos de Krylov. Existem vários algoritmos que, partindo do subespaço de Krylov, permitem derivar diversos *solvers* de Krylov. Dentre esses *solvers* podem-se citar os Métodos de Lanczos, de Gradiente Bi-conjugado (BI-CG), do Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES) (Saad, 1995), de Squared BiCG (Sonneveld C. G. S., 1989), de BiCGstab (van der Vorst, 1992), de BiCGstab(L) (Sleijpen e Fokkema, 1993), etc.

Uma forma de melhorar o desempenho de *solvers* iterativos é desenvolver preconditionadores para o sistema de equações. Assim, o emprego de bons preconditionadores é altamente desejável, pois aumenta a eficiência do processo de solução. Em geral, as matrizes de partição \mathbf{Q} de métodos iterativos básicos são usadas como preconditionadores, como a do método de Jacobi ($\mathbf{Q} = \mathbf{D}$) e a do método de Gauss-Seidel ($\mathbf{Q} = \mathbf{D} + \mathbf{L}$), onde \mathbf{D} e \mathbf{L} são, respectivamente, as matrizes com os coeficientes da diagonal e da parte inferior à diagonal de \mathbf{A} . Em (Araújo F. C., d'Azevedo E. F. e Gray L. J., 2011), foi desenvolvido um preconditionador para sistema de equações, baseado na própria estratégia de subestruturação e foram realizados testes que mostraram sua eficiência.

3.3.9 Cálculo de tensões

Com as variáveis de contorno já conhecidas, ou seja, os deslocamentos e forças de contorno, o NAESY obtém outras respostas ainda não determinadas tais como deslocamentos e tensões em pontos internos e o tensor de tensões completo em pontos do contorno. Foram incorporados ao programa NAESY neste trabalho o cálculo do tensor de tensões completo em pontos no contorno do sólido e também tensões principais para todos os nós do modelo.

Análises numéricas, via método dos elementos de contorno, enfrentam sempre a dificuldade de efetuar cálculos de integrais singulares. Considerando-se o cálculo de tensões de contorno em sólidos genéricos e tomando-se as expressões matemáticas de contorno, as singularidades $O(r^{-2})$ e $O(r^{-3})$ precisam ser integradas de modo a conseguir resultados precisos. No entanto, calcular de forma precisa essas integrais é uma tarefa com elevado grau de dificuldade, especialmente em domínios esbeltos como, por exemplo, membros estruturais em aço, cuja espessura de seus elementos constituintes, ou seja, espessura das mesas e da alma, é pequena.

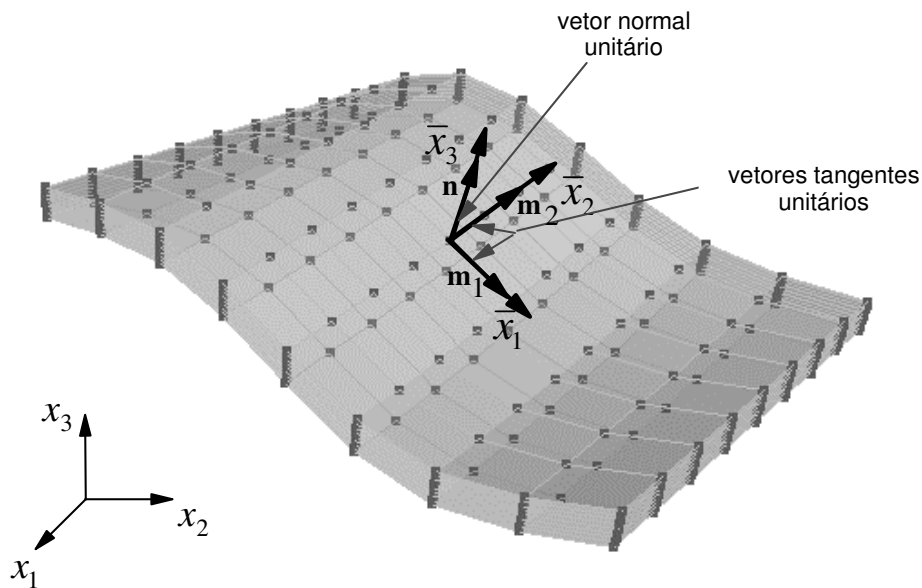


Figura 3.17 - Sistema de referência local mutuamente ortogonal no nó de contorno.

Uma alternativa diferente e que elimina a necessidade de calcular integrais singulares consiste na determinação de um sistema de referência local mutuamente ortogonal (Fig. 3.17) em cada nó pertencente ao contorno do sólido e em seguida efetuar o cálculo das deformações ao longo das direções deste sistema. A Lei de Hooke é então utilizada para determinar o estado completo de tensão no nó de contorno (C. A. Brebbia, J. C. F. Telles e L.C. Wrobel, 1984). Esse procedimento é aplicado assim que todas as variáveis de contorno sejam conhecidas, ou

seja, deslocamentos e forças de contorno. Através da Fig. 3.17, observa-se que a direção 3 é sempre tomada como sendo a direção do vetor normal à superfície no ponto considerado.

Considerando-se o sistema de referência da Fig. 3.17 as forças de contorno são dadas por:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} = \bar{p}_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

Para estabelecer o estado completo de tensões no nó considerado, é necessário calcular mais três componentes de tensão, sendo duas normais em relação às direções 1 e 2 ($\bar{\sigma}_{11}$ e $\bar{\sigma}_{22}$) da Fig. 3.17 e uma cisalhante ($\bar{\sigma}_{12}$). Aplicando-se a lei de Hooke no nó de contorno, as três componentes de tensão a serem ainda determinadas ao longo do sistema de referência local podem ser calculadas pelas expressões:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{(1-\nu)} [v\bar{p}_3 + 2G(\bar{\varepsilon}_{11} + \nu\bar{\varepsilon}_{22})] \\ \bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{(1-\nu)} [v\bar{p}_3 + 2G(\bar{\varepsilon}_{22} + \nu\bar{\varepsilon}_{11})] \\ \bar{\sigma}_{12} = 2G\bar{\varepsilon}_{12} \end{cases} \quad (3.7)$$

onde as componentes de deformações $\bar{\varepsilon}_{ij}$, $i, j=1,2$ da Eq. (3.7) são calculadas por:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j(x_1, x_2, x_3)}{\partial \bar{x}_i} \right) \quad (3.8)$$

Assim, a deformação na direção 1 do sistema de referência local é dada por:

$$\frac{\partial \bar{u}_i(x)}{\partial \bar{x}_1} = \sum_{k=1}^{ndof} \left(\frac{\lambda_{ik}}{J(r)} \left(\sum_{q=1}^{nnoel} \frac{\partial h_q(r,s)}{\partial r} \Big|_q u_{kq} \right) \right) \quad (3.9)$$

e a deformação na direção 2 referente ao mesmo sistema é dada por:

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} = \frac{1}{\bar{m}'_{22}} \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}'_2} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \bar{m}'_{12} \right) \quad (3.10)$$

com

$$\frac{\partial \bar{u}_i(x)}{\partial \bar{x}'_2} = \sum_{k=1}^{ndof} \left(\frac{\lambda_{ik}}{J(s)} \left(\sum_{q=1}^{noel} \frac{\partial h_q(r,s)}{\partial s} \Big|_q u_{kq} \right) \right) \quad (3.11)$$

Nas expressões acima, $h_q(r,s)$ representam funções de interpolação isoparamétricas, J o jacobiano da transformação responsável pelo mapeamento das coordenadas cartesianas em coordenadas naturais, $noel$ o número de nós por elemento de contorno, $ndof$ o número de graus de liberdade e λ_{ik} os cossenos diretores.

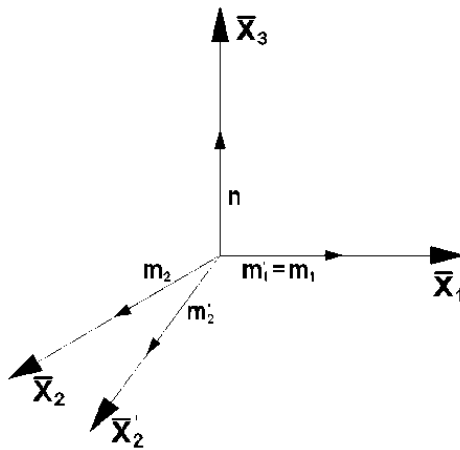


Figura 3.18 - Construção do sistema de referência local mutuamente ortogonal no nó de contorno.

O vetor normal \mathbf{n} do sistema de referência local é obtido a partir de dois vetores tangentes \mathbf{m}'_1 e \mathbf{m}'_2 presentes na Fig. 3.18. As deformações são então calculadas ao longo das direções de \mathbf{m}'_1 e \mathbf{m}'_2 onde a deformação, obtida ao longo da direção \mathbf{m}'_1 , é tomada como sendo a deformação ao longo da direção 1 do sistema de referência local \mathbf{m}_1 , mas o mesmo não acontece para \mathbf{m}'_2 , pois \mathbf{m}'_1 , \mathbf{m}'_2 , e \mathbf{n} não formam necessariamente um sistema de referência mutuamente ortogonal. Para calcular a deformação da direção 2 do sistema de referência local \mathbf{m}_2 , a deformação ao longo da direção \mathbf{m}'_2 , dada pela Eq. (3.11), precisa ser corrigida pela Eq. (3.10).

No caso em que elementos descontínuos estão presentes nas análises, as deformações e tensões são calculadas em nós funcionais, ou seja, nós deslocados de uma pequena distância d das arestas do elemento como mostra a Fig. 3.19. As funções de interpolação isoparamétricas neste caso são diferentes das funções de interpolação isoparamétricas para elemento contínuo. A utilização de elementos descontínuos em determinados modelos é de grande importância

para que as descontinuidades de forças de contorno possam ser consideradas durante as análises.

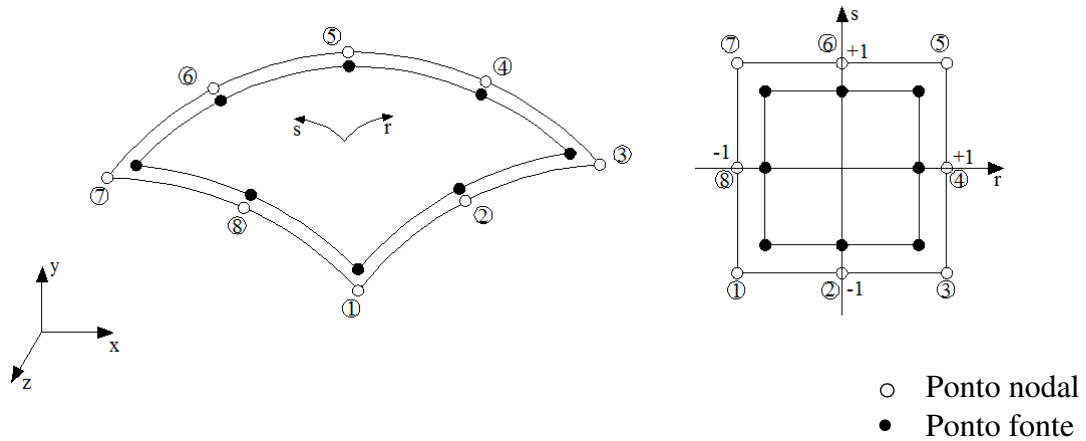


Figura 3.19 - Elemento descontínuo quadrangular de 8 nós.

Uma vez determinado o tensor de tensões para o sistema de referência local $\bar{\sigma}$ no nó considerado, obtém-se o tensor de tensões segundo sistema de referência global σ realizando o produto $\sigma = \mathbf{R}\bar{\sigma}\mathbf{R}^T$ onde \mathbf{R} é a matriz de rotação. Tensões principais e direções principais também são determinadas, resolvendo-se o problema de valor principal $\sigma \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, onde λ_i e \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, 3$, são as tensões principais e suas respectivas direções principais. Por fim, são calculadas as tensões de von Mises por:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \quad (3.12)$$

3.4 PÓS-PROCESSAMENTO

O pós-processamento realizado pelo NAESY é feito através da impressão de dados em arquivos para posterior leitura e processamento por programas de visualização. Para visualizar modelos e resultados subrotinas foram implementadas e incorporadas ao NAESY. As subrotinas inseridas geram arquivos para que possam ser processados por programas de visualização científica como o VisIt (<https://wci.llnl.gov/codes/visit>) e Pos3D (<http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm/pos3d>). Para a visualização com o programa VisIt foi utilizado o formato '.vtk' (Visualization Tool Kit) que fornece diretrizes de como entrar com dados da análise como por exemplo de geometrias e de resultados. Da mesma forma utilizou-

se do ‘neutral file’ para a impressão de resultados e posterior visualização com o programa Pos3D.

O programa VisIt é uma ferramenta de visualização interativa, desenvolvida no Departamento de Simulação Avançada de Energia e Iniciativa Computacional, Estados Unidos. É destinado principalmente à visualização de dados científicos. Na verdade, o VisIt é um programa de visualização robusto, capaz de lidar com um grande volume de diversos tipos de dados de forma interativa e permite a visualização de maneira rápida, eficiente e com grande qualidade de imagens, contando que o usuário esteja familiarizado. O programa oferece ainda diversas características avançadas destinadas a programadores experientes, além de permitir inclusões de novas opções de visualização em seu código fonte.

O “Pos3D” é um pós-processador gráfico interativo para modelos tridimensionais de elementos finitos que trata de modelos sólidos ou de superfícies e que foi desenvolvido pelo Instituto Tecgraf (Tecnologia em computação gráfica) na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

Dentre as opções de visualização incluídas durante este trabalho tem-se:

- Malha de elementos;
- deformada do sólido;
- deslocamentos u_x , u_y e u_z ;
- forças de contorno p_x , p_y , p_z ;
- tensões normais σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} ;
- tensões cisalhantes τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} ;
- tensões principais σ_1 , σ_2 , σ_3 ;
- direções principais e_1 , e_2 , e_3 e
- tensões de von Mises.

CAPÍTULO 4 – APLICAÇÕES

Diversas aplicações foram realizadas com o objetivo de verificar o desempenho da técnica SBS para o cálculo de tensões e deslocamentos, assim como dos *solvers* iterativos de Krylov. Para fins de comparação de resultados, foi utilizado o software comercial ANSYS 13 (2010) e resultados presentes na literatura científica. A seguir, serão apresentados sete problemas que, em geral, tratam-se de vigas, placas, interação solo-fundação e volumes representativos de materiais compósitos. Os problemas 1, 3 e 4 não foram subestruturados, pois o objetivo era essencialmente avaliar tensões e, considerando-se esses problemas, foram utilizadas as subrotinas BLAS (www.netlib.org/lapack) para a resolução do sistema de equações. Em todos os problemas, foi empregada a quadratura de Gauss de dimensões 4x4 para o cálculo das integrais não singulares e, para as integrais fracamente singulares e quase singulares, foi aplicado o processo combinado de dimensões 8x8.

4.1 PROBLEMA 1 - VIGA ENGASTADA E LIVRE SOB FLEXÃO SIMPLES

Uma viga engastada e livre, não subestruturada, com seção transversal retangular de base b igual a 0.2m, altura h de 0.3m e comprimento l igual a 3m, foi submetida a um carregamento distribuído q de 10kN/m², como mostra a Fig. 4.1. A viga é de concreto, com módulo de elasticidade longitudinal de 21.7GPa e coeficiente de Poisson igual a 0.2. Para esse problema, foram comparadas tensões σ_{zz} (Tabela 4.1, Figs. 4.5-4.8), τ_{yz} (Tabela 4.2, Figs. 4.9-4.12), σ_1 (Tabela 4.3, Figs. 4.13 e 4.14) e σ_3 (Tabela 4.4, Figs. 4.15 e 4.16), obtidas via programas NAESY e ANSYS 13.

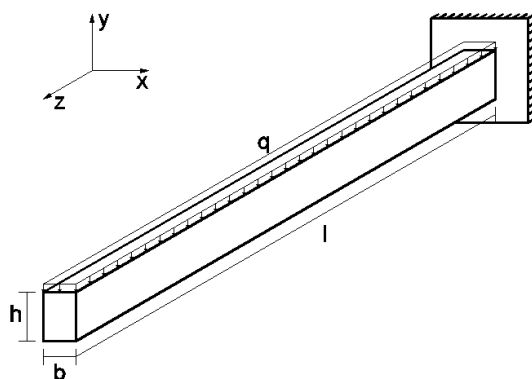


Figura 4.1 – Problema 1: Viga engastada e livre sob flexão simples.

As Figs. 4.2(a) e 4.3 mostram as malhas de elementos assim como o número de graus de liberdade (NDOF) para as análises realizadas nos programas NAESY e ANSYS 13 respectivamente. Na figura 4.2(b) tem-se a deformada da viga para a análise via NAESY.

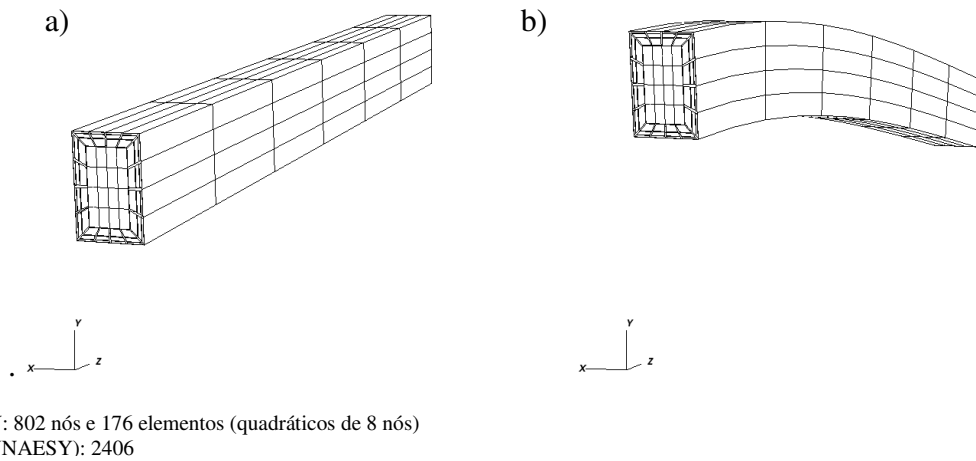
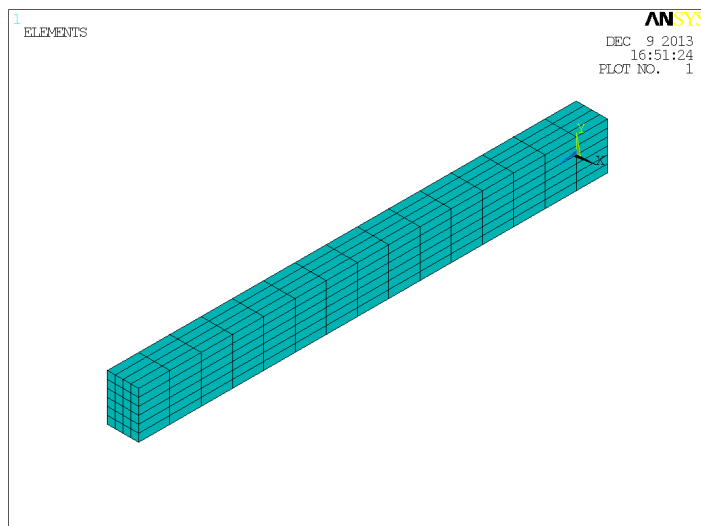


Figura 4.2 – Problema 1: Malha de elementos de contorno (a) e deformada (b) (NAESY).



ANSYS 13: 2013 nós e 360 elementos ('3-D 20-Node Structural Solid – SOLID 186')
NDOF (ANSYS 13): 6039

Figura 4.3 – Problema 1: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).

Através da Fig. 4.4, é possível observar os deslocamentos obtidos via programas NAESY e ANSYS 13 ao longo do eixo da viga. Os deslocamentos, fornecidos pelo programa NAESY, são maiores quando comparados aos obtidos no programa ANSYS 13 e isso pode ser justificado pela diferença entre as formulações de elementos de contorno e de elementos finitos, pois as soluções fundamentais utilizadas pelo método dos elementos de contorno são soluções analíticas e tendem a fornecer resultados mais precisos se os coeficientes das matrizes de contorno forem calculados de forma precisa.

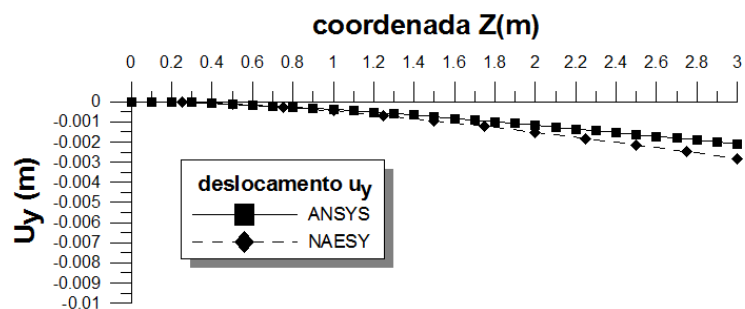


Figura 4.4 – Problema 1: Deslocamentos u_y ao longo do eixo da viga.

Resultados relativos às tensões σ_{zz} na seção engastada

Tabela 4.1 – Problema 1: Valores de σ_{zz} ao longo da altura y da seção engastada.

Coordenada Y	Valores σ_{zz}	Coordenada Y	Valores σ_{zz}
ANSYS 13 (m)	ANSYS 13 (kN/m ²)	NAESY (m)	NAESY (kN/m ²)
0.000	-3158.40	0.000	-5020.60
0.050	-1867.40	0.040	-2378.54
0.100	-916.49	0.095	-1168.44
0.150	-0.72	0.150	-0.54
0.200	915.29	0.205	1167.55
0.250	1867.00	0.260	2378.60
0.300	3164.90	0.300	5058.80

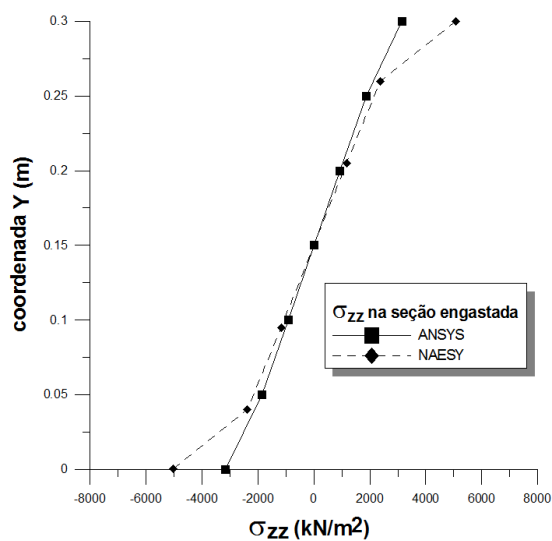


Figura 4.5 – Problema 1: Tensão σ_{zz} ao longo da altura y da seção engastada.

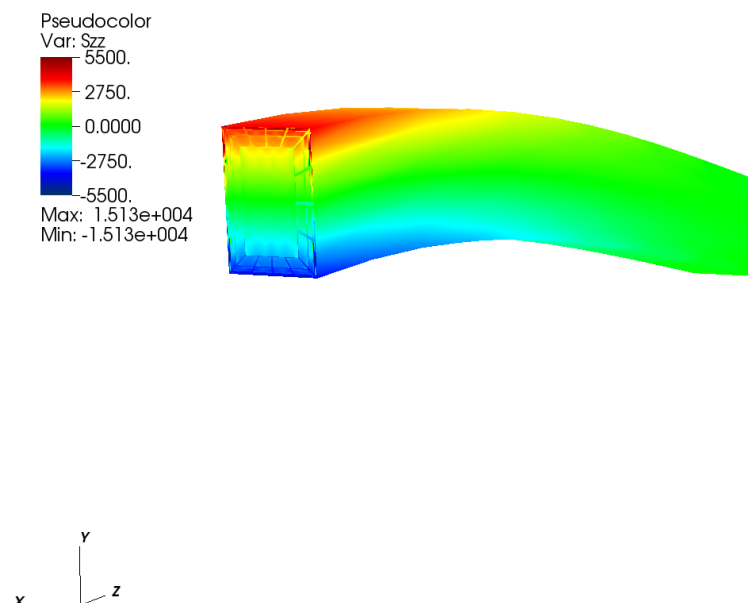


Figura 4.6 – Problema 1: Tensão σ_{zz} ao longo da viga.

A Tabela 4.1 mostra que os valores para as tensões σ_{zz} , obtidos pelo programa NAESY, são superiores aos fornecidos pelo ANSYS 13. Para verificar se os resultados estão corretos, desenvolveu-se um programa em linguagem de programação FORTRAN 90 (PROCESSING_RESULTS) que realiza integrações ao longo da superfície de tensões para obter esforços resultantes como momento fletor, esforço cortante e esforço normal, além de gerar arquivos de dados para posterior visualização pelo programa VisIt. As Figs. 4.7 e 4.8 mostram as superfícies para as tensões normais σ_{zz} fornecidas pelos programas NAESY e ANSYS 13 respectivamente.

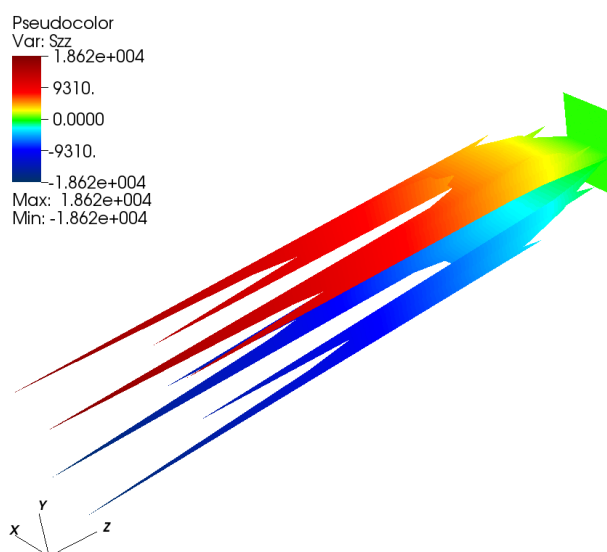


Figura 4.7 – Problema 1: Superfície para as tensões σ_{zz} ao longo da seção engastada da viga (NAESY).

O valor exato para o momento fletor na seção engastada é de 9 kN.m e pode ser facilmente calculado pela expressão de equilíbrio de momentos para um ponto qualquer na seção engastada. Utilizando a quadratura de Gauss, de dimensões 4x4, a integral $\int_A \sigma_{zz} y dA$ para a superfície da Fig.4.7 forneceu um valor para o momento fletor de aproximadamente 10.78 kN.m (em módulo). A superfície da Fig. 4.7 mostra um comportamento singular nos cantos das arestas da seção transversal da viga e, assim, a quadratura de Gauss padrão tende a fornecer resultados ruins para estas regiões. Portanto, a divergência encontrada para o valor do momento pode ser justificada pela ineficácia da quadratura de Gauss nessas regiões.

A Fig. 4.8 mostra a superfície para as tensões σ_{zz} fornecidas pelo programa ANSYS 13. É possível observar que a superfície é mais suave quando comparada à obtida via formulações de contorno (Fig. 4.7). A quadratura de Gauss (dimensões 4x4), forneceu um valor para o momento fletor de 8.86 kN.m (em módulo). Observou-se que a quadratura de Gauss forneceu resultados melhores nesse caso porque a superfície é suave.

Para todos os problemas onde o cálculo de esforços resultantes foi realizado via integração numérica, a quadratura de Gauss de dimensão 4x4, ou até mesmo de ordem inferior, convergia para um valor que não apresentava variações significativas se a ordem de integração fosse aumentada.

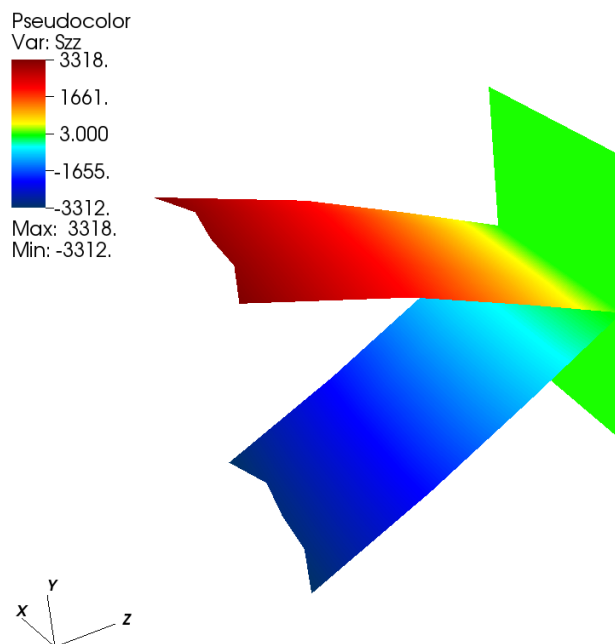


Figura 4.8 – Problema 1: Superfície para as tensões σ_{zz} ao longo da seção engastada da viga (ANSYS 13).

Resultados relativos às tensões τ_{yz} na seção engastada

Tabela 4.2 – Problema 1: Valores de τ_{yz} ao longo da altura y da seção engastada.

Coordenada Y	Valores τ_{yz}	Coordenada Y	Valores τ_{yz}
ANSYS 13 (m)	ANSYS 13 (kN/m ²)	NAESY (m)	NAESY (kN/m ²)
0.000	-325.89	0.003	-658.49
0.050	-131.78	0.039	-102.78
0.100	-86.68	0.095	157.21
0.150	-65.48	0.150	205.67
0.200	-88.61	0.205	155.63
0.250	-135.28	0.261	-106.47
0.300	-332.65	0.297	-667.23

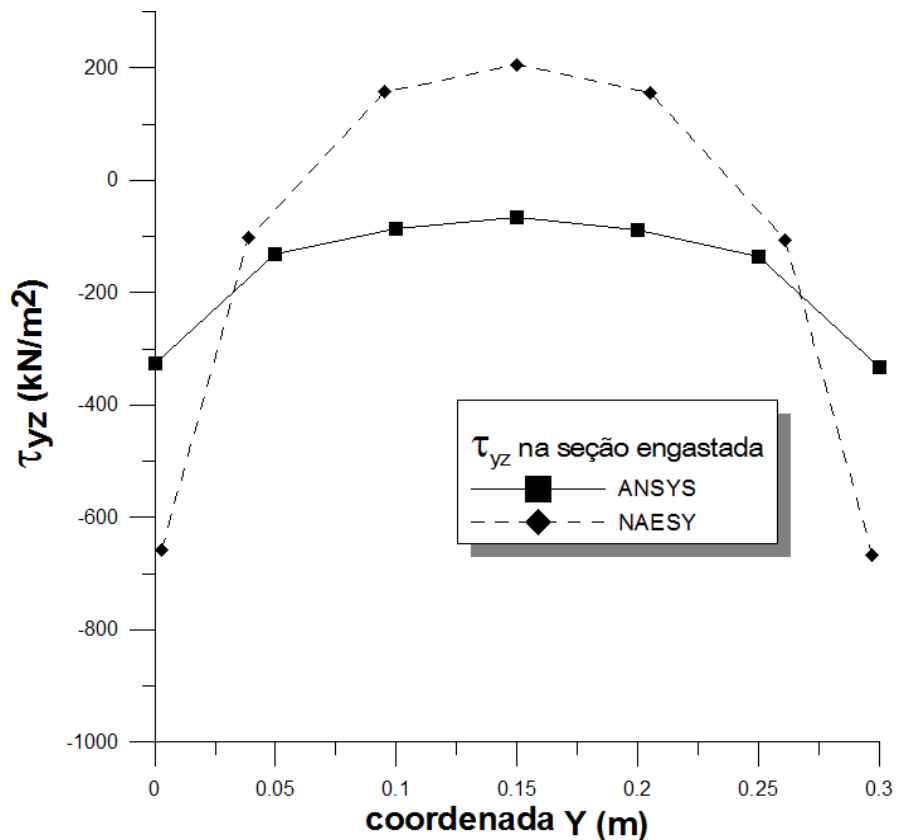


Figura 4.9 – Problema 1: Tensão τ_{yz} ao longo da altura y da seção engastada.

Pseudocolor
 Var: Syz
 1204.
 -1524.
 -4252.
 -6980.
 -9708.
 Max: 1204.
 Min: -9708.

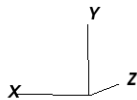
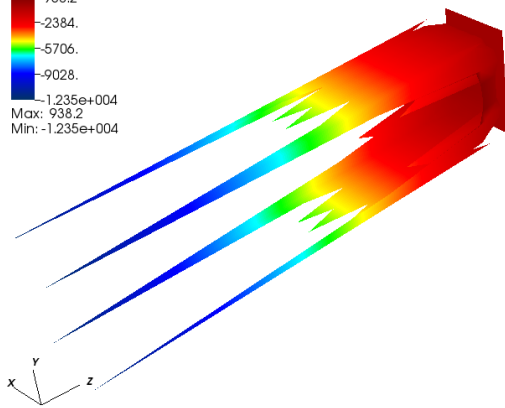


Figura 4.10 – Problema 1: Tensão τ_{yz} ao longo da viga.

Pseudocolor
 Var: Syz
 938.2
 -2384.
 -5706.
 -9028.
 -1,235e+004
 Max: 938.2
 Min: -1,235e+004



Pseudocolor
 Var: Syz
 938.2
 -2384.
 -5706.
 -9028.
 -1,235e+004
 Max: 938.2
 Min: -1,235e+004

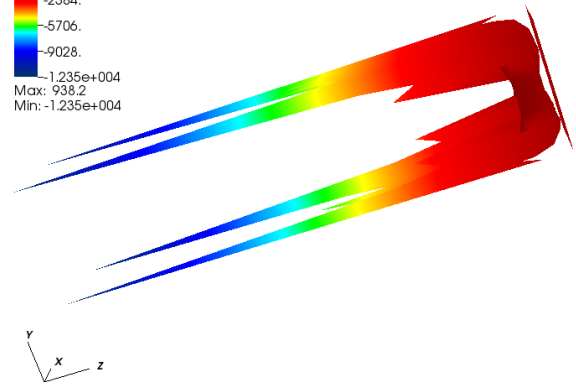


Figura 4.11 – Problema 1: Superfície para as tensões τ_{yz} ao longo da seção engastada da viga (NAESY).

A Tabela 4.2 também mostra grandes divergências entre os valores das tensões τ_{yz} para os programas NAESY e ANSYS 13. O programa PROCESSING_RESULTS possibilitou plotar as Figs. 4.11 e 4.12 que apresentam as superfícies para as tensões τ_{yz} fornecidas pelo NAESY e pelo ANSYS 13. Assim, a quadratura de Gauss (dimensão 4x4) foi empregada para calcular a integral $\int_A \tau_{yz} dA$ e, assim, obter o esforço cortante para ambas as superfícies. Integrando-se as superfícies das Figs. 4.11 (resultados via NAESY) e 4.12 (resultados via ANSYS 13), os

valores dos esforços cortantes foram de, respectivamente, 7.01 kN e 5.99 kN (em módulo). O valor exato é de 6kN (obtido pela expressão de equilíbrio das forças na direção y) e, devido ao comportamento singular das tensões τ_{yz} nos cantos das arestas da seção transversal (Fig.4.11), a quadratura de Gauss forneceu resultados melhores para a superfície da Fig. 4.12 (ANSYS 13), pois essa é suave.

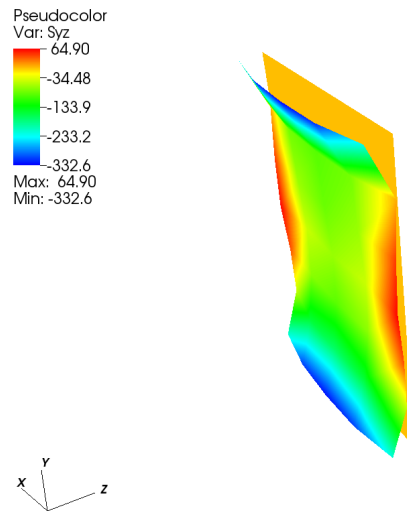


Figura 4.12 – Problema 1: Superfície para as tensões τ_{yz} ao longo da seção engastada da viga (ANSYS 13).

Resultados relativos às tensões σ_1 na seção engastada

Tabela 4.3 – Problema 1: Valores de σ_1 ao longo da altura y da seção engastada.

Coordenada Y ANSYS 13 (m)	Valores σ_1 ANSYS 13 (kN/m ²)	Coordenada Y NAESY (m)	Valores σ_1 NAESY (kN/m ²)
0.000	-359.800	0.011	-1250.903
0.050	-201.440	0.039	-954.025
0.100	-141.000	0.095	-465.595
0.150	64.633	0.150	205.286
0.200	925.400	0.205	1202.068
0.250	1878.000	0.261	2353.843
0.300	3204.300	0.300	4655.265

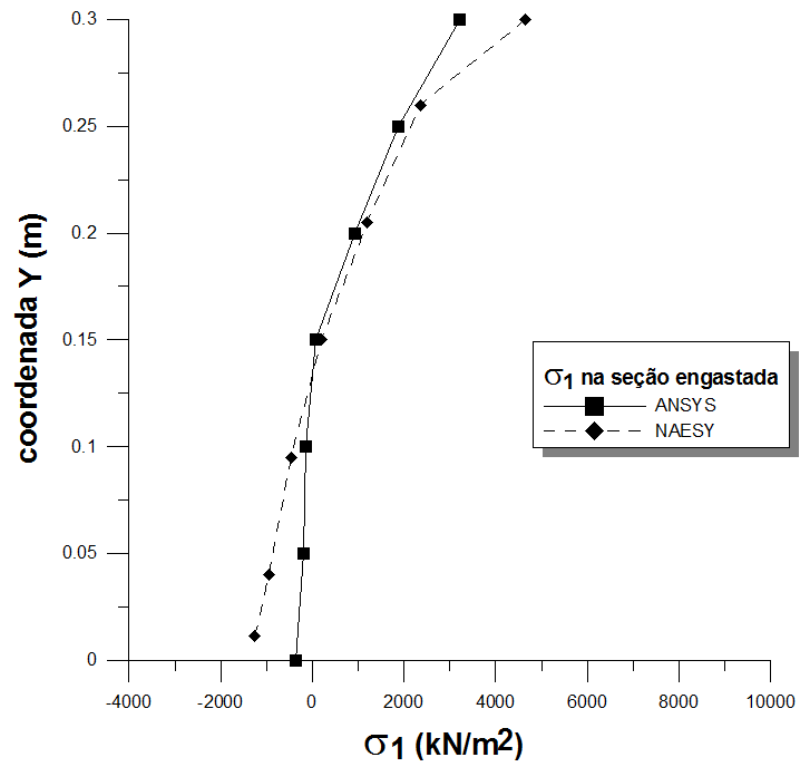


Figura 4.13 – Problema 1: Tensão σ_1 ao longo da altura y da seção engastada.

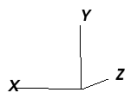
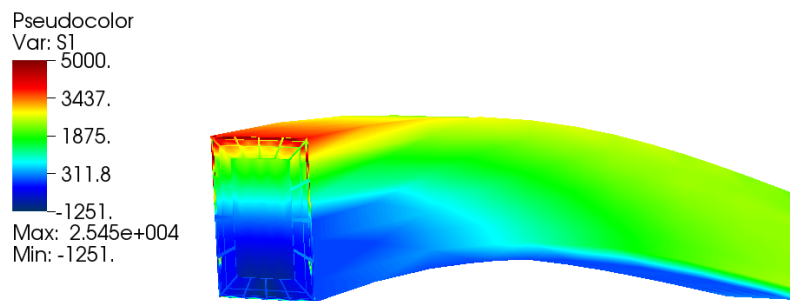


Figura 4.14 – Problema 1: Tensão σ_1 ao longo da viga.

Resultados relativos às tensões σ_3 na seção engastada

Tabela 4.4 – Problema 1: Valores de σ_3 ao longo da altura y da seção engastada.

Coordenada Y ANSYS 13 (m)	Valores σ_3 ANSYS 13 (kN/m ²)	Coordenada Y NAESY (m)	Valores σ_3 NAESY (kN/m ²)
0.000	-3196.40	0.000	-4634.78
0.050	-1877.80	0.040	-2381.24
0.100	-926.18	0.095	-1203.60
0.150	-66.32	0.150	-206.06
0.200	138.36	0.205	465.86
0.250	196.85	0.260	1016.35
0.300	354.37	0.289	1247.77

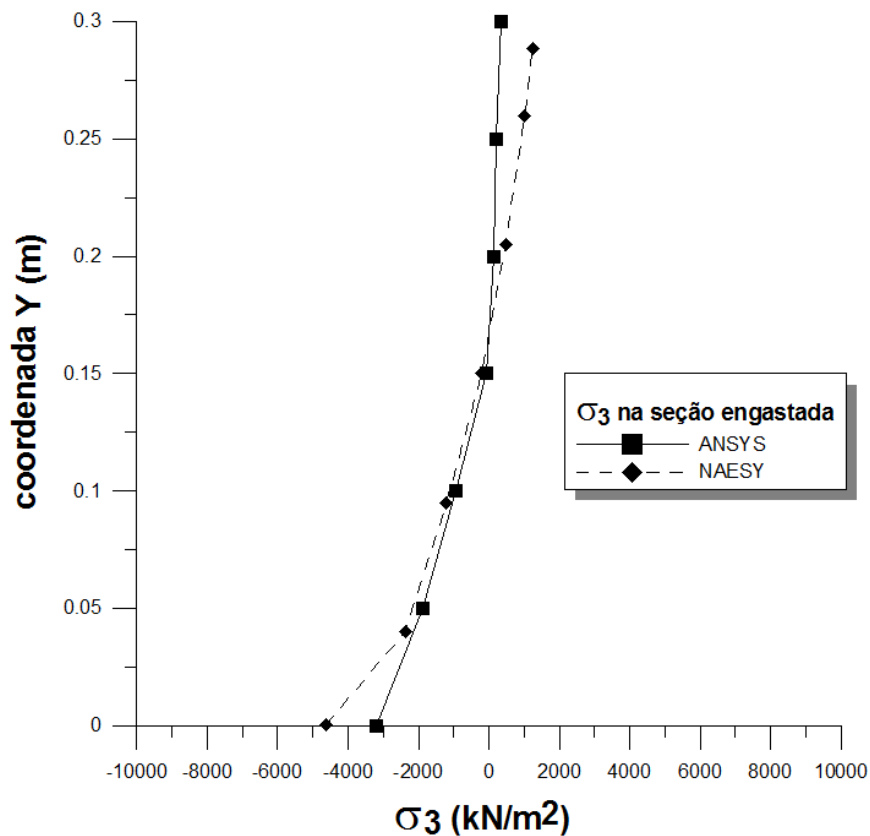


Figura 4.15 – Problema 1: Tensão σ_3 ao longo da altura y da seção engastada.

A comparação entre os resultados, relativos às tensões σ_1 (Tabela 4.3 e Figs. 4.13 e 4.14) e σ_3 (Tabela 4.4 e Figs. 4.15 e 4.16) para os programas NAESY e ANSYS 13, também divergem. As tabelas e gráficos desse problema sempre mostram valores maiores para os resultados obtidos via formulações de contorno (NAESY) que identifica concentração de tensões pelo fato da presença de condições de contorno de deslocamentos. Observou-se que as superfícies das tensões que foram plotadas para o ANSYS 13 (Figs. 4.8 e 4.12) foram suaves ao contrário das mesmas superfícies fornecidas pelo NAESY (Figs. 4.7 e 4.11). Assim, as diferenças para as tensões σ_1 e σ_3 podem também ser explicadas pela diferença entre as formulações do MEC e MEF. Os esforços resultantes calculados (momento fletor e esforço cortante) mostram que, apesar das diferenças apresentadas pelo estado tensional fornecido pelo NAESY, que podem ser justificadas pela ineficácia da quadratura de Gauss nas regiões com comportamento singular, os resultados não podem ser considerados insatisfatórios ou mesmo incoerentes.

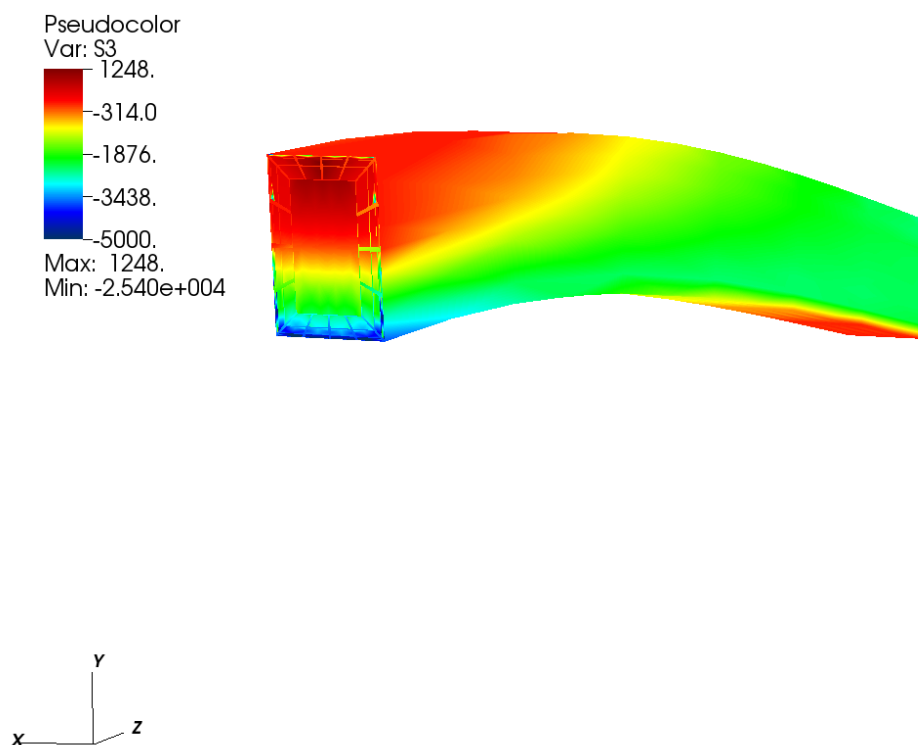


Figura 4.16 – Problema 1: Tensão σ_3 ao longo da viga.

O objetivo através dos três primeiros problemas é avaliar, via análise 3D, o comportamento de vigas em geral e, por isso, foram analisadas vigas com relações altura/comprimento (h/l)

pequenas (problema 1) e grandes (problema 3), além de uma viga soldada para avaliar o comportamento de elementos estruturais de parede fina (problema 2). Os resultados obtidos pelas comparações realizadas para o problema 1 revelam que, em geral, as respostas em termos de tensão foram maiores para a análise via MEC, o que pode ser justificado pela diferença entre as formulações do MEC e do MEF. De fato, as formulações do MEC são semi-analíticas, o que aumenta a precisão dos resultados, sobretudo em zonas onde existem concentração de tensões como ocorre na seção engastada da viga do problema 1, em especial nos cantos das arestas. Outro fato observado é que as superfícies de tensões obtidas pelos resultados fornecidos pelo programa ANSYS 13 são suaves e, assim, o comportamento das tensões para o MEC e para o MEF foram diferentes. Ressalte-se que, mesmo refinando-se demasiadamente a malha para análise via MEF, os resultados pouco se modificaram. Os esforços resultantes calculados apresentaram diferenças maiores para as análises via MEC e podem ser justificadas pela ineficácia da quadratura de Gauss em calcular integrais em regiões singulares como em regiões próximas aos cantos das arestas e, assim, procedimentos especiais de integração devem ser aplicados para calcular essas integrais de forma mais precisa.

4.2 PROBLEMA 2 - VIGA METÁLICA ESBELTA BIENGASTADA SOB FLEXÃO SIMPLES

Nesse problema, foi realizada a análise de uma viga metálica esbelta biengastada VS 400x35 (NBR 5884, 2005). O flange tem largura b_f de 140mm e espessura t_f de 9,5mm e a alma tem altura h_w de 381mm e espessura t_w de 4,75mm. A viga de comprimento 4m foi submetida a uma carga uniformemente distribuída q de 15kN/m² (Fig. 4.17). A análise foi realizada considerando-se três subregiões, com duas subregiões relativas às duas mesas e uma relativa à alma do perfil I. O módulo de elasticidade longitudinal do aço é de 200GPa e o coeficiente de Poisson é 0.3. Para esse problema, tensões normais σ_{zz} (Tabela 4.5, Figs. 4.21 e 4.22) e tensões de von Mises (Tabela 4.6, Figs. 4.23 e 4.24), foram comparadas na seção central da viga com resultados obtidos pelo software comercial ANSYS 13. O *solver* de Krylov utilizado foi o BiCG (Saad, 1995).

As Figs. 4.18(a), 4.18(c) e 4.19 apresentam detalhes das malhas de elementos que foram empregadas para a análise desse problema pelos programas NAESY e ANSYS 13. Na Fig. 4.18(b) é apresentada a deformada da viga fornecida pelo NAESY.

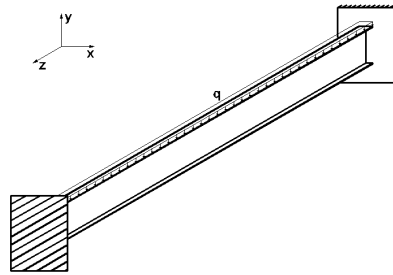
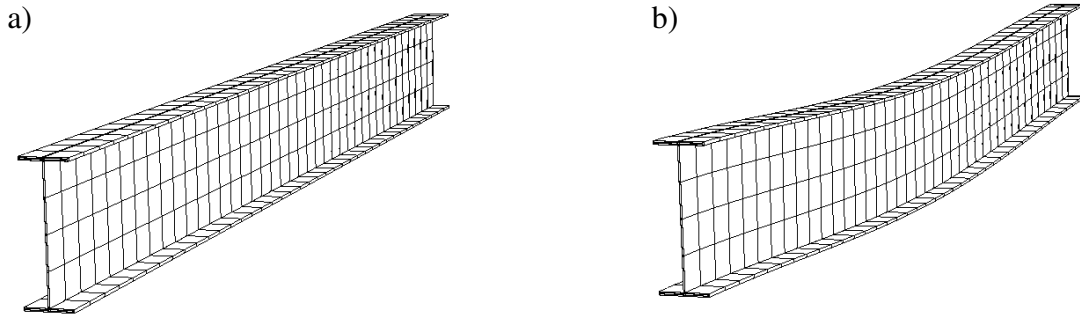


Figura 4.17 – Problema 2: Viga metálica esbelta biengastada sob flexão simples.



NAESY: 4704 nós e 1092 elementos (quadráticos de 8 nós)
 NDOF (NAESY): 14112
 N^o de iterações do solver BiCG: 1054 (aproximadamente 7.5% de NDOF)

Figura 4.18 – Problema 2: Malha de elementos de contorno (a) e deformada (b) (NAESY).

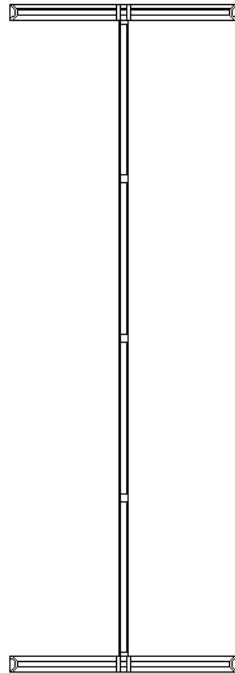
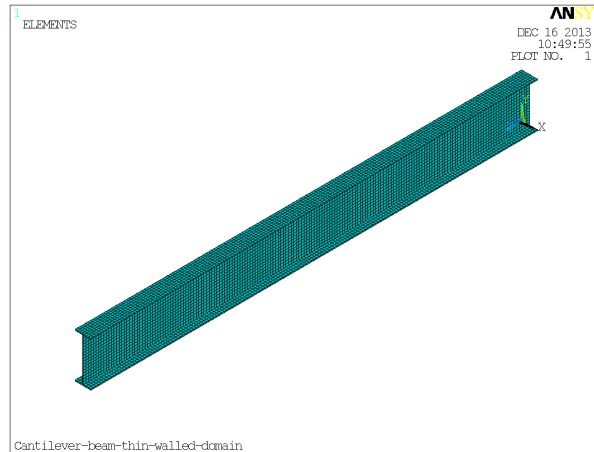


Figura 4.18(c) – Problema 2: Detalhes do refinamento para a seção engastada.



ANSYS 13: 38.786 nós e 5394 elementos ('3-D 20-Node Structural Solid – SOLID 186')
NDOF (ANSYS 13): 116358

Figura 4.19 – Problema 2: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).

Os deslocamentos fornecidos pelos programas NAESY e ANSYS 13 podem ser comparados através da Fig. 4.20, onde é possível observar que ambos são próximos uns dos outros.

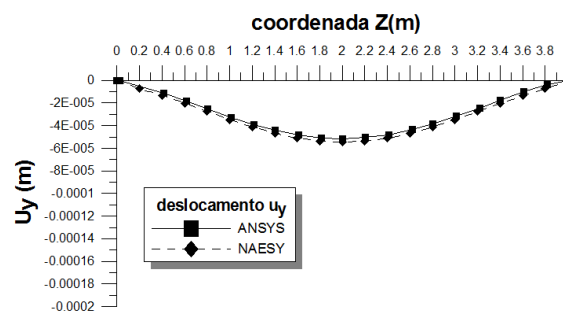


Figura 4.20 – Problema 2: Deslocamentos u_y ao longo do eixo da viga.

Resultados relativos às tensões σ_{zz} na seção central da viga

Tabela 4.5 – Problema 2: Valores de σ_{zz} ao longo da altura y da seção central da viga.

Coordenada Y ANSYS 13 (m)	Valores σ_{zz} ANSYS 13 (kN/m ²)	Coordenada Y NAESY (m)	Valores σ_{zz} NAESY (kN/m ²)
0.0095	2156.60	0.0095	2253.00
0.0543	1622.70	0.0571	1529.98
0.3009	-1223.40	0.2953	-1107.88
0.3457	-1744.80	0.3429	-1641.00
0.3905	-2648.00	0.3905	-2579.38

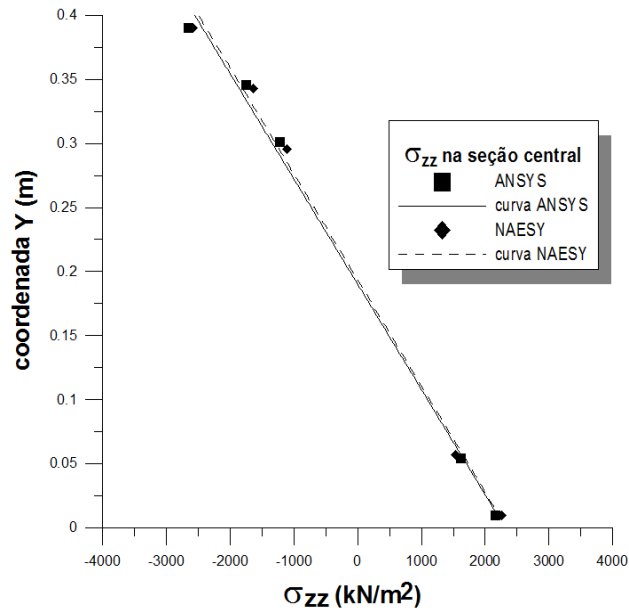


Figura 4.21 – Problema 2: Tensão σ_{zz} ao longo da altura y da seção central da viga.

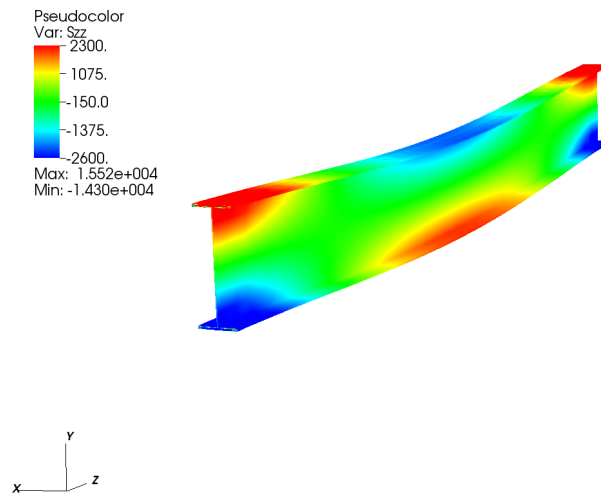


Figura 4.22 – Problema 2: Tensão σ_{zz} ao longo da viga.

O gráfico presente na Fig. 4.21 e os valores presentes na Tabela 4.5 apresentam uma maior concordância entre os resultados devido ao fato de a seção analisada estar no centro da viga e, assim, distante das seções onde estão presentes condições de contorno de deslocamentos. É possível observar ainda que as formulações de contorno forneceram bons resultados para o cálculo de tensões em membros estruturais de parede fina e o refinamento não precisou ser demasiadamente tão intenso como em formulações de elementos finitos, que exigem elementos com geometrias não muito distorcidas de forma a gerar uma matriz global do

sistema bem condicionada. De forma semelhante, bons resultados foram alcançados para as tensões de von Mises (Tabela 4.6 e Figs. 4.23 e 4.24).

Resultados relativos às tensões de von Mises na seção central da viga

Tabela 4.6 – Problema 2: Valores das tensões de von Mises ao longo da altura y da seção central da viga.

Coordenada Y ANSYS 13 (m)	Valores von Mises ANSYS 13 (kN/m ²)	Coordenada Y NAESY (m)	Valores von Mises NAESY (kN/m ²)
0.010	2159.50	0.010	2073.26
0.054	1647.50	0.057	1549.62
0.301	1101.60	0.295	992.66
0.346	1605.10	0.343	1499.98
0.391	2170.90	0.391	2022.93

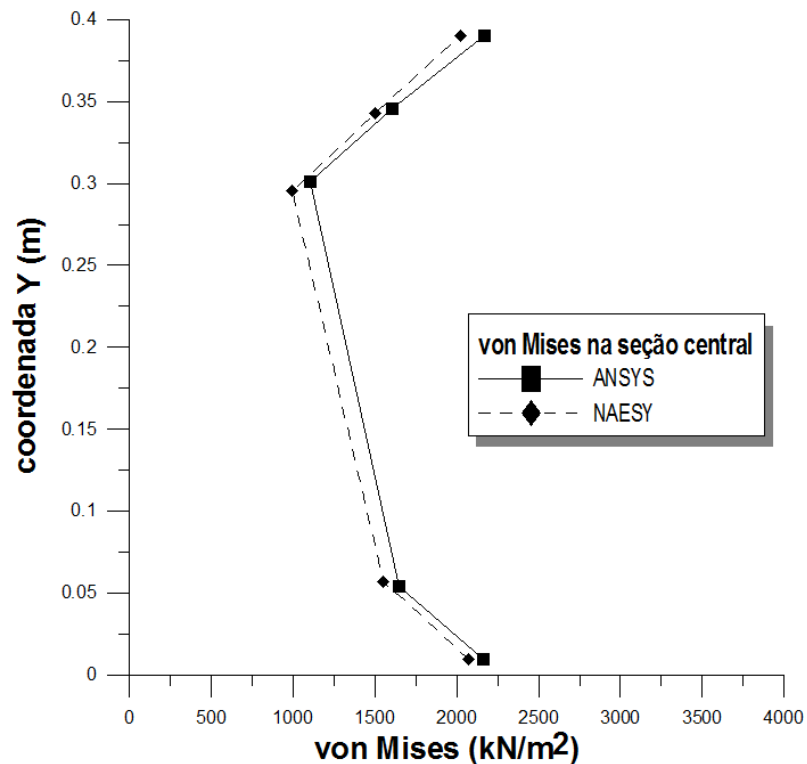


Figura 4.23 – Problema 2: Tensão de von Mises ao longo da altura y da seção central da viga.

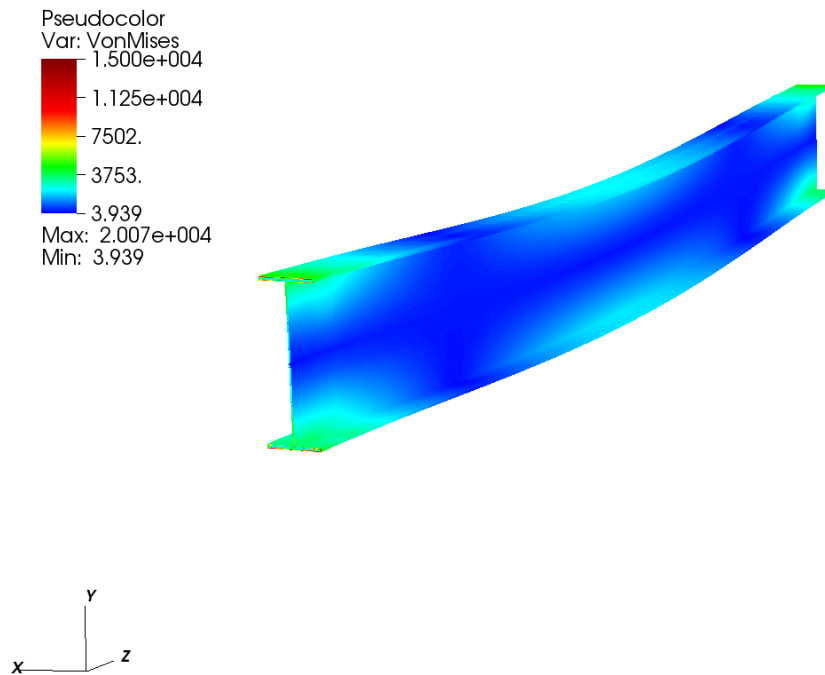


Figura 4.24 – Problema 2: Tensão de von Mises ao longo da viga.

4.3 PROBLEMA 3 - VIGA PAREDE ENGASTADA E LIVRE SOB FLEXÃO SIMPLES

O problema 3 trata-se de uma viga parede engastada e livre, não subestruturada, com seção transversal retangular de base b igual a 0.3m, altura h de 1.5m e comprimento l igual a 3m. A viga parede foi submetida a um carregamento distribuído q de 500kN/m² em sua superfície superior como mostra a Fig. 4.25. O material da viga é o concreto com módulo de elasticidade longitudinal de 21.7GPa e coeficiente de Poisson igual a 0.2. O objetivo nesse problema é avaliar o comportamento das tensões σ_{zz} (Tabela 4.7, Figs. 4.29-4.32), τ_{yz} (Tabela 4.8, Figs. 4.33- 4.36), σ_1 (Tabela 4.9, Figs. 4.37 e 4.38) e σ_3 (Tabela 4.10, Figs. 4.39 e 4.40) na seção transversal engastada, e comparar com respostas obtidas com o software comercial ANSYS 13 via formulações de elementos finitos. As malhas de elementos de contorno (NAESY) e de elementos finitos (ANSYS 13) estão presentes nas Figs. 4.26(a) e 4.27 respectivamente. A Fig. 4.26(b) mostra a deformada da viga.

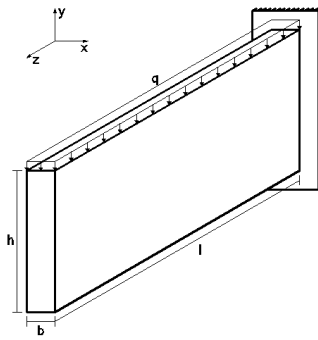
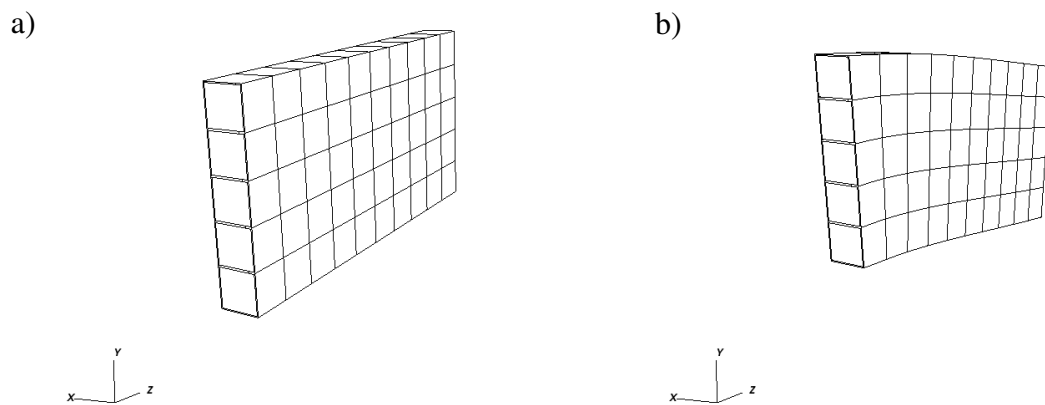
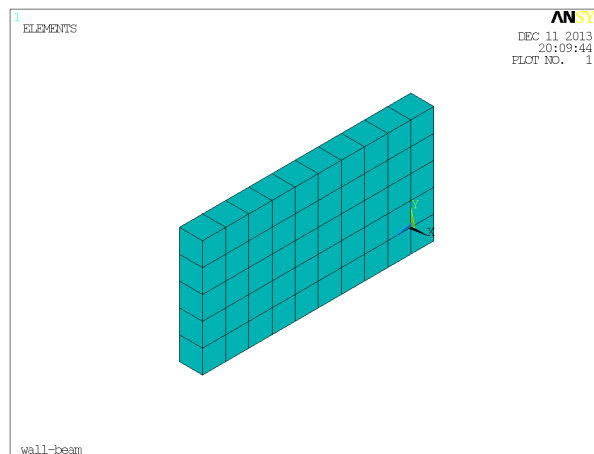


Figura 4.25 – Problema 3: Viga parede engastada e livre sob flexão simples.



NAESY: 428 nós e 130 elementos (quadráticos de 8 nós);
NDOF (NAESY): 1284

Figura 4.26 – Problema 3: Malha de elementos de contorno (a) e deformada (b) (NAESY).



ANSYS 13: 428 nós e 50 elementos ('3-D 20-Node Structural Solid – SOLID 186').
NDOF (ANSYS 13):1284

Figura 4.27 – Problema 3: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).

Através da Fig. 4.28 observar-se que os deslocamentos calculados pelos programas NAESY e ANSYS 13 são muito próximos um do outro de modo que não é possível distinguir diferenças entre as duas curvas apresentadas.

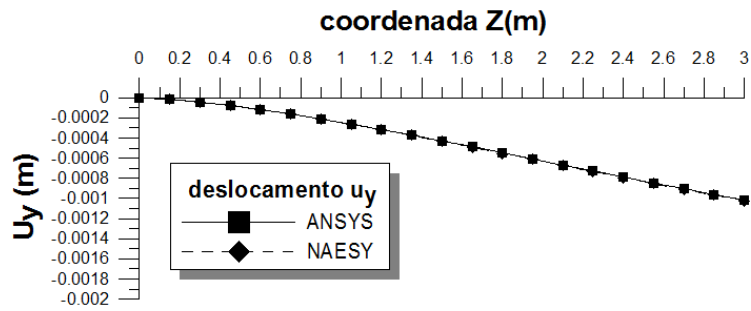


Figura 4.28 – Problema 3: Deslocamentos u_y ao longo do comprimento da viga.

Resultados relativos às tensões σ_{zz} na seção engastada

Tabela 4.7 – Problema 3: Valores de σ_{zz} ao longo da altura y da seção engastada.

Coordenada Y	Valores σ_{zz}	Coordenada Y	Valores σ_{zz}
ANSYS 13 (m)	ANSYS 13 (kN/m ²)	NAESY (m)	NAESY (kN/m ²)
0.000	-7304.00	0.008	-9933.51
0.300	-2667.70	0.293	-3855.53
0.600	-959.45	0.593	-1174.10
0.900	848.32	0.908	1014.67
1.200	2502.10	1.208	3827.89
1.500	7857.50	1.493	11104.15

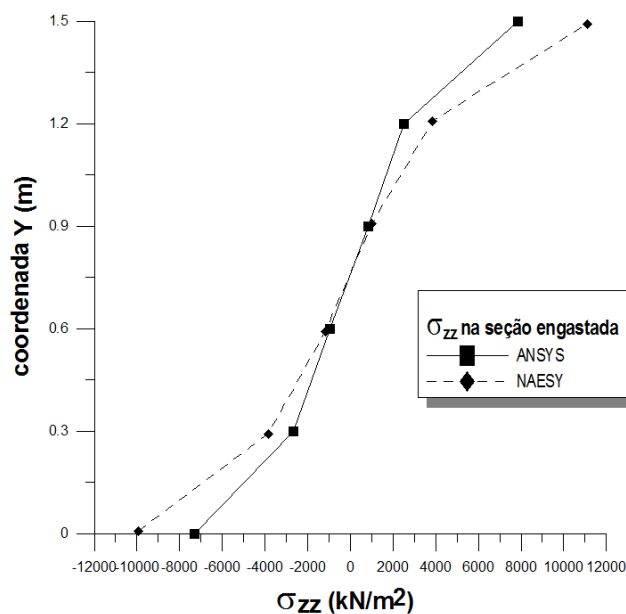


Figura 4.29 – Problema 3: Tensão σ_{zz} ao longo da altura y da seção engastada.

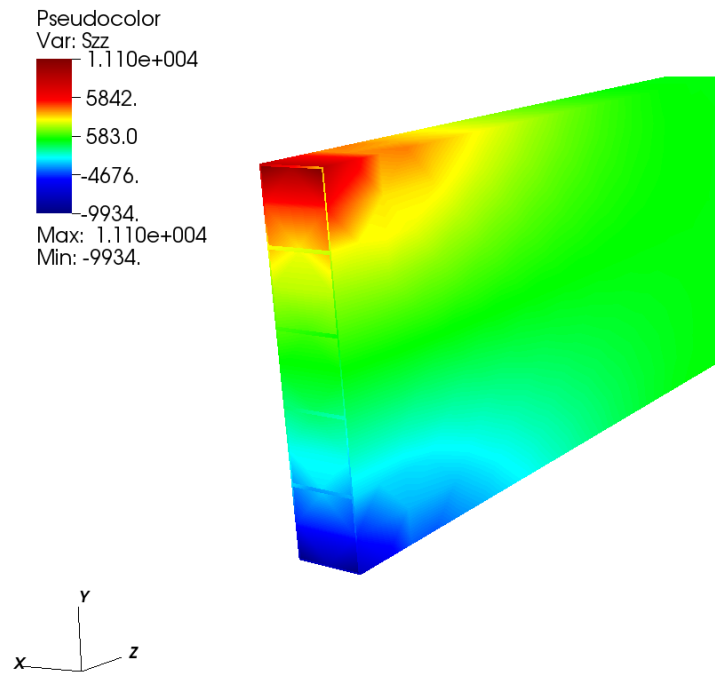


Figura 4.30 – Problema 3: Tensão σ_{zz} ao longo da viga.

De forma análoga ao problema 1, os resultados obtidos para as tensões σ_{zz} (Tabela 4.7, Figs. 4.29 e 4.30) e τ_{yz} (Tabela 4.8, Figs. 4.33 e 4.34) apresentaram divergências consideráveis. Assim, esforços resultantes foram calculados (momento fletor e esforço cortante) para verificar as respostas obtidas em termos de tensões. As Figs. 4.31 e 4.32 mostram as superfícies para as tensões σ_{zz} fornecidas via análises realizadas pelo NAESY e ANSYS 13 respectivamente. Integrando-se a expressão $\int_A \sigma_{zz} y dA$ empregando a quadratura de Gauss (dimensão 4x4), os valores do momento fletor foram de 718.01 kN.m para a superfície da Fig. 4.31 (NAESY) e 650.43 kN.m para a superfície da Fig. 4.32 (ANSYS 13). A expressão do equilíbrio de momentos para qualquer ponto na seção engastada fornece um valor exato para o momento fletor de 675 kN.m e, assim, os resultados obtidos para ambas as análises (NAESY e ANSYS 13) apresentam uma diferença na faixa de aproximadamente 25 a 43 kN.m. Valores mais próximos do valor exato talvez possam ser obtidos se for realizado um maior refinamento da malha na seção engastada. Por outro lado, as formulações de contorno podem identificar o comportamento singular nos cantos das arestas da seção engastada e, assim, a quadratura de Gauss torna-se ineficaz para o cômputo das integrais nas proximidades dessa região e procedimentos especiais de integração precisariam ser empregados.

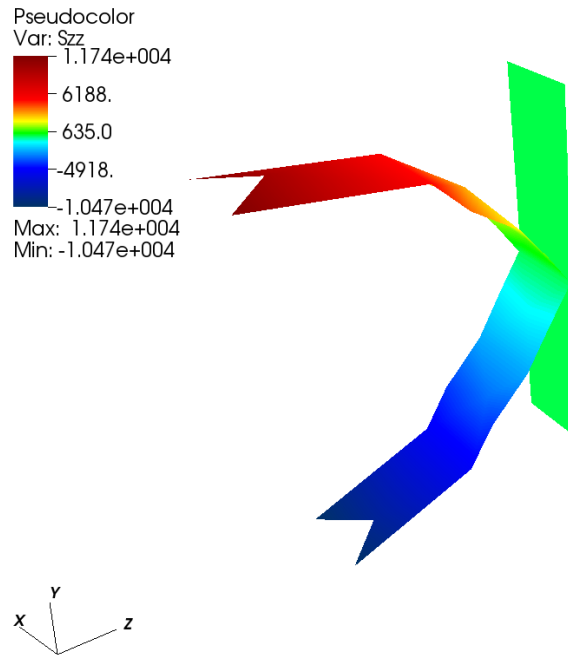


Figura 4.31 – Problema 3: Superfície para as tensões σ_{zz} ao longo da seção engastada da viga (NAESY).

Comparando a superfície para as tensões σ_{zz} do problema 1 (Fig. 4.7) com a superfície da Fig. 4.31 observa-se que esta última apresenta uma maior suavidade, pois o refinamento é bem menor quando comparado ao realizado no problema 1 e, assim, o comportamento singular das respostas em termos de tensões nos cantos das arestas da seção engastada não é tão pronunciado quanto os presentes no problema 1.

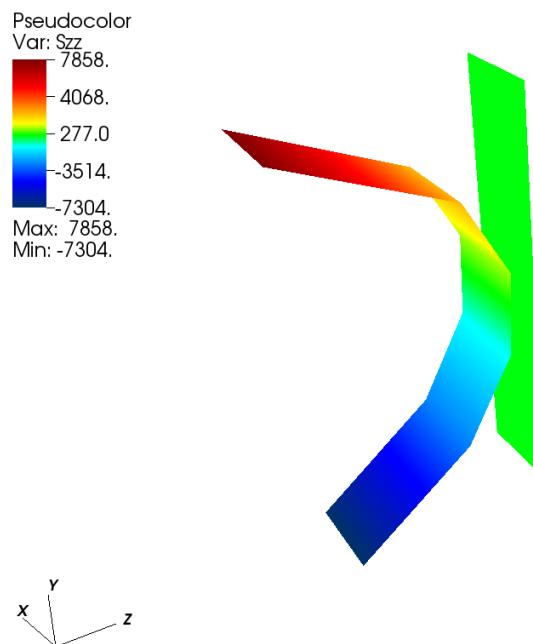


Figura 4.32 – Problema 3: Superfície para as tensões σ_{zz} ao longo da seção engastada da viga (ANSYS 13).

Resultados relativos às tensões τ_{yz} na seção engastada

Tabela 4.8 – Problema 3: Valores de τ_{yz} ao longo da altura y da seção engastada.

Coordenada Y ANSYS 13 (m)	Valores τ_{yz} ANSYS 13 (kN/m ²)	Coordenada Y NAESY (m)	Valores τ_{yz} NAESY (kN/m ²)
0.000	-1353.80	0.008	-1936.35
0.300	-722.39	0.293	-887.07
0.600	-852.74	0.608	-835.07
0.900	-915.64	0.908	-901.23
1.200	-885.36	1.208	-1135.69
1.500	-1894.00	1.493	-2721.84

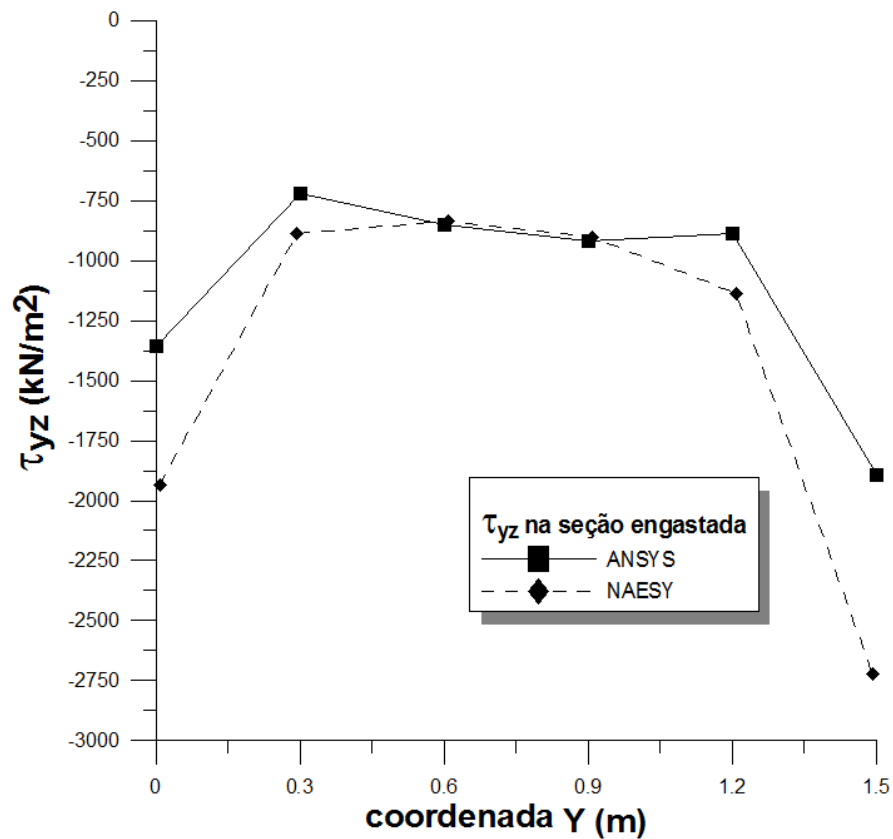


Figura 4.33 – Problema 3: Tensão τ_{yz} ao longo da altura y da seção engastada.

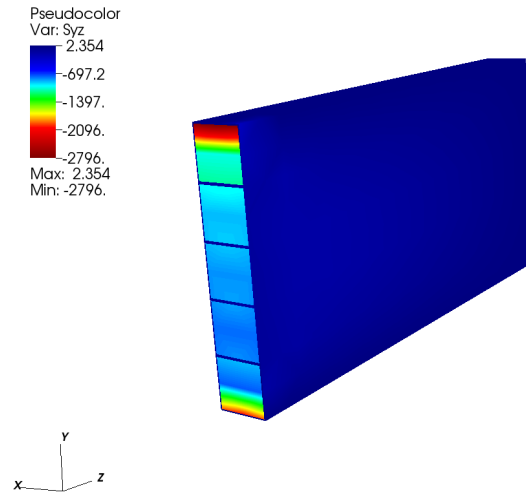


Figura 4.34 – Problema 3: Tensão τ_{yz} ao longo da viga.

Novamente, é possível observar divergências para as tensões τ_{yz} fornecidas pelos programas NAESY e ANSYS 13. Os esforços cortantes obtidos calculando-se a integral $\int_A \tau_{yz} dA$ com a quadratura de Gauss (dimensão 4x4) foram de 454.38 kN e 448.33 kN para as superfícies das Figs. 4.35 (NAESY) e 4.36 (ANSYS 13) respectivamente. O valor exato do cortante é de 450 kN (obtido pela expressão de equilíbrio das forças da direção y) e, assim, os valores calculados para o NAESY e para o ANSYS 13 são bem próximos ao valor exato porque ambas as superfícies, Figs. 4.35 e 4.36, são suaves e então a quadratura de Gauss calcula as integrais com grande precisão.

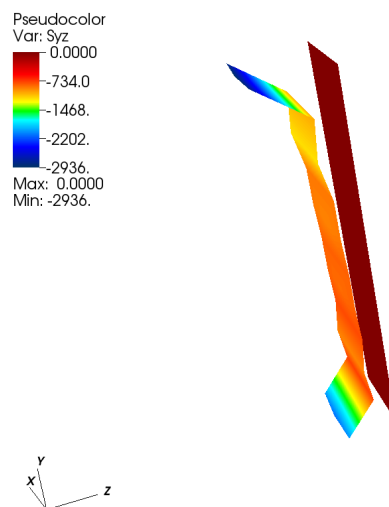


Figura 4.35 – Problema 3: Superfície para as tensões τ_{yz} ao longo da seção engastada da viga (NAESY).

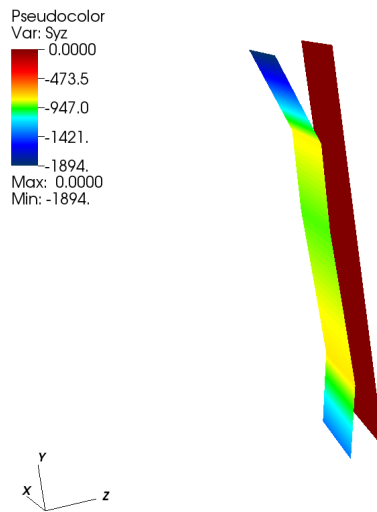


Figura 4.36 – Problema 3: Superfície para as tensões τ_{yz} ao longo da seção engastada da viga (ANSYS 13).

Resultados relativos às tensões σ_1 na seção engastada

Tabela 4.9 – Problema 3: Valores de σ_1 ao longo da altura y da seção engastada.

Coordenada Y ANSYS 13 (m)	Valores σ_1 ANSYS 13 (kN/m ²)	Coordenada Y NAESY (m)	Valores σ_1 NAESY (kN/m ²)
0.000	-816.64	0.008	-1683.88
0.300	-129.69	0.293	-544.81
0.600	346.77	0.608	260.07
0.900	1510.70	0.908	1645.60
1.200	2890.20	1.208	4369.07
1.500	8494.70	1.493	12207.17

Assim como no problema 1, as tensões σ_1 (Tabela 4.9) e σ_3 (Tabela 4.10), fornecidas pelo programa NAESY, são superiores às fornecidas pelo programa ANSYS 13. Essa diferença pode ser justificada, novamente, pelas diferenças entre as formulações de elementos finitos e elementos de contorno. Por ser baseado em formulações integrais e admitindo que as integrais sejam calculadas com boa precisão, o MEC é eficiente em zonas onde ocorrem concentrações de tensões como é o caso das seções engastadas das vigas do problema 1 e do problema 3.

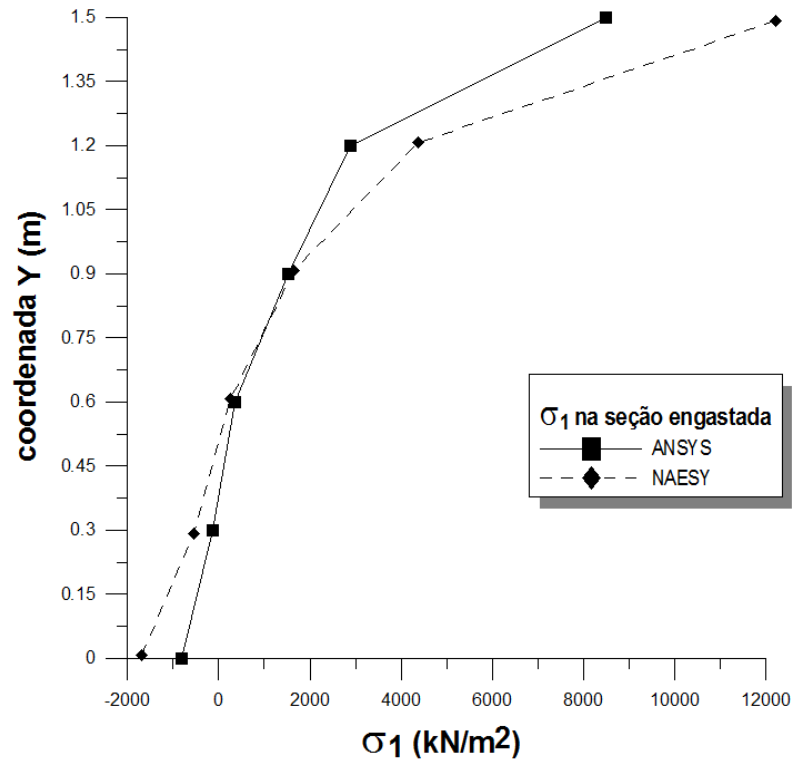


Figura 4.37 – Problema 3: Tensão σ_1 ao longo da altura y da seção engastada.

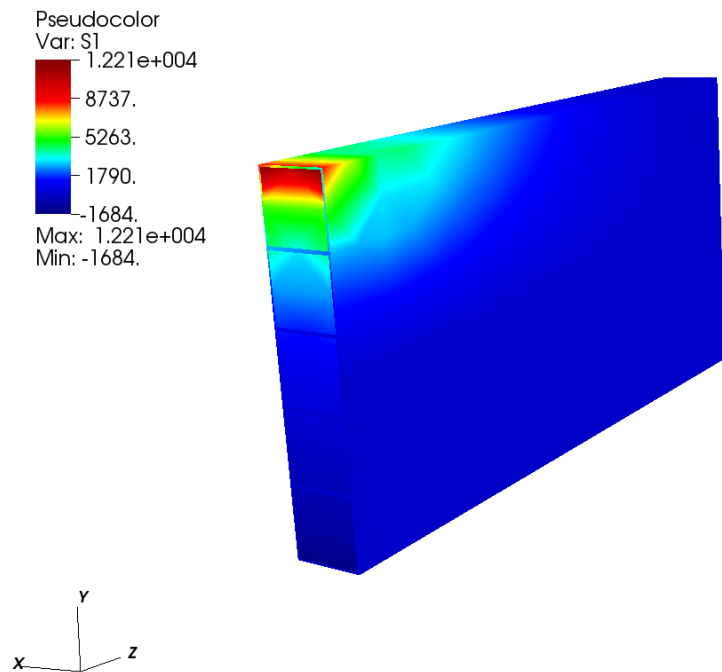


Figura 4.38 – Problema 3: Tensão σ_1 ao longo da viga.

Resultados relativos às tensões σ_3 na seção engastada

Tabela 4.10 – Problema 3: Valores de σ_3 ao longo da altura y da seção engastada.

Coordenada Y ANSYS 13 (m)	Valores σ_3 ANSYS 13 (kN/m ²)	Coordenada Y NAESY (m)	Valores σ_3 NAESY (kN/m ²)
0.000	-7731.20	0.008	-10733.01
0.300	-2958.70	0.293	-4274.60
0.600	-1538.30	0.593	-1720.87
0.900	-450.05	0.893	-380.45
1.200	-7.92	1.208	415.79
1.500	734.09	1.493	1673.01

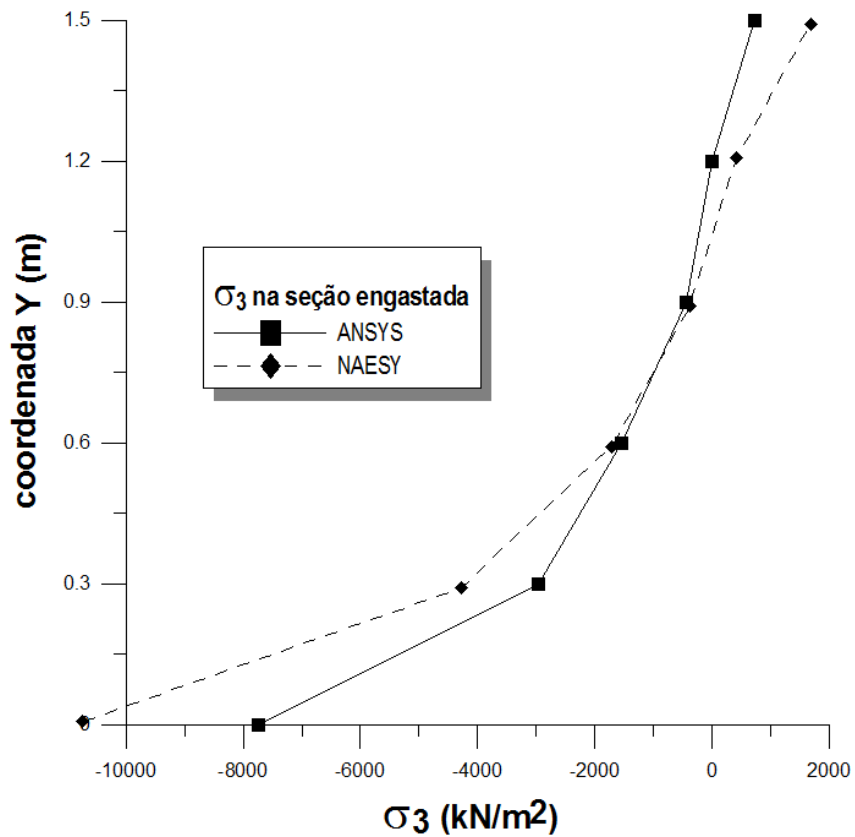


Figura 4.39 – Problema 3: Tensão σ_3 ao longo da altura y da seção engastada.

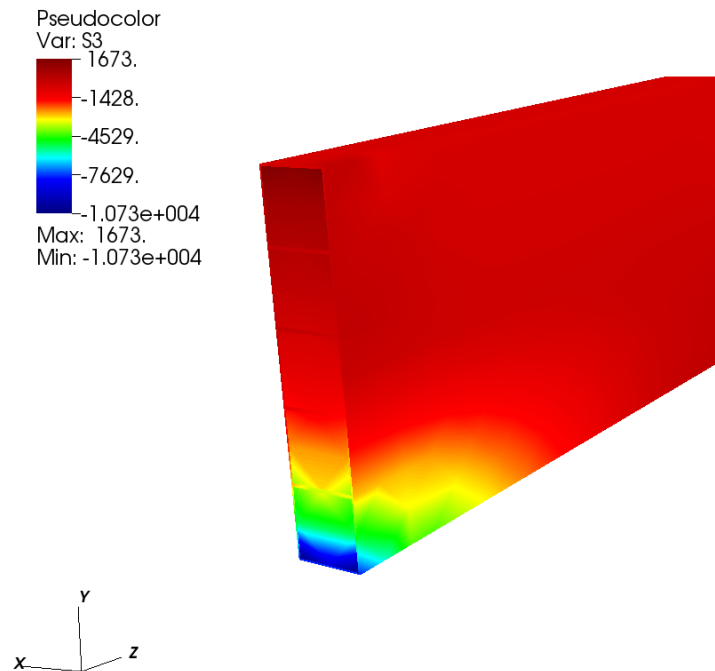


Figura 4.40 – Problema 3: Tensão σ_3 ao longo da viga.

4.4 PROBLEMA 4 - PLACA ESPESSA SOB FLEXÃO E ENGASTADA NAS EXTREMIDADES

Uma placa quadrada, não subestruturada, de dimensões l igual 3m e espessura de 0.3m ($l/e=10$), foi submetida a um carregamento distribuído q de 10kN/m^2 em sua superfície superior. A placa foi engastada na área hachurada em sua parte inferior conforme Fig. 4.41. O material da placa é o concreto com módulo de elasticidade longitudinal de 21.7GPa e coeficiente de Poisson igual a 0.2. Para esse problema tensões σ_{xx} (Tabelas 4.11 e 4.12, Figs. 4.46-4.49) e σ_{zz} (Tabelas 4.13 e 4.14, Figs. 4.51-4.54) foram comparadas com as obtidas via software comercial ANSYS 13 em nós presentes ao longo das duas linhas da região superior da placa (Fig. 4.42 (a)) e das duas linhas da região inferior da placa (Fig. 42 (b)) que correspondem a regiões predominantes de compressão e tração respectivamente.

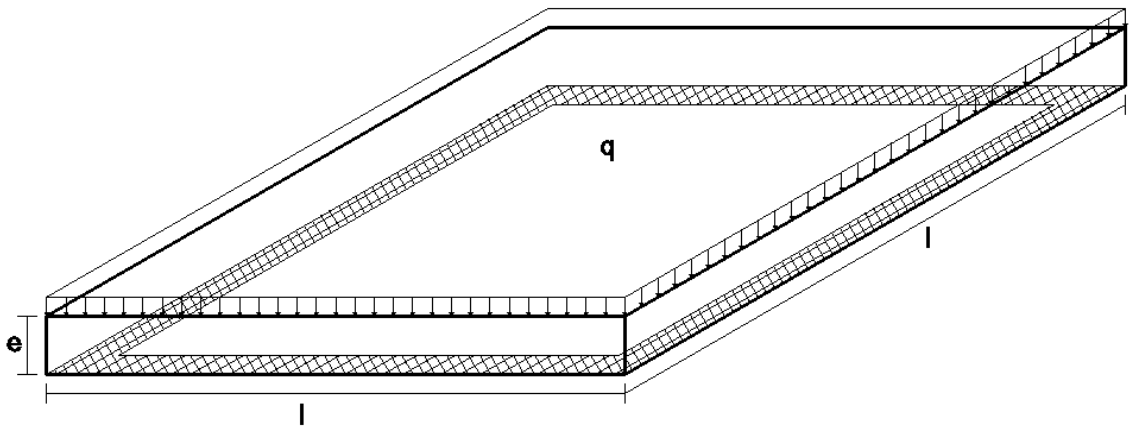


Figura 4.41 – Problema 4: Placa espessa sob flexão e engastada nas extremidades.

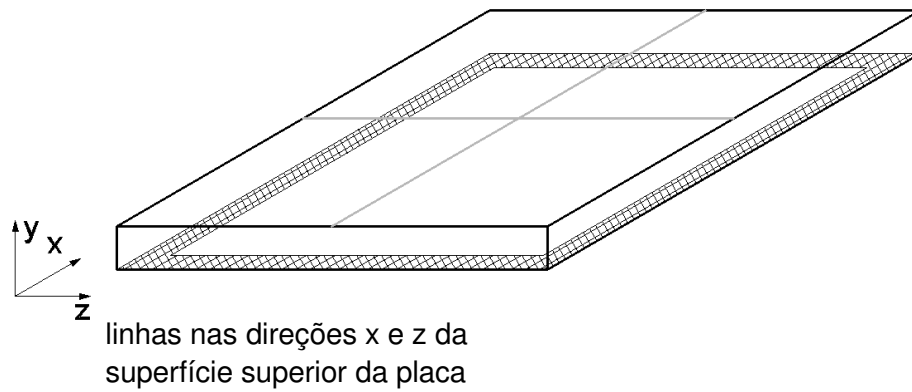


Figura 4.42(a) – Problema 4: Linhas superiores que contêm os nós onde tensões foram comparadas.

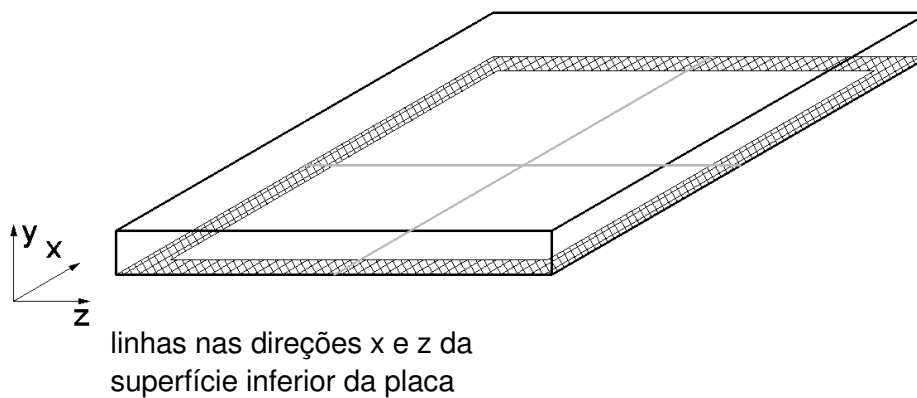
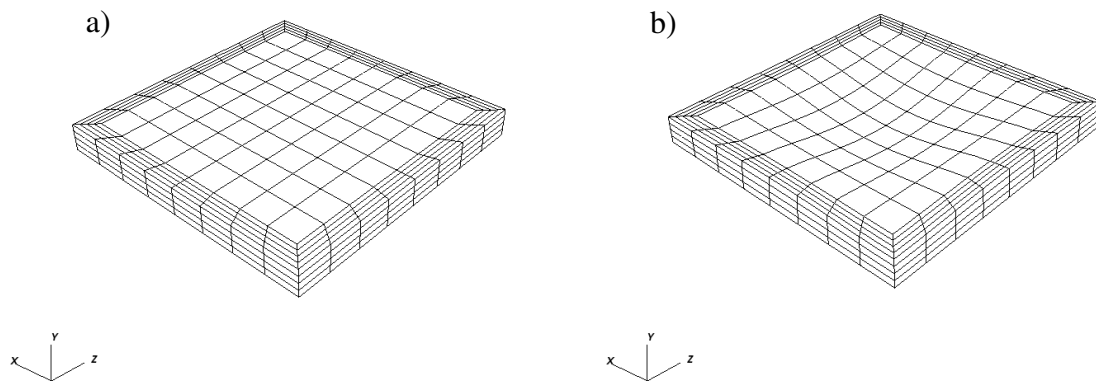


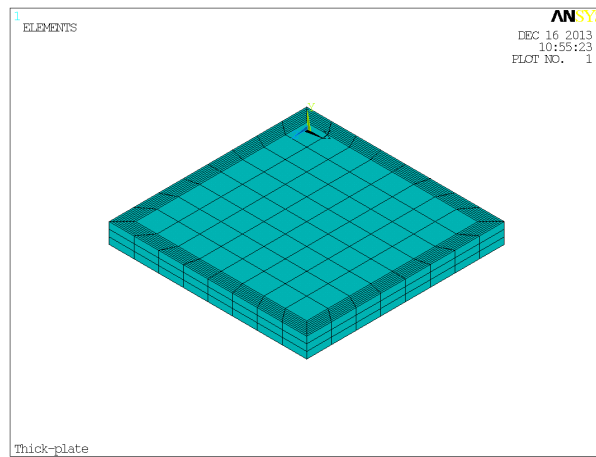
Figura 4.42(b) – Problema 4: Linhas inferiores que contêm os nós onde tensões foram comparadas.

Os refinamentos de malha para as análises realizadas pelo NAESY e pelo ANSYS 13 estão presentes nas Figs. 4.43 e 4.44 respectivamente.



NAESY: 1922 nós e 640 elementos (quadráticos de 8 nós)
 NDOF (NAESY): 5766

Figura 4.43 – Problema 4: Malha de elementos de contorno (a) e deformada (b) (NAESY).



ANSYS 13: 4983 nós e 960 elementos ('3-D 20-Node Structural Solid – SOLID 186')
 NDOF (ANSYS 13): 14949

Figura 4.44 – Problema 4: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).

Os gráficos das Figs. 4.45 e 4.50 mostram que os deslocamentos para as análises realizadas pelos programas NAESY e ANSYS13 são muito próximos um do outro de modo que as curvas praticamente se sobrepõem.

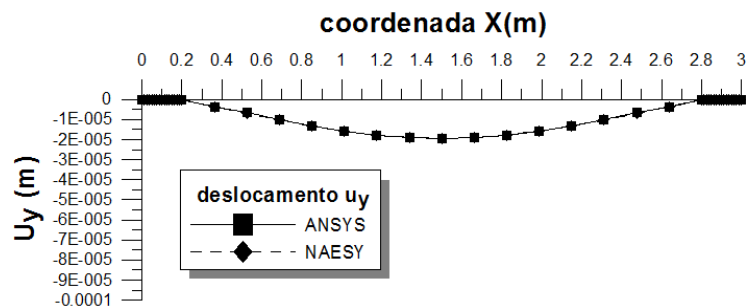


Figura 4.45 – Problema 4: Deslocamentos u_y na linha inferior ao longo do eixo x.

Resultados relativos às tensões σ_{xx} na linha superior ao longo da direção x

Tabela 4.11 – Problema 4: Valores de σ_{xx} ao longo da linha superior indicada na Fig. 4.42 (a).

Coordenada X	Valores σ_{xx}	Coordenada X	Valores σ_{xx}
ANSYS 13 (m)	ANSYS 13 (kN/m ²)	NAESY (m)	NAESY (kN/m ²)
0.025	1.36	0.025	-0.03
0.050	7.40	0.050	5.05
0.075	17.73	0.075	18.60
0.100	30.27	0.100	35.12
0.125	43.76	0.125	50.88
0.150	56.43	0.150	67.75
0.175	67.93	0.175	81.52
0.200	86.64	0.200	109.04
0.525	-9.25	0.525	-35.24
0.850	-99.36	0.850	-111.52
1.175	-134.79	1.175	-146.69
1.500	-143.99	1.500	-156.42
1.825	-134.79	1.825	-146.69
2.150	-99.36	2.150	-111.52
2.475	-9.25	2.475	-35.24
2.800	86.64	2.800	109.04
2.825	67.93	2.825	81.52
2.850	56.43	2.850	67.75
2.875	43.76	2.875	50.88
2.900	30.27	2.900	35.13
2.925	17.73	2.925	18.60
2.950	7.40	2.950	5.05
2.975	1.36	2.975	-0.03

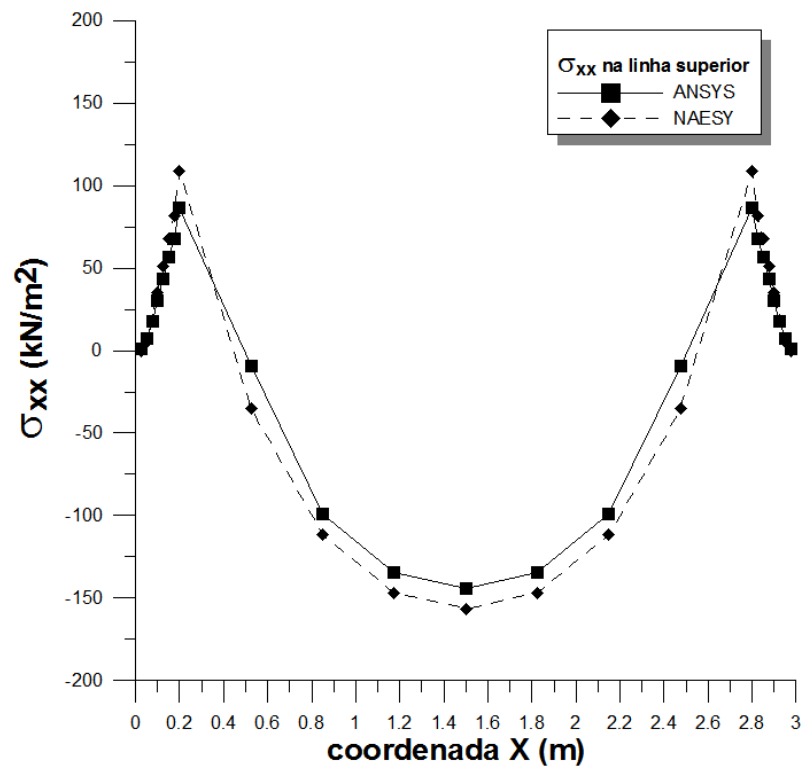


Figura 4.46 – Problema 4: Tensão σ_{xx} (linha superior).

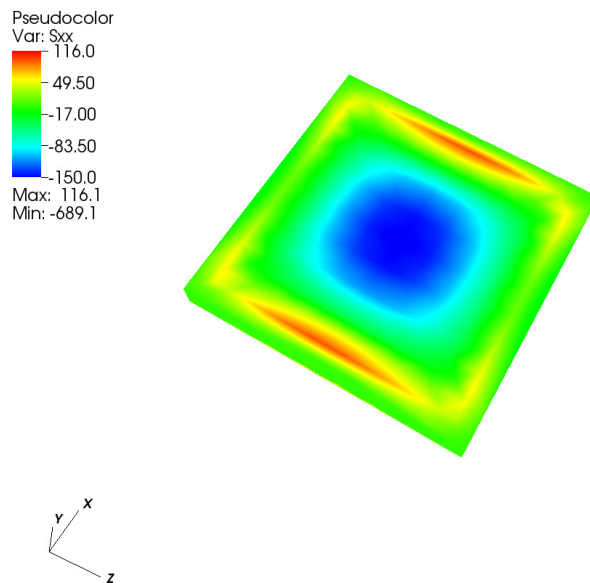


Figura 4.47 – Problema 4: Tensão σ_{xx} ao longo da placa (superfície superior).

Resultados relativos às tensões σ_{xx} na linha inferior ao longo da direção x

Tabela 4.12 – Problema 4: Valores de σ_{xx} ao longo da linha inferior indicada na Fig. 4.42 (b).

Coordenada X	Valores σ_{xx}	Coordenada X	Valores σ_{xx}
ANSYS 13 (m)	ANSYS 13 (kN/m ²)	NAESY (m)	NAESY (kN/m ²)
0.025	11.51	0.025	38.31
0.050	9.23	0.050	20.33
0.075	1.34	0.075	5.83
0.100	-7.22	0.100	-8.57
0.125	-15.55	0.125	-25.00
0.150	-20.77	0.150	-48.86
0.175	-16.86	0.175	-118.81
0.200	-163.81	0.200	-684.90
0.525	-8.09	0.525	-25.91
0.850	56.67	0.850	62.47
1.175	94.42	1.175	103.06
1.500	105.96	1.500	116.14
1.825	94.42	1.825	104.11
2.150	56.67	2.150	62.47
2.475	-8.09	2.475	-25.91
2.800	-163.81	2.800	-684.90
2.825	-16.86	2.825	-118.81
2.850	-20.77	2.850	-48.86
2.875	-15.55	2.875	-25.00
2.900	-7.22	2.900	-8.57
2.925	1.34	2.925	5.83
2.950	9.23	2.950	20.33
2.975	11.51	2.975	38.31

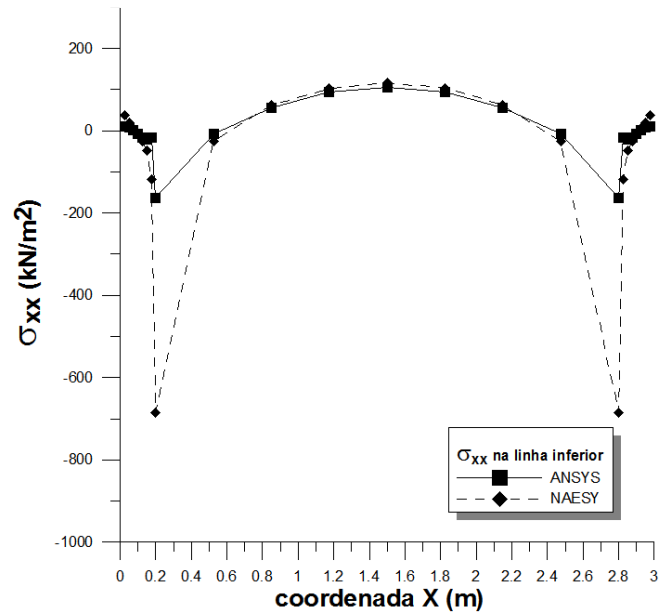


Figura 4.48 – Problema 4: Tensão σ_{xx} (linha inferior).

As Figs. 4.48 e 4.53 mostram picos de tensões em pontos onde o campo de deslocamento se modifica de deslocamento prescrito nulo para forças nulas (superfície livre de forças). Nesses pontos, vê-se que os valores de tensão calculados via MEC são bem superiores àqueles calculados via MEF (ANSYS 13), os quais poderiam ser melhorados se a malha fosse refinada. Para este problema especificamente, o aspecto do refinamento para o MEC foi semelhante ao aspecto do refinamento presente no contorno do modelo analisado via MEF.

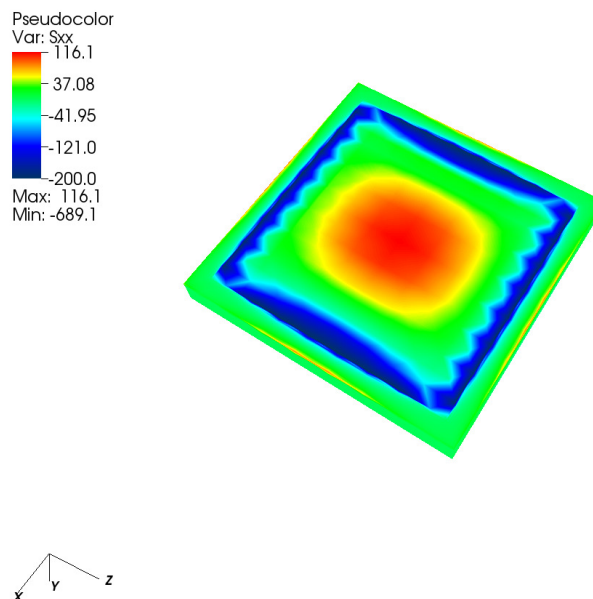


Figura 4.49 – Problema 4: Tensão σ_{xx} ao longo da placa (superfície inferior).

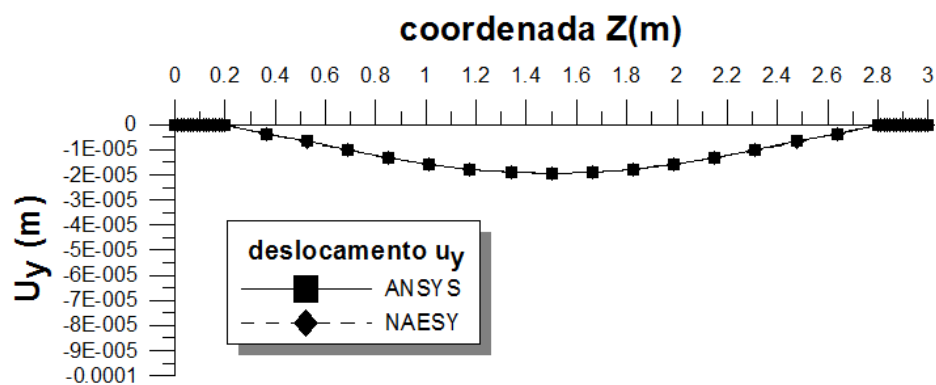


Figura 4.50 – Problema 4: Deslocamentos u_y na linha inferior ao longo do eixo z .

Resultados relativos às tensões σ_{zz} na linha superior ao longo da direção z

Tabela 4.13 – Problema 4: Valores de σ_{zz} ao longo da linha superior indicada na Fig. 4.42 (a).

Coordenada Z NAESY (m)	Valores σ_{zz} NAESY (kN/m ²)	Coordenada Z ANSYS 13 (m)	Valores σ_{zz} ANSYS 13 (kN/m ²)
0.075	17.73	0.075	18.60
0.100	30.27	0.100	35.12
0.125	43.76	0.125	50.88
0.150	56.43	0.150	67.75
0.175	67.93	0.175	81.52
0.200	86.64	0.200	109.04
0.525	-9.25	0.525	-35.24
0.850	-99.36	0.850	-111.52
1.175	-134.79	1.175	-146.69
1.500	-143.99	1.500	-156.42
1.825	-134.79	1.825	-146.69
2.150	-99.36	2.150	-111.52
2.475	-9.25	2.475	-35.24
2.800	86.64	2.800	109.04
2.825	67.93	2.825	81.52
2.850	56.43	2.850	67.75
2.875	43.76	2.875	50.88

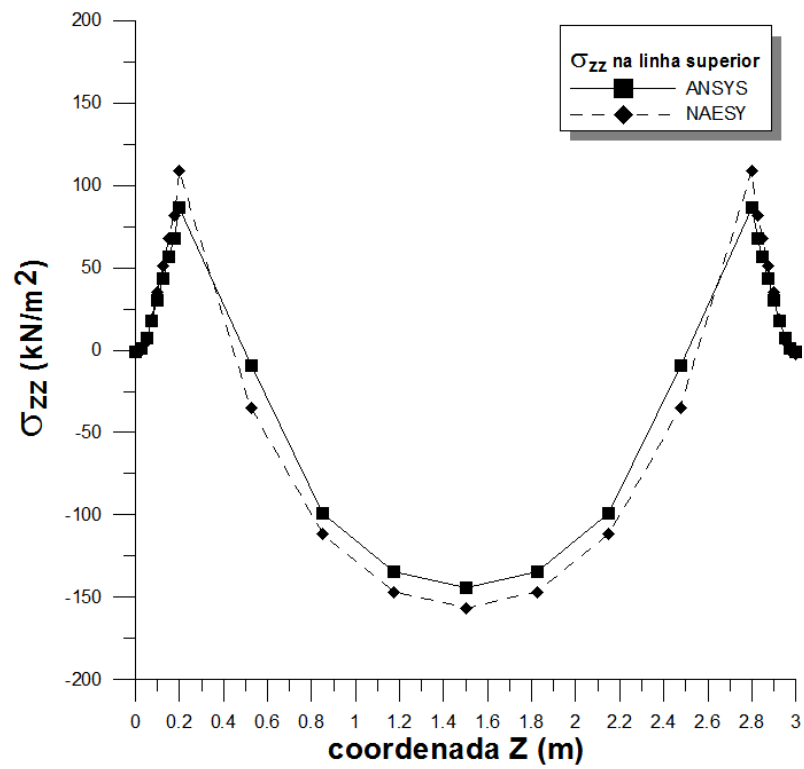


Figura 4.51 – Problema 4: Tensão σ_{zz} (linha superior).

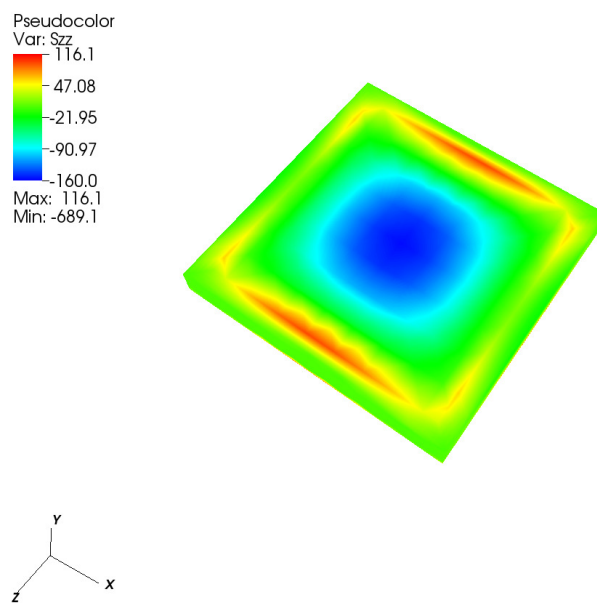


Figura 4.52 – Problema 4: Tensão σ_{zz} ao longo da placa (superfície superior).

Resultados relativos às tensões σ_{zz} na linha inferior ao longo da direção z

Tabela 4.14 – Problema 4: Valores de σ_{zz} ao longo da linha inferior indicada na Fig. 4.42 (b).

Coordenada Z	Valores σ_{zz}	Coordenada Z	Valores σ_{zz}
ANSYS 13 (m)	ANSYS 13 (kN/m ²)	NAESY (m)	NAESY (kN/m ²)
0.000	22.66	0.000	86.39
0.025	11.51	0.025	38.31
0.050	9.23	0.050	20.33
0.075	1.34	0.075	5.83
0.100	-7.22	0.100	-8.57
0.125	-15.55	0.125	-25.00
0.150	-20.77	0.150	-48.86
0.175	-16.86	0.175	-118.81
0.200	-163.81	0.200	-684.90
0.525	-8.09	0.525	-25.91
0.850	56.67	0.850	62.47
1.175	94.42	1.175	104.11
1.500	105.96	1.500	116.14
1.825	94.42	1.825	103.06
2.150	56.67	2.150	62.47
2.475	-8.09	2.475	-25.92
2.800	-163.81	2.800	-684.90
2.825	-16.86	2.825	-118.81
2.850	-20.77	2.850	-48.86
2.875	-15.55	2.875	-25.00
2.900	-7.22	2.900	-8.57
2.925	1.34	2.925	5.83
2.950	9.23	2.950	20.33

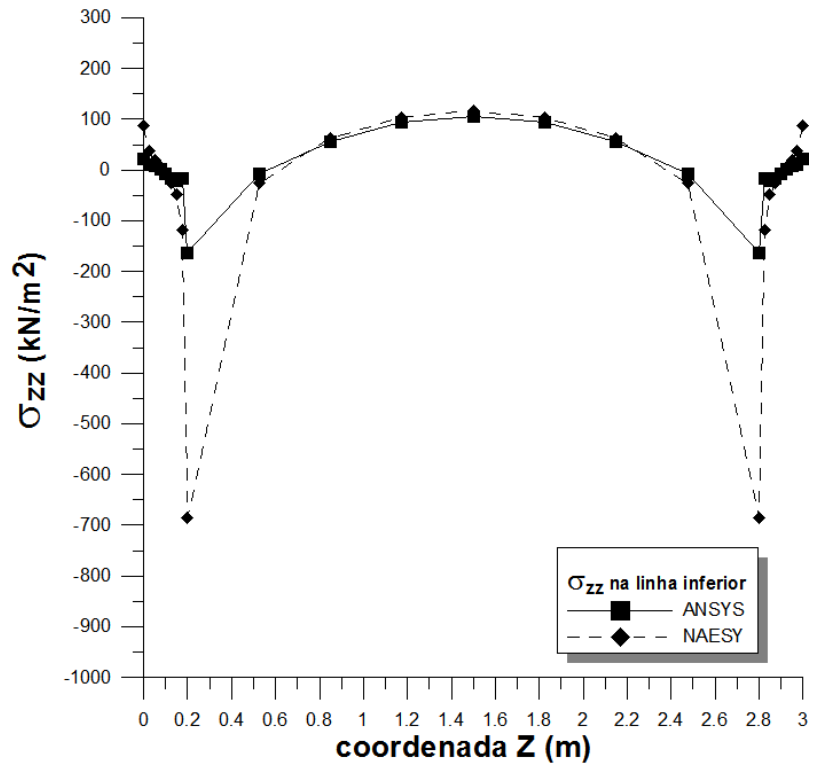


Figura 4.53 – Problema 4: Tensão σ_{zz} (linha inferior).

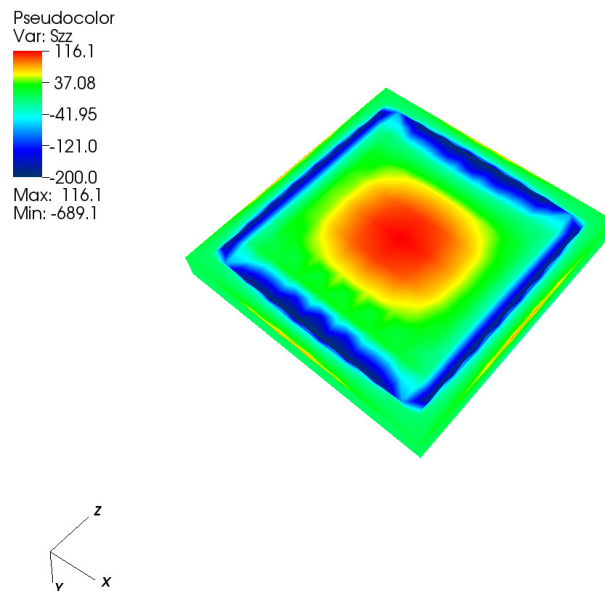


Figura 4.54 – Problema 4: Tensão σ_{zz} ao longo da placa (superfície inferior).

Através do problema 4, foi possível avaliar o comportamento estrutural de placas espessas. Os resultados obtidos com o NAESY e o software ANSYS 13 são próximos, apesar de algumas diferenças pontuais, novamente, em posições onde estão presentes condições de contorno de deslocamentos.

4.5 PROBLEMA 5 – INTERAÇÃO SOLO-FUNDAÇÃO

O problema 5 trata-se de um problema de interação solo-fundação. Esse problema é constituído de duas subregiões onde uma delas é a fundação e a outra o solo. Para este problema existem malhas de contorno (Figs. 4.56 e 4.57) mas, para avaliação e visualização de grandezas como deslocamentos e tensões em pontos internos, uma malha de elementos 3D tetraédricos e piramidais foi gerada (Fig. 4.58). O aspecto da deformada do conjunto solo-fundação encontra-se na Fig. 4.60, e a malha de elementos finitos (ANSYS 13) é mostrada na Fig. 4.59. A geração dos modelos de contorno e tridimensionais foi realizada pelo software comercial ANSYS 13 e pós-processada pelos módulos computacionais em linguagem de programação FORTRAN 90 PROCESS_SAT, PROCESS_FEM (desenvolvidos ao longo deste trabalho) e NAESY_meshgenerator. A fundação é uma sapata quadrada de dimensão b 1.52m e 19 cm de espessura, e o solo tem dimensões L de 12.16m e H de 5m, como mostra a Fig. 4.55. O módulo de elasticidade da fundação é de $2.0E+08$ kN/m², o do solo é de $2.0E+05$ kN/m², o coeficiente de Poisson adotado foi de 0.35 (solo e fundação) e a densidade é de 1800kg/m³ (solo e fundação). O carregamento q considerado (Fig. 4.55), foi estático de 4000kN/m² atuando na direção normal da superfície superior da sapata e dirigida para baixo (sentido negativo do eixo y). Para esse problema, foi empregado o *solver* de Krylov BiCGstab(L) (Sleijpen e Fokkema, 1993).

O objetivo desse problema é verificar o desempenho da técnica SBS assim como eficácia e eficiência dos *solvers* iterativos. Em se tratando de resultados, deseja-se comparar o deslocamento u_y máximo (vide Fig. 4.55) e tensões σ_{yy} no interior do solo com o software comercial ANSYS 13 observando, assim, respostas obtidas pelo MEC e pelo MEF. Serão mostrados alguns gráficos de cores referentes aos deslocamentos u_y (Figs. 4.61, 4.63 e 4.64) e às tensões σ_{yy} (Figs. 4.62 e 4.65).

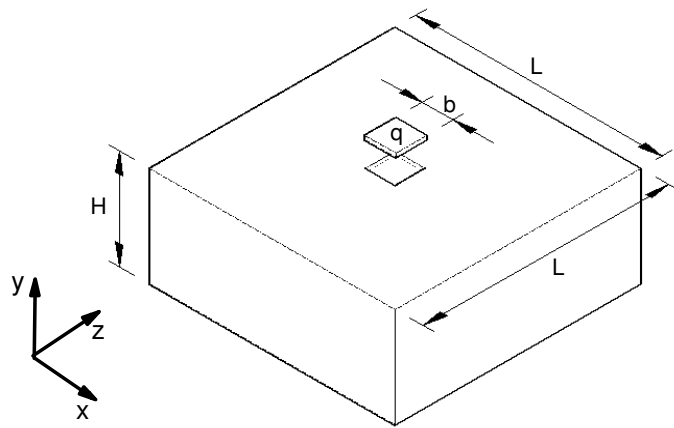
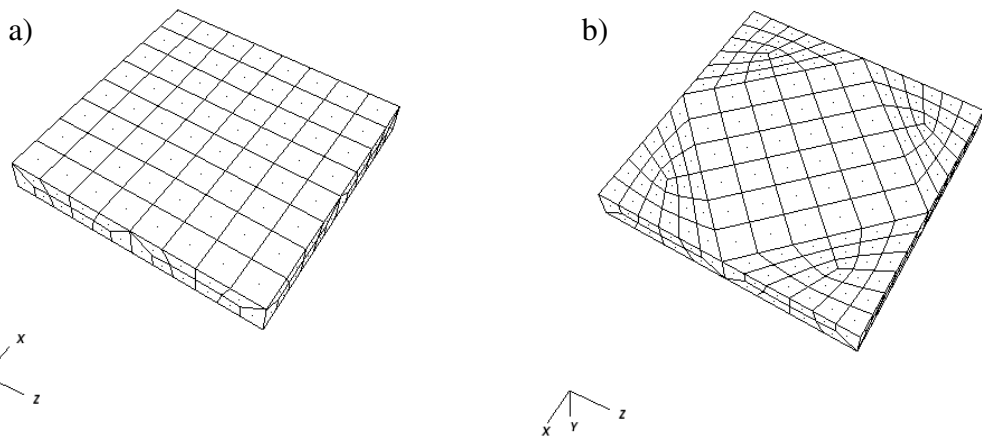
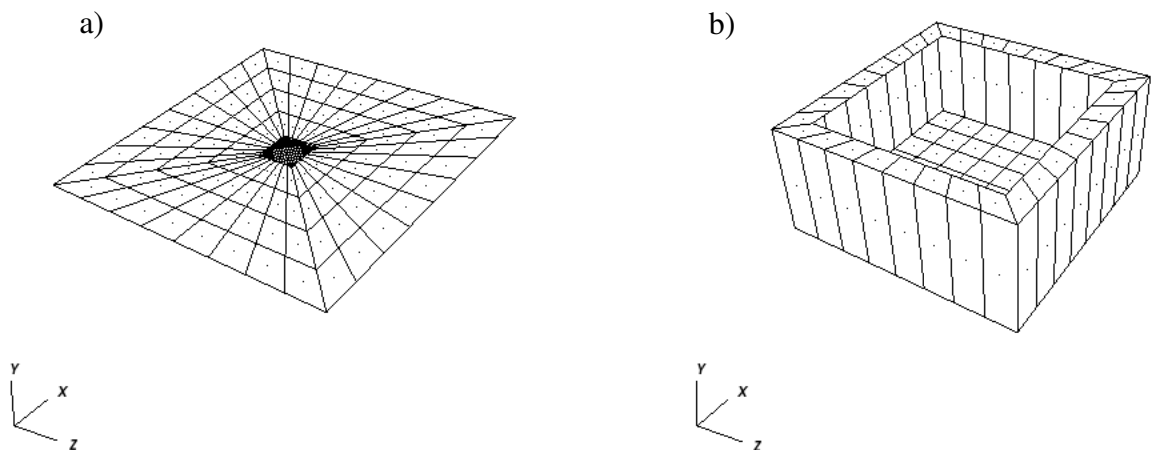


Figura 4.55 – Problema 5: Interação solo-fundação e suas dimensões.



FUNDAÇÃO (NAESY): 2017 nós e 288 elementos (quadráticos de 8 nós)
 NDOF (NAESY): 6051

Figura 4.56 – Problema 5: Malha de elementos de contorno nas regiões superior (a) e inferior (b) da fundação.



SOLO (NAESY): 2240 nós, 352 elementos (quadráticos de 8 nós) e
 905 pontos internos
 NDOF (NAESY): 6720

SOLO (NAESY): 427 nós e 128 'enclosing elements'

Nº de iterações do solver BiCGstab(L): 203 (aproximadamente 1.6% de NDOF (12771- total))

Figura 4.57 – Problema 5: Malha de elementos de contorno para o solo (a) e 'enclosing elements' (b).

‘Enclosing elements’ são elementos cuja função é possibilitar, em problema definidos em domínios semi-infinitos, o cálculo implícito dos coeficientes da diagonal principal da matriz \mathbf{H} via estratégia de deslocamento de corpo rígido.

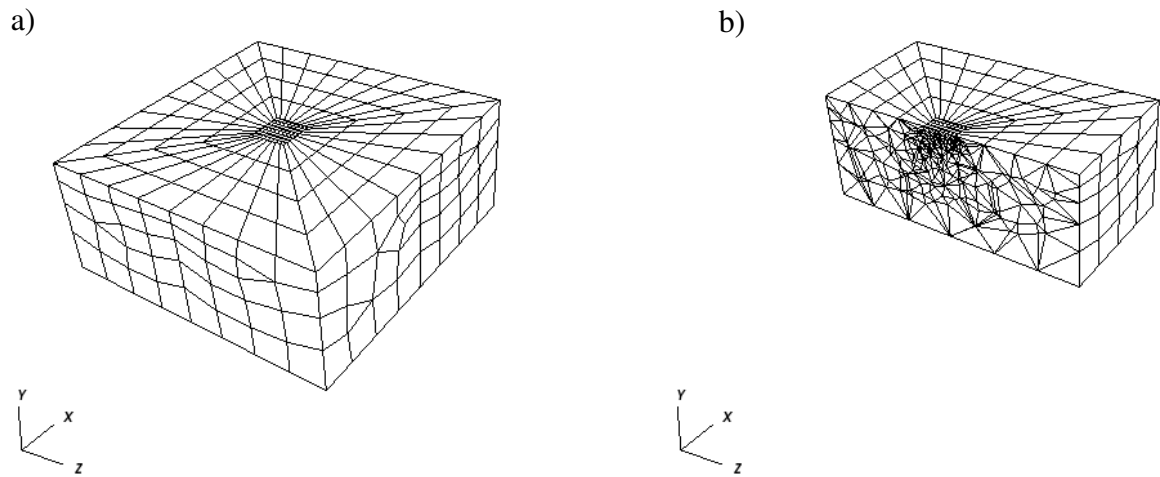
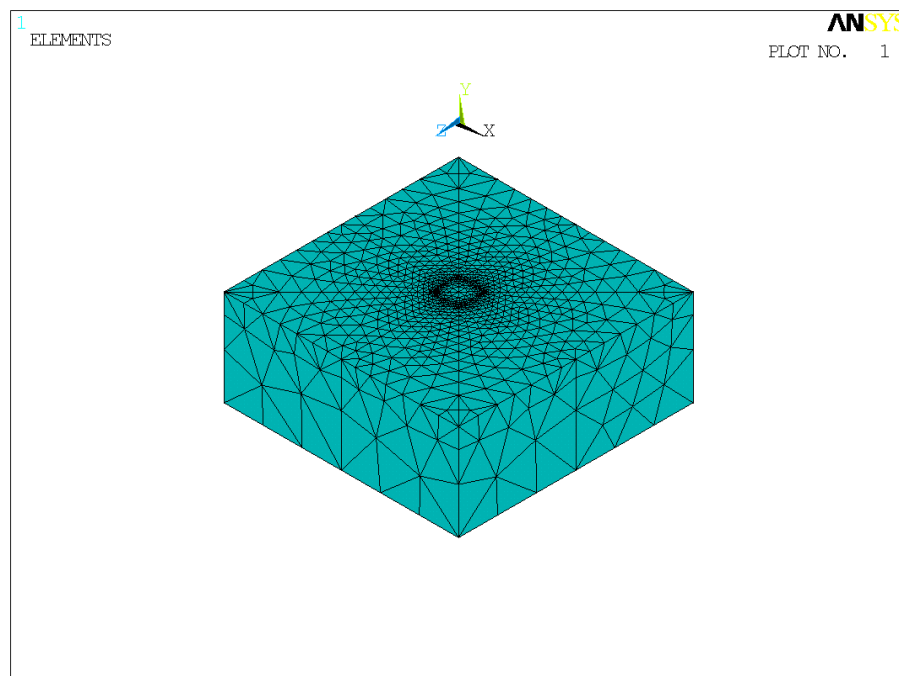


Figura 4.58 – Problema 5: Malha de elementos 3D (tetraédricos e piramidais) para fins de visualização de resultados.



ANSYS 13: 57961 nós e 41997 elementos ('3-D 10-Node Tetrahedral Structural Solid – SOLID 187')
NDOF (ANSYS 13): 173883

Figura 4.59 – Problema 5: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).

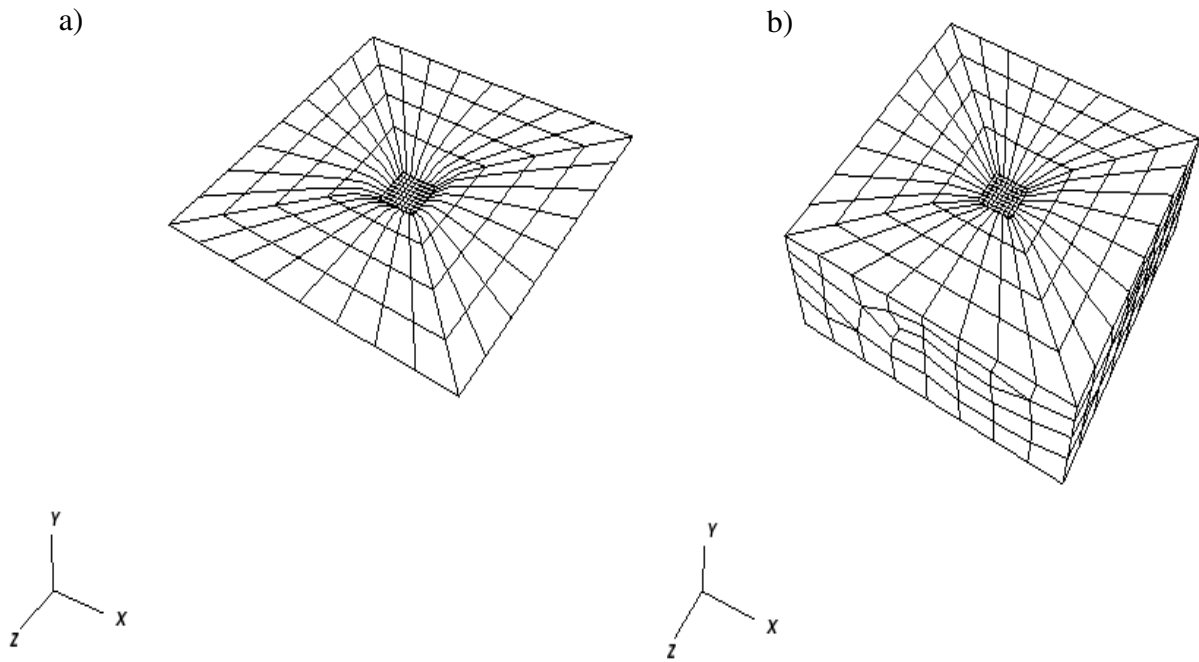


Figura 4.60 – Problema 5: Aspecto da deformada do modelo 2D de contorno (a) e 3D (b).

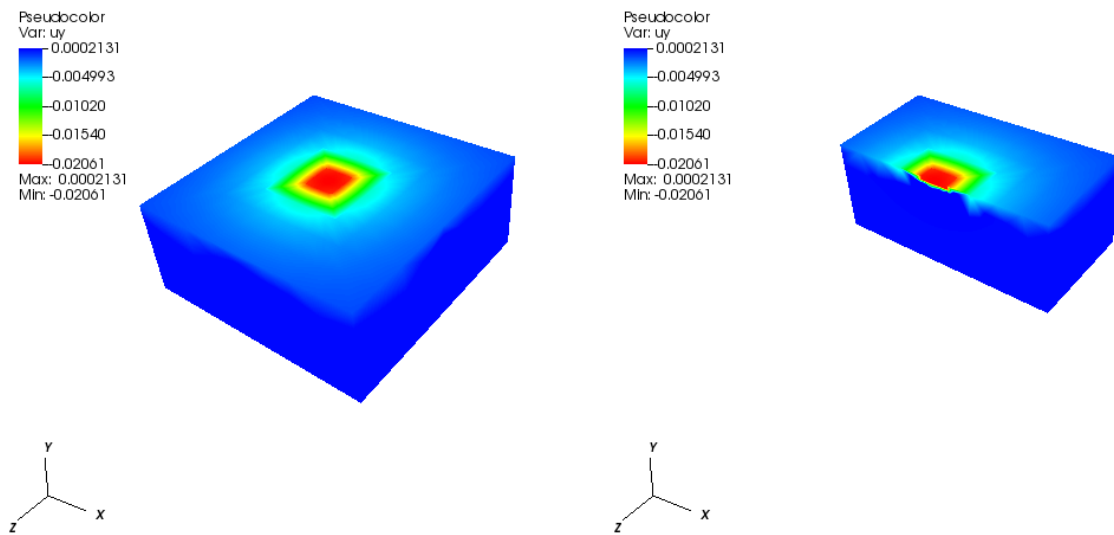


Figura 4.61 – Problema 5: Deslocamentos u_y ao longo da fundação e do solo (NAESY).

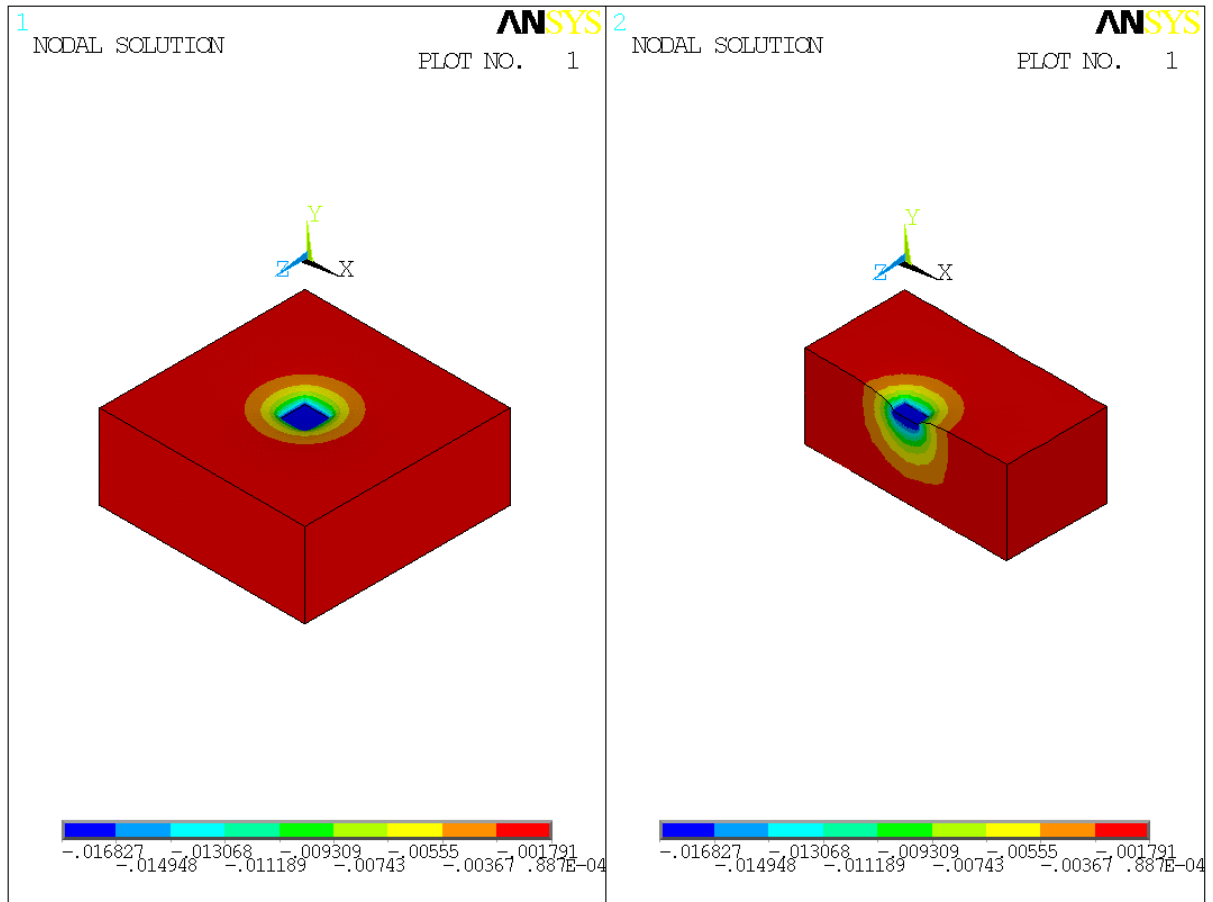


Figura 4.62 – Problema 5: Deslocamentos u_y ao longo da fundação e do solo (ANSYS 13).

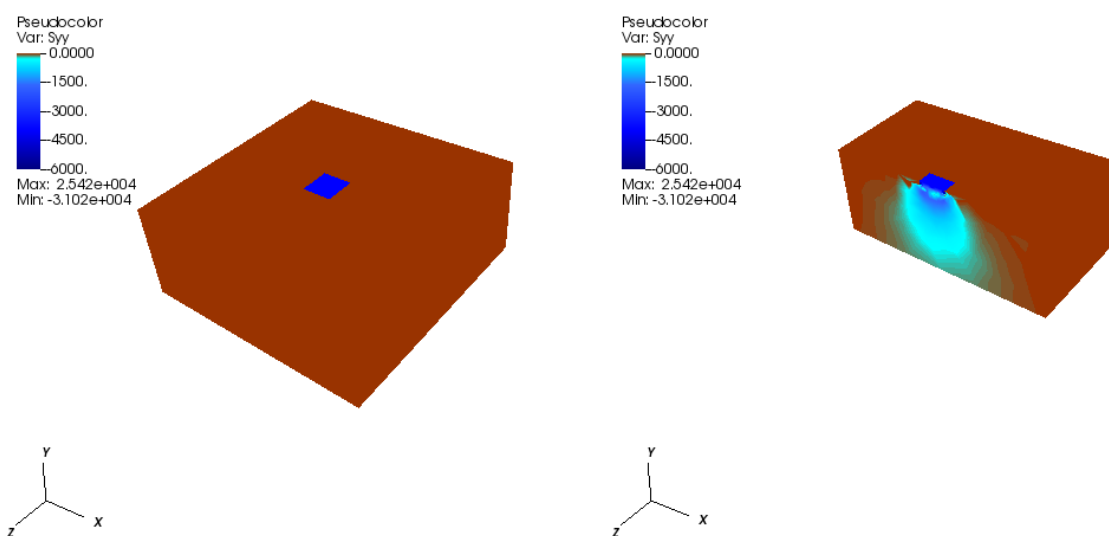


Figura 4.63 – Problema 5: Tensão σ_{yy} ao longo da fundação e do solo (ANSYS) - (à direita o bulbo de tensões).

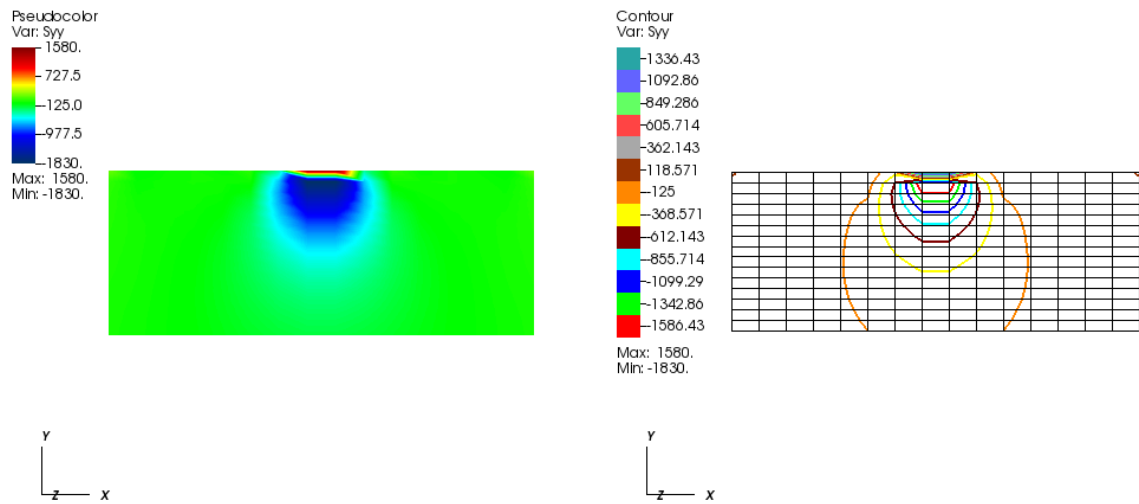


Figura 4.64 – Problema 5: Bulbo de tensões para um plano logo abaixo da fundação de coordenada z igual a 7 se estendendo de uma profundidade de 0.3m a 5m (NAESY).

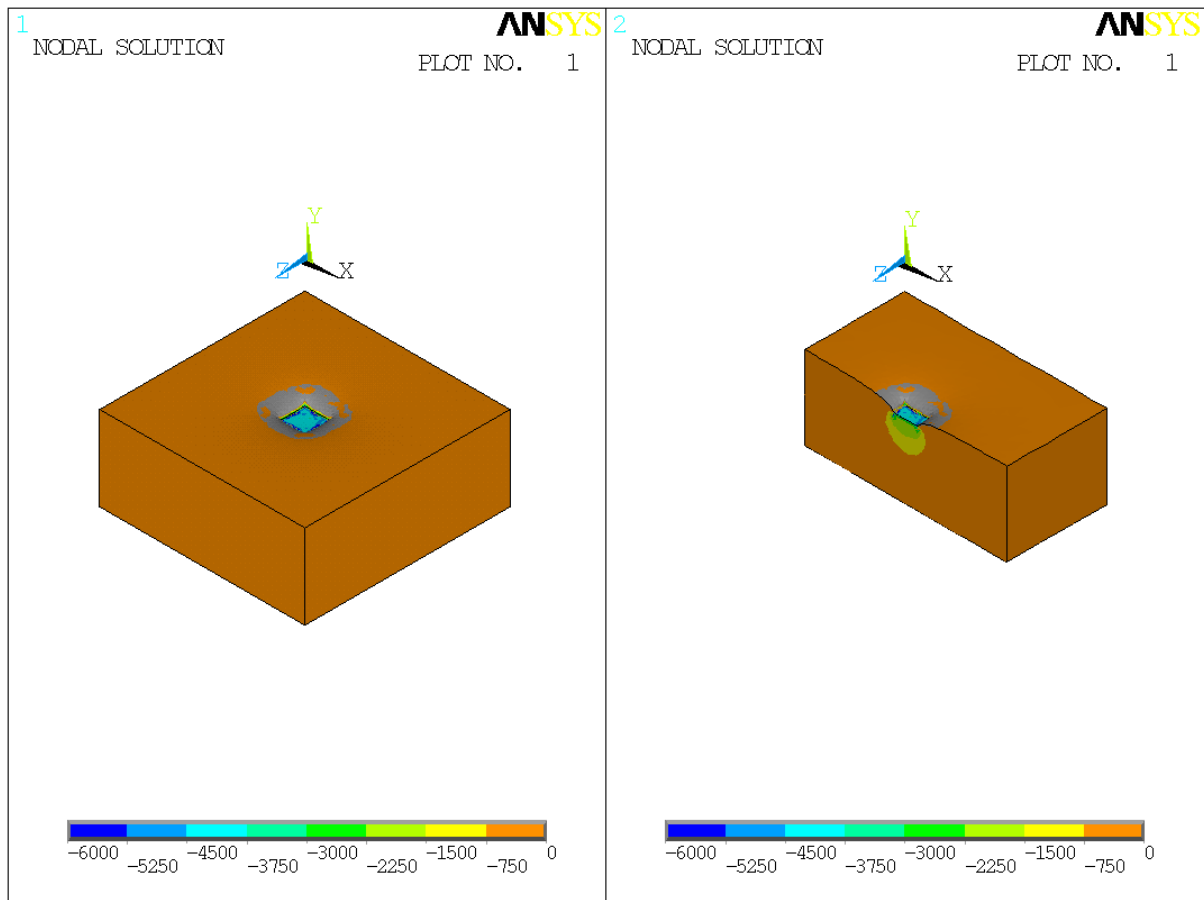


Figura 4.65 – Problema 5: Tensão σ_{yy} ao longo da fundação e do solo (ANSYS 13) - (à direita o bulbo de tensões).

O problema 5 trata de um modelo numérico maior quando comparado aos demais analisados até este momento. Observa-se, claramente, a diferença entre o tamanho do modelo numérico via MEC e MEF, realçando assim uma grande vantagem do MEC, que é justamente a discretização apenas de contorno assim como uma geração de malhas mais fácil de ser realizada, pois elementos 2D são mais simples de serem gerados quando comparados aos elementos sólidos 3D. Através desse problema, foi possível também avaliar o bom desempenho da técnica SBS que alcançou bons resultados assim como dos *solvers* iterativos de Krylov, pois a ordem do sistema de equações foi de 12.771 e o solver de Krylov utilizado convergiu para um número de iterações igual a 203, ou seja, cerca de 1.6% da ordem do sistema. A resposta obtida via MEC para o deslocamento u_y máximo são próximas às obtidas via MEF, pois o MEC e o MEF forneceram um deslocamento u_y máximo de aproximadamente -2.0cm e -1.7cm, respectivamente, e esse deslocamento máximo ocorre logo abaixo da fundação como esperado. Através dos gráficos de cores, é possível observar que o comportamento das respostas em termos de tensões é semelhante, mas não foi possível comparar tensões em nós específicos já que não foi possível encontrar nós próximos aos do modelo de contorno no arquivo em que o programa ANSYS 13 fornece os nós e suas respectivas tensões. Apesar disso, é possível comparar valores através das faixas de cores e seus respectivos valores numéricos.

4.6 PROBLEMA 6 – INTERAÇÃO SOLO-TUBULÃO

O problema 6 também trata-se de um problema de interação solo-fundação. No entanto, o elemento de fundação não é uma sapata quadrada e sim um tubulão. Duas subregiões foram consideradas onde uma delas é o tubulão e a outra o solo. Aqui, também, existem malhas de contorno (Figs. 4.67 e 4.68) e malhas de elementos 3D tetraédricos e piramidais (Fig. 4.69) que foram geradas para a avaliação e visualização de grandezas como deslocamentos e tensões em pontos internos. A Fig. 4.70 mostra a malha de elementos finitos (ANSYS 13). Como no problema 5, a geração dos modelos de contorno e tridimensionais foi realizada pelo software comercial ANSYS 13 e pós-processada pelos programas PROCESS_SAT, PROCESS_FEM e NAESY_meshgenerator. O solo tem dimensões L de 10m e altura H de 12m, como mostra a Fig. 4.66 (a), e o tubulão tem dimensões H de 6m, h_a de 0.3m, h_b de 1m, D igual a 1.5m e d igual a 0.6m, como mostra a Fig. 4.66 (b). O pilar tem seção transversal quadrada $l \times l$ onde l é igual a 0.4m. Os módulos de elasticidade para o tubulão e para o solo são, respectivamente, $2.0E+08$ kN/m² e $2.0E+05$ kN/m² e para ambas as subregiões o

coeficiente de Poisson é de 0.35 e a densidade é de 1800kg/m^3 . O carregamento q (Fig. 4.48 (b)) é de 15000kN/m^2 , e o sistema de equações algébricas foi resolvido utilizando o *solver* de Krylov BiCGstab(L) (Sleijpen e Fokkema, 1993).

Esse problema nos permitiu novamente verificar o desempenho da técnica SBS assim como eficácia e eficiência dos *solvers* iterativos. Quanto aos resultados, o objetivo é comparar resultados com o software comercial ANSYS 13 como deslocamento u_y máximo (Figs. 4.71 e 4.72), tensões normais σ_{yy} (Figs. 4.73 e 4.74), além de tensões de cisalhamento τ_{xy} (Figs. 4.75 e 4.76) e τ_{xz} (Figs. 4.77 e 4.78), atuantes ao longo do fuste do tubulão.

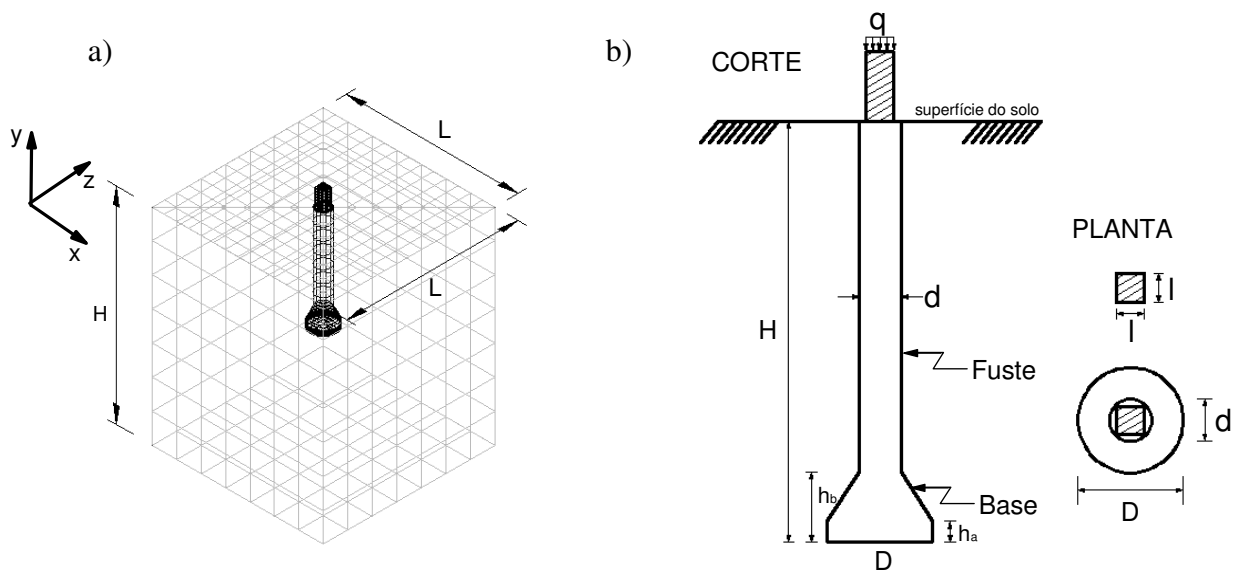
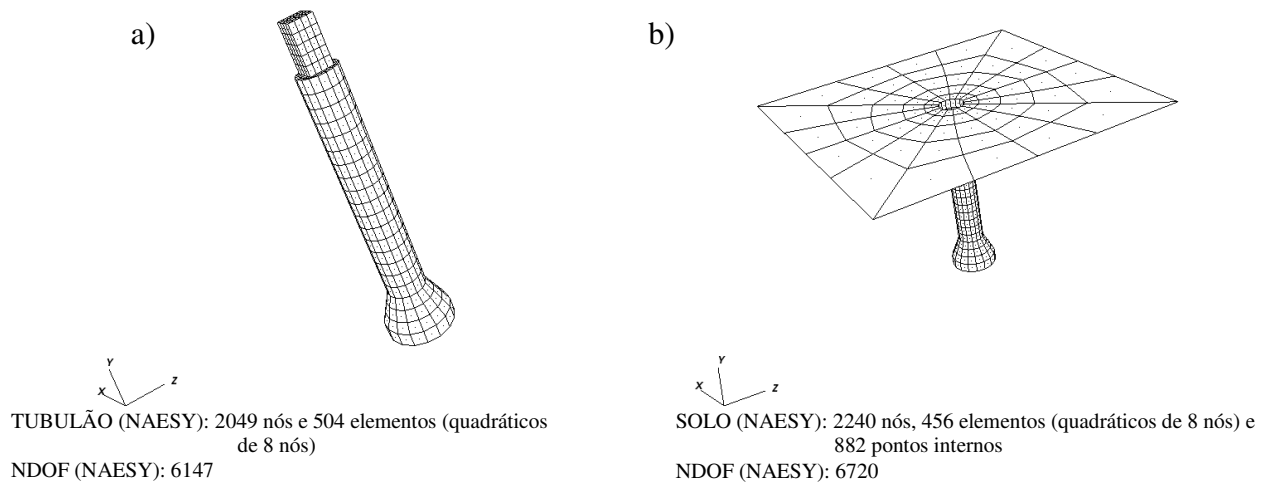
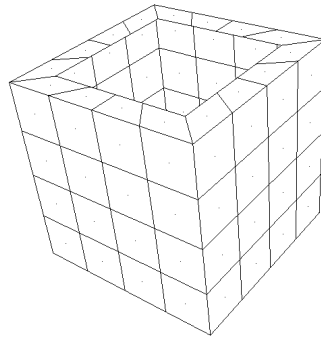


Figura 4.66 – Problema 6: Interação solo-tubulão e suas dimensões (a) e caracterização do tubulão (b).



N^0 de iterações do solver BiCGstab(L): 2907 (aproximadamente 24.5% de NDOF total (11907))

Figura 4.67 – Problema 6: Malha de elementos contorno para o tubulão (a) e para o solo (b).



SOLO (NAESY): 305 nós e 96 'enclosing elements'

Figura 4.68 – Problema 6: 'Enclosing elements'.

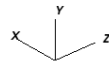
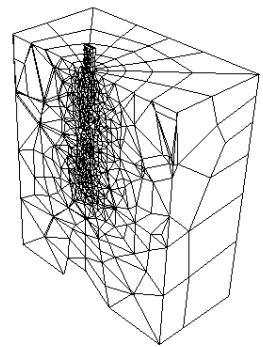
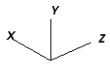
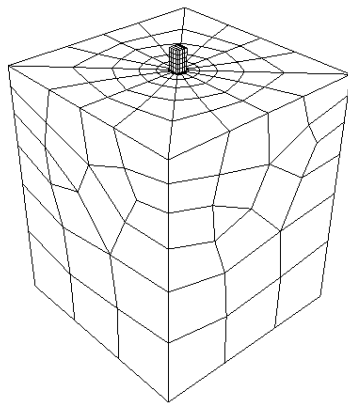
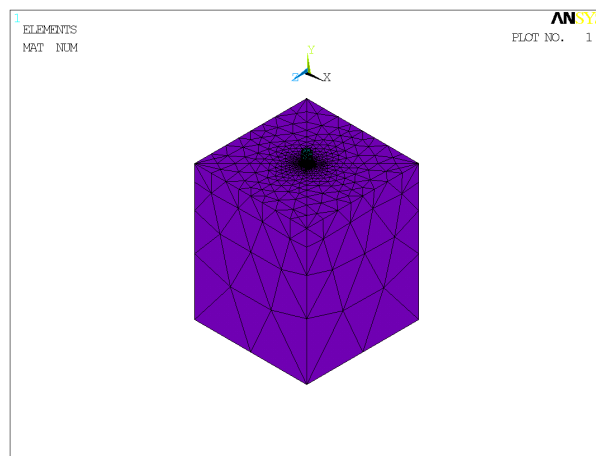


Figura 4.69 – Problema 6: Malha de elementos 3D (tetraédricos e piramidais) para fins de visualização de resultados.



ANSYS 13: 38139 nós e 27079 elementos ('3-D 10-Node Tetrahedral Structural Solid – SOLID 187')
 NDOF (ANSYS 13): 114417

Figura 4.70 – Problema 6: Malha de elementos finitos (ANSYS 13).

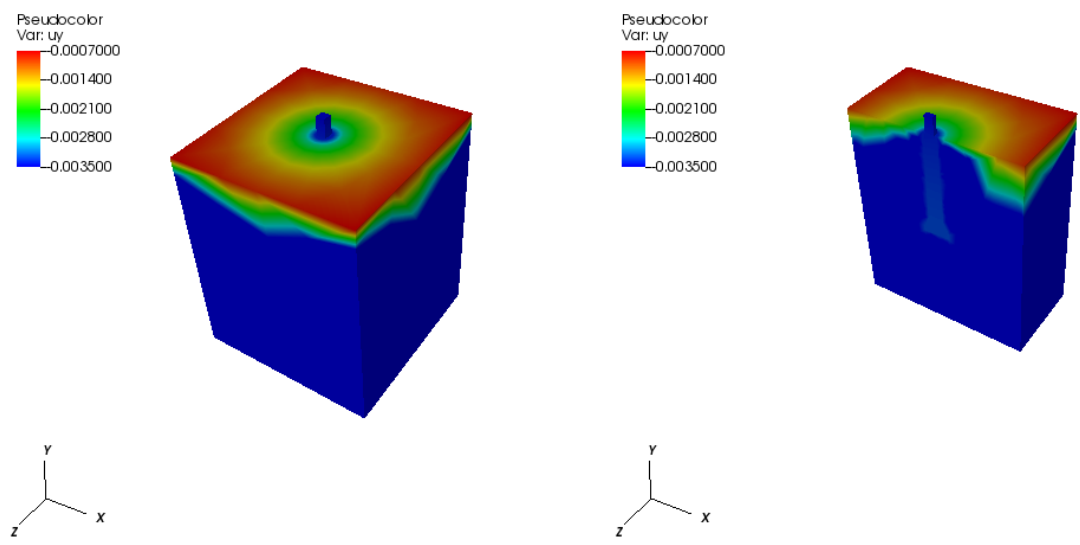


Figura 4.71 – Problema 6: Deslocamentos u_y ao longo do tubulão e do solo (NAESY).

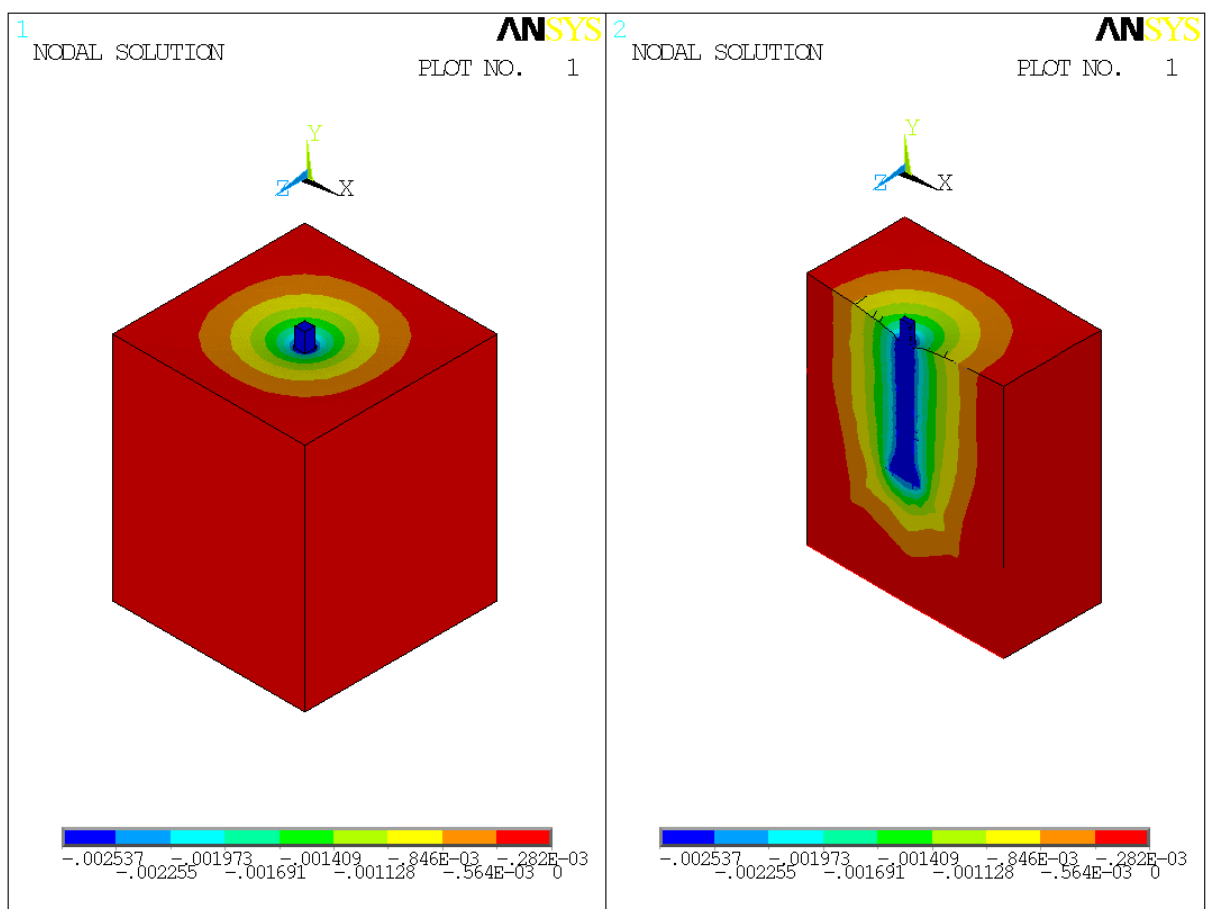


Figura 4.72 – Problema 6: Deslocamentos u_y ao longo do tubulão e do solo (ANSYS 13).

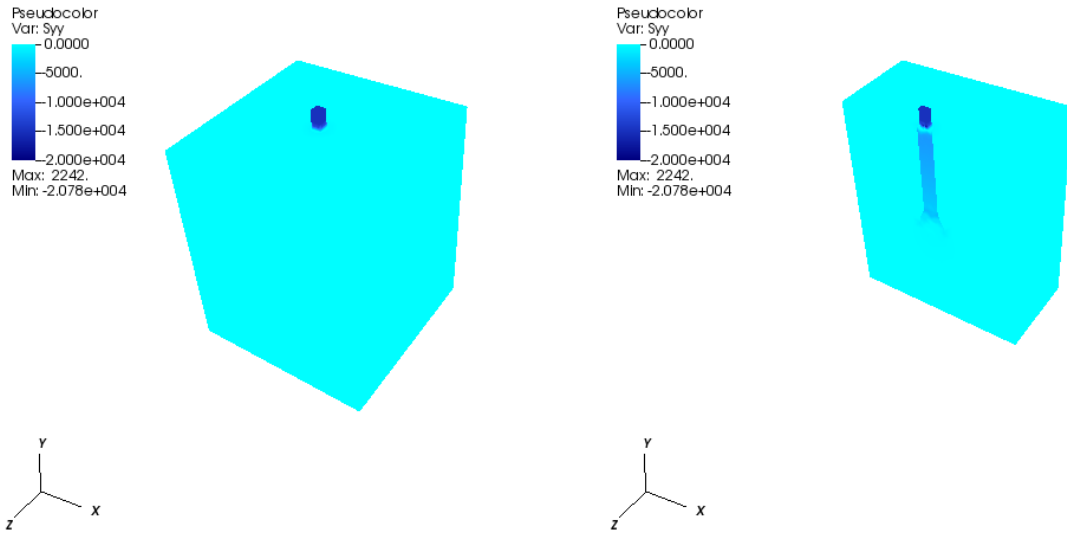


Figura 4.73 – Problema 6: Tensão σ_{yy} ao longo do tubo e do solo (NAESY).

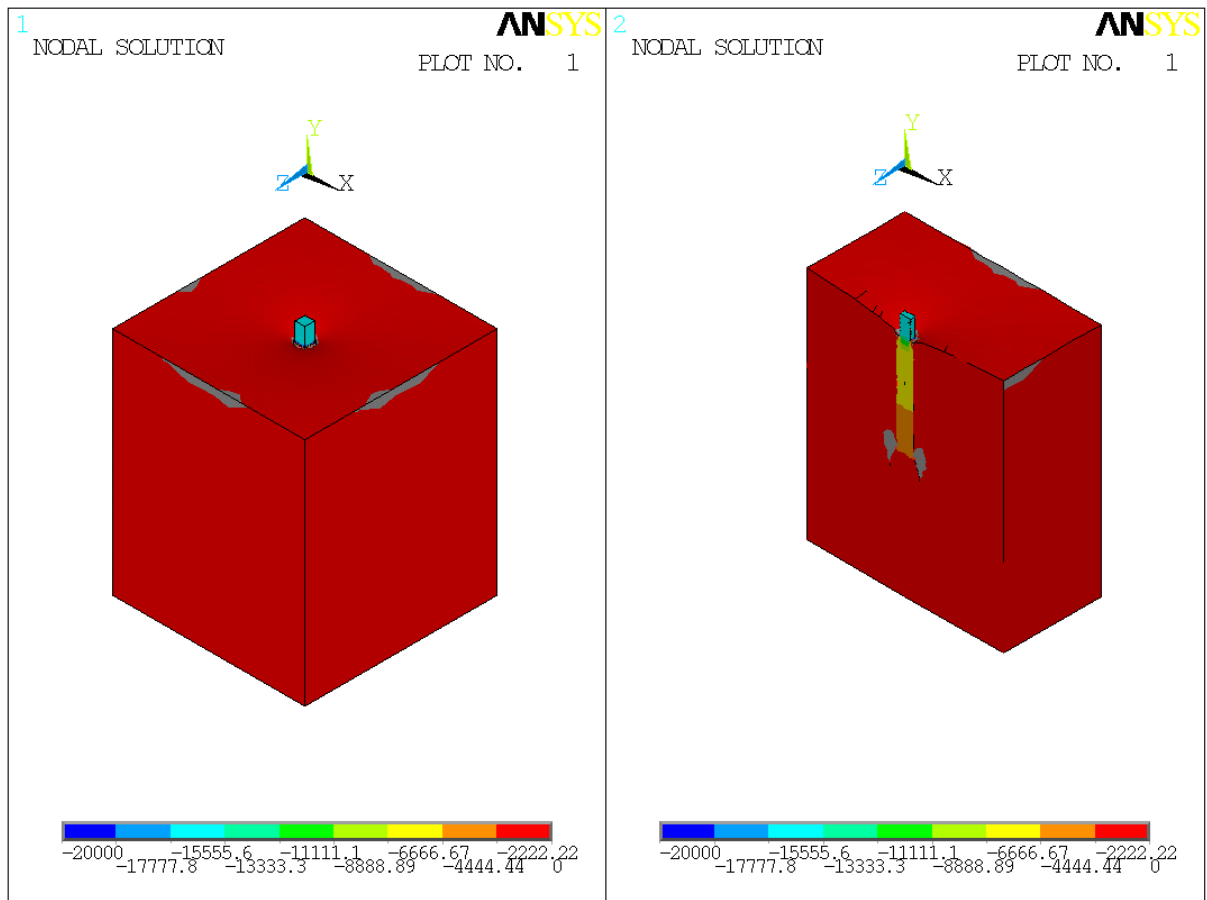


Figura 4.74 – Problema 6: Tensão σ_{yy} ao longo do tubo e do solo (ANSYS 13).

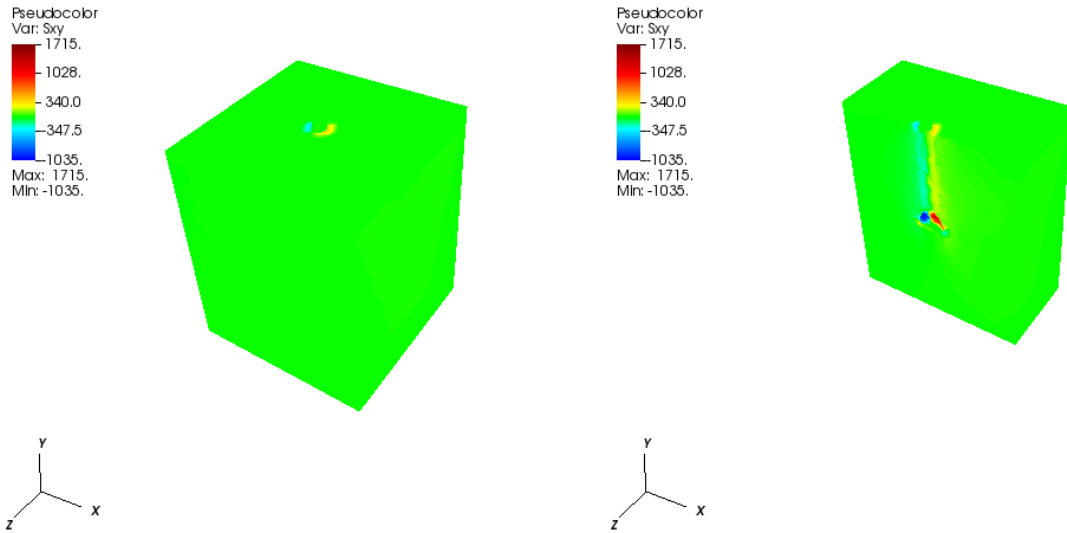


Figura 4.75 – Problema 6: Tensão τ_{xy} ao longo do tubulão e do solo (NAESY).

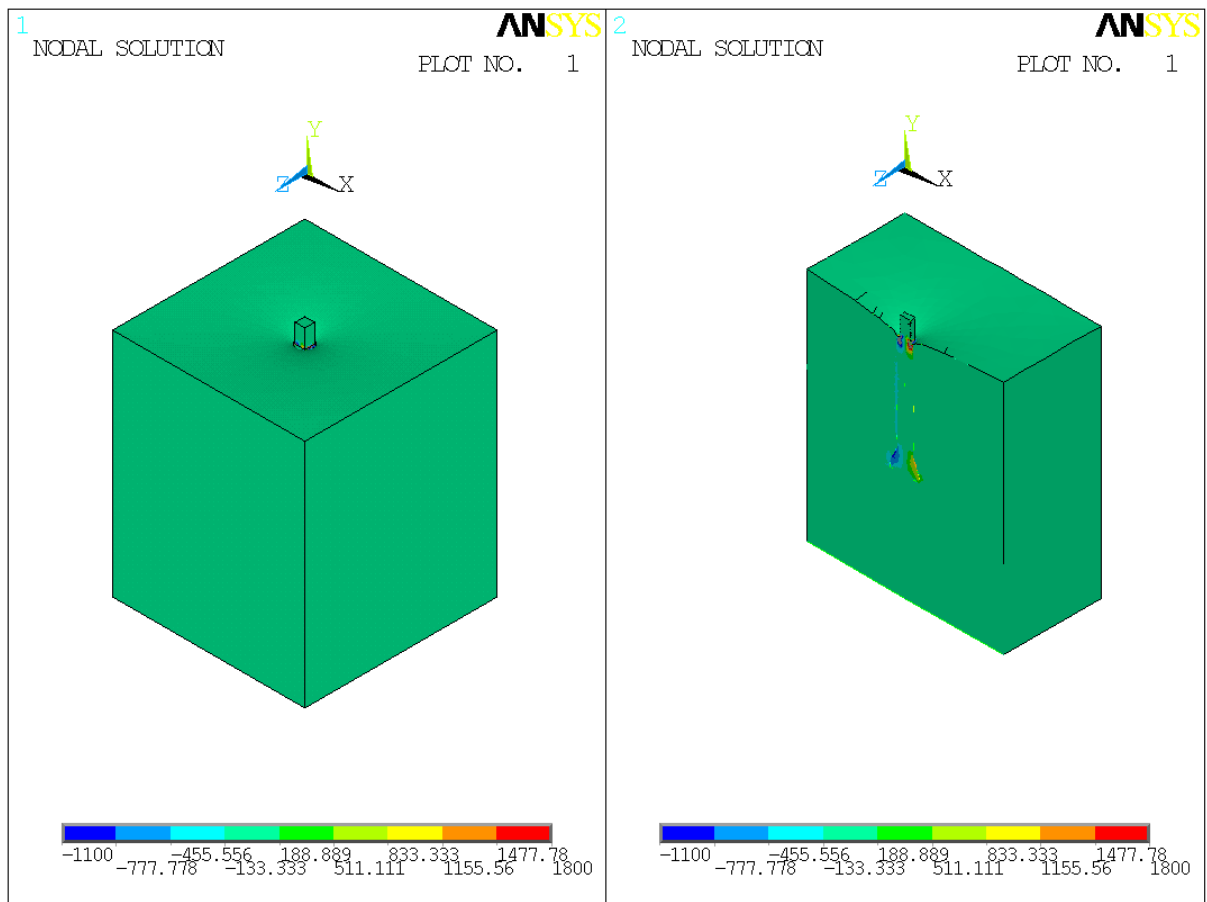


Figura 4.76 – Problema 6: Tensão τ_{xy} ao longo do tubulão e do solo (ANSYS 13).

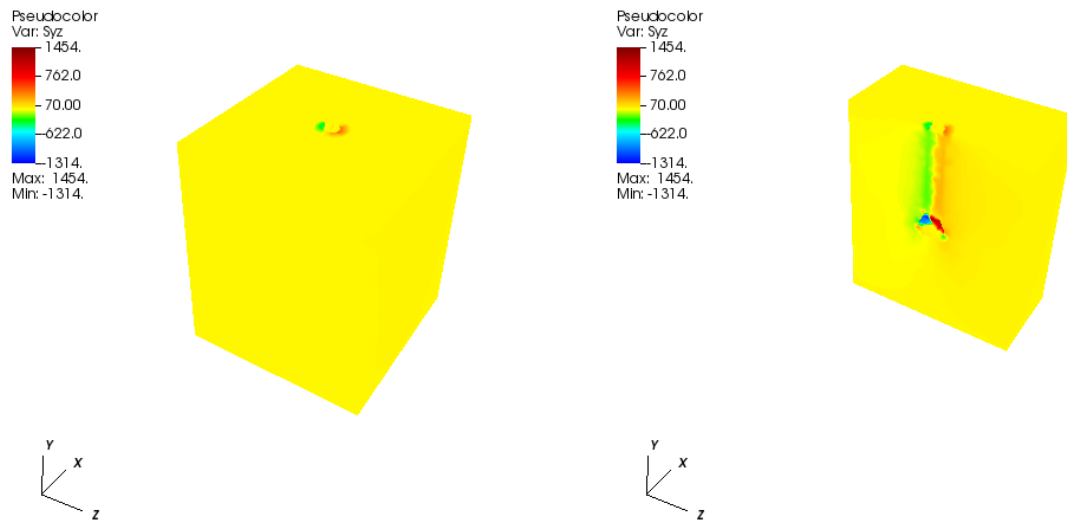


Figura 4.77 – Problema 6: Tensão τ_{yz} ao longo do tubo e do solo (NAESY).

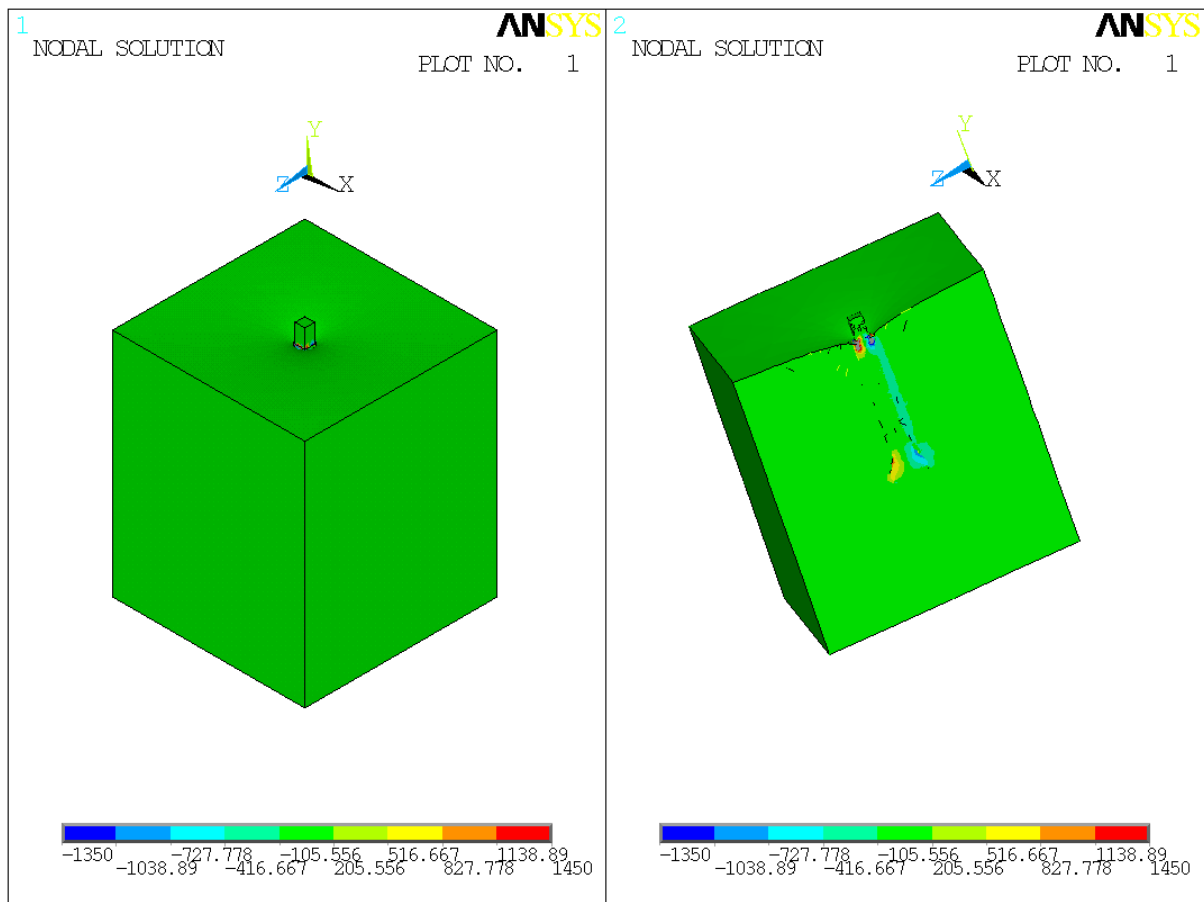


Figura 4.78 – Problema 6: Tensão τ_{yz} ao longo do tubo e do solo (ANSYS 13).

O problema 6, assim como o problema 5, trata-se de um modelo numérico maior quando comparado aos 4 primeiros analisados. Novamente, observa-se claramente a diferença entre o tamanho do modelo numérico via MEC e MEF. Para esse problema em especial, tinha-se por objetivo verificar o comportamento das tensões de cisalhamento no fuste do tubulão e os gráficos de cores apresentados ilustram bem este comportamento. Através desse problema, também foi possível avaliar o bom desempenho da técnica SBS, pois bons resultados foram alcançados e o *solver* iterativo de Krylov utilizado convergiu para um número de iterações igual a 2907 e a ordem do sistema foi de 11.907, ou seja, o número de iterações necessárias para a convergência da solução corresponde a aproximadamente 24.5% da ordem do sistema de equações. A resposta obtida via MEC para o deslocamento u_y máximo foi um pouco maior à obtida via MEF, pois o MEC e o MEF forneceram um deslocamento u_y máximo de aproximadamente -3.5mm e -2.5mm respectivamente, e este deslocamento máximo ocorre para pontos da superfície onde a carga está aplicada e diminui ao longo do eixo do tubulão no sentido negativo do eixo y (Fig. 4.66). Os gráficos de cores mostram que o comportamento das respostas em termos de tensões é semelhante mas, como no problema 5, não foi possível comparar tensões em nós específicos pois não foi possível encontrar nós próximos aos do modelo de contorno no arquivo em que o programa ANSYS 13 fornece os nós e suas respectivas tensões. Apesar disso, é possível comparar valores através das faixas de cores e seus respectivos valores numéricos.

4.7 PROBLEMA 7 - COMPÓSITO REFORÇADO COM NANOTUBOS DE CARBONO

Nesse problema, tensões foram calculadas em um volume representativo de material (RVE) compósito, o qual compõe-se por nanotubos de carbono inseridos em um material matriz (polímero). Aqui, particularmente, consideram-se os RVEs indicados nas Figs. 4.79 (a) e (b), com 1 e 4 nanotubos respectivamente, submetidos a um deslocamento axial (direção de l_1) positivo e unitário. Os detalhes referentes às condições de contorno de forças e deslocamentos estão presentes em (F.C. Araujo, E.F. d’Azevedo e L.J. Gray, 2011). Na Fig. 4.79 (a), o RVE compõe-se de uma única célula com dimensões l_1 100nm e $l_2=l_3=20$ nm. Na Fig. 4.79 (b), 4 células unitárias são consideradas na determinação do RVE. O módulo de elasticidade (E_{CNT}) do nanotubo de carbono e da matriz (E_M) adotados foram $1000\text{nN/nm}^2(\text{GPa})$ e $100\text{nN/nm}^2(\text{GPa})$ respectivamente. O coeficiente de Poisson é 0.3 tanto para os nanotubos de carbono quanto para a matriz. Para esse problema, foram comparadas

tensões principais σ_1 (Fig. 4.81) com os resultados obtidos por (X.L. Chen e Y.J. Liu, 2004), via formulações de elementos finitos para o RVE com 1 nanotubo de carbono em que duas subregiões são consideradas, ou seja, a matriz polimérica e o nanotubo de carbono. Os detalhes das malhas empregadas para cada subregião estão presentes na Fig. 4.80 e o *solver* de Krylov empregado foi o BiCG (Saad, 1995).

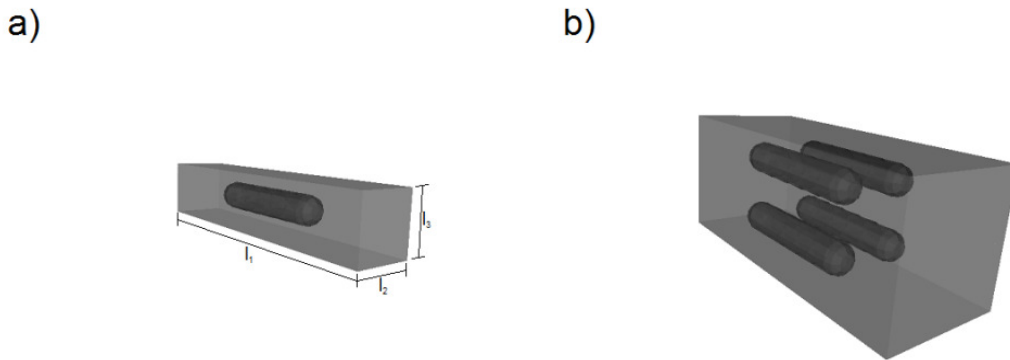
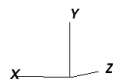
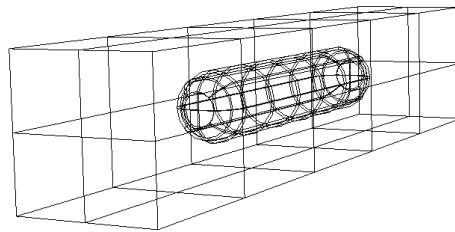


Figura 4.79 – Problema 7: Compósito reforçado com nanotubos de carbono.



MATRIZ (POLÍMERO): 388 nós e 128 elementos (quadráticos de 8 nós);
 NANOTUBO DE CARBONO: 492 nós e 168 elementos (quadráticos de 8 nós);
 NDOF: 2640
 N^o de iterações do solver BiCGstab(L)=505 (aproximadamente 19.1% de NDOF)

Figura 4.80 – Problema 7: Malha de elementos de contorno (NAESY).

Considerando-se o problema 7, não foi possível comparar resultados pontuais com aqueles apresentados em (X.L. Chen e Y.J. Liu, 2004), pois nesse artigo as tensões principais foram apenas plotadas em gráficos de cores correspondentes às faixas de tensões, mas não se apresentam valores de tensões em pontos específicos. Contudo verifica-se que o aspecto das tensões nesses gráficos é muito semelhante.

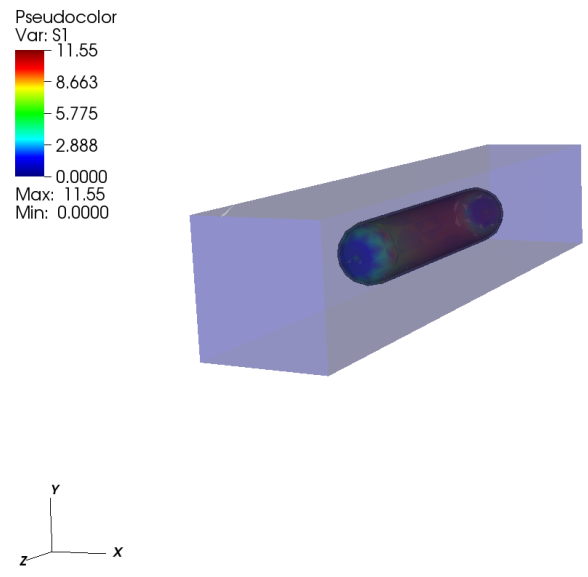


Figura 4.81 – Problema 7: Primeira tensão principal (σ_1) ao longo do compósito (NAESY).

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES

5.1 CONCLUSÕES

Os resultados obtidos mostram a eficácia e eficiência da técnica empregada para o cálculo de tensões no contorno de sólidos 3D genéricos. O uso dessa técnica evitou, para a determinação de tensões no contorno, o cálculo de integrais singulares de ordem $O(r^{-2})$ e $O(r^{-3})$ presentes na representação integral de contorno, as quais são difíceis de serem calculadas com boa precisão. Em conjunto com a técnica subregião-por-subregião (SBS), desenvolvida em trabalhos anteriores (Araújo, Alberto e Dors, 2003; Araújo, Dors, Martins e Mansur, 2004; Araújo, Silva e Telles, 2006; Araújo e Gray, 2008; Araújo, d'Azevedo e Gray, 2010 e 2011), essa técnica pode ser de grande utilidade em análises de sólidos 3D genéricos em especial os de parede fina, e em análises microestruturais de materiais tais como compósitos reforçados com nanotubos de carbono ou materiais policristalinos. Observam-se diferenças claras, em certos nós do modelo, entre os resultados obtidos via MEF e MEC, o que se justifica pelas diferenças matemáticas entre as formulações do MEC e do MEF. As formulações do MEC são semi-analíticas e por isso fornecem resultados mais precisos, em geral, além de serem mais eficientes em regiões onde ocorrem concentrações de tensões. Ressalte-se ainda que a geração da malha de elementos para o MEC é mais simples de ser realizada, além de gerar um sistema de equações algébricas com um número muito menor de graus de liberdade, quando comparado ao necessário em uma análise via MEF. Esse fato aumenta a eficiência do processo de resolução do problema e reduz muito o esforço computacional durante as análises, admitindo que o algoritmo de integração aplicado no cálculo dos coeficientes do sistema de equações seja eficiente. Nos modelos considerados, vê-se que o número de graus de liberdade dos modelos de elementos finitos é consideravelmente maior em todas as comparações realizadas.

A obtenção de malhas estruturadas ou não estruturadas, a partir do programa comercial ANSYS 13, revelou-se um importante e interessante recurso para a geração de malhas em modelos geométricos mais complexos, além de permitir uma maior flexibilidade nos modos de refinamento que podem ser aplicados. O intercâmbio entre os programas ANSYS 13, AutoCAD 2012 e NAESYmeshgenerator também foi muito vantajoso diante dos vários recursos e comandos disponibilizados pelo software AutoCAD 2012 que permite a criação de

diversos tipos de geometria, das mais simples às mais complexas, em um ambiente agradável e amigável.

A visualização dos resultados pelos programas VisIt e Pos3D constitui-se de uma importante ferramenta para a visualização de um grande volume de diversos tipos de dados. Destaca-se aqui a qualidade do programa VisIt, programa do qual se obteve a maioria das figuras deste trabalho, que apresenta diversas opções de visualização, com um grande número de recursos e com uma grande qualidade nas imagens geradas. Sua arquitetura distribuída e paralela faz do VisIt um programa de visualização robusto e extremamente eficiente para a visualização de quaisquer tipos de dados.

Todas as aplicações realizadas permitiram também a avaliação do desempenho do algoritmo SBS e também dos *solvers* de Krylov empregados. O tratamento isolado de cada subregião revelou a eficiência do algoritmo SBS e observou-se que o número de iterações para o qual os *solvers* iterativos convergiram foi bem inferior à ordem do sistema de equações, mostrando assim o potencial e as vantagens desses *solvers* na resolução de problemas subestruturados.

5.2 ASPECTOS FUTUROS

Como tópicos a serem abordados em trabalhos futuros, podem ser citados:

- Contato não-linear com dano;
- análise microestrutural de materiais policristalinos;
- análises dinâmicas e sismologia;
- possibilitar a análise de problemas onde apoios e interfaces inclinadas estão presentes;
- novas opções em geração de malha de elementos como algoritmos que permitam a geração de malhas não estruturadas e
- estudo de características avançadas do programa de visualização VisIt.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexander H. D. Cheng, Daisy T. Cheng, 2005. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, 268–302.

Araújo F. C., D.R. Alberto, Dors C., 2003. Analysis of 3D time-dependent acoustic problems via a generic BE substructuring algorithm based on iterative solvers. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, 705–716.

Araújo F. C., d'Azevedo E. F., Gray L. J., (2010). Boundary-element parallel-computing algorithm for the microstructural analysis of general composites. *Computers & Structures*, 88, 773-784.

Araújo F. C., d'Azevedo E. F., Gray L. J., 2011. Constructing efficient substructure-based preconditioners for BEM systems of equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35, 517–526.

Araújo F. C., Dors C., Martins C. J., Mansur W. J., 2004. New developments on BE/BE multi-zone algorithms based on Krylov solvers - applications to 3D frequency-dependent problems. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, 26, 231-248.

Araújo F. C., Gray L. J., 2008. Analysis of thin-walled structural elements via 3D standard BEM with generic substructuring. *Computational Mechanics*.

Araújo F. C., Gray L. J., 2008. Evaluation of effective material parameters of CNT reinforced composites via 3D BEM. *Comp Mod Eng Sci*, 24(2), 103–21.

Araújo F. C., Silva K. I., Telles J. C. F., 2006. Generic domain decomposition and iterative solvers for 3D BEM problems. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 68, 448-472.

Banerjee P. K., 1994. *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill, London.

Bathe K. J., 1982. *Finite Element Procedures in Eng. Analysis*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

Beer G., Watson J. O., 1992. *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*. J. Wiley.

- Bonnet M., 1999. *Boundary Integral Equation Methods for Fluids and Solids*. J. Wiley.
- Brebbia C. A., Dominguez, 1987. *Boundary Elements – an introduction course*. McGraw Hill Book Company.
- Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C., 1984. *Boundary Element Techniques*. Springer Verlag, Berlin.
- Chen G., Zhou J., 1992. *Boundary Element Methods*. Academic Press Limited.
- Crisfield, M .A., 1986. *Finite Element Procedures for Structural Analysis*. Pineridge Press, Vol. 1.
- Fish J., Belytschko T. A., 2007. *First Course in Finite Elements*. J. Wiley.
- G. Cailletaud, S. Forest, D. Jeulin, F. Feyel, I. Galliet, V. Mounoury, S. Quilici., 2003. Some elements of microstructural mechanics. *Computational Materials Science*, 27, 351–374.
- Hall W. S., 1994. *The Boundary Element Method*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Hughes T. J. R., Levit I., Winget L., 1983. An element-by-element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 36(2), 241–54.
- I. Benedetti, M. H. Aliabadi, 2013. A three-dimensional cohesive-frictional grain boundary micromechanical model for intergranular degradation and failure in polycrystalline materials. Preprint submitted to *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*.
- I. Benedetti, M. H. Aliabadi, 2013. A three-dimensional grain boundary formulation for microstructural modelling of polycrystalline materials. *Computational Materials Science*, 67, 249-260.
- Kane J. H., 1992. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Logan D. L., 1993. *A First Course in the Finite Element Method*. PWS Publishing Company.
- Love A. E. H., 1944. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York.

- O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor, 2005. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6^a ed.
- P. Wriggers, S. O. Moftah, 2006. Mesoscale models for concrete: Homogenization and damage behavior. *Finite elements in analysis and design*, 42, 623-636.
- Qian D., Dickey E. C., Andrews R., Rantell T., 2000. Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube-polystyrene composites. *Applied Physics Letter*, 76, 2868-2870.
- Revista Composites & Plásticos de Engenharia, jul./ago. 2011, n^o 77, ISSN-1518-3092.
- Saad Y., 1995. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Publishing Company, Boston.
- Sleijpen G. L. G., Fokkema D. R., 1993. BICGSTAB(L) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *Electron Trans Num Methods Anal*, 1, 11–32.
- Sonneveld P. C. G. S., 1989. A fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM J Sci Stat Comput*, 10, 36–52.
- van der Vorst H., 1992. A Bi-CGSTAB. A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J Sci Stat Comput*, 13, 631–44.
- Weaver W., Johnston P. R., 1984. *Finite Elements for Structural Analysis*. Prentice Hall.
- X. L. Chen, Y. J. Liu., 2004. Square representative volume elements for evaluating the effective material properties of carbon nanotube-based composites, *Computational Materials Science*, 29, 1–11.
- Z. M. Wang, A. K. H. Kwan, H. C. Chan, 1999. Mesoscopic study of concrete I: generation of random aggregate structure and finite element mesh. *Computers & Structures*, 70, 533-544.