



Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil



Análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial

WANDERSON GONÇALVES MACHADO

Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Ouro Preto, Setembro de 2012

M149a Machado, Wanderson Gonçalves.
Análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial [manuscrito] /
Wanderson Gonçalves Machado - 2012.
xi, 78f.: il. color.; graf.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola
De Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil.
Área de concentração: Construção Metálica.

1. Vigas - Teses. 2. Análise numérica - Teses. 3. Construção mista -
Teses. I. Sousa Junior, João Batista Marques de. II. Universidade Federal
de Ouro Preto. III. Título.

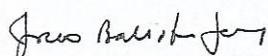
CDU: 692.297:519.6

Catálogo: sisbin@sisbin.ufop.br

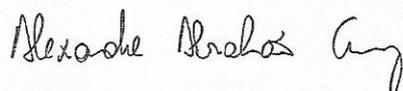
ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS MISTAS COM INTERAÇÃO PARCIAL

AUTOR: WANDERSON GONÇALVES MACHADO

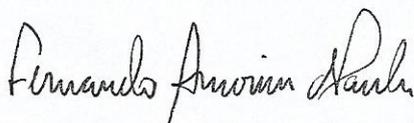
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 26 de setembro de 2012, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr. (Orientador / UFOP)



Prof. Dr. Alexandre Abrahão Cury (UFOP)



Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula (UFMG)

*“Glória ao Pai, ao Filho
e ao Espírito Santo.
Como era no princípio,
agora e sempre. Amém! ”*

Dedico este trabalho aos meus pais, Geraldo e Sebastiana, que me apoiaram em todos os momentos e rezaram sempre por mim e a Tati, meu anjo e meu amor, que nos momentos que pensei em desistir, me deu forças para continuar.

AGRADECIMENTOS

À Deus, Autor de tudo e de todas as coisas, Mestre dos Mestres, que nos momentos difíceis, quando eu só via um par de pegadas na areia, me carregastes nos braços.

A Nossa Senhora que do céu não cansaste de interceder por mim.

A meus pais, Geraldo e Sebastiana, que abdicaram de tantas coisas para que eu pudesse chegar até aqui.

À minha família que me apoiou em todos os momentos.

À minha namorada, Tatiane, anjo de Deus na minha vida, pelo amor, carinho e presença constante que não me deixou desistir.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr., pela orientação e companheirismo e ao Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves pela colaboração.

Ao PROPEC, Escola de Minas e Universidade Federal de Ouro Preto, pela oportunidade.

Aos amigos da Turma, Denisson, Walliston, Tiago, Dalilah, Janaína, Gabriel e Felipe, pelos momentos de estudos e descontrações.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos irmãos do GOU e GPP, pelos momentos de orações e partilhas que me sustentaram espiritualmente em Ouro Preto todo esse tempo.

Aos irmãos da REP. TABOR, pelos diversos momentos inesquecíveis, e por poder dizer: “Mestre, é bom estar aqui”.

Aos demais amigos de Ouro Preto e amigos de Ipatinga pela amizade sincera.

A todos o meu muito obrigado. Deus abençoe a todos!!!

Análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial

RESUMO

A intenção de obter estruturas cada vez mais elaboradas e eficientes fez com que a construção civil passasse a utilizar, em todo mundo, há mais de 150 e 100 anos respectivamente, estruturas de aço e de concreto, entretanto os elementos estruturais mistos de aço-concreto passaram a ser utilizados somente a partir da década de 60, com o desenvolvimento de métodos e disposições construtivas que garantiam a funcionalidade do conjunto de dois materiais, ampliando, assim, as opções de projeto e construção.

O objetivo do presente trabalho é promover uma análise numérica dinâmica de vigas mistas, considerando que há deslizamento na interface de contato dos dois elementos que constituem a viga mista, ou seja, quando há interação parcial entre os elementos. As soluções da literatura para a análise de estruturas submetidas à vibração (problema dinâmico com interação parcial) ainda são escassas e as recomendações de projeto bastante simplificadas.

A análise numérica, é feita utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo utilizado um elemento finito específico com deslizamento incorporado, já desenvolvido e implementado em trabalhos anteriores. As implementações existentes são apenas para análise estática do problema de viga mista com interação parcial, sendo que no presente trabalho, são implementadas formulações para realização da análise dinâmica do problema de viga mista, capazes de determinar as frequências naturais e os modos de vibração das vigas mistas, bem como os históricos de deslocamentos (via superposição modal e integração direta), estudando assim a influência da interação parcial nestas grandezas.

A implementação dos algoritmos é feita utilizando o Maple 14. Os resultados obtidos com a utilização do elemento finito implementado neste trabalho, em problemas de análise dinâmica, são comparados com os resultados obtidos com diferentes elementos finitos desenvolvidos por outros autores e encontrados na literatura técnica disponível.

Dynamic analysis of composite beams with partial interaction

ABSTRACT

The intention of obtaining structures increasingly elaborate and efficient made to pass construction using in whole world, over 150 and 100 years respectively, steel and concrete structures, already the structural elements composite steel-concrete, began to be used only from the 60's, with the development of methods and constructive arrangements which guaranteed the functionality of assembly these two materials (steel and concrete), thus expanding the options of design and construction.

The objective of the present work is to promote a dynamic numerical analysis of composite beams, considering that there are slip in the contact interface of the two elements which constitute the composite beam, in other words, there is partial interaction between the materials. The solutions from the literature for the analysis of structures subjected to vibration (dynamic problem) are still scarce and the design recommendations greatly simplified.

The analysis, in this work, will be done using the Finite Element Method (FEM), where is used a finite element particular with slip incorporated, already developed and implemented in previous works. The existing implementations are only for static analysis of the problem of composite beam with partial interaction, being that in the present work, be implemented formulations for performing dynamic analysis of the problem of composite beam, able to determine the natural frequencies and mode shapes of composite beams (via superposition and direct integration), thus studying the influence of partial interaction in these quantities.

The implementations of the algorithms are made using Maple 14 (computer language). The finite element implemented in this work, for dynamic analysis will be compared with elements developed by other authors from examples found in the literature.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURASIX

LISTA DE TABELASXI

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO 1

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS 1

1.2 MOTIVAÇÕES 5

1.3 OBJETIVOS 6

1.4 APRESENTAÇÃO 8

CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 9

2.1 INTRODUÇÃO 9

2.2 INTERAÇÃO PARCIAL 11

2.3 ANÁLISE ESTÁTICA COM INTERAÇÃO PARCIAL 13

2.4 ANÁLISE DINÂMICA COM INTERAÇÃO PARCIAL 17

CAPÍTULO 3 ANÁLISE DINÂMICA 20

3.1 INTRODUÇÃO 20

3.2 SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE (SGL) 22

3.2.1 Equação do movimento 22

3.2.1.1 Vibração Livre 23

3.2.1.2 Vibração Forçada 24

3.3 SISTEMAS DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE 25

3.3.1 Frequência Natural e Modo de Vibração Natural 27

3.4 MÉTODOS DE ANÁLISE DINÂMICA 29

3.4.1 Método da Superposição modal 30

3.4.1.1 Integral de Duhamel 32

3.4.2 Métodos de Integração Direta.....	34
3.4.2.1 Método de Newmark.....	34
3.4.2.2 Método de Wilson θ	35
CAPÍTULO 4 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO PARA VIGAS MISTAS.....	37
4.1 INTRODUÇÃO	37
4.2 MODELO IMPLEMENTADO (Elemento Finito “SLIP10DOF”).....	38
4.2.1 Matriz de Rigidez do Elemento “SLIP10DOF”	39
4.2.2 Matriz de Massa do Elemento “SLIP10DOF”	45
4.2.3 Matriz de Amortecimento Proporcional (Amortecimento de Rayleigh)	50
4.2.4 Matrizes Analíticas (Elemento “SLIP10DOF”)	52
CAPÍTULO 5 EXEMPLOS.....	56
5.1 INTRODUÇÃO	56
5.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS	57
5.2.1 Determinação das frequências naturais e modos de vibração	57
5.2.1.1 Viga simplesmente apoiada	58
5.2.1.2 Viga engastada-livre	62
5.2.1.3 Viga engastada-apoiada	63
5.2.1.4 Viga bi engastada	63
5.2.2 Viga submetida a pulso	64
5.2.2.1 Viga Simplesmente Apoiada.....	64
a) Para $t_1=1s$	65
5.2.3 Viga mista submetida à carga móvel.....	68
CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	73
6.1 CONCLUSÕES	73
6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	75

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

Figura 1. 1 Elemento misto de concreto-isopor.....	2
Figura 1. 2 Elemento misto de madeira-aço.	2
Figura 1. 3 Laje mista de aço-concreto “Steel Deck”.....	2
Figura 1. 4 Pilares mistos de aço-concreto.....	3
Figura 1. 5 Vigas mistas de aço-concreto.....	3
Figura 1. 6 Edifício Garagem América.	4
Figura 1. 7 Edifício WT Nações Unidas.	5

CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Figura 2. 1 Seções vinculadas mecanicamente (Oehlers e Bradford, 1995)	10
Figura 2. 2 Deslocamentos na viga mista com deslizamento incorporado.....	12

CAPÍTULO 3 ANÁLISE DINÂMICA

Figura 3. 1 Tipos de cargas dinâmicas (Lima e Santos, 2008).....	21
Figura 3. 2 Sistema massa, mola e amortecedor (Lima e Santos, 2008).....	22
Figura 3. 3 Diagrama de corpo livre (Lima e Santos, 2008)	22
Figura 3. 4 (a) Pórtico plano com três andares; (b) Diagrama de corpo livre da massa m1 (Lima e Santos, 2008).....	25

CAPÍTULO 4 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO PARA VIGAS MISTAS

Figura 4. 1 Graus de liberdade do elemento finito “SLIP10DOF”	38
Figura 4. 2 Distâncias ao eixo do elemento “SLIP10DOF”	39

CAPÍTULO 5 EXEMPLOS

Figura 5. 1 Viga mista.	57
Figura 5. 2 Deslocamentos verticais v (4 primeiros modos de vibração).....	60
Figura 5. 3 Deslizamento s (4 primeiros modos de vibração).....	60
Figura 5. 4 Deslocamentos axiais u1 (4 primeiros modos de vibração).....	61
Figura 5. 5 Deslocamentos axiais u2 (4 primeiros modos de vibração).....	61
Figura 5. 6 Histórico de deslocamentos de 5s para um pulso de 1s – Método de Newmark	66

Figura 5. 7 Histórico de deslocamentos de 5s para um pulso de 1s – Método Wilson-Theta	66
Figura 5. 8 Histórico de deslocamentos de 1s para um pulso de 1s	67
Figura 5. 9 Viga mista – Exemplo 5.2.3.....	68
Figura 5. 10 Carga móvel sobre a viga mista.	69
Figura 5. 11 Histórico de deslocamentos adaptado de Huang e Su (2008).	69
Figura 5. 12 Histórico de deslocamentos de 2s	70
Figura 5. 13 Histórico de deslocamentos para sistema amortecido – Método de Duhamel	72
Figura 5. 14 Histórico de deslocamentos para sistema amortecido – Método de Newmark via superposição modal.....	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 3. 1 Valores típicos de amortecimento, STEIDEL (1989).....	24
Tabela 5. 1 Frequências naturais para viga simplesmente apoiada.	59
Tabela 5. 2 Frequências naturais para viga simplesmente apoiadas devido à rigidez da conexão.....	62
Tabela 5. 3 Frequências naturais para viga engastada-livre.	62
Tabela 5. 4 Frequências naturais para viga engastada-apoiada.	63
Tabela 5. 5 Frequências naturais para viga bi apoiada.	63
Tabela 5. 6 Constantes de proporcionalidade α e β	65
Tabela 5. 7 Deslocamento máximo para o Método de Newmark	67
Tabela 5. 8 Deslocamento máximo para o Método de Newmark	68
Tabela 5. 9 Deslocamento máximo – Método de Newmak via superposição modal.....	71
Tabela 5. 10 Deslocamento máximo – Método de Duhamel	71
Tabela 5. 11 Constantes de proporcionalidade α e β	71

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A busca por construções cada vez mais eficientes e econômicas tem feito com que a Engenharia Civil se preocupe, ao longo dos anos, em desenvolver novas técnicas construtivas. Os elementos estruturais empregados na construção civil são diversos, tais como os elementos moldados *in loco*, os pré-moldados, os de aço, os elementos mistos ou compostos, entre outros. O presente trabalho tem como objeto de estudo os elementos mistos, de forma especial as vigas mistas.

Os elementos estruturais mistos surgiram com o intuito de se obter um elemento estrutural que aproveitasse o que cada material tem de melhor, caracterizando-se essencialmente pela associação de dois ou mais materiais com características físicas distintas, e que se complementem mutuamente. A associação dos materiais que constitui o elemento misto é garantida por meios mecânicos, tais como os conectores de cisalhamento.

As associações de diferentes materiais para a obtenção de elementos estruturais mistos são diversas, como por exemplo, a associação do concreto com o isopor (Figura 1.1), da madeira com o aço (Figura 1.2), do aço com o concreto (Figuras 1.3-1.5), entre outras, sendo a associação do aço com o concreto a mais utilizada na construção civil.



Figura 1. 1 Elemento misto de concreto-isopor.

Fonte: Oliveira, 2009



Figura 1. 2 Elemento misto de madeira-aço.

Fonte: Oliveira, 2009

Os elementos mistos utilizados na Construção Civil são principalmente as lajes, os pilares e as vigas de aço-concreto, mostrados nas Figuras 1.3, 1.4 e 1.5 respectivamente.



Figura 1. 3 Laje mista de aço-concreto “Steel Deck”.

Fonte: <http://www.metodoestruturas.com.br/sistemas-construtivos/SistemaMisto>

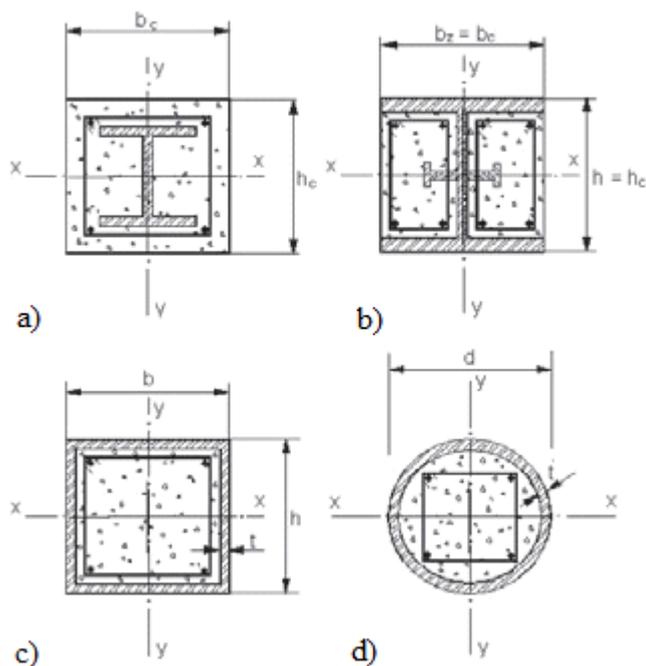


Figura 1. 4 Pilares mistos de aço-concreto.

Fonte: <http://www.metodoestruturas.com.br/sistemas-construtivos/SistemaMisto>

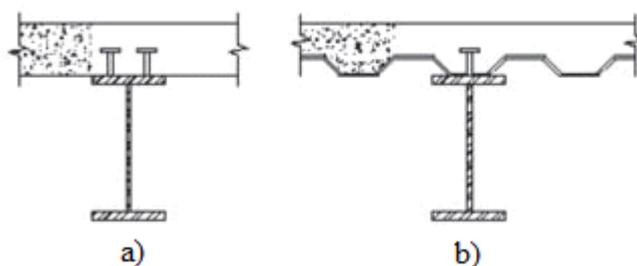


Figura 1. 5 Vigas mistas de aço-concreto.

Fonte: <http://www.metodoestruturas.com.br/sistemas-construtivos/SistemaMisto>

Os elementos mistos de aço-concreto, como vistos nas figuras anteriores, são constituídos por um perfil de aço laminado, dobrado ou soldado, associado a um componente de concreto simples ou armado. Na construção civil, os elementos estruturais mistos estão inseridos principalmente na construção de edifícios de múltiplos andares, pontes e galpões.

A utilização de elementos estruturais mistos vem ganhando espaço na construção civil no Brasil e no mundo. Segundo Silva (2006), as primeiras estruturas mistas de aço-concreto surgiram em 1894 nos Estados Unidos, porém somente em 1914 começaram a ser estudadas, sendo que em 1944 foram introduzidos métodos de dimensionamento na norma AASHTO (American Association of State Highway) e em

1952 introduzidos também na AISC (American Institute of Steel Construction), o que fez com que estes elementos começassem a se disseminar a partir da década de 60.

Silva (2006) cita que no Brasil elementos estruturais mistos foram introduzidos ainda na década de 50 pelo engenheiro Paulo R. Fragoso, em obras tais como os dos edifícios Garagem América (1957), Palácio do Comércio (1959), Avenida Central (1961), Santa Cruz (1963) e Sede do IPERJ (1965). Contudo, a importância desses sistemas mistos no Brasil passou a ser mais percebida a partir da primeira versão da NBR 8800 em 1986, visto que esta norma começou a prever métodos construtivos utilizando elementos mistos. A versão de 1986 previa apenas as vigas mistas, sendo que a versão atual de 2008 passou a prever outros elementos mistos, tais como pilares e lajes, além de prever também o caso das ligações mistas.

A Figura 1.6 mostra o Edifício Garagem América, localizado na cidade de São Paulo-SP, que foi o primeiro edifício de múltiplos andares em construção metálica no Brasil e que utilizou de elementos estruturais mistos, como vigas e lajes.



Figura 1. 6 Edifício Garagem América.
Fonte: <http://www.metallica.com.br>

Outro exemplo, porém mais recente, de edifício de múltiplos andares, construído utilizando elementos mistos, é o Edifício WT Nações Unidas, localizado em Pinheiros - SP, tendo a sua construção finalizada em setembro de 2008.



Figura 1. 7 Edifício WT Nações Unidas.
Fonte: <http://www.revistatechne.com.br>

1.2 MOTIVAÇÕES

Segundo Lima e Santos (2008), na construção civil, em sua grande maioria, as cargas às quais uma estrutura está submetida são dinâmicas. No entanto, o efeito dinâmico da maioria dessas cargas pode ser desprezado, pois não influencia de forma considerável o comportamento da estrutura, sendo tratadas como cargas estáticas.

Em alguns casos, porém, o carregamento dinâmico pode apresentar influencia considerável nas respostas estruturais, devendo ser considerado no cálculo. Os carregamentos a serem considerados são principalmente os de ventos, terremotos, carros, pessoas, etc.

Nie et al. (2004) cita a alta frequência fundamental de vibração das vigas mistas como uma de suas vantagens em relação as vigas simples de aço e de concreto. A frequência fundamental, como será mais bem explicada no Capítulo 3, é a frequência em que a estrutura vibra de forma livre (sem que haja carga aplicada durante o processo de vibração). O deslocamento de uma estrutura está ligado a sua frequência natural de vibração, sendo que quanto maiores são as frequências, menores são os deslocamentos.

Além da alta frequência fundamental de vibração, os elementos estruturais mistos de aço-concreto possuem outras vantagens a serem levadas em consideração, como por exemplo, a qualidade, precisão e tempo de execução, que são melhores se

comparados com sistemas estruturais em que todos os elementos são moldados *in loco*, visto que seus elementos de aço são pré-fabricados. Outra vantagem desses sistemas é que podem dispensar escoras e fôrmas de preenchimento *in loco* dos elementos de concreto, como é o caso das lajes mistas steel-deck (Figura 1.3). Queiroz et al. (2001) listam outras vantagens dos sistemas mistos de aço-concreto, tais como: redução do peso próprio e do volume da estrutura, redução do consumo de aço estrutural, aumento da rigidez e da resistência à flambagem (comparados às estruturas de aço). Nie et al. (2004) cita a alta relação vão x altura da viga mista, a sua menor deformação e a sua alta frequência fundamental de vibração (se comparados às vigas simples). Todas estas vantagens fazem com que a solução utilizando sistemas estruturais mistos passe a ser interessante quando se deseja vencer grandes vãos, como é o caso de pontes e galpões (Silva, 2006).

Os projetos de vigas mistas de aço e concreto muitas vezes são elaborados levando em consideração a interação parcial. Isto significa que, por motivos técnicos e econômicos, a quantidade de conectores de cisalhamento utilizada, é inferior ao necessário para impedir totalmente o deslizamento relativo entre os dois elementos. Este deslizamento poderá influenciar de forma considerável no comportamento estrutural da viga mista (Capítulo 2).

As diversas vantagens da viga mista, ou dos sistemas mistos em geral e a presença de poucos trabalhos envolvendo análise numérica dinâmica de vigas mistas com interação parcial na literatura, motivaram o desenvolvimento deste trabalho.

1.3 OBJETIVOS

O presente trabalho tem, como objetivo principal, desenvolver uma análise numérica dinâmica de vigas mistas para o caso onde há interação parcial na interface de contato dos diferentes materiais, ou seja, considerando que há um deslizamento relativo na interface, sendo que todas as análises realizadas consideram os materiais envolvidos no regime linear elástico.

A simulação numérica é feita através do Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando um elemento com dez graus de liberdade, já utilizado nos trabalhos de

Dall'Asta e Zona (2004), Silva (2006) e Oliveira (2009) para a análise estática, adaptado para resolver problemas de análise dinâmica. O elemento utilizado é baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli e considera o deslizamento incorporado à sua formulação. Além deste elemento finito, diversos outros, específicos para este tipo de problema, já foram desenvolvidos e implementados, porém a maioria dos elementos foi utilizada apenas para análise estática.

Neste trabalho, são determinados inicialmente as frequências naturais e os modos de vibração das vigas mistas com interação parcial, sendo, em seguida, examinados os efeitos da interação parcial sobre as propriedades dinâmicas da estrutura. Posteriormente, são implementados algoritmos para determinar os deslocamentos, estudando assim a influência da interação parcial na resposta dinâmica geral deste tipo de estrutura. Os deslocamentos são obtidos utilizando métodos de integração direta e de superposição modal, descritos no Capítulo 3.

As implementações dos algoritmos são feitas utilizando a linguagem de programação embutida no Maple 14®, que é um pacote computacional que possui aspectos algébricos, numéricos, gráficos e de programação.

Os resultados encontrados utilizando o elemento finito implementado neste trabalho, para a análise dinâmica, são comparados aos resultados obtidos utilizando-se elementos desenvolvidos por outros autores a partir de exemplos encontrados na literatura, bem como comparados com resultados analíticos (exatos), com o intuito de validar a eficiência deste elemento para a análise dinâmica do problema, visto que já foi demonstrada a sua eficiência para a análise estática.

Este trabalho pertence à linha de pesquisa denominada Mecânica Computacional, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC), sendo extensão e continuação de trabalhos desenvolvidos neste programa, tais como as dissertações de mestrado de Caldas (2004), Muniz (2005), Silva (2006), Oliveira (2009) e a tese de doutorado de Silva (2010). Alguns trabalhos contemplam análise linear e não linear, seja de forma analítica e/ou numérica, porém apenas para análise estática, sendo este trabalho o primeiro da linha de pesquisa a tratar dos problemas dinâmicos.

1.4 APRESENTAÇÃO

Este trabalho está dividido em seis capítulos. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica, primeiramente sobre a análise estática de vigas mistas e em seguida, sobre análise dinâmica, considerando a interação parcial.

O Capítulo 3 apresenta os diversos tipos de carregamentos dinâmicos ao qual uma estrutura pode estar submetida, bem como a forma em que o sistema pode vibrar (livre ou forçada), apresentando as formulações da equação de movimento para os casos a serem considerados. São apresentados também, os métodos numéricos de integração direta e via superposição modal, utilizados para a análise dinâmica.

No Capítulo 4, apresentam-se as formulações para a matriz de rigidez e para a matriz de massa do elemento finito implementado, baseadas na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, bem como a matriz de amortecimento proporcional do elemento finito, chamado neste trabalho de SLIP10DOF.

O Capítulo 5 apresenta três exemplos numéricos, no intuito de validar, para a análise linear dinâmica, o elemento finito de dez graus de liberdade utilizado.

Finalmente, são apresentadas as conclusões referentes a este trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica a respeito da análise estática e dinâmica de vigas mistas com interação parcial, sendo que o foco deste trabalho é a análise dinâmica destes elementos estruturais mistos. Salienta-se que o contingente de trabalhos considerando a análise estática de problemas de elementos mistos, em especial as vigas mistas, é muito grande. Contudo, percebe-se um número pequeno de trabalhos envolvendo a análise dinâmica destes elementos estruturais.

O sistema misto aço-concreto é constituído por um perfil de aço (laminado, soldado ou formado a frio), que trabalha em conjunto com o concreto (geralmente armado). A interação do perfil de aço com o de concreto é proporcionada por meios mecânicos, tais como conectores, mossas, ressaltos, entre outros. Essa interação se dá por atrito ou simplesmente por aderência e repartição de cargas (Queiroz et al, 2001).

Os elementos mistos de aço-concreto possuem certas vantagens quando comparados aos elementos de concreto (simples ou armado) e mesmo quando comparados aos elementos metálicos, pois os elementos mistos visam aproveitar melhor a capacidade resistente de cada material que constitui o elemento.

O aço é um material que resiste bem a esforços de tração e compressão, já o concreto resiste muito bem à compressão, porém sua resistência à tração é muito pequena (em torno de 8 a 15% da sua resistência à compressão).

A viga de aço, dependendo de sua esbelteza, quando submetida à carga de compressão, poderá sofrer flambagem, já a viga de concreto armado possui o concreto localizado na parte tracionada contribuindo pouco para a resistência total do elemento. A maior parte da resistência à tração da viga de concreto armado é proporcionada pela armadura da viga.

O conceito de viga mista de aço-concreto veio exatamente unir as propriedades resistentes da viga de concreto armado e da viga de aço, pois a viga mista geralmente é calculada desconsiderando o concreto na parte tracionada (diminuindo assim o “desperdício” de concreto).

Outro ponto a favor da viga mista é que na parte comprimida, normalmente a resistência conta com toda parcela do concreto (simples ou armado) e apenas uma pequena parcela do perfil de aço, o que diminui a possibilidade de ocorrer flambagem local do perfil se comparada com a viga de aço, pois será o concreto a resistir à maioria do esforço de compressão. A viga mista de aço-concreto torna-se muito interessante para as diversas obras tais como pontes e edifícios, desde que se tenha uma mão-de-obra especializada para a sua execução.

A Figura 2.1 mostra diferentes tipos de vigas mistas, onde se percebe o perfil metálico na parte inferior (em sua maioria tracionada) e uma laje de concreto na parte superior (parte comprimida da viga).

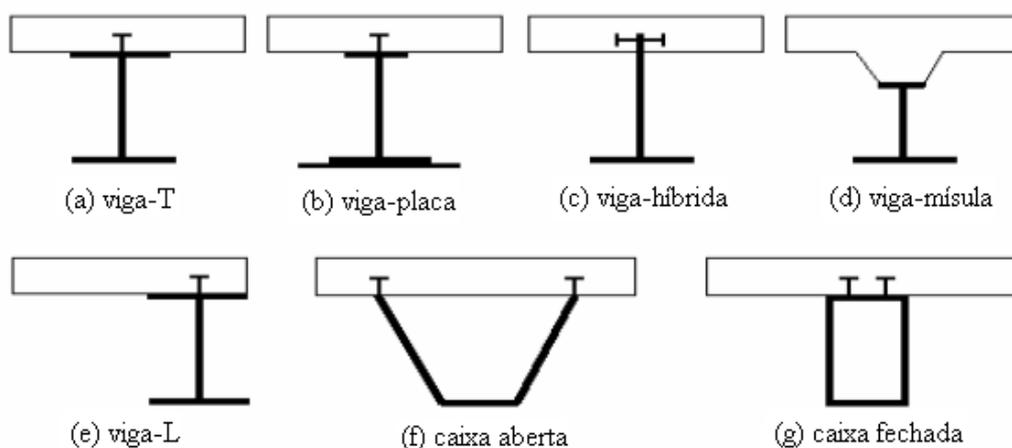


Figura 2. 1 Seções vinculadas mecanicamente (Oehlers e Bradford, 1995)

O uso de diversos sistemas mistos promove um aumento considerável de soluções possíveis para construção civil. Um exemplo disso são os pilares mistos, nos

quais a contribuição do aço na resistência total do sistema chega a 90% (segundo a NBR 8800), muito superior à contribuição do aço em estruturas convencionais de concreto armado, que não chega a 40%.

2.2 INTERAÇÃO PARCIAL

A aderência natural entre os materiais, embora possa ser elevada, muitas vezes não é considerada no cálculo de uma estrutura, devido à sua baixa confiabilidade. Por esse motivo torna-se necessária a utilização de conectores de cisalhamento ou outros meios mecânicos, com o intuito de promover a interação entre as interfaces dos materiais constituintes do elemento misto.

Os conectores de cisalhamento e demais meios mecânicos, têm a função de absorver os esforços cisalhantes, induzidos na interface dos materiais constituintes do elemento misto. Os meios mecânicos proporcionam uma ligação na interface dos dois materiais, diminuindo o escorregamento longitudinal dos materiais (deslizamento na interface) e também a separação vertical da interface dos materiais (deslocamento vertical).

A interação na interface, em função do número de conectores, pode-se definir uma interação parcial ou total. Na interação parcial, o deslizamento relativo na interface é considerado, pois a participação do deslizamento é importante para o comportamento global do sistema misto e/ou mesmo da estrutura em que este elemento esteja inserido. Já na interação total, não se considera para a análise, nenhum deslizamento na interface.

Difícilmente haverá, na prática, um elemento misto que tenha realmente interação total entre os seus materiais, pois a interação total pode implicar em uma quantidade muito grande de conectores ou mesmo em melhores especificações de conectores. Logo, o que normalmente acontece é o deslizamento existente ser tão pequeno que não influencie de modo considerável o comportamento do sistema ou mesmo da estrutura, podendo então ser desprezado, dizendo-se então que a interação é total.

O aumento do número de conectores ou mesmo dos tamanhos dos mesmos provocará uma interação maior, porém deve-se tomar cuidado para que a quantidade ou

especificação dos conectores, na busca por uma maior interação entre os materiais, não aumente o custo da estrutura de forma considerável.

Os conectores de cisalhamento mais utilizados na prática são os do tipo pino com cabeça (“stud”), sendo projetados para serem utilizados como eletrodo de solda (durante o processo de soldagem no perfil metálico) e após a soldagem como conector de cisalhamento. O nome pino com cabeça é devido ao seu formato, caracterizado pela existência de uma cabeça semelhante à de um prego, a qual é padronizada para cada diâmetro do conector (Oehlers e Bradford, 1999).

O esquema mostrado na Figura 2.2 refere-se aos deslocamentos ocorridos na viga mista, onde u_1 e u_2 são os deslocamentos axiais, v_1 e v_2 são os deslocamentos verticais, s é o deslizamento relativo na interface e θ é a rotação da viga. Como não será considerada a separação vertical, v_1 e v_2 são iguais.

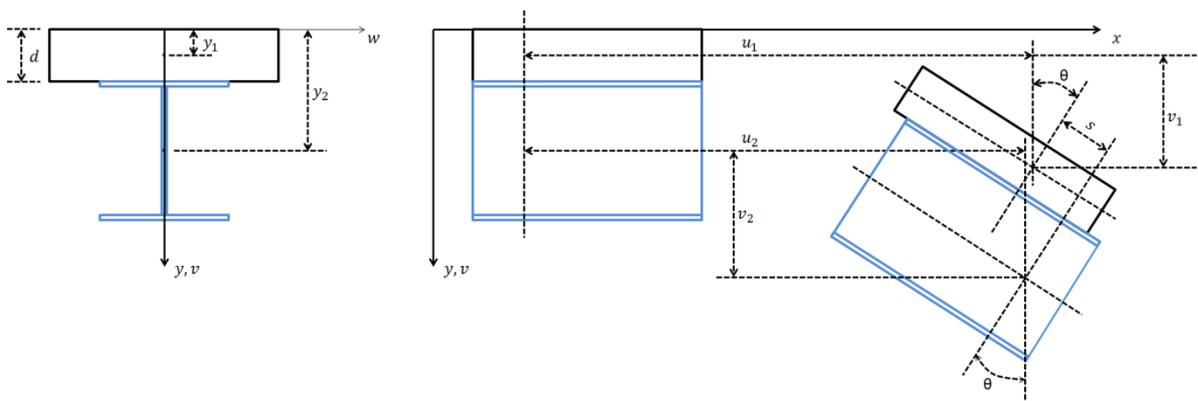


Figura 2. 2 Deslocamentos na viga mista com deslizamento incorporado

De acordo com a Figura 2.2, a interação parcial na interface do aço com o concreto provoca um deslizamento na interface, dado por:

$$s(x) = u_2 - u_1 + h\theta$$

onde h é a distância entre os dois centros geométricos das áreas da seção transversal correspondentes aos materiais constituintes da viga mista.

A compreensão dos comportamentos de cada elemento da seção mista de forma isolada, bem como do conjunto do elemento misto a partir da interação proporcionada pela ligação, são importantes, sendo necessária a realização de avaliações experimentais e numéricas que forneçam subsídios para que se possa compreender melhor este

comportamento, que é afetado diretamente pelo deslizamento ocorrido na interface de contato do aço com o concreto.

No presente trabalho, todas as análises serão feitas considerando a interação parcial na interface dos materiais da viga mista de aço-concreto. A interação parcial será considerada apenas na direção horizontal, sendo na direção vertical considerada a interação total, ou seja, não há separação vertical dos elementos (aço e concreto) na interface. Salari e Spacone (2001) relatam que o fato de não se considerar a separação vertical se deve a não existência de evidências experimentais em análises de vigas mistas que comprovem a sua importância na resposta.

2.3 ANÁLISE ESTÁTICA COM INTERAÇÃO PARCIAL

Nesta seção é feita uma revisão de literatura envolvendo a análise estática de elementos mistos, de forma especial a viga mista.

A revisão sobre análise estática tem a intenção de mostrar a importância da compreensão estática do problema para que se possa melhor entender o comportamento dinâmico do mesmo, servindo então de base para o presente trabalho. Esta revisão servirá também para mostrar a evolução dos trabalhos, que primeiramente eram constituídos por análises estritamente estáticas dos diversos problemas de engenharia, passando com o tempo a surgirem trabalhos que contivessem também a análise dinâmica, inclusive para o problema de viga mista.

Newmark et al. (1951) desenvolveram as primeiras soluções para o problema estático da viga mista com a interação parcial. As soluções de Newmark foram baseadas na teoria de viga de Euler-Bernoulli com deslizamento incorporado. A teoria de vigas de Euler Bernoulli se aplica para deslocamentos verticais pequenos e iguais numa mesma seção transversal, para deslocamento horizontal nulo e onde as seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação, permanecem planas e ortogonais ao eixo após a deformação. Diversos autores, desde 1951, vêm utilizando as soluções de Newmark em seus trabalhos estáticos, pois muitos desses são baseados na teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

No presente trabalho será utilizada a teoria de vigas de Euler-Bernoulli para análise do problema dinâmico de vigas mistas, visto que esta teoria já possui o deslizamento incorporado em suas soluções. Porém, não serão utilizadas as soluções de Newmark, pois estas se aplicam apenas para análise estática deste problema.

Goodman (1967) apresentou trabalhos envolvendo análise estática para diferentes sistemas mistos compostos por diferentes tipos de madeiras, considerando o deslizamento na interface dos materiais, mostrando as diversas possibilidades de composição para os elementos mistos.

Goodman e Popov (1968) apresentaram trabalhos contendo análises estáticas lineares e testes de vigas mistas com interação parcial, porém em suas análises não foram considerados apenas um plano de deslizamento, mas sim dois planos (vigas mistas compostas por 3 camadas) para seções transversais retangulares e iguais, sendo este modelo uma extensão do trabalho de Newmark et al. (1951), pois baseou-se na teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Os trabalhos de Goodman e Popov também são aplicáveis para vigas de diferentes tipos de madeiras simplesmente apoiadas e outras composições diferentes para os elementos mistos, mostrando que as formulações para análise de vigas mistas podem ser gerais, desde que se respeitem as características dos materiais que as compõem.

A solução analítica de um problema é muito importante, mas nos problemas reais de engenharia esta solução é muito difícil de ser encontrada, tornando-se inviável na maioria dos casos. Com o advento dos computadores, surgiram diversos métodos numéricos para a solução de problemas mais complexos, facilitando a obtenção de resultados de forma rápida e eficiente, ou seja, resultados muito próximos dos resultados exatos, mostrando a eficiência dos métodos numéricos.

O método numérico mais utilizado no mundo para encontrar a solução de problemas mais complexos é o Método de Elementos Finitos (MEF), podendo-se ainda citar o Método das Diferenças Finitas (MDF), Newton Raphson, entre outros. No presente trabalho será utilizado o MEF, onde será implementado a parte dinâmica de um elemento finito já utilizado em trabalhos anteriores para análise estática do problema (Dall'Asta e Zona (2004), Silva (2006) e Oliveira (2009), Silva (2010)).

Hist e Yeo (1980), Roberts (1985), Razakpur e Nofal (1989), Johnson e Molenstra (1991), entre outros autores, apresentaram trabalhos envolvendo a análise estática utilizando métodos numéricos como o MEF e o MDF para análise de deslocamentos em vigas mistas com interação parcial. As análises, nestes trabalhos, foram feitas para vigas com geometrias bem complexas e para diversas combinações de carregamentos e condições de contorno, mostrando assim a eficiência do elemento finito utilizado para a análise do problema de viga mista que considera o deslizamento na interface.

Girhammar e Gopu (1993), ao invés de tratarem da análise estática linear de vigas mistas, para um caso geral, trataram da análise estática linear de vigas-colunas mistas com deslizamento na interface, porém apenas a solução analítica (exata) foi encontrada.

Oven et al.(1997) apresentaram uma análise inelástica não linear de vigas mistas, sendo o modelo de elementos finitos utilizado, um modelo bidimensional de viga mista com interação parcial.

Salari et al. (1998), para análise estática, também incluíram a não-linearidade para o caso de vigas mistas onde eram utilizados conectores de cisalhamento deformáveis, permitindo assim o deslizamento relativo na interface.

Fabbrocino et al. (1999) e Seracino et al. (2004) investigaram as vigas mistas contínuas sujeitas à carregamentos estáticos, considerando a interação parcial na interface. Por se tratar de vigas mistas contínuas, difere-se da maioria dos autores que investigavam apenas a viga simplesmente apoiada ou mesmo sob outras condições de contorno, mas quase sempre com dois apoios. Este trabalho é interessante, por se tratar de um exemplo mais real em se tratando de engenharia, além do que, a concepção de viga contínua é diferente da concepção de viga simples.

Salari e Spacone (2001) apresentaram soluções numéricas baseadas no MEF. Salari e Spaconi, em suas análises, desconsideram a não linearidade geométrica e também a existência da separação vertical entre as seções, por ainda não haver resultados experimentais que justifiquem a inclusão destes deslocamentos verticais nas formulações. Os autores afirmam ainda que, os elementos baseados no método de forças são interessantes na solução de problemas estáticos e também dinâmicos, lineares e não

lineares ligados à análise sísmica e de edifícios. Com este tipo de elemento é possível utilizar um único elemento finito para cada membro da estrutura, o que causa uma diminuição do número de graus de liberdade a serem considerados.

Além de Salari e Spaconi (2001), outros autores como Fang et al. (2000), Ranzi et al. (2004) e Wu et al. (2004) também apresentaram métodos numéricos baseado principalmente no MEF.

Ayoub e Filippou (2002) e Dall'Asta e Zona (2002) também apresentaram trabalhos envolvendo não-linearidade para o caso de vigas mistas, mas assim como Salari et al. (1998), apenas para a análise estática, sendo a solução encontrada de forma analítica e numérica.

Dall'Asta e Zona (2004a), apresentaram formulações numéricas em Elementos Finitos para o *slip locking*, em vigas mistas com conectores de cisalhamento deformáveis. *Slip locking*, segundo os autores, “é o travamento que ocorre quando dois ou mais campos de deslocamento são utilizados em conjunto na representação dos graus de liberdade de um elemento”.

Sousa Jr. e Caldas (2005) apresentaram um trabalho com análise numérica estática linear de colunas mistas com seção transversal qualquer. Ainda em 2005, Muniz (2005) desenvolveu modelos numéricos para análise estática linear de elementos estruturais mistos.

Ranzi et al. (2006) apresentaram um método geral para análise estática de vigas mistas com interação parcial longitudinal e transversal, ou seja, foi considerada a separação vertical, diferindo da maioria dos trabalhos, onde esta condição não foi incluída.

Silva (2006) apresentou em seus trabalhos, soluções analíticas e numéricas de vigas mistas com deslizamento relativo na interface. Silva (2006) considerou a não linearidade física, sendo a análise numérica feita pelo MEF e estritamente estática. No presente trabalho será utilizado o elemento finito de dez graus de liberdade, implementado para análise estática por Silva (2006), sendo no trabalho atual, o elemento implementado para realização de uma análise dinâmica.

Xu e Wu (2007) desenvolveram soluções estáticas numéricas, nos quais utilizaram um elemento bidimensional de vigas mistas com deslizamento na interface. No mesmo trabalho, Xu e Wu (2007) fizeram também uma análise dinâmica do problema de viga mista com interação parcial.

Sousa Jr. e Silva (2007 e 2008) apresentaram trabalhos sobre análise estática numérica não linear para vigas mistas parcialmente conectadas (considerando o deslizamento na interface). Para essa análise foram considerados elementos de interface, sendo os elementos implementados através do MEF.

Sousa Jr. e Silva (2010) apresentaram soluções analíticas e numéricas para vigas mistas de múltiplas camadas, considerando o deslizamento na interface. Foi utilizado o MEF para a obtenção dessas soluções. Também utilizando o MEF, Sousa et al. (2010) desenvolveram a análise não linear de vigas-colunas mistas parcialmente conectadas, sendo utilizados também elementos de interface.

2.4 ANÁLISE DINÂMICA COM INTERAÇÃO PARCIAL

Esta seção apresenta uma revisão bibliográfica de trabalhos envolvendo a análise dinâmica de elementos mistos, considerando a interação parcial entre os elementos.

Girhammar e Pan (1993) desenvolveram, em sua forma clássica, a equação diferencial parcial de sexta ordem que governa o problema de viga mista, submetida a carregamento dinâmico e apresentadas as devidas condições de contorno. A equação apresentada por Girhammar e Pan é baseada na teoria de vigas de Euler-Bernoulli com deslizamento na interface.

No início de suas investigações, Girhammar e Pan (1993) trabalhavam buscando uma solução geral para o problema de viga mista, porém perceberam que para casos em que se tinham estruturas com muitas condições de contorno, a solução era muito restrita. Tal fato se deve, entre outras razões, à impossibilidade de se provar a ortogonalidade dos modos de vibração para todas as condições de contorno. Além disso, eles avaliaram as frequências naturais exatas, mas não avaliaram os modos de vibração, para as diversas condições de contorno.

Biscontin et al. (1999) investigaram, analiticamente, o comportamento dinâmico de vigas mistas aço-concreto sujeitas a pequenas vibrações e apresentaram um elemento finito unidimensional de viga mista. O problema de pequenas vibrações é formulado e resolvido através de um processo analítico, em que o acoplamento de movimentos longitudinais e transversais, ocorre devido à presença da conexão.

Biscontin et al. (1999) utilizaram o modelo analítico com o intuito de interpretar uma série de testes dinâmicos realizados para conexões com diferentes conformações. Os resultados experimentais obtidos por eles se aproximaram dos resultados teóricos, permitindo a identificação de parâmetros importantes do sistema e a caracterização da conexão.

Berczynski e Wróblewski (2005) apresentaram um trabalho envolvendo a solução de problemas de vibração livre de vigas mistas, sendo desenvolvidos três modelos analíticos que descrevem o comportamento deste tipo de construção. Em seu trabalho, os autores apresentaram dois modelos utilizando as teorias de viga de Euler e um utilizando a teoria de vigas de Timoshenko, mostrando a aplicação das duas teorias para o caso de análise dinâmica de viga mista.

Os resultados encontrados em Berczynski e Wróblewski (2005), através dos modelos analíticos, foram comparados com resultados experimentais, concluindo-se que a teoria de vigas de Timoshenko, atinge resultados mais satisfatórios, porém ambas as teorias se mostraram muito eficientes na análise do problema de viga mista.

Xu e Wu (2007) desenvolveram um trabalho considerando a análise estática, dinâmica e a flambagem em elementos mistos, utilizando para isso os elementos de vigas de Timoshenko. Os autores mostraram, para as diversas condições de contorno, os efeitos causados pela deformação por cisalhamento e pela rotação à inércia nas frequências naturais e também no processo de flambagem.

Xu e Wu (2007) desenvolveram, para vibração livre, expressões exatas e numéricas das frequências naturais para viga bi apoiada, engastada-apoiada, engastada-livre e bi engastada.

Huang e Su (2008) apresentaram em seu trabalho a análise dinâmica numérica de vigas mistas considerando a interação parcial, utilizando um elemento finito unidimensional. Os autores observaram que a resposta no tempo, para uma viga mista

com interação parcial, podia diferir significativamente de uma viga mista com interação total em termos de amplitude, período e modos de vibração, dependendo da composição da conexão.

Huang e Su (2008) mostraram a condição de ortogonalidade dos modos de vibração que é utilizada para desacoplar as equações de movimento, facilitando assim a resolução dos problemas, principalmente os mais complexos.

O exemplo apresentado por Huang e Su será analisado neste trabalho, com o intuito de avaliar o elemento finito implementado. O exemplo é caracterizado por uma carga que se move pelo comprimento da viga ao longo do tempo. A solução do problema em questão é derivada do método de superposição modal.

Girhammar e Pan (2009) desenvolveram uma análise dinâmica exata para vigas mistas, considerando a interação parcial, através da teoria de viga de Euler-Bernoulli.

Nesta revisão bibliográfica percebe-se a escassez de trabalhos envolvendo análise dinâmica de vigas mistas considerando a interação parcial na interface, em relação ao número de trabalhos para análise estática, sendo necessária a realização de mais estudos nesta área, o que impulsionou a realização deste trabalho.

ANÁLISE DINÂMICA

3.1 INTRODUÇÃO

Segundo Lima e Santos (2008), a dinâmica das estruturas tem o objetivo de determinar os deslocamentos, as velocidades e as acelerações de todos os elementos que constituem uma estrutura submetida à carga dinâmica. Uma estrutura ao vibrar, desloca-se ou movimenta-se em torno da sua deformada estática.

A carga dinâmica apresenta variação no tempo, seja em sua magnitude, direção ou posição. Tal variação introduz acelerações, velocidades e deslocamentos na estrutura, gerando forças de inércia e de amortecimento. A grande maioria das cargas consideradas na Engenharia Civil é de natureza dinâmica, porém aquelas que proporcionam pequenas vibrações na estrutura são tratadas muitas vezes como cargas estáticas, desprezando-se assim as forças de inércia e de amortecimento, visto que não interferem de forma considerável no equilíbrio da estrutura. No entanto, as cargas que provocam maiores vibrações devem ser consideradas na análise do comportamento dinâmico da estrutura, sendo que as que mais influenciam são principalmente as oriundas de: terremotos, ventos, explosões, movimentações de veículos e pessoas, entre outras (Lima e Santos, 2008).

A carga dinâmica pode ser classificada segundo a sua forma de variação no tempo como harmônica, periódica, transiente e impulsiva. A carga é dita harmônica quando pode ser representada por uma função seno ou cosseno. A carga periódica caracteriza-se por repetições num intervalo regular de tempo. Denomina-se carga

transiente, aquela que apresenta uma variação arbitrária no tempo e impulsiva quando possui uma duração muito curta. Na Figura 3.1 são apresentados os tipos de cargas citados acima.

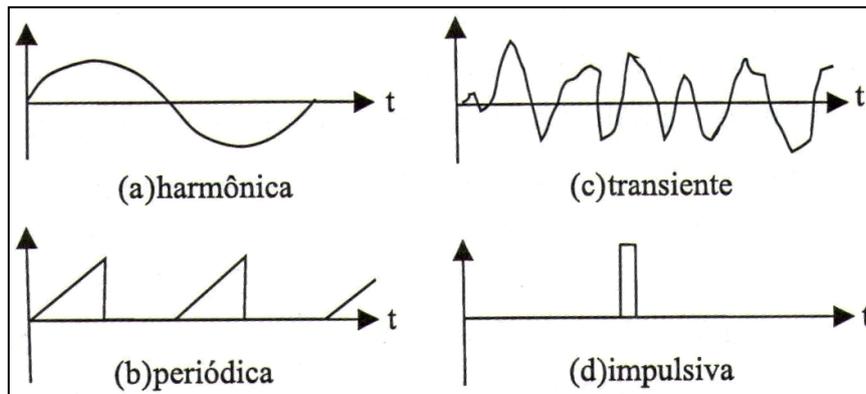


Figura 3. 1 Tipos de cargas dinâmicas (Lima e Santos, 2008)

Outra classificação importante na dinâmica é quanto ao tipo de vibração à qual a estrutura está submetida, podendo esta ser livre ou forçada.

A vibração forçada do sistema é caracterizada pela aplicação de qualquer excitação dinâmica externa, seja ela uma força (diferentes tipos de cargas dinâmicas), deslocamento ou aceleração ou mesmo o fornecimento contínuo de energia.

Quando não há excitação dinâmica externa, ou seja, o sistema vibra devido somente à imposição de condições iniciais, tais como deslocamento e/ou velocidade no instante $t=0$, a vibração do sistema é denominada vibração livre.

A seguir serão apresentadas as equações que regem o problema dinâmico, para vibração livre e forçada, denominadas equações do movimento. Inicialmente será apresentada a equação apenas para um grau de liberdade e posteriormente para n graus de liberdade.

3.2 SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE (SGL)

3.2.1 Equação do movimento

Segundo o Princípio de d'Alembert, o equilíbrio dinâmico de um sistema pode ser obtido adicionando-se às forças externas aplicadas uma força fictícia, chamada de força de inércia $F(t)$.

Considerando o esquema do sistema massa, mola e amortecedor a seguir,

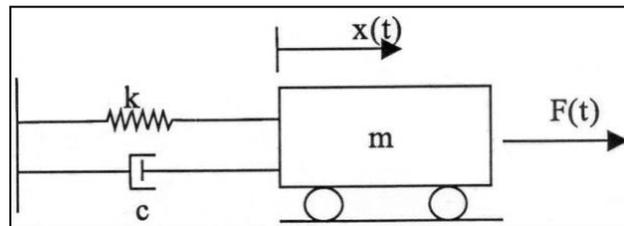


Figura 3. 2 Sistema massa, mola e amortecedor (Lima e Santos, 2008)

o diagrama de corpo livre do sistema é dado por:

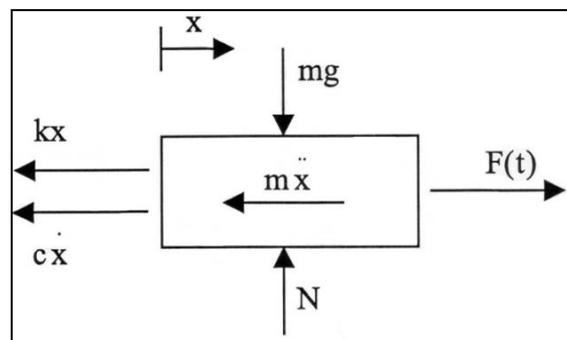


Figura 3. 3 Diagrama de corpo livre (Lima e Santos, 2008)

Considerando o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 3.3, a equação de equilíbrio, para um sistema com um grau de liberdade, é dado por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (3.1)$$

onde m , c e k são a massa, a constante de amortecimento e a rigidez do sistema, respectivamente, $F(t)$ é a força externa aplicada no sistema e $x(t)$ o deslocamento, sendo a sua derivada primeira e segunda, a velocidade e aceleração, respectivamente.

3.2.1.1 Vibração Livre

A equação do movimento para um sistema, em vibração livre, implica no termo $F(t)$ nulo, pois não há nenhuma excitação externa ao sistema, e a Equação 3.1 assume a seguinte forma:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (3.2)$$

Desconsiderando o amortecimento, a Equação 3.2 pode ser escrita da seguinte forma:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (3.3)$$

A solução para a Equação 3.3, considerando as condições iniciais $x(0)=x_0$ e $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$, é dada por:

$$x(t) = x_0 \cos(w_n t) + \frac{\dot{x}_0}{w_n} \sin(w_n t) \quad (3.4)$$

onde w_n é a frequência circular, expressa em radianos por segundos, dada por:

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.5)$$

Encontrada a frequência circular, a frequência natural w_0 , para um sistema com um grau de liberdade, é dada por:

$$f_n = \frac{w_n}{2\pi} \quad (3.6)$$

onde f_n é a frequência natural, expressa em Hertz (Hz).

Considerando o amortecimento, temos não mais o sistema vibrando em sua configuração natural, mas sim numa configuração amortecida, sendo a solução da Equação 3.2 dada por:

$$x(t) = e^{-\xi w_n t} \left[x_0 \cos(w_a t) + \frac{\dot{x}_0 w_n x_0}{w_a} \sin(w_a t) \right] \quad (3.7)$$

onde w_a , é a frequência circular amortecida, dada por:

$$w_a = w_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.8)$$

Na Equação 3.8, ξ é o fator de amortecimento ou amortecimento relativo, dado por:

$$\xi = \frac{c}{2mw_n} \quad (3.9)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento e m é a massa do sistema.

Utilizando a Equação 3.9, obtêm-se valores típicos de amortecimento, determinados experimentalmente para alguns tipos de estrutura (Tabela 3.1).

	ξ
Amortecedores automobilísticos	0,1-0,5
Borracha	0,04
Estruturas de aço arrebiteadas	0,03
Concreto	0,02
Madeira	0,003
Aço laminado a frio	0,0006
Alumínio laminado a frio	0,0002
Bronze com teor de fósforo	0,00007

Tabela 3. 1 Valores típicos de amortecimento, STEIDEL (1989).

3.2.1.2 Vibração Forçada

A vibração forçada é caracterizada pela presença de uma excitação externa aplicada ao sistema, seja essa excitação uma força (carga harmônica, periódica, transiente ou impulsiva), um deslocamento ou aceleração ou mesmo um fornecimento contínuo de energia. A equação para a vibração forçada é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (3.10)$$

onde $F(t)$ não é nulo. A força aplicada pode assumir diversas formas distintas, de acordo com tipo de excitação à qual o sistema está submetido.

As equações para vibração forçada serão apresentadas apenas para n graus de liberdade.

3.3 SISTEMAS DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

O estudo do sistema com um grau de liberdade é de fundamental importância para o entendimento da dinâmica, porém não são aplicáveis a vários problemas típicos de Engenharia Civil. Sendo assim, é necessário então o estudo de sistemas estruturais mais complexos, constituídos por múltiplos graus de liberdade.

As equações de equilíbrio dinâmico são introduzidas a partir de um pórtico de três andares. O pórtico possui as vigas e colunas sem deformação axial, a inércia das vigas à flexão infinita e a massa da estrutura aplicada ao nível dos andares, sendo então constituído de um sistema estrutural com três graus de liberdade, como mostrado na Figura 3.4a.

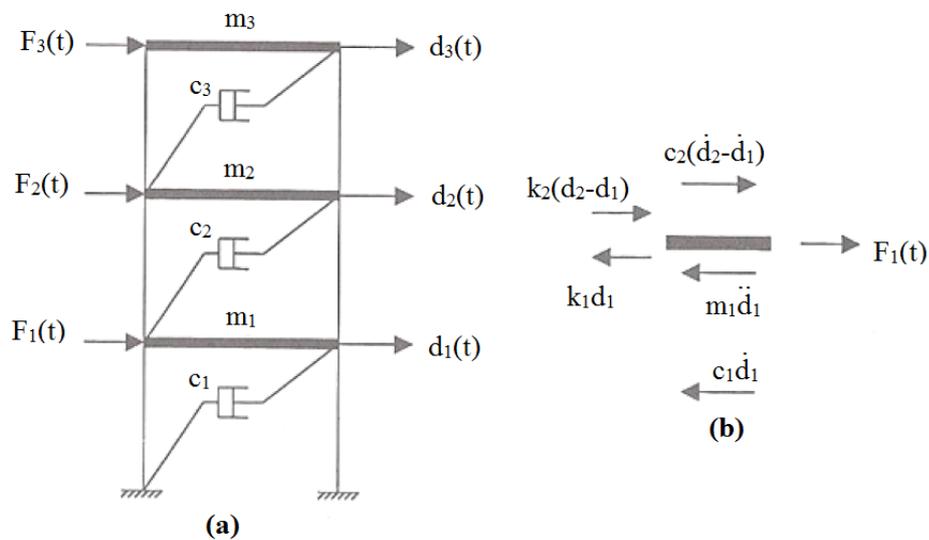


Figura 3. 4 (a) Pórtico plano com três andares; **(b)** Diagrama de corpo livre da massa m_1 (Lima e Santos, 2008)

onde, $F_1(t), F_2(t)$ e $F_3(t)$ são as forças externas aplicadas ao nível dos andares, $d_1(t), d_2(t)$ e $d_3(t)$ os deslocamentos dos graus de liberdade da estrutura, m_1, m_2 e m_3 as massas aplicadas nos níveis dos andares, k_1, k_2 e k_3 as rigidezes dos andares e c_1, c_2 e c_3 os coeficientes de amortecimento para cada piso.

A partir do diagrama de corpo livre da Figura 3.4b, a equação de equilíbrio do 1º grau de liberdade é dada por:

$$m_1 \ddot{d}_1 + (c_1 + c_2) \dot{d}_1 - c_2 \dot{d}_2 + (k_1 + k_2) d_1 - k_2 d_2 = F_1(t) \quad (3.11)$$

De forma análoga, podem-se obter as equações de equilíbrio para os demais graus de liberdade, as quais são dadas por:

$$m_2 \ddot{d}_2 - c_2 \dot{d}_1 + (c_2 + c_3) \dot{d}_2 - c_3 \dot{d}_3 - k_2 d_1 + (k_2 + k_3) d_2 - k_3 d_3 = F_2(t) \quad (3.12)$$

$$m_3 \ddot{d}_3 - c_3 \dot{d}_2 + c_3 \dot{d}_3 - k_3 d_2 + k_3 d_3 = F_3(t) \quad (3.13)$$

As equações anteriores (3.11-3.13) podem ser escritas também na forma matricial, chegando a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Portanto, para sistemas com múltiplos graus de liberdade, utiliza-se a notação matricial para exprimir a equação do movimento, sendo escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}(t) \quad (3.15)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, e \mathbf{d} , $\dot{\mathbf{d}}$, $\ddot{\mathbf{d}}$ e $\mathbf{F}(t)$, respectivamente, os vetores de deslocamentos, velocidades, acelerações e forças aplicadas (Lima e Santos, 2008).

Quando o sistema está submetido à vibração livre, o vetor de forças aplicadas é nulo, sendo assim, a Equação 3.15 é dada por:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

3.3.1 Frequência Natural e Modo de Vibração Natural

Na análise de vibrações livres de uma estrutura, determinam-se duas características dinâmicas muito importantes: as frequências naturais e os modos naturais de vibração.

Desconsiderando-se o amortecimento, a Equação 3.16 assume a seguinte forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

A solução que representa a vibração livre de um sistema segundo um de seus modos de vibração, é dada por:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\phi}_j q_j(t) \quad (3.18)$$

onde $\boldsymbol{\phi}_j$ é um auto vetor (modo de vibração da estrutura referente à uma frequência natural) e $q_j(t)$ é uma função harmônica dada por:

$$q_j(t) = A_j \cos(w_{n_j} t) + B_j \sin(w_{n_j} t) \quad (3.19)$$

sendo A_j e B_j constantes de integração, determinadas a partir de condições iniciais de movimento.

Substituindo a Equação 3.18 em 3.19:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\phi}_j \left[A_j \cos(w_{n_j} t) + B_j \sin(w_{n_j} t) \right] \quad (3.20)$$

Substituindo-se a Equação 3.20 na Equação 3.17, obtém-se:

$$(-w_{n_j}^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_j + \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_j) q_j(t) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Como $q_j(t) = 0$ pode assumir valores diferentes de zero, a Equação 3.21 só é válida para a expressão entre parênteses identicamente nula, ou seja:

$$(\mathbf{K} - w_{n_j}^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_j = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

A Equação 3.22 representa um sistema homogêneo e, uma vez que a solução $\boldsymbol{\phi}_j = \mathbf{0}$ não implica nenhum interesse, busca-se a solução não trivial, dada por:

$$\det \left| (\mathbf{K} - w_{n_j}^2 \mathbf{M}) \right| = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

A Equação 3.23 é uma equação polinomial na variável w_{n_j} , cujas n raízes são os autovalores ou valores característicos (frequências circulares do sistema estrutural).

Os valores característicos encontrados a partir da Equação 3.23, são substituídos nas equações 3.6 e 3.22, a fim obter as frequências naturais para cada grau de liberdade w_{0_j} e o modo de vibração natural referente a cada frequência natural (autovetor) ϕ_j , respectivamente.

Para múltiplos graus de liberdade, a Equação 3.6 assume a seguinte forma:

$$f_{n_j} = \frac{w_{n_j}}{2\pi} \quad (3.24)$$

Normalizando os autovetores encontrados na Equação 3.22, obtêm-se:

$$\bar{\phi}_j = \frac{\phi_j}{\sqrt{\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j}} \quad (3.25)$$

onde ϕ_j representa o auto-vetor antes da normalização, e $\bar{\phi}_j$ representa o auto-vetor normalizado. A matriz modal normalizada, constituída por N modos de vibração, é representada como.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\phi}_{1,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\phi}_{N,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\phi}_{N,N} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

3.4 MÉTODOS DE ANÁLISE DINÂMICA

As análises dinâmicas podem ser realizadas no domínio do tempo ou no domínio da frequência, sendo que o presente trabalho será restrito apenas à análise no domínio do tempo.

A solução de um problema dinâmico consiste em obter as respostas do sistema (deslocamentos, velocidades, acelerações, esforços, etc.) em função do tempo, a partir de certo instante inicial para o qual se conhecem as configurações.

Em geral, não é simples obter soluções analíticas para problemas de análise dinâmica, principalmente com múltiplos graus de liberdade, devendo-se recorrer a procedimentos numéricos de integração das equações diferenciais do movimento ao longo do tempo. Estes procedimentos fornecem as soluções para valores discretos do tempo t_0, t_1, \dots, t_n

A integração discreta no tempo pode ser feita através de algoritmos explícitos ou implícitos. Os algoritmos explícitos permitem encontrar a solução no tempo $t+\Delta t$ em função apenas de valores calculados no tempo t . Já os algoritmos implícitos incluem em sua formulação informações em algum ponto depois do tempo t . Neste trabalho serão implementados algoritmos implícitos de Newmark e Wilson-Theta (Bathe, 1982).

Os métodos de análise dinâmica mais utilizados, métodos da superposição modal e integração direta, se diferem em função de se obter ou não transformações das matrizes envolvidas, antes de se iniciar o processo de solução. Os métodos chamados diretos se caracterizam por trabalhar com as matrizes em sua forma original. Diferentemente, o método de superposição modal trabalha com a transformação das matrizes envolvidas, através de uma mudança de coordenadas, de forma a se obter equações desacopladas que podem ser resolvidas mais facilmente. A solução individual de cada equação pode então ser obtida através de integração direta (com um grau de liberdade) ou através da interação numérica da equação de Duhamel (para múltiplos graus de liberdade), que serão apresentadas nas próximas seções.

3.4.1 Método da Superposição Modal

O Método da Superposição Modal é um dos métodos mais utilizados para solucionar problemas de dinâmica, em que o objetivo principal é promover a transformação de um sistema de n equações em um sistema de um grau de liberdade.

A técnica da superposição modal corresponde a uma transformação das coordenadas dos deslocamentos nodais (geométricos) para as coordenadas modais ou generalizadas. Essa transformação é possível devido à propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração (autovetores). Os modos de vibração são linearmente independentes, formando então uma base no espaço n -dimensional, o que significa que qualquer vetor neste espaço n -dimensional pode ser expresso como uma combinação linear dos n vetores linearmente independentes.

A propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração é a base do método da superposição modal. Devido à ortogonalidade dos modos de vibração, têm-se os produtos $\Phi^T M \Phi$, $\Phi^T C \Phi$ e $\Phi^T K \Phi$ resultando em matrizes diagonais, ou seja, matriz de massa diagonal e na matriz de rigidez diagonal, respectivamente.

A matriz de amortecimento C , no método da superposição modal, é considerada através das taxas de amortecimento em cada modo normal, sendo considerada válida a hipótese de ortogonalidade da matriz de amortecimento. A determinação da matriz de amortecimento, assim como das matrizes de rigidez e massa, será feita no Capítulo 4.

A equação de movimento do problema em coordenadas nodais é dada por:

$$M\ddot{\mathbf{d}}(t) + C\dot{\mathbf{d}} + K\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.27)$$

A mudança de base para coordenadas modais ou generalizadas é feita utilizando a seguinte equação:

$$\mathbf{d}(t) = \Phi \mathbf{y}(t) \quad (3.28)$$

Logo, a derivada primeira e segunda da Equação 3.11 é:

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \Phi \dot{\mathbf{y}}(t) \quad (3.29)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \Phi \ddot{\mathbf{y}}(t) \quad (3.30)$$

onde,

$\Phi \rightarrow$ matriz modal (Equação 3.26);

$y(t) \rightarrow$ vetor de deslocamentos em coordenadas modais de ordem n (função do tempo);

$\dot{y}(t) \rightarrow$ vetor de velocidades em coordenadas modais de ordem n (função do tempo);

$\ddot{y}(t) \rightarrow$ vetor de acelerações em coordenadas modais de ordem n (função do tempo).

A equação do movimento em termos das coordenadas generalizadas fica então da seguinte forma:

$$\bar{M}\ddot{y}(t) + \bar{C}\dot{y} + \bar{K}y(t) = P(t) \quad (3.31)$$

onde \bar{M} , \bar{C} e \bar{K} são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e de rigidez generalizadas e $P(t)$ é o vetor de cargas generalizadas, dados por:

$$\bar{M} = \Phi^T M \Phi \quad (3.32)$$

$$\bar{C} = \Phi^T C \Phi \quad (3.33)$$

$$\bar{K} = \Phi^T K \Phi \quad (3.34)$$

$$P(t) = \Phi^T F(t) \quad (3.35)$$

As matrizes de massa e de rigidez são matrizes diagonais, o que garante o desacoplamento das equações. Portanto, desacoplando as equações, têm-se um conjunto de n equações independentes ($i=1..n$), em coordenadas modais, dado por:

$$\ddot{y}_i(t_i) + \frac{\bar{C}_i}{\bar{M}_i} \dot{y}_i(t_i) + \frac{\bar{K}_i}{\bar{M}_i} y_i(t_i) = \frac{P_i(t_i)}{\bar{M}_i} \quad (3.36)$$

onde

$$\frac{\bar{K}_i}{\bar{M}_i} = f_{n_i}^2 \quad (3.37)$$

e

$$\bar{C}_i = 2f_{n_i} \xi \bar{M}_i \quad (3.38)$$

sendo que f_{n_i} são as frequências naturais. Portanto,

$$\ddot{y}_i(t_i) + 2f_{n_i}\xi\dot{y}_i(t_i) + f_{n_i}^2 y_i(t_i) = \frac{P_i(t_i)}{\bar{M}_i} \quad (3.39)$$

Resolvendo a Equação 3.39, encontram-se os valores dos deslocamentos, velocidades e acelerações em coordenadas modais em cada tempo t_i , substituindo os respectivos valores nas Equações 3.28, 3.29 e 3.30, determinando respectivamente os deslocamentos, as velocidades e as acelerações nas coordenadas modais.

A Equação 3.20, denominada equação modal, será resolvida de forma numérica, obtendo assim a solução do problema em coordenadas modais. Neste presente trabalho será resolvido utilizando a Integral de Duhamel ou as técnicas de integração direta, métodos que serão descritos melhor a seguir.

A matriz de amortecimento que será considerada neste trabalho é a matriz de amortecimento proporcional (Amortecimento de Rayleigh). No capítulo 4 será apresentada a formulação da matriz de amortecimento proporcional.

3.4.1.1 Integral de Duhamel

A Integral de Duhamel para sistemas amortecidos é dada por:

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{\bar{M}_i w_{a_i}} \int_0^t e^{-\xi w_{0_i}(t-\tau)} P(\tau) \text{sen}[w_{a_i}(t-\tau)] d\tau \quad (3.40)$$

onde \bar{M}_i e w_{a_i} são a massa generalizada e a frequência circular amortecida para cada grau de liberdade e $P(\tau)$ é o carregamento.

Desenvolvendo a Equação 3.40, obtêm-se a forma incremental da Integral de Duhamel, como sendo:

$$y_i(t_i) = \frac{e^{-\xi w_{0_i} t}}{\bar{M}_i w_{a_i}} [A(t_i) \text{sen}(w_{a_i} t_i) - B(t_i) \cos(w_{a_i} t_i)] \quad (3.41)$$

As integrais incrementais para sistemas não-amortecidos, $A(t)$ e $B(t)$, são dadas pelas seguintes equações:

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \left[P(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \right] \Delta I_1 + \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \Delta I_4 \quad (3.42)$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \left[P(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \right] \Delta I_2 + \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \Delta I_3 \quad (3.43)$$

onde,

$$I_1(t_i) = \frac{e^{-\xi w_{0_i} t_i}}{(\xi w_{0_i})^2 + w_{a_i}^2} \left(\xi w_{0_i} \cos(w_{a_i} t_i) + w_{a_i} \sin(w_{a_i} t_i) \right) \quad (3.44)$$

$$I_2(t_i) = \frac{e^{-\xi w_{0_i} t_i}}{(\xi w_{0_i})^2 + w_{a_i}^2} \left(\xi w_{0_i} \sin(w_{a_i} t_i) - w_{a_i} \cos(w_{a_i} t_i) \right) \quad (3.45)$$

$$I_3(t_i) = \left[t_i - \frac{\xi w_{0_i} t_i}{(\xi w_{0_i})^2 + w_{a_i}^2} \right] I_2(t_i) + \left[\frac{w_{a_i}}{(\xi w_{0_i})^2 + w_{a_i}^2} \right] I_1(t_i) \quad (3.46)$$

$$I_4(t_i) = \left[t_i - \frac{\xi w_{0_i} t_i}{(\xi w_{0_i})^2 + w_{a_i}^2} \right] I_1(t_i) + \left[\frac{w_{a_i}}{(\xi w_{0_i})^2 + w_{a_i}^2} \right] I_2(t_i) \quad (3.47)$$

Aplicando as Equações 3.42 e 3.43, para cada tempo t_i , na Equação 3.41, encontram-se os deslocamentos $y_i(t_i)$, em cada tempo t_i . Sendo assim, as acelerações $\ddot{y}_i(t_i)$, em cada tempo t_i , são dadas pela derivada segunda da Equação 3.41 no tempo.

Quando se desconsidera o amortecimento, ou seja, $\xi = 0$:

$$y_i(t_i) = \frac{1}{M_i w_{0_i}} \left[A(t_i) \text{sen}(w_{0_i} t_i) - B(t_i) \text{cos}(w_{0_i} t_i) \right] \quad (3.48)$$

onde w_{0_i} é a frequência natural para cada grau de liberdade e as integrais incrementais para sistemas não-amortecidos, $A(t)$ e $B(t)$, são dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} A(t_i) = A(t_{i-1}) + \left[P(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \right] & \left(\text{sen}(w_{0_i} t_i) - \text{sen}(w_{0_i} t_{i-1}) \right) \frac{1}{w_{0_i}} \\ & + \frac{\Delta P_i}{w_{0_i}^2 \Delta t_i} \left\{ [\text{cos}(w_{0_i} t_i) - \text{cos}(w_{0_i} t_{i-1})] \right. \\ & \left. + w_{0_i} [t_i \text{sen}(w_{0_i} t_i) - t_{i-1} \text{sen}(w_{0_i} t_{i-1})] \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
B(t_i) = B(t_{i-1}) + \left[P(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \right] (\cos(w_{0_i} t_i) - \cos(w_{0_i} t_{i-1})) \frac{1}{w_{0_i}} \\
+ \frac{\Delta P_i}{w_{0_i}^2 \Delta t_i} \{ [\text{sen}(w_{0_i} t_i) - \text{sen}(w_{0_i} t_{i-1})] \\
- w_{0_i} [t_i \cos(w_{0_i} t_i) - t_{i-1} \cos(w_{0_i} t_{i-1})] \} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

3.4.2 Métodos de Integração Direta

Na integração direta, as equações são integradas usando processos numéricos passo a passo, sendo que o termo, “direta” significa que as equações são integradas no tempo, antes que aconteça alguma transformação das equações em outra forma diferente. A integração direta é baseada em duas ideias. Primeiramente, ao invés de resolver a equação do movimento a qualquer tempo t , busca-se solucioná-la a intervalos Δt discretos, separadamente. Isto significa que o equilíbrio dinâmico que inclui os efeitos de inercia e amortecimento, é tomado em pontos discretos dentro do intervalo de solução. A segunda ideia é a discretização do tempo em intervalos Δt , de forma que os deslocamentos, velocidades e acelerações são determinados para cada tempo $t + \Delta t$.

Para a aplicação dos métodos de integração direta, são determinadas as matrizes \mathbf{K} , \mathbf{M} e \mathbf{C} , sendo inicialmente aplicadas condições iniciais no tempo zero, denotadas \mathbf{d}^0 , $\dot{\mathbf{d}}^0$ e $\ddot{\mathbf{d}}^0$. Na solução o tempo total T é subdividido em n intervalos, implicando em $\Delta t = T/n$, encontrando-se a solução nos tempos $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, T$.

A seguir são apresentados os dois métodos de integração direta utilizados neste trabalho, sendo eles: Método de Newmark e Método de Wilson θ .

3.4.2.1 Método de Newmark

Na análise através do Método de Newmark, impondo-se as condições iniciais, adota-se um passo de tempo Δt qualquer e os parâmetros α e δ , sendo que:

$$\alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2 \quad (3.51)$$

$$\delta \geq 0,50 \quad (3.52)$$

Para este trabalho foi utilizado $\delta = 0,50$, o que implica $\alpha = 0,25$.

Tendo-se adotado os parâmetros anteriores (Δt , α e δ), calculam-se as constantes de integração a serem utilizadas, dadas por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \\ a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); a_6 = \Delta t(1 - \delta); a_7 = \delta \Delta t \end{aligned} \quad (3.53)$$

Tendo sido calculadas as constantes de integração, calcula-se a forma efetiva da matriz de rigidez, dada por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} \quad (3.54)$$

Para a análise linear pelo método de Newmark, é usual triangularizar a matriz de rigidez efetiva, obtendo-se

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T \quad (3.55)$$

Para cada passo de tempo é calculado o vetor das cargas efetivas no tempo $t+\Delta t$:

$$\hat{\mathbf{p}}^{t+\Delta t} = \mathbf{p}^{t+\Delta t} + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{d}^t + a_2 \dot{\mathbf{d}}^t + a_3 \ddot{\mathbf{d}}^t) + \mathbf{C}(a_1 \mathbf{d}^t + a_4 \dot{\mathbf{d}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{d}}^t) \quad (3.56)$$

Calcula-se os deslocamentos no tempo $t+\Delta t$, dados por:

$$\mathbf{LDL}^T \mathbf{d}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{p}}^{t+\Delta t} \quad (3.57)$$

Tendo obtido os deslocamentos no tempo $t+\Delta t$, calculam-se as acelerações e as velocidades no tempo $t+\Delta t$, dados respectivamente por:

$$\ddot{\mathbf{d}}^{t+\Delta t} = a_0(\mathbf{d}^{t+\Delta t} - \mathbf{d}^t) - a_2 \dot{\mathbf{d}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{d}}^t \quad (3.58)$$

$$\dot{\mathbf{d}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{d}}^t + a_6 \ddot{\mathbf{d}}^t + a_7 \ddot{\mathbf{d}}^{t+\Delta t} \quad (3.59)$$

3.4.2.2 Método Wilson θ

Este método é essencialmente uma extensão do método da aceleração linear, em que uma variação linear da aceleração é assumida de um tempo t até $t+\Delta t$. No método

de Wilson θ , a aceleração na equação do movimento é assumida como linear do tempo t até $t+\theta\Delta t$, onde $\theta \geq 1,0$, sendo que usualmente é utilizado $\theta = 1,4$.

Similarmente ao método de Newmark, são calculadas as constantes de integração, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}; a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}; a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2}; a_4 = \frac{a_0}{\theta}; \\ a_5 &= \frac{-a_2}{\theta}; a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}; a_7 = \frac{\Delta t}{2}; a_8 = \frac{\Delta t^2}{6} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Assim como no método de Newmark, é calculada a matriz de rigidez efetiva e a sua triangularização, utilizando as mesmas formulações (Equações 3.54 e 3.55).

Para cada passo de tempo é calculado o vetor das cargas efetivas no tempo $t+\theta\Delta t$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}^{t+\theta\Delta t} &= \mathbf{p}^t + \theta(\mathbf{p}^{t+\Delta t} - \mathbf{p}^t) + \mathbf{M}(a_0\mathbf{d}^t + a_2\dot{\mathbf{d}}^t + 2\ddot{\mathbf{d}}^t) \\ &\quad + \mathbf{C}(a_1\mathbf{d}^t + 2\dot{\mathbf{d}}^t + a_3\ddot{\mathbf{d}}^t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Calculam-se os deslocamentos no tempo $t+\theta\Delta t$, dados por:

$$\mathbf{LDL}^T \mathbf{d}^{t+\theta\Delta t} = \hat{\mathbf{p}}^{t+\theta\Delta t} \quad (3.62)$$

Tendo obtido os deslocamentos no tempo $t+\theta\Delta t$, calculam-se as acelerações, as velocidades e os deslocamentos no tempo $t+\Delta t$, dados respectivamente por:

$$\ddot{\mathbf{d}}^{t+\Delta t} = a_4(\mathbf{d}^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{d}^t) + a_5\dot{\mathbf{d}}^t + a_6\ddot{\mathbf{d}}^t \quad (3.63)$$

$$\dot{\mathbf{d}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{d}}^t + a_7(\ddot{\mathbf{d}}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{d}}^t) \quad (3.64)$$

$$\mathbf{d}^{t+\Delta t} = \mathbf{d}^t + \Delta t\dot{\mathbf{d}}^t + a_8(\ddot{\mathbf{d}}^{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{d}}^t) \quad (3.65)$$

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO PARA VIGAS MISTAS

4.1 INTRODUÇÃO

A solução numérica via Método dos Elementos Finitos, para problemas de viga mista, vem despertando o interesse de muitos pesquisadores em todo mundo, sendo possível encontrar diversos trabalhos utilizando elementos deste tipo, como por exemplo, em Oven et al. (1997), Faella et al. (2002), Salari e Spaconi (2001), Dall'Asta e Zona (2004), Liang et al. (2004), entre outros.

A solução do problema de viga mista, utilizando métodos numéricos, torna-se muito interessante, pois estes métodos podem ser aplicados para todos os tipos de vigas, inclusive para os casos mais complexos, onde a solução analítica é difícil de ser encontrada. A solução numérica do problema converge para a solução analítica à medida que a malha de elementos finitos é refinada.

Neste trabalho é apresentada uma formulação para um elemento finito unidimensional, com deslizamento relativo, baseado no elemento de dez graus de liberdade já utilizado em outros trabalhos por Dall'Asta e Zona (2004), Silva (2006) e Oliveira (2009). Os trabalhos citados apresentaram apenas formulações para a análise estática, onde apenas a matriz de rigidez K do elemento foi apresentada.

No presente trabalho, visando realizar uma análise dinâmica para o caso de vigas mistas com interação parcial, serão implementadas para o elemento finito mencionado, as matrizes de massa M e de amortecimento C . O elemento finito utilizado possui deslizamento incorporado na face de contato dos materiais, sendo capaz de resolver os problemas de viga mista propostos neste trabalho.

4.2 MODELO IMPLEMENTADO (Elemento Finito “SLIP10DOF”)

O elemento a ser implementado, chamado neste trabalho de “SLIP10DOF”, é mostrado a seguir na Figura 4.1, onde u_{ij} , v_i e θ_i são os deslocamentos nodais do elemento finito (deslocamentos axiais, verticais e rotação, respectivamente), representando os graus de liberdade do elemento. O índice i implica o tipo do material, sendo o concreto representado pelo número 1 e o aço pelo número 2.

O nome “SLIP10DOF” vem da sua tradução literal (“SLIP” como sendo deslizamento) e (“10DOF”-10 Dregree Of Freedom como sendo 10 graus de liberdade), ou seja, o “SLIP10DOF” é um elemento de dez graus de liberdade com deslizamento relativo na interface de seus materiais.

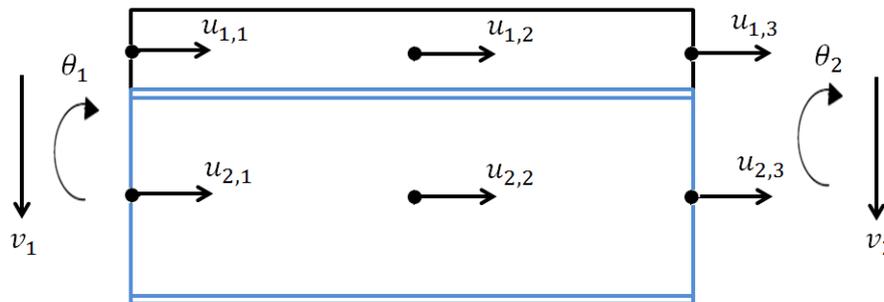


Figura 4. 1 Graus de liberdade do elemento finito “SLIP10DOF”

Um modelo de elementos finitos de barra para modelar o problema de vigas mistas, tem as seguintes hipóteses cinemáticas ligadas à deformação de um elemento da viga de Euler-Bernoulli: funções de interpolação que garantam a continuidade dos deslocamentos verticais, axiais e das rotações nas extremidades dos elementos, onde estas últimas são consideradas iguais às derivadas dos deslocamentos transversais. Para garantir estas exigências, deve-se ter no mínimo um polinômio de terceiro grau para os deslocamentos transversais, e no mínimo lineares para os deslocamentos axiais.

A seguir são apresentadas as matrizes de rigidez, de massa e de amortecimento do elemento.

4.2.1 Matriz de Rigidez do Elemento “SLIP10DOF”

Primeiramente, serão apresentadas na Figura 4.2, as notações utilizadas para a dedução da formulação do problema.

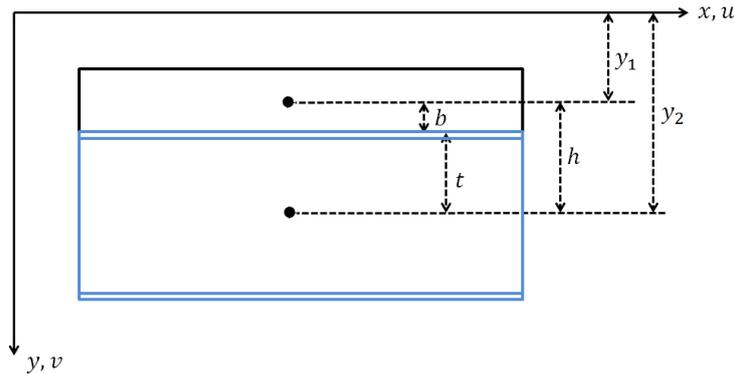


Figura 4. 2 Distâncias ao eixo do elemento “SLIP10DOF”

Os valores de y_1 e y_2 são respectivamente as distâncias do *eixo x* aos centros das seções de concreto e de aço, h é a distância entre os centros das seções e b e t são respectivamente, as distâncias dos centros das seções de concreto e de aço à interface de contato dos materiais.

De acordo com a cinemática, serão apresentadas as expressões referentes aos deslocamentos axiais u_1 e u_2 , deslocamento vertical v e deslizamento s (Figura 2.2), são dadas respectivamente por:

$$u_1 = u_1^0 - (y - y_1)\theta = u_1^0(x) - (y - y_1)\theta(x) \quad (4.1)$$

$$u_2 = u_2^0 - (y - y_2)\theta = u_2^0(x) - (y - y_2)\theta(x) \quad (4.2)$$

$$v(x, y) = v^0(x) \quad (4.3)$$

$$s(x) = u_2(x, y_2 - t) - u_1(x, y_1 + b) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + h\theta(x) \quad (4.4)$$

Segundo a hipótese de Euler-Bernoulli:

$$\theta(x) = \frac{dv^0}{dx} \quad (4.5)$$

onde θ é a rotação da viga e v^0 é o deslocamento vertical inicial.

Aplicando a Equação 4.5 nas Equações 4.1, 4.2 e 4.4:

$$u_1(x, y) = u_1^0(x) - (y - y_1) \frac{dv^0(x)}{dx} \quad (4.6)$$

$$u_2(x, y) = u_2^0(x) - (y - y_2) \frac{dv^0(x)}{dx} \quad (4.7)$$

$$s(x) = u_2(x, y_2 + t) - u_1(x, y_1 + t) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + h \frac{dv^0(x)}{dx} \quad (4.8)$$

Segundo a teoria da elasticidade, a energia de deformação é dada por:

$$U = \int_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV + \int_V \frac{FS^2}{2} dx \quad (4.9)$$

onde ε é a deformação axial, s é o deslizamento, E é o módulo de elasticidade longitudinal e F é a força aplicada ao sistema estrutural.

O primeiro termo da Equação 4.9 é referente à soma das parcelas de deformações axiais dos materiais 1 e 2, $U_{e,1}$ e $U_{e,2}$ respectivamente, e o segundo termo referente à parcela da deformação devido ao deslizamento, U_s , dados por:

$$U_\varepsilon = \int_V \frac{E\varepsilon_1^2}{2} dV + \int_V \frac{E\varepsilon_2^2}{2} dV \quad (4.10)$$

$$U_s = \int_V \frac{FS^2}{2} dx \quad (4.11)$$

onde ε_1 e ε_2 são as deformações nos eixos dos materiais 1 e 2, concreto e aço respectivamente, determinadas a seguir.

Considerando o material 1, a deformação ε_1 , é igual a:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} = \frac{du_1^0}{dx} - (y - y_1) \frac{d^2v^0(x)}{dx^2} = \varepsilon_1^0 + (y - y_1)k \quad (4.12)$$

Colocando a Equação anterior na forma matricial, obtém-se:

$$\varepsilon_1 = \langle 1 \quad (y - y_1) \rangle \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

onde $\langle \quad \rangle$ representa um vetor linha e $\begin{Bmatrix} \end{Bmatrix}$ um vetor coluna. Esta notação será utilizada ao longo de todo este trabalho.

Na Equação 4.12, k é a curvatura, que é determinada por:

$$k = \frac{d^2 v^0(x)}{dx^2} \quad (4.14)$$

Considerando o material 2, analogamente, temos que a deformação ε_2 , é:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + (y - y_2)k = \langle 1 \quad (y - y_2) \rangle \begin{Bmatrix} \varepsilon_2^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Substituindo as Equações 4.13 e 4.15 na Equação 4.10, as parcelas da energia de deformação devido às deformações axiais, $U_{\varepsilon,1}$ e $U_{\varepsilon,2}$, são dadas por:

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon,1} &= \int_V \frac{E_1 \varepsilon_1^2}{2} dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_1^T E_1 \varepsilon_1 dV \\ &= \int_0^L \int_{A_1} \frac{E_1}{2} \langle \varepsilon_1^0 \quad k \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ (y - y_2) \end{Bmatrix} \langle 1 \quad (y - y_2) \rangle \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ k \end{Bmatrix} dA_1 dx \\ &= \int_0^L \frac{1}{2} \langle \varepsilon_1^0 \quad k \rangle \left(\int_{A_1} E_1 \begin{bmatrix} 1 & (y - y_2) \\ (y - y_2) & (y - y_2)^2 \end{bmatrix} dA_1 \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ k \end{Bmatrix} dx \\ &= \int_0^L \frac{1}{2} \langle \varepsilon_1^0 \quad k \rangle \begin{bmatrix} E_1 A_1 & E_1 S_1 \\ E_1 S_1 & E_1 I_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ k \end{Bmatrix} dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

Analogamente,

$$U_{\varepsilon,2} = \int_0^L \frac{1}{2} \langle \varepsilon_2^0 \quad k \rangle \begin{bmatrix} E_2 A_2 & E_2 S_2 \\ E_2 S_2 & E_2 I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_2^0 \\ k \end{Bmatrix} dx \quad (4.17)$$

Portanto, matricialmente, a energia de deformação do elemento, considerando as parcelas de deformação e deslizamento, é dada por:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} \langle \varepsilon_1^0 \quad \varepsilon_2^0 \quad k \quad s \rangle \begin{bmatrix} E_1 A_1 & 0 & E_1 S_1 & 0 \\ 0 & E_2 A_2 & E_2 S_2 & 0 \\ E_1 S_1 & E_2 S_2 & E_1 I_1 + E_2 I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ k \\ s \end{Bmatrix} dx \quad (4.18)$$

ou da seguinte forma,

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} \varepsilon(x)^T D \varepsilon(x) dx \quad (4.19)$$

onde ε é o vetor de deformações e D é a matriz composta das propriedades físicas e geométricas e da força F .

O vetor de deformações também pode ser escrito da seguinte forma:

$$\varepsilon(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ k \\ s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & -d^2 \\ -1 & 1 & h \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ v \end{Bmatrix} = \partial u(x) \quad (4.20)$$

onde ∂ é uma matriz de operadores diferenciais e $u(x)$ é o vetor de deslocamentos do elemento.

Segundo Silva (2006), o vetor dos deslocamentos nodais \mathbf{d} do elemento finito mostrado anteriormente na Figura 4.1, é:

$$\mathbf{d}^T = \langle \mathbf{d}_{u_1}^T \quad \mathbf{d}_{u_2}^T \quad \mathbf{d}_v^T \rangle \quad (4.21)$$

onde \mathbf{d}_{u_1} é o vetor dos deslocamentos axiais do elemento 1, \mathbf{d}_{u_2} é o vetor dos deslocamentos axiais do elemento 2 e \mathbf{d}_v é o vetor dos deslocamentos verticais e rotações dos elementos 1 e 2, dados por:

$$\mathbf{d}_{u_1}^T = \langle u_{1,1} \quad u_{1,2} \quad u_{1,3} \rangle \quad (4.22)$$

$$\mathbf{d}_{u_2}^T = \langle u_{2,1} \quad u_{2,2} \quad u_{2,3} \rangle \quad (4.23)$$

$$\mathbf{d}_v^T = \langle v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \rangle \quad (4.24)$$

onde o sobrescrito T , implica a transposição do vetor ou mesmo de uma matriz.

Uma das características da formulação via MEF é a aproximação da solução exata dos deslocamentos e tensões no elemento, por funções de interpolação, \mathbf{N} , dos deslocamentos nodais \mathbf{d} .

Discretizando pelo MEF, os deslocamentos axiais e verticais do elemento, definidos pelas funções de interpolação na coordenada x , são respectivamente dados por:

$$u_1 = N_u(x)\mathbf{d}_{u_1} \quad (4.25)$$

$$u_2 = N_u(x)\mathbf{d}_{u_2} \quad (4.26)$$

$$v = N_v(x)\mathbf{d}_v \quad (4.27)$$

onde N_u e N_v são funções de interpolação na coordenada x e as extremidades de integração são 0 (*zero*) e L . Estas funções de interpolação serão determinadas adiante para uma coordenada generalizada ξ .

Colocando as Equações 4.25-4.27 na forma matricial:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} N_u(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_u(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_v(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{u_1} \\ \mathbf{d}_{u_2} \\ \mathbf{d}_v \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

onde \mathbf{N} é a matriz de interpolação.

Substituindo a Equação 4.28 na Equação 4.20, obtêm-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \boldsymbol{\partial}\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-d^2}{dx^2} \\ -1 & 1 & h\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_u(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_u(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_v(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{u_1} \\ \mathbf{d}_{u_2} \\ \mathbf{d}_v \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

O que implica em,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{bmatrix} N_{u,x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_{u,x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -N_{v,xx} \\ N_u & N_u & hN_{v,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{u_1} \\ \mathbf{d}_{u_2} \\ \mathbf{d}_v \end{Bmatrix} = \mathbf{B}(x)\mathbf{d} \quad (4.30)$$

onde \mathbf{B} é a matriz derivada da matriz de interpolação.

Aplicando a equação 4.29 na Equação 4.19:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(x)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(x) dx = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}(x)^T \mathbf{D} \mathbf{B}(x) \mathbf{d} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left(\int_0^L \mathbf{B}(x)^T \mathbf{D} \mathbf{B}(x) dx \right) \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Logo a Matriz de Rigidez em função de x , é dada por:

$$\mathbf{K}(x) = \int_0^L \mathbf{B}(x)^T \mathbf{D} \mathbf{B}(x) dx \quad (4.32)$$

Como as funções são definidas em relação a um elemento genérico com variável ξ ao longo do eixo axial, as funções de interpolação axiais e transversais são dadas por:

$$\mathbf{N}_{u_1}^T = \mathbf{N}_{u_2}^T = \mathbf{N}_u^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\ 1 - \xi^2 \\ \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{N}_v^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \xi^3 \\ \frac{L}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \xi - \frac{1}{4} \xi^2 + \frac{1}{4} \xi^3 \right) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \xi^3 \\ \frac{L}{2} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \xi + \frac{1}{4} \xi^2 + \frac{1}{4} \xi^3 \right) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

onde as coordenadas de suas extremidades de integração são -1 e 1 e,

$$\xi = \frac{2}{l}x - 1 \quad (4.35)$$

Substituindo as funções de interpolação na coordenada ξ (Equações 4.33 e 4.34) na matriz $\mathbf{B}(x)$, obtém-se a matriz $\mathbf{B}(\xi)$ é:

$$\mathbf{B}(\xi) = \begin{bmatrix} N_{u,\xi} \frac{d\xi}{dx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_{u,\xi} \frac{d\xi}{dx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -N_{v,\xi\xi} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 \\ N_u & N_u & hN_{v,\xi} \frac{d\xi}{dx} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

onde,

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \quad (4.37)$$

Portanto, a Matriz de Rigidez em função de ξ é dada por:

$$\mathbf{K}(\xi) = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}(\xi)^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi) \left(\frac{d\xi}{dx}\right) d\xi \quad (4.38)$$

4.2.2 Matriz de Massa do Elemento “SLIP10DOF”

Para a solução do problema dinâmico, além da matriz de rigidez \mathbf{K} do elemento, é necessária também a determinação da matriz de massa \mathbf{M} do elemento finito. A matriz de massa será determinada, assim como a matriz de rigidez, através da teoria de vigas de Euler-Bernoulli com deslizamento incorporado.

Como os deslocamentos nodais do elemento finito são dados pela Equação (4.19), a Energia Cinética do Elemento é igual a:

$$E_c = \int_V \frac{1}{2} \rho V^2 dm \quad (4.39)$$

onde, ρ é a densidade (massa pelo volume) e V é a velocidade determinada pela equação a seguir (Equação 4.40) .

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \quad (4.40)$$

Como,

$$V_x^2 = \dot{u} \quad (4.41)$$

$$V_y^2 = \dot{v} \quad (4.42)$$

somando-se as Equações 4.41 e 4.42, chega-se a:

$$\dot{u}^2 + \dot{v}^2 = \dot{u}^T \dot{u} + \dot{v}^T \dot{v} \quad (4.43)$$

onde, para simplificação, será utilizado a seguinte notação para derivada, em relação ao tempo:

$$\dot{(\quad)} = \frac{d(\quad)}{dt} \quad (4.44)$$

Substituindo a Equação 4.43 na Equação 4,39, a energia cinética do elemento é:

$$E_c = \int_V \frac{1}{2} \rho (\dot{u}^T \dot{u} + \dot{v}^T \dot{v}) dV \quad (4.45)$$

Como são dois, os deslocamentos axiais e os verticais, a Equação 4.45 assume a seguinte forma:

$$E_c = \int_{V_1} \frac{1}{2} \rho_1 (\dot{u}_1^T \dot{u}_1 + \dot{v}_1^T \dot{v}_1) dV_1 + \int_{V_2} \frac{1}{2} \rho_2 (\dot{u}_2^T \dot{u}_2 + \dot{v}_2^T \dot{v}_2) dV_2 \quad (4.46)$$

onde as energias cinéticas para as parcelas separadas são,

$$E_{c_1} = \int_{V_1} \frac{1}{2} \rho_1 (\dot{u}_1^T \dot{u}_1 + \dot{v}_1^T \dot{v}_1) dV_1 \quad (4.47)$$

$$E_{c_2} = \int_{V_2} \frac{1}{2} \rho_2 (\dot{u}_2^T \dot{u}_2 + \dot{v}_2^T \dot{v}_2) dV_2 \quad (4.48)$$

Para E_{c_1} , a Equação 4.6 é válida, sendo a sua derivada primeira igual a:

$$\dot{u}_1(x, y) = \dot{u}_1^0(x) - (y - y_1) \frac{d\dot{v}^0(x)}{dx} \quad (4.49)$$

onde \dot{u}_1^0 é a derivada da Equação 4.25, dada por,

$$\dot{u}_1^0 = \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{d}}_{u_1} \quad (4.50)$$

Como a rotação é dada pela Equação 4.5, a rotação em funções polinomiais, é dada por:

$$\frac{dv^0(x)}{dx} = \mathbf{N}_{v,x} \mathbf{d}_v \quad (4.51)$$

onde sua derivada primeira é,

$$\frac{d\dot{v}^0(x)}{dx} = \mathbf{N}_{v,x} \dot{\mathbf{d}}_v \quad (4.52)$$

Logo, a Equação 4.49 em funções polinomiais é dada por:

$$\dot{u}_1 = \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{d}}_{u_1} - (y - y_1) \mathbf{N}_{v,x} \dot{\mathbf{d}}_v \quad (4.53)$$

A derivada da segunda parcela da Equação 4.43, é:

$$\dot{v}_1^T \dot{v}_1 = \dot{v}^T \dot{v} = \dot{\mathbf{d}}_v^T \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v \dot{\mathbf{d}}_v \quad (4.54)$$

Substituindo as Equações 4.53 e 4.54 na Equação 4.47, a energia cinética do material I , é:

$$\begin{aligned} E_{c1} &= \int_{V_1} \frac{1}{2} \rho_1 (\dot{u}_1^T \dot{u}_1 + \dot{v}_1^T \dot{v}_1) dV_1 \\ &= \int_0^L \int_{A_1} \frac{1}{2} \rho_1 (\mathbf{N}_u \dot{\mathbf{d}}_{u_1} - (y - y_1) \mathbf{N}_{v,x} \dot{\mathbf{d}}_v)^T (\mathbf{N}_u \dot{\mathbf{d}}_{u_1} \\ &\quad - (y - y_1) \mathbf{N}_{v,x} \dot{\mathbf{d}}_v) dA_1 dx + \int_0^L \int_{A_1} \frac{1}{2} \rho_1 (\dot{\mathbf{d}}_v^T \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v \dot{\mathbf{d}}_v) dA_1 dx \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde,

$$\int dA_1 = A_1 ; \int (y - y_1) dA_1 = S_1 ; \int (y - y_1)^2 dA_1 = I_1 \quad (4.56)$$

Aplicando as Equações 4.56 em 4.55:

$$\begin{aligned}
E_{c_1} = & \int_0^L \frac{1}{2} \rho_1 A_1 \dot{\mathbf{d}}_{u_1}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{d}}_{u_1} dx \\
& - \int_0^L \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \dot{\mathbf{d}}_{u_1}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_{v,x} \dot{\mathbf{d}}_v dx - \int_0^L \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \dot{\mathbf{d}}_v^T \mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{d}}_{u_1} dx \\
& + \int_0^L \frac{1}{2} \rho_1 A_1 \dot{\mathbf{d}}_v^T \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v \dot{\mathbf{d}}_v dx
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Separando os termos da Equação 4.57, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
E_{c_1} = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_{u_1}^T \left(\int_0^L \rho_1 A_1 \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u dx \right) \dot{\mathbf{d}}_{u_1} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_{u_1}^T \left(\int_0^L \rho_1 S_1 \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_{v,x} dx \right) \dot{\mathbf{d}}_v \\
& - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_v^T \left(\int_0^L \rho_1 S_1 \mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_u dx \right) \dot{\mathbf{d}}_{u_1} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_v^T \left(\int_0^L \rho_1 I_1 \mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_{v,x} dx \right) \dot{\mathbf{d}}_v \\
& + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_v^T \left(\int_0^L \rho_1 A_1 \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v dx \right) \dot{\mathbf{d}}_v
\end{aligned} \tag{4.58}$$

onde as massas referentes aos deslocamentos são separadas em,

$$\mathbf{m}_{u_1} = \int_0^L \rho_1 A_1 \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u dx \tag{4.59}$$

$$\mathbf{m}_{u_1 v} = \int_0^L \rho_1 S_1 \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_{v,x} dx \tag{4.60}$$

$$\mathbf{m}_{v u_1} = \int_0^L \rho_1 S_1 \mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_u dx \tag{4.61}$$

$$\mathbf{m}_{v v} = \int_0^L (\rho_1 A_1 \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v + \rho_1 I_1 \mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_{v,x}) dx \tag{4.62}$$

onde $\rho_1 I_1 \mathbf{N}_{v,x}^T \mathbf{N}_{v,x}$ é a inércia à rotação da seção. Se os eixos estiverem nos centroides, $\mathbf{m}_{u_1 v} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{m}_{v u_1} = \mathbf{0}$.

Utilizando da Equação 3.35, faz-se a mudança da coordenada x para coordenada ξ , sendo a derivada de ξ , igual a:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \quad (4.63)$$

Logo $N_{v,x}$ é dado por:

$$N_{v,x} = \frac{dN_v}{dx} = \frac{dN_v}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = N_{v,\xi} \frac{2}{L} \quad (4.64)$$

Portanto, obtêm-se a energia cinética para o material 1, como sendo:

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_{u_1}^T \mathbf{m}_{u_1} \dot{\mathbf{d}}_{u_1} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_{u_1}^T \mathbf{m}_{u_1v} \dot{\mathbf{d}}_v - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_v^T \mathbf{m}_{vu_1} \dot{\mathbf{d}}_{u_1} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_v^T \mathbf{m}_{vv} \dot{\mathbf{d}}_v \quad (4.65)$$

De forma análoga, para a energia cinética do material 2, E_{c_2} :

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_{u_2}^T \mathbf{m}_{u_2} \dot{\mathbf{d}}_{u_2} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_{u_2}^T \mathbf{m}_{u_2v} \dot{\mathbf{d}}_v - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_v^T \mathbf{m}_{vu_2} \dot{\mathbf{d}}_{u_2} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_v^T \mathbf{m}_{vv} \dot{\mathbf{d}}_v \quad (4.66)$$

Portanto, a Energia Cinética Total é dada por:

$$E_c = E_{c_1} + E_{c_2} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}} \quad (4.67)$$

Na Equação 4.67, $\dot{\mathbf{d}}$ é a derivada do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{d} do elemento em relação ao tempo e \mathbf{M} é a matriz de massa do elemento. O vetor de deslocamentos nodais é dado pela Equação 4.21, enquanto que a matriz \mathbf{M} é dada por:

$$\mathbf{M} = \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{u_1} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_{u_1v} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{u_2} & \mathbf{m}_{u_2v} \\ -\mathbf{m}_{vu_1} & \mathbf{m}_{vu_2} & \mathbf{m}_{vv} \end{bmatrix} dx \quad (4.68)$$

onde as matrizes de massa referentes aos deslocamento nodais foram definidos pelas Equações 4.59-4.62.

Mudando para a coordenada generalizada “ ξ ”, a Matriz de massa é dada por:

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{M}(\xi)] \frac{dx}{d\xi} d\xi \quad (4.69)$$

onde,

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{L}{2} \quad (4.70)$$

4.2.3 Matriz de Amortecimento Proporcional (Amortecimento de Rayleigh)

Para que o sistema amortecido gere equações desacopladas, é necessário que a matriz de amortecimento possua, assim como as matrizes de rigidez e de massa, a propriedade de ortogonalidade em relação aos modos de vibração. Para isso, já existe uma equação para determinar o amortecimento do tipo proporcional, dada por:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (4.71)$$

Considerando a matriz de amortecimento proporcional somente à matriz de massa:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} \quad (4.72)$$

Escrevendo a equação anterior na forma modal,

$$C_i = \alpha M_i \quad (4.73)$$

Como o amortecimento modal é:

$$C_i = 2\xi_i w_{0_i} M_i \quad (4.74)$$

onde w_{0_i} é a frequência natural.

Igualando as Equações 4.73 e 4.74, a taxa de amortecimento proporcional à matriz de massa é dada por:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2w_{0_i}} \quad (4.75)$$

Considerando agora a matriz de amortecimento proporcional à matriz de rigidez:

$$\mathbf{C} = \beta\mathbf{K} \quad (4.76)$$

Da forma modal,

$$C_i = \beta K_i \quad (4.77)$$

Igualando as Equações 4.74 e 4.77, a taxa de amortecimento proporcional à matriz de rigidez fica sendo:

$$\xi_i = \frac{\beta K_i}{2w_{0i}M_i} \quad (4.78)$$

A formulação para o amortecimento de Rayleigh propõe a combinação dos dois casos, obtendo a seguinte expressão para taxa de amortecimento modal:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2w_{0i}} + \frac{\beta w_{0i}}{2} \quad (4.79)$$

Conhecidas duas taxas de amortecimento (definidas experimentalmente), associadas a dois modos de vibração quaisquer especificados, relacionados a duas frequências naturais, pode-se calcular os valores dos parâmetros α e β .

Portanto, sejam ξ_i e ξ_j duas taxas de amortecimento associadas a duas frequências naturais w_{0i} e w_{0j} , utilizando da Equação 4.79, pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2w_{0i}} + \frac{\beta w_{0i}}{2} \quad (4.80)$$

e

$$\xi_j = \frac{\alpha}{2w_{0j}} + \frac{\beta w_{0j}}{2} \quad (4.81)$$

Obtêm-se um sistema de duas equações e duas incógnitas, podendo ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{w_{0i}} & w_{0i} \\ \frac{1}{w_{0j}} & w_{0j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

Resolvendo para α e β :

$$\mathbf{U}_{\varepsilon,2} = \begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\frac{7E_2A_2}{3L} & \frac{-8E_2A_2}{3L} & \frac{E_2A_2}{3L} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \frac{-8E_2A_2}{3L} & \frac{16E_2A_2}{3L} & \mathbf{0} \\
\frac{E_2A_2}{3L} & \frac{-8E_2A_2}{3L} & \frac{7E_2A_2}{3L} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{12E_2I_2}{L^3} & \frac{6E_2I_2}{L^2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{6E_2I_2}{L^2} & \frac{4E_2I_2}{L} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-12E_2I_2}{L^3} & \frac{-6E_2I_2}{L^2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{6E_2I_2}{L^2} & \frac{2E_2I_2}{L} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-12E_2I_2}{L^3} & \frac{-6E_2I_2}{L^2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{6E_2I_2}{L^2} & \frac{2E_2I_2}{L} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-12E_2I_2}{L^3} & \frac{-6E_2I_2}{L^2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{6E_2I_2}{L^2} & \frac{2E_2I_2}{L} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-12E_2I_2}{L^3} & \frac{-6E_2I_2}{L^2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{6E_2I_2}{L^2} & \frac{2E_2I_2}{L}
\end{bmatrix} \quad (4.81)$$

onde a energia total devido às deformações \mathbf{U}_{ε} , é dada pela Equação 4.10.

Substituindo as propriedades dos materiais das seções, a parcela da energia de deformação devido ao deslizamento \mathbf{U}_s , é dada por:

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix}
U_{s,1} & -U_{s,1} & U_{s,2} \\
-U_{s,1} & U_{s,1} & -U_{s,2} \\
(U_{s,2})^T & (-U_{s,2})^T & U_{s,3}
\end{bmatrix} \quad (4.82)$$

onde $\mathbf{U}_{s,1}$, $\mathbf{U}_{s,2}$ e $\mathbf{U}_{s,3}$ foram determinadas apenas para simplificação, pois a matriz \mathbf{U}_s é muito grande, sendo assim:

$$\mathbf{U}_{s,1} = \begin{bmatrix}
\frac{2FL}{15} & \frac{FL}{15} & \frac{-FL}{30} \\
\frac{FL}{15} & \frac{8FL}{15} & \frac{FL}{15} \\
\frac{-FL}{30} & \frac{FL}{15} & \frac{2FL}{15}
\end{bmatrix} \quad (4.83)$$

$$\mathbf{U}_{s,2} = \begin{bmatrix}
\frac{Fh}{10} & \frac{-7FhL}{60} & \frac{-Fh}{10} & \frac{FhL}{20} \\
\frac{4Fh}{5} & \frac{FhL}{15} & \frac{-4Fh}{5} & \frac{FhL}{15} \\
\frac{Fh}{10} & \frac{FhL}{20} & \frac{-Fh}{10} & \frac{-7FhL}{60}
\end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{U}_{s,3} = \begin{bmatrix} \frac{6Fh^2}{5L} & \frac{Fh^2}{10} & \frac{-6Fh^2}{5L} & \frac{Fh^2}{10} \\ \frac{Fh^2}{10} & \frac{2Fh^2L}{15} & \frac{-Fh^2}{10} & \frac{-Fh^2L}{30} \\ \frac{-6Fh^2}{5L} & \frac{-Fh^2}{10} & \frac{6Fh^2}{5L} & \frac{-Fh^2L}{30} \\ \frac{Fh^2}{10} & \frac{-Fh^2L}{30} & \frac{-Fh^2}{10} & \frac{2Fh^2L}{15} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Logo a Matriz de Rigidez do elemento é dada pela soma das parcelas ou seja, pela soma das Equações 4.80-4.82.

A matriz de massa é dada pela Equação 4.69, em que as suas parcelas de massas são dadas por:

$$\mathbf{m}_{u_1} = \begin{bmatrix} \frac{2\rho_1 A_1 L}{15} & \frac{\rho_1 A_1 L}{15} & \frac{-\rho_1 A_1 L}{30} \\ \frac{\rho_1 A_1 L}{15} & \frac{8\rho_1 A_1 L}{15} & \frac{\rho_1 A_1 L}{15} \\ \frac{-\rho_1 A_1 L}{30} & \frac{\rho_1 A_1 L}{15} & \frac{2\rho_1 A_1 L}{15} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{m}_{u_2} = \begin{bmatrix} \frac{2\rho_2 A_2 L}{15} & \frac{\rho_2 A_2 L}{15} & \frac{-\rho_2 A_2 L}{30} \\ \frac{\rho_2 A_2 L}{15} & \frac{8\rho_2 A_2 L}{15} & \frac{\rho_2 A_2 L}{15} \\ \frac{-\rho_2 A_2 L}{30} & \frac{\rho_2 A_2 L}{15} & \frac{2\rho_2 A_2 L}{15} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\mathbf{m}_{u_1 v} = \begin{bmatrix} \frac{-\rho_1 S_1}{10} & \frac{7\rho_1 S_1 L}{60} & \frac{\rho_1 S_1}{10} & \frac{-\rho_1 S_1 L}{20} \\ \frac{-4\rho_1 S_1}{5} & \frac{-\rho_1 S_1 L}{15} & \frac{4\rho_1 S_1}{5} & \frac{-\rho_1 S_1 L}{15} \\ \frac{-\rho_1 S_1}{10} & \frac{-\rho_1 S_1 L}{20} & \frac{\rho_1 S_1}{10} & \frac{7\rho_1 S_1 L}{60} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

$$\mathbf{m}_{u_2 v} = \begin{bmatrix} \frac{-\rho_2 S_2}{10} & \frac{7\rho_2 S_2 L}{60} & \frac{\rho_2 S_2}{10} & \frac{-\rho_2 S_2 L}{20} \\ \frac{-4\rho_2 S_2}{5} & \frac{-\rho_2 S_2 L}{15} & \frac{4\rho_2 S_2}{5} & \frac{-\rho_2 S_2 L}{15} \\ \frac{-\rho_2 S_2}{10} & \frac{-\rho_2 S_2 L}{20} & \frac{\rho_2 S_2}{10} & \frac{7\rho_2 S_2 L}{60} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$\mathbf{m}_{vu_1} = (\mathbf{m}_{u_1 v})^T \quad (4.90)$$

$$\mathbf{m}_{vu_2} = (\mathbf{m}_{u_2v})^T \quad (4.91)$$

$$\mathbf{m}_{vv} = \mathbf{m}_{vv1} + \mathbf{m}_{vv2} \quad (4.92)$$

onde,

$$\mathbf{m}_{vv1} = \begin{bmatrix} \frac{13\rho_1 A_1 L}{35} + \frac{6\rho_1 I_1}{5L} & \frac{11\rho_1 A_1 L^2}{210} + \frac{\rho_1 I_1}{10} & \frac{9\rho_1 A_1 L}{70} - \frac{6\rho_1 I_1}{5L} & \frac{-13\rho_1 A_1 L^2}{420} + \frac{\rho_1 I_1}{10} \\ \frac{11\rho_1 A_1 L^2}{210} + \frac{\rho_1 I_1}{10} & \frac{\rho_1 A_1 L^2}{105} + \frac{2\rho_1 I_1 L}{15} & \frac{13\rho_1 A_1 L^2}{420} - \frac{\rho_1 I_1}{10} & \frac{-\rho_1 A_1 L^2}{140} - \frac{\rho_1 I_1 L}{30} \\ \frac{9\rho_1 A_1 L}{70} - \frac{6\rho_1 I_1}{5L} & \frac{13\rho_1 A_1 L^2}{420} - \frac{\rho_1 I_1}{10} & \frac{13\rho_1 A_1 L}{35} + \frac{6\rho_1 I_1}{5L} & \frac{-11\rho_1 A_1 L^2}{210} - \frac{\rho_1 I_1}{10} \\ \frac{-13\rho_1 A_1 L^2}{420} + \frac{\rho_1 I_1}{10} & \frac{-\rho_1 A_1 L^2}{140} - \frac{\rho_1 I_1 L}{30} & \frac{-11\rho_1 A_1 L^2}{210} - \frac{\rho_1 I_1}{10} & \frac{\rho_1 A_1 L^2}{105} + \frac{2\rho_1 I_1 L}{15} \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

$$\mathbf{m}_{vv2} = \begin{bmatrix} \frac{13\rho_2 A_2 L}{35} + \frac{6\rho_2 I_2}{5L} & \frac{11\rho_2 A_2 L^2}{210} + \frac{\rho_2 I_2}{10} & \frac{9\rho_2 A_2 L}{70} - \frac{6\rho_2 I_2}{5L} & \frac{-13\rho_2 A_2 L^2}{420} + \frac{\rho_2 I_2}{10} \\ \frac{11\rho_2 A_2 L^2}{210} + \frac{\rho_2 I_2}{10} & \frac{\rho_2 A_2 L^2}{105} + \frac{2\rho_2 I_2 L}{15} & \frac{13\rho_2 A_2 L^2}{420} - \frac{\rho_2 I_2}{10} & \frac{-\rho_2 A_2 L^2}{140} - \frac{\rho_2 I_2 L}{30} \\ \frac{9\rho_2 A_2 L}{70} - \frac{6\rho_2 I_2}{5L} & \frac{13\rho_2 A_2 L^2}{420} - \frac{\rho_2 I_2}{10} & \frac{13\rho_2 A_2 L}{35} + \frac{6\rho_2 I_2}{5L} & \frac{-11\rho_2 A_2 L^2}{210} - \frac{\rho_2 I_2}{10} \\ \frac{-13\rho_2 A_2 L^2}{420} + \frac{\rho_2 I_2}{10} & \frac{-\rho_2 A_2 L^2}{140} - \frac{\rho_2 I_2 L}{30} & \frac{-11\rho_2 A_2 L^2}{210} - \frac{\rho_2 I_2}{10} & \frac{\rho_2 A_2 L^2}{105} + \frac{2\rho_2 I_2 L}{15} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Substituindo as Equações 4.86-4.94 na Equação 4.69, tem-se a Matriz de Massa do Elemento “SLIP10DOF”.

A Matriz de Amortecimento Proporcional do Elemento “SLIP10DOF” é dada pela Equação 4.71, onde se tem que todos os termos das Equações 4.80-4.82 (Matriz de Rigidez do elemento) são multiplicados pelo parâmetro β e todos os termos das Equações 4.86-4.94 são multiplicados pelo parâmetro α .

Portanto as matrizes, \mathbf{K} , \mathbf{M} e \mathbf{C} , desenvolvidas neste capítulo, serão utilizadas no capítulo seguinte, para resolver problemas de análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial, como forma de validar o elemento finito implementado.

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentados três exemplos de análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial. Os exemplos foram analisados como forma de validar o elemento finito com deslizamento incorporado apresentado, baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, denominado neste trabalho SLIP10DOF.

Os resultados obtidos para o elemento finito apresentado são comparados aos resultados analíticos ou numéricos encontrados por outros autores.

O elemento finito, com deslizamento incorporado implementado, já apresentou resultados satisfatórios em trabalhos anteriores da linha de pesquisa de Mecânica Computacional do Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil (PROPEC), da Escola de Minas, porém as análises anteriores utilizando deste elemento foram para exemplos estáticos de vigas mistas, sendo que este trabalho, o SLIP10DOF será utilizado para uma análise dinâmica.

O primeiro exemplo, retirado dos trabalhos de Xu e Wu (2007) e Huang e Su (2008), é apresentado com o intuito de determinar dois parâmetros muito importantes para a análise dinâmica, as frequências naturais e os modos de vibração da viga mista com interação parcial, observando a influência da rigidez da conexão nestes parâmetros.

O segundo exemplo é uma extensão do primeiro, em que será aplicado um carregamento distribuído de 1KN/m ao longo de todo comprimento da viga, para diferentes tempos de aplicação do carregamento, avaliando assim os métodos de integração direta (Wilson-Theta e Newmark), para os diferentes números de passos de tempo e para as diferentes condições de contorno. Nas análises deste exemplo são utilizados amortecimento de 1%.

O terceiro exemplo trata de uma viga mista, submetida a uma carga que se move ao longo do tempo pelo comprimento da viga. Para este exemplo, são utilizados os métodos de Newmark e Duhamel via superposição modal.

5.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.2.1 Determinação das frequências naturais e modos de vibração

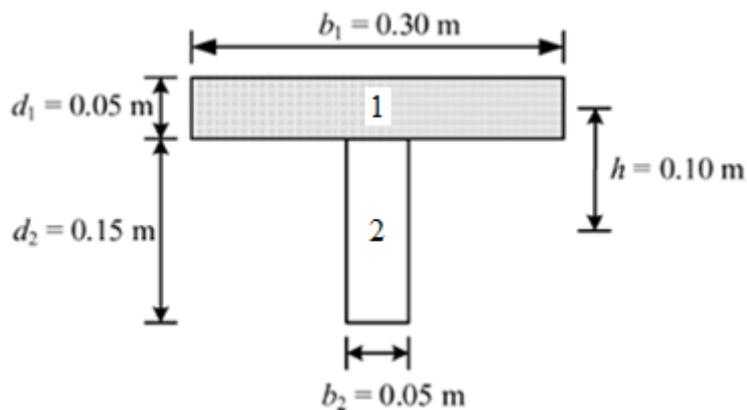


Figura 5. 1 Viga mista.

O exemplo a ser resolvido é de uma viga mista, de seção transversal mostrada na Figura 5.1, para qual as propriedades da seção transversal e dos materiais são as seguintes: $L=4\text{m}$, $h=0,1\text{m}$, $E_1=12\text{GPa}$, $E_2=8\text{GPa}$, $A_1=0,015\text{m}^2$, $A_2=0,0075\text{m}^2$, $I_1=3,125 \times 10^{-6}\text{m}^4$, $I_2=1,40625 \times 10^{-4}\text{m}^4$, $m_1=36\text{kg/m}$ e $m_2=3,75\text{kg/m}$.

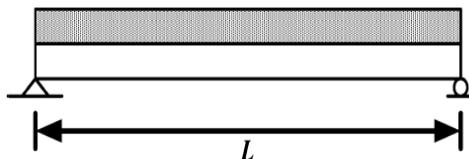
A análise dos parâmetros será feita para diferentes rigidezes da conexão, K_s , com o intuito de se verificar a influência da diminuição da rigidez de conexão na análise dos modos de vibração. Portanto, será variada para cada análise, assumindo os valores de: 50MPa, 1MPa; 0,1MPa e 0,01MPa.

Xu e Wu (2007) trataram o mesmo exemplo para diferentes condições de contorno. Estes autores desenvolveram e resolveram as equações diferenciais do problema de forma analítica (exata). Suas análises seguiram quatro hipóteses, sendo que na primeira consideravam a deformação devido ao cisalhamento e a rotação a inércia. A segunda hipótese considerava apenas a deformação devido ao cisalhamento, a terceira apenas a rotação a inércia e, na última análise, nenhum dos dois fatores foi considerado.

Devido às hipóteses adotadas na formulação do elemento finito, no presente trabalho não são consideradas as deformações por cisalhamento, mas a inércia à rotação será considerada. Assim como em Xu e Wu (2007) serão feitas análises para as quatro condições de contorno: simplesmente apoiada, engastada-apoiada, engastada-livre e bi engastada.

Considerando $K_s=50\text{MPa}$, as frequências naturais, para cada condição de apoio, são determinadas a seguir e comparadas com os resultados analíticos obtidos por Xu e Wu (2007). Os resultados serão obtidos para uma malha de 15 elementos, pois esta quantidade de elementos finitos se mostrou suficiente, sendo que para menos elementos alguns valores divergiam consideravelmente dos valores exatos.

5.2.1.1 Viga simplesmente apoiada



Considerando a viga simplesmente apoiada, Figura 5.2, as frequências naturais obtidas são dadas na Tabela 5.1:

Ordem	f_n (Xu e Wu) [Hz]	f_n (SLIP10DOF) [Hz]	Erro (%)
1	10,3202	10,3035	0,1618
2	33,5087	33,4525	0,1677
3	66,4042	66,2852	0,1792
-	-	92,2726	-
4	109,9384	110,1022	0,1490
5	164,7303	164,8619	0,0799
6	231,0143	231,3543	0,1472
7	308,8379	309,6741	0,2708
-	-	317,8041	-
8	398,1566	400,0241	0,4690
9	498,8747	502,6015	0,7470
-	-	563,1011	-
-	-	592,9015	-
10	610,8634	617,7325	1,1245

Tabela 5. 1 Frequências naturais para viga simplesmente apoiada.

Percebe-se uma boa aproximação com os valores encontrados por Xu e Wu (2007), mostrando que o elemento finito de dez graus de liberdade, implementado para análise dinâmica, tem boa precisão, pois os valores de Xu e Wu (2007) são exatos (analíticos), o que mostra ainda mais a eficiência do SLIP10DOF.

Neste trabalho, foram determinadas também frequências que correspondem a deslocamentos predominantemente axiais, implicando assim nos modos de vibração axiais da viga. Os valores das frequências axiais estão em destaque na Tabela 5.1, valores estes não determinados por Xu e Wu (2007) em suas análises, uma vez que estes autores só consideraram as vibrações transversais da viga. Percebe-se, que para uma viga simplesmente apoiada, o 4º modo de vibração é um modo axial, como mostrado no gráfico a seguir, onde são mostrados os quatro modos de vibração principais. O modo de vibração axial é mostrado em destaque.

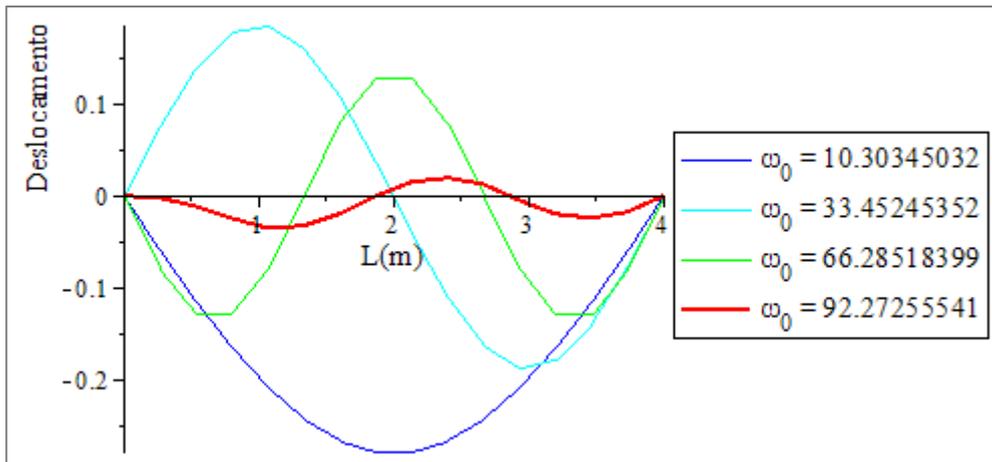


Figura 5. 2 Deslocamentos verticais v (4 primeiros modos de vibração).

O deslizamento relativo s e os deslocamentos axiais (u_1 e u_2), são mostrados a seguir para os quatro primeiros modos de vibração, apenas para a rigidez da conexão de 50MPa.

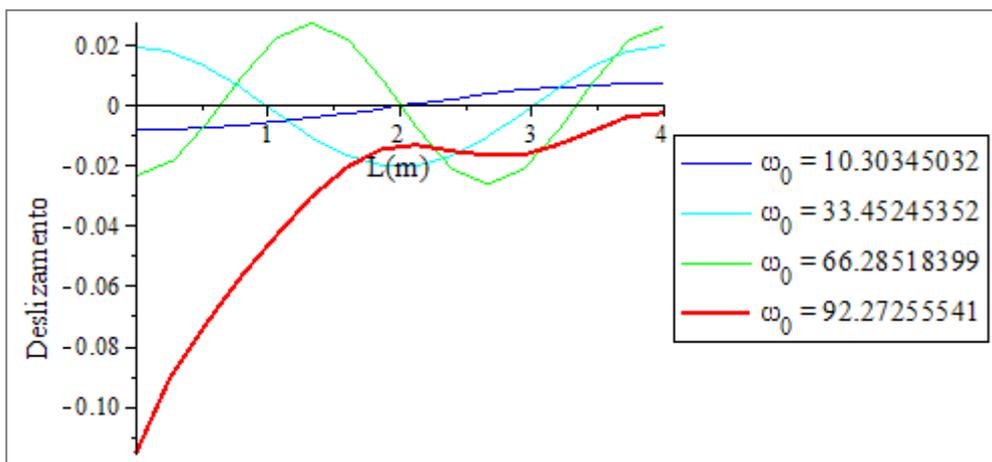


Figura 5. 3 Deslizamento s (4 primeiros modos de vibração).

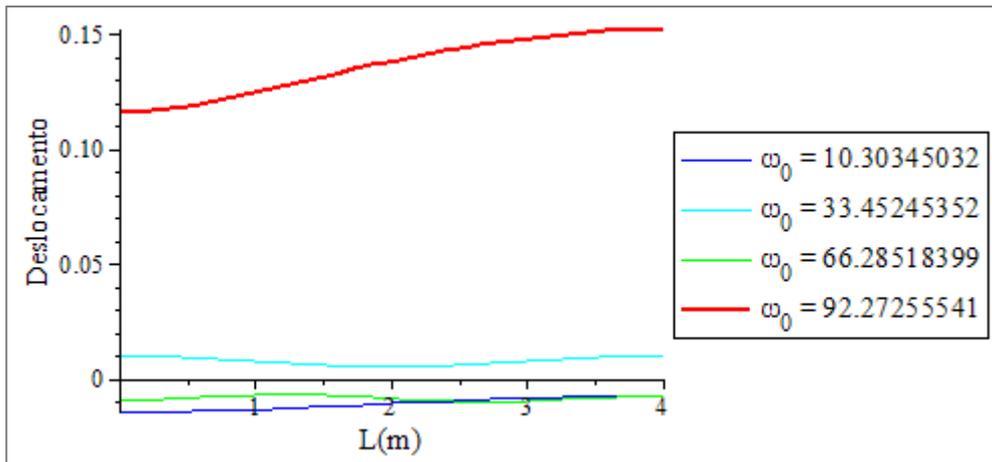


Figura 5. 4 Deslocamentos axiais u_1 (4 primeiros modos de vibração).

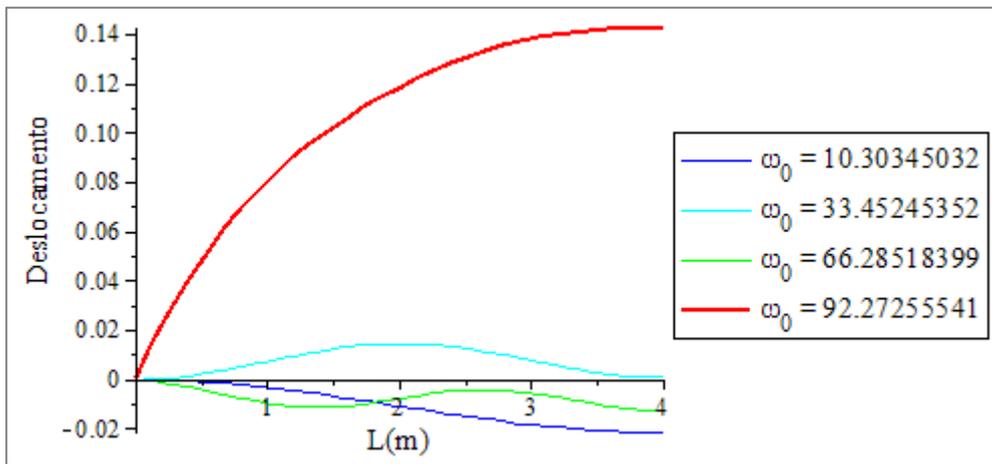


Figura 5. 5 Deslocamentos axiais u_2 (4 primeiros modos de vibração).

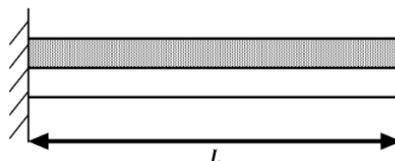
Com o intuito de avaliar a influência da rigidez da conexão nos parâmetros dinâmicos (frequências naturais e modos de vibração), será realizada uma variação nos valores da rigidez da conexão, como mostrado na Tabela 5.2:

Ordem	f_n (SLIP10DOF) [Hz]	f_n (SLIP10DOF) [Hz]	f_n (SLIP10DOF) [Hz]	f_n (SLIP10DOF) [Hz]
	50MPa	1MPa	0,1MPa	0,01MPa
1	10,3035	6,3367	6,0624	2,7087
2	33,4525	24,4315	8,5309	6,0333
3	66,2852	25,9699	24,1436	24,1143
4	92,2726	54,5420	54,2513	54,2221
5	110,1022	96,6460	96,3547	96,3254
6	164,8619	150,7205	150,4292	150,4000
7	231,3543	216,7654	212,4280	211,4024
8	309,6741	222,5015	216,4745	216,4454
8	317,8041	286,8255	285,6492	285,5334
10	400,0241	294,8245	294,5343	294,5053
11	502,6015	385,0064	384,7172	384,6883
12	563,1011	487,5040	487,2160	487,1872
13	592,9015	571,6813	571,1165	571,0588
14	617,7325	602,6086	602,3222	602,2935

Tabela 5. 2 Frequências naturais para viga simplesmente apoiadas devido à rigidez da conexão.

Percebe-se que com a diminuição da rigidez da conexão, os modos de vibração axiais tornam-se mais preponderantes, chegando a aparecer como o 1º modo de vibração quando o valor da rigidez da conexão é da ordem de 0,01MPa.

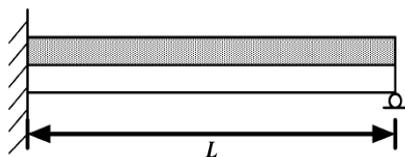
5.2.1.2 Viga engastada-livre ($K_s=50\text{MPa}$)



Ordem	f_n (Xu e Wu) [Hz]	f_n (SLIP10DOF) [Hz]	Erro(%)
1	3,9974	3,9969	0,0125
2	20,1785	20,1677	0,0535
3	49,1164	49,0966	0,0403
4	87,4384	87,4096	0,0329
5	136,7388	136,7335	0,0039
-	-	152,8577	-
6	197,2268	197,3615	0,0683
7	269,2300	269,6698	0,1634
8	352,6873	353,7619	0,3047
9	447,5887	446,7909	0,1782
-	-	450,5276	-
10	553,7899	555,1977	0,2542

Tabela 5. 3 Frequências naturais para viga engastada-livre.

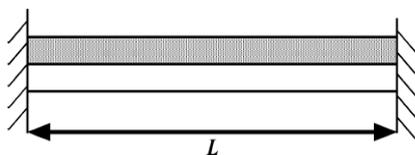
5.2.1.3 Viga engastada-apoiada ($K_s=50\text{MPa}$)



Ordem	f_n (Xu e Wu) [Hz]	f_n (SLIP10DOF) [Hz]	Erro(%)
1	14,2527	14,2509	0,0126
2	39,5196	39,5152	0,0111
3	75,0998	75,1009	0,0015
4	121,5804	121,6145	0,0280
-	-	152,8305	-
5	179,3902	179,5341	0,0802
6	248,6975	249,1230	0,1711
7	329,5263	330,5684	0,3162
8	421,8229	424,0643	0,5314
-	-	447,3874	-
9	525,4876	529,8648	0,8330
-	-	565,3844	-
10	640,3893	648,2938	1,2343

Tabela 5. 4 Frequências naturais para viga engastada-apoiada.

5.2.1.4 Viga bi engastada ($K_s=50\text{MPa}$)



Ordem	f_n (Xu e Wu) [Hz]	f_n (SLIP10DOF) [Hz]	Erro(%)
1	18,8029	18,8021	0,0043
2	46,0966	46,0923	0,0093
3	84,5605	84,5667	0,0073
4	134,0000	134,0508	0,0379
5	194,8408	195,0351	0,0997
6	267,1620	267,7014	0,2019
-	-	302,1264	-
7	350,9908	352,2724	0,3651
8	446,2562	448,9368	0,6007
9	552,8609	557,9705	0,9242
-	-	590,1333	-
-	-	668,4102	-
10	670,6677	679,7856	1,3595

Tabela 5. 5 Frequências naturais para viga bi apoiada.

Da mesma forma que para viga simplesmente apoiada, para as demais condições de contorno avaliadas (engastada-livre, engastada-apoiada e bi engastada), percebe-se a proximidade dos valores encontrados utilizando a formulação do presente trabalho com os valores exatos encontrados por Xu e Wu (2007), mostrando a eficiência do elemento SLIP10DOF, para a viga mista com interação parcial sujeita às diversas condições de contorno.

Os valores em destaque representam as frequências naturais axiais, que se tornam mais preponderantes na medida em que se diminui a rigidez da conexão, assim como mostrado para o caso da viga simplesmente apoiada (Tabela 5.2), sendo, portanto, a rigidez da conexão um fator importante a ser considerado na análise das frequências naturais e dos modos de vibração.

5.2.2 Viga submetida a pulso

Neste exemplo, será analisado o problema de uma viga mista submetida a um pulso representado por uma carga uniformemente distribuída que atua por um determinado período e depois é retirada. As análises serão realizadas para o pulso de carga de 1s, obtendo os históricos de deslocamentos provocados pela aplicação do pulso e os respectivos deslocamentos máximos.

Considerando uma carga distribuída, q_0 , de 1KN/m aplicada na viga do exemplo anterior (Exemplo 5.2.1), será analisado a viga simplesmente apoiada.

5.2.2.1 Viga Simplesmente Apoiada

Segundo Xu e Wu, a solução analítica, para o deslocamento máximo, de uma viga simplesmente apoiada é igual a 7,5599mm.

Considerando a taxa de amortecimento $\xi=0,01$ e as duas primeiras frequências naturais, 10,3035Hz (64,74rad/s) e 33,4525Hz (210,19rad/s), temos que as constantes de proporcionalidade da matriz de amortecimento são dadas pela Tabela 5.6:

ξ	α	β
0,01	0,9898869641	0,000072746568789

Tabela 5. 6 Constantes de proporcionalidade α e β

A solução do problema para um pulso de 1s será encontrada através dos Métodos diretos de Newmark e Wilson-Theta, variando a quantidade de passos de tempo. A duração de cada passo de tempo será igual a 0,001s, onde, para o tempo de análise do efeito da aplicação do carregamento de 5s, são utilizados 5000 passos de tempo. A malha utilizada é de 4 elementos finitos, sendo esta quantidade de elementos suficientes para se obter bons resultados.

a) Para $t_1=1s$

Para o tempo de aplicação do carregamento de 1s, considerando uma carga de 1KN/m, são apresentados nas Figuras 5.10, 5.11 e 5.12, respectivamente, os históricos dos deslocamentos para o tempo de análise de 5s (Método de Newmark), de 5s (Método Wilson-Theta) e de 1s (Método de Newmark). Para o Método de Newmark é utilizado o parâmetro α igual a 0,25 e β de 0,5 e para o Método Wilson-Theta o parâmetro θ utilizado é de 1,4.

O histórico de deslocamentos para 5s, sem amortecimento e com amortecimento é dado pelas Figuras 5.10 e 5.11, respectivamente para os métodos de Newmark e Wilson-Theta.

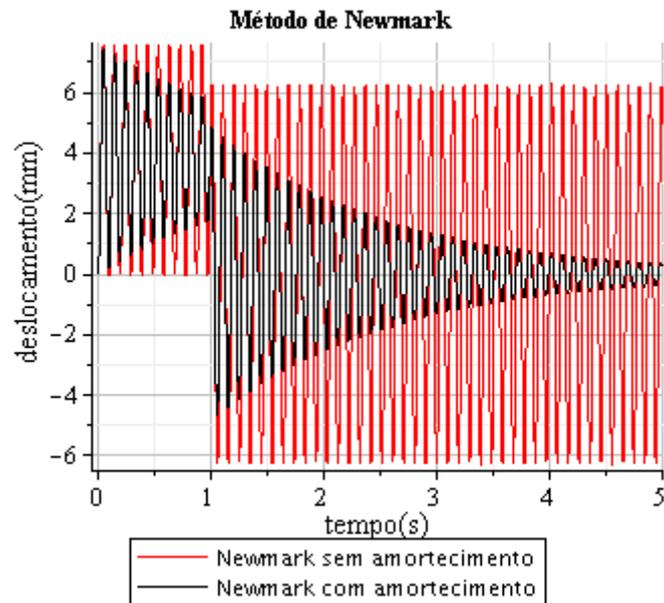


Figura 5. 6 Histórico de deslocamentos de 5s para um pulso de 1s – Método de Newmark

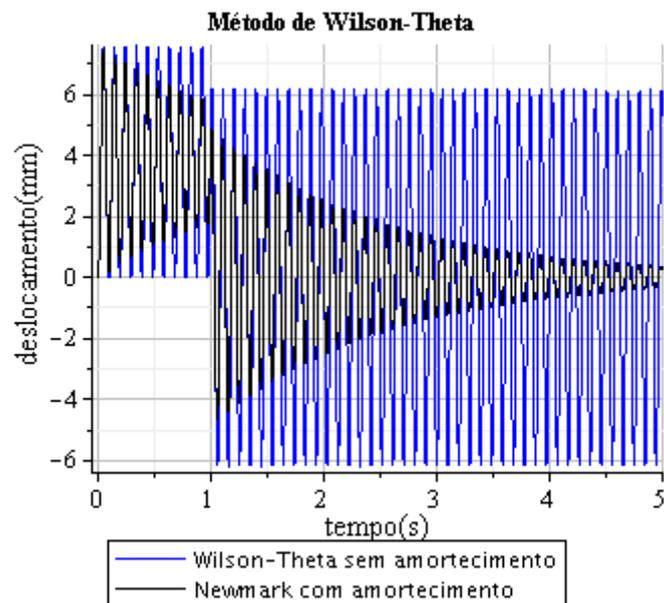


Figura 5. 7 Histórico de deslocamentos de 5s para um pulso de 1s – Método Wilson-Theta

O tempo de análise de 5s foi utilizado para que se perceba o efeito do amortecimento no sistema ao longo do tempo, visto que para tempos menores não se percebe tão nitidamente este efeito. Os valores dos deslocamentos para o sistema com amortecimento mostraram-se coerentes, apesar de não poderem ser comparados com

resultados obtidos no trabalho de Xu e Wu (2007), pois este não tratou, em seu trabalho, de sistemas amortecidos.

Como para 5s os resultados obtidos pelo elemento SLIP10DOF (através dos métodos de Newmark e Wilson-Theta) são muito próximos, para analisar o efeito da aplicação da carga durante um tempo igual ao tempo do pulso é apresentado apenas os resultados obtidos apenas pelo método de Newmark, pois ambos os métodos ofereceram resultados semelhantes.

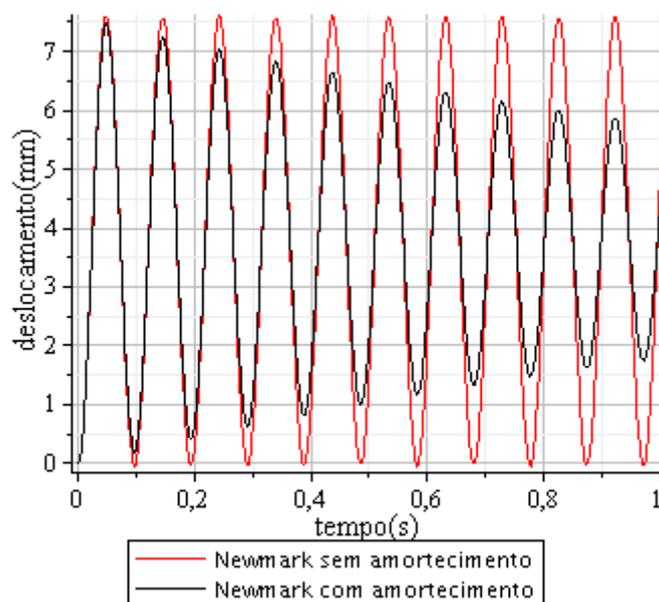


Figura 5. 8 Histórico de deslocamentos de 1s para um pulso de 1s

Na Figura 5.12, percebe-se que o maior deslocamento (com e sem amortecimento) já ocorre durante o pulso de 1s.

As Tabelas 5.7 e 5.8 mostram a comparação dos valores dos deslocamentos máximos exatos encontrados por Xu e Wu (2007) e pelo elemento finito desenvolvido neste trabalho (SLIP10DOF) para os métodos de Newmark e Wilson-Theta respectivamente. Os valores não consideram o amortecimento.

L (m)	$v_{m\acute{a}x}$ (Xu e Wu)	$v_{m\acute{a}x}$ (SLIP10DOF) Newmark	Erro (%)
L/2 (2m)	7,5599mm	7,6177mm	0,76

Tabela 5. 7 Deslocamento máximo para o Método de Newmark

L (m)	$v_{m\acute{a}x}$ (Xu e Wu)	$v_{m\acute{a}x}$ (SLIP10DOF) Wilson-Theta	Erro (%)
L/2 (2m)	7,5599mm	7,6043mm	0,58

Tabela 5. 8 Deslocamento máximo para o Método de Newmark

onde L é o comprimento da viga, igual a 4m.

Percebe-se que o elemento SLIP10DOF, utilizado através dos métodos de Newmark e Wilson-Theta, oferece resultados bem próximos dos resultados analíticos encontrados por Xu e Wu (2007), para o sistema sem amortecimento.

O deslocamento máximo, considerando a taxa de amortecimento de 1%, é de 7,4021 mm para o método de Newmark e 7,4032 mm para o método Wilson-Theta, o que mostra que o elemento SLIP10DOF oferece bons resultados, quando comparados os resultados obtidos pelos dois métodos utilizados, que são muito próximos.

5.2.3 Viga mista submetida à carga móvel

O terceiro exemplo trata de uma viga mista submetida à carga móvel, retirado de Huang e Su (2008), mostrado na Figura 5.16, onde a carga p_0 de 100kN se desloca pelo comprimento L da viga, a uma velocidade v_0 de 16,67m/s ao longo do tempo (0,9s), como mostrado na Figura 5.17.

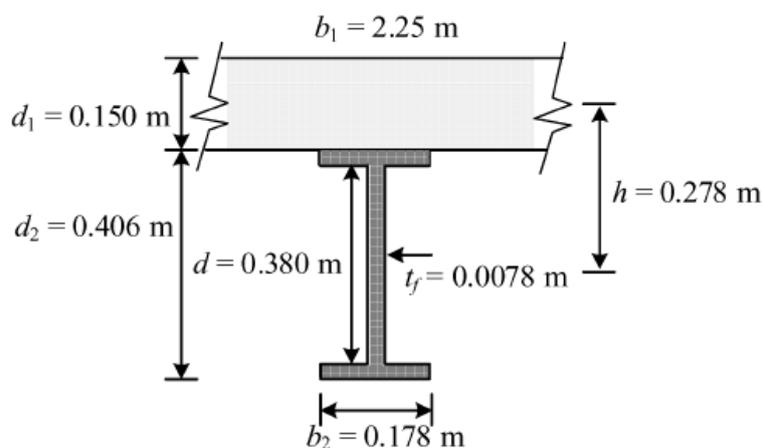


Figura 5. 9 Viga mista – Exemplo 5.2.3.

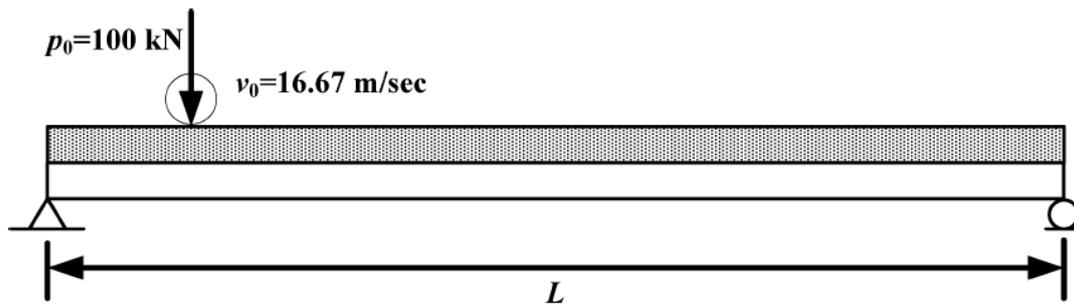


Figura 5. 10 Carga móvel sobre a viga mista.

As propriedades da seção transversal e dos materiais são as seguintes: $L=15\text{m}$, $h=0,278\text{ m}$, $E_1=13,55\text{ GPa}$, $E_2=200\text{ GPa}$, $A_1=0,338\text{ m}^2$, $A_2=0,00763\text{ m}^2$, $I_1=6,328\times 10^{-4}\text{ m}^4$, $I_2=2,15\times 10^{-4}\text{ m}^4$, $m_1=810\text{ kg/m}$ e $m_2=60,65\text{ kg/m}$. O módulo de rigidez ao cisalhamento da interface K_s é de 100MPa .

Huang e Su (2008) apresentaram, para este exemplo, um histórico de deslocamentos contendo a solução analítica e numérica para a interação parcial e total, dado pela Figura 5.18.

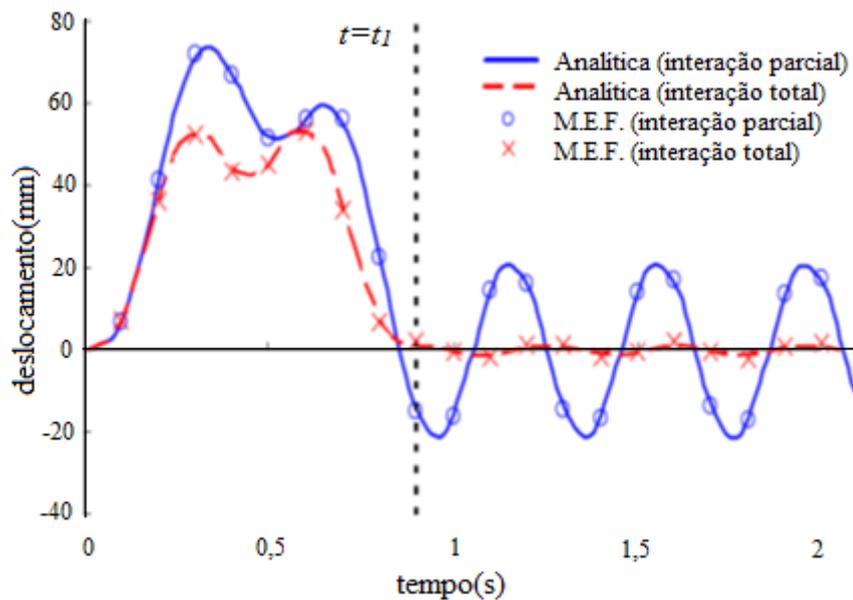


Figura 5. 11 Histórico de deslocamentos adaptado de Huang e Su (2008).

O deslocamento máximo determinado por Hung e Su (2008), sem considerar o amortecimento, é de $73,79\text{mm}$.

Neste trabalho será feita a análise de problema apenas para a interação parcial, sendo apresentado um histórico de deslocamentos contendo os métodos de Newmak e de Duhamel, ambos considerando a superposição modal.

A frequência natural fundamental dada por Huang e Su (2008), para este exemplo, é igual a 15,62Hz, sendo que neste trabalho, utilizando o SLIPE10DOF, para 6 elementos, obteve-se uma frequência de 15,61Hz, bem próxima do valor de Huang e Su.

Na Figura 5.18, o histórico de deslocamento é mostrado para um tempo de 2s; dessa forma, para este trabalho, utilizando o SLIP10DOF, será apresentado na Figura 5.19 o histórico de deslocamentos para 100 passos de tempo de 0,02s, para os métodos de Newmark e Duhamel, ambos sem considerar o amortecimento, assim como Huang e Su (2008). Diferentemente do exemplo anterior, o método de Newmark neste exemplo será analisado com superposição modal. Para a solução do problema será utilizada uma malha de 6 elementos.

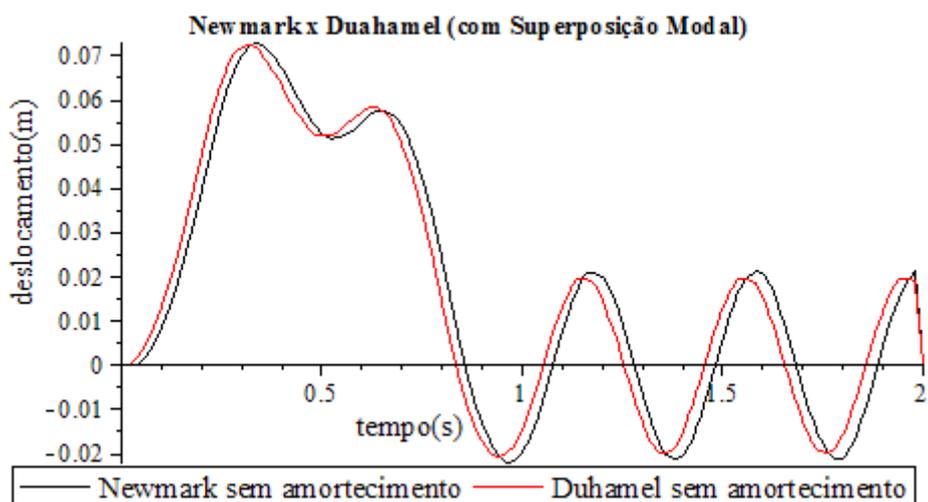


Figura 5. 12 Histórico de deslocamentos de 2s

O histórico de deslocamentos encontrado com a utilização do SLIP10DOF, contidos no gráfico da Figura 5.19, se mostra bem próximo dos valores encontrados por Huang e Su (2008), mostrados na Figura 5.18.

A seguir, nas Tabelas 5.10 e 5.11 são apresentados os deslocamentos máximos para os métodos de Newmark e Duhamel via superposição modal.

L	$v_{m\acute{a}x}$ (Huang e Su)	$v_{m\acute{a}x}$ (SLIP10DOF) Newmark	Erro (%)
L/2 (7,5 m)	73,79mm	72,90mm	1,21

Tabela 5. 9 Deslocamento máximo – Método de Newmak via superposição modal

L	$v_{m\acute{a}x}$ (Huang e Su)	$v_{m\acute{a}x}$ (SLIP10DOF) Duhamel	Erro (%)
L/2 (7,5 m)	73,79mm	72,40mm	1,88

Tabela 5. 10 Deslocamento máximo – Método de Duhamel

Os valores dos deslocamentos máximos encontrados, tanto pelo método de Duhamel, quanto para o método de Newmark, se mostraram bem próximos do valor encontrado por Huang e Su.

Com a intenção de mostrar o efeito do amortecimento será apresentado nas figuras a seguir, os históricos de deslocamentos para os métodos de Newmark e Duhamel (considerando superposição modal), para um sistema amortecido, ambos os métodos considerando a taxa de amortecimento de 1%.

Assim como para o Exemplo 5.2.2, a matriz de amortecimento é proporcional, então, considerando as duas frequências naturais iniciais, de 2,4843Hz (15,61rad/s) e 8,5104Hz (53,47rad/s), as constantes de proporcionalidade α e β , são dadas pela Tabela 5.11:

ξ	α	B
0,01	0,2416062278	0,0002896491070

Tabela 5. 11 Constantes de proporcionalidade α e β

Dadas as constantes de proporcionalidade da matriz de amortecimento, o histórico de deslocamentos para o sistema amortecido é dado pelas Figuras 5.20 e 5.21. Para o sistema amortecido será considerado 1000 passos de tempo de 0,02s, para que se obtenha o histórico ao longo do tempo de 20s, com o intuito de mostrar o efeito do amortecimento de 1% no sistema.

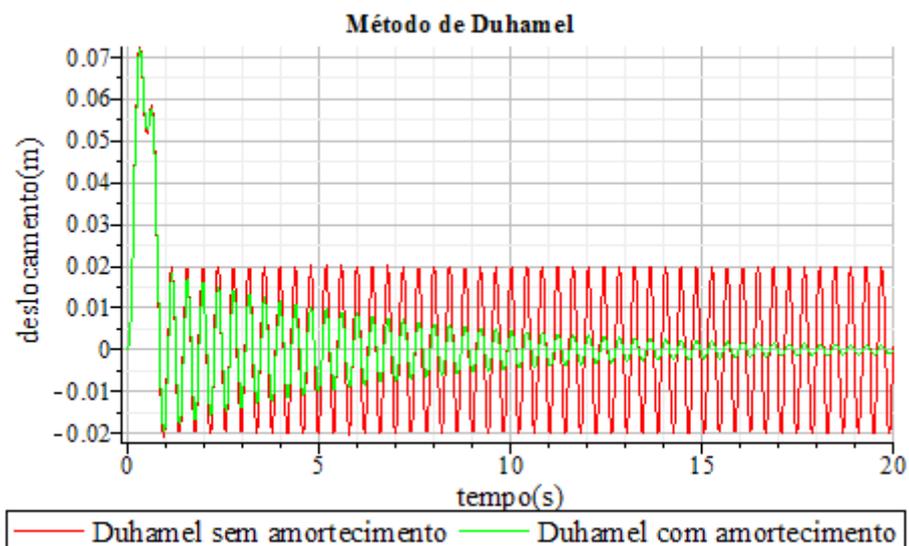


Figura 5. 13 Histórico de deslocamentos para sistema amortecido – Método de Duhamel

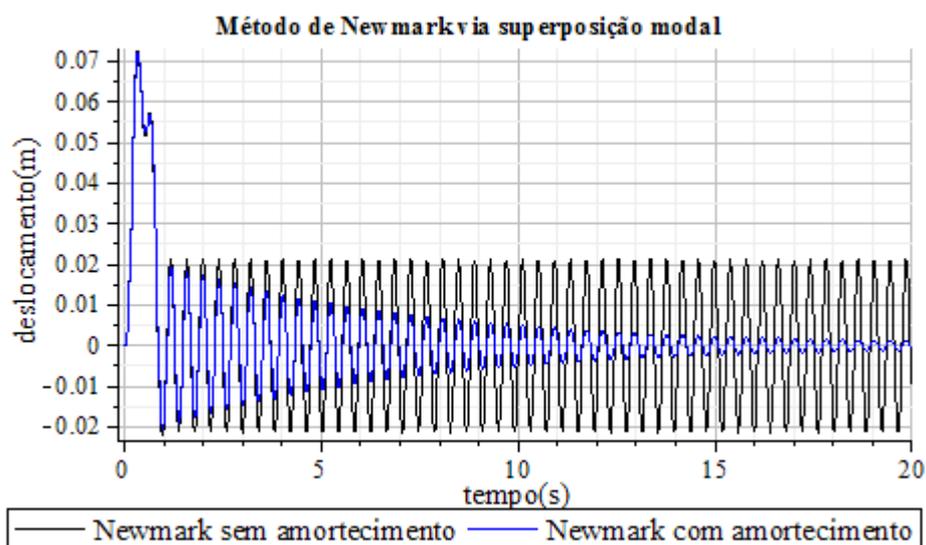


Figura 5. 14 Histórico de deslocamentos para sistema amortecido – Método de Newmark via superposição modal

Como visto nas Figuras 5.20 e 5.21, ambos os métodos ofereceram resultados muito próximos para o sistema amortecido, mostrando a eficiência do SLIP10DOF para os dois métodos de superposição modal.

Durante o período de aplicação de carga, o amortecimento praticamente não tem influência nos resultados, como era de se esperar, mas ao longo do tempo, após terminar a aplicação do carregamento móvel (tempo de 0,9s), o efeito do amortecimento é mais perceptível.

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 CONCLUSÕES

O elemento implementado para análise dinâmica, foi utilizado através dos métodos de integração direta, Wilson-Theta e Newmark, mostrando a eficiência do elemento SLIP10DOF, pois forneceu resultados muito próximos de resultados encontrados por outros autores, para métodos numéricos ou mesmo métodos analíticos.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A análise dinâmica de vigas mistas é muito importante, visto que a maioria das cargas as quais uma estrutura está submetida é dinâmica. Como foi visto no Capítulo 2 deste trabalho, percebe-se que há uma escassez de trabalhos para este tipo de sistema, ficando para trabalhos futuros algumas sugestões que possibilite o aumento do número de trabalhos nessa linha.

Uma sugestão para trabalhos futuros é implementar outras formulações referentes à não-linearidade (física e geométrica) para o caso da análise dinâmica, já que este elemento, uma vez que foi utilizado para análise não-linear estática.

Outra sugestão é com relação a estudar melhor a rigidez da conexão, onde sugere-se que, além de avaliar a sua influência nas frequências naturais e nos modos de

vibração, avalie-se também outros parâmetros dinâmicos importantes, tais como os históricos de velocidades e acelerações.

Sugere-se também que sejam analisados outros tipos de carregamentos, de forma a abranger um leque maior de possibilidades de aplicação prática.

No presente trabalho foram apresentados resultados para os métodos de Newmark e Duhamel, via superposição modal, podendo ser apresentados em trabalhos futuros análises através de outros métodos, como Wilson-Theta, por exemplo, que foi apresentada para a forma direta de integração. Além de outros métodos, via superposição modal, podem ser apresentados em trabalhos futuros análises envolvendo outros métodos diretos, como por exemplo o método de Runge-Kutta.

Foram analisadas neste trabalho os sistemas considerando o amortecimento de 1%, então sugere-se que seja variada a taxa de amortecimento e apresentado históricos de deslocamentos, velocidades e acelerações para diferentes taxas de amortecimento, vendo a influência de sua variação nestes parâmetros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT. (2008). NBR - 8800: Projeto de Revisão. Projeto e Execução de Estruturas de Aço e Estruturas Mistas Aço-Concreto em Edifícios. Rio de Janeiro, RJ: ABNT.
- Ayoub, A., & Filippou, F. (2002). Mixed formulation of nonlinear steel–concrete composite beam element. *Journal Structural Engineering*, 371-81.
- Bathe, K.-J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Berczynski, S., & Wróblewski, T. (2005). Vibration of Steel-Concrete Composite Beams Using the Timoshenko Beam Model. *Journal of Vibration and Control*, 829-48.
- Biscontin, G., Morassi, A., & Wendel, P. (2000). Vibrations of Steel-Concrete Composite Beams. *Journal of Vibration and Control*, 671-714.
- Caldas, R. B. (2004). *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço Concreto*. Ouro Preto, MG: Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP.
- Dall'Asta, A., & Zona, A. (2002). Non-linear Analysis of Composite Beams by a Displacement Approach. *Computers and Structures*, 2217-28.
- Dall'Asta, A., & Zona, A. (2004a). Slip Locking in Finite Elements for Composite Beams with Deformable Shear Connection. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1907-30.
- Fabbrocino, G., Manfredi, G., & Gosenza, E. (1999). Non-Linear Analysis of Composite Beams under Positive Bending. *Computers and Structures*, 77-89.
- Faella, C., Martinelli, E., & Nigro, E. (2002). Steel and Concrete Composite Beam with Flexible Shear Connection: “Exact” Analytical Expression of the Stiffness Matrix and Applications. *Computer & Structures*, 1001-09.
- Fang, L. X., Chan, S. L., & Wong, Y. L. (2000). Numerical Analysis of Composite Frames with Partial Shear-Stud Interaction by One Element per Member. *Engineering Structures*, 22, 1285-1300.
- Girhammar, U. A., & Gopu, V. K. (1993). Composite Beam-Columns with Interlayer Slip Exact Analysis. *Journal Structural Engineering*, 1265–82.
- Girhammar, U. A., & Pan, D. H. (1993). Dynamic Analysis of Composite Members with Interlayer Slip. *International Journal of Solids and Structures*, 797-823.

- Girhammar, U. A., Pan, D. H., & Gustafsson, A. (2009). Exact Dynamic Analysis of Composite Beams with Partial Interaction. *International Journal of Mechanical Sciences*, 565-82.
- Goodman, J. (1967). *Layered Wood Systems with Interlayer Slip*. Berkeley, CA: Tese PhD, Universidade da Califórnia.
- Goodman, J. R., & Popov, E. P. (1968). Layered Beam Systems with Interlayer Slip. *American Society of Civil Engineers. Structural Division Journal*, 2535-47.
- Hist, M. J., & Yeo, M. F. (1980). The Analysis of Composite Beams Using Standard Finite Element Programs. *Compos. Struct.*, 233-37.
- Huang, C., & Su, Y. (2008). Dynamic Characteristics of Partial Composite Beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 665-85.
- Johnson, R., & Molenstra, I. N. (1991). Partial Shear Connection in Composite Beams for Buildings. *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 679-704.
- Liang, Q. Q., Uy, B., Bradford, M. A., & Ronagh, H. R. (2004). Ultimate Strength of Continuous Composite Beams in Combined Bending and Shear. *Journal of Constructional Steel Research*, 1109-28.
- Lima, S. S., & Santos, S. H. (2008). *Análise Dinâmica das Estruturas*. Rio de Janeiro, RJ: Ciência Moderna.
- Muniz, C. F. (2005). *Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos*. Ouro Preto: Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP.
- Newmark, N. M., Siess, C. P., & Viest, I. M. (1951). Test and Analysis of Composite Beam with Incomplete Interaction. *Proc. Soc. Exp. Stress Anal*, 75-92.
- Nie, J. F., & Cai, C. S. (2004). Stiffness and Deflection of Steel-Concrete Composite Beams under Negative Bending. *Journal of Structural Engineering*, 1842 -51.
- Oehlers, D. J., & Bradford, M. A. (1995). *Composite Steel and Concrete Structural Members: Fundamental Behaviour*. Oxford: Pergamon Press.
- Oehlers, D. J., & Bradford, M. A. (1999). *Elementary Behaviour of Composite Steel and Concrete Structural Members*. Oxford: Butterworth Heinemann.
- Oliveira, C. E. (2009). *Análise Não-Linear Geométrica de Vigas-Colunas com Interação Parcial*. Ouro Preto, MG: Dissertação de Mestrado, PROPEC, Escola de Minas, UFOP.
- Oven, V. A., Burgess, I. W., PlanK, R. J., & Wali, A. A. (1997). An analytical Model for the Analysis of Composite Beam with Partial Interaction. *Computer & Structures*, 493 -504.

- Queiroz, G., Pimenta, R. J., & Da Mata, L. A. (2001). *Elementos das Estruturas Mistas Aço-Concreto*. Belo Horizonte: O Lutador.
- Ranzi, G., Gara, F., & Ansourian, P. (. (2006). General Method of Analysis for Composite Beams with Longitudinal and Transverse Partial Interaction. *Computers and Structures*, 2373–84.
- Ranzy, G., Bradford, M. A., & Uy, B. (2004). A Direct Stiffness Analysis of a Composite Beam with Partial Interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 657-72.
- Razaqpur, A. G., & Nofal, M. (1989). A Finit Element for Modeling the nonlinear behavior of Shear Connectors in Composite Structures. *Compos. Struct.*, 169-74.
- Roberts, T. M. (1985). Finit Difference Analysis of Composite Beams with Partial Interaction . *Compos. Struct.*, 469-73.
- Salari, M. R., & Spacone, E. (2001). Finite Element Formulations of One-Dimensional Elements with Bond-slip. *Eng. Struct.*, 815–26.
- Salari, M. R., Spacone, E., Shing, P. B., & Frangopol, D. M. (1998). Nonlinear Analysis of Composite Beams with Deformable Shear Connectors. *Journal of Structural Engineering*, 1148–58.
- Seracino, R., Lee, C. T., Lim, T., & Lim, J. Y. (2004). Parcial Interaction Stresses in Continuous Composite Beams under Serviceability Loads. *Journal of Constructional Steel Research*, 1525-43.
- Silva, A. R. (2006). *Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial*. Ouro Preto, MG: Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP.
- Silva, A. R. (2010). *Análise Numérica de Elementos Estruturais com Interação Parcial*. Ouro Preto, MG: Tese de doutorado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP.
- Silva, A. R., & Sousa, J. J. (2008). A Family of Interface Elements for the Analysis of Composite Beams with Interlayer Slip. *Finite Elements in Analysis and Design*, 305-14.
- Sousa, J. J., & Caldas, R. B. (2005). Numerical Analysis of Composite Steel Concrete Columns of Arbitrary Cross-section. *J. Struct. Eng.*, 1721-30.
- Sousa, J. J., & Silva, A. R. (2007). Nonlinear Analysis of Partially Connected Composite Beams Using Interface Elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 954-964.
- Sousa, J. J., & Silva, A. R. (2010). Analytical and Numerical Analysis of Multilayered Beams with Interlayer Slip. . *Engineering Structures*, 1671-1680.

- Sousa, J. J., Cláudio, E. M., & Silva, A. R. (2010). Nonlinear Analysis of Partially Connected Composite Beams Using Interface Elements. *Journal of Constructional Steel Research*, 772-79.
- Steidel, R. F. (1989). *An Introduction to Mechanical Vibrations*. New York: Jon Wiley.
- Wu, Y. F., Griffith, M. C., & Oehlers, D. J. (2004). Numerical Simulation of Steel Plated RC Column. *Computer & Structures*, 359-71.
- Xu, R., & Wu, Y. F. (2007). Two-dimensional Analytical Solutions of Simply Supported Composite Beams with Interlayer Slips. *Int. J. Solids Struct*, 165-75.