

Universidade Federal de Ouro Preto - Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **Uma Técnica Eficiente para Estabilizar a Estratégia do Resíduo Ortogonal na Análise Não Linear de Estruturas**

**Dalilah Pires Maximiano**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação  
do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da  
Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos  
para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil,  
área de concentração: Construção Metálica

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Ouro Preto, Março de 2012

M464t

Maximiano, Dalilah Pires.

Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas [manuscrito] / Dalilah Pires Maximiano - 2012.

xi, 67f.: il. color.; graf.; tabs.

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de concentração: Construção Metálica.

1. Arcos - Teses. 2. Análise numérica - Teses. 3. Análise funcional não-linear - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

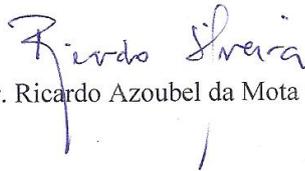
CDU: 624.014.2:624.072.32

Catálogo: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)

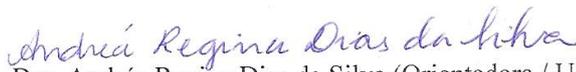
**UMA TÉCNICA EFICIENTE PARA ESTABILIZAR A ESTRATÉGIA DO  
RESÍDUO ORTOGONAL NA ANÁLISE NÃO LINEAR DE  
ESTRUTURAS**

**AUTORA: DALILAH PIRES MAXIMIANO**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 21 de março de 2012, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (Orientador / UFOP)



Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva (Orientadora / UFOP)



Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo (UFOP)



Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira (UFMG)

*“Nunca deixe que lhe digam que não  
vale a pena acreditar no sonho que se tem  
ou que seus planos nunca vão dar certo...  
quem acredita sempre alcança!”*

***Renato Russo***

À minha família, ao meu orientador e, principalmente,  
à minha co-orientadora.

# Agradecimentos

A Deus por me proteger e sempre guiar o meu caminho.

À minha família pela educação, presença e valores transmitidos. Em especial, à minha mãe, Sebastiana, e aos meus irmãos, Flávia e Paulo, pelo amor, apoio e compreensão em todos os momentos.

Ao meu orientador, prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, por acreditar na minha capacidade, pela motivação e orientação a mim dedicada. Obrigada pela confiança e ensinamentos.

À minha co-orientadora, Andréa Regina Dias da Silva, pela presença constante no desenvolvimento deste trabalho e pela valiosa contribuição. Muito obrigada pela amizade, paciência e, principalmente, pela disponibilidade e atenciosa assistência.

À Janaína Maria e Gisele Cristina pela amizade e companheirismo.

Aos amigos Tiago, Denisson, Wanderson, Walliston e Gabriel pela convivência e pelos momentos engraçados.

À Róvia pela atenção e seu dedicado trabalho na secretaria do PROPEC.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas pelos ensinamentos.

À Capes pela ajuda financeira.

Resumo da Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

## **UMA TÉCNICA EFICIENTE PARA ESTABILIZAR A ESTRATÉGIA DO RESÍDUO ORTOGONAL NA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS**

**Dalilah Pires Maximiano**

Março/2012

*Orientadores:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Andréa Regina Dias da Silva

O desenvolvimento e a aplicação de procedimentos numéricos para a solução do sistema de equações representativo do problema estrutural estático não linear têm merecido atenção nos últimos anos. Uma metodologia eficiente de solução deve ser capaz de traçar toda a trajetória de equilíbrio do sistema estrutural em análise, identificando e passando pelos pontos singulares ou críticos que possam existir. Grande parte dos procedimentos baseia-se no esquema iterativo de Newton-Raphson ao qual são acoplados métodos de continuação. A ideia desses métodos é tratar o parâmetro de carga como uma variável, e adicionar uma condição de restrição ao sistema de equações que descreve o equilíbrio estrutural para que tal parâmetro possa ser determinado. Neste trabalho, o método de Newton-Raphson e a estratégia do resíduo ortogonal proposta pelo pesquisador Krenk (1995) são usados. Na estratégia do resíduo ortogonal, o parâmetro de carga é ajustado de forma que as forças desequilibradas sejam ortogonais aos deslocamentos incrementais correntes. Entretanto, dependendo do sistema estrutural a ser analisado, essa estratégia apresenta inconsistências nas proximidades de pontos limites de carga ou deslocamento. O objetivo deste trabalho é, então, apresentar uma alternativa eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal. Propõe-se, que uma condição de perpendicularidade, referida como técnica do fluxo normal, seja satisfeita ao longo do processo iterativo de solução, para que a dificuldade em ultrapassar todos os pontos limites que surgem ao longo da trajetória de equilíbrio seja superada. A metodologia numérica adotada é descrita e, para comprovar a sua eficiência, arcos com comportamento geometricamente não linear são analisados. Ao final da dissertação, algumas conclusões e observações serão estabelecidas.

Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

**AN EFFICIENT TECHNIQUE FOR STABILIZE THE ORTHOGONAL  
RESIDUAL STRATEGY IN THE NONLINEAR ANALYSIS OF STRUCTURES**

**Dalilah Pires Maximiano**

March/2012

*Advisors:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Andréa Regina Dias da Silva

The development and application of numerical procedures for solving a nonlinear equation system representing the static structural problem have deserved attention in recent years. An efficient nonlinear solution strategy must be able to trace the entire structural equilibrium path or load-displacement curve, identifying and passing through the singular or critical points that may exist. A large part of the solution procedures are based on the Newton-Raphson iterative scheme (full or modified) to which are coupled the path-following methods. The idea of these methods is to treat the load parameter as an additional variable, and add a constraint condition to the equation system that describes the structural equilibrium so that this load parameter can be determined. This work uses the Newton-Raphson iteration scheme and the orthogonal residual procedure proposed by Krenk (1995). In the orthogonal residual strategy, the load parameter is adjusted using the orthogonality condition between the unbalanced force vector and the current incremental displacement vector. However, depending on the structural system analyzed, this strategy presents numerical problems or inconsistencies in nearby load or displacement limit points (snap buckling phenomena). Therefore, this dissertation aims to present an efficient numerical procedure to stabilize the orthogonal residual strategy. It is proposed that a perpendicularity condition, referred to as normal flow technique, be fulfilled through the iterative solution process, so that the difficulty in overcoming all critical points along the nonlinear equilibrium path be surpassed. The numerical methodology proposed is described in detail and, to prove its efficiency, arches showing highly geometric nonlinear behavior are studied. Some conclusions and comments are presented at the end of the dissertation.

# Sumário

<b>Listas de Figuras.....</b>	<b>ix</b>
<b>Listas de Tabelas.....</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução .....</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos.....	1
1.2 Organização do Trabalho .....	4
<b>2 Fundamentos para Análise Estática Não Linear Geométrica .....</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução .....	6
2.2 Não Linearidade Geométrica.....	7
2.3 Formulação do Elemento Finito Não linear .....	8
2.4 O Sistema Computacional CS-ASA.....	13
<b>3 Solução do Problema Não Linear .....</b>	<b>15</b>
3.1 Introdução.....	15
3.2 Metodologia de Solução .....	16
3.2.1 Solução Incremental Predita.....	19
3.2.2 Ciclo de Iterações: Método de Newton-Raphson .....	19
3.3 Incremento de Carga Baseado no GSP.....	25
3.4 Iteração Baseada no Resíduo Ortogonal .....	28
<b>4 Análise Estática Não Linear de Arcos Esbeltos .....</b>	<b>32</b>
4.1 Introdução.....	32
4.2 Influência da Condição de Perpendicularidade .....	33
4.2.1 Arco Senoidal .....	34
4.2.2 Arco Circular Abatido .....	37
4.2.3 Arco Circular Rotulado-Engastado .....	39

4.2.4	Arco Circular Parcialmente Carregado.....	41
4.2.5	Arco Circular Biarticulado .....	43
4.3	Influência da Atualização da Matriz de Rigidez .....	47
4.4	Influência da Técnica do Fluxo Normal em Outras Estratégias de Iteração .....	49
4.4.1	Arco Circular Parcialmente Carregado.....	50
4.4.2	Arco Circular Biarticulado .....	51
<b>5</b>	<b>Considerações Finais .....</b>	<b>53</b>
5.1	Introdução.....	53
5.2	Conclusões.....	54
5.2.1	Resíduo Ortogonal Associado à Técnica do Fluxo Normal .....	54
5.2.2	Influência da Atualização da Matriz de Rigidez .....	55
5.2.3	Outras Estratégias Associadas à Técnica do Fluxo Normal .....	55
5.3	Sugestões para Pesquisas Futuras.....	56
	<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Estratégias de Iteração .....</b>	<b>64</b>
A.1	Introdução.....	64
A.2	Iteração Baseada na Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais.....	64
A.3	Iteração Baseada no Deslocamento Generalizado.....	65

# Lista de Figuras

2.1	Efeitos de segunda ordem: P- $\Delta$ e P- $\delta$ .....	8
2.2	Elemento de viga-coluna adotado .....	10
2.3	Configuração deformada do elemento finito.....	12
2.4	Programa CS-ASA (Silva, 2009): análises e efeitos considerados .....	14
3.1	Trajectoria de equilíbrio .....	17
3.2	Solução incremental-iterativa.....	18
3.3	Interpretação geométrica dos métodos de Newton-Raphson .....	21
3.4	A técnica do fluxo normal .....	24
3.5	Os vetores $\delta U_r$ e $\delta U$ da iteração $k$ na técnica do fluxo normal .....	24
3.6	Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado GSP .....	28
4.1	Arco senoidal: geometria e carregamento .....	34
4.2	Trajectoria de equilíbrio para o arco senoidal.....	35
4.3	Caminhos de equilíbrio para diferentes valores de $z_0$ .....	36
4.4	Arco abatido birrotulado: geometria e carregamento.....	37
4.5	Trajectorias de equilíbrio: sistema estrutural perfeito.....	38
4.6	Trajectorias de equilíbrio: sistema estrutural imperfeito .....	38
4.7	Arco rotulado-engastado: geometria e carregamento.....	40
4.8	Curvas carga-deslocamento.....	40
4.9	Configurações deformadas .....	41
4.10	Arco parcialmente carregado: geometria e carregamento.....	42
4.11	Curvas carga-deslocamento vertical.....	42
4.12	Arco biarticulado: geometria e carregamento .....	43
4.13	Trajectorias de equilíbrio: sistema estrutural perfeito.....	45
4.14	Configurações deformadas: sistema estrutural perfeito .....	45

4.15	Trajétórias de equilíbrio: sistema estrutural imperfeito .....	46
4.16	Configurações deformadas: sistema estrutural imperfeito .....	46
4.17	Arcos analisados.....	48
4.18	Variação da carga $P$ em cada incremento .....	52

# Lista de Tabelas

3.1	Metodologia incremental-iterativa para análise estática não linear .....	26
3.2	Resumo das estratégias de incremento de carga e iteração adotadas .....	31
4.1	Valores limites de carga, $p$ (N/cm).....	35
4.2	Pontos limites de carga e deslocamento – sistema estrutural imperfeito .....	39
4.3	Valores limites de carga, $p$ (N/m) .....	43
4.4	Valores limites de carga, $P$ (N): sistema estrutural perfeito .....	47
4.5	Valores limites de carga, $P$ (N): sistema estrutural imperfeito .....	47
4.6	Influência da atualização da matriz de rigidez .....	49
4.7	Avaliação da eficiência computacional das estratégias adotadas.....	51
4.8	Influência dos métodos de Newton-Raphson no processo de solução.....	51
4.9	Eficiência computacional das estratégias adotadas .....	52
A.1	Iteração a norma mínima dos deslocamentos residuais.....	66
A.2	Iteração baseada no deslocamento generalizado .....	67

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais e Objetivos

Com a tendência cada vez mais crescente de verticalização das grandes cidades, um dos principais objetivos da engenharia estrutural tem sido tornar os sistemas estruturais mais econômicos e, conseqüentemente, competitivos. A economia envolve, principalmente, a redução do peso da estrutura e do consumo de materiais utilizados. Tal objetivo vem sendo conseguido devido à disponibilidade de materiais de alta resistência, como o aço, o que possibilita a utilização de elementos estruturais cada vez mais esbeltos.

Ressalta-se que a concepção de estruturas esbeltas, leves e com grandes vãos livres tem reforçado a importância de se considerar os efeitos não lineares que afetam significativamente o comportamento estrutural. Esses efeitos, que são associados à não linearidade física do material e à não linearidade geométrica, agem simultaneamente e reduzem a capacidade resistente da estrutura. Cabe enfatizar que as exigências quanto à segurança e à durabilidade das estruturas devem ser sempre atendidas.

O primeiro efeito não linear citado no parágrafo anterior é produzido pela degradação da resistência do material. Quando o material é solicitado com estados de tensões que ultrapassam o limite de proporcionalidade do material, ocorre a degradação do mesmo e, como consequência, ocorre a perda da sua capacidade resistente. Já o efeito da não linearidade geométrica, também chamado de efeito de segunda ordem, ocorre devido à mudança da configuração geométrica da estrutura à medida que o carregamento vai sendo aplicado. Sendo assim, a análise de sistemas estruturais na qual esses efeitos são considerados exige o desenvolvimento de técnicas numéricas sofisticadas e um melhor conhecimento do comportamento estrutural.

Tradicionalmente, a análise não linear da estabilidade de uma estrutura é feita considerando os princípios da Teoria Geral da Estabilidade Elástica (Thompson e Hunt, 1973), a qual é baseada na energia potencial total e suas variações em torno de um ponto de equilíbrio. Essa análise envolve invariavelmente a solução de um sistema de equações algébricas não lineares. Métodos puramente incrementais e esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos são usados na obtenção da solução. Os procedimentos puramente incrementais, utilizados primeiramente por Turner *et al.* (1960) e Argyris (1964), têm como vantagem a sua simplicidade e, como desvantagem, o fato dos esforços internos correspondentes à configuração deformada da estrutura não estarem em equilíbrio com as cargas externas ao final de cada passo incremental. Isso implica em erros que vão se acumulando à medida que o número de passos de carga aumenta.

Por outro lado, com os esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos, os erros podem ser reduzidos a valores insignificantes, graças às iterações realizadas dentro de cada passo de carga. Dessa forma, o equilíbrio entre os esforços internos atuantes e a carga externa aplicada na estrutura é praticamente alcançado. Grande parte desses procedimentos baseia-se no método de Newton-Raphson (Bathe, 1996), no qual a carga permanece constante durante o ciclo iterativo. Por esse motivo, em sua formulação clássica só é capaz de obter resultados convergentes até as proximidades do primeiro ponto limite. Isso acontece devido ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente que se torna singular nesses pontos. O método de Newton-Raphson modificado é, também, bastante popular e vem sendo usado em muitas aplicações (Zienkiewicz e Taylor, 1991). Porém, assim como a técnica padrão, ele é incapaz de ultrapassar os pontos limites que possam surgir ao longo da trajetória de equilíbrio. A diferença básica em relação às duas variantes do método de Newton-Raphson é que, no modificado, a matriz de rigidez não é continuamente atualizada ao longo do processo iterativo de solução.

Para contornar os problemas de convergência próprios de uma análise não linear, técnicas numéricas são utilizadas. Tais técnicas são associadas às iterações do tipo Newton e permitem obter a resposta da estrutura além dos pontos limites. As estratégias do controle de deslocamento, desenvolvida por Batoz e Dhatt (1979), do controle de energia usada por Bathe e Dvorkin (1983) e por Yang e Mcguire (1986), da norma mínima dos deslocamentos residuais apresentada por Chan (1988), do controle de deslocamento generalizado introduzida por Yang e Shieh (1990) e do controle do comprimento de arco (*arc-length method*), apresentada inicialmente por Wempner (1971) e Riks (1972) e, mais tarde, modificada por Crisfield (1981) e Ramm (1981) são encontradas na literatura. Outra

estratégia desenvolvida com esse mesmo objetivo é a estratégia do resíduo ortogonal apresentada por Krenk (1995) e Krenk e Hededal (1995). Nesses trabalhos, a eficiência da técnica proposta foi verificada através da análise não linear de treliças. Pinheiro e Silveira (2004) também comprovaram a eficiência da estratégia do resíduo ortogonal na análise da estabilidade elástica de treliças espaciais. No entanto, para alguns sistemas estruturais reticulados planos, essa estratégia apresentou problemas de convergência próximos a pontos limites, como observado em Rocha (2000) e Fuína (2004).

A diversificação e a complexidade do comportamento não linear dos sistemas estruturais esbeltos, juntamente com aspectos relacionados à instabilidade numérica frequentes em uma análise não linear são fatores suficientes para que se tenha certa cautela em afirmar que uma estratégia de solução é mais eficiente que outra. Vários estudos encontrados até aqui têm demonstrado que não existe um método ideal e, além disso, não se pode esperar de nenhuma estratégia a resolução de diferentes problemas não lineares com a mesma eficiência computacional.

Este trabalho se insere no contexto das metodologias de solução de equações não lineares. O objetivo é implementar e testar na plataforma CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), que é um sistema computacional para análise numérica avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas baseado no Método dos Elementos Finitos (Silva, 2009), a estratégia do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995). Além disso, propõe-se que uma condição de perpendicularidade — técnica do fluxo normal — seja satisfeita ao longo do processo iterativo de solução para superar as inconsistências dessa estratégia nas proximidades dos pontos limites de carga ou deslocamento existentes. Dessa forma, será possível conhecer o comportamento não linear de estruturas esbeltas com o traçado completo da sua trajetória de equilíbrio. Vale destacar que uma alternativa para contornar esse problema foi sugerida por Kouhia (2008). Esse autor propôs uma nova expressão para a correção do parâmetro de carga que não satisfaz a condição de ortogonalidade da estratégia nas vizinhanças de pontos limite de deslocamento.

Pesquisas envolvendo a técnica do fluxo normal podem ser encontradas na literatura. Watson *et al.* (1987) e Watson *et al.* (1997) implementaram o algoritmo, referido como fluxo normal às curvas de Davidenko (Georg, 1981), nos softwares HOMPACT e HOMPACT90, respectivamente. Ragon *et al.* (2002) apresentaram um estudo comparativo entre as variantes do método do comprimento de arco linear (Wempner, 1971; Riks, 1979) e cilíndrico (Crisfield, 1981), e o algoritmo do fluxo normal (Watson *et al.*, 1987; Watson *et al.*, 1997). Esses autores afirmam que o algoritmo do fluxo normal pode ser mais

eficiente que o método do comprimento de arco em casos de trajetórias de equilíbrio fortemente não lineares. Além disso, garantem que o método mantém grandes incrementos mesmo quando a não linearidade da curva é acentuada, e que o uso da direção normal às curvas de Davidenko fazem com que a convergência durante o processo iterativo seja mais rápida. Além desses, Saffari *et al.* (2008) e Tabatabaei *et al.* (2009) também adotaram essa técnica. Recentemente, Maximiano *et al.* (2011) apresentaram um estudo onde o objetivo foi avaliar o desempenho das estratégias de iteração do comprimento de arco cilíndrico, norma mínima dos deslocamentos residuais e do deslocamento generalizado associadas à técnica do fluxo normal.

A validação e a verificação da eficiência da estratégia do resíduo ortogonal associada à técnica do fluxo normal são feitas através da análise estática de segunda ordem de arcos esbeltos com caminhos de equilíbrio fortemente não lineares. Além disso, a influência da técnica do fluxo normal em outras estratégias de iteração do CS-ASA é, também, apresentada.

Por fim, cabe esclarecer que o presente trabalho é parte integrante de um amplo projeto de pesquisa denominado “*Análise não linear estática e dinâmica de sistemas estruturais metálicos*” (Silveira, 2010) e vai de encontro aos objetivos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC/Deciv/EM/UFOP), estando relacionado com as seguintes linhas de pesquisa:

- *Mecânica Computacional*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
- *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas Metálicas*: que visa estudar isoladamente ou em conjunto o comportamento das diversas partes de uma estrutura metálica.

Uma breve descrição dos capítulos que compõem este trabalho é feita na próxima seção.

## **1.2 Organização do Trabalho**

Esta dissertação é constituída por outros quatro capítulos e um apêndice, nos quais são apresentados os fundamentos teóricos necessários para um melhor entendimento e desenvolvimento do trabalho em si, e os resultados obtidos com os exemplos para

validação e verificação da eficiência da estratégia do resíduo ortogonal associada à técnica do fluxo normal.

Inicialmente, no Capítulo 2, o efeito da não linearidade geométrica na análise estática de estruturas reticuladas planas é abordado. Além disso, a formulação do elemento finito adotado na modelagem das estruturas, e as características gerais do sistema computacional CS-ASA são apresentadas.

Os detalhes da metodologia de solução de sistemas não lineares, usada aqui, são fornecidos no Capítulo 3. Tal metodologia é caracterizada por um esquema de solução incremental-iterativo, onde, após cada incremento inicial de carga, iterações subsequentes do tipo Newton são realizadas para estabelecer uma nova configuração de equilíbrio da estrutura. O método de Newton-Raphson e a técnica do fluxo normal são mostrados. Ainda no Capítulo 3, a estratégia de iteração baseada no resíduo ortogonal e a estratégia de incremento automático do parâmetro de carga são descritas.

No Capítulo 4, através da análise da estabilidade estática de cinco arcos esbeltos cujas respostas são encontradas na literatura, verifica-se a eficiência computacional da estratégia do resíduo ortogonal associada à técnica do fluxo normal. A influência da técnica do fluxo normal associada a outras estratégias de iteração disponíveis no programa CS-ASA e a influência da atualização da matriz de rigidez no processo iterativo da solução não linear são também estudadas nesse capítulo.

Finalizando o trabalho, no Capítulo 5, algumas considerações e conclusões referentes à pesquisa serão estabelecidas. Com o objetivo de continuar o estudo realizado neste trabalho, são fornecidas algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

Para complementar o trabalho, no Apêndice A são descritas duas das estratégias de iteração presentes no sistema computacional CS-ASA e que foram usadas no presente trabalho.

# Capítulo 2

## Fundamentos para Análise Estática Não Linear Geométrica

### 2.1 Introdução

Em geral, os projetos estruturais eram desenvolvidos considerando o sistema perfeito e realizando uma análise linear. Nesse tipo de análise, as equações de equilíbrio são formuladas considerando a posição inicial indeformada da estrutura, e assume-se que as deformações são pequenas, de tal modo que seus efeitos sobre o equilíbrio e resposta do sistema são insignificantes.

No entanto, grande parte das estruturas apresenta comportamento não linear antes de atingirem seus limites de resistência. Nesse caso, a consideração da análise linear não é mais adequada pelo fato de ser incapaz de retratar o comportamento real de estruturas sob condições não usuais de carregamento ou de carregamento limite. Através da análise não linear, procura-se uma modelagem mais realista considerando, apropriadamente, os efeitos relacionados às não linearidades que afetam significativamente o comportamento estrutural. Como consequência, tem-se um aumento da complexidade do problema e do custo computacional.

Este capítulo tem como objetivo apresentar os fundamentos necessários para a análise estática de modelos estruturais reticulados planos considerando o efeito da não linearidade geométrica. Esse efeito é descrito na Seção 2.2. O Método dos Elementos Finitos é usado, e a formulação para o elemento finito de viga-coluna adotado na modelagem do sistema estrutural é detalhada na Seção 2.3. Na descrição da formulação numérica utilizada, atenção especial é dada à obtenção do vetor de forças internas e da

matriz de rigidez do elemento. Os efeitos da não linearidade geométrica onde são considerados grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações serão simulados. Finalizando o capítulo, na Seção 2.4, são apresentadas as principais características do sistema computacional onde foram feitas as implementações e as análises deste trabalho.

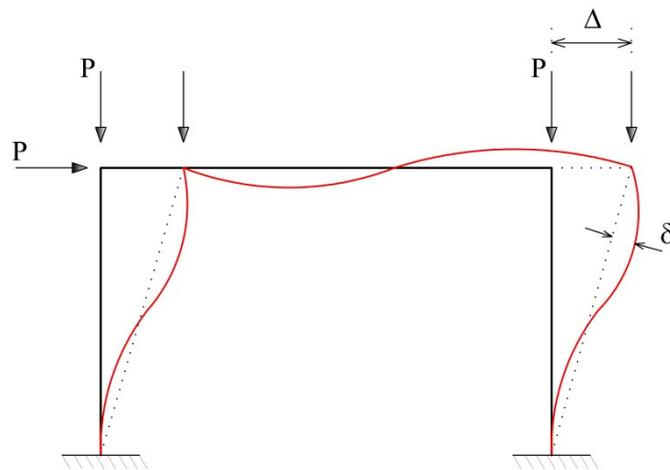
## **2.2 Não Linearidade Geométrica**

O comportamento não linear do sistema estrutural é verificado quando as relações entre ações e deslocamentos não são diretamente proporcionais. Sendo assim, sob a ação de um carregamento qualquer, o comportamento não linear de uma estrutura pode ser classificado de acordo com seus efeitos. Dentre as várias fontes de não linearidade, destaca-se neste trabalho, a não linearidade geométrica. Entende-se como não linearidade geométrica todo efeito causado em uma estrutura devido a mudanças na sua geometria. Para deslocamentos relativamente grandes, a deflexão lateral de um membro pode trazer como consequência o aparecimento de momentos fletores adicionais, em virtude da presença de um esforço normal. Esse tipo de comportamento, também chamado de efeitos de segunda ordem, é responsável por considerar na composição do equilíbrio os efeitos  $P-\Delta$  (global) e  $P-\delta$  (local, a nível de elemento), que são os efeitos oriundos das deformações da estrutura à medida que é carregada. Esses efeitos são ilustrados na Figura 2.1. Trata-se de uma importante fonte de não linearidade no problema estrutural e exige formulações numéricas adequadas para sua consideração (Silva, 2009).

Para diversos projetos de edificações convencionais da construção civil, os processos aproximados mostram-se suficientes. Isso se deve ao fato de que, nessas estruturas, os deslocamentos são muito pequenos em relação às dimensões das peças estruturais. No entanto, com a tendência de verticalização das grandes cidades e com os avanços tanto no campo da engenharia de materiais quanto das técnicas construtivas, a opção por edificações mais esbeltas vem sendo cada vez mais intensa. Para acompanhar o desenvolvimento tecnológico, deve-se pensar em processos de análise que sejam mais bem elaborados a fim de proporcionar aos engenheiros e calculistas melhores resultados. Avaliações mais seguras quanto à capacidade portante e aos níveis de deslocabilidade de uma estrutura dependem de tais resultados.

A formulação para a análise não linear geométrica de estruturas tem seus fundamentos teóricos na teoria da elasticidade não linear. A não linearidade geométrica

aparece na teoria da elasticidade tanto nas equações de equilíbrio, que são escritas utilizando-se as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações deformação-deslocamento, que incluem termos não lineares nos deslocamentos e suas derivadas. Como mencionado antes, a não linearidade geométrica surge devido à modificação da geometria da estrutura ao longo do processo de deformação do corpo. Pode ocorrer devido a uma grande deformação, a grandes deslocamentos e rotações da configuração de referência, ou aos dois conjuntamente. Neste trabalho, grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações são supostos.



**Figura 2.1** Efeitos de segunda ordem: P- $\Delta$  e P- $\delta$

A formulação para análise de segunda ordem de sistemas estruturais reticulados planos utilizada neste trabalho é descrita na seção seguinte, onde se discute também um dos métodos numéricos mais usados para a solução não linear de problemas na área da Engenharia de Estruturas.

### 2.3 Formulação do Elemento Finito Não Linear

O Método dos Elementos Finitos é hoje um dos métodos mais difundidos, tanto no meio acadêmico, como entre os engenheiros e técnicos para modelagem computacional em engenharia de uma forma geral. Isso se deve à sua grande aplicabilidade e eficiência nas mais diversas análises como: corpos sólidos, fluidos, meios porosos, meios elásticos ou hiper elásticos, plásticos, em análises linear e não linear de estruturas, análise estática e dinâmica, entre outras. A ideia básica do método é considerar que os corpos possam ser

estudados como sendo constituídos por elementos de dimensões finitas que se conectam uns com os outros por meio de seus vértices (nós), arestas e faces. Assim, o meio contínuo é discretizado (dividido) em subdomínios, referidos como elementos finitos, e os graus de liberdade a serem determinados são definidos nos pontos nodais dos mesmos.

Ao conjunto de elementos finitos e pontos nodais, dá-se, o nome de malha de elementos finitos. Dentro de certas condições de convergência, quanto mais refinada essa malha for, mais próximo se estará da solução exata do problema estudado. Porém, esse refinamento aumenta o número de incógnitas e, conseqüentemente, o custo computacional. Por isso, deve-se adotar, sempre, um número de elementos que leve a uma solução satisfatória dentro da precisão desejada e do tempo esperado.

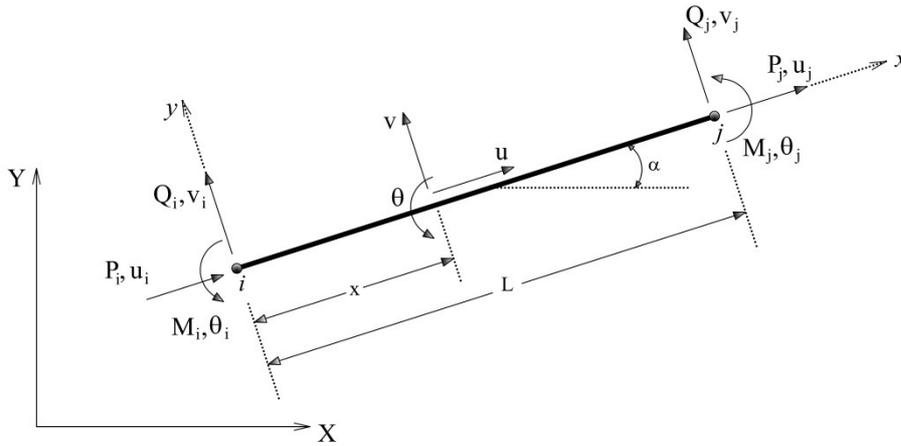
A maioria das formulações de elementos finitos para análise de segunda ordem de estruturas baseia-se em referenciais Lagrangianos, onde os deslocamentos em um sistema estrutural, decorrentes de um dado carregamento, são medidos em relação a uma configuração inicial desse sistema. Com a abordagem Lagrangiana, o desenvolvimento de metodologias incrementais para análise não linear começa com a divisão do caminho de carregamento de um corpo sólido em certo número de configurações de equilíbrio. Três configurações para o corpo podem ser estabelecidas em termos de um sistema de coordenadas cartesianas: a configuração inicial,  $t = 0$ , a última configuração deformada,  $t$ , e a configuração deformada corrente,  $t + \Delta t$ . Assume-se que todas as variáveis de estado, tais como, tensões, deformações e deslocamentos, juntamente com a história de carregamento, são conhecidas na configuração  $t$ . A partir daí, tem-se como objetivo a formulação de um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração  $t + \Delta t$ . Isso é feito considerando que o carregamento externo que atuou na configuração  $t$  tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de  $t$  para  $t + \Delta t$  é comumente referido como um passo incremental.

Formulações não lineares para elementos de viga-coluna em referenciais Lagrangianos foram propostas por vários pesquisadores, dentre os quais Wen e Rahimzadeh (1983), Chajes e Churchill (1987), Goto e Chen (1987), Wong e Tin-Loi (1990), Alves (1993a; 1993b), Yang e Kuo (1994), Pacoste e Eriksson (1997), Torkamani *et al.* (1997) e Torkamani e Sonmez (2001) podem ser citados.

Neste trabalho, é utilizada a formulação proposta por Pacoste e Eriksson (1997), que é baseada na teoria de Timoshenko e utiliza relações cinemáticas estabelecidas através de

funções trigonométricas. Essa formulação foi desenvolvida em referencial Lagrangiano total, onde a configuração de referência corresponde ao estado original da estrutura descarregada, ou seja, os deslocamentos são sempre medidos em relação à configuração original indeformada,  $t = 0$  (Crisfield, 1991).

O elemento finito usado refere-se a um elemento reticulado plano de viga-coluna limitado pelos pontos nodais  $i$  e  $j$ , conforme mostra a Figura 2.2. Cada um desses pontos possui três graus de liberdade, que são os deslocamentos axial,  $u$ , e transversal,  $v$ , e uma rotação,  $\theta$ .



**Figura 2.2** Elemento de viga-coluna adotado

As relações deformação-deslocamento são escritas como:

$$\epsilon_{xx} = \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \cos(\theta) + \left(\frac{dv}{dx}\right) \sin(\theta) \quad (2.1a)$$

$$\gamma = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cos(\theta) - \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \sin(\theta) \quad (2.1b)$$

$$k = \frac{d\theta}{dx} \quad (2.1c)$$

sendo  $\epsilon_{xx}$  a deformação axial,  $\gamma$  a deformação cisalhante,  $k$  a curvatura do elemento e  $\theta$  o ângulo de rotação da seção transversal na configuração deformada.

As relações constitutivas, considerando pequenas deformações, são dadas por (Pacoste e Eriksson, 1997):

$$P = EA\epsilon_{xx} \quad (2.2a)$$

$$Q = GA\gamma \quad (2.2b)$$

$$M = EI\kappa \quad (2.2c)$$

em que  $EA$ ,  $GA$  e  $EI$  representam as rigidezes axial, cisalhante e devido à flexão, respectivamente.

Usando o referencial Lagrangiano total, a energia potencial total, pode ser escrita através da seguinte relação:

$$\Pi = \int_V \int_0^{\epsilon_{ij}} (\tau_{ij} d\epsilon_{ij}) dV - \int_S f_i u_i dS \quad (2.3)$$

sendo  $\tau_{ij}$  o tensor de tensões,  $\epsilon_{ij}$  a deformação axial,  $f_i$  e  $u_i$ , respectivamente, a força aplicada e o deslocamento axial.

Considerando então as relações constitutivas (2.2) e realizando a integração na área da seção transversal, a equação anterior é reescrita como:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA\epsilon_{xx}^2 + GA\gamma^2 + EI\kappa^2 \right] dx - \int_S f_i u_i dS \quad (2.4)$$

na qual o primeiro termo do lado direito é a energia interna de deformação e o último termo é a energia potencial devido às cargas aplicadas.

Os deslocamentos  $u(x)$  e  $v(x)$ , e rotação  $\theta(x)$ , representados na Figura 2.3, são aproximados utilizando funções de interpolação lineares, ou seja,

$$u = H_1 u_i + H_2 u_j \quad (2.5a)$$

$$v = H_1 v_i + H_2 v_j \quad (2.5b)$$

$$\theta = H_1 \theta_i + H_2 \theta_j \quad (2.5c)$$

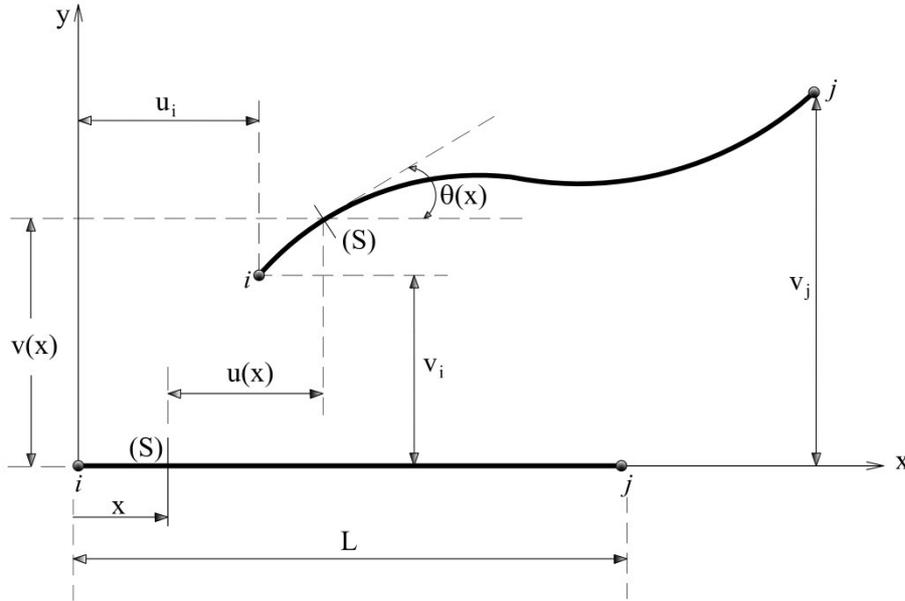
sendo,

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (2.6a)$$

$$H_2 = \frac{x}{L} \quad (2.6b)$$

Considerando a Equação (2.4), a energia interna de deformação é, como já mencionado, definida como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA\epsilon_{xx}^2 + GA\gamma^2 + EI\kappa^2 \right] dx \quad (2.7)$$



**Figura 2.3** Configuração deformada do elemento finito

Se um ponto da quadratura de Gauss for usado para realizar a integração da energia de deformação na Equação (2.7), a seguinte expressão é obtida para  $U$ :

$$U = \frac{L}{2} \left[ EA\epsilon_{xx}^2 + GA\gamma^2 + EI\kappa^2 \right] \quad (2.8)$$

sendo  $L$  o comprimento do elemento finito.

Para um elemento genérico, as componentes  $f_i^m$  do vetor de forças internas e as componentes  $k_{mn}$  da matriz de rigidez são obtidas através de diferenciações sucessivas de (2.8), isto é:

$$f_i^m = \frac{\partial U}{\partial u_m} \quad (2.9)$$

$$k_{mn} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_m \partial u_n} \quad (2.10)$$

A matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento são calculados no sistema local de coordenadas e podem ser transformados para o sistema global usando as equações:

$$\mathbf{K}_{eg} = {}^t\mathbf{R}^T \mathbf{K}_e {}^t\mathbf{R} \quad (2.11)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_{ig} = {}^t\mathbf{R}_a^T {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_i \quad (2.12)$$

sendo  $\mathbf{K}_e$  e  $\mathbf{f}_i$ , respectivamente, a matriz de rigidez do elemento e o vetor de forças internas em coordenadas locais.  ${}^t\mathbf{R}$  é matriz de rotação entre o sistema global e o sistema local atualizado na configuração  $t$ , e  $\mathbf{R}_a$  é a matriz de rotação atualizada na última iteração processada. Essas matrizes dependem apenas da inclinação  $\alpha$  (Figura 2.2) e podem ser definidas como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

## 2.4 O Sistema Computacional CS-ASA

Esta seção apresenta as características da ferramenta computacional para análise estrutural, CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), desenvolvida por Silva (2009). O CS-ASA foi escrito em linguagem *Fortran 95* (Chapman, 2003). Com essa linguagem, Silva (2009) utilizou uma programação estruturada em módulos cujo funcionamento interno pode ser alterado sem a necessidade de modificar o programa que o utiliza. Desde então, isso vem favorecendo a melhoria da produtividade da programação, e facilitando a expansão do CS-ASA com o desenvolvimento de novas funcionalidades.

Seguindo um formato tradicional de um programa de elementos finitos, o programa CS-ASA é capaz de realizar a análise estática e dinâmica de estruturas metálicas, como ilustrado na Figura 2.4. Em busca de uma modelagem estrutural mais realista, tal ferramenta possui formulações de elementos finitos reticulados planos que consideram os efeitos da não linearidade geométrica, a semirrigidez da ligação, e os efeitos da plastificação nos membros estruturais. Os efeitos não lineares que podem ser simulados

nas análises estática e dinâmica estão indicados também na Figura 2.4. Importante ressaltar que, neste trabalho, será realizada apenas a análise estática de estruturas considerando o efeito da não linearidade geométrica, como destacado na mesma figura.



**Figura 2.4** Programa CS-ASA (Silva, 2009): análises e efeitos considerados

A entrada de dados é feita através de arquivos com formato texto. Destaca-se que um pré-processador gráfico e interativo (Prado, 2012) foi desenvolvido recentemente. A partir dos arquivos de entrada, é gerada uma malha de elementos finitos para o modelo estrutural existente e, a partir daí, inicia-se a análise numérica propriamente dita como mostra a Figura 2.4. Como resultados da análise têm-se, principalmente, os deslocamentos nodais e os esforços atuantes na estrutura. Em uma análise estática não linear, essas grandezas são determinadas a cada incremento de carga. Arquivos com formato texto são gerados pelo programa contendo os resultados.

Para uma análise estática não linear, a formulação escolhida de acordo com o efeito desejado na análise deve ser informada. Dentre as formulações geometricamente não lineares no CS-ASA, é utilizada no presente trabalho, a formulação SOF-3 (*Second-order finite element formulation - 3*). Essa formulação foi descrita na seção anterior. Além da formulação, os parâmetros que gerenciam a estratégia incremental-iterativa baseada no

método de Newton-Raphson padrão ou modificado são informações necessárias para as análises que serão efetuadas neste trabalho. Os detalhes do processo incremental-iterativo serão apresentados no Capítulo 3, onde, como destacado no Capítulo 1, serão descritas as novas estratégias implementadas no CS-ASA.

# Capítulo 3

## Solução do Problema Estático Não Linear

### 3.1 Introdução

No estudo do comportamento não linear de uma estrutura, a resolução de equações algébricas não lineares é inevitável. O processo incremental-iterativo tem se mostrado eficiente na solução dessas equações, e continua sendo o mais adotado na comunidade científica para análise numérica não linear de sistemas estruturais. Esse processo consiste na aplicação fracionada do carregamento, chamado incremento de carga, cumulativamente ao longo da análise até que o carregamento seja todo aplicado. Em cada passo da análise, correspondente a um incremento de carga, as equações de equilíbrio são resolvidas por meio de métodos iterativos como o de Newton-Raphson. Podem ser utilizadas, também, técnicas de continuação, que são equações de restrição adicionadas ao sistema algébrico com o intuito de ultrapassar os pontos limites.

Este capítulo apresenta a metodologia incremental-iterativa de solução do problema estático não linear considerando os efeitos da não linearidade geométrica. Tal metodologia é detalhada na Seção 3.2, onde são descritos também os métodos de Newton-Raphson, padrão e modificado, e a técnica do fluxo normal usada na etapa do processo iterativo de solução. As Seções 3.3 e 3.4 apresentam as estratégias de incremento de carga e iteração adotadas neste trabalho.

## 3.2 Metodologia de Solução

No contexto do MEF, a equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento geometricamente não linear pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{F}_r$  é um vetor de referência caracterizando o carregamento externo aplicado, onde apenas a direção é importante;  $\lambda$  é um parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de  $\mathbf{F}_r$ ; e  $\mathbf{F}_i$  é o vetor de forças internas que é função dos deslocamentos,  $\mathbf{U}$ , nos pontos nodais da estrutura.

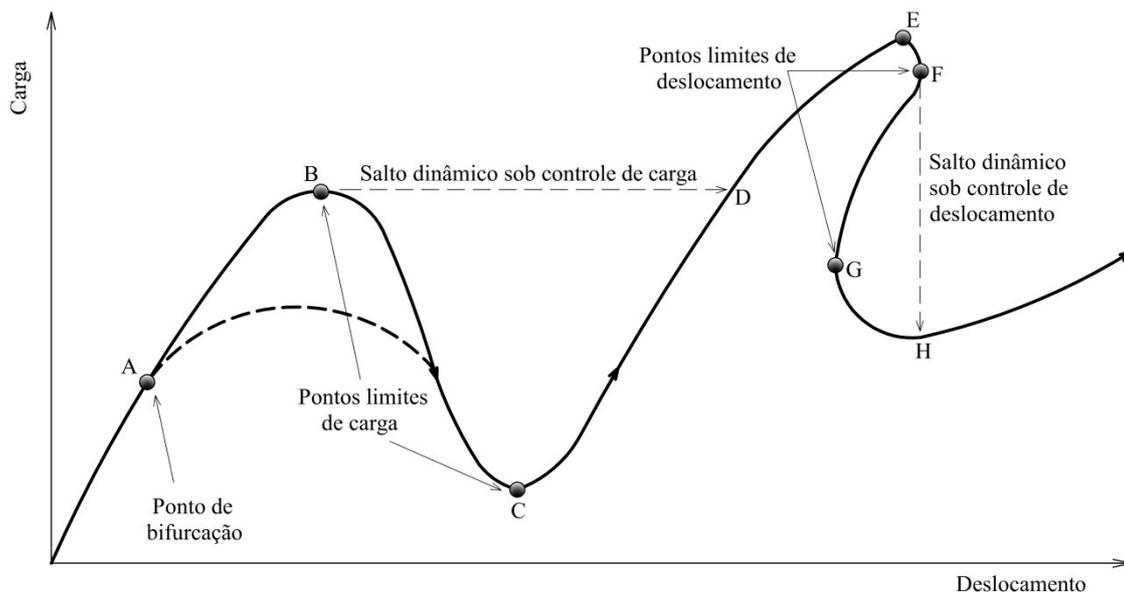
Uma forma comum de representação gráfica da resposta estática não linear de uma estrutura consiste no traçado de uma curva carga-deslocamento (ou rotação), onde a abscissa corresponde a uma componente de deslocamento (ou rotação) de um nó selecionado, e a ordenada representa o parâmetro de carga. Essa curva, ilustrada na Figura 3.1, é chamada trajetória de equilíbrio, e cada um de seus pontos representa uma configuração de equilíbrio estático que satisfaz a Equação (3.1).

Uma metodologia eficiente de solução de sistemas de equações não lineares deve ser capaz de superar os problemas numéricos associados ao comportamento não linear, traçando toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundários) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir. São definidos dois tipos de pontos críticos: pontos limites com os fenômenos de *snap-through* (salto dinâmico sob controle de carga) e *snap-back* (salto dinâmico sob controle de deslocamento), e de bifurcação, a partir do qual derivam duas ou mais trajetórias de equilíbrio. Esses pontos críticos são exemplificados na Figura 3.1.

Embora, muitas vezes, a resposta da análise de uma estrutura antes de se alcançar pontos críticos seja suficiente para os propósitos de projeto, a determinação da resposta no intervalo pós-crítico é essencial quando se deseja estudar o comportamento não linear da estrutura. A resposta no intervalo pós-crítico confirma a passagem pelo ponto limite e permite o conhecimento da carga de colapso (Bellini e Chulya, 1987; Crisfield, 1991).

A solução do problema estrutural representado pela Equação (3.1) é obtida, neste trabalho, através de um esquema que combina procedimento incremental e iterativo, onde duas fases podem ser identificadas. A primeira delas, denominada fase predita, envolve a solução dos deslocamentos incrementais a partir de um determinado acréscimo de carregamento. A segunda fase, denominada corretiva, tem por objetivo a correção das

forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos pela utilização de um processo iterativo. Tais forças internas são então comparadas com o carregamento externo, obtendo-se daí a quantificação do desequilíbrio existente entre forças internas e externas. O processo corretivo é feito até que, por intermédio de um critério de convergência, a estrutura esteja em equilíbrio.



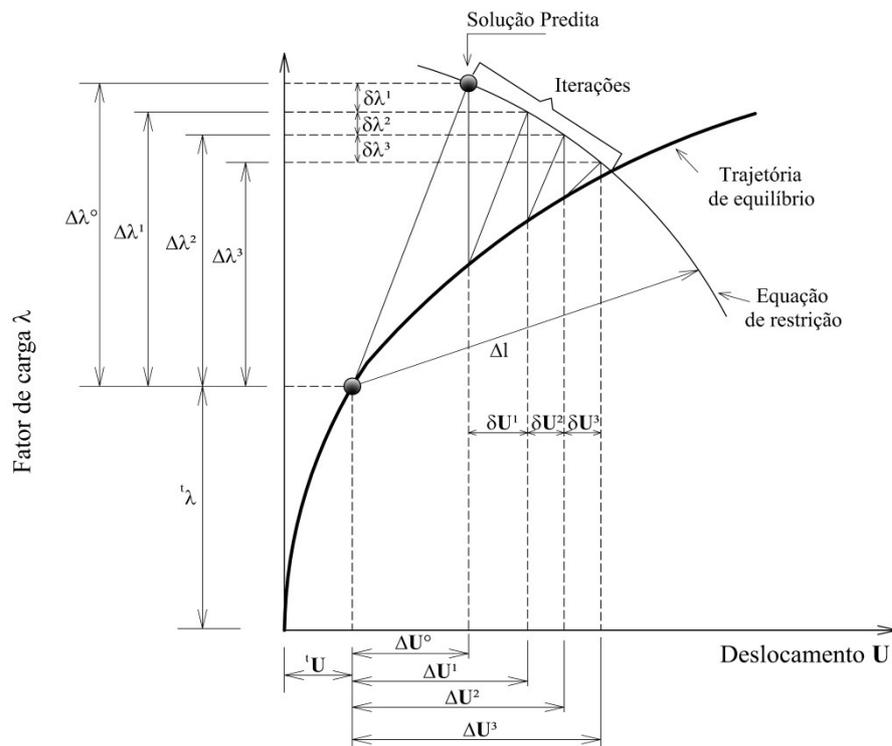
**Figura 3.1** Trajetória de equilíbrio

Os passos principais da metodologia de análise não linear serão apresentados adiante. Antes, porém, é necessário fazer algumas observações relacionadas à notação a ser adotada:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga  $t + \Delta t$ ;
- $k$  se refere ao contador do número de iterações em um determinado passo de carga. Para  $k = 0$ , tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo;
- $\lambda$  e  $\mathbf{U}$  definem o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{U}$  caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}$  denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais

obtidos durante o processo iterativo.

A metodologia incremental-iterativa é representada graficamente na Figura 3.2 para um único acréscimo de carga. Observa-se que, inicialmente, após a última configuração de equilíbrio da estrutura, representada pelo ponto de coordenadas  $({}^t\mathbf{U}, {}^t\lambda)$ , é selecionado um incremento de carga,  $\Delta\lambda^0$ , definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga. A partir daí, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ . As aproximações  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$  caracterizam o que é comumente chamado de solução incremental predita. Como  $\mathbf{F}_i$  é uma função não linear dos deslocamentos, a solução do problema, ponto de coordenadas  $({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0, {}^t\lambda + \Delta\lambda^0)$ , não satisfaz, a princípio, a condição de equilíbrio (3.1). Procura-se então, na segunda etapa do processo de solução, fase corretiva, usar um processo iterativo para corrigir essa solução e restaurar o equilíbrio da estrutura o mais eficientemente possível. Se as iterações realizadas envolvem não só a correção dos deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ , mas também do parâmetro de carga,  $\lambda$ , então uma equação adicional de restrição é requerida. Essas duas etapas do processo de solução não linear serão descritas nas subsecções seguintes.



**Figura 3.2** Metodologia de solução incremental-iterativa

### 3.2.1 Solução Incremental Predita

A primeira etapa para a obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente,  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$ , consiste na montagem da matriz de rigidez tangente,  $\mathbf{K}$ , utilizando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura. A partir daí, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{U}_r$ , usando a expressão:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r \quad (3.2)$$

Através de uma estratégia de incremento de carga é possível que se faça uma seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . Essa seleção pode estar condicionada a uma equação de restrição adicional imposta ao problema, como mostrado na Figura 3.2, por exemplo, para a restrição do comprimento de arco (Crisfield, 1981; 1991). A estratégia de incremento de carga adotada neste trabalho será apresentada adiante.

Definido o incremento inicial,  $\Delta\lambda^0$ , são determinados os deslocamentos nodais incrementais tangenciais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ , escalonando-se  $\delta\mathbf{U}_r$ , ou seja,

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r \quad (3.3)$$

Em seguida, podem ser atualizados o parâmetro de carga e os deslocamentos totais através do seguinte procedimento:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.4)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.5)$$

em que  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{U}$  caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga, como indicado na Figura 3.2.

Como anteriormente mencionado, a solução descrita pelas Equações (3.4) e (3.5) nem sempre satisfazem a condição de equilíbrio do sistema. Então, iterações subsequentes são necessárias para que se possa restaurar o equilíbrio. O processo iterativo será descrito a seguir.

### 3.2.2 Ciclo de Iterações: Método de Newton-Raphson

Em uma análise numérica, o uso do método de Newton-Raphson (Cook *et al.*, 1989) tem como objetivo determinar as raízes ou zeros de uma equação não linear. Nesse método, admite-se que, dada uma estimativa inicial para a raiz, o problema consiste em determinar

uma sequência de correções, até que se atinja a solução com uma precisão desejada. Para isso, a equação não linear, cujas raízes deverão ser determinadas, é aproximada através de uma série de Taylor (Press *et al.*, 1986; Heath, 1997). Grande parte dos métodos para solução de problemas estruturais não lineares baseia-se no método de Newton-Raphson para solução da Equação (3.1).

Para iniciar o desenvolvimento do método de Newton-Raphson, a Equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{g}$  representa o vetor gradiente (ou desequilíbrio de forças) que deve se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando assim que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido.

Para o incremento de carga no instante atual,  $t + \Delta t$ , a cada iteração, dada uma solução aproximada,

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^{(k-1)} = \mathbf{U}^{(k-1)} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} \quad (3.7)$$

calcula-se a correção  $\delta\mathbf{U}^k$ , tal que:

$$\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k) = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Nas equações acima, os termos  $k$  e  $k-1$  referem-se, respectivamente, às iterações corrente e anterior.

A partir da seguinte expansão em série de Taylor da equação anterior em torno de  $\mathbf{U}^{(k-1)}$ , ou seja,

$$\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k) \cong \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}^{(k-1)}} \delta\mathbf{U}^k + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial (\mathbf{U}^{(k-1)})^2} (\delta\mathbf{U}^k)^2 + \dots \quad (3.9)$$

é possível determinar  $\delta\mathbf{U}^k$ .

Usando apenas os dois primeiros termos da série, e substituindo-a em (3.8), obtém-se:

$$\delta\mathbf{U}^k = -\frac{\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)})}{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}^{(k-1)}}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}^{(k-1)}}\right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}) \quad (3.10)$$

na qual, a derivada (inclinação da reta tangente à curva que descreve o equilíbrio do sistema) corresponde fisicamente a matriz de rigidez tangente da estrutura,  $\mathbf{K}$ .

A Equação (3.10), que fornece a correção dos deslocamentos nodais, pode ser reescrita como:

$$\delta \mathbf{U}^k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}) \quad (3.11)$$

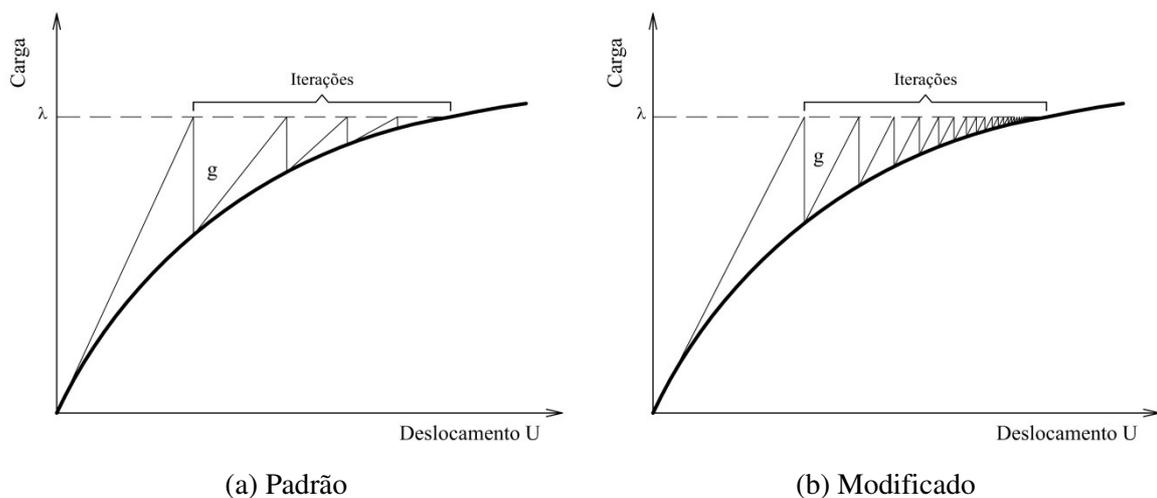
A nova estimativa para a solução, dada por:

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}^k \quad (3.12)$$

é considerada a solução do problema quando um determinado critério de convergência for satisfeito. Mais adiante, o critério adotado neste trabalho será descrito.

O método de Newton-Raphson padrão definido pelas Equações (3.11) e (3.12) é representado graficamente na Figura 3.3a para sistemas com um grau de liberdade. Observe que, a cada iteração, a inclinação da reta tangente é modificada. Esse método converge quadraticamente, se a solução inicial  $\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^0$  estiver próxima o suficiente da solução do sistema de equações (3.1). Além disso, a inversa da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  deve existir em todas as iterações necessárias até a convergência ser atingida.

O método de Newton-Raphson modificado é uma alteração da técnica padrão, na qual a inclinação da reta tangente obtida na primeira iteração é mantida constante. No contexto da análise estrutural, a matriz de rigidez permanece inalterada. Nesse caso, o número de iterações necessárias quando se utiliza o método modificado pode ser maior que o da técnica padrão. Tal método é ilustrado na Figura 3.3b.



**Figura 3.3** Interpretação geométrica dos métodos de Newton-Raphson

Os métodos de Newton-Raphson padrão e modificado são incapazes de ultrapassar os pontos limites que possam surgir ao longo da trajetória de equilíbrio. Isso acontece pelo fato do parâmetro de carga  $\lambda$  ser mantido constante durante o ciclo iterativo e, conseqüentemente, ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente que se torna singular nesses pontos. Portanto, caso se pretenda acompanhar todo o traçado da trajetória de equilíbrio, com possíveis passagens pelos pontos limites, é necessário que se permita a variação de  $\lambda$  a cada iteração. Tal variação é possível associando, às iterações de Newton, procedimentos numéricos que adicionam uma equação de restrição ao problema. A forma dessa equação de restrição é o que distingue as várias estratégias de iteração (Silveira, 1995; Galvão, 2000).

Seguindo a técnica geral de solução inicialmente proposta por Batoz e Dhatt (1979), onde a variação do parâmetro de carga é permitida, pode-se considerar que a mudança nos deslocamentos nodais é governada pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k\right), k \geq 1 \quad (3.13)$$

com  $\mathbf{g}$  sendo função dos deslocamentos nodais totais,  $\mathbf{U}^{(k-1)}$ , calculados na última iteração, e do valor corrente do parâmetro de carga total,  $\lambda^k$ , que agora também é uma incógnita escrita como:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.14)$$

sendo  $\delta\lambda^k$  a correção do parâmetro de carga.

Substituindo (3.14) em (3.13), tem-se:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \left[ \left( \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \right) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)} \right] \quad (3.15)$$

que pode ainda ser escrita como:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.16)$$

que é a equação procurada para se trabalhar durante o ciclo iterativo.

Da Equação (3.16), os deslocamentos nodais iterativos podem ser decompostos em duas parcelas, obtendo-se:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.17)$$

em que:

$$\delta \mathbf{U}_g^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.18)$$

$$\delta \mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (3.19)$$

Aqui,  $\delta \mathbf{U}_g$  é a correção que seria obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia de incremento do parâmetro de carga constante, e  $\delta \mathbf{U}_r$  é o vetor de deslocamentos iterativos resultante da aplicação de  $\mathbf{F}_r$ .

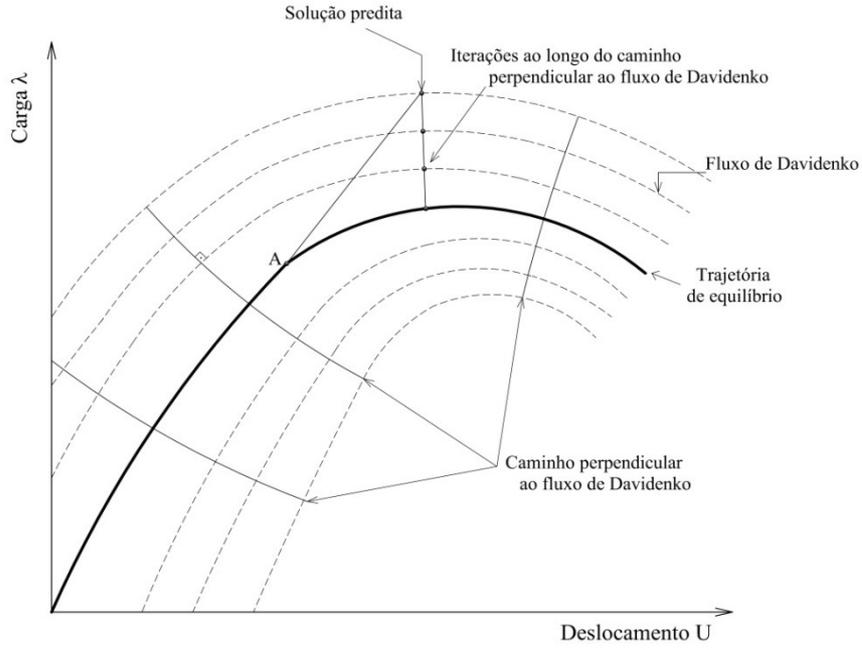
Caso seja adotado o método de Newton-Raphson modificado, a correção  $\delta \mathbf{U}_r$  na iteração corrente  $k$  será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais  $\delta \mathbf{U}_r$  calculado mediante a Equação (3.2). Esse parâmetro não se modifica durante as iterações, visto que  $\mathbf{K}$  permanece inalterada. Já a correção do parâmetro de carga,  $\delta \lambda^k$ , única incógnita da Equação (3.17), é determinada seguindo uma estratégia de iteração. No caso deste trabalho, a estratégia de iteração baseada no resíduo ortogonal foi utilizada. Tal estratégia será descrita na próxima seção. Com a determinação de  $\delta \lambda^k$ , retorna-se à Equação (3.17) para a obtenção da correção dos deslocamentos. O uso da expressão (3.17) será referido como processo convencional da metodologia de solução não linear.

Na técnica do fluxo normal, o equilíbrio entre forças internas e externas é alcançado realizando as iterações sequenciais dos métodos de Newton-Raphson, padrão ou modificado, ao longo de um caminho normal às curvas descritas pela Equação (3.6), como ilustra a Figura 3.4. Esse conjunto de curvas é conhecido na literatura como fluxo de Davidenko (Allgower e Georg, 1980). Com essa técnica, a expressão (3.17), usada para obter a correção dos deslocamentos nodais, é modificada e reescrita como:

$$\delta \mathbf{U}^k = \left( \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \right) - \frac{\left( \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \right)^T \delta \mathbf{U}_r^k}{\left( \delta \mathbf{U}_r^k \right)^T \delta \mathbf{U}_r^k} \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.20)$$

que é, segundo Watson *et al.* (1997), a única solução de norma euclidiana mínima da Equação (3.15).

Usando a Equação (3.20), os vetores  $\delta \mathbf{U}$  e  $\delta \mathbf{U}_r$  na iteração corrente  $k$  são sempre perpendiculares, uma vez que o segundo termo da diferença vetorial é a projeção do primeiro na direção do vetor  $\delta \mathbf{U}_r^k$ , como mostra a Figura 3.5.



**Figura 3.4** A técnica do fluxo normal

Com a obtenção da solução iterativa,  $\delta\lambda^k$  e  $\delta\mathbf{U}^k$ , faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema através das seguintes relações:

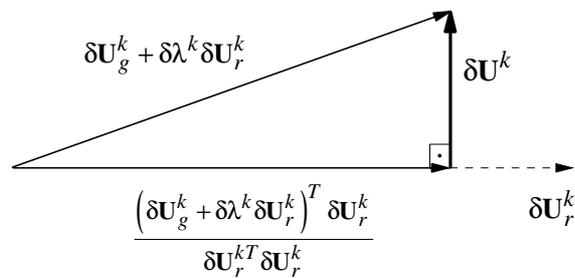
$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.21)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k \quad (3.22)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais tem-se:

$$(t+\Delta t)\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (3.23)$$

$$(t+\Delta t)\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (3.24)$$



**Figura 3.5** Os vetores  $\delta\mathbf{U}_r$  e  $\delta\mathbf{U}$  da iteração  $k$  na técnica do fluxo normal

Em qualquer processo iterativo, a solução não é exata, ou seja, é calculada aproximadamente. Portanto, alguns limites de tolerância devem ser fixados para a interrupção desse processo. Neste trabalho, foi adotado o critério de convergência baseado em relações de deslocamentos, que é sempre verificado ao final da iteração corrente e é definido como:

$$\zeta_1 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (3.25)$$

na qual o numerador é a norma euclidiana dos deslocamentos iterativos (residuais); e o denominador é a norma euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo; e  $\zeta$  é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada. É comum adotar valores entre  $10^{-3}$  e  $10^{-6}$ .

O processo incremental-iterativo descrito nesta seção é simplificado na Tabela 3.1. As estratégias usadas para calcular  $\Delta\lambda^0$  e  $\delta\lambda^k$  serão apresentadas nas duas próximas seções.

### 3.3 Incremento de Carga Baseado no GSP

Como destacado na seção anterior, a definição do valor inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , é um procedimento fundamental na obtenção da solução incremental predita. A seleção automática da magnitude do incremento desse parâmetro é importante, e deve refletir o grau de não linearidade corrente do sistema estrutural em estudo. Essa seleção é possível através de uma estratégia de incremento de carga, que, para ser eficiente deve satisfazer basicamente os seguintes critérios:

- gerar grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear;
- fornecer pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear;
- ser capaz de definir o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximo e mínimo são ultrapassados.

Procurando satisfazer os requerimentos anteriores, adotou-se neste trabalho a estratégia baseada no parâmetro de rigidez GSP (*Generalized stiffness parameter*). Essa estratégia foi apresentada por Yang e Kuo (1994), que propuseram a seguinte equação de restrição para ser respeitada nas duas etapas de solução não linear (solução predita e ciclo de iterações):

**Tabela 3.1** Metodologia incremental-iterativa para análise estática não linear

---

**1. SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:**  $\Delta\lambda^0, \Delta\mathbf{U}^0$

**1a.** Monta a matriz de rigidez tangente:  $\mathbf{K}$

**1b.** Resolve:  $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$

**1c.** Define  $\Delta\lambda^0$  usando uma estratégia de incremento de carga ► **SEÇÃO 3.3**

**1d.** Determina:  $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$

**1e.** Atualiza as variáveis na configuração  $t + \Delta t$ :

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \text{ e}$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$$

**2. PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:**  $k = 1, 2, 3, \dots, \text{nmáx}$

**2a.** Avalia o vetor de forças internas:  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$

**2b.** Calcula o vetor de forças residuais:  $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$

**2c.** Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$

**2d.** Corrige o parâmetro de carga,  $\delta\lambda^k$ , usando uma estratégia de iteração ► **SEÇÃO 3.4**

**2e.** Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k, \text{ se } \mathbf{Processo\ convencional}, \text{ ou,}$$

$$\delta\mathbf{U}^k = \left( \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \right) - \frac{\left( \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \right)^T \delta\mathbf{U}_r^k}{\delta\mathbf{U}_r^{kT} \delta\mathbf{U}_r^k} \delta\mathbf{U}_r^k, \text{ se } \mathbf{Técnica\ do\ fluxo\ normal},$$

$$\text{com } \delta\mathbf{U}_g^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$$

**2f.** Atualiza o parâmetro de carga,  $\lambda$ , e o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ :

a) *Incremental:*  $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$

b) *Total:*  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$

**2g.** Verifica a convergência utilizando o critério baseado em deslocamentos:

$$\frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta$$

**SIM:** Interrompa o processo iterativo e siga para o item 3

**NÃO:** Se  $k < \text{nmáx}$ , retorna ao passo 2

Se  $k = \text{nmáx}$ , reduz  $\Delta\lambda^0$  à metade e reinicia o processo incremental, passo 2

---

**3. REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 1**

---

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k + k_1 \delta \lambda^k = H_k \quad (3.26)$$

em que  $\mathbf{C}$  é uma matriz cujos elementos são constantes,  $k_1$  também é constante e  $H$  é um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco ou trabalho externo). Em função de valores selecionados para essas variáveis, chega-se a diferentes estratégias de incremento de carga e de iteração.

A equação de restrição anterior juntamente com a Equação (3.16) formam um sistema de equações com  $N+1$  incógnitas, onde  $N$  se refere à dimensão do vetor de deslocamentos e o 1, ao parâmetro de carga  $\lambda$ . Essas duas equações podem ser combinadas de forma que, após manipulações algébricas e matriciais, obtém-se a seguinte expressão para a correção do parâmetro de carga:

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_r^k + k_1} \left( H_k - \mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (3.27)$$

Usando os valores de  $\mathbf{C}$  e  $k_1$  sugeridos por Yang e Shieh (1990), ou seja,

$$\mathbf{C} = {}^t \delta \mathbf{U}_r \Delta \lambda^0 \text{ e } k_1 = 0 \quad (3.28)$$

onde  ${}^t \delta \mathbf{U}_r$  é o vetor de deslocamentos nodais tangenciais do passo de carga anterior, chega-se a uma nova expressão para  $\delta \lambda$ :

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_r^k} \left( H_k - \Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (3.29)$$

A solução incremental inicial  $\Delta \lambda^0$  é obtida fazendo, na equação anterior,  $k = 0$ ,  $\delta \lambda^0 = \Delta \lambda^0$ ,  $\delta \mathbf{U}_g^0 = \mathbf{0}$  e  $\delta \mathbf{U}_r^0 = \delta \mathbf{U}_r$ . Dessa forma, escreve-se:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{H_0}{{}^t \delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r}} \quad (3.30)$$

O valor do parâmetro incremental  $H_0$ , (no caso, deslocamento generalizado) pode ser definido usando a equação anterior e assumindo que, no primeiro passo de carga, se conhece o valor de  $\Delta \lambda^0$  (valor fornecido pelo analista). Assim, tem-se:

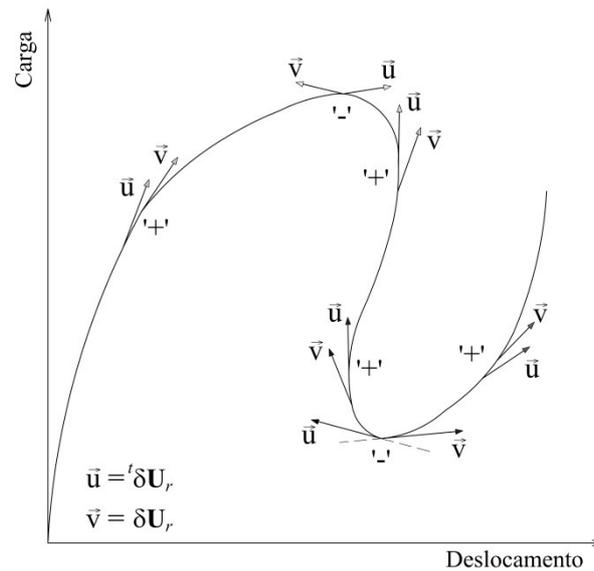
$$H_0 = (\Delta \lambda_1^0)^2 ({}^1 \delta \mathbf{U}_r^T) ({}^1 \delta \mathbf{U}_r) \quad (3.31)$$

Com a substituição de (3.31) em (3.30), chega-se a:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) {}^1\delta\mathbf{U}_r}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r}} \quad (3.32)$$

onde o radicando define o parâmetro de rigidez GSP.

O critério para escolher o sinal correto na expressão anterior é baseado no sinal do parâmetro GSP. De acordo com Yang e Kuo (1994), o sinal do parâmetro de rigidez corrente depende apenas dos vetores  ${}^t\delta\mathbf{U}_r$  (passo de carga anterior) e  $\delta\mathbf{U}_r$  (passo de carga corrente), como mostra a Figura 3.6. Dessa forma, o parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanecerá sempre positivo.



**Figura 3.6** Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado GSP (Yang e Kuo, 1994)

### 3.4 Iteração baseada no Resíduo Ortogonal

Ao longo do processo iterativo, a determinação da correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda$ , é função de uma dada estratégia de iteração ou equação de restrição imposta ao problema. A ideia básica de uma estratégia de iteração é tratar o parâmetro de carga  $\lambda$  como uma variável adicional, permitindo sua variação de forma a obter todo o traçado da trajetória de equilíbrio, com possíveis passagens pelos pontos limites. Com isso, para equilibrar o número de equações e o número de incógnitas, uma equação de restrição é somada às equações de equilíbrio originais.

Uma boa estratégia de iteração deve ser eficiente computacionalmente. Isso significa que, para um dado passo de carga, a configuração de equilíbrio do sistema estrutural em estudo deve ser obtida da forma mais rápida possível. Cabe enfatizar que não se pode esperar de nenhuma estratégia a resolução de problemas fortemente não lineares com igual eficiência computacional.

A estratégia do resíduo ortogonal, utilizada para correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo e foco principal deste trabalho, foi proposta por Krenk (1995). A cada iteração de equilíbrio, a magnitude da carga é ajustada de tal forma que o vetor de forças desequilibradas seja ortogonal ao incremento corrente de deslocamento. A estratégia impõe a condição física de que, para esse nível de carga, o incremento de deslocamento tem valor ótimo, ou seja, não modifica o vetor de forças desequilibradas. A condição de ortogonalidade é formulada diretamente em termos de forças e deslocamentos, e os passos básicos da metodologia proposta por Krenk são descritas a seguir.

No início de cada iteração  $k$ , existe ainda um desequilíbrio entre forças internas e externas. Nessa situação, o vetor de forças externas é  $({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)}) \mathbf{F}_r$ , e o vetor dos deslocamentos incrementais  $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$  é conhecido, permitindo o cálculo das forças internas,  $\mathbf{F}_i({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k-1)})$ . Objetiva-se, então, obter o vetor de forças externas que melhor se ajuste às forças internas de forma a minimizar o desequilíbrio existente entre essas grandezas. Esse vetor de forças externas corrigido pode ser escrito como:  $({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r$ .

Seguindo a ideia estabelecida por Krenk (1995), a correção do parâmetro de carga na iteração corrente  $k$ ,  $\delta\lambda^k$ , é calculada considerando os seguintes argumentos: a existência de forças residuais induz, evidentemente, o cálculo adicional de deslocamentos,  $\delta\mathbf{U}^k$ . Assumindo, então, que os deslocamentos incrementais da iteração anterior,  $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$ , são a melhor aproximação na direção dos deslocamentos incrementais da iteração corrente,  $\Delta\mathbf{U}^k$ , tem-se que a magnitude desse vetor se modificará de acordo com a projeção do vetor resíduo na direção dos deslocamentos. Sendo assim, os deslocamentos incrementais aumentarão ou diminuirão de acordo com o sinal do produto escalar,  $\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$ , onde:

$$\tilde{\mathbf{g}} = ({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}) \quad (3.33)$$

representa o vetor de forças residuais, que é obtido corrigindo as forças externas para produzir, como supracitado, um melhor ajuste às forças internas.

O vetor de deslocamentos incrementais  $\Delta\mathbf{U}^k$  terá valor ótimo se a condição de

ortogonalidade,

$$\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} = 0 \quad (3.34)$$

for satisfeita.

Substituindo a Equação (3.33) em (3.34), e desenvolvendo a expressão obtida, chega-se a:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\left( \mathbf{g}^{(k-1)} \right)^T \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}}{\mathbf{F}_r^T \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}} \quad (3.35)$$

que é a expressão procurada para a correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo. Nessa equação,  $\mathbf{g}$  representa o vetor de forças desequilibradas, que é calculado como:

$$\mathbf{g}^{(k-1)} = ({}^t \lambda + \Delta \lambda^{(k-1)}) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i({}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}) \quad (3.36)$$

De acordo com a Tabela 3.1, a equação anterior pode também ser escrita, numa forma simplificada, como:

$$\mathbf{g}^{(k-1)} = ({}^{t+\Delta t} \lambda)^{(k-1)} \mathbf{F}_r - ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i)^{(k-1)} \quad (3.37)$$

Finalizando este capítulo, mostra-se na Tabela 3.2 um fluxograma simplificado, indicando as estratégias de incremento de carga e iteração apresentadas neste capítulo. A expressão usada para obter os deslocamentos nodais iterativos quando se adota o processo convencional da metodologia de solução não linear, e aquela usada quando a técnica do fluxo normal é inserida, são também indicadas. É importante lembrar que a metodologia numérica para solução do problema estático não linear adotada neste trabalho é mostrada na Tabela 3.1.

**Tabela 3.2** Resumo das estratégias de incremento de carga e iteração adotadas

---

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n^{\circ}_{\text{máx}}$

Solução Predita:

$$\begin{cases} \Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \\ \Delta\mathbf{U}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \end{cases}$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \delta\lambda^k = -\frac{\left(\mathbf{g}^{(k-1)}\right)^T \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}}{\mathbf{F}_r^T \Delta\mathbf{U}^{(k-1)}} \\ \delta\mathbf{U}^k = \left(\delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k\right) \quad (\text{Processo convencional}) \\ \delta\mathbf{U}^k = \left(\delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k\right) - \frac{\left(\delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k\right)^T \delta\mathbf{U}_r^k}{\delta\mathbf{U}_r^{kT} \delta\mathbf{U}_r^k} \delta\mathbf{U}_r^k \quad (\text{Técnica do fluxo normal}) \end{cases}$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\delta\mathbf{U}^k\| \leq \zeta \|\Delta\mathbf{U}^k\|$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n^{\circ}_{\text{máx}}$

---

# Capítulo 4

## Análise Estática Não Linear de Arcos Esbeltos

### 4.1 Introdução

Pretende-se verificar neste capítulo, a eficiência computacional da estratégia do resíduo ortogonal (Krenk, 1995) associada à condição de perpendicularidade, referida como técnica do fluxo normal, apresentadas no capítulo anterior. Adicionalmente, será realizado um estudo para avaliar a influência da atualização da matriz de rigidez durante o processo iterativo de solução do problema estático não linear, e a influência da técnica do fluxo normal associada a outras estratégias iterativas disponíveis no programa CS-ASA (Silva, 2009). Para isso, arcos esbeltos serão analisados.

Os arcos são sistemas estruturais que, dependendo da magnitude e tipo de carregamento, da geometria, e das condições de apoio, podem exibir um comportamento fortemente não linear. No estudo da estabilidade desses arcos será considerado que o material permanece no regime linear elástico, e que a perda da estabilidade é, portanto, causada apenas pelos efeitos da não linearidade geométrica. É importante esclarecer que estruturas esbeltas podem perder a estabilidade sem que as cargas aplicadas sejam suficientes para causar a degradação do material. A solução numérica obtida nas análises será comparada às soluções analíticas ou numéricas encontradas na literatura para validar a metodologia de solução não linear usada neste trabalho.

Dessa forma, serão analisadas, nas duas próximas seções, as respostas estáticas de cinco arcos. Em todas as análises, admitiu-se uma tolerância de convergência igual a  $10^{-4}$  no processo iterativo, sendo adotado o critério de convergência baseado em relações de

deslocamentos. Fixou-se o número máximo de iterações igual a 21. Como critério para avaliar os pontos limites de carga, o GSP (*Generalized Stiffness Parameter*), definido na Seção 3.3, foi usado. Segundo Yang e Kuo (1994) o valor nulo desse parâmetro indica um ponto onde a reta tangente à curva carga-deslocamento tem inclinação nula. Além disso, o parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$  foi controlado, também, através do parâmetro de rigidez GSP. Cabe destacar que o valor inicial para  $\Delta\lambda^0$  é fornecido pelo analista para iniciar o processo de análise. Entretanto, esse valor é corrigido durante o processo iterativo do primeiro incremento. Para os demais passos de carga, a definição da intensidade do carregamento acontece automaticamente usando a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro de rigidez GSP. Vale lembrar que as estratégias de incremento de carga fornecem o incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$ , e a intensidade da carga aplicada é calculada multiplicando o parâmetro de carga pelo vetor de referências  $F_r$ .

Iniciando o estudo, na Seção 4.2 é verificada a influência da técnica do fluxo normal como condição de perpendicularidade a ser satisfeita durante o processo iterativo de obtenção do equilíbrio estrutural para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal. Na Seção 4.3 é apresentada a influência da atualização da matriz de rigidez durante o processo iterativo. Por fim, a influência da técnica do fluxo normal associada a outras estratégias de iteração é mostrada na Seção 4.4.

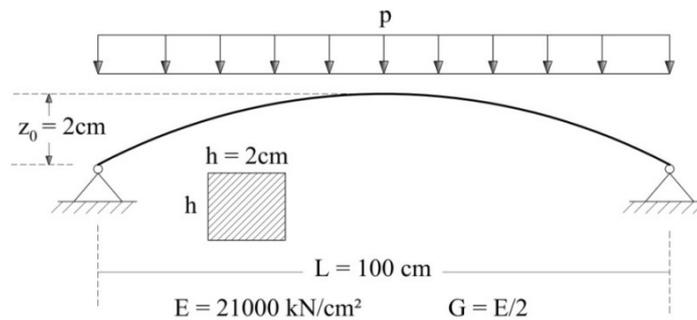
## **4.2 Influência da Condição de Perpendicularidade**

Esta seção tem como objetivo verificar a eficiência da associação entre estratégia do resíduo ortogonal e a técnica do fluxo normal no processo de solução da equação não linear de equilíbrio estrutural estático. Ambas foram implementadas no programa computacional CS-ASA pela autora deste trabalho. Foram estudados cinco sistemas estruturais que são usados frequentemente para validar formulações de elementos finitos, bem como estratégias de solução não linear. O processo convencional de solução não linear foi adotado em todas as análises para comparação.

A análise estática não linear dos seguintes sistemas estruturais: arco senoidal, arco circular abatido, arco circular rotulado-engastado, arco circular parcialmente carregado e arco circular biarticulado serão apresentadas nas subseções seguintes. As propriedades geométricas e físicas desses arcos e os parâmetros utilizados na análise serão apresentados ao longo desta seção.

### 4.2.1 Arco Senoidal

O primeiro exemplo a ser analisado trata-se do arco senoidal biapoiado submetido a um carregamento uniformemente distribuído,  $p$ . A Figura 4.1 ilustra o sistema estrutural descrito. Esse sistema pode ser encontrado na literatura como, por exemplo, nos trabalhos de Bergan (1980), Galvão (2004) e Silva (2009). Galvão (2004) utilizou o arco senoidal para validar algumas formulações de elementos finitos, e apresentou um estudo da influência de imperfeições nas condições de apoio e de carregamento na estabilidade desse arco. Silva (2009) realizou uma análise de vibração não linear, na qual a relação entre a frequência de vibração livre e a amplitude da resposta foi observada. Uma avaliação sobre o tipo, *hardening* ou *softening*, e grau de não linearidade do arco considerando diferentes condições de apoio foi feita.

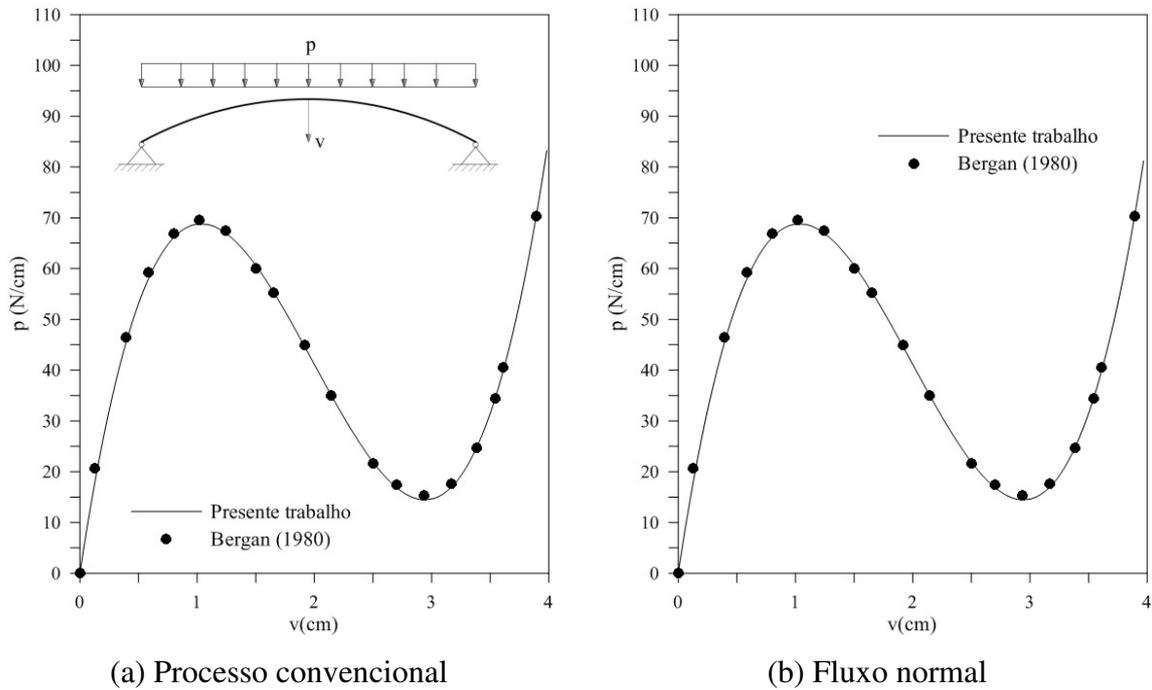


**Figura 4.1** Arco senoidal: geometria e carregamento

As análises foram realizadas discretizando o arco com vinte e seis elementos finitos. O método de Newton-Raphson padrão foi escolhido no processo de solução, e para iniciar a análise, a carga distribuída  $p$  foi assumida igual a 5 N/cm.

As trajetórias de equilíbrio obtidas usando a estratégia do resíduo ortogonal no processo convencional de solução, e a mesma estratégia associada ao fluxo normal são apresentadas na Figura 4.2. Foi feito o controle do deslocamento vertical no centro do arco. Para comparação, foram usados os resultados numéricos alcançados por Bergan (1980). Percebe-se que os resultados encontrados praticamente coincidem com aqueles da literatura para os dois casos. Para esse sistema estrutural foi possível observar eficiência no traçado completo do caminho de equilíbrio tanto no processo convencional quanto utilizando o fluxo normal. Nos dois casos, 116 incrementos de carga foram necessários para obter a curva ilustrada nessa figura. Porém, a metodologia de análise combinando a estratégia do resíduo ortogonal com o fluxo normal teve desempenho um pouco melhor

com relação ao número de iterações totais no processo de análise. Para o processo convencional, 232 iterações foram feitas; já, para o fluxo normal 229 iterações.



**Figura 4.2** Trajetória de equilíbrio para o arco senoidal

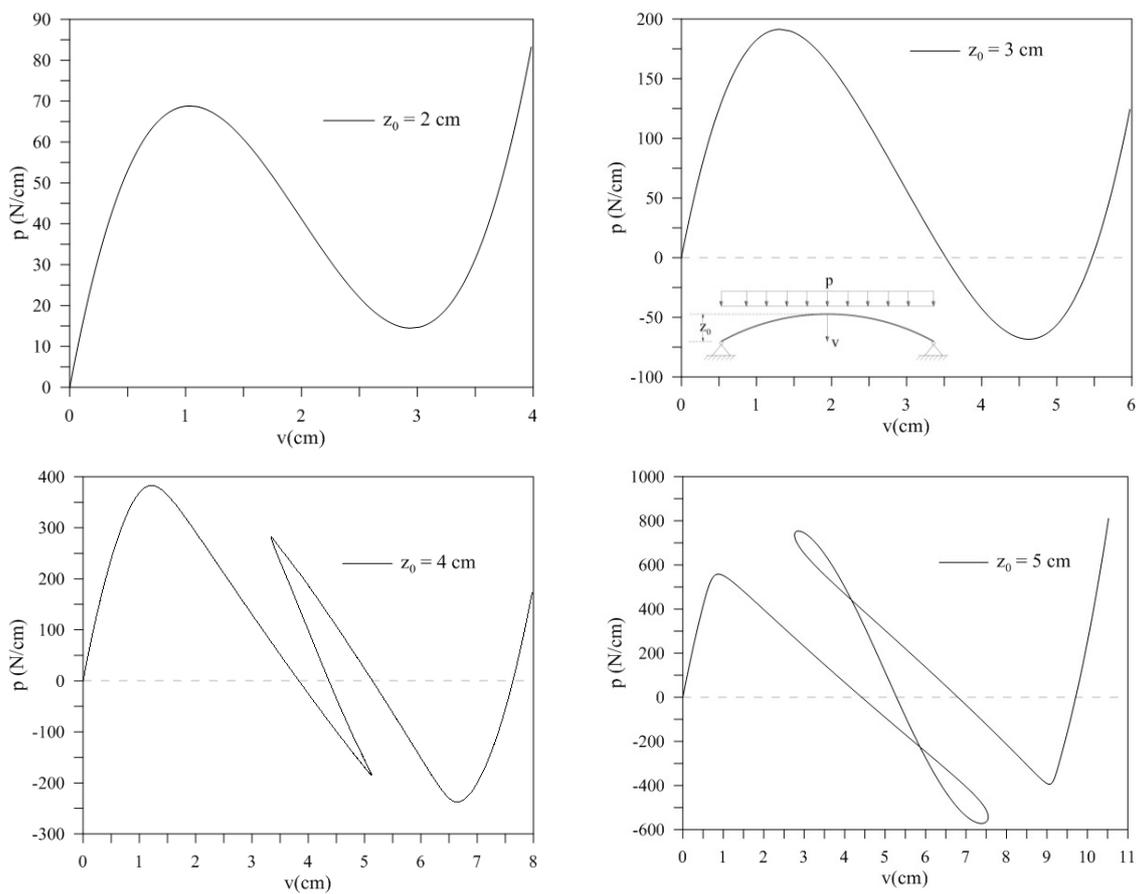
O caminho não linear, como se pode observar na curva carga-deslocamento vertical ilustrada na Figura 4.2, apresenta dois pontos limites de carga. A Tabela 4.1 apresenta os valores desses pontos que são comparados àqueles obtidos por Bergan (1980).

**Tabela 4.1** Valores limites de carga,  $p$  (N/cm)

Processo Convencional	Fluxo Normal	Bergan (1980)
68.8	68.8	69.8
14.8	14.6	15.4

A dificuldade encontrada pela estratégia do resíduo ortogonal em ultrapassar pontos limites de deslocamento é comentada nos trabalhos Rocha (2000), Fuína (2004) e Kouhia (2008). Entretanto, dependendo do sistema estrutural analisado, essa estratégia pode ser eficiente para contornar os pontos limites de carga e/ou deslocamento. Nesse sentido, para comprovar esse fato, variou-se a altura do arco,  $z_0$ . A influência desse parâmetro no comportamento estrutural pode ser verificada através das trajetórias de equilíbrio ilustradas

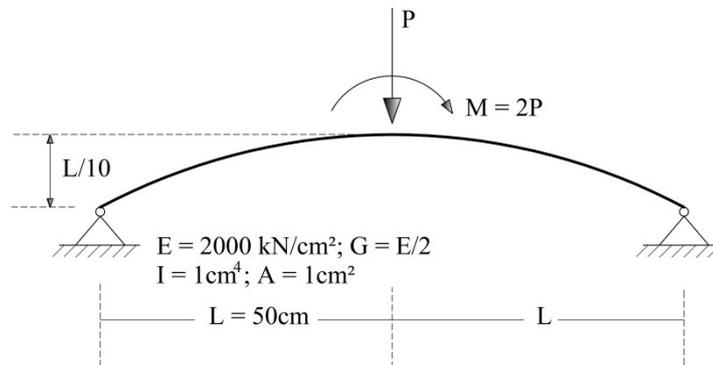
na Figura 4.3. As curvas mostradas nessa figura foram obtidas considerando os seguintes valores para  $z_0$ : 2, 3, 4 e 5 cm. É possível observar com essa alteração na configuração geométrica, que o comportamento não linear do arco senoidal vai se tornando mais acentuado, com a presença não só de pontos limites de carga, mas também de pontos limites de deslocamento. Destaca-se então que, mesmo com o aumento da não linearidade da resposta e o surgimento de pontos limites de deslocamento, a estratégia do resíduo ortogonal foi capaz de traçar o caminho de equilíbrio completo, ultrapassando os pontos limites presentes com bom desempenho. É importante mencionar que o processo convencional (Equação 3.17) foi usado nesse estudo, e os parâmetros de análise adotados anteriormente foram mantidos.



**Figura 4.3** Caminhos de equilíbrio para diferentes valores de  $z_0$

### 4.2.2 Arco Circular Abatido

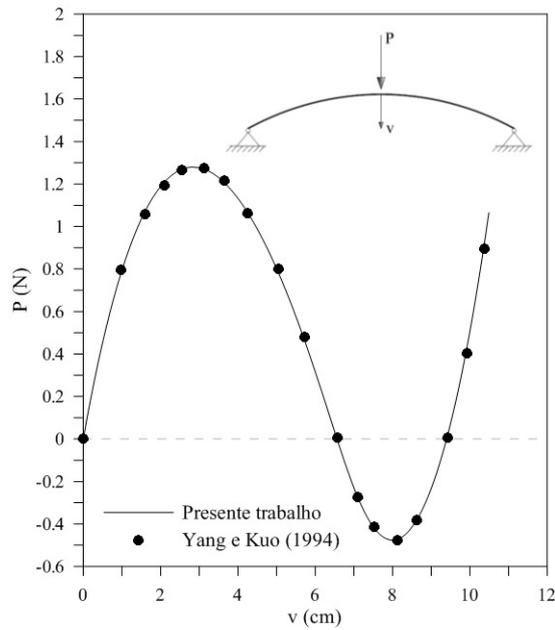
O próximo exemplo abordado é ilustrado na Figura 4.4. Trata-se do arco circular abatido birrotulado que será analisado considerando duas condições de carregamento. Primeiramente, o arco é submetido a uma carga vertical  $P$  aplicada no seu eixo de simetria (sistema estrutural perfeito). Em seguida, uma carga excêntrica representada pela força  $P$  associada a uma carga momento  $M$  de valor  $2P$  (sistema imperfeito) é considerada. A estrutura foi modelada considerando vinte e seis elementos finitos, e a intensidade da carga  $P$  para o primeiro incremento foi adotada igual a 0.1 N. O método de Newton-Raphson modificado foi usado.



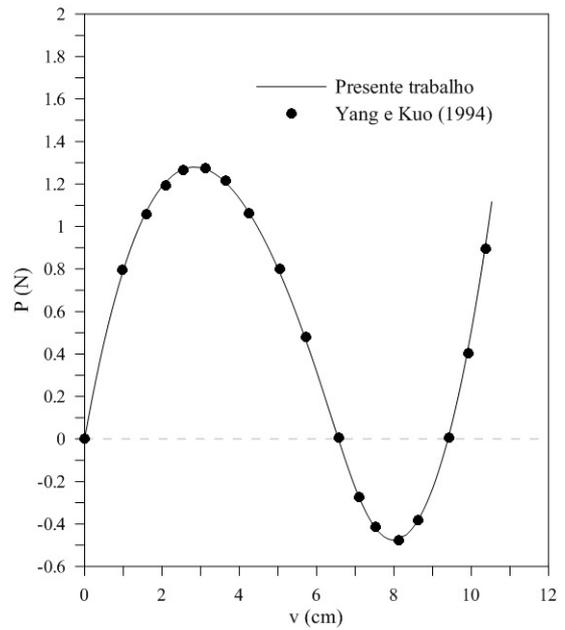
**Figura 4.4** Arco abatido birrotulado: geometria e carregamento

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram as trajetórias de equilíbrio para o sistema perfeito e imperfeito, respectivamente. As trajetórias, considerando a variação do deslocamento vertical,  $v$ , no ponto onde a carga pontual é aplicada, foram obtidas com o processo convencional e, também, com o fluxo normal. São usados para comparação os resultados fornecidos por Yang e Kuo (1994).

Como no exemplo anterior, o caminho de equilíbrio para o sistema perfeito (Figura 4.5) apresenta dois pontos limites de carga, e, novamente, a trajetória foi conseguida com eficiência para o processo convencional e, da mesma forma, para o fluxo normal. Também para esse exemplo, o desempenho com a utilização do fluxo normal se mostrou melhor, proporcionando um número menor de iterações totais, além de apresentar uma pequena diferença, para menos, no número de incrementos de cargas. Com o processo convencional, 126 incrementos de carga e 330 iterações foram necessários. Usando o fluxo normal, os valores foram: 124 incrementos de carga e 248 iterações.

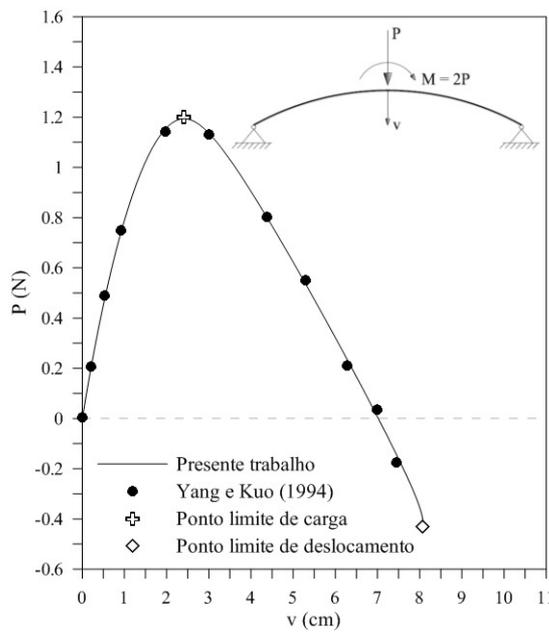


(a) Processo convencional

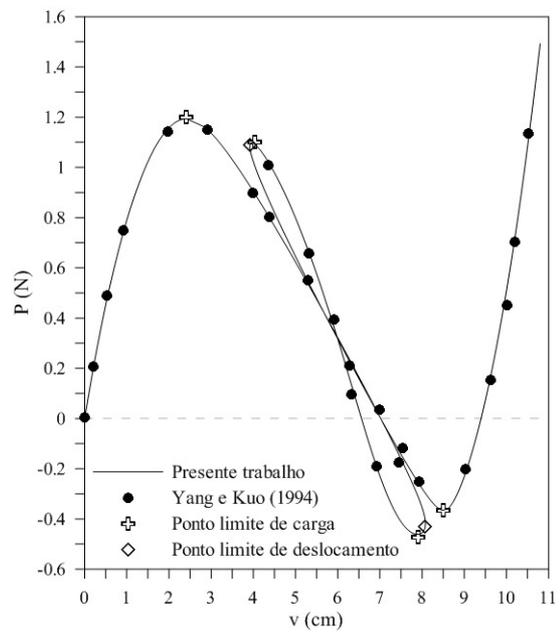


(b) Fluxo normal

**Figura 4.5** Trajetórias de equilíbrio: sistema estrutural perfeito



(a) Processo convencional



(b) Fluxo normal

**Figura 4.6** Trajetórias de equilíbrio: sistema estrutural imperfeito

Para o sistema imperfeito, entretanto, a não linearidade da resposta é mais acentuada. Verificam-se quatro pontos limites de carga e dois pontos limites de deslocamentos na Figura 4.6b. Pode-se observar que, com o processo convencional, não foi possível

completar o traçado da trajetória de equilíbrio. Nesse caso, a estratégia do resíduo ortogonal não foi eficiente, e a trajetória foi obtida apenas até o primeiro ponto limite de deslocamento, como ilustrado na Figura 4.6a. Por outro lado, quando a condição de perpendicularidade (técnica do fluxo normal) é introduzida na metodologia de solução não linear, é possível obter todo o caminho de equilíbrio com bom desempenho e eficiência.

Nota-se que os resultados alcançados estão muito próximos aos da literatura (Figura 4.6b). Essa proximidade fica ainda mais evidente através da Tabela 4.2. Nessa tabela, os pontos limites de carga e deslocamento destacados na Figura 4.6 são comparados àqueles fornecidos por Yang e Kuo (1994).

**Tabela 4.2** Pontos limites de carga e deslocamento – sistema estrutural imperfeito

Pontos Limites	Presente Trabalho	Yang e Kuo (1994)
<i>Carga</i>	1.194	1.200
	-0.461	-0.473
	1.098	1.100
	-0.365	-0.365
<i>Deslocamento</i>	8.080	8.08
	3.914	3.91

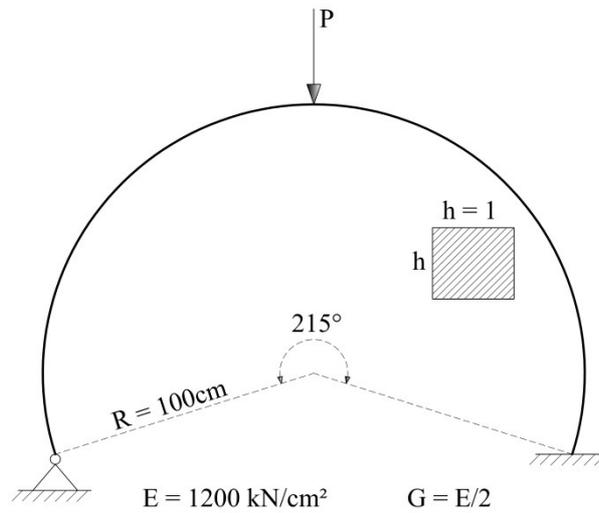
### 4.2.3 Arco Circular Rotulado-Engastado

O arco circular submetido à carga pontual centrada em seu eixo de simetria é ilustrado na Figura 4.7. Esse arco é engastado em uma extremidade e, na outra, a rotação em torno do eixo Z é permitida.

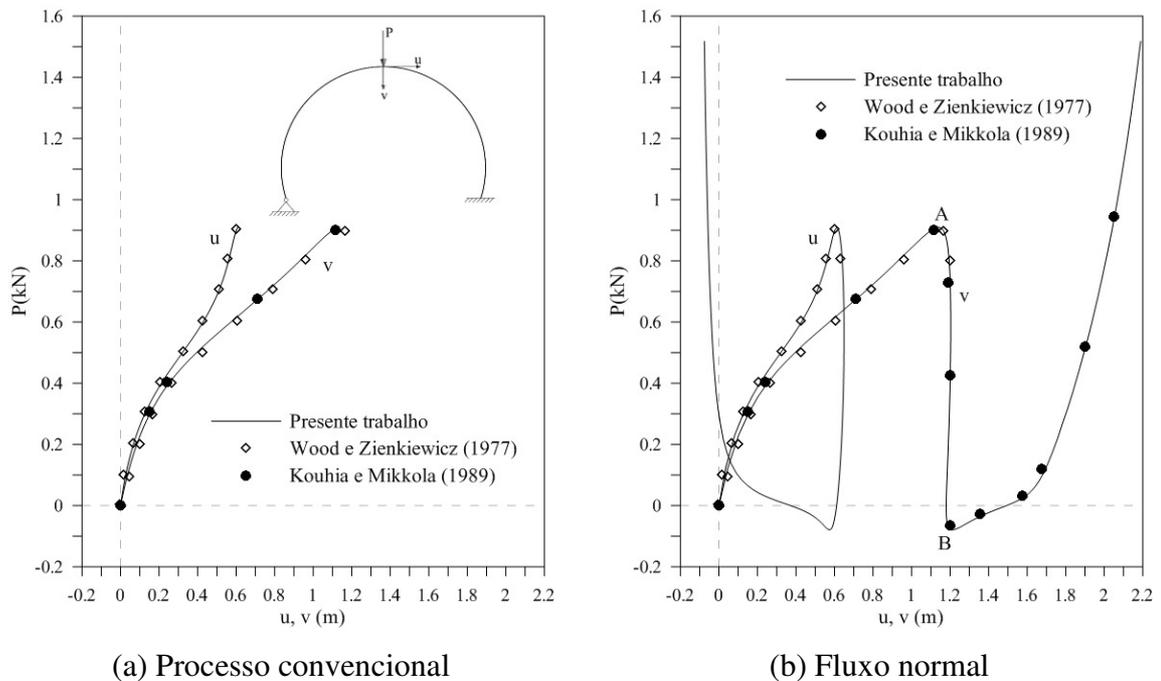
O mesmo sistema estrutural foi analisado por Wood e Zienkiewicz (1977) que forneceram a solução analítica para o problema até o primeiro ponto limite de carga. Kouhia e Mikkola (1989) apresentaram resultados numéricos obtidos através de um modelo formado por 64 elementos. Além desses autores, outros podem ser destacados: Cardona e Huespe (1999), Battini *et al.* (2003) e, recentemente, Makinen *et al.* (2011).

Uma malha composta por trinta e dois elementos finitos foi adotada neste trabalho para a modelagem do sistema estrutural. A carga  $P$  foi assumida igual a 150 N para iniciar a análise. Para o processo iterativo, optou-se pelo método de Newton-Raphson padrão.

As trajetórias de equilíbrio obtidas controlando os deslocamentos horizontal,  $u$ , e vertical,  $v$ , no centro do arco são mostradas na Figura 4.8. Os resultados obtidos analiticamente por Wood e Zienkiewicz (1977) e, numericamente, por Kouhia e Mikkola (1989) são usados para comparação.



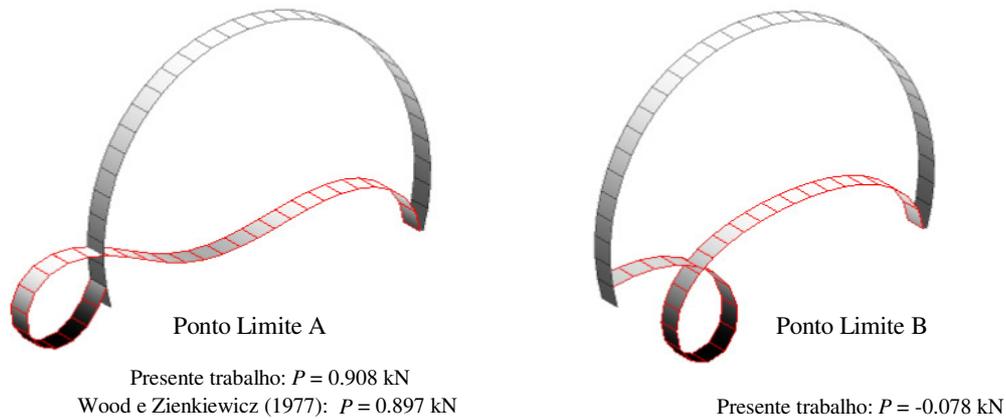
**Figura 4.7** Arco rotulado-engastado: geometria e carregamento



**Figura 4.8** Curvas carga-deslocamento

Na Figura 4.8a é observado que, com o processo convencional, houve dificuldade para contornar o primeiro ponto limite de carga, e as configurações de equilíbrio não foram obtidas além desse ponto. A Figura 4.8b mostra que essa dificuldade é superada considerando o fluxo normal. Utilizando essa técnica, os pontos limites de carga  $A$  e  $B$ , indicados também nessa figura, são ultrapassados com eficiência possibilitando novamente o traçado completo da trajetória de equilíbrio.

As configurações deformadas do arco referentes aos dois pontos limites de carga, *A* e *B*, são ilustradas na Figura 4.9, onde as cargas *P* correspondentes a esses pontos são também informadas. Nota-se uma boa concordância do primeiro ponto limite de carga *A* com o fornecido por Wood e Zienkiewicz (1977).

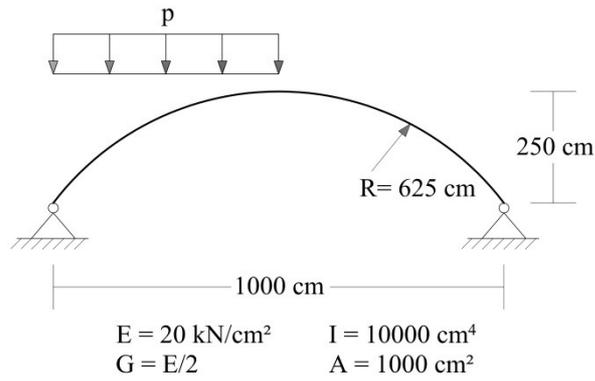


**Figura 4.9** Configurações deformadas

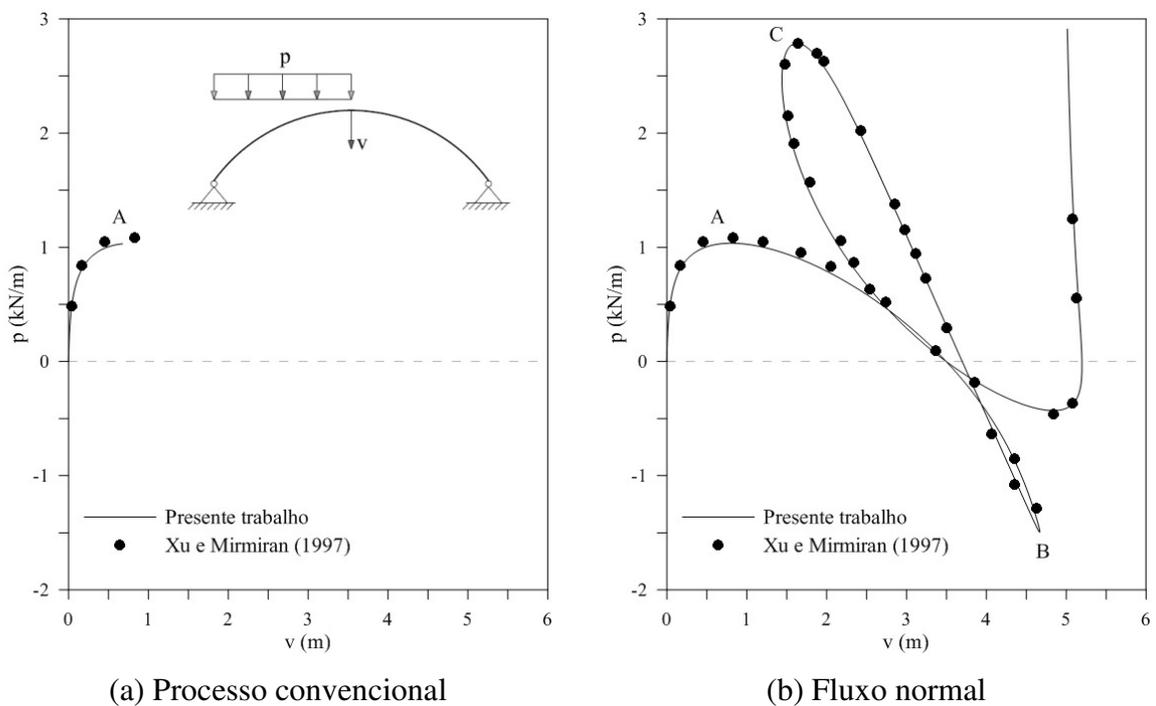
#### 4.2.4 Arco Circular Parcialmente Carregado

O arco circular biapoiado submetido a um carregamento uniformemente distribuído em metade de sua extensão é analisado nesta seção. Tal estrutura é ilustrada na Figura 4.10. Para realizar a análise estática, foram adotados vinte elementos finitos na modelagem do arco. A intensidade da carga distribuída *p* para o primeiro incremento foi considerada igual a 100 N/m, e optou-se pelo método de Newton-Raphson padrão.

As variações do deslocamento vertical do centro do arco com carga são mostradas na Figura 4.11. É possível verificar, através da Figura 4.11b, o comportamento fortemente não linear do arco parcialmente carregado. A curva apresenta três pontos limites de deslocamento e quatro pontos limites de carga, e somente com a utilização da técnica do fluxo normal, esses pontos foram ultrapassados possibilitando o traçado do caminho de equilíbrio completo. A estratégia do resíduo ortogonal, quando o processo convencional da metodologia de solução foi adotado, se mostrou mais uma vez incapaz de obter todo o caminho de equilíbrio, alcançando apenas pontos próximos ao primeiro ponto limite de carga (Figura 4.11a).



**Figura 4.10** Arco parcialmente carregado: geometria e carregamento



**Figura 4.11** Curvas carga-deslocamento vertical

Os resultados encontrados aqui foram comparados aos obtidos numericamente por Xu e Mirmiran (1997), como pode ser observado na Figura 4.11 e na Tabela 4.3. Nessa tabela encontra-se a diferença relativa entre os valores obtidos por esses autores e os obtidos no presente trabalho. São fornecidos os valores para os três primeiros pontos limites de carga, indicados pelas posições *A*, *B* e *C* na Figura 4.11b. Nota-se que as cargas referentes aos pontos *A* e *B* deste trabalho apresentam uma pequena diferença em relação àquelas encontradas por Xu e Mirmiran (1997). Já o resultado para o ponto *C* é bem próximo daquele fornecido pelos referidos pesquisadores.

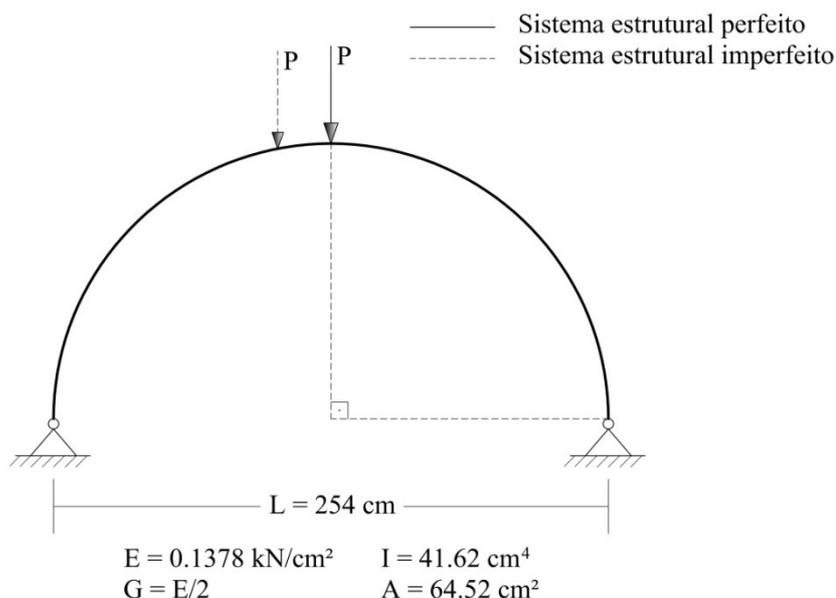
**Tabela 4.3** Valores limites de carga,  $p$  (N/m)

Pontos Limites de Carga	Presente Trabalho	Xu e Mirmiran (1997)	Diferença (%)
A	1035.57	1128.04	8.20
B	-1492.08	-1645.77	9.34
C	2787.10	2784.46	-0.09

#### 4.2.5 Arco Circular Biarticulado

O próximo exemplo que será analisado neste trabalho, trata-se do arco circular biarticulado. Esse sistema estrutural, ilustrado pela Figura 4.12, foi inicialmente estudado por Harrison (1978), e mais tarde por Yang e Kuo (1994).

Assim como no exemplo estudado na Seção 4.2.2, o sistema estrutural em questão foi analisado considerando duas configurações de carregamento. Na primeira, a carga pontual é aplicada no eixo de simetria do sistema (sistema perfeito); na segunda situação, essa carga foi deslocada e aplicada no ponto nodal mais próximo ao eixo de simetria do arco de modo a produzir o efeito da imperfeição (sistema imperfeito). Considerando a simetria do modelo, para realizar a análise do sistema perfeito, apenas metade do arco foi discretizada. Nesse caso, trinta e quatro elementos finitos foram adotados e restringiu-se o deslocamento axial e a rotação do ponto de aplicação da carga. Já no estudo do sistema imperfeito, utilizaram-se sessenta e oito elementos finitos para modelar o arco completo.



**Figura 4.12** Arco biarticulado: geometria e carregamento

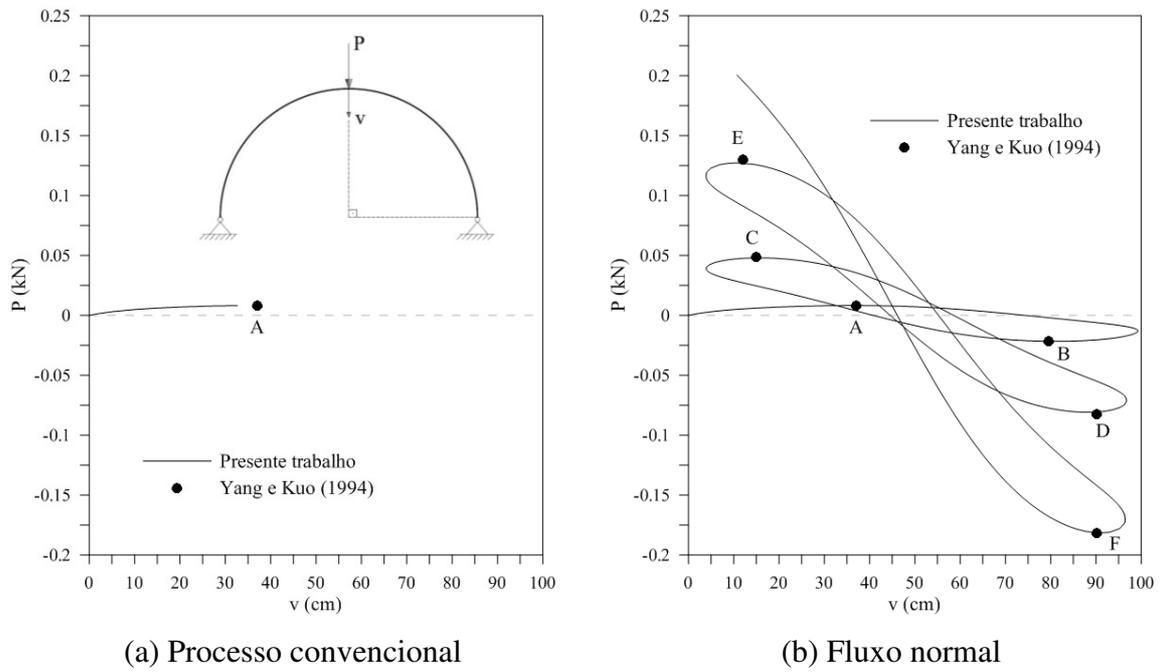
As duas configurações de carregamento provocam respostas altamente não lineares do arco, caracterizadas pela presença de vários pontos limites de carga e deslocamento. Isso pode ser observado através das trajetórias de equilíbrio mostradas nas Figuras 4.13 e 4.15, para os sistemas perfeito e imperfeito, respectivamente. Essas trajetórias foram obtidas considerando a carga  $P$  igual a  $0.4N$  para iniciar a análise e o método de Newton-Raphson padrão.

Assim como nos três exemplos anteriores, a estratégia do resíduo ortogonal no processo convencional da metodologia de solução não linear se mostrou incapaz de obter o caminho completo de equilíbrio, apresentando dificuldade em ultrapassar o primeiro ponto limite de carga,  $A$ . Apenas valores próximos ou até esse ponto limite são alcançados, como ilustrado nas Figuras 4.13a e 4.15a. A mesma dificuldade não é observada quando a técnica do fluxo normal é usada. As Figuras 4.13b e 4.15b mostram o caminho de equilíbrio completo obtidos utilizando essa técnica. Nessas figuras, destacam-se, também, os pontos limites de carga obtidos por Yang e Kuo (1994).

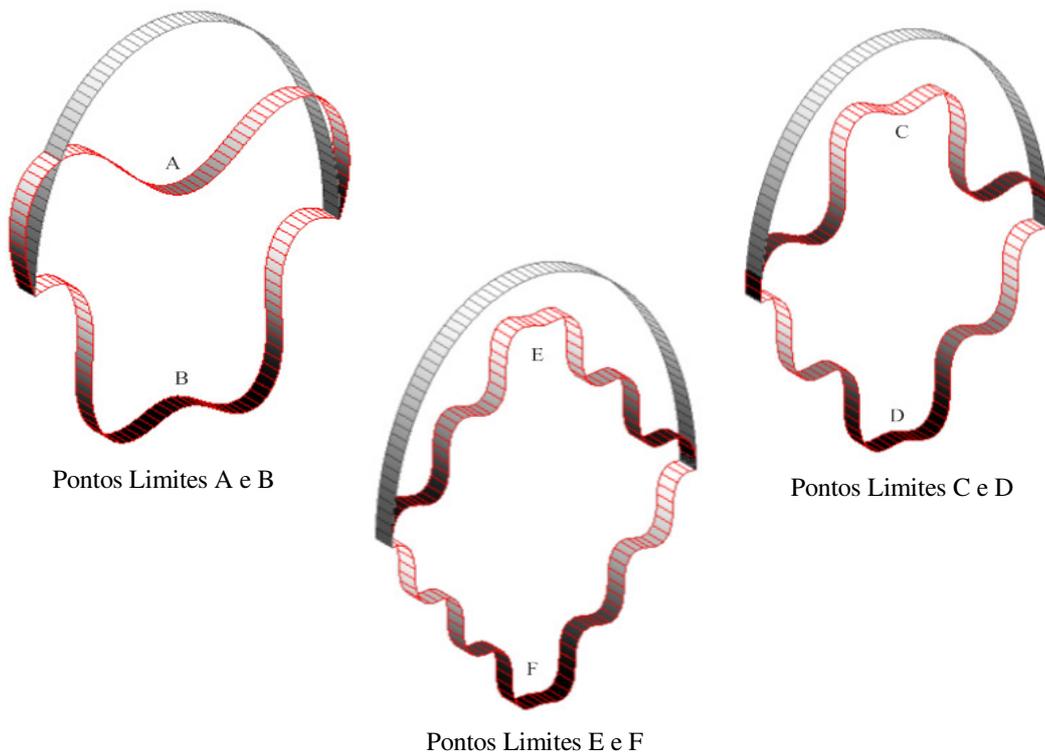
Os pontos limites de carga presentes nas trajetórias de equilíbrio, considerando as duas situações de carregamento, são apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.5 onde são comparados aos fornecidos por Yang e Kuo (1994). Nota-se que os resultados obtidos no presente trabalho apresentam boa concordância com aqueles encontrados por esses autores. As configurações deformadas do arco após cada uma das cargas limite agirem sobre o sistema são ilustradas na Figura 4.14 para o sistema estrutural perfeito, e na Figura 4.16 para o sistema imperfeito.

E, finalmente, a partir dos exemplos clássicos analisados no presente trabalho, pode-se concluir que a condição de perpendicularidade imposta no processo iterativo — técnica do fluxo normal — acoplada à estratégia do resíduo ortogonal torna possível a superação de problemas de instabilidade nas proximidades de pontos limites observado com o uso dessa estratégia e o processo convencional de solução não linear. Os resultados alcançados com essa combinação foram satisfatórios quando comparados aos da literatura, comprovando a eficiência do fluxo normal na estabilização da estratégia do resíduo ortogonal, permitindo obter o caminho de equilíbrio completo de arcos com comportamento fortemente não linear.

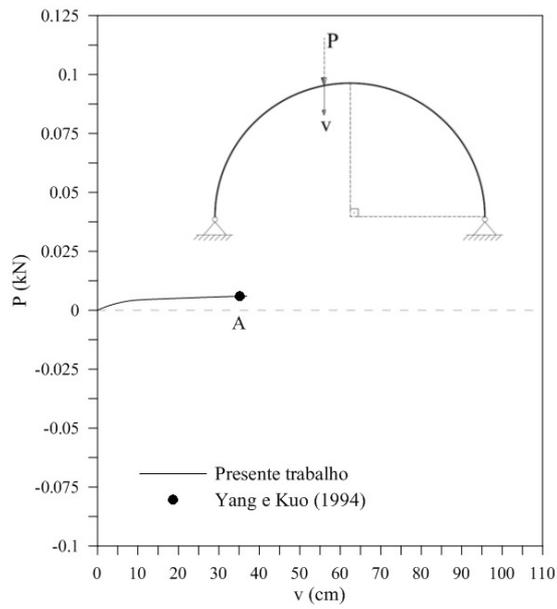
Na próxima seção serão mostrados alguns parâmetros que influenciam a metodologia de solução da análise estática não linear usada neste trabalho.



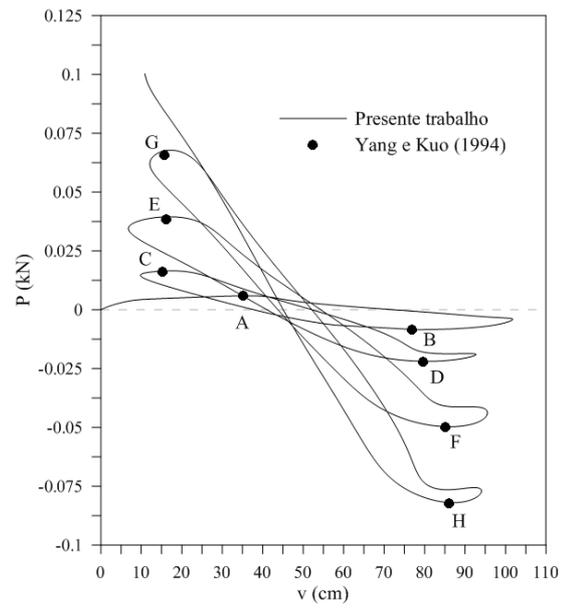
**Figura 4.13** Trajetórias de equilíbrio: sistema estrutural perfeito



**Figura 4.14** Configurações deformadas: sistema estrutural perfeito

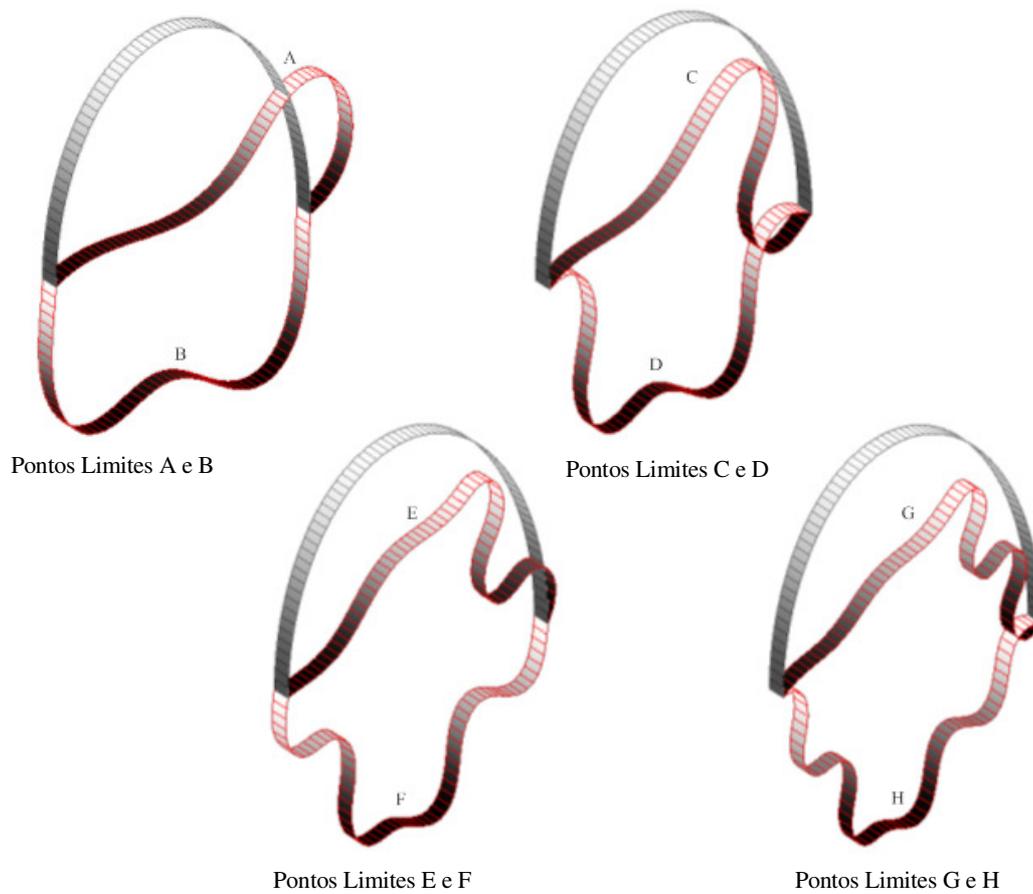


(a) Processo convencional



(b) Fluxo normal

**Figura 4.15** Trajetórias de equilíbrio: sistema estrutural imperfeito



**Figura 4.16** Configurações deformadas: sistema estrutural imperfeito

**Tabela 4.4** Valores limites de carga,  $P$  (N): sistema estrutural perfeito

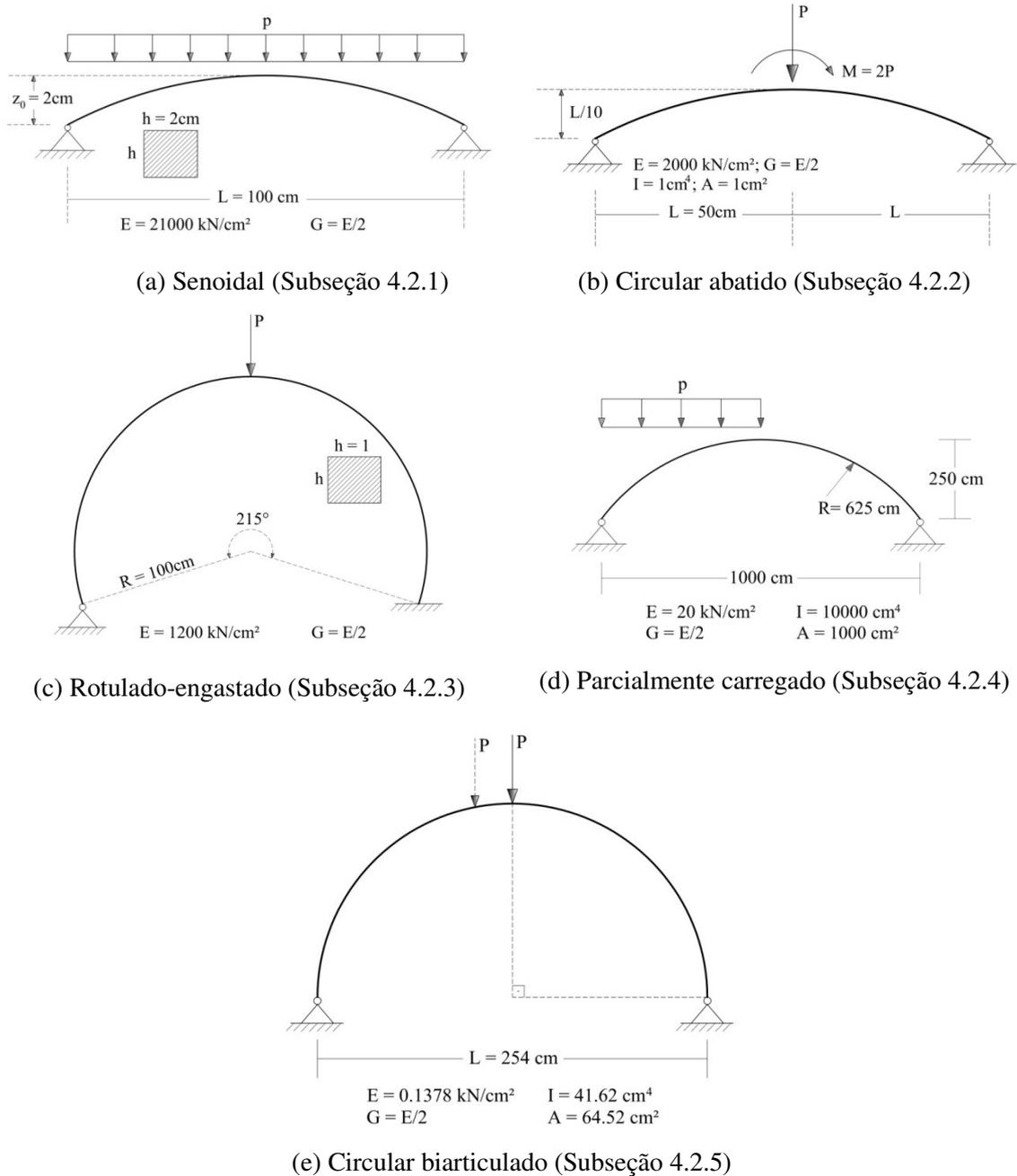
<b>Pontos Limites de Carga</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Yang e Kuo (1994)</b>
<i>A</i>	8.137	8.186
<i>B</i>	-21.705	-21.928
<i>C</i>	47.916	48.648
<i>D</i>	-80.885	-82.900
<i>E</i>	127.196	129.841
<i>F</i>	-181.624	-182.003

**Tabela 4.5** Valores limites de carga,  $P$  (N): sistema estrutural imperfeito

<b>Pontos Limites de Carga</b>	<b>Presente Trabalho</b>	<b>Yang e Kuo (1994)</b>
<i>A</i>	5.904	5.813
<i>B</i>	-8.463	-8.498
<i>C</i>	16.524	16.149
<i>D</i>	-21.901	-22.162
<i>E</i>	39.521	38.566
<i>F</i>	-49.712	-49.896
<i>G</i>	67.822	64.875
<i>H</i>	-81.958	-82.420

### 4.3 Influência da Atualização da Matriz de Rigidez

Como destacado no capítulo anterior, grande parte das técnicas de solução de problemas não lineares baseia-se na aplicação do método de Newton-Raphson. Neste trabalho, foram adotadas duas variantes desse método: Newton-Raphson padrão e modificado. No primeiro, a matriz de rigidez tangente é atualizada a cada iteração; já no segundo, a matriz obtida na primeira iteração é mantida constante durante todo o ciclo iterativo. Sendo assim, esta seção tem como objetivo apresentar um estudo envolvendo a influência dessas duas variantes do método no processo iterativo de solução. Para isso, os arcos apresentados na seção anterior são usados novamente. Essas estruturas são exibidas na Figura 4.17, onde se indica também a subseção na qual cada uma delas foi analisada. Os valores iniciais de cargas, detalhes da modelagem e as propriedades físicas e geométricas foram mantidos, e podem ser encontrados nas subseções correspondentes. Com o estudo realizado na seção anterior comprovou-se que a estratégia do resíduo ortogonal torna-se bastante eficiente quando a técnica do fluxo normal é também adotada. Sendo assim, nesta seção o estudo será realizado considerando apenas essa combinação de estratégias.



**Figura 4.17** Arcos analisados

São apresentados na Tabela 4.6, para fins de comparação, os parâmetros relevantes em uma análise estática não linear: o número total de incrementos de carga ( $N_{tot}$ ) e de iterações ( $I_{tot}$ ); o número médio de iterações por incremento de carga ( $I_{méd}$ ); o tempo de processamento em segundos ( $CPU$ ); e o número total de reinicializações ( $Rein$ ). Cabe esclarecer que a reinicialização acontece quando se atinge o número máximo de iterações desejadas ( $nmáx$ ) (considerado igual a 21 para todos os exemplos) e não se obtém a convergência para um dado incremento de carga. Nesse caso, então, retorna-se à última

configuração de equilíbrio conhecida, e reinicializa-se o processo incremental-iterativo considerando metade do valor encontrado para  $\Delta\lambda^0$ .

Através dos resultados apresentados na Tabela 4.6, é possível perceber que o melhor desempenho nas análises foi conseguido quando a matriz de rigidez foi atualizada a cada iteração durante o processo iterativo, ou seja, usando o método de Newton-Raphson padrão. Para os dois exemplos estudados nas Subseções 4.2.1 e 4.2.2, entretanto, nota-se um desempenho equivalente entre as duas variantes do método de Newton-Raphson. O tempo de processamento para a técnica padrão é ligeiramente superior, mas, por outro lado, menos iterações são necessárias para a convergência. Considerando os resultados alcançados com as demais análises, a superioridade do método padrão é nítida em todos os parâmetros fornecidos.

**Tabela 4.6** Influência da atualização da matriz de rigidez

Arcos (Figura 4.17)	Newton-Raphson Padrão					Newton-Raphson Modificado				
	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU*	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU*
Senoidal	116	232	2	0	1.64	117	234	2	0	1.01
Circular abatido <i>S. Perfeito</i>	124	248	2	0	1.61	124	258	2	0	1.1
Circular abatido <i>S. Imperfeito</i>	262	550	2	0	3.18	262	861	3	0	1.76
Rotulado-engastado	111	425	4	1	3.73	11466	49787	4	8	94.93
Parcialmente carregado	393	1070	3	0	4.62	1850	7218	4	3	8.97
Circular biarticulado <i>S. Perfeito</i>	647	1848	3	0	15.92	6792	22781	3	4	64.18
Circular biarticulado <i>S. Imperfeito</i>	2552	7160	3	1	296.86	11111	42616	4	3	436.48

\*Nota: CPU avaliado em um Pentium(R) Dual-Core CPU T4300 @ 2.10GHz e memória RAM de 4GB

## 4.4 Influência do Fluxo Normal em Outras Estratégias de Iteração

A técnica do fluxo normal, como destacado no capítulo anterior, trata-se basicamente de uma modificação estabelecida no esquema iterativo de Newton-Raphson na tentativa de acelerar o processo de solução e/ou contornar problemas de convergência. Mostrou-se na Seção 4.2 que, para a estratégia do resíduo ortogonal, os problemas de convergência típicos

do método foram superados com o uso da técnica do fluxo normal. Como no sistema computacional CS-ASA diversas outras estratégias estão disponíveis, a implementação do fluxo normal visa, também, possibilitar a sua utilização em conjunto com essas estratégias.

Assim, esta seção apresenta um estudo cujo objetivo é comparar a influência da técnica do fluxo normal na eficiência também de outras estratégias de iteração presentes no programa CS-ASA. Dentre as estratégias de iteração disponíveis nesse programa, duas foram consideradas aqui: iteração a norma mínima dos deslocamentos residuais (Chan, 1988) e iteração a deslocamento generalizado (Yang e Shieh, 1990). Tais estratégias são detalhadas no Apêndice A. É importante destacar que o mesmo esquema de incremento automático do parâmetro de carga apresentado no capítulo anterior, Seção 3.3, foi usado.

Os exemplos analisados nas Seções 4.2.4 e 4.2.5 serão novamente usados. Os mesmos parâmetros avaliados na seção anterior: número total de incrementos de carga e de iterações ( $N_{tot}$  e  $I_{tot}$ ), número médio de iterações por incremento de carga ( $I_{méd}$ ), tempo de processamento em segundos ( $CPU$ ) e número total de reinicializações ( $Rein$ ) são usados para comparação. Os resultados obtidos são mostrados separadamente para cada um dos arcos nas duas próximas subseções.

#### **4.4.1 Arco Circular Parcialmente Carregado**

O arco circular parcialmente carregado, ilustrado na Figura 4.10, é analisado considerando os mesmos parâmetros iniciais de análise adotados na Seção 4.2.4. Na Tabela 4.7 são indicados os valores dos parâmetros  $N_{tot}$ ,  $I_{tot}$ ,  $I_{méd}$ ,  $CPU$  e  $Rein$  encontrados usando o processo convencional e, também, a técnica do fluxo normal na solução do problema estrutural. São mostrados, ainda, os resultados alcançados com a estratégia do resíduo ortogonal em conjunto com o fluxo normal. Pode-se observar que o desempenho da mesma é equivalente ao das demais.

Comparando os parâmetros de análise é possível observar a similaridade entre o desempenho computacional conseguido com o processo convencional e com o fluxo normal para as duas estratégias consideradas. Para este exemplo e para os parâmetros que foram adotados na análise, é possível perceber que a introdução da técnica do fluxo normal na análise não favorece em nada a eficiência dessas estratégias. No entanto, se o método de Newton-Raphson modificado é adotado na análise, verifica-se, através da Tabela 4.8, uma melhora significativa na estratégia baseada no deslocamento generalizado. Essa análise foi apresentada e discutida detalhadamente em Maximiano *et al.* (2011).

**Tabela 4.7** Avaliação da eficiência computacional das estratégias adotadas

Estratégia	Processo Convencional					Fluxo Normal				
	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU
Norma Mínima	393	1070	3	0	4.34	393	1070	3	0	4.57
Desl. Generalizado	393	1224	3	0	4.76	393	1224	3	0	4.81
Resíduo Ortogonal	-	-	-	-	-	393	1070	3	0	4.62

**Tabela 4.8** Influência dos métodos de Newton-Raphson no processo de solução

Newton-Raphson	Processo Convencional					Fluxo Normal				
	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU
Padrão	393	1224	3	0	4.76	393	1224	3	0	4.81
Modificado	2497	13187	5	3	11.15	1500	9412	6	2	7.46

#### 4.4.2 Arco Circular Biarticulado

Da mesma forma que na análise do exemplo anterior, foram mantidos os mesmo parâmetros iniciais adotados na Subseção 4.2.5 para o estudo do arco circular biarticulado mostrado na Figura 4.12. Porém, será considerada aqui, apenas uma situação de carregamento, o da carga pontual aplicada no eixo de simetria do arco.

A Tabela 4.9 apresenta os valores encontrados para os parâmetros  $N_{tot}$ ,  $I_{tot}$ ,  $I_{méd}$ ,  $CPU$  e  $Rein$  usando o processo convencional e a técnica do fluxo normal. Pode-se observar uma diferença significativa entre essas duas abordagens quando a estratégia de iteração baseada no deslocamento generalizado é usada. Os resultados mostram um número de incrementos de carga menor, menos iterações totais e a não ocorrência de reinicializações. Sendo assim, o tempo de processamento é bastante inferior.

A influência do fluxo normal na eficiência dessa estratégia é verificada mais claramente através da Figura 4.18. Essa figura mostra a variação da carga  $P$  em cada passo incremental. Nota-se que em torno do ponto limite  $C$  ( $P = 47.916$  N), os resultados diferem, e a eficiência da técnica do fluxo normal a partir desse ponto pode ser percebida. Através da Figura 4.18, verifica-se, também, que maiores incrementos de carga são mantidos, mesmo quando a não linearidade da curva é acentuada. Isso foi observado também por Ragon *et al.* (2002).

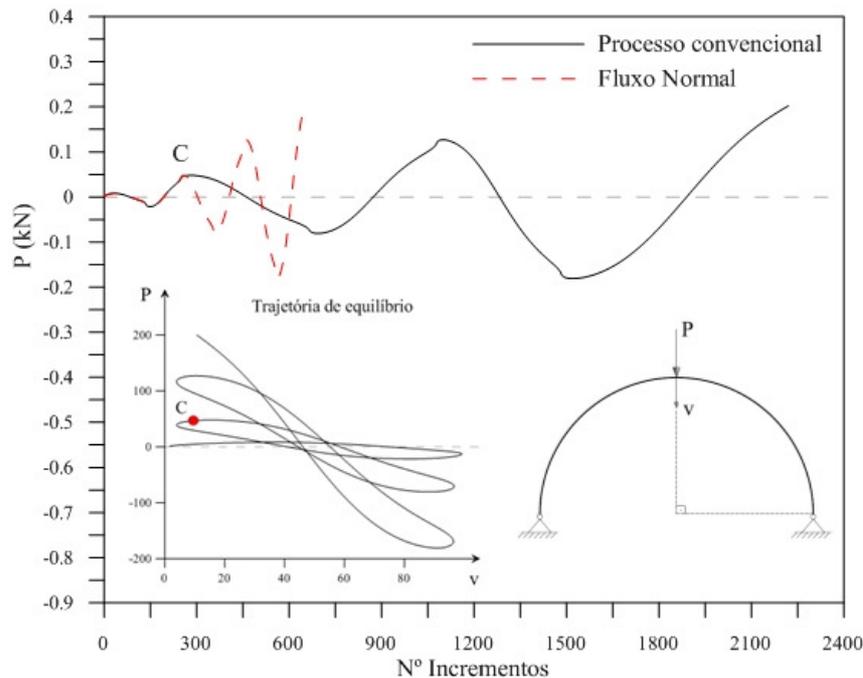
Ainda observando a Tabela 4.9, para a estratégia da norma mínima dos deslocamentos residuais, pode-se observar que novamente os resultados foram

equivalentes. Sendo assim, nessas condições, não se justifica a utilização da técnica do fluxo normal, que requer, como foi observado, um custo computacional maior.

Os resultados obtidos com a estratégia do resíduo ortogonal associada ao fluxo normal são também apresentados nessa tabela. Como no exemplo anterior, o desempenho dessa metodologia foi similar ao das outras estratégias.

**Tabela 4.9** Eficiência computacional das estratégias de iteração adotadas

Estratégia	Processo Convencional					Fluxo Normal				
	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU
Norma Mínima	649	1451	2	0	15.2	649	1451	2	0	15.8
Desl. Generalizado	2220	3224	1	3	39.9	649	1451	2	0	15.3
Resíduo Ortogonal	-	-	-	-	-	647	1848	3	0	15.9



**Figura 4.18** Variação da carga  $P$  em cada incremento

# Capítulo 5

## Considerações Finais

### 5.1 Introdução

Com a finalidade de estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995), foi proposto neste trabalho, que uma condição de perpendicularidade — técnica do fluxo normal — fosse satisfeita ao longo do processo iterativo de solução. Na estratégia do resíduo ortogonal, o parâmetro de carga é ajustado de forma que as forças desequilibradas sejam ortogonais aos deslocamentos incrementais correntes. Entretanto, dependendo do sistema ou modelo estrutural analisado, essa estratégia apresenta inconsistências nas proximidades de pontos limites de carga ou deslocamento. Para superar essa dificuldade e ultrapassar os pontos críticos, é adotada, neste trabalho, a técnica do fluxo normal. Essa técnica estabelece uma modificação no esquema iterativo de Newton-Raphson com o objetivo de acelerar o processo de solução e/ou contornar problemas de convergência.

Cabe destacar que, embora o sistema computacional CS-ASA (Silva, 2009), utilizado neste trabalho, disponha de várias estratégias de solução não linear, métodos para obtenção do traçado das trajetórias de equilíbrio continuam sendo alvo de muitos estudos. Com este trabalho, mais uma estratégia estável e eficiente para solução de problemas não lineares torna-se opção para o usuário desse programa. O bom desempenho computacional da metodologia adotada foi verificado na análise estática de sistemas estruturais geometricamente não lineares. Como mencionado no Capítulo 2, Seção 2.4, o programa CS-ASA foi desenvolvido através de uma programação estruturada em módulos. Dessa forma, as implementações realizadas pela autora deste trabalho foram feitas sem alterações no programa principal.

Com o objetivo de validar e verificar a eficiência da estratégia do resíduo ortogonal associada à técnica do fluxo normal, arcos esbeltos que apresentaram caminhos de equilíbrio fortemente não lineares foram analisados. Adicionalmente, foi apresentado um estudo verificando a influência da atualização da matriz de rigidez (Newton-Raphson padrão) ou não (Newton-Raphson modificado) durante o processo iterativo da solução não linear. A influência da técnica do fluxo normal associada a outras estratégias de iteração do programa CS-ASA foi também avaliada. As análises dos resultados obtidos através da simulação numérica dos sistemas estruturais abordados no Capítulo 4 permitem estabelecer algumas conclusões. Essas conclusões e as sugestões para futuras pesquisas são descritas nas duas próximas seções.

## **5.2 Conclusões**

Os resultados das análises não lineares realizadas em cinco arcos esbeltos, apresentando diferentes geometrias, condições de contorno e carregamento, foram comparados com as soluções numéricas e analíticas disponíveis na literatura. A boa concordância entre todas as respostas permite afirmar que tanto a estratégia do resíduo ortogonal quanto a técnica do fluxo normal foram implementadas corretamente, e podem ser combinadas para avaliar o comportamento estático de estruturas metálicas reticuladas planas. A seguir, outras conclusões serão apresentadas separadamente referentes ao estudo desenvolvido no Capítulo 4.

### **5.2.1 Resíduo Ortogonal Associado à Técnica do Fluxo Normal**

No Capítulo 4, através da análise estática não linear dos arcos, observou-se que a condição de perpendicularidade — técnica do fluxo normal — imposta ao longo do processo iterativo de solução torna possível a superação de problemas de instabilidade nas proximidades de pontos limites observados com a estratégia do resíduo ortogonal. Os resultados alcançados combinando a estratégia do resíduo ortogonal com o fluxo normal foram satisfatórios quando comparados aos da literatura. Isso comprova a eficiência dessa associação na obtenção do caminho de equilíbrio completo de arcos com comportamento fortemente não linear. Sendo assim, essa combinação na solução de sistema de equações não lineares torna-se melhor opção.

### **5.2.2 Influência da Atualização da Matriz de Rigidez**

Duas variantes do método de Newton-Raphson foram adotadas neste trabalho: Newton-Raphson padrão e modificado. A opção pelo método modificado pode acelerar a análise, já que a matriz de rigidez não é atualizada a cada iteração. Entretanto, na maioria das vezes, pode exigir um número maior de iterações para a convergência.

Através dos resultados apresentados na Seção 4.3, foi possível perceber que o melhor desempenho nas análises foi conseguido usando o método de Newton-Raphson padrão, ou seja, quando a matriz de rigidez foi atualizada a cada iteração durante o processo iterativo. Para os dois exemplos estudados nas Seções 4.2.1 e 4.2.2, entretanto, observou-se um desempenho equivalente entre as duas variantes do método de Newton-Raphson. O tempo de processamento para a técnica padrão é ligeiramente superior, em compensação, menos iterações são necessárias para a convergência. Considerando os resultados dos demais exemplos, a superioridade do método padrão foi observada em todos os parâmetros abordados.

### **5.2.3 Outras Estratégias Associadas à Técnica do Fluxo Normal**

A implementação da técnica do fluxo normal no sistema computacional CS-ASA possibilitou a utilização da mesma em conjunto com as outras estratégias de iteração disponíveis nesse sistema. A estratégia baseada na norma mínima dos deslocamentos residuais e a estratégia do deslocamento generalizado foram selecionadas para o estudo. Os resultados mostraram que a técnica do fluxo normal contribuiu significativamente para o desempenho computacional da metodologia de solução não linear adotada. Isso foi verificado quando se utilizou a estratégia baseada no deslocamento generalizado. Essa combinação permitiu o traçado completo da trajetória de equilíbrio com um número menor de incrementos de carga e de iterações totais e, portanto, com tempo de processamento inferior ao do processo convencional. Nesse caso, foram mantidos maiores incrementos de carga mesmo quando a não linearidade da curva era acentuada, como observaram Ragon *et al.* (2002). Além disso, o processo de solução foi reiniciado menos vezes que o processo convencional. Quando combinada com a estratégia da norma mínima dos deslocamentos residuais, a mesma eficiência não é observada. Sendo assim, nessas condições, não se justifica a utilização da técnica do fluxo normal.

### 5.3 Sugestões para Futuras Pesquisas

Algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros são apresentadas nesta seção.

- Testar a combinação proposta neste trabalho na análise estática não linear de outras estruturas, tais como: pórticos, vigas, treliças, placas e cascas;
- Utilizar a combinação proposta também na solução de problemas estruturais em que outros efeitos não lineares, como ligação semirrígida e plasticidade, estejam presentes na análise;
- Dar continuidade à investigação e desenvolvimento de novas estratégias de solução não linear;
- Realizar análises paramétricas para os arcos estudados aqui; estender essas análises aos pórticos e colunas com ligações semirrígidas;
- Implementar procedimentos numéricos que consigam determinar, com precisão, pontos críticos (bifurcação, máximos e mínimos) ao longo das trajetórias de equilíbrio (Shi e Crisfield, 1994; Crisfield, 1997);
- Implementar a estratégia de incremento de carga denominada *controle do deslocamento generalizado* (Alvarenga, 2010);
- Realizar estudos adicionais associados, especificamente, às diferentes estratégias de incremento de carga implementadas no CS-ASA.

# Referências Bibliográficas

- Allgower, E.L., e Georg K., 1980. Homotopy methods for approximating several solutions to nonlinear systems of equations. In: Forster W, editor. *Numerical solution of highly nonlinear problems*. Amsterdam, New York: North-Holland, pp. 253-70.
- Alvarenga, A.R., 2010. *As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Alves, R.V. (1993a). *Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Total*. 1º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- Alves, R.V., 1993b. *Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado*. 3º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Argyris, J.H., 1964. Recent advances in matrix methods of structural analysis, Pergamon.
- Bathe, K.J., 1996. *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice-Hall.
- Bathe, K.J., e Dvorkin, E.N., 1983. On the automatic solution of nonlinear finite element equations, *Computers and Structures*, v. 17(5-6), pp. 871-879.
- Batoz, J.L., e Dhett, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, pp. 1262-1267.
- Battini, J.M., Pacoste, C., e Eriksson, A., 2003. Improved minimal augmentation procedure for the direct computation of critical points. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, pp. 2169-2185.

- Bellini, P.X., e Chulya, A., 1987. An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations, *Computers and Structures*, v. 26 (1-2), pp. 99-110.
- Bergan, P.G., 1980. Solution algorithms for nonlinear structural problems. *Computers and Structures*, v. 12, pp. 497-509.
- Cardona, A., e Huespe, A., 1999. Evaluation of simple bifurcation points and post-critical path in large finite rotation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 175, pp. 137-156.
- Chajes, A., e Churchill, J.E., 1987. Nonlinear frame analysis by finite element methods. *Journal of Structural Engineering*. v. 113(6-Jun), pp. 1221-1235.
- Chan, S.L., 1988. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 26, pp. 2657-2669.
- Chapman, S.J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., New York, John Wiley and Sons, Inc.
- Crisfield, M.A., 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers and Structures*, v. 13, pp. 52-62.
- Crisfield, M.A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. v. 1, John Wiley and Sons Inc., USA.
- Crisfield, M.A., 1997. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, v. 2, John Wiley & Sons.
- Fuina, J.S., 2004. *Métodos de Controle de Deformações para Análise Não-Linear de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Galvão, A.S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado,

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Galvão, A.S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.

Georg, K., 1981. Numerical integration of the Davidenko equation, in *Numerical Solution of Nonlinear Equations*, E. Allgower, K. Glashoff, H.-O. Peitgen (eds.), Springer Verlag, Lecture Notes in Math. 878.

Goto, Y., e Chen, W., 1987. Second-order elastic analysis for frame design. *Journal of Structural Engineering*, v. 113(7), pp. 1500-1519.

Harrison, H.B., 1978. Post-buckling behavior of elastic circular arches. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, v. 65, part 2, pp. 283-298.

Heath, M.T., 1997. *Nonlinear Equations – Lecture Notes to Accompany*, Scientific Computing an Introductory Survey, Chapter 5.

Kouhia, R., 2008. Stabilized forms of orthogonal residual and constant incremental work control path following methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.197, pp. 1389–1396.

Kouhia, R. e Mikkola, M., 1989. Tracing the Equilibrium Path Beyond Simple Critical Points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28, pp. 2923-2941.

Krenk, S., 1995. An orthogonal residual pProcedure for non-linear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, pp. 823-839.

Krenk, S. e Hededal, O., 1995. A Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 123, pp. 95-107.

- Machado, F.C.S., 2005. *Análise Inelástica de Segunda-ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Mäkinen, J., Kouhia, R., Fedoroff, A., e Marjamäki, H., 2011. Direct computation of critical equilibrium states for spatial beams and frames. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 89, pp. 135–153.
- Maximiano, D.P., Silva, A.R.D., e Silveira R.A.M., 2011. A técnica do fluxo normal aplicada à análise não linear de arcos esbeltos. *Anais do 32º CILAMCE*, Ouro Preto, MG, Brasil, v. 1, pp. 1–19.
- Pacoste, C., e Eriksson, A., 1997. Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 144, pp. 163-197.
- Pinheiro, L., 2003. *Análises Não lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-rígidos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Pinheiro, L., e Silveira, R.A.M., 2004. Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais. *Revista da Escola de Minas*, Ouro Preto, MG, v. 58, pp. 1-14.
- Prado, I.M., 2012. *CS-ASA Preprocessor: Programa Gráfico Interativo de Pré-processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., e Flannery, B.P., 1986. *Numerical Recipes in Fortran 77 – The Art of Scientific Computing*, v. 1, 2<sup>nd</sup> edition.
- Ragon, S.A., Gurdal, Z., e Watson, L.T., 2002. A comparison of three algorithms for tracing nonlinear equilibrium paths of structural systems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 39, pp. 689-698.
- Ramm, E., 1981. *Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89.

- Riks, E., 1972. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, v. 39, pp. 1060-1066.
- Riks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, pp. 529-551.
- Rocha, G., 2000. *Estratégias Numéricas para Análise de Elementos Estruturais Esbeltos Metálicos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Rocha, P.A.S., 2006. *Análise inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semi-rígidas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Saffari, H., Fadaee, M.J., e Tabatabaei, R., 2008. Nonlinear analysis of space trusses using modified normal flow algorithm, *ASCE Journal of Structural Engineering*, v. 134(6), pp. 998-1005.
- Santos, M.N., 2007. *Emprego de Elemento Finito Híbrido na Análise Não linear de Estruturas Metálicas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Shi, J. e Crisfield, M.A., 1994. A semi-direct approach for the computation of singular points. *Computers & Structures*, v. 51(1), pp. 107-115.
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema computacional para a análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Silveira, R.A.M., 2010. *Análise não linear estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Projeto CNPq, Modalidade Produtividade em Pesquisa (PQ), Processo 304318/2010-8.

- Tabatabaei, R., Saffari, H., e Fadaee, M.J., 2009. Application of normal flow algorithm in modal adaptive Pushover analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, v.65(1), pp. 89-96.
- Thompson, J.M.T., e Hunt, G.W., 1973. *A general Theory of Elastic Stability*. John Wiley and Sons, Inc..
- Torkamani, M.A.M., e Sonmez, M., 2001. Inelastic large deflection modeling of beam-columns. *Journal of Structural Engineering*, v. 127(8), pp. 876-886.
- Torkamani, M.A.M., Sonmez, M., e Cao, J., 1997. Second-order elastic plane-frame analysis using finite-element method. *Journal of Structural Engineering*, v 12(9), pp. 1225-1235.
- Turner, M.J., Dill, E.H., Martin, H.C., e Melosh, R.J., 1960. Large deflection of structures subject to heating and external load. *Journal of Aerospace Science*, v. 27, pp. 97-106.
- Watson, L.T., Billups, S.C., e Morgan, A.P., 1987. Algorithm 652: HOMPACT: A suite of codes for globally convergent homotopy algorithms, *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 13(3), pp. 281-310.
- Watson, L.T., Sosonkina, M., Melville, R.C., Morgan, A.P., e Walker, H.F., 1997. Algorithm 777: HOMPACT90: A suite of Fortran 90 Codes for globally convergent homotopy algorithms, *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 23(4), pp. 514-549.
- Wempner, G.A., 1971. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, v. 7, pp. 1581-1599.
- Wen, R.K., e Rahimzadeh, 1983. Nonlinear elastic frame analysis by finite element. *Journal of the Structural Division*, v. 109(8-Aug), pp. 1952-1971.
- Wong, M.B., e Tin-Loi, F., 1990. Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. *Computers and Structures*, v. 34(4), pp. 641-646.
- Wood, R.D. e Zienkiewicz, O.C., 1977. Geometrically nonlinear finite element analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells. *Computers and Structures*, v. 7, pp. 725-735.

- Xu, Z., e Mirmiran, A., 1997. Looping behavior of arches using corotational finite element. *Computers and Structures*, v. 62(6), pp. 1059-1071.
- Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.
- Yang, Y.B., e Mcguire, W., 1986, Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 112(4 Apr), pp. 853-877.
- Yang, Y.B., e Shieh, M.S., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, v. 28(12), pp. 2110-2116.
- Zienkiewicz, O.C., e Taylor, R.L., 1991. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company (UK), v. 2.

# Apêndice A

## Estratégias de Iteração

### A.1 Introdução

A correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda$ , é calculada em função de uma dada estratégia de iteração, ou equação de restrição imposta ao problema. Uma estratégia de iteração deve atender, principalmente, o requisito de ser eficiente computacionalmente. Neste anexo são apresentadas duas estratégias de iteração, que atendem ao requisito anterior, e estão implementadas no sistema computacional CS-ASA.

### A.2 Iteração a Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais

Chan (1988) apresentou uma estratégia de iteração definida como o Método dos Deslocamentos Residuais (MDR). Nessa estratégia, ao invés de se usarem restrições geométricas e de energia, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (ou deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas. Vale ressaltar que esse é o objetivo principal do ciclo iterativo.

Nesse método, a componente  $j$  do vetor de deslocamentos  $\delta\mathbf{U}$  numa dada iteração  $k$ , usando, por exemplo, a Equação (12), é escrita na forma:

$$e_j = \delta\mathbf{U}^k(j) = \delta\mathbf{U}_g^k(j) + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k(j) \quad (\text{A.1})$$

sendo  $e_j$  considerado como um dado erro.

Chan então propôs que a condição de mínimos quadrados desse erro, para um sistema de  $m$  graus de liberdade, poderia ser expressa de acordo com:

$$\frac{d\left(\sum_{j=1}^m (e_j)^2\right)}{d\delta\lambda^k} = 0 \quad (\text{A.2})$$

A equação anterior é equivalente à condição da norma euclidiana mínima dos deslocamentos residuais, escrita numa forma mais adequada como:

$$\frac{d\left[\left(\delta\mathbf{U}^k\right)^T \delta\mathbf{U}^k\right]}{d\delta\lambda^k} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Substituindo, então, a Equação (12) na Equação (35) e, depois, derivando a expressão obtida em relação a  $\delta\lambda^k$ , chega-se a:

$$\delta\lambda^k = -\frac{\left(\delta\mathbf{U}_r^k\right)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{\left(\delta\mathbf{U}_r^k\right)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (\text{A.4})$$

Cabe esclarecer que, para a técnica do fluxo normal, onde a Equação (3.19) é usada ao invés de (3.16), essa mesma relação final é obtida.

A Tabela A.1 resume parte do processo incremental-iterativo, destacando as expressões usadas para obtenção da solução predita ( $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$ ) e as equações para correção do parâmetro de carga (Equação A.4) e dos deslocamentos nodais. O critério baseado em deslocamentos é usado para sinalizar que um novo estado de equilíbrio foi encontrado. Destaca-se que, durante o ciclo iterativo, é indicada, para a correção dos deslocamentos, a expressão usada no processo convencional de metodologia de solução não linear. A Equação (3.20) deverá ser usada caso a técnica do fluxo normal seja adotada.

### A.3 Iteração Baseada no Deslocamento Generalizado

Com a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro GSP foi mostrado, de acordo com o trabalho de Yang e Kuo (1994), a seguinte expressão deveria ser considerada para o parâmetro de carga ao longo do processo de solução não linear:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^0 \left({}^t\delta\mathbf{U}_r^T\right) \delta\mathbf{U}_r^k} \left( H_k - \Delta\lambda^0 \left({}^t\delta\mathbf{U}_r^T\right) \delta\mathbf{U}_g^k \right) \quad (\text{A.5})$$

**Tabela A.1** Iteração a norma mínima dos deslocamentos residuais

---

Incremento de carga: $i = 1, 2, \dots, n^{\circ}_{\text{máx}}$
Solução Predita:
$\begin{cases} \Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{ \text{GSP} } \\ \Delta\mathbf{U}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \end{cases}$
Ciclo de iterações: $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$
$\begin{cases} \delta\lambda^k = -\frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \\ \delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \end{cases}$
Pare o ciclo iterativo quando: $\ \delta\mathbf{U}^k\  \leq \zeta \ \Delta\mathbf{U}^k\ $
Pare o incremento de carga quando: $i = n^{\circ}_{\text{máx}}$

---

Na obtenção da solução incremental predita ( $k = 0$ ), os referidos pesquisadores definiram que o parâmetro incremental  $H_0$  (no caso, deslocamento generalizado) deveria ser obtido considerando que no primeiro passo de carga se conhece o valor e  $\Delta\lambda^0$  no primeiro passo de carga, escrevendo:

$$H_0 = (\Delta\lambda_1^0)^2 ({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) ({}^1\delta\mathbf{U}_r) \quad (\text{A.6})$$

Durante o ciclo iterativo o parâmetro de deslocamento generalizado  $H_0$  é mantido constante, ou seja,  $H_k = 0$  para  $k > 0$ . Dessa forma, pode-se reescrever (A.5) como:

$$\delta\lambda^k = -\frac{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_g^k}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (\text{A.7})$$

que é a expressão para a correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo.

Assim como na seção anterior, ilustram-se, na Tabela A.2, as etapas principais do processo incremental-iterativo. A estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro GSP e a estratégia de iteração baseada no deslocamento generalizado são usadas. Aqui também, a correção dos deslocamentos durante o ciclo iterativo é estabelecida de acordo

com o processo convencional da metodologia de solução não linear. Caso se adote a técnica do fluxo normal, a Equação (3.20) deve ser usada.

**Tabela A.2** Iteração baseada no deslocamento generalizado

---

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n^{\circ}_{\text{máx}}$

Solução Preditada:

$$\begin{cases} \Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \\ \Delta\mathbf{U}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \end{cases}$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \delta\lambda^k = -\frac{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_g^k}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r^k} \\ \delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \end{cases}$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\delta\mathbf{U}^k\| \leq \zeta \|\Delta\mathbf{U}^k\|$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n^{\circ}_{\text{máx}}$

---