

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **Modelagem do Comportamento Inelástico de Estruturas de Aço: Membros sob Flexão em Torno do Eixo de Menor Inércia**

**Gilney Afonso Gonçalves**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação do  
Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da  
Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos  
requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia  
Civil, área de concentração: Construção Metálica

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Profª. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Ouro Preto, Junho de 2013

G635m      Gonçalves, Gilney Afonso.  
Modelagem do comportamento inelástico de estruturas de aço  
[manuscrito] : membros sob flexão em torno do eixo de menor inércia /  
Gilney Afonso Gonçalves - 2013.  
xi, 90f.: il.; graf.; tab.

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.  
Profª Drª Andréa Regina Dias da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de  
Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil.  
Área de concentração: Construção Metálica.

1. Aço - Estruturas - Teses. 2. Análise numérica - Teses. 3. Método de  
análise avançada - Método da rótula plástica - Teses. 4. Método dos  
elementos finitos - Teses. I. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. II. Silva,  
Andréa Regina Dias da. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

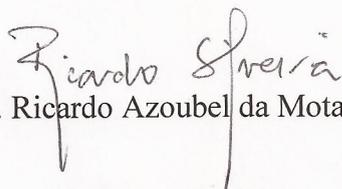
CDU: 624.014.2:519.674

Catálogo: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)

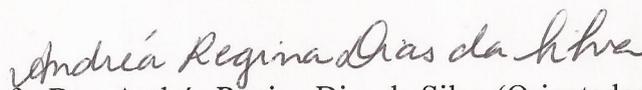
**MODELAGEM DO COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE ESTRUTURAS DE  
AÇO: MEMBROS SOB FLEXÃO EM TORNO DO EIXO DE MENOR INÉRCIA**

**AUTOR: GILNEY AFONSO GONÇALVES**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 14 de junho de 2013, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



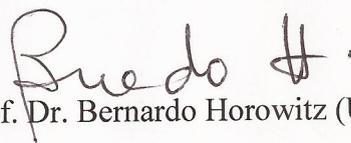
Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (Orientador / UFOP)



Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva (Orientadora / UFOP)



Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo (UFOP)



Prof. Dr. Bernardo Horowitz (UFPE)

*“se as coisas são inatingíveis... ora!  
Não é motivo para não querê-las...  
Que tristes os caminhos, se não fora  
A mágica presença das estrelas”.*

**Mário Quintana**

Aos meus pais e aos meus orientadores.

# Agradecimentos

A Deus, por ter me dado a vida e estar sempre presente guiando os meus passos, e à Maria pela sua constante intercessão e proteção.

Aos meus pais, Creuza e José Afonso, pela educação, lições e valores ensinados. Essa conquista é fruto de todo amor, dedicação e incentivo que sempre me foram dados.

À minha irmã Marluce e aos meus sobrinhos Yasmim e Kauan, por todo carinho e alegria que me proporcionam.

Aos meus orientadores prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira e profa. Andréa Regina Dias da Silva, pela amizade, atenção e brilhante orientação dada durante a elaboração deste trabalho.

À minha avó Maria da Anunciação pelo seu incentivo e pelas suas orações, e a todos os meus tios, primos e demais familiares pelo apoio e torcida.

A todos os amigos do mestrado, pelos momentos de descontração, amizade e companheirismo.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) pela atenção e ensinamentos transmitidos.

Ao CNPq pela ajuda financeira.

Resumo da Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

## **MODELAGEM DO COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE ESTRUTURAS DE AÇO: MEMBROS SOB FLEXÃO EM TORNO DO EIXO DE MENOR INÉRCIA**

**Gilney Afonso Gonçalves**

Junho/2013

*Orientadores:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Andréa Regina Dias da Silva

Esta dissertação tem como objetivo a modelagem do comportamento inelástico de sistemas estruturais em aço usando o método da rótula plástica refinado. Em tal método, os efeitos decorrentes do escoamento do aço são capturados através de um parâmetro que reduz a rigidez do membro estrutural em função do desenvolvimento de regiões plásticas. Estudam-se estruturas com membros submetidos à flexão em torno do eixo de menor inércia, seções transversais do tipo I e compactas. O programa computacional CS-ASA é usado como base para novas implementações e análises. Duas formulações inelásticas de elementos finitos reticulados planos, que consideram também os efeitos de segunda ordem e tensões residuais e estão disponíveis no programa, são adotadas nas análises. Como critério para definir o estado limite último da seção transversal, adotam-se superfícies de plastificação que descrevem a interação entre forças internas — esforço normal e momento fletor. Emprega-se o módulo tangente para considerar a degradação da rigidez em função do acréscimo de forças internas. Atenção especial será dada ao modelo de módulo tangente que melhor representa o caso de flexão em torno do eixo de menor inércia. Para solução da equação não linear que governa o equilíbrio estrutural, usa-se o método iterativo de Newton-Raphson acoplado a estratégias de continuação. Colunas isoladas e pórticos planos são analisados, e os resultados obtidos são comparados aos encontrados por outros pesquisadores através do método da zona plástica. Essa comparação permitirá concluir que as metodologias apresentadas neste trabalho são eficazes e necessárias para a previsão do comportamento das estruturas com membros com flexão em torno do eixo de menor inércia. Outras observações referentes aos estudos realizados serão estabelecidas.

Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

**INELASTIC BEHAVIOR MODELING OF STEEL STRUCTURES: MEMBERS  
UNDER MINOR-AXIS BENDING**

**Gilney Afonso Gonçalves**

June/2013

*Advisors:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Andréa Regina Dias da Silva

This dissertation concerns the inelastic behavior modeling of steel structural systems, examining such modeling using the refined plastic-hinge method. This method uses a parameter to capture the effects of steel inelasticity; the parameter reduces the structural member stiffness because of the development of cross-section plastic regions. This dissertation investigates structural members subjected to minor-axis bending and considers I type profiles and compact cross-sections. As a basis for new implementations and analyses, the study uses the CS-ASA computational tool. The analysis adopts two beam-column element inelastic formulations. These formulations also consider the second-order effects and residual stresses, which CS-ASA is able to handle. To define the cross section ultimate limit state, the study adopts strength surfaces that describe the interaction between internal forces — axial load and bending moment. The tangent modulus approach is used to consider the stiffness degradation caused by the increase in internal forces. Thus, the study pays special attention to the tangent modulus model that best represents the case of minor-axis bending. To solve the nonlinear equations that govern the equilibrium at the structural system, the Newton-Raphson iterative strategy coupled with path-following methods is employed in this study. Isolated columns and portal frames are analyzed, and the results obtained are compared to those of other investigators who used the plastic zone method. The comparison shows that the methodologies presented in this dissertation are effective and necessary for predicting the behavior of steel structures with members under minor-axis bending. The dissertation also offers other comments concerning relevant studies.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos .....	1
1.2 O Sistema Computacional CS-ASA.....	4
1.3 Organização do Trabalho.....	6
<b>2 Fundamentos da Análise Estrutural Inelástica</b> .....	<b>7</b>
2.1 Introdução .....	7
2.2 Princípios Básicos .....	7
2.2.1 Comportamento do Material.....	8
2.2.2 Distribuição de Tensões na Seção Transversal.....	8
2.2.3 Formação das Rótulas Plásticas.....	13
2.3 Métodos de Análise Inelástica .....	15
2.3.1 Método da Zona Plástica .....	16
2.3.2 Método da Rótula Plástica.....	17
2.3.3 Efeitos Geometricamente Não Lineares.....	18
2.4 Método da Rótula Plástica Refinado.....	19
2.4.1 Superfícies de Resistência .....	19
2.4.2 Módulo de Elasticidade Tangente.....	24
2.4.3 Tensões Residuais .....	25
<b>3 Metodologia Numérica para Análise Inelástica</b> .....	<b>28</b>
3.1 Introdução .....	28
3.2 Solução do Problema Estrutural Inelástico.....	29
3.2.1 Primeira Etapa: Solução Incremental Preditada.....	30
3.2.2 Segunda Etapa: Ciclo de Iterações.....	31

3.3	Formulação de Elementos Finitos Generalizada.....	34
3.3.1	O Parâmetro $\psi$ na Formulação PHF-1 .....	42
3.3.2	O Parâmetro $\psi$ na Formulação PHF-2 .....	45
<b>4</b>	<b>Exemplos de Aplicação e Validação.....</b>	<b>49</b>
4.1	Introdução .....	49
4.2	Colunas Isoladas.....	51
4.2.1	Coluna Engastada-Livre .....	51
4.2.2	Coluna Biapoiada.....	55
4.2.3	Coluna Biapoiada com Curvatura Inicial.....	58
4.3	Pórticos .....	60
4.3.1	Portal Simples .....	60
4.3.2	Pórtico de Dois Andares.....	64
4.3.3	Pórtico Treliçado.....	70
<b>5</b>	<b>Considerações Finais .....</b>	<b>76</b>
5.1	Introdução .....	76
5.2	Conclusões .....	77
5.3	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	77
	<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Modificações na Entrada de Dados.....</b>	<b>86</b>
A.1	Introdução .....	86
A.2	Modificações Realizadas .....	86

# Lista de Figuras

1.1	Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados .....	5
2.1	Diagramas tensão-deformação para o aço estrutural .....	8
2.2	Flexão de uma viga retangular .....	9
2.3	Processo de plastificação da seção transversal (Silva, 2009) .....	11
2.4	Diagrama momento-curvatura (Silva, 2009) .....	13
2.5	Formação da rótula plástica .....	14
2.6	Mecanismo em um pórtico simples.....	15
2.7	Discretização no Método da Zona Plástica.....	16
2.8	Discretização no Método da Rótula Plástica .....	17
2.9	Efeitos considerados em uma análise de segunda ordem (P- $\Delta$ e P- $\delta$ ).....	19
2.10	Superfície de resistência tridimensional.....	20
2.11	Resposta do membro estrutural à ação da carga axial e momento fletor .....	21
2.12	Superfícies de resistência para o eixo de maior inércia.....	23
2.13	Superfícies de resistência para o eixo de menor inércia .....	24
2.14	Comparação entre as equações propostas para o módulo tangente.....	26
2.15	Distribuição das tensões residuais nos perfis recomendada pelo ECCS (1983)....	27
3.1	Elemento finito adotado nas análises inelásticas (Silva, 2009) .....	36
3.2	Graus de liberdade do elemento no sistema corrotacional .....	37
3.3	Transformações entre os sistemas de coordenadas .....	41
3.4	Correção das forças internas após violação da superfície de resistência.....	42
3.5	Comparação entre os modelos que representam o parâmetro $\psi$ (Silva, 2009).....	43
3.6	Superfícies de resistência e início de escoamento usadas na formulação PHF-1 ..	46
3.7	Superfícies de resistência e início de escoamento usadas na formulação PHF-2 ..	48
4.1	Estruturas analisadas: colunas isoladas e pórticos .....	50

4.2	Coluna engastada-livre e sua discretização em elementos finitos .....	52
4.3	Trajетórias de equilíbrio da coluna: uso da formulação PHF-1 .....	53
4.4	Trajетórias de equilíbrio da coluna: uso da formulação PHF-2 .....	54
4.5	Trajетórias de equilíbrio para diferentes superfícies de resistência .....	55
4.6	Coluna biapoiada com diferentes condições de carregamento .....	56
4.7	Curvas de interação da coluna biapoiada com momento nas duas extremidades..	57
4.8	Curvas de interação da coluna biapoiada com momento em uma extremidade ....	57
4.9	Curvas de interação da coluna biapoiada sob carga horizontal no centro.....	58
4.10	Coluna biapoiada com curvatura inicial e sua discretização em elementos finitos	58
4.11	Curvas obtidas para a coluna com curvatura inicial.....	59
4.12	Variação da carga limite com a esbeltez da coluna.....	60
4.13	Portal simples: geometria, carregamento e discretização em elementos finitos....	61
4.14	Trajетórias de equilíbrio para o pórtico simples: uso da formulação PHF-1.....	62
4.15	Trajетórias de equilíbrio para o pórtico simples: uso da formulação PHF-2.....	63
4.16	Trajетórias de equilíbrio do portal simples: uso da formulação PHF-1 .....	65
4.17	Pórtico de dois andares: geometria e carregamento .....	66
4.18	Trajетórias de equilíbrio do pórtico de dois andares .....	66
4.19	Distribuição de forças internas na seção <i>a</i> da viga .....	67
4.20	Distribuição de forças internas na seção <i>b</i> da coluna.....	68
4.21	Plastificação da seção transversal no pórtico de dois andares .....	69
4.22	Pórtico treliçado perfeito: geometria e carregamento .....	70
4.23	Trajетórias de equilíbrio para a treliça geometricamente perfeita.....	71
4.24	Pórtico treliçado com imperfeições geométricas iniciais .....	72
4.25	Trajетórias de equilíbrio para a treliça imperfeita: uso da formulação PHF-1 .....	72
4.26	Trajетórias de equilíbrio para a treliça imperfeita: uso da formulação PHF-2 .....	73
4.27	Plastificação da seção transversal na treliça imperfeita .....	74
4.28	Diagramas de momento fletor e esforço normal para a treliça imperfeita .....	75
A.1	Portal simples estudado na Subseção 4.3.1 .....	89
A.2	Portal simples: arquivo de dados 1.....	89
A.3	Portal simples: arquivo de dados 2.....	90

# Lista de Tabelas

2.1	Fatores de forma para determinadas seções transversais .....	12
2.2	Comparação entre os métodos de análise inelástica.....	18
3.1	Algoritmo com a estratégia de solução numérica adotada .....	35
3.2	Parâmetros da Equação (3.19a) (Silva <i>et al.</i> , 2009).....	39
3.3	Parâmetros da Equação (3.22a).....	42
4.1	Notação adotada para o módulo de elasticidade tangente .....	51
4.2	Notação adotada para o parâmetro $\psi$ .....	64
4.3	Fator de carga limite ( $\lambda_{lim}$ ).....	67
4.4	Propriedades dos membros estruturais do pórtico treliçado .....	70
A.1	Eixo da seção transversal em torno do qual ocorre a flexão.....	86
A.2	Modelos para o módulo de elasticidade tangente ou constante .....	87
A.3	Opções de superfícies de resistência .....	87

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais e Objetivos

Atualmente, a evolução tecnológica dos processos construtivos e os materiais mais resistentes têm contribuído para a elaboração de projetos cada vez mais ousados na construção civil. Além disso, é forte o apelo para que esses materiais e processos atendam às premissas da sustentabilidade. Tudo isso vem abrindo espaço para a utilização do aço, que além de ser um material totalmente reciclável, possui características importantes como alta resistência e durabilidade, peso leve, boa ductilidade e maior velocidade de fabricação e montagem.

Na elaboração do projeto estrutural busca-se dimensionar os elementos de maneira que as condições de segurança e de utilização previstas para a construção sejam atendidas. Esse dimensionamento é feito com base nas respostas obtidas na análise estrutural, na qual são determinados os esforços internos, deslocamentos, tensões e deformações da estrutura sob determinadas condições de contorno e carregamento. Para prever o comportamento da estrutura de maneira precisa, é necessária uma boa interação entre as etapas de análise e projeto. Nesse campo, destaca-se a análise avançada, que pode ser definida como um método capaz de avaliar simultaneamente a resistência e a estabilidade da estrutura, sem a necessidade da verificação individual da capacidade dos membros (Chen e Toma, 1994). Dessa maneira, enquanto uma maior complexidade é introduzida na análise, uma redução considerável é obtida na avaliação e elaboração do projeto. Um dos maiores benefícios da análise avançada é que essa possibilita uma abordagem holística dos projetos estruturais promovendo, conseqüentemente, uma avaliação mais precisa do comportamento do

sistema estrutural. Esse tipo de análise proporciona ao analista uma maior liberdade para aperfeiçoar o projeto estrutural e atender as demandas arquitetônicas da construção. Segundo Surovek (2011), a análise avançada também fornece valores mais realísticos das forças internas, pois considera o acoplamento entre os efeitos de segunda ordem e inelásticos de forma mais precisa. Assim sendo, os estados limites de serviço, caracterizados por deformações permanentes e deflexões totais na carga limite, podem ser verificados de forma mais adequada.

Dentre os diversos métodos capazes de realizar a análise avançada, destaca-se aqui o método da rótula plástica refinado (King *et al.*, 1992; Liew *et al.*, 1993; Chan e Chui, 2000). Baseado na teoria da plasticidade concentrada, esse método tem se mostrado prático e preciso na avaliação do comportamento estrutural até o colapso. É nesse contexto que se insere o tema desta dissertação. O seu objetivo principal é usar o método da rótula plástica refinado possibilitando uma modelagem adequada do comportamento inelástico de sistemas estruturais de aço contendo membros submetidos à flexão em torno do eixo de menor inércia. Embora não seja usual, membro com flexão em torno desse eixo apresenta benefícios importantes como a capacidade de desenvolver toda a sua resistência plástica sem a ocorrência da flambagem lateral por torção (BS 5950, 2000; AISC, 2005). Além disso, para perfis de abas largas, o fator de forma é aproximadamente 35% maior que o referente ao eixo de maior inércia (Kanchanalai e Lu, 1979). Ressalta-se que nas análises considerar-se-ão as seções como sendo compactas e do tipo I. Segundo a NBR 8800 (2008) as seções compactas são capazes de desenvolver uma distribuição de tensões totalmente plástica, com grande rotação antes do início da flambagem local.

Para atender ao objetivo proposto, foi implementado no sistema computacional CS-ASA — *Computational System for Advanced Structural Analysis*, Silva (2009) — uma nova equação para o módulo tangente sugerida por Ziemian e McGuire (2002). Nessa equação a degradação da rigidez da seção varia em função do esforço normal e do momento fletor em torno do eixo de menor inércia. Também foram empregadas superfícies de resistência (Orbison *et al.*, 1982; ASCE, 1971; BS 5950, 2000) que avaliam de maneira adequada a interação entre esforço normal e momento fletor no eixo de menor inércia. A validação dessas estratégias foi feita através de problemas estruturais encontrados na literatura e que apresentam a solução analítica ou a solução numérica pelo método da zona plástica.

Destaca-se que o assunto abordado nesta dissertação vem sendo discutido por vários pesquisadores. Kanchanalai (1977), por exemplo, estudou uma série de pórticos com

colunas orientadas nos eixos de maior e menor inércia. Esse autor apresentou resultados teóricos e experimentais, além de sugerir recomendações de projeto. Posteriormente, Kanchanalai e Lu (1979) desenvolveram soluções analíticas na forma de curvas de interação para uma coluna isolada considerando diferentes casos de carregamento aplicados no eixo de menor inércia. Baseando-se nessas curvas, esses autores desenvolveram novas fórmulas de projeto para previsão da carga crítica dessas colunas.

Relacionado às superfícies de interação, Orbison *et al.* (1982) desenvolveram uma expressão para a curva de resistência de perfis padrão americano de peso leve a médio sob ação combinada da carga axial e flexão nos dois eixos principais. Zubyan (2011) apresentou novas superfícies de resistência para perfis *I* e *H* submetidos à carga axial e momento fletor em torno do eixo de menor inércia. Além disso, esse autor desenvolveu fórmulas empíricas para o cálculo do módulo tangente desses perfis. Aktas e Earls (2006) estudaram perfis tipo *I* com flexão no eixo mais fraco e propuseram modificações nas equações de interação fornecidas pela norma americana. Esses perfis também foram estudados por Bambach *et al.* (2007) que sugeriram novas equações de projeto para as normas americana, australiana e europeia sobre perfis formados a frio.

Bradford e Azhari (1994) estudaram o efeito da flambagem local em perfis *I* sob flexão em torno do eixo de menor inércia.

King e Chen (1994) propuseram um refinamento no método da rótula plástica para a avaliação de pórticos de aço cujas colunas têm flexão no eixo mais fraco. Esses autores avaliaram pórticos com ligações rígidas e semirrígidas. Pórticos planos de aço com dois andares e colunas sujeitas à combinação de carga axial e flexão no eixo de menor inércia foram estudados por Ziemian e Miller (1997). O objetivo foi avaliar a precisão do método da rótula plástica comparado ao método da zona plástica. Posteriormente Ziemian e McGuire (2002) propuseram uma equação para o módulo tangente, que considera os efeitos da carga axial e do momento com flexão em torno do eixo mais fraco. A utilização dessa equação forneceu bons resultados, próximos aos do método da zona plástica.

Kim e Chen (1997) propuseram três métodos práticos para análise avançada de estruturas apertadas de aço com membros submetidos à flexão no eixo de menor inércia. O primeiro método consiste na modelagem explícita das imperfeições; o segundo utiliza o conceito da carga nocional equivalente, e o terceiro introduz uma redução adicional na equação do módulo tangente.

Mais recentemente, Cheng *et al.* (2013) apresentou um estudo experimental sobre vigas-coluna de seção  $H$ , com alta relação altura/espessura, submetidas a uma combinação de carregamento axial constante e flexão cíclica no eixo de menor inércia.

Cabe destacar ainda que, esta dissertação é um complemento direto de alguns trabalhos de pesquisa do PROPEC/UFOP. O primeiro deles é o de Machado (2005), que implementou formulações inelásticas de segunda ordem válidas para pórticos planos com ligações rígidas. Os trabalhos subsequentes são os de Rocha (2006) e Santos (2007), que através de um elemento finito híbrido não linear, possibilitaram a análise inelástica de segunda ordem de pórticos com ligações semirrígidas. Por último, destaca-se o trabalho de Silva (2009) que desenvolveu o sistema computacional CS-ASA, no qual foram realizadas todas as análises e implementações propostas. As principais características desse sistema serão descritas, na próxima seção.

Por fim, cabe esclarecer que o presente trabalho vai de encontro aos objetivos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFOP (PROPEC/Deciv/EM/UFOP), estando relacionado com as seguintes linhas de pesquisa:

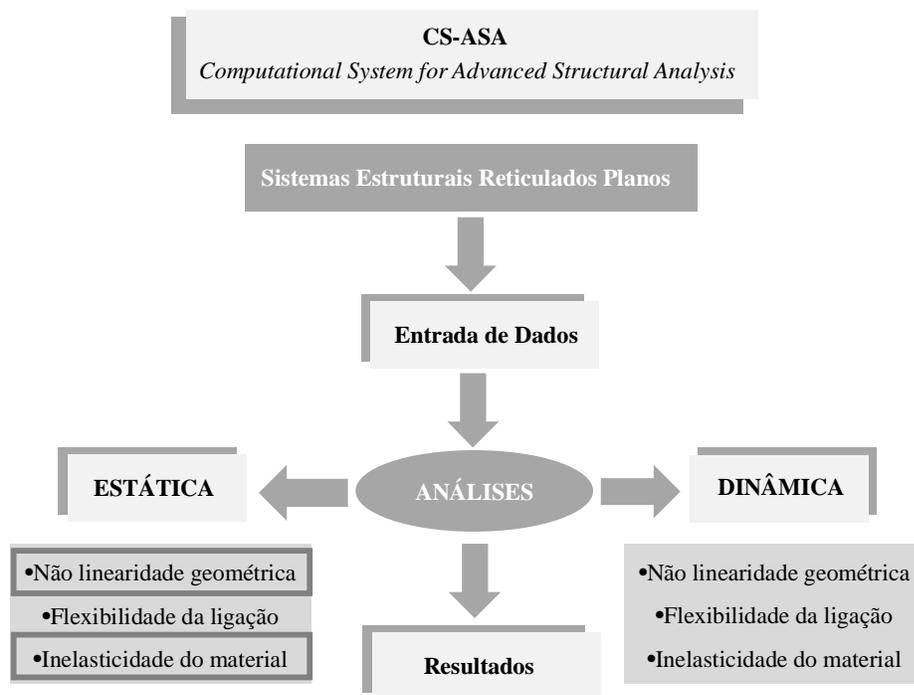
- *Mecânica Computacional*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
- *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas Metálicas*: que visa estudar aspectos relacionados com comportamento e projeto de estruturas metálicas.

## **1.2 O Sistema Computacional CS-ASA**

Nesta seção é apresentado o sistema computacional CS-ASA, no qual foram feitas as análises e intervenções para cumprir o objetivo deste trabalho. O CS-ASA é um programa para análise estrutural, desenvolvido por Silva (2009), que realiza análises numéricas avançadas estáticas e dinâmicas de estruturas metálicas baseado no Método dos Elementos Finitos. Esse sistema foi escrito em linguagem *Fortran 95* (Chapman, 2003). Utilizando essa linguagem, Silva (2009) organizou as rotinas em módulos que proporcionam um aumento na produtividade da programação, além de facilitar a expansão do sistema com o desenvolvimento de novas funcionalidades. Essa expansão, inclusive, já vem acontecendo com a conclusão de algumas dissertações. Maximiano (2012) propôs que uma condição de perpendicularidade — técnica do fluxo normal — fosse satisfeita ao longo do processo iterativo de solução não linear para superar certas inconsistências da estratégia do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995). Maciel (2012) implementou um novo módulo

denominado CS-ASA/BC (*Bilateral Contact*), que permite estudar o equilíbrio e a estabilidade de vigas e colunas em contato bilateral com fundações elásticas.

Para realizar análises avançadas estáticas e dinâmicas de estruturas metálicas, o CS-ASA possui diversas formulações de elementos finitos reticulados planos, que simulam efeitos relevantes como a não linearidade geométrica, a flexibilidade da ligação e a inelasticidade do aço. A influência de imperfeições geométricas e tensões residuais também pode ser considerada. Uma representação com os tipos de análise e efeitos considerados pelo CS-ASA é mostrada na Figura 1.1. Vale ressaltar que, neste trabalho, serão realizadas apenas análises estáticas considerando os efeitos da não linearidade geométrica e da inelasticidade do aço como é destacado na Figura 1.1.



**Figura 1.1** Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados

No CS-ASA a entrada de dados é feita através de arquivos com formato texto. Em um dos arquivos é informado o tipo de análise (linear ou não linear) e são fornecidos os dados gerais da estrutura como: características geométricas e físicas, condições de contorno e carregamento atuante. Se a análise for estática não linear, em outro arquivo, o usuário define a formulação não linear a ser utilizada e insere outras informações relevantes, tais como: estratégia de incremento de carga e de iteração, o incremento inicial

do parâmetro de carga, o método de Newton-Raphson (padrão ou modificado) e o critério de convergência. Outro arquivo é necessário no caso de análises dinâmicas. Um exemplo de arquivos de dados utilizados especificamente neste trabalho é apresentado no Apêndice A. Maiores detalhes sobre os dados de entrada podem ser consultados no manual criado por Prado (2012), que desenvolveu um pré-processador gráfico e interativo para o CS-ASA. Após a leitura dos dados e o processamento da análise são gerados outros arquivos com formato texto contendo os resultados.

### **1.3 Organização do Trabalho**

No Capítulo 2 deste trabalho estão os conceitos e fundamentos necessários para uma melhor compreensão do fenômeno da inelasticidade do aço. As principais metodologias de análise inelástica (zona plástica e rótula plástica) também são apresentadas. Especial atenção é dada ao método da rótula plástica refinado (adotado neste trabalho) cujas características são descritas com mais detalhes.

O Capítulo 3 começa com uma descrição resumida dos procedimentos usados no CS-ASA para resolução de problemas estruturais não lineares. Em seguida, as duas formulações inelásticas disponíveis no programa são apresentadas na forma de uma formulação generalizada. Ao longo da exposição dessas formulações são discutidas as intervenções propostas no presente trabalho.

A verificação e a validação das estratégias implementadas é feita no Capítulo 4 através da análise de sistemas estruturais cujas respostas são encontradas na literatura. Os exemplos analisados estão divididos em dois grupos: colunas isoladas e pórticos. Destaca-se ao longo do texto, a eficácia das intervenções realizadas, que consistem na introdução do módulo tangente proposto por Ziemian e McGuire (2002) em conjunto com superfícies de resistência adequadas para cada eixo de flexão.

Finalizando, no Capítulo 5, citam-se as principais conclusões obtidas após a análise dos resultados. Algumas sugestões para trabalhos futuros também são apresentadas.

Para complementar o trabalho, no Apêndice A, são fornecidas orientações aos usuários do CS-ASA quanto às modificações realizadas na entrada de dados das análises inelásticas. Novos itens e opções foram inseridos como consequência desta pesquisa.

# Capítulo 2

## Fundamentos da Análise Estrutural Inelástica

### 2.1 Introdução

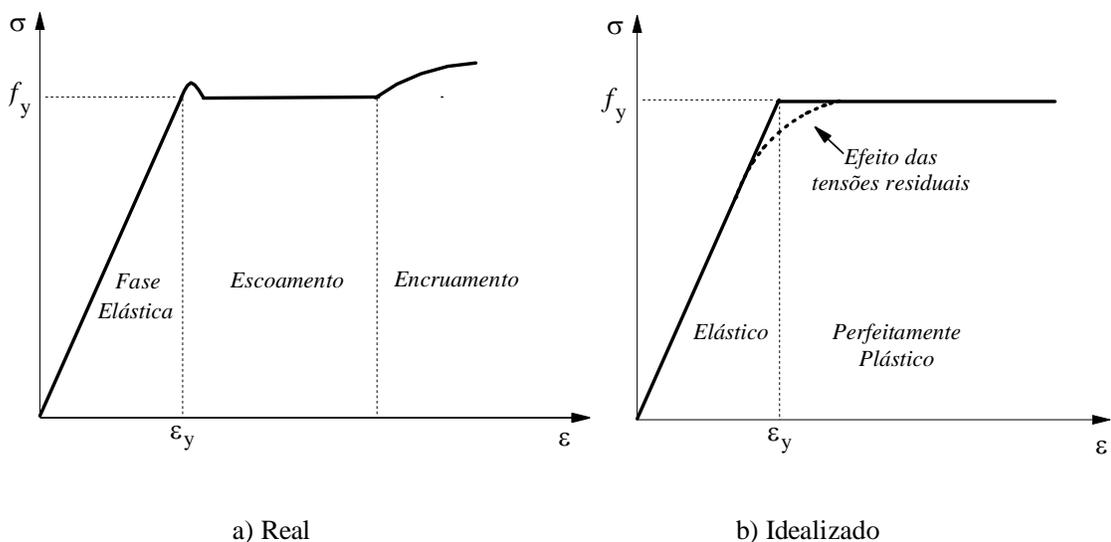
Uma das principais propriedades do aço é a ductilidade, ou seja, a capacidade de resistir a grandes deformações antes que ocorra a ruptura. Essa característica permite a redistribuição dos esforços após alguns membros estruturais terem atingido sua resistência última. Dessa maneira, torna-se necessário que essa propriedade seja considerada nas análises de estruturas de aço. A análise que leva em consideração a possibilidade do material se deformar além do regime elástico é dita inelástica. Esse tipo de análise, associado com formulações que avaliam os efeitos de segunda ordem, fornece uma melhor representação do comportamento estrutural, resultando numa previsão mais precisa dos possíveis modos de colapso. Neste capítulo, serão apresentados os principais fundamentos e estratégias utilizados nos métodos de análise inelástica.

### 2.2 Princípios Básicos

Esta seção tem a finalidade de mostrar os princípios básicos necessários para a compreensão do fenômeno da plastificação do aço. Serão discutidos aspectos importantes como o comportamento do material, a distribuição de tensões na seção transversal da estrutura, e o processo de formação das rótulas plásticas.

## 2.2.1 Comportamento do Material

Para representar o comportamento de um determinado material sob efeito de forças de tração ou compressão usa-se o diagrama tensão-deformação. No caso do aço estrutural, esse diagrama, apresenta três fases distintas conforme ilustra a Figura 2.1a. Na *fase elástica*, o material obedece a uma relação linear entre tensões e deformações. Na *fase de escoamento* esse material sofre deformações sem qualquer acréscimo de tensão. A tensão que causa o escoamento é chamada tensão de escoamento e será denotada por  $f_y$ . A deformação correspondente ao início do escoamento será denotada por  $\epsilon_y$ . Quando o escoamento termina, o material continua a resistir a um aumento de tensão. O crescimento da curva até atingir o limite de resistência caracteriza o endurecimento por deformação ou *fase de encruamento*. Por simplificação, o aço será idealizado como um material elástico-perfeitamente plástico cujo comportamento tensão-deformação é ilustrado na Figura 2.1b.

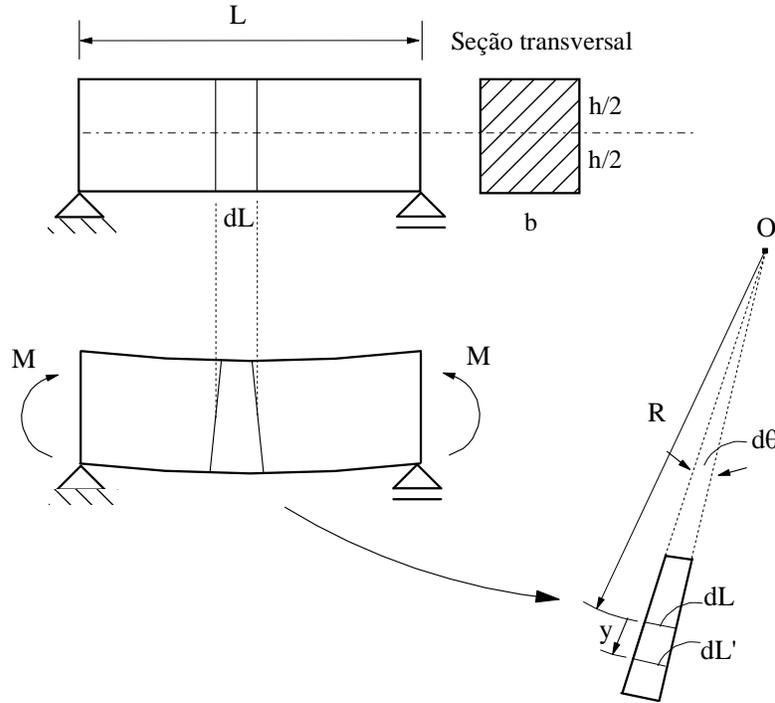


**Figura 2.1** Diagramas tensão-deformação para o aço estrutural

## 2.2.2 Distribuição de Tensões na Seção Transversal

Em uma análise inelástica é importante conhecer a relação entre o momento fletor aplicado e o ângulo de rotação relativa,  $\theta$ , das extremidades do membro. Segundo Chen e Sohal (1995), a capacidade de carga de uma estrutura devido à plastificação depende dessa relação momento-rotação, que por sua vez depende da forma da seção transversal. Para ilustrar o cálculo da relação momento-curvatura, considere um segmento de viga de

comprimento  $dL$  e, por simplicidade, com seção transversal retangular sob flexão pura. Considerando que seu comprimento seja pequeno, pode-se considerar que a forma da flexão é circular, com centro no ponto  $O$  e raio de curvatura  $R$ , conforme a Figura 2.2.



**Figura 2.2** Flexão de uma viga retangular

O comprimento de uma fibra distante  $y$  da linha neutra, após a deformação, pode ser escrito como:

$$dL' = (R + y)d\theta \quad (2.1)$$

Assumindo que as seções permanecem planas após a flexão, a deformação axial ( $\epsilon$ ) da fibra é proporcional à sua distância  $y$  da linha neutra. Utilizando então as Equações (2.1) e (2.2), pode-se escrever:

$$\epsilon = \frac{dL' - dL}{dL} = \frac{(R + y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} \therefore \epsilon = \frac{y}{R} = y\Phi \quad (2.2)$$

A curvatura  $\Phi$ , ou rotação relativa entre duas seções por unidade de comprimento é definida por (Megson, 2005):

$$\Phi = \frac{1}{R} \quad (2.3)$$

Para se obter a relação momento-curvatura são utilizadas as seguintes equações de equilíbrio:

$$P = \int_A \sigma \, dA \quad (2.4a)$$

$$M = \int_A \sigma y \, dA \quad (2.4b)$$

sendo a primeira utilizada para identificar a posição da linha neutra da seção transversal (no caso da seção retangular a linha neutra passa pelo centróide) e a segunda para obter a capacidade de resistência a momento da seção.

Considerando a relação tensão-deformação idealizada, a Figura 2.3 ilustra o processo de plastificação de uma seção transversal da viga, provocada pelo acréscimo no momento fletor que nela atua. No início as fibras da seção estão no regime elástico ( $\varepsilon < \varepsilon_y$  e  $\sigma < f_y$ ) como indicado na Figura 2.3a. Sabendo que no regime elástico,  $\sigma = E\varepsilon$ , e usando as Equações (2.2) e (2.4b) tem-se:

$$M = \int_A \sigma y \, dA = \int_A E\varepsilon y \, dA = \int_A E\Phi y^2 \, dA = EI\Phi \quad (2.5)$$

em que  $I$  é o momento de inércia da seção em relação ao eixo  $x$  que passa pelo centróide da área.

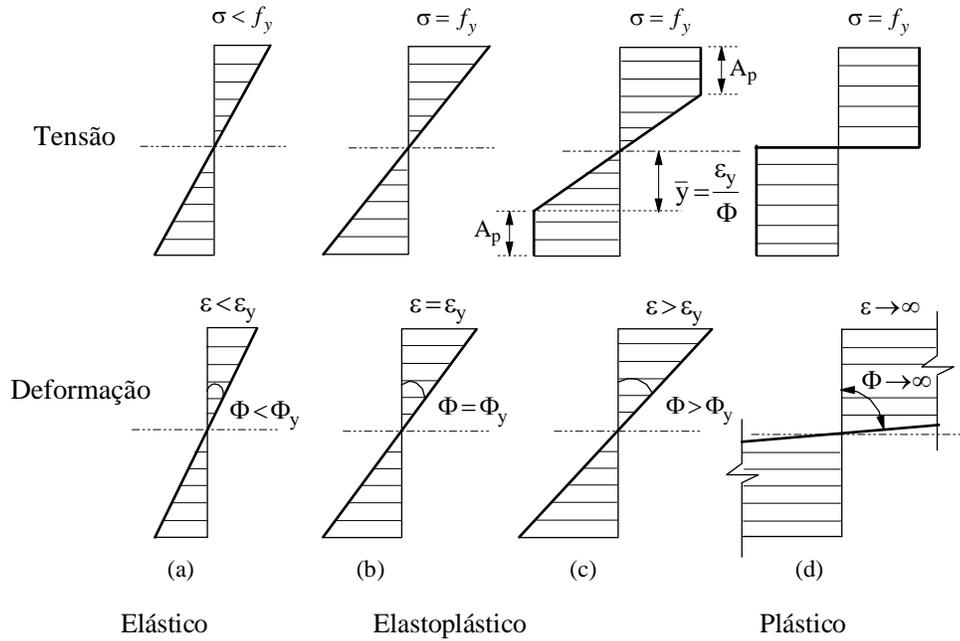
Quando atingem a tensão de escoamento ( $\sigma = f_y$ ), Figura 2.3b, as fibras mais externas assumem o comportamento plástico, enquanto as demais permanecem no regime elástico. A curvatura correspondente ao início da plastificação é dada por:

$$\Phi_y = \frac{2}{h} \varepsilon_y \quad (2.6)$$

sendo  $h/2$  o valor máximo assumido por  $y$ , ou seja, o valor que define a posição das fibras mais extremas que estão mais distantes da linha neutra.

O momento de escoamento, ou momento elástico máximo, pode ser obtido por:

$$M_y = EI\Phi_y = E\varepsilon_y \frac{2I}{h} = f_y \frac{2I}{h} = f_y W \quad (2.7)$$



**Figura 2.3** Processo de plastificação da seção transversal (Silva, 2009)

com  $W$  sendo o módulo elástico ou momento resistente da seção. Para a seção retangular tem-se  $W = bh^2/6$ .

Durante o processo de plastificação da seção transversal, existem fibras que já plastificaram e outras que ainda se encontram na região elástica. Essa etapa do processo caracteriza o regime elastoplástico. A zona de transição entre o regime elástico e o plástico é delimitada por:

$$\bar{y} = \frac{\varepsilon_y}{\Phi} \quad (2.8)$$

em que  $\bar{y}$  pode ser visualizado na Figura 2.3c. O momento interno na seção transversal durante o regime elastoplástico pode ser obtido por equilíbrio de momentos e resulta, usando (2.4b), da seguinte soma:

$$M = \int_{A_e} \sigma y \, dA + \int_{A_p} f_y y \, dA = \int_{A_e} E \Phi y^2 \, dA + \int_{A_p} E \varepsilon_y y \, dA \quad (2.9)$$

sendo  $A_e$  e  $A_p$  as áreas da região elástica e plástica, respectivamente. Considerando um elemento de área  $dA = bdy$  na Equação (2.9), e considerando a simetria da seção retangular em relação à linha neutra, obtém-se:

$$M = 2E\Phi b \int_0^{\bar{y}} y^2 dy + 2bf_y \int_{\bar{y}}^{h/2} y dy = \frac{2}{3} E\Phi b \bar{y}^3 + 2bf_y \left( \frac{h^2}{4} - \bar{y}^2 \right) \quad (2.10)$$

Usando as relações (2.6), (2.7) e (2.8), obtêm-se a seguinte expressão para o momento elasto-plástico de uma seção retangular:

$$M = \frac{3}{2} M_y \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\Phi_y}{\Phi} \right)^2 \right] \quad (2.11)$$

Observando a Figura 2.3d, nota-se que quando ocorre a plastificação total da seção tem-se  $\Phi \rightarrow \infty$ , e conseqüentemente  $\Phi_y/\Phi \rightarrow 0$ . Usando essa informação na equação anterior, chega-se à expressão para o momento plástico da seção transversal retangular, ou seja:

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{3}{2} \therefore M_p = \frac{3}{2} M_y = \frac{3}{2} f_y W = f_y Z \quad (2.12)$$

na qual  $Z$  define o módulo plástico da seção (nesse caso,  $Z=1.5W$ ).

A relação entre o momento plástico e o momento de escoamento é definida como o fator de forma da seção transversal, ou seja:

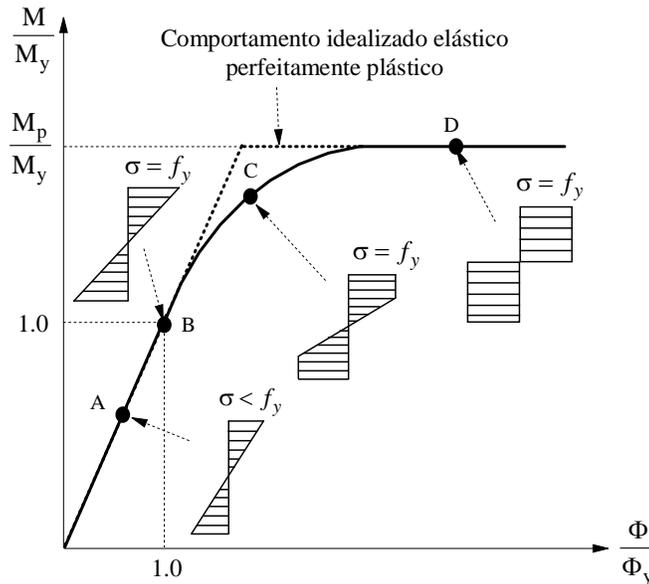
$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{f_y Z}{f_y W} = \frac{Z}{W} \quad (2.13)$$

O fator de forma especifica o acréscimo de momento que uma seção pode suportar além de seu momento de escoamento. Para uma seção retangular, comparando (2.12) e (2.13), tem-se  $f = 1.5$ . Esse fator é maior para seções com massa concentrada próxima do centróide. A Tabela 2.1 fornece os fatores de forma das seções transversais mais comuns.

**Tabela 2.1** Fatores de forma para determinadas seções transversais

Forma da seção	Fator de forma
Triangular	2.34
Diamante	2.00
Circular	1.70
Retangular	1.50
Tubo circular	1.27
Perfis I	1.10-1.2

A Figura 2.4 mostra a relação momento-curvatura e ilustra o comportamento da seção transversal nos regimes elástico (A), elastoplástico (C) e plástico (D). O ponto B representa o início do escoamento da seção quando ocorre a plastificação das fibras extremas.



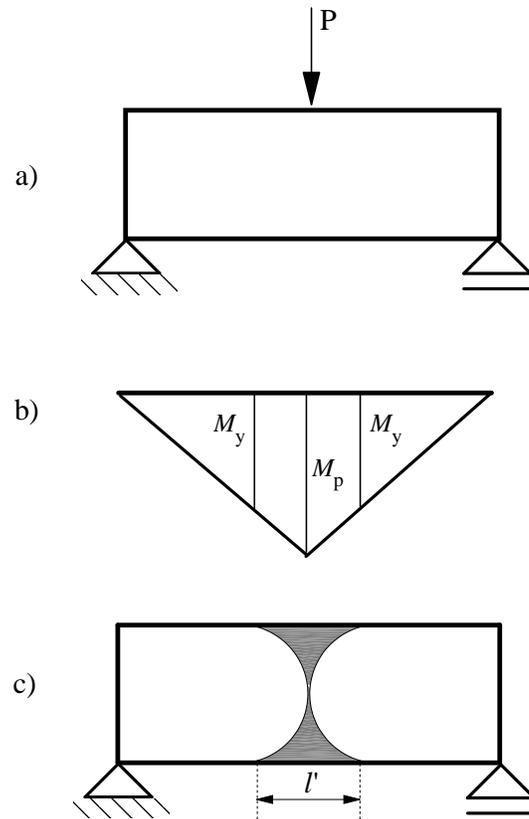
**Figura 2.4** Diagrama momento-curvatura (Silva, 2009)

Cabe ressaltar que, quando ocorre a atuação simultânea do momento fletor e do esforço normal, a capacidade plástica da seção é reduzida. Nesse caso o estado limite último da seção transversal é definido pelas superfícies de resistência (ou curvas de interação) que serão detalhadas na Seção 2.4.

### 2.2.3 Formação das Rótulas Plásticas

Analisando o diagrama momento-curvatura na Figura 2.4, observa-se que ao atingir o momento plástico ( $M_p$ ), a seção continua a se deformar sem acréscimo no momento resistente. Essa condição de rotação crescente e momento resistente constante caracteriza a formação de uma rótula plástica. A Figura 2.5a ilustra uma viga biapoiada submetida a uma carga concentrada. O momento fletor interno máximo ( $M_{máx} = PL/4$ ) ocorre no centro da viga, seção transversal onde a carga é aplicada. Quando o carregamento tem uma intensidade na qual o momento interno máximo seja igual a  $M_p$ , essa seção se plastifica completamente. Como pode ser observado nas Figuras 2.5b e 2.5c, nessa situação, regiões

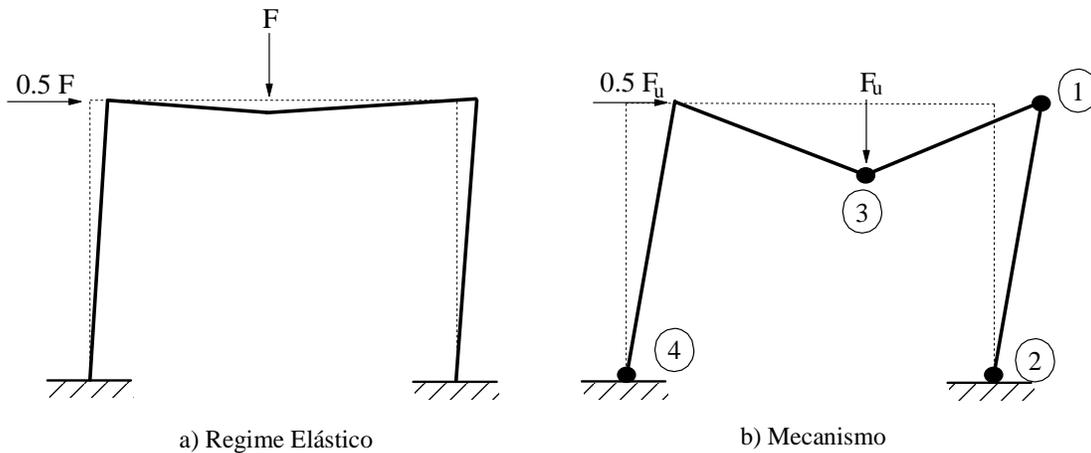
vizinhas com momento superior ao de escoamento  $M_y$  têm algumas fibras plastificadas. A região hachurada na Figura 2.5c define a zona de plastificação, e o comprimento  $l'$  é referido como comprimento da rótula plástica. Esse comprimento depende do carregamento e da geometria da seção transversal. Nas análises numéricas realizadas neste trabalho, considerar-se-á que a rótula plástica é concentrada e, nesse caso, tem comprimento nulo.



**Figura 2.5** Formação da rótula plástica

O comportamento elastoplástico dos pórticos de aço é semelhante ao da viga discutida anteriormente. Com a formação de um determinado número de rótulas plásticas, a redistribuição de esforços não é mais possível e a estrutura torna-se hipostática transformando em um mecanismo. Sendo assim, a estrutura não suporta mais o carregamento aplicado e entra em colapso. A Figura 2.6a representa um pórtico simples no regime elástico. Com o acréscimo de carga, inicia-se a sequência de formação das rótulas plásticas, indicada na Figura 2.6b pela numeração de 1 a 4. Na carga de colapso,  $F_u$ , ocorre

o desenvolvimento da quarta rótula plástica e acontece o mecanismo, no qual a estrutura passa a se deformar indefinidamente sem nenhum incremento de carga.



**Figura 2.6** Mecanismo em um pórtico simples

## 2.3 Métodos de Análise Inelástica

Muitos fenômenos físicos estudados por cientistas e engenheiros são descritos por equações diferenciais, parciais ou ordinárias. A solução analítica dessas equações geralmente é obtida para seções e condições de contorno particulares. Porém, na maioria dos casos que envolvem seções arbitrárias, essa solução, quando possível de ser obtida, é muito trabalhosa. Como alternativa, métodos numéricos são utilizados para fornecerem uma solução aproximada para essas equações. Dentre esses, um dos mais difundidos é o método dos elementos finitos, que é aplicado a diversas áreas da engenharia, como: análise de tensão, transferência de calor, escoamento dos fluidos, corpos elásticos e plásticos, dentre outras. Basicamente, o método consiste em dividir o domínio ou o contorno de um corpo contínuo em vários subdomínios, denominados *elementos*, que por sua vez são constituídos pelos pontos nodais ou simplesmente *nós*. A solução aproximada da equação diferencial é calculada considerando esses pontos nodais. O conjunto de elementos e nós forma a malha de elementos finitos que dá origem ao corpo discreto. Assumindo formulações e condições de convergência adequadas, quanto mais refinada a malha, mais próxima a solução ficará da solução exata. Entretanto, deve-se ressaltar que, o refinamento também aumenta o custo computacional para a obtenção da solução. Sendo assim, deve-se sempre escolher uma malha adequada para a precisão desejada.

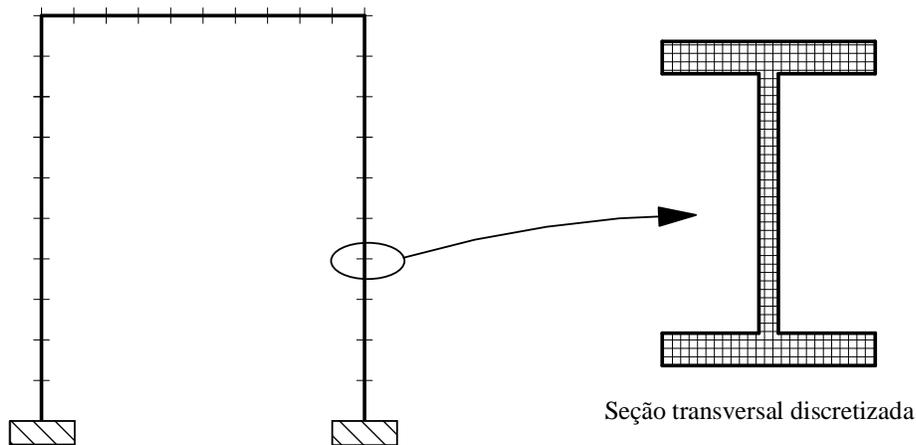
Nesse contexto do método dos elementos finitos se inserem os dois principais métodos de análise inelástica: Zona Plástica e Rótula Plástica. A diferença entre essas duas metodologias está no grau em que elas acompanham a progressão do escoamento do material do membro devido à ação combinada de esforço normal, momento fletor e tensões residuais. Essa diferença será explicada a seguir.

### 2.3.1 Método da Zona Plástica

No método da zona plástica, a seção transversal de cada elemento finito é discretizada, como mostra a Figura 2.7. Nesse método, os efeitos de segunda ordem e tensões residuais podem ser considerados diretamente na análise. Outra característica importante é que o estado de tensão pode ser obtido em cada fibra. Isso possibilita o acompanhamento gradual do escoamento na seção transversal.

Segundo Chen e Kim (1997), em uma análise feita por zona plástica que considera explicitamente os efeitos de segunda ordem, a distribuição da plasticidade e as tensões residuais, não é necessário verificar a capacidade de cada membro estrutural isoladamente. Por esse motivo, a solução obtida pelo método supracitado é tida como “solução exata”.

Embora a eficácia do método da zona plástica seja muito grande, o mesmo não pode ser usado rotineiramente nos escritórios de engenharia, pois requer um intenso esforço computacional. Por isso sua aplicação é mais restrita à simulação de estruturas simples, que servirão para comparação com resultados experimentais, e/ou como calibração para o desenvolvimento de outros métodos mais práticos de análise inelástica.



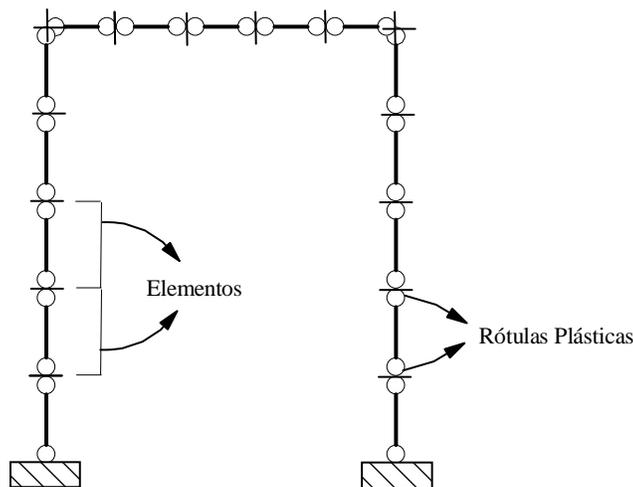
**Figura 2.7** Discretização no Método da Zona Plástica

Como exemplos de trabalhos voltados para essa linha de pesquisa, podem ser citados: Vogel (1985), Ziemian (1990), Clarke (1994), Li e Lui (1995), Kim e Lee (2002), Jiang *et al.* (2002), Alvarenga e Silveira (2009a,b), Alvarenga (2010), Silva (2010) e Sreenath *et al.* (2011).

### 2.3.2 Método da Rótula Plástica

No método da rótula plástica, o fenômeno da plastificação é concentrado nos nós de cada elemento, como indicado na Figura 2.8. Nesses pontos nodais pode ocorrer a formação das chamadas rótulas plásticas, que caracterizam uma seção totalmente plastificada. Segundo Ziemian (1993), esse método é bem mais eficiente computacionalmente que o método da zona plástica tendo fornecido resultados satisfatórios dentro do nível exigido pela análise avançada de estruturas.

Pode-se classificar o método da rótula plástica em duas categorias: método da rótula elastoplástica e método da rótula plástica refinado. O primeiro deles é a forma mais simples de se considerar os efeitos inelásticos do aço na análise. Supõe-se que o elemento permanece no regime elástico até que a resistência plástica da seção seja alcançada, formando uma rótula plástica. Em análises de estruturas nas quais os efeitos do esforço normal (e conseqüentemente das tensões residuais) são pequenos e o comportamento predominante está associado com os efeitos de flexão, o método da rótula elastoplástica fornece bons resultados. Porém, nas análises em geral, essa metodologia superestima a resistência e a rigidez dos membros estruturais (Chen e Toma, 1994).



**Figura 2.8** Discretização no Método da Rótula Plástica

Buscando aumentar a eficácia do método da rótula elastoplástica e, ao mesmo tempo, manter sua simplicidade, pesquisadores como King *et al.* (1992), Liew *et al.* (1993), Chan e Chui (2000), e Ziemian e McGuire (2002) promoveram refinamentos no método citado, dando origem ao chamado método da rótula plástica refinado. Esses refinamentos, buscam simular o avanço da plastificação nas seções do elemento antes da formação das rótulas plásticas. Isso permite que os efeitos das tensões residuais sejam considerados. Liew *et al.* (1993) afirmam que uma análise inelástica de segunda ordem, que utiliza o método da rótula plástica refinado, é capaz de capturar a interação entre a resistência e estabilidade do sistema estrutural e de seus membros. Portanto, esse tipo de análise pode ser considerado uma análise avançada, na qual não é necessária a verificação da resistência dos membros estruturais individualmente. Uma comparação entre as principais formulações inelásticas, discutidas nessa seção, é apresentada na Tabela 2.2.

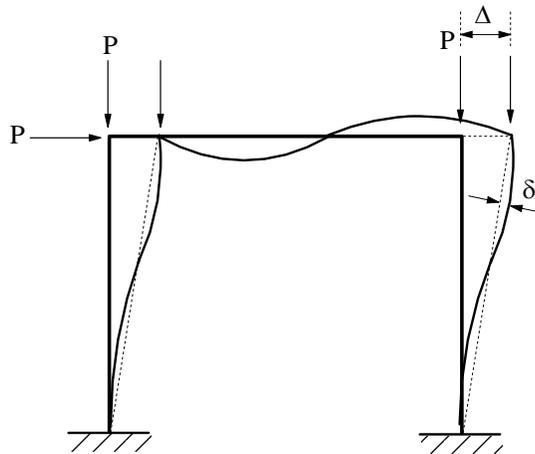
**Tabela 2.2** Comparação entre os métodos de análise inelástica

	<b>Método da Zona Plástica</b>	<b>Método da Rótula Plástica Refinado</b>
<i>Modelagem</i>	discretização da seção transversal em fibras	rótulas plásticas nos pontos nodais do elemento
<i>Distribuição da plasticidade</i>	desenvolvimento gradual da plasticidade na seção transversal e ao longo do comprimento do elemento	não há distribuição da plasticidade. Adota-se o modelo elástico-perfeitamente plástico
<i>Comportamento não linear do material</i>	modelo elastoplástico com ou sem encruamento definido em cada fibra	controlado geralmente pelas superfícies de resistência, pelo módulo tangente, e pelo parâmetro de degradação da rigidez (Seção 2.4)
<i>Tensões residuais</i>	calculadas em cada fibra	são consideradas explicitamente ou através do módulo tangente (Seção 2.4.2)
<i>Imperfeições Geométricas</i>	introduzidas diretamente no modelo ou representadas por cargas nocionais	introduzidas diretamente no modelo ou representadas por cargas nocionais ou ainda através do módulo tangente (Seção 2.4.2)

### 2.3.3 Efeitos Geometricamente Não Lineares

Associado a esses métodos de análise inelástica é importante que sejam considerados os efeitos da não linearidade geométrica, ou seja, os efeitos que surgem na estrutura devido a mudanças na sua geometria. Para valores relativamente grandes de deslocamentos, a deflexão lateral de um membro pode levar ao aparecimento de momentos fletores

adicionais devido à presença de um esforço normal. Esse comportamento é comumente chamado de efeitos de segunda ordem e está relacionado às equações de equilíbrio que consideram a configuração deformada (efeitos  $P-\Delta$  a nível global e  $P-\delta$  a nível local, ilustrados na Figura 2.9) e as relações deformação-deslocamento. Trata-se de uma importante fonte de não linearidade no problema estrutural e exige formulações numéricas adequadas para sua consideração (Silva, 2009). No presente trabalho, para simular os efeitos da não linearidade geométrica utiliza-se a formulação linearizada proposta por Yang e Kuo (1994).



**Figura 2.9** Efeitos considerados em uma análise de segunda ordem ( $P-\Delta$  e  $P-\delta$ )

## 2.4 Método da Rótula Plástica Refinado

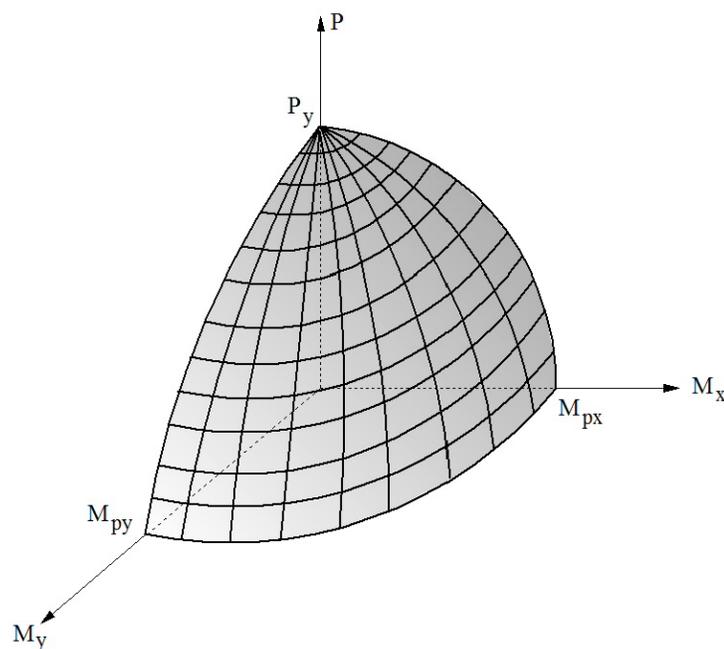
Como citado anteriormente, o objetivo do refinamento no método da rótula plástica é capturar o avanço da plastificação na seção transversal desde o início do escoamento até sua plastificação total com a formação da rótula plástica. Esta dissertação segue os princípios do método da rótula plástica refinado e, por isso, algumas características desse método serão detalhadas nas subseções seguintes.

### 2.4.1 Superfícies de Resistência

Em uma análise inelástica procura-se estimar com precisão a capacidade última dos membros estruturais. Para isso são estabelecidos critérios que definem o limite de resistência plástica do membro estrutural. Dentre os diversos critérios existentes (von Mises, Tresca etc.), definidos a partir do estado de tensão, destacam-se nas análises

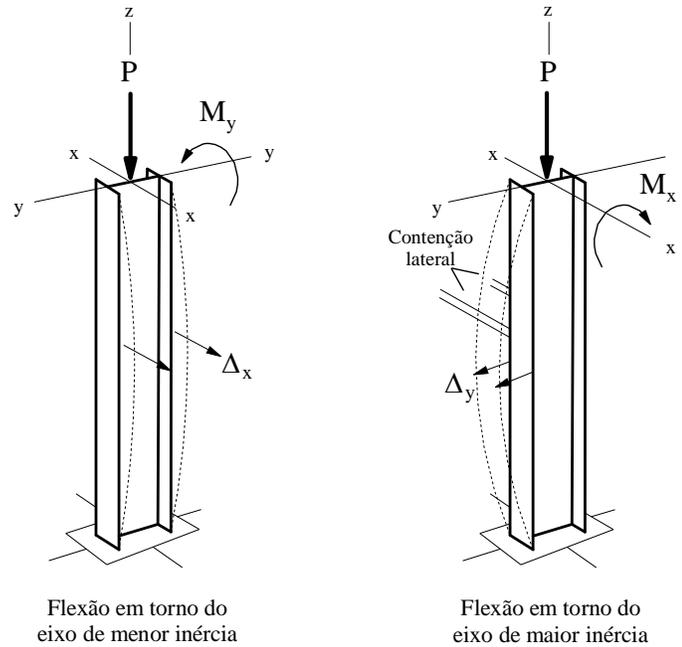
plásticas, as superfícies de resistência, nas quais o limite de plastificação é determinado através da combinação das forças internas. Neste trabalho, as superfícies de resistência serão adotadas e expressarão a interação entre momento fletor e esforço normal na seção transversal. No contexto do método da rótula plástica, essas superfícies são responsáveis por definir o instante em que ocorre a formação da rótula plástica (plastificação total da seção). A escolha adequada da superfície de resistência, para a seção analisada, é um dos requisitos fundamentais para uma boa representação do comportamento plástico da estrutura.

A equação matemática que define a superfície de resistência tem seis dimensões que representam os seis graus de liberdade possíveis nas extremidades de um membro estrutural típico. Esses graus de liberdade representam os efeitos do esforço normal, do esforço cortante (em duas direções), do momento fletor (em duas direções) e do momento torsor. No método da rótula plástica, geralmente desconsideram-se os efeitos da deformação cisalhante causados pelo momento torsor e pelo esforço cortante. Assim sendo, a superfície torna-se tridimensional, e fica em função apenas do esforço normal ( $P$ ) e do momento fletor nas direções  $x$  e  $y$  ( $M_x$  e  $M_y$ ). Essa superfície é ilustrada na Figura 2.10, na qual  $P_y$  é o esforço normal de escoamento e  $M_{px}$  e  $M_{py}$ , representam o momento de plastificação em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Todas essas grandezas serão utilizadas nas equações de resistência descritas a seguir.



**Figura 2.10** Superfície de resistência tridimensional

O comportamento do membro estrutural de acordo com o eixo em que ocorre a solicitação do momento fletor é ilustrado na Figura 2.11, na qual  $\Delta_y$  e  $\Delta_x$  indicam as deformações devido à carga de flexão.



**Figura 2.11** Resposta do membro estrutural à ação da força normal e momento fletor

A curva exata da superfície de resistência depende da forma da seção transversal do membro estrutural. Os cálculos mais rigorosos para determinar uma expressão fechada para a superfície de resistência de uma dada seção tendem a ser muito complexos, exceto para seções axialmente simétricas. Para manter a praticidade da análise estrutural adota-se geralmente uma curva única que abrange diversos perfis (Duan e Chen, 1990). Nesse intuito, Chen e Atsuta (1976) desenvolveram expressões aproximadas para seções duplamente simétricas formadas por um conjunto de retângulos. No entanto, essas expressões apresentavam descontinuidades que geravam instabilidade numérica quando implementadas computacionalmente. Baseado no trabalho de Chen e Atsuta (1976), Orbison *et al.* (1982) selecionaram o perfil W12x31 como o mais representativo dos perfis padrão americano de peso leve a médio e, através de testes e ajustes de curva, desenvolveram a seguinte expressão aproximada para a superfície de resistência:

$$1.15p^2 + m_x^2 + m_y^4 + 3.67p^2m_x^2 + 3p^6m_y^2 + 4.65m_x^4m_y^2 = 1 \quad (2.14)$$

sendo  $p = P/P_y$  ( $P_y = f_y A$ ),  $m_x = M_x/M_{px}$  ( $M_{px} = f_y Z_x$ ) e  $m_y = M_y/M_{py}$  ( $M_{py} = f_y Z_y$ ). Essa expressão, por ser contínua e convexa, é mais eficiente para implementações computacionais. McGuire *et al.* (2000) propuseram uma versão modificada da Equação (2.14), expressa por:

$$p^2 + m_x^2 + m_y^4 + 3.5 p^2 m_x^2 + 3 p^6 m_y^2 + 4.5 m_x^4 m_y^2 = 1 \quad (2.15)$$

As normas AISC (2005) e NRB 8800 (2008) propõem expressões de interação semelhantes para barras submetidas a momentos fletores e esforços normais. No limite de resistência, essas expressões podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_x}{M_{px}} + \frac{M_y}{M_{py}} \right) = 1, \text{ para } \frac{P}{P_y} \geq 0.2 \quad (2.16a)$$

$$\frac{P}{2P_y} + \left( \frac{M_x}{M_{px}} + \frac{M_y}{M_{py}} \right) = 1, \text{ para } \frac{P}{P_y} < 0.2 \quad (2.16b)$$

Como pode ser visto na equação, essa superfície apresenta uma descontinuidade em  $P/P_y = 0.2$ .

Especificamente para o caso de flexão no eixo de menor inércia, a ASCE (1971) recomenda as seguintes expressões para a superfície de resistência:

$$0.84 \frac{M_y}{M_{py}} + \left( \frac{P}{P_y} \right)^2 = 1, \text{ para } \frac{P}{P_y} \geq 0.4 \quad (2.17a)$$

$$\frac{M_y}{M_{py}} = 1, \text{ para } \frac{P}{P_y} < 0.4 \quad (2.17b)$$

Já a norma britânica BS-5950 (2000) fornece expressões para o momento plástico reduzido ( $M_{pr}$ ) de perfis  $I$  ou  $H$  compactos e com mesas iguais, na presença de esforço normal. Em relação ao eixo de maior inércia  $x$ , essas equações são dadas por:

$$M_{prx} = f_y \left[ Z_x - \frac{A^2}{4t_w} \left( \frac{P}{P_y} \right)^2 \right], \text{ para } \frac{P}{P_y} \leq t_w (D - 2t_f) / A \quad (2.18a)$$

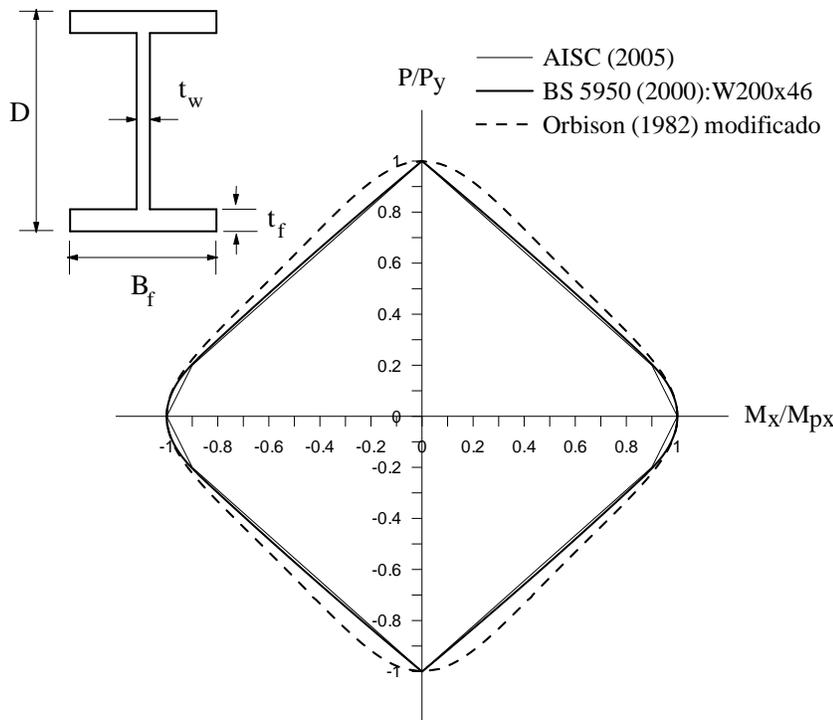
$$M_{prx} = f_y \left[ \left( \frac{A^2}{4B_f} \right) \left( \frac{2B_f D}{A} - 1 \right) + \frac{P}{P_y} \right] \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right), \text{ para } \frac{P}{P_y} > t_w(D - 2t_f) / A \quad (2.18b)$$

Já em relação ao eixo de menor inércia  $y$ , são recomendadas as seguintes expressões:

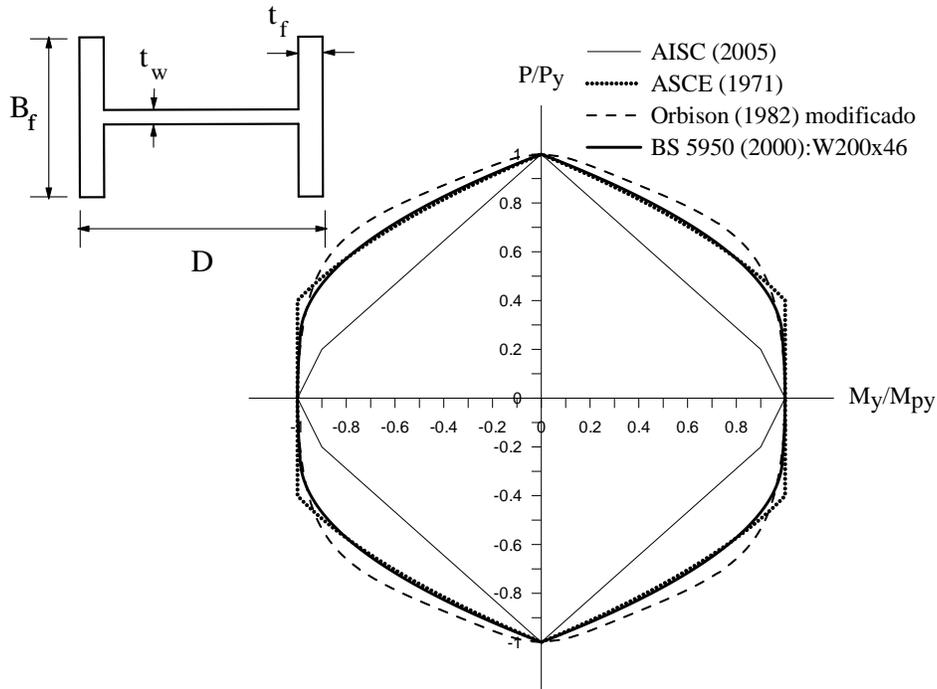
$$M_{pry} = f_y \left[ Z_y - \frac{A^2}{4D} \left( \frac{P}{P_y} \right)^2 \right], \text{ para } \frac{P}{P_y} \leq t_w D / A \quad (2.19a)$$

$$M_{pry} = f_y \left[ \left( \frac{A^2}{8t_f} \right) \left( \frac{4B_f t_f}{A} - 1 \right) + \frac{P}{P_y} \right] \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right), \text{ para } \frac{P}{P_y} > t_w D / A \quad (2.19b)$$

Nas Equações (2.18) e (2.19) e, como ilustrado nas Figuras 2.12 e 2.13,  $A$  é a área da seção do perfil,  $t_w$  é a espessura da alma,  $t_f$  é a espessura da mesa,  $B_f$  é a largura da mesa e  $D$  é a altura da seção do perfil. Os termos  $Z_x$  e  $Z_y$  são o módulo plástico da seção em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Nas Figuras 2.12 e 2.13 também são ilustradas as superfícies de resistência, para os eixos de maior e menor inércia, respectivamente, obtidas conforme as equações apresentadas anteriormente.



**Figura 2.12** Superfícies de resistência para o eixo de maior inércia



**Figura 2.13** Superfícies de resistência para o eixo de menor inércia

## 2.4.2 Módulo de Elasticidade Tangente

O módulo de elasticidade tangente  $E_t$  captura, de maneira aproximada, a redução da rigidez da seção do elemento devido ao esforço normal. As equações de resistência para colunas do AISC (2005) definem o módulo tangente  $E_t$  como:

$$\frac{E_t}{E} = 1.0, \text{ para } P \leq 0.39P_y \quad (2.20a)$$

$$\frac{E_t}{E} = -2.7243 \frac{P}{P_y} \ln\left(\frac{P}{P_y}\right), \text{ para } P > 0.39P_y \quad (2.20b)$$

onde  $P$  é o esforço normal atuante e  $P_y$  é o esforço normal de escoamento.

As Equações (2.20a-b) incluem os efeitos das imperfeições iniciais e também das tensões residuais nas colunas, no entanto, só é válida para esforços normais de compressão ( $P < 0$ ). Para esforços normais de tração ( $P > 0$ ), podem ser utilizadas as equações de resistência para colunas propostas pelo CRC (Galambos, 1998), que são dadas por:

$$\frac{E_t}{E} = 1.0, \text{ para } P \leq 0.5P_y \quad (2.21a)$$

$$\frac{E_t}{E} = \frac{4P}{P_y} \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right), \text{ para } P > 0.5P_y \quad (2.21b)$$

As equações citadas anteriormente consideram de forma implícita apenas os efeitos das tensões residuais.

Nas Equações (2.20) e (2.21), o módulo tangente é função apenas do esforço normal atuante no elemento. Ziemian e McGuire (2002) propuseram uma modificação nas equações propostas pelo CRC (Galambos, 1998) na qual o módulo tangente varia em função do esforço normal e, também, do momento de flexão em relação ao eixo de menor inércia. Nesse caso:

$$E_t = \tau E, \text{ em que } \tau = \min \left( \begin{array}{c} 1.0 \\ (1+2p) \left[ 1 - (p + \beta m_y) \right] \end{array} \right) \quad (2.22)$$

sendo:

$$p = \max \left( P/P_y, (0.5 - \beta m_y) / 2 \right) \quad (2.23)$$

$$m_y = \frac{M_y}{M_{Py}} \quad (2.24)$$

Nas Equações (2.22) e (2.23) o termo  $\beta$  é um valor empírico, que em análises inelásticas de segunda ordem é nulo para o eixo  $x$  (maior inércia) e é igual a 0.65 para o eixo  $y$  (menor inércia) segundo Ziemian e McGuire (2002). Na Equação (2.24),  $M_y$  e  $M_{Py}$  são o momento de flexão e o momento plástico de flexão, ambos em relação ao eixo  $y$ .

Usando essas equações em análises de membros estruturais com flexão em torno do eixo de menor inércia, Ziemian e McGuire (2002) obtiveram resultados compatíveis com o método da zona plástica.

Considerando apenas a atuação dos esforços normais, a Figura 2.14 faz uma comparação entre essas equações apresentadas para descrever a variação do módulo de elasticidade tangente.

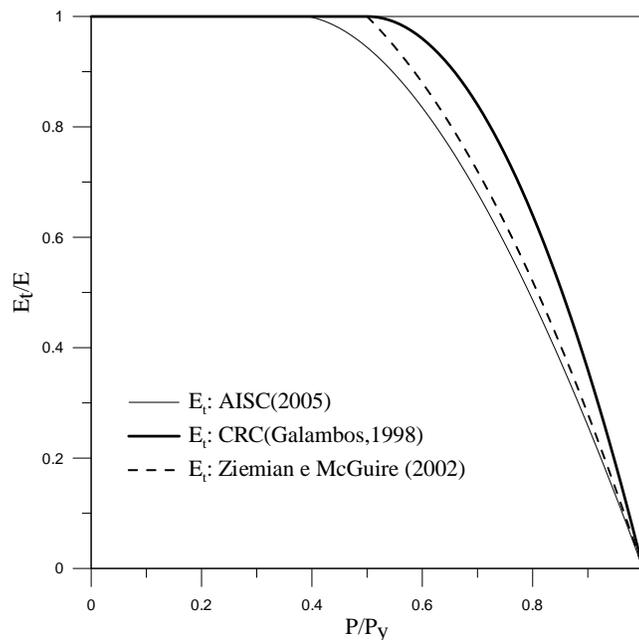
### 2.4.3 Tensões Residuais

Durante o processo de fabricação dos perfis de aço, as diferentes velocidades de resfriamento, após a laminação, levam ao aparecimento das chamadas tensões residuais.

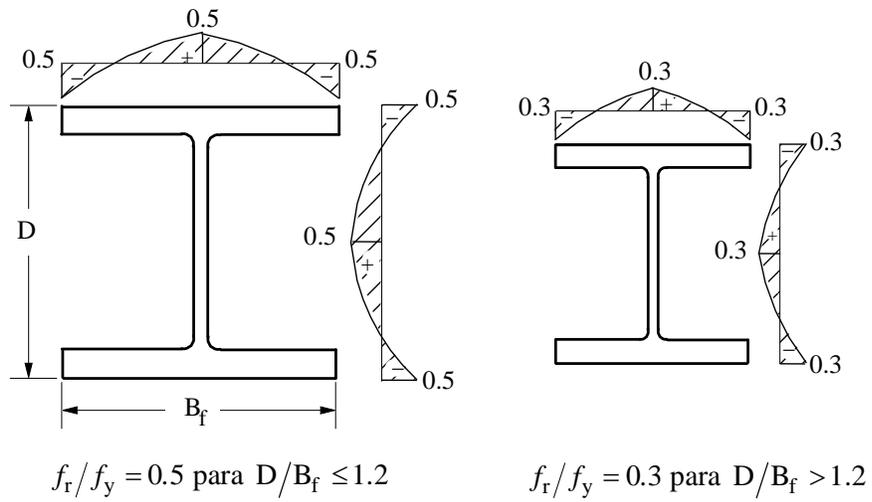
Isso ocorre porque as extremidades do perfil resfriaram-se mais rapidamente que a região central, contraindo-se. Quando ocorre o resfriamento da parte central, as extremidades já solidificadas impedem essa região de contrair-se livremente. Assim, as tensões residuais são de tração na parte central e de compressão nas extremidades. Essas tensões são sempre normais à seção transversal dos perfis. As operações executadas posteriormente nas fábricas de estruturas metálicas, como soldagem e corte com maçarico, que envolvem aquecimento e resfriamento do perfil, também provocam o surgimento de tensões residuais. Os efeitos causados por essas tensões são considerados de maneira implícita no cálculo do módulo de elasticidade tangente discutido na seção anterior. Porém as tensões residuais também podem ser expressas de forma explícita, seguindo recomendações normativas. O *European Convention for Construction Steelwork* (ECCS, 1983), por exemplo, considera que a tensão residual máxima depende da razão entre a altura e a largura da seção, como ilustrado na Figura 2.15.

As normas AISC (2005) e NRB 8800 (2008) recomendam que a tensão residual de compressão nas mesas seja tomada igual a 30% da tensão de escoamento do aço utilizado.

Vale ressaltar que em perfis submetidos à flexão em torno do eixo de menor inércia, o efeito das tensões residuais é mais pronunciado visto que, afeta mais as fibras extremas.



**Figura 2.14** Comparação entre as equações propostas para o módulo tangente



**Figura 2.15** Distribuição das tensões residuais nos perfis recomendada pelo ECCS (1983)

# Capítulo 3

## Metodologia Numérica para Análise Inelástica

### 3.1 Introdução

Como mencionado no Capítulo 1, as análises estruturais que serão apresentadas no próximo capítulo foram feitas no CS-ASA — sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica desenvolvido por Silva (2009). Para atender aos objetivos propostos, o código foi expandido com novas implementações e possibilidades de análise estrutural. Nesse sistema computacional, duas formulações inelásticas, que seguem as ideias propostas pelos pesquisadores Liew *et al.* (1993) e Chan e Chui (2000), estão disponíveis. Essas formulações baseiam-se nos princípios do método da rótula plástica refinado, discutido no capítulo anterior. Neste capítulo essas duas abordagens serão apresentadas na forma de uma formulação generalizada já apresentada em Silva *et al.* (2009). Nessa formulação generalizada, os efeitos da plastificação do material são capturados através de um parâmetro único que acompanha a degradação da rigidez da seção, e os efeitos de segunda ordem são simulados por equações desacopladas de rigidez. A definição desse parâmetro é, basicamente, o que difere as duas formulações inelásticas presentes no CS-ASA. Na Seção 3.2, antes de apresentar a formulação generalizada, detalha-se o procedimento usado para solução das equações que descrevem os problemas estruturais não lineares. A formulação generalizada é discutida logo em seguida, na Seção 3.3, onde também são destacadas as modificações propostas neste trabalho.

## 3.2 Solução do Problema Estrutural Inelástico

Em geral, as estruturas se comportam de forma não linear antes de atingirem seus limites de resistência. Por isso, a busca por uma melhor representação do comportamento estrutural, requer que as fontes de não linearidade sejam consideradas.

No contexto do método dos elementos finitos, a condição de equilíbrio dos problemas estruturais inelásticos estudados nesta dissertação pode ser expressa como:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \boldsymbol{\psi}) \cong \mathbf{F}_e, \text{ ou, } \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \boldsymbol{\psi}) \cong \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{F}_i$  refere-se ao vetor de forças internas, que é uma função não linear dos deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$ , e também depende dos esforços normais nos membros,  $\mathbf{P}$ , e do parâmetro que controla a plastificação da seção,  $\boldsymbol{\psi}$ ;  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas;  $\lambda$  é o parâmetro de carga e  $\mathbf{F}_r$  é um vetor de forças externas de referência cuja direção é importante.

Para que a resposta da estrutura (tensões, deformações e deslocamentos) quando submetida a um determinado carregamento seja obtida, é necessária a solução de equações algébricas não lineares. Sabe-se que métodos eficientes para resolver essas equações devem ser capazes de percorrer o caminho de equilíbrio do sistema estrutural em análise e, se necessário, identificando e passando por todos os pontos críticos (pontos limites de carga e de deslocamento e/ou pontos de bifurcação) que possam existir.

A solução da Equação (3.1) é obtida através de um processo incremental e iterativo. Esse processo é organizado em duas etapas fundamentais. Primeiramente, a partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, seleciona-se o incremento inicial de carga  $\Delta\lambda^0$ , onde se procura satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Com o valor de  $\Delta\lambda^0$ , determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ . Os valores de  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$  caracterizam a chamada solução predita que, a princípio, não satisfaz a Equação (3.1), pois  $\mathbf{F}_i$  é uma função não linear dos deslocamentos. Por isso, numa segunda etapa, é feita a correção dessa solução predita através de um processo iterativo. As duas etapas citadas serão detalhadas a seguir e, por isso, torna-se necessário, esclarecer a notação a ser utilizada:

- considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura no passo de carga  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio no passo de carga  $t_1$ ;

- $k$  se refere ao contador do número de iterações em certo passo de carga. Para  $k = 0$ , tem-se a solução incremental predita e, para outros valores, tem-se o ciclo iterativo;
- $\lambda$  e  $\mathbf{U}$  definem o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais, respectivamente;
- $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{U}$  caracterizam, respectivamente, o incremento do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}$  denotam, respectivamente, a correção do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

### 3.2.1 Primeira Etapa: Solução Incremental Predita

A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, monta-se a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$ . Em seguida, calcula-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{U}_r$ , através da expressão:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r \quad (3.2)$$

O incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , pode ser selecionado automaticamente através de estratégias que impõem uma equação de restrição adicional ao problema. Uma metodologia eficiente de incremento automático de carga deve satisfazer basicamente os seguintes critérios: gerar grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear, e de forma contrária, fornecer pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear; e também ser capaz de definir o sinal correto para o incremento (Silva, 2009; Silveira, 1995). Algumas estratégias de seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga estão disponíveis no CS-ASA (Silva, 2009) e, dentre essas, a técnica do incremento do deslocamento generalizado proposta por Yang e Kuo (1994) será adotada. Nesse caso, o parâmetro  $\Delta\lambda^0$  é calculado através da expressão:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) {}^1\delta\mathbf{U}_r}{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r}} = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{|GSP|} \quad (3.3)$$

onde o subscrito e sobrescrito 1 indicam os valores de  $\Delta\lambda^0$  e  $\delta\mathbf{U}_r$ , obtidos no primeiro passo de carga, e GSP (*Generalized Stiffness Parameter*) representa o parâmetro de rigidez generalizado do sistema. Esse parâmetro, que depende apenas dos vetores  ${}^1\delta\mathbf{U}_r$  (passo de

carga anterior) e  $\delta\mathbf{U}_r$  (passo de carga corrente), define o sinal (positivo ou negativo) a ser adotado na expressão. O sinal torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanece positivo.

Em análises estruturais inelásticas, tem-se como principal objetivo a obtenção da carga limite do sistema estrutural. A estratégia de incremento de carga constante atende a esse objetivo, e também é adotada neste trabalho. Nesse caso, o valor de  $\Delta\lambda^0$  é constante ao longo de toda a análise. É importante mencionar que a escolha adequada para esse incremento garante a precisão da resposta.

Uma vez definido  $\Delta\lambda^0$ , obtém-se os deslocamentos nodais incrementais tangenciais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ , escalonando-se  $\delta\mathbf{U}_r$ , ou seja,

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r \quad (3.4)$$

Essa primeira etapa é concluída com a atualização do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais totais, da seguinte forma:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.5a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.5b)$$

Como já foi dito, a princípio, as Equações (3.5a-b) não satisfazem a condição de equilíbrio da estrutura. Assim sendo, na próxima seção será detalhado o processo iterativo que corrige essa solução predita, buscando estabelecer o equilíbrio do sistema.

### 3.2.2 Segunda Etapa: Ciclo de Iterações

A maioria dos métodos de resolução de problemas estruturais não lineares é baseada no método de Newton-Raphson (Crisfield, 1991). Tal método consiste em determinar as raízes de uma equação não linear através de uma sequência de correções, até que, para uma precisão desejada, a solução seja alcançada. O método de Newton-Raphson é aplicado para resolver a Equação (3.1), que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \boldsymbol{\psi}) = \mathbf{g} \quad (3.6)$$

em que  $\mathbf{g}$  é um vetor de forças residuais que deve se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido.

Porém, no esquema tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante durante todo o processo iterativo. Isso interfere diretamente no

traçado da trajetória de equilíbrio, não sendo possível definir corretamente o caminho de equilíbrio pós-flambagem. Buscando passar por todos os pontos críticos que existirem ao longo da trajetória, a variação do parâmetro de carga deve acontecer. Considera-se, assim, que a mudança nos deslocamentos nodais é governada pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), \text{ para } k \geq 1 \quad (3.7)$$

Admitindo apenas a variação dos deslocamentos durante o ciclo iterativo, o vetor de forças residuais,  $\mathbf{g}$ , passa a ser função não linear apenas dos deslocamentos nodais totais,  $\mathbf{U}^{(k-1)}$ , calculados na última iteração, e do valor corrente do parâmetro de carga total,  $\lambda^k$ , que agora também é uma incógnita escrita como:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad (3.8)$$

sendo  $\delta \lambda^k$  a correção do parâmetro de carga que será discutida mais adiante.

Substituindo as Equações (3.6) e (3.8) em (3.7), obtém-se:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = [(\lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)}] \quad (3.9)$$

que é a equação usada durante o ciclo iterativo. Reescrevendo essa equação, tem-se:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.10)$$

Os deslocamentos nodais iterativos obtidos na equação anterior podem ser decompostos em duas parcelas:

$$\delta \mathbf{U}^k = \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.11)$$

com:

$$\delta \mathbf{U}_g^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.12a)$$

$$\delta \mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (3.12b)$$

Caso seja adotado o método de Newton-Raphson modificado, que mantém a matriz de rigidez constante durante o ciclo iterativo, o vetor de deslocamentos iterativos,  $\delta \mathbf{U}_r$ , na iteração corrente  $k$ , será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais,  $\delta \mathbf{U}_r$  (Equação 3.2). A correção do parâmetro de carga,  $\delta \lambda^k$ , única incógnita da Equação (3.11), é determinada seguindo uma estratégia de iteração. Destaca-se que, neste trabalho, adota-se a iteração a

carga constante, na qual o incremento de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo, e a equação de restrição se reduz a:

$$\delta\lambda^k = 0 \quad (3.13)$$

Entretanto, para se conhecer também a resposta da estrutura pós-flambagem a variação da correção do parâmetro de carga é necessária. A estratégia da norma mínima dos deslocamentos residuais proposta por Chan (1988) e implementada no CS-ASA será utilizada nesses casos. Tal estratégia é definida como:

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (3.14)$$

Vale destacar que outras estratégias de iteração estão implementadas no CS-ASA e também são descritas em Silva (2009). Assim, após a obtenção da solução iterativa,  $\delta\lambda^k$  e  $\delta\mathbf{U}^k$ , atualiza-se as variáveis incrementais do problema, ou seja:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.15a)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.15b)$$

e, em seguida, as variáveis totais:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (3.16a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (3.16b)$$

Para que o processo iterativo seja finalizado, é necessário que uma condição de convergência seja atendida. No CS-ASA, dois critérios de convergência podem ser selecionados de forma que, pelo menos um dos dois, deve ser respeitado. O primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças e é definido como:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (3.17)$$

em que o numerador representa a norma Euclidiana do vetor das forças residuais, o denominador é a norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo, e  $\zeta$  é um fator de tolerância escolhido pelo analista.

O segundo critério de convergência é calculado baseado em relações de

deslocamentos:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (3.18)$$

sendo o numerador, a norma Euclidiana dos deslocamentos nodais iterativos e o denominador, a norma Euclidiana dos deslocamentos nodais incrementais.

Nas análises inelásticas realizadas neste trabalho, optou-se pela utilização do primeiro critério de convergência descrito na Equação (3.17).

Na Tabela 3.1 faz-se um resumo de todo procedimento numérico descrito nos parágrafos anteriores.

### 3.3 Formulação de Elementos Finitos Generalizada

Para descrever o movimento dos corpos sólidos, geralmente utiliza-se o referencial Lagrangiano, que pode ser classificado em total ou atualizado. No referencial Lagrangiano total, os deslocamentos da estrutura, causados por um determinado carregamento, são medidos a partir da configuração inicial,  $t = 0$ . Por outro lado, no referencial Lagrangiano atualizado, esses deslocamentos são medidos a partir da última configuração de equilíbrio conhecida,  $t$ . Na formulação de elementos finitos a ser apresentada, será adotado o referencial Lagrangiano atualizado.

O elemento finito utilizado é o elemento de pórtico plano delimitado pelos pontos nodais  $i$  e  $j$ , e com molas fictícias nas extremidades como ilustra a Figura 3.1. São três os graus de liberdade em cada nó: deslocamento vertical  $v$ , deslocamento horizontal  $u$  e rotação  $\theta$ . Os elementos de mola são responsáveis por simular a plastificação do material das seções. Ainda na Figura 3.1, o parâmetro  $\psi$  está associado com o nível de plastificação e será explicado com mais detalhes nas Subseções 3.3.1 e 3.3.2.

As seguintes hipóteses são consideradas na modelagem do sistema estrutural:

- todos elementos são inicialmente retos e prismáticos, e suas seções transversais permanecem planas após a deformação;
- os perfis são compactos de forma que a seção possa desenvolver capacidade total de rotação plástica sem que haja flambagem local. Os membros são suficientemente contraventados de forma que a flambagem lateral ou torcional não influencie a resposta do sistema antes do colapso;

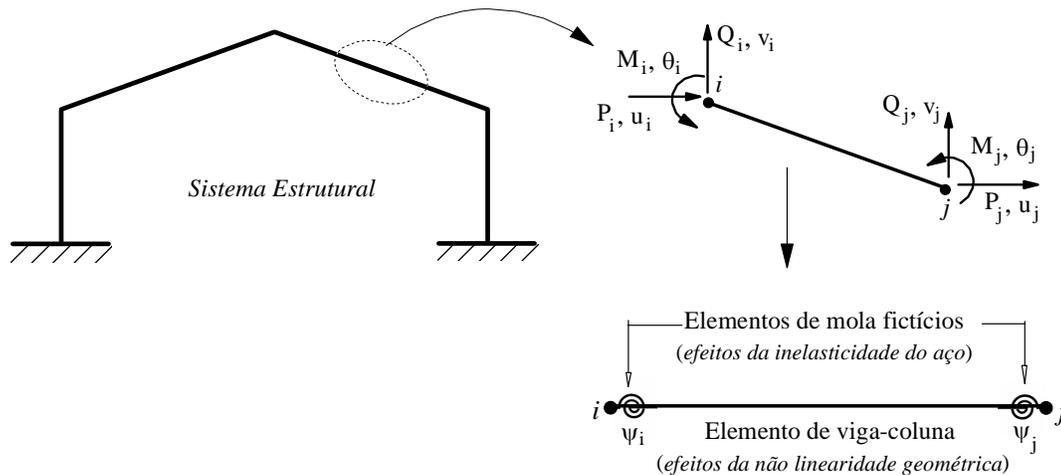
**Tabela 3.1** Algoritmo com a estratégia de solução numérica adotada

---

1.	Lê os dados gerais da estrutura e do tipo de análise	
2.	Calcula-se o vetor de cargas nodais de referência, $\mathbf{F}_r$	
3.	$t = 0$	
4.	$t_1 = t$	
5.	Considera-se a condição inicial ${}^t\mathbf{U} = \mathbf{0}$ e ${}^t\lambda = 0$	
6.	<b>for</b> cada incremento de carga <b>do</b>	<b>▷ PROCESSO INCREMENTAL</b>
7.	$t = t_1$	▷ Passo de carga anterior
8.	$t_1 = t + 1$	▷ Passo de carga corrente
9.	Monta-se a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}$ (Equação 3.31)	
10.	Resolve: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r$	
11.	<b>if</b> $t_1 = 1$ <b>then</b>	
12.	$\Delta\lambda^0 = (\Delta\lambda^0)_1$	
13.	<b>else</b>	
14.	Define $\Delta\lambda^0$ (Equação 3.3)	
15.	<b>end if</b>	
16.	Determina $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r$	
17.	Atualiza as variáveis na configuração $t_1$ : ${}^t\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$ e ${}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$	
18.	<b>for</b> $k \leftarrow 1$ , número máximo de iterações ( $n_{max}$ ) <b>do</b>	<b>▷ PROCESSO ITERATIVO</b>
19.	Avalia o vetor de forças internas: ${}^t\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$	
20.	Calcula o vetor de forças residuais: $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^t\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^t\mathbf{F}_i^{(k-1)}$	
21.	<b>if</b> $\ \mathbf{g}^{(k-1)}\  / \ \Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\  \leq$ fator de tolerância <b>then</b>	
22.	Pare o processo iterativo e siga para a linha 32	
23.	<b>end if</b>	
24.	<b>if</b> Newton-Raphson padrão <b>then</b>	
25.	Atualiza a matriz de rigidez $\mathbf{K}$	
26.	<b>end if</b>	
27.	Calcula a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$ (Equação 3.13 ou 3.14)	
28.	Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$	
29.	Atualizam-se as variáveis incrementais e totais:	
	$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$	<b>▷ Variáveis incrementais</b>
	${}^t\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^t\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$	<b>▷ Variáveis totais</b>
30.	<b>end for</b>	
31.	Atualiza a variável $\psi$ e outras que forem necessárias	
32.	<b>end for</b>	

---

- grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos;
- o encurtamento axial devido à curvatura oriunda de flexão no membro é desprezado;
- as forças de cisalhamento são consideradas pequenas, e os efeitos de deformação por cortante serão, então desprezados.



**Figura 3.1** Elemento finito adotado nas análises inelásticas (Silva, 2009)

A formulação generalizada para análises inelásticas de estruturas de aço proposta por Silva *et al.* (2009) utiliza o referencial Lagrangiano atualizado e corrotacional. O referencial corrotacional se refere a um sistema de eixos ortogonais, ligado aos extremos dos elementos, que se movimenta simultaneamente com as deformações. Dessa forma, o cálculo da matriz de rigidez e do vetor de forças internas é feito no campo dos deslocamentos naturais, ou seja, daqueles que realmente causam deformação. O elemento de viga-coluna no referido sistema pode ser visto na Figura 3.2.

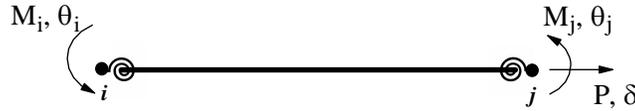
A relação força-deslocamento para o elemento finito, no sistema local corrotacional, considerando os efeitos da inelasticidade do material da seção transversal nas suas extremidades, pode ser escrita na forma incremental como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 A / L & 0 & 0 \\ 0 & C_2 [k_{ii} k_{jj} - k_{ij} k_{ji} (1 - C_3)] & C_6 k_{ij} \\ 0 & C_6 k_{ji} & C_4 [k_{ii} k_{jj} - k_{ij} k_{ji} (1 - C_5)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.19a)$$

ou, numa forma simplificada, rescrita como:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (3.19b)$$

onde os subscritos  $i$  e  $j$ , em (3.19a), são relacionados às extremidades do elemento e o subscrito  $c$ , em (3.19b), indica o sistema de coordenadas utilizado;  $A$  é a área da seção transversal;  $L$  é o comprimento do elemento;  $\Delta P$  e  $\Delta M$  são, respectivamente, o esforço normal e o momento fletor incrementais, e  $\Delta \delta$  e  $\Delta \theta$  são os incrementos de deformação axial e rotação nodais.



**Figura 3.2** Graus de liberdade do elemento no sistema corrotacional

Os termos  $k_{ii}$ ,  $k_{ij}$ ,  $k_{ji}$  e  $k_{jj}$ , responsáveis por simular os efeitos de segunda ordem, são os termos da matriz de rigidez para as ações de flexão numa análise não linear estática convencional. Conforme mencionado no Capítulo 2, será usada a formulação geometricamente não linear linearizada proposta por Yang e Kuo (1994). Nessa formulação, esses termos são definidos como:

$$k_{ii} = k_{jj} = \frac{4E_t I}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (3.20a)$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \frac{2E_t I}{L} - \frac{PL}{30} \quad (3.20b)$$

sendo  $I$  o momento de inércia da seção transversal,  $E_t$  o módulo tangente e  $L$  o comprimento do elemento.

Para atender aos objetivos desta dissertação, implementou-se no CS-ASA as equações para o módulo tangente indicadas por Ziemian e McGuire (2002). Conforme destacado na Subseção 2.4.2, essas equações dependem do esforço normal e também do momento de flexão em torno do eixo de menor inércia. Como o momento é avaliado nas extremidades  $i$  e  $j$  do elemento finito (Figura 3.2), os termos provenientes da matriz de rigidez elástica nas Equações (3.20a-b) são recalculados considerando que o módulo tangente varia linearmente ao longo do comprimento do elemento finito, ou seja,

$$E_t(x) = \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right) E_{t,i} + E_{t,j} \frac{x}{L} \right] \quad (3.21)$$

com  $E_{t,i}$  e  $E_{t,j}$  representando o módulo tangente modificado nas extremidades  $i$  e  $j$ , respectivamente.

Usando funções de interpolação apropriadas, o primeiro termo nas Equações (3.20a-b) são redefinidos, considerando (3.21), através das relações:

$$k_{ii}^* = \int_0^L \left[ \frac{2}{L} \left( 2 - 3 \frac{x}{L} \right) \right]^2 E_t(x) I dx \quad (3.22a)$$

$$k_{ij}^* = k_{ji}^* = \int_0^L \left[ \frac{2}{L} \left( 2 - 3 \frac{x}{L} \right) \right] \left[ \frac{2}{L} \left( 1 - 3 \frac{x}{L} \right) \right] E_t(x) I dx \quad (3.22b)$$

$$k_{jj}^* = \int_0^L \left[ \frac{2}{L} \left( 1 - 3 \frac{x}{L} \right) \right]^2 E_t(x) I dx \quad (3.22c)$$

Resolvendo as integrais anteriores e considerando a segunda parcela na Equação (3.20a-b), os coeficientes  $k_{ii}$ ,  $k_{ij}$ ,  $k_{ji}$  e  $k_{jj}$  na Equação (3.19a-b) tornam-se:

$$k_{ii} = \frac{(3E_{t,i} + E_{t,j})I}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (3.23a)$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \frac{(E_{t,i} + E_{t,j})I}{L} - \frac{PL}{30} \quad (3.23b)$$

$$k_{jj} = \frac{(E_{t,i} + 3E_{t,j})I}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (3.23c)$$

Voltando à Equação (3.19a), os coeficientes  $C_{m(m=1,\dots,6)}$  são representados em função dos parâmetros que simulam a degradação da rigidez da seção transversal na formulação inelástica adotada. As formulações inelásticas do CS-ASA são denotadas por: PHF-1 (*Plastic-hinge finite element formulation - 1*), que é baseada na metodologia proposta por Liew *et al.* (1993); e PHF-2 (*Plastic-hinge finite element formulation - 2*), que adota os princípios da formulação desenvolvida por Chan e Chui (2000). A Tabela 3.2 detalha os coeficientes  $C_{m(m=1,\dots,6)}$  para essas duas formulações. Nessa tabela,  $E$  representa o módulo de elasticidade,  $E_t$  o módulo tangente,  $I$  é o momento de inércia,  $L$  é o comprimento do elemento,  $\psi$  é o parâmetro de redução de rigidez e os termos  $k$  simulam os efeitos de segunda ordem. O termo  $\psi$  será discutido nas duas próximas subseções.

**Tabela 3.2** Parâmetros da Equação (3.19a) (Silva *et al.*, 2009)

Formulação	Parâmetros					
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>6</sub>
PHF-1	$E_i^*$	$\psi_i / k_{ji}$	$\psi_j$	$\psi_j / k_{ii}$	$\psi_i$	$\psi_i \psi_j$
PHF-2	$E$	$\frac{\psi_i}{\beta_1(1-\psi_i)}$	$\frac{\psi_j}{(1-\psi_j)} k_{ii} \beta_2$	$\frac{\psi_j}{\beta_1(1-\psi_j)}$	$\frac{\psi_i}{(1-\psi_i)} k_{jj} \beta_2$	$\frac{6EI}{L} \frac{\psi_i \psi_j}{(1-\psi_i)(1-\psi_j)}$

$$\beta_1 = \frac{L}{6EI} \left[ \left( \frac{6EI}{L} \frac{\psi_i}{(1-\psi_i)} + k_{ii} \right) \left( \frac{6EI}{L} \frac{\psi_j}{(1-\psi_j)} + k_{jj} \right) - k_{ij} k_{ji} \right] \text{ e } \beta_2 = \frac{6EI}{L} \frac{1}{k_{ij} k_{ji}}$$

\*Exceto quando for adotado o módulo tangente proposto por Ziemian e McGuire (2002), no qual assume-se  $C_1 = E$

Com a definição dos coeficientes  $C_m$ , a relação força-deslocamento descrita pela Equação (3.19) tem todos os seus termos estabelecidos. Entretanto, é necessária a transformação dessa expressão do sistema corrotacional para o sistema global de coordenadas. Essa mudança é feita em dois estágios: primeiro transforma-se a expressão do sistema corrotacional para o sistema local, e posteriormente realiza-se a transformação para o sistema global de coordenadas. Esses estágios podem ser vistos na Figura 3.3.

A relação entre as componentes de força no sistema corrotacional e as componentes de força no sistema local é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{f}_l = \mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{f}_l^T = \{P_i \quad Q_i \quad M_j \quad P_j \quad Q_j \quad M_j\}$  é o vetor de forças nodais do elemento no sistema local de coordenadas, e  $\mathbf{T}_{cl}$ , é a chamada matriz de transformação, que é definida como:

$$\mathbf{T}_{cl}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

sendo  $L$  o comprimento do elemento.

O vetor de forças incrementais no sistema local pode ser obtido da Equação (3.24), fazendo-se:

$$\Delta \mathbf{f}_l = \Delta(\mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c) = \mathbf{T}_{cl} \Delta \mathbf{f}_c + \Delta \mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c \quad (3.26)$$

Na equação anterior, a primeira parcela ( $\mathbf{T}_{cl}\Delta\mathbf{f}$ ) resulta do incremento das forças nodais básicas e a segunda ( $\Delta\mathbf{T}_{cl}\mathbf{f}_c$ ) advém do trabalho realizado por essas forças. Essa segunda parcela, segundo Chan e Chui (2000), pode ser substituída por ( $\mathbf{N}\Delta\mathbf{u}$ ), sendo a matriz  $\mathbf{N}$  definida como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P/L & 0 & 0 & -P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P/L & 0 & 0 & P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

A relação entre os deslocamentos nodais incrementais nos sistemas corrotacional e local é dada por:

$$\Delta\mathbf{u}_c = \mathbf{T}_{cl}^T \Delta\mathbf{u} \quad (3.28)$$

Substituindo (3.28) em (3.19b) tem-se:

$$\Delta\mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \mathbf{T}_{cl}^T \Delta\mathbf{u} \quad (3.29)$$

que é usada para reescrever a Equação (3.26) como:

$$\Delta\mathbf{f}_l = (\mathbf{T}_{cl} \mathbf{K}_c \mathbf{T}_{cl}^T + \mathbf{N}) \Delta\mathbf{u} = \mathbf{K}_e \Delta\mathbf{u} \quad (3.30)$$

na qual  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez do elemento no sistema local de coordenadas. Ressalta-se que a transformação dessa matriz para o sistema global ( $\mathbf{K}_{eg}$ ) é feita através da expressão:

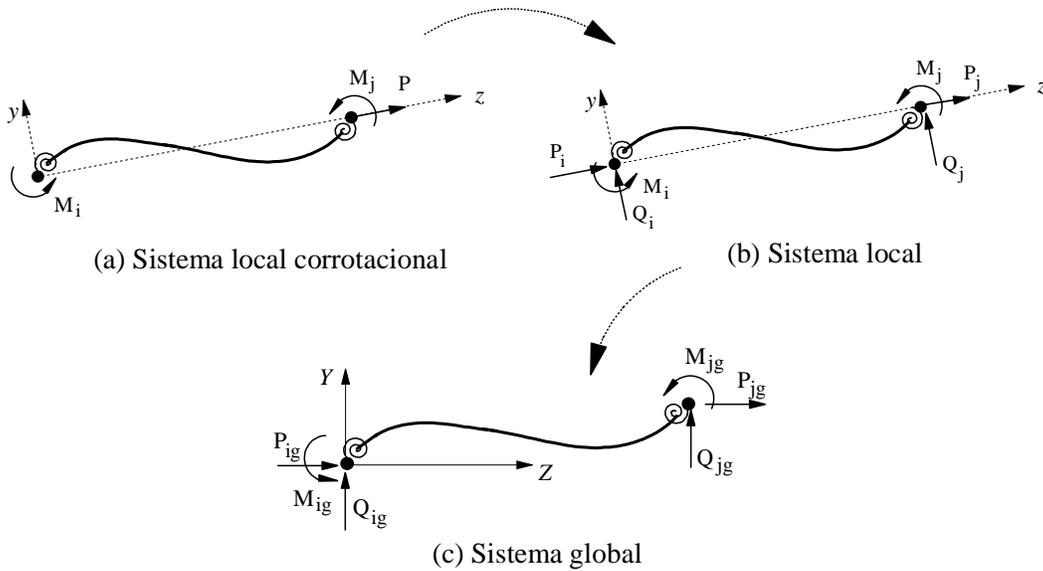
$$\mathbf{K}_{eg} = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_e \mathbf{R} \quad (3.31)$$

em que  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação entre os dois sistemas, ou seja:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

A Equação (3.19) é válida até as forças internas atingirem a resistência plástica da seção. Daí em diante, com a seção já plastificada, o aumento de esforço normal, por

exemplo, faz com que a resistência da seção se torne menor que as forças que nela atuam. Assim sendo, uma alteração na relação força-deslocamento é necessária para que as equações de resistência plástica da seção não sejam violadas. Para incorporar essa alteração nas análises, Liew *et al.* (1993) sugerem que as forças internas retornem à superfície de resistência numa trajetória horizontal, reduzindo apenas o momento fletor, conforme representado na Figura 3.4. Após a formação da rótula plástica no ponto A, um incremento de esforço normal,  $\delta P$ , faria com que o mesmo violasse a superfície de resistência, deslocando-se para o ponto B. Para que isso não ocorra, é feita uma redução no momento fletor,  $\delta M_{pr}$ , que retorna o ponto para a superfície de resistência (ponto C).



**Figura 3.3** Transformações entre os sistemas de coordenadas

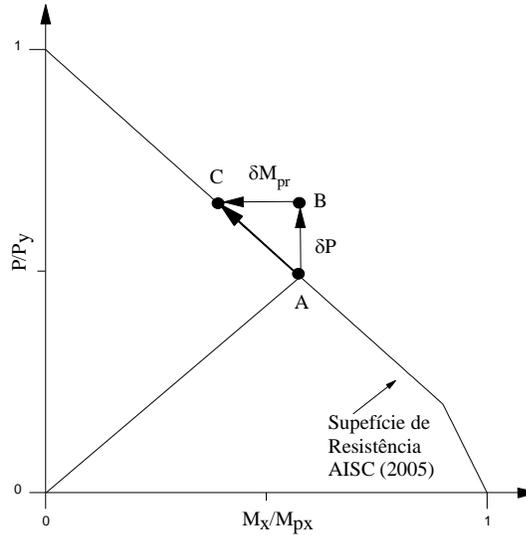
Havendo a violação da superfície de resistência, a relação tensão-deformação é escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 A / L & 0 & 0 \\ 0 & C_7 K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_8 K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.33a)$$

ou, de forma abreviada:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_{ch} \Delta \mathbf{u}_c + \Delta \mathbf{f}_{ps} \quad (3.33b)$$

na qual  $K_{22} = k_{c(2,2)} - k_{c(2,3)}k_{c(3,2)} / k_{c(3,3)}$  e  $K_{33} = k_{c(3,3)} - k_{c(2,3)}k_{c(3,2)} / k_{c(2,2)}$ , sendo  $k_{c(m,n)}$  o termo correspondente à linha  $m$  e à coluna  $n$  na matriz de rigidez  $\mathbf{K}_c$  (Equação 3.19a). O vetor  $\Delta \mathbf{f}_{ps}$  é o vetor de correção dos esforços internos, e os coeficientes  $C_7$ ,  $C_8$ ,  $\zeta_I$  e  $\zeta_2$  são definidos na Tabela 3.3, de acordo com a extremidade onde se forma a rótula plástica.



**Figura 3.4** Correção das forças internas após violação da superfície de resistência

**Tabela 3.3** Parâmetros da Equação (3.22a)

Rótula Plástica	Parâmetros			
	$C_7$	$C_8$	$\zeta_I$	$\zeta_2$
Extremidade $i$	0	1	$\delta M_{pr_i}$	$\delta M_{pr_i} (k_{c(3,2)} / k_{c(2,2)})$
Extremidade $j$	1	0	$\delta M_{pr_j} (k_{c(2,3)} / k_{c(3,3)})$	$\delta M_{pr_j}$
Extremidades $i$ e $j$	0	0	$\delta M_{pr_i}$	$\delta M_{pr_j}$

### 3.3.1 O Parâmetro $\psi$ na Formulação PHF-1

O parâmetro  $\psi$  acompanha a degradação da rigidez da seção associada com a plastificação das seções nas extremidades do elemento. Esse parâmetro adimensional tem valor unitário quando o elemento está em regime elástico, e valor nulo quando uma rótula plástica é formada. Na formulação PHF-1 (Silva, 2009), quatro modelos matemáticos com um limite

estabelecido para o início do processo de degradação da rigidez podem ser usados para representar  $\psi$ . Esses modelos são representados pelas seguintes equações:

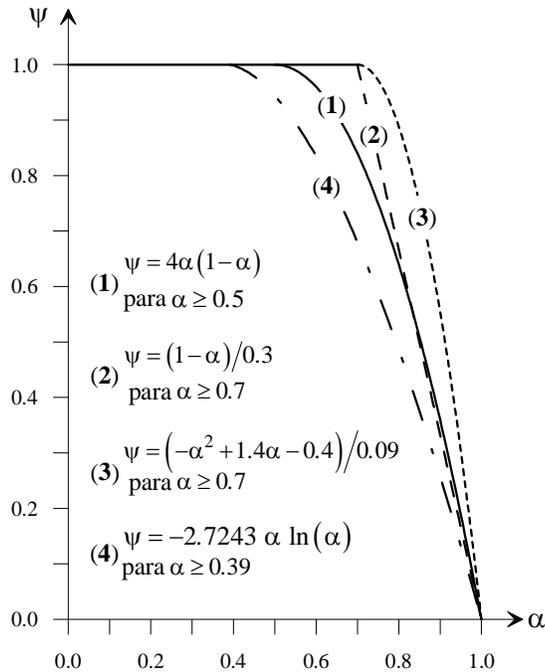
$$\psi = 4\alpha(1-\alpha), \text{ com início de escoamento em } \alpha = 0.5 \quad (3.34a)$$

$$\psi = (1-\alpha)/0.3, \text{ com início de escoamento em } \alpha = 0.7 \quad (3.34b)$$

$$\psi = (-\alpha^2 + 1.4\alpha - 0.4)/0.09, \text{ com início de escoamento em } \alpha = 0.7 \quad (3.34c)$$

$$\psi = -2.7243 \alpha \ln(\alpha), \text{ com início de escoamento em } \alpha = 0.39 \quad (3.34d)$$

Quando o termo  $\alpha$  atinge o valor de início de escoamento estabelecido no modelo, inicia-se o processo de redução da rigidez da seção. Caso contrário, se  $\alpha$  for menor que o valor de início de escoamento, assume então que a seção encontra-se em regime puramente elástico e, portanto, nenhuma degradação ocorre ( $\psi = 1$ ). A variação de  $\psi$  em função do termo  $\alpha$  para os quatro modelos apresentados é representada graficamente na Figura 3.5.



**Figura 3.5** Comparação entre os modelos que representam o parâmetro  $\psi$  (Silva, 2009)

O termo  $\alpha$  é um índice que avalia a interação entre o esforço normal e momento fletor na seção. No CS-ASA esse índice é obtido a partir das superfícies de resistência

plástica (ou curvas de interação) propostas pelas normas AISC (2005) e NRB 8800 (2008), e é descrito como:

$$\alpha = \frac{P}{P_y} + \frac{8}{9} \frac{M}{M_p}, \text{ para } \frac{P}{P_y} \geq \frac{2}{9} \frac{M}{M_p} \quad (3.35a)$$

$$\alpha = \frac{P}{2P_y} + \frac{M}{M_p}, \text{ para } \frac{P}{P_y} < \frac{2}{9} \frac{M}{M_p} \quad (3.35b)$$

sendo  $P_y$  o esforço normal de escoamento e  $M_p$  o momento de plastificação. Essa equação é válida para membros estruturais submetidos à flexão em torno dos eixos de maior e menor inércia. No entanto, observa-se na comparação feita na Figura 2.13 que, para a flexão em torno do eixo de menor inércia, essa superfície fornece resultados conservadores, ou seja, abaixo daqueles considerados mais “exatos”.

Buscando representar de maneira mais adequada a flexão em torno do eixo de menor inércia, foram implementadas no CS-ASA outras duas superfícies de resistência: a indicada pelo ASCE (1971), que é recomendada somente para o eixo de menor inércia; e a proposta por Orbison (1982) e modificada por McGuire *et al.* (2000), que é adequada para ambos os eixos de flexão. Essas duas curvas são utilizadas na formulação PHF-1.

Usando a superfície indicada pelo ASCE (1971), descrita através da Equação (2.17) do Capítulo 2, o termo  $\alpha$  é definido como:

$$\alpha = 0.84 \frac{M_y}{M_{py}} + \left( \frac{P}{P_y} \right)^2, \text{ para } \frac{P}{P_y} \geq 0.4 \frac{M_y}{M_{py}} \quad (3.36a)$$

$$\alpha = \frac{\left( 0.32 \frac{M_y}{M_{py}} + 0.84 \right)^2 - 0.7056}{0.64} = 1, \text{ para } \frac{P}{P_y} < 0.4 \frac{M_y}{M_{py}} \quad (3.36b)$$

em que  $M_y$  e  $M_{py}$  representam, respectivamente, o momento atuante e o momento de plastificação, ambos em relação ao eixo  $y$ .

Por sua vez, usando a superfície proposta por Orbison (1982) e modificada por McGuire *et al.* (2000), representada pela Equação (2.15), obtém-se o termo  $\alpha$  da seguinte forma:

$$\alpha = p^2 + m_x^2 + 3.5 p^2 m_x^2, \text{ para o eixo de maior inércia} \quad (3.37a)$$

$$\alpha = p^2 + m_y^4 + 3p^6 m_y^2, \text{ para o eixo de menor inércia} \quad (3.37b)$$

onde  $p = P/P_y$ ,  $m_x = M_x/M_{px}$ , e  $m_y = M_y/M_{py}$ . Cabe esclarecer que  $M_x$  e  $M_y$  representam, respectivamente, o momento atuante em torno dos eixos  $x$  e  $y$ ; e  $M_{px}$  e  $M_{py}$ , indicam o momento de plastificação, também em relação a cada um desses eixos.

Na Figura 3.6 são mostradas as superfícies de resistência e de início de escoamento dadas pelas Equações (3.35), (3.36) e (3.37). Essas superfícies são obtidas com o modelo parabólico de  $\psi$  que tem início de escoamento em  $\alpha = 0.5$  (Equação 3.34a).

Na formulação PHF-1 os efeitos das tensões residuais são considerados por meio do módulo tangente  $E_t$ . Neste trabalho, além das equações de resistência para colunas fornecidas pelo CRC (Galambos, 1998) e pelo AISC (2005), destaca-se a utilização das equações propostas por Ziemian e McGuire (2002). A expressão do módulo tangente indicada por esses autores possibilita um tratamento mais adequado para avaliar a resistência dos membros estruturais sujeitos à flexão no eixo de menor inércia. As três expressões citadas para o módulo tangente são descritas na Subseção 2.4.2.

### 3.3.2 O Parâmetro $\psi$ na Formulação PHF-2

Na formulação PHF-2 (Silva, 2009), o parâmetro  $\psi$ , que simula a degradação da rigidez da seção transversal nos pontos nodais do elemento, é associado à rigidez dos elementos de mola. Enquanto o elemento está no regime elástico, a rigidez da mola é infinita e tem-se  $\psi = 1$ . Porém, quando ocorre a formação de uma rótula plástica, a rigidez da mola se anula e nesse caso assume-se  $\psi = 0$ . A expressão que define o parâmetro  $\psi$  é dada por:

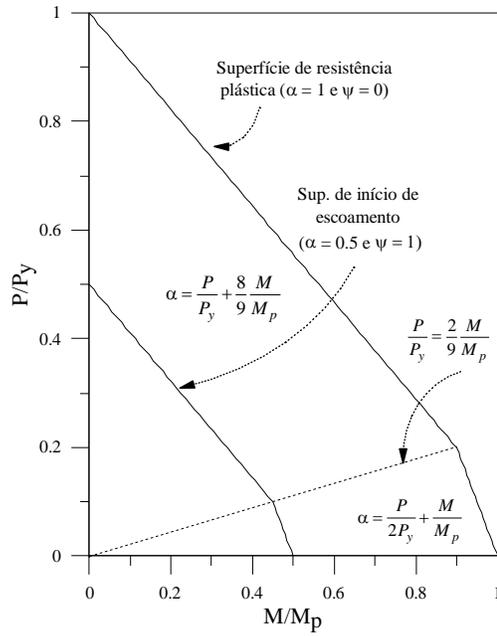
$$\psi = \frac{|M_{pr} - M|}{(|M_{pr} - M| + |M - M_{er}|)}, \text{ para } M_{er} < M < M_{pr} \quad (3.38)$$

sendo  $M_{er}$  o momento de início de escoamento e  $M_{pr}$  o momento plástico reduzido. O momento,  $M_{er}$ , define a superfície de início de escoamento e é descrito como:

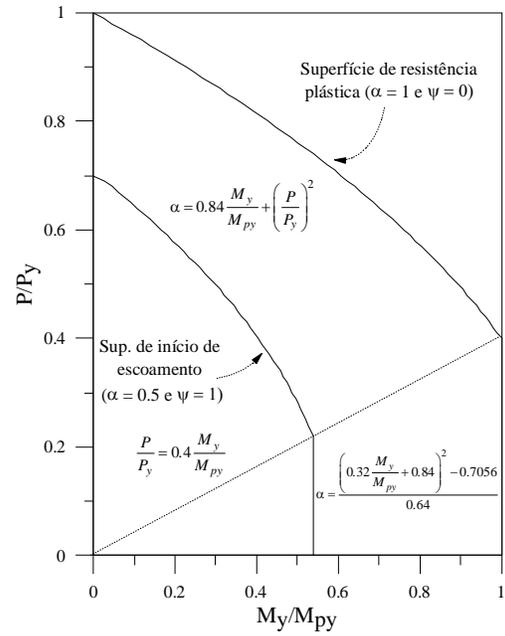
$$M_{er} = (f_y - f_r - P/A)W \quad (3.39)$$

em que  $f_y$  é a tensão de escoamento,  $f_r$  é a tensão residual,  $A$  é a área da seção e  $W$  é o módulo elástico da seção. A tensão residual,  $f_r$ , deve ser adotada seguindo recomendações normativas, conforme foi descrito no Capítulo 2, Subseção 2.4.3.

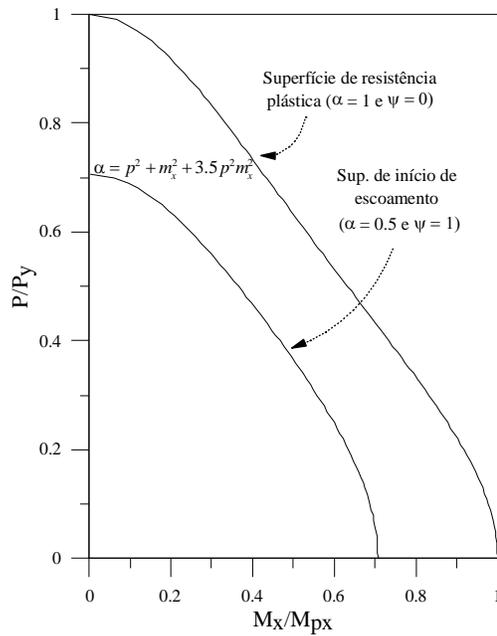
O momento plástico reduzido é definido aqui através da norma BS 5950 (2000).



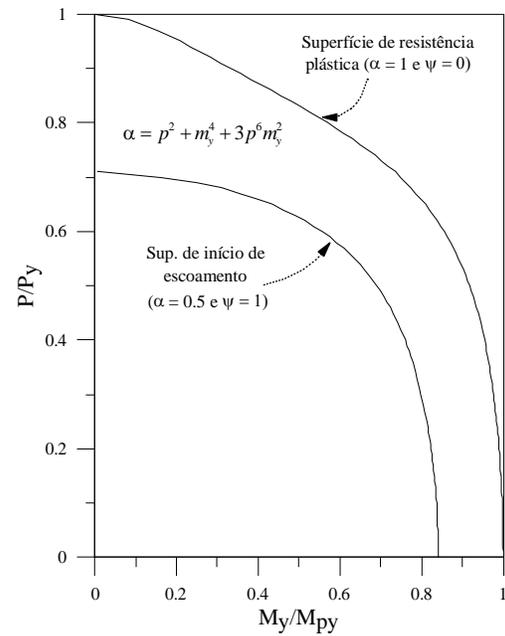
(a) AISC (2005): maior e menor inércias



(b) ASCE (1971): menor inércia



(c) Orbison (1982) modificada: maior inércia



(d) Orbison (1982) modificada: menor inércia

**Figura 3.6** Superfícies de resistência e início de escoamento usadas na formulação PHF-1

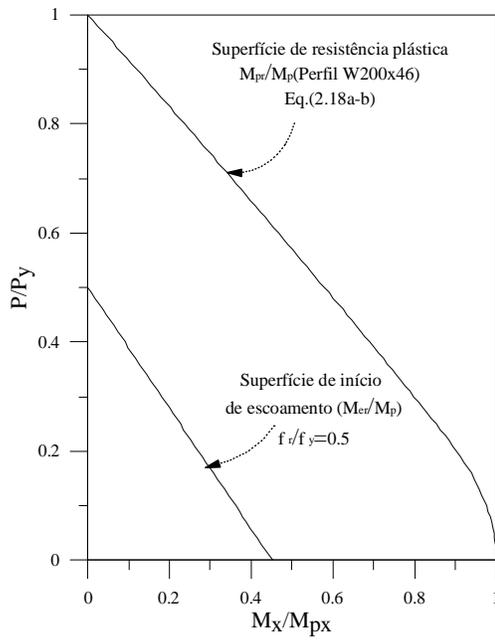
Apenas perfis do tipo *I* ou *H* compactos com mesas iguais serão adotados e as equações para o momento plástico são então descritas pelas Equações (2.18) e (2.19).

A superfície proposta por Orbison (1982) e modificada por McGuire *et al.* (2000), também foi implementada na formulação PHF-2. Usando essa superfície, o momento plástico reduzido pode ser obtido através das relações:

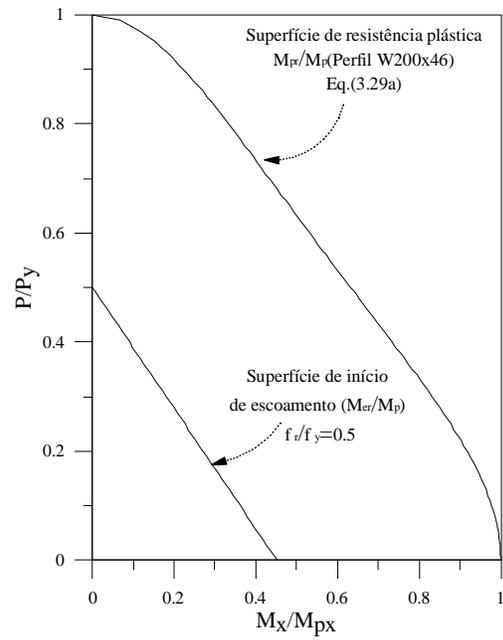
$$M_{prx} = M_{px} \sqrt{(1-p^2)/(1+3.5p^2)}, \text{ para o eixo de maior inércia} \quad (3.40a)$$

$$M_{pry} = M_{py} \sqrt{(-3p^6 + \sqrt{9p^{12} - 4(p^2 - 1)})/2}, \text{ para o eixo de menor inércia} \quad (3.40b)$$

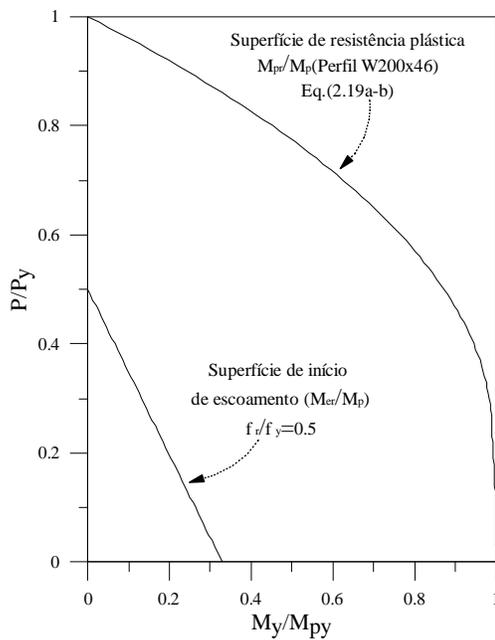
As superfícies de resistência e de início de escoamento usadas na formulação PHF-2 são exibidas na Figura 3.7.



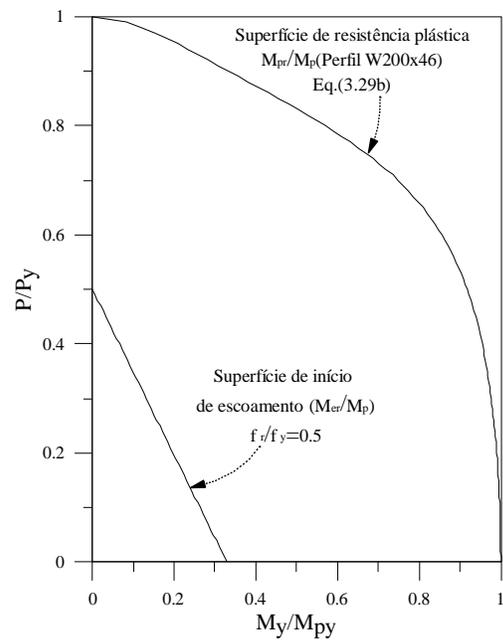
(a) BS 5950 (2000): maior inércia



(b) Orbison (1982) modificada: maior inércia



(c) BS 5950 (2000): menor inércia



(d) Orbison (1982) modificada: menor inércia

**Figura 3.7** Superfícies de resistência e início de escoamento usadas na formulação PHF-2

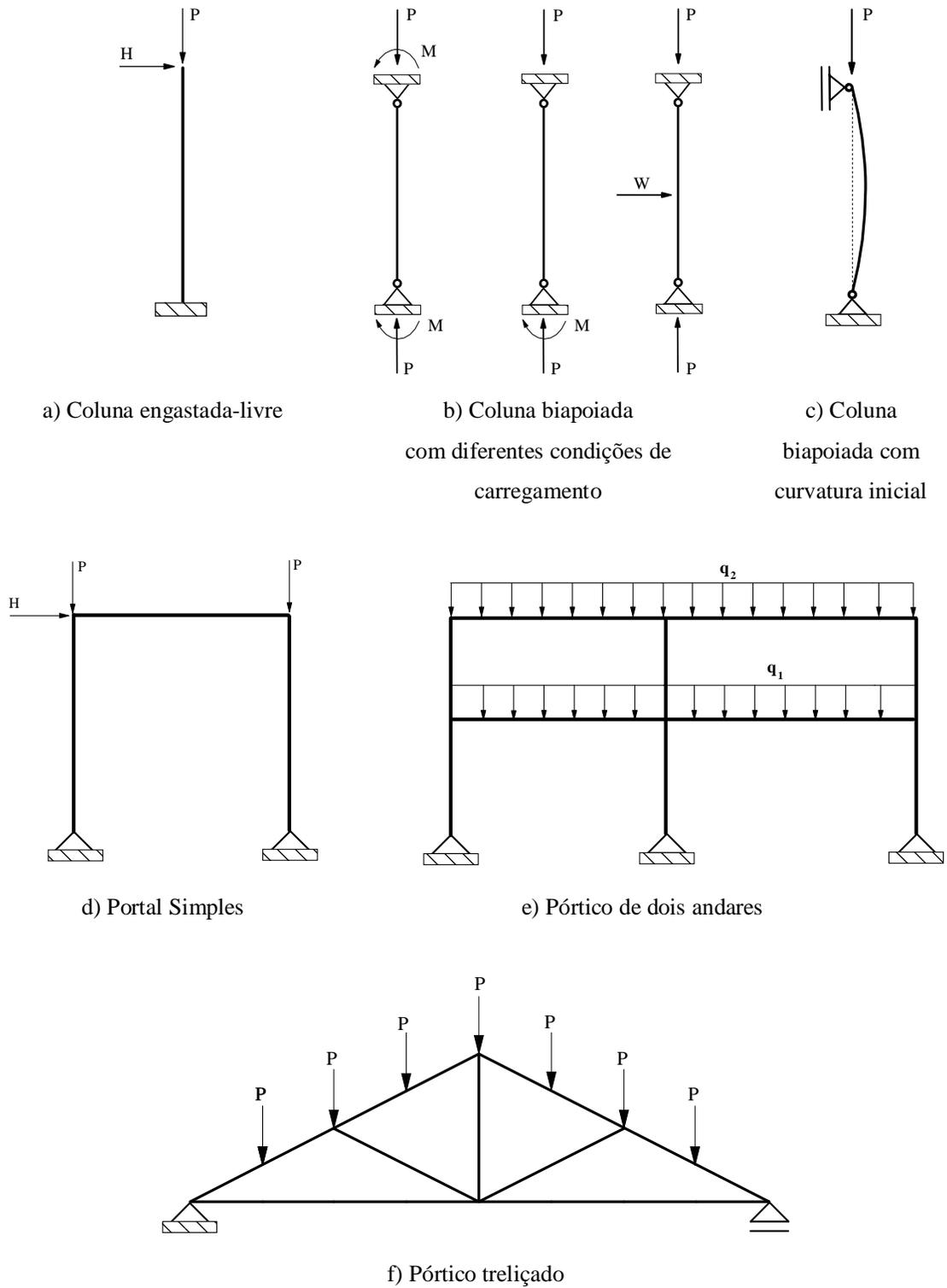
# Capítulo 4

## Exemplos de Aplicação e Validação

### 4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é avaliar a eficácia das estratégias numéricas adotadas para análise inelástica de membros estruturais com flexão em torno do eixo de menor inércia. Mais especificamente, será destacada a importância de se considerar o modelo de módulo tangente proposto por Ziemian e McGuire (2002) para simular a degradação da rigidez da seção transversal. Faz-se também um estudo sobre as diferentes superfícies de resistência plástica descritas no capítulo anterior. Com esse propósito, as análises serão realizadas com sistemas estruturais cujas respostas são encontradas na literatura. As estruturas estudadas estão ilustradas na Figura 4.1. Mostram-se três colunas com diferentes condições de carregamento e apoio (Figuras 4.1 a-c); e três pórticos com geometrias e condições de carga distintas (Figuras 4.1 d-f). A discussão sobre o estudo realizado com cada um desses sistemas é feita nas duas próximas seções, que foram organizadas de acordo com o tipo de estrutura, ou seja, colunas isoladas e pórticos.

Para obter a trajetória de equilíbrio das colunas isoladas ou dos pórticos além do ponto limite de carga, a estratégia do deslocamento generalizado e a norma mínima dos deslocamentos residuais foram usadas no processo incremental e iterativo de solução do problema estrutural em questão. Nas análises cujo interesse é apenas avaliar o comportamento estrutural até tal ponto, nenhuma estratégia de incremento automático de carga ou iteração é necessária. Em todas as situações, adota-se o método de Newton-Raphson modificado e um fator de tolerância igual a  $10^{-4}$ .



**Figura 4.1** Estruturas analisadas: colunas isoladas e pórticos

Visando facilitar a apresentação dos resultados, adota-se a notação simplificada indicada na Tabela 4.1 para se referir aos diferentes modelos que descrevem a variação do módulo de elasticidade tangente com as forças internas. O uso do módulo de elasticidade constante é possível, e está indicado também. Informam-se ainda as equações apresentadas no Capítulo 2 para representar cada um desses modelos. Ao longo do texto cada modelo será citado simplesmente como “módulo tangente”.

**Tabela 4.1** Notação adotada para o módulo de elasticidade tangente

<b>Notação</b>	<b>Descrição/ Equação</b>
$E_{t0}$	Módulo de elasticidade $E$
$E_{t1}$	AISC (2005) e CRC (Galambos, 1998): Equações (2.20a-b) e (2.21a-b)
$E_{t2}$	CRC (Galambos, 1998): Equação (2.21a-b)
$E_{t3}$	Ziemian e McGuire (2002): Equações (2.22), (2.23) e (2.24)

## 4.2 Colunas Isoladas

Nos projetos estruturais, a flexão em torno do eixo de menor inércia geralmente está relacionada com as colunas da estrutura. O conhecimento do comportamento de tal membro estrutural nessa situação é, então, de fundamental importância. Nesse sentido, esta seção tem como objetivo validar as estratégias propostas neste trabalho através da análise inelástica de três colunas com diferentes condições de apoio e carregamentos, e que atuam de maneira isolada.

### 4.2.1 Coluna Engastada-Livre

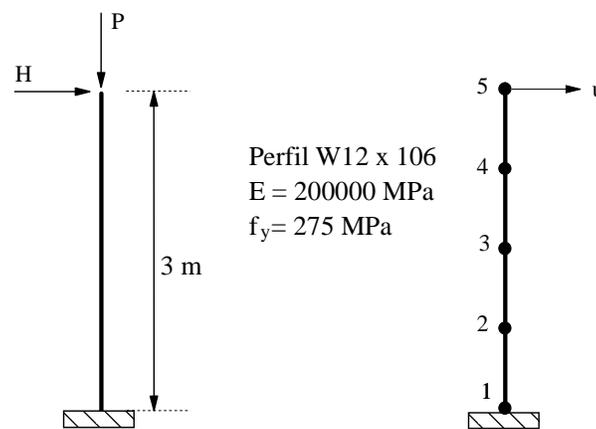
Seja a coluna engastada-livre submetida a uma carga vertical permanente  $P$ , e uma carga horizontal variável  $H$  aplicada no plano da seção transversal, perpendicularmente ao eixo de menor inércia, conforme ilustra a Figura 4.2. Esse exemplo também foi analisado por Zubydan (2011) para validar suas formulações numéricas. Nessa mesma figura, são mostrados ainda os dados referentes ao material e à geometria da coluna, além da discretização em elementos finitos.

Investigou-se o comportamento da coluna para três níveis do carregamento permanente  $P$ : 20%, 40% e 60% da carga axial de escoamento,  $P_y$ .

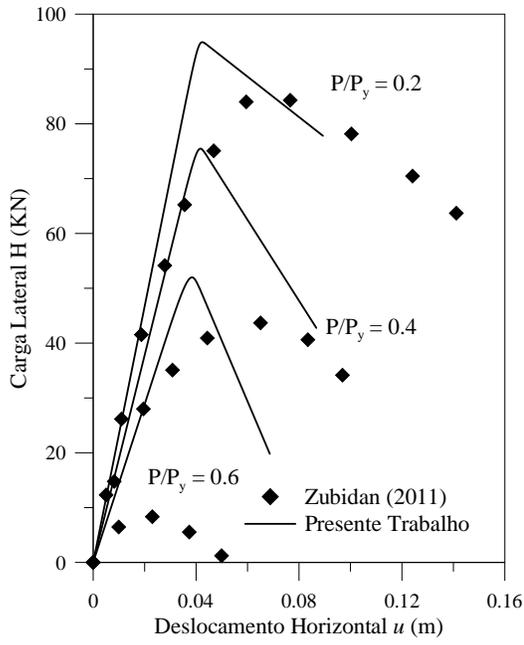
Controlando o deslocamento horizontal  $u$  no topo da coluna foram obtidas as trajetórias de equilíbrio ilustradas nas Figuras 4.3 e 4.4. Na Figura 4.3, os resultados foram obtidos considerando a formulação PHF-1, enquanto a resposta encontrada com a formulação PHF-2 é exibida na Figura 4.4. Para validar os resultados encontrados são empregadas soluções indicadas por Zubydan (2011), que utilizou o método da zona plástica. Quando se adotou a formulação PHF-1, o modelo de degradação da rigidez parabólico (Equação 3.23a) foi usado. No caso da formulação PHF-2, tensões residuais foram estabelecidas seguindo as recomendações do ECCS (1983). A superfície de resistência Orbison (1982) modificada foi escolhida, e obtiveram-se os resultados variando o modelo representativo do módulo tangente.

Analisando as trajetórias encontradas, independentemente da formulação adotada, pode-se concluir que o módulo tangente  $E_{t3}$  é o mais eficaz na previsão da carga limite. Os outros modelos superestimam a carga limite, principalmente para os valores mais elevados da relação  $P/P_y$ .

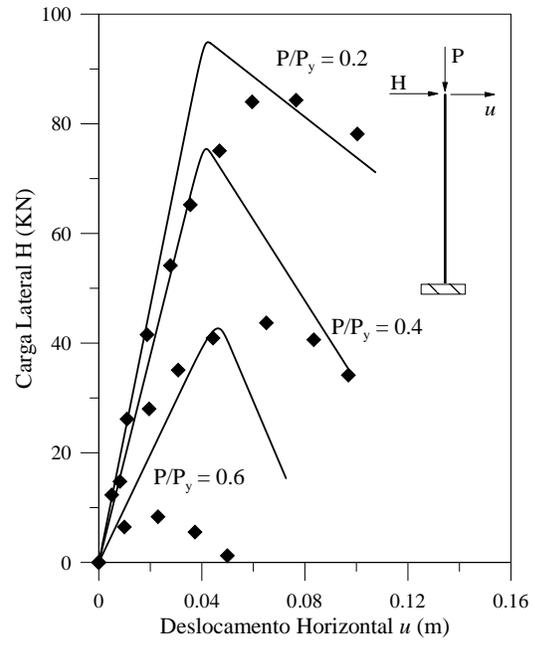
Sendo assim, mantendo o módulo tangente  $E_{t3}$ , foi feita outra análise variando-se as superfícies de resistência. Os resultados obtidos estão representados na Figura 4.5. Como pode ser constatado, os resultados são bastante próximos para ambas as superfícies de resistência tanto para a formulação PHF-1 (Figura 4.5a) quanto para a PHF-2 (Figura 4.5b).



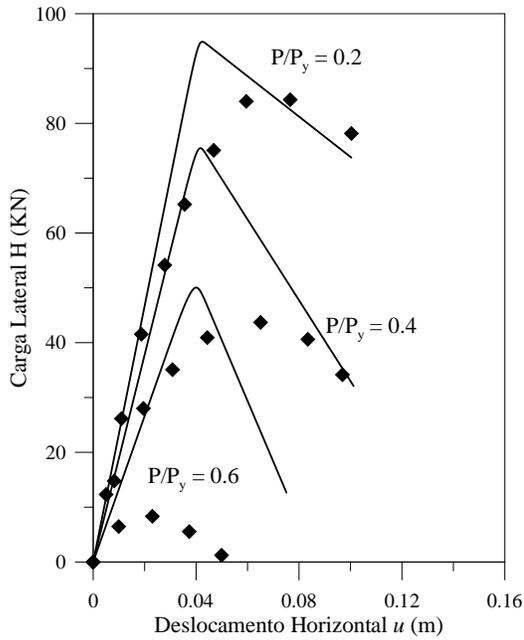
**Figura 4.2** Coluna engastada-livre e sua discretização em elementos finitos



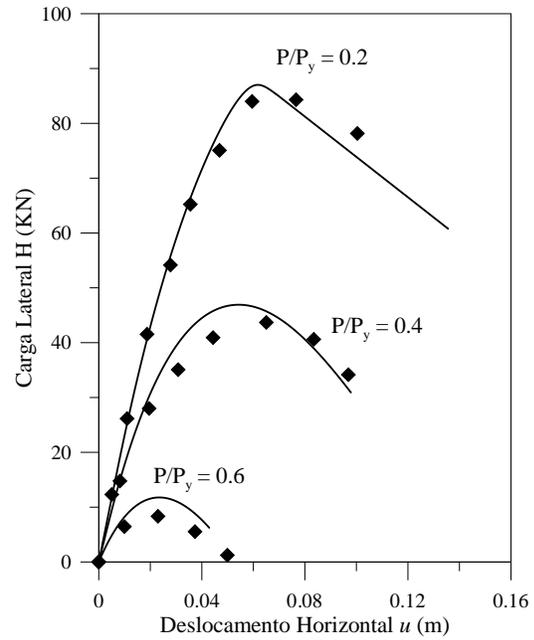
a) Módulo tangente  $E_{t0}$



b) Módulo tangente  $E_{t1}$

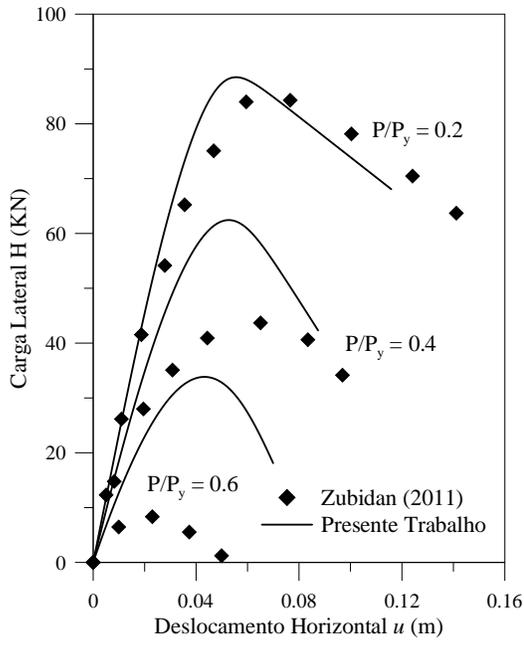


c) Módulo tangente  $E_{t2}$

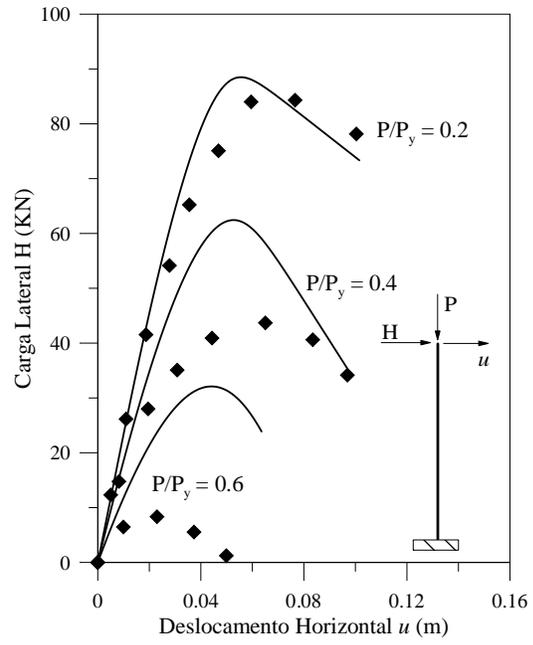


d) Módulo tangente  $E_{t3}$

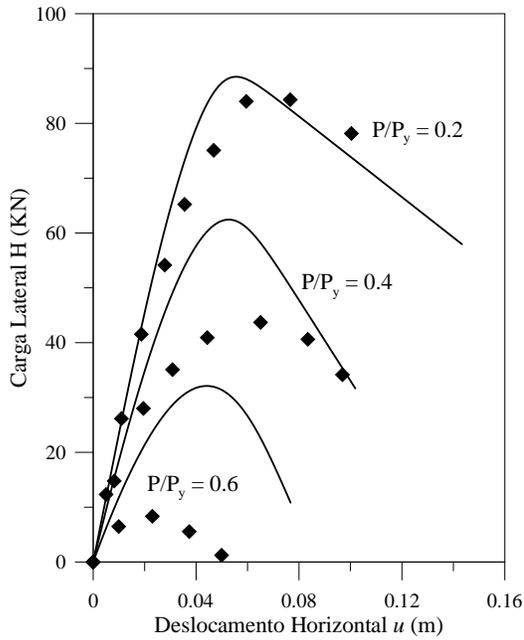
**Figura 4.3** Trajetórias de equilíbrio da coluna: uso da formulação PHF-1



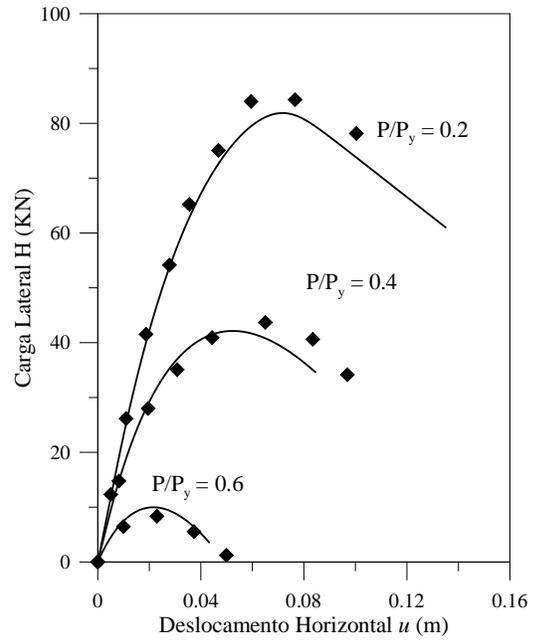
a) Módulo tangente  $E_{t0}$



b) Módulo tangente  $E_{t1}$

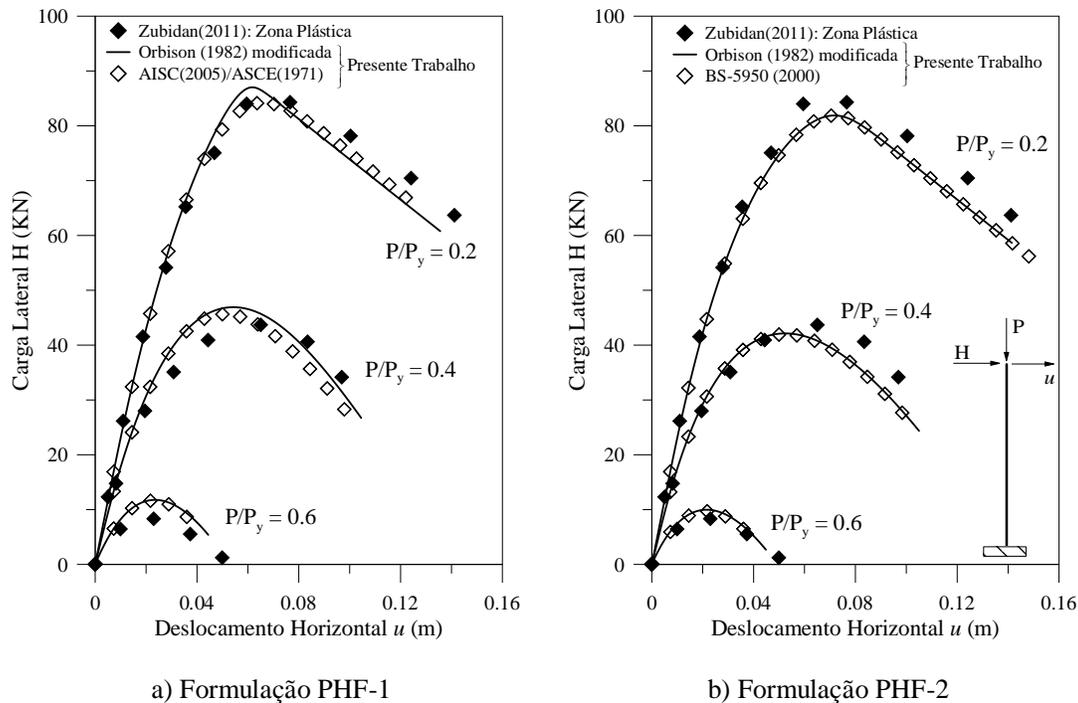


c) Módulo tangente  $E_{t2}$



d) Módulo tangente  $E_{t3}$

**Figura 4.4** Trajetórias de equilíbrio da coluna: uso da formulação PHF-2



**Figura 4.5** Trajetórias de equilíbrio para diferentes superfícies de resistência

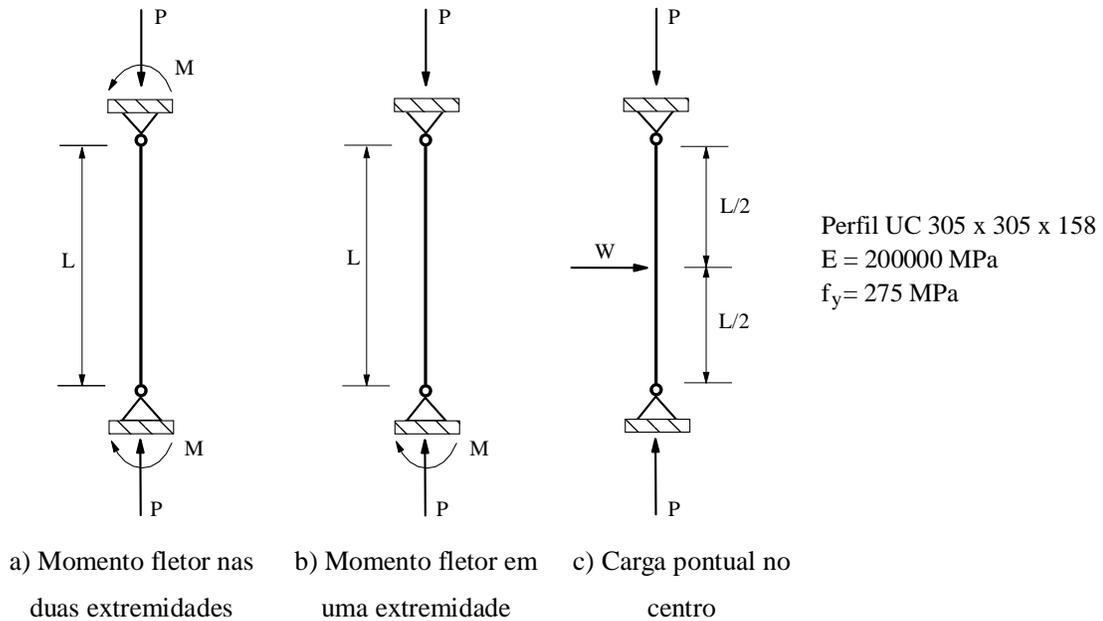
## 4.2.2 Coluna Biapoiada

A segunda coluna estudada é birrotulada e, assumindo uma carga axial permanente  $P$  atuando nas extremidades da coluna, três condições de carregamento são avaliadas: momento fletor variável atuando nas duas extremidades (Figura 4.6a), momento fletor variável atuando apenas em uma extremidade (Figura 4.6b), e carga horizontal variável aplicada no meio da coluna como mostra a Figura 4.6c. A flexão da coluna em todos os três casos ocorrerá em torno do eixo de menor inércia.

Dez elementos finitos são usados na discretização da coluna. Os dados da seção transversal e do material utilizado também são apresentados na Figura 4.6. Nas análises, utiliza-se a formulação inelástica PHF-2 juntamente com a superfície de resistência recomendada pela norma BS 5950; tensões residuais indicadas no ECCS (1983) são adotadas.

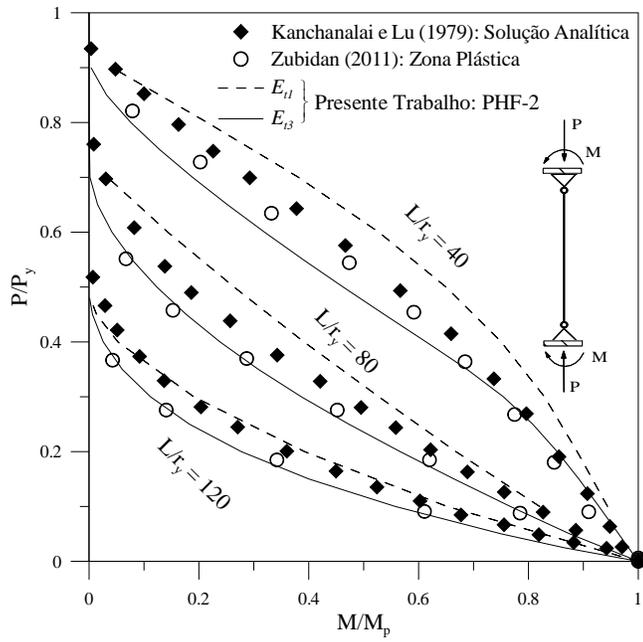
As curvas de interação entre momento e esforço normal para cada uma dessas colunas investigadas são ilustradas nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9. O estudo foi feito considerando o parâmetro de esbeltez  $L/r_y$  (sendo  $L$  o comprimento da coluna e  $r_y$  o raio de giração) igual a 40, 80 e 120. São feitas análises adotando os módulos tangentes  $E_{t1}$  e  $E_{t3}$ . Com a finalidade de validar os resultados, empregam-se soluções analíticas desenvolvidas

por Kanchanalai e Lu (1979). Para o caso da coluna biapoiada com momento nas duas extremidades (Figura 4.6a), também se utiliza os resultados obtidos por Zubidan (2011).

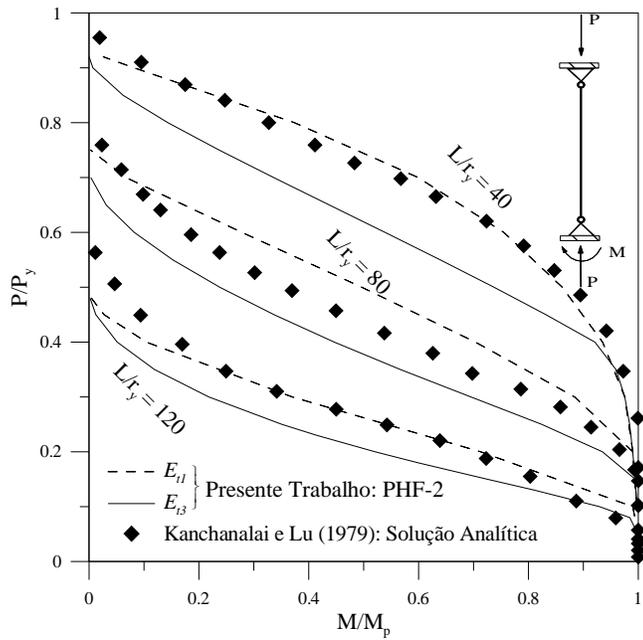


**Figura 4.6** Coluna biapoiada com diferentes condições de carregamento

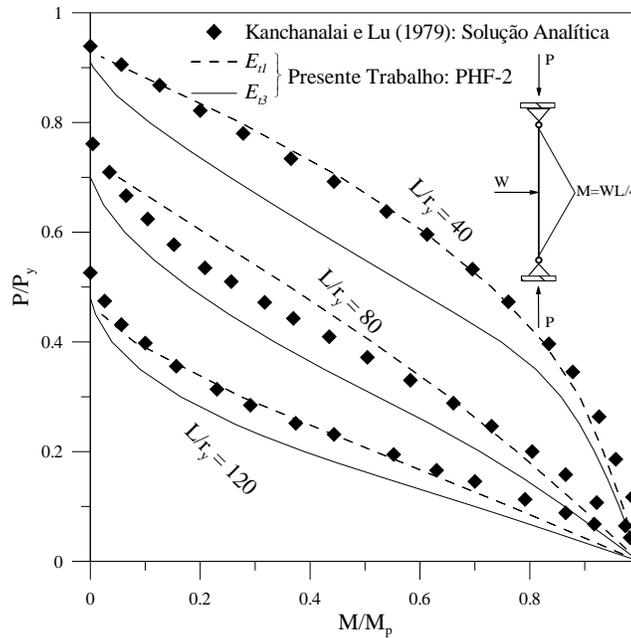
Na Figura 4.7, observa-se que, para  $L/r_y = 120$ , ao se utilizar o módulo tangente  $E_{t1}$ , obtém-se uma curva de interação quase coincidente com a solução analítica. Porém, para parâmetros de esbeltez menores, a resistência da coluna é superestimada. Por sua vez, o módulo tangente  $E_{t3}$ , em todas as situações, fornece curvas conservadoras em relação à solução analítica, e mais exatas quando comparadas à solução obtida por Zubidan (2011) com o método da zona plástica. Isso também é verificado nas demais análises, ou seja, variando o carregamento, como pode ser visto nas Figuras 4.8 e 4.9. Nesses casos, com o  $E_{t1}$ , obtêm-se bons resultados também para  $L/r_y = 40$ ; porém, para  $L/r_y = 80$  a resistência ainda é superestimada.



**Figura 4.7** Curvas de interação da coluna biapoiada com momento nas duas extremidades



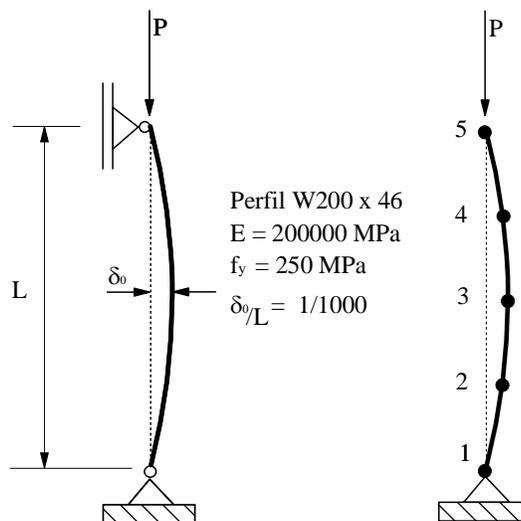
**Figura 4.8** Curvas de interação da coluna biapoiada com momento em uma extremidade



**Figura 4.9** Curvas de interação da coluna biapoçada sob carga horizontal no centro

### 4.2.3 Coluna Biapoçada com Curvatura Inicial

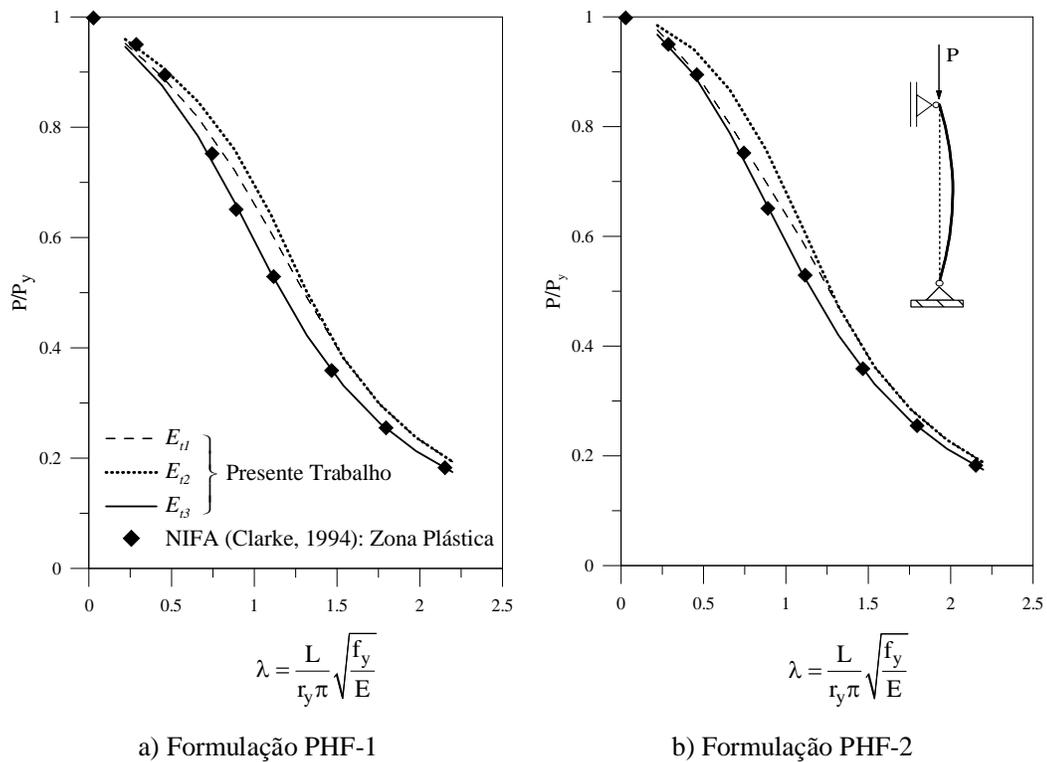
A última coluna isolada a ser estudada é biapoçada com certa curvatura inicial como apresenta a Figura 4.10. As propriedades físicas e geométricas, bem como o carregamento aplicado na coluna, também são mostradas na Figura 4.10. Assume-se que a imperfeição inicial seja senoidal com amplitude  $L/1000$  na direção do eixo de menor inércia.



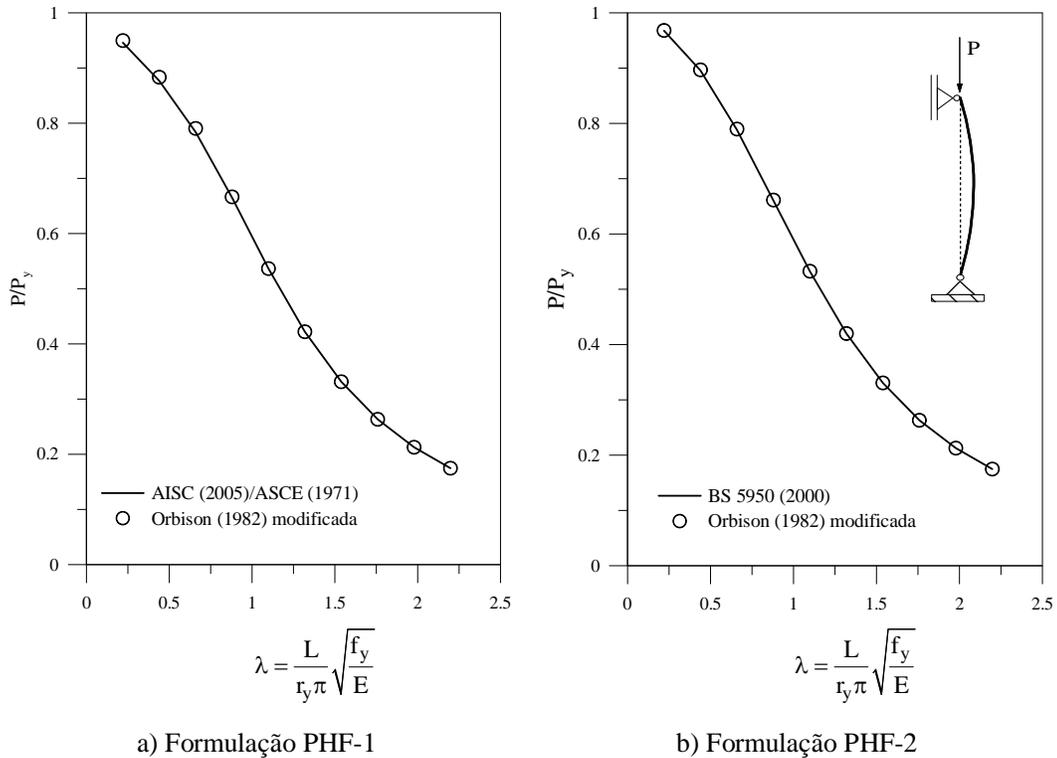
**Figura 4.10** Coluna biapoçada com curvatura inicial e sua discretização em elementos finitos

A discretização é feita com quatro elementos finitos. O estudo foi realizado alterando-se o comprimento da coluna, de forma que o parâmetro de esbeltez da coluna,  $L/r_y(f_y/E)^{0.5}$ , variasse de 0 a 2.5, aproximadamente. A carga limite da coluna foi obtida em cada situação e a sua variação com o índice de esbeltez é ilustrada na Figura 4.11 para as duas formulações de elementos finitos usadas neste trabalho. Os valores dessa carga estão adimensionalizados pela carga axial de escoamento. Na formulação PHF-1, adotou-se o modelo de degradação da rigidez parabólico, com início de escoamento em  $\alpha = 0.5$ , e a superfície de resistência indicada pelas normas AISC (2005)/ASCE (1971). Por outro lado, na formulação PHF-2 adotou-se a tensão residual igual a 30% do valor da tensão de escoamento, e a superfície de resistência da norma BS 5950 (2000). Novamente, os resultados mostrados na Figura 4.11 apontam o módulo tangente proposto por Ziemian e McGuire (2002),  $E_{t3}$ , como o que melhor representa o comportamento da coluna em ambas as formulações. Utilizando os módulos  $E_{t1}$  e  $E_{t2}$ , a carga crítica  $P$  é superestimada.

Avaliou-se também a resposta estrutural obtida usando o módulo tangente  $E_{t3}$  juntamente com a superfície de resistência proposta por Orbison (1982) modificada. Os resultados apresentados na Figura 4.12 mostram que, usando essa superfície, a eficácia do módulo  $E_{t3}$  é mantida.



**Figura 4.11** Curvas obtidas para a coluna com curvatura inicial



**Figura 4.12** Variação da carga limite com a esbelteza da coluna

### 4.3 Pórticos

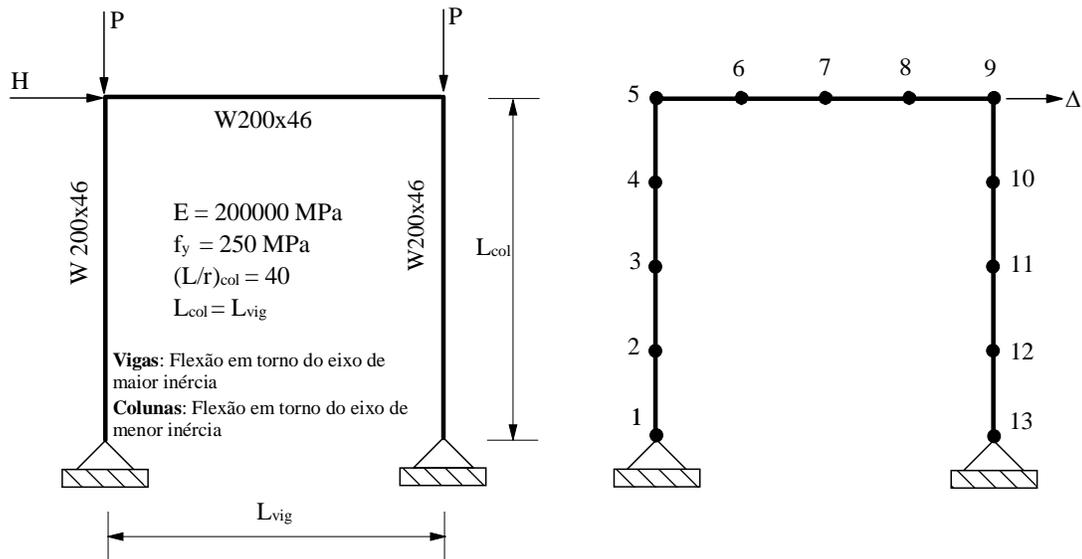
Nesta seção fazem-se análises inelásticas de sistemas aporticados compostos por membros estruturais sujeitos à flexão em torno do eixo de menor inércia. Três pórticos são estudados: um portal simples, um pórtico de dois andares e o terceiro, com uma forma treliçada. Em todas as análises desta seção adotou-se como estratégia de incremento automático do parâmetro de carga o deslocamento generalizado, e para controle do processo iterativo, a norma mínima dos deslocamentos residuais foi a estratégia utilizada. Nas análises realizadas com a formulação PHF-1, adotou-se o modelo de degradação da rigidez parabólico, com início de escoamento em  $\alpha = 0.5$ .

#### 4.3.1 Portal Simples

O portal simples apresentado na Figura 4.13 faz parte de um conjunto de pórticos estudados por El-Zanaty *et al.* (1980). Os dados sobre a geometria, seção transversal, propriedades do material e carregamento também são indicados nessa figura. Quatro elementos finitos foram utilizados na discretização de cada membro estrutural; as colunas

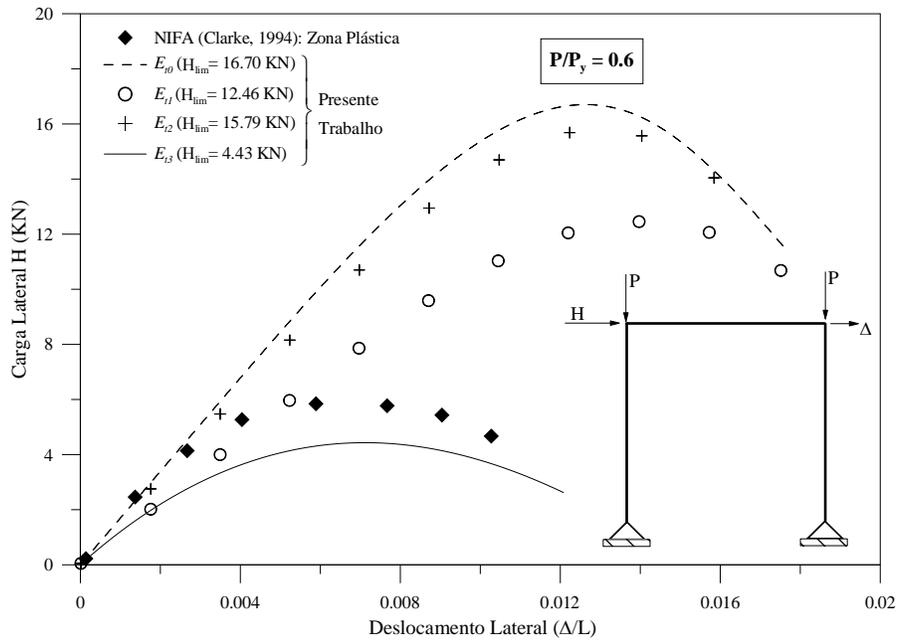
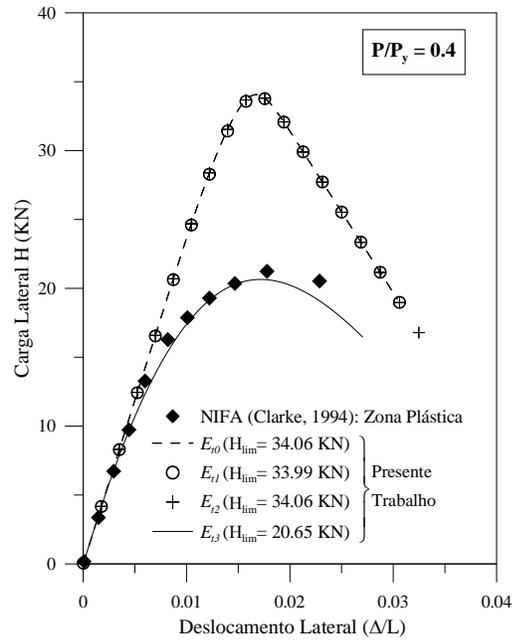
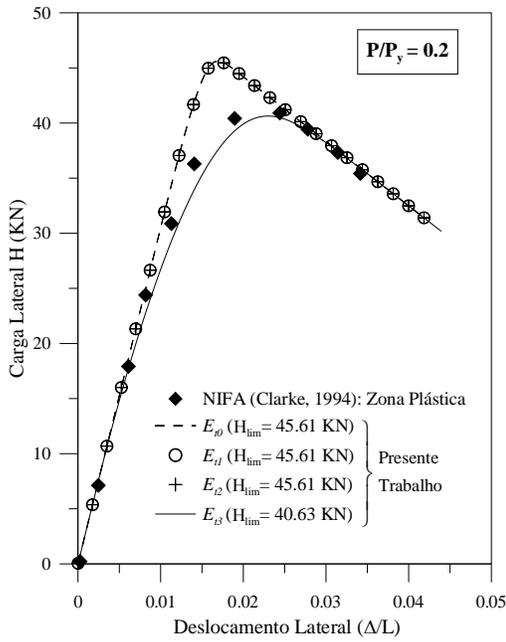
estão orientadas na direção do eixo de menor inércia, e as vigas, sofrem flexão em torno do eixo de maior inércia.

As trajetórias de equilíbrio são traçadas controlando o deslocamento horizontal no topo da coluna à direita para três intensidades da carga permanente  $P$ : 20%, 40% e 60% de  $P_y$  (carga axial de escoamento). Nas Figuras 4.14 e 4.15 são mostrados os resultados obtidos com as formulações PHF-1 e PHF-2, respectivamente. A superfície de resistência indicada nas normas AISC (2005)/ASCE (1971) é usada na formulação PHF-1, e a norma BS 5950 (2000) é adotada na formulação PHF-2. Nessa segunda formulação a tensão residual é considerada como 30% da tensão de escoamento. Validam-se os resultados com as respostas obtidas por Ziemian e McGuire (2002). Esses autores utilizaram o programa NIFA (Clarke, 1994) e o método da zona plástica.

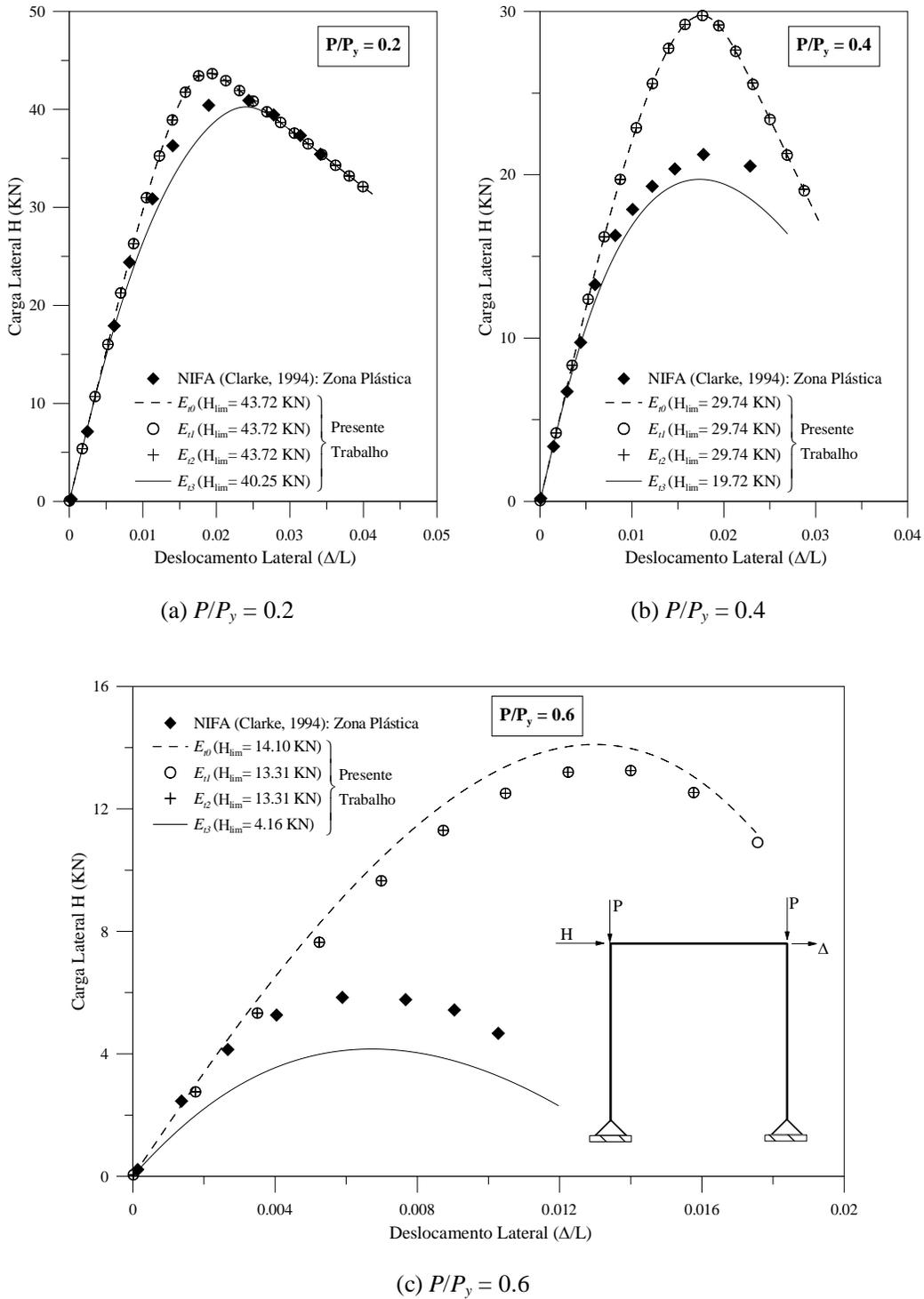


**Figura 4.13** Portal simples: geometria, carregamento e discretização em elementos finitos

Em todas as análises do portal simples, observa-se que a trajetória de equilíbrio que mais se aproxima da resposta obtida por Ziemian e McGuire (2002) é a que foi obtida com o módulo tangente  $E_{t3}$ . Mesmo para  $P/P_y = 0.6$ , esse módulo, diferentemente dos outros, fornece resultados conservadores e a favor da segurança. Vale ressaltar que, para  $P/P_y = 0.2$  e  $P/P_y = 0.4$ , os módulos tangentes  $E_{t0}$ ,  $E_{t1}$  e  $E_{t2}$  fornecem resultados aproximadamente iguais. Nesses casos, a carga crítica do portal simples é superestimada em ambas as formulações.



**Figura 4.14** Trajetórias de equilíbrio para o pórtico simples: uso da formulação PHF-1



**Figura 4.15** Trajetórias de equilíbrio para o pórtico simples: uso da formulação PHF-2

Na formulação PHF-1 também se avaliou a influência do modelo escolhido para simular o efeito conjunto do momento fletor e do esforço normal na degradação da rigidez. Os quatro modelos matemáticos para descrever o fator  $\psi$  responsável por tal simulação,

descritos no Capítulo 3 pelas Equações (3.34a-d), foram testados. Para facilitar a apresentação dos resultados esses modelos são citados conforme a notação indicada na Tabela 4.2.

A variação do deslocamento  $\Delta$  no topo do pórtico com o acréscimo do carregamento é mostrada nas Figuras 4.16a-c, que mostram, respectivamente, os resultados considerando a carga permanente igual a  $0.2P_y$ ,  $0.4P_y$  e  $0.6P_y$ . Destaca-se novamente o uso do módulo tangente modificado  $E_{t3}$ . Nota-se que os valores determinados para a carga crítica são bem próximos para os diversos modelos de  $\psi$ , e estão de acordo com a solução obtida pelo método da zona plástica. No entanto, observa-se que o modelo logarítmico ( $\psi_4$ ) gerou resultados ligeiramente mais conservadores em relação aos demais.

**Tabela 4.2** Notação adotada para o parâmetro  $\psi$

Notação	Descrição/ Equação
$\psi_1$	$\psi = 4\alpha(1-\alpha)$ , com início de escoamento em $\alpha = 0.5$ ( Eq. 3.34a)
$\psi_2$	$\psi = (1-\alpha)/0.3$ , com início de escoamento em $\alpha = 0.7$ ( Eq. 3.34b)
$\psi_3$	$\psi = (-\alpha^2+1.4\alpha-0.4)/0.09$ , com início de escoamento em $\alpha = 0.7$ ( Eq. 3.34c)
$\psi_4$	$\psi = (-2.7243\alpha \ln(\alpha))$ , com início de escoamento em $\alpha = 0.39$ ( Eq. 3.34d)

### 4.3.2 Pórtico de Dois Andares

A geometria do pórtico de dois andares estudado nessa seção foi proposta originalmente por Iffland e Birnstiel (1982). Posteriormente, Ziemian e Miller (1997) orientaram as colunas desse pórtico de forma que a flexão ocorresse em torno do eixo de menor inércia, e realizaram análises inelásticas baseadas nos métodos da rótula plástica e zona plástica. Como pode ser visto na Figura 4.17, o pórtico está submetido a cargas uniformemente distribuídas que atuam nas vigas. Informações sobre a geometria, o material e os perfis utilizados também são fornecidos na figura indicada. Adotaram-se quatro elementos finitos em cada membro estrutural.

Na Figura 4.18 é mostrada a variação do deslocamento horizontal  $\Delta_r$  no topo da terceira coluna à direita com o carregamento. Foram usadas as formulações PHF-1 e PFH-2, sendo a superfície de resistência definida pelas normas AISC (2005)/ASCE (1971) usada na primeira delas, e a superfície da norma BS 5950 (2000) utilizada na outra. A comparação é feita com os resultados obtidos por Ziemian e Miller (1997) com o programa NIFA (Clarke, 1994). Ressalta-se, mais uma vez, a eficiência do módulo  $E_{t3}$  na simulação

do comportamento inelástico do pórtico de dois andares, produzindo resultados bastante próximos daqueles obtidos com o método da zona plástica. O fator de carga limite encontrado em cada caso analisado é apresentado na Tabela 4.3. Nota-se que a formulação PHF-2 gerou resultados melhores em comparação com a formulação PHF-1.

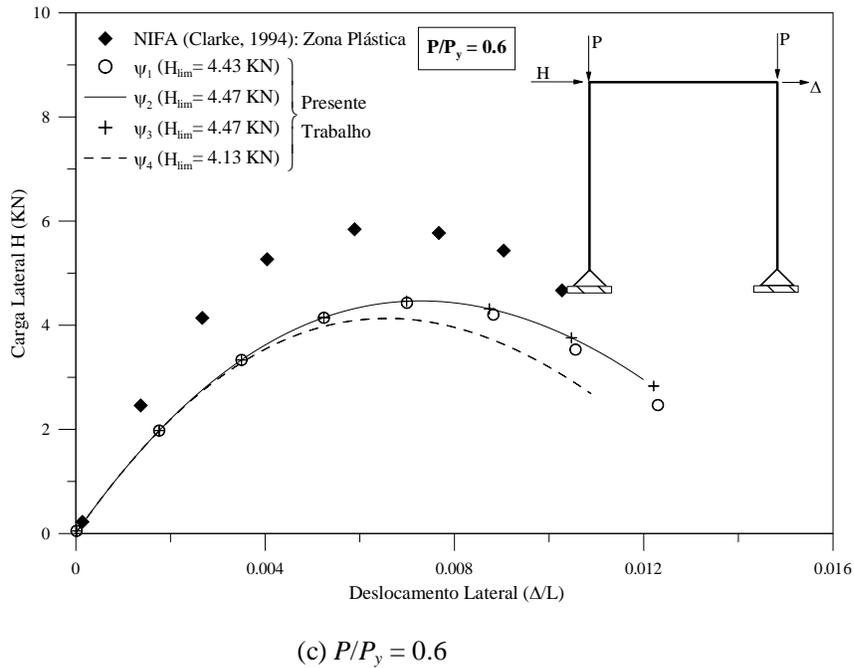
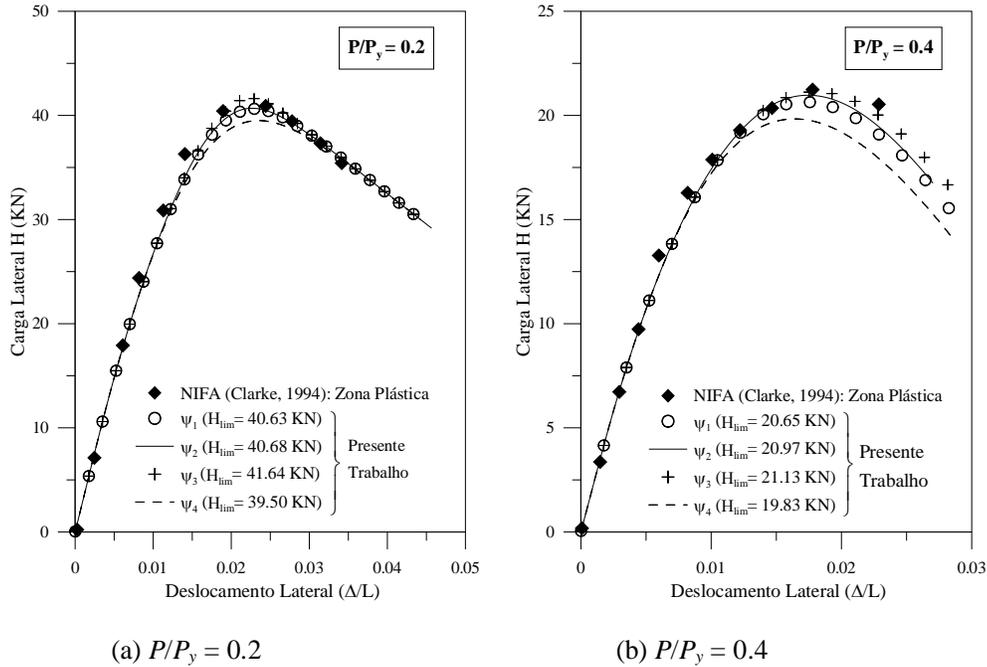


Figura 4.16 Trajetórias de equilíbrio do portal simples: uso da formulação PHF-1

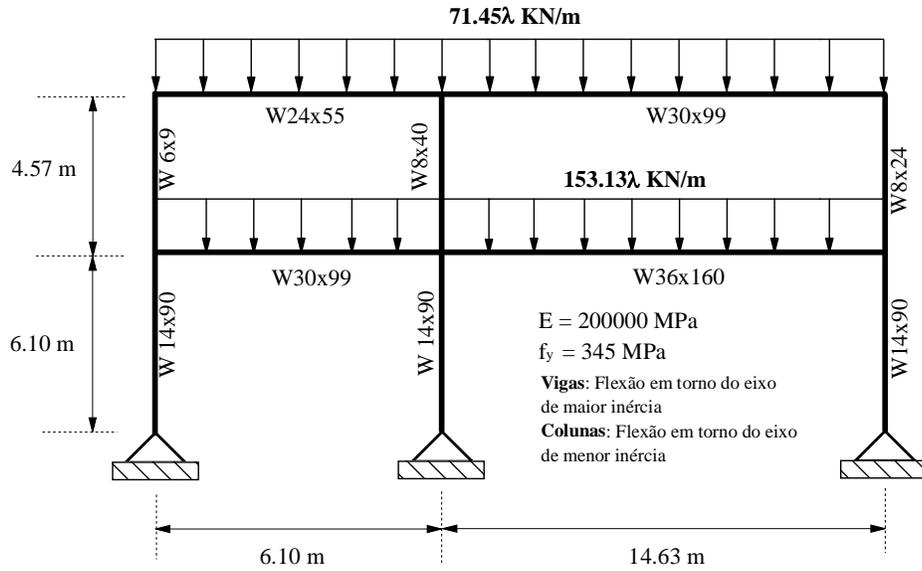


Figura 4.17 Pórtico de dois andares: geometria e carregamento

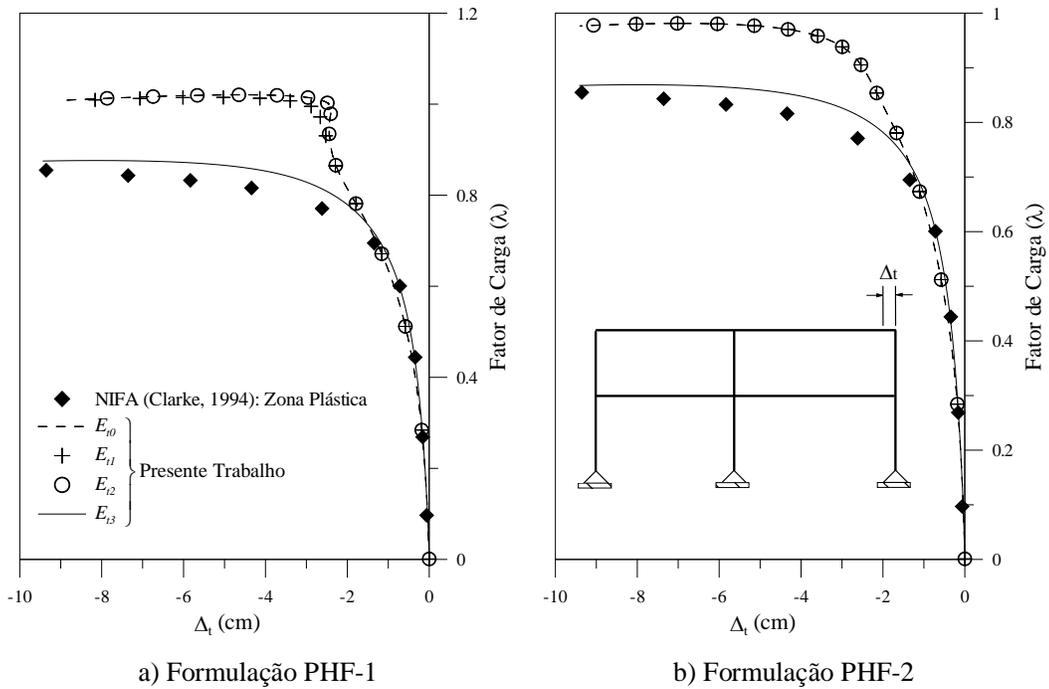
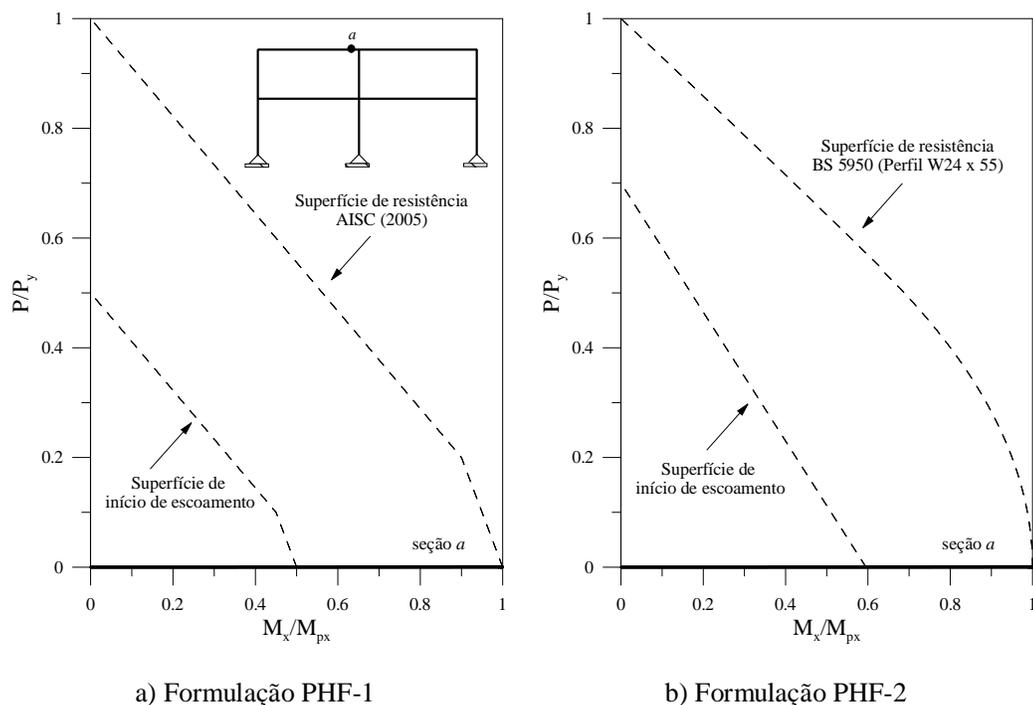


Figura 4.18 Trajetórias de equilíbrio do pórtico de dois andares

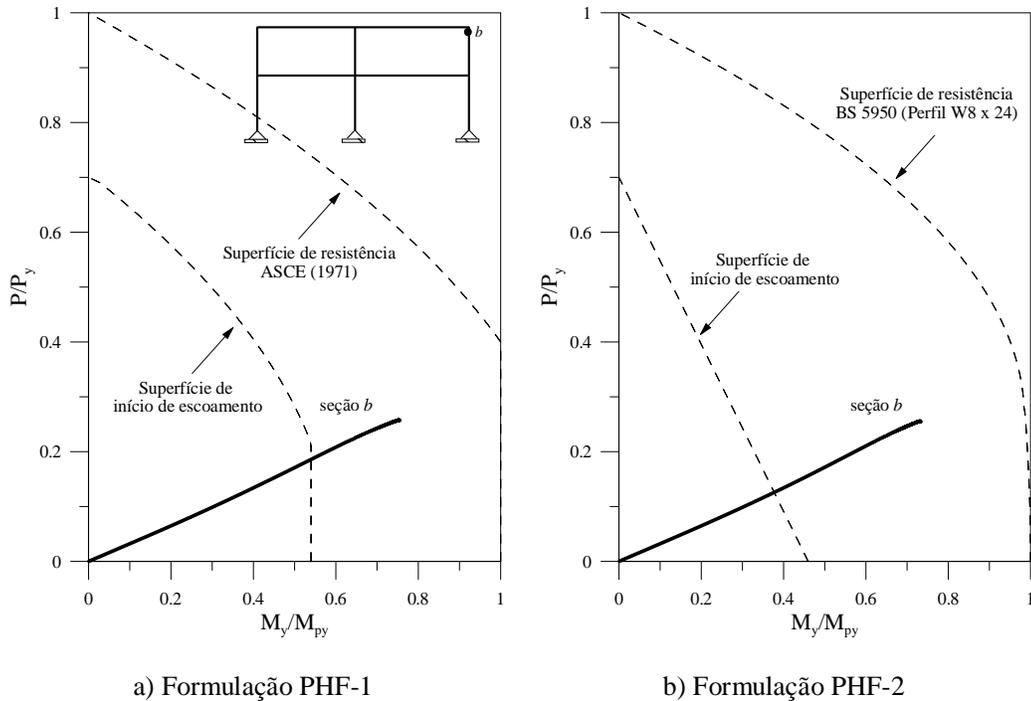
**Tabela 4.3** Fator de carga limite ( $\lambda_{lim}$ )

Módulo	PHF-1	PHF-2
$E_{t0}$	1.02	0.981
$E_{t1}$	1.01	0.981
$E_{t2}$	1.02	0.981
$E_{t3}$	0.876	0.868
Zona Plástica	0.860	

Utilizando o módulo tangente  $E_{t3}$  também se obteve a variação das forças internas (esforço normal e momento fletor) desenvolvidas nas seções transversais da estrutura durante o processo de carregamento. Essa variação é exibida nas Figuras 4.19 e 4.20, que mostram o comportamento obtido com as formulações PHF-1 e PHF-2, respectivamente. As seções escolhidas estão ilustradas nessas mesmas figuras. Analisando os resultados, nota-se que na seção *a* (viga) apenas o momento fletor é predominante. Na formulação PHF-1, esse momento atinge a superfície de resistência causando a plastificação total da seção com a formação da rótula plástica. Na seção *b* (coluna) tanto o momento fletor quanto o esforço normal contribuem, evidentemente, para o desenvolvimento da plastificação; porém, não há a formação da rótula plástica.



**Figura 4.19** Distribuição de forças internas na seção *a* da viga



**Figura 4.20** Distribuição de forças internas na seção *b* da coluna

Para concluir esta seção, avaliou-se o grau de plastificação dos membros da estrutura no instante de colapso. De acordo com Silva (2009), o grau de plastificação estabelece uma informação útil referente à localização de seções críticas ou regiões com alto grau de plastificação nos sistemas estruturais. Com a formulação PHF-1, esse índice é calculado pela relação:

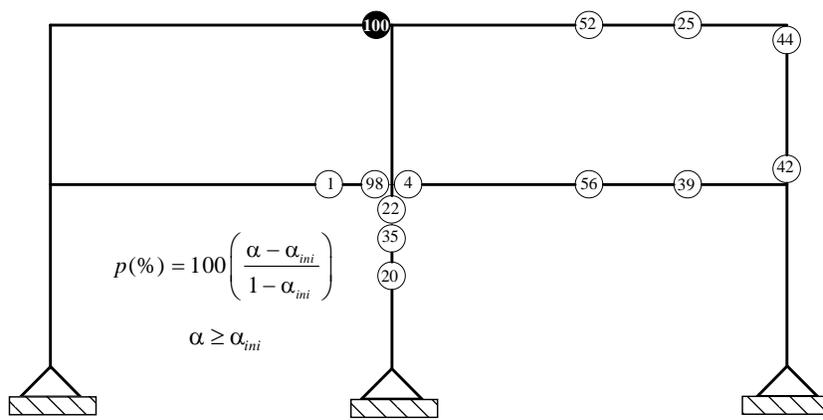
$$p(\%) = 100 \left( \frac{\alpha - \alpha_{ini}}{1 - \alpha_{ini}} \right), \text{ para } \alpha \geq \alpha_{ini} \quad (4.1)$$

sendo  $\alpha$  o índice que avalia a interação entre o esforço normal e momento fletor na seção. A obtenção desse índice foi discutida na Subseção 3.3.1. O termo  $\alpha_{ini}$  representa o valor no qual se inicia o escoamento da seção e depende da escolha do modelo usado para representar  $\psi$ . Cabe lembrar que os modelos matemáticos disponíveis no CS-ASA (Silva, 2009) são descritos nas Equações (3.34a-d). Na formulação PHF-2, para o cálculo do índice de escoamento, usa-se a seguinte expressão:

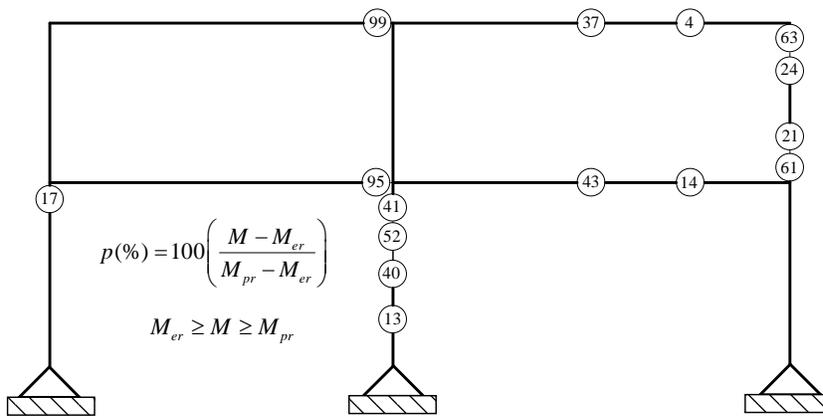
$$p(\%) = 100 \left( \frac{M - M_{er}}{M_{pr} - M_{er}} \right), \text{ para } M_{er} \geq M \geq M_{pr} \quad (4.2)$$

sendo  $M_{er}$  o momento de início de escoamento e  $M_{pr}$  o momento plástico reduzido, já explicados na Subseção 3.3.2.

A Figura 4.21 exibe o grau de plastificação nas seções do pórtico. Esse valor é informado no interior do círculo que indica a seção onde houve escoamento do material. As demais seções permaneceram em regime elástico. Ao avaliar os resultados, observa-se que as duas formulações estimam igualmente as seções mais plastificadas ( $p > 90\%$ ). A formulação PHF-1 prevê a formação de uma rótula plástica na viga do andar superior como indica a Figura 4.21a.



a) Formulação PHF-1

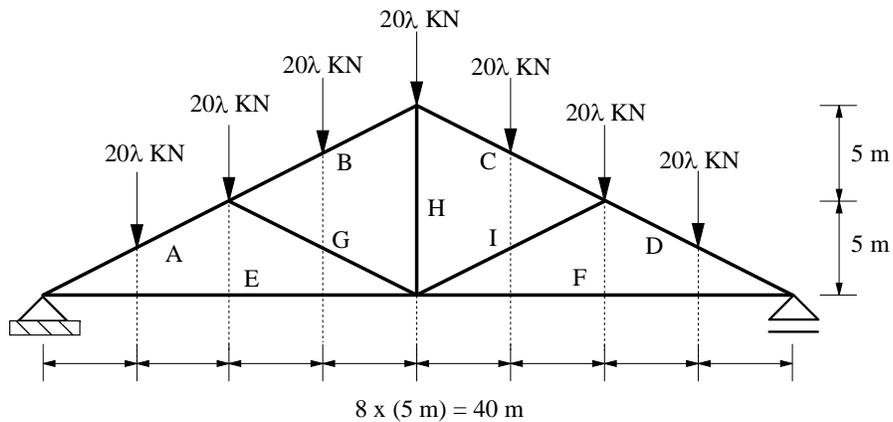


b) Formulação PHF-2

**Figura 4.21** Plastificação da seção transversal no pórtico de dois andares

### 4.3.3 Pórtico Treliçado

O último problema a ser analisado neste capítulo é ilustrado na Figura 4.22. Trata-se de um pórtico treliçado que será referido, aqui, simplesmente como treliça, embora os nós sejam rígidos. O carregamento aplicado e a geometria da estrutura também são mostrados na Figura 4.22. Todos os membros da treliça estão orientados na direção do eixo de menor inércia. Os perfis que a compõem, bem como a tensão de escoamento em cada um dos membros são informados na Tabela 4.4. Assume-se o módulo de elasticidade igual a 200000 MPa.



**Figura 4.22** Pórtico treliçado perfeito: geometria e carregamento

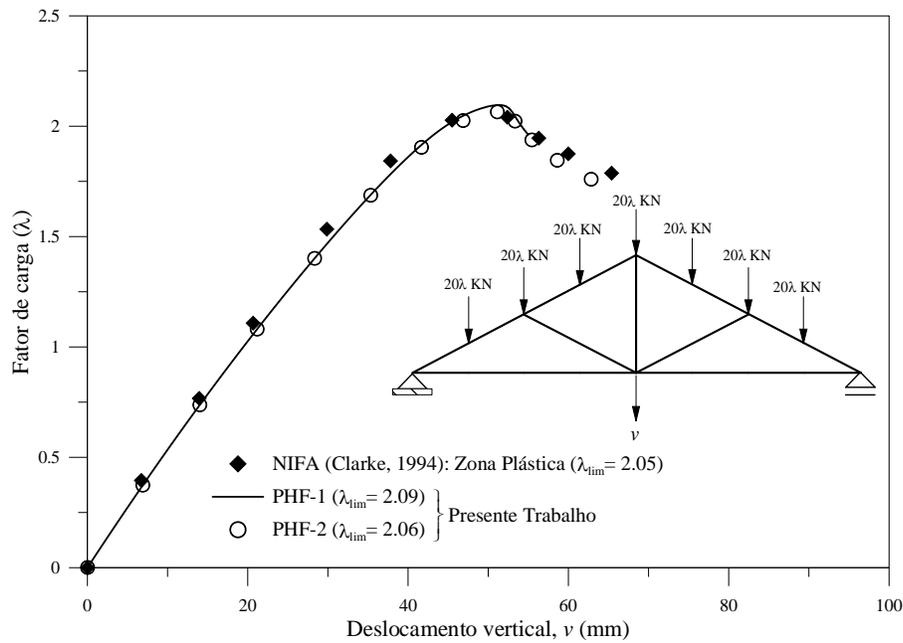
**Tabela 4.4** Propriedades dos membros estruturais do pórtico treliçado

Membro	Perfil	Tensão de Escoamento
A e D	250 UC 72.9	250 MPa
B e C	200 UC 52.2	250 MPa
E, F e H	100 UC 14.8	260 MPa
G e I	150 UC 23.4	260 MPa

Seguindo o estudo feito por Clarke (1994) para avaliar a redução na resistência da estrutura devido às imperfeições, serão consideradas duas hipóteses: (i) treliça geometricamente perfeita sem tensões residuais e; (ii) treliça geometricamente imperfeita com tensões residuais. Para o primeiro caso utiliza-se a formulação PHF-1 com a superfície da norma AISC (2005)/ASCE (1971) e, também, a formulação PHF-2 com a

curva de resistência da norma BS 5950 (2000). Para desconsiderar o efeito das tensões residuais, o módulo de elasticidade é mantido constante (modelo  $E_{t0}$ ).

Considerando a treliça perfeita, a trajetória de equilíbrio é obtida controlando o deslocamento vertical  $v$  do nó central inferior como mostra a Figura 4.23. Conclui-se que ambas as formulações representam de maneira eficiente o comportamento estrutural, desde que sejam adotadas superfícies de resistência adequadas para o eixo de menor inércia do perfil utilizado.

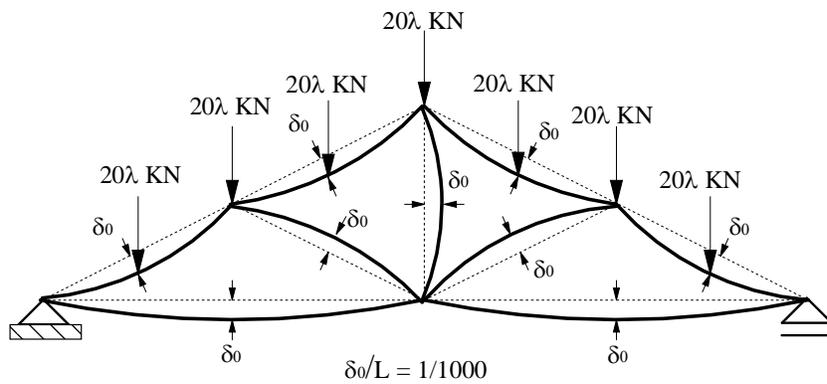


**Figura 4.23** Trajetórias de equilíbrio para a treliça geometricamente perfeita

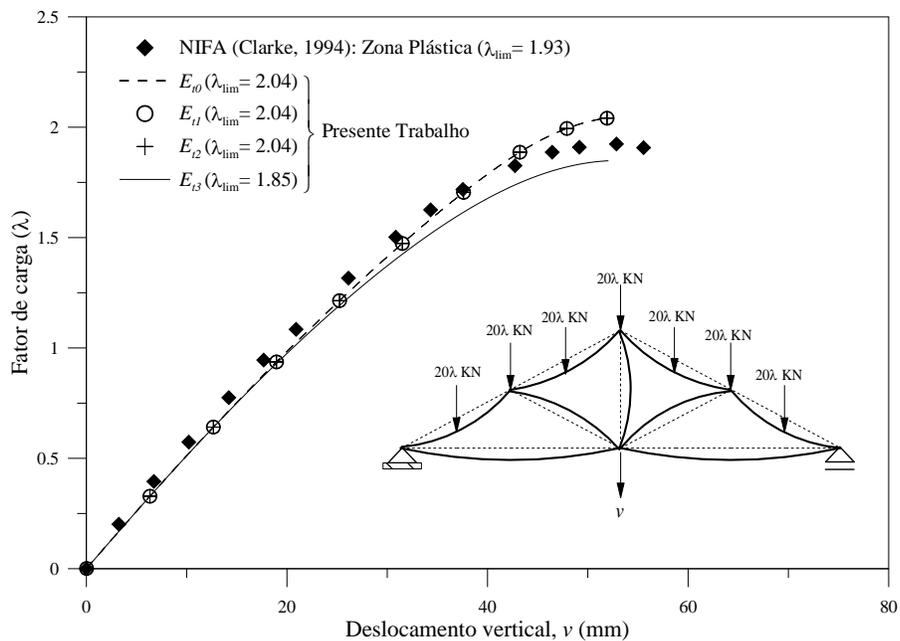
No segundo caso, a treliça é analisada com imperfeições geométricas iniciais e considerando as tensões residuais. É assumida uma imperfeição máxima  $\delta_0 = L/1000$  no centro de cada membro estrutural, como ilustra a Figura 4.24. Destaca-se que a representação das imperfeições está exagerada para facilitar a visualização. Na formulação PHF-2, adota-se as tensões residuais seguindo as recomendações do ECCS (1983), citadas na Subseção 2.4.3.

As trajetórias de equilíbrio encontradas são exibidas nas Figuras 4.25 e 4.26 para as formulações PHF-1 e PHF-2, respectivamente. Em ambas as formulações, para fatores de carga inferiores à unidade, as trajetórias obtidas com os quatro modelos do módulo tangente coincidem e, estão próximas da curva encontrada por Clarke (1994). Para valores

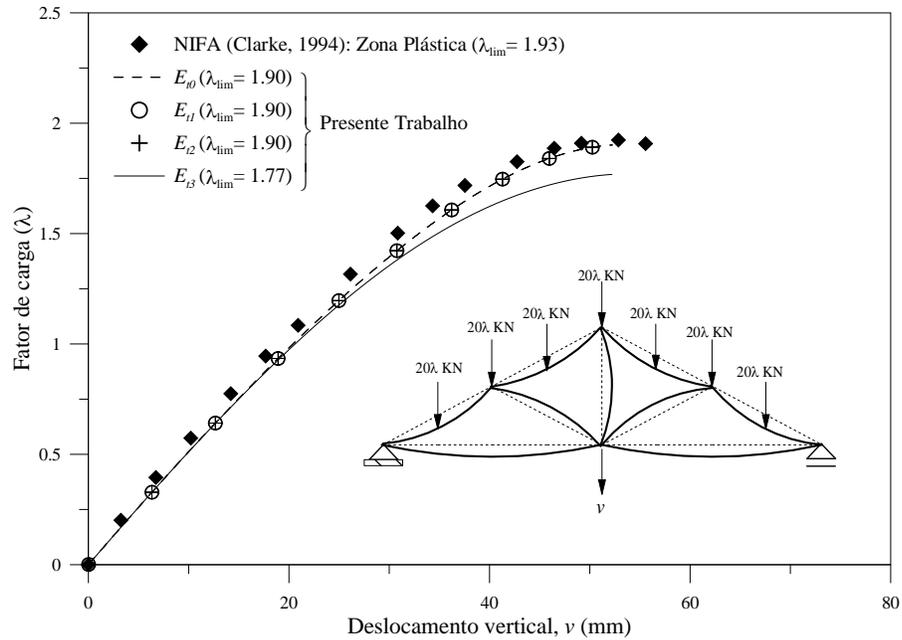
superiores, o resultado obtido com o módulo  $E_{t3}$  começa a divergir, fornecendo um fator de carga mais conservador. Na formulação PHF-1, em que as outras equações do módulo tangente superestimam a carga crítica limite da treliça, o módulo  $E_{t3}$  é o mais eficiente. Porém, na formulação PHF-2, na qual os outros módulos fornecem bons resultados,  $E_{t3}$  é o mais conservador. Aliás, como os módulos tangentes  $E_{t0}$ ,  $E_{t1}$  e  $E_{t2}$  forneceram curvas idênticas nas duas formulações estudadas, conclui-se que não houve variação do módulo de elasticidade nessas análises. Assim, creditam-se os bons resultados obtidos com os mesmos na formulação PHF-2, à consideração explícita das tensões residuais, o que não acontece na formulação PHF-1.



**Figura 4.24** Pórtico treliçado com imperfeições geométricas iniciais



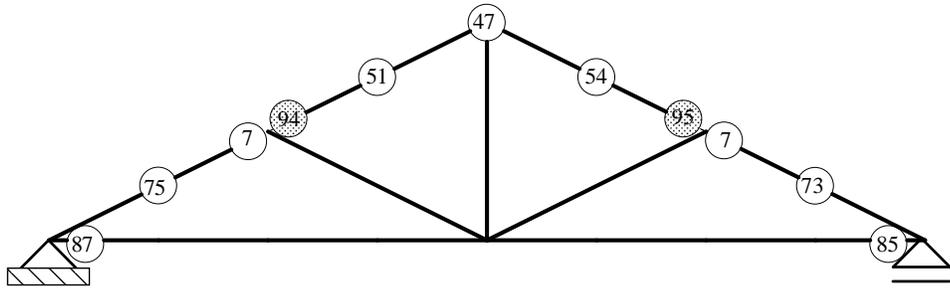
**Figura 4.25** Trajetórias de equilíbrio para a treliça imperfeita: uso da formulação PHF-1



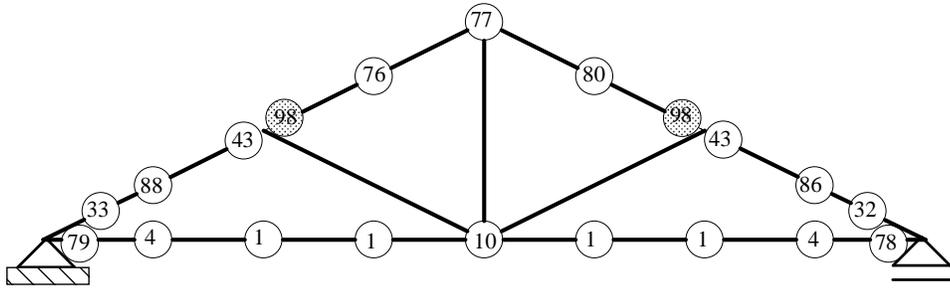
**Figura 4.26** Trajetórias de equilíbrio para a treliça imperfeita: uso da formulação PHF-2

A Figura 4.27 ilustra o grau de plastificação das seções transversais no instante em que acontece o colapso da estrutura. Observa-se que a treliça imperfeita, atinge a carga crítica sem o desenvolvimento de rótulas plásticas. Porém há seções que são indicadas nos círculos hachurados, que apresentam alto índice de plastificação. Nota-se também que a formulação PHF-2, exceto nas extremidades da barra inferior, fornece porcentagens de plastificação maiores que a formulação PHF-1.

Na mesma condição anterior, os diagramas de momento fletor e esforço normal foram obtidos e estão mostrados na Figura 4.28. A comparação é feita com valores obtidos por Clarke (1994) que usou o método da zona plástica. Observa-se que os resultados obtidos com a formulação PHF-1 são menores que os encontrados na formulação PHF-2, porém, esses valores estão em concordância com a solução de Clarke (1994).



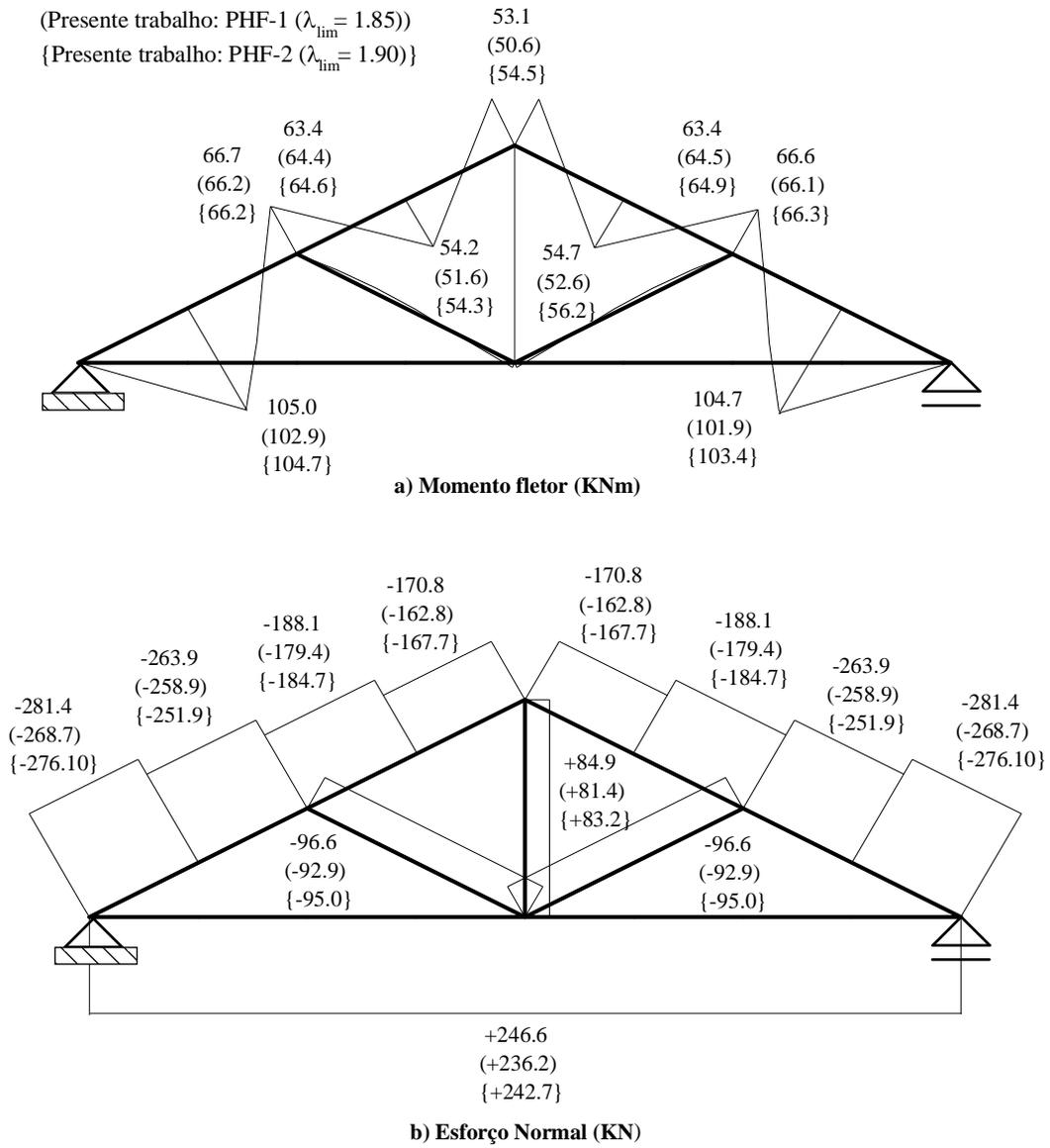
a) Formulação PHF-1:  $\lambda_{lim} = 1.85$



b) Formulação PHF-2:  $\lambda_{lim} = 1.90$

**Figura 4.27** Plastificação da seção transversal na treliça imperfeita

Clarke (1994): Zona plástica  
 (Presente trabalho: PHF-1 ( $\lambda_{lim} = 1.85$ ))  
 {Presente trabalho: PHF-2 ( $\lambda_{lim} = 1.90$ )}



**Figura 4.28** Diagramas de momento fletor e esforço normal para a treliça imperfeita

# Capítulo 5

## Considerações Finais

### 5.1 Introdução

No presente trabalho, metodologias que permitem a modelagem do comportamento inelástico de estruturas de aço, com destaque para situações onde ocorre a flexão do membro em torno do eixo de menor inércia, foram apresentadas. Os efeitos da não linearidade geométrica também foram considerados nessa modelagem.

O programa computacional CS-ASA (Silva, 2009) foi usado como base para as novas implementações e análises. Cabe esclarecer que Silva (2009) realizou apenas análises inelásticas levando em consideração a flexão em torno do eixo de maior inércia dos membros estruturais. Conforme foi citado ao longo desta dissertação, as estratégias adotadas para melhor representar a flexão do membro em torno do eixo de menor inércia consistem na consideração de superfícies de resistência apropriadas e, principalmente, na utilização do modelo de módulo tangente proposto por Ziemian e McGuire (2002). Essas técnicas foram introduzidas nas duas formulações inelásticas disponíveis no CS-ASA, que são baseadas no método da rótula plástica refinado. Ressalta-se que a flexão em torno do eixo mais fraco não é alvo de muitos estudos e uma análise inelástica nessa situação requer técnicas adequadas.

Para validar as novas estratégias adicionadas ao CS-ASA, colunas isoladas e pórticos com membros fletidos em torno do eixo de menor inércia, que apresentam solução analítica ou solução numérica pelo método da zona plástica encontrada na literatura, foram usados. As conclusões obtidas após a análise da resposta dessas estruturas investigadas, bem como algumas sugestões para trabalhos futuros, são descritas nas seções seguintes.

## 5.2 Conclusões

Avaliando os resultados apresentados no Capítulo 4, conclui-se que, na maioria das análises, a utilização de superfícies de resistência adequadas para representar o estado limite da seção transversal, em conjunto com o módulo tangente proposto por Ziemian e McGuire (2002), é necessária e foi corretamente implementada no CS-ASA. Essa afirmação se justifica, pois, em geral, os resultados obtidos com essas estratégias estiveram em concordância com as soluções analíticas ou numéricas encontradas na literatura. Além disso, mostraram-se eficientes para as duas formulações inelásticas presentes no programa: PHF-1 e PHF-2. Entretanto, salienta-se que, na maior parte dos estudos realizados, a segunda formulação forneceu resultados ligeiramente mais precisos que a primeira.

Os bons resultados conseguidos com o módulo tangente supracitado ficaram evidentes nas trajetórias de equilíbrio das estruturas investigadas. Houve uma melhoria considerável na precisão dos resultados em relação às análises feitas com outros módulos tangentes já disponíveis no CS-ASA. Os demais modelos para o módulo tangente superestimaram a carga crítica da estrutura.

Na formulação PHF-1 foi verificado que, em análises com o módulo tangente proposto por Ziemian e McGuire (2002), a variação dos diversos modelos do parâmetro de degradação da rigidez disponíveis no CS-ASA não altera de maneira significativa o valor da carga crítica do sistema.

Observou-se também que a superfície proposta por Orbison (1982) e modificada por McGuire *et al.* (2000) pode ser usada em conjunto com o módulo tangente proposto por Ziemian e McGuire (2002) nas duas formulações inelásticas. Essa superfície gerou resultados quase coincidentes com os obtidos através das superfícies recomendadas pelas normas técnicas.

Por fim, o êxito nos resultados obtidos garante a possibilidade de se realizar uma análise inelástica confiável e realística com o programa computacional CS-ASA.

## 5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Nesta seção são feitas algumas sugestões para trabalhos futuros visando ampliar as possibilidades de análise inelástica feita no CS-ASA e/ou proporcionar resultados ainda mais realísticos. Essas sugestões são destacadas a seguir:

- Consideração das ligações semirrígidas nas análises inelásticas de estruturas com membros estruturais submetidos à flexão em torno do eixo de menor inércia (King e Chen, 1994);
- Utilização de seções não compactas, levando em consideração a flambagem local em perfis (Bradford e Azhari, 1994);
- Ampliação das superfícies de resistências para tornar possível a análise inelástica de outros tipos de seção transversal, como a tubular (Duan e Chen, 1990; Meas, 2012);
- Análises inelásticas considerando a flambagem lateral por torção (Kim e Lee, 2002). Ressalta-se que a verificação desse efeito não é necessária nos membros estruturais com flexão no eixo de menor inércia;
- Análises inelásticas considerando o encruamento do aço;
- Consideração da interação entre força cortante e momento fletor nas análises inelásticas;
- Análise inelástica de estruturas mistas em aço e concreto baseando-se no conceito da rótula plástica refinado (Iu *et al.*, 2009; Liu *et al.*, 2012; Fong e Chan, 2012);
- Desenvolvimento de um pré e pós-processador gráficos eficientes para o programa CS-ASA;
- Análise dinâmica de membros estruturais sob flexão em torno do eixo de menor inércia considerando os efeitos da inelasticidade do material (Cheng *et al.*, 2013);
- Análise inelástica baseada no método da rótula plástica de estruturas em situação de incêndio (Iu e Chan, 2004; Landesmann, 2012)
- Análise inelástica de elementos estruturais com restrições de contato impostas por um meio elástico, como o solo, por exemplo.

# Referências Bibliográficas

AISC, 2005. *Specification for Structural Steel Buildings*. Chicago.

Aktas, M., e Earls, C.J. 2006. Minor axis moment-thrust response behavior in steel I-shaped members. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 132(7), pp. 1079-1086.

Alvarenga, A.R., 2010. *As Ligações Semirrígidas na Análise Avançada com Zona Plástica de Portais Planos de Aço*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Alvarenga, A.R., e Silveira, R.A.M. 2009a. Introduzindo as ligações na análise com EF empregando zona-plástica - Uma nova formulação. *Anais do 30º CILAMCE*, Armação de Búzios, Brasil.

Alvarenga, A.R., e Silveira, R.A.M., 2009b. Second-order plastic zone analysis of steel frame - Part I: Numerical formulation and examples of validation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 6, pp. 131-152.

ASCE, 1971. *Plastic Design in Steel, A Guide and Commentary*. ASCE Manual No. 41 New York.

Bambach, M.R., Rasmussen, K.J.R., e Ungureanu V., 2007. Inelastic behaviour and design of slender I-sections in minor axis bending. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 63, pp. 1-12.

Bradford, M.A., e Azhari, M., 1993. Local buckling of I-Sections bent about the minor axis. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 31, pp. 73-89.

- BS 5950, 2000. *Structural Use of Steelwork in Buildings — Part 1: Code of practice for design — Rolled and welded sections*. British Standards Institution, London, England.
- Chan, S.L., 1988. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 2657-2669.
- Chan, S.L., e Chui, P.P.T., 2000. *Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford.
- Chapman, S.J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn.
- Chen, W.F., e Atsuta, T., 1976. *Theory of Beam columns*. McGraw-Hill, New York.
- Chen, W.F., e Kim, S.E., 1997. *LRFD Steel Design using Advanced Analysis*, CRC Press, Boca Raton, Flórida.
- Chen, W.F., e Sohal, I., 1995. *Plastic Design and Second-order Analysis of Steel Frames*. Springer-Verlag, New York.
- Chen, W.F., e Toma, S., 1994. *Advanced Analysis of Steel Frames*, CRC Press, Boca Raton, Flórida.
- Cheng, X., Chen Y., e Nethercot, D.A., 2013. Experimental study on H-shaped steel beam-columns with large width-thickness ratios under cyclic bending about weak-axis. *Engineering Structures*, vol.49, pp. 264-274.
- Clarke, M.J., 1994. Plastic zone analysis of frames. In Chen W.F., e Toma S., eds, *Advanced analysis of steel frames: Theory, software, and applications*. CRC Press, Boca Raton, pp. 259–319.
- Crisfield, M.A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. vol. 1, John Wiley & Sons Inc., USA.
- Duan, L., e Chen, W.F., 1990. A yield surface equation for doubly symmetrical sections. *Engineering Structures*, vol 12, pp.114-119.
- ECCS, 1983. *Ultimate Limit State Calculation of Sway Frames with Rigid Joints*. Pub. no. 33, European Convention for Constructional Steelwork.

- El-Zanaty, M.H., Murray, D.M., e Bjorhovde, R., 1980. *Inelastic behavior of multistory steel frames*. Structural Engineering Report. No. 83, University of Alberta, Edmonton, Alta, Canada.
- Fong, M., e Chan, S.L., 2012. Advanced analysis of steel-concrete composite beam-columns by refined plastic hinge method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 71(6) 1250046.
- Galambos, T.V., 1998. *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. Structural Stability Research Council, 4th edn., John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Iffland, J.S.B., e Birnstiel, C., 1982. Stability design procedures for building frameworks. *American Institute for Steel Construction Project No. 21.62*, AISC, Chicago.
- Iu, C.K., Bradford, M.A., e Chen, W.F., 2009. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. *Engineering Structures*, vol. 31, pp. 799-813.
- Iu, C.K., e Chan, S.L., 2004. A simulation-based large deflection and inelastic analysis of steel frames under fire. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 60, pp. 1495-1524.
- Jiang, J.M., Chen, H., e Liew, J.Y.R., 2002. Spread-of-plasticity analysis of three dimensional steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 59, pp. 193-212.
- Kanchanalai, T., 1977. The design and behavior of beam-columns in unbraced steel frames. *American Iron and Steel Institute Project No. 189, Rep. No. 2*, Civil Engineering/Structural Research Laboratory, University of Texas, Austin, Texas.
- Kanchanalai, T., e Lu, L.W., 1979. Analysis and design of framed columns under minor axis bending. *Engineering Journal*, AISC, vol.16 (2), Second Quarter, pp. 29-41.
- Kim, S.E., e Chen, W.F., 1997. Further advanced bending studies of practical analysis for weak-axis. *Engineering Structures*, vol. 19(6), pp.407-416.
- Kim, S.E., e Lee, D.H., 2002. Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames. *Engineering Structures*, vol. 24, pp.735-744.

- Kim, S.E., e Lee, J., 2002. Improved refined plastic-hinge analysis accounting for lateral torsional buckling. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 58, pp. 1431-1453.
- King, W.S., e Chen, W.F., 1994. Practical second-order inelastic analysis of semirigid frames. *Journal of Structural Engineering ASCE*, vol. 120(7), pp. 2156–2175.
- King, W.S., White, D.W., e Chen, W.F., 1992. On second-order inelastic analysis methods for steel frame design. *Journal of Structural Engineering ASCE*, vol. 118(2), pp. 408–428.
- Krenk, S., 1995. An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 823-839.
- Landesmann, A., 2012. Refined plastic-hinge model for analysis of steel-concrete structures exposed to fire. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 71, pp. 202-209.
- Li, Y., e Lui, E.M., 1995. A simplified plastic zone method for frame analysis. *Microcomputers and Civil Engineering*, vol. 10, pp. 51-62.
- Liew, J.Y.R., White, D.W., e Chen, W.F., 1993a. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 1. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3196-3216.
- Liew, J.Y.R., White, D.W., e Chen, W.F., 1993b. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3217-3237.
- Liu, S.W., Liu, Y.P., e Chan, S.L., 2012. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames Part 1: Cross-section analysis technique and second-order analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 70, pp. 326-336.
- Liu, S.W., Liu, Y.P., e Chan, S.L., 2012. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames Part 2: Refined plastic hinge and advanced analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 70, pp. 337-349.

- Machado, F.C.S., 2005. *Análise Inelástica de Segunda-ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Maciel, F.V., 2012. *Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais Impostas por Bases Elásticas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Maximiano, D.P., 2012. *Uma Técnica Eficiente para Estabilizar a Estratégia do Resíduo Ortogonal na Análise Não Linear de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- McGuire, W., Gallagher, R.H. e Ziemian, R.D. 2000. *Matrix Structural Analysis*, 2nd Ed., Wiley, New York.
- Meas, O., 2012. *Modeling Yield Surfaces of Various Structural Shapes*. Honor's Theses, Paper 119, Bucknell University.
- Megson, T.H.G., 2005. *Structural and Stress Analysis*. 2nd edn, Elsevier.
- NBR 8800, 2008. *Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.
- Orbison, J.G., McGuire W., e Abel, J.F., 1982. Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 33, pp. 557-573.
- Prado, I.M., 2012. *CS-ASA Preprocessor: Programa Gráfico Interativo de Pré-Processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Rocha, P.A.S., 2006. *Análise Inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semi-rígidas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

- Santos, M.N., 2007. *Emprego de Elemento Finito Híbrido na Análise Não linear de Estruturas Metálicas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para a Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Silva, A.R.D., Silveira, R.A.M., Neves, F.A., e Ferreira, W.G., 2009. Análise inelástica de estruturas metálicas: Aplicação de uma formulação generalizada. *Anais do 30º CILAMCE*, Armação de Búzios, Brasil, vol. 1, pp. 1–15.
- Silva, R.G.L., 2010. *Análise Inelástica Avançada de Pórticos Planos de Aço Considerando as Influências do Cisalhamento e de Ligações Semirrígidas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Sreenath, S., Saravanan, U., e Kalyanaraman, V., 2011. Beam and shell element model for advanced analysis of steel structural members. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 67, pp.1789-1796.
- Surovek, A.E., 2011. *Guidelines for the Use of Direct second-order Inelastic Analysis in Steel Frame Design*. SEI-ASCE, Reston, VA.
- Vogel, U., 1985. *Calibrating frames*. *Stahlbau*, vol. 54 (october), pp. 295-311.
- Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.
- Ziemian, R.D., 1990. *Advanced Methods of Inelastic Analysis in the Limit States Design of Steel Structures*. Ph.D. dissertation, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY.

- Ziemian, R.D., 1993. Verification and benchmarking problems: Examples of frames studies used to verify advanced methods of inelastic analysis. In White, D.W. & Chen, W.F., eds, *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames: An assessment of the state of art*. Structural Stability Research Council (SSRC), section 3.
- Ziemian, R.D., e McGuire, W., 2002. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 128(10), pp. 1301-1307.
- Ziemian, R.D., e Miller, A.R., 1997. Inelastic analysis and design: frames with members in minor-axis bending. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 123(2), pp. 151–156.
- Zubydan, H.A., 2011. Inelastic second order analysis of steel frame elements flexed about minor axis. *Engineering Structures*, vol. 33, pp. 1240-1250.

# Apêndice A

## Modificações na Entrada de Dados

### A.1 Introdução

Este apêndice tem como objetivo orientar os usuários do programa CS-ASA quanto às modificações realizadas na entrada de dados das análises inelásticas. Novos itens e opções foram incluídos com esta dissertação. A descrição dessas modificações é feita na próxima seção.

### A.2 Modificações Realizadas

Ao todo três modificações foram realizadas na entrada de dados das análises inelásticas. Duas delas foram feitas no arquivo de dados e a terceira nas opções escolhidas na tela pelo usuário. No arquivo de dados, o usuário terá que informar juntamente com as propriedades de cada seção, o eixo de flexão. Essa informação é inserida conforme o código apresentado na Tabela A.1.

**Tabela A.1** Eixo da seção transversal em torno do qual ocorre a flexão

Código	Eixo de Flexão
1	Maior inércia
2	Menor inércia

A segunda modificação foi feita na escolha do módulo de elasticidade tangente. Agora estão disponíveis quatro opções em ambas as formulações PHF-1 e PHF-2. É

possível, também, manter o módulo de elasticidade constante. Essas opções podem ser selecionadas conforme indica a Tabela A.2.

**Tabela A.2** Modelos para o módulo de elasticidade tangente ou constante

<b>Código</b>	<b>Descrição</b>
0	Módulo de Elasticidade $E$
1	AISC (2005) e CRC (Galambos, 1998): Equações 2.20a-b e 2.21a-b
2	CRC (Galambos, 1998): Equação 2.21a-b
3	Ziemian e McGuire (2002): Equações 2.22, 2.23 e 2.24

A última modificação está relacionada com as superfícies de resistência. Como foram implementadas novas superfícies, o usuário poderá escolher entre aquelas que estão disponíveis para cada formulação. As opções são mostradas na tela e seguem o código indicado na Tabela A.3.

**Tabela A.3** Opções de superfícies de resistência

<b>Formulação</b>	<b>Código</b>	<b>Superfície de Resistência</b>
PHF-1	1	<u>AISC(2005)/ASCE (1971)</u>
	2	<u>Orbison (1982) modificada</u>
PHF-2	1	<u>BS 5950 (2000)</u>
	2	<u>Orbison (1982) modificada</u>

Um resumo com todas as opções que o usuário poderá selecionar ao realizar uma análise inelástica no CS-ASA é mostrado no algoritmo da Tabela A.4. Os itens que estão grifados destacam as novas implementações.

Para concluir esta seção, um exemplo dos arquivos de dados utilizados nas análises inelásticas do CS-ASA é apresentado. Foi considerado o portal simples estudado na Subseção 4.3.1. Esse pórtico é ilustrado novamente na Figura A.1. Nos arquivos de dados representados nas Figuras A.2 e A.3 são destacadas as modificações comentadas nesta seção. Informações detalhadas sobre esses arquivos podem ser consultadas no manual desenvolvido por Prado (2012).

**Tabela A.4** Algoritmo com as opções do CS-ASA para análises inelásticas

- 
1. Lê os dados gerais da estrutura e do tipo de análise, incluindo a informação sobre o eixo de flexão em cada seção
  2. Lê a formulação inelástica escolhida
  3. **if** PHF-1 **then**
  4. Seleciona equação para o módulo tangente:
    - Módulo de elasticidade  $E$
    - Módulo tangente definido pelo AISC(2005)/CRC (Galambos, 1998)
    - Módulo tangente definido pelo CRC (Galambos, 1998)
    - Módulo tangente definido em Ziemian e McGuire (2002)
  5. Seleciona modelo de redução de rigidez ( $\psi$ ):
    - $\psi = 4\alpha(1 - \alpha)$ , com início de escoamento em  $\alpha \geq 0.5$
    - $\psi = (-\alpha^2 + 1.4\alpha - 0.4)/0.09$ , com início de escoamento em  $\alpha \geq 0.7$
    - $\psi = (1 - \alpha)/0.3$ , com início de escoamento em  $\alpha \geq 0.7$
    - $\psi = -2.7243 \alpha \ln(\alpha)/0.3$ , com início de escoamento em  $\alpha \geq 0.39$
  6. Seleciona superfície de resistência:
    - Superfície AISC(2005)/ASCE (1971)
    - Superfície Orbison (1982) modificada
  7. **end if**
  8. **if** PHF-2 **then**
  9. Seleciona equação para o módulo tangente:
    - Módulo de elasticidade  $E$
    - Módulo tangente definido pelo AISC (2005)/CRC (Galambos, 1998)
    - Módulo tangente definido pelo CRC (Galambos, 1998)
    - Módulo tangente definido em Ziemian e McGuire (2002)
  10. Seleciona superfície de resistência:
    - Superfície BS 5950 (2000)
    - Superfície Orbison (1982) modificada
  11. **end if**
-

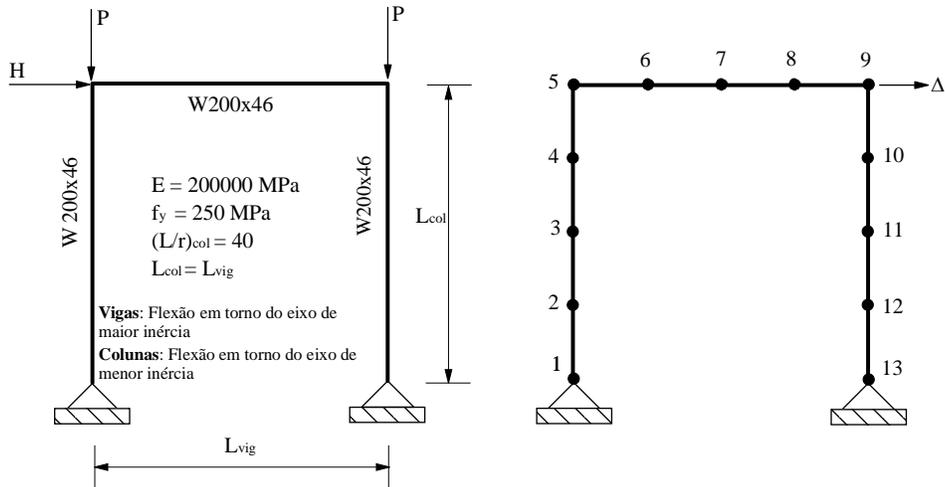


Figura A.1 Portal simples estudado na Subseção 4.3.1

```

PORTAL Simples-Ziemian e McGuire (2002)
estatica
por
1
0
2
3 1
13 12 2 2 3 1 2 2 9
coord
ppor
13
1 0.0d0 0.0d0
5 0.0d0 2048.0d0
9 2048.0d0 2048.0d0
13 2048.0d0 0.0d0
boun
1 1 1 0
13 1 1 0
elem
1 1 2
12 12 13
mate
2.00d5 250.0d0
1
1 12
seca
5860.0d0 15.3d6 1.51d5 2.29d5 203.0d0 7.2d0 203.0d0 11.0d0 2.0d0
2
1 4
9 12
5860.0d0 45.4d6 4.48d5 4.95d5 203.0d0 7.2d0 203.0d0 11.0d0 1.0d0
1
5 8
graf
0 9 9
dead
1 0
5 0.0 -879000.0 0.0
9 0.0 -879000.0 0.0
13 0.0 0.0 0.0
load
1 0
5 1.0 0.0 0.0
13 0.0 0.0 0.0
end
tipo de análise
modelo estrutural
tipo de solução (0 - linear; 1 - não-linear)
ligações semi-rígidas
tipo de análise plástica (1-elastoplástica; 2-refinada)
modelo de módulo tangente: modelo de degradação da rigidez
npoi n, nel em, nnode, ndi me, ndofn, nmats, npmat, nsecs, npsec
MACRO-COMANDO
MACRO-COMANDO
npoi n
no, x, y
MACRO-COMANDO
no, ng, dx, dy, mz
MACRO-COMANDO
el, noi, noj
MACRO-COMANDO
E, Fy (Mod. Elast.; Tensão Esc.)
ngel m
kel 1, kel 2
MACRO-COMANDO
a, I, W, Z, D, Tw, Bf, Tf e Eixo
ngel m
kel 1, kel 2
kel 1, kel 2
a, I, W, Z, D, Tw, Bf, Tf e Eixo
ngel m
kel 1, kel 2
MACRO-COMANDO
autopl, npl, ndl
MACRO-COMANDO
iplod, iedge
no, px, py, mz
MACRO-COMANDO
iplod, iedge
no, px, py, mz

```

Figura A.2 Portal simples: arquivo de dados 1

4	form (4- PHF-1 ; 5- PHF-2)
%PRINCIPAL	
5 5 50 30000 25 2 1 1.e-4	Ei nc, Ei te, faci , ni nc, ni tmax, i terty, cconv, betok
%REANAL	
0	i res
%RELATO	
4	rel
%SCREEN	
100	kwi nc
%END	

**Figura A.3** Portal simples: arquivo de dados 2