



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - UFOP
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL - ESCOLA DE MINAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL - PROPEC
ESTRUTURAS METÁLICAS



ESTUDO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM ESTRUTURAS 2D CONSIDERANDO A NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

AUTOR: WALLISTON DOS SANTOS FERNANDES

*ORIENTADORES: Prof. Dr. Valério Silva Almeida
Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências da Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Ouro Preto, fevereiro de 2013.

*A Deus, o maior de todos os
engenheiros, à minha família,
à minha namorada e a todos que
contribuíram para esse grande feito.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todo o companheirismo, afeto e ajuda necessária para chegar até aqui e por tudo que tem feito, faz e fará para mim pelo resto de minha vida;

Ao Valério Silva Almeida que, mesmo distante, foi mais que um orientador, um verdadeiro pai e amigo e sem ele era impossível eu ter chegado até aqui;

Ao Francisco de Assis das Neves que, sendo meu coorientador, esteve sempre pronto e presente para me ajudar em tudo o que precisei, ou seja, sem ele também eu certamente não teria chegado tão longe;

Ao Marcelo Greco que mostrou ser mais que um colaborador; um verdadeiro companheiro que contribuiu muito para meu entendimento teórico;

Ao Hélio Luiz Simonetti, com quem aprendi muito, compartilhando conhecimentos e experiências, além de dividir bons momentos, além de ter me ajudado muito, sendo outra pessoa fundamental para que o grande dia chegasse;

Aos meus pais, Jorge Luís Fernandes e Lourdes Aparecida dos Santos Fernandes (Lurdinha maratonista) por todo o carinho e instrução que me deram para que eu pudesse construir meu caráter e evoluir como ser humano;

Aos meus irmãos, William Luiz Fernandes e Lorena de Fátima Fernandes, pela companhia e atenção nos momentos necessários, proporcionando bons momentos de descontração;

À minha namorada e melhor amiga Brenda Fernandes Limoeiro, com quem divido meus momentos de alegrias e vitórias, assim como os de angústia e incertezas, além de estar sempre pronta pra me estender sua mão e me motivar a cada vez mais a seguir em frente;

Aos meus amigos do mestrado, com quem dividi bons momentos e, com certeza, fizeram parte dessa conquista;

Ao PROPEC e à UFOP, por terem me dado essa oportunidade de crescimento profissional e confiado em meu potencial;

A todos os professores do PROPEC, pelos bons e valiosos momentos de ensino e descontrações;

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

E enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que esse grande dia chegasse, meu MUITO OBRIGADO.

RESUMO

Atualmente, faz-se necessário o uso de alternativas que melhorem o custo-benefício de estruturas. Vale a pena investir em conhecimento para o uso de técnicas que façam aproveitar ao máximo tudo o que o material tem a nos oferecer, de acordo com a utilidade estrutural da peça e da sua solicitação. A partir dessa necessidade, foi criado o conceito de Otimização Topológica, sendo este um campo de pesquisa da engenharia que tem o objetivo de projetar a topologia ótima de estruturas segundo determinado conjunto de critérios de custo, maximizando ou minimizando certa especificação de projeto.

Assim, este trabalho propõe o estudo da otimização topológica de chapas usando dois tipos de elementos finitos triangulares, com o objetivo de investigar a influência da não linearidade geométrica na topologia ótima. Para a otimização é aplicado o método clássico evolucionário, com a introdução de uma suavização, denominado SESO. Ambos elementos finitos triangulares, sendo esses o FFT e o QST, foram estudadas separadamente cada formulação, sendo a primeira aplicada para avaliar a otimização topológica linear e a segunda a não linear. A obtenção do elemento finito QST emprega a formulação posicional e será aplicado junto com o otimizador para avaliação da influência da não linearidade geométrica na topologia ótima, quando comparada com a otimização usando o elemento finito FFT para análise linear. Ambos os elementos foram aplicados nas análises lineares, verificando-se que o elemento QST requer um menor número de iterações, embora demande um maior tempo computacional, do algoritmo de otimização para atingir a mesma topologia ótima. Vários exemplos da literatura são executados com vistas a mostrar as diferenças na topologia ótima final quando se empregam as análises linear e não linear, permitindo verificar a importância de uma análise correta quanto à topologia ótima final.

Em paralelo, o trabalho complementa com o desenvolvimento de uma interface computacional na linguagem Borland Delphi para a união de ambas formulações, implementadas na linguagem Fortran e adaptadas para trabalharem em conjunto, a fim de se avaliar os resultados.

Palavras chave: Otimização Topológica, SESO, Análise Não Linear Geométrica, QST, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

Currently it is necessary to use alternatives to improve the cost-benefit structures. It is worth investing in knowledge for the use of techniques that make the most of all that the material has to offer, according to the utility and structural part of your request. From this need, the concept Topology Optimization was created, which is a research field of engineering that aims to design the optimal topology structures as determined set of criteria of cost, maximizing or minimizing certain design specification.

Thus, this text proposes the study of topology optimization plates using two types of triangular finite elements, in order to investigate the influence of geometric nonlinearity in the optimal topology. For the optimization method is applied evolutionary classic with the introduction of a smoothing, called SESO. Both triangular finite elements, these being the FFT and QST, were studied separately each formulation, the first being applied to evaluate the topology optimization linear and second non-linear. Obtaining the QST employs finite element formulation is applied and positional alongside the optimizer to evaluate the influence of non-linearity in the geometric topology great compared with optimization using finite element analysis for FFT linear. Both elements were applied to linear analyzes, verifying that the QST element requires a smaller number of iterations, although a longer computational demands of the optimization algorithm to achieve the same optimum topology. Several examples from the literature are performed in order to show the differences in the optimal topology end when employing the linear and nonlinear analysis, allowing you to check the importance of a correct analysis regarding the final optimal topology.

Also, this work was complemented by the development of a computational interface in Delphi language to the union of both formulations implemented in Fortran language and adapted to work together in order to evaluate the results.

Keywords: Topological Optimization, SESO, Non linear Analysis, QST, Finite Elements Method.

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução e Revisão Bibliográfica.....	1
-------------------------------------------------------------	----------

Capítulo 2 – Otimização Estrutural.....	6
2.1 – Conceitos de Otimização Estrutural.....	6
2.2 – Tipos de Otimização Estrutural.....	7
2.3 – Métodos de Otimização Estrutural.....	8
2.4 – Técnicas de Otimização.....	10
2.4.1 – SIMP (Simple Isotropic Material with Penalization).....	10
2.4.2 – TSA (Topological Sensitivity Method).....	11
2.4.3 – Algoritmo ACO (Ant Colony Optimization) and Modified ACO.....	11
2.4.4 – ESO (Evolucionary Structural Optimization).....	12
2.4.5 – SESO (Smoothing Evolucionary Structural Optimization).....	14
2.4.5.1 – IP (Índice de Performance).....	17

Capítulo 3 – Formulação dos Elementos Finitos.....	19
3.1 – Elementos Finitos Utilizados.....	19
3.2 – O elemento Finito FFT (Free Formulation Triangle).....	19
3.3 – O elemento Finito QST (Quadratic Strain Triangle).....	19
3.4 – Método de Newton Raphson.....	23
3.5 – Comparativo entre FFT e QST.....	25
3.6 – Processos de Otimização e os Elementos Finitos.....	27
3.7 – A Otimização e a Não Linearidade Geométrica.....	28

Capítulo 4 – Algoritmo de Otimização.....	32
4.1 – FORTRAN.....	32

4.2 – DELPHI.....	33
4.2.1 – Interface de Desenvolvimento do Delphi e componentes.....	34
4.3 – UniOM v1.0.....	35
4.4 – Estrutura de dados e pseudo-código.....	37
4.5 – Calibração dos parâmetros de otimização.....	38
4.6 – Parâmetros iniciais de otimização.....	39

Capítulo 5 – Análises dos Modelos Lineares.....	41
5.1 – Exemplos Lineares.....	41
5.1.1 – Problema de duas barras.....	41
5.1.2 – Chapa biapoiada com carga centrada.....	45
5.1.3 – Estrutura de Michell.....	50
5.1.4 – Chapa curta presa nas quatro extremidades com carga centrada.....	53
5.2 – Discussão dos Resultados.....	57

Capítulo 6 – Análises dos Modelos não Lineares.....	60
6.1 – Exemplos não Lineares.....	60
6.1.1 – Chapa presa pelas extremidades nos nós centrais.....	60
6.1.2 – Chapa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores.....	66
6.1.3 – Chapa biengastada lateralmente.....	73
6.1.4 – Chapa longa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores. .	79
6.1.5 – Chapa quadrada com carga no centro geométrico.....	85
6.2 – Discussão dos Resultados.....	92

Capítulo 7 – Considerações Finais.....	94
-----------------------------------------------	-----------

Bibliografia.....	96
--------------------------	-----------

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Estrutura de Michell.....	1
Figura 1.2 – Otimização de Forma e Topológica.....	2
Figura 1.3 – Processo de Otimização Estrutural.....	4
Figura 2.1 – Exemplo de uma viga maciça comparada à uma de suas formas otimizadas, a treliça, dado um carregamento qualquer P centrado.....	6
Figura 2.2 – Tipos de Otimização Estrutural (Paramétrica, Forma e Topológica).....	7
Figura 2.3 – Procedimento característico de um projeto de otimização topológica.....	8
Figura 2.4 – Ramificações da Computação Natural.....	9
Figura 2.5 – Classificação dos principais métodos determinísticos.....	10
Figura 2.6 – Tabuleiro de xadrez presente na topologia.....	14
Figura 2.7 – Suavização da quantidade de elementos retirados na iteração i	15
Figura 2.8 – Elemento central i sofrendo influencia dos elementos vizinhos dentro de um círculo de raio r ..	16
Figura 3.1 – Geometria e os 9 graus de liberdade do FFT no sistema local x_1x_2	19
Figura 3.2 – Pontos nodais do elemento QST.....	21
Figura 3.3 – Problema de barra simples com um grau de liberdade.....	24
Figura 3.4 – Método de Newton-Raphson.....	25
Figura 3.5 – Exemplo de malha gerada pelo programa de otimização com 32 elementos para o FFT.....	26
Figura 3.6 – Exemplo de malha gerada pelo programa de otimização com 32 elementos para o QST.....	26
Figura 3.7 – Fluxograma de atividades para otimização topológica.....	28
Figura 3.8 – Fluxograma de Otimização envolvendo a Não Linearidade Geométrica.....	30
Figura 4.1 – Compaq Visual Fortran – Editor e Compilador.....	33
Figura 4.2 – Borland Delphi – Editor e Compilador.....	34
Figura 4.3 – Créditos do programa UniOM v1.0.....	36
Figura 4.4 – Tela de Apresentação do programa UniOM v1.0.....	36
Figura 4.5 – Janela Principal do programa UniOM v1.0.....	37
Figura 4.6 – Fluxograma de otimização do SESO.....	38
Figura 5.1 – Domínio inicial do problema de duas barras.....	41
Figura 5.2 – Topologia final ótima, resultante na iteração 25, usando o elemento FFT.....	42
Figura 5.3 – Topologia final ótima, resultante na iteração 68, usando o elemento FFT.....	43
Figura 5.4 – Topologia final ótima, resultante na iteração 117, usando o elemento FFT.....	43
Figura 5.5 – Topologia final ótima, resultante na iteração 3, usando o elemento QST.....	43
Figura 5.6 – Topologia final ótima, resultante na iteração 5, usando o elemento QST.....	44
Figura 5.7 – Topologia final ótima, resultante na iteração 16, usando o elemento QST.....	44
Figura 5.8 – Topologias finais ótimas para o problema de duas barras.....	44
Figura 5.9 – Chapa biapoiada com carga centrada.....	45
Figura 5.10 – Topologia final ótima, resultante na iteração 22, usando o elemento FFT.....	46
Figura 5.11 – Topologia final ótima, resultante na iteração 55, usando o elemento FFT.....	46
Figura 5.12 – Topologia final ótima, resultante na iteração 72, usando o elemento FFT.....	47
Figura 5.13 – Topologia final ótima, resultante na iteração 85, usando o elemento FFT.....	47
Figura 5.14 – Topologia final ótima, resultante na iteração 3, usando o elemento QST.....	47
Figura 5.15 – Topologia final ótima, resultante na iteração 5, usando o elemento QST.....	48
Figura 5.16 – Topologia final ótima, resultante na iteração 15, usando o elemento QST.....	48
Figura 5.17 – Topologia final ótima, resultante na iteração 38, usando o elemento QST.....	48
Figura 5.18 – Topologias finais ótimas para chapa biapoiada com carga centrada.....	49
Figura 5.19 – Domínio inicial da estrutura de Michell.....	50
Figura 5.20 – Topologia final ótima, resultante na iteração 40, usando o elemento FFT.....	51
Figura 5.21 – Topologia final ótima, resultante na iteração 78, usando o elemento FFT.....	51
Figura 5.22 – Topologia final ótima, resultante na iteração 90, usando o elemento FFT.....	51
Figura 5.23 – Topologia final ótima, resultante na iteração 139, usando o elemento FFT.....	51
Figura 5.24 – Topologia final ótima, resultante na iteração 3, usando o elemento QST.....	52
Figura 5.25 – Topologia final ótima, resultante na iteração 5, usando o elemento QST.....	52
Figura 5.26 – Topologia final ótima, resultante na iteração 12, usando o elemento QST.....	52
Figura 5.27 – Topologia final ótima, resultante na iteração 30, usando o elemento QST.....	52

Figura 5.28 – Topologias finais ótimas para estrutura de Michell.....	53
Figura 5.29 – Chapa curta presa nas quatro extremidades com carga centrada.....	54
Figura 5.30 – Topologia final ótima, resultante na iteração 45, usando o elemento FFT.....	54
Figura 5.31 – Topologia final ótima, resultante na iteração 105, usando o elemento FFT.....	55
Figura 5.32 – Topologia final ótima, resultante na iteração 140, usando o elemento FFT.....	55
Figura 5.33 – Topologia final ótima, resultante na iteração 158, usando o elemento FFT.....	55
Figura 5.34 – Topologia final ótima, resultante na iteração 3, usando o elemento QST.....	55
Figura 5.35 – Topologia final ótima, resultante na iteração 5, usando o elemento QST.....	56
Figura 5.36 – Topologia final ótima, resultante na iteração 16, usando o elemento QST.....	56
Figura 5.37 – Topologia final ótima, resultante na iteração 36, usando o elemento QST.....	56
Figura 5.38 – Topologias finais ótimas para chapa fina presa nas quatro.....	56
Figura 5.39 – Topologia final ótima, resultante da iteração 202, usando o elemento FFT com volume final de 38% apresentando ruptura de membros importantes.....	59
Figura 6.1 – Chapa presa pelas extremidades nos nós centrais.....	61
Figura 6.2 – Topologia resultante, na iteração 60, usando o FFT (Análise Linear).....	61
Figura 6.3 – Topologia resultante, na iteração 115, usando o FFT (Análise Linear).....	62
Figura 6.4 – Topologia resultante, na iteração 168, usando o FFT (Análise Linear).....	62
Figura 6.5 – Topologia final ótima, resultante na iteração 257, usando o FFT (Análise Linear).....	62
Figura 6.6 – Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear).....	62
Figura 6.7 – Topologia resultante, na iteração 5, usando o QST (Análise não-Linear).....	62
Figura 6.8 – Topologia resultante, na iteração 20, usando o QST (Análise não-Linear).....	62
Figura 6.9 – Topologia final ótima, resultante na iteração 42, usando o QST (Análise não-Linear).....	63
Figura 6.10 – Topologias finais ótimas para chapa presa pelas extremidades nos nós centrais.....	63
Figura 6.11 – Elementos 3357 (FFT) e 2609 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 1861 (FFT) e 12331 (QST) utilizados para análise de deslocamentos.....	63
Figura 6.12 – Chapa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores.....	66
Figura 6.13 – Topologia resultante, na iteração 40, usando o FFT (Análise Linear).....	67
Figura 6.14 – Topologia resultante, na iteração 65, usando o FFT (Análise Linear).....	67
Figura 6.15 – Topologia resultante, na iteração 85, usando o FFT (Análise Linear).....	67
Figura 6.16 – Topologia final ótima, resultante na iteração 121, usando o FFT (Análise Linear).....	68
Figura 6.17 – Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear).....	68
Figura 6.18 – Topologia resultante, na iteração 5, usando o QST (Análise não-Linear).....	68
Figura 6.19 – Topologia resultante, na iteração 10, usando o QST (Análise não-Linear).....	68
Figura 6.20 – Topologia final ótima, resultante na iteração 20, usando o QST (Análise não-Linear).....	68
Figura 6.21 – Topologias ótimas finais para chapa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores.....	69
Figura 6.22 – Elementos 292 (FFT) e 32 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 31 (FFT) e 46 (QST) utilizados para análise de deslocamentos.....	69
Figura 6.23 – Chapa biengastada lateralmente.....	73
Figura 6.24 – Topologia resultante, na iteração 40, usando o FFT (Análise Linear).....	73
Figura 6.25 – Topologia resultante, na iteração 65, usando o FFT (Análise Linear).....	74
Figura 6.26 – Topologia resultante, na iteração 85, usando o FFT (Análise Linear).....	74
Figura 6.27 – Topologia final ótima, resultante na iteração 121, usando o FFT (Análise Linear).....	74
Figura 6.28 – Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear).....	74
Figura 6.29 – Topologia resultante, na iteração 5, usando o QST (Análise não-Linear).....	74
Figura 6.30 – Topologia resultante, na iteração 12, usando o QST (Análise não-Linear).....	74
Figura 6.31 – Topologia final ótima, resultante na iteração 30, usando o QST (Análise não-Linear).....	75
Figura 6.32 – Topologias finais ótimas para chapa biengastada lateralmente.....	75
Figura 6.33 – Elementos 104 (FFT) e 72 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 16 (FFT) e 106 (QST) utilizados para análise de deslocamentos.....	76
Figura 6.34 – Chapa longa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores.....	79
Figura 6.35 – Topologia resultante, na iteração 50, usando o FFT (Análise Linear).....	80
Figura 6.36 – Topologia resultante, na iteração 85, usando o FFT (Análise Linear).....	80
Figura 6.37 – Topologia resultante, na iteração 98, usando o FFT (Análise Linear).....	80
Figura 6.38 – Topologia final ótima, resultante na iteração 111, usando o FFT (Análise Linear).....	80
Figura 6.39 – Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear).....	81

Figura 6.40 – Topologia resultante, na iteração 5, usando o QST (Análise não-Linear).....	81
Figura 6.41 – Topologia resultante, na iteração 15, usando o QST (Análise não-Linear).....	81
Figura 6.42 – Topologia final ótima, resultante na iteração 30, usando o QST (Análise não-Linear).....	81
Figura 6.43 – Topologias finais ótimas para chapa longa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores.....	81
Figura 6.44 – Elementos 223 (FFT) e 122 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 31 (FFT) e 181 (QST) utilizados para análise de deslocamentos.....	82
Figura 6.45 – Chapa quadrada com carga no centro geométrico.....	85
Figura 6.46 – Topologia resultante, na iteração 30, usando o FFT (Análise Linear).....	86
Figura 6.47 – Topologia resultante, na iteração 80, usando o FFT (Análise Linear).....	86
Figura 6.48 – Topologia final ótima, resultante na iteração 145, usando o FFT (Análise Linear).....	86
Figura 6.49 – Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear).....	87
Figura 6.50 – Topologia resultante, na iteração 6, usando o QST (Análise não-Linear).....	87
Figura 6.51 – Topologia final ótima, resultante na iteração 22, usando o QST (Análise não-Linear).....	87
Figura 6.52 – Topologias finais ótimas para chapa quadrada com carga no centro geométrico.....	88
Figura 6.53 – Elementos 1928 (FFT) e 932 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 841 (FFT) e 4141 (QST) utilizados para análise de deslocamentos.....	88

LISTA DE GRÁFICOS E TABELAS

Gráfico 5.1 – Iteração x Volume Máximo para ambos elementos FFT e QST.....	45
Gráfico 5.2 – Iteração x Volume Máximo para ambos elementos FFT e QST.....	49
Gráfico 5.3 – Iteração x Volume Máximo para ambos elementos FFT e QST.....	53
Gráfico 5.4 – Iteração x Volume Máximo para ambos elementos FFT e QST.....	57
Gráfico 6.1 – Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST.....	64
Gráfico 6.2 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT.....	64
Gráfico 6.3 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST.....	65
Gráfico 6.4 – Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento.....	65
Gráfico 6.5 – Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST.....	70
Gráfico 6.6 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT.....	71
Gráfico 6.7 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST.....	71
Gráfico 6.8 – Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento.....	72
Gráfico 6.9 – Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST.....	76
Gráfico 6.10 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT.....	77
Gráfico 6.11 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST.....	78
Gráfico 6.12 – Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento.....	78
Gráfico 6.13 – Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST.....	82
Gráfico 6.14 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT.....	83
Gráfico 6.15 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST.....	83
Gráfico 6.16 – Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento.....	84
Gráfico 6.17 – Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST.....	89
Gráfico 6.18 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT.....	90
Gráfico 6.19 – Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST.....	90
Gráfico 6.20 – Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento.....	91
Tabela 6.1 – Valores de deslocamentos para o elemento FFT.....	65
Tabela 6.2 – Valores de deslocamentos para o elemento QST.....	66
Tabela 6.3 – Valores de deslocamentos para o elemento FFT.....	72
Tabela 6.4 – Valores de deslocamentos para o elemento QST.....	72
Tabela 6.5 – Valores de deslocamentos para o elemento FFT.....	78
Tabela 6.6 – Valores de deslocamentos para o elemento QST.....	79
Tabela 6.7 – Valores de deslocamentos para o elemento FFT.....	84
Tabela 6.8 – Valores de deslocamentos para o elemento QST.....	84
Tabela 6.9 – Valores de deslocamentos para o elemento FFT.....	91
Tabela 6.10 – Valores de deslocamentos para o elemento QST.....	91

LISTA DE ABREVIATURAS

OT	Otimização Topológica
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalization
ESO	Evolutionary Structural Otimization
SESO	Evolutionary Structural Otimization Smoothing
MEC	Método dos Elementos de Contorno
IP	Índice de Performance
TSA	Topological Sensitivity Analysis
ACO	Ant Colony Optimization
TVM	Tensão de Von Mises
MEF	Método de Elementos Finitos
NLG	Não Linear/Linearidade Geométrica
NPC	Número de Passos de Carga
ITER	Contador de uma Iteração qualquer i

LISTA DE SÍMBOLOS

E	Módulo de Elasticidade
V_i	Volume do elemento i na i -ésima iteração
V_0	Volume da estrutura na primeira iteração
σ_0^{VM}	Tensão máxima de Von Mises na primeira iteração
σ_i^{VM}	Tensão máxima de Von Mises do elemento i na i -ésima iteração
$\eta(j)$	Função ponderadora
ν	Coefficiente de Poisson
$\sigma_i^{\text{ponderado}}$	Tensão de Von Mises ponderada do elemento i
A_i	Área do elemento i
A_j	Área do elemento j
σ_j^{VM}	Tensão de Von Mises do elemento j
NV	Número de elementos cujos centróides estão no interior da circunferência
R_{max}	Raio máximo da circunferência
R_{ij}	Distância entre os centróides dos elementos i e j
D_0	Matriz constitutiva inicial do projeto
$D(j)$	Matriz constitutiva no ponto $j \in \Omega$
ρ	Densidade volumétrica
Ω	Domínio da estrutura
$f(\epsilon)$	Função reguladora
Γ	Conjunto dos elementos que serão removidos da estrutura
$\bar{\Gamma}$	Conjunto dos elementos que não serão removidos da estrutura
σ_x	Componente normal do tensor de tensões na direção x
σ_y	Componente normal do tensor de tensões na direção y
τ_{xy}	Componente de tensão de cisalhamento
σ_i	Tensão do elemento i
σ_j	Tensão do elemento j
u	Deslocamento horizontal
v	Deslocamento vertical
σ_e^{VM}	Tensão de Von Mises máxima do elemento
σ_{MAX}^{VM}	Tensão de Von Mises máxima da estrutura
FRR	Fator de Razão de Rejeição
FER	Fator Evolucionário de Rejeição
VI	Volume da estrutura na iteração i
VRI	Volume retirado por iteração

Capítulo 1 – Introdução e Revisão Bibliográfica

Este trabalho aborda conceitos de otimização estrutural envolvidos aos conceitos de não linearidade geométrica, mostrando as diferenças entre as topologias ótimas nas análises lineares e não lineares geométricas. São aplicados conceitos de elementos finitos planos triangulares em conjunto com uma técnica de otimização denominada SESO (Smoothing Evolutionary Structural Optimization) para a obtenção das topologias finais, que são comparadas com os resultados oriundos de outras técnicas presentes na literatura.

Primeiramente, é fundamental e importante conceituar o que é otimização. Assim, otimizar é encontrar um modelo adequado, de acordo com um ou mais critérios de custo, para que se possa minimizar ou maximizar determinado critério de projeto. Esse critério pode ser uma melhor relação custo-benefício para se produzir uma peça estrutural, uma significativa redução de peso da estrutura para, por exemplo, minimizar os efeitos causados por ele, uma melhor distribuição de tensões para que membros internos da estrutura não sofram possíveis esforços elevados, minimizar deslocamentos, entre outros.

Seguindo uma linha do tempo, há relatos que os primeiros passos da otimização estrutural foram introduzidos no final do século XIX, com o precursor trabalho de Maxwell (1872) *apud* Coutinho (2006) no qual buscava o menor volume para estruturas uniaxiais submetidas a carregamentos. Segundo Coutinho (2006), em 1904, Michell deu continuidade ao trabalho de Maxwell ao projetar estruturas treliçadas nas quais buscava o menor peso, observando as tensões nas barras para cada caso de carga. Mas, somente no final dos anos 50, com o trabalho de Cox (1958), seu trabalho foi reconhecido. Suas famosas estruturas são citadas na teoria moderna de Otimização Topológica até hoje. Um exemplo de seu trabalho pode ser visto na figura 1.1.

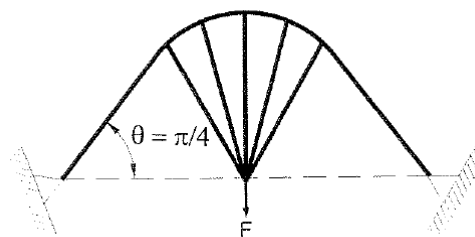


Figura 1.1 – Estrutura de Michell (Silva, 2001)

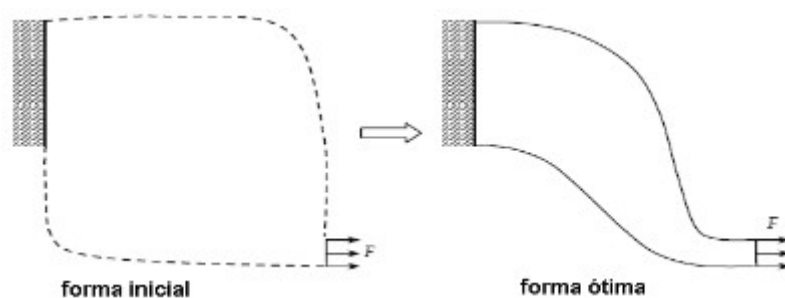
Na década de 60, os estudos sobre otimização de leiaute avançaram e conseguiram determinar tanto a localização dos membros estruturais como a disposição e seção transversal ótima (Zhou e Rozvany, 1991), mas só nos anos 70, alguns problemas específicos puderam ser também

resolvidos, como os de Hemp (1973) e o de Prager (1974), ambos para uma classe muito restrita de estruturas, vistos como uma extensão do conceito de otimização de estruturas de treliças, desenvolvido por Michell (1904).

Na década de 80, varias publicações foram feitas no que diz respeito à maximização da rigidez de placas delgadas considerando a espessura como variável de projeto (Cheng e Olhoff, 1981; Khon e Strang, 1986; Rozvany *et al.*, 1982), com a utilização do MEF. As conclusões acerca desses trabalhos eram que várias soluções ótimas locais podem ser obtidas em problemas de otimização.

Ainda em meados da mesma década, vários questionamentos sobre os resultados das otimizações de forma e paramétricas surgiram, pois alguns deles apresentavam grandes problemas quando se alterava a topologia (ou distribuição de material) já que uma mudança da topologia implica constante alteração, durante o processo de otimização, do modelo de elementos finitos associados à estrutura no inicio do processo, isto é, a cada iteração o problema físico é modificado e o algoritmo deve prever a atualização da malha de elementos finitos a cada iteração, o que é complexo (Simonetti, 2009). Por isso, com a necessidade de se aprimorar a otimização de forma, surge no final da década a Otimização Topológica, com uma metodologia de domínio fixo estendido, inicialmente no método da Homogeneização (Bendsøe e Kikuchi, 1988). Essa metodologia foi inspirada nos trabalhos de Cheng e Olhoff (1981) e de Cheng e Olhoff (1982) que tratavam da otimização de espessuras de chapas e placas, Lurie *et al.* (1982), Goodman *et al.* (1986), Kohn e Strang (1986) que estudaram a otimização para projetos de barras de torção construídas com dois materiais com diferentes proporções volumétricas e Rozvany *et al.* (1982), que investigaram a formulação matemática para o problema de maximização da rigidez (com restrição de volume) de placas delgadas, onde a variável de projeto é a espessura e concluíram para este problema de otimização que existem vários ótimos locais.

As diferenças entre a otimização de forma e a topológica são mostradas na figura 1.2.



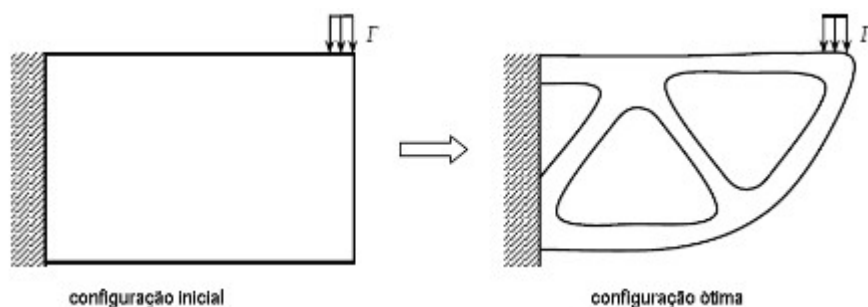


Figura 1.2 – Otimização de Forma e Topológica (Simonetti, 2009)

Nasce então uma classificação da otimização quanto ao tipo: Otimização de Forma, Otimização Paramétrica e Otimização Topológica. Essas classificações serão melhores abordadas nos capítulos seguintes.

A partir dessas informações, vários trabalhos sobre otimização foram feitos e melhorados de várias formas, seguindo os conceitos básicos que dão suporte teórico que foram estabelecidos há mais de um século (Rozvany *et al.*, 1995), porém, em sua maioria, seguindo uma análise linear dos modelos propostos. Apenas após o ano 2000, alguns poucos trabalhos sobre não linearidade e otimização começaram a aparecer com mais frequência, como visto em Gea e Luo (2001), Pereira (2006), Lahuerta *et al.* (2010) e Chang *et al.* (2012).

A grande vantagem da Otimização Topológica em contraste com os métodos tradicionais de otimização, como a Otimização de Forma ou a Otimização Paramétrica é que esses métodos não são capazes de alterar o leiaute da estrutura original, fazendo com que esses não auxiliem o projeto conceitual da estrutura.

Pode-se dizer que na Otimização Paramétrica, a estrutura apresenta a forma e a topologia fixa, ou seja, variam-se as dimensões, tais como o diâmetro da seção transversal de seus componentes, espessura e altura, por exemplo. Entretanto, é necessário salientar que esta não é única e possui modelos diferentes, sendo alguns deles: linear (Anderson, 1984), parcialmente linear (Heckman, 1986), não-linear por partes (Robinson, 1988), aditivo (Hastie & Tibshirani, 1986), expansão unidirecional (Härdle & Stoker, 1989), redução de dimensionalidade (Li, 1991), expansão unidirecional aditiva (Friedman & Stuetzle, 1981).

Na otimização de forma, um pouco mais genérica, a estrutura apresenta forma variável e a topologia fixa, não ocorrendo a inserção de “buracos”. Nesta abordagem, as variáveis de projeto definem o contorno do domínio, cuja forma é alterada durante o processo de otimização sobre esse procedimento (Haftka e Grandhi, 1986). Em outras palavras, esse tipo de otimização pode ser descrito como aquela onde a meta é maximizar (ou minimizar) a função objetivo, valendo-se do contorno dos segmentos e a posição de furos, já fixos. A escolha das variáveis de projeto adequadas

para a parametrização das formas é um dos problemas deste método (Parkinson *et al.* 1997).

Diferentemente da otimização de forma na qual as variáveis de projeto que definem o contorno são alteradas em cada iteração durante o processo de otimização, a Otimização Topológica apresenta como principais características a inserção de buracos e domínio fixo estendido, com as dimensões do projeto mantidas fixas durante todo o processo iterativo (Bendsøe e Kikuchi, 1988). Na procura pela solução ótima, a Otimização Topológica distribui o material por todo o domínio de tal forma que se possa otimizar um determinado critério – como o de tensão máxima da estrutura. Esse tipo de otimização pode ser dividida em duas classes distintas: a partir de um meio discreto e a partir um meio contínuo. A primeira é subdividida em dois grupos: otimização de estruturas de malha contínua (“gridlike continua”) que trabalha com um número infinito de barras rígidas separadas por um espaço infinitesimal cuja solução é obtida analiticamente e a otimização de estruturas discretas (“ground structural”) que considera o domínio de projeto com vários pontos distribuídos e que podem ser uma possível ligação de treliças, cuja solução é obtida numericamente.

Com base nas informações acima descritas, de forma geral, pode-se demonstrar as etapas envolvidas num processo de otimização estrutural, de acordo com a figura 1.3, como sendo:

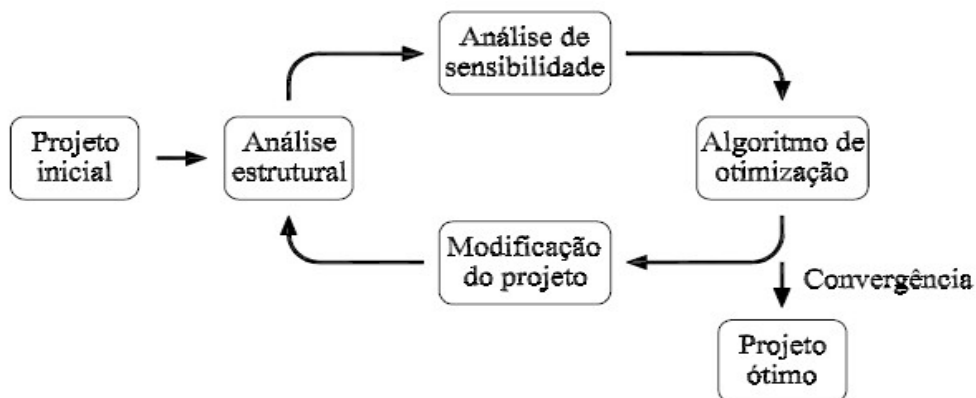


Figura 1.3 – Processo de Otimização Estrutural (Labanowski, 2004)

Assim, dado um modelo inicial de projeto, faz-se uma análise estrutural, de acordo com as condições de contorno e verifica-se a sua sensibilidade quanto à remoção de material, sem que isso afete sua integridade. Depois, o algoritmo de otimização é aplicado e, caso haja a convergência, tem-se a topologia ótima final; do contrário, o projeto é modificado e é então refeita a análise estrutural.

Finalmente, com base em todas essas informações presentes na literatura sobre otimização, este trabalho propõe o estudo de uma formulação baseado no método heurístico clássico evolucionário ESO, denominada SESO – Suavização ou Smoothing ESO, unindo conceitos de não

linearidade geométrica para análise de estruturas bidimensionais.

Em conjunto, deseja-se empregar o Método dos Elementos Finitos na sua forma clássica, considerando o comportamento não linear geométrico e o SESO para a busca da topologia ótima de sólidos ou estruturas em estado plano de tensões e utilizando como fator principal da remoção de elementos a Tensão Máxima de Von Mises.

2.1 – Conceitos de Otimização Estrutural

Otimizar é encontrar um modelo adequado, de acordo com um ou mais critérios de custo, para que se possa minimizar ou maximizar determinado critério de projeto. Pode, por exemplo, envolver uma diferente metodologia de produção em uma certa empresa, para que ela produza mais em menos tempo, ou reduzir o custo de seu produto ao substituir determinado tipo de material que o compõe, melhorando significativamente sua eficiência sem prejudicar necessariamente sua finalidade.

No campo estrutural, pode-se dizer que otimizar seria encontrar um melhor modelo para atender determinada solicitação de projeto. Como exemplo de uma estrutura otimizada, pode-se citar as treliças que, para certos tipos de carregamentos, comportam-se tão bem quanto uma viga maciça (figura 2.1).

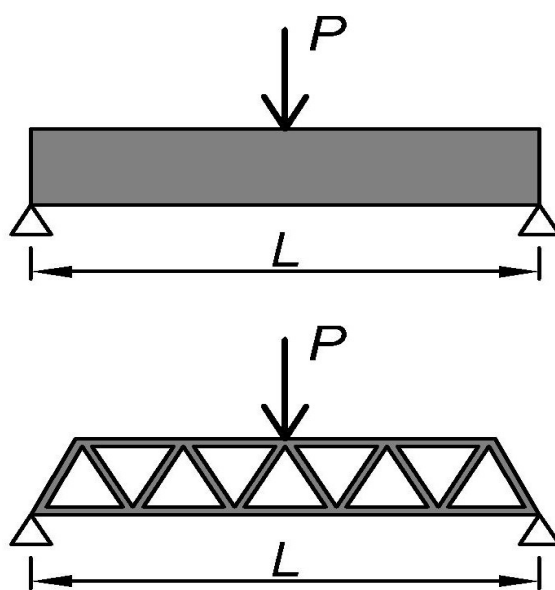


Figura 2.1 – Exemplo de uma viga maciça comparada à uma de suas formas otimizadas, a treliça, dado um carregamento qualquer P centrado.

Nesse caso, ao se comparar ambas estruturas feitas com o mesmo material e mesmo comprimento L , tem-se que a treliça possui menor volume final do que a viga maciça, o que torna a treliça um modelo otimizado em relação à viga maciça. Assim, para este mesmo exemplo, um dos critérios de otimização seria a busca pelo menor peso, que é obtido no modelo final (treliça) em relação ao modelo inicial (viga maciça). Outros exemplos de critérios de otimização estrutural para

diferentes problemas seriam a busca por menores deslocamentos e/ou frequência do projeto sem ferir as condições de equilíbrio e compatibilidade da peça, ou mesmo a distribuição de tensões ao longo da estrutura, descartando-se regiões do domínio onde não haja fluxo de tensões ou este seja de muito baixo valor, ou ainda a relação custo-benefício para a produção em série daquela estrutura.

2.2 – Tipos de Otimização Estrutural

Quando se otimiza uma estrutura é importante estabelecer previamente, além do critério de projeto inicial, a aparência final da estrutura, principalmente se existir alguma restrição quanto ao formato final. Considerando o exemplo anterior da viga maciça comparada à treliça, verifica-se que, do ponto de vista da otimização estrutural, vazios foram formados no interior da viga até que a forma de treliça fosse determinada. Sendo assim, esse tipo de otimização é classificado como topológica, cujas principais características são a inserção de vazios e domínio fixo estendido, ou seja, as dimensões do projeto são mantidas fixas durante todo o processo iterativo (Bendsoe e Kikuchi, 1988). Mais dois outros tipos são também estudados, sendo a otimização paramétrica, onde a estrutura apresenta a forma e a topologia fixas e variam-se apenas as características constitutivas do material e/ou as dimensões da peça estrutural (Vanderplaats, 1984) e a otimização de forma, onde a estrutura apresenta a topologia fixa, variando-se a forma e não ocorrendo à inserção de vazios. Nesta abordagem, as variáveis de projeto definem o contorno do domínio, cuja forma é alterada durante o processo de otimização (Haftka e Grandhi, 1986). Tem-se exemplos de estruturas que podem ser otimizadas para carregamento centrado, segundo os tipos citados:

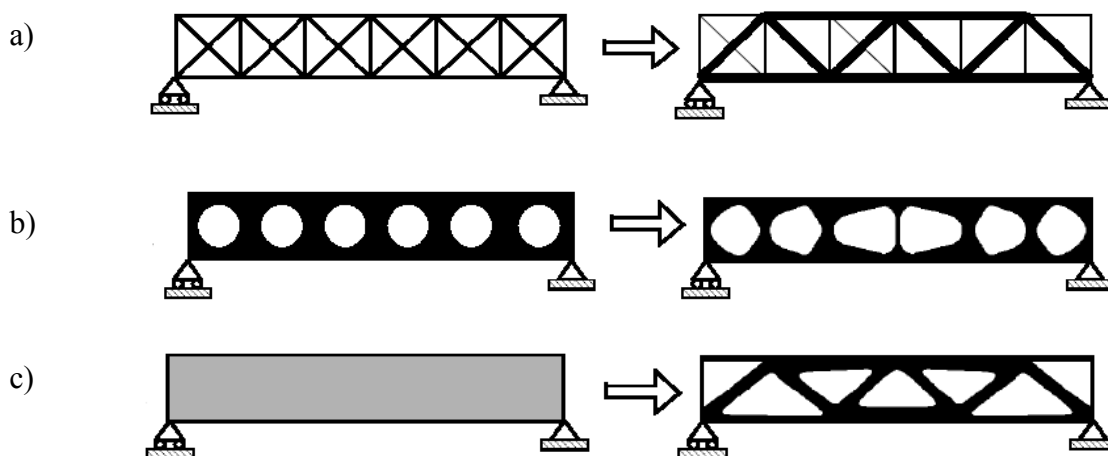


Figura 2.2 – Tipos de Otimização Estrutural

2.2a Otimização Paramétrica, 2.2b Otimização de Forma e 2.2c Otimização Topológica

(Bendsoe e Sigmund, 2002)

Porém, nem sempre o resultado encontrado é satisfatório, pois podem ocorrer regiões decorrentes de instabilidades numéricas que podem inviabilizar a produção da peça estrutural. Assim o resultado precisa ser interpretado usando otimização de forma ou técnicas de processamento de imagem. As modificações decorrentes desta interpretação alteram a performance da estrutura o que torna indispensável uma análise por elementos finitos deste resultado (Simonetti, 2009).

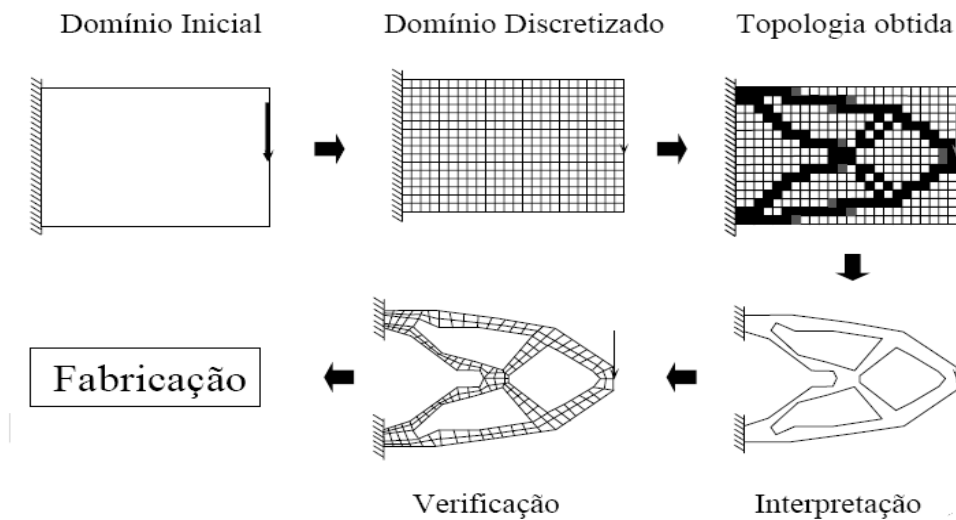


Figura 2.3 – Procedimento característico de um projeto de otimização topológica (Silva, 2001).

2.3 – Métodos de Otimização Estrutural

São três os métodos que podem classificar qualquer técnica de otimização: métodos heurísticos, probabilísticos e determinísticos.

Os métodos heurísticos se baseiam em regras, simplificações ou aproximações que reduzem ou limitam a busca por soluções em domínios que são difíceis e/ou pouco compreendidos. São métodos empíricos que podem ou não apresentar resultados satisfatórios.

Os métodos probabilísticos se baseiam em análises probabilísticas de possíveis soluções para um determinado problema. Porém, a relação entre causa e efeito não é completamente determinada. Pode-se apenas determinar a probabilidade de ocorrência de um dado fenômeno a partir do conhecimento dos que o precedem (Lima, 2011). Esse tipo de método engloba também técnicas que imitam, de forma simplificada, fenômenos ou processos encontrados na natureza e, por esse motivo, é denominado Computação Natural (Lima, 2011 *apud* Olivieri, 2004). As ramificações dessa Computação Natural são mostradas na figura 2.4.

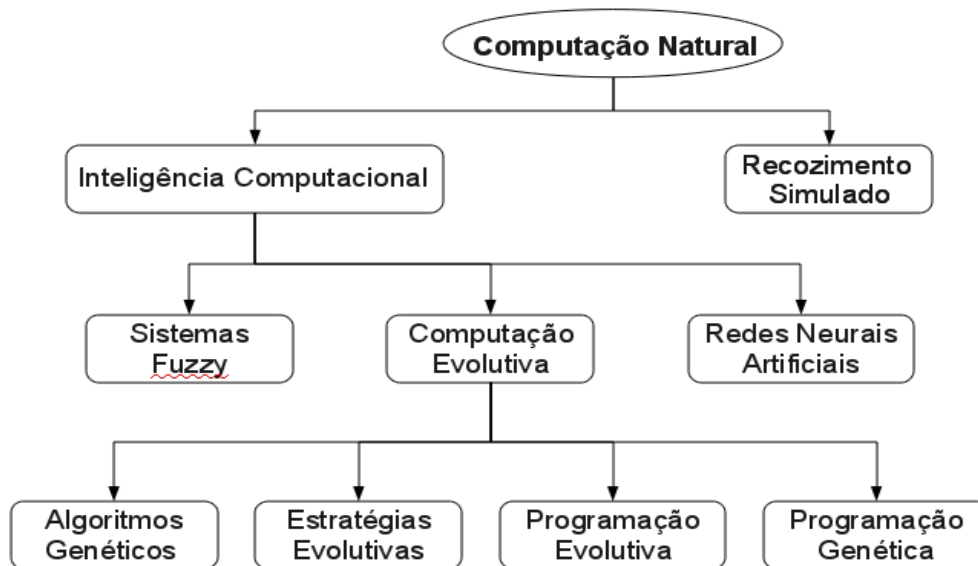


Figura 2.4 – Ramificações da Computação Natural (Olivieri, 2004).

Os métodos determinísticos se baseiam em um conjunto teoremas e ações sistemáticas para determinar um resultado otimizado ou muito próximo dele, com certo grau de precisão. Assim, o resultado é completamente determinado pelas rotinas que o precedem e condiciona com o mesmo valor os procedimentos que o sucedem (Lima, 2011). Em alguns casos dependem de uma função objetivo e quando isso acontece, utilizam de pelo menos a sua primeira derivada em relação às variáveis de projeto. Por isso, é imprescindível e importante que a função, se houver, seja derivável e contínua. Os principais métodos determinísticos existentes são apresentados na figura 2.5.

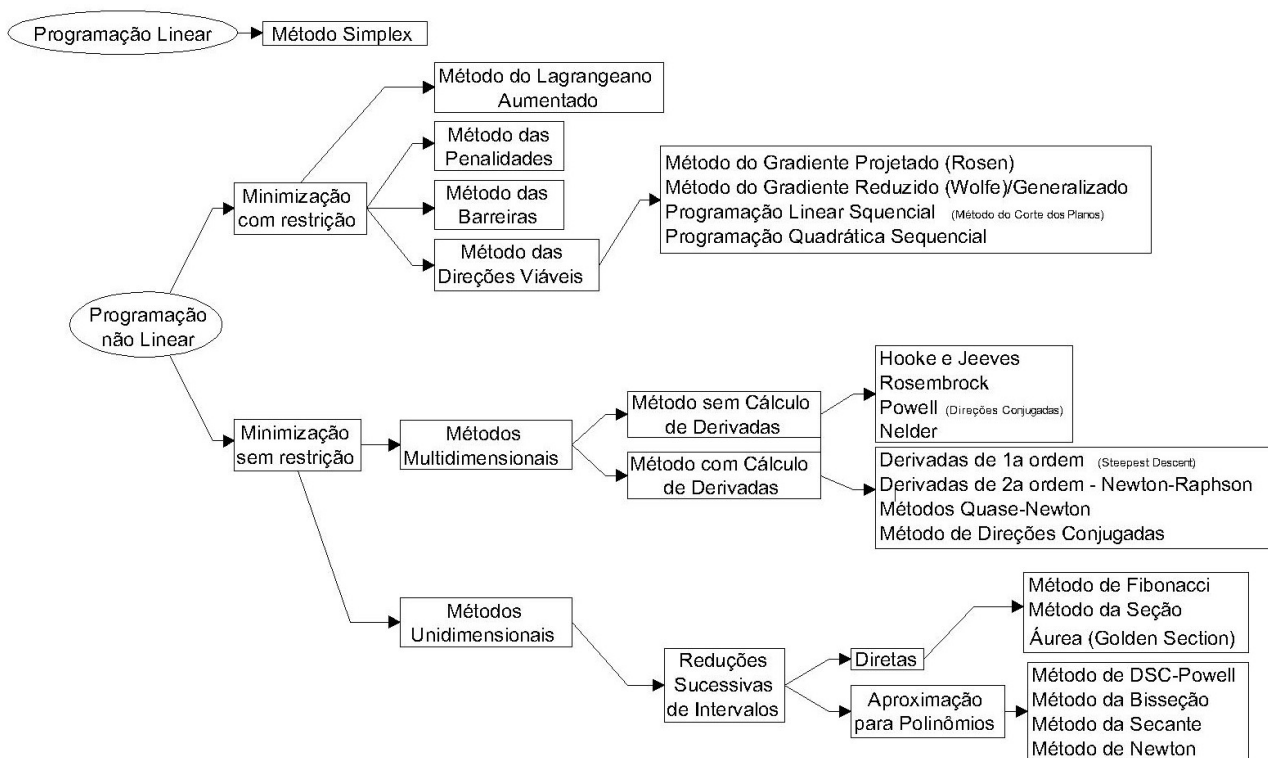


Figura 2.5 – Classificação dos principais métodos determinísticos (Neves, 1997).

2.4 – Técnicas de Otimização Topológica

2.4.1 – SIMP (Simple Isotropic Material with Penalization)

Esse método basicamente propõe que a microestrutura é desconhecida (daí a denominação artificial), mas sua rigidez é conhecida (Pereira, 2006). Sua formulação parte da Teoria da Homogeneização, que visa descrever as propriedades efetivas de um material composto formado a partir de um material isotrópico de base, além de fornecer um método de parametrização consistente para resolver o problema da melhor distribuição de material em um domínio relaxado (Sant'Anna, 2002). A homogeneização também permite uma descrição contínua de meios não contínuos. As propriedades físicas dos materiais, como peso específico e módulo de elasticidade são descontínuos e oscilam muito rapidamente entre os valores associados a cada componente do material composto.

A solução proposta consiste em se criarem células de material que possuem comportamento constante de célula para célula. As microestruturas são formadas pela mistura de materiais homogêneos, criando então um meio não homogêneo. Assume-se que o material é formado pelo agrupamento periódico dessas células unitárias, de modo que as propriedades efetivas do meio homogeneizado sejam parametrizadas apenas por características geométricas dessas microestruturas

artificiais (Cardoso, 2000).

Porém, para o caso de mudança de material, outras equações devem ser formuladas de acordo com as propriedades daquele novo material. Isso acaba sendo uma desvantagem, pois, assim, há a necessidade de várias formulações para diferentes tipos de material, podendo tornar o método inviável. Além disso, o custo computacional pode ser elevado, pois dependendo da geometria, muitos parâmetros devem ser otimizados.

É um método também abordado por Kirsch (1990), Cheng e Jiang (1992) e Cheng e Guo (1997), que propuseram uma relaxação ε nas regiões de baixa densidade (altamente deformadas).

2.4.2 – TSA (Topological Sensitivity Method)

Esse método utiliza de uma função escalar, definida em todo o domínio do sistema, que fornece a sensibilidade de uma função-custo, com a inserção de um pequeno furo em um ponto determinado (Novotny, 2003). Essa função escalar é denominada Derivada Topológica.

Tem-se, então, o domínio inicial do problema, representado por Ω , e, após a inserção de um pequeno furo, um novo domínio Ω_ε . Se a função-custo é dada por ψ , a derivada topológica é regida pela seguinte equação:

$$D_T(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Psi(\Omega_\varepsilon) - \Psi(\Omega)}{f(\varepsilon)} \quad (2.1)$$

onde $f(\varepsilon)$ é uma função regularizadora negativa, monotônica e decrescente, tal que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ com $\varepsilon \rightarrow 0$ ($0 \leq \varepsilon < 1$) que dependerá do problema em análise (Simonetti, 2009).

Embora a definição da Derivada Topológica seja extremamente geral, sua resolução não pode ser obtida de maneira convencional. Assim, técnicas para a obtenção desses resultados foram propostas por Novotny *et al.* (2003), que permitem utilizar todo o ferramental matemático desenvolvido para a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma, são também encontradas nos trabalhos de Haug *et al.* (1986) e Fancello (1993), a fim de se encontrar o resultado para a Derivada Topológica.

2.4.3 – Algoritmo ACO (Ant Colony Optimization) and Modified ACO

Os algoritmos de colônia de formigas (ACO, do inglês Ant Colony Optimization) como o próprio nome indica, foram inspirados nas formigas principalmente no comportamento que elas apresentam na busca por alimento, mas também no que diz respeito à organização do trabalho e

cooperação entre si. Uma colônia de insetos é muito organizada e as atividades coletivas dos insetos são realizadas com a auto-organização (Koide, 2010).

Assim, observado o comportamento das formigas para a obtenção de soluções para os problemas, o algoritmo leva em conta três procedimentos:

→ Construção das soluções com as formigas, de acordo com a movimentação das mesmas;

→ Atualização de feromônio, relacionado à busca pela melhor solução, onde quanto maior a quantidade de feromônio maior a probabilidade de uma mesma conexão ou componente ser usado, e, quanto menor, maiores as chances de se buscar novas regiões ainda não consideradas, podendo ser regiões próximas do ótimo.

→ Ações *daemon*, diz respeito a rotinas que venham a melhorar a busca em determinado local, ações de busca local, ou um conjunto de ações globais que possibilitem tomar decisões positivas.

A diferença entre o algoritmo modificado e o normal é que no algoritmo modificado o feromônio é usado como uma variável contínua, ao invés de ser usada como variável discreta (Chang, 2012). Maiores detalhes podem ser encontrados em Koide (2010), Chang (2012) e Angus (2008).

2.4.4 – ESO (Evolutionary Structural Optimization)

De acordo com os problemas numéricos encontrados na resolução de problemas de otimização estrutural, algumas outras técnicas foram estudadas para minimizar essas adversidades. A técnica ESO foi desenvolvida a partir de observações das estruturas na natureza, tais como ossos, árvores e conchas, em uma tentativa de avaliar como essas estruturas adquiriram forma ao longo do processo de evolução natural (Xie e Steven, 1993), o ESO é uma técnica simples, comparada a outras presentes na literatura, que modifica a topologia da estrutura mediante heurística de remoção gradual de elementos finitos da malha correspondentes a regiões que não contribuem, efetivamente, para a boa performance da estrutura. Além disso, essa técnica foi primeiramente aplicada no processo de otimização topológica para a minimização das tensões em componentes mecânicos. (Simonetti, 2009).

Em outras palavras, o ESO consiste em uma remoção gradual de elementos finitos, da malha gerada, em regiões que não contribuem efetivamente para a estrutura ("materiais ineficientes"), através de um critério qualquer de rejeição. É um procedimento simples de retirada, considerado, portanto, "*hard-kill*", ou seja, há uma remoção única e definitiva dos elementos que não atendem ao critério de rejeição estabelecido. Porém, uma grande vantagem está no fato da topologia e da forma

serem determinados simultaneamente. Tal procedimento pode ser interpretado da seguinte forma:

$$D(j) = \begin{cases} D_0, & \text{se } j \in \Gamma \\ 0, & \text{se } j \in \bar{\Gamma} \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $D(j)$ é a matriz constitutiva do ponto $j \in \Omega$; D_0 é a matriz constitutiva inicial do projeto, Ω é o domínio da estrutura, dado por $\Omega = \Gamma + \bar{\Gamma}$; Γ é o conjunto dos elementos que

não serão removidos da estrutura (sólido), dado por $\Gamma = \left\{ \Omega / \left(\frac{\sigma_e^{VM}}{\sigma_{MAX}^{VM}(\Omega)} \right) \geq FRR \right\}$ e $\bar{\Gamma}$ é o conjunto dos elementos que serão removidos da estrutura (vazio), dado por

$$\bar{\Gamma} = \Omega - \Gamma = \left\{ \Omega / \left(\frac{\sigma_e^{VM}}{\sigma_{MAX}^{VM}(\Omega)} \right) < FRR \right\}.$$

Um critério de rejeição simples e até então estudado para proporcionar a remoção de elementos da estrutura é o de Tensão Máxima de Von Mises, cujo valor é determinado pela seguinte relação:

$$\sigma_{max}^{VM} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau_{xy}^2 + \sigma_x \sigma_y} \quad (2.3)$$

Assim, determinada a tensão de Von Mises do elemento, σ_e^{vm} , a tensão máxima de Von Mises atuante na estrutura, σ_{max}^{vm} e, preestabelecido um coeficiente de remoção denominado FRR ou fator de raio de rejeição, tem-se a seguinte inequação:

$$\sigma_e^{VM} < FRR \cdot \sigma_{MAX}^{VM} \quad (2.4)$$

Desta forma, os elementos que satisfazem a inequação são removidos da estrutura a cada iteração, sendo estes considerados ineficientes. Essa remoção é feita definindo-se um valor muito pequeno à rigidez daquele elemento ($E = 10^{-12}$), valor este muito próximo de 0, o que torna esse elemento ineficiente sem a necessidade de se refazer a malha referente ao problema.

Contudo, aspectos negativos do ESO incluem uma possível geração de elementos flutuantes, ou seja, elementos que não estão interligados a outros elementos e, também, o efeito “tabuleiro de xadrez” ou “checkerboard”, figura 2.6, que compreende em uma alternância entre vazio e preenchido em uma dada região do domínio, podendo ocasionar instabilidade numérica,

dependência da malha e mínimos locais (Simonetti, 2009).

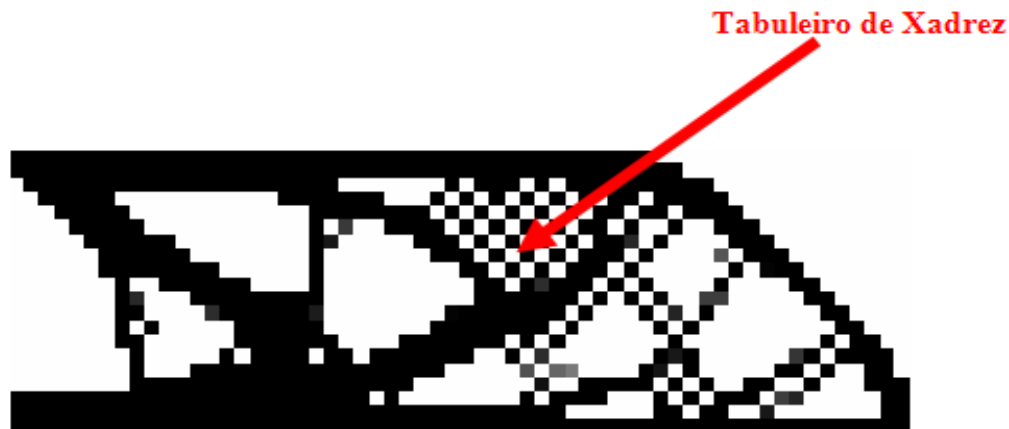


Figura 2.6 – Tabuleiro de xadrez presente na topologia (Porto, 2006).

Esse critério de otimização usado pelo ESO inclui rigidez (Chu *et al.*, 1996), minimização da tensão (Li *et al.*, 1999), deformação (Xie e Steven, 1997), formação de ondas (Manickarajah *et al.*, 1998), rigidez a torção (Li *et al.*, 1999), entre outros.

Quanto à instabilidade na topologia, pode-se citar os trabalhos de Jog e Haber (1996), Stolpe e Svanberg (2001.a), Matsui e Terada (2004), entre outros.

2.4.5 – SESO (Smoothing Evolutionary Structural Optimization)

A forma simplificada de obtenção da topologia ótima do ESO proporcionou estudos mais aprofundados. Para sanar os problemas ocasionados pelo critério de remoção do ESO, alguns procedimentos foram adotados. Inicialmente, notou-se que a remoção dos elementos em cada iteração que satisfizesse a inequação (2.4), levava a retirada, muitas vezes, precipitada ou precoce de um elemento que não deveria ser retirado. Isto se dava, muitas vezes, pelo fato de que no processo evolutivo, certo elemento que não deveria sair acabava sendo retirado para atender a inequação de tensões máximas, gerando uma solução forçada, não-ótima e com um possível desenvolvimento de uma região instável de “tabuleiro de xadrez” (“checkerboard”), o qual é um dos maiores problemas do ESO (Simonetti, 2009). Para resolver esse problema, o SESO propôs uma organização dos elementos que não atendem a inequação (2.4) tal qual (p%) desses elementos sejam removidos e (1-p%) sejam devolvidos à estrutura. Esta devolução é realizada por uma função reguladora, que realiza uma suavização do procedimento ou, em outras palavras, pondera os elementos com maiores tensões, assim como na sua vizinhança, e é considerada como “soft-kill”, ou seja, uma parcela dos elementos removidos retornará à estrutura. Esse procedimento elimina o “tabuleiro de xadrez”, pois os vazios de possíveis regiões instáveis são devolvidos graças aos seus

vizinhos. Tal procedimento pode ser interpretado da seguinte forma:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_0, & \text{se } j \in \Gamma_i \\ D_0 \cdot \eta_j(\bar{\Gamma}), & \text{se } j \in \Gamma_{GS} \\ 0, & \text{se } j \in \Gamma_{LS} \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $\bar{\Gamma} = \Gamma_{LS_i} + \Gamma_{GS_i}$ é o domínio dos elementos do problema, Γ_{LS_i} é o domínio dos elementos que devem ser excluídos efetivamente, Γ_{GS_i} o domínio dos elementos que são devolvidos a estrutura, $0 \leq \eta(\bar{\Gamma}) \leq 1$ é a função reguladora que pondera o valor da razão $\sigma_e^{VM} / \sigma_{MAX}^{VM}$ dentro do domínio $\bar{\Gamma}$ e pode eliminar o problema do “tabuleiro de xadrez” e i é a iteração atual de otimização (Almeida *et al.*, 2011).

A suavização proposta pode ser realizada através de $\eta(\bar{\Gamma})$ usando uma função linear do tipo $\eta(\bar{\Gamma}) = \alpha j + \beta$ ou uma função trigonométrica do tipo $\eta(\bar{\Gamma}) = \text{sen}(\alpha j)$, pois estas funções são contínuas e, portanto, diferenciáveis em todo o domínio $\bar{\Gamma}$ e tem imagem variando de 0 a 1, como pode ser visto na figura 2.7.

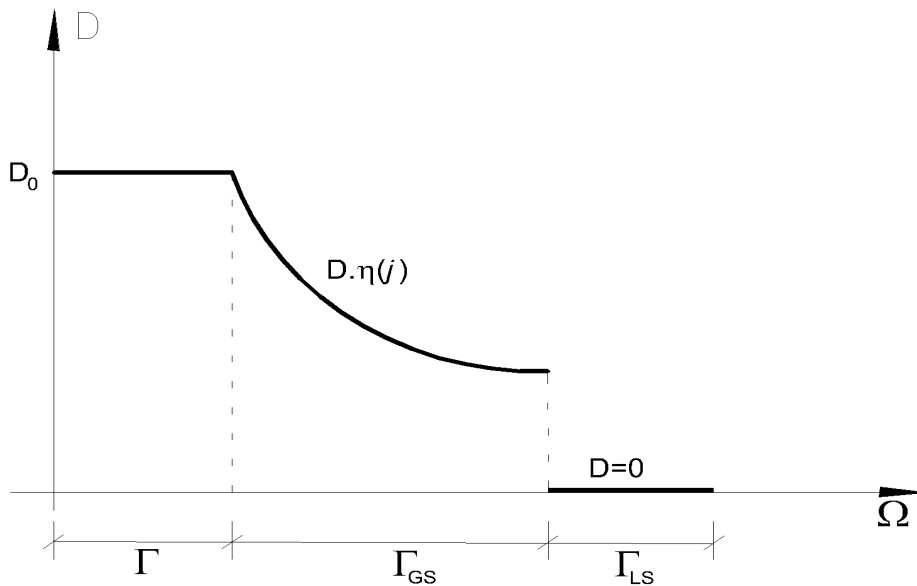


Figura 2.7 – Suavização da quantidade de elementos retirados na iteração i (Almeida *et al.*, 2011)

Com relação aos elementos flutuantes, o SESO propôs a inserção do nibbling, sendo este um algoritmo utilizado para otimizar os contornos de uma estrutura onde, ao fim de cada iteração, os valores de tensão dentro da estrutura são examinados para determinar a “necessidade” de criar uma cavidade (vazio). Se uma região de baixa tensão for observada dentro da estrutura e o valor da tensão estiver abaixo da tensão definida, inicialmente, então isto significa que há a necessidade da

cavidade (Simonetti, 2009). Assim, se um elemento satisfaz a inequação (2.4) do ESO, aquele elemento só poderá ser removido se ao menos uma de suas bordas ou lados, não estiver conectados a nenhum outro elemento da estrutura (Querin, 1997).

Quanto à dependência da malha, o SESO propôs a inserção de um filtro, consistindo em aplicar um operador matemático sobre uma função não regular, capaz de obter uma função nova, mais suave. Os filtros são mais fáceis de programar e são, computacionalmente, mais baratos (Cardoso, 2000). Assim, usa-se como parâmetro de controle desse filtro um raio de abrangência e quanto maior for o raio maior será a suavização da distribuição das tensões de Von Mises do elemento central no interior do domínio inicial (figura 2.8).

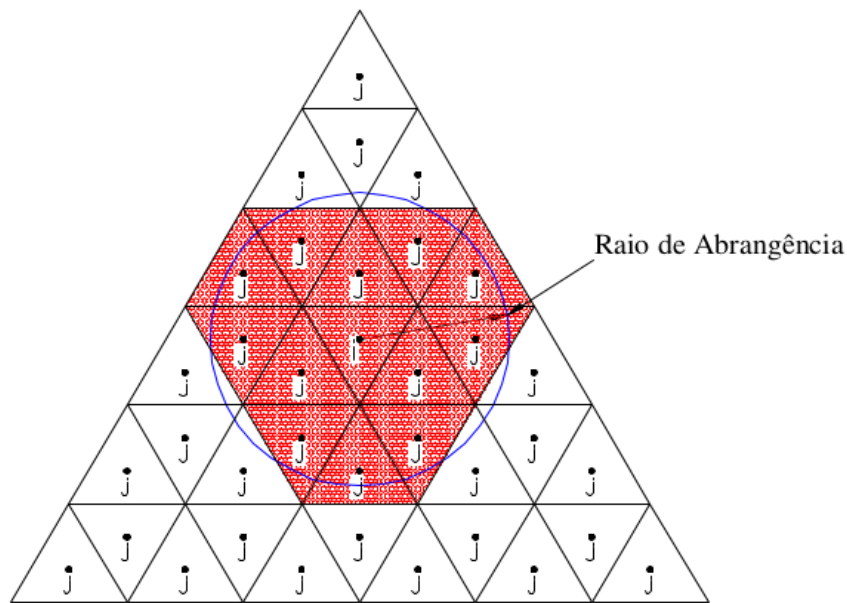


Figura 2.8 – Elemento central i sofrendo influencia dos elementos vizinhos dentro de um círculo de raio r (Simonetti, 2009).

A maneira pela qual a tensão do elemento i sofre influência das tensões dos elementos j dentro de uma circunferência de raio r é dada pela equação:

$$\sigma_i^{\text{ponderado}} = \frac{\sigma_i^{\text{vm}} \cdot A_i + \bar{w} \cdot \sum_j^{NV} \sigma_j^{\text{vm}} \cdot A_j}{A_i + \bar{w} \cdot \sum_j^{NV} A_j} \quad (2.6)$$

onde o termo $\sigma_i^{\text{ponderado}}$ é a tensão de Von Mises ponderada do elemento i , que, inicialmente, apresenta tensão de Von Mises σ_i^{vm} , A_i é a área do elemento i , A_j é a área do elemento j e σ_j^{vm} a tensão de Von Mises do elemento j . O peso \bar{w} é escrito através da equação:

$$\bar{w} = \frac{\sum_{j=1}^{NV} w_j}{NV} \quad (2.7)$$

e

$$w_j = \frac{R_{max} - R_{ij}}{R_{max}} \quad (2.8)$$

onde NV representa o número de elementos finitos cujos centróides estão no interior da circunferência de raio de abrangência R_{max} e R_{ij} é a distância entre os centróides dos elementos i e j.

Em termos matemáticos, os filtros espaciais, é uma restrição adicional à formulação do problema de otimização. Com o aumento do raio, os gradientes ficam restritos a valores menores, logo, a transição entre sólido (material) e vazio (sem material) torna-se mais suave, gerando mais elementos com tensões intermediárias (Simonetti, 2009).

2.4.5.1 – Índice de Performance

O Índice de Performance é um dos critérios de parada adotado nesse trabalho, estando este incorporado na técnica SESO. É um parâmetro adimensional que mede a eficiência do desempenho estrutural.

Liang *et al.* (2000) propôs em seu trabalho a seguinte equação para o cálculo do IP:

$$IP = \left(\frac{\sigma_{0,max}^{VM}}{\sigma_{i,max}^{VM}} \right) \cdot \frac{\rho_0 \cdot V_0}{\rho_i \cdot V_i} = \left(\frac{\sigma_{0,max}^{VM}}{\sigma_{i,max}^{VM}} \right) \cdot \frac{V_0}{V_i} \quad (2.9)$$

onde V_0 e V_i são os volumes inicial e da i-ésima iteração, $\sigma_{0,max}^{VM}$ e $\sigma_{i,max}^{VM}$ são as Tensões Máximas de Von Mises inicial e da i-ésima iteração e ρ_0 e ρ_i são as densidades inicial e da i-ésima iteração, que são iguais para materiais incompressíveis, respectivamente.

A suavização gerado devido a equação 2.5 faz com que a matriz constitutiva possa ser escrita em termos da espessura devido a uma relação linear direta entre ambos. Neste contexto, o índice de performance na equação 2.10, que leva em conta a expressão 2.5, em termos das espessuras e a função reguladora da técnica SESO, pode ser escrita como:

$$IP = \left(\frac{\sigma_{0,max}^{VM}}{\sigma_{i,max}^{VM}} \right) \cdot \frac{A_0 \cdot t}{\sum_{j=1}^{NE} A_j \cdot t_j} = \left(\frac{\sigma_{0,max}^{VM}}{\sigma_{i,max}^{VM}} \right) \cdot \frac{A_0 \cdot t_0}{\sum_{j=1}^{NE} A_j \cdot t_j \cdot \eta(j)} \quad (2.10)$$

onde t_0 e t_j são, respectivamente, a espessura inicial e a espessura do j-ésimo elemento na i-ésima iteração e A_0 é a área inicial do elemento. Assim, a definição da topologia ótima é verificada por esse índice de performance, sendo este um fator de monitoramento da estrutura. Se esse índice cai de forma acentuada, é uma forte indicação de que passou por uma configuração local ideal ou estacionário. Entretanto, não há garantia de que este seja uma topologia ótima final, mas, sim, uma configuração ideal para um projeto de engenharia.

Portanto, o SESO nada mais é do que uma melhora do ESO, com a inclusão de funções matemáticas que melhoram o processo de discretização da estrutura na obtenção da topologia ótima, sendo esta a técnica adotada neste trabalho para a resolução dos problemas de otimização.

Capítulo 3 – Formulação dos Elementos Finitos

3.1 – Elementos Finitos Utilizados

Para as análises de otimização foi utilizado o Método dos Elementos Finitos. Para cada tipo de análise, linear e não linear, um tipo de elemento finito foi empregado, de acordo com duas formulações distintas: o elemento finito FFT, triangular, de alta ordem e advindo da formulação livre (Bergan e Felippa, 1985), para as análises lineares, e o elemento finito QST, também triangular e baseado na energia potencial total estacionária (Greco *et al.* 2007), para as análises não lineares.

3.2 – O elemento Finito FFT (Free Formulation Triangle)

A formulação desse elemento finito é advinda da formulação livre, sendo este um elemento finito de 3 nós, que pode ser definido de acordo com a figura 3.1.

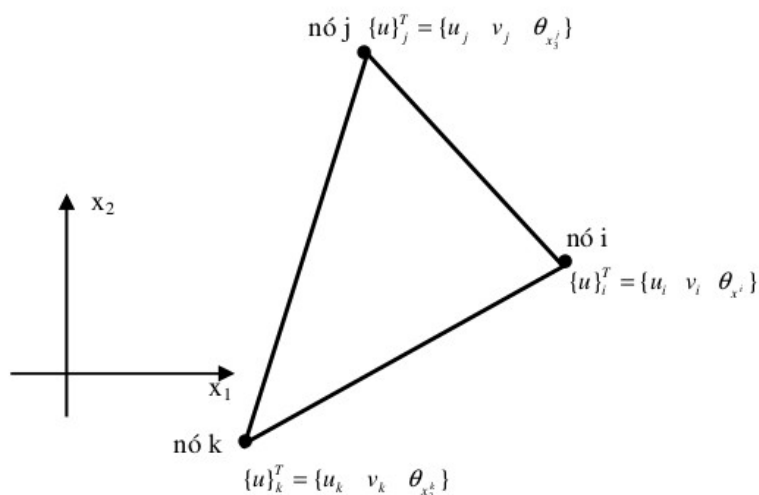


Figura 3.1 – Geometria e os 9 graus de liberdade do FFT no sistema local x_1x_2

Este elemento possui em sua formulação um parâmetro α , que afeta uma das parcelas da matriz de rigidez e é, dessa maneira, um fator de escala nas funções de forma dos termos relacionados com os graus de liberdade rotacionais. Se esse parâmetro for igual a 0, recai-se no elemento clássico da literatura, o CST (Constant Strain Triangle).

Todo o desenvolvimento desse elemento aqui estudado foi baseado no trabalho de Bergan e Felippa (1985).

3.3 – O elemento Finito QST (Quadratic Strain Triangle)

A formulação desse elemento utiliza o princípio da energia potencial total estacionária de um sistema qualquer analisado. Dentre todas as configurações possíveis num sistema de corpo flexível com forças atuantes, aquela correspondente ao valor máximo (ou mínimo) do potencial total Π é a configuração equilibrada. O funcional de energia Π é uma função da energia de deformação total U_t e da energia potencial oriunda do somatório das forças externas $P = \sum FX$ no volume inicial do corpo V analisado (Greco & Coda, 2006).

O funcional de energia Π é dado por:

$$\Pi = U - P \quad (3.1)$$

onde:

$$U = \int_V u dV = \int_V \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV \quad (3.2)$$

O desenvolvimento do método numérico parte da minimização desse funcional, da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = \int_V \frac{\partial u}{\partial X} dV - F = 0 \quad (3.3)$$

A equação 3.11 mostra a natureza não linear da formulação, uma vez que $u = u(\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \gamma_{XY})$ (Greco & Coda, 2006). A variável X representa posições nodais, tanto horizontais quanto verticais. Assim, essa equação representa o conjunto de equações de equilíbrio não linear para cada posição nodal. A solução do conjunto de equações representado por (3.3) representa o equilíbrio da estrutura na posição deformada, para condição de máxima ou mínima energia, e pode ser resolvido diretamente por algoritmos do tipo quasi-Newton. Porém, uma estratégia mais estável é a solução das equações por algoritmos do tipo Newton-Raphson, sendo este o escolhido para a resolução das equações de natureza não linear.

O QST (Quadratic Strain Triangle) é um elemento finito de chapa que possui geometria triangular e um total de 10 nós, de acordo com a figura 3.2.

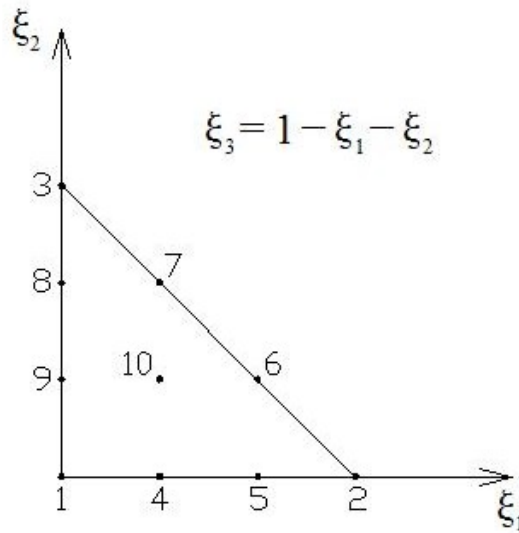


Figura 3.2 – Pontos nodais do elemento QST

Os parâmetros adimensionais ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 são as coordenadas homogêneas do elemento triangular (ou coordenadas triangulares) dadas por $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$

Os deslocamentos são expressos em aproximações cúbicas. Para satisfazer a compatibilidade de deslocamentos entre os elementos, a função de deslocamento deve depender apenas dos deslocamentos dos nós do lado em questão. Como a função é cúbica, quatro nós por face do elemento são necessários, além de um nó em seu interior. Esse nó é necessário para manter a integridade do polinômio, pois se o polinômio não estiver completo a rigidez terá valores indesejados. Além disso, o nó deve estar, preferencialmente, no centroide do elemento (Rades, 2006).

A expressão do deslocamento nodal tem a seguinte forma, de acordo com (3.4):

$$u = \sum_{i=1}^{10} \varphi_i u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{10} \varphi_i v_i \qquad (3.4)$$

onde:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2) \qquad (3.5)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2) \qquad (3.6)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \xi_3 (3\xi_3 - 1)(3\xi_3 - 2) \quad (3.7)$$

$$\varphi_4 = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_1 - 1) \quad (3.8)$$

$$\varphi_5 = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_2 - 1) \quad (3.9)$$

$$\varphi_6 = \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3\xi_2 - 1) \quad (3.10)$$

$$\varphi_7 = \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3\xi_3 - 1) \quad (3.11)$$

$$\varphi_8 = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_3 (3\xi_3 - 1) \quad (3.12)$$

$$\varphi_9 = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_3 (3\xi_1 - 1) \quad (3.13)$$

$$\varphi_{10} = 27 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \quad (3.14)$$

As funções de forma do elemento QST podem ser encontradas em Soriano (2003) e Assan (2003). As derivadas não nulas das funções de forma em relação às coordenadas triangulares ξ_1 e ξ_2 são mostradas nas equações a seguir. Os cálculos são apresentados por Marques (2006). A importância das derivadas está relacionada com o cálculo do gradiente da função mudança de configuração.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} = \frac{27}{2} \xi_1^2 - 9\xi_1 + 1 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} = \frac{27}{2} \xi_2^2 - 9\xi_2 + 1 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} = -\frac{11}{2} + 18\xi_1 + 18\xi_2 - \frac{27}{2} \xi_1^2 - 27 \xi_1 \xi_2 - \frac{27}{2} \xi_2^2 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} = \frac{27}{2} \xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_2 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} = \frac{9}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \xi_1} = \frac{9}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \xi_2} = 27 \xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_1 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial \xi_1} = -\frac{9}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial \xi_2} = 36\xi_2 - \frac{9}{2} - 27\xi_1\xi_2 + \frac{9}{2}\xi_1 - \frac{81}{2}\xi_2^2 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \varphi_7}{\partial \xi_1} = -\frac{45}{2}\xi_2 + 27\xi_1\xi_2 + 27\xi_2^2 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \varphi_7}{\partial \xi_2} = 9 - \frac{45}{2}\xi_1 - 45\xi_2 + \frac{27}{2}\xi_1^2 + 54\xi_1\xi_2 + \frac{81}{2}\xi_2^2 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \varphi_8}{\partial \xi_1} = -45\xi_1 + \frac{81}{2}\xi_1^2 + 54\xi_1\xi_2 + 9 - \frac{45}{2}\xi_2 + \frac{27}{2}\xi_2^2 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \varphi_8}{\partial \xi_2} = -\frac{45}{2}\xi_1 + 27\xi_1^2 + 27\xi_1\xi_2 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \varphi_9}{\partial \xi_1} = -\frac{81}{2}\xi_1^2 + 36\xi_1 - \frac{9}{2} - 27\xi_1\xi_2 + \frac{9}{2}\xi_2 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \varphi_9}{\partial \xi_2} = -\frac{9}{2}\xi_1 (3\xi_1 - 1) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \xi_1} = 27\xi_2 - 54\xi_1\xi_2 - 27\xi_2^2 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \xi_2} = 27\xi_1 - 54\xi_1\xi_2 - 27\xi_1^2 \quad (3.31)$$

As integrações numéricas $\int_V \frac{\partial u}{\partial X_i} dV$ e $\nabla g(X_0) = \int_V \frac{\partial^2 u}{\partial X_j \partial X_i} dV$, apresentadas nas equações (3.32) e (3.33), são calculadas numericamente utilizando-se 7 pontos de Hammer por elemento finito (Greco & Coda, 2006).

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial X_i} dV = \sum_{\eta=1}^7 \frac{\partial u(\xi, X_i)}{\partial X_i} \omega_\eta \det(A_0(\xi_\eta)) \quad (3.32)$$

$$\nabla g(X_0) = \int_V \frac{\partial^2 u}{\partial X_j \partial X_i} dV = \sum_{\eta=1}^7 \frac{\partial^2 u(\xi, X_i)}{\partial X_j \partial X_i} \omega_\eta \det(A_0(\xi_\eta)) \quad (3.33)$$

3.4 – Método de Newton Raphson

Quando se considera uma análise linear, pode-se utilizar a seguinte relação:

$$K.u = f \quad (3.34)$$

A equação 3.34 corresponde a uma análise linear pois a resposta dos deslocamentos é uma função linear do vetor de forças aplicado f (Bathe, 1996). Assim, para uma análise não linear, a equação 3.34 é reescrita da seguinte forma:

$$K(u).u = f \quad (3.35)$$

Nota-se que a matriz de rigidez K passa a ser dependente dos deslocamentos. Logo, no equilíbrio, tem-se:

$$K(u).u - f \simeq 0 = g(u) \quad (3.36)$$

Para sintetizar de forma resumida o método, dada uma barra de área A e módulo de elasticidade E , submetida a uma carga W e que apresenta um deslocamento w , tem-se:

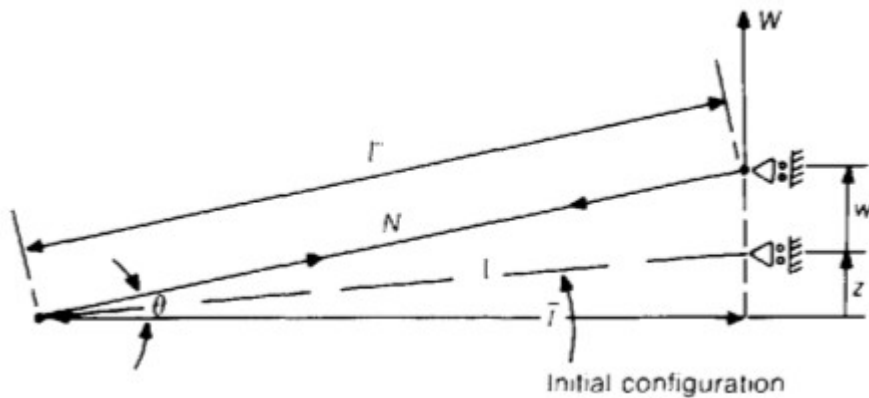


Figura 3.3: Problema de barra simples com um grau de liberdade (Crisfield, 2000)

Dessa maneira, a relação entre a carga W e o deslocamento w é dado por:

$$W = \frac{EA}{l^3} \left(z^2 w + \frac{3}{2} z w^2 + \frac{1}{2} w^3 \right) \quad (3.37)$$

Reescrevendo:

$$g = \frac{EA}{l^3} \left(z^2 w + \frac{3}{2} z w^2 + \frac{1}{2} w^3 \right) - W = 0 \quad (3.38)$$

O processo iterativo é obtido através da expansão de 1ª ordem da série de Taylor:

$$g_n \approx g_0 + \frac{dg_0}{dw} \delta w + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 g_0}{dw^2} (\delta w)^2 \right) \quad (3.39)$$

Logo, dada uma estimativa inicial w_0 , ao qual $g_0(w_0) \neq 0$, e com base nas informações acima, a figura 3.4 pode então representar, de forma resumida, o método de Newton-Raphson:

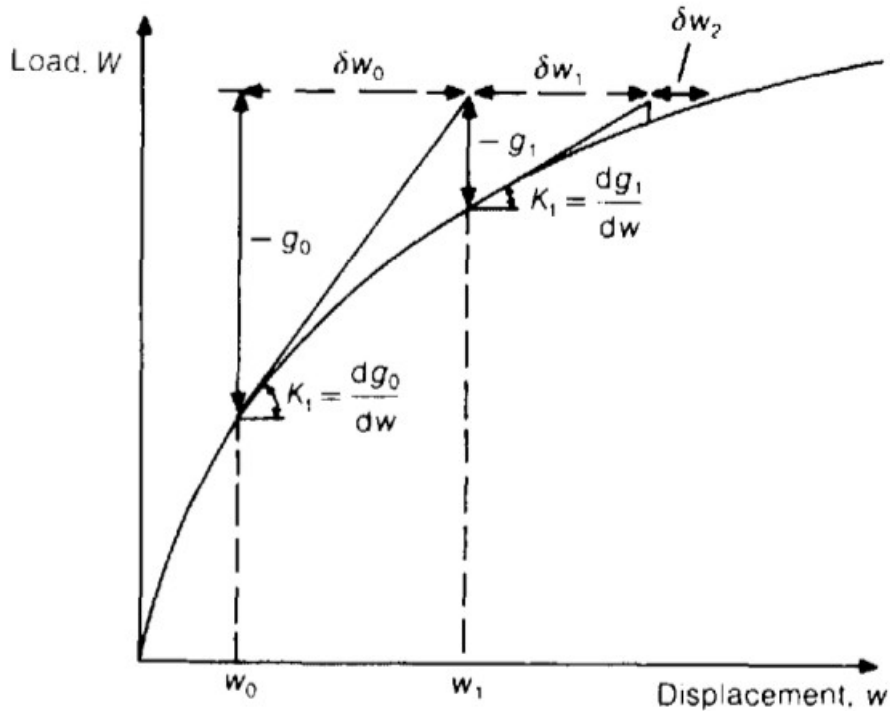


Figura 3.4: Método de Newton-Raphson (Crisfield, 2000)

Dessa forma, o processo iterativo é contínuo até que haja a convergência da rigidez em relação aos deslocamentos. Esse método é muito utilizado para análises não lineares e, dessa forma, é também utilizado nesse trabalho para a obtenção dos resultados do QST.

3.5 – Comparativo entre FFT e QST

Apesar de ambos serem elementos triangulares, algumas diferenças além das funções de forma poderão ser observadas ao longo desse trabalho. Assim, é conveniente listar as principais vantagens e desvantagens de cada elemento, enquanto que nos capítulos seguintes, essas características ficarão mais evidentes.

Primeiramente, é interessante mostrar a discretização dos elementos ao longo do domínio inicial a fim de se verificar a quantidade de nós de cada elemento de acordo com a distribuição no modelo. Logo, considerando uma chapa quadrada de tamanho e espessura quaisquer, com 32 elementos, tem-se:

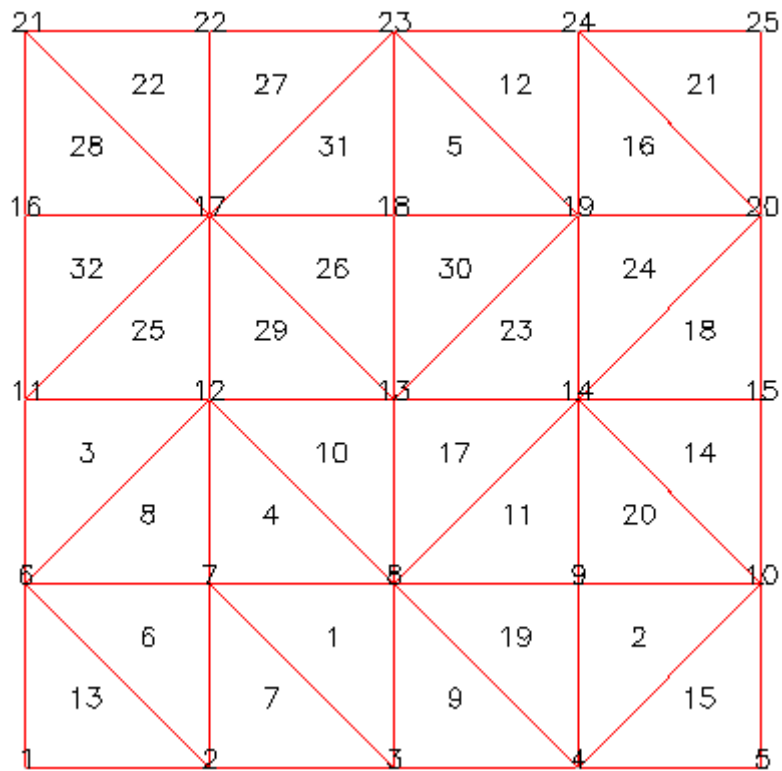


Figura 3.5: Exemplo de malha gerada pelo programa de otimização com 32 elementos para o FFT¹

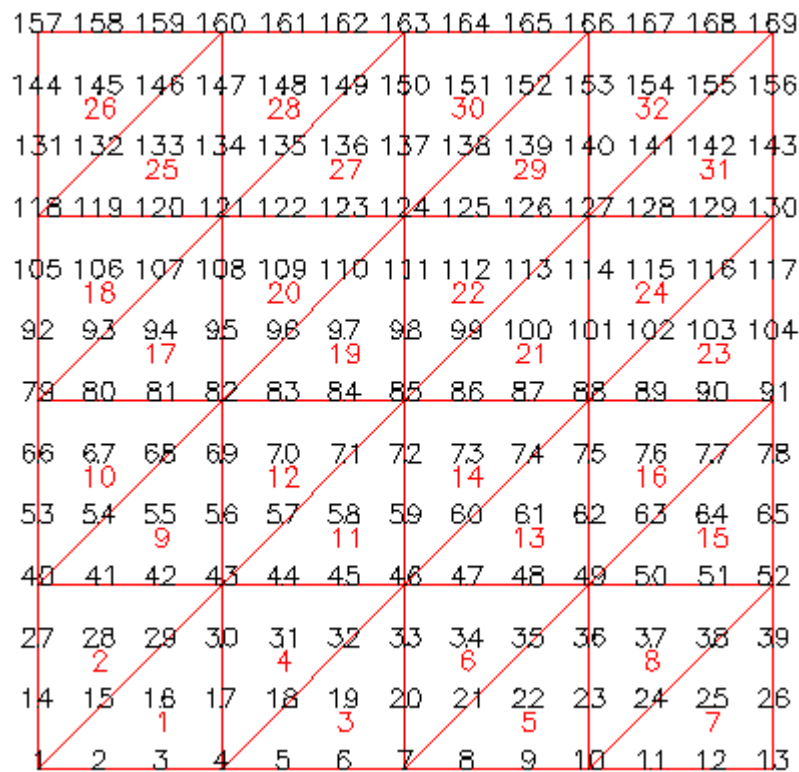


Figura 3.6: Exemplo de malha gerada pelo programa de otimização com 32 elementos para o QST²

¹ Os números ao centro do elemento fazem referência ao número de identificação do elemento.

² Os números destacados em vermelho fazem referência ao número de identificação do elemento.

Como cada elemento do FFT possui apenas 3 nós, é garantido um menor tempo de processamento comparado ao QST, além da facilidade de implementação uma vez que as funções de forma são mais simples. Consequentemente, essas características são desvantagens para o QST, uma vez que ele possui uma teoria mais complexa que o FFT e demanda maior tempo de processamento para o cálculo de sua rigidez. Apesar disso, os campos de deslocamentos e tensões são melhores definidos em relação ao FFT, obtendo assim a topologia ótima em poucas iterações de forma geral, e possui uma melhor precisão das tensões comparado ao FFT, para malhas com mesma quantidade de elementos. Além disso, para se alcançar a topologia ótima final, é necessário uma malha mais refinada para o FFT, ou, em outras palavras, como a aproximação do QST é melhor, pode-se usar menos elementos e ainda assim obter respostas mais próximas da exata. Em contrapartida, há um grande uso de memória para o processamento de malhas geradas pelo QST, além de malhas muito refinadas não ser possível discretizar devido a um limitador do uso de memória pelo programa.

Assim sendo, cada elemento possui suas vantagens e desvantagens. Logo, de acordo com as especificações de projeto, deve-se ter um certo cuidado ao escolher qual elemento utilizar para a análise em específico, lembrando que uma análise de elemento finito linear pode resultar em falsos modelos ideais e portanto, deve ser procedido com certa cautela (Gea e Luo, 2001). Exemplos contendo essas diferenças serão vistos nos capítulos seguintes.

3.6 – Processos de Otimização e os Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é amplamente utilizado na otimização de estruturas, mas não é o único. Métodos, como o dos Elementos de Contorno, também podem ser utilizados e foram e estão sendo estudados por Cervera (2003), Cervera e Trevelyan (2005) e Marczak (2006). O Método dos Elementos Finitos é um método numérico natural para o uso na otimização topológica em função da característica do método, baseado em parâmetros de domínio, o que facilita o desenvolvimento de técnicas de otimização associados aos valores de densidade de material de cada ponto deste domínio. Exemplo disto é a extensa quantidade de trabalhos publicados nesta linha ao longo das últimas décadas e citadas nos itens anteriores deste projeto. Entretanto, um grande gargalo que surge da aplicação deste método junto a otimização topológica é sua forte dependência com respeito à malha de elementos finitos, ocasionando muitas vezes regiões de projeto não factíveis e instáveis (Almeida, 2009).

O processo de otimização, em conjunto com elementos finitos, é abordado de forma iterativa, onde a cada iteração uma porcentagem de elementos é removido, de acordo com a técnica

de otimização utilizada, até que não haja mais a remoção de elementos e a topologia ótima seja finalmente alcançada. Sendo a análise linear ou não linear, o processo iterativo de otimização ocorre de igual forma, mas de acordo com os resultados parciais das malhas geradas, ou seja, a Tensão Máxima de Von Mises proveniente de cada iteração. A partir disso, pode-se então enunciar um fluxograma de atividades para a realização do processo de otimização, como visto na figura 3.7:

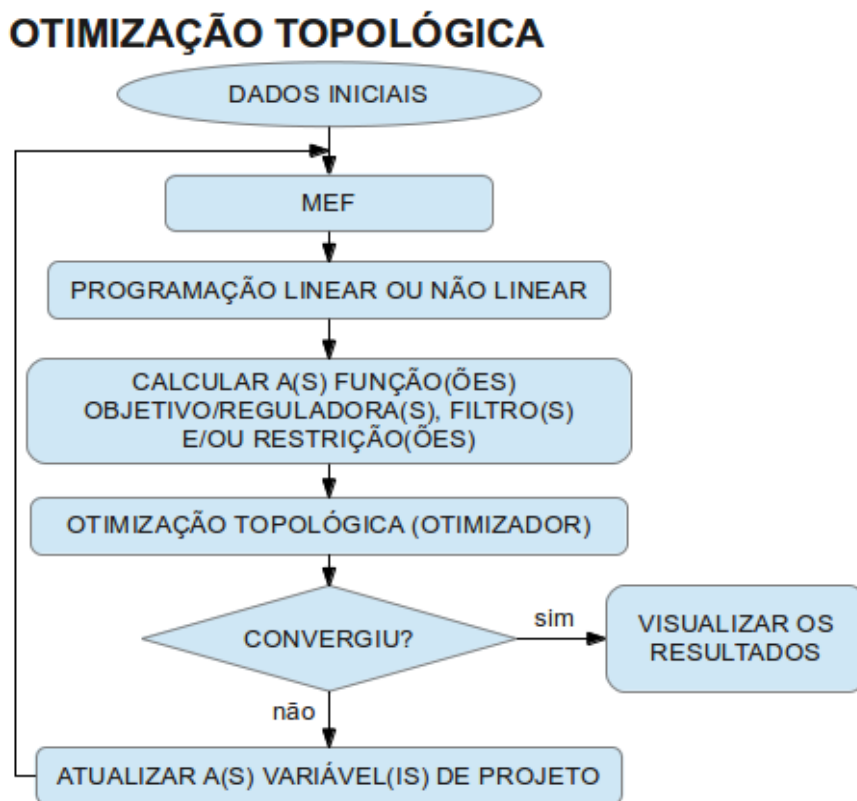


Figura 3.7 – Fluxograma de atividades para otimização topológica

Logo, partindo dos dados iniciais, a malha é gerada para que a análise linear ou não linear seja verificada. É importante ressaltar que praticamente não há convergência em uma única iteração de otimização, uma vez que a análise do modelo é necessária a fim de verificar a integridade e a performance da nova estrutura. Por isso, as funções, que regem o problema, são calculadas e o processo de remoção de elementos pelo otimizador é iniciado. Caso não haja a convergência, os parâmetros de entrada relacionados à otimização são atualizados e o processo iterativo é recommçado até a obtenção da esperada topologia ótima final.

3.7 – A Otimização e a Não Linearidade Geométrica

Quando se considera imperfeições ou alterações geométricas em análises estruturais, já não existe mais linearidade na verificação do deslocamento ocorrido devido a um determinado

carregamento. Essa mudança de geometria, comparada a uma configuração inicial prestabelecida, pode ser devido a um erro de confecção da peça estrutural, por um erro de fixação do material de acordo com sua finalidade ou devido a deslocamentos e rotações da configuração original provocados por um carregamento qualquer. Ao se considerar que a estrutura sofre deslocamentos significativos de acordo com a carga aplicada, podem surgir problemas de instabilidade da estrutura e, dessa forma, aparecerão esforços não previstos inicialmente. Assim, faz-se necessária uma verificação denominada Análise Não Linear Geométrica.

Nas análises estruturais, empregando-se o método dos elementos finitos, a maioria dos programas que permitem considerar a não-linearidade geométrica se baseiam em alguma forma de descrição lagrangiana do equilíbrio (Paula, 2001). Assim, dada uma estrutura com um problema inicial de geometria, é necessário utilizar uma formulação que possibilite sua resolução.

No que diz respeito à otimização, as formulações implementadas e utilizadas nas análises trabalham em conjunto com os métodos de remoção de elementos. Sendo a análise linear ou não linear, a remoção de elementos pela otimização ocorre de forma igual, variando apenas o tipo de elemento finito empregado.

Em uma análise não linear geométrica, pode-se, então, enunciar o seguinte procedimento:

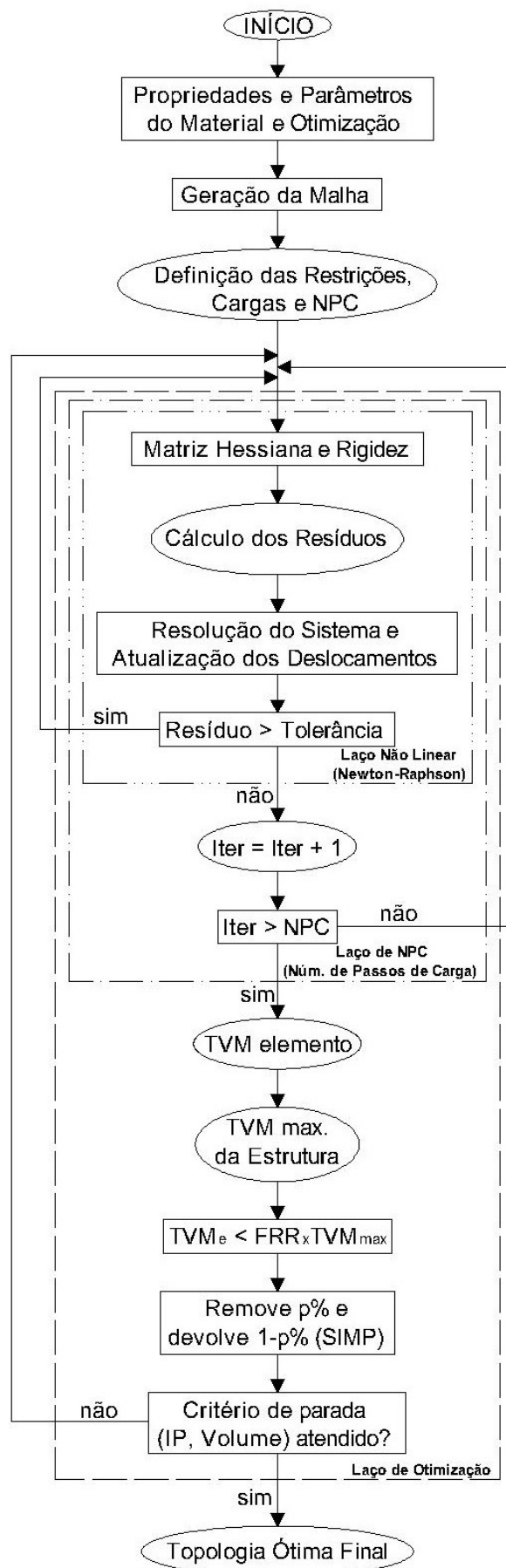


Figura 3.8 – Fluxograma de Otimização envolvendo a Não Linearidade Geométrica

De acordo com os parâmetros de entrada, define-se a malha e as condições de contorno. A matriz Hessiana é calculada e, de forma conjunta, a matriz de rigidez é determinada. O resíduo, ou erro do processo incremental, é calculado e há a resolução do sistema para a determinação dos deslocamentos. Caso o erro seja menor que a tolerância imposta inicialmente, passa-se para o próximo passo de carga. Caso contrário, a matriz de rigidez é atualizada a partir dos deslocamentos obtidos e o processo iterativo não linear (Newton Raphson) é reiniciado. Após o término de todos os passos de carga, há uma análise da Tensão de Von Mises do elemento e da Tensão Máxima de Von Mises da estrutura. Assim, verifica-se a equação 2.4 e a remoção de elementos ocorre de acordo com a técnica SESO. Finalmente, de acordo com o(s) critério(s) de parada estabelecidos (IP, Volume Máximo), ou pelo simples não atendimento a equação, a topologia final é definida.

Neste trabalho, o critério de remoção de elementos se dá através das tensões, ou seja, os elementos que possuem baixos valores comparados a tensão máxima atuante são retirados. Dessa forma, tanto para as análises lineares e não lineares, o otimizador apenas remove os elementos que não satisfazem o critério de tensões preestabelecido. Ainda assim, é interessante e importante observar que os modelos ótimos de análises linear e não linear nem sempre se verificam da mesma maneira. Isso se dá devido à diferença de distribuição de tensões entre os elementos finitos ao longo das iterações que fazem a remoção desses elementos e também pela natureza não linear de algumas estruturas, de acordo com a geometria e condições de contorno inicial. A primeira teoria é uma consequência da diferença do tipo de elemento finito utilizado na implementação do programa computacional para análises lineares e não lineares e a segunda leva em conta a excentricidade do carregamento, o tipo de apoio utilizado nas condições de contorno e/ou as imperfeições iniciais da peça estrutural.

O programa *UniOM v1.0 (Units for Optimization Models)* foi desenvolvido a partir de dois tipos de aplicativos: o Fortran, ambiente onde foram implementadas todas as rotinas de cálculo, e o Delphi, programa onde foi escrita a interface gráfica do Usuário (Graphical User Interface, ou GUI), visando facilitar a interação do usuário com os cálculos para a obtenção e interpretação dos resultados. Assim, a GUI permite que, a partir do fornecimento dos dados pelo usuário, sejam criados os arquivos que serão processados pelas rotinas de cálculo (denominados arquivos de entrada), para que, após interpretados, possam gerar as respostas (denominados arquivos de saída) que serão novamente lidas pela GUI, fazendo com que os resultados sejam exibidos em forma gráfica ou de tabelas, facilitando o entendimento dos dados.

4.1 – FORTRAN

O Fortran é uma linguagem de programação voltada para aplicações de caráter científico e matemático, apesar também ser utilizada em outras áreas (Kass, 2007). Seu nome é uma abreviação de *Formula Translator*, sendo esta a primeira linguagem de programação de alto nível. (Fernandes, 2008).

O trabalho de desenvolvimento do Fortran iniciou-se em 1950, nos laboratórios da IBM, onde foram criadas muitas versões desde então. Por convenção, uma versão do Fortran era denotada pelos dois últimos algarismos relativos ao ano do lançamento da versão estável do mesmo. As versões Fortran 66, Fortran 77, Fortran 90 e Fortran 95 ainda são bem conhecidas na comunidade científica. Uma característica básica dessa linguagem é a velocidade de cálculo, fazendo com que muitos códigos ainda permaneçam escritos em Fortran, mesmo existindo outras linguagens mais completas como o C, C++, C# ou Java. A estabilidade também é outro ponto forte, fazendo com que essa linguagem ainda seja bastante usada por diversos profissionais, além do meio acadêmico.

Mesmo com muitos códigos de cálculo escritos em versões antigas do Fortran, não houve a necessidade de reescrevê-los em outras linguagens existentes devido também à facilidade de interação com outras interfaces, como é o caso desse trabalho. Ainda assim, é muito importante que profissionais das áreas de matemática, física e engenharia tenham, pelo menos, noções básicas sobre a mesma. Além disso, o Fortran é multiplataforma e existem editores e compiladores desta linguagem para outros sistemas operacionais além da Microsoft Windows, como o GNU/Linux, MacOS e FreeBSD.

O compilador utilizado nesse estudo foi o *Compaq Visual Fortran*, cuja versão é a 6.6, para

sistema operacional Windows, e que utiliza a versão 77 da linguagem Fortran.

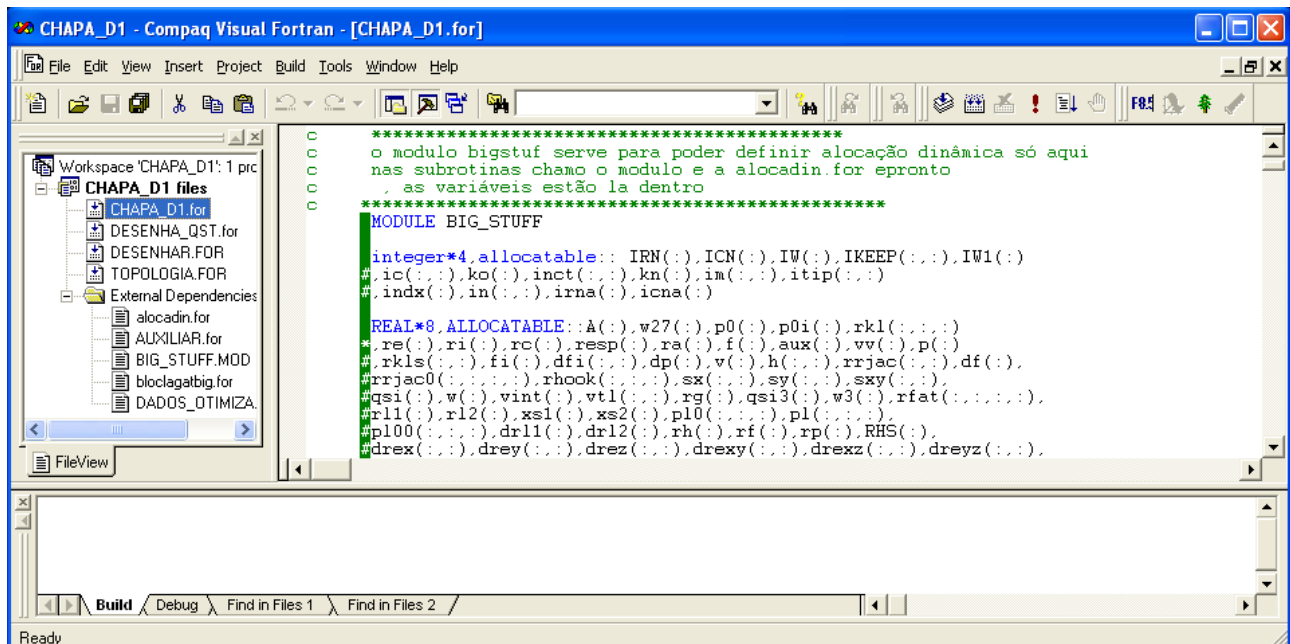


Figura 4.1: Compaq Visual Fortran – Editor e Compilador

4.2 – Borland DELPHI

O Delphi pode ser definido como a associação de um Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE), uma linguagem moderna de programação (o Object Pascal) e uma Biblioteca de Componentes Visuais (VCL), que constituem os objetos (Lischner, 2000).

A programação em Delphi é modulada, baseada em unidades (Units), de forma que estas podem ser importadas ou exportadas entre diferentes projetos, ou seja, várias unidades podem ser agrupadas em um único projeto, trabalhando em conjunto, ou, da mesma forma, vários projetos podem ser reunidos, cada qual contendo uma única unidade.

Essas unidades representam toda a programação em modo texto, onde pode-se editar os códigos necessários para o funcionamento do programa. Porém, cada unidade pode ou não estar atrelada aos formulários (Forms), que permite ao usuário verificar graficamente os comandos implementados nas unidades, auxiliando no bom funcionamento do programa e facilitando a detecção de possíveis erros de programação.

A estrutura do Delphi é orientada a objetos e eventos. Cada objeto possui propriedades que o caracterizam e eventos que a ele são associados. O momento em que determinado código implementado é ativado pelo programa depende do evento em que esse código está inserido. Assim, a elaboração de um aplicativo em Delphi pode ser dividida em duas partes: tempo de projeto e tempo de execução. O primeiro está intimamente relacionado ao desenvolvedor, e diz respeito às

modificações que podem ser atribuídas aos componentes VCL ou ao código-fonte da linguagem. O segundo se relaciona ao usuário final, e diz respeito à execução das tarefas atribuídas aos componentes VCL, definidas em tempo de projeto, por dispositivos de entrada de dados (como mouse e teclado) ou por rotinas específicas associadas ao sistema operacional (Fernandes, 2008).

As versões do Delphi são separadas de acordo com suas particularidades. A versão Standard é uma versão básica que possui uma quantidade limitada de componentes VCL. A versão Professional foi desenvolvida com enfoque em programação profissional, possuindo, além dos recursos básicos da versão Standard, suporte a programação de banco de dados, servidores Web e outras ferramentas adicionais. A versão Enterprise, também conhecida como Client/Server, possui enfoque em programação para aplicativos empresariais e possui ferramentas como SQL Links para conexões nativas Client/Server BDE, componentes para internet, componentes ADO e Interbase Express, suporte a aplicativos multiusuários, dentre outras. Convém ressaltar que as versões possuem a mesma definição de ambiente integrado, com capacidade expansiva de sua VCL original.

4.2.1 – Interface de Desenvolvimento do Delphi e componentes

Também conhecido como IDE (Integrated Development Environment), o ambiente favorece uma boa interação entre o usuário e o computador através das ferramentas que possui, diretamente aplicadas na implementação dos códigos do programa.

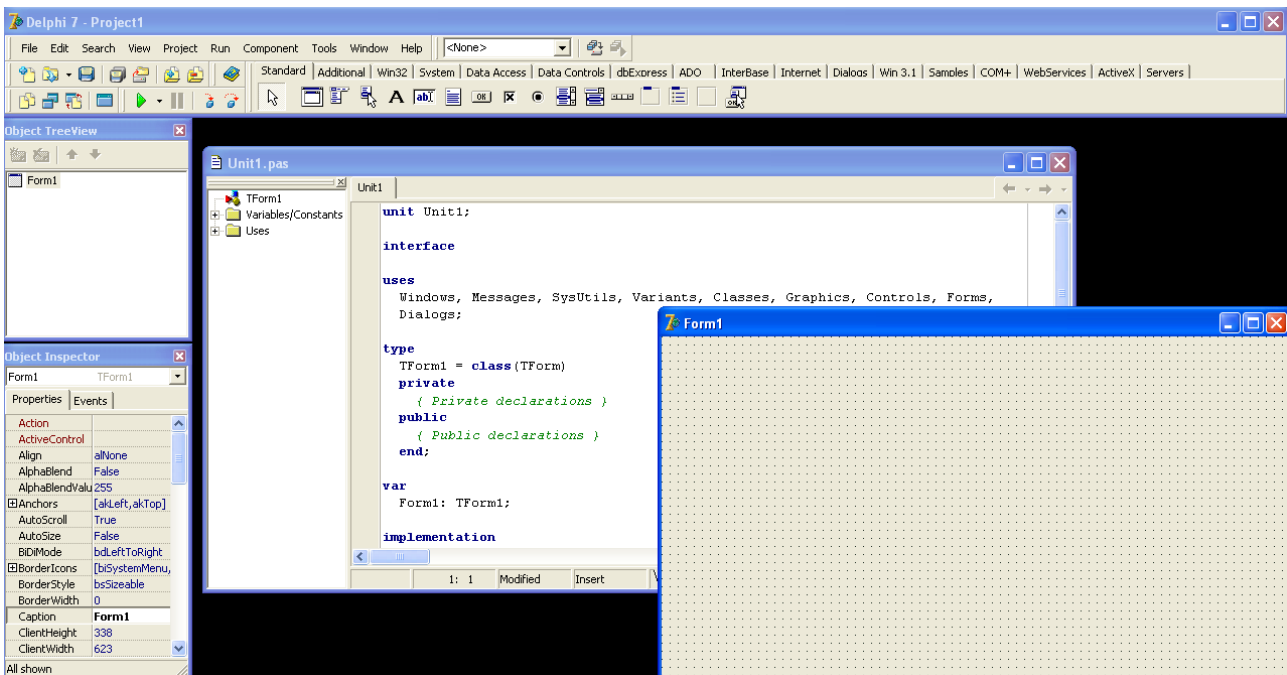


Figura 4.2: Borland Delphi – Editor e Compilador

Nesse ambiente os códigos nas chamadas Units são implementados, geralmente vinculados a formulários (Forms), os quais agregam os componentes que se deseja inserir no programa. Esses componentes podem ser botões, barra de menus, caixas de texto, entre outros. Cada componente possui suas próprias características e propriedades que podem ser modificadas inicialmente ou ao longo da execução do programa, de forma a facilitar para o programador. Uma vez que esses componentes forem inseridos, funções, métodos ou eventos podem ser ativados em tempo de execução ou de projeto a fim de se obter os resultados desejados.

4.3 – UniOM v1.0 (Units for Optimization Models)

O programa *UniOM v1.0* foi desenvolvido para o auxílio na análise dos resultados. A entrada de dados no programa de otimização é feita através de arquivo-texto editável. Porém, vários desses arquivos são necessários, resultando em uma reação em cadeia na qual os arquivos de saída de um módulo consiste no arquivo de entrada do módulo seguinte até que se obtenha o arquivo final de saída com os resultados. Nem sempre os arquivos de saída intermediários se encontram formatados para a entrada do próximo módulo. Assim, o programa consiste em uma interface capaz de unir todos os módulos de cálculo para gerar os resultados desejados, assim como organizar todos os arquivos intermediários de saída e formatá-los para serem os devidos arquivos de entrada do próximo módulo. Dessa forma, basta apenas informar ao programa os dados iniciais necessários do problema e verificar a integridade dos arquivos finais de saída, que podem ser manipulados nos programas de análise desejados a fim de obter os gráficos e/ou as imagens dos resultados.



Figura 4.3: Créditos do programa UniOM v1.0

O programa possui poucas telas, sendo que a maioria dos dados de entrada do programa foram concentrados na tela principal do mesmo. Uma rápida tela de apresentação é apresentada, como mostrado na figura 4.4.

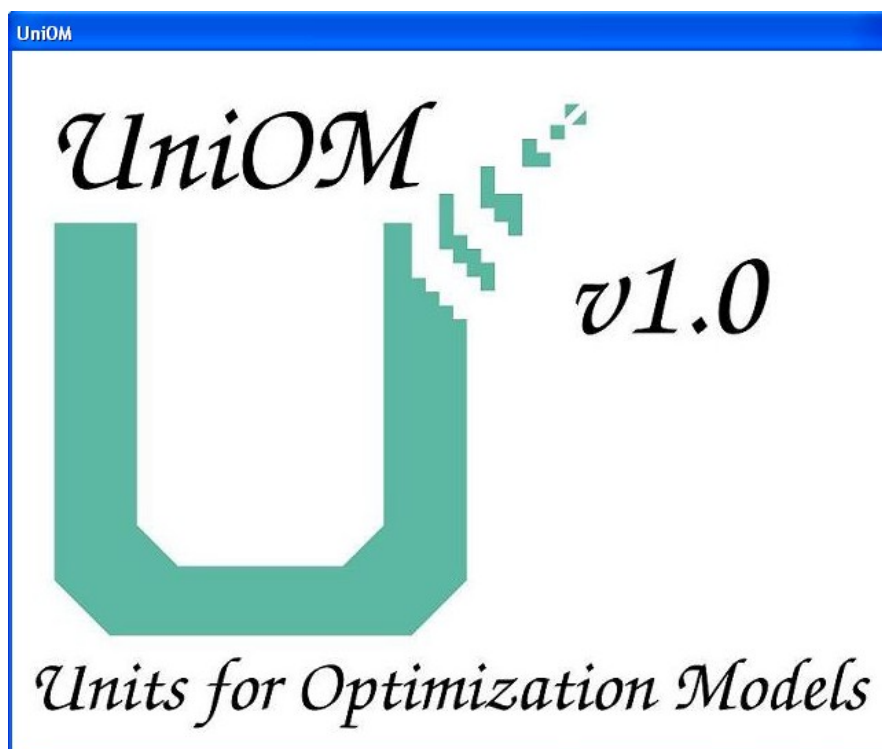


Figura 4.4: Tela de Apresentação do programa UniOM v1.0

A figura 4.5 mostra a janela principal do programa. Aqui são definidos a maior parte dos parâmetros do problema, como o tipo de análise, a malha de elementos, as coordenadas dos nós do modelo, os dados do material, a quantidade de passos de carga, as restrições de nós e os pontos de carregamento. Ao final dessa etapa, a malha de elementos finitos já estará definida, restando apenas os dados de entrada da otimização.

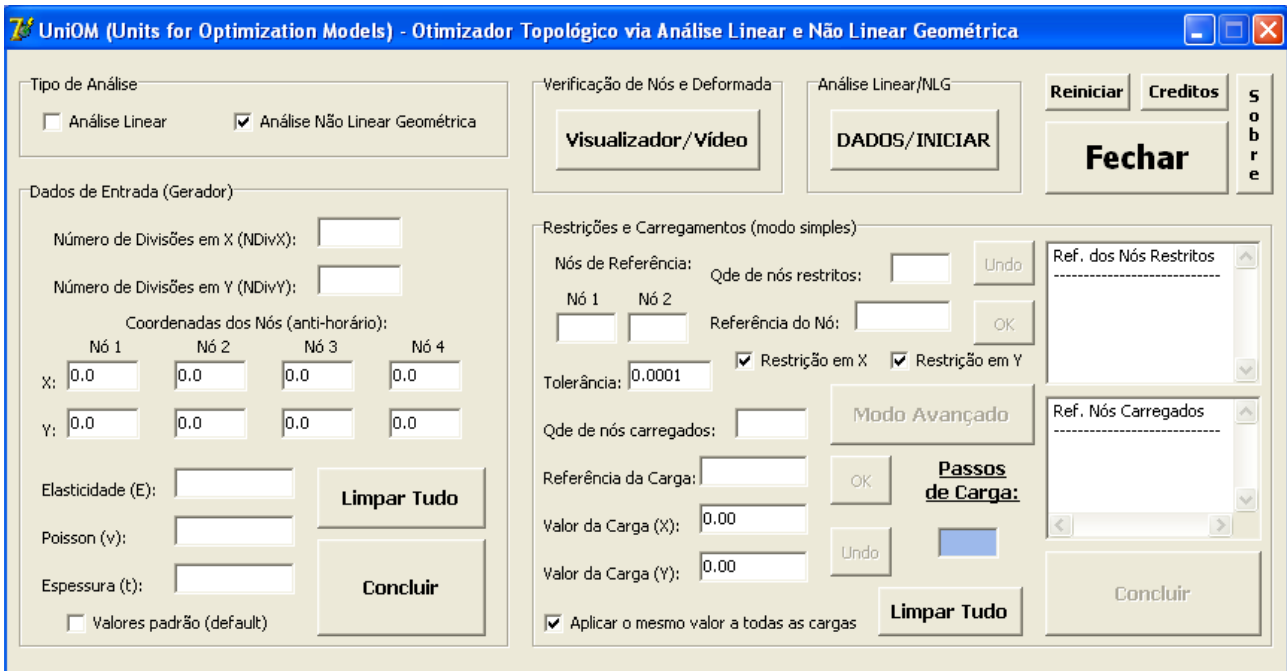


Figura 4.5: Janela Principal do programa UniOM v1.0

Nesta etapa do programa, os parâmetros de otimização também são definidos. Esses parâmetros regulam a taxa de remoção de elementos por iteração, incluindo a porcentagem de elementos que serão devolvidos à estrutura, ou seja, a calibração de todo o processo evolutivo.

4.4 – Estrutura de dados e pseudo-código

A execução do programa é procedida da seguinte forma:

Primeiro, os dados do modelo são coletados e armazenados. Assim, a malha é definida e a geometria do modelo assim como os parâmetros do material são determinados. Logo após, é necessário informar o número de passos de carga, a quantidade de nós restritos e o carregamento nos nós. A precisão dos deslocamentos obtidos pela solução do modelo é controlada pela tolerância. Então, os parâmetros de otimização são escolhidos de acordo com o tipo de problema e a topologia final seja obtida. Para simplificar todo esse processo de otimização, pode-se enunciar um fluxograma que descreve o procedimento do programa (figura 4.6).

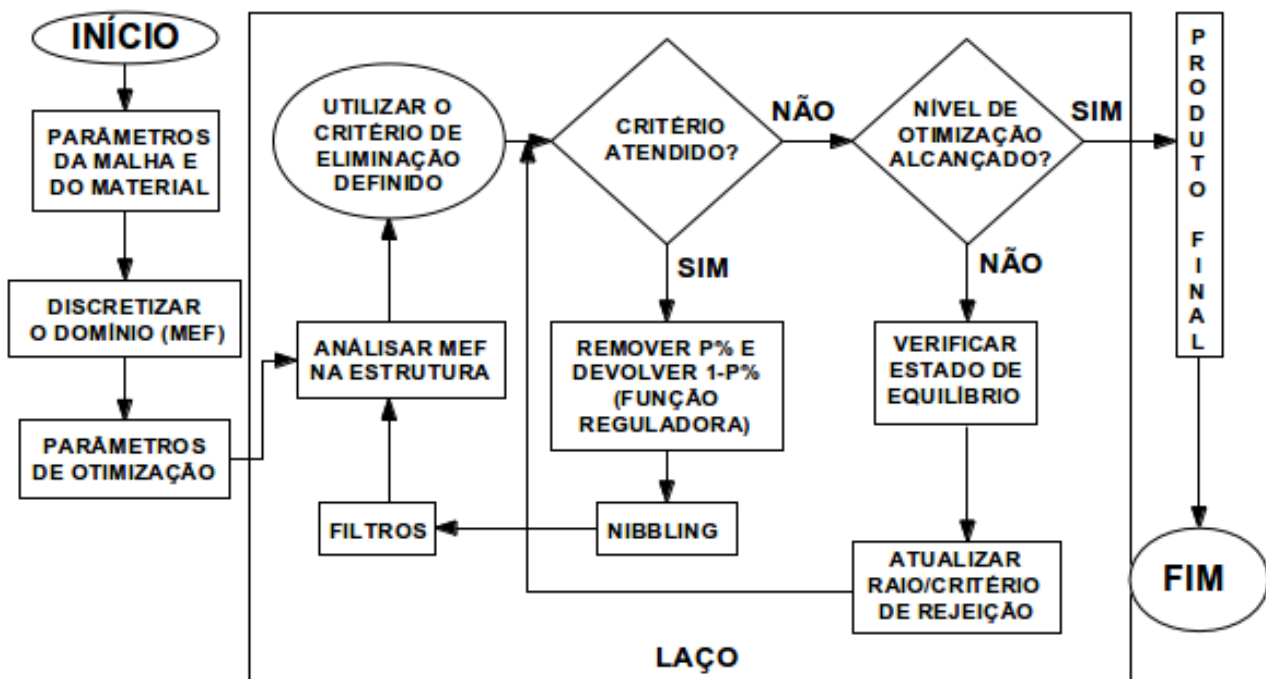


Figura 4.6: Fluxograma de otimização do SESO (pseudo-código)

Após definir os parâmetros de entrada, a malha de elementos é gerada. Assim, os parâmetros de otimização precisam ser estabelecidos para se ter o início do processo iterativo. A malha é verificada e inicia-se o critério de remoção através da Tensão Máxima de Von Mises. A porcentagem de elementos removidos por iteração depende dos parâmetros de calibração definidos antes do início da avaliação do modelo. Se o critério for atendido, ou seja, a inequação que verifica e compara a Tensão Máxima de Von Mises com a Tensão de Von Mises do elemento for satisfeita, ocorre a remoção e a devolução de elementos, de acordo com as funções reguladoras, filtros e nibbling. Esse processo é feito n vezes até que o critério não seja mais atendido. Se ainda assim o nível de otimização não foi alcançado, o estado de equilíbrio da estrutura é verificado, de acordo com o índice de performance, e o fator de raio de rejeição é atualizado, para novamente o processo de remoção de elementos ser iniciado até que o critério de remoção não seja atendido e o nível de otimização seja alcançado. Dessa forma, obtêm-se a estrutura final, já otimizada, com os respectivos deslocamentos dos nós avaliados.

4.5 – Calibração dos parâmetros de otimização

A calibração do programa é feita de acordo com as condições de contorno e o índice de performance da estrutura inicial. Quando ocorre a ruptura da estrutura, fazendo com que ela fique hipostática devido à remoção excessiva de elementos, a análise da estrutura é interrompida de

acordo com esse índice de performance, que controla a integridade do modelo na iteração em questão, ou seja, com a estrutura já atualizada e com os elementos removidos. Essa ruptura ocorre quando os parâmetros de remoção do programa estão com valores muito elevados.

É importante ressaltar que a retirada de elementos não ocorre de forma íntegra, ou seja, a dimensão da matriz de rigidez global não se altera. Ao invés, aos elementos que não contribuem efetivamente para a estrutura, é atribuído uma baixa rigidez (valor próximo ao 0) e, a cada iteração, os valores são atualizados de acordo com a distribuição de tensões. Assim, quando os valores de remoção estão elevados, pode acontecer da estrutura apresentar certa “hipostaticidade” (rompimento da estrutura, ou seja, remoção de elementos fundamentais para o modelo) em algumas iterações até que o índice de performance cancele o processo ou até mesmo retifique a estrutura ao anular o efeito hipostático, devolvendo elementos para a estrutura.

4.6 – Parâmetros iniciais de otimização

Alguns parâmetros devem ser previamente definidos para que se possa alcançar a topologia ótima final. Abaixo, uma breve explicação sobre os parâmetros mais importantes.

→ VOLMAX: com o significado de volume máximo final da estrutura, esse parâmetro é o critério de parada mais usado em muitas técnicas de otimização encontradas na literatura. Seu funcionamento é bem simples: caso o volume indicado seja atingido, a otimização é interrompida. É definido em porcentagem.

→ RVOL: com o significado de retirada de volume por iteração, esse parâmetro controla a porcentagem de elementos máxima que poderá ser retirada por iteração. Foi um parâmetro muito utilizado pelo ESO, mas no SESO ele trabalha juntamente com um filtro que verifica o índice de performance da estrutura. Assim, mesmo se o valor desse parâmetro for alto, o filtro se encarrega de limitar a quantidade de elementos por iteração.

→ FRR: com o significado de fator de raio de remoção, esse parâmetro, juntamente com o FER, são os mais importantes para que ocorra a otimização. O FRR determina o valor inicial de remoção de elementos. Multiplicado pela tensão máxima de Von Mises da estrutura atual (na iteração i), os elementos que possuírem tensões menores de Von Mises em relação a esse produto podem ser removidos de acordo com as funções reguladoras que verificam a vizinhança em relação àquele elemento (eq. 2.4).

→ FER: com o significado de fator evolucionário de rejeição, esse parâmetro atualiza o FRR a cada iteração, uma vez que a tensão máxima tende a aumentar com a retirada de elementos. Logo, a tensão máxima da estrutura aumenta a cada iteração assim como o FRR, que é atualizado pelo FER, até que o valor de FRR da i -ésima iteração seja tal que, multiplicado pela tensão máxima da respectiva iteração (de acordo com a eq. 2.4), não provoque a remoção de mais elementos, definindo portando, nessa iteração, a topologia ótima final.

Os valores desses parâmetros foram citados em cada um dos exemplos apresentados nos capítulos a seguir.

Os resultados que aqui serão apresentados foram gerados a partir do elemento finito FFT e o QST, e comparados entre si. Para a obtenção da topologia ótima foi utilizado um passo de carga para uma melhor aproximação dos resultados lineares, além de uma significativa melhora do tempo de processamento, uma vez que o processo iterativo de não linearidade se repete de acordo com a quantidade de passos de carga e é refeito para cada modelo ótimo encontrado em cada iteração de otimização. É importante ressaltar que, mesmo sendo utilizado um passo de carga para o modelo não linear, as matrizes de rigidez dos elementos que são geradas são do modelo não linear. Isso acontece já que, para cada passo de carga, o programa utiliza incrementos iterativos que avaliam os erros das respostas obtidas. Assim, ainda que para um passo de carga, o programa recai na análise de Newton Raphson, utilizando dois ou mais incrementos dessa forma.

Foram então comparados quatro exemplos que apresentaram bons resultados e serão apresentados a seguir. É importante ressaltar que os valores utilizados são os mesmos usados pela literatura e não são necessariamente valores de peças estruturais reais.

5.1 – Exemplos Lineares

5.1.1 – Problema de duas barras

Este exemplo estudado por Silva (2001) aparece com certa frequência em problemas relacionados a otimização. Consiste em uma chapa retangular biapoada, cujos apoios encontram-se na vertical, a carga é aplicada no centro da outra extremidade e possui as seguintes dimensões, de acordo com a figura 5.1.

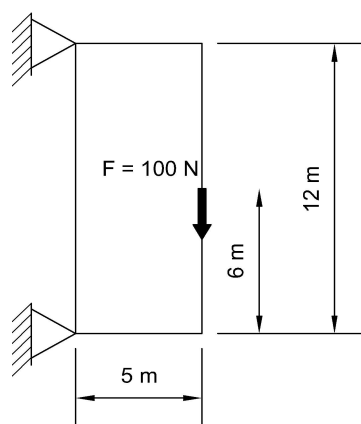


Figura 5.1: Domínio inicial do problema de duas barras

Os dados do problema, incluindo os parâmetros do material utilizado, o aço, e condições de contorno são listados a seguir:

- Malha utilizada: 10 x 60 (totalizando 1200 elementos finitos triangulares para ambos elementos);
- Módulo de Elasticidade (E): 210 GPa;
- Poisson (ν): 0,3;
- Espessura (t): 0,001 m;
- Parâmetros de Otimização
 - Para o FFT: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 25%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 50%, Fator de raio de rejeição (FRR) = 1% e Fator evolucionário de rejeição (FER) = 1,25%.
 - Para o QST: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 25%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 50%, Fator de raio de rejeição (FRR) = 3,5% e Fator evolucionário de rejeição (FER) = 6,5%.

A evolução do processo de otimização para o elemento FFT é mostrada a seguir.

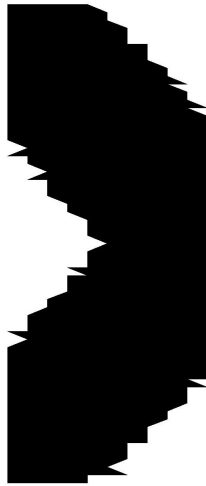


Figura 5.2: Topologia final ótima, resultante na iteração 25, usando o elemento FFT

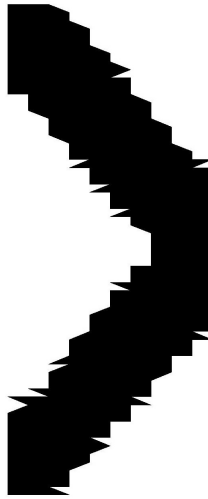


Figura 5.3: Topologia final ótima, resultante na iteração 68, usando o elemento FFT

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 5.4.

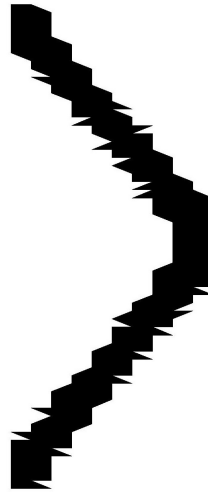


Figura 5.4: Topologia final ótima, resultante na iteração 117, usando o elemento FFT

A evolução do processo de otimização para o elemento QST é mostrada a seguir.

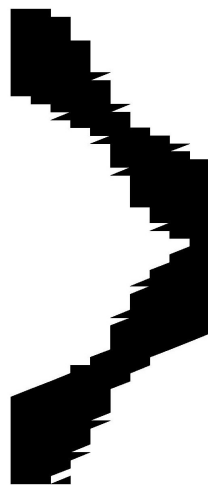


Figura 5.5: Topologia final ótima, resultante na iteração 3, usando o elemento QST

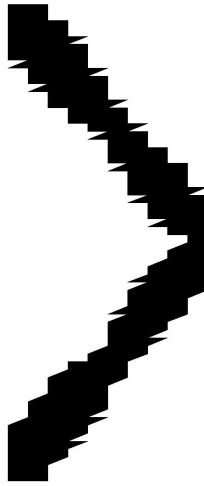


Figura 5.6: Topologia final ótima, resultante na iteração 5, usando o elemento QST

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 5.7.

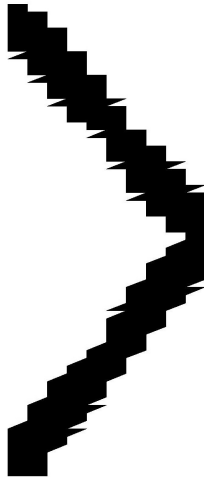
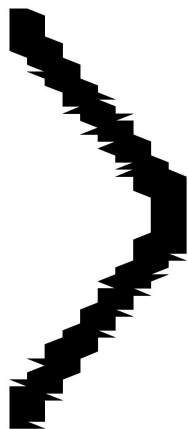
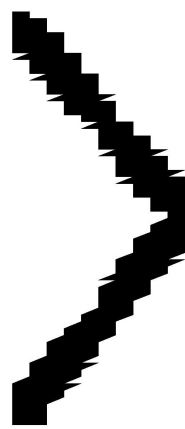


Figura 5.7: Topologia final ótima, resultante na iteração 16, usando o elemento QST

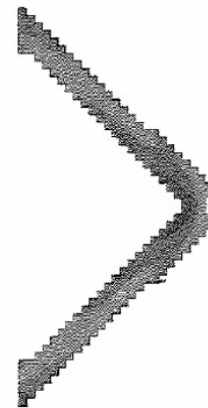
Tem-se, então, um comparativo entre as topologias finais ótimas e a encontrada por Silva (2001), mostrado na figura 5.8.



(a) FFT



(b) QST



(c) Silva, 2001

Figura 5.8: Topologias finais ótimas para o problema de duas barras

Fazendo um comparativo entre a porcentagem de redução do volume de acordo com as iterações, tem-se:

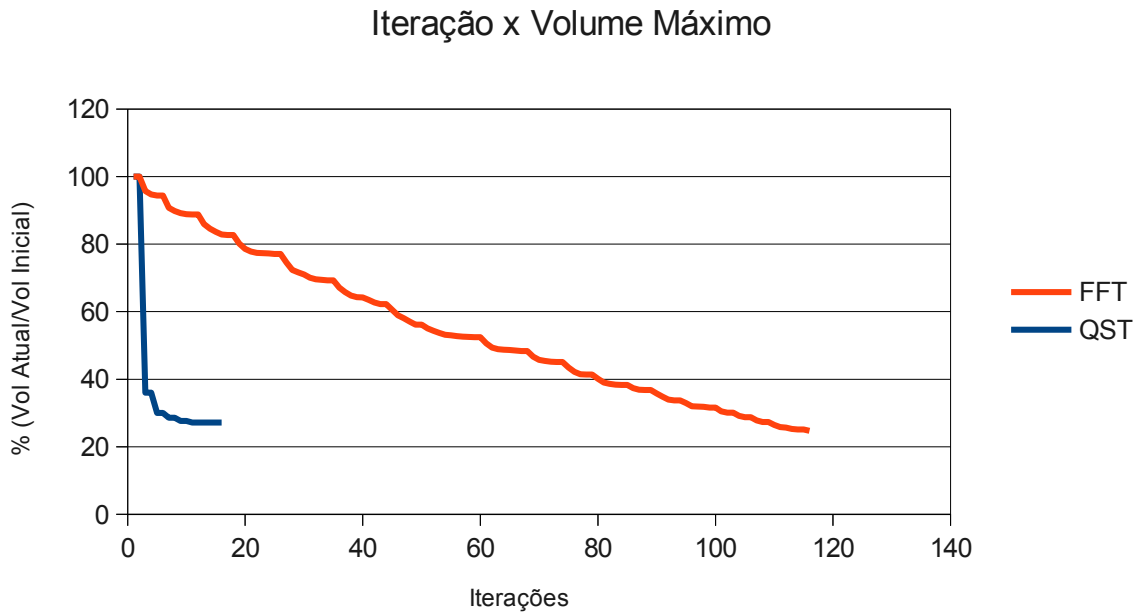


Gráfico 5.1: Iteração x Volume Máximo para ambos elementos FFT e QST

Ambas topologias finais se assemelham à forma obtida por Silva (2001).

O tempo total de processamento para o FFT foi de 9,654 segundos enquanto que, para o QST, o tempo foi de 301 segundos.

5.1.2 – Chapa biapoada com carga centrada

Para que se possa analisar a influência da geometria inicial do problema na topologia ótima final, foram alteradas as dimensões iniciais da estrutura do problema de duas barras, de acordo com a figura 5.9:

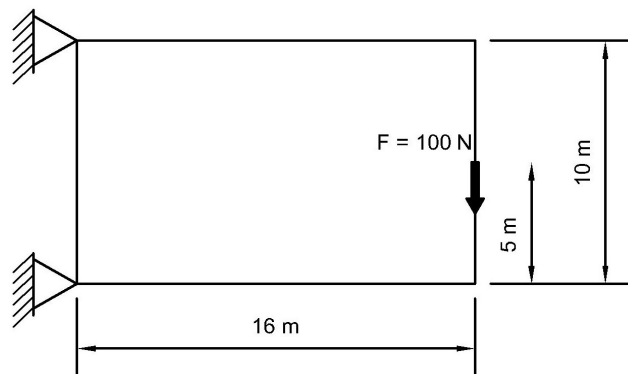


Figura 5.9: Chapa biapoada com carga centrada

Os dados do problema, incluindo os parâmetros do material utilizado, o aço, e condições de contorno são listados a seguir:

- Malha utilizada: 20 x 50 (totalizando 1998 elementos finitos triangulares para o FFT e 2000 elementos finitos triangulares para o QST)¹;
- Módulo de Elasticidade (E): 210 GPa;
- Poisson (ν): 0,3;
- Espessura (t): 0,001 m;
- Parâmetros de Otimização
 - Para o FFT: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 50%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 50%, Fator de raio de rejeição (FRR) = 1% e Fator evolucionário de rejeição (FER) = 0,75%.
 - Para o QST: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 50%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 50%, Fator de raio de rejeição (FRR) = 3,5% e Fator evolucionário de rejeição (FER) = 4,25%.

A evolução do processo de otimização para o elemento FFT é mostrada a seguir.

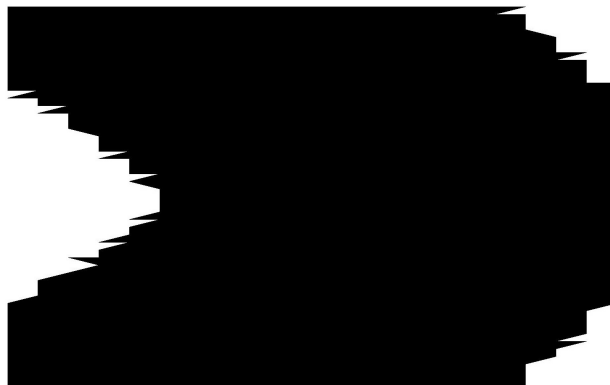
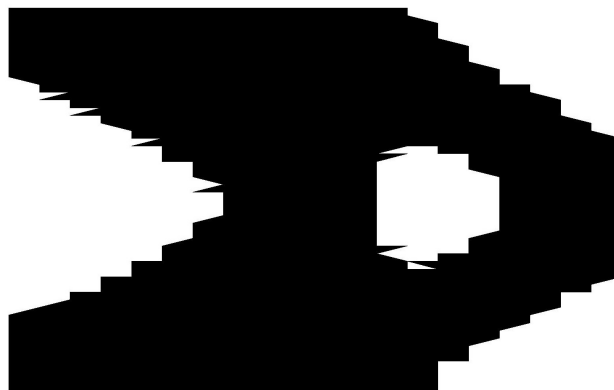


Figura 5.10: Topologia final ótima, resultante na iteração 22, usando o elemento FFT



¹ A implementação do FFT se mostra ligeiramente instável ao apresentar dois elementos finitos a menos na lateral direita do domínio, sendo respectivamente um superior e um inferior devido a uma forte dependência da malha.

Figura 5.11: Topologia final ótima, resultante na iteração 55, usando o elemento FFT

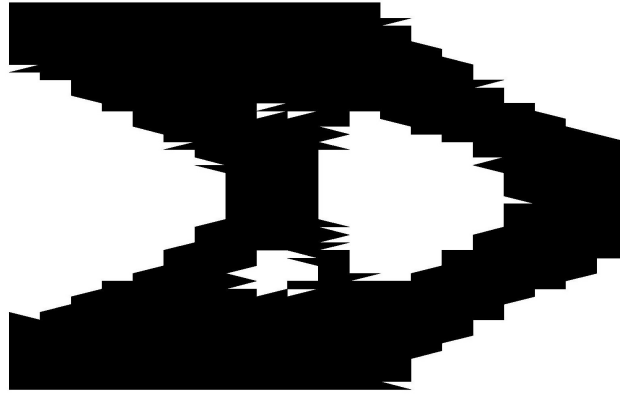


Figura 5.12: Topologia final ótima, resultante na iteração 72, usando o elemento FFT

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 5.13.

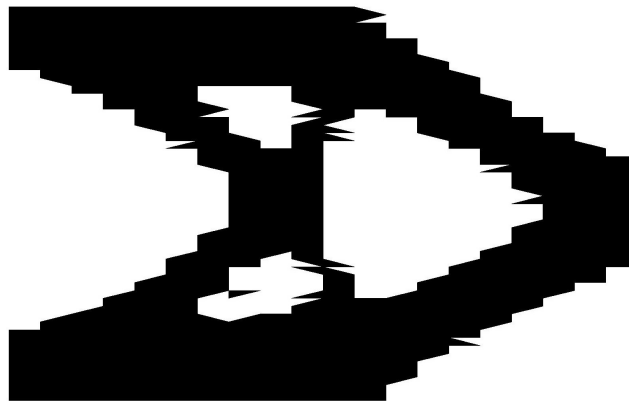


Figura 5.13: Topologia final ótima, resultante na iteração 85, usando o elemento FFT

A evolução do processo de otimização para o elemento QST é mostrada a seguir.



Figura 5.14: Topologia final ótima, resultante na iteração 3, usando o elemento QST

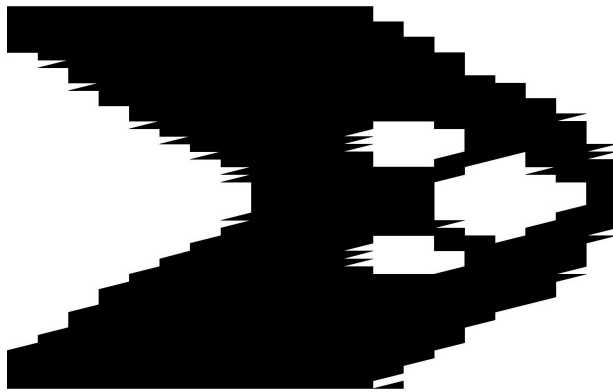


Figura 5.15: Topologia final ótima, resultante na iteração 5, usando o elemento QST



Figura 5.16: Topologia final ótima, resultante na iteração 15, usando o elemento QST

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 5.17.



Figura 5.17: Topologia final ótima, resultante na iteração 38, usando o elemento QST

Tem-se, então, um comparativo entre as topologias finais ótimas, mostrado na figura 5.18.

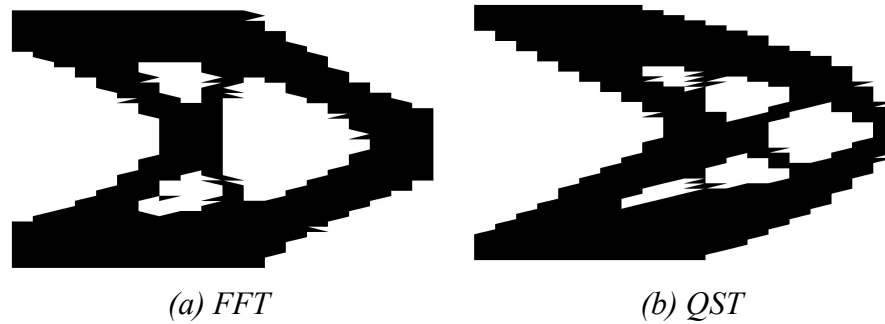


Figura 5.18: Topologias finais ótimas para chapa biapoiada com carga centrada

Fazendo um comparativo entre a porcentagem de redução do volume de acordo com as iterações, tem-se:

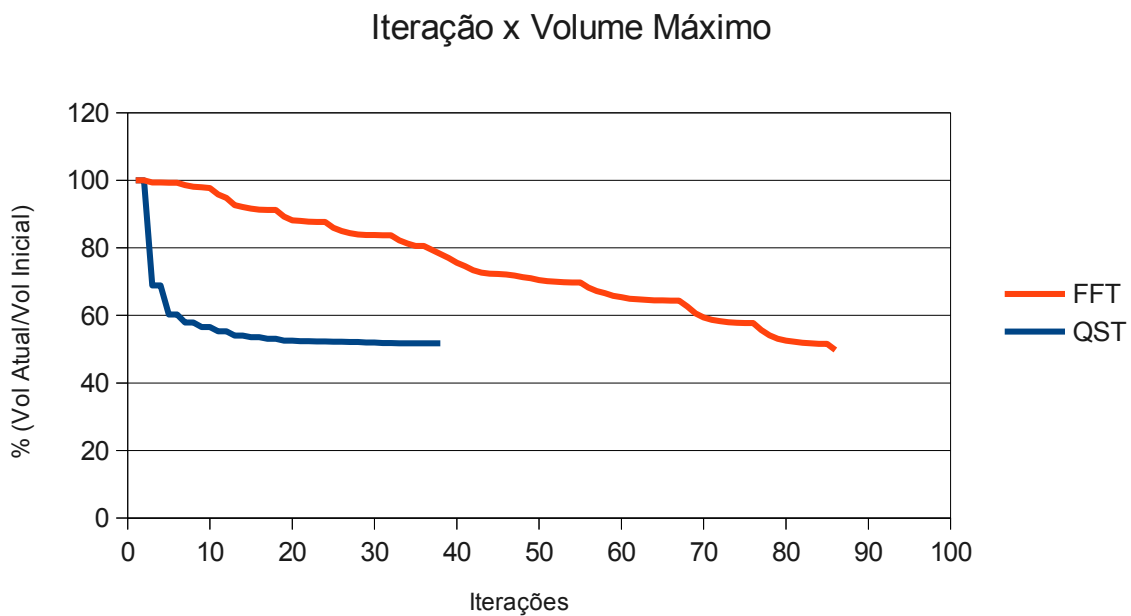


Gráfico 5.2: Iteração x Volume Máximo para ambos elementos FFT e QST

Com as mesmas condições de contorno no exemplo anterior e pequenas mudanças na forma inicial, percebe-se uma grande diferença da topologia final em relação ao encontrado no primeiro exemplo. É importante ressaltar que o programa de otimização é muito “sensível” aos parâmetros de entrada de otimização, assim como a forma do modelo inicial. Logo, uma vez que esses parâmetros de otimização são diferentes para as análises linear e não linear devido a própria implementação computacional de cada elemento, o aparecimento ou não de membros internos na topologia final se difere para o FFT e o QST, como é mostrado neste exemplo. Porém, a topologia final se mantém semelhante para ambos elementos.

O tempo total de processamento para o FFT foi de 19,217 segundos enquanto que, para o

QST, o tempo foi de 1374 segundos.

5.1.3 – Estrutura de Michell

Esse modelo, estudado por Michell em 1904, consiste em uma chapa retangular isostática biapojada com uma carga centrada na parte inferior, como mostrado na figura 5.19.

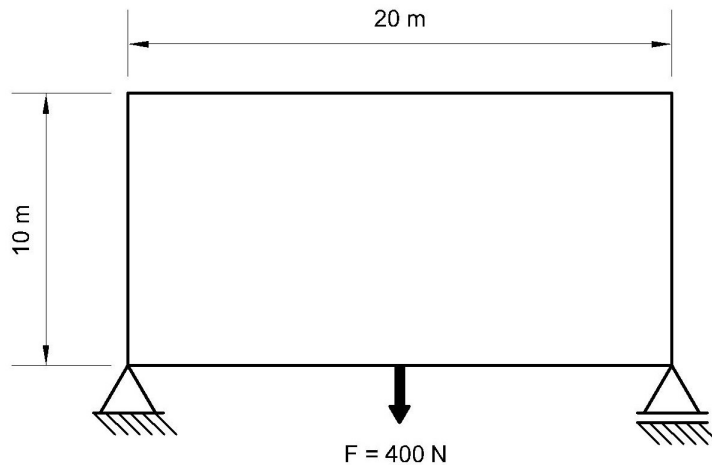


Figura 5.19: Domínio inicial da estrutura de Michell

Os dados do problema, incluindo os parâmetros do material utilizado, o aço, e condições de contorno são listados a seguir:

- Malha utilizada: 60 x 20 (totalizando 2400 elementos finitos triangulares ambos elementos);
- Módulo de Elasticidade (E): 200 GPa;
- Poisson (ν): 0,3;
- Espessura (t): 0,001 m;
- Parâmetros de Otimização
 - Para o FFT: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 50%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 1,75%, Fator de raio de rejeição (FRR) = 1,25% e Fator evolucionário de rejeição (FER) = 0,85%.
 - Para o QST: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 50%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 1,75%, Fator de raio de rejeição (FRR) = 3,5% e Fator evolucionário de rejeição (FER) = 5%.

A evolução do processo de otimização para o elemento FFT é mostrada a seguir.



Figura 5.20: Topologia final ótima, resultante na iteração 40, usando o elemento FFT

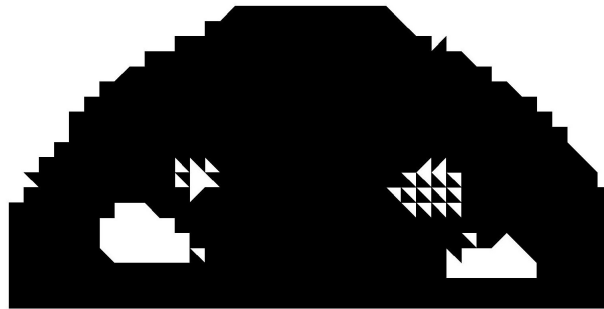


Figura 5.21: Topologia final ótima, resultante na iteração 78, usando o elemento FFT

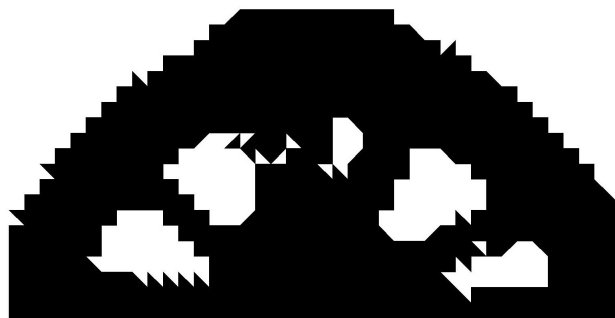


Figura 5.22: Topologia final ótima, resultante na iteração 90, usando o elemento FFT

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 5.23.

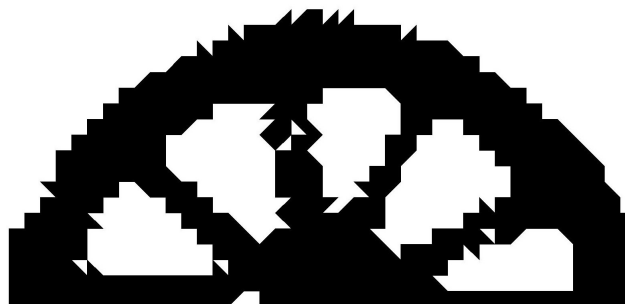


Figura 5.23: Topologia final ótima, resultante na iteração 139, usando o elemento FFT

A evolução do processo de otimização para o elemento QST é mostrada a seguir.

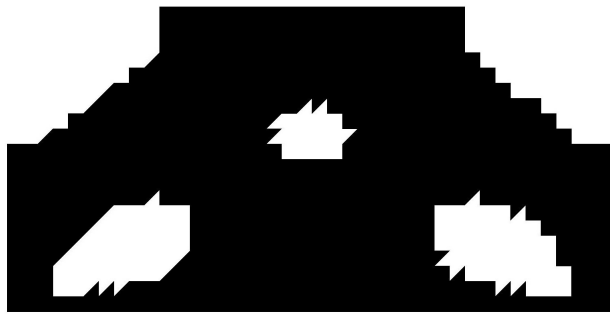


Figura 5.24: Topologia final ótima, resultante na iteração 3, usando o elemento QST

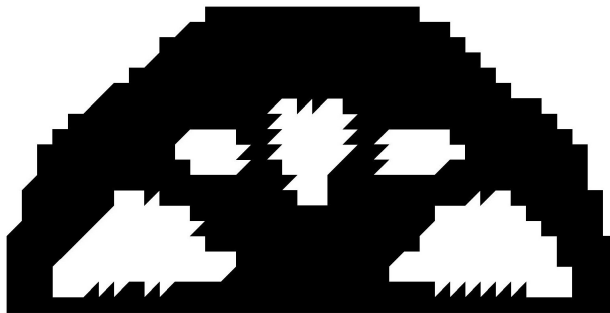


Figura 5.25: Topologia final ótima, resultante na iteração 5, usando o elemento QST

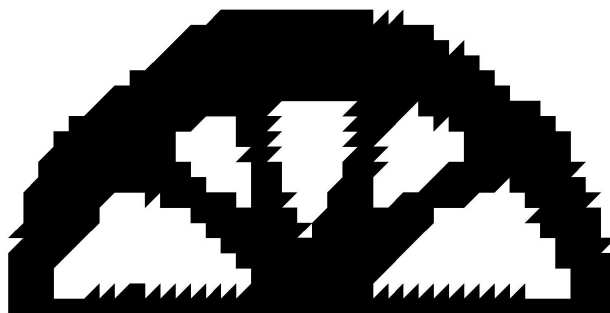


Figura 5.26: Topologia final ótima, resultante na iteração 12, usando o elemento QST

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 5.27.

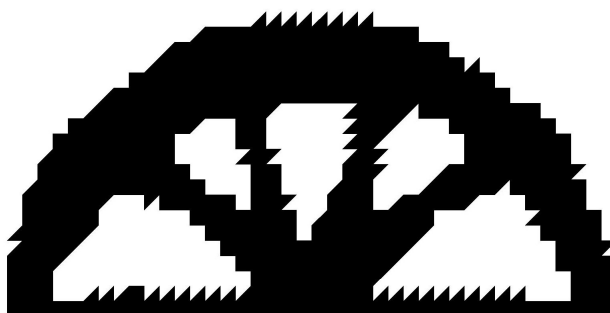


Figura 5.27: Topologia final ótima, resultante na iteração 30, usando o elemento QST

Tem-se, então, um comparativo entre as topologias finais ótimas e a encontrada por Silva (2001), mostrado na figura 5.28.

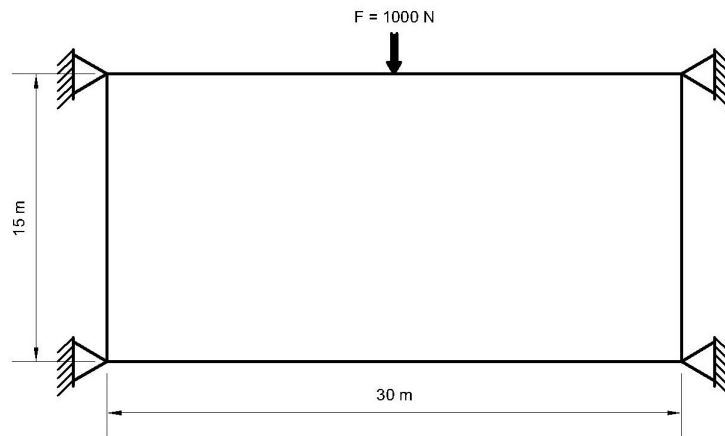


Figura 5.29: Chapa fina presa nas quatro extremidades com carga centrada

Os dados do problema, incluindo os parâmetros do material utilizado, e condições de contorno são listados a seguir:

- Malha utilizada: 30 x 30 (totalizando 1800 elementos finitos triangulares ambos elementos);
- Módulo de Elasticidade (E): 100 GPa;
- Poisson (ν): 0,3;
- Espessura (t): 0,001 m;
- Parâmetros de Otimização
 - Para o FFT: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 50%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 1%, Fator de raio de rejeição (FRR) = 1% e Fator evolucionário de rejeição (FER) = 0,5%.
 - Para o QST: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 50%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 1%, Fator de raio de rejeição (FRR) = 6,5% e Fator evolucionário de rejeição (FER) = 4%.

A evolução do processo de otimização para o elemento FFT é mostrada a seguir.

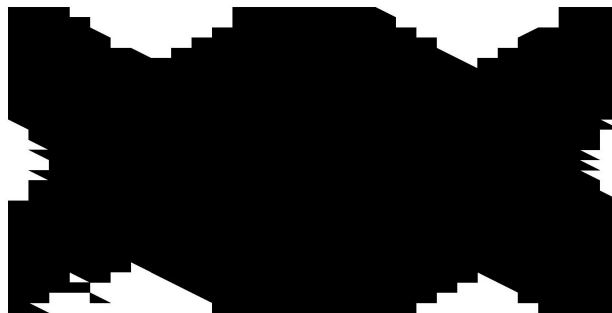


Figura 5.30: Topologia final ótima, resultante na iteração 45, usando o elemento FFT



Figura 5.31: Topologia final ótima, resultante na iteração 105, usando o elemento FFT



Figura 5.32: Topologia final ótima, resultante na iteração 140, usando o elemento FFT

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 5.33.

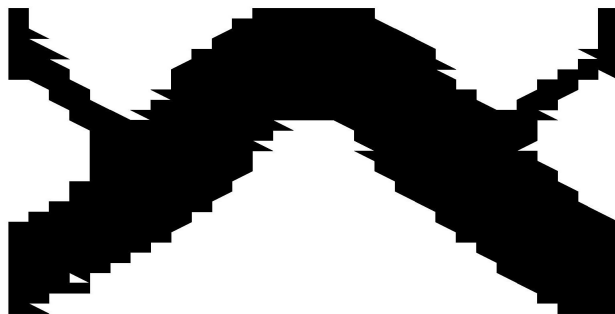


Figura 5.33: Topologia final ótima, resultante na iteração 158, usando o elemento FFT

A evolução do processo de otimização para o elemento QST é mostrada a seguir.



Figura 5.34: Topologia final ótima, resultante na iteração 3, usando o elemento QST

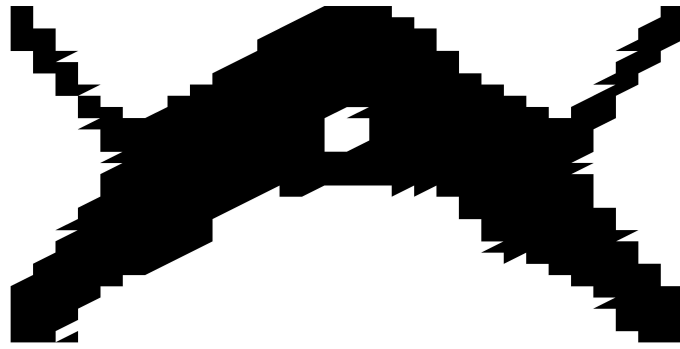


Figura 5.35: Topologia final ótima, resultante na iteração 5, usando o elemento QST

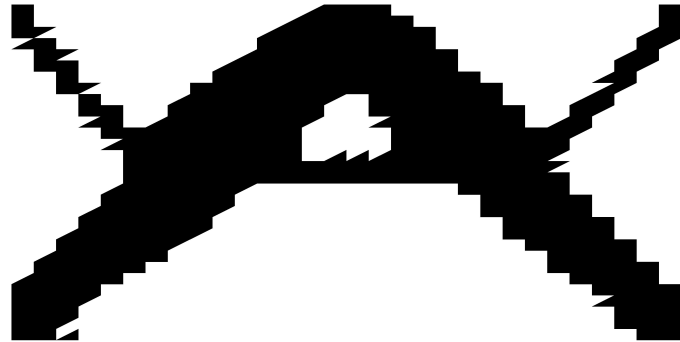


Figura 5.36: Topologia final ótima, resultante na iteração 16, usando o elemento QST

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 5.37.

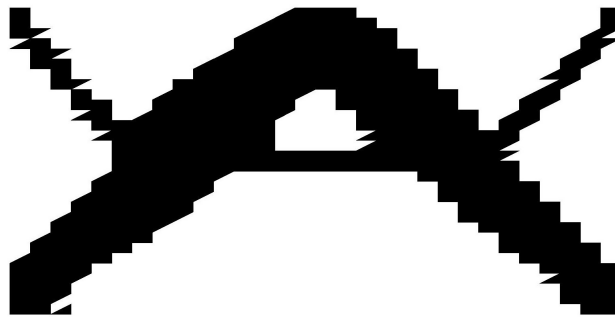
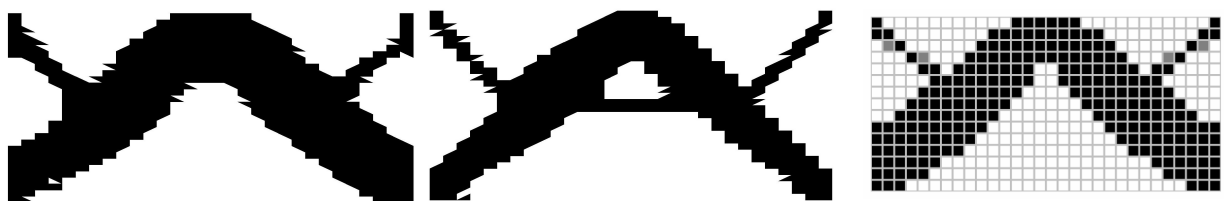


Figura 5.37: Topologia final ótima, resultante na iteração 36, usando o elemento QST

Tem-se, então, um comparativo entre as topologias finais ótimas e a encontrada por Wang (2003), mostrado na figura 5.38.



(a) FFT

(b) QST

(c) Wang, 2003

Figura 5.38: Topologias finais ótimas para chapa fina presa nas quatro

Fazendo um comparativo entre a porcentagem de redução do volume de acordo com as iterações, tem-se:

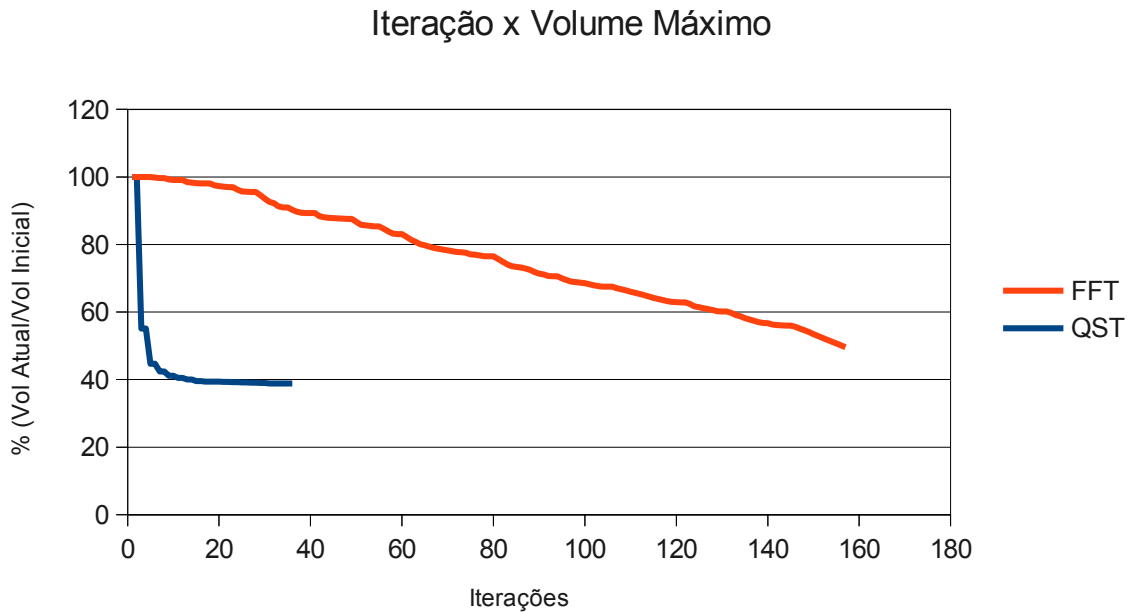


Gráfico 5.4: Iteração x Volume Máximo para ambos elementos FFT e QST

A sensibilidade aos parâmetros de entrada do programa é novamente verificada nesse exemplo, dado um membro interno apresentado pelo QST e que não é mostrado pelo FFT nem pela literatura (Wang, 2003). Outro detalhe importante é que o elemento, quando removido, não é “fisicamente retirado” da matriz de rigidez; ao invés, ao elemento que é removido, é atribuído um valor muito baixo de rigidez (aproximadamente da ordem de 10^{-12}) para que não fosse necessário alterar o tamanho da matriz de rigidez global da estrutura. Isso explica o fato de na terceira iteração do QST desse exemplo aparecerem elementos “soltos” na parte inferior da estrutura, limitados pelos fatores Evolucionário de Rejeição e Raio de Rejeição (FER e FRR), mas corrigidos em seguida na quinta iteração.

Ambas topologias finais se assemelham à forma obtida por Wang (2003).

O tempo total de processamento para o FFT foi de 62,871 segundos enquanto que, para o QST, o tempo foi de 1099 segundos.

5.2 – Discussão dos Resultados

Todos os quatro exemplos mostraram topologias ótimas adequadas para cada problema imposto, sendo utilizados os mesmos parâmetros de entrada e mesma malha, exceto os parâmetros de otimização. Ambos os elementos FFT e QST apresentaram bons resultados quanto ao esperado. No entanto, pode-se destacar algumas observações importantes.

Inicialmente, é clara a diferença entre o tempo de processamento entre ambos elementos, sendo essa muito grande, e fazendo com que o FFT seja amplamente vantajoso em relação ao QST nesse aspecto. O que acontece de fato é que a Matriz Hessiana calculada na implementação do QST exige grande tempo de processamento, uma vez que essa implementação utiliza o método de Newton Raphson. Em outras palavras, como há diferença no número de nós entre os elementos (3 para o FFT e 10 para o QST), a matriz de rigidez do QST é muito maior e, por isso, exige-se um tempo de processamento muito maior comparado ao FFT, principalmente no que envolve resolução de sistemas não lineares. Ainda assim, as topologias finais de ambos elementos são semelhantes pois as chapas são curtas, fazendo com que os deslocamentos sejam pequenos se comparados às dimensões do problema. Assim sendo, os exemplos permanecem no regime linear fazendo com que as topologias sejam semelhantes. Porém, é mais adequado a utilização do FFT para exemplos lineares, dada a grande diferença do tempo de processamento.

Além disso, verifica-se também, de maneira inversa, uma grande diferença no número de iterações de otimização para se alcançar a topologia ótima entre os elementos, fazendo com que o QST seja amplamente vantajoso em relação ao FFT nesse aspecto. A distribuição de tensões no QST ao longo da malha de elementos é melhor definida nas iterações iniciais, provocando uma remoção severa de elementos já nas primeiras iterações de otimização. Assim sendo, a forma ótima é atingida após poucas iterações uma vez que o campo de tensões pouco se altera após as primeiras iterações e praticamente não se altera a partir da décima iteração, conseqüentemente não mais removendo ou removendo poucos elementos da malha.

Vinculado a isso, existem os parâmetros que fazem a retirada de volume por iteração (RVOL) e definem o volume máximo da estrutura final (VOLMAX), que controla o quão agressiva será a remoção de elementos e qual será o volume final, respectivamente. Um elevado valor de RVOL foi utilizado para os dois primeiros exemplos (50%) e para os dois últimos valores baixos (da ordem de 1%). Esse parâmetro controla a porcentagem de elementos que será removida por iteração, o que sugere que para um valor elevado a remoção seja severa e para um valor baixo a remoção seja suave. No FFT, o número de iterações aumentou nos últimos exemplos, sendo ligeiramente influenciado pelo parâmetro RVOL. No QST, esse parâmetro faz pouca influência, pois o filtro que controla o índice de performance da estrutura garante a quantidade de elementos a ser removido sem afetar a integridade da topologia final, além do campo de tensões estar

simultaneamente bem definido.

Um novo critério de parada foi observado em paralelo com o parâmetro VOLMAX no QST, critério o qual verifica se a estrutura ainda possui algum elemento a ser removido de acordo com os parâmetros FER e FRR adotados. Logo, esse critério verifica a não mais remoção de elementos, definindo assim a topologia ótima final, uma vez que a topologia tende a ser a mesma nas iterações seguintes, caso não haja mais nenhuma remoção, e, assim, nem o parâmetro VOLMAX e nem o Índice de Performance são alcançados. Por isso, ainda que para ambos elementos tenha sido definido o mesmo valor final do volume, percebe-se no último exemplo que o valor correspondente ao QST foi ignorado, o que não gera dependência quanto ao valor de VOLMAX como critério de parada para a otimização. É importante ressaltar que o FFT, para esse mesmo exemplo, não conseguiu atingir o volume final de 38% obtido pelo QST, ocorrendo antes sua ruptura (figura 5.38).

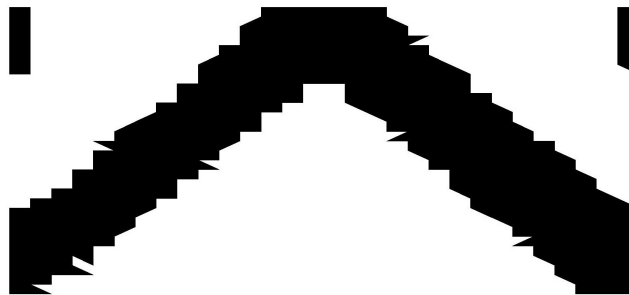


Figura 5.39 – Topologia final ótima, resultante da iteração 202, usando o elemento FFT com volume final de 38% apresentando ruptura de membros importantes

Como se pode ver, essa topologia pode se mostrar instável do ponto de vista estrutural. Logo, pode ser considerada inadequada como topologia ótima final.

Finalmente, os gráficos de volume apresentados mostram o quão severa é a remoção de elementos do QST, ao contrário do FFT. Isso ocorre devido ao campo de tensões do QST ser distribuído, já nas primeiras iterações, quase que integralmente entre os elementos que irão compor a topologia final ótima somente, ou seja, a forma final do modelo já é definida logo no início e vários elementos que possuem tensão mais baixa são removidos em grande escala inicialmente.

Capítulo 6 – Análises dos Modelos não Lineares

Os resultados que aqui serão apresentados, assim como no capítulo 5, foram gerados a partir do elemento finito FFT e o QST, e comparados entre si. Porém, é importante ressaltar que o elemento finito FFT ainda realiza análises lineares, de acordo com sua formulação. Já o elemento QST engloba as análises não lineares e ambas topologias são comparadas neste capítulo a fim de se mostrar as diferenças obtidas. Para modelos não lineares já é possível notar uma grande diferença de topologias finais ótimas entre os modelos lineares. Vale ressaltar que as malhas utilizadas para o mesmo exemplo foram diferentes para ambos elementos, uma vez que a distribuição de tensões ocorrem de formas distintas e, principalmente, o FFT, em geral, necessita de uma malha mais fina para que a topologia final seja alcançada em relação ao QST. Assim, a escolha das malhas foi definida de acordo com a necessidade da determinação da topologia ótima levando em conta o tempo de processamento, ou seja, malhas que gerassem um bom resultado para ambos elementos e tivessem a maior economia possível de tempo para cada exemplo.

Todavia, a própria natureza não linear dos exemplos faz com que as topologias ótimas finais sejam diferentes das análises lineares, como apresentado a seguir. Para as análises das topologias ótimas não linear e de seus respectivos deslocamentos, foram utilizados dez passos de carga em todos os exemplos para o QST, valor este escolhido de acordo com um equilíbrio entre o tempo de processamento e uma melhor apuração dos resultados.

Foram comparados cinco exemplos, que serão apresentados a seguir. Os nós escolhidos para análise dos deslocamentos foram os mesmos das aplicações da carga, assim como os elementos escolhidos para análise das tensões foram aqueles que continham esses mesmos nós, referentes aos deslocamentos analisados. Todos estão indicados em cada problema.

Finalmente, para os exemplos 1, 2 e 3, a técnica de otimização usada pela literatura foi a SIMP, usando o Compliance (energia de deformação) como função objetivo. Para o exemplo 4, o autor utilizou a TSA como técnica de otimização. Já no exemplo 5, o Algoritmo de Otimização das Colônias (ACO) foi a técnica utilizada. Todos usaram elemento finito linear de dois nós.

6.1 – Exemplos não Lineares

6.1.1 – Chapa presa pelas extremidades nos nós centrais

Este exemplo consiste em uma chapa retangular presa pelas extremidades, exatamente nos

nós centrais e aqueles bem próximos ao centro. A carga é aplicada para cima, no centro da extremidade superior, e possui as seguintes dimensões, de acordo com a figura 6.1.

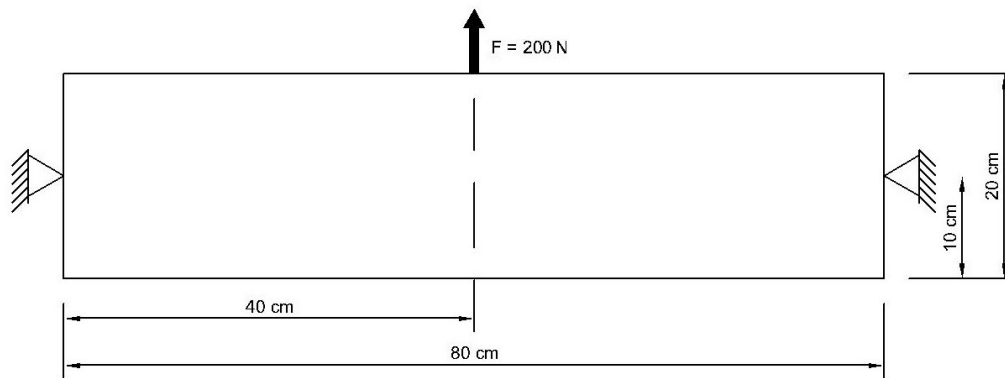


Figura 6.1: Chapa presa pelas extremidades nos nós centrais

Os dados do problema, incluindo os parâmetros do material utilizado, são listados a seguir:

- Malha utilizada: 60 x30 para o FFT (totalizando 3600 elementos finitos triangulares) e 90 x 15 para o QST (totalizando 2700 elementos finitos triangulares);
- Módulo de Elasticidade (E): 100000 N/cm²;
- Poisson (ν): 0,3;
- Espessura (t): 0,1 cm;
- Parâmetros de Otimização
 - Para o FFT: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 20%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 75%, Razão de rejeição (RR) = 0,75 e Razão Evolucionária (ER) = 1.
 - Para o QST: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 20%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 75%, Razão de rejeição (RR) = 3,5 e Razão evolucionária (ER) = 5,85.

Esses dados, assim como o volume máximo de 20% em relação ao volume inicial, são os mesmos utilizados por Gea e Luo (2001), que apresenta o mesmo problema. A evolução do processo de otimização para a análise linear é mostrada a seguir.

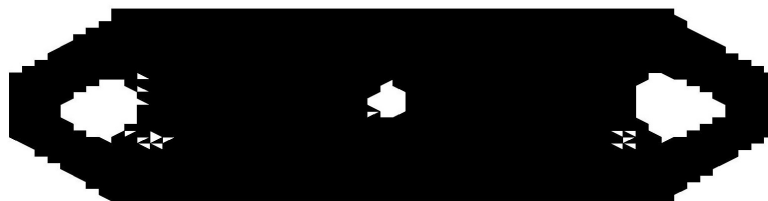


Figura 6.2: Topologia resultante, na iteração 60, usando o FFT (Análise Linear)

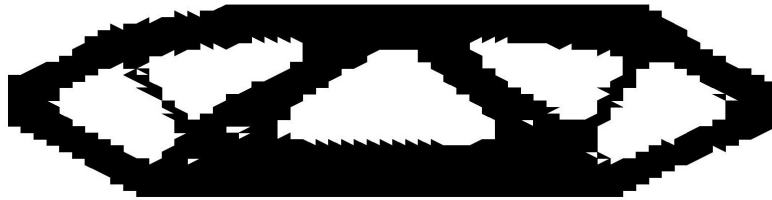


Figura 6.3: Topologia resultante, na iteração 115, usando o FFT (Análise Linear)

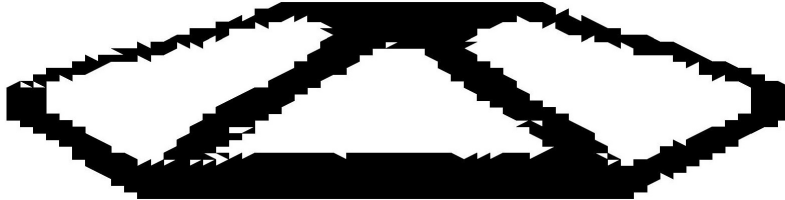


Figura 6.4: Topologia resultante, na iteração 168, usando o FFT (Análise Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.5.

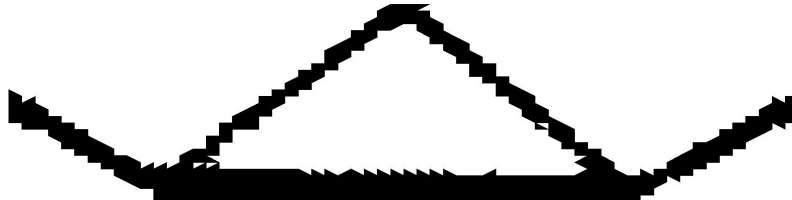


Figura 6.5: Topologia final ótima, resultante na iteração 257, usando o FFT (Análise Linear)

A evolução do processo de otimização para a análise não linear geométrica é mostrada a seguir.

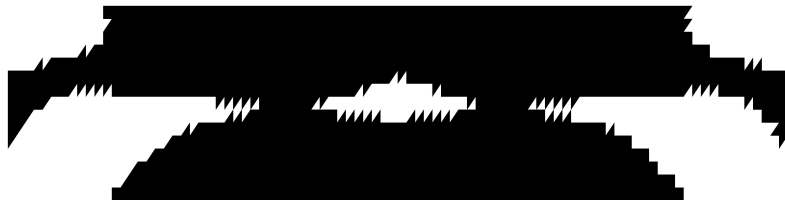


Figura 6.6: Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear)

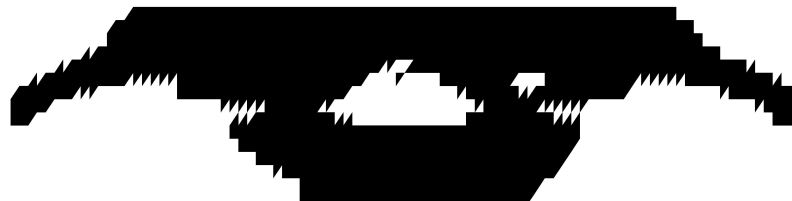


Figura 6.7: Topologia resultante, na iteração 5, usando o QST (Análise não-Linear)

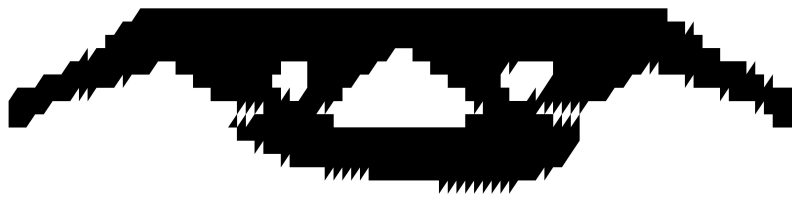


Figura 6.8: Topologia resultante, na iteração 20, usando o QST (Análise não-Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.9.

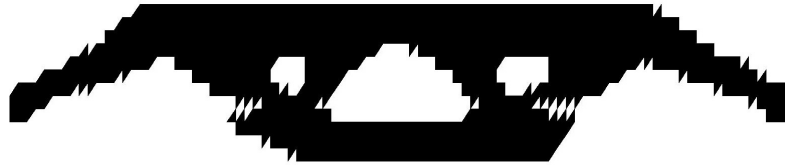
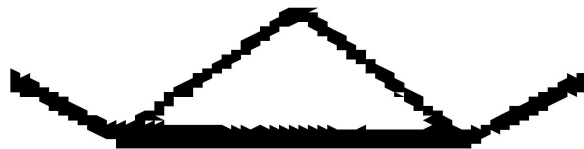


Figura 6.9: Topologia final ótima, resultante na iteração 42, usando o QST (Análise não-Linear)

Tem-se, então, um comparativo entre as topologias finais ótimas e as encontradas por Gea e Luo (2001), mostrado na figura 6.10.



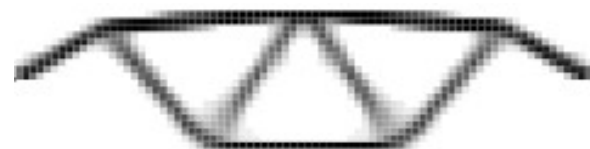
(a) FFT (Modelo Linear)



(b) Gea e Luo, 2001 (Modelo Linear)



(c) QST (Modelo Não Linear)



(d) Gea e Luo, 2001 (Modelo Não Linear)

Figura 6.10: Topologias finais ótimas para chapa presa pelas extremidades nos nós centrais

Os elementos e nós utilizados para a análise de tensões e deslocamentos, respectivamente, em ambos elementos finitos, estão na figura 6.11 abaixo. Lembrando que os mesmos se referem ao ponto de aplicação da carga, e a mesma está aplicada no nó 1861 no FFT e no nó 12331 no QST.

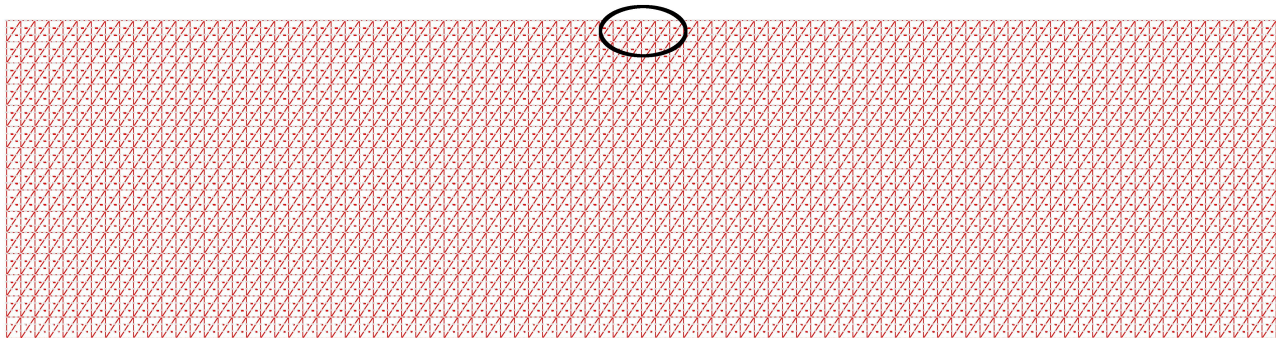


Figura 6.11: Elementos 3357 (FFT) e 2609 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 1861 (FFT) e 12331 (QST) utilizados para análise de deslocamentos

Fazendo um comparativo entre a tensão máxima de Von Mises e a iteração de otimização, tem-se:

Tensão Máxima de Von Mises x Iterações

Elemento 3357 (FFT) e Elemento 2609 (QST)

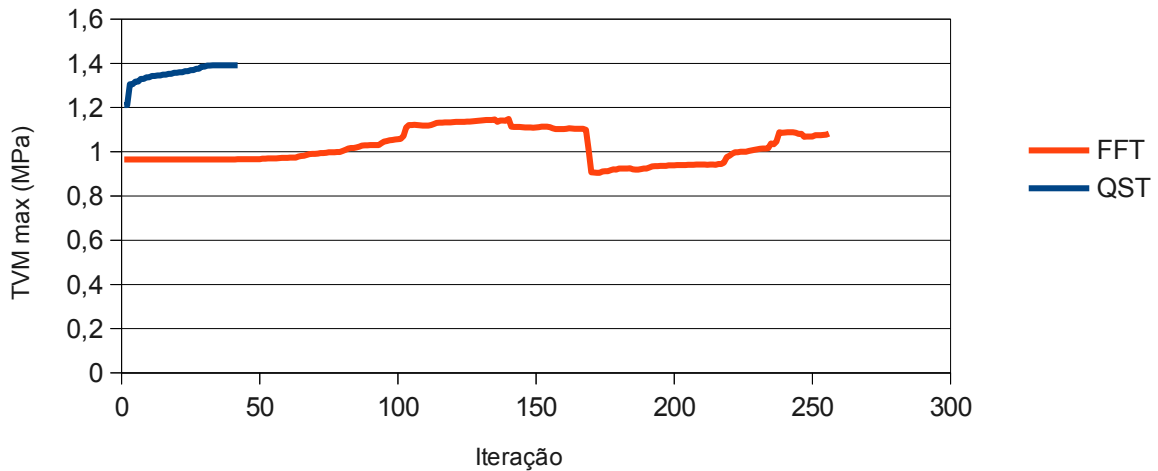


Gráfico 6.1: Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST

Para o FFT, é interessante notar que na iteração 170, aproximadamente, há uma queda de tensão. Isso ocorre pois os membros externos da estrutura são removidos, o que causa uma nova redistribuição do campo de tensões. Já para o QST, há uma brusca elevação da tensão na iteração 3, aproximadamente. A explicação para esse fato é que muitos elementos são removidos de uma vez, aumentando assim a tensão no ponto especificado.

Fazendo também um comparativo entre os deslocamentos de acordo com cada elemento, tem-se:

Força x Deslocamento

FFT

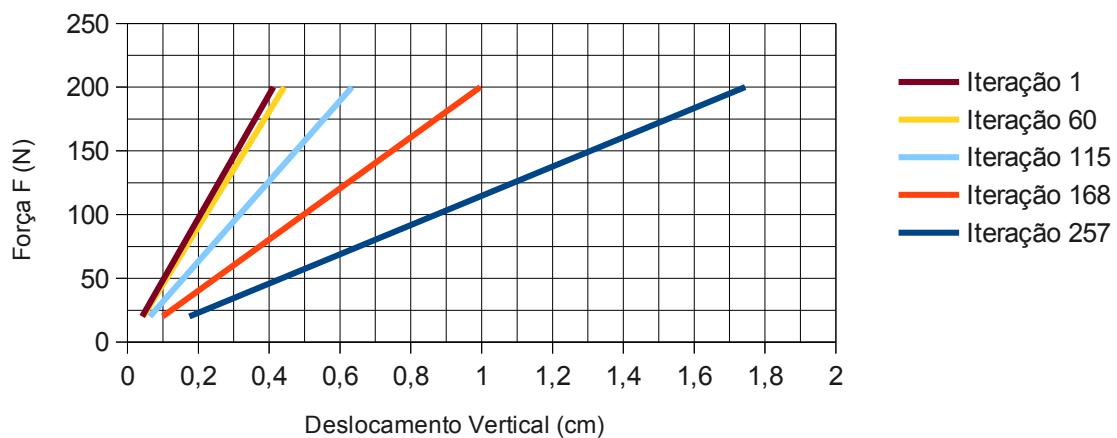


Gráfico 6.2: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT

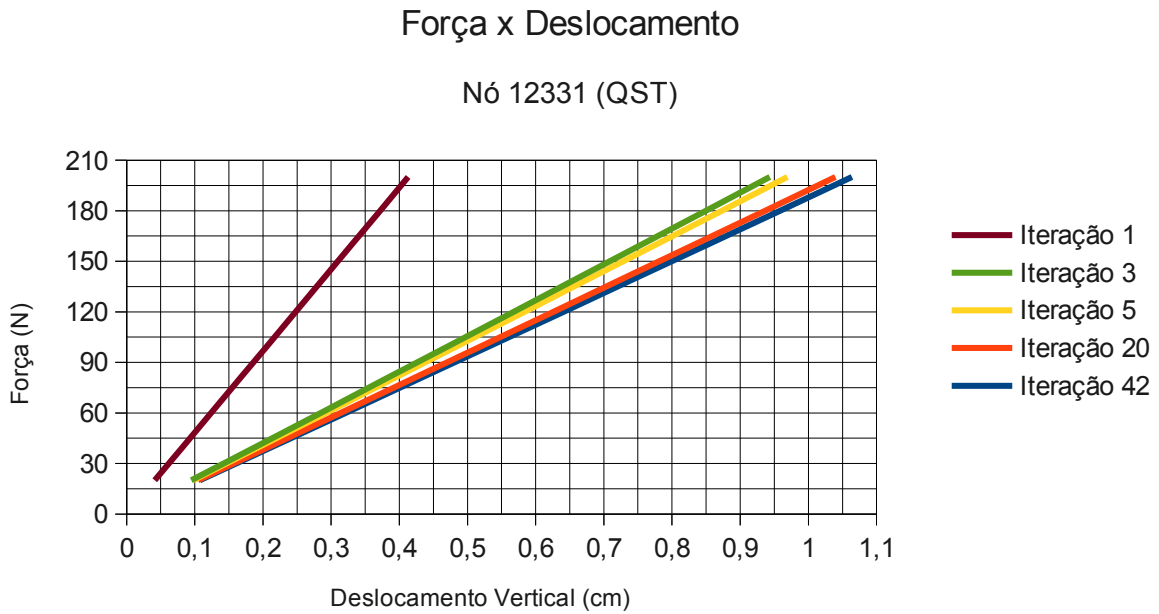


Gráfico 6.3: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST

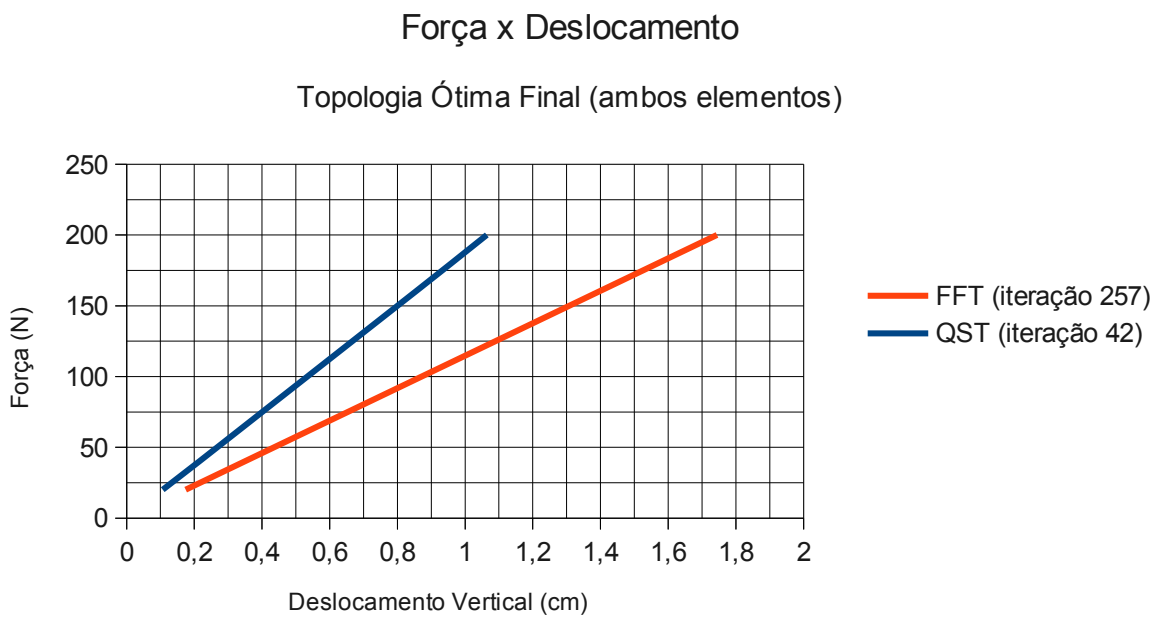


Gráfico 6.4: Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento

As tabelas abaixo mostram os valores de deslocamento linear, para o FFT, e os obtidos em cada passo de carga para cada iteração de otimização através do método de Newton Raphson, para o QST:

Iteração	Iteração 1	Iteração 60	Iteração 115	Iteração 168	Iteração 256
Deslocamento	0.41201E+00	0.44279E+00	0.63439E+00	0.99669E+00	0.17439E+01

Tabela 6.1: Valores de deslocamentos para o elemento FFT

NPC/Iter.	Iteração 1	Iteração 3	Iteração 5	Iteração 20	Iteração 42
Passo 1	0.41327311E-01	0.94943939E-01	0.97608464E-01	0.10472246E+00	0.10720269E+00
Passo 2	0.82649708E-01	0.18974931E+00	0.19506761E+00	0.20927166E+00	0.21422372E+00
Passo 3	0.12396718E+00	0.28441666E+00	0.29237811E+00	0.31364847E+00	0.32106400E+00
Passo 4	0.16527972E+00	0.37894653E+00	0.38954064E+00	0.41785374E+00	0.42772446E+00
Passo 5	0.20658733E+00	0.47333949E+00	0.48655585E+00	0.52188834E+00	0.53420602E+00
Passo 6	0.24788999E+00	0.56759605E+00	0.58342439E+00	0.62575311E+00	0.64050956E+00
Passo 7	0.28918769E+00	0.66171677E+00	0.68014693E+00	0.72944889E+00	0.74663599E+00
Passo 8	0.33048044E+00	0.75570218E+00	0.77672411E+00	0.83297650E+00	0.85258620E+00
Passo 9	0.37176821E+00	0.84955281E+00	0.87315658E+00	0.93633679E+00	0.95836106E+00
Passo 10	0.41305100E+00	0.94326918E+00	0.96944496E+00	0.10395306E+01	0.10639615E+01

Tabela 6.2: Valores de deslocamentos para o elemento QST

Como a remoção de elementos é gradual no FFT, ou seja, ocorre através de várias iterações, o deslocamento tende a aumentar à medida que aumentam as iterações, ou seja, se aproxima da topologia ótima. No QST também acontece a mesma coisa. Porém, como a remoção inicial é brusca, os valores dos deslocamentos aumentam bastante já nas primeiras iterações, mas permanecendo com valores finais menores que o FFT. Assim, a estrutura obtida com a topologia final do QST se desloca menos, como mostrado nas tabelas 6.1 e 6.2.

Além disso, para o QST, percebe-se que o modelo apresenta uma suave curva, estando assim na interface entre o linear e o não linear de acordo com os valores tabelados.

6.1.2 – Chapa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores

Este exemplo consiste em uma chapa retangular presa pelas extremidades, exatamente nos nós superiores e inferiores assim como seus adjacentes mais próximos. São aplicados três carregamentos concentrados ao longo da face inferior, e possui as seguintes dimensões, de acordo com a figura 6.12.

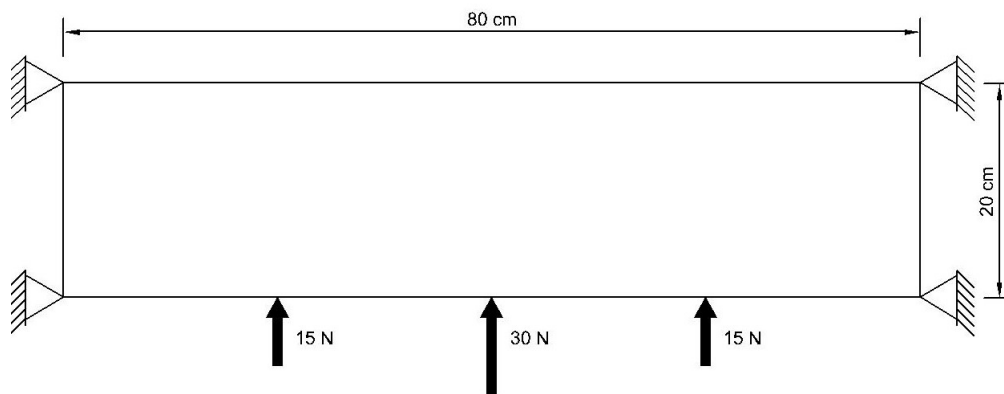


Figura 6.12: Chapa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores

Os dados do problema, incluindo os parâmetros do material utilizado, são listados a seguir:

- Malha utilizada: 60 x 40 para o FFT (totalizando 4800 elementos finitos triangulares) e 30 x 30 para o QST (totalizando 1800 elementos finitos triangulares);
- Módulo de Elasticidade (E): 10000 N/cm²;
- Poisson (ν): 0,3;
- Espessura (t): 0,1 cm;
- Parâmetros de Otimização
 - Para o FFT: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 20%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 15%, Razão de rejeição (RR) = 1 e Razão Evolucionária (ER) = 1,75.
 - Para o QST: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 20%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 15%, Razão de rejeição (RR) = 3,5 e Razão evolucionária (ER) = 8,25.

Esses dados, assim como o volume máximo de 20% em relação ao volume inicial, são os mesmos utilizados por Gea e Luo (2001), que apresenta o mesmo problema. A evolução do processo de otimização para a análise linear é mostrada a seguir.

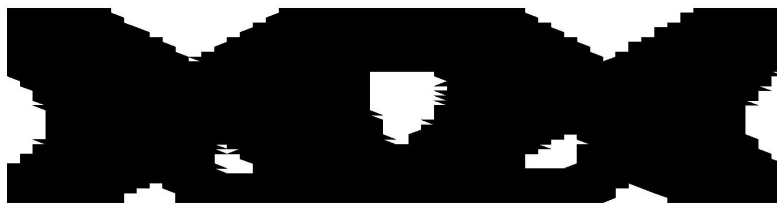


Figura 6.13: Topologia resultante, na iteração 40, usando o FFT (Análise Linear)



Figura 6.14: Topologia resultante, na iteração 65, usando o FFT (Análise Linear)

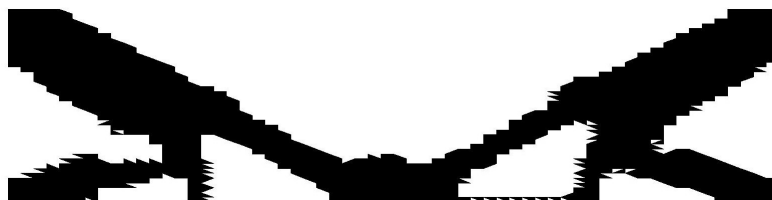


Figura 6.15: Topologia resultante, na iteração 85, usando o FFT (Análise Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.16.

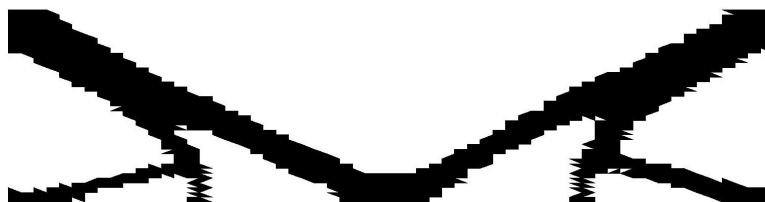


Figura 6.16: Topologia final ótima, resultante na iteração 121, usando o FFT (Análise Linear)

A evolução do processo de otimização para a análise não linear geométrica é mostrada a seguir.

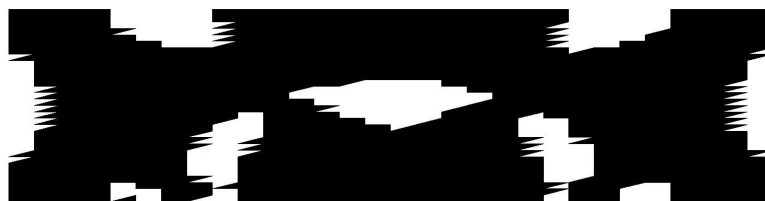


Figura 6.17: Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear)

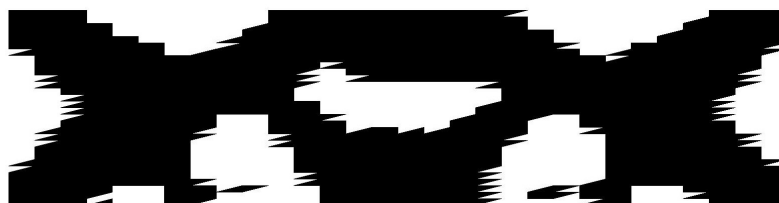


Figura 6.18: Topologia resultante, na iteração 5, usando o QST (Análise não-Linear)

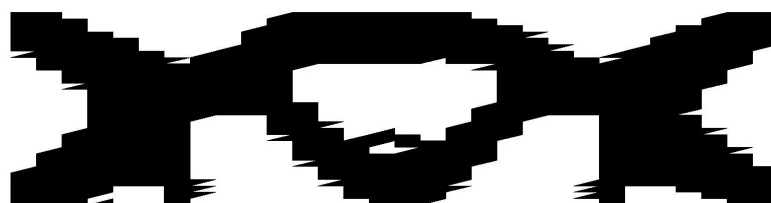


Figura 6.19: Topologia resultante, na iteração 10, usando o QST (Análise não-Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.20.

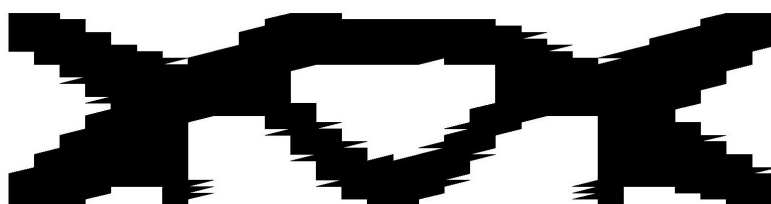


Figura 6.20: Topologia final ótima, resultante na iteração 20, usando o QST (Análise não-Linear)

Tem-se, então, um comparativo entre as topologias finais ótimas e as encontradas por Gea e Luo (2001), mostrado na figura 6.21.

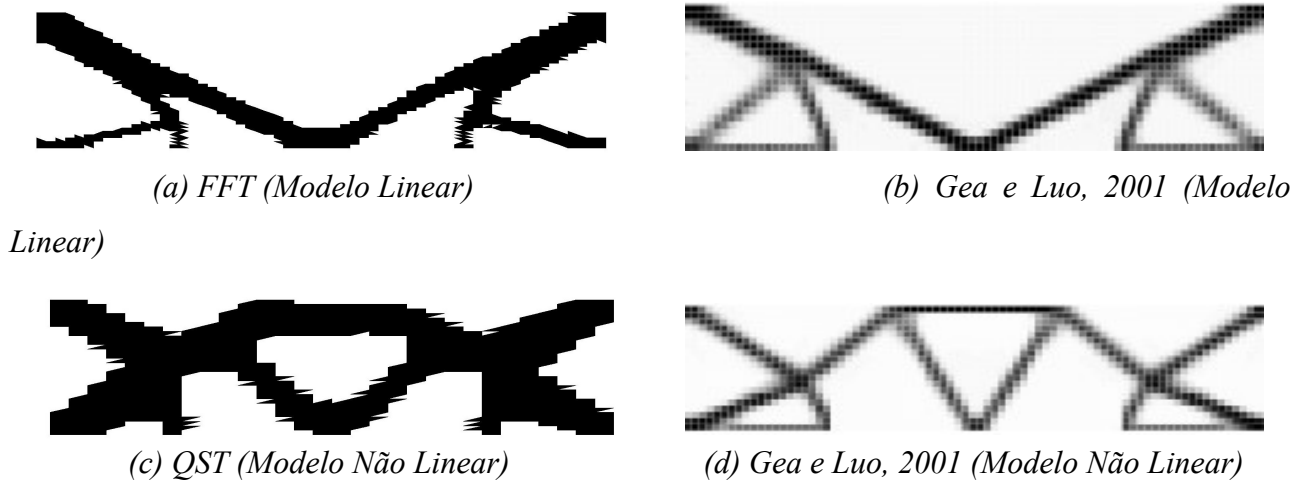


Figura 6.21: Topologias ótimas finais para chapa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores

Os elementos e nós utilizados para a análise de tensões e deslocamentos, respectivamente, em ambos elementos finitos, estão na figura 6.22 abaixo. Lembrando que os mesmos se referem ao ponto de aplicação da carga no centro do modelo, e a mesma está aplicada no nó 31 no FFT e no nó 46 no QST.

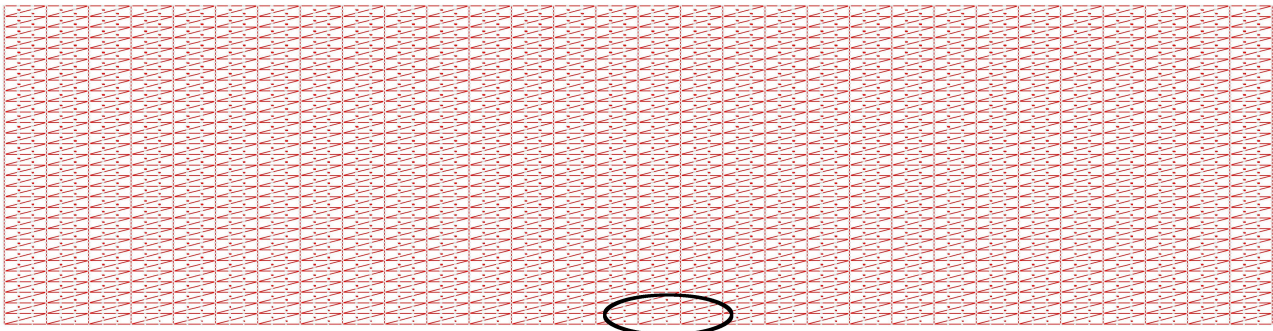


Figura 6.22: Elementos 292 (FFT) e 32 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 31 (FFT) e 46 (QST) utilizados para análise de deslocamentos

Fazendo um comparativo entre a tensão máxima de Von Mises e a iteração de otimização, tem-se:

Tensão Máxima de Von Mises x Iterações

Elemento 292 (FFT) e Elemento 32 (QST)

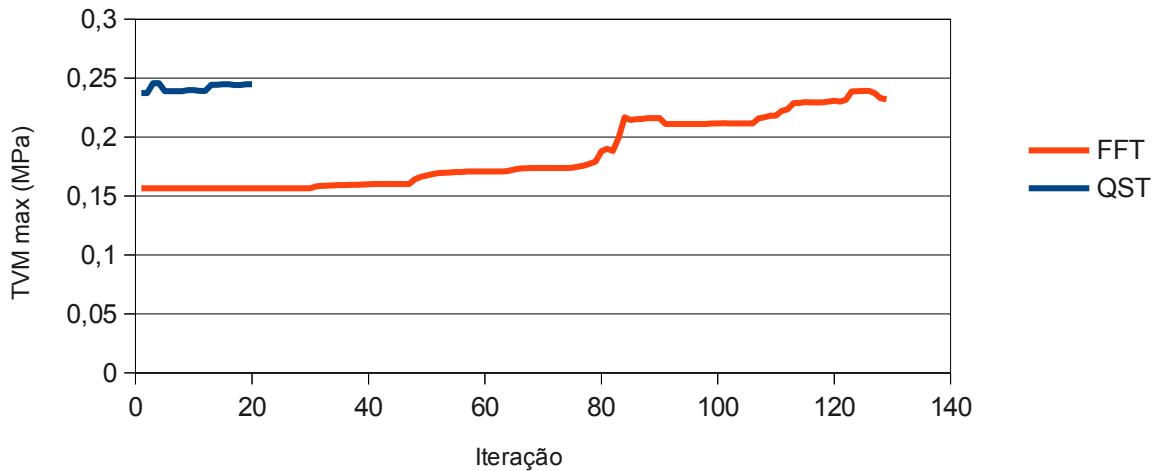


Gráfico 6.5: Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST

Para o FFT, nesse exemplo, a tensão tende a crescer ao longo de cada iteração. É interessante perceber que, em um intervalo de poucas iterações, todos os membros internos são removidos. Como essa remoção ocorre próximo da iteração 80, há um ligeiro aumento da tensão nesse ponto. Quanto ao QST, não há uma grande variação da tensão ao longo do processo. Porém, com a formação de um vazio (ou buraco) no interior do modelo, a tensão aumenta levemente na iteração 3 e cai na iteração 5 já que os membros inferiores são removidos, ocorrendo uma redistribuição de tensões e uma “independência” das cargas, ou seja, sem que haja algum membro que compartilhe o esforço ao longo da superfície inferior. Na iteração 12, um pequeno membro interno também é removido e a tensão tem um leve aumento novamente.

Fazendo um comparativo entre os deslocamentos de acordo com cada elemento, tem-se:

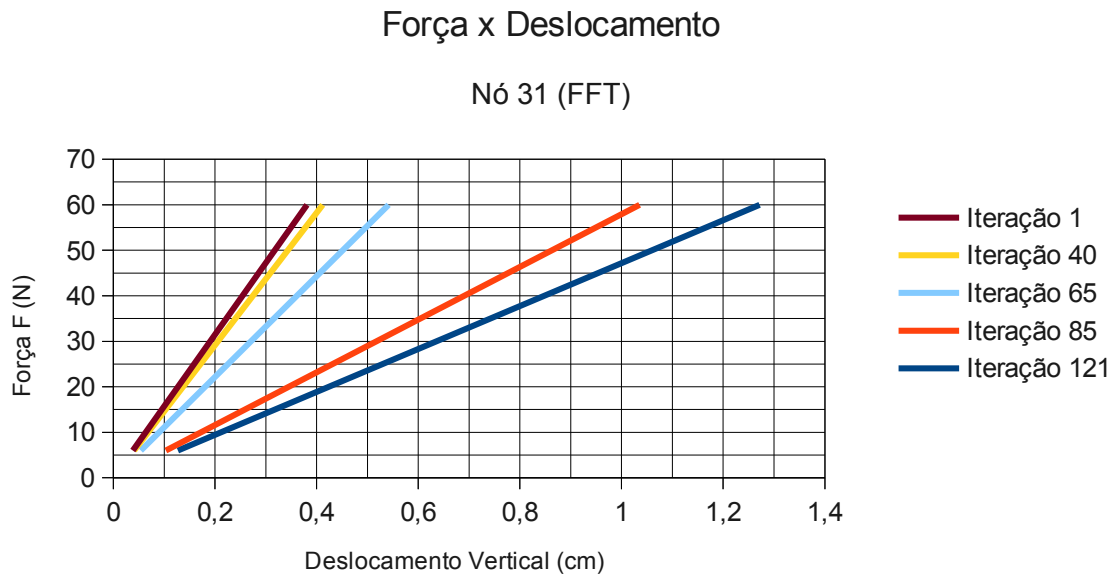


Gráfico 6.6: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT

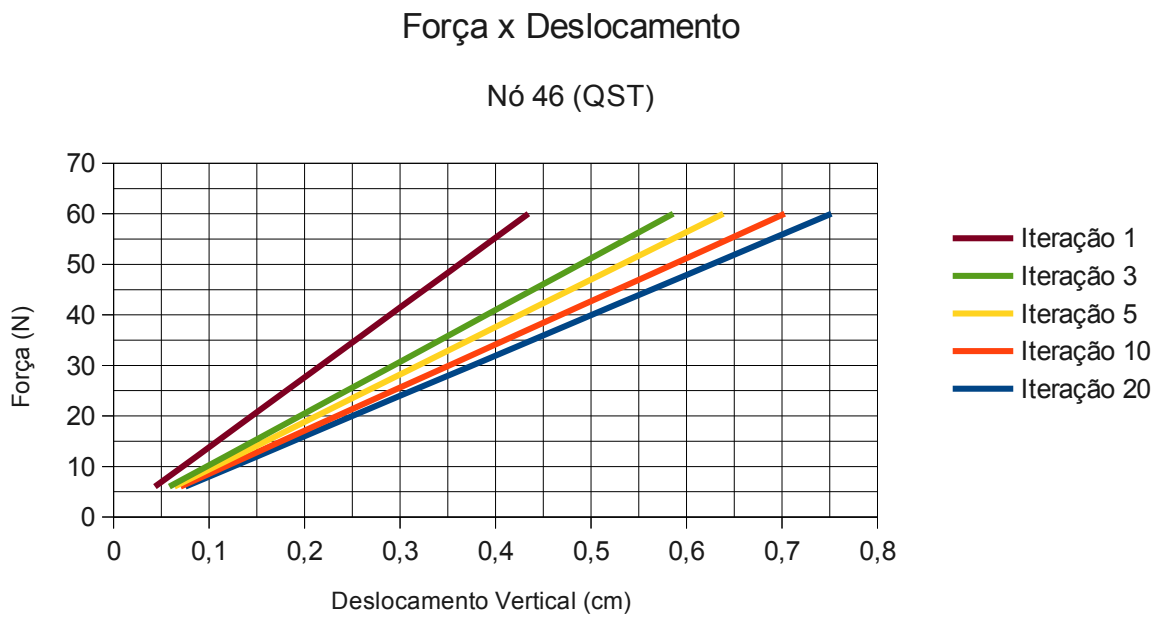


Gráfico 6.7: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST

Força x Deslocamento

Topologia Ótima Final (ambos elementos)

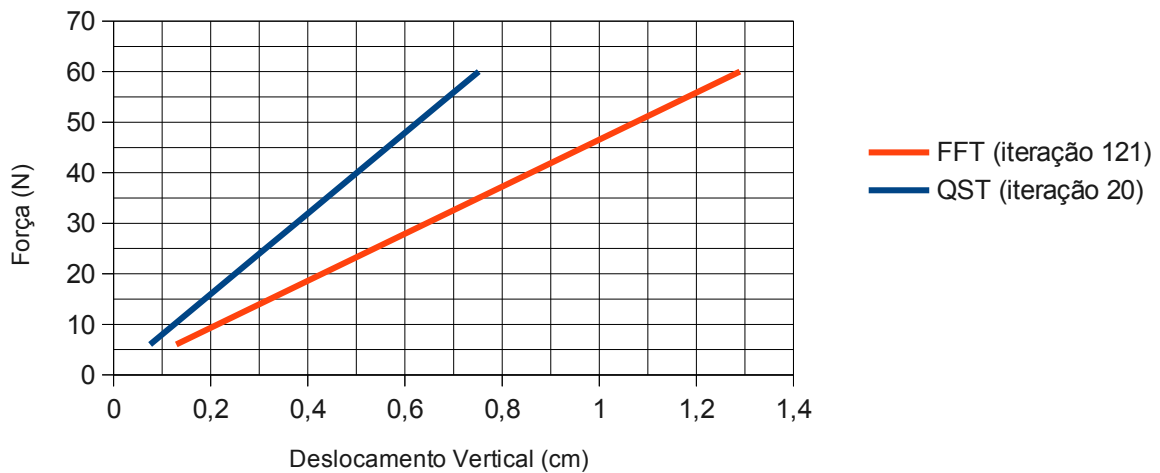


Gráfico 6.8: Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento

As tabelas abaixo mostram os valores de deslocamento linear, para o FFT, e os obtidos em cada passo de carga para cada iteração de otimização através do método de Newton Raphson, para o QST:

Iteração	Iteração 1	Iteração 40	Iteração 65	Iteração 85	Iteração 121
Deslocamento	0.38080E+00	0.41200E+00	0.54179E+00	0.10352E+01	0.12893E+01

Tabela 6.3: Valores de deslocamentos para o elemento FFT

NPC/Iter.	Iteração 1	Iteração 3	Iteração 5	Iteração 20	Iteração 42
Passo 1	0.43403771E-01	0.58565369E-01	0.63803708E-01	0.70232203E-01	0.75087664E-01
Passo 2	0.86812913E+00	0.11714036E+00	0.12761495E+00	0.14047610E+00	0.15019031E+00
Passo 3	0.13022743E+00	0.17572498E+00	0.19143373E+00	0.21073173E+00	0.22530796E+00
Passo 4	0.17364733E+00	0.23431925E+00	0.25526007E+00	0.28099909E+00	0.30044067E+00
Passo 5	0.21707260E+00	0.29292316E+00	0.31909398E+00	0.35127822E+00	0.37558846E+00
Passo 6	0.26050327E+00	0.35153673E+00	0.38293547E+00	0.42156913E+00	0.45075138E+00
Passo 7	0.30393932E+00	0.41015998E+00	0.44678456E+00	0.49187185E+00	0.52592945E+00
Passo 8	0.34738076E+00	0.46879290E+00	0.51064127E+00	0.56218640E+00	0.60112271E+00
Passo 9	0.39082760E+00	0.52743552E+00	0.57450560E+00	0.63251280E+00	0.67633120E+00
Passo 10	0.43427984E+00	0.58608783E+00	0.63837757E+00	0.70285107E+00	0.75155496E+00

Tabela 6.4: Valores de deslocamentos para o elemento QST

Para o FFT, há um grande aumento dos deslocamentos quando os membros superiores são removidos. Já no QST, inicialmente os valores são elevados, mas novamente permanece com valores finais menores que o FFT. Logo, a topologia final do QST desloca menos que a FFT.

Além disso, para o QST, percebe-se que o modelo apresenta uma suave curva, estando assim na interface entre o linear e o não linear de acordo com os valores tabelados.

6.1.3 – Chapa biengastada lateralmente

Este exemplo consiste em uma chapa retangular biengastada. São aplicados três carregamentos concentrados ao longo da face inferior, e possui as seguintes dimensões, de acordo com a figura 6.23.

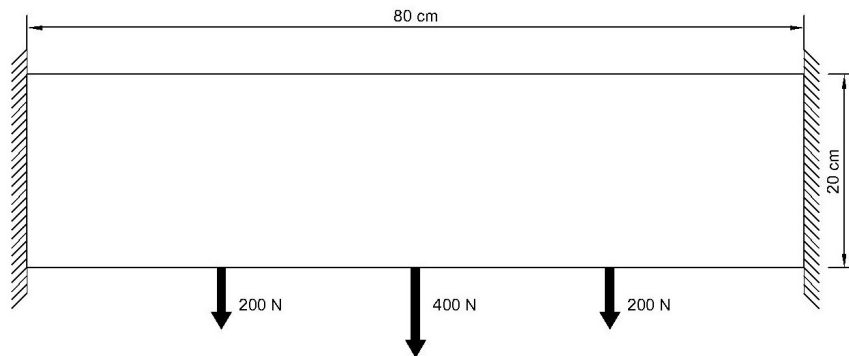


Figura 6.23: Chapa biengastada lateralmente

Os dados do problema, incluindo os parâmetros do material utilizado, são listados a seguir:

- Malha utilizada: 60 x 40 para o FFT (totalizando 4800 elementos finitos triangulares) e 140 x 10 para o QST (totalizando 2800 elementos finitos triangulares);
- Módulo de Elasticidade (E): 10000 N/cm²;
- Poisson (ν): 0,3;
- Espessura (t): 0,1 cm;
- Parâmetros de Otimização
 - Para o FFT: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 20%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 15%, Razão de rejeição (RR) = 1 e Razão Evolucionária (ER) = 1,75.
 - Para o QST: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 20%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 15%, Razão de rejeição (RR) = 3,5 e Razão evolucionária (ER) = 10.

Esses dados, assim como o volume máximo de 20% em relação ao volume inicial, são os mesmos utilizados por Gea e Luo (2001), que apresenta o mesmo problema. A evolução do processo de otimização para a análise linear é mostrada a seguir.

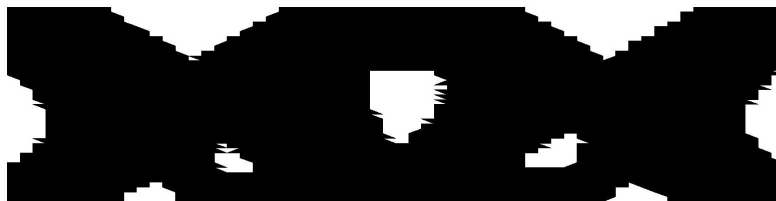


Figura 6.24: Topologia resultante, na iteração 40, usando o FFT (Análise Linear)

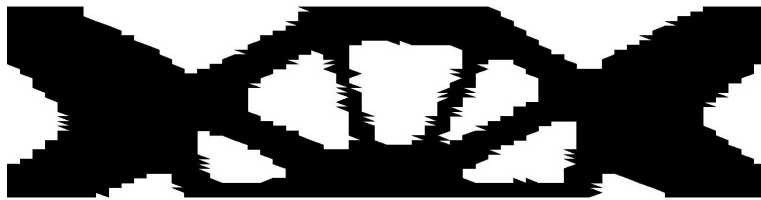


Figura 6.25: Topologia resultante, na iteração 65, usando o FFT (Análise Linear)

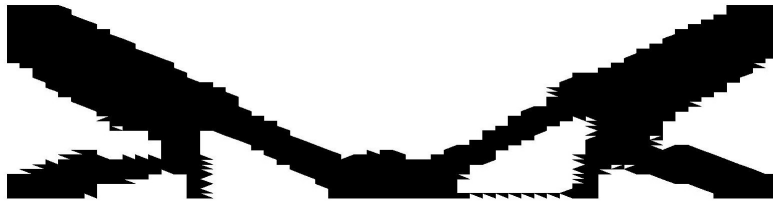


Figura 6.26: Topologia resultante, na iteração 85, usando o FFT (Análise Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.27.

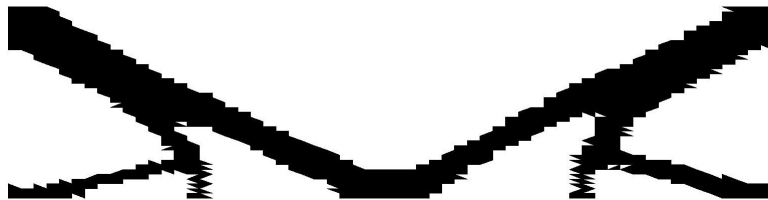


Figura 6.27: Topologia final ótima, resultante na iteração 121, usando o FFT (Análise Linear)

A evolução do processo de otimização para a análise não linear geométrica é mostrada a seguir.

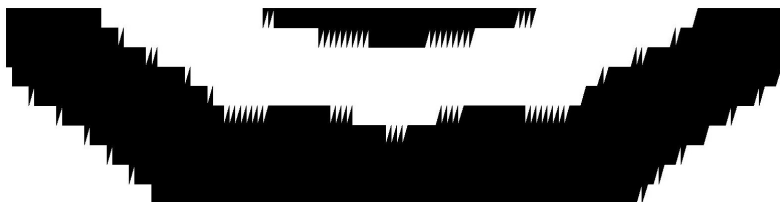


Figura 6.28: Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear)

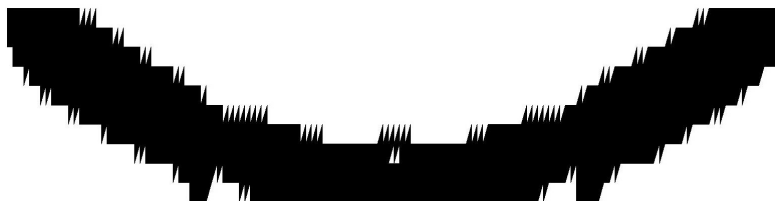


Figura 6.29: Topologia resultante, na iteração 5, usando o QST (Análise não-Linear)



Figura 6.30: Topologia resultante, na iteração 12, usando o QST (Análise não-Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.31.

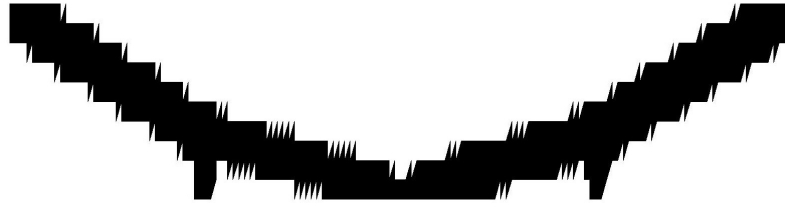


Figura 6.31: Topologia final ótima, resultante na iteração 30, usando o QST (Análise não-Linear)

Tem-se, então, um comparativo entre as topologias finais ótimas e as encontradas por Gea e Luo (2001), mostrado na figura 6.32.



(a) FFT (Modelo Linear)



(b) Gea e Luo, 2001 (Modelo Linear)



(c) QST (Modelo Não Linear)



(d) Gea e Luo, 2001 (Modelo Não Linear)

Figura 6.32: Topologias finais ótimas para chapa biengastada lateralmente

É importante ressaltar que o engaste faz aparecer tensões ao longo de todo seu comprimento, o que influencia na topologia final. De fato, os elementos que contém os nós restritos não são removidos, mas apenas eles. Assim, para melhor aproximação da topologia da literatura, esses elementos foram também removidos propositalmente, mas sabendo que o modelo é biengastado e que apenas os elementos que contém os nós restritos não são efetivamente removidos da estrutura.

Os elementos e nós utilizados para a análise de tensões e deslocamentos, respectivamente, em ambos elementos finitos, estão na figura 6.33 abaixo. Lembrando que os mesmos se referem ao ponto de aplicação da carga que se encontra mais à esquerda no modelo, e a mesma está aplicada no nó 16 no FFT e no nó 106 no QST.

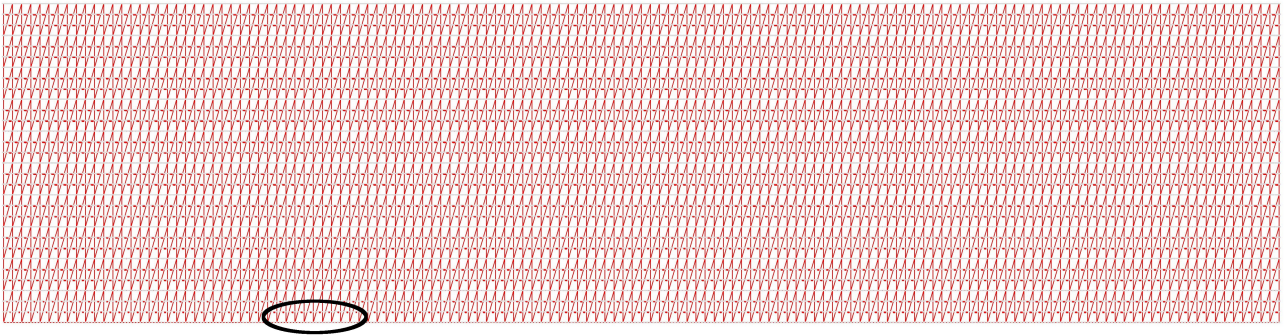


Figura 6.33: Elementos 104 (FFT) e 72 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 16 (FFT) e 106 (QST) utilizados para análise de deslocamentos

Fazendo um comparativo entre a tensão máxima de Von Mises e a iteração de otimização, tem-se:

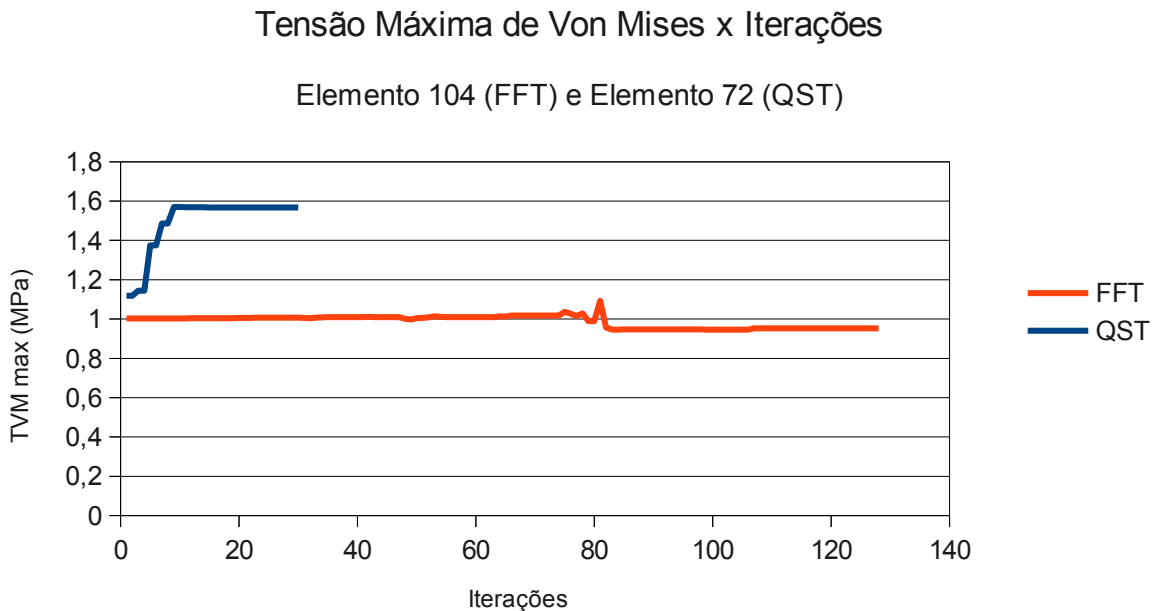


Gráfico 6.9: Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST

No FFT, a tensão permanece constante até ocorrer uma oscilação da tensão no intervalo entre as iterações 75 e 82. Como é verificado nas topologias intermediárias, há uma leve assimetria dos membros internos do modelo. Quando esses membros são removidos, correspondente ao intervalo dessas iterações, essa assimetria provoca picos de tensão até que todos os membros sejam removidos, ocorrendo a estabilização. É interessante perceber que a tensão diminui levemente em relação ao inicial, pois ela tende a crescer no ponto da carga central do modelo, como visto no exemplo anterior.

No QST, é importante ressaltar que a matriz de rigidez não tem seu tamanho modificado, ou

seja, apenas os valores correspondentes são atualizados. Assim, como a remoção inicial é muito brusca, ela remove uma quantidade de elementos especificada pelos parâmetros de entrada. Ainda assim, o programa não remove todos esses elementos de uma vez e, por isso, aparecem os elementos “soltos” na estrutura na iteração 3. Porém, isso é corrigido nas próximas iterações. A tensão para esse exemplo permanece praticamente estável inicialmente até que todos os elementos que se encontram na parte superior são removidos (iteração 5). Nesse momento, há um leve aumento da tensão, uma vez que a estrutura já apresenta uma grande redução de material. Na iteração 12, a topologia apresentada já está bem próxima do ótimo e a tensão se estabiliza, assim como no FFT.

Fazendo um comparativo entre os deslocamentos de acordo com cada elemento, tem-se:

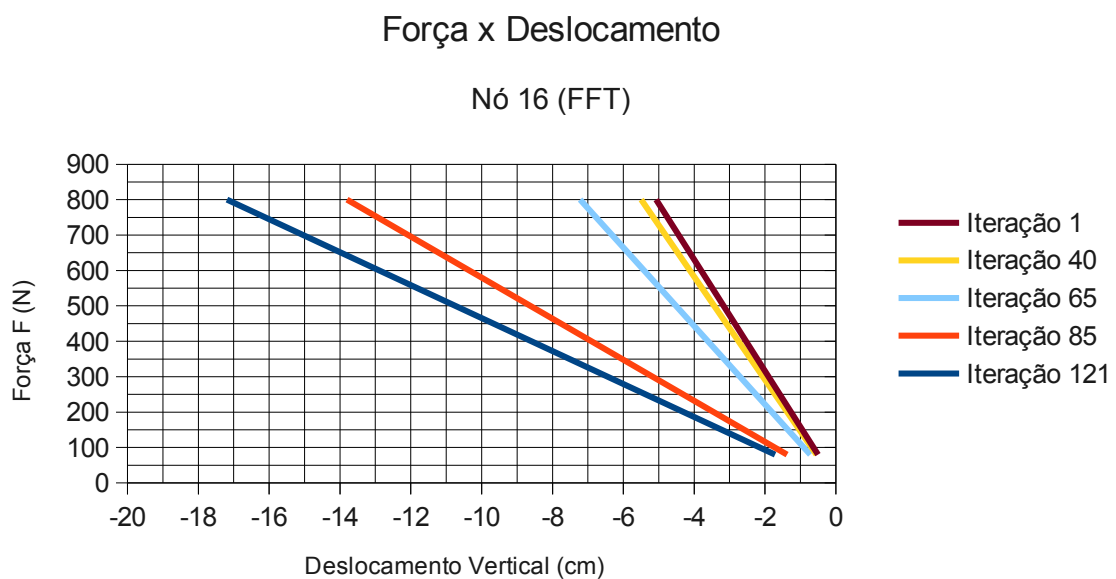


Gráfico 6.10: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT

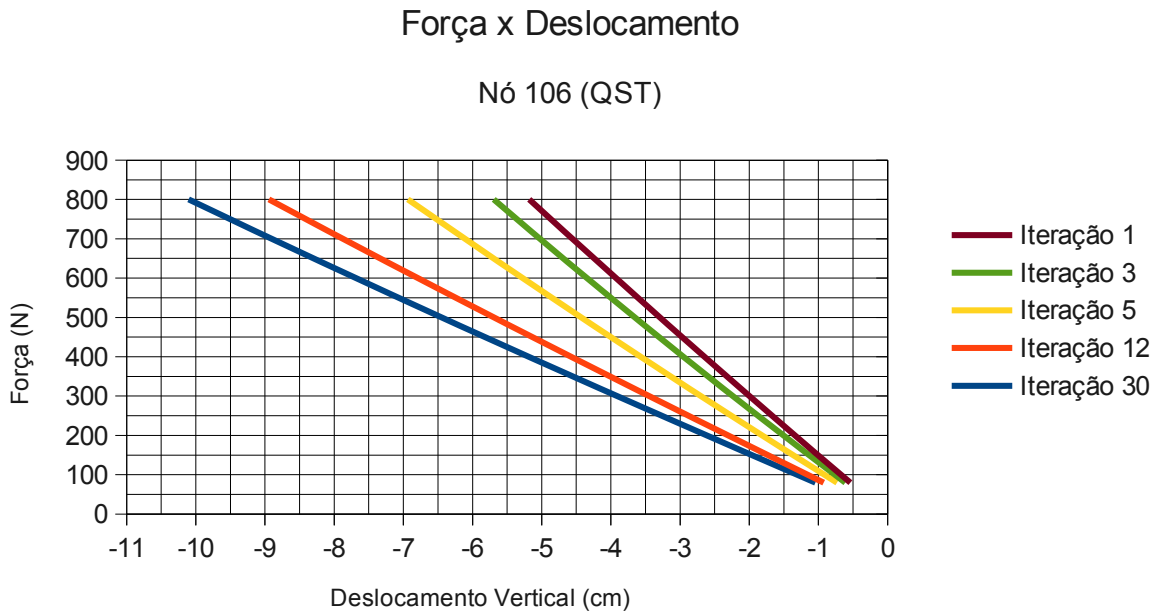


Gráfico 6.11: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST

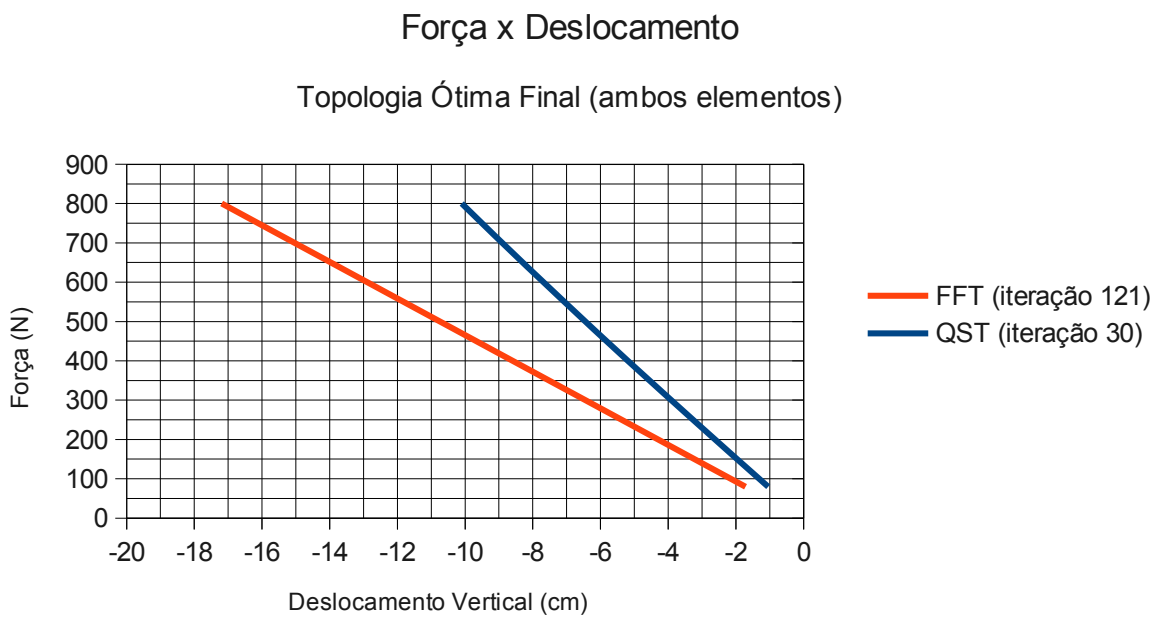


Gráfico 6.12: Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento

As tabelas abaixo mostram os valores de deslocamento linear, para o FFT, e os obtidos em cada passo de carga para cada iteração de otimização através do método de Newton Raphson, para o QST:

Iteração	Iteração 1	Iteração 40	Iteração 65	Iteração 85	Iteração 121
Deslocamento	-0.50773E+01	-0.54933E+01	-0.72238E+01	-0.13803E+02	-0.17191E+02

Tabela 6.5: Valores de deslocamentos para o elemento FFT

NPC/Iter.	Iteração 1	Iteração 3	Iteração 5	Iteração 12	Iteração 30
Passo 1	-0.53903523E+00	-0.61054028E+00	-0.73179144E+00	-0.92308474E+00	-0.10450784E+01
Passo 2	-0.10730977E+01	-0.12104780E+01	-0.14545748E+01	-0.18452794E+01	-0.20923010E+01
Passo 3	-0.16023033E+01	-0.18004664E+01	-0.21684573E+01	-0.27629383E+01	-0.31344113E+01
Passo 4	-0.21267640E+01	-0.23810936E+01	-0.28736020E+01	-0.36737764E+01	-0.41674493E+01
Passo 5	-0.26465878E+01	-0.29528924E+01	-0.35702053E+01	-0.45763449E+01	-0.51891802E+01
Passo 6	-0.31618787E+01	-0.35163466E+01	-0.42584826E+01	-0.54697424E+01	-0.61983754E+01
Passo 7	-0.36727374E+01	-0.40718973E+01	-0.49386599E+01	-0.63534331E+01	-0.71944030E+01
Passo 8	-0.41792612E+01	-0.46199480E+01	-0.56109669E+01	-0.72271303E+01	-0.81770247E+01
Passo 9	-0.46815442E+01	-0.51608686E+01	-0.62756331E+01	-0.80907181E+01	-0.91462309E+01
Passo 10	-0.51796771E+01	-0.56949993E+01	-0.69328853E+01	-0.89441985E+01	-0.10102167E+02

Tabela 6.6: Valores de deslocamentos para o elemento QST

Assim como no exemplo anterior, os deslocamentos do FFT crescem muito após a remoção dos membros superiores. Mais uma vez para o QST, inicialmente os valores são elevados, mas novamente permanece com valores finais menores que o FFT, fazendo com que a topologia final do QST desloque menos que a FFT.

Para esse exemplo, a curva para o QST se mostra suave, estando novamente na interface entre o linear e o não linear de acordo com os valores tabelados.

6.1.4 – Chapa longa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores

Este exemplo consiste em uma chapa retangular longa presa pelas suas extremidades. Apenas uma carga é aplicada em sua face inferior, e possui as seguintes dimensões, de acordo com a figura 6.34.

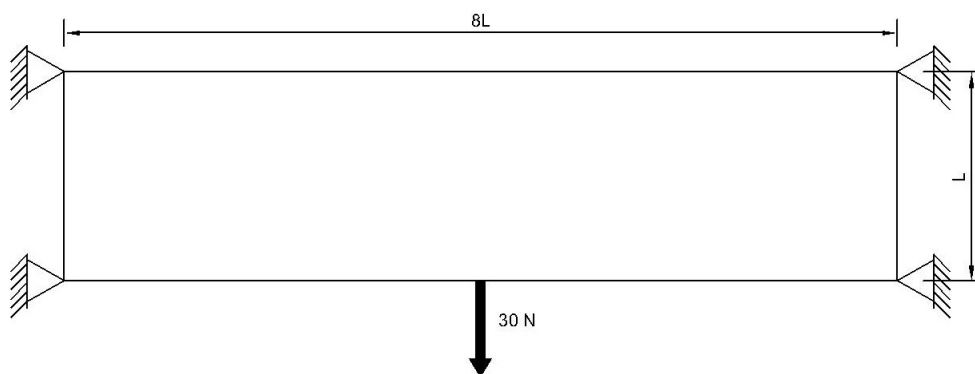


Figura 6.34: Chapa longa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores

Os dados do problema, incluindo os parâmetros do material utilizado, são listados a seguir:

- Malha utilizada: 60 x 24 para o FFT (totalizando 2880 elementos finitos triangulares) e 120 x 12 para o QST (totalizando 2880 elementos finitos triangulares);

- Módulo de Elasticidade (E): 3000 N/cm²;
- Poisson (ν): 0,3;
- Espessura (t): 0,1 cm;
- Comprimento (L): 2 cm;
- Parâmetros de Otimização:
 - Para o FFT: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 40%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 1.75%, Razão de rejeição (RR) = 1 e Razão Evolucionária (ER) = 1,75.
 - Para o QST: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 40%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 1.75%, Razão de rejeição (RR) = 3,5 e Razão evolucionária (ER) = 10,75.

Esse problema foi também estudado por Jung e Gea (2004) e por Chang et al. (2012). A evolução do processo de otimização para a análise linear é mostrada a seguir.



Figura 6.35: Topologia resultante, na iteração 50, usando o FFT (Análise Linear)



Figura 6.36: Topologia resultante, na iteração 85, usando o FFT (Análise Linear)



Figura 6.37: Topologia resultante, na iteração 98, usando o FFT (Análise Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.38.



Figura 6.38: Topologia final ótima, resultante na iteração 111, usando o FFT (Análise Linear)

A evolução do processo de otimização para a análise não linear geométrica é mostrada a seguir.

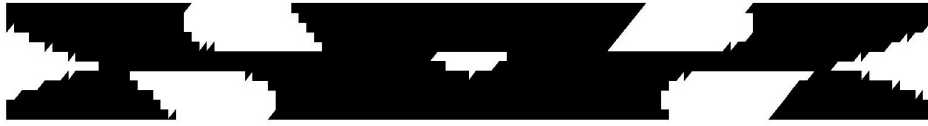


Figura 6.39: Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear)



Figura 6.40: Topologia resultante, na iteração 5, usando o QST (Análise não-Linear)

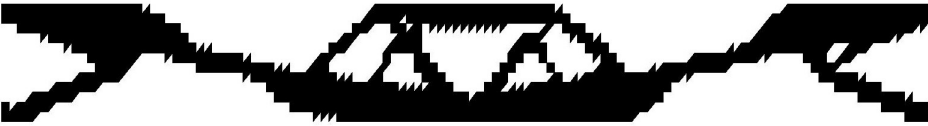


Figura 6.41: Topologia resultante, na iteração 15, usando o QST (Análise não-Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.42.

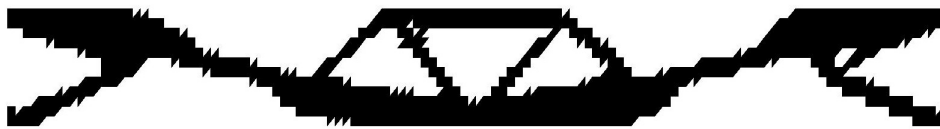


Figura 6.42: Topologia final ótima, resultante na iteração 30, usando o QST (Análise não-Linear)

Tem-se, então, um comparativo entre as topologias finais ótimas e as encontradas por Chang *et al.* (2012), mostrado na figura 6.43.



(a) FFT (Modelo Linear)



(b) Chang *et al.*, 2012 (Modelo Linear)



(c) QST (Modelo Não Linear)



(d) Chang *et al.*, 2012 (Modelo Não Linear)

Figura 6.43: Topologias finais ótimas para chapa longa presa pelas extremidades nos nós superiores e inferiores

Os elementos e nós utilizados para a análise de tensões e deslocamentos, respectivamente, em ambos elementos finitos, estão na figura 6.44 abaixo. Lembrando que os mesmos se referem ao ponto de aplicação da carga, e a mesma está aplicada no nó 31 no FFT e no nó 181 no QST.

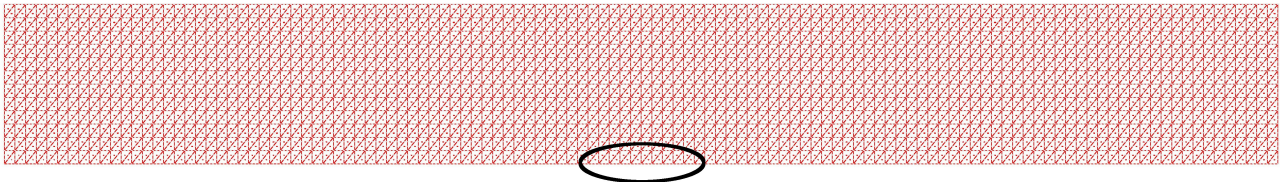


Figura 6.44: Elementos 223 (FFT) e 122 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 31 (FFT) e 181 (QST) utilizados para análise de deslocamentos

Fazendo um comparativo entre a tensão máxima de Von Mises e a iteração para cada elemento, tem-se:

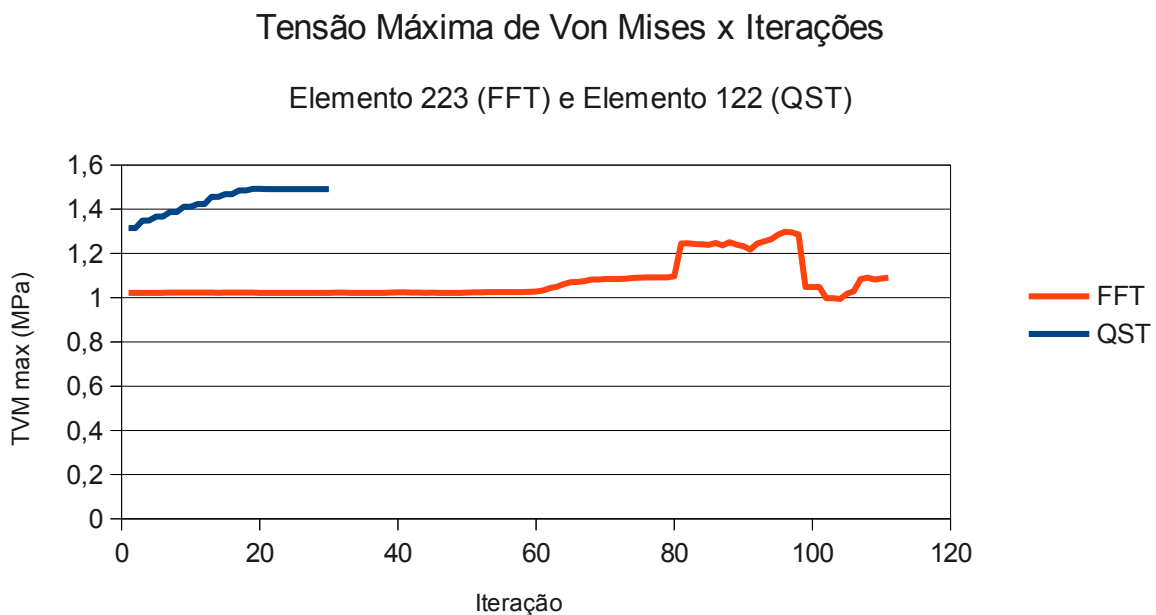


Gráfico 6.13: Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST

Nesse exemplo, para o FFT, a tensão permanece constante até próximo a iteração 80, quando sofre um ligeiro aumento, dado pela formação de um vazio interno (buraco) e, logo após, um decaimento (próximo a iteração 100) causado pela remoção dos membros inferiores e, conseqüentemente, uma redistribuição da tensão para os membros remanescentes. A tensão aumenta nos cantos da chapa, dessa forma.

Para o QST, a tensão cresce à medida que os elementos são removidos. Como não há remoção de membros inferiores adjacentes à carga, a tensão aumenta gradativamente e não sofre influência dos membros internos removidos (após a iteração 15), além da remoção dos mesmos ser bem gradual, ou seja, aos poucos.

Fazendo um comparativo entre os deslocamentos de acordo com cada elemento, tem-se:

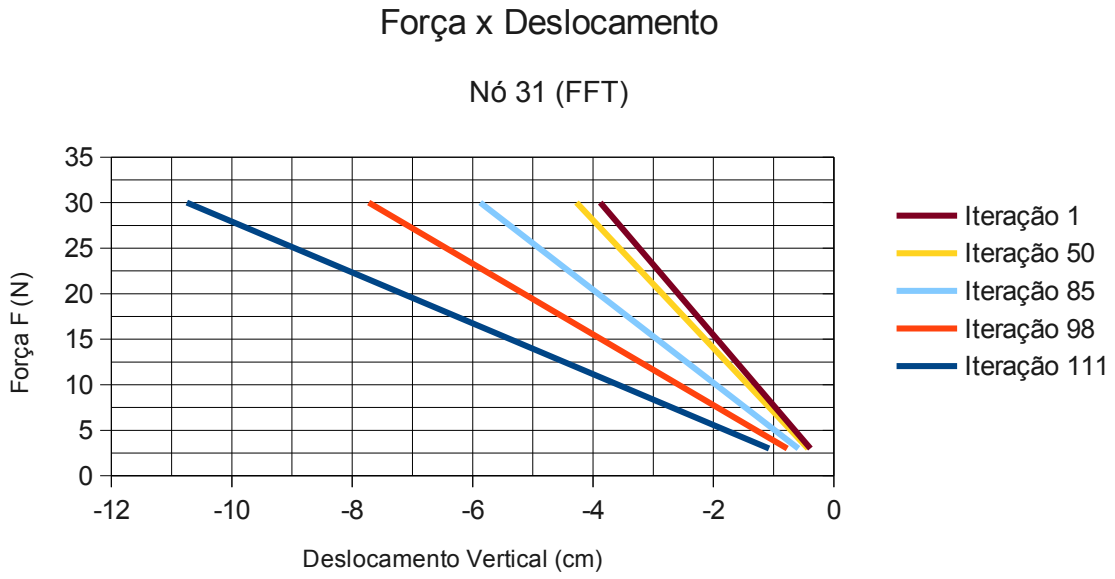


Gráfico 6.14: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT

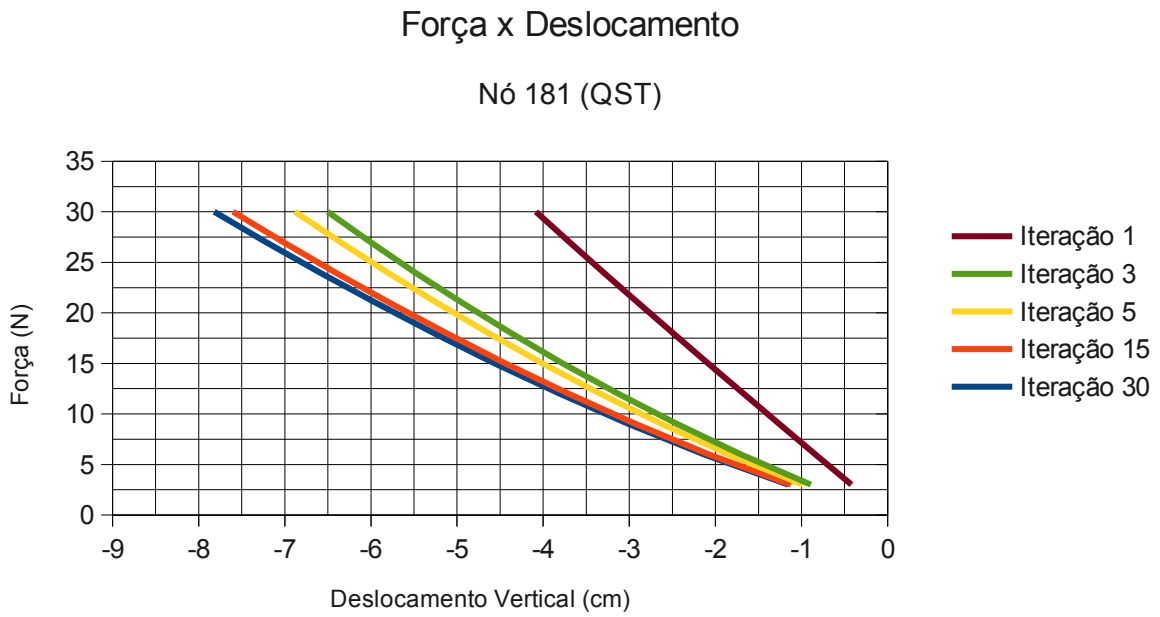


Gráfico 6.15: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST

Força x Deslocamento

Topologia Ótima Final (ambos elementos)

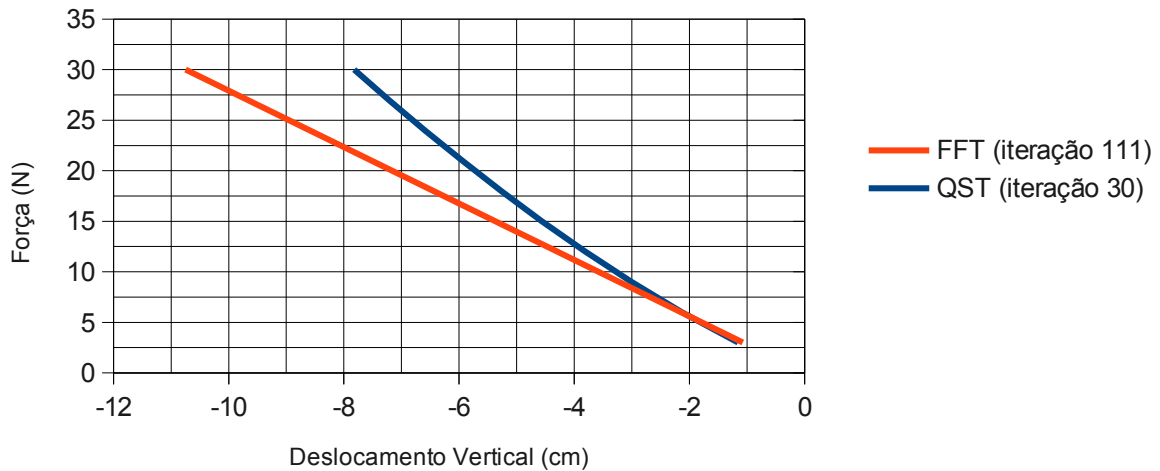


Gráfico 6.16: Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento

As tabelas abaixo mostram os valores de deslocamento linear, para o FFT, e os obtidos em cada passo de carga para cada iteração de otimização através do método de Newton Raphson, para o QST:

Iteração	Iteração 1	Iteração 50	Iteração 85	Iteração 98	Iteração 111
Deslocamento	-0.38786E+01	-0.42733E+01	-0.58725E+01	-0.77242E+01	-0.10748E+02

Tabela 6.7: Valores de deslocamentos para o elemento FFT

NPC/Iter.	Iteração 1	Iteração 3	Iteração 5	Iteração 15	Iteração 30
Passo 1	-0.42051350E+00	-0.89210497E+00	-0.98435310E+00	-0.11232422E+01	-0.11543212E+01
Passo 2	-0.83976749E+00	-0.17018539E+01	-0.18455642E+01	-0.20739866E+01	-0.21311605E+01
Passo 3	-0.12571810E+01	-0.24437450E+01	-0.26228423E+01	-0.29242314E+01	-0.30052192E+01
Passo 4	-0.16721952E+01	-0.31301258E+01	-0.33385203E+01	-0.37059107E+01	-0.38091133E+01
Passo 5	-0.20842819E+01	-0.37707964E+01	-0.40066119E+01	-0.44364402E+01	-0.45606042E+01
Passo 6	-0.24929500E+01	-0.43733812E+01	-0.46365363E+01	-0.51265929E+01	-0.52707041E+01
Passo 7	-0.28977508E+01	-0.49438137E+01	-0.52349610E+01	-0.57836133E+01	-0.59468683E+01
Passo 8	-0.32982823E+01	-0.54867994E+01	-0.58068444E+01	-0.64127114E+01	-0.65944859E+01
Passo 9	-0.36941911E+01	-0.60059312E+01	-0.63558275E+01	-0.70176732E+01	-0.72176916E+01
Passo 10	-0.40851732E+01	-0.65042548E+01	-0.68848998E+01	-0.76015533E+01	-0.78197560E+01

Tabela 6.8: Valores de deslocamentos para o elemento QST

Os deslocamentos do FFT crescem muito após a remoção dos membros inferiores, mas começam com uma diferença relativamente baixa. Para o QST, dada a brusca remoção inicial, os deslocamentos aumentam consideravelmente já na iteração 3, uma vez que a chapa é longa. Após isso, os valores sofrem pouca variação.

Para esse exemplo, a curva se mostra bem definida, apresentando uma considerável não linearidade do modelo.

6.1.5 – Chapa quadrada com carga no centro geométrico

Este exemplo consiste em uma chapa quadrada presa pelas suas extremidades inferiores e superiores. É considerada uma carga em seu centro geométrico, assim como na figura 6.45

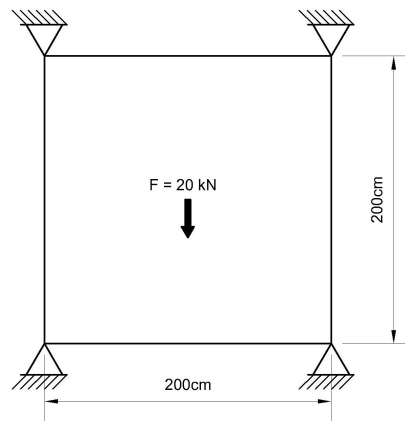


Figura 6.45: Chapa quadrada com carga no centro geométrico

Os dados do problema, incluindo os parâmetros do material utilizado e condições de contorno, são listados a seguir:

- Malha utilizada: 40 x 40 para o FFT (totalizando 3200 elementos finitos triangulares) e 30 x 30 para o QST (totalizando 1800 elementos finitos triangulares);
- Módulo de Elasticidade (E): 2000000 N/cm²;
- Poisson (ν): 0,3;
- Espessura (t): 1 cm;
- Parâmetros de Otimização
 - Para o FFT: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 20%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 15%, Razão de rejeição (RR) = 1 e Razão Evolucionária (ER) = 1,5.
 - Para o QST: Volume máximo desejado (VOLMAX) = 20%, Retirada de volume por iteração (RVOL) = 15%, Razão de rejeição (RR) = 3,5 e Razão evolucionária (ER) = 12,75.

Esse problema foi também estudado por Chang et al. (2012). A evolução do processo de otimização para a análise linear é mostrada a seguir.



Figura 6.46: Topologia resultante, na iteração 30, usando o FFT (Análise Linear)



Figura 6.47: Topologia resultante, na iteração 80, usando o FFT (Análise Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.48.

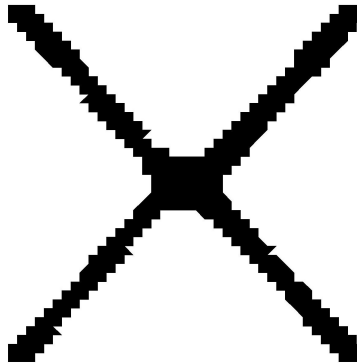


Figura 6.48: Topologia final ótima, resultante na iteração 145, usando o FFT (Análise Linear)

A evolução do processo de otimização para a análise não linear geométrica é mostrada a seguir.

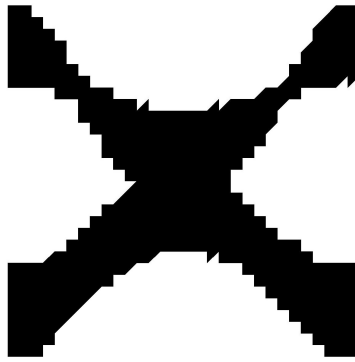


Figura 6.49: Topologia resultante, na iteração 3, usando o QST (Análise não-Linear)

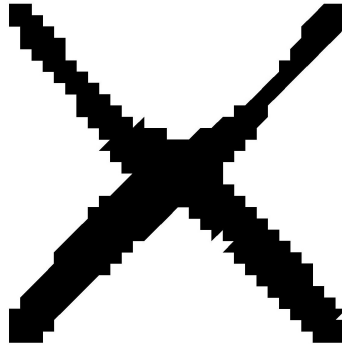


Figura 6.50: Topologia resultante, na iteração 6, usando o QST (Análise não-Linear)

A topologia final ótima encontrada é mostrada na figura 6.51.

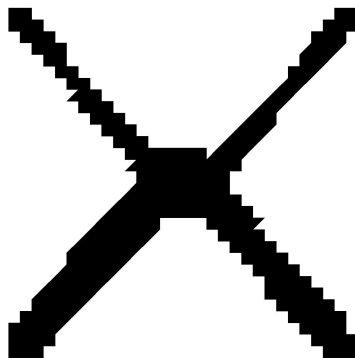
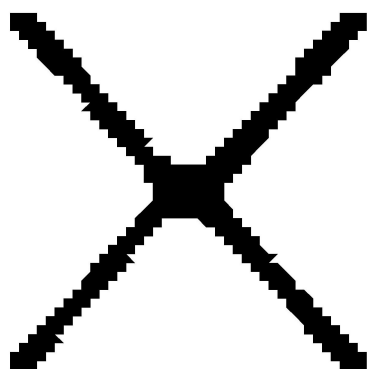


Figura 6.51: Topologia final ótima, resultante na iteração 22, usando o QST (Análise não-Linear)

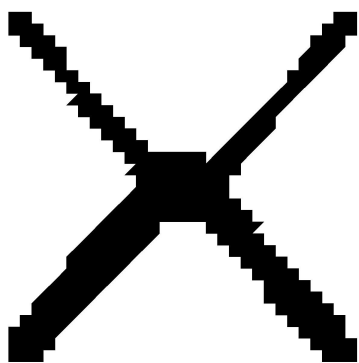
As topologias finais ótimas encontradas por Chang *et al.* (2012) para as análises linear e não linear, respectivamente, são mostradas na figura 6.52.



(a) FFT (Modelo Linear)



(b) Chang et al., 2012 (Modelo Linear)



(c) QST (Modelo Não Linear)



(d) Chang et al., 2012 (Modelo Não Linear)

Figura 6.52: Topologias finais ótimas para chapa quadrada com carga no centro geométrico

Os elementos e nós utilizados para a análise de tensões e deslocamentos, respectivamente, em ambos elementos finitos, estão na figura 6.53 abaixo. Lembrando que os mesmos se referem ao ponto de aplicação da carga, no centro geométrico do modelo, e a mesma está aplicada no nó 841 no FFT e no nó 4141 no QST.

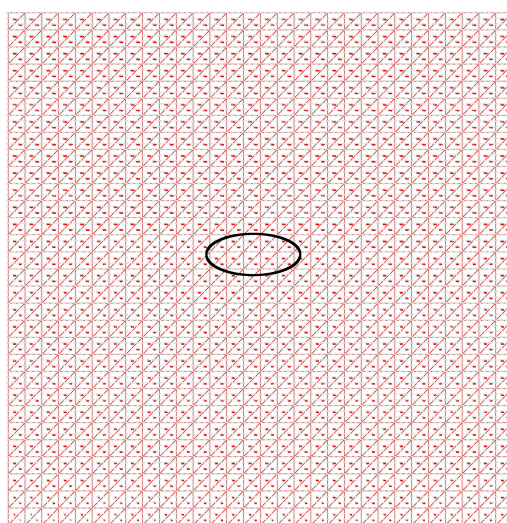


Figura 6.53: Elementos 1928 (FFT) e 932 (QST) utilizados para análise de tensões e nós 841 (FFT) e 4141 (QST) utilizados para análise de deslocamentos

Fazendo um comparativo entre a tensão máxima de Von Mises e a iteração para cada elemento, tem-se:

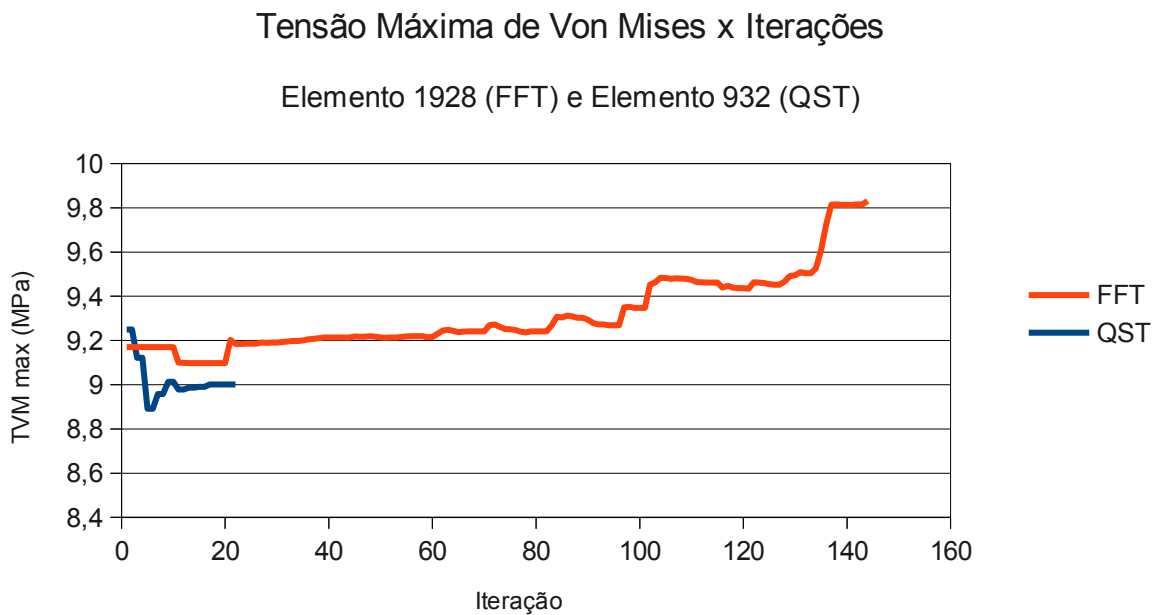


Gráfico 6.17: Tensão Máxima de Von Mises x Iteração para ambos elementos FFT e QST

Para o FFT, a tensão cresce à medida que os elementos são removidos, sofrendo poucas oscilações. Ao final do processo iterativo (iteração 140) há um pequeno aumento da tensão frente ao total de elementos removidos.

Já no QST a tensão cai inicialmente, uma vez que os membros inferiores concentram a maior quantidade de tensão. Há um ligeiro aumento após a iteração 6, já que a topologia já está muito próxima do ótimo e muitos elementos já foram removidos.

Fazendo um comparativo entre os deslocamentos de acordo com cada elemento, tem-se:

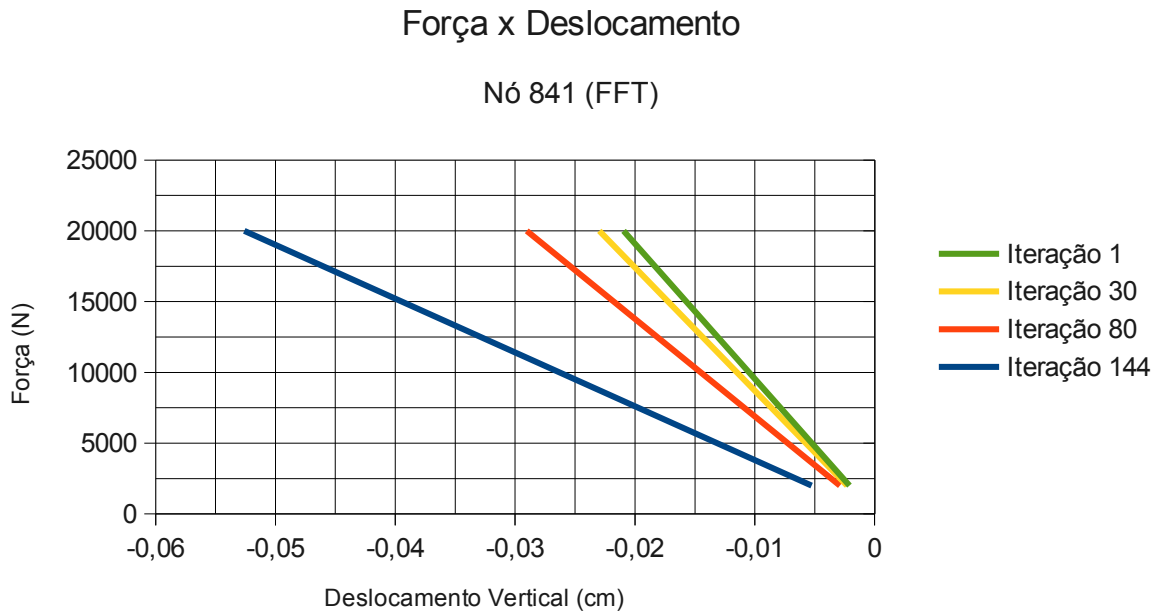


Gráfico 6.18: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do FFT

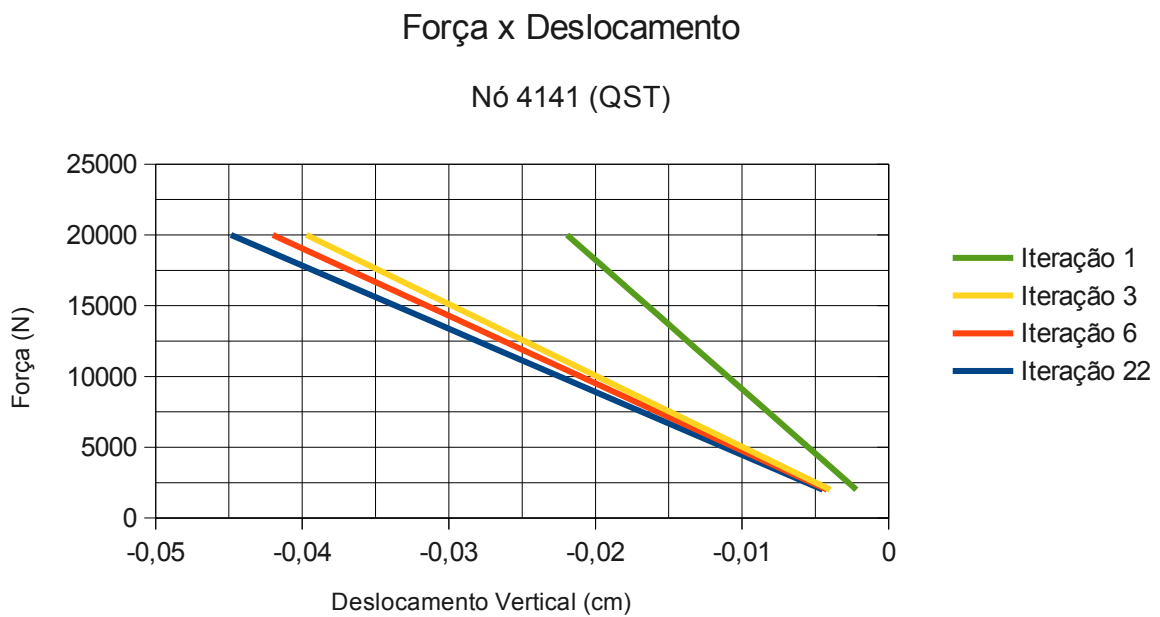


Gráfico 6.19: Força x Deslocamento ao longo do processo iterativo de otimização do QST

Força x Deslocamento

Topologia Ótima Final (ambos elementos)

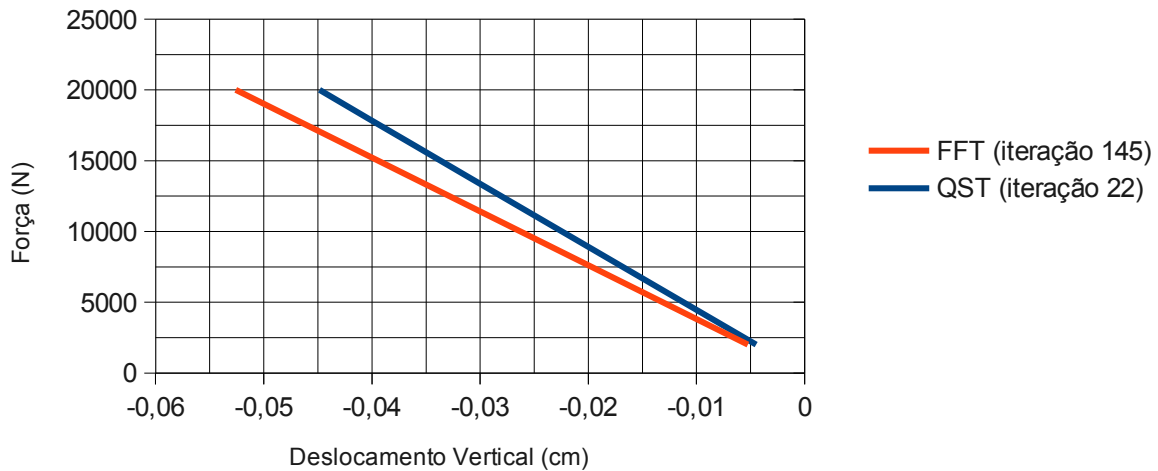


Gráfico 6.20: Força x Deslocamento das topologias ótimas finais de cada elemento

As tabelas abaixo mostram os valores de deslocamento linear, para o FFT, e os obtidos em cada passo de carga para cada iteração de otimização através do método de Newton Raphson, para o QST:

Iteração	Iteração 1	Iteração 30	Iteração 80	Iteração 144
Deslocamento	-0.20951E-01	-0.22975E-01	-0.29041E-01	-0.52591E-01

Tabela 6.9: Valores de deslocamentos para o elemento FFT

NPC/Iter.	Iteração 1	Iteração 3	Iteração 6	Iteração 22
Passo 1	-0.21927585E-02	-0.39712384E-02	-0.41997224E-02	-0.44856481E-02
Passo 2	-0.43855179E-02	-0.79424892E-02	-0.83994351E-02	-0.89713957E-02
Passo 3	-0.65782784E-02	-0.11913753E-01	-0.12599139E-01	-0.13457243E-01
Passo 4	-0.87710399E-02	-0.15885028E-01	-0.16798833E-01	-0.17943190E-01
Passo 5	-0.10963802E-01	-0.19856317E-01	-0.20998519E-01	-0.22429238E-01
Passo 6	-0.13156566E-01	-0.23827619E-01	-0.25198196E-01	-0.26915385E-01
Passo 7	-0.15349331E-01	-0.27798933E-01	-0.29397865E-01	-0.31401634E-01
Passo 8	-0.17542096E-01	-0.31770260E-01	-0.33597526E-01	-0.35887983E-01
Passo 9	-0.19734863E-01	-0.35741600E-01	-0.37797179E-01	-0.40374433E-01
Passo 10	-0.21927630E-01	-0.39712953E-01	-0.41996825E-01	-0.44860984E-01

Tabela 6.10: Valores de deslocamentos para o elemento QST

Os valores dos deslocamentos do FFT crescem muito ao longo das últimas iterações, ao contrário do QST, onde os valores crescem muito já nas primeiras iterações (brusca remoção inicial) e não sofrem grandes alterações até a topologia ótima final. Os valores finais de deslocamento do QST são menores que os do FFT.

Para esse exemplo, a curva para o QST se mostra bastante suave (chapa curta), estando na interface entre o linear e o não linear de acordo com os valores tabelados.

6.2 – Discussão dos Resultados

As topologias ótimas encontradas para todos os exemplos foram satisfatórias de acordo com os exemplos encontrados na literatura. Malhas diferentes foram utilizadas de acordo com a necessidade de cada elemento para se obter resultados pertinentes. Apesar disso, os mesmos parâmetros de entrada (exceto FER e FRR que dependem do tipo de elemento) foram utilizados e, dessa maneira, algumas observações podem ser feitas.

A brusca remoção inicial do QST, observada no capítulo anterior, se repete para os exemplos não lineares, assim como o número reduzido de iterações, de forma geral, e o maior tempo de processamento, comparado ao FFT, o que leva a concluir a diferença de comportamento do elemento quanto à técnica de otimização SESO. Assim, para um mesmo procedimento de obtenção da topologia final, diferentes elementos se comportam de maneiras distintas ao longo do processo iterativo, principalmente no que tange a não linearidade geométrica, em relação ao tempo de processamento, topologia ótima final e número total de iterações necessárias para se atingir o resultado esperado. Apesar disso, as topologias encontradas foram bem próximas comparadas a outros métodos e técnicas da literatura.

Em relação às topologias finais, a diferença é notável entre os resultados de cada elemento, influenciando diretamente nos valores de deslocamentos e na tensão ao longo da estrutura e do processo iterativo. Em alguns exemplos, a diferença é bastante considerável, podendo levar a uma análise errônea de qual seria a melhor topologia final. Essa diferença se dá principalmente devido às formulações de cada elemento, assim como o número de nós totais de cada um, mas principalmente, na natureza linear ou não linear dos exemplos avaliados. Logo, dependendo das especificações iniciais de projeto, essa diferença na topologia final entre linear e não linear pode ser significativa e crucial, o que requer uma atenção muito especial ao se fazer uma análise como essa.

Além dessas informações, a comparação entre as diferentes técnicas de otimização dos exemplos apresentados com o SESO garante que a topologia final dependa basicamente da não linearidade do modelo, da formulação do elemento finito e, também, da intensidade da carga e não necessariamente da técnica de otimização empregada, uma vez que os resultados do SESO ficaram bem próximos aos apresentados pela literatura.

Quanto à tensão, é interessante notar que como a remoção do FFT é mais lenta comparada ao QST, membros internos em iterações intermediárias são formados na maioria dos casos e,

quando removidos, provocam picos ou oscilações na tensão nas iterações próximas. No QST isso praticamente não ocorre, já que nas primeiras iterações a topologia ótima já está quase definida após a brusca remoção de elementos. É interessante notar que em alguns casos no FFT a tensão diminui no ponto de aplicação da carga nas iterações próximas ao ótimo, uma vez que a maior tensão do modelo se concentra em membros afastados da carga. No QST isso também acontece no último exemplo, mas, de forma geral, a tensão tende a crescer no ponto de aplicação da carga, ao longo do processo iterativo.

Quanto aos deslocamentos, pode-se perceber que as topologias encontradas para o QST deslocam menos (em sua forma ótima) do que as obtidas no FFT. Isso acontece uma vez que o ótimo do QST possui uma melhor forma final, mais otimizada nesse quesito por apresentar uma melhor disposição de membros internos que redistribuem melhor os esforços gerados, o que, de forma geral, garante deslocamentos menores ao contrário das topologias apresentadas pelo FFT. Em outras palavras, essa disposição dos membros internos da topologia final se dá de tal forma que a estrutura se torna mais rígida em relação ao FFT, garantindo assim menores deslocamentos de acordo com o carregamento aplicado. Uma outra observação pertinente é em relação à curva não linear dos valores de deslocamento. Nos exemplos em que as dimensões do modelo possuíam valores próximos entre si (chapa quadrada ou curta), a curva de deslocamentos permanecia na interface entre o linear e o não linear já que os valores das cargas não eram grandes o suficiente para provocarem elevados deslocamentos. Porém, a topologia ainda assim foi diferente de acordo com a singularidade não linearidade e, também, devido à formulação do QST.

Por fim, é importante salientar as diferenças de topologia entre uma análise linear e não linear dos modelos lineares. Essa diferença ocorre, principalmente, pelo fato de uma análise não linear levar em conta os efeitos provocados pelos momentos gerados a partir de cargas excêntricas e/ou irregularidades da peça estrutural. Assim sendo, os deslocamentos menores que podem ser vistos nos gráficos do QST em comparação com o FFT ocorrem devido às topologias não lineares serem otimizadas a fim de se evitar efeitos de segunda ordem como, por exemplo, flambagem da estrutura. Essa característica pode ser facilmente notada no último exemplo, onde os membros inferiores da estrutura ótima do QST são mais espessos que a estrutura ótima do FFT, evitando uma flambagem local desses membros, uma vez que estão comprimidos. E para que o volume final seja o mesmo de ambos, os membros superiores se mostram mais finos, uma vez que se encontram tracionados, de acordo com o carregamento imposto no problema. Assim, em resumo, a disposição dos membros da estrutura otimizada do QST se difere do FFT para impedir os efeitos de flambagem local que podem surgir mediante ao carregamento considerando, sendo que esses efeitos não são determinados em uma análise linear.

Capítulo 7 – Considerações Finais

De acordo com as verificações feitas nesse trabalho, pode-se enunciar algumas considerações importantes.

→ A importância de se otimizar está diretamente ligado ao fato de se aproveitar ao máximo a estrutura para determinado carregamento específico. Assim, de acordo com as especificações de projeto, é vantajoso, do ponto de vista econômico, otimizar um modelo para se ter uma boa relação entre o volume final da estrutura (peso) e o tipo de carregamento aplicado. Além disso, outras variáveis, como custo, podem ser relativamente melhoradas ao fim do processo.

→ Com o Método dos Elementos Finitos aplicado juntamente às técnicas de otimização foram gerados resultados muito satisfatórios. A literatura, em geral, abrange muito esse método para otimização. Além disso, ambos elementos finitos lineares e planos (triangulares) obtiveram topologias semelhantes, ao qual se conclui que a obtenção do ótimo independe do tipo de elemento finito em si, mas sim da sua formulação.

→ A técnica de otimização SESO pode eliminar muitos pormenores, alguns causados pelo Método dos Elementos Finitos (como a dependência da malha para a maioria dos casos, por exemplo) e outros pelo seu antecessor, o ESO (como o “tabuleiro de xadrez”), e se mostrou bem eficiente frente às outras técnicas presentes na literatura, tais como SIMP, ACO e TSA. Dessa forma, vale a pena uma maior e melhor investigação e aprofundamento da técnica, inclusive com outros métodos matemáticos (como Elementos de Contorno), com o intuito de melhorar o SESO e obter resultados mais aprimorados.

→ Para chapas com deslocamentos muito pequenos e/ou chapas curtas, uma análise linear pode ser suficiente para se determinar a topologia ótima de um modelo, uma vez que a topologia final, em geral, é a mesma em uma análise linear e não linear. A curva de força x deslocamento permanece no trecho linear apenas e é por isso que as topologias são iguais. Porém, para deslocamentos consideráveis, pode ser necessária uma análise não linear (nesse caso, geométrica), pois as topologias serão diferentes e, dessa forma, uma falsa topologia, ou uma topologia inadequada, ou ainda uma topologia não totalmente otimizada pode ser gerada a partir de uma análise linear para problemas desse gênero, que pode ser inviável do ponto de vista estrutural.

→ O critério de parada pelo volume máximo informado deixa de ser fundamental no QST para se atingir a estrutura ótima. É importante notar que, em um determinado instante do processo iterativo de remoção de elementos, a distribuição de tensão ocorre de tal forma que o critério de parada adotado não mais seja satisfeito. Isso se dá devido ao método de Newton Raphson, pois em um determinado momento, os deslocamentos se mantêm praticamente constante, fazendo com que não haja mais a conversão do método (a derivada da função que rege o problema se aproxima de 0) e não mais ocorra a retirada de elementos devido à constância do valor de tensão de Von Mises dos elementos remanescentes. Assim, de forma geral, caso o volume final da estrutura seja um valor pequeno em relação ao seu volume inicial, por exemplo 5%, o volume ótimo final do QST não atingirá esse valor. Além disso, o fato de VOLMAX não ser mais um critério de parada garante uma melhoria na performance. Em outras palavras, quando o VOLMAX é utilizado como critério de parada, pode ocorrer o colapso da estrutura, ou seja, membros importantes que garantem sua estabilidade se romperem até que o valor definido seja atingido. Logo, investigar outras estratégias como critério de parada podem ser interessantes para se garantir uma melhor topologia final.

→ As topologias das análises do QST se mostraram diferentes das topologias do FFT devido uma consideração dos efeitos provocados pelo momento fletor, oriundos de uma análise não linear. Assim, efeitos de flambagem são considerados e modificam membros da estrutura, a fim de suportar esses momentos que surgem devido às imperfeições da peça ou carga excêntrica.

Finalmente, a partir dessas considerações, é visto que vale a pena otimizar uma estrutura para se poder utilizar o máximo de sua capacidade de acordo com o carregamento, uma vez que, além da estrutura, outros parâmetros podem ser também otimizados, como peso e custo final. E, novamente, uma análise não linear é importante para que não se obtenha uma topologia ótima possivelmente inadequada em uma análise mais detalhada de uma estrutura, envolvendo-se grandes deslocamentos.

Tem-se como sugestão para próximas dissertações:

- Análises dinâmicas, a fim de se comparar as topologias ótimas com a literatura;
- Deslocamentos como função objetivo na otimização, a fim de avaliar mudanças na topologia de acordo com os valores de deslocamentos obtidos em cada iteração;
- Análise não linear de acordo com o tipo de material;
- Análise não linear com a inserção de vazios no domínio inicial.

- Almeida, V. S., *Otimização topológica de estruturas via MEF e MEC*. Projeto de Pesquisa PQ, CNPq. (2009).
- Almeida, V. S., Fernandes, W. S., Simonetti, H. L., Neves, F. A., Greco, M., *Avaliação de Diferentes Elementos Finitos em Problemas Elásticos 2D em Otimização Topológica*. CILAMCE, Brasil. (2011).
- Anderson, T. W. *Estimating linear statistical relationships*. The Annals of Statistics, vol. 12, no. 1, pp. 1-45. (1984).
- Angus, D. J., *Niching Ant Colony Optimisation*. Faculty of Information & Communication Technologies Swinburne University of Technology, Melbourne, Australia . (2008).
- Assan, A. E. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. Ed. da UNICAMP, 2.ed. (2003).
- Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA. (1982).
- Bendsøe, M. P., Kikuchi, N., *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, pp. 197-224. (1988).
- Bendsøe, M. P., Sigmund, O., *Topology optimization*, Springer, Berlin. (2002).
- Bergan, P. G. e Felippa, C. A., *A triangular membrane element with rotational degrees of freedom*. Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng., v.50, p.25-69. (1985).
- Cardoso, E. L., *Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas*. Dissertação de Mestrado da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul. (2000).
- Cervera E., *Evolutionary Structural Optimization based on Boundary Representation of B-spline Geometry*. PhD Thesis. University of Durham, Durham, UK, 2003.
- Cervera, E., Trevelyan, J., *Evolutionary Structural Optimization based on Boundary Representation of NURBS. Part I: 2D Algorithms*. Computers and Structures 83 ,1902–1916, 2005.
- Chang, D. H., Yoo, K. S., Park, J. Y., Han, S. Y., *Optimum Design for Nonlinear Problems Using Modified Ant Colony Optimization*. International Conference on Software and Computer Applications (ICSCA), Singapore. (2012).
- Cheng, G. e Guo, X., *Epsilon-relaxed approach in structural topology optimization*. Structural Optimization, v. 13, n. 4, pp. 258-266. (1997).
- Cheng, G. e Jiang, Z., *Study on topology optimization with stress constraints*. Engineering Optimization, v. 20, pp. 129-148. (1992).
- Cheng, T. K. e Olhoff, N., *An investigation concerning optimal design of solid elastic plates*.

- International Journal of Solids Structures, v.17, pp. 305-323. (1981).
- Cheng, T. K. e Olhoff, N., *Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates*. International Journal of Solids Structures, 18-2, pp. 153-169. (1982).
- Chu, D. N., Xie, Y. M., Hira, A. e Steven, G. P., *Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints*. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 21, pp. 239-251. (1996).
- Coutinho, K. D., *Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte. (2006).
- Cox, H. L., *The Theory of Design*, Aeronaut. Res. Council Rep. No. 19791. (1958).
- Crisfield, M. A., *Non Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, USA. (2000).
- Fancello, E. A., *Análise de sensibilidade, geração adaptativa de malhas e o Método dos Elementos Finitos na otimização de forma em problemas de contato e mecânica da fratura*. Tese de Doutorado da COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil. (1993).
- Friedman, J. H., Stuetzle, W., *Projection Pursuit Regression*. J. Amer. Statist. Assoc. 76, 817. (1981).
- Fernandes, W. L., *Software para Análise e Dimensionamento de Vigas Mistas Aço Concreto em Pontes Rodoviárias*. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós Graduação do Departamento de Engenharia Civil da UFOP, Ouro Preto. (2008).
- Gea, H. C. e Luo J., *Topology Optimization of Structures with Geometrical Nonlinearities*, Department of Mechanical and Aerospace Engineering of The State University of New Jersey, EUA. (2001).
- Goodman, J., Kohn, R. V. e Reyna, L., *Numerical Study of Relaxed Variational Problem from Optimal Design*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 57, pp. 107-127. (1986).
- Greco, M., Carrasco, E. V. M., Coda, H. B., *Modelagem numérica em uma viga de madeira laminada colada usando o método dos elementos finitos*. CILAMCE, Portugal. (2007).
- Greco, M., CODA, H. B., *Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis*. Journal of Sound and Vibration. v. 290, p. 1141-1174. (2006).
- Haftka, R. T., Gandhi, R. V., *Structural Shape Optimization – A survey*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 57, pp. 91-106. (1986).
- Härdle, W., Stoker, T., *Investigating smooth multiple regression by the method of average derivatives*. Journ. of the american statist. association (jasa), vol. 84, no.408, pp.986-995. (1989).
- Hastie, T., Tibshirani, R., *Generalized Linear Models (with Discussion)*. Statistical Science, vol. 1, no. 3, pp. 297-318. (1986).

- Haug, E. J., Choi, K. K. e Komkov, V., *Design sensitivity analysis of structural systems*. Academic Press, Orlando, FL, U.S.A. (1986).
- Heckman, N., *Spline Smoothing in Partly Linear Models*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 48, no. 2, pp. 244-248. (1986).
- Hemp, W. S., *Optimum Structures*, Oxford: Clarendon, p. 123. (1973).
- Jung, D. e Gea, C., *Topology optimization of nonlinear structures*. Finite Elements in Analysis and Design, v. 40, p. 1417 – 1427. (2004).
- Kass, R., *A Physics 416 Fortran Tutorial*. 25p. Disponível em: <http://www.physics.ohio-state.edu/~kass/P416_Fortran_tutorial_S07.doc>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2012. (2007).
- Kirsch, U., *On the relationship between optimum structural topologies and geometries*. Struct. Optim., v. 2, p. 39–45. (1990).
- Kohn, R. V. e Strang, G., *Optimal-design and relaxation of variational problems*. Communications on Pure and Applied Mathematics, v.39, n.1, pp.112- 137. (1986).
- Koide, R. M., *Algoritmo de colônia de formigas aplicado à otimização de materiais compostos laminados*. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba. (2010).
- Labanowski, A. J., Fancello, E. A., Novotny, A. A., *Simp, Eso e Tsa: Uma Análise Comparativa de Métodos de Otimização Topológica para Elasticidade 2D e 3D*, CILAMCE, 2004, Brasil.
- Lahuerta, R. D., Rojas, P. A. M., Silva, E. C. N., *Projeto de Estruturas em Regime Não-Linear Geométrico Utilizando o Método da Otimização Topológica*. Asociación Argentina de Mecánica Computacional (AMCA), Argentina. (2010).
- Li, K. C. *Sliced Inverse Regression for Dimension Reduction*. Journal of the American Statistical Association (JASA), vol. 86, no. 414, pp. 316-342. (1991).
- Liang, Q.Q., Xie, Y.M., Steven, G.P. *Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure*. ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 2, pp. 322-330. (2000).
- Lima, M. L. R., *Otimização Topológica e Paramétrica de Vigas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos*. Dissertação de Mestrado da Escola Politécnica da USP, São Paulo. (2011).
- Lischner, R., *Delphi: o Guia Essencial*. Campus Editora, 605p. (2000).
- Lurie, K. A., Federov, A.V. e Cherkaev, A.V., *Regularization of Optimal Design Problems for Bar and Plates, Parts I e II*, Journal of optimizations and Theory and Applications, 37-4, pp. 499-521,523-543. (1982).
- Manickarajah, D., Xie, Y. M. e Steven, G.P., *An evolutionary method for optimization of plate buckling resistance*. Finite Elements in Analysis and Design, v. 29, pp. 205-230. (1998).

- Marczak, R.J., *Optimal Topology Identification of 2D Elastic Structures with the Boundary Element Method*. Mecânica Computacional, Argentina, vol xxv, pp.2769-2784, 2006.
- Marques, G. C. S. C., *Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais*. Dissertação de Mestrado da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. (2006).
- Matsui, K. e Terada, K., *Continuous approximation of material distribution for topology optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 59, n. 14, pp. 1925-1944. (2004).
- Neves, F. A., *Programação com Multi-Objetivos Aplicada à Otimização do Projeto de Pontes Estaiadas*. Tese de Doutorado da COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. (1997).
- Novotny, A. A., Feijóo, R.A. e Taroco, E., *Análise de sensibilidade contínua*. LNCC/MCT, Petrópolis, Brasil. (2003).
- Olivieri, B. P., *Otimização do Projeto de Pontes Protendidas Pré-Moldadas pelo Método dos Algoritmos Genéticos*. Dissertação de Mestrado da COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. (2004).
- Parkinson, M. B., Howell, L.L., Cox, J.J., *A parametric Approach to the Optimization-Based Design of Compliant Mechanisms*. Proceedings of the 23rd Design Automation Conference, DETC97/DAC-3763. (1997).
- Paula, C. F., *Contribuição ao Estudo das Respostas Numéricas Não-Lineares Estática e Dinâmica de Estruturas Reticuladas Planas*. Tese de Doutorado da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. (2001).
- Pereira, C. E. L., *Análise de Sensibilidade Topológica em Problemas de Não-Linearidade Geométrica e Hiperelasticidade Não-Linear Quasi-Incompressível*. Tese de Doutorado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, Campinas. (2006).
- Prager, W., *A note on discretized michell structures*. Comput. Meth. Appl. Mech., v. 3,p. 349–355. (1974).
- Querin, O. M., *Evolutionary Structural Optimization stress based formulation and implementation*. PhD dissertation, University of Sydney. (1997).
- Rades, M., *Finite Element Analysis*. University Politehnica of Bucharest, Romania. (2006).
- Robinson, P. M., *Root N-Consistent Semiparametric Regression*. Econometrica, vol. 56, no. 4, pp. 931-954. (1988).
- Rozvany, G. I. N., Bendsøe, M. P., Kirsch, U., *Layout optimization of structures*, Applied Mechanics Review, v. 48, pp. 41-119. (1995).
- Rozvany, G. I. N., Olhoff, N., Cheng, K. e Taylor, J. E., *On the Solid Plate Paradox in Structural*

- Optimization*. Journal of Structural Mechanics, 10-1, pp. 1- 32. (1982).
- Sant'Anna, H. M., *Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão*. Dissertação de Mestrado, UFRS, Porto Alegre. (2002).
- Silva, E. C. N., *Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas*. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Polit. da USP, SP, Brasil. (2001).
- Simonetti, H. L., *Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais*. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós Graduação do Departamento de Engenharia Civil da UFOP, Ouro Preto. (2009).
- Soriano, H. L. *Método de elementos finitos em análise de estruturas*. São Paulo: Edusp, 580 p., 27 cm. ISBN 85-314-0730-3. (2003).
- Stolpe, M. e Svanberg, K., *On the trajectories of penalization methods for topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 21, n. 2, pp. 128-139. (2001).
- Vanderplaats, G. N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications*. Boston: McGraw-Hill Book Company, 1984.
- Wang, Y., *A Study on Microstructures of Homogenization for Topology Optimization*. Thesis Doctor, Victoria University of Technology Melbourne, Australia. (2003).
- Xie, Y. M. and Steven, G. P., *A simple evolutionary procedure for structural optimization*. Computers & Structures, Vol. 49, No. 5, pp. 885-896. (1993).
- Xie, Y. M. and Steven, G. P., *Evolutionary Structural Optimization*. Springer- Verlag, Berlin. (1997).
- Zhou, M., Rozvany, G. I. N., *The COC algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.89, pp.309-336. (1991).