

Fernando Carlos Scheffer Machado

**ANÁLISE COMPUTACIONAL VIA MDF DE CASCAS CILÍNDRICAS
COM RESTRIÇÕES BILATERAIS E UNILATERAIS DE CONTATO**

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil: Construção Metálica.

Orientador:

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Departamento de Engenharia Civil

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas

Ouro Preto, abril de 2013

M149a Machado, Fernando Carlos Scheffer.
Análise computacional via MDF de cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato [manuscrito] / Fernando Carlos Scheffer Machado - 2013.
xvi, 99f.: il. color.; grafs.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.
Área de concentração: Construção Metálica.

1. Cascas (Engenharia) - Teses. 2. Análise elástica (Engenharia) - Teses. 3. Método das diferenças finitas (MDF) - Teses. 4. Mecânica do contato - Contato unilateral - Teses. 5. Otimização - Teses. I. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

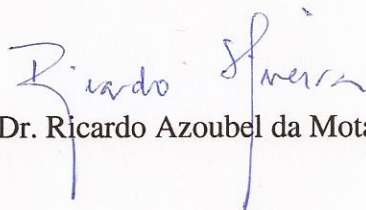
CDU: 624.014:519.673

Catálogo: sisbin@sisbin.ufop.br

ANÁLISE COMPUTACIONAL VIA MDF DE CASCAS CILÍNDRICAS COM RESTRIÇÕES BILATERAIS E UNILATERAIS DE CONTATO

AUTOR: FERNANDO CARLOS MACHADO

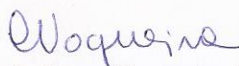
Esta tese foi apresentada em sessão pública e aprovada em 25 de abril de 2013,
pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (Orientador / UFOP)



Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva (UFOP)



Profa. Dra. Christianne de Lyra Nogueira (UFOP)



Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha (UFSJ)



Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira (UFES)

“O importante é não parar de questionar.”

Albert Einstein

Agradecimentos

Aos meus pais, simplesmente por tudo. Principalmente à minha mãe, que nunca deixou de apoiar e acreditar.

Ao meu orientador, prof. Ricardo Azoubel, por ter depositado sua confiança na minha capacidade e pela ajuda inestimável para conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos, Flávio, Mário e Marcelo, pelas ajudas com a pesquisa e pelo apoio nas horas mais escuras.

À Mariana, que além de tudo, ainda ofereceu inspiração.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) do DECIV/UFOP, pela disponibilidade e atenção em todos os momentos.

Resumo da tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Análise Computacional via MDF de Cascas Cilíndricas com Restrições Bilaterais e Unilaterais de Contato

Fernando Carlos Scheffer Machado

Abril/2013

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

As cascas cilíndricas são elementos estruturais bastante utilizados como tubulações enterradas, estruturas de contenção de túneis e poços, e depósitos de diversos materiais, na forma de silos ou tanques. Nessas aplicações as cascas cilíndricas interagem com o meio elástico, no caso solo ou rocha. Essa interação pode ser considerada de duas formas diferentes: com um *problema de contato bilateral* (PCB), quando a estrutura e o meio não perdem contato durante o processo de deformação; e como um *problema de contato unilateral* (PCU), quando a casca não está completamente fixa e pode perder contato com o meio para determinadas condições de carregamento. Portanto, esta tese tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta, ou programa computacional, para o estudo e análise de problemas envolvendo cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por bases elásticas. Essa ferramenta computacional apresenta como principais características: i. o emprego do Método das Diferenças Finitas (MDF) para aproximar as derivadas das equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base elástica. Adota-se neste trabalho a Teoria de Casca de Sanders, que pode ser aplicada para cascas ou painéis cilíndricos pouco ou muito abatidos; e as bases elásticas são aproximadas pelos modelos de Winkler e Pasternak; ii. o emprego de metodologias de solução desses PCB e PCU. No caso do PCB, a região de contato S_c entre os corpos (casca-base) é conhecida *a priori*, e sua solução pode ser obtida de forma direta, se as hipóteses de pequenos deslocamentos e material elástico forem consideradas. No caso do PCU, tem-se como principal desafio a definição da região de contato entre os corpos, S_c , que não é conhecida *a priori*, e adotam-se aqui duas estratégias de solução desse problema (ES1 e ES2, respectivamente). Na primeira, a interação casca-base é avaliada considerando diretamente as restrições de contato unilateral e resolvendo-se um Problema de Complementaridade Linear (PCL). Na segunda, a região de contato S_c é inicialmente aproximada e na sequência utiliza-se o método de Newton-Raphson para corrigi-la e avaliar a participação da base elástica na obtenção de outras incógnitas do problema. Essa ferramenta computacional foi desenvolvida usando a linguagem de programação Fortran®. Diversos exemplos numéricos são apresentados e analisados com o intuito de averiguar a eficiência das metodologias implementadas para soluções dos problemas de contato. No final da tese, algumas conclusões e observações referentes ao sistema computacional desenvolvido e às metodologias numéricas propostas são estabelecidas. Além de o MDF ter se apresentado como um método de fácil implementação e utilização, as estratégias de solução não linear adotadas se mostraram semelhantes, em termos de resultados obtidos, mas com ligeiro ganho de eficiência computacional por parte da ES1. Por fim, sugestões para novas pesquisas são apresentadas.

Abstract of Thesis presented as part of the requirements for the degree of Doctor of Civil Engineering.

**Computational Analysis via FDM of Cylindrical Shells with
Bilateral and Unilateral Contact Constraints**

Fernando Carlos Scheffer Machado

April/2013

Advisor: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Buried pipelines, containment structures for tunnels and shafts, and deposits of various materials in the form of silos or tanks all use structural elements known as cylindrical shells. Cylindrical shells interact in these applications with elastic means, in these cases soil or rock. This interaction can be considered in two ways. First, it can be considered a *bilateral contact problem* (BCP) where, during the deformation process, structure and base remain in contact; second, it can be considered a *unilateral contact problem* (UCP) where, under certain loading conditions, the shell is not completely fixed and may lose contact with the medium. The main objective of this thesis then is to develop a computational tool for the study and analysis of problems, imposed by elastic base contact, involving cylindrical shells with bilateral and unilateral restrictions.

This numerical tool has as main features: i. the use of the finite difference method (FDM) to approximate the derivatives of the differential equations of equilibrium of the system's shell-elastic base. This paper adopts Sanders' theory for shells, which can be applied to cylindrical shells and panels, and approximates the elastic bases using Winkler's and Pasternak's models. ii. Employment of methodologies for solving these BCPs and UCPs. In the case of BCP, the region of contact between the bodies S_c (shell-base) is known *a priori*; its solution can be obtained directly if one considers the assumptions of small displacements and elastic material. In the case of UCP, the main challenge is the definition of the area of contact between the bodies S_c , which is unknown *a priori*; to solve this problem, the current study adopts two strategies for solving this problem (ES1 and ES2, respectively). First, the interaction shell-base is calculated by considering directly the unilateral contact constraints and solving a linear complementarity problem (LCP). Second, the contact area S_c is initially approximated and corrected, via Newton-Raphson's method, by evaluating the participation of the elastic foundation in obtaining other unknown variables. This numerical tool was developed using the programming language Fortran ®. To determine the efficiency of these methodologies, the work presents and analyzes several numerical examples. The end of the thesis, offers some conclusions and remarks regarding the computing system developed and the proposed numerical methodologies. Besides the MDF have been presented as a method easy to implement and use, the nonlinear solution strategies adopted were similar in terms of results, though ES1 showed a slight gain in computational efficiency. Finally, suggestions for further research are presented.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS, OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO	1
1.2 APLICAÇÕES	5
1.3 REFERÊNCIAS IMPORTANTES	9
2. FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA E PROPOSTAS DE SOLUÇÃO	13
2.1 INTRODUÇÃO	13
2.2 PROBLEMAS DE CONTATO	13
2.3 EQUAÇÕES BÁSICAS	15
2.4 ESTRATÉGIAS NUMÉRICAS PARA SOLUÇÃO	20
2.4.1 Transformação do Problema Contínuo em Discreto	20
2.4.2 Tratamento do Problema de Contato Bilateral	21
2.4.3 Tratamento do Problema de Contato Unilateral	22
3. TEORIA DE CASCA CILÍNDRICA, MODELOS DE BASES ELÁSTICAS E APLICAÇÃO DO MDF	31
3.1 INTRODUÇÃO	31
3.2 EQUAÇÕES BÁSICAS DA CASCA CILÍNDRICA	31
3.2.1 Relações Cinemáticas	33
3.2.2 Relações Constitutivas	34
3.2.3 Equações de Equilíbrio	36
3.3 MODELOS DE BASES ELÁSTICAS	37
3.3.1 Modelo de Molas Discretas	39
3.3.2 Modelo de Winkler	40
3.3.3 Modelo de Filonenko-Borodich	40
3.3.4 Modelo de Pasternak	41
3.3.5 Outros Modelos de Base	41

3.4 APROXIMAÇÕES POR DIFERENÇAS FINITAS	42
3.4.1 Equação de Equilíbrio da Casca Cilíndrica na Forma de Diferenças Finitas	45
3.4.2 Modelos de Base Elástica na Forma de Diferenças Finitas	49
3.5 MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE FORÇAS EXTERNAS DO SISTEMA ..	50
3.6 CONDIÇÕES DE CONTORNO E PERIODICIDADE	52
3.6.1 Bordo simplesmente apoiado	52
3.6.2 Bordo engastado	53
3.6.3 Bordo livre	54
3.6.4 Condições de Periodicidade	56
4. PROGRAMA COMPUTACIONAL E EXEMPLOS NUMÉRICOS	58
4.1 INTRODUÇÃO	58
4.2 CÓDIGO FONTE	59
4.3 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO	62
4.3.1 Estudo da Malha – Cargas Distribuídas e Concentradas	62
4.3.2 Estudo da Condição de Bordo	66
4.3.3 Estudo dos Modelos de Bases Elásticas	68
4.4 PROBLEMAS DE CONTATO UNILATERAL	73
4.4.1 Cargas em Linha	73
4.4.2 Cargas Concentradas	76
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES	83
5.1 INTRODUÇÃO	83
5.2 CONCLUSÕES	83
5.2 FUTUROS TRABALHOS	85
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	86
ANEXO: ALGORITMO DE LEMKE	94

Lista de Figuras

1. INTRODUÇÃO

Figura 1.1 Casca cilíndrica usada como estrutura de contenção para túneis	5
Figura 1.2 Estrutura cilíndrica usada como parede de contenção de uma mina	6
Figura 1.3 Casca cilíndrica usada como parede de contenção de um poço-garagem ..	6
Figura 1.4 Entrada do túnel Sasago no Japão e reparo da sua estrutura de ventilação	8
Figura 1.5 Esquema da estrutura interna do túnel e de seu colapso	8

2. FORMULAÇÃO GERAL E PROPOSTAS DE SOLUÇÃO

Figura 2.1 Representação de problemas estruturais com restrições de contato	14
Figura 2.2 Tipos de problemas de contato	15
Figura 2.3 Painel cilíndrico em contato com uma base elástica	16
Figura 2.4 Domínio de validade das restrições de contato unilateral	19
Figura 2.5 Algoritmo de solução do PCB	22
Figura 2.6 Algoritmo de solução adotado para a ES1	26
Figura 2.7 Representação gráfica do método de Newton-Raphson	26
Figura 2.8 Algoritmo de solução adotado para a ES2	30

3. TEORIA DE CASCA CILÍNDRICA, MODELOS DE BASES ELÁSTICAS E APLICAÇÃO DO MDF

Figura 3.1 Geometria da casca cilíndrica e tipos de carregamento atuantes	33
Figura 3.2 Forças internas e pressão lateral atuantes no elemento infinitesimal de casca cilíndrica	36
Figura 3.3 Representação da base elástica através de pequenas molas	38
Figura 3.4 Deslocamento da base elástica	38
Figura 3.5 Modelo de molas discretas e malha de DF	39
Figura 3.6 Modelo de Winkler	40
Figura 3.7 Modelo de Filonenko-Borodich	41

Figura 3.8 Modelo de Pasternak	41
Figura 3.9 Representação do modelo elastoplástico do solo	42
Figura 3.10 Representação gráfica do MDF	43
Figura 3.11 Malha de DF retangular num trecho genérico da casca cilíndrica	46
Figura 3.12 Molécula de DF que representa a equação de equilíbrio da casca cilíndrica	48
Figura 3.13 Malha de DF usada para a casca cilíndrica (casca completa – tubo)	48
Figura 3.14 Molécula de DF dos modelos de base elástica com dois parâmetros ...	50
Figura 3.15 Aplicação do MDF e montagem da matriz de rigidez	51
Figura 3.16 Representação da carga uniformemente distribuída (pressão radial) ...	51
Figura 3.17 Cargas concentradas e as áreas de influência correspondentes	52
Figura 3.18 Tratamento numérico para eliminação dos pontos nodais fictícios da malha	56
Figura 3.19 Aplicação das condições de periodicidade	57

4. PROGRAMA COMPUTACIONAL E EXEMPLOS NUMÉRICOS

Figura 4.1 Fluxograma do Programa Computacional	59
Figura 4.2 Casca cilíndrica simplesmente apoiada com carga distribuída	63
Figura 4.3 Configuração deformada da casca para diferentes malhas	63
Figura 4.4 Casca cilíndrica com carga circunferencial em linha	64
Figura 4.5 Variação do deslocamento em P de acordo com a malha de DF	65
Figura 4.6 Configuração deformada da casca cilíndrica para carga circunferencial atuante (f.esc.: $\times 100$)	65
Figura 4.7 Valores de w/t e M_x/D , em x , para diferentes condições de bordo	66
Figura 4.8 Deslocamento radial (w) ao longo da direção x para diferentes comprimentos longitudinais	67
Figura 4.9 Painel cilíndrico assente em base elástica – contato bilateral	69
Figura 4.10 Deslocamentos radial em um painel de curvatura suave sobre uma base elástica	69
Figura 4.11 Painel cilíndrico quadrado assente sobre base elástica com contato bilateral	71
Figura 4.12 Deslocamento radial e momentos fletores em x de um painel sob carga distribuída com vários parâmetros para a base	71

Figura 4.13 Deslocamento radial e momentos fletores em θ de um painel sob carga concentrada variando os parâmetros da base	72
Figura 4.14 Tubo cilíndrico em contato unilateral com um meio elástico	74
Figura 4.15 Configuração deformada da casca para diferentes análises de contato unilateral	74
Figura 4.16 Painel quadrado com quatro cargas concentradas	75
Figura 4.17 Deslocamento radial na direção x de um sistema painel-base sob cargas concentradas	76
Figura 4.18 Superfície deformada do painel e da base sob cargas concentradas (f.esc.: $\times 10$)	77
Figura 4.19 Painel cilíndrico com uma carga em várias posições	78
Figura 4.20 Configurações deformadas causadas por cargas concentradas posicionada em várias posições	79
Figura 4.21 Painel abatido com uma carga concentrada	81

Lista de Tabelas

3. TEORIA DE CASCA CILÍNDRICA, MODELOS DE BASES ELÁSTICAS E

APLICAÇÃO DO MDF

Tabela 3.1 Representação esquemática das derivadas por diferença central	44
---	----

4. PROGRAMA COMPUTACIONAL E EXEMPLOS NUMÉRICOS

Tabela 4.1 Deslocamentos w em $x = 10\text{m}$ – carga uniformemente distribuída	63
Tabela 4.2 Deslocamentos w em P ($x = 20\text{m}$) para $L = 40\text{m}$ – carga circunferencial ..	64
Tabela 4.3 Deslocamento radial máximo do painel/placa	69
Tabela 4.4 Deslocamento radial, x , e momentos fletores máximos, M_θ , de um painel sob carga concentrada variando os parâmetros da base	72
Tabela 4.5 Deslocamentos radiais (em metros) obtidos de acordo com as formulações de bases e metodologias de cálculo usadas	75
Tabela 4.6 Comparação entre as estratégias – carga móvel comprimindo o painel ..	78
Tabela 4.7 Comparação entre as estratégias – carga móvel puxando o painel	80
Tabela 4.8 Estudo paramétrico dos resultados para cada fator variado	81

ANEXO – ALGORITMO DE LEMKE

Tabela A.1 Inicialização de processo	97
Tabela A.2 Resultados obtidos após a operação de pivoteamento	97

Lista de Símbolos

C	Rigidez de membrana da casca cilíndrica
C_b	Tensor de propriedades da base elástica
C_{ijkl}	Tensor de propriedades elásticas da estrutura
D	Rigidez à flexão da casca cilíndrica
E	Módulo de elasticidade da casca cilíndrica
F	Força externa de carregamento
F_e	Vetor de forças externas
F_r	Vetor de forças externas de referência
F_i	Vetor de forças de reação ao deslocamento imposto ao sistema
G	Parâmetro de rigidez cisalhante da camada de solo – 2º parâmetro do modelo de Pasternak
\mathbf{g}	Vetor gradiente de Π
K	Parâmetro de rigidez elástico da fundação – 1º parâmetro
k_B	Primeiro parâmetro dos modelos de base elástica;
k_M	Segundo parâmetro dos modelos de base elástica
L	Comprimento longitudinal da casca
\mathbf{M}	Matriz de cálculo para o PCL
\mathbf{K}	Matriz de rigidez do sistema estrutural ou hessiana de Π
\mathbf{K}_L	Matriz de rigidez da casca
\mathbf{K}_b	Matriz de rigidez da base elástica
$\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_\theta, \mathbf{M}_{x\theta}$	Vetores de forças internas na estrutura – Momentos fletores
$\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_\theta, \mathbf{N}_{x\theta}$	Vetores de forças internas na estrutura – Esforços normais
p	Dimensão das matrizes e vetores de cálculo
q	Função que define o carregamento do sistema estrutural
$\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_\theta$	Vetores de forças internas na estrutura – Esforços cortante
R	Raio médio da casca cilíndrica
r_b	Reação da base num determinado ponto nodal

S_c	Superfície de contato
S_f	Superfície submetida a carregamento
S_u	Superfície com condições de contorno prescritas
T	Intensidade do campo de tração na membrana do solo – 2º parâmetro do modelo de Filonenko-Borodich
t	Espessura da casca cilíndrica
$\mathbf{U}, \Delta\mathbf{U}, \delta\mathbf{U}$	Vetores de deslocamento nodal da estrutura: total, incremental e corretivo
$\mathbf{U}_b, \Delta\mathbf{U}_b, \delta\mathbf{U}_b$	Vetores de deslocamento nodal da base elástica: total, incremental e corretivo
u, v, w	Deslocamentos da casca nas três direções
u_b	Deslocamento da base num determinado nó
u_i	Deslocamento da casca num determinado nó
V	Volume do contínuo da estrutura
\mathbf{w}, \mathbf{z} e \mathbf{q}	Vetores de cálculo para o PCL
x, θ, z	Coordenadas cilíndricas do sistema estrutural
α	Ângulo de abertura de construção do painel
β_c	Fator matemático
$\Delta x, \Delta\theta$	Espaçamento da malha de diferenças finitas nas direções principais
$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$	Deformações normais e cisalhante
$\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_\theta, \bar{\gamma}_{x\theta}$	Deformações normais e cisalhante médias
ζ	Tolerância máxima para definição da convergência
φ	Valor da diferença de descolamento entre a base e a estrutura
$\chi_x, \chi_\theta, \chi_{x\theta}$	Mudanças de curvatura da superfície de referência em cada direção
$\lambda, \Delta\lambda$	Fator de carregamento total e incremental
ν	Coefficiente de Poisson
Π	Funcional de energia do sistema
σ_{ij}	Tensão num ponto de coordenadas i e j
$\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{x\theta}$	Tensões normais e de cisalhamento
ϕ	Função polinomial que substitui a função diferencial f
∇	Operador Laplaciano

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS, OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO

Aplicações envolvendo cascas cilíndricas são bastante comuns na engenharia estrutural, sendo encontradas, por exemplo, como estruturas de contenção de túneis e poços, e depósitos de diversos materiais, na forma de silos ou tanques. Nas engenharias mecânica, naval e aeroespacial também existe um grande campo de utilização das cascas cilíndricas.

Quando usadas como estruturas de túneis, poços ou tubulações enterradas, as cascas cilíndricas interagem com o meio, no caso solo ou rocha. Em algumas situações, as cascas atuam como suporte do meio (Bulson, 1985); em outras são sustentadas pelo solo ou rocha (Straughan, 1990; Silva, 1998); e, em alguns casos, a estrutura e o solo trabalham simultaneamente tanto na sustentação como no apoio (Sistema NATM – Solotrat, 2011). Nessas aplicações, se a casca está completamente presa (ou fixa) ao meio, caracteriza-se o problema estrutural como sendo de *Contato Bilateral* (PCB; Paliwal e Bhalla, 1993a,b; Gunawan *et al.*, 2005). Quando a casca não está completamente fixa e pode perder contato com o meio sob determinadas condições de carregamento, define-se o problema com sendo de *Contato Unilateral* (PCU; Güler, 2004; Celep *et al.*, 2011). Nesse último caso, considera-se que o solo ou rocha, denominados genericamente aqui, nesta tese, de *base elástica* (ou *meio elástico*), só ofereça reação se comprimido.

A solução dos problemas de contato casca cilíndrica-base elástica é usualmente alcançada via métodos numérico-computacionais, uma vez que abordagens analíticas são restritas a carregamento e condições de contorno simples e bem definidas o que não é o caso dos PCUs. Assim, para muitos problemas de contato de interesse prático não é possível encontrar as soluções analíticas das equações que regem o problema (Bulson, 1985). Os métodos experimentais, embora úteis e precisos, se mostram onerosos tanto em custo quanto em tempo de execução (Szilard, 2007).

Os métodos numéricos, apesar de proverem soluções aproximadas, quando bem formulados, desenvolvidos e aplicados na discretização do sistema estrutural casca-base,

fornece resultados próximos dos considerados reais (Szilard, 2004; Burden e Faires, 2008). Entre os métodos numéricos mais usados na solução dos PCBs e PCUs, de interesse desta tese, estão (Choi, 2006): o Método dos Elementos Finitos (MEF); o Método dos Elementos de Contorno (MEC); o Método dos Elementos Discretos (MED); e o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Esta tese, que se insere na linha de pesquisa em *Mecânica Computacional* do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) da UFOP, pode ser considerada uma continuação direta dos trabalhos de Silveira (1995), Silva (1998), Pereira (2003) e, mais recentemente, Maciel (2012). Todos utilizaram o MEF na discretização e aproximação dos respectivos problemas de contato. Silveira (1995), por exemplo, estudou a estabilidade de colunas, arcos e anéis com restrições unilaterais de contato. Silva (1998) propôs formulações numéricas para analisar os problemas de contato bilateral e unilateral entre placas e fundações elásticas. Pereira (2003) se concentrou na aplicação dessas formulações aos problemas de contato unilateral envolvendo vigas e bases elásticas. Maciel (2012) desenvolveu um novo módulo do CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; Silva, 2009) para análise da estabilidade elástica de colunas com restrições bilaterais de contato.

Pode-se afirmar que esta tese tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta ou programa computacional para o estudo e análise de problemas envolvendo cascas cilíndricas com restrições de contato impostas por bases elásticas. Essa ferramenta computacional, em que ambos os PCB e PCU podem ser tratados, apresenta como principais características:

- i. primeiramente, o emprego do Método das Diferenças Finitas (MDF) para aproximar as derivadas das equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base elástica. Por ser mais geral, adota-se neste trabalho a Teoria de Casca de Sanders, que pode ser aplicada para cascas ou painéis cilíndricos pouco ou muito abatidos (Sanders, 1961; Brush e Almroth, 1975). As bases elásticas são aproximadas pelos modelos de Winkler e Pasternak (Dutta e Roy, 2002; Wang *et al.*, 2005). Basicamente, aplica-se o MDF substituindo-se as derivadas que aparecem nas equações diferenciais de equilíbrio por fórmulas de diferenças das variáveis de campo (no caso, os deslocamentos) em pontos selecionados do sistema. Esses pontos definem uma malha, que é chamada aqui de malha de diferenças finitas. Abordagem semelhante é usada para as expressões que descrevem as condições de contorno do problema. Como consequência da aplicação do MDF, chega-se num sistema de equações algébricas, a partir do qual os deslocamentos da casca ou base, nos pontos da malha, podem ser obtidos. Finalmente, justifica-se a utilização do MDF através das seguintes considerações: a existência

de base computacional inicialmente desenvolvida por Silveira (1990), que aplicou o MDF na avaliação da estabilidade elástica de cascas isotrópicas e enrijecidas; por se tratar de uma estratégia numérica simples, genérica e de fácil aplicação; e por facilitar a introdução e implementação dos modelos de bases elásticas usados nesta pesquisa;

ii. a segunda característica importante da ferramenta computacional desenvolvida está relacionada com as estratégias ou metodologias de solução dos PCB e PCU. No caso dos PCBs, a região de contato entre os corpos (casca-base), definida aqui como S_c , é conhecida *a priori* e, portanto, não é considerada uma incógnita do problema. Assim, se as hipóteses de pequenos deslocamentos e material elástico (casca e base) forem adotadas, como é o caso desta tese, a solução do PCB pode ser obtida de uma forma direta, resolvendo-se simplesmente a equação matricial:

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b] \mathbf{U} = \mathbf{F}_e \quad (1.1)$$

em que \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_b representam as matrizes de rigidez da casca e da base elástica, respectivamente; \mathbf{F}_e é o vetor de carregamento nodal; e o vetor \mathbf{U} contém os deslocamentos nodais, incógnitas do problema. No caso dos PCUs tem-se como um dos principais desafios a definição da região ou regiões de contato entre os corpos, S_c . Ou seja, mesmo considerando as hipóteses de pequenos deslocamentos e material elástico, a solução do PCU não pode ser obtida de uma forma direta, uma vez que S_c não é conhecida *a priori*, caracterizando-se como um problema não linear. Usando-se os fundamentos e terminologias da área de *Programação Matemática* (ou *Otimização Estrutural*), e baseando-se nos trabalhos de Silveira (1995) e Silva (1998), adotam-se aqui duas estratégias de solução do PCU:

- *Estratégia de Solução 1 (ES1)*: a região de contato S_c é avaliada considerando diretamente as restrições de contato unilateral; ou seja, formulando-se o PCU como um *Problema de Complementaridade Linear (PCL)*, isto é, como um *problema de otimização com restrições*, que é descrito genericamente da seguinte forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{w} \geq 0; \mathbf{z} \geq 0; \mathbf{w}^T \mathbf{z} = 0 \quad (1.3a,b,c)$$

em que a solução da Equação (1.2) deve ser alcançada respeitando-se as restrições (1.3). No próximo capítulo desta tese, onde será detalhada essa ES1, serão feitas as definições dos

vetores \mathbf{w} , \mathbf{z} e \mathbf{q} , e matriz \mathbf{M} . O algoritmo de Lemke (Lemke, 1968) é adotado nesta tese para resolver o PCL resultante;

- *Estratégia de Solução 2 (ES2)*: a região de contato S_c é inicialmente aproximada através de uma determinada estratégia; na sequência utiliza-se o método de Newton-Raphson para corrigi-la e avaliar a participação da base elástica na obtenção de outras incógnitas do problema. Nessa estratégia de solução, como as restrições de contato não são consideradas de uma forma direta, define-se o seguinte *problema de otimização sem restrições* a ser resolvido:

$$\mathbf{g} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b] \mathbf{U} - \mathbf{F}_e \neq 0 \quad (1.4)$$

com \mathbf{g} sendo o vetor gradiente, ou forças desequilibradas do sistema casca-base, que deve se anular ao longo do processo iterativo de Newton-Raphson. A cada iteração, através de uma nova avaliação de S_c , corrige-se a participação da base elástica, ou seja, a matriz de rigidez \mathbf{K}_b . Esse processo iterativo é concluído, indicando que a solução do PCU foi atingida, quando determinado critério de convergência for satisfeito.

No sentido de facilitar o entendimento dos fundamentos teóricos e computacionais envolvidos neste trabalho, organizou-se esta tese em cinco capítulos, que serão brevemente descritos a seguir.

Ainda neste Capítulo 1, na próxima seção, são mostradas algumas aplicações de cascas cilíndricas como estruturas de contenção de túneis e escavações; na sequência, são mencionadas algumas pesquisas diretamente relacionadas com esta tese.

No Capítulo 2 é apresentada a formulação geral do problema de contato casca-base elástica de particular interesse desta tese. São detalhadas em seguida as soluções propostas para os PCB e PCU.

A teoria de cascas cilíndricas adotada, incluindo as relações cinemáticas, relações constitutivas e equações diferenciais de equilíbrio são mostradas no Capítulo 3. Nesse capítulo são apresentados também os modelos de bases elásticas adotados para aproximar o comportamento do meio, solo ou rocha. Ainda neste capítulo é apresentado, genericamente, o MDF e sua aplicação na transformação das equações diferenciais de equilíbrio do problema em questão num sistema de equações algébricas.

O Capítulo 4 é responsável pela apresentação do programa computacional desenvolvido nesta tese, além de alguns aspectos relevantes observados durante a sua implementação. Na sequência, são analisados problemas clássicos de cascas cilíndricas sem e com restrições

bilaterais de contato; os problemas de contato unilateral são abordados na última parte do capítulo.

Por fim, no Capítulo 5, são feitas considerações finais referentes a esta pesquisa e apresentadas algumas conclusões baseadas nos exemplos estudados no capítulo anterior; finaliza-se o capítulo e a tese com sugestões para pesquisas futuras.

1.2 APLICAÇÕES

Um campo importante de aplicação do tema deste trabalho é o das estruturas de contenção de túneis e escavações tubulares, onde, no caso, a casca deve interagir com o meio que a envolve, isto é, o solo ou rocha. Nas Figuras 1.1 a 1.3 podem ser vistas algumas estruturas sujeitas a problemas de contato de interesse desta tese.



Figura 1.1 Casca cilíndrica usada como estrutura de contenção para túneis (Eller, 2009)



Figura 1.2 Estrutura cilíndrica usada como parede de contenção de uma mina (Eller, 2009)



Figura 1.3 Casca cilíndrica usada como parede de contenção de um poço-garagem
(Fonte: www.roadtraffic-technology.com)

Acidentes envolvendo túneis também evidenciam a necessidade de estudos na área de interesse deste trabalho. Um exemplo recente, de 02 de dezembro de 2012, foi noticiado no Japão, e envolveu a ruína da estrutura de ventilação do túnel Sasago (Figura 1.4), causando prejuízos tanto materiais quanto em vidas. Esse túnel fica a 80 km de Tóquio e faz parte de uma série de túneis construídos entre a década de 60 e 70. Um trecho de 50 metros da sua estrutura de ventilação sofreu colapso, caindo sobre pista e veículos que passavam no momento do colapso. Avaliações preliminares indicaram que a fixação da estrutura de ventilação, que era feita através de parafusos de pressão presos à estrutura teto do túnel (casca de concreto) – possivelmente por não ter manutenção adequada – se romperam. A casca de concreto que reveste o túnel, que serve tanto como estrutura de suporte do túnel quanto de suporte para estruturas internas e equipamentos, não se rompeu. As Figuras 1.4 e 1.5 apresentam fotos e um esquema do acidente ocorrido. Encontrar formas de se analisar essa casca de concreto considerando não só todas as cargas atuantes (internas e externas), mas também sua interação com o meio, no caso a rocha, é de fundamental importância para o equilíbrio e estabilidade de todo o sistema de suporte.

A despeito da principal motivação da pesquisa proposta, a mesma teoria aqui empregada tem outras aplicações na indústria e engenharia, seja ela aeroespacial ou naval. Adicionalmente, a área de prospecção de petróleo tem grande interesse de aplicação das estruturas cilíndricas. A necessidade de se projetar grandes tubos cilíndricos flutuantes ou apoiados no leito do oceano, que servem tanto como suporte e contenção de equipamento quanto também de depósito de óleo e detritos, é uma clara demonstração da importância do conhecimento dos fundamentos da pesquisa proposta.

Essas aplicações de cascas cilíndricas na indústria e várias áreas da engenharia têm motivado uma procura por sistemas computacionais com recursos para análises lineares e não lineares. Embora as ferramentas numéricas que consideram modelos não lineares físicos e geométricos tenham evoluído, o seu emprego ainda se mostra uma tarefa relativamente complicada, principalmente na solução dos problemas de contato de interesse desta tese. Os programas comerciais disponíveis são bastante complexos de serem utilizados pelos projetistas, e a maioria deles utiliza o MEF, que apesar de ser um método bastante versátil, tem suas limitações, principalmente no tocante da consideração dos efeitos não lineares.



Figura 1.4 Entrada do túnel Sasago no Japão e reparo da sua estrutura de ventilação

(Fonte: www.itblow.com)

Ceiling panel structure and suspected cause of collapse

**Based on information provided by Central Nippon Expressway Co.*

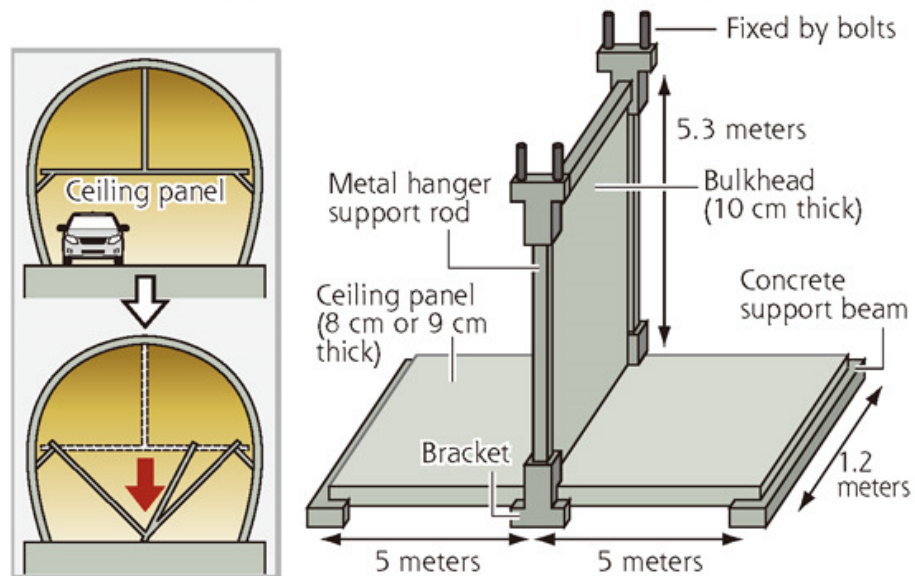


Figura 1.5 Esquema da estrutura interna do túnel e de seu colapso

(Fonte: www.yomiuri.co.jp)

1.3 REFERÊNCIAS IMPORTANTES

Esta pesquisa teve como ponto de partida os trabalhos de Silveira (1990; 1995), que aliaram as áreas de análise estrutural e mecânica computacional. Em Silveira (1990) foi encontrada a base computacional necessária para as implementações realizadas nesta tese. Silveira (1995) forneceu os fundamentos teóricos necessários para entendimento e desenvolvimento das estratégias de solução dos problemas de contato propostas aqui. Como já comentado, as dissertações de Silva (1998), Pereira (2003) e Maciel (2012), todas produzidas no PROPEC/UFOP, foram também relevantes para o desenvolvimento do presente trabalho.

Como consequência dessas dissertações e tese citadas no parágrafo anterior, foram publicados diversos artigos em conferências e periódicos internacionais. Merecem destaque aqueles publicados em periódicos, quais sejam: Silva *et al.* (2001), Silveira e Gonçalves (2001), Silveira *et al.* (2008a, 2008b, 2013). Conforme relatado em Maciel (2012), em Silva *et al.* (2001) estão os fundamentos da solução numérica, via MEF, para problemas de equilíbrio de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato, mas considerando pequenos deslocamentos e deformações e material elástico linear. Já em Silveira *et al.* (2008a, 2008b) podem ser encontradas duas formulações capazes de resolver o problema de contato unilateral entre uma estrutura esbelta e uma fundação elástica, ou seja: na primeira formulação, que é mais geral, o MEF foi usado tanto para discretizar a estrutura quanto a base, e técnicas de programação matemática são adotadas na solução do problema de otimização (Silveira *et al.*, 2008a); na segunda formulação foi usado o método de Ritz para a redução espacial e o método de Newton-Raphson para a solução das equações não lineares (Silveira *et al.*, 2008b). Mais recentemente, Silveira *et al.* (2013) desenvolveram um estudo envolvendo arcos e anéis com restrições unilaterais de contato; nesse mesmo artigo pode ser encontrada uma ampla pesquisa bibliográfica sobre análises estáticas e dinâmicas de problemas de barras, placas, anéis e cascas cilíndricas com restrições de contato.

Outro trabalho de pesquisa que serviu de referência básica para esta tese foi o de Straughan (1990), que adotou o MDF como o método de discretização nas análises lineares de placas apoiadas em fundações elásticas. Ele considerou diversos tipos de modelos de bases elásticas para representação do solo. Nesse trabalho ficou evidenciada a viabilidade e facilidade da implementação computacional desses modelos para simulação de solos e rochas no contexto do MDF.

Nota-se uma preferência do meio acadêmico pela adoção do MEF na solução dos problemas de contato tratados nesta tese. Entretanto, aplicações do MDF nas engenharias estrutural e geotécnica continuam sendo alvos de pesquisas, com o recente e crescente

interesse da comunidade científica (Szilard, 2004; Mickens, 2005). Esse interesse pode ser constatado pela evolução do MDF, e mais precisamente no desenvolvimento de suas variantes. Dentre essas variações destaca-se o método das diferenças finitas energéticas (MDFE), que se apresenta como um “meio termo” entre o MDF tradicional e o MEF. Dentre as pesquisas nessa área, citam-se os trabalhos de Mittlebach (2002; 2007) e Vieira (2007), que avaliaram o comportamento de silos através desse método.

Outras pesquisas usando o MDF comprovam a sua viabilidade na solução de vários problemas de engenharia. Debs (1976), por exemplo, tratou, de forma simplificada, as cascas de revolução; e Ibanesco *et al.* (2009), que analisaram placas apoiadas em estacas e destacaram a facilidade de aplicação e implementação do MDF na solução de problemas de contato desse tipo.

Soluções semi-analíticas de cascas cilíndricas são encontradas em diversos trabalhos, entre eles, Seng (1987), que usou a técnica de dupla expansão de séries de Fourier para desenvolver um programa para análise de cascas; e Madureira *et al.* (2010), que desenvolveram formulações semi-analíticas e híbridas usando séries de Fourier expandidas para simular o comportamento de cascas cilíndricas sujeitas a diversos tipos de carregamentos.

Paliwal e Bhalla (1993a e 1993b), Paliwal e Srivastava (1994) e Paliwal *et al.* (1995; 1996) consideraram o problema de grandes deslocamentos e deformações em cascas cilíndricas assentes em fundações elásticas, onde os modelos de Winkler, Pasternak e Kerr foram considerados. Gunawan *et al.* (2005) analisaram, via MEF, cascas cilíndricas parcialmente enterradas em fundações elásticas usando séries de Fourier na direção circunferencial para capturar o efeito da base. Na abordagem semi-analítica proposta por esses autores só foram consideradas cargas simétricas.

Han e Liew (1997) estudaram o comportamento de placas em contato com fundações modeladas com dois parâmetros e propuseram uma técnica numérica de solução alternativa aos MEF, MEC e MDF; a teoria de Reissner/Midlin foi usada para a placa. Nobili e Tarantino (2005) usaram o MDF para estudar vigas viscoelásticas sobre bases viscoelásticas. Já Malekzadeh *et al.* (2008) resolveram o problema de vibração livre tridimensional de uma casca cilíndrica circular fina em contato com bases do tipo Winkler e Pasternak.

Recentemente, Shen (2009; 2012) e Shen *et al.* (2010) publicaram trabalhos relacionados com o comportamento pós-flambagem de cascas cilíndricas envoltas por meio elástico. Foram considerados nessas análises o método de Rayleigh-Ritz e o modelo de Pasternak para representar o meio elástico. Ma *et al.* (2007; 2009) estudaram o problema de

contato unilateral entre estruturas e bases elásticas; o modelo de Winkler foi considerado no primeiro artigo e uma base do tipo Pasternak na segunda publicação.

Também recentemente, Baktiari-Nejad e Bideleh (2012), através do método de Rayleigh-Ritz, estudaram o problema de vibração livre não linear em cascas cilíndricas circulares em fundações do tipo Winkler e Pasternak. Como esperado, eles verificaram que existe uma relação direta entre o parâmetro de rigidez da base e o aumento da frequência natural.

O problema de contato unilateral foi também abordado em Bottega (1989), que procurou solução analítica para descrever o comportamento de um anel elástico dentro de uma cavidade que poderia se contrair. Ele verificou que o efeito da contração dessa cavidade retardava o colapso da estrutura. Güler (2004) avaliou, através do método de Galerkin, placas circulares elásticas assentes em contato unilateral com fundações do tipo Winkler e Pasternak.

Bradford e Roufegarinejad (2007) e Lam (2008) avaliaram tubos de aço preenchidos com concreto (ou qualquer outro material), onde foi feita uma analogia desse material de preenchimento com uma base elástica. Vasilikis e Karamanos (2009) estudaram a estabilidade de cilindros de paredes finas de aço, confinados e sob pressão externa; atenção especial foi dada à identificação de mecanismos de plastificação no regime pós-flambagem. Celep *et al.* (2011) investigaram, via método de Galerkin, a resposta estática e dinâmica de uma viga apoiada unilateralmente em uma base do tipo Pasternak. Sob efeito dinâmico, eles verificaram que os modos de vibração da viga eram bastante influenciados pela base elástica.

Luo e Teng (1998) estudaram, via MEF, cascas de revolução em contato com fundações cujo comportamento foi aproximado por uma função polinomial; Hong *et al.* (1999) analisaram o problema de contato unilateral envolvendo cascas axissimétricas e placas sobre fundações elásticas do tipo Winkler. Recentemente, Sharidi *et al.* (2013) adotaram o método de Rayleigh-Riz para estudar a flambagem de painéis cilíndricos em contato unilateral com bases elásticas do tipo Winkler e Pasternak. A análise não linear realizada por esses autores permitiu avaliar as deformações laterais causadas por cargas axiais considerando a influência da base, que foi avaliada em apenas um dos lados da casca.

Na área de engenharia de túneis, destacam-se aqui o trabalho de Nakagawa e Jiang (2003), que estudaram problemas tempo-dependente de paredes em rochas moles usando o MDF; e também o artigo de Choi (2006), onde foi feito um resumo dos programas comerciais existentes e das metodologias numéricas usualmente adotadas na solução de problemas nessa área. Destaca-se ainda o trabalho de Lü *et al.* (2011) que fizeram uma análise de confiabilidade de túneis procurando destacar diversos métodos de análise.

Outros trabalhos, embora não diretamente relacionados com a linha de pesquisa desta tese, evidenciam algumas metodologias e formulações usadas aqui. Civalek (2006), por exemplo, analisou através do MDF os efeitos dinâmicos em uma placa apoiada sobre uma base elástica; Söderberg e Björklund (2008) procuraram validar um modelo numérico simplificado de contato que levava em consideração os efeitos da rugosidade no modelo de Winkler.

Como também já enfatizado em Maciel (2012), merecem ser citados os seguintes artigos cuja atenção é voltada aos modelos de bases elásticas, quais sejam: Hetényi (1946); Kerr (1964); Dutta e Roy (2002); e Wang *et al.* (2005). O primeiro trabalho fornece as soluções analíticas de vários problemas de vigas sobre uma base do tipo Winkler; em Kerr (1964) estão as equações que regem o comportamento de bases elásticas do tipo Winkler, Pasternak, Reissner, Filonenko-Borodich, entre outros; e Dutta e Roy (2002), e Wang *et al.* (2005) trazem o estado da arte sobre as soluções analíticas e numéricas de problemas de contato entre estruturas e fundações elásticas.

Finalmente, apresentam-se a seguir trabalhos que foram importantes referências na definição da geometria de alguns problemas apresentados no Capítulo 4 desta tese. Soluções analíticas linearizadas para diversos problemas de placas e cascas podem ser encontradas em Timoshenko e Krieger (1970); e soluções numéricas clássicas, obtidas através do MEF, são fornecidas em Brendel e Ramm (1980), que estudaram a estabilidade de cascas cilíndricas. Pitkäranta *et al.* (1995) resolveram, através do MEF, uma série de problemas envolvendo cascas que podem ser considerados *Benchmarks*; já Bathe *et al.* (2000) propuseram os chamados elementos finitos mistos de casca MITC (*mixed interpolated tensorial components*) e forneceram várias análises numéricas com o intuito de verificar a eficiência desse novo elemento; Sze *et al.* (2004) publicaram o artigo intitulado “*Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells*”, onde diversos tipos de cascas foram analisados numericamente. Para concluir, em Mackerle (2005) é encontrada uma pesquisa bibliográfica sobre aplicações de vasos de pressão e tubos em diversas áreas da engenharia, incluindo os problemas de contato 2D e 3D.

Capítulo 2

Formulação Geral do Problema de Contato e Propostas de Solução

2.1 INTRODUÇÃO

Apresentam-se inicialmente neste capítulo as equações básicas que regem os problemas de contato de interesse desta tese. Na sequência, após a discretização do sistema casca cilíndrica-base elástica, são desenvolvidas as estratégias numéricas adotadas para soluções desses problemas, sejam eles de contato bilateral ou unilateral. Ressalta-se, mais uma vez, que o método de discretização adotado é o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Assim, a Seção 2.2 destina-se à apresentação dos problemas de contato envolvendo o sistema estrutura-meio elástico, aqui caracterizado por uma casca cilíndrica e uma base elástica, responsável por simular o comportamento do solo ou rocha. Como mencionado no capítulo anterior, existe a possibilidade do aparecimento de dois tipos de problemas: *Contato Bilateral* (PCB) e *Contato Unilateral* (PCU). Na Seção 2.3 são apresentadas as equações básicas que regem esses problemas, com ênfase à descrição das restrições que caracterizam o PCU. Na última, a Seção 2.4, estão as estratégias numéricas adotadas para a solução dos PCB e PCU.

2.2 PROBLEMAS DE CONTATO

Um sólido deformável, quando sob a ação de forças externas, deforma-se e, conseqüentemente, esforços internos são desenvolvidos. Esses esforços serão em geral determinados a partir de tensões que se especificam num ponto ou num elemento do sólido.

Cascas cilíndricas são sólidos tridimensionais que apresentam a particularidade de serem limitados por duas superfícies paralelas, onde a distância entre elas é designada como espessura, sendo essa dimensão muito menor que as outras dimensões das superfícies. Por ser

cilíndrica, a geratriz longitudinal de suas superfícies tem raio infinito enquanto na direção circunferencial o raio é definido.

O fato de a espessura ser pequena, quando comparada às outras dimensões do sólido, permite que se introduzam simplificações na formulação dos problemas de placas e cascas. Mas, ainda assim, essa dimensão é bastante relevante em termos da Mecânica do Contínuo e deve ser considerada na formulação das Teorias de Placas e Cascas para obtenção de grandezas como os deslocamentos, deformações e tensões.

Considerar-se-á, neste trabalho, que o material constituinte da casca é homogêneo e tenha comportamento elástico. Uma das não linearidades possíveis, a geométrica, pode ser incluída na análise a partir de uma formulação adequada de cascas cilíndricas. A sua consideração em trabalhos futuros será discutida no último capítulo desta tese.

Quando as cascas cilíndricas são usadas como estruturas de túneis, poços ou tubulações enterradas, elas interagem com o meio, no caso solo ou rocha. Nessas aplicações, se a casca está completamente presa (ou fixa) ao meio, caracteriza-se então o problema como sendo de *Contato Bilateral* (PCB). Quando a casca está apenas apoiada e permitindo perda de contato com o meio, para determinadas condições de carregamento, define-se o problema como sendo de *Contato Unilateral* (PCU). Na Figura 2.1 são mostradas uma tubulação, e dois painéis cilíndricos com restrições de contato, que, em função da fixação dessas estruturas ao meio/base, podem ser tratadas como contato bilateral ou unilateral. Supõe-se, adicionalmente, que o meio, atuando sob contato unilateral, só ofereça reação quando comprimido. Na Figura 2.2 são representados esquematicamente esses dois tipos de problemas de contato.

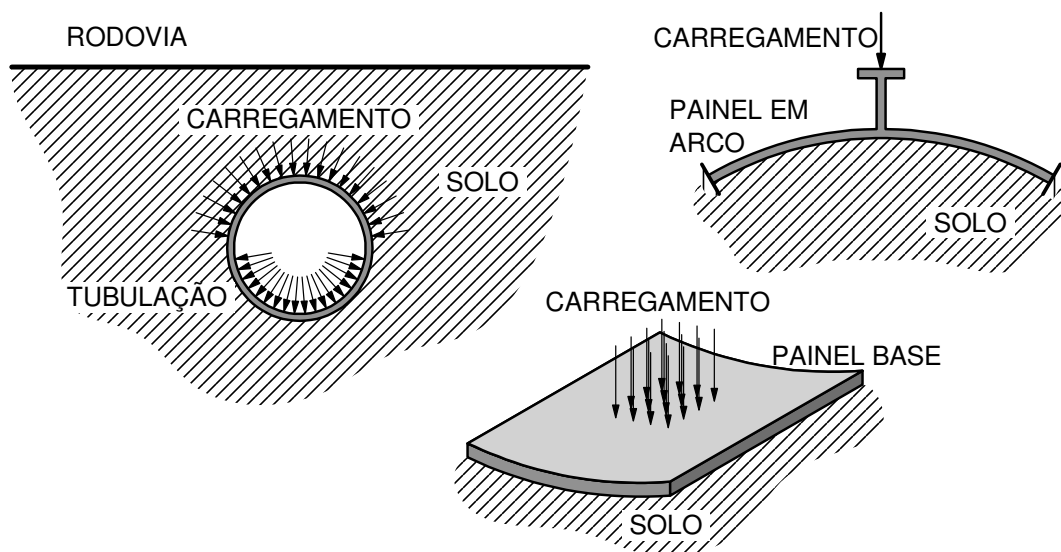


Figura 2.1 Representação de problemas estruturais com restrições de contato

O problema a ser analisado nesta tese se traduz numa casca cilíndrica assente numa base elástica que, na prática, representa um solo ou rocha (Figura 2.1). Essa base elástica, cujos modelos serão apresentados no Capítulo 3, pode ser idealizada como um colchão de molas com determinada rigidez, que se deformam independente uma da outra ou de forma conjunta.

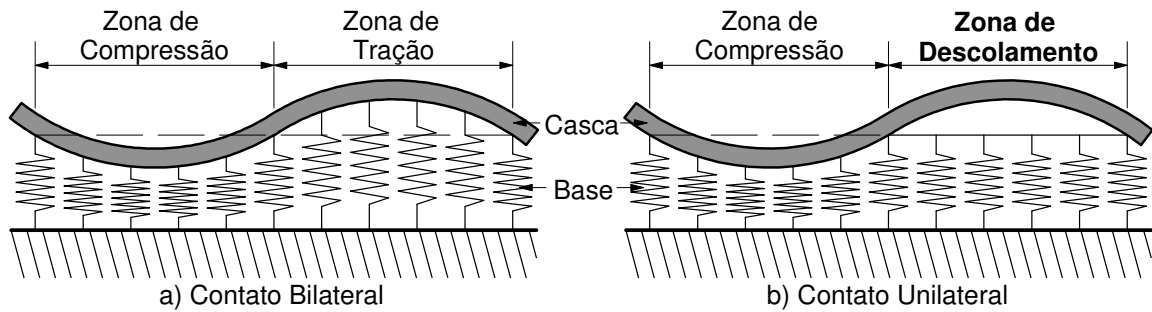


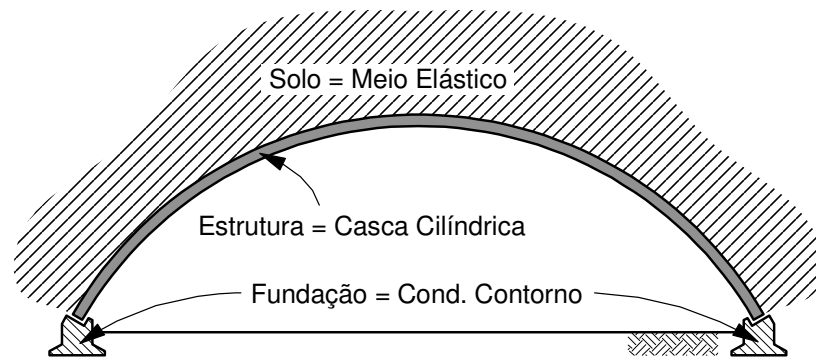
Figura 2.2 Tipos de problemas de contato

Caso o seja um PCB (Figura 2.2a), a base elástica irá trabalhar integralmente junto com a estrutura, independentemente dos deslocamentos radiais da casca serem positivos ou negativos. Isso significa que a região de contato entre os corpos é conhecida *a priori* e o problema a ser resolvido é **linear**. Já no caso do PCU (Figura 2.2b), como é suposto que a base só reaja às solicitações de compressão, a definição da região de contato entre os corpos vai depender, para uma determinada solicitação ou carregamento, da configuração deformada da casca, ou seja, não se conhece *a priori* a região de contato entre os corpos. Isso significa que, mesmo considerando as hipóteses de pequenos deslocamentos e material elástico, quando se consideram as restrições unilaterais, o problema a ser resolvido é **não linear**.

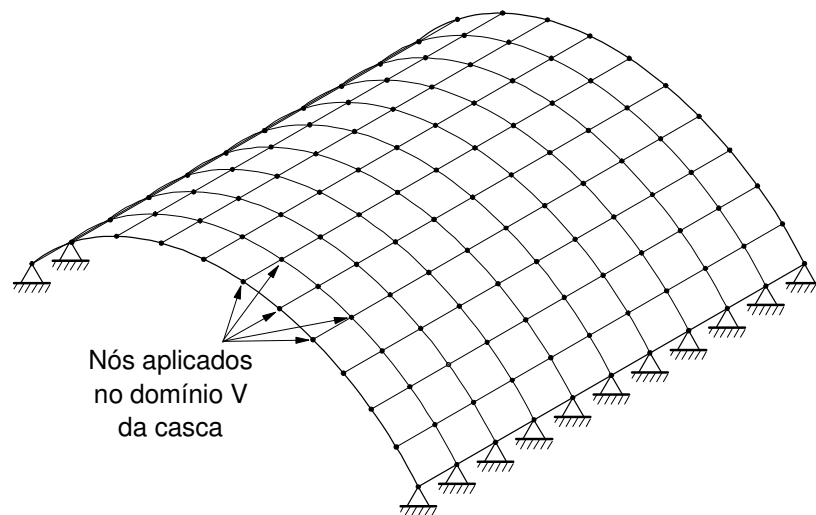
As estratégias adotadas neste trabalho para solução dos PCB e PCU serão detalhadas na Seção 2.4; antes, porém, serão descritas, a seguir, as equações básicas que regem o comportamento do sistema casca-base elástica.

2.3 EQUAÇÕES BÁSICAS

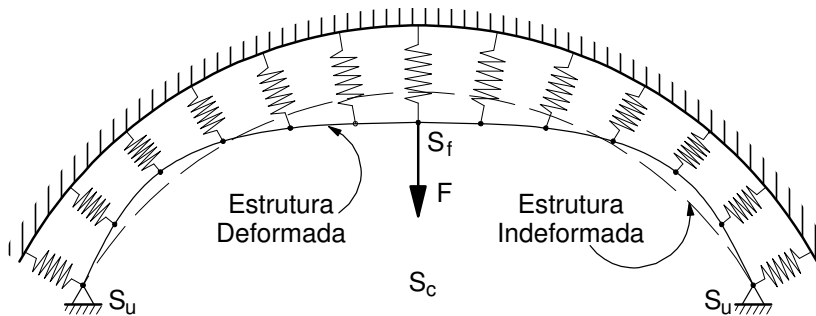
A Figura 2.3a apresenta um dos problemas de contato de interesse desta tese, ou seja, um painel cilíndrico (ou estrutura) em contato com o solo (ou base elástica). Já a Figura 2.3b ilustra uma das possíveis malhas de diferenças finitas que poderia ser adotada na discretização desse problema. Com a aplicação do MDF, que será detalhado no próximo capítulo, será possível conhecer os deslocamentos da casca e da base nos pontos nodais dessa malha para os dois tipos de problema de contato a serem analisados (Figuras 2.3c1 e 2.3c2).



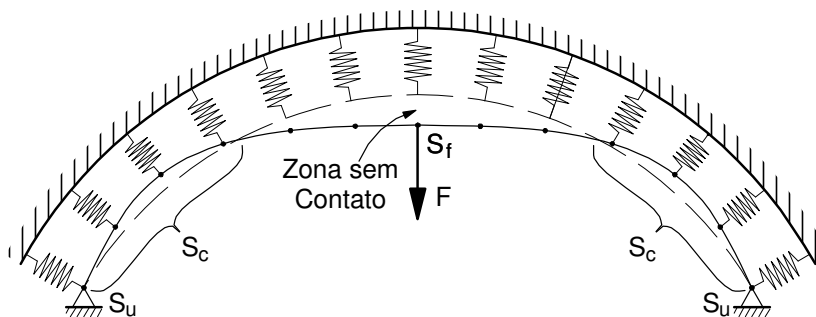
a) O Problema de engenharia



b) Discretização adotada



c1) Contato bilateral



c2) Contato unilateral

c) Tipos de contato possíveis de análise

Figura 2.3 Painel cilíndrico em contato com uma base elástica

A estrutura pode ser definida como um sólido elástico contínuo de domínio V , com o contorno delimitado por três superfícies distintas supostas regulares: S_u , S_f e S_c . Como nos problemas estruturais usuais, S_u define a região do sólido onde os deslocamentos são prescritos e S_f é a região do sólido onde as forças externas são prescritas. A superfície denominada S_c define a região de contato entre os corpos.

Para a estrutura, as equações de equilíbrio interno, as relações cinemáticas e as relações constitutivas são dadas, respectivamente, por:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ em } V \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } V \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij,j} = C_{ijkl}\varepsilon_{kj} \text{ em } V \quad (2.3)$$

Deve-se observar, através da Equação (2.1), que as forças de corpo foram desprezadas da análise e que faz-se uso da notação indicial com a convenção usual de somatório. Ainda nas Equações (2.1, 2.2 e 2.3), σ_{ij} representa as componentes cartesianas do tensor de Cauchy, ε_{ij} caracteriza as componentes de deformação infinitesimal e u_i as componentes dos deslocamentos. Por fim, C_{ijkl} define o tensor das propriedades elásticas da casca.

Como neste trabalho objetiva-se a resposta da fundação apenas na região de contato entre os corpos, é possível representá-la com modelos matemáticos simples, mas que apresentam precisão satisfatória. Dessa forma, a reação da base pode ser descrita genericamente através da seguinte equação:

$$r_b = C_b u_b \quad (2.4)$$

em que u_b e r_b são o deslocamento e a reação à compressão da base elástica, respectivamente, e C_b caracteriza as propriedades mecânicas da base elástica.

Para o sistema estrutural analisado, as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } S_u \quad (2.5)$$

$$F_i = \sigma_{ij}n_j \text{ em } S_f \quad (2.6)$$

com (2.5) representando a condição de contorno essencial do problema, sendo \bar{u}_i o valor prescrito do deslocamento em S_u ; a Equação (2.6) caracteriza o equilíbrio das forças que deve existir em S_f .

Para a caracterização dos PCB e PCU a serem resolvidos, necessita-se ainda de uma equação adicional que indica a condição de compatibilidade que deve ser satisfeita em S_c e, fisicamente, representa a condição de impenetrabilidade entre os corpos. Para o caso do PCB, tem-se a seguinte expressão para a distância entre os dois corpos, φ :

$$\varphi = u_b - u_i = 0 \text{ em } S_c \quad (2.7)$$

a qual deve ser nula em S_c . Ou seja, os deslocamentos da estrutura e da base elástica são iguais na região de contato. Essa última condição é típica da situação de contato bilateral entre corpos.

Para o caso do PCU, a condição de compatibilidade que deve ser satisfeita em S_c é descrita através da inequação em termos da distância entre os dois corpos:

$$\varphi = u_b - u_i \geq 0 \text{ em } S_c \quad (2.8)$$

Essa expressão indica a condição de impenetrabilidade entre a estrutura e o meio. Assim, ao se analisar o comportamento de um ponto genérico em S_c , uma das seguintes situações pode ser observada:

- i. caso ocorra o contato entre os corpos (base e estrutura), escreve-se:

$$\varphi = 0 \text{ e } r_b > 0 \quad (2.9)$$

- ii. no caso de separação entre os corpos, ou seja, existe o descolamento entre a base e casca, tem-se, então:

$$\varphi > 0 \text{ e } r_b = 0 \quad (2.10)$$

A partir dessas considerações, pode-se concluir que as condições que definem de forma completa o contato como sendo unilateral são dadas pela Inequação (2.8), ou ainda, em termos da reação da base como:

$$r_b \geq 0 \quad (2.11)$$

e através da relação de complementaridade entre φ e r_b , ou seja,

$$\int_{S_c} r_b \varphi dS_c = 0 \quad (2.12)$$

A Figura 2.4 fornece o domínio de validade dessas três relações e ainda o gráfico de validade da lei de contato.

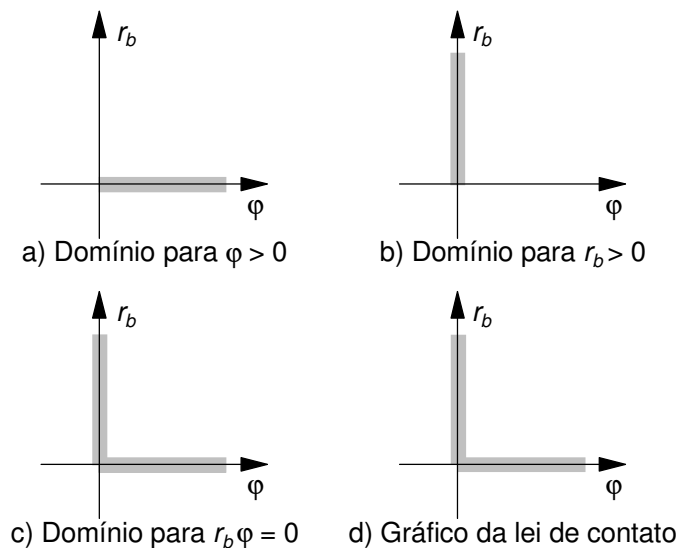


Figura 2.4 Domínio de validade das restrições de contato unilateral

Observa-se, então, que a solução do PCU pode ser obtida através da Equação (2.1), com o auxílio das Equações (2.2) e (2.3), respeitando-se as condições de contorno (2.5) e (2.6), as Inequações (2.8) e (2.11) e a condição de complementaridade (2.12). Entretanto, a não linearidade decorrente das condições de contorno em S_c torna a solução direta do problema uma tarefa bastante difícil. Assim, será necessário formular um problema de minimização equivalente para que seja possível utilizar uma estratégia numérica conveniente para a sua solução. É demonstrado em Silveira (1995), que o problema de otimização:

$$\text{Min } \Pi(u_i, u_b) \quad (2.13)$$

$$\text{Sujeito a: } -\varphi \leq 0, \text{ em } S_c \quad (2.14)$$

em que,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_{S_c} C_b u_b^2 dS_c - \int_{S_f} F_i u_i dS_f \quad (2.15)$$

é equivalente à solução das equações e restrições impostas na formulação apresentada.

No caso do PCB, substitui-se a Inequação (2.14) pela condição de igualdade (2.7).

Na próxima seção são apresentadas as estratégias usadas nesta tese para solução desses problemas de minimização equivalente.

2.4 ESTRATÉGIAS NUMÉRICAS PARA SOLUÇÃO

As estratégias numéricas utilizadas neste trabalho para a solução aproximada dos problemas de contato bilateral (PCU) e unilateral (PCU) apresentam como características principais:

- i. o emprego do Método das Diferenças Finitas (MDF), onde se substitui o domínio original dos corpos (estrutura e base elástica) e seus respectivos contornos por uma malha e se aproxima a solução do problema. Como consequência, chega-se, no sistema de equações algébricas que rege os PCB e PCU em estudo (Subseção 2.4.1 e Capítulo 3);
- ii. no caso do PCB, após essa discretização do sistema, a solução do problema linear pode ser alcançada de forma direta resolvendo-se esse sistema de equações algébricas (Subseção 2.4.2);
- iii. no caso do PCU, também após a aplicação do MDF, a solução do problema não linear não pode ser obtida de uma forma direta e assim duas metodologias de solução para esse problema são apresentadas na Subseção 2.4.3.

2.4.1 Transformação do Problema Contínuo em Discreto

Como já comentado no capítulo anterior e será detalhado no próximo capítulo desta tese, aplica-se aqui o MDF para aproximar as derivadas das equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base elástica. Isso é feito substituindo-se as derivadas que aparecem nas equações diferenciais de equilíbrio do sistema casca-base por fórmulas de diferenças das variáveis de campo, no caso os deslocamentos, em pontos selecionados do sistema. Esses pontos estão localizados na malha de diferenças finitas. Faz-se o mesmo para as expressões que descrevem as condições de contorno do problema. Como consequência da aplicação do

MDF, chega-se num sistema de equações algébricas, a partir do qual os deslocamentos da casca ou base, nos pontos da malha, podem ser obtidos, ou seja:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}_e \quad (2.16)$$

em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema casca-base, \mathbf{F}_e é o vetor das forças externas atuantes e \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais do sistema, incógnitas do problema. Efetivamente, a matriz de rigidez do sistema \mathbf{K} é montada a partir do arranjo das equações de equilíbrio da casca, \mathbf{K}_L , com a da base elástica, \mathbf{K}_b .

2.4.2 Tratamento do Problema de Contato Bilateral

Caso a casca e a base estejam sujeitas às restrições bilaterais de contato, pequenos deslocamentos e deformações, com o material de ambos os corpos exibindo comportamento elástico, é possível a adoção de hipóteses da teoria linear elástica para solução do problema. Dessa forma, a solução do problema de minimização equivalente descrito pela Equação (2.13) e restrição (2.7), onde os deslocamentos da casca são iguais ao da base, e a região de contato S_c é conhecida *a priori*, pode ser obtido diretamente resolvendo-se a equação matricial (2.16), que é reescrita da seguinte forma:

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b] \mathbf{U} = \mathbf{F}_e \quad (2.17)$$

em que o vetor \mathbf{U} representa os deslocamentos nodais da casca e da base, que são iguais nesse caso.

A Figura 2.5 apresenta o algoritmo adotado neste trabalho para a solução do PCB em questão. Informa-se adicionalmente que a resolução do sistema anterior – passo 8 do algoritmo da Figura 2.5 – é obtida por um processo de escalonamento de Gauss-Jordan (Burden e Faires, 2008). O sobrescrito *f* nos passos 4, 5 e 6 informa que as matrizes de rigidez da casca e base são montadas inicialmente retangular, isto é, considerando os pontos fictícios da malha de diferenças finitas, explicados mais adiante. Com a introdução das condições de contorno do problema, passo 7, eliminam-se esses pontos fictícios. Esses procedimentos computacionais serão detalhados no próximo capítulo.

-
- 1: Leitura dos dados: propriedades geométricas, dos materiais e dos carregamentos do sistema (casca-base)
 - 2: Define-se a malha de diferenças finitas do sistema
 - 3: Monta-se o vetor de forças externas: \mathbf{F}_e
 - 4: Monta-se a matriz de rigidez da casca: ${}^i\mathbf{K}_L$
 - 5: Monta-se a matriz de rigidez da base elástica: ${}^i\mathbf{K}_b$
 - 6: Calcula-se a matriz de rigidez do sistema estrutural: ${}^i\mathbf{K} = {}^i\mathbf{K}_L + {}^i\mathbf{K}_b$
 - 7: Faz-se a introdução das condições de contorno: ${}^i\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$
 - 8: Resolve-se o sistema: $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}_e$
 - 9: Calculam-se as forças internas: $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{N}_x, \mathbf{N}_\theta, \mathbf{N}_{x\theta}, \mathbf{M}_x, \mathbf{M}_\theta, \mathbf{M}_{x\theta}, \mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_\theta$
 - 10: Imprimem-se os resultados
-

Figura 2.5 Algoritmo de solução do PCB

2.4.3 Tratamento do Problema de Contato Unilateral

Caso o sistema casca-base esteja sujeito às restrições unilaterais de contato, mesmo considerando as hipóteses de pequenos deslocamentos e deformações, e material elástico, a solução do PCU não pode ser obtida diretamente através de (2.17), uma vez que não se conhece *a priori* a região de contato S_c entre os corpos. Assim, no caso do PCU, após a discretização do sistema, o problema de minimização equivalente definido pela Equação (2.13) e restrição (2.14), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\text{Min } \Pi(\mathbf{U}, \mathbf{U}_b) \quad (2.18)$$

$$\text{Sujeita a: } -\varphi(\mathbf{U}, \mathbf{U}_b) \leq 0 \quad (2.19)$$

em que se considera agora o vetor \mathbf{U} como os deslocamentos nodais da estrutura e \mathbf{U}_b os deslocamentos nodais da base.

Serão descritas a seguir duas estratégias numéricas adotadas para a solução do problema de otimização com restrições unilaterais de contato.

- *Estratégia de Solução 1 (ES1): PCL*

Trata-se da estratégia de solução do PCU inicialmente proposta por Vaz (1991) e já usada com sucesso, no contexto do MEF, para problemas de barras e placas com restrições de contato unilaterais (Silveira, 1995; Silva, 1998). Essa estratégia será adaptada agora para solução do PCU envolvendo cascas cilíndricas e bases elásticas.

Como brevemente mencionado no capítulo anterior, essa estratégia utiliza os recursos de programação matemática, através de esquemas de pivoteamento, que são usados especificamente na solução de Problemas de Complementaridade Linear (PCL), que são descritos genericamente da seguinte forma (Fletcher, 1981; Barbosa, 1986):

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{w} \geq 0; \mathbf{z} \geq 0; \text{ e } \mathbf{w}^T \mathbf{z} = 0 \quad (2.21a,b,c)$$

em que \mathbf{M} é uma matriz quadrada de ordem $p \times p$, e \mathbf{w} , \mathbf{z} e \mathbf{q} são vetores de dimensão p . Note que nessa formulação não existe função objetivo a ser minimizada ou maximizada; o objetivo é a obtenção dos vetores \mathbf{w} e \mathbf{z} que satisfaçam a Equação (2.20), respeitando-se as restrições (2.21). A condição (2.20) representa um sistema de equações lineares; as condições (2.21a) e (2.21b) requerem que a solução de (2.20) seja não negativa; e a condição (2.21c) implica em: $\mathbf{w}_i \mathbf{z}_i = 0$, para $i = 1, 2, \dots, p$, desde que $w_i, z_i \geq 0$ (Equação 2.21a,b).

Em Fletcher (1981) são apresentados os métodos de programação matemática usualmente empregados na solução de um PCL. Entre os mais usados, merecem destaque: o método de Dantzig (Cottle e Dantzig, 1968); e o método de Lemke (1968). Esses métodos podem ser considerados extensões do Método Simplex de programação linear (Fletcher, 1981).

O método de Dantzig, conhecido também como o *método de pivoteamento principal*, foi usado por Ascione e Grimaldi (1984) em uma das formulações propostas para solução do problema de contato sem atrito entre uma placa e uma fundação elástica. Uma implementação computacional do método de Lemke é fornecida por Ravidran (1972). Em Ravidran e Lee (1981) é feito um estudo mostrando a superioridade do algoritmo de Lemke em relação às outras técnicas na solução de problemas lineares e quadráticos complementares. Como exemplos de aplicação do método de Lemke na solução de problemas de contato, podem ser citados: Barbosa (1986); Silva (1998); Stavroulakis *et al.* (1991); Silveira e Gonçalves (2001); Silva *et al.* (2001); Pereira (2003); e Silveira *et al.* (2013).

A transformação do problema de minimização em questão (Equação (2.18) e restrição (2.19)) num PCL (Equação (2.20) e restrições (2.21)) equivalente, em que técnicas de pivoteamento podem ser empregadas para resolvê-lo, envolve o emprego de metodologias numéricas específicas. Silveira (1995) e Silva (1998), por exemplo, propõem três formulações numéricas que podem ser usadas nessa transformação. São elas:

- i. *Formulação Primal*: onde as incógnitas principais são os deslocamentos da estrutura e a reação da base elástica;
- ii. *Formulação Dual*: onde apenas a reação da base elástica é tomada como incógnita principal;
- iii. *Formulação Compatível*: onde as incógnitas são os deslocamentos da base elástica e os deslocamentos relativos entre os corpos.

Decidiu-se utilizar neste trabalho apenas a terceira opção em função da sua simplicidade, facilidade de implementação computacional e, por fim, devido à técnica de discretização adotada (MDF). Essa formulação, que é denominada *Compatível* por apresentar como incógnitas apenas deslocamentos, tem como ponto de partida o seguinte indicador variacional:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_L \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_b^T \mathbf{K}_b \mathbf{U}_b - \mathbf{U}^T \mathbf{F}_e \quad (2.22)$$

com \mathbf{U} e \mathbf{U}_b , como já mencionado, sendo os deslocamentos da estrutura e da base, respectivamente; \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_b são as matrizes de rigidez da estrutura e da base, respectivamente; e \mathbf{F}_e é o vetor de forças externas nodais.

Aplicando o teorema de Lagrange no indicador variacional (2.22) em relação a valores nodais cinematicamente admissíveis de \mathbf{U} e \mathbf{U}_b , chega-se à equação de equilíbrio do sistema, isto é:

$$\mathbf{K}_L \mathbf{U} + \mathbf{K}_b \mathbf{U}_b = \mathbf{F}_e \quad (2.23)$$

Através de algumas transformações e manipulações algébricas realizadas na equação anterior,

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_L \mathbf{U} + \mathbf{K}_b \mathbf{U}_b + \mathbf{K}_L \mathbf{U}_b - \mathbf{K}_L \mathbf{U}_b &= \mathbf{F}_e \therefore \\
(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b) \mathbf{U}_b - \mathbf{K}_L (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}) &= \mathbf{F}_e \therefore \\
\mathbf{U}_b &= (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} [\mathbf{K}_L (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}) + \mathbf{F}_e], \tag{2.24}
\end{aligned}$$

chega-se na seguinte equação:

$$\mathbf{U}_b = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{F}_e + (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{K}_L (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}) \tag{2.25}$$

que é equivalente a Equação (2.20), caso se reconheça que:

$$\mathbf{w} = \mathbf{U}_b; \mathbf{q} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{F}_e; \mathbf{M} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{K}_L; \text{ e } \mathbf{z} = \mathbf{U}_b - \mathbf{U} \tag{2.26}$$

Assim, a Equação (2.25) com as restrições:

$$\mathbf{U}_b \geq \mathbf{0}; (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}) \geq \mathbf{0}; \text{ e } \mathbf{U}_b^T (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}) = \mathbf{0} \tag{2.27a,b,c}$$

definem um PCL padrão, onde técnicas de otimização podem ser usadas na sua solução. A Figura 2.6 fornece o algoritmo usado neste trabalho para a implementação e solução do PCL definido pela Equação (2.25) e restrições (2.27a,b,c).

- **Estratégia de Solução 2 (ES2): MNR**

Como também já introduzido no capítulo anterior, nessa estratégia de solução, a região de contato S_c é inicialmente aproximada e, na sequência, utiliza-se o método de Newton-Raphson para corrigi-la. Com isso consegue-se quantificar a participação da base elástica na obtenção de outras incógnitas do problema. Aqui, como as restrições de contato não são consideradas de uma forma direta, define-se o seguinte *problema de otimização sem restrições* a ser resolvido:

$$\mathbf{g} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b] \mathbf{U} - \mathbf{F}_e \neq \mathbf{0} \tag{2.28}$$

com \mathbf{g} sendo o vetor gradiente, ou forças desequilibradas do sistema casca-base, que deve se anular ao longo do processo iterativo de Newton-Raphson, como ilustrado na Figura 2.7. A cada iteração, através de uma nova avaliação de S_c , corrige-se a participação da base elástica, ou seja, a matriz de rigidez \mathbf{K}_b . Esse processo iterativo é concluído, indicando que a solução do PCU foi atingida, quando determinado critério de convergência for satisfeito.

Formulação Compatível	
1:	Entrada de dados: propriedades geométricas, dos materiais, dos carregamentos do sistema e modelo de base
2:	Definição e montagem da malha de diferenças finitas
3:	Monta-se o vetor de forças externas: \mathbf{F}_e
4:	Monta-se a matriz de rigidez da casca (malha fictícia): ${}^i\mathbf{K}_L$
5:	Monta-se a matriz de rigidez da base elástica (malha fictícia): ${}^i\mathbf{K}_b$
6:	Aplicam-se as condições de contorno: ${}^i\mathbf{K}_L \rightarrow \mathbf{K}_L$ e ${}^i\mathbf{K}_b \rightarrow \mathbf{K}_b$
7:	Monta-se a matriz do PCL: $\mathbf{M} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1}\mathbf{K}_e$
8:	Monta-se o vetor do PCL: $\mathbf{q} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1}\mathbf{F}_e$
9:	Resolve-se o PCL (algoritmo de Lemke): $\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz}$; $\mathbf{w} \geq 0$; $\mathbf{z} \geq 0$; e $\mathbf{w}^T\mathbf{z} = 0$
10:	Obtém-se os deslocamentos da base: $\mathbf{U}_b = \mathbf{w}$
11:	Obtém-se os deslocamentos da casca: $\mathbf{U} = \mathbf{w} - \mathbf{z}$
12:	Calculam-se forças internas: $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{N}_x, \mathbf{N}_0, \mathbf{N}_{x0}, \mathbf{M}_x, \mathbf{M}_0, \mathbf{M}_{x0}, \mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_0$
13:	Imprimem-se os resultados

Figura 2.6 Algoritmo de solução adotado para a ES1

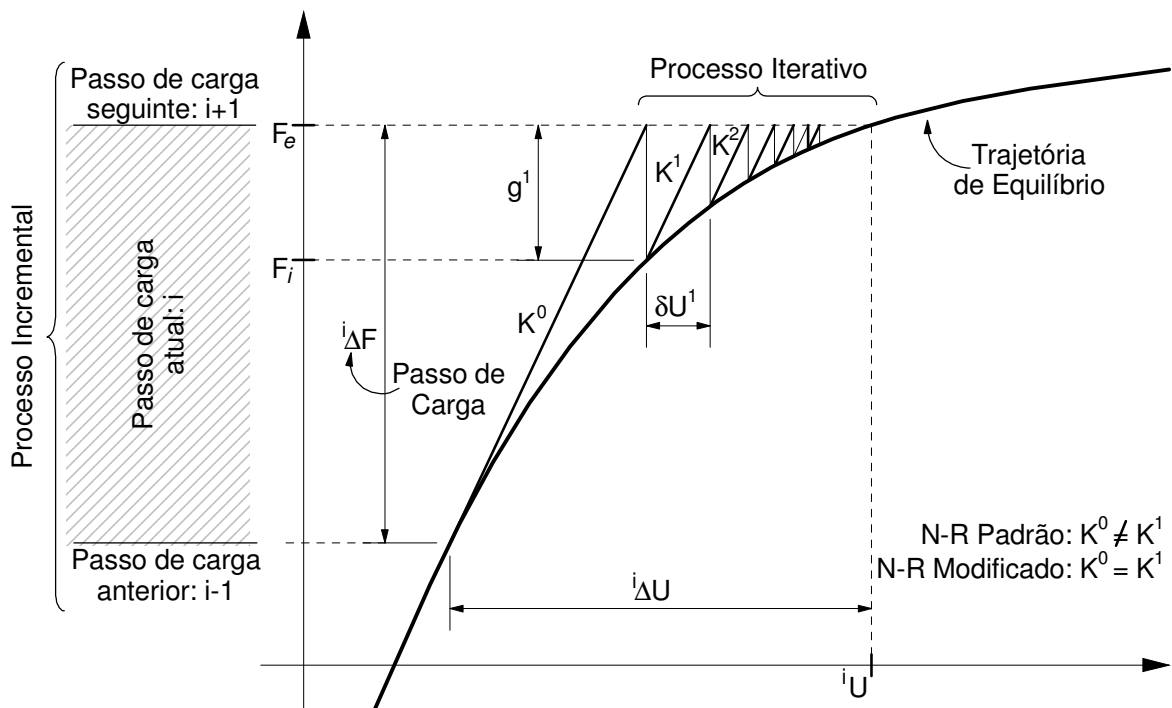


Figura 2.7 Representação gráfica do método de Newton-Raphson

Nessa estratégia de solução, o carregamento que pode causar a separação entre os corpos (casca-base) deve ser aplicado de forma incremental, onde em cada passo deve-se procurar anular o vetor gradiente dado pela Equação (2.28). Vale salientar que a matriz de rigidez da base \mathbf{K}_b será aproximada através de monitoramento do deslocamento do sistema, obtidos através da resolução do sistema de Equações (2.17). Note que \mathbf{K}_b é montada, usando o MDF, a partir das equações diferenciais que regem o comportamento do modelo adotado (Capítulo 3). Para inicialização desse processo de solução, antes do ciclo incremental, a participação da base não é considerada, uma vez que não se conhece *a priori* S_c , ou seja, a extensão da possível influência da base.

Resumindo, a matriz \mathbf{K}_b será aproximada a partir do monitoramento do deslocamento da estrutura em cada passo de carga/iteração de acordo com o sinal do deslocamento obtido em cada ponto nodal da malha de diferenças finitas. Essa aproximação é corrigida através das iterações do tipo Newton-Raphson (Figura 2.7).

No algoritmo apresentado na Figura 2.8, o vetor de forças externas nodais incrementais, $\Delta \mathbf{F}_e$, é definido através do produto de $\Delta \lambda$ e \mathbf{F}_r , que são, respectivamente, o parâmetro de controle do incremento de carga e o vetor de forças de referência. Neste trabalho, $\Delta \lambda$ é tomado constante ao longo de todo o processo incremental. Em Machado (2005) e Silva (2009) podem ser encontradas diversas estratégias de incremento de carga.

Ainda do algoritmo apresentado na Figura 2.8, nota-se que para um dado passo de carga, duas etapas distintas podem ser identificadas (Silva, 2009). A primeira delas, denominada fase predita, envolve a solução dos deslocamentos incrementais a partir de um determinado acréscimo de carga; a segunda fase, denominada corretiva, tem como objetivo a correção das forças internas incrementais e, como consequência, a obtenção do equilíbrio do sistema casca-base, quando se supõe o atendimento do critério de convergência baseado em forças. Essas duas fases de solução serão detalhadas a seguir juntamente com o procedimento adotado para inicialização de algumas variáveis. Antes, porém, é necessário fazer algumas observações relacionadas à notação a ser adotada:

- i. Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura e da base elástica no passo de carga i , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga $i + \Delta i$;
- ii. k é o contador do número de iterações (correções) em um determinado passo de carga. Para $k = 0$, tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo;
- iii. λ e \mathbf{U} definem o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;

- iv. $\Delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{U}$ caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- v. $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{U}$ denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais que ocorrem ao longo do ciclo iterativo.

-
- 1: Entrada de dados: propriedades geométricas, dos materiais e dos carregamentos do sistema
 - 2: Define-se a malha de diferenças finitas adotada
 - 3: Monta-se o vetor de forças externas de referência: \mathbf{F}_r
 - 4: Monta-se a matriz de rigidez da casca: ${}^1\mathbf{K}_e$
 - 5: Aplicam-se as condições de contorno: ${}^1\mathbf{K}_e \rightarrow \mathbf{K}_e$
 - 6: Resolve-se o sistema: ${}^0\mathbf{U} = \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{F}_r$
 - 7: Aproximam-se as regiões de contato entre os corpos: ${}^0\mathbf{U} \rightarrow S_c$
 - 8: Monta-se a matriz de rigidez da base a partir da região de contato: $S_c \rightarrow {}^0\mathbf{K}_b$
 - 9: Calcula-se a matriz de rigidez do sistema para o primeiro passo de carga: ${}^1\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + {}^0\mathbf{K}_b$
 - 10: **for** $i = 1$, número máximo de passos de carga **do**
 - 11: Resolve-se o sistema: ${}^i\mathbf{U} = {}^i\mathbf{K}^{-1}({}^i\Delta\lambda)\mathbf{F}_r$
 - 12: **if** (${}^i\mathbf{U} \neq {}^{i-1}\mathbf{U}$) **then**
 - 13: Avaliam-se os deslocamentos e define as regiões de contato: ${}^i\mathbf{U} \rightarrow S_c$
 - 14: Monta-se a matriz de rigidez da base (na malha fictícia) a partir da região de contato: $S_c \rightarrow {}^i\mathbf{K}_b$
 - 15: Calcula-se a matriz de rigidez do sistema: ${}^i\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + {}^i\mathbf{K}_b$
 - 16: **end if**
 - 17: **for** $k = 1$, número máximo de iterações **do**
 - 18: Calcula-se o vetor gradiente: ${}^{i,1}\mathbf{g} = (k \cdot \Delta\lambda)\mathbf{F}_r - {}^i\mathbf{K}{}^i\mathbf{U}$
 - 19: Calcula-se a relação: $C_g = \|\mathbf{g}\| \div \|\Delta\lambda \cdot \mathbf{F}_r\|$
 - 20: **if** ($C_g < \text{tolerância}$) **then exit for**
 - 21: Resolve-se o sistema: ${}^{i,k}\delta\mathbf{U} = {}^{i,k}\mathbf{K}^{-1} \cdot {}^{i,k}\mathbf{g}$
 - 22: Corrigem-se os deslocamentos: ${}^{i,k}\mathbf{U} = {}^{i,k-1}\mathbf{U} + {}^{i,k}\delta\mathbf{U}$
 - 23: **end for**
 - 24: **end for**
 - 25: Calculam-se forças internas resultantes: $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{N}_x, \mathbf{N}_0, \mathbf{N}_{x0}, \mathbf{M}_x, \mathbf{M}_0, \mathbf{M}_{x0}, \mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_0$
 - 26: Imprimem-se os resultados
-

Figura 2.8 Algoritmo de solução adotado para a ES2

1. Preparação das variáveis para o primeiro passo de carga

A construção da matriz \mathbf{K}_b é sinal-dependente dos deslocamentos, isto é, as componentes de \mathbf{K}_b só serão aplicadas se os deslocamentos radiais forem negativos ou positivos naquele nó (dependendo se a base for interna ou externa à casca). Esse fato introduz a necessidade de se

adotar um valor inicial de deslocamento, ${}^0\Delta\mathbf{U}$, que é obtido da solução da Equação (2.16), sem considerar a contribuição da base elástica. Após a análise do sinal das componentes desse vetor, verifica-se a possível região de contato entre os corpos S_c , ou seja, os pontos da malha de diferenças finitas que serão considerados na montagem de \mathbf{K}_b . Uma vez conhecido $\Delta\lambda$ e ${}^0\Delta\mathbf{U}$, inicia-se o ciclo incremental.

2. Ciclo incremental

O ciclo mais externo do processo se inicia a partir dos dados obtidos no passo de carga anterior ($\Delta\lambda$ e ${}^{i-1}\Delta\mathbf{U}$), com a montagem da matriz de rigidez do sistema. Esse procedimento pode ser suprimido caso, a partir de uma verificação prévia, não ocorra variação na influência da base elástica, isto é, não haja modificação em S_c . Nesse caso a matriz de rigidez a ser usada poderá ser a mesma do passo de carga anterior (${}^i\mathbf{K} = {}^{i-1}\mathbf{K}$). Esse procedimento é responsável por um considerável ganho de tempo de processamento. Com a definição da rigidez do sistema (casca-base) resolve-se novamente o sistema (2.16) para se obter ${}^i\Delta\mathbf{U}$ e, logo em seguida, faz-se a atualização do parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais, ou seja:

$${}^i\lambda = {}^{i-1}\lambda + \Delta\lambda \text{ e } {}^i\mathbf{U} = {}^{i-1}\mathbf{U} + {}^i\Delta\mathbf{U} \quad (2.29)$$

que normalmente não satisfaz a condição de equilíbrio do sistema. Assim, iterações subsequentes são necessárias para que se possa restaurar o equilíbrio. Esse processo iterativo é comumente chamado corretivo e é descrito a seguir.

3. Ciclo corretivo

O ciclo mais interno, de acordo com o algoritmo apresentado, se inicia com a obtenção do vetor de forças internas do sistema casca-base, ou seja:

$${}^i\mathbf{F}_i^k = {}^i\mathbf{K}^{k-1}\mathbf{U}^k, k \geq 1 \quad (2.30)$$

Na sequência, calcula-se o vetor gradiente (forças desequilibradas) do sistema, isto é:

$$\mathbf{g} = {}^i\lambda\mathbf{F}_r - {}^i\mathbf{F}_i \quad (2.31)$$

que deve ser comparado com o vetor de cargas externas incrementais $\Delta\lambda\mathbf{F}_r$, da seguinte forma:

$$\frac{\|i \mathbf{g}^k\|}{\|\Delta \lambda^{k-1} \mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (2.32)$$

sendo ζ a tolerância requerida para convergência do processo. Caso o critério de convergência anterior não seja atendido, procede-se uma nova iteração, onde se “corrigem” os deslocamentos seguindo a expressão de Newton-Raphson, isto é:

$$\delta \mathbf{U}^k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}^{k-1} \quad (2.33)$$

O vetor $\delta \mathbf{U}^k$ é então usado na atualização dos deslocamentos incrementais e totais do sistema. Os procedimentos descritos nesta seção são repetidos até que o critério de convergência seja satisfeito.

Capítulo 3

Teoria de Casca Cilíndrica, Modelos de Bases Elásticas e Aplicação do MDF

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é organizado em duas grandes partes. Na primeira parte, que envolve as Seções 3.2 e 3.3, são apresentadas a teoria de casca cilíndrica e os modelos de bases elásticas adotados levando-se em consideração os objetivos deste trabalho. Assim, na próxima seção podem ser encontradas as equações básicas que regem o comportamento da casca, isto é, as relações cinemáticas, relações constitutivas e equações de equilíbrio. Na sequência, Seção 3.3, estão os modelos de bases elásticas considerados para representar o solo ou rocha.

Na segunda parte do capítulo, que começa na Seção 3.4, são descritos os fundamentos do Método das Diferenças Finitas (MDF), que é responsável, como já foi mencionado, pela transformação das equações de equilíbrio do sistema casca-base num sistema de equações algébricas. Na última parte do capítulo, Seções 3.5 e 3.6, estão os detalhes relacionados com as montagens das matrizes de rigidez da casca, da base elástica e do vetor de forças externas, bem como a introdução das condições de contorno e periodicidade.

3.2 EQUAÇÕES BÁSICAS DA CASCA CILÍNDRICA

A formulação adotada é baseada em certas hipóteses simplificadoras bastante comuns da teoria clássica de cascas, ou seja:

- i. as tensões normais σ_z que atuam na direção radial da casca são desprezíveis em comparação com as outras tensões;
- ii. as deformações devido ao cisalhamento transversal podem ser desprezadas; as fibras normais à superfície de referência indeformada permanecem normais e não sofrem variação no seu comprimento durante o processo de deformação;
- iii. a casca é considerada esbelta ($t \ll R$); em que t é sua espessura e R o seu raio;

- iv. o material da casca é homogêneo e apresenta comportamento linear elástico;
- v. as forças que agem sobre o sistema são conservativas.

As duas primeiras hipóteses implicam em uma distribuição linear dos deslocamentos ao longo da espessura da casca, possibilitando assim o conhecimento do comportamento de todos os pontos de uma casca a partir do estudo da sua superfície de referência (mediana). Entretanto, para que essas duas hipóteses sejam apropriadamente empregadas, elas devem ser acompanhadas da terceira. Essas três hipóteses foram propostas por Love (1944) para cascas na tentativa de reduzir o problema tridimensional a um bidimensional. Ele baseou-se nas hipóteses de Kirchhoff para placas, que são análogas às de Bernoulli para vigas esbeltas.

A formulação matemática usada nesta tese para cascas isotrópicas pode ser modificada para a inclusão de enrijecedores (longitudinais e transversais; Silveira, 1990) e bases elásticas. A modificação referente aos enrijecedores, que não será considerada aqui, consiste basicamente na inclusão de forças adicionais, que atuam na linha de fixação dos mesmos. Os modelos de bases elásticas adotadas serão mostrados na Seção 3.3.

Popov (1978) define que, em soluções baseadas na teoria da elasticidade, a espessura da casca pode chegar a um décimo do raio interno e o erro na aplicação das fórmulas se manterá pequeno. Assim, este trabalho considera esse limite para consideração de cascas esbeltas.

A Figura 3.1 define os elementos geométricos da casca cilíndrica e alguns tipos de carregamentos. O formato cilíndrico da casca sugere que o melhor sistema de coordenadas é o x , θ e z , com origem no ponto P situado na superfície média da casca. Assim, os eixos x e θ são tomados coincidentes com as direções longitudinal e circunferencial, respectivamente. O eixo z é normal à superfície média da casca, assumindo a direção radial. Os deslocamentos de um ponto da casca na direção dos eixos coordenados x , θ e z são u , v e w , respectivamente, e os sentidos positivos desses são os indicados na figura. O comprimento longitudinal L , a espessura t e o raio médio R definem completamente as dimensões do tubo cilíndrico.

A casca cilíndrica está sujeita a carregamentos e, na prática, eles podem ocorrer na forma concentrada e/ou distribuída, tanto nos bordos (Figura 3.1b) quanto ao longo da superfície, na forma de pressão radial (Figura 3.1c). Embora os carregamentos axiais sejam importantes, uma vez que são responsáveis pelos principais problemas de instabilidade da casca cilíndrica, eles não serão abordados nesta pesquisa.

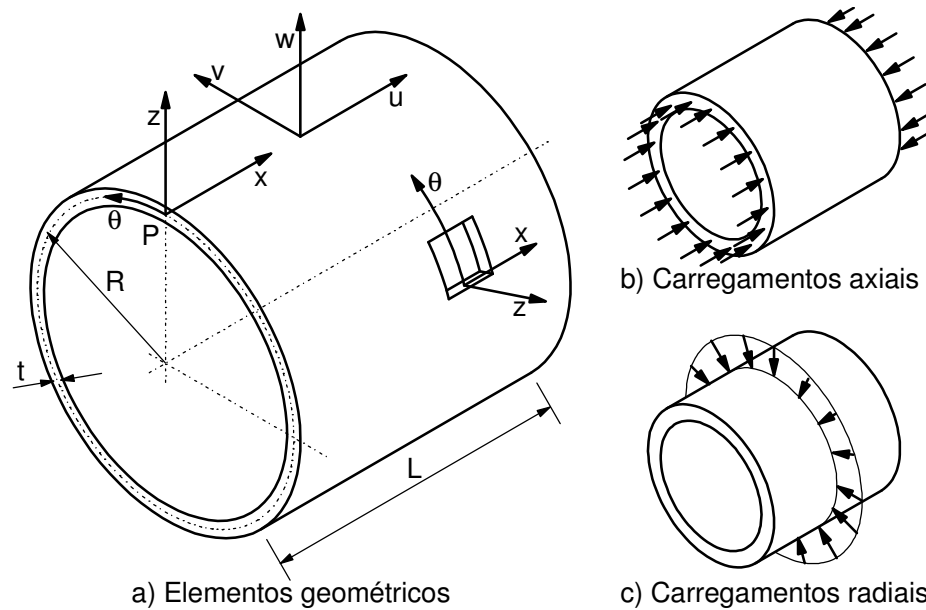


Figura 3.1 Geometria da casca cilíndrica e tipos de carregamento atuantes

3.2.1 Relações Cinemáticas

A teoria de cascas esbeltas é uma tentativa de se reduzir o problema tridimensional de deformação a um problema bidimensional, usando para isso a premissa da pequena espessura. A primeira tentativa consistente de obter essa redução foi proposta por Love (1944), que usou as hipóteses de Kirchhoff para placas delgadas. Praticamente todos os trabalhos seguintes nessa área fizeram uso dessas hipóteses de Love-Kirchhoff (Gonçalves, 1985).

A partir de Love-Kirchhoff, Donnell (1934) sugeriu equações bastante precisas, e relativamente simples, para a obtenção da resposta não linear de cascas abatidas (grandes raios). Sanders (1961) propôs modificações na primeira e segunda forma fundamental, entre o estado deformado e indeformado da superfície de referência, no sentido de melhorar as medidas de deformações de membrana e flexão. Mais recentemente, via princípio dos trabalhos virtuais, foram removidas inconsistências do trabalho de Love (Gonçalves, 1985).

Assim, como consequência das hipóteses de Love-Kirchhoff, desprezam-se aqui as deformações normais à superfície média da casca. Essa superfície média é usada como superfície de referência e nela são consideradas duas deformações normais (ϵ_x e ϵ_θ) e uma deformação cisalhante ($\gamma_{x\theta}$). As expressões propostas por Sanders, para pequenas deformações e para rotações de grande a moderada amplitude, são gerais e atendem a todos os tipos de cascas cilíndricas (abatidas e não abatidas). Elas são apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8R^2} \left(R \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w + \frac{1}{8R^2} \left(R \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\
\gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + R \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) v
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde R é o raio da casca e ν é o coeficiente de Poisson.

Nas equações anteriores, os termos quadráticos foram retirados supondo que estes são muito pequenos na condição de pequenos deslocamentos. Assim, são obtidas as expressões das deformações usadas nesta tese, ou seja:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \\
\gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + R \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) v
\end{aligned} \tag{3.2}$$

As aproximações lineares das mudanças de curvatura, concernentes à teoria adotada, podem ser expressas na forma:

$$\begin{aligned}
\chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\chi_\theta &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
\chi_{x\theta} &= -\frac{1}{4R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{3}{4R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2.2 Relações Constitutivas

Na solução de problemas envolvendo corpos deformáveis é necessário estabelecer relações entre as componentes de tensão e de deformação através de um modelo que represente apropriadamente as propriedades elásticas do corpo. A hipótese da tensão normal, σ_z , ser pequena quando comparada com as tensões σ_x e σ_θ , faz com que se considere um estado plano

de tensões. As tensões normais σ_x e σ_θ , e a tensão cisalhante $\tau_{x\theta}$ para materiais isotrópicos no regime elástico são dadas a seguir (Gonçalves, 1985):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_\theta + \nu \bar{\epsilon}_x) \\ \tau_{x\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{x\theta}\end{aligned}\tag{3.4}$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal e ν , o coeficiente de Poisson. $\bar{\epsilon}_x$, $\bar{\epsilon}_\theta$ e $\bar{\gamma}_{x\theta}$ são as deformações em um ponto qualquer da casca a uma distância ξ da superfície de referência, e são dadas por:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_x &= \epsilon_x + \xi \chi_x \\ \bar{\epsilon}_\theta &= \epsilon_\theta + \xi \chi_\theta \\ \bar{\gamma}_{x\theta} &= \gamma_{x\theta} + \frac{2\xi}{\chi_{x\theta}}\end{aligned}\tag{3.5}$$

As forças e momentos resultantes por unidade de comprimento da seção na superfície média da casca (Figura 3.2) são definidos da seguinte forma:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz; \quad N_\theta = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\theta dz; \quad e \quad N_{x\theta} = N_{\theta x} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\theta} dz \tag{3.6a,b,c}$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz; \quad M_\theta = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\theta z dz; \quad e \quad M_{x\theta} = M_{\theta x} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\theta} z dz \tag{3.6d,e,f}$$

Substituindo (3.4) em (3.6), e realizando as integrações necessárias, chega-se nas relações constitutivas mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}N_x &= C(\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta); & M_x &= D(\chi_x + \nu \chi_\theta); \\ N_\theta &= C(\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x); & M_\theta &= D(\chi_\theta + \nu \chi_x); \\ N_{x\theta} = N_{\theta x} &= C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\theta}; \quad e & M_{x\theta} = M_{\theta x} &= D(1-\nu) \chi_{x\theta}\end{aligned}\tag{3.7}$$

em que C e D são a rigidez de membrana e de flexão da casca, respectivamente. Essas grandezas são definidas como:

$$C = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad \text{e} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.8a,b)$$

3.2.3 Equações de Equilíbrio

As forças e momentos resultantes, que atuam num elemento infinitesimal genérico da casca cilíndrica isotrópica, bem como a pressão lateral externa q , são representadas na Figura 3.2. As equações diferenciais de equilíbrio desse elemento infinitesimal podem ser obtidas pelo somatório das forças e momentos no elemento indeformado da casca cilíndrica, de acordo com a teoria linear adotada. As seis equações resultantes, depois de manipuladas, se transformam nas três equações de equilíbrio de forças mostradas a seguir (Brush e Almroth, 1975; Gonçalves, 1985; Silveira, 1990):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R\partial\theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{2R^2\partial\theta} = 0 \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial N_\theta}{R\partial\theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{N_{x\theta}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3}{2R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{R^2\partial\theta} = 0 \quad (3.9b)$$

$$-\frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x\partial\theta} + \frac{\partial^2 M_\theta}{R^2\partial\theta^2} + q(x, \theta) = 0 \quad (3.9c)$$

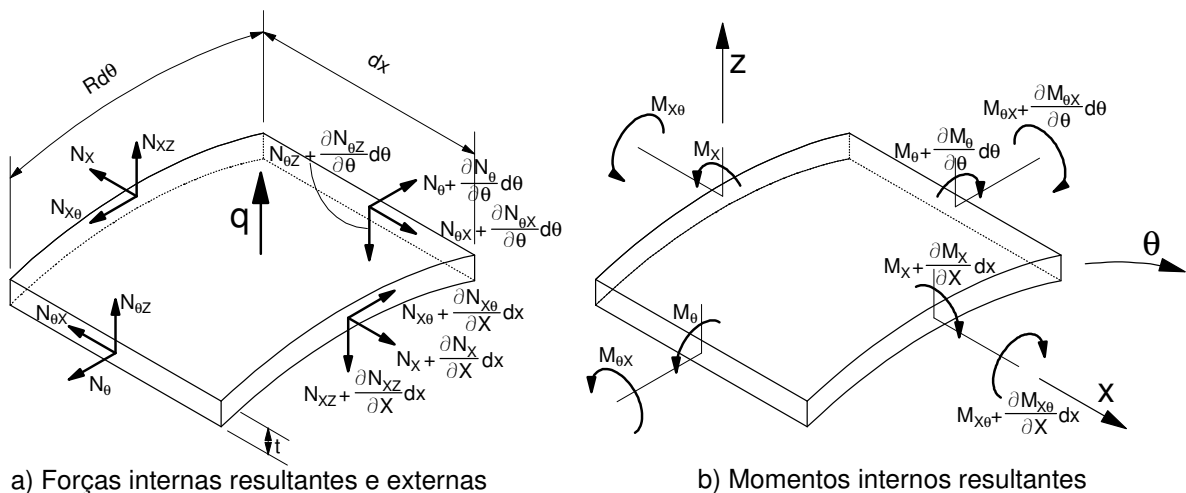


Figura 3.2 Forças internas e pressão lateral atuantes no elemento infinitesimal de casca cilíndrica

Como o objetivo deste trabalho é estudar a resposta da casca cilíndrica sob determinados carregamentos e com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por bases elásticas, que são consideradas apenas na direção radial (deslocamento radial ou lateral da casca, w), considera-se, a partir deste momento, que apenas a terceira Equação (3.9c) será necessária para solução dos PCB e PCU. Com as hipóteses de pequenos deslocamentos, material elástico, e certos tipos de cargas atuantes, estima-se que as outras duas equações têm pouca influência na resposta do sistema, pois são responsáveis, basicamente, pelo efeito de membrana da casca. Assim, a Equação (3.9c), após a utilização das relações cinemáticas e constitutivas anteriores, e já considerando a influência da base elástica, pode ser apresentada em função apenas do deslocamento w da superfície média da casca, ou seja:

$$\frac{1}{R^2} w + \frac{D}{C} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - \frac{q(x, \theta) + r_b}{C} = 0 \quad (3.10)$$

ou,

$$\frac{C}{R^2} w + D \nabla^4 w = q(x, \theta) + r_b \quad (3.11)$$

com q representando a pressão lateral atuante e r_b caracteriza a reação da base elástica, que depende dos modelos a serem apresentados na próxima seção.

3.3 MODELOS DE BASES ELÁSTICAS

Em muitas situações práticas, o interesse da resposta da base elástica limita-se à obtenção das forças (reações) na região de contato com a estrutura, no caso, a casca cilíndrica, não importando o campo de deslocamento ou estado de tensões que se desenvolve no seu interior. A maioria dos modelos é idealizada como ilustrado na Figura 3.3, onde pequenas molas são empregadas no sentido de oferecerem reação ao deslocamento da estrutura, podendo essa reação ter comportamento linear ou não linear.

O modelo matemático considerado mais simples é aquele que apresenta apenas um parâmetro para definir o comportamento do solo/rocha, normalmente representando sua rigidez. Nessa categoria destacam-se o modelo de molas discretas dispostas ao longo da região de contato e o modelo contínuo de Winkler (Hetényi, 1946; Kerr, 1964). Esse modelo

de Winkler é equivalente a um colchão formado por molas estreitamente espaçadas e independentes, isto é, sem interação entre si.

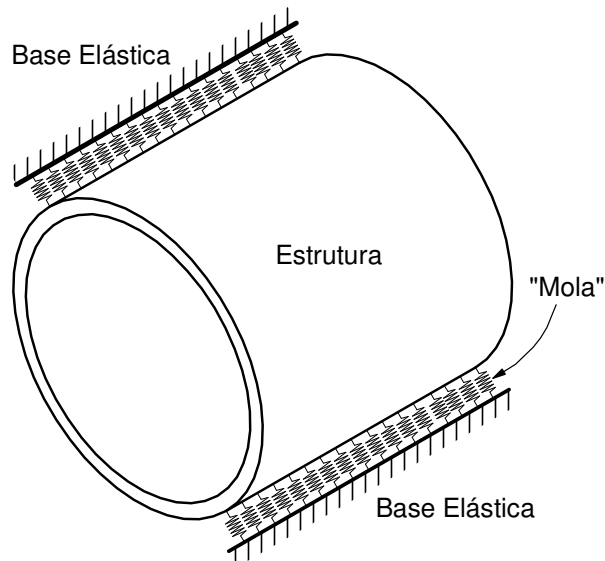


Figura 3.3 Representação da base elástica através de pequenas molas

Em algumas situações práticas, entretanto, o comportamento do solo difere consideravelmente daquele idealizado por Winkler. De acordo com Winkler, uma carga atuando em um determinado ponto da base causa deflexão apenas nesse ponto, como mostrado na Figura 3.4a. Entretanto, o solo é, na realidade, um corpo contínuo e, portanto, uma curva de deflexão contínua deve ser considerada (Figura 3.4b). Modelos como os de Pasternak, Filonenko-Borodich e Vlasov (Kerr, 1964; Harr *et al.*, 1969; Yang, 1972; Zhaohua e Cook, 1983; Horvath, 1993) apresentam dois parâmetros para definir o comportamento da base elástica. Esses modelos assumem, de alguma forma, a interação entre as molas, melhorando, portanto, o modelo proposto por Winkler.

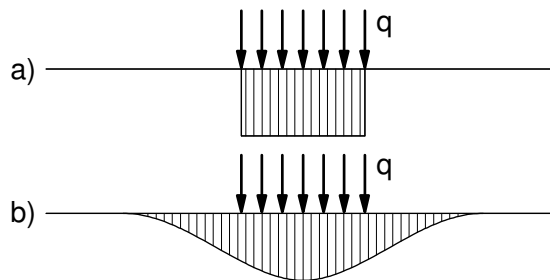


Figura 3.4 Deslocamento da base elástica

Apesar de existirem inúmeras pesquisas nessa área, ainda faltam evidências experimentais para se verificar qual desses modelos fornece a melhor resposta do comportamento da fundação (Harr *et al.*, 1969; Dutta e Roy, 2002). Um dos principais problemas dos pesquisadores é achar uma equivalência entre esses parâmetros e as características reais do solo. Algumas pesquisas já usam testes de placas de carga, testes de consolidação, tri-axiais e índices de suporte Califórnia (CBR) como formas de encontrar esses parâmetros, mas, na maioria dessas pesquisas, é obtida apenas uma correlação com a rigidez do solo (parâmetro único). Isso demonstra a dificuldade de se encontrar a taxa de dispersão das cargas (o segundo parâmetro; Dutta e Roy, 2002; Wang *et al.*, 2005).

Como observado por Straughan (1990), e também comprovado no próximo capítulo desta tese, o emprego de modelos de base com dois parâmetros tem como principal efeito o aumento da rigidez do conjunto. As próximas subseções trazem alguns modelos de bases estudados neste trabalho. Alguns foram implementados no programa computacional desenvolvido.

3.3.1 Modelo de Molas Discretas

A base é representada aqui por um sistema de apoios discretos constituídos por molas, como mostrado na Figura 3.5.

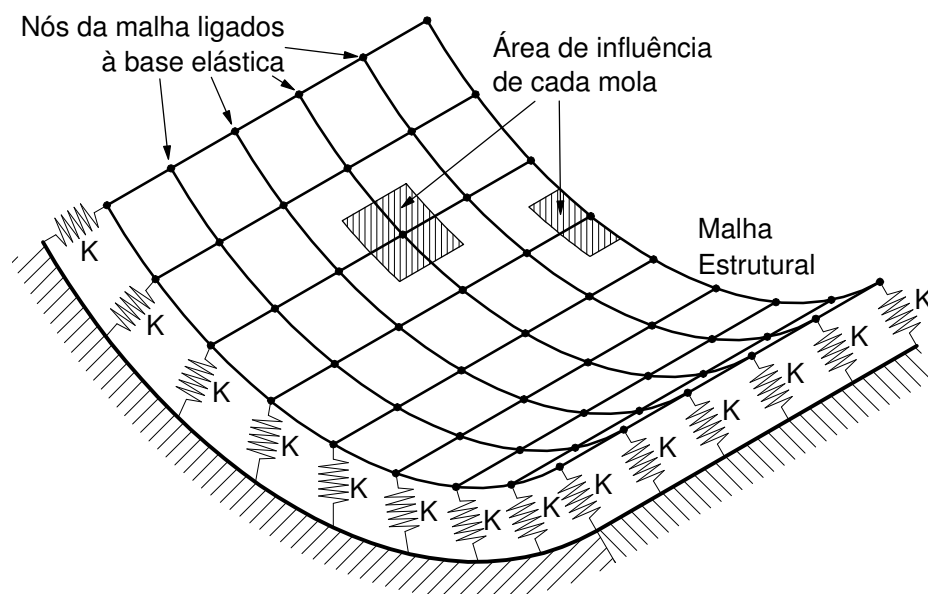


Figura 3.5 Modelo de molas discretas e malha de DF

Nesse caso, a reação da base elástica é dada por:

$$r_b = Kw_b|_{(x_i, y_i)} \quad (3.12)$$

em que r_b e w_b são, respectivamente a reação e o deslocamento da base elástica, K representa o parâmetro de rigidez da mola e (x_i, y_i) caracteriza a posição da mola.

3.3.2 Modelo de Winkler

O modelo de Winkler (Figura 3.6) assume que a intensidade da reação normal r_b exercida em um dado ponto da base elástica é diretamente proporcional à deflexão que ocorre nesse ponto, ou seja:

$$r_b = Kw_b \quad (3.13)$$

em que K é o parâmetro de rigidez elástico da fundação.

Observe que nas duas equações anteriores existe apenas um parâmetro, K , caracterizando a rigidez da base. Nos modelos apresentados a seguir é assumida a existência de alguma interação entre as molas através da adição de um segundo parâmetro.

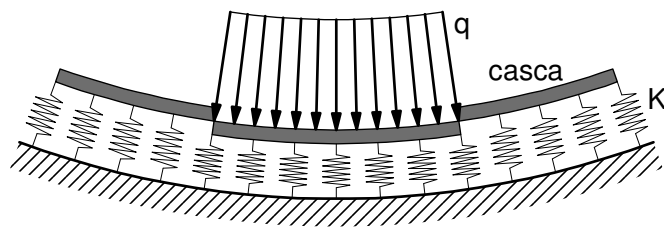


Figura 3.6 Modelo de Winkler

3.3.3 Modelo de Filonenko–Borodich

Esse modelo assume que as molas são conectadas a uma membrana elástica sujeita a um campo constante de tração T , como ilustrado na Figura 3.7. O modelo de Filonenko-Borodich é representado matematicamente através da equação:

$$r_b = Kw_b - T\nabla^2 w_b \quad (3.14)$$

em que T é a intensidade do campo de tração na membrana e K é o parâmetro de rigidez elástico da fundação.

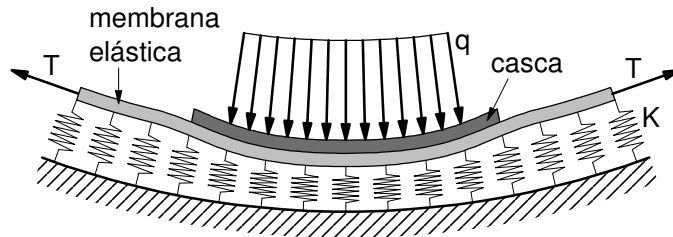


Figura 3.7 Modelo de Filonenko-Borodich

3.3.4 Modelo de Pasternak

No modelo ilustrado na Figura 3.8, assume-se que as molas são interligadas por uma camada incompressível que resiste apenas às deformações cisalhantes. Tem-se então:

$$r_b = Kw_b - G\nabla^2 w_b \quad (3.15)$$

em que G representa o parâmetro de rigidez cisalhante da camada.

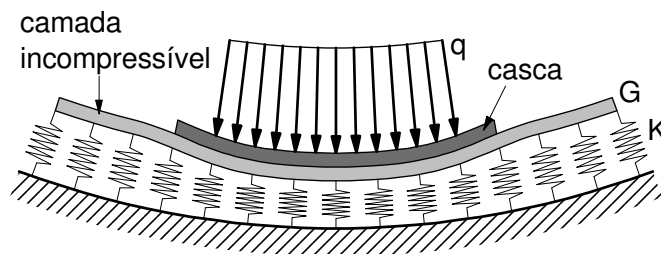


Figura 3.8 Modelo de Pasternak

3.3.5 Outros Modelos de Base

Existem outros modelos que, apesar de não serem tão usuais e, por isso, não são avaliados nesta pesquisa, devem ser expostos. Os modelos com três ou mais parâmetros acrescentam a possibilidade de comportamentos diferenciados entre solos profundos e superficiais. Funcionam como se mais de um modelo fossem colocados sobrepostos. Apesar de aproximar com maior precisão o comportamento real do solo, esses modelos possuem os mesmos problemas referentes à determinação dos parâmetros constitutivos (Dutta e Roy; 2002).

Os modelos inelásticos de fundação tentam representar o comportamento não linear do solo, cujas características se alteram à medida que o nível de carregamento se modifica. As

principais idealizações são os modelos elastoplástico e viscoelástico. O segundo visa aproximar o comportamento do solo durante períodos de tempo relativamente grandes (Ter-Martirosyan, 1992). Já o primeiro modelo leva em conta a possibilidade de plastificação do solo (ver Figura 3.9).

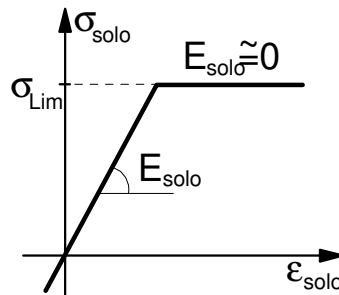


Figura 3.9 Representação do modelo elastoplástico do solo

3.4 APROXIMAÇÕES POR DIFERENÇAS FINITAS

Na aplicação do Método das Diferenças Finitas (MDF), as derivadas das equações diferenciais que regem o problema casca-base elástica são substituídas por uma combinação linear de valores da função em uma série de pontos selecionados da estrutura. Esses pontos estão localizados nos nós de uma malha de referência, chamada aqui de **malha de diferenças finitas**. Essa malha pode ser formada por quadrados, retângulos, triângulos, etc., dependendo da metodologia adotada ou da forma da estrutura.

Por definição, se algum problema estrutural é descrito por uma equação diferencial, pode-se então substituir essa equação por uma equação de diferenças finitas equivalente. Abordagem semelhante é tomada com as expressões que descrevem as condições de contorno. Na aplicação do MDF, a equação diferencial que rege a resposta de um determinado problema é transformada num conjunto de equações algébricas a partir do qual os deslocamentos, deformações e forças resultantes dessa estrutura podem ser obtidos.

Assim, substituem-se os operadores diferenciais d e ∂ por operadores de diferenças Δ adequados. Considerando primeiramente o caso unidimensional, obtêm-se as expressões de diferenças finitas para as derivadas, aproximando a função $w = f(x)$ (que aqui representa o deslocamento radial da casca), em um determinado intervalo, por um polinômio de interpolação $\phi(x)$. As derivadas $\phi'(x)$, $\phi''(x)$, $\phi'''(x)$,... podem, então, nesses pontos considerados, substituir as funções $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,... . É evidente que uma melhor aproximação polinomial da função original $f(x)$, no chamado ponto pivotal i , como ilustrado

na Figura 3.10, permite melhores expressões de diferenças finitas e, portanto, uma maior precisão.

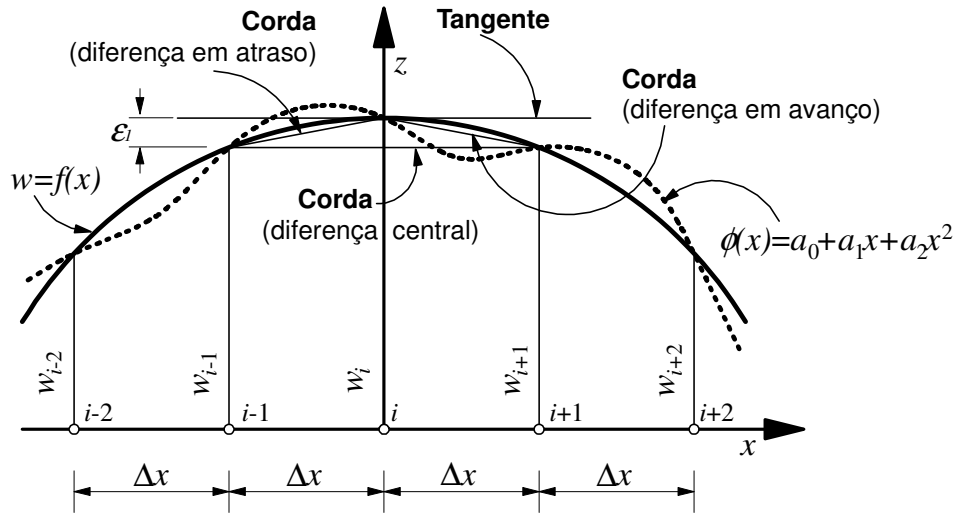


Figura 3.10 Representação gráfica do MDF (Szilard, 2004)

A maneira mais simples de se obter expressões de diferenças finitas para a primeira e segunda derivadas da função $w = f(x)$, em um ponto pivotado i , é substituindo $f(x)$, que pode ser um polinômio de segunda ordem, através de um número de pontos equidistantes, como também mostrado na Figura 3.10. Essa “colocação” polinomial usando intervalos Δx entre os pontos pode ser expressa por:

$$\phi(x) = w_i + \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2(\Delta x)} x + \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{(\Delta x)^2} \frac{x^2}{2} \quad (3.16)$$

e, portanto,

$$\phi'(x) = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2(\Delta x)} + \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{(\Delta x)^2} x \quad (3.17)$$

Uma vez que se considera o ponto pivotado i sempre localizado em $x = 0$, a primeira derivada da função original pode ser aproximada por:

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_i \cong \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_i = [\phi'(x)]_i = \frac{1}{2(\Delta x)} (w_{i+1} - w_{i-1}) \quad (3.18)$$

Da mesma forma, a expressão de diferenças finitas para a segunda derivada é:

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_i = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right)\right]_i \cong \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_i = [\phi''(x)]_i = \frac{1}{(\Delta x)^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \quad (3.19)$$

As derivadas de ordem superiores podem ser obtidas através do mesmo procedimento, e assim escreve-se diretamente:

$$\left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right)_i \cong \left[\frac{\Delta}{2(\Delta x)}\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)\right]_i = \frac{1}{2(\Delta x)^3} (w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}) \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4}\right)_i \cong \left[\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3}\right)\right]_i = \frac{1}{(\Delta x)^4} (w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) \quad (3.21)$$

As equações anteriores foram obtidas utilizando o conceito de *diferenças centrais* e são esquematicamente representadas na Tabela 3.1 através de uma forma molecular, incluindo o erro ε_1 obtido usando a abordagem de série de Taylor.

Tabela 3.1 Representação esquemática das derivadas por diferença central (Szilard, 2004)

$w_i^{(k)}$	Coefficientes	Erro
w_i'	$\left[(-1) \text{---} (+1)\right] \frac{1}{2(\Delta x)}$	$-\frac{1}{6}(\Delta x)^2 w_i'''$
w_i''	$\left[(+1) \text{---} (-2) \text{---} (+1) \right] \frac{1}{(\Delta x)^2}$	$-\frac{1}{12}(\Delta x)^2 w_i^{IV}$
w_i'''	$\left[(-1) \text{---} (+2) \text{---} \text{---} (-2) \text{---} (+1) \right] \frac{1}{2(\Delta x)^3}$	$-\frac{1}{4}(\Delta x)^2 w_i^{VI}$
w_i^{IV}	$\left[(+1) \text{---} (-4) \text{---} (+6) \text{---} (-4) \text{---} (+1) \right] \frac{1}{(\Delta x)^4}$	$-\frac{1}{6}(\Delta x)^2 w_i^{VI}$
Pontos	$\text{---} \circ_{i-2} \text{---} \circ_{i-1} \text{---} \circ_i \text{---} \circ_{i+1} \text{---} \circ_{i+2} \text{---}$	ε_1

O significado das diferenças centrais também é mostrado na Figura 3.10, ou seja, usando uma parábola de segunda ordem para o polinômio de interpolação, a inclinação da linha de corda que passa pelos pontos x_{i-1} e x_{i+1} é tomada idêntica à da tangente que passa pelo ponto x_i . Seguindo o mesmo raciocínio, pode-se interpretar o significado da primeira derivada em *diferença em avanço* como:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_i \cong \left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x} (w_{i+1} - w_i) \quad (3.22)$$

e da primeira derivada em *diferença em atraso* como:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_i \cong \left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x}(w_i - w_{i-1}) \quad (3.23)$$

As denominações diferenças finitas *centrais*, em *avanço* ou em *atraso*, identificam a utilização de pontos simetricamente, à direita ou à esquerda do ponto pivotal, respectivamente (Figura 3.10).

As diferenças finitas centrais fornecem expressões para as derivadas que, na sua forma mais simples, envolvem erros na ordem de $(\Delta x)^2$, enquanto que para as diferenças em avanço ou atraso o erro resultante é da ordem do espaçamento da malha, isto é, de Δx . Em outras palavras, diferenças centrais possuem precisão de segunda ordem enquanto as outras possuem precisão de primeira ordem. Portanto, para um dado grau de refinamento da malha, o emprego da diferença central fornecerá resultados mais precisos do que aqueles obtidos com diferenças em avanço ou atraso. Outra boa vantagem da diferença finita central em relação às demais é a disposição simétrica dos pontos a serem considerados para análise.

Após essas considerações, este trabalho basear-se-á na formulação com diferenças finitas centrais para a aproximação das derivadas nas equações de equilíbrio do sistema.

3.4.1 Equação de Equilíbrio da Casca Cilíndrica na Forma de Diferenças Finitas

Para o caso bidimensional, como é o caso das equações de equilíbrio de cascas cilíndricas, a malha unidimensional (variação apenas em x) terá que ser substituída por uma com duas dimensões (x e θ , no caso). A Figura 3.11 apresenta um trecho de uma malha usada para discretizar a casca cilíndrica (tomada plana). Observe que a malha é formada por retângulos com dimensões de Δx e $R\Delta\theta$. Nessa malha, destaca-se o *ponto pivotal* na posição (i, j) onde a equação de equilíbrio do sistema, na forma de diferenças finitas, será aplicada.

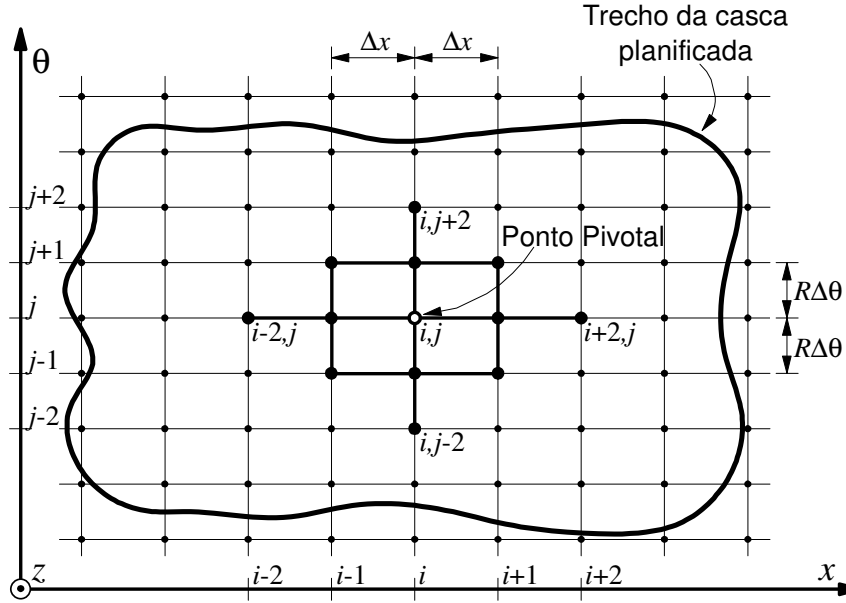


Figura 3.11 Malha de DF retangular num trecho genérico da casca cilíndrica

Como a equação de equilíbrio da casca (Equação 3.11) envolve o uso de um operador Laplaciano em w , ou seja:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{R^2 \partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{R^4 \partial \theta^4} \quad (3.24)$$

então, cada uma de suas parcelas terá que ser desenvolvida na forma de diferenças finitas como segue:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{i,j} \cong \frac{1}{\Delta x^4} (w_{i-2,j} - 4w_{i-1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} + w_{i+2,j}) \quad (3.25a)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{R^4 \partial \theta^4} \right)_{i,j} \cong \frac{1}{R^4 \Delta \theta^4} (w_{i,j-2} - 4w_{i,j-1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j+1} + w_{i,j+2}) \quad (3.25b)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{R^2 \partial x^2 \partial \theta^2} \right)_{i,j} \cong \frac{1}{R^2 \Delta x^2 \Delta \theta^2} \left[4w_{i,j} - 2(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} \right] \quad (3.25c)$$

Portanto, a representação em diferenças finitas de (3.24), no ponto pivotal (i, j) , é:

$$\begin{aligned} \nabla^4 (w)_{i,j} \cong & \frac{1}{R^2 \Delta x^2 \Delta \theta^2} \left[20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + \right. \\ & 2(w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) + \\ & \left. w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2} \right] + \varepsilon(R\Delta x\Delta\theta) \end{aligned} \quad (3.26)$$

em que $\varepsilon(R\Delta x\Delta\theta)$ é o erro que descreve a discrepância entre a expressão exata do operador biarmônico (∇^4) e sua aproximação em diferenças finitas.

Adotando-se o mesmo procedimento para todas as parcelas da Equação (3.11), chega-se a:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{t^2}{12\Delta x^4} \right] (w_{i-2,j} + w_{i+2,j}) + \left[\frac{t^2}{12R^4\Delta\theta^4} \right] (w_{i,j-2} + w_{i,j+2}) + \\ & \left[\frac{t^2}{6R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} \right] (w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1}) + \\ & \left[\frac{t^2}{3R^4\Delta\theta^4} \frac{t^2}{3R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} \right] (-w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) + \left[\frac{t^2}{3\Delta x^4} \frac{t^2}{3R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} \right] (-w_{i-1,j} - w_{i+1,j}) + \\ & \left[\frac{t^2}{2\Delta x^4} + \frac{2t^2}{3R^2\Delta x^2\Delta\theta^2} + \frac{t^2}{2R^4\Delta\theta^4} + \frac{1}{R^2} \right] (w_{i,j}) = \frac{q(x,\theta)}{C} \end{aligned} \quad (3.27)$$

cuja representação na forma molecular pode ser vista na Figura 3.12.

Os coeficientes da equação de equilíbrio da casca cilíndrica (Equação 3.11), na forma de diferenças finitas (Equação 3.27), darão origem à matriz de rigidez da casca, \mathbf{K}_L . Essa matriz, juntamente com a contribuição da base elástica, \mathbf{K}_b , é fundamental para que as estratégias numéricas apresentadas no capítulo anterior possam ser utilizadas e, como consequência, se conheçam os deslocamentos nodais, \mathbf{U} , do sistema discreto. Detalhes da montagem de \mathbf{K}_L serão apresentados na Seção 3.5.

Um ponto importante da aplicação do MDF é o posicionamento das moléculas de diferenças finitas nos pontos da malha. Como a Equação (3.27) é de quarta ordem, o posicionamento da molécula próxima às bordas da casca exigirá a criação de pontos fictícios fora do domínio de solução. A Figura 3.13 apresenta uma malha de DF onde podem ser vistos os chamados pontos nodais de *cálculo e fictícios*.

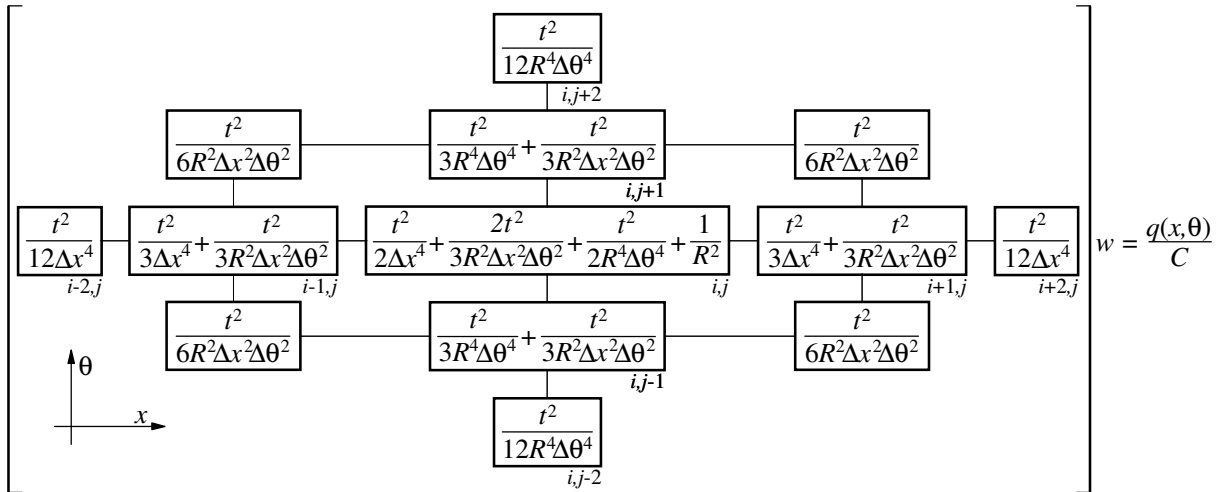


Figura 3.12 Molécula de DF que representa a equação de equilíbrio da casca cilíndrica

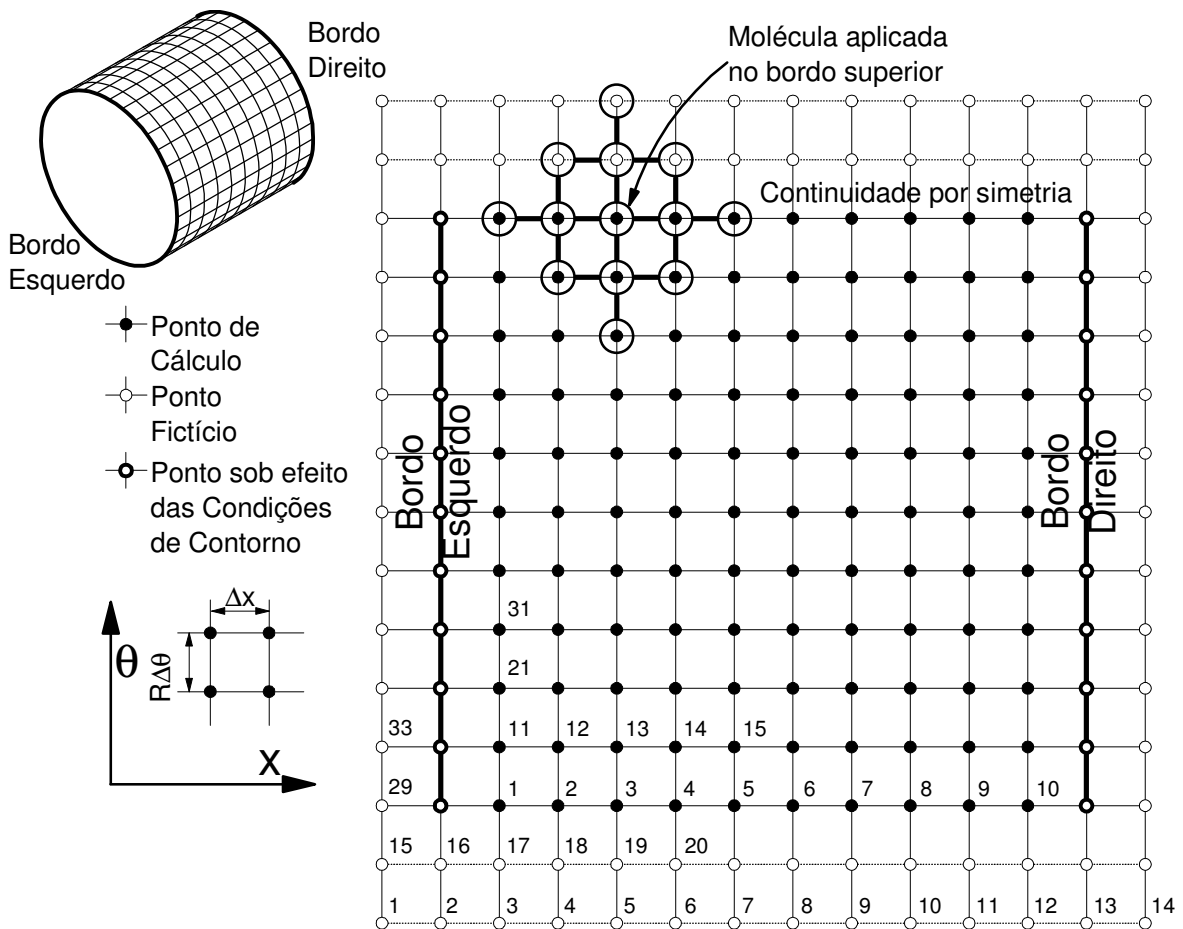


Figura 3.13 Malha de DF usada para a casca cilíndrica (casca completa – tubo)

Esses pontos fictícios também contribuem com deslocamentos, igualmente chamados fictícios, e se constituem incógnitas adicionais do problema, assim como os pontos que estão no bordo da casca. Essas incógnitas adicionais são eliminadas no processo de solução através das condições de contorno e condições de periodicidade que serão abordadas na Seção 3.6.

Como será apresentado na Seção 3.5, a matriz de rigidez da casca, \mathbf{K}_L , é inicialmente estabelecida com seu número de colunas ampliado (contendo os pontos fictícios e os pontos do bordo) e depois, com a introdução das condições de contorno e periodicidade, é reduzida para uma matriz quadrada $p \times p$, onde p corresponde ao número de pontos nodais de cálculo.

3.4.2 Modelos de Base Elástica na Forma de Diferenças Finitas

A mesma metodologia usada na montagem da matriz de rigidez da casca, \mathbf{K}_L , deve ser empregada para a obtenção da matriz de rigidez da base elástica, \mathbf{K}_b . Entretanto, ela será diferente para cada tipo de modelo, isto é:

No caso dos modelos de um parâmetro, a contribuição da rigidez da base na matriz de rigidez é feita de forma bastante simples e direta, uma vez que as Equações (3.12) e (3.13) podem ser substituídas pela expressão:

$$(r_b)_{i,j} = k_B (w_{i,j}) \quad (3.28)$$

em que (i,j) define a posição do ponto pivotal, k_B é o valor da rigidez da base e w é o deslocamento. Dessa forma, conclui-se então que \mathbf{K}_b será uma matriz diagonal, cujas componentes não nulas terão o valor k_B para o modelo de mola e k_B multiplicado pela área de influência do ponto nodal para o modelo de Winkler.

No caso dos modelos com dois parâmetros, as Equações (3.14) e (3.15) podem ser representadas genericamente, usando Diferenças Finitas (DF), pela expressão:

$$(r_b)_{i,j} = k_B (w_{i,j}) - \frac{k_M}{R\Delta x\Delta\theta} \left[(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) - 4(w_{i,j}) \right] \quad (3.29)$$

em que (i,j) define a posição do ponto pivotal, k_B é o parâmetro de rigidez elástico da fundação e k_M representa, no caso do modelo de Pasternak, o parâmetro rigidez cisalhante da camada. Sua forma molecular pode ser vista na Figura 3.14, onde estão os coeficientes que farão parte da matriz \mathbf{K}_b .

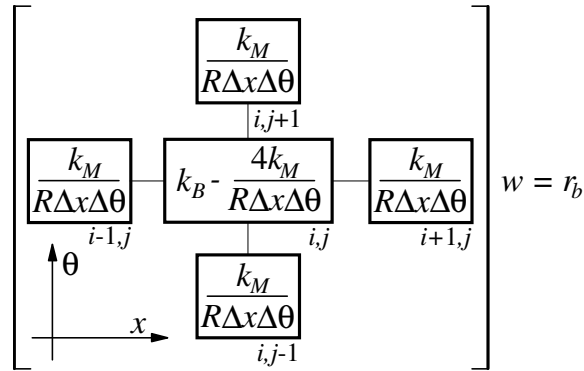


Figura 3.14 Molécula de DF dos modelos de base elástica com dois parâmetros

3.5 MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE FORÇAS EXTERNAS DO SISTEMA

As matrizes de rigidez \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_b são formadas basicamente pelos coeficientes das equações algébricas, na forma de DF, que substituem as equações diferenciais de equilíbrio da casca e da base elástica, respectivamente. No processo de montagem dessas matrizes, devido à existência dos pontos fictícios e dos pontos nos bordos da casca, elas são inicialmente montadas com dimensão retangular $p \times p'$. No caso, p corresponde ao número real de incógnitas do problema (pontos nodais de cálculo) e p' corresponde ao número total de pontos nodais da malha (incluindo os nós fictícios).

Assim, a equação de equilíbrio do sistema, na sua forma discreta, é posicionada em cada ponto nodal de cálculo da malha, que corresponde a cada linha da matriz. A Figura 3.15 exemplifica graficamente como a equação de equilíbrio do sistema, na forma de DF (Equação 3.27), é aplicada no ponto nodal de cálculo 53 – considerado, por exemplo, como *ponto pivotal* – e como os coeficientes da equação são posicionados nessa linha, ocupando em colunas específicas da matriz.

Nessa matriz retangular, cada coluna caracteriza um ponto nodal da malha fictícia e cada linha representa um ponto nodal de cálculo, onde a equação é posicionada.

Ao fim do processo, após a aplicação das condições de contorno e periodicidade (Seção 3.6), a matriz retangular é transformada numa matriz quadrada. As colunas da matriz de rigidez que correspondem a nós fictícios ou nós que tem deslocamento prescrito nulo – dependendo das condições de contorno – são eliminadas, fazendo com que ela passe a ter dimensão $p \times p$, ficando apenas as colunas associadas às incógnitas do problema. Ressalta-se, que o ponto central da molécula (*pivotal*), no final do processo, estará posicionado na diagonal principal da matriz de rigidez do sistema.

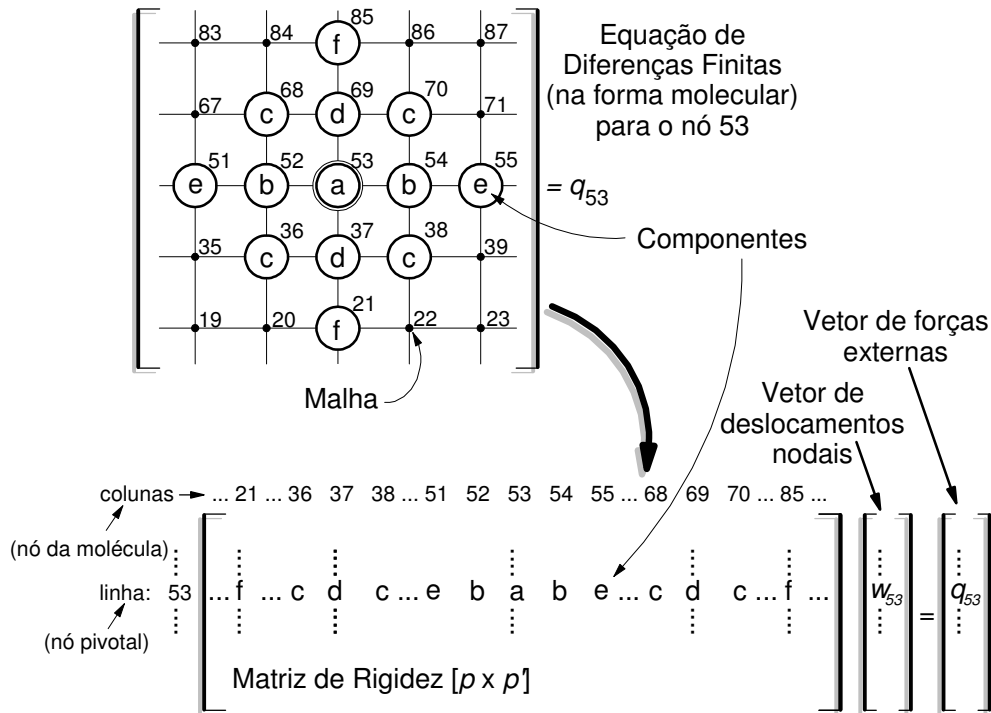


Figura 3.15 Aplicação do MDF e montagem da matriz de rigidez

É de interesse deste trabalho verificar a resposta do sistema casca-base sob determinados carregamentos. Como já comentado, esses carregamentos serão restritos a pressões laterais externas ou internas, concentradas ou distribuídas, uniformes ou não, atuando exclusivamente na direção perpendicular à superfície média da casca (direção z da Figura 3.1), também denominada de direção radial. Quando essa pressão lateral for uniformemente distribuída, pode-se substituir o seu valor diretamente na equação de equilíbrio do sistema; caso a carga lateral não seja uniforme, deve-se distribuí-la ponto a ponto da malha, cuidando-se para que não haja variações excessivas na sua intensidade entre dois pontos nodais consecutivos (ver Figura 3.16).

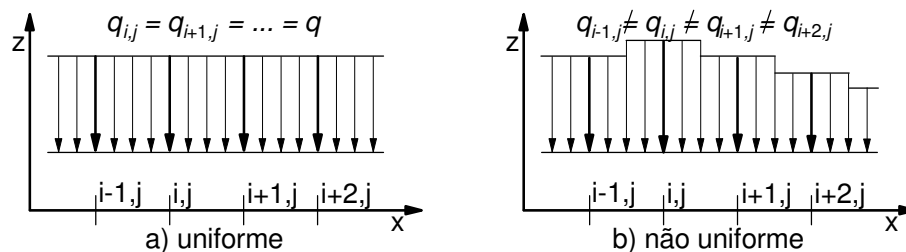


Figura 3.16 Representação da carga uniformemente distribuída (pressão radial)

As cargas concentradas, na direção radial, podem, também, ser consideradas e não oferecem dificuldades de implementação. Essas cargas, entretanto, devem ser introduzidas na

equação de equilíbrio como se fossem distribuídas em torno do nó, como ilustrado na Figura 3.17. Nessa figura estão duas cargas aplicadas com a indicação da área de influência a ser considerada.

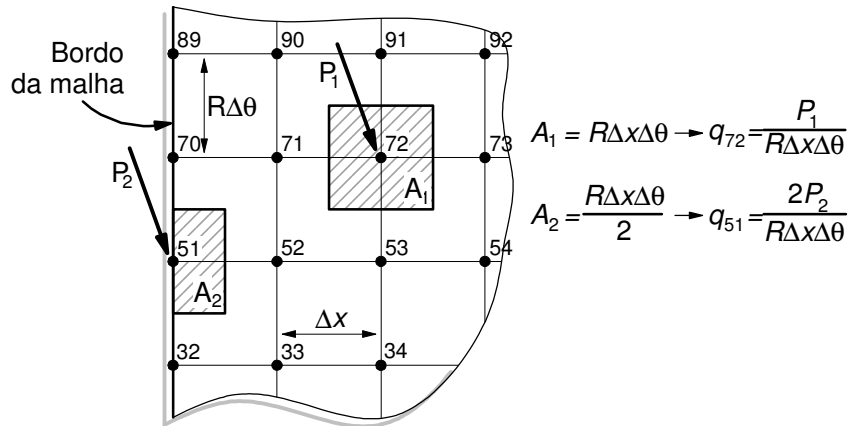


Figura 3.17 Cargas concentradas e as áreas de influência correspondentes

3.6 CONDIÇÕES DE CONTORNO E PERIODICIDADE

As condições de contorno podem ter grande influência na forma defletida da casca e na distribuição das tensões de membrana e flexão. Em geral, duas condições de contorno são necessárias em cada bordo da casca, as quais podem ser divididas em: **essenciais** e **naturais**. As primeiras estão associadas ao deslocamento e à rotação; já as condições naturais estão relacionadas com as tensões resultantes no bordo da casca.

As condições de periodicidade deverão ser consideradas no caso da casca completa (tubo cilíndrico fechado) e serão apresentadas na Subseção 3.6.4.

As equações na forma de DF serão mostradas a seguir, analisando apenas o bordo esquerdo da casca, por simplificação. Neste trabalho, supõe-se que os bordos da casca possam ser simplesmente apoiados, engastados ou livres e que ali não exista nenhum tipo de enrijecedor.

3.6.1 Bordo simplesmente apoiado

Caso o bordo esquerdo da casca seja simplesmente apoiado, tem-se que:

i. a deflexão w é nula, ou seja:

$$w_{i,j} = 0 \quad (3.30)$$

ii. a rotação é livre, isto é, o momento fletor é nulo, $M_x = 0$, o que significa:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.31)$$

que na forma de DF fica (ver Figura 3.18):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2} (w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) = 0$$

e, como no contorno $w_{i,j} = 0$ (*ponto pivotal*), obtém-se:

$$w_{i-1,j} = -w_{i+1,j} \quad (3.32)$$

3.6.2 Bordo engastado

No caso do bordo esquerdo ser engastado, tem-se que:

i. a deflexão w é nula, ou seja:

$$w_{i,j} = 0 \quad (3.33)$$

ii. a rotação é impedida, portanto:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.34)$$

que na forma de DF fica (ver Figura 3.18):

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cong \frac{1}{2\Delta x} (-w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) = 0$$

ou,

$$w_{i-1,j} = w_{i+1,j} \quad (3.35)$$

Em ambas as condições de contorno observa-se que o deslocamento w é prescrito no bordo. Assim, a equação de equilíbrio da casca, na direção z , é aplicada apenas nos pontos internos da casca (pontos de cálculo). Como a derivada de ordem mais elevada é de quarta ordem, quando a equação de equilíbrio do sistema, na forma discreta, for posicionada no ponto nodal da malha mais próximo do bordo, aparecerão pontos a uma distância de $2\Delta x$ do ponto pivotal, que são os chamados *pontos nodais fictícios*. Os *deslocamentos fictícios* são eliminados através das condições (3.32) e (3.35). Em termos numéricos, basta somar (ou subtrair) as duas colunas da matriz dos coeficientes relativas às variáveis envolvidas e então eliminar a coluna da incógnita fictícia.

3.6.3 Bordo livre

Para o caso de bordo livre, têm-se as seguintes condições (Figura 3.18):

i. a rotação é livre, o que significa que o momento fletor é nulo, $M_x = 0$. Nesse caso, deve-se considerar a expressão completa de M_x , incluindo o efeito de Poisson, ou seja:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} = 0 \quad (3.36)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson e R o raio da casca. Na forma de DF, essa equação fica (ver Figura 3.18c):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2} (w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) + \frac{\nu}{R^2 \Delta \theta^2} (w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}) = 0$$

cuja incógnita $w_{i-1,j}$ pode ser definida como:

$$w_{i-1,j} = (2 + 2\beta_f) w_{i,j} - \beta_f (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) - w_{i+1,j} \quad (3.37)$$

com, $\beta_f = \nu \frac{\Delta x^2}{R^2 \Delta \theta^2}$.

ii. a deflexão radial w é livre, o que significa que o esforço cortante é nulo, $V_x = 0$, ou é igual ao carregamento aplicado nos pontos nodais do bordo, ou seja:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial x \partial \theta^2} = -\frac{q(i, \theta)}{D} \quad (3.38)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson, R o raio da casca, D é a rigidez à flexão da casca e $q(i, \theta)$ é o carregamento aplicado ao longo do bordo esquerdo. Na forma de DF fica (ver Figura 3.18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial x \partial \theta^2} &\cong \frac{1}{2\Delta x^3} (-w_{i-2,j} + 2w_{i-1,j} - 2w_{i+1,j} + w_{i+2,j}) \\ &+ \frac{2-\nu}{2R^2 \Delta x \Delta \theta^2} [2(w_{i-1,j} - w_{i+1,j}) - w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1}] = -\frac{q(i, \theta)}{D} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Assim, a incógnita $w_{i-2,j}$ pode ser definida como:

$$\begin{aligned} w_{i-2,j} &= (2 + 2\beta_c)(w_{i-1,j} - w_{i+1,j}) \\ &- \beta_c(w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j+1}) + w_{i+2,j} + \frac{q(i, \theta)}{D} \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde, $\beta_c = (2-\nu) \frac{\Delta x^2}{R^2 \Delta \theta^2}$.

As Equações (3.37) e (3.40) devem ser usadas para eliminar os pontos fictícios que aparecem no sistema de equações algébricas quando (3.27) é aplicada nos pontos do contorno.

Um resumo das equações algébricas para tratamento numérico dessas condições de contorno é apresentado na Figura 3.18.

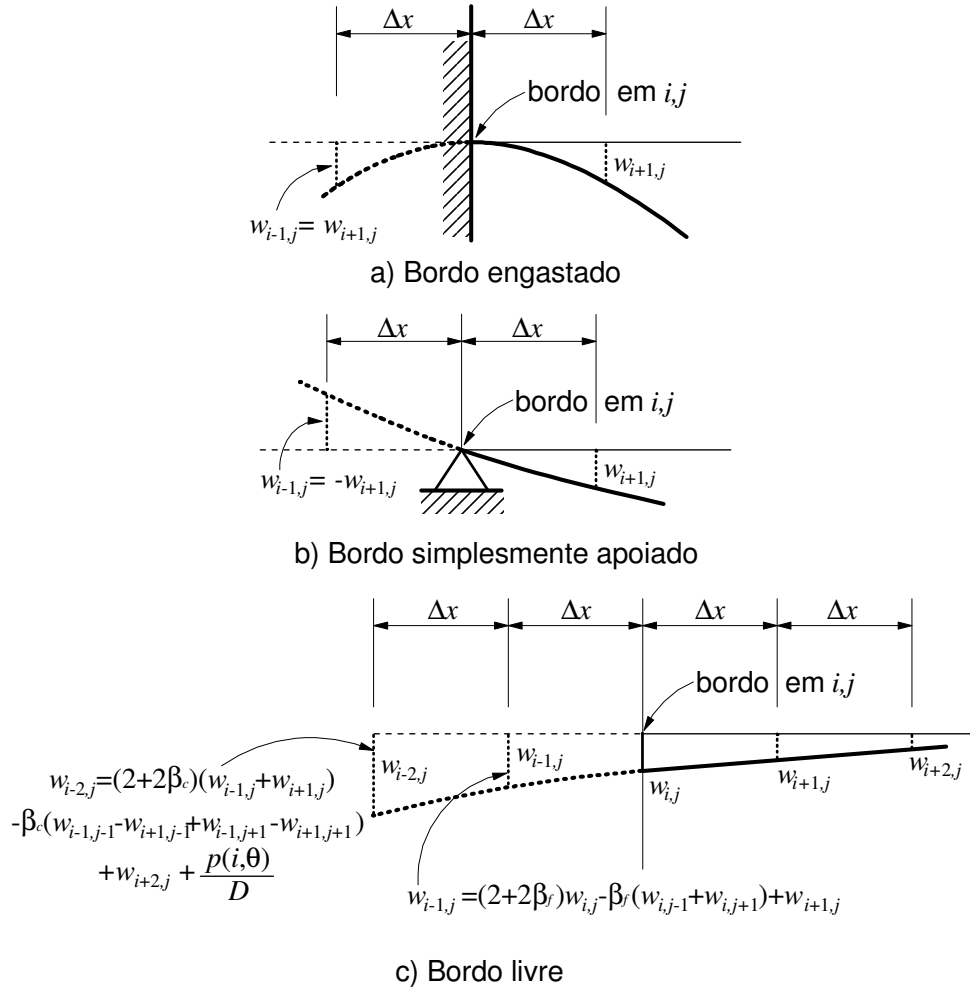


Figura 3.18 Tratamento numérico para eliminação dos pontos nodais fictícios da malha

3.6.4 Condições de Periodicidade

Quando o problema envolver um tubo cilíndrico completo fechado e certos tipos de carregamento, é possível analisar apenas parte do painel cilíndrico considerando as chamadas condições de periodicidade.

Em função das derivadas de quarta ordem do deslocamento radial w em relação a θ , ao posicionar a equação de equilíbrio da casca na primeira e última linha da malha que contém os pontos nodais de cálculo ou referência (identificadas como m e n na Figura 3.19), assim como nas linhas adjacentes a essas, haverá o surgimento de deslocamentos fictícios nos pontos nodais das duas primeiras e das duas últimas linhas da malha apresentada na Figura 3.19.

Através da condição de periodicidade podem-se igualar os deslocamentos fictícios dos nós na primeira linha da malha ($m-2$) aos deslocamentos dos nós localizados sobre a penúltima linha ($n-1$) que contém os pontos de cálculo (ou referência); o mesmo acontece

com os deslocamentos dos nós sobre a segunda linha ($m-1$) e última linha de cálculo (n). De modo semelhante, deve-se relacionar os deslocamentos dos pontos localizados nas duas últimas linhas da malha fictícia ($n+1$ e $n+2$) com as duas primeiras linhas de cálculo ou referência (m e $m+1$).

As condições de periodicidade são introduzidas numericamente de forma idêntica às condições de contorno essenciais, ou seja, somando-se as duas colunas da matriz dos coeficientes relativas às incógnitas envolvidas, e depois eliminando a coluna da matriz relacionada à incógnita fictícia.

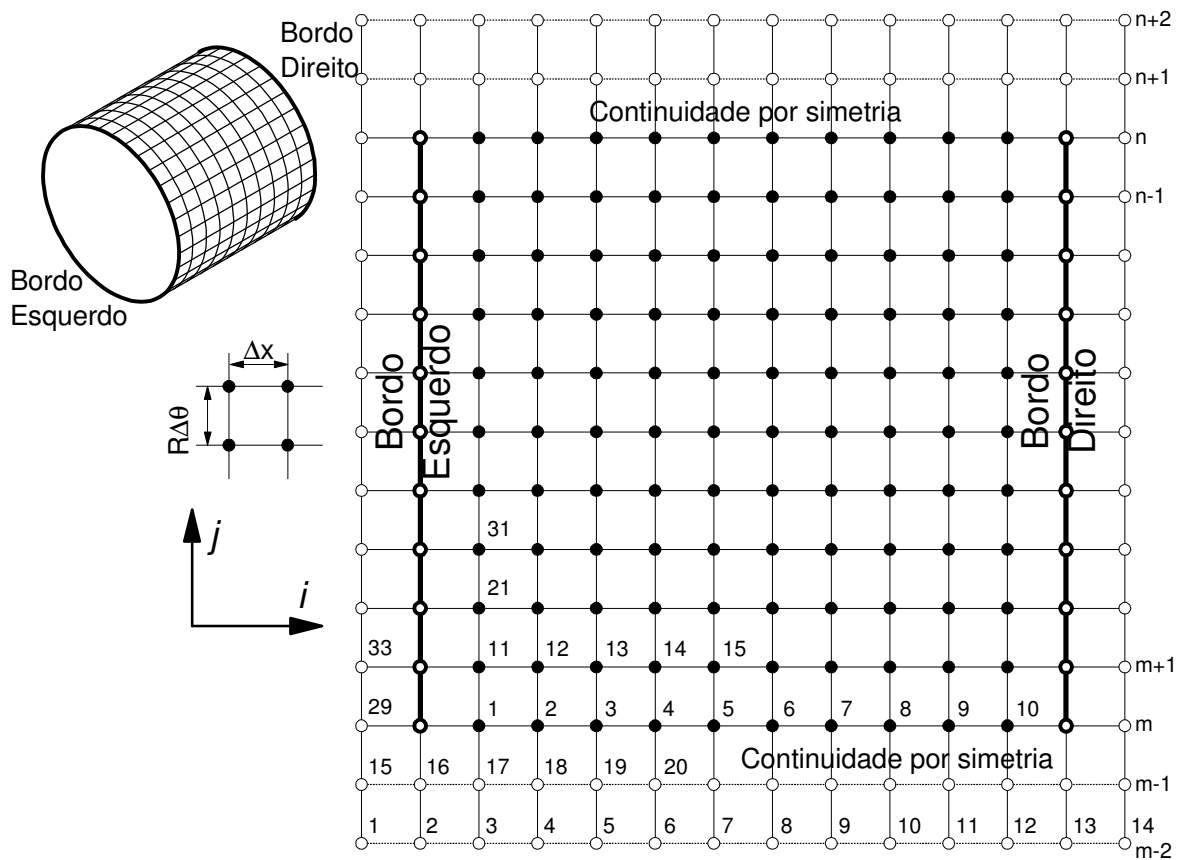


Figura 3.19 Aplicação das condições de periodicidade

Capítulo 4

Programa Computacional e Exemplos Numéricos

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como primeiro objetivo validar as estratégias de solução para o problema de contato estrutura-base, desenvolvidas no Capítulo 2. Para isso, foi desenvolvido um programa computacional, capaz de solucionar, numericamente, os problemas de contato, tanto lineares quanto não lineares, atende as estratégias propostas, usando as teorias e metodologias apresentadas no Capítulo 3. Como segundo objetivo, avalia-se sua eficiência e capacidade de solução através de análises paramétricas de resultados obtidos.

Assim, uma breve descrição desse programa é feita na próxima seção, onde são resumidas as estratégias numéricas necessárias ao seu desenvolvimento. Apesar de terem sido implementadas exclusivamente para utilização nesta tese, algumas rotinas foram baseadas em partes dos trabalhos de Straughan (1990), Silveira (1990, 1995) e Silva (1998).

Na Seção 4.3 serão apresentadas algumas análises com o intuito de legitimar os resultados obtidos pelo programa, comparando-os com problemas clássicos de cascas cilíndricas encontrados na literatura, comumente chamados de *benchmarks*. Também foram usados como referência, resultados obtidos pelo programa comercial ANSYS® (2010), que se baseia no método dos elementos finitos. Esses testes iniciais também servirão como orientação na construção de problemas estruturais (mais elaborados) que sirvam como PCU (próximo alvo análise desta seção) e, também, para conhecer como o programa lida com esses problemas, de maneira que se permita obter resultados mais interessantes para a análise proposta.

Por fim, na Seção 4.4, são estudadas as soluções numéricas de PCU propostas. Os exemplos foram escolhidos de forma a evidenciar alguns fenômenos típicos como a perda de contato entre a casca e a base elástica. As análises têm como principal objetivo fazer a comparação entre as estratégias propostas, avaliação de sua eficiência e obter mais informações de sua funcionalidade.

4.2 CÓDIGO FONTE

O programa computacional foi desenvolvido em linguagem FORTRAN 2000 (Cunha, 2005) e segue, em linhas gerais, o fluxograma apresentado na Figura 4.1. A sua estrutura pode ser subdividida em quatro blocos caracteristicamente distintos e importantes:

- leitura dos dados de entrada e geração automática das malhas de diferenças finitas;
- montagem da matriz dos coeficientes (matrizes de rigidez) da casca e base elástica;
- obtenção da solução linear (sem contato/base ou contato bilateral) ou não linear (contato unilateral: ES1 ou ES2);
- saída e organização dos resultados para pós-processamento.

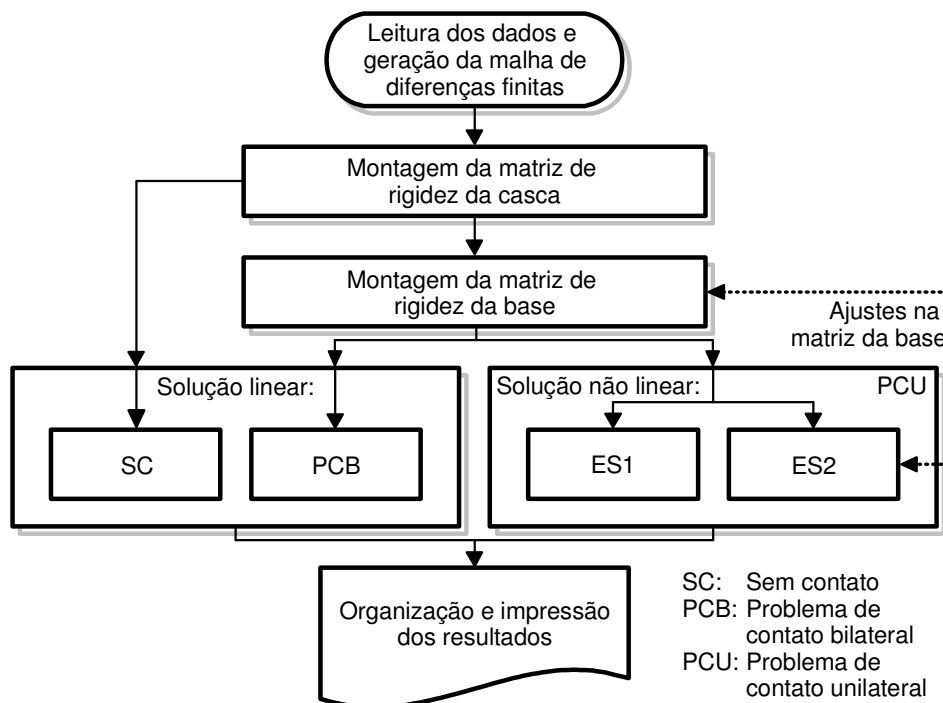


Figura 4.1 Fluxograma do programa computacional

Com a geração automática da malha de diferenças finitas, são calculados os parâmetros indicadores do grau de deslocabilidade da estrutura, os quais são fundamentais na definição das dimensões dos vetores e matrizes. Procurou-se organizar e economizar o espaço de memória com o intuito de prever *bugs* vinculados a limitações na capacidade de armazenamento (memória) do computador. Para isso, adotou-se um sistema de armazenamento no qual os vetores e as matrizes, diretamente dependentes do tamanho da malha, fossem dimensionados para ocupar o espaço de memória estritamente necessário e alocados de forma temporária. Essa técnica de armazenamento é comumente denominada

alocação dinâmica de memória, sendo bastante útil na execução e eficiência de um programa computacional (Cunha, 2005).

Uma vez definidas as malhas de DF, monta-se a matriz dos coeficientes da casca (\mathbf{K}_L) a partir de suas equações de equilíbrio. A princípio, sua forma é retangular porque o número de colunas deve incluir também os nós fictícios e os sob influência das condições de contorno, enquanto o número de linhas da matriz é igual ao número de nós de cálculo, isto é, os pontos de referência deslocáveis (ver Figura 3.15). Após a aplicação das condições de contorno e de periodicidade, a matriz é reduzida à forma quadrada através de uma sub-rotina que retira e reordena as colunas. Em seguida, é montada a matriz dos coeficientes (matriz de rigidez) da base elástica (\mathbf{K}_b) da mesma forma que \mathbf{K}_L .

A partir desse ponto, o programa permite a optar pela **Solução Linear** para resolver os casos em que não existe contato ou quando o contato é bilateral (a base interage com a casca tanto na tração quanto na compressão). Nesse caso, somam-se as matrizes da casca e da base de forma que o seguinte sistema de equações possa ser resolvido:

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad \text{ou} \quad \mathbf{U} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{F} \quad (4.1)$$

em que \mathbf{U} e \mathbf{F} são os vetores de deslocamentos nodais e de forças externas, respectivamente.

Para a solução desse sistema de equações algébricas adotou-se uma técnica de resolução de matrizes esparsas onde duas sub-rotinas são empregadas. Baseada no método de Gauss, a primeira sub-rotina decompõe a matriz em LU (triangular inferior-LOWER e triangular superior-UPPER), e é usada apenas uma vez a cada incremento de carga. A segunda atua sobre a matriz decomposta e, a cada ajuste no vetor de carga, é utilizada para fornecer os deslocamentos desejados.

Se o problema a ser resolvido envolve contato unilateral entre os corpos (PCU) então o programa usa uma das estratégias de **Solução Não Linear**: ES1 ou ES2. Dependendo da estratégia escolhida, a montagem da matriz dos coeficientes (de rigidez) da base elástica, \mathbf{K}_b , será diferente.

Na primeira estratégia ela é plenamente montada, como se toda a base estivesse agindo sobre a casca (semelhante ao PCB). A ES1 considerará \mathbf{K}_b como a restrição imposta ao deslocamento da casca e, usando o algoritmo de Lemke, fará os ajustes necessários para eliminar a superposição entre a casca e a base.

Na outra estratégia, ES2, a matriz da base é montada inicialmente nula, isto é, como se não fornecesse reação ao deslocamento da casca (semelhante ao PSC). À medida que o

processo incremental se desenvolve, o programa monitora quais nós da casca começam a interagir com a base. A matriz \mathbf{K}_b é reconstruída, considerando então apenas os nós onde acontece o contato. O procedimento de montagem é análogo ao da matriz de rigidez da casca, isto é, primeiramente é construída retangular e, depois de aplicadas as condições de contorno e periodicidade, reduzida a uma matriz quadrada.

Depois da montagem das matrizes de rigidez, o programa usará a estratégia de solução escolhida (ES1 ou ES2), usando o algoritmo de Lemke ou o de Newton-Raphson.

A ES1, como já explicado na Subseção 2.4.3, manipula previamente as matrizes da casca e base e os vetores de força e deslocamento, organizados de forma apropriada. Assim, o **algoritmo de Lemke** desenvolve o processo de pivoteamento que fornece, ao final, os deslocamentos da casca e da base em vetores separados. Esse algoritmo é apresentado, de forma detalhada ao final deste trabalho, em Seção Anexa.

A ES2 usa o **algoritmo de Newton-Raphson** que soma previamente as matrizes da casca e da base e resolve o sistema de equações (4.1) usando o método LU, já mencionado. O tempo computacional necessário para a decomposição LU é bem superior ao tempo dispensado pela segunda sub-rotina que fornece os deslocamentos, justificando, assim, o uso do método N-R Modificado em detrimento do N-R Padrão. Por ser um método incremental, a solução de (4.1) é repetida a cada passo de carga e o deslocamento obtido (e eventualmente corrigido) é somado ao anterior até que o número máximo de passos de carga seja atingido e, conseqüentemente, as forças externas tenham atingido seu valor máximo.

Por fim, o programa organiza e imprime os resultados obtidos – deslocamentos e forças internas – de forma apropriada para o seu uso em programas gráficos de pós-processamento.

4.3 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

Foram feitos três estudos, usando problemas de casca cilíndrica-base elástica, que serviram tanto para validação do programa implementado, quanto para orientação na escolha/definição dos problemas que serão adotados na próxima Seção. Essas avaliações, que usam apenas estratégias de solução linear, têm como objetivo averiguar os seguintes itens:

- a) a influência da malha de Diferenças Finitas;
- b) a influência da geometria da casca cilíndrica e condições de contorno;
- c) os tipos de carregamentos e aspectos de sua utilização; e
- d) os modelos de bases elásticas.

4.3.1 Estudo da Malha - Cargas Distribuídas e Concentradas

Para verificação da influência da malha de DF é estudado o problema ilustrado na Figura 4.2. Trata-se de uma casca cilíndrica em que as extremidades (bordas) são consideradas simplesmente apoiadas. Sujeita a uma carga radial uniformemente distribuída (tubo com pressão interna), sua geometria e dados pertinentes ao problema estrutural são apresentados na mesma figura. Foi feita uma análise linear variando-se o tamanho da malha em x e θ , de uma malha simples, de 7×11 pontos nodais, até uma refinada, de 81×161 nós. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles obtidos pelo programa ANSYS (usando uma malha MEF de 80×80 elementos do tipo SHELL-181) e, também, com valores calculados analiticamente (Timoshenko e Krieger, 1970).

A Tabela 4.1 apresenta os deslocamentos radiais (w) encontrados em $x = 10$ m de acordo com a malha. A Figura 4.3 apresenta a configuração deformada da casca, numa linha de análise na direção x , obtida com algumas das malhas avaliadas.

Percebe-se que a variação da malha, tanto em x quanto em θ (ver Tabela 4.1), não proporciona grande variação no valor do deslocamento radial encontrado na linha mediana da casca. O refinamento da malha não interfere no resultado final nos pontos calculados. O único inconveniente percebido de se usar uma malha simples é o de que ela não fornece os detalhes do formato da configuração deformada – principalmente nas regiões próximas às bordas. Uma alternativa é o uso de uma malha mais refinada nos pontos de interesse de análise.

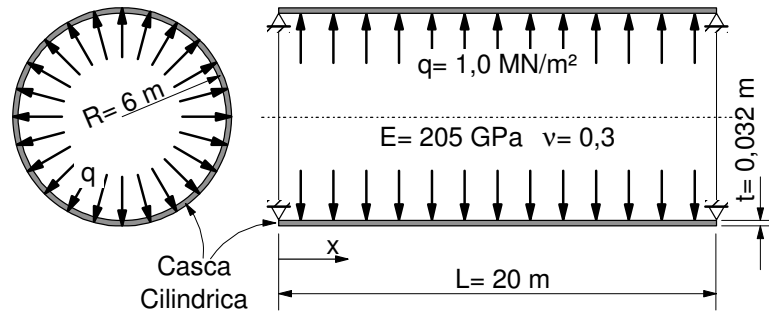


Figura 4.2 Casca cilíndrica simplesmente apoiada sob pressão interna

Tabela 4.1 Deslocamentos w em $x = 10\text{m}$ – carga uniformemente distribuída
a) Variação da malha em x

Malha	w (metros)	erro(%)
7x81	0,004993902476	0,23%
11x81	0,004993902438	0,23%
21x81	0,004993902439	0,23%
41x81	0,004993902439	0,23%
81x81	0,004993902439	0,23%
ANSYS	0,005005400000	↙
Analítico	0,005487805000	

b) Variação da malha em θ

Malha	w (metros)	erro(%)
41x11	0,004993902439	0,23%
41x21	0,004993902439	0,23%
41x41	0,004993902439	0,23%
41x81	0,004993902439	0,23%
41x161	0,004993902439	0,23%
ANSYS	0,005005400000	↙
Analítico	0,005487805000	

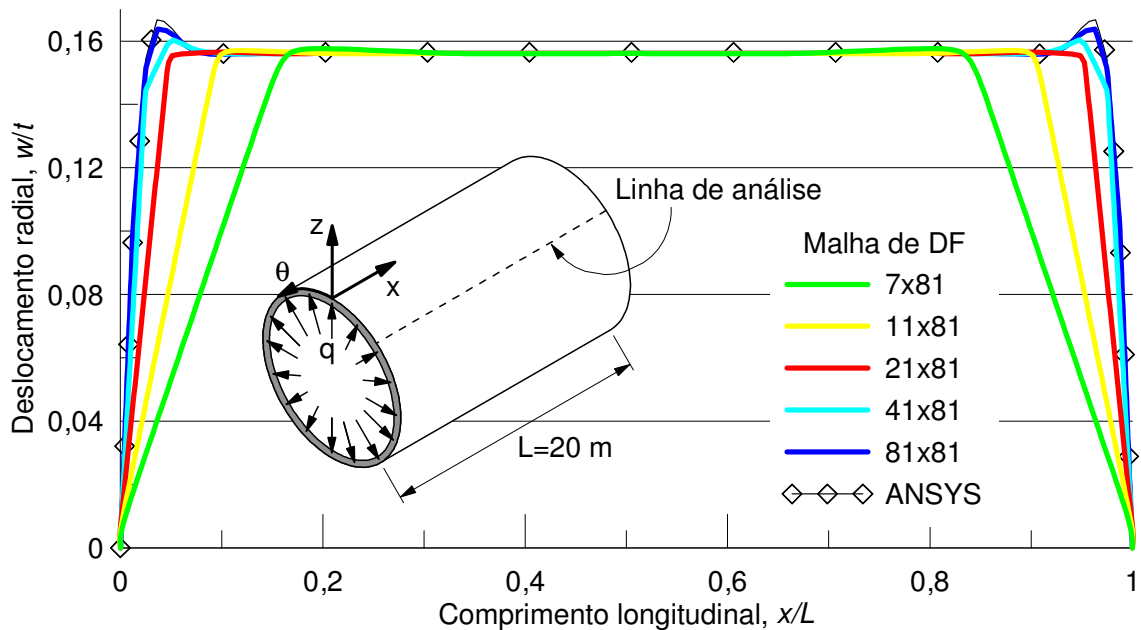


Figura 4.3 Configuração deformada da casca para diferentes malhas

Analisou-se a mesma casca, mas agora modificando a forma do carregamento. Adotou-se um carregamento distribuído numa linha circunferencial aplicado em $L/2$, como apresentado na Figura 4.4. Esse carregamento apesar de distribuído na direção θ , tem caráter concentrado na direção x e esse fato redonda em considerações importantes. Por ser distribuído na direção θ , o uso de uma malha simples ou refinada nessa direção não oferece

diferença no resultado final. Assim, o número de nós foi variado apenas na direção x , de 11 a um total de 301 nós.

A Tabela 4.2 apresenta os valores obtidos do deslocamento radial no ponto de aplicação da carga e usou-se, como referência, a solução analítica fornecida em Timoshenko e Krieger (1970) dada pela seguinte equação:

$$w_{\max} = \frac{P}{8\beta^3 D} \quad \text{onde} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 t^2}} \quad (4.2)$$

A Figura 4.5 mostra a variação do deslocamento radial em P (máximo) para diferentes malhas e comprimentos longitudinais. A resposta analítica encontrada por Timoshenko e Kieger (1970) também está indicada. Essa variação tem o intuito de se definir a malha com melhor precisão de resultados.

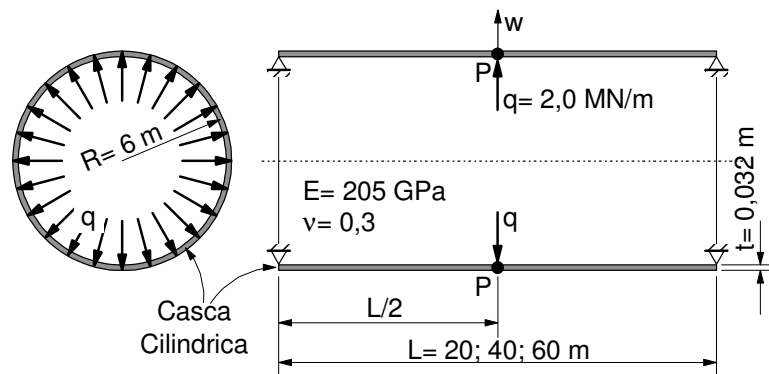


Figura 4.4 Casca cilíndrica com carga circunferencial em linha

Tabela 4.2 Deslocamento radial w em P ($x = 20$ m) para $L = 40$ m – carga circunferencial

Malha	w (metros)	erro(%)	Malha	w (metros)	erro(%)
11x81	0,00249	84,49%	141x81	0,01685	-4,70%
21x81	0,00499	69,01%	161x81	0,01659	-3,07%
41x81	0,00981	39,06%	201x81	0,01615	-0,30%
61x81	0,01379	14,31%	221x81	0,01598	0,74%
81x81	0,01615	-0,35%	241x81	0,01584	1,59%
111x81	0,01709	-6,18%	321x81	0,01549	3,73%
121x81	0,01706	-6,01%	Analítico	0,01610	

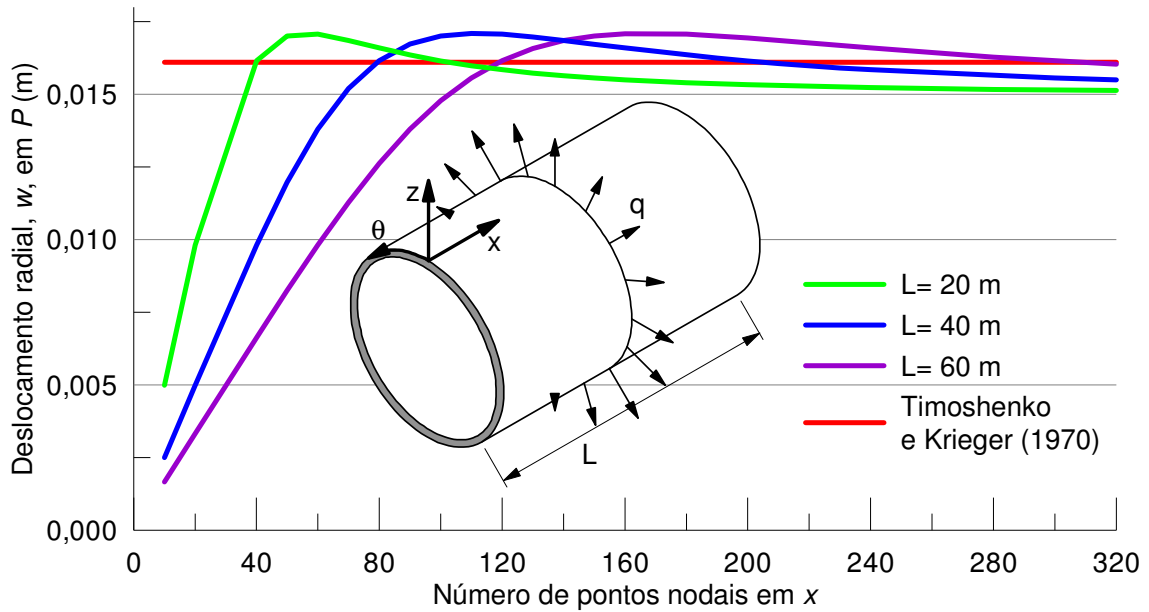


Figura 4.5 Variação do deslocamento em P , de acordo com a malha de DF

A Figura 4.5 apresenta a convergência obtida à medida que se aumenta o refinamento da malha. Entretanto, é importante destacar através da comparação das três curvas ($L = 20$ m, 40 m e 60 m) que o refinamento de uma malha de DF não é vinculado ao tamanho da malha (número de nós), mas sim ao tamanho do intervalo das malhas (Δx ou $\Delta \theta$) (Szilard, 2004). Assim, o refinamento ideal é obtido com um bom proporcionamento entre as dimensões da casca e a malha de DF para se obter valores de Δx e $\Delta \theta$ entre $0,5$ e $0,05$. Concluindo que, quanto mais longa for a casca maior deverá ser o número de nós da discretização. Para ilustração, a Figura 4.6 mostra a configuração deformada de metade da casca ($L = 20$ m) para o caso de carga circunferencial, exagerando-se a deformação para facilitar a visualização.

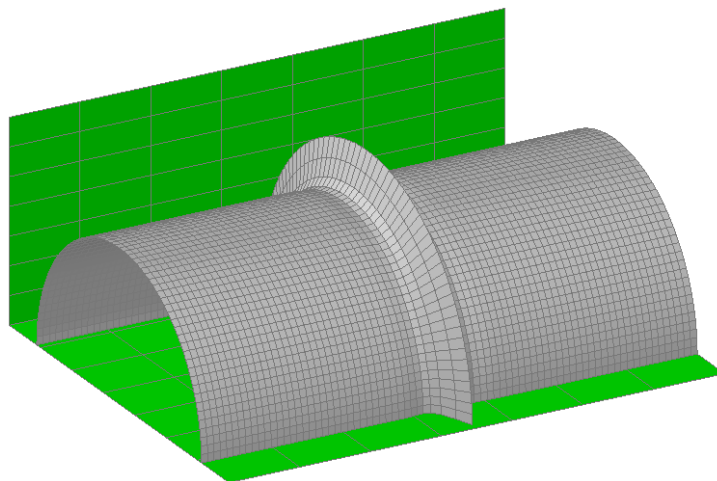


Figura 4.6 Configuração deformada da casca cilíndrica para carga circunferencial atuante (f.esc.: $\times 100$)

4.3.2 Estudo da Condição de Bordo

O estudo agora considera diferentes condições de bordo e avalia sua influência nas dimensões de problemas estruturais de casca cilíndrica. O programa computacional desenvolvido permite a resolução de problemas com estruturas tubulares ou, também, de painéis cilíndricos. As extremidades curvas podem ser engastadas, simplesmente apoiadas ou livres. Nos painéis, as extremidades retas podem ser engastadas ou simplesmente apoiadas.

O objetivo desta análise é definir o comprimento longitudinal ideal para que se consiga capturar uma zona mediana da casca que não seja influenciada pelas perturbações causadas pelas condições de contorno das extremidades curvas. O mesmo sistema estrutural e carregamento distribuído (q) usado na Subseção anterior (Figura 4.2) são aqui adotados. Entretanto, consideram-se diferentes condições de apoio nas duas extremidades: engastada, simplesmente apoiada e livre. Os resultados obtidos são vistos na Figura 4.7.

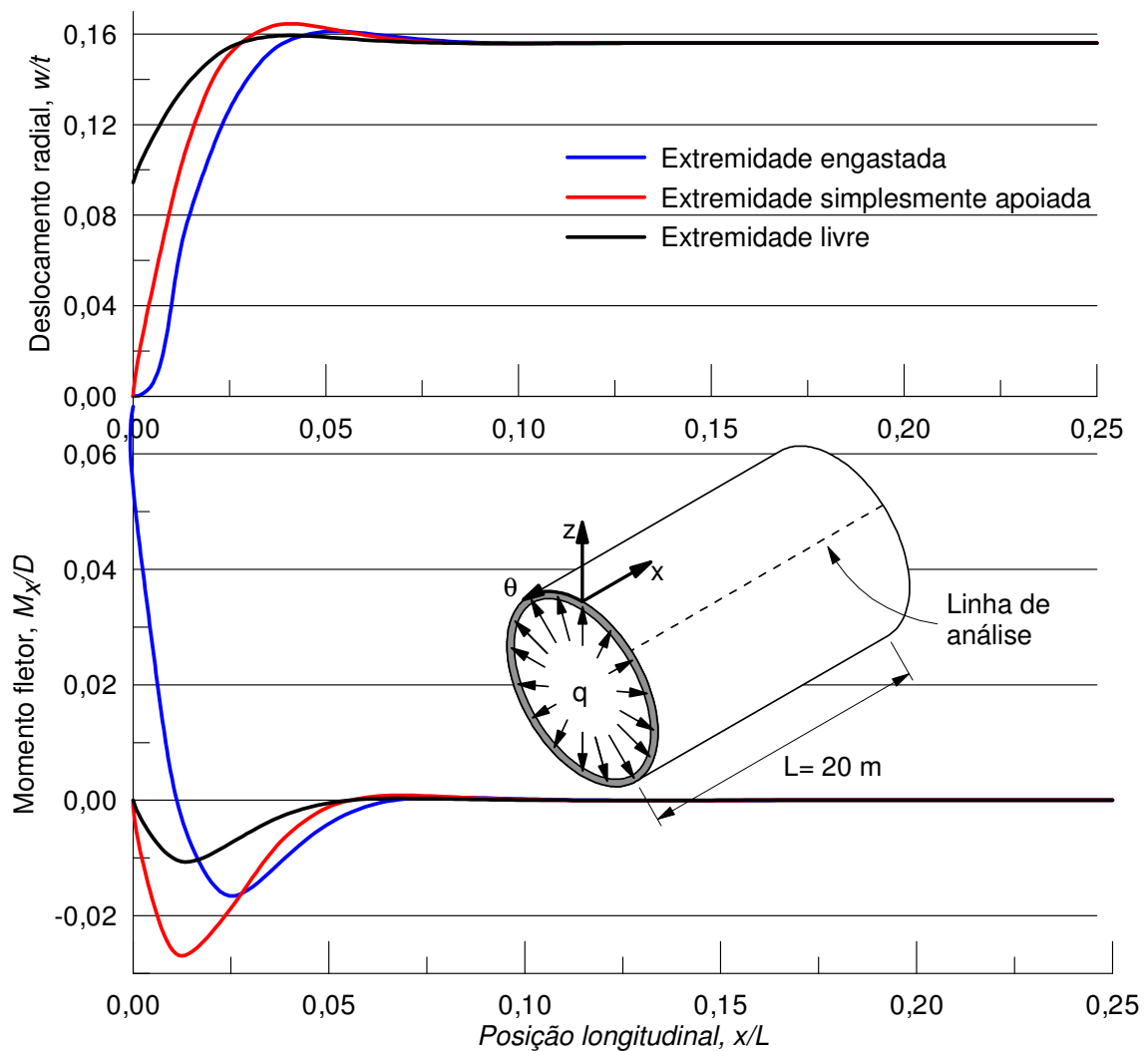


Figura 4.7 Valores de w/t e M_x/D , em x , para diferentes condições de bordo

A obtenção dos deslocamentos e respectivas forças internas (momento em x , em destaque) nesses pontos próximos às extremidades são de grande importância, pois serão imprescindíveis para o dimensionamento da casca cilíndrica. Contudo, destaca-se que a utilização de uma casca extremamente longa não trará informações adicionais as daquelas fornecidas por uma casca com comprimento médio.

Os deslocamentos radiais (e respectivas forças internas atuantes) em pontos medianos da casca só serão influenciados pelas perturbações criadas pelas condições de contorno das extremidades quando a dimensão longitudinal for pequena. No caso do exemplo analisado (Figura 4.7), quando o comprimento for inferior a 4,0 metros. Dessa forma, o uso de problemas com comprimentos longitudinais dentro do intervalo entre R e $2R$ são os mais apropriados, pois apresentam de forma bem diferenciada os efeitos das condições de contorno em relação às zonas medianas sem, no entanto, exagerar no comprimento longitudinal da casca. Lembrando que grandes comprimentos, sejam longitudinais ou circunferenciais, exigem malhas com número maior de nós, fato que ocasiona um consumo maior de memória de processamento.

Para confirmar a afirmação anterior analisou-se o mesmo problema, sob uma mesma condição de bordo (engastada), mas com comprimentos longitudinais de 4,0 e 3,0 metros. Os resultados obtidos para o deslocamento radial, w , ao longo da direção x , são apresentados na Figura 4.8.

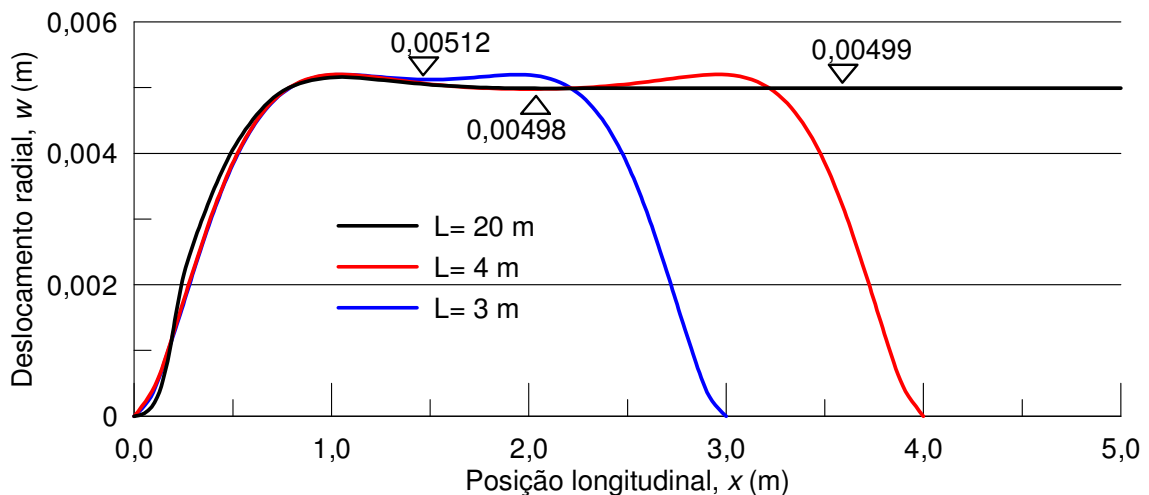


Figura 4.8 Deslocamento radial (w) ao longo da direção x para diferentes comprimentos longitudinais

O que se observa nessa figura é que, quando o comprimento longitudinal é pequeno (menor que 4,0 m, para este problema), a zona mediana começa a ser influenciada pela

perturbação do bordo e, assim, o valor do deslocamento radial (w) na posição mediana pode ficar alterado e, como consequência, sua comparação com valores calculados de forma analítica, que leva em consideração comprimentos infinitos, fica comprometida.

4.3.3 Estudo dos Modelos Bases Elásticas

Procurou-se, então, testar os modelos de base implementados para analisar como funcionam os modelos e, inclusive, sua eficiência. Porém, antes da avaliação desses modelos, buscou-se na literatura dados comparativos para validar as análises. O trabalho de Straughan (1990), apesar de estudar placas (com os quatro bordos livres), tem grande semelhança com esta pesquisa por usar o MDF como metodologia de solução de problemas de placas sobre bases elásticas, em que ocorre **contato bilateral** entre os corpos elásticos.

Tentando aproximar o problema calculado por Straughan (1990), usou-se um painel retangular de $7,2 \times 14,4$ m², com uma carga distribuída de $2,394 \times 10^4$ N/m² aplicada sobre ele, como o apresentado na Figura 4.9. Algumas adaptações tiveram que ser feitas para aproximar o problema analisado do encontrado na literatura. Primeiramente, considerou-se para o painel cilíndrico um raio de 1000 m para que ele se assemelhasse à placa plana. Em segundo, adotou-se o uso de apoios simples nas laterais menores, pois o presente programa não permite o uso de bordos livres nos quatro lados. A base usada por Straughan segue o modelo de Pasternak ($k_B = 1,2993$ MN/m³ e $k_M = 2,54652$ MN/m.)

A Figura 4.10 apresenta o deslocamento radial encontrado nos pontos localizados numa linha que passa no meio do painel, paralela aos lados de menor dimensão (simplesmente apoiados). Percebe-se que existe uma boa aproximação das configurações deformadas e as diferenças observadas são oriundas do ganho de rigidez proporcionado pelas diferenças nas condições de contorno (de livres para simplesmente apoiadas). A Tabela 4.3 apresenta os valores máximos de deslocamento e erros obtidos.

Além disso, o que se pode observar nesse exemplo é que a adoção do modelo de Winkler – usando apenas o primeiro parâmetro k_B –, além de oferecer menos oposição ao deslocamento do painel, também proporcionou pouca rigidez ao sistema casca-base (observa-se que a linha de deslocamentos do gráfico apresentou uma curvatura muito suave, quase reta). Esse comportamento é esperado, mesmo no caso desse problema, que tem uma relação entre k_B e k_M de tamanho razoável ($k_B/k_M = 0,51$).

Paliwal e Bhalla (1993) propõem uma relação, entre esses dois parâmetros, em torno de $1/4L^2$, que no caso de um problema com $L = 12$ m, essa relação seria de 0,001736, isto é, $k_M \gg k_B$. Entretanto, o uso de valores de k_M tão altos proporciona um ganho de rigidez

exagerado ao sistema casca/base elástica. Isso resulta em sistemas tão rígidos que são perdidos detalhes da configuração deformada da casca (as perturbações próximas aos bordos, p.ex.) e, conseqüentemente, minimizando os valores dos momentos fletores nessas regiões, mas, principalmente, perdem-se informações importantes sobre as zonas de descolamento, que são alvo da presente pesquisa.

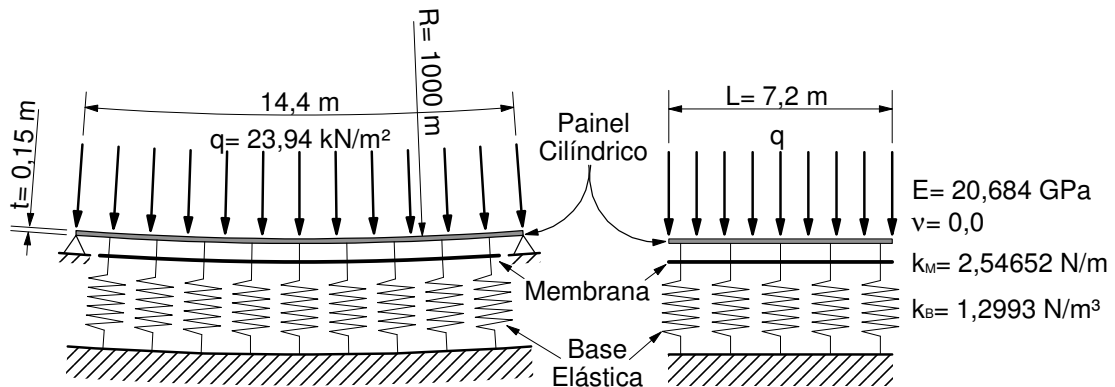


Figura 4.9 Painel cilíndrico assente em base elástica – contato bilateral

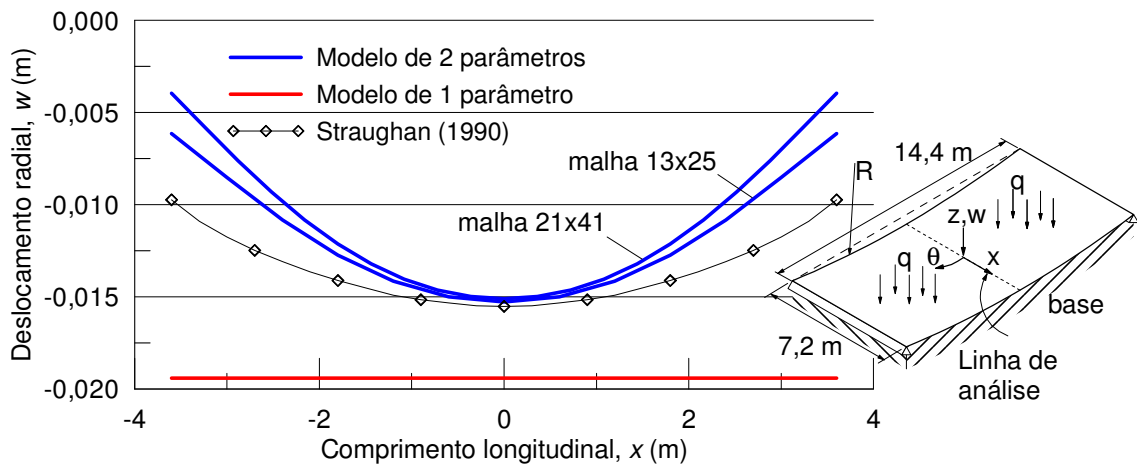


Figura 4.10 Deslocamento radial em um painel de curvatura suave sobre uma base elástica

Tabela 4.3 Deslocamento radial máximo do painel/placa

Análise	w (metros)	erro(%)
1 parâmetro (malha de 21x41)	-0,01941	20,0%
2 parâmetros (malha de 21x41)	-0,01511	2,74%
2 parâmetros (malha de 13x25)	-0,01528	1,58%
Straughan,1990 (malha de 13x25)	-0,01552	

Assim, para obter uma comparação entre os modelos de base e definir uma boa proporção entre esses dois parâmetros, foi feita, também, uma análise dos deslocamentos para painéis onde são testados vários os parâmetros das bases elásticas (com contato bilateral) e carregamentos de tipos diferentes. Primeiramente, aplicou-se uma carga distribuída de 10^6 N/m² sobre o painel apresentado na Figura 4.11, com formato quase quadrado e simplesmente apoiado nos quatro lados. O deslocamento radial obtido numa linha longitudinal mediana é apresentado na Figura 4.12. O primeiro parâmetro k_B foi tomado constante em todos os testes, inclusive para o modelo de 1 parâmetro, no valor de $1,0 \times 10^6$ N/m³. O segundo parâmetro, k_M , sofreu uma variação de $1,0 \times 10^5$ até $2,0 \times 10^6$ N/m, obtendo relações k_B/k_M de 10; 2; 1 e 0,5.

O que foi observado é que, apesar do deslocamento na região mediana do painel não ter sofrido variação perceptível, o ganho de rigidez oferecido pelo modelo de base com dois parâmetros interferiu efetivamente na redução da perturbação causada pelas condições de contorno e reduzindo, inclusive, o momento fletor, em x , máximo na casca nessa região.

Na sequência, considerou-se uma carga concentrada de valor $1,0 \times 10^6$ N no centro do mesmo painel anteriormente analisado. Os deslocamentos radiais e momentos fletores na direção x obtidos são apresentados na Figura 4.13. Também foram usados os mesmos parâmetros para os modelos de base do problema anterior.

Nesta avaliação, percebe-se, assim como o primeiro, que houve um ganho efetivo de rigidez proporcionado pelo modelo de 2 parâmetros. Os valores de deslocamento máximos e momentos em θ , apresentados na Tabela 4.4, demonstram que a adoção de um parâmetro k_M grande (em relação a k_B) acarretará uma redução efetiva do deslocamento radial e do momento máximos da casca. Dependendo da situação, esse fato pode acarretar um “mascaramento” dos resultados levando a um subdimensionamento da estrutura.

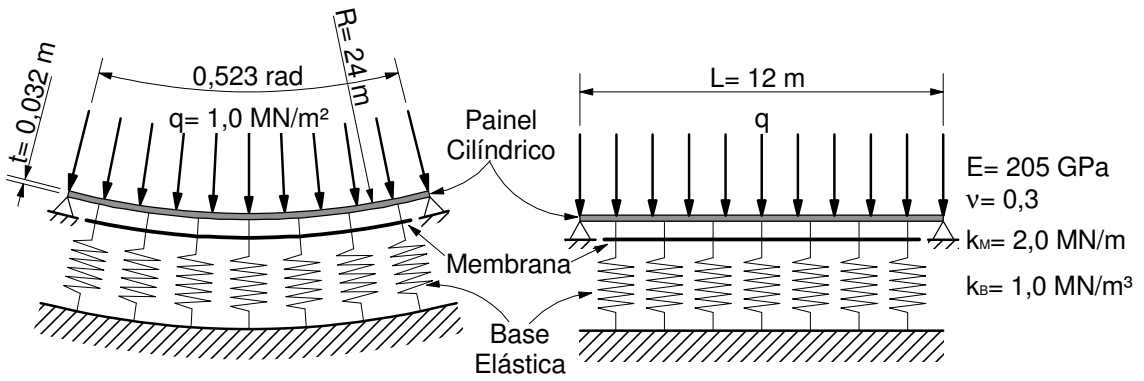


Figura 4.11 Painel cilíndrico quadrado assente sobre base elástica com contato bilateral

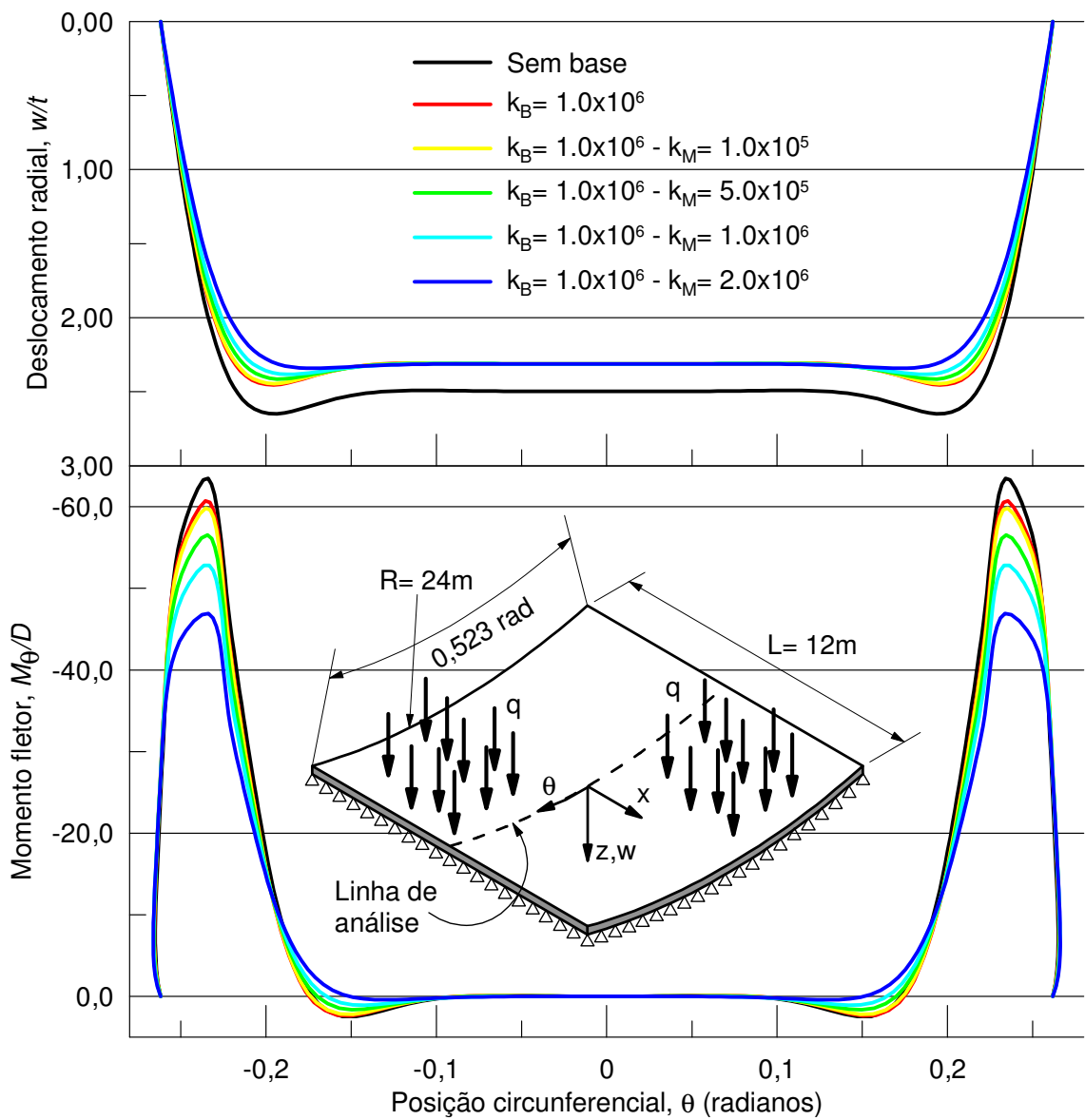


Figura 4.12 Deslocamento radial e momentos fletores em x de um painel sob carga distribuída variando os parâmetros da base

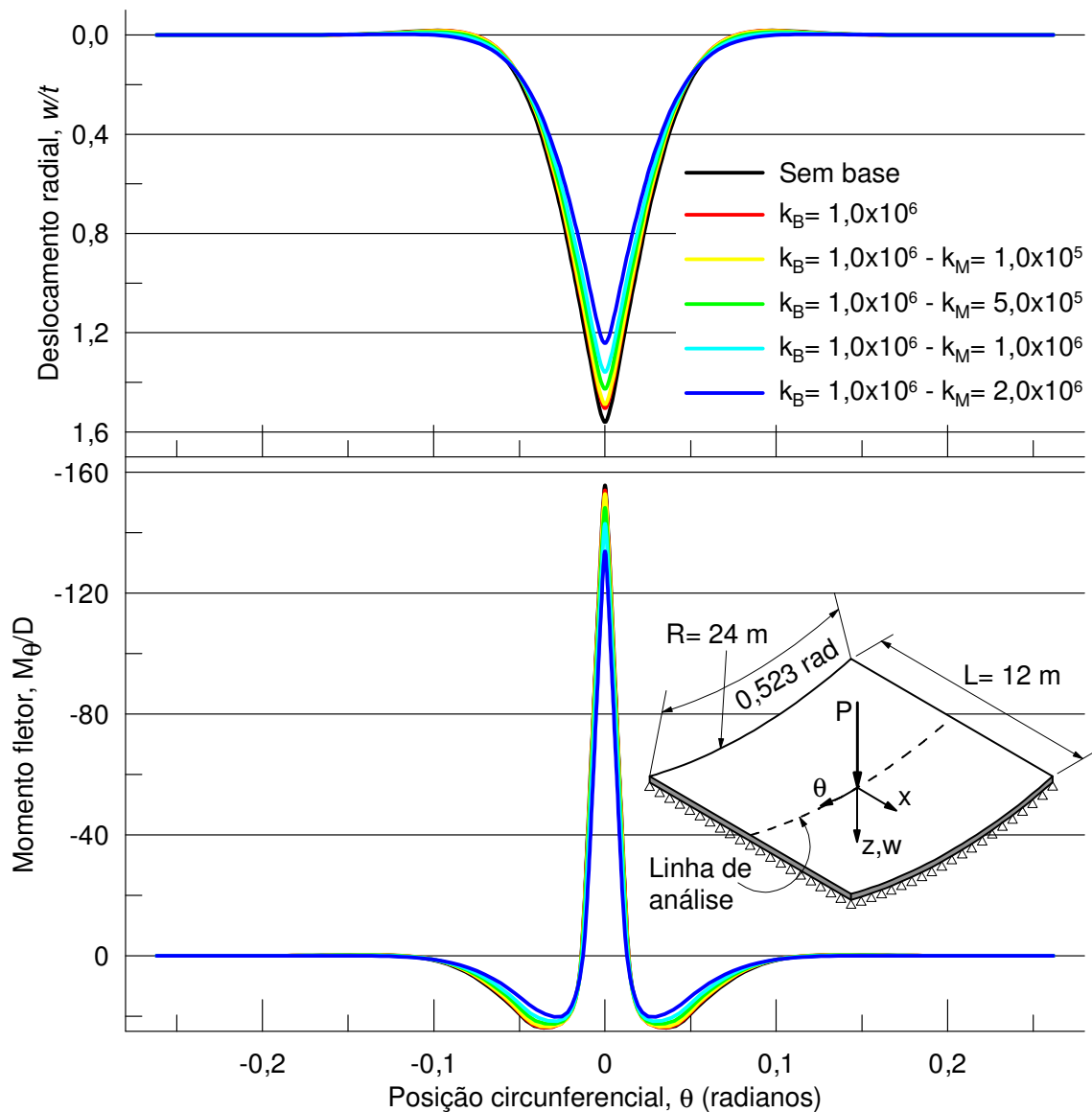


Figura 4.13 Deslocamento radial e momentos fletores em θ de um painel sob carga concentrada variando os parâmetros da base

Tabela 4.4 Deslocamento radial, x , e momentos fletores máximos, M_θ , de um painel sob carga concentrada variando os parâmetros da base

Análise	w (m)	Momento em θ (Nm)
Sem base	0,04993	-28898232
Winkler ($k_B= 1,0 \times 10^6$)	0,04817	-28604894
$k_B= 1,0 \times 10^6$ e $k_M= 1,0 \times 10^5$	0,04817	-28604439
$k_B= 1,0 \times 10^6$ e $k_M= 5,0 \times 10^5$	0,04806	-28559427
$k_B= 1,0 \times 10^6$ e $k_M= 1,0 \times 10^6$	0,04569	-27525087
$k_B= 1,0 \times 10^6$ e $k_M= 2,0 \times 10^6$	0,03979	-24850753

4.4 PROBLEMAS DE CONTATO UNILATERAL

Analizam-se, agora, cascas sob contato unilateral com bases elásticas. As duas metodologias de resolução apresentadas no Capítulo 2: a ES1 (que considera as restrições impostas pelo contato unilateral como um problema de complementaridade linear – PCL) e a ES2 (que considera o contato unilateral como uma não linearidade imposta, que emprega o método de Newton-Raphson – N-R) serão usadas.

O objetivo é procurar a convergência dessas duas metodologias, destacando as vantagens e desvantagens de cada uma. Para isso, desenvolveram-se algumas análises usando problemas estruturais que evidenciam os efeitos típicos do contato unilateral.

Como já mencionado, efeitos importantes do contato unilateral somente são percebidos quando, na estrutura, são aplicadas cargas de efeito localizado, e principalmente, quando se permite ao sistema desenvolver uma configuração deformada que, em determinados pontos, venha a comprimir a base (oferecendo reações de compressão) e em outros, principalmente, se afastar (descolar) a casca da base elástica de suporte, não ocorrendo reações de tração.

A ES2 necessita de uma definição prévia dos parâmetros incrementais/iterativos para convergência do processo. Salvo exceções informadas no texto, em todos os problemas o carregamento foi dividido em 10 passos de carga e o limite máximo de iterações usado é de 100.

4.4.1 Cargas em Linha

Para realçar o aparecimento de zonas de perda de contato (descolamento), em contraposição ao de compressão, procurou-se aplicar duas cargas em linha circunferencial, com sentidos opostos, sobre a casca cilíndrica analisada. Esse carregamento é representado na Figura 4.14. Porém, procurou-se posicionar essas cargas suficientemente distantes uma da outra, de forma que uma pouco interferisse nos deslocamentos causados pela outra, evitando sobreposições ou compensações na configuração deformada (deslocamento radial) da casca, indesejadas à análise.

Uma vez que o contato unilateral fornece diferentes tipos de oposição ao deslocamento dependendo da configuração deformada (função do carregamento), esse tipo de problema estrutural poderá destacar os efeitos do contato unilateral de forma clara.

Como ilustrado na Figura 4.14, o tubo circular de aço tem 21 metros de comprimento e os carregamentos em linha circunferencial são aplicados em $x = 7$ m e $x = 14$ m, com sentidos opostos. Na mesma figura são apresentados os demais dados necessários para a definição do problema; a malha de discretização da casca usada é de 31×81 nós (x e θ).

Na Figura 4.15 é apresentada a configuração deformada obtida através das seguintes análises: sem contato, com contato bilateral e com contato unilateral usando as duas estratégias propostas.

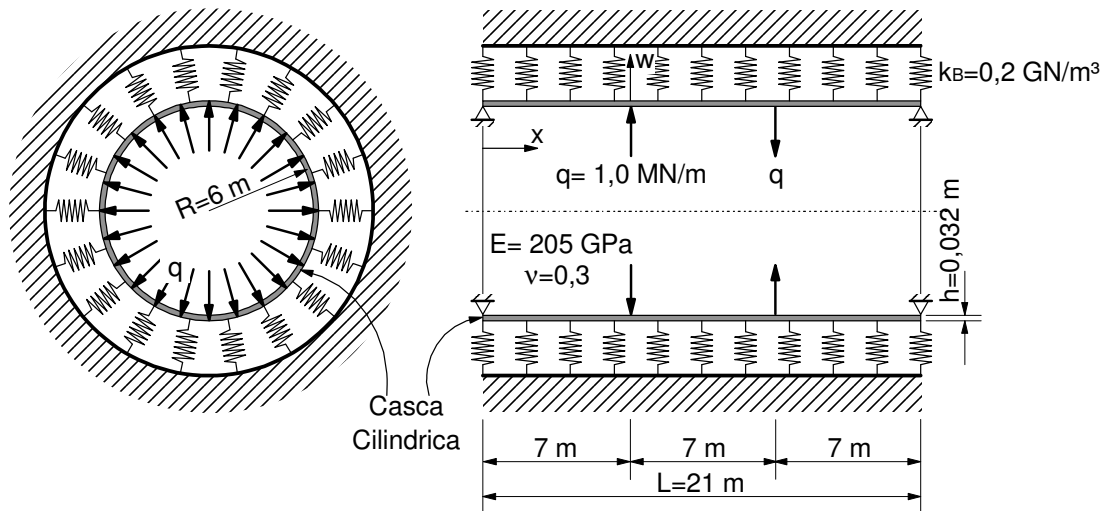


Figura 4.14 Tubo cilíndrico em contato unilateral com um meio elástico

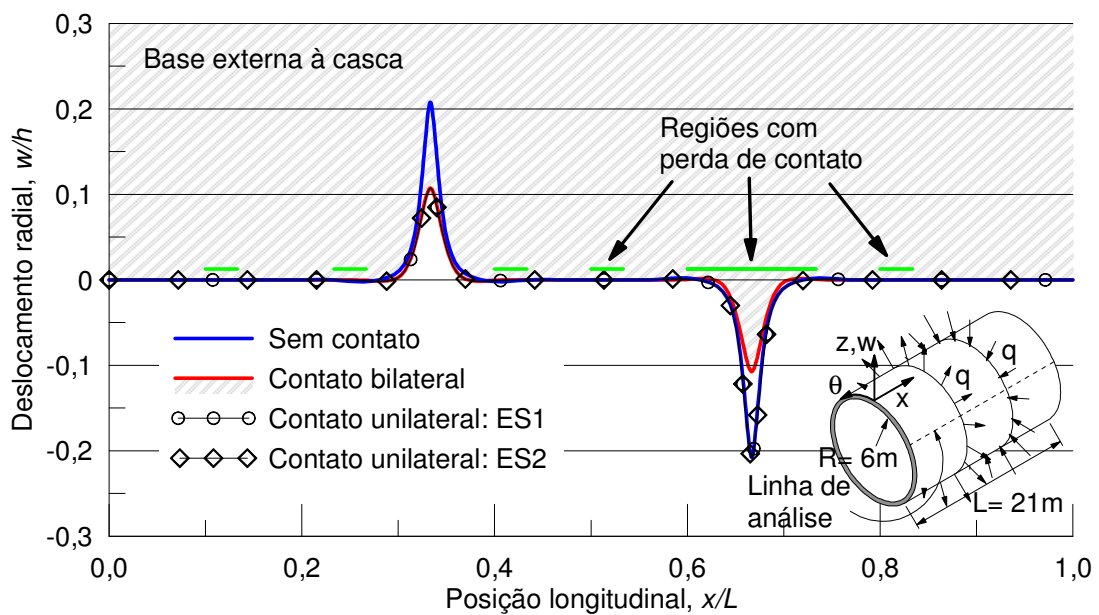


Figura 4.15 Configuração deformada da casca para diferentes análises de contato unilateral

Da Figura 4.15 é possível perceber, que os resultados obtidos entre as duas estratégias propostas são, aproximadamente, iguais (ou iguais). Além disso, existe coerência entre os resultados do contato unilateral com os do contato bilateral e sem contato. Isto é, os deslocamentos obtidos no PCU, em ambas as estratégias, foram semelhantes aos obtidos sem a consideração da base nos pontos onde ocorreram descolamentos e semelhantes aos obtidos

com contato bilateral nas outras regiões. Isso significa que nos pontos onde houve deslocamento positivo ocorreu reação da base elástica (com correspondente redução do deslocamento) e nos demais pontos, onde ocorreu deslocamento negativo, a casca deformou com pouca ou nenhuma interferência da base.

Na Tabela 4.5 podem ser comparados os deslocamentos encontrados exatamente sob as cargas onde se destacam os efeitos do contato unilateral. Sob a carga que comprime a base, ocorre **reação da base** e o deslocamento w encontrado é muito próximo daquele obtido usando o contato bilateral. Já sob a carga que puxa a base se vê o oposto, isto é, a base **não oferece reação**, pois o deslocamento obtido é muito próximo daquele alcançado quando não se considera base alguma.

Tabela 4.5 Deslocamentos radiais (em metros) obtidos de acordo com as formulações de bases e metodologias de cálculo usadas

Posição da carga	Sem Contato	Contato bilateral	Contato unilateral ES1	Contato unilateral ES2	Erro(%)
$x = 7 \text{ m}$	0,0066565	0,0034416	0,0034418	0,0034418	0,006%
$x = 14 \text{ m}$	-0,0066565	-0,0034416	-0,0066559	-0,0066559	0,009%

Apesar de não ter sido detectada diferença significativa de resultados entre as duas estratégias (ES1/PCL e ES2/N-R), fato que confirma a convergência das duas metodologias, algumas considerações podem ser feitas para se considerar qual metodologia é mais eficiente:

- A estratégia ES1 (PCL – Lemke) se mostra bastante eficiente e rápida, em termos de tempo computacional. Entretanto, ela é muito susceptível ao tamanho da malha (número de nós). Quanto maior a malha, maior será o tempo necessário para a inversão das matrizes de rigidez (numa progressão quadrática). O uso de algoritmos mais eficientes (CROUT, p.ex.), tanto em termo de tempo de processamento quanto em uso de memória, pode ser um fator decisivo para definir que essa metodologia seja a melhor a ser usada;
- A estratégia ES2 (Newton-Raphson), aparentemente, se mostrou um pouco mais rápida que a ES1, demonstrando ser menos susceptível que ES1 em termos de tamanho da malha (quanto maior a malha, mais tempo de processamento). Entretanto, esse fato pode ser oriundo do código fonte de ES2, que usa um algoritmo de solução do sistema de equações mais otimizado (CROUT), diferentemente de ES1, que usa Gauss-Jordan simples. Se ambos usassem a mesma rotina, muito provavelmente teriam tempos de processamento bastante semelhantes.

4.4.2 Cargas Concentradas

Considerando um painel abatido de aço, praticamente quadrado, com 12 m de lado, como o apresentado na Figura 4.16, aplicaram-se quatro cargas concentradas (na direção radial), duas comprimindo a casca contra a base elástica e duas tracionando, todas com igual intensidade. Foram feitas quatro análises diferentes para o problema: sem contato, com contato bilateral e usando as duas estratégias para contato unilateral (ES1 e ES2). Adotou-se uma malha de 21×21 nós. A configuração deformada obtida numa determinada região de pontos (linha de análise) é apresentada na Figura 4.17.

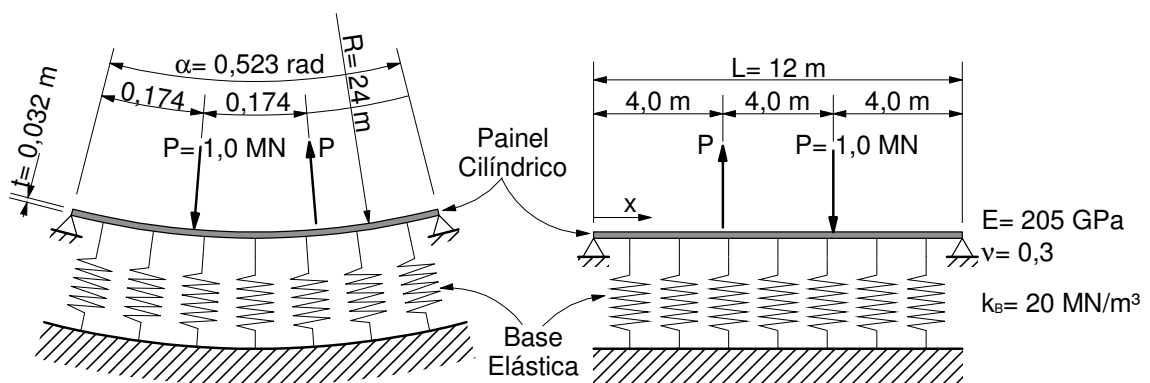


Figura 4.16 Painel quadrado com quatro cargas concentradas

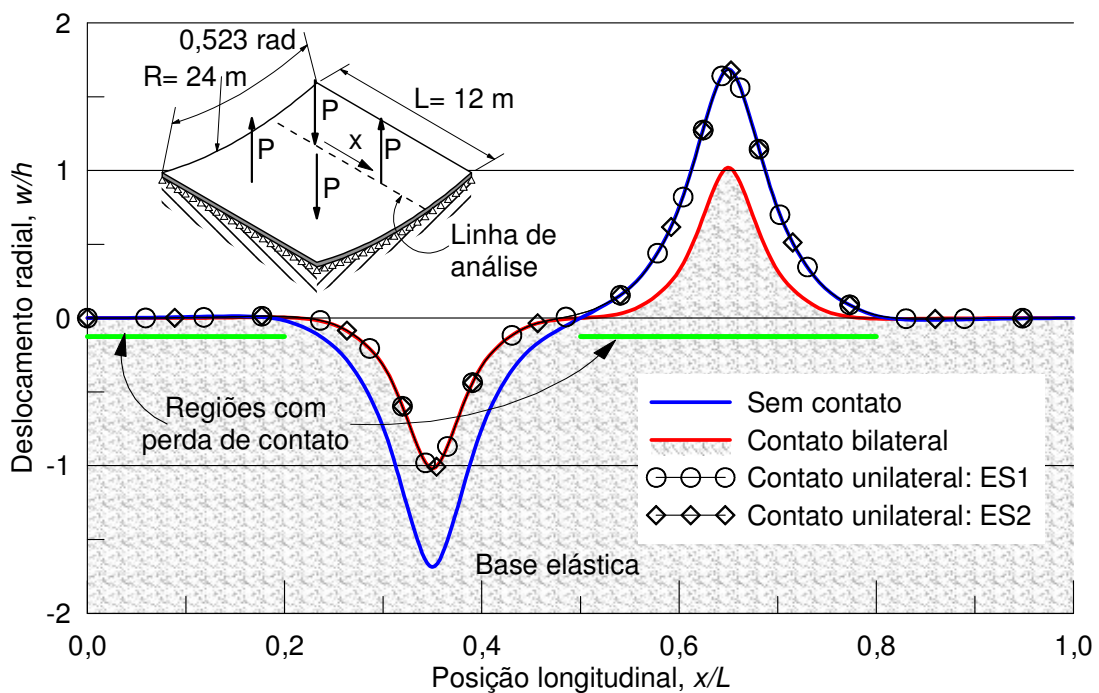


Figura 4.17 Deslocamento radial na direção x de um sistema painel-base sob cargas concentradas

Analisando os resultados obtidos, percebe-se que a configuração dos deslocamentos é bastante semelhante à verificada no problema anterior. Nas zonas de contato, os deslocamentos encontrados ao considerar o contato bilateral (PCB) são praticamente iguais ao unilateral (PCU). Nas zonas de descolamento a similaridade é outra, isto é, os deslocamentos obtidos com o contato unilateral são praticamente iguais aos da casca sem influência da base elástica. A Figura 4.18 apresenta, para ilustração, a configuração deformada do sistema casca/base, e o deslocamento da base, mostrando as zonas de contato e as de descolamento (quando a base não reage ao deslocamento da casca).

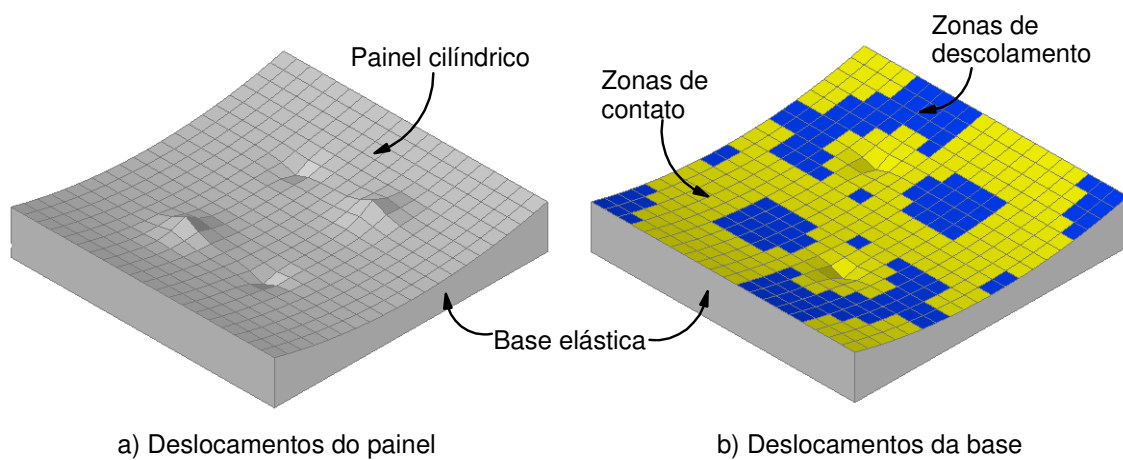


Figura 4.18 Superfície deformada do sistema e da base sob cargas concentradas (f.esc.: $\times 10$)

Assim como no problema anterior, também não foi encontrada diferença significativa de resultados entre as duas estratégias de solução (ES1 e ES2). Essa convergência, apesar de confirmar que ambas as estratégias são eficazes para resolver o PCU, não traz nenhuma nova informação para ser discutida, principalmente no tocante à eficiência das estratégias. Dessa forma, para tentar obter esse tipo de análise de desempenho e funcionalidade das estratégias implementadas, usou-se o mesmo sistema painel/base elástica do problema anterior, mas aplicando-se uma carga concentrada em diversas posições do painel, como apresentado na Figura 4.19.

A Figura 4.20 apresenta os deslocamentos radiais obtidos nas linhas de posicionamento das cargas nas direções x e θ . Avaliando esses resultados, percebe-se que a solução obtida através da estratégia ES2 (Newton-Raphson) é susceptível ao posicionamento da carga. Quanto mais a carga se aproximava do bordo circunferencial, mais o algoritmo necessitava de um número maior de iterações para obter a convergência. Destaca-se que o deslocamento

apresentado na posição L3 – com a estratégia ES2 – não significa o deslocamento real, mas sim, um valor espúrio resultante da não convergência do algoritmo.

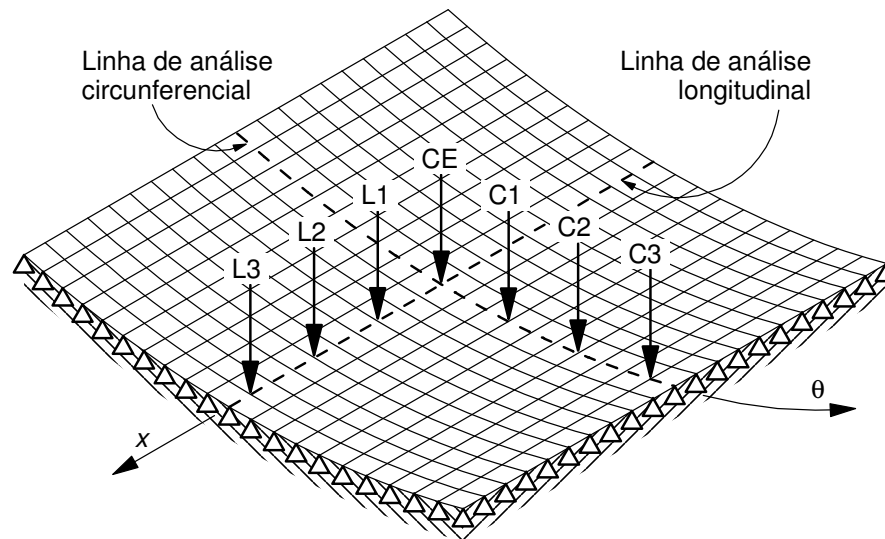


Figura 4.19 Painel cilíndrico com uma carga em várias posições

A Tabela 4.6 apresenta, além dos deslocamentos obtidos na posição da respectiva carga, o número de iterações que a ES2 exigiu em cada processamento. Enquanto a ES2 demonstrou dificuldade de convergência em L2 e, principalmente, em L3, a estratégia ES1 (PCL-Lemke) se mostrou eficiente e confiável em qualquer uma das situações, efetuando praticamente o mesmo número de pivoteamentos em todas as situações (em torno de 200) com resultados equivalentes aos obtidos no PSC.

Tabela 4.6 Comparação entre as estratégias – carga móvel comprimindo o painel

Posição	w (metros)			Nº max. de iterações (ES2)
	PCB	ES1	ES2	
CE (central)	0,032624	0,032649	0,032649	1
C1	0,032624	0,032649	0,032649	1
C2	0,032623	0,032648	0,032648	1
C3	0,031508	0,031518	0,031518	1
L1		0,032649	0,032649	3
L2		0,032641	0,032545	48
L3		0,031200	–	103

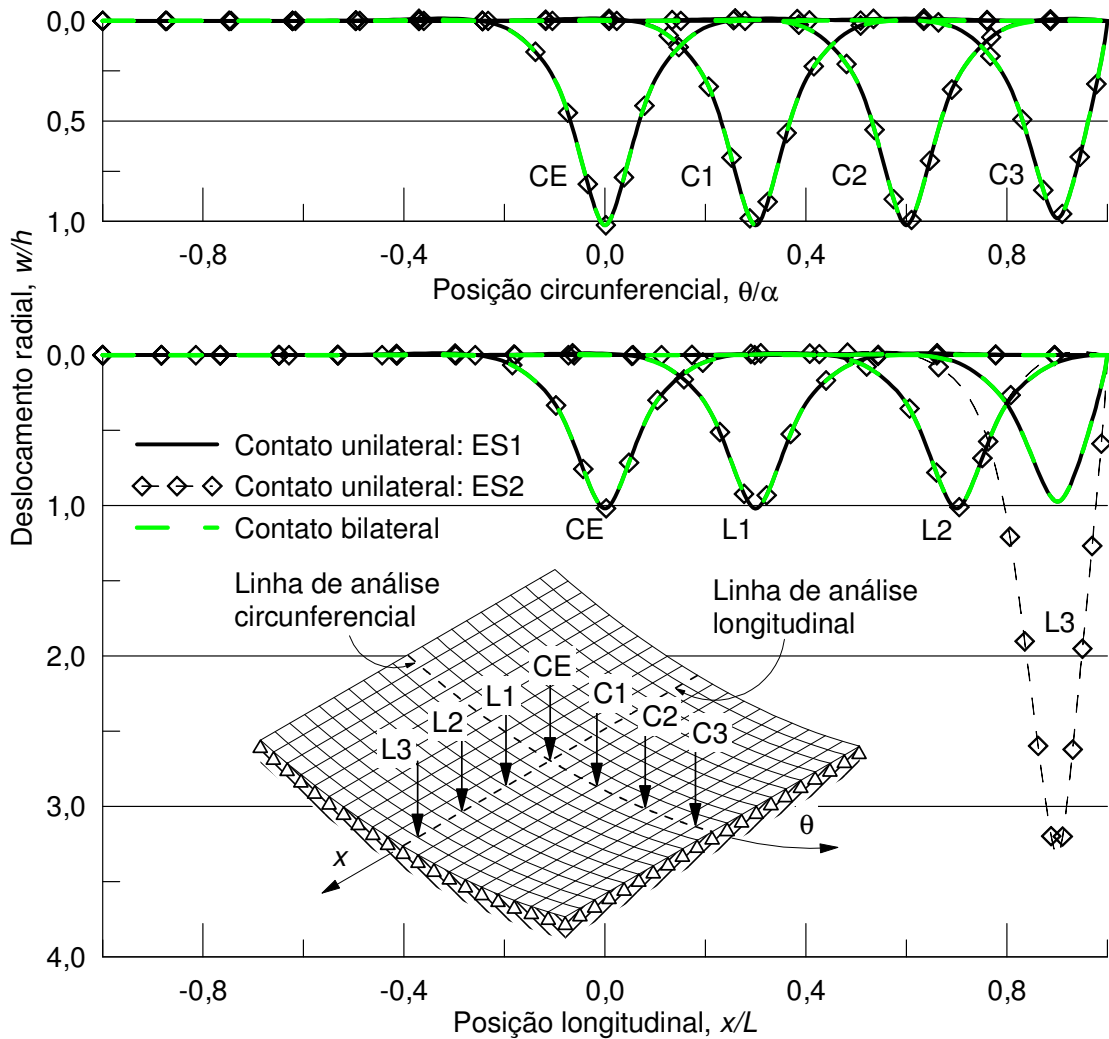


Figura 4.20 Configurações deformadas causadas por cargas concentradas posicionada em várias posições

Para verificar se o mesmo ocorre quando as cargas, ao invés de comprimir a casca sobre a base elástica, aplicam tração (tentando descolar a placa da base), foram obtidos os resultados mostrados na Tabela 4.7. Esses resultados são semelhantes aos anteriormente apresentados, destacando que a convergência de ES2, neste caso, piora. Esse fato ocorre porque, ao puxar a casca, um maior número de nós da casca se descola da base e, conseqüentemente, a não linearidade também é maior, prejudicando o processo iterativo (corretivo; Figura 2.7), que necessita de mais iterações para convergir.

Tabela 4.7 Comparação entre as estratégias – carga móvel puxando o painel

Posição	w (metros)			N° max. de iterações (ES2)
	PSC	ES1	ES2	
CE (central)	-0,053921	-0,053890	-0,053891	1
C1	-0,053921	-0,053890	-0,053891	1
C2	-0,053915	-0,053888	-0,053888	1
C3	-0,048758	-0,048748	-0,048748	1
L1	-0,053921	-0,053891	-0,053891	3
L2	-0,053985	-0,053965	-0,053035	82
L3	-0,047749	-0,047740	–	253

Assim, a partir dessas avaliações, é possível chegar às seguintes conclusões:

- Ambas as estratégias (ES1 e ES2) se mostram semelhantes para analisar esse tipo de sistema estrutural com cargas concentradas aplicadas em qualquer ponto da malha.
- A estratégia ES2 (N-R) se mostrou muito susceptível ao posicionamento da carga na malha apresentando problemas de convergência. Para solucionar esse problema, sugere-se o uso de metodologias mais eficientes de convergência. O uso do N-R padrão aliado a outras técnicas controles de convergência (comprimento de arco, p.ex.) pode ser uma alternativa ao método aqui utilizado (N-R modificado) que não se mostrou adequado para obter a convergência do processo iterativo.
- A estratégia ES1 (PCL – Lemke) se mostrou mais confiável, embora mais lenta que ES2, em algumas situações.

Por fim, para avaliar esse problema de convergência em ES2, resolveu-se estudar, independentemente, cada um dos fatores que definem o sistema estrutural e que, de alguma forma, sejam pertinentes ao PCU. Assim, variou-se o raio (R), a espessura (t), o módulo elástico (E) e o parâmetro elástico da base (k_B) do problema apresentado na Figura 4.21. Esse problema tem uma carga concentrada no meio de um painel abatido quase quadrado com os quatro lados simplesmente apoiados. Em todas as análises, usou-se uma malha de 21×21 pontos nodais.

Como a questão é analisar a influência da rigidez, quando se variou a componente R variou-se também o ângulo de formação do painel, de forma que o comprimento circunferencial foi mantido com um valor próximo de 15 m (mantendo o painel quadrado). A Tabela 4.8 traz um pequeno resumo dos resultados obtidos (deslocamento radial e convergência). Como são vários passos de carga (10) com várias iterações em cada um deles, são apresentados os números de iterações médios obtidos em todo o processo.

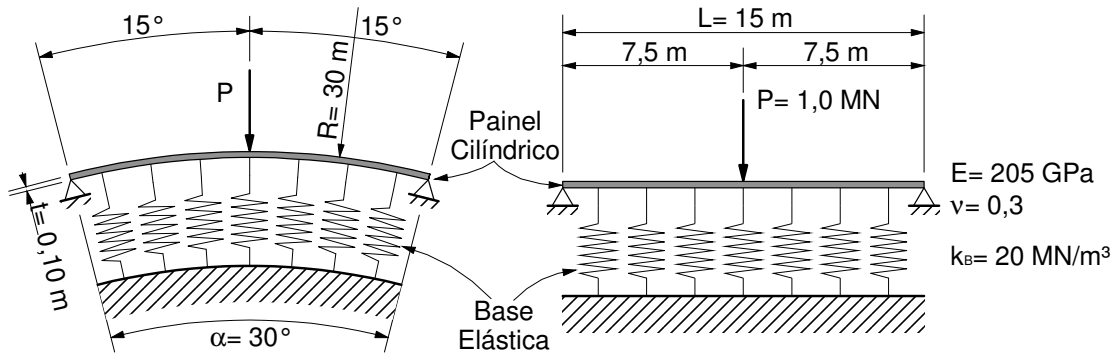


Figura 4.21 Painel abatido com uma carga concentrada

Tabela 4.8 Estudo paramétrico dos resultados para cada fator variado.

Fator	$w_{Max.}$ (metros)		N° de pivoteamentos	N° médio de iterações (ES2)	
	ES1	ES2			
R (m)	10	-0,018587207916	-0,018587207916	195	0
	30	-0,043234815435	-0,043234815435	221	0
	50	-0,048707902687	-0,048707902687	233	0
	100	-0,051577489895	-0,051577489773	233	1
t (m)	0,025	-0,043234815435	-0,043234815435	221	0
	0,05	-0,017044488358	-0,017044488105	181	1
	0,10	-0,0050188686352	-0,0050188357090	249	5
	0,25	-0,0008736014897	-0,0008731098746	211	10
E (Pa)	2,05E4	-0,084882209704	-0,084882206766	247	1
	2,05E8	-0,080883120806	-0,080883120803	249	1
	2,05E11	-0,0050188686352	-0,0050188357090	249	5
	2,05E15	-0,0000006595875	-0,0000006595692	253	6
k_B (N/m³) Compr.	2,0E7	-0,0000006595875	-0,0000006595692	253	6
	2,0E9	-0,0000006571777	-0,0000006571598	253	6
	2,0E10	-0,0000006364700	-0,0000006364551	253	6
	2,0E12	-0,0000002302507	-0,0000002302506	209	2
k_B (N/m³) Tracion.	2,0E7	0,0000006596120	0,0000006595937	110	6
	2,0E9	0,0000006596066	0,0000006595886	110	6
	2,0E10	0,0000006595604	0,0000006595451	110	6
	2,0E12	0,0000006587747	0,0000006587745	228	3

Entre as várias considerações que podem ser feitas a partir desses resultados, a principal é que as duas estratégias têm a sua convergência influenciada por fatores diferentes. Enquanto ES1 depende do número de nós da base que estão sendo comprimidos pela casca (que definem o número de pivoteamentos), ES2, ao contrário, depende do número de nós que estão nas regiões de perda de contato (número de não linearidades envolvidas no problema). Então, qualquer fator que aumenta o número de pontos nodais sujeitos ao descolamento piora a convergência de ES2 (N-R).

Outras considerações importantes:

- A estratégia ES2 tem mais dificuldade de convergir quando os raios são grandes, espessuras pequenas e módulos elásticos pequenos, isto é, a convergência de ES2 é susceptível à alta flexibilidade da casca (a definição de cada um desses parâmetros, se ele é grande ou pequeno, vai depender do problema estrutural como um todo);
- Variando-se a rigidez da base, k_B , de $2,05 \times 10^7$ (flexível) até $2,05 \times 10^{12}$ (rígida) o número médio de correções de ES2 diminuiu de 6 até 2. Isso ocorre porque quando, a rigidez da base é alta, a amplitude da configuração deformada da casca diminui, reduzindo as zonas de descolamento e conseqüentemente os pontos nodais que geram não linearidade;
- Quando a carga comprime a base, ES2 tende a convergir mais rápido do que quando a carga traciona a base. Isso ocorre porque a segunda configuração cria mais regiões de perda de contato;
- Por fim, o número de pivoteamentos de ES1 (PCL – Lemke) depende do número de nós que comprimem a base (o contrário do N-R), isto é, que precisam ser corrigidos. Quanto mais pontos a serem corrigidos, maior o tempo total de processamento. Contudo, essa variação de pontos a serem corrigidos não acarreta nenhum problema de convergência em qualquer circunstância.

Capítulo 5

Considerações Finais, Conclusões e Sugestões

5.1 INTRODUÇÃO

Este trabalho fez uma análise sobre estratégias de solução de Problemas de Contato Unilateral (PCU) que podem ocorrer em sistemas envolvendo a interação não linear entre cascas cilíndricas e bases elásticas. Também foi alvo de estudo o uso do Método das Diferenças Finitas como ferramenta de discretização do contínuo, transformando as equações diferenciais, tanto da casca como de modelos de bases, em equações algébricas.

O contato unilateral, que constitui a não linearidade do problema, pode ser resolvido diretamente, como se fosse um problema de otimização com restrição, ou, então, de forma indireta, usando um processo incremental para buscar tal comportamento não linear.

Assim, a primeira estratégia proposta (ES1) transforma o problema estrutural num Problema de Complementaridade Linear (PCL) que aplica o algoritmo de pivoteamento de Lemke (1968) na sua solução. A segunda estratégia usa o método de otimização de Newton-Raphson, que usa um processo incremental/iterativo para capturar efeitos não lineares de sistemas estruturais.

Para completar a pesquisa, foram estudados os principais modelos de bases elásticas sendo destacados os dois tipos mais comuns: de um ou de dois parâmetros.

5.2 CONCLUSÕES

As análises feitas buscaram demonstrar a eficiência das estratégias de solução, para este tipo de problema estrutural, destacando as vantagens e desvantagens de cada uma, além de revalorizar o uso do MDF como ferramenta de análise estrutural de placas e cascas destacando o seu uso na consideração dos modelos de bases elásticas mais comumente usados nas pesquisas mais recentes.

Os exemplos apresentados no capítulo anterior, além de validar as metodologias de solução e o código fonte implementado, também permitiram estabelecer uma série de comentários e conclusões que serão resumidos a seguir:

- i. Não foi detectada diferença significativa de resultados entre as duas estratégias – ES1 (PCL-Lemke) e ES2 (N-R), o que confirma a convergência das duas metodologias e o êxito em sua implementação;
- ii. Cada estratégia é influenciada pelo número de pontos nodais que ela manipula afetando diretamente no seu tempo de processamento. Assim, o tempo de processamento de ES1 depende do número de nós da casca que mantém contato com a base elástica enquanto ES2 depende do número de nós que perdem contato com a base.
- iii. A estratégia ES1 (PCL-Lemke) se mostrou mais confiável não demonstrando problemas nos resultados. Observou-se, apenas, que o de tempo de processamento foi maior que o exigido pela outra estratégia. ES1 se mostrou susceptível ao tamanho da malha de pontos nodais (número total de nós) redundando em aumento no tempo de processamento. Isso ocorre devido ao algoritmo de inversão da matriz e do número de pivoteamentos necessários;
- iv. A estratégia ES2 (N-R) se mostrou uma metodologia rápida e eficiente, porém, se mostrou susceptível a altos níveis de não linearidade. Esses altos níveis são responsáveis por exigir uma maior quantidade de iterações para corrigir a trajetória de equilíbrio, de tal forma que, em alguns casos, a convergência não foi alcançada;
- v. O nível de não linearidade é vinculado à configuração deformada da casca, pois essa configuração pode representar maior ou menor formação de zonas de descolamento. Os fatores que influenciam o deslocamento dos pontos nodais são os mesmos que definem a rigidez do sistema (R , t , E , k_B , etc.) e, por conseguinte, o nível de não linearidade do problema e a eficiências das estratégias;
- vi. O tipo de carregamento e o sentido da carga também podem influenciar o nível de não linearidade e, conseqüentemente, a eficiência das estratégias. Cargas que tracionam a casca, causando descolamento da base, tendem a proporcionar maior nível de não linearidade que as cargas que comprimem a casca contra a base elástica.

Outras considerações que podem ser feitas a respeito dos temas tratados neste trabalho são:

- i. O Método das Diferenças Finitas (MDF), mostrou eficiência na discretização do problema estrutural proposto, apresentando facilidade de implementação tanto da teoria

de casca cilíndrica quanto também dos modelos de base elástica, caracterizando-se como uma alternativa viável a outros métodos numéricos (MEF, MEC, etc.);

- ii. Os modelos de bases elásticas apresentados funcionaram adequadamente, tanto na consideração de contato bilateral quanto unilateral, mas fica evidente a necessidade da definição dos parâmetros de rigidez do solo, principalmente o parâmetro que determina a interação entre as molas (k_M), para que os resultados obtidos fiquem mais próximos de resultados reais.

Por fim, considerou-se que a estratégia ES1 é mais adequada para solução do Problema de Contato Unilateral que a ES2, devido a sua simplicidade, confiabilidade e precisão. Sugere-se o seu uso em qualquer metodologia de discretização, entre eles, o MEF, MEC, etc.

5.3 FUTUROS TRABALHOS

Este trabalho pode ser considerado o passo inicial para uma série de pesquisas que complementarão os assuntos aqui tratados. Algumas linhas de pesquisa sugeridas para futuros trabalhos podem ser:

- i. A consideração das três equações fundamentais de equilíbrio para cascas cilíndricas para o estudo do colapso por perda da instabilidade (flambagem) e a consideração da não linearidade geométrica;
- ii. O uso de enrijecedores longitudinais e circunferenciais na casca cilíndrica;
- iii. O estudo e implementação de algoritmos otimizados para inversão de matrizes e solução dos sistemas de equações;
- iv. A aplicação de métodos mais eficientes de convergência, tais como o N-R padrão atrelado a controles da convergência mais rápidos (comprimento de arco, p.ex.), com o intuito de ampliar a confiabilidade da estratégia ES2;
- v. O estudo da resposta dinâmica linear e não linear desse sistema estrutural casca/base elástica (considerando tanto o contato bilateral quanto o unilateral);
- vi. A consideração de outros modelos de bases elásticas, inclusive os não lineares;
- vii. A análise experimental de bases elásticas (solos e rochas) para obtenção de valores reais de k_B e k_M .

Referências Bibliográficas

REFERÊNCIAS INDICADAS:

- ANSYS (2010) – *User's Manual for revision 11*, Swanson Analysis Systems Inc., Houston, PA.
- ASCIONE, L. e GRIMALDI, A. (1984) – “Unilateral contact between a plate and na elastic foundation”, *Meccanica*, Vol. 19, pp. 223–233, Springer.
- BAKHTIARI-NEJAD, F. e BIDELEH, S. M. M. (2012) – “Nonlinear free vibration analysis of prestressed circular cylindrical shells on the Winkler/Parsternak foundation”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 53, pp. 26–39, Elsevier.
- BARBOSA, H. J. C. (1986) – “Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade”, *Tese de Doutorado*, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE/UFRJ), RJ.
- BATHE, K-J., IOSILEVICH, A. e CHAPELLE D. (2000) – “An evaluation of the MITC shell elements”, *Computers & Structures*, Vol. 75, pp. 1–30, Pergamon.
- BOTTEGA, W.J. (1989) – “On the behavior of an elastic ring within a contracting cavity”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 31, No. 5, pp. 349–357. Pergamon.
- BRADFORD, M.A. e ROUFEGARINEJAD, A. (2007) – “Elastic local buckling of thin-walled elliptical tubes containing elastic infill material”, *Interaction and Multiscale Mechanics*, Vol. 1, pp. 143–156.
- BRÁZ, M. C. P. C. (2006) – “Problemas de programação matemática com restrições lineares de equilíbrio e aplicações”, *Tese de Doutorado*, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa.
- BRENDEL, B., e RAMM E. (1980) – “Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells”, *Computers & Structures*, Vol. 12, pp. 549–558, Pergamon.
- BRUSH, D. O. e ALMROTH, B. O. (1975) – *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill Inc. USA.

- BULSON, P. S. (1985) – *Buried Structures: Static and Dynamic Strength*, Chapman & Hall Ltd., NY.
- BURDEN, R. L. e FAIRES, J. D. (2008) – *Análise Numérica*, Cengage Learning, São Paulo, SP.
- CELEP, Z., GÜLER, K. e DEMIR, F. (2011) – “Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load”, *Structural Engineering and Mechanics-ASCE*, Vol. 37, No. 1, pp. 61–77.
- CHOI, S. (2006) – “Computations in tunneling: a revisit to numerical modeling programs”, *Modeling Tools*, PBWorld, New York.
- CIVALEK, Ö. (2006) – “Harmonic differential quadrature-finite differences coupled approaches for geometrically nonlinear static and dynamic analysis of rectangular plates on elastic foundation”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, pp. 966–980, Elsevier.
- COTTLE, R. W. e DANTZIG, G. B. (1968) – “Complementary pivot theory of mathematical programming”, *Linear Algebra Appl.*, Vol. 1, pp. 103–125, Brunel, UK.
- CUNHA, R. D. (2005) – *Introdução a Linguagem de Programação Fortran 90*, Ed. UFRGS, Porto Alegre, RS.
- DEBS, M. H. (1976) – “Contribuição ao Cálculo das Cascas de Revolução Mediante Diferenças Finitas”, *Dissertação de Mestrado*, USP-São Carlos, SP.
- DONNEL, L. H. (1934) – “Stability on thin-walled tubes under torsion”, N.A.C.A. TR 479.
- DUTTA, S. C. e ROY, R. (2002) – “A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system”, *Computers & Structures*, Vol. 80, pp. 1579–1594, Pergamon.
- EBOLI, C. R. (1989) – “Dimensionamento Ótimo de Seções de Concreto Armado”, *Dissertação de Mestrado*, DEC – PUC/Rio, Rio de Janeiro.
- ELLER, P. R. (2009) – “Elementos de Cálculo Estrutural”, *Notas de aula – CIV 230*, UFOP/EM/Deciv, Ouro Preto, MG.
- FLETCHER, R. (1981) – *Practical Methods of Optimization*, Vol. 2, John Wiley & Sons, USA.
- GONÇALVES, P. B. (1985) – “Equações Gerais de Cascas Esbeltas para Análise Não-Linear e Estudo da Instabilidade Elástica”, *Seminário de Doutorado*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- GÜLER, K. (2004) – “Circular elastic plate resting on tensionless Pasternak foundation”, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 130(10), pp. 1251–1254.

- GUNAWAN, H., MIKAMI, T., KANIE S. e SATO M. (2005) – “Finite element analysis of cylindrical shells partially buried in elastic foundations”, *Computer & Structures*, Vol. 83, pp. 1730–1741, Elsevier.
- GUNAWAN, H., MIKAMI, T., KANIE S. e SATO M. (2006) – “Free vibration characteristics of cylindrical shells partially buried in elastic foundations”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, pp. 785–793, Elsevier.
- HAN, J.-B. e LIEW, K. M. (1997) – “Numerical differential quadrature method for Reissner/Mindlin plates on two-parameter foundations”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 39, No. 9, pp. 977–989. Pergamon.
- HARR, M. E., DAVIDSON, J. L., HO, D-M, POMBO, L. E., RAMASWAMY, S. V. e ROSNER, J. C. (1969) – “Euler beams on two parameter foundation model”, *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 95, No. SM4, pp. 933–948.
- HONG, T., TENG, J. G. e LUO, Y. F. (1999) – “Axisymmetric shells and plates on tensionless elastic foundation”, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 36, pp. 5277–5300, Pergamon.
- HORVATH. J. S. (1993) – “Beam-column-analogy model for soil-structures interaction analysis”, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 110, No. 2, pp. 358–364.
- HETÉNYI, M. (1946) – *Beams on Elastic Foundation*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., USA.
- KERR, A. D. (1964) – “Elastic and viscoelastic foundation models”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 31, pp. 491–498.
- LAM, D. e GARDNER L. (2008) – “Structural design of stainless steel concrete filled columns”, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 64, pp. 1275–1282, Elsevier.
- LEMKE, C. E. (1968) – “On Complementary Pivot Theory”, *Mathematics of Decision Sciences*, Edts. Dantzig, G. B. e Yenott, A. F., part 1, pp. 95-114, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA.
- LOVE, A. E. H. (1944) – *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications.
- LÜ, Q., SUN, H-Y. e LOW, B. K. (2011) – “Reliability analysis of ground-support interaction in circular tunnels using the response surface method”, *Int. J. of Rock Mechanic & Mining Sci.*, Vol. 48, pp. 1329–1343, Elsevier.
- LUO, Y. F. e TENG, J. G. (1998) – “Stability analysis of shell of revolution on nonlinear elastic foundations”, *Computer & Structures*, Vol. 69, pp. 499–511, Pergamon.

- MA, X., BUTTERWORTH, J. W. e CLIFTON, G. C. (2007) – “Compressive buckling analysis of plates in unilateral contact”, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 2852–2862, Elsevier.
- MA, X., BUTTERWORTH, J. W. e CLIFTON, G. C. (2009) – “Static analysis of an infinite beam resting on a tensionless Pasternak foundation”, *Euro. J. of Mechanics A/Solids*, Vol. 28, pp. 697–703, Elsevier.
- MACIEL, F. V. (2012) – “Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais Impostas por Bases Elásticas”, *Dissertação de Mestrado*, EM/UFOP, Ouro Preto-MG.
- MADUREIRA, L. R., FONSECA, E. M. M. e MELO, F. J. Q. (2010) – “The deformation of cylindrical shells subjected to radial loads”, *Pan-American 11th Congress of Applied Mechanics*, Foz do Iguaçu, Brasil.
- MACHADO, F. C. S. (2005) – “Análise Inelástica de Segunda Ordem de Sistemas Estruturais Metálicos”, *Dissertação de Mestrado*, EM/UFOP, Ouro Preto-MG.
- MACKERLE, J. (2005) – “Finite elements in analysis of pressure vessels and piping, an addendum: a bibliography (2001–2004)”, *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 82, pp. 571–592, Elsevier.
- MALEKZADEH, P., FARID, M., ZAHEDINEJAD, P. e KARAMI, G. (2008) – “Three-dimensional free vibration analysis of thick cylindrical shells resting on two-parameter elastic supports”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 313, pp. 655–675. Elsevier.
- MICKENS, R. E. (2005) – “*Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*”, World Scientific Publishing Co., USA.
- MITTELBAACH, F. R. (2002) – “Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Reservatórios Cilíndricos”, *Dissertação de Mestrado*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- MITTELBAACH, F. R. (2007) – “Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Dinâmica de Problemas Axissimétricos de Placas Delgadas e Espessas”, *Tese de Doutorado*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- NAKAGAWA, M. e JIANG Y. (2003) – “Finite difference analysis considered the characteristic of time dependency for soft rock tunnel”, *Proceedings of the Symposium on Rock Mechanics*, Vol. 32, pp.263-268, JST.
- NOBILI, A. e TARANTINO A. M. (2005) – “Unilateral contact problem for aging viscoelastic beams”, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 131(12), pp. 1229–1238.

- PALIWAL, D. N. e BHALLA V. (1993a) – “Large deflection analysis of cylindrical shells on a Pasternak foundation”, *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 53, pp. 261–271, Elsevier.
- PALIWAL, D. N. e BHALLA V. (1993b) – “Large amplitude free vibrations of cylindrical shells on a Pasternak foundation”, *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 54, pp. 387–398, Elsevier.
- PALIWAL, D. N. e SRIVASTAVA R. (1994) – “The large deflection of cylindrical shells on a Kerr foundation”, *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 57, pp. 1–5, Elsevier.
- PALIWAL, D. N. e KANAGASABAPATHY, H. e GUPTA K. M. (1995) – “The large deflection of an orthotropic cylindrical shells on a Pasternak foundation”, *Composite Structures*, Vol. 31, pp. 31–37, Elsevier.
- PALIWAL, D. N., PANDEY R. K. e NATH T. (1996) – “Free vibrations of circular cylindrical shells on Winkler and Pasternak foundations”, *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 69, pp. 79–89, Elsevier.
- PEREIRA, W. L. A (2003) – “Formulações Numéricas para Análise de Vigas em Contato com Bases Elásticas”. *Dissertação de Mestrado*, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG.
- PITKÄRANTA, J., LEINO, Y., OVASKAINEN, O. e PIILA J. (1995) – “Shell deformation states and the finite element method: a benchmark study of cylindrical shells”, *Computer Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. 128, pp. 81–121, Elsevier.
- POPOV E. P. (1978) – *Introdução à Mecânica dos Sólidos*. Ed Edgard Blücher. SP.
- RAVIDRAN, A. (1972) – “A computer routine for quadratic and linear programming problems”, *Commun. ACM*, Vol. 15, No. 9, pp. 818–820.
- RAVIDRAN, A. e LEE, H. (1981) – “Computer experiments on quadratic programming algorithms”, *Eur. J. Oper. Res.*, Vol. 8, No. 2, pp. 166–174.
- SANDERS Jr, J. L. (1961) – “Nonlinear Theories for Thin Shells, *Div. Eng. & Appl. Physics*, pp. 1–35, Harvard University, USA.
- SENG, O. L. (1987) – “A computer program for cylindrical shell analysis”, *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 30, pp. 131–149, Elsevier.
- SHAHIDI, A. R., SHAHRAKI, D. P., MIRDAMADI, H. R. E VASEGHI, A. (2013) – “Nonlinear analysis of uni-lateral buckling for cylindrical panels on tensionless foundation”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 62, pp. 109-117, Elsevier.
- SHEN, H-S. (2009) – “Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium”, *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 51, pp. 372–383, Elsevier.

- SHEN, H-S., YANG, J. e KITIPORNCHAI, S. (2010) – “Postbuckling of internal pressure loaded FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium”, *Euro. J. of Mechanical A/Solids*, Vol. 29, pp. 448–460, Elsevier.
- SHEN, H-S. (2012) – “Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium”, *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 1144–1154, Elsevier.
- SILVA, A. R. D. (1998) – “Análise de Placas com Restrições de Contato”, *Dissertação de Mestrado*, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG.
- SILVA, A. R. D. (2009) – “Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas”, *Tese de Doutorado*, PROPEC/UFOP, Ouro Preto, MG.
- SILVA, A. R. D., SILVEIRA, R. A. M. e GONÇALVES, P. B. (2001) – “Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations”, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 2083–2100, Elsevier.
- SILVEIRA, R. A. M. (1990) – “Análise Não-Linear Geométrica de Cascas Cilíndricas Isotrópicas e Enrijecidas”, *Dissertação de Mestrado*, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio.
- SILVEIRA, R. A. M. (1995) – “Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato”, *Tese de Doutorado*, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio.
- SILVEIRA, R. A. M. e GONÇALVES, P. B. (2001) – “Analysis of slender structural elements under unilateral contact constraints”, *Int. J. Struct. Eng. Mech.*, Vol. 12, pp. 35–50, Elsevier.
- SILVEIRA, R. A. M., PEREIRA, W. L.A. e GONÇALVES, P. B. (2008a) – “Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact constraints by a Ritz type approach”, *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 2629–2650, Elsevier.
- SILVEIRA, R. A. M., PEREIRA, W. L.A. e GONÇALVES, P. B. (2008b) – “Constrained and unconstrained optimization formulations for structural elements in unilateral contact with an elastic foundation”, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2008.
- SILVEIRA, R. A. M., NOGUEIRA, C. L. e GONÇALVES, P. B. (2013) – “A numerical approach for equilibrium and stability of slender arches and rings under contact constraints”, *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, pp 147–159, Elsevier.
- SÖDERBERG, A. E BJÖRKLUND, S. (2008) – “Validation of a simplified numerical contact model”, *Tribology International*, vol. 41, pp. 926–933, Elsevier.

- SOLOTRAT (2011) – “Túneis – uma solução de engenharia inteligente”, *Revista de Fundações e Obras Geotécnicas*, Vol. 6, Solotrat Engenharia Geotécnica, São Paulo.
- STAVROULAKIS, G. E., PANAGIOTOPOULOS, P. D. E AL-FAHED, A. M. (1991) – “On the rigid body displacements and rotations in unilateral contact problems and applications”, *Computer & Structures*, Vol. 40, No. 3, pp. 559–614, Pergamon.
- STRAUGHAN, W. T. (1990) – “Analysis of Plates on Elastic Foundations”, *PhD Thesis*, Faculty of Texas Tech University, Texas, USA.
- SÜSSEKIND, J. C. (1979) – *Curso de Análise Estrutural*, Vol. 2, Editora Globo, Porto Alegre, RS.
- SZE, K. Y., LIU, X. H. e LO, S. H. (2004) – “Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 40, pp. 1551–1569, Elsevier.
- SZILARD, R. (2004) – *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA.
- TER-MARTIROSYAN, Z. G. (1992) – *Rheological parameters of soils and design of foundations*, (tradução do russo), Oxford and IBH Publishing Company Ltd., UK.
- TIMOSHENKO e KRIEGER (1970) – *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Ed., Singapore.
- VASILIKIS, D. e KARAMANOS, S. A. (2009) – “Stability of confined thin-walled steel cylinders under external pressure”, *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 51, pp. 21–32, Elsevier.
- VAZ, L. E. (1991) – “Otimização sem Restrição e Otimização com Restrição”, *Notas de Aula do Curso Introdução à Programação Matemática*, DEC – PUC/Rio, Rio de Janeiro.
- VIEIRA, A. P. G. (2007) – “Método das Diferenças Finitas Energéticas Versus Método dos Elementos Finitos na Análise dos Efeitos de Perturbação de Bordo em Cascas Cilíndricas Axissimétricas”, *Dissertação de Mestrado*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- WANG, Y. H., THAM, L. G. e CHEUNG Y. K. (2005) – “Beams and plates on elastic foundations: a review”, *Prog. Struct. Engng. Mater.*, Vol. 7, pp. 174–182, John Wiley & Sons.
- YANG, T. Y. (1972) – “A finite element analysis of plates on two parameter foundation model”, *Computer & Structures*, Vol. 2, pp. 593–614.
- ZHAOHUA, F. e COOK, R. D. (1983) – “Beam elements on two parameter elastic foundation”, *Journal of Eng. Mechanics*, Vol. 6, pp. 1390–1402.

REFERÊNCIAS DE FIGURAS DA INTERNET:

Figura 1.3: “*Casca cilíndrica usada como parede de contenção de um poço-garagem*” em <http://www.roadtraffic-technology.com/projects/cesena/> (acessado em 27 de novembro de 2012).

Figura 1.4: “*Entrada do túnel Sasago no Japão e reparo da sua estrutura de ventilação*” em <http://www.itblow.com/latest-news/police-raid-japan-tunnel-operator-after-collapse/> (acessado em 9 de dezembro de 2012)

Figura 1.5: “*Esquema da estrutura interna e de seu colapso*” em <http://www.yomiuri.co.jp/dy/national/T121203003265.htm> (acessado em 9 de dezembro de 2012)

Anexo

Algoritmo de Lemke

A.1 INTRODUÇÃO

A análise do PCU sob o enfoque da programação matemática equivale à solução do problema de otimização definido pelas Equações (2.13) e (2.14), nas quais a função objetivo, Π , e a condição de impenetrabilidade, φ , entre a estrutura e a base elástica são definidas em função dos deslocamentos nodais da estrutura e da base elástica.

Esse problema de minimização pode ser transformado em um problema de programação quadrática com restrições de desigualdade. Segundo Eboli (1989, *apud* Silveira, 1995), a solução de um problema de programação quadrática com restrições de desigualdade pode ser obtida de duas formas: empregando métodos de solução de programação quadrática com restrições de igualdade, adotando-se uma estratégia de determinação do conjunto ativo de restrições ($\varphi = 0$) ou usando esquemas de pivoteamento, que são utilizados especificamente para a solução de problemas de complementaridade linear.

O objetivo do algoritmo de Lemke é, então, determinar a solução não negativa do sistema de equações representado, de uma forma geral, por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz} \tag{A.1}$$

$$\mathbf{w} \geq 0; \quad \mathbf{z} \geq 0; \quad \text{e} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{z} = 0 \tag{A.2a,b,c}$$

sendo \mathbf{M} uma matriz quadrada de ordem $p \times p$ e \mathbf{w} , \mathbf{z} e \mathbf{q} vetores de ordem p , na qual \mathbf{w} e \mathbf{z} são as variáveis a serem determinadas.

A Equação (A.1) representa um sistema de equações lineares, sendo que as condições (A.2a) e (A.2b) requerem que sua solução seja não negativa. As equações anteriores caracterizam um problema de complementaridade linear (PCL), que é resolvido, neste trabalho, através do esquema de pivoteamento de Lemke.

Uma implementação computacional do método de Lemke é fornecida por Silveira (1995) que apresenta, também, o significado mecânico ou físico desse método.

A.2 DEFINIÇÕES

Antes de efetivamente apresentar o método, são necessárias algumas definições:

- i. um ponto (w, z) é solução se obedece à Equação (A.1);
- ii. se essa solução satisfaz às condições (A.2a,b), ela é denominada solução viável do problema complementar;
- iii. a solução viável é também complementar se a condição de complementaridade (A.2c) é verificada. Para isso, é necessário que w_i e/ou z_i seja nula, sendo (w_i, z_i) um par complementar com w_i e z_i complementos mútuos;
- iv. se os elementos do vetor q são não negativos, a solução é chamada trivial. Nesse caso, tem-se que $w = q$ e $z = 0$, não interessando, então, empregar o método de Lemke; caso contrário, ou seja, se pelo menos um elemento de q é negativo, a solução é dita não trivial e a solução inicial dada por $w = q$ e $z = 0$, mesmo obedecendo à condição de complementaridade é inviável;
- v. sendo o problema de complementaridade não trivial, são introduzidos, na análise, um vetor e de componentes positivas e uma variável artificial z_0 , com o objetivo de aumentar o sistema de equações original (A.1), que fica, então, composto de p equações e $p + 1$ incógnitas. Esse sistema aumentado é descrito por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz} + \mathbf{e}z_0 \quad (\text{A.3})$$

de forma que as variáveis w , z e z_0 , a serem, agora, determinadas, obedeçam à relação anterior e às seguintes condições:

$$\mathbf{w} \geq 0 \quad (\text{A.4a})$$

$$\mathbf{z} \geq 0, \quad z_0 \geq 0 \quad (\text{A.4b})$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = 0 \quad (\text{A.4c})$$

- vi. o ponto de partida para a solução do sistema de equações anterior é obtido fazendo-se $z_0 = \min\{q_i, 1 \leq i \leq p\}$, $z = 0$ e $w = q + e z_0$. Através de uma seqüência de pivoteamentos,

satisfazendo as equações (A.3) e (A.4a,b,c), tenta-se guiar a variável artificial até zero, obtendo, assim, a solução do problema de complementaridade original;

- vii. uma solução (w, z, z_0) do sistema definido pelas Equações (A.3) e (A.4a,b,c) é uma solução viável básica complementar se:
- (w, z, z_0) é uma solução viável básica de (A.4a,b);
 - nem w_s e nem z_s são básicas para algum $s \in \{1, 2, \dots, p\}$;
 - z_0 é básica, e uma variável do par complementar (w_i, z_i) é básica para $i = 1, 2, \dots, p$ com
com
 $i \neq s$;
- viii. a partir dessa solução viável básica complementar (w, z, z_0) , na qual w_s e z_s são ambas não básicas, obtém-se uma solução viável básica complementar adjacente $(\bar{w}, \bar{z}, \bar{z}_0)$, no caso de se introduzir w_s ou z_s na base, no lugar de uma variável que não seja z_0 . Cada solução viável básica complementar tem, pelo menos, duas soluções viáveis básicas complementares adjacentes, mas, se o aumento de w_s ou z_s ocasionar ou a retirada de z_0 da base ou uma terminação em raio, terá, então, menos de duas soluções viáveis básicas adjacentes.

A.3 PROCEDIMENTO INICIAL

As duas possibilidades de obtenção da solução do problema de complementaridade linear existentes são:

- a) o ponto $(w, z) = (q, 0)$ é solução do PCL (solução trivial) se o vetor $q \geq 0$;
- b) tendo o vetor q alguma componente negativa, o esquema de pivoteamento proposto por Lemke deve ser iniciado. Como ponto de partida, toma-se a solução inviável $(w, z) = (q, 0)$. A variável z_0 é, então, aumentada de zero na equação $w = q + e z_0$, até que uma última componente w_s se anule, tornando-se não básica. Em seguida, substitui-se o valor de z_0 nas outras equações para completar a operação de pivoteamento. Essa operação de pivoteamento inicial fica definida, então, pelo par (w_s, z_0) , sendo:

$$s = \min \left\{ \frac{q_i}{e_i}, i = 1, 2, 3, \dots, p \quad \forall \quad q_i < 0 \right\} \quad (\text{A.5})$$

Esse procedimento de obtenção da primeira solução viável básica complementar pode ser organizado de acordo com a Tabela A.1.

Tabela A.1 Inicialização do processo

Base	w_1	...	w_s	...	w_p	z_1	...	z_s	...	z_p	z_0	q
w_1	1		0		0	$-m_{11}$		$-m_{1s}$		$-m_{1p}$	-1	q_1
\vdots												
w_s	0		1		0	$-m_{s1}$		$-m_{ss}$		$-m_{sp}$	-1	q_s
\vdots												
w_p	0		0		1	$-m_{p1}$		$-m_{ps}$		$-m_{pp}$	-1	q_p

Em substituição a w_s , que é a variável básica de maior valor negativo, a variável artificial z_0 é conduzida à base. Com as seguintes operações de pivoteamento,

$$q'_s = -q_s, \text{ e } q'_i = q_i - q_s, \text{ para } i \neq s \quad (\text{A.6a})$$

$$m'_{sj} = \frac{-m_{sj}}{-1} = m_{sj}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, p \quad (\text{A.6b})$$

$$m'_{ij} = -m_{ij} + m_{sj}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, p \text{ e } i \neq s \quad (\text{A.6c})$$

chega-se à forma apresentada na Tabela A.2.

Tabela A.2 Resultados obtidos após a operação de pivoteamento

Base	w_1	...	w_s	...	w_p	z_1	...	z_s	...	z_p	z_0	q
w_1	1		-1		0	m'_{11}		m'_{1s}		m'_{1p}	0	q'_1
\vdots												
w_s	0		-1		0	m'_{s1}		m'_{ss}		m'_{sp}	1	q'_s
\vdots												
w_p	0		-1		1	m'_{p1}		m'_{ps}		m'_{pp}	0	q'_p

Com esses procedimentos iniciais, tem-se:

- $q'_i \geq 0$, para $i = 1, 2, \dots, p$;
- $w_1 = q'_1, w_2 = q'_2, w_{s-1} = q'_{s-1}, z_0 = q'_s, w_{s+1} = q'_{s+1}, \dots, w_p = q'_p$, que é a solução básica, e todas as demais variáveis, inicialmente nulas, formam uma solução viável básica complementar;
- quando o valor de z_0 for reduzido a zero, a solução viável básica complementar da equação (A.3) torna-se a solução viável básica complementar do problema original (A.1).

A.4 PROCEDIMENTO PRINCIPAL

O esquema de pivoteamento proposto por Lemke continua, obtendo-se uma sequência de soluções viáveis básicas complementares, até que a variável artificial z_0 se torne zero. A mudança de base, na obtenção de cada solução viável básica complementar, é feita de modo que as seguintes condições sejam obedecidas:

- i. a condição de complementaridade entre as variáveis ($w_i z_i = 0$, para $i = 1, 2, \dots, p$) deve ser mantida;
- ii. a solução básica deve permanecer não negativa, isto é, as constantes do lado direito em todas as tabelas devem ser não negativas.

Para que a condição (i) seja satisfeita, a variável não básica a entrar na base da próxima tabela deve ser selecionada de forma adequada. Ao se realizar o procedimento inicial do esquema, as variáveis w_s e z_s tornam-se não básicas. Caso sejam tomadas como básicas, ainda assim, a condição de complementaridade é mantida. Utilizando, então, a regra da complementaridade – a variável a ser escolhida para entrar na base da próxima tabela é sempre o complemento daquela variável que deixou a base na última tabela – selecionando-se, então, a variável z_s para entrar na base.

Selecionando de forma adequada a variável básica a ser substituída por z_s , a condição (ii) é satisfeita. Essa seleção é feita através do teste da razão mínima, similar ao empregado no Método Simplex de programação linear. Assim, para se determinar que a variável deixe a base, os seguintes cálculos devem ser feitos:

$$\frac{q'_i}{m'_{is}}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{para } m'_{is} > 0 \quad (\text{A.7})$$

Tomando-se:

$$\frac{q'_j}{m'_{js}} = \min_{m'_{is} > 0} \left(\frac{q'_i}{m'_{is}} \right) \quad (\text{A.8})$$

significa que a variável básica w_j deve ser substituída por z_s . Com isso, uma nova tabela é obtida, realizando-se as operações de pivoteamento (A.6a,b,c) considerando m'_{js} como o elemento pivô.

A variável z_j é, agora, escolhida automaticamente para entrar na base, de acordo com a regra da complementaridade, uma vez que a variável w_j acabou de sair da base. Em seguida, o teste da razão mínima é aplicado, a fim de se definir a variável básica a ser substituída por z_j , obtendo-se, após essas operações de pivoteamento, uma nova tabela.

A.5 FINALIZAÇÃO DO PROCESSO

O processo descrito anteriormente termina quando:

- i. o teste da razão mínima indicar que a variável básica z_0 deve deixar a base. Nesse caso, tem-se que a solução viável básica complementar do problema aumentado, após a operação de pivoteamento, é igual à solução viável básica complementar do problema original;
- ii. o teste da razão mínima falhar. Isto acontece quando não se encontra nenhum coeficiente positivo na coluna pivô. Portanto, o problema de complementaridade linear não possui solução e, diz-se, que o problema possui uma “terminação em raio”. Geometricamente, significa que a variável não-básica selecionada para entrar na base define uma linha básica que corresponde a um bordo ilimitado de K , sendo K um poliedro convexo (Eboli, 1989, *apud* Silveira, 1995) que representa o conjunto de soluções viáveis da equação (A.3).