



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS – EM
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL – DECIV
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENG. CIVIL – PROPEC



**ANÁLISE DE TORÇÃO DE SAINT-VENANT EM BARRAS COM SEÇÃO
ARBITRÁRIA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (M.E.C.)**

MESTRANDO: Maicon José Hillesheim
ORIENTADOR: Prof. Francisco Célio de Araújo, Dr.-Ing

Ouro Preto, novembro de 2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS – EM
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL – DECIV
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENG. CIVIL – PROPEC



ANÁLISE DE TORÇÃO DE SAINT-VENANT EM BARRAS COM SEÇÃO ARBITRÁRIA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (M.E.C.)

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas – PROPEC da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construções Metálicas.

MESTRANDO: Maicon José Hillesheim
PROF. ORIENTADOR: Francisco Célio de Araújo, Dr.-Ing

Ouro Preto, novembro de 2013

H652a	<p>Hillesheim, Maicon José. Análise de torção de Saint-Venant em barras com seção arbitrária via método dos elementos de contorno (M.E.C.) [manuscrito] / Maicon José Hillesheim. - 2013. 83f.: il. color.; grafs.; tabs.</p> <p>Orientadores: Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo.</p> <p>Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Área de concentração: Construção Metálica.</p> <p>1. Torção - Teses. 2. Métodos dos Elementos de Contorno - Teses. 3. transformação de coordenadas - Teses. I. Araújo, Francisco Célio de. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.</p> <p>CDU: 624.014</p>
-------	---

Catlogação: sisbin@sisbin.ufop.br

**ANÁLISE DE TORÇÃO DE SAINT VENANT EM BARRAS COM
SEÇÃO ARBITRÁRIA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO (M.E.C.)**

AUTOR: MAICON JOSÉ HILLESHEIM

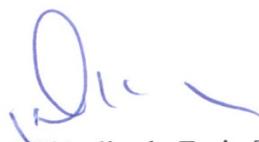
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 04 de novembro de 2013, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo (Orientador / UFOP)



Prof. Dra. Kátia Inácio da Silva (UFOP)



Prof. Dr. José Cláudio de Faria Telles (UFRJ)

DEDICATÓRIA

Aos meus pais: Nelson Hillesheim e Liria Limberger Hillesheim

AGRADECIMENTOS

Agradecimento especial por toda a paciência, dedicação e empenho do meu Orientador o professor doutor Francisco Célio de Araújo que sempre apresentou respostas para as perguntas impossíveis de serem respondidas por mim que surgiram no decorrer deste trabalho.

Agradeço aos amigos Everton, Lucas e Antônio Roque que sempre me ajudaram e pela convivência durante a fase de disciplinas e estudos em grupo.

Aos amigos Carlos Roberto e Wagner pelas ajudas no presente trabalho.

Aos meus familiares que sempre me apoiaram nessa árdua caminhada.

A todos os colegas de mestrado que tive o prazer de conviver e pelos momentos de descontração.

A todos que de alguma forma contribuíram com a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, uma formulação bidimensional do Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.) é utilizada na análise de elementos estruturais com seções arbitrárias quaisquer submetidos a torção uniforme. A análise se baseia na torção de Saint-Venant e propõe-se a abranger seções de paredes espessas e finas. Uma vez que integrais singulares e integrais *quasi*-singulares fazem parte da formulação do M.E.C., constata-se que a eficiência do método depende essencialmente do processo de integração empregado para o cálculo desses tipos de integrais. Com esse fim, algoritmos especiais de integração, baseados na transformação cúbica de coordenadas, segundo Telles, e baseados em expressões analíticas, foram desenvolvidos. Realizam-se diferentes aplicações em que grandezas de interesse tais como centro de torção, momento de inércia à torção, rotação angular específica, tensões, etc. são avaliadas de modo a verificar a eficiência do programa computacional implementado. Nesse contexto, comparam-se os resultados obtidos com os demais processos considerados na pesquisa e com resultados apresentados por outros autores.

ABSTRACT

In this work, a 2D formulation of the Boundary Element Method (BEM) is applied to analyze structural framework elements with arbitrary sections under uniform torsion. The analysis takes into account Saint-Venant torsion, and aims at dealing with both thick-walled and thin-walled sections. As both singular and quasi-singular integrals are present in the BE formulation, it is observed that the efficiency of the method essentially depends on the numerical quadrature employed to evaluate these kinds of integrals. Aiming at that, special integration algorithms based on the cubic coordinate transformation (Telles), and based on closed mathematical expressions have been developed. Many problems have been analyzed in which important engineering quantities as torsion center, torsional moment of inertia, torsional angle, shear stresses, etc. have been evaluated to verify the efficiency of the computational code implemented. In this respect, the results obtained with the strategies developed in this research are compared to the ones presented by other authors.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Componentes de deslocamentos.....	05
Figura 2.2: Ponto $\mathbf{x} \in \Gamma$	08
Figura 2.3: Detalhe do contorno no ponto \mathbf{x}	08
Figura 2.4: Tensão de cisalhamento em $\mathbf{x} \in \Omega$	09
Figura 2.5: Seção transversal baseada no sistema \bar{X}	11
Figura 3.1: Problema de potencial com as condições de contorno.....	16
Figura 3.2: Típico domínio Ω com raio r , ponto fonte ξ e contorno Γ	17
Figura 3.3: Ponto fonte aplicado em uma descontinuidade no contorno.....	18
Figura 3.4: Exemplo de domínio discretizado.....	20
Figura 3.5: Exemplo de domínio discretizado com o detalhe de um elemento linear mapeado em coordenadas naturais η	21
Figura 3.6: Vetor \mathbf{r} e vetor \mathbf{n} ortogonais quando o ponto fonte situa-se no próprio elemento.....	22
Figura 3.7: Elemento parabólico.	23
Figura 3.8 : Sistema de equações.....	26
Figura 3.9: Domínio esbelto.	27
Figura 3.10: Integrando correspondente à potencial <i>quasi</i> -singular.	29
Figura 3.11: Integrando correspondente à fluxo <i>quasi</i> -singular.....	29
Figura 3.12: Distribuição dos pontos de Gauss Padrão e após a transformação de Telles.....	31
Figura 3.13: Esquema local de coordenadas.....	32
Figura 3.14: Representação do vetor normal.....	33
Figura 3.15: Parâmetros do sistema local de coordenadas.....	35
Figura.3.16: Um ponto no contorno discretizado Γ	37
Figura 3.17: Detalhes do ponto no contorno.....	37
Figura 3.18: Direção das componentes de derivadas.....	39

Figura 4.1-a: Retângulo.....	46
Figura 4.1-b: Empenamento no contorno retangular.....	46
Figura 4.1-c. Empenamento na seção retangular.....	47
Figura 4.2-a: Meia Lua	47
Figura 4.2-b: Empenamento no contorno da meia lua.....	47
Figura 4.2-c. Empenamento na seção em meia lua.....	48
Figura 4.3-a: Perfil I.....	49
Figura 4.3-b: Empenamento da seção caixão no contorno.....	49
Figura 4.3-b: Empenamento no contorno do perfil I.....	49
Figura 4.3-c. Empenamento na seção em perfil I.....	49
Figura 4.4-a: Caixão de parede fina.....	50
Figura 4.4-b. Empenamento da seção caixão no contorno.....	52
Figura 4.4-c. Empenamento da seção caixão.....	53
Figura 4.4-d: Tensão τ_{xz} no contorno da seção.....	53
Figura 4.4-e: Campo de tensão τ_{xz} da seção.....	54
Figura 4.4-f: Tensão τ_{yz} no contorno da seção.....	54
Figura 4.4-g: Campo de tensão τ_{yz} da seção.....	55
Figura 4.5-a: Triângulo equilátero.....	55
Figura 4.5-b: Empenamento no contorno do triângulo.....	57
Figura 4.5-c: Empenamento na seção em triângulo.....	57
Figura 4.5-d: Tensão τ_{xz} no contorno.....	58
Figura 4.5-e: Tensão τ_{yz} no contorno.....	58
Figura 4.5-f: Campo de tensão de cisalhamento τ_{xz}	58
Figura 4.5-g: Campo de tensão de cisalhamento τ_{yz}	58
Figura 4.6-a: Elipse.....	59

Figura 4.6-b: Empenamento no contorno da elipse.....	61
Figura 4.6-c: Empenamento na seção elíptica.....	61
Figura 4.6-d: Tensão de cisalhamento τ_{zx} no contorno.....	61
Figura 4.6-e: Tensão de cisalhamento τ_{zy} no contorno.....	61
Figura 4.6-f: Tensão de cisalhamento τ_{zx} na seção elíptica.....	62
Figura 4.6-g: Tensão de cisalhamento τ_{zy} na seção elíptica.....	62
Figura 4.7: Barra biengastada com seus graus de liberdade.....	63
Figura 4.8: Matriz de rigidez de pórtico espacial.....	63

LISTA DE SÍMBOLOS

CARACTERES ROMANOS

C	Centro de Gravidade
d	Distancia do ponto fonte até a linha de ação do elemento linear
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
G	Matriz dos potenciais
H	Matriz dos fluxos
I_t	Momento de Inércia a torção
J	Jacobiano da transformação
J_0	Momento polar de inércia da seção trasversal
l	Comprimento do elemento linear
M	Coordenadas de um ponto
M_t	Momento torçor
n	Vetor normal ao contorno
p	Fluxo
S	Centro de torção
t	Vetor tangente ao contorno
u	Campo de deslocamentos
x	Ponto de campo
\bar{X}	Sistema cartesiano arbitrário
x, y, z	Coordenadas cartesianas

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas de um sistema cartesiano com origem arbitrária
X_c, Y_c	Coordenadas do centro de gravidade
X_s, Y_s	Coordenadas do centro de cisalhamento

CARACTERES GREGOS

α	Distância da projeção do ponto fonte na linha de ação do elemento até seu nó inicial
Γ	Contorno
Γ_j	Contorno de um elemento
∇	Vetor gradiente
∇^2	Operador Laplaciano
γ	Coordenadas cúbicas
$\bar{\gamma}$	Coordenada cúbica no ponto singular
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{yx}, \gamma_{zy}, \gamma_{xz}$	Distorções angulares
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Deformações lineares
η	Coordenadas naturais
θ	Ângulo entre dois vetores
θ_i	Deslocamento angular
θ'_i	Rotação angular específica
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Ponto fonte
ρ	Distancia do centro de torção até um ponto do domínio da seção
σ_N	Tensão normal

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Tensões normais

τ_N Tensão de cisalhamento

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ Tensões tangenciais

ψ Função de empenamento

ψ_0 Função de empenamento referenciada no sistema arbitrário

ψ_s Função de empenamento referenciada no centro de cisalhamento

Ω Domínio

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Motivação e Objetivos.....	1
1.2 Estado da Arte.....	2
2 FORMULAÇÃO DE TORÇÃO DE SAINT-VENANT	5
2.1 Princípios Básicos.....	5
2.2 Torque.....	9
2.3 Determinação do centro de torção	11
3 FORMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	16
3.1 Problema de Potencial	16
3.3 Fluxos internos.....	19
3.4 Implementação Computacional	19
3.5.2 Elementos Lineares.....	20
3.4.3 Elementos Parabólicos	23
3.4.4 Sistema de Equações Algébricas	25
3.4.5 Particularidades do M.E.C. para o problema de torção	26
3.5 Integração Numérica.....	27
3.6 Transformação de Telles.....	28
3.7 Integração Analítica com elementos lineares	31
3.7.1 Expressões analíticas para os coeficientes de G e H.....	32
3.8 Cálculo dos fluxos nos pontos internos	36
3.8.1 Derivadas analíticas no contorno (fluxos)	37
3.8.2 Integrais analíticas em pontos internos (fluxos)	38
3.9 Cálculo das tensões.....	45
4 RESULTADOS E APLICAÇÕES	46
5 CONCLUSÕES	65
6 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	66
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
ANEXOS	69

1 INTRODUÇÃO

1.1. Motivação e Objetivos

Problemas de engenharia, governados por equações diferenciais parciais, são, na verdade, analisados via modelos discretos com um número finito de graus de liberdade. Com esse fim, processos de discretização, que possibilitam a simulação computacional desses problemas, têm sido desenvolvidos por pesquisadores ao longo das últimas décadas. Entre os métodos de análise, têm-se destacado os Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) e de Elementos de Contorno (M.E.C.).

O antigo problema da torção em barras de barras com seções arbitrárias necessita de formulações numéricas para ser resolvido a partir da torção de Saint-Venant, que fundamenta-se na teoria da elasticidade. Somente para algumas formas geométricas simples como círculo, elipse e triângulo é possível à obtenção de soluções analíticas das equações diferenciais parciais envolvidas (equação de Laplace), as quais podem ser convenientemente resolvidas por meio do M.E.C.

Elementos estruturais de seções arbitrárias sujeitas a momentos torçores estão presentes nos mais diversos tipos de estruturas e maquinarias tais como fuselagem de aeronaves, peças estruturais de automóveis entre outros. Na construção civil, os elementos sujeitos a esse esforço são as vigas de pontes ou viadutos em trechos curvos (normalmente com seções em forma de caixão), vigas e pilares em geral que fazem parte da estrutura de um edifício etc. Esses membros de seções genéricas podem ter seção espessa, como é o caso de estruturas em concreto armado, ou ainda, podem ser formados por elementos de parede fina, como é o caso de perfis em aço, empregados em estruturas metálicas.

Diante dessa classe de problemas relevantes em engenharia, propõe-se, no presente trabalho, compreender o fenômeno de torção de Saint-Venant e implementar estratégias computacionalmente eficientes para a sua análise. Neste particular, optou-se por uma formulação baseada no M.E.C. que possibilitará, de forma unificada, a simulação computacional de seções de parede fina ou espessa. Ressalta-se que estratégias, para avaliar grandezas de interesse tais como função de empenamento, deslocamento angular, rigidez torcional, tensões cisalhantes, etc., são desenvolvidas. Na verdade, a implementação

computacional dessas rotinas resultou na criação de um novo módulo no âmbito do programa NAESY (Numerical Analysis of Engineering Systems), desenvolvido em linguagem de programação Fortran90, que inclui técnicas publicadas em diversos artigos científicos como Araújo, Alberto e Dors (2003); Araújo, Dors, Martins e Mansur (2004); Araújo, Silva e Telles (2006); Araújo e Gray (2008) e Araújo, d'Azevedo e Gray (2010, 2011).

Note-se que, por se tratar de método baseado em formulação integral de contorno, uma questão relevante são as estratégias de integração para o cálculo dos coeficientes das matrizes, já que nessas formulações há a presença de integrais impróprias fracamente e fortemente singulares que demandam algoritmos especiais de integração. A situação é particularmente intrincada no caso de integrais *quasi*-singularidades. Neste trabalho, adotam-se, para o cálculo das mesmas, processos baseados na transformação de coordenadas cúbicas (Telles, 1994) e em integrações analíticas.

1.2 Estado da Arte

Coulomb desenvolveu sua teoria para a resolução de problema de torção para barras de seção circular, considerando que estas seções permaneceriam planas após sofrerem o processo de torção. De acordo com Timoshenko e Goodier (1979), Navier aplicou esse mesmo princípio para barras não circulares obtendo respostas errôneas de que o ângulo de torção é inversamente proporcional ao momento polar de inércia e que a máxima tensão cisalhante ocorre no ponto mais afastado do centróide. Ainda segundo Timoshenko, a solução coerente foi apresentada por Saint-Venant, que usou o processo semi-inverso para desenvolver a formulação do problema de torção.

Recentemente, diversos estudos foram realizados abordando técnicas numéricas para a resolução de problemas mais complexos envolvendo torção.

Athanasiadis (1989) traz formulação baseada no M.E.C. para o cálculo da função de empenamento no contorno, bem como outras propriedades como o centro de torção de seções arbitrárias, utilizando uma estratégia indireta.

Friedman e Koasmatk (2000) apresentam resolução de problema de torção acoplada à flexão em vigas de material isotrópico e com seção arbitrária, a partir da formulação semi-

inversa de Saint-Venant, via elementos de contorno. O estudo foi realizado com uma formulação bidimensional e utilizou o elemento isoparamétrico de três nós que possibilita maior aproximação à geometria da seção da viga. O estudo obteve a resposta correspondente às propriedades tais como centro de torção e momento de inércia à torção, bastante próximo da solução obtida com valor exato por meio de expressões analíticas, fazendo uso de um pequeno número de elementos, comprovando a boa aplicabilidade do M.E.C. para este tipo de problema em relação ao M.E.F.

Sapountzakis (2003) visa avaliar o comportamento de seções arbitrárias e constantes ao longo de seu comprimento, para domínios multiplamente conexos. Considera-se que esses membros estruturais estão sujeitos a momentos torçores distribuídos e arbitrários, enquanto as bordas são mantidas lineares, de modo que surgem deformações e tensões normais, bem como as tensões de cisalhamentos nas seções, dado que as tensões são grandezas de grande interesse prático.

O autor, no mesmo ano, desenvolve uma formulação para análise não uniforme de membros estruturais compósitos com seção transversal arbitrária constante. O interior desses membros pode conter materiais de diferentes módulos de elasticidade longitudinal e diferentes módulos de elasticidade transversal em que um determinado membro consiste de uma matriz com um número finito de inclusões. Essas barras podem estar, ainda, sujeitas a momentos torçores concentrados e momentos torçores distribuídos não uniformemente ao longo da seção.

Sapountzakis (2006) desenvolve uma formulação em elementos de contorno para calcular uma matriz de rigidez e o vetor de carga nodal de uma seção homogênea ou composta arbitrária, em que a dada formulação leva em conta os efeitos das deformações de cisalhamento. Na sua investigação, sete problemas de valor de contorno são formulados, empregando-se exclusivamente integrais de contorno, onde só o contorno é discretizado.

O mesmo autor, em 2012, apresenta uma formulação baseada no M.E.C., desenvolvida para a análise de torção não uniforme de barras com seção arbitrária de dupla simetria, levando em conta o momento secundário gerado na deformação. A barra pode estar sujeita a carregamentos arbitrários distribuídos ou carregamentos concentrados. O deslocamento é baseado na formulação desenvolvida, considerando as leis constitutivas do material em três dimensões e o sistema baseado em uma estratégia incremental interativa para

resolver a parte elástica e a parte plástica das tensões com um eficiente processo de integração.

Camotim (2010) utiliza a cinemática da distorção e mecânica, empregada em parede fina, para fornecer a definição clara das propriedades e do empenamento de seções com parede esbelta. É descrito um procedimento analítico para determinar a deformação distorcional e a distribuição de deslocamentos para este tipo de seção.

A precisão da resposta depende da eficiência do processo de integração uma vez que a formulação do M.E.C. apresenta integrais singulares que são fracamente singulares. Diante dessa problemática, Telles (1994) propôs a transformação polinomial cúbica de coordenadas com o aumento da concentração de pontos de Gauss no local onde se encontra a singularidade. O estudo foi de grande relevância, promovendo uma melhora significativa nas respostas obtidas pelo M.E.C. com a integração que utiliza poucos pontos por elemento e reduz, assim, o custo computacional de processamento.

Com a mesma problemática, Araújo e Gray (2008), em um estudo do emprego de nano tubos de carbono (CNTs) em compósitos, apresentaram um processo especial de integração para os casos de integrais fortemente singulares e fracamente singulares. Tal processo baseia-se em uma estratégia analítica em que um elemento bidimensional tem seu contorno subdividido em elementos lineares e um sistema local de coordenadas implantado em cada elemento, possibilitando a estratégia analítica.

2 FORMULAÇÃO DE TORÇÃO DE SAINT-VENANT

O problema de torção em seções circulares é bastante simples uma vez que, por inspeção, verifica-se que todas as suas seções transversais permanecem planas e sem empenamento ao se deformar e, ainda, que a distribuição de tensão varia linearmente com a distância ρ do eixo da barra. É possível demonstrar, também, que as tensões, bem como o ângulo de torção, são grandezas inversamente proporcionais ao momento polar de inércia da seção. Quando se trata de seções não circulares, verifica-se que as seções não permanecem planas e as hipóteses adotadas para seções circulares deixam de ser aplicáveis. Uma formulação consistente é apresentada por Saint-Venant na qual as relações da teoria da elasticidade são respeitadas. Esta formulação é aplicável para qualquer tipo de seção, podendo ser circular, elíptica, simétrica ou não simétrica, de parede fina ou espessa, fechadas ou abertas. No entanto, a solução para essa classe de problemas consiste na resolução da equação de Laplace que, por sua vez, demanda uma estratégia numérica.

2.1 Princípios Básicos

Para entender a formulação de Saint-Venant, considere-se uma barra com seção transversal qualquer (veja figura 2.1) sujeita a um torque em suas extremidades livres.

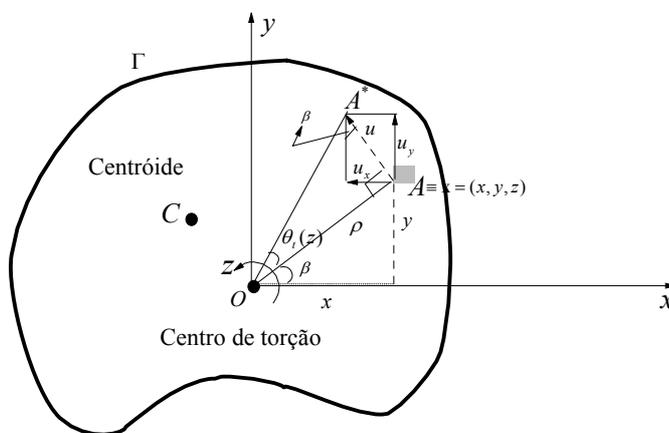


Figura 2.1: Componentes de deslocamentos.

Nesta situação, o respectivo campo de deslocamentos na seção transversal é dado pelas expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = -\theta'_t z y \\ u_y = \theta'_t z x \\ u_z = \theta'_t \psi_s(x, y) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

em que $\theta'_t = \frac{d\theta_t}{dz}$ e θ_t é o ângulo de rotação relativo entre duas seções associadas ao eixo z, e o empenamento da seção é representado por uma função $\psi_s = \psi_s(x, y)$. Uma vez que o deslocamento é $u = \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|$ e o empenamento da seção $\psi_s = \psi_s(x, y)$, u_z varia independente da coordenada z, ou seja, u_z é o mesmo para todas as seções da barra. As expressões acima estão referenciadas a um sistema cuja origem localiza-se no ponto O , (veja figura. 2.1), o qual corresponde ao centro de torção da seção, não necessariamente o seu centróide (na seção 2.3 será apresentada uma formulação para a obtenção do centro de torção). Com os deslocamentos u_x, u_y, u_z , dados pelas expressões (2.1), e desprezando as forças de massa, obtêm-se, das relações entre deformação e deslocamento da teoria da elasticidade, as seguintes expressões para as componentes de deformação são obtidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\theta'_t z + \theta'_t z = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\theta'_t y + \theta'_t \frac{\partial \psi_s}{\partial x} = \theta'_t \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \theta'_t x + \theta'_t \frac{\partial \psi_s}{\partial y} = \theta'_t \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial y} + x \right) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Aplicando-se a lei de Hooke generalizada, obtêm-se, então, as respectivas componentes de tensão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\theta'_t \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\theta'_t \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial y} + x \right) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Nota-se, nas expressões (2.3), que todas as tensões normais são nulas, podendo-se dizer, então, que todos os pontos estão em um estado de cisalhamento puro. As tensões de cisalhamento devem ser determinadas de modo que atendam as condições de contorno e as equações de equilíbrio da teoria da elasticidade. Dessa forma, das equações de equilíbrio, dado que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, desprezando-se as forças de massa, obtém-se:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Substituindo as equações (2.3) em (2.4), verifica-se que a função de empenamento ψ é obtida de uma equação diferencial parcial de segunda ordem que, por sua vez, é conhecida como equação diferencial de Laplace,

$$G\theta'_t \left[\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2} \right] = 0 \text{ ou } \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.5)$$

Percebe-se, de acordo com Timoshenko (1979), que a tensão de cisalhamento resultante que atua no contorno é dirigida de acordo com a tangente ao mesmo. Essa condição deve ser satisfeita uma vez que não há nenhum esforço sobre a superfície lateral da barra, e então se obtém a expressão (2.6), pois o vetor tensão é ortogonal ao vetor normal no contorno.

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \quad (2.6)$$

A partir das figuras 2.2 e 2.3 e considerando um infinitesimal do contorno, o vetor normal $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ é dado por $\mathbf{n} = (n_x, n_y) = (\cos \alpha, \sin \alpha) = \left(\frac{dy}{d\Gamma}, -\frac{dx}{d\Gamma} \right)$.

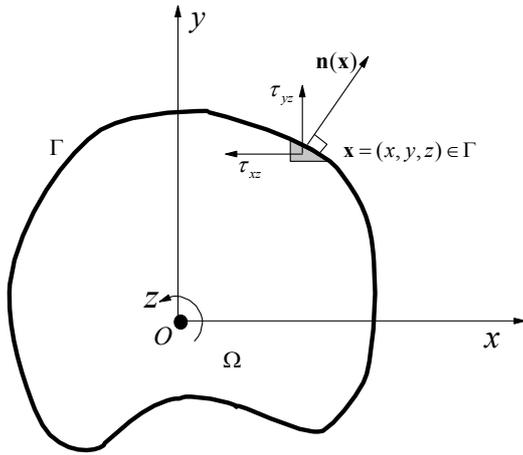


Figura 2.2: Ponto $\mathbf{x} \in \Gamma$.

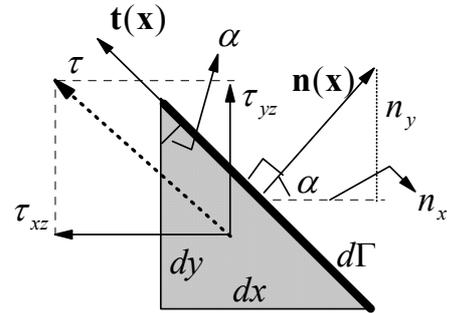


Figura 2.3: Detalhe do contorno no ponto \mathbf{x} .

Substituindo as tensões expressas em (2.3) na equação (2.6) tem-se:

$$\left(\frac{\partial \psi_s}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{d\Gamma} - \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{d\Gamma} = 0 . \quad (2.6b)$$

As condições de contorno da equação (2.6b) podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial x} \frac{dy}{d\Gamma} + \frac{\partial \psi_s}{\partial y} \left(-\frac{dx}{d\Gamma} \right) = y \frac{dy}{d\Gamma} - x \left(-\frac{dx}{d\Gamma} \right) \quad (2.6c)$$

logo

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi_s}{\partial y} n_y = y n_x - x n_y \quad (2.6d)$$

Assim, por definição, obtém-se o fluxo no contorno, que é dado pela expressão (2.6e)

$$p(\mathbf{x}) = \nabla \psi_s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{n}} = (x, y) \cdot (-n_y, n_x) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) , \quad (2.6e)$$

na qual $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = (-n_y, n_x)$ é o vetor tangente ao contorno no ponto \mathbf{x} . Percebe-se que \mathbf{t} e \mathbf{n} são vetores ortogonais entre si, logo $(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = -n_x n_y + n_x n_y \equiv 0$, o que implica dizer que o problema de torção é solucionado por uma função de potencial $\psi_s(x, y)$ que é governada pela equação

diferencial parcial de Laplace sob as condições de contorno (2.6e). Deste modo, pode-se dizer que o problema da torção consiste em resolver a equação (2.5) sob as condições de contorno (2.6e).

2.2 Torque

Com as expressões para cálculo das tensões cisalhantes dadas pelas equações (2.3), vê-se, de acordo com a figura 2.4, que o momento torçor na seção é dado por

$$M_t = \int_{\Omega} (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})d\Omega . \quad (2.7)$$

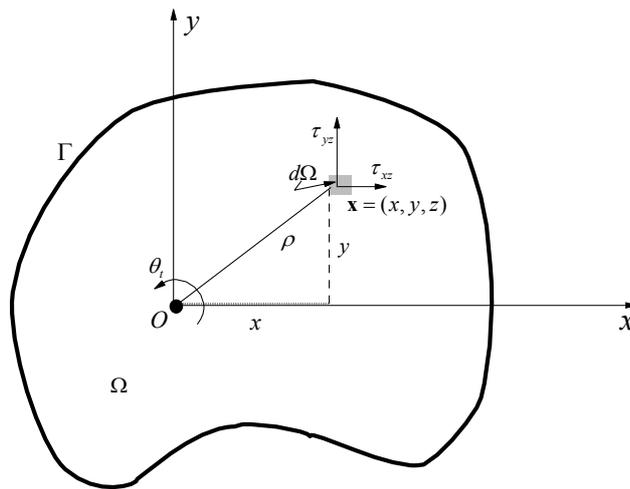


Figura 2.4: Tensão de cisalhamento em $\mathbf{x} \in \Omega$.

Substituindo as equações (2.3) na equação (2.7), obtém-se:

$$\frac{M_t}{G\theta'_t} = \int_{\Omega} \left[x \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial y} + x \right) - y \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial x} - y \right) \right] d\Omega \quad (2.8)$$

A equação (2.8) pode ser desmembrada, e pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{M_t}{G\theta'_t} = \int_{\Omega} \left(x \frac{\partial \psi_s}{\partial y} - y \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega \quad (2.9)$$

Tornando a reescrevê-la, tem-se:

$$\frac{M_t}{G\theta'_t} = -\int_{\Omega} \left[\frac{\partial(y\psi_s)}{\partial x} - \frac{\partial(x\psi_s)}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \rho^2 d\Omega \quad (2.10)$$

O termo $\int_{\Omega} \rho^2 d\Omega$ corresponde ao momento polar de inércia J_0 da seção. Aplicando o teorema de Green em $-\int_{\Omega} \left[\frac{\partial(y\psi_s)}{\partial x} - \frac{\partial(x\psi_s)}{\partial y} \right] d\Omega$, observa-se:

$$-\int_{\Omega} \left[\frac{\partial(y\psi_s)}{\partial x} - \frac{\partial(x\psi_s)}{\partial y} \right] d\Omega = -\int x\psi_s(\mathbf{x})dx + y\psi_s(\mathbf{x})dy = -\int_{\Gamma} \psi_s(\mathbf{x})[\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x})]d\Gamma \quad (2.11)$$

em que $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = (-n_y, n_x)$ é o vetor tangente unitário. Finalmente, a equação (2.12) fornece a importante relação entre o deslocamento angular, o torque e as propriedades características da seção, ou seja,

$$\frac{M_t}{G\theta'_t} = -\int_{\Gamma} \psi_s(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\Gamma + J_0, \quad (2.12)$$

na qual $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x})$ corresponde ao valor do fluxo normal prescrito. É também possível aplicar o Teorema de Green e transformar a integral de domínio do momento polar de inércia $J_0 = \int_{\Omega} \rho^2 d\Omega$ em uma integral de linha

$$J_0 = \int_{\Gamma} xy[(y,x) \cdot (n_x, n_y)]d\Gamma. \quad (2.13)$$

Com a equação (2.14), o torque da seção é calculado exclusivamente por integral de contorno, logo:

$$M_t = G\theta'_t I_t, \text{ com } I_t = -\int_{\Gamma} \psi_s(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\Gamma + \int_{\Gamma} xy[(y,x) \cdot (n_x, n_y)]d\Gamma, \quad (2.14)$$

onde I_t é o momento de inércia à torção da seção.

2.3 Determinação do centro de torção

As expressões deduzidas na seção anterior estão utilizando como referência o centro de torção da seção, no entanto, o centro de torção S não é conhecido de início e, desse modo, precisa-se de uma estratégia para obtê-lo em relação a um sistema de referência qualquer. O centro de torção é o ponto da seção em torno do qual a seção transversal gira quando submetida a torque. A figura 2.5 representa o problema quando o contorno está referenciado em um sistema qualquer, aqui denominado \bar{X} .

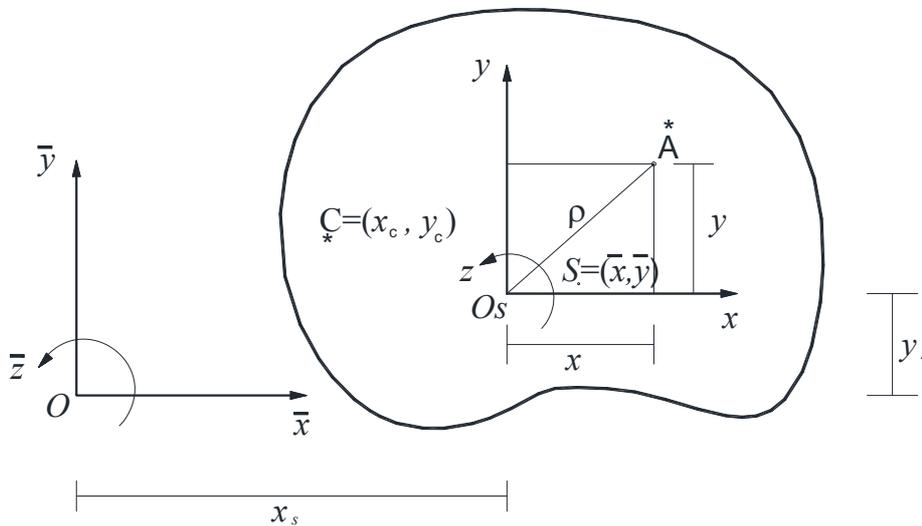


Figura 2.5. Seção transversal baseada no sistema \bar{X} .

A partir da figura 2.5, as coordenadas \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} são descritas como

$$\begin{cases} \bar{x} = x + x_s \\ \bar{y} = y + y_s \\ \bar{z} = z \end{cases} \quad (2.15)$$

Ao substituir a equação (2.15), na equação (2.1), o campo de deslocamento referenciado no sistema \bar{X} , então, é dado por:

$$\begin{cases} u_{\bar{x}} = -\theta'_t \bar{z} (\bar{y} - y_s) \\ u_{\bar{y}} = \theta'_t \bar{z} (\bar{x} - x_s) \\ u_{\bar{z}} = \theta'_t \psi_s (\bar{x} - x_s, \bar{y} - y_s) \end{cases} \quad (2.16)$$

Reescrevendo as relações entre deformação e deslocamento da teoria da elasticidade para o sistema \bar{X} e aplicando a lei Hooke generalizada, obtém-se:

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = \theta'_t \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{y}} + (\bar{x} - x_s) \right] & \tau_{yz} = G\theta'_t \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{y}} + (\bar{x} - x_s) \right] \\ \gamma_{xz} = \theta'_t \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{x}} - (\bar{y} - y_s) \right] & \tau_{xz} = G\theta'_t \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{x}} - (\bar{y} - y_s) \right] \end{cases} \quad (2.17)$$

Da condição de contorno existente, devido à ausência de cargas laterais na barra, tem-se

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \quad (2.18)$$

Assim, substituindo as expressões dadas pela equação (2.17) na expressão dada pela equação (2.18) e fazendo algumas manipulações algébricas, chega-se à seguinte relação:

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{x}} n_x + \frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{y}} n_y = (\bar{y} - y_s) n_x - (\bar{x} - x_s) n_y \quad (2.19)$$

na qual o termo do lado esquerdo corresponde ao fluxo da função ψ_s o qual pode ser reescrita como

$$\nabla \psi_s \mathbf{n}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{n}} = \bar{y} n_x - \bar{x} n_y - y_s n_x + x_s n_y \quad , \quad (2.20)$$

ou ainda:

$$\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{t}} = \nabla \psi_s \mathbf{n} + (y_s, -x_s) \mathbf{n} \quad (2.21)$$

Colocando o vetor normal em evidência, observa-se

$$\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{t}} = \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{y}} \right] \mathbf{n} + (y_s, -x_s) \mathbf{n} = \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{x}} + y_s, \frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{y}} - x_s \right] \mathbf{n} \quad (2.22)$$

A equação (2.22) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{t}} = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\psi_s + y_s \bar{x} + f_1(\bar{y})), \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\psi_s - x_s \bar{y} + f_2(\bar{x})) \right] \mathbf{n} \quad (2.23)$$

Com

$$\begin{cases} f_1(\bar{y}) = -x_s \bar{y} + c \\ f_2(\bar{x}) = +y_s \bar{x} + c \end{cases} \quad (2.24)$$

O fluxo no contorno comum ao sistema qualquer e ao sistema referenciado no centro de torção é demonstrado na equação (2.25).

$$\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{t}} = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\psi_s + y_s \bar{x} - x_s \bar{y} + c), \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\psi_s - x_s \bar{y} + y_s \bar{x} + c) \right] \mathbf{n} = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\psi_0), \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\psi_0) \right] \mathbf{n} = \nabla \psi_0 \mathbf{n} \quad (2.25)$$

portanto:

$$\psi_0(\bar{x}, \bar{y}) = \psi_s(\bar{x} - x_s, \bar{y} - y_s) + y_s \bar{x} - x_s \bar{y} + c \quad (2.26)$$

Agrupando os termos, obtemos a equação (2.27), na qual se relaciona o empenamento referenciado no sistema qualquer com o referenciado no centro de torção da seção:

$$\psi_s(x, y) = \psi_0(\bar{x}, \bar{y}) - y_s \bar{x} + x_s \bar{y} + c \quad (2.27)$$

E, além disso, com o operador laplaciano aplicado à função de empenamento da seção tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_0 &= \bar{\nabla} \bar{\nabla} \psi_0 = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{y}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \cdot \left[\left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{x}} + y_s \right), \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \bar{y}} - x_s \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi_s \end{aligned} \quad (2.28)$$

Essa propriedade descrita em (2.28) garante que, conhecendo a geometria da seção, o potencial ψ_0 , referenciado no sistema \bar{X} , pode ser obtido diretamente com a resolução do problema de contorno, uma vez que se conhece o fluxo no contorno $\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{t}}$ que é obtido pela geometria da seção em questão.

A equação (2.27) relaciona ψ_s com ψ_0 , mas ainda será preciso conhecer x_s , y_s e c (veja Fig. 2.5), os quais podem ser determinados a partir do sistema abaixo (Athanasiadis 1989):

$$\begin{cases} I_{xx}x_s - I_{xy}y_s + M_x c = -\int_{\Omega} \bar{y} \psi_0 d\Omega \\ I_{xy}x_s - I_{yy}y_s + M_y c = -\int_{\Omega} \bar{x} \psi_0 d\Omega \\ M_x x_s - M_y y_s + Fc = -\int_{\Omega} \psi_0 d\Omega \end{cases}, \quad (2.29)$$

tendo como incógnitas, as respectivas coordenadas do centro de torção x_s, y_s bem como a constante c . Assim, resolvendo o problema de valor de contorno para o sistema \bar{X} , facilmente é possível transladar a resposta para o sistema cuja origem se situa no centro de torção por meio da equação (2.27).

Como os termos do lado direito de (2.29) correspondem a integrais de domínio e dado que já se dispõe de malhas de elementos de contorno para a modelagem das seções, será conveniente transformá-las em integrais ao longo do contorno, obtidas empregando-se a 2ª identidade de Green dada por

$$\int_{\Omega} (\psi_0 \nabla^2 f - f \nabla^2 \psi_0) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.30)$$

Considerando funções cujo $\nabla^2 f = 1$, como por exemplo a função $f = \frac{1}{2} \bar{x}^2$, então a expressão (2.30) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \psi_0 d\Omega = \int_{\Gamma} \left[\psi_0(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f(\bar{\mathbf{x}}) p(\bar{\mathbf{x}}) \right] d\Gamma \quad (2.31)$$

Derivando a função f em relação ao vetor normal \mathbf{n} ao contorno Γ tem-se a expressão:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla f, \mathbf{n}) = [(\bar{x}, 0) \cdot (n_{\bar{x}}, n_{\bar{y}})] = \bar{x} \cdot n_{\bar{x}} \quad (2.32)$$

Substituindo a função f e a expressão (2.32) em (2.31), obtêm-se a expressão (2.33) correspondente à integral de domínio transformada em uma integral de contorno.

$$\int_{\Omega} \psi_0 d\Omega = \int_{\Gamma} \left[(\bar{x} \cdot n_{\bar{x}}) \psi_0(\bar{\mathbf{x}}) - \left(\frac{1}{2} \bar{x}^2 \right) p(\bar{\mathbf{x}}) \right] d\Gamma \quad (2.33)$$

Por analogia, escolhendo-se convenientemente $f = \frac{1}{6} \bar{y}^3$ e $f = \frac{1}{6} \bar{x}^3$ e substituindo-as na 2ª identidade de Green, dada pela equação (2.30), obtêm-se respectivamente as relações

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \bar{y} \psi_0 d\Omega = \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{1}{2} \bar{y}^2 n_{\bar{y}} \right) \psi_0(\bar{\mathbf{x}}) - \left(\frac{1}{6} \bar{y}^3 \right) p(\bar{\mathbf{x}}) \right] d\Gamma \\ \int_{\Omega} \bar{x} \psi_0 d\Omega = \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{1}{2} n_x \bar{x}^2 \right) \psi_0(\bar{\mathbf{x}}) - \left(\frac{1}{6} \bar{x}^3 \right) p(\bar{\mathbf{x}}) \right] d\Gamma \\ \int_{\Omega} \psi_0 d\Omega = \int_{\Gamma} \left[(\bar{x} \cdot n_x) \psi_0(\bar{\mathbf{x}}) - \left(\frac{1}{2} \bar{x}^2 \right) p(\bar{\mathbf{x}}) \right] d\Gamma \end{array} \right. , \quad (2.34)$$

que expressam as integrais de domínio correspondente ao termo do lado direito do sistema de equações (2.29) em integrais de contorno.

3 FORMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O M.E.C. consiste basicamente em converter as equações diferenciais parciais que governam um problema em correspondentes equações integrais, envolvendo apenas valores de contorno (Silva, 2005, p.6). Com isso, apenas o contorno precisa ser discretizado, proporcionando uma significativa redução na complexidade da malha, bem como uma redução do tamanho do sistema de equações algébricas.

Como demonstrado na seção 2.1, o problema de torção consiste na resolução de uma equação diferencial de Laplace/ Poisson, cuja formulação integral será discutida abaixo.

3.1 Problema de Potencial

Existe uma gama de problemas descritos pela equação de Laplace/Poisson como, por exemplo, problemas de potenciais elétricos, linhas de fluxos em barragens, fluxo de calor em uma chapa etc. Aqui trabalharemos especificamente com a equação de Laplace, dada por $\nabla^2\psi = 0$ em Ω , como ilustrado na figura 3.1.

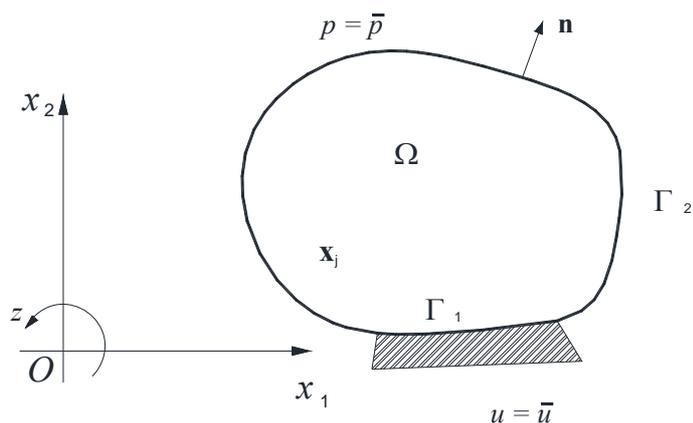


Figura 3.1: Problema de potencial com as condições de contorno.

Tal equação, para problemas gerais, deve ser resolvida de modo a atender as condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\mathbf{x}) = \bar{\psi}(\mathbf{x}) \text{ em } \Gamma_1, \text{ condição de contorno essencial} \\ p(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \bar{p}(\mathbf{x}), \text{ em } \Gamma_2, \text{ condição de contorno natural} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Por meio das relações de Green, um problema definido em um domínio pode ser descrito pela equação integral de contorno dada por

$$c(\xi)\psi(\xi) + \int_{\Gamma} p^*(\mathbf{x}, \xi)\psi(\mathbf{x})d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi^*(\mathbf{x}, \xi)p(\mathbf{x})d\Gamma \quad , \quad (3.2)$$

em que \mathbf{x} é denominado ponto de campo e o ponto ξ é denominado ponto fonte. Os termos $\psi^*(\mathbf{x}, \xi)$ e $p^*(\mathbf{x}, \xi)$ correspondem à solução fundamental e ao fluxo fundamental, e o $c(\xi)$ é o termo livre da integral, já que ψ^* é a solução fundamental dessa classe de problemas dada por

$$\psi^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad , \quad (3.3)$$

onde $r = \|\mathbf{r}\|$ é a norma do vetor raio, que compreende a distância entre \mathbf{x} e ξ (figura 3.2).

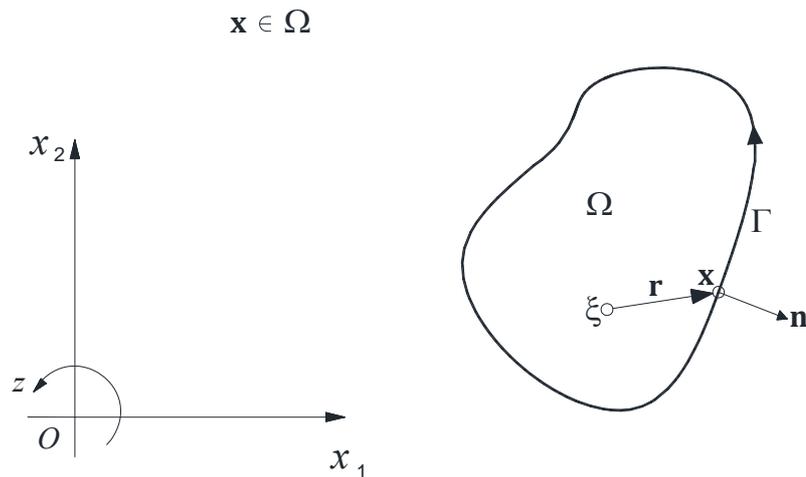


Figura 3.2: Típico domínio Ω com o ponto fonte ξ e contorno Γ .

Conhecendo a solução fundamental $\psi^*(\mathbf{x}, \xi)$ e derivando-a em relação ao vetor normal \mathbf{n} ao contorno Γ , chega-se ao fluxo fundamental. Para o caso 2D, o fluxo é dado por :

$$p^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\partial \psi^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \nabla^2 \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -2\pi \delta(r) \Rightarrow p^*(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_i n_i}{r} \right), \quad (3.4)$$

em que r_i é componente do vetor raio e i varia de 1 a 2 para o caso bidimensional, então tem-se:

$$r = \|\mathbf{r}\| = [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2} \text{ e } r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r} \quad (3.5)$$

O termo $c(\xi)$ é denominado termo livre depende da geometria do contorno, onde o ponto fonte se encontra. Para o caso 2D (figura 3.3), obtém-se

$$c(\xi) = 1 - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon_{,i} n_i}{\varepsilon} \right) d\bar{\Gamma}_\varepsilon = 1 - \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\alpha d\theta = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \quad (3.6)$$

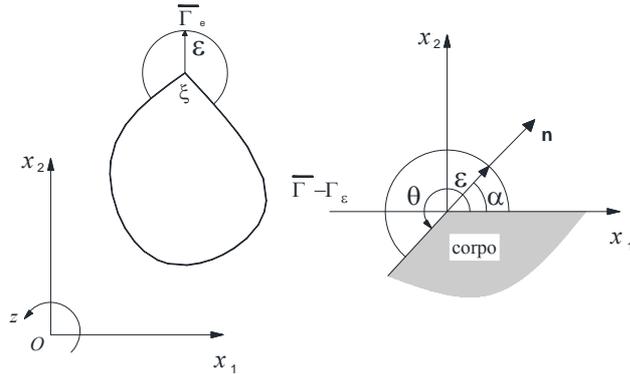


Figura 3.3: Ponto fonte aplicado em uma descontinuidade do contorno.

Particularmente, tem-se os casos abaixo:

$$c(\xi) = \begin{cases} \text{contorno suave:} \rightarrow \alpha = \pi \text{ rad} \rightarrow c(\xi) = 1/2 \\ \text{canto:} \quad \quad \quad \rightarrow \alpha = 3\pi/2 \text{ rad} \rightarrow c(\xi) = 1/4 \\ \text{ponto interno:} \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow c(\xi) = 1 \\ \text{ponto externo:} \rightarrow \alpha = 2\pi \text{ rad} \rightarrow c(\xi) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

3.3 Fluxos internos

Para o problema de torção, é preciso conhecer as derivadas cartesianas no contorno e nos pontos internos, pois estas grandezas são necessárias para o cálculo das tensões de cisalhamento existente na seção.

O potencial interno no ponto interno (ξ) é dado pela equação (3.8) em que seu fluxo pode ser escrito:

$$\mathbf{p}(\xi) = -\nabla\psi(\xi) \quad (3.8)$$

Em notação indicial, $\psi_{,i}(\xi)$ corresponde a derivada cartesiana de $\psi(\xi)$ no ponto interno ξ , e é dado por:

$$\psi_{,i} = \frac{\partial\psi(\xi)}{\partial x_i(\xi)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial\psi^*(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi_i} p(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi_i} \psi(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.9)$$

Para o caso 2D, a derivada cartesiana da solução fundamenta ψ é dada pela equação (3.10)

$$\frac{\partial\psi^*(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_{,i}}{r} \right) \mathbf{e} \quad r = [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \xi_i} = -\frac{r_{,i}}{r} = -r_{,i} \quad (3.10)$$

e a derivada cartesiana do fluxo é a equação (3.11)

$$\frac{\partial p^*(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2\pi r^2} [n_i - 2r_{,i} r_{,n}] \quad (3.11)$$

onde $r_{,n}$ corresponde à derivada do raio na direção do vetor normal \mathbf{n} .

3.4 Implementação Computacional

Como o propósito deste trabalho é analisar peças sujeitas a torção cujas seções podem ser complexas, faz-se necessário subdividir a geometria complexa em N segmentos finitos, denominados elementos de contorno. Logicamente, para representá-los, adotam-se funções simples. Fazendo isto, é possível transformar a equação integral em uma equação algébrica

(Brebbia e Dominguez, 1987:52). Formalmente a estratégia consiste em interpolar o contorno a partir de pontos conhecidos denominados nós. Assim, na verdade, os elementos ligam os nós uns aos outros, conforme figura 3.4, em que o intermédio desses nós são aproximados por meio das funções de forma. Dessa forma, quando se tem elementos lineares, o intermédio é representado por uma reta e quando o elemento é curvo, o intermédio é representado por uma função curva quadrática.

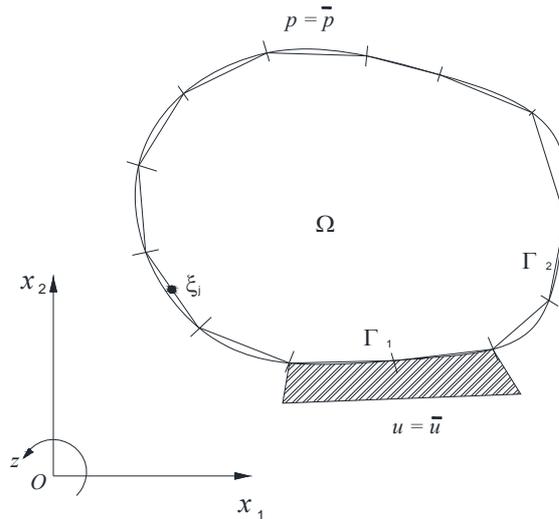


Figura3.4: Exemplo de contorno discretizado.

A interpolação do contorno dá-se de forma parametrizada em que é conveniente transformar as coordenadas cartesianas, ao longo do contorno, em coordenadas naturais. Note que as variáveis em coordenadas cartesianas x_1 e x_2 , são transformadas em uma coordenada natural η , por meio das funções de forma. Outro ponto importante é observar o sentido da integração, neste trabalho, adota-se como sentido positivo o sentido anti-horário.

3.5.2 Elementos Lineares

Como o contorno é subdividido e aproximado por elementos menores, a equação integral também precisa ser subdividida e calculada para cada elemento, a resposta, então, é dada pelo somatório das integrações ao longo de todos os N elementos. Assim a equação integral de contorno, discretizada para elementos lineares, é dada por:

$$\begin{aligned}
& c(\xi_i)\psi(\xi_i) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} p^*(\mathbf{x}, \xi_j) \left[\frac{1}{2}(1-\eta)\psi_A^{(j)} + (1+\eta)\frac{1}{2}\psi_B^{(j)} \right] d\Gamma_j = \\
& = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \psi^*(\mathbf{x}, \xi_j) \left[\frac{1}{2}(1-\eta)p_A^{(j)} + \frac{1}{2}(1+\eta)p_B^{(j)} \right] d\Gamma_j
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Esses elementos são isoparamétricos, nos quais as funções de interpolação, utilizadas para aproximar a resposta do problema, são as mesmas que se utilizam para aproximar a geometria (veja Fig. 3.5).

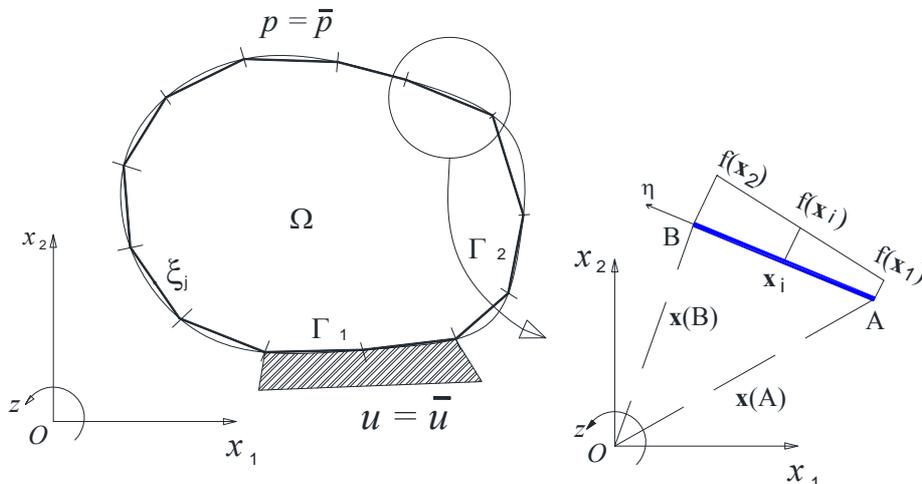


Figura 3.5: Exemplo de domínio discretizado com o detalhe de um elemento linear mapeado em coordenadas naturais η .

Para o elemento linear (figura 3.5), tem-se, utilizando-se coordenadas naturais, as seguintes funções de interpolação/forma:

$$\left\{ \begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{2}(1-\eta)\psi_A^{(j)} + \frac{1}{2}(1+\eta)\psi_B^{(j)} \\
p(x) &= \frac{1}{2}(1-\eta)p_A^{(j)} + \frac{1}{2}(1+\eta)p_B^{(j)} \\
x_i(\eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta)x_i(\mathbf{A}) + \frac{1}{2}(1+\eta)x_i(\mathbf{B}), \quad i=1,2
\end{aligned} \right. \tag{3.13}$$

Neste caso, o jacobiano da transformação é dado por:

$$J(\eta) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} = \frac{l_j}{2}. \quad (3.14)$$

Em concordância com a equação (3.12), os coeficientes são multiplicados separadamente para cada termo da função de forma, h_A e h_B . Os coeficientes do sistema de equações são dados pela integral ao longo do contorno de cada elemento onde se tem os elementos da matriz \mathbf{H} e os elementos da matriz \mathbf{G} . Para o caso $i \neq j$, os coeficientes do sistema de equação são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h_{1j} &= \int_{\Gamma_j} p^*(x, \xi) h_A(\eta) J(\eta) d\Gamma_j, & h_{2j} &= \int_{\Gamma_j} p^*(x, \xi) h_B(\eta) J(\eta) d\Gamma_j \\ g_{1j} &= \int_{\Gamma_j} \psi^*(x, \xi) h_A(\eta) J(\eta) d\Gamma_j, & g_{2j} &= \int_{\Gamma_j} \psi^*(x, \xi) h_B(\eta) J(\eta) d\Gamma_j \end{aligned} \quad (3.15)$$

Quando o ponto fonte situa-se no elemento, conforme figura 3.6, o coeficiente da matriz \mathbf{H} , dado pela integração ao longo do próprio elemento, é igual a zero, porque o vetor \mathbf{r} é ortogonal ao vetor \mathbf{n} , e neste caso tem-se: $r_i n_i = \frac{r_i}{r} n_i = \frac{1}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) = 0$.

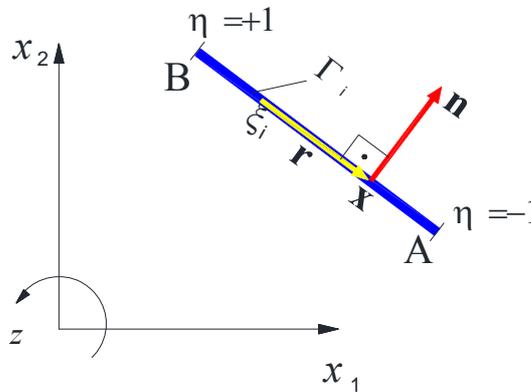


Figura 3.6: Vetor \mathbf{r} e vetor \mathbf{n} ortogonais quando o ponto fonte situa-se no próprio elemento.

No entanto, este coeficiente corresponde a V.P. (valor principal de Cauchy), e é obtido indiretamente.

Os elementos da matriz \mathbf{G} podem ser calculados usando a quadratura de Gauss, porém, quando o ponto fonte pertence ao elemento, as suas integrais são fracamente singulares. Quando a integração se dirige ao ponto fonte situado no contorno, já que $\|\mathbf{r}\|$ tende a zero, o integrando tende ao infinito. Para elementos lineares, existem expressões analíticas sem ser

necessário fazer uma transformação adicional de coordenadas para o cálculo daqueles que apresentam singularidade.

$$g_{ii} = \frac{1}{8\pi} \{l_{i-1} [3 - 2 \ln(l_{i-1})] + l_i [3 - 2 \ln(l_i)]\} \quad (3.16)$$

3.4.3 Elementos Parabólicos

Os elementos parabólicos representam uma aproximação mais rica com as geometrias irregulares ou curvas, também representam uma aproximação mais refinada à resposta, haja vista que quanto maior o grau do polinômio, maior sua capacidade de se aproximar de funções de outra natureza.

Sendo a figura. 3.7 um elemento parabólico correspondente ao segmento Γ_j referenciado no sistema de eixos cartesianos x_1, x_2 , em que o domínio Γ_j representa o contorno interpolado pelo elemento de índice j , r corresponde à distância do ponto fonte ξ ao contorno interpolado pelo elemento.

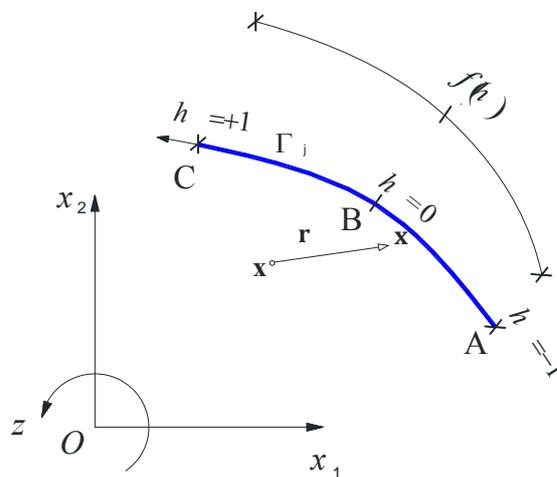


Figura 3.7: Elemento parabólico.

As variáveis ψ e p são aproximadas pelas mesmas funções, tal característica faz com que esses elementos sejam isoparamétricos. Os elementos parabólicos para serem determinados, é preciso três nós servindo de referência para a interpolação.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(\eta) = h_A(\eta)x_{iA}^{(j)} + h_B(\eta)x_{iB}^{(j)} + h_C(\eta)x_{iC}^{(j)} \\ \psi(\eta) = h_A(\eta)\psi_{iA}^{(j)} + h_B(\eta)\psi_{iB}^{(j)} + h_C(\eta)\psi_{iC}^{(j)} \\ p(\eta) = h_A(\eta)p_{iA}^{(j)} + h_B(\eta)p_{iB}^{(j)} + h_C(\eta)p_{iC}^{(j)} \end{array} \right. , \quad (3.17)$$

Para estes elementos, as funções de forma/ interpolação são dadas em 3.18.

$$\left\{ \begin{array}{l} h_A(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta-1) \\ h_B(\eta) = (1-\eta)(1+\eta) \\ h_C(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta+1) \end{array} \right. \quad (3.18)$$

A equação integral discretizada para os elementos parabólicos fica:

$$\begin{aligned} c(\xi_i)\psi(\xi_i) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} p^*(\mathbf{x}, \xi_j) [h_A(\eta)\psi_{iA}^{(j)} + h_B(\eta)\psi_{iB}^{(j)} + h_C(\eta)\psi_{iC}^{(j)}] d\Gamma_j \\ = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \psi^*(\mathbf{x}, \xi_j) [h_A(\eta)p_{iA}^{(j)} + h_B(\eta)p_{iB}^{(j)} + h_C(\eta)p_{iC}^{(j)}] d\Gamma_j \end{aligned} \quad (3.19)$$

No caso do elemento parabólico, quando $\xi_j \in \Gamma_j$, o produto $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ deixa de ser verdade e uma integral fortemente singular precisa ser integrada. Quando $\xi_j \notin \Gamma_j$, utiliza-se a quadratura de Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1j} = \int_{\Gamma_j} p^*(x, \xi) h_A(\eta) J(\eta) d\Gamma_j \\ h_{2j} = \int_{\Gamma_j} p^*(x, \xi) h_B(\eta) J(\eta) d\Gamma_j \\ h_{3j} = \int_{\Gamma_j} p^*(x, \xi) h_C(\eta) d\Gamma_j \end{array} \right. \quad \text{e} \quad (3.20a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{1j} = \int_{\Gamma_j} \psi^*(x, \xi) h_A(\eta) J(\eta) d\Gamma_j \\ g_{2j} = \int_{\Gamma_j} \psi^*(x, \xi) h_B(\eta) J(\eta) d\Gamma_j \\ g_{3j} = \int_{\Gamma_j} \psi^*(x, \xi) h_C(\eta) J(\eta) d\Gamma_j \end{array} \right. \quad (3.21b)$$

Nesse caso, o jacobiano da transformação é dado por:

$$J(\eta) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (3.22)$$

No programa NAESY, o problema de valor principal é calculado indiretamente pela expressão (3.23) para todos os tipos de elementos empregados na presente formulação.

$$\hat{h}_{ij} = c(\xi_{\partial i}) + h_{ii} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N h_{ik}, i = 1, N \quad (3.23)$$

3.4.4 Sistema de Equações Algébricas

A equação integral de contorno discretizada é escrita para o j-ésimo elemento de contorno é dada da seguinte forma:

$$c(\xi_j)\psi(\xi_j) + h_{i1}\psi_1 + h_{i2}\psi_2 + \dots + h_{ii}\psi_{ii} + \dots + h_{iN}\psi_N = g_{i1}p_1 + g_{i2}p_2 + \dots + g_{ii}p_{ii} + \dots + g_{iN}p_N \quad (3.24)$$

Sendo $h_{ij} = \int_{\Gamma_j} p^*(x, \xi_j) d\Gamma_j$ e $g_{ij} = \int_{\Gamma_j} \psi^*(x, \xi_j) d\Gamma_j$ os coeficientes das matrizes, com $i=1, N$

e $j=1, N$. Na forma matricial, a equação pode ser escrita conforme (3.25)

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & h_{12} & \dots & h_{1i} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & \hat{h}_{22} & \dots & h_{2i} & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \dots & h_{Ni} & \dots & \hat{h}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1i} & \dots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2i} & \dots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \dots & g_{Ni} & \dots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Em notação matricial:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gp} \quad (3.26)$$

Para a resolução do sistema de equação, são permutadas as colunas associadas às condições de contorno prescritas, permanecendo do lado esquerdo a matriz associada aos potenciais e fluxos incógnitos e, do lado direito, a matriz associada às condições de contorno prescritas. Uma vez que seja efetuada a multiplicação, obtém-se o vetor do lado direito.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.27}$$

O sistema é, então, resolvido por uma solver direto baseado em decomposição LU.

3.4.5 Particularidades do M.E.C. para o problema de torção

Para o problema da torção, há apenas fluxos prescritos $p(\mathbf{x})$ no contorno, os quais são obtidos automaticamente pela expressão (2.6e). Dessa forma é dispensável a permutação de colunas associadas às condições de contorno. Entretanto, o sistema de equações torna-se auto-equilibrado e, para resolvê-lo, arbitra-se, de modo a remover a singularidade do sistema, a resposta do empenamento correspondente à última componente \mathbf{x} igual a zero. Para isso, anulam-se as últimas linha e coluna de \mathbf{A} , e impõe-se o último termo da diagonal igual 1, conforme figura (3.8). Resolvendo o sistema de equações com a singularidade removida, obtêm-se os demais termos referenciados no último termo que é igualado a zero.

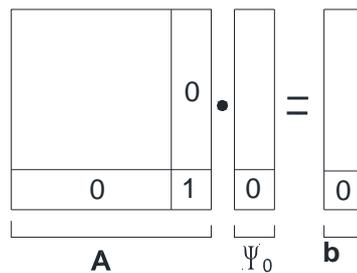


Figura 3.8 : Sistema de equações.

Uma vez obtida a resposta do empenamento, referenciada no sistema arbitrário ψ_0 , novamente por meio da equação 2.27, o empenamento é transladado para o sistema de coordenadas cuja origem localiza-se no centro de torção. É preciso, então, atualizar os fluxos $p(\mathbf{x})$, bem como as coordenadas dos nós da malha, para o sistema de coordenadas

referenciado no sistema de torção. Somente depois disso é que se pode utilizar as expressões deduzidas nas sessões 2.1 e na 2.2.

Outro aspecto importante, dado que a formulação objetiva analisar não apenas seções de paredes espessas, mas também seções de paredes finas, tem-se quase-singularidade envolvida no cálculo dos coeficientes de \mathbf{H} e \mathbf{G} (figura 3.9). Desse modo, os algoritmos de integração também devem ser eficientes nesses casos.

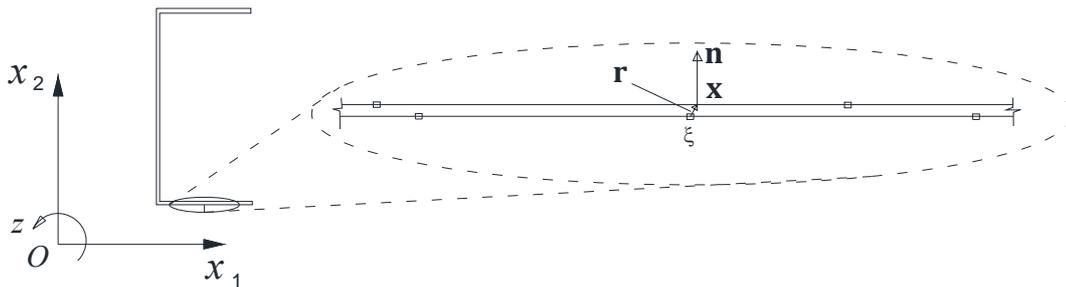


Figura 3.9: Domínio esbelto.

Quando se está trabalhando com seções de parede fina, o raio pode ficar bastante pequeno e, com isso, os integrandos crescem bruscamente e o método de Gauss padrão deixa de computar esse crescimento que, por sua vez, apresenta os valores dos integrandos de forma pouco confiável nesses casos. Para solucionar esse problema, é empregada a transformação de Telles e, alternativamente, são desenvolvidas as integrais analíticas, possibilitando que a presente formulação seja adequada para analisar seções com parede espessa e seções com parede fina.

3.5 Integração Numérica

O método de integração numérica mais comumente empregado é o método de Gauss Legendre, no qual, seja um domínio já transformado em coordenadas naturais, compreendido entre $x_i = -1$ e $x_f = +1$, o procedimento consiste em avaliar a função a ser integrada para cada ponto de Gauss P_i , convenientemente calculado de modo a minimizar o erro. O valor da função é multiplicado pelo seu respectivo peso w_i e o valor da integral é dado pelo somatório

do produto de todos os valores da função avaliada para cada ponto de Gauss pelo seu respectivo peso.

Para n pontos de Gauss, o método fornece valores exatos das integrais de polinômios de ordem $p = 2n - 1$.

Para uma dimensão, o valor do integrando é dado por:

$$\int_{-1}^{+1} f(r) dr = \sum_{i=1}^{nr} f(r_i) w_i \quad (3.28)$$

Para duas dimensões, a expressão fica:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(r, s) dr ds = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{i=1}^{nr} f(r_i, s) w_s \right] ds = \sum_{j=1}^{ns} \sum_{i=1}^{nr} f(r_i, s_j) w_i w_j \quad (3.29)$$

em que r, s são as abscissas do elemento bidimensional em coordenadas naturais e w_i e w_j são os respectivos pesos.

Esse método de integração é facilmente implementado e apresenta boa eficácia para integrais regulares. Para integrais singulares e quase singulares, é preciso adotar métodos especiais de integração.

3.6 Transformação de Telles

Quando se têm integrais quase singulares, comumente existentes em elementos de contorno, a quadratura de Gauss não é eficiente utilizando poucos pontos. As figuras 3.10 e 3.11 mostram típicos integrandos quase singulares existentes na análise de seções de perfis com parede fina. Para obter uma boa eficiência, precisa-se aumentar significativamente a quantidade de pontos e, conseqüentemente, isso aumentará consideravelmente o custo computacional.

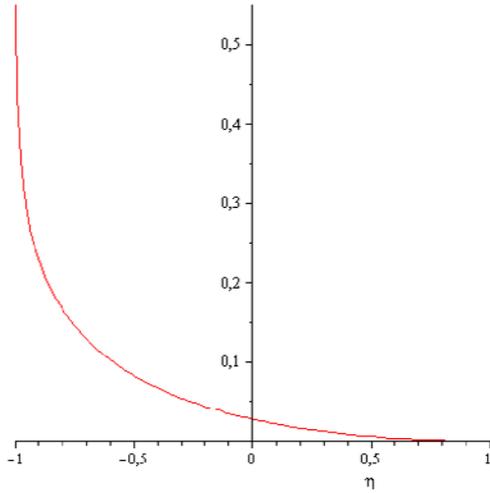


Figura 3.10: Integrandos correspondente à Ψ^* *quasi-singular*.

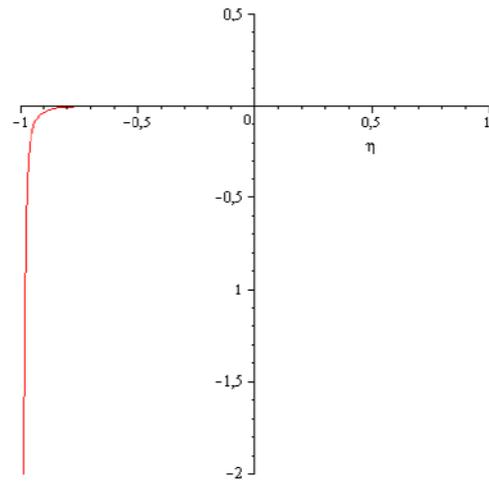


Figura 3.11: Integrandos correspondente à p^* *quasi-singular*.

Telles (1987) propôs, para avaliar uma integral dada por

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\eta) d\eta \quad (3.30)$$

com singularidade em $\bar{\eta}$, a transformação cúbica de coordenadas fornecida por

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d, \quad (3.31)$$

em que a, b, c e d são calculados, aplicando-se as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(1) = 1 \\ \eta(-1) = -1 \\ \frac{d\eta}{d\gamma} \Big/ \bar{\eta} = 0 \\ \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \Big/ \bar{\eta} = 0 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

A terceira condição implica que o jacobiano (J) da transformação reduziu a ordem da singularidade em $\bar{\eta}$, e a quarta condição implica que o jacobiano se anula onde a

singularidade é mais grave. Aplicando as condições mencionadas em (3.32), as constantes a, b, c e d são definidas por:

$$\begin{cases} a = 1/Q \\ b = -d = -3\bar{\gamma}/Q \\ c = 3\bar{\gamma}^2/Q \\ Q = 1 + 3\bar{\gamma}^2 \end{cases} \quad (3.33)$$

onde $\bar{\gamma}$ é a solução e $\eta(\bar{\gamma}) = \bar{\eta}$ pode ser calculada por:

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|)} + \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* - |\eta^*|)} + \bar{\eta} \quad (3.34)$$

com $\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1$. Assim, obtém-se para a integração em (3.35):

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\eta(\gamma))J(\gamma)d\gamma \quad (3.35)$$

em que

$$J(\gamma) = \frac{3(\gamma - \bar{\gamma})}{1 + 3\bar{\gamma}^2} \quad (3.36)$$

A figura 3.12 mostra a distribuição dos pontos de Gauss Padrão, ao longo do domínio em coordenadas naturais do elemento, e compara a posição dos mesmos após a transformação de Telles.

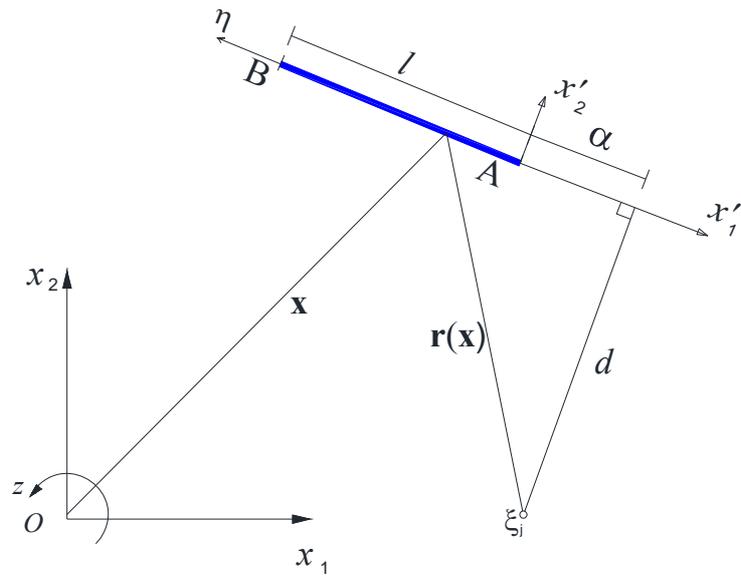


Figura 3.13: Esquema local de coordenadas.

Por meio dessa estratégia, um dos componentes do vetor raio, d , que corresponde à distância do ponto fonte à reta que contém o elemento, é constante ao longo do elemento linear e, assim, o raio varia somente devido ao componente x'_1 , referenciado ao sistema local. Esse componente x'_1 , é, então, descrito em função das funções de forma e raio e pode ser expresso em função da coordenada natural η .

$$r(\eta) = \sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2} \quad (3.37)$$

Como o jacobiano não se altera, a estratégia possibilita o desenvolvimento de expressões analíticas para as integrais dos núcleos fundamentais em pontos fonte sobre contorno ou internos.

3.7.1 Expressões analíticas para os coeficientes de G e H

Rescrevendo o coeficiente correspondente ao potencial referenciado no sistema local, em termos de suas funções, forma-se a seguinte equação:

$$g_{11} = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} \right] \underbrace{\frac{1}{2}}_{ha} \underbrace{(1-\eta) \frac{l}{2}}_J d\eta \quad , \quad (3.38)$$

e integrando-o em relação à coordenada natural, chega-se à expressão

$$g_{11} = \frac{1}{8l\pi} \left(\begin{array}{l} \ln(d^2 + l^2 + 2l\alpha + \alpha^2)(-l^2 - 2l\alpha - \alpha^2 + d^2) + \\ \arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right)(4dl + 4d\alpha) + \arctan\left(\frac{l+\alpha}{d}\right)(-4dl - 4d\alpha) + \\ \ln(d^2 + \alpha^2)(2l\alpha + \alpha^2 - d^2) + 3l^2 + 2l\alpha \end{array} \right) \quad (3.39)$$

Para o caso em que o coeficiente correspondente ao potencial é multiplicado pelo termo da função de interpolação $h_q = \frac{1}{2}(1 + \eta)$, o coeficiente é dado por:

$$g_{12} = -\frac{1}{8l\pi} \left(\begin{array}{l} \ln(d^2 + l^2 + 2l\alpha + \alpha^2)(l^2 - \alpha^2 + d^2) + \\ \ln(d^2 + \alpha^2)(\alpha^2 - d^2) - l^2 + 2l\alpha + \\ 4d\alpha \left(\arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right) - \arctan\left(\frac{l+\alpha}{d}\right) \right) \end{array} \right) \quad (3.40)$$

No sistema local de coordenadas, tem-se que o vetor normal ao longo do contorno Γ_j do elemento é dado por $\mathbf{n} = (0, 1)$, conforme se pode observar na figura (3.14), e assim

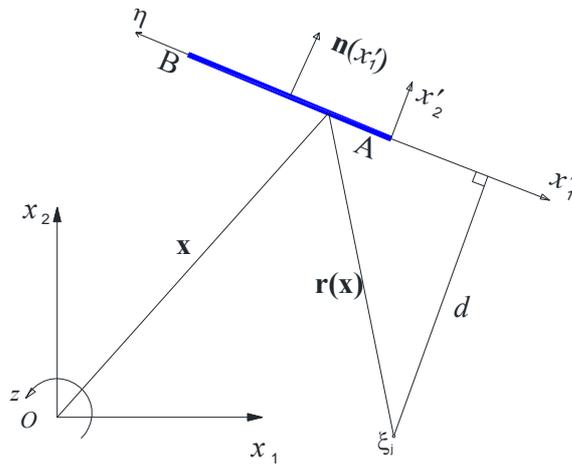


Figura 3.14: Representação do vetor normal.

resulta

$$h_{11} = \int -\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} \cdot 0 + \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} \cdot 1 \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{h_q} \cdot \underbrace{(1-\eta)}_J \frac{l}{2} d\eta, \quad (3.41)$$

que já reduz consideravelmente a complexidade da expressão e, fazendo algumas manipulações algébricas, chega-se ao integrando dado pela equação (3.42).

$$h_{11} = \int_{-1}^1 -\frac{l}{8\pi} \left(\frac{d}{\left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha \right)^2 \right]} \right) (1-\eta) d\eta \quad (3.42)$$

Efetuada-se a integral definida, chega-se à expressão analítica para o cálculo dos coeficientes associados ao fluxo fundamental dado pela equação (3.43).

$$h_{11} = \frac{1}{4l\pi} \left(\begin{array}{l} d \ln(l^2 + 2l\alpha + \alpha^2 + d^2) - 2 \arctan\left(\frac{l+\alpha}{d}\right)l \\ -2 \arctan\left(\frac{l+\alpha}{d}\right)\alpha - d \ln(\alpha^2 + d^2) + \\ 2 \arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right)l + 2 \arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right)\alpha \end{array} \right) \quad (3.43)$$

Quando o fluxo é multiplicado pelo segundo termo da função interpoladora $h_q = \frac{1}{2}(1+\eta)$, o coeficiente é dado por:

$$h_{12} = -\frac{1}{4l\pi} \left(\begin{array}{l} d \ln(l^2 + 2l\alpha + \alpha^2 + d^2) - 2 \arctan\left(\frac{l+\alpha}{d}\right)\alpha - \\ d \ln(\alpha^2 + d^2) + 2 \arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right)\alpha \end{array} \right) \quad (3.44)$$

O valor dos coeficientes calculados analiticamente depende de parâmetros geométricos, como pode ser visto na figura 3.15, que são o comprimento do elemento l , a componente do raio d e a distância da projeção d até a origem do sistema local de

coordenadas (α). Com as coordenadas do nó inicial do elemento e do ponto fonte ξ , observa-se:

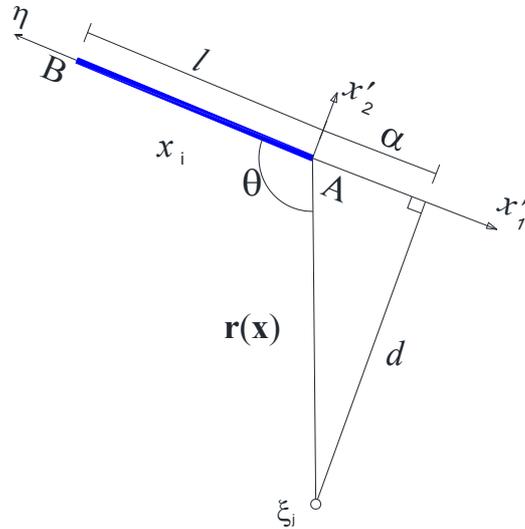


Figura 3.15: Parâmetros do sistema local de coordenadas.

Da geometria analítica, o ângulo θ , compreendido entre o vetor tangente ao elemento e o raio correspondente ao nó inicial do elemento, é relacionado pela equação (3.45) advinda do produto interno entre dois vetores.

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}}{\|\mathbf{r}\| \cdot \|\mathbf{t}\|} \quad (3.45)$$

A partir da figura tem-se:

$$\alpha = r \cdot \cos(\theta) \Rightarrow r \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}}{\|\mathbf{r}\| \cdot \|\mathbf{t}\|} \quad (3.46)$$

e a componente d é dada por:

$$d = r \cdot \sin(\theta) \quad (3.47)$$

Com a relação trigonométrica tem-se

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow \sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \quad (3.48)$$

logo

$$d = r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{r}\| \cdot \|\mathbf{t}\|} \right)^2} \quad (3.49)$$

3.8 Cálculo dos fluxos nos pontos internos

Seja a equação (3.50), correspondente aos fluxos nos pontos internos, demonstrada na seção 3, a sua forma discretizada é dada por:

$$\begin{aligned} \psi_{,i} = & \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi^*(x, \xi)}{\partial \xi_i} \left[\frac{1}{2}(1-\eta) p_A^{(j)} + (1+\eta) \frac{1}{2} p_B^{(j)} \right] d\Gamma_j - \\ & - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*(x, \xi)}{\partial \xi_i} \left[\frac{1}{2}(1-\eta) \psi_A^{(j)} + (1+\eta) \frac{1}{2} \psi_B^{(j)} \right] d\Gamma_j \end{aligned} \quad (3.50)$$

em que as derivadas cartesianas da solução fundamental e do fluxo são:

$$\frac{\partial \psi^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_{,i}}{r} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial p^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2\pi r^2} [n_i - 2r_{,i} r_{,n}] \quad (3.51)$$

Tem-se

$$r = [(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \xi_i} = -\frac{r_{,i}}{r} = -r_{,i} \quad (3.52)$$

e pode-se, então, atribuir os coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\psi(\mathbf{x}, \xi)^*}{\partial \xi_i} h_q d\Gamma_j \quad (a) \\ h_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \frac{p(\mathbf{x}, \xi)^*}{\partial \xi_i} h_q d\Gamma_j \quad (b) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Estes coeficientes podem ser obtidos através da quadratura de Gauss, ou ainda, pode ser aplicada a estratégia acima para se calcular os seus valores analiticamente. Emprega-se a expressão analítica quando o ponto interno situa-se próximo ao contorno, gerando *quasi-singularidade*.

3.8.1 Derivadas analíticas no contorno (fluxos)

As integrais $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ são fortemente singulares quando o ponto fonte ξ localiza-se no contorno Γ e o procedimento para o cálculo das derivadas cartesianas em $\mathbf{x} \in \Gamma$, conforme a figura 3.16, dá-se da seguinte forma:

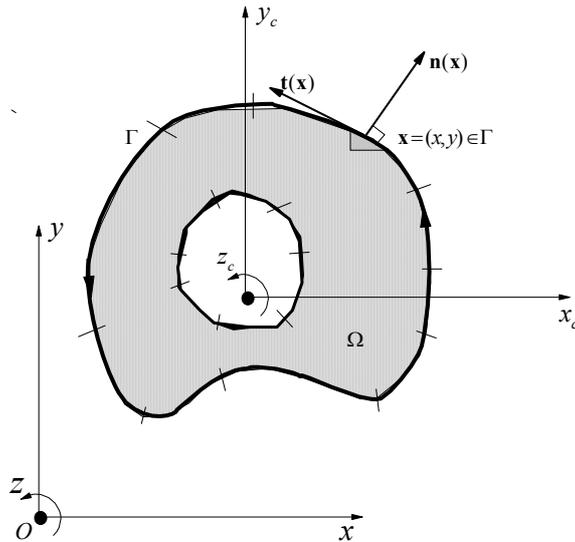


Figura.3.16: Um ponto no contorno discretizado Γ

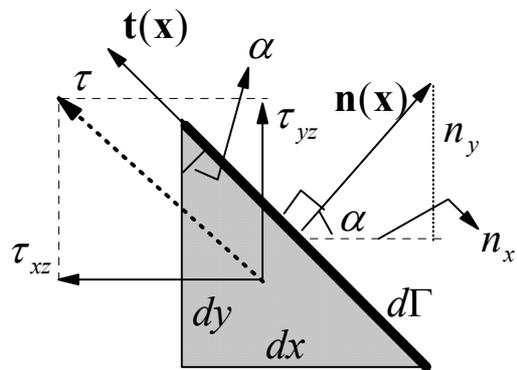


Figura 3.17: Detalhes do ponto no contorno.

$$\psi(\eta) = \sum_{q=1}^{nnoel} h_q(\eta) \psi_q, \quad x_i(\eta) = \sum_{q=1}^{nnoel} h_q(\eta) x_{iq},$$

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} d\eta = J(\eta) d\eta. \quad (3.54)$$

As derivadas da função de empenamento na direção do vetor tangente e na direção do vetor normal quando $\mathbf{x} \in \Gamma$ são dadas por:

$$\frac{\partial \psi[\mathbf{x}(\eta)]}{\partial \mathbf{t}} = \nabla \psi \cdot \mathbf{t} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial \psi(\eta)}{\partial x_i} \right] t_i = \frac{\partial \psi(\eta)}{\partial \Gamma} = \frac{1}{J(\eta)} \frac{\partial \psi(\eta)}{d\eta} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \psi[\mathbf{x}(\eta)]}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial \psi(\eta)}{\partial x_i} \right] n_i = \sum_{i=1}^2 x_i t_i, \quad (3.56)$$

com

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2) = \left[\frac{x_1'(\eta)}{J(\eta)}, \frac{x_2'(\eta)}{J(\eta)} \right], \quad \mathbf{n}(\eta) = \left[-\frac{x_2'(\eta)}{J(\eta)}, \frac{x_1'(\eta)}{J(\eta)} \right] = (n_1, n_2) = (-t_2, t_1), \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \psi(\eta)}{d\eta} = \frac{1}{J(\eta)} \sum_{q=1}^{n_{noel}} \left[\frac{\partial h_q(\eta)}{d\eta} \right] \psi_q \quad (3.58)$$

Das equações (3.55) e (3.56), obtêm-se o sistema de equações que relaciona as derivadas direcionais a derivadas cartesianas.

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{J(\eta)} \frac{\partial \psi(\eta)}{d\eta} \\ \sum_{i=1}^2 x_i t_i \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Logo, as derivadas cartesianas $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$, no contorno, são obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{1}{J(\eta)} \frac{\partial \psi(\eta)}{d\eta} \\ \sum_{i=1}^2 x_i t_i \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

3.8.2 Integrais analíticas em pontos internos (fluxos)

Seja a figura 3.18, quando se escreve o $\mathbf{r}(x')$, o raio que anteriormente era escrito em função de \mathbf{x} global passa a depender apenas de x_1' , dado que o parâmetro d e α são constantes, assim os coeficientes g'_{ij} e h'_{ij} são obtidos na direção tangente e na direção normal ao elemento de contorno Γ_j . Então, é preciso relacionar os coeficientes g'_{ij} e h'_{ij} com a direção dos eixos globais do sistema por meio da equação (3.61).

$$\begin{Bmatrix} g'_{1k} \\ g'_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} g'_{1k} \\ g'_{2k} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} h'_{1k} \\ h'_{2k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} h'_{1k} \\ h'_{2k} \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

em que o índice k indica a função de interpolação h_q pelo qual os coeficientes estão sendo multiplicados.

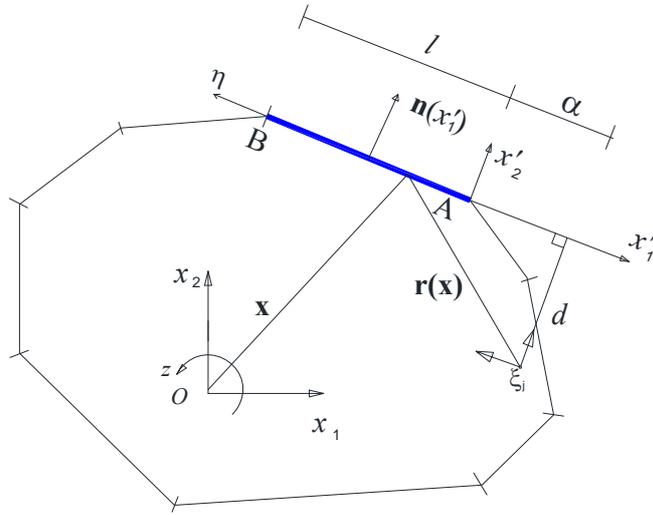


Figura 3.18: Direção das componentes de derivadas.

Coefficientes g'_{ij}

Para a função de forma $h_q = \frac{1}{2}(1-\eta)$ e a direção ξ_1 , a partir da figura 3.14, tem-se:

$$r_{,i}(\eta) = \frac{\left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} \text{ e } r(\eta) = \sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2} \quad (3.62)$$

Substituindo as equações (3.62) na derivada cartesiana do potencial fundamental, dado pela equação (3.53a), chega-se ao g'_{11} que, neste caso, corresponde à direção tangente do elemento de contorno.

$$g'_{11} = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{\left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}}}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} \underbrace{\frac{1}{2}}_{h_q} (1-\eta) \underbrace{\frac{l}{2}}_j d\eta \quad (3.63)$$

Reescrevendo, obtém-se a seguinte expressão

$$g'_{11} = \int_{-1}^1 \frac{l}{8\pi} \frac{\left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)}{\left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2\right]} (1-\eta) d\eta \quad (3.64)$$

que é facilmente integrada resultando na expressão analítica dada pela equação (3.65).

$$g'_{11} = \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4} \frac{\ln(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)}{\pi} - \frac{1}{4} \frac{\ln(4d^2 + 4\alpha^2)}{\pi} + \\ &\frac{1}{4} \frac{\ln(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)\alpha}{l\pi} + \frac{1}{2} \frac{d \arctan\left(\frac{1}{4} \frac{4l^2 + 4l\alpha}{ld}\right)}{l\pi} - \\ &\frac{1}{4} \frac{\ln(4d^2 + 4\alpha^2)\alpha}{l\pi} - \frac{1}{2} \frac{d \arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right)}{l\pi} \end{aligned} \right] \quad (3.65)$$

Para $h_q = \frac{1}{2}(1+\eta)$ e direção ξ_1 , têm-se o integrando dado pela equação (3.66)

$$g'_{12} = \int_{-1}^1 \frac{l}{8\pi} \frac{\left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)}{\left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2\right]} (1+\eta) d\eta \quad , \quad (3.66)$$

em que, resolvendo a integral definida, chega-se à expressão analítica dada por:

$$g'_{12} = \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)}{l\pi} - \frac{1}{2} \frac{d \arctan\left(\frac{1}{4} \frac{4l^2 + 4l\alpha}{ld}\right)}{l\pi} + \\ &\frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(4d^2 + 4\alpha^2)}{l\pi} + \frac{1}{2} \frac{d \arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right)}{l\pi} \end{aligned} \right] \quad (3.67)$$

Para $h_q = \frac{1}{2}(1-\eta)$ e ξ_2 , o coeficiente g'_{21} é calculado na direção normal ao elemento e

tem-se:

$$r_{,i}(\eta) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} \text{ e } r(\eta) = \sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2} \quad , \quad (3.68)$$

Substituindo a equação 3.68 em 3.53a obtêm-se:

$$g'_{21} = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} \frac{1}{2}(1-\eta) \frac{l}{2} d\eta \quad (3.69)$$

Reescrevendo, chega-se à expressão abaixo:

$$g'_{21} = \int_{-1}^1 \frac{l}{8\pi} \frac{d}{\left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2\right]} (1-\eta) d\eta \quad (3.70)$$

Efetuada sua integração, obtêm-se a expressão analítica do coeficiente g'_{21} dada por

$$g'_{21} = \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{d \ln(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)}{l\pi} + \frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{1}{4} \frac{4l^2 + 4l\alpha}{ld}\right)}{\pi} + \\ & \frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{1}{4} \frac{4l^2 + 4l\alpha}{ld}\right) \alpha}{l\pi} + \frac{1}{4} \frac{d \ln(4d^2 + 4\alpha^2)}{l\pi} - \\ & \frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right) \alpha}{l\pi} \end{aligned} \right] \quad (3.71)$$

Para $h_q = \frac{1}{2}(1+\eta)$ e ξ_2 tem-se:

$$g'_{21} = \int_{-1}^1 \frac{l}{8\pi} \frac{d}{\left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2\right]} (1+\eta) d\eta \quad (3.72)$$

cuja integração analítica fornece

$$g'_{22} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} \frac{d \ln(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)}{l\pi} - \frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{1}{4} \frac{4l^2 + 4l\alpha}{ld}\right) \alpha}{l\pi} \\ \frac{1}{4} \frac{d \ln(4d^2 + 4\alpha^2)}{l\pi} + \frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right) \alpha}{l\pi} \end{array} \right] \quad (3.73)$$

Coefficientes h'_{ij}

Para $h_q = \frac{1}{2}(1-\eta)$ e ξ_1 têm-se $\frac{\partial r(\eta)}{\partial \xi_1} = r_{,1}$ e $r(\eta)$ respectivamente explicitado pela equação (3.74).

$$r(\eta) = \sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2} \quad (3.74)$$

E o termo $\frac{\partial r(\eta)}{\partial \mathbf{n}} = r_{,n}$, dado pela equação (3.75).

$$r_{,n}(\eta) = \frac{\left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} 0 + \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} 1 \quad (3.75)$$

Substituindo a equação (3.74) e (3.75) na equação (3.53b), têm-se o integrando para o coeficiente.

$$h'_{11} = \int_{-1}^{+1} \frac{-2 \cdot d \cdot l \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)}{4\pi \left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2 \right]^2} \cdot \frac{1}{2}(1-\eta) d\eta \quad (3.76)$$

Portanto chega-se a expressão analítica para o coeficiente.

$$h'_{11} = \left[\frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{1}{4} \frac{4l^2 + 4l\alpha}{ld}\right)}{l\pi} - \frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right)}{l\pi} - \frac{2d}{\pi(4d^2 + 4\alpha^2)} \right] \quad (3.77)$$

Para $h_q = \frac{1}{2}(1+\eta)$ e ξ_1 o integrando fica:

$$h'_{12} = \int_{-1}^{+1} \frac{-2 \cdot d \cdot l \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha \right)}{4\pi \left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{1}{2}(1+\eta) d\eta \quad (3.78)$$

em que calculando a integral obtém-se:

$$h'_{12} = \left[-\frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{1}{4} \frac{4l^2 + 4l\alpha}{ld}\right)}{l\pi} + \frac{2d}{\pi(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)} + \frac{1}{2} \frac{\arctan\left(\frac{\alpha}{d}\right)}{l\pi} \right] \quad (3.79)$$

Para $h_q = \frac{1}{2}(1-\eta)$ e ξ_2 , têm-se $r_{,i}(\eta)$ para o índice $i=2$ dado pela equação (3.80)

$$r_{,2}(\eta) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} \text{ e } r(\eta) = \sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2} \quad (3.80)$$

e $r_{,n}(\eta)$ com índice $n=2$ dado pela equação (3.81).

$$r_{,n}(\eta) = \frac{\left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} 0 + \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha\right)^2}} 1 \quad (3.81)$$

Substituindo a equação (3.80) e (3.81) na equação (3.53b), obtém-se o integrando para o coeficiente dado pela expressão (3.82).

$$h'_{21} = \int_{-1}^{+1} \frac{l}{4\pi \left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha \right)^2 \right]} \left(1 - 2 \frac{d^2}{\left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha \right)^2 \right]} \right) \cdot \frac{1}{2}(1-\eta) d\eta \quad (3.82)$$

Uma vez efetuado o cálculo analítico da sua integral obtêm-se:

$$h'_{21} = \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{\ln(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)}{l\pi} + \frac{1}{4} \frac{\ln(4d^2 + 4\alpha^2)}{l\pi} \\ & \frac{2}{\pi(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)} \left(l + 2\alpha + \frac{d^2}{l} + \frac{\alpha^2}{l} \right) + \\ & \frac{2}{\pi(4d^2 + 4\alpha^2)} \left(\alpha + \frac{d^2}{l} + \frac{\alpha^2}{l} \right) \end{aligned} \right] \quad (3.83)$$

Para $h_q = \frac{1}{2}(1+\eta)$ e ξ_2 tem-se:

$$h'_{22} = \int_{-1}^{+1} \frac{l}{4\pi \left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha \right)^2 \right]} \left(1 - 2 \frac{d^2}{\left[d^2 + \left(\frac{1}{2}(1+\eta)l + \alpha \right)^2 \right]} \right) \cdot \frac{1}{2}(1+\eta) d\eta \quad (3.84)$$

em que, resolvendo a integral, chega-se à expressão analítica para o coeficiente em questão.

$$h'_{22} = \left[\begin{aligned} & \frac{2}{\pi(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)} \left(\alpha + \frac{d^2}{l} + \frac{\alpha^2}{l} \right) - \frac{1}{4} \frac{\ln(4d^2 + 4\alpha^2)}{l\pi} + \\ & \frac{1}{4} \frac{\ln(4d^2 + 4l^2 + 8l\alpha + 4\alpha^2)}{l\pi} - \frac{2}{l\pi(4d^2 + 4\alpha^2)} (d^2 + \alpha^2) \end{aligned} \right] \quad (3.85)$$

3.9 Cálculo das tensões

As tensões são calculadas pelas expressões 3.86 deduzidas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} = \tau_{13} = G\gamma_{13} = G\theta'_t \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial x_1} - x_2 \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{23} = G\gamma_{23} = G\theta'_t \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial x_2} + x_1 \right) \end{array} \right. \quad (3.86)$$

4 RESULTADOS E APLICAÇÕES

Para avaliar a eficiência da formulação utilizada para determinação das grandezas de interesse, foram analisados cinco exemplos. Uma vez que a integração analítica limita-se ao elemento linear, as 3 primeiras análises objetivaram comparar os resultados obtidos quando se emprega a transformação de Telles com os obtidos com a integração analítica. É importante lembrar que as integrais são utilizadas no cálculo dos coeficientes das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , provenientes da discretização das expressões matemáticas do M.E.C. e são ativadas apenas quando o ponto fonte situa-se muito próximo do elemento, ocasionando a quase singularidade, os demais são calculados utilizando Gaus Padrão. Como parâmetro de avaliação, foi utilizado o centro de torção (X_s, Y_s) e o momento de inércia torcional (I_t), já que, para obtenção dos mesmos, é necessário resolver o problema de valor de contorno.

O primeiro exemplo trata de uma seção retangular espessa contendo dupla simetria e suas dimensões encontram-se na figura 4.1-a e a função do empenamento desta seção é mostrada na figura 4.1-b para o contorno e figura 4.1-c para o domínio. Os resultados foram obtidos utilizando-se 36 elementos lineares isoparamétricos e 6 pontos de integração para cada elemento. Os valores das propriedades calculadas estão presentes na tabela 1.

Tabela 1. Resultados: Retângulo

Propriedades	Presente trabalho (transformação de Telles)	Presente trabalho (integração analítica)	Valor exato
x_c	0.0000000	0.0000000	0.0000000
y_c	0.0000000	0.0000000	0.0000000
x_s	0.0000000	0.0000000	0.0000000
y_s	0.0000000	0.0000000	0.0000000
I_t	0.4671610	0.4671547	0.4573635

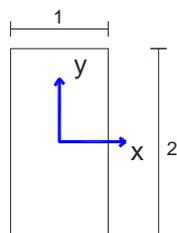


Figura 4.1-a. Retângulo.

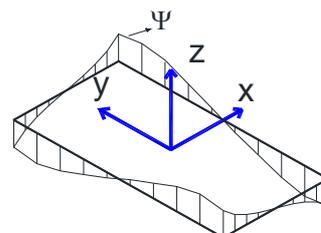


Figura 4.1-b. Empenamento no contorno do retângulo.

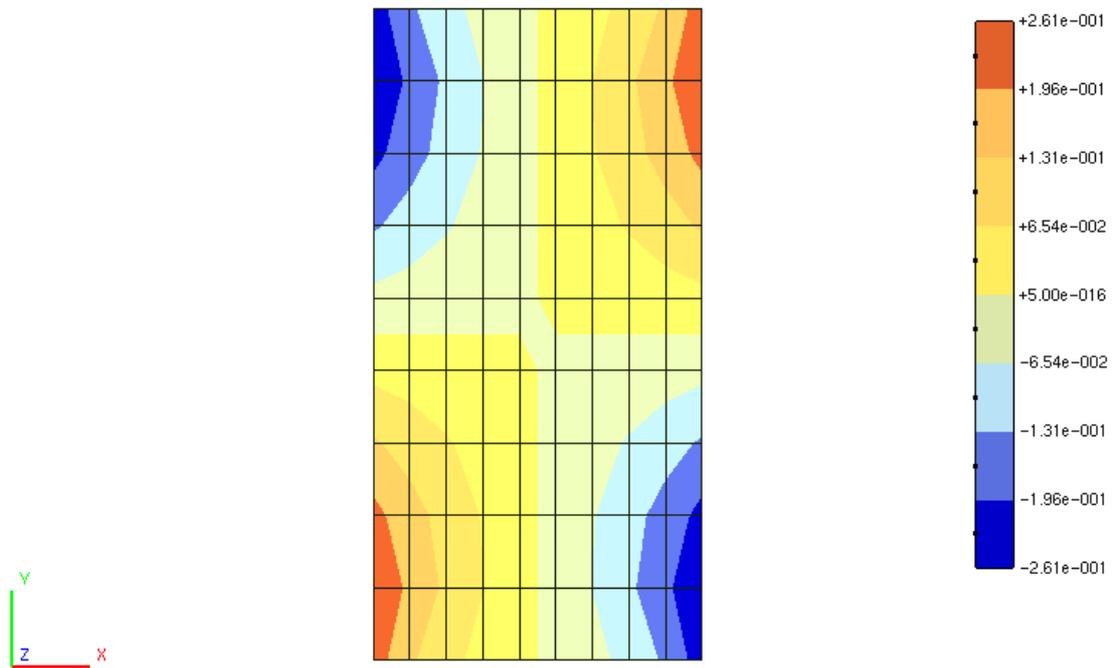


Figura 4.1-c. Empenamento na seção retangular.

O segundo exemplo refere-se a uma seção meia lua, cujas dimensões se encontram na figura 4.2-a e a função de empenamento no contorno é dada na figura 4.2-b e no domínio é dado pela figura 4.2-c.

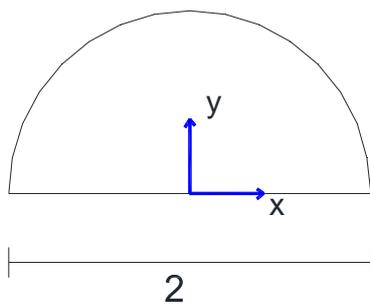


Figura 4.2-a. Meia lua.

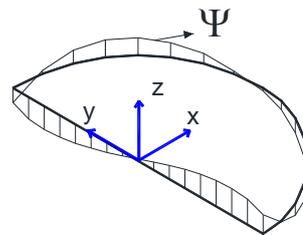


Figura 4.2-b. Empenamento no contorno da meia lua.

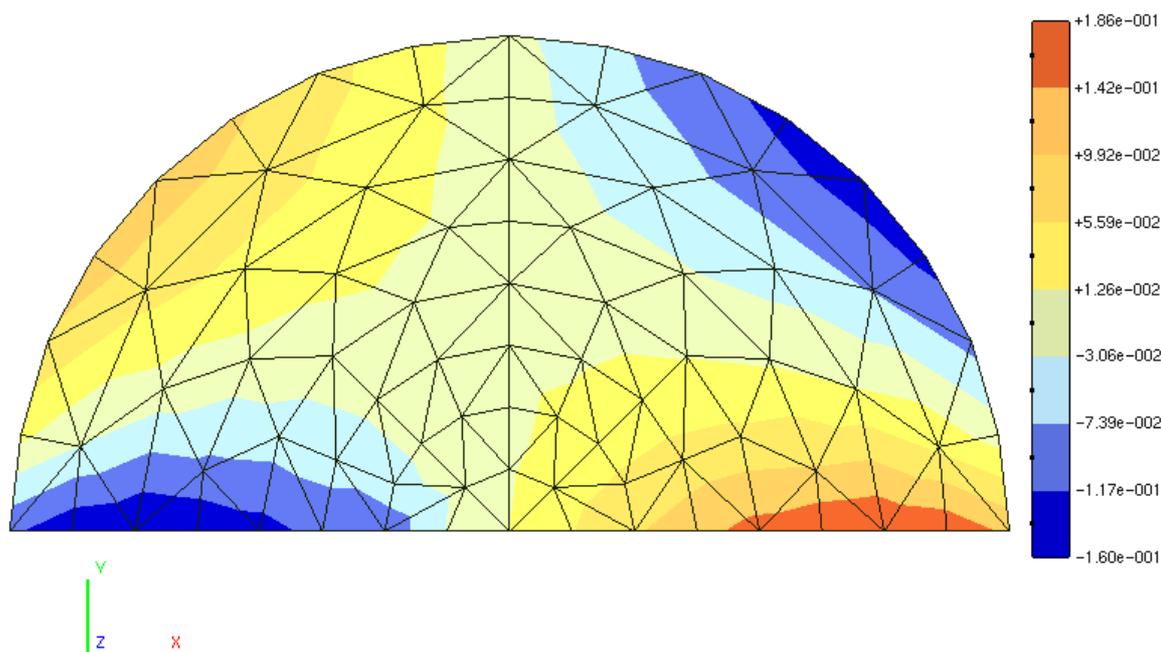


Figura 4.2-c. Empenamento na seção em meia lua.

Na análise, foram utilizados 32 elementos lineares isoparamétricos e 6 pontos de Gauss. Os resultados estão expostos na tabela 2.

Tabela 2. Resultados: meia lua

Propriedades	Presente trabalho (Trans. de Telles)	Presente trabalho (Int. analítica)	Valor exato
x_c	0.0000544	0.0000544	0.0000000
y_c	0.4230324	0.4230324	0.4244132
x_s	0.0299002	0.0299192	0.0000000
y_s	0.5113149	0.51131710	0.5113662
I_t	0.2961034	0.29924733	-

Nos dois problemas anteriores, pouca diferença é notada entre os valores obtidos quando se adotam as integrais analíticas e aqueles obtidos quando se adota a transformação de Telles. Os resultados ficaram bastante próximos dos valores exatos analíticos, demonstrando a eficácia da formulação tanto quando se utiliza integrais analíticas, como quando se usa a transformação de Telles.

O terceiro exemplo trata de uma seção I de parede fina, em que suas dimensões são mostradas na figura 4.3-a. A seção foi rodada com 256 elementos lineares isoparamétricos e a integração foi realizada com 6 pontos de Gauss, utilizando a transformada de Telles e também foi rodada utilizando o processo de integração analítica. O seu empenamento no

contorno é mostrado na figura 4.3-b e no domínio é mostrado na figura 4.3-c, e os resultados apresentados na tabela 3.

Tabela 3. Resultados: perfil I

Propriedades	Presente trabalho (Trans. de Telles)	Presente trabalho (Int. analítica)	Valor exato
x_c	101.499999	101.499999	101.50000
y_c	101.499999	101.499999	101.50000
x_s	101.501296	101.500000	101.50000
y_s	101.499999	101.499999	101.50000
I_t	217950.955	217793.812	-

Os valores das respostas numéricas, foram praticamente idênticos com os valores exatos, comprovando eficiência dos dois processos, dado que a seção é de parede fina e requer bastante precisão dos algoritmos de integração.

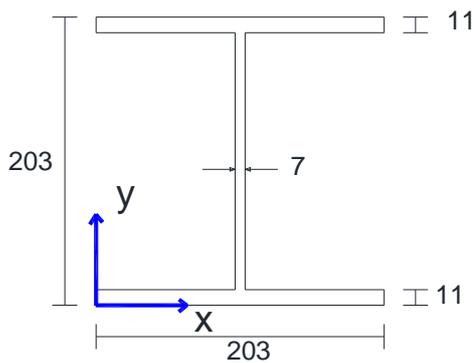


Figura 4.3-a: Perfil I.

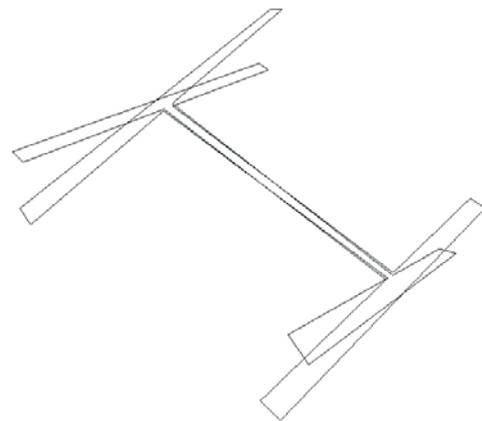


Figura 4.3-b: Empenamento no contorno do perfil I.

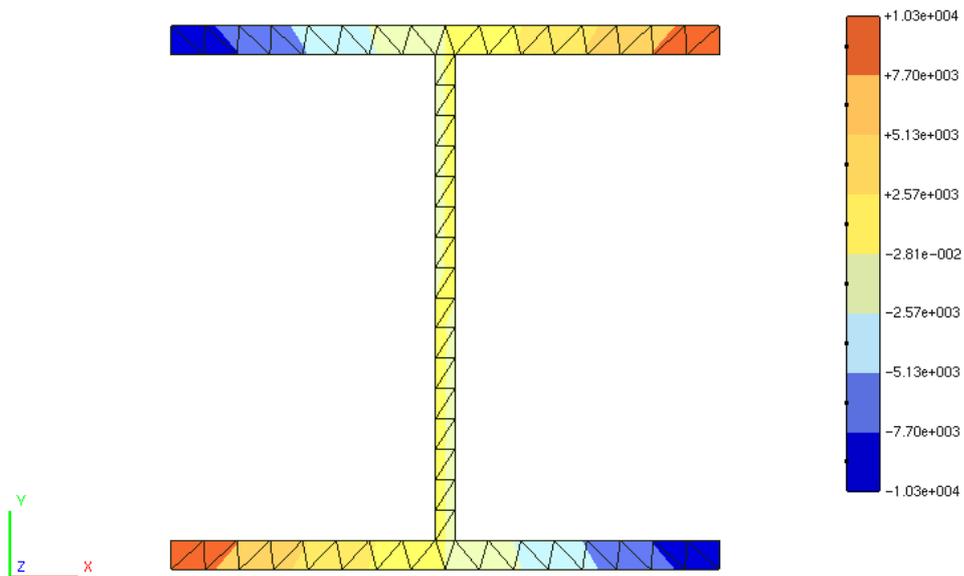


Figura 4.3-c. Empenamento na seção em perfil I.

O quarto exemplo trata de uma seção caixão de parede delgada estudada por Kindmann, Kraus (2007), cujas dimensões são encontradas na figura 4.4-a. Para a avaliação da formulação adotada no presente trabalho, supõe-se um comprimento de 200 cm, foi aplicado um torque T de 10×10^6 Ncm e considera-se módulo de elasticidade transversal de 200×10^5 N/cm² e coeficiente de Poisson $\nu = 0.28$.

Esta seção caixão foi avaliada três vezes: durante a primeira avaliação, foram utilizados 288 elementos lineares isoparamétricos e foi comparado o processo de integração analítico com a transformação de Telles. Na segunda avaliação, utilizaram-se 1200 elementos lineares isoparamétricos e também foi comparado o processo analítico com a transformação de Telles. Já na terceira avaliação da seção caixão, empregaram-se 112 elementos parabólicos. A tabela 4 apresenta os dados da avaliação com 288 elementos lineares.

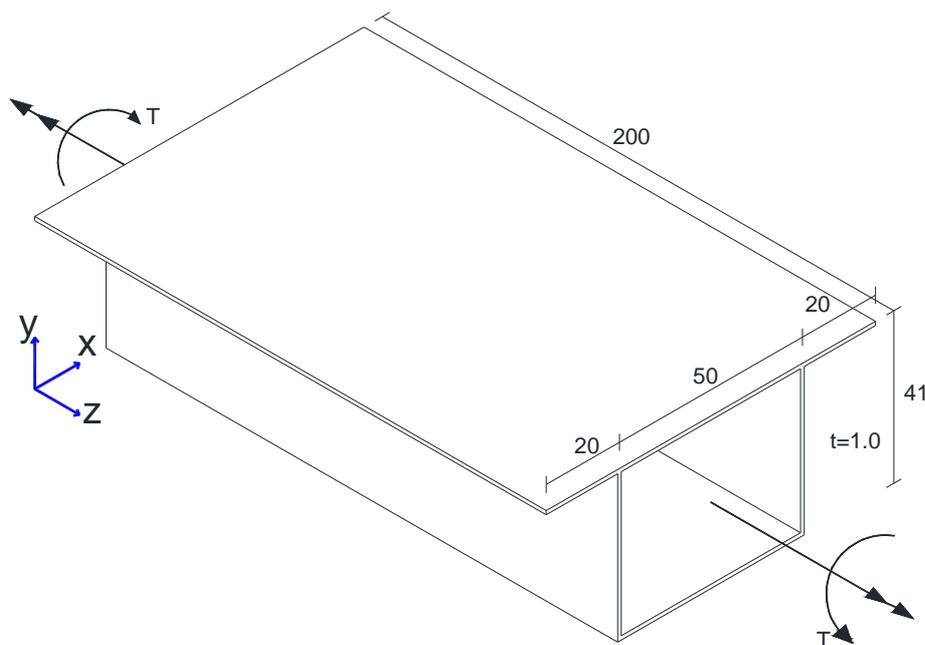


Figura 4.4-a. Caixaão de parede fina.

Tabela 4. Resultados: Caixaõ com 288 elementos

Propriedades	Kindmann	Presente trabalho (Trans. Telles)	Presente (Int. Analítica)	Valor exato
Área	-	218.9999999	218.9999999	219.000000
I_{xx}	-	190313.0000000	190313.0000000	190313.000000
I_{yy}	-	564035.7500000	564035.7500000	564035.750000
J_0	-	754348.7500000	754348.7500000	-
x_c	-	45.0000000	45.0000000	45.0000000
y_c	24.1363636	24.0616438	24.0616438	24.0616438
x_s	-	44.9659826	45.1436840	45.0000000
y_s	22.3890636	22.4566200	22.5629467	-
I_t	-	92660.0452265	96762.2177368	-
θ'_t	-	1.3813936×10^{-5}	$1.38806111 \times 10^{-5}$	-
τ_{xz-max}	-	2579.798445	2579.278397	-
τ_{yz-max}	-	-2595.226042	-2593.996702	-

A tabela 5 apresenta os dados da avaliação realizada como 1200 elementos lineares.

Tabela 5. Resultados: Caixaõ com 1200 elementos

Propriedades	Kindmann	Presente trabalho (Trans. Telles)	Presente (Int. Analítica)	Valor exato
x_c	-	45.0000000	45.0000000	45.0000000
y_c	24.1363636	24.0616438	24.0616438	24.0616438
x_s	-	46.0617708	45.0072069	45.0000000
y_s	22.3890636	22.9952546	22.3767119	-
I_t	-	87636.1357837	90033.9365994	-
θ'_t	-	$1.460584710 \times 10^{-5}$	$1.42168614 \times 10^{-5}$	-
τ_{xz-max}	-	2607.591278	2608.004545	-
τ_{yz-max}	-	-2609.228094	-2609.032601	-

É importante lembrar que as propriedades como área, I_{xx} , I_{yy} e as coordenadas do centro de gravidade X_c e Y_c , são obtidas diretamente sem precisar resolver o problema de valor de contorno. Como a geometria da seção é linear, os valores obtidos correspondem ao valor exato adotando-se apenas a integração de Gauss. Os mesmos constam na tabela apenas para servir de parâmetro. Assim, pela simetria, a coordenada X_s do centro de torção é previamente conhecida e nota-se que os resultados ficaram bastante próximos do valor esperado que é 45,0 para o centro de torção. Comparando-se os dois tipos de integração, pouca diferença é notada. Comparando-se as malhas, observa-se a convergência dos resultados quando é realizado o refinamento da malha.

A tabela 6 apresenta os dados avaliados com 112 elementos parabólicos isoparamétricos.

Tabela 6. Resultados: Caixaão com 112 elementos parabólicos

Propriedades	Kindmann	Presente trabalho (Trans. Telles)	Valor exato
x_c	-	45.0000000	45.0000000
y_c	24.1363636	24.0616438	24.0616438
x_s	-	44.9216439	45.0000000
y_s	22.3890636	22.8873064	-
I_t	-	88678.8546549	-
θ'_t	-	$1.44341473 \times 10^{-5}$	-
$\tau_{xz-\max}$	-	2672.894355	-
$\tau_{yz-\max}$	-	2796.401033	-

Com uma quantidade menor de elementos, a formulação apresentou bons resultados, como pode ser visto na tabela 6, podendo, também, serem comparados com os resultados das tabelas 4 e 5, obtidos com elementos lineares. Isso se dá porque o elemento parabólico é mais rico e aproxima-se, com mais fidelidade, da resposta do problema. Assim, podendo usar uma quantidade menor de elementos, as dimensões das matrizes são menores o que implica em menor custo computacional quando se emprega este tipo de elemento.

O aspecto do empenamento no contorno da seção é mostrado na figura 4.4-b e a função de empenamento na seção é ilustrada pela figura 4.4-c.

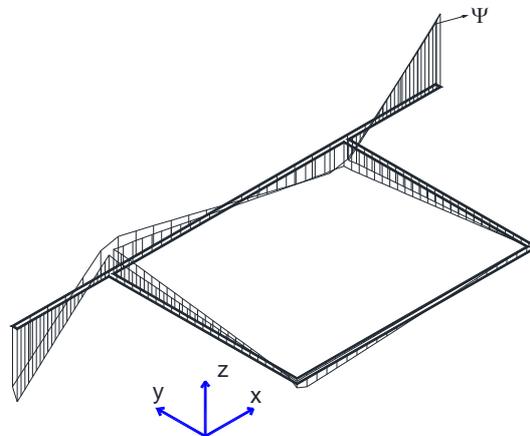


Figura 4.4-b. Empenamento da seção caixaão no contorno.

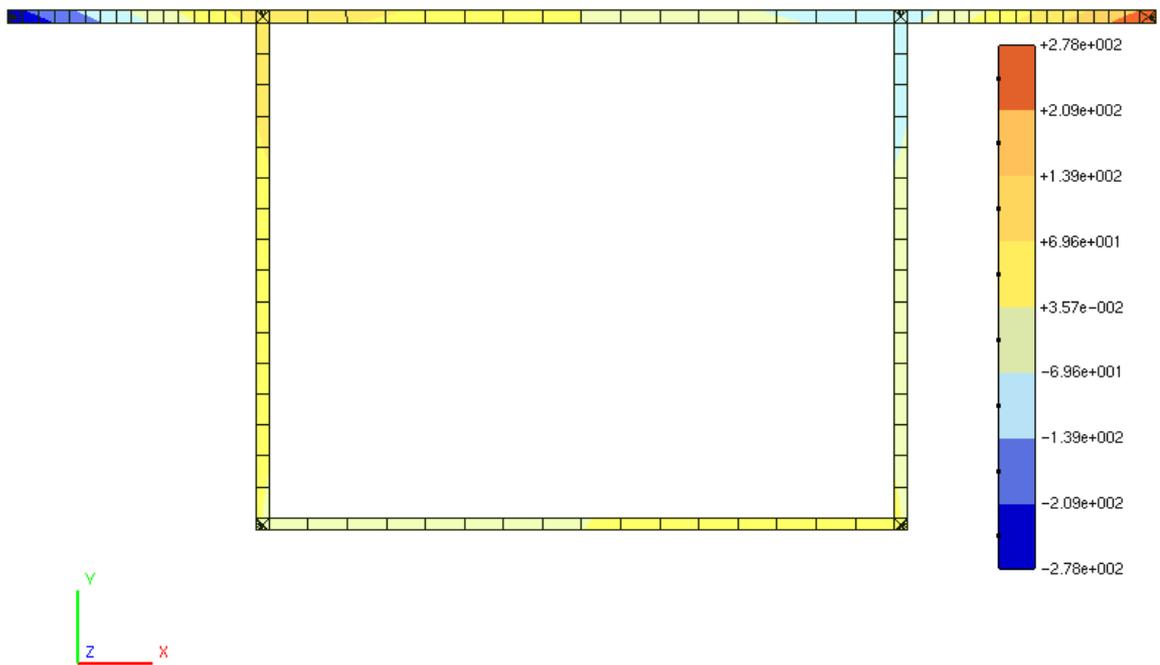


Figura 4.4-c. Empenamento da seção caixão.

O aspecto da tensão τ_{xz} no contorno é mostrado na figura 4.4-d e o campo das mesmas tensões é ilustrada na figura 4.4-e.

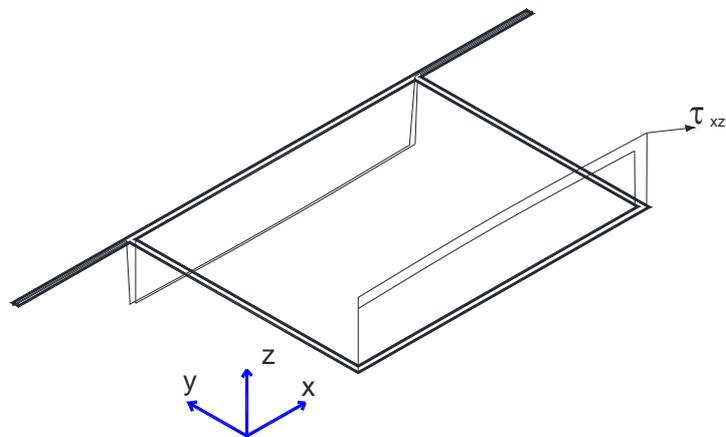


Figura 4.4-d: Tensão τ_{xz} no contorno da seção.

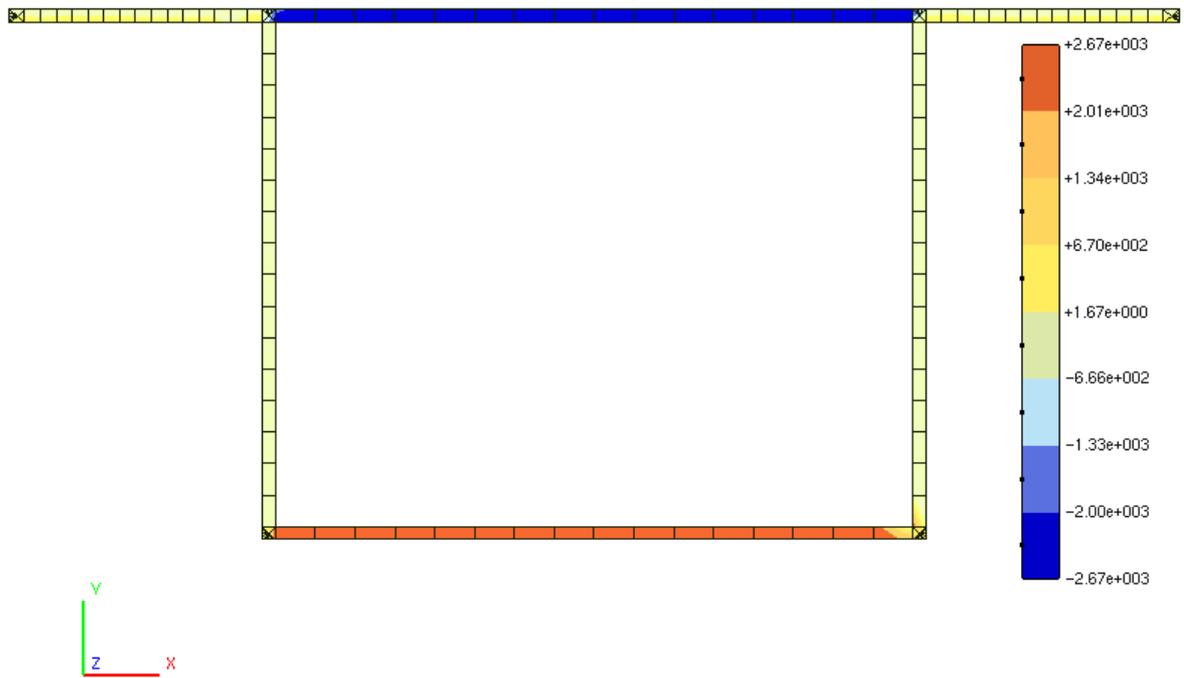


Figura 4.4-e: Campo de tensão τ_{xz} da seção.

E o aspecto da tensão τ_{yz} no contorno é mostrado na figura 4.4-f e o campo da respectiva tensão é apresentado pela figura 4.4-g.

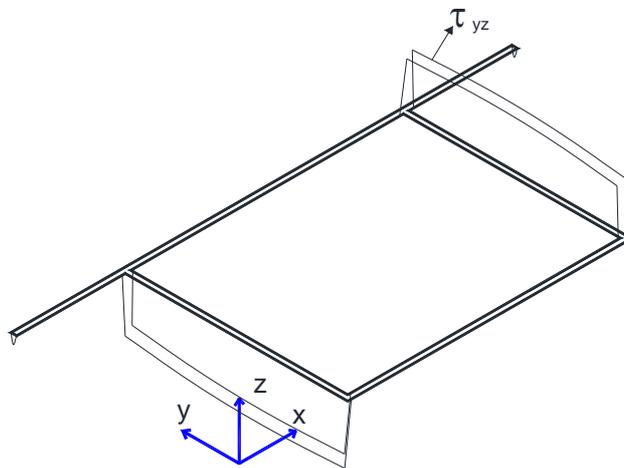


Figura 4.4-f: Tensão τ_{yz} no contorno da seção.

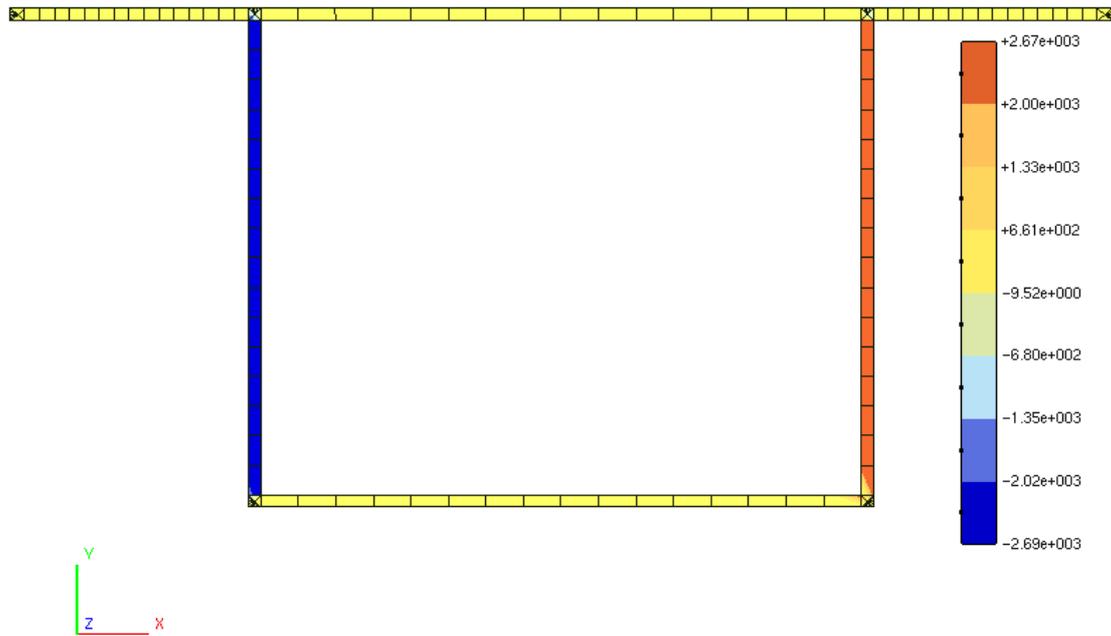


Figura 4.4-g: Campo de tensão τ_{yz} da seção.

Através das figuras 4.4-d e 4.4-f, pode-se observar que a formulação captura as diferenças de tensão ao longo da espessura, tendo em vista que, em formulações simplificadas, essas tensões são admitidas constantes. Sendo assim, conclui-se que a presente formulação fornece a resposta com bastante riqueza e precisão.

O quinto e o sexto exemplos tratam de seções para cujo empenamento e tensões em todo o seu domínio e contorno existem soluções analíticas a partir da formulação de Saint-Venant, então tem-se o triângulo equilátero da figura 4.5-a.

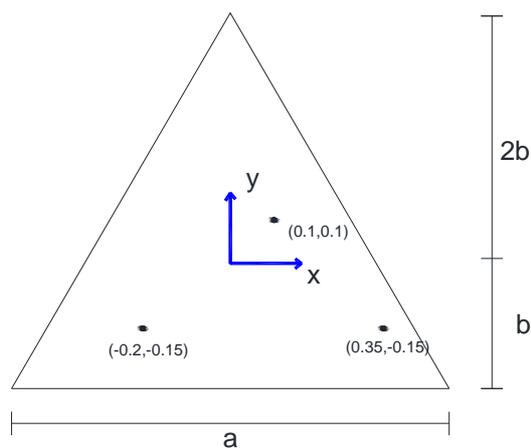


Figura 4.5-a: Triângulo equilátero.

As soluções são deduzidas por Silva,(2005), em que se obtêm os polinômios harmônicos para resolução de torção de Saint-Venant. Para a seção triangular, a rotação específica, a partir a figura 4.5-a, é dada por:

$$\theta'_t = \frac{5}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{M_t}{b^4 G} \quad (4.1)$$

O momento de inércia torção da seção triangular é:

$$I_T = \frac{9\sqrt{3} \cdot b^4}{5} \quad (4.2)$$

O empenamento e o deslocamento u_z é dado por:

$$\begin{aligned} \psi_s(x, y) &= -\frac{(-x^3 + 3y^2x)}{b} \quad \text{e} \\ u_z(x, y) &= \theta'_t \cdot \psi_s(x, y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Fazendo a derivadas parciais tem-se:

$$\frac{d\psi_s}{dx} = -\frac{(-3x^2 + 3y^2)}{b} \quad \text{e} \quad \frac{d\psi_s}{dy} = -\frac{(6yx)}{b} \quad (4.4)$$

Substituindo as equações (4.5) nas equações (3.86), têm-se as expressões analíticas para as tensões no domínio triangular.

$$\tau_{xz} = G\theta'_t \left(-\frac{(-3x^2 + 3y^2)}{b} - y \right) \quad \text{e} \quad \tau_{yz} = G\theta'_t \left(-\frac{(6yx)}{b} + x \right) \quad (4.5)$$

Então, seja uma barra cuja seção transversal é um triângulo com lado $a = 1$ cm, sujeito a um torque 10×10^2 Ncm, o material é o aço com $E = 200 \times 10^5$ N/cm² coeficiente de Poisson $\nu = 0.28$. É realizada aqui uma análise numérica com 48 elementos parabólicos. A integração ativa o processo de Telles quando necessário e utiliza 6 pontos de Gauss. Na tabela 7, são comparados a rotação específica, a inércia à torção e as respectivas tensões e deslocamento u_z em três pontos.

Tabela 7. Comparação dos resultados obtidos a partir da seção elíptica.

Propriedades	Formulação analítica	Presente Formulação
θ'_t	$5.912066 \times 10^{-3} \text{ rad}$	$5.9120412 \times 10^{-3} \text{ rad}$
I_t	$2.165063 \times 10^{-2} \text{ cm}^4$	$2.1597354 \times 10^{-2} \text{ cm}^4$
$u_z(0.1, 0.1)$	$6.826666 \times 10^{-6} \text{ cm}$	$3.638655 \times 10^{-5} \text{ cm}$
$\tau_{xz}(0.1, 0.1)$	-4618.802 N/cm^2	-4627.676 N/cm^2
$\tau_{yz}(0.1, 0.1)$	6218.802 N/cm^2	6235.457 N/cm^2
$u_z(-0.2, -0.15)$	$-1.87733 \times 10^{-5} \text{ cm}$	$1.402206 \times 10^{-5} \text{ cm}$
$\tau_{xz}(-0.2, -0.15)$	5528.203 N/cm^2	5544.165 N/cm^2
$\tau_{yz}(-0.2, -0.15)$	-4437.604 N/cm^2	-4446.598 N/cm^2
$u_z(0.35, -0.15)$	$-6.570666 \times 10^{-5} \text{ cm}$	$-6.09976 \times 10^{-5} \text{ cm}$
$\tau_{xz}(0.35, -0.15)$	-1071.796 N/cm^2	-1075.398 N/cm^2
$\tau_{yz}(0.35, -0.15)$	-7765.507 N/cm^2	-7781.576 N/cm^2

O aspecto do empenamento no contorno e o empenamento da seção para a seção é mostrado na figura 4.5-b e 4.5-c respectivamente.

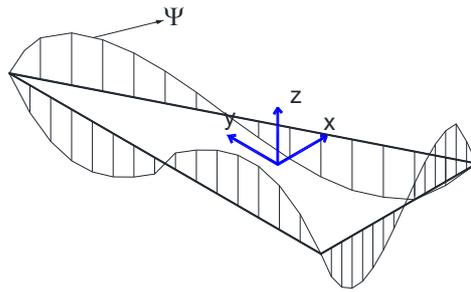


Figura 4.5-b: Empenamento no contorno do triângulo.

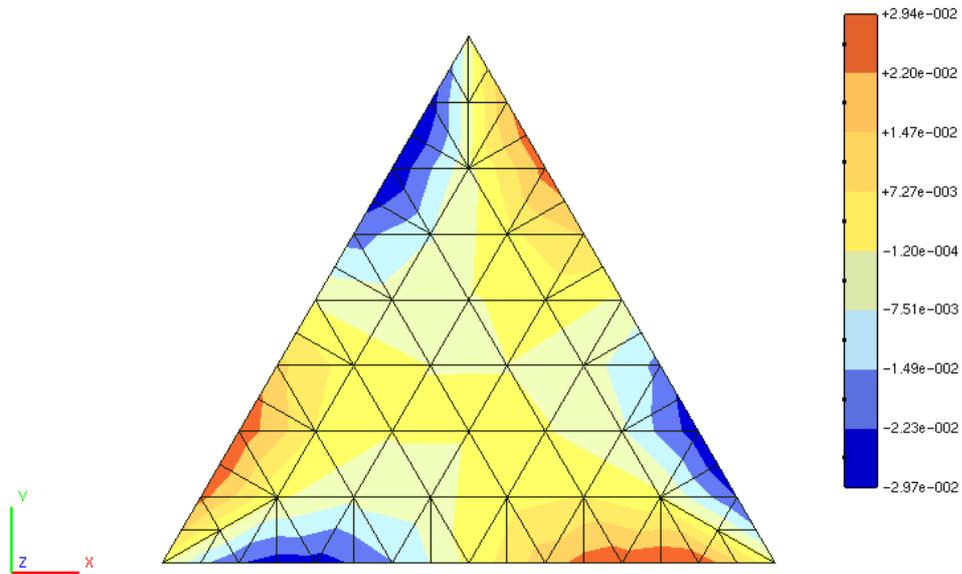


Figura 4.5-c: Empenamento na seção em triângulo.

E o aspecto das tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz} , no contorno da seção em triângulo, é mostrado nas figuras 4.5-d e 4.5-e, o campo das mesmas tensões é ilustrado pelas figuras 4.4-f e figura 4.4-g respectivamente.

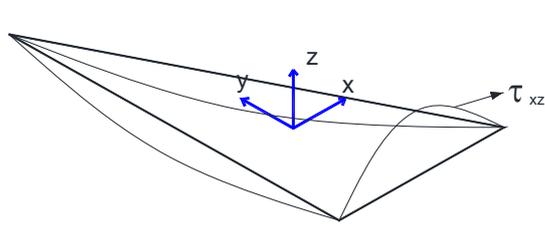


Figura 4.5-d: Tensão τ_{xz} no contorno.

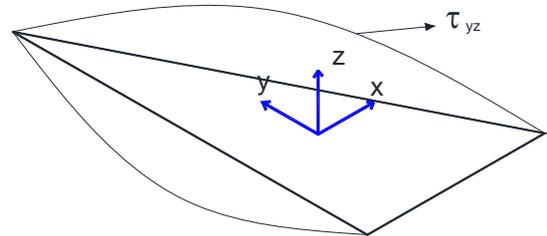


Figura 4.5-e: Tensão τ_{yz} no contorno.

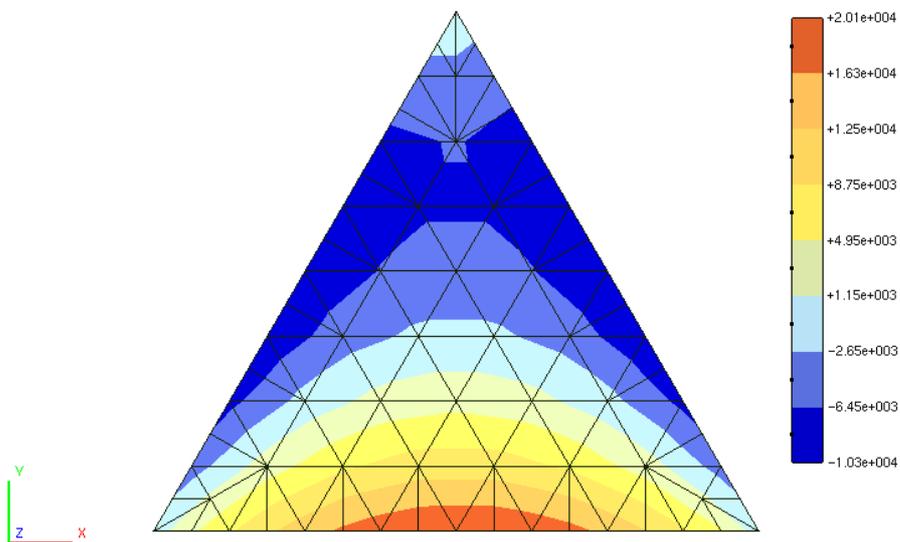


Figura 4.5-f: Campo de tensão de cisalhamento τ_{xz} .

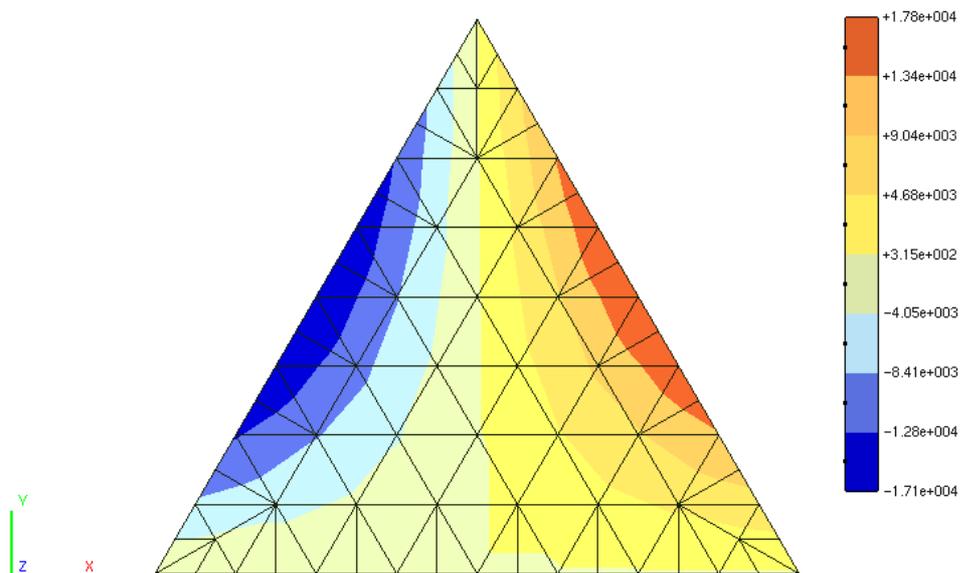


Figura 4.5-g: Campo de tensão de cisalhamento τ_{yz} .

O quinto exemplo é a seção elíptica da figura 4.6-a.

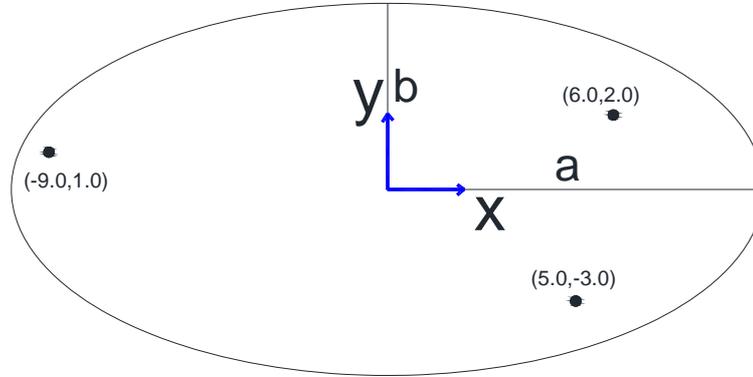


Figura 4.5-a: Elipse.

Para a elipse, têm-se as seguintes propriedades calculadas analiticamente:

Rotação específica

$$\theta'_t = \frac{M_t (b^2 + a^2)}{G\pi a^3 b^3} \quad (4.6)$$

Momento de inércia à torção.

$$I_t = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + a^2} \quad (4.7)$$

Empenamento e deslocamento na direção de z que é dado por:

$$\psi_s(x, y) = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot xy \quad \text{e} \quad u_z(x, y) = \theta'_t \cdot \psi_s(x, y) \quad (4.8)$$

Fazendo-se as derivadas parciais tem-se:

$$\frac{d\psi_s}{dx} = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) y \quad \text{e} \quad \frac{d\psi_s}{dy} = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) x \quad (4.9)$$

e substituindo-se a equação (4.9) na equação (3.93) chega-se às tensões de cisalhamento.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} = G\theta'_t y \left[\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) - 1 \right] \\ \tau_{yz} = G\theta'_t x \left[\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) + 1 \right] \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Então seja uma barra de aço com seção elíptica com $a = 10$ cm e $b = 5$ cm, sujeita a um torque de 5×10^5 Ncm, cujo módulo de elasticidade do aço é de $E = 200 \times 10^5$ N/cm² e coeficiente de Poisson $\nu = 0.28$. Na análise são utilizados elementos parabólicos, pois estes têm maior capacidade de se aproximar da geometria do problema. A quantidade de elementos é 36 e são utilizados 6 pontos de Gauss na integração e a transformação de Telles quando necessário. Na tabela abaixo, são comparados a rotação específica, a inércia à torção e as respectivas tensões e deslocamento u_z em três pontos.

Tabela 8. Comparação dos resultados obtidos a partir da seção elíptica.

Propriedades	Formulação analítica	Presente Formulação
θ'_t	2.0394927×10^{-5} rad	2.0394927×10^{-5} rad
I_t	3138.0351 cm ⁴	3141.592 cm ⁴
$u_z(-9.0, 1.0)$	1.100078×10^{-4} cm	1.102259×10^{-4} cm
$\tau_{xz}(-9.0, 1.0)$	-254.647 N/cm ²	-255.019 N/cm ²
$\tau_{yz}(-9.0, 1.0)$	-572.957 N/cm ²	-572.901 N/cm ²
$u_z(6.0, 2.0)$	1.466771×10^{-4} cm	1.4697535×10^{-4} cm
$\tau_{xz}(6.0, 2.0)$	-509.295 N/cm ²	-510.042 N/cm ²
$\tau_{yz}(6.0, 2.0)$	-381.971 N/cm ²	-381.887 N/cm ²
$u_z(5.0, -3.0)$	-1.833464×10^{-4} cm	$-1.8372001 \times 10^{-4}$ cm
$\tau_{xz}(5.0, -3.0)$	763.943 N/cm ²	765.102 N/cm ²
$\tau_{yz}(5.0, -3.0)$	318.309 N/cm ²	318.241 N/cm ²

O aspecto do empenamento no contorno da elipse é mostrado na figura 4.6-b e função de empenamento na seção é mostrada pela figura 4.6-c.

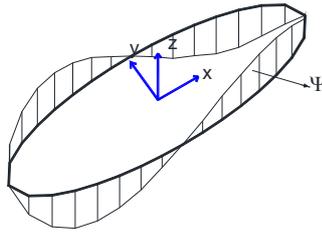


Figura 4.6-b: Empenamento no contorno da elipse.

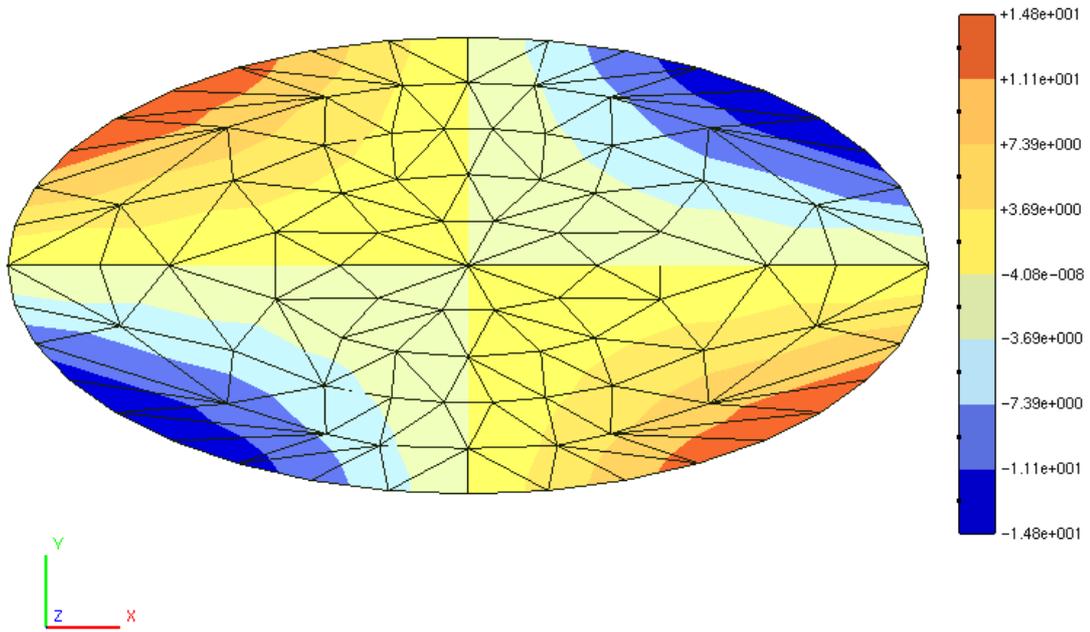


Figura 4.6-c: Empenamento na seção elíptica.

E o aspecto das tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz} , no contorno da elipse, é mostrado na figura 4.6-d, figura 4.6-e, o campo dessas tensões na seção é ilustrado 4.6-f e figura 4.6-g respectivamente.

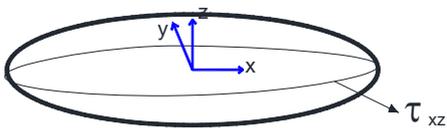


Figura 4.6-d: Tensão de cisalhamento τ_{xz} no contorno.

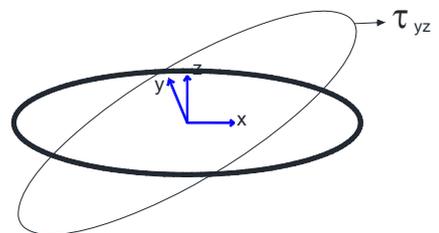


Figura 4.6-e: Tensão de cisalhamento τ_{yz} no contorno.

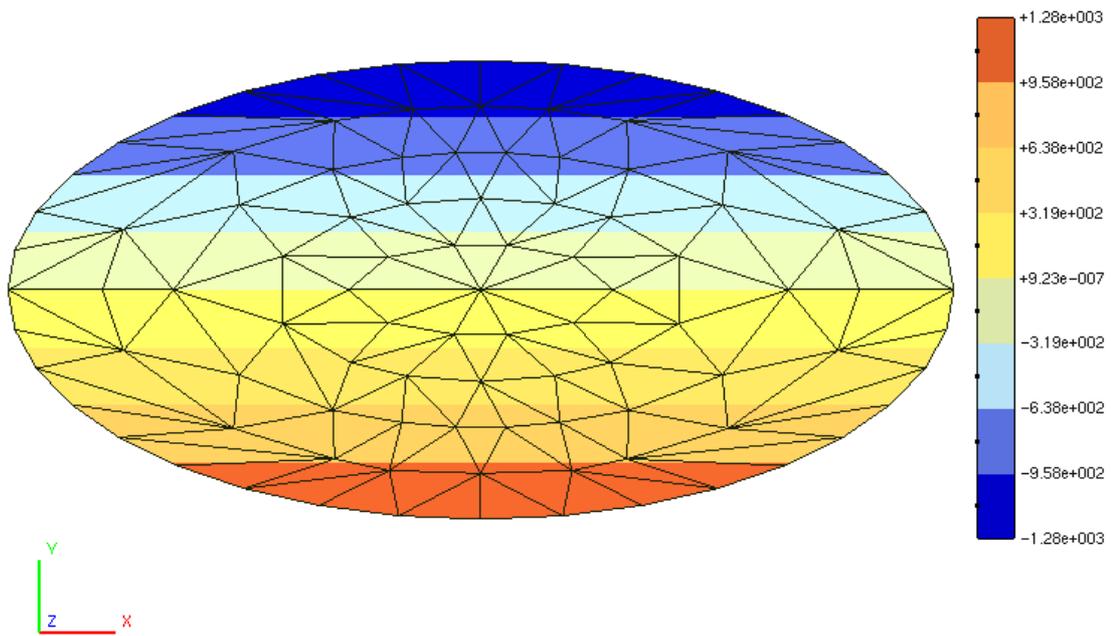


Figura 4.6-f: Tensão de cisalhamento τ_{zx} na seção elíptica.

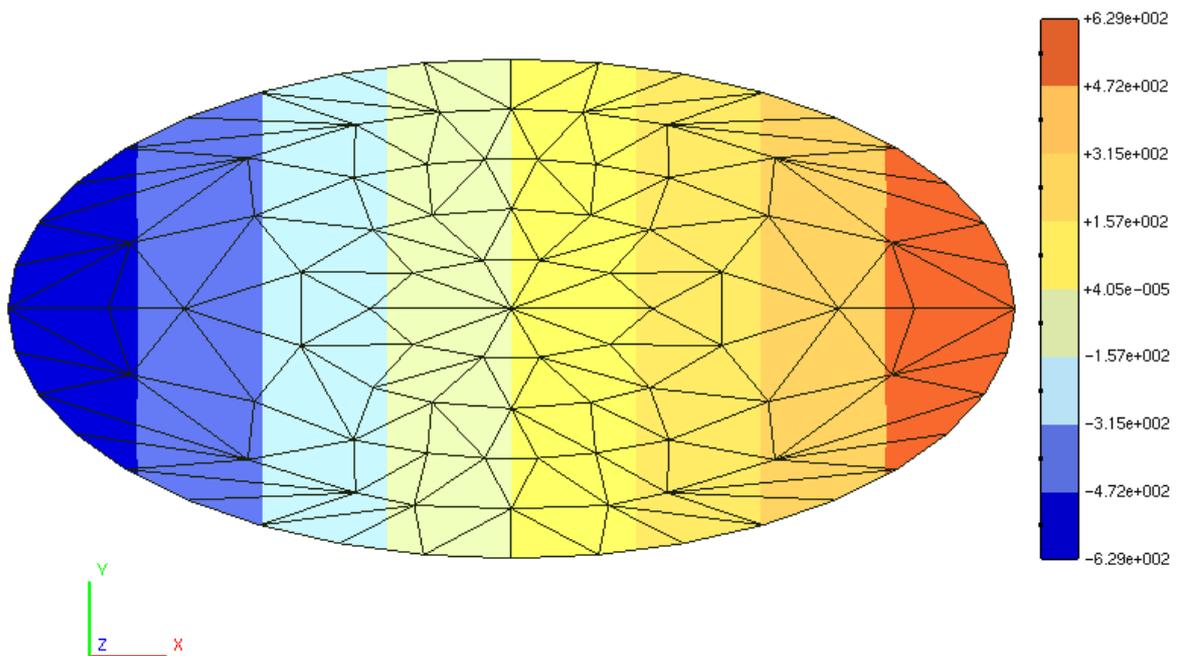


Figura 4.6-g: Tensão de cisalhamento τ_{zy} na seção elíptica.

O quarto e o quinto exemplos focaram as tensões e o deslocamento angular específico, dado que as seções escolhidas apresentam expressões analíticas para o cálculo das propriedades deduzidas a partir da formulação de Saint-Venant e estão em concordância com as relações da teoria da elasticidade. Os resultados obtidos pela formulação implementada também se apresentaram bastante próximos dos resultados obtidos a partir da formulação analítica exata, conforme pode ser visto nas tabelas 7 e 8.

Como aplicação, uma vez que as propriedades da seção foram calculadas para a obtenção do centro e torção, podem-se calcular os momentos principais de inércia e, então, tem-se todos os dados necessários para calcular a matriz de rigidez de pórtico espacial. Portanto, observe a figura 4.7 em que se tem uma barra bi engastada e seus graus de liberdade em cada nó.

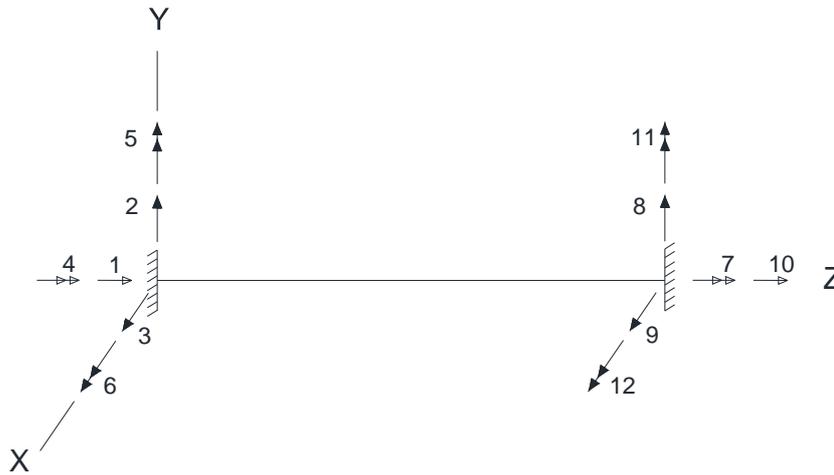


Figura 4.7: Barra biengastada com seus graus de liberdade.

Fonte: Gere (1965)

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_r}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_r}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{L} \\ -\frac{EA_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_r}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_r}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{L} \end{bmatrix}$$

Figura 4.8: Matriz de rigidez de pórtico espacial.

A matriz **K** (figura4.8) faz parte da formulação do Método dos Deslocamentos (da rigidez direta), que corresponde à matriz de rigidez de elemento de pórtico espacial, obtida via aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Na matriz apresentada na figura 4.8, são consideradas as deformações devido ao esforço normal, momento fletor e momento torçor.

Os valores numéricos dos coeficientes da matriz de rigidez dada na figura 4.8 para a seção caixão, do exemplo três, obtida com 112 elementos parabólicos, são dados por:

coluna =1	coluna =2	coluna =3	coluna =4	coluna =5	coluna =6
21900000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	1905605.04	0.00	0.00	0.00	190560503.42
0.00	0.00	3616822.50	0.00	361682250.00	0.00
0.00	0.00	0.00	3464015504.53	0.00	0.00
0.00	0.00	-361682250.25	0.00	48224300000.00	0.00
0.00	190560503.56	0.00	0.00	0.00	25408067123.29
-21900000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	-1905605.04	0.00	0.00	0.00	-190560503.42
0.00	0.00	-3616822.50	0.00	361682250.00	0.00
0.00	0.00	0.00	-3464015504.5	0.00	0.00
0.00	0.00	361682250.25	0.00	24112150000.00	0.00
0.00	190560503.56	0.00	0.00	0.00	12704033561.64

coluna =7	coluna =8	coluna =9	coluna =10	coluna =11	coluna =12
-21900000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	-1905605.03	0.00	0.00	0.00	1905605.03
0.00	0.00	-3616822.50	0.00	-361682250.00	0.00
0.00	0.00	0.00	-3464015504.5	0.00	0.00
0.00	0.00	361682250.00	0.00	24112150000.00	0.00
0.00	-190560503.42	0.00	0.00	0.00	12704033561.64
21900000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	1905605.03	0.00	0.00	0.00	-190560503.42
0.00	0.00	3616822.50	0.00	361682250.00	0.00
0.00	0.00	0.00	3464015504.53	0.00	0.00
0.00	0.00	361682250.00	0.00	48224300000.00	0.00
0.00	-190560503.42	0.00	0.00	0.00	25408067123.29

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho consiste da apresentação de uma formulação de elementos de contorno, voltada para a resolução do problema de torção, na qual algoritmos especiais de integração para integrais fracamente, fortemente e quase singulares são implementados. As integrais quase singulares surgem quando o problema é aplicado a seções de parede fina ou quando ha elementos descontínuos no modelo. A fim de se desenvolver uma formulação unificada para qualquer tipo de seção, sem fazer-se distinção entre parede espessa ou fina, dedicou-se uma atenção especial aos processos de integração. Para tal, foram desenvolvidas expressões analíticas para as integrais limitadas aos elementos lineares. Por outro lado, a transformação de Telles também foi empregada, já que é aplicável a elementos de qualquer ordem.

Embora as integrais analíticas desenvolvidas apresentem o valor exato para os integrandos, suas expressões são grandes e demandam uma quantidade significativa de operações, aumentando o seu custo computacional, portanto, esta é uma desvantagem da integração analítica se comparada à transformação de Telles. Assim, vê-se que o processo de integração baseada na transformação cúbica segundo Telles é relativamente simples e eficiente para a classe de problemas analisados.

O M.E.C. é uma poderosa ferramenta numérica, dado que apenas o contorno é discretizado, o que reduz a dimensão do sistema de equações. A formulação implementada mostrou-se eficiente na resolução do problema de torção uniforme, tanto para seções de parede fina como espessas. A formulação pode ser facilmente incorporada a um programa de análise estrutural, voltado ao comportamento de pórticos espaciais, via Método dos Deslocamentos para o cálculo da rigidez torcional.

Outro ponto importante é que a análise de problemas de torção via MEC possibilita o cálculo de tensões cisalhantes em pontos quaisquer do domínio ou do contorno com grande precisão, fato de grande interesse prático na área de projetos.

6 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Acreditamos que em futuros trabalhos seria importante desenvolverem-se formulações analíticas para o cálculo das integrais correspondentes aos coeficientes das matrizes do sistema de equações do M.E.C, fazendo uso do elemento parabólico.

Além disso, faz-se necessária uma análise de torção em seções compostas por vários materiais (com diferentes propriedades constitutivas), utilizando a técnica de subregião SBS.

Importante também é a implementação de uma sub-rotina para a análise de pórticos espaciais em que se empregam membros com seções genéricas.

E, por fim, destaca-se a importância de fazer-se uma análise de torção não uniforme em seções arbitrárias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araújo F.C., D.R. Alberto, Dors C. (2003). *Analysis of 3D time-dependent acoustic problems via a generic BE substructuring algorithm based on iterative solvers*. Engineering Analysis with Boundary Elements. 27: 705-716.

Araújo F. C., d’Azevedo E. F., Gray L. J. (2010). *Boundary-element parallel-computing algorithm for the microstructural analysis of general composites*, Computers & Structures, 88, 773-784.

Araújo F. C., d’Azevedo E. F., Gray L. J. (2011). *Constructing efficient substructure-based preconditioners for BEM systems of equations*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 35: 517-526.

Araújo F. C., Dors C., Martins C. J. Mansur W. J. (2004). *New developments on BE/BE multi-zone algorithms based on Krylov solvers-applications to 3D frequency-dependent problems*. J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng., 26: 231-248.

Araújo F. C., Silva K. I., Telles J. C. F. (2006). *Generic domain decomposition and iterative solvers for 3D BEM problems*. Int. J. Numer. Methods Engrg., vol 68, pp. 448-472.

Araújo, F.C. e Gray. L J. (2008). *Evaluation of effective material parameters of CNT-reinforced composites via 3D BEM*. CMES, v 24, p. 103-121.

Athanasiadis, G.(1989). *Direkte und indirekte Randelementmethoden zur Bestimmung der Lage des Schubmittelpunktes beliebig geformter Staquerschnitte*. Forschung Im Ingenieurwesen Bd. 55 (1989) Nr.2

Brebbia,C.A. e Domingues. *Boundary Elements – AN Introduction Course*. MacGraw Hill Book Company,1987.

Camotin, D. e Silvestre, N. (2010). *On the mechanics of distortion in thin-walled open sections*. Elsevier, v. 48, p. 469-481.

Friedman, Z e Kosmatka, J.B.(,2000). *Torsion and flexure of a prismatic isotropic beam the boundary element method*. Elsevier Science Ltd. p. 479-494.

Gere, J.M. e Weaver, W. Jr. Análise de estruturas reticuladas. Van Educational Publishing, New York, 1965.

Kindmann, R & Matthias, K. (2007) *FE-Methoden zur Bestimmung der Lage des Schubmittelpunktes dünnwandiger Querschnitte*. Bautechnik, v. 84. p. 682-690.

Sapountzakis, E.J. e Mokos, V.G. (2003)a. *Warping shear stress in nonuniform torsion by BEM*. Computational Mechanics, v. 30, p. 131-142.

Sapountzakis, E.J. e Mokos, V.G. (2003)b. *Warping shear stress in nonuniform torsion of composite bars by BEM*. Elsevier, v. 192, p. 4337-4353.

Sapountzakis, E.J. e Mokos, V.G. (2006). *3-D Beam element of variable composite cross section including warping effect*. Acta Mechanica, v. 171. p. 151-169.

Sapountzakis, E.J. e Tsipiras, V.J. (2012). *Secondary torsion moment deformation effect in inelastic nonuniform torsion sections by BEM*. Elsevier, v. 47, p. 68-84.

Silva, H. F. *Formulação do problema da torção uniforme em barras de seção transversal maciça*. Dissertação (Mestrado em Engenharia)- Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

Silva, K. I. *Decomposição genérica de domínio para análises 3D via M.E.C.-Estudo de eficiência de estratégias voltadas para análise de problemas de engenharia de grande ordem*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2005.

Telles, J. C. F; Oliveira, R.F.(1994). *Third Degree Polynomial Transformation for Boundary Element integrals: Further Improvements*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 13, p. 135-141.

Thimoshenko, S. P. e Goodier, J. N. *Teoria da Elasticidade*. 3 ed. McGraw-Hill, 1979.

Salmon, C.G; Johnson, J.E. e Malhas, F.A. *Steel Structures, Design and Behavior*. 5ª edition. Pearson, 2009.

ANEXOS

ANEXO A – Expressões integrais de contorno para o cálculo das propriedades das seções.

$$A = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(x)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} x n_x d\Gamma$$

$$I_{xx} = \int_{\Omega} y^2 d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} xy^2 n_x d\Gamma$$

$$I_{yy} = \int_{\Omega} x^2 d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} d\Omega = \oint_{\Gamma} x^2 y n_y d\Gamma$$

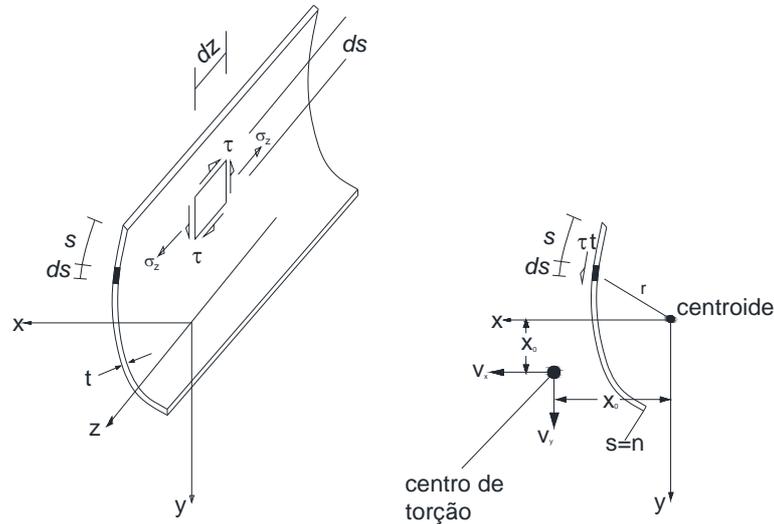
$$I_{xy} = \int_{\Omega} xy d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} x^2 y n_x d\Gamma$$

$$x_c = \frac{1}{A} \int_{\Omega} x d\Omega = \frac{1}{A} \int_{\Omega} \frac{\partial(xy)}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{A} \oint_{\Gamma} x y n_y d\Gamma$$

$$y_c = \frac{1}{A} \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{1}{A} \int_{\Omega} \frac{\partial(xy)}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{A} \oint_{\Gamma} x y n_x d\Gamma$$

ANEXO B – Formulação simplificada para torção não uniforme em parede fina

Seja a figura abaixo uma seção de parede delgada.



Seção de parede delgada.

Fonte: Salmon

Para o momento aplicado no plano yz, as tensões são calculadas pelas expressões:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} (I_y y + I_{xy} x) \quad \text{e} \quad \tau t = \frac{-V_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[I_y \int_0^s y t ds - I_{xy} \int_0^s x t ds \right]$$

Para o momento aplicado no plano xz as tensões são calculadas pelas expressões:

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} (-I_{xy} y + I_x x) \quad \text{e} \quad \tau t = \frac{+V_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[I_{xy} \int_0^s y t ds - I_x \int_0^s x t ds \right]$$

Centro de cisalhamento é dado por:

$$y_0 = -\frac{1}{V_x} \int_0^s (\tau t) r ds, \quad \text{em que} \quad \tau t = \frac{+V_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[I_{xy} \int_0^s y t ds - I_x \int_0^s x t ds \right]$$

$$x_0 = \frac{1}{V_y} \int_0^s (\tau t) r ds, \quad \text{em que} \quad \tau t = \frac{-V_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left[I_y \int_0^s y t ds - I_{xy} \int_0^s x t ds \right]$$