



Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Doutorado em Construções Metálicas



Arthur Ribeiro de Alvarenga

# AS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS NA ANÁLISE AVANÇADA COM ZONA PLÁSTICA DE PORTAIS PLANOS DE AÇO

TESE DE DOUTORADO – VOLUME I

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Ouro Preto  
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

# AS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS NA ANÁLISE AVANÇADA COM ZONA PLÁSTICA DE PORTAIS PLANOS DE AÇO

**AUTOR: Arthur Ribeiro de Alvarenga**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas Metálicas.

Ouro Preto  
2010

A473l

Alvarenga, Arthur Ribeiro de.

As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço [manuscrito] / Arthur Ribeiro de Alvarenga. - 2010.

xli, 481 f. (2v.) : il., color.; graf.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.

Área de concentração: Construção Metálica.

1. Aço - Estruturas - Teses. 2. Ligações metálicas - Teses. 3. Métodos numéricos - Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

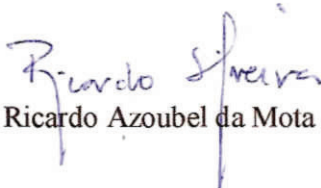
CDU: 624.014.2

Catálogo: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)

**AS LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS NA ANÁLISE AVANÇADA COM  
ZONA PLÁSTICA DE PORTAIS PLANOS DE AÇO**

**AUTOR: ARTHUR RIBEIRO DE ALVARENGA**

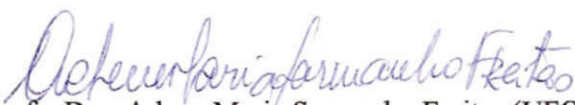
Esta tese foi apresentada em sessão pública e aprovada em 29 de abril de 2010,  
pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (Orientador / UFOP)



Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr. (UFOP)



Prof.ª. Dra. Arlene Maria Sarmanho Freitas (UFOP)

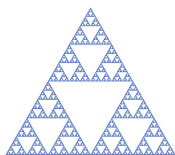


Prof. Dr. Gilson Queiroz (UFMG)

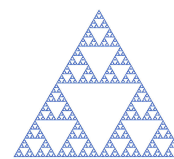
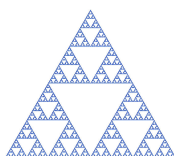


Prof. Dr. Walnócio Graça Ferreira (UFES)

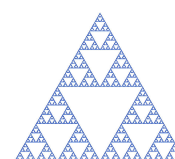
Seja simples,  
a simplicidade vale ouro,  
e como é difícil ser simples! (C. Alvarenga).



Liberdade é um privilégio que evolui  
e pelo qual devemos diariamente lutar,  
como manifestação da cultura, nobreza e dignidade  
do homem moralmente responsável. (I. Kant).



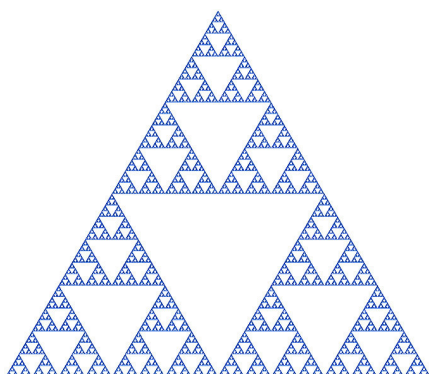
Quando uma pessoa pára de perguntar,  
pára de aprender,  
pára de crescer. (A. Cury).



Existe uma dupla força artista:  
aquela que produz a profusão de imagens  
e a que escolhe o semelhante e o acentua. (F. Nietzsche).

## Dedicatória

- Às pessoas que me inspiram:  
*meu pai (in-memorian) e minha mãe, meu(s) filho(s),  
minha irmã e família, minhas mulheres e meus amigos.*
- Aos que ontem me guiaram os passos:  
G. QUEIROZ, E. MANTOVANI e R. FONTES.
- Aos que hoje seguem ao meu lado:  
R. AZOUBEL, F. LEÃO e J. SCHULMAN.
- Aos que me acompanham hoje e se lembrarão amanhã  
todos os amigos da UFOP/UFMG, CEC/ORG, PERSEC.



E agradeço a Deus,  
que me permitiu chegar aqui, com a ajuda de vocês.

## APRESENTAÇÃO

No jogo de xadrez, aprendi com os mestres que se podem fazer novidades e seguir caminhos novos, também, partindo de trilhas antigas; não é necessário que tudo seja novo. E, ao concluir o mestrado (2005), no qual meu objetivo inicial era apresentar bons resultados obtidos com a formulação anterior, incluindo, então, a descoberta da *Integração Iterativa (IIEA)*, cheguei à proposição do *teorema da configuração inicial* quase por acidente.

No estudo das ligações, objetivo do mestrado anterior (paralisado em 2004), cuja formulação havia desenvolvido (em 2003) e não utilizado, torturava-me dar destino a tal desenvolvimento. Então, havia que conciliar essas duas coisas, e com isso nasceu o plano do doutorado. Neste estudo, muito foi pesquisado (lido), ao longo de sete anos, surgiu a ideia da curva de *Rigidez Bilinear (RBL)*, que foi desenvolvida, em segredo, todo esse tempo e somente agora é apresentada.

Durante o curso de doutorado, o desejo de passar pelo ponto limite levou-me ao controle de deslocamento selecionado e, nasceu daí, a ideia do *generalizado* (proposto), ambos implementados.

O programa computacional, extremamente lento, complexo, enorme, trabalhoso para testes e desenvolvimento, exigiu-me, em 2009, uma mudança radical. Adquiri o software (Power-basic), refiz todo o sistema computacional *PPLANAVA* com a linguagem nova, modifiquei tudo para ficar mais operacional e eu pudesse usar os melhores recursos da máquina e das soluções numéricas. Não poupei trabalho e dedicação para fazer isso funcionar. Não foram poucos os desafios: as madrugadas de incertezas, de resultados incorretos, da procura de erros numéricos, de edição, de fórmulas, de aproximações, de dados, de modelos, etc. Não cabe numa página descrever os anos desta chamada “infundável” tese.

Resta-me, pois, agradecer, e muito, a Deus por permitir que eu a realizasse, aos meus familiares, que pensaram que eu ia bater as botas antes (até eu, também!); e ao pessoal da banca, que gastou os olhos em tanto papel, em especial ao meu mestre Gilson Queiroz, com quem aprendi muito. Não posso me esquecer dos amigos, que compartilharam tantas vezes do meu desespero e deram forças (gente da UFOP, da UFMG, do CEC/ORG, clientes da Persec Engenharia)... É tanta gente que não vou citar nomes, porque seria injusto esquecer qualquer um.

E, agradeço, principalmente, ao meu querido orientador Ricardo Azoubel (e esposa!), que viu o empenho da minha vida neste trabalho e disse: “Não se preocupe, vamos em frente”! Sempre um apoio para prosseguir! Este trabalho tem uma enorme parcela dele também, da sua vida, da sua dedicação e do seu tempo. E fecho com minha querida professora Maria de Lourdes, que conseguiu me fazer gostar, novamente, do português. Recebam, com este trabalho, a imensa gratidão que sinto por vocês. Do fundo do coração, muito obrigado!

Ao leitor peço desculpas pelo tamanho da obra (dois volumes), que fica como parte teórica e prática. Realmente, um dia pensei que não chegaria aqui, então, quis deixar a você o melhor do que pude fazer até agora e, creia-me, sinto, enfim, muito feliz de tê-lo conseguido.

*Arthur Ribeiro de Alvarenga*

# RESUMO

Neste trabalho, estuda-se como desenvolver a *Análise Avançada* empregando o método da Zona Plástica em portais planos de aço, agora incluindo o efeito das ligações. Primeiramente, define-se esta análise como a inelástica de segunda ordem, na qual se avalia a plasticidade distribuída (por meio da técnica das fatias) e consideram-se os chamados “*Aspectos importantes*”, como as imperfeições geométricas (curvatura inicial e fora de prumo) e físicas (tensões residuais). Em seguida, introduz-se o efeito das ligações, mediante uma revisão bibliográfica abrangendo histórico, propriedades, tipos, modelos de comportamento de momento rotação  $M-\theta$ . Propõe-se um novo modelo, chamado *Rigidez Bilinear (RBL)*, que é empregado também em várias análises e permite fazer uma estimativa de curvas  $M-\theta$  por analogia.

É desenvolvida a formulação numérica do EF com ligação numa extremidade e se define um novo parâmetro *índice de giro próprio da ligação*  $\eta$ . Estuda-se a sua influência na formulação, seus valores, variações e seu efeito nas análises produzidas. A *Integração Iterativa do Esforço Axial (IIEA)*, que é uma correção necessária quando ocorre o escoamento na seção, é ajustada e empregada. Estuda-se o deslocamento do centro de gravidade plástico, que leva a comportamentos da plasticidade não abordados, em geral, na literatura.

A implementação computacional desse elemento, incluindo o ajuste da *IIEA* e da excentricidade, permite o estudo de vários modelos de ligações, inclusive o proposto. São abordados também: a determinação da rotação da ligação, o acompanhamento da curva  $M-\theta$  e controles para os casos de não linearidade dessa curva. São analisados exemplos de vigas, colunas e portais, no regime elástico ou inelástico, com ligações lineares e não lineares, validando a formulação e as contribuições deste trabalho.

Por fim, estuda-se a definição da configuração geométrica limitadora, ou seja, aquela que permite obter a carga limite mínima de projeto para um portal plano com ligações. É estabelecida a validade da proposta do *Teorema da Configuração Inicial*, visto que existem situações em que a carga limite encontrada não se altera em razão de mudanças na geometria imperfeita inicial. Mesmo nessas condições, comprovou-se que a deformada inelástica pode definir essa configuração limitadora. No caso de dúvidas, são apresentadas recomendações simples (corolários) e um roteiro para projeto no contexto da *Análise Avançada* incluindo o efeito das ligações semirrígidas.

# ABSTRACT

(The semi-rigid connections on plastic-zone's advanced analysis of plane steel portals)

In this work, the development of the Plastic-Zone's Advanced Analysis of plane steel portals is studied, now including the connections effect. Firstly, this analysis is defined as inelastic second-order which capture the plasticity spread by slice technique and includes the "*Main Aspects*" as geometric (out-of-straight and out-of-plumb) and physical imperfections (residual stress). The connection effect is introduced, with bibliographic review ranging from history, properties, types, up to moment-rotation behavioral models (M- $\theta$ ). A new connection's model called Bi-linear Rigidity (*BLR*) is proposed. This model is applied in some analysis and allows the M- $\theta$  approaching by analogy.

The numerical FE formulation with one end-connection and a new parameter called connection's own-rotation index  $\eta$ , are presented. This influence of this index on formulation, values, changes and its effects on analysis are shown. The *Axial Force Iterative Integration (AFII)*, that is a necessary task when section yielding happens, is adjusted and employed. The effect of plastic geometric center's move is studied, which arrived to plastic behaviors not covered in general literature.

The computer implementation provides several connection models study, including the proposed one. Also are treated: how to define the connection rotation, the M- $\theta$  following path, and the non-linear cases of this graph control. There are analysis of beam, column and portal's examples, at elastic and inelastic range, with non-linear and linear connection's behavior, validating the contributions of this work.

Further, the study defines the limiting geometric configuration as the one which brings the least limit load to design of the plane portal with connections. The *Initial Configuration Theorem* proposal validity is stated, as there are some cases where the found limit load doesn't modify because of initial imperfect geometry changes. Even in this situation, it is assured that the inelastic deformed shape can define this limiting configuration. When in doubt, simple tips (corollary) and a design rules for *Advanced Analysis* including semi-rigid connections are provided.



## SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
	<b>Apresentação</b>	iii
	<b>Resumo</b>	iv
	<b>Abstract</b>	v
	<b>Sumário</b>	vi
	<b>Lista de Figuras</b>	xiii
	<b>Lista de Tabelas</b>	xx
	<b>Lista de Símbolos e Abreviaturas</b>	xxiii
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>01</b>
1.1	Considerações iniciais	02
1.2	Análise estrutural - Estado da arte .....	03
1.3	O conceito da <i>Análise Avançada</i>	09
1.4	<i>Aspectos importantes</i> .....	10
1.4.1	Curvatura inicial	10
1.4.2	Fora de prumo .....	11
1.4.3	Tensões residuais	11
1.5	Motivação e justificativas .....	12
1.6	Objetivos	15
1.7	Organização .....	17
1.8	Referências	19
<b>2</b>	<b>MODELOS DAS LIGAÇÕES</b>	<b>22</b>
2.1	Introdução	23
2.1.1	Primórdios .....	23
2.1.2	Reconhecimento pelas normas	24
2.1.3	Vantagens previstas .....	29
2.1.4	Tipos de ligação	31
2.1.5	Pesquisa experimental .....	33
2.2	Parâmetros das ligações	38
2.2.1	Pontos característicos .....	38
2.2.2	Resistência da ligação	40
2.2.3	Rigidez da ligação .....	41

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
2.2.4	Índice de rigidez (ou de flexibilidade) da ligação	44
2.2.5	Dutilidade .....	47
2.3	Classificação das ligações	51
2.3.1	Classificação de Bjorhovde <i>et al.</i> (1990) .....	53
2.3.2	Classificação do Eurocode 3 (1992)	54
2.3.3	Classificação de Hasan <i>et al.</i> (1998) .....	57
2.3.4	Outras possibilidades de classificações	58
2.4	Modelos de curvas momento-rotação .....	60
2.4.1	Modelos com trechos lineares	62
2.4.2	Modelos polinomiais .....	65
2.4.3	Modelos potenciais	70
2.4.4	Modelos exponenciais .....	78
2.4.5	Confrontando alguns modelos	82
2.5	<i>Linha de viga</i> .....	84
2.6	Tipos de ligação analisados	91
2.6.1	Ligações soldadas.....	91
2.6.2	Ligações com perfis Ts	92
2.6.3	Ligações com chapa estendida .....	95
2.6.4	Ligações com chapa cortada e chapa de cabeça	97
2.6.5	Ligações com cantoneiras .....	98
2.6.6	Rótulas de fato	102
2.7	Ligações nas bases .....	103
2.7.1	Bases rotuladas	104
2.7.2	Bases engastadas .....	105
2.8	Modelo de curva M- $\theta$ com <i>Rigidez Bilinear (RBL)</i>	108
2.9	Referências .....	127
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO GERAL</b>	<b>142</b>
3.1	Introdução	143
3.2	Considerações gerais .....	144
3.2.1	Sistema corrotacional	145
3.2.2	Tensão e deformação da fibra .....	147
3.2.3	Limitações e hipóteses simplificadoras	149

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
3.3	Desenvolvimento do EF com ligação	152
3.3.1	Cinemática do elemento .....	152
3.3.2	Grandezas do sistema corrotacional	155
3.3.3	Funções de forma - Visão geral .....	158
3.3.4	Introdução da rigidez da ligação no EF	160
3.3.5	Condições de contorno para o EF com ligação .....	160
3.3.6	Função de forma para o EF com ligação	163
3.3.7	Significado do parâmetro $\eta$ .....	165
3.3.8	Campo de deformação	171
3.4	Matrizes de rigidez do EF com ligação .....	172
3.4.1	Matrizes de rigidez na forma genérica	172
3.4.2	Matrizes de rigidez básicas do EF com ligação .....	175
3.4.3	Matrizes de rigidez na forma completa	176
3.4.4	Propriedades elastoplásticas da seção .....	179
3.4.5	Matriz de rigidez global	185
3.5	Esforços internos de equilíbrio .....	186
3.6	<i>Integração Iterativa do Esforço Axial (IIEA)</i>	187
3.6.1	Introdução .....	187
3.6.2	Justificativa	190
3.6.3	<i>IIEA</i> sob condições especiais .....	190
3.7	Referências	192
<b>4</b>	<b>ASPECTOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>195</b>
4.1	Introdução	196
4.2	Considerações gerais .....	198
4.3	Solução do problema não linear	203
4.3.1	Avaliação das hipóteses .....	205
4.3.2	Processo incremental	208
4.3.3	Processo iterativo .....	214
4.4	Aplicando a <i>Integração Iterativa (IIEA)</i>	216
4.5	Controle do comportamento da ligação .....	219
4.5.1	Curvas de ligação introduzidas	220
4.5.2	Comportamento geral de uma ligação .....	221

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
4.5.3	Rotação da ligação	223
4.54.	Ligações não lineares .....	228
4.6	Referências	233
<b>5</b>	<b>ELEMENTO FINITO RÍGIDO-RÍGIDO</b>	<b>236</b>
5.1	Introdução	237
5.2	Formulação numérica do EF rígido-rígido .....	239
5.2.1	Campo de deslocamento e de deformação	239
5.2.2	Matrizes de rigidez .....	239
5.3	Coluna de Van Kuren & Galambos (1964)	241
5.4	Coluna de Galambos & Ketter (1959) .....	246
5.5	Portal de Chen <i>et al.</i> (1996)	250
5.6	Portal de Arnold <i>et al.</i> (1968) .....	255
5.7	Referências	259
<b>6</b>	<b>ELEMENTO FINITO RÍGIDO-RÓTULA</b>	<b>261</b>
6.1	Introdução	262
6.2	Formulação numérica do EF rígido-rótula .....	264
6.2.1	Campo de deslocamento e de deformação	264
6.2.2	Matrizes de rigidez .....	265
6.3	Coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	266
6.4	Coluna de Lu & Kamalvand (1968) .....	270
6.5	Portal de Kanchanalai (1977)	277
6.6	Portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	283
6.6.1	Reproduzindo o problema original	284
6.6.2	Portal com carga maior na coluna esquerda .....	286
6.6.3	Portal com carga maior na coluna direita	289
6.6.4	Conclusões sobre o estudo do portal .....	292
6.7	Referências	298
<b>7</b>	<b>ELEMENTO FINITO RÍGIDO-LIGAÇÃO</b>	<b>300</b>
7.1	Introdução	301
7.2	Viga simples .....	304
7.2.1	Linha de viga com modelo elástico	305
7.2.2	Viga elástica e modelo de ligação com trechos lineares	307

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
7.2.3	Viga elástica com ligações não lineares	309
7.2.4	Viga inelástica com ligações lineares .....	312
7.2.5	Viga inelástica com ligações não lineares	315
7.3	Coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	319
7.3.1	Flambagem elástica com ligações lineares	320
7.3.2	Estudo de convergência .....	322
7.3.3	Flambagem inelástica com ligações lineares	325
7.3.4	Flambagem com ligações não lineares .....	327
7.4	Portal de Yau & Chan (1994)	331
7.5	Portal de Chan & Chui (2000) .....	335
7.5.1	Análise do portal com ligações não lineares	338
7.5.2	Análise do portal com ligações de curva $M-\theta$ <i>RBL</i> .....	340
7.5.3	<i>Controle do Deslocamento Generalizado (CDG)</i>	341
7.6	Ângulo de giro próprio da ligação .....	345
7.6.1	Análise da viga com carga concentrada	345
7.6.2	Análise da coluna com carga de flambagem .....	346
7.7	Referências	349
<b>8</b>	<b>ANÁLISE AVANÇADA INCLUINDO A LIGAÇÃO</b>	<b>351</b>
8.1	Introdução	352
8.2	Portal de Chen & Zhou (1987) modificado .....	354
8.3	Estudo das condições de base na flambagem do portal	356
8.4	Imperfeição inicial combinada à flambagem do portal .....	362
8.5	Cargas verticais combinadas e geometria imperfeita	365
8.5.1	Combinação incluindo a carga distribuída ( $q_0/2$ ) .....	365
8.5.2	Combinação incluindo a carga distribuída ( $q_0/4$ )	366
8.6	Carga horizontal combinada às verticais .....	370
8.6.1	Carga horizontal $H + 50\%$ da vertical $P_0$	370
8.6.2	Carga horizontal $H + 50\%$ da vertical distribuída ( $q_0$ ) ...	370
8.6.3	Carga horizontal $H + 25\%$ da vertical conc. e dist.	373
8.7	Modificando a viga do portal .....	375
8.8	<i>Análise Avançada</i> do portal com ligação <i>midirrígida</i>	376
8.9	Efeito das ligações não lineares .....	381

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
8.9.1	Ligação não linear rígida D2	383
8.9.2	Ligação não linear flexível D3 .....	387
8.10	Comentários finais	391
8.11	Referências .....	393
<b>9</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>394</b>
9.1	Introdução	395
9.2	Conclusões .....	395
9.2.1	<i>Integração Iterativa do Esforço Axial (IIEA)</i>	395
9.2.2	Elemento finito com ligação .....	397
9.2.3	<i>Controle do Deslocamento Generalizado (CDG)</i>	399
9.2.4	Modelo de curva M- $\theta$ com <i>Rigidez Bilinear (RBL)</i>	400
9.2.5	<i>Análise Avançada</i> incluindo ligações	401
9.3	O conceito estrutural .....	405
9.3.1	Antecedentes dessa proposta	405
9.3.2	Comportamentos que justificam o Teorema .....	408
9.3.3	Recomendações da atual pesquisa	410
9.3.4	Exemplo demonstrativo .....	413
9.4	Aspectos críticos	416
9.5	Continuação da pesquisa .....	419
9.6	Referências	420
	<b>APÊNDICES</b>	<b>422</b>
A.1	Limites de esbeltez para flambagem local e lateral	423
A.2	Crítérios das normas na resistência das ligações .....	425
A.3	Estruturas contraventadas e não contraventadas	426
A.4	Deformações do ponto e da fibra .....	428
A.5	Participação do estiramento nas funções ( $v_0$ )	431
A.6	Matrizes de rotação .....	431
A.7	Termos de rigidez gerados pelas propriedades médias	433
A.8	Resultados gráficos obtidos de figuras impressas .....	434
A.9	Conceito de analogia adotado nesta tese	437
A.10	Listagem de saída do exemplo do capítulo 9 .....	440
A.10.1	Dados fornecidos	442

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
A.10.2	Listagem da saída dos dados	444
A.10.3	Listagem da saída do increm. do início do escoamento	448
A.10.4	Listagem da saída do incremento de pré-colapso	451
A.10.5	Listagem da saída do incremento do colapso .....	455
A.11	Notas sobre o CD (anexo)	459
A.12	Referências .....	460
<b>REFERÊNCIAS COMPLETAS</b>		<b>461</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura	Título	Pag.
1.1	Métodos de análise estrutural	04
1.2	Efeitos secundários associados às deformações .....	06
1.3	Tipos de resposta das análises estruturais	08
1.4	Imperfeições geométricas das análises estruturais .....	10
1.5	Tensões residuais (TR)	12
2.1	Modelos de portais com construção .....	25
2.2	Comportamento da ligação	27
2.3	Diversos diagramas M- $\theta$ .....	27
2.4	Diversos tipos de ligação	32
2.5	Tipos especiais de ligação .....	33
2.6	Pontos da curva de ligação	38
2.7	Resistência da ligação .....	41
2.8	Rigidez da ligação	41
2.9	Rotação de referência $\theta_0$ e de contato $\theta_{CN}$ .....	43
2.10	Dutilidade da ligação	48
2.11	Comportamento pós-limite .....	50
2.12	Classificação da ligação segundo Bjorhovde <i>et al.</i> (1990)	53
2.13	Classificação da ligação segundo Eurocode 3 (1992) .....	56
2.14	Classificação da ligação segundo Hasan <i>et al.</i> (1998)	58
2.15	Modelos mais simples de curva M- $\theta$ .....	64
2.16	Curva M- $\theta$ com modelo multilinear	64
2.17	Parâmetros adotados nas equações de $K_m$ (Frye & Morris, 1975) .....	66
2.18	Modelo não linear do Eurocode 3, Anexo J (1997)	71
2.19	Modelo de Colson & Louveau (1983) .....	74
2.20	Modelo de Richard & Abbott (1975)	74
2.21	Modelo de Kishi & Chen (1987) .....	77
2.22	Modelo de Ang & Morris (1984)	77
2.23	Modelo de Yee & Melchers (1986) .....	81



<b>Figura</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
2.24	Modelo de Wu & Chen (1990)	81
2.25	Confrontação de modelos .....	82
2.26	Efeito da ligação na viga com carga uniformemente distribuída $q$	85
2.27	<i>Linha da viga</i> (Batho & Rowan, 1934) .....	85
2.28	Coeficientes de momento (Gerschwindner, 1991)	87
2.29	<i>Ligação ao vento</i> (Disque, 1964) .....	88
2.30	Efeito da coluna (Nethercot, 1985 e 2000)	90
2.31	Aproximando o efeito da coluna (Nethercot, 1985 e 2000) .....	90
2.32	Deformação da ligação soldada	93
2.33	Deformação da ligação com perfis Ts .....	93
2.34	Ensaio de Ts à tração	96
2.35	Deformação da ligação com chapa estendida .....	96
2.36	Deformação das ligações semirrígidas	99
2.37	Deformação das ligações de cantoneiras .....	99
2.38	Ligações por rótulas	102
2.39	Bases de colunas rotuladas .....	105
2.40	Bases de colunas engastadas	105
2.41	Deformações das bases .....	106
2.42	Modelos mais simples	109
2.43	Modelo trilinear .....	110
2.44	Curva $R_k$ - $\theta$ para o modelo pentalinear:	110
2.45	Curva $R_k$ - $\theta$ da ligação de Rathbun (1936) .....	111
2.46	Modelo de <i>rigidez bilinear RBL</i> proposto	113
2.47	Curvas da ligação de Rathbun (1936) com modelo <i>RBL</i> .....	116
2.48	Curva trilinear com $R_{kp} = 0$ empregando <i>RBL</i>	118
2.49	Curvas de Hechtman & Johnson (1947) sem encruamento .....	119
2.50	Curva trilinear com $R_{kp} > 0$ empregando <i>RBL</i>	120
2.51	Curvas de Hechtman & Johnson (1947) com encruamento .....	122
2.52	Estudo do fator de forma $\beta_L$	124
2.53	Estudo do parâmetro $\kappa_p$ .....	125

<b>Figura</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
3.1	Modelagem da Zona Plástica	146
3.2	Configurações do referencial lagrangiano atualizado .....	146
3.3	Comportamento da fibra e do material	148
3.4	Comportamento no descarregamento da fibra .....	148
3.5	Zonas plásticas na seção com TRs	153
3.6	Relação entre a fibra e o eixo .....	153
3.7	Grandezas do sistema corrotacional	157
3.8	Sistema global e corrotacional .....	157
3.9	Efeito da ligação na viga	162
3.10	Efeito da rotação na viga com ligação .....	162
3.11	Representação da função de $v_0(x)$	166
3.12	Representação da função de $v_0'(x)$ .....	167
3.13	Representação da função de $EIv_0''(x)/(M_0L_0)$	168
3.14	Representação das funções $\Psi_{20}$ e $\Psi_{30}$ .....	170
3.15	Rigidez axial equivalente	181
3.16	Rigidez à flexão equivalente .....	181
3.17	Geometria da seção retangular elastoplástica	184
3.18	Propriedades da seção retangular elastoplástica .....	184
3.19	Comportamento da inércia elastoplástica	185
3.20	Início da plasticidade da fatia (fibra) .....	188
3.21	Formação de ZP em um nó do EF	189
3.22	Processo da Integração Iterativa .....	189
4.1	Fluxograma (parte I)	200
4.2	Fluxograma (parte II) .....	201
4.3	Solução do problema não linear	204
4.4	Desvantagens do controle de carga .....	209
4.5	Outros controles	209
4.6	<i>Controle de deslocamento generalizado</i> .....	213
4.7	Determinação de $Q_1$ nos EFs com diversos tipos de zona plástica	217
4.8	Comportamento da ligação .....	222

<b>Figura</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
4.9	Comportamento da ligação (após reversão)	222
4.10	Correção de $\eta$ dada a plasticidade no nó com a ligação .....	225
4.11	Efeito da ligação não linear	230
4.12	Correção do efeito da ligação não linear .....	230
5.1	Exemplos analisados	238
5.2	Coluna de Van Kuren & Galambos (1964) .....	241
5.3	Perfil da coluna 4 WF 13	242
5.4	Trajectoria de equilíbrio da coluna experimental .....	243
5.5	Zonas plásticas na coluna de Van Kuren & Galambos (1964)	245
5.6	Coluna de Galambos & Ketter (1959) .....	246
5.7	Perfil da coluna 8 WF 31	247
5.8	Curvas de interação de Galambos & Ketter .....	248
5.9	Zonas plásticas das colunas de Galambos & Ketter (1959)	249
5.10	Portal de Chen <i>et al.</i> (1996) .....	250
5.11	Trajectorias de equilíbrio do portal de Chen <i>et al.</i> (1996)	252
5.12	Diagrama de Interação para colunas do portal de Chen <i>et al.</i> (1996) ..	254
5.13	Zonas plásticas do portal de Chen <i>et al.</i> (1996)	254
5.14	Portal de Arnold <i>et al.</i> (1968) .....	255
5.15	Trajectoria de equilíbrio do portal de Arnold <i>et al.</i> (1968)	258
5.16	Zonas plásticas do portal de Arnold <i>et al.</i> (1968) .....	258
6.1	Exemplos analisados	263
6.2	Coluna birrotulada de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	266
6.3	Trajectorias de equilíbrio das colunas	267
6.4	Zonas plásticas das colunas .....	269
6.5	Fatias plásticas nas seções da coluna	269
6.6	Coluna escora de Lu & Kamalvand (1968) .....	270
6.7	Trajectorias por rotação da coluna de Lu & Kamalvand (1968)	272
6.8	Trajectorias por flecha da coluna de Lu & Kamalvand (1968) .....	274
6.9	Zonas plásticas das colunas de Lu & Kamalvand (1968)	276

<b>Figura</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
6.10	Portal com rótulas de Kanchanalai (1977)	277
6.11	Diagrama de interação para o portal de Kanchanalai (1977) .....	279
6.12	Zonas plásticas no portal de Kanchanalai (1977)	281
6.13	Zonas plásticas nas seções dos portais .....	281
6.14	Portal com rótulas de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	283
6.15	Trajatórias de equilíbrio do portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	285
6.16	Flambagem na direção x- do portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	287
6.17	Trajatórias de equilíbrio para $P_1 = P$ (flambagem x-) .....	288
6.18	Flambagem na direção x+ do portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	290
6.19	Trajatórias de equilíbrio para $P_2 = P$ (flambagem x- ou x+) .....	291
6.20	Direção da flambagem do portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	294
6.21	Coeficiente de flambagem $k_{fl}$ do portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	294
6.22	Zonas plásticas do portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	297
6.23	Seções com fatias plásticas do portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	297
7.1	Exemplos analisados	302
7.2	Viga biligada simples .....	304
7.3	Diagrama da <i>linha de viga</i>	307
7.4	Avaliação do dimensionamento da viga simples .....	307
7.5	Efeito da curva M- $\theta$ com trechos lineares na viga elástica	308
7.6	Curvas M- $\theta$ não lineares da viga elástica .....	310
7.7	Trajatória de equilíbrio da viga simples elástica	313
7.8	Curva M- $\theta$ “B7R” do “SCDB” e a aproximada <i>RBL</i> .....	317
7.9	Seguindo a curva M- $\theta$ <i>RBL</i> proposta	317
7.10	Zonas plásticas da viga simples .....	318
7.11	Coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	319
7.12	Trajatórias elásticas da coluna travada de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	322
7.13	Coef. de flambagem da coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	323
7.14	Trajatórias inelásticas da coluna travada de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	325
7.15	Carga de flambagem inelástica da coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	327

<b>Figura</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
7.16	Ligações não lineares na coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	328
7.17	Zonas plásticas da coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	330
7.18	Portal de Yau & Chan (1994)	331
7.19	Trajatórias de equilíbrio do portal de Yau & Chan (1994) .....	332
7.20	Zonas plásticas do portal de Yau & Chan (1994)	334
7.21	Portal de Chan & Chui (2000) .....	335
7.22	Perfil do portal 8 WF 48	335
7.23	Curvas M- $\theta$ da ligação do portal de Chan & Chui (2000) .....	336
7.24	Trajatórias de equilíbrio do portal de Chan & Chui (2000)	338
7.25	Zonas plásticas do portal de Chan & Chui (2000) .....	340
7.26	Trajatórias de equilíbrio do portal de Chan & Chui (2000) com ligações de curvas M- $\theta$ tabeladas e modelo <i>RBL</i> .....	342
7.27	Trajatórias de equilíbrio do portal de Chan & Chui (2000) com a ligação C3 – controles incrementais .....	342
7.28	Trajatórias de equilíbrio do portal de Chan & Chui (2000) com a ligação RC3 mostrando problema numérico .....	344
8.1	Portal de Chen & Zhou (1987) modificado (Alvarenga, 2005)	352
8.2	Portal de Chen & Zhou (1987) e Alvarenga (2005) .....	355
8.3	Portal de Chan & Zhou (1987) nos modelos tradicionais	357
8.4	Portal com rótulas nas bases e curvatura inicial (CI) .....	357
8.5	Comportamento dissimilar do portal	357
8.6	Configurações com imperfeições geométricas do portal sem ligações	361
8.7	Deformadas inelásticas na flambagem sem imperfeição geométrica	361
8.8	Trajatórias de equilíbrio do portal com FP+CI $\int -/+ \int$ .....	363
8.9	Trajatórias do portal da Fig. 8.2(b) FP com diferentes CIs	364
8.10	Zonas plásticas na flambagem do portal com carga P .....	364
8.11	Trajatória do portal da Fig. 8.2(b) com carga ( $q_0/2$ )	366
8.12	Portal da Fig. 8.2(b) com carga ( $q_0/4$ ) .....	367
8.13	Bifurcação do portal com cargas verticais (FE = 50)	368

<b>Figura</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
8.14	Variação do fator de carga limite com a <i>semiflexibilidade</i>	369
8.15	Trajetoórias de equilíbrio do portal com $H + 50\%$ de $P_0$ .....	371
8.16	Trajetoórias de equilíbrio do portal com $H + 50\%$ de $q_0$	372
8.17	Trajetoórias de equilíbrio do portal com $H + 25\%$ de $(P_0 + q_0)$ .....	374
8.18	Efeito de $H$ no fator de carga limite com a <i>semiflexibilidade</i>	374
8.19	Trajetoórias de equilíbrio do portal <i>AA</i> com $H + 50\%$ de $P_0$ .....	377
8.20	Variação do fator de carga de colapso e escoamento com o perfil	377
8.21	Trajetoórias de equilíbrio do portal com ligação <i>midirrígida</i> .....	378
8.22	Zonas plásticas do portal <i>midirrígida</i>	380
8.23	Ligações simétricas não lineares .....	382
8.24	Relações da analogia	382
8.25	Curvas $D_2$ e $D_3$ obtidas por analogia .....	385
8.26	Trajetoórias do portal com ligação rígida não linear $D_2$	387
8.27	Trajetoórias do portal com ligação flexível não linear $D_3$ .....	389
8.28	Zonas plásticas do portal com ligação não linear flexível $D_3$	390
9.1	Zonas plásticas do portal com ligação <i>midirrígida</i> e carga $q_0$ .....	407
9.2	Efeito das ZPs na configuração inicial do portal	411
9.3	Direção da CI limitadora .....	412
9.4	Portal com ligação <i>midirrígida</i> e carga especial	413
9.5	Portal com ligação <i>midirrígida</i> e carga especial .....	414
9.6	Trajetoórias de equilíbrio do Portal com carga especial	415
A.1	Comportamento geral de um ponto de um corpo .....	428
A.2	Efeito de $q_1$ nos deslocamentos $v_O(x)$	432
A.3	Efeito de $q_1$ nos deslocamentos $v_O(x)$ com $\Psi$ constante .....	432
A.4	Reprodução de gráfico impresso	436
A.5	Geração da cópia do gráfico via “AutoCAD” (2002) .....	436
A.6	Geração da tabela da curva via “AutoCAD” (2002)	436
A.7	Esforços nas ligações não lineares .....	437
A.8	Dados do portal especial	440

## LISTA DE TABELAS

Tabela	Título	Pag.
2.1	Índices de avaliação da rigidez da ligação e viga	45
2.2	Influência da relação ligação × viga na rigidez nodal .....	46
2.3	Estimativas para considerar a ligação rígida ou flexível numa análise	51
2.4	Limites da ligação rígida no Eurocode 3 (1992) .....	55
2.5	Valores mínimos dos parâmetros de rigidez da ligação	56
2.6	Comprimento característico $L/d$ e resistência requerida .....	57
2.7	Função $K_m$ e coeficientes do polinômio de Frye & Morris (1975)	67
2.8	Fatores de conversão $C_k$ para o SI .....	67
2.9	Relações de rigidez do anexo J do Eurocode 3 (1997)	71
2.10	Expoente $C_1$ da curva de potência de Kishi & Chen (1987) .....	76
2.11	Função $K_m$ e coeficientes de Ang & Morris (1984)	76
2.12	Parâmetros da curva exponencial de Lui & Chen (1988) .....	78
2.13	Parâmetro $C_1$ da curva exponencial de Yee & Melchers (1986)	81
2.14	Avaliação de custo da viga com ligação .....	88
2.15	Valores aproximados de rigidez $R_k$	100
2.16	Curva $M-\theta$ com $RBL$ para exemplo de Rathbun (1936) .....	115
2.17	Fatores de forma $\beta_L$ & $\kappa_p$ para exemplo de Rathbun (1936)	126
3.1	Valores particulares dos coeficientes das MRs básicas D e H .....	176
3.2	Valores particulares dos coeficientes da MR $K_{ep}$	178
3.3	Valores particulares dos coeficientes da MR $K_h$ .....	178
5.1	Propriedades da seção 4 WF 13 da coluna	243
5.2	Propriedades da seção 4 WF 13 experimental .....	245
5.3	Resultados da análise numérica	245
5.4	Propriedades da seção 8 WF 31 da coluna .....	247
5.5	Propriedades das seções do portal de Chen <i>et al.</i> (1996)	250
5.6	Análises do portal de Chen <i>et al.</i> (1996) .....	251
5.7	Análises de ZP do portal de Chen <i>et al.</i> (1996)	251

<b>Tabela</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
5.8	Propriedades dos materiais do portal	255
5.9	Propriedades das seções do portal .....	256
5.10	Propriedades das seções reduzidas dos perfis do portal	256
6.1	Resultados da análise da coluna de Lu & Kamalvand (1968) .....	275
6.2	Propriedades da seção 16 WF 36 da viga	279
6.3	Propriedades geométricas adotadas nos perfis do portal .....	285
6.4	Cargas de colapso do portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	285
6.5	Condição de flambagem na direção x- .....	288
6.6	Estudo das imperfeições para carga limite	291
6.7	Condição de flambagem com $P_2 = P$ (direção x- ou x+) .....	292
7.1	Propriedades da seção da viga	304
7.2	Esforços e deformações da viga simples .....	305
7.3	Dados da curva M- $\theta$ para modelos bilineares e trilineares	308
7.4	Efeito das ligações não lineares na viga elástica .....	311
7.5	Esforços e deformações no colapso da viga simples	314
7.6	Comparação dos modelos da ligação não linear B7R (Bailey,1970) ...	316
7.7	Efeito das ligações não lineares na viga inelástica	318
7.8	Cargas de flambagem da coluna travada .....	321
7.9	Cargas de flambagem da coluna destravada	321
7.10	Verificação da convergência .....	324
7.11	Carga limite inelástica da coluna travada	326
7.12	Resultados do portal de Yau & Chan (1994) .....	333
7.13	Propriedades da seção 8 WF 48 do portal	336
7.14	Curvas M- $\theta$ das ligações .....	337
7.15	Condições limite do portal de Chan & Chui (2000)	339
7.16	Condições limite com curvas <i>RBL</i> do portal de Chan & Chui (2000) .	340
7.17	Efeito dos controles na análise do portal de Chan & Chui (2000)	343
7.18	Efeito do método de determinar-se a rotação na viga simples .....	347
7.19	Efeito do método de determinar-se a rotação na coluna simples	347



<b>Tabela</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
8.1	Propriedades da seção da viga 16 WF 50	355
8.2	Efeito da CI na flambagem do portal com rótulas nas bases .....	357
8.3	Efeito da FP+CI na flambagem do portal nos modelos tradicionais	361
8.4	Efeito do FP+CI na flambagem do portal com ligações .....	363
8.5	Efeito da CI no portal com carga ( $q_0/4$ )	367
8.6	Efeito das cargas verticais: 75% $P_0$ e 25% $q_0$ .....	368
8.7	Efeito de H + 50% de carga vertical $P_0$	371
8.8	Efeito de H + 50% de carga distribuída $q_0$ .....	372
8.9	Efeito de H + 25% das cargas concentrada $P_0$ e distribuída $q_0$	373
8.10	Efeito de H + 50% de carga concentrada $P_0$ no portal AA .....	376
8.11	Cargas limite do portal com ligação <i>midirrígida</i>	378
8.12	Propriedades das curvas <i>RBL</i> análogas D2 e D3 .....	385
8.13	Portal com ligação não linear rígida D2	386
8.14	Portal com ligação não linear flexível D3 .....	388
8.15	Portal com ligação não linear flexível C3	389
9.1	Cargas limite do portal com ligação <i>midirrígida</i> e carga especial .....	414
A.1	Coefficientes de comportamento compacto	424
A.2	Comprimentos máximos para não ocorrer a flambagem lateral .....	424
A.3	Cálculo dos momentos das ligações rígidas com chapa de topo	439
A.4	Cálculo dos momentos das ligações flexíveis com 2 Ls de alma .....	439
A.5	Cálculo dos momentos das ligações com chapa de cabeça	439

## LISTA DE SÍMBOLOS

### 1. LETRAS MAIÚSCULAS COM NEGRITO

- A** – matriz de incidência cinemática do EF corrotacional, com ângulo  $\varphi$ , também denominada matriz de mudança de coordenadas instantânea, Eq. 3.59.
- A<sub>0</sub>** – matriz de incidência cinemática do EF corrotacional, com ângulo zero, Eq. 3.60.
- D** – matriz de rigidez elastoplástica básica, Eq. 3.70.
- F** (**F<sub>j</sub>**) – vetor dos esforços globais, (índice  $j = \{1-6\}$ ), ver Fig. 3.8(b).
- F<sub>I</sub>** – vetor das forças nodais equivalentes e/ou dos esforços internos genérico, Eq. 3.103.
- F<sup>0</sup>** – vetor das cargas nodais de referência ou originais.
- F<sup>ω</sup>** – vetor das cargas nodais aplicadas até o instante (iteração do passo)  $\omega$ .
- G<sub>α</sub>** – matriz de compatibilidade geométrica, associada a cada grandeza corrotacional  $q_\alpha$ , índice  $\alpha = \{1-3\}$ , Eq. 3.67(b).
- H** – matriz de rigidez básica referente à curvatura do EF, Eq. 3.72
- K** – matriz de rigidez genérica do EF, Eq. 3.67(a).
- K<sub>ep</sub>** – matriz de rigidez elasto-plástica do EF, versão corrotacional, Eqs. 3.67(b) e 3.79.
- K<sub>g</sub>** – matriz de rigidez geométrica, método elástico de segunda ordem e Eq. 3.67(c).
- K<sub>gα</sub>** – matriz de rigidez geométrica corrotacional do EF, Eq. 3.68.
- K<sub>h</sub>** – matriz de rigidez de curvatura do EF, Eqs. 3.67(c) e 3.81.
- K<sub>r</sub>** – matriz de rigidez [6:6] gerada pela função  $f_t$  aplicada à matriz **R** [3:3].
- Q** – vetor dos esforços corrotacionais, Eq. 3.57 e Fig. 3.8(b).
- R** – matriz genérica [3:3], empregada também para rotação no Sec. A.6, Eq. A.9.
- S** – matriz de rigidez genérica global, com todos os GDLs ordenados, Eq. 3.94.
- S<sup>ω</sup>** – matriz de rigidez genérica global avaliada no instante (iteração do passo)  $\omega$ .
- T** – matriz de transformação da MRE local para global, ver Sec. A.6, Eq. A.8.
- X<sup>^</sup>** – vetor das coordenadas globais em 3D, ver Sec. A.4.

## 2. LETRAS MAIÚSCULAS EM ITÁLICO.

- $A @ T$  – indicam valores dos termos das matrizes de rigidez, genéricos ( $A$ - $J$  na Eq. 3.80,  $K$ - $L$  na Eq. 3.69,  $M$ - $T$  na Eq. 3.82,  $A$ - $I$  nas Eqs. 5.7 e 6.8).
- $C_a$  – coeficiente angular da curva de Lui & Chen (1988), ver Tab. 2.12; e, também, coeficiente do axial atuante ( $0,9N_d/N_y$ ; Eurocode, 1992) nas Tabs. A.1 e A.2.
- $C_{dc}$  – coeficiente relativo a esbeltez limite da alma ( $d_a/a$ ) à compressão, na Tab. A.1.
- $C_{df}$  – coeficiente relativo a esbeltez limite da alma ( $d_a/a$ ) à flexão, na Tab. A.1.
- $C_e$  – expoente da Eq. 2.22 (Eurocode, 1992), ver Fig. 2.18 e Tab. 2.9; empregado também como coef. de travamento lateral nas regiões elásticas na Tab. A.2.
- $C_{fc}$  – coeficiente relativo a esbeltez limite da aba ( $b/t$ ) à compressão, na Tab. A.1.
- $C_{ff}$  – coeficiente relativo a esbeltez limite da aba ( $b/t$ ) à flexão, na Tab. A.1.
- $C_i$  – coeficiente (de índice “ $i$ ” {1, 2,...}) das curvas de ligações  $M$ - $\theta$ , ver Cap. 2.
- $C_{Lj}$  – coeficiente linear da curva exponencial de Kishi & Chen (1987), Eq. 2.39.
- $C_n$  – expoente da Tab. 2.8, para obter  $C_k$ , curva de Frye & Morris (1975).
- $C_k$  – coeficiente da Tab. 2.8, para converter  $K_{SI}$  para  $K_m$ .
- $C_{zp}$  – coeficiente de travamento lateral nas regiões com ZP na Tab. A.2.
- $C_1^*$  – coeficiente corrigido da Eq. 2.44 de Yee & Melchers (1986).
- $H(x)$  – função de Heavyside, Eq. 2.19(a-b) (Abramowitz & Stegun, 1972).
- $K_m$  – fator de conversão do momento nas Eqs. de Frye & Morris (1975) e Ang & Morris (1984), ver Tab. 2.7 e 2.11, respectivamente.
- $K_{SI}$  – conversão de unidades [kip, in] para o Sistema Internacional de  $K_m$ , ver Tab. 2.8.
- $X$  – indica uma grandeza qualquer (Eq. 3.83), empregada como  $[\log_{10}(\theta)]$  para definir o expoente  $C_1$  da Eq. de Kishi & Chen (1987), ver Tab. 2.10; (também na *Lista de símbolos*, para o item 9 *subscritos*).
- $X_{LIM}$  – indica valor limite  $[\log_{10}(\theta)]$  para Eq. de Kishi & Chen (1987), ver Tab. 2.10.

## 3. LETRAS MAIÚSCULAS (SEM NEGRITO, SEM ITÁLICO).

- $A$  – indica área de forma genérica (com subscrito).
- $A_g$  – área bruta da seção [ $\text{cm}^2$ ].
- $A_{we}$  – área elástica remanescente ou efetiva da alma.
- $A_0$  – área da seção original (ou de referência), utilizada para integração das propriedades elastoplásticas ou integração dos esforços corrotacionais, Eqs. 3.85, 3.95 e 3.96.
- $B$  – vão de vigas ou largura de pórticos [cm].

- $B_1$  – coef. de majoração do momento com a estrutura travada, ver Cap. 1.
- $B_2$  – coef. de majoração do momento com a estrutura destravada, Cap. 1 e Sec. A.3.
- $C_b$  – coef. de diagrama de momento relativo das NBR 8800 (1986), ver Cap. 1.
- $CG_p$  – centro de gravidade plástico (despreza áreas plásticas), ver Fig. 3.5 e Eq. 3.91.
- $C_{liga}$  – fator de custo da ligação, ver seção 2.5 e Tab. 2.14.
- $C_m$  – coeficiente de diagrama de momento relativo ao fator de amplificação, ver Eqs. 6.12 e 6.13, empregado nos Caps. 1 e 6.
- $C_{tot}$  – fator de custo total da peça: viga e ligação, ver Sec. 2.5 e Tab. 2.14.
- $C_{viga}$  – fator de custo da viga, ver seção 2.5 e Tab. 2.14.
- $D$  – módulo de rigidez genérico [ $kN/cm^2$ ], Eq. 3.3.
- $D_{1j}$  ( $D_{2j}$ ,  $D_{3j}$ ) – integral de  $DdA_0$  ( $Dy dA_0$ ,  $Dy^2 dA_0$ ), no regime elástico vale  $EA_g$  ( $0$ ,  $EI_z$ ), índice  $j =$  nós {A, B}, ver Sub. 3.4.4, Eqs. 3.87(b), (3.89 e 3.90), respectivamente.
- $D_{1m}$  – média das integrais de  $D_{1A}$  e  $D_{1B}$ , Eqs. 3.84 e 3.87(a).
- $D_{2m}$  – média das integrais de  $D_{2A}$  e  $D_{2B}$ , Eq. 3.84.
- $D_{3ABm}$  – inércia elastoplástica transmitida entre A-B, ver Sub. 3.4.4 e Eq. 3.92(a).
- $D_{3jm}$  – média considerando  $D_{3j}$  e a transmissão  $D_{3ABm}$ , ver Sub. 3.4.4 e Eq. 3.92(b).
- $D_{3m}$  – média das integrais de  $D_{3A}$  e  $D_{3B}$ , Eq. 3.84.
- $E$  – módulo de elasticidade ou de Young [ $kN/cm^2$ ] do aço, ver Sub. 3.2.2.
- $E_c$  – módulo de elasticidade do concreto [ $kN/cm^2$ ], ver Sub. 2.7.1.
- $E_s$  – módulo plástico aparente ou endurecimento [ $kN/cm^2$ ], ver Sec. 5.6 e Tab. 5.8.
- $E_t$  – módulo tangente ou de Engesser [ $kN/cm^2$ ], ver Sub. 3.2.2.
- $F_j$  – força global genérica [ $kN$ ], índice  $j = \{1, 2, 3, \dots\}$ , ver Fig. 3.8(b) e Eq. 3.56(a).
- $F_x$  – forças nos parafusos e aba inferior da ligação {de tração  $T_1$ ,  $T_2, \dots$ , ou compressão,  $N_3$ }, ver Fig. A.7, Tabs. A.3 e A.5.
- $G$  – coeficiente de rigidez entre a viga e a coluna do nó, no portal de Chen & Zhou (1987), Eq. 8.1, ver Secs. 8.3 e 8.10.
- $G_J$  – coeficiente de rigidez dos nós, relação coluna  $\times$  viga, para os ábacos de Julian & Lawrence (1959), índice  $J =$  nós {A, B}, ver Eqs. 6.15 e 6.16.
- $H$  ( $H_0$ ) – carga horizontal genérica (ou de referência) [ $kN$ ].
- $H_{Mu}$  – esforço horizontal último transferido pela viga na ligação, ver Fig. 8.24(a).
- $H_y$  – carga horizontal que provoca o colapso rígido-plástico [ $kN$ ], Eq. 6.17.
- $I$  – inércia principal da seção genérica, em geral, no plano da análise (eixo  $z$ ) [ $cm^4$ ].

- $I_e$  – inércia efetiva principal da seção do perfil, descontando a área plástica (eixo  $z$ ).
- $I_y$  ( $I_z$ ) – inércia principal da seção do perfil, em relação ao eixo  $y$  ( $z$ ) da seção.
- $J_A$  ( $J_B$ ) – nó inicial (final) de uma barra (viga, coluna) ou EF com índice  $A$  (ou  $B$ ).
- $J_2$  – um dos invariantes do tensor das deformações, associado à teoria da menor deformação, ver Sub. 3.2 (Chen & Han, 1987).
- $K_c$  – rigidez da coluna, Eq. 2.8(c).
- $K_{ij}$  – elemento de matriz de rigidez genérica, índices  $i, j = \{1-6\}$ .
- $K_j$  – rigidez da ligação, (aqui,  $j$  não é índice), Eq. 2.8(d).
- $K_v$  – rigidez mínima da viga, Eq. 2.8(b).
- $L$  – dimensão principal: comprimento ou vão de vigas, altura de colunas ou pórticos, nos Caps. 5 a 9, comprimento básico do EF [cm] nos Caps. 3 e 4 e Sub. 9.2.2.
- $L_a$  – altura do andar, Eq. 2.1.
- $L_c$  – comprimento na configuração conhecida, Fig. 3.2(b) e Eq. 3.15(a) do Cap. 3; ou altura da coluna, Eq. 2.8(c) do Cap. 2.
- $L_d$  – comprimento na configuração deformada (ou atual), ver Fig. 3.2(c) e Eq. 3.15(b).
- $L_{fl}$  – comprimento efetivo ou equivalente de flambagem ( $= k_{fl} \cdot L$ ), ver Fig. 7.15.
- $L_t$  – distancia entre travamentos, perpendicular ao plano da análise, ver Secs. 3.2 e A.1.
- $L_v$  – comprimento da viga ou barra, ver Eq. 2.8 do Cap. 2, ou Figs. 3.9 e 3.10 do Cap.3.
- $L_0$  – comprimento na configuração original, no instante  $\omega = 0$ , ver Fig. 3.2(a).
- $M$  ( $M_J$ ) – momento genérico, (ou no ponto/nó  $J$  { $A, B, C, D, E$ }), [kNcm].
- $M_c$  – momento da coluna, Eq. 2.8(c).
- $M_{cn}$  – momento da ligação em que há o contato viga  $\times$  coluna, ver Fig. 2.9.
- $M_d$  – momento de dimensionamento, Eq. 6.12.
- $M_e$  – momento elástico máximo da ligação (Eurocode 3, 1992).
- $M_{EF}$  – momento na ligação calculado pelo EF, ver Sec. 4.5.
- $M_f$  – momento da ligação rígida perfeita (engaste), Eq. 2.8(a).
- $M_J$  – integração do momento (integral de  $\sigma_y dA$ , no nó  $J$  do EF), Eq. 3.96.
- $M_m$  – momento máximo suportado na ligação (ou limite experimental), ver Fig. 2.6.
- $M_p$  – momento plástico da seção ( $\sigma_y \cdot Z_z$ ).
- $M_{pr}$  – momento plástico reduzido da seção (desconta as TRs), Eq. 6.9 da Sec. 6.4.
- $M_q$  – momento máximo no engaste para viga com carga distribuída ( $q$ ), Eq. 7.2(b).
- $M_Q$  – momento máximo no engaste para viga com carga concentrada ( $Q$ ), Eq. 7.2(a).

- $M_r$  – momento genérico na ligação, ver Fig. 2.2.
- $M_s$  – momento associado à rigidez secante, ver Fig. 2.18 e Sub. 2.4.3.
- $M_u$  – momento último da ligação, ver Fig. 2.6.
- $M_v$  – momento na viga engastada, Eq. 2.48 na Sec. 2.5.
- $M_y$  – momento de início do escoamento, ver Fig. 2.43.
- $M_0$  – momento de referência, associado à rotação  $\theta_0$ , ver Eq. 2.28 e Fig. 2.20.
- $N$  ( $N_j$ ) – esforço axial (ou “normal”) genérico (ou no ponto  $J$  {A, B, C,...}) [kN].
- $N_{crit}$  – carga de flambagem elástica dada por fórmulas ( $k_{fl} \neq 1$ ), Eq. 7.7 na Sub. 7.3.1.
- $N_d$  – esforço axial de dimensionamento ou projeto, Eq. 6.12.
- $N_e$  – carga de flambagem de Euler, com  $k_{fl} = 1$ , ver Fig. 7.12, Eqs. 6.12 e 7.6.
- $N_j$  – integração do esforço normal (integral de  $\sigma dA$ , no nó  $j$  do EF), ver Eq. 3.95.
- $N_m$  – carga de flambagem inelástica da barra isolada, ver Fig. 7.15, Eqs. 6.12 e 7.9.
- $N_{pp}$  – carga de flambagem determinada por *PPLANAVA*, ver Tabs. 7.8 e 7.9.
- $N_y$  – carga de escoamento (esmagamento) da seção à compressão ( $\sigma_y \cdot A_g$ ), ver Sec. 5.4.
- $\bar{N}_j$  – esforço axial mais provável para a *IIEA*, sem escoamento na iteração, Eq. 4.21.
- $P_{A0}$  – produto escalar dos vetores ( $u_A^T \cdot u_0$ ), ver Eq. 4.11(b) e Fig. 4.6(b).
- $P_j$  – carga vertical [kN], índice  $j = \{1, 2, 3, \dots\}$  geral;  $\{0\}$  de referência, Secs. 7.3, 7.4, 7.6 e Cap. 8.
- $P_v$  – peso linear da seção da viga [kN/m], Eq. 2.56 na Sec. 2.5.
- $Q$  ( $Q_0$ ) – carga concentrada no meio-vão da viga (de referência)[kN], ver Secs. 6.4 e 7.2.
- $Q_b$  – esforço cortante no chumbador, ver Sub. 4.3.1.
- $Q_p$  – esforço de tração gerado por efeito de alavanca, ver Fig. 2.3.4(c) e 2.6.2.
- $Q_y$  – carga concentrada no meio-vão da viga que gera mecanismo plástico, Eq. 6.10(a).
- $Q_\alpha$  – carga corrotacional genérica, índice  $\alpha = \{1-3\}$ , ver Fig. 3.8(b).
- $R_{cws}, R_{ca}$  – rigidez do painel da coluna ao corte e à compressão, Eq. A.11 na Sec. A.9.
- $R_j$  – elemento da MR genérica  $\mathbf{R}$ , índice  $j = \{1-6\}$ , Eq. 3.75.
- $R_k$  – rigidez genérica da ligação [kNm/rad], ver Fig. 2.8.
- $R_{kab}$  – rigidez média da ligação entre os pontos {A, B}, ver Fig. 2.16 e Eq. 2.14(b).
- $R_{ki}$  – rigidez inicial da ligação, ver Figs. 2.6 e 2.8.
- $R_{kj}$  – rigidez da ligação bilinear (tri), índice  $j$  (trecho) =  $\{1-3\}$ , ver Fig. 7.5 e Sub. 7.2.2.
- $R_{km}$  – rigidez máxima da ligação, ver Fig. 2.9(a).
- $R_{kp}$  ( $R_{ku}$ ) – rigidez plástica (última) da ligação, ver Fig. 2.8 e Sub. 2.2.3.

$R_{ks}$  – rigidez secante da ligação, ver Fig. 2.8.

$R_{kt}$  – rigidez tangente (instantânea) da ligação, ver Fig. 2.8.

$R_{ky}$  – rigidez da ligação secante após o escoamento (Eurocode 3, 1992), ver Fig. 2.48.

$R_{kj}^*$  – rigidez da ligação, descontando-se  $R_{kp}$ , índice  $j = \{i, 1, 2, A, B\}$ , Eq. 2.66.

$R_{\Sigma b}$  – rigidez do conjunto de parafusos da ligação, Eq. A.11 na Sec. A.9.

$T$  – esforço de tração genérico, índices  $j = \{1-4\}$  para tração nos parafusos, ver Tabs. A.3 e A.5, bem como Fig. A.7.

$T_b$  – esforço de tração nos chumbadores, ver Sub. 4.3.1.

$V_j$  – reação vertical genérica [kN], índice  $j = \text{nós } \{A, B, C, \dots\}$

$V_d$  ( $V_{de}$ ) – esforço cortante [kN], índice:  $\{d\}$  de projeto;  $\{de\}$  máximo no critério de von Mises (1913), Eq. 4.3.

$V_O$  – volume original para integrar as propriedades e os esforços, Eqs. 3.54 e 3.83.

$W$  – total das cargas verticais aplicadas no portal CZ [kN], ver Sub. 8.2.

$W_y$  ( $W_z$ ) – módulo resistente elástico [cm<sup>3</sup>], em relação ao eixo  $y$  ( $z$ ) da seção.

$Z_y$  ( $Z_z$ ) – módulo resistente plástico [cm<sup>3</sup>], em relação ao eixo  $y$  ( $z$ ) da seção.

#### 4. LETRAS MINÚSCULAS EM NEGRITO

$\mathbf{g}$  – vetor de cargas residuais da iteração ( $= \Delta \mathbf{F}$ ), ver Sub. 4.3.2.

$\mathbf{q}$  ( $q_\alpha$ ) – vetor de deslocamentos corrotacionais, (índice  $\alpha = \{1-3\}$ ), ver Fig. 3.7, Eqs. 3.11 e 3.12.

$\mathbf{u}$  ( $u_j$ ) – vetor de deslocamentos globais em 2D, (índice  $j = \{1-6\}$ ), ver Fig. 3.8(a) e Eq. 3.14.

$\mathbf{u}_A$  – vetor de deslocamentos da iteração anterior, ver Eq. 4.5 e Fig. 4.6(b).

$\mathbf{u}_0$  – vetor de deslocamentos com a carga de referência  $\mathbf{F}^0$ , ver Eq. 4.6(b).

$\hat{\mathbf{u}}$  – vetor de deslocamentos globais em 3D, ver Fig. A.1(a).

$\mathbf{x}$  – vetor de coordenadas globais em 2D, ver Fig. 3.2.

$\hat{\mathbf{x}}$  – vetor de coordenadas globais em 3D, ver Fig. A.1(a).

#### 5. LETRAS MINÚSCULAS EM ITÁLICO

$a @ f$  – coeficientes das funções de interpolação, Eqs. 3.16 e 3.20 da Sub. 3.3.3.

$f_T$  – função linear de transformação da matriz  $\mathbf{R}$  em  $\mathbf{K}_r$ , Eq. 3.74 da Sub. 3.4.3.

$h$  – fator incremental (de 0 a 100%), ver Sub. 4.3.2.

## 6. LETRAS MINÚSCULAS (SEM NEGRITO, SEM ITÁLICO)

- $a$  – espessura da alma do perfil I [cm], ver Fig. 3.1(b).
- $a_c, b_c$  – dimensões base e altura do bloco de concreto, ver Sec. 2.7, Figs. 2.39 e 2.40.
- $a_i$  – coeficientes quadráticos do *RBL*, índice  $i = \{1, 2\}$ , Eqs. 2.60 a 2.62.
- $a_L$  – aba da cantoneira de ligação [cm], ver Fig. 2.17(d, i).
- $a_p, b_p$  – dimensões base e altura da placa de base, ver Sec. 2.7, Figs. 2.39 e 2.40.
- $a_s, b_s, c_s$  – coeficientes do polinômio do 2º grau em  $\Delta\lambda$ , ver Fig. 4.6(a), Eqs. 4.10 e 4.11.
- $b$  – largura da aba do perfil I [cm], ver Fig. 3.1(b).
- $b_a$  – extensão horizontal da cantoneira, Fig. 2.17(c-d).
- $b_i$  – coeficientes lineares do *RBL*, índice  $i = \{1, 2\}$ , Eqs. 2.60 a 2.62.
- $b_t$  – largura da aba do perfil T, Fig. 2.17(g).
- $b_{Tb}$  – largura do perfil tubo, ver Fig. 2.17(i) ligação com 4Ls cercando.
- $c$  – coeficiente da Eq. 2.4 e subscrito  $\{2, 3 \text{ ou } 4\}$ , do índice de fixação  $\gamma (= \gamma_c)$ .
- $c_i$  – coeficientes constantes do *RBL*, índice  $i = \{1, 2\}$ , Eqs. 2.60 a 2.62.
- $d$  – altura do perfil I [cm], ver Fig. 3.1(b).
- $d_a (d_{ac})$  – altura da alma do I [cm], [parte elástica remanescente, aproximada por  $(d-4t)$ , descontando o raio do filete], ver Sub. 3.2.3 e Eq. 4.3.
- $dA_O$  – variação diferencial da área de referência, para integração.
- $d_b$  – diâmetro dos parafusos de ligação, ver Fig. 2.17(c-g).
- $d_c$  – diâmetro dos chumbadores, ver Sec. 2.7 e Fig. 2.39(c).
- $d_g$  – gabarito entre furos da chapa de topo estendida, ver Fig. 2.17(e).
- $dh$  – variação do fator incremental (de 0 a 100%), ver Sub. 4.3.2.
- $dM$  – variação diferencial (ou acréscimo) do momento.
- $dM_{je}$  – variação do momento elástico na iteração antes da *IIEA*, índice  $j = \text{nós } \{A, B\}$ .
- $dM_{jp}$  – variação do momento plástico na iteração após a *IIEA*, índice  $j = \text{nós } \{A, B\}$ .
- $dM_j^\#$  – correção dos momentos no EF para a ligação de M- $\theta$  não linear, índice  $j = \text{nós } \{A, B\}$ , Eq. 4.39 da Sub. 4.5.4.
- $dN_j$  – variação do esforço axial na plasticidade, índice  $j = \text{nós } \{A, B\}$ , ver Eq. 4.22.
- $dq_\alpha$  – acréscimos de rotações naturais, índice  $\alpha = \{1-3\}$  ou nós  $\{A, B\}$ , ver Caps. 3 e 4.
- $d\mathbf{q}^* (dq_\alpha^*)$  – vetor de acréscimos de rotações naturais com a plasticidade no EF, índice  $\alpha = \{1-3\}$  ou nós  $\{A, B\}$ , ver Sub. 4.5.3.
- $ds$  – variação corretiva do deslocamento generalizado, Eq. 4.18(b).



- $dV_O$  – variação diferencial do volume de referência, para integração na Eq. 3.83.
- $dx$  – variação diferencial da posição (distancia)  $x$ , ver Cap. 3.
- $dX$  – taxa de variação da grandeza  $X$  genérica.
- $dp'$  ( $dp^{\#}$ ) – acréscimo da curvatura para a ligação de M- $\theta$  não linear, Eqs. 4.37 e 4.38.
- $d\theta$  – acréscimo de rotação da ligação, ver Caps. 2 e 4.
- $e$  – excentricidade genérica (M/N), ver Sub. 2.7.1.
- $f$  – relação de tensões de escoamento ( $23,5/\sigma_y$ ), ver Sec. A.1 (Eurocode 3, 1992).
- $g$  – índice de rigidez nodal da ligação, ver Eq. 2.3 na Sub. 2.2.4.
- $g_a$  – gabarito horizontal de furos da cantoneira ou chapa, ver Fig. 2.17(a-b, h).
- $g_b$  – gabarito líquido ( $g_L - d_b$ ), ver Fig. 2.17(d).
- $g_L$  – gabarito de furo vertical da cantoneira, ver Fig. 2.17(d).
- $h_a$  – altura da cantoneira, ver Fig. 2.17(a-b), ver Secs. 8.9 e A.9.
- $h_c$  – altura do concreto da base, ver Sec. 2.7 e Fig. 2.39(c).
- $h_L$  – altura da ligação flexível, ver Eq. 8.4(b), pode ser ( $h_a$  ou  $h_p$ ).
- $h_p$  – altura da chapa de cabeça, ver Fig. 2.17(h), ver Secs. 8.9 e A.9.
- $h_s$  – parâmetro característico da analogia das ligações, ver Secs. 8.9 e A.9.
- $i, j, n$  – índices genéricos para somatórios: fatias, nós, EF, etc.
- $k_1, k_2$  – inverso dos parâmetros  $G_A$  e  $G_B$  (Li & Li, 2007), ver Tabs. 7.8 e 7.9.
- $k_{fl}$  – coeficiente de comprimento efetivo de flambagem, Eq. 6.18(c) na Sub. 6.6.1.
- $k_{AB}, k_{CD}$  – coeficiente de flambagem  $k_{fl}$  da coluna A-B e C-D, respectivamente.
- $k_{Teor}$  – coeficiente de flambagem  $k_{fl}$  teórico, ver Sub. 7.3.1 e Tabs. 7.8 e 7.9.
- $l_c$  – comprimento de ancoragem do chumbador, ver Sec. 2.7 e Fig. 2.39(c).
- $l_r$  – extensão da rosca do chumbador, ver Sec. 2.7 e Fig. 2.39(c).
- $m$  – relação adimensional entre o momento  $M_r$  e o último  $M_u$ , Eq. 2.25 na Sub. 2.4.3.
- $m_a$  – flexibilidade nodal ( $= \beta_k$ ), inverso de ( $g$ ), ver Sub. 2.2.4.
- $m_A$  – momento relativo do apoio ponto A, ver Eq. 2.52(a).
- $m_C$  – momento relativo do meio-vão ponto C, ver Eq. 2.52(b).
- $n_{ef}$  – número de EF da barra, ver Sub. 7.3.2.
- $n_{elem}$  – número total de EF do modelo, para se obter  $\mathbf{S}$  na Eq. 3.94.
- $n_{fatia}$  – número total de fatias da seção, para se obter as propriedades e esforços.
- $p_L$  – distancia da borda da chapa, ou cantoneira, ao furo, ver Fig. 2.17.
- $q$  ( $q_0$ ) – carga uniformemente distribuída [kN/m], nas Secs. 6.4, 7.2, 8.5 a 8.9, e 9.3.

- $q_y$  – carga uniformemente distribuída [kN/m] que gera mecanismo plástico, Eq. 6.10(b).
- $q_\alpha$  – coordenada corrotacional genérica, índice  $\alpha = \{1-3\}$  ou nós  $\{A, B\}$ .
- $r$  – relação adimensional entre a rotação  $\theta_r$  a de referência  $\theta_0$ , Eq. 2.25 na Sub. 2.4.3.
- $r_i$  – componente da MR  $\mathbf{K}_r$ , índice  $i = \{1-10\}$ , ver Eqs. 3.76 e 3.77.
- $r_y$  ( $r_z$ ) – raio de giro [cm], em relação ao eixo  $y$  ( $z$ ) da seção.
- $s$  ( $s_a, s_0$ ) – módulo do vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , (anterior  $\mathbf{u}_A$  e de referência  $\mathbf{u}_0$ , respectivamente), ver Eq. 4.7(a-c).
- $t$  – espessura da aba do perfil I [cm], ver Fig. 3.1(b).
- $t_a, t_c, t_p, t_t$  – espessura da cantoneira de alma, cantoneira de aba, da chapa de topo (ou de cabeça) e da aba do perfil T, respectivamente [cm], ver Fig. 2.17.
- $t_e$  – espessura do enchimento entre a base e o bloco, ver Sec. 2.7 e Fig. 2.39(c).
- $u$  – deslocamento na direção do eixo  $x$  do EF.
- $u_{gk}$  –  $k$ -ésimo deslocamento do vetor  $\mathbf{u}_g$ , provocado pela carga  $\Delta\mathbf{F} = \mathbf{g}$ , Eq. 4.4.
- $u_j$  – deslocamento local genérico, ( $u, v$  ou  $\theta$ ), índice  $j = \{1-3\}$ , respectivamente.
- $u_k$  –  $k$ -ésimo deslocamento do vetor  $\mathbf{u}$ , selecionado para controle, ver Sub. 4.3.2.
- $u_O$  – deslocamento do eixo do EF na direção  $x$  local, Eqs. 3.16 e 3.19.
- $u_{Ok}$  –  $k$ -ésimo deslocamento do vetor  $\mathbf{u}_0$ , provocado pela carga  $\mathbf{F}^0$ , Eq. 4.4.
- $v$  – deslocamento na direção transversal, eixo  $y$  do EF.
- $v_O$  – deslocamento do eixo do EF na direção  $y$  local, Eqs. 3.20, 3.43, 3.51, 5.1 e 6.2.
- $w_v$  – peso linear da viga [kN/m], ver Sec. 2.5.
- $x$  – coordenada genérica no eixo local, axial ao eixo do EF.
- $x_m$  – momento modificado ( $K_m \cdot M_r$ ), parâmetro na curva de Frye & Morris (1975) e Ang & Morris (1984), ver Eq. 2.15 e 2.34(a-b).
- $x_{m0}$  – momento modificado de referência ( $K_m \cdot M_0$ ) de Ang & Morris (1984), Eq. 2.34(b).
- $x_p$  – coordenada de posição de um ponto genérico P do EF.
- $y$  – coordenada genérica no eixo transversal ao do EF, define o plano do EF.
- $y_{CGP}$  – coordenada  $y$  do centro de gravidade plástico, ver Fig. 3.5 e 3.91.
- $y_{CGP}^a$  – coordenada do efeito do axial excêntrico na plasticidade, Eq. 4.40.
- $y_{CGP}^b$  – coordenada da correção da rotação específica na plasticidade, Eq. 4.41.
- $y_p$  – coordenada de posição da fibra, quando ocorre a rotação específica ( $\rho'$ ).
- $y_{pO}$  – coordenada de um ponto genérico P da seção em relação ao eixo O.
- $z$  – coordenada genérica no eixo horizontal da seção, perpendicular ao plano do EF.

## 7. LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

$\Delta$  – deslocamento lateral genérico de pórticos.

$\Delta_a$  – deslocamento lateral do andar, Eq. 2.1.

$\Delta \mathbf{F}$  – vetor de esforços residuais ou de acréscimo de cargas externas ( $\mathbf{g}$ ), Sub. 4.3.2.

$\Delta \mathbf{F}_I$  – acréscimo do vetor de esforços residuais no passo (incremento), ver Caps. 3 e 4.

$\Delta_{H2}, \Delta_{H1}$  – deslocamentos de 2ª e 1ª ordem, para definir  $B_2$ , ver Sec. A.3.

$\Delta M_i$  – acréscimo de momentos, índice  $i = \{1-3\}$ , ver Eq. 2.66 na Sec. 2.8.

$\Delta N$  – correção do esforço axial na *IIEA*, ver Subs. 3.6 e 4.4.

$\Delta P$  – acréscimo de carga vertical genérica.

$\Delta s$  – variação do deslocamento generalizado no passo, Eq. 4.12 na Sub. 4.3.2.

$\Delta \mathbf{u}$  – acréscimo do vetor de deslocamentos da estrutura, Eq. 4.5 na Sub. 4.3.2.

$\Delta u_k$  – acréscimo da  $k$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{u}$ , Eq. 4.4(a) na Sub. 4.3.2.

$\Delta_0$  – imperfeição geométrica relativa ao fora de prumo inicial, ver Sec. 1.4.2.

$\Delta \lambda$  – acréscimo do fator de carga (no passo), Eqs. 4.4, 4.13, 4.14 e 4.17 na Subs. 4.3.2.

$\Phi$  – ângulo associado à curvatura e ao efeito de segunda ordem ( $M\Phi$ ), ver Fig. 1.2(c).

$\Psi_i$  – funções de forma genéricas, índice  $i = \{1-3\}$ , Eqs. 3.19 e 3.44 na Sub. 3.3.3.

$\Psi_{20}$  – função de forma do EF rígido-rígido, ver Fig. 3.14, Eqs. 3.36, 3.48 e 3.50.

$\Psi_{30}$  – função de forma do efeito da ligação, ver Fig. 3.14, Eqs. 3.48 e 3.50.

## 8. LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

$\alpha$  – ângulo de giro genérico, e genericamente, índice das grandezas corrotacionais.

$\alpha_B$  – ângulo de giro próprio da ligação no nó B, ver Fig. 3.14, Eq. 3.47 e 3.51.

$\alpha_m$  – parâmetro de ajuste de  $C_m$ , ver Eq. 6.13.

$\alpha_p, \beta_p$  – fatores de carga de  $P_1$  e  $P_2$ , do portal Fig. 6.14 da Sec. 6.6.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – parâmetros do *RBL* relativos às áreas do diagrama  $R_k-\theta$ , Eqs. 2.66 e 2.67.

$\beta$  – fator de momento, em geral  $M/M_p$  ou  $H/H_y$ , ver Eq. 6.17, Sec. 6.5.

$\beta_k$  – flexibilidade nodal (Al-Bermani & Kitipornchai, 1992; ver  $m_a$ ), Eq. 2.6(b).

$\beta_L$  – parâmetro de forma genérico do *RBL* [ $\alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)$ ], ver Fig. 2.52.

$\beta_m$  – maior momento nas seções travadas, em relação à  $M_p$ , Sub. 3.2.3.

$\gamma_c$  – índice de fixação da ligação, indiciado por  $c = \{2-4\}$ , Eq. 2.4 na Sub. 2.2.4.

$\gamma_{ij}$  – deformação de cisalhamento genérica, índices  $i \neq j = \{1-3\}$ , ver Sec. A.4.

- $\gamma_p$  – fator de carga combinada [ $\beta_p/(\alpha_p + \beta_p)$ ], ver Sub. 6.6.4.
- $\gamma_z$  – fatores de inércia da coluna C-D em relação à A-B no portal da Sub. 6.6.1.
- $\delta$  – deslocamento transversal ou flecha associada à curvatura da barra ou EF.
- $\delta_u$  – deformação da ligação sob momento último, ver Fig. 8.24(b).
- $\delta \mathbf{u}$  ( $\delta \mathbf{u}_g, \delta \mathbf{u}_{gk}$ ) – variação corretiva dos deslocamentos (devido à carga residual  $\mathbf{g}$ , e sua  $k$ -ésima componente), Eqs. 3.54 e 4.19.
- $\delta X$  – pequena variação da grandeza  $X$  genérica (no processo corretivo).
- $\delta y_v$  – variação da flecha vertical da viga biligada, ver Eq. 2.55 na Sec. 2.5.
- $\delta \epsilon$  – variação ou acréscimo da deformação (no processo corretivo), Eqs. 3.54 e 3.55.
- $\delta \epsilon_j$  – variação ou acréscimo da deformação no processo *IIEA*, Eq. 3.105 e Sec. 4.4.
- $\delta \lambda$  – variação corretiva do fator de carga, ver Sub. 4.3.2, Eqs. 4.4(c) e 4.20.
- $\delta_0$  – imperfeição geométrica associada à curvatura inicial da barra, ver Sub. 1.4.1.
- $\partial$  – operador diferencial parcial genérico.
- $\epsilon$  – deformação genérica, avaliada pelo alongamento linear, ver Eqs. 3.2(a), 3.53, 5.2, 6.3 e Sec. A.4.
- $\epsilon_e$  – deformação elástica, ver Fig. 3.20.
- $\epsilon_f$  – deformação na fatia, ver Fig. 3.3.
- $\epsilon_i$  – deformação axial, índice  $i = \{1-3\}$ , ver Sec. A.4.
- $\epsilon_m$  ( $\delta \epsilon_m$ ) – deformação média (seu acréscimo na iteração), Eq. 3.52.
- $\epsilon_0$  – deformação axial do eixo (que contém o centróide) da seção do EF, Eq. 3.6.
- $\epsilon_p$  – deformação plástica, máximo 4%, ver Fig. 3.20.
- $\epsilon_s$  – deformação limite do patamar plástico e do endurecimento sob tração, Fig. 3.3(c).
- $\epsilon_u$  – deformação última ou limite, máximo:  $\epsilon_y + 4\%$ .
- $\epsilon_y$  – deformação de início do escoamento ( $\sigma_y/E$ ), ver Figs. 3.3(c), 3.4 e 3.20.
- $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{\#}$  ( $\boldsymbol{\epsilon}^{\#}$ ) – vetor de deformações em 3D (ou 2D), ver Sec. A.4.
- $\zeta_A$  – inércia elastoplástica relativa ( $DI_A/EI_{zA}$ ) do nó sem ligação, Eq. 4.27 da Sub. 4.5.3.
- $\zeta_B$  – inércia elastoplástica relativa ( $DI_B/EI_{zB}$ ) do nó com ligação, Eq. 4.28 e Fig. 4.10, da Sub. 4.5.3.
- $\eta$  – índice de giro próprio da ligação ou de *semiflexibilidade* nodal, Eq. 2.7(a).
- $\eta_{EF}$  – índice de *semiflexibilidade* nodal do EF [emprega  $L$  (não  $L_v$ ) para cálculo de  $(g)$ ].
- $\eta^*$  – índice de *semiflexibilidade* nodal com plasticidade, ver Fig. 4.10 e Eq. 4.28.

- $\eta^*_L$  – índice de *semiflexibilidade* nodal com plasticidade e estiramento, Eq. 4.33.
- $\theta_b$  – rotação de referência para Bjorhovde *et al.* (1990), Eq. 2.9 na Sub. 2.3.1.
- $\theta_c$  – rotação de referência para Eurocode 3 (1992), Eq. 2.11 na Sub. 2.3.2.
- $\theta_{cn}$  – rotação de contato aba da viga lateral da coluna, ver Fig. 2.9 e Eq. 4.23.
- $\theta_e$  – rotação correspondente ao limite do regime elástico, ver Fig. 2.6.
- $\theta_g$  – ângulo de giro de corpo rígido, ver Fig. 3.2 e Eq. 3.1.
- $\theta_j$  – ângulo de giro genérico (inclusive para a ligação) [mrad], índice  $j = \{A, B\}$  para viga (ou nó do EF) na Fig. 3.9,  $\{E, D\}$  para portal “ao vento” da Fig. 2.29;  $\{C, D, E, F\}$  no ponto de mesma letra, para Figs. 4.8, 4.9 e 4.11.
- $\theta_L$  – rotação isolada só da ligação, sem a viga ( $= \alpha_B$ ).
- $\theta_{kr}$  – rotação da curva B cúbica, Eq. 2.18 na Sub. 2.4.2.
- $\theta_m$  – rotação correspondente ao momento máximo da ligação, ver Fig. 2.6.
- $\theta_p$  – rotação teórica da rótula plástica (RP), ver Fig. 2.7.
- $\theta_Q$  ( $\theta_q$ ) – rotação no extremo da viga com carga concentrada  $Q$  ou distribuída  $q$ , Eq. 7.3 [a (b)].
- $\theta_r$  – rotação genérica da ligação [mrad], ver Fig. 2.2.
- $\theta_s$  – rotação da ligação para condições de serviço, ver Sub. 2.2.4.
- $\theta_u$  – rotação última (pré-colapso) da ligação, ver Figs. 2.6 e 8.24, estimativa Eq. 2.1.
- $\theta_v$  – rotação dos extremos da viga biapoiada, Eq. 2.49 na Sec. 2.5.
- $\theta_0$  – rotação de referência, ver Fig. 2.9(a) e Eq. 2.2.
- $\kappa_A$  – relação de rigidez de transição (ponto A) para o *RBL*:  $R_{kA}/R_{ki}$ , ver Sec. 2.8.
- $\kappa_d$  ( $\lambda_d, \mu_d$ ) – constantes de Lamé (Timoshenko & Goodier, 1970), Eq. A.2[a (b, c)].
- $\kappa_p$  – relação de rigidez e parâmetro do *RBL*:  $R_{kp}/R_{ki}$ , ver Sec. 2.8 e Fig. 2.53.
- $\lambda$  – fator de carga genérico, em geral associado a  $N/N_y$  (ou  $P/N_y$ ).
- $\lambda_c$  – fator de carga de colapso genérico.
- $\lambda_e$  – fator de carga crítico (flambagem elástica), ver Sec. 1.2 e Fig. 1.3(b).
- $\lambda_i$  – fator de carga de flambagem, índice  $i = \{AB, CD\}$  colunas, Sec. 6.6.
- $\lambda_{lim}$  – fator de carga limite, definido pela análise avançada, ver Sec. 1.2, Fig. 1.3(b).
- $\lambda_p$  – fator de carga de colapso por mecanismo (ou plástico), ver Sec. 1.2, Fig. 1.3(b).
- $\lambda_Q$  ( $\lambda_q$ ) – fator de carga de colapso na viga, com carga concentrada  $Q$  (distribuída  $q$ ), Eq. 6.11(a) [(b)].

- $\lambda_y$  – fator de carga de início do escoamento da estrutura ou barra.
- $\lambda_z$  – esbeltez aparente, Eq. 6.18(b) na Sec. 6.6.
- $\lambda^\omega$  – fator de carga aplicado no instante  $\omega$  (iteração/incremento), ver Sub. 4.3.2.
- $\mu_r$  – fator de rigidez da ligação, Eq. 2.5 na Sub. 2.2.4.
- $\nu$  – coeficiente de deformação transversal ou de Poisson (Timoshenko & Goodier, 1970), em geral, para o aço 0,3; desprezado nesta tese, ver Sec. A.4.
- $\xi$  – estiramento da fibra, Eq. 3.38 da Sub. 3.3.6 e Sec. A.5.
- $\rho$  – ângulo de giro genérico da seção do EF, ver Fig. 3.6(a) na Sub. 3.3.1.
- $\rho'$  – rotação específica ( $d\rho/dx$ ), conjugada energética ao momento, ver Fig. 3.6(b).
- $\rho_p$  – índice de plasticidade na seção retangular das Figs. 3.17, 3.18 e 3.19.
- $\rho_z$  – parâmetro de flambagem inelástica, ver Eq. 6.18(a) na Sec. 6.6.
- $\sigma$  – tensões normais genéricas, sinais: tração (+) ou compressão (-), [kN/cm<sup>2</sup>].
- $\sigma_{ck}$  – tensão última ou de ruptura do concreto.
- $\sigma_e$  – tensão de flambagem elástica de Euler.
- $\sigma_f$  – tensão genérica de uma fatia, ver Fig. 3.3.
- $\sigma_i$  – tensão axial, índice  $i = \{1-3\}$ , ver Sec. A.4.
- $\sigma_r$  – tensão residual (TR) máxima, ver Fig. 1.5.
- $\sigma_u$  – tensão última ou limite de resistência do aço, ver Tab. 5.8.
- $\sigma_y$  – tensão de escoamento, ver Fig. 3.3(c), 3.4 e 3.20.
- $\sigma_{yb}$  – tensão de escoamento do chumbador, Sec. 2.7.
- $\hat{\sigma} (\sigma^\#)$  – vetor de tensões em 3D (ou 2D), ver Sec. A.4.
- $\tau_{ij}$  – tensão de cisalhamento genérica, índices  $i \neq j = \{1-3\}$ , ver Sec. A.4.
- $\varphi_A$  – ângulo de giro interno da viga no nó A, ver Figs. 3.9 e, 6.6 na Sec. 6.4.
- $\varphi_B$  – ângulo de giro interno da viga no nó B, ver Figs. 3.9 e, 5.2 na Sec. 5.3.
- $\varphi_i$  – ângulo de posição do eixo corrotacional (x) em relação ao eixo X global, índice  $i = \{c, d\}$  conhecido e deformado, respectivamente, Eq. 3.13(a-b), ver Figs. 3.2 e 3.7.
- $\chi_i$  – relação entre o acréscimo de momentos plástico e elástico na iteração, para corrigir a rotação da ligação no método XX, Eqs. 4.30 e 4.31, na Sub. 4.5.3.
- $\omega$  – instante genérico do processo incremental-iterativo, ver Fig. 4.3.

## 9. SUBSCRITOS

$X_a$  – relacionado aos apoios.

$X_A$  – relacionado às grandezas do nó inicial do EF ( $J_A$ ).

$X_B$  – relacionado às grandezas do nó final do EF ( $J_B$ ).

$X_c$  – relacionado às grandezas da configuração conhecida ( $\omega=1$ ) ou à condição de colapso ou a coluna, ou ao meio-vão da viga.

$X_d$  – relacionado às grandezas da configuração desconhecida ( $\omega$ ), ou referente ao dimensionamento.

$X_D$  ( $X_E$ ) – relacionado ao lado direito (ou esquerdo) da viga ou portal.

$X_e$  – relacionado ao estado elástico (de fatias, por exemplo) ou de flambagem elástica.

$X_f$  – relacionado a um ponto genérico: a fibra, e por extensão a fatia.

$X_g$  – relacionado às grandezas geométricas.

$X_k$  – usado nas integrações numéricas das propriedades  $D_{1m}$ ,  $D_{2m}$  e  $D_{3m}$ , índice  $k = \{1-3\}$ , nas Eqs. 3.84 e 3.85, da Sec. 3.4.4.

$X_{i,j,k,m,n}$  – são índices genéricos usados nos somatórios.

$X_m$  – relacionado aos valores médios (propriedades e deformações).

$X_O$  – relacionado ao ponto O, centróide da seção genérica.

$X_{Od}$  – relacionado ao centróide O da seção genérica, na configuração deformada.

$X_p$  – relacionado ao estado plástico (de fatias, por exemplo) ou mecanismo plástico.

$X_{Pd}$  – relacionado ao ponto P da seção genérica, na configuração deformada.

$X_u$  – relacionado ao estado último.

$X_v$  – relacionado à(s) viga(s).

$X_y$  – relacionado ao escoamento ( $y$ ) ou ao eixo ( $Y$ ).

$X_z$  – relacionado ao eixo principal Z da seção.

$X_0$  – relacionado a grandezas da configuração original ( $\omega = 0$ ).

$X_\alpha$  – índice de grandeza corrotacional genérica.

$X^\omega$  – relacionado à grandeza avaliada no instante atual.

---

**10. ABREVIACÕES**

---

- AA – portal de Chen & Zhou (1987) modificado, com um só perfil (8 WF 31) e sem o apoio horizontal superior (Alvarenga, 2005), ver Secs. 8.1, 8.2 e 8.7.
- AELL – Análise Elástica, Ligação Linear.
- AELN – Análise Elástica, Ligação Não Linear.
- AILL – Análise Inelástica, Ligação Linear.
- AILN – Análise Inelástica, Ligação Não Linear.
- BL – curva M- $\theta$  experimental de Bailey (1970), ver Fig. 7.8 na Sub. 7.2.5.
- CC – Controle de Carga (processo incremental), ver Fig. 4.4.
- C1, C2 e C3 – curvas M- $\theta$  de Chan & Chui (2000), ver Fig. 7.23 na Sec. 7.5.
- CC1, CC2 e CC3 – resultados de Chan & Chui (2000), ver Sec. 7.5.
- CD – Controle de Deslocamento selecionado (Argyrus, 1964), ver Fig. 4.5(a).
- CDG – *Controle de Deslocamento Generalizado*, ver Fig. 4.6(a) na Sub. 4.3.2.
- CG<sub>p</sub> – Centro de Gravidade plástico, ver Fig. 3.5 na Sub. 3.31.
- CI – Curvatura Inicial, ver Fig. 1.4(a) na Sub. 1.4.1.
- CZ – portal de Chen & Zhou (1987) sem o apoio horizontal superior, ver Fig. 8.2.
- D2 e D3 – curvas M- $\theta$  obtidas por analogia às curvas C2 e C3, ver Sec. 8.9.
- EF (EFs) – Elemento(s) Finito(s).
- ERP – método Elástico com Rótula Plástica (clássico ou de segunda ordem).
- ERP-CN – método Elástico com Rótula Plástica e Cargas Nocionais, ver Sec. 1.2.
- ERP-M – método Elástico com Rótula Plástica com seção Montada, ver Sec. 1.2.
- ERP-R – método Elástico com Rótula Plástica Refinado, ver Sec. 1.2.
- FE – Fator de Escala para amplificar os deslocamentos, (usual 50 vezes).
- FM – curva M- $\theta$  polinomial de Frye & Morris (1975), ver Sub. 2.4.2.
- FP – Fora de Prumo, ver Fig. 1.4(b) na Sub. 1.4.2.
- G&K – indica as TRs de Galambos & Ketter (1959), ver Fig. 1.5(c) na Sub. 1.4.3.
- IIEA – *Integração Iterativa do Esforço Axial*, ver Secs. 3.6 e 4.4.
- KC – curva M- $\theta$  potencial de Kishi & Chen (1987), ver Sub. 2.4.3.
- LC – exponencial Lui & Chen (1986), modificado por Kishi & Chen (1987), ver Sub. 2.4.4.
- MC – Modelo Com (EF de) rótula, ver Secs. 6.3 e 6.4.
- ME – método usando a MRE para avaliar a rotação da ligação, Eq. 4.34.
- MR – Matriz de Rigidez genérica (qualquer).



- MRE – Matriz de Rigidez do Elemento finito ( $\mathbf{K}$ ), Eq. 3.67(a).
- MS – Modelo Sem (EF de) rótula, ver Secs. 6.3 e 6.4.
- MT – curva  $M-\theta$  experimental de Rathbun (1936), ver Fig. 2.25.
- MRG – matriz de rigidez global ( $\mathbf{S}$ ), Eq. 3.94.
- M- $\theta$  – curva momento-rotação da ligação, ver Fig. 2.2.
- NFP – Número de Fatias Plásticas, nos diagramas de zonas plásticas.
- PT – nesta Própria Tese.
- PTV – Princípio dos Trabalhos Virtuais.
- QRP – Quase-Rótula Plástica, ver Sec. 1.2.
- RC1, RC2 e RC3 – versão *RBL* das curvas CC1 a CC3, ver Fig. 7.23 na Sec. 7.5.
- RT – curva  $R_k-\theta$  experimental de Rathbun (1936), ver Fig. 2.45.
- RBL* – curva  $M-\theta$  com *Rigidez BiLinear* (proposta), ver Fig. 2.46 e Sec. 2.8.
- RLA – Referencial Lagrangiano Atualizado, ver Fig. 3.2 na Sub. 3.2.1.
- RP (RPs) – Rótula(s) Plástica(s), ver Sec. 1.2.
- R-P – método Rígido Plástico, ver Sec. 1.2.
- RS – ligação linear com a Rigidez Secante ( $R_{ks}$ ), ver Figs. 2.8 e 2.15.
- S – método Simplificado de avaliar a rotação da ligação, Eq. 4.35.
- TCI* – *Teorema da Configuração Inicial*, ver Secs. 1.6 e 9.3.
- TR (TRs) – tensão(ões) residual(ais), ver Fig. 1.5 na Sub. 1.4.3.
- TC1, TC2 e TC3 – curvas de Chan & Chui (2000) tabeladas, ver Fig. 7.23 na Sec. 7.5.
- XX – método da formulação para a rotação da ligação, com parâmetro  $\chi$ , Eq. 4.31.
- ZP (ZPs) – Zona(s) Plástica(s), ou método; ver Figs. 3.5 e 4.7, Secs. 1.2 e 4.4, Cap. 3.
- ZPI – método da Zona Plástica com Integração de (M-N- $\Phi$ ), ver Sec. 1.2.
- 1A – modelo com geometria não corrigida, ver Sec. 5.3.
- 1B – modelo com dados experimentais, ver Sec. 5.3.
- 2D – bidimensional, estruturas planas.
- 3D – tridimensional, estruturas espaciais.

**11. TRADUÇÕES ADOTADAS**

- “beam line” – *linha de viga*, ver Fig. 2.27 e Sec. 2.5.
- “benchmark problems” – *problemas de banco de provas* (Chen & Toma, 1994).
- “CDC Column Deflection Curves” – curvas de colunas defletidas, formas de obter-se a coluna deformada a partir dos esforços atuantes (Higgins *et al.*, 1971).
- “CSP Current Stiffness Parameter” – *parâmetro de rigidez corrente*, do método de controle do trabalho (Bergan *et al.*, 1978).
- “degrading” – *degradação* da ligação, ver Fig. 2.11.
- “DOF degree of freedom” – GDL grau(s) de liberdade.
- “dynamic jump” – *salto dinâmico*, acesso a ponto à frente na trajetória, ver Fig. 4.4(b).
- “GSP generalized stiffness parameter” – *parâmetro de rigidez generalizada* (Bergan *et al.*, 1978).
- “JMRC Joint Moment Rotation Curve” – curvas momento-rotação (Faella *et al.*, 2000).
- “loop” – *laço* ou conjunto de instruções/operações repetidas até um teste terminá-lo.
- “know-how” – *técnica* ou conhecimento para fazer/produzir algo.
- “overflow” – estouro do valor de uma variável de memória do computador, que ocorre após, por exemplo, uma divisão por zero (1/0) ou  $\tan(\pi/2)$ . (Windows, 2001).
- “prying” – *efeito alavanca*, ver Fig. 2.34 na Sub. 2.6.2.
- “RBS Reduced Beam Section” – *VSR viga de seção reduzida* (Kim & Engelhardt, 2007).
- “SCDB Steel Connection Data Bank” – banco de dados de ligações Chen *et al.* (1996).
- “shakedown” – *acomodação*, forma de comportamento elástico após ter sido atingido um determinado patamar de plasticidade e reduzir-se a carga (Horne, 1979).
- “sidesway” – *galeio lateral* (side + sway), ver Sub. 9.3.1.
- “snap-through” – *deslizamento descendente* (Galambos, 1982), ver Fig. 4.4(a).
- “strain hardening” – *endurecimento sob tensão*, ver Fig. 2.11.
- “strain softening” – *amolecimento sob tensão*, ver Fig. 2.11.
- “sway” – deslocamento lateral por onda (náutica), *galeio* sob o efeito de vento.
- “T stub” – *tocos de T*, o perfil é cortado longitudinalmente, na metade da altura (como um machado cortando o toro de madeira), ver Fig. 2.33 na Sub. 2.6.2.
- “unwinding” – “desenrolar a espiral da mola, tirar da ordem”, adotou-se comportamento *dissimilar* (Galambos, 1982), quebrar a simetria; ver Fig. 8.5 e Sec. 8.3.
- “wind connection” – ligação simples, resistindo *ao vento* (Disque, 1964), ver Fig. 2.29.

---

**12. PROGRAMAS DE COMPUTADOR**

---

BCIN.for – para análise com ZPI de viga-coluna (Chen & Toma, 1994).

CONANA.for – para obter-se curva  $M-\theta$  de ligações com cantoneiras, empregando estudos de Kishi (1987), (Chen *et al.*, 1996), ver Sec. A.9.

FRAMP.for/FRAMH.for – para análise com ZPI de portais, (Chen & Toma, 1994), só flambagem (P) e com carga horizontal (H), respectivamente.

NIM – desenvolvido e empregado por Shen & Zheng (1995), ver Sec. 5.6.

SCDB.for – acesso aos dados/tabelas do “SCDB” (Chen *et al.*, 1996).

---

*FLEXCOMP* – versão desenvolvida pelo autor do BCIN.for, ver Sec. 5.3 e 5.4.

*PPLANAVX* – desenvolvido pelo autor (2005-7), em Turbo-Basic (Miller, 1987), operado em sistema IBM PC DOS (1983), que faz *Análise Avançada* com ZP/Técnica das fatias, empregado no mestrado (sem ligações).

*PPLANAVA* – desenvolvido pelo autor (2009-10), em Power-Basic (2005), operado em sistema Windows (2001), que faz *Análise Avançada* com ZP/Técnica das fatias, empregado no doutorado (com ligações).

TABELAS.lsp – em AutoLISP para gerar uma tabela, ver Sec. A.8.

VGASLIGA – desenvolvido pelo autor para cálculo de vigas com 2 apoios, biligadas, pelo método da viga conjugada (Monforton & Wu, 1963), sujeita a cargas concentradas e distribuída, ver Sec. 7.2.

---

**13. COMANDOS DO “AUTOCAD” (2002)**

---

Empregados na Sec. A.8 (para gerar uma tabela, partindo de uma figura):

“align” – alinha a figura por meio de giro sobre um dado ponto e ângulo;

“appload” – carregar um arquivo “AutoLISP” que cria pseudo comandos do CAD;

“array horizontal” – faz várias cópias da figura selecionada espaçadas horizontalmente;

“block” – para salvar uma figura e referenciá-la por único nome;

“insert” – introduz arquivos ou blocos no desenho;

“layer” – para seleção da camada (nível) de representar a figura no desenho;

“line” – para traçar uma semirreta entre 2 pontos;

“raster image” – insere imagem gráfica (“JPEG”, por exemplo);

“trim fence” – cortar uma figura (linhas) usando outro conjunto de linhas selecionado;

“undo” – desfaz a ação do comando do “AutoCAD” anterior;

“zoom” – aproxima ou afasta a imagem gráfica da tela.

## 14. FORMATAÇÃO

“texto” – citação ou tradução de pesquisadores em publicações (*sic*);

*texto* – termo (ou frase) do autor, inserido nesta tese, não existente ou particular, traduções e termos latinos de uso geral (por exemplo, *a priori*, *et al.*, etc.);

ABR – abreviaturas de termo (ou siglas) de pesquisadores em publicações.

*ABR* – abreviatura inserida nesta tese, não existente ou particular.

Cap. (Caps.) – indicação de capítulo(s).

Eq. (Eqs.) – indicação de equação(ões).

Fig. (Figs.) – indicação de figura(s);

Sec. (Secs.) – indicação de seção(ões).

Sub. (Subs.) – indicação de subseção(ões).

Tab. (Tabs.) – indicação de tabela(s).

I. – numeração de capítulo, índice I = {1-9, A}.

I.J – numeração de seção, equações, figuras e tabelas, índice J = {1, 2, 3,...}.

I.J(a) – partes ou subdivisões de equações, figuras e tabelas; índice a = {a, b, c,...}.

I.J.K – numeração de Sub., índice K = {1, 2, 3,...};

.a – ordenação alfabética de item, índice a = {a, b, c,...};

.i – numeração romana itálica de alíneas, índice i = {i, ii, iii,...}.

Autor1 (ano) ou (Autor1, ano) – referência de 1 autor.

Autor1 & Autor2 (ano) ou (Autor1 & Autor2, ano) – referência de 2 autores.

Autor1 *et al.* (ano) ou (Autor1 *et al.*, ano) – referência de 1 autor, dentre mais de 2.

Referência(s) – adotou-se o sistema americano “Library of Congress” (AISC, 2005), colocando o separador universal & (substituindo “and”), com a diagramação:

*Nome do livro*, I<sup>a</sup>. Ed., Editora, Vol. xx, pp. iii-iiij, Local.

*Nome da norma*, Sigla/número, Conselho/Grupo, Parte, pp. iii-iiij, Local.

*Nome do trabalho*, Tese/Dissertação, Departamento, Universidade, Local.

“Nome de artigo”, *Nome do jornal*, Vol. xx, No. xx, pp. iii-iiij.

“Nome do trabalho”, *Nome do congresso SIGLA*, Vol. xx, pp. iii-iiij, Local.

“Nome de artigo”, *Nome da página*, [WWW.endereço@eletrônico](#), Local.

# 1 INTRODUÇÃO

## SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
1.1	Considerações iniciais	2
1.2	Análise estrutural – Estado da arte .....	3
1.3	O conceito da <i>Análise Avançada</i>	9
1.4	<i>Aspectos importantes</i> .....	10
1.5	Motivação e justificativas	12
1.6	Objetivos .....	15
1.7	Organização	17
1.8	Referências .....	19

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo, faz-se um elo entre o trabalho anterior do autor (Alvarenga, 2005) e o atual, uma vez que são passos consecutivos dentro de um mesmo tema da Engenharia Estrutural: a estabilidade de portais planos de aço sob o enfoque da *Análise Avançada*.

No primeiro trabalho avaliaram-se os diversos métodos de análise estrutural disponíveis, suas vantagens e desvantagens, bem como a sua relação com o dimensionamento envolvendo critérios de resistência e estabilidade. Isso nos remete ao estado da arte tratado na próxima seção. A partir daí, introduz-se o que seria um caminho direto de análise estrutural e dimensionamento, chegando-se ao conceito da *Análise Avançada*, que é rerepresentado na seção posterior de forma sucinta.

Ambas as pesquisas empregam o método da Zona Plástica, sendo que a anterior tratou dos chamados *aspectos importantes*, pois são exigências mínimas das normas para que tais análises estruturais diretas possam cumprir sua finalidade. Também esses aspectos são lembrados na quarta seção deste capítulo.

Depois dessas etapas inicia-se propriamente o este trabalho, com o objetivo descrito na quinta seção. Aproximadamente quatro anos atrás, no projeto desta tese, existiam propostas e escopo um pouco diferentes do que os ora cumpridos. Cabe justificar que essa parcela de perda (ligações de base e excentricidade, por exemplo) foi substituída por novas contribuições não previstas ou conhecidas antes. Tais contribuições apareceram como consequência natural do desenvolvimento de uma formulação nova de um elemento finito (EF) com ligação, das propostas anteriores que mereceram cuidados complementares (*Integração Iterativa dos Esforços Axiais*), bem como de outras ideias que surgiram ao longo de todo esse período e das necessidades decorrentes da própria pesquisa desenvolvida.

Na sexta seção, faz-se um retrato das partes desta tese, mostrando sua organização, destacando e localizando as contribuições principais deste trabalho, o que se torna necessário, dado o tamanho da obra.

Na última seção, constam as referências, o que se repete ao longo de toda tese, no final de cada capítulo.

## 1.2 ANÁLISE ESTRUTURAL – ESTADO DA ARTE

Hoje, a análise estrutural pode ser vista como uma ciência, principalmente para a construção de estruturas de aço, e que se baseia em quatro pontos fundamentais:

- a. a Estabilidade – a flambagem pode-se manifestar de forma a comprometer a estrutura ou parte da mesma, e precisa ser avaliada para garantir a segurança da construção;
- b. a Plasticidade – para melhor auferir as propriedades do aço, destacando a ductilidade, que permite a redistribuição de esforços e, portanto, o aproveitamento da resistência extra de outras partes das estruturas que possuem maior redundância;
- c. as técnicas de modelagem – indicando aqui tanto o Método dos Elementos Finitos (MEF) como os demais processos numéricos (estratégia de solução de problemas não lineares, comportamentos descritos por curvas  $\sigma$ - $\epsilon$ , P-M- $\Phi$ , M- $\theta$ , etc.), que permitem desenvolver análises estruturais mais refinadas; e
- d. a Informática – todo esse desenvolvimento somente foi possível com o advento dos modernos computadores e seu progresso em recursos tecnológicos.

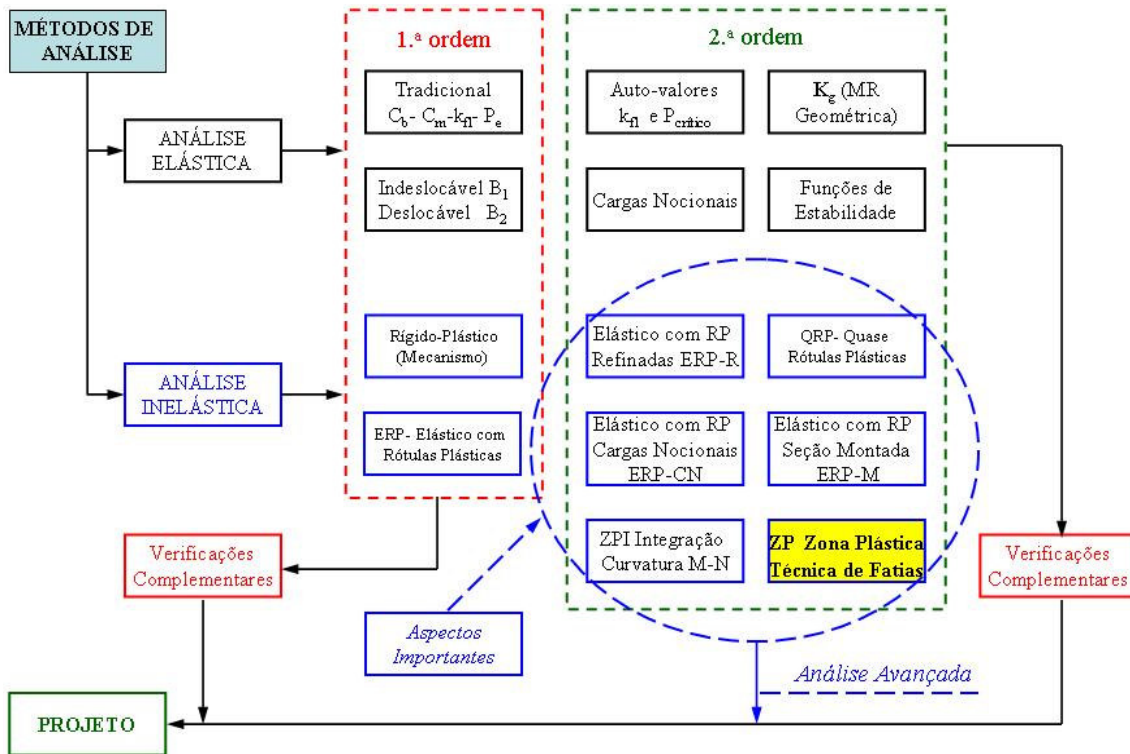
Assim, por meio dessa ciência, é possível projetar (calcular e desenhar) estruturas em que se garantam simultaneamente sua estabilidade e sua resistência (segurança), aproveitando sua capacidade de suportar maiores cargas (redistribuição de esforços), minimizando custos e material (peso, tempo e processos) e empregando-se, para isso, os recursos numéricos com a Informática. Essa conjugação de áreas e esforços nas últimas décadas possibilitou o surgimento de vários métodos de análise estrutural que podem ser adotados em cada projeto, como ilustra a Fig. 1.1.

As análises podem ser separadas em dois grupos, considerando a estabilidade:

- a. de primeira ordem – que não avalia efeitos das modificações da geometria; e
- b. de segunda ordem – que consideram essas alterações, seja de forma direta ou implícita, na própria análise, seja na forma aproximada, pós-análise.

Existem, também, dois grupos do ponto de vista da plasticidade:

- a. elásticos – que consideram tensões proporcionais às deformações, segundo a Lei de Hooke, ignorando a plasticidade; e
- b. inelásticos – que avaliam o seu efeito nas análises.



**Figura 1.1 Métodos de análise estrutural.**

Em fase anterior ao surgimento dos computadores e mesmo por algum tempo depois, a forma de análise mais empregada era a elástica linear (ou de primeira ordem). Admitia-se que as deformações seriam suficientemente pequenas, de tal forma que a geometria inicial seria confundida com a resultante após a aplicação dos carregamentos. Considerava-se que o material se comportasse no regime elástico, ou seja, a resposta da análise era linear em esforços e deslocamentos. Essa forma de análise não possibilita a avaliação adequada da estabilidade ou da resistência última da estrutura. Por isso, o projeto era auxiliado com o emprego de equações de interação empíricas que procuravam estimar efeitos secundários sobre os esforços solicitantes, realizando-se verificações complementares posteriores às análises. A análise seria refeita sempre que detectadas condições incompatíveis nessas equações.

Como essas equações, dentre outros parâmetros e definições, estavam ligados a procedimentos empíricos, é natural que, com o desenvolvimento tecnológico, uma série de questionamentos surgisse em relação ao seu emprego e aos resultados produzidos com esse tipo de filosofia. Notoriamente, a aproximação da carga de flambagem de uma coluna baseando-se no conceito de comprimento equivalente (fator de comprimento de flambagem  $k_{fl}$ ) sofreu ardorosas críticas (Kim & Chen, 1996a-b; Nethercot, 2000).



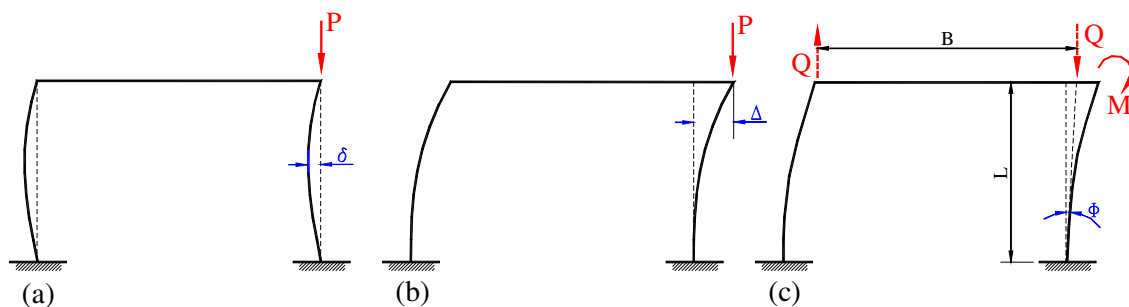
Hoje, não se permite que a análise estrutural ignore os efeitos de segunda ordem, que são facilmente constatados quando se incorporam os efeitos das deformações na geometria durante o processo de solução. Os efeitos secundários são os seguintes:

- a.  $P\delta$  (P-deltinha) – associado ao acréscimo de momentos, pelo arqueamento das barras sujeitas a esforços axiais (efeito da carga P), ilustrado na Fig. 1.2(a);
- b.  $P\Delta$  (P-delta) – considera o acréscimo de momentos, devido ao deslocamento lateral ( $\Delta$ ) dos nós das colunas sujeitas a esforços axiais (P) da Fig. 1.2(b); e
- c.  $M\Phi$  (M-fi) – relacionado ao acréscimo de momentos provocado pela rotação da seção da extremidade da barra oposta ao ponto onde atua esse momento (M). Na figura 1.2(c) mostra-se que esse efeito vem do cortante  $Q (= M/B)$ , que age como P, e do deslocamento  $\Delta$  associado ao giro  $\Phi$  ( $\Delta = L \tan \Phi \approx L \Phi$ ), do que  $P\Delta = (L/B)M\Phi$ . Em geral, o vão B é maior que a altura L e o giro  $\Phi$  é da ordem de miliradianos [mrad], por isso é ignorado ou menos expressivo.

As análises elásticas, ditas de primeira ordem, são levadas ao patamar de segunda ordem simplificada porque as normas exigem que se incluam correções que levem em conta esses efeitos de segunda ordem, seja na forma tradicional com uma série de coeficientes de ajustes ( $C_b$ ,  $C_m$ ,  $k_{fi}$ ,  $P_e$ ), seja na forma de combinar duas análises no método  $B_1$ - $B_2$ . Isso quer dizer que se faz uma análise considerando a estrutura travada ou indeslocável, da qual aparece um coeficiente de majoração de esforços  $B_1$ , na consideração de estrutura deslocável se determina o coeficiente  $B_2$ . De tal forma que os esforços considerados naquelas verificações complementares são combinações lineares dos resultados obtidos por  $B_1$  e  $B_2$  (AISC LRFD, 1993; ABNT NBR 8800, 1986).

Consideram-se propriamente elásticos de segunda ordem os processos que:

- a. determinam os coeficientes de comprimento efetivo de flambagem por autovalores e os modos associados por autovetores da matriz de rigidez (MR) incluindo os efeitos geométricos;
- b. que usam cargas horizontais fictícias (nacionais) de forma a expor o efeito P-delta ( $P\Delta$ ) da estrutura (Wood *et al.*, 1976);
- c. que fazem o emprego da MR geométrica  $\mathbf{K}_g$  construída por métodos numéricos (MEF), para obter deslocamentos e esforços; e
- d. que melhoram a avaliação dos termos de rigidez por meio das funções de estabilidade, obtendo resultados mais precisos (Sonmez, 1996).



**Figura 1.2 Efeitos secundários associados às deformações:**  
 (a) curvatura no  $P\delta$ ; (b) galeio lateral no  $P\Delta$ ; (c) cortante induzido pelo giro oposto no  $M\Phi$ .

Os processos (b-c-d) são essencialmente iterativos, enquanto o primeiro (a) é uma melhoria nas estimativas de  $k_{fl}$  e  $P_e$ , ligando-se, ainda, ao processo empírico anterior.

A plasticidade é introduzida por métodos que avaliam a formação de mecanismos e definem, com o uso de teoremas clássicos (Horne, 1979), a maior carga estaticamente equilibrada, na qual nenhum ponto da estrutura possui um momento superior ao plástico, e a menor carga, que determina o comportamento da estrutura como um mecanismo, levando-a ao colapso. Nesse caso, pontos onde atuam o momento máximo (chamado momento plástico  $M_p$ ) passam a comportar-se como rótulas para novos acréscimos de carga, e assim são definidas as rótulas plásticas (RP).

Surge a necessidade, entretanto, de considerar os esforços axiais na formação dessas rótulas plásticas. Para isso, define-se a superfície de interação entre esses esforços (axial e momento) da mesma seção. Uma vez que a seção permanece elástica até se formar a RP, aplica-se o método elástico com rótula plástica (ERP), no qual se determina a ordem de aparecimento das RPs (Ziemian *et al.*, 1992).

Naturalmente, a combinação das duas tendências e das duas áreas da Engenharia (Estabilidade e Plasticidade) levou à introdução da plasticidade nos métodos elásticos de segunda ordem, ou os efeitos secundários nos métodos do tipo elástico com rótula plástica, que passam a uma nova condição. Surge, assim, a análise inelástica de segunda ordem, que hoje possui basicamente três abordagens distintas:

- a. concentrada – dita com rótula plástica, na qual se distribuem nós nas seções mais solicitadas da estrutura ou das barras, para ali avaliar a plasticidade, sob um comportamento a flexocompressão. Essa abordagem pode ser “refinada” (ERP-R), quando controlada por uma superfície de interação e com uma degradação suave a partir do início do escoamento, dado pelo módulo tangente (Liew *et al.*, 1993); ou construída numa “seção montada” com partes

- remanescentes elásticas (EPR-M, Chan & Chui, 2000) ou empregando “cargas nocionais” para induzir efeitos secundários (EPR-CN, Eurocode 3, 1992);
- b. quase rótula plástica (QRP) – na qual se faz uma abordagem de RP mais flexível, dentre outras diferenças (Attalla *et al.*, 1994); e
  - c. distribuída – dita com zona plástica (ZP), na qual se avalia a plasticidade ao longo de toda a barra, seja empregando as relações momento/axial/curvatura (M-N- $\Phi$ ) do surgimento do método (Chen & Toma, 1994; Barzan & Chiorean, 1999), ou monitorando subvolumes ditos “fatias” (Alvarez & Birnstiel, 1969; Teh & Clarke, 1999).

A primeira abordagem é a que apresenta maiores adeptos, com maior quantidade de pesquisadores, trabalhos publicados, etc. A razão primordial é sua simplicidade, aliada à sua rapidez na obtenção das respostas. Os avanços técnicos incluem programas computacionais para análise em 3D (Ziemian & McGuire, 2001, Kim *et al.*, 2006), modelagem de elementos finitos com rótulas plásticas no interior (Chen & Chan, 1995) e análises voltadas às normas de estados limites (Kim & Chen, 1999). No Brasil, destacam-se vários trabalhos (Santos *et al.*, 2008; Silva, 2009; e Silveira, 2009).

O método QRP foi incluído apenas para simbolizar a tendência de unir as duas abordagens principais, concentrada e distribuída. Nessa condição, pode-se enquadrar também a formulação de Ackroyd (1979).

Finalmente, a abordagem distribuída foi colocada nessa ordem porque é adotada nesta tese. Note que trabalhos com o chamado método ZPI (integração momento, axial e curvatura, M-N- $\Phi$ ) aparecem com Galambos & Ketter (1959), Lu & Kamalvand (1968) e Kanchanalai (1977). Esse processo é apresentado com detalhes por Chen & Toma (1994) e tem em Chiorean & Barzan (2005) a mais recente técnica.

O monitoramento da seção por meio de fatias surge com Alvarez & Birnstiel (1969), sendo desenvolvido posteriormente também por El-Zanaty *et al.* (1980), White (1985) e Clarke (1994). Recentemente, essa técnica recebeu novas contribuições (Teh & Clarke, 1999; Lavall, 1996, Alvarenga, 2005; Almeida, 2006).

O último método é o mais preciso de todos, já que avalia a plasticidade de forma mais detalhada. Todavia, requer maiores recursos computacionais: desde maior área de memória, maior rapidez de processador, saídas gráficas, etc., uma vez que o tempo gasto na execução dessa tarefa é superior ao que consomem os demais métodos.

A cada ano os recursos da informática se tornam mais amplos, e essas demandas, apesar de elevadas, não comprometem mais a capacidade dos computadores, o que viabiliza a utilização do método da zona plástica (ZP).

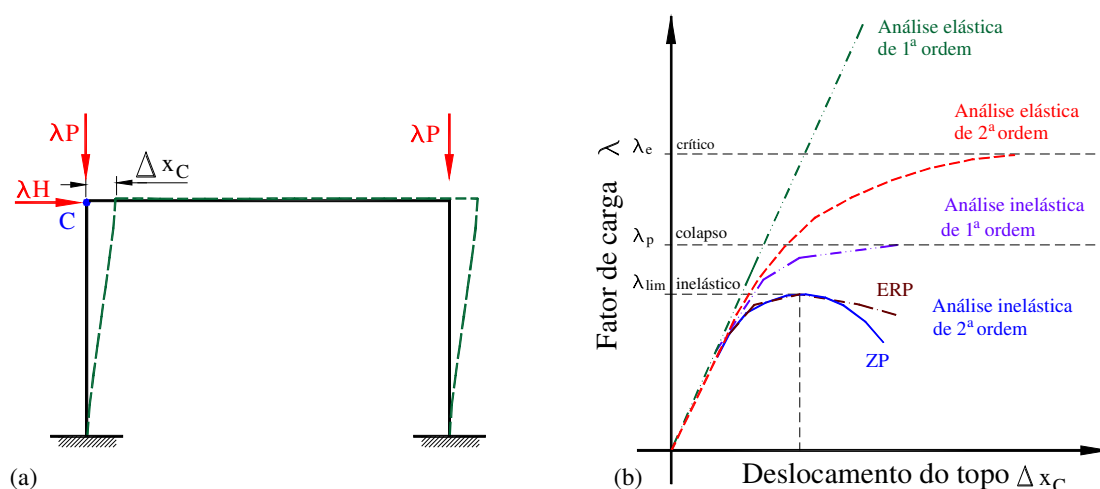
A essa altura, é importante definir o conceito de comportamento estrutural que nasce a partir dos diversos métodos apresentados. Para isso mostra-se a Fig. 1.3(a) em que um portal simples hipotético é sujeito a um carregamento incremental de fator  $\lambda$ , de tal forma que se constrói a sua trajetória de equilíbrio representada na Fig. 1.3(b) de forma a caracterizar melhor as respostas de cada método empregado.

No método elástico de primeira ordem, nenhuma restrição é obtida. No elástico de segunda ordem, define-se o fator crítico ( $\lambda_e$ ) que provoca a flambagem elástica.

No método plástico, encontra-se o fator de formação do mecanismo, e aplicando-se o elástico com rótula plástica (ERP), se define a carga de colapso plástico ( $\lambda_p$ ).

Com os métodos da zona plástica (ZP), ou conjugando melhorias (refinamentos) ao ERP, se consegue determinar o limite inelástico ( $\lambda_{lim}$ ), que é o máximo fator de carga que a estrutura poderá suportar. Deve-se lembrar a recomendação: “todos os testes mostram conclusivamente que os pórticos destravados são prováveis de entrar em colapso por instabilidade, antes de se formar o mecanismo plástico, e qualquer análise racional ou dimensionamento deve observar isto” (Hajjar *et. al.*, 1997). Nesta tese, trata-se por fator de colapso ( $\lambda_c$ ) essa condição limite, esteja associada à flambagem inelástica ou à formação de mecanismo plástico.

Tendo mostrado os métodos existentes, na seção seguinte, apresenta-se a *Análise Avançada*, que é um novo caminho a ser percorrido.



**Figura 1.3 Tipos de resposta das análises estruturais:**  
(a) portal simples; (b) trajetórias de equilíbrio.

### 1.3 O CONCEITO DA ANÁLISE AVANÇADA

Atingido esse patamar de refinamento, verificou-se, entretanto, que os resultados numéricos ainda não reproduziam adequadamente os ensaios experimentais e que havia outras considerações a serem incluídas, que interagem seja com a estabilidade, seja com a plasticidade das estruturas reais.

A análise inelástica de segunda ordem ganha novo papel quando se introduzem nos modelos essas condições reais. A partir daí, os resultados obtidos passam a reproduzir razoavelmente os de laboratório, de tal forma que ficam desnecessárias verificações complementares de barras individualmente no plano da análise, já que o limite de estabilidade ou de resistência, assim determinado, é muito preciso. Essa nova concepção se denominou “Análise Avançada” (ou “Análise Direta”) porque é um processo de análise que constitui dimensionamento (Clarke *et al.*, 1992). E esse conceito se torna maior à medida que mais características do comportamento real são simuladas pelos modelos e introduzidas nas análises (Chen & White, 1993). O termo “avançada”, aqui, não se refere a algo moderno ou a uma novidade, mas representa um passo adiante em direção ao dimensionamento/projeto da estrutura.

Na figura 1.1 faz-se uma diagramação dos métodos de análise citados e indica-se a inserção da *Análise Avançada* como um novo recurso na direção do projeto, sem as chamadas “verificações complementares” (de estabilidade e resistência).

São várias as condições naturais cujas influências podem ser consideradas quando se realiza a *Análise Avançada* (Liew *et al.*, 1993). Algumas dessas condições foram tratadas no trabalho anterior (Alvarenga, 2005) e denominadas *aspectos importantes*. Elas são atributos que representam condições mínimas exigidas pelas normas, ou seja:

- a. a curvatura inicial das barras – que está associada ao efeito secundário  $P\delta$ , mais significativos em estruturas travadas (ou contraventadas);
- b. o fora de prumo das colunas – que está associado aos efeitos secundários  $P\Delta$  e  $M\Phi$ , mais graves nas estruturas destravadas (não contraventadas); e
- c. as tensões residuais – que provocam o surgimento da plasticidade de forma antecipada e prolongam a trajetória até o colapso.

Na seção seguinte faz-se um pequeno resumo sobre essas considerações, que são intrínsecas às normas no caso da curvatura inicial e das tensões residuais, bem como da que vem sendo introduzida como cargas nocionais ( $P\Delta$ ) na simulação do fora de prumo.

## 1.4 ASPECTOS IMPORTANTES

Nesta seção, procura-se mostrar o que são esses atributos mínimos para a realização da *Análise Avançada*, e que tem maior relevância com o método da Zona Plástica (ZP) porque são introduzidos explicitamente no modelo. É essa equivalência entre o que se considerou para estabelecer as normas e o que se emprega nas análises que tornam desnecessárias as chamadas verificações complementares. Note-se que, no caso dos modelos ERP refinados, é a superfície de interação que determina o comportamento estrutural. No caso da ZP, esse método é empregado para gabaritar os demais, ficando desnecessárias as verificações de interação no escopo da análise.

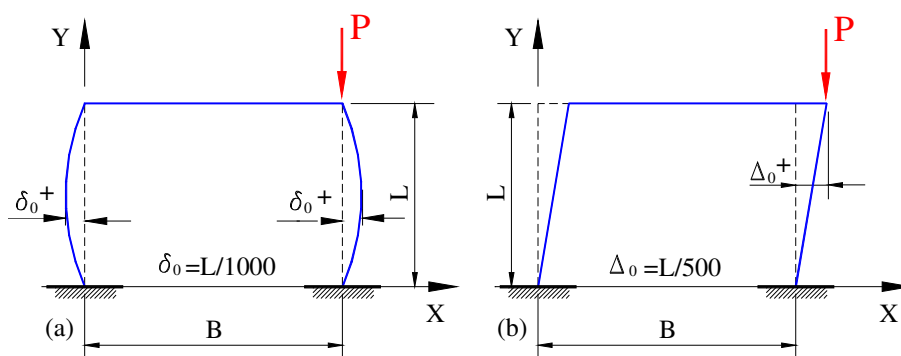
Apresenta-se, a seguir, uma sucinta descrição desses atributos.

### 1.4.1 CURVATURA INICIAL

A curvatura inicial simula o efeito do resfriamento após a confecção dos perfis, sejam laminados, sejam soldados, em que a barra não é perfeitamente reta, mas possui uma leve curvatura, que é limitada na fabricação.

Usualmente, é parametrizada como uma meia-onda senoidal, com a flecha máxima  $\delta_0$  no meio-vão da barra, como é mostrado na Fig. 1.4(a). Alguns pesquisadores empregam também a forma parabólica (Kim & Lee, 2002). Em algumas análises, verificou-se que o uso do arco de círculo para barras com poucos elementos finitos (EFs), também produz bons resultados (Alvarenga, 2005).

Segundo diversas normas, o usual é adotar a flecha  $\delta_0 = L/1000$ , sendo (L) a altura da coluna (entre pisos). Porém, a norma australiana AS 4100 (1990) impõe  $\delta_0 \geq 3$  mm, enquanto Bjorhovde (1988) recomendou uma flecha menor ( $L/1500$ ).



**Figura 1.4 Imperfeições geométricas das análises estruturais:**  
(a) curvatura inicial; (b) fora de prumo.

Normalmente, esse efeito é considerado explicitamente apenas nas colunas, pois é prática normal (nas fábricas) colocar-se a curvatura inicial como uma contraflecha vertical para vigas, melhorando o seu desempenho para suportar pisos.

Na figura 1.4 ilustra-se o sentido positivo da curvatura inicial, quando na coluna da esquerda (com a direção de ordenação dos EFs para cima), tem-se CI (+) para a esquerda, e a coluna da direita, com a ordenação para baixo, a CI (+) é para a direita.

Neste trabalho as barras são subdivididas, em geral, em mais de 6 EFs cada, então, considerou-se desnecessário usar a CI circular adotada anteriormente (Alvarenga, 2005), empregando-se a CI senoidal mesmo.

#### 1.4.2 FORA DE PRUMO

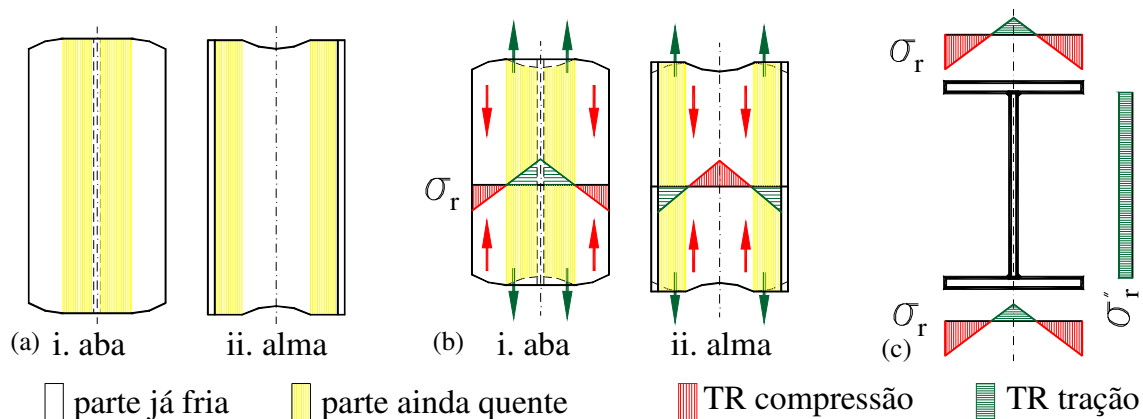
É uma circunstância atrelada aos limites de tolerância da montagem, das folgas dos parafusos e das uniões, bem como do processo construtivo, enfim, aos que têm uma tolerância de verticalidade. No Brasil e em outros países limita-se essa tolerância ao valor  $L/600$ , e por conseqüência adotou-se  $\Delta_0 = L/500$ , como recomendaram Galambos *et al.* (1988). Na Europa, colocou-se  $\Delta_0 = L/200$ , incluindo nisso a falta de aperto de parafusos e eventuais excentricidades de montagem (Chen & White, 1993). Como ilustrado na Fig. 1.4(b), adotou-se, neste trabalho, o sinal positivo para a direção do eixo global x, coincidindo também com a direção dos esforços horizontais positivos.

De toda forma, modelar essa imperfeição geométrica não é simples. Por isso, ainda são adotados métodos empregando cargas nocionais. Todavia, torna-se importante sua inclusão nas colunas quando há cargas axiais elevadas em relação às cargas de Euler, em estruturas assimétricas e quando existem elevados cortantes e momentos nas colunas gerando efeitos conjugados ( $M\Phi$ ) ao  $P\Delta$  (Galambos *et al.*, 1988).

#### 1.4.3 TENSÕES RESIDUAIS

As tensões residuais (TR) aparecem com o resfriamento desigual das diversas partes dos perfis, seja depois da laminação, seja por causa do corte a maçarico, seja por causa da soldagem, dentre outros processos de fabricação geradores.

Primeiro, as partes mais externas ou expostas se resfriam e se contraem (em branco), enquanto as mais protegidas (ou internas) se resfriam devagar, seguindo a Fig. 1.5(a). Quando, então, tentam contrair-se, são impedidas. As que se contraíram antes ficam comprimidas e as últimas ficam com tração, como mostradas na Fig. 1.5(b).



**Figura 1.5 Tensões residuais (TR):**  
 (a) resfriamento desigual; (b) contração e geração das tensões; (c) diagrama aproximado.

Essas tensões TRs são autoequilibradas nas seções dos perfis. E existem vários modelos que podem ser adotados, como o da Fig. 1.5(c) para os laminados americanos mais compactos, onde não ocorrem TRs de compressão na alma (Galambos & Ketter, 1959), sendo o mais empregado neste trabalho. Seu efeito é provocar o início do escoamento antecipado para partes da seção com TRs do mesmo sinal das tensões dos esforços e retardar quando os sinais são opostos (Alvarenga & Silveira, 2006a).

Na seção seguinte, explica-se a relação do atual trabalho de tese com a *Análise Avançada* no contexto de outra imperfeição natural (atributo) a ser considerada

## 1.5 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVAS

Observe-se que em cada estrutura, para cada geometria, podem-se dispor as imperfeições geométricas previstas na *Análise Avançada* de diversas maneiras, quando essas imperfeições são consideradas na forma explícita, que é o caso do método aqui adotado (da zona plástica).

E isso pode gerar um número elevado de combinações dessas imperfeições, tornando a avaliação da estrutura mais complicada ou trabalhosa.

Assim, apresentou-se uma proposta para reduzir essa tarefa, baseando-se nos trabalhos de Chwalla (1938) ao estudar as barras à flexocompressão, com as curvas de deflexão de colunas (Higgins *et al.*, 1971). Nessa antiga concepção, determinava-se a curvatura e a deflexão da barra à flexocompressão associada a partir dos esforços atuantes.

Verificou-se que existe, portanto, uma premissa de comportamento que liga a deformada da barra à sua capacidade de carga.



Estendeu-se essa premissa na ordem inversa, e procurou-se demonstrar-se que seria possível *dispor as imperfeições geométricas iniciais que serão governantes, baseando-se numa aproximação da deformada inelástica da estrutura sujeita ao mesmo carregamento, com a configuração inicial perfeita* (Alvarenga, 2005).

Naturalmente, vários serão os caminhos para se confirmar essa conclusão, como também para delimitar casos de sua validade, ou limites de aplicabilidade. E, para o emprego no projeto, outras exigências complementares devem ser atendidas.

No caso do projeto das estruturas em pórticos, as normas, hoje, preveem, basicamente, três comportamentos distintos na análise estrutural, associados ao tipo de construção que se adota, isto é:

- a. tipo rígida – similar ao que se fazia anteriormente, considera que as seções da coluna e viga interligadas terão a mesma rotação, ou seja, que a seção da viga é ligada rigidamente à coluna, terá a mesma rotação daquela, gerando, por continuidade, momentos de flexão;
- b. tipo simples ou rotulada – despreza-se o efeito da ligação da viga à coluna, do ponto de vista de esforços de flexão, considerando, assim, que a viga poderá girar na ligação, sem transmitir esforço algum dessa natureza à coluna, ou que o mesmo é desprezível; e
- c. tipo semirrígida – admite-se uma rotação relativa entre as seções interligadas da coluna e viga, embora haja a participação de esforços de flexão por meio da ligação inferiores aos previstos no tipo (a) e superiores, aos do tipo (b).

Seja qual for a análise estrutural desenvolvida (de primeira ou de segunda ordem, estática ou dinâmica, planar ou espacial), o projetista deve enquadrar o seu modelo num dos tipos de construção anteriores, e, por consequência, precisará também ter recursos para desenvolver a *Análise Avançada* com esses tipos de construção.

A construção rígida, que é a forma mais antiga, tradicional e adotada na maioria dos modelos em geral, já foi estudada em diversos trabalhos, por diversos pesquisadores. Também, no estudo dos *aspectos importantes*, esse tipo de construção foi adotado em Alvarenga (2005).

Entretanto, a conclusão anterior (sobre as imperfeições geométricas iniciais) não foi investigada à luz dos outros tipos de construção, que consideram o vínculo entre a

coluna e a viga de forma mais próxima da realidade. Agora, procura-se preencher essa lacuna e também preparar a base para futuros trabalhos nessa linha de pesquisa.

Isso é possível porque a teoria atual atende aos princípios e requerimentos da *Análise Avançada*, como a já apresentada (Alvarenga, 2005). Portanto, partindo das mesmas considerações, que são genéricas, ou seja, não restringem as condições de borda do elemento finito (EF), admite-se, sem demonstração, que, aplicando-se a mesma metodologia anterior para desenvolver os EFs com ligação desta tese, cumpram-se as exigências de continuidade, estabilidade e unicidade de solução (Pimenta, 1986).

Além disso, deve-se destacar que este trabalho se enquadra em duas linhas de pesquisa do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil (PROPEC) do /Deciv/Escola de Minas/UFOP, quais sejam:

- a. mecânica computacional – que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia; e
- b. comportamento e dimensionamento de estruturas metálicas – que visa estudar isoladamente, ou em conjunto, o comportamento das diversas partes de uma estrutura de aço.

A primeira linha está inserida em toda a formulação numérica e computacional empregada neste trabalho, e a segunda se insere ao verificar-se que a *Análise Avançada* é uma forma de avaliar tanto o comportamento (esforços, deformações, etc.) como também de realizar o dimensionamento, sendo por isso chamada de “avançada”.

Com a inclusão das ligações, a *Análise Avançada* passa a conter outra fonte de comportamento não linear expressivo e que, assim, a torna mais próxima da realidade, que é a sua maior justificativa e objetivo.

Há um sentimento de desafio e realização no desenvolvimento dessa contribuição, uma vez que as ligações estão presentes nos diversos temas de pesquisa bem como os profissionais requerem maiores informações e *técnicas* (“know-how”) para o seu emprego prático no projeto. Assim, não basta apenas desenvolver-se uma análise voltada ao dimensionamento. É necessário acompanhar a tecnologia existente e não exigir mais esforço/tempo para a realização do mesmo serviço (projeto).

## 1.6 OBJETIVOS

O autor com esta tese tem os seguintes objetivos:

- a. desenvolver a formulação de um EF com ligação numa extremidade;
- b. ajustar a *Integração Iterativa do Esforço Axial (IIEA)*, tendo em vista a presença dessa ligação (o que exige o seu reestudo);
- c. avaliar o efeito da plasticidade na seção, considerando o deslocamento do centro de gravidade plástico ( $y_{CGP}$ ), que provoca excentricidade, modifica curvaturas, e, também, requer uma forma mais coerente de aproximar as propriedades das seções do EF (melhorar as “médias” anteriores);
- d. estudar as ligações, incluindo modelos, diversos tipos de curva momento-rotação  $M-\theta$  hoje existentes, propriedades, critérios de escolha (classificação), estimativa pela linha de viga, tipos de ligação, etc., com a finalidade de desenvolver um material (apostila) para uso acadêmico e consultas;
- e. estudar as opções, a introdução, a seleção, a determinação de parâmetros e o controle dos diversos tipos de curva  $M-\theta$ , o que leva à proposta de uma nova curva, que é simples e de fácil emprego;
- f. aplicar estratégias para ultrapassagem do ponto limite de carga, permitindo comprová-lo e determinar a resistência da estrutura após esse limite. Esse procedimento exige modificar o desenvolvimento do processo incremental (com um novo conceito) e as partes da ferramenta computacional correspondentes, para adaptá-la à concepção “solução predita e correção iterativa” (Silveira, 1999). Introdução do controle incremental relativo a um deslocamento selecionado (Argyris, 1964) e, posteriormente, o desenvolvimento uma nova proposta de estratégia tratada por *controle do deslocamento generalizado*;
- g. avaliar a influência da ligação no comportamento de vigas, colunas e portais. A partir da formulação numérica do EF com ligação, fazer o estudo das condições extremas (engaste e rótula) e, posteriormente, avaliar o efeito da variação do *índice de semiflexibilidade da ligação* ou *índice de giro próprio da ligação*  $\eta$  (eta). Estudo a aplicação dos seus dois valores (local e global) bem como o significado como parâmetro da ligação;
- h. fazer a compatibilização entre a resposta a nível de EF e o comportamento da ligação ( $M-\theta$ ) e, conseqüentemente, o desenvolvimento de três métodos para

avaliar a rotação da ligação e, assim, determinar o seu estado e poder fazê-la acompanhar uma trajetória de solução coerente;

- i. empregar as diversas curvas de ligação com os modelos selecionados e obter curvas similares pelo novo modelo de curva  $M-\theta$  proposto aqui. Dessa forma, apresentar alternativa para se obter uma curva aproximada a partir de outra conhecida, desse mesmo modelo que foi definido aqui, por uma forma simples de analogia;
- j. desenvolver exemplos completos e com dados bem identificados, incluindo o EF com ligação que, além da validação da formulação numérica desenvolvida, possam servir de banco de provas para outras pesquisas; e
- k. avaliar efetivamente a proposta do *teorema da configuração inicial* (Alvarenga, 2005; & Silveira, 2006b), para estruturas com ligações. Mostrar como dispor as imperfeições geométricas e a influência das zonas plásticas e do carregamento na deformada inelástica e nas imperfeições iniciais *limitadoras*. Apresentar alternativas e/ou formas mais simples de empregá-lo com eficiência. Desenvolver um roteiro e recomendações para o emprego no projeto da *Análise Avançada* incluindo o efeito das ligações.

## 1.7 ORGANIZAÇÃO

Nesta seção, são apresentados os nove capítulos que compõem esta tese, destacando a localização das partes que representam contribuições originais dentro deste conjunto, que é organizado nos seguintes assuntos:

- a. introdução – que mostra a continuidade do trabalho anterior e seus objetivos, situando a *Análise Avançada* com ligações semirrígidas;
- b. modelo das ligações – extensa revisão bibliográfica sobre o tema ligações, apresentando histórico, parâmetros, classificação, modelos de comportamento, a estimativa da linha de viga, tipos de ligação. No final, destaca-se a seção 2.8 com a proposta de uma nova curva  $M-\theta$ , chamada *RBL*;
- c. formulação geral – adotam-se hipóteses simplificadoras e considerações gerais que permitem o desenvolvimento das expressões das matrizes de rigidez e dos esforços solicitantes para o EF com ligação. Destacam-se os itens:
  - i. condição de contorno para introduzir a ligação, na subseção 3.3.3;
  - ii. o significado do parâmetro  $\eta$  na formulação numérica, da subseção 3.3.7;
  - iii. as MR do EF com ligação tratadas nas subseções 3.4.2 e 3.4.3;
  - iv. as novas propriedades “médias” adotadas, na subseção 3.4.4; e
  - v. as novas considerações da *Integração Iterativa do Esforço Axial (IIEA)*, da subseção 3.6.3;
- d. aspectos computacionais – descreve-se em linhas gerais o conteúdo e as considerações gerais dessa ferramenta computacional, sem muita preocupação com código ou implementações em si. Um fluxograma ilustra como se desenvolve o processamento dos programas e suas funções. Destacam-se como acréscimos às etapas anteriores (Alvarenga, 2005 e 2008):
  - i. o processo incremental, com a nova proposta de controle de deslocamento generalizado da subseção 4.3.2;
  - ii. a expansão da *Integração Iterativa (IIEA)*, da seção 4.4 (Alvarenga & Silveira, 2008c); e
  - iii. controle do comportamento da ligação, da seção 4.5;
- e. elemento finito rígido-rígido – é a primeira avaliação de resultados dessa formulação numérica para o caso particular com  $\eta = 0$ . Dentre os quatro exemplos tratados, destaca-se o portal de Chen *et al.* (1996) da seção 5.5, pois

- ali se evidencia melhor as diferenças que justificam a *Integração Iterativa IIEA*;
- f. elemento finito rígido-rótula – trata-se de outro caso particular, agora  $\eta = 0,5$  (máximo), e que permitiu o estudo das colunas escoras da seção 6.6. Aqui, destaca-se o portal de Hajjar et al. (1997), que permitiu algumas publicações em congressos internacionais (Alvarenga & Silveira, 2008a-b);
  - g. elemento finito rígido-ligação – trata-se da validação da formulação numérica proposta, agora com problemas de ligação propriamente ditos, destacando-se:
    - i. casos de vigas simples da seção 7.2, com carga concentrada ou distribuída, tendo nas extremidades ligações lineares, bilineares, trilineares, curvas não lineares, a curva proposta comparada com a curva experimental da ligação, etc.;
    - ii. colunas simples da seção 7.3, travadas e destravadas, incluindo estudo de convergência e ligações não lineares;
    - iii. portal de Chan & Chui (2000) da seção 7.5, que contém a validação de todas as contribuições mais importantes, a nível de formulação, desta tese;
  - h. *Análise Avançada* incluindo a ligação – este é o capítulo de maior destaque do ponto de vista de resultados, no qual se explora o tema principal, com o portal de Chen & Zhou (1987) modificado, sob diversas condições de carga e imperfeições geométricas, realizando a *Análise Avançada*. No final, propõe-se, ainda, uma forma de se obter, por analogia, uma curva  $M-\theta$  nova partindo de outra curva existente, ambas empregando o modelo *RBL*;
  - i. considerações finais – apresenta as conclusões, os aspectos críticos das soluções (falhas, limites, desvios, pontos de controvérsias, desvantagens) e os desdobramentos futuros desta tese. Destaque-se a proposta de um roteiro para a *Análise Avançada* da subseção 9.2.5, e o *conceito estrutural* da seção 9.3, levando a um último e marcante exemplo.

Por fim, menciona-se que todos os capítulos possuem a sua própria lista de referências correspondentes, inclusive para os apêndices (que complementam algumas informações não colocadas diretamente no corpo da tese). No final, apresenta-se uma lista completa de todas as referências deste trabalho.

## 1.8 REFERÊNCIAS

ABNT NBR 8800 (1986), *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios*, ABCEM, Rio de Janeiro/RJ.

Ackroyd, M.H. (1979), “*Nonlinear stability of flexibly-connected plane steel frames*”, PhD Diss., Dept. Civil, Env. Architecture Eng., Univ. Colorado Boulder, Colorado.

AISC LRFD (1993), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 2<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

Almeida, A.C.B. (2006), “*Análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais nos perfis estruturais de aço*”, Diss. de Mestrado, PROPEE / EE-UFGM, Belo Horizonte/MG.

Alvarenga, A.R. (2005), “*Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*”, Diss. de Mestrado, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto/MG.

Alvarenga, A.R. (2008), “*Estudos sobre ligações com análise avançada através da zona plástica em pórticos planos de aço*”, Ex. de Qualificação, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto/MG.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2006a), “Efeito das tensões residuais na análise avançada de estruturas simples de aço”, *Anais das XXXII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, pp. 1493-1503.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2006b), “A configuração geométrica inicial na análise avançada de portais planos de aço”, *REM Revista Escola de Minas*, Vol. 70, No. 2, pp. 185-196.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008a), “Lean columns by plastic zone advanced analysis view”, *Anais do 5th European Conference on Steel and Composite Structures*, EUROSTEEL 2008, Graz, Áustria, Vol. B, pp 1659-1664.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008b), “Análise avançada de portais com colunas escoras”. *Anais do XXXIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, Vol. EST05-320, pp. 1-12.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008c), “Integração iterativa do esforço axial na análise inelástica com zona plástica”, *Anais do XXIX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Maceió/AL.

Alvarez, R.J. & Birnstiel, C. (1969), “Inelastic analysis of multistory multibay frames”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 95, No. 11, pp 2477-2503.

Argyris, J.H. (1964), *Recent advances in matrix methods of structural analysis*, Pergamon Press, Ankara.

AS 4100 (1990), *Steel structures*, Standards Association of Australia, Sidney, Austrália.

Attalla, M.R., Deierlein, G.G. & McGuire, W. (1994), “Spread of plasticity: a quasi-plastic hinge approach”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 120, No. 8, pp 2451-2473.

Barsan, G.M. & Chiorean C.G. (1999), “Computer program for large deflection elasto-plastic analysis of semi-rigid steel frame-works”, *Computers & Structures*, Vol. 72, pp 699-711.

Bjorhovde, R. (1988), “Column: from theory to practice”, *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp 21-33.

Chan, S.L. & Chui, P.P.T. (2000), *Nonlinear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*, Elsevier, Oxford, Reino Unido.

Chen, W.F. & Chan, S.L. (1995), “Second-order inelastic analysis of steel frames using element with midspan and end springs”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 121, No. 3, pp. 530-541.

Chen, W.F., Goto, Y. & Liew, J.Y.R. (1996), *Stability design of semi-rigid frames*, John Willey and Sons, Nova Iorque.

Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames., Theory software and applications*, CRC Press, Boca Raton.

Chen, W.F. & White, D.W. (1993), *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames – An assessment of the state-of-the-art*, SSRC, Bethlehem.

Chen, W.F. & Zhou, S.P. (1987), “Inelastic analysis of steel braced frames with flexible joints”, *Int. Jor. Solid and Structures*, Vol. 23, No. 5, pp 631-649.

Chiorean, C.G. & Barsan, G.M. (2005), “Large deflection distributed plasticity analysis of 3D steel frameworks”, *Computer and Structures*, Vol. 83, pp. 1555-1571.

Chwalla, E. (1938), “Die stabilitaet lotrecht belasteter rechteckrahmen”, *Dier Bauingenieur*, Vol. 19, pp. 69.

Clarke, M.J. (1994), “Plastic-zone analisys of frames”. Em Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames: theory, software and applications*, CRC Press, Boca Raton.

Clarke, M.J., Bridge, R.Q., Hancock, G.J. & Trahair, N.S. (1992), “Advanced analysis on steel building frames”, *J. C. S. Research*, Vol. 23, pp 1-29.

El-Zanaty, M.H., Murray, D.W. & Bjorhovde, R. (1980), “*Inelastic behavior of multi-story steel frames*”, Structural Engineering Report., No. 83, Univ. Alberta, Canadá.

Eurocode 3 (1992), *Design of steel structures*, Part 1, CEN European Committee for Standardization, ENV 1993 –1–1 E, Bruxelas.

Galambos, T.V. & Ketter, R.L. (1959), “Columns under combined bending and thrust”, *ASCE J. Eng. Mechanics*, Vol. 85, No. 2, pp. 1-30.

Galambos, T.V. & outros (1988), *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*, 4<sup>a</sup> Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.

Hajjar, J.F. & outros (1997), *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for American steel design*, ASCE, Nova Iorque.

Higgins, T.R. & outros (1971), *Plastic Design in Steel- A guide and commentary*, ASCE WRC, Vol. 41, Nova Iorque.

Horne, M.R. (1979), *Plastic theory of structures*, 2<sup>a</sup> Ed. Pergamon Press, Oxford.

Kanchanalai, T. (1977), *The design and behavior of beam-column in unbraced steel frames*, AISI Project 189, Rep. 2, Univ. Texas, Austin, Civil Eng./Structural Research Lab.

Kim, S.E. & Chen, W.F. (1996a), “Practical advanced analysis for unbraced steel frame design – Part I”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 11, pp. 1259-1265.

Kim, S.E. & Chen, W.F. (1996b), “Practical advanced analysis for braced steel frame design – Part II”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 11, pp. 1266-1274.

Kim, S.E. & Chen, W.F. (1999), “Guidelines to unbraced frame design with LRFD”, *The Structural Design of Tall Buildings*, Vol. 8, pp. 273-288.



- Kim, S.E. & Lee, D.H. (2002), “Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames”, *Engineering Structures.*, Vol. 24, pp. 735-744.
- Kim, S.E., Ngo-Huu, C. & Lee, D.H. (2006), “Second-order inelastic dynamic analysis of 3D steel frames”, *Int. Jour. Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 1693-1709.
- Lavall, A.C.C. (1996), “Uma formulação teórica consistente para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal”, Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos/SP.
- Liew, J.Y.R., White, D.W. & Chen, W.F. (1993), “Second-order refined plastic-hinge analysis for Frame Design”, Part I-II, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 119, No. 11, pp. 3196-3237.
- Lu, L.W. & Kamalvand, H. (1968), “Ultimate strength of laterally loaded columns”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 94, No. 6, pp. 1505-1523.
- Nethercot, D.A. (2000), “Frame structures: global performance. Static and stability behaviour – General report”, *J.S.C. Research.*, Vol. 55, pp. 109-124.
- Pimenta, P.M. (1986), “Aspectos da análise não-linear de estruturas reticuladas”, *Anais do 7º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia*, São Carlos, São Paulo.
- Santos, M.N., Rocha, P.A.S., Silva, A.R.D. & Silveira, R.A.M. (2008), “Applications of a hybrid finite element - Advanced nonlinear analysis of steel frames”, *Anais do 5th European Conference on Steel and Composite Structures - Eurosteel 2008*, Vol. B, pp. 1891-1896, Graz, Áustria.
- Silva, A.D.R. (2009), “Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas”, Tese de Doutorado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto/MG.
- Silveira, R.A.M. (1999), “Estratégias numéricas para análise de elementos estruturais esbeltos”, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG, Relatório Final de Pesquisa.
- Silveira, R.A.M. (2009), “Análise numérica avançada de estruturas metálicas”, Relatório Final de Pesquisa, Programa Pesquisador Mineiro I (PPM I), Edital 03/07, FAPEMIG.
- Sonmez, M. (1996), “Second-order analysis of elastic plane frames using finite element methods”, MSc Tese, Univ. da Pensilvânia.
- Teh, L.H. & Clarke, M.J. (1999) “Co-rotational and lagrangian formulations for elastic 3D beam finite element”, *J. Constr. Steel Research*, Vol. 48, pp. 123-144.
- White, D.D. (1985), “Material and geometric nonlinear analysis of local planar behavior in steel frames using iterative computer graphics”, MS Thesis, Cornell Univ., Ithaca, Nova Iorque.
- Wood, B.R., Beaulieu, D. & Adams, P.F. (1976), “Column Design by P-Delta Method”, *ASCE Journal of Struct. Division*, Vol. 102, No. 2, pp. 411-427.
- Ziemian, R.D. (1990), “Advanced methods of inelastic analysis in the limit states design of steel structures”, PhD Diss., Grad. School of Cornell Univ., Ithaca, Nova Iorque.
- Ziemian, R.D., McGuire, W. & Deierlein, G.G. (1992), “Inelastic limit states design”, Part I: “Planar frames studies”, Part II: “Three-dimensional frame study”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 118, No. 9, pp. 2352- 2568.
- Ziemian, R.D. & McGuire, W. (2001), “Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 128, No. 10, pp 1301-1307.

# 2

## MODELOS DAS LIGAÇÕES

### SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
2.1	Introdução	23
2.2	Parâmetros das ligações .....	38
2.3	Classificação das ligações	51
2.4	Modelos de curvas momento-rotação .....	60
2.5	<i>Linha de viga</i>	84
2.6	Tipos de ligação analisados .....	91
2.7	Ligações nas bases	103
2.8	Modelo de curva M- $\theta$ com <i>Rigidez Bilinear (RBL)</i> .....	108
2.9	Referências	127

## 2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é composto de nove seções e representa um estudo ou revisão bibliográfica sobre o tema “ligações”, enfoque principal desta tese. Nesta seção, faz-se a apresentação do capítulo, reportam-se alguns aspectos históricos do início da pesquisa sobre este tema no mundo, a introdução dessas descobertas nas normas, quais as suas possíveis vantagens, a dependência e a validação de modelos por meio de pesquisas experimentais. Na seção seguinte, abordam-se os principais parâmetros envolvendo as ligações: resistência, rigidez, índice de rigidez relativo e ductilidade. Já na terceira seção, mostram-se algumas classificações das ligações e, em seguida, listam-se alguns modelos teóricos utilizados para descrever o comportamento delas. Na quinta seção, tem-se uma primeira avaliação do comportamento da ligação na viga onde é empregada, por meio da chamada *linha de viga*. Na sexta, faz-se uma breve descrição dos trabalhos de pesquisa relacionados a ligações específicas, fornecendo, assim, um material de consulta mais direcionado ao projetista ou ao estudante da engenharia estrutural. Um estudo abrangendo as ligações usadas nas bases das colunas compõe a sétima seção. Na oitava, propõe-se um novo modelo de curva  $M-\theta$  e, por fim, a última seção contém as referências bibliográficas.

### 2.1.1 PRIMÓRDIOS

Inicialmente, as uniões entre as colunas e as vigas eram executadas por meio de ligações com rebites sem haver qualquer preocupação maior com a presença da ligação que não fosse sua resistência e sua boa execução. Mas alguns pesquisadores se preocuparam não apenas em medir e avaliar o seu comportamento, como também determinar formas de estabelecer padrões para o seu dimensionamento e avaliar-lhe a segurança.

Os primeiros experimentos com ligações surgiram em Wilson & Moore (1917) realizando o ensaio experimental da flexibilidade de juntas rebitadas. Posteriormente, Young (1917, & Dunbar, 1928; & Jackson, 1934), Baker (1934, & Pipard, 1936) e Rathbun (1936) realizaram ensaios para obter as primeiras curvas conhecidas de momento-rotação da ligação, chamadas genericamente de  $M-\theta$  ( $M$ -teta). Nasceu daí a noção de que o comportamento de ligações não pode ser propriamente considerado linear, sua relação com a flecha, a rotação e os momentos nas vigas.

Destaca-se Batho & Rowan (1934) que propuseram estimar a resposta da ligação pela chamada *linha de viga*. Em seguida, ocorrem vários ensaios com juntas aparafusadas e o primeiro ensaio de juntas soldadas (Hechtman & Johnson, 1947).

Pode-se indicar adicionalmente a primeira formulação com o método dos elementos finitos com ligação de Monforton & Wu (1963) e o primeiro processo iterativo empregando ligações de Frye & Morris (1975).

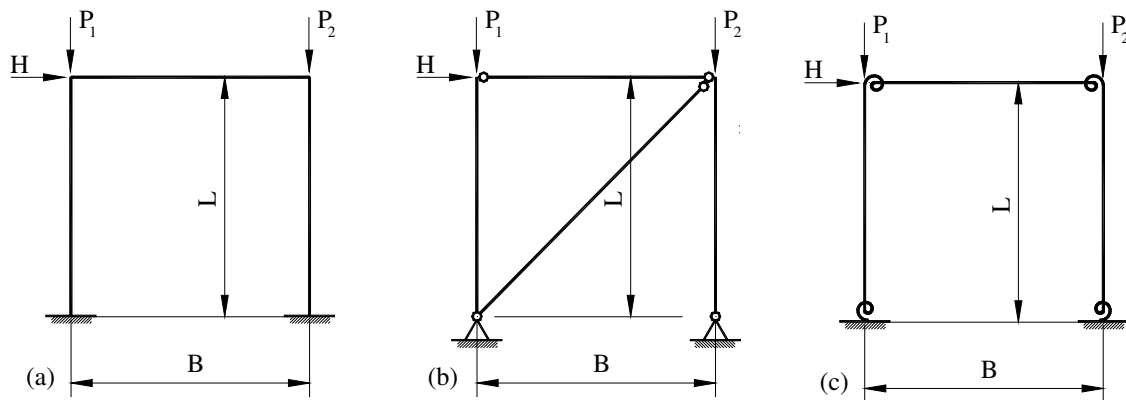
Como se constata, inúmeros trabalhos, tanto experimentais quanto analíticos, foram desenvolvidos desde 1930 até a presente data, indicando claramente a vastidão dessa área de pesquisa e as necessidades de informações para bem compreender-se o trabalho estrutural dessas partes, de forma que se possa, efetivamente, construir com economia e segurança.

### 2.1.2 RECONHECIMENTO PELAS NORMAS

No passado, o projetista poderia empregar dois tipos de construção baseados na forma como as ligações eram idealizadas:

- a. rígidas – admitia-se que a viga acompanharia o movimento de giro da coluna, de tal forma que o ângulo relativo entre essas peças estruturais não se modificaria. Tal condição exige que a coluna seja capaz de absorver os momentos transmitidos que possuem valores elevados (de viga para coluna e vice-versa). Essa consideração é ilustrada por um portal simples de altura  $L$  e base  $B$ , na Fig. 2.1(a); e
- b. rotuladas ou simples – aceitava-se que a ligação seria tão flexível que o valor do momento absorvido seria desprezível, podendo ocorrer uma rotação relativa entre a coluna e a viga de qualquer ordem. Este caso é representado na Fig. 2.1(b) na qual, dada à forma de construção adotada, torna-se necessária a presença de um elemento estabilizador, como uma viga parede, um travamento como foi indicado, para a formação de treliças (contraventamentos).

As normas até então procuravam garantir condições de dimensionamento que pudessem cumprir com tais aproximações, desprezando o real comportamento das ligações. A construção semirrígida era agrupada no caso parcialmente rígido (item b anterior) desde 1947 até 1986 (Leon, 2000). Nesse período, teve o seu maior destaque na consideração da ligação simples, porém resistente *ao vento* (Disque, 1964).



**Figura 2.1 Modelos de portais com construção:**  
(a) rígida; (b) rotulada; (c) semirrígida.

Assim, a ligação era vista apenas como um elo entre as partes estruturais, que não produziria efeitos no comportamento avaliado do modelo estrutural. Portanto, desprezava-se, em geral, sua presença, tanto como a interação com o conjunto na solução e análise do comportamento estrutural.

Com o surgimento da era do computador e da tecnologia, que se desenvolveu contemporaneamente, ficou estabelecido que essas hipóteses básicas de ligação (rígida e rótula) não se poderiam cumprir na prática, ou seja:

- qualquer ligação flexível é capaz de resistir algum momento, e isso permite que se obtenha algum ganho na condição de flambagem das colunas, por causa dessa pequena restrição ao giro, ou seja, um benefício que era desprezado (Goverdham, 1984; Nethercot, 1985; Davison *et al.*, 1987);
- as ligações mais próximas da consideração de rótula são os olhais e os pinos, ou ligações com um único parafuso ou rebite, que são pouco usuais e dispendiosas (custo elevado);
- já a ligação considerada mais rígida pode apresentar somente uma pequena rotação relativa entre a coluna e a viga. Com essa hipótese, os esforços solicitantes da análise aumentam, tornando a ligação cara e trabalhosa, na fabricação e na montagem;
- casos de ligações consideradas rígidas, aparafusadas e com enrijecedores de coluna, que apresentaram deslocamentos laterais da ordem do dobro do que foi previsto na análise convencional elástica, de primeira ordem (Nethercot & Zandonini, 1988; Morris & Packer 1987);

- e. as ligações mais próximas das rígidas perfeitas (engastes) seriam as soldadas de penetração total e com enrijecedores de coluna (Aoki & Fukumoto, 1983; Davison *et al.*, 1987);
- f. ao não se atingirem esses dois extremos idealizados de comportamento (rótula e engaste), deve ser avaliada a influência de um comportamento intermediário (Ackroyd & Gerstle, 1982), o que pode possibilitar, também, uma segurança maior nos resultados da análise e alguma economia (Nethercot *et al.*, 1988), como se mostrará posteriormente.

Além disso, é necessário investigar o que ocorre com a estrutura globalmente, pois quando ocorre maior flexibilidade nos nós, os deslocamentos crescem, podendo provocar maiores efeitos de segunda ordem (efeitos já mencionados na seção 1.2).

Essas considerações podem ser mais bem compreendidas acompanhando um exemplo de comportamento de uma ligação, ilustrado na Fig. 2.2, na qual são representados: (a) a rotação de uma ligação chamada genericamente por  $\theta_r$ , o momento que esta transmite  $M_r$ ; e (b) o diagrama que mostra a sua relação.

Os extremos das duas idealizações anteriores, rígidas e rotuladas, representam os eixos: horizontal (rótula) e vertical (engaste) desse diagrama, respectivamente, caracterizando, dessa forma, a disparidade entre o que se adotava no modelo estrutural e a realidade do que é construído.

São tratadas por rígidas e flexíveis (ou “rotuladas”) as ligações que se aproximam das ideais (ou “perfeitas”), que são os casos extremos: o engaste e a rótula.

O valor do momento de plastificação da viga  $M_p$  indica se a ligação é capaz de absorver os esforços de projeto (dimensionamento) e qual será o valor de rotação  $\theta_p$  correspondente, condição que precisa ser considerada.

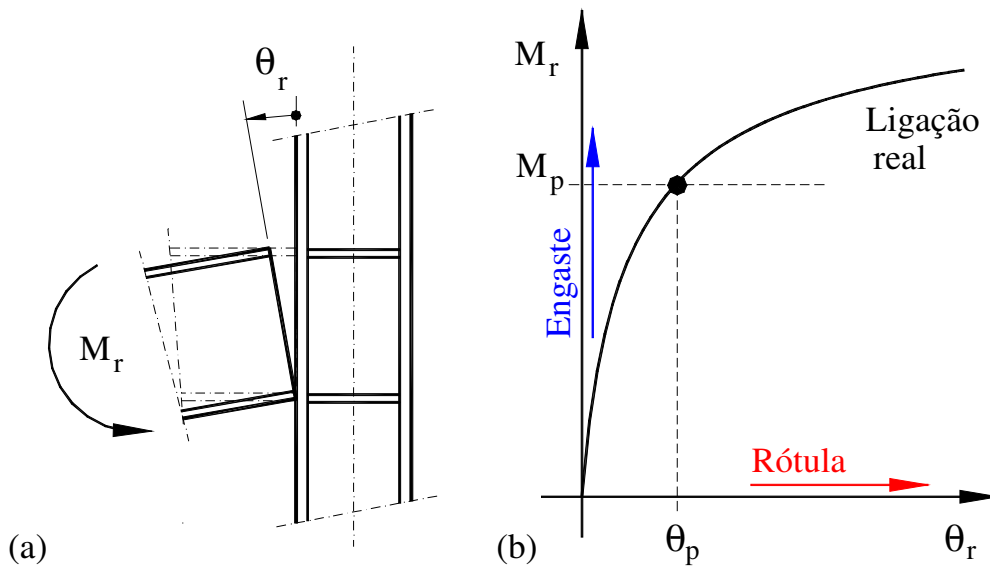
A trajetória de comportamento da ligação, representada pelo diagrama, mostra uma relação não linear entre essas grandezas  $M_r$  e  $\theta_r$ , que é comum a todos os tipos de ligação, porém não necessariamente da mesma forma, ou seja: diferentes ligações apresentam diferentes trajetórias. Em geral, mesmo ligações similares com grandezas geométricas e físicas diferentes, ou uma ligação assimétrica sujeita a momentos de sinais opostos, também apresenta trajetórias diferentes (Beedle & Christopher, 1964).

Batho & Rowan (1934) foram os primeiros a constatar essa diversidade de comportamento das ligações, retratado na Fig. 2.3, na qual se representam trajetórias de

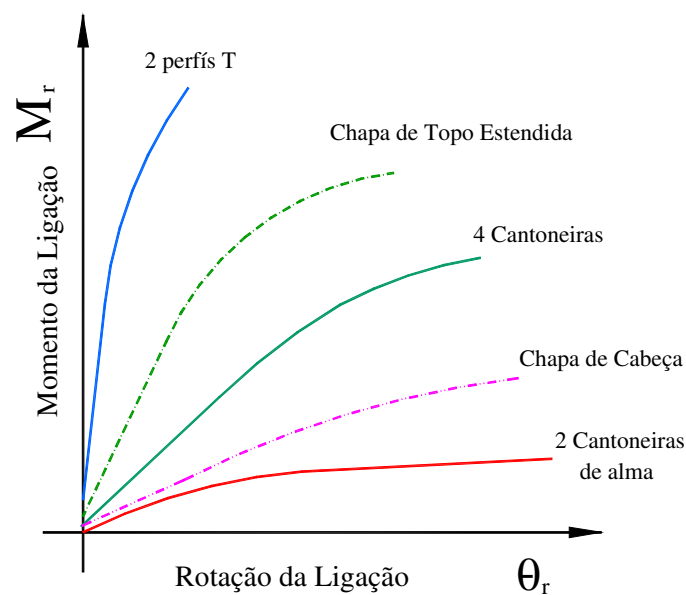
alguns tipos de ligação, ou curvas  $M-\theta$ , que serão abordadas com mais detalhes nas seções seguintes. Nessa figura, procura-se reproduzir a experimental, na qual as colunas e as vigas tiveram seus perfis inalterados, porém modificou-se o tipo de ligação.

As normas somente começaram a reconhecer a influência desse comportamento das ligações posteriormente. Morris & Packer (1987) indicaram as primeiras menções:

- a. Det Norske Veritas (1977) determina curvas  $M-\theta$  que podem ser adotadas em uniões de tubos para estruturas de plataformas marítimas da Noruega;



**Figura 2.2 Comportamento da ligação:**  
(a) significado; (b) diagrama  $M-\theta$ .



**Figura 2.3 Diversos diagramas  $M-\theta$ .**

- b. AISC (1976, 1986) nos Estados Unidos, permite certas considerações de rigidez parcial, com base no estabelecido pelo SSRC (1981) (Galambos *et al.*, 1988), criando uma força-tarefa para desenvolver estudos sobre efeito de ligações no dimensionamento;
- c. no Reino Unido, a norma BS 5950 (1990) indica métodos para incorporar a ligação semirrígida, embora anteriormente já houvesse realizado uma revisão e padronização do trabalho norueguês (UEGOR, 1985). Posteriormente, algumas especificações técnicas foram publicadas dando ênfase ao tema (Owens & Cheal, 1989; BCSA, 1995), embora a norma propriamente não defina método para avaliar as propriedades da ligação (Anderson & Tahir, 1996);
- d. a norma canadense CAN3-S16-1 (CSA, 1994) não prevê diretamente a construção semirrígida, embora seja requerida a análise dos efeitos de segunda ordem, considerando, então, a participação dessa semirrígidez da ligação nas estruturas (Xu, 2001).

As versões mais recentes da norma americana (AISC, 2005) e da Europa (Eurocode 3, 2000) permitem que a resposta real de uma ligação possa ser considerada no cálculo estrutural, embora a maioria dos ensaios tenha sido realizada com ligações isoladas (trecho de coluna e viga). Há, portanto, uma preocupação emergente quando se adotam esses procedimentos, pois não há garantia que as respostas serão as mesmas quando essas ligações fazem parte de um conjunto. Isso pode ser agravado pela presença do cortante (normalmente desprezado) e por deformações plásticas do painel. Zandonini & Zenon (1996) reportaram que uma série de fatores afeta a rigidez inicial da ligação (e a sua medida), dentre eles, a relação entre o cortante e o momento, sendo maior a influência para ligações mais rígidas.

Bjorhovde *et al.* (1987, 1996) têm mantido congressos periódicos, envolvendo pesquisadores na área de ligações em todo mundo, nos quais procuram realizar um acervo sobre o tema, indicando o volume elevado de contribuições produzidos.

Existem vários tipos de ligação a se estudar, vários detalhes que interferem na união (parafusos, soldas, furos, gabaritos, espessuras) e sua participação na curva  $M-\theta$ . É necessária a confrontação dos modelos com ensaios experimentais, cujo custo e realização incluem outros desafios. A deformação do painel da coluna, bem como os efeitos locais nas abas e alma, que são responsáveis pelo comportamento dútil da



ligação, pode provocar outros efeitos significativos nas estruturas (Bose & Hughes, 1995), gerando outras considerações para a análise.

Assim, embora em diversas áreas da construção de aço – por exemplo, no método dos estados-limites – tenha-se atingido um “consenso” e se disponha de formas claras e diretas de fazer avaliações adequadas da resistência, da flambagem, etc., o mesmo não ocorre com as ligações. Ainda não se dispõe de uma ferramenta, de uma forma direta, simples e confiável de introduzir o comportamento das ligações no projeto como se deseja e se espera.

### 2.1.3 VANTAGENS PREVISTAS

Com as normas de estado-limite e após o “paradoxo do fator  $k$ ” (Siat-Moy, 1986), várias pesquisas se voltaram para o estudo da influência da ligação no dimensionamento, em razão do risco iminente de projetos inadequados ou contra a segurança.

As primeiras flagrantes vantagens da consideração dos efeitos das ligações nas estruturas apareceram com Sugimoto & Chen (1982), Bjorhovde (1984), Chen & Lui (1985). Nesses trabalhos, as colunas teoricamente birrotuladas, travadas com ligações de cantoneiras nas extremidades, possuem o coeficiente de comprimento equivalente de flambagem  $k_{fl}$  reduzido de 1 para 0,820 a 0,935 segundo o plano de maior inércia do perfil I (z) e, para 0,625 a 0,848 no plano perpendicular (y) dessa seção. Essas pesquisas foram expandidas posteriormente com Lui & Chen (1987), Lui (1988). Destaca-se Hellesland & Bjorhovde (1996a-b), que propuseram novos ábacos que determinam o coeficiente de comprimento efetivo  $k_{fl}$ , levando em conta o efeito das ligações por meio dos parâmetros  $G_A$  e  $G_B$ .

Nethercot *et al.* (1985) comprovaram que o comportamento das ligações flexíveis poderia representar um benefício econômico a ser explorado. Barakat & Chen (1990) empregaram a rigidez secante para corrigir os valores dos parâmetros  $B_1$ ,  $B_2$  e o coeficiente de comprimento efetivo  $k_{fl}$ , otimizando o dimensionamento.

Moncarz & Gerstle (1981) e Ackroyd & Gerstle (1982) mostraram que a deslocabilidade da estrutura é aumentada pela presença das ligações semirrígidas, exigindo um estudo mais cauteloso por parte dos projetistas.

Liew & Yu (1995) comentaram sobre o uso de ligações presumidamente rígidas para prédios de grande porte, nos quais a facilidade de fabricação e de montagem no

local, frequentemente, direciona a simplificações no detalhamento. Assim, algumas vezes, essas ligações apresentam um forte comportamento não linear. Segundo esses pesquisadores, para obter a rigidez requerida, faz-se o reforço de colunas por meio de enrijecedores horizontais e, às vezes, até de alma dupla, evitando os efeitos de deformações locais.

Por outro lado, embora de maneira geral as ligações semirrígidas não exijam tanto das colunas ou dos processos de fabricação e montagem, elas apresentam comportamento altamente não linear e pronunciado efeito no deslocamento lateral das estruturas nas quais são empregadas, o que torna a sua adoção no projeto uma tarefa que não é tão simples.

Dessa forma, é necessário combinar partes semirrígidas do edifício com sistemas de elevada rigidez ou treliças, responsáveis pela estabilidade de todo o conjunto. À medida que o número de andares do edifício cresce, o estado limite de serviço pode vir a ser predominante no dimensionamento em relação ao estado último, para garantir o conforto humano (Ackroyd, 1979).

Para prédios de até 10 andares é possível o uso de ligações semirrígidas apenas. Daí até 20 andares recomenda-se um sistema de rigidez complementar ou empregar a forma quase “rígida” tradicional. A partir de 20 andares, pode ser adotada tanto a concepção em tubo ou em treliças. Nesses casos então, a redução de custos não está vinculada propriamente ao material ou à ligação, mas aos menores recursos gastos nos processos de fabricação e montagem (Liew & Yu, 1995).

Sobre os custos relacionados com as ligações, foi indicado que sendo o peso de uma viga inferior a 520 N/m, a relação de aumento de custo na presença de uma ligação flexível é de 25%, porém, se esta for rígida, o aumento é de 70% (CISC, 1983). Já quando o peso dessa viga atinge a 2350 N/m, esses limites passam a ser 5% e 43%, respectivamente. Xu (1999), por exemplo, adotou os valores médios de 15% e 55% do que se deduz uma variação de custo mínima de 40% entre uma opção e a outra. Reduzir o custo da parte estrutural em 20% no peso é um ótimo atrativo para a construção, além de outros benefícios administrativos (menor quantidade e duração das atividades na montagem, menor incidência de acidentes, menor tempo de obra, menores prazos, conclusão do empreendimento e retorno financeiro mais rápido, etc.).

#### 2.1.4 TIPOS DE LIGAÇÃO

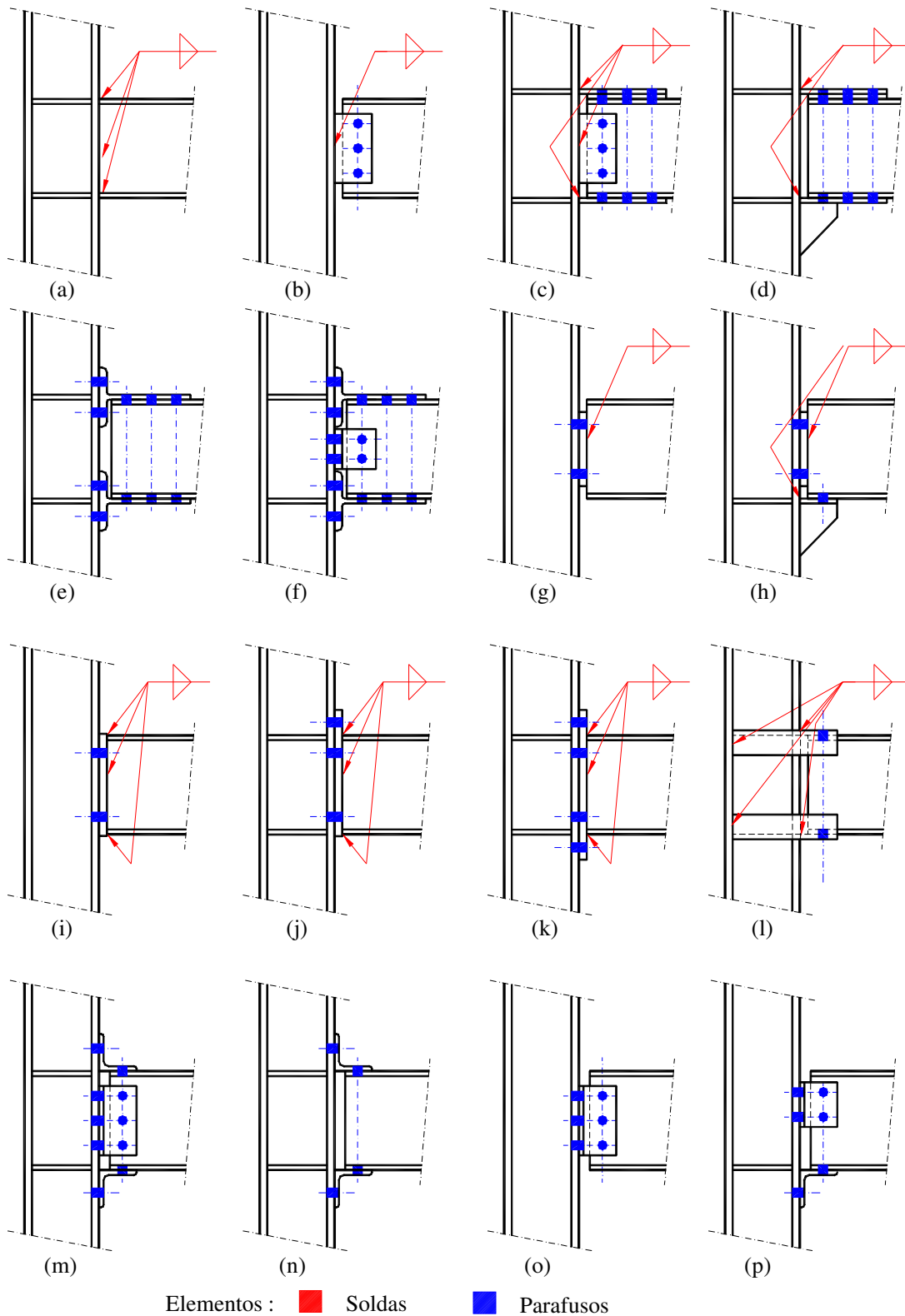
Além dos diversos tipos de ligação, verifica-se que existe uma gama de parâmetros diferentes em cada ligação, inclusive a influência da(s) viga(s) e da coluna que participam da ligação.

Na figura 2.4, indicam-se diversos tipos de ligação, entretanto, isso não significa que todos os tipos possíveis estejam representados. Nessa figura estão apenas alguns dos tipos mais comuns ou mais fáceis de adotar e construir, diante da atual circunstância de tecnologia e materiais. Por exemplo, o custo elevado de cortar e furar os perfis Ts, da Figs. 2.4(e-f) transformaram-no em obsoleto em relação à ligação com chapa de topo da Figs. 2.4(j-k). Com a nova tendência de empregar colunas em perfis tubulares, alguns desses tipos podem ser modificados ou também ficar obsoletos.

Devem-se verificar os detalhes de cada tipo apresentado (os parafusos, os furos, os filetes de solda, as distancias de bordas, as distancias entre furos, as espessuras de componentes, etc.), bem como que os parafusos podem ter propriedades mecânicas diferentes, ser apertados com pré-tensão, pode ocorrer deslizamento, os furos podem ser com broca ou a punção, de forma alongada, etc. Sem falar das soldas que podem ser com filetes, com penetração total ou parcial, qual o espaço de cordões, etc.

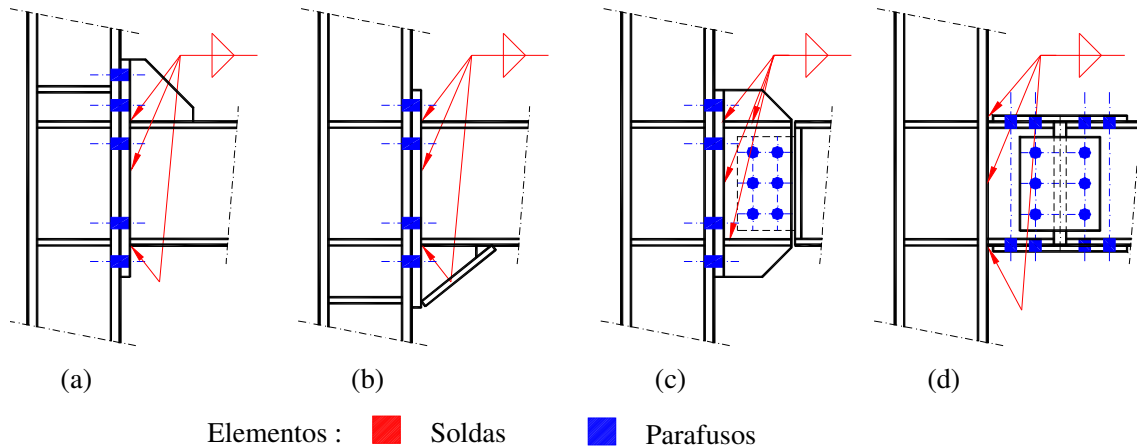
Quando se entra no estudo dos detalhes da ligação propriamente, ficam mais transparentes as várias diferenças, pois ainda pode haver casos em que, por razões de padronização, várias peças tenham a mesma ligação ou seguem um dado gabarito de produção em série (larga escala) e são empregadas em perfis (seções) e vigas (condições de cálculo) diferentes.

Portanto, mesmo para um único tipo de ligação, uma enorme gama de variações geométricas e físicas existe. Explicando, veja-se a chapa de topo estendida, sobre a qual se fizeram inúmeros trabalhos, conforme a espessura de componentes (da chapa e da aba da coluna), do diâmetro do parafuso, pretensão e dos esforços atuantes, pode ocorrer o chamado *efeito de alavanca* (“prying”). Caso essa mesma ligação seja construída assimétrica, por exemplo, estendida só numa direção, como na Fig. 2.4(j), a resposta estrutural da ligação será composta então de duas curvas  $M-\theta$ : uma para o momento último maior, similar ao da Fig. 2.4(k), que provoca tração na parte estendida; e outra, com valores de momento último menor, quando se comporta como uma ligação do tipo chapa cortada da Fig. 2.4(i), para o momento de sentido oposto (Yu *et al.*, 1998).



**Figura 2.4 Diversos tipos de ligação:**

- (a) soldada; (b) chapa de alma lateral; (c) 3 talas soldadas na coluna; (d) 1 tala e 1 suporte;  
 (e) 2 perfis Ts; (f) 2 Ts com 2Ls de alma; (g) chapa de cabeça; (h) chapa de cabeça e 1 suporte;  
 (i) chapa cortada; chapa estendida: (j) de 1 lado; (k) de 2 lados; (l) cercada de 4 Ls;  
 (m) 4 Ls (2 de alma, 2 de aba); (n) 2 Ls de aba; (o) 2 Ls de alma; (p) 2 Ls alma e 1 L suporte.



**Figura 2.5 Tipos especiais de ligação:**  
 chapa estendida com (a) reforço superior, (b) reforço inferior,  
 (c) T aparafusado na alma; (d) árvore de Natal com 4 talas externas.

Observando a quantidade de exemplos simples de ligação na Fig. 2.4, imagina-se a complexidade que surge para os casos ilustrados na Fig. 2.5, com alguns tipos especiais de ligação que raramente são estudados ou avaliados, embora sejam recursos empregados pelos projetistas, em circunstância especial. Ou seja, o projetista continua desamparado na análise de vários tipos de ligação e para essas condições especiais, que não se pode impedir *a priori* que apareçam no projeto.

### 2.1.5 PESQUISA EXPERIMENTAL

Antes de se tratar dos modelos empregados para aproximar o comportamento da ligação, é necessário citar toda a vasta pesquisa experimental que foi produzida ao longo de várias décadas, sobre a qual se fazem hoje diversos trabalhos de aproximações ou calibrações de modelos, e que continua sendo desenvolvida em todo o mundo.

Para se avaliar o esforço de realizar tais ensaios experimentais, podem-se citar os seguintes requerimentos:

- a. o aparato de laboratório (máquinas de ensaio, macacos hidráulicos, medidores, ferramental, etc.);
- b. os equipamentos para transporte, movimentação, fabricação, montagem e proteção;
- c. o material ensaiado, que deve reproduzir condições de amostragem equilibrada (materiais com propriedades similares aos de mercado, lote de confecção ou produção, características geométricas e físicas com valores médios com mínimas variações no cômputo de todas as peças ensaiadas);

- d. a mão de obra especializada, que reproduza as condições normais de fabricação e montagem, representando uma avaliação média do trabalho operário do local onde se produzem as estruturas, sempre enquadrada numa determinada qualidade, que deve superar a mínima;
- e. a experiência prévia dos pesquisadores. Isso permite a construção de modelos de ensaios, cujos resultados possam aferir as grandezas significativas do estudo com precisão, inclusive na parte de colocação dos medidores, sistemas de leitura, tempo de medições após a aplicação de passos de carga, bem como em avaliar a validade de um ensaio, quando os resultados produzidos demonstram acidentes ou imprecisões na sua execução; e
- f. o tempo e os recursos financeiros. Para a amostragem ser representativa, deve-se gabaritar os resultados, fazer comparações, a avaliação do processo, exame de corpos de prova, a calibragem do aparato e dos medidores antes do ensaio, o acompanhamento durante significativo tempo do ensaio, a armazenagem das informações por diversos meios (eletrônico, filmes, fotos, medições), etc. Tudo isso requer considerável tempo dentro do laboratório e representa elevado custo, já que há uma escala e planejamento de utilização dos recursos do laboratório para as suas diversas finalidades.

São muitos os aspectos a se avaliar nos detalhes de uma ligação, o que foge do intuito deste trabalho, mas que ressalta a importância de dados e resultados experimentais, como forma principal de gabaritar as diversas formulações ou modelos existentes e, também, entender os diversos comportamentos apresentados. Esse trabalho conjugado laboratorial-analítico é que tem permitido atingir modelos mais coerentes de ligação, como o das “componentes” (Faella *et al.*, 2000).

Goverdham (1984) reuniu experimentos a partir de 1950, incluindo algumas tentativas empíricas para estabelecer relações entre os dados de momento e rotação. Esses experimentos envolvem, principalmente, as ligações com cantoneiras, com chapa: simples de alma, a de cabeça e a de topo estendida. [Ver Figs. 2.4(m, n, o, b, g & k); respectivamente].

Já Nethercot (1985) selecionou 70 experimentos, dentre os quase 700 disponíveis, estabelecendo equações empíricas para esses dados. Os tipos de ligação abordados são os mesmos de Goverdham, acrescentando-se: cercadas com 4 cantoneiras e de 2 perfis

T, com ou sem 2 cantoneiras de alma. correspondendo às Figs. 2.4(1, e-f).

Os trabalhos de Goverdham (1984) foram estendidos por Kishi & Chen (1990), reunindo tanto ligações com rebites como com parafusos e soldadas, realizadas no período de 1936 a 1986. Os resultados de ensaios foram comparados com aproximações propostas por outros pesquisadores (Frye & Morris, 1975; Chen & Lui, 1985, e Kishi & Chen, 1987).

Neste século, o comitê do Eurocode 3, editores do Anexo J, bem como outros grupos de pesquisa europeus, tem desenvolvido uma série de ensaios experimentais (Weynand, 1992) e estudos analíticos baseados no método das “componentes”, dispondo de um grande material de pesquisa já consolidado (Faella *et al.*, 2000). Alguns pesquisadores têm também estudado o efeito das cargas axiais nas colunas modificando o comportamento das ligações (Guisse & Jaspart, 1996).

Desde 2005, o Eurocode 3 (2000) traz novas revisões ou complementos, abrangendo uma série de áreas e apresentado desenvolvimento marcante nesse tema de ligações, em relação às outras normas, mesmo à americana. Algumas normas, como a BS 5950 (1990) e o AISC (2005) fornecem alguma ajuda ao projetista, fornecendo algumas ligações padronizadas (totalmente detalhadas) recomendadas para o projeto.

Outra parte crítica de toda essa pesquisa experimental reside no fato dos ensaios serem, em sua maioria, realizados com perfis laminados leves ou de peso médio, requerendo extrapolações quando se requer empregar outros perfis mais pesados, ou também ligações que usam outros tipos de seção – por exemplo, as tubulares. Além disso, cada ligação possui resistência, rigidez e características rotacionais, enfim, próprias e diferentes, que dependem de detalhes cuja avaliação por meio de ensaios é improvável, por causa do alto custo e do tempo envolvidos (Patel & Chen, 1984).

Até aqui, falou-se apenas das ligações entre peças de aço. Porém, não se pode esquecer o outro ramo de pesquisa que envolve o concreto nas estruturas mistas. Assim como há as vigas mistas (em que a laje de concreto participa como uma aba superior), há as colunas mistas (em que os perfis I de aço são revestidos pelo concreto, ou os tubo de aço preenchidos de concreto), bem como as ligações mistas (Queiroz *et al.*, 2002). Essas ligações envolvem pilares e vigas que podem também ser mistas, de aço ou de concreto. Resulta que até a nomenclatura difere, o termo “colunas” da metálica é substituído por “pilares”, adotado nos outros ramos. Este assunto está fora do escopo desta tese.

Por causa dos terremotos de Northridge em 1994 (FEMA, 2000) e Kobe, em 1995, foram realizadas forças-tarefas de pesquisa nos EUA para o estudo de ligações sob condições dinâmicas (Galambos, 2000) e, posteriormente, com o ataque terrorista ao World Trade Center (Astaneh-Asl, 2003) foi dada ênfase às condições de incêndio.

Já na Europa, o desenvolvimento da tecnologia das construções mistas, concreto-aço, tem sido preponderante, levando às pesquisas voltadas para as ligações mistas (Bjorhovde *et al.*, 1996). Assim, as pesquisas com relação às ligações simples, curvas M- $\theta$  sob cargas monotônicas, foram colocadas em segundo plano nos principais centros de pesquisa e algumas ligações não receberam até agora contribuições do mesmo porte das já extensamente ensaiadas de forma experimental.

A definição de curvas M- $\theta$  ajustadas a dados experimentais, como no SCDB “Steel Connection Data Bank” (Chen *et al.*, 1996; Abdalla & Chen, 1995) são eficientes para a análise de pórticos, mas não indicam nenhuma informação sobre o comportamento da ligação (suas deformações e colapso), quanto à variação de parâmetros, não permitindo uma otimização pelo projetista (Shi *et al.*, 1996). Uma melhoria é o estudo combinado de equações teóricas com aproximações empíricas, proposto por Kishi & Chen (1987). Há dez anos, estimavam-se 300 ensaios utilizáveis, dentre 800 realizados (Bjorhovde *et al.*, 1996); atualmente esse número é muito maior.

Por outro lado, procedimentos estabelecidos pelo Eurocode 3 (1992), Anexo J, permitem a verificação da ligação, mas apenas o emprego da rigidez secante não é adequado para a análise estrutural inelástica de segunda ordem, ou a avançada (Shi *et al.*, 1996).

Já a definição das curvas M- $\theta$  adotando o método das “componentes” parece ter um caminho bastante produtivo, como se observa pelo JMRC “Joint Moment Rotation Curve” (Faella *et al.*, 2000), cujo emprego na prática ainda precisa ser avaliado. É um procedimento que pode ser automatizado, tem certo respaldo experimental, mas precisa ser introduzido na prática dos escritórios.

Outro caminho a ser seguido é o do estudo da ligação com modelos computacionais tridimensionais, que exige recursos nem sempre disponíveis. Significa, assim, que o projetista poderá ficar ainda na situação de ter:

- a. dados sobre várias ligações, que não são adequadas às suas necessidades;
- b. ter a definição de procedimentos para o dimensionamento de diversos tipos;



- c. recomendações ou estimativas; mas requerendo informações adicionais específicas para realizar o seu projeto, e não haver forma de obtê-las de maneira simples.

Isso, sem dúvida, representa um desafio a ser vencido no dia a dia do projeto estrutural englobando ligações semirrígidas; portanto, trata-se de uma das justificativas deste trabalho e de seu desdobramento numa possível linha de pesquisa.

Na próxima seção, são indicados os principais parâmetros de uma ligação, em seguida são mostrados os tipos de modelo existentes.

## 2.2 PARÂMETROS DAS LIGAÇÕES

Como mencionado, as ligações podem ter seu comportamento determinado por meio das curvas  $M-\theta$ , que apresentam diversos tipos de forma, compreendidos entre o que se considera “infinitamente rígido”, ou seja, o ângulo relativo entre a viga e a coluna naquele ponto de união não se altera ao longo de todo o processo de cálculo; e o que se denomina “rótula ideal”, na qual se pode ocorrer qualquer modificação do ângulo relativo sem que surja qualquer momento fletor. Esses dois extremos (engaste e rótula) representam, na realidade, os eixos do diagrama  $M-\theta$ , que não podem ser reproduzidos factualmente.

Para se escolher o tipo de ligação mais adequado a cada situação, é necessário conhecer bem o comportamento das ligações, de onde surge uma série de conceitos que serão agora introduzidos (Eurocode 3, 1992; BCSA, 1995).

### 2.2.1 PONTOS CARACTERÍSTICOS

Os pontos característicos são valores do gráfico  $M-\theta$  utilizados para classificar o comportamento e determinar a influência da ligação no sistema estrutural.

Na figura 2.6, representa-se, de forma simplificada, um diagrama hipotético de ligação obtido em ensaio sob carregamento mono tônico até a ruptura e que contém, às vezes, um ou mais trechos de descarregamentos intermediários (dentre outras diferenças). De acordo com esse diagrama, definem-se as grandezas básicas:

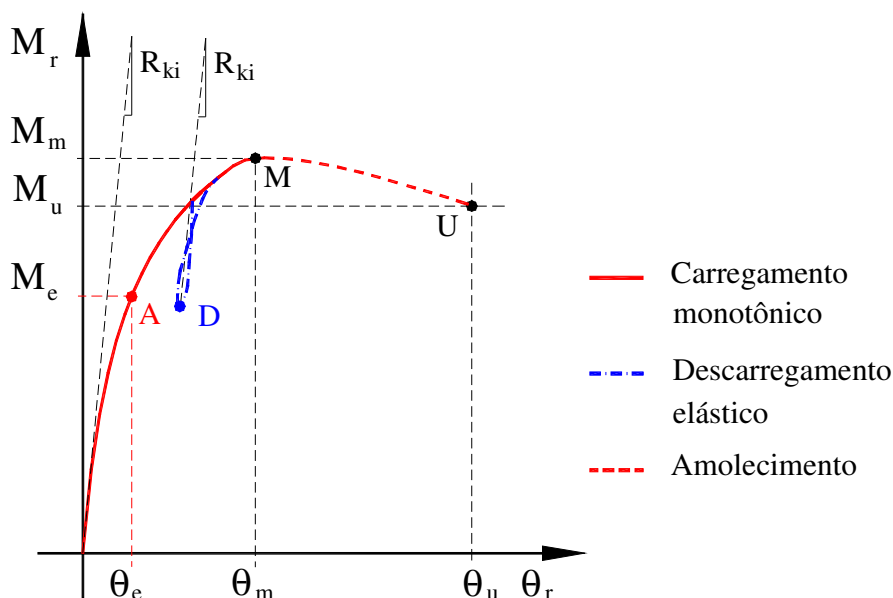


Figura 2.6 Pontos da curva de ligação.

- a. momento máximo ( $M_m$ ) – é o maior momento que a ligação é capaz de suportar, antes do colapso, relacionado também ao conceito de resistência e à capacidade da ligação, (ponto M na Fig. 2.6);
- b. rotação do momento máximo ( $\theta_m$ ) – é a rotação correspondente ao momento máximo, sendo que se a ligação não atingir essa rotação num dado carregamento, tal momento não ocorrerá, e assim, a ligação transferirá um momento menor, sob uma rotação menor. O valor 20 mrad é recomendado para a resistência nominal (Deierlein, 1992);
- c. momento último ( $M_u$ ) – é o momento que a ligação apresenta seu colapso, (ponto U na Fig. 2.6), o qual pode ser igual ou menor que o máximo  $M_m$ , dependendo da ligação. Na maioria dos casos, os valores de  $M_u$  e  $\theta_u$  são confundidos com  $M_m$  e  $\theta_m$ , ou seja, os pontos M e U coincidem. Em geral, para efeito de projeto, essa coincidência é imposta (ponto M = U); e
- d. rotação última ( $\theta_u$ ) – é a rotação associada ao momento último  $M_u$ , a qual ao ser atingida, ou superada, na etapa de análise estrutural, tem-se o colapso da ligação. Um valor estimado para vigas com a relação  $L_v/d \leq 30$  é dado por:

$$\theta_u \approx 0,0008 F_y [\text{ksi}] + \frac{\Delta_a}{L_a} \approx 1,15985E - 3 F_y \left[ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right] + \frac{\Delta_a}{L_a} \quad (2.1)$$

sendo  $\Delta_a$  o deslocamento lateral do andar,  $L_a$  a altura do piso inferior ao andar da viga onde a ligação está,  $L_v$  o vão da viga e (d) a altura da seção. Para uma viga simples, desprezando a movimentação entre pisos ( $\Delta_a \approx 0$ ) e aço comum (ASTM A 36,  $F_y \approx 25 \text{ kN/cm}^2$ ), obtém-se  $\theta_u \approx 28,8 \text{ mrad}$ . Portanto, é usual limitar essa rotação em 30 mrad (Christopher & Bjorhovde, 1999).

Outro ponto importante na Fig. 2.6 é o (A) de limite do regime elástico, em que se supõe que o momento elástico aparente  $M_e$  esteja relacionado à chamada rotação elástica  $\theta_e$ , empregado em análises sob condições de serviço.

Determinados os pontos característicos da ligação pelo diagrama M- $\theta$ , deve-se avaliar tanto o seu comportamento conjugado ao modelo estrutural quanto a sua utilização em uma dada condição de projeto, estudando suas propriedades. Para isso, nas subseções seguintes são avaliadas as quatro propriedades básicas de uma ligação:

- a. a resistência – que avalia a possibilidade de ocorrer o momento plástico da viga ( $M_p$ ) em região anexa à ligação;

- b. a rigidez da ligação – na qual se avalia a curva  $M-\theta$  da ligação de forma a poder corresponder a uma expectativa de trabalho estrutural (mais próximo do rígido ou do flexível);
- c. a rigidez relativa – da ligação em relação à viga, caracterizada por um índice de rigidez ou de flexibilidade; e
- d. a ductilidade – que avalia o grau de rotação que poderá ser obtido.

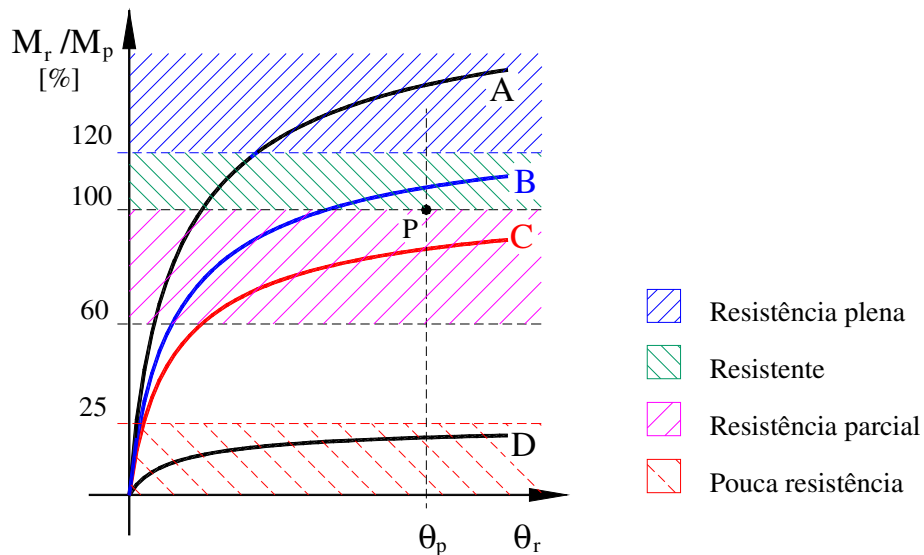
### 2.2.2 RESISTÊNCIA DA LIGAÇÃO

A resistência é uma característica que define se a ligação pode ou não transmitir um momento fletor correspondente ao limite de resistência da viga a que pertence, avaliado usualmente como o momento plástico da viga ( $M_p$ ).

Acompanhando a Fig. 2.7, notam-se várias curvas de ligação (marcadas de A à D) e regiões com hachuras que delimitam as classes de resistência das ligações (veja no apêndice A.2 as adotadas pelas normas), conforme:

- a. de resistência plena – como mostra a curva (A), caso o momento máximo  $M_m$  supere em 20% o de resistência da viga ( $M_m > 1,2 M_p$ ), pode-se formar uma rótula plástica (RP) na viga em região adjacente à ligação e fazer a análise empregando um método inelástico;
- b. resistente – quando o valor de  $M_m$  superar  $M_p$ , mas não em 20%, como a curva (B). Nesse caso, se a curva supera o ponto P correspondente a rotação plástica  $\theta_p$  da RP da viga, a ligação é que será a própria RP. Essa rotação é obtida pela análise estrutural, ou estimada como  $\theta_p \approx 20$  mrad (Leon, 1999);
- c. parcialmente resistente ou de resistência parcial – quando o momento máximo da ligação supera a 60% de  $M_p$  (mas não atinge 100%, ou seja, não pode formar RP na viga), representado pela curva (C);
- d. de pequena resistência ou “rotulada” – quando a resistência é inferior a 25% de  $M_p$ , como visto na curva (D); e finalmente,
- e. não estrutural – se não ocorrer nenhum dos casos anteriores, a ligação se torna inadequada ao uso, ou seja, não deve ser empregada naquela condição.

Quando a ligação possui momento máximo ( $M_m$ ) inferior ao momento plástico da viga ( $M_p$ ) não se formará a RP próxima da ligação na viga. Porém, a ligação pode se comportar como uma RP cujo  $M_p$  será  $M_u$ , exigindo-se então que seja dútil.



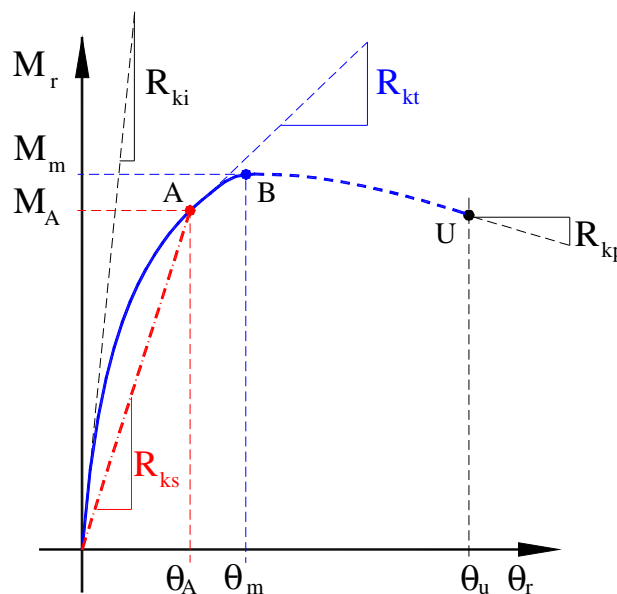
**Figura 2.7 Resistência da ligação.**

Além disso, após a análise plástica, se o mecanismo de colapso obtido inclui a seção da ligação e a curva  $M-\theta$  supera  $M_p$ , mas não atinge à rotação  $\theta_p$  correspondente (o ponto P), a RP vai se formar ou na viga, ou na coluna (e não na ligação).

### 2.2.3 RIGIDEZ DA LIGAÇÃO

A rigidez é fundamental para se definir o comportamento da ligação. A rigidez afeta diretamente os resultados obtidos na análise estrutural, já que sua variação com o ângulo de rotação é tão complexa como o próprio diagrama  $M-\theta$ .

Na figura 2.8, identificam-se quatro medidas dessa grandeza, a saber:



**Figura 2.8 Rigidez da ligação.**

- a. rigidez tangente ( $R_{kt}$ ) – é a rigidez da ligação instantânea, obtida como a tangente a curva  $M-\theta$  no ponto considerado (ponto A, por exemplo). Pode ser avaliada analiticamente, quando se empregam equações matemáticas para definir as curvas  $M-\theta$  (funções de  $M_r$  ou de  $\theta_r$ ), que permitem estabelecer de forma direta  $R_{kt}$  como  $\partial M_r / \partial \theta_r$  (avaliados no ponto A). Essa rigidez deve ser obtida de forma numérica, quando as curvas aproximação  $M-\theta$  não permitem obter uma expressão direta da derivada. Isso é feito por meio de uma secante ao ponto considerado, cuja extensão entre os pontos da curva seja bem pequena, de forma a confundir-se com a tangente;
- b. rigidez inicial ( $R_{ki}$ ) – é a rigidez da ligação no início da carga ( $M_r \approx 0$ ). Como algumas ligações apresentam deslizamento no início da curva  $M-\theta$ , decorrentes das folgas e do atrito, impedindo a melhor aferição de  $R_{ki}$ , é comum aproximá-la experimentalmente, como a média das rigidezes obtidas num dado instante, com o descarregamento “elástico” e recarga da ligação (trajetória que leva ao ponto D, na Fig. 2.6). Em geral, esse processo é considerado elástico e, assim, supõe-se que a rigidez não se altera ao longo do percurso. Na maioria das vezes, a rigidez inicial é o valor máximo apresentado pela ligação. Mas há exceções, como os casos particulares de ligações do tipo:
- i*– chapa de alma, chapa de cabeça e com 2 cantoneiras de alma [Figs. 2.4(b, g & o), respectivamente], quando após um platô, com rigidez quase nula, dada a deformação excessiva da ligação, ocorre o contato entre a aba da viga e a face da coluna, visto na Fig. 2.9(b), propiciando rigidez elevada local, que pode superar a inicial dessas ligações (Faella *et al.*, 2000). Essas curvas  $M-\theta$  [ver Fig. 2.9(a)] são ajustadas considerando que  $M_u \approx M_{cn}$ , bem como  $\theta_{cn} \leq \theta_m \leq 30$  mrad, que corresponde ao contato ( $\theta_{cn}$ ,  $M_{cn}$ , antes de  $R_{kt}$  tornar a crescer) ou sua projeção (Bjorhovde *et al.*, 1990);
  - ii*– chapa estendida [Figs. 2.4(j-k), respectivamente], quando o *efeito de alavanca* pode provocar uma rigidez maior que a inicial, logo após uma pequena rotação (aumentando o contato), ou deslizamento (SCDB, Abdalla & Chen, 1995);
- c. rigidez última ( $R_{ku}$ ) – também denominada plástica ( $R_{kp}$ ), é o valor da rigidez da ligação próxima ao seu colapso. Em algumas ligações, esse valor pode ser negativo ou zero, o que do ponto de vista estrutural não tem sentido. Por isso,

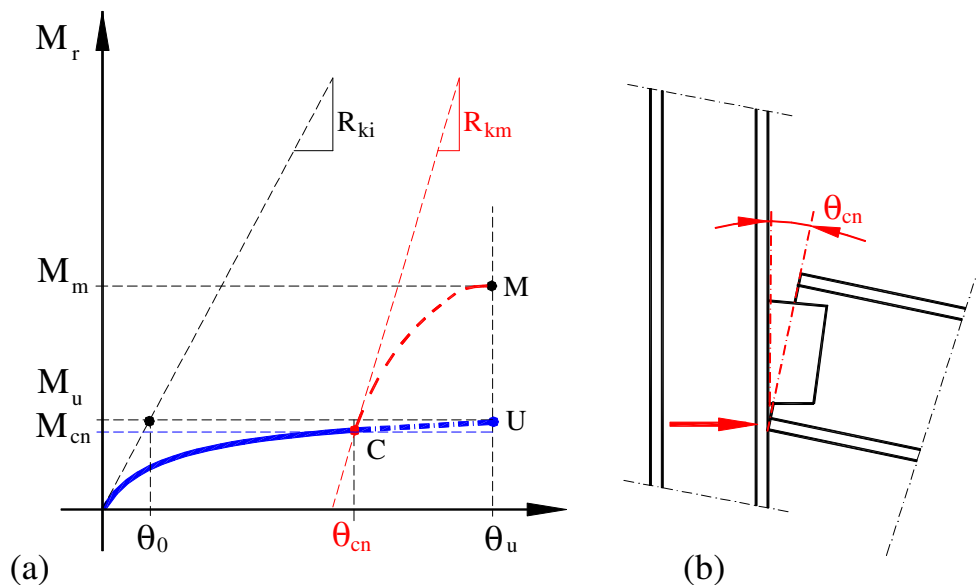
algumas curvas são consideradas apenas no trecho ascendente. Nesse caso, faz-se a interrupção do diagrama  $M-\theta$ , para efeito de análise, naquele ponto de início da trajetória descendente (B da Fig. 2.8). Assim, os trechos pontilhados das Figs. 2.6 e 2.8 são desprezados, correspondendo ao valor  $\theta_{rim}$ , que é então considerado como  $\theta_u$ . Pode-se aproximar  $R_{ku}$  como a rigidez secante obtida com  $\theta = 20$  mrad, embora não se prove que tal resultado seja conservador (Leon, 1999); e

- d. rigidez secante ( $R_{ks}$ ) – é obtida pela semirreta que liga a origem a um ponto da curva  $M-\theta$  (ponto A na Fig. 2.8, por exemplo), correspondendo ao momento para dada situação de projeto, de valor menor que o obtido ao se seguir a trajetória. Essa rigidez é adotada por algumas normas (Eurocode 3, 1992). Para condições de serviço, recomenda-se o valor de rigidez determinado na curva  $M-\theta$  com  $\theta = 2,5$  mrad (Leon, 1999).

Em geral, adota-se  $M_m = M_u$ . Para a ligação flexível da Fig. 2.9(a) despreza-se a parte (C-M) de crescimento pós-contato ( $\theta_{cn}$ ), prolongando-se a curva a anterior (C-U).

Uma vez conhecidas essas rigidezes, pode-se definir também a rotação de referência ( $\theta_0$ ) que é a rotação requerida para se atingir o momento máximo  $M_m$ , caso a rigidez fosse constante e igual à rigidez inicial  $R_{ki}$ , isto é:

$$\theta_0 = \frac{M_m}{R_{ki}} \quad (2.2)$$



**Figura 2.9** Rotação de referência  $\theta_0$  e de contato  $\theta_{cn}$ .  
(a) curva  $M-\theta$  da ligação flexível; (b) rotação de contato.

Muitas vezes essa rotação costuma ser próxima da que refere-se ao limite elástico, ( $\theta_0 \approx \theta_e$ ) e que para ângulos  $\theta_r \leq \theta_0$ , o comportamento da ligação é linear. Por fim, essa grandeza é empregada também em algumas expressões aproximadas de  $M-\theta$  para tornar a rotação adimensional:  $r = \theta_r / \theta_0$ .

#### 2.2.4 ÍNDICE DE RIGIDEZ (OU DE FLEXIBILIDADE) DA LIGAÇÃO

Independentemente da curva momento-rotação da ligação selecionada, a rigidez da viga também é necessária para descrever o comportamento rotacional do conjunto no modelo estrutural.

A viga tende a acompanhar a rotação de extremidade de forma proporcional ao momento que ali atua, no regime elástico, passando ao regime não linear com a plasticidade. Já a ligação tem o seu comportamento não linear dado pelo diagrama  $M-\theta$ , porém é necessário considerar que tais rotações (da ligação e da viga) se somam na avaliação do comportamento estrutural, daí a necessidade de um parâmetro comum.

Como se mostra posteriormente existem várias formas que os pesquisadores encontraram para descrever essa relação entre a viga e a ligação.

Convencionalmente, admite-se que a viga possua a rigidez  $cEI_z/L_v$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material,  $I_z$  a sua inércia à rotação em relação ao eixo perpendicular ao plano de carga da viga e  $L_v$  o seu vão. Dannemann (1963) discute as expressões apresentadas por Monforton & Wu (1963) e que são hoje empregadas por diversos pesquisadores, indicando  $c = 3$  para a rigidez mínima. Para a rigidez máxima, proposta por Hickerson (1937), adota-se  $c = 4$ .

Para descrever essa relação de rigidezes da viga e da ligação, tem-se o “índice de rigidez nodal” ( $g$ ) expresso por:

$$g = \frac{E I_z}{R_k L_v} \quad (2.3)$$

que pode ser nulo ( $g = 0$ ), quando a ligação for rígida perfeita (tratada doravante por “engaste”), ou seja, uma união de rigidez infinita ( $R_k \rightarrow \infty$ ,  $\theta_r = 0$ ) e o valor “infinito” ( $g \rightarrow \infty$ ) quando a ligação for rótula.

Lightfoot & LeMesurier (1974) empregaram a rigidez relativa da ligação definida por  $\lambda_r = 1/(4g)$ , o que produz também valores “infinitos”, quando  $g = 0$ .

Um índice de emprego muito comum é o chamado “índice de fixação”  $\gamma$ , proposto por Monforton & Wu (1963) segundo Xu & Grierson (1993), adotando o valor  $c = 3$ , na expressão:



$$\gamma_c = \frac{1}{1+c.g} \quad (2.4)$$

O índice de fixação ( $\gamma_3$ , obtido com  $c = 3$ ), é o mais citado. Nos trabalhos de: Romstad & Subramanian (1970), Yu & Shanmugam (1986), Ho & Chan (1992), o mesmo nome é empregado, porém adotando  $c = 4$  ( $\gamma_4$ ). Os últimos apresentaram um “fator de rigidez da ligação”  $\mu_r$  relacionado à rigidez da viga, conforme:

$$R_k = \frac{\gamma_4}{1-\gamma_4} \left( \frac{4EI}{L} \right) = \mu_r \left( \frac{4EI}{L} \right) \quad (2.5)$$

Astaneh-Asl (1999) definiu a “flexibilidade nodal” ( $m_A = 1/g$ ) atrelado à relação entre  $M_u$  (ligação) e  $M_p$  (viga). Albermani & Kitipornchai (1992) chama esse mesmo parâmetro de índice de rigidez do nó ( $1/\beta_k$ ) escrevendo o índice de fixação como:

$$\gamma_4 = \frac{1}{1+4/\beta_k} \quad \text{e} \quad \beta_k = \frac{R_k L}{EI} = \left( \frac{1}{g} \right) \quad (2.6a-b)$$

que são formas similares da mesma relação.

Como se verá no capítulo 3, nesta tese apresenta-se uma nova grandeza chamada *índice de semiflexibilidade nodal*  $\eta$ , definida pela relação:

$$\eta = \frac{2g}{1+4g} = \frac{1-\gamma_4}{2} \quad (2.7a-b)$$

Na tabela 2.1 se fornecem os valores de alguns desses parâmetros de ligação já apresentados para os dois casos extremos (engaste e rótula).

Em razão das suas propriedades (inércia e vão, por exemplo), a viga modifica o comportamento da ligação.

**Tabela 2.1 Índices de avaliação da rigidez da ligação e viga.**

Condição (Eq.)	$R_k$	$g^{(1,2,3)}$ (2.3)	$\gamma_3^{(4)}$ (2.4)	$\beta_k$ $=1/g^{(2)}$ (2.6b)	$\eta$ (2.7)	$M_u/M_p^{(2)}$
Engaste	$\infty$	0 (0,001)	1	$\geq 18$	0,0	$\geq 1,0$
Rótula	0	$\infty$ (10)	0	$\leq 0,5$	0,5	$\leq 0,2$

Notas: 1) Ackroyd & Gerstle (1982) propuseram  $g \leq 0,05$  para rígido e  $g \geq 1$  para flexível;

2) Astaneh-Asl (1999) recomendou também  $g \leq 0,056$  para rígido e  $g \geq 2$  para flexível;

3) Kishi *et al.* (1987) indicaram os valores entre parêntesis; 4) Chan & Chui, 2000; entre outros;

5) AISC (2005) adotaram  $g \leq 0,05$  para rígido e  $g \geq 0,5$  para flexível.

**Tabela 2.2 Influência da relação ligação × viga na rigidez nodal.**

(a) Variando a seção da viga e inércia ( $I_z$ ): com $R_k = 677500$ kNcm/rad e $L = 400$ cm					
WF 6 x 20 $I_z = 1727$ cm <sup>4</sup>		W 8 x 21 <sup>(3)</sup> $I_z = 3134$ cm <sup>4</sup>		WF 14 x 22 $I_z = 8282$ cm <sup>4</sup>	
$g$ <sup>(1)</sup>	$\eta$ <sup>(2)</sup>	$g$	$\eta$	$g$	$\eta$
0,1275	0,1688	0,2313	0,2403	0,6112	0,3549
(b) Variando o vão L: com W 8 x 21 ( $I_z = 3134$ cm <sup>4</sup> ) e $R_k = 677500$ kNcm/rad					
L = 200 cm		L = 400 cm <sup>(3)</sup>		L = 600 cm	
$g$	$\eta$	$g$	$\eta$	$g$	$\eta$
0,4626	0,3246	0,2313	0,2403	0,1542	0,1907
(c) Variando a rigidez da ligação $R_k$ [kNcm/rad]: com W 8 x 21 ( $I_z = 3134$ cm <sup>4</sup> ) e $L = 400$ cm					
$R_k = 677500$ <sup>(3)</sup>		$R_k = 3176500$		$R_k = 6140000$	
$g$	$\eta$	$g$	$\eta$	$g$	$\eta$
0,2313	0,2403	0,0493	0,0824	0,0255	0,0463

Notas: 1)  $g = (EI_z)/(R_k L)$ ; 2)  $\eta = (2g)/(1+4g)$ ; 3) do ensaio III-6 (●); e 4)  $E = 20000$  kN/cm<sup>2</sup>.

Assim, a mesma ligação de 4 Ls [ver Fig. 2.4(m)], que foi ensaiada por Azizinamini *et al.* (1985), ligada a uma viga WF 8 x 21 (modelo III-6 do SCDB, Chen *et al.*, 1996), pode ter uma avaliação e comportamento diversos, dependendo do vão e da seção da viga a qual foi ligada como elucidase na Tab. 2.2.

Note-se que, modificando a seção original de WF 8 x 21 para outras de peso próximo, porém inércias ( $I_z$ ) diferentes, ou alterando-se o vão ( $L$ ), tem o efeito de variar a rigidez do conjunto viga-ligação, avaliado pela rigidez nodal ( $g$ ) ou pela semiflexibilidade ( $\eta$ ). Inércias menores ou vão maiores reduzem a rigidez nodal e a semiflexibilidade, sendo válido o inverso. A mesma ligação, entretanto, pode apresentar diferentes valores de rigidez inicial ( $R_{ki}$ ) com pequenas modificações de detalhes, o que também acarreta substancial mudança nos parâmetros das ligações, variando desde o semirrígido até o quase rígido. Na tabela 2.2, por exemplo, modificou-se a espessura da cantoneira da ligação de 8 para 19 e 38 mm, respectivamente.

Esses parâmetros podem ainda ser utilizados para estabelecer relações entre as rotações da viga-ligação e a rotação da coluna. Por exemplo, McCormick, em 1974, (Nethercot, 1985), apresentou uma relação entre o momento  $M_c$  na coluna (extremo da ligação) e o momento  $M_f$  de uma união engastada (com ligação perfeitamente rígida) em uma extremidade e rótula na outra, ou seja:

$$M_c = \frac{M_f}{1 + K_v/K_c + K_v/K_j} \quad (2.8a)$$

na qual:

$$K_v = \frac{3EI_v}{L_v} \quad K_c = \frac{12EI_c}{L_c} \quad K_j = \frac{2\gamma_2 EI_v}{L_v} \quad (2.8b-c-d)$$

com os subscritos (v) para viga e (c) para a coluna, onde ocorre a ligação, sendo o valor de  $\gamma_2$  obtido fazendo  $c = 2$  na Eq. 2.4.

Para efeito de cargas de utilização (não fatoradas), Ackroyd & Gerstle (1982) indicaram que a ligação pode ser avaliada como rígida quando  $0,05 \leq 3\gamma_3$  ( $c = 3$ ) e flexível se  $3\gamma_3 \geq 2$ . Além disso, as rotações avaliadas sob condições de serviço devem respeitar o limite de *galeio* (“sway”,  $\Delta \leq L/400$ ) e, por consequência,  $\theta_s \leq 2,5$  mrad (Stelmack *et al.*, 1986).

Leon (1999) optou por avaliar o índice  $g$  com a rigidez secante ( $R_k = R_{ks}$ ) para condições de serviço, sendo a ligação rotulada quando  $g \geq 18$  e rígida se  $g \leq 2$ . Para condições de estados últimos, entretanto, explicou que limites fixos não podem ser estabelecidos, pois isso depende da combinação de cargas que for aplicada. Uma variação de até 5% (entre os resultados obtidos pelo engaste tradicional e pela ligação) indica que tal ligação se comporta rigidamente (Eurocode 3, 1992).

Nethercot (2000) indica que as ligações serão rígidas se, no mínimo,  $\beta_k \geq 12,4$  e comportar-se-ão próximas às engastadas quando  $\beta_k \geq 70$  (os métodos tradicionais de análise podem ser empregados, neste caso). Já o comportamento como rótula ocorre para:  $0,29 \leq \beta_k \leq 0,31$ .

### 2.2.5 DUTILIDADE

A ductilidade é uma característica especial do aço que provoca a redistribuição de esforços em estruturas redundantes na análise plástica, permitindo que uma reserva de resistência adicional da estrutura possa ser aproveitada.

Essa reserva ocorre porque no regime plástico algumas seções conseguem absorver rotações sem que no local apareçam acréscimos de esforços. Nos pontos da estrutura que apresentam esse comportamento, são idealizadas as chamadas rótulas plásticas (RP).

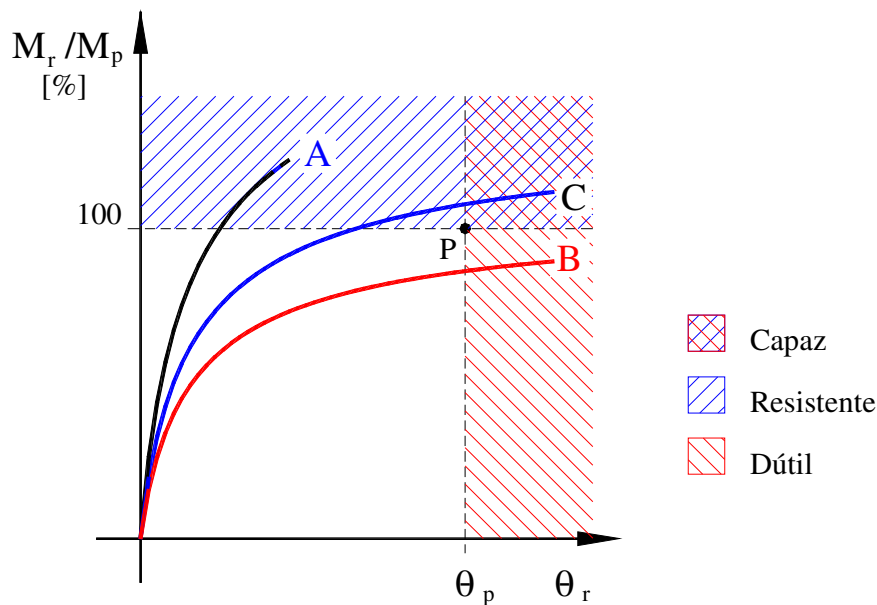
No cálculo plástico, procura-se determinar a formação do mecanismo de colapso e qual o menor fator de carga para que isso possa ocorrer, de forma a se estabelecer a segurança do sistema estrutural. Num nó de encontro entre viga e coluna, tem-se um local provável de formação da RP. Porém, como em geral as colunas recebem cargas verticais elevadas e também sofrem o risco da instabilidade, prefere-se que tais rótulas plásticas se formem nas vigas, em local adjacente às colunas.

Por outro lado, a própria rotação da ligação, ou o seu colapso, pode ocorrer em valores de rotações menores que os previstos para a seção onde se supõe formar a RP na viga. Isso indica que poderá haver um fator de carga menor do que o definido pelo mecanismo plástico, conforme o projeto, sob o qual a estrutura entrará em colapso.

Assim, deseja-se que a ligação na construção rígida, ou próximo dessa consideração, tenha suficiente ductilidade para resistir momentos da ordem de  $M_p$ , de forma que tal rotação na formação da RP na viga ocorra na seção adjacente, sem que a ligação sofra colapso (ou perda de resistência).

Uma vantagem do método das “componentes” é identificar, para cada ligação estudada, quais as partes de comportamento frágil e as que propiciam comportamento dútil (Faella *et al.*, 2000). Essa característica está relacionada às partes da ligação compostas de chapas e perfis, que sofrem deformações plásticas, mas não formarão mecanismos locais de colapso, tampouco apresentarão instabilidade, nas condições limites (falando agora da plasticidade no âmbito das partes componentes da ligação).

Contrariamente, outros elementos como as soldas e os parafusos, os últimos quando em tensões elevadas, tendem a ser frágeis (Bose & Hughes, 1991). Assim, algumas ligações propiciam que os materiais com tendências à fragilidade se rompam antecipadamente a maiores deformações, o que significa baixa ductilidade. Portanto, não é dútil a ligação mostrada pela curva (A) do diagrama  $M-\theta$  da Fig. 2.10.



**Figura 2. 10 Dutilidade da ligação.**

Quando a ligação consegue atingir uma rotação da mesma grandeza da rotação plástica ( $\theta_p$ ), o que vai garantir a formação teórica da rótula plástica (RP) na viga, próximo da ligação, considera-se que esta ligação é dútil, como a curva (B), próxima ao ponto P da Fig. 2.10. Se, além disso, o valor de momento que a ligação suporta nessa rotação supera o momento plástico da viga, como já visto na subseção 2.2.2, a ligação é dita “capaz”, como é o caso da curva (C) na Fig. 2.10.

No projeto plástico, torna-se necessário verificar se as ligações próximas às RP dos mecanismos de colapso são dúteis e resistentes, de forma a garantir essa hipótese de cálculo. Note-se que a curva (A) é resistente, mas não dútil, enquanto a curva (B) é dútil, mas não resistente. Somente a curva (C) atende às duas exigências.

Supõe-se, dessa forma, que essa ligação permite a formação de RP na extremidade da viga, antes que ocorra o seu colapso, seja por resistência, seja por fragilidade.

A ductilidade também participa dos problemas estruturais sem análise plástica, como nas ligações mais flexíveis. Tais uniões exigem grande ductilidade, pois, se a rigidez é baixa, a rotação tende a ser elevada (Christopher & Bjorhovde, 1999), o que leva a deslocamentos de maior ordem. Nessa consideração, supõe-se que as rotações podem atingir 40 mrad, embora ensaios experimentais com vigas simplesmente apoiadas e momentos no meio-vão da ordem de 99,9% de  $M_p$  tenha-se encontrado rotações inferiores a 30 mrad (Astaneh-Asl *et al.*, 1989).

Já nas ligações mais rígidas, de maneira geral, procura-se:

- a. evitar a fragilidade dos parafusos, optando por diâmetros maiores (substituir no projeto o parafuso dimensionado como M20 pelo M24, por exemplo);
- b. reduzir a tração efetiva dos parafusos (limitada a 70% da sua resistência), no caso da pré-tensão; e também,
- c. optar pelas espessuras de chapas que sejam compactas.

Entretanto, ao se ganhar em ductilidade, perde-se em resistência ou rigidez (Bose & Hughes, 1995). Já a compacidade dos componentes (seções ou chapas) influi tanto na flambagem lateral e/ou por torção como nos efeitos locais, comprometendo, também, a resistência ou a ductilidade (Kemp & Dekker, 1991).

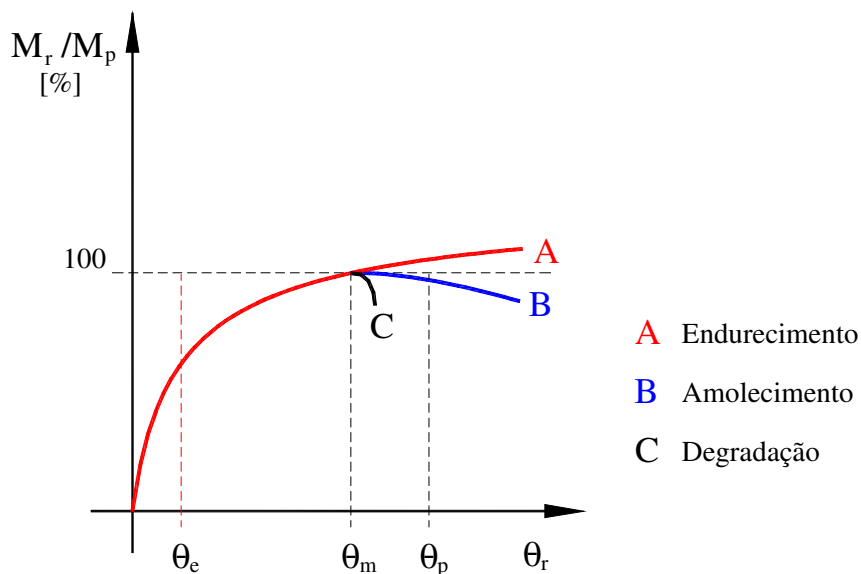
A ductilidade somente pode ser avaliada de forma absoluta, no caso dos pórticos de travamento (especialmente a momentos) em que  $\theta_p \geq 30$  mrad, ou nos casos intermediários  $\theta_p \geq 20$  mrad, em áreas sísmicas (SAC-AISC, 1997). Popov *et al.* (1993)

propuseram 15 mrad como um valor mínimo, baseados no terremoto de Northridge. Já Nader & Astaneh-Asl (1992) indicaram 30 mrad, valor adotado pelo FEMA (1995, 1997). Nos demais casos, não há como estabelecer esse limite de valores.

Mas, como mencionado, esse comportamento também é relativo. Assim, poder-se-ia dizer que a ligação é dútil se supera  $\theta_p = 6 \theta_e$ , sendo  $\theta_e$  a rotação de início de escoamento da ligação (limite elástico). Entretanto, é bastante complicado estabelecer esse valor  $\theta_e$  para cada ligação e sua condição de trabalho, dadas as particulares características dúteis pós-limite que apresentam (Leon, 1999), como se delineaia na Fig. 2.11:

- o *endurecimento sob tensão* (“strain hardening”);
- o *amolecimento* (“strain softening”); e,
- a *degradação* (“degrading”), que é associada à flambagem local, trinca e deslizamento.

A classificação de ligação de Bjorhovde *et al.* (1990), a ser apresentada na próxima seção, introduz uma linha limite que auxilia na previsão da ductilidade mínima requerida para a ligação, em nível de estimativa. A avaliação da ductilidade, porém, na forma de capacidade de rotação e da sua influência, em relação às demais propriedades da ligação, ainda é um campo de pesquisa a ser desenvolvido (Gioncu & Petcu, 1997).



**Figura 2.11** Comportamento pós-limite.

### 2.3 CLASSIFICAÇÃO DAS LIGAÇÕES

É importante indicar que o Eurocode 3 (1992) associa a forma de análise estrutural ao tipo de modelo de ligação. Verificações de serviço, sob cargas nominais, podem ser realizadas pela análise elástica de primeira ou segunda ordem, com modelos de ligações lineares. Todavia, na verificação da condição de carga limite, supõe-se pelo menos o emprego de um modelo bilinear para as ligações e a realização de um cálculo plástico ou inelástico. Para as ligações serem consideradas rígidas ou rotuladas, podem-se adotar as orientações da Tab. 2.3 (Ackroyd & Gerstle, 1982).

**Tabela 2.3 Estimativas para considerar a ligação rígida ou flexível numa análise.**

Estado limite	Método de 2ª ordem	Ligação	$R_k$ [kNm/rad]	$g$ (Eq. 2.3)	$\eta$ (Eq. 2.7)
Serviço	elástico	rígida	5,65E4 a 1,13E5 <sup>(1)</sup>	0,05 a 0,1	0,083 a 0,143
Último	plástico ou inelástico	rígida	1,13E5 a 5,65E6 <sup>(2)</sup>	0,02 a 0,1	0,037 a 0,143
		rótula	$\leq 4,52E5$ <sup>(3)</sup>	$> 2$	$> 4/9$

Notas: Para a ligação rígida, supõe-se os tipos: 1) aparafusada, ou, 2) soldada; 3) flexível só ligação aparafusada; 4) valores  $EI_z/L_v$  típicos em prédios variam entre  $5,65 \times 10^3$  a  $1,13 \times 10^4$  kNm/rad.

Outra questão muito importante, tanto na resistência quanto na rigidez, é a participação do painel (a região anexa à ligação) da coluna nas deformações da ligação analisada. A ligação é classificada como *enrijecida* quando o painel da coluna a que se liga a viga possui adequado conjunto de enrijecedores, como apresentado nas Figs. 2.4 (a, c-d-e-f, j-k & m-n). Esses enrijecedores são, normalmente, chapas com a mesma dimensão das abas das vigas e espessuras maiores ou iguais às das abas das vigas.

Ligações com enrijecedores são tipicamente rígidas, nas quais a ductilidade tende a ser menor. Nasce daí o moderno conceito *VSR – Viga de Seção Reduzida* (“Reduced Beam Section – RBS”; Kim & Engelhardt, 2007), na qual se reduz de propósito as dimensões da seção, em um ponto adjacente à ligação, onde se prevê a formação de uma RP, aliviando a ligação e as condições de cálculo do restante da estrutura.

O objetivo ao enrijecer-se a coluna é reduzir as deformações transversais das abas da coluna, de forma que sejam desprezíveis. Essas deformações são decorrentes da transformação do momento em um binário e da ação local dessas forças.

Além disso, há que considerar, também, as deformações do cortante, relacionadas à forma geométrica retangular desse painel, que tende a se modificar para um trapézio

ou paralelogramo. Procura-se, também, impedir essa deformação por meio de enrijecedores inclinados a 45 graus, por exemplo.

Assim, supõe-se que a curva  $M-\theta$  da ligação dita enrijecida se refira a uma deformação específica da ligação, sem incluir efeitos na coluna. O mesmo não se pode dizer quando não há enrijecedores de coluna, ou seja, a curva  $M-\theta$  pode incluir implicitamente: efeitos de painel de coluna, flexão das abas, etc. Por exemplo, as curvas com o método das “componentes”, nas quais esses efeitos podem ser conjugados aos mais intrínsecos à ligação. Esse método pode levar em conta inclusive as excentricidades, os efeitos do cortante e do axial, etc., nas curvas produzidas.

Quando não são inseridos os enrijecedores de coluna [ver Figs. 2.4 (b, g, i & o)], a ligação é dita não enrijecida, embora não seja prescrito que, nos casos quando os enrijecedores forem insuficientes (ou seja, não atendam às condições de dimensionamento aplicáveis) tais ligações enquadrem-se no grupo das enrijecidas.

De igual forma, é complicado dizer que a ligação pode ser enrijecida pelo fato da coluna ser suficientemente compacta para os esforços ali transmitidos e não possuir enrijecedores, ou os sejam estes parciais. Há, ainda, casos em que os efeitos locais são combatidos sem enrijecer a ligação [ver Figs. 2.4(h & p)], bem como nas condições da Fig. 2.4(l) em que o enrijecimento pode ocorrer se os  $L_s$  tiverem dada espessura e forem soldados à alma da coluna, supondo que a coluna seja de seção I.

Essa discussão mostra a complexidade da elaboração de uma classificação de ligações. A abrangência dos termos (“rígida, semirrígida e flexível”), o significado que traduzem (por exemplo, rígida: resistir um momento superior ao plástico da viga) e as exigências decorrentes para que o termo e o significado correspondam, de fato, à ligação selecionada (para se considerar rígida a coluna que recebe a ligação tem de possuir enrijecedores que absorvam esforços não inferiores a ..., etc.), permite que se incorra com facilidade em algum tipo de consideração que extrapole limites ou leve a mau julgamentos, exigindo, assim, cuidados especiais do projetista na sua utilização.

Como a própria concepção da classificação segue critérios não tão simples de serem expressos, uma vez que o comportamento das ligações dado pela curva  $M-\theta$  também depende da viga e da coluna na qual a ligação é realizada, dentre outros aspectos, procurou-se inicialmente classificar, identificando comportamentos similares dessas curvas  $M-\theta$  incluindo a viga.



A ideia dessas classificações é fazer uma estimativa preliminar do comportamento da ligação pelo projetista, de forma a permitir sua seleção para uma dada condição de projeto e verificação posterior mediante a análise estrutural.

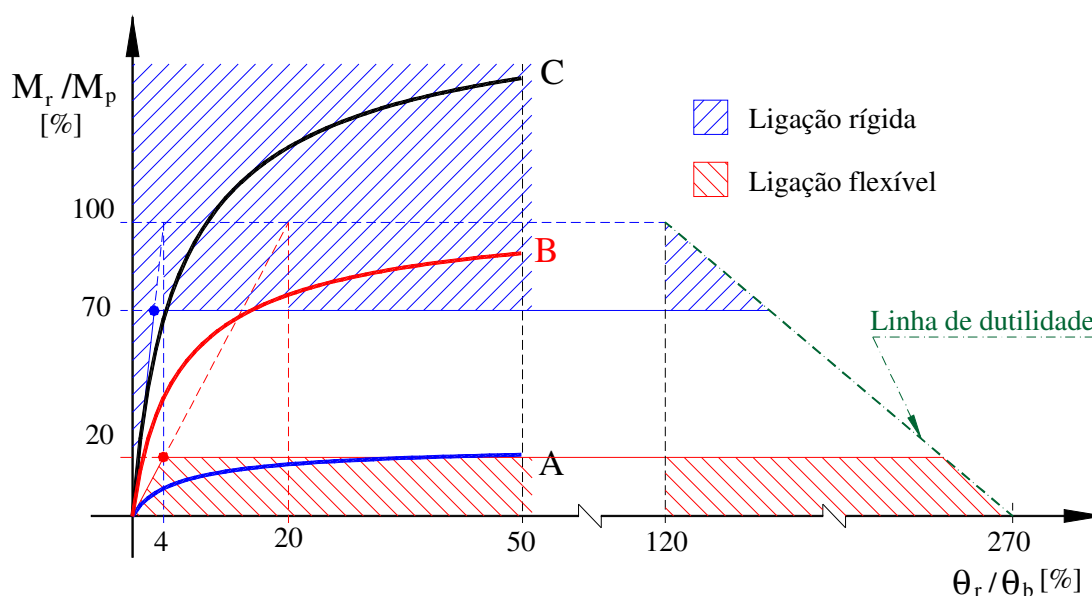
Descrevem-se nas próximas subseções algumas classificações:

- a. Bjorhovde *et al.* (1990);
- b. Eurocode 3 (1992);
- c. Hasan *et al.* (1998); e
- d. outras possibilidades de classificação.

### 2.3.1 CLASSIFICAÇÃO DE BJORHOVDE *ET AL.* (1990)

Acompanhando o representado na figura 2.12, verifica-se que a classificação é feita pelo enquadramento da curva  $M-\theta$  em três regiões: ligação flexível (com pequeno momento último,  $< 20\% M_p$ , hachura à esquerda), ligação rígida (com momento último superiores a  $M_p$ , hachura à direita) e a região semirrígida (intermediária entre as anteriores, sem hachura), modificando-se apenas os limites dessas regiões.

Esse diagrama é similar ao  $M-\theta$  tradicional, porém é adimensional, sendo o momento da ligação ( $M_r$ ) expresso em relação ao momento plástico ( $M_p$ ) da viga a que está ligada, enquanto a rotação da ligação ( $\theta_r$ ) é relacionada a uma rotação estimada ( $\theta_b$ ), que é dada por:



**Figura 2. 12** Classificação da ligação segundo Bjorhovde *et al.* (1990).

$$\theta_b = \frac{M_p}{EI_z / (5d)} \quad (2.9)$$

O termo no denominador aparece da aproximação da altura estimada da seção da viga I pela relação  $L_v \approx 20d$  e da rigidez à flexão da viga (com  $c = 4$ ), ou seja:

$$4 EI_z / L_v \approx 4 EI_z / (20d) = EI_z / (5d) \quad (2.10)$$

São estabelecidos os seguintes limites:

- ligação flexível (ou rotulada) – corresponde às condições:  $M_m \leq 20\% M_p$  e reduz-se linearmente com a inclinação 20% de  $\theta_r / \theta_b$  para  $M_p$ . Por exemplo, na Fig. 2.12, a curva M- $\theta$  (A) corresponde a uma ligação flexível;
- ligação rígida – a curva deve ter momento máximo superior a 70% de  $M_p$  e deve superar, também, a linha com inclinação 4% de  $\theta_r / \theta_b$  para  $M_p$ , nos momentos inferiores a 70%. Na figura 2.12, a curva (C) será rígida; e
- ligação semirrígida – na região intermediária aos limites já estabelecidos, por exemplo, a curva (B) na Fig. 2.12.

Como se verifica, pela presença da altura da seção ( $d$ ) na rotação estimada, essa classificação é mais útil para a etapa preliminar (pré-dimensionamento).

Essa classificação estabelece uma chamada linha de ductilidade (representada à direita na Fig. 2.12), que une os pontos  $(\theta_r/\theta_b, M_r/M_p)$ : (270%,0) a (120%, 100%). As curvas M- $\theta$  cujo valor de  $(\theta_u/\theta_b, M_u/M_p)$  ultrapassam essa linha, correspondem às ligações que se comportam de forma dútil.

As vantagens em relação à classificação do Eurocode 3 (1992) são: independe que a estrutura seja travada ou não, avalia a ductilidade da ligação e emprega valores adimensionais para avaliar a rigidez e a resistência. Já a norma europeia requer apenas que se cumpram requerimentos de rigidez ( $R_k$ ) e resistência ( $M_u$ ), sendo a ductilidade avaliada pela etapa de análise estrutural. Na realidade, a curva do Eurocode 3 nasce desse primeiro modelo, sendo uma adaptação para verificação do dimensionamento.

### 2.3.2 CLASSIFICAÇÃO DO EUROCODE 3 (1992)

Esta classificação é um ajuste da anterior, feita pelos comitês europeus, seguindo a Fig. 2.13, na qual se indicam duas representações. A primeira se refere aos pórticos destravados (não contraventados ou deslocáveis) e a segunda está relacionada aos pórticos travados (contraventados ou indeslocáveis).

Nessa classificação dos pórticos, os termos entre parênteses são denominações diferentes adotadas na norma brasileira (NBR 8800, 2007) e na americana (AISC, 2005), respectivamente. Pode-se ver uma explicação melhor desses termos no apêndice A.3, incluindo uma classificação da estrutura pela deslocabilidade lateral. Esses conceitos estão presentes tanto na utilização dos comprimentos efetivos de flambagem  $k_{fl}$  [manuseio dos ábacos de Julian & Lawrence (1959)] quanto na definição de fatores de amplificação  $B_1$  e  $B_2$ . E estão, também, relacionados aos efeitos amplificadores de momentos secundários já mostrados [Figs. 1.2(a-b) e 1.4(a-b)]:

- efeito  $P-\delta$  (P-deltinha) e a curvatura inicial (CI) das barras, mais grave nas estruturas travadas; e
- efeito  $P-\Delta$  (P-delta), relacionado ao deslocamento lateral e ao fora de prumo (FP), que é preponderante para as estruturas mais deslocáveis ( $B_2 > 1,5$ ).

Agora o parâmetro adimensional adotado é a chamada rotação de referencia ( $\theta_c$ ), definida por (como  $\theta_0$  da Eq. 2.2, com  $M_m = M_p$  e  $R_{ki} = EI_z/L_v$ ):

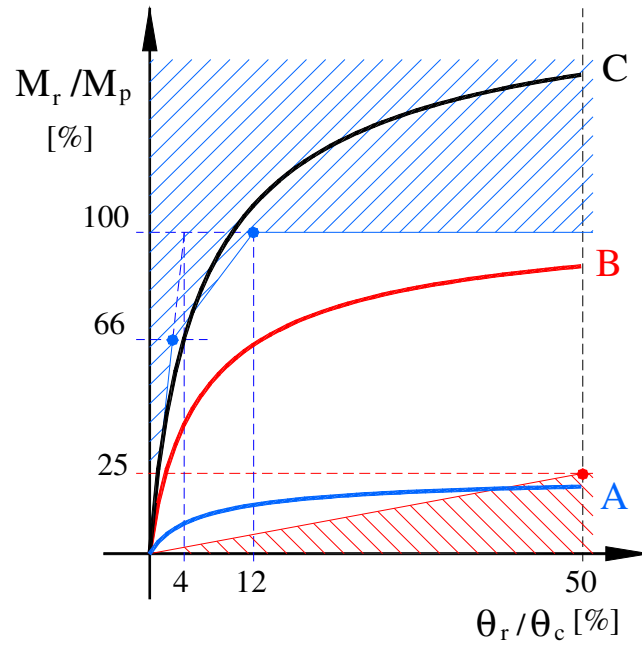
$$\theta_c = \frac{M_p}{EI_z/L_v} \quad (2.11)$$

Os limites dessa classificação são:

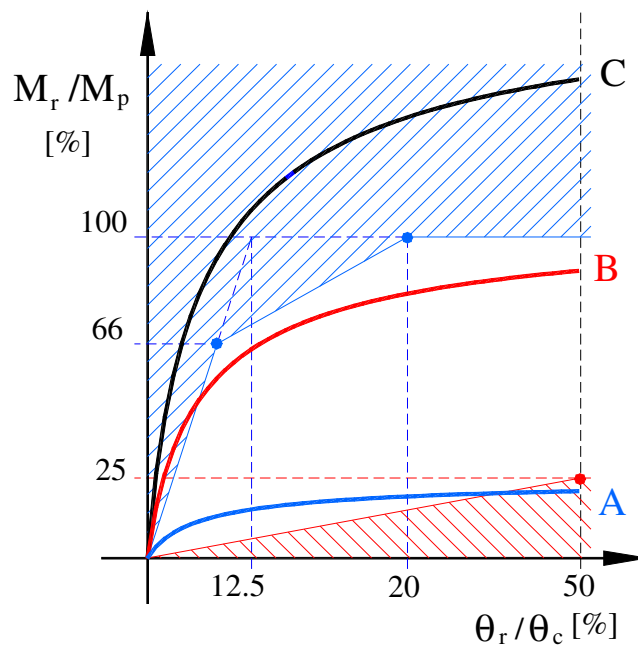
- ligação flexível – compreende momentos inferiores a 25%  $M_p$ , para rotações relativas  $\theta_r / \theta_c$  superiores a 50%, e decresce deste ponto linearmente até 0. As curvas  $M-\theta$  da Fig. 2.13 marcadas com (A) são consideradas flexíveis, mesmo tendo um trecho inicial semirrígido;
- ligação rígida – os limites são definidos por três segmentos de reta nos gráficos da Fig. 2.13, conforme a estrutura seja deslocável, aplicando-se a Tab. 2.4, sendo que a ligação rígida deve apresentar momento último  $M_u$  superior ao  $M_p$  da viga, quando a relação  $\theta_r / \theta_c$  superar o limite indicado na linha inferior da Tab. 2.4. No caso da Fig. 2.13, as curvas marcadas com (C) serão rígidas; e
- ligação semirrígida – da mesma forma que na classificação anterior, a região intermediária, que contém as curvas  $M-\theta$  marcadas com (B) na Fig. 2.13.

**Tabela 2.4 Limites da ligação rígida no Eurocode 3 (1992)**

$M_r <$	(a) Pórtico destravado	(b) Pórtico travado
$2/3 M_p$	$\theta_r / \theta_c < 4\% p/ M_p$	$\theta_r / \theta_c < 12,5\% p/ M_p$
$M_p$	$\theta_r / \theta_c < 12\% p/ M_p$	$\theta_r / \theta_c < 20\% p/ M_p$



(a)



(b)

Ligação rígida    Ligação flexível

**Figura 2.13 Classificação da ligação segundo Eurocode 3 (1992):**  
 (a) pórtico destravado; (b) pórtico travado.

**Tabela 2.5 Valores mínimos dos parâmetros de rigidez da ligação.**

Ligação	(a) Pórtico destravado			(b) Pórtico travado		
	$\beta_k$	$g$	$\eta$	$\beta_k$	$g$	$\eta$
Rígida	25,0	0,04	2/29	8,0	0,125	1/6
Rótula	0,5	2,00	4/17	0,5	2,000	4/17

**Tabela 2.6 Comprimento característico L/d e resistência requerida.**

Modelo	Flexibilidade L/d		Resistência M/M <sub>p</sub>	
	Rótula	Rígido	Rótula	Rígido
Bjorhovde <i>et al.</i> (1990)	10 a 15	1 a 2 <sup>(1)</sup>	0,15 a 0,2	≥ 0,7
Eurocode 3 (1992)	40	<sup>(2)</sup>	0,25	≥ 1,0

Notas: 1) com efeito do painel L/d = 2, sem efeito L/d = 1; 2) travado L/d = 2,5 e destravado L/d = 0,8.

Quanto à rigidez da ligação, pode-se escrever uma relação com a rigidez da viga similar ao índice de rigidez, de acordo com:

$$R_k = \beta_k \frac{EI_z}{L_v} = \left( \frac{1}{g} \right) \frac{EI_z}{L_v} \quad (2.12)$$

sendo  $\beta_k$  definido aproximadamente pela Tab. 2.5. Essa classificação é voltada para uma verificação de dimensionamento. Comparando-se com o chamado comprimento característico L/d, pode-se construir a Tab. 2.6.

### 2.3.3 CLASSIFICAÇÃO DE HASAN *ET AL.* (1998)

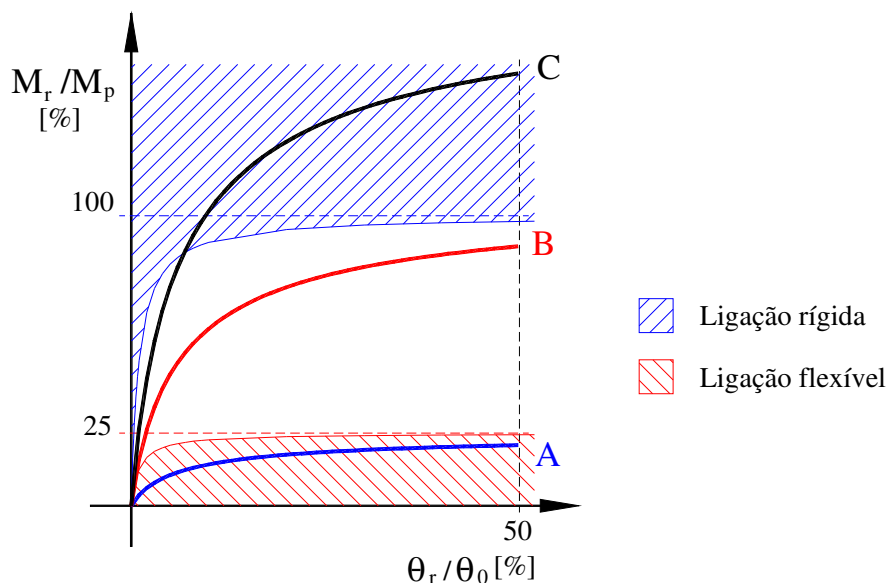
Essa nova classificação foi idealizada no intuito de superar algumas deficiências das anteriores, quais sejam:

- classificar a rigidez da ligação com base na rigidez da viga ligada e, agora, essa rigidez fica independente;
- as curvas de ligação M- $\theta$  são geralmente não lineares, enquanto os limites anteriores eram lineares, possibilitando algumas dúvidas; e
- a forma abrupta de modificação da curva M- $\theta$  em algumas ligações, gerando, também, ambiguidade de interpretação ao projetista.

Essa classificação é representada na Fig. 2.14 e emprega a Eq. (2.31) do modelo potencial de 3 parâmetros (Kishi & Chen, 1987), que será apresentada na seção 2.4.

Para as curvas limites, considera-se a rigidez da ligação  $R_{ki} = 357,4$  kNcm/mrad para o limite ligação flexível e  $R_{ki} = 11302,5$  kNcm/mrad para a rígida; emprega-se, também, o expoente de forma da curva  $C_1 = 1$  em todos os casos. As semirretas correspondentes a 25% e 100% de  $M_p$  são assíntotas das curvas limites dessas regiões.

De forma similar aos casos anteriores, observa-se, na Fig. 2.14, que a curva M- $\theta$  marcada com (A) é classificada em flexível ou rotulada, a marcada com (B) é semirrígida e a marcada com (C) é dita rígida.



**Figura 2. 14 Classificação da ligação segundo Hasan *et al.* (1998).**

Repare-se, também, que é mais fácil empregar essa classificação dada a forma dos limites adotados, já que as curvas  $M-\theta$  (A-B-C) são as mesmas representadas nos diagramas das classificações anteriores (Figs. 2.12 e 2.13, respectivamente).

### 2.3.4 OUTRAS POSSIBILIDADES DE CLASSIFICAÇÕES

Alguns pesquisadores, visando melhorar a forma tradicional de dimensionamento, empregaram ajustes no coeficiente de comprimento efetivo de flambagem  $k_{fl}$  para levar em conta o efeito da ligação (Kishi *et al.*, 1998; Hellesland & Bjorhovde, 1996a-b). Faella *et al.* (1994) fizeram uma análise simplificada partindo de um subconjunto (em forma de H deitado), para pórticos destravados, incluindo quatro vigas ligadas à coluna analisada, duas em cada extremidade e de cada lado, para determinar  $k_{fl}$  (similar aos estudos de Hajjar *et al.*, 1997).

Goto & Miyashita (1998) avaliaram os limites da consideração entre as ligações tratadas por rígida e semirrígida, por meio da análise de subconjuntos da estrutura, o que também gerou uma forma de classificação mais objetiva sobre quais ligações seriam efetivamente rígidas ou não.

Nethercot *et al.* (1998) alertaram que não se deve classificar uma ligação como rígida tão-somente por sua curva  $M-\theta$ , e que é importante avaliar o seu desempenho quanto à resistência e à ductilidade também, o que justifica as seções anteriores.

Outros pesquisadores propuseram classificações que não consideraram o comprimento da viga ( $L_v$ ), mas que não permitem uma rápida avaliação de uso, no caso de um caso específico [(Bijlaard & Steenhuis, 1991; Tschemmernegg & Huter, 1993) segundo Faella *et al.*, 2000; Bjorhovde *et al.*, 1990; e Nethercot *et al.*, 1998].

Entretanto Tschemmernegg & Queiroz (1996) alertaram que não é possível propriamente se representar as deformações da ligação, incluindo o painel (com cisalhamento e flexão, em um ou ambos os lados), apenas com uma mola rotacional na extremidade da viga. Ressaltando, ainda, a presença da excentricidade e o centro instantâneo de rotação da ligação que não coincidem com o nó formado pela viga e coluna, no qual se supõe a mola rotacional.

Isso torna mais complexo a classificação e o estudo da ligação. Acompanhando outros pesquisadores (Faella *et al.*, 2000), porém, admite-se que num dado patamar de simplificações as curvas  $M-\theta$  podem incluir informações sobre os comportamentos determinados a partir de modelos mais refinados (pelo método das “componentes” ou numéricos, por exemplo). Propõe-se que com essas curvas respostas satisfatórias serão obtidas dentro dos limites usuais da engenharia.

## 2.4 MODELOS DE CURVAS MOMENTO-ROTAÇÃO

Sabendo das condições antes mencionadas, os pesquisadores têm procurado além de realizar os experimentos, apresentar modelos simples que permitam descrever o comportamento das ligações avaliado basicamente pela curva  $M-\theta$ , cujo conhecimento é fundamental para qualquer análise estrutural.

Existem diversos modelos para as curvas  $M-\theta$  que estão relacionados aos três tipos de processo empregado na sua obtenção, ou seja:

- a. matemáticos – adotam algum tipo de expressão matemática básica. Procura-se determinar os parâmetros dessa expressão com base nas características geométricas e físicas, para reproduzir aproximadamente os resultados fornecidos pelos ensaios experimentais. Esses parâmetros são calibrados por meio de regressões, de correlações, de avaliações estatísticas, para que as equações finais sejam obtidas;
- b. analíticos – procuram determinar o comportamento esperado com base na análise estrutural da própria ligação, dos seus elementos componentes e dos parâmetros de projeto relacionados (propriedades, características e dimensões), para se chegar à curva desejada; e
- c. conjugados – são os modelos que conjugam os dois processos anteriores: uma equação de curva ajustada aos dados obtidos por expressões analíticas ou por modelos de simulação computacional.

Os processos matemáticos são mais simples, antigos, conhecidos e, por isso, os mais utilizados. Procuram relacionar diretamente, entre si, as grandezas envolvidas: momento, rotação e rigidez.

Os processos analíticos surgem com a tentativa de explicar comportamentos como o *efeito de alavanca*, determinar os mecanismos de plasticidade das chapas e cantoneiras, etc., seja determinando as grandezas anteriores (momento, rotação e rigidez), seja de forma empírica por meio dos resultados de ensaios experimentais. Em etapa posterior, esses métodos evoluíram para uma série de trabalhos em que os pesquisadores optaram por processos conjugados.

Pode-se, ainda, classificar os modelos das curvas momento-rotação com relação à fonte de dados empregada:



- a. empíricos – a definição dos parâmetros das curvas ou expressões aproximadas é realizada por meio de regressões que minimizam diferenças numéricas, empregando um conjunto de experimentos selecionado;
- b. analíticos – cujos dados utilizados para gerar os parâmetros provêm de uma análise de esforços, tensões, deformações, equilíbrio e considerações de compatibilidade, usuais na resistência dos materiais e na plasticidade, baseando-se nos comportamentos indicados por ensaios experimentais;
- c. mecânicos – a parte analítica anterior é subdividida num conjunto de “componentes” e atribui-se a cada componente uma mola. A combinação dessas molas, que vão trabalhar em associações diversas, em série ou paralelo, conjuntamente, vai permitir avaliar o comportamento final da ligação;
- d. numéricos – indicam que os dados são obtidos pela modelagem de cada ligação empregando-se a técnica de elementos finitos em 2D ou 3D, incluindo todas as partes da ligação e suas propriedades; e
- e. experimentais – a base de dados, os resultados de ensaio experimental.

Os modelos empíricos apareceram associados aos processos matemáticos de maneira geral e possuem, assim, laços históricos comuns. No final deste capítulo, apresenta-se uma proposta de curva  $M-\theta$  também de modelo matemático-empírico.

Os processos analíticos são os que empregam modelos mais detalhados de estudo, como o método das “componentes” ou métodos numéricos. Essas curvas de ligação podem ser obtidas diretamente, sem exigir o emprego de expressões matemáticas. Algumas vezes os processos analíticos são associados a valores tabelados ou a aproximações empíricas posteriores.

Nomeando alguns modelos puramente analíticos, tem-se: Youssef-Agha *et al.* (1989) para ligação com 2Ls de aba da Fig. 2.4(n) e Shi *et al.* (1996) para chapa de topo estendida da Fig. 2.4(j). Como processos conjugados aos modelos analíticos podem-se citar: Chen *et al.* (1996) e Yee & Melchers (1986), dentre outros.

Os modelos mecânicos são adotados pelo Eurocode 3 (1997), havendo vários trabalhos publicados com o método das “componentes” (Faella *et al.*, 2000).

Alguns processos conjugados englobam trabalhos que empregaram a simulação numérica de ligações (Krisnamurthy *et al.*, 1979; Tarpay & Cardinal, 1981; Ghassemieh *et al.*, 1983; Bahaari & Sherbourne, 1994; etc.) e também o método das “componentes”

do Eurocode 3 (1992) e seu Anexo J (Briquet *et al.*, 1994).

Deve-se indicar que diversos fatores (as variações de detalhes, da qualidade do trabalho de fabricação e dos materiais, a plasticidade, o escorregamento parafuso-furo, efeitos locais de furos, entalhe, solda e borda, etc.) contribuíram para que os modelos analíticos não tenham conseguido maior sucesso (Morris *et al.*, 1995).

Tendo em vista os limites desta tese, serão abordados apenas alguns métodos matemáticos com processos empíricos, que, além de serem mais conhecidos, possuem maior emprego na prática, pelo menos por enquanto. Esses modelos são apresentados de maneira sucinta nas próximas subseções, sendo dada ênfase (detalhes) aos que são empregados no corpo deste trabalho.

O método das “componentes” é pouco empregado, assim como os de ensaios experimentais ou modelos numéricos (MEF) nos exemplos desta tese. Porém, tais curvas podem ser introduzidas numa análise estrutural, similar às aqui desenvolvidas, por meio de uma tabela de valores, ou seja, na forma aproximada multilinear, que será apresentada na subseção 2.4.1.

Nos processos ditos matemáticos, a forma da curva  $M-\theta$  é definida com base na expressão adotada e pode ser agrupada nos seguintes modelos:

- a. com trechos lineares (lineares mesmo, bi, tri, multilineares);
- b. polinomiais, incluindo os de gabarito de curva B-cúbicos;
- c. potenciais;
- d. exponenciais; e
- e. outros tipos (novas tendências).

#### 2.4.1 MODELOS COM TRECHOS LINEARES

Os mais antigos e conhecidos modelos de ligação são os lineares, como representado na Fig. 2.15, que aparecem com Batho (1931), Baker (1934) e Rathbun (1936) com a concepção de rigidez inicial constante  $R_{ki}$  (elástica). Posteriormente, foram empregados também por Monforton & Wu (1963), Arbabi (1982), Kawashima & Fujimoto (1984) e apareceram, também, em estudos de vibração de pórticos semirrígidos (Yau & Chan, 1994).

A representação linear é expressa por:

$$M_r = R_k \theta_r \quad (2.13)$$

em que  $R_k = R_{ki}$  (inicial) ou  $R_k = R_{ks}$  (secante), como ilustrado na Fig. 2.15.

Considerados muito simples (requer pouca informação), os modelos lineares são adotados, em geral, para estudo do estado limite de serviço, sob considerações elásticas e empregando cargas não fatoradas. Nessas condições, supõe-se atingir rotações pequenas, de forma que os resultados produzidos serão aceitáveis (Gerstle, 1988). Pode-se empregar a rigidez secante, embora não se possa aquilatar o nível de desvios resultante (diferenças decorrentes de tal simplificação). É Recomendável verificar se a rotação máxima então obtida na análise não supera a prevista para a curva no ponto (Lindsey *et al.*, 1985), refazendo-se o cálculo em caso contrário.

Modelos bilineares apareceram em Lothers (1951), Lewitt *et al.* (1966), Lionberger (1967, & Weaver, 1969), continua com Romstad & Subramanian (1970), Johnson & Law (1981), Maxwell *et al.* (1981), Tarpi & Cardinal (1981), Melchers & Kaur (1982), Sivakumaram (1988) e Youssef-Agha *et al.* (1989). Esses pesquisadores aproximaram, inicialmente, a curva com dois segmentos retos de inclinações distintas.

Posteriormente, o modelo bilinear foi adotado pelo Eurocode 3 (1992), que emprega a rigidez inicial até o momento atingir o valor igual a  $M_u$ , seguindo com esse valor até a rotação de colapso (Chen & Lui, 1983; Cook & Gerstle, 1987). Em algumas situações, como no caso de se avaliar o estado limite de serviço, a norma europeia recomenda adotar a rigidez secante no primeiro trecho, como se elucida na Fig. 2.15.

Dentre os modelos com trechos lineares podem-se citar os trilineares (Moncarz & Gerstle, 1981; Vinnakota, 1982; Sugimoto & Chen, 1982; Razzaq, 1983; Stelmack *et al.*, 1986; e Gerstle, 1988) e os multilineares, adotados por Poggi & Zandonini (1987).

De fato, todo ensaio experimental, em certo grau de medição, fornece um modelo de comportamento próximo ao multilinear, o que justifica ter essa possibilidade em qualquer programa computacional sobre o tema, como se ilustra na Fig. 2.16. Nessa figura, delinea-se um modelo pentilinear, que poderia ser adotado com boa precisão.

Entretanto, hoje, há recursos para se obter a curva experimental com tantos pontos, que se pode considerar como se fosse um traçado contínuo, em que a diferença entre o arco e o segmento linear é indistinta. Pode-se escrever, então, por intervalos:

$$M_r = R_{kab}(\theta_r - \theta_a) + M_a, \text{ com} \\ R_{kab} = \frac{(M_b - M_a)}{(\theta_b - \theta_a)} \quad (2.14a-b)$$

na qual a rigidez  $R_{kab}$ , constante no intervalo  $\theta_a \leq \theta_r \leq \theta_b$ , é a secante à curva que liga os dois pontos extremos do intervalo e obriga-se que (em valor absoluto):  $M_a \leq M_r \leq M_b$ , de forma geral, para garantir que ( $R_{kab}$ ) seja sempre positiva.

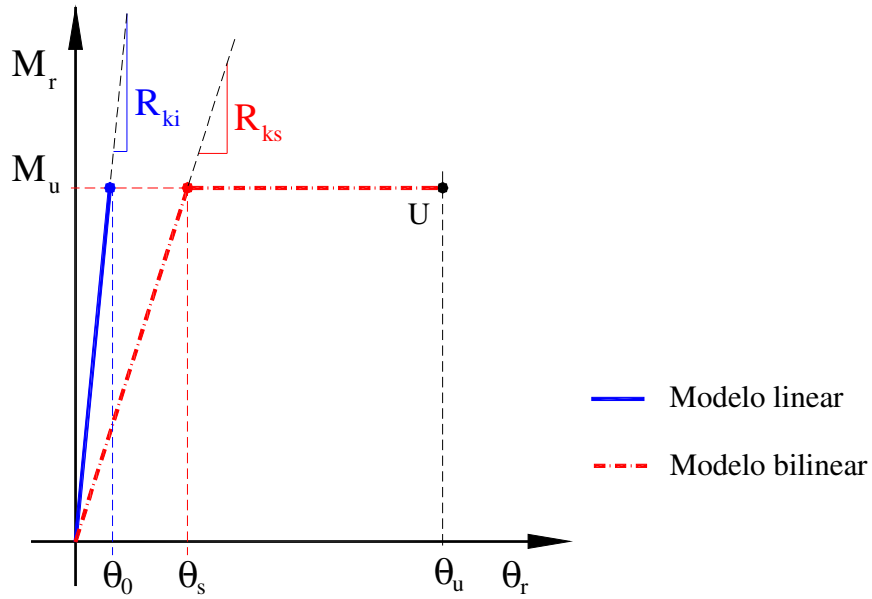


Figura 2.15 Modelos mais simples de curva  $M-\theta$ .

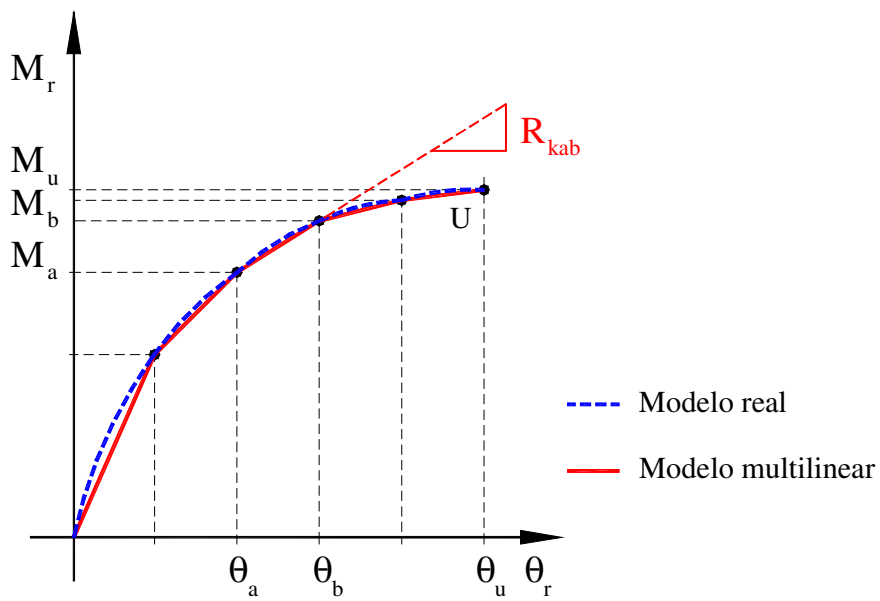


Figura 2.16 Curva  $M-\theta$  com modelo multilinear.

### 2.4.2 MODELOS POLINOMIAIS

A utilização de modelos com curvas não lineares está vinculada a estudos de estabilidade, em que se requer o histórico do carregamento, cujo processo de análise é incremental e com passos pequenos de forma a minimizar os desvios.

O primeiro trabalho a empregar uma expressão não linear para a curva  $M-\theta$ , com padronização de parâmetros para a reprodução de resultados confiáveis, foi o de Sommer (1969). Foi adotado um polinômio calibrado com valores experimentais para a ligação com chapa de cabeça [ver Fig. 2.4(g)]. Esse modelo se tornou conhecido e popular a partir dos sete tipos de ligação estudados no trabalho de Frye & Morris (1975), havendo comentários de Picard *et al.* (1976), recebendo a colaboração, também, de Altman *et al.* (1982), dentre outros.

Segundo Sommer (1969), a ideia básica era selecionar alguns parâmetros da ligação por meio de um estudo de correlação que calibrasse os resultados numéricos, produzidos pelas fórmulas, com os valores correspondentes obtidos através de ensaios experimentais. Nesse modelo, a rotação da ligação  $\theta_r$  é um polinômio do quinto grau:

$$\theta_r(M_r) = \sum_{i=1a3} [C_i(x_m)^{(2i-1)}] = C_1(x_m) + C_2(x_m)^3 + C_3(x_m)^5 \quad (2.15)$$

do aqui chamado *momento modificado*  $x_m = (K_m M_r)$ , produto de uma constante ( $K_m$ ), que é função ( $f$ ) dos parâmetros selecionados mostrados na Fig. 2.17, e do momento  $M_r$  que atua na ligação; as grandezas  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são as constantes de ajuste de curva calibradas com os ensaios de forma a atingir um percentil de desvio máximo de 10%.

Os valores correspondentes da expressão da função ( $f$ ) que define  $K_m$  e dos coeficientes do polinômio  $C_i$  são indicados na Tab. 2.7. Os valores originais dessa tabela foram determinados em unidades americanas (dimensões em polegadas [in] e momentos em quilo-libra polegada [kip in]). Na tabela 2.8, apresenta-se um fator de conversão  $C_k$  quando se empregam as unidades do Sistema Internacional (SI), (dimensões em centímetros [cm] e momentos em [kNcm]), de forma que se obtém diretamente:

$$K_m = C_k K_{SI} \quad (2.16)$$

Os parâmetros indicados na Tab. 2.7 e na Fig. 2.17 foram selecionados segundo um critério de correlação pela técnica dos mínimos quadrados, que ajustou de forma mais significativa as curvas obtidas pelo modelo às curvas experimentais, conforme:

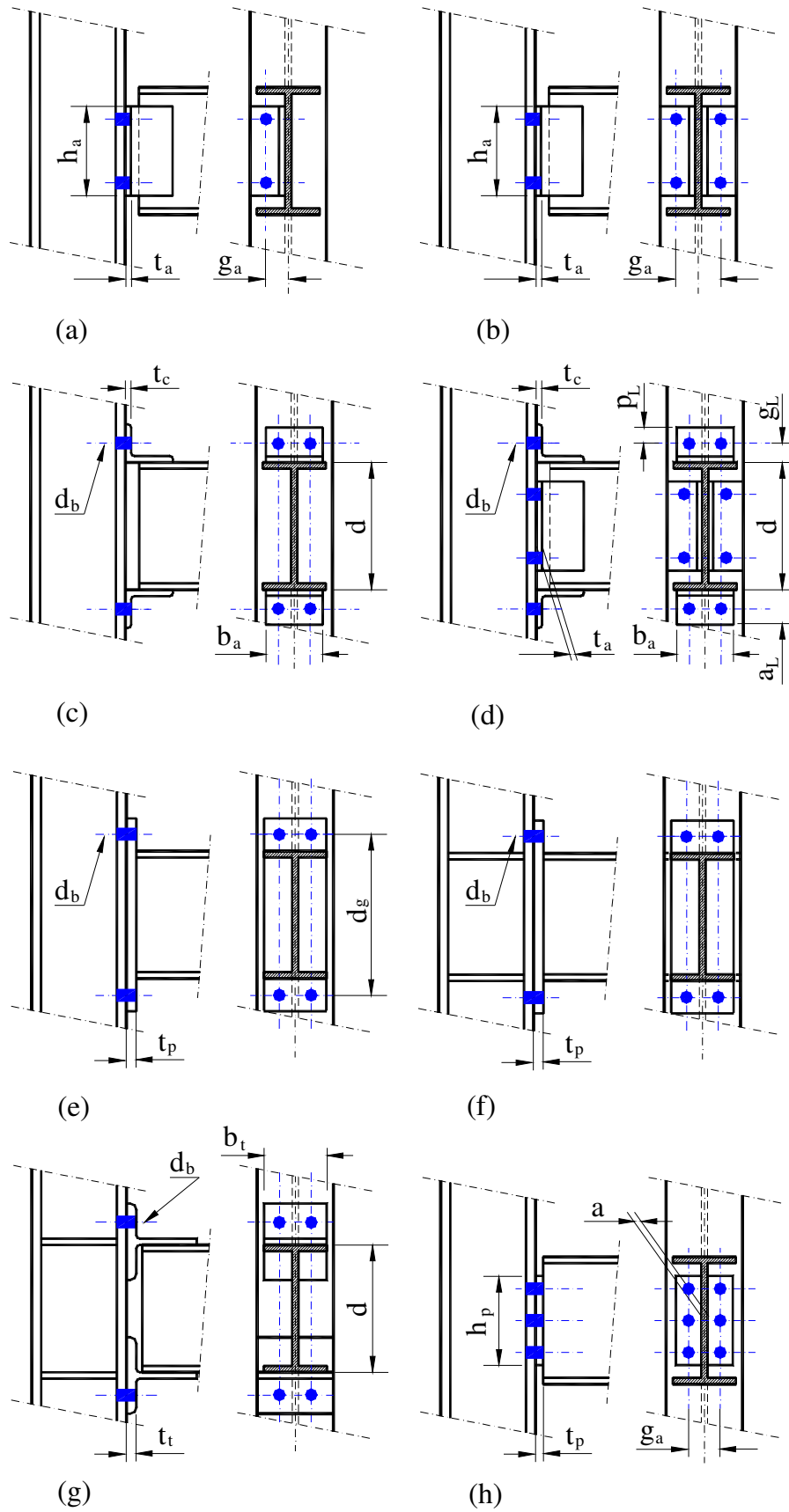
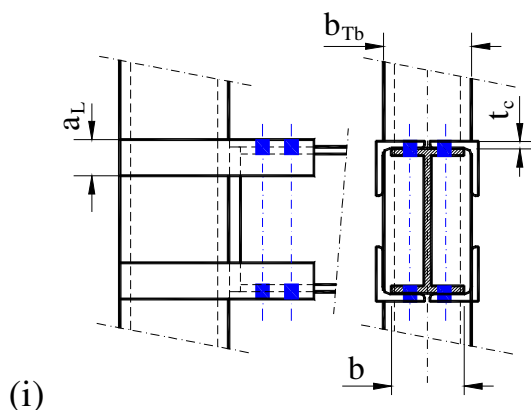


Figura 2. 17 Parâmetros adotados nas equações de  $K_m$  (Frye & Morris, 1975).

**Figura 2.17 (cont.) Parâmetros adotados nas funções  $K_m$  (Frye & Morris, 1975):**

(a) 1 L de alma; (b) 2 Ls de alma; (c) 2 Ls de aba; (d) 4 Ls de alma e aba; chapa de topo estendida: (e) com enrijecedor, (f) sem enrijecedor; (g) 2 perfis T; (h) chapa de cabeça; e (i) 4 Ls cercando.

**Tabela 2.7 Função  $K_m$  e coeficientes do polinômio de Frye & Morris (1975).**

Nº	Tipo <sup>(1)</sup>	$K_m = f$ (parâmetros)	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1	1 L na alma	$h_a^{-2,4} t_a^{-1,81} g_a^{0,15}$	4,28 E-03	1,45 E-09	1,51 E-16
2	2 Ls na alma	$h_a^{-2,4} t_a^{-1,81} g_a^{0,15}$	3,66 E-04	1,15 E-06	4,57 E-08
3	2 Ls no flange	$d^{-1,5} t_c^{-0,5} b_a^{-0,7} d_b^{-1,1}$	8,46 E-04	1,01 E-04	1,24 E-08
4	4 Ls alma e flange <sup>(2,3)</sup>	$d^{-1,287} t_c^{-1,128} t_a^{-0,415} b_a^{-0,694} g_b^{1,35}$	2,23 E-05	1,85 E-08	3,19 E-12
5	Ch. estendida s/ enrij.	$d_g^{-2,4} t_p^{-0,4} d_b^{-1,5}$	1,83 E-03	-1,04 E-04	6,38 E-06
6	Ch. estendida c/ enrij.	$d_g^{-2,4} t_p^{-0,6}$	1,79 E-03	1,76 E-04	2,04 E-04
7	2 perfis Ts	$d^{-1,5} t_t^{-0,5} b_t^{-0,7} d_b^{-1,1}$	2,10 E-04	6,20 E-06	-7,60 E-09
8	Ch. de cabeça <sup>(4)</sup>	$h_p^{-2,3} t_p^{-1,6} a^{0,5} g_a^{1,6}$	5,10 E-05	6,20 E-10	2,40 E-13
9	4 Ls cercando <sup>(5)</sup>	$a_L^{0,9553} t_c^{-0,7338} (b/b_{Tb})^{1,051}$	1,04 E-05	-1,62 E-11	4,62 E-16

Notas: 1) Para dimensões em polegadas [in] e momentos expressos em kip.in (Chen & Toma, 1994);

2) Altmann *et al.* (1982), sendo  $g_b = (g_L - d_b/2)$ ; 3) valores comprovados experimentalmente por Radziminiski & Azizinamini (1987); 4) Sommer (1969), segundo Kennedy (1969);

5) Pickard *et al.* (1976) para colunas tubulares (Chen & Lui, 2000).

**Tabela 2.8 Fatores de conversão  $C_k$  para o SI.**

Nº	Fig. 2.16	Tipo	- $C_n (2,54)^{-C_n}$		$C_k$
1	(a)	1 L na alma	4,060	44,018	3,894
2	(b)	2 Ls na alma	4,060	44,018	3,894
3	(c)	2 Ls no flange	4,200	50,154	4,437
4	(d)	4 Ls na alma e flange	2,174	7,588	0,671
5	(e)	Ch. estendida s/ enrij.	4,300	55,054	4,871
6	(f)	Ch. estendida c/ enrij.	3,000	16,387	1,450
7	(g)	2 perfis Ts	3,800	34,544	3,056
8	(h)	Ch. de cabeça	2,800	13,600	1,203
9	(i)	4 Ls cercando	-0,221	0,814	0,072

Notas: 1) O valor  $K_{SI}$ , com dimensões em cm, deve ser multiplicado por  $C_k$ , para se obter  $K_m = C_k K_{SI}$ .

2) n corresponde a soma dos expoentes da expressão de  $K_m$  [in], em geral negativo.

- a. na cantoneira – dimensões:  $a_L$  = aba,  $h_a$  = extensão vertical,  $g_a$  = gabarito de furos;  $b_a$  = extensão horizontal; espessuras:  $t_a$  = para L de alma,  $t_c$  = L de aba, [obs. gabarito da cantoneira:  $g_L = a_L - p_L$  (aba – borda)];

- b. na viga I – dimensões:  $d$  = altura,  $b$  = aba; espessuras:  $a$  = da alma,  $t$  = das abas (note que estes símbolos são os mesmos adotados em toda a tese);
- c. espessuras –  $t_p$  = da chapa de topo ou de cabeça,  $t_t$  = da aba dos Ts;
- d. outros:  $b_t$  = largura do T,  $h_p$  = altura da chapa de cabeça,  $d_g$  = gabarito entre furos para chapa estendida,  $d_b$  = diâmetro dos parafusos;  $g_b$  = gabarito líquido ( $g_L - d_b/2$ );  $b_{Tb}$  = largura do tubo.

Conforme Chen & Lui (2000), foram desenvolvidas curvas similares para ligações cercadas por 4 Ls da Fig. 2.17(i) por Picard *et al.* (1976), com 4 Ls da Fig. 2.17(d) (dois na alma e um em cada aba) por Altmann *et al.* (1982) e para chapa de cabeça da Fig. 2.17(h), originalmente por Kennedy (1969), como citado em Goverdham (1984).

A rigidez da ligação pode ser encontrada pela derivada  $\partial M/\partial \theta$  da Eq. (2.15), isto é (Chan & Chui, 2000):

$$R_{kt}(M_r) = \frac{1}{K_m [C_1 + 3C_2(x_m)^2 + 5C_3(x_m)^4]} \quad (2.17)$$

Em vários textos científicos nos quais esse modelo é apresentado, constata-se uma série de divergências de valores cuja causa pode ser tanto falha de edição quanto alguma correção ou ajuste, realizado posteriormente por outros autores (Alvarenga, 2010).

Assim, para o projetista aplicar esse modelo com segurança, é necessário conhecer quais são os valores das constantes dessa tabela corretos.

Cita-se que a grande vantagem da curva de Frye & Morris (1975) é a facilidade de se determinar  $K_m$  com base nos parâmetros, que permite uma boa flexibilidade no modelo com ajustes rápidos, e conseguir uma boa aproximação dos resultados de laboratório, com diferenças máximas reportadas de 11% (Kennedy, 1969).

Desenvolveu-se aqui um programa computacional para traçar essas curvas, comparando-se os resultados obtidos com os valores do banco de dados experimentais que constam do SCDB (Chen *et al.*, 1996). Comprovou-se que a reprodução de resultados era fiel. Porém, quando esse programa foi aplicado na obtenção de novas respostas (fora dos experimentais), verificou-se a necessidade de definir melhor quais eram os limites de validade e alguns resultados não se mostraram coerentes também (Alvarenga, 2010). Cabe ressaltar que essas curvas têm a precisão indicada apenas para rotações inferiores a 10 mrad, o que limita seu emprego a análises sob condições de



serviço. Assim surgem dúvidas sobre em que situação prática seria confiável adotar esse modelo, com quais parâmetros e qual o domínio de validade.

Outra desvantagem desse modelo ocorre na obtenção da rigidez por meio de momentos com valores muito próximos, o que torna também o processo numérico pesado e instável. A alternativa é que a rigidez pode ser definida, também, pelo uso de uma secante num intervalo pequeno (99,9% a 100,1% de dado  $M_r$ , por exemplo), como foi realizado em alguns estudos prévios ainda não publicados.

A determinação de um momento relativo a uma dada rotação (solução inversa) exige um processo de tentativas (iteração), como a técnica biseção de Newton.

O comportamento senoidal dos polinômios (curvas na forma de S deitado) pode produzir artificialmente o surgimento de rigidez negativa, o que torna seu emprego em processos iterativos, como os deste trabalho, extremamente complicados (Jones *et al.*, 1982; Azizinamini & Radzimirski, 1988). Note-se que os polinômios adotados inicialmente por Jones *et al.* (1982) eram completos (Nethercot *et al.*, 1987), ou seja, havia termos de expoente par, o que justificaria a afirmativa anterior. Porém, nos de Frye & Morris (1975), os expoentes são todos ímpares e, assim, não apareceram termos de rigidez negativa nos estudos realizados (Alvarenga, 2010).

Sobre o último comentário informa-se que, empregando os dados fornecidos pelo SCDB (Chen *et al.*, 1996) e os da Tab. 2.7, obteve-se rigidez positiva em todos os exemplos desse modelo. Entretanto, houve casos em que apareceu rigidez negativa de ligações tanto nos valores experimentais como no resultado de outras formulações (exponencial e de potência), o que seria interessante estudar mais profundamente, no futuro.

Outro caso de modelo polinomial por trechos é o do gabarito de curva B cúbica. Basicamente, é a mesma ideia de uma curva obtida por uma série de trechos lineares, sendo que, neste caso, as curvas são subdivididas numa série de trechos, a cada três pontos, em que se aproximam as curvaturas e tangentes usando polinômios do terceiro grau (Hayes, 1974). Define-se um sistema de equações determinando-se os valores compatíveis das constantes de cada trecho a todo o conjunto de dados experimental (Cox, 1972).

Essa curva pode ser descrita pela expressão:

$$\theta_{kr}(M_r) = \sum_{i=0}^3 C_{1i} (M_r)^i + \sum_{j=1}^3 C_{2j} H(M_r - M_{rj}) (M_r - M_{rj})^3 \quad (2.18)$$

na qual  $H$  é a função passo de Heavyside (Abramowitz & Stegun, 1972), ou seja:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{quando } x < 0 \end{cases} \quad (2.19a-b)$$

Esse processo, que foi empregado por Jones *et al.* (1982) e permite uma boa reprodução de curvas, na qual a rigidez pode ser obtida de forma precisa, mas gera muitos dados (constantes  $C_{1i}$  e  $C_{2j}$ ), requer um processo numérico especial iterativo e é específico para cada ensaio, o que torna muito particular sua aplicação.

### 2.4.3 MODELOS POTENCIAIS

Essa designação engloba vários modelos e expressões. A primeira função potencial foi proposta por Batho & Lash em 1936 (Chan & Chui, 2000). Depois, Krishnamurthy *et al.* (1979), com um trabalho estatístico avaliando a influência de uma série de parâmetros da ligação, definiram, por ajuste de curva, as constantes  $C_1$  e  $C_2$  da expressão básica:

$$\theta_r(M_r) = C_1 M_r^{C_2} \quad (2.20)$$

O parâmetro ( $C_1$ ) dessa curva de ligação tem de ser positivo ( $> 0$ ), e não se obtém a rigidez inicial a partir de  $R_{ki} = (\partial M / \partial \theta)_{M=0}$ , exceto se for imposto  $C_2 = 1$ , quando se torna uma equação linear, já vista antes. Além disso, recomenda-se que  $C_2 > 1$ . Os valores de  $C_2$  foram obtidos por correlação de vários parâmetros adimensionais, relativos às propriedades e à geometria da seção.

Nesse caso, a rigidez da ligação é dada por:

$$R_{kt}(M_r) = \frac{1}{C_1 C_2 M_r^{(C_2-1)}} \quad (2.21)$$

Krisnamurthy *et al.* (1979) determinaram o valor  $C_2 = 1,58$  para ligação com chapa de topo estendida da Fig. 2.4(j). Posteriormente, Kukreti *et al.* (1987) encontraram  $C_2 = 0,737$  para chapa cortada vista na Fig. 2.4(i), com uma linha simples de parafusos; e para a ligação estendida reforçada com 8 parafusos, ilustrada na Fig. 2.5(a), Kukreti *et al.* (1990) obtiveram  $C_2 = 1,913$ .

Entretanto, as respostas obtidas com essa fórmula (Eq. 2.20) só apresentaram um bom comportamento no trecho inicial da trajetória, o que justifica a adoção de outros modelos potenciais.

O Anexo J do Eurocode 3 (1997) adota uma curva com dois trechos lineares e um trecho de transição potencial, como indicado na Fig. 2.18, sendo aplicadas:

- para ligações rígidas tipo soldada, com chapa estendida e com 4Ls, que são representadas na Figs. 2.4(a, j-k & m) (Faella *et al.*, 2000); ou,
- com 2 Ls de aba, visto na Fig. 2.4(n). Pode-se, por simplicidade, recair nos modelos trilineares anteriores também.

Nos trechos lineares, adota-se a rigidez inicial  $R_{ki}$  até o início do escoamento, definido por  $M_e \approx 2 M_s/3$ , e no trecho após a maior plasticidade ( $M_r > M_s$ ), a rigidez plástica  $R_{kp}$ . A transição não linear, para  $M_e \leq M_r \leq M_s$ , é dada pela curva potencial:

$$M_r = \frac{R_{ki} \theta_r}{\left(\frac{3M_r}{2M_s}\right)^{C_e}} \quad (2.22)$$

com o ângulo  $\theta_e \leq \theta_r \leq \theta_s = M_s / R_{ks}$ , acompanhando os valores da Tab. 2.9.

O Eurocode 3 (1992) permite outra simplificação para um diagrama bilinear, sendo, nesse caso, a rigidez secante definida por:

- para ligação viga-coluna  $R_{ks2} = R_{ki}/2$  [ver Figs. 2.4(a, j-k, m-n)];
- de 2Ls de aba, da Fig. 2.4(n), quando será  $R_{ks2} = R_{ki}/3,5$ ; e
- para outros tipos de ligação:  $R_{ks2} = R_{ki}/3$  (Briquet *et al.*, 1994).

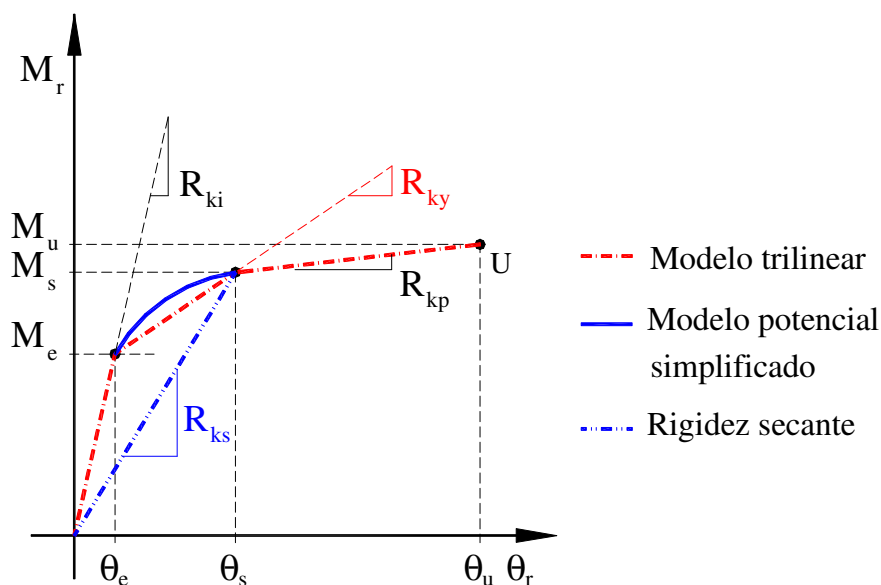


Figura 2.18 Modelo não linear do Anexo J do Eurocode 3 (1997).

Tabela 2.9 Relações de rigidez do Anexo J do Eurocode 3 (1997).

Item	Fig. 2.4	Tipo	$C_e$	$R_{ks}$	$R_{ky}$
1	a-j-k-m	rígidas	2,7	$R_{ki}/3,0$	$R_{ki}/7,0$
2	n	2 Ls na aba	3,1	$R_{ki}/3,5$	$R_{ki}/8,5$

Uma variação da abordagem anterior foi realizada por Al-Bermani (1994) e Zhu *et al.* (1995), chamada linha de contorno com 4 parâmetros, sendo diferente apenas na curva de transição, na qual a rigidez é definida por:

$$R_{kt} = R_{ki} + \frac{|M_r| - M_e}{M_s - M_e} (R_{ki} - R_{kp}) \quad (2.23)$$

que é válida para  $M_e \leq M_r \leq M_s$ , fazendo-se em seguida  $M_r = M_e + \Sigma dM_{rt}$ , em que então se tem  $dM_{rt} = R_k d\theta$ .

Passando agora aos modelos potenciais mais completos que surgiram com os trabalhos de Goldberg & Richard (1963), Colson & Louveau (1983) apresentaram um modelo potencial de 3 parâmetros, adotando:

$$\theta_r = \frac{|M_r|}{R_{ki} \left[ 1 - |M_r/M_u|^{C_1} \right]} \quad (2.24)$$

no qual  $M_u$  se torna uma assintota, e  $C_1$  define a forma da curva.

Definindo a rotação adimensional  $r = \theta_r/\theta_0$  e o momento adimensional  $m = M_r / M_u$ , tomando-se  $\theta_0 = M_u / R_{ki}$ , pode-se reescrever Eq. (2.24) como:

$$r = \frac{|m|}{\left[ 1 - |m|^{C_1} \right]} \quad (2.25)$$

na qual o coeficiente  $C_1$  determina a forma da curva. À medida que  $C_1$  cresce, a curva fica limitada entre as semirretas  $m = r \leq 1$  e  $m = 1$ , como ilustrado na Fig. 2.19.

A rigidez da ligação definida por  $\partial M/\partial \theta$  é dada pela expressão:

$$\theta_r = \frac{R_{ki} \left[ 1 - |M_r/M_u|^{C_1} \right]^2}{\left[ 1 + (C_1 - 1) |M_r/M_u|^{C_1} \right]} \quad (2.26)$$

De forma similar, Pilvin (1983), segundo Faella *et al.* (2000), apresentou a expressão adimensional:

$$r = m \left[ 1 + \frac{m}{(2^{C_1} - 1)(1 - m)} \right] \quad (2.27)$$

que representa uma curva que tem como assíntotas:  $m = 1$  e a semirreta  $m/r = 1$ , sendo muito parecida com a da Fig. 2.19.

Richard & Abbott (1975) apresentaram um modelo potencial de quatro parâmetros, que expressa o momento como função da rotação pela fórmula:

$$M_r = \frac{(R_{ki} - R_{kp}) \theta_r}{\left(1 + \left| \frac{(R_{ki} - R_{kp}) \theta_r}{M_0} \right|^{C_1} \right)^{(1/C_1)}} + R_{kp} \theta_r \quad (2.28)$$

sendo  $C_1$  o parâmetro de ajuste de curva,  $M_0$  o momento de referência,  $R_{ki}$  e  $R_{kp}$  a rigidez inicial e a plástica. O momento nominal máximo, nesse caso, é determinado por  $M_m = M_0 + R_{kp} \theta_{rd}$ , tomando-se  $\theta_{rd} = 20$  mrad, como sugere o AISC (Liu *et al.*, 2008).

Aplicando  $r = \theta_r/\theta_0$  e  $m = M_r/M_0$ , tomando-se  $M_0 = (R_{kp} - R_{ki}) \theta_0$ , pode-se tornar adimensional a Eq. 2.28, chegando à expressão:

$$m = \frac{r}{\left(1 + |r|^{C_1} \right)^{(1/C_1)}} + C_2 r \quad (2.29)$$

na qual  $C_2 = R_{kp}/(R_{ki} - R_{kp})$ . Assim, pode-se entender o sentido dos parâmetros  $C_1$  e  $C_2$  dessa expressão, acompanhando a Fig. 2.20, em que o expoente  $C_1$  varia de 1 a 20 ( $\infty$ ), enquanto se fixou  $C_2 = 0,1$ . Observa-se que  $C_2$  determina a inclinação limite superior, enquanto  $(C_1 + C_2)$  define o valor de  $(m)$  no qual a trajetória se modifica de  $R_{ki}$  para  $R_{kp}$  (neste exemplo, para  $r = 1$  tem-se  $m = 1 + 0,1 = 1,1$ ). E quanto maior for o valor de  $C_1$ , mais a curva se aproximará da forma bilinear da assíntota.

A rigidez é obtida diretamente pela expressão  $(\partial M/\partial \theta)$ :

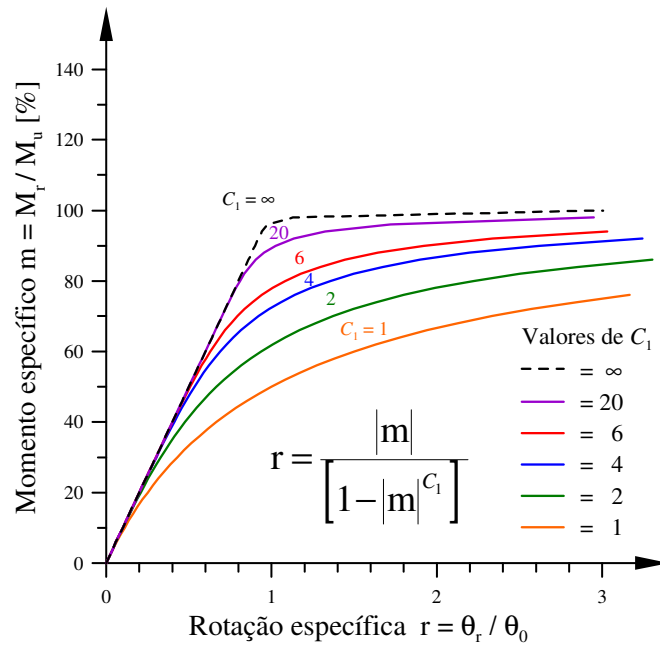
$$R_{kt} = \frac{R_{ki}}{\left[1 + (\theta_r/\theta_0)^{C_1} \right]^{(C_1+1)/C_1}} + R_{kp} \quad (2.30)$$

Azizinamini *et al.* (1985) empregaram essa equação para estudar ligações com 4 Ls [Fig. 2.4(m)], Driscoll (1987) com 2Ls de aba [Fig. 2.4(n)], enquanto Kukreti (1987) construiu um modelo com EFs para gabaritar respostas de ensaios computacionais de ligações para chapa estendida de topo [Fig. 2.4(j)] e Kishi & Chen (1987) para ligações de cantoneiras em geral [Figs. 2.4(m-n-o)].

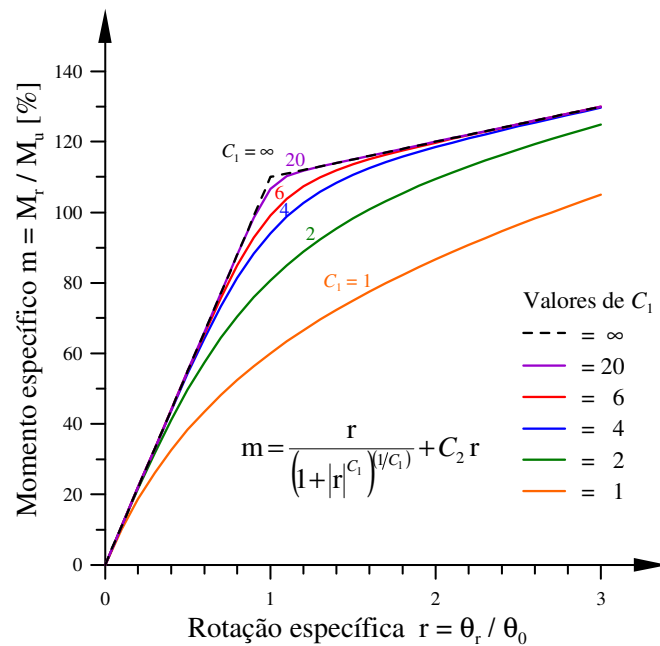
Esse modelo, posteriormente, originou o proposto por Kishi & Chen (1987), ao se fazer diretamente  $R_{kp} = 0$  nas fórmulas anteriores, ou seja:

$$M_r = \frac{R_{ki} \theta_r}{\left[1 + (\theta_r/\theta_0)^{C_1} \right]^{(1/C_1)}} \quad (2.31)$$

no qual o ângulo de referência é definido agora por  $\theta_0 = M_u/R_{ki}$ .



**Figura 2.19** Modelo de Colson & Louveau (1983).



**Figura 2.20** Modelo de Richard & Abbott (1975).

Como visto, o parâmetro  $C_1$  define a forma da curva, sendo que, quando este cresce arbitrariamente, a curva tende a se confundir com o modelo bilinear, com a inclinação inicial  $R_{ki}$ . A diferença é que, com o parâmetro linear ( $R_{kp}$ ) de Richard & Abbott (1975), a curva tem uma forma que permite atingir o momento último  $M_u$ .

Já no modelo de Kishi & Chen (1987), o momento  $M_u$  é a assintota alcançada aproximadamente apenas quando  $C_1 > 2$ , (não sendo atingido, em caso contrário).

Pode-se igualmente obter a forma adimensional dessa curva Eq. 2.31, que é representada na Fig. 2.21, tomando-se  $m = M_r/M_u$  e  $r = \theta_r/\theta_0$ , isto é:

$$m = \frac{r}{[1 + (r)^{C_1}]^{1/C_1}} \quad (2.32)$$

A vantagem desse modelo é manter as mesmas características do anterior para ligações que não possuem acréscimo de rigidez na plasticidade nem decréscimo de rigidez. No amolecimento, que ocorre quando  $R_{kp}$  é negativo, aplicar a equação de Richard & Abbott (1975) propicia melhores resultados ou representação, como se comprova, por exemplo, em Almusallam & Richard (1993).

Sua a rigidez é definida pela equação ( $\partial M/\partial \theta$ ):

$$R_{kt} = \frac{R_{ki}}{[1 + (\theta_r/\theta_0)^{C_1}]^{(C_1+1)/C_1}} \quad (2.33)$$

Os modelos de Richard & Abbott (1975) e de Kishi & Chen (1987) são boas alternativas para projeto pelas seguintes características: simplicidade da expressão  $M-\theta$ , a rigidez é geralmente positiva, o traçado é suave, além disso, esses modelos conseguem aproximar muito bem diversas curvas produzidas em laboratório.

Para os tipos de ligação analisados, na Tab. 2.10, mostra-se os valores estimados do expoente  $C_1$ , que é fixo até o valor  $X = \log_{10}(\theta_0) \leq X_{lim}$  e varia linearmente conforme a expressão à direita na tabela, quando  $X$  supera este limite ( $X_{lim}$ ). Por exemplo, no item 3 (4Ls na alma e aba), adota-se o expoente  $C_1 = 0,827$ ; quando  $\log_{10} \theta_0 \leq -2,538$ ; ou bem,  $\theta_0 < 2,897$  mrad. Em caso contrário, calcula-se  $C_1 = (5,483 \log_{10} \theta_0 + 14,745)$ . Supondo que  $\theta_0 = 3,2$  mrad ( $\log_{10} 3,2 = -2,495$ ) então  $C_1 = 5,483(-2,495) + 14,745 = 1,0657$ . Esses valores foram obtidos por meio de correlação estatística sobre os dados experimentais, que constaram nas tabelas do SCDB (Chen *et al.*, 1996). Algumas diferenças foram encontradas na Tab. 2.10 de outros autores (Alvarenga, 2010).

As desvantagens desse modelo constituem os eventuais desvios em relação às ligações verdadeiras, impedindo uma possível otimização dessas e a não expansão desses dados para os outros tipos de ligação. Deve ser indicado também que esses valores foram obtidos com o modelo analítico (não numérico, ou seja, sem MEF) e que não consideraram no desenvolvimento das equações as deformações na coluna.

Complementando os modelos potenciais, Ang & Morris (1984) tentaram refazer o trabalho de Frye & Morris (1975), substituindo a curva polinomial destes pesquisadores, pela função de Ramberg & Osgood (1943), gerando a expressão:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{(K_m M_r)}{(K_m M_0)} \left\{ 1 + \left[ \frac{(K_m M_r)}{(K_m M_0)} \right]^{(C_1-1)} \right\} = \frac{x_m}{x_{m0}} \left[ 1 + \left( \frac{x_m}{x_{m0}} \right)^{(C_1-1)} \right] \quad (2.34a-b)$$

na qual reaparece o momento modificado  $x_m = K_m M_r$ , função  $f$  de outros parâmetros, mostrada na Tab. 2.11; sendo  $C_1$  um parâmetro de forma da curva, cujo efeito pode ser observado na Fig. 2.22. A forma adimensional da Eq. 2.34b, será:

$$r = m \left[ 1 + m^{(C_1-1)} \right] \quad (2.35)$$

sendo  $m = M_r / M_0$ , com  $M_0$  correspondendo a um ponto de referencia ( $M_0, \theta_0$ ), não necessariamente  $M_u$ . Essa equação foi usada para aproximar ligações flexíveis e adotada também por Shi & Atluri (1989).

**Tabela 2.10** Expoente  $C_1$  da curva de potência de Kishi & Chen (1987).

Item	Tipo	Figura	$X_{lim}^{(1)}$	$X \leq X_{lim}$	$X > X_{lim}$
1	1 L na alma <sup>(2)</sup>	2.16(a)	-3,073	0,695	0,520 X +2,291
2	2 Ls na alma <sup>(2)</sup>	2.16(b)	-2,582	0,573	1,322 X +3,952
3	2 Ls na aba <sup>(2)</sup>	2.16(c)	-2,880	0,302	2,003 X +6,070
4	4 Ls na alma e aba <sup>(2)</sup>	2.16(d)	-2,538	0,827	5,483 X +14,745
5	Ch. estendida 2 lados s/ enrij. <sup>(3,4)</sup>	2.16(e)	-2,810	1,216	1,730 X +6,077
6	Ch. estendida 2 lados c/ enrij. <sup>(3,4)</sup>	2.16(f)	-2,000	1,357	1,832 X +5,021
7	Ch. estendida lado trac. s/ enrij. <sup>(3,4)</sup>	2.4(j) s/ enr.	-2,360	1,982	1,021 X +4,392
8	Ch. estendida lado trac. c/ enrij. <sup>(3,4)</sup>	2.4(j)	-2,480	2,655	0,896 X +4,877
9	Ch. cortada s/ enrij. <sup>(3,4)</sup>	2.4(i)	-2,120	1,569	1,230 X +4,177
10	Ch. cortada c/ enrij. <sup>(3,4)</sup>	2.4(i) c/ enr.	-2,810	1,033	1,657 X +5,689

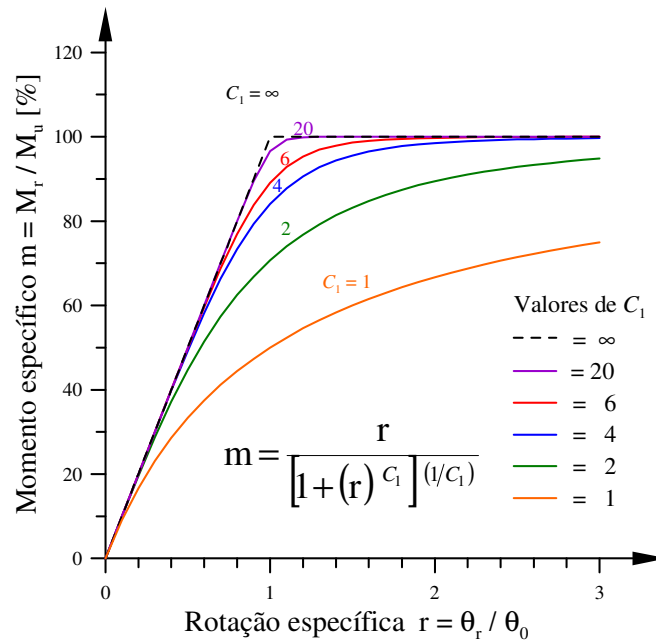
Notas: 1) com  $X = \log_{10}(\theta_0)$ ; 2) Kishi & Chen (1987); 3) Goto & Myashita (1998); 4) com enrijecedores de coluna (c/ enrij.) e sem enrijecedores (s/ enrij.), respectivamente.

**Tabela 2.11** Função  $K_m$  e coeficientes de Ang & Morris (1984).

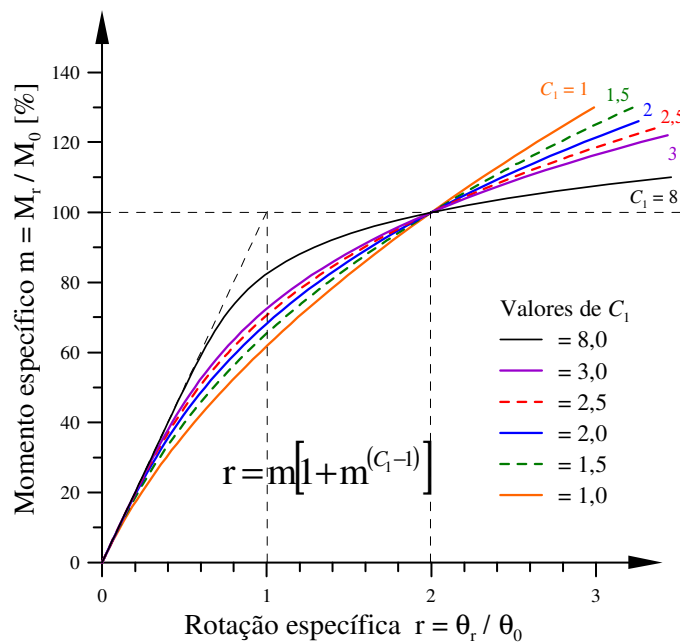
Nº	Tipo <sup>(7)</sup>	$K_m = f(\text{parâmetros})^{(1)}$	$\theta_0$ [rad]	$K_m M_0$	$C_1$
1	1 L na alma <sup>(2)</sup>	$h_a^{-2,09} t_a^{-1,64} g_a^{2,06}$	$1,03 \times 10^{-2}$	32,75	3,93
2	2 Ls na alma <sup>(3)</sup>	$h_a^{-2,2} t_a^{0,08} g_a^{-0,28}$	$3,98 \times 10^{-3}$	0,63	4,94
3	2 Ls no flange <sup>(4)</sup>	$d^{-1,06} t_c^{-0,54} b_a^{0,85} d_b^{-1,28}$	$5,17 \times 10^{-3}$	745,94	5,61
4	Ch. de cabeça <sup>(5)</sup>	$h_p^{-2,51} t_p^{-1,54} a^{-0,45} g_a^{2,12}$	$7,04 \times 10^{-3}$	186,77	4,32
5	4 Ls cercando <sup>(6,8)</sup>	$(b/b_{Tb})^{1,06} t_c^{-0,85} a_L^{-0,059}$	$4,58 \times 10^{-5}$	753,26	5,98

Notas: 1) Válidos para dimensões em polegadas [in] e momentos em kip.in (Chan & Chui, 2000). Ensaios por: 2) Lipson (1968); 3) Batho & Rowan (1934) e Lewitt *et al.* (1966); 4) Sommer (1969), conforme Kennedy (1969); 5) Beaulieu & Giroux (1974); 6) Brun & Pickard (1976); 7) adota os parâmetros de Frye & Morris (1975), ver Fig. 2.17; 8) ver Chen & Lui (2000).





**Figura 2. 21 Modelo de Kishi & Chen (1987).**



**Figura 2. 22 Modelo de Ang & Morris (1984).**

Attiogbe & Morris (1991) testaram aproximações das curvas de laboratório, aplicando a técnica dos mínimos quadrados, com melhores resultados para as curvas de Richard & Abbott (1975) do que para as de Ramberg & Osgood (1943).

Os modelos potenciais apresentam boas perspectivas para se tornarem mais aplicados hoje, substituindo com vantagens os lineares e polinomiais.

O modelo de Dong (1994), citado por Morris *et al.* (1995), por exemplo, pode substituir com vantagens o de Frye & Morris (1975). A desvantagem tem sido a

definição da rigidez inicial, ou da rigidez plástica, nem sempre coerentes com os resultados experimentais e a falta de dados para outros tipos de ligação.

#### 2.4.4 MODELOS EXPONENCIAIS

Outra tentativa para representar a curva  $M-\theta$  foi apresentada por Lui & Chen (1986, 1988), que fornecem bons resultados desde que na ligação não se manifeste o encruamento. A curva proposta por esses pesquisadores é dada por:

$$M_r = \sum_{j=1}^n \left\{ C_j \left[ 1 - \exp\left(-\frac{|\theta_r|}{2jC_a}\right) \right] \right\} + M_0 + R_{kp} |\theta_r| \quad (2.36)$$

na qual se tem um somatório de constantes de momento  $C_j$  com decaimento exponencial relacionado a um passo constante de rotação  $C_a$ , um momento de referencia  $M_0$  e uma rigidez plástica final  $R_{kp}$ . Portanto, são requeridos  $(n+3)$  parâmetros, o que contrabalança a boa precisão obtida. A rigidez é dada pela expressão  $(\partial M/\partial \theta)$ :

$$R_{kt} = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{C_j}{2jC_a} \exp\left(-\frac{|\theta_r|}{2jC_a}\right) \right] + R_{kp} \quad (2.37)$$

sendo a rigidez inicial obtida fazendo-se  $|\theta_r| = 0$  na Eq. 2.37, o que resulta:

$$R_{ki} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{C_j}{2jC_a} \right) + R_{kp} \quad (2.38)$$

que é também indicada na Tab. 2.12. Kishi & Chen (1987) substituíram, posteriormente, o termo  $R_{kp} |\theta_r|$  da Eq. (2.36) por uma expressão que acomoda uma parcela linear, conforme:

**Tabela 2.12 Parâmetros da curva exponencial de Lui & Chen (1988).**

Para- metros	1L de alma Richard <i>et al.</i> (1980)	2Ls de aba Azizinamini <i>et al.</i> (1985)	Chapa cortada Ostraender (1970)	Ch. estendida Johnston & Walpole (1981)
Fig.	2.4(o)	2.4(n)	2.4(i)	2.4(k)
$R_{kp}$	$0,47104 \times 10^2$	$0,43169 \times 10^3$	$0,96415 \times 10^3$	$0,41193 \times 10^3$
$C_a$	$0,51167 \times 10^{-3}$	$0,31425 \times 10^{-3}$	$0,31783 \times 10^{-3}$	$0,67083 \times 10^{-3}$
$C_1$	$-0,43300 \times 10^2$	$-0,34515 \times 10^3$	$-0,25038 \times 10^3$	$-0,67824 \times 10^3$
$C_2$	$0,12139 \times 10^4$	$0,52345 \times 10^4$	$0,50736 \times 10^4$	$0,27084 \times 10^4$
$C_3$	$-0,58583 \times 10^4$	$-0,26762 \times 10^5$	$-0,30396 \times 10^5$	$-0,21389 \times 10^5$
$C_4$	$0,12971 \times 10^5$	$0,61920 \times 10^5$	$0,75338 \times 10^5$	$0,78563 \times 10^5$
$C_5$	$-0,13374 \times 10^5$	$-0,65114 \times 10^5$	$-0,82873 \times 10^5$	$-0,99740 \times 10^5$
$C_6$	$0,52224 \times 10^4$	$0,25506 \times 10^5$	$0,33927 \times 10^5$	$0,43042 \times 10^5$
$R_{ki}$	$0,48000 \times 10^5$	$0,95219 \times 10^5$	$0,11000 \times 10^6$	$0,30800 \times 10^6$

Nota: 1) Nesses casos:  $M_0 = 0$ ,  $n = 6$  constantes  $C_j$ , ou seja,  $j = 6$ .

$$R_{kp}|\theta_r| = \sum_{j=1}^n [C_{Lj}(\theta_r - \theta_j)H(\theta_r - \theta_j)] \quad (2.39)$$

resultando na rigidez plástica dada por:

$$R_{kp} = \sum_{j=1}^n [C_{Lj} H(\theta_r - \theta_j)] \quad (2.40)$$

na qual  $H$  é a função passo de Heavyside, já apresentada.

Apesar da aparente complexidade, essas equações podem ser incorporadas a programas computacionais facilmente (Chen & Toma, 1994).

Um dos primeiros modelos analíticos e exponencial foi proposto por Yee & Melchers (1986), que procuraram estabelecer uma curva que possuísse parâmetros com certa coerência, identificando a relação entre os termos envolvidos. Esses pesquisadores apresentaram a equação:

$$M_r = M_p \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{-(R_{ki} - R_{kp} + C_1 \theta_r) \theta_r}{M_p} \right] \right\} + R_{kp} \theta_r \quad (2.41)$$

sendo  $C_1$  uma constante de ajuste, que controla a inclinação da curva. Já a rigidez da ligação é calculada, então, pela expressão:

$$R_{kt} = R_{kp} + (R_{ki} - R_{kp} + 2C_1 \theta_r) \exp \left[ \frac{-(R_{ki} - R_{kp} + C_1 \theta_r) \theta_r}{M_p} \right] \quad (2.42)$$

Essa curva possui a rigidez inicial  $R_{ki}$  na origem e à medida que  $\theta_r$  cresce, aproxima-se da reta  $M = M_0 + R_{kp} \theta_r$ , na qual  $M_0$  representa o momento plástico da ligação, e  $R_{kp}$  a rigidez no endurecimento à tensão. Não é simples, porém, ajustar  $C_1$ , que é dimensional, correspondendo a uma variação de rigidez angular ( $C_1 = R_{ka} / \theta_a$ ).

Definindo  $m = M_r / M_0$ ,  $r = \theta_r / \theta_0$  e  $\kappa_p = R_{kp} / R_{ki}$ , pode-se escrever a forma adimensional da Eq.2.41 pela expressão:

$$m = 1 - \exp \left[ -r(1 - \kappa_p + C_1^* r) \right] + \kappa_p r \quad (2.43)$$

na qual o novo parâmetro de forma  $C_1^*$  é dado por:

$$C_1^* = \frac{C_1 \theta_0}{R_{ki}} = \frac{R_{ka} \theta_0}{R_{ki} \theta_a} \quad (2.44)$$

Pode-se ver o comportamento dessa curva na Fig. 2.23, em que se fixou  $\kappa_p = 0,1$  e variaram-se os valores de  $C_1^*$ . Note que é possível se empregar valores de  $\kappa_p$  nulos ou negativos (simulando o amolecimento). A semirreta ( $m = 1 + 0,1 r$ ) é assíntota superior,

já a semirreta ( $m = r \leq 1$ ) é tangente para  $C_1^* = 1$ , fica à esquerda da curva se  $C_1^* < 1$  e à direita quando  $C_1^* > 1$ .

Os valores de  $C_1$  recomendados para a ligação de chapa de topo estendida, representada na Fig. 2.4(j), são mostrados na Tab. 2.13.

Com o emprego da curva de Wu & Chen (1990), cuja base é logarítmica, houve melhores resultados na modelagem (Lee & Moon, 2002) de ligações com 2Ls de alma da Fig. 2.4(o) do que com as fórmulas analíticas e curvas de Kishi & Chen (1987). Essa curva M- $\theta$  é estabelecida pela expressão:

$$\frac{M_r}{M_0} = \left[ \log \left( 1 + \frac{\theta}{C_1 \theta_0} \right) \right]^{C_2} \quad \text{ou} \quad m = \left[ \log \left( 1 + \frac{r}{C_1} \right) \right]^{C_2} \quad (2.45a-b)$$

na qual  $C_1$  e  $M_0$  são parâmetros de forma,  $C_2$  é o expoente, e os demais parâmetros já foram definidos (inclusive a rotação de referencia  $\theta_0$ ). Na figura 2.24, ilustra-se o efeito da variação da constante de forma  $C_1$  [similarmente ao que fez Faella *et al.*, (2000) para outras ligações] quando se faz o expoente  $C_2$  da Eq. (2.45) valer 1.

A rigidez desse modelo de ligação é calculada por:

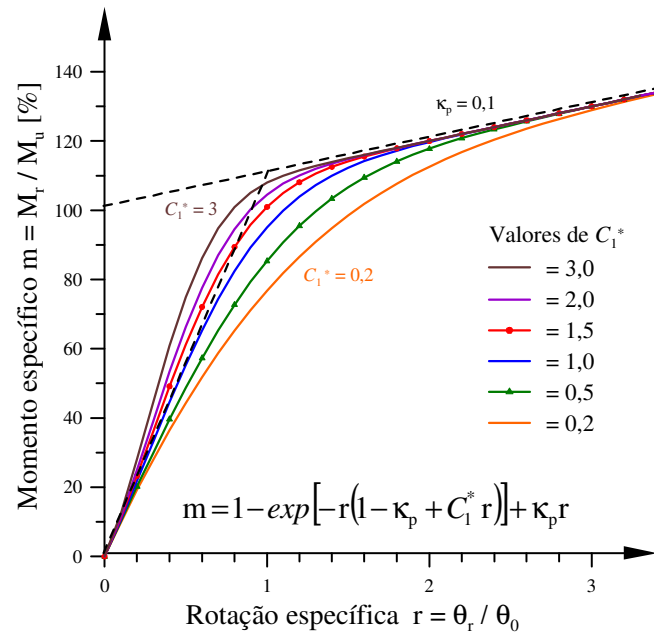
$$R_{kt} = \frac{M_0 C_1^2}{(C_2 + \theta_0)} \left[ \log \left( 1 + \frac{\theta}{C_1 \theta_0} \right) \right]^{(C_2-1)} \quad (2.46)$$

porém, não se obtém o valor de  $R_{ki}$  quando  $\theta = 0$  (Lee & Moon, 2002).

Chisalla (1999) propõe um novo modelo da análise paramétrica para ligações com duas cantoneiras (2L de alma ou 2L de aba), com alguns parâmetros empíricos, aplicando a expressão exponencial:

$$M_r = M_0 + R_{kp} \theta \left[ 1 - \exp \left( - \frac{R_{ki} \theta}{M_0} \right) \right] \quad (2.47)$$

Como se pode observar, a apresentação de tantos modelos de curvas M- $\theta$  com a abordagem matemática não indica um final, mas a ampla gama de representações possíveis e ainda em desenvolvimento, o que permite que sejam propostos outros modelos ou melhorados os existentes.

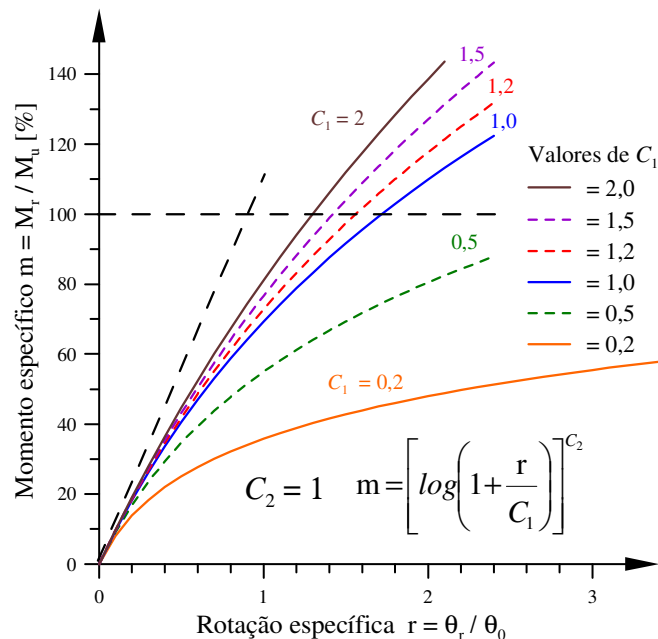


**Figura 2.23** Modelo de Yee & Melchers (1986).

**Tabela 2.13** Parâmetro  $C_1$  da curva exponencial de Yee & Melchers (1986).

Detalhe da ligação	$C_1$ [kipin]	$C_1$ [kNcm] <sup>(1)</sup>
Coluna enrijecida e ligação com parafusos apertados	0,0	0,00
Coluna enrijecida e ligação com parafusos pré-tensionados	3,5	39,56
Coluna não enrijecida	1,5	16,95

Notas: 1) 1 kip in = 11,30 kNcm; 2) detalhes complementares em Faella *et al.* (2000).



**Figura 2.24** Modelo de Wu & Chen (1990).

### 2.4.5 CONFRONTANDO ALGUNS MODELOS

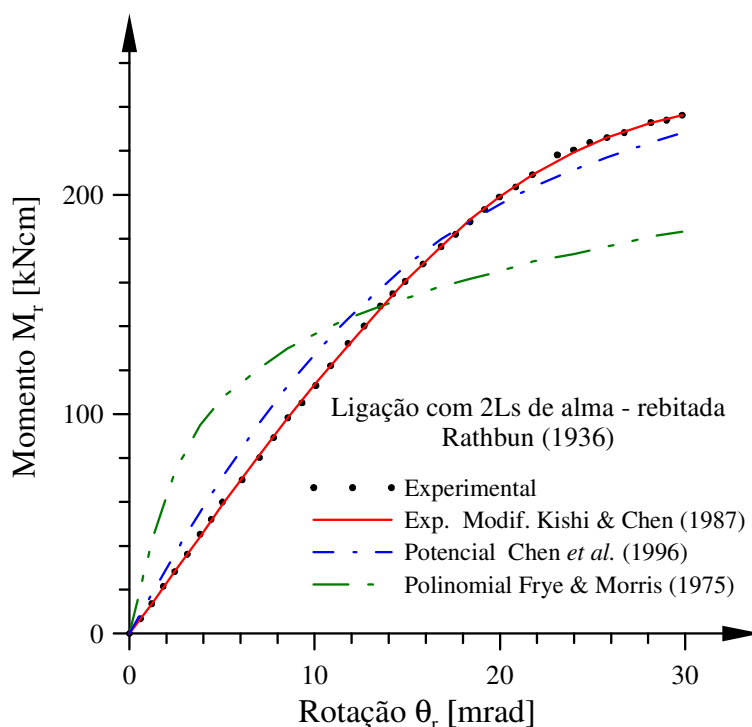
Apenas para ilustrar algumas diferenças entre os diversos modelos estudados e os ensaios experimentais, na Fig. 2.25 reproduz-se um dos vários exemplos do SCDB (Kishi & Chen, 1990) no qual os três modelos matemáticos que têm maior aplicação podem ser comparados: o polinomial, o potencial e o exponencial.

Desses modelos, o exponencial é que apresenta o resultado melhor para essa ligação rebitada de Rathbun (1936) [ver 2Ls de alma da Fig. 2.4(o)] e o polinomial é o mais distinto.

Embora apenas um exemplo não seja conclusivo, outros casos constantes no SCDB (Kishi & Chen, 1990) comprovaram que o comportamento geral encontrado foi aproximadamente o mesmo constatado nessa figura (Alvarenga, 2010).

Comparando outros modelos não matemáticos com os experimentais, pode-se citar o trabalho de Shi *et al.* (1996), que tentaram determinar relações analíticas entre  $M$  e  $\theta$  para obter pontos da curva sem se preocuparem em obter uma expressão matemática formal para a curva da ligação. Mas existem discrepâncias não apenas nas trajetórias obtidos pelas curvas  $M$ - $\theta$  analíticas, como no valor da rigidez inicial e sua leve variação ao longo da trajetória supostamente elástica.

Essas diferenças afetam a velocidade de convergência para o ponto de equilíbrio, dependendo da curva ou do modelo adotado (Dumas *et al.*, 2004).



**Figura 2.25 Confrontação de modelos.**

Note-se que esse ponto de equilíbrio é estimado pela interseção da curva da ligação com a *linha de viga*, como será mostrado na seção seguinte. Assim, se a curva da ligação não é bem calibrada, tanto o ponto estimado fica mais distante da realidade experimental, quanto da solução final, comprometendo sua validade.

Rauscher & Gerstle (1992) examinaram, em ensaios de laboratório, 48 espécimes, considerados teoricamente idênticos, que produziram curvas  $M-\theta$  com elevados desvios em relação ao padrão esperado. Isso se deveu a uma série de detalhes, que estão ligados de forma intrínseca à construção propriamente, como:

- a. anomalia de material (confeção e fabricação);
- b. mão de obra (fabricação e montagem);
- c. folgas e aperto (montagem); e
- d. procedimentos e qualidades (geral).

Além disso, essas ligações estão nas abas das colunas (ou seja, são excêntricas), o que tem tanto a interferência do efeito do painel da coluna – já indicado – como, também do centro instantâneo de rotação de algumas, que não está no eixo da viga [por exemplo, no centro da aba inferior para a chapa de topo estendida da Fig. 2.4(j)]. São diferenças inevitáveis que aparecem em decorrência dos modelos simplificados de ligação (Tschemmernegg & Queiroz, 1996).

É importante salientar que, aparentemente, a maior acurância na curva  $M-\theta$  não altera significativamente o ponto limite de carga (Poggi & Zandonini, 1987).

Tendo visto os diversos modelos de ligação, na próxima seção, inicia-se o estudo propriamente dito da influência da ligação.

## 2.5 LINHA DE VIGA

Essa ideia foi inicialmente desenvolvida por Batho & Rowan (1934) no sentido de compatibilizar o comportamento da viga e da ligação, sendo a seguir reproduzida.

De acordo com a Fig. 2.26(a), para uma carga uniformemente distribuída na viga ( $q$ ), o momento fletor  $M_v$  nos apoios da viga de vão  $L_v$ , biengastada, (ligações rígidas perfeitas, que não apresentam nenhuma rotação) é dado por:

$$M_v = \frac{qL_v^2}{12} \quad (2.48)$$

Como esse momento é o máximo que ocorre na viga, conclui-se que, no seu dimensionamento, este será o momento plástico ( $M_p$ ) requerido, ou seja,  $M_v = M_p$ .

Por outro lado, supondo que a ligação da viga não tenha condições de absorver nenhum momento, situação tratada na Fig.2.26(b), comportando-se, assim, como birrotulada, a rotação na extremidade será:

$$\theta_v = \frac{qL_v^3}{24EI_v} \quad (2.49)$$

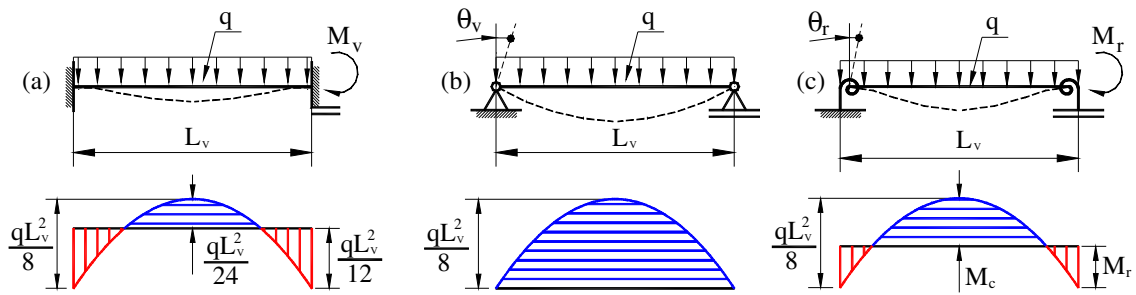
Entretanto, com a presença da ligação, elucidada na Fig. 2.26(c), os valores do momento no apoio ( $M_r$ ) e da rotação da extremidade ( $\theta_r$ ) passam pelo equilíbrio da ligação, o que modifica o momento máximo no meio-vão ( $M_c$ ), alterando os esforços na viga, sua flecha e o seu dimensionamento (agora,  $M_r \leq M_c \approx M_p$ ).

Supondo-se, então, que o comportamento da viga possa ser descrito, do ponto de vista de solitação, da forma linear, pela relação entre a rotação da extremidade com o momento que ali atua, têm-se os dois pontos ( $M$ - $\theta$ ) que representam e definem a *linha de viga* (“beam line”), a saber:  $(0, M_v)$  e  $(\theta_v, 0)$ .

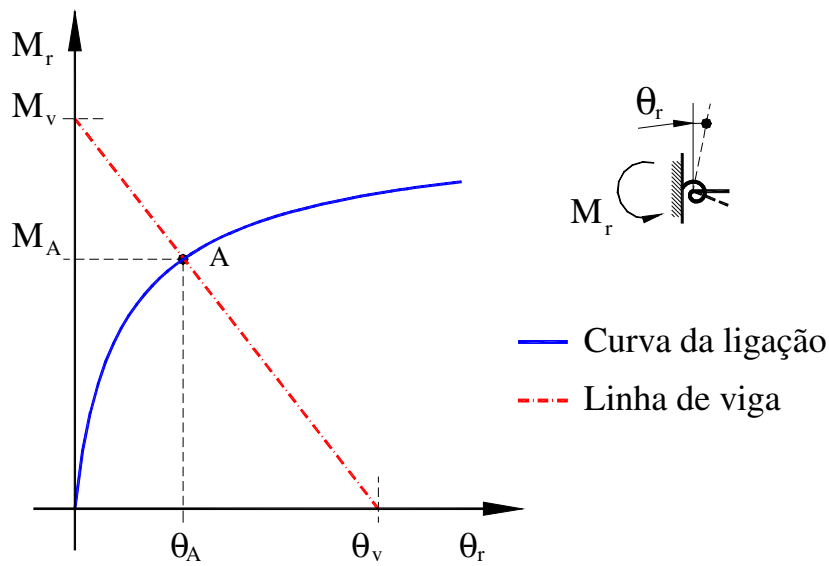
Esses pontos estão indicados na linha inclinada [em traço e ponto (---)] do diagrama  $M$ - $\theta$ , da Fig. 2.27, que representa, assim, o estado de comportamento da viga com relação às suas condições de extremidade. A inclinação dessa semirreta é definida por  $-M_v/\theta_v = -2EI_z/L_v$  (metade da rigidez elástica da viga).

Finalmente, pode-se determinar a situação de trabalho da ligação sob a carga  $q$  conhecendo-se a curva  $M$ - $\theta$  da ligação (na Fig. 2.27), e determinando a interseção desta com a *linha de viga* antes definida. A interseção definida pelo ponto de trabalho (A) é uma condição de compatibilidade entre a ligação e a viga, que corresponderá ao momento de extremidade  $M_A$  e à rotação  $\theta_A$ .





**Figura 2.26** Efeito da ligação na viga com carga uniformemente distribuída  $q$   
 Condição: (a) biengastada; (b) birrotulada; (c) com biligação semirrígida,  
 (d) convenção matemática (+) positivo, sobre o eixo (—), e (-) negativo, abaixo (||).



**Figura 2.27** Linha de viga (Batho & Rowan, 1934).

Kotlyar (1996) apresenta soluções similares para outros carregamentos da viga.

Conhecido o momento no apoio  $M_A$ , pode-se encontrar o momento no meio-vão  $M_C$ , que será dado por:

$$M_C = \frac{q L_v^2}{8} - M_A \quad (2.50)$$

Com os valores conhecidos de  $M_A$  e  $M_C$ , a viga e a ligação podem ser otimizados, de forma que  $M_p$  (viga)  $\geq$  máximo ( $M_A$ ,  $M_C$ ).

A rotação da extremidade pode ser calculada pela derivada da equação da elástica (Nethercot, 1985), em geral, não superando 30 mrad do ponto de vista prático:

$$\theta_A = \frac{M_A L_v}{2EI_v} - \frac{q L_v^3}{24EI_v} \quad [\text{estimada } \leq 30\text{mrad}] \quad (2.51)$$

Mas, considerando que  $\theta_r = M_s/R_{ks}$  (rigidez secante), definindo  $m_A = M_A/(qL_v^2)$  e  $m_C = M_C/(qL_v^2)$  e fazendo  $\theta_r = \theta_A$ , pode-se escrever então:

$$m_A = \frac{1}{12(1+2g)} \quad m_C = \frac{1}{8} - m_A = \frac{(1+6g)}{24(1+2g)} \quad (2.52a,b)$$

em que ambos os valores são dependentes do fator de fixação ( $g$ ) definido na Eq. 2.3.

Gerschwindner (1991) verificou a variação de  $m_A$  e  $m_C$  com ( $g$ ) apenas para valores inferiores a 1. O fator de fixação pode variar de 0 a infinito ( $\infty$ ), porém esses valores extremos podem gerar anomalias numéricas em aplicações.

Expressando ( $g$ ) em relação à *semiflexibilidade nodal*  $\eta$  [Eq. 2.7(a)] como:

$$g = \frac{\eta}{2(1-2\eta)} \quad (2.53)$$

e substituindo nas Eqs. 2.52(a-b) obtêm-se então:

$$m_A = \frac{(1-2\eta)}{12(1-\eta)} \quad m_C = \frac{(1+\eta)}{24(1-\eta)} \quad (2.54a,b)$$

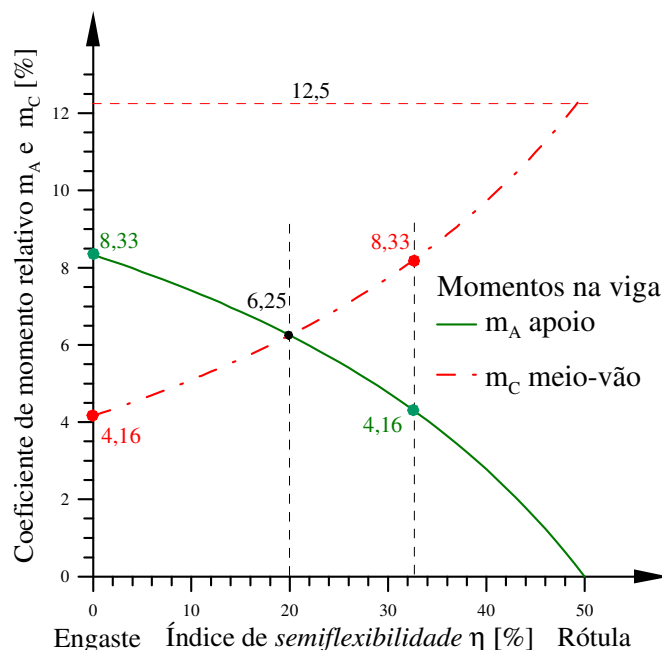
Com o que se desenha a Fig. 2.28, relacionando diretamente  $m_A$  e  $m_C$  com  $\eta$ .

Avaliando agora do ponto de vista de dimensionamento, a viga biengastada é a que dimensiona a seção mais leve, porém o momento máximo ocorre na extremidade, o que penaliza a ligação (quanto mais rígida a ligação, maior o seu custo). Note-se que existem vários valores de momento de apoio ( $m_A$ ) que reduzem o momento  $m_C$ , lembrando que o maior desses dimensiona a viga, e o maior  $m_A$  define a ligação. Existe um ponto em que os coeficientes  $m_A$  e  $m_C$  trocam de valor entre si, em relação à condição biengastada: com  $\eta = 1/3$  ( $g = 1/2$ ,  $R_k = 2 EI_v/L_v$ ), quando  $m_A = 1/24 = 4,16\%$  e  $m_C = 1/12 = 8,33\%$ . Isso significa usar a mesma viga dimensionada para a ligação biengastada, porém com o maior momento no meio-vão, e na ligação atuará metade do esforço, ou seja, terá um custo menor. Portanto, a região onde  $\eta \leq 1/3$  é a parte mais econômica para o dimensionamento. Pode-se destacar outro ponto interessante  $\eta = 1/5 = 20\%$  ( $g = 2/9$ ,  $R_k = 4,5 EI_v/L_v$ ) no qual os coeficientes se igualam:  $m_A = m_C = 6,25\%$ .

Para completar o dimensionamento, deve-se verificar, também, o estado de serviço, ou seja, avaliar a deformação através da flecha vertical ( $\delta y_v$ ), expressa como:

$$\delta y_v = \frac{M_A L_v^2}{8EI_v} - \frac{5qL_v^4}{384EI_v} \leq \frac{L_v}{360} \quad (2.55)$$

a partir da qual se determinará um perfil mais econômico do que o obtido para as condições extremas rótula e engaste iniciais.



**Figura 2.28** Coeficientes de momento (Gerschwindner, 1991).

Segundo Simões (1996), o custo de uma viga IPE (laminado europeu) cresce 20% com uma ligação simples e atinge 60% quando essa se torna rígida (com parafusos e soldas). Assim, esse pesquisador apresentou uma estimativa de custo, baseando-se no peso nominal da viga ( $P_v$ ) como:

$$C_{\text{liga}} P_v = C_{\text{liga}} w_v L_v = (1,2 + 0,4\gamma_3) w_v L_v \quad (2.56)$$

na qual  $w_v$  é o peso linear da sua seção, e o fator de custo da ligação ( $C_{\text{liga}}$ ) é uma proporção direta com o índice de fixação  $\gamma_3$ ,  $C_{\text{liga}} = (1,2 + 0,4\gamma_3)$ .

Constrói-se a Tab. 2.14 empregando-se as Eqs. 2.53, 2.54 e 2.56 para estudar melhor o dimensionamento da viga da Fig. 2.26(c). Tomando como referência o peso obtido pelo dimensionamento do biengaste (fator de custo  $C_{\text{viga}} = 100\%$ ), a ligação é a mais cara (fator de custo  $C_{\text{liga}} = 160\%$ ), chegando ao fator de custo total  $C_{\text{tot}} = C_{\text{viga}} \times C_{\text{liga}} = 160\%$ . Já a birrotulada, se a ligação é a mais barata (120%), o peso resultante do dimensionamento (proporcional ao momento plástico), seria (125%); e o total reduz-se com 6,25% de economia. Na opção semirrígida com a mesma seção da engastada ( $C_{\text{liga}} = 100\%$ ), mas uma ligação barata ( $C_{\text{viga}} = 135\%$ ) obtém-se uma boa economia (18,5%) (Gerschwindner, 1991).

Entretanto, existe a seguinte alternativa, ainda não explorada, no caso semirrígido. Adotam-se coeficientes de momentos iguais ( $m_A = m_C = 6,25$ ) e embora a ligação tenha um custo maior que a média ( $C_{\text{liga}} = 144\%$ ), o dimensionamento reduz ( $C_{\text{viga}} = 90\%$ ), com o que se encontra o fator de custo total ( $C_{\text{tot}} \approx 130\%$ ), uma economia de 18,75%.

Essa questão econômica, sem mencionar outras vantagens, justifica a maior divulgação do emprego da ligação semirrígida.

Outra questão é quando essa viga com ligação participa de um portal, supondo-se num primeiro instante, que só atuem cargas verticais na viga. Após ter sido atingido o ponto A, por ambas as ligações da viga de portal, é aplicada uma carga horizontal H (por exemplo, de vento) como representado na Fig. 2.29 (Sourochnikoff, 1949).

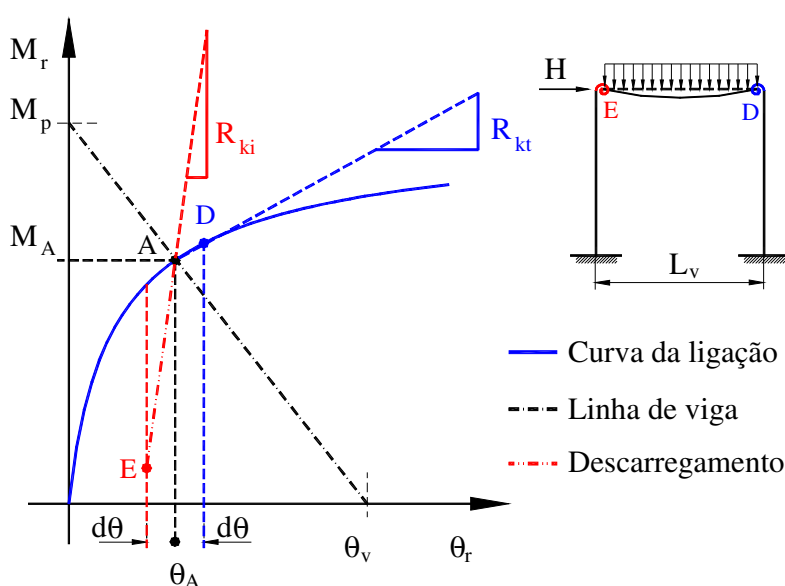
A ligação à direita ficará mais carregada, com um acréscimo  $d\theta$ , de modo que a rotação será  $\theta_D = \theta_A + d\theta$ , atinge o ponto D e a rigidez final será menor que a inicial, indicando maiores deformações dessa ligação, com o que  $M_D = M_A + R_{kt} d\theta$  (pequeno acréscimo)  $\approx M_A$  (Christopher & Bjorhovde, 1999).

Já para ligação do lado esquerdo, que entra em processo de descarregamento elástico (Popov & Pinkney, 1969), a sua rigidez é  $R_{ki}$  (próxima do máximo) e o momento no ponto E torna-se bem menor:  $M_E = M_A - R_{ki} d\theta$ .

**Tabela 2.14 Avaliação de custo da viga com ligação.**

Condição	Momentos		Índices de flexibilidade			Fator de custos		
	$m_A$ [%]	$m_C$ [%]	$\eta$	$g$	$\beta_k^{(1)}$	$C_{liga}$	$C_{viga}$	$C_{tot}^{(2)}$
Biengaste	8,33	4,16	0,00	0	$\infty$	1,60	1,00	1,600
Birrótula	0,00	12,50	0,50	$\infty$	0	1,20	1,25	1,500
Bisemirrígida	6,25	6,25	0,20	0,16	6	1,44	0,90	1,296
	4,16	8,33	0,33	0,50	2	1,35	1,00	1,350

Notas: 1) Coef. de rigidez relativa da ligação:  $\beta_k = (R_k L_v) / (EI_v) = 1/g$ , ou seja,  $R_k = \beta_k EI_v / L_v$ ,  
2) Fator de custo total  $C_{tot} =$  custo da viga  $C_{viga} \times$  custo da ligação  $C_{liga}$ .



**Figura 2.29 Ligação ao vento (Disque, 1964).**

Ou seja, enquanto a ligação em D tende a se comportar quase como uma rótula, a da esquerda se comporta com a rigidez máxima elástica. Esse duplo comportamento, que favorece alguns casos de dimensionamento (por exemplo, com ligações ao corte puro), como propôs Disque (1964) para ligações simples, desde que as vigas e colunas fossem capazes de resistir adequadamente – no regime elástico – aos esforços de vento. Esse fenômeno foi chamado de *ligação ao vento* (“wind connection”).

Para terminar esta parte, mostra-se outro emprego da *linha de viga*, que é auxiliar no pré-dimensionamento de ligações de vigas em pórticos deslocáveis. Seguindo o estudo de Nethercot (1985, 2000), que se baseia nas ideias de Sourochnikoff (1949), verificou-se que uma boa tentativa (pré-dimensionamento) é usar a estimativa inicial do ponto A ( $\theta_A, M_A$ ) da *linha de viga*, para se chegar ao equilíbrio mais rapidamente. Mas, no caso das estruturas deslocáveis, mesmo conhecendo esse ponto (A), o processo computacional pode ser demorado.

Assim, foi sugerido que se corrigissem os pontos da curva da ligação isolada,  $M-\theta$  da Fig. 2.30, somando os valores de momento-rotação da análise de segunda ordem linear elástica das colunas (marcada como “Col.”) considerando as ligações das vigas como engastadas (rígidas perfeitas), obtendo-se a curva de momento da ligação considerando a deslocabilidade da coluna ( $M-\theta + \text{Col.}$ ).

Portanto, o ponto A deixa de ser solução, sendo agora a solução o ponto S, que corresponde ao ponto B da curva  $M-\theta$  original, que é  $d\theta$  menor que  $\theta_S$ , sendo essa variação correspondente a movimentação de coluna, ponto C; todos relacionados ao mesmo momento do ponto solução S ( $\theta_S, M_S$ ). Ou seja, na curva  $M-\theta$  original o ponto B de provável equilíbrio seria encontrado por  $\theta_B = \theta_S - d\theta$ .

Outra forma de utilizar a *linha de viga* é trabalhar com a rigidez secante da ligação, como se ilustra na Fig. 2.31. O valor de rigidez determinado pelo ponto A (interseção da *linha de viga* e da curva ligação) é usado na análise elástica de segunda ordem, obtendo-se como solução o ponto B ( $M_B, \theta_B$ ), que determina na curva  $M-\theta$  o ponto C e o momento  $M_C$ , e com ele a nova rigidez secante  $R_{k2}$ . Segundo Al-Salloum & Almusallam (1995), esse processo permite a convergência com (4-6) tentativas, o que poderia ser facilmente incorporado num programa computacional.

Outros estudos (rememorando os trabalhos de Batho) também aplicam a *linha de viga* (Carskaddan *et al.*, 1984; Brown, 1986), inclusive adotando equações de curvas aproximadas parabólicas para estimar o comportamento dos pórticos (Estrin, 1992).

Tendo visto o comportamento simplificado da ligação por meio da estimativa de *linha de viga*, um resumo das ligações adotadas nesta tese é feito na seção seguinte.

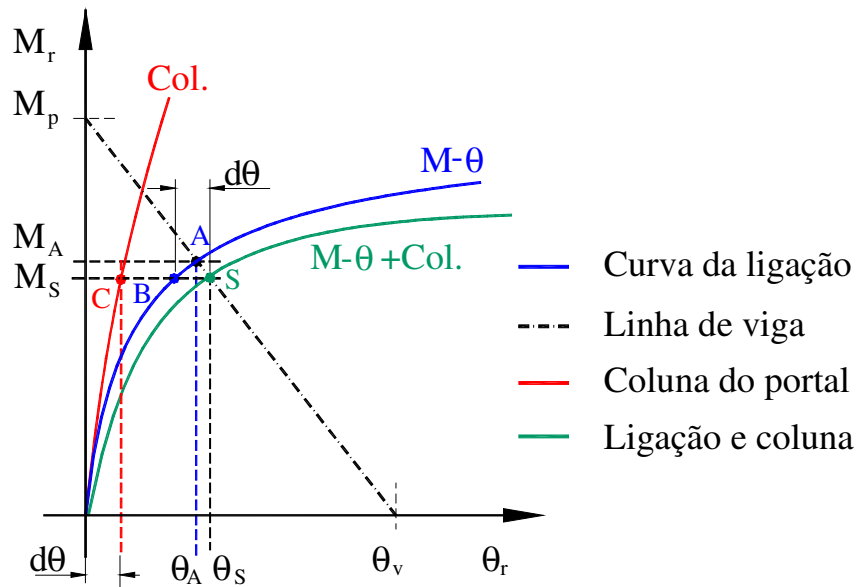


Figura 2.30 Efeito da coluna (Nethercot, 1985 e 2000).

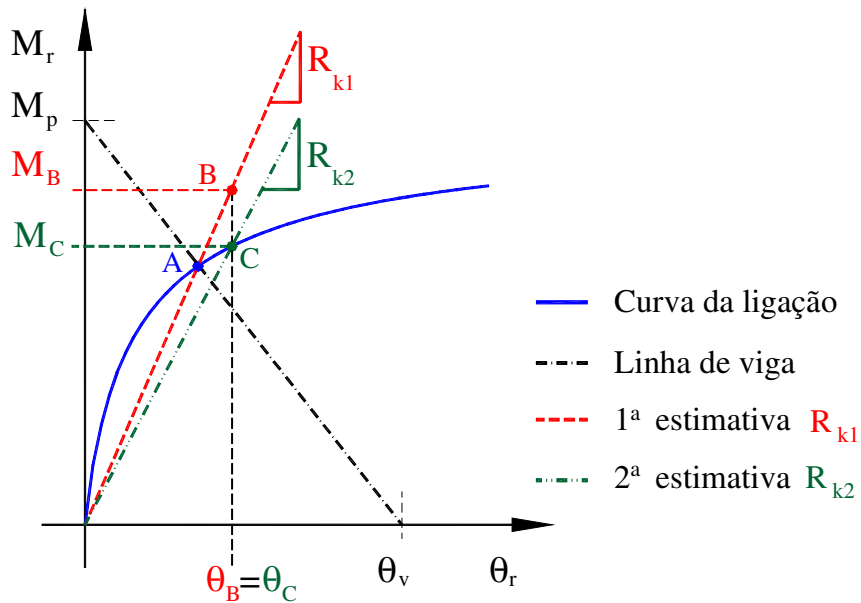


Figura 2.31 Aproximando o efeito da coluna (Nethercot, 1985 e 2000).

## 2.6 TIPOS DE LIGAÇÃO ANALISADOS

Nesta seção faz-se apenas uma descrição de alguns dentre os diversos de tipos de ligação disponíveis, indicando suas deformações principais e as pesquisas referentes mais importantes. Alguns desses tipos, adotados na tese de forma indireta (curvas M- $\theta$ ), são ligações mais comuns, a saber (ver Fig. 2.4):

- a. soldadas – Fig. 2.4(a);
- b. com 2 perfis Ts – Figs. 2.4(e-f);
- c. com chapa estendida de topo – Figs. 2.4(j-k);
- d. com chapa cortada ou de cabeça – Figs. 2.4(g, i);
- e. com cantoneiras – Figs. 2.4(m, n, o); e
- f. rótulas de fato.

As pesquisas mais recentes sobre essas ligações serão indicadas num trabalho complementar, na forma de um relatório interno posterior (Alvarenga, 2010). Agora são ressaltados rapidamente alguns pontos importantes que as caracterizam. Aspectos analíticos de forma a obter curvas M- $\theta$  pelo método das “componentes” foram detalhados por Faella *et al.* (2000).

### 2.6.1 Ligações soldadas

É a ligação do tipo rígida, ou a mais rígida. Algumas atingem a rigidez inicial da ordem de  $6,78 \cdot 10^7$  kNm/rad (Ackroyd & Gerstle, 1982). Na realidade, as soldas não apresentam deformações significativas e sua ruptura é do tipo frágil. Além disso, há alguma melhoria na resistência quando o esforço atua perpendicularmente ao filete (deformações em média entre 5-9% da deformação da peça ligada), e o contrário, se longitudinal ao cordão (deformações crescem para 12-16%), como reconheceu o AISC (Inwankin, 1997), com destaque aos estudos de Witteveen *et al.* (1982).

Assim, a rotação dessa ligação ocorre em função de deformações nas próprias partes componentes da união (viga e coluna), como ilustrado na Fig. 2.32. Uma parte importante reside nos rasgos, chanfros, peças de apoio e preparação para a soldagem.

É comum a existência de enrijecedores, tendo em vista que os esforços locais tendem a crescer, e com isso, procura-se reforçar a coluna, evitando o efeito de esmagamento do painel e distorções por cisalhamento (Yardimci *et al.*, 1996).

El-Ghazaly (1995) estudou o comportamento momento-rotação de ligações simétricas em colunas, incluindo a flambagem de painel, e avaliou a influência da altura da viga. Englehardt & Husain (1993) fizeram ensaios experimentais dinâmicos em ligações com talas soldadas e alma aparafusada. El-Tawil (2000) verificou o efeito dessas uniões no painel de colunas. Barson & Pellegrino (2002) estudaram as causas da ruptura dessas soldas no terremoto de Northridge (1994). Goel *et al.* (2000) apresentaram um modelo com chapas verticais e horizontais que soldam indiretamente as abas da viga na coluna, num apoio tipo cruciforme, numa analogia às construções com treliças. Dubina & Stratan (2002) realizaram ensaios avaliando a performance, a influência da forma de soldagem, a resistência do aço depositado e custos.

### 2.6.2 Ligações com perfis Ts

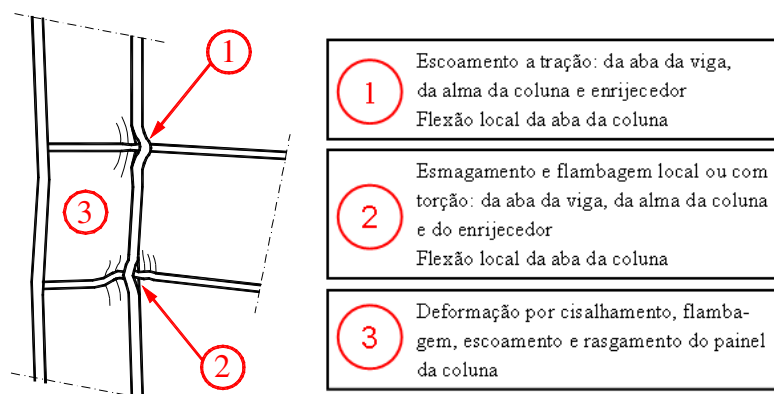
Essa ligação com (*tocos*, “stubs”) Ts [vista na Figs. 2.4(e-f)] é a aparafusada mais rígida, com  $R_k > 113$  MN/rad (Ackroyd, 1979), porém, atualmente, seu emprego é reduzido. A razão está na quantidade de operações de furação envolvidas, nas abas e alma dos 2 Ts e na viga em ambas as abas, o que resulta também mais operações de colocação e aperto de parafusos na montagem, com a conseqüente elevação do custo, por isso foi substituída, no uso em geral, pela de chapa de topo estendida. Todavia, no início da construção de aço, aqui e também fora do Brasil, aproximavam-se os comportamentos da última ligação, por meio dos ensaios de perfis Ts dessa ligação. Assim, as pesquisas de ambos os tipos estiveram unidas por vários trabalhos.

Sendo uma ligação de característica rígida, o projetista preocupar-se-á com vários detalhes. Ocorrem elevados efeitos locais na coluna (flexão e flambagem local das abas, cisalhamento e flambagem da alma) e a possível necessidade de enrijecedores. O painel da coluna tende a sofrer tensões e deformações elevadas, efeitos de alavanca, deformação e ruptura de parafusos, incluindo a ruptura na seção líquida da alma no corpo do T que se liga à aba tracionada da viga, como ilustrado na Fig. 2.33. Além disso, os mesmos estados críticos, vistos na ligação anterior, participam aqui também.

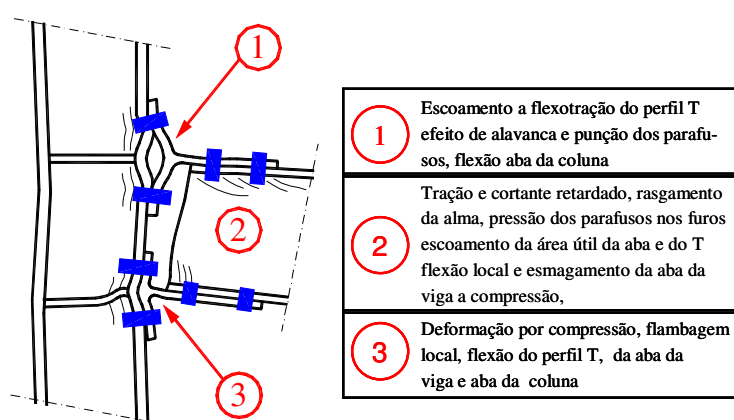
Beedle & Christopher (1964) avaliaram experimentalmente a rigidez de ligações de vigas soldadas de topo, com 2 perfis Ts ou chapa estendida aparafusada ou rebitada, demonstrando a capacidade de atingirem o momento plástico da viga.

Douty & McGuire (1965) foram os primeiros a fazer ensaios e propor fórmulas de dimensionamento aproximadas, baseadas em seus ensaios.





**Figura 2. 32 Deformação da ligação soldada.**



**Figura 2. 33 Deformação da ligação com perfis Ts.**

Fórmulas elastoplásticas foram posteriormente apresentadas também por Struick & de Back (1969) usando os ensaios experimentais de Schutz (1959). De Back & Zotemeijer (1972) determinam três mecanismos possíveis de falha na aba aparafusada na coluna, avaliando o efeito da variação da espessura dos Ts, agora colocados com as almas dispostas em perpendicular, como se mostra nas Figs. 2.34(a-b). Deve-se esclarecer que uma boa parte da pesquisa experimental tratada nesta subseção, prende-se ao estudo do comportamento desses 2 Ts à tração. Então, ao aplicar a força de tração (T), a deflexão da aba do perfil T vai encontrar apoio, ou seja, contato na outra parte (coluna), o que gera um esforço adicional ( $Q_p$ ), de flexão local, conhecido como *efeito de alavanca* representado na Fig. 2.34(c). Em vários trabalhos estudou-se a mecânica desse comportamento, propondo modelos e formas de avaliação.

Agerskov (1976) propôs o estado limite para a ligação com 2 perfis Ts baseado na situação que ocorrer primeiro: a separação entre as partes ou aparecimento de tensões de escoamento na aba (ou na chapa estendida).

Nair *et al.* (1974) estudaram o *efeito de alavanca* variando as dimensões geométricas dos Ts, para parafusos ASTM A 325 ou ASTM A 490, e propuseram equações semiempíricas para avaliar este efeito. Zotemeijer (1974) fez ensaios com Ts reforçados, de forma a provocar deformações plásticas nos Ts que representavam as colunas, determinando mecanismos de colapso, com base nos quais desenvolveu as equações para este estado limite.

Packer (1975) variou a pré-tensão dos parafusos, disposição e enrijecimento dos Ts das colunas propondo equações alternativas para os casos de coluna não enrijecida. Packer & Morris (1977) também fizeram sugestões complementares ao trabalho de De Back & Zotemeijer (1972).

Graham (1993) fez a avaliação de 2 perfis Ts simétricos, variando a espessura e a pré-tensão. Esse pesquisador mostrou a influência do encruamento no limite de deformação das chapas ligadas, sugerindo uma equação para determinar o *efeito de alavanca* na ruptura dos parafusos.

Esses estudos com 2 perfis T serviram para abalizar tanto essas ligações quanto as de chapa estendida, tratadas na subseção seguinte. Posteriormente, verificou-se a necessidade de estudos com a configuração da chapa de topo completa, separando-se então as conclusões e os trabalhos feitos até então com os 2 perfis Ts (Graham, 1993).

Acompanhando a representação da Fig. 2.34(d), verifica-se que a aba mais espessa quase não se deforma, e assim, o *efeito de alavanca* não se manifesta, sendo comum nesses casos a ruptura dos parafusos, chamada “frágil”. A aba é dita semirrígida [ver Fig. 2.34(e)] quando se deforma e aparece a força ( $Q_p$ ) com valores médios [15-20% da carga do parafuso,  $(T/2)$ ]. Já a aba flexível da Fig. 2.34(f) é a que mais se deforma, provoca um *efeito de alavanca* maior, podendo atingir 30% da carga do parafuso ou mais (Swanson, 2002). Todos esses mecanismos dependem, também, das condições geométricas: distâncias de borda, extensão do perfil T, furo e parafuso, etc. O modelo de Struick & De Back (1969) foi o que apresentou fidelidade maior aos ensaios experimentais (Swanson, 2002).

É frequente o emprego desse modelo de comportamento dos Ts para outras análises de ligações similares (Faella *et al.*, 2000), mesmo com alguma distorção. Alguns benefícios são desprezados (Shi *et al.*, 1996) e adota-se uma interpretação rigorosa do comportamento das partes flexionadas que compõem a ligação. Alguns pesquisadores, entretanto, questionam a existência do *efeito de alavanca* em parafusos

pré-tensionados e o efeito de punção decorrente, que está atuando antes da solicitação estrutural (efeito das cargas) (discussão de Khrisnamurthy com Sherbourne, 1996).

Swanson & Leon (2000) fizeram ensaios experimentais de Ts, Gebbeken *et al.* (1999) realizaram estudos numéricos, Piluso *et al.* (2001) definiram a carga última de perfis Ts com o método das “componentes” e Coelho *et al.* (2004b) fizeram estudos com ligações empregando Ts soldados.

Por fim, Gantes & Lemonis (2003) estudaram por meio de modelos numéricos, o efeito das dimensões, aperto e comprimento dos parafusos nessas ligações.

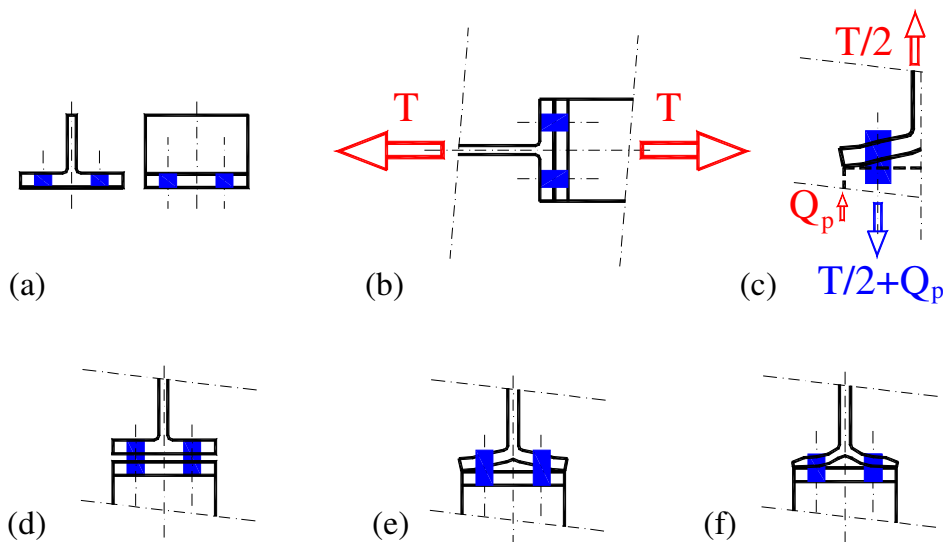
### **2.6.3 LIGAÇÕES COM CHAPA ESTENDIDA**

Trata-se do tipo de ligação mais atribuído à construção rígida hoje em dia. Devem-se destacar, entretanto, algumas variações. Emprega-se a chapa estendida para o lado superior para momentos de continuidade (negativos). Quando ocorrem inversões de momento, entretanto, a chapa é estendida para os dois lados. Nas figuras 2.4(j-k), respectivamente, ilustram-se essas diferenças.

O início de sua pesquisa se mistura à do tipo anterior, requerendo cuidados similares do projetista, porém algumas diferenças devem ser ressaltadas. Enquanto no caso dos Ts as abas com furações e a alma dos Ts representam partes mais sensíveis da ligação, na chapa estendida, como se representa na Fig. 2.35, os efeitos concentradores das soldas e as tensões residuais decorrentes da soldagem permitem um comportamento mais frágil em presença de momentos elevados.

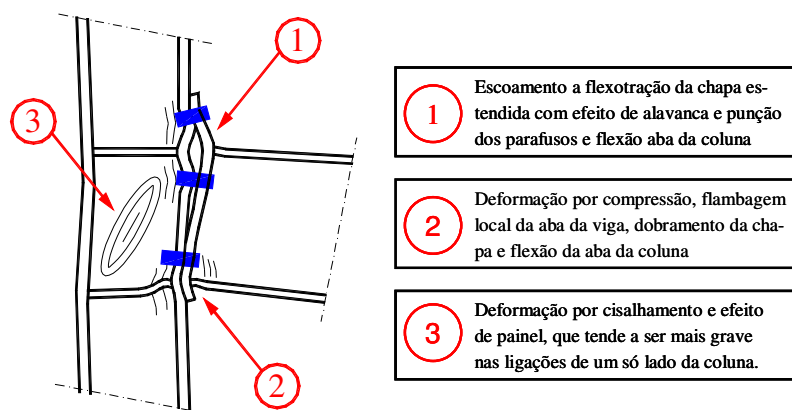
Johnson *et al.* (1959) verificaram a alta capacidade de rotação e produção de rótulas plásticas para ligações com parafusos de alta resistência. Sherbourne (1961) avaliou que a capacidade de rotação é determinada pela deformação plástica da chapa. A definição da espessura dessa chapa para projeto foi proposta em trabalhos de Mann (1968), bem como de Surtes & Mann (1970).

Bailey (1970) também determinou equações que consideram o efeito do escorregamento. Já Zoutemeijer (1974) realizou ensaios em pórticos de tamanho real com essas ligações. Packer (1975) verificou o efeito da espessura do flange da coluna, sendo posteriormente analisada a influência dos enrijecedores. Um sumário para projeto em estados limite foi apresentado por Packer & Morris (1977).



**Figura 2.34 Ensaio de Ts à tração.**

(a) perfil T isolado; (b) montagem para ensaio; (c) efeito de alavanca  $Q_p$ ; T com aba: (d) rígida; (d) semirrígida; (e) flexível.



**Figura 2.35 Deformação da ligação com chapa estendida.**

Bahia *et al.* (1981) avaliaram colunas não enrijecidas e Graham (1993), o cortante combinado nos parafusos, dimensionando a ligação pela flexão da aba da coluna. Yee e Melchers (1986) desenvolveram um modelo próprio de curva  $M-\theta$ , incluindo o efeito dos parafusos na determinação dos seguintes parâmetros dessa ligação: momento último, rigidez inicial e plástica. Jenkins *et al.* (1986) mostraram que o parafuso interno pode absorver mais carga que o externo, dependendo da flexibilidade da chapa.

Goverdham (1988) fez um estudo sobre curvas  $M-\theta$  de ligações com chapa de topo estendida ou cortada, comparando resultados experimentais e analíticos.

Bahaari & Sherbourne (1994, 1996 e 2000) fizeram diversas simulações numéricas de chapas estendidas e usaram fórmulas paramétricas com o modelo de Richard & Abbott (1975). Coelho *et al.* (2004a) realizaram o ensaio experimental da ligação com chapa de topo soldada sem penetração total.

Foley & Vinnakota (1995) empregaram o modelo de Kishi & Chen (1987) e determinaram parâmetros para a obtenção das curvas  $M-\theta$  dessa ligação. Bursi & Jaspart (1997), Troup *et al.* (1998) e Nemati *et al.* (2000) empregaram o método das “componentes” ou o MEF, para posteriormente, por regressão, apresentarem seus resultados.

Mofid *et al.* (2001) desenvolveram estudo analítico para avaliar o comportamento da ligação considerando efeitos de placa e de membrana em solução fechada, no regime elástico.

Lima *et al.* (2004) estudaram o efeito do axial na curva  $M-\theta$  para essa ligação usando experimentos e o método das “componentes”; já Maggi *et al.* (2005) empregaram o MEF, abalizado por ensaios experimentais para chapa estendida de um só lado (assimétrica).

Destacam-se vários ensaios experimentais para este tipo de ligação: Jenkins *et al.* (1986), Tsai & Popov (1990), Aggarwal (1994), Adey *et al.* (1998), Yorgun & Bayramoglu (2001) (dentre outros citados por Mofid *et al.*, 2005), que têm sido empregados para o desenvolvimento do método das “componentes”.

Além disso, o EUROCODE (2002) traz, junto com o BCSA (1995), uma série ligações padronizadas para projeto contendo tabelas com detalhes e esforços de dimensionamento compatíveis, além de um roteiro para obter-se a curva  $M-\theta$  empregando o método das “componentes” (Faella *et al.*, 2000).

#### **2.6.4 LIGAÇÕES COM CHAPA CORTADA E CHAPA DE CABEÇA**

A ligação com chapa cortada tem um comportamento intermediário, ou seja, não é tão rígida como a de chapa estendida, nem tão flexível como a de chapa de cabeça. De toda forma, a espessura da chapa e o *efeito de alavanca* devem ser observados na sua análise, dentre outros aspectos.

As deformações desta ligação, mostradas na Fig. 2.36(a), imitam as já indicadas na parte interna da viga para a chapa estendida, porém com um comportamento mais leve para a coluna, como ocorre também para outras uniões de comportamento similar.

Já a ligação com chapa de cabeça, indicada na Fig. 2.36(b), é flexível e seu comportamento é semelhante ao de 2 cantoneiras de alma, (Owens & Moore, 1992).

O trabalho experimental de Kennedy (1969) possibilitou a compreensão do comportamento da chapa de cabeça com alguns estudos analíticos e forneceu dados para o modelo polinomial de Sommer (1969; Kennedy, 1969).

Recentemente, Broderick & Thomson (2005) fizeram estudos experimentais da ligação de chapa cortada avaliando sua rigidez e sua ductilidade quando submetida a carregamento cíclico. Schuab (1998), dentre outros, citado por Albommali *et al.* (2003), também apresentaram trabalhos sobre o tema, incluindo ligações contendo uma ou duas linhas de parafusos tracionados.

Albomaali *et al.* (2005) apresentaram duas curvas  $M-\theta$ , uma com a equação de Ramberg & Osgood (1943) e outra com a de Kishi & Chen (1987), desenvolvidas com base nos resultados obtidos por uma modelagem numérica da ligação, calibrada com resultados experimentais.

### 2.6.5 LIGAÇÕES COM CANTONEIRAS

A ligação com cantoneiras de alma foi o primeiro tipo de ligação a ser avaliado experimentalmente (Batho & Rowan, 1934) e é classificada como flexível na maioria das aplicações (ou como “rotulada”).

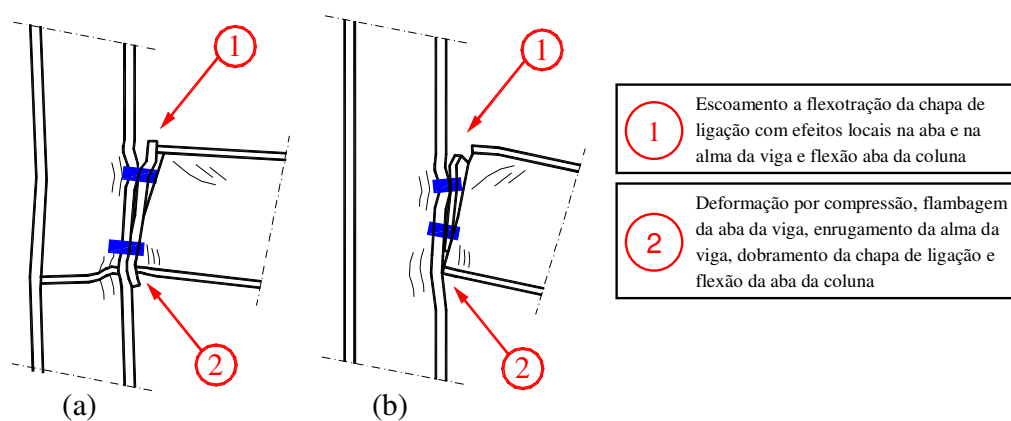
Seu aparecimento coincidiu com a construção metálica usando rebites, os quais, em sequência, foram substituídos gradativamente por parafusos comuns e em seguida pelos parafusos de alta resistência. Munse *et al.* (1959) comprovaram que a resistência das cantoneiras de alma cresce quando se substituíam rebites por parafusos de alta resistência. Na mesma época, surgiram as opções de 2 Ls de aba, e também as ligações com 3 Ls ou com 4 Ls. Johnson & Green (1940) estudaram ligações com 2 Ls de alma ou 2 Ls de aba soldadas nas colunas ou soldadas na viga.

Deve-se mencionar, entre as deformações desenhadas na Fig. 2.37(a) para os 2 Ls de alma, a que acontece na aba de cada cantoneira, com a formação de duas linhas (charneiras) plásticas, que a faz abrir, permitindo um afastamento maior da face da aba superior da viga, bem como uma aproximação da aba inferior, que muitas vezes colide com a coluna. Tal contato, indicado na Fig. 2.9, faz surgir um acréscimo de resistência e rigidez, como já mencionado, que se recomenda ignorar.

Esse fenômeno é comum a outras ligações de alma como a chapa lateral da Fig. 2.4(b) e a chapa de cabeça da Fig. 2.4(g), merecendo o mesmo cuidado.

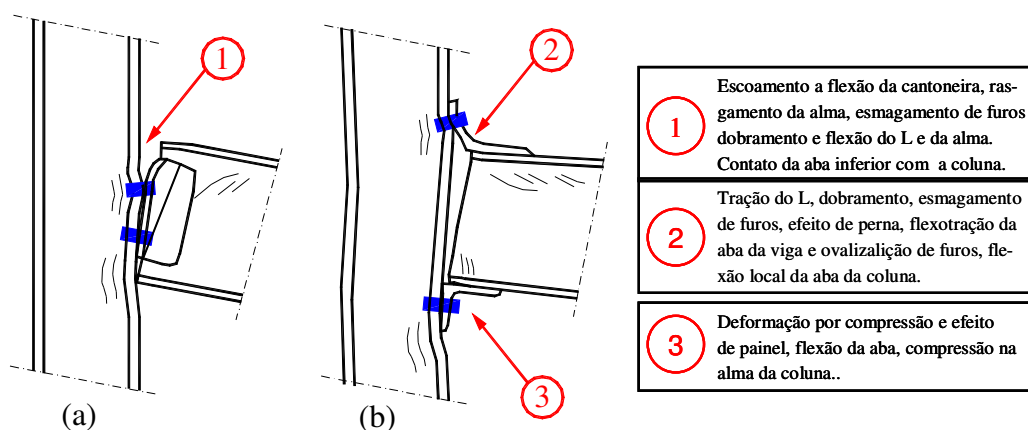
O projetista deve ter cautelas adicionais com os efeitos de rasgamento, esmagamento dos furos, ruptura de parafusos ao esforço combinado (flexão e corte), alguns efeitos secundários na alma (em caso de recortes da aba da viga) e, principalmente, na própria aba da cantoneira.

Lipson (1968) fez o estudo de tala de alma e cantoneira de alma com parafusos, comprovando sua maior rigidez com parafusos de alta resistência (em vez de usar rebites). Comprovou, também, a grande não linearidade dessas ligações e as rotações da ordem de 50 mrad, consideradas elevadas.



**Figura 2. 36 Deformação das ligações semirrígidas:**

(a) chapa cortada rente; (b) chapa de cabeça.



**Figura 2. 37 Deformação das ligações de cantoneiras:**

(a) cantoneiras de alma; (b) cantoneiras de aba.

A consequência do recorte nas abas das vigas, nas ligações com 2Ls de alma, foi verificada por Birkmoe & Gilmor (1978) que demonstraram o risco de rasgamento da alma próximo ao parafuso mais externo.

Richard *et al.* (1980) estudaram o efeito da chapa soldada na coluna e aparafusada na viga da Fig. 2.4(b), cujo comportamento se aproxima, também, do caso de 2Ls de alma, quando estes são soldados à coluna. De Falco & Marino (1966), conforme Sugimoto & Chen (1982), sugeriram alguns valores médios da rigidez inicial para projeto baseando-se no número de parafusos (para 2 Ls de alma) ou altura da viga (para 2 Ls de aba), como mostrado na Tab. 2.15.

Chen & Lui (1983) iniciaram o estudo do benefício das ligações flexíveis no travamento das colunas usando 2Ls de alma e 2Ls de aba.

As deformações da ligação com duas cantoneiras de aba são representadas na Fig. 2.37(b), sendo que a opção com 4Ls, na realidade, é uma soma de efeitos dos tipos anteriores, sendo válidas as três observações numeradas na figura. O seu estudo tem ênfase com os trabalhos analíticos de Kishi & Chen (1987). Os resultados, porém, são apresentados com o modelo matemático da curva potencial dada pela Eq. 2.31, calibrada experimentalmente com parâmetros de forma.

Attiogbe & Morris (1991) apresentaram comparações das fórmulas de Richard & Abbott (1975) com as de Ramberg & Osgood (1943), determinando parâmetros pelo método dos mínimos quadrados para essa ligação e gabaritando-os com os ensaios de Onuah *et al.* (1989).

Mander *et al.* (1994) estudaram o ciclo de fadiga para 2Ls de aba, empregaram, no caso monotônico, a curva  $M-\theta$  de Menegotto & Pinto (1973), indicaram a grande plasticidade e encruamento da ligação, bem como a influência da cabeça do parafuso, da porca, da arruela e o do aperto do conjunto, no comportamento da ligação.

**Tabela 2.15 Valores aproximados de rigidez  $R_k$  <sup>(1)</sup>.**

Tipo	Parâmetro associado			Rigidez $R_k$ $10^5$ [kNcm/rad]	
	Descrição	mín.	máx.	mín.	máx.
2 L alma	num. parafusos	3	10	3,7	323
2 L aba	altura viga [mm]	203	915	245	2170

Nota: 1) segundo De Falco & Marino (1966).



Bhatti & Hingtgen (1995) estudaram parametricamente o efeito da semirrigidez em portais, usando as equações analíticas de Kishi & Chen (1987), para os três tipos de ligação com Ls. Kim & Chen (1996c) comprovaram que a determinação da potência  $C_1$  da Eq. 2.31 mediante o ajuste de curva era melhor do que com o emprego da equação empírica de Kishi & Chen (1987), para a ligação com 2Ls de aba.

Benuzzi *et al.* (1996) constataram que o comportamento das ligações no experimento de estruturas era inferior ao apurado em ensaios da ligação isolada, por meio do modelo em balanço (ou T deitado). Essa conclusão evidenciou que o comportamento das ligações com Ls precisavam de novas avaliações. Zandonini & Zenon (1996) procuraram estudar a influência do cortante em ligações semirrígidas com cantoneiras, diagnosticando os seguintes casos:

- a. a ligação com 2Ls de abas pode ter resistência próxima e até superior a uma ligação com 4Ls;
- b. aumentar a espessura dos Ls da ligação não majora necessariamente a resistência da mesma;
- c. com o apoio da aba da viga na coluna, ligações com 2Ls de alma e similares podem suportar momentos de ligações maiores, como os de uniões com Ls nas abas, em situações em que o cortante predomine (vão menores  $L_v < 5m$ ). Assim, o cortante pequeno permite que a ligação seja mais rígida (com 2Ls de aba, com ou sem os de alma), o inverso quando este cortante é elevado: e,
- d. a ligação de alma permanece mais flexível, não recebendo influência do cortante.

Faella *et al.* (1996) utilizaram o método das “componentes” e o estudo analítico de Kishi & Chen, (1987) para desenvolver a curva  $M-\theta$  na ótica do Eurocode 3 (1992).

Posteriormente, Kim & Chen (1998) apresentaram uma tabela de dados para a equação potencial de Kishi & Chen (1987), da ligação com 4Ls, empregando parâmetros de dimensionamento usuais do AISC (1993). Lourenço *et al.* (1997) realizaram um estudo experimental para determinar o ciclo de histerese pra ligação com 2Ls de aba.

Chisalla (1999) propôs outro modelo exponencial com análise paramétrica estudando ligações com duas cantoneiras (2Ls de alma ou de aba). Shen & Astaneh-Asl (1999) estudaram o diagrama de histerese para ligações com Ls, para terremotos.

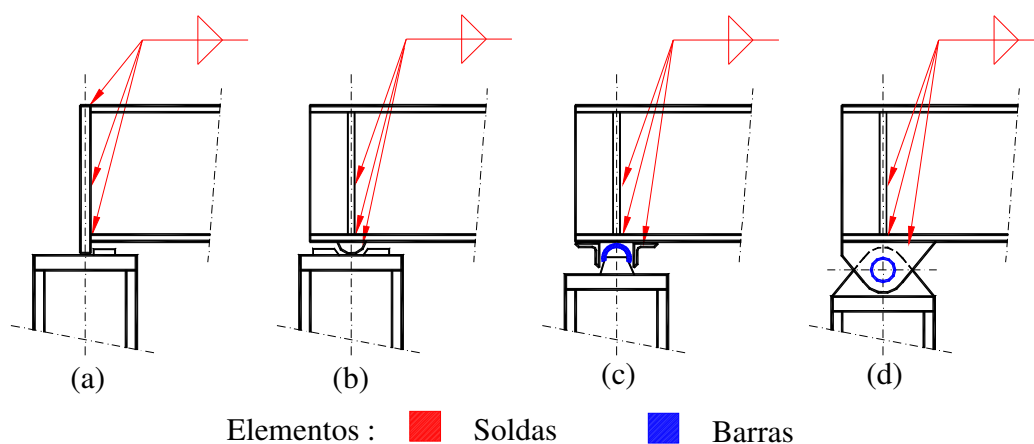
Pucinotti (2001) desenvolveu o método das “componentes” para as ligações com 2Ls de aba, ou 4Ls. Lee & Moon (2002) apresentaram novos resultados de ensaios, processo analítico e curvas  $M-\theta$  obtidas com a Eq. 2.39 do modelo de Wu & Chen (1990). Citipitioglu *et al.* (2002) avaliaram o efeito do deslizamento em ligações com 4Ls. Albomaali *et al.* (2003) propuseram um diagrama de histerese para 2Ls de alma, Garlock *et al.* (2003) para 2Ls de aba, enquanto Calado (2003) faz o mesmo para 4Ls, porém adotando o método mecânico (das “componentes”).

### 2.6.6 RÓTULAS DE FATO

Nesta subseção, apenas complementa-se uma visão geral das ligações, pois sempre se trata a ligação flexível ou com baixas rigidez e resistência ( $M_u \leq 25\% M_p$ ) como uma rótula. E, como mostrado, ligações com chapa soldada lateral à alma, com duas cantoneiras de alma ou chapa de cabeça, das Figs. 2.4(b-g-o), respectivamente, e outras similares, são “rotuladas”, mas não são rótulas.

Para construir uma ligação que se aproxime da rótula perfeita, existem quatro formas representadas na Fig. 2.38, cuja preocupação foi enfatizar a liberdade de giro. Entretanto, o meio mais comum realmente é o olhal [ver Fig. 2.38(d)]. Naturalmente, alguns dispositivos complementares para travamento laterais ou guias são necessários para garantir posição e estabilidade.

As ligações de emendas de trechos de colunas ou de vigas, com talas e similares entre outras, foge dos objetivos com este trabalho, porém na próxima seção algumas considerações sobre as ligações de base das colunas são apresentadas.



**Figura 2.38** Ligações por rótulas:

(a) apoio em chapa; (b) apoio em berço ou meia-lua; (c) apoio em rolete; (d) olhal.

## 2.7 LIGAÇÕES NAS BASES

As bases das colunas constituem uma parte pouco lembrada quando se fala da influência da semirrigidez das ligações nas estruturas. Faz-se uma apresentação nesta seção apenas para complemento do assunto, já que ainda não se dispõem de curvas  $M-\theta$  bem calibradas e, assim, não se adotaram ligações nas bases nos exemplos desta tese.

Os primeiros estudos dessas ligações aparecem com Salmon *et al.* (1955). Já De Wolf & Sarisley (1980) verificaram bases à compressão excêntrica e Thambiratnam & Paramasivam (1986) avaliaram as espessuras das chapas de base à compressão excêntrica, com apenas um chumbador à tração. A partir daí, surgiram os trabalhos de Melchers (1992) e associados (Hon & Melchers, 1987) e Ermopoulos & Stamatopoulos (1996a,b), os primeiros para as bases rotuladas e os últimos, para as rígidas. Wald *et al.* (1996) e Jaspert & Vandegans (1998) realizaram uma série de ensaios e desenvolveram fórmulas analíticas com o método das “componentes” para ambos os tipos de base, com o primeiro artigo definindo a rigidez da ligação e o segundo, propondo as curvas  $M-\theta$ .

A influência das bases no comportamento estrutural já foi comprovada tanto em coluna isoladas (Lau *et al.*, 2003), como também em pórticos (Hayalioglu & Degertekin, 2005), o que justifica a sua inclusão neste estudo.

Em nível de construção, identificam-se, tradicionalmente, dois tipos de base:

- a. rotuladas – nas quais se supõe, *a priori*, que os chumbadores não resistem aos esforços rotacionais, e um pequeno giro da base é permitido sem a presença de esforços. Experimentalmente, entretanto, comprova-se a existência de uma pequena resistência que pode ser considerada para a coluna; e
- b. engastadas – nas quais se supõe que os chumbadores e a placa de base fornecem à estrutura a rigidez necessária para absorver todos os esforços e transmiti-los às fundações, não apresentando qualquer rotação da coluna naquele ponto. De fato, tanto sob condições últimas como nas de serviço, podem ocorrer rotações que não se devem desprezar. Cabe verificar qual a influência delas no comportamento estrutural, principalmente em relação à consequente movimentação horizontal dos pavimentos superiores.

Como já esperado, nenhuma dessas hipóteses se cumpre perfeitamente na prática e, por consequência, ambos os tipos de base dependem também da parcela de esforço axial atuante para definir o seu comportamento de ligação quanto ao giro  $M-\theta$ .

Não foram realizados muitos experimentos, tampouco se dispõe de muitos trabalhos de pesquisadores, o que torna um ensaio experimental desse tipo desafiador. O Eurocode 3 (1992), por exemplo, apenas aborda o caso da compressão pura, ignorando o efeito dos momentos e excentricidades (Ermopoulos & Stamatopoulos, 1996a).

A maior parte dos resultados disponíveis foi produzida por métodos numéricos (MEF) ou analíticos (das “componentes”) e alguns foram obtidos por meio de fórmulas matemáticas explícitas, como as da seção 2.5. Os tipos de base tradicionais são descritos nas subseções seguintes.

### 2.7.1 BASES ROTULADAS

Essa ligação é representada na Fig. 2.39 e tradicionalmente não absorve momentos. Por essa razão, como se elucida na figura, os chumbadores são colocados:

- a. um par no centro, que é mais tradicional; ou
- b. quatro chumbadores centrais, quando o esforço cortante é maior.

Quando ocorre o giro da ligação ( $\theta_r$ ) porém, surgem esforços de tração e a resultante do axial se desloca do centro linear da coluna, gerando um pequeno momento na base. Murray (1983) fez os primeiros estudos modernos desse tipo de base, incluindo o arrancamento do chumbador, mas considerando uma pequena carga de compressão.

Melchers (1992) propôs um método analítico para obtenção da rigidez inicial e da curva  $M-\theta$ . Melchers & Hon (1987) adotaram a Eq. 2.41 (Yee & Melchers, 1986) para descrever o comportamento dessa ligação, que inclui vários parâmetros (ver Fig. 2.39):

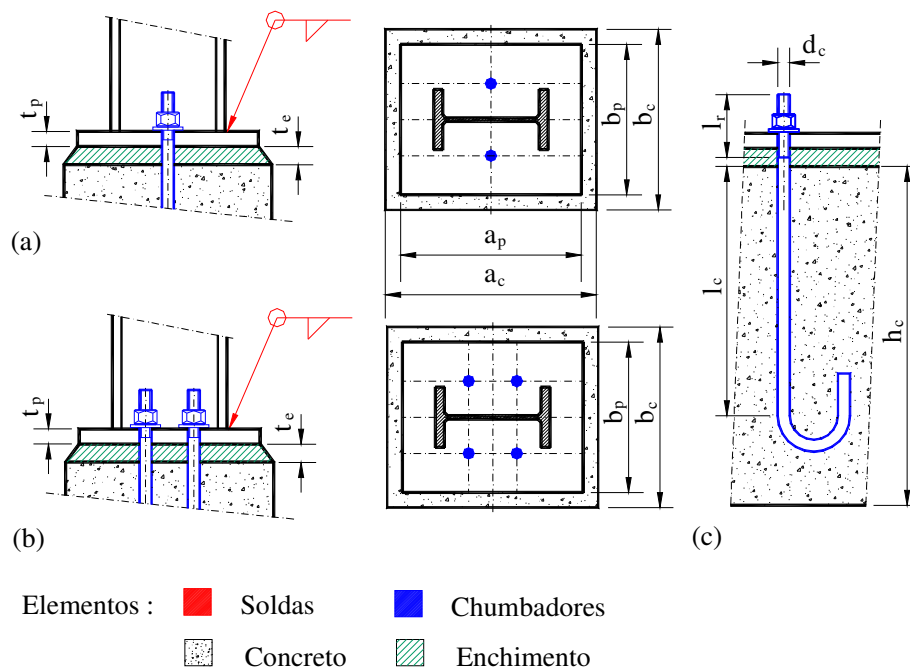
- a. dimensões da chapa – extensão  $a_p$ , largura  $b_p$  e a espessura da chapa  $t_p$ ;
- b. excentricidade –  $e = M/N$  (relação entre a carga axial e o momento na base);
- c. dimensões e propriedades do chumbador – comprimento de ancoragem  $l_c$ , extensão da rosca  $l_r$ , diâmetro  $d_c$ , tensão de escoamento  $\sigma_{yb}$ , forma da ponta; e
- d. dimensões e propriedades da base de concreto – extensão  $a_c$ , largura  $b_c$ , altura  $h_c$ , tensão última de referência  $\sigma_{ck}$ , altura do enchimento  $t_e$ , módulo elástico do concreto  $E_c$ ; entre outros.

Algumas dimensões são empregadas para definir larguras de borda, pressões na base e a tração dos chumbadores, bem como o possível *efeito de alavanca*. A desvantagem de se empregar esse modelo é que há muitos parâmetros envolvidos.

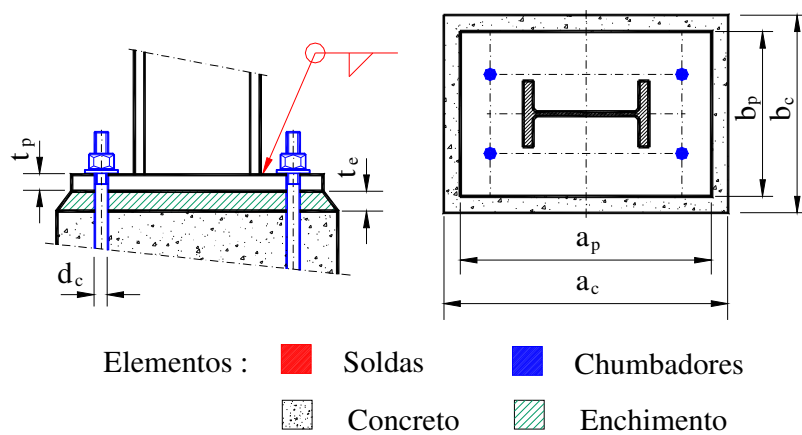
Adicionalmente, a base de dados empregada para calibrar as fórmulas é bem reduzida ainda, carecendo de maior comprovação experimental, principalmente para colunas de seções maiores e sujeitas a maiores esforços nas bases.

### 2.7.2 BASES ENGASTADAS

A ligação avaliada nesse contexto, representada na Fig. 2.40, refere-se às condições de pequenos a médios esforços, não se requerendo reforços locais da chapa, ou mesmo a construção de grelhas para transmissão de esforços de compressão.



**Figura 2.39 Bases de colunas rotuladas:**  
 (a) com 2 chumbadores; (b) com 4 chumbadores centrais; (c) detalhe do chumbador.



**Figura 2.40 Bases de colunas engastadas.**

Os parâmetros são os mesmos do tipo anterior, porém, aqui, supõe-se que a base terá rigidez suficiente para absorver os esforços (momentos) de projeto.

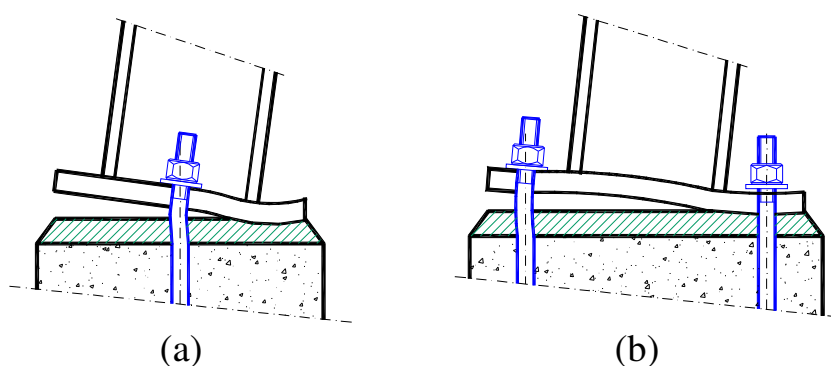
Ermopoulos & Stamatopoulos (1996a,b) desenvolveram modelos de curvas  $M-\theta$  tanto para análise estática como dinâmica. Esses pesquisadores apresentaram uma formulação analítica em que o esforço normal atuante e as tensões de compressão resultantes determinam em qual dos 15 possíveis diagramas de equilíbrio a base será enquadrada. Conforme a posição da resultante das pressões sobre a placa, o alongamento do chumbador e a tração atuante, calcula-se o momento resultante e o ângulo de giro procurado.

Scacco (1992) avaliou o efeito do cisalhamento e da tração combinados nos chumbadores para projeto. Jaspert & Vandegans (1998) desenvolveram métodos analíticos das “componentes” para essa base. O dimensionamento, segundo a ótica dos estados limite pelo AISC (1993), foi tratado por Drake & Elkin (1999).

Kotonleon *et al.* (1999) realizaram uma série de ensaios experimentais e numéricos com o MEF, abordando o comportamento de bases à flexocompressão considerando o efeito do contato e o levantamento da base.

Liew *et al.* (1997) e Chan *et al.* (2005) empregaram a análise avançada para alguns estudos de estruturas com ligações não lineares nas bases também.

As deformações dessas bases podem ser entendidas acompanhando a Fig. 2.41, na qual se mostra que quando o chumbador se alonga permite o giro da base, em geral, em relação ao flange mais comprimido, e aí placa sofre esmagamento e dobramento, enquanto no lado oposto se separa da base.



**Figura 2.41** Deformações das bases:  
(a) rotulada com 2 chumbadores; (b) engastada com 4 chumbadores.

Observe-se que foi indicado um tipo chumbador na Fig. 2.39(c), com a ponta encurvada (tipo “bengala”), que é uma das formas mais antigas. Hoje, existem outros tipos de ponta (cabeça de martelo, arruela de chapa, etc.) que propiciam maior ancoragem ao concreto e, também, melhoram o comportamento do chumbador.

As ligações nas bases não foram incluídas neste trabalho de pesquisa, mas serão objetos de trabalhos posteriores, acompanhando a comunidade científica mundial.

Note-se que não se falou aqui de uma série de trabalhos envolvendo pilares, vigas e ligações mistas, nos quais o concreto trabalha associado ao aço. Nos últimos quinze anos essa área tem tido um enorme crescimento, todavia, não foi incluída no escopo deste trabalho. As condições dinâmicas ou situação de incêndio também não foram tratadas pelo mesmo motivo, embora sejam metas de futuros trabalhos.

Os vários trabalhos hoje já publicados sobre ligações (Nethercot & Zandonini, 1990; Chen, 1988; Bjorhovde *et al.*, 1987, 1996) tornam esse assunto facilmente acessível ao projetista ou engenheiro. Procurou-se, então, neste capítulo fazer uma visão geral sobre o estado da arte das ligações, talvez não tão atualizada, afinal, no último decênio muito material foi produzido, em diversas áreas correlatas ou complementares. Alguns aspectos particulares, porém, foram abordados, para que a seção seguinte possa apresentar uma nova proposta de curva  $M-\theta$ .

## 2.8 MODELO DE CURVA M- $\theta$ COM RIGIDEZ BILINEAR (RBL)

Após o estudo de alguns tipos de ligação, observa-se a exigência de que a curva M- $\theta$  seja capaz de representar de forma racional o comportamento demonstrado pelas ligações em seus ensaios experimentais, como sugerem as normas. Para isso, essa curva deve satisfazer, mesmo que de forma aproximada, as seguintes condições sintetizadas por Yee & Melchers (1986):

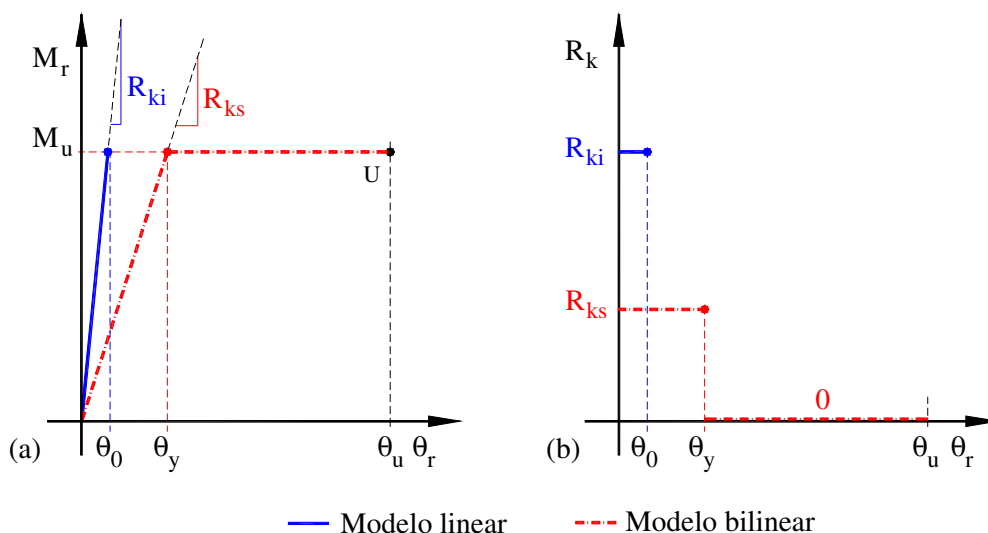
- a. a curva deve passar pela origem:  $M_r(\theta_r = 0) = 0$ ;
- b. a rigidez na origem deve ser a inicial:  $R_{kt}(\theta_r = 0) = R_{ki}$ ;
- c. a rigidez deve convergir para o valor plástico, quando a rotação tende a crescer arbitrariamente (infinito):  $R_{kt}(\theta_r \rightarrow \infty) = R_{kp}$ ;
- d. quando a rigidez plástica tender a zero,  $R_{kp} \rightarrow 0$ , a curva deverá ter como assintota o momento último  $M_u$ ;
- e. para qualquer valor da rotação, a tangente a curva M- $\theta$  definirá o valor da rigidez da ligação ( $dM_r/d\theta_r = R_{kt}$ );
- f. os parâmetros adotados devem ter um significado para projeto e ser determinados de forma fácil e acurada; e
- g. que a curva M- $\theta$  aproximada tenha uma forma relativamente suave.

O grande desafio de introduzir as ligações no processo de análise estrutural, portanto, é atender a todas essas exigências, pois nem sempre as condições anteriores são preenchidas pelos modelos disponíveis, tampouco existem modelos adequados para todos os tipos de ligação.

Assim, parte-se agora para a proposta de uma nova curva M- $\theta$ , cujo objetivo básico é atender de forma mais explícita as condições estipuladas nos itens (c, d & e) anteriores, estabelecendo desde o início que:

- c. a rigidez plástica ocorre na rotação última:  $R_{kt}(\theta_r = \theta_u) = R_{kp}$ ;
- d. a curva passará por  $\theta_r = \theta_u$ , que corresponderá ao valor  $M_r = M_u$ . Isso significa afirmar que não existe mais uma assíntota (tendência), e sim o último ponto da curva, em todos os casos; independentemente do valor da rigidez plástica ser zero (ou até negativo, se desejado); e
- e. o atendimento a  $R_{kt} = dM_r/d\theta_r$  é básico no modelo proposto, pois a integração para obter-se a curva M- $\theta$  será realizada, garantindo, assim, a continuidade da curva proposta em todos os pontos.





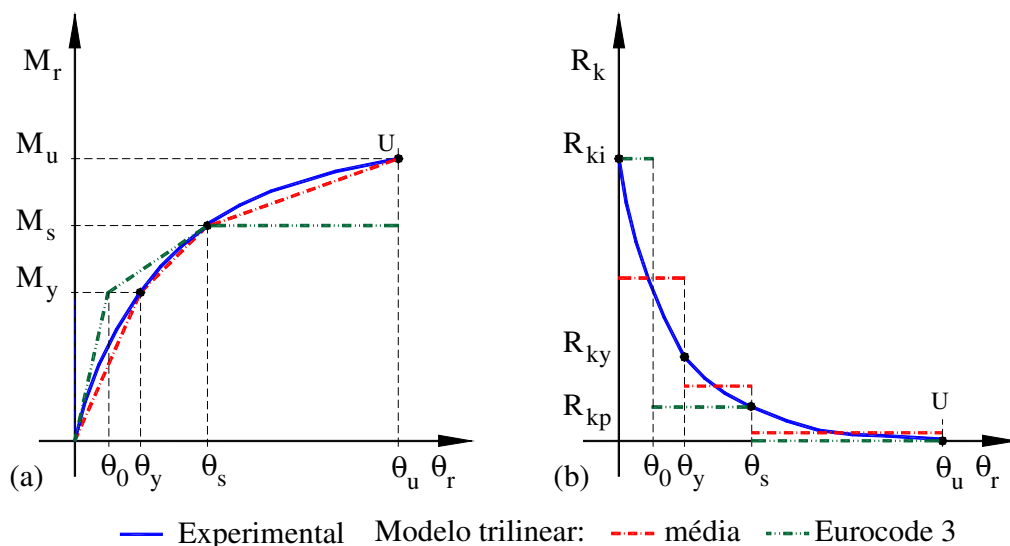
**Figura 2.42 Modelos mais simples:**  
(a) curva  $M-\theta$ ; (b) curva  $R_k-\theta$ .

Essas definições indicam que é necessário considerar a rigidez da ligação como a propriedade mais importante na avaliação do seu comportamento. É fundamental, por isso, que a sua avaliação seja a mais coerente possível, o que requer uma análise mais detalhada da curva  $R_k-\theta$  das ligações.

Nos estudos anteriores, constatou-se que os modelos lineares e até bilineares atendiam aos vários tipos de análise elástica. De maneira geral, porém, quando se avalia a curva  $R_k-\theta$  dessas ligações, verifica-se a falta de concordância com a realidade experimental. Na figura 2.42, por exemplo, mostra-se como o modelo linear, e o bilinear, de diagrama  $M-\theta$  apresenta o diagrama  $R_k-\theta$  com pouca informação.

Na figura 2.43, ilustra-se o caso do modelo trilinear que é adotado pelo Eurocode 3 (1992). Essa curva (em linha traço e ponto) da norma europeia possui três saltos de rigidez: o primeiro maior seguido por outro menor, sendo a rigidez no endurecimento sob tensão desprezada ( $R_{kp} = 0$ ). Note-se que, mesmo empregando-se médias de  $R_k$ , que são constantes nos intervalos (linha traço dois pontos), esses saltos persistem. Portanto, fica evidente que o modelo trilinear não apresenta a continuidade que se espera para a rigidez, indicado pela curva contínua que representa o experimental.

Poder-se-ia, então, adotar uma curva polilinear (pentalinear, por exemplo), cuja precisão é bem maior que as anteriores, e inclusive ajustando-se alguns pontos aos do ensaio experimental, como se indica na Fig. 2.44. Entretanto, mesmo considerando as rigidezes médias de  $R_k$ , nos intervalos, verifica-se que os saltos continuam desconexos em relação ao que se desejaria de uma curva de rigidez.

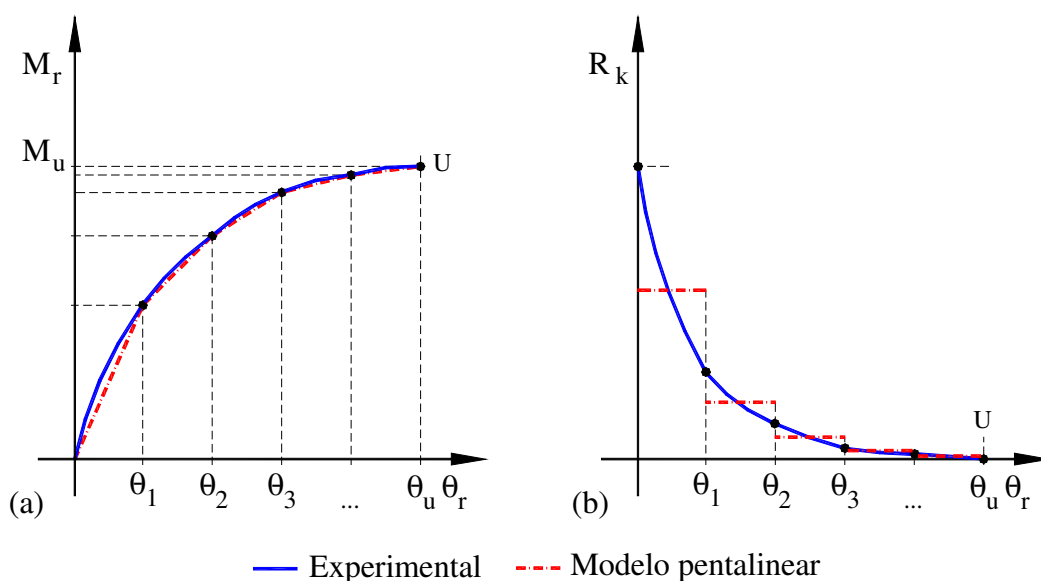


**Figura 2.43 Modelo trilinear:**

(a) curva  $M-\theta$ ; (b) curva  $R_k-\theta$ .

Assim, fica claro que a rigidez  $R_k$  é inadequadamente representada, quando se empregam modelos com trechos lineares, visto que a curva  $R_k-\theta$  torna-se uma função descontínua (com saltos) em tantos intervalos quanto sejam os segmentos lineares adotados.

Por outro lado, para as curvas  $M-\theta$  definidas na forma de equações matemáticas, como as polinomiais, exponenciais, potenciais, etc., embora possuam expressões para  $R_k$  que são contínuas, várias não atendem a algumas das condições anteriores estipuladas por Yee & Melchers (1986) e observadas na curva a ser proposta.



**Figura 2.44 Curva  $R_k-\theta$  para o modelo pentilinear:**

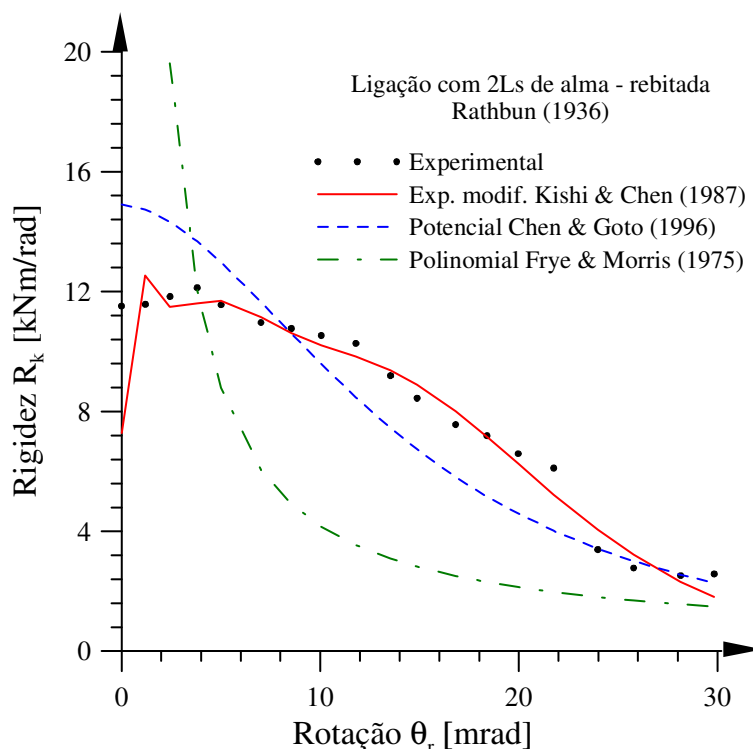
(a) curva  $M-\theta$ ; (b) curva  $R_k-\theta$ .

Um dos ensaios experimentais de Rathbun (1936) com a curva  $M-\theta$  reproduzida na Fig. 2.25 tem agora sua curva  $R_k-\theta$  correspondente representada na Fig. 2.45, para os modelos:

- polinomial de Frye & Morris (1975);
- exponencial modificado de Kishi & Chen (1987); e
- potencial de Kishi & Chen (1987).

Nessa mesma figura (2.45), são fornecidos os pontos obtidos por meio do ensaio experimental, o que contrasta bastante com os modelos matemáticos escolhidos. Verifica-se que, embora as curvas  $M-\theta$  obtidas (ver Fig. 2.25) não sejam tão diferentes, as curvas  $R_k-\theta$  mostram grandes diferenças, mesmo no caso do modelo exponencial de Kishi & Chen (1987), que é a aproximação melhor dentre as três. Essa constatação sugere que se pode obter uma boa aproximação entre a curva  $M-\theta$  numérica e a experimental, ainda que a curva  $R_k-\theta$  apresente diferenças.

Deve-se lembrar, entretanto, o desafio que é medir a rigidez da ligação por meio experimental. Note que os pontos do ensaio experimental, indicados na Fig. 2.45, apresentam maiores discrepâncias entre si (irregularidades na trajetória ou saltos aparentes), que os obtidos nas curvas de modelos matemáticos (mais suaves).



**Figura 2.45** Curva  $R_k-\theta$  da ligação de Rathbun (1936).

Além disso, vale comentar que os modelos matemáticos não são aplicáveis para todas as ligações. São modelos que dependem fortemente de parâmetros de ajuste ou empíricos, que nem sempre são adequados ou estão disponíveis para projeto. Como alternativas para o projetista, são apresentadas as seguintes possibilidades:

- a. o uso de modelos 3D com o MEF para estudo de cada ligação particular. Isso exige que o profissional tenha conhecimento das ferramentas numérico-computacionais existentes (saber modelar e ter acesso aos pacotes existentes, como o Ansys, 2005; Adina, 2000, etc.), para que os resultados sejam abalizados possibilitando a obtenção de uma curva confiável; ou,
- b. adotar o método das “componentes”, no qual o Eurocode 3 (1992) assume a responsabilidade, perante a comunidade científica, pelo uso de uma forma bastante simplificada para construir a curva M- $\theta$  requerida.

Portanto, embora já dispondo de muitos resultados experimentais e modelos já calibrados, o projetista não dispõe de tantos recursos para se poder incluir o efeito das ligações na prática da engenharia estrutural. E assim a alternativa (b.) anterior passa a ser bastante adequada se for possível determinar uma curva M- $\theta$  não linear, para um projeto específico, que atenda aos princípios do Eurocode 3 (1992).

Nesta seção, trata-se da proposição de uma curva de ligação M- $\theta$  mais simples e geral que a obtida com os modelos matemáticos já apresentados e cujo objetivo principal é fornecer um recurso adicional ao projetista.

A ideia inicial é partir de um diagrama  $R_k$ - $\theta$  de forma polilinear no qual se possa representar adequadamente a rigidez da ligação. Uma vez definido esse diagrama  $R_k$ - $\theta$ , por integração se determina a curva M- $\theta$ . Isso significa propor um processo matemático oposto à técnica tradicional, na qual se estabelece a curva M- $\theta$  e, em seguida, obtém-se a rigidez da ligação pela sua diferenciação ( $R_k = \partial M / \partial \theta$ ).

King (1994) desenvolveu a primeira tentativa para se achar uma curva M- $\theta$  de uma ligação integrando a curva  $R_k$ - $\theta$ . Esse pesquisador obteve bons resultados considerando uma curva exponencial e avaliando a rigidez segundo a equação:

$$R_k = \frac{\partial M}{\partial \theta} = R_{ki} \left[ 1 - (M/M_u)^{C_1} \right] \quad (2.57)$$

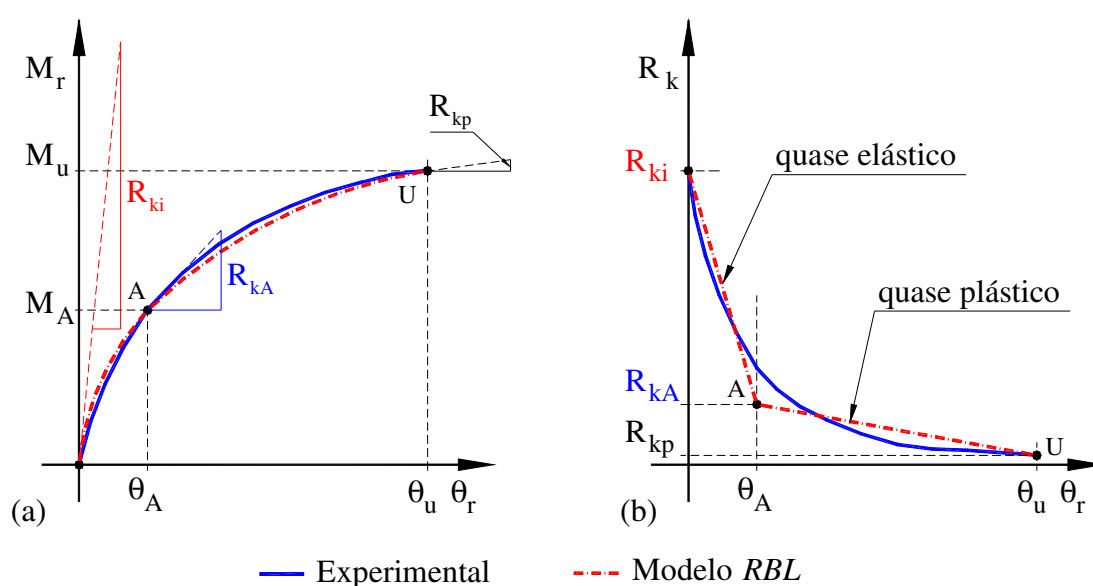
na qual  $C_1$  é um fator de forma. O grande desafio que surge, o que é comum a todas as curvas aproximadas, é definir qual o fator de forma adequado para cada caso de ligação.

Não se dispõe, porém, de tantas informações sobre a rigidez (tabelas  $R_k-\theta$  de cada ligação ou ensaio), pois é uma propriedade cuja medição experimental não é simples, e os desvios são maiores. Assim, na prática, não se tem essa curva  $R_k-\theta$  tão precisa.

Simplificando a ideia inicial de trechos de reta, desenvolve-se o novo modelo de comportamento de ligação que segue a mesma proposta inicial das primeiras curvas bilineares  $M-\theta$ , porém agora para a rigidez. Ou seja, propõe-se agora construir um diagrama  $R_k-\theta$  bilinear e contínuo, desenhado na Fig. 2.46(b), que será a base para construir a curva  $M-\theta$  desejada da Fig. 2.46(a). Essa proposta será denominada modelo de curva  $M-\theta$  com *Rigidez Bilinear (RBL)*.

O diagrama de rigidez  $R_k-\theta$  da Fig. 2.46(b) já possui dois pontos conhecidos e que devem ser determinados pelo projetista em qualquer análise de ligação, quais sejam:

- ponto inicial ( $\theta_r = 0, R_k = R_{ki}$ ) – no qual a rigidez inicial é sempre um valor requerido como dado em qualquer modelo; e
- ponto final ( $\theta_r = \theta_u, R_k = R_{kp}$ ) – atende-se à condição (c) modificada de Yee & Melchers (1986), sendo que a rotação última ( $\theta_u$ ) tanto pode ser estimada pelo cálculo (por exemplo, com o método das “componentes”) como pode ser arbitrada: um valor recomendado ou prescrito:  $20 \theta_0$ , não superando 30 mrad, em geral (Swanson & Leon, 2000). A rotação  $\theta_u$  pode ser gabaritada em relação a outros modelos do mesmo tipo já estudado. Já a rigidez última ou plástica, pode ser determinada (método das “componentes”) ou aproximada [ $R_{kp} = (1/7) - (1/10)$  de  $R_{ki}$ ], como sugerem alguns pesquisadores (Faella *et al.*, 2000).



**Figura 2.46** Modelo de *rigidez bilinear RBL* proposto:  
(a) curva  $M-\theta$ ; (b) curva  $R_k-\theta$ .

Define-se, agora, o ponto A da interseção das duas semirretas [ver Fig. 2.46(b)], ou seja, os valores ( $\theta_r = \theta_A$ ;  $R_k = R_{kA}$ ), que permitam uma boa aproximação do comportamento da rigidez. A adoção dessas semirretas leva em conta dois comportamentos da rigidez que interferem no diagrama M- $\theta$  final, que são:

- trecho quase elástico – no qual a plasticidade começa a se manifestar nos componentes como chapas e perfis, podendo ocorrer grandes variações de rigidez em pequenos ângulos de giro da ligação; e
- trecho quase plástico – no qual, com uma pequena variação da rigidez, ocorrem elevadas variações da rotação da ligação.

Deve-se enfatizar que o comportamento descrito por esses dois trechos na curva  $R_k$ - $\theta$  permitirá que se obtenha uma curva M- $\theta$  bastante acurada com o modelo *RBL*.

Ao estabelecer o ponto A ( $\theta_A$ ,  $M_A$ ), pode-se definir a rigidez em A ( $R_{kA}$ ) partindo da expressão:

$$M_A = \int_{\theta=0}^{\theta_A} R_k(\theta) d\theta \approx (R_{ki} + R_{kA}) \theta_A / 2 \quad (2.58)$$

que, resolvendo para  $R_{kA}$ , chega-se a:

$$R_{kA} = 2 M_A / \theta_A - R_{ki} \quad (2.59)$$

A variação  $R_k$ - $\theta$  é representada por duas semirretas, genericamente são definidas pela equação geral:

$$R_k(\theta) = 2a_i \theta + b_i \quad (2.60a)$$

cuja integração fornece:

$$M_r(\theta) = a_i \theta^2 + b_i \theta + c_i \quad (2.60b)$$

em que os coeficientes (a-b-c) devem ser determinados considerando as duas semirretas isoladamente ( $i = 1$  ou  $2$ ), ou seja:

- trecho quase elástico – em que  $0 \leq \theta \leq \theta_A$ :

$$a_1 = -(R_{ki} - R_{kA}) / \theta_A \quad b_1 = R_{ki} \quad c_1 = 0 \quad (2.61)$$

com  $R_{ki} \geq R_k \geq R_{kA}$  e, conseqüentemente,  $0 \leq M_r \leq M_A$ ; e

- trecho quase plástico – com  $\theta_A \leq \theta \leq \theta_u$ :

$$a_2 = -\frac{(R_{kA} - R_{kp})}{(\theta_u - \theta_A)} \quad b_2 = \frac{(R_{kA}\theta_u - R_{kp}\theta_A)}{(\theta_u - \theta_A)} \quad c_2 = M_A - a_2\theta_A^2 - b_2\theta_A \quad (2.62)$$

com o que:  $R_{kA} \geq R_k \geq R_{kp}$  e, portanto,  $M_A \leq M_r \leq M_u$ .

As equações finais para a curva M- $\theta$ , válida por trechos, são dadas por:

$$\begin{aligned} \theta \leq \theta_A : M_1(\theta) &= R_{ki} \theta - (R_{ki} - R_{kA}) \theta^2 / \theta_A \\ \theta > \theta_A : M_2(\theta) &= M_A + \frac{[(R_{kp} - R_{kA})(\theta + \theta_A) / 2 + R_{kA} \theta_u - R_{kp} \theta_A]}{(\theta_u - \theta_A) / (\theta - \theta_A)} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para avaliar essa proposta, estuda-se o exemplo de ligação de Rathbun (1936) com os valores de  $R_{ki}$  e  $R_{kp}$  obtidos experimentalmente, e determina-se a rigidez  $R_{kA}$  a partir de um ponto selecionado da curva experimental  $M-\theta$  ( $\theta_r = \theta_A$ ,  $M = M_A$ ), de tal forma que este será também ponto da curva  $M-\theta$  do modelo *RBL*.

Sabe-se, como comentado, que a rigidez inicial ( $R_{ki}$ ) não possui uma medida experimental precisa. De acordo com o SCDB (Kishi & Chen, 1990), os outros modelos adotaram diferentes rigidezes  $R_{ki}$ , conforme:

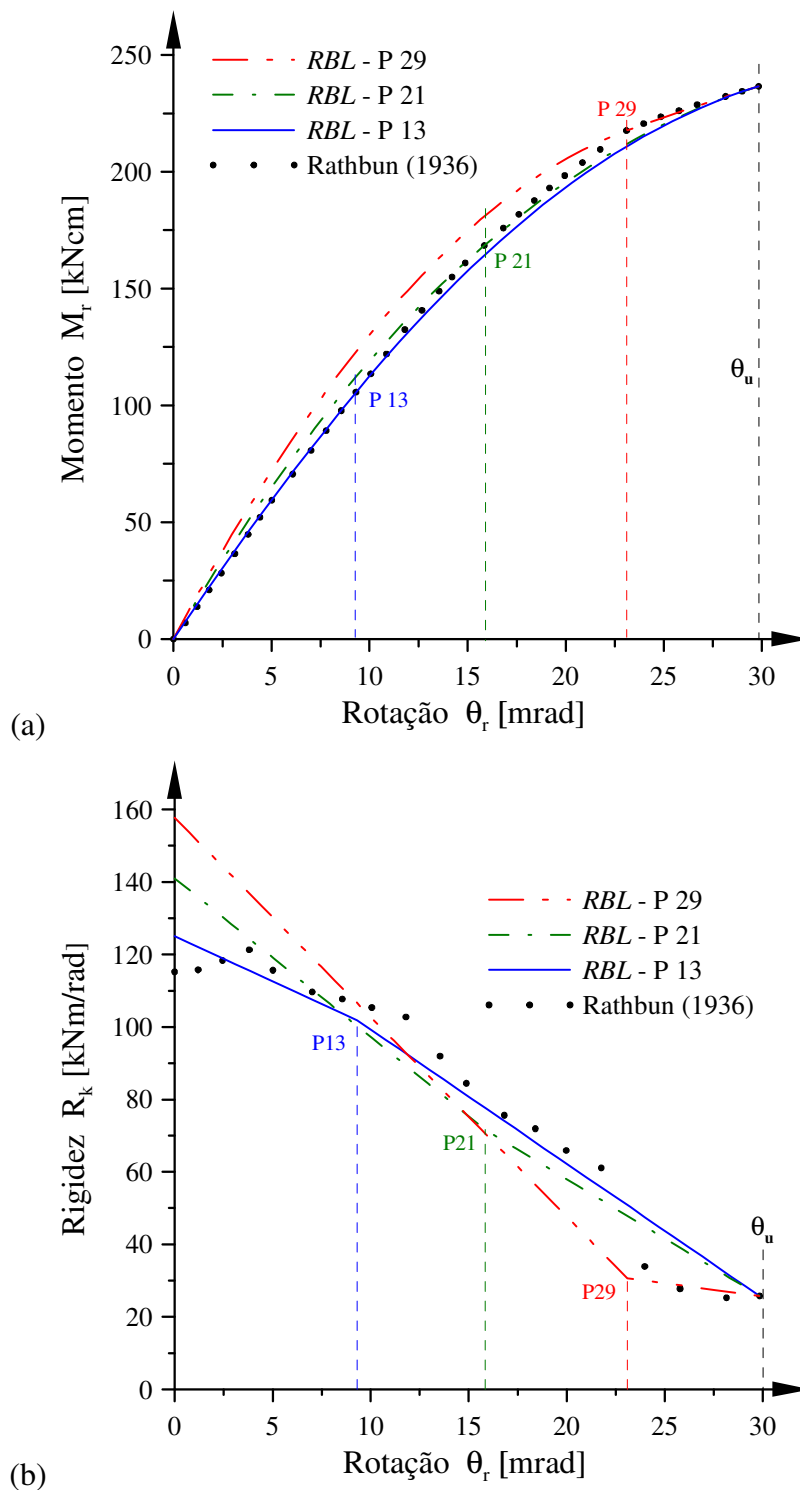
- $R_{ki} = 364,9$  kNm/rad, para o modelo polinomial (Frye & Morris, 1975);
- $R_{ki} = 149,1$  kNm/rad, para o modelo potencial (Kishi & Chen, 1987);
- $R_{ki} = 72,79$  kNm/rad, e com a rigidez máxima 125,3 kNm/rad, em  $\theta = 1,2$  mrad, para o modelo exponencial modificado (Kishi & Chen, 1987); e
- $R_{ki} = 115,2$  kNm/rad, e com o valor máximo 121,3 kNm/rad em  $\theta = 3,81$  mrad, para o ensaio experimental (Rathbun, 1936).

Resolve-se aqui, então, o problema de maneira inversa, iniciando-se por determinar  $R_{kA}$  em função de  $M_u$  e  $M_A$ , que são dados conhecidos, e finalmente obtém-se o valor de  $R_{ki}$  por meio dos parâmetros já calculados e de  $\theta_A$ . Com esse procedimento constrói-se a Tab. 2.16 a partir de três pontos diferentes, escolhidos para o ponto A de transição (P13, P21 e P29) na curva  $M-\theta$  ilustrada na Fig. 2.47(a). Nessa figura, estão presentes três curvas  $M-\theta$  obtidas por esse processo, de onde se verifica que a curva que apresentou o resultado melhor em relação à experimental foi aquela em que o ponto A é o indicado por P13, onde  $\theta_A \approx \theta_u / 3$ . Pode-se definir a relação  $\kappa_A = R_{kA} / R_{ki}$ .

**Tabela 2.16 Curva  $M-\theta$  com *RBL* para exemplo de Rathbun (1936).**

Ponto comum <sup>(1)</sup>	Ponto A		Ponto 0		$\kappa_A$ <sup>(4)</sup> [%]
	Rotação [mrad]	Momento [kNcm]	Rigidez [kNm/rad] $R_{kA}$ <sup>(2)</sup>	$R_{ki}$ <sup>(3)</sup>	
P13	9,31	105,6	101,9	125,0	81,5
P21	15,85	168,5	71,6	141,0	50,8
P29	23,10	217,6	30,6	157,8	19,4

Notas: 1) Ponto da curva  $M-\theta$  de Rathbun (1936) escolhido para ponto A;  
2)  $R_{kA} = 2(M_u - M_A) / (\theta_u - \theta_A) - R_{kp}$ ; 3)  $R_{ki} = 2M_A / \theta_A - R_{kA}$ ; 4)  $\kappa_A = R_{kA} / R_{ki}$ .



**Figura 2.47** Curvas da ligação de Rathbun (1936) com modelo *RBL*  
 (a) curva  $M-\theta$ ; (b) curva  $R_k-\theta$ .

Verifica-se com a Fig. 2.47(b) que a curva  $M-\theta$  onde se localiza o ponto P13 é mais centrada em relação aos pontos do experimento e possui a menor diferença em relação ao  $R_{ki}$  máximo do modelo experimental, o que parece justificar sua boa reprodução da curva  $M-\theta$  experimental de Rathbun.



King (1994) comprovou que a curva  $M-\theta$  gerada por integração de  $R_k-\theta$  permite obter curvas bem mais próximas das experimentais. E esses resultados iniciais comprovam que se pode encontrar um ponto A, bem calibrado, que permita reproduzir uma curva experimental de forma razoável para projeto, e mesmo que tal procedimento tem um significado bem claro e simples, como foi inicialmente proposto.

Como mencionado, uma das formas mais expeditas de que se dispõe para traçar a curva  $M-\theta$  é pelo Eurocode 3 (1992), que emprega o método das “componentes”. Trata-se de um procedimento bastante vantajoso, pois está ao alcance dos projetistas e é garantido por norma.

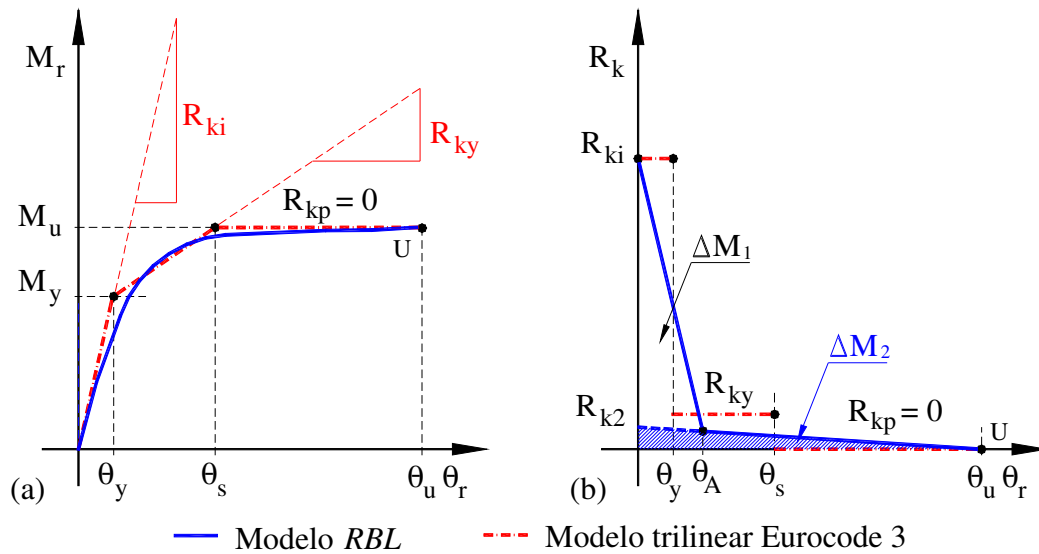
Uma primeira aplicação é converter o diagrama  $M-\theta$  trilinear do Eurocode 3 (1992), ilustrado na Fig. 2.48(a), num equivalente não linear do modelo *RBL*. Para isso, destacam-se os seguintes trechos característicos do diagrama trilinear apresentado:

- a. trecho quase elástico –  $R_k = R_{ki}$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_y$ , no qual a rotação de início do escoamento  $\theta_y = 2 \theta_0/3$ , sendo a rotação de referência  $\theta_0 = M_u / R_{ki}$  e o momento,  $M_y = 2M_u/3$ ;
- b. trecho quase plástico – para  $\theta_y \leq \theta \leq \theta_s$ , em que se considera a rigidez secante  $R_{ky} = R_{ki}/7$ , em que o momento na ligação atinge o valor máximo  $M_u$ . Considerando as condições anteriores, define-se o ângulo  $\theta_s = \theta_y + \Delta \theta_{ys}$ , no qual  $\Delta \theta_{ys} = (M_u - M_y)/R_{ky}$ . Substituindo os valores conhecidos, chega-se a  $\theta_s = 3 \theta_0$ ; e
- c. trecho plástico sem encruamento – com  $R_{kp} = 0$ , em que apenas o ângulo de rotação cresce de  $\theta_s \leq \theta \leq \theta_u$ , podendo ser definido  $\theta_u \approx 20 \theta_0 (\leq 30 \text{ mrad})$ .

Fazendo-se a conversão ao modelo *RBL*, têm-se como dados:  $R_{ki}$ ,  $R_{kp} (= 0)$ ,  $M_u$  e  $\theta_u$ . O diagrama de rigidez equivalente  $R_k-\theta$  do *RBL*, mostrado na Fig. 2.48(b), é formado por dois triângulos cujas áreas representam os momentos  $\Delta M_1$  e  $\Delta M_2$ , isto é:

$$\begin{aligned} \Delta M_1 &= (R_{ki} + R_{kA}) \theta_A / 2 - (R_{k2} + R_{kA}) \theta_A / 2 = (R_{ki} - R_{k2}) \theta_A / 2 \\ \Delta M_2 &= R_{k2} \theta_u / 2 \end{aligned} \quad (2.64a,b)$$

em que da segunda expressão obtém-se  $R_{k2}$ , ao fazer  $\Delta M_2 = R_{ky} \theta_s$ , equilibrando o diagrama  $R_k-\theta$  do Eurocode 3. Lembrando-se de que para  $\Delta M_1 + \Delta M_2 = M_u$  emprega-se a Eq. 2.64 (a), com  $\Delta M_1$ , resolvendo para  $\theta_A$ .



**Figura 2. 48** Curva trilinear com  $R_{kp} = 0$  empregando *RBL*:  
(a) curva  $M-\theta$ ; (b) curva  $R_k-\theta$ .

Para esses procedimentos, utiliza-se a versão de Frye & Morris (1975) da curva de Hechtman & Johnson (1947), adotando-se os dados:  $R_{ki} = 30248$  kNm/rad,  $M_u = 13685$  kNcm e  $\theta_u = 20,025$  mrad. Pelo Eurocode 3 (1992), são definidos os novos parâmetros para os diagramas da Fig. 2.49:

$$\theta_0 = M_u/R_{ki} = 4,524 \text{ mrad}, \quad \theta_y = 2 \theta_0/3 = 3,016 \text{ mrad}, \quad \theta_s = 3 \theta_0 = 13,572 \text{ mrad},$$

$$R_{ky} = R_{ki}/7 = 4321 \text{ kNm/rad}, \quad M_y = 2 M_u/3 = 9123 \text{ kNcm}.$$

Notas: 1)  $1 \text{ [kNm/rad]} \times 1 \text{ [mrad]} = 0,1 \text{ [kNcm]}$ ; 2)  $1 \text{ [kNcm]} / 1 \text{ [kNm/rad]} = 10 \text{ [mrad]}$ .

Passando agora ao processo de geração da curva  $M-\theta$  pelo modelo *RBL*, determinam-se os parâmetros complementares:

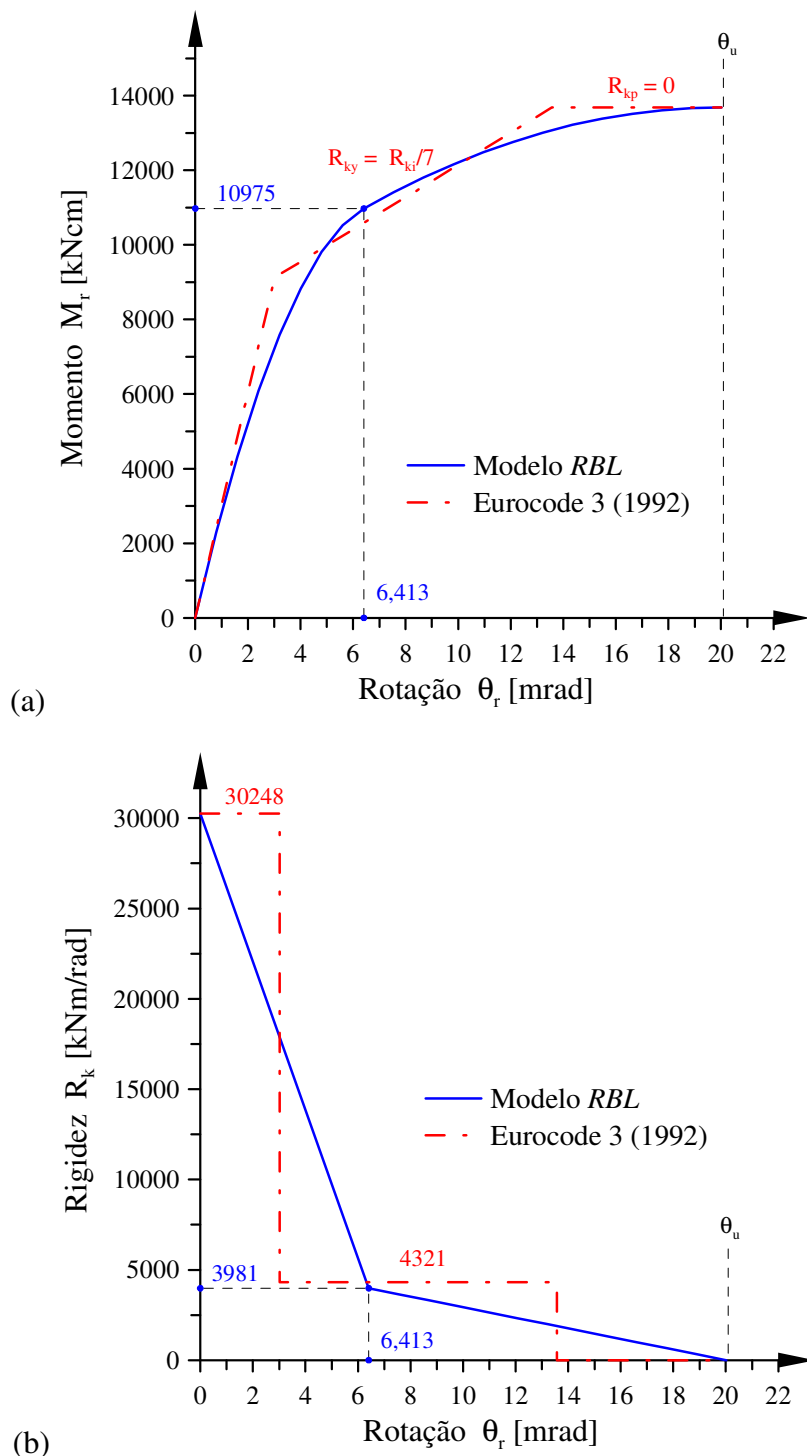
$$\Delta M_2 = R_{ky} \theta_s = 5864 \text{ kNcm}, \quad \Delta M_1 = M_u - \Delta M_2 = 7821 \text{ kNcm},$$

$$R_{k2} = 2 \Delta M_2 / \theta_u = 5857 \text{ kNm/rad}, \quad \theta_A = 2 \Delta M_1 / (R_{ki} - R_{k2}) = 6,413 \text{ mrad},$$

$$R_{kA} = R_{k2} (1 - \theta_A / \theta_u) = 3981 \text{ kNm/rad}, \quad M_A = (R_{ki} + R_{kA}) \theta_A / 2 = 10975 \text{ kNcm}.$$

Com esses resultados constroem-se, então, os diagramas das curvas de Hechtman & Johnson (1947)  $M-\theta$  e  $R_k-\theta$  ilustrados na Fig. 2.49. Observa-se que a curva  $M-\theta$  do modelo *RBL* praticamente se ajusta de forma bastante razoável ao diagrama do Eurocode 3, com uma leve saída na região de início da rigidez secante, sendo tangente na base à  $R_{ki}$  e na parte superior, com  $R_{kp} = 0$ . (Obs.  $\kappa_A = 3981/30248 = 13,2\%$ ).

O bom ajuste encontrado para a curva  $M-\theta$  pode ser explicado ao constatar-se que a curva  $R_k-\theta$  do modelo *RBL* se parece com uma média daquela adotada no Eurocode 3.



**Figura 2.49** Curvas de Hechtman & Johnson (1947) sem encruamento:  
(a) curva  $M$ - $\theta$ ; (b) curva  $R_k$ - $\theta$ .

Note-se que esse processo de solução pode ser aplicado a todos os diagramas desse tipo. Agora, determina-se uma curva não linear com o método *RBL*, para o tipo genérico de curva  $M$ - $\theta$  trilinear do Eurocode 3 (1992), na qual a rigidez  $R_{kp}$  não é zero, como mostrado na Fig. 2.50(a). O diagrama trilinear possui as seguintes partes:

- a. trecho quase elástico –  $R_k = R_{ki}$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_y$ , no qual a rotação de início do escoamento  $\theta_y = 2 \theta_0/3$ , sendo a rotação de referência  $\theta_0 = M_s / R_{ki}$ , e o momento é limitado a  $M_y = 2M_s/3$ ;
- b. trecho quase plástico – para  $\theta_y \leq \theta \leq \theta_s$ , com a rigidez secante  $R_{ky} = R_{ki}/7$ , sendo que o momento é inferior ao de referência  $M_s$ , e adota-se  $\theta_s = 3 \theta_0$ ; e
- c. trecho plástico com encruamento – com  $R_{kp} > 0$ , para  $\theta_s \leq \theta \leq \theta_u$ , adotando também  $\theta_u \approx 20 \theta_0 (\leq 30 \text{ mrad})$  e momento máximo igual ao último  $M_u$ .

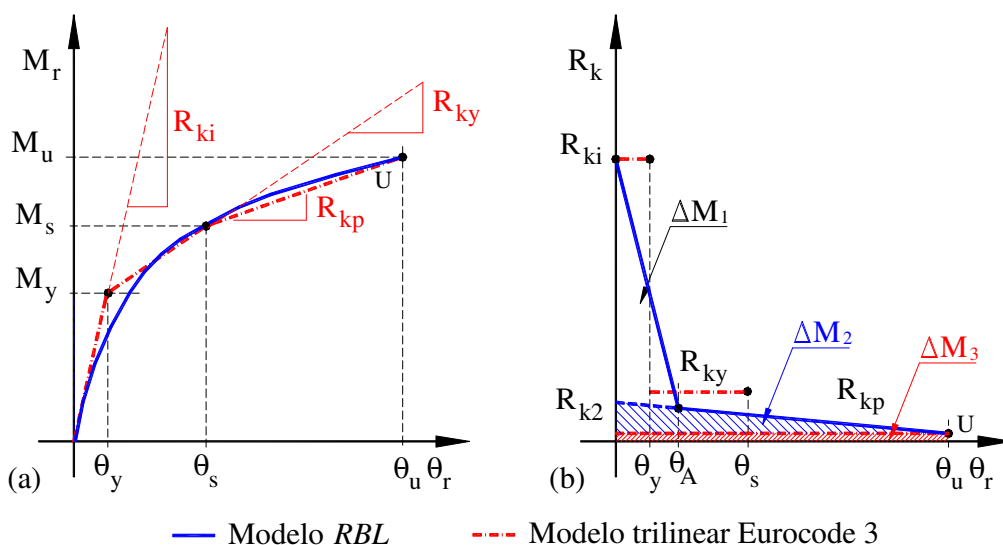
Pode-se considerar que, no *endurecimento sob tensão*, o momento máximo tenha um acréscimo proporcional à relação entre o módulo tangente e o elástico,  $E_t/E = 2\%$ , ficando o trecho final quase horizontal (Faella *et al.*, 2000).

Para demonstrar o emprego do *RBL*, entretanto, adotar-se-á  $M_s = 90\% M_u$ , encontrando-se a relação:

$$R_{kp} = \Delta M_{su} / (\theta_u - \theta_s) = (M_u - M_s) / (\theta_u - \theta_s) = 0,1 M_u / (\theta_u - \theta_s) \quad (2.65)$$

Seguindo a Fig. 2.50(b), percebe-se uma nova área retangular  $\Delta M_3 = R_{kp} \theta_u$ , que corresponde a uma parcela constante a ser retirada de  $M_u$  para chegar-se à soma das áreas dos dois triângulos já definidos:  $\Delta M_1$  e  $\Delta M_2$ . Agora, escreve-se:

$$\begin{aligned} \Delta M_1 &= (R_{ki}^* - R_{k2}^*) \theta_A / 2 \\ \Delta M_2 &= R_{k2}^* \theta_u / 2 \\ M_u - \Delta M_3 &= \Delta M_2 + \Delta M_1 \end{aligned} \quad (2.66a-c)$$



**Figura 2.50 Curva trilinear com  $R_{kp} > 0$  empregando RBL:**  
(a) curva  $M-\theta$ ; (b) curva  $R_k-\theta$ .

sendo  $R_{k2}^* = R_{k2} - R_{kp}$ , que é a parcela de rigidez que supera  $R_{kp}$ . Portanto,  $R_{k2}^*$  é a parcela da rigidez máxima da área triangular  $\Delta M_2$ , que deve ser somada à  $R_{kp}$  para obter-se  $R_{k2}$ . De igual forma, deverá ser avaliado  $R_{kA}^*$  e  $R_{kA}$ .

Para boa compreensão do que foi exposto, reestuda-se o exemplo anterior mantendo-se os dados:  $R_{ki} = 30248$  kNm/rad,  $M_u = 13685$  kNcm e  $\theta_u = 20,025$  mrad, com os seguintes valores complementares para o diagrama do Eurocode 3:

$$\begin{aligned} M_s &= 0,9 M_u = 12316 \text{ kNcm}, & R_{ky} &= R_{ki}/7 = 4321 \text{ kNm/rad}, \\ \theta_0 &= M_s/R_{ki} = 4,072 \text{ mrad}, & \theta_y &= 2 \theta_0/3 = 2,714 \text{ mrad}, & \theta_s &= 3 \theta_0 = 12,216 \text{ mrad}, \\ M_y &= 2 M_s/3 = 8211 \text{ kNcm}, & R_{kp} &= 0,1 M_u /(\theta_u - \theta_s) = 1752 \text{ kNm/rad}. \end{aligned}$$

Para gerar a curva do modelo *RBL*, determinam-se as grandezas:

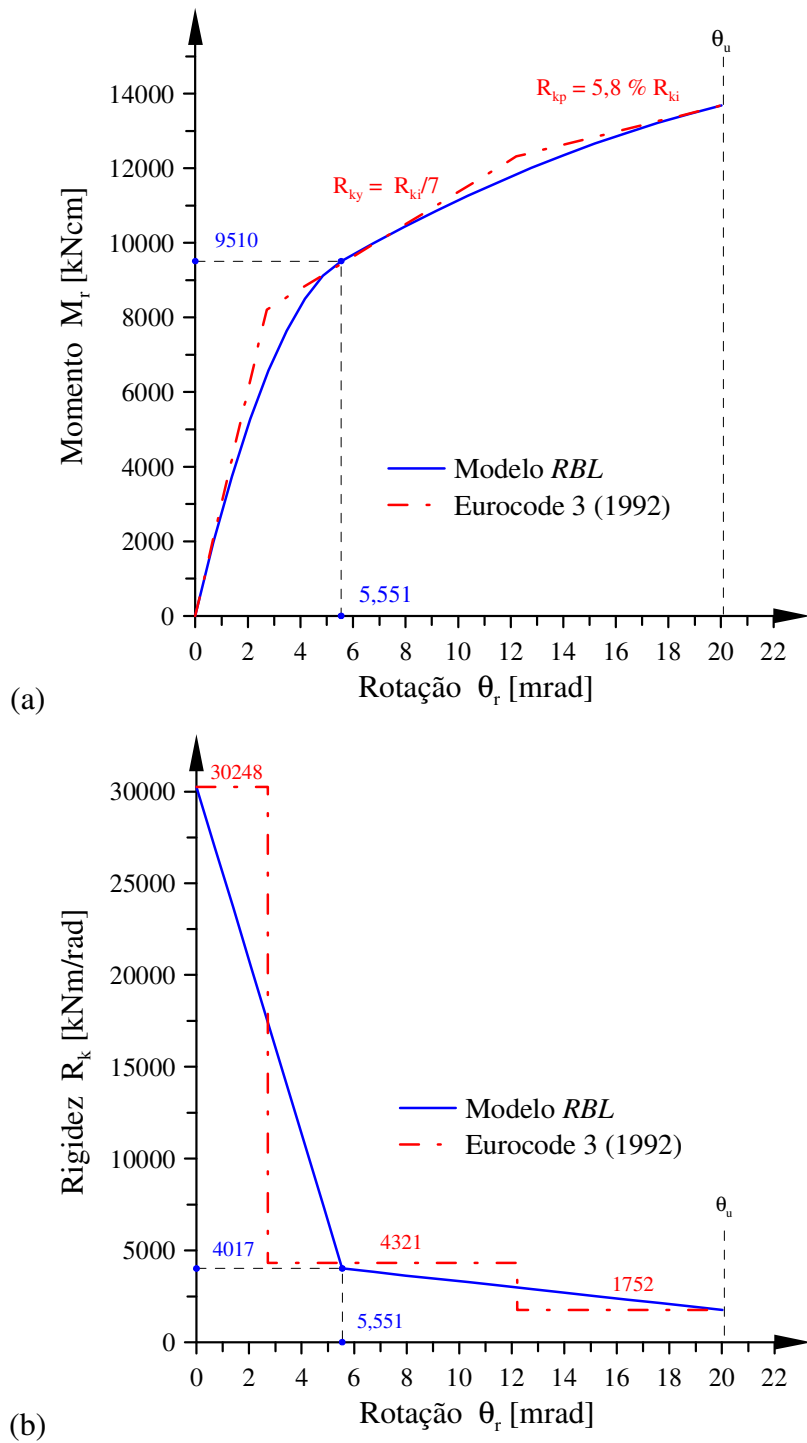
$$\begin{aligned} \Delta M_3 &= R_{kp} \theta_u = 3508 \text{ kNcm}, & \Delta M_1 + \Delta M_2 &= M_u - \Delta M_3 = 10177 \text{ kNcm}, \\ \Delta M_2 &= (R_{ky} - R_{kp}) \theta_s = 3138 \text{ kNcm}, & \Delta M_1 &= 7039 \text{ kNcm} \\ R_{k2}^* &= 2 \Delta M_2 / \theta_u = 3134 \text{ kNm/rad}, & R_{ki}^* &= R_{ki} - R_{kp} = 28496 \text{ kNm/rad}, \\ \theta_A &= 2 \Delta M_1 / (R_{ki}^* - R_{k2}^*) = 5,551 \text{ mrad}, & R_{k2} &= R_{k2}^* + R_{kp} = 4886 \text{ kNm/rad}, \\ R_A^* &= R_{k2}^* (1 - \theta_A / \theta_u) = 2265 \text{ kNm/rad}, & R_{kA} &= R_{kA}^* + R_{kp} = 4017 \text{ kNm/rad}, \\ M_A &= (R_{ki} + R_{kA}) \theta_A / 2 = 9510 \text{ kNcm}. & (\text{Obs. } \kappa_A &= 4017/30248 = 13,3\%) \end{aligned}$$

Esses resultados são empregados na obtenção das curvas  $M-\theta$  e  $R_k-\theta$  da ligação de Hechtman & Johnson (1947) ilustrados na Fig. 2.51. Note-se que a curva  $M-\theta$  da Fig. 2.51(a) fica totalmente envolvida pela do Eurocode 3 (1992). Comprova-se, na Fig. 2.51(b), que a rigidez do modelo *RBL* é quase uma média do diagrama do Eurocode 3 (1992), explicando-se, assim, o bom resultado.

Deve-se enfatizar que essas aplicações do método *RBL* para os diagramas do Eurocode 3 (1992) se mostraram bem razoáveis em ambos os casos (sem e com encruamento), justificando o seu emprego direto por aqueles que adotam essa norma para projeto de forma rotineira.

Antes de seguir explorando o modelo *RBL* proposto, faz-se necessário entender a influência dos seus parâmetros principais e estabelecer formas mais simples de tratar essa curva  $M-\theta$ . Naturalmente, parâmetros como a rigidez inicial ( $R_{ki}$ ), o momento último ( $M_u$ ) e a rotação última ( $\theta_u$ ) são definidos *a priori* pelo projetista e não podem ser muito diferentes dos valores fornecidos. A questão se prende quanto a avaliar a rigidez plástica ( $R_{kp}$ ) e a situação do ponto A, que podem ser arbitrados ou ajustados.

Em geral, pode-se adotar para uma curva  $M-\theta$  qualquer a mesma forma de solução empregada para o diagrama genérico trilinear do Eurocode 3 (1992) anterior.



**Figura 2. 51 Curvas de Hechtman & Johnson (1947) com encruamento**  
 (a) curva  $M-\theta$ ; (b) curva  $R_k-\theta$ .

Definem-se as relações entre os momentos  $\Delta M$ , correspondentes às áreas do diagrama  $R_k-\theta$ , e o momento último ( $M_u$ ), conforme as expressões a seguir:

$$\alpha_1 = \Delta M_1 / M_u \quad \alpha_2 = \Delta M_2 / M_u \quad \alpha_3 = \Delta M_3 / M_u \quad (2.67)$$

O primeiro parâmetro de forma da curva é determinado por  $\beta_L = \alpha_1 / (\alpha_1 + \alpha_2)$ , tal que:  $0 \leq \beta_L \leq 1$ , e representa a variação de rigidez quase elástica ( $\alpha_1$ ) em relação a toda

variação de rigidez do diagrama  $R_k-\theta$  do modelo *RBL*. Observe-se que  $\alpha_3$  depende fundamentalmente de  $R_{kp}$ . Assim, para o triângulo superior tem-se:  $\alpha_1 = \beta_L (1 - \alpha_3)$  e, por conseguinte,  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3$ . O efeito do fator de forma  $\beta_L$  é ilustrado na Fig. 2.52, em que se manteve o valor de  $\alpha_3 = 0,25$ ; e varia-se  $\beta_L$  no intervalo  $0 \leq \beta_L \leq 1$ , com passos de 10%, para os mesmos dados da curva de Hechtman & Johnson (1947) da versão com encruamento da Fig. 2.51.

Observe-se que as curvas  $M-\theta$  da Fig. 2.52(a) apresentam uma forma mais suave para valores  $\beta_L$  pequenos ( $< 0,3$ ) e vai aproximando-se de um comportamento bilinear para  $\beta_L$  próximos de 1.

Nos diagramas  $R_k-\theta$  da Fig. 2.52(b) verifica-se que aqueles que possuem traçado elástico mais acentuado terão rigidez plástica menor e sem grandes variações, tornando a curva  $M-\theta$  mais abrupta. O contrário ocorre para os diagramas que possuem traçados elásticos menores, gerando curvas  $M-\theta$  mais suaves.

Repare-se que quando o fator de forma  $\beta_L$  for zero ( $\beta_L = 0$ ), a rigidez inicial  $R_{ki}$  se reduz e o diagrama  $R_k-\theta$  se torna linear. Por exemplo:

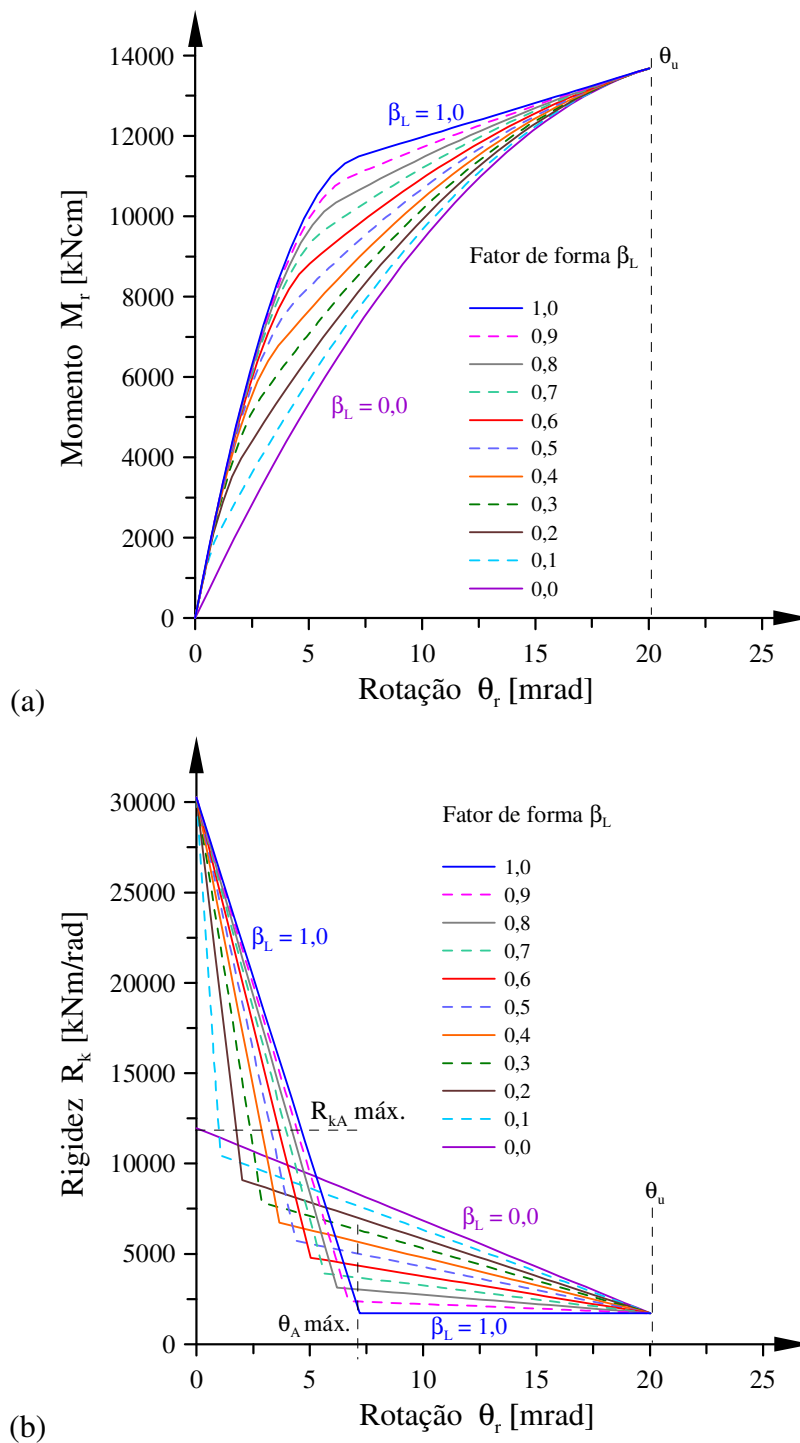
$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1 - \alpha_3 = 0,75 & \quad \Delta M_2 = 0,75 M_u = 10263,8 \text{ kNcm} \\ R_{k2}^* = 2\Delta M_2/\theta_u = 10251 \text{ kNm/rad} & \quad R_{k2} = R_{k2}^* + R_{kp} = 12003 \text{ kNm/rad} \\ R_{k2} = 39,7\% R_{ki} \end{aligned} \right\}$$

Ou seja, na realidade, tem-se outra curva (outro  $R_{ki} = R_{k2}$ ). Veja-se que  $\beta_L$  também pode ser negativo, como sucedeu no caso do ponto A sendo P13, para a curva da ligação de Rathbun (1936), mas isso ocorre em casos particulares (recomenda-se  $\beta_L \geq -0,1$ ).

Conforme mostrado na Fig. 2.52(b), com  $\beta_L = 1$  define-se o valor  $\theta_A$  máximo, sendo recomendado que  $\theta_A \leq \theta_u/3$  e próximo de  $\theta_0 = M_u/R_{ki}$ . Já quando  $\beta_L = 0$  obtém-se o valor de  $R_{kA}$  máximo (que não pode ser superado, do contrário surgirá valor de  $\alpha_3$ , ou de  $\alpha_1$ , negativo). Esses são valores limites adotados para escolher-se o ponto  $(M_A, \theta_A)$ .

Outro parâmetro de forma a ser estudado é definido pela relação  $\kappa_p = R_{kp}/R_{ki}$ , que depende da rigidez plástica ( $R_{kp}$ ) e influencia a trajetória final da curva  $M-\theta$  (podendo até ser de valor negativo, o que não é avaliado neste instante). Esse fator indica a parcela de rigidez plástica fixa (ou constante) do diagrama  $R_k-\theta$  do modelo *RBL*. Nesse caso, o que varia é a área do retângulo  $\Delta M_3$ , e com isso reduz-se, também, a influência do parâmetro  $\beta_L$  no restante da curva.

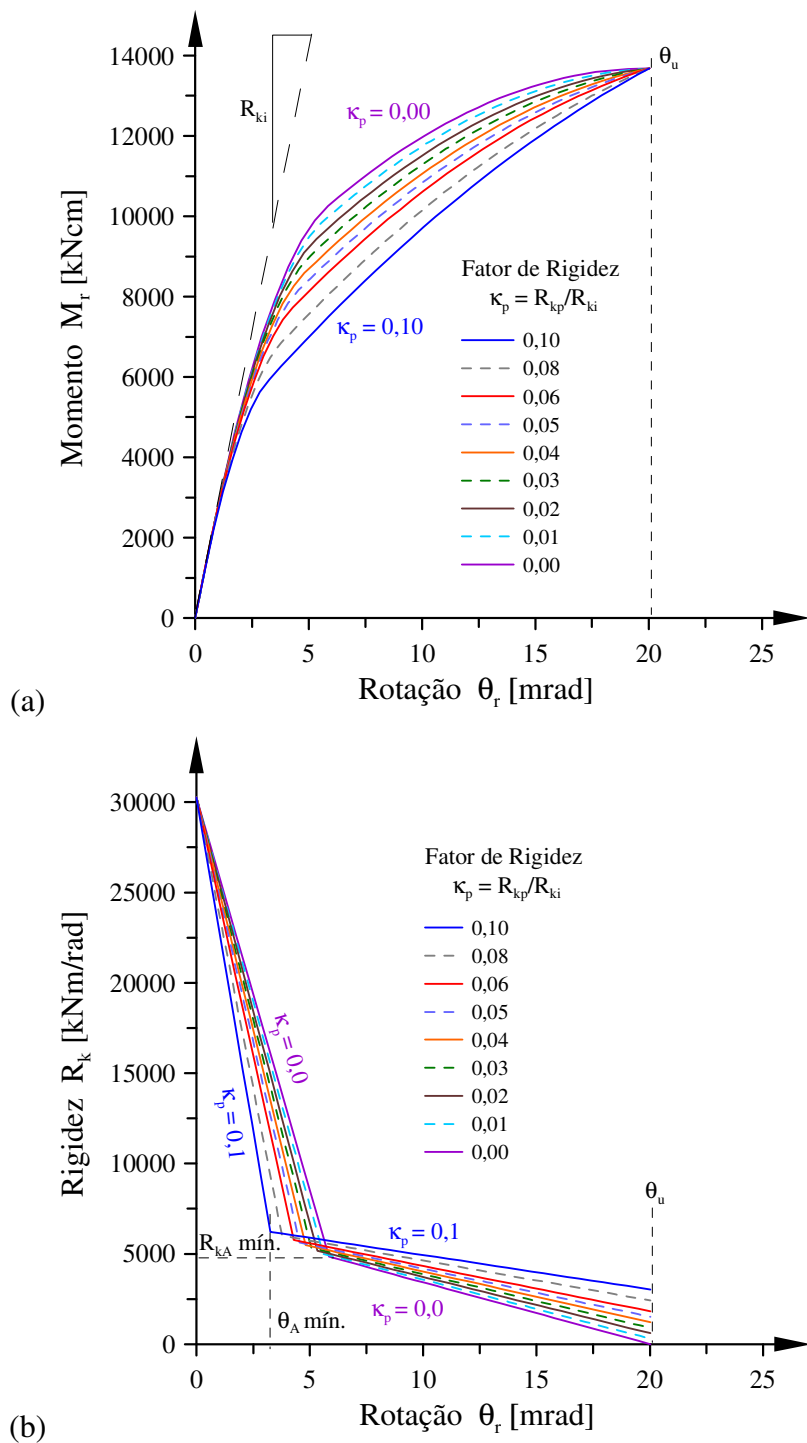
Ilustra-se na figura 2.53, o efeito do fator de forma ( $\kappa_p$ ) nas curvas  $M-\theta$  e  $R_k-\theta$ , no intervalo  $0 \leq \kappa_p \leq 10\%$ , adotando o fator de forma  $\beta_L = 0,5$  ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) em todos os casos.



**Figura 2.52** Estudo do fator de forma  $\beta_L$   
 (a) curva  $M-\theta$ ; (b) curva  $R_k-\theta$ .

Considerou-se que nas ligações usuais não ocorrem valores de  $R_{kp}$  muito elevados (superiores a 10% de  $R_{ki}$ ), como indicaram Sherbourne & Bahari (1997) para as ligações com chapa estendida de topo, por exemplo. Observa-se que para valores de  $(\kappa_p)$  pequenos, a curva  $M-\theta$  ficam mais elevadas e suaves, já quando se aproxima de 10%, as curvas ficam mais abruptas, como se tendessem ao modelo bilinear.





**Figura 2. 53 Estudo do parâmetro  $\kappa_p$ :**  
 (a) curva M- $\theta$ ; (b) curva  $R_k$ - $\theta$ .

Os diagramas de rigidez mostram um primeiro trecho mais alto e mais externo para  $(\kappa_p)$  próximos de zero. O inverso ocorre para valores maiores de  $(\kappa_p)$ , como se poderia esperar. Com  $\kappa_p = 0,1$  obtém-se  $\theta_A$  mínimo; já com  $\kappa_p = 0$ , determina-se  $R_{kA}$  mínimo. É possível, também, adotar-se um valor de  $(\kappa_p)$  negativo ( $R_{kp} < 0$ ), que

representaria uma condição de amolecimento da ligação (Almusallam & Richard, 1992) que é pouco considerada na prática.

Para ilustrar são apresentados na Tab. 2.17 os parâmetros obtidos para as três curvas aproximadas de Rathbun (1936) da Fig. 2.47, que possuem os seguintes dados:  $R_{ki} = 121,3$  kNm/rad (não empregado aqui),  $R_{kp} = 25,76$  kNm/rad,  $M_u = 236,6$  kNcm e  $\theta_u = 29,84$  mrad. Nesse caso como  $R_{kp}$  é fixo,  $\alpha_3 = R_{kp}\theta_u/M_u = 32,5\%$  é constante, enquanto o parâmetro  $\kappa_p = R_{kp}/R_{ki}$  variará em função do  $R_{ki}$  adotado em cada ponto A, sendo mais correto o valor experimental  $\kappa_p \approx 21,2\%$  ( $> 10\%$ , próximo de  $20,6\%$ !)

Deve-se indicar uma relação direta entre os parâmetros ( $\kappa_p$ ) e ( $\alpha_3$ ) dada por:

$$\alpha_3 = \kappa_p \frac{R_{ki}\theta_u}{M_u} = \kappa_p \left( \frac{\theta_u M_0}{\theta_0 M_u} \right) = \kappa_p \left( \frac{M_0/M_u}{\theta_0/\theta_u} \right) \quad (2.68)$$

na qual se relaciona o momento elástico esperado ( $M_0 = R_{ki} \theta_0$ ) e o momento último  $M_u$ .

De igual forma, para valores de  $\beta_L$  fixos,  $\kappa_p = 0$  e  $\kappa_p = 0,1$  chega-se nos limites inferior e superior de  $\theta_A$ , respectivamente, servindo também como orientação ao projetista. Quando  $M_s = M_u$ , como no caso da curva trilinear do Eurocode 3 (1992) da Fig. 2.49, então  $\alpha_3 = \kappa_p (= 0)$ . Se  $M_s = 0,9 M_u$ , como no diagrama trilinear da Fig. 2.51, encontra-se agora:

$$\kappa_p = R_{kp} / R_{ki} = 1752 / 30348 = 5,78\%$$

$$\alpha_3 = 5,78 (0,9M_u / M_u) / (4,072 / 20,025) = 25,58\% \approx 25,6\%$$

$$\Delta M_3 / M_u = 3508 / 13685 = 25,63\% \approx 25,6\% \text{ (confere!)}$$

Para finalizar, vale informar que será realizado, no futuro, um estudo para calibrar valores dos parâmetros ( $\beta_L$  &  $\kappa_p$ ) em relação às curvas experimentais de forma a orientar os projetistas quando na utilização dos diversos tipos de ligação.

No próximo capítulo será apresentada a formulação numérica geral do elemento finito com ligação, que será empregado para realizar a análise avançada neste trabalho.

**Tabela 2.17 Fatores de forma  $\beta_L$  &  $\kappa_p$  para exemplo de Rathbun (1936).**

Ponto A <sup>(1)</sup>	Rigidez [kNm/rad]			$\Delta M_2$ [kNcm]	Parâmetros [%]			
	$R_{ki}$ <sup>(2)</sup>	$R_{k2}$	$R_{kA}$ <sup>(3)</sup>		$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_L$	$\kappa_p$ <sup>(4)</sup>
P13	125,0	136,4	101,9	165,1	-2,3	69,8	-3,4	20,6
P21	141,0	123,5	71,6	145,9	5,8	61,7	8,6	18,3
P29	157,8	47,2	30,6	32,0	54,0	13,5	80,0	16,3

Notas: 1) Ponto da curva M- $\theta$  de Rathbun (1936) escolhido para ponto A (Fig. 2.47);

2)  $R_{ki} = 2M_A/\theta_A - R_{kA}$ ; 3)  $R_{kA} = 2(M_u - M_A)/(\theta_u - \theta_A) - R_{kp}$ ; 4)  $\kappa_p = R_{kp}/R_{ki}$ .

## 2.9 REFERENCIAS

Abdalla, KM & Chen, WF (1995), "Expanded database of semi-rigid steel connections", *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 4, pp. 553-564.

ABNT NBR 8800 (1986), *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios*, ABCEM, Rio de Janeiro/RJ.

ABNT NBR 8800 (2007), *Projeto de revisão da norma NBR 8800 (1986)*, CB02, CE02. Comitê Brasileiro da Construção Civil e das Estruturas de Aço. 01/2007, Rio de Janeiro/RJ.

Abolmaali, A., Kukreti, A.R. & Razavi, H. (2003), "Hysteresis behavior of semi-rigid double web angle steel connections", *J. Constr. Steel Research*, Vol. 59, pp. 1057-1082.

Abolmaali, A., Matthys, J.H., Farooqi, M. & Choi, Y. (2005), "Development of moment-rotation model equations for flush end-plate connections", *J. C. Steel Research*, Vol. 61, pp. 1595-1612.

Abramowitz, M. & Segun, I.A. (1972), *Handbook of mathematical functions: with formulas, graph and mathematical tables*, Dover Publications, N. Iorque.

Ackroyd, M.H. (1979), "*Nonlinear stability of flexibly-connected plane steel frames*", PhD Diss., Dept. Civil, Env. Architecture Eng., Univ. Colorado Boulder, Colorado.

Ackroyd, M.H. (1987), "Simplified frame design of type PR construction", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 141-146.

Ackroyd, M.H. & Gerstle, K.H. (1982), "Behavior of type 2 steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 108, No. 7, pp. 1541-1556.

Adey, B.T., Grodin, G.Y. & Chenye, J.J.R. (1998), "Extended end-plate moment connections under cyclic loading", *J. C. Steel Research*, Vol. 46, No. 1-3, pp. 435-436.

ADINA (2000), *ADINA Finite element system*. 8.6, ADINA R & D Inc., Watertown, Massachusetts.

Agerskov, H. (1976), "High-strength bolted connections subjected to prying", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 102, No. 1, pp. 161-175.

Aggarwal, AK (1994), "Comparative test on endplate beam-to-column connections", *Journal of Constr. Steel Research*, 30, pp. 151-175.

AISC (1976), *Manual of steel construction - Specification for structural steel buildings*, 8<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC ASD (1989), *Allowable stress design - Specification for structural steel buildings*, 9<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC LRFD (1986), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 1<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC LRFD (1993), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 2<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC LRFD (2005), *Specification for structural steel buildings*, ANSI/AISC 360-05, Chicago, Illinois.

AISC SAC (1997), *Background reports: metallurgy, fracture mechanics, welding, moment connections and frame system behavior*, Rep. SAC/BD-97/02.

Al-Bermani, F.G.A. & Kitipornchai, S. (1992), "Elastoplastic nonlinear analysis of flexibly jointed space frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 118, No. 1, pp. 108 -125.

Al-Bermani, F.G.A., Li, B., Zhu, K. & Kitipornchai, S. (1994), "Cyclic and seismic response of flexibly jointed frames", *Engineering Structures*, Vol. 16, No. 4, pp. 249-255.

Almusallam, T.H. & Richard, R.M. (1993), "Steel frame analysis with flexible joints exhibiting-strain-softening behavior", *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 1, pp. 55-65.

Al-Salloum, Y.A. & Almusallam, T.H. (1995), "Optimally and safety of rigid and flexibly-jointed steel frames", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 35, pp. 189-215.

Altman, W.G. Jr, Azizinamini, A., Bradburn, J.H. & Radziminski, J.B. (1982), "*Moment-rotation characteristics of semi-rigid steel beam-to-column connection*", Report to NSF for Grant n. PFR7923520, Dep. of Civil Eng., Univ. of South-California, Columbia.

Alvarenga, A.R. (2010), "*Estudo sobre as ligações em estruturas de aço*", Relatório Interno de Desenvolvimento. PROPEC/EM-UFOP, Curso de Doutorado em Construções Metálicas.

Anderson, D & Tahir, MM (1996), "Economic comparison between simple and partial strength design of braced frames", em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R., *Connections in steel structures III*, Trento, Itália, pp. 527-553.

Ang, V.M. & Morris, G.A. (1984), "Analysis of three dimensional frames with flexible beam-to-column connections", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 11, pp. 245-254.

ANSYS (2005), *Structural nonlinearities*, Seminar for revision 4.4, Swanson Analysis System Inc., ANSYS Inc., Canonsburg, Pennsylvania.

Aoki, T. & Fukumoto, Y. (1983), "Experiments on end-restrained steel welded H columns", 3<sup>rd</sup> *International colloquium on stability of metal structures*, Paris, França, pp. 71-76.

Arbabi, F. (1982), "Drift on flexibly connected frames", *Computers & Structures*, Vol 15, No. 2, pp. 103-108.

Astaneh-Asl, A. (1999), "Seismic performance and design of bolted steel moment-resisting frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 105-120.

Astaneh\_Asl, A. (2003), "World Trade Center collapse. Field investigation and analysis", Notas de leitura. Proceedings 9<sup>th</sup> *Arab Structural Eng. Conference*, Abu Dhabi, UAE.

Astaneh-Asl, A., Call, S.M. & McMullin, K.M. (1989), "Design of single plate shear connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 21-32.

Attiogbe, E. & Morris, G. (1991), "Moment-rotation functions for steel connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 117, No. 6, pp. 1703-1718.

Azizinamini, A., Bradburn, J.H. & Radziminski, J.B.(1985), "*Static and cyclic behavior of semi-rigid steel beam-connections*", Struct. Res. Studies, Dept. of Civil Eng., Univ. South-Carolina/Columbia.

Azizinamini, A. & Radziminski, J.B. (1989), "Static and cyclic performance of semi-rigid steel beam-to-column connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 115, No. 12, pp. 2979-2999.

Bahaari, M.R. & Sherbourne, A.N. (1994), "Computer modeling of an extended end-plate bolted connection", *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 5, pp. 879-893.

Bahaari, M.R. & Sherbourne, A.N. (1996), "Structural behavior of end-plate bolted connections to stiffened columns", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 8, pp. 926-935.

Bahari, M.R. & Sherbourne, A.N. (2000), "Behavior of eight-bolt large capacity endplate connections", *Computer and Structures*, Vol. 72, pp. 699-711.

Bahia, C.S., Graham, J. & Martin, L.H. (1981), "Experiments on rigid beam to column connections subject to shear and bending forces", *Int. Conf. Joints in Struct. Steelwork*, Teeside Polytechnic.

Bailey, J.R. (1970), "Strength and rigidity of bolted beam to column connections", *Proceedings of the Conference on Joints in Structures*, Vol. 1, pp. 4, Un. de Sheffield / RU.

Baker, J.F. (1934), "A note on effective length of pillar forming part of continuous member in building frame", 2<sup>nd</sup> Report Steel Structures Research Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research of Grand Britain, pp. 13-34, HMSO. Londres/RU.

Barakat, M. & Chen, W.F. (1990), "Practical analysis of semi-rigid frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 54-68.

Barsom, J.M. & Pellegrino, J.V. Jr (2002), "Failure analysis of welded steel moment-resisting frame connections", *ASCE Journal of Materials in Civil Eng.*, Vol. 14, No. 1, pp. 24-34.

Batho, C. & Lash, S.D. (1936), "Further investigations on beam and stanchion connections encase concrete. Together with laboratory investigation on full scale steel frame", Final report. SSRC, Dept. of Scientific and Ind. Research, pp. 276-363, HMSO, Londres/RU.

Batho, C. & Rowan, H.C. (1934), "Investigation of beam and stanchion connections", Steel Structures Res. Committee, 2<sup>nd</sup> Report, Londres, HMSO pp. 61-137, em Morris & Packer, (1987). Já Abdalla & Chen (1995), citaram pp. 92; e 1<sup>st</sup> Report Batho, C. (1931), pp. 61-137.

BCSA (1995), *Joints in steel construction. Moment connections*, The Steel Construction Institute, Shuttleworth & outros, Westminster, Londres, RU.

Beaulieu, D. & Giroux, Y.M. (1974), "Etude experimentale d'un joint rigide entre un poteau tubulaire et des poutres en double-té", Rap. GCT-74-06-02 Dep. de Génie Civil, Univ. Laval, Quebec, Canadá.

Beedle, L. & Christopher, R. (1964), "Tests of steel moment connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 116-125.

Benuzzi, F., Nethercot, D.A. & Zandonini, R. (1996), "Experimental behavior of semi-rigid connections in frames", em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R., *Connections in steel structures III*, Trento/Itália, pp. 57-66.

Bhatti, M.A. & Hingtgen, J.D. (1995), "Effects of connection stiffness and plasticity on the service load behavior of unbraced steel frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 21-33.

Birkemoe, PC. & Gilmor, M.I. (1978), "Behavior of bearing critical double-angle bema connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 109-115.

Bjorhovde, R. (1984), "Effect of end-restraint on column strength – Practical applications", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 1-13.

Bjorhovde, R., Brozzetti, J. & Colson, A. (1987), *Connections in steel structures I – Behavior, strength and design*, Cachan, França. Elsevier Applied Science, Londres/RU.

Bjorhovde, R., Colson, A. & Brozzetti, J. (1990), "Classification system for beam-to-column connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 11, pp. 3059-3076.

Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R. (1996), *Connections in steel structures III – Behavior, strength and design*, Trento, Itália. Pergamon Press.

Bose, B. & Hughes, A.F. (1995), "Verifying the performance of standard ductile connections for semi-continuous steel-frames", *Structures & Buildings*, Vol. 110, No. 11, pp. 441-457.

Briquet, C., Guisse, S., Jaspard, J.P., Lognard, B. & Maquoi, R. (1994), "Research activities under COST C1 at the department MSM of the University of Liège", Proc. of 2<sup>nd</sup> COST C1 Workshop on Semi-rigid behavior of civil engineering structural connections. Praga, República Tcheca.

Broderick, B.M. & Thomson, A.W. (2005), "Moment-rotation response of flush end-plate joints under cyclic loading", *Steel structures*, Vol. 5, pp. 441-451.

Brown, J.H. (1986), "Moments on beam-columns with flexible connections in braced frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 157-165.

Brun, P. & Picard, A. (1976), "*Etude d'un assemblage imparfaitement rigide et des effets de son utilisatio dans um multi-étage*", Rap. GCT-76-03 Dep. de Génie Civil, Un. Laval, Quebec/Canadá.

Bursi, O.S. & Jaspart, J.P. (1997), "Calibration of-finite element model for isolated bolted endplate steel connection", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 44, No. 3, pp. 225-262.

BS 5950 (1990), *Structural use of steelwork in building*, Part I, Code of practice for design in simple and continuous construction: hot-rolled sections, British Standards Institution, Londres/RU.

Calado, L. (2003), "Nonlinear cyclic model of top and seat with web angle for steel beam-to-column connections", *Engineering Structures*, Vol. 25, pp. 1189-1197.

Carskaddan, P.S., Haaijer, G. & Grubb, M.A. (1984), "Adjusting the beam-line for positive-moment yielding", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 217-221.

Chan, S.L. & Chui, P.P.T. (2000), *Nonlinear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*, Elsevier, Oxford/RU.

Chan, S.L., Huang, H.Y. & Fang, L.X. (2005), "Advanced analysis of imperfect portal frames with semi-rigid base connections", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 6, pp. 633-640.

Chen, W.F. (1988), *Steel beam-to-column connections*, Elsevier Applied Science, R. Narayan Ed., Londres/RU.

Chen, W.F. & Lui, E.M. (1985), "Columns with end restraint and bending in load and resistance design factor", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 105-132.

Chen, W.F. & Lui, E.M. (2000), *Stability design of steel frames*, CRC Press, Boca Raton/Flórida.

Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames- Theory software and applications*, CRC Press, Boca Raton/Flórida.

Chen, W.F., Goto, Y. & Liew, J.Y.R. (1996), *Stability design of semi-rigid frames*, John Willey and Sons, Nova Iorque.

Chisala, M.L. (1999), "Modeling M- $\Phi$  curves for Standard beam-to-column connections", *Engineering Structures*, Vol. 21, pp. 1066-1075.

Christopher, J.E. & Bjorhovde, R. (1999), "Semi-rigid frame design methods for practicing engineers", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 12-28.

CISC (1983), *A project analysis approach to building costs*, Canadian Institute of Steel Construction, Willowdale, Ontário, Canadá. (CISC, 1997, *Handbook of steel construction*, 7.a Ed).

Citipitioglu, A.M., Haj-Ali, R.M. & White, D.W. (2002), "Refined 3D finite element modeling of partially-restrained connections including slip", *J. C. Steel Research*, Vol. 58, No. 1-3, pp. 995-1013.

Coelho, A.M.G., Bijlaard, F.S.K. & Silva, L.S. (2004a), "Experimental assessment of the ductility of extended end plate connections", *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 1185-1206.

Coelho, A.M.G., Bijlaard, F.S.K., Gresnit, N. & Silva, L.S. (2004b), "Experimental assessment of the behavior of bolted T-stub connections made up of welded plates", *J. C. Steel Research*, Vol. 60, pp. 269-311.

Colson, A. & Louveau, J.M. (1983), "Connections incidence on the inelastic behavior of steel structural", *Euromech Colloquium*, No. 174.

Cook, N.E. Gerstle, K.H. (1987), "Safety type 2 steel frames", Part II "Under cyclic loads", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 113, No. 7, pp. 1444 -1456 e 1457-1467.

Cox, M. (1972), "The numerical evaluation of B-splines", *Journal of Inst. Math. Applic.*, Vol. 10, pp. 134-139.

CSA S16 (1994), *Limit states design of steel structures*, CAN/CSA-S16.1-M94, Canadian Standards Association, Rexdale, Ontário/Canadá.

Dannemann, R.W. (1963), disc. em Monforton, G.R. & Wu, T.S. (1963), *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 90, No. 4, pp. 287-290.

Davison, J.B., Kirby, P.A. & Nethercot, D.A. (1987), "Column behavior in PR construction: experimental behavior", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 113, No. 9, pp. 2032-2050.

De Back, L. & Zoetemeijer, P. (1972), "High strength bolted beam to column connections: the computation of bolts, T-stub flanges and column flanges", Stevin Laboratory 6-72-13, Delft Univ. of Technology, Delft/Holanda.

De Falco, F. & Marino, F.J. (1966), "Column stability in type 2 construction", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 67-71.

Deierlein G.G. (1992), "An inelastic analysis and design system for steel frames with partially restrained connections", em Bjorhovde, R., Colson, A., Haaijer, G. & Stark, J.W.B., *Connections in Steel Structures II – Behavior, design and Strength*, AISC, pp. 408-415, Chicago.

Det Norske Veritas (1977), *Norwegian rules for the design construction and inspection of offshore structures*, DNV, Hovik/Norway.

De Wolf, J.T. & Sarisley, E.F. (1980), "Column base plates with axial loads and moment", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 106, pp. 2167-2184.

Dhillon, B.S. & Majid, S.A. (1990), "Interactive analysis and design of flexibly connected frames", *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 2, pp. 189-202.

Dhillon, B.S., O'Malley III, J.W. (1999), "Interactive design of semi-rigid steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 125, No. 5, pp. 556-564.

Disque, R.O. (1964), "Wind connections with simple framing", *AISC Eng. Journal*, Vol. 3/4, pp. 101-103.

Dong, Q. (1994), "Microcomputer analysis of reinforced concrete flat-plate structures subjected to lateral loading", MSc Tese. Dept. Civil Eng., Univ. of Manitoba, Winnipeg/Canadá.

Douty, R.T., McGuire, W. (1965), "High-strength bolted moment connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 91, No. 2, pp. 101-128.

Drake, R.M. & Elkin, S.J. (1999), "Beam-column base plate design – LRFD method", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 29-38. [Erratas: (2000), Vol. 2/4, pp. 81; e (2000), Vol. 4/4, pp. 170].

Driscoll, G.C. (1987), "Elastic plastic analysis of top- and seated angle connections", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 8, pp. 119-136.

Dubina, D. & Stratan, A. (2002), "Behavior of welded connections of moment resisting frames beam-to-column joints", *Engineering Structures*, Vol. 24, pp. 1431-1440.

Dumas, M., Beaulieu, D. & Piccard, A. (2004), "Introduction of the true behavior of connections in structural steel analyses", 5.o Structural Specialty Conf. of the *Canada Society for Civil Eng.*, Saskatoon/Canada.

El-Ghazaly, H.A. (1995), "Elasto-plastic rotational capacity of welded symmetrical moment connections", *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 4, pp. 676-685.

El-Tawil, S. (2000), "Panel zone yielding in steel", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 120-131.

Engelhardt, M.D. & Husain, A.S. (1993), "Cyclic-loading performance of welded flange-bolted web connections", *ASCE Journal of Struct. Eng.*, Vol. 119, No. 12, pp. 3537-3550.

Ermopoulos, J.C. & Michaltsos G.T. (1998), "Analytical modeling of stress distribution under column base plates", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 46, No. 1-3, pp. 246-247.

Ermopoulos, J.C. & Stamatopoulos, G.N. (1996a), "Mathematical modeling of column base plate connections", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 36, No. 2, pp. 79-100.

Ermopoulos, J.C. & Stamatopoulos, G.N. (1996b), "Analytical modeling of column base plates under cyclic loading", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol.40, No. 3, pp. 225-238.

Estrin, GY (1992), "Determination of bending moments in semi-rigid steel framing joints", *Computers & Structures*, Vol. 45, No. 5/6, pp. 189-202.

Eurocode 3 (1992), *Design of steel structures*, Part 1, CEN - European Committee for Standardization. ENV 1993 -1-1 E, Bruxelas.

Eurocode 3 (1997), *Revised Annex J: Joint in building frames*, Part 1.1, CEN - European Committee for Standardization, versão aprovada. (Revisão 1998, segundo Simões *et al.*, 2002).

Eurocode 3 (2000), *Design of steel structures - Design of joints*, Part 1.8, CEN - European Committee for Standardization, PR-ENV 1993 -1-8 E, draft 2, Bruxelas.

ECSS (1984), *Ultimate limit states calculations of sway frame with rigid joints*, Technical working group 8.2 Publicação 33. European Convention for Constructional Steelwork, pp. 20.

Faella, C., Piluso, V. & Rizzano, G. (1994), "Connection influence on the elastic and inelastic behavior of steel frames", International workshop and seminar *Behavior of steel structures on seismic areas*. STESSA, Timisoara/Romênia.

Faella, C., Piluso, V. & Rizzano, G. (1996), "Prediction of the flexural resistance of bolted connections with angle", *IABSE Colloquium on Semi-rigid Structural Connections*. Istambul/Turquia.

Faella, C., Piluso, V. & Rizzano, G. (2000), *Structural steel semi-rigid connections – Theory, design and software*, CRC Press, Boca Raton/Flórida.

FEMA (1995), *Evaluation, repair, modification and design of welded steel moment structures*, Report n. 267, Federal Agency Management Agency. Advisory 1, n. 267A (1997).

Foley, C.M., Vinnacota, S. (1995), "Toward design office moment-rotation curves for end-plate beam-to-column connections", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 35, pp. 217-253.

Frye, M.J. & Morris, G.A. (1975), "Analysis of flexibly connected steel frames", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 2, No. 3, pp. 280-291. Disc.: Nixon, D. & Adams, P.F. (1976), *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 3, No. 2, pp. 349-350, Picard, A., Giroux, Y.M. & Brun, P. (1976), pp. 350-352.

Galambos, T.V. (2000), "Recent research and design developments in steel and composite structures in USA", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 55, pp. 289-303.

Galambos, T.V., & outros (1988), *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*, 4<sup>a</sup> Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.

Gantes, C.J. & Lemonis, M.E. (2003), "Influence of equivalent bolt length in finite element modeling of T-stub steel connections", *Computer and Structures*, Vol. 81, pp. 595-604.

Garlock, M.M., Ricles, J.M. & Sause, R. (2003), "Cyclic load tests and analysis of bolted top-and-seat angle connections", *ASCE Journal of Struct. Eng.*, Vol. 119, No. 12, pp. 1615-1625.

Gebbeken, N., Binder, B. & Rothert, H. (1992), "Zur numerischen analyze von kopfplatten-verbindungen", *Stahlbau*, Vol. 61, pp. 265-274, Berlim/Alemanha.



Gerschwindner, L.F. (1991), "A simplified look at partially restrained beams", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 73-78.

Gerstle, K.H. (1988), "Effect of connections on frames", *J. C. Steel Research*, Vol. 10, pp. 241-267.

Ghassemieh, M., Kukreti, A.R. & Murray, T.M. (1983), "*Inelastic finite element analysis of stiffened end-plate moment connections*", Res. Report n. FSEL/MBMA 83-02 Fears Structural Eng. Lab. School of Civil and Env. Science, Univ. of Oklahoma, Norman/Oklahoma.

Gioncu, V. & Pectu, T. (1997), "Available rotation capacity of wide-flange beams and beam-columns", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 43, No. 1-3, pp. 161-217.

Goel, S.C., Lee, K.H. & Stojasdinovik, B. (2000), "Design of welded moment connections using truss analogy", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 31-40.

Goldberg, J.E. & Richard, R.M. (1963), "Analysis of nonlinear structures", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 89, No. 4, pp. 333-351.

Gomes, F.C.T., Kuhlmann, U., De Matteis, G. & Mandara, A. (1998), "Recent developments on classification of joints", *COST C1 Workshop*, Liege/França.

Goto, Y. & Miyashita, S. (1998), "Classification system for rigid and semi-rigid connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 124, No. 7, pp. 750-757.

Goverdham, A.V. (1984), "*A collection of experimental moment-rotation curves and evaluation of prediction equations for semi-rigid connections*", MSc. Tese. Vanderbilt Univ., Nashville/Tennessee.

Goverdham, A.V. (1988), "Moment-rotation characteristics of end-plate connections", PhD Dissertation. Vanderbilt Univ., Nashville/Tennessee.

Graham, I. (1993), "Observations from the behaviour of bolted beam to unstiffened column rigid connections", *The Structural Engineer*, Vol. 71, No. 6, pp. 99-105.

Guisse, S. & Jaspart, J.P. (1996), "Influence of structural frame behavior on joint design", em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R. *Connections in steel structures III*, Trento/Itália., pp. 321-330.

Hajjar, J.F. & outros (1997), *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for american steel design*, ASCE, Nova Iorque.

Hasan, R., Kishi, N. & Chen, W.F. (1998), "A new nonlinear connection classification system", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 47, pp. 119-140.

Hayalioglu, M.S. & Degertekin, S.O. (2005), "Minimum cost design of steel frames with semi-rigid connections and column bases via genetic optimization", *Computer & Structures*, Vol. 83, pp. 1849-1863.

Hayes, J.G. (1974), "Numerical methods for curve and surface fitting", *The Institute of Mathematics and its Application*, Vol. 5-6, pp. 144-152, Londres/RU.

Hellesland, J. & Bjorhovde, R. (1996a), "Part I: restraint demand factors and effective lengths of braced columns", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 10, pp. 1216-1224.

Hellesland, J. & Bjorhovde, R. (1996b), "Part II: improved frame stability analysis with effective length" *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 11, pp. 1275-1283.

Hetchman, R.A. & Johnson, B.G. (1947), "Riveted semi-rigid beam-to-column building connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 11.

Hickerson, T. (1937), "*Statically indeterminate frame works*", Chapel Hill, N.C. em Dannemann (1963).

Ho, W.M.G. & Chan, S.L. (1992), "Semibifurcation and bifurcation analysis of flexibly connected steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 117, No. 8, pp. 2299-2319.

Hon, K.K. & Melchers, R.E. (1987), "Moment-rotation curves for 'pinned' column-bases", *The Structural Engineer*, Vol. 65, No. 9, pp. 54-59.

Iwankin, N. (1997), "Rational basis for increased fillet weld strength", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 68-70. [Errata: (1997), Vol. 3/4, pp. 112].

Jaspart, J.P. & Vandegans, D. (1998), "Application of the component method to column bases", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 48, pp. 89-106.

Jenkins, W.M., Tong, S. & Prescott, A.T. (1986), "Moment transmitting end-plate connections in steel construction and proposed basis for flush end-plate design", *The Structural Engineer*, Vol. 64, No. 5, pp. 121-132.

Johnson, B. & Green, L. (1940), "Flexible welded angle connections", *AWS Journal*, Vol. 19, No. 10, pp. 402-408.

Johnson, L.G., Cannon, J.C. & Spooner, L.A. (1959), "Joints in high tensile preload bolts – tests on joints designed to develop full plastic moments of connected members", *Proc. Jubilee Symposium on high strength bolts*, Londres/RU, IStrutE, pp. 70-80.

Johnson, R.P. & Law, C.L.C. (1981), "Semi-rigid joints for composite frames", em "Joints in structural steel works", John Wiley & Sons, pp. 3.3-3.19, Nova Iorque.

Johnston, N.D. & Walpole, W.R. (1981), "Bolted end-plate beam-to-column connections under earthquake type loading", Res. Rep. 81-7, Depto. of Civil Eng., Univ. of Canterbury, Christchurch/N. Zelândia.

Jones, S.W., Kirby, P.A. & Nethercot, D.A. (1982), "Columns with semi-rigid joints", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 108, No. 2, pp. 361-372.

Kawashima, S. & Fujimoto, T. (1984), "Vibration analysis of frames with semi-rigid connections", *Computers & Structures*, Vol. 19, pp. 85-92.

Kemp, A.R. & Dekker, N.W. (1991), "Available rotation capacity in steel and composite beams", *The Structural Engineer*, Vol. 69, No. 05, pp. 88-94.

Kennedy, D.J.L. (1969), "Moment-rotation characteristics of shear connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 105-115.

Kim, K.D. & Englehardt, M.D. (2007), "Non-prismatic beam element for beams with RBS connections in steel moment frames", *ASCE J. Structural Engineer*, Vol. 133, No. 2, pp. 176-184.

Kim, S.E. & Chen, W.F. (1996c), "Practical advanced analysis for semi-rigid frame design", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 129-141.

Kim, Y. & Chen, W.F. (1998), "Design tables for top- and seat-angle with double web-angle connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 50-75.

King, W.S. (1994), "The limit loads of steel semi-rigid frames analyzed with different methods", *Computers & Structures*, Vol. 51, No. 5, pp. 475-487.

Kishi, N. & Chen, W.F. (1987), "Moment-rotation relations of semi-rigid connections with angles", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 7, pp. 1813-1834.

Kishi, N. & Chen, W.F. (1990), "Semi-rigid steel beam-to-column connections data base and modeling", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 1, pp. 105-119.

Kishi, N., Chen, W.F., Goto, Y. & Hasan, R. (1996), "Behavior of tall buildings with mixed use of rigid and semi-rigid connections", *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1193-1206.

Kishi, N., Chen, W.F., Goto, Y., Komuro, M. (1998), "Effective length factor of columns in flexibly jointed and braced frames", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 47, pp. 93-118.

Kishi, N., Chen, W.F., Matsuoka, K.G. & Nomachi, S.G. (1987), "Moment-rotation of top- and seat angle with double web angle connections", em Bjorhovde, R., Brozzetti, J. & Colson, A. *Connections in steel structures I*, Cachan/França, pp. 135-149.

Kontoleon, M.J., Mistakidis, E.S., Baniotopoulos, C.C. & Panagiotopoulos, P.D. (1999), "Parametric analysis of the structural response of steel base plate connections", *Computer & Structures*, Vol. 71, pp. 87-103.

Kottlyar, P.E.N. (1996), "Formulas for beams with semi-rigid connections", *AISC Eng. Journal*, Vol. 4/4, pp. 142-146.

Krishnamurthy, N., Huang, H.T., Jeffrey, P.K. & Avery, L.K. (1979), "Analytical M-tetha curves for end-plate connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 105, No. 1, pp. 133 -145.

Kukreti, A.R., Ghassemieh, M. & Murray, T.M. (1990), "Behavior and design of large capacity moment end plates", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 3, pp. 809-828.

Kukreti, A.R., Murray, T.M. & Abolmaali, A. (1987), "End-plate connection moment-rotation relationship", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 8, pp. 137-157.

Lau, H.H., Godley, M.H.R. & Beale, R.G. (2003), "The influence of base connectivity on the ultimate load of columns", *Computer & Structures*, Vol. 81, pp. 1827-1849.

Lee, S.S. & Moon, T.S. (2002), "Moment-rotation model of semi-rigid connections with angles", *Engineering Structures*, Vol. 24, pp. 227-237.

Leon, R.T. (1999), "Partially restrained connections", em *Handbook of structural steel connection design and details*, Tamboli, AR. McGraw-Hill.

Lewitt, C.W., Chesson, E.J. & Munse, W.H. (1966), "Restraint characteristics of flexible riveted and bolted beam to column connections", *Struct. Res. Series*, 296, Dept. Civil Eng. Illinois/Urbana II.

Liew, J.Y.R. & Yu, C.H. (1995), "Influence of semi-rigid joint actions on the design and behavior of building frames", *Proc. PSSC 4 Pacific Steel Structures Conf.*, Vol. 1, pp. 71-80.

Liew, J.Y.R., Yu, C.H., Ng, Y.H. & Shanmugam, N.E. (1997), "Testing of semi-rigid unbraced frames for calibration of 2nd-order inelastic analysis", *J. C. Steel Research*, Vol. 41, No. 2-3, pp. 159-195.

Lightfoot, F. & LeMesurier, A.P. (1974), "Elastic analysis of frameworks with elastic connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 100, No. 6, pp. 1297-1309.

Lima L.R.O., Silva, L.S., Vellasco, P.C.G.S. & Andrade, S.A.L. (2004), "Experimental evaluation of extended endplate beam-to-column joints subjected to bending and axial force", *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 1333-1347.

Lindsey, S.D., Ioannides, S.A. & Goverdham, A.V. (1985), "The effect of connection flexibility on steel members and frame stability", em Chen, W.F., *Connection flexibility on steel frames*, ASCE.

Lionberger, S.R. (1967), "Statics and dynamics of building frames with non-rigid connections", PhD Diss., Stanford Univ., Califórnia.

Lionberger, S.R. & Weaver, J.W. (1969), "Dynamic response of frames with non-rigid connections", *ASCE J. Mechanical Div.*, Vol. 95, No. EM1, pp. 95-114.

Lipson, S.L. (1968), "Single angle and single plate beam framing connections", *1<sup>st</sup> Canadian Structural Eng. Conference*.

Liu, Y., Xu, L. & Grierson, D.E. (2008), "Compound-element modeling accounting for semi-rigid connections and member plasticity", *Engineering Structures*, Vol. 30, pp. 1292-1307.

Lo, D.S.K. & Stierner, S.F. (1995), "A practical method for incorporating flexible connections in plane frame analysis", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 22, pp. 871-882.

Lothers, J.E. (1951), "Elastic restraint equation for semi-rigid connections", *Transactions of J. Struct. Engng. ASCE*, Vol. 116, pp. 480-502.

Lourenço, P.B., Cruz, P.J.S. & Moreno, C.L.M. (1997), "Simulação de ligações semi-rígidas submetidas a carregamentos cíclicos em construção metálica e mista", em A. Lamas, P. Cruz & L. Calado Proc. *I. Encontro Nacional da Construção Metálica e Mista*, pp. 827-838, Porto/ Portugal.

Lui, E.M. (1988), "A practical P-delta analysis method for type FR and PR Frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 85-99.

Lui, E.M. & Chen, W.F. (1986), "Analysis and behavior of flexibly-jointed frames", *Engineering Structures*, Vol. 8, pp. 107-118.

Lui, E.M. & Chen, W.F. (1987), "Effects of joint flexibility on the behavior of steel frames", *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 5, pp. 719-732.

Lui, E.M. & Chen, W.F. (1988), "Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames", *Int. Jor. Solid and Structures*, Vol. 24, No. 9, pp. 893-913.

Maggi, Y.I., Gonçalves, R.M., Leon, R.T. & Ribeiro, L.F.L. (2005), "Parametric analysis of steel bolted end plate connections using finite element modeling", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 61, pp. 689-708.

Mander, J.B., Chen, S. & Pekcan, G. (1994), "Low-cycle fatigue of semi-rigid top- and seat-angle connection", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 111-122.

Mann, A.P. (1968), "*Plastically designed endplates*", PhD Diss., Univ. Leeds/RU.

Maxwell, S.M., Jenkins, W.M. & Howlett, J.N. (1981), "A theoretical approach to the analysis of connection behavior", *Proceedings of Conference on Joints on Steelwork*. Teeside Polytechnic/RU.

McCormick, M.M. (1974), *Background to AISC standard connections*, Melbourne Research Laboratory, BHP/Austrália. (Australian Institute of Steel Construction).

Melchers, R.E. (1992), "Column-base response under applied moment", *J. C. Steel Research*, Vol. 23, pp. 127-143.

Melchers, R.E. & Kaul, D. (1982), "Behavior of frames with flexible joints", Proc. 8<sup>th</sup> *Australian Conference on Mechanics of Structural Materials*, Newcastle/Austrália.

Menegotto, M. & Pinto, P.E. (1973), "Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal stress in the base", *IABSE symposium on the resistance and ultimate deformability*.

Mofid, M., Azizpour, S. & McCabe, S.L. (2001), "On the analytical model of beam-to-column semi-rigid connections, using plate theory", *Thin-walled Structures*, Vol. 39, pp. 307-325.

Mofid, M., Mohammadi, M.R.S. & McCabe, S.L. (2005), "Analytical approach of endplate connection: ultimate and yielding moment", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 131, No. 3, pp. 449-456.

Mohamed, S.E., Kounadist, A.N. & Simitzes, G.J. (1991), "Elastic-plastic instability of flexibly connected non-orthogonal frames", *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 6, pp. 663-669.

Moncarz, P.D. & Gerstle, K.H. (1981), "Steel frames with nonlinear connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 107, No. 8, pp. 1427-1440.

Monforton, G.R. & Wu, T.S. (1963), "Matrix analysis of semi-rigidly connected steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 89, No. 6, pp. 13 -42.

Morris, G.A. & Packer, J.A. (1987), "Beam-to-column connections in steel frames", *Canadian Jour. Civil Eng.*, Vol. 14, pp. 68-76. Disc: Nethercot, D.A. & Zandonini, R. (1988), Vol. 15, pg 282-286.

- Morris, G.A., Huang, J. & Scerbo, M. (1995), "Accounting for connection behavior in steel frame design", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 22, pp. 955-969.
- Munse, W.H., Bell, W.G. & Chesson, E. (1959), "Behavior of riveted and bolted beam-to-column connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 85, No. 3, pp. 29-50.
- Murray, T.M. (1983), "Design of lightly loaded steel column base plates", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 143-152.
- Nader, M.N. & Astaneh-Asl, A. (1992), "*Seismic behavior and design of semi-rigid steel frames*", Report No. UCB/SEMM 67-31, Dept. Civil Eng. Univ. of California, Berkeley/Califórnia.
- Nair, R.S., Birkemoe, P.C. & Munse, W.H. (1974), "High strength bolts subject to tension and prying", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 100, No. 2, pp. 351-372.
- Nemati, N., Le Houdec, D. & Zandonini, R. (2000), "Numerical modeling of the cyclic behavior of the basic components of steel endplate connections", *Advances in Eng. Software*, Vol. 31, pp. 837-849.
- Nethercot, D.A. (1985), "*Steel beam-to-column connections. A review of test data and its applicability to the evaluation of joint behavior in the performance of steel frames*", CIRIA Project RP 338.
- Nethercot, D.A. (2000), "Frame structures: global performance. Static and stability behavior. General report", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 55, pp. 109-124.
- Nethercot, D.A., Davison, J.B. & Kirby, P.A. (1988), "Connection flexibility and beam design in non-sway frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 99-108.
- Nethercot, D.A. & Zandonini, R. (1990), "Methods of prediction of joint behavior: beam-to-column connections", em Narayan, R, editor *Structural connections: stability and strength*, Elsevier Applied Science, Londres/RU, Cap.2, pp. 22-62.
- Nethercot, D.A., Li, T.Q. & Ahmed, B. (1998), "Unified classification system for beam-to-column connections", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 57, pp. 661-694.
- Onuah, C., Morris, G. & Attiogbe, E. (1989), "Moment-rotation behavior of double web angle connections", Proceedings of *Canadian Soc. of Civil Eng.*, Vol. 1B, pp. 424-444.
- Ostraender, J.R. (1970), "*An experimental investigation of end-plate connections*", MSc Tese, Univ. of Saskatchewan, Saskatoon/Canadá.
- Owens, G.W. & Cheal, B.D. (1989), *Structural steelwork connections*, Butterworths, Londres/RU.
- Owens, G.W. & Moore, D.B. (1992), "Steel connections: the robustness of simple connections", *The Structural Engineer*, Vol. 70, No. 3-4, pp. 37-45.
- Packer, J.A. (1975), "*A study of tension region of plastically design bolted beam to column connections*", MSc Tese, Manchester/RU.
- Packer, J.A. & Morris, J.L. (1977), "A Limit-state design method for the tension region of bolted beam-column connections", *The Structural Engineer*, Vol. 10, No. 5, pp. 446-458.
- Patel, K.V. & Chen, W.F. (1984), "Nonlinear analysis of steel moment connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 110, No. 8, pp. 1861-1874.
- Picard, A., Giroux & Brun, P. (1976), Disc: "Analysis of flexibly connected steel frames", Frye & Morris (1975), *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 3, No. 2, pp. 350-352.
- Piluso, V., Faella, C. & Rizzano, G. (2001), "Ultimate behavior of bolted T-stubs. I: theoretical model, II: model validation", *ASCE J. Structural Engineer.*, Vol. 127, No. 6, pp. 686-704.
- Pilvin, A. (1983), "Modelisation du comportement des assemblages de structures-barres", PhD Diss., Univ. de Paris/França.

- Pippard, A.J.S. & Backer J.F. (1936), *The analysis of engineering structures*, 3<sup>rd</sup>. Ed., Londres/RU.
- Poggi, C. & Zandonini, R. (1987), "A finite element for the analysis of semi-rigid frames", em Bjorhovde, R., Brozzetti, J. & Colson, A., *Connections in steel structures I*, Cachan/França, pp. 238-247.
- Popov, E. & Pinkney, R.B. (1969), "Cyclic yield reversal in steel building connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 95, No. 3, pp. 327-353.
- Popov, E., Tsai, K.C. & Englehardt, M.D. (1993), "Some unresolved issues in seismic codes", *Preceedings Structures Congress ASCE*, Irvine/Califórnia.
- Pucinotti, R. (2001), "Top-and-seat and web angle connections: prediction via mechanical model", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 57, pp. 661-694.
- Queiroz, G., Pimenta, R.J. & Paula, L.A.C. (2001), *Elementos das estruturas mistas aço-concreto*, Ed. O lutador.
- Radziminski, J.B. & Azizinamini, A. (1987), "Prediction of moment-rotation behavior of semi-rigid beam-to-column connections", em Bjorhovde, R., Brozzetti, J. & Colson, A. (1987), *Connections in steel structures I*, Cachan/França, pp. 33-40.
- Ramberg, W. & Osgood, W.R. (1943), "*Description of stress-strain curves by 3 parameters*", Tech. Rep. 902, National Advisory Committe for Aeronautics, Washington.
- Rathbun, J.C. (1936), "Elastic properties of riveted connections", *Transactions ASCE*, Vol. 107, pp. 993-1019.
- Rauscher, T.R. & Gerstle, K.H. (1992), "Reliability of rotational behavior of framing connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 12-19.
- Razzaq, Z. (1983), "End restraint effect on steel column strength", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 109 No. 2, pp. 314-334.
- Richard, R.M. & Abbott, B.J. (1975), "Versatile elastic-plastic stress and strain formula", *ASCE J. Mechanical Div.*, Vol. 101, No. 4, pp. 511-515.
- Richard, R.M., Gillett, P.E., Kriegh, J.D. & Lewis, B.A. (1980), "The analysis and design of single plate framing connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 30-52.
- Romstad, K.M. & Subramanian, C.V. (1970), "Analysis of frame connection rigidity", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 96, No. 11, pp. 2283-2300.
- Salmon, C.G., Schenker, L. & Johnston, B.G. (1955), "Moment-rotation characteristics of column anchorages", *Transactions ASCE J. Struct. Engng.*, Vol. 122, No. 2852, pp. 132-154.
- Savard, M., Beaulieu, D. & Fafard, M. (1994), "Nonlinear finite element analysis of three dimensional frames", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 21, pp. 461-470.
- Scacco, M.N. (1992), "Design aid: anchor bolt interaction of shear and tension loads", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 137-140.
- Schuab, S. (1998), "*Cyclic behavior of flush end plate connections*", MSc Tese, Dept. Civil Eng., Univ. of Oklahoma, Norman/Oklahoma.
- Shen, J. & Astaneh-Asl, A. (1999), "Hysteretic behavior of bolted-angle connections", *Journal of Constr. Steel Research.*, Vol. 51, pp. 201-218.
- Sherbourne, A.N. (1961), "Bolted beam-to-column connections", *The Structural Engineer.*, Vol. 39, No. 6, pp. 203-210.
- Sherbourne, A.N. & Bahaari, M.R. (1994), "3D Simulation of end-plate bolted connections", *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 120, No. 11, pp. 3122-3136. Disc: Krisnamurthy, N. (1996), Vol. 122, No. 6, pp. 713-714.

Sherbourne, A.N. & Bahaari, M.R. (1997), "Finite element prediction of end plate bolted connection behavior I: Parametric study, II: Analytic formulation", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 123, No. 2, pp. 157-175.

Shi, G. & Atluri, S.N. (1989), "Static and dynamic analysis of space frames with nonlinear connections", *Int. J. for Numeric Methods in Eng.*, Vol. 28, pp. 2635-2650.

Shi, Y.J., Chan, S.L. & Wong, Y.L. (1996), "Modeling for moment-rotation characteristics for end-plate connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 11, pp. 1300 -1306.

Shutz, F.W. (1959), "Strenght of moment connections using high tensile strength bolts", *Proceeding National Eng. Conference, AISC*.

Siat-Moy, F.C. (1999), "An improved K-factor formula", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 125, No. 2, pp. 169-174. Disc: Hellesland, J., (2000), Vol. 126, No. 5, pp. 633-635.

Simões, L.M.C. (1996), "Optimization of frames with semi-rigid connections", *Computers & Structures*, Vol. 60, No. 4, pp. 531-539.

Sivakumaram, K.S. (1988), "Seismic response of multi-storey steel buildings with flexible connections", *Engineering Structures*, Vol. 10, pp. 239-248.

Sommer, W.H. (1969), "*Behaviour of welded header plate connections*", MSc Tese, Univ. Toronto/Canadá.

Sonmez, M. (1996), "*Second-order analysis of elastic plane frames using finite element methods*", MSc Tese, Univ. of Pensilvannia.

Sourochnikoff, B. (1949), "Wind stresses in semi-rigid connections of steel framework", *Proceeding ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 2, No. 2402, pp. 382-402.

SSRC (1981), *General principles for the stability design of metal structures*, Technical Memorandum No. 5, ASCE.

Stelmack, T.W., Marley, M.I. & Gerstle, K.H. (1986), "Analysis and tests of flexibly connected steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 7, pp. 1573-1589.

Struik, J.H. & De Back, J. (1969), "*Tests on bolted T-stubs with respect to bolted beam-to-column connections*", Report 6-69-13, Stevin Laboratory Delft Univ. of Technology, Delft/Holanda.

Sugimoto, H. & Chen, W.F. (1982), "Small end restraint effects on strength of H-columns", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 108, No. 3, pp. 661-681.

Surtes, J.O. & Mann, A.P. (1970), "Endplate connections in plastically designed structures", *Conf. of Joints in Structures*, Un. of Sheffield/RU.

Swanson, J.A. (2002), "Ultimate strength prying models for bolted T-stub connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 136-147.

Swanson, J.A. & Leon, R.T. (2001), "Bolted steel connections: tests on T-stub components", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 126, No. 1, pp. 50 -56.

Tarpy, T.S. & Cardinal, J.W. (1981), "Behavior of semi-rigid beam to column end plate connections", *Proceedings of Conference on Joints on Steelwork*, Pentach Press, RU.

Thambiratnam, D.P. & Paramasivam, P. (1986), "Base plates under axial loads and moments", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 5, pp. 1166-1181.

Troup, K., Xiao, R.Y. & Siat-Moy, S.J. (1998), "Numerically modeling of bolted steel connections", *Journal of Constr. Steel Research.*, Vol. 46, No. 1-3, pp. 269-276.

Tsai, K.C., & Popov, E.P. (1990), "Cyclic behavior of end-plate moment connection", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 7, pp. 2917-2930.

Tschermmerneegg, F. & Queiroz, G. (1996), "Mechanical modeling of semi-rigid joints for the analysis of framed steel and composite structures" em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R., *Connections in steel structures III*, Trento, Itália, pp. 237-246.

UEGOR (1985), *Design of tubular joints for offshore structures*, Vol. 1-3, Underwater Engineering Group Offshore Research, CIRIA, Londres/RU.

Vinnakota, S (1982), "Planar strength of restrained beam columns", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 108, No. 11, pp. 2496-2516.

Wald, F., Sokol, Z. & Steenhuis, M. (1996), "Proposal of the stiffness design model of the column bases", em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R., *Connections in steel structures III*, Trento Itália, pp. 249-258.

Weinand, K. (1992), "SERICON Databank on joints in building frames", *Proceedings of the 1<sup>st</sup> COST C1 Workshop* Strasbourg, pp. 28-30.

Wilson, W.M. & Moore, H.F. (1917), "Tests to determine the rigidity of riveted joints in steel structures", *Engineering Experimental Station, Bulletin* 104, Urbana II/Illinois.

Wu, F.H. & Chen, W.F. (1990), "A design model for semi-rigid connections", *Engineering Structures*, Vol. 12, No. 4, pp. 88-97.

Xu, L. (1999), "*Optimal design of steel frameworks with semi-rigid connections*", PhD Diss., Waterloo Univ./Canadá.

Xu, L. (2001), "Second-order analysis for semi-rigid steel frame design", *Canadian Jour. Civil Eng.*, Vol. 28, pp. 59-76.

Xu, L. & Grierson, D.E. (1993), "Computer-automated design of semi-rigid steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 119, No. 6, pp. 1740-1760.

Yau, C.Y. & Chan, S.L. (1994), "Inelastic and stability analysis of flexibly connected steel frames by springs-in-series model", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 120, No. 10, pp. 2803-2819.

Yee, Y.L. & Melchers, R.E. (1986), "Moment rotation curves for bolted connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 3, pp. 615-634.

Yardimici, N., Yorgun, C. & Arda, T.S. (1996), "Testes on beam-columns strong and weak axis connections", *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 3, pp. 393-399.

Young, C.R. (1917), *Bulletin 4 Engineering Experiment Station*, University of Illinois/Urbana II.

Young, C.R. & Dunbar, W.B. (1928), "*Permissible stress on rivets in tension*", *Bulletin 8 Section 16, School of Engineering*, Univ. of Toronto/Canadá.

Young, C.R. & Jackson, K.B. (1934), "The relative rigidity of welded and riveted connections", *Canadian Journal of Research*, Vol. II, No. 1, pp. 62-100, Vol. II, No. 2 pp. 101-134.

Yourgun, C. & Bayramoglu, G. (2001), "Cyclic test for welded-plate sections with end-plate connections", *Journal of Constr. Steel Research.*, Vol. 57, No. 12, pp. 1309-1320.

Youssef-Agha, W., Aktan, H.M. & Olowokere, O.D. (1989), "Seismic response of low-rise steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 115, No. 3, pp. 594-607.

Yu, C.H., Liew, J.Y.R., Shanmugan, N.E. & Ng, Y.H. (1998), "Collapse behavior of sway frames with end-plate connections", *Journal of Constr. Steel Research.*, Vol. 48, pp. 169-188.

Yu, C.H. & Shammugan, N.E. (1986), "Stability of frames with semi-rigid joints", *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 639-648.

Zandonini, R. & Zanon, P. (1996), "Experimental analysis of steel beams with semi-rigid joints", *Advances in Steel Structures ICSAS*, Vol. I, pp. 359-364.



Zhu, K., Al-Bermani, F.G.A., Kitipornchai, S. & Li, B. (1995), "Dynamic response of flexibly jointed frames", *Engineering Structures*, Vol. 17, No. 8a, pp. 575-580.

Zoetemeijer, P. (1974), "A design method for tension side of statically loaded, bolted beam to column connections", *Heron* 20, No. 1, Delft Univ. of Technology, Delft/Holanda.

# 3

## FORMULAÇÃO GERAL

### SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
3.1	Introdução	143
3.2	Considerações gerais .....	144
3.3	Desenvolvimento do EF com ligação	152
3.4	Matrizes de rigidez do EF com ligação .....	172
3.5	Esforços internos de equilíbrio	186
3.6	<i>Integração Iterativa do Esforço Axial (IIEA)</i> .....	187
3.7	Referências	192

### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, faz-se a apresentação geral da base numérica computacional empregada ao longo deste trabalho para se realizar a *Análise Avançada* incluindo o efeito das ligações.

A formulação geral aborda um elemento finito (EF) que possui uma ligação numa das extremidades. Outros EFs empregados ao longo desta tese situam-se como casos particulares dessa formulação.

Na próxima seção, descrevem-se inicialmente as hipóteses simplificadoras, o referencial lagrangiano atualizado, o sistema corrotacional, os conceitos de tensão-deformação que levam ao comportamento inelástico, as condições básicas do problema estrutural na ótica de como se realizar uma *Análise Avançada*, as principais limitações, as características e os pesquisadores que se relacionam com os atributos adotados.

O EF com ligação é desenvolvido na seção 3.3. Partindo-se da cinemática do elemento, adota-se a aproximação do comportamento da fibra pelo eixo e chega-se a uma avaliação da deformação. Definem-se as grandezas naturais (deslocamentos, esforços) e se estabelecem as funções de forma. As condições de contorno introduzem particularidades da ligação, das quais são obtidos os campos de deslocamentos e de deformações correspondentes. Nessa seção, dá-se o destaque à grandeza *semiflexibilidade nodal*  $\eta$ , que permite uma simplificação nas equações que expressam os deslocamentos e o campo de deformações anteriores, bem como possui um significado especial que é ilustrado.

Na quarta seção, aborda-se a definição das matrizes de incidência cinemática, de rigidez constitutiva, a associada à curvatura do EF/barra e a geométrica, locais e globais, desde sua concepção genérica, partindo do equilíbrio e do PTV. Nessa seção, destaca-se um estudo sobre as propriedades elastoplásticas médias que são tratadas de outra maneira em relação aos processos anteriores (Lavall, 1996; Alvarenga, 2005), empregando as considerações de Chen *et al.* (1996).

Os esforços internos complementam a formulação, destacando a *Integração Iterativa do Esforço Axial* (Alvarenga, 2005), com algumas modificações e ajustes, ao longo desse período de estudos (Alvarenga & Silveira, 2008c).

A maioria das deduções e expressões algébricas desenvolvidas neste capítulo foi verificada pelo programa computacional “MAPLE” versão 7.0 (WMI, 2001), também, que forneceu um valioso auxílio.

## 3.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Desenvolve-se uma formulação numérica para realizar uma análise inelástica de segunda ordem empregando o conceito de zona plástica ou plasticidade distribuída. Por meio dessa formulação, que é aplicada no plano da estrutura, procura-se monitorar a formação das zonas plásticas da flexocompressão ao longo das barras, tratadas aqui de forma genérica (viga-coluna), para assim, fazer-se um retrato simplificado mais fiel do comportamento estrutural.

Na abordagem com zona plástica, de acordo com a Fig. 3.1(a), cada barra da estrutura é representada como uma série de elementos finitos (EF) que são definidos por um par de nós (por exemplo, A e B) nas extremidades. Nesses nós se avaliam as propriedades geométricas efetivas (a área  $A_0$ , a posição do centro de gravidade plástico  $y_{CGP}$ , o momento de inércia  $I_z$ ) e o comportamento da seção (o módulo tangente  $D$ ; o estado de tensões  $\sigma$ , o de deformações  $\epsilon$ ), conforme apresentaram inicialmente Owen & Hinton (1980).

Nesta abordagem, todas as barras/EFs têm seções de perfis I, com altura ( $d$ ), largura ( $b$ ), espessuras de aba ( $t$ ) e de alma ( $a$ ), como indica a Fig. 3.1(b).

Neste capítulo, desenvolve-se um EF mais geral, que possui uma ligação numa das extremidades, B no caso da Fig. 3.1(a). Essa ligação contribui com um novo grau de liberdade interno, representado pelo seu giro próprio, que está relacionado à sua rigidez e ao momento que ali atua, sendo estudado na seção seguinte.

O conceito de zona plástica adotando a técnica das fatias considera cada seção dos nós extremos (A-B) subdividida em componentes de área ( $dA_0$ ), que são denominados de *fatia*, representada na Fig. 3.1(c) (Lavall, 1996). Essas fatias são avaliadas conforme o estado de tensão ou a deformação do seu centroide, denominado *fibra*, também representada no centro da fatia na Fig. 3.1(c).

Essas fatias são delimitadas pelas seções extremas do EF e têm a mesma extensão ( $L$ ), porém, tanto as tensões como as deformações de cada extremidade da fatia são diferentes não existindo o imaginado equilíbrio de fatias, mas, sim, o equilíbrio dos esforços internos resultantes nas seções com as cargas aplicadas em termos nodais.

Nas fibras considera-se apenas o comportamento linear, desprezando as rotações e os deslocamentos de um ponto do corpo. Ou seja, avaliam-se apenas as relações que determinam as alterações de comprimento da fibra (ver o apêndice A.4).

É importante destacar que o estado das fibras, em cada nó, determina o estado das fatias e pela soma dos estados dessas fatias se encontra o estado de cada nó (a nível de esforços internos) e do EF como um conjunto (em nível de propriedades e rigidez). Numericamente, essa integral se transforma numa soma ao longo da área ( $A_0$ ) de cada seção, de cada nó do EF, envolvendo todas as fatias de área ( $dA_0$ ).

Do ponto de vista das propriedades estruturais (tanto a rigidez da seção como a determinação do seu centro de gravidade plástico) deverão ser avaliadas em cada instante ( $\omega$ ), baseando-se nas médias das propriedades atualizadas dos dois nós; já as demais características [como posição da fatia ( $y_c$ ), área ( $dA_0$ ) da fatia, etc.] são grandezas constantes (não se alteram), estabelecidas no início do análise, ou seja, são grandezas originais.

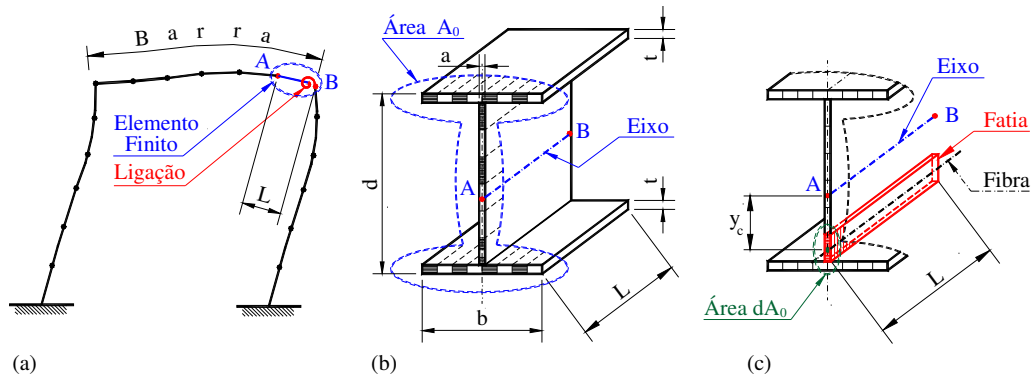
Tendo em vista as diversas considerações adotadas nessa formulação e para permitir sua apresentação mais clara, os trechos seguintes são divididos em subseções, destacando-se nos subtítulos o assunto principal.

### 3.2.1 SISTEMA CORROTACIONAL

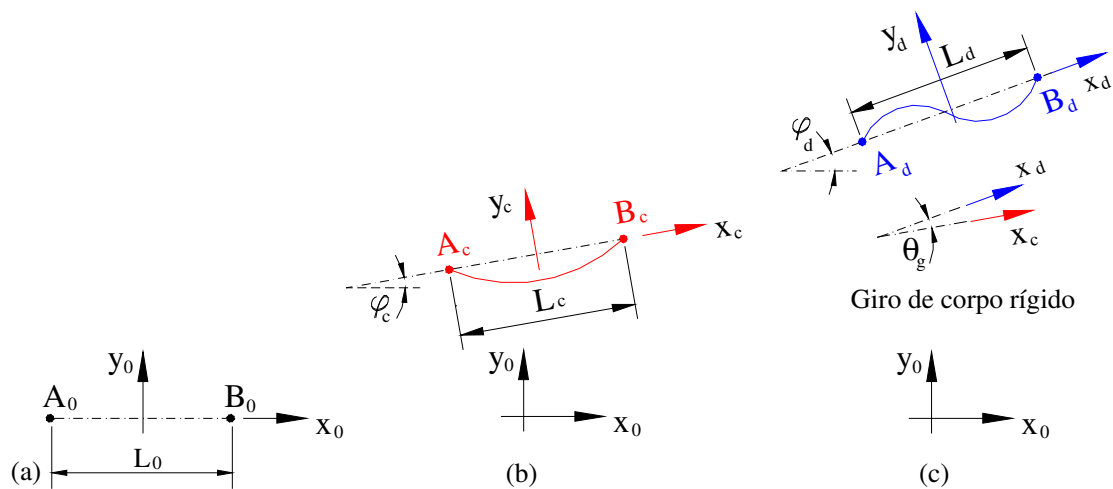
Essa formulação adota o referencial lagrangiano atualizado (RLA), para o qual as grandezas da configuração que se deseja obter no instante atual ( $\omega$ ), com o subscrito ( $_d$ ) significando *deformadas*, são relacionadas às grandezas já determinadas, do instante anterior ( $\omega-1$ ), com o subscrito ( $_c$ ) significando *conhecidas*, em cada ciclo do processo de solução. As grandezas constantes da análise são chamadas de grandezas *originais*, com o subscrito ( $_0$ ) (zero), quando  $\omega = 0$ . Essas configurações são representadas esquematicamente na Fig. 3.2.

Os pontos originais ( $A_0, B_0$ ), que definem a distância original  $L_0$ , ocupam a posição deformada ( $A_d, B_d$ ), no instante atual ( $\omega$ ), e serão relacionados à posição conhecida ( $A_c, B_c$ ) do instante anterior ( $\omega-1$ ) por meio de deslocamentos que cada ponto (ou nó) sofre  $\mathbf{u}$  ( $u, v, \theta$ ) ao passar da configuração ( $c$ ) para a ( $d$ ), em razão do carregamento atuante, ou parcela, que provoca esse movimento.

Tanto o eixo do elemento finito como os referenciais são definidos pela linha que une os nós (A-B) e determinam um ângulo de posição atual  $\varphi_d$  entre o eixo local atual ( $x_d, y_d$ ), e o global fixo ( $x_0, y_0$ ). Como existe, analogamente, um ângulo de posição conhecida ( $\varphi_c$ ) anterior, define-se o giro que nasce da diferença entre esses dois ângulos de eixos coordenados (ou referenciais), por giro de corpo rígido  $\theta_g$ , isto é:



**Figura 3.1 Modelagem da Zona Plástica:**  
(a) estrutura com EFs; (b) elemento finito e eixo; (c) fatia com fibra.



**Figura 3.2 Configurações do referencial lagrangiano atualizado:**  
(a) original, ( $\omega=0$ ); (b) conhecida, ( $\omega-1$ ); (c) deformada, ( $\omega$ ).

$$\theta_g = \varphi_d - \varphi_c \quad (3.1)$$

Essa formulação numérica atende, também, ao teste fundamental de movimento de corpo rígido de Yang & Kuo (1994), que não provocando o surgimento de esforços espúrios, como se comprovou (Alvarenga, 2008).

Conforme Silveira (1995), a grande vantagem de se adotar o RLA é que se consegue um bom controle sobre o giro de corpo rígido ( $\theta_g$ ) ao se aproximar as duas configurações, conhecida e deformada, minimizando os desvios na avaliação das deformações e dos esforços internos de equilíbrio.

A principal diferença em relação ao referencial lagrangiano total é que, ao relacionar a configuração deformada diretamente à original, quanto maior for o ângulo ( $\varphi_d$ ) maior tenderá a ser o desvio nos resultados produzidos.

Por outro lado, as equações deduzidas dependem tanto de grandezas estabelecidas no RLA propriamente quanto de grandezas originais, visto que o estado de tensões é integrado ao longo do volume original, que é considerado fixo, para a obtenção dos esforços internos, como será visto nas subseções 3.2.3 e 3.2.4.

### 3.2.2 TENSÃO E DEFORMAÇÃO DA FIBRA

Como a fibra estabelece o comportamento da fatia, define-se o alongamento linear  $\varepsilon$  (ou técnico) e a tensão nominal  $\sigma$ , conforme (Biot, 1939):

$$\varepsilon = L_d/L_c - 1 \quad \sigma = dN_d/dA_0 \quad (3.2a-b)$$

sendo  $L_d$  e  $L_c$  o comprimento deformado e o conhecido,  $dN_d$  é a parcela de esforço que solicita a fibra e  $dA_0$  a área da fibra, que é constante ( $dA_d = dA_c = dA_0$ ), como se mostra na Fig. 3.3(a), em que se considera, apenas, o comportamento unifilar da fibra.

Essas grandezas ( $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ) formam um par de medidas conjugadas, que são relacionadas entre si por uma lei constitutiva, em que a tensão  $\sigma$  é função da deformação  $\varepsilon$ , como ilustrado na Fig. 3.3(b). Para maior entendimento veja o apêndice A.4.

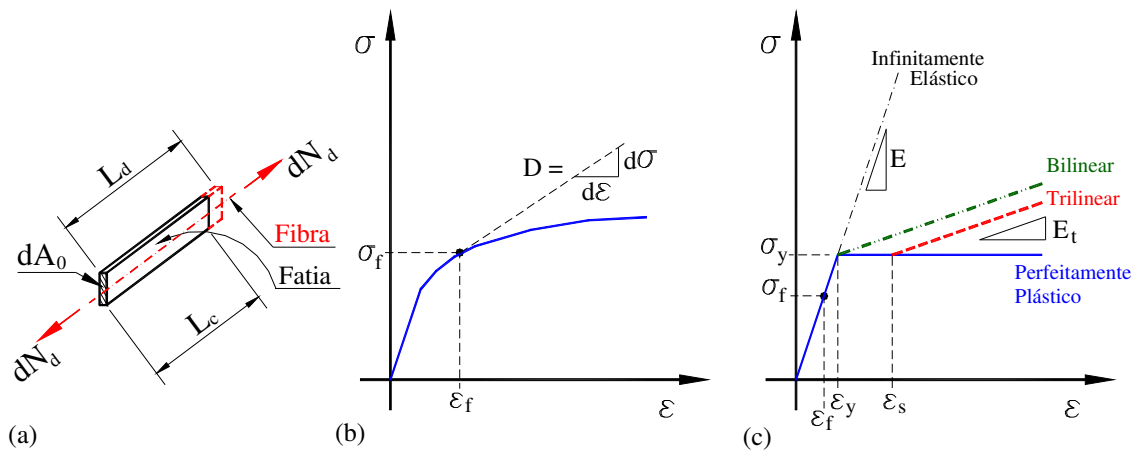
Define-se o módulo de rigidez do material da fibra como a tangente a curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  no ponto que representa o estado atual dessa fatia, ou seja:

$$D = d\sigma(\varepsilon)/d\varepsilon \quad (3.3)$$

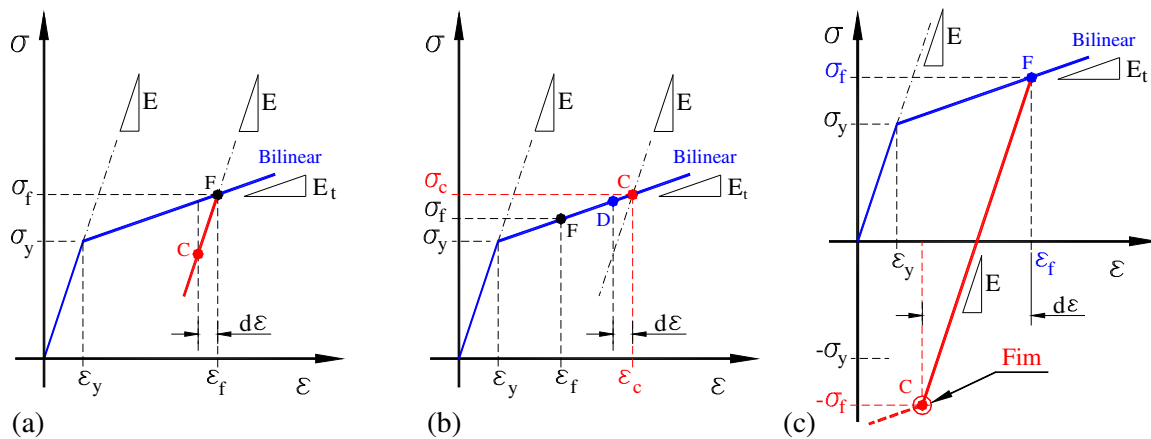
Existem vários diagramas de material que podem ser empregados, mas nesta formulação se consideram os tipos mais usuais na prática: o infinitamente elástico, o elástico perfeitamente plástico, o modelo dito bilinear e o trilinear com patamar, todos ilustrados na Fig. 3.3(c).

Notando-se que o comportamento estabelecido pelos diagramas prevê o módulo  $D$  como função do nível de tensão da fibra:

- a.  $E$  – o módulo elástico ou de Young (Beal, 2000), quando em regime elástico, logo,  $\sigma < \sigma_y$ , sendo  $\sigma_y$  a tensão inicial de escoamento do material;
- b.  $0$  – se o material for perfeitamente plástico e estiver em escoamento  $\sigma = \sigma_y$ ;
- c.  $E_t$  – o módulo tangente (Engesser, 1889 e 1895), quando em carregamento plástico, então  $\sigma \geq \sigma_y$ . É comum, na prática, adotar-se um  $E_t$  de valor pequeno não nulo, simulando o diagrama perfeitamente plástico (para evitar alguns tipos de singularidade de solução). Esse procedimento, entretanto, não será aplicado aqui.



**Figura 3.3 Comportamento da fibra e do material:**  
 (a) deformação da fibra; (b) módulo de rigidez; (c) diagramas tensão-deformação:  
 (—) perfeitamente plástico, (---) infinitamente elástico, (---) bilinear e (---) trilinear.



**Figura 3.4 Comportamento no descarregamento da fibra:**  
 (a) elástico; (b) ajuste plástico; (c) escoamento no sentido oposto.

O descarregamento da fibra (ou seja, a variação de deformação  $d\epsilon$  de sinal oposto ao da carga plástica) é tratado de forma diferente das aproximações anteriores (Lavall, 1996). Supondo-se, por exemplo, que o material tenha um diagrama de comportamento bilinear  $\sigma$ - $\epsilon$ , conforme a Fig. 3.4(a-c), há três casos de descarregamento considerados:

- quando ocorre a redução de deformação  $d\epsilon$ , após a fibra entrar em carga plástica e atingir um ponto de equilíbrio F, a fibra volta a se comportar de forma elástica, atingindo o ponto C [ver Fig. 3.4(a)] (Lavall, 1996);
- se a fibra parte do ponto de equilíbrio F, continua em carga, atingindo o ponto C, sem convergir, quando ocorre o descarregamento em decorrência da deformação  $d\epsilon$ , a fibra atinge o ponto D, ou seja, a plasticidade é apenas ajustada, pois o equilíbrio ainda não tinha sido encontrado [ver Fig. 3.4(b)] ;



- c. ocorrendo o descarregamento elástico previsto no caso (a), a deformação de máxima possível não poderá causar uma tensão no sentido oposto superior à de escoamento ( $-\sigma_f$ ) [ver Fig. 3.4(c)]. Admite-se o encruamento isotrópico, pequenas deformações e despreza-se o efeito Bauschinger (Chen & Han, 1987).

A principal diferença recai no fato de que, nessa formulação (adotada aqui), a plasticidade é ajustada durante todo o processo iterativo, reduzindo-se os ciclos até a convergência e evitando-se as soluções incoerentes (Nyssen, 1981).

Considera-se como descarregamento elástico o ocorrido apenas após ter sido atingida uma convergência anterior e acontecer uma deformação de sinal contrário ao do carregamento plástico. Adicionalmente, impõe-se um limite nesse descarregamento, como o início do escoamento no sentido oposto. A carga plástica no sentido oposto é condição de término da análise, uma vez que se torna complicado estabelecer o que está ocorrendo com a fibra, que poderia ter deformações plásticas de sinal oposto às tensões de escoamento existentes (o que causaria confusão com um possível erro numérico).

### 3.2.3 LIMITAÇÕES E HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Para definir o EF genérico dessa formulação, introduzem-se agora algumas hipóteses simplificadoras, juntamente com os seus autores (ou referências):

- a. Bernoulli (1728): o efeito de Poisson (Timoshenko & Goodier, 1970) é desprezado e na plasticidade o volume não se altera, portanto as deformações transversais ao eixo do EF são desprezadas, o que permite que a área geométrica das seções e das fatias seja constante (não se alteram na análise), não admitindo grandes deformações;
- b. Euler (1759): as seções permanecem ortogonais ao eixo da barra, ou seja, não ocorrerão distorções nas seções, desprezando-se o efeito da força cortante;
- c. Navier (1823): seções transversais planas permanecem planas após a introdução dos carregamentos, ou seja, não ocorre empenamento;
- d. Vlassov (1962): todas as barras (vigas e/ou colunas) estarão travadas fora do plano da análise, evitando a instabilidade lateral por flexotorção ou por empenamento. Isso implica que a esbeltez transversal deverá ser limitada (ver apêndice A.1 para parâmetros limite das normas):

i. próximo às zonas plásticas:  $L_t/r_y = 25 + 955/\sigma_y$  [kN/cm<sup>2</sup>], ou,

ii. trechos elásticos:  $L_t/r_y = (60 + 40\beta_M)\sqrt{25/\sigma_y}$  [kN/cm<sup>2</sup>]  $\leq 70$ ,

em que  $r_y$  é o raio de giração da seção no eixo de menor inércia (y),  $L_t$  é a distancia entre travamentos laterais e  $\beta_M$  a relação entre os momentos nas seções do travamento, com:  $-0,625 \leq \beta_M = M_t/M_p \leq 1,0$  adotando o sinal (+) para curvatura reversa (Higgins *et al.*, 1971);

e. Neal (1977): não se reduzirá a tensão de escoamento sob tensões combinadas, pois os esforços de cisalhamento são pouco expressivos. Então, não são reduzidos  $M_p$  ou  $N_y$  por causa do cisalhamento. Portanto, exige-se que os cortantes sejam:  $V_d \leq 0,577\sigma_y a d_a$  (Higgins *et al.*, 1971), em que  $d_a$  é a altura livre da alma (neste trabalho:  $d_a \approx d - 4t$ ). Entretanto, procura-se atender ao critério de von Mises (1913) quanto ao maior cisalhamento suportado pela área remanescente elástica da alma ( $a \cdot d_{ae}$ ) da seção do perfil I, verificando-se:  $V_{de} = 0,77\sigma_y a d_{ae} \geq V_d$ ;

f. Galambos (1982): todas as seções (perfis I) são compactas (não ocorrerá a instabilidade local das chapas componentes) e pode-se atingir a carga limite do sistema estrutural. Na prática, limitam-se as relações de esbeltez das partes componentes dos perfis segundo:

i. para a aba:  $b/t \leq 108,2/\sqrt{\sigma_y}$ ;

ii. para a alma de colunas (com ou sem flexão):  $d_a/a \leq 158/\sqrt{\sigma_y}$ ; e

iii. para a alma de vigas (somente na flexão):  $d_a/a \leq 533/\sqrt{\sigma_y}$ ;

como recomenda o LRFD (Salmon & Johnson, 1990), sendo  $\sigma_y$  ( $\leq 45$ ) expresso em kN/cm<sup>2</sup>, para todos os casos (ver o apêndice A.1);

g. não é verificado o atendimento à lei do *regime de fluxo plástico*, ou a *teoria de menor deformação*  $J_2$  (Chen & Han, 1987). Tampouco se comprova que há atendimento completo ao critério de von Mises (1913), ou a qualquer outro, com relação ao escoamento, uma vez que somente se consideram tensões normais atuantes nas fibras e, assim, o escoamento é estabelecido apenas pelo diagrama de tensão-deformação do material, sendo por isso exigido o item (e);

h. será considerada a influência da ligação entre a viga e a coluna, conforme a construção seja: i. rígida; ii. rotulada; ou iii. semirrígida;

- i. não se propõe um estudo sobre o comportamento dos painéis das colunas, que são normalmente considerados rígidos, não apresentando distorções. Três situações são previstas, entretanto, com as construções (ver apêndice A.2):
  - i. rígida – mesmo na presença de elevados momentos e cortantes, ou seja, nessa consideração cumpre que sejam colocados enrijecedores adequados nas colunas (horizontais na direção dos flanges das vigas e em diagonal para o cisalhamento, se requeridos);
  - ii. flexível – supondo que não haveria, *a priori*, esforços de momento, não seriam empregados enrijecedores;
  - iii. semirrígida – a curva momento-rotação da ligação implicitamente pode incluir a deformação do painel, dependendo da forma (tipo), das grandezas envolvidas e dos enrijecedores que podem, também, ser especificados;
- j. a excentricidade da ligação pode ser considerada, mas não foi explorada neste trabalho;
- k. as bases podem ter comportamento semirrígido, também, sendo resultado de uma família de curvas momento-rotação avaliadas sob uma dada condição de esforço axial, o que, entretanto, não determina modificação na definição das condições de contorno para o EF com ligação. Portanto, despreza-se o efeito da deformação axial para se estabelecer o comportamento momento-rotação da base;
- l. desprezam-se os efeitos das deformações locais de abas de colunas, nos pontos de contato com a ligação associados aos casos de flambagem local e/ou lateral, considerando que esses estados combinados serão críticos somente na trajetória após flambagem, ou seja, que as seções possuem capacidade de rotação de forma a atingir o momento último (Kemp & Dekker, 1991)

Essas considerações são também atributos ou limitações da *Análise Avançada*, aqui adotada, e que serão empregadas na seção seguinte, para estabelecer o elemento finito com uma ligação na extremidade. Algumas das características descritas não serão exploradas no corpo desta tese, embora isso não queira dizer que não tenha sido desenvolvida a formulação e/ou implementação correspondente (como o caso da excentricidade da ligação, por exemplo).

### 3.3 DESENVOLVIMENTO DO ELEMENTO FINITO COM LIGAÇÃO

Nesta seção é apresentada a formulação numérica do elemento finito (EF) para a condição de contorno rígido-ligação. O EF com condição de contorno oposta (ligação-rígido) obedece às mesmas considerações aqui estabelecidas, de forma simétrica, não sendo repetido o procedimento.

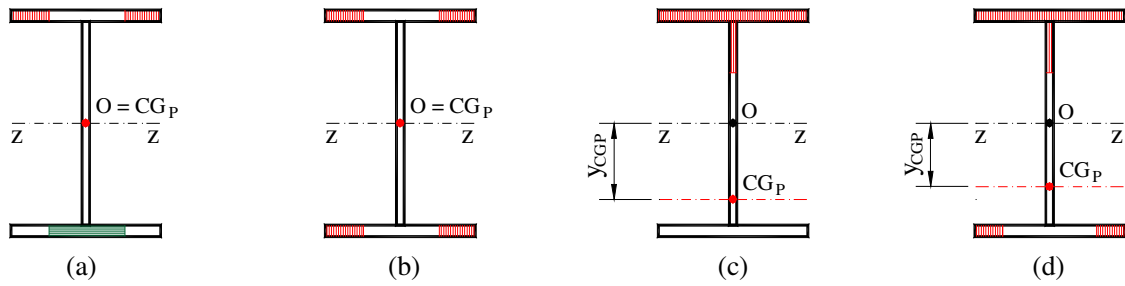
Nos capítulos seguintes (6 e 7), serão abordados os EFs que possuem as condições de contorno rígido-rígido e rígido-rótula, que se tornam casos particulares do EF rígido-ligação, em que se faz a consideração de rigidez infinita para o primeiro e de nula para o último. O EF rígido-rígido, chamado convencional, proposto inicialmente por Lavall (1996) é adotado, de maneira geral, em todos os modelos, por ser do tipo mais comum. Já o tipo rígido-rótula, em que a ligação se torna um pino, representa condições mais comuns às estruturas em treliças, previstas nas normas. A presença de rótulas nas análises passa a ser questionada com base no conceito atual de ligação semirrígida e do comportamento chamado *flexível* visto no capítulo anterior.

Deve-se verificar, todavia, que as funções de forma obtidas para estas condições de contorno, rígido-rígido e rígido-rótula, independentemente, não são as mesmas adotadas para a condição de contorno rígido-ligação, o que, de certa maneira, serve para comprovar a correção da formulação proposta ao atender ambas as considerações.

Na cinemática do EF genérico, apresentada a seguir, propõe-se a representação do comportamento do EF pelo seu eixo; em seguida são estabelecidas as grandezas corrotacionais e as funções de forma, que obedecerão às condições de contorno do EF com ligação. Estabelecidos os campos de deslocamento e de deformações, por diferenciação se chega às matrizes de rigidez (MR). As condições de equilíbrio determinam os esforços internos desse elemento.

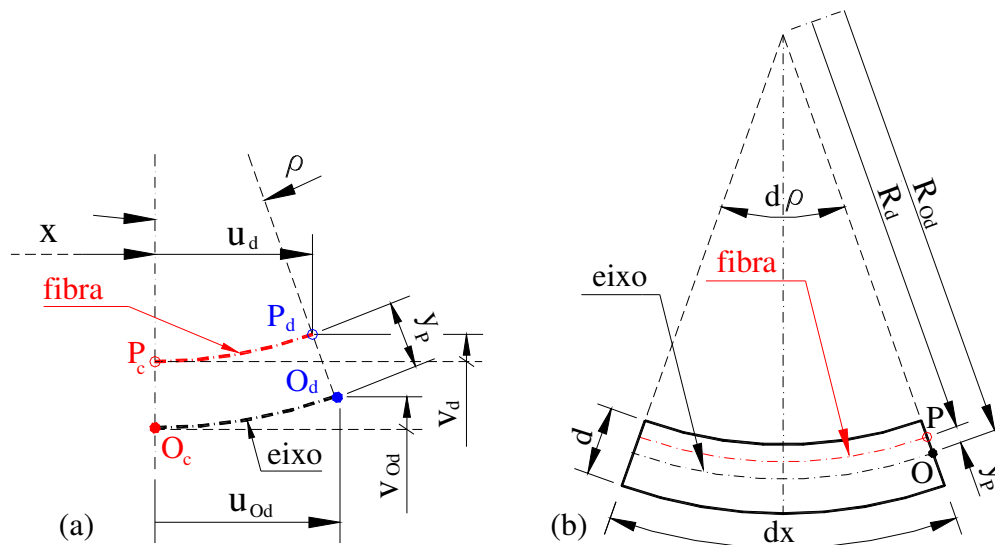
#### 3.3.1 CINEMÁTICA DO ELEMENTO

As hipóteses da seção anterior são necessárias para que um ponto da seção (uma fibra, por exemplo) possa ter seu estado de tensão-deformação estabelecido com base no conhecimento do comportamento do centroide da seção (O), que durante a fase elástica está contido no eixo do EF. Porém, na fase elastoplástica, somente em casos especiais, como ilustrado na Fig. 3.5(a-b), tem-se a distribuição da plasticidade na seção de forma simétrica em relação ao eixo z-z (caso de flexão pura ou de esforço axial puro, na figura se considerou o esforço de compressão).



**Figura 3.5 Zonas plásticas na seção com TRs:**

(a) flexão pura; (b) compressão pura; flexocompressão: (c) com 1 ZP; (d) com 2 ZPs;  
 (e) convenção: □ elástico, plástico: (→) à tração, (||) à compressão; (●) eixo do EF e (●) CG plástico.



**Figura 3.6 Relação entre a fibra e o eixo:**

(a) deslocamentos de P em relação a O; (b) raios de curvatura do elemento.

Em geral, na presença de esforço axial e da flexão combinados, a plasticidade na seção é assimétrica, resultando no deslocamento do centro de gravidade plástico ( $CG_P$ ), ou seja,  $y_{CGP} \neq 0$  [ $CG_P$  não coincide com o eixo do EF ( $O$ )], como se representa na Fig. 3.5(c-d) para os casos de flexocompressão com uma ou duas zonas plásticas. Isso ocorre e torna-se ainda mais grave porque se considera a presença das tensões residuais (TRs) no material.

Cumpra, agora, estabelecer o comportamento de um ponto P genérico da seção (uma fibra), como representado na Fig. 3.6(a), que sofre deslocamentos ( $u_d, v_d$ ) em relação aos deslocamentos ( $u_{Od}, v_{Od}$ ) do centroide da seção ponto O, pelas expressões:

$$u_d(x, y_P) = u_{Od}(x) - y_P \sin \rho \tag{3.4a-b}$$

$$v_d(x, y_P) = v_{Od}(x) - y_P (1 - \cos \rho)$$

sendo ( $x$ ) a posição longitudinal da seção que contém P, no sistema local corrotacional,

na configuração deformada,  $y_P$  a posição desse ponto em relação ao centro de giro da seção (na figura o eixo O) e  $\rho$  o ângulo de giro do eixo que contém essa seção.

O conceito de alongamento considerando a fibra isolada é relacionado, então, ao alongamento da fibra contida no eixo do EF, acompanhando a Fig. 3.6(b). Para um trecho infinitesimal  $dx$  do EF, numa seção de altura  $d$ , com os raios de curvatura do ponto P ( $R_d$ ) e do centroide O ( $R_{Od}$ ), pode-se expressar a deformação de P ( $\varepsilon$ ) como:

$$\varepsilon = \varepsilon_O - y_P \rho' \quad (3.5)$$

na qual ( $\varepsilon_O$ ) é a deformação da fibra no eixo O e ( $\rho' = d\rho/dx$ ) é a variação do ângulo de giro da corda relativamente ao eixo global, sendo agora ( $y_P$ ) a posição da fibra, da seção considerada, que pode ser alterada ao longo do processo de solução (quando ocorre a plasticidade, desconta-se o  $y_{CGP}$  da cota de posição original da fibra:  $y_P = y_{PO} - y_{CGP}$ ).

Deve se observar que:

- a. a rotação específica ( $\rho'$ ) somente se confunde com a curvatura ( $d^2y/dx^2$ ) quando não ocorre esforço axial na seção ou quando se despreza a curvatura inicial do eixo do EF, sendo essa uma grandeza conjugada energeticamente ao momento fletor (Pimenta, 1986). Quando há plasticidade, outros pesquisadores chamam essa rotação ( $\rho'$ ) de *curvatura inelástica* (Galambos, 1982);
- b. a cota de posição ( $y_P$ ) somente coincide com a cota original ( $y_{PO}$ ) no regime elástico, visto que no estado elastoplástico o centroide da seção remanescente ( $CG_P$ ) não mais necessariamente coincide com a linha de centro do EF, como visto na Fig. 3.5. Portanto, ( $y_P$ ) pode ter valores diferentes ( $y_{PO} \neq y_{Pc} \neq y_{Pd}$ ), atualizado em cada instante ( $\omega$ ), adotando-se, nas equações posteriores, o símbolo ( $y_c$ ), que indica a grandeza conhecida [retira-se o índice (p)];
- c. admite-se que a corda e a tangente ao eixo do EF coincidem, desprezando o possível ângulo inicial de curvatura adotado por Lavall (1996);
- d. fica evidente que quando acontece, portanto, uma variação do esforço axial ou da plasticidade, é necessário corrigir a rotação específica. Isso, de certa forma, justifica algumas das proposições adotadas neste trabalho que serão apresentadas posteriormente.

Considerando as relações geométricas da Fig. 3.6 combinadas às Eqs. 3.2 e 3.4, a deformação do eixo do EF ( $\varepsilon_O$ ) pode ser expressa em relação aos deslocamentos do centroide O, escrevendo:

$$\varepsilon_0 = \sqrt{[(1 + u'_{Od})^2 + (v'_{Od})^2]} - 1 \approx \left( \frac{1 + u'_{Od}}{\cos \rho} \right) - 1 \quad (3.6)$$

Reescrevendo-se a Eq. 3.5 utilizando a equação anterior e tomando a definição de secante de  $\rho$  ( $\sec \rho$ ), obtém-se:

$$\varepsilon = (1 + u'_{Od})(\sec \rho) - 1 - y_c \rho' \quad (3.7)$$

Considerando-se, então, que os ângulos sejam muito pequenos, são válidas as seguintes aproximações usuais da engenharia:

$$\sen \rho \approx \tan \rho \approx \rho \quad \cos \rho \approx 1 - \rho^2/2 \quad \sec \rho \approx 1 + \rho^2/2 \quad (3.8)$$

Com essas aproximações, após alguma manipulação algébrica, determinam-se as seguintes expressões para  $\rho$  e  $\rho'$  (ou,  $d\rho/dx$ ), ou seja:

$$\rho = \frac{v'_{Od}}{(1 + u'_{Od})} \quad \rho' = \frac{(v''_{Od} \cos^2 \rho - u''_{Od} \cos \rho \sen \rho)}{(1 + u'_{Od})} \quad (3.9)$$

e, fazendo  $u''_{Od} = 0$ , chega-se na relação que define o campo de deformações do elemento, que é básica para todo o desenvolvimento posterior da formulação, isto é:

$$\varepsilon = (1 + u'_{Od}) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v'_{Od}}{1 + u'_{Od}} \right)^2 \right] - 1 - y_c \frac{v''_{Od}}{(1 + u'_{Od})} \quad (3.10)$$

### 3.3.2 GRANDEZAS DO SISTEMA CORROTACIONAL

Emprega-se o RLA, já visto na subseção 3.2.1, para acompanhar o comportamento do EF, que é determinado pelo movimento dos nós A e B em cada instante, relacionando a configuração deformada (ou atual) do sistema corrotacional ( $x_d, y_d$ ) à configuração anterior conhecida ( $x_c, y_c$ ).

Destaca-se que a configuração conhecida e a deformada são consequências do processo de solução, no qual a configuração conhecida no instante  $(\omega-1)$  é atualizada pela deformada  $(\omega)$ . Verifica-se o giro de corpo rígido do EF ( $\theta_g$ ), ângulo que surge da diferença dos ângulos de posição ( $\varphi_d - \varphi_c$ ), da Eq. 3.1, quando se justapõem na mesma origem O os 2 sistemas referenciais representados na Fig. 3.7(a),

Assim, as rotações das extremidades do EF ( $\theta_A$  e  $\theta_B$ ), representadas na Fig. 3.7 (b), em quaisquer das configurações, incluem o giro de corpo rígido do EF ( $\theta_g$ ) definido pelos eixos corrotacionais que acompanham essas configurações, como mostrado na Fig. 3.7(a). Veja que, em cada instante  $(\omega)$ , define-se um giro de corpo rígido ( $\theta_g$ ) cuja soma resulta no ângulo da posição deformada ( $\varphi_d$ ).

Nesse sistema local corrotacional que acompanha cada EF, são estabelecidas três componentes de deslocamento, definidas aqui como grandezas objetivas, que não são afetadas por giro de corpo rígido do elemento ( $\theta_g$ ) e, portanto, espelham um campo de deformações. Essas grandezas formam o vetor  $\mathbf{q} = q_\alpha$ ,  $\alpha = \{1 \text{ a } 3\}$ , e são definidas por incrementos (a cada instante) com expressões:

$$dq_1 = L_d - L_c \quad dq_2 = \theta_A - \theta_g \quad dq_3 = \theta_B - \theta_g \quad (3.11a-c)$$

sendo o estiramento ( $q_1$ ) a variação da corda do elemento, ou da distância entre os nós, que se demonstra ao coincidirem os extremos  $A_c = A_d = A$  como na Fig. 3.7(c). Já os ângulos de giro efetivo são rotações das quais se retirou a parcela de corpo rígido ( $\theta_g$ ), que provocam esforços, denominados por  $q_2$  e  $q_3$  na Fig. 3.7(d).

Partindo da Eq. 3.11, pode-se dizer, detalhando um pouco mais, que as grandezas incrementais geram as grandezas finais:

$$q_{1d} = q_{1c} + dq_1 \quad dq_j = (\theta_{jd} - \theta_{gd}) - (\theta_{jc} - \theta_{gc}) \quad q_{jd} = q_{jc} + dq_j \quad (3.12)$$

nas quais (j) os subscritos (A) ou (B), refere-se à rotação do nó inicial (A) e do final (B) do EF, respectivamente, como será tratado doravante. Já (j) são os subscritos: (2) ou (3), indicam o giro corrotacional efetivo dos nós do EF ( $q_2$  e  $q_3$ ). Em geral, as grandezas corrotacionais serão chamadas ( $q_\alpha$ ) e o sentido positivo é o indicado na Fig. 3.7(c-d).

Os ângulos que definem os eixos locais corrotacionais, conhecido e deformado, são calculados, com base nas posições e nos deslocamentos, pelas expressões:

$$\varphi_c = \arctan \left( \frac{y_{Bc} - y_{Ac}}{x_{Bc} - x_{Ac}} \right) \quad \varphi_d = \arctan \left( \frac{y_{Bc} - y_{Ac} + v_B - v_A}{x_{Bc} - x_{Ac} + u_B - u_A} \right) \quad (3.13)$$

Esses nós estão relacionados ao sistema cartesiano global (fixo) do problema, havendo três graus de liberdade por nó ( $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ ), seis para cada EF, armazenados no vetor  $\mathbf{u} = u_i$ ,  $i = \{1 \text{ a } 6\}$ , como mostrado na Fig. 3.8(a). Assim, escreve-se:

$$\begin{aligned} \text{Nó inicial A: } & u_1 = u_A, \quad u_2 = v_A, \quad u_3 = \theta_A, \\ \text{Nó final B: } & u_4 = u_B, \quad u_5 = v_B, \quad u_6 = \theta_B. \end{aligned} \quad (3.14a-b)$$

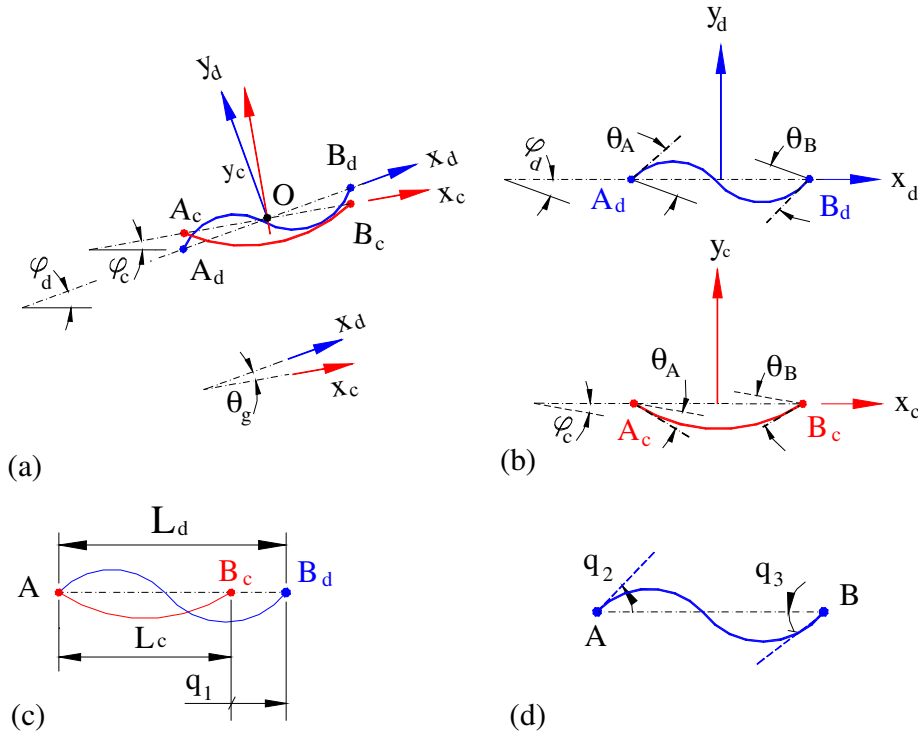
Enquanto os comprimentos do EF, conhecido e deformado, são dados por:

$$\begin{aligned} L_c &= \sqrt{[(x_{Bc} - x_{Ac})^2 + (y_{Bc} - y_{Ac})^2]}, \\ L_d &= \sqrt{[(x_{Bc} - x_{Ac} + u_B - u_A)^2 + (y_{Bc} - y_{Ac} + v_B - v_A)^2]} \end{aligned} \quad (3.15a-b)$$

Os deslocamentos  $q_\alpha$  e  $u_i$ , ilustrados nas Figs. 3.7 e 3.8(a), respectivamente, estão correlacionados geometricamente, pelas equações anteriores. Os esforços também

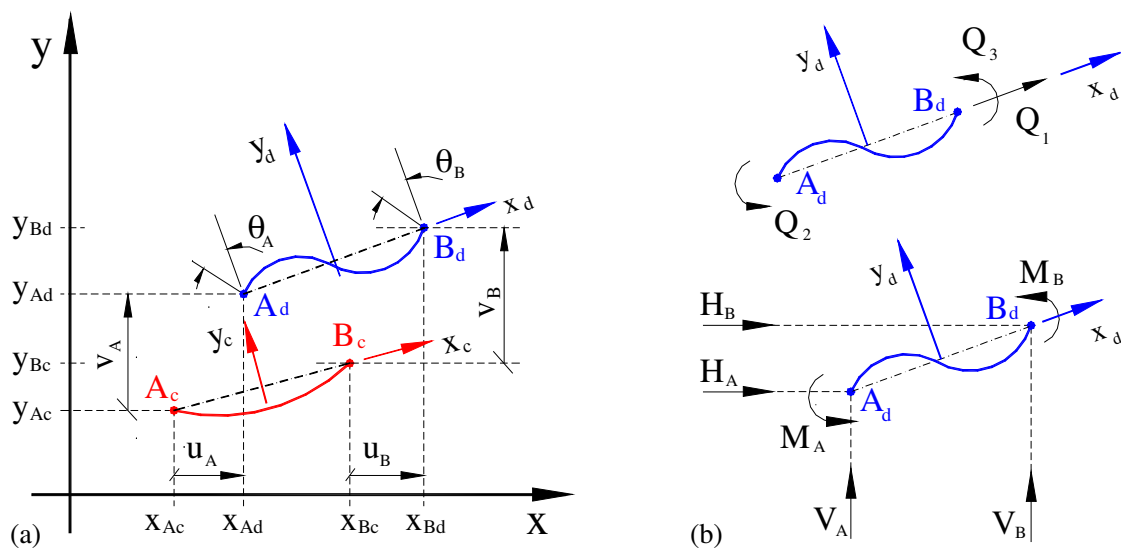


podem ser relacionados entre si, como ilustrado na Fig. 3.8(b), na qual se tem tanto os esforços corrotacionais vetor  $\mathbf{Q} = Q_\alpha$ ,  $\alpha = \{1 \text{ a } 3\}$ , como os globais, vetor  $\mathbf{F} = F_i$ ,  $i = \{1 \text{ a } 6\}$ , constituído pelas forças ( $H_A$ ,  $H_B$ ,  $V_A$ ,  $V_B$ ) e pelos momentos ( $M_A$ ,  $M_B$ ) de forma correspondente. Observe-se que, por simplicidade para efeito de dedução das equações, tratam-se as grandezas incrementais ( $dq_\alpha$ ) como as finais ( $q_\alpha$ ) no instante  $\omega = 0$ .



**Figura 3.7** Grandezas do sistema corrotacional:

(a) giro de corpo rígido; (b) rotações envolvidas; (c) estiramento  $q_1$ ; (d) rotações efetivas  $q_2$  e  $q_3$ .



**Figura 3.8** Sistema global e corrotacional:

(a) coordenadas e deslocamentos globais; (b) esforços globais e corrotacionais.

### 3.3.3 FUNÇÕES DE FORMA – VISÃO GERAL

No contexto do método dos elementos finitos (MEF), os deslocamentos do centroide ( $u_{0d}$  e  $v_{0d}$ ) serão aproximados por funções de interpolação de  $(x)$  estabelecidas na configuração atual, sendo retirados, por simplicidade, os subscritos  $(d)$ . São adotadas funções tradicionais (Hermite, 1848), presentes em várias formulações de EF (Bathe, 1996).

A função de interpolação que aproxima o deslocamento axial  $u_0$  é linear. Como esse deslocamento não depende de condição de contorno, essa função é adotada por qualquer tipo de EF empregado. Assim, o deslocamento  $u_0$  é obtido pela expressão:

$$u_0(x) = a x + b = \Psi_1(x) \quad (3.16)$$

a qual, quando aplicada aos nós extremos (A, B),  $x_A = -L_0/2$  e  $x_B = L_0/2$ , permite escrever o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} a x_A + b \\ a x_B + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a L_0/2 + b \\ +a L_0/2 + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

cujas soluções permitem avaliar as constantes  $(a, b)$ :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_B - u_A)/L_0 \\ (u_B + u_A)/2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Da definição do estiramento  $q_1$  pela Fig. 3.7(c), pode-se reescrever a Eq. 3.18 fazendo  $u_A = 0$ , e todo o deslocamento axial se mede por  $u_B = L_d - L_c = q_1$ , então:

$$u_0(x) = \left( \frac{x}{L_0} + \frac{1}{2} \right) q_1 = \Psi_1 q_1 \quad (3.19)$$

em que  $(L_0)$  é o comprimento original do EF (do eixo), pois as funções de interpolação são estabelecidas no instante  $\omega = 0$ , quando  $L_c = L_0$ . Conclui-se pela Eq. 3.19 que a função  $(\Psi_1)$  determina os deslocamentos:  $u_0(-L_0/2) = 0$  e  $u_0(L_0/2) = q_1$ .

Já o deslocamento  $v_0$  é aproximado por meio de um polinômio do terceiro grau em  $x$ , que depende das condições de contorno do EF considerado, sendo desenvolvido neste capítulo o caso geral do EF rígido-ligação. As demais condições de borda serão discutidas nos capítulos referentes a cada caso (extremidade rígida e a rótula).

Empregando-se, agora, um polinômio do terceiro grau para aproximar o deslocamento transversal ao eixo do EF  $v_0(x)$ , tem-se a expressão:

$$v_0(x) = c x^3 + d x^2 + e x + f \quad (3.20)$$

na qual existem quatro constantes que devem ser determinadas pelas condições de contorno do problema. O objetivo é que se possa definir essa função ( $v_0$ ) também em relação às grandezas  $q_\alpha$ , ou seja:

$$v_0(x) = \left(1 + \frac{q_1}{L_0}\right) (\Psi_2 \tan q_2 + \Psi_3 \tan q_3) \approx \left(1 + \frac{q_1}{L_0}\right) (\Psi_2 q_2 + \Psi_3 q_3) \quad (3.21)$$

nas quais aparecem as funções  $\Psi_j(x)$  relacionadas às rotações efetivas  $q_j$  que se desejam determinar. (Ver no apêndice A.5, explicação para a presença de  $q_1$  em  $v_0$ ).

Todavia, pela formulação corrotacional, empregando a Eq. 3.20 aos extremos do intervalo, impõe-se que  $v_0(x_A = -L_0/2) = v_A = 0$ , e  $v_0(x_B = L_0/2) = v_B = 0$ , obtendo-se duas condições para  $(e, f)$ , comuns a todos os EFs desenvolvidos, resultando em:

$$e = \frac{-c L_0^2}{4} \quad f = \frac{-d L_0^2}{4} \quad (3.22a-b)$$

As duas condições adicionais necessárias para determinar-se  $(c, d)$  provém das rotações líquidas, como a diferencial de  $v_0(x)$  em relação à  $(x)$ , ou seja:

$$\theta(x) = dv_0(x)/dx = 3c x^2 + 2d x + e \quad (3.23)$$

ou ainda, das relações com a variação da rotação, ou seja, a derivada de segunda ordem de  $v_0(x) = d^2 v_0/dx^2 = d\theta(x)/dx = -M(x)/EI_z$ , supondo válida a equação diferencial elástica, gerando outro tipo de restrição de extremidade do tipo:

$$d\theta(x)/dx = d^2 v_0(x)/dx^2 = 6c x + 2d \quad (3.24)$$

No caso do extremo rígido, por exemplo, empregam-se as Eqs. 3.20 e 3.23 para ambos os nós, construindo o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} c x_A^3 + d x_A^2 + e x_A + f \\ c x_B^3 + d x_B^2 + e x_B + f \\ 3c x_A^2 + 2d x_A + e \\ 3c x_B^2 + 2d x_B + e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

que se resolve com os deslocamentos  $(v_A, \theta_A)$  e  $(v_B, \theta_B)$  correspondentes à  $(x_A = -L_0/2)$  e  $(x_B = L_0/2)$ , obtendo-se as constantes  $(c, d, e \& f)$  bem como a função de interpolação.

Para o caso com rótula, emprega-se a Eq. 3.24 em uma das extremidades. Já para o EF com ligação, é preciso encontrar relações adequadas para empregar a Eq. 3.24, montar e resolver esse sistema (Eq. 3.25). Essa condição de extremidade só pode ser desenvolvida, após se estabelecer o comportamento da ligação, como se verá na subseção seguinte.

### 3.3.4 INTRODUÇÃO DA RIGIDEZ DA LIGAÇÃO NO EF

Neste instante não se avalia o efeito da excentricidade ou a participação da curva de ligação, no estabelecimento das expressões de equilíbrio e compatibilidade.

Genericamente, admite-se que num dado instante ( $\omega$ ) a ligação possua a rigidez  $R_k$ , determinada pela curva  $M-\theta$  adotada, sendo  $R_k = dM_r(\theta_r)/d\theta_r$  sua tangente, para um dado valor de teta ( $\theta_r$ ). A rigidez também pode ser obtida pela secante que liga dois pontos equidistantes de um valor  $\Delta\theta_r$  muito pequeno em relação ao ponto  $\theta_r$ , isto é:

$$R_k \approx \frac{\Delta M_r}{\Delta \theta_r} \approx \frac{[M_r(\theta_r + \Delta \theta_r) - M_r(\theta_r - \Delta \theta_r)]}{2 \Delta \theta_r} \quad (3.26a-b)$$

Note-se que a curva  $M-\theta$ , agora, pode ser fornecida por qualquer dos diversos processos indicados no capítulo 2, ou seja, uma expressão matemática, uma fórmula empírica, uma tabela de valores, um resultado intermediário de método analítico, etc. O que se requer, aqui, é apenas a sua rigidez à rotação, tal como definida acima.

A formulação a seguir apresentada, de maneira geral, está ligada ao índice de rigidez relativo da viga ( $g$ ), definido na subseção 2.2.4 pela Eq. 2.3. Ressalte-se que o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o comprimento da viga ( $L_v$ ) não se alteram ao longo da análise. Entretanto, tanto a rigidez da ligação ( $R_k$ ) como a inércia da seção [ $I_z$ , por causa da plasticidade], são atualizados em cada instante ( $\omega$ ). Deve-se lembrar que cada barra (viga ou coluna) é composta de vários elementos finitos (EF), mas apenas os da extremidade podem ter ligações; assim, não se deve confundir o comprimento da barra ( $L_v$ ) com o comprimento de cada EF ( $L_{0i}$ ,  $i = \{1 \text{ a } (n_{ef} > 1)\}$ ) que forma a barra, ou seja:

$$L_v = \sum_{i=1}^{n_{ef}} L_{0i} \quad (3.27)$$

que é determinado no início da análise, sendo ( $n_{ef}$ ) o número de EFs da barra.

### 3.3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O EF COM LIGAÇÃO

Para avaliar o efeito da ligação é necessário determinar as condições de contorno representativas dessa situação que engloba as demais. Isso pode ser alcançado partindo-se da Fig. 3.9, na qual se ilustra uma viga genérica, com uma união rígida, ou engaste, na extremidade A, enquanto no lado oposto (B) tem-se uma ligação dita semirrígida, ou seja, para a qual a continuidade não é perfeita.

Constata-se que na extremidade rígida o giro interno da viga ( $\varphi_A$ ) tem o mesmo valor do giro externo ( $\theta_A$ ), por exemplo, na coluna a qual está ligada. Na extremidade com ligação a mesma situação não ocorre, já que existe uma rotação interna da ligação ( $\alpha_B$ ) que se soma ao giro interno da viga ( $\varphi_B$ ). Logo, as rotações internas são:

$$\varphi_A = \theta_A \quad \theta_B = \varphi_B + \alpha_B \quad \therefore \quad \varphi_B = \theta_B - \alpha_B \quad (3.28a-c)$$

Na subseção anterior, verificou-se que esse giro próprio da ligação relaciona o momento que nela atua e a sua rigidez rotacional, ou seja (ver Eq. 3.26):

$$\alpha_B = M_B / R_k \quad (3.29)$$

Considerando-se o comportamento elástico linear do material, pode-se avaliar que os momentos atuantes nas extremidades da viga dependem das suas grandezas básicas e das rotações internas que ocorreram. Aplicando-se a relação clássica curvatura-rotação, escreve-se (Chen & Lui, 1991):

$$M_A = \frac{-EI_z}{L_v} (4\varphi_A + 2\varphi_B) \quad M_B = \frac{EI_z}{L_v} (2\varphi_A + 4\varphi_B) \quad (3.30a-b)$$

Substituindo-se agora nessas expressões os ângulos externos ( $\theta_A$  e  $\theta_B$ ) das Eq. 3.28 (a-b), com a definição de ( $g$ ) pela Eq. 2.3 e do ângulo de giro da ligação ( $\alpha_B$ ) da Eq. 3.29, chega-se, após alguma manipulação algébrica, às expressões desses momentos:

$$M_A = \frac{-4EI_z}{L_v} \left( \frac{1+3g}{1+4g} \right) \theta_A + \frac{-2EI_z}{L_v} \left( \frac{1}{1+4g} \right) \theta_B$$

$$M_B = \frac{EI_z}{L_v} \left( \frac{2\theta_A + 4\theta_B}{1+4g} \right) \quad (3.31a-b)$$

Podem-se separar os efeitos das rotações externas ( $\theta_A$  e  $\theta_B$ ) das Eqs. 3.31(a-b), fazendo cada uma unitária e a outra nula. Isso é indicado na Fig. 3.10(a) para a rotação  $\theta_A$  e 3.10(b) para  $\theta_B$ , encontrando-se, então, as condições de contorno necessárias para o desenvolvimento da formulação na subseção seguinte.

Dessa forma, os momentos provocados pela rotação em A ( $\theta_A$ ) são:

$$M_A = \frac{-4EI_z}{L_v} \left( \frac{1+3g}{1+4g} \right) \theta_A \quad M_B = \frac{2EI_z}{L_v} \left( \frac{1}{1+4g} \right) \theta_A \quad (3.32a-b)$$

enquanto os momentos gerados pela a rotação em B ( $\theta_B$ ):

$$M_A = \frac{-2EI_z}{L_v} \left( \frac{1}{1+4g} \right) \theta_B \quad M_B = \frac{4EI_z}{L_v} \left( \frac{1}{1+4g} \right) \theta_B \quad (3.33a-b)$$

Note-se que o termo  $(1+4g)$  participa nas equações anteriores indicando que a ligação reduz a rigidez nos extremos da viga (já que  $g \geq 0$ ). O momento no engaste  $M_A$  varia de 100% a 75%, enquanto na ligação  $M_B$  varia 1 a 0, para rotação no engaste ( $\theta_A$ ). Porém o efeito redutor é o mesmo, quando a rotação é na ligação ( $\theta_B$ ).

Para avaliar o sentido dessas expressões, estudam-se os casos extremos de  $(g)$ :

- quando a ligação é engaste ( $R_k \rightarrow \infty$ ), então  $g = 0$ , que substituindo nas equações anteriores recai nas Eqs. 3.30 (a-b) iniciais;
- quando a ligação é rótula ( $R_k = 0$ ), com  $g \rightarrow \infty$  (um valor elevado), obtêm-se:

$$M_A = \frac{-3EI_z}{L_v} \theta_A \quad M_B = 0 \quad (3.34a-b)$$

portanto:  $M_A = M_B = 0$  com qualquer giro da “rótula”  $\theta_B$  ( $\theta_A = 0$ ), como esperado.

As equações 3.32 e 3.33 são consideradas clássicas para um EF com ligação (Vasconcelos Filho, 1986; Kotlyar, 1996).

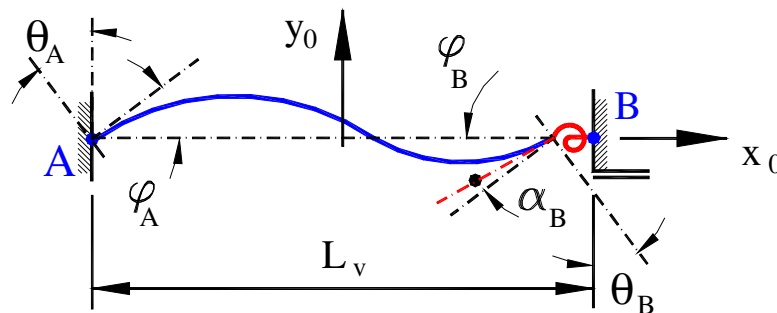


Figura 3.9 Efeito da ligação na viga.

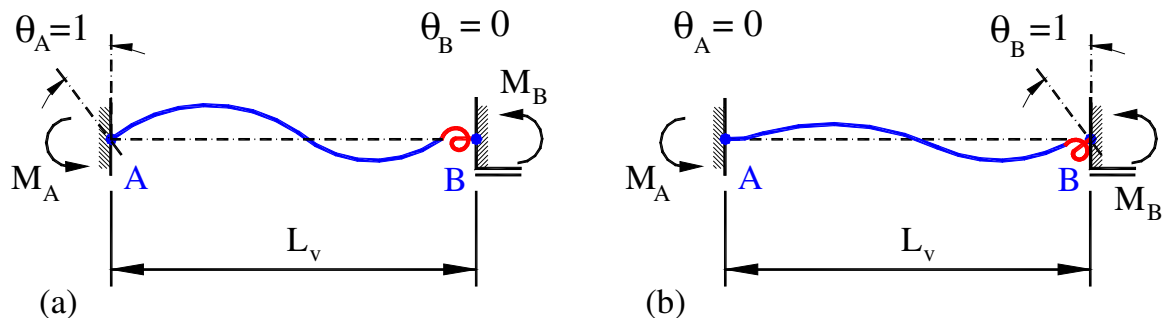


Figura 3.10 Efeito da rotação na viga com ligação:

(a) rotação no extremo rígido  $\theta_A$ ; (b) rotação no extremo com ligação  $\theta_B$ .

### 3.3.6 FUNÇÃO DE FORMA PARA O EF COM LIGAÇÃO

Partindo-se das condições de contorno anteriores (Eqs. 3.32 e 3.33) usando a restrição da Eq. 3.24, pode-se modificar a Eq. 3.25 para o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} c x_A^3 + d x_A^2 + e x_A + f \\ c x_B^3 + d x_B^2 + e x_B + f \\ 6c x_A + 2d \\ 6c x_B + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_A'' \\ v_B'' \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Considerando-se que as rotações agora avaliadas não incluem a rotação de corpo rígido, substituem-se, então, os valores dos ângulos genéricos ( $\theta_A$  e  $\theta_B$ ), analisados para a viga, pelas grandezas corrotacionais equivalentes ( $q_2$  e  $q_3$ ), respectivamente.

Agora os momentos provocados pela grandeza corrotacional  $q_2$  serão (Eq. 3.32):

$$M_A = \frac{-4EI_z}{L_v} \left( \frac{1+3g}{1+4g} \right) q_2 \quad M_B = \frac{2EI_z}{L_v} \left( \frac{1}{1+4g} \right) q_2 \quad (3.36a-b)$$

enquanto para a grandeza corrotacional  $q_3$  têm-se (Eq. 3.33):

$$M_A = \frac{-2EI_z}{L_v} \left( \frac{1}{1+4g} \right) q_3 \quad M_B = \frac{4EI_z}{L_v} \left( \frac{1}{1+4g} \right) q_3 \quad (3.37a-b)$$

observando-se, já, a adoção dos sinais compatíveis. Levando em consideração o efeito da deformação axial, definido o estiramento da fibra pela relação:

$$\xi = 1 + q_1 / L_c \quad (3.38)$$

As novas condições de contorno podem ser escritas, como:

$$\begin{aligned} v_A'' &= v''_{(x=x_A)} = \frac{-2\xi}{(1+4g)L_0} [2(1+3g)q_2 + q_3] \\ v_B'' &= v''_{(x=x_B)} = \frac{2\xi}{(1+4g)L_0} (q_2 + 2q_3) \end{aligned} \quad (3.39a-b)$$

nas quais substituiu-se o comprimento da viga ( $L_v$ ) pelo original do EF ( $L_0$ ) que é adotado para expressar as funções de forma (ou de interpolação).

Com essas definições, determinam-se todas as constantes da Eq. 3.20, como funções das grandezas corrotacionais, isto é:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\xi}{(1+4g)L_0^2} [(1+2g)q_2 + q_3] \\ d &= \frac{-\xi}{2(1+4g)L_0} [q_3 - (1+6g)q_2] \end{aligned} \quad (3.40a-b)$$

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{-\xi}{4(1+4g)} [(1+2g)q_2 + q_3] \\
 f &= \frac{\xi L_0}{8(1+4g)} [(1+6g)q_2 - q_3]
 \end{aligned}
 \tag{3.40c-d}$$

e substituindo na Eq. 3.20 obtém-se a expressão dos deslocamentos verticais:

$$v_o(x) = \frac{\xi}{(1+4g)} \left\{ \begin{aligned} & \left[ (1+2g) \left( \frac{x^3}{L_0^2} - \frac{x}{4} \right) + (1+6g) \left( \frac{-x^2}{2L_0} + \frac{L_0}{8} \right) \right] q_2 \\ & + \left[ \frac{x^3}{L_0^2} + \frac{x^2}{2L_0} - \frac{x}{4} - \frac{L_0}{8} \right] q_3 \end{aligned} \right\}
 \tag{3.41}$$

Emprega-se, agora, o índice de *semiflexibilidade da ligação* ( $\eta$ ), definido na Eq. 2.7(a), para simplificar a expressão anterior, considerando que:

$$(1-\eta) = \frac{(1+2g)}{(1+4g)} \quad (1+\eta) = \frac{(1+6g)}{(1+4g)} \quad (1-2\eta) = \frac{1}{(1+4g)}
 \tag{3.42a-c}$$

Assim, a Eq. 3.41 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$v_o(x) = \left( 1 + \frac{q_1}{L_0} \right) \left\{ \begin{aligned} & \left[ (1-\eta) \left( \frac{x^3}{L_0^2} - \frac{x}{4} \right) + (1+\eta) \left( \frac{-x^2}{2L_0} + \frac{L_0}{8} \right) \right] q_2 \\ & + (1-2\eta) \left[ \frac{x^3}{L_0^2} + \frac{x^2}{2L_0} - \frac{x}{4} - \frac{L_0}{8} \right] q_3 \end{aligned} \right\}
 \tag{3.43}$$

Observe-se que nas deduções antes apresentadas considera-se a aproximação numérica das tangentes de  $q_2$  e  $q_3$  pelos próprios ângulos ( $\tan q_j \approx q_j$ ,  $j=2$  a  $3$ ).

As matrizes de rigidez (MR) são determinadas ao diferenciar o campo de deformações, em relação às grandezas objetivas ( $q_a$ ). Para isso, é aplicada a regra da cadeia, diferenciando primeiro as funções de interpolação do deslocamento em relação à ( $x$ ). Logo, retornando a Eq. 3.21 (b), explicitam-se as funções  $\Psi_2$  e  $\Psi_3$ , conforme:

$$\begin{aligned}
 \Psi_2 &= (1-\eta) \left( \frac{x^3}{L_0^2} - \frac{x}{4} \right) + (1+\eta) \left( \frac{-x^2}{2L_0} + \frac{L_0}{8} \right) \\
 \Psi_3 &= (1-2\eta) \left( \frac{x^3}{L_0^2} + \frac{x^2}{2L_0} - \frac{x}{4} - \frac{L_0}{8} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.44a-b}$$

com as suas derivadas de primeira ordem sendo dadas por:



$$\Psi_2' = (1-\eta) \left( \frac{3x^2}{L_0^2} - \frac{1}{4} \right) + (1+\eta) \left( \frac{-x}{L_0} \right) \quad \Psi_3' = (1-2\eta) \left( \frac{3x^2}{L_0^2} + \frac{x}{L_0} - \frac{1}{4} \right) \quad (3.45a-b)$$

e as de segunda ordem:

$$\Psi_2'' = (1-\eta) \frac{6x}{L_0^2} - (1+\eta) \frac{1}{L_0} \quad \Psi_3'' = (1-2\eta) \left( \frac{6x}{L_0^2} + \frac{1}{L_0} \right) \quad (3.46a-b)$$

Constata-se que tanto a função  $\Psi_2$ , como  $\Psi_3$ , definidas na Eq. 3.44, reproduzem os valores correspondentes aos casos particulares de ligação rígida perfeita (*engaste*) ou rótula, fazendo-se  $\eta = 0$  ou 0,5 (para  $g = 0$  ou  $g = \infty$ ), respectivamente. Esses casos particulares são tratados nos capítulos correspondentes (5 e 6).

### 3.3.7 SIGNIFICADO DO PARÂMETRO $\eta$

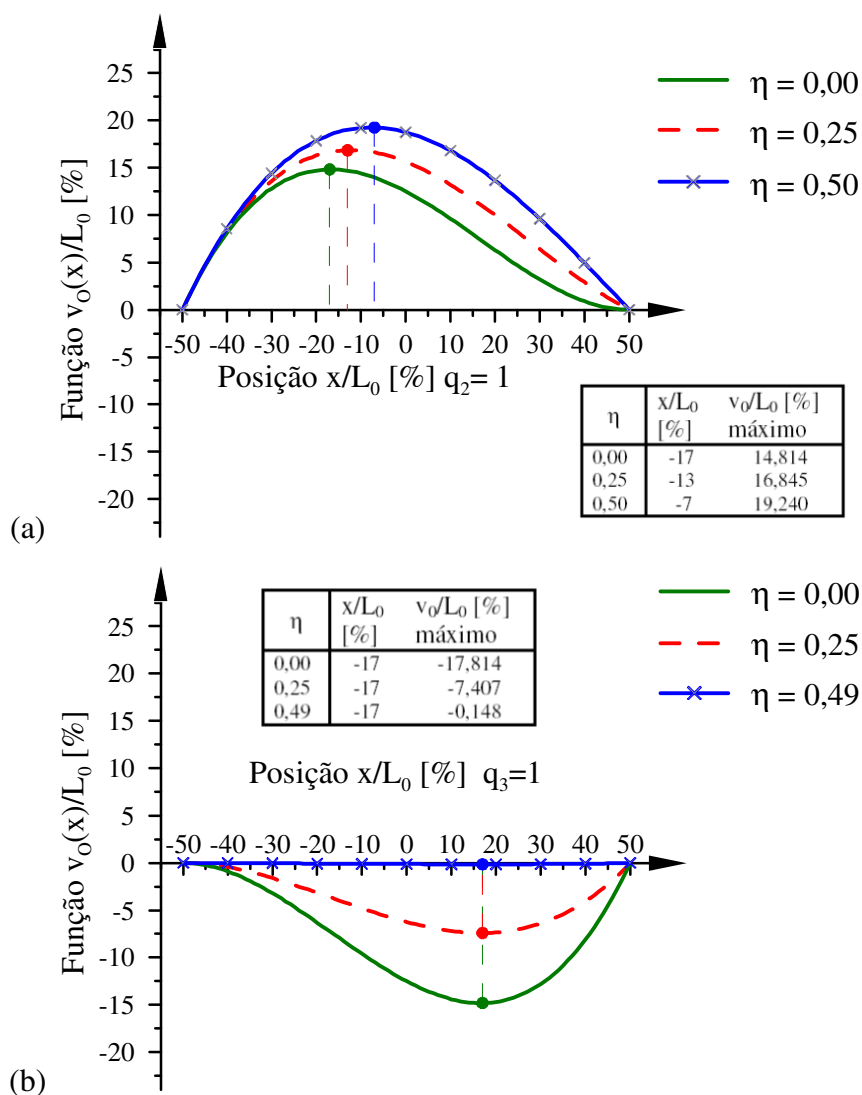
As modificações que os deslocamentos sofrem em decorrência da ligação, representada pelo parâmetro  $\eta$ , podem ser avaliadas, lembrando-se de que apenas a função  $v_0(x)$  possui essa influência, pois depende dessas condições de extremidade.

A seguir, estuda-se o comportamento dessa função  $v_0$ , com suas derivadas, considerando-se que não há deslocamento  $u_0$  ( $q_1 = 0$ ) e, os três tipos de união:

- a. engaste ou rígida perfeita ( $\eta = 0$ );
- b. a chamada *midirrígida*, com a *semiflexibilidade*  $\eta = 0,25$ ; obtida com  $g = 0,25$  também, o que corresponde à rigidez linear  $R_k = 4EI_z/L_v$ , ou seja, a rigidez da ligação é igual à rigidez elástica da viga; e
- c. rótula ( $\eta = 0,5$ ).

Na figura 3.11(a), representa-se a função  $v_0$  para essas três ligações, considerando a rotação unitária  $q_2$  e na Fig. 3.11(b) a unitária  $q_3$ . Para a rotação  $q_2$ , à medida que  $\eta$  cresce, a posição de máximo se desloca de 17% para 7% (quase no meio-vão), saindo da curva de flecha da viga biengastada que sofre uma rotação no nó A ( $\eta = 0$ ) e atingindo o máximo, próximo de 20%, para o extremo oposto com rótula ( $\eta = 0,5$ ).

Já quando se avalia o efeito da rotação unitária de  $q_3$  nas flechas da Fig. 3.11(b), tem-se a mesma curva, modulada por  $(1-2\eta)$ , a posição  $x/L_0$  do máximo não se altera e o máximo decai de 18% no engaste ( $\eta = 0$ ), para 0 no caso da rótula ( $\eta = 0,5$ ).

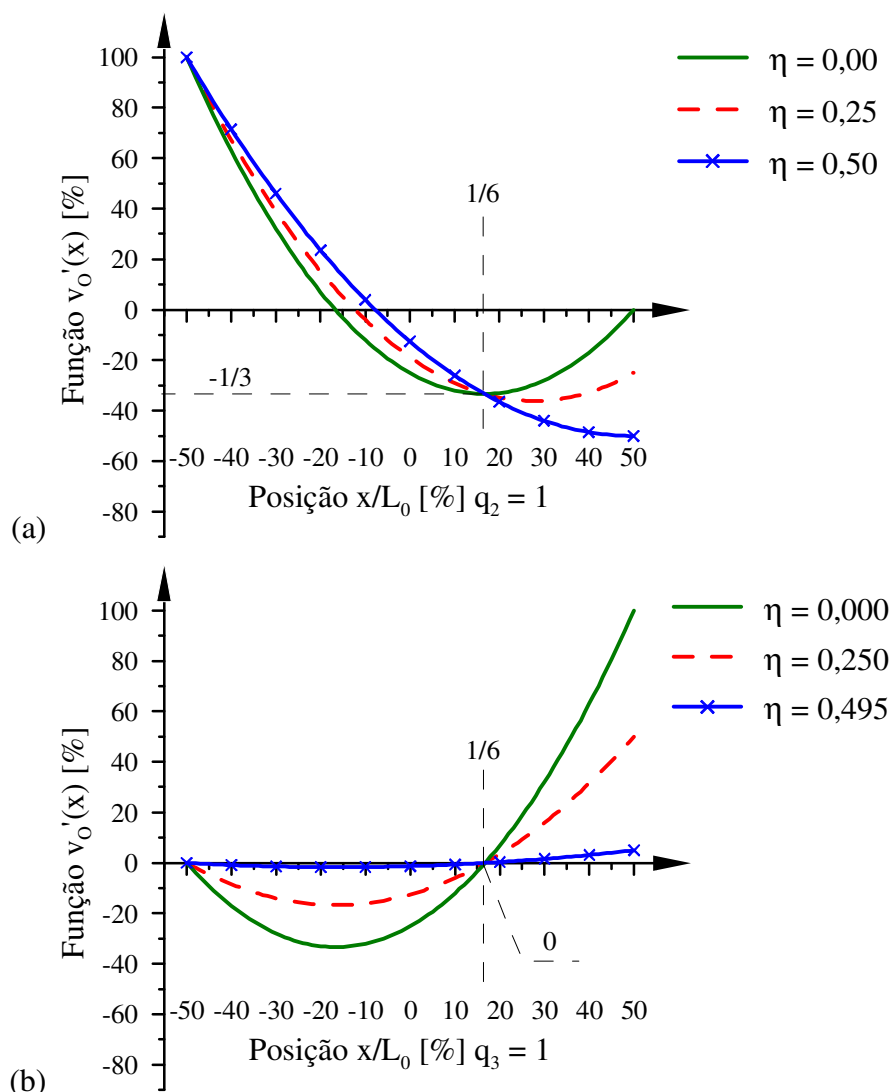


**Figura 3.11** Representação da função de  $v_O(x)$   
 (a) rotação unitária em A; (b) rotação unitária em B.

Portanto, o efeito da rotação transmitida se reduz e serão menores as flechas decorrentes. A ligação *midirrígida* se comporta de forma intermediária às curvas dos dois extremos (engaste e rótula), como esperado.

De forma idêntica, examina-se agora os valores da derivada  $v_O'$  ( $= dv_O/dx$ ) para entender como se comporta a rotação das seções ao longo do EF, quando são impostas essas rotações unitárias de extremidade.

No caso da rotação unitária  $q_2$  da Fig. 3.12(a) com a ligação tipo engaste em B, o giro próprio ali é zero. Essas rotações em B, porém, vão crescendo em valor absoluto (sinal oposto), à medida que a flexibilidade do nó B aumenta ( $\eta$  cresce), chegando ao máximo no caso de rótula, quando se encontra  $q_3 = -q_2/2$ .

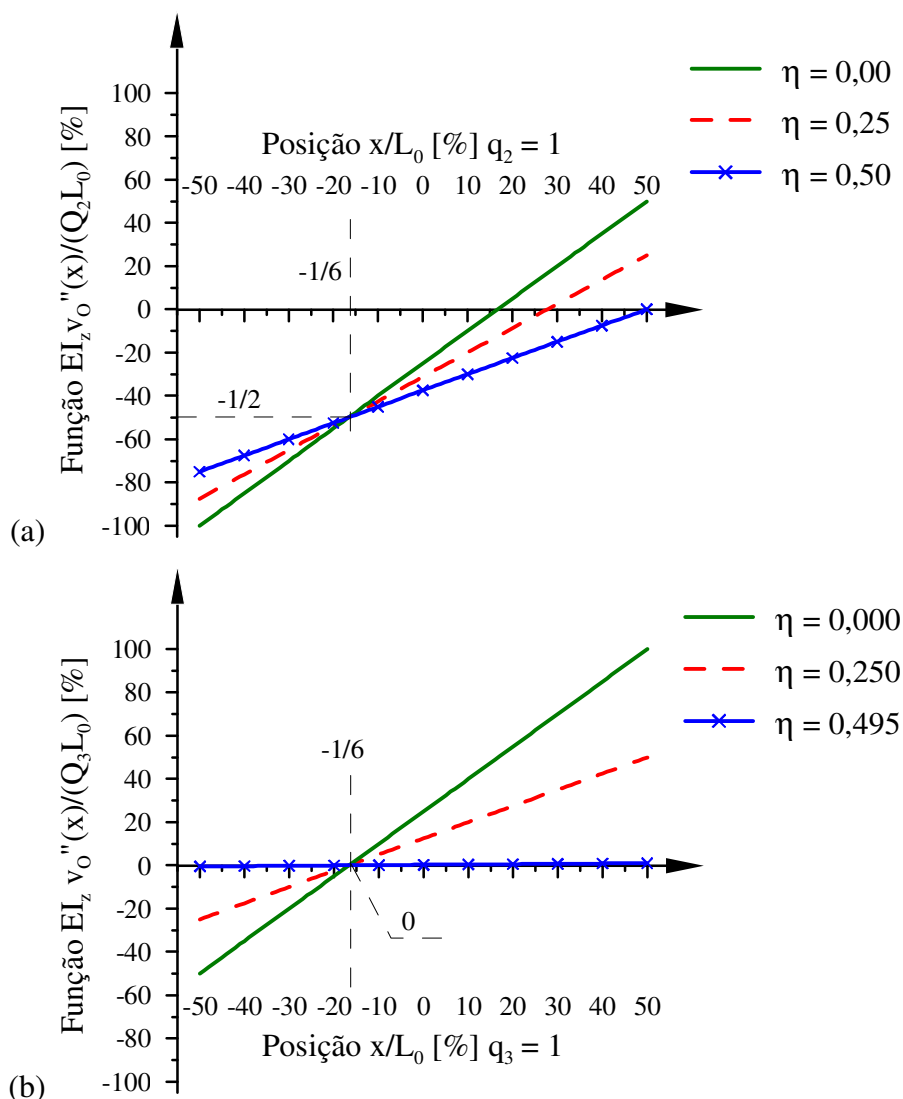


**Figura 3.12** Representação da função de  $v_O'(x)$   
 (a) rotação unitária em A; (b) rotação unitária em B.

Por outro lado, ao se aplicar a rotação unitária em  $q_3$ , não há qualquer rotação na ligação rígida em A, mas ocorre uma notável redução do comportamento das rotações até a situação de rótula, na qual nenhuma rotação ocorrerá na viga (toda a rotação é na ligação,  $q_3 = \alpha_B$ ). Adotou-se  $\eta = 0,495$  ( $\approx 0,5$ ) para ressaltar essa redução.

Observe-se que existe um ponto comum a ambos gráficos ( $x = L_0/6$ ) no qual a função ( $v_O'$ ) é independente de  $\eta$ , tendo o mesmo valor ( $-1/3$ ) para a rotação unitária em  $q_2$ ; e (0, zero) para a unitária em  $q_3$ .

Finalmente, analisa-se o comportamento dos momentos de flexão da viga, na condição elástica, avaliados pela derivada segunda de  $v_O$ , ou seja,  $v_O''$  ( $= d^2v_O/dx_2$ ). Por meio da Fig. 3.12, confirma-se que  $v_O''$  varia linearmente (segundo as hipóteses iniciais), notando que este gráfico é adimensional pela relação  $EI_z v_O''(x)/(M_0L_0)$ .



**Figura 3.13** Representação da função de  $EI_z v_O''(x)/(M_0 L_0)$   
 (a) rotação unitária em A ( $M_0 = Q_2$ ); (b) rotação unitária em B ( $M_0 = Q_3$ ).

Considera-se 100% ao momento máximo em A ( $M_0 = Q_2$ ,  $v_O''$  mínimo, pois é negativo), para a rotação unitária  $q_2$ . E o momento máximo em B ( $M_0 = Q_3$ ,  $v_O''$  máximo positivo), corresponde à rotação unitária  $q_3$ . Não se deve deixar de levar em conta o sinal da relação entre o momento  $M(x)$  e a derivada  $(-v_O''(x))$ .

Para o caso de ambos os extremos rígidos ( $\eta = 0$ ), os momentos ( $v_O''$ ) dos nós opostos são metade do valor em A ou B, com sinal oposto, respectivamente, como é conhecido (Vasconcelos Filho, 1986).

Para a condição rótula em B, o momento ( $v_O''$ ) ali é zero e na outra extremidade representa 67,5% do caso rígido, para  $q_2 = 1$ . Quando o valor de  $\eta$  se aproxima de 0,5; a rotação unitária em  $q_3$  não provoca flexão significativa na barra ( $v_O'' \approx 0$ ).

Com a *midirrigidez*  $\eta = 0,25$ ; as derivadas ( $v_0''$ ) variam de  $\{-87,5\%$  a  $25\%\}$  entre as extremidades, para  $q_2 = 1$ ; enquanto, para  $q_3 = 1$ , essa variação é de  $\{50\%$  a  $-25\%\}$ .

É necessário, também, avaliar ângulo de giro próprio da ligação ( $\alpha_B$ ), já definido antes pela Eq. 3.29, com relação às grandezas corrotacionais, ou seja:

$$\alpha_B = \eta(q_2 + 2q_3) \quad (3.47)$$

Quando a ligação é rígida ( $\eta = 0$ ), então  $\alpha_B = 0$ , como esperado, não há rotação própria da ligação. Por outro lado, na condição de rótula ( $\eta = 0,5$ ) tal rotação será  $q_2/2$  (metade da rotação do lado oposto,  $q_2$ ), somada a qualquer rotação  $q_3$  que ocorra na extremidade B, visto que é rótula, e tal rotação  $q_3$  não provocará nenhum esforço, ou seja, é apenas um giro próprio da rótula. Observe que  $q_3 = \theta_B - \alpha_B = 0 - (q_2/2) = -q_2/2$ , que é o giro da rótula (Vasconcelos Filho, 1986), se nenhuma outra rotação ( $\theta_B$ ) nela ocorrer. Dessa forma pode-se, então, denominar o parâmetro  $\eta$  como *índice de rotação própria da ligação*.

Para entender bem a participação de  $\alpha_B$  nas funções de forma (Eq. 3.43), retorna-se a Eq. 3.44(a), que é separada agora em dois termos:

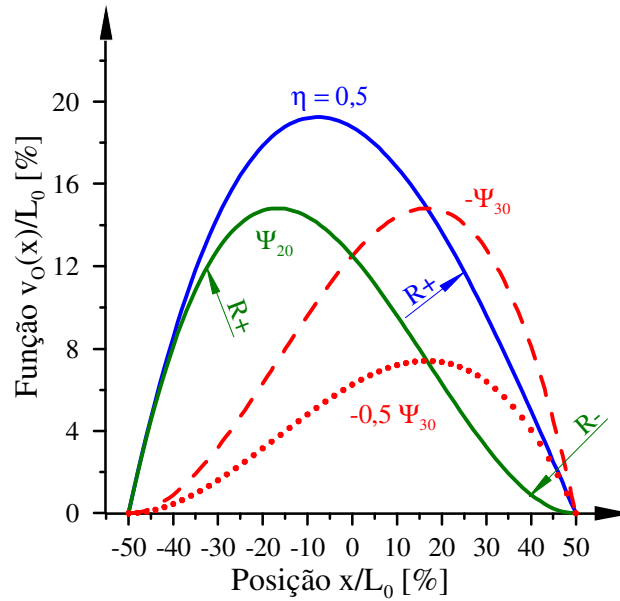
$$\Psi_2 = \underbrace{\left( \frac{x^3}{L_0^2} - \frac{x^2}{2L_0} - \frac{x}{4} + \frac{L_0}{8} \right)}_{\Psi_{20}} - \eta \underbrace{\left( \frac{x^3}{L_0^2} + \frac{x^2}{2L_0} - \frac{x}{4} - \frac{L_0}{8} \right)}_{\Psi_{30}} \quad (3.48)$$

cujo significado pode ser compreendido vendo a Fig. 3.14. A função chamada  $\Psi_{20}$  representa o comportamento da ligação biengastada em ambos os extremos, com  $q_2 = 1$  ( $q_3 = 0$ ,  $\eta = 0$ ). Note-se que essa curva  $\Psi_{20}$  possui o valor máximo em  $x/L_0 = -1/6$  e que na extremidade direita há uma mudança no sentido da curvatura (R+/R-).

Já a curva  $-\Psi_{30}$  é simétrica à curva anterior, sendo somada modulada por  $\eta$ , ou seja, essa é a influência da ligação na rotação  $q_2$ . Ao somar ( $\Psi_{20}$ ) e  $(-0,5 \Psi_{30})$  obtém-se a forma da curva para ligação com rótula em B ( $\eta = 0,5$ ). Observe-se que essa curva possui apenas um sentido da curvatura (R+); não há mudança de sentido.

Portanto, a *midiflexibilidade*  $\eta = 0,25$  é um ponto intermediário entre a presença mais acentuada de  $\Psi_{20}$ , que resulta numa mudança de curvatura na extremidade direita (para  $\eta < 0,25$ ) e o efeito de  $-\Psi_{30}$ , quando não há essa mudança ( $\eta > 0,25$ ).

Já a função de interpolação associada à rotação  $q_3$ , dada pela Eq. 3.44(b), não muda de forma (função  $\Psi_{30}$ ), apenas a sua intensidade é modulada pelo termo  $(1-2\eta)$ . Assim, pode-se reescrever a função de interpolação dos deslocamentos  $v_0$  como:



**Figura 3.14** Representação das funções  $\Psi_{20}$  e  $\Psi_{30}$ .

$$v_O(x) = \left( 1 + \frac{q_1}{L_0} \right) [(\Psi_{20} - \eta \Psi_{30}) q_2 + (1 - 2\eta) \Psi_{30} q_3] \quad (3.49)$$

Agrupando termos em  $\eta$ , chega-se à expressão:

$$v_O(x) = \xi \left[ \underbrace{(\Psi_{20} q_2 + \Psi_{30} q_3)}_{\text{EF rígido-rígido}} - \underbrace{\eta (q_2 + 2q_3) \Psi_{30}}_{\text{efeito da ligação}} \right] \quad (3.50)$$

na qual se tem o comportamento do EF rígido-rígido (Lavall, 1996), modificado pelo segundo termo, que representa o efeito da ligação ( $\eta$ ) e o uso da função de forma  $\Psi_{30}$  para fazer a correção. (Obs. lembrando de  $\xi$  definido pela Eq. 3.38).

Substituindo a Eq. 3.47 na expressão anterior, obtém-se finalmente, a participação do giro da ligação no campo dos deslocamentos, conforme:

$$v_O(x) = \xi \left[ \underbrace{(\Psi_{20} q_2 + \Psi_{30} q_3)}_{\text{EF rígido-rígido}} - \underbrace{\alpha_B \Psi_{30}}_{\text{efeito da ligação}} \right] \quad (3.51)$$

ou seja, o giro da ligação ( $\alpha_B$ ) é um fator da função de forma  $\Psi_{30}$  que se subtrai (superpõe-se  $-\Psi_{30}$ ) da expressão dos deslocamentos do EF da condição rígido-rígido (normal).

### 3.3.8 CAMPO DE DEFORMAÇÃO

O campo de deformação para este EF com ligação pode ser estabelecido pela Eq. 3.5 (ver apêndice A.4 para detalhes sobre esta consideração), na qual, empregando-se o teorema do valor médio, determina-se a deformação  $\varepsilon_0$  do eixo como a deformação média  $\varepsilon_m$  do EF, isto é:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{L_0} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \left( 1 + \frac{q_1}{L_0} \right) \left[ 1 + \frac{(\Psi'_2 q_2 + \Psi'_3 q_3)^2}{2} \right] dx \quad (3.52)$$

Realizando as substituições, integrações e simplificações algébricas necessárias, encontra-se a expressão final do campo de deformação para esse elemento com ligação:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{q_1}{L_0} + \frac{1}{30} \left( 1 + \frac{q_1}{L_0} \right) \left[ \begin{aligned} & (2\eta^2 + \eta + 2)q_2^2 + 2(2\eta - 1)^2 q_3^2 \\ & + (2\eta - 1)(4\eta + 1)q_2 q_3 \end{aligned} \right] \\ & - y_c \left\{ \left[ (1 - \eta) \frac{6x}{L_0^2} - (1 + \eta) \frac{1}{L_0} \right] q_2 + (1 - 2\eta) \left( \frac{6x}{L_0^2} + \frac{1}{L_0} \right) q_3 \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

que será utilizada na dedução das matrizes de rigidez.

Nas deduções e para obter a MRE, aplica-se a *semiflexibilidade* ( $\eta$ ), dita global, que é avaliada pela Eq. 2.7(a) com o valor de  $(g)$  calculado com  $L_v$ , comprimento da barra. Para determinarem-se as deformações (e as tensões), todavia, emprega-se a Eq. 3.53, com a *semiflexibilidade* ( $\eta_{EF}$ ), chamada local, em que é usado comprimento do EF ( $L$ ) para avaliar  $(g)$ . (Alvarenga & Silveira, 2009a).

### 3.4 MATRIZES DE RIGIDEZ DO EF COM LIGAÇÃO

São apresentados na subsecção seguinte os procedimentos para obtenção das matrizes de rigidez (MR) do EF com ligação. O processo, adotado aqui, difere da forma geral empregada pelo método dos elementos finitos (MEF) na qual se faz a diferenciação das funções de forma para se chegar às matrizes de rigidez. Neste caso, os campos de deformações já foram expressos diretamente em relação às grandezas corrotacionais  $\epsilon$ , assim, pode-se diferenciá-los de forma direta, fazendo o emprego da relação  $(q_\alpha \times u_i)$  por meio de uma matriz de transformação cinemática, o que torna a solução mais econômica e simples.

#### 3.4.1 MATRIZES DE RIGIDEZ NA FORMA GENÉRICA

Estabelecendo-se o equilíbrio do elemento por meio do princípio dos trabalhos virtuais (PTV) aplicado ao volume original, que se considera fixo, por hipótese, ao longo de todo o processo da análise estrutural, escreve-se:

$$\int_{V_0} \sigma \delta \epsilon dV_0 = \sum_{i=1}^6 F_i \delta u_i \quad (3.54)$$

Isso significa que a variação do trabalho realizado pelos esforços externos ( $F_i$ ) na produção dos deslocamentos ( $u_i$ ) é equilibrada pela variação do trabalho das tensões nas deformações.

A variação de  $\delta \epsilon$  pode ser achada aplicando-se a regra da cadeia (sabendo que  $\epsilon$  é função de  $q_\alpha$ , que por sua vez é função dos deslocamentos  $u_i$ ), isto é:

$$\delta \epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial \epsilon}{\partial q_\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_\alpha}{\partial u_i} \end{pmatrix} \delta u_i \quad (3.55)$$

e, desde que  $\delta u_i \neq 0$ , obtém-se, substituindo a relação anterior na Eq. 3.54, expressa na forma indicada:

$$F_i = \int_{V_0} \sigma \begin{pmatrix} \frac{\partial \epsilon}{\partial q_\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_\alpha}{\partial u_i} \end{pmatrix} dV_0 = Q_\alpha \begin{pmatrix} \frac{\partial q_\alpha}{\partial u_i} \end{pmatrix} \quad (3.56a)$$

que pode ser escrita também na forma matricial:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_0^T \mathbf{Q} \quad (3.56b)$$

que representa o equilíbrio do elemento finito.

Note-se que na Eq. 3.56(b)  $\mathbf{A}_0$  é a *matriz de incidência cinemática* e  $\mathbf{Q}$  é o vetor de



esforços corrotacionais, com as componentes:

$$Q_\alpha = \int_{V_0} \sigma \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\alpha} \right) dV_0 \quad (3.57)$$

Torna-se necessário conhecer a variação das grandezas corrotacionais (ou objetivas) em relação às globais, o que significa diferenciar os deslocamentos  $q_\alpha$  em relação aos deslocamentos globais  $u_i$ . Considerando-se inicialmente a influência do ângulo  $\varphi_d$ , tem-se:

$$q_{\alpha,i} = \frac{\partial q_\alpha(\varphi_d)}{\partial u_i} \quad (3.58)$$

com  $\alpha = \{1 \text{ a } 3\}$  &  $i = \{1 \text{ a } 6\}$ , o que determina a denominada *matriz de mudança instantânea de coordenadas*  $\mathbf{A}(\varphi_d)$ , de dimensões  $[3 \times 6]$ , conforme expressão abaixo:

$$\mathbf{A}(\varphi_d) = \frac{1}{L_d} \begin{bmatrix} -L_d \cos \varphi_d & -L_d \sin \varphi_d & 0 & L_d \cos \varphi_d & L_d \sin \varphi_d & 0 \\ -\sin \varphi_d & \cos \varphi_d & L_d & \sin \varphi_d & -\cos \varphi_d & 0 \\ -\sin \varphi_d & \cos \varphi_d & 0 & \sin \varphi_d & -\cos \varphi_d & L_d \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Uma matriz similar é indicada por Yu & Shanmugan (1986), Gao & Haldar (1995) e Tin-Loi & Miza (1996). Como não se conhece *a priori* o ângulo de giro  $\varphi_d$ , procura-se estabelecer a relação  $q_{\alpha,i}$  fazendo-se  $\varphi_d = 0$  na equação anterior, com o que se encontra, então, a *matriz de incidência cinemática*  $\mathbf{A}_0$ , já indicada na Eq. 3.56(b), que é representada por:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{L_d} \begin{bmatrix} -L_d & 0 & 0 & L_d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_d & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & L_d \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Determina-se, agora, a matriz de rigidez do elemento referida ao sistema global derivando-se a Eq. 3.56(a) em relação às componentes dos deslocamentos globais  $u_j$ , lembrando-se de que existe adicionalmente a parcela advinda do movimento de corpo rígido, ligada à compatibilidade geométrica. Da Eq. 3.56(a), chega-se à expressão geral:

$$K_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \frac{\partial q_\alpha}{\partial u_i} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial u_j} + Q_\alpha \frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial u_i \partial u_j} \quad (3.61)$$

Observe-se que a primeira parcela da equação anterior pode ser encontrada derivando-se a Eq. 3.57 em relação à  $q_\beta$ , ou seja:

$$Q_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta} \quad (3.62)$$

tendo as parcelas indicadas o significado seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\alpha,\beta} &= \int_{V_0} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial q_\alpha} \right) \mathbf{D} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial q_\beta} \right) dV_0 \\
\mathbf{H}_{\alpha,\beta} &= \int_{V_0} \boldsymbol{\sigma} \left( \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right) dV_0
\end{aligned} \tag{3.63a-b}$$

Com a substituição da Eq. 3.62 na Eq. 3.61, é possível escrever:

$$\mathbf{K}_{ij} = \underbrace{q_{\alpha,i} (\mathbf{D}_{\alpha,\beta} + \mathbf{H}_{\alpha,\beta}) q_{\beta,j}}_{\text{Grandezas Objetivas}} + \underbrace{Q_\alpha q_{\alpha,ij}}_{\text{Corporígrado}} \tag{3.64}$$

sendo as duas primeiras parcelas matrizes de rigidez dependentes das grandezas objetivas ( $q_\alpha$ ) que causam a deformação do elemento, enquanto a última parcela representa o efeito do movimento de corpo rígido do EF.

Fazendo-se a reordenação da Eq. 3.64, encontra-se, finalmente:

$$\mathbf{K}_{ij} = \underbrace{q_{\alpha,i} \mathbf{D}_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{Parcela constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} \mathbf{H}_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{Curvatura do elemento}} + \underbrace{Q_\alpha q_{\alpha,ij}}_{\text{P}\Delta \text{ e M}\Phi} \tag{3.65}$$

em que a primeira parcela representa a rigidez constitutiva associada ao material e às propriedades da seção; a segunda avalia a variação geométrica da curvatura do elemento, ligada ao efeito P $\delta$ ; e, por fim, a parcela referente ao efeito de movimento de corpo rígido, associada aos efeitos secundários P $\Delta$  e M $\Phi$ , já apresentados na seção 1.2.

Observe-se também, que as derivadas de segunda ordem de  $q_\alpha$  em relação à  $u_j$  podem ser obtidas diretamente da Eq. 3.58, fazendo-se  $\varphi_d = 0$ , isto é:

$$q_{\alpha,ij} = \frac{\partial^2 q_\alpha (\varphi_d = 0)}{\partial u_i \partial u_j} \tag{3.66}$$

com  $\alpha = \{1 \text{ a } 3\}$ ,  $i = \{1 \text{ a } 6\}$  e  $j = \{1 \text{ a } 6\}$ . Como respostas dessas diferenciações, são encontradas três matrizes, uma matriz para cada  $\alpha$ , de dimensões [6 $\times$ 6], chamadas de *matrizes de compatibilidade geométrica*  $\mathbf{G}_\alpha$ .

Agora, reescreve-se a Eq. 3.65 na forma matricial:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{ep} + \mathbf{K}_g \tag{3.67a}$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ep} &= \mathbf{A}_0^T \mathbf{D} \mathbf{A}_0 \\
\mathbf{K}_g &= \mathbf{A}_0^T \mathbf{H} \mathbf{A}_0 + \sum_{\alpha=1}^3 Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha = \mathbf{K}_h + \mathbf{K}_{g\alpha}
\end{aligned} \tag{3.67b-c}$$

sendo  $\mathbf{K}_{ep}$  definida a matriz de rigidez constitutiva e  $\mathbf{K}_g$  a matriz de rigidez geométrica.

Dessa forma, para cada elemento finito, determina-se a sua matriz de rigidez elastoplástica e de rigidez geométrica. As matrizes ( $\mathbf{K}_{ep}$ ,  $\mathbf{K}_h$  e  $\mathbf{K}_{g\alpha}$ ) são simétricas de dimensão  $[6 \times 6]$  definindo-se as duas primeiras em cada caso particular (engaste, rótula e semirrígida), enquanto a última não depende das condições de extremidade do EF.

A matriz  $\mathbf{K}_{g\alpha}$  pode ser apresentada então como:

$$\mathbf{K}_{g\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 & -K & 0 \\ & L & 0 & -K & -L & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & K & 0 \\ & & & & L & 0 \\ \text{simétrico} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

sendo os termos dentro da matriz definidos por:

$$K = (Q_2 + Q_3)/L_d^2 \quad L = Q_1/L_d \quad (3.69a-b)$$

Note-se que o termo  $K$  representa o efeito  $M\Phi$ , enquanto  $L$  representa o efeito  $P\Delta$ , com  $L_d$  sendo o comprimento atual (ou deformado).

As matrizes  $\mathbf{K}_{ep}$  e  $\mathbf{K}_h$  possuem termos que estão associados aos esforços corrotacionais  $Q_\alpha$ , ao comprimento original  $L_0$  e às *propriedades elastoplásticas* a serem avaliadas em cada instante  $\omega$ , ou seja, a cada ciclo de iteração da solução, pelos processos numéricos envolvendo as fatias da seção, nos nós inicial e final, tratados na subseção 3.4.4.

### 3.4.2 MATRIZES DE RIGIDEZ BÁSICAS DO EF COM LIGAÇÃO

A matriz de rigidez básica constitutiva ( $\mathbf{D}$ ), definida pela Eq. 3.63(a), pode ser escrita de forma muito simples, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1m} & d_1 \mathbf{D}_{2m} & d_2 \mathbf{D}_{2m} \\ & d_3 \mathbf{D}_{3m} & d_4 \mathbf{D}_{3m} \\ \text{simétrico} & & d_5 \mathbf{D}_{3m} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

sendo os valores dos coeficientes  $d_i$  funções de  $\eta$ :

$$\begin{aligned} d_1 &= (1 + \eta) & d_2 &= -(1 - 2\eta) & d_3 &= 4(\eta^2 - \eta + 1) \\ d_4 &= 2(2\eta - 1)^2 & d_5 &= 4(2\eta - 1)^2 \end{aligned} \quad (3.71a-e)$$

Já a MR básica relativa à curvatura ( $\mathbf{H}$ ), definida com a Eq. 3.63 (b), é dada por:

$$\mathbf{H} = \frac{Q_1 L_d}{30} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & h_1 & h_2 \\ \text{simétrico} & & h_3 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

na qual os parâmetros  $h_j$  valem:

$$h_1 = 2(2\eta^2 + \eta + 2) \quad h_2 = (8\eta^2 - 2\eta - 1) \quad e \quad h_3 = 4(2\eta - 1)^2 \quad (3.73a-c)$$

A tabela 3.1 fornece para alguns casos particulares de  $\eta$ , os valores dos coeficientes  $d_i$ ,  $i = \{1 \text{ a } 6\}$  e  $h_j$ ,  $j = \{1 \text{ a } 3\}$ . Nela se inclui o caso da *rótula*, o da ligação totalmente rígida, que é chamada de *engaste*; e também a ligação *midirrígida*, que possui  $\eta = 0,25$ .

**Tabela 3.1 Valores particulares dos coeficientes das MRs básicas D e H.**

Ligação <sup>(1)</sup>	$\eta$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
engaste	0,00	1	-1	4	2	4	4	-1	4
rígida	0,05	1,05	-0,9	3,81	1,62	3,24	4,11	-1,08	3,24
	0,10	1,1	-0,8	3,64	1,28	2,56	4,24	-1,12	2,56
	0,15	1,15	-0,7	3,49	0,98	1,96	4,39	-1,12	1,96
	0,20	1,2	-0,6	3,36	0,72	1,44	4,56	-1,08	1,44
<i>midirrígida</i>	0,25	1,25	-0,5	3,25	0,50	1,00	4,75	-1,00	1,00
flexível	0,30	1,3	-0,4	3,16	0,32	0,64	4,96	-0,88	0,64
	0,35	1,35	-0,3	3,09	0,18	0,36	5,19	-0,72	0,36
	0,40	1,4	-0,2	3,04	0,08	0,16	5,44	-0,52	0,16
	0,45	1,45	-0,1	3,01	0,02	0,04	5,71	-0,28	0,04
rótula	0,50	1,5	0	3	0	0	6	0	0

Notas: 1) engaste é o rígido perfeito; flexível, a quase rótula; *midirrígida* para a posição média em  $\eta$ .

### 3.4.3 MATRIZES DE RIGIDEZ NA FORMA COMPLETA

Uma função linear de transformação denominada  $f_T$  gera a MR [6×6] na forma tradicional, ao realizar o duplo produto pela matriz  $\mathbf{A}_0$ , que já foi indicado nas Eqs. 3.67(b-c), definida pela relação:

$$f_T: \mathbf{R} [3 \times 3] \rightarrow \mathbf{K}_r [6 \times 6] = \mathbf{A}_0^T \mathbf{R} \mathbf{A}_0 \quad (3.74)$$

na qual são conhecidos os termos da MR básica  $\mathbf{R} [3 \times 3]$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ & R_4 & R_5 \\ \text{simétrico} & & R_6 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

e a matriz de incidência cinemática  $\mathbf{A}_0$ , da Eq. 3.60, escrevendo-se a MR completa:

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_1 & r_2 & -r_4 \\ & r_5 & r_6 & r_2 & -r_5 & r_7 \\ & & r_8 & r_3 & -r_6 & r_9 \\ & & & r_1 & -r_2 & r_4 \\ & \text{simétrico} & & & r_5 & -r_7 \\ & & & & & r_{10} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

com o que se estabelece a relação de correspondência da transformação  $f_T$ :

$$\begin{aligned} r_1 &= R_1 & r_2 &= \frac{(R_2 + R_3)}{L_d} & r_3 &= R_2 & r_4 &= R_3 \\ r_5 &= \frac{(R_4 + 2R_5 + R_6)}{L_d^2} & r_6 &= \frac{(R_4 + R_5)}{L_d} & r_7 &= \frac{(R_5 + R_6)}{L_d} \\ r_8 &= R_4 & r_9 &= R_5 & \text{e} & r_{10} &= R_6 \end{aligned} \quad (3.77a-j)$$

Assim, definem-se as operações lineares:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ep} [6 \times 6] &= \mathbf{A}_0^T \mathbf{D} \mathbf{A}_0 = f_T: \mathbf{D} [3 \times 3] \\ \mathbf{K}_h [6 \times 6] &= \mathbf{A}_0^T \mathbf{H} \mathbf{A}_0 = f_T: \mathbf{H} [3 \times 3] \end{aligned} \quad (3.78a-b)$$

com o que se encontra diretamente a MR constitutiva  $\mathbf{K}_{ep}$ , como:

$$\mathbf{K}_{ep} = \begin{bmatrix} A & -B & -C & -A & B & D \\ & E & F & B & -E & G \\ & & H & C & -F & I \\ & & & A & -B & -D \\ & \text{simétrico} & & & E & -G \\ & & & & & J \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

na qual os termos internos da matriz são dados por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{D_{1m}}{L_0} & B &= \frac{3\eta D_{2m}}{L_0 L_d} & C &= \frac{(1+\eta)D_{2m}}{L_0} & D &= \frac{(1-2\eta)D_{2m}}{L_0} \\ E &= \frac{12(1-3\eta+3\eta^2)D_{3m}}{L_0 L_d^2} & F &= \frac{6(1-2\eta+2\eta^2)D_{3m}}{L_0 L_d} & J &= 2I \\ G &= \frac{6(1-2\eta)^2 D_{3m}}{L_0 L_d} & H &= \frac{4(1-\eta+\eta^2)D_{3m}}{L_0} & \text{e} & I &= \frac{2(1-2\eta)^2 D_{3m}}{L_0} \end{aligned} \quad (3.80a-j)$$

Da mesma forma, pode-se expressar a MR da curvatura  $\mathbf{K}_h$  por:

$$\mathbf{K}_h = \frac{Q_1}{30L_d} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M & N & 0 & -M & P \\ & & R & 0 & -N & S \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simétrico} & & & M & -P \\ & & & & & T \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

com os termos dentro dessa matriz valendo:

$$\begin{aligned}
 M &= 6(1 - 3\eta + 6\eta^2) & N &= 3(1 + 4\eta^2)L_d & P &= 3(1 - 6\eta + 8\eta^2)L_d \\
 R &= 2(2 + \eta + 2\eta^2)L_d^2 & S &= -(1 + 2\eta - 8\eta^2)L_d^2 & e & T = 4(1 - 2\eta)^2L_d^2
 \end{aligned}
 \tag{3.82a-f}$$

Avalia-se a variação com o parâmetro  $\eta$  dos coeficientes da matriz  $\mathbf{K}_{ep}$  [Eqs. 3.80(a-j)] na Tab. 3.2 e da matriz  $\mathbf{K}_h$  [Eqs. 3.82(a-f)] na Tab. 3.3.

Os coeficientes da matriz  $\mathbf{K}_{ep}$  são quadráticos em  $\eta$ , diferindo dos encontrados por Monforton & Wu (1963), que são lineares em  $\eta$ , comprovando as diferenças entre essas duas formulações (Alvarenga, 2008).

As propriedades elastoplásticas da seção, indicadas como ( $D_{1m}$ ,  $D_{2m}$ ,  $D_{3m}$ ) e empregadas na matriz  $\mathbf{K}_{ep}$ , serão definidas na próxima subseção.

**Tabela 3.2 Valores particulares dos coeficientes da MR  $\mathbf{K}_{ep}$ .**

Ligação <sup>(1)</sup>	$\eta$	A	B	C	D	E	F	G	H	I
engaste	0	1	0	1	1	12	6	6	4	2
rígida	0,05	1	0,15	1,05	0,9	10,29	5,43	4,86	3,81	1,62
	0,10	1	0,30	1,10	0,8	8,76	4,92	3,84	3,64	1,28
	0,15	1	0,45	1,15	0,7	7,41	4,47	2,94	3,49	0,98
	0,20	1	0,60	1,20	0,6	6,24	4,08	2,16	3,36	0,72
<i>midirrígida</i>	0,25	1	0,75	1,25	0,5	5,25	3,75	1,5	3,25	0,5
flexível	0,30	1	0,90	1,30	0,4	4,44	3,48	0,96	3,16	0,32
	0,35	1	1,05	1,35	0,3	3,81	3,27	0,54	3,09	0,18
	0,40	1	1,20	1,40	0,2	3,36	3,12	0,24	3,04	0,08
	0,45	1	1,35	1,45	0,1	3,09	3,03	0,06	3,01	0,02
rótula	0,50	1	1,5	1,5	0	3	3	0	3	0
Numerador		$D_{1m}$	$D_{2m}$	$D_{2m}$	$D_{2m}$	$D_{3m}$	$D_{3m}$	$D_{3m}$	$D_{3m}$	$D_{3m}$
Denominador		$L_0$	$L_0L_d$	$L_0$	$L_0$	$L_0L_d^2$	$L_0L_d$	$L_0L_d$	$L_0$	$L_0$

Nota: 1) engaste é o rígido perfeito; flexível, a quase rótula; *midirrígida* para a posição média em  $\eta$ .

**Tabela 3.3 Valores particulares dos coeficientes da MR  $\mathbf{K}_h$ .**

Ligação <sup>(1)</sup>	$\eta$	M	N	P	R	S	T
engaste	0	6	3	3	4	-1	4
rígida	0,05	5,19	3,03	2,16	4,11	-1,08	3,24
	0,10	4,56	3,12	1,44	4,24	-1,12	2,56
	0,15	4,11	3,27	0,84	4,39	-1,12	1,96
	0,20	3,84	3,48	0,36	4,56	-1,08	1,44
<i>midirrígida</i>	0,25	3,75	3,75	0,00	4,75	-1,00	1,00
flexível	0,30	3,84	4,08	-0,24	4,96	-0,88	0,64
	0,35	4,11	4,47	-0,36	5,19	-0,72	0,36
	0,40	4,56	4,92	-0,36	5,44	-0,52	0,16
	0,45	5,19	5,43	-0,24	5,71	-0,28	0,04
rótula	0,50	6	6	0	6	0	0
Numerador		1	$L_d$	$L_d$	$L_d^2$	$L_d^2$	$L_d^2$

Nota: 1) engaste é o rígido perfeito; flexível, a quase rótula; *midirrígida* para a posição média em  $\eta$ .

### 3.4.4 PROPRIEDADES ELASTOPLÁSTICAS DA SEÇÃO

As integrais no volume original ( $V_0$ ), como as indicadas nas Eq. 3.57 e Eqs. 3.63 (a-b), são aproximadas por meio dos somatórios de fatias no nó do EF. Isso pode ser apresentado, de maneira geral, pela expressão:

$$\int_{V_0} [X(x)] dV_0 = \frac{L_0}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} [X_i(x_j)] dA_{O_i} \quad (3.83)$$

na qual (j) é o índice do nó inicial ( $_1 = A$ ) ou final ( $_2 = B$ ); (i) se refere à fatia de cada seção, em que se está integrando;  $X_i(x_j)$  representa a grandeza avaliada na fatia (i), no nó (j);  $dA_{O_i}$  é a área constante original da fatia (i); e  $L_0$  é o comprimento original do EF. Note-se que é feita a média das integrais das propriedades nas áreas do nó inicial e final.

Esse processo caracteriza a integração numérica de Newton-Cotes, pela regra do trapézio (Abramowitz & Stegun, 1972), e se justifica porque as propriedades das fatias nos pontos extremos do EF são conhecidas, recomendando-se o emprego de integrações reduzidas em análises inelásticas (Saje *et al.*, 1996).

As propriedades elastoplásticas mencionadas serão calculadas, então, em termos médios, utilizando:

$$D_{km} = (D_{ka} + D_{kb})/2, \text{ com } k = \{1 \text{ a } 3\} \quad (3.84)$$

em que se avalia no nó índice j (a ou b):

$$D_{kj} = \int_{A_0} D_j(y_c)^{(k-1)} dA_0 = \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} [D_{ij}(y_{c_i})^{(k-1)} dA_{O_i}] \quad (3.85)$$

ou seja:  $D_{1j}$  é a avaliação numérica da integral de  $(D \cdot dA_0)$ ,  $D_{2j}$  a de  $(D \cdot y_c \cdot dA_0)$  e  $D_{3j}$  a relativa à  $(D \cdot y_c^2 \cdot dA_0)$ , no nó j (somando todas as fatias da seção), e  $D_{ij}$ , que corresponde a D, é obtido de acordo com Eq. 3.3 para cada fatia i do nó j. Com a plasticidade, separam-se as somas de fatias ( $dA_0$ ) em elásticas ( $dA_e$ ) e plásticas ( $dA_p$ ), mas a área não se altera.

Esse processo foi empregado para produzir vários resultados anteriormente (Alvarenga & Silveira, 2006b, 2008a/b), inclusive os de validação do EF dito rígido-rígido, estudado no capítulo 5, e do EF rígido-rótula, tratado no capítulo 6.

Um conceito mais efetivo de avaliação das propriedades elastoplásticas foi adotado ultimamente e produziu bons resultados de validação (Alvarenga e Silveira, 2009a). Esse procedimento foi adotado nos capítulos 7 e 8, sendo esclarecido a seguir.

Considerando o equilíbrio do EF corrotacional do ponto de vista apenas constitutivo, pode-se escrever para o EF sem ligação ( $\eta = 0$ ):

$$\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \Rightarrow \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} D_{1m} & D_{2m} & -D_{2m} \\ & 4D_{3m} & 2D_{3m} \\ \text{simétrico} & & 4D_{3m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \quad (3.86)$$

em que  $q_i$  e  $Q_i$  são os já conhecidos deslocamentos e os esforços corrotacionais.

Em seguida, analisa-se o significado de cada termo da matriz  $\mathbf{D}$ . Para isso, avalia-se o comportamento de um EF de seção retangular (mais simples do que os Is empregados na parte computacional da solução), com uma zona plástica (ZP) já formada, para se ter uma boa ideia do comportamento da seção na plasticidade.

Os termos da Eq. 3.86 representam de forma simplificada:

- a.  $D_{1m} \cdot q_1 / L_0 = Q_1$  é a forma de avaliar o esforço e a deformação puramente axial, como elucidada a Fig. 3.15(a). Pela representação da Fig. 3.15(b) percebe-se que essa deformação depende igualmente de ambas as extremidades nodais e, por isso, utiliza-se o valor médio (da mesma forma anterior):

$$D_{1m} = \frac{1}{2} (D_{1A} + D_{1B}), \text{ com } D_{1j} = E \sum_{ie}^{n \text{ fat } e} dA_{ie} + E_t \sum_{ip}^{n \text{ fat } p} dA_{ip} \quad (3.87a-b)$$

em que se somam a contribuição da área das fatias elásticas ( $dA_e$ ) e das plásticas ( $dA_p$ ), com seus respectivos módulos, numa área *elastoplástica*  $D_1$  do nó  $j$ .

Adota-se a média dos valores, nos nós, para a MR, quando  $E_t = 0$  significa somar o valor nodal das partes elásticas remanescentes da seção de cada nó, ou seja:  $EA_m = E (A_{eA} + A_{eB})/2$ ;

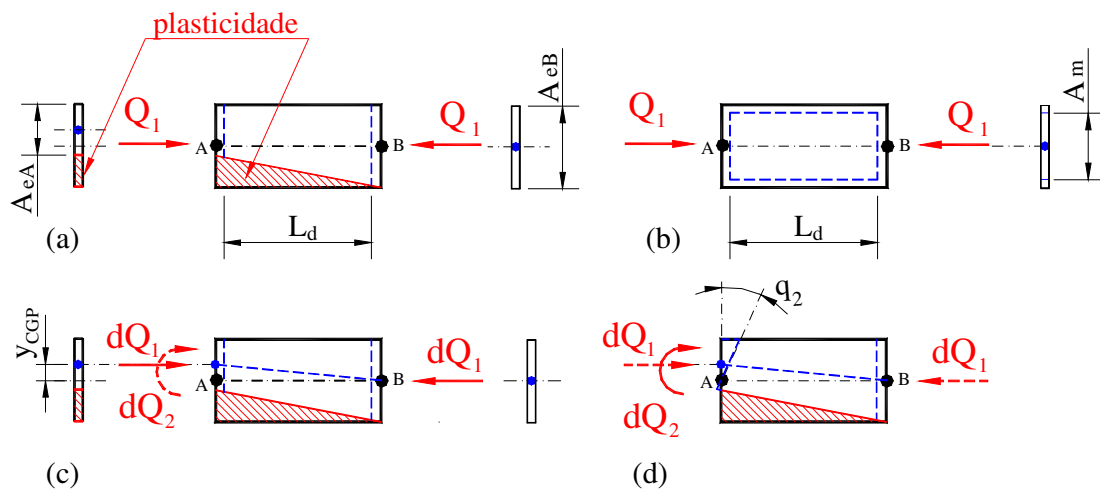
- b. já os termos  $D_{2m} \cdot q_j / L_0 = Q_1$  e  $D_{2m} \cdot q_1 / L_0 = Q_j$ , com  $(j) = (2)$  ou  $(3)$  constituem uma novidade, pois, em geral, são desprezados ou ignorados. Ocorrem duas novas situações:

- i.* a deformação axial  $q_1$  pode produzir momentos  $dQ_2$  (ou  $dQ_3$ ), como ilustra a Fig. 3.15(c), dada à presença da excentricidade, já mostrada na subseção 3.3.1, (isto é,  $y_{CGP} \neq 0$ , ver Fig. 3.5);
- ii.* as rotações efetivas  $q_2$  ou  $q_3$  podem gerar contribuições nos esforços axiais  $dQ_1$ , que são vistos na Fig. 3.15(d), atuando de forma excêntrica.

Em razão do esforço axial excêntrico [que na Fig. 3.15(c) ocorre somente no nó A], pode-se gerar um momento  $Q_2 = dQ_1 \cdot y_{CGP}$ . Note-se que esse efeito não ocorre no nó B, para essa representação. Logo, não se justifica que se tomem valores médios para essa propriedade. Portanto, considera-se cada nó com a

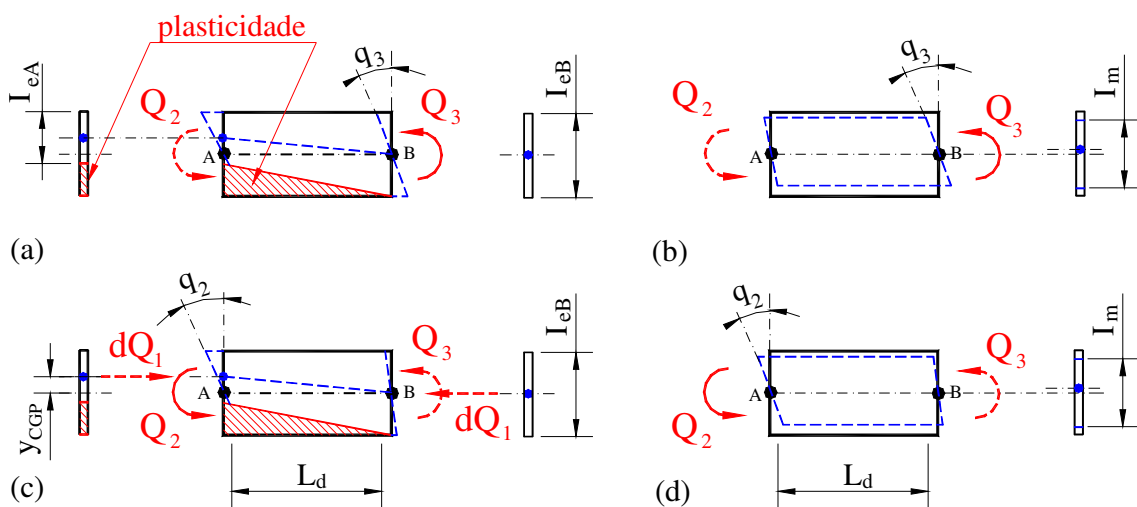


- propriedade independente, com os termos  $D_{2m}$  substituídos por  $D_{2A}$  e  $D_{2B}$ , respectivamente (sem utilizar a média);
- c. os termos com  $D_{3m}$  são mais difíceis ainda de serem aceitos na forma das médias simples anteriores (Alvarenga, 2005). Isso porque a plasticidade é capturada de forma bastante trabalhosa, monitorando cada fatia de cada nó do EF, do que se determinam as propriedades nodais mais corretas. Então, supondo-se o emprego de valores médios, imagina-se que tais médias devem reproduzir um pouco do que ocorre nos nós.



**Figura 3.15 Rigidez axial equivalente:**

- (a) plasticidade em A; (b) deformação média axial; (c) deformação axial  $dq_1$  excêntrica induzindo ao momento  $dQ_2$ ; (d) giro  $dq_2$  gerando esforço axial  $dQ_1$ .



**Figura 3.16 Rigidez à flexão equivalente:**

- (a) a rotação  $q_3$  induz momentos  $Q_2$  e  $Q_3$ ; (b) efeito de  $q_3$  na forma de média; (c) a rotação  $q_2$  induz momentos  $Q_2$  e  $Q_3$  e axial  $dQ_1$ ; (d) efeito de  $q_2$  na forma de média.

Ao se fazer a média anterior, entretanto, ambos os nós ficavam com as mesmas propriedades (valor único para ambos os nós), sendo que os comportamentos e os estados (desses nós) podem ser bastante diferentes. Observe-se que o que se deseja é achar uma média mais razoável, considerando o estado desses nós. Para melhor entender essa diferença, requer-se um estudo mais detalhado. Na figura 3.16(a), mostra-se a ZP do nó (A) e compreende-se que com aplicação da rotação  $q_3$  só ocorram momentos induzidos  $Q_2$  e  $Q_3$ , os quais poderiam corresponder aos obtidos pela média na Fig. 3.16(b). Deve-se lembrar que, dessa forma, ambos os nós (A) e (B) possuiriam, também, a excentricidade  $y_{CGP}$ , menores que o real em (A) (visto que, fez-se a média dessas propriedades). Entretanto, quando se impõe a rotação  $q_2$ , como representado na Fig. 3.16(c), aparecerão não apenas os momentos induzidos  $Q_3$  e  $Q_2$ , mas uma parcela de esforço axial excêntrico,  $dQ_1$  associado. Note-se que essa parcela de axial deve aparecer tanto na forma da média anterior como na proposta atual. Na forma anterior, porém, a parcela de axial é dividida em dois nós, sendo que no nó B não há excentricidade (não possui ZP).

Poder-se-ia justificar o emprego da média anterior informando que isso torna a plasticidade mais lenta, uma vez que os deslocamentos maiores são retardados, visto que plasticidade nodal é diluída no EF, e não dominante onde se origina. Se a formulação consegue ter uma adequada recuperação dos esforços internos e se no restante do processo essas influências (excentricidades) são consideradas, a média anterior apenas dificulta o processo de equilíbrio. Requerendo mais iterações e forçando a distribuição da plasticidade, perde-se mais tempo no ciclo corretivo até atingir a convergência, chegando ao *mesmo estado de equilíbrio*.

Essas avaliações de médias foram modificadas, considerando-se agora a aproximação desenvolvida no método plástico refinado proposto por Liew, quando se forma uma rótula plástica (RP) em uma das extremidades do EF (Chen *et al.*, 1996).

Dessa forma, reescreve-se a matriz **D**, que procura espelhar coerência maior com o que ocorre nos nós correspondentes, baseando-se em novas propriedades elastoplásticas nodais, por meio da expressão:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} D_{1m} & d_1 D_{2A} & d_2 D_{2B} \\ & d_3 D_{3Am} & d_4 D_{3ABm} \\ \text{simétrico} & & d_5 D_{3Bm} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

na qual os parâmetros ( $d_j$ ),  $j = \{1 \text{ a } 5\}$  são os mesmos da Eq. 3.70, porém se emprega o *momento estático elastoplástico* da seção dos nós (A) e (B), dado por:

$$D_{2j} = E \sum_{ie}^{n \text{ fat } e} y_{ie} dA_{ie j} + E_t \sum_{ip}^{n \text{ fat } p} y_{ip} dA_{ip j} \quad (3.89)$$

que não será zero se houver plasticidade e o deslocamento do CGP ( $y_{CGP} \neq 0$ ).

Os termos relativos à *inércia elastoplástica* de cada nó ( $j$ ) são avaliados da forma tradicional, considerando o teorema dos eixos paralelos:

$$D_{3j} = E \sum_{ie}^{n \text{ fat } e} y_{ie}^2 dA_{ie j} + E_t \sum_{ip}^{n \text{ fat } p} y_{ip}^2 dA_{ip j} + \left( E \sum_{ie}^{n \text{ fat } e} dA_{ie j} + E_t \sum_{ip}^{n \text{ fat } p} dA_{ip j} \right) y_{CGP}^2 \quad (3.90)$$

em que  $y_{CGP}$ , quando ocorre a plasticidade, será encontrado pela relação:

$$y_{CGPj} = \frac{D_{2j}}{D_{1j}} = \frac{\left( E \sum_{ie}^{n \text{ fat } e} y_{ie} dA_{ie j} + E_t \sum_{ip}^{n \text{ fat } p} y_{ip} dA_{ip j} \right)}{\left( E \sum_{ie}^{n \text{ fat } e} dA_{ie j} + E_t \sum_{ip}^{n \text{ fat } p} dA_{ip j} \right)} \quad (3.91)$$

Adotando-se a aproximação de Chen *et al.* (1996), determinam-se as *inércias elastoplásticas* nodais efetivas conforme:

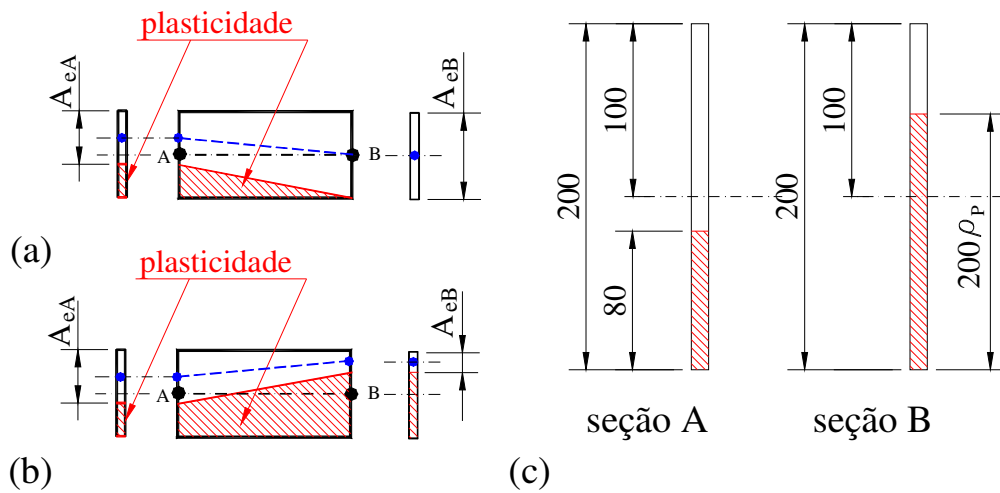
$$D_{3ABm} = (D_{3A} D_{3B}) / (EI_0) \quad D_{3jm} = (3D_{3j} + D_{3ABm}) / 4 \quad (3.92a-b)$$

em que  $D_{3ABm}$  avalia a relação de transmissão de momentos entre os nós, considerando o efeito conjugado da plasticidade em ambos os nós, e a rigidez de viga ( $4EI_2/L_0$ ) é a base para a correção de  $D_{3jm}$ ,  $j$  sendo o nó (A) ou (B). (Veja também o apêndice A.7).

Para melhor avaliar a diferença entre os dois processos, por exemplo, considera-se um EF com seção retangular (com dimensões de 20 cm  $\times$  1 cm), e supõe-se que a extremidade A tenha 40% da seção plástica, como na Fig. 3.17(a) e do outro lado, no nó B, a plasticidade varia conforme o parâmetro ( $\rho_P$ ), no intervalo de 0 (elástico)  $\leq \rho_P \leq 1$  (plástico), representado na Fig. 3.17(b).

Ao considerar o material como elástico-plástico perfeito ( $E_t = 0$ ) e isolando o módulo elástico ( $E$ ), pode-se dizer que:

$$\left| \begin{array}{lll} D_{1A}/E = 12 \text{ cm}^2 & D_{1B}/E = 20(1-\rho_P) & D_{1m}/E = 16-10 \rho_P \\ y_A = 4 \text{ cm} & D_{2A}/E = 48 \text{ cm}^3 & y_B = 10 \rho_P \quad D_{2B}/E = 200(1-\rho_P) \rho_P \end{array} \right.$$



**Figura 3.17 Geometria da seção retangular elastoplástica:**  
 (a) plasticidade no nó A, lado B elástico; (b) plasticidade também em B;  
 (c) esquema das seções analisadas para cálculo.

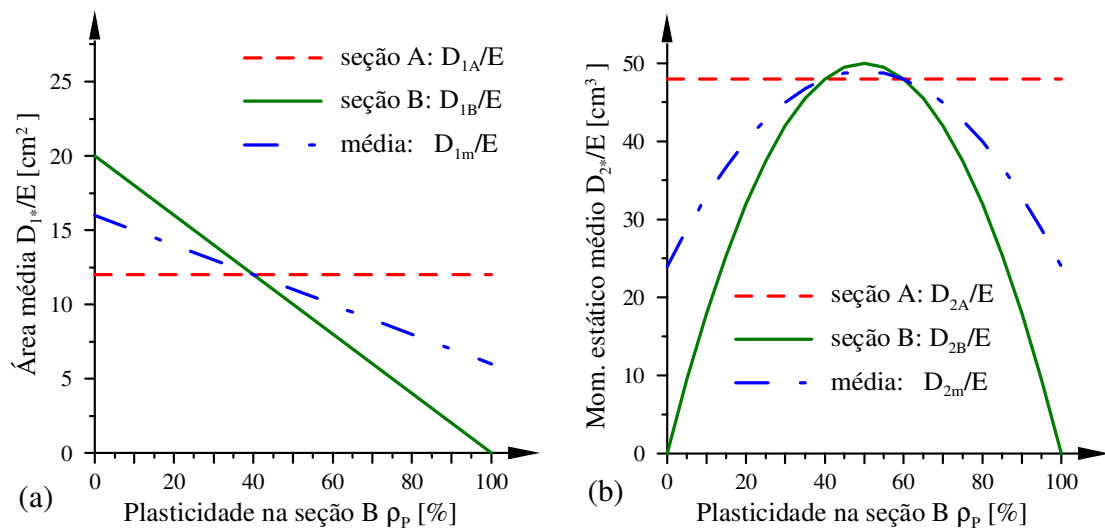
A área média da seção representa um valor coerente, como se acompanha na Fig. 3.18(a). Já o momento estático na Fig. 3.18(b) varia muito no nó B e é constante no nó A. Assim, a média acompanha as mudanças em B, distorcendo o que ocorre em A.

Para avaliar a inércia elastoplástica, pode-se escrever:

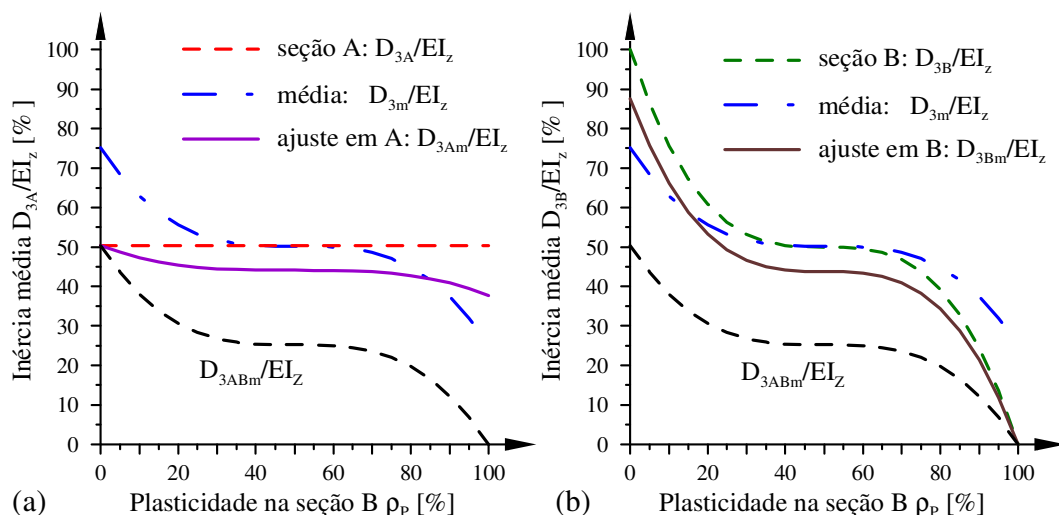
$$D_{3A}/E = h^3/12 + h \cdot y^2 = (12)^3/12 + 12(4)^2 = 336 \text{ cm}^4$$

$$D_{3B}/E = [20(1 - \rho_p)]^3/12 + [20(1 - \rho_p)](10 \rho_p)^2 = 8000(1 - \rho_p)(4 \rho_p^2 - 2 \rho_p + 1)/12$$

Com esses valores se constrói a Fig. 3.19, na qual se verifica que a média anterior ( $D_{3m}$ ) considerou-se uma inércia mínima no nó com  $\rho_p = 1$ , que é incorreta. Na abordagem atual, as inércias ajustadas dos nós refletem tanto a plasticidade da seção ( $D_{3A}$  e  $D_{3B}$ ), como a influência do nó oposto no nó avaliado ( $D_{3ABm}$ ).



**Figura 3.18 Propriedades da seção retangular elastoplástica:**  
 (a) área elastoplástica média; (b) momento estático elastoplástico médio.



**Figura 3.19 Comportamento da inércia elastoplástica:**  
 (a) média no nó A (com ZPs fixas); (b) média no nó B (com ZPs crescendo).

No nó A com ZP fixa, a média  $D_{3Am}$  está mais perto de  $D_{3A}$  do que  $D_{3m}$ , como se mostra na Fig. 3.19(a). Já no nó B da Fig. 3.19(b), com a ZP crescendo, quando  $\rho_p = 1$  então  $D_{3Bm}$  atinge zero, acompanhando  $D_{3B}$ , enquanto  $D_{3m}$  não é nulo.

Essa nova abordagem melhorou a velocidade de convergência quando já ocorria plasticidade em diversos EF/barras, para algumas estruturas analisadas (Alvarenga & Silveira, 2009a). Algumas vezes, houve um insignificante acréscimo de deslocamentos, porém, mostra-se mais instável próximo do ponto limite de carga [na versão anterior do *PPLANAVA*, ocorria singularidade mais rapidamente, na atual sucede uma divisão por zero (“overflow”) nos casos de formação de mecanismo (viga, por exemplo)].

### 3.4.5 MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Com as propriedades definidas, chega-se na matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  de cada elemento finito (i) no sistema corrotacional local. Em seguida, procede-se à sua transformação para o eixo global por uma rotação de eixos ( $\theta_g$ ) por meio da operação linear:

$$\mathbf{K}(i) = \mathbf{T}^T(\theta_g)\mathbf{K}\mathbf{T}(\theta_g) \quad (3.93)$$

na qual  $\mathbf{T}(\theta_g)$  a matriz de transformação por rotação (ver apêndice A.6). Em seguida, faz-se a montagem da Matriz de Rigidez Global  $\mathbf{S}$  do sistema estrutural, somando-se a contribuição isolada de cada EF de cada barra, alinhada por graus de liberdade (GDL), ou seja:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n \text{ elementos}} \mathbf{K}(i) \quad (3.94)$$

### 3.5 ESFORÇOS INTERNOS DE EQUILÍBRIO

Complementando a formulação apresentada, serão encontrados agora os esforços internos resultantes no EF. Como foi dito, na técnica das fatias esses esforços são avaliados pela integração das tensões atuantes em todas as fatias da seção de cada nó. Note-se que essas tensões são obtidas a partir do diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$  selecionado, somando às tensões residuais e às existentes, as variações de tensões causadas pelos acréscimos das deformações calculadas pela Eq. 3.53, ou seja, dependem da ligação ( $\eta_{EF}$ ) também.

Considerando o nó  $j$  genérico, que pode ser o inicial (A) ou o final (B), determina-se o esforço axial  $N_j$  resultante da expressão:

$$N_j = \int_{A_0} \sigma dA_0 = \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} [\sigma_i dA_{0i}] \quad (3.95)$$

e o momento de flexão  $M_j$  é dado por:

$$M_j = \int_{A_0} \sigma y_c dA_0 = \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} [\sigma_i y_{ci} dA_{0i}]. \quad (3.96)$$

Nessas expressões, as integrais na área original (isto é, em toda a seção  $A_0$ ) são convertidas em somatórios de ( $n$ , número total fatias), cada fatia com sua tensão ( $\sigma_i$ ), sua área ( $dA_{0i}$ ) e a sua posição em relação ao eixo do EF ( $y_{ci}$ ).

As respostas dessas integrais ( $N_j$ ,  $M_j$ ) correspondem aos esforços corrotacionais de equilíbrio. É fácil concluir que os momentos de flexão são  $Q_2 = -M_A$  e  $Q_3 = M_B$ . Há, porém, dois esforços axiais  $N_j$  associados à grandeza  $Q_1$ . No regime elástico, as integrais fornecem valores absolutos iguais ( $-N_A = N_B = Q_1$ ). Já na presença da plasticidade, em geral, essas integrais podem produzir valores absolutos diferentes. Dadas as diferenças produzidas nas respostas do método anterior (Lavall, 1996), desenvolveu-se um processo alternativo de ajuste chamado *IIEA Integração Iterativa do Esforço Axial* (Alvarenga e Silveira, 2008c), escrevendo:

$$Q_1 = IIEA (-N_A, N_B) \quad (3.97)$$

Esse processo será apresentado com maiores detalhes na seção seguinte.

### 3.6 INTEGRAÇÃO ITERATIVA DO ESFORÇO AXIAL (IIEA)

Uma parte importante no processo numérico de geração dos esforços internos reside na correção do estado das fatias, quando ocorre a plasticidade. Lavall (1996) tentou realizar a aproximação do esforço axial como uma média simples das integrais das tensões nas fatias, calculadas no nó inicial e final de cada EF, de forma similar à Eq. 3.83 adotada para as propriedades elastoplásticas, ou seja:

$$Q_1 = \frac{-N_A + N_B}{2}. \quad (3.98)$$

na qual se tem o esforço axial no EF corrotacional  $Q_1$  relacionado aos esforços  $N_i$  que são avaliados pela Eq. 3.95.

Vários pesquisadores (Oran, 1973; Kam *et al.*, 1983; Kassimali, 1983) reportaram dificuldades numéricas surgidas com a interação entre o esforço axial, o momento fletor e a curvatura (ou rotação específica) quando a plasticidade participa da análise. Kassimali (1983) atribuiu algumas dessas discrepâncias numéricas do passado a considerações inadequadas da formulação. Já Yang & Kuo (1994) atribuíram à incapacidade de algumas formulações acompanharem o movimento de corpo rígido, avaliando esforços espúrios. Entretanto, em trabalhos realizados, mostrou-se que as diferenças encontradas no método anterior não tinham essas origens, mas, proviam de uma perda do equilíbrio, que nasce no instante em que se limita (ou se modifica) o comportamento da fatia por causa do escoamento, como se mostra na subseção seguinte. Maiores detalhes sobre esses aspectos podem ser vistos em Alvarenga (2005, 2008; & Silveira, 2008c).

#### 3.6.1 INTRODUÇÃO

Seguindo a figura 3.20(a), observa-se que quando determinada fibra está no regime elástico, a uma deformação  $\varepsilon_1$  corresponde uma tensão  $\sigma_1 < \sigma_y$ , tal que:

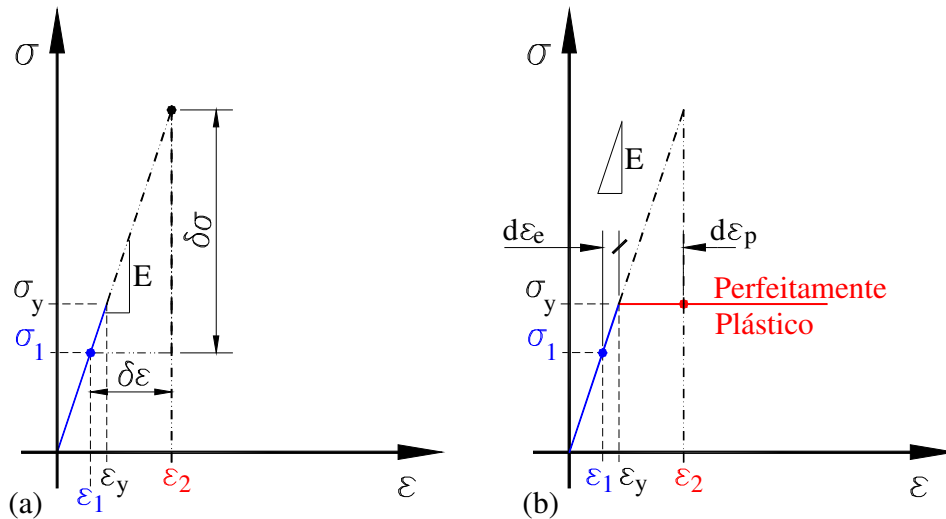
$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E < \varepsilon_y. \quad (3.99)$$

Quando ocorrer um acréscimo de deformação  $\delta\varepsilon$ , num dado instante  $\omega$  do processo incremental-iterativo, tal que:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \delta\varepsilon \geq \varepsilon_y \quad (3.100)$$

então a tensão encontrada na fibra será:

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \delta\sigma = \sigma_1 + E\delta\varepsilon > \sigma_y \therefore \sigma_2 = \sigma_y \quad (3.101)$$



**Figura 3.20 Início da plasticidade da fatia (fibra):**  
 (a) Escoamento:  $\sigma_1 + \delta\sigma > \sigma_y$ ; (b) deformação permanente:  $d\epsilon_p$ .

Supondo que o material seja elástico e perfeitamente plástico, constata-se que a fibra entrou em escoamento. Dessa forma, o acréscimo de tensão inicialmente suposto, ao realizar-se a análise e o equilíbrio do vetor de cargas, não mais ocorrerá.

Haverá, então, uma deformação permanente (plástica)  $d\epsilon_p$ , mostrada na Fig. 3.20 (b), e uma deformação elástica  $d\epsilon_e = \epsilon_y - \epsilon_1$ , de tal forma que:

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 + d\epsilon_e + d\epsilon_p = \epsilon_y + d\epsilon_p > \epsilon_y. \quad (3.102)$$

NA figura 3.21(a) mostra-se a situação de um EF onde no nó (A) surgem fibras plásticas e o nó (B) está em regime elástico. Forma-se, então, uma zona plástica (ZP) ao longo do EF. Observe-se, também, que a Eq. 3.102 só pode ser definida considerando uma redução da tensão, antes avaliada como superior a  $\sigma_y$  em cada fatia.

Assim, ocorre naturalmente uma parcela de tensão  $d\sigma$  não equilibrada nas fatias que sofrem o escoamento neste instante. Integrando-se as tensões em todas as fatias das seções, nos nós inicial e final desse EF, obtém-se o vetor de esforços internos:

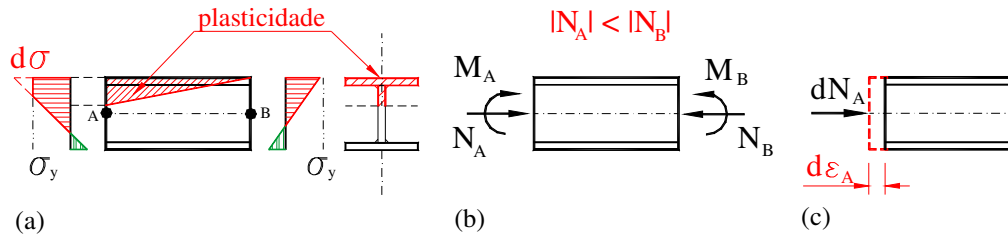
$$\mathbf{F}_I = \{-N_A, -M_A, N_B, M_B\}^T = \{Q_1, Q_2, Q_3\}^T = \mathbf{Q} \quad (3.103)$$

Ocorre que esses esforços apresentam uma parcela de desequilíbrio no esforço normal, causada pelos valores  $d\sigma$  não equilibrados:

$$dN_A = |N_A| - |N_B| \neq 0 \quad (3.104)$$

Verificou-se que essa diferença não pode ser restaurada por meio do processo iterativo de Newton-Raphson e que a ausência dessa parcela gerava uma distorção nos resultados (Alvarenga, 2005). Isso será exemplificado no capítulo 5.





**Figura 3.21** Formação de ZP em um nó do EF:

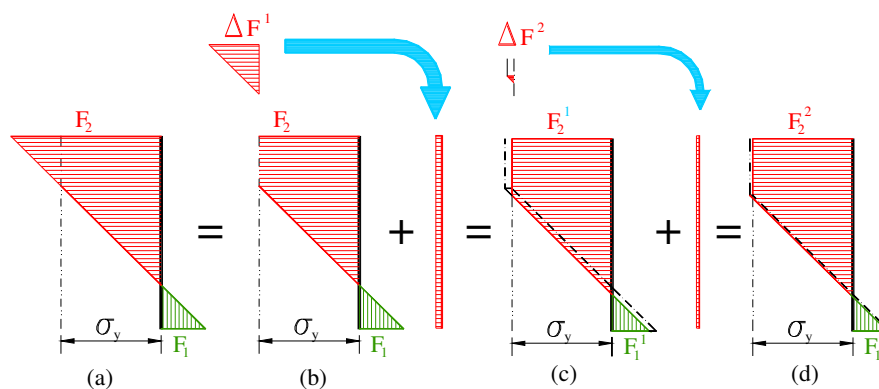
(a) ZP causa  $d\sigma$  desequilibrado; (b) esforços internos no EF; (c) deformação adicional.

Deve-se lembrar que se considera  $N_A$  e  $N_B$  com o sinal de engenharia: (+) para tração e os esforços internos tem sentidos opostos no EF, que são diferentes dos sinais das tensões. Para ajustar tensões de forma a equilibrar os esforços normais, apresentou-se um processo iterativo aplicado a todos os elementos que tivessem fibras plásticas, nos quais, enquanto houver uma diferença  $|dN_j| > \text{tolerância} (\cong 0,1\%)$ , será introduzida uma deformação axial adicional no nó índice  $j$  (A ou B), onde ocorre  $dN_j$ , pela expressão (Alvarenga, 2005):

$$\delta\epsilon_j = dN_j/A_{cj} \tag{3.105}$$

na qual  $A_{cj}$  é a área da seção conhecida (naquela iteração), avaliada no nó de índice  $j$  (A ou B), que será atualizada iterativamente. Assim, novas tensões serão obtidas, outros esforços  $F$  também, e o ciclo será repetido até se atingir à convergência do processo. Na Fig.3.22(a-d), elucida-se a transformação de um diagrama elástico em um diagrama plástico, fazendo-se a recuperação das tensões  $\Delta F^1$  e  $\Delta F^2$ , que nascem da plasticidade, gerando o diagrama plástico correspondente, com esforços resultantes menores.

O objetivo aqui é garantir que em cada EF ter-se-á sempre:  $-N_A \approx N_B \approx Q_1$ , visto que o esforço normal deverá ser constante (inalterado entre os extremos do EF) e que não há carga axial externa aplicada no interior do EF.



**Figura 3.22** Processo da Integração Iterativa:

(a) diagrama elástico; (b) diagrama reduzido; (c) correção; (d) diagrama final.

Não é necessário fazer o mesmo para o momento, que é avaliado linearmente ao longo do EF, sendo possível seu equilíbrio ou ajuste na iteração seguinte usando apenas o esquema de Newton-Raphson.

### 3.6.2 JUSTIFICATIVA

A justificativa desse processo pode ser expressa como: “os esforços nodais de EF baseados em deslocamentos não podem ser recuperados através da integração direta das tensões nas fibras ao longo das seções nas extremidades do EF, porque, em geral, as equações diferenciais de equilíbrio não são atendidas ali (para formulações fracas que assumem alguma função de forma para aproximar o EF deformado), quando ocorre a plasticidade” (Kassimali, 1984).

“Tampouco a matriz de rigidez tangente do EF deve ser empregada para recuperar os esforços incrementais do EF”, já que “essa não pode capturar a não linearidade do material que aparece no atual passo de carga” (Teh & Clarke, 1999).

Alvarez & Birnstiel (1969), nos primórdios da técnica de ZP, já indicavam a “necessidade de correção iterativa de ( $N_j$  e  $M_j$ ) no próprio passo de carga”, notando que “ $M_j$  depende de  $N_j$  e da deflexão, e que o ajuste de  $M_j$  deveria ser feito após o primeiro, em outro processo iterativo”.

Esse processo tem precedente nos trabalhos de Terro & Hamoush (1996), que reproduziram o diagrama tensão-deformação de uma seção retangular (que se constrói com as fórmulas de Moses, 1964), por meio de um processo iterativo que possui a mesma essência do desenvolvido agora (Alvarenga & Silveira, 2008c). São ideias similares às de Bushnell (1977), adotadas na formulação com ZP de Clarke (1994).

Pode-se considerar, então, que o procedimento aplicado tem justificativa teórica, significado físico e precedente (Alvarenga, 2005).

### 3.6.3 IIEA SOB CONDIÇÕES ESPECIAIS

A *IIEA* representa uma tarefa numérica complementar da formulação cujo desdobramento computacional será tratado no capítulo seguinte. Cabe ressaltar, porém, alguns aspectos teóricos que devem ser levados em consideração, que são as questões de como definir-se o valor esperado, ou correto, desse esforço axial  $Q_1$  no EF, principalmente, quando se tem outras situações mais complexas do que a ilustrada na Fig. 3.22.

O esforço axial estabelecido pela Eq. 3.95 pode ser relacionado ao campo de deformações da Eq. 3.5, escrevendo-se:

$$N_j = \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} \{D[\varepsilon_0 - \rho'(y_i - y_{CGP})]dA_{O_i}\} \quad (3.106)$$

do que aparecem, genericamente, as duas parcelas que contribuem:

$$N_j = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} D dA_{O_i} - \rho' \sum_{j=1}^{n \text{ fatias}} D (y_j - y_{CGP}) dA_{O_j} = \varepsilon_0 D_{1m} - \rho' D_{2m} \quad (3.107)$$

Como em dado instante  $\omega$  ainda não ocorreram novos escoamentos de fatias, as grandezas indicadas são calculadas e avaliam-se os acréscimos dos esforços, então o incremento do esforço axial que deverá ocorrer naquele instante, independentemente de haver nova plasticidade, é dado por:

$$\Delta N_j = \underbrace{\Delta \varepsilon_0 D_{1m}}_{\text{alongamento}} - \underbrace{\Delta \rho' D_{2m}}_{\text{curvatura}} = \Delta N_{\varepsilon_j} - \Delta N_{\rho'_j} \quad (3.108)$$

Esse incremento possui duas componentes: a do alongamento ( $\Delta N_{\varepsilon_j}$ ), que é abalizada por uma integral média, já apresentada, e a parcela da curvatura ( $\Delta N_{\rho'_j}$ ) que é relacionada à excentricidade ( $y_{CGP}$ ). Mas, essa excentricidade é uma das principais causas das variações acopladas do esforço axial, por isso mesmo essa parcela é desconsiderada e toma-se como incremento real esforço do axial apenas a parcela do alongamento.

Portanto, conhecendo-se esse valor, pode-se fazer a correção do esforço axial após a determinação de todas as plasticidades que aconteceram naquele instante ( $\omega$ ), retirando-se a parcela já introduzida, que representa a diferença entre o axial obtido e o do instante anterior ( $\omega-1$ ), valor que será reincorporado ao EF pela *IIEA*:

$$\Delta N_{IIEA_j} = \Delta N_{\varepsilon_j} - (N_{jd} - N_{jc}) = \Delta N_{\varepsilon_j} - (N_j^{\omega} - N_j^{\omega-1}) \quad (3.109)$$

no nó correspondente.

Este assunto é revisto no próximo capítulo, na parte de implementação computacional, na qual se indicam alguns detalhes adicionais.

Com as matrizes de rigidez e os esforços internos do elemento, a base da formulação geral fica completa, passando-se agora ao estudo do processo de solução numérica e a sua implementação computacional.

### 3.7 REFERÊNCIAS

Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (1972), *Handbook of mathematical functions: with formulas, graph and mathematical tables*, Dover Publications, Nova Iorque.

Alvarenga, A.R. (2005), “Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço”, Dissertação de Mestrado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto/MG.

Alvarenga, A.R. (2008), “Estudos sobre ligações com análise avançada através da zona plástica em pórticos planos de aço”, Exame de Qualificação, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto/MG.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2006b), “A configuração geométrica inicial na análise avançada de portais planos de aço”, *REM Revista Escola de Minas*, Vol. 70, No. 2, pp. 185-196.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008a), “Lean columns by plastic zone advanced analysis view”, *Anais do 5th European Conference on Steel and Composite Structures*, EUROSTEEL, Graz, Áustria, Vol. B, pp. 1659-1664.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008c), “Integração iterativa do esforço axial na análise inelástica com zona plástica”, *Anais do XXIX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Maceió/AL.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2009a), “Introduzindo as ligações na análise com EF empregando zona-plástica - Uma nova formulação”, *Anais do XXX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Búzios/RJ.

Alvarez, R.J. & Bernstiel C. (1969), “Inelastic analysis of multistory multibay frames”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 95, No. 11, pp. 2477-2503.

Bathe, K.J. (1996), *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. Jersey.

Beal, A.N. (2000), “Who invented Young’s modulus”, *The Structural Engineer*, Vol. 78, No. 14, pp. 27-32.

Bernoulli, D. (1728), em Witmer (1991-1992), “Elementary Bernoulli-Euler beam theory”, *MIT Unified Engineering Course*, Notes: pp. 5.114-5.164, & Speiser, D. (1982), “Daniel Bernoulli” (1700-1782), *Helvetica Physica Acta*, Vol. 55, pp. 504-523.

Biot, J.B. (1939), “Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for body under initial stress”, *Philosophical Magazine*, Vol. 27, pp. 468-485.

Bushnell, D. (1977), “A strategy for the solution of problems involving large deflections, plasticity and creep”, *Int. Journal of Num. Meth. in Eng.*, Vol. 11, No. 4, pp. 683-708.

Chen, W.F. & Han, D.J. (1987), *Plasticity for structural engineers*, Springer-Verlag, Nova Iorque.

Chen, W.F. & Lui, E.M. (1991), *Stability design of steel frames*, CRC Press Inc, Boca Raton, Flórida.

Chen, W.F., Goto, Y. & Liew, J.Y.R. (1996), *Stability design of semi-rigid frames*, John Willey and Sons, Nova Iorque.

Clarke, M.J. (1994), “Plastic-zone analysis of frames”. Em Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames: theory, software and applications*, CRC Press, Boca Raton.

Engesser, F. (1889), “Ueber die knickfestigkeit gerader stäbe”. *Zeitschrift für architekture and ingenieurwesen*, pp. 455.

Engesser, F. (1895), “Knickfragen”. *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 26, pp. 24.

Euler, G. (1759), “Sur les forces des colones”, *Memoires de L’Academie Royale des Science et Belles Lettres*, Vol. 13, pp 252, Berlim/Alemanha. Traduzido para o inglês por Van der Broek, J.A.; em *American Journal of Physics*, (1947), Vol. 15, pp. 309.

Galambos, T.V. (1982), *Structural members and frames*, Dept. Civil Engineering, Univ. Minnesota, Mineapolis.

Gao, L. & Haldar, A. (1995), "Safety evaluation of frames with PR connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 121, No. 7, pp. 1101-1109.

Hermite, C. (1848), em Stander, D. (1988), "Makers of modern mathematics: Charles Hermite". *Bull. Inst. Math. Appl.*, Vol. 24, No. 7-8, pp. 120-121.

Higgins, T.R. & outros (1971), *Plastic design in steel - A guide and commentary*, ASCE WRC, Manuals and reports on engineering practice, Vol. 41, Nova Iorque.

Kam, T.Y., Rossow, E.C. & Corotis, R.B. (1983), "Inelastic tangential stiffness for 2-D frames", *ASCE J. Struct. Division.*, Vol. 109, No. 11, pp. 2685-2697.

Kassimali, A. (1983), "Large deformation analysis of elastic-plastic frames", *ASCE J. Struct. Division.*, Vol. 109, No. 8, pp. 1869-1886.

Kemp, A.R. & Dekker, N.W. (1991), "Available rotation capacity in steel and composite beams", *The Structural Engineer*, Vol. 69, No. 5, pp. 88-94.

Kotlyar, N.P.E. (1996), "Formulas for beams with semi-rigid connections". *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 142-146.

Lavall, A.C.C. (1996), "*Uma formulação teórica consistente para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal*", Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos/SP.

Monforton, G.R. & Wu, T.S. (1963), "Matrix analysis of semi-rigidly connected steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 89, No. 6, pp. 13-42.

Moses, F. (1964), "Inelastic frame buckling", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 90, No. 6, pp. 105-121.

Navier, C.L.M.H. (1823), em El-Picon (1988), "*Navier and the introduction of suspension bridges in France construction history*", Vol. 4, pp. 21-34.

Neal, B.G. (1977), *The plastic methods of structural analysis*, 3.a Ed., Chapman and Hall, Londres, Reino Unido.

Nyssen, C. (1981), "An efficient and accurate iterative method allowing large incremental steps to solve elasto-plastic problems", *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 63-71.

Oran, C. (1973), "Tangent stiffness in plane frames", *ASCE J. Struct. Engin.*, Vol. 73, No 6, pp. 973-985.

Owen, D.R.J. & Hinton, E. (1980), *Finite elements in plasticity: theory and practice*, Pineridge Press Ltd, Swansea, Reino Unido.

Pimenta, P.M. (1986), "Aspectos da análise não-linear de estruturas reticuladas", *Anais do 7º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia*, São Carlos/SP.

Saje, M., Planinc, I., Turk, G. & Vratnari, P. (1996), "A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames", *Comp. Meth. Appl. Mechanics and Eng.*, Vol. 144, pp. 125-151.

Salmon, C.G. & Johnson, J.E. (1990), *Steel structures – Design and behavior – Emphasizing load and resistance factor design*, Harper Collins Publishers, 3.a Ed., Nova Iorque.

Silveira, R.A.M. (1995), "*Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato*", Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC/RJ, Rio de Janeiro/RJ.

Teh, L.H. & Clarke, M.J. (1999), "Plastic-zone analysis of 3D steel frames using beam elements", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 125, No. 11, pp. 1328-1337.

Terro, J.M. & Hamoush, S.A. (1996), “Inelastic analysis of sections subjected to axial force and bending moment”, *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 1, pp. 13-19.

Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N. (1970), *Theory of elasticity*, 3<sup>a</sup> Ed., McGraw-Hill, Nova Iorque.

Tin-Loi, F. & Misa, J.S. (1996), “Large displacement elasto-plastic analysis of semi-rigid steel frames”, *Int. Journal of Num. Meth. In Eng.*, Vol. 39, pp. 741-762.

Vasconcelos Filho, A. (2002), *Análise estrutural de edifícios altos*, Notas de aula, EEUFMG, Belo Horizonte/MG.

Vlassov, B.E. (1962), em Mori, D.D. (1988), “*Flexo-torção: Teorias de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordem, Automatização do cálculo*”, Dissertação de Mestrado, EESC/USP, São Carlos/SP.

Von Mises, R.E. (1913), em Hill, R. (1950), *The mathematical theory of plasticity*, Oxford, Clarendon Press.

WMI (2001), *Maple 7.0 Worksheet environment, numerical, calculations, algebraic computations, graphic, calculus, differential equations, linear algebra, finance and statistics, programming, software*, Waterloo Maple Inc. Star division GmbH.

Yang, Y.B. & Kuo, S.R. (1994), *Theory and analysis of nonlinear framed structures*, Prentice Hall / Simon & Schuster Parte. Ltd., Singapura.

Yu, C.H. & Shammugan, N.E. (1986), “Stability of frames with semi-rigid joints”, *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 639-648.

# 4

## ASPECTOS COMPUTACIONAIS

### SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
4.1	Introdução	196
4.2	Considerações gerais .....	198
4.3	Solução do problema não-linear	203
4.4	Aplicando a <i>Integração Iterativa (IIEA)</i> .....	216
4.5	Controle do comportamento da ligação	219
4.6	Referências .....	233

## 4.1 INTRODUÇÃO

Hoje, uma das partes mais complexas de um trabalho de pesquisa de engenharia, que aborda a área numérica, reside na transcrição de fórmulas e processos numa base computacional ou no desenvolvimento dessa base. Isso tem transformado a meta principal da engenharia estrutural, na utilização de programas de computadores ou no desenvolvimento dessas ferramentas; muitas vezes esquecendo-se de que não é esta a sua finalidade, nem do trabalho proposto e, tampouco essa é a parte mais importante.

Isso contrasta muito com o que se espera da própria engenharia, pois, de certa maneira, parece transformar o profissional e/ou analista estrutural em um usuário dos chamados “pacotes” (ANSYS, 2009; ADYNA, 2000; etc.), ou pior, num mero programador, capaz de produzir um código aberto, para um uso irrestrito e descontrolado (Peters *et al.*, 1998). Fica, assim, a impressão de que a engenharia estrutural se transformou no desenvolvimento de programação de computadores, e não na solução de problemas estruturais.

Por essa razão, nesta tese se mostram detalhes num nível mais alto, incluindo neste capítulo a compreensão de princípios e decisões principais que nortearam o trabalho e excluindo-se, de maneira geral, o código computacional, ou seja, esta tese não é um manual de utilização ou do desenvolvimento de programa computacional.

Mas as informações fornecidas são as suficientes para que se possa ter uma visão geral de como desenvolver essa tarefa, empregando os diversos recursos hoje existentes, nas mais diversas plataformas e linguagens disponíveis.

Desenvolveu-se um sistema de programas de computador modulares, baseado no sistema operacional “IBM PC DOS” (versão 6.3, 1993), denominado *PPLANAVX*, com a linguagem “TURBO-BASIC” (Miller, 1987). Esse sistema produziu excelentes resultados até 2007, tendo resolvido vários dos exemplos, para o EF rígido-rígido (que serão vistos no próximo capítulo) e para o EF rígido-rótula (capítulo 6).

Posteriormente, verificando-se as desvantagens de continuar utilizando as máquinas controladas com o sistema operacional anterior (“IBM PC DOS”, 1993), migrou-se para uma linguagem nova “POWER-BASIC” (2005) compatível com o sistema “WINDOWS” (versão XP, 2001), que é mais lenta em alguns pontos que a anterior e mais rápida em outros. O resultado final é que o tempo e a memória gastos permanecem sendo um dos desafios a vencer no futuro.



Na próxima seção, faz-se um apanhado geral das características desse sistema computacional, fornecendo uma descrição bastante sucinta da filosofia principal das partes, um fluxograma geral e alguns comentários complementares.

Posteriormente, trata-se da solução do problema não linear, que se relaciona à técnica incremental-iterativa. Nessa implementação, definiu-se um *fator de incremento* (um número que varia de 0 a 1, de forma automática ou com passos predefinidos) que está vinculado ao tipo de controle incremental selecionado pelo usuário (de carga, por exemplo). Neste ponto, então, surge outra contribuição deste trabalho, que é o chamado *Controle de Deslocamento Generalizado (CDG)*.

Na seção 4, abordam-se alguns aspectos computacionais que nascem da *Integração Iterativa do Esforço Axial (IIEA)*, apresentada no capítulo anterior e empregada nos exemplos desta tese. Alguns trechos relativos à *IIEA* estão mais compactos, sendo complementados por informações já apresentadas em trabalhos anteriores (Alvarenga, 2005 e 2008), que não serão repetidas aqui.

Na penúltima seção, aborda-se outra contribuição desta tese, que é o controle da ligação por meio da curva  $M-\theta$  e um diagrama de comportamento de semi-histerese. Além disso, estuda-se, também, a determinação da rotação da ligação, que é uma novidade e outro desafio a ser vencido na obtenção dos resultados apresentados no capítulo 7 do EF rígido-ligação.

As referencias do capítulo compõem a última seção.

## 4.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O sistema computacional *PPLANAVA* (*Pórtico PLano ANálise AVAnçada*) é um conjunto de programas independentes que trabalham numa sequência de tarefas (ou objetos), cujo resultado final é desenvolver uma análise inelástica de segunda ordem, incluindo:

- a. as imperfeições geométricas (a curvatura inicial, CI; e/ou o fora de prumo, FP);
- b. as imperfeições físicas (os diagramas tensão-deformação e as tensões residuais, TR); e agora,
- c. as ligações semirrígidas.

Os dois primeiros módulos (1 e 2) são de entradas de dados de geometria e cargas, respectivamente. No módulo 3 definem-se as hipóteses a serem analisadas. No quarto módulo (4), inicializam-se os dados nas matrizes, como tensões residuais, ligações, e prepara-se a etapa de solução de cada hipótese. Após a conclusão desta parte, o problema entra na chamada fase de solução.

A fase de solução corresponde ao processo incremental-iterativo, em que ciclicamente são chamados os módulos, que desempenham as seguintes tarefas:

- a. módulo 0: define o vetor de cargas de referência, usado na análise naquele instante, podendo ser um vetor de acréscimo de carga ou até o de carga fixa (no início do processo), bem como o vetor de carga acumulada;
- b. módulo 5: obtém as diversas matrizes de rigidez (MR) dos EFs [6×6], para qualquer tipo de EF: normal, com rótula ou com ligação, soma as MRE ( $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{ep} + \mathbf{K}_{ga} + \mathbf{K}_h$ ) e faz a rotação de eixos do sistema local para o global;
- c. módulo 6: faz a montagem da matriz de rigidez global ( $\mathbf{S}$ );
- d. módulo 7: resolve o sistema de equações lineares por redução de Gauss (Mayer, 1973) de forma otimizada, com um ou dois vetores de cargas simultaneamente, obtendo os deslocamentos correspondentes;
- e. módulo D: define o vetor de carga final, o vetor de deslocamentos final e o fator de carga, com base nos resultados anteriores, quando se emprega o fator de incremento para deslocamento selecionado ou generalizado;
- f. módulo 8Ap: obtém a nova configuração, determina as deformações e tensões nas fatias ao longo de todo o modelo;
- g. módulo 8Bp: desenvolve a *IIEA*, quando ocorre a plasticidade no EF;

- h. módulo 8Cp: controla a ligação, ajustando o comportamento do EF à curva  $M-\theta$  selecionada;
- i. módulo 9: realiza a checagem da convergência, avaliando o resíduo de forças, momentos, deslocamentos e rotações, em relação ao estado anterior, determinando se obteve um novo estado aproximado de equilíbrio;
- j. módulo P: faz a saída geral dos resultados, por passo ou por iteração; e
- k. módulo C: permite reiniciar de algum ponto anterior, refinando o fator de incremento, quando já ocorreu o colapso com passos maiores que 0,1%.

Esse procedimento é representado esquematicamente pelo fluxograma das Figs. 4.1 e 4.2, nas quais se destacam três grandes *laços* (“loops”):

- a. das hipóteses – que ocorre quando se tem num mesmo trabalho mais de uma hipótese de análise (pouco usado);
- b. dos incrementos – que podem ser de carga, deslocamento escolhido ou generalizado; e
- c. das iterações – que depende do grau de não linearidade do problema, do critério de convergência adotado, bem como, da proximidade de um ponto limite de carga, ou limite de deslocamento ou, ainda, de um ponto de bifurcação.

Desenvolveu-se um sistema computacional por causa do volume de informação manipulada (e não por um objetivo puramente modular ou uma visão de macro programa). A filosofia de qualquer programa estrutural pode ser expandida a outras aplicações, mas, neste caso, isso seria bastante ineficiente, visto que a quantidade de informações envolvidas no processo com fatias é muito elevada e exige um espaço de armazenamento próprio, o que difere das concepções adotadas nos programas que avaliam a plasticidade de forma concentrada (Chen & Toma, 1994).

As tarefas que envolvem as fatias englobam:

- a. a geração da MRE (propriedades geométricas);
- b. a determinação do campo de deformações (acréscimos de tensões);
- c. o estabelecimento da plasticidade com o caminhamento no diagrama tensão-deformação (escoamento, deformações plásticas, estado de carga plástica);
- d. a obtenção dos esforços internos (integração de tensões);

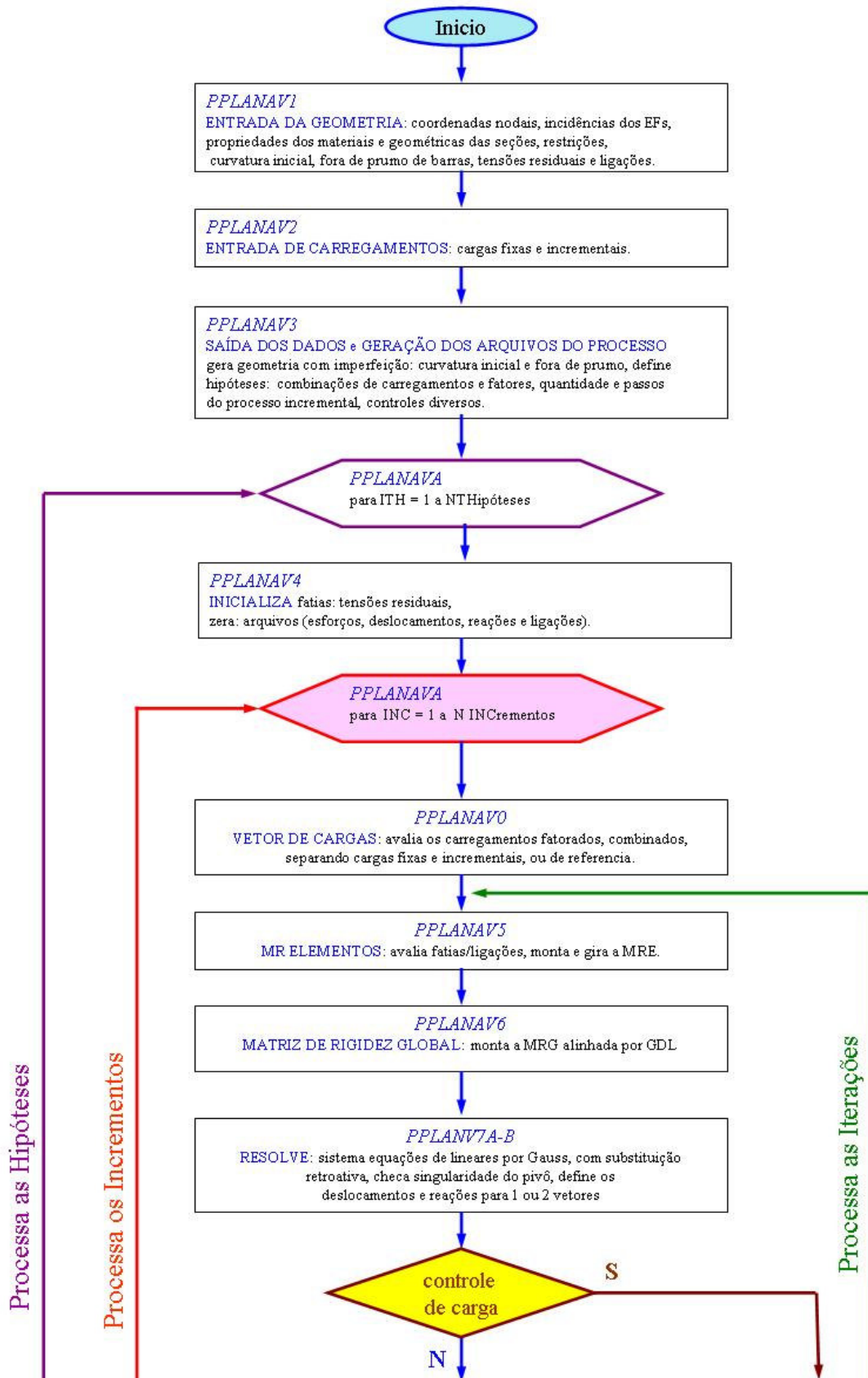


Figura 4.1 Fluxograma (parte I)

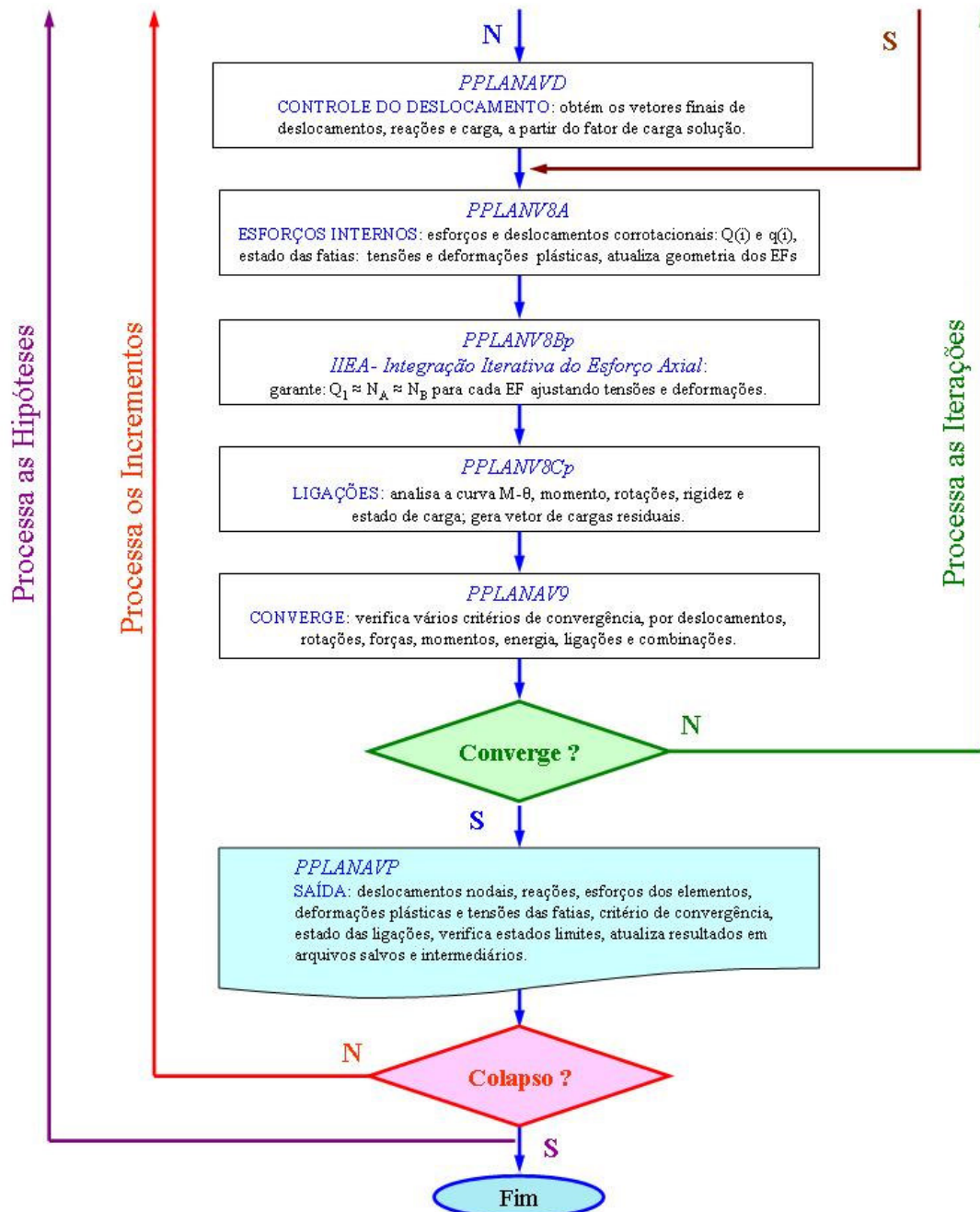


Figura 4.2 Fluxograma (parte II)

- e. os ajustes da *IIEA*;
- f. os ajustes de propriedades geométricas elastoplásticas; e
- g. a interferência da ligação no comportamento das fatias (como será visto na penúltima seção deste capítulo).

Na filosofia de desenvolvimento de *PPLANAVA*, considera-se o uso dos recursos disponíveis na máquina, maximizando a parcela do armazenamento com arquivos em

disco, quando o tradicional é que se façam tais armazenamentos na memória. Isso torna o processamento mais lento, porém se ganha ao manter a informação necessária em todas as etapas da solução (como no caso de se refazerem os trabalhos com menor perda).

Essa arquitetura permite a parada para análise e o seu reinício posterior. São aspectos que aparentemente não têm sentido para modelos pequenos, mas que se tornam interessantes quando o processo eletrônico se torna caro (consumo de tempo de refazer um trabalho, por exemplo). Isso permite, também, uma facilidade de diagnóstico de erros (de implementação, formulação ou numéricos). Todavia, há muito debate em torno de soluções e arquiteturas de sistemas computacionais, o que se torna novamente uma questão de alternativas pessoais e foge ao objetivo com este trabalho.

A entrada de dados e o comportamento dos modelos, com base no conceito da *Análise Avançada*, em que se têm os chamados *Aspectos Importantes* [efeitos geométricos da curvatura inicial (CI), fora de prumo (FP) e físico das tensões residuais (TR)], já foram mostrados (Alvarenga, 2005) e o programa não teve alterações significativas nesta parte.

A introdução da ligação semirrígida exigiu a modificação de uma parte da entrada de dados para permitir algumas facilidades de uso, além da inclusão de um arquivo temporário de informações relativo aos EFs com ligação.

O novo módulo de ligações (*PPLANV8Cp*) do sistema é uma ferramenta ainda em desenvolvimento, mesmo após a conclusão deste trabalho. Vários pontos, como o efeito da plasticidade e do axial, não puderam ser plenamente avaliados, seja pela carência de exemplos correspondentes, seja por não ter conseguido reproduzir os existentes na literatura. Além disso, há controvérsias nas formas em que são apresentadas essas curvas  $M-\theta$  em alguns trabalhos, daí a dúvida se o ângulo de giro da viga está incluído. Pode-se adicionar que nem sempre as publicações trazem todos os dados necessários (por exemplo, por limites editoriais como espaço), ou não se tem acesso às obras completas (no caso de teses, ensaios de laboratório), nos quais mesmo um contato com o pesquisador não permite acesso a essas informações. Sem as informações completas e adequadas, reduzem-se os meios de avaliar as discrepâncias, já constatadas em outros casos e propor ajustes ou melhorias. São etapas naturais a vencer no futuro, que serão abordadas no capítulo 9.

### 4.3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO LINEAR

Como se constata pelo fluxograma nas Figs. 4.1 e 4.2, o processo de solução do problema não linear, tratado nesta tese, engloba três considerações básicas:

- a. a avaliação das hipóteses;
- b. o processo incremental; e
- c. o processo iterativo.

A avaliação das hipóteses tem relação direta com a definição de carregamentos e como as cargas são inseridas e tratadas no modelo estrutural pelo programa computacional. O processo incremental-iterativo constitui a forma de solução geral para uma análise com não linearidade física e geométrica, porque as incógnitas principais – os deslocamentos – estão também relacionadas às matrizes constitutivas e geométricas, como foi indicado antes.

Lembrando que a análise é incremental, uma fração  $\Delta \mathbf{F}$  do carregamento nodal equivalente é aplicada em cada passo. Então, forma-se o sistema de equações lineares no instante  $(\omega)$ , característico dos métodos inelásticos de segunda ordem, indicado por:

$$\mathbf{S}^{\omega} \Delta \mathbf{u}^{\omega} = \Delta \mathbf{F}^{\omega} = \Delta \lambda \mathbf{F}^0 \quad \mathbf{u}^{\omega} = \mathbf{u}^{\omega-1} + \Delta \mathbf{u}^{\omega} \quad \mathbf{F}^{\omega} = \mathbf{F}^{\omega-1} + \Delta \mathbf{F}^{\omega} = \lambda^{\omega} \mathbf{F}^0 \quad (4.1a-c)$$

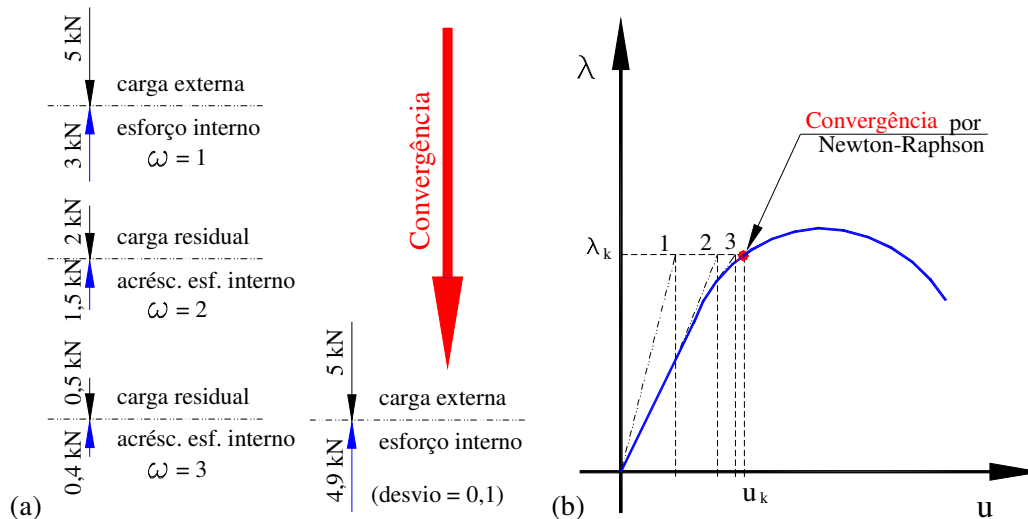
Os deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ) e as forças ( $\mathbf{F}$ ) são atualizados em cada etapa, bem como a rigidez ( $\mathbf{S}$ ) que relaciona o seu incremento ( $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \mathbf{F}$ ) em cada instante  $(\omega)$ .

O sistema definido pela Eq. 4.1(a) é resolvido por redução de Gauss, com substituição retroativa (Owen & Hinton, 1980). Determinam-se, assim, os acréscimos de deslocamentos  $\Delta \mathbf{u}^{\omega}$  e as reações  $\mathbf{R}^{\omega} = \mathbf{R}^{\omega-1} + \Delta \mathbf{R}^{\omega}$ . Com os deslocamentos atuais, obtêm-se as deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}^{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\omega-1} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\omega}$ ) das fatias de cada nó do EF; com base nelas, as tensões correspondentes ( $\boldsymbol{\sigma}^{\omega} = \boldsymbol{\sigma}^{\omega-1} + \Delta \boldsymbol{\sigma}^{\omega}$ ), e integrando essas tensões, os novos esforços internos ( $\mathbf{F}_I^{\omega}$ ). Veja-se que o vetor completo de cargas de referência é  $\mathbf{F}^0$ .

Na sequência, os esforços desequilibrados do sistema estrutural são obtidos pela diferença entre a parcela de cargas aplicadas  $\mathbf{F}^{\omega} = \lambda^{\omega} \mathbf{F}^0$  (externas) e os esforços internos nodais  $\mathbf{F}_I^{\omega}$ , como ilustrado na Fig. 4.3(a), ou seja:

$$\Delta \mathbf{F}^{\omega} = \mathbf{F}^{\omega} - \mathbf{F}_I^{\omega} = \lambda^{\omega} \mathbf{F}^0 - \mathbf{F}_I^{\omega} \quad (4.2)$$

sendo  $\lambda$  o fator de carga, que pode ser fixo ou definido em cada instante  $(\omega)$ .



**Figura 4.3 Solução do problema não linear:**  
 (a) definir cargas residuais; (b) correção da rigidez iterativamente.

Essas forças desequilibradas ou residuais ( $\Delta F$ ) são, então, eliminadas aplicando-se o processo iterativo, conforme ilustrado na Fig. 4.3(b), que apresenta a trajetória de equilíbrio de uma análise. Constrói-se tal trajetória com um deslocamento escolhido ( $u$ ), associado a um fator de carga ( $\lambda$ ) e procura-se atingir o ponto da curva ( $u_k, \lambda_k$ ) com as iterações  $\omega = 1, 2, 3$ , etc. Como visto, ( $\omega$ ) é simplesmente um instante em qualquer iteração de qualquer passo, sendo que no início do passo e na figura, por simplicidade, tomou-se o valor  $\omega = 1$ .

A matriz de rigidez global (MRG), que representa a tangente ou gradiente (define a direção de crescimento), é atualizada em várias etapas chamadas de ciclos iterativos, e o ponto de solução (vetor de deslocamentos) vai se aproximando do ponto da curva, na qual se obtém um valor próximo do equilíbrio.

Quando esse ciclo de iterações, que reavalia todas as grandezas, tende a resultados finais muito próximos entre duas iterações seguidas, acréscimos de outras iterações podem ser desprezados. Assim, considera-se atingido um ponto da trajetória de equilíbrio, iniciando-se um novo passo ou incremento.

Essa técnica de solução incremental-iterativa constitui o método de Newton-Raphson (Simpson, 1740) que, em geral, consegue uma convergência quadrática na direção da solução, como também pode apontar para divergência, em proximidade de pontos críticos, e ficar estacionário em pontos de bifurcação.

Alguns detalhes dessas considerações básicas do processo de solução serão abordados nas subseções seguintes.



### 4.3.1 AVALIAÇÃO DAS HIPÓTESES

No programa computacional *PPLANAVA*, todos os carregamentos são constituídos por cargas nodais, ou por cargas aplicadas nas barras, que são convertidas a nodais equivalentes, referenciadas em conjunto. Assim, na realidade, forma-se um vetor de cargas com valores associados a cada grau de liberdade (GDL) da estrutura.

Durante a leitura de dados, as cargas são definidas pelo GDL associado ( $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ ), como as forças [horizontal ( $H_j$ ) e vertical ( $V_j$ )] e o momento ( $M_j$ ), atuantes no nó ( $j$ ). Essas cargas são identificadas como fixas ou incrementais, *a priori*, e são armazenadas para o processamento posterior.

Cada hipótese representa a aplicação desses carregamentos, que podem ser combinados (majorados por fatores e somados). As cargas fixas de qualquer carregamento da hipótese, com seus fatores, são aplicadas de uma só vez, em um único passo (chamado zero, 0), seguido de iterações até a convergência. Todas as cargas incrementais dos carregamentos, incluindo seus fatores, são aplicadas, posteriormente, seguindo o processo incremental selecionado na hipótese. Esse processo utiliza um *fator de incremento* (número variando de 0 a 100%) cujo crescimento segue um conjunto de passos chamado *histórico*, que pode ser:

- a. predeterminado pelo usuário; ou
- b. automático (gerado pelo próprio programa computacional).

O *histórico* compõe-se de até 20 intervalos com fatores de incremento e sua repetição no intervalo. Por exemplo, considere-se o *histórico*: (5×10%, 10×1%). Isso significa que há 2 intervalos consecutivos de incrementos: no primeiro, aplicam-se 5 passos de 10% e no segundo, 10 passos de 1%. Imaginando-se que antes da realização desses 2 intervalos, o fator de incremento seja 20%, serão, então, executados 15 passos, com valores: 30%, 40%, 50%, 60%, 70% no primeiro intervalo e 10 passos de 1%, saindo de 71% e chegando a 80%, no final do segundo. Isso permite passar rapidamente por pontos mais fáceis (região elástica) e reduzir ou controlar melhor os passos próximos às regiões críticas ou pontos limites (Alvarenga & Silveira, 2006c).

É necessário determinar qual o fator de início do escoamento, pois com a plasticidade, em geral, o tamanho dos passos deve ser reduzido. Às vezes, isso é trabalhoso e requer o processo incremental em carga, para fazer-se uma série de tentativas, nas quais os passos são reduzidos de 10%, para 5%, 1% ou menos.

O *PPLANAVA* possui um controle interno para detectar o início do escoamento (com precisão de até 0,1%) e prosseguir, a partir daí, com passos de 1% até o colapso, automaticamente. Esse processo automático – antes era a versão *ELAST* – foi descrito em Alvarenga (2008). Posteriormente, desenvolveu-se o chamado módulo *PLAST*, no qual, depois de encontrado o colapso da estrutura, o processamento retorna ao fator de incremento -3%, e realiza 2 intervalos, com os passos: (3×0,5% e 20×0,1%), chegando-se novamente ao colapso, agora com a precisão de 0,1% no incremento.

Esses processos automáticos são muito práticos quando se conhece o provável valor de colapso. Gabaritam-se as cargas e os fatores de incremento aplicados às cargas, de forma que o colapso aconteça com o fator entre 60% a 100%. Assim, os passos com 1%, na parte com plasticidade, não são pequenos nem grandes demais. Análises estruturais, incluindo o EF com ligação, nos quais o passo de carga é superior a 5%, podem apresentar desvios maiores, prejudicando os resultados finais. Para esses casos, os passos do fator incremental automático, no controle de cargas e regime elástico, padronizados antes em (10% e 5%), foram reduzidos para (4% e 2%), respectivamente.

Outra complicação que pode surgir é ocorrer o escoamento quando na aplicação das cargas ditas fixas, em um só passo, ou mesmo, o modelo conter ligações não lineares. Significa que não se pode adotar um passo apenas, ou seja, é necessário um processo incremental para a carga fixa também. Para isso, tem-se a chamada hipótese acoplada. Então, as cargas fixas são introduzidas de forma incremental numa hipótese que não provoca o colapso, até se atingir 100% do fator incremental em controle de carga. Ao término dessa hipótese, pode-se selecionar a condição acoplada, quando o estado atual da estrutura corresponderá à carga fixa da hipótese seguinte, que prossegue com o desenvolvimento da condição incremental desejada e permite um resultado numérico mais coerente.

Para concluir esta seção é preciso indicar as condições em que *PPLANAVA* determina o colapso e encerra o processo de análise da hipótese.

Ocorre a parada no processo de solução incremental-iterativo quando:

- a. a área efetiva, ou a inércia efetiva, ficar próxima de zero ( $< 0,1\%$  do valor original), ou seja, todas as fatias da seção estão plásticas ( $\sigma \geq \sigma_y$ ), formando o mecanismo de colapso plástico;
- b. o elemento da diagonal principal da MRG (pivô) com valor nulo ou negativo,

- c. ultrapassar o número de iterações prescrito (mínimo 100), sendo paralisado a pedido do operador (processo interrompido sem convergir);
- d. a deformação plástica da fatia exceder ao máximo prescrito (máximo  $\varepsilon_p = 4\%$ );
- e. a plasticidade do EF ficar descontrolada nas suas extremidades (*IIEA*);
- f. não atender ao critério de resistência da seção (von Mises, 1913), acontece quando o cisalhamento da área elástica remanescente da alma da seção ( $A_{we}$ ) é ultrapassado pelo esforço cortante no EF, ou seja:

$$V_d > V_{de} = 0,577 \sigma_y A_{we} \quad (4.3)$$

A nova etapa de ligações exige conhecer o seu momento, sua rotação, sua rigidez e, ainda, controlar o processo determinando o término quando ocorrer:

- a. o módulo da rotação da ligação superior à rotação última ( $|\theta_r| > \theta_u$ );
- b. o módulo do momento da ligação superior ao momento último ( $|M_r| > M_u$ );
- c. a rigidez da ligação nula ou negativa ( $R_k \leq 0$ );
- d. o descarregamento que atinja o momento de sinal oposto, superior ao inicial antes do descarregamento ( $|M_{rdes}| > M_{rcar}$ );
- e. ponto do processo ( $M_r, \theta_r$ ) em conflito com os da curva  $M-\theta$ , ou tabela de dados, que impossibilite a continuação. Isso é detectado também pelo controle de convergência da ligação (momento do EF no nó com ligação); e
- f. superar o estado limite previsto pelo método das componentes (ou outro) quando este for adotado. Essa etapa ainda não foi implementada. Consiste em um conjunto de dados ( $M_r, \theta_r$ ) que são checados e informa-se na saída quais eventos correspondentes ocorreram naquela iteração. Hoje, esse controle é empregado para cada ligação flexível ( $\eta > 0,4$ ) e verifica quando o ângulo de contato ( $\theta_{cn}$ ) foi superado [ver subseções 4.5.1 e 2.2.3 (Fig. 2.8)].

No caso das ligações de base, foi previsto, ainda, o término quando:

- a. ocorrer tensão de compressão no concreto que supera o limite  $\sigma_{ck}$ ;
- b. encontrar-se esforço de tração ( $T_b$ ) ou corte excessivo ( $Q_b$ ) no chumbador; e
- c. ser superado o estado limite previsto pelo diagrama de solicitações da base.

Essa parte relativa às bases também ainda não foi completamente desenvolvida, sendo objetivo de pesquisa posterior (ver capítulo 9).

### 4.3.2 PROCESSO INCREMENTAL

Na seção anterior, embora o fator de incremento ( $h$ ) tenha sido apresentado apenas como um número que cresce de 0 a 1, não se definiu a que esse incremento está associado. Esse enfoque é um conceito novo adotado em *PPLANAVA* que permite aplicar esse fator de diversas formas.

O processo incremental está associado à solução de equações não lineares  $f(x) = 0$  pelo método de Newton-Raphson (Simpson, 1740). Assim, quando se analisa a curva carga-deslocamento de uma estrutura, parece natural que esse incremento seja em carga ( $\lambda=h$ ), ou um acréscimo em fator de carga ( $\Delta\lambda=dh$ ), que multiplica o vetor de carregamento da estrutura ( $\mathbf{F}^0$ ), como mostrado na Fig. 4.3(b).

Entretanto, como é conhecido, o *controle de carga* (CC) falha ao obter a trajetória descendente, como evidenciado na Fig. 4.4(a). Note-se que, em geral, necessita-se reduzir muito os passos ( $\Delta\lambda$ ) no topo da trajetória, e mesmo assim sobrevém a MRG singular ou um custo elevado para a convergência (Alvarenga & Silveira, 2006c).

Além disso, em alguns casos, com o controle apenas da carga consegue-se atingir o ramo pós-limite de acréscimo, pontualmente, pois ocorre a singularidade da MRG, e este último ponto corresponde ao chamado *salto dinâmico* (“dynamic jump”), como ilustrado na Fig. 4.4(b). Essas situações são comuns na versão *PPLANAVX*.

Outra possibilidade de incremento é o de uma componente selecionada do deslocamento (GDL) ou de referência. Agora o fator de incremento ( $h$ ) será aplicado nesse chamado *deslocamento selecionado* ( $u_k$ ),  $k$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{u}$ , para o qual se arbitra um valor máximo ( $u_{k\text{máx}}$ ) na hipótese correspondente ( $u_k = h \cdot u_{k\text{máx}}$ ).

Em geral, esse controle é empregado após alguns modelos prévios serem calculados com controle de carga, até para abalizar melhor qual o GDL selecionado, os valores dos intervalos de incremento e o máximo arbitrado. Definido o incremento do deslocamento selecionado ( $\Delta u_k =$  incremento da  $k$ -ésima componente de  $\mathbf{u}$ ), pode-se determinar o acréscimo de carga ( $\Delta\lambda$ ) e a correção do fator de carga da iteração ( $\delta\lambda$ ) pelas expressões (Argyris, 1964):

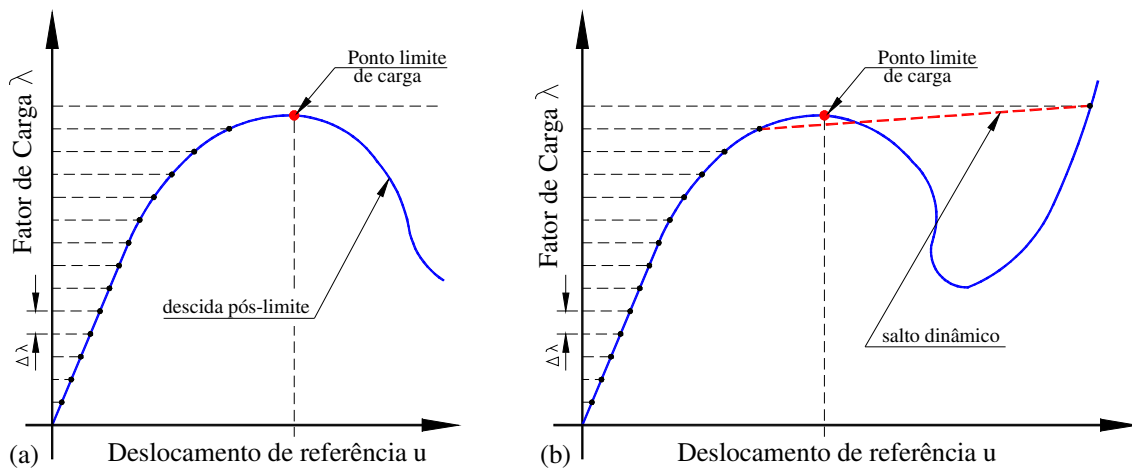
$$\Delta\lambda = \Delta u_k / u_{0k} \quad \delta u_k = \delta u_{gk} + \delta\lambda u_{0k} = 0 \quad \therefore \delta\lambda = -\delta u_{gk} / u_{0k} \quad (4.4a-c)$$

nas quais  $u_{0k}$  é a componente  $k$  dos deslocamentos relativos ao vetor de carga de referência ( $\mathbf{F}^0$ ) e  $\delta u_{gk}$  é a componente  $k$  dos deslocamentos relativos ao vetor das cargas residuais ( $\mathbf{g} = \Delta\mathbf{F}^0$ ) daquela iteração. Note-se que acréscimos da correção iterativa não modificam o valor final da componente selecionada  $u_k$  naquele passo. Por isso, definem-

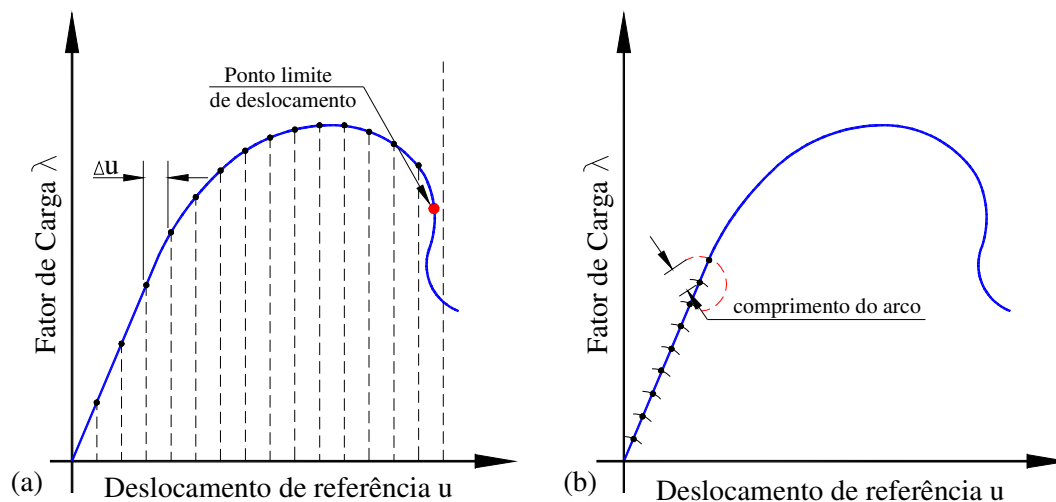
se ajustes do fator de carga ( $\delta\lambda$ ) pelo acréscimo do deslocamento selecionado originado das cargas residuais ( $\delta u_{gk}$ ).

O *controle do deslocamento* (CD), todavia, não é adequado aos problemas fortemente não lineares que apresentam pontos limites de deslocamentos, como na Fig. 4.5(a). Isso já foi verificado em alguns arcos (Xu & Mirmiran, 1997), portais em L com cargas excêntricas (Galvão *et al.*, 2000) e treliças espaciais (Pinheiro, 2003).

Bergan *et al.* (1978) propuseram o método de controle do trabalho com o chamado “parâmetro de rigidez corrente” (CSP), que controla indiretamente o fator de carga. Posteriormente, surgiu a estratégia do “comprimento de arco” (Ramm, 1981; Crisfield, 1981), representada de forma simplificada na Fig. 4.5(b), estudada por Silveira *et al.* (1999) e Rocha (2000).



**Figura 4.4** Desvantagens do controle de carga:  
(a) falha em atingir carga limite; (b) possibilidade do salto dinâmico.



**Figura 4.5** Outros controles:  
(a) deslocamento selecionado; (b) comprimento de arco.

Uma nova área de pesquisa aparece com o desenvolvimento de estratégias para superar os pontos limites (de carga, de deslocamento, críticos) e encontrar as diversas trajetórias de equilíbrio. Os trabalhos de Crisfield (1991), Kouhia (1992), Fafard & Massicotte (1993) e Zhiliang (1994) são relevantes contribuições sobre o assunto. Nas técnicas desenvolvidas por esses pesquisadores, propõem-se obter uma solução predita, ou tentativa inicial, e, em seguida, o processo iterativo de correção é desenvolvido, atendendo a uma condição de restrição adicional (Yang & Kuo, 1994).

Em geral, todos os processos que acompanham a trajetória descendente pós-limite enfrentam as seguintes situações:

- a. a instabilidade numérica próxima a pontos limites de carga ou deslocamento;
- b. o ajuste do fator de carga, que tende a acompanhar as variações de rigidez da estrutura; e
- c. a capacidade de se determinar a direção de carregamento e da convergência, impedindo as chamadas *armadilhas numéricas* (pontos que se sucedem no processo iterativo, formando um ciclo ininterrupto, sem que o programa computacional detecte ou consiga ultrapassar).

Nesse instante, apresenta-se outra contribuição com esta tese, que é chamado aqui de *controle de deslocamento generalizado* (CDG). Essa técnica também foi implementada computacionalmente e, da mesma forma que se pode empregar o fator de incremento ( $h$ ) para o controle de carga ou para o controle de um deslocamento selecionado, pode-se aplicá-lo ao chamado deslocamento generalizado.

O controle do deslocamento generalizado não é uma ideia original, visto que outros pesquisadores já propuseram algo similar. Yang & Shieh (1990), por exemplo, apresentaram um controle desse tipo empregando o chamado “parâmetro de rigidez generalizada” (GSP), que tem como vantagens:

- a. estabilidade numérica no limite de carga e trajetória descendente;
- b. a variação de rigidez não linear é obtida pelo GSP (Bergan *et al.*, 1978); e
- c. a troca de sinal do GSP permite conhecer a direção de incremento (+) ou do decremento (–) da carga, em conformidade com o estado da análise e o ponto da trajetória de equilíbrio procurado.

O *controle de deslocamento generalizado* proposto, não possui todas as vantagens listadas, devendo ser considerado uma contribuição mais simples. Pode-se reescrever a Eq. 4.1(b), considerando o vetor dos deslocamentos anterior ( $\mathbf{u}_A$ ), e o vetor dos deslocamentos que se deseja obter ( $\mathbf{u}$ ), como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_A + \Delta\mathbf{u} \quad (4.5)$$

Como em cada passo incremental, supõe-se que uma parcela da carga  $\Delta\lambda$  seja equilibrada se o vetor de deslocamentos de referência  $\mathbf{u}_0$  é obtido por

$$\mathbf{S}^0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}^0 \quad \therefore \Delta\mathbf{u} \approx \Delta\lambda \mathbf{u}_0 \quad (4.6a-b)$$

em que  $\mathbf{F}^0$  é o vetor de cargas de referência.

Pela definição da grandeza deslocamento generalizado ( $s$ ) como o módulo do vetor  $\mathbf{u}$ , ou seja,  $s = |\mathbf{u}|$ , as seguintes grandezas podem ser determinadas:

$$s^2 = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u} \quad s_A^2 = \mathbf{u}_A^T \cdot \mathbf{u}_A \quad s_0^2 = \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{u}_0 \quad (4.7a-c)$$

Inserindo Eq. 4.5 na Eq. 4.7(a), se encontra a seguinte relação:

$$s^2 = (\mathbf{u}_A + \Delta\mathbf{u})^T \cdot (\mathbf{u}_A + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{u}_A^T \cdot \mathbf{u}_A + 2 \mathbf{u}_A^T \cdot \Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^T \cdot \Delta\mathbf{u} \quad (4.8)$$

Substituindo as Eqs. 4.6(b) e 4.7(b-c), na Eq. 4.8 chega-se a equação:

$$s^2 = s_A^2 + 2\Delta\lambda \mathbf{u}_A^T \cdot \mathbf{u}_0 + \Delta\lambda^2 s_0^2 \quad (4.9)$$

Reordenando os termos, obtém-se uma equação do segundo grau em  $\Delta\lambda$ :

$$s_0^2 \Delta\lambda^2 + 2P_{A0} \Delta\lambda - (s^2 - s_A^2) = 0 \quad \therefore a_s \Delta\lambda^2 + 2b_s \Delta\lambda - c_s = 0 \quad (4.10a-b)$$

sendo os coeficientes:

$$a_s = s_0^2 \quad b_s = P_{A0} = \mathbf{u}_A^T \cdot \mathbf{u}_0 \quad c_s = (s^2 - s_A^2) \quad (4.11a-c)$$

Assim, surgem as seguintes possibilidades de solução para  $\Delta\lambda$ :

a. o vetor  $\mathbf{u}$  está crescendo, logo:  $\Delta s > 0$ :

ou seja,  $s > s_A$ , nessa condição tem-se que:

$$c_s = (s^2 - s_A^2) = (s + s_A)(s - s_A) = (s + s_A)\Delta s \Rightarrow c_s > 0 \quad (4.12)$$

Portanto, observa-se que também  $b_s = P_{A0} = \mathbf{u}_A^T \cdot \mathbf{u}_0 > 0$ , encontrando-se:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta s}{s_0} = -\frac{b_s}{a_s} + \sqrt{\left(\frac{b_s}{a_s}\right)^2 + \frac{c_s}{a_s}} > 0 \quad (4.13)$$

Note-se que a outra raiz é a de retorno, e mais, que os vetores  $\mathbf{u}_A$  e  $\mathbf{u}_0$  possuem a mesma direção de crescimento (o ângulo entre os vetores é menor que  $\pi/2$ );

b. o vetor  $\mathbf{u}$  está decrescendo, logo:  $\Delta s < 0$ :

chega-se a mesma Eq. (4.13), porém, agora  $s < s_A$ , então  $c_s < 0$ , o valor absoluto do resultado do radical é menor que  $(b_s/a_s)$ , então  $\Delta\lambda < 0$ . Ou seja, os vetores  $\mathbf{u}_A$  e  $\mathbf{u}_0$  apontam para direções opostas (o ângulo entre eles supera  $\pi/2$ ); e

c. o valor  $P_{A0} = 0$ :

quando os vetores  $\mathbf{u}_A$  e  $\mathbf{u}_0$  são ortogonais (perpendiculares) e indicam a mudança de crescimento para decrescimento, ou o contrário. Fazendo  $(b_s/a_s) = 0$ , na Eq. 4.13, resulta na expressão:

$$\Delta\lambda = \pm \sqrt{\frac{c_s}{a_s}} = \pm \sqrt{\frac{(s^2 - s_A^2)}{s_0^2}} = \pm \sqrt{\frac{(s + s_A)}{s_0} \frac{\Delta s}{s_0}} \quad (4.14)$$

na qual o sinal ( $\pm$ ) de  $\Delta\lambda$  pode ser associado ao sinal de  $\Delta s$ . Quando  $\Delta s > 0$ , se está num ponto de máximo local, e o vetor  $\mathbf{u}_A$  indica a direção para o decréscimo. Já se  $\Delta s < 0$ , se está num ponto de mínimo local (onde  $s < s_A$ ) e o vetor  $\mathbf{u}_A$  aponta para a direção do novo acréscimo de  $s$ .

Note-se que já ocorreram duas coincidências:

- primeiramente, chega-se a uma equação quadrática, similar à que aparece nos estudos com comprimento de arco (Crisfield, 1981); e
- o estudo para escolher a raiz solução, abandonando a solução de retorno, segue o mesmo conceito do sinal de um produto escalar ( $P_{A0} = \mathbf{u}_A^T \cdot \mathbf{u}_0$ ).

Na figura 4.6(a) procura-se ilustrar o significado para a equação do segundo grau obtida, como uma parábola de eixo  $\lambda$ , que representa uma restrição. Já na Figura 4.6(b), as três situações de comportamento da solução para  $\Delta\lambda$  são caracterizadas, observando o crescimento ( $\Delta\lambda > 0$ ), o ponto limite de carga ( $\Delta\lambda = 0$ ) e a trajetória do *deslizamento descendente* [“snap-through”, com  $\Delta\lambda < 0$ , (Galambos, 1982)].

Pode-se ainda simplificar o termo  $(c_s)$  da equação da parábola considerando que:

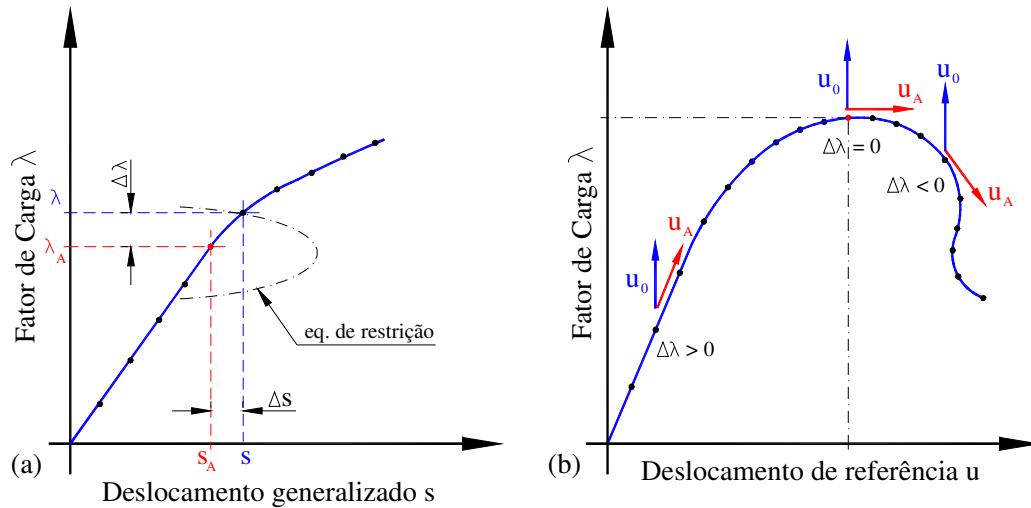
$$s^2 = (s_A + \Delta s)^2 = s_A^2 + 2s_A \Delta s + \Delta s^2 \quad (4.15)$$

Substituindo a Eq. 4.15 na Eq. 4.11(c), acha-se uma nova expressão para  $(c_s)$ :

$$c_s = (2s_A + \Delta s)\Delta s \quad (4.16)$$

Como em geral (em valor absoluto)  $|s_A| > |\Delta s|$ , entende-se que  $\Delta s$  é que define o sinal de  $(c_s)$  e as mesmas considerações anteriores permanecem válidas.





**Figura 4.6 Controle de deslocamento generalizado:**

(a) solução predita; (b) significado de  $P_{A0}$ .

Observe-se que no ponto limite de carga a Eq. 4.14 pode ser resolvida empregando-se a Eq. 4.16, obtendo-se:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta s}{s_0} \sqrt{\left(\frac{2s_A}{\Delta s} + 1\right)} \quad (4.17)$$

que indica uma dependência linear de  $\Delta\lambda$  com a variação de  $\Delta s/s_0$  em relação ao módulo do vetor de referência e não linear com a variação  $\Delta s/s_A$  em relação ao módulo do vetor do estado anterior. Ou seja, próximo ao ponto limite de carga, o sinal de  $\Delta s$  determina o sinal de  $\Delta\lambda$ : se  $\Delta s$  cresce, ainda se está antes do ponto limite e  $\lambda$  ainda cresce; porém, quando  $\Delta s$  muda de sinal, já se ultrapassou o topo local da trajetória.

Conhecendo-se o acréscimo do fator de carga  $\Delta\lambda$ , a partir de  $\Delta s$  preestabelecido, o vetor acréscimo de deslocamento  $\Delta\mathbf{u}$  passa a ser uma modulação do vetor  $\mathbf{u}_0$ , conforme a Eq. 4.6(b). Tem-se, assim, a chamada solução predita ou inicial.

Considerando agora a fase chamada corretiva, isto é, o processo de iteração, impõe-se uma restrição adicional, que nesse caso é manter constante o deslocamento generalizado ( $s$ ) até se atingir a convergência. Pode-se expressar essa condição partindo da Eq. 4.7(a), mediante a diferenciação, chegando à relação:

$$2s ds = 2\mathbf{u}^T \cdot d\mathbf{u} \quad \therefore ds = \frac{\mathbf{u}^T \cdot d\mathbf{u}}{s} = 0 \quad (4.18a-b)$$

Como  $s \neq 0$ , a Eq. 4.18(b) pode ser atendida de duas formas:

a. o produto escalar ( $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{du}$ ) é nulo:

supondo que o vetor  $\mathbf{du} \neq \mathbf{0}$ , então os vetores se tornaram ortogonais, o que caracteriza um ponto limite de carga, que será:

i. máximo local, quando  $\mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{du} - \delta\mathbf{u}) > 0$  e  $\mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{du} + \delta\mathbf{u}) < 0$ ;

ii. mínimo local, se ao contrário,  $\mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{du} - \delta\mathbf{u}) < 0$  e  $\mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{du} + \delta\mathbf{u}) > 0$ ; sendo  $\delta\mathbf{u}$  o acréscimo do vetor  $\mathbf{du}$ , calculado um pouco antes (-) ou um pouco depois (+) do ponto; e

b. o módulo do vetor  $\mathbf{du}$  tende arbitrariamente a 0, ou  $\mathbf{du} \rightarrow \mathbf{0}$ :

que é a condição mais importante. Lembre-se que ao longo do processo iterativo, o módulo do vetor  $\mathbf{u}$  não se modifica ( $s = \text{constante}$ ), logo o módulo do vetor correção também não será alterado. Define-se o vetor de correção iterativa por:

$$\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}_g + \delta\lambda\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

Ou seja, a soma dos deslocamentos ( $\delta\mathbf{u}_g$ ) causados pelo vetor de cargas residuais ( $\mathbf{g} = \Delta\mathbf{F}$ ) e a variação do fator de carga ( $\delta\lambda$ ) nos deslocamentos de referencia ( $\mathbf{u}_0$ ) é zero. Pode-se, então, determinar a correção do fator de carga (considerando que  $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$ ) como:

$$\delta\lambda = -\frac{\delta\mathbf{u}_g^T \cdot \mathbf{u}_0}{\mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{u}_0} = -\frac{\delta\mathbf{u}_g^T \cdot \mathbf{u}_0}{s_0^2} \quad (4.20)$$

que corresponde à mesma equação produzida por Chan (1988), ao desenvolver a estratégia que utiliza a norma mínima dos deslocamentos residuais. Note-se que, no caso deste trabalho, o objetivo foi manter  $ds = 0$ , e isso também ocorre com a avaliação dos mínimos quadrados, adotada por esse pesquisador.

Esse controle incremental combina as ideias de Fujji *et al.* (1992) ao empregar o módulo de  $\mathbf{u}$  ( $s$ ), Widjaja (1998), ao obter-se  $\mathbf{u}_0$  considerando a matriz  $\mathbf{S}^0$  atualizada e substitui o proposto antes (Alvarenga, 2008), que é inadequado.

### 4.3.3 PROCESSO ITERATIVO

O ciclo iterativo ocorre em qualquer passo incremental e é encerrado quando determinada tolerância é atingida, estabelecida pelo critério de convergência.

Como decorrência desse ciclo, o vetor de forças residuais tende arbitrariamente ao vetor  $\mathbf{0}$  ou a ter um módulo muito pequeno. O critério de convergência funciona como uma medida para esse resíduo. Em *PPLANAVA*, porém, as cargas residuais são sempre

reintroduzidas nos passos seguintes, de forma a minimizar a parcela acumulada de desvios que poderiam aparecer decorrentes desses resíduos, somados ao longo de todos os ciclos (isso traz uma pequena melhoria no resultado numérico).

Existem diversos critérios de convergência. As versões de *PPLANAVX* anteriores a 2007 empregavam o controle de convergência pela norma euclidiana mínima:

- a. dos esforços residuais;
- b. das forças e momentos residuais, em separado;
- c. dos incrementos de deslocamentos;
- d. dos incrementos de deslocamentos e rotações, separadamente; e
- e. do trabalho de deformação.

O critério (d.) da norma mínima dos incrementos dos deslocamentos e rotações, separadamente, recomendado por Kassimali (1983), foi o mais adotado nos exemplos com o EF rígido-rígido do próximo capítulo e também no EF com rótula do capítulo 6.

No caso dos modelos incluindo o EF rígido-ligação, verificou-se que o emprego de apenas uma modalidade de controle (ou somente de esforços, ou somente de deslocamentos) permitia a produção de resultados inconsistentes (falsa convergência), por isso, foram desenvolvidos dois novos critérios conjugados:

- f. com as opções (a.) e (c.) anteriores; e
- g. com as opções (b.) e (d.) anteriores.

O critério (g.) foi adotado para esses casos. O critério (e) serve como abalizador de resultados. Adicionalmente, as diferenças entre o momento de flexão avaliado no nó com ligação do EF e o obtido pela curva  $M-\theta$  foram empregados como parâmetros de final de processo. Essa é mais uma novidade, decorrente deste trabalho, que merece cuidado especial, visto que não se tem ainda pleno domínio dessa ferramenta, de forma a explicar sem maiores ressaltos as razões dos possíveis desvios e diferenças numéricas encontradas em alguns casos. Deve-se indicar que nas várias referências citadas no capítulo 2, por exemplo, não se informa nada sobre essa questão, tampouco sobre os critérios de convergência adotados.

A tolerância adotada em todos os resultados obtidos foi fixada em 0,1%, que é recomendada por alguns pesquisadores (Clarke, 1994) e se mostra rigorosa.

O programa computacional *PPLANAVA* possui as mesmas considerações de controles de iteração da versão anterior (Alvarenga, 2008) e não será repetida aqui.

Outras exigências operacionais surgem e serão discutidas com a nova implementação da *Integração Iterativa dos Esforços Axiais (IIEA)*, que é abordada na próxima seção.

#### 4.4 APLICANDO A INTEGRAÇÃO ITERATIVA (IIEA)

No capítulo anterior, foram apresentados os fundamentos da *IIEA*, mas resta a questão de como controlar isso no processamento, pois até agora se considerou que apenas uma seção tem zona plástica. Ocorre que ambas as seções do EF podem ter zonas plásticas, por exemplo, e cabe definir qual o valor de  $dN$  a ser corrigido, em cada caso, por cada nó, para obter-se o esforço axial  $Q_1$  adequado.

Para bem entender esse comportamento, na Fig. 4.7 (Alvarenga & Silveira, 2008c) reproduz-se o tratamento adotado desde 2007 nas versões de *PPLANAVX*, para se definir o valor da correção da *IIEA* a partir de  $Q_1$ . As primeiras versões da *IIEA* tomavam a seção com maior zona plástica, ou que havia se escoado naquele instante, como a que receberia toda a correção (diferença  $\Delta N$ ) de axiais entre os nós.

Posteriormente, percebeu-se que essas diferenças poderiam ser geradas em ambos os nós (casos de dupla ZP, por exemplo), desenvolvendo os casos da Fig. 4.7 (com os estados e alguns exemplos ilustrativos), mas ainda tratando a correção por meio da diferença entre nós ( $\Delta N = N_A - N_B$ ).

A modificação feita em *PPLANAVA* reside na avaliação da variação do esforço axial  $dN_j$  calculada com base em  $\bar{N}_j$ , que é definido pela expressão:

$$\bar{N}_j = N_j^{\omega-1} + E \sum_{ie}^{n \text{ fat } e} \delta \varepsilon_{mie} dA_{ie} + E_t \sum_{ip}^{n \text{ fat } p} \delta \varepsilon_{mip} dA_{ip} \quad (4.21)$$

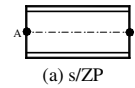
na qual as parcelas de esforços gerados pela deformação média ( $\delta \varepsilon_m$ ) nas fatias elásticas e plásticas, considerando os respectivos módulos ( $D$ ) são somadas ao esforço axial do instante anterior ( $\omega-1$ ) do nó ( $J$ ). Ou seja, determina-se o esforço axial previsto na formulação, como se não houvesse a plasticidade naquele instante e o valor a ser ajustado pela *IIEA* provém da diferença:

$$dN_j = \bar{N}_j - N_j \quad (4.22)$$

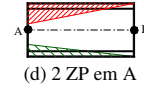
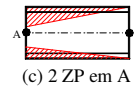
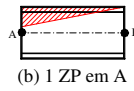
**Descrição do estado:**

**Diagramas ilustrativos (exemplos):**

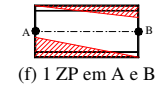
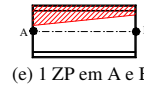
- Ambos os nós elásticos:  $Q_1 = N_A = N_B$



- Nó j está elástico:  $Q_1 = N_j$   
(outro nó com 1 ou 2 ZPs)



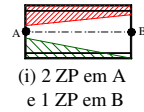
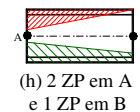
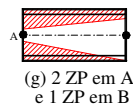
- Ambos os nós têm 1 ZP:  
ao plastificar ocorrem ( $\Delta N_A, \Delta N_B$ )



$$\bar{N}_A = N_A + \Delta N_A \quad \bar{N}_B = N_B + \Delta N_B \quad Q_1 = \max(\bar{N}_A, \bar{N}_B)$$

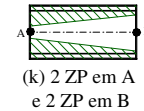
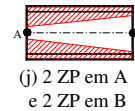
- Nó j tem 1 ZP e o outro 2 ZPs:  
(usar o que tem 1 ZP)

$$\bar{N}_j = N_j + \Delta N_j \quad Q_1 = \bar{N}_j$$



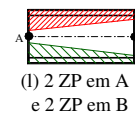
- Ambos os nós com 2 ZPs de mesmo sinal:  
(2 ZPs de compressão ou 2 ZPs de tração)

$$Q_1 = \max(\bar{N}_A, \bar{N}_B)$$

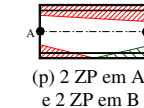
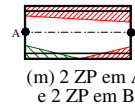


- Ambos os nós com 2 ZPs de sinais opostos:

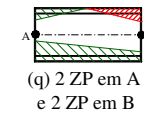
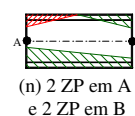
$$\text{Média: } Q_1 = \frac{1}{2}(\bar{N}_A + \bar{N}_B)$$



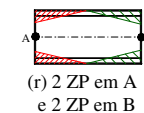
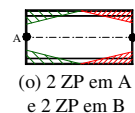
- Casos mistos com 2 ZPs de mesmo sinal em 1 nó e de sinais opostos em outro nó



Deve-se considerar  $Q_1$  como o valor do nó j com 2 ZPs do mesmo sinal.

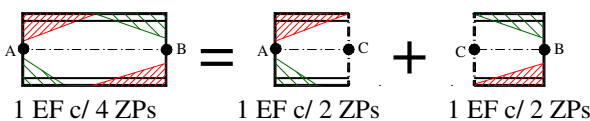


- Casos inconsistentes (ou erros)  
(2 ZPs de axiais de sinais diferentes)



- Casos especiais:

subdividir o EF em 2 EFs novos:



Convenção:

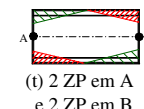
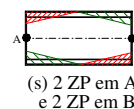


Figura 4.7 Determinar  $Q_1$  nos EFs com diversos tipos de zona plástica (ZP).

entre tal valor mais provável ( $\bar{N}$ ), e o que foi encontrado após a parcela da plasticidade que se manifestou naquele instante ( $\omega$ ), quando se acharam os esforços internos.

Ocorre que o valor ( $dN$ ) pode ser de crescimento das deformações ou, o que é pior, de redução. No primeiro caso, para corrigir as deformações nas fatias emprega-se a Eq. 3.105. Entretanto, no caso da redução do esforço, a estimativa de  $dN$  calculada com a área efetiva elástica naquele instante (a mesma Eq. 3.105) não é adequada. Há uma tendência, quando se faz a redução de  $N$ , de que os valores de  $|dN|$  encontrados a cada iteração cresçam, principalmente, quando a plasticidade na seção começa a ficar elevada e o  $y_{CGPl}$  da seção cresce. Dessa forma, a variação ( $dN$ ) cresce numericamente [por exemplo, numa iteração para (+), na outra para (-)] e o ciclo iterativo da *IIEA* diverge.

Para contornar essa divergência, determinou-se que após sair do módulo *PPLAN8Ap*, quando já se tem um apanhado inicial das consequências das deformações em virtude dos deslocamentos do instante ( $\omega$ ) atual, todos os nós dos EFs onde ocorre plasticidade são checados. Os valores de  $Q_1$  de cada EF mais prováveis são determinados como  $\bar{N}_j$ .

Para isso, a parcela  $d\sigma$ , que se perde com a plasticidade, é recuperada empregando um valor  $\Delta N$  para atingir  $Q_1$ . Uma vez definido  $Q_1$ , são ajustadas as tensões das fatias, de forma a se obter – na precisão adotada (0,1%) – os valores das integrais de  $(\sigma dA)$  iguais a  $Q_1$ , em ambos os nós (as últimas versões de *PPLANAVA* adotaram 0,01% para manter a saída com valores iguais).

A correção dessas tensões é realizada pelo método de bissecção de Newton, após duas tentativas de ajuste direto. Quando, em valor absoluto, ocorre acréscimo de  $N$ , esse procedimento é suficiente (mais rápido) e, no decréscimo, garante-se chegar numa solução. Mesmo assim, ainda existem situações nas quais o processo numérico não consegue corrigir, quando próximo ao ponto limite e com elevada plasticidade.

Alguns aspectos computacionais complementares da *IIEA* podem ser vistos em Alvarenga (2008), um fluxograma e alguns detalhes adicionais em Alvarenga & Silveira (2009b). Em geral, a *IIEA* é empregada nas primeiras iterações de cada passo, sendo bastante eficiente. Quando isso não ocorre, é sinal da aproximação de um ponto crítico.

Deve-se indicar uma informação complementar, relativa à plasticidade com 2 ZPs, que é o *efeito da excentricidade* ( $y_{CGP}$ ). Virtualmente, à medida que as ZPs crescem, há a tendência de surgir acréscimos de esforços ( $dN_j$ ) não provocados pela plasticidade.

A causa disso é a excentricidade, como se mostra nas Figs. 3.15(c-d). Como o esforço axial é equilibrado por ambas as seções do EF, então essa tendência de crescimento em um nó, isolado, tem de ser ajustada no nó oposto (onde tende a ser menor). Para essas condições, também podem surgir variações do axial no EF. No caso dessas diferenças não geradas pelo acréscimo da plasticidade, deve-se usar a média dos valores corrigidos (ou prováveis):  $Q_1 = (\bar{N}_1 + \bar{N}_2)/2$ .

A seção seguinte aborda outro aspecto computacional importante relacionado à ligação.

#### 4.5 CONTROLE DO COMPORTAMENTO DA LIGAÇÃO

Simular o comportamento da ligação adequadamente é uma tarefa que requer os maiores cuidados. Entende-se aqui por controle não apenas a introdução do modelo com seus dados e a sua curva, mas a caracterização do seu estado de carga, os momentos e rigidez coerentes, a definição da rotação da ligação, a avaliação do comportamento do EF e a interdependência de resultados.

Algumas dessas atividades são desconhecidas nas formulações já existentes, pois, por meio de equações algébricas, retira-se artificialmente o giro próprio da ligação do EF (Sekulovic & Salatic, 2001). No caso da zona plástica, isso não é possível, visto que os momentos decorrem de integrações de tensões que envolvem plasticidade, tensões residuais, excentricidade, enquanto a rotação da ligação é avaliada pela formulação.

Dispõe-se, como resultado do processo incremental-iterativo em dado instante, um ponto  $(M_{EF}, \theta_r)$  que não faz parte necessariamente da curva  $M-\theta$  fornecida  $(M_r, \theta_r)$ . Surge, então, a dúvida de como se proceder.

Para responder a essa questão de forma mais concisa, esta seção é subdividida nas seguintes partes:

- a. curvas de ligação introduzidas;
- b. comportamento geral de uma ligação – diagrama com semi-histerese;
- c. rotações da ligação; e
- d. ligações não lineares.

#### 4.5.1 CURVAS DE LIGAÇÃO INTRODUZIDAS

Ao longo dos estudos realizados para esta tese, foi conhecida uma série de curvas  $M-\theta$  de ligações disponíveis, com várias fórmulas, métodos, parâmetros, etc. Tal diversidade permitiu chegar ao consenso de que não teria sentido colocar-se no sistema computacional todas essas possibilidades.

Assim, foram desenvolvidos vários módulos menores, que permitem obter as curvas  $M-\theta$  e, em seguida, introduzi-las no sistema computacional como uma tabela de dados. Isso possibilitou maior flexibilidade e a não interferência do estudo das diversas possibilidades de ligações no sistema *PPLANAVA* desenvolvido.

Mesmo assim, alguns modelos de ligações, por serem tradicionais e terem maior emprego nos exemplos da literatura mundial, foram introduzidos diretamente no sistema computacional *PPLANAVA*. São eles:

- a. os lineares, bilineares e trilineares;
- b. as curvas tabeladas  $M-\theta$  e  $R_k-\theta$ ;
- c. o polinomial de Frye & Morris (1975);
- d. o potencial de Richard & Abbott (1975) bem como a sua versão simplificada (Kishi & Chen, 1987); e
- e. a curva proposta deste trabalho, o modelo *RBL*.

Essas mesmas curvas têm programas computacionais independentes de geração fora do sistema computacional *PPLANAVA*. Para outras curvas/modelos, como o exponencial de Lui & Chen (1988), o modificado de Kishi & Chen (1990), alguns diferentes como os de Yee & Melchers (1986), Attiogbe & Morris (1991) com a curva de Ramberg & Osgood (1943), também foram desenvolvidos programas menores.

Realizou-se uma versão do SCDB – “Steel Connection Data Bank”, modernizando o programa computacional desenvolvido por Kishi & Chen (1990) (Chen *et al.*, 1996), que agora gera tabelas também com unidades do SI (kNm, mm e radianos) e pode-se fazer algum estudo maior desses dados. Também alguns programas computacionais abordando o método das componentes e outras ferramentas, como o JMRC – “Joint Moment Rotation Curves” de Faella *et al.* (2000) estão operacionais, para uso futuro.

Na parte de ligações com a base, houve maiores carências: a falta de trabalhos publicados e/ou os com poucas informações (artigos incompletos e/ou não acessíveis).



Por outro lado, a curva *RBL* teve, também, uma série de estudos de viabilidade e foram desenvolvidos alguns programas computacionais menores para avaliar os seus parâmetros, fazer comparações das aproximações, etc.

Todas as curvas de ligação simuladas em *PPLANAVA* empregam os mesmos parâmetros com que foram definidas, unidades coerentes com o programa já desenvolvido e requerem limites básicos: momento último  $M_u$ , rotação última  $\theta_u$ , rigidez inicial ou elástica  $R_{ki}$ . Para as ligações que alcançam rotações superiores a 20 mrad e que sejam flexíveis ( $\eta > 0,4$ ), verifica-se o ângulo de rotação não supera o de contato ( $\theta_{cn}$ ), caso em que se encerra também a análise (ver subseções 2.2.3 e 4.3.1, Fig. 2.9). Esse ângulo de contato é estimado por:

$$\theta_{cn} \approx \tan \theta_{cn} = 25/d [\text{mm}] \quad (4.23)$$

considerando um recuo da viga em 12,5 mm, e que o giro da ligação será centrado em relação à  $(d/2)$ , sendo  $(d)$  a altura da seção da viga.

#### 4.5.2 COMPORTAMENTO GERAL DE UMA LIGAÇÃO

Da mesma forma que se definiu um comportamento do material por meio do seu diagrama tensão-deformação na subseção 3.2.2 (Challa & Hall, 1994), deve-se estabelecer o comportamento da ligação pelo seu diagrama  $M-\theta$ .

Assim, acompanhando a Fig. 4.8(a), a ligação está em carga quando um acréscimo de rotação ( $d\theta$ ) faz com que tanto o momento quanto a sua rigidez se modifique, segundo a curva de dados  $M-\theta$ , do ponto C para o D, por exemplo.

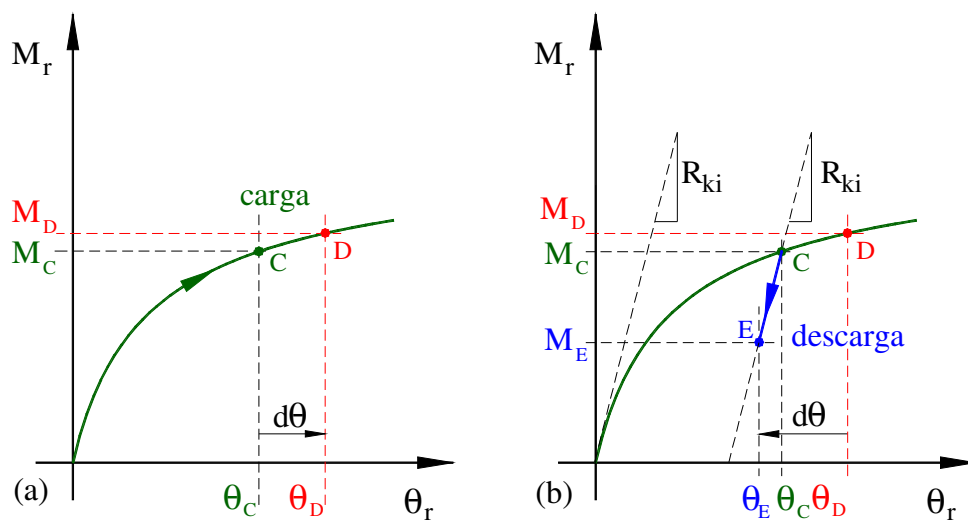
Enquanto não findar o ciclo iterativo, tanto ocorrem acréscimos  $d\theta$  da mesma direção, como variações contrárias, do ponto D para o C, seguindo a forma da curva.

Como ilustrado na Fig. 4.8(b), depois de obtido um ponto de convergência C, tem-se um carregamento até o ponto D e, posteriormente, um acréscimo de rotação no sentido contrário, que supera o intervalo  $d\theta_{C-D} (= \theta_C - \theta_D)$ , a ligação entra em processo de descarregamento elástico atingindo o ponto E, segundo a reta de rigidez inicial ( $R_{ki}$ ), que passa por C. Enquanto não há convergência, é possível qualquer movimentação entre os pontos C-D-E.

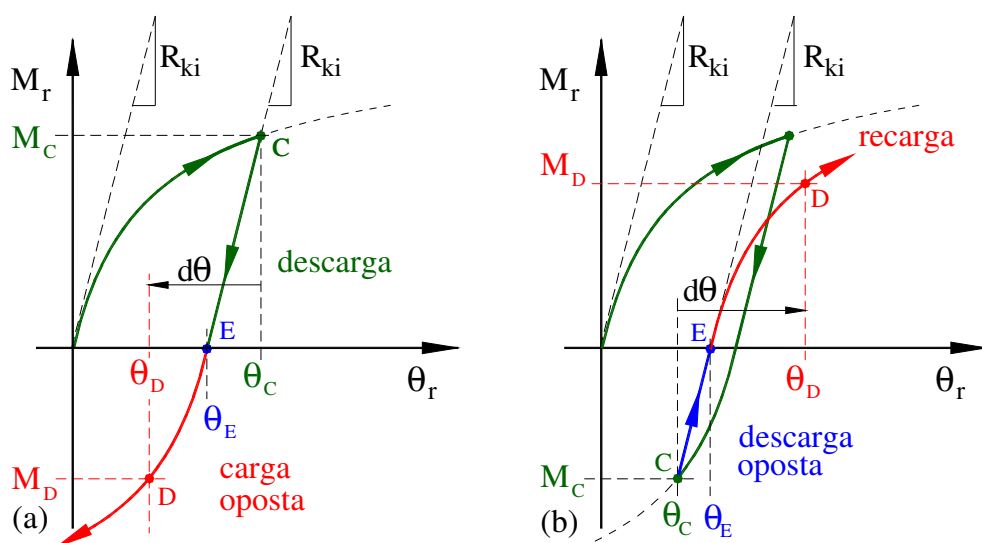
Mais complicado se torna quando o valor de  $d\theta$ , do caso anterior, é tal que o momento retorna a zero, no novo ponto E, seguindo a linha de descarregamento de rigidez inicial ( $R_{ki}$ ), como ilustrado na Fig. 4.9(a). A partir daí nasce uma cópia da curva  $M-\theta$  original, porém traçada em sentido contrário.

Lembre-se que por serem etapas da análise, só se consegue chegar à convergência com duas iterações consecutivas quando os pontos estão muito próximos. Portanto, dependendo do valor da rotação ( $d\theta$ ), tanto pode acontecer essa caminhada como pode suceder o seu retorno (sentido inverso).

Suponha-se que haja a convergência na situação anterior, ponto D da Fig. 4.9(a), e mais uma vez ocorra acréscimo de carga ( $d\theta$ ), no sentido original. Toda a sequência mostrada na Fig. 4.9(b) ocorrerá: descarregamento elástico, segundo a reta de rigidez inicial até o ponto onde  $M = 0$  (novo ponto E) bem como a reentrada numa curva de carga, paralela à inicial, agora nascendo em E, e atingindo o novo ponto D.



**Figura 4.8 Comportamento da ligação:**  
(a) acréscimo de carga; (b) descarregamento elástico.



**Figura 4.9 Comportamento da ligação (após reversão):**  
(a) carga no sentido oposto; (b) retorno à carga na direção original.

Esse tipo de representação e descrição do comportamento é comum nos problemas dinâmicos (Popov & Pinkney, 1969), mas também não pode ser desprezado num problema estático, como também não foi o diagrama tensão-deformação. A razão principal está na própria natureza dos carregamentos combinados e na formação das ZPs, que podem modificar as solicitações das ligações, como se verá.

Anteriormente, admitiu-se o comportamento independente no encruamento do material. Agora, de forma similar, considera-se que a ligação possui a curva  $M-\theta$  oposta independentemente do estado de deformação anterior (Stelmack *et al.*, 1986; Chan & Chui, 2000). Isso impede o emprego de ligações que sejam assimétricas em relação ao eixo da viga, como as mostradas nas Figs. 2.4(d, h, j & p), visto que as curvas  $M-\theta$  de carga e carga-oposta serão diferentes por causa da sua própria geometria.

Mas, mesmo no caso dinâmico, verifica-se que o trabalho de deformação da ligação causa modificações na histerese, que não são consideradas aqui. Por isso denominou-se diagrama de semi-histerese. Observe-se que os momentos representados no diagrama consideram os sinais positivos nos eixos, embora o mesmo seja válido para sinais negativos de  $M-\theta$  na condição inicial (diagrama oposto).

#### **4.5.3 ROTAÇÃO DA LIGAÇÃO**

Ao se obterem os esforços solicitantes (momentos) pela integração das tensões, esses valores devem sujeitar-se ao momento máximo que a ligação suporta para aquela condição (rotação). Ou seja, é a rotação da ligação que permite conhecer-lhe o comportamento, definindo a rigidez e o momento a ser absorvido. Por conseguinte, é necessário, antes de qualquer procedimento, definir qual é a rotação da ligação.

Aqui já nasce outra questão, relacionada ao conceito de rotação da ligação que pode estar conjugada a da viga ou ser independente (própria da ligação). Neste trabalho considerou-se a rotação como própria da ligação ( $\alpha_B$ ), supondo-se que a deformação dela já incorpora o efeito de painel, a excentricidade, etc., porém não considerando a plasticidade na viga. Esse é um ponto de controvérsia que merece o estudo cauteloso e que será reavaliado posteriormente.

Um dos grandes desafios encontrados no desenvolvimento das análises de validação dessa formulação e que, assim, também atinge o seu emprego principal, refere-se a esse parâmetro-chave, que é a definição do giro próprio da ligação  $\theta_r$ , ou seja, a sua avaliação.

Constata-se que em outras formulações o momento do EF e da ligação possui um único valor, e que é diretamente ajustado. Isso não ocorre aqui.

Partindo unicamente da formulação desenvolvida (Eq. 4.37), chegou-se à relação:

$$d\theta_r = \left(1 + \frac{q_1}{L_0}\right) \eta (dq_A + 2 dq_B) \quad (4.24)$$

sendo  $dq_A$  e  $dq_B$  os acréscimos de rotações naturais do nó oposto (A) e do nó com ligação (B). Deve-se esclarecer que o primeiro termo surge da diferencial de ( $v_0''$ ) e considera-se o efeito do alongamento do EF. Lembrando da definição de  $\eta$  pela Eq. 2.7(a) e de  $\xi$  pela Eq. 3.38, reescreve-se a Eq. 4.24 da seguinte forma:

$$d\theta_r = \frac{dM_B}{R_k} \approx \xi \left( \frac{EI_v}{R_k L_v} \right) \frac{(2dq_A + 4 dq_B)}{(1 + 4g)} \quad (4.25)$$

em que o termo ( $g$ ) comparece diretamente pela Eq. 2.3, as rotações ( $dq_A$ ,  $dq_B$ ) têm seus multiplicadores elásticos e o denominador ( $1 + 4g$ ) é o efeito da ligação.

Essa expressão é claramente válida no regime elástico, mas o mesmo já não acontece no regime inelástico. E a coisa se torna mais complexa ainda para as ligações não lineares.

Em primeiro lugar, a ação da *IIEA* ajustando o esforço axial do EF provoca uma modificação nos momentos integrados nos nós [ $\sum \sigma \cdot y \cdot (y - y_{CGP}) dA$ ], pois aparece um momento artificial, pelo aparecimento da excentricidade do  $y_{CGP}$  ( $\neq 0$ ), multiplicada pelo acréscimo do axial. Dessa forma, nem todo o acréscimo de momento elástico, que seria avaliado pelas rotações naturais ( $dq_A$  e  $dq_B$ ), resultam corretos no caso da existência da plasticidade. Isso significa que nem toda a rotação natural  $dq_j$  interfere no giro próprio da ligação  $d\theta_r$ .

Por outro lado, à medida que a plasticidade toma a seção, os coeficientes 2 e 4 que multiplicam, respectivamente, essas rotações devem ser corrigidos ou ajustados. De forma similar ao indicado por Chen *et al.* (1996), para a formulação com rótulas plásticas refinadas, adotado também na subseção 3.4.4, pode-se reescrever o momento em função das grandezas com plasticidade, empregando:

$$dM_B = 2D_{3ABm} dq_A + (3D_{3B} + D_{3ABm}) dq_B \quad (4.26)$$

em que  $D_{3A}$  e  $D_{3B}$  são as rigidezes reais das seções dos nós (A, B) do EF com plasticidade, sendo a *rigidez transmitida*  $D_{3ABm}$  definida pela Eq. 3.92(a).

Definindo-se ( $\zeta_j = D_{3j} / EI_z$ ) o fator de degradação do nó  $j$  (A ou B), provocada pela sua plasticidade, ou seja,  $\zeta_B = D_{3B} / EI_z$  (rigidez relativa do nó com ligação em relação à original) e  $\zeta_A = D_{3A} / EI_z$  (à do nó oposto), a Eq. 4.26 transforma-se em:

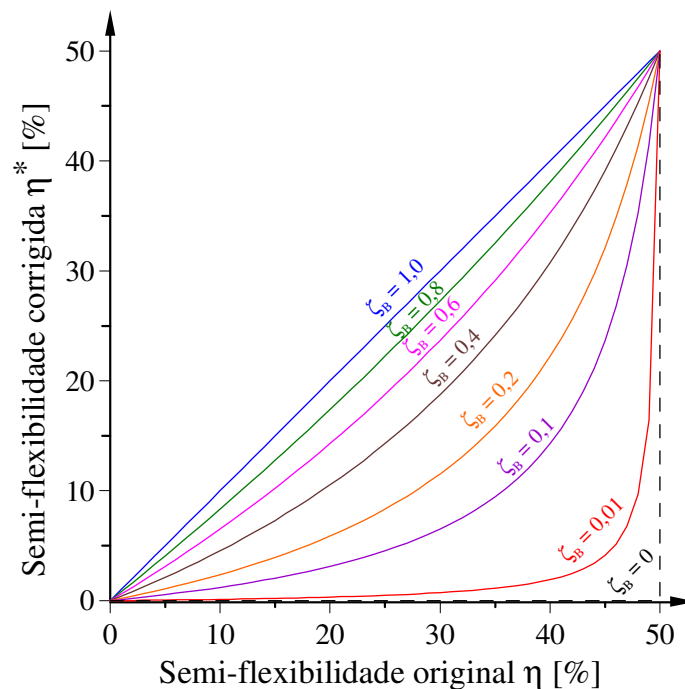
$$dM_B = D_{3B} [ 2\zeta_A dq_A + (3 + \zeta_A) dq_B ] \quad (4.27)$$

Supondo que houve, também, uma plasticidade na seção que tem a ligação, isto é, na qual se avaliam os parâmetros ( $g$ ) e ( $\eta$ ), ao determinar-se a relação de decréscimo da rigidez nessa condição, pode-se obter um valor de  $\eta^*$  corrigido:

$$\eta^* = \frac{\zeta_B \eta}{[1 - 2\eta(1 - \zeta_B)]} \quad (4.28)$$

Visualiza-se o efeito de  $\zeta_B$  em  $\eta^*$  obtido a partir de  $\eta$ , observando-se algumas propriedades simples (constatadas na Fig. 4.10):

- quando ( $\zeta_B = 1$ ), têm-se ( $\eta^* = \eta$ ), não há correção (regime elástico);
- se ( $\zeta_B = 0$ ), ocorre o colapso e o parâmetro ( $\eta^* = 0$ ) é pouco significativo;
- se ( $\eta = 0$ ) então ( $\eta^* = 0$ ), ou seja, só há rotação no nó do EF (não ocorre rotação na ligação); e
- se ( $\eta = 0,5$ ) logo ( $\eta^* = 0,5$ ), independentemente de  $\zeta_B$  (pode ocorrer qualquer plasticidade no nó oposto, que não se modifica a condição de rótula no nó B, lembrando-se que a sua inércia se reduz, entretanto continua simétrica).



**Figura 4.10** Correção de  $\eta$  dada a plasticidade no nó com a ligação.

Essas propriedades podem ser explicadas pelo gráfico de correções de  $\eta$  dada a plasticidade do nó com a ligação, mostrado na Fig. 4.10. Para o caso ( $\zeta_B = 0,01$ ), a curva segue quase paralela ao eixo horizontal, dando um pulo quando ( $\zeta_B = 0,5$ ) em que ( $\eta = 0,5$ ). O valor ( $\zeta_B = 0$ ) seria um ponto de descontinuidade, no qual todos os valores de  $\eta^*$  seriam também 0, exceto para o ponto ( $\eta = 0,5$ ) conforme a alínea (d.) anterior.

Com essas definições, a Eq. 4.24 pode, então, ser modificada para levar em conta a plasticidade dos nós do EF, com a expressão:

$$d\theta_r = \xi \eta^* \left[ \zeta_A dq_A + \frac{(3 + \zeta_A)}{2} dq_B \right] \quad (4.29)$$

Nessa equação, fazendo-se ( $\zeta_A = 1$ ), chega-se aos mesmos coeficientes (1 e 2) do estado elástico. Todavia, se a seção do lado A torna-se uma rótula plástica ( $D_{3A} = 0$ ), então ( $\zeta_A = 0$ ) e a rotação da ligação será ( $3 \cdot dq_B$ ), rotação da seção no caso da viga com rótula na extremidade A [lembrando o termo (2g) de  $\eta^*$ ].

As relações anteriores levam em conta o que ocorre com a rigidez das seções, porém os próprios momentos nas extremidades são ajustados e modificados pela *IIEA*, de forma não linear. Assim, para se obter boa aproximação, definiu-se o parâmetro ( $\chi_j$ ) como a relação entre os acréscimos de momentos plásticos ( $dM_{jp}$ ) e os elásticos ( $dM_{je}$ ) na iteração (no nó j, A ou B), ou seja:

$$\chi_j = \frac{dM_{jp}}{dM_{je}} \quad (4.30)$$

Assim, chegou-se à primeira expressão para avaliar o ângulo de giro da ligação, chamado, genericamente, de método *XX*:

$$d\theta_r = \xi \eta^* \left[ \zeta_A \chi_A dq_A + \frac{(3 + \zeta_A)}{2} \chi_B dq_B \right] \quad (4.31)$$

Em diversos casos, constataram-se valores de  $dM_{jp}$  maiores ou com sinal oposto a  $dM_{je}$ , resultando em parâmetros ( $\chi_j \geq 1$ ) ou ( $\chi_j < 0$ ), o que parece não ter qualquer significado. Uma vez que essa equação é um pouco empírica, essa definição de ( $\chi_j$ ) não foi muito adequada em alguns problemas analisados, não se podendo saber *a priori*, com certeza, a validade dessa correção e os eventuais exageros cometidos quando  $dM_{je}$  fica pequeno. (Obs. na programação,  $\eta$  já é calculado diretamente como  $\eta^*$ ).

Para definir os valores dessas rotações chamadas de efetivas ( $dq_A^*$ ,  $dq_B^*$ ), substituem-se na Eq. 4.24 os termos ( $dq_j$  e  $\eta$ ) por ( $dq_j^*$  e  $\eta^*$ ), encontrando-se:

$$d\theta_r = \left(1 + \frac{q_1}{L_0}\right) \eta^* (dq_A^* + 2 dq_B^*) \quad (4.32)$$

sendo que as grandezas corrotacionais  $d\mathbf{q}^*$  ( $dq_1^*$ ,  $dq_2^*$  e  $dq_3^*$ ) não são as produzidas pela formulação, mediante os deslocamentos globais, mas pelos acréscimos dos esforços no EF na iteração, resolvendo-se o sistema  $\mathbf{D}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{Q}$  descrito na Eq. 3.86, substituindo ( $\mathbf{q}$ ) por ( $d\mathbf{q}^*$ ), e ( $\mathbf{Q}$ ) por ( $d\mathbf{Q}^*$ ). Assim, as grandezas ( $dq_j^*$ ) estão, agora, relacionadas aos esforços internos do EF ( $dQ_j^*$ ), por meio da MR básica do EF ( $\mathbf{D}$ ).

A vantagem desse processo é que os valores ( $dQ_j^*$ ) já levam em conta o efeito da plasticidade nas seções do EF. Porém, ao se obter os valores de ( $dq_j^*$ ), no caso da ligação em B, falta somar em ( $dq_B^*$ ) a própria parcela de giro da ligação, ou seja, ( $d\theta_r$ ).

Partindo-se da condição elástica, pode-se considerar a expressão:

$$d\theta_r = \eta_L^* [dq_A^* + 2(dq_B^* + d\theta_r)] \quad (4.33)$$

em que se englobou no termo  $\eta_L^* = \eta^* (1 + q_1/L_0)$  o estiramento ( $\xi$ ) do EF, logo, pode-se resolver a Eq. 4.33 para ( $d\theta_r$ ), chegando-se à fórmula aproximada:

$$d\theta_r = \eta_L^* \frac{(dq_A^* + 2 dq_B^*)}{(1 - 2\eta_L^*)} \quad (4.34)$$

Essa forma de avaliar ( $d\theta_r$ ) é um pouco mais sofisticada que a proposta XX, e foi denominada de método *ME*, pois depende da MR básica constitutiva do EF.

E, finalmente, contrapondo-se às duas formas anteriores, avaliou-se também o efeito da expressão direta desse ângulo, adotada desde o início da formulação:

$$d\theta_r = \frac{dM_B}{R_k} = \frac{(M_{Bd} - M_{Bc})}{R_k} \quad (4.35)$$

ou seja, apenas se avalia o acréscimo de momento obtido na iteração ( $M_{Bd} - M_{Bc}$ ) e se divide pela rigidez da ligação adotada naquele instante, chamado método *S*.

As três formas de definir a modificação do ângulo da ligação são avaliadas, e encontra-se o ângulo total pela soma ou atualização dessas rotações em cada iteração:

$$\theta_{rd} = \theta_{rc} + d\theta_r = \sum_{i=1}^{\omega} (d\theta_r^i) \quad (4.36)$$

No início, o processo *XX* era empregado por *PPLANAVA*, partindo-se da Eq. 4.24, e evoluiu-se até a Eq. 4.31. Mas alguns problemas (com colunas inelásticas e ligação) não foram adequadamente resolvidos por esse método, quando então se desenvolveram as Eqs. 4.32 e 4.34. Foram feitos diversos ensaios avaliando essas equações e possíveis melhorias, e isso gerou questionamentos sobre sua coerência e aplicabilidade, como

também, confrontaram-se resultados com os da Eq. 4.35, que é mais simples e se apresentou bastante estável numericamente na solução de vários exemplos.

Além disso, existe sempre a questão de manter incluído o efeito da excentricidade no momento obtido pela integração, com a parcela  $dN \cdot y_{CGP}$ , causada pelo desvio do  $CG_P$ , e isso ocorre tanto nos casos do processo  $XX$  como do  $ME$ . Portanto, para acompanhar o diagrama de comportamento da subseção anterior, controla-se a rotação da ligação (de convergência anterior:  $\theta_c$ , atual:  $\theta_d$ , acréscimo:  $d\theta$ ) baseando-se nos valores obtidos com a Eq. 4.36, aplicando um dos três métodos acima ( $XX$ ,  $ME$  ou  $S$ ) e achando o estado da ligação (carga, descarga elástica e carga oposta).

Outra necessidade é a correção das tensões decorrentes da flexão pura, quando esse momento (integrado na seção) supera ao previsto na curva  $M-\theta$  não linear da ligação para aquela rotação, o que será apresentado na subseção seguinte.

#### 4.5.4 LIGAÇÕES NÃO LINEARES

Sem dúvida, a parte mais interessante do comportamento da ligação está na sua resposta não linear mostrada pelo diagrama  $M-\theta$ . No caso da técnica das fatias, entretanto, isso representa outra desafiadora tarefa computacional.

Na figura 4.11(a), é indicado um ponto C de equilíbrio da trajetória ( $M_C, \theta_C$ ). No incremento posterior, por exemplo, numa fase inicial da solução, pode existir um acréscimo de rotação ( $d\theta$ ) tal que, com os deslocamentos e esforços internos resultantes do EF com ligação, encontra-se um ponto E (de momento  $M_E$ ). Esse ponto supera o D, correspondente ao momento ( $M_D$ ) da curva  $M-\theta$  para aquela rotação ( $\theta_D = \theta_C + d\theta$ ). Isso decorre do fato de se tomar a rigidez da ligação como  $R_{kC}$  (correta para o ponto C). No entanto, como ilustrado na curva  $M-\theta$ , a rigidez da ligação se modifica em cada instante, e no ponto D a rigidez já será  $R_{kD}$ , inferior à primeira avaliação. Ou seja, *a rigidez instantânea tende a levar o equilíbrio para um ponto fora da curva.*

Isso é melhor do ponto de vista da análise estrutural, pois reduz os demais deslocamentos naquele instante e a correção iterativa será mais efetiva no global.

Entretanto, os momentos dos nós do EF são superiores aos que a ligação permite para aquela rotação, o que requer a correção das tensões nas fatias desses nós. Naturalmente, recai-se num processo similar ao da *IIEA*, agora com o momento fletor. Essa tarefa computacional significaria outro acréscimo de operações (outro programa e realizar a manipulação de todo o arquivo de fatias).



Como em toda iteração se faz a avaliação da rotação específica ( $\rho'$ ) do EF e das parcelas de tensões decorrentes que geram a flexão, para reduzir essa tarefa computacional, adotou-se que ela fosse introduzida numa modificação dessa rotação específica dos nós desse EF na iteração seguinte.

Pode-se escrever o acréscimo do momento de flexão, definido, em geral, pela Eq. 3.96, relacionado ao campo de deformações da Eq. 3.5, como:

$$dM_j = \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} \left\{ D_{ij} y_i [d\varepsilon_m - d\rho'_j (y_i - y_{CGP_j})] dA_{oi} \right\} \quad (4.37)$$

um somatório nas fatias de área ( $dA_{oi}$ ), módulo ( $D_{ij}$ ), variação da deformação média no eixo do EF ( $d\varepsilon_m$ ) e da rotação específica ( $d\rho'$ ), associados à posição da fatia ( $y_i$ ) e do CGP ( $y_{CGP}$ ) no nó ( $j$ ).

Primeiro, considerando o regime elástico ( $D_{ij} = E$ ), existe uma associação entre a variação da rotação específica ( $d\rho'_j \rightarrow d\rho_j^{\#}$ ) e o acréscimo de momento no nó do EF, que permite definir a correção a ser somada na iteração seguinte:

$$d\rho_j^{\#} = d\rho'_j \frac{(dM_{CD} - dM_{CE})}{dM_{CE}} = -d\rho'_j \frac{dM_{DE}}{dM_{CE}} \quad (4.38)$$

na qual se faz uma proporção dos momentos mostrados na Fig. 4.11(b)

Essa correção resulta em se aplicar uma parcela de momento fletor equivalente:

$$dM_j^{\#} = - \sum_{i=1}^{n \text{ fatias}} \left\{ D_{ij} y_i (y_i - y_{CGP_j}) d\rho_j^{\#} dA_{oi} \right\} \quad (4.39)$$

Do ponto de vista de processamento, a correção da Eq. 4.38 é inserida nas fatias somente na iteração seguinte. Todavia, na própria iteração é preciso gerar o vetor de esforços internos para se avaliarem as cargas residuais (ou desequilibradas). E isso precisa levar em conta momentos coerentes. Logo, o acerto do vetor de esforços internos ( $\mathbf{F}_I$ ) do EF finaliza a iteração na qual a diferença foi gerada, como se representa na Fig. 4.12(a), na qual o nó B com ligação possui plasticidade, e o momento  $M_E^B$  é avaliado supera o da ligação  $M_D^B$ . O valor da correção  $dM_B^{\#}$ , da Eq. 4.39, é distribuído na própria iteração, conforme:

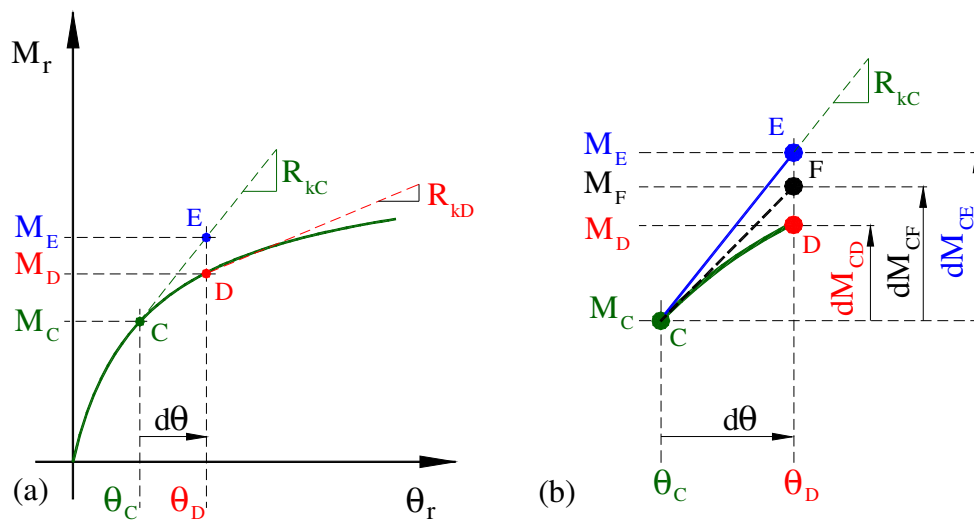
- o nó com ligação (B), recebe a correção  $dM_B^{\#}$ ; e
- o nó oposto (A), a parcela  $dM_B^{\#}/2$ ,

Já na iteração posterior, as mesmas correções ( $dM^{\#}$ ) serão inseridas na forma de rotações específicas ( $d\rho_A^{\#}$ ,  $d\rho_B^{\#}$ ) dos nós do EF correspondente, ajustando-se, assim, as tensões nas fatias. Após o ajuste das fatias, os esforços finais (gerados pela integração

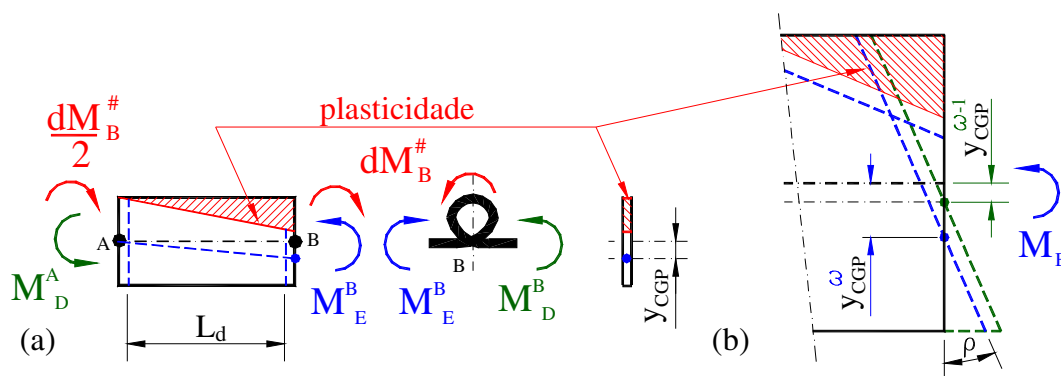
das tensões nas fatias) entram no equilíbrio nodal, permitindo corrigir eventuais desvios provocados pelas avaliações anteriores ( $dp'_A\#$ ,  $dp'_B\#$  e  $dM\#_B$ ).

Com a plasticidade, realizar essa correção torna-se mais complexo, já que agora o ( $y_{CGP}$ ) não é nulo, portanto, o efeito da excentricidade do axial acoplado ( $dN \cdot y_{CGP}$ ) deve ser levado em conta e a geração das tensões não está mais relacionada, em proporção direta, à rigidez ou à rotação específica (ou seja, a Eq. 4.38 deixa de ser válida).

A proposta de solução adotada neste trabalho, mantém a distribuição da diferença dos momentos ( $dM\#_j$ ), como antes, porém fazem-se dois ajustes complementares.



**Figura 4.11** Efeito da ligação não linear: (a) ponto fora da curva M- $\theta$ ; (b) processo de correção.



**Figura 4.12** Correção do efeito da ligação não linear: (a) ajuste de momentos no EF; (b) ajuste da rotação específica  $\rho'$ .

Conforme foi mostrado na Fig. 3.16, variações de momento podem gerar esforços axiais e, vice-versa, quando o ( $y_{CGP}$ ) não mais é nulo, por causa do regime inelástico. Ao longo da iteração, também a excentricidade  $y_{CGP}$  pode variar, ao aparecerem novas zonas (ou fatias) plásticas. Portanto, a correção na iteração seguinte exige que se conheçam o estado plástico anterior ( $\omega - 1$ ) e qual a situação da rotação específica atual ( $\omega$ ), como se indica na Fig. 4.12(b).

Dessa forma, definem-se duas grandezas relacionadas ao esforço axial e à flexão, com o objetivo de acompanhar os efeitos da plasticidade no processo:

- a. coordenada do efeito do axial excêntrico na plasticidade – que avalia o fato do ( $y_{CGP}$ , Eq. 3.91) variar a cada instante ( $\omega$ ) e, por isso, os acréscimos de axial ( $dN_j$ ) surgidos não são aplicados no eixo do EF com ligação, gerando *momentos excêntricos*, que não causam rotação da ligação, dados por:

$$y_{CGPj}^a = \frac{N_j y_{CGPj}^a + dN_j y_{CGPj}}{(N_j + dN_j)} \quad (4.40)$$

na qual se aplica o acréscimo de axial ( $dN_j$ ) no novo  $CG_P$ , a carga já atuante ( $N_j$ ) na coordenada de  $CG_P$  anterior e o equilíbrio determina a nova coordenada média. Note-se que no início  $y_{CGP} = 0$ , ou seja, essa coordenada informa onde está aplicado o esforço axial do EF com ligação em regime inelástico; e

- b. coordenada da correção da rotação específica na plasticidade – que considera a influência de se corrigir a rotação específica (ou “curvatura inelástica”) em ligações não lineares com a expressão:

$$y_{CGPj}^b = \frac{\rho'_j y_{CGPj}^b + d\rho'_j y_{CGPj}}{(\rho'_j + d\rho'_j)} \quad (4.41)$$

A correção feita na rotação específica ( $d\rho'_j$ ) é aplicada no novo  $CG_P$ , o acréscimo atual da rotação específica ( $\rho'_j$ ) na coordenada do  $CG_P$  anterior e, a nova coordenada, também, é definida por equilíbrio. Ao calcular acréscimos de deformação (associados à rotação específica), subtrai-se ( $y_{CGP}$ ) das distâncias ( $y_i$ ) das fatias ao eixo do EF (ou seja, isso interfere em todas as deformações e, conseqüentemente, em todos os acréscimos de tensões).

Por conseguinte, o mesmo efeito da plasticidade no esforço axial (haver maior giro na seção por causa da excentricidade da seção remanescente elástica) acontece também com a rotação específica inelástica.

Como na formulação proposta, a grandeza ( $\eta$ ) não avalia o estado da plasticidade do nó oposto ao da ligação, também a rotação correspondente ( $q_A$ ), empregada para definir a rotação específica ( $\rho'_B$ ) em cada instante, estabelecida na Eq. 3.53, deve ser reduzida pelo mesmo fator  $\zeta_A = D_{3A}/(EI_z)$  apresentado na Eq. 4.27.

Para finalizar os ajustes do EF com ligação não linear e plasticidade, deve-se indicar que, quando aparecem novas fatias plásticas no nó com a ligação, então o ponto atingido na Fig. 4.11(b) não será o (E), mas o (F), cujo momento ( $M_F$ ), em geral, será menor (mesmo com a *IIEA*) do que o obtido sem plasticidade ( $M_E$ ) para as mesmas condições (rotação  $d\theta$ ).

Baseando-se nessas considerações, agora a Eq. 4.38 deverá ser reescrita como:

$$d\rho_j^{\#} = d\rho_j' \frac{(dM_{CD} - dM_{CF})}{dM_{CF}} = -d\rho_j' \frac{dM_{DF}}{dM_{CF}} \quad (4.42)$$

Pode-se questionar se os pontos (E) e (F) poderiam estar sob a curva  $M-\theta$ . Fica claro, pelo próprio processo em que a rigidez inicial é superior à final, que isso é pouco provável de acontecer. Mesmo assim, verificou-se que o processo iterativo tende à convergência nesse caso.

Nenhuma das equações ou considerações indicadas nesta última seção está disponível na literatura mundial. A maioria dos trabalhos de pesquisa confina a plasticidade numa forma concentrada nodal e os efeitos complexos das excentricidades são negligenciados, mesmo nas demais aproximações chamadas distribuídas.

Ao tentar explicar as divergências e inconsistências de vários resultados, pode-se perceber tanto a influência do deslocamento do  $CG_P$ , bem como o aparecimento da sua excentricidade modificando a resposta do EF com ligação e o comportamento do modelo estrutural. Contudo, esse assunto merece outros estudos e averiguações. Nesta tese, apresentam-se apenas algumas partes iniciais, sujeitas a modificações posteriores.

## 4.6 REFERÊNCIAS

- ADINA (2000), *ADINA finite element system 8.6*, ADINA R & D Inc., Watertown, Massachusetts.
- Alvarenga, A.R. (2005), “Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço”, Diss. de Mestrado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Alvarenga, A.R. (2008), “Estudos sobre ligações com análise avançada através da zona plástica em pórticos planos de aço”, Ex. de Qualificação, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2006c), “Detalhes numéricos na análise inelástica com zona plástica”, Anais do XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering CILAMCE, Belém / PA.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008c), “Integração iterativa do esforço axial na análise inelástica com zona plástica”, Anais do XXIX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Maceió / AL.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2009b), “Second-order plastic-zone analysis of steel frames part I: Numerical formulation and examples of validation”, *Latin American J. of Solids and Struct.*, Vol. 6, No. 2, pp. 131-152.
- ANSYS (2009), *Ansys academic research*, Version 12.0. CFS. Ansys Inc., Canonsburg, Pennsylvania.
- Argyris, J.H. (1964), *Recent advances in matrix methods of structural analysis*, Pergamon Press, Ankara.
- Attiogbe, E. & Morris, G. (1991), “Moment-rotation functions for steel connections”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 117, No. 6, pp. 1703-1718.
- Bergan, P.G., Horrigmore, G., Krakeland, G. & Soreide, T.H. (1978), “Solutions techniques for nonlinear finite element problems”, *Int. Jour. Numer. Meth. in Eng.*, Vol. 12, pp. 1677-1696.
- Challa, V.R.M. & Hall, J.F. (1994), “Earthquake collapse analysis of steel frames”, *Earthquake Eng. and Struct. Dynamic.*, Vol. 23, No. 4, pp. 1199-1218.
- Chan, S.L. (1988), “Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method”, *Int. Jour. Numer. Meth. in Eng.*, Vol. 26, pp. 2657-2669.
- Chan, S.L. & Chui, P.P.T. (2000), *Nonlinear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*, Elsevier, Nova Iorque.
- Chen, W.F., Goto, Y. & Liew, J.Y.R. (1996), *Stability design of semi-rigid frames*, John Willey and Sons, Nova Iorque.
- Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames - Theory software and applications*, CRC Press, Boca Raton.
- Clarke, M.J. (1994), “Plastic-zone analysis of frames”. Em Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames: theory, software and applications*, CRC Press, Boca Raton.
- Crisfield, M.A. (1981), “A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through”, *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 55-62.
- Crisfield, M.A. (1991), *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 1, Willey & sons, Nova Iorque, pp. 1-20.
- Faella, C., Piluso, V. & Rizzano, G. (2000), *Structural steel semi-rigid connections – Theory, design and software*, CRC Press, Boca Raton.
- Fafard, M. & Massicotte, B. (1993), “Geometrical interpretation of the arc-length method”, *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 4, pp. 603-615.

- Frye, M.J. & Morris, G.A. (1975), "Analysis of flexibly connected steel frames", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 2, No. 3, pp 280-291.
- Fujii, F., Choong, K.K. & Gong, S.X. (1992), "Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic frames", *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 1-2, pp. 133-136.
- Galambos, T.V. (1982), *Structural members and frames*, Dept. Civil Engineering, Un. Minnesota, Mineapolis.
- Galvão, A.S., Silveira, R.A.M. & Gonçalves, P.B. (2000), "Buckling and post-buckling behavior of L frames", *Anais do XXI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering CILAMCE*, PUC-RJ, Rio de Janeiro / RJ.
- IBM PC DOS (1993), (IBM Personal Computer Disk Operation System), *IBM PC DOS and Microsoft Windows User's Guide*, Microsoft Corporation, Indianapolis, IN.
- Kassimali, A. (1983), "Large deformation analysis of elastic-plastic frames", *ASCE J. Struct. Division*, Vol. 109, No. 8, pp. 1869-1886.
- Kishi, N. & Chen, W.F. (1987), Moment-rotation relations of semi-rigid connections with angles. *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 7, pp 1813-1834.
- Kishi, N. & Chen, W.F. (1990) "Semi-rigid steel beam-to-column connections data base and modeling", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 1, pp 105-119.
- Kouhia, R. (1992), "On the solution of nonlinear finite element equations", *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 1-2, pp. 243-254.
- Lui, E.M. & Chen, W.F. (1988), "Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames", *Int. Jor. Solid and Structures*, Vol. 24, No. 9, pp. 893-913.
- Meyer, C. (1973), "Solution of linear equations – State of the art", *ASCE J. Struct. Division.*, Vol. 99, No. 7, pp. 1507-1526.
- Miller, A.R. (1987), *Turbo-basic programs for scientists and engineers*, Sybex, São Francisco.
- Nyssen, C. (1981), "An efficient and accurate iterative method allowing large incremental steps to solve elastic-plastic problems", *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 63-71.
- Owen, D.R.J. & Hinton, E. (1980), *Finite elements in plasticity: theory and practice*, Pineridge Press, RU.
- Peters, D.J., Puri, S.P.S., Kratky, R.J., Huang, Y.H., Heroux, J.P. & Adams, L.A. (1998), Editorial "Computer misuse in civil engineering", *Journal of Comp. in Civil Eng.*, Vol. 10, pp. 169-180.
- Pinheiro, L. (2003), "Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos", Diss. de Mestrado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Popov, E. & Pinkney, R.B. (1969), "Cyclic yield reversal in steel building connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 95, No. 3, pp. 327-353.
- Power-Basic (2005), *Console compiler for windows CC4 – Reference guide*, Powerbasic Inc, Flórida.
- Ramberg, W. & Osgood, W.R. (1943). *Description of stress-strain curves by 3 parameters*, Tech. Rep. 902. National Advisory Committee for Aeronautics, Washington.
- Ramm, E. (1981), "Strategies for tracing the nonlinear response near limit points", em Bathe, K.J., Wunderlich, W. & Stein, E. (1982), *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, pp. 63-69, Springer, Berlim.
- Richard, R.M. & Abbott, B.J. (1975), "Versatile elastic-plastic stress and strain formula", *ASCE J. Mechanical Div.*, Vol. 101, No. 4, pp. 511-515.

Rocha, G. (2000), “Estratégias de incremento de carga e de iteração para a análise não-linear de estruturas”, Diss. de Mestrado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto / MG.

Sekulovic, M. & Slatic R. (2001), “Nonlinear analysis of frames with flexible connections”, *Computer and Structures*, Vol. 79, pp. 1097-1107.

Silveira, R.A.M.; Rocha, G. & Gonçalves, P.B. (1999), “Estratégias numéricas para análises geometricamente não-lineares”, Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM, Águas de Lindóia / SP.

Simpson, S. (1740), *The nature and laws of chance*, em O’Connor, J.J. & Robertson, E.F. (1966), “Thomas Simpson”, MacTutor History of Mathematics Archive, HNMI Holistic Numerical Methods Institute. Baseado em Rouse Ball, W.W. (1908), “A short account of history of mathematics”, (anos 1701-1761), 4. Ed.

Stelmack, T.W., Marley, M.I. & Gerstle, K.H. (1986), “Analysis and tests of flexibly connected steel frames”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 7, pp. 1573-1589.

Von Mises, R.E. (1913), em Hill, R. (1950), *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford, RU.

Widjaja, B.R. (1998), “Path-following technique based on residual energy suppression for nonlinear finite element analysis”, *Computers & Structures*, Vol. 66, No. 2-3, pp. 201-209.

Windows (2001), *Windows New Technology eXPerience workstation*, Microsoft Corporation, version 5.1, service pack 2, St. <http://toastytech.com/guis/wxp.html>, Redmond, WA.

Xu, Z. & Mirmiran, A. (1997), “Looping behavior of arches using co-rotational finite element”, *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 6, pp. 1059-1071.

Yang, Y.B. & Kuo, S.R. (1994), *Theory and analysis of nonlinear framed structures*, Prentice Hall, Singapura.

Yang, Y.B. & Shieh, M.S. (1990), “Solution method for nonlinear problems with multiple critical points”, *American Inst. of Aeronautics and Astronautics J.*, Vol. 28, No. 12, pp. 2110-2116.

Yee, Y.L. & Melchers, R.E. (1986), “Moment rotation curves for bolted connections”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 3, pp. 615-634.

Zhiliang, F. (1994), “A study of variable step-length incremental/iterative methods for nonlinear finite element equations”, *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 6, pp. 1269-1275.

## F I M DO VOLUME I

Apresentado: 29/04/2010

Revisado: 30/07/2010

*Arthur Ribeiro de Alvarenga*

CREA-MG 26.303/D

Direitos Autorais Reservados



Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Doutorado em Construções Metálicas



Arthur Ribeiro de Alvarenga

# AS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS NA ANÁLISE AVANÇADA COM ZONA PLÁSTICA DE PORTAIS PLANOS DE AÇO

TESE DE DOUTORADO – VOLUME II

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Ouro Preto  
2010



A473l

Alvarenga, Arthur Ribeiro de.

As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço [manuscrito] / Arthur Ribeiro de Alvarenga. - 2010.

xli, 481 f. (2v.) : il., color.; graf.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.

Área de concentração: Construção Metálica.

1. Aço - Estruturas - Teses. 2. Ligações metálicas - Teses. 3. Métodos numéricos - Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

CDU: 624.014.2

Catálogo: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)

## SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
	<b>Apresentação</b>	iii
	<b>Resumo</b>	iv
	<b>Abstract</b>	v
	<b>Sumário</b>	vi
	<b>Lista de Figuras</b>	xiii
	<b>Lista de Tabelas</b>	xx
	<b>Lista de Símbolos e Abreviaturas</b>	xxiii
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>01</b>
1.1	Considerações iniciais	02
1.2	Análise estrutural - Estado da arte .....	03
1.3	O conceito da <i>Análise Avançada</i>	09
1.4	<i>Aspectos importantes</i> .....	10
1.4.1	Curvatura inicial	10
1.4.2	Fora de prumo .....	11
1.4.3	Tensões residuais	11
1.5	Motivação e justificativas .....	12
1.6	Objetivos	15
1.7	Organização .....	17
1.8	Referências	19
<b>2</b>	<b>MODELOS DAS LIGAÇÕES</b>	<b>22</b>
2.1	Introdução	23
2.1.1	Primórdios .....	23
2.1.2	Reconhecimento pelas normas	24
2.1.3	Vantagens previstas .....	29
2.1.4	Tipos de ligação	31
2.1.5	Pesquisa experimental .....	33
2.2	Parâmetros das ligações	38
2.2.1	Pontos característicos .....	38
2.2.2	Resistência da ligação	40
2.2.3	Rigidez da ligação .....	41

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
2.2.4	Índice de rigidez (ou de flexibilidade) da ligação	44
2.2.5	Dutilidade .....	47
2.3	Classificação das ligações	51
2.3.1	Classificação de Bjorhovde <i>et al.</i> (1990) .....	53
2.3.2	Classificação do Eurocode 3 (1992)	54
2.3.3	Classificação de Hasan <i>et al.</i> (1998) .....	57
2.3.4	Outras possibilidades de classificações	58
2.4	Modelos de curvas momento-rotação .....	60
2.4.1	Modelos com trechos lineares	62
2.4.2	Modelos polinomiais .....	65
2.4.3	Modelos potenciais	70
2.4.4	Modelos exponenciais .....	78
2.4.5	Confrontando alguns modelos	82
2.5	<i>Linha de viga</i> .....	84
2.6	Tipos de ligação analisados	91
2.6.1	Ligações soldadas.....	91
2.6.2	Ligações com perfis Ts	92
2.6.3	Ligações com chapa estendida .....	95
2.6.4	Ligações com chapa cortada e chapa de cabeça	97
2.6.5	Ligações com cantoneiras .....	98
2.6.6	Rótulas de fato	102
2.7	Ligações nas bases .....	103
2.7.1	Bases rotuladas	104
2.7.2	Bases engastadas .....	105
2.8	Modelo de curva M- $\theta$ com <i>Rigidez Bilinear (RBL)</i>	108
2.9	Referências .....	127
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO GERAL</b>	<b>142</b>
3.1	Introdução	143
3.2	Considerações gerais .....	144
3.2.1	Sistema corrotacional	145
3.2.2	Tensão e deformação da fibra .....	147
3.2.3	Limitações e hipóteses simplificadoras	149

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
3.3	Desenvolvimento do EF com ligação	152
3.3.1	Cinemática do elemento .....	152
3.3.2	Grandezas do sistema corrotacional	155
3.3.3	Funções de forma - Visão geral .....	158
3.3.4	Introdução da rigidez da ligação no EF	160
3.3.5	Condições de contorno para o EF com ligação .....	160
3.3.6	Função de forma para o EF com ligação	163
3.3.7	Significado do parâmetro $\eta$ .....	165
3.3.8	Campo de deformação	171
3.4	Matrizes de rigidez do EF com ligação .....	172
3.4.1	Matrizes de rigidez na forma genérica	172
3.4.2	Matrizes de rigidez básicas do EF com ligação .....	175
3.4.3	Matrizes de rigidez na forma completa	176
3.4.4	Propriedades elastoplásticas da seção .....	179
3.4.5	Matriz de rigidez global	185
3.5	Esforços internos de equilíbrio .....	186
3.6	<i>Integração Iterativa do Esforço Axial (IIEA)</i>	187
3.6.1	Introdução .....	187
3.6.2	Justificativa	190
3.6.3	<i>IIEA</i> sob condições especiais .....	190
3.7	Referências	192
<b>4</b>	<b>ASPECTOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>195</b>
4.1	Introdução	196
4.2	Considerações gerais .....	198
4.3	Solução do problema não linear	203
4.3.1	Avaliação das hipóteses .....	205
4.3.2	Processo incremental	208
4.3.3	Processo iterativo .....	214
4.4	Aplicando a <i>Integração Iterativa (IIEA)</i>	216
4.5	Controle do comportamento da ligação .....	219
4.5.1	Curvas de ligação introduzidas	220
4.5.2	Comportamento geral de uma ligação .....	221

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
4.5.3	Rotação da ligação	223
4.54.	Ligações não lineares .....	228
4.6	Referências	233
<b>5</b>	<b>ELEMENTO FINITO RÍGIDO-RÍGIDO</b>	<b>236</b>
5.1	Introdução	237
5.2	Formulação numérica do EF rígido-rígido .....	239
5.2.1	Campo de deslocamento e de deformação	239
5.2.2	Matrizes de rigidez .....	239
5.3	Coluna de Van Kuren & Galambos (1964)	241
5.4	Coluna de Galambos & Ketter (1959) .....	246
5.5	Portal de Chen <i>et al.</i> (1996)	250
5.6	Portal de Arnold <i>et al.</i> (1968) .....	255
5.7	Referências	259
<b>6</b>	<b>ELEMENTO FINITO RÍGIDO-RÓTULA</b>	<b>261</b>
6.1	Introdução	262
6.2	Formulação numérica do EF rígido-rótula .....	264
6.2.1	Campo de deslocamento e de deformação	264
6.2.2	Matrizes de rigidez .....	265
6.3	Coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	266
6.4	Coluna de Lu & Kamalvand (1968) .....	270
6.5	Portal de Kanchanalai (1977)	277
6.6	Portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	283
6.6.1	Reproduzindo o problema original	284
6.6.2	Portal com carga maior na coluna esquerda .....	286
6.6.3	Portal com carga maior na coluna direita	289
6.6.4	Conclusões sobre o estudo do portal .....	292
6.7	Referências	298
<b>7</b>	<b>ELEMENTO FINITO RÍGIDO-LIGAÇÃO</b>	<b>300</b>
7.1	Introdução	301
7.2	Viga simples .....	304
7.2.1	Linha de viga com modelo elástico	305
7.2.2	Viga elástica e modelo de ligação com trechos lineares	307

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
7.2.3	Viga elástica com ligações não lineares	309
7.2.4	Viga inelástica com ligações lineares .....	312
7.2.5	Viga inelástica com ligações não lineares	315
7.3	Coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	319
7.3.1	Flambagem elástica com ligações lineares	320
7.3.2	Estudo de convergência .....	322
7.3.3	Flambagem inelástica com ligações lineares	325
7.3.4	Flambagem com ligações não lineares .....	327
7.4	Portal de Yau & Chan (1994)	331
7.5	Portal de Chan & Chui (2000) .....	335
7.5.1	Análise do portal com ligações não lineares	338
7.5.2	Análise do portal com ligações de curva $M-\theta$ <i>RBL</i> .....	340
7.5.3	<i>Controle do Deslocamento Generalizado (CDG)</i>	341
7.6	Ângulo de giro próprio da ligação .....	345
7.6.1	Análise da viga com carga concentrada	345
7.6.2	Análise da coluna com carga de flambagem .....	346
7.7	Referências	349
<b>8</b>	<b>ANÁLISE AVANÇADA INCLUINDO A LIGAÇÃO</b>	<b>351</b>
8.1	Introdução	352
8.2	Portal de Chen & Zhou (1987) modificado .....	354
8.3	Estudo das condições de base na flambagem do portal	356
8.4	Imperfeição inicial combinada à flambagem do portal .....	362
8.5	Cargas verticais combinadas e geometria imperfeita	365
8.5.1	Combinação incluindo a carga distribuída ( $q_0/2$ ) .....	365
8.5.2	Combinação incluindo a carga distribuída ( $q_0/4$ )	366
8.6	Carga horizontal combinada às verticais .....	370
8.6.1	Carga horizontal $H + 50\%$ da vertical $P_0$	370
8.6.2	Carga horizontal $H + 50\%$ da vertical distribuída ( $q_0$ ) ...	370
8.6.3	Carga horizontal $H + 25\%$ da vertical conc. e dist.	373
8.7	Modificando a viga do portal .....	375
8.8	<i>Análise Avançada</i> do portal com ligação <i>midirrígida</i>	376
8.9	Efeito das ligações não lineares .....	381

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
8.9.1	Ligação não linear rígida D2	383
8.9.2	Ligação não linear flexível D3 .....	387
8.10	Comentários finais	391
8.11	Referências .....	393
<b>9</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>394</b>
9.1	Introdução	395
9.2	Conclusões .....	395
9.2.1	<i>Integração Iterativa do Esforço Axial (IIEA)</i>	395
9.2.2	Elemento finito com ligação .....	397
9.2.3	<i>Controle do Deslocamento Generalizado (CDG)</i>	399
9.2.4	Modelo de curva M- $\theta$ com <i>Rigidez Bilinear (RBL)</i>	400
9.2.5	<i>Análise Avançada</i> incluindo ligações	401
9.3	O conceito estrutural .....	405
9.3.1	Antecedentes dessa proposta	405
9.3.2	Comportamentos que justificam o Teorema .....	408
9.3.3	Recomendações da atual pesquisa	410
9.3.4	Exemplo demonstrativo .....	413
9.4	Aspectos críticos	416
9.5	Continuação da pesquisa .....	419
9.6	Referências	420
	<b>APÊNDICES</b>	<b>422</b>
A.1	Limites de esbeltez para flambagem local e lateral	423
A.2	Crítérios das normas na resistência das ligações .....	425
A.3	Estruturas contraventadas e não contraventadas	426
A.4	Deformações do ponto e da fibra .....	428
A.5	Participação do estiramento nas funções ( $v_0$ )	431
A.6	Matrizes de rotação .....	431
A.7	Termos de rigidez gerados pelas propriedades médias	433
A.8	Resultados gráficos obtidos de figuras impressas .....	434
A.9	Conceito de analogia adotado nesta tese	437
A.10	Listagem de saída do exemplo do capítulo 9 .....	440
A.10.1	Dados fornecidos	442

<b>Seção</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
A.10.2	Listagem da saída dos dados	444
A.10.3	Listagem da saída do increm. do início do escoamento	448
A.10.4	Listagem da saída do incremento de pré-colapso	451
A.10.5	Listagem da saída do incremento do colapso .....	455
A.11	Notas sobre o CD (anexo)	459
A.12	Referências .....	460
<b>REFERÊNCIAS COMPLETAS</b>		<b>461</b>



# 5

## ELEMENTO FINITO RÍGIDO-RÍGIDO

### SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
5.1	Introdução	237
5.2	Formulação numérica do EF rígido-rígido .....	239
5.3	Coluna de Van Kuren & Galambos (1964)	241
5.4	Coluna de Galambos & Ketter (1959) .....	246
5.5	Portal de Chen <i>et al.</i> (1996)	250
5.6	Portal de Arnold <i>et al.</i> (1968) .....	255
5.7	Referências	259

## 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se o elemento finito rígido-rígido como um caso particular, do EF geral desenvolvido no capítulo 3, quando se garante a continuidade na extremidade, ou seja, a rigidez da ligação é infinita e faz-se o parâmetro  $\eta = 0$ . Na realidade trata-se do mesmo EF que é de emprego mais geral e foi também adotado no trabalho anterior (Alvarenga, 2005).

Na seção seguinte, mostram-se o campo de deslocamentos ( $v_0$ ), as deformações e as matrizes de rigidez obtidas para esse EF, reproduzindo parte da formulação numérica básica, proposta anteriormente (Lavall, 1996), porém apresentada de outra forma.

Apenas para demonstrar os progressos realizados na pesquisa, com este EF, serão apresentados quatro exemplos de estudo especiais ilustrados na Fig. 5.1:

- a. reproduz-se a trajetória de equilíbrio da coluna à flexocompressão do experimento de Van Kuren & Galambos (1964), com o objetivo de validar-se a formulação para um caso de barra;
- b. produz-se a curva de iteração do esforço normal  $N$  e momento fletor  $M$ , para uma barra à flexocompressão, que segue as ideias de Galambos & Ketter (1959) e baseia-se em ensaios experimentais realizados nas décadas de 1950 e 1960, averiguando diversas condições de cargas limite;
- c. avalia-se o processo da *IIEA – Integração Iterativa do Esforço Axial* apresentado na seção 3.6, comparando diversas respostas para o problema do portal de Chen *et al.* (1996); e
- d. analisa-se o portal de Arnold *et al.* (1968), no qual os resultados obtidos, para um conjunto de barras, são confrontados com os experimentais.

Na maioria dos exemplos deste capítulo, bem como nos demais, os modelos adotados para o programa computacional incluíram nas imperfeições geométricas a curvatura inicial (CI), com a flecha usual  $L/1000$ , em que  $L$  é a altura da coluna. Sua forma é de arco senoidal (previsto na norma), substituída, em alguns casos, pela circular (que permite melhor resultado, quando o número de EFs por barra é pequeno). Em geral, as tensões residuais (TR) foram consideradas também, como a de Galambos & Ketter (1959), porque reproduzem condições implícitas na norma AISC LRFD (1993).

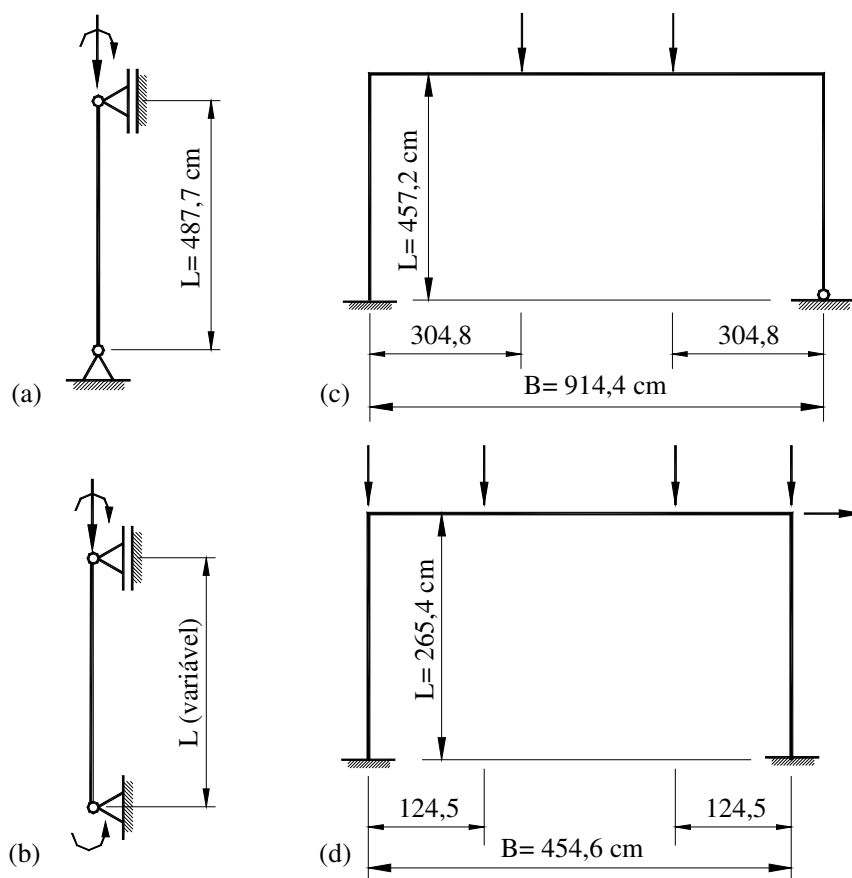
A condição de fora de prumo (FP) aparece nos modelos da *Análise Avançada* propriamente, como um dimensionamento, o que não foi o objetivo com este capítulo.

Os materiais são considerados elásticos e perfeitamente plásticos, salvo quando indicados em contrário. Os dados fornecidos pelos autores dos problemas são repetidos e os valores adotados também, com o objetivo de construir-se um banco de provas que possa futuramente servir a outros pesquisadores. (Ver apêndice A.11).

Denomina-se fator (de carga) de colapso ( $\lambda_c$ ) ao menor fator que provoca o colapso, tido aqui como ponto limite de carga (seja por flambagem inelástica, seja por outro estado limite). Não confundir com o fator de carga última [ $\lambda_p$ , este relativo à formação de mecanismo, plasticidade abundante e colapso da seção ao cisalhamento (ver Eq. 4.3)]. Por sua vez, o fator (de carga) de escoamento ( $\lambda_y$ ) é o menor valor, no qual aparece pelo menos uma fatia plástica no modelo.

Adota-se a convenção de sinais de engenharia nos diagramas: tração positiva (—) e compressão negativa (||). No contexto desta tese, denomina-se *modelo* ao conjunto de dados fornecido ao programa computacional para realizar-se a análise estrutural.

No final deste capítulo foram incluídas as referências correspondentes.



**Figura 5.1 Exemplos analisados:**

(a) coluna de Van Kuren & Galambos (1964); (b) coluna de Galambos & Ketter (1959);  
 (c) portal de Chen *et al.* (1996); (d) portal de Arnold *et al.* (1968).

## 5.2 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO EF RÍGIDO-RÍGIDO

A formulação do EF rígido-rígido foi apresentada anteriormente (Alvarenga, 2005 e 2008) como uma parte independente, cujo desenvolvimento nasce das condições de contorno mostradas na Eq. 3.25. Agora, chega-se às mesmas expressões da formulação numérica original (Lavall, 1996; Alvarenga, 2005), porém empregando a formulação proposta, fazendo-se apenas o índice de giro próprio da ligação  $\eta = 0$ , (ou seja, o índice de rigidez nodal  $g = 0$ ).

### 5.1.1 CAMPO DE DESLOCAMENTO E DE DEFORMAÇÃO

Substituindo-se  $\eta = 0$  na Eq. 3.43, obtém-se o campo de deslocamento  $v_o$ :

$$v_o(x) = \left(1 + \frac{q_1}{L_0}\right) \left[ \left( \frac{x^3}{L_0^2} - \frac{x^2}{2L_0} - \frac{x}{4} + \frac{L_0}{8} \right) q_2 + \left( \frac{x^3}{L_0^2} + \frac{x^2}{2L_0} - \frac{x}{4} - \frac{L_0}{8} \right) q_3 \right] \quad (5.1)$$

e na Eq. 3.53, o campo de deformações:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{q_1}{L_0} + \left(1 + \frac{q_1}{L_0}\right) \left( \frac{2q_2^2 + 2q_3^2 - q_2 q_3}{30} \right) \\ - y_c \left[ \left( \frac{6x}{L_0^2} - \frac{1}{L_0} \right) q_2 + \left( \frac{6x}{L_0^2} + \frac{1}{L_0} \right) q_3 \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

### 5.1.2 MATRIZES DE RIGIDEZ

Empregando a Eq. 3.70 e tomando os coeficientes mostrados na Tab. 3.1 (engaste) com  $\eta = 0$ , encontra-se a matriz de rigidez constitutiva básica  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} D_{1m} & D_{2m} & -D_{2m} \\ & 4D_{3m} & 2D_{3m} \\ \text{simétrico} & & 4D_{3m} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

e na Eq. 3.72, a matriz de rigidez relativa à curvatura básica  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{Q_1 L_d}{30} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 4 & -1 \\ \text{simétrico} & & 4 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Realizando, então, a transformação com  $f_T$  (Eq. 3.74), chega-se à matriz de rigidez do EF constitutiva, definida na Eq. 3.79 e na primeira linha da Tab. 3.2 (engaste):

$$\mathbf{K}_{ep} = \begin{bmatrix} A & 0 & -B & -A & 0 & B \\ & C & D & 0 & -C & D \\ & & 2E & B & -D & E \\ & & & A & 0 & -B \\ & \text{simétrico} & & & C & -D \\ & & & & & 2E \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

e a de rigidez à curvatura pela Eq. 3.81 e primeira linha da Tab. 3.3 (engaste):

$$\mathbf{K}_h = \frac{Q_1}{30L_d} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F & G & 0 & -F & G \\ & & H & 0 & -G & -I \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simétrico} & & & F & -G \\ & & & & & H \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

nas quais os termos dentro das matrizes são dados por:

$$\begin{aligned} A &= D_{1m} / L_0 & B &= D_{2m} / L_0 & C &= 12D_{3m} / (L_0 L_d^2) \\ D &= 6D_{3m} / (L_0 L_d) & E &= 2D_{3m} / L_0 & F &= 6 \\ G &= 3L_d & H &= 4L_d^2 & I &= L_d^2 \end{aligned} \quad (5.7a-i)$$

sendo definidas na subseção 3.4.4 as propriedades elastoplásticas da seção indicadas por  $D_{1m}$ ,  $D_{2m}$ ,  $D_{3m}$ , respectivamente, e  $Q_1$  pela Eq. 3.97 (IIEA). (Ver apêndice A.7).

Comprova-se que as equações anteriores são as mesmas da formulação numérica original para o EF rígido-rígido (Lavall, 1996; Alvarenga, 2005).

Agora serão apresentados os exemplos de validação dessa formulação.

### 5.3 COLUNA DE VAN KUREN & GALAMBOS (1964)

Esse EF rígido-rígido é o mais empregado em todos os modelos. Após a introdução da *IIEA* (Alvarenga, 2005; Alvarenga & Silveira, 2008c), essa formulação numérica conseguiu produzir vários resultados de qualidade, de maneira geral, comparando-se com os resultados teóricos da literatura mundial.

Agora, faz-se um confronto dessa parcela da formulação numérica, com alguns ensaios experimentais, o que não será possível para os demais EFs desta tese.

A validação inicia-se com um ensaio experimental de barra a flexocompressão. Esse exemplo simples é considerado um banco de provas para as formulações inelásticas de segunda ordem que se propõem realizar a *Análise Avançada*.

Por causa da discrepância de dados, nesse estudo ilustrado na Fig. 5.2, utilizaram-se dois modelos. No primeiro modelo, chamado 1A, a coluna analisada possui os dados adotados por King *et al.* (1992), seguindo estudos de El-Zanaty *et al.* (1980), que não informou os valores adotados na sua tese, tampouco comentou sobre desvios ou tolerâncias nas grandezas indicadas.

Adicionalmente, existem diferenças com relação às medidas, às unidades e aos arredondamentos quando considerados, que também são fontes de inevitáveis desvios, tanto neste exemplo quanto em outros.

O perfil da coluna é o laminado 4 WF 13, representado na Fig. 5.3(a), sendo adotada a seção do I equivalente da Fig. 5.3(b). A Tabela 5.1 mostra as propriedades geométricas da seção, destacando os valores das espessuras ajustadas para manter as propriedades de área bruta ( $A_g$ ) e inércia ( $I_z$ ), visto que a seção do laminado possui um raio (entre a alma e a aba) que não é considerado na geometria com retângulos.

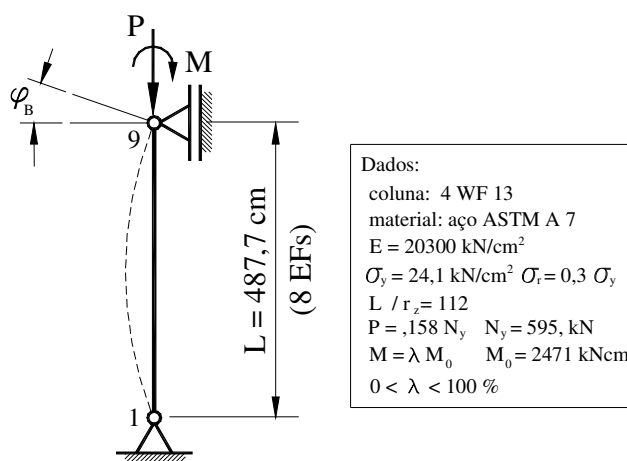
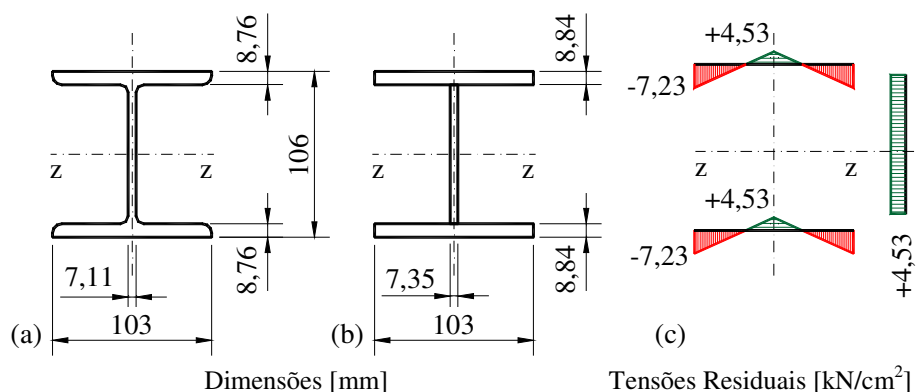


Figura 5.2 Coluna de Van Kuren & Galambos (1964).



**Figura 5.3 Perfil da coluna 4 WF 13:**  
(a) laminado original; (b) seção equivalente; (c) TR de Galambos & Ketter (1959).

A carga  $P$  é aplicada inicialmente (fixa) como valor de  $0,158 N_y$  (corresponde a  $94,09$  kN) e posteriormente o momento cresce segundo o fator de carga  $\lambda$ , empregando-se o valor de referencia  $M_0 = M_p = 2471$  kNcm de forma incremental.

Indica-se que não são consideradas nesta análise nem a curvatura inicial (CI) nem o fora de prumo da coluna, mas as tensões residuais (TR) de perfis laminados americanos, como proposto por Galambos & Ketter (1959), mostradas na Fig. 5.3(c).

O modelo submetido ao programa computacional *PPLANAVX* foi realizado com 8 EFs, 9 nós, cada seção subdividida com 200 fatias nos flanges e 36 na alma.

Sem incluir a curvatura inicial, encontrou-se o escoamento com  $\lambda_y \geq 49,3\%$  e o colapso com  $\lambda_c \geq 87,9\%$ . King *et al.* (1992) empregaram o método da rótula-plástica, refinada ou não, e a resistência de coluna (com as fórmulas empíricas do AISC), determinando o colapso com 91% e 88%, respectivamente.

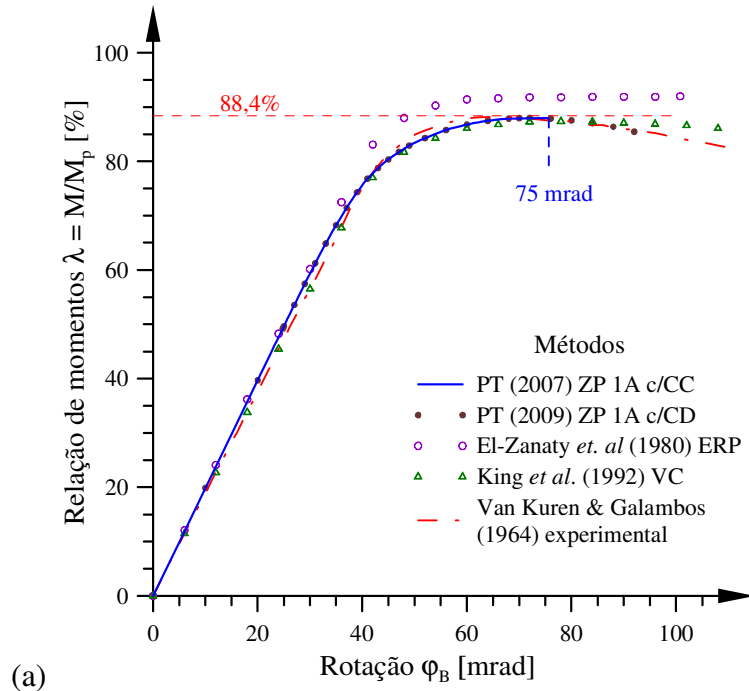
Já El-Zanaty *et al.* (1980) apresentaram sua curva com ZP, que supera a do ensaio, e outra indicando o uso de uma carga lateral de  $4,45$  N aplicada no meio-vão como simulando a CI, quando então a trajetória fica sob a experimental, mas não forneceram os seus pontos limites de carga. Colocando CI com  $\delta_0 = L/1000$ , o fator de carga de colapso obtido reduziu-se para  $\lambda_c \geq 86,3\%$ , que é bem inferior ao experimental.

As trajetórias de equilíbrio relacionando o momento  $M_0$  e a rotação  $\varphi_B$  do nó 9 (da Fig. 5.2) são mostradas na Fig. 5.4(a) para os casos estudados por King *et al.* (1992), que praticamente reproduziram El-Zanaty *et al.* (1980). Com os mesmos dados, apresentam-se as curvas 1A da própria tese (PT), feitas com *Controle de Carga* (CC) e *de Deslocamento* (CD). Aplicando o CC encontrou-se, para  $\varphi_B = 68,48$  (74,77) mrad, o fator  $\lambda = 87,9$  (88%, colapso), respectivamente. Já com CD, o fator de carga máximo obtido foi  $\lambda = 87,997\%$  quando  $\varphi_B = 72$  mrad (ver Tab. 5.3).

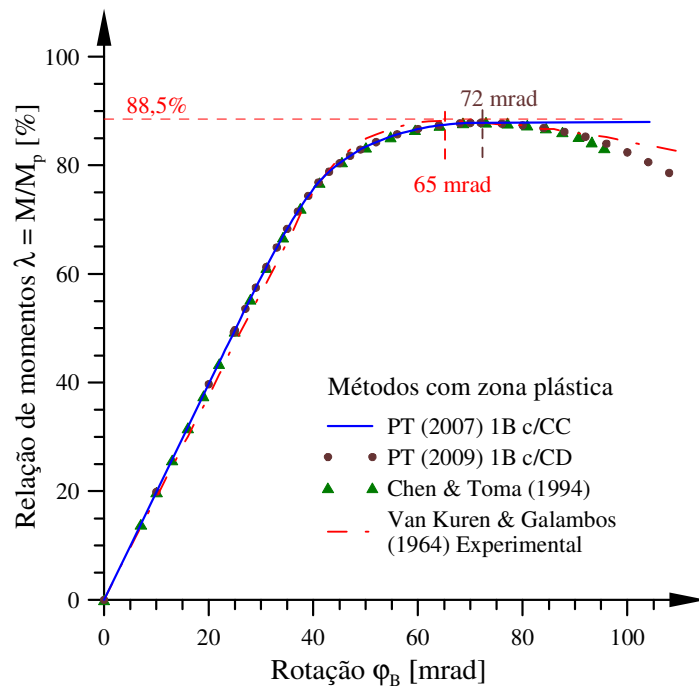
**Tabela 5.1 Propriedades da seção 4 WF 13 da coluna.**

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t    alma a	elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]			plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]	
AISC 1978	4,16 in	4,06 in	0,345 in    0,28 in	3,83 in <sup>2</sup>	11,3 in <sup>4</sup>	5,46 in <sup>3</sup>	6,28 in <sup>3</sup>	
Convertido	105,66	103,12	8,763    7,112	24,710	470,3	89,47	102,91	
PT <sup>(1)</sup>	=	=	8,844 <sup>(2)</sup> 7,354 <sup>(2)</sup>	24,709	=	89,03	102,52	

Notas: 1) PT: própria tese; 2) valores aproximados de forma a manter a área bruta  $A_g$  e a inércia  $I_z$ .



(a)



(b)

**Figura 5.4 Trajetória de equilíbrio da coluna experimental:**

- (a) com resultados de King *et al.* (1992) e El-Zanaty *et al.* (1980);
- (b) com método da zona plástica: Chen & Toma (1994).



Desenvolveu-se uma versão (*FLEXCOMP.bas*) do programa computacional “BCIN.for” de Chen & Toma (1994), que adota outro método da zona plástica. Para *FLEXCOMP*, adotou-se o incremento de 1 mm das flechas e de 0,05% do momento  $M$ , com os dados do modelo 1A. A seção tem 20 fatias no flange, 80 na alma; com 21 pontos de integração. O colapso ocorreu com  $\lambda_c \geq 87,95\%$ . Modificando-se para 9 pontos, obteve-se a  $\lambda_c \geq 88,02\%$ , confirmando os resultados obtidos na PT.

Posteriormente, essa estrutura foi reestudada com o chamado modelo 1B, por *PPLANAVA* (2009), considerando os dados experimentais de Van Kuren & Galambos (1964), conforme:  $L/r_z = 112,3$ , cargas:  $N_y = 591,82$  kN,  $P_0 = 93,508$  kN,  $M_0 = 2464$  kNcm, módulo  $E = 20278$  kN/cm<sup>2</sup>; além das propriedades indicadas na Tab. 5.2.

Na Fig. 5.4 (b), comparam-se os resultados 1B com o experimental e mostram-se os resultados de *FLEXCOMP* (Chen & Toma, 1994) também.

O modelo 1B usando CC, tem escoamento ainda com  $\lambda_y \geq 49,3\%$  e possui um salto dinâmico maior do que em 1A, ao passar de  $\lambda = 87,8$  para 87,9% (colapso), com as rotações:  $\varphi_B = 69,47$  e 104,27 mrad, respectivamente. Empregando-se o CD, chega-se à carga última com  $\varphi_B = 110$  mrad ( $\lambda = 77,65\%$ ) e a carga limite atinge  $\lambda = 87,83\%$  quando  $\varphi_B = 72$  mrad; mas as modificações são muito pequenas em relação ao CC.

Na técnica das fatias, a plasticidade se deteriora mais lentamente (por causa da posição da fibra) no início, posteriormente, esse efeito torna-se contrário e a carga limite ocorre num ponto um pouco após o máximo experimental ( $\varphi_{Blim} = 72 > 65$  mrad), o que também pode ser explicado pelo encruamento no último. O ensaio experimental encontrou  $M_m = 2181$  kNcm e a PT 2164 kNcm (99,2%! ). Pode-se considerar um excelente resultado para os dois controles (CC e CD), como ilustrado na Tab. 5.3.

A diferença (0,1% no colapso) entre os modelos 1A e 1B é muito pequena, sendo os demais resultados bastante coerentes com os encontrados pelo programa anterior *PPLANAVX* (2005-7), comprovando que, em alguns casos (como as colunas), ambas as versões alcançam o mesmo desempenho, como foi informado.

Para finalizar esta seção, na Fig. 5.5 apresenta-se a distribuição da plasticidade ao longo da barra e na seção mais crítica, que é o nó 8, entre o EF (7) e o (8), que possui 75,8% das fatias plásticas. Note-se que a plasticidade tomou mais de 50% da extensão da coluna, predominando a compressão, como se poderia supor, e o efeito local do momento ocorreu no nó 8 para este modelo com 8 EFs.

**Tabela 5.2 Propriedades da seção 4 WF 13 experimental.**

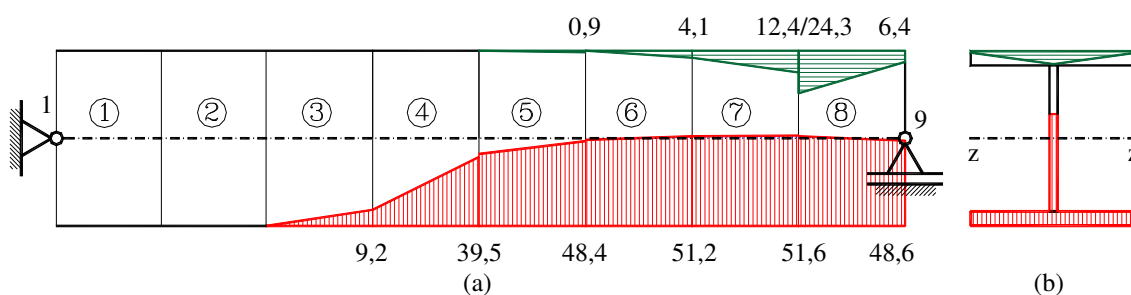
Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t    alma a	elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]			plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]	
Medido	4,16 in	4,06 in	–    –	–    –	3,79 in <sup>2</sup>	–	5,44 in <sup>3</sup>	6,23 in <sup>3</sup>
Convertido	105,66	103,12	–    –	–    –	24,45	–	89,15	102,09
PT	=	=	8,848 <sup>(2)</sup> 7,050 <sup>(2)</sup>		=	469,2	88,76	102,00

Notas: 1) PT: própria tese; 2) valores aproximados de forma a manter a área bruta  $A_g$  e a inércia  $I_z$ .

**Tabela 5.3 Resultados da análise numérica.**

Modelo	Controle	Rotação $\theta$ [mrad]	Fator de carga $\lambda$ [%]	Momento $M$ <sup>(3)</sup> [kNcm]	Observação
1A <sup>(1)</sup>	CC <sup>(4)</sup>	68,45	87,9	2172,0	pré-colapso
		74,77	88,0	2174,5	colapso
	CD	72,00	87,997	2174,2	carga limite
1B <sup>(2)</sup>	CC	69,47	87,8	2163,4	pré-colapso
		104,27	87,9	2165,9	colapso
	CD	72,00	87,832	2164,1	carga limite
experimental		110,00	77,648	1913,3	carga última
		65,00	88,5	2181,0	carga limite

Notas: 1)  $M_0 = 2471$  kNcm; 2)  $M_0 = 2464$  kNcm; 3)  $M = \lambda M_0$ ; 4) PPLANAVX (2005).

**Figura 5.5 Zonas plásticas na coluna de Van Kuren & Galambos (1964):**

(a) percentual de fatias plásticas; (b) seção crítica no nó 8;

(c) convenção: (==) tração, (||) compressão.

Todavia, comprova-se também que o ponto limite é de instabilidade, visto que o momento último (na trajetória descendente) representa apenas 77,6% de  $M_0$ . Nessa condição, a deformação plástica máxima é de  $\varepsilon_p = -6,8$  mm/m, enquanto no ponto limite foi de apenas  $\varepsilon_p = -2,7$  mm/m.

#### 5.4 COLUNA DE GALAMBOS & KETTER (1959)

Este exemplo é quase uma extensão do anterior, no qual se estuda as *Curvas de Interação* de Galambos & Ketter (1959), que foram produzidas de forma numérica, gabaritada com resultados experimentais de Van Kuren & Galambos (1964), depois aproximadas por equações empíricas e posteriormente adotadas pelas normas americanas do AISC (ASD, 1989; LRFD, 1986 e 1993).

Agora a barra mostrada na Fig. 5.6 sofre flexão do momento  $M$  e compressão da carga axial  $P$ , em ambas as extremidades, sendo o menor esforço aplicado fixo, enquanto no outro se faz o processo incremental com o fator  $\lambda$ , até atingir o colapso.

É incluído o efeito de curvatura inicial (CI), com  $\delta_0 = L/1000$ , em forma senoidal, com as tensões residuais (TR) quando introduzidas. Essas imperfeições são atributos mínimos, considerados no dimensionamento das normas (em geral, de uma forma implícita, por meio do módulo tangente  $E_t$ ).

Pela relação entre os esforços ( $N = P, M$ ) atuantes externos e as cargas nominais de escoamento à compressão ( $N_y$ ) bem como do momento plástico da seção ( $M_p$ ), traçam-se as curvas desejadas ( $N/N_y \times M/M_p$ ). Essas curvas de interação são mostradas em diversas fontes (Al-Mashary & Chen, 1991; Liew *et al.*, 1993; Chen & Toma, 1994; Hajjar *et al.*, 1997; etc.), porém, quase sempre, com tensões de escoamento anteriores (para aço ASTM A7, de  $\sigma_y = 22,76 \text{ kN/cm}^2$ , tomava-se  $E = 20692 \text{ kN/cm}^2$ ).

Na própria tese, o material suposto elástico perfeitamente plástico, adotou-se o aço ASTM A 36, de  $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ , com o módulo  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ .

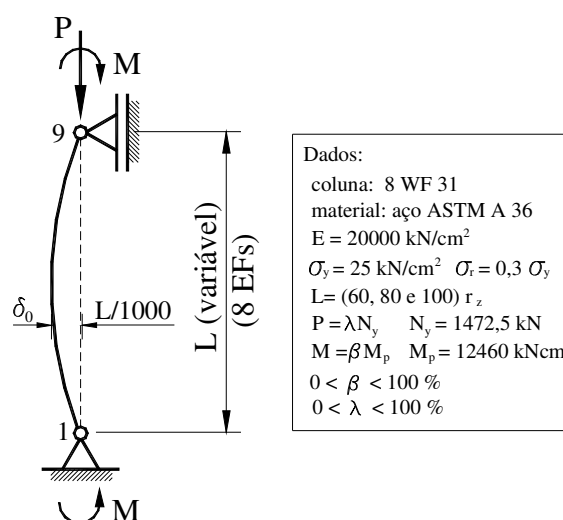
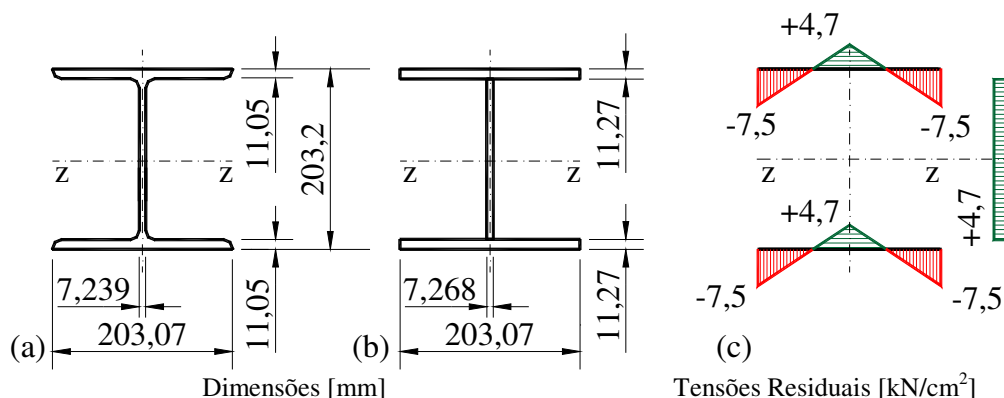


Figura 5.6 Coluna de Galambos & Ketter (1959).

**Tabela 5.4 Propriedades da seção 8 WF 31 da coluna.**

Refe-rência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t    alma a				elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]
AISC 1978	8,00 in	7,995 in	0,435 in	0,285 in	9,13 in <sup>2</sup>	110 in <sup>4</sup>	27,5 in <sup>3</sup>	30,4 in <sup>3</sup>
Convertido	203,20	203,07	11,049	7,239	58,903	4578,54	450,64	498,16
PT	=	=	11,270 <sup>(2)</sup>	7,268 <sup>(2)</sup>	=	4577,30	450,50	498,50

Notas: 1) PT: própria tese; 2) valores aproximados de forma a manter a área bruta  $A_g$  e inércia  $I_z$ .

**Figura 5.7 Perfil da coluna 8 WF 31:**

(a) laminado original; (b) seção equivalente; (c) TR de Galambos & Ketter (1959).

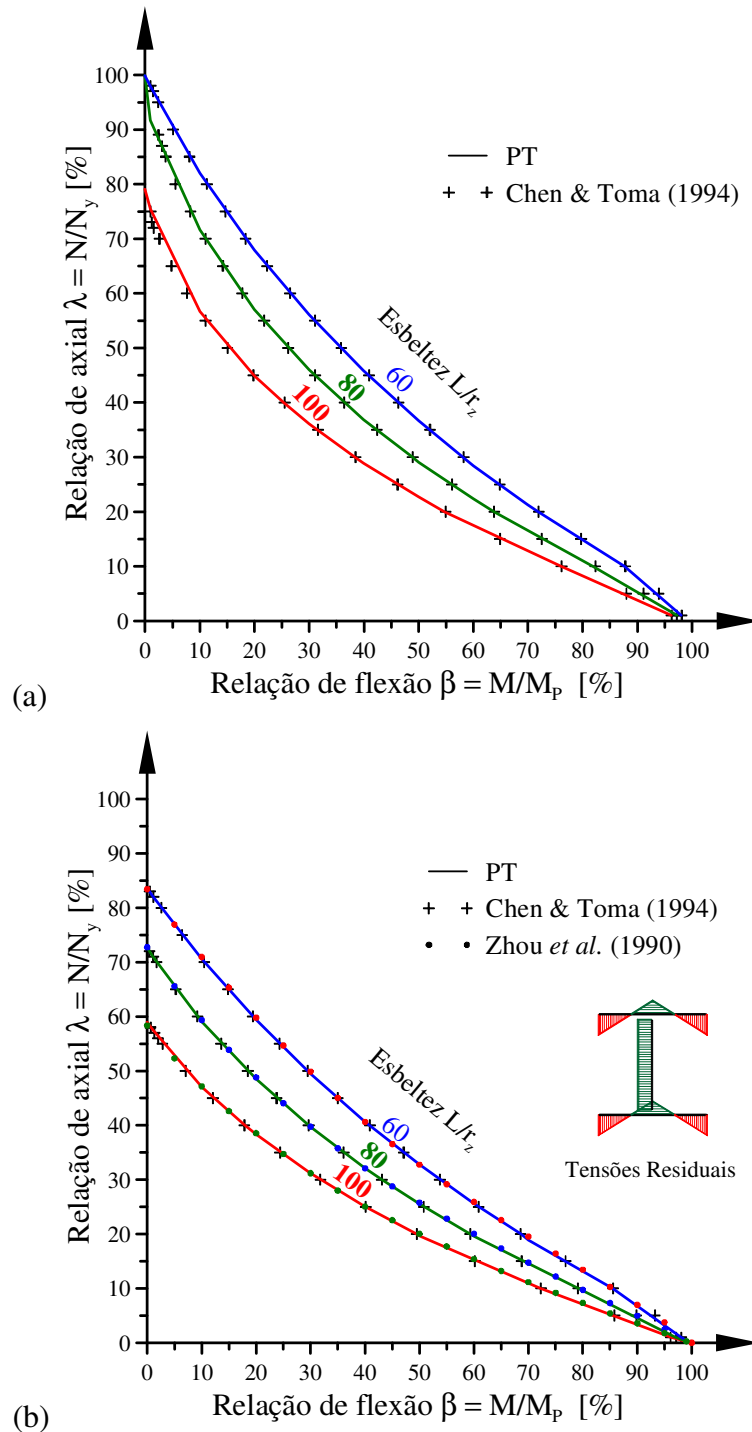
Nas figuras 5.7(a-b), mostra-se o perfil laminado com a seção equivalente, na Tab. 5.4 apresentam-se as propriedades geométricas da seção original e também os valores ajustados adotados no modelo da PT.

No modelo adotado, empregou-se 8 EFs, sendo avaliadas duas condições: sem e com tensões residuais (TR), indicadas na Fig. 5.7(c). São TR lineares, do tipo indicado por Galambos & Ketter (1959), com o valor máximo  $\sigma_r \text{ máx} = 0,3 \sigma_y$ . Essas tensões residuais constituem um padrão adotado pelos exemplos contidos na literatura americana (Chen *et al.*, 1996) que são seguidos nesta tese.

O número de fatias na condição com TR para as abas foi de 200, e 20 em caso contrário; na alma, foram adotadas 36 fatias em ambos os casos.

Para comparar os resultados, empregou-se a versão desenvolvida do programa “BCIN.for” de Chen & Toma (1994), adotando os mesmos dados. *FLEXCOMP* executou um mínimo de 20 iterações por passo, tolerância de 0,1%, com 40 fatias na aba e 40 na alma e analisou 21 seções (nós).

As curvas de interação para esbelteza  $L/r_z = 60, 80$  e  $100$  são mostradas na Fig. 5.8(a) sem TR e 5.8(b) com TR, destacando-se a concordância com as de *FLEXCOMP*, embora os resultados obtidos registrem pequenas diferenças.



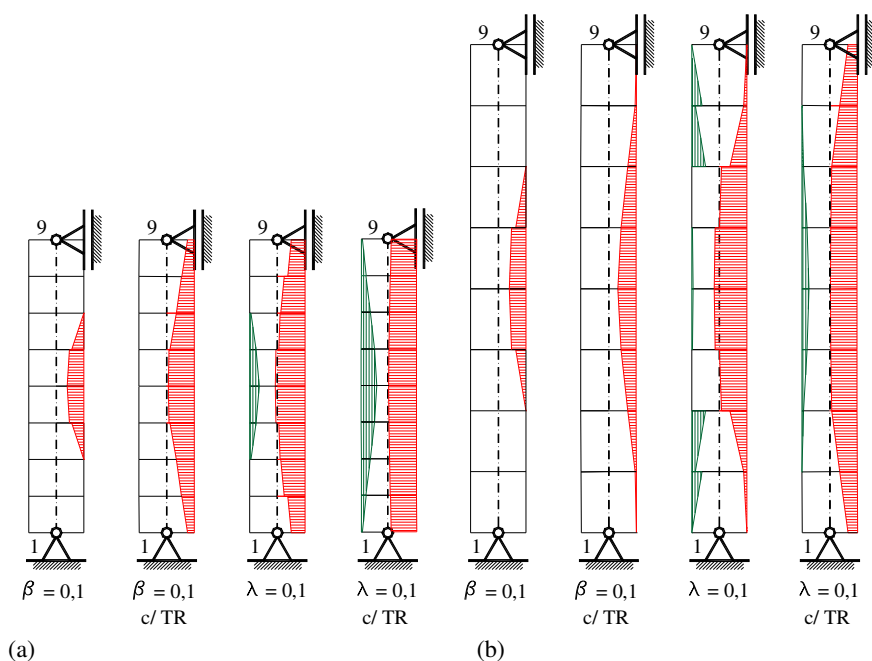
**Figura 5.8** Curvas de interação de Galambos & Ketter:  
 (a) sem tensões residuais; (b) com tensões residuais.

Indica-se que esses resultados foram produzidos pela versão 2005/7 do *PPLANAVX*, que possui maior tendência ao colapso por compressão dada a *IIEA* anterior [isso em relação à versão atual (*PPLANAVA*)]. Mesmo assim, os resultados ficam muito próximos dos encontrados por Zhou *et al.* (1990), no caso, incluindo TR.

Para comparação, foi avaliado o caso similar ao do exemplo da seção 5.2, que possui momento numa extremidade apenas, com  $P = 0,8 N_y$  (1072,5 kN),  $L = 352,6$  cm ( $L/r_z = 40$ ) e os demais dados seguem os da Tab. 5.3, adotando os mesmos valores originais do aço ASTM A7, ou seja,  $E = 20762$  kN/cm<sup>2</sup> e  $\sigma_y = 22,76$  kN/cm<sup>2</sup>.

Os valores obtidos pelo programa computacional *PPLANAVX* (2005) foram: fator de carga  $\lambda_c \geq 21,2\%$  (21,128), flecha vertical  $\delta_y = 0,479$  cm (0,460) e rotação máxima (no nó onde atua  $M_0 = 11346$  kNcm)  $\phi_B = 8,146$  mrad (8,884), que estão próximos dos produzidos por *FLEXCOMP* (em parênteses) nas mesmas condições. Comparando-se as respostas com as de Galambos & Ketter (1959): o momento de colapso 2383,3 kNcm (crítico) é inferior a 2416,7 kNcm, obtido por *FLEXCOMP* ou *PPLANAVX*. Há uma discrepância geral de valores (da ordem de 3%), que se explica pela falta de maiores recursos na época (1959), quando se desprezou a deformação axial, que tem a mesma ordem de grandeza da transversal e, assim, interfere também nos resultados.

Finalizando, na Fig. 5.9 faz-se um diagrama das fatias plásticas no colapso, para casos de esbeltez  $L/r_z$ : 60 e 100. Observa-se que a plasticidade é maior na seção mais robusta e torna-se mais concentrada, quando não se consideram as TRs. Todavia, quando se introduzem as TRs, a plasticidade se torna extensa (ao longo de toda a barra), e para momento pequeno ( $\beta = 0,1$ ) ocorrem apenas ZPs de compressão. Já quando o axial é pequeno ( $\lambda = 0,1$ ), ocorrem ZPs também de tração, embora as outras sejam bem maiores. Isso ressalta como é importante considerar as TRs nos modelos.



**Figura 5.9 Zonas plásticas das colunas de Galambos & Ketter (1959)**  
(a) esbeltez  $L/r_z = 60$ ; (b) esbeltez  $L/r_z = 100$ ; (c) convenção: (||) tração, (==) compressão.

## 5.5 PORTAL DE CHEN *ET AL.* (1996)

O portal ilustrado na Fig. 5.10 foi proposto por Chen *et al.* (1996) e investigado sob diversas formas por esses pesquisadores. Esse exemplo será explorado também para avaliar a ação da *IIEA* (Alvarenga, 2005 e 2008) mostrando suas melhorias e as alternativas existentes para empregar essa *técnica das fatias* (Lavall, 1996).

Para acompanhar a norma americana, que é empregada nas verificações, a curvatura inicial (CI), no sentido indicado, com arco de círculo, e as tensões residuais de Galambos & Ketter (1959) foram introduzidas como imperfeições explícitas. O modelo adotado para análise por zona plástica emprega 18 EFs, sendo 6 para cada barra.

As seções dos perfis adotados foram ajustadas, com as propriedades indicadas na Tab. 5.5. As cargas no enunciado original são  $P_1 = 356$  kN e  $P_2 = 267$  kN. Aplicaram-se cargas maiores de forma que o programa computacional pudesse encontrar o fator de colapso independentemente, mantendo-se apenas a relação dada ( $P_2 = 75\% P_1$ ).

Esse portal é inicialmente avaliado nas diversas considerações de análise plástica, com os resultados fornecidos em Chen *et al.* (1996) e, a seguir, apresentam-se os resultados dos casos de zona plástica estudados, como visto na Tab. 5.6.

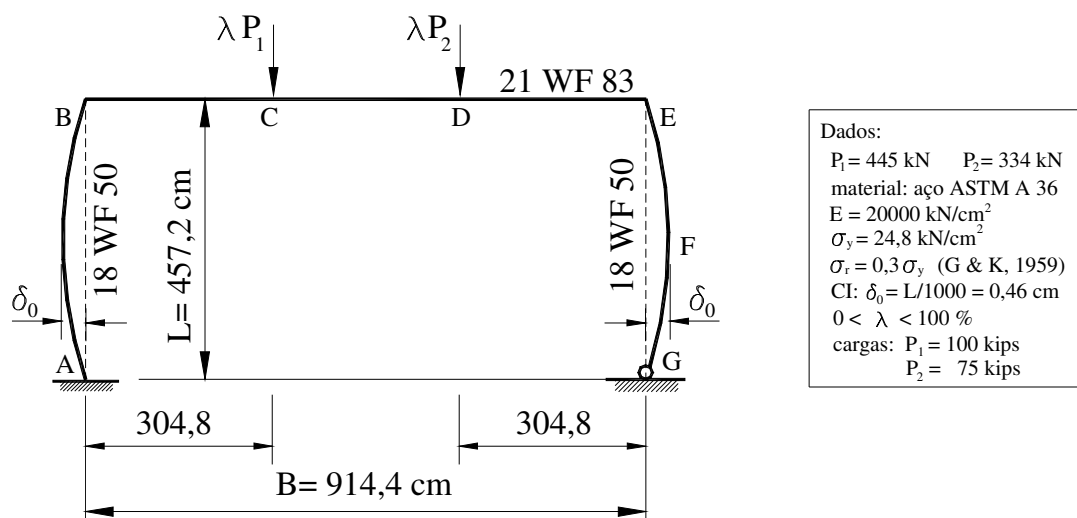


Figura 5.10 Portal de Chen *et al.* (1996).

Tabela 5.5 Propriedades das seções do portal de Chen *et al.* (1996).

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras				elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]
			aba t	alma a				
18WF50	457,2	190,5	14,478	9,017	94,84	33298,0	1456,8	1655,1
PT	=	=	14,655 <sup>(2)</sup>	9,116 <sup>(2)</sup>	=	33299,3	1456,7	1652,8
21WF83	543,6	212,3	21,209	13,081	156,77	76170,4	2802,2	3211,9
PT	=	=	21,652 <sup>(2)</sup>	12,957 <sup>(2)</sup>	=	76169,9	2802,6	3210,2

Notas: 1) PT: própria tese; 2) valores aproximados de forma a manter área bruta  $A_g$  e inércia  $I_z$ .

**Tabela 5.6 Análises do portal de Chen *et al.* (1996).**

Método	$\lambda_c$ <sup>(8)</sup> [ ]	Forças [kN]			Momentos de flexão [kNm]				
		H	V <sub>A</sub>	V <sub>G</sub>	M <sub>A</sub>	M <sub>B</sub>	M <sub>C</sub>	M <sub>D</sub>	M <sub>E</sub>
Rig. plást. <sup>(1)</sup>	0,972	89,9	396,5	360,4	0,0	411,0	797,2	687,5	411,0
ERP 2 <sup>o</sup> ord. <sup>(2)</sup>	0,933	83,3	380,5	346,2	9,4	375,4	790,3	678,7	380,7
ERP Ref. <sup>(3)</sup>	0,936	74,9	381,3	347,1	8,1	337,7	711,1	610,3	342,6
ZP média <sup>(4)</sup>	0,950	85,0	387,1	352,7	15,2	393,5	792,5	682,3	397,6
ZP direto <sup>(5)</sup>	0,920	113,4	485,4	213,2	125,8	388,6	757,9	652,8	390,8
PT (2005) <sup>(6)</sup>	0,866	84,9	347,8	326,6	40,64	342,7	720,1	605,4	392,7
PT (2008) <sup>(7)</sup>	0,946	84,8	385,4	351,3	13,34	391,4	788,2	678,9	395,9

Notas: 1) método plástico clássico; 2) método elástico com rótulas plásticas de 2<sup>a</sup> ordem; 3) idem 2, refinado; 4) zona plástica com média  $Q_1 = (N_A + N_B)/2$  (Lavall, 1996); 5) ZP com  $N_A \neq N_B$  direto, (valores encontrados na integração); 6) zona plástica com *IIEA* anterior (Alvarenga, 2005); 7) *IIEA* versão 2008; 8) valores de  $\lambda_c$  dos casos 1 a 3 (Chen *et al.*, 1996), ajustados para os dados de ZP.

**Tabela 5.7 Análises de ZP do portal de Chen *et al.* (1996).**

Método da zona plástica	$\lambda_c$ [ ]	Esforços axiais [kN]							
		EF 6 (coluna A-B)				EF 13 (coluna E-F-G)			
		N <sub>A</sub>	N <sub>B</sub>	Q <sub>1</sub>	dN	N <sub>A</sub>	N <sub>B</sub>	Q <sub>1</sub>	dN
média <sup>(1)</sup>	0,950	401,4	374,0	387,7	27,4	322,1	383,7	352,9	61,6
direto <sup>(2)</sup>	0,920	441,7	376,1	408,9	65,6	342,2	132,6	237,4	209,7
PT (2005) <sup>(3)</sup>	0,866	348,8	348,8	348,8	0,0	327,3	327,3	327,3	0,0
PT (2008) <sup>(4)</sup>	0,946	386,5	386,5	386,5	0,0	351,0	351,0	351,0	0,0

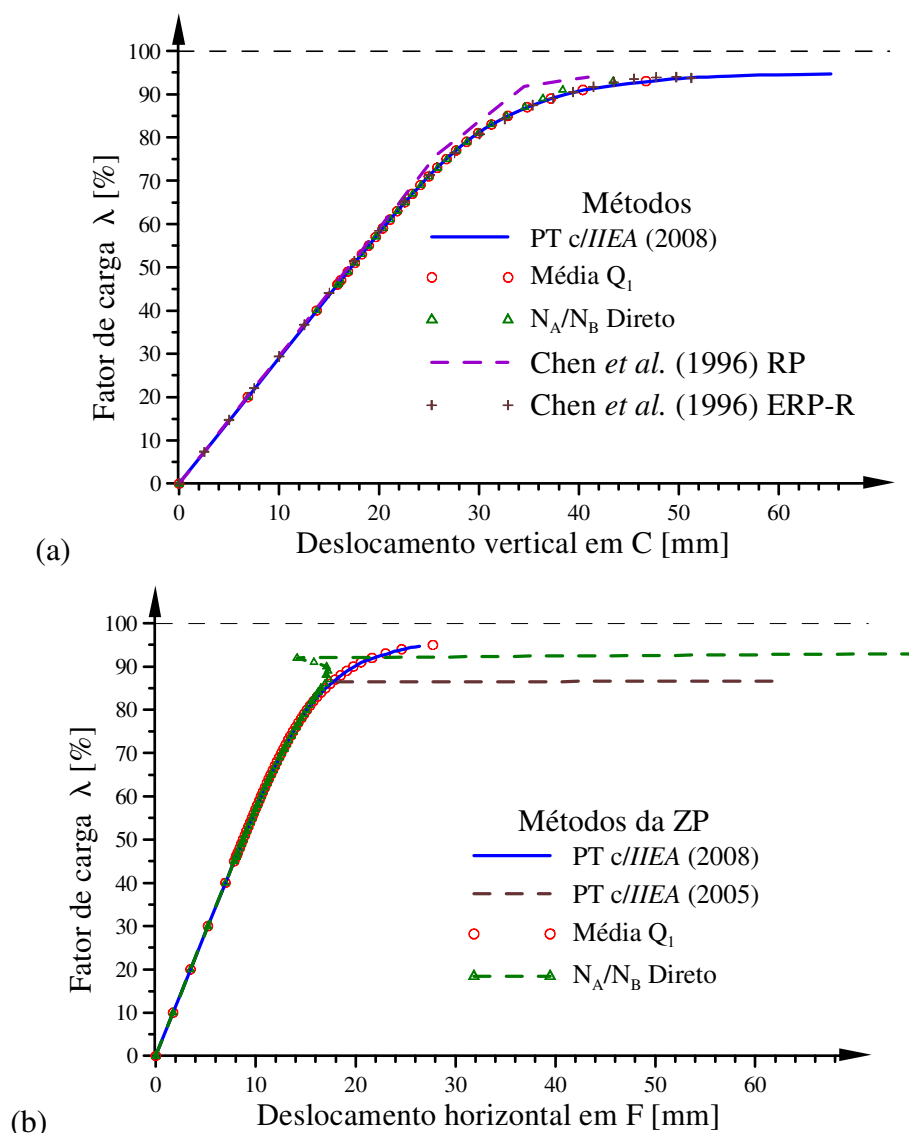
Notas: 1) zona plástica com média  $Q_1 = (N_A + N_B)/2$  (Lavall, 1996), 2) ZP com  $N_A \neq N_B$  direto, (valores encontrados na integração), 3) zona plástica com *IIEA* anterior (Alvarenga, 2005), 4) *IIEA* versão 2008 (Alvarenga, 2008).

Na tabela 5.7, destacam-se os esforços axiais  $N_A$  e  $N_B$  encontrados, nos estudos com ZP, indicando os resultados obtidos com a *IIEA* (2005 e 2008); a introdução dos esforços obtidos na integração sem qualquer ajuste ou correção (direto); e, também, o valor médio que corresponde à  $Q_1$ , adotado por outros pesquisadores.

Agora, é feita a primeira comparação de resultados pela Fig. 5.11, que ilustra duas trajetórias de equilíbrio em função do fator de carga  $\lambda$ . O deslocamento vertical do ponto C (nó 9) (embora não seja máximo, que é o do nó 10), na Fig. 5.11(a), mostra que as respostas produzidas acompanham as obtidas por Chen *et al.* (1996). Já o deslocamento horizontal do ponto F (nó 15), que é o de maior valor, representado na Fig. 5.11(b), elucida a diferença entre os resultados dos métodos de ZP.

Observe que este exemplo é um caso típico de formação de mecanismo plástico de viga, para o qual a versão anterior de *PPLANAVX* (2005) sempre mostrou um resultado pior, visto que a correção dN era incluída sempre na parte de maior plasticidade. Por isso, acelera a degradação da ZP no nó mais solicitado, o que, quando a plasticidade cresce (se distribuindo ao longo da barra) na flexão, pode-se tornar inadequado. Essa é a condição de pior resultado para a versão da *IIEA* anterior (2005). A versão atual ajusta a plasticidade no local e da forma necessária.





**Figura 5.11** Trajetórias de equilíbrio do portal de Chen *et al.* (1996):  
(a) vertical no ponto C; (b) horizontal no ponto F.

Sobre os diversos tipos de análise, fazem-se as seguintes observações:

- Chen *et al.* (1996) indicaram uma deflexão vertical máxima aproximada do ponto C de  $\delta y_C \approx 5,6$  cm (2,2 in), empregando o método ERP refinado;
- o emprego dos valores oriundos diretamente da integração do axial ( $N_A$  e  $N_B$ ) provocou uma trajetória bastante irreal e apresentou, além disso, valores bastante diferentes do aceitável. Esse cálculo foi realizado com passos de 1%, embora isso não modifique o comportamento antes observado; a MRG ficou singular na rotação z do EF que contém o ponto C e encontrou-se o deslocamento vertical  $\delta y_C = 4,0$  cm ( $\lambda_c = 92\%$ );
- o processo com o valor médio  $Q_1$  atingiu o mesmo fator de carga. Neste caso, a trajetória de deslocamentos não é tão diferente, visto que o desvio é interno, e na

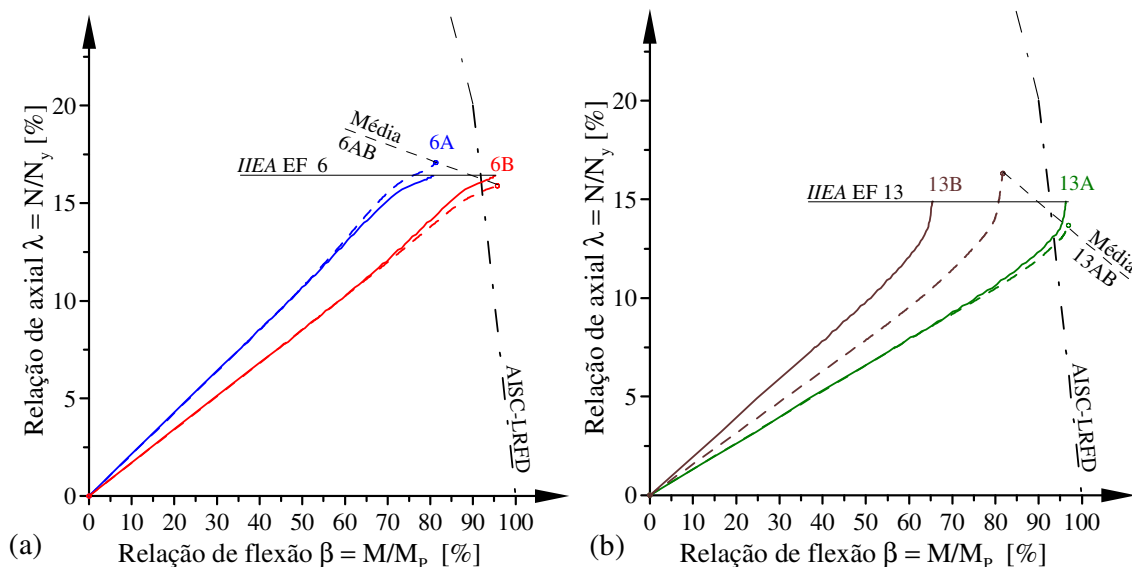
- média tais valores estariam corretos, embora não nas tensões e deformações das fatias. Esse cálculo foi paralisado com o fator 95%, quando o critério de convergência não foi atendido em 1200 iterações, tendo alcançado  $\delta y_c = 6,9$  cm ( $\lambda_c = 94,9\%$ );
- d. a versão anterior da *IIEA* encontrou sobrecarga de memória no EF 13 (próximo ao ponto F), com um fator de carga bem menor ( $\lambda = 86,6\%$ ) e o deslocamento menor  $\delta y_c = 3,4$  cm, num colapso prematuro;
  - e. a versão atual da *IIEA* controla melhor a formação das ZPs nos casos em que o efeito de momento fletor é maior e, também, não converge com 1200 iterações, mas com evidentes sinais de colapso (com o controle iterações avaliado em 100%, enquanto na convergência tal controle seria de 0,1%). Determinou-se a flecha  $\delta y_c = 6,2$  cm ( $\lambda_c = 94,6\%$ ), nesse caso.

Para ver-se melhor a diferença entre a aplicação do valor médio  $Q_1$  e do processo da *IIEA*, nas Figs. 5.12(a-b), representam-se os comportamentos dos EFs 6 e 13, que correspondem às extremidades superiores das colunas, sendo que os nós (B) do EF 6, e (A) do EF 13 estão conectados à viga. Verifica-se que as trajetórias da versão com a média apresentam uma condição de desequilíbrio na qual a barra com maior  $M/M_p$  possui no final o menor  $N/N_y$ , enquanto na outra extremidade do mesmo EF a relação  $N/N_y$  é maior. Pode-se dizer que houve uma *passagem artificial* de carga axial do nó mais carregado à flexão, para o menos carregado, o que não pode ser aceitável.

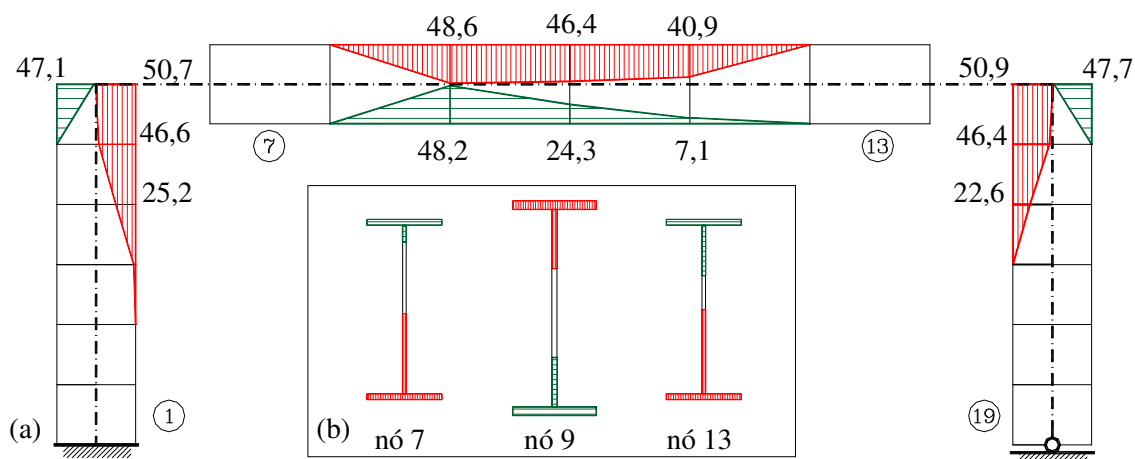
Já as trajetórias dos EFs com a *IIEA* estão em mesmo nível de carga ( $N/N_y$ ) independentemente do que sucede com  $M/M_p$ , como se espera. A diferença mais marcante pode ser acompanhada na trajetória do nó (B) do EF 13, cujos comportamentos são bem distintos. Isso ressalta que, neste exemplo, o efeito tende a ser local, nos esforços do EF, no seu comportamento e dimensionamento apenas. (Obs. para a coluna:  $N_y = 2352$  kN e  $M_p = 41046$  kNcm).

Nas figuras 5.13(a-b), pode-se comprovar a formação de mecanismo plástico clássico, chamado “colapso de viga”, que com a ZP deixa de ser algo nos pontos de momento máximo para estender-se ao longo das barras. Fica evidente, porém, o colapso das seções: no topo das colunas B (nó 7), E (nó 13) e ponto C da carga  $P_1$  (nó 9).

Deve-se comentar que nos diversos casos de formação de mecanismo em que a flexão comanda o processo, os resultados obtidos pela versão anterior de *PPLANAVX* (2005-7) sempre apresentaram diferenças de (3-5)% em relação ao esperado.



**Figura 5.12** Diagramas de interação para colunas do portal de Chen *et al.* (1996): (a) EF 6 coluna A-B; (b) EF 13 coluna E-G; (c) com IIEA (—), com média (- -).



**Figura 5.13** Zonas plásticas do portal de Chen *et al.* (1996): (a) percentual na estrutura; (b) as seções críticas; (c) convenção: (==) tração, (||) compressão.

A atual versão parece conseguir obter um resultado melhor nesse trecho, ao fazer-se a correção do esforço axial, recuperando a diferença mais provável que se tenha originado quando ocorre o escoamento, em casos de zonas duplas com flexão.

Nas análises em que a flambagem comanda o processo, as duas versões tendem a produzir resultados próximos, pois conseguem detectar melhor a instabilidade, mesmo em casos de dupla zona plástica (à compressão), como será visto no próximo capítulo, que foi desenvolvido integralmente com a versão anterior do IIEA (2005-7), e com excelentes resultados.

## 5.6 PORTAL DE ARNOLD *ET AL.* (1968)

O portal representado na Fig. 5.14, já foi estudado por outros pesquisadores, incluindo El-Zanaty *et al.* (1980), Galambos (1982), Shen & Zheng (1995).

Além de ter seções diferentes para as colunas e a viga, também os materiais são distintos (ver a Tab. 5.8). Embora a geometria seja considerada sem imperfeições, as tensões residuais de Galambos & Ketter (1959) para laminados americanos foi adotada.

Este exemplo foi analisado duas vezes. Na primeira vez, empregaram-se as propriedades das seções equivalentes adotadas com base nos perfis indicados em Galambos (1982), convertida em unidades do SI, apresentadas na Tab. 5.9.

Constatou-se que tais propriedades eram superiores às medidas no ensaio experimental (Arnold *et al.*, 1968), sendo o cálculo refeito para as propriedades corrigidas. A diferença encontrada nos perfis I compostos de retângulos, similares aos mostrados na Fig. 5.7(b), entre os valores nominais e os medidos, foi então retirada dos valores-padrão tabelados dos laminados (da Tab. 5.9). Essa diferença (redução) é indicada de forma sumária na Tab. 5.10.

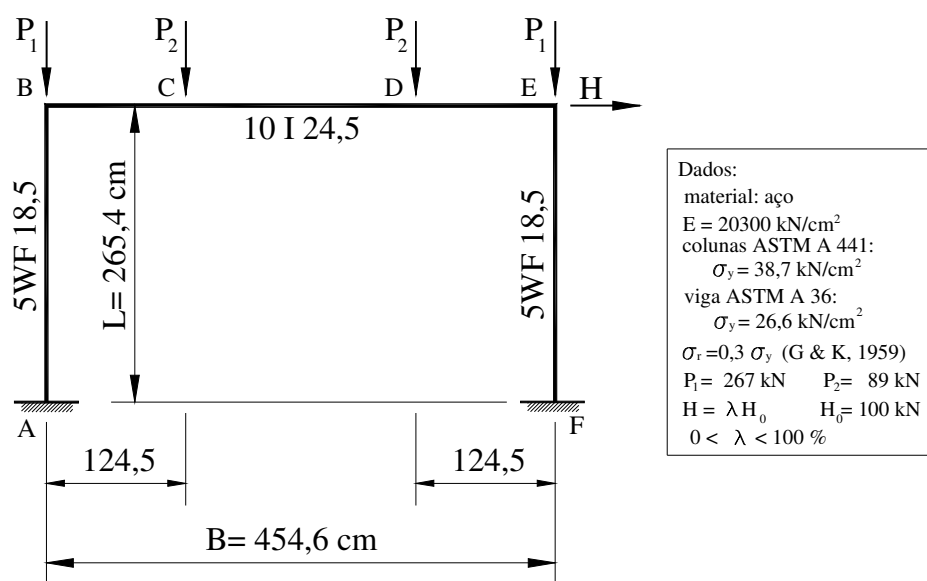


Figura 5.14 Portal de Arnold *et al.* (1968).

Tabela 5.8 Propriedades dos materiais do portal.

Aço ASTM	$\sigma_v^{(3,4)}$	$\sigma_u^{(3)}$	$\sigma_r^{(3)}$	$E^{(1,3)}$	$E_s^{(3,5)}$	$\epsilon_v$ [mm/m]	$\epsilon_s$ [mm/m] <sup>1</sup>
A 36	26,6	45,0	7,98	20337	476	1,31	18,78 <sup>(2)</sup>
A 441	38,7	56,6	11,62	20389	487	1,90	18,28 <sup>(2)</sup>

Notas: 1) Adotado  $E = 20300 \text{ kN/cm}^2$ ; 2) a deformação última ( $\epsilon_u$ ) não foi informada; 3) em  $[\text{kN/cm}^2]$ ; 4) Shen & Zheng (1995) indicaram  $\sigma_y = 26,59$  e  $38,73$ ; 5) módulo tangente  $E_t = (E \cdot E_s)/(E + E_s)$ , módulo plástico (ou de endurecimento)  $E_s = (E \cdot E_t)/(E - E_t)$ .

Arnold *et al.* (1968) citaram o deslocamento máximo aproximado de  $\Delta_E = 17,78$  cm, com a carga máxima de  $H = 74,8$  kN. Baseados em mecanismo plástico, previram um valor teórico maior:  $H = 94,3$  kN e justificaram que houve a redução da resistência por instabilidade. Shen & Zheng (1995) indicaram a carga máxima do ensaio  $H = 75,17$  kN e a da sua teoria, com o chamado método “NIM”,  $H = 75,87$  kN.

Não existem muitos detalhes sobre o modelo empregado ou valores obtidos nas outras referências de maneira geral. Seria natural o emprego de 5 EFs para o estudo desse portal. No modelo desta tese, foram adotados 20 EFs, sendo 6 em cada coluna e 8 EFs na viga. Atingiu a carga  $H = 77,3$  (73,8) kN, com a seção teórica (a experimental, em parêntesis), respectivamente.

As trajetórias de equilíbrio do portal, considerando o deslocamento horizontal do ponto E, são traçadas na Fig. 5.15. Os resultados de El-Zanaty *et al.* (1980) também foram reproduzidos empregando o método elástico com rótulas plásticas (de primeira ordem e de segunda) bem como a análise inelástica da sua tese, que é do tipo zona plástica, porém não considera o deslocamento do centro de gravidade plástico ( $CG_P$ ).

Nessa figura, são indicados, também, os resultados do ensaio experimental e as duas análises com zona plástica desta tese, com as seções padrão bem como as reduzidas.

**Tabela 5.9 Propriedades das seções do portal.**

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t    alma a				elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]
10 I25,4 Convertido	10,00 in 254	4,66 in 118,36	0,491 in 12,471	0,310 in 7,874	– 48,10	– 5140	– 404,7	28,0 in <sup>3</sup> 458,8
PT	=	=	12,567 <sup>(2)</sup>	8,019 <sup>(2)</sup>	=	=	=	464,1
5 WF 18,5 Convertido	5,12 in 130,05	5,025 in 127,63	0,420 in 10,668	0,265 in 6,731	– 35,87	– 1094,7	– 167,4	11,4 in <sup>3</sup> 186,8
PT	130,81	127,76	11,139 <sup>(2)</sup>	6,825 <sup>(2)</sup>	=	=	=	190,4

Notas: 1) PT: própria tese; 2) valores aproximados de forma a manter a área bruta  $A_g$  e a inércia  $I_z$ .

**Tabela 5.10 Propriedades das seções reduzidas dos perfis do portal.**

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t    alma a				elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]
10 I25,4 <sup>(3)</sup> Redução <sup>(4)</sup>	254,00	118,36	12,474	7,874	47,565 0,389	5098,8 35,9	401,5	459,9
PT	254,00	118,40	12,463 <sup>(2)</sup>	7,944 <sup>(2)</sup>	47,711	5104,1	401,9	460,6
5WF18,5 <sup>(3)</sup> Redução <sup>(4)</sup>	130,05	127,63	10,668	6,731	34,550 0,831	1044,9 34,6	160,7	182,4
PT	130,81	127,76	10,599 <sup>(2)</sup>	7,271 <sup>(2)</sup>	35,039	1060,1	162,1	184,5

Notas: 1) PT: própria tese; 2) valores aproximados para obter a área bruta  $A_g$  e a inércia  $I_z$  equivalentes;

3) valores obtidos com I de retângulos para os dados de El-Zanaty *et al.* (1980);

4) correções para reduzir os valores indicados na Tab. 5.9 (padrão).

Comprova-se que, com o ajuste de propriedades das seções, os resultados acompanharam bem os inelásticos com ZP de El-Zanaty *et al.* (1980), situando-se logo abaixo da curva experimental. Por outro lado, empregando as seções originais dos perfis, supera-se a curva experimental, (já que as propriedades são maiores).

Note-se que Arnold *et al.* (1968) indicaram o comportamento elástico do portal até a introdução da carga vertical total. Entretanto, no modelo numérico adotado, constatou-se o escoamento com 94,7% (92,7%) da carga aplicada, na opção experimental, (original em parêntesis), respectivamente.

Na figura 5.16(a), ilustra-se o estado final das fatias de plásticas no colapso do modelo, identificando-se claramente a formação do mecanismo com 5 ZPs, ou seja, um colapso dito sobrecompleto, porque bastariam 4 ZPs (ou RPS, rótulas plásticas) para formar-se o mecanismo de colapso combinado ou o de andar.

Verifica-se, pelas seções indicadas na Fig. 5.16(b), relativas aos nós mais solicitados em situação pré-colapso, que a plasticidade está bem avançada, mas ainda não se formou uma seção em estado último (totalmente plástica). Os nós (1 e 7) da coluna esquerda ainda têm alguma região elástica, enquanto os nós (15 e 20) da coluna direita e nó (9) do meio-vão da viga se encontram em situação mais grave.

Por outro lado, o salto no deslocamento lateral do nó E de 10,17 (9,77) cm para 12,46 (17,08), aproximadamente, comprovam a perda de instabilidade antes do colapso por final da resistência, (modelo original em parêntesis).

A carga limite ocorre ligeiramente antes do mecanismo se completar, com o escoamento generalizado na seção do ponto C, como foi indicado antes.

Esses resultados foram produzidos pela versão de 2008, embora em outros exemplos se tenha constatado que ambas as versões reproduzem os mesmos resultados.

A última versão em operação de *PPLANAVA* (2010) reproduz também esses resultados, com mínima diferença em relação à versão de 2008. Esse exemplo foi exaustivamente reproduzido nos ensaios das diversas versões e testes da *IIEA*, auxiliando sobremaneira no diagnóstico de falhas e ajustes necessários do programa computacional.

Tendo-se comprovado a funcionalidade do programa computacional e da formulação básica, com resultados de qualidade, no próximo capítulo, estuda-se o EF rígido-rótula, que é um passo em direção ao estudo do efeito das ligações.

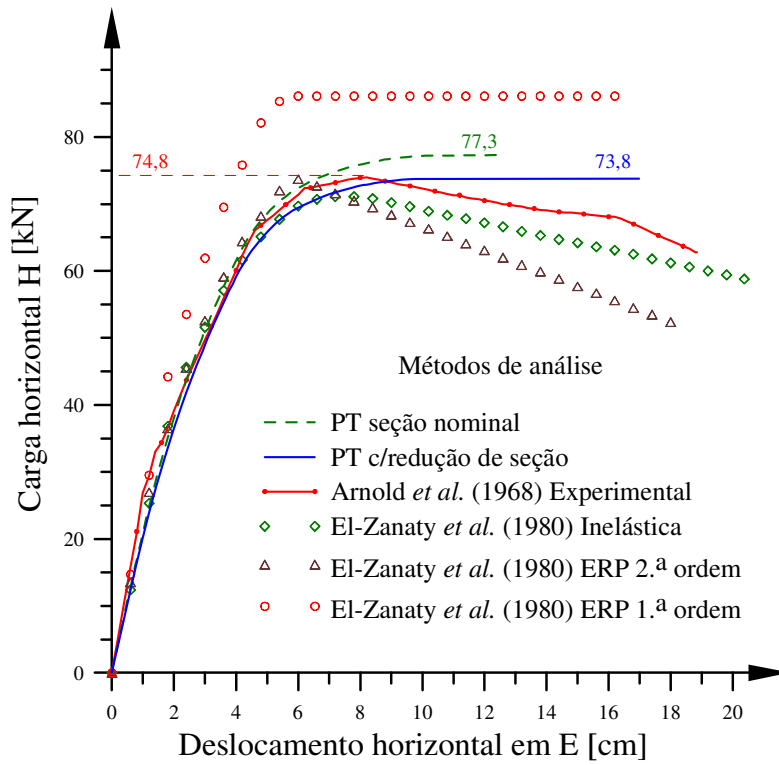


Figura 5.15 Trajetória de equilíbrio do portal de Arnold *et al.* (1968).

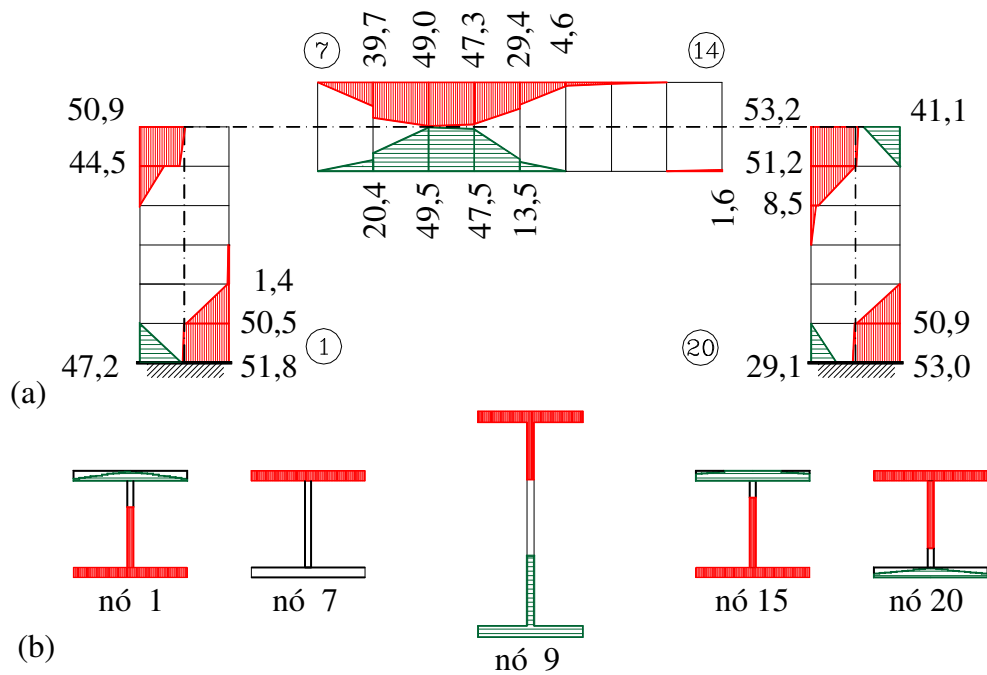


Figura 5.16 Zonas plásticas do portal de Arnold *et al.* (1968):  
 (a) percentual na estrutura; (b) as seções críticas; (c) convenção: (—) tração, (||) compressão.

## 5.7 REFERÊNCIAS

AISC ASD (1989), *Allowable stress design - Specification for structural steel buildings*, 9<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC LRFD (1986), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 1<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC LRFD (1993), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 2<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

Al-Mashary, F. & Chen, W.F. (1991), “Simplified second-order inelastic analysis for steel frames”, *The Structural Engineer*, Vol. 69, No. 23(3), pp. 395-399.

Alvarenga, A.R. (2005), “*Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*”, Diss. de Mestrado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto/MG.

Alvarenga, A.R. (2008), “*Estudos sobre ligações com análise avançada através da zona plástica em pórticos planos de aço*”, Ex. de Qualificação, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto/MG.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008c), “Integração iterativa do esforço axial na análise inelástica com zona plástica”, *Anais do XXIX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Maceió/AL.

Arnold, P., Adams, P.F. & Lu, L.W. (1968), “Strength and behavior of an inelastic hybrid frame”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 94, No. 1, pp. 243-266.

Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames - Theory software and applications*, C.R.C. Press, Boca Raton.

Chen, W.F., Goto, Y. & Liew, J.Y.R. (1996), *Stability design of semi-rigid frames*, John Willey and Sons, Nova Iorque.

El-Zanaty, M.H., Murray, D.W. & Bjorhovde, R. (1980), “*Inelastic behavior of multi-story steel frames*”, Structural Engineering Report, No. 83, Univ. Alberta, Canadá.

Galambos, T.V. (1982), *Structural members and frames*, Dept. Civil Engineering, Univ. Minnesota, Mineapolis.

Galambos, T.V. & Ketter, R.L. (1959), “Columns under combined bending and thrust”, *ASCE J. Eng. Mechanics*, Vol. 85, No. 2, pp. 1-30.

Hajjar, J.F. & outros (1997), *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for American steel design*, ASCE, Nova Iorque.

Lavall, A.C.C. (1996), “*Uma formulação teórica consistente para a análise não-linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal*”, Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos / SP.

Liew, J.Y.R., White, D.W. & Chen, W.F. (1993), “Second-order refined plastic-hinge analysis for frame design Part I-II”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 119, No. 11, pp. 3196-3237.

King, W.S.; White, D.W. & Chen, W.F. (1992), “Second-order inelastic analysis methods for steel-frame design”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 118, No. 2, pp. 408-428.

Shen, Z.Y. & Zheng, W.G. (1995), “A new numerical integration method for the analysis of steel structural stability”, *Pacific Steel Structures Conference 4 PSSC*, Vol. 1, pp. 543-550.

Van Kuren, R.C. & Galambos, T.V. (1964), “Beam-column experiments”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 90, No. 2, pp. 223-256.



Zhou, D.P., Duan, L. & Chen, W.F. (1990), “Comparison of design equations for steel beam columns”, *Structural Engineer. Review*, Vol. 2, No. 1, pp. 45-53; em Liew *et al.* (1993) ed.

# 6

## ELEMENTO FINITO RÍGIDO-RÓTULA

### SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
6.1	Introdução	262
6.2	Formulação numérica do EF rígido-rótula .....	264
6.3	Coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	266
6.4	Coluna de Lu & Kamalvand (1968) .....	270
6.5	Portal de Kanchanalai (1977)	277
6.6	Portal de Hajjar <i>et al.</i> (1997) .....	283
6.7	Referências	298

## 6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo desenvolve-se o elemento finito (EF) rígido-rótula como mais um caso particular do EF geral, apresentado no capítulo 3, agora para a condição de rigidez da extremidade com ligação ser nula.

Como se mostrou no capítulo 2, de fato não existe tal rigidez nula, mas uma ligação bastante flexível. Entretanto, por ser uma condição limite inferior da rigidez tem um papel relevante ao permitir a exploração com a *Análise Avançada* de problemas que marcaram o desenvolvimento dos métodos elásticos e inelásticos de segunda ordem, como no estudo da coluna-escora (Siat-Moy, 1986).

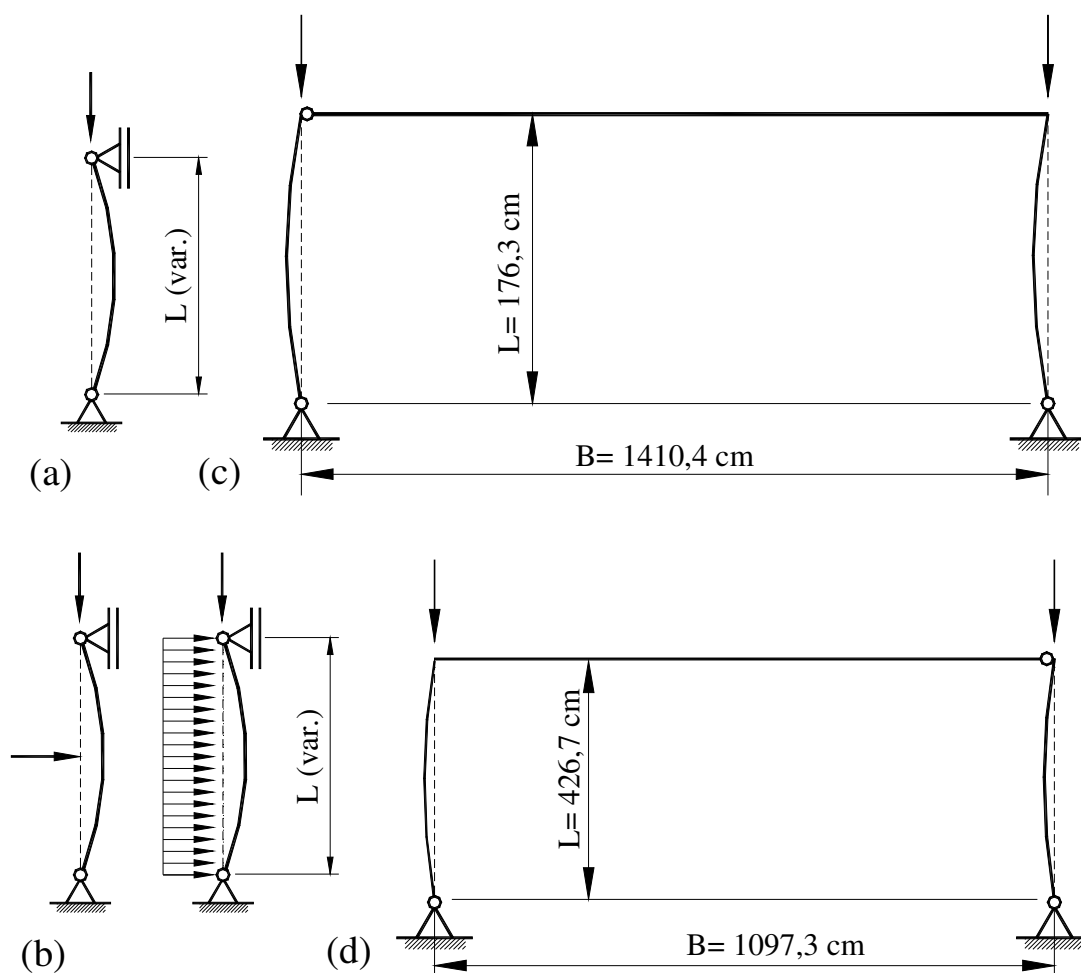
Na seção seguinte, obtêm-se de forma simplificada as partes da formulação numérica correspondentes, como o campo de deslocamentos, de deformações e as matrizes de rigidez. Para isso emprega-se ( $\eta = 0,5$ ) nas equações básicas do capítulo 3.

A validação aborda quatro exemplos de estudo especiais, ilustrados na Fig. 6.1:

- a. determina-se a carga de flambagem elástica ou inelástica, da coluna simples na Fig. 6.1(a), estudada por Hajjar *et al.* (1997), para reproduzir a curva do AISC LRFD (1993). O modelo emprega nas extremidades o EF rígido-rótula e os resultados se comparam com os anteriores (Alvarenga & Silveira, 2005);
- b. avalia-se o comportamento da coluna à flexo-compressão, como estudaram Lu & Kamalvand (1968), cujos resultados foram utilizados posteriormente por Foley & Vinnakota (1999) para validar sua formulação inelástica. Analisam-se dois tipos de carga provocando a flexão, sendo uma concentrada no meio-vão e outra distribuída, como representado na Fig. 6.1(b);
- c. o emprego da coluna tipo escora, ou birrotulada, que constitui uma “solução econômica e comum na prática” (Kanchanalai, 1977), é estudado na estrutura do portal da Fig. 6.1(c). Os diagramas, correspondentes à interação entre a carga vertical de compressão das colunas (incluindo o efeito da escora) e o momento atuante são primórdios das atuais normas americanas (Galambos *et al.*, 1998); e
- d. verifica-se a influência dessa coluna escora no dimensionamento à flambagem, analisando o portal, proposto por Hajjar *et al.* (1997), que é similar ao estudado no controverso “paradoxo do fator k” (Siat-Moy, 1986). O estudo desse portal descrito na Fig. 6.1(d) fornece algumas conclusões interessantes para as normas (Alvarenga & Silveira, 2008a).

Esses trabalhos possuem aplicação na validação de resultados obtidos por diversos tipos de formulações inelásticas, pois algumas dessas soluções são consideradas “exatas” pela comunidade científica mundial (Chen & White, 1993).

Os resultados desta tese acompanham razoavelmente as respostas previstas por esses pesquisadores, constituindo assim uma fonte de consulta, para auxiliar os trabalhos de pesquisa e validações a serem desenvolvidos no futuro, formando um conjunto de *banco de provas* (“benchmark problems”, ver apêndice A.11). Note-se que as equações de interação consideram os esforços axiais (N) nas seções das barras, enquanto, em alguns exemplos, aplicam-se cargas verticais (P), que diferem desses valores nos pórticos, dado o efeito de tombamento e a deformação axial (que nem sempre são considerados). Por isso, essas grandezas são, às vezes, confundidas ( $P \approx N$ ).



**Figura 6.1 Exemplos analisados:**

- (a) coluna de Hajjar *et al.* (1997); (b) coluna de Lu & Kamalvand (1968);  
 (c) portal de Kanchanalai (1977); (d) portal de Hajjar *et al.* (1997).

## 6.2 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO EF RÍGIDO-RÓTULA

Apresentam-se agora partes complementares da formulação numérica geral do capítulo 3, lembrando-se, também, de que essa formulação foi apresentada de forma independente (Alvarenga, 2008; Alvarenga & Silveira, 2008b), quando se empregou para obter a expressão de  $v_O$ , o sistema da Eq. 3.25 como condições de contorno, porém substituindo a última expressão pela Eq. 3.24. Essa última parcela representa ( $v_O'' = 0$ ), ou seja, o momento na extremidade B é nulo ( $M_B = 0$ ). Portanto, o sistema construído para o EF rígido rótula é dado por:

$$\begin{bmatrix} c x_A^3 + d x_A^2 + e x_A + f \\ c x_B^3 + d x_B^2 + e x_B + f \\ 3c x_A^2 + 2d x_A + e \\ 6c x_B + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ \theta_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

e da expressão de ( $v_O$ ) em termos dos deslocamentos ( $v_A$ ,  $v_B$ ,  $\theta_A$  e  $\theta_B$ ) determinam-se as constantes ( $c$ ,  $d$ ,  $e$  &  $f$ ) e se reproduz a formulação anterior (Alvarenga, 2008b).

Aqui, obtêm-se os mesmos resultados, porém empregando a condição  $\eta = 0,5$  diretamente, o que será mostrado nas subseções seguintes.

Note-se que o EF rígido-rótula é similar ao elemento rótula-rígido, assim as mesmas deduções são aplicadas, alterando-se apenas a ordem dos nós, por isso, o último se deixa como um exercício ao leitor.

### 6.2.1 CAMPO DE DESLOCAMENTO E DE DEFORMAÇÃO

Substituindo  $\eta = 0,5$  na Eq. 3.43, obtêm-se o campo de deslocamento  $v_O$ :

$$v_O(x) = \left( 1 + \frac{q_1}{L_0} \right) \left[ \left( \frac{x^3}{2L_0^2} - \frac{3x^2}{4L_0} - \frac{x}{8} + \frac{3L_0}{16} \right) q_2 \right] \quad (6.2)$$

e na Eq. 3.53, o campo de deformações:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{L_0} + \left( 1 + \frac{q_1}{L_0} \right) \left( \frac{q_2^2}{10} \right) - 3y_c \left( \frac{x}{L_0^2} - \frac{1}{2L_0} \right) q_2 \quad (6.3)$$

Verifica-se imediatamente que não há a participação da rotação  $q_3$ , ou seja, o giro próprio da rótula é independente (qualquer), portanto, a função  $\Psi_3 = 0$ .

### 6.2.2 MATRIZES DE RIGIDEZ

Partindo-se da Eq. 3.70 e considerando os coeficientes da Tab. 3.1 com  $\eta = 0,5$  (rótula), chega-se à matriz de rigidez constitutiva básica **D**:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} D_{1m} & 1,5D_{2m} & 0 \\ & 3D_{3m} & 0 \\ \text{simétrico} & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

e pela Eq. 3.72, na matriz de rigidez relativa à curvatura básica **H**:

$$\mathbf{H} = \frac{Q_1 L_d}{30} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 6 & 0 \\ \text{simétrico} & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Fazendo, então, a transformação  $f_T$  (Eq. 3.74), reescreve-se a matriz de rigidez do EF constitutiva, dada pela Eq. 3.79 e a última linha da Tab. 3.2, com  $\eta = 0,5$  (rótula):

$$\mathbf{K}_{ep} = \begin{bmatrix} A & -B & -C & -A & B & 0 \\ & D & E & B & -D & 0 \\ & & F & C & -E & 0 \\ & & & A & -B & 0 \\ \text{simétrico} & & & & D & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

e a de rigidez à curvatura com a Eq. 3.81 e a última linha da Tab. 3.3 (rótula):

$$\mathbf{K}_H = \frac{Q_1}{30L_d} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & G & H & 0 & -G & 0 \\ & & I & 0 & -H & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{simétrico} & & & & G & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

nas quais os termos dentro das matrizes são dados por:

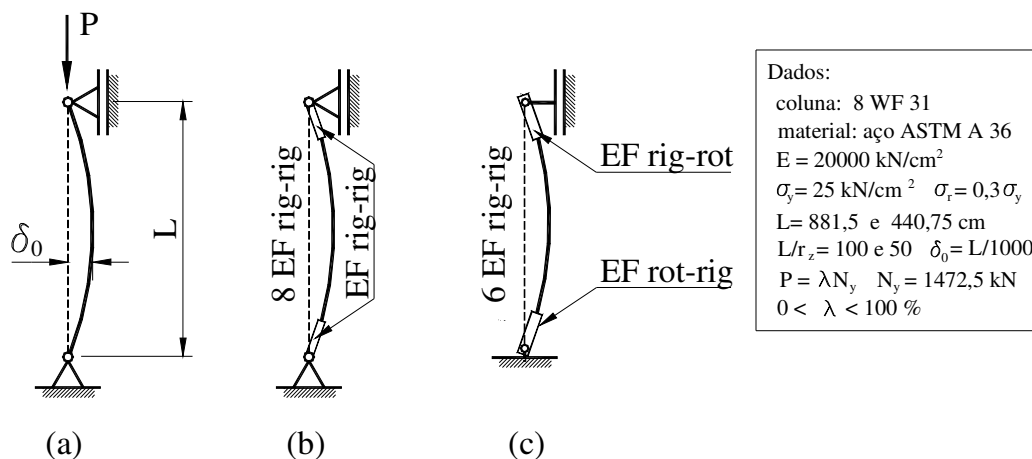
$$\begin{aligned} A &= D_{1m}/L_0 & B &= 3D_{2m}/(2L_0 L_d) & C &= 3D_{2m}/(2L_0) \\ D &= 3D_{3m}/(L_0 L_d^2) & E &= 3D_{3m}/(L_0 L_d) & F &= 3D_{3m}/L_r \\ G &= 6 & H &= 6L_d & I &= 6L_d^2 \end{aligned} \quad (6.8a-i)$$

sendo definidas na subseção 3.4.4 as propriedades elastoplásticas da seção indicadas por  $D_{1m}$ ,  $D_{2m}$ ,  $D_{3m}$ , respectivamente, e  $Q_1$  pela Eq. 3.97 (IIEA). (Ver apêndice A.7).

Tendo visto a parte complementar dessa formulação para o caso do EF rígido-rótula, serão apresentados, agora, os exemplos de validação.

### 6.3 COLUNA DE HAJJAR *ET AL.* (1997)

Neste exemplo, trata-se da coluna birrotulada simples, ilustrada na Fig. 6.2(a), sujeita à compressão. O objetivo é encontrar a carga de flambagem elástica ou inelástica no plano de análise (supondo-a travada na outra direção) que depende da extensão  $L$ .



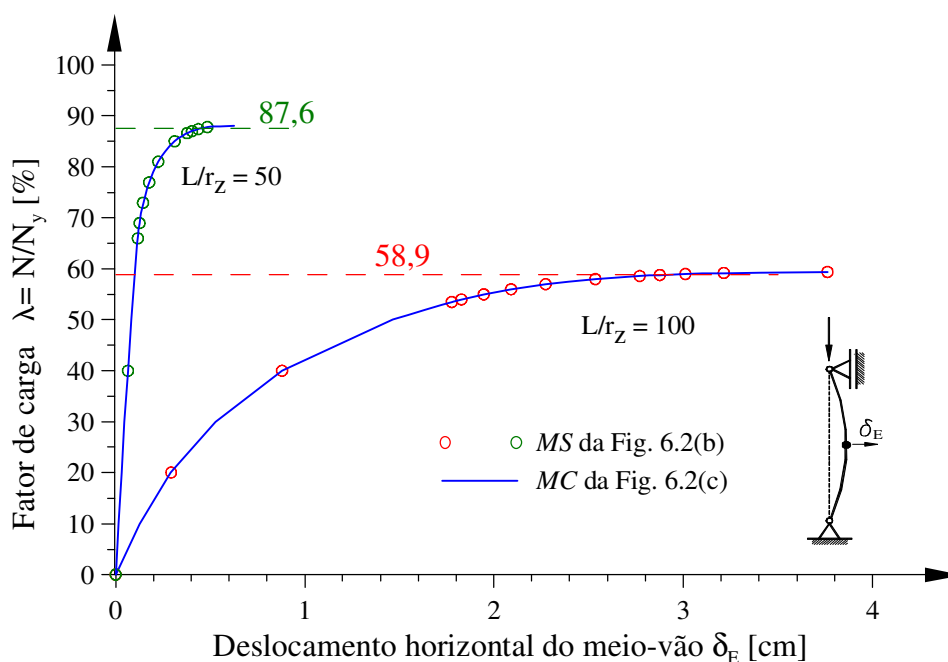
**Figura 6.2 Coluna birrotulada de Hajjar *et al.* (1997):**  
 (a) coluna de Hajjar *et al.* (1997); (b) modelo MS com 8 EF rígido-rígido;  
 (c) modelo MC com 6 EF padrão e 2 EFs com rótulas nas extremidades.

Para comparar, adotam-se dois modelos teoricamente equivalentes, conforme:

- a. MS modelo sem EF de rótula: com 8 EFs tipo tradicional (rígido-rígido), porém os apoios são rótulas, ou seja, liberados ao giro, representado na Fig. 6.2(b); e
- b. MC modelo com EF de rótula nas extremidades e 6 EFs tradicionais na parte intermediária, sendo os apoios travados ao giro, como ilustrado na Fig. 6.2(c).

Do ponto de vista da engenharia, esses modelos são equivalentes, o que os obriga a possuir resultados idênticos ou muito próximos. A seção transversal da coluna é do perfil 8 WF 31, que já foi adotada no exemplo 5.4, com as mesmas dimensões e tensões residuais (TRs) indicadas na Fig. 5.7 e propriedades na Tab. 5.4. Nesse exemplo, considera-se também o efeito de curvatura inicial (CI) e encontra-se o fator de carga ( $\lambda$ ) que corresponde à flambagem.

São avaliados dois casos de esbeltez:  $L/r_z = 100$  e  $50$ , sendo os resultados correspondentes confrontados com os valores previstos pelo AISC LRFD (1993) e tratados por Hajjar *et al.* (1997). A curva de flambagem completa, com demais valores da esbeltez  $L/r_z$ , é apresentada em Alvarenga & Silveira (2005).



**Figura 6.3** Trajetórias de equilíbrio das colunas.

As trajetórias de equilíbrio representadas na Fig. 6.3 relacionam os deslocamentos horizontais do nó da meia-altura da coluna ( $\delta_E$ , o mais significativo), com o fator de carga  $\lambda$ , para as considerações representadas por *MS* da Fig. 6.2(b) ou *MC* da Fig. 6.2(c), e empregando ambos os valores de esbeltez  $L/r_z$ .

É notório que, em ambos os modelos empregados (*MC* e *MS*), não houve diferença significativa nos deslocamentos obtidos.

Cabe agora avaliar os resultados separadamente, conforme:

- esbeltez  $L/r_z = 100$ : corresponde a uma situação praticamente elástica, ou seja, manifesta-se uma pequena plasticidade, provocada por causa das TRs principalmente. Em ambos os modelos empregados (*MC* e *MS*), obteve-se o fator de carga de colapso ( $\lambda_c = 0,594$ ), com uma grande dificuldade de convergência (mais de 1000 iterações), e posterior colapso. O resultado considerado “exato” pela comunidade científica mundial, empregando outra abordagem de zona plástica (Kanchanalai, 1977), fornece o fator limite ( $N/N_y = \lambda = 0,591$ ), obtido para flambagem no menor eixo de inércia. As recomendações da norma AISC LRFD (1993) assumem que tais valores podem ser usados nas duas direções. E, assim, aplicando as equações conservadoras da norma americana para essas condições, chega-se a ( $\lambda = 0,589$ ), embora o valor 0,591 seja repetidamente mencionado em Hajjar *et al.* (1997); e
- esbeltez  $L/r_z = 50$ : no qual a plasticidade parece determinar o caminho à



flambagem, dita inelástica. Constatam-se, também, insignificantes diferenças nos deslocamentos, atingindo o colapso com  $\lambda_c = 88,1\%$ . O fator de carga limite pelas equações do AISC LRFD (1993) é  $87,6\%$ , e o “exato” pode ser estimado por proporção [ $\lambda_c = (0,876/0,589) \times 0,591 = 0,879$ ] ao valor previsto na norma americana, que confere razoavelmente com o resultado obtido.

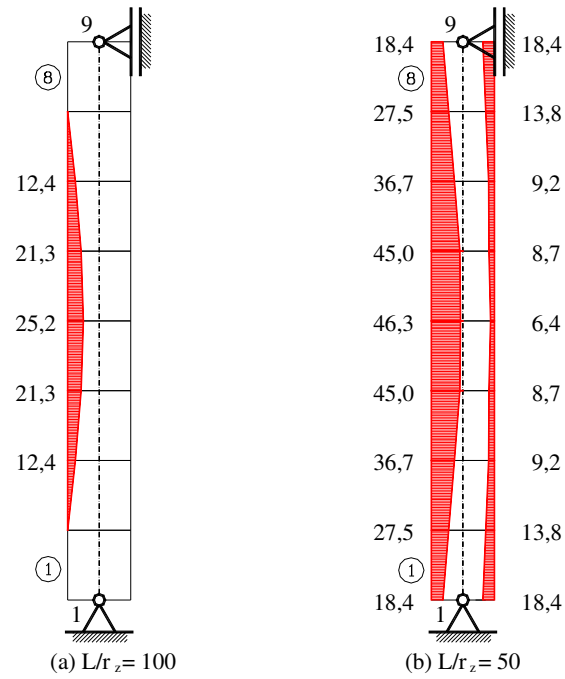
Além disso, em ambos os casos estudados, tanto os deslocamentos como os esforços, as deformações, as fatias plastificadas, etc., têm diferenças insignificantes, o que indica que ambos os métodos (*MS* e *MC*) produzem os mesmos resultados, validando por tanto a formulação apresentada.

É interessante avaliar o comportamento da plasticidade nas colunas, ilustrado na Fig. 6.4 das fatias plásticas no colapso. Para a esbelteza maior ( $L/r_z = 100$ ), aparece uma única zona plástica que abrange 6 EFs centrais, simétrica ao meio-vão, atingindo  $25,2\%$  da seção. Já para a esbelteza menor ( $L/r_z = 50$ ) ocorre uma plasticidade mais acentuada, ao longo de toda barra, com 2 ZPs. A primeira parece um crescimento da ZP da esbelteza maior, com o máximo no meio-vão de  $46,3\%$ . A segunda ZP, menor, decresce para o meio vão até  $6,4\%$ . Observe-se que em ambos os extremos, têm-se o percentual igual para as 2 ZPs ( $18,4\%$ ), de cada lado (simétrico).

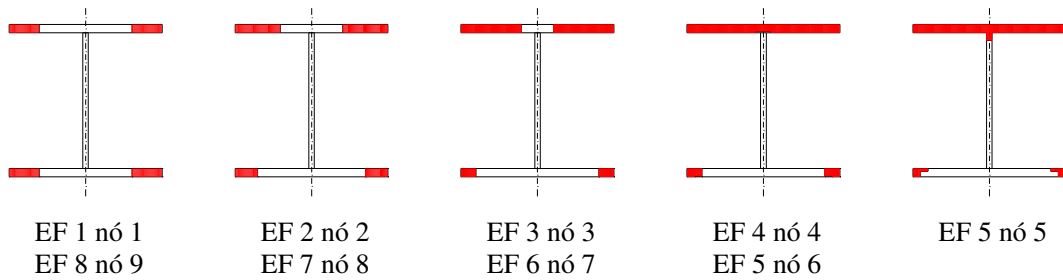
A plasticidade maior no centro da coluna expõe o efeito secundário  $P\delta$  majorando a flexão da barra, acelerando a flambagem e comprovando premissas estabelecidas no desenvolvimento das equações americanas (Hajjar *et al.*, 1997).

Na figura 6.5, representam-se as seções dos nós da coluna robusta ( $L/r_z = 50$ ), nas quais se verifica que as zonas plásticas das extremidades são simétricas. Caminhando para a parte central, a aba inferior tem sua plasticidade reduzida, sobrando apenas nas bordas, enquanto a ZP superior vai se expandindo até tomar toda a aba e no final um pedaço pequeno da alma, na seção do meio-vão da barra. A partir daí o processo inverso repete-se em direção à outra extremidade.

Fica claro, portanto, a influência das tensões residuais (TRs), provocando o escoamento de forma marcante nos extremos das abas dos laminados, onde as TRs são de compressão. Isso é também um indicativo de eventuais problemas de flambagem local das abas (que deve ser verificado, quando a seção não é compacta, conforme previsto no item 3.2.3(f.) e no apêndice A.1.



**Figura 6.4 Zonas plásticas das colunas:**  
 percentual na: (a) flambagem elástica; (b) inelástica; (c) convenção: (==) compressão.

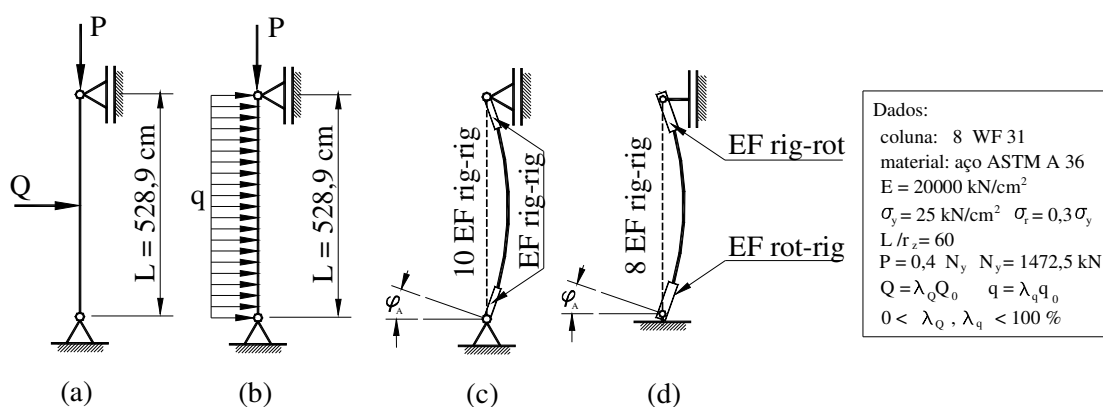


**Figura 6.5 Fatias plásticas nas seções da coluna com  $L/r_z = 50$ .**  
 Nota: convenção: (||) compressão.

## 6.4 COLUNA DE LU & KAMALVAND (1968)

A avaliação conjugada da plasticidade e da estabilidade de barras passou a ser mais entendida a partir dos trabalhos de Lu & Kamalvand (1968), dentre outros, que fizeram a determinação do colapso integrando numericamente as equações diferenciais, após subdivisão do vão em vários segmentos, considerando as relações de momento, curvatura e axial ( $M-N-\Phi$ ) da seção, apresentadas por Moses (1964).

Posteriormente, esses problemas foram reproduzidos por Foley & Vinnakota, (1999) com o objetivo de validar sua formulação numérica também, empregando o método da zona plástica (ZP), porém com outra abordagem. Originalmente, deseja-se determinar a máxima carga concentrada no meio-vão ( $Q$ ) e a máxima uniformemente distribuída ( $q$ ), que a coluna pode resistir, sujeita a uma carga fixa de compressão  $P$ , como ilustrado nas Figs. 6.6(a-b), respectivamente.



**Figura 6.6 Coluna escora de Lu & Kamalvand (1968):**  
(a) carga concentrada  $Q$ ; (b) distribuída  $q$ ; (c) modelo  $MS$ ; (d) modelo  $MC$ .

Consideram-se os mesmos dados de material, da seção, da coluna e as tensões residuais do exemplo anterior, sem incluir imperfeições geométricas.

Repete-se a mesma técnica empregada no exemplo anterior, com os dois modelos:

- $MS$  modelo sem EF de rótula: com uma malha de 10 EFs-padrão, como adotado por Foley & Vinnakota (1999), na qual os apoios são fixo e deslizante, representados na Fig. 6.6(c); e
- $MC$  modelo com EF de rótula nas extremidades: tendo 8 EFs-padrão na parte intermediária e os apoios são travados ao giro, como ilustrado na Fig. 6.6(d).

Esse procedimento é necessário porque a última modelagem (*MC*) não dispõe dos valores das rotações ( $\varphi_A$ ) dos apoios, que é o deslocamento selecionado para apresentar os resultados disponíveis da literatura.

Assim, primeiramente, procura-se comprovar os resultados do *MS*, obtidos pelo programa computacional *PPLANAVX* (2005/7), com os fornecidos pelos pesquisadores já citados, seguindo a Fig. 6.7(a) para o caso da carga  $Q$ , e a Fig. 6.7(b) para o caso da distribuída no vão  $q$ .

Nessa figura 6.7, são apresentadas as trajetórias de equilíbrio que relacionam o fator de carga ( $\lambda_Q = Q/Q_y$  ou  $\lambda_q = q/q_y$ ) em relação à rotação ( $\varphi_A$ ) do nó 1, apoio inferior da coluna, representado nas Figs. 6.6(c-d). Admitindo que o momento máximo atuante na barra seja o plástico reduzido ( $M_{pr}$ ), definido por:

$$M_{pr} = M_p - M_r = Z_z \sigma_y - W_z \sigma_r \approx (Z_z - 0,3W_z) \sigma_y \quad (6.9)$$

em que  $Z_z$  e  $W_z$ , são os módulos de resistência, plástico e elástico, respectivamente, obtêm-se os valores de  $Q_y$  e  $q_y$ :

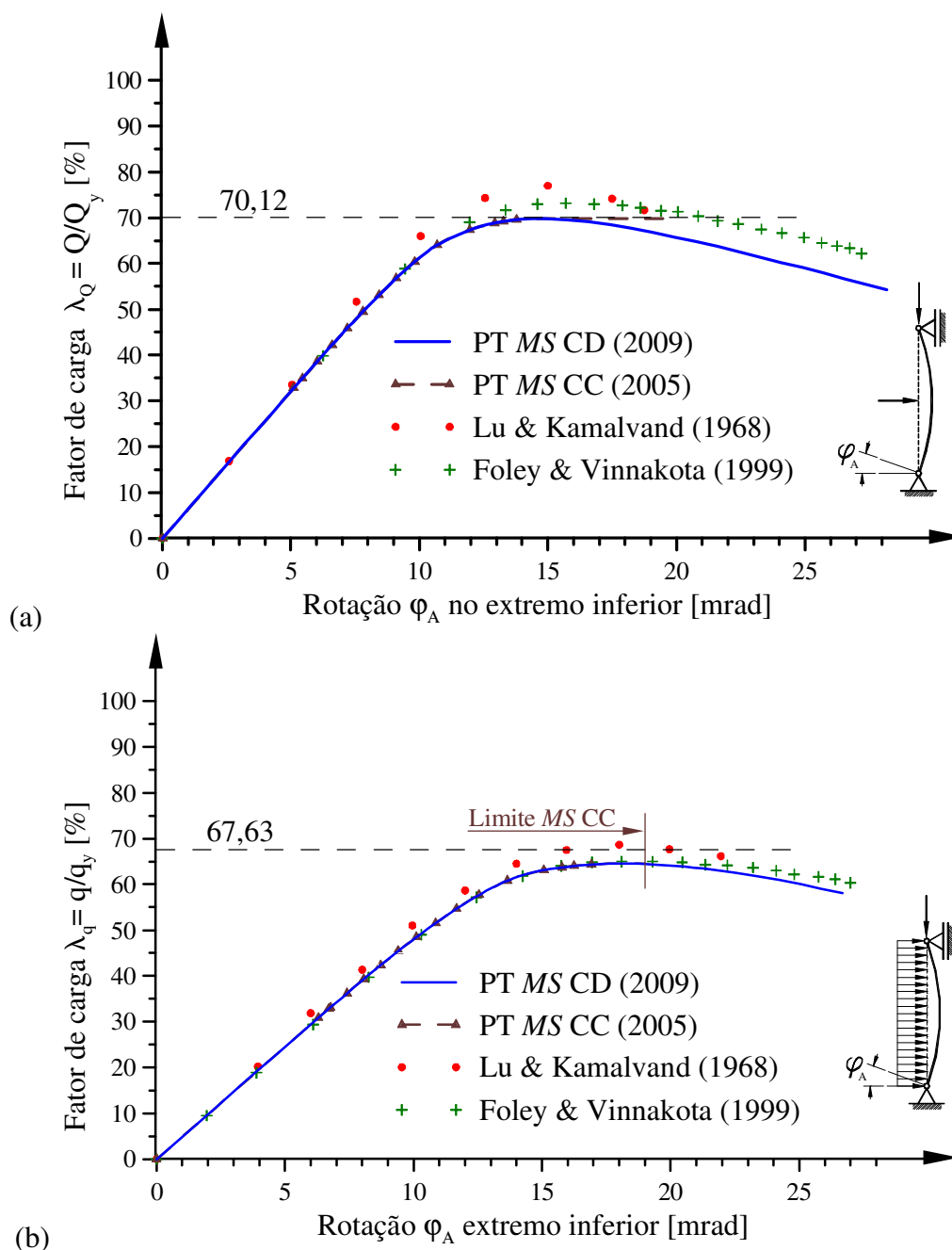
$$Q_y = \frac{4M_{pr}}{L} \quad q_y = \frac{8M_{pr}}{L^2} \quad (6.10a-b)$$

Esses valores de referência ( $Q_y$  e  $q_y$ ) são importantes para se comparar os resultados dos pesquisadores citados, embora, eles não os forneçam diretamente. Para os dados do problema, com as expressões 6.9 e 6.10(a-b), encontram-se os valores limites:  $M_{pr} = 9084,8$  kNcm,  $Q_y = 68,7$  kN e  $q_y = 25,98$  kN/m.

Cumprir indicar que, no processamento dos modelos do PT, foram adotadas as cargas de referência:  $Q_0 = 50$  kN,  $q_0 = 20$  kN/m e os fatores de carga  $\lambda$  produzidos foram convertidos aos equivalentes  $\lambda_Q$  e  $\lambda_q$ , pelas expressões:

$$\lambda_Q = \frac{Q}{Q_y} = \frac{\lambda Q_0}{Q_y} = \frac{\lambda}{1,374} \quad \lambda_q = \frac{q}{q_y} = \frac{\lambda q_0}{q_y} = \frac{\lambda}{1,299} \quad (6.11a-b)$$

Nas figuras 6.7(a-b) apresentam-se os resultados desta tese, que se aproximam dos de Foley & Vinnakota (1999) e estão ligeiramente inferiores aos obtidos por Lu & Kamalvand (1968). A diferença dos primeiros em relação aos últimos pode ser justificada pela sua técnica momento/axial/curvatura, similar ao “BCIN.for” (Chen & Toma, 1994), na qual se desprezavam as deformações axiais. Também havia menos recursos tecnológicos (computador, ferramentas numéricas, etc.) em 1968, comparando-se com o estágio de desenvolvimento da ciência atual.



**Figura 6.7** Trajetórias por rotação da coluna de Lu & Kamalvand (1968): (a) carga concentrada na meia-altura, (b) carga distribuída na altura; processos da própria tese (PT): (c) CC – controle de carga; (d) CD – controle de deslocamento.

Foley & Vinnakota (1999) atribuíram as suas discrepâncias às pequenas diferenças no modelo de TRs. e nas propriedades geométricas avaliadas da seção transversal.

Os resultados desta tese mostram um leve desvio no topo da trajetória em relação aos de Foley & Vinnakota (1999), que é maior no caso da carga concentrada.

Verifica-se que essa diferença se manteve mesmo na versão mais moderna de PPLANAVA (2009), que ambas as versões de MS (2005), com controle de carga (CC) e (2009) com controle de deslocamentos (CD), obtêm o mesmo resultado.

Nesta tese adotou-se 436 fatias (com  $10 \times 20 = 200$  na aba e 36 na alma) em cada seção (nó), enquanto Foley & Vinnakota (1999) adotaram uma malha menor, com apenas 66 fatias (sendo  $3 \times 9 = 27$  na aba e 12 na alma).

Os fatores relativos a  $\lambda_Q (= Q/Q_y)$  apresentam maiores divergências que os valores de ( $\lambda_q = q/q_y$ ), por causa da imperfeita distribuição de carga (depende do número de EFs) e da plasticidade, que é menos concentrada (mais alongada) para o caso da distribuída. Isso destoa do modelo de distribuição de cargas infinitesimal (perfeito).

Diversos valores da esbeltez  $L/r_z$  (20, 40, 60, 80 e 100) são estudados pelos pesquisadores indicados, mas adotou-se no exemplo o valor de  $L/r_z = 60$ , pois apresenta valores médios de deslocamentos e também um efeito de plasticidade marcante.

Lu & Kamalvand (1968) propuseram determinar o limite do momento  $M$ , como uma aproximação linear do diagrama, que foi posteriormente adotada pela norma americana AISC com sucesso (ASD, 1972 e 1976; depois, incluindo um tratamento estatístico no LRFD, 1986), gerando a fórmula empírica de interação:

$$\frac{N_d}{N_m} + \frac{C_m (M_d / M_{pr})}{(1 - N_d / N_e)} \leq 1 \quad (6.12)$$

na qual ( $N_d$ ,  $M_d$ ) são os esforços atuantes na seção, ( $N_m$ ) a carga axial de flambagem inelástica isolada, ( $N_e$ ) a carga de flambagem elástica de Euler da barra correspondente, e o fator de correção ( $C_m$ ) do efeito dos momentos, que procura aproximar-se dos resultados experimentais.

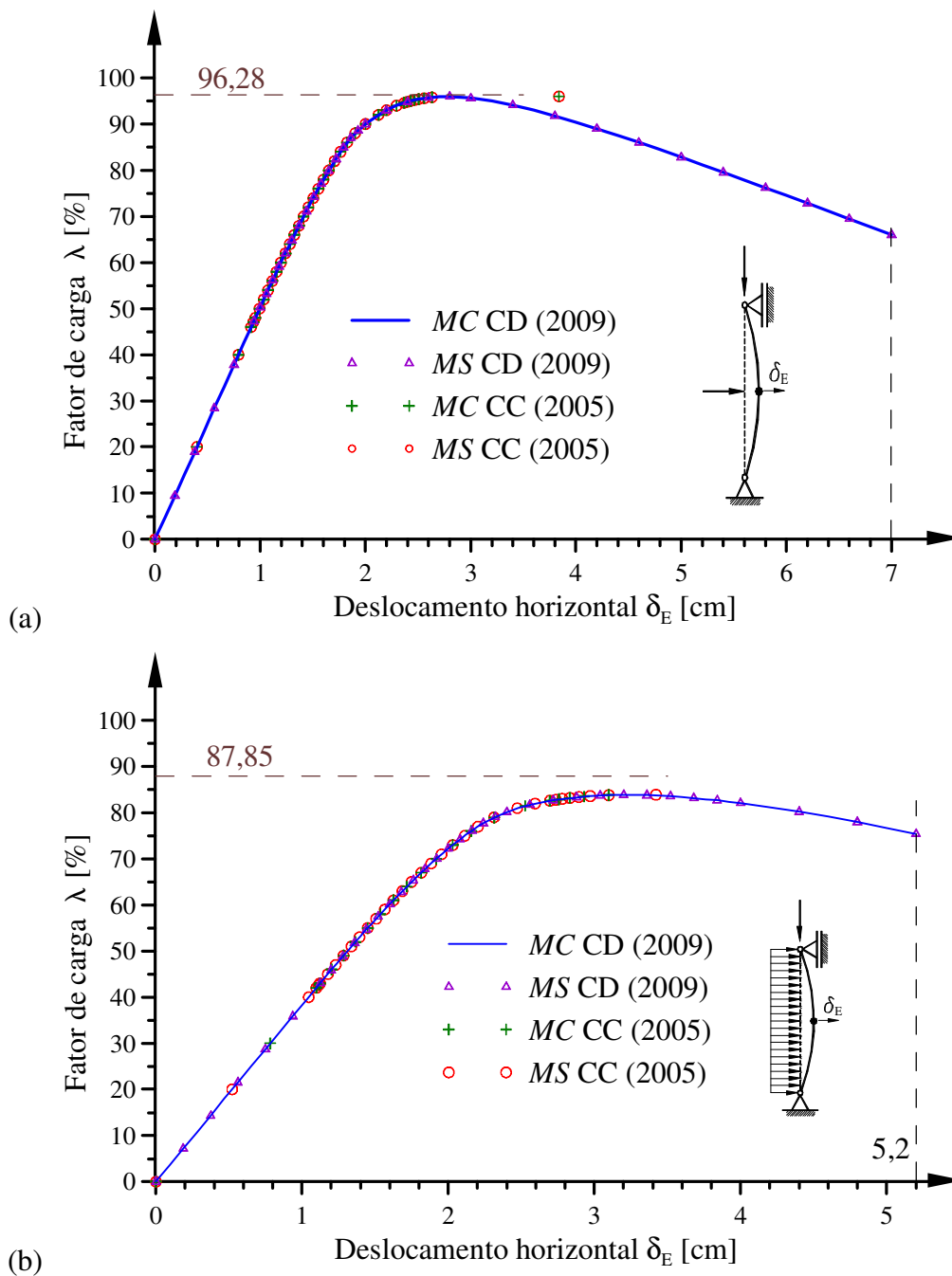
Esses pesquisadores estudaram os dois casos de cargas anteriores, para norma, nas condições de engaste e rótula (embora aqui tenha sido avaliado apenas o último tipo de apoio). Foi, então, estabelecido o fator  $C_m$  com base na expressão:

$$C_m = 1 - \alpha_m N_d / N_e \quad (6.13)$$

sendo o coeficiente de ajuste  $\alpha_m = 0,2$  (0) para carga concentrada (distribuída entre parêntesis), nos apoios com rótulas. Apenas para complementar, adota-se  $\alpha_m = 0,6$  (0,4) para as cargas correspondentes nos engastes (Lu & Kamalvand, 1968).

Empregando essas fórmulas empíricas, encontram-se os valores  $Q_{LIM} = 48,14$  kN e  $q_{LIM} = 17,57$  kN/m. Os fatores limites correspondentes do AISC, também indicados nas Figs. 6.7(a-b), podem ser calculados com as expressões:

$$\begin{aligned} \lambda_Q &= Q_{LIM}/Q_y = 48,14/68,70 = 0,7012 \\ \lambda_q &= q_{LIM}/q_y = 17,57/25,98 = 0,6763 \end{aligned} \quad (6.14a-b)$$



**Figura 6.8** Trajetórias por flecha da coluna de Lu & Kamalvand (1968):  
 (a) carga concentrada na meia-altura; (b) carga distribuída na altura.

Para avaliar os modelos de EFs com rótula (*MC*), apresentam-se nas Figs. 6.8(a-b) as trajetórias de equilíbrio considerando o deslocamento horizontal ( $\delta_E$ ) do nó situado no meio-vão, com o fator de carga  $\lambda$ . Tanto na versão com CC (2005) como na CD (2009) a semelhança de resultados é evidente.

Comprova-se que tanto esses fatores de carga como demais deslocamentos, os esforços, as tensões, as deformações nas fatias, o estado último, etc., apresentaram

discrepâncias irrisórias, parecendo-se uma cópia. (não há diferença até a quarta casa decimal nos deslocamentos e até a segunda decimal nos esforços, por exemplo).

Nessa figura 6.8, destaca-se, também, a resposta obtida por *PPLANAVA* (2009) empregando o controle dos deslocamentos. Ambos os modelos (*MS* e *MC*) foram reprocessados com os dados anteriores e reproduziram os mesmos resultados.

Na tabela 6.1, mostram-se algumas diferenças quanto às rotações obtidas. No caso do método *MS* se tem deslocamentos nodais calculados; mas, no *MC* do EF com rótula, conhece-se o giro de corpo rígido do EF, o que apresenta, assim, um valor um pouco diferente. Além disso, comprova-se a eficácia do controle do deslocamento: enquanto CC informa que  $95,9\% \leq \lambda_c \leq 96\%$  para carga (Q) e  $83,8\% \leq \lambda_c \leq 83,9\%$ , para (q); o CD dá um valor mais próximo:  $\lambda_c \approx 95,941\%$  e  $83,858\%$ , respectivamente, e segue a trajetória descendente, como se percebe nas Figs. 6.8(a-b). O controle CD não conseguiu convergir no modelo *MS* com  $\delta_E = 7,2$  cm, carga uniforme q ( $\lambda = 75,43\%$ ) na trajetória descendente, enquanto no *MC* ocorreu plasticidade reversa. Para a carga Q o modelo *MC* detectou colapso ao corte, com  $\lambda = 62,0\%$  e  $\delta_E = 8$  cm.

Para melhor entender o comportamento desses modelos, deve-se verificar a propagação da plasticidade ao longo da coluna, acompanhando a Fig. 6.9 de zonas plásticas dos EFs dos modelos, construída representando o estado da coluna-escora no último passo de carga que convergiu antes do ponto limite (pré-colapso).

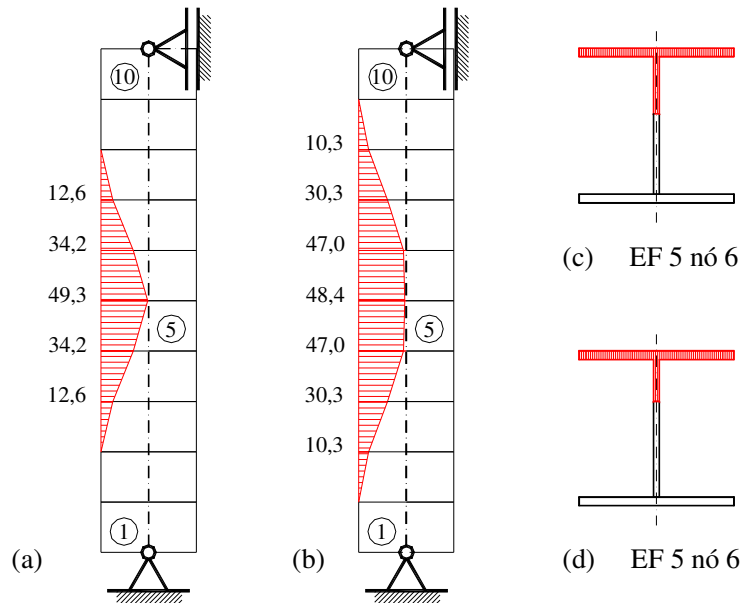
Para as duas condições de carga, observa-se que apenas uma zona plástica (ZP) de compressão se desenvolveu. Enquanto no caso da carga concentrada da Fig. 6.9(a), a ZP é mais compacta, com 5 nós avaliados, no da distribuída, são afetados mais EFs, com 7 nós avaliados na Fig. 6.9(b).

**Tabela 6.1 Resultados da análise da coluna de Lu & Kamalvand (1968).**

Carga	Processo incremental (1)	Rotação $\varphi_A$ [mrad]		Fator de carga $\lambda$ [%] (4)	Desloc. $\delta_E$ [cm]	Observação
		<i>MS</i> (2)	<i>MC</i> (3)			
Q	CC	14,400	14,241	95,900	2,697	pré-colapso colapso
		19,464	32,436	96,000	6,765	
	CD	14,852	14,252	95,941	2,800	carga limite carga última
		32,291	36,216	57,408	8,000	
q	CC	17,517	17,270	83,800	3,099	pré-colapso colapso
		19,017	29,466	83,900	5,701	
	CD	17,990	17,740	83,858	3,200	carga limite carga última
		34,700	34,456	60,430	7,000	

Notas: 1) CC – controle de carga, CD – controle de deslocamento; 2) deslocamento calculado; 3) rotação de corpo rígido do EF com rótula; 4)  $\lambda = Q/Q_0$  ou  $q/q_0$ , com  $Q_0 = 50$  kN e  $q_0 = 20$  kN/m.





**Figura 6.9 Zonas plásticas da coluna de Lu & Kamalvand (1968)**  
 percentual na estrutura: (a) com carga concentrada; (b) com carga distribuída;  
 seção do nó central: (c) com carga concentrada; (d) com carga distribuída;  
 (e) convenção: compressão (— a, b; || c, d).

Os valores percentuais de fatias plásticas nas seções seguem uma distribuição parabólica em ambos os casos, chegando próximo a 50% da seção, no ponto médio da altura (o do deslocamento máximo). Na situação pré-colapso, verifica-se que a plasticidade da alma é maior (41,7%) para a carga concentrada que na distribuída, (30,6%), como se retrata nas Figs. 6.9(c-d).

### 6.5 PORTAL DE KANCHANALAI (1977)

Kanchanalai (1977) resolve o problema do portal representado na Fig. 6.10, com rótulas nas bases, uma coluna rigidamente ligada à viga e uma coluna-escora, ou seja, com rótula também no topo. Ambas as colunas são de seção perfil 8 WF 31, mas a viga não tem seu perfil indicado, embora seja estabelecida a relação de rigidez viga  $\times$  coluna  $G_D = 2$ . A esbeltez  $L/r_z = 20$ , define a altura das colunas ( $L = 20 r_z = 176,3$  cm).

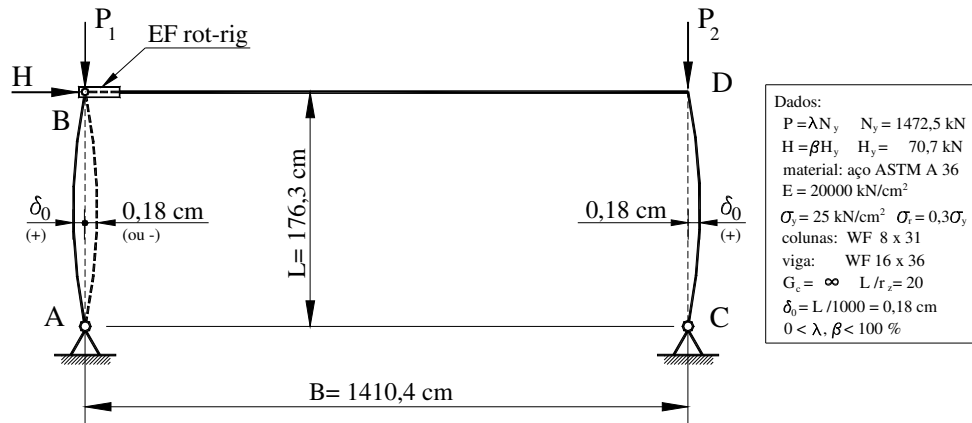


Figura 6.10 Portal com rótulas de Kanchanalai (1977).

Nesta tese, adotou-se a seção do perfil 16 WF 36 para a viga, pois é o laminado americano de inércia mais próxima. Considera-se que o vão da viga  $B$  é bem maior que  $L$ , e que  $G_C = \infty$ , no caso da base com rótula. Fazendo  $B = 8 L$  ( $B \gg L$ ), obtém-se:

$$\frac{I_c}{L} = \frac{4577,5}{176,3} = 25,96 \quad \frac{I_v}{B} = \frac{18647,2}{1410,4} = 13,22 \quad (6.15a-b)$$

encontrando agora:

$$G_D = \frac{I_c/L}{I_v/B} = \frac{25,96}{13,22} = 1,96 \approx 2 \quad (6.16)$$

Nesse portal, atuam cargas verticais nas colunas  $P = \lambda N_y$ , com  $N_y = 1472,5$  kN (esmagamento da seção) e uma horizontal no topo  $H = \beta H_y$ , sendo  $H_y = M_p/L = 70,7$  kN que causa a formação de rótula plástica (RP) em  $D$ , pelo momento  $M_p = 12462$  kNcm.

O objetivo é determinar a curva de interação dada por  $H \cdot L/M_p \times N/N_y$  ( $N \approx P$ ), para a flexão com flambagem no eixo de maior inércia do perfil, ou seja, a relação entre o momento fletor e o esforço axial para uma estrutura simples, na qual se forma apenas uma ZP (ou RP teórica), no ponto  $D$ , da ligação rígida entre a coluna e a viga.

Os dados considerados estão na Fig. 6.10, incluindo-se os efeitos das tensões residuais (TR) e da curvatura inicial (CI)  $\delta = L/1000$ , nos padrões americanos.

As características da coluna são as mesmas da Fig. 5.7 e da Tab. 5.4; já a viga teve suas dimensões de espessura ajustadas, conforme mostrado na Tab. 6.2, para garantir valores de área e inércia do laminado original.

Na solução, Kanchanalai (1977) emprega a mesma estratégia desenvolvida por Galambos & Ketter (1959) e Lu & Kamalvand (1968), considerando a relação de flexão/axial/curvatura  $M-N-\Phi$  do perfil, já incluindo TR e CI, implicitamente. Em cada passo é assumida uma curva inicial para a solução, baseada nas condições de equilíbrio e compatibilidade dessas grandezas, em cada estação; mas não se considera a deformação axial. O processo corretivo ajusta a deformada, sob axial constante, e o incremental no momento determinará o colapso. Equivale ao processo descrito em Chen & Toma (1994) para os programas “FRAMP.for” e “FRAMH.for”, num problema mais simples que os resolvidos por Chen & Zhou (1987).

No modelo desta tese, adotou-se uma malha de 20 EFs, sendo 6 para cada coluna, 8 na viga (7 EFs-padrão e 1 EF rótula-rígido). Na presença de carga horizontal, a curvatura inicial (CI) limitadora é a da Fig. 6.10: com a coluna C-D para a direita “+” e A-B qualquer “+” ou “-”. Para cargas verticais apenas ( $\beta = 0$ ), a carga limite não se altera caso ambas as CIs sejam para fora ou para dentro, o que se modifica apenas é a direção da deformada correspondente.

Reproduz-se na Fig. 6.11 o diagrama de interação proposto por Kanchanalai (1977), correspondente à situação de cargas  $P$  iguais nas colunas ( $P_1 = P_2 = \lambda P$ ), e sobrepõem-se os valores encontrados nesta tese. O eixo das abscissas ( $x$ ) considera o momento primário no portal,  $M = H \cdot L$ , dado pela expressão:

$$\beta = \frac{H \cdot L}{M_p} = \frac{H}{H_y} \quad (6.17)$$

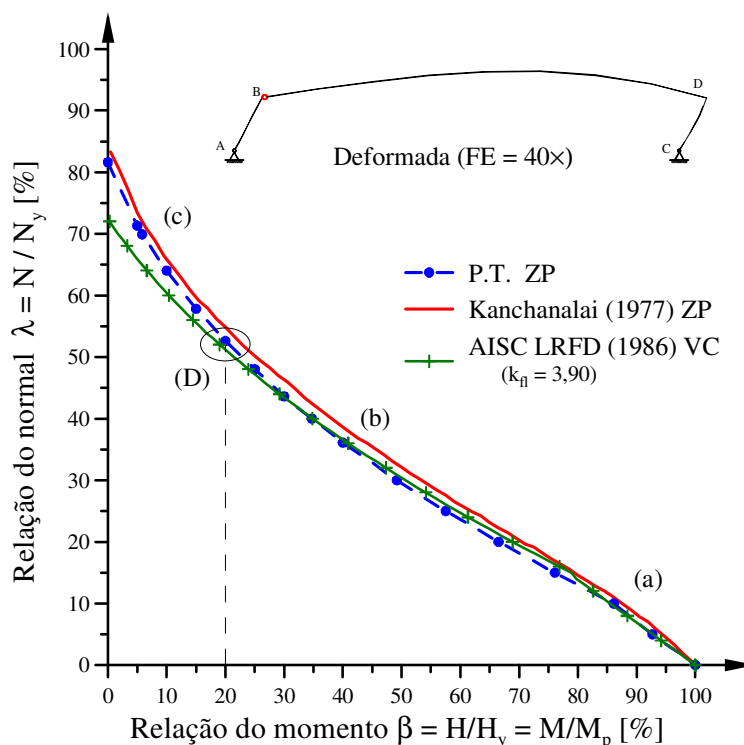
Nota-se que essas curvas são bem parecidas, porém os valores desta tese são inferiores aos de Kanchanalai (1977) e próximos dos calculados pela equação de interação viga-coluna (VC) do AISC LRFD (1986) com  $k_{fl} = 3,9$  (Hajjar *et al.*, 1997).

Essas diferenças podem ser justificadas considerando-se, primeiramente, que a viga foi estimada, por uma relação  $I_v/L_v$ . A viga provoca o aparecimento de um valor adicional de compressão na coluna estrutural (não escora), por efeito de pórtico. Assim, embora as cargas aplicadas sejam iguais ( $P$ ), os valores das reações verticais e dos normais nas colunas são diferentes, o que Kanchanalai (1977) não considerou.

**Tabela 6.2 Propriedades da seção 16 WF 36 da viga.**

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t    alma a				elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]
AISC 1978	15,9 in	6,99 in	0,43 in	0,295 in	10,6 in <sup>2</sup>	448 in <sup>4</sup>	56,5 in <sup>3</sup>	64,0 in <sup>3</sup>
Convertido	403,80	177,60	10,922	7,493	68,39	18647	925,8	1048,7
PT	=	=	11,013 <sup>(2)</sup>	7,667 <sup>(2)</sup>	=	=	923,6	1047,6

Obs. 1) PT: na própria tese; 2) valores aproximados de forma a manter a área bruta  $A_g$  e a inércia  $I_z$ ;  
3) selecionou-se uma seção que possui  $I_z$  suficiente para não ocorrer plasticidade na mesma.

**Figura 6.11 Diagrama de interação para o portal de Kanchanalai (1977).**

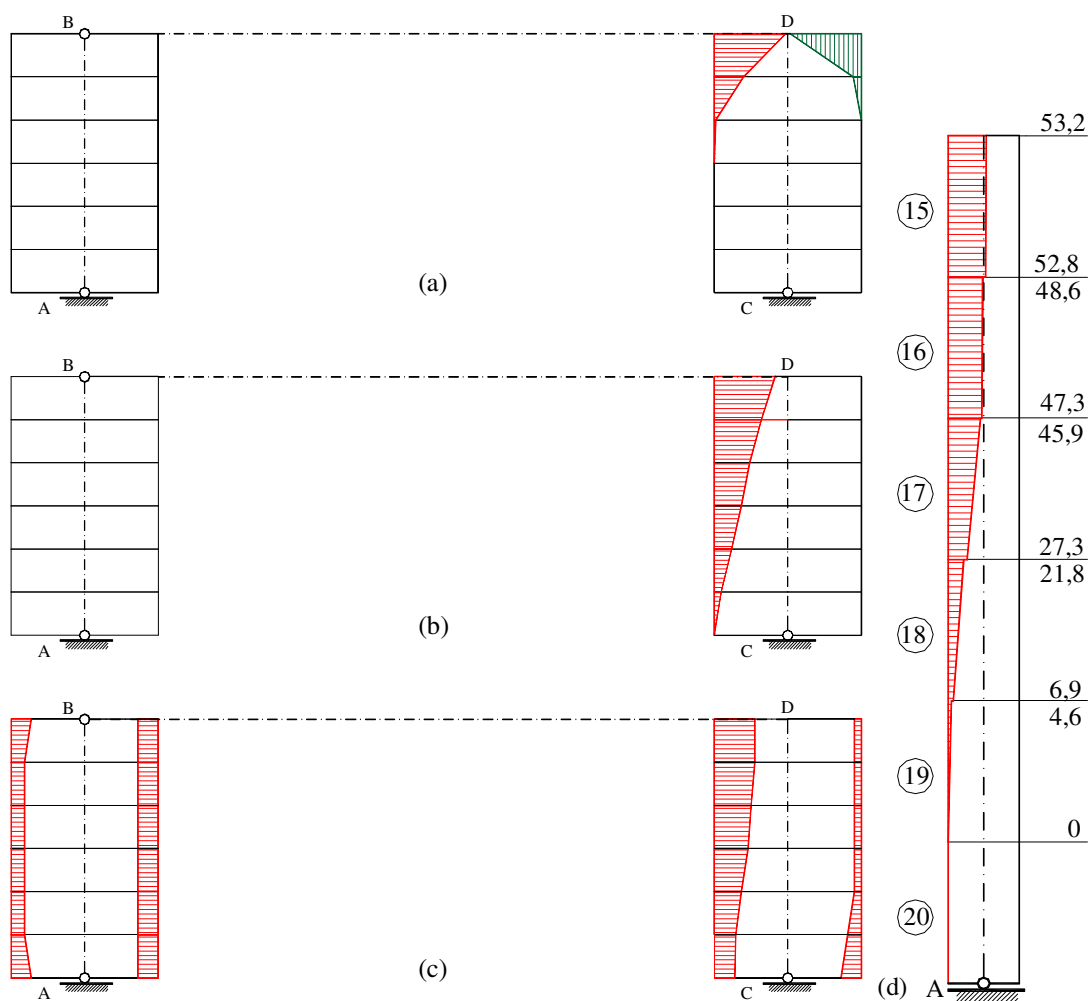
Nota: FE = fator de escala.

Por exemplo, no portal com  $\beta = 20\%$ , ponto (D) da Fig. 6.11, constata-se que somente a carga horizontal  $H = 14,14$  kN, gera as reações verticais  $-V_A = V_B = \pm 1,74$  kN. No passo pré-colapso, todavia, as reações horizontais são maiores:  $H_A = 9,80$  kN e  $H_B = -23,94$  kN (resulta no mesmo  $H$ ). Já as verticais são  $V_A = 770,40$  kN e  $V_B = 778,67$  kN. Dessa forma, enquanto tem-se o valor nominal  $P = 52,6\% N_y = 774,5$  kN, que Kanchanalai (1977) considerou idêntico em ambas as colunas. No portal real, acha-se a diferença  $\Delta V = 4,17$  kN (acrécimo de 0,54%), sendo que  $V_A$  é menor e  $V_B$  maior de  $\Delta V$ , em relação a  $P$ . Como  $P$  afeta tanto a estabilidade (efeito  $P\Delta$ ) como os momentos (ou seja,  $H$ ), o colapso identificado torna-se mais premente e as reações horizontais crescem também (relação  $1,69 = 23,94/14,14$ ).

Além disso, deve-se citar que nas considerações do AISC LRFD (1986), abalizadas em Kanchanalai (1977), supõe-se que o escoamento seja uniforme ao longo da coluna, de forma a garantir-se que ela ainda é prismática (Hajjar *et al.*, 1997). Essa premissa torna-se questionável quando se realiza uma análise com zona plástica, na qual se comprova que tal propagação do escoamento não é uniforme como suposto. Isso não parece ser tão “exato” e foi indicado antes (Alvarenga, 2005).

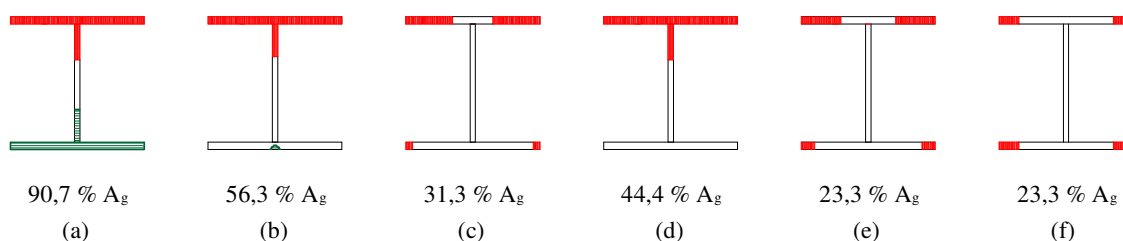
Pela figura 6.12, confirma-se que essa propagação da plasticidade é bastante variável, depende do valor de  $H$  aplicado (ou  $\beta$ ), e determina, de outra forma, o valor máximo de ( $\lambda = N/N_y$ ) ou de ( $\beta = H/H_y$ ), com os seguintes comportamentos:

- a. a região (a) da Fig. 6.11: inicia-se com  $\lambda = 0$ , único local onde a formação de mecanismo plástico ocorre, com  $\beta = 1$ , e se estende até  $\lambda \leq 10\%$  ( $\beta \geq 85\%$ ). Nessa região ocorre a plasticidade assimétrica, com 2 ZPs na mesma seção, sendo uma à compressão (maior) e outra à tração (menor), indicando maior flexibilidade da coluna, também, visto que esta se plastifica em até 3 EFs. Essas 2 ZPs indicam a presença de  $M_{pr}$  (reduzido) na seção e o colapso acontece por formação de mecanismo associado à flambagem de pequena compressão, como ilustrado na Fig. 6.12(a). Ressalte-se que, exceto para  $\lambda = 0$ , ocorrerá a flambagem inelástica previamente à formação do mecanismo (Hajjar *et al.*, 1997; Alvarenga, 2005);
- b. na região (b) da Fig. 6.11: verifica-se um estado intermediário, que corresponde a uma única ZP maior, no topo da coluna estrutural. Essa plasticidade induz o aparecimento precoce da instabilidade dessa coluna, como já citado (Alvarenga & Silveira, 2008b); e
- c. na região (c) da Fig. 6.11: quando o valor  $\beta \leq 25\%$  (ou seja,  $\lambda \geq 70\%$ ), tem-se o domínio da flambagem inelástica, em que se notam 2 ZPs nos perfis da coluna C-D, que são assimétricas, acompanhando aproximadamente a forma da CI ao longo de toda sua extensão. Verifica-se que para  $\beta \leq 15\%$  ocorre plasticidade também na coluna escora A-B, como mostra a Fig. 6.12(c). Isso proporciona redução adicional da carga limite, que Kanchanalai (1977) não identificou. Naturalmente, a plasticidade é maior na coluna C-D dada à presença do momento fletor, e ali ocorre a instabilidade, que causa o colapso. Note-se que essas ZPs formadas na escora só não são assimétricas nas extremidades, como visto na Fig. 6.4(b) da seção 6.3.



**Figura 6.12 Zonas plásticas no portal de Kanchanalai (1977):**

(a)  $\beta = 100\%$ , mecanismo plástico puro; (b)  $\beta = 40\%$ , flambagem associada à plasticidade; (c)  $\beta = 0\%$ , flambagem inelástica pura; (d) percentual de fatias plásticas da coluna C-D ( $\beta = 20\%$ ) no ponto D; (e) convenção: (||) tração, (=) compressão.



**Figura 6.13 Zonas plásticas nas seções dos portais:**  
coluna C-D: (a)  $\beta = 100$ , (b)  $\beta = 40$ , (c)  $\beta = 0$ , (d)  $\beta = 20\%$ ; coluna A-B:  $\beta = 0\%$   
(e) meio-vão; (f) extremos; (g) convenção: (—) tração, (||) compressão.

Na figura 6.12(d), exemplifica-se a variação da ZP ao longo da barra. No colapso da coluna C-D com  $\beta = 20\%$ , a plasticidade se estende por 5 EFs, ou seja, 5 nós tiveram seu centro de gravidade plástico não mais coincidindo com o CL do EF ( $y_{CGP} \neq 0$ ), propriedades menores, e conseqüentemente, deformações maiores que as previstas por

outras aproximações. Fica também ilustrado que a plasticidade não se manifesta apenas no topo da coluna, mas em grande parte da sua extensão.

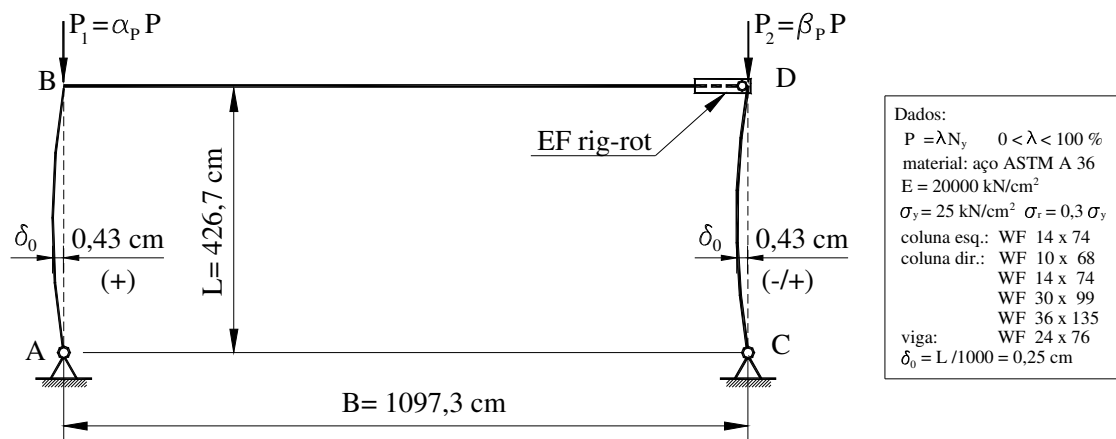
Complementando a análise desse exemplo, nas Figs. 6.13(a-d) mostram-se as fatias plásticas das seções no topo da coluna C-D, que correspondem aos diagramas com ZP das Figs. 6.12(a-d), respectivamente. Já a escora A-B, na situação da Fig. 6.12(c), tem fatias plásticas de forma assimétrica em toda extensão, inclusive no nó da meia-altura visto na Fig. 6.13(e), exceto nos extremos [A e B, Fig. 6.13(f)] quando é simétrica. A parcela de fatias plásticas (23,3%) da seção, todavia, não se altera.

Na Figura 6.13(b), indica-se uma pequena ZP à tração, sendo que na parte mais extensa do diagrama tem-se apenas 1 ZP de compressão. Em algumas situações, no colapso, a maior parte da alma também fica plástica à compressão, similar ao que se representa na Fig. 6.13(d).

Observe-se que a direção da CI da coluna A-B não modifica os resultados, porém invertendo a curvatura de C-D, as cargas limites crescem. Por exemplo, para o ponto D,  $\beta = 20\%$ , encontrou-se  $\lambda = 53,1\% > 52,6\%$ ; embora essa diferença seja pequena. A influência da CI será estudada melhor no capítulo 8.

## 6.6 PORTAL DE HAJJAR *ET AL.* (1997)

No estudo dos coeficientes de comprimento efetivo de flambagem  $k_{fl}$ , de forma a apresentar conceitos da Estabilidade, Hajjar *et al.* (1997) analisaram o portal da Fig. 6.14. De fato, investiga-se a influência da deslocabilidade dessa estrutura, pois a viga W 24 x 76, que se mantém elástica ao longo de toda a análise, possui uma ligação flexível no ponto D com a coluna direita (C-D). Aqui, essa ligação será modelada como uma rótula perfeita. A estabilidade do portal, então, é garantida pela flexibilidade da coluna esquerda (A-B), de perfil W 14 x 74, que está rigidamente ligada à viga. Dessa forma, o problema recai no controverso “paradoxo do fator k” (Siat-Moy, 1986), que deve ser visto como um cuidado que se requer no emprego de equações aproximadas.



**Figura 6.14 Portal com rótulas de Hajjar *et al.* (1997).**

Esse problema demonstra uma das utilizações do EF rígido-rótula neste capítulo, o estudo das colunas-escoras, que é subdividido nas seguintes partes:

- segundo Hajjar *et al.* (1997), estuda-se a influência da seção da coluna C-D no dimensionamento desse portal com  $\alpha_P = 1$  e  $\beta_P = 0,5$  (ou seja,  $P_2 = P_1/2$ );
- avalia-se o que ocorre na *Análise Avançada* dessa estrutura, para  $0 \leq \beta_P \leq 1$ , com  $\alpha_P = 1$ , ou seja, a carga  $P_1 \geq P_2$ , e a flambagem ocorre para a esquerda;
- repete-se o item (b.), mas agora  $0 \leq \alpha_P \leq 1$ , com  $\beta_P = 1$ , ou seja, a carga  $P_2 \geq P_1$  de forma a se ter a flambagem ocorrendo para a direita; e
- conclusões dessas análises.

Esse modelo foi realizado também com 20 EFs, 6 em cada coluna e 8 na viga, dos quais 1 EF rígido-rótula na extremidade direita e o restante do tipo-padrão.



### 6.6.1 REPRODUZINDO O PROBLEMA ORIGINAL

Estuda-se a influência da rigidez da coluna da direita (C-D) variando-se sua seção correspondente de forma que a inércia da coluna  $I_{CD} = \gamma_z I_{AB}$ , com os fatores  $\gamma_z$  dados por  $\{0,5/1/5/10\}$ , sendo  $I_{AB}$  a inércia  $I_z$  da seção W 14 x 74 da outra coluna.

As propriedades consideradas dos perfis selecionados, com suas dimensões de espessura ajustadas, são indicadas na Tab. 6.3. Nesse caso, não se indicam os dados dos perfis originais, pois o objetivo agora não é a confrontação de resultados numéricos (quantitativos), mas de comportamento (qualitativos). Os dados de materiais e demais características são fornecidos também na Fig. 6.14.

Deseja-se determinar a carga limite do portal, com duas cargas verticais. Na coluna A-B  $P_1 = \lambda N_y$ , com  $N_y = 3516$  kN (esmagamento da seção), enquanto a carga na C-D é  $P_2 = 50\% P_1 = \lambda N_y/2$ . Inclui-se a curvatura inicial (CI) e as tensões residuais (TR) da norma AISC, adotadas em todo o capítulo. Note-se que é necessário definir a direção da CI que provoca a menor carga limite, sendo esta mostrada também na Fig. 6.14.

As trajetórias de equilíbrio desse portal são traçadas na Fig. 6.15, acompanhando o deslocamento horizontal (na direção x-) em relação ao fator de carga em  $P_1 (= P = N)$ . Observe-se que apesar da enorme variação de inércia da coluna C-D, isso altera muito pouco a capacidade de carga do portal, que não supera  $\lambda = 78\%$ .

Além disso, o efeito da CI para essa estrutura representa pouca influência ( $P\delta$ ) no aumento dos deslocamentos. No caso da coluna C-D, modificar a CI de direção, da esquerda “(-“, indicado na Fig. 6.14) para a direita “+” não altera o fator limite (78%), como visto na seção anterior, porque é birrotulada. Embora essa imperfeição tenha de ser introduzida. Já a CI da coluna A-B é direcionada, conforme a deformada, em “+(“ ou “-“). Para este caso, as CIs da forma e sinais: (+/- ( e (+/+ ) governam.

Assim, comprova-se que modificar a rigidez da coluna escura (C-D), para essas condições de carga, não altera a flambagem inelástica da coluna A-B, ou seja, o dimensionamento; logo, o coeficiente de flambagem  $k_{AB}$  não se alterou. Há uma ínfima variação na carga limite e na trajetória, que se deve ao fato de os deslocamentos transversais serem um pouco maiores na direção governante, quando a coluna C-D é mais rígida, pois ela se deforma menos na direção axial e transfere mais carga também; mas essa variação é desprezível (sem qualquer interesse prático).

Nesse problema, o que determina a capacidade do portal é a carga de flambagem da coluna A-B apenas, acrescida de um pequeno efeito  $P\delta$ .

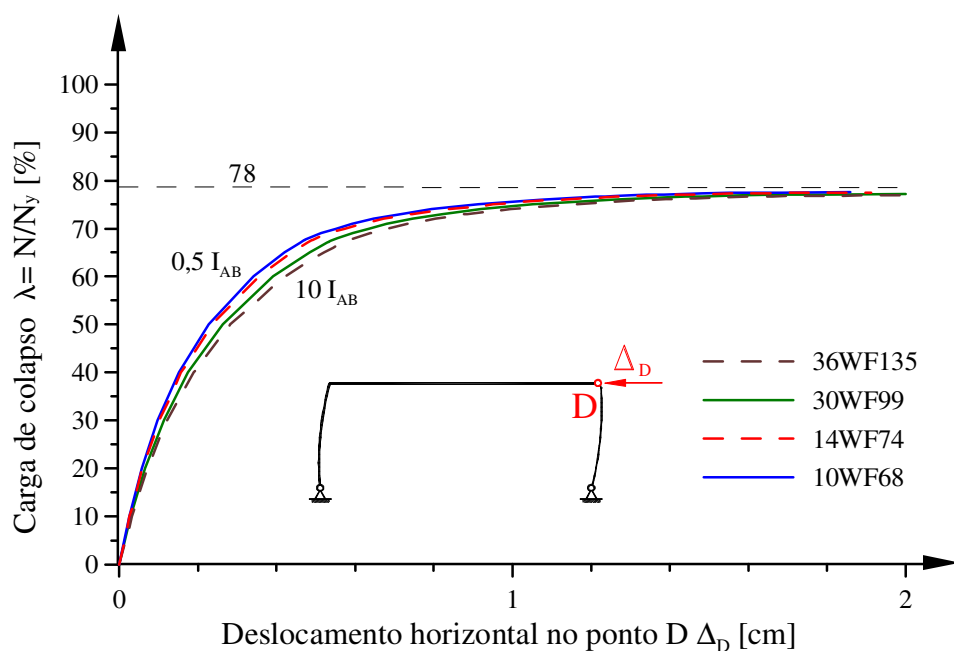


Figura 6.15 Trajetórias de equilíbrio do portal de Hajjar *et al.* (1997).

Tabela 6.3 Propriedades geométricas adotadas nos perfis do portal.

Perfil	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]	Relação $\gamma_z$ [] $I_z/I_{AB}$
	altura d	largura b	espessuras					
			aba t	alma a				
24 WF 76	607,1	228,3	17,637	11,187	114,5	87408	3288,2	–
14 WF 74	360,7	256,5	20,027	11,818	140,6	33090	2053,8	1,000
10 WF 68	264,2	256,5	19,915	11,969	129,0	16399	1398,4	0,496
30 WF 99	754,4	266,7	17,187	13,342	187,7	166076	5108,3	5,019
36 WF135	904,2	304,8	20,384	15,272	256,1	324658	8338,1	9,811

Notas: 1) as espessuras (t, a) foram ajustadas para manter a área bruta  $A_g$  e a inércia  $I_z$  dos laminados;  
2) a coluna C-D possui  $I_z$  próximo da relação  $\gamma_z$  adotada por Hajjar *et al.* (1997).

Tabela 6.4 Cargas de colapso do portal de Hajjar *et al.* (1997).

Perfil da coluna C-D	$\gamma_z$ [] $I_z/I_{AB}$	Deslocamento nó 13		Carga $N/N_y$ <sup>(1)</sup>		P = N [kN]	$k_{AB}$ <sup>(4)</sup>
		$\Delta_D$ [cm] <sup>(2)</sup>	$\Delta_D/\Delta_{DAB}$	$\lambda_c$ <sup>(3)</sup>	$\lambda_c/\lambda_{AB}$		
10 WF 68	0,496	1,684	97,5	77,5	100,1	2724,9	2,493
14 WF 74	1,000	1,727	100,0	77,4	100,0	2721,4	2,499
30 WF 99	5,019	1,799	104,2	77,1	99,6	2710,8	2,518
36 WF135	9,811	1,758	101,8	76,8	99,2	2700,3	2,537

Notas: 1)  $N = P$ ,  $N_y = 3516$  kN; e, 2) deslocamento no passo 0,1% antes do colapso; 3) indicada a carga limite  $\lambda$  inferior (máxima sem colapso); 4)  $k_{AB} = 4,938(-\ln \lambda_c)^{0,5}$ .

Na tabela 6.4, elucida-se o comportamento dessas trajetórias, mostrando que os valores de  $\Delta x$  do ponto D ( $\Delta_D$ , nó 13), o maior deslocamento horizontal, bem como os do fator de carga  $\lambda_c$  de colapso, estão muito próximos em todos os casos estudados.

Hajjar *et al.* (1997) empregando as expressões fornecidas pelo AISC LRFD (1986) com os dados desse problema, determinaram o coeficiente de comprimento efetivo  $k_{fl}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho_z &= \sqrt{\ln \lambda_c / \ln 0,658} = \sqrt{-2,389 \ln \lambda_c} \\ \lambda_z &= \rho_z \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} = \rho_z \pi \sqrt{\frac{20000}{25}} = 88,858 \rho_z = 137,37 \sqrt{-\ln \lambda_c} \\ k_{\Pi} &= \frac{\lambda_z}{L/r_z} = \frac{\lambda_z}{426,7/15,34} = \frac{\lambda_z}{27,82} = 4,938 \sqrt{-\ln \lambda_c} \end{aligned} \quad (6.18a-c)$$

Assim, para a coluna A-B com  $76,8\% \leq \lambda_c \leq 77,5\%$ , os coeficientes de flambagem  $k_{AB}$  no eixo z (maior inércia), encontra-se  $2,54 \geq k_{AB} \geq 2,49$ , respectivamente. Hajjar *et al.* (1997) com o processo de dimensionamento, pelo ábaco de Julian & Lawrence (1959), para  $I_z = 43700 \text{ cm}^4$ ,  $G_A = \infty (\approx 9000)$  e  $G_B = 1,95$  encontraram  $k_{AB} = 2,62$  que supera um pouco ao desta tese (máx. +5,2%, o ábaco é favorável à segurança).

Por outro lado, sem qualquer avaliação adicional, fica claro que a coluna C-D e as modificações de sua inércia não alteram esse comportamento, bem como a estrutura é estável em relação a esta coluna para o valor  $\beta_P = 0,5$  (Hajjar *et al.*, 1997).

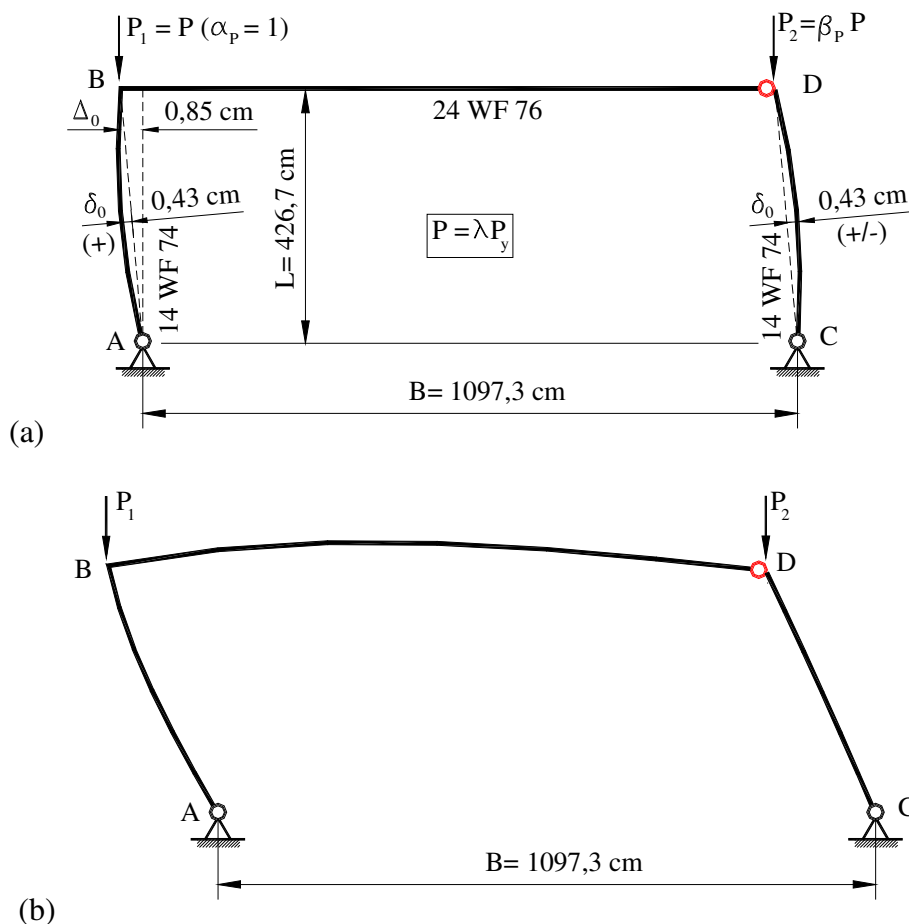
Seguindo Siat-Moy (1986), empregando a mesma Eq. 6.18 para a coluna C-D, como  $P_2 = 0,5 P_1$ ,  $\lambda_c$  (C-D) =  $0,5\lambda_c$  (A-B), chega-se, então, a  $38,4\% \leq \lambda_c \leq 38,8\%$  do qual se obtém, enfim, os coeficientes aparentes  $4,80 \leq k_{CD} \leq 4,83$ . Conforme Alvarenga & Silveira (2008b), o coeficiente adequado é  $k_{CD} = 1$ , já que não ocorre, efetivamente, a flambagem dessa coluna para o carregamento indicado.

Nesse caso, não se avaliou o efeito  $P\Delta$ , que não pode ser desprezado em estruturas com escoras, portanto os resultados aqui são adequados apenas quando a estrutura for travada, não havendo qualquer “fora de prumo” (ou deslocamento horizontal no topo).

### 6.6.2 PORTAL COM CARGA MAIOR NA COLUNA ESQUERDA

Para se obter melhor visão do comportamento desse portal, deve-se fazer a *Análise Avançada*, na qual a imperfeição geométrica do fora de prumo (FP), que avalia o efeito  $P\Delta$ , tem de ser considerada; recomendando-se  $\Delta_0 = L/500$  (White & Hajjar, 1991; Chen & White, 1993).

Nas análises seguintes, serão consideradas as colunas com a mesma seção (14 WF 74). As cargas são  $P_1 = N = P$  ( $\alpha_P = 1$ ),  $P_2 = \beta_P P$ , sendo  $0 \leq \beta_P < 1$  ( $P_1 > P_2$ ). Com isso a flambagem inelástica ocorrerá para a direção esquerda. Deve-se ajustar a configuração geométrica imperfeita inicial (CI +FP) para determinar-se a carga limite mínima.



**Figura 6.16 Flambagem na direção x- do portal de Hajjar *et al.* (1997):**  
 (a) Modelagem da CI e FP; (b) deformada no colapso, para  $\beta = 54\%$ ,  $FE = 40\times$ .

A imperfeição geométrica (CI+FP) mais crítica é a representada na Fig. 6.16(a), sendo a CI da coluna C-D em qualquer direção, forma (+/+) ou (+/-). Essa configuração geométrica inicial imita sua deformada no instante de colapso, representada na Fig. 6.16(b) (Alvarenga, 2005).

As trajetórias de equilíbrio são representadas na Fig. 6.17, constatando-se que as cargas de colapso maiores ( $\lambda = N/N_y$ ) ocorrem para os menores valores de  $\beta_p$ , como esperado. As deflexões máximas praticamente dobraram de valor em relação às obtidas apenas com a CI da Fig. 6.15, partindo de aproximadamente  $L/250$  para atingir  $L/105$ , sem a presença de qualquer carga horizontal no portal, elucidando o efeito  $P\Delta$ . Note-se que a condição  $\beta_p = 0,5$  com a rigidez relativa  $I_V/I_C = 2,638$  nas duas colunas, corresponde ao estudo da subseção 6.6.1, porém agora incluindo o FP.

Empregando-se as Eqs. 6.18(a-c), detecta-se a perda de estabilidade da coluna A-B provocada pela carga de compressão na coluna C-D como consta na Tab. 6.5.

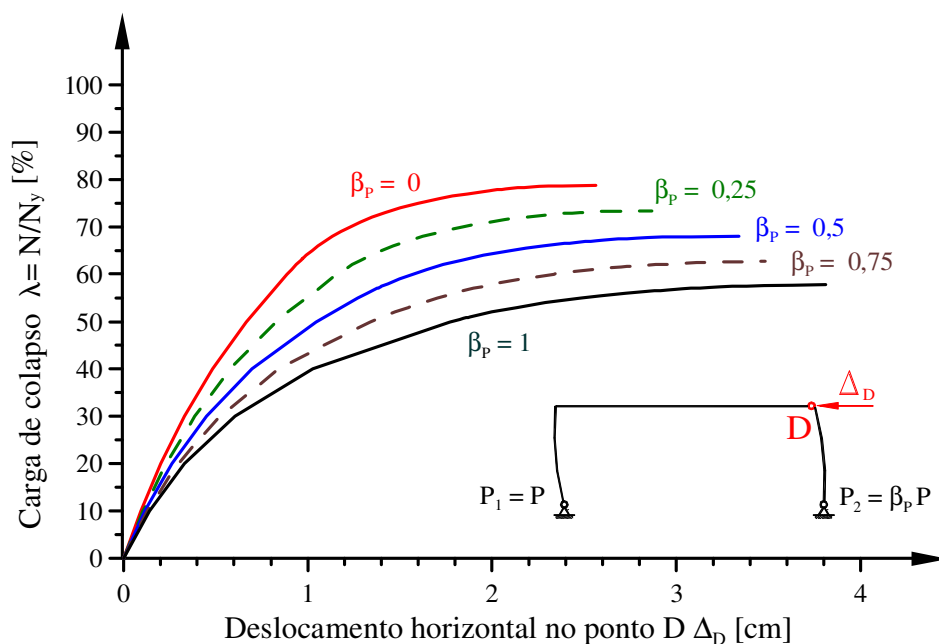


Figura 6.17 Trajetórias de equilíbrio para  $P_1 = P$  (flambagem x-).

Tabela 6.5 Condição de flambagem na direção x-.

$\beta_P$ [%]	$\lambda = N/N_y$ ( <sup>1</sup> ) Colapso	$P_1 = P_{\max}$ [kN]	$P_2 = \beta_P P$ [kN]	$P_1/P_{1\max}$ [%]	$\lambda_{AB}$ ( <sup>2</sup> )	$k_{AB}$ ( <sup>3</sup> )	$\lambda_{CD}$ ( <sup>4</sup> )	$k_{CD}$ ( <sup>3</sup> )
0	0,787	2767,1	0,0	100,0	67,2	2,416	? ( <sup>5</sup> )	? ( <sup>5</sup> )
25	0,733	2577,2	644,3	93,1	76,5	2,750	178,9	6,431
50 ( <sup>6</sup> )	0,679	2387,4	1193,7	86,3	85,5	3,073	142,7	5,129
61	0,655	2303,0	1404,8	83,2	89,3	3,211	131,5	4,728
75	0,626	2201,0	1650,8	79,5	94,0	3,379	119,4	4,292
100	0,577	2028,7	2028,7	73,3	101,8	3,660	101,8	3,660

Notas: 1)  $N = P$ ,  $N_y = 3516$  kN; 2)  $\lambda_{AB} = 137,34(-\ln \lambda_c)^{0,5}$ ; 3)  $k_{fl} = \lambda_z / 27,82$ ;  
4)  $\lambda_{CD} = 137,34[-\ln (\beta_P \lambda_c)]^{0,5}$ ; 5) indefinido; 6) original de Hajjar et al. (1997).

Enquanto a coluna A-B isolada absorveu 78,7% de  $N_y$  e o portal resiste 2767 kN, conjugada à coluna C-D, ambas suportam uma carga máxima de 4058 kN, metade para cada uma (2029 kN), que representa uma perda de 27% (da capacidade de A-B isolada).

Observe-se que o coeficiente de flambagem indicado na Tab. 6.5 varia no intervalo  $2,4 \leq k_{AB} \leq 3,7$ ; enquanto Hajjar *et al.* (1997), baseados na avaliação da capacidade do andar (LRFD, 1993), obtiveram o valor intermediário  $k_{AB} = 3,21$  (chamado “prático”) e encontraram também o coeficiente  $k_{CD} = 4,54$ .

Por outro lado, realizando uma análise de flambagem do sistema, Hajjar *et al.* (1997) indicaram o valor teórico  $k_{AB} = 3,18$  chegando a  $k_{CD} = 4,49$  para  $\beta_P = 0,5$ . Isso corresponde à situação da tabela  $k_{AB} = 3,073$  e  $k_{CD} = 5,129 > 4,54 > 4,49!$  Inadequado?

Empregando-se a *Análise Avançada*, verifica-se que quando as colunas possuem a mesma carga ( $\beta_P = 100\%$ ), com uma participação conjunta, isso exige um coeficiente de

flambagem maior ( $k_{AB} = k_{CD} = 3,66 > 3,21$ ), embora o autor não concorde com o uso dessa aproximação para a coluna-escora ( $k_{CD} = 3,66?$ ).

Já no caso de a carga atuante na escora C-D não ser igual à da coluna A-B (no problema é de 50%), para se adotar o valor  $k_{AB} = 3,21$  que indicaram, a carga  $P_2$  deve ser inferior a  $\beta_P = 61\% P_1$  em A-B, ou seja,  $P_2 \leq 1405$  kN, o que representa  $k_{CD} = 4,73$  próximo aos coeficientes  $k_{CD}$  informados antes (4,49 teórico e 4,54 prático). Desde que  $\beta_P = 50\% < 61\%$ ,  $k_{AB} = 3,21 > 3,18 > 3,07$  conclui-se que há um superdimensionamento ou uma boa margem conservadora incluída na norma.

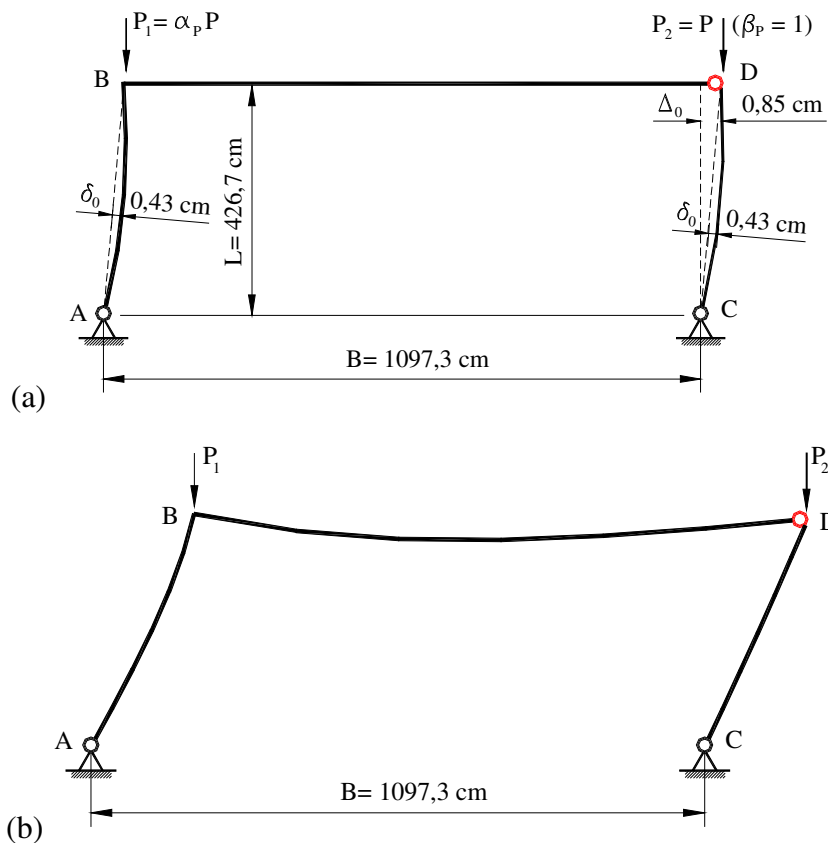
### 6.6.3 PORTAL COM CARGA MAIOR NA COLUNA DIREITA

Estuda-se, agora, a capacidade da escora C-D tomando as cargas  $P_2 = P$  ( $\beta_P = 1$ ),  $P_1 = \alpha_P P$ , sendo  $0 \leq \alpha_P < 1$  ( $P_1 < P_2$ ), ( $N = P$ ), e a geometria com imperfeições iniciais opostas, da Fig. 6.18(a), provocando a flambagem na direção  $x+$ , representada pela deformada na Fig. 6.18(b). A curvatura inicial tem a forma de  $-/+$  ou  $-/-$ .

Observe-se que a carga  $P_2$  sozinha não causa a flambagem do conjunto, mas pode provocar a flambagem individual da coluna C-D ou a sua maior dependência de A-B.

Para se entender o efeito das imperfeições iniciais no comportamento desse portal, os fatores de colapso são listados na Tab. 6.6, para as diferentes configurações deste estudo. A configuração da Fig. 6.16(a) continua dominando para valores de  $\alpha_P \geq 85\%$ . Somente a partir daí, a configuração da Fig. 6.18(a) passa a determinar o menor fator de carga de colapso. Verifica-se um fator de carga de colapso muito elevado (acima de 94,8%) quando  $\alpha_P \leq 31,25\%$ . Nesses casos, a CI da barra A-B, pode ter qualquer direção (“+” ou “-”) que a carga limite obtida não se altera. A justificativa é que agora a coluna A-B fornece o apoio horizontal suficiente para garantir a flambagem inelástica da escora C-D, (com  $k_{CD} \approx 1$ ), como a barra birrotulada, que de fato é. Nesta tese, recomenda-se adotar sempre  $\underline{k} = 1$ , para as escoras!

No trecho com  $37,5 \leq \alpha_P \leq 75\%$ , têm-se a parte mais interessante, na qual a degradação pela plasticidade na escora C-D é tão elevada que provoca o colapso em A-B, antes que a coluna C-D atinja a flambagem inelástica.



**Figura 6.18 Flambagem na direção  $x+$  do portal de Hajjar *et al.* (1997):**  
 (a) modelagem da CI e FP; (b) deformada no colapso para  $\beta_p = 54\%$ ,  $FE = 40\times$ .

Isso ocorre porque A-B não é mais capaz de absorver o momento gerado pelo esforço horizontal induzido que C-D exige para atingir a sua flambagem; e assim, A-B entra em flambagem inelástica antes. Isso pode ser avaliado como uma flambagem do *sistema* ou conjugada (conjuga a plasticidade de C-D e A-B, para o colapso de A-B). Nessas condições, a configuração da deformada mais crítica é a representada na Fig. 6.18(b), sem outras opções.

As trajetórias de equilíbrio relacionando os deslocamentos do ponto D para as mesmas relações  $\alpha_p$  de cargas e configurações geométricas iniciais (CI+FP) diferentes são mostradas na Fig. 6.19.

As cargas de colapso são parecidas, porém, as trajetórias têm maiores diferenças, quando a relação  $\alpha_p$  é pequena ( $\alpha_p \rightarrow 0$ ). Para  $\alpha_p$  maiores, a trajetória é semelhante, embora a maior diferença no colapso seja com  $\alpha_p = 0,5$ .

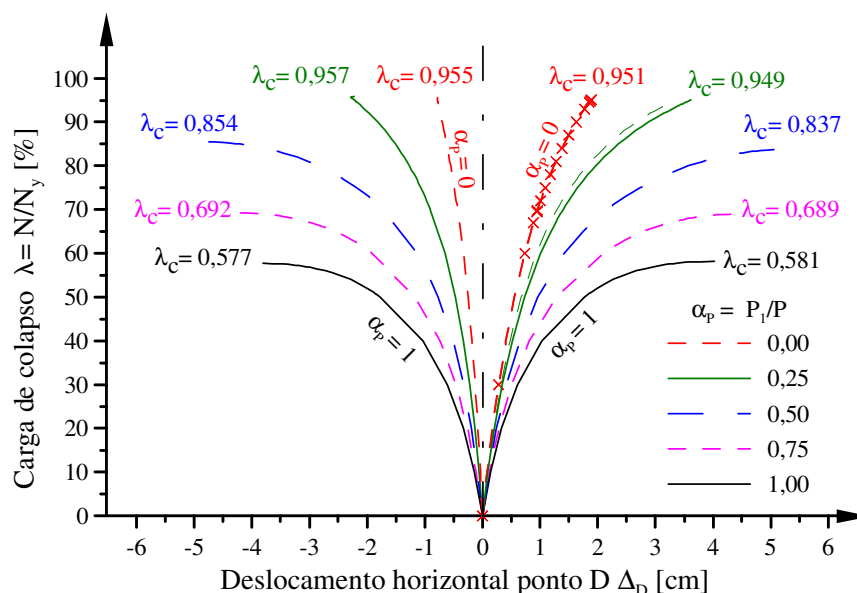
No caso do FP, a direção é determinada pelo pior efeito:

- direção  $x-$ : instabilidade da coluna A-B dada a própria carga; ou,
- direção  $x+$ : instabilidade da coluna C-D por efeito  $P\Delta$  conjugado à plasticidade.

**Tabela 6.6 Estudo das imperfeições para carga limite.**

FP (1)	CI (2)		Fig.	Carga $P_1 = \alpha_p P$ (3,4)										
	AB	CD		0	25,0	31,3	37,5	43,8	50,0	54,4	62,5	75,0	85,0	100
x-	+	-/+	6.16a	95,5	95,7	95,8	96,0	90,5	85,4	82,1	76,5	69,2	64,1	57,7
x+	+	+	-	95,1	94,9	94,8	94,4	89,6	85,2	82,3	77,4	70,7	66,0	60,0
	-	+	6.18a				93,1	88,2	83,7	80,8	75,7	68,9	64,2	58,1

Notas: 1) FP fora de prumo: x- “\ ”, x+ “/ ”; 2) CI: curvatura inicial: AB “-”, “+”, CD “-”, “+”;  
3)  $P_2 = P (= N) = \lambda N_y$ ,  $N_y = 3516$  kN; 4) os valores que governam estão destacados ( ).

**Figura 6.19 Trajetórias de equilíbrio para  $P_2 = P$  (flambagem x- ou x+).**

Veja-se que os menores valores de  $\alpha_p$  correspondem a maiores valores dos fatores de carga, se atinge quase a carga de esmagamento  $N_y$  e os maiores  $\alpha_p$  aos menores fatores, como esperado. Por exemplo, para  $\alpha_p = 25\%$ , tem-se  $\lambda_c = 94,9\%$  comprovando a esbeltez da barra C-D, obtida com  $k_{CD} = 1$  ( $\lambda_{CD} = 27,8$ ).

Note-se ainda, que mesmo quando as trajetórias representam estados finais diferentes, as diferenças entre os fatores de carga de colapso são pequenas, variando de (0,4 a 1,7)%, ou seja, é questionável se a influência é relevante do ponto de vista de engenharia.

Como no caso anterior, apresenta-se na Tab. 6.7 na qual se determinam as menores cargas limites dentre as três possibilidades mostradas na Tab. 6.6 e os coeficientes de flambagem  $k_{AB}$  e  $k_{CD}$  correspondentes, aplicando-se as Eqs. 6.18.

O colapso na direção x+ prevalece enquanto  $\alpha_p \geq 85\%$ , correspondendo a uma degradação da coluna C-D com flambagem própria ou induzindo a flambagem conjugada da coluna A-B.



**Tabela 6.7 Condição de flambagem com  $P_2 = P$  (direção x- ou x+).**

$\alpha_P$ [%]	FP (1)	Colapso $\lambda =$ $N/N_y$ (2)	$P_2 =$ $P_{max}$ [kN]	$P_1 =$ $\alpha_P P$ [kN]	$P_2 /$ $P_{2max}$ [%]	$\lambda_{AB}$ (3)	$k_{AB}$ (4)	$\lambda_{CD}$ (5)	$k_{CD}$ (4)
0,0	x+	0,951	3343,7	0,0	100,0	? (6)	? (6)	30,79	1,107
25,0		0,949	3336,7	834,2	99,8	164,7	5,922	31,42	1,130
37,5		0,931	3273,4	1227,5	97,9	140,9	5,065	36,73	1,320
43,7		0,882	3101,1	1356,7	92,7	134,0	4,818	48,67	1,749
50,0		0,837	2942,9	1471,4	88,0	128,2	4,608	57,94	2,082
62,5		0,757	2661,6	1663,5	79,6	118,8	4,271	72,47	2,605
75,0		0,689	2422,5	1816,9	72,4	111,6	4,011	83,83	3,013
85,0	x-	0,641	2253,8	1915,7	67,4	107,3	3,847	91,59	3,292
100,0		0,577	2028,7	2028,7	60,7	101,9	3,661	101,9	3,661

Notas: 1) onde indicados x- e x+, considera-se o menor valor de  $\lambda$ ; 2)  $N = P$ ,  $N_y = 3516$  kN;  
 3)  $\lambda_{AB} = 137,34[-\ln(\alpha_P \lambda_c)]^{0,5}$ ; 4)  $k_{fl} = \lambda_c / 27,82$ ; 5)  $\lambda_{CD} = 137,34(-\ln \lambda_c)^{0,5}$ ; 6) indefinido.

A partir desse ponto ( $\alpha_P < 85\%$ ) ocorrerá somente a flambagem do pórtico e na direção preponderante x-, como visto na subseção anterior. Essa tabela conjugada à Tab. 6.5 serve de base para as conclusões da subseção seguinte.

#### 6.6.4 CONCLUSÕES SOBRE O ESTUDO DO PORTAL

Agora, avalia-se o comportamento da estrutura na direção da flambagem x- ou x+, relacionada à configuração geométrica preponderante, para a determinação da carga de colapso mínima, associada às cargas  $P_1$  e  $P_2$  aplicadas no portal. Para tanto, define-se o parâmetro de carga  $\gamma_P = P_2 / (P_1 + P_2) = \beta_P / (\alpha_P + \beta_P)$ , que varia entre:

- 0: corresponde a  $P_2 = \beta_P = 0$ , só a coluna A-B recebe carga  $P_1 = \alpha_P N_y$ ;
- 0,5: corresponde a cargas iguais nas colunas,  $P_1 = P_2 = P$ , ou ( $\alpha_P = \beta_P$ ); e
- 1: corresponde a  $P_1 = \alpha_P = 0$ , só a coluna C-D carregada por  $P_2 = \beta_P N_y$ .

Analisando-se a Fig. 6.20, assim construída, podem ser identificadas três regiões de comportamento bem distintas:

- domínio da flambagem do portal (em L), com a instabilidade da coluna A-B conjugada, ou não, aos efeitos da plasticidade, em que  $P_1 > P_2$  no geral, partindo de  $\lambda_c = 78,7\%$  chega ao mínimo de  $\lambda_c = 57,7\%$ , estendendo-se até o ponto P (aproximadamente  $\gamma_P = 54\%$ , onde  $P_1 \geq 85\% P_2$ ). Essa primeira região mostra uma queda em forma parabólica da carga limite, mais tênue para  $\gamma_P \leq 25\%$  e mais abrupta próximo de  $\gamma_P \approx 50\%$ . Note-se que em todos os casos só ocorre plasticidade na coluna A-B, próximo à ligação com a viga, no ponto B;

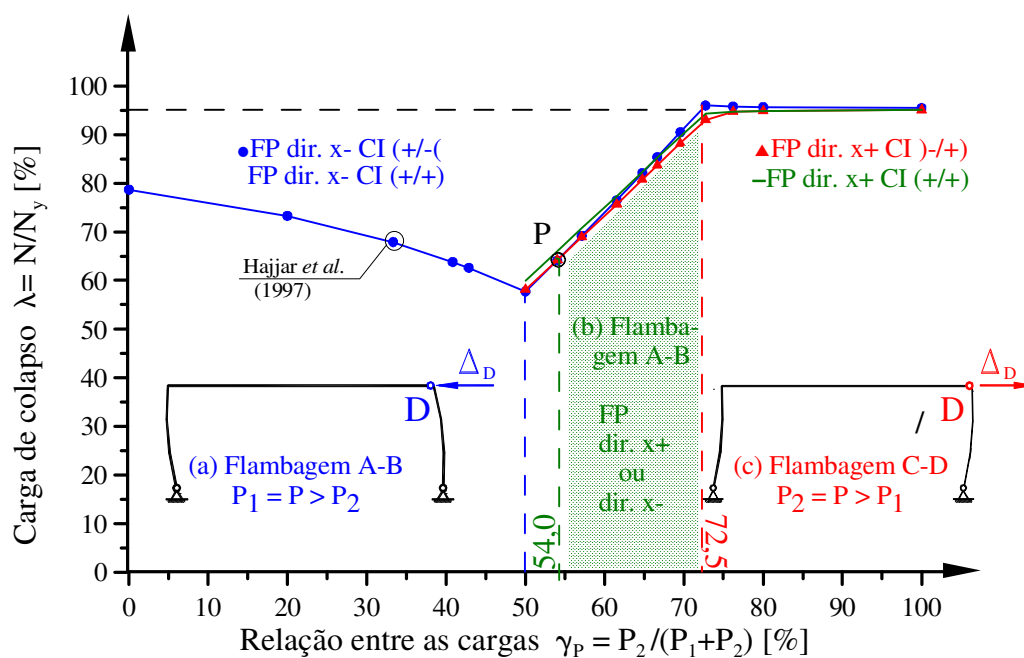
- b. intermediária às regiões (a) e (c), que é a mais interessante, pois se apresenta a possibilidade de se ter a flambagem nas duas direções (com pequenas diferenças de fator de carga), e na qual ocorre, em maior ou menor grau, plasticidade nas duas colunas. Pode-se entender que a plasticidade da escora C-D gera um momento central maior e acelera a sua curvatura na direção da flambagem isolada, que não chega a ser atingida, como se viu na subseção anterior (Alvarenga & Silveira, 2008a). Enquanto isso, por meio de efeitos secundários  $P\Delta$ , o esforço horizontal induzido aumenta a plasticidade na coluna A-B, cresce e degrada mais rapidamente o portal, que então entra em colapso por flambagem da coluna A-B, antecipando o provável mecanismo a ser formado no ponto B; e
- c. a outra extremidade, a partir de  $\gamma_P = 72,5\%$ , tem-se o domínio puro da flambagem inelástica da escora C-D, com o fator de carga praticamente inalterado  $\lambda_c \approx 95\%$  ( $k_{fl} \approx 1!$ ), onde o sentido da CI da coluna A-B (ou da C-D) não interferem no problema (sinal + ou -). Diferente da região anterior, aqui ocorre plasticidade apenas na coluna C-D, de maneira geral em toda a extensão da barra e com o mesmo formato. A carga  $P_1$  não mais influencia na resposta.

Assim, a direção da deformada é estabelecida a partir das condições do carregamento, em que a instabilidade pode se manifestar de formas diferentes, por causa da presença da plasticidade, ou seja, pode-se chegar a uma nova conclusão:

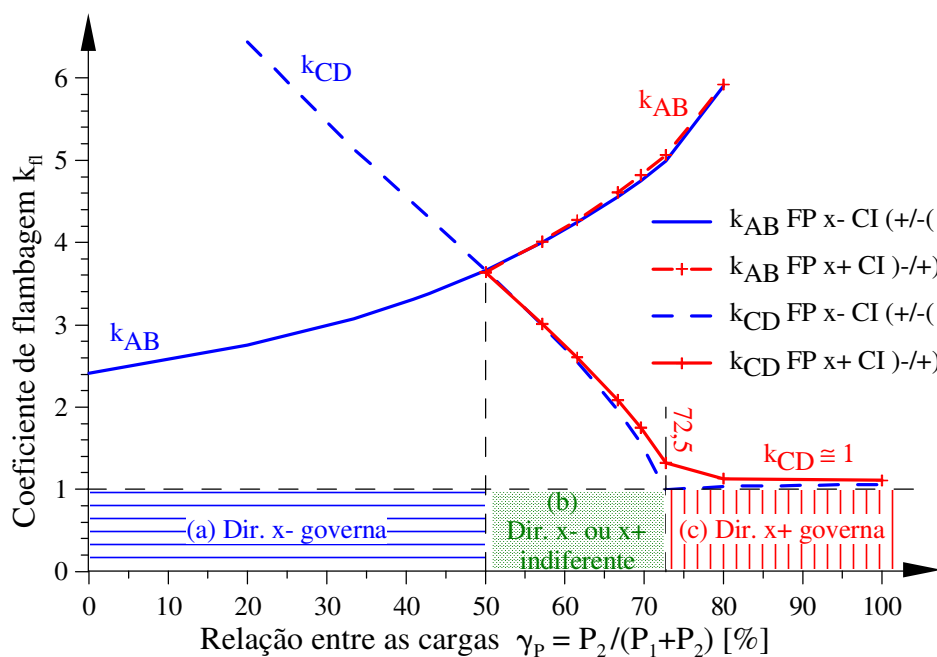
*a plasticidade pode alterar os modos de flambagem, excitados pelo carregamento da estrutura, numa dada direção, em função da presença de uma (ou mais) coluna(s)-escora na estrutura.*

Para avaliar o efeito do carregamento da estrutura na flambagem das barras isoladas, como é tradicional no dimensionamento das normas, apresenta-se na Fig. 6.21, na qual se tem a variação dos coeficientes de flambagem aparentes:  $k_{AB}$  e  $k_{CD}$ , conforme obtidos nas Tabs. 6.5 e 6.6, por meio das Eqs. 6.18(a-c), em função da variação das cargas, definida pelo parâmetro  $\gamma_P$ . Nesse instante, despreza-se o efeito da curvatura CI (+/+ ) nos resultados, já que não os governa e, no máximo, equipara-se ao caso CI )-/+ ) para altos valores de  $\gamma_P$ .

Poder-se-ia supor que, quanto maiores forem os coeficientes  $k_{fl}$ , mais restritivos serão, já que a carga final suportada pelo perfil será menor no dimensionamento resultante. Entretanto, o emprego descuidado de fórmulas pode trazer surpresas!



**Figura 6.20** Direção da flambagem do portal de Hajjar et al. (1997).



**Figura 6.21** Coeficiente de flambagem  $k_{fi}$  do portal de Hajjar et al. (1997).

Quando o fator de carga  $\gamma_p$  é inferior a 0,2 ou superior a 0,8 então  $k_{CD}$  ou  $k_{AB}$ , respectivamente, tende ao infinito. Observa-se que as normas limitam a esbelteza máxima em  $L/r_z = 200$ , o que resulta neste exemplo na restrição  $k_{max} \leq 7,18$ . Verifica-se que os valores elevados de  $k_{fi}$  não tem sentido como restrição nesta análise, visto que em ambos os casos a estrutura é estável e suporta as cargas previstas.

Portanto, são os menores valores de  $k_{fi}$  que controlam a resposta estrutural, havendo também três regiões distintas de comportamento, conforme:

- a.  $k_{AB}$  é menor que  $k_{CD}$  e define a flambagem da coluna A-B, pelo FP na direção  $x-$ , governando até  $\gamma_P = 54\%$ ;
- b. região intermediária, com possibilidade de flambagem nas duas direções;
- c. com  $\gamma_P > 72,5\%$ , coeficientes  $k_{CD} \approx 1$  (tendem para 1 e são menores que  $k_{AB}$ ), em que ocorre a flambagem inelástica da coluna C-D isolada, ou seja, o coeficiente  $k_{AB} \geq 5$  apenas confirma que a coluna A-B não governa o dimensionamento e é um valor bem inferior ao limite (7,18).

Na hipótese de só haver a carga  $P_2$  na coluna C-D (ou seja,  $\gamma_P = 1$ ), não se poderia construir o portal com valores de  $k_{AB}$  tão elevados. Isso não é verdade! A variação de  $k_{AB}$  pelas Eqs. 6.18(a-c) apenas sinaliza que a carga máxima não é controlada pela coluna estrutural A-B e, por essa razão, a carga aplicável em C-D será maior, calculada com  $k_{CD} = 1$ . Isso se torna bem claro no trecho à esquerda do gráfico, no qual  $k_{CD}$  tende para infinito, mas, antes disso,  $k_{AB}$ , com valores cada vez menores, determina o colapso da estrutura, quando  $\gamma_P$  tende a zero. Observe-se que quando  $k_{CD}$  for superior a 7,18 ( $L/r_z > 200$ ) e a coluna C-D não tiver carga (ou seja,  $\gamma_P = 0$ ), não se poderia construir o portal! Mais uma vez chega-se a um absurdo. Portanto,  $k_{CD}$  não teria nenhum efeito prático e o portal pode ser construído plenamente com as colunas e cargas previstas.

Assim, fica demonstrado que não há sentido em se empregar  $k_{CD}$  diferente de 1, uma vez que o “paradoxo” para a coluna-escora é um caso de mau uso de equação. Porém, isso não retira o mérito de Siat-Moy (1986), afinal, desse e de outros questionamentos, desenvolveu-se a tecnologia que resultou na *Análise Avançada*.

Note-se, portanto, que no emprego de fórmulas como as Eqs. 6.18, para determinar o coeficiente  $k_{fl}$ , podem-se achar valores incoerentes do ponto de vista de engenharia, cujo sentido é apenas dizer quem governa o dimensionamento das colunas do portal, envolvendo a atuação das cargas e a estabilidade das colunas individualmente.

O efeito da plasticidade nos EFs desse portal também pode ser estudado, com base no parâmetro  $\gamma_P$ , conforme representado na Fig. 6.22, considerando as três regiões de comportamento antes apresentadas, da seguinte forma:

- a. valores baixos de  $\gamma_P \leq 40,8\%$ , acompanhando-se a Fig. 6.22(b), na qual a plasticidade se manifesta na coluna da esquerda apenas, sendo a flambagem na direção  $x-$ , que provoca uma zona plástica (ZP) no lado interno próximo ao ponto B, no topo da coluna A-B. No caso mais grave ( $\gamma_P = 0$ ), da Fig. 6.22(a),

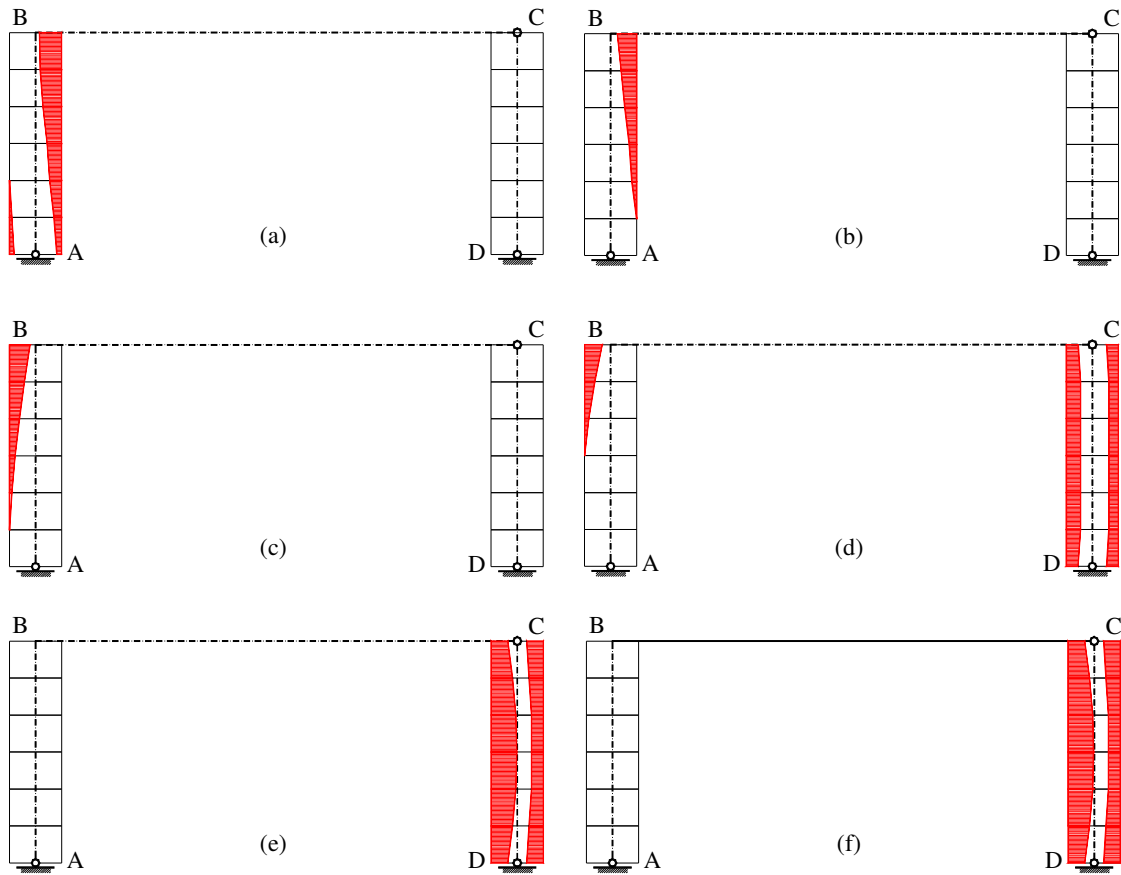
- aparece também uma ZP inferior nesta coluna. Quando  $\gamma_P \geq 50\%$  começa a ser possível, tanto a flambagem para o lado  $x^-$  como para o  $x^+$ , representado na Fig. 6.22(c), em que a ZP está no topo, porém do lado externo, que não corresponde ao caso mais crítico, o qual permanece sendo o do lado  $x^-$ , com a ZP do lado interno da Fig. 6.22(b). Em geral, nesse trecho só há plasticidade na coluna A-B;
- b. para  $\gamma_P > 54\%$ , a tendência passa a ser flambagem na direção  $x^+$ , com uma ZP na parte externa próxima ao topo da coluna A-B, e a coluna C-D, dadas as maiores cargas nela impostas, começa a apresentar 2 ZPs ao longo de toda a barra. A marca deste trecho é a presença de plasticidade nas duas colunas e a possibilidade de flambagem nas duas direções, ilustrado na Fig. 6.22(d); e
  - c. quando  $\gamma_P \geq 75\%$  a plasticidade surge apenas ao longo da escora C-D, com 2 ZPs, ocorrendo a flambagem inelástica ( $k_{AB} \approx 1$ ) como visto na Fig. 6.4 da seção 6.3. O início desse trecho corresponde à carga horizontal mínima que causa a flambagem inelástica da coluna A-B, conjugada à plasticidade em C-D. Essas condições correspondem às ZPs indicadas nas Figs. 6.22(e-f).

Na figura 6.23, elucidam-se algumas das seções das zonas plásticas representadas nos portais da Fig. 6.22. A plasticidade da coluna A-B é mais localizada em uma única aba e, às vezes, atinge pequena parte da alma, dada a combinação de flexão compressão, como visto nas Figs. 6.23(a-b), para os casos nos quais  $\gamma_P < 50\%$ . Já a manifestação da plasticidade na coluna escora C-D engloba ambas as abas, com 2 ZPs, sendo simétrica nas extremidades rotuladas, como visto na Fig. 6.23(d) e assimétrica na meia-altura, na qual atua o momento máximo, como visto na Fig. 6.23(e), ou em casos mais graves, como na Fig. 6.23(c).

Confirma-se que a viga se mantém elástica em todas as análises, mesmo no colapso e nenhuma plasticidade foi nela encontrada, por isso não foi representada.

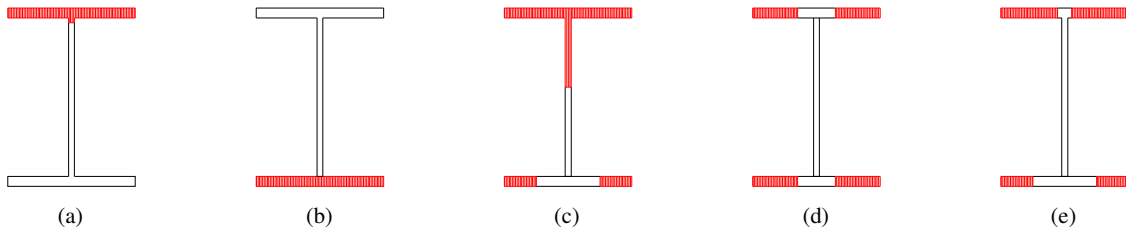
Esta última seção foi resumida em trabalhos que foram publicados por Alvarenga & Silveira (2008a, 2008b) e constituem uma possível contribuição sobre o problema das colunas-escoras para a norma brasileira.

Tendo comprovado os bons resultados dessa parte da formulação numérica, baseando-se na coerência das respostas ora encontradas, comparadas com as anteriores, entra-se no capítulo seguinte, para validação da formulação para o elemento finito com ligação propriamente dito.



**Figura 6.22 Zonas plásticas do portal de Hajjar *et al.* (1997).**

Casos: (a)  $\gamma_P = 0$ ; (b)  $\gamma_P = 40,8\%$ ; (c)  $\gamma_P = 50\%$ ; (d)  $\gamma_P = 69,6\%$ ; (e)  $\gamma_P = 80\%$ ; (f)  $\gamma_P = 1$ ;  
 (g) convenção: (⇒) compressão.



**Figura 6.23 Seções com fatias plásticas do portal de Hajjar *et al.* (1997).**

Percentual: (a) 37,2%; (b) 36,5%; (c) 64,2%; (d) 51,1%; (e) 61,1%;  
 (f) convenção: (||) compressão.

## 6.7 REFERÊNCIAS

- AISC (1972), *Manual of steel construction. Specification for structural steel buildings*, 7<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.
- AISC (1976), *Manual of steel construction. Specification for structural steel buildings*, 8<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.
- AISC LRFD (1986), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 1<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.
- AISC LRFD (1993), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 2<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.
- Alvarenga, A.R. (2005), “*Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*”, Diss. de Mestrado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Alvarenga, A.R. (2008), “*Estudos sobre ligações com análise avançada através da zona plástica em pórticos planos de aço*”, Ex. de Qualificação, EM-UFOP/DECIV, Ouro Preto / MG.
- Alvarenga A.R. & Silveira, R.A.M. (2005), “Aspectos importantes na análise avançada de colunas de aço”, *Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2005*, Guarapari / ES.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008a), “Lean columns by plastic zone advanced analysis view”, *Anais do 5th European Conference on Steel and Composite Structures*, EUROSTEEL, Graz, Áustria, Vol. B, pp 1659-1664.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008b), “Análise avançada de portais com colunas escoras”, *Anais do XXXIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural* (maio/2008 EST05-320), pp. 1-13.
- Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames- Theory software and applications*, CRC Press, Boca Raton.
- Chen, W.F. & White, D.W. (1993), *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames – An Assessment of the state-of-the-art*, SSRC, Bethlehem, Pensilvania.
- Chen, W.F. & Zhou, S.P. (1987), “Inelastic analysis of steel braced frames with flexible joints”. *Int. Jor. Solid and Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 631-649.
- Foley, C.M. & Vinnakota, S. (1999), “Inelastic behavior of multistory partially restrained steel frames - Part I - II”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 125, No. 8, pp. 854-861, 862-868.
- Galambos, T.V. (1982), *Structural members and frames*, Dept. Civil Engineering, Un. Minnesota, Minneapolis.
- Galambos, T.V. & outros (1998), *Guide to stability design criteria for metal structures*, SSRC – Steel Structures Research Council, 5.a Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Galambos, T.V. & Ketter, R.L. (1959), “Columns under combined bending and thrust”, *ASCE J. Eng. Mechanics*, Vol. 85, No. 2, pp. 1-30.
- Hajjar, J.F. & outros (1997), *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for American steel design*, ASCE, Nova Iorque.
- Julian, O.G. & Lawrence, L.S. (1959), “Notes on J and L nomographs for determination of effective lengths”. Reportagem não publicada de propriedade de Jackson & Moreland Eng., Boston, Massachusetts.
- Kanchanalai, T. (1977), “The design and behavior of beam-column in unbraced steel frames”, AISI Project 189, Rep. No. 2, Univ. Texas, Austin, Civil Eng./Structural Research Lab.

Lu, L.W. & Kamalvand, H. (1968), “Ultimate strength of laterally loaded columns”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 94, No. 6, pp. 1505-1523.

Moses, F. (1964), “Inelastic frame buckling”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 90, No. 6, pp. 105-121.

Siat-Moy, F.C. (1986), “K-factor paradox”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 8, pp. 1747-1760.

White, D.D. & Hajjar, J.F. (1991), “Application of second-order elastic analysis in LRFD: research to practice”, *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp.133-148.



# 7

## ELEMENTO FINITO RÍGIDO-LIGAÇÃO

### SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
7.1	Introdução	301
7.2	Viga simples .....	304
7.3	Coluna de Hajjar <i>et al.</i> (1997)	319
7.4	Portal de Yau & Chan (1994) .....	331
7.5	Portal de Chan & Chui (2000)	335
7.6	Ângulo de giro-próprio da ligação .....	345
7.7	Referências	349

## 7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, desenvolvem-se os exemplos para a validação da formulação apresentada no capítulo 3, com a participação efetiva da ligação. Indica-se que a maior parte da literatura existente carece de exemplos e material simples de consulta, o que assim passou também a ser um objetivo com esta parte da tese.

Ao se trazer a participação da ligação, na solução do problema estrutural, aparecem imediatamente dois tratamentos distintos, baseados no seu comportamento:

- a. os modelos de ligações com comportamento linear: mais simples, nos quais a sua rigidez não se altera ao longo da análise; e
- b. os modelos não lineares: nos quais existem diversas aproximações e a rigidez varia em cada instante da análise, como se mostrou no capítulo 2.

Existe uma combinação desses dois tipos de modelo de ligação com os tipos de análise. Para facilitar essa caracterização dos exemplos abordados neste capítulo, as seguintes abreviações serão adotadas:

- a. AELL – Análise Elástica, Ligação Linear;
- b. AILL – Análise Inelástica, Ligação Linear;
- c. AELN – Análise Elástica, Ligação Não linear; e
- d. AILN – Análise Inelástica, Ligação Não linear.

Na validação da formulação numérica abordam-se quatro exemplos, porém esses são tratados de diversas maneiras e com diferentes objetivos:

- a. determina-se o comportamento de uma viga simples mostrada na Fig. 7.1(a), com duas ligações idênticas nas extremidades, abordando dois tipos de carga:
  - i. carga concentrada no meio-vão, e
  - ii. carga distribuída uniforme ao longo de todo o vão.

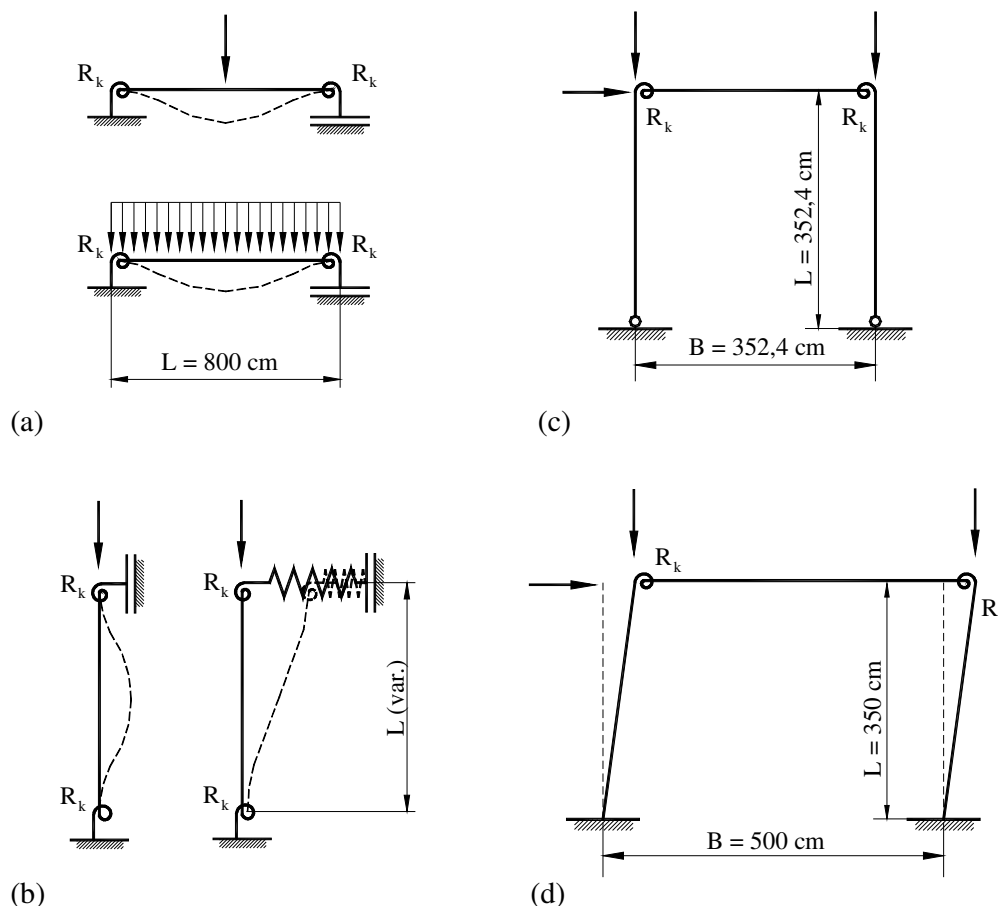
Essas vigas serão estudadas de diversas maneiras, fazendo-se a redução de rigidez da condição engaste (rigidez dita infinita) até a rótula (rigidez dita nula);

- b. determina-se a carga de flambagem elástica de uma coluna com duas ligações idênticas nas extremidades (Chen & Lui, 1991; Hajjar *et al.*, 1997) quando se sai da condição de rigidez máxima (engaste) e se atinge a condição mínima de rótula. Neste estudo, considera-se tanto a coluna na condição travada ou indeslocável quanto na situação de ser deslocável na extremidade superior, [ver

- a Fig. 7.1(b)]. Os resultados são confrontados com os valores fornecidos em Li & Li (2007). Um estudo de convergência para avaliar as necessidades e capacidades de modelagem deste EF com ligação é também realizado;
- c. estuda-se o portal de Yau & Chan (1994), ilustrado na Fig. 7.1(c) com ligação rígida ou linear, regime elástico ou não (AELL e AILL). Esse problema também foi abordado por Machado (2005); e
- d. procura-se reproduzir os resultados do portal de Chan & Chui (2000), abordando ligações não lineares em ambos os regimes (AELN e AILN).

Além disso, neste capítulo apresenta-se também uma avaliação dos três tipos de método de determinação do ângulo de rotação da ligação indicados na subseção 4.5.3. Nos exemplos, indicam-se quais destes métodos foram empregados:

- a. *S* – simples;
- b. *XX* – aproximado; e
- c. *ME* – com MRE.



**Figura 7.1 Exemplos analisados:**  
 (a) viga simples biligada; (b) coluna de Hajjar *et al.* (1997);  
 (c) portal de Yau & Chan (1994); portal de Chan & Chui (2000).

Menciona-se, também, que em outros problemas estudados, não incluídos nesta tese, encontraram-se dificuldades numéricas ou resultados bastante diferentes dos que constam na literatura. A principal razão dessa diferença provém aparentemente de como se está relacionando a curva  $M-\theta$  fornecida com os dados do problema. Embora isso não seja comentado na literatura, existem duas formas de tratar a rotação  $\theta$ :

- a. como o giro próprio da ligação ( $\theta = \theta_L = \alpha_B$ ), independentemente da viga, que é a consideração adotada aqui; e
- b. como o giro total do nó (viga + ligação:  $\theta = \theta_V + \theta_L$ ), como faz a maioria dos pesquisadores (Liew *et al.*, 1997; Silva, 2009).

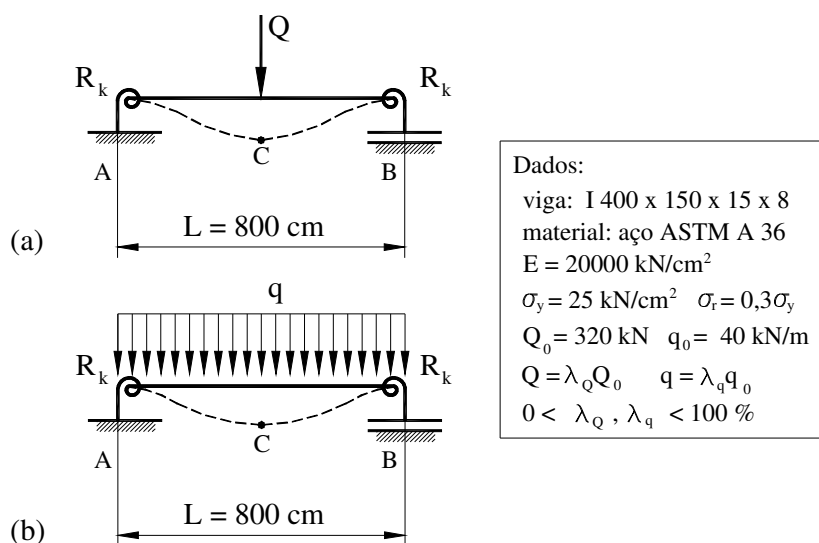
Neste trabalho, considerou-se a primeira opção (a), mas deve-se notar que algumas vezes o giro da viga ( $\theta_V$ ) é muito pequeno, de forma que a hipótese (a) pode ser confundida com a (b). Já quando esses valores individuais são distintos, a resposta final tende a desviar-se mais do que o esperado.

## 7.2 VIGA SIMPLES

Estuda-se, aqui, a viga da Fig. 7.2, que está sujeita a dois tipos de carga: a concentrada no meio-vão ( $Q$ ) e a distribuída ( $q$ ) no vão. Diferente de outros exemplos, a seção da viga não é de nenhum perfil-padrão, embora os laminados 16 WF 40 ou o IPE 400A tenham características próximas. Podem-se comparar as propriedades das três seções na Tab. 7.1. Com a tensão de escoamento  $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ , a seção proposta atende às limitações da subseção 3.2.3(f), para não ocorrer a flambagem local (alíneas *i*.  $b/t = 10 \leq 21,64$ ; e, *ii*.  $d_a/a = 46,25 \leq 106,6$ ) e considera-se  $M_p = 28501,3 \text{ kNcm}$ .

Os dados complementares serão fornecidos posteriormente de acordo com as análises desenvolvidas:

- obter a *linha de viga* (Batho & Rowan, 1934), tipo AELL;
- comportamento de diversas ligações não lineares (AENL);
- dimensionamento, considerando a plasticidade (AILL); e
- efeito combinado (AINL).



**Figura 7.2** Viga biligada simples:  
 (a) carga concentrada  $Q$ ; (b) carga distribuída  $q$ .

**Tabela 7.1** Propriedades da seção da viga.

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t	alma a			elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]
PT <sup>(1)</sup>	400,0	150,0	15,00	8,00	74,60	20061	1003,0	1140,0
16WF40 <sup>(2)</sup>	16 in	7 in	0,505 in	0,305 in	11,8 in <sup>2</sup>	518 in <sup>4</sup>	64,7 in <sup>3</sup>	73,0 in <sup>3</sup>
Convertido	406,4	177,8	12,83	7,75	76,13	21560	1060,2	1196,2
IPE400A <sup>(3)</sup>	397,0	180,0	12,00	7,00	73,10	20290	1022,0	1144,0

Notas: 1) PT: na própria tese, com o perfil adotado; perfis laminados similares: 2) americano (AISC LRFD, 1993); 3) europeu (DIN 1025-5, 1994).

### 7.2.1 LINHA DE VIGA COM MODELO ELÁSTICO

No problema tipo AELL, foram adotados 8 EFs no modelo, arbitrando-se diversos valores para a *semiflexibilidade* nodal  $\eta$ , definida na Eq. 2.7(a), e resolvendo a Eq. 2.3 para  $R_k$ , encontrando-se a rigidez da ligação pela expressão:

$$R_k = \frac{(2-4\eta)EI}{\eta L} = \frac{(1-2\eta)}{\eta} 10030,30 \text{ kNm/rad} \quad (7.1)$$

Confrontaram-se os resultados dessa análise com os do programa computacional *VGASLIGA*.bas desenvolvido, que calcula flechas e rotações, pelo método da viga conjugada, empregando as ideias de Monforton & Wu (1963) e equações de Cunningham (1990). Confirma-se a exatidão das respostas na Tab. 7.2. Note-se que os casos extremos ( $\eta = 0$  e  $= 0,5$ ) correspondem à hipótese de viga biengastada e birrotulada, respectivamente. A solução de *VGASLIGA* é direta, com 1000 pontos de integração; enquanto em *PPLANAVX* (2008) foram gastas de 5 até 21 (máx.,  $\eta = 0,2$ ) iterações para resolver o problema.

Com os momentos nas ligações  $M_{A/B}$  e as rotações respectivas  $\theta_{A/B}$ , pode-se visualizar esses resultados na Fig. 7.3, construindo o diagrama chamado de *linha de viga* (Batho & Rowan, 1934), introduzido na seção 2.5.

Para os dados do problema, se encontram os momentos de engaste:

$$M_Q = \frac{QL}{8} = 32000 \quad M_q = \frac{qL^2}{12} = 21333 \text{ [kNcm]} \quad (7.2a-b)$$

**Tabela 7.2 Esforços e deformações da viga simples.**

Parâmetros		Rigidez $R_k$ [kNm/rad]	(a) Carga concentrada Q				(b) Carga distribuída q			
$\eta$	g		Momentos [kNcm]		$\Delta y_C^{(2)}$ [cm]	$\theta_{A/B}^{(3)}$ [mrad]	Momentos [kNcm]		$\Delta y_C^{(2)}$ [cm]	$\theta_{A/B}^{(3)}$ [mrad]
			$M_{A/B}$	$M_C$			$M_{A/B}$	$M_C$		
0,00	0,000	<sup>(5)</sup> $\infty$	-31999	31999	2,127	0,00	-21000	11000	1,064	0,00
0,01	0,005	982874	-31676	32322	2,192	0,32	-20787	11212	1,106	0,21
0,05	0,028	180545	-30315	33683	2,463	1,68	-19895	12105	1,284	1,10
0,10	0,063	80242	-28443	35555	2,836	3,55	-18666	13333	1,529	2,33
0,15	0,107	46808	-26351	37645	3,253	5,63	-17293	14705	1,803	3,70
0,20	0,167	30091	-23998	39998	3,722	7,98	-15749	16250	2,110	5,23
0,25	0,250	20061	-21332	42664	4,254	10,63	-13999	17999	2,243	6,98
0,30	0,375	13374	-18284	45710	4,861	13,67	-11999	19999	2,858	8,97
0,35	0,583	8597	-14767	49225	5,562	17,18	-9692	22306	3,318	11,27
0,40	1,000	5015	-10064	53326	6,380	21,27	-6999	24998	3,855	13,96
0,45	2,250	2229	-5817	58170	7,346	26,10	-3818	28178	4,489	17,13
0,50	124,8	<sup>(4)</sup> 40	-128	63855	8,479	31,77	-84	31911	5,234	20,85
0,50	$\infty$	<sup>(5)</sup> 0	0	63982	8,505	31,90	0	31995	5,250	20,93

Notas: 1) Momentos nos apoios (A/B) sinal (–) tração superior, no meio-vão (C) (+) tração inferior;

2) flecha  $y_C$  (+) para baixo; 3) rotação no apoio  $\theta$  (A/B) sinal -/+ respectivamente (horário, anti-);

4) com  $\eta = 0,499$ ; 5) com apoios rígidos ou rótulas (sem EF com ligação).

e as rotações de extremidade da viga birrotulada (Batho & Rowan, 1934):

$$\theta_Q = \frac{QL^2}{16EI} = 31,903 \quad \theta_q = \frac{qL^3}{24EI_z} = 21,269 \text{ [mrad]} \quad (7.3a-b)$$

Verifica-se que, no caso da carga distribuída, aparece uma pequena diferença entre os resultados computacionais e a linha teórica, que os supera. Isso é explicado porque no modelo numérico a carga uniforme é aproximada como um conjunto de cargas nodais equivalente. Assim, o resultado será tão próximo do “uniforme” quanto mais nós e EFs se inserir no modelo ( $M_q = 21333 > M_{A/B} = 21000$  kNcm, quando  $\eta = 0$ ). O assunto quantidade de EFs do modelo será abordado na subseção 7.3.2.

Observe-se, também, que as linhas tracejadas com os pontos de  $\eta =$  valor, constantes para a carga  $Q$ , interceptam os da carga  $q$ , como se espera.

Repete-se aqui o estudo da Fig. 2.28, relativo ao melhor aproveitamento da seção da viga, utilizando-se ligações semirrígidas no dimensionamento da Fig. 7.4, porém com ambos os casos de carga. Aplicam-se as fórmulas correspondentes (Kotlyar, 1996), comprovando mais uma vez a resposta obtida nesta tese.

Verifica-se que para a carga  $Q$  a viga está subdimensionada, exigindo uma seção 1,5 vezes mais resistente, ou seja,  $M_p \geq 42750$  KNcm, para  $\eta \leq 0,25$ . Já com a distribuída  $q$ , a seção é aprovada desde que  $\eta \leq 0,45$  (não pode ser birrotulada!).

Conforme apresentado em Alvarenga & Silveira (2009a), existem duas soluções econômicas: a. o ponto P onde  $M_{A/B} \approx M_C$  (mesmo valor); e, b. a linha R ( $\eta \approx 0,3$ ), que corresponde aproximadamente à troca entre os valores de momentos apoio ( $M_{A/B}$ )  $\times$  meio-vão ( $M_C$ ) em relação à viga biengastada.

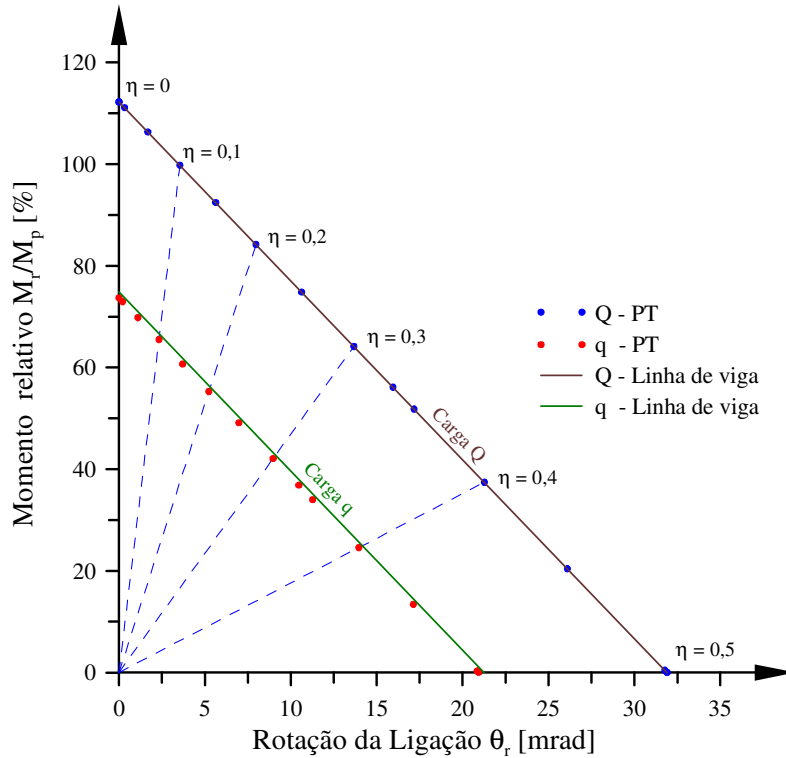
## 7.2.2 VIGA ELÁSTICA E MODELO DE LIGAÇÃO COM TRECHOS LINEARES

Nesta subseção, trata-se da AELN da viga biligada, já que o regime elástico da viga é a forma mais simples de avaliar o comportamento dos modelos de ligação implementados computacionalmente.

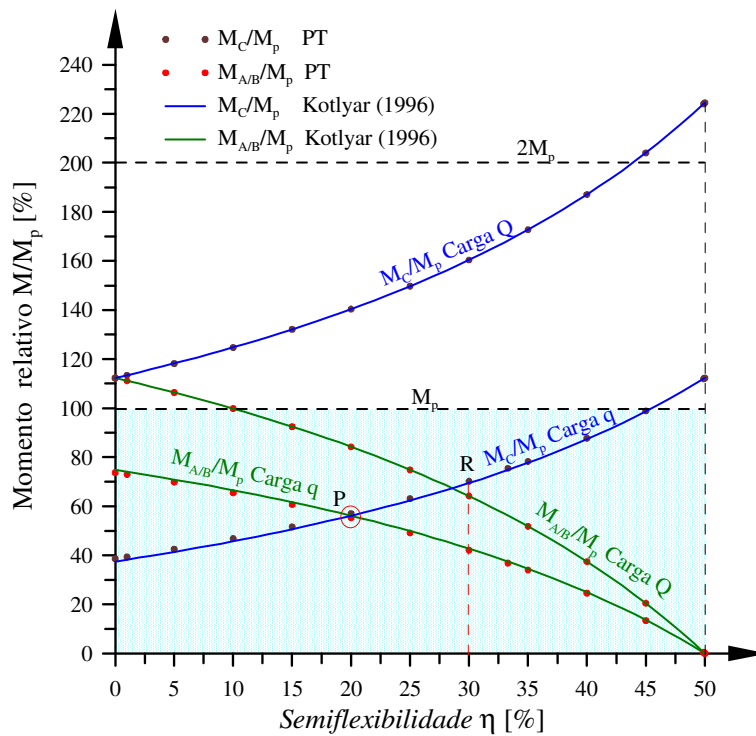
No modelo bilinear e no trilinear, foram empregados, propositadamente, curvas  $M-\theta$  que possuem pontos comuns das lineares, por isso o comportamento final desses casos será o mesmo, o que permite uma rápida validação. Isso se espelha na Fig. 7.5(a) para o modelo bilinear e Fig. 7.5(b) para o trilinear, respectivamente.

No primeiro caso, faz-se uma transição da flexibilidade de  $\eta = 0,10$  para 0,25; e no último, há três valores:  $\{0,10/0,25/0,40\}$  conforme dados indicados na Tab. 7.3. Por conseguinte, a trajetória  $M-\theta$  de equilíbrio da solução passa por pontos correspondentes

à transição e atinge ao mesmo estado final, correspondente à última *semiflexibilidade*  $\eta$ ; ou seja, atinge as flechas da Tab. 7.2: a. para bilinear: 4,254 cm (Q), 2,243 cm (q); e, b. para trilinear: 6,38 cm (Q), 3,855 cm (q).

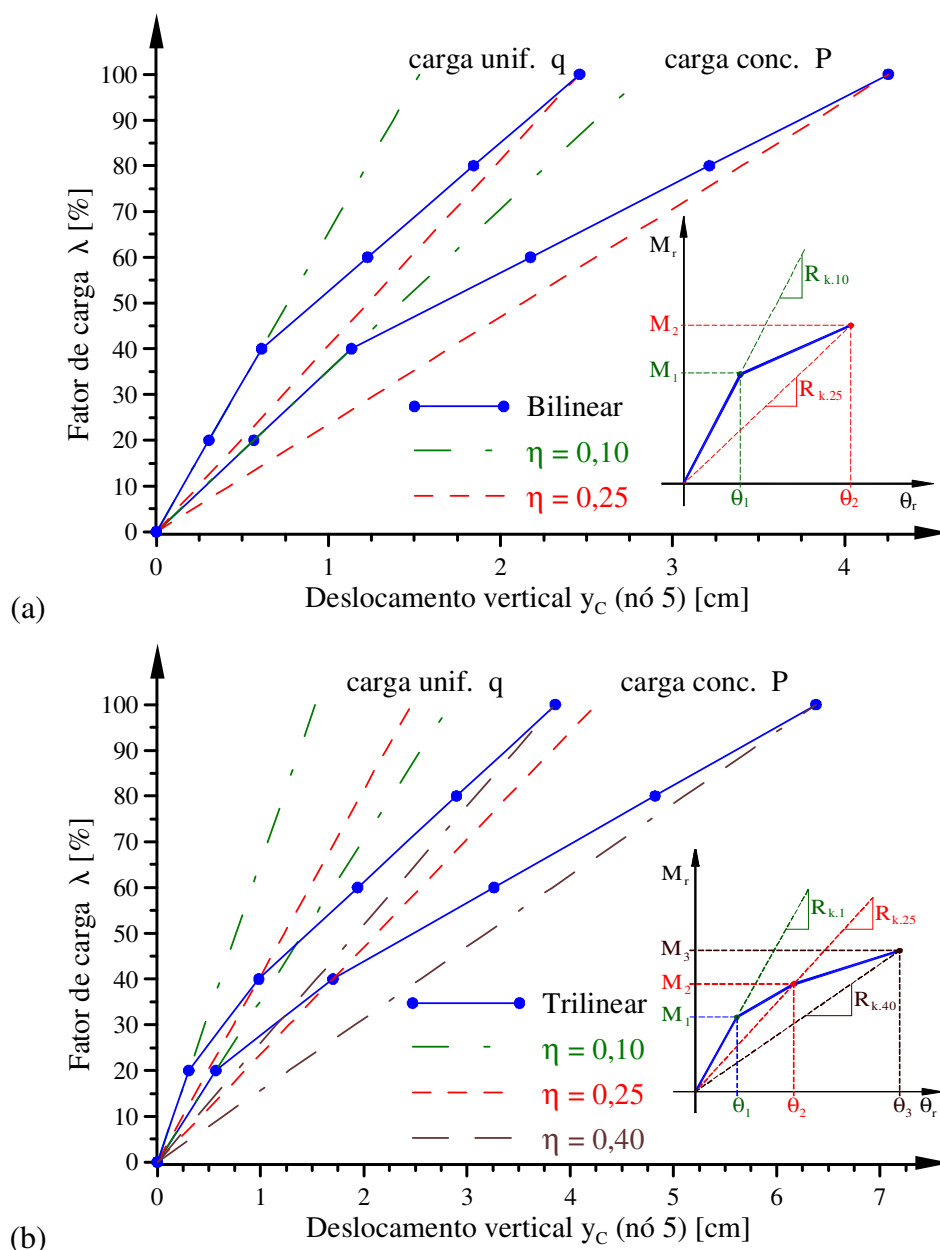


**Figura 7.3** Diagrama da *linha de viga*.



**Figura 7.4** Avaliação do dimensionamento da viga simples.





**Figura 7.5** Efeito da curva  $M-\theta$  com trechos lineares na viga elástica modelos: (a) bilinear; (b) trilinear.

**Tabela 7.3** Dados da curva  $M-\theta$  para modelos bilineares e trilineares.

Parâmetros		Rigidez $R_{k1}$ [kNm/rad]	(a) Bilinear <sup>(1)</sup>				(b) Trilinear <sup>(2)</sup>			
$\eta$	g		Momento [kNm]		Rotação [mrad]		Momentos [kNm]		Rotação [mrad]	
			$M_Q$	$M_q$	$\theta_Q$	$\theta_q$	$M_Q$	$M_q$	$\theta_Q$	$\theta_q$
0,10	0,063	80242	11378	7467	1,418	0,931	5689	3733	0,709	0,465
0,25	0,250	20061	21333	14001	10,63	6,980	8534	5600	4,254	2,792
0,40	1,000	5015	—	—	—	—	10666	7000	21,27	13,96

Notas: 1) bilinear:  $R_{k2} = 10801,4$  kNm/rad; 2) trilinear:  $R_{k2} = 8023,6$  e  $R_{k3} = 1253,3$  kNm/rad.

Para os resultados da Fig. 7.5, o controle incremental (fator de carga  $\lambda$ ) passou pelos pontos de transição (20 e 40%) do diagrama  $M-\theta$ . Situação mais complexa é

quando ocorre o salto sem a passagem pela transição – por exemplo, partir de  $\lambda = 35\%$  e atingir  $45\%$ , saltando o valor  $40\%$  da transição. Note que a rigidez só muda após ser dado o passo de carga (não no próprio instante). Para  $\eta = 0,25$  e carga  $Q$ , o momento correto final é  $21333$  kNcm. Porém, saltando  $\lambda = 40\%$ , encontra-se  $M_{A/B} = 21410$  (mín., ou  $21951$  kNcm, máx.), referentes a empregar (ou não) a rigidez anterior fixa no passo. Corrigindo a rigidez da ligação com o processo descrito na subseção 4.5.4, encontra-se  $M_{A/B} = 21327,1$  kNcm. O desvio reduz de  $(0,36$  a  $2,9\%)$  para  $-0,03\%$ . Isso indica que:

- a. deve-se ter cuidado com passos incrementais que majorem as rotações acima de  $4\%$  em média, de cada vez;
- b. não é possível manter a rigidez da ligação constante durante o passo incremental, pois ela é ajustada no processo também; e
- c. tornam-se questionáveis os resultados que foram produzidos sem observar esses cuidados com a rigidez da ligação e o comportamento do EF.

### 7.2.3 VIGA ELÁSTICA COM LIGAÇÕES NÃO LINEARES

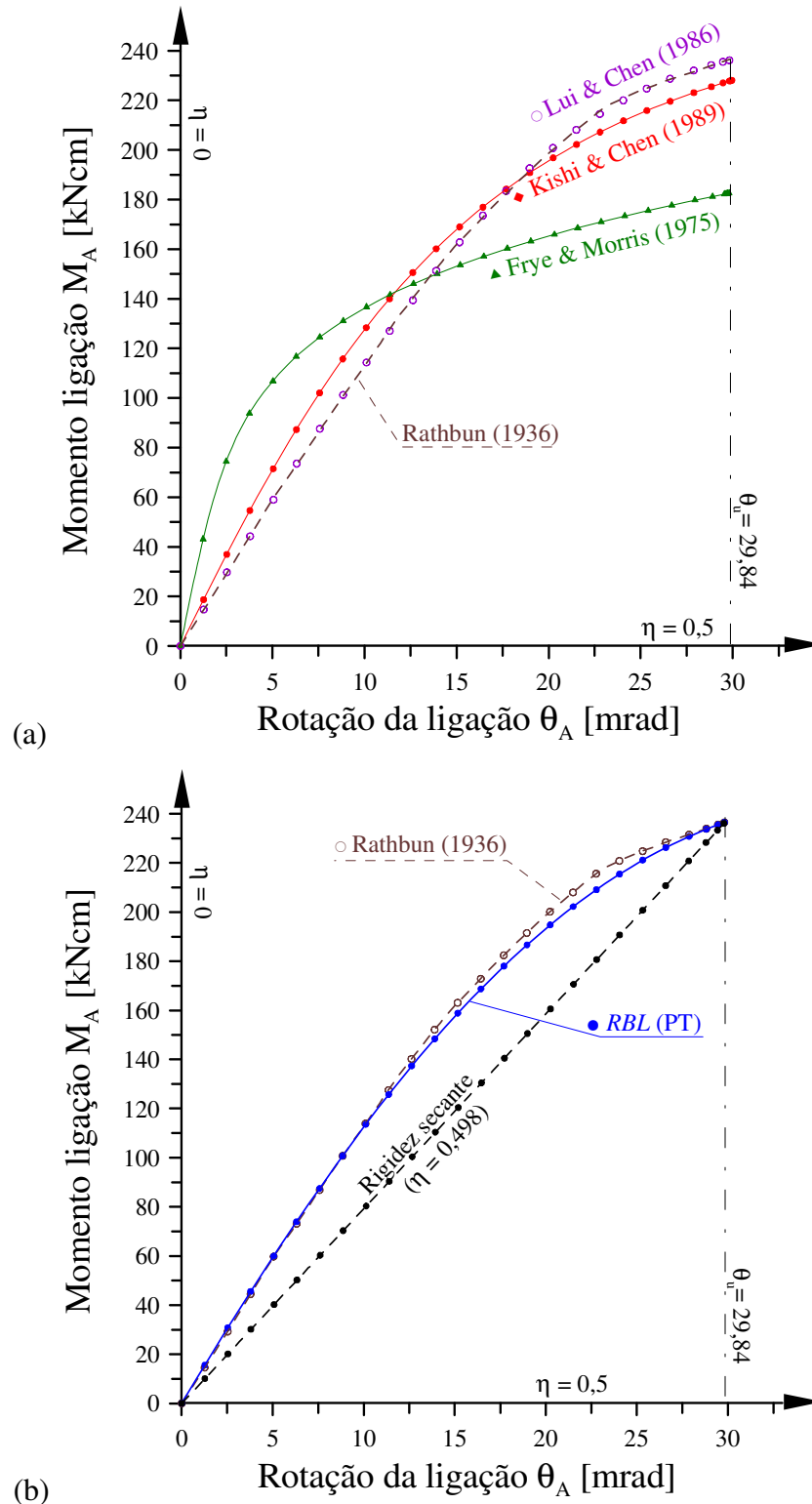
Nesta subseção, que complementa a anterior, estuda-se o emprego de outras curvas não lineares, adotando a ligação de Rathbun (1936) da Fig. 2.25 (capítulo 2).

Apenas a hipótese da carga concentrada  $Q$  no meio vão é analisada, e o tipo é AELN. Comprovar-se-á que os modelos de curvas implementadas estão sendo seguidos de forma adequada pelo programa computacional *PPLANAVA*. Para isso, na Fig. 7.6 mostram-se os diagramas de curvas  $M-\theta$ , que são abreviadas por:

- a. FM – modelo polinomial de Frye & Morris (1975), na subseção 2.4.2;
- b. KC – potencial de Kishi & Chen (1987), na subseção 2.4.3;
- c. LC – exponencial Lui & Chen (1986), modificado posteriormente por Kishi & Chen (1987), na subseção 2.4.4;
- d. MT – curva  $M-\theta$  experimental na Fig. 2.25 (Rathbun, 1936);
- e. RT – curva  $R_k-\theta$  experimental na Fig. 2.45 (Rathbun, 1936);
- f. RS – modelo linear com rigidez secante definida no ponto final da trajetória; e
- g. *RBL* – modelo de rigidez bilinear na Fig. 2.47, proposto nesta tese.

As curvas FM, KC, LC e MT têm seus dados e parâmetros fornecidos pelo arquivo “SCDB” (Chen *et al.*, 1996). Esses dados foram verificados reproduzindo-se as curvas  $[(M)$  em kNcm] e comparando-se os valores convertidos aos existentes nas suas tabelas originais, encontrando resultados coincidentes.

Os parâmetros do “SCDB” foram os mesmos fornecidos ao *PPLANAVA* para as curvas FM e KC. As curvas experimentais e LC foram introduzidas por tabelas, sendo os pontos intermediários interpolados diretamente pelo sistema computacional.



**Figura 7.6** Curvas  $M$ - $\theta$  não lineares da viga elástica:  
(a) FM, LC, KC; (b) MT, *RBL* e RS.

O modelo RS é linear com a rigidez secante (Obs.  $g = 63,25$ ):

$$R_{ks} = M_u / \theta_u = 2,366 \text{ [kNm]} / 29,84 \text{ [mrad]} = 79,289 \text{ kNm/rad} \quad (7.4)$$

e o modelo *RBL* emprega os parâmetros ajustados ao ponto P13 na Fig. 2.47(a).

Na figura 7.6, mostram-se em linhas cheias essas curvas, geradas por programas isolados (fora de *PPLANAVA*) na forma de tabelas. No processo de solução, o programa computacional convergiu em cada passo incremental para os pontos de equilíbrio, cujos valores  $M-\theta$  estão destacados por pontos. Dessa forma, conclui-se que, efetivamente, as curvas  $M-\theta$  foram acompanhadas na solução.

Todos os exemplos foram finalizados quando a rotação na ligação superou o valor último previsto, que é  $\theta_u = 29,84$  mrad.

Para ter-se uma medida da influência dos diversos modelos no processo de solução, apresenta-se a Tab. 7.4, na qual são indicados alguns resultados básicos, obtidos com o fator de carga  $\lambda = 90\%$ , próximo da rotação última prevista. Verifica-se que pelo fato de a conexão ser muito flexível, mesmo para uma curva  $M-\theta$  mais imprecisa, como a FM, a variação no fator de carga final foi muito pequena, e a maior discrepância ficou por conta do momento no apoio, que também é muito pequeno, e um maior momento estimado no meio-vão, mas também sem maiores consequências.

Entretanto, cabe destacar a boa precisão dos modelos exponenciais de LC, bem como da curva proposta, o que demonstra que essa ideia é viável, embora a curva *RBL* tenha sido ajustada diretamente à curva  $M-\theta$  de Rathbun (1936).

Pode-se considerar que para momentos muito pequenos na ligação (flexível) a forma da curva  $M-\theta$  não parece provocar grandes diferenças de comportamento no regime elástico.

**Tabela 7.4 Efeito das ligações não lineares na viga elástica.**

Pesquisador / curva	$\theta_{A/B}$ [mrad]	$R_{kA/B}$ [kNm/rad]	Momentos [kNcm]		$\Delta y_C$ [cm]	$\lambda_{\max}$ [%]
			$M_{AB}$	$M_C$		
Rathbun M- $\theta$ <sup>(1)</sup> (1936)	28,500	25,756	233,16	57354,6	7,6101	94,2
R <sub>k</sub> - $\theta$ <sup>(2)</sup>	28,504	25,356	233,84	57353,9	7,6102	92,9
<i>RBL</i> (PT)	28,503	30,720	232,82	57354,9	7,6103	94,2
Frye & Morris (1975)	28,589	15,397	180,78	57406,9	7,6230	93,9
Lui & Chen (1986)	28,511	21,235	233,57	57354,2	7,6107	94,1
Kishi & Chen (1987)	28,519	24,903	224,73	57363,0	7,6124	94,6
Rigidez secante <sup>(3)</sup>	28,483	79,289	225,84	57361,9	7,6099	94,2

Notas: 1) para ( $M-\theta$ ) adota-se a rigidez média entre os 2 pontos da curva experimental; 2) para  $R_k-\theta$ , emprega-se a variação linear ao longo dos pontos, 3) rigidez secante é dada pela Eq. (7.4)  $R_{ks} = M_u/\theta_u$  e colocada para avaliar esta simplificação.

#### 7.2.4 VIGA INELÁSTICA COM LIGAÇÕES LINEARES

A introdução da plasticidade resulta numa dificuldade numérica maior quando a ZP atinge o EF com ligação. Corrigiu-se o método *XX* primeiro, passando da avaliação do ângulo de giro próprio da ligação feito pela Eq. 4.23 para a Eq. 4.30. Constatou-se que, mesmo assim, esse método não funcionava tão bem com a plasticidade na compressão, e então foi substituído pelo método *ME*, em geral, obtendo-se bons resultados. Nos resultados desta seção, não se consideram as tensões residuais e o modelo é AILL.

Pode-se fazer uma verificação básica comparando-se os valores calculados para os casos extremos [biengaste ( $\eta = 0$ ) e birrótula ( $\eta = 0,5$ )] com aqueles obtidos com ligações cujo  $R_k$  foi determinado com a *semiflexibilidade*  $\eta = 0,01$  e  $0,499$ . Assim, aplicam-se valores de  $\eta$  muito próximos das condições ideais, mas diferentes de uma rigidez infinita e da nula, respectivamente.

Verifica-se que para ambas as cargas ( $Q$  e  $q$ ) os resultados obtidos são muito próximos, quase idênticos, como destacam as Figs. 7.7(a-b), respectivamente.

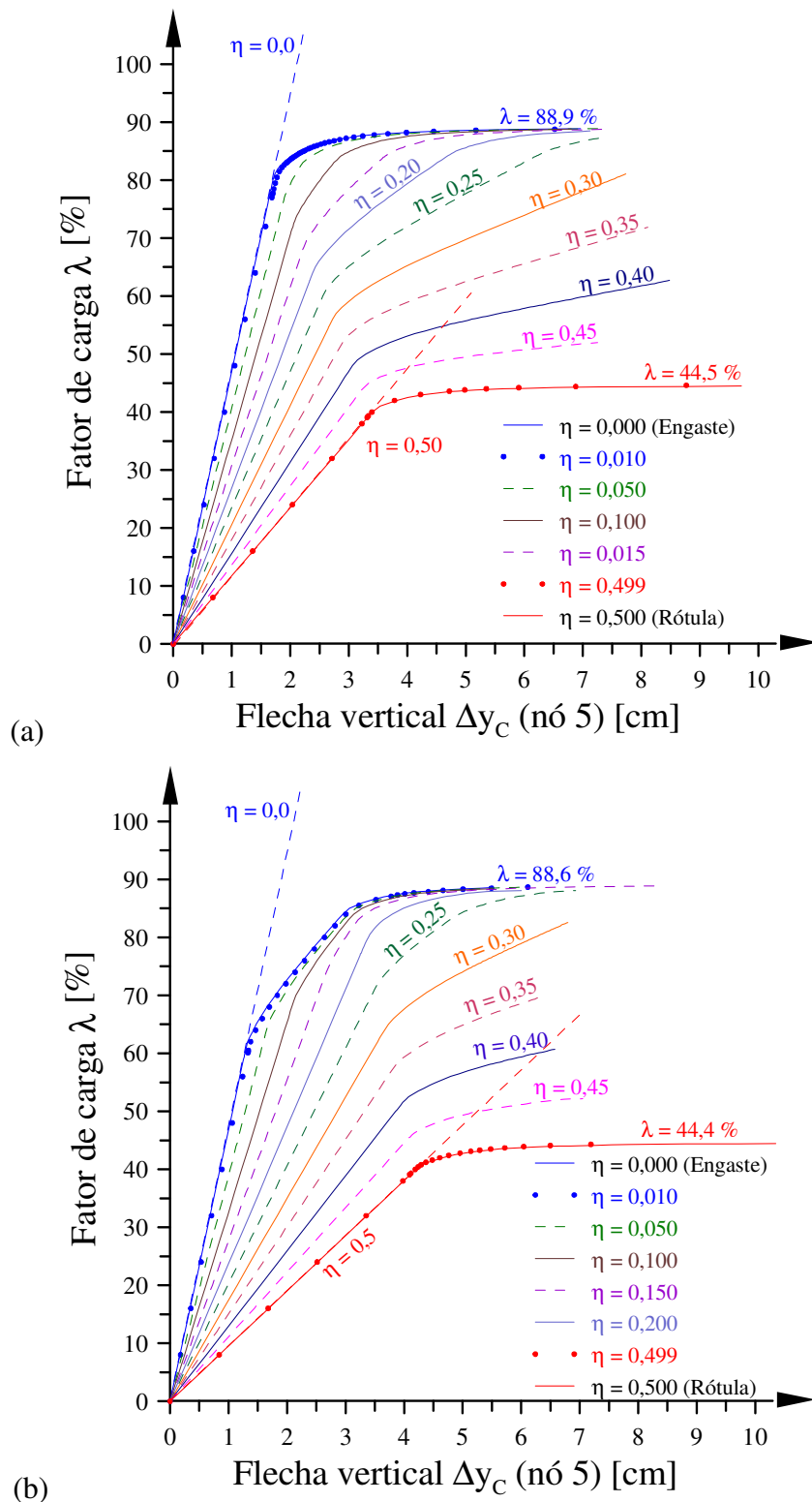
Como dito, no regime elástico a simulação de carga distribuída por diversas cargas nodais gera alguns desvios. De forma similar, verifica-se que o fator de carga de colapso na viga com biengaste, que deveria ser o mesmo (próximo de 90%) atinge 88,9% para a carga concentrada ( $Q$ ) e 88,6% para a de carga distribuída ( $q$ ). No caso da birrótula, deveria se aproximar da metade do anterior, ou seja, 45%. Para a carga ( $Q$ ) obteve-se 44,5%; já para ( $q$ ), 44,4%.

Novamente, o método da zona plástica (ZP) mostra que não há aquele fechamento completo da rótula plástica (RP) previsto nos modelos concentrados para que se inicie a plasticidade no meio-vão. A ZP forma-se de maneira mais gradual, aparece no meio-vão num dado instante, após uma dada degradação da extremidade, e posteriormente crescem juntas até o final. Observe-se que no colapso, em vários casos com  $\eta \leq 0,15$  (ligações quase rígidas), o estado último é o de cisalhamento (Eq. 4.3) da seção com a ligação, e isso ocorre após a parte central atingir uma plasticidade elevada também.

Outro aspecto é que as trajetórias com a carga distribuída são mais suaves e curtas, enquanto para a concentrada as trajetórias parecem ser longas (maior extensão); embora com a mesma carga atuante ( $Q = 320 \text{ kN} = q \cdot L = 40 \text{ kN/m} \cdot 8\text{m}$ ).

No caso da viga biengastada (ou com ligação mais rígida) e carga distribuída, existe um terceiro trecho intermediário da trajetória, menos inclinado, que corresponde

à plasticidade no EF com ligação, mas antes de chegar ao trecho horizontal (patamar) a plasticidade já se manifesta na região central também. À medida que  $\eta$  cresce até 0,20; esse trecho vai desaparecendo e a trajetória fica mais brusca.



**Figura 7.7** Trajetórias de equilíbrio da viga simples inelástica:  
(a) carga concentrada  $Q$ ; (b) carga distribuída  $q$ .

**Tabela 7.5 Esforços e deformações no colapso da viga simples.**

$\eta$	Rigidez $R_k$ [kNm/rad]	(a) Carga concentrada Q					(b) Carga distribuída q				
		Momentos [kNcm] <sup>(3)</sup>		$\Delta y_C$ [cm]	$\theta_{A/B}$ [mrad]	$\lambda_Q$	Momentos [kNcm] <sup>(3)</sup>		$\Delta y_C$ [cm]	$\theta_{A/B}$ [mrad]	$\lambda_q$
		$M_{A/B}$	$M_C$				$M_{A/B}$	$M_C$			
0,00	<sup>(2)</sup> $\infty$	28381	28381	5,628	0,000	88,7	28147	22475	2,526	0,000	79,2
0,01	<sup>(1)</sup> 982874	28379	28383	5,685	0,289	88,7	28150	22984	2,608	0,286	79,9
0,05	<sup>(1)</sup> 180545	28369	28392	5,973	1,571	88,7	28143	24846	2,916	1,559	82,8
0,10	<sup>(1)</sup> 80242	28264	28370	5,524	3,523	88,6	28120	26725	3,417	3,504	85,7
0,15	<sup>(1)</sup> 46808	28078	28364	5,533	5,999	88,3	28040	27507	4,009	5,991	86,9
0,20	<sup>(1)</sup> 30091	27557	28372	5,778	9,159	87,4	20062	28124	5,252	9,326	87,8
0,25	<sup>(1)</sup> 20061	25120	28377	6,099	12,524	83,6	28089	28374	7,003	14,002	88,2
0,30	13373	20002	28375	6,397	14,958	75,7	25450	28313	6,798	18,350	82,6
0,35	8597	17327	28423	7,989	20,154	71,5	16612	28243	6,445	19,323	70,1
0,40	5015	11630	28424	8,439	23,189	62,6	10608	28234	6,574	21,154	60,7
0,45	2229	4852	28358	7,132	21,766	51,9	5487	28297	7,363	24,614	52,8
0,50	<sup>(5)</sup> 40	115	28420	9,135	28,740	44,6	130	28402	9,648	32,301	44,6
0,50	<sup>(2)</sup> 0	0	28444	9,708	30,125	44,5	0	28404	9,710	32,509	44,5

Notas: 1) para  $\eta \leq 0,25$  há plasticidade no EF com ligação ( ); 2) extremos ( $\eta = 0$  ou  $0,5$ ) como engaste ou rótula nos apoios; 3)  $M_p = 28500$  kNcm; 4)  $\lambda_Q = Q/Q_0$ ,  $\lambda_q = q/q_0$ ,  $q_0 = 80$  kN/m; 5) com  $\eta = 0,499$ .

A viga com a ligação *midirrígida*  $\eta = 0,25$  mostra um comportamento misto entre o que ocorre com  $\eta = 0,20$  de transição mais abrupta e o  $\eta = 0,30$  onde há apenas dois trechos antes descritos.

As trajetórias nas Figs. 7.7(a-b) não atingiram ao estado limite último, sendo representado até 88% da carga aplicada determinada pelo PPLANAVX (2007).

Na tabela 7.5, mostram-se os resultados correspondentes da viga no estado pré-colapso, para algumas *semiflexibilidades* ( $\eta$ ). Por não incluir as TRs, esse exemplo permite observações interessantes. Em geral, confirma-se esse colapso pelos momentos  $M_{A/B}$  ou  $M_C$  próximos ao momento plástico da seção ( $M_p = 28500$  kNcm). Para a carga concentrada (Q), o momento da ligação vai sendo reduzido, mas até  $\eta \leq 0,15$  essa variação é pequena em relação ao engaste, com o colapso  $\lambda \geq 88\%$ . Para a carga distribuída (q), à medida que  $\eta$  aumenta, cresce o momento e o escoamento no meio-vão. Isso distribui a plasticidade que predomina na ligação para o engaste, havendo, assim, melhor aproveitamento da viga para  $\eta = 0,25$  quando se atinge  $\lambda = 88\%$ . Quando  $\eta \geq 0,35$  a ligação tem menor influência para ambas as cargas (Q e q), apenas afetando a plasticidade (e sua expansão) na região do meio-vão.

Os esforços e as deformações indicados na Tab. 7.5 foram determinados também considerando o colapso da seção por cisalhamento (Eq. 4.3). Sem essa consideração, os valores de  $\lambda_Q$  e  $\lambda_q$  seriam todos da ordem de 88%, para as ligações mais rígidas, nas quais a plasticidade aparece também no EF com ligação ( $\eta \leq 0,25$ ).

### 7.2.5 VIGA INELÁSTICA COM LIGAÇÕES NÃO LINEARES

Por fim, avalia-se o comportamento do EF com ligação não linear e a plasticidade simultaneamente (AILN). Para essa hipótese, requer-se que a ligação seja *capaz*, ou bem, tal ligação deverá suportar o momento plástico da seção e atingir rotação superior à da rótula-plástica correspondente, conforme previsto na subseção 2.2.5 e Fig. 2.10.

Nem sempre se encontra na literatura exemplos dessa natureza. Sua inclusão nos exemplos e estudo servirá como material de consulta e outra contribuição desta tese. Dessa forma, adota-se uma curva  $M-\theta$  que atenda às seguintes condições:

- momento máximo superior ao plástico da viga,  $M_m \geq M_P = 28500 \text{ kNm}$ ; e
- rotação superior a  $\theta_p \approx 2\Delta y_C/L = 2 \times 5,628/800 = 14,07 \text{ mrad}$ , considerando a deformação plástica da viga biengastada para o mesmo carregamento ( $Q$ ).

Escolheu-se, então, a ligação do tipo chapa de topo estendida, com reforçadores de coluna, por ser uma das mais rígidas que permitirá o estudo proposto. Aqui surgem as primeiras dificuldades: achar uma ligação compatível e ensaiada, determinando quais os parâmetros são válidos para a modelagem.

Dentre as disponíveis, adotou-se a curva  $M-\theta$  V-39 “SCDB” (Chen *et al.*, 1996) referente ao ensaio “B7R” de Bailey (1970), que possui  $M_m = 299,5 \text{ kNm}$  e  $\theta_u = 37,1 \text{ mrad}$ . Nesse ensaio da ligação, a viga é de seção WF laminado com altura de 305 mm (próximo aos 400 mm da seção da viga proposta). Incluem-se as tensões residuais (TRs) de Galambos & Ketter (1959) para laminados nesta análise.

Supondo que a ligação seja similar, é natural aceitar que o momento da ligação adotada e sua curva  $M-\theta$  sejam inferiores aos reais, tendo em vista simplesmente a relação de alturas envolvida ( $400 \times 305 \text{ mm}$ : 131% maior). Logo, para a ligação similar, poder-se-ia estimar em pelo menos 20% a mais de capacidade (momento maior) do que a ensaiada, todavia isso não será levado em conta nesta análise.

Outra questão é que se dispõe apenas da curva experimental e do modelo exponencial modificado (Lui & Chen, 1986; Kishi & Chen, 1987). Esse modelo não foi introduzido no programa computacional *PPLANAVA*, e os seus parâmetros requeridos (quantidade de informação) são mais suscetíveis a erros de digitação. Assim, empregou-se somente a curva experimental, mostrada por pontos na Fig. 7.8, desenvolvendo a curva pelo método *RBL*, proposto com o procedimento descrito na seção 2.8.



Para se determinar a curva *RBL* proposta com boa aproximação, escolheu-se o ponto P24 (em destaque) como o de ajuste. Os três últimos pontos do experimento correspondem ao escoamento da ligação, no qual não há modificação do momento, por isso foram desprezados na análise numérica para estabelecer a curva *RBL*, reduzindo-se  $\theta_u \approx 33,4$  mrad. Note-se que  $M$  só supera  $M_p$  após  $\theta > 20$  mrad  $> \theta_p \approx 14,1$  mrad.

Confrontando-se os resultados obtidos com a curva exponencial, constrói-se a Tab. 7.6, na qual se verifica que a *RBL* é bem próxima (dispersão  $R^2$  em torno de 1, está acima de 99%), mas não é uma reprodução tão fiel quanto a exponencial.

Com isso, determinaram-se os parâmetros rigidez inicial  $R_{ki} = 39,716$  kNm/rad e  $R_{kp} = 0$ . Mantêm-se os dados experimentais  $M_u = 29945,6$  kNcm e  $\theta_u = 33,4$  mrad [sendo o ponto de ajuste P24: ( $M_A = 26315,7$  kNcm,  $\theta_A = 12,2$  mrad)]. O objetivo é obter uma curva mais simples que seja adequada, compreensível e fácil de se reproduzir. Considerando uma representação gráfica mais perfeita, a curva de Kishi & Chen (1987), em geral, mostra-se melhor que os outros modelos (inclusive o *RBL*).

Realizou-se uma solução elástica prévia, quando ocorreu o colapso da ligação (a rotação superou  $\theta_u$ ), para avaliar o desempenho do modelo *RBL* dessa curva  $M-\theta$  e compará-lo com o experimental.

Na figura 7.9 mostra-se que os pontos do processo de solução numérica da viga por *PPLANAVA* são das curvas fornecidas, de forma similar ao que foi feito a outras apresentadas neste trabalho, comprovando a coerência das respostas. Desenvolveu-se, também, a solução para as curvas experimentais ( $M-\theta$ ,  $R_k-\theta$ ) e para a curva de Kishi & Chen (1987) com o modelo exponencial modificado, introduzidas como tabelas.

Os bons resultados calculados na situação pré-colapso são listados na Tab. 7.7 para comparação. Há pouca diferença entre eles, porém comprova-se não é possível empregar um modelo linear de ligação (como o da rigidez secante) para as análises inelásticas.

**Tabela 7.6 Comparação dos modelos da ligação não linear B7R (Bailey, 1970).**

Curva M- $\theta$	Desvios absolutos		Desvio médio	Desvio padrão	Dispersão $R^2$
	negativo	positivo			
<i>RBL</i> (PT)	-11,70	+8,59	-1,42	4,89	0,9968
Exponencial	-3,96	+2,82	-0,02	1,30	0,9998

Notas: 1) são confrontados os momentos calculados nas mesmas rotações do experimental;  
2) desvios dos momentos em kNcm.

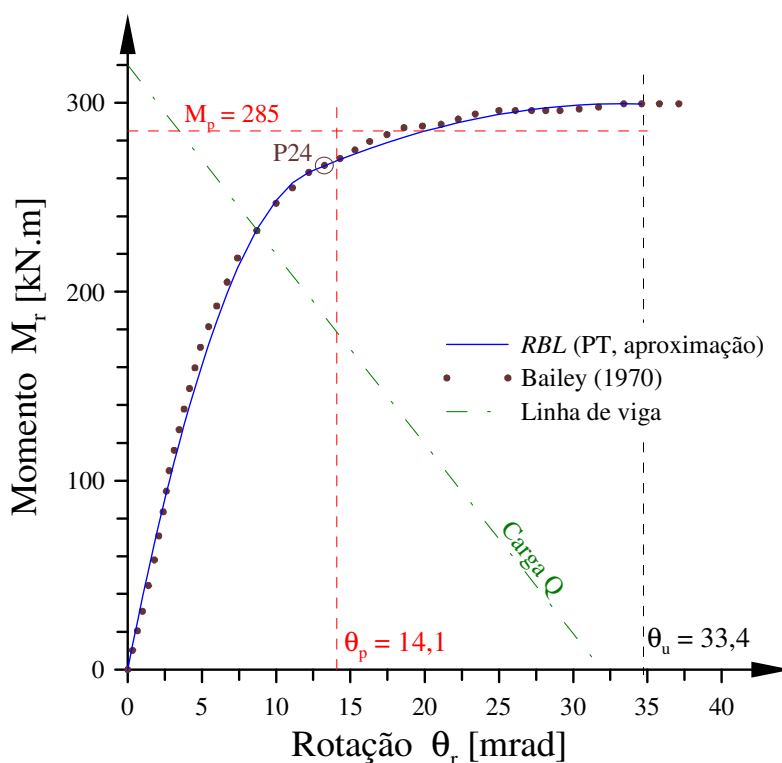


Figura 7.8 Curva M- $\theta$  “B7R” do “SCDB” e a aproximada *RBL*.

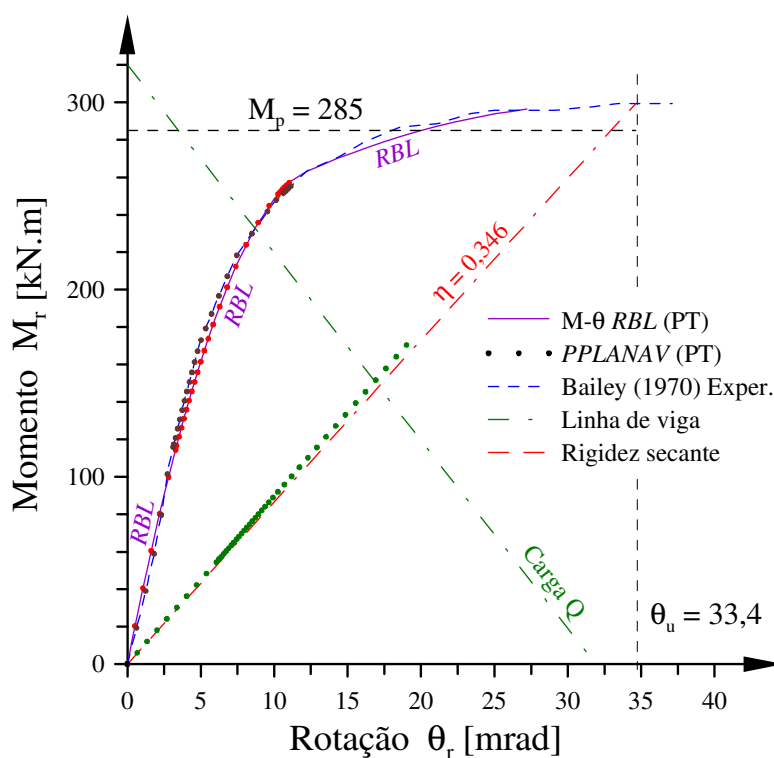


Figura 7.9 Seguindo a curva M- $\theta$  *RBL* proposta.

A curva proposta *RBL* exibe um bom comportamento, ficando mais próxima da  $R_k$ - $\theta$  experimental, que é mais fiel do que a M- $\theta$ , pois a última possui seus saltos de rigidez [ver a Fig. 2.44(b)]. Comprovam-se diferenças muito pequenas para a carga

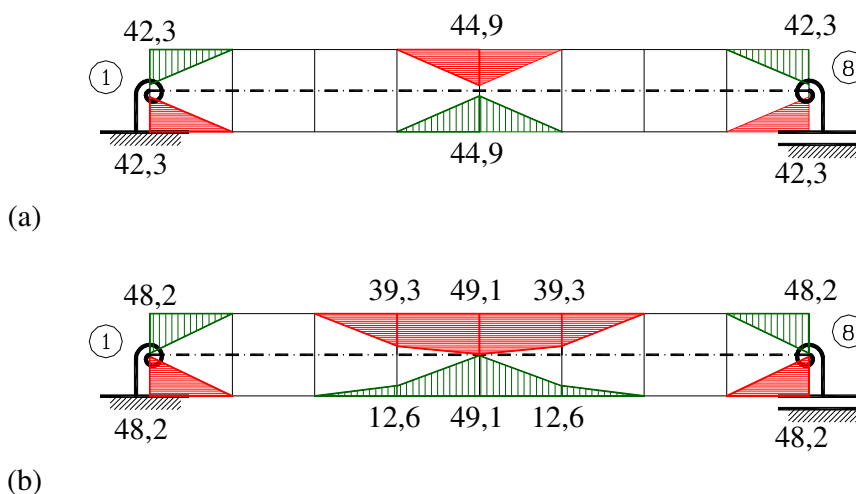
distribuída também, o que valida sua utilização.

Nesses exemplos simples, a formação de ZPs é concentrada na região dos maiores momentos. Na figura 7.10, elucidam-se dois diagramas típicos, um para cada tipo de carga. Em geral, ocorre a formação de 3 ZPs, uma em cada extremidade (se a ligação é quase rígida,  $\eta \leq 0,15$ ) e a central. Quando a ligação é mais flexível, somente aparece a ZP central, costuma ser mais pontual na carga (Q), e se propaga por mais EFs no caso da distribuída (q). No caso da distribuída, somente se formam ZPs nas seções com ligações para  $\eta \leq 0,05$  e apenas na parte central quando  $\eta \geq 0,3$ . Várias vezes, o colapso é determinado por cisalhamento na zona mais solicitada. A região com  $0,25 \leq \eta \leq 0,35$  possui pior desempenho computacional com dificuldades de convergência, superando 1000 iterações sem convergir, quando o processo de solução foi paralisado.

**Tabela 7.7 Efeito das ligações não lineares na viga inelástica.**

Carga	Pesquisador / curva	$\theta_{A/B}$ [mrad]	$R_{kA/B}$ [kNm/rad]	Momentos [kNm]		$\Delta y_C$ [cm]	$\lambda_{\max}$ [%]
				$M_{A/B}$	$M_C$		
Q	Bailey M- $\theta$ <sup>(1)</sup> (1970)	11,201	7424,4	25574,2	28371,6	5,945	84,3
	$R_k$ - $\theta$ <sup>(2)</sup>	10,939	7676,4	25894,0	28371,9	5,923	84,8
	RBL (PT)	11,020	6669,6	25704,8	28369,1	5,896	84,5
	Kishi & Chen (1987) Rigidez secante <sup>(3)</sup>	11,379	7021,7	25570,5	28375,1	6,014	84,3
q <sup>(4)</sup>	Bailey (1970) M- $\theta$ <sup>(1)</sup>	16,720	3156,7	28081,7	28398,8	8,311	88,3
	RBL (PT)	18,122	2467,8	28060,5	28415,7	8,820	88,2

Notas: 1) para (M- $\theta$ ) adota-se a rigidez média entre os 2 pontos da curva experimental; 2) para  $R_k$ - $\theta$ , emprega-se uma variação linear ao longo dos pontos; 3) rigidez secante é dada pela Eq. (7.4)  $R_{ks} = M_u/\theta_u$  e colocada para avaliar esta simplificação; 4) com  $q = 56$  kN/m, atingiu-se  $\lambda = 126,2$  e  $126,1$ ; respectivamente;  $\lambda_{\max} = 0,7 \lambda$  [proporcional à  $q_0 = 80$  kN/m ( $56/80 = 0,7$ )].

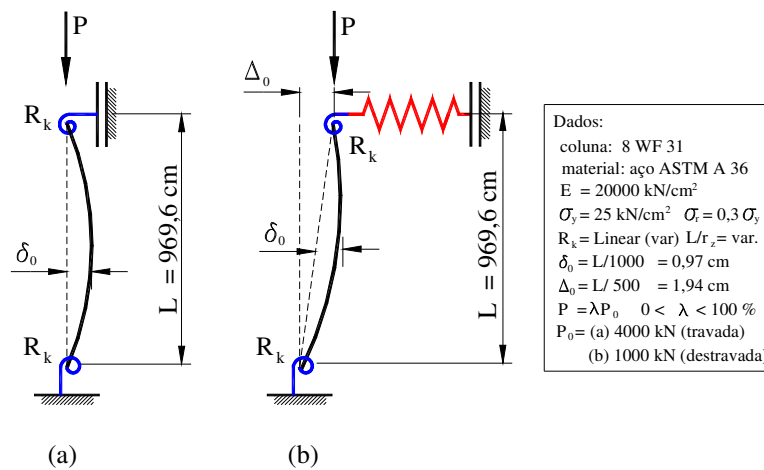


**Figura 7.10 Zonas plásticas da viga simples:**  
percentual de fatias plásticas (a) carga Q ligação linear; (b) distribuída q com ligação não linear de Bailey (1970) M- $\theta$  experimental; (c) convenção: (||) tração, (=) compressão.

### 7.3 COLUNA DE HAJJAR *ET AL.* (1997)

Novamente, emprega-se a coluna da seção 6.3 para validar o comportamento do EF com ligação, agora modificando as condições de extremos da barra. Neste exemplo, a coluna ilustrada na Fig. 7.11 tem  $L = 969,6$  cm de extensão e a ligação possui a rigidez definida conforme  $\eta$ , partindo-se da condição engaste até a condição de rótula. Constrói-se, assim, a curva de flambagem correspondente a essa variação de rigidez (ou condição de extremidade). São estudados dois casos, conforme o apoio superior seja:

- fixo horizontal, que representa a situação de estrutura travada da Fig. 7.11(a); e
- móvel, que é o caso da estrutura destravada da Fig. 7.11(b).



**Figura 7.11** Coluna de Hajjar *et al.* (1997):  
(a) travada; (b) destravada.

Nesta seção, serão analisadas, também, condições similares às anteriores, como:

- flambagem elástica e ligação linear (AELL);
- estudo de convergência de modelos com ligação;
- flambagem inelástica com ligação linear (AILL); e
- flambagem com ligação não linear (AENL & AINL).

O perfil da coluna é o mesmo da Fig. 5.7 com as propriedades da Tab. 5.4, adotado em outros exemplos desta tese. Consideram-se as mesmas TRs de laminados americanos (Galambos & Ketter, 1959) e a curvatura inicial ( $L/1000$ ), de forma a se comparar com os resultados do AISC LRFD (1993), no qual essas condições estão implícitas. O modelo da análise possui 10 EFs, sendo 8 do tipo tradicional (rígido-rígido) e 2 com ligações (um antes ou depois dos 8).

### 7.3.1 FLAMBAGEM ELÁSTICA COM LIGAÇÕES LINEARES

Inicialmente, essa coluna é avaliada com ligações lineares e regime elástico (AELL) cuja rigidez é parametrizada por:

$$R_k = \frac{(2-4\eta) EI}{\eta L} = \frac{944,163}{g} \text{ kNm/rad} \quad (7.5)$$

na qual a *semiflexibilidade*  $\eta$ , definida pela Eq. 2.7(a), varia de 0 (engaste) a 0,5 (rótula), parametrizada por valores simples de ( $g$ ).

Para as estruturas travadas, aplicou-se a carga  $P_0 = 4000$  kN, sendo a carga crítica dada por  $N_{crit} = \lambda P_0$ . Adotou-se o controle do deslocamento horizontal  $\Delta_6$  do nó central (6) com o máximo de 40 cm, para  $0,15 \leq \eta \leq 0,45$ ; e 34,4 cm fora desse intervalo.

Define-se a carga de Euler para essa coluna como:

$$N_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 961,0 \text{ kN} \quad (7.6)$$

Então, o coeficiente de comprimento de flambagem ( $k$ ) é obtido fazendo-se:

$$k_{fl} = \sqrt{\frac{N_e}{N_{crit}}} = \sqrt{\frac{961,0}{N_{crit}}} = \frac{31}{\sqrt{N_{crit}}} \quad (7.7)$$

Nos casos extremos da coluna travada, encontram-se valores que coincidem com os teóricos. Para o engaste (rótula, em parêntesis)  $N_{PP} = 3835$  ( $943,2 = N_{crit}$ ) kN, acha-se o coeficiente  $k_{fl} = 0,5005$  (1,009) próximo do teórico  $k_{teor} = 0,5$  (1,0), respectivamente.

Os coeficientes de comprimentos efetivos  $k_{fl}$  e as cargas de flambagem  $N_{PP}$  obtidas pelo programa computacional desenvolvido são mostrados na Tab. 7.8. Nessa mesma tabela estão os coeficientes  $k_{fl}$  e cargas críticas  $N_{crit}$  calculadas por meio das equações transcendentais (que geraram o ábaco de Julian & Lawrence, 1953) indicadas por Hajjar *et al.* (1997), fazendo-se o coeficiente de rigidez do nó  $G_A = G_B = 2g$  para estruturas travadas. Esses coeficientes  $k_{fl}$  são comparados com alguns  $k_{teor}$  teóricos fornecidos por Li & Li (2007). Reproduzem-se outros pontos diferentes fornecidos por esses pesquisadores apenas para mostrar a coerência dos resultados.

Nas colunas destravadas, a carga aplicada é  $P_0 = 1000$  kN. Controlou-se o deslocamento horizontal do topo (nó 11), que é livre, mas impedido de girar por causa da rigidez da ligação. Esse deslocamento  $\Delta_{11}$  varia de 114 cm até 106 cm para ligação do tipo flexível ( $\eta \geq 0,45$ ). Agora, considerou-se, também, o fora de prumo (FP) da norma  $\Delta_0 = L/500$ . As cargas críticas e os coeficientes  $k_{fl}$  são listados de forma similar na Tab. 7.9, embora este não seja definido para a condição de rótula ( $k_{fl} = \infty$ ).

**Tabela 7.8 Cargas de flambagem da coluna travada.**

Parâmetros		Hajjar <i>et al.</i> (1997)			Li & Li (2007)		Própria tese		
$\eta$	g	$G_A = G_B = 2g$	$k_{fl}$	$N_{crit}$ [kN]	$k_1 = k_2^{(4)}$	$k_{teor}$	$\lambda_c$ [%]	$N_{PP}$ [kN]	$k_{fl}$
0,000	0,000	<sup>(1)</sup> 0,000	0,5000	3844,0	$\infty$	0,500	96,33	3853,2	0,4994
0,002	0,001	0,002	0,5010	3828,6	–	–	95,90	3836,0	0,5005
0,019	0,010	0,020	0,5100	3694,9	20,00	0,525	93,37	3734,8	0,5073
0,083	0,050	0,100	0,5487	3191,9	10,00	0,549	79,81	3192,4	0,5487
0,143	0,100	0,200	0,5919	2742,7	5,00	0,592	68,07	2722,8	0,5941
0,222	0,200	0,400	0,6598	2207,4	3,00	0,640	54,70	2188,0	0,6627
0,250	0,250	0,500	0,6863	2040,5	2,00	0,686	50,50	2020,0	0,6897
0,333	0,500	1,000	0,7743	1603,1	1,00	0,774	39,58	1583,2	0,7791
0,400	1,000	2,000	0,8553	1313,7	0,50	0,855	32,35	1294,0	0,8618
0,444	2,000	4,000	0,9156	1146,2	0,30	0,902	28,16	1126,4	0,9237
0,476	5,000	10,00	0,9625	1037,3	0,10	0,962	25,47	1018,8	0,9712
0,488	10,000	20,00	0,9805	999,6	0,05	0,981	24,52	980,8	0,9899
0,499	100,000	200,00	0,9980	964,9	–	–	23,67	946,8	1,007
0,500	<sup>(2)</sup> $\infty$	$\infty$	0,9996	961,0	0,000	1,000	23,58	943,2	1,009

Notas: 1) considerada biengastada; 2) birrotulada; 3)  $k_1 = 1/G_A$ ,  $k_2 = 1/G_B$ ; 4) alguns valores ( $k_1$ ,  $k_2$ ) originais de Li & Li (2007) colocados para abalizar diferenças; 5)  $N_{crit} = 961/k_{fl}^2$ ; 6)  $P_0 = 4000$  kN.

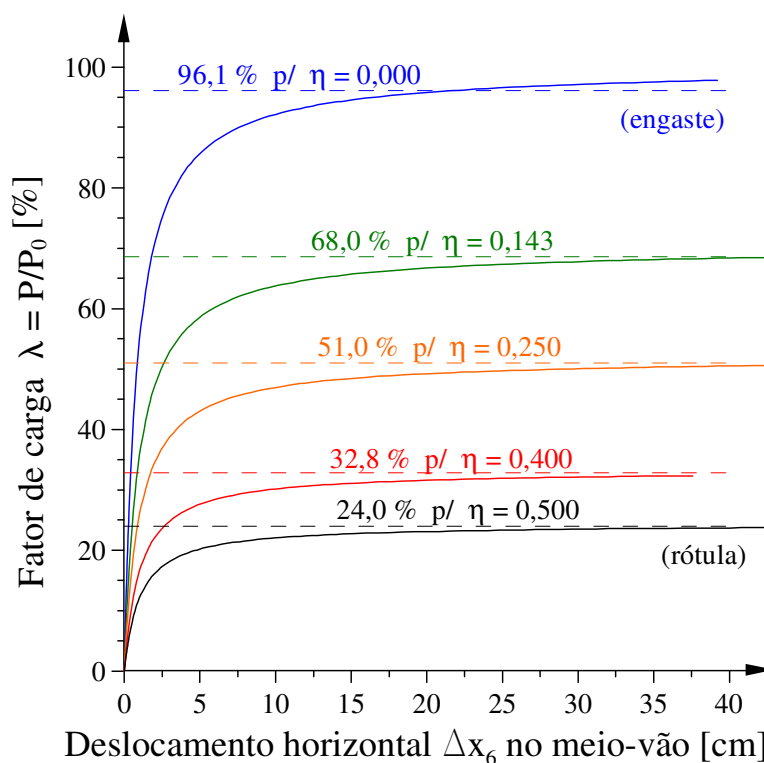
**Tabela 7.9 Cargas de flambagem da coluna destravada.**

Parâmetros		Hajjar <i>et al.</i> (1997)			Li & Li (2007)		Própria tese		
$\eta$	g	$G_A = G_B = 6g$	$k_{fl}$	$N_{crit}$ [kN]	$k_1 = k_2^{(4)}$	$k_{teor}$	$\lambda_c$ [%]	$N_{PP}$ [kN]	$k_{fl}$
0,000	0,000	<sup>(1)</sup> 0,000	1,000	961,0	$\infty$	1,00	96,0	960,6	1,000
0,002	0,001	0,006	1,002	957,2	20,000	1,02	95,7	956,6	1,002
0,019	0,010	0,060	1,020	923,6	10,000	1,03	92,2	922,3	1,021
0,083	0,050	0,300	1,099	795,2	3,000	1,11	79,1	791,3	1,102
0,143	0,100	0,600	1,196	672,3	2,000	1,16	66,7	667,1	1,200
0,222	0,200	1,200	1,375	508,2	1,000	1,32	50,3	502,7	1,383
0,250	0,250	1,500	1,459	451,7	0,500	1,59	44,7	446,5	1,467
0,333	0,500	3,000	1,826	288,3	0,300	1,90	28,4	284,5	1,837
0,400	1,000	6,000	2,405	166,2	0,200	2,23	16,4	163,9	2,421
0,444	2,000	12,00	3,272	89,8	0,100	3,01	8,85	88,5	3,295
0,476	5,000	30,00	5,050	37,7	0,050	4,16	3,71	37,1	5,089
0,488	10,000	60,00	7,083	19,1	–	–	1,89	18,8	7,150
0,499	100,000	600,00	22,240	1,9	–	–	0,00	1,9	22,48
0,500	<sup>(2)</sup> $\infty$	$\infty$	$\infty$	0,0	0,000	$\infty$	0,00	0,0	$\infty$

Notas: 1) considerada biengastada; 2) birrotulada; 3)  $k_1 = 1/G_A$ ,  $k_2 = 1/G_B$ ; 4) alguns valores ( $k_1$ ,  $k_2$ ) originais de Li & Li (2007) colocados para abalizar diferenças; 5)  $N_{crit} = 961/k_{fl}^2$ ; 6)  $P_0 = 1000$  kN.

Os valores de Hajjar *et al.* (1997) apresentados foram calculados fazendo-se o coeficiente de rigidez do nó  $G_A = G_B = 6g$  para estruturas destravadas [Hellesland & Bjorhovde, 1996(a-b)].

Na figura 7.12 estão traçadas algumas das trajetórias de equilíbrio construídas para se chegar às cargas de flambagem elásticas da Tab. 7.8. Observa-se que os fatores de carga continuam crescendo, a carga crítica de flambagem é uma média aproximada desse trecho de leve inclinação e não há propriamente uma assíntota.



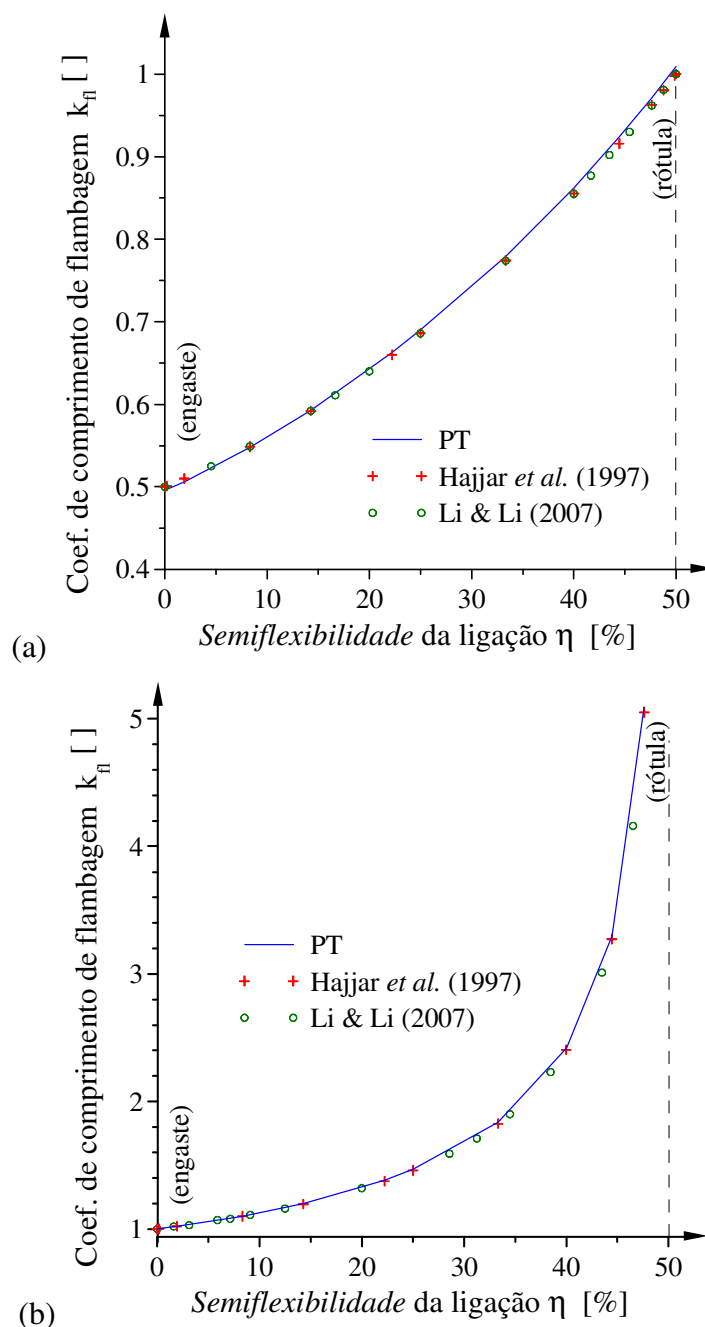
**Figura 7.12** Trajetórias elásticas da coluna travada de Hajjar *et al.* (1997).

Os coeficientes de flambagem  $k_{fl}$  obtidos por Hajjar *et al.* (1997), Li & Li (2007) e nesta tese para os diferentes *índices de giro próprio da ligação*  $\eta$  são representados nas Figs. 7.13(a-b), comprovando a boa concordância entre os valores produzidos e os extraídos da literatura.

### 7.3.2 ESTUDO DE CONVERGÊNCIA

No método dos elementos finitos (MEF), é natural que se faça um ensaio sobre a capacidade de a modelagem representar de maneira adequada o problema. Isso significa avaliar a capacidade de a malha adotada num modelo atingir um resultado aceitável e a convergência da solução. Logo, há um ponto em que o aumento do número de EFs empregado no modelo não se traduz em melhoria do resultado.

O estudo das malhas das fatias foi realizado anteriormente (Alvarenga, 2005) e não teria sentido repeti-lo. Pela técnica adotada em todos os problemas já resolvidos, as barras são sempre subdivididas em EFs do mesmo tamanho. Então, também esse fator não é objetivo de estudo. Resta, assim, estudar o tamanho de cada EF, ou seja, o número de EFs ( $n_{ef}$ ) em que se divide a barra para efeito de análise. Para o EF tradicional (rígido-rígido) concluiu-se que a quantidade entre  $6 \leq n_{ef} \leq 8$  é adequada.



**Figura 7.13** Coef. de flambagem da coluna de Hajjar *et al.* (1997):  
(a) travada (obs. com “.” decimal); (b) destravada.

São obtidos os resultados (AELL) para a *semiflexibilidade*  $\eta = g = 0,25$  (*midir-rígido*), isto é  $R_k = 3776,6$  kNm/rad. Mantidos todos os demais parâmetros, constrói-se a Tab. 7.10, com o controle dos deslocamentos, para as duas situações da estrutura:

- travada: com deslocamento  $\Delta x_{C_{\max}} = 13,2$  cm, carga teórica  $N_{\text{crit}} = 2040,5$  kN, *histórico*: (10×0,3%, 15×1%, 15×2%, 24×4%, 35×8%); e
- destravada: com deslocamento  $\Delta x_{B_{\max}} = 114$  cm, carga teórica  $N_{\text{crit}} = 451,6$  kN, *histórico*: (5×0,4%, 8×1%, 10×4%, 8×8%).



À medida que o  $n_{ef}$  cresce, a resposta estrutural vai sendo refinada e as diferenças vão se reduzindo. Por exemplo, na Tab. 7.10(b)  $\Delta\theta_B = 0,349$  entre 4-6, já  $\Delta\theta_B = 0,032$  entre 12-16; ou seja, o desvio 0,505% caiu para 0,046%. Todavia o custo em número de iterações cresce de 15,2% para 21,8% (base de comparação:  $\theta_B = 69,112$  [mrad] e 678 [iterações]). Com 2 EFs apenas, o efeito da CI parece desaparecer e o resultado é bem destoante. A maior quantidade de EFs (20 ou 32) parece absorver uma parte da energia ajustando vários deslocamentos, o que parece reduzir o efeito da carga, do esforço axial e os efeitos secundários nos momentos também. Empregar 16 EFs permite excelente precisão, mas torna-se caro pelo número de iterações e pelo tamanho das MRG resultantes. Entretanto, modelar com 6 EFs, ou menos, não parece ser satisfatório. Por essas razões, adotou-se, em geral, nos modelos com ligações desta tese, um número de EFs intermediário entre  $8 \leq n_{ef} \leq 10$  por barra.

**Tabela 7.10 Verificação da convergência:**

**(a) coluna travada**

$n_{ef}$	Fator de carga $\lambda$ [%]	Esforços (máx.) [kN] <sup>(1)</sup>		Momentos [kNm]		Rotações [mrad] $\theta_{A/B}$ <sup>(2)</sup>	Iterações gastas
		$N_d$	$V_d$	$-M_{A/B}$ <sup>(2)</sup>	$M_C$ <sup>(4)</sup>		
2	57,303	2282,9	205,45	33136,5	66272,3	87,753	495
4	53,230	2125,1	249,42	35507,8	56835,2	94,033	497
6	51,526	2059,0	238,21	35064,1	54322,4	92,858	635
8	50,884	2034,2	245,26	34855,4	53417,7	92,305	811
10	50,580	2022,5	248,19	34750,3	52995,6	92,027	946
12	50,414	2016,0	246,15	34691,1	52765,6	91,870	1085
●16	50,272	2009,6	247,77	34630,6	52536,4	93,442	1370
20	50,169	2006,6	246,53	34602,7	52430,3	91,634	1633

**(b) coluna destravada**

$n_{ef}$	Fator de carga $\lambda$ [%]	Desloc. $\Delta y_B$ [cm]	Esforços (máx.) [kN] <sup>(1)</sup>		Momentos [kNm]		Rotações [mrad]		Iterações gastas
			$N_d$	$V_d$	$M_A$ <sup>(3)</sup>	$-M_B$ <sup>(3)</sup>	$\theta_A$ <sup>(3)</sup>	$-\theta_B$ <sup>(3)</sup>	
2	45,765	7,3455	457,65	56,263	26530,2	26890,9	70,235	71,208	203
4	45,020	7,5093	450,20	63,000	25871,3	26324,4	68,513	69,713	179
6	44,779	7,5480	447,79	64,207	25724,1	26192,4	68,123	69,364	282
8	44,692	7,5618	446,92	64,601	25670,8	26144,5	67,982	69,237	368
10	44,651	7,5682	446,51	64,770	25645,7	26122,0	67,916	69,177	451
12	44,628	7,5716	446,29	64,855	25632,4	26109,8	67,880	69,144	530
●16	44,606	7,5750	446,06	64,927	25618,8	26097,4	67,843	69,112	678
32	44,410	7,5767	444,10	64,856	25568,4	26047,1	67,860	69,133	1225

Notas: 1) máximos:  $N_d$  axial de compressão (-),  $V_d$  corte nas duas direções (+/-); 2) momentos e rotações nas ligações ( $M_{A/B}$ ,  $\theta_{A/B}$ ) são iguais e opostos; 3) momentos e rotações nas ligações em (A) positivos, em (B) negativos, como indicado; 4) ponto C de controle do deslocamento; 5) base de comparação (●).

### 7.3.3 FLAMBAGEM INELÁSTICA COM LIGAÇÕES LINEARES

Reestuda-se, agora, o problema da coluna travada da Fig. 7.11(a) considerando o comportamento inelástico (AILL) e tensões residuais de Galambos & Ketter (1959). Os valores de rigidez são os mesmos da seção anterior, definidos pela Eq. 7.5.

Inicia-se um dos grandes desafios dessa formulação, que é a presença de plasticidade variável ao longo do EF com ligação. Os últimos ajustes da formulação na *IIEA* da subseção 3.6.3, bem como a parte computacional descrita na subseção 4.5.3 e 4.5.4, começam a ser avaliados aqui. Esses resultados são passíveis de maiores críticas e, conseqüentemente, sofrerem ajustes no futuro. É um procedimento ainda em fase de testes, que precisará um tempo maior para ter-se a real dimensão da sua capacidade.

Em muitos dos resultados produzidos avalia-se a rotação da ligação pelo método *ME*, e nos mais complicados, adota-se o método *S*. O método *XX* fornece, em geral, maiores discrepâncias, principalmente com a *ZP* incluindo o próprio EF com ligação.

As trajetórias de equilíbrio desenhadas na Fig. 7.14 comprovam que se obtêm resultados semelhantes para o engaste ou  $\eta = 0,002$  (e para a rótula ou  $\eta = 0,499$ ). As variações de  $\eta$  intermediárias também mostram coerência, notando-se que as ligações mais rígidas possuem trajetórias menores e a transição com a plasticidade é mais abrupta. Já nas mais flexíveis, as trajetórias são curvas mais suaves e não se consegue definir a parcela de efeito da flambagem, da plasticidade ou da semirrigidez da ligação.

Com a rigidez da ligação dada pela Eq. 7.5 e  $G_{A/B} = 2g$ , obtém-se o coeficiente  $k_{\Pi}$  da mesma forma como na subseção anterior se calculou a Tab. 7.8. Encontra-se a carga da norma AISC LRFD (1993) usando-se a esbelteza relativa:

$$\rho_z = \frac{k_{\Pi} L}{\pi r_z} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} = \frac{k_{\Pi}}{\pi} \frac{969,6}{8,815} \sqrt{\frac{25}{20000}} = 1,2378 k_{\Pi} \quad (7.8)$$

para o trecho inelástico, conforme a expressão:

$$N_m = 0,658^{\rho_z^2} N_y \quad (7.9)$$

na qual a carga de esmagamento  $N_y = 1472,5$  kN. Com esses dados constrói-se a Tab. 7.11. Observa-se que existem pequenas diferenças (não superiores a 5%) e para  $\eta \geq 0,4$  não ocorrem *ZPs* no EF com ligação (melhores resultados).

Para melhor avaliação, na Fig. 7.15 reproduzem-se de forma gráfica as cargas limites da Tab. 7.11, incluindo as obtidas por comprimento efetivo do AISC LRFD (1993). Comprovou-se que essas cargas das normas são conservadoras em relação às encontradas com o perfil 8 WF 31, em colunas birrotuladas de comprimento

equivalente, em que se constatou a mesma diferença (Alvarenga & Silveira, 2005). Algumas diferenças são explicadas porque houve um tratamento estatístico nos resultados dos ensaios antes das aproximações da norma (Galambos, 1982), outras devem ser atribuídas às falhas do modelo numérico propriamente, inclusive do EF com ligação e plasticidade. (Supõe-se o efeito do termo  $\xi$ , não incluído no método  $S$ ).

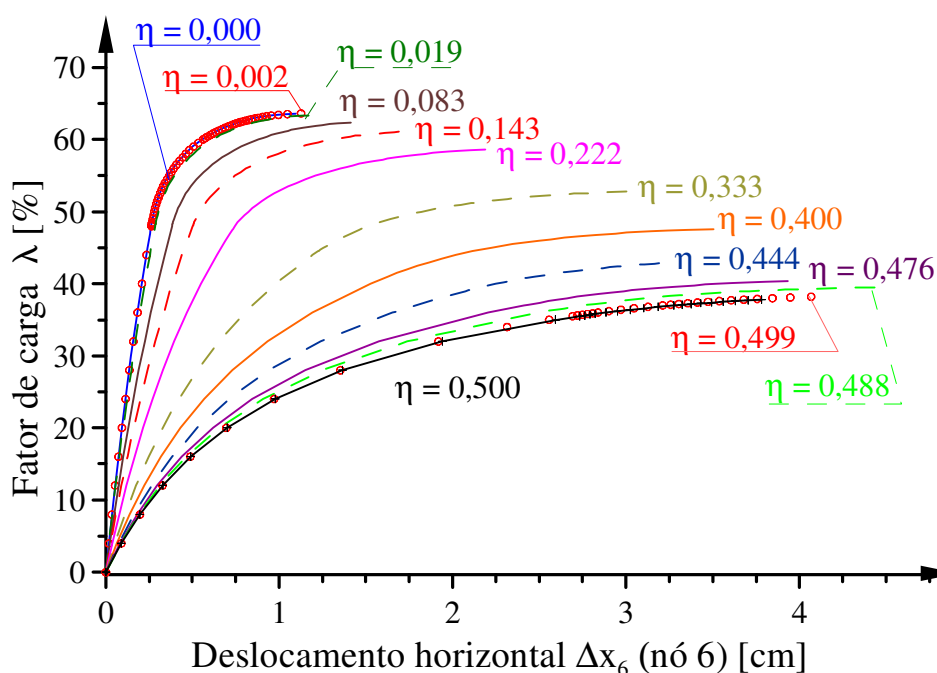
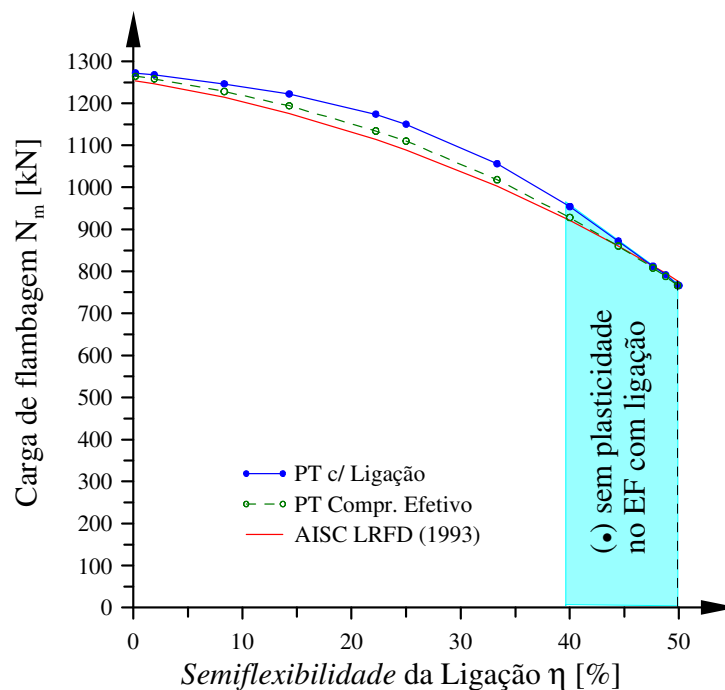


Figura 7.14 Trajetórias inelásticas da coluna travada de Hajjar *et al.* (1997).

Tabela 7.11 Carga limite inelástica da coluna travada.

η	Parâmetros		AISC LRFD (1993)			Própria tese				
	g	Rigidez R <sub>k</sub> [kNm/rad]	k <sub>fl</sub>	ρ <sub>z</sub>	Carga N <sub>m</sub> [kN] <sup>(1)</sup>	Deslocamentos Δx <sub>C</sub> [cm]	θ <sub>A/B</sub> [mrad]	Momentos M <sub>A/B</sub> M <sub>C</sub> [kNcm] <sup>(2)</sup>		Carga N [kN] <sup>(3)</sup>
0,000	0,000	<sup>(1)</sup> ∞	0,5000	0,619	1254,4	1,095	0,000	1505,8	1120,3	1272,0
0,002	0,001	944100,0	0,5010	0,621	1253,6	1,126	0,017	1522,6	1143,6	1271,9
0,019	0,010	94410,0	0,5100	0,631	1246,3	1,233	0,171	1569,5	1223,1	1268,0
0,083	0,050	18882,0	0,5487	0,680	1214,0	1,412	0,858	1602,0	1365,4	1246,0
0,143	0,100	9441,0	0,5919	0,733	1176,2	1,745	1,795	1686,3	1631,3	1222,0
0,222	0,200	4720,0	0,6598	0,817	1113,8	2,334	3,739	1763,0	2115,0	1174,0
0,250	0,250	2360,0	0,6863	0,850	1088,6	2,455	4,479	1691,4	2247,2	1150,0
0,333	0,500	1888,0	0,7743	0,959	1002,5	3,029	7,413	1400,6	2822,2	1056,0
0,400	1,000	944,1	0,8553	1,059	921,1	3,503	10,031	946,7	3311,3	952,0
●0,444	2,000	472,1	0,9156	1,134	860,2	4,080	12,366	584,1	3819,1	872,0
●0,476	5,000	188,8	0,9625	1,192	813,0	4,370	13,741	259,6	4075,8	812,0
●0,488	10,000	94,4	0,9805	1,214	794,9	4,503	14,333	135,4	4188,1	790,0
●0,499	100,000	9,4	0,9980	1,236	777,4	4,415	14,227	13,5	4121,5	768,0
●0,500	<sup>(2)</sup> ∞	0,0	0,9996	1,238	775,4	4,480	14,457	0,0	4174,1	766,0

Notas: 1) obtidos com a Eq. 7.8 e 7.9 AISC LRFD (1993); 2) momentos e rotações nos extremos simétricos (sinal +/-); 3) cargas pré-cólapsos; 4) casos (●) sem plasticidade no EF com ligação.



**Figura 7.15** Carga de flambagem inelástica da coluna de Hajjar *et al.* (1997).

Para melhor comparação, foram feitos modelos de colunas birrotuladas similares às estudadas na Fig. 6.2(a), com comprimentos  $L = k_{fl} \cdot L_0$  (efetivos), sendo  $L_0$  o original desse exemplo (969,6 cm) e  $k_{fl}$  o coeficiente de flambagem na Tab. 7.11 [definido pelo AISC LRFD (1993)], indicados também na Fig. 7.15. Dessa forma, verifica-se com mais clareza o efeito da plasticidade no EF com ligação.

### 7.3.4 FLAMBAGEM COM LIGAÇÕES NÃO LINEARES

Como em outras partes desta tese, nem sempre se encontram exemplos simples desse tipo de problema na literatura. O efeito da plasticidade no EF com ligação quando essa é do tipo não linear constitui o maior desafio neste trabalho.

Em alguns testes, os métodos *XX* e *ME* mostraram divergências ou dificuldades numéricas na avaliação do giro próprio da ligação e do ajuste do momento associado, de forma a obedecer à curva  $M-\theta$  fornecida. Isso resultou nas modificações da parte computacional indicadas na subseção 4.5.4, que são propostas nesta tese.

Nesta subseção, encontram-se as cargas de flambagem para a coluna travada da Fig. 7.11(a), com  $P_0 = 4000$  kN, empregando como ligações não lineares as duas curvas experimentais já mostradas e suas aproximações pelo método *RBL*:

- a. sigla RT para Rathbun (1936), do tipo flexível; e
- b. sigla BL para Bailey (1970), do tipo quase rígida.

São realizadas as análises elásticas e inelásticas, cujas trajetórias de equilíbrio estão representadas nas Figs. 7.16(a-b).

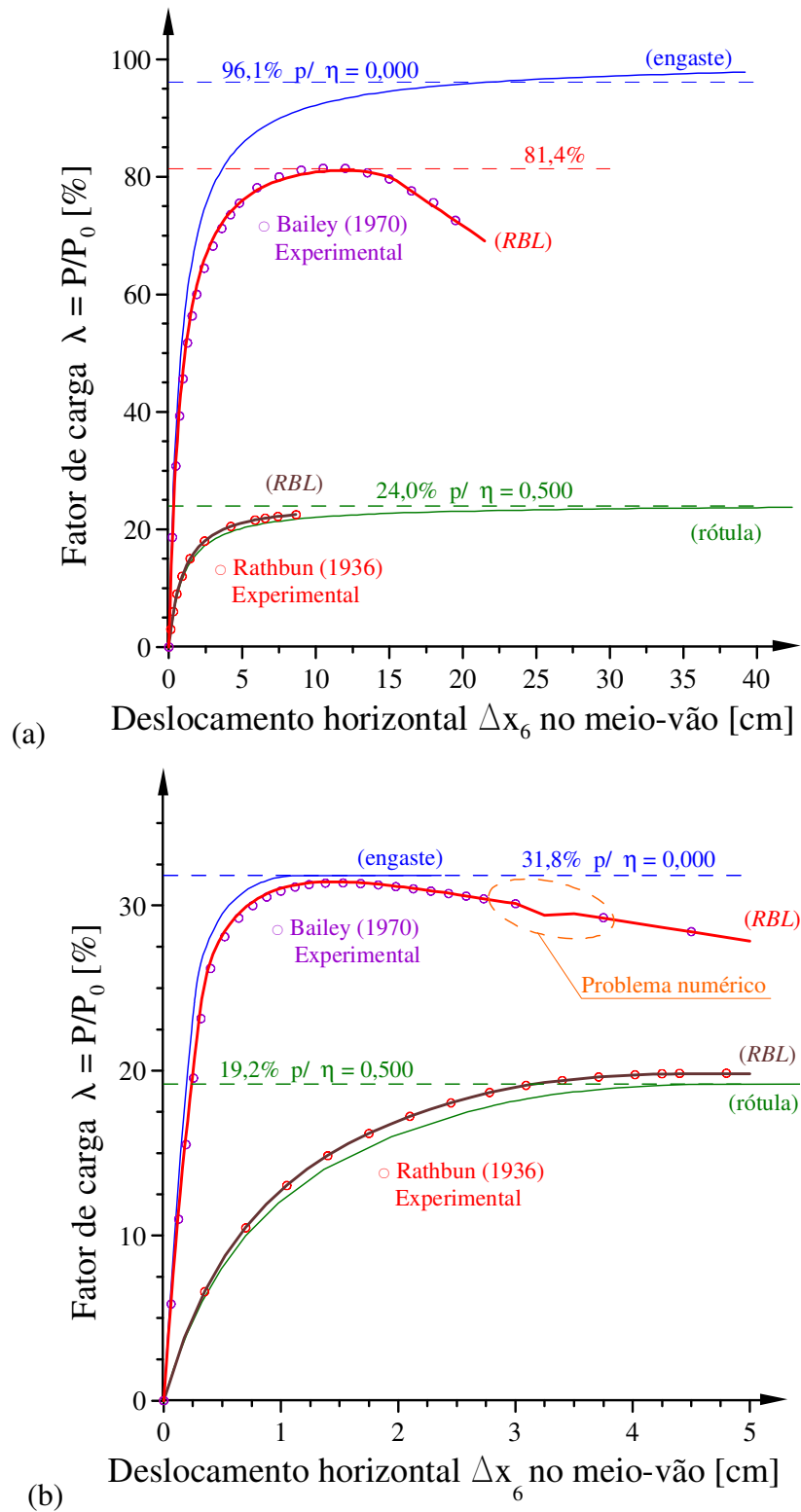


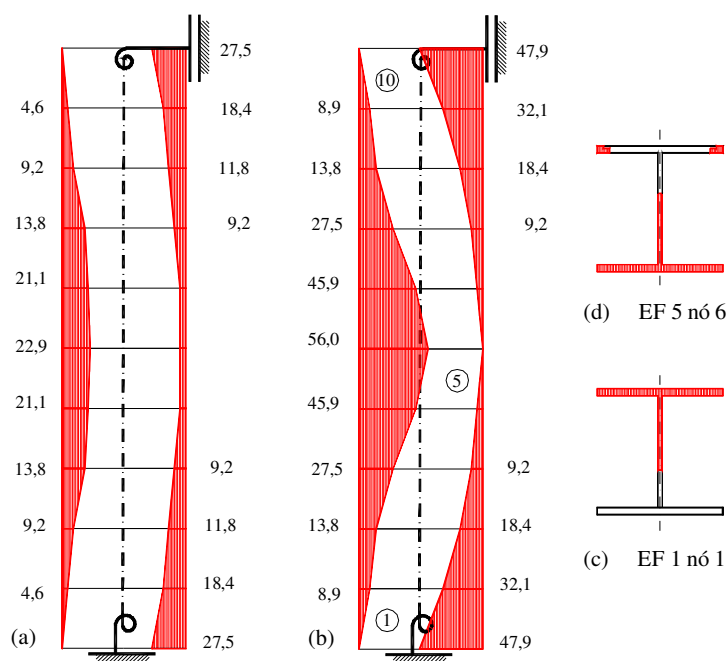
Figura 7.16 Ligações não lineares na coluna de Hajjar *et al.* (1997): (a) análise elástica; (b) análise inelástica.

As respostas das curvas  $M-\theta$  experimental e aproximada *RBL* são comparadas aos resultados produzidos para as condições de rótula e de engaste (ligação totalmente rígida), respectivamente. Com isso, avaliam-se as diferenças para o modelo real. O deslocamento horizontal máximo  $\Delta x_6$  do nó central (6) foi selecionado como parâmetro para as trajetórias de equilíbrio, fazendo as seguintes observações:

- a. aparece um problema numérico ( $M_{EF} < M_L$ ) no trecho de descida do modelo *RBL*, que ocorre a partir do passo 49,  $\Delta x_6 = 1,945$  cm e  $\lambda = 31,29\%$ . O equilíbrio global (deslocamentos e esforços) não foi afetado, embora a rigidez da ligação e a rotação estimada tenham sido;
- b. elástica: as curvas  $M-\theta$  experimentais e as do modelo *RBL* evidenciam o mesmo comportamento, não havendo diferenças significativas nessas respostas. Essas trajetórias seguem aproximadamente o comportamento da rótula para RT, e um pouco mais defasado, o engaste para BL. A curva RT termina mais abruptamente ( $\lambda = 22,6\%$ ), pois, além de absorver um momento  $M_u$  pequeno (236 kNcm apenas), sua capacidade de giro foi esgotada rapidamente (29,84 mrad). No caso do modelo BL, a curva  $M-\theta$  não consegue atingir a carga de flambagem prevista para o engaste, tendo o máximo de  $\lambda = 81,4 < 96,1\%$ , pois a rigidez da ligação se reduz e aumenta o deslocamento central; e
- c. inelástico: novamente não se constata maiores diferenças entre os modelos com a curva  $M-\theta$  experimental ou com a aproximada (*RBL*). Com relação ao comportamento que se espera dessas ligações, verifica-se que a ligação RT acompanha sensivelmente o modelo com rótula, atingindo  $\lambda = 19,2\%$ , em certo nível de deformações (pequenos deslocamentos,  $< 5$  cm). O modelo BL também acompanha o engaste, no qual se contata a ação da plasticidade na seção do EF com ligação. A sua rigidez relativa ( $g$ ) é reduzida drasticamente e atinge o fator máximo  $\lambda \approx 32\%$  (BL: 31,4%), ou seja, menos da metade da carga elástica. Logo após esse máximo, aumenta a formação da ZP na parte central da barra. Mesmo no final da trajetória, o fator de carga ainda é bem superior ao da barra com RT ( $\lambda = 27,8 > 18,2\%$ ). Com o escoamento da ligação, a inércia remanescente elástica cai de 64,4 a 50,0%, quando  $\lambda$  varia de 31,0 a 31,5%; já no meio-vão a redução é de 67,0 a 50,7% no passo que leva ao colapso, por incremento de carga.

Como a carga atuante é de compressão, o efeito da ligação não linear unido à plasticidade se mostra extremamente rápido. Note-se que a coluna dessa subseção representa, na realidade, uma escora ligada a duas vigas muito rígidas de andares consecutivos, sem que haja continuidade em nenhum extremo. No caso de coluna ligada à base de concreto, são necessários outros dados e curvas  $M-\theta$ , o que fica para uma etapa de pesquisa posterior a esta tese.

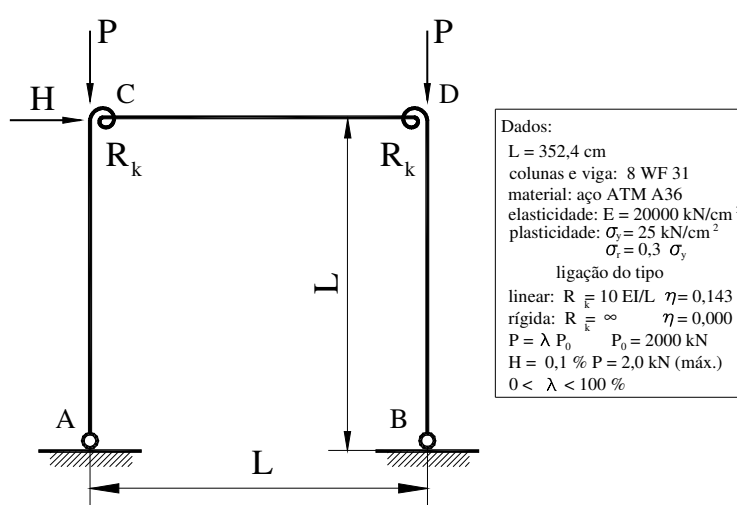
Nas figuras 7.17(a-b), representa-se a formação das ZPs nas extremidades e, posteriormente, no meio-vão para o modelo BL. As seções com fatias plásticas apenas de compressão evidenciam o deslocamento do centro de gravidade plástico ( $y_{CGP}$ ) e o consequente efeito secundário associado à curvatura inicial (efeito  $P\delta$ ). Na carga última, observa-se que tanto nos nós extremos (1 e 11) quanto no do meio-vão (6) a plasticidade tomou uma aba completa e a maior parte da alma.



**Figura 7.17 Zonas plásticas da coluna de Hajjar *et al.* (1997) percentual na estrutura: (a) carga limite, (b) carga última; seções com fatias plásticas: (c) carga limite, (d) carga última; (e) convenção: ( || ) compressão.**

#### 7.4 PORTAL DE YAU & CHAN (1994)

Estuda-se, agora, o portal proposto por Yau & Chan (1994) que será utilizado aqui para validar a formulação numérica do EF com ligação do tipo linear nos regimes: elástico e inelástico (AELL e AILL). Essa estrutura foi também avaliada por Chan & Chui (2000) e Machado (2005), que adotaram o método elástico com rótula-plástica da seção montada e o refinado. A flambagem das colunas desse portal, em qualquer regime, é determinada pelo travamento oferecido pela viga, ou seja, pelas ligações da viga às colunas, já que as bases são rótulas e não há cargas no vão da viga.



**Figura 7.18 Portal de Yau & Chan (1994).**

O portal apresentado na Fig. 7.18 é analisado sob as seguintes condições:

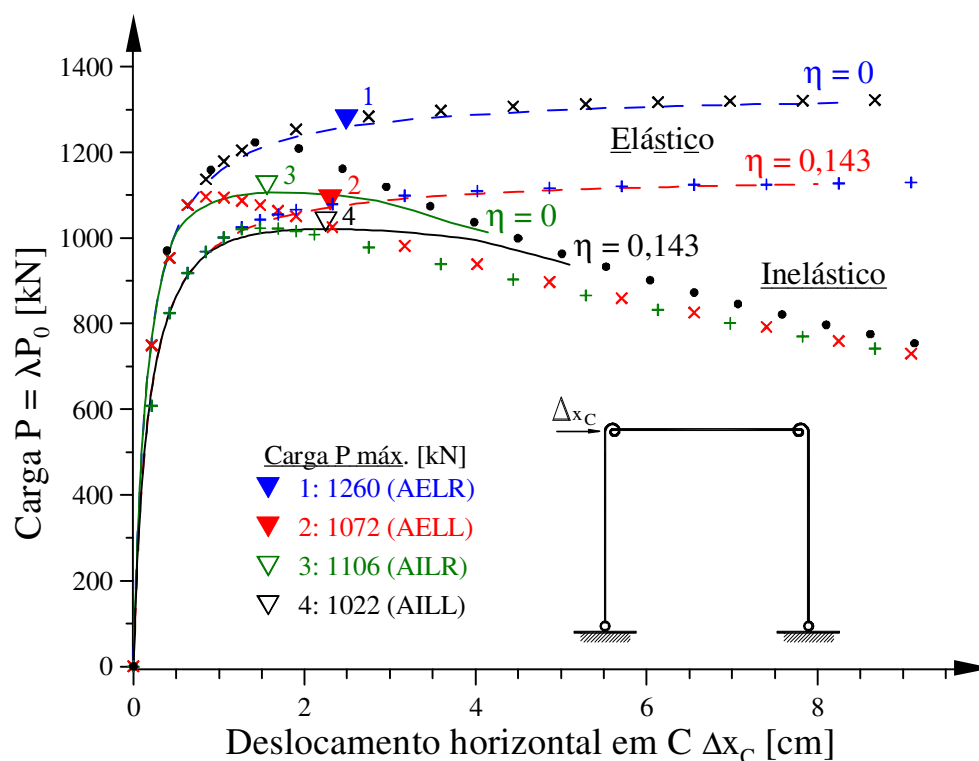
- AELL: elástico com ligação rígida ( $\eta = 0$ ) ou linear ( $\eta = 0,143$ ); e
- AILL: inelástico, com as mesmas ligações anteriores (caso a.).

O perfil adotado é o mesmo já empregado em outras partes, porém consideram-se as tensões residuais seguindo o modelo europeu (linear na aba e na alma), com a tensão máxima  $\sigma_r = 0,3 \sigma_y$  (Eurocode 3, 1992) [ver Fig. 7.22(c)].

O caso de ligação por engaste apenas complementa informações para comparação, uma vez que tal análise já foi realizada (capítulo 5). A rigidez linear da ligação é dada por  $R_k = 10 EI_z/L$ ; sendo L o vão da viga. Para os dados do problema, determinou-se a rigidez  $R_k = 25976,2 \text{ kNm/rad}$  ( $g = 0,1$  e  $\eta = 0,143$ ), ou seja, uma ligação rígida.

Esse problema foi modelado com 24 EFs (8 EFs por barra) e não se considerou qualquer imperfeição geométrica.





**Figura 7.19** Trajetórias de equilíbrio do portal de Yau & Chan (1994):

- (1) própria tese (PT): elástico: (---)  $\eta = 0$ , (---)  $\eta = 0,143$ ; inelástico: (—)  $\eta = 0$ , (—)  $\eta = 0,143$ ;  
 (2) Yau & Chan (1994) elástico: (x)  $\eta = 0$ , (+)  $\eta = 0,143$ ; inelástico: (x)  $\eta = 0$ , (+)  $\eta = 0,143$ ;  
 (3) Machado (2005) inelástico: (•)  $\eta = 0$ , ERP-M (ver seção 1.2); (4)  $P_0 = 2000$  kN.

Na figura 7.19, representam-se as trajetórias de equilíbrio correspondentes aos trabalhos indicados, observando-se que:

- a curva superior ilustra o método de cálculo tradicional, em que se considera a estrutura elástica e as ligações são todas infinitamente rígidas. Determina-se a carga crítica como  $P = 1260$  kN, empregando o controle do deslocamento do ponto C (nó 9), e a solução acompanha a de Yau & Chan (1994);
- em seguida, avalia-se o efeito da ligação linear, no qual a forma da curva não é muito diferente da anterior, mas a carga crítica reduz-se para 1072 kN. A resposta encontrada acompanha muito bem a dos autores do problema;
- quando se introduz a plasticidade, com a tensão residual máxima de  $0,3 \sigma_y$ , o comportamento se torna diferente, chegando-se à carga limite de  $P = 1106$  kN para ligação rígida; e
- finalmente, ao se levar em consideração a mesma ligação linear e a plasticidade, encontra-se a menor carga limite  $P = 1022$  kN, o que permite ter uma avaliação primária do efeito de uma ligação em um portal.

A trajetória da solução inelástica nasce da separação da parte elástica em um dado ponto, que ficou perto do indicado por Yau & Chan (1994) e é superado pela trajetória de Machado (2005). Note-se que a plasticidade descrita pelo primeiro fecha a rótula plástica imediatamente, com uma perda de capacidade maior (foi mais penalizada) do que descrito pelo método da ZP. Entretanto, as curvas de ZP se aproximam dos modelos de plasticidade refinados de Machado (2005) e as trajetórias quase coincidem no final, embora esse tenha saído de um ponto inicial mais elevado (detectando uma carga limite maior do que esperado). As curvas desses pesquisadores se prolongam até  $\Delta x_C \approx 9$  cm, enquanto as de ZP terminaram antes, pois foi encontrado o colapso por limite de cisalhamento (Eq. 4.3) na seção mais crítica (em D, topo da coluna B-D).

Nas tabelas 7.12(a-b), comparam-se alguns resultados numéricos fornecidos na literatura com os referentes à ZP, constata-se que estão bem próximos e com as mesmas tendências (ordem de crescimento dos valores), mostrando que há coerência entre eles.

**Tabela 7.12 Resultados do portal de Yau & Chan (1994)**

**(a) carga crítica e inelástica limite**

Tipo (1)	Yau & Chan (1994)		Chan & Chui (2000) (3)		Machado (2005) (4)		Própria tese		
	$\frac{PL^2}{EI_z}$	Carga P [kN] (2)	$\frac{PL^2}{EI_z}$	Carga P [kN] (2)	$\frac{PL^2}{EI_z}$	Carga P [kN] (2)	$\frac{PL^2}{EI_z}$	Carga P [kN] (2)	$\Delta x_C$ [cm]
AELR	1,80	1326,8	1,82	1341,6	–	–	1,793	1321	10,79
AILR	1,49	1098,3	1,39	1024,6	1,390	1024,6	1,500	1106	1,56
AELL	1,56	1150,0	1,56	1150,0	–	–	1,540	1135	10,25
AILL	1,39	1024,6	1,28	943,5	–	–	1,385	1021	2,30
APLR	–	–	1,68	1238,4	1,679	1237,6	–	–	–
APLL	–	–	1,49	1098,3	–	–	–	–	–

**(b) esforços e deslocamentos da própria tese**

Tipo (1,5)	Deslocamentos		Momento $M_{CD}$ (6)	Carga P [kN] (2)	$\frac{PL^2}{EI_z}$
	$\Delta x_C$ [cm]	$\theta_{CD}$ (6) [mrad]	[kNcm]	[kN] (2)	
AELR	10,79	–	14548	1321	1,793
	(7) 5,63	–	7596	1304	1,769
AILR	1,56	–	1933	1106	1,500
transição	0,51	–	697	1011	1,372
AELL	10,25	4,568	11865	1135	1,540
	(7) 8,05	3,585	9312	1130	1,533
AILL	2,30	0,978	2541	1021	1,385
transição	1,14	0,504	1309	993	1,347

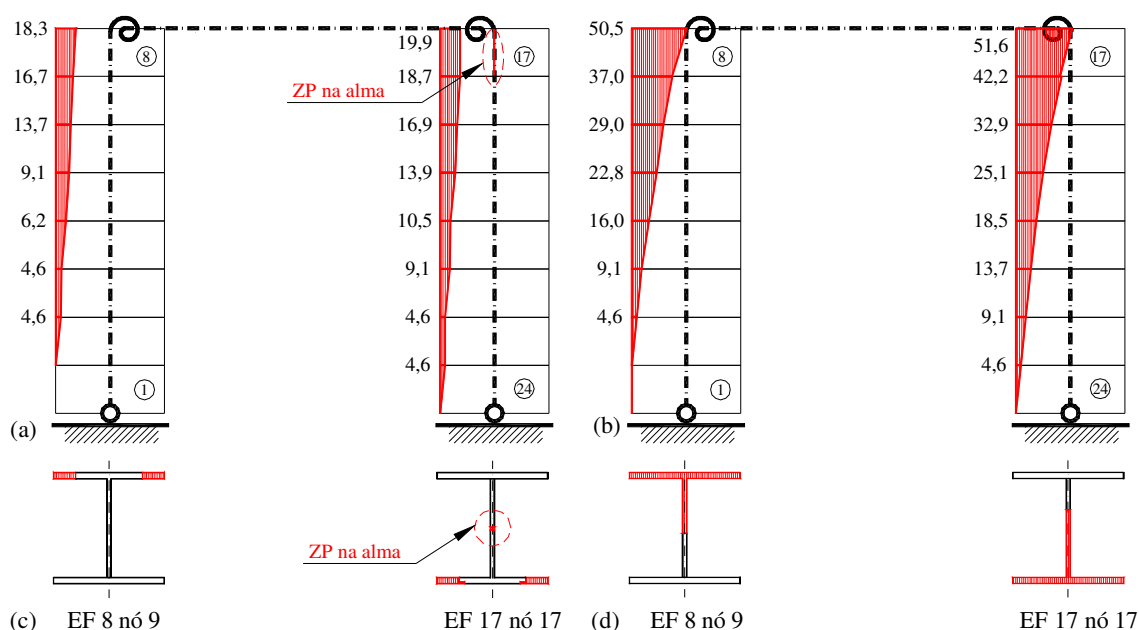
Notas: 1) Siglas: Análise = Elástica, Inelástica ou Plástica; Ligação = Linear ou Rígida; 2)  $\lambda = PL^2/EI_z$ ,  $P = \lambda EI_z/L^2 = \lambda \times 737,12$  kN; 3) indicaram  $\sigma_r = 0,5 \sigma_y$ , embora Yau & Chan (1994) tenham adotado o coeficiente 0,3; 4) com os métodos: elastoplástico (ERP) e plástico refinado da seção montada (ERP-M), com o refinado (ERP-R, Liew *et al.*, 1993) obteve-se 1,31; 5) transição: final do trecho elástico e início da trajetória inelástica; 6) maior momento e rotação na ligação; 7) com tensões  $\sigma \leq \sigma_u = 40,7$  kN/cm<sup>2</sup>.

A carga crítica depende do ponto escolhido como assíntota. Yau & Chan (1994) empregaram a relação  $\Delta x_C/L = 3\%$ . Todavia, o autor recomenda que se adote a carga correspondente à tensão limitada por  $\sigma \leq \sigma_u$  ( $= 40,7 \text{ kN/cm}^2$  para o aço ASTM A 36).

Já as cargas limites são mais claramente determinadas, e agora os resultados conferem com os de Yau & Chan (1994), embora destoem um pouco dos de Chan & Chuí (2000) e Machado (2005), o que pode ser justificado pela forma de avaliar-se a plasticidade, bem como pelas TRs de  $0,5 \sigma_y$  adotadas pelos últimos.

Para complementar esta seção, na Fig. 7.20 apresenta-se o diagrama de fatias plásticas desse portal, no qual se encontram apenas ZPs de compressão, maiores nos topos das colunas (pontos C e D, respectivamente) e reduzindo em direção as bases, enquanto a viga não possui qualquer plasticidade. Comprova-se, também, que a plasticidade é maior na carga última que na carga “inelástica” limite.

As TRs bilineares do Eurocode 3 (1992) propiciam o aparecimento de maior plasticidade na alma dos perfis, como ilustrado na Fig. 7.20(a), o que não ocorre, em geral, quando se consideram as TRs da norma americana.



**Figura 7.20 Zonas plásticas do portal de Yau & Chan (1994).**

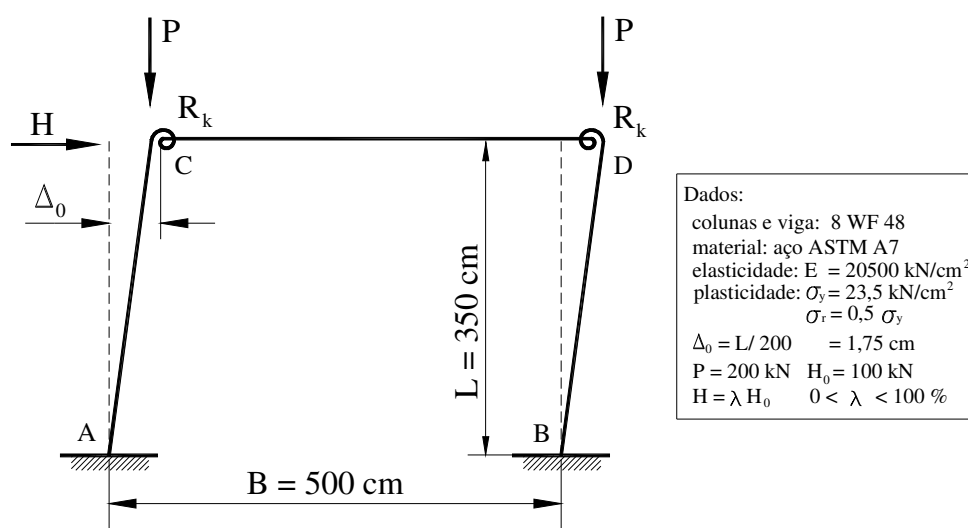
Percentual na estrutura: (a) carga limite  $P = 1021 \text{ kN}$ ; (b) carga última  $P = 937 \text{ kN}$ , ( $\Delta x_C = 5,1 \text{ cm}$ ); nas seções dos pontos C e D: (c) carga limite; (d) carga última; (e) convenção: (||) compressão.

## 7.5 PORTAL DE CHAN & CHUI (2000)

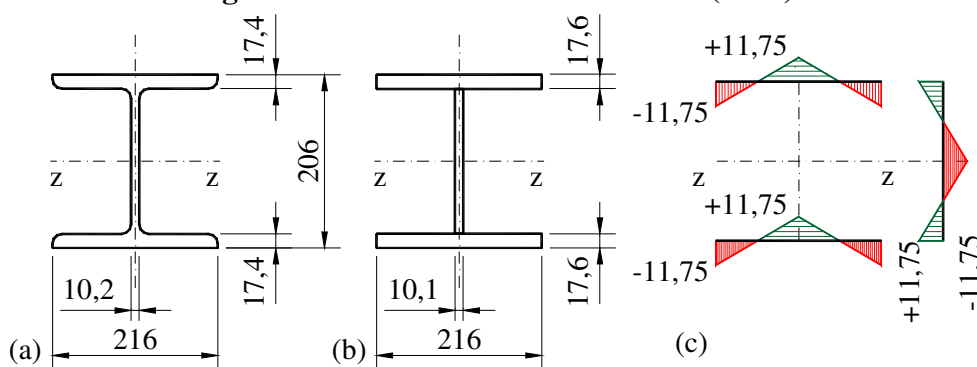
O portal mostrado na Fig. 7.22 foi proposto por Chan & Chui (2000) para mostrar a influência das ligações não lineares nos resultados da análise estrutural (AELN e AILN). Além disso, será utilizado aqui com o objetivo de avaliar as respostas de outras contribuições desenvolvidas nesta tese.

As cargas verticais  $P$  (200 kN) são introduzidas, inicialmente, com a geometria tendo um fora de prumo  $\Delta_0 = L/200$ , recomendado pelo ECCS (1984). Depois, a carga horizontal  $H$  é aplicada de forma incremental até se atingir o ponto limite ou crítico, dependendo da análise realizada. O modelo adotado possui 24 EFs, 8 para cada barra.

As colunas e a viga são do perfil laminado 8 WF 48, cuja seção e geometria, que é aproximada por retângulos, são mostradas nas Figs. 7.22(a-b). Já as suas dimensões, propriedades geométricas padrões e as adotadas aqui são indicadas na Tab. 7.13. As tensões residuais (TR) em forma bilinear (Eurocode 3, 1992) são ilustradas, também, na Fig. 7.23(c), sendo o máximo de  $F_r = 0,5 F_y$  nos extremos e meios das abas e da alma.



**Figura 7.21 Portal de Chan & Chui (2000).**



**Figura 7.22 Perfil do portal 8 WF 48:**

(a) laminado original; (b) seção equivalente; (c) TR do Eurocode 3 (1992).

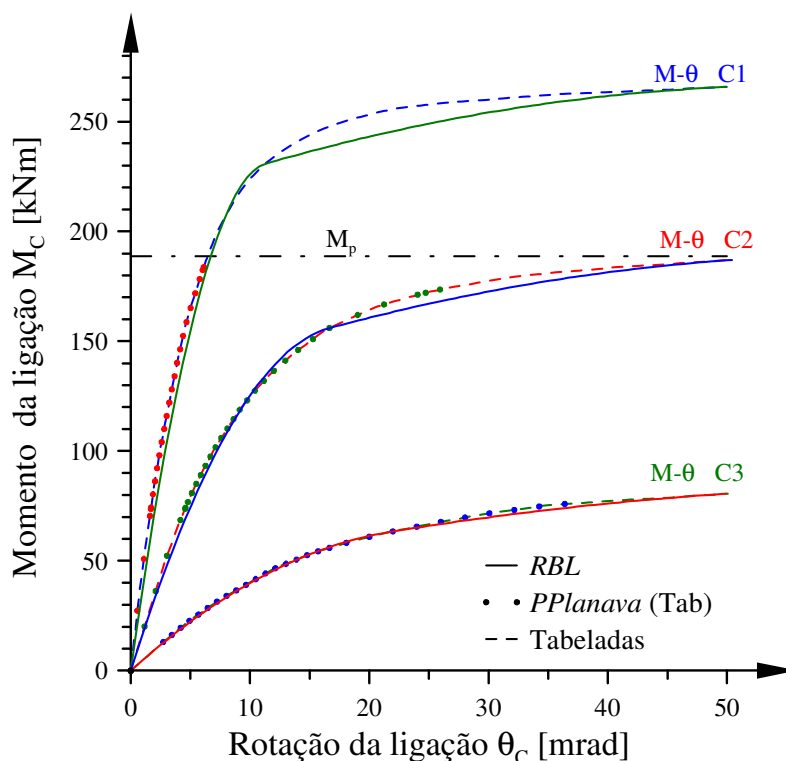
**Tabela 7.13 Propriedades da seção 8 WF 48 do portal.**

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	espessuras aba t    alma a				elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]
8 WF 48	215,9	206,0	17,399	10,160	90,96	7658	707,9	802,9
PT <sup>(1)</sup>	=	=	17,642	10,119	=	=	709,4	803,0

Notas: 1) PT: da própria tese; 2) valores aproximados de forma a manter a área bruta  $A_g$  e a inércia  $I_z$ .

Chan & Chui (2000) indicaram as tensões de escoamento do aço ASTM A7, selecionadas neste trabalho, embora na análise inelástica informem que adotaram as tensões do ASTM A 36 ( $\sigma_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ ). Esses pesquisadores informaram as curvas M- $\theta$  do modelo de Richard & Abbott (1975) (ver subseção 2.4.3) por meio de um gráfico adimensional ( $M/M_p$ ), não fornecendo os (4) parâmetros correspondentes, nem com qual o  $\sigma_y$  calculou-se o momento  $M_p$  utilizado na figura da sua análise.

Na figura 7.23, são apresentadas as curvas das ligações denominadas por C1 – resistência plena; C2 – resistente; e, C3 – flexível (ver subseção 2.2.2). As curvas correspondentes foram aproximadas por meio gráfico, gerando tabelas, com pontos espaçados a cada 5 mrad, (ver apêndice A.8). Considerou-se o momento plástico da seção  $M_p = 188,71 \text{ kNm}$ , que é indicado em outro exemplo, para o mesmo perfil e condições, na mesma referência (Chan & Chui, 2000).

**Figura 7.23** Curvas M- $\theta$  da ligação do portal de Chan & Chui (2000).

**Tabela 7.14 Curvas M- $\theta$  das ligações:****(a) parâmetros das curvas RBL adotadas**

Curva	Rotação [mrad] <sup>(1)</sup>		Momentos [kNm]		Rigidez [kNm/rad] <sup>(1)</sup>		
	$\theta_A$	$\theta_U$	$M_A$	$M_U$ <sup>(1)</sup>	$R_{ki}$	$R_{kA}$	$R_{kp}$
C1	11,27	49,97	230,8	265,8	39377	1566	243
C2	16,65	50,41	156,0	187,0	17273	1461	379
C3	21,94	49,92	63,4	80,6	4912	868	359

**(b) estudo estatístico das curvas RBL selecionadas**

Curva	Desvio absoluto <sup>(3)</sup>			Desvio relativo		Desvio padrão	$R^2$	Ponto <sup>(4)</sup>
	(-)	(+)	médio	[%]	médio			
C1	-13,39	+2,27	-5,02	22,12	2,972	4,182	0,999	24/102
C2	-5,35	+2,95	-2,16	7,83	2,086	2,388	0,999	34/102
C3	-2,17	+0,49	-0,65	3,45	1,326	0,727	0,999	44/100

Notas: 1) dados para PPLANAVA; 2) inclui o ponto (0,0) da curva; 3) desvios em momentos [kNm] para as mesmas rotações; 4)  $n/m$ : ponto  $n$  selecionado pelo melhor " $R^2$ ", dentre os  $m$  disponíveis.

Os pontos obtidos diretamente nas análises inelásticas do PPLAANVA estão marcados em destaque, notando-se que os da curva C1 não superam  $M_P$ , como deve ser. As curvas aproximadas pelo método RBL, também empregadas nos exemplos desta seção, mostram diferenças claras de trajetória, pois as curvas dos modelos de Richard & Abbott (1975) têm variação potencial.

Os seis parâmetros principais determinados ( $M_U$ ,  $\theta_A$ ,  $\theta_U$ ,  $R_{ki}$ ,  $R_{kA}$  e  $R_{kp}$ ), bem como medidas de calibragem das curvas M- $\theta$  RBL adotadas em relação às geradas por meio gráfico, são fornecidos na Tab. 7.14, onde ficam evidentes as diferenças. Procurou-se desenvolver um traçado de forma mais prática (uma aproximação menos refinada, de engenharia) para se avaliar melhor a capacidade desse modelo.

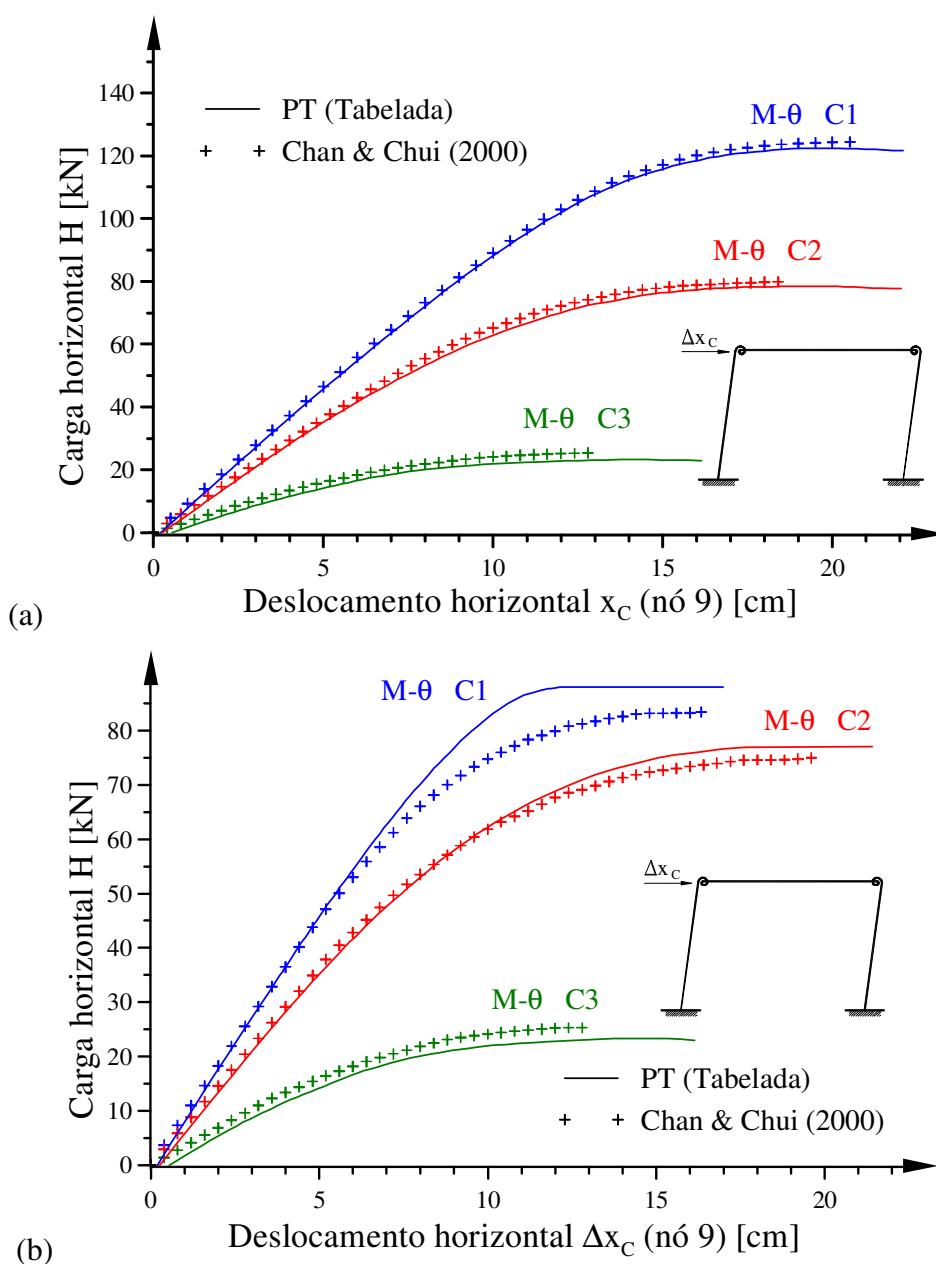
Com esses dados, realiza-se agora a validação de todo o material proposto nesta tese, seguindo a ordenação:

- comprova-se os resultados das análises elásticas e inelásticas (AENL e AINL) com as ligações não lineares (C1 a C3) empregando-se as curvas tabeladas;
- avalia-se o desempenho dos modelos RBL em relação aos anteriores segundo os critérios de uma análise inelástica (AINL) para as três curvas; e
- demonstra-se a capacidade de solução pelo CDG (*controle do deslocamento generalizado*) analisando o problema elástico da curva C3, que é flexível e, por isso mesmo, mostra dificuldades numéricas tanto no processo de solução inicial (calibrar passos) como de falsa convergência, ou não convergência, no final.

Para condensar, tratam-se as curvas tabeladas por TC1 a TC3, as do modelo RBL por RC1 a RC3, e os resultados nas figuras de Chan & Chui (2000) por CC1 a CC3.

### 7.5.1 ANÁLISE DO PORTAL COM LIGAÇÕES NÃO LINEARES

A modelagem do comportamento estrutural desse portal pode ser comparada, de forma aproximada, com as respostas de Chan & Chui (2000), na Fig. 7.24(a) para análises elásticas, cujos resultados de TC são levemente inferiores aos de CC; e, 7.24(b) para as análises inelásticas, em que os resultados TC1 e TC2 superam os anteriores, lembrando que no caso da ligação C3 não ocorre plasticidade, e, dessa forma, esses resultados são os mesmos nas Figs. 7.24(a-b).



**Figura 7.24** Trajetórias de equilíbrio do portal de Chan & Chui (2000): (a) análise elástica; (b) análise inelástica.

Chan & Chui (2000) indicaram as cargas de flambagem elástica dos modelos CC1 a CC3 como:  $P = \{124,3/79,9/26,6\}$  kN, enquanto *PPLANAVA* encontrou:  $P = \{122,5/78,5/23,2\}$  kN, respectivamente. As diferenças podem ser atribuídas ao modelo com mais EFs [ $24 \times 3$  (CC)], diferenças de formulação e, principalmente, a aproximação gráfica das figuras para obtenção dos valores de  $M-\theta$  das análises desenvolvidas. Cabe ressaltar que essas trajetórias (AELN) para as curvas TC1 a TC3 foram produzidas aplicando-se o *CDG*, do capítulo 4 desta tese.

No caso dos resultados inelásticos da Fig. 7.24(b), a plasticidade concentrada parece penalizar as análises de Chan & Chui (2000), fechando a rótula plástica antecipadamente. Esses pesquisadores consideraram o modelo da seção montada com o comportamento similar ao das tensões de escoamento de  $\sigma_y = 25$  kN/cm<sup>2</sup>, enquanto se adotou  $\sigma_y = 23,5$  kN/cm<sup>2</sup> nas análises desta tese. Saliente-se que ocorreu plasticidade reversa no modelo TC2, embora a ligação estivesse comprometida com  $M = 184,3$  kNm (98,6% de  $M_u$ ) e também com a rotação  $\theta = 44,67$  mrad (88,6% de  $\theta_u$ ).

Na tabela 7.15 faz-se um resumo dos resultados nos pontos crítico (AELN) e limite (AILN) para essas ligações. Esses valores correspondem às curvas tabeladas. O esforço normal (N) máximo ocorre no topo da coluna direita (em D), que possui um momento pouco menor que o do lado oposto (C), que é listado. Vários pesquisadores desprezam a deformação axial, mas há casos cuja diferença decorrente é significativa. Note-se que o parâmetro  $\eta$  tende a 0,5 nos modelos AELN (o final da curva  $M-\theta$ ), já com a plasticidade maior (AINL) reduzem para 0,0 (TC1) [ou 0,4 se menor (TC2)].

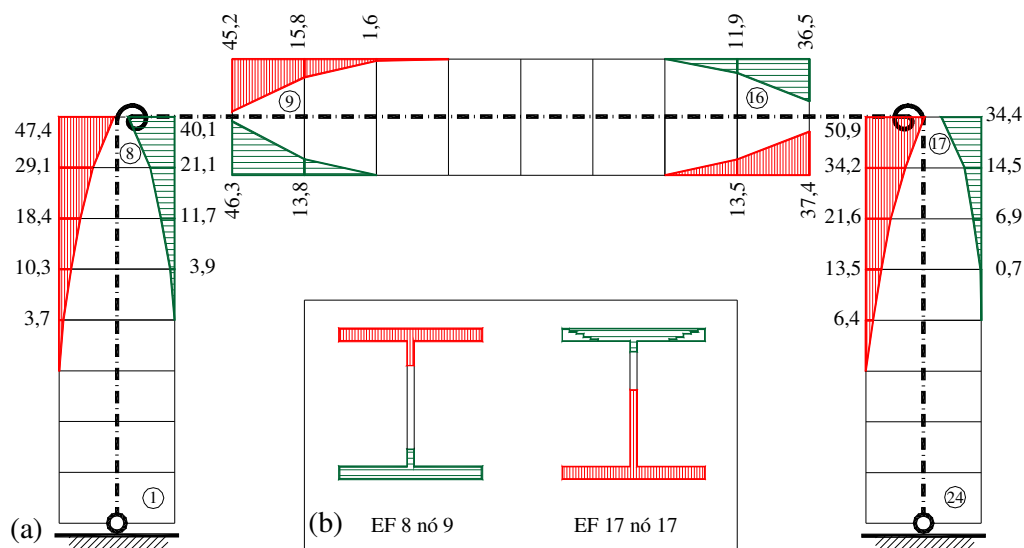
Na figura 7.25, mostra-se a formação de zonas plásticas (ZP) nesse portal para a ligação de rigidez plena (C1), que são de flexão nas extremidades da viga e no topo das colunas, evidenciando a formação do mecanismo plástico de andar. Isso indica que, ao avaliar-se um pouco melhor o efeito da distribuição das ZPs, pode-se obter um benefício: uma carga limite maior (ou menos conservadora).

**Tabela 7.15 Condições limite do portal de Chan & Chui (2000).**

Análise e ligação	TC	$\eta^{(1)}$	Deslocamentos		Esforços [kN]		Momento $M_{C/D}^{(2)}$ [kNm]
			$\Delta x_C$ [cm]	$\theta_{C/D}$ [mrad]	H	N (máx)	
Elástica	TC1	0,4770	19,621	23,179	122,46	299,86	25665
	TC2	0,4730	19,029	31,455	78,53	269,48	17876
	TC3	0,4716	13,524	29,503	23,24	227,89	7118
Inelástica	TC1	0,0215	12,156	6,167	88,00	271,48	18447
	TC2	0,4027	18,056	26,753	77,00	267,83	17441

Notas: 1) no colapso da AELN  $\eta$  tende a 0,5 (rótula); 2) momento na ligação (não no EF).





**Figura 7.25 Zonas plásticas do portal de Chan & Chui (2000) com a ligação TC1: (a) portal; (b) seções nas colunas; (c) convenção: (=>) tração, (||) compressão.**

### 7.5.2 ANÁLISE DO PORTAL COM LIGAÇÕES DE CURVA $M-\Theta$ *RBL*

O objetivo, agora, é comparar os resultados obtidos pelas curvas reproduzidas de forma gráfica (TC) com os do método *RBL* proposto (RC), que são aproximações das anteriores. Não se deseja empregar o *RBL* substituindo equações com mais recursos, como as curvas potenciais e exponenciais, mas sim, atingir um bom resultado utilizando de equações mais simples, como as propostas, mesmo reconhecendo que as supracitadas são melhores.

Na figura 7.26, reproduzem-se os resultados das análises inelásticas com as curvas tabeladas, o que permite confrontar com os obtidos pelo método *RBL*. Repare-se que para a ligação TC3 ou RC3, em que o regime é sempre elástico, as diferenças são menores. As curvas TC1 a TC3 têm as cargas limites  $H = \{88,0/77,0/23,2\}$  kN, enquanto as RC1 a RC3 (*RBL*) atingem  $H = \{87,9/75,0/21,5\}$  kN, respectivamente.

Podem-se perceber as diferenças entre os modelos observando-se os resultados com as curvas *RBL* mostrados na Tab. 7.16, que são similares à anterior (Tab. 7.15).

**Tabela 7.16 Condições limites com curvas *RBL* do portal de Chan & Chui (2000).**

Análise e ligação		$\eta^{(1)}$	Deslocamentos		Esforços [kN]		Momento $M_{C/D}$ [kNcm]
			$\Delta x_C$ [cm]	$\theta_{C/D}$ [mrad]	H	N (máx)	
Inelástica	RC1	0,0171	12,318	6,477	87,9	271,5	18466
	RC2	0,4018	19,794	31,698	75,0	267,6	17431
Elástica	RC3	0,4472	9,182	18,579	21,5	223,4	5948

Nota: 1) dada a plasticidade no EF com ligação  $\eta \approx 0$  (RC1), enquanto RC3 tende a 0,5.

Nos modelos mais rígidos (C2), as curvas baseadas no modelo de Richard & Abbott (1975) têm um ganho intermediário, o que faz o modelo *RBL* atingir uma carga final menor, embora a diferença seja pequena. Todavia, nas curvas  $M-\theta$  de ensaios experimentais, raramente se identifica essa característica (esse ganho), exceto em casos de contato da aba da viga com a coluna (ver Fig. 2.9). Essa pode ser também outra razão pela qual nem sempre o modelo potencial possa ser aplicado na reprodução de ensaios experimentais com sucesso.

### 7.5.3 CONTROLE DO DESLOCAMENTO GENERALIZADO (CDG)

O controle de deslocamento *selecionado* foi eficaz em ultrapassar e determinar aproximadamente a carga limite em diversos exemplos já abordados nesta tese. Permitiu uma visão mais clara do desenvolvimento do mecanismo de colapso plástico, em geral, posterior à carga limite (da flambagem inelástica). Além disso, é muito simples de manipular, pois envolve apenas uma grandeza (resultado).

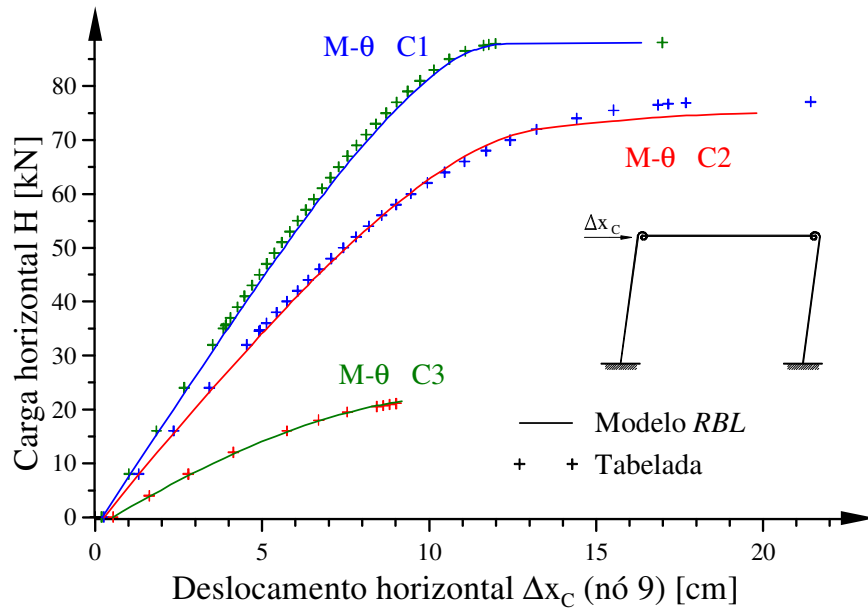
Já o deslocamento generalizado ( $s$ ) é uma grandeza incomum na percepção do projetista, visto que é um módulo de vetor e não se aplica a um deslocamento apenas, mas a todos os deslocamentos simultaneamente. Assim, torna-se um pouco estranho indicar o processo incremental no módulo do vetor deslocamento ( $\mathbf{u}$ ) como (*80 passos de 1 cm*), ou seja, ( $s_{\text{máx}} = 80 \text{ cm}$ ), por exemplo. Mas foi exatamente esse *histórico* que se empregou ao resolver os casos elásticos da Fig. 7.24(a).

Na figura 7.27, reproduzem-se as trajetórias de equilíbrio da ligação C3, cujo modelo é elástico em todo o percurso (ocorre, no máximo, 4 fatias plásticas no colapso) e a ligação atinge a rotação última antes de o escoamento se agravar. Verifica-se que o controle de carga atinge o máximo com  $H = 21,2 \text{ kN}$  quando sobrevém uma dificuldade de convergência seguida de salto dinâmico (MRG singular) e final da análise.

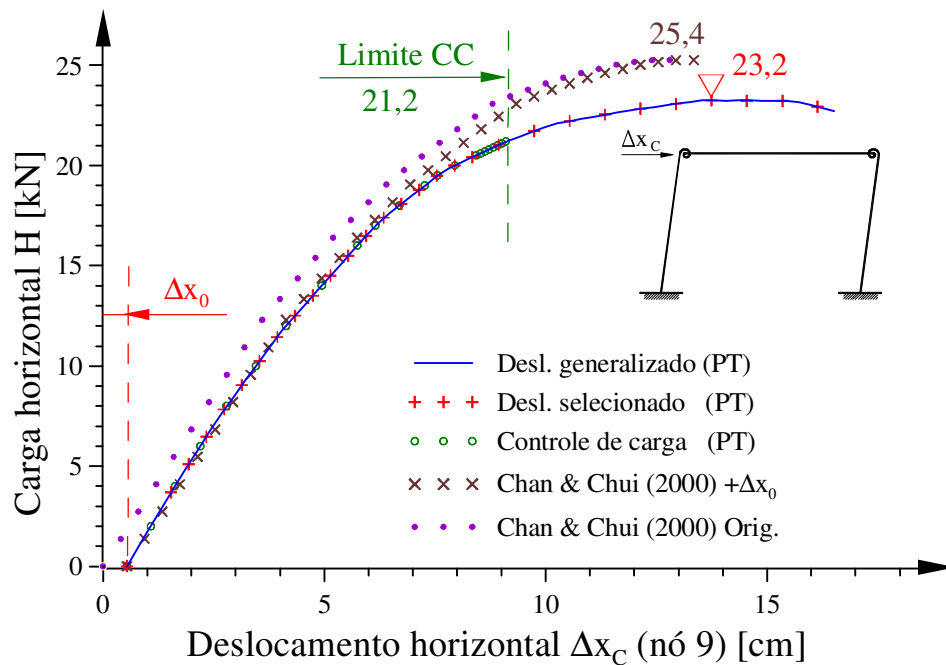
Escolhendo-se o próprio ponto C (nó 9) de máximo deslocamento para controle atinge-se a carga máxima  $H = 23,24 \text{ kN}$ , que também é alcançada pelo processo *CDG*, comprovando sua eficiência.

Entretanto, a curva TC3 de Chan & Chui (2000) supera tais resultados, mas esses pesquisadores não indicaram (ou consideraram) o deslocamento horizontal causado pela carga vertical fixa ( $\Delta x_0 = 0,54 \text{ cm}$ ). Somando-se o deslocamento  $\Delta x_0$ , a curva desses pesquisadores aproxima-se bastante da obtida. Mantém-se a dúvida se, além dos deslocamentos  $\Delta x_0$  negligenciados, os efeitos  $P\Delta x_0$  também o foram, o que justificaria

as cargas horizontais mais elevadas indicadas por eles (26,6 kN, superior aos 25,4 kN, da imagem gráfica reproduzida – ver apêndice A.8).



**Figura 7.26** Trajetórias de equilíbrio do portal de Chan & Chui (2000) com ligações de curvas M-θ tabeladas e modelo RBL.



**Figura 7.27** Trajetórias de equilíbrio do portal de Chan & Chui (2000) com a ligação C3 – controles incrementais.

**Tabela 7.17 Efeito dos controles na análise dos portais****(a) resposta estrutural no portal de Chan & Chui (2000)**

Controle da análise <sup>(1)</sup>		$\eta$ <sup>(2)</sup>	Deslocamentos		Esforços [kN]		Momento $M_{C/D}$ [kNcm]
			$\Delta x_C$ [cm]	$\theta_{C/D}$ [mrad]	H	N (máx)	
Carga		0,4433	9,012	18,245	21,10	223,02	58,45
Deslocamento selecionado	pré-máx	0,4433	8,941	18,076	21,03	222,92	58,18
		0,4716	13,740	30,073	23,24	228,05	71,61
Deslocamento generalizado	pré-máx	0,4433	8,905	17,986	20,99	222,86	58,03
		0,4710	14,340	31,632	23,24	228,35	72,80

**(b) desempenho computacional e numérico no portal de Yau & Chan (1994)**

Controle da análise	Passos	Iterações		Estado obtido		Iterações / passo
		total	máximo no passo	$\Delta x_C$ [cm]	$\lambda$ [%]	
Carga	32	1163	200	20,206	57,00	36,3
Desl. selecionado	97	1201	18	8,000	56,28	12,4
Desl. generalizado	50	333	11	25,662	57,32	6,7

Notas: 1) pré- é o valor do controle de carga (pré-colapso), máx- é o máximo obtido;

2) na carga limite,  $\eta$  é quase o de rótula (0,5), ou seja, ponto da M- $\theta$  já quase na horizontal.

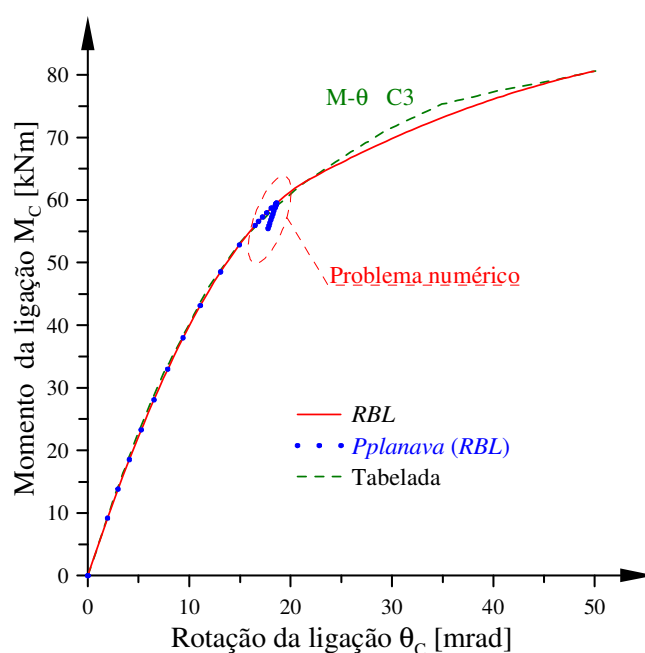
Na tabela 7.17(a), faz-se um resumo dos resultados correspondentes aos pontos limites. Observa-se que os controles de deslocamento (selecionado e generalizado) passaram por  $\Delta x_C = 9$  cm, ponto final do controle de carga, com grandezas semelhantes às desse processo, mas atingiram uma carga H superior após  $\Delta x_C = 13$  cm

Por outro lado, o desempenho computacional apresentado na Tab. 7.17(b) foi medido com dados do exemplo da seção anterior (Yau & Chan, 1994), no qual o controle de carga paralisa próximo à carga limite, com 200 iterações. Já o controle do deslocamento selecionado ultrapassa com facilidade esse ponto limite, não precisa de tantos passos assim e foi bem eficiente. Nesse exemplo, ao contrário de outras análises, o deslocamento generalizado conseguiu superar o selecionado, talvez pela coincidência de uma boa calibragem dos passos (ds) tomados como 1 cm.

Empregando-se os controles de deslocamentos, mesmo ultrapassando o ponto de carga limite, podem suceder pontos de bifurcação ou de instabilidade numérica, que costumam trazer grandes dificuldades e surpresas ao analista estrutural. Um desses casos coincidiu com o final da trajetória de equilíbrio RC3 (Chan & Chui, 2000), em que se alcançou o improvável máximo  $H = 25$  kN, partindo desde 21,2 kN, com passos de 0,1 kN (por controle de carga). Constatou-se que a esses resultados correspondiam parâmetros de rotação da ligação, com um desvio de convergência no momento associado, que variou de 6,3 até 11% no H máx (25). Na figura 7.28 reproduz-se a curva

M- $\theta$  com os resultados de *PPLANAVA* nesses pontos, comprovando-se o problema numérico. Observe-se que a ligação parece descarregar, e assim, não poderia atingir um momento maior (permanece 5522 kNcm), enquanto no EF essa grandeza atinge incorretamente 5900 kNcm.

Uma vez que no programa computacional *PPLANAVA* a rotação e o momento da ligação não estão relacionados ao EF, para acompanhar a curva M- $\theta$  adequadamente é necessário determinar a rotação da ligação, obtendo-se com base nessa informação, o momento na ligação. Lembre-se que o momento no EF depende unicamente da formulação e da plasticidade, o que justifica a seção seguinte.



**Figura 7.28** Trajetórias de equilíbrio do portal de Chan & Chui (2000) com a ligação RC3 mostrando problema numérico.

## 7.6 ÂNGULO DE GIRO PRÓPRIO DA LIGAÇÃO

Como visto na subseção anterior, determinar corretamente qual o giro da ligação, por qualquer dos métodos apresentados na subseção 4.5.3 [o simples (*S*), o aproximado (*XX*) ou empregando a MR do elemento (*ME*)], é fundamental para se ter uma solução adequada. Esse foi um dos maiores desafios neste trabalho, e ainda não se pode dizer qual é o mais confiável ou preciso. Nesta seção, faz-se uma abordagem rápida das diferenças encontradas, apresentando a resposta produzida por cada método (*S*, *XX* ou *ME*) nos diversos tipos de análise (elástica ou inelástica, ligação linear ou não linear) para o caso da viga e da coluna tratados nas seções 7.2 e 7.3 deste capítulo.

Todavia, em alguns casos, o momento obtido pela formulação no EF difere do determinado a partir do ângulo de rotação na curva  $M-\theta$  selecionada. Se no processo iterativo esses valores convergem, pode-se prosseguir; mas, se divergem, cabe algum processo corretivo ou paralisar a solução. Esse assunto merece uma pesquisa complementar posterior (ver capítulo 9).

### 7.6.1 ANÁLISE DA VIGA COM CARGA CONCENTRADA

Estuda-se o efeito da avaliação da rotação da ligação no problema da viga da Fig. 7.2(a) sujeita à carga concentrada  $Q$ , com diversos tipos de análise, como se mostra na Tab. 7.18. Os seguintes comentários podem ser feitos:

- AELL – adotou-se a condição de rigidez linear dada por  $\eta = 0,25$  (ver Eq. 7.1). Esse problema foi resolvido em única etapa (1 passo,  $\lambda = 100\%$ ), todos os métodos gastaram 18 iterações e convergiram com a mesma relação 73,89% da tolerância. Não houve diferenças significativas;
- AELN – nesse caso, foram necessárias 273 iterações (máximo de 18 iterações) em 40 passos de 2,5% ( $\lambda = 100\%$ ). Os resultados são praticamente idênticos, tendo sido empregada a curva não linear potencial de Kishi & Chen (1987);
- AILL – modificou-se o método *S* para considerar a diferença entre os momentos atual e anterior ( $dM_A = M_{Ad} - M_{Ac}$ ), quando antes se empregava a variação decorrente da plasticidade ( $dM_A = dM_{AP}$ ) e surgiram desvios por causa da excentricidade também ( $dN \cdot y_{CGP}$ ). Comprovou-se que o mais adequado é avaliar a diferença, independentemente da excentricidade. Para o método *XX*, concluiu-se que não se pode utilizar a média das propriedades para a inércia, mas deve-se considerar sua redução em cada seção dos nós. Todos os métodos determinaram

- o colapso quando  $\lambda = 89\%$ , sendo mostrados os últimos resultados que convergiram após 93 iterações. Neste exemplo, foram realizadas 709 iterações, obtendo-se 11534 fatias plásticas; e
- d. AILN – considerou-se a curva não linear *RBL*, reproduzindo a ligação rígida de Bailey (1970), para provocar o máximo de plasticidade no EF com ligação. Todos os métodos atingiram o fator de carga na situação pré-colapso de 86%, porém o método *XX*, mesmo após várias tentativas de ajustes, apresentou divergências, ora superando, ora subestimando a rotação da ligação. Essas dificuldades numéricas exigem mais cuidado para o seu emprego no caso das análises inelásticas de vigas.

### 7.6.2 ANÁLISE DA COLUNA COM CARGA DE FLAMBAGEM

Emprega-se, agora, a coluna travada do exemplo da Fig. 7.11(a) com o mesmo modelo já estudado e a carga  $P_0 = 2000$  kN. Fazem-se as seguintes observações:

- a. AELL – aplicou-se o controle do deslocamento selecionado, e as respostas produzidas não diferem muito entre si. Listam-se os resultados no incremento 96, que corresponde ao deslocamento  $\delta x_C = 40$  cm (fator de carga  $\lambda = 50,5\%$ ). Foram gastas 945 iterações e, no máximo, 5 por incremento;
- b. AELN – adota-se a mesma curva  $M-\theta$  de Kishi & Chen (1987) do problema da viga. São desenvolvidas 520 iterações ao longo de 52 passos, gastando-se no máximo 13 iterações por passo. Alcançam o deslocamento 22 cm com o fator de carga  $\lambda \approx 68,26\%$  (diferença de 0,1% para mais em *S*). Não se verificam grandes diferenças nos modelos elásticos analisados;
- c. AILL – é um dos problemas para os quais as respostas do método *XX* continuaram inadequadas, apresentando significativas diferenças. Foram tentadas várias modificações para melhorar o seu desempenho, sem sucesso. Neste exemplo, processaram-se 1392 iterações ao longo de 47 incrementos, com no máximo 94 iterações em um passo; e
- d. AILN – foi outro desafio, como no item anterior (AILL), pois tanto o momento da ligação como outras grandezas foram afetadas também. Nos últimos testes, constatou-se que algumas dificuldades numéricas encontradas (divergência entre os momentos do EF e da ligação, por exemplo) são indícios de que já se atingiu o colapso ou a carga limite, como se mostrou antes na Fig. 7.28.

**Tabela 7.18 Efeito do método de determinar-se a rotação na viga simples.**

Método	Deslocamentos		Momentos [kNcm]				N [kN]	$\varepsilon_r$ <sup>(3)</sup> [%]
	$\delta_{yc}$ [cm]	$\theta_{A/B}$ [mrad]	$M_C$	$M_{EF}$	$M_{A/B}$	dM		
(a) AELL <sup>(1)</sup>								
S					28443,567	0,010		–
XX	2,8361	3,545	35554,656	28443,577	28447,234	3,657	1,524	0,128
ME					28447,060	3,483		0,122
(b) AELN <sup>(1)</sup>								
S		26,032	58097,152	5890,392	5890,392	–	4,177	–
XX	7,3329	26,033	58097,122	5890,421	5890,421	–	4,178	–
ME		26,033	58097,122	5890,421	5890,421	–	4,178	–
(c) AILL <sup>(2)</sup>								
S		3,494			28035,104	0,411		0,001
XX	4,4823	3,483	28280,791	28035,515	27950,078	85,437	1,961	0,306
ME		3,494			28038,480	2,965		0,011
(d) AILN <sup>(2)</sup>								
S	7,0178	13,107	28412,202	26619,083	26619,746	0,663	2,832	0,002
XX	7,0011	13,198	28411,626	26619,701	26649,392	29,691	2,825	0,112
ME	6,9641	13,164	28410,374	26621,044	26638,196	17,152	2,811	0,064

Notas: 1) adotou-se para XX:  $\chi_2 = \chi_3 = 1$ , ver Eqs. 4.30 e 4.31; 2) valores do último passo que convergiu; 3) desvio relativo  $\varepsilon_r = dM/M_{EF}$ .

**Tabela 7.19 Efeito do método de determinar-se a rotação na coluna simples.**

Método	Deslocamentos		Momentos [kNcm]				N [kN]	$\varepsilon_r$ <sup>(3)</sup> [%]
	$\delta_{yc}$ [cm]	$\theta_{A/B}$ [mrad]	$M_C$	$M_{EF}$	$M_{A/B}$	dM		
(a) AELL <sup>(1)</sup>								
S		86,807			32781,629	0,111	2019,29	–
XX	40,00	86,673	49975,828	32781,740	32731,276	50,464	2021,43	0,15
ME		86,673			32731,292	50,448	2021,43	0,15
(b) AELN <sup>(1,2)</sup>								
S		28,882	32942,006	29780,723	29780,722	0,001	2730,29	–
XX	22,00	28,770	32942,940	29772,455	29772,456	0,001	2729,97	–
ME		28,770	32942,940	29772,457	29772,458	0,001	2729,97	–
(c) AILL <sup>(1,4)</sup>								
S		3,914			1477,990	0,000		–
XX	2,082	0,792	2000,965	1477,990	289,903	1188,0	1139,99	80,4
ME		3,897			1471,829	6,161		0,42
(d) AILN <sup>(1,2,4)</sup>								
S	0,988	0,348	1059,463	1363,309	1364,879	1,570		0,11
XX	1,050	0,759	1058,001	1362,430	2921,989	1559,6	1239,99	114,5
ME	0,987	0,349	1061,751	1364,659	1368,518	3,859		0,28

Notas: 1) diferença provocada pelo alongamento considerado (S); 2) as diferenças são distribuídas a outras grandezas (também); 3) desvio relativo  $\varepsilon_r = dM/M_{EF}$ ; 4) mesmo com correções de  $\chi_2$  e  $\chi_3$  (XX).



Diante dessas dificuldades, numa boa parte final dos exemplos deste capítulo e no seguinte optou-se pelo emprego do método (*S*) de avaliar a rotação da ligação, não apenas pela sua simplicidade, mas porque se mostrou o mais estável numericamente, embora tal método não leve em conta o efeito do alongamento na rotação da ligação. Isso também pode ser a causa de algumas diferenças constatadas nos resultados de validação (ver Fig. 7.15, por exemplo). Na pesquisa posterior poder-se-á melhor avaliar e compreender o alcance desses métodos, propondo novos ajustes, caso necessários (ver capítulo 9)

Foi comprovado que, com a formulação numérica apresentada, obtêm-se boas respostas para a análise da viga. Já não se pode dizer o mesmo para a da coluna, o que justificou a não introdução dessa consideração nas *Análises Avançadas* que se desenvolvem no próximo capítulo.

## 7.7 REFERÊNCIAS

- AISC LRFD (1993), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 2<sup>a</sup> Ed., Chicago, Ilionois.
- Alvarenga, A.R. (2005), “Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço”, Diss. de Mestrado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Alvarenga A.R. & Silveira, R.A.M. (2005), “Aspectos importantes na análise avançada de colunas de aço”, *Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, CILAMCE, Guarapari / ES.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2009a), “Introduzindo as ligações na análise com EF empregando zona-plástica - Uma nova formulação”, *Anais do XXX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, CILAMCE, Búzios/ RJ.
- Bailey, J.R. (1970), “Strength and rigidity of bolted beam to column connections”, *Proceedings of the Conference on Joints in Structures*, Vol. 1, pp. 4, Un. de Sheffield / RU.
- Batho, C. & Rowan, H.C. (1934), “Investigation of beam and stanchion connections”, *Steel Structures Research Committee, 2<sup>nd</sup> Report*, Londres, HMSO pp. 61-137, em Morris & Packer, (1987). Abdalla & Chen (1995) citaram o trabalho pp. 92; e 1<sup>st</sup> Report Batho, C. (1931), pp 61-137.
- Chan, S.L. & Chui, P.P.T. (2000), *Nonlinear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*, Elsevier, Oxford, Reino Unido.
- Chen, W.F., Goto, Y. & Liew, J.Y.R. (1996), *Stability design of semi-rigid frames*, John Willey and Sons, Nova Iorque.
- Chen, W.F. & Lui, E.M. (1991), *Stability design of steel frames*, CRC Press, New directions in Civil Engineering Séries, Purdue University, Boca Raton / Flórida.
- Cunningham, R. (1990), “Some aspects of semi-rigid connections in structural steelwork”, *The Structural Engineer*, Vol. 68, No. 5, pp. 85-92.
- DIN 1025-5 (1994), *Hot rolled I and H sections (IPE series) dimensions, mass and static parameters*, Deutsches Institut für Normung, Berlim.
- Eurocode 3 (1992) *Design of steel structures*, Part 1, European Committee for Standardization, ENV 1993 -1-1 E, Bruxelas.
- ECCS (1984), *Ultimate limit states calculations of sway frame with rigid joints*, Technical working group 8.2, Vol. 33, European Convention for Constructional Steelwork, pp. 20.
- Frye, M.J. & Morris, G.A. (1975), “Analysis of flexibly connected steel frames”, *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 2, No. 3, pp. 280-291. Disc: Nixon, D. & Adams, P.F. (1976), *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 3 No. 2, pp. 349-350; Picard, A., Giroux, Y.M. & Brun, P. (1976), pp. 350-352.
- Galambos, T.V. (1982), *Structural members and frames*, Dept. Civil Engineering, Un. Minnesota, Mineapolis.
- Galambos, T.V. & Ketter, R.L. (1959), “Columns under combined bending and thrust”, *ASCE J. Eng. Mechanics*, Vol. 85, No. 2, pp. 1-30.
- Hajjar, J.F. & outros (1997), *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for American steel design*, ASCE, Nova Iorque.
- Hellesland, J. & Bjorhovde, R. (1996a), “I: Restraint demand factors and effective lengths of braced columns”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 10, pp. 1216-1224.
- Hellesland, J. & Bjorhovde, R. (1996b), “II: Improved frame stability analysis with effective length”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 11, pp. 1275-1283.

Julian, O.G. & Lawrence, L.S. (1959), “Notes on J and L nomographs for determination of effective lengths”, Reportagem não publicada de propriedade de Jackson & Moreland Eng. Boston, Massachusetts.

Kishi, N. & Chen, W.F. (1987), “Moment-rotation relations of semi-rigid connections with angles”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 7, pp. 1813-1834.

Kottlyar, P.E.N. (1996), “Formulas for beams with semi-rigid connections”, *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 142-146.

Li, G.Q. & Li, J.J. (2007), *Advanced analysis and design*, John Wiley and Sons, Nova Iorque.

Liew, J.Y.R., Yu, C.H., Ng, Y.H. & Shanmugam, N.E. (1997), “Testing of semi-rigid unbraced frames for calibration of second-order inelastic analysis”, *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 41, No. 2/3, pp. 159-195.

Liew, J.Y. Richard, White, D.W. & Chen, W.F. (1993), “Second-order refined plastic-hinge analysis for frame design. Part I-II”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 119, No. 11, pp 3196-3237.

Lui, E.M. & Chen, W.F. (1986), “Analysis and behavior of flexibly-jointed frames”, *Engineering Structures*, Vol. 8, pp. 107-118.

Machado, F.C.S. (2005), “Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos”. Diss. de Mestrado, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto / MG.

Monforton, G.R. & Wu, T.S. (1963), “Matrix analysis of semi-rigidly connected steel frames”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 89, No. 6, pp. 13-42.

Rathbun, J.C. (1936), “Elastic properties of riveted connections”, *Transactions of ASCE*, Vol. 107, pp. 993-1019.

Richard, R.M. & Abbott, B.J. (1975), “Versatile elastic-plastic stress and strain formula”, *ASCE J. Mechanical Div.*, Vol. 101, No. 4, pp. 511-515.

Silva, A.D.R. (2009), “Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas”, Tese de Doutorado, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto / MG.

Yau, C.Y. & Chan, S.L. (1994), “Inelastic and stability analysis of flexibly connected steel frames by springs-in-series model”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 120, No. 10, pp. 2803-2819.

# 8

## ***ANÁLISE AVANÇADA*** **INCLUINDO A LIGAÇÃO**

### SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
8.1	Introdução	352
8.2	Portal de Chen & Zhou (1987) modificado .....	354
8.3	Estudo das condições de base na flambagem do portal	356
8.4	Imperfeição inicial combinada à flambagem do portal .....	362
8.5	Cargas verticais combinadas e geometria imperfeita	365
8.6	Carga horizontal combinada às verticais .....	370
8.7	Modificando a viga do portal	375
8.8	<i>Análise Avançada</i> do portal com ligação <i>midirrígida</i> .....	376
8.9	Efeito das ligações não lineares	381
8.10	Comentários finais .....	391
8.11	Referências	393

## 8.1 INTRODUÇÃO

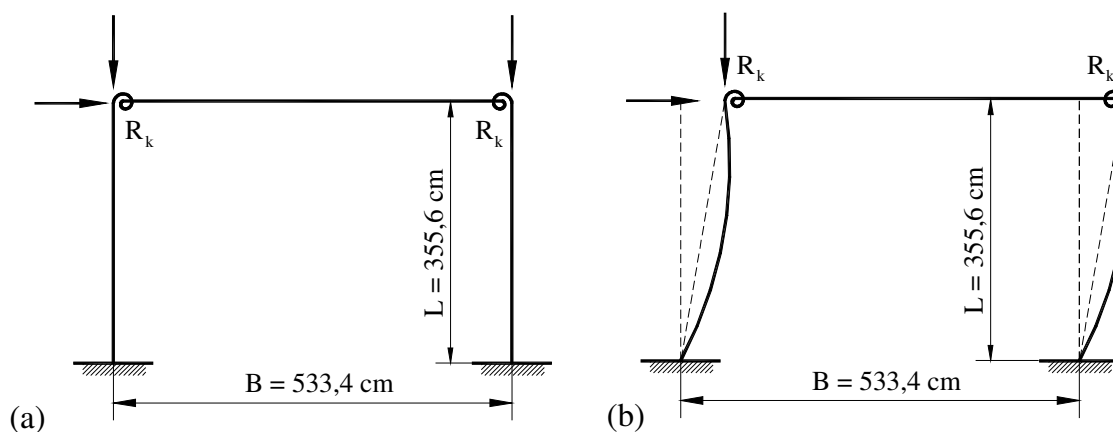
Finalmente atinge-se o objetivo maior com este trabalho, que é o emprego de todas as etapas já desenvolvidas para se realizar a *Análise Avançada* com a participação do EF com ligação (Alvarenga, 2008).

Neste capítulo, será estudada a influência da ligação nas imperfeições geométricas iniciais, procurando-se avaliar qual a participação das ligações na configuração da deformada próxima ao colapso (ponto de carga limite inelástico).

Neste estudo, emprega-se o mesmo portal proposto inicialmente por Chen & Zhou (1987) modificado pela retirada do apoio horizontal superior, adotado anteriormente (Alvarenga, 2005), cujo esquema é representado de forma simplificada na Fig. 8.1, porém agora incluindo a ligação. Na seção seguinte, faz-se a indicação completa dos dados desse problema, incluindo geometria, os *aspectos importantes* da *Análise Avançada* e os parâmetros das ligações empregados.

Dada a série de diferentes modelos e objetivos tratados, nas seções posteriores serão abordados os seguintes tópicos:

- estudo das condições de base na flambagem do portal;
- imperfeição inicial combinada com a flambagem do portal;
- cargas verticais combinadas e geometria imperfeita;
- carga horizontal combinada com as verticais;
- modificando a viga do portal;
- Análise Avançada* do portal com ligação *midirrígida*;
- efeito das ligações não lineares; e
- comentários finais.



**Figura 8.1** Portal de Chen & Zhou (1987) modificado (Alvarenga, 2005).

(a) geometria perfeita; (b) geometria com imperfeições.

O estudo das bases visa entender o efeito da presença da rótula no comportamento do portal e a sua relação com as imperfeições iniciais.

Na terceira seção, explora-se o efeito da curvatura inicial na carga de flambagem, introduzindo um conceito chamado *dissimilar*. No contexto deste trabalho, isso quer dizer tornar algo assimétrico, quebrar a simetria, sair de um estado estável de repartição de esforços baseado num comportamento simétrico.

Em seguida, estuda-se a influência de outros tipos de carga vertical com a introdução de cargas distribuídas na viga, que solicitam as ligações de forma diversa das cargas nas colunas, e por fim, introduz-se a carga horizontal.

Na quinta seção, modifica-se a viga do portal para avaliar o seu efeito na flambagem pura (somente carga P na coluna). Na seção posterior, faz-se o resumo da *Análise Avançada* com todas as cargas limite encontradas e as configurações correspondentes, para o portal com a ligação *midirrígida* ( $\eta = 0,25$ ). Aqui, define-se o conceito de configuração ou imperfeição geométrica inicial *limitadora*, que significa a configuração de imperfeições iniciais que leva ao menor fator de carga limite para um dado carregamento.

A ligação não linear é abordada na penúltima seção, na qual se propõe determinar os parâmetros da curva *RBL* da ligação de um perfil de altura maior, baseando-se nos dados conhecidos de outra para um perfil menor. Foram utilizadas as curvas do modelo *RBL* (C2 e C3) desenvolvidas para o portal de Chan & Chui (2000) na seção 7.5.

Nos comentários finais faz-se uma comparação entre os resultados aqui produzidos e os fornecidos por Chen & Zhou (1987), mostrando algumas diferenças que nascem do modelo e das considerações adotadas.

## 8.2 PORTAL DE CHEN & ZHOU (1987) MODIFICADO

O portal de Chen & Zhou (1987) foi estudado por diversos pesquisadores na condição de estrutura travada, ou seja, com um apoio lateral no topo da coluna (ponto D) e bases com engastes ou rótulas (Machado, 2005). Posteriormente, no intuito de desenvolver uma *Análise Avançada*, esse portal foi modificado, liberou-se o apoio horizontal do topo, mas se manteve as bases engastadas e, também, uniformizou-se a seção da viga pela da coluna (Alvarenga, 2005).

O portal agora estudado é representado na Fig. 8.2(a). A seção das suas colunas é do perfil 8 WF 31, empregado nesta tese. Já a viga poderá ter a seção original de Chan & Zhou (1987), que é 16 WF 50, tratado doravante por portal CZ, ou a mesma da coluna, como em Alvarenga (2005), que será indicado por AA. A seção original da viga (CZ) tem suas dimensões e propriedades geométricas listadas na Tab. 8.1 junto com a seção equivalente adotada nos modelos estruturais. Em ambos os casos, essas vigas possuem ligações nas suas extremidades de mesma curva  $M-\theta$  e características, sendo inicialmente avaliadas como lineares ( $R_k$  é constante ao longo da análise).

Na figura 8.2(a) estão representadas também: uma carga vertical distribuída na viga ( $q$ ), as duas cargas verticais ( $P$ ) e a horizontal ( $H$ ) no topo das colunas. A carga de esmagamento para a seção dessa coluna é  $N_y = 1472,5$  kN, com a tensão de escoamento dada. Chama-se ( $W$ ) a soma de todas as cargas verticais, fixada em aproximadamente  $2N_y$ . Assim, com  $W \approx 2 \times 1472,5 = 2945$  kN  $\rightarrow W = 3000$  kN, definem-se as cargas de referência:  $P_0 = W/2 = 1500$  kN e  $q_0 = W/B = 562,5$  kN/m. Já a carga horizontal  $H$  é associada ao esforço que provoca o clássico colapso por formação de mecanismo plástico de andar, com 4 rótulas plásticas (RP), pela relação:

$$H_y \cdot L = 4 M_p = 4 \times 124,5 = 498 \text{ kNm} \rightarrow H_y = 498 / 3,556 = 140 \text{ kN}$$

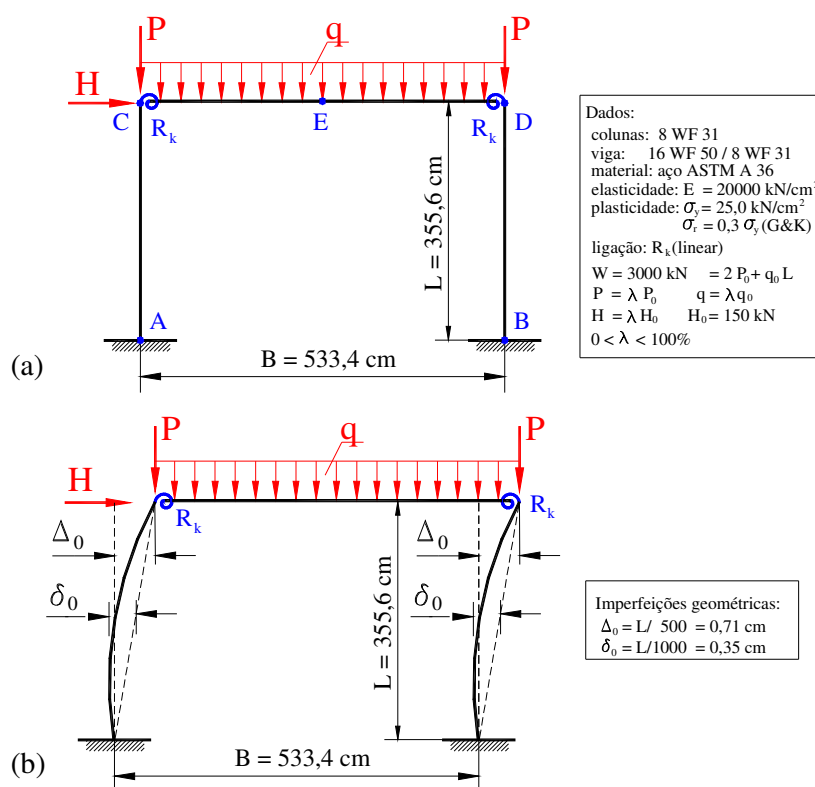
o qual foi arredondado para  $H_0 = 150$  kN, de forma que o fator de colapso produzido no processo computacional seja menor que 1.

O modelo estrutural adotado possui 24 EFs, sendo 8 por barra. O material é aço ASTM A 36, considerado elástico e perfeitamente plástico, incluindo as tensões residuais (TRs) do modelo G & K (Galambos & Ketter, 1959).

Com esses dados serão realizadas diversas *Análises Avançadas* incluindo o efeito das ligações nas extremidades da viga e as várias configurações geométricas imperfeitas iniciais. Como foi dito, o objetivo básico é validar o *Teorema da Configuração Inicial* (Alvarenga, 2005) e determinar se há alguma circunstância especial (ou exceção) em

que outro procedimento seja requerido. Além disso, desejando-se verificar a influência da ligação por meio do parâmetro  $\eta$  na resposta da estrutura, essa grandeza é variada de 0 (engaste) a 0,5 (rótula). Assim, as diversas situações de carregamentos, bem como de imperfeições geométricas combinadas (fora de prumo  $FP$  e curvatura inicial,  $CI$ ), ou seja, de configurações geométricas imperfeitas iniciais, serão estudadas incluindo as ligações.

Não se adotou o controle dos deslocamentos para esses problemas porque seria exigida, ainda assim, a solução com controle de cargas primeiro e a quantidade de análises a ser desenvolvida era elevada. Optou-se pelo método  $S$  para avaliar a rotação da ligação, porque ele mostrou-se o mais estável numericamente.



**Figura 8.2 Portal de Chen & Zhou (1987) e Alvarenga (2005):**  
 (a) geometria básica; (b) geometria com imperfeições.

**Tabela 8.1 Propriedades da seção da viga 16 WF 50.**

Referência	Dimensões da seção I [mm]				Área $A_g$ [cm <sup>2</sup> ]	Inércia $I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	Módulo resistente	
	altura d	largura b	aba t	alma a			elástico $W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	plástico $Z_z$ [cm <sup>3</sup> ]
16WF50	16,26 in	7,07 in	0,63 in	0,38 in	14,7 in <sup>2</sup>	659 in <sup>4</sup>	81,0 in <sup>3</sup>	92,0 in <sup>3</sup>
Convertido	413,0	179,58	16,002	9,652	94,838	27429,7	1327,4	1507,6
PT <sup>(1,2)</sup>	414,0	179,58	16,138	9,659	94,837	27430,0	1325,0	1505,0

Notas: 1) PT: na própria tese; 2) valores aproximados de forma a manter a área bruta  $A_g$  e a inércia  $I_z$ ;  
 3) para cálculo de  $R_{ki}$  considerou-se  $I_z = 25430 \text{ cm}^4$  ( $\approx 93\%$  do valor teórico).



### 8.3 EFEITO DAS CONDIÇÕES DE BASE NA FLAMBAGEM DO PORTAL

Uma das questões iniciais que se propõe é determinar qual será a carga limite das estruturas desse portal tipo *CZ* sujeito apenas à carga vertical  $P$  nas colunas, segundo as condições tradicionalmente adotadas:

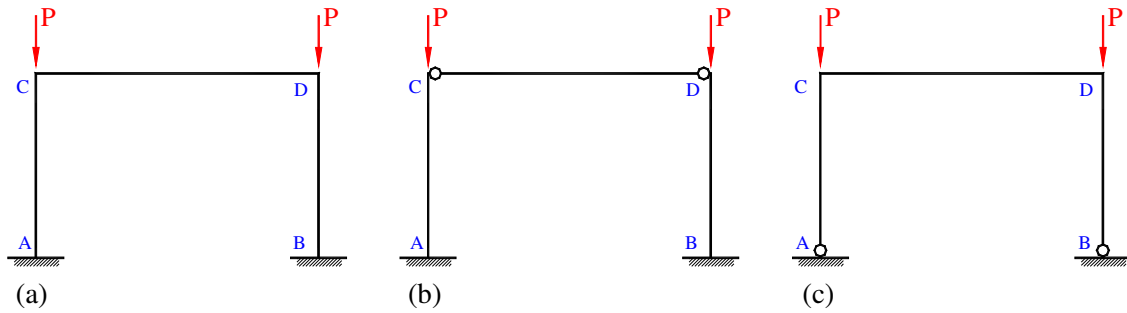
- a. base rígida e ligação rígida com a viga [Fig. 8.3(a)];
- b. base rígida e ligação com a viga em rótula [Fig. 8.3(b)]; e
- c. base em rótula e ligação rígida com a viga [Fig. 8.3(c)].

A primeira condição indicada na Fig. 8.3(a) reporta às conclusões da *Análise Avançada* do portal *AA* (com a viga da mesma seção da coluna), nas quais foram consideradas todas as imperfeições geométricas iniciais do portal. A figura 8.3(b) remete ao estudo da coluna isolada e à parte final de conclusões de Alvarenga (2005), já que a viga é apenas uma escora para compatibilizar deslocamentos das colunas. E, assim, a parte nova deste primeiro estudo se baseia nas análises de Chen & Zhou (1987) com relação à modificação da condição de base de rígido para rótula, na Fig.8.3(c), porém, sem o apoio horizontal superior adotado por esses pesquisadores.

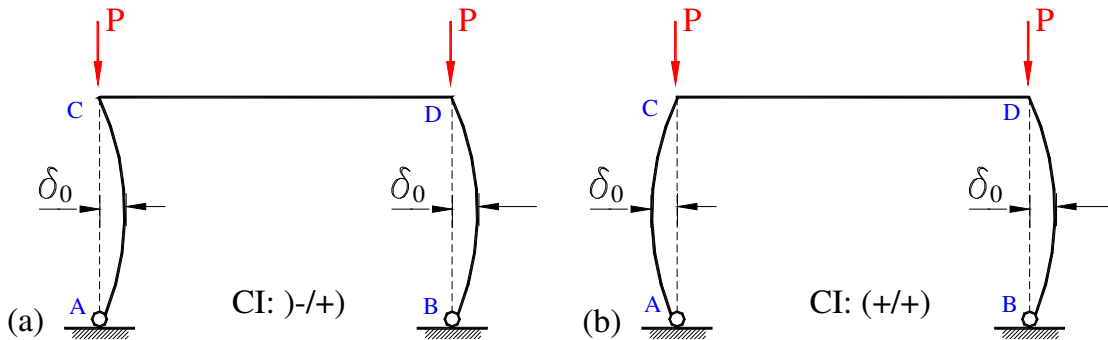
Para iniciar este estudo, é necessário conhecer o comportamento do portal na flambagem (carga  $P \leq P_0$ ) com a condição de curvatura inicial isolada (CI), mostrada na Fig. 8.4, para a estrutura com rótulas nas bases da Fig. 8.3(c). Só existem duas possibilidades de configurações geométricas diferentes para a CI: (a) assimétrica, ou (b) simétrica, como indicado nas Figs. 8.4(a-b), respectivamente. Girando 180° a primeira configuração, não a modifica; já o caso de CI (+/+ ) é similar ao da CI )-/(.

A condição CI )-/( ou (+/- ( ) é a governante como indicado na Tab. 8.2. Note-se que, mesmo sem imperfeição alguma, o topo da coluna do portal (ponto C = nó 9) se desloca de forma assimétrica para  $\Delta x_C = -1,845$  cm no colapso.

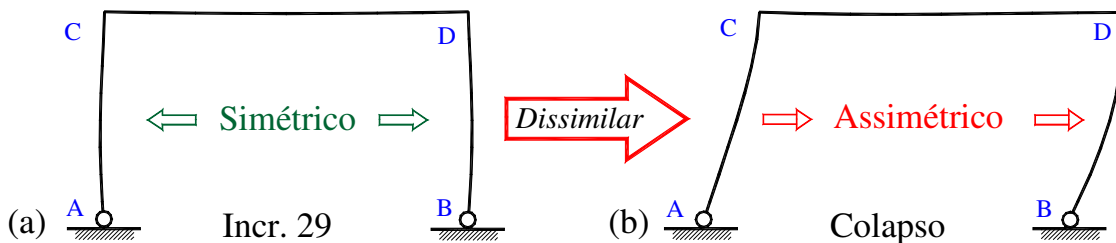
É necessário entender, porém, o que ocorre no caso da CI (+/+). Observe-se que os fatores de carga são maiores e que o deslocamento  $\Delta x_C$  se deu para a direita (questão numérica, poderia ser para a esquerda), com momentos menores que na CI )-/(. Esse fenômeno foi constatado antes por Chwalla (1938), conforme Lu (1963), sendo aqui chamado de comportamento *dissimilar* (“unwinding”; Galambos, 1982). Significa que, por não haver um travamento horizontal adequado, o portal passa do estado simétrico para o assimétrico, no qual pode absorver mais energia de deformação e resistir mais esforços.



**Figura 8.3 Portal de Chen & Zhou (1987) nos modelos tradicionais:**  
 (a) ligações rígidas; (b) viga com rótulas; (c) bases com rótulas.



**Figura 8.4 Portal com rótulas nas bases e curvatura inicial (CI).**  
 (a) forma assimétrica; (b) forma simétrica;



**Figura 8.5 Comportamento *dissimilar* do portal:**  
 (a) último passo simétrico; (b) colapso com deformada assimétrica.

Nota: 1) fator de escala dos deslocamentos: FE = 100.

**Tabela 8.2 Efeito da CI na flambagem do portal com rótulas nas bases.**

CI	Fator carga [%]		$\Delta x_C$ [cm] <sup>(1)</sup>	Esf. axiais [kN] <sup>(2)</sup>		Momentos [kNcm] <sup>(3)</sup>	
	$\lambda_v$	$\lambda_c$		$N_A$	$N_B$	$M_C$	$M_D$
-/+)	65,3	75,1	-1,348	1132	1121	1500	1537
(+/+)	68,7	83,2	0,218	1247	1249	653	145
sem	71,2	83,7	-0,222	1257	1255	269	-281

Notas: 1) estado pré-colapso; 2) cargas nas bases; 3) nos extremos da viga.

Esse comportamento é elucidado na Fig. 8.5, em que há simetria até o incremento 29 ( $\lambda = 86\%$ ), a partir do qual ocorre o salto assimétrico.

No caso da solução computacional, isso provém de pequenas diferenças numéricas, que quebram a simetria (aqui para a direita, +). Na estrutura real, pequenas diferenças entre os perfis, materiais, etc., levam ao comportamento *dissimilar*, que direciona a flambagem.

Portanto, o fator de carga da consideração assimétrica é menor e mais limitador que o fator obtido para a simétrica. Deve-se lembrar que nas configurações simétricas o efeito de uma curvatura numa coluna é compensado pela curvatura oposta da outra. Consta-se que o fenômeno *dissimilar* ocorre no pórtico sem imperfeições também.

Retornando ao problema dos três portais da Fig. 8.3, a *Análise Avançada* requer que se defina previamente qual é a configuração geométrica imperfeita *limitadora* para que se determine a carga limite mínima, que é a de dimensionamento.

Ao avaliar a configuração geométrica imperfeita inicial, retorna-se ao trabalho anterior (Alvarenga, 2005), com o portal AA da Fig. 8.3(a), no qual foram analisados 24 casos de combinações possíveis de FP e CI (isto é: 4 FPs isolados, 4 CIs isolados e 16 FPs + CIs combinados). Entretanto, o bom senso da engenharia pode auxiliar e reduzir um pouco essa tarefa, considerando que:

- a. o FP simétrico é estabilizante e aumenta a carga limite, portanto 10 casos não seriam analisados (2 de FPs simétricos isolados, e 8 das combinadas com CIs). Foi comprovado que, mesmo combinados a outras imperfeições assimétricas (CIs), os FPs simétricos permanecem, sendo menos críticos (Alvarenga, 2005);
- b. o FP assimétrico contrário ao esforço horizontal H é uma combinação benéfica, que majora a carga limite, o que eliminaria 5 casos de carga limite máxima; e
- c. devido ao comportamento *dissimilar*, a carga limite com CIs simétricas também é maior, o que exclui outras 2 CIs isoladas.

Deduz-se, então, que os casos de *configurações assimétricas* (com FP) *tendem a comandar o projeto* (dimensionamento). Essas quatro configurações com geometrias imperfeitas são apresentadas de forma esquemática na Fig. 8.6 sem as ligações.

Para demonstrar a conclusão anterior, agora relativa às CIs simétricas que não são limitadoras, mesmo na presença de FP assimétrico, faz-se a análise apenas com a carga vertical P ( $H = 0$ ) no topo das colunas do portal CZ e consideram-se os três tipos de portais da Fig. 8.3: (a) com ligações rígidas na base e na viga; (b) com rótulas nos extremos da viga; e, (c) com rótulas só nas bases, montando-se a Tab. 8.3.

A primeira observação desta Tab. 8.3 é que as CIs simétricas, correspondentes às Figs. 8.6(a-b), não são limitadoras, em nenhuma dessas análises, para os três portais.

Iniciando-se pela análise do portal da Fig. 8.3(b), no qual a viga possui rótulas nos extremos, têm-se de fato duas colunas isoladas, do tipo engaste na base e livre no topo, com uma viga que constitui apenas uma escora, homogeneizando os deslocamentos das extremidades. Por isso, os deslocamentos  $\Delta x_C$  são mais de 3 vezes maiores que os da Fig. 8.3(a) ( $1,925/0,56 = 3,43$ ). E o comportamento segue o descrito pela *Análise Avançada* da coluna engastada e livre, na qual o caso (d) FP+CI (+/-) governa o dimensionamento (Alvarenga, 2005). Pode-se verificar na Fig. 8.7(b) que a deformada da estrutura sem imperfeição identifica-se com a geometria imperfeita limitadora.

Já no caso do portal da Fig. 8.3(c), em que as rótulas estão nas bases e a viga é responsável pela rigidez da estrutura, o comportamento leva a um deslocamento como se fosse o de um andar, situação na qual a imperfeição do caso (c) com FP+CI (-/+) é a mais limitadora, o que se confirma novamente pela deformada obtida sem imperfeição da Fig. 8.7(c). Se a viga for bastante rígida (como neste exemplo), a influência da curvatura da coluna é menor, e as cargas limite de projeto desses dois portais (b-c) tornam-se bem próximas ( $\lambda_c = 69,3 \approx 67,8\%$ , sendo a diferença apenas 2,1%).

Agora, avalia-se o comportamento do portal sem rótulas da Fig. 8.3(a). Não se repete a situação do portal AA em que a imperfeição com FP+CI (-/+) foi a mais limitadora (Alvarenga, 2005). Para entender isso, deve-se avaliar a rigidez da viga.

A rigidez nodal é dada por:

$$G = \frac{(I_v/B)}{(I_c/L)} = \frac{I_v L}{I_c B} \quad (8.1)$$

sendo  $I_c$  e  $I_v$  a inércia da coluna e viga do nó.

O portal AA possuía seção igual para colunas e viga (inércias iguais,  $I_c = I_v$ ), com o que a rigidez nodal é  $G = L/B = 355,6/533,4 = 2/3 (< 1)$ , ou seja, a viga é mais flexível que a coluna, admitindo maior giro para compatibilidade. Assim, a base absorve mais plasticidade que o topo das colunas, a tendência é que se formem ZPs nas bases e o andar se mova, como se essas bases fossem rótulas, similarmente ao que se encontrou para o portal da Fig. 8.3(c). Logo, as imperfeições geométricas limitadoras daquele problema acompanharam essa tendência, demonstrada pela sua deformada inelástica, que se imita com o caso (c) FP+CI (-/+).

Já no portal CZ, a relação de rigidez da viga é  $I_v/B = 51,4$ ; enquanto a da coluna é a mesma  $I_c/L = 12,86$ ; então a rigidez nodal será  $G = 51,4/12,86 \approx 4$ , significando que a viga tende a girar menos em relação à coluna. Repare-se que os deslocamentos  $\Delta x_C$  resultantes da configuração FP+CI  $\left. \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right\}$  são superiores aos da condição FP+CI  $\left. \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$ . A quantidade de fatias plásticas da última (5637), porém, supera a primeira (5159). Isso tem a seguinte explicação: de fato, a imperfeição FP+CI  $\left. \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right\}$  só favorece o colapso quando a rigidez relativa da viga é menor que a da coluna, permitindo maior sensibilidade do portal à direção da flambagem da coluna (condição elástica). Mas, se a viga é relativamente mais rígida, gera-se a plasticidade no topo das colunas, de tal forma que essas regiões se comportarão como se fossem rótulas (RP) e se comportarão da mesma forma que o portal da Fig. 8.3(b), para o qual a configuração limitadora é a da imperfeição FP+CI  $\left. \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$ . Conclui-se que a plasticidade altera o modo de flambagem.

Na figura 8.7, mostra-se a deformada inelástica dos portais das Figs. 8.3(a-c) na condição sem imperfeição geométrica e apenas com a carga P aplicada.

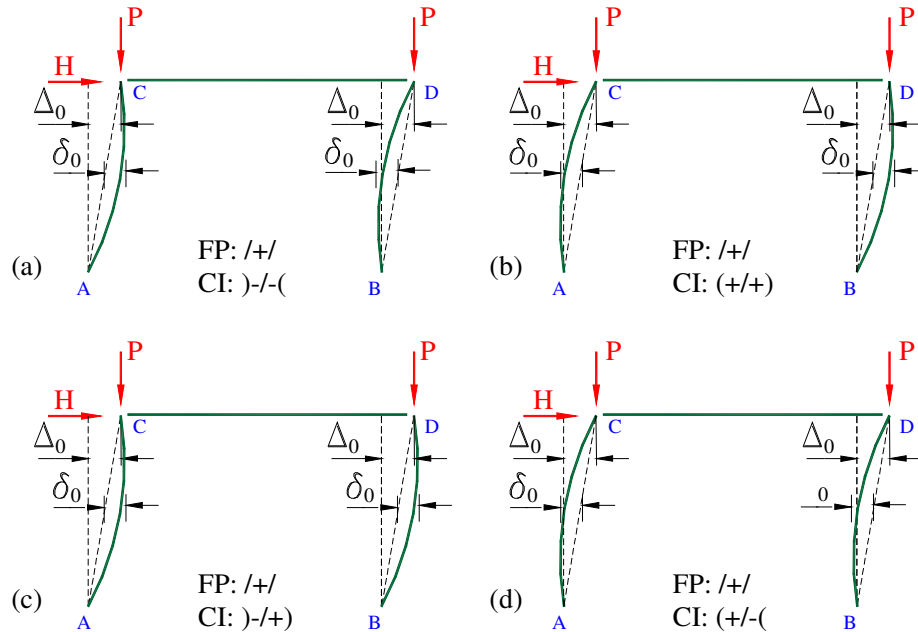
Os deslocamentos foram majorados pelo fator de escala 50 vezes, de forma a destacar melhor a deformada. Identifica-se rapidamente, nos portais das Figs. 8.7(b-c), a disposição das deformadas com a configuração geométrica imperfeita correspondente da Fig. 8.6 [representadas em tamanho menor, dentro das Figs. 8.7(a-c)].

No caso do portal engastado da Fig. 8.7(a), as deflexões com a geometria perfeita são muito pequenas (—); mesmo empregando o fator de escala FE = 100, não se constata nada. Por isso aplicou-se o fora de prumo L/500, cuja deformada [marcada em tracejado (- -) na mesma Fig. 8.7(a)], consegue comprovar que, diferentemente do portal AA, esse portal CZ tem agora a imperfeição FP+CI  $\left. \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$  como a limitadora.

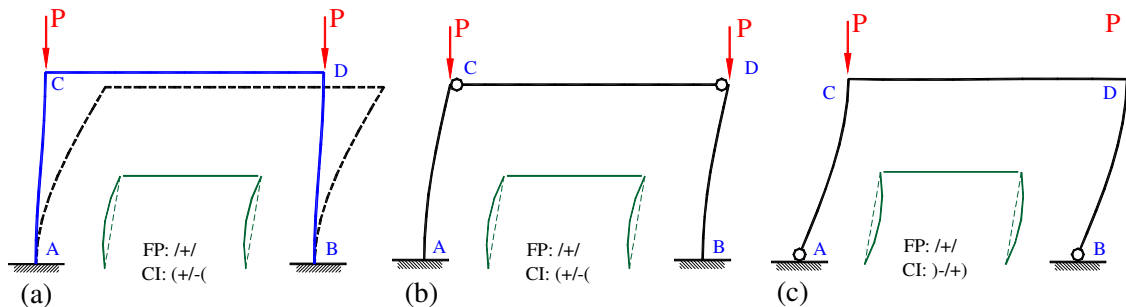
Na figura 8.7, demonstra-se que, em certos casos, a deformada inelástica da estrutura sem imperfeições iniciais é um caminho muito simples para determinar quais são as imperfeições geométricas que são limitadoras (teorema). Todavia, no caso do portal sem rótulas da Fig. 8.3(a), isso não ficou tão evidente, o que justificou a introdução do fora de prumo. Quando há carga horizontal na hipótese, entretanto, isso se tornará desnecessário.

A deformada sem imperfeição geométrica do portal da Fig. 8.7(c) foi representada girada 180° em relação aos resultados computacionais, pois como foi dito, quando existe apenas carga vertical, o comportamento *dissimilar* pode acontecer em qualquer direção (ou seja, sinal: + ou -).

Isso corresponderia à configuração inicial limitadora girada de 180 graus também. Assim, no cálculo computacional, a direção do FP foi (-), enquanto na figura (apenas por clareza) mostrou-se o FP (+), que foi o escolhido para as demais análises.



**Figura 8.6** Configurações com imperfeições geométricas do portal sem ligações: (a) FP+CI )-/(; (b) (+/+); (c) FP+CI )-/+; (d) FP+CI (+/-).



**Figura 8.7** Deformadas inelásticas na flambagem sem imperfeição geométrica (FE=50): (a) portal todo engastado s/ FP (—, FE=100), c/ FP (- -); (b) viga com rótulas; (c) bases com rótulas; (d) configuração imperfeita limitadora associada.

**Tabela 8.3** Efeito da FP+CI na flambagem do portal nos modelos tradicionais.

Ligações		Fig. 8.3	(a) FP+CI )-/(		(b) FP+CI (+/+)		(c) FP+CI )-/+		(d) FP+CI (+/-)	
Base A-B	Viga C-D		$\Delta x_C$ [cm]	$\lambda_c$ [%]	$\Delta x_C$ [cm]	$\lambda_c$ [%]	$\Delta x_C$ [cm]	$\lambda_c$ [%]	$\Delta x_C$ [cm]	$\lambda_c$ [%]
engaste	engaste	(a)	0,593	89,5	0,601	89,5	0,596	89,6	0,560	• 89,4
engaste	rótula	(b)	1,531	72,2	1,531	72,2	1,131	76,2	1,925	• 69,3
rótula	engaste	(c)	1,814	70,7	1,903	70,6	2,179	• 67,8	1,324	74,3

Notas: 1) fator de carga  $\lambda_c$  e deslocamentos  $\Delta x_C$  no pré-colapso; 2) caso que **governa** (•).

#### 8.4 IMPERFEIÇÃO INICIAL COMBINADA À FLAMBAGEM DO PORTAL

Agora, avalia-se o que acontece aos portais do tipo mostrado na Fig. 8.2(b), que possui bases engastadas e viga com ligações de curva  $M-\theta$  linear. Apenas as cargas verticais  $P$  estão atuando ( $q = H = 0$ ) e se emprega o coeficiente de giro próprio da ligação  $\eta$  como parâmetro para construir a Tab. 8.4. A rigidez da ligação, que não se altera durante cada uma dessas análises, é determinada pela expressão:

$$R_k = \frac{(2-4\eta) EI_z}{\eta L} \approx \frac{9535}{g} \text{ kNm/rad} \quad (8.2)$$

Sobre essa tabela 8.4, são feitas as seguintes observações:

- quando a *semiflexibilidade* é  $\eta \leq 0,3$  a carga de colapso praticamente não se modifica, indicando o comportamento de ligação rígida (ou seja, para  $\eta = 0,1$  a  $0,2$  se encontra  $\lambda = 89,4 \approx 89,3$ ) com a mesma resposta da estrutura;
- para o mesmo coeficiente  $\eta$  de ligação rígida ( $\eta \leq 0,3$ ), a carga de colapso não depende da forma da imperfeição FP+CI (por exemplo, com  $\eta = 0,1$  se encontra  $\lambda = 89,4$  para as 4 geometrias imperfeitas). Ocorre uma exceção para  $\eta = 0,2$  e FP+CI  $\int\text{-}\int$  (indicado “►”), que se explica por problemas numéricos; e
- para ligações flexíveis ( $\eta > 0,3$ ), a configuração *limitadora* é a da imperfeição FP+CI  $\int\text{-}\int$ , que foi determinada na seção anterior.

As trajetórias de equilíbrio com a imperfeição FP+CI  $\int\text{-}\int$  são vistas na Fig. 8.8, dentre outras que poderiam ser selecionadas, e nela verifica-se praticamente o mesmo caminho (tendência) para ligações com  $\eta \leq 0,3$ . Attingir o mesmo fator de carga limite ( $\lambda_c \approx 89,3\%$ ) por diversas ligações pode ser explicado pelo fato da ligação ser rígida, não ter solicitado a viga e, dessa forma, absorver o efeito da CI da coluna.

Uma parcela das rotações é absorvida pelas folgas de giro da ligação e a outra parcela, de momentos, pelas ligações que se comportam de forma rígida (admitem expressivos momentos) e as bases engastadas (absorvem qualquer momento).

As ligações flexíveis ( $\eta \geq 0,4$ ) não suportam momentos de travamento maiores, o efeito da CI aparece e a imperfeição FP+CI  $\int\text{-}\int$  é *limitadora* (indicado “•” na Tab. 8.4), pois acompanha o comportamento do portal da Fig. 8.3(b) com rótulas na viga. Entretanto, as ligações rígidas ( $\eta \leq 0,3$ ) que possuem a mesma carga limite, apresentam diferentes trajetórias de equilíbrio para o FP com as diferentes CIs, como elucidado na

Fig. 8.9, em que se empregou a ligação *midirrigida*  $\eta = 0,25$ .

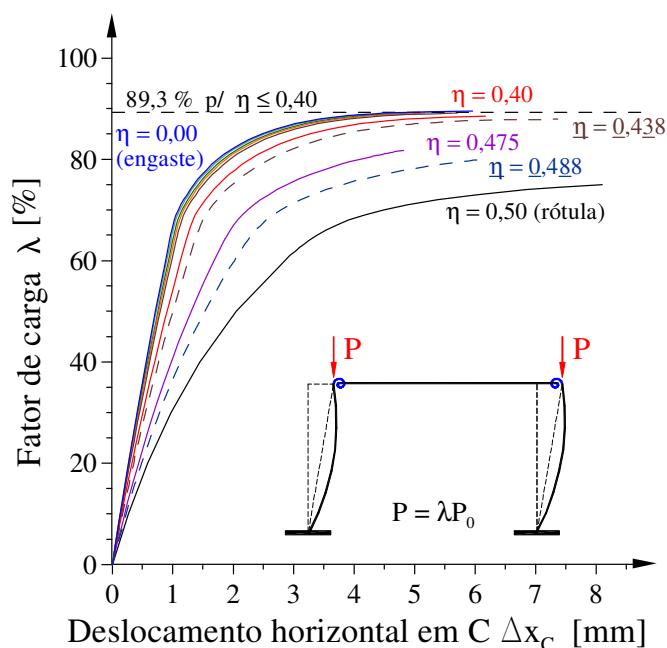
As CIs simétricas possuem quase a mesma trajetória, como esperado. Os casos de CI simétrica, Figs. 8.6(a-b), que levaram a cargas de colapso maiores nas estruturas com ligações engastadas, não têm o mesmo efeito para as ligações rígidas, embora, em geral, permaneçam não limitadoras para as outras *semiflexibilidades*  $\eta$ ; ou seja, há uma tendência de que apenas duas configurações, as assimétricas, representadas nas Figs. 8.6(c-d) comandem o dimensionamento desse portal com carregamentos simétricos.

Para cargas verticais P nas colunas apenas, a CI (+/-) apresenta deslocamentos  $\Delta x_C$  maiores para o mesmo fator de carga (ver ponto G da Fig. 8.9) e atinge mais rapidamente a carga limite. Pelo maior risco (efeito  $P\Delta$  pior), essa CI é a que governa quando todas têm a mesma carga limite.

**Tabela 8.4 Efeito do FP+CI na flambagem do portal com ligações.**

Ligações			(a) FP+CI (-/+)		(b) FP+CI (-/-)		(c) FP+CI (+/+)		(d) FP+CI (+/-)	
Parâmetros <sup>(2)</sup>		$R_k$	$\Delta x_C$	$\lambda_c$	$\Delta x_C$	$\lambda_c$	$\Delta x_C$	$\lambda_c$	$\Delta x_C$	$\lambda_c$
$\eta$	g	[kNm/rad]	[cm]	[%]	[cm]	[%]	[cm]	[%]	[cm]	[%]
0,000	0,000	$\infty$	0,596	89,6	0,593	89,6	0,601	89,6	0,560	89,5
0,100	0,063	152561	0,561	89,4	0,574	89,4	0,581	89,4	0,605	89,4
0,200	0,166	57210	0,564	89,3	0,619	89,5	0,601	89,3	0,629	89,3
0,250	0,250	38140	0,555	89,2	0,598	89,2	0,608	89,2	0,637	89,2
0,300	0,375	25427	0,571	89,1	0,636	89,1	0,648	89,1	0,682	89,1
0,400	1,000	9535	0,617	88,5	0,758	88,4	0,789	88,4	0,840	88,4
0,475	4,750	2007	0,478	81,7	0,768	80,6	0,766	80,6	0,996	79,4
0,500	$\infty$	0	1,131	76,2	1,531	72,2	1,531	72,2	1,925	69,3

Notas: 1) fatores de carga  $\lambda_c$  e deslocamentos  $\Delta x_C$  no pré-colapso; 2) ligações rígidas  $\eta \leq 0,3$  (●).



**Figura 8.8 Trajetórias de equilíbrio do portal com FP+CI (-/+).**



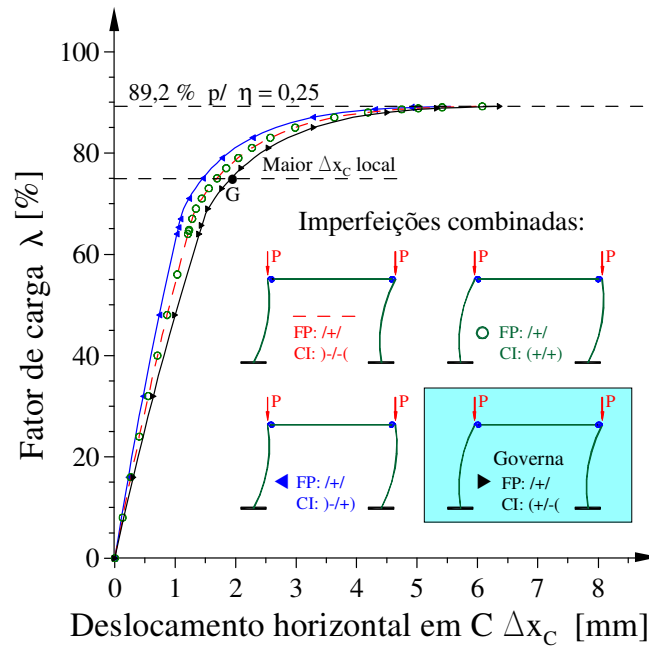


Figura 8.9 Trajetórias do portal da Fig. 8.2(b) FP com diferentes CIs.

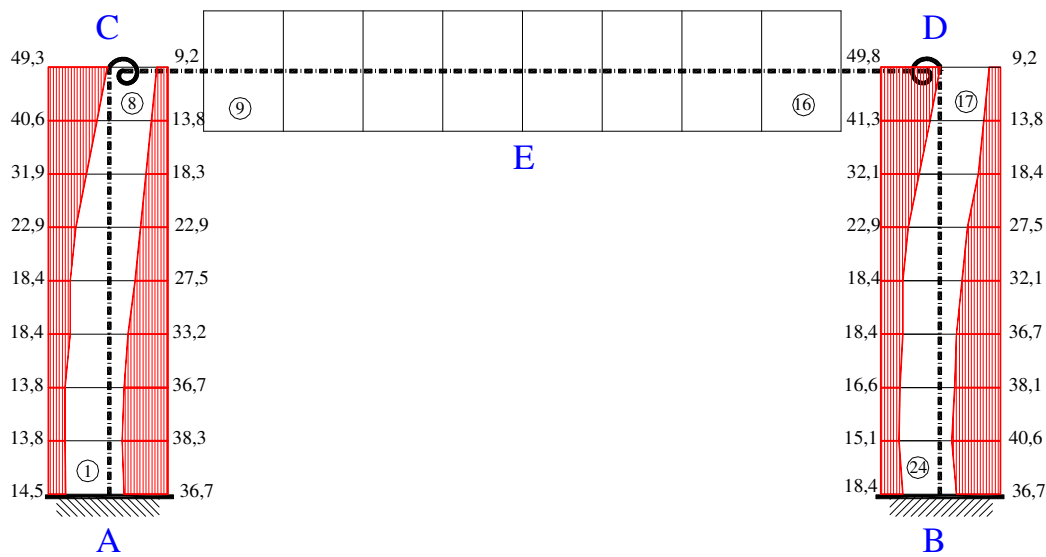


Figura 8.10 Zonas plásticas na flambagem do portal com carga P.  
Convenção: (||) compressão, FP+CI /+/-.

Por outro lado, para as ligações flexíveis, essa forma de CI fornece o menor fator de carga, tornando-se a principal para o dimensionamento (e por isso, *limitadora*).

Na figura 8.10, mostra-se um diagrama típico de zonas plásticas no pré-colapso, para as condições de cargas desta seção. A viga com ligação *midirrígida* ( $\eta = 0,25$ ) está elástica enquanto cada coluna possui 2 ZPs de compressão ao longo de toda a altura. Esse comportamento repete-se para qualquer das CIs adotadas. Quando  $\eta$  cresce, a única modificação é uma pequena redução na quantidade de fatias plásticas.

## 8.5 CARGAS VERTICAIS COMBINADAS E GEOMETRIA IMPERFEITA

Constatou-se que a carga limite fica homogênea para diversas condições na seção anterior, também, porque as ligações não foram solicitadas pela viga. Assim, introduz-se nesta seção a carga vertical distribuída ( $q$ ) na viga. Todavia, ao tomar-se apenas ( $q$ ) atuando ( $P = H = 0$ ), com qualquer tipo de ligação ( $0 \leq \eta \leq 0,5$ ), ocorrerá o colapso por formação de mecanismo plástico de viga. Se a união é flexível ( $\eta \geq 0,4$ ), tem-se 1 ZP central ( $\lambda_c = 37,5\%$ ,  $q_{Lim} = 105,8$  kN/m). Quando a ligação for engaste ou rígida (*semiflexibilidade*  $\eta \leq 0,25$ ), aparecerão 3 ZPs. Assim, surgirá uma ZP adicional em cada extremo da viga ( $\lambda_c = 65,8\%$   $q_{Lim} = 185,1$  kN/m). No problema CZ, a viga é mais rígida que a coluna, então as ZPs serão formadas no topo das colunas ( $\lambda_c = 50,1\%$   $q_{Lim} = 141$  kN/m). Portanto, a carga distribuída atuando sozinha não solicita o portal quanto à sua estabilidade. Essa hipótese equivale a dimensionar a viga à flexão apenas, como se fez antes na seção 7.2.

Assim, a combinação de cargas verticais ( $P$  e  $q$ ), com  $q_0 = W/B$ ,  $P_0 = W/2$  e  $W = 3000$  kN, é abordada nesta seção, considerando os seguintes casos:

- $(q_0/2)$ :  $q \leq 50\% q_0$ ,  $P \leq 50\% P_0$  ( $q = 281,2$  kN/m,  $P = 750$  kN); e
- $(q_0/4)$ :  $q \leq 25\% q_0$ ,  $P \leq 75\% P_0$  ( $q = 140,6$  kN/m,  $P = 1125$  kN).

### 8.5.1 COMBINAÇÃO INCLUINDO A CARGA DISTRIBUÍDA ( $q_0/2$ )

Estuda-se a combinação incluindo metade da carga vertical ( $P_0+q_0$ ), considerando: a forma simétrica da CI da Fig. 8.6(b) ou a assimétrica da Fig. 8.6(d), combinadas ou não com o FP. Em todas essas combinações, a carga limite mantém-se a mesma ( $\lambda_c = 44,9\%$ ,  $q_c = 126,3$  kN/m) para ligações rígidas ( $\eta \leq 0,4$ ) e apresenta uma pequena diferença para as flexíveis ( $\lambda_c = 37,6\%$ ,  $q_c = 105,7$  kN/m). As imperfeições não parecem ter maior influência nesse problema, pois a carga na viga é muito elevada, provocando seu colapso, antes que se manifeste qualquer instabilidade. Isso já justifica a não inclusão do estudo do efeito de  $q_0$  isolado.

A diferença entre os fatores de colapso teórico e encontrado ( $52,1 - 44,9 = 5,2\%$ ), no caso da ligação rígida, está associada aos efeitos:  $P\Delta_0$  (FP) e  $P\delta_0$  (CI); enquanto na flexível, tem-se apenas o colapso à flexão da viga ( $37,6 \approx 37,5\%$ ) com 1 ZP central.

Na figura 8.11 apresentam-se as trajetórias de equilíbrio do ponto C (nó 9). Esse ponto foi selecionado para todas as demais análises adiante, porque possui o maior deslocamento horizontal.

Nessa figura, constata-se o término prematuro para as ligações mais flexíveis (como na rótula, a curva ainda está ascendendo) indicando o mecanismo de colapso de viga (barra) e não propriamente do portal (global). Além disso, não há qualquer plasticidade nas colunas quando  $\eta \geq 0,438$ .

### 8.5.2 COMBINAÇÃO INCLUINDO A CARGA DISTRIBUÍDA ( $q_0/4$ )

Nesse problema, a carga distribuída solicita menos à viga, pois é metade da aplicada no caso anterior. Partindo da consideração apenas da CI simétrica da Fig. 8.4(a) e assimétrica da Fig. 8.4(b), sem incluir o FP, verifica-se a presença do comportamento *dissimilar* para todas as *semiflexibilidades*  $\eta$ . O fator de carga limite não se modifica ( $\lambda_c = 79,3\%$ ), exceto quando  $0,4 \leq \eta \leq 0,5$ ; em que varia de 79% a 74,7%. Deve-se comentar que surge tanto o salto *dissimilar* para a esquerda (x-) quanto para a direita (x+), visto que sua origem está em pequenas diferenças dos processos numéricos.

Adotando a ligação *midirrígida* ( $\eta = 0,25$ ) para esse carregamento, constrói-se a Tab. 8.5, na qual se constata que as CIs com a forma  $-/+$  ou  $+/-$  continuam limitadoras, mesmo fazendo de rótulas as bases do portal. Pode-se concluir que o fenômeno *dissimilar* não se modifica pela presença da ligação quando esta é rígida.

O caso das bases com rótulas e apenas CI corresponde aos ensaios experimentais de Lu (1963). Nesta tese, acha-se o colapso com carga ( $\lambda_c = 58,7\%$ ,  $q = 165,1$  kN/m) bem inferior à condição simétrica ( $\lambda_c = 62,6\%$ ,  $q = 176,1$  kN/m; que é 6,6% maior).

A razão da repetição dessas variações, modificando apenas as ligações e carregamentos, é propor que a imperfeição de forma simétrica da Fig. 8.6(b) (Chen & Zhou, 1987) seja colocada em segundo plano, pois, quando houver uma movimentação lateral qualquer, uma das configurações imperfeitas [das Figs. 8.6(c-d)] governará, já que exige menor energia de deformação. Em cada caso, deve-se definir qual será o sinal da curvatura CI empregada:  $+/-$  (ou  $-/+$ ).

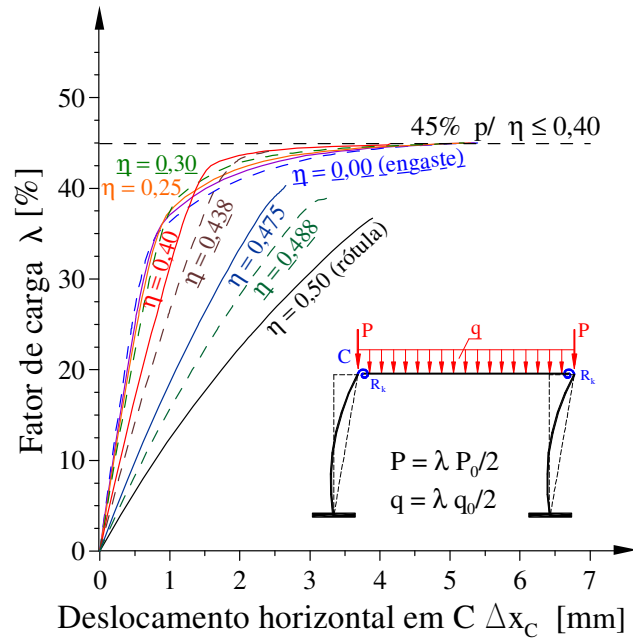
A tabela 8.6 apresenta os esforços com os deslocamentos da situação pré-colapso (a última que convergiu), bem como os fatores de carga de escoamento e de colapso para a condição limitadora  $+/-$ . O intervalo dos fatores de carga de colapso encontrados é  $70,1 \leq \lambda_c \leq 71,1\%$ , embora, também se tenha atingido outros fatores (marcados com “•”: 73,5 a 77,3%) com as *semiflexibilidades*  $\eta = \{0,1/0,4/0,475\}$ .

Essas respostas podem ser entendidas ao acompanhar-se a Fig. 8.13, na qual são indicadas as deformadas dos portais, no estado pré-colapso, obtidas para as ligações com a.  $\eta = 0,1$  ( $\lambda_c = 73,8\%$ ); e, b.  $\eta = 0,2$  ( $\lambda_c = 70,8\%$ ), respectivamente.

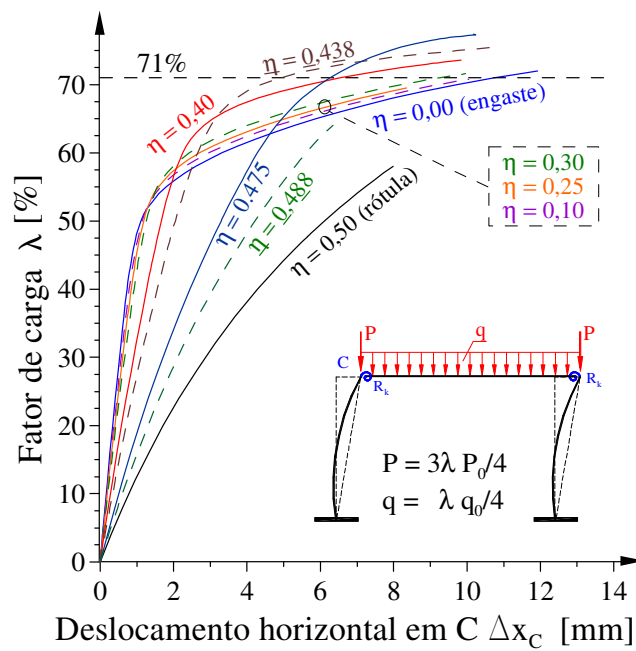
**Tabela 8.5 Efeito da CI no portal com carga ( $q_0/4$ ).**

Ligações		(a) CI -/-(		(b) CI (+/+)		(c) CI -/+)		(d) CI (+/-)	
Base	Viga	$\Delta x_C$	$\lambda_c$	$\Delta x_C$	$\lambda_c$	$\Delta x_C$	$\lambda_c$	$\Delta x_C$	$\lambda_c$
A-B	C-D	[cm]	[%]	[cm]	[%]	[cm]	[%]	[cm]	[%]
rótula	ligação	+0,724	62,6	+0,821	63,6	+1,550	58,7	-1,550	58,7
engaste	$\eta = 0,25$	+0,346	80,1	-0,733	79,3	-1,025	76,8	+1,025	76,8

Nota: 1) fatores de carga  $\lambda_c$  e deslocamentos  $\Delta x_C$  no pré-colapso.



**Figura 8.11** Trajetória do portal da Fig. 8.2(b) com carga ( $q_0/2$ ).



**Figura 8.12** Portal da Fig. 8.2(b) com carga ( $q_0/4$ ).

**Tabela 8.6 Efeito das cargas verticais: 75% P<sub>0</sub> e 25% q<sub>0</sub>.**

Ligações		Fator de carga		Ligações: momentos e rotações			Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]		
Parâmetros		[%]		[kNcm]		[mrad]					
$\eta$	$g$	$\lambda_y$	$\lambda_c$	$M_C$	$-M_D$	$\theta_C$	$-\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
0,016	0,008	35,4	70,6	3220	3977	0,003	0,004	1056	1059	-506	3460
0,100	0,063	36,1	73,8	2402	3510	0,157	0,230	1105	1109	388	3285
0,200	0,166	37,2	70,8	3144	3929	0,550	0,687	1061	1064	-534	3375
0,250	0,250	38,1	71,1	3096	3899	0,812	1,022	1064	1067	-536	3331
0,300	0,375	39,3	71,6	2966	3811	1,166	1,499	1072	1076	-464	3266
0,400	1,000	44,1	73,5	2531	3528	2,654	3,700	1101	1104	-310	2994
0,475	4,750	50,6	77,3	1375	2710	6,876	13,54	1157	1162	285	2371
0,499	124,8	48,1	70,1	22	158	2,852	11,57	1051	1052	2789	2849

Ligações		Deslocamentos		Momentos	Fatias plásticas
Parâmetros		$\Delta x_C$	$-\Delta y_E$	[kNcm]	
$\eta$	$g$	[cm]	[cm]	$M_E$	[ ]
0,016	0,008	1,131	2,020	31681	3499
0,100	0,063	1,499	2,239	33970	4562
0,200	0,166	1,080	2,037	31893	3509
0,250	0,250	1,060	2,048	32032	3660
0,300	0,375	1,062	2,082	32440	3871
0,400	1,000	1,010	2,209	33748	4588
0,475	4,750	1,023	2,795	36630	5825
0,499	124,8	2,043	2,366	34964	4699

Notas: 1) resultados no estado pré-colapso; 2) ligações rígidas  $\eta \leq 0,25$  (●).

Nessa figura 8.13 estão representadas, também, as duas tendências opostas que geram o ponto estacionário (sem convergência) ou de bifurcação, isto é:

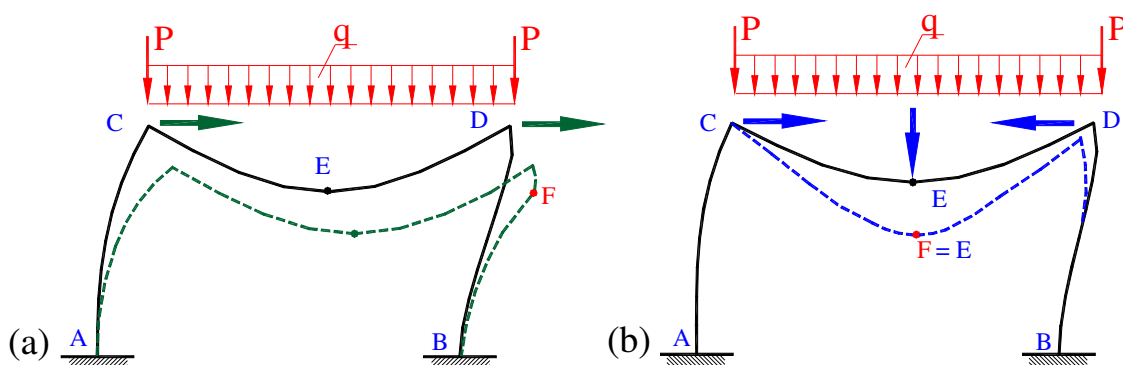
- as colunas perdem a estabilidade, levando ao aumento da deformação horizontal para a direita, com o colapso da parte superior da coluna B-D abaixo do topo (ponto F, nó 18), [essa tendência está na Fig. 8.13(a)]; e
- dada a elevada plasticidade, a viga passa a se comportar como um tirante (catenária, tende ao colapso do ponto F=E), o que puxa as colunas consigo para dentro do espaço da estrutura [essa tendência é mostrada na Fig. 8.13(b)].

Algumas vezes, a primeira tendência predomina e se vai um pouco mais longe, o que justifica o fato de os fatores de carga serem um pouco maiores. Mas, em geral, sobrevém a mesma incapacidade de convergir, explicada pela situação da coluna da direita (B-D), que não consegue ir para a direita (flambagem) ou para a esquerda (flexão de viga), ficando o problema sem continuação (o programa fica alternando entre essas duas configurações).

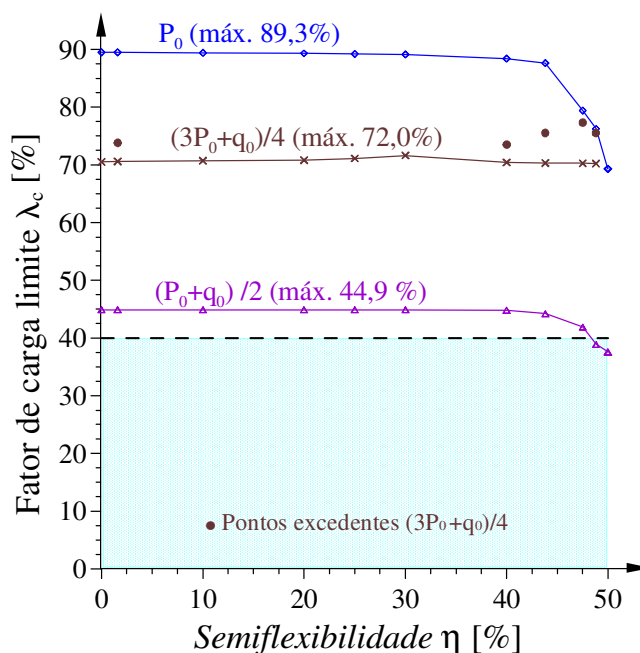
Deve-se lembrar que os valores de  $\eta \leq 0,3$  representam ligações rígidas, ou seja, todas têm, aproximadamente, o mesmo comportamento. Daí pode-se deduzir que os fatores de carga maiores obtidos não estão atrelados à *semiflexibilidade* da ligação, pois

o mesmo aconteceu antes na Tab. 8.4 para  $\eta = 0,2$  e CI )-/(, como também na Tab. 8.6 para o parâmetro  $\eta = 0,4$  e  $0,475$ ; que correspondem às ligações flexíveis. Além disso, verifica-se que a rotação da ligação atinge um máximo absoluto ( $59 \leq \lambda \leq 76\%$ ) e começa a reduzir-se, bem como os momentos, a partir desse máximo.

Na figura 8.14, representa-se a variação das cargas limite com o parâmetro  $\eta$ , ficando caracterizado o efeito da ligação rígida, o predomínio da flexão em E na carga  $(P+q_0)/2$  e um trecho intermediário da carga  $(3P+q_0)/4$ , com alguns pontos excedendo o comportamento esperado. Conclui-se que a carga distribuída predomina em relação à flambagem, dada a maior rigidez da viga para travar a coluna, enquanto no meio-vão a plasticidade provoca o colapso da seção.



**Figura 8.13** Bifurcação do portal com cargas verticais ( $FE=50$ ):  
(a) tendência à flambagem das colunas; (b) tendência a formar mecanismo de viga.



**Figura 8.14** Variação do fator de carga limite com a *semiflexibilidade*.

## 8.6 CARGA HORIZONTAL COMBINADA ÀS VERTICAIS

Nesta seção, varia-se a *semiflexibilidade*  $\eta$  (isto é, a rigidez da ligação) e são avaliadas as três condições de carregamentos, todas incluindo o esforço horizontal  $H$  (máx.  $H_0 = 150$  kN), somado às seguintes cargas atuando simultaneamente:

- 50% da carga vertical  $P_0$  ( $P = 750$  kN) em cada coluna;
- 50% da carga distribuída  $q_0$  ( $q = 281,2$  kN/m) na viga; e
- 25% de  $P_0$  ( $P = 375$  kN) por coluna, e 25% de  $q_0$  ( $q = 140,6$  kN/m) na viga.

### 8.6.1 CARGA HORIZONTAL $H + 50\%$ DA VERTICAL $P_0$

Na primeira condição de estudo ( $H + 50\% P_0$ ), o fator de carga  $\lambda_c = 100\%$  corresponde à aplicação da carga vertical máxima de  $P = 750$  kN ( $P_0/2$ ) e ao esforço horizontal  $H = H_0 = 150$  kN. Varia-se o parâmetro  $\eta$  e adota-se a imperfeição inicial limitadora da Fig. 8.6(c) com  $\text{J-/+}$  para desenvolver a Tab. 8.7.

Comprova-se novamente que o fator de carga de colapso  $\lambda_c$  não varia muito para a semiflexibilidade  $\eta \leq 0,3$  situando-se entre 61 e 62%. A partir daí decai, atingindo apenas 35% para a condição quase rótula (flexível).

Constata-se que o giro da ligação para os primeiros casos é bem pequeno, o que identifica que essas ligações como rígidas. Em geral, o colapso se dá por cisalhamento (Eq. 4.3) combinado à plasticidade e à flambagem, no topo da coluna ponto D (nó 17), ou, também, por ponto estacionário. Já quando  $\eta$  atinge 0,4 e caminha para 0,5; entra-se num outro de comportamento no qual as bases (engastes) recebem esforços de flexão maiores que os anteriores. Nessas análises, aconteceram algumas dificuldades de convergência no final da trajetória, mas detectou-se ou o colapso plástico na base B (nó 25), ou o salto dinâmico seguido de singularidade da MRG (flambagem).

Na figura 8.15, traçam-se as trajetórias de equilíbrio para as *semiflexibilidades*  $\eta$  escolhidas, nas quais se aplicam os mesmos comentários feitos sobre a Tab. 8.6.

### 8.6.2 CARGA HORIZONTAL $H + 50\%$ DA VERTICAL DISTRIBUÍDA ( $q_0$ )

Na segunda condição, combinam-se o horizontal  $H$  e 50% da carga distribuída  $q_0$ , mantendo a mesma imperfeição inicial limitadora da Fig. 8.6(d) com FP+CI ( $\text{+/-}$ ) variando-se o parâmetro  $\eta$  para montar a Tab. 8.8. As trajetórias de equilíbrio correspondentes estão na Fig. 8.16, cujos resultados se tornam diferentes para  $\eta \geq 0,40$ .

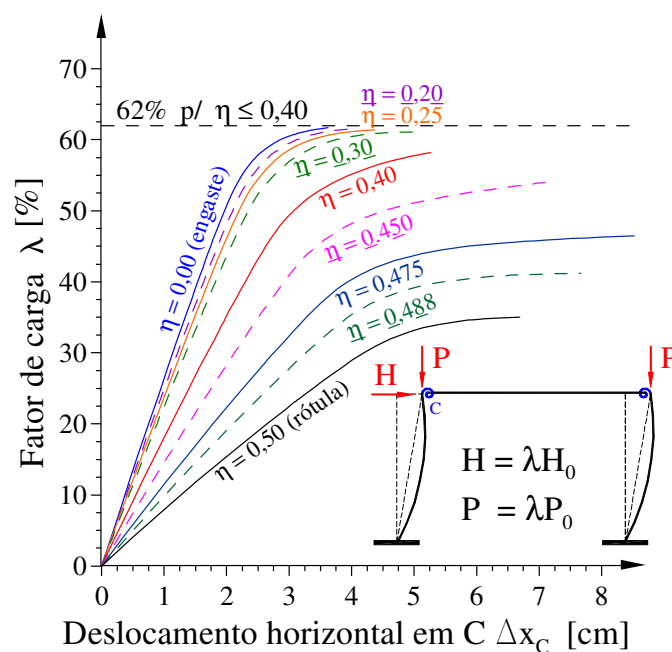
Aplicando esse carregamento, a formação de mecanismo de viga prevalece com seu colapso por cisalhamento (Eq. 4.3) e plasticidade no meio-vão (ponto E, nó 13) para a *semiflexibilidade*  $\eta \leq 0,40$ .

**Tabela 8.7 Efeito de H + 50% de carga vertical  $P_0$ .**

Ligações		Fator de carga [%]		Ligações: momentos e rotações [kNcm] [mrad]				Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]	
Parâmetros		$\lambda_y$	$\lambda_c$	$-M_C$	$-M_D$	$-\theta_C$	$-\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
$\eta$	g										
0,016	0,008	39,1	62,0	9465	8935	0,010	0,009	431	500	9681	9090
0,100	0,063	38,7	61,9	9507	8970	0,623	0,588	430	499	9748	9143
0,200	0,166	38,0	61,6	9419	8917	1,646	1,559	428	498	9779	9178
0,250	0,250	37,6	61,4	9425	8925	2,471	2,341	426	495	9833	9223
0,300	0,375	36,9	61,0	9323	8869	3,667	3,488	423	492	9876	9268
0,400	1,000	34,4	58,2	8431	8203	8,842	8,603	405	468	10082	9524
0,475	4,750	28,5	46,4	4789	4758	23,94	23,78	330	366	10874	10551
0,499	124,8	23,5	35,0	200	200	26,21	26,17	262	263	11055	11065

Ligações		Deslocamentos		Fatias plásticas
Parâmetros		$\Delta x_C$	$-\Delta y_E$	
$\eta$	g	[cm]	[cm]	[ ]
0,016	0,008	3,721	0,249	1822
0,100	0,063	4,000	0,253	1851
0,200	0,166	4,112	0,252	1825
0,250	0,250	4,370	0,255	1841
0,300	0,375	4,556	0,255	1788
0,400	1,000	5,266	0,248	1389
0,475	4,750	8,254	0,252	604
0,499	124,8	6,691	0,154	1816

Notas: 1) resultados no estado pré-colapso; 2) ligações rígidas  $\eta \leq 0,25$  (■).



**Figura 8.15 Trajetórias de equilíbrio do portal com H + 50% de  $P_0$ .**

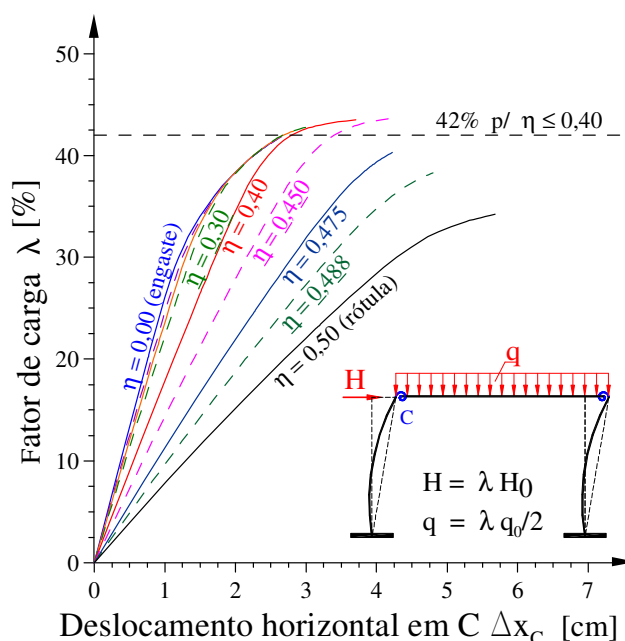


**Tabela 8.8 Efeito de H + 50% de carga distribuída  $q_0$ .**

Ligações		Fator de carga		Ligações: momentos e rotações				Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]	
Parâmetros		[%]		[kNcm]		[mrad]					
$\eta$	g	$\lambda_y$	$\lambda_c$	$M_C$	$-M_D$	$\theta_C$	$-\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
0,016	0,008	19,8	41,1	1380	10874	0,001	0,011	291	326	4446	9936
0,100	0,063	20,4	41,5	1315	10845	0,086	0,711	293	329	4650	9978
0,200	0,166	21,3	42,0	1211	10805	0,212	1,889	297	333	4985	10087
0,250	0,250	22,0	42,3	1244	10784	0,326	2,827	299	335	5140	10081
0,300	0,375	23,0	42,7	1305	10763	0,513	4,233	303	338	5482	10167
0,400	1,000	26,9	43,4	1720	10706	1,804	11,23	309	309	6541	10378
0,475	4,750	24,9	40,2	152	5770	0,759	28,84	291	312	8554	10207
0,499	124,8	23,4	34,9	-114	294	14,91	38,40	261	263	11057	11056

Ligações		Deslocamentos		Momentos	Fatias plásticas
Parâmetros		$\Delta x_C$	$\Delta y_E$	[kNcm]	[ ]
$\eta$	g	[cm]	[cm]	$M_E$	
0,016	0,008	2,508	2,128	35088	2509
0,100	0,063	2,575	2,200	35539	2649
0,200	0,166	2,701	2,321	36510	2857
0,250	0,250	2,784	2,432	36416	2978
0,300	0,375	2,962	2,665	36808	3085
0,400	1,000	3,569	3,708	37384	3423
0,475	4,750	4,197	3,694	37383	3090
0,499	124,8	6,776	2,208	34866	3532

Notas: 1) resultados no estado pré-cólapse; 2) ligações rígidas  $\eta \leq 0,25$  (■).

**Figura 8.16 Trajetórias de equilíbrio do portal com H + 50% de  $q_0$ .**

Entretanto, a plasticidade ocorre também nas extremidades da coluna do lado direito (em geral à compressão) e é mais concentrada, enquanto do outro lado a plasticidade pouco se manifesta. Esse panorama mantém-se nesse intervalo de  $\eta$ , pois o esforço axial na coluna não prepondera em relação à flexão da viga.

Quando a ligação da viga tende a ser flexível, a plasticidade se concentra na base e em ambas as colunas, mas predomina o colapso pela flexão da zona central da viga. Repare-se que a ligação no lado esquerdo fica com pouca carga (pequenos giros e momentos), enquanto, no direito, tanto o momento quanto a rotação são significativos.

### 8.6.3 CARGA HORIZONTAL H + 25% DA VERTICAL CONCENTRADA E DISTRIBUÍDA

A última condição combina as cargas verticais em 25% de cada ( $P_0$  e  $q_0$ ), sendo o horizontal incrementado conjuntamente e a configuração limitadora é com FP+CI  $-/+/-$ . Então, tem-se uma parcela de efeito da flambagem nas colunas e as ligações são sensibilizadas pelas cargas na viga, enquanto o meio-vão da viga continua sofrendo uma formação de ZP à flexão menor. Essa consideração é abordada na Tab. 8.9 e possui as trajetórias de equilíbrio desenhadas na Fig. 8.17.

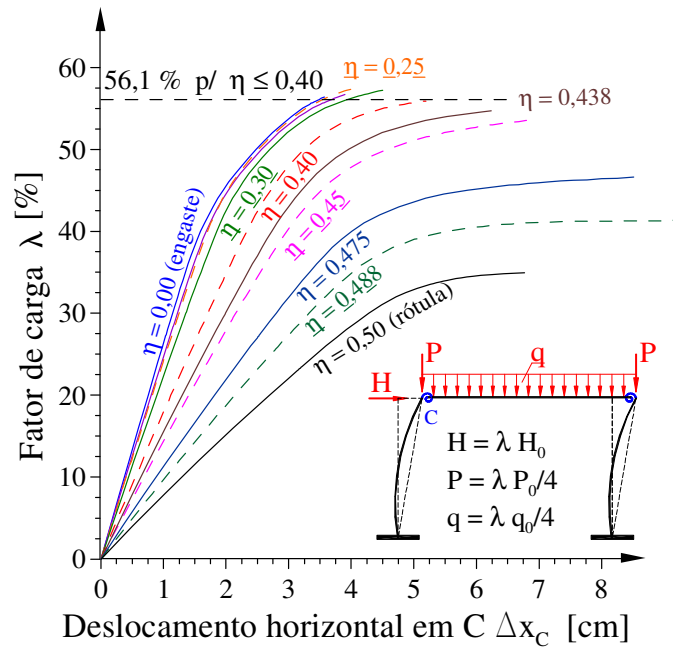
Como nos demais casos, para  $\eta \leq 0,40$ ; o fator de carga limite  $\lambda_c$  fica entre 56 e 57%, quase não varia, indicando o comportamento rígido da ligação. A partir dessa *semiflexibilidade*, entra-se no comportamento flexível, no qual existe uma modificação maior de comportamento. Com  $\eta = 0,30$  obtém-se um bom aproveitamento ( $\lambda_c = 57,1\%$ , máximo).

**Tabela 8.9 Efeito de H + 25% das cargas concentrada  $P_0$  e distribuída  $q_0$ .**

Ligações		Fator de carga		Ligações: momentos e rotações				Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]	
Parâmetros		[%]		[kNcm]		[mrad]					
$\eta$	g	$\lambda_y$	$\lambda_c$	$-M_C$	$-M_D$	$-\theta_C$	$-\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
0,016	0,008	26,8	56,0	5114	9755	0,005	0,010	392	448	8959	9457
0,100	0,063	27,4	56,3	5242	9732	0,344	0,638	394	450	9147	9479
0,200	0,166	28,4	56,6	5525	9706	0,966	1,697	396	453	9458	9542
0,250	0,250	29,1	56,9	5599	9684	1,468	2,539	398	455	9583	9536
0,300	0,375	30,1	57,1	5826	9666	2,291	3,802	399	457	9781	9569
0,400	1,000	30,7	55,9	5370	9619	5,631	10,09	391	447	10035	9720
0,475	4,750	27,5	46,8	4124	6287	20,61	6,25	332	371	10874	10537
0,499	124,8	23,5	34,9	162	246	21,18	32,14	261	263	11059	11053

Ligações		Deslocamentos		Momentos	Fatias plásticas
Parâmetros		$\Delta x_C$	$-\Delta y_E$	[kNcm]	
$\eta$	g	[cm]	[cm]	$M_E$	[ ]
0,016	0,008	3,380	1,498	25853	1530
0,100	0,063	3,542	1,515	26082	1600
0,200	0,166	3,862	1,539	26410	1672
0,250	0,250	4,063	1,553	26606	1750
0,300	0,375	4,438	1,573	26848	1829
0,400	1,000	5,193	1,535	26015	1685
0,475	4,750	9,093	1,427	22364	664
0,499	124,8	6,769	1,100	17434	1870

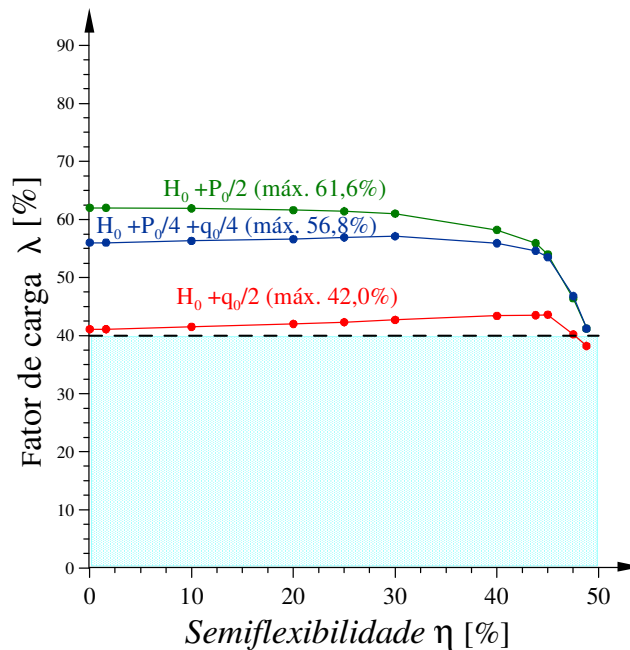
Notas: 1) resultados no estado pré-colapso; 2) ligações rígidas  $\eta \leq 0,25$  (■).



**Figura 8.17** Trajetórias de equilíbrio do portal com H + 25% de (P<sub>0</sub> + q<sub>0</sub>).

Nesse intervalo, os momentos e rotações na ligação do lado esquerdo (ponto C) são aproximadamente metade do que se encontra no lado direito (ponto D). Aparecem 5 ZPs, sendo a central na viga, duas no topo e duas nas bases das colunas; porém há uma tendência de colapso da seção mais solicitada por cisalhamento (Eq. 4.3) associado à plasticidade e à flambagem, no topo da coluna direita, ponto D (nó 17).

Quando a ligação da viga torna-se flexível, as ZPs inferiores passam a ser maiores e com ambos os sinais (ZP de flexão).



**Figura 8.18** Efeito de H no fator de carga limite com a *semiflexibilidade*.

Na figura 8.18 elucida-se o efeito de  $H$  na carga limite quando  $\eta$  varia, notando-se um leve crescimento para a carga  $q_0/2$  (benefício) até 0,4; porém, a redução é significativa para todas as combinações de cargas a partir desse ponto. Nessa condição o colapso acontece por plasticidade e cisalhamento nas bases das colunas (ver subseções 3.2.3 e 4.3.1). Os momentos no meio-vão não são tão significativos, sendo a ZP da viga apenas na parte superior da seção, à compressão.

## 8.7 MODIFICANDO A VIGA DO PORTAL

Nesta seção, aborda-se o problema do portal AA, com o perfil 8 WF 31 substituindo o de Chen & Zhou (1987). Como esse perfil é esbelto para esse vão e tem um momento plástico bem menor, a análise realizada limitar-se-á ao estudo do seu comportamento na hipótese de carga horizontal  $H$  e 50% da vertical  $P_0$  nas colunas.

Agora rigidez da ligação, que é constante nessas análises, será definida por:

$$R_k = \frac{(2 - 4\eta) EI_z}{\eta L} = \frac{1716,16}{g} \text{ kNm/rad} \quad (8.3)$$

Para esse portal e cargas, a CI  $-/+$  é a que governa e a direção do FP é a mesma de  $H$ , desenvolvendo-se a Tab. 8.10. Nessa tabela, verifica-se que as variações de  $\eta$  provocam modificações generalizadas das respostas estruturais desse portal. Não se identifica um comportamento do tipo rígido, visto antes com o portal CZ, já que a seção 8 WF 31 para esse vão é bastante flexível.

As trajetórias de equilíbrio traçadas na Fig. 8.17 distribuem-se de forma suave (como um leque) para a semiflexibilidade  $\eta$ , verificando-se uma mudança gradual de comportamento entre os extremos: o engaste e a rótula.

Para o engaste ou ligação quase rígida (ou  $\eta \leq 0,1$ ), há 2 ZPs de flexão, a maior sendo de compressão, nas bases das colunas e apenas de compressão no topo. A viga também apresenta ZPs de compressão no lado superior à esquerda, e inferior à direita. À medida que a *semiflexibilidade*  $\eta$  cresce, as ZPs na viga e no topo da coluna desaparecem, enquanto as ZPs da base crescem também. Isso suscita a modificação da imperfeição limitadora correspondente de FP+CI  $(+/-)$  da ligação do tipo rígido para FP+CI  $(-/+)$  da flexível, embora nos resultados apresentados na figura seja considerada a primeira configuração imperfeita. Note-se que, por essa razão, os resultados para  $\eta \geq 0,3$  não são governantes.

**Tabela 8.10 Efeito de H + 50% de carga concentrada  $P_0$  no portal AA.**

Ligações		Fator de carga		Ligações: momentos e rotações				Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]	
Parâmetros		[%]		[kNcm]		[mrad]					
$\eta$	g	$\lambda_y$	$\lambda_c$	$-M_C$	$-M_D$	$-\theta_C$	$-\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
0,016	0,008	35,2	59,7	9087	8809	0,027	0,026	414	482	10038	9429
0,100	0,063	34,0	57,5	8150	8020	2,968	2,921	401	462	10121	9580
0,200	0,166	32,5	54,6	7221	7144	7,013	6,939	383	436	10309	9827
0,250	0,250	31,5	53,7	7312	7240	10,65	10,55	376	430	10451	9953
0,300	0,375	30,4	51,1	6430	6378	14,05	13,94	359	407	10605	10168
0,400	1,000	27,5	44,1	4028	4009	23,48	23,36	316	346	11012	10742
0,475	4,750	24,5	37,0	910	908	25,19	25,14	274	281	11104	11047
0,499	124,8	23,2	34,5	35,8	35,8	26,04	26,00	259	259	11047	11041

Ligações			Desloc. $\Delta x_C$ [cm]	Fatias plásticas [ ]
Parâmetros		$R_k$		
$\eta$	g	[kNm/rad]		
0,016	0,008	3425455	5,484	1825
0,100	0,063	27458	5,350	1393
0,200	0,166	10297	5,886	994
0,250	0,250	6864,6	7,157	748
0,300	0,375	4576,4	7,570	644
0,400	1,000	1716,2	8,798	1444
0,475	4,750	361,3	6,940	1816
0,499	124,8	13,8	6,570	1802

Notas: 1) resultados no estado pré-colapso; 2) FP+CI  $\text{(-/+/-)}$ ; 3) ( ) resultados não-governantes.

Na figura 8.20, indica-se a variação do fator de carga de colapso com os perfis para esse carregamento ( $H+P_0/2$ ). No perfil do portal CZ, verifica-se o comportamento rígido, seguido de uma perda de capacidade e modificação da carga de colapso de forma abrupta. Já com o perfil mais esbelto, observa-se uma variação quase uniforme (linear) dessa perda, até próximo de  $\eta = 0,25$  onde a mudança de curvatura inicial para FP+CI  $\text{(+/-)}$  é percebida pela queda mais abrupta.

Como esperado, quando as vigas são ligadas com rótulas, esses portais têm o mesmo comportamento; quando engastados, as diferenças tendem a ser menores, pois a viga fornece travamento à coluna suficiente para a carga de flambagem ficar próxima.

O escoamento tende a ser mais uniforme (quase linear) para portal AA, enquanto para o CZ há dois trechos que acompanham a forma do colapso.

## 8.8 ANÁLISE AVANÇADA DO PORTAL COM LIGAÇÃO MIDIRRÍGIDA

Realiza-se, agora, o resumo da *Análise Avançada* do portal CZ considerando a ligação *midirrígida* ( $\eta = 0,25$ ) e verifica-se o efeito das combinações de carregamentos no seu comportamento. Na figura 8.21, traçam-se as diversas trajetórias de equilíbrio obtidas pela ação dos carregamentos aplicados, indicados na Tab. 8.11.

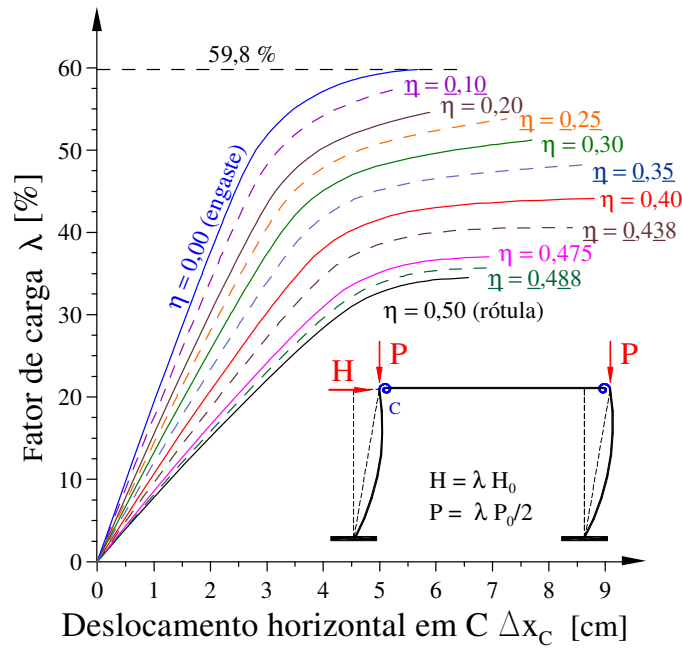


Figura 8.19 Trajetórias de equilíbrio do portal AA com  $H + 50\%$  de  $P_0$ .

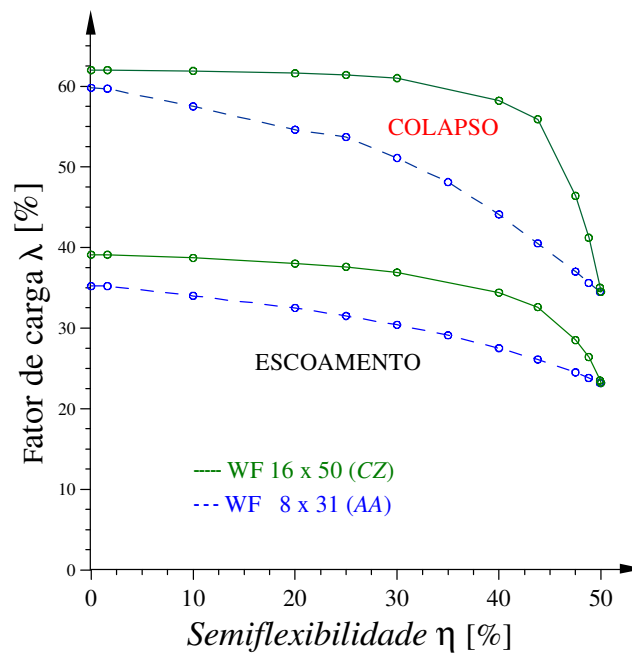


Figura 8.20 Variação do fator de carga de colapso e escoamento com o perfil.

Pela figura 8.21, conclui-se que a hipótese  $(P_0+q_0)/2$  ( $P_0 = 1500$  kN e  $q_0 = 562,5$  kN/m) é a que produz o menor fator de carga, sem horizontal (“•”, 44,9%). Com o horizontal combinado, a carga limite corresponde a  $(q_0/2$ , “▶”, 42,3%). Portanto, o fator de carga global 40% atende a todas as condições simultaneamente, com uma pequena folga.

A indicação do deslocamento limite  $L/400$  mostra que as condições de cargas verticais atendem às exigências de norma, porém com a presença do horizontal  $H$ , tais deslocamentos deveriam ser metade ou o fator de carga limite reduzido a  $\approx 20\%$ .

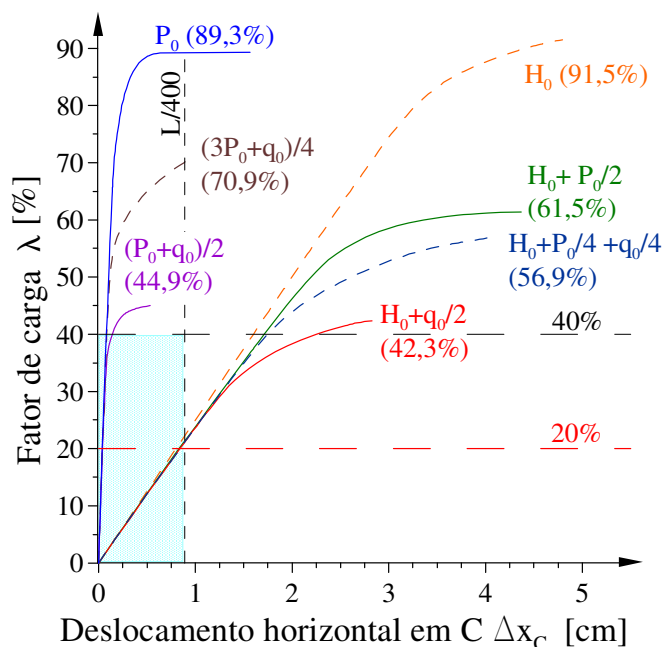


Figura 8.21 Trajetórias de equilíbrio do portal com ligação *midirrígida*.

Tabela 8.11 Cargas limite do portal com ligação *midirrígida*.

Cargas aplicadas	Fator de carga [%]		Ligações: momentos e rotações [kNcm] [mrad]				Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]	
	$\lambda_y$	$\lambda_c$	$M_C$	$-M_D$	$\theta_C$	$-\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
<sup>(1)</sup> Vertical										
– $P_0$	65,5	89,2	-1178	1125	-0,309	0,295	1336	1340	682	622
– $(P_0+q_0)/2$	26,7	44,9	7535	7635	1,976	2,002	673	674	-3555	5032
– $(3P_0+q_0)/4$	38,1	71,1	3096	3899	0,812	1,022	1064	1067	-536	3331
H –	54,7	91,4	12091	11921	3,170	3,126	-45	45	12367	12366
H $P_0/2$	37,6	61,4	-9425	8929	-2,471	2,341	426	495	9833	9223
H $q_0/2$	22,0	42,3	1244	10784	0,326	2,827	299	335	5140	10081
H $(P_0+q_0)/4$	29,1	56,9	-5599	9684	-1,468	2,539	398	455	9583	9536

Cargas aplicadas	Deslocamentos		Momentos [kNcm]	Fatias plásticas [ ]	Imperfeições iniciais FP+CI
	$\Delta x_C$ [cm]	$-\Delta y_E$ [cm]			
<sup>(1)</sup> Vertical					
– $P_0$	0,637	0,438	–	5654	(+/-)
– $(P_0+q_0)/2$	0,771	3,921	37437	4043	(+/-)
– $(3P_0+q_0)/4$	1,060	2,048	32032	3660	(+/-)
H –	4,760	0,137	–	1650	)/-(+)
H $P_0/2$	4,370	0,255	–	1841	)/-(+)
H $q_0/2$	2,784	2,432	36416	2978	(+/-)
H $(P_0+q_0)/4$	4,063	1,553	26606	1750	(+/-)

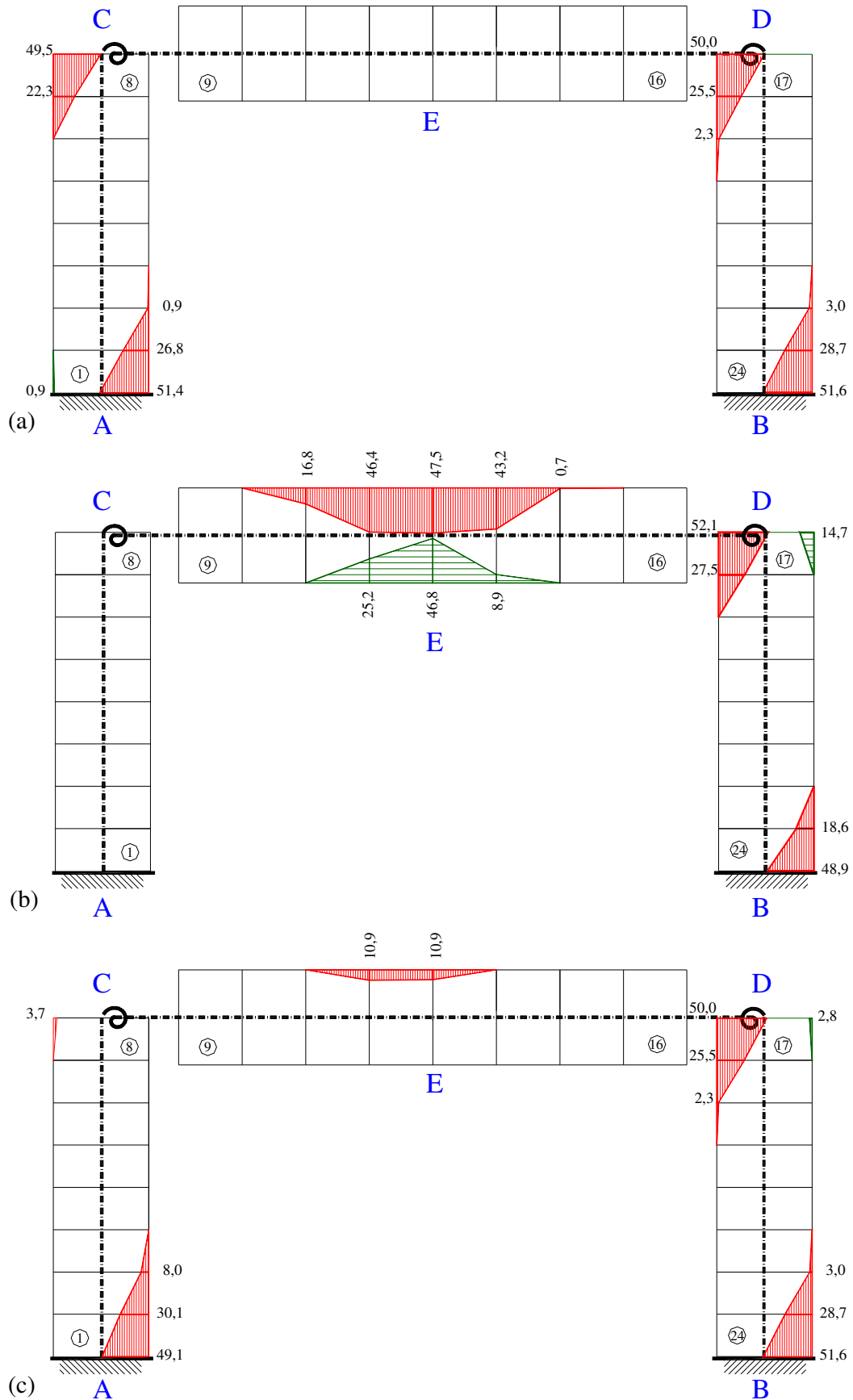
Notas: 1) carga horizontal; 2) resultados no estado pré-colapso; 3) ( ) critérios limite.

Deve-se checar a flecha vertical no ponto E (nó 13) que não pode superar  $B/180 = 2,96$  cm. Observa-se que a carga distribuída ( $q$ ) antecipa a formação do mecanismo plástico em relação à flambagem, mas na presença do esforço horizontal ( $H$ ) os efeitos secundários combinados ( $P\Delta$  e  $P\delta$ ) aceleram a flambagem.

Nas seções anteriores, ficou evidenciado que o aparecimento da plasticidade e sua propagação pela estrutura atende à determinação dos pontos de maior rigidez, onde ocorre a formação das zonas plásticas (ZP) primeiro. Assim, pode-se acompanhar o estado das ZPs do portal no instante pré-colapso pela Fig. 8.22, sobre a qual se fazem as seguintes observações:

- a.  $H+50\% P_0$  – não há ZPs na viga, apenas nas colunas [ver Fig. 8.22(a)]. Se a ligação tende a ser rígida ( $\eta \leq 0,3$ ), aparecem as ZPs no topo das colunas e a CI limitadora é a (+/-). Se a união é flexível, podem ocorrer apenas ZPs na base, quando então a CI limitadora passa a ser a oposta )-/+);
- b.  $H +50\% q_0$  – a viga desenvolve uma ZP no meio-vão (ponto E) por flexão [ver Fig. 8.22(b)]. Se a ligação é rígida ( $\eta \leq 0,3$ ) existem 2 ZPs nos extremos da coluna B-D (em alguns casos, mais extensas), enquanto na outra coluna a plasticidade, praticamente, não se manifesta ou é insignificante. Quando a rigidez da conexão é menor, a ZP do meio-vão da viga tende a predominar antes que a flambagem ou outras formações de ZPs modifiquem a direção da CI (+/-). Nessas condições sucede o colapso por plasticidade combinada ao cisalhamento (Eq. 4.3) no ponto E;
- c.  $H +25\% (P_0 +q_0)$  – a ZP que ocorre na viga tende a ser menor, e, se a união é rígida ( $\eta \leq 0,3$ ), desenvolvem-se 5 ZPs, com 2 ZPs em cada coluna (uma em cada extremidade, base e topo), sendo extensas para ligações mais rígidas [ver Fig. 8.22(c)]. Casos de menor rigidez levam à redução ou ao desaparecimento das ZPs do topo das colunas, primeiramente, no ponto C. A região mais solicitada é o ponto D, onde acontece o colapso por plasticidade conjugada ao corte (Eq. 4.3); e
- d. os casos incluindo a carga horizontal são bem diferentes da condição de carga de flambagem pura (apenas a vertical  $P$  atuando), mostrada antes na Fig. 8.10.





**Figura 8.22 Zonas plásticas do portal *midirrígido*:**  
 (a) carga  $H + 50\%$  de  $P_0$ ; (b) carga  $H + 50\%$  de  $q_0$ ; (c) carga  $H + 25\%$  de  $(P_0 + q_0)$ ;  
 (d) convenção: (==) tração, (||) compressão.

## 8.9 EFEITO DAS LIGAÇÕES NÃO LINEARES

Para finalizar as análises deste capítulo, investiga-se o portal CZ, nas piores condições de projeto, já determinadas, de carga e imperfeições geométricas limitadoras correlatas, porém utilizando ligações não lineares.

Para tanto, empregam-se duas versões (D2 e D3) obtidas por *analogia* (Meili, 1994) das ligações da seção 7.5: C2 e C3, aproximadas pelo modelo *RBL*, uma rígida e a outra flexível. Esta é outra proposta deste trabalho, que justifica também o uso do modelo *RBL*, já apresentado. Repare, também, que as ligações devem ser simétricas.

Supõe-se que o mesmo projeto da ligação é adotado para as duas vigas que possuem seções diferentes, caracterizadas pelas suas alturas:

- a. a viga original 8 WF 48, com  $d = 216$  mm (Chan & Chui, 2000); e
- b. a viga do portal CZ, 16 WF 50, com  $d = 414$ mm.

Deseja-se aplicar às ligações uma analogia, na qual se identifica de forma simples parâmetros de comportamento. Neste caso, parte-se já de relações que são conhecidas [por exemplo, método das componentes (Eurocode 3, 1992)], desde que não haja grandes variações nos demais elementos que constituem a ligação, exceto o aumento de distancia entre as partes ligadas, como representado na Fig. 8.23.

Para se fazer essa analogia proposta, seleciona-se um parâmetro adequado ou mais. (Ver apêndice A.9). Nesse problema, adota-se a distância  $h_s$ , pois se considera que a ligação e seus elementos possuem características semelhantes (mesmos parafusos, furos, soldas, espessuras, chapas, detalhes, material, etc.).

Para a ligação rígida (D2), supondo que as abas terão deformações similares às de ensaio (mostradas esquematicamente na Fig. 2.32 (parte soldada) e Fig. 2.35 (parte aparafusada, incluindo a chapa); seria indicado considerar como dimensão característica a distancia média entre as abas da seção. Isso porque é o elevado esforço de tração que provém da aba superior o causador do efeito alavanca, do escoamento e da deformação da aba da coluna, da tração nos parafusos, etc. No lado inferior, é a compressão local que, através chapa, esmaga a aba e deforma a alma da coluna, etc. Portanto, o parâmetro característico  $h_s$  será definido por:

$$h_s = (d - t) \quad (8.4a)$$

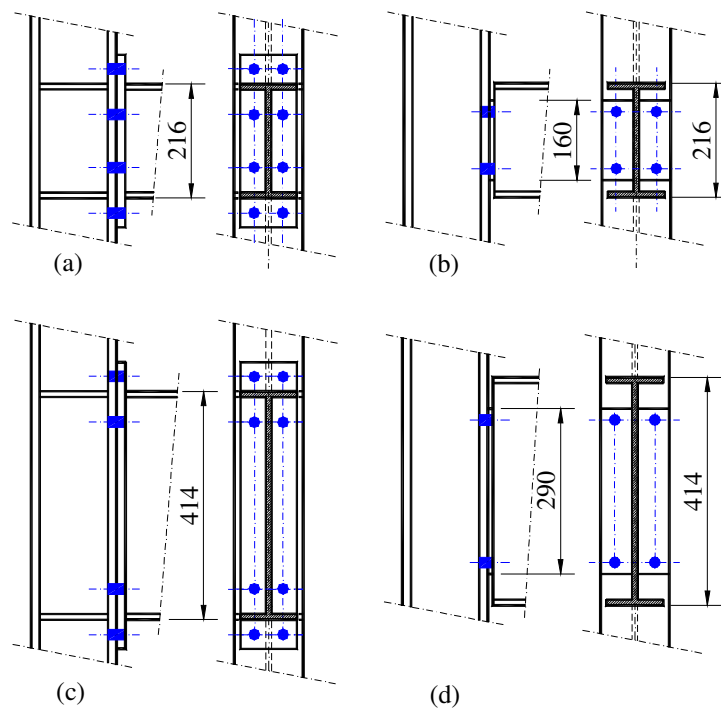
Na ligação flexível [como indicado nas Figs. 2.36(b) e 2.37(a)], constata-se uma deformação maior na parte superior da cantoneira (ou da chapa de cabeça), associada ao

parafuso superior, e na parte inferior, ao contato da borda da cantoneira ou chapa de ligação com efeito menor que o primeiro. Assim, escolhe-se para parâmetro da analogia a distância entre o furo superior e a borda inferior; isto é:

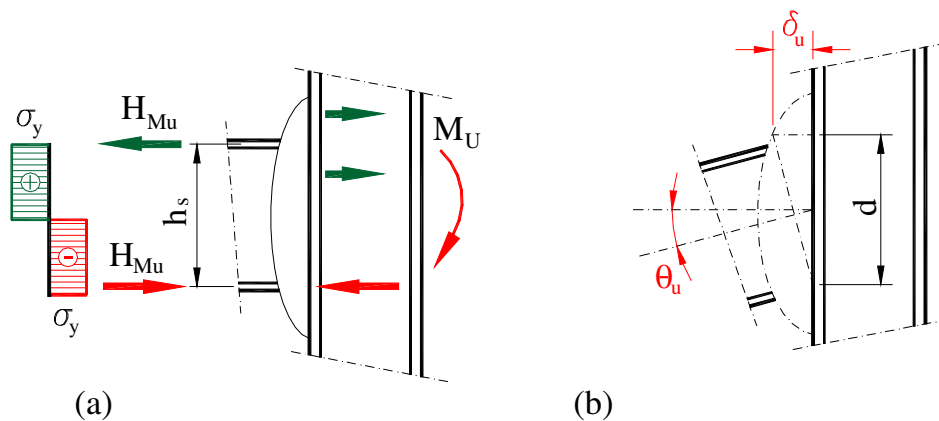
$$h_s = (h_L - p_L) \quad (8.4b)$$

no qual  $h_L$  é altura da cantoneira [ $h_a$  da Fig. 2.17(b)] ou da chapa [ $h_p$  da Fig. 2.17(h)], e  $p_L$  é a distância de borda do parafuso (superior, supõe-se tracionado).

Observando-se a Fig. 8.24, as grandezas principais da ligação podem ser relacionadas ao parâmetro característico ( $h_s$ ) e à altura da seção ( $d$ ) pelas expressões:



**Figura 8.23** Ligações simétricas não lineares: (a) rígida C2; (b) flexível C3; (c) modificada D2; (d) modificada D3.



**Figura 8.24** Relações da analogia: (a) proporção  $M_u$  e parâmetro  $h_s$ ; (b) rotação última  $\theta_u$  e altura do perfil  $d$ .

$$M_u \propto H_{Mu} h_s \quad R_{ki} \propto H_{Mu} h_s^2 \quad \tan \theta_u = \frac{\delta_u}{d} \quad (8.5a-c)$$

nas quais  $H_{Mu}$  é a carga máxima transmitida pela ligação através da aba da viga e  $\delta_u$  representa a soma de todas as deformações (à tração e à compressão da ligação).

Dessa forma, pode-se estabelecer a relação entre as propriedades já conhecidas e as desejadas empregando o parâmetro característico de cada uma com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} M_{uD} &= M_{uC} \frac{h_{sD}}{h_{sC}} \approx M_{uC} \frac{M_{pD}}{M_{pC}} \\ R_{kiD} &= R_{kiC} \left( \frac{h_{sD}}{h_{sC}} \right)^2 \\ \theta_{uD} &= \arctg \left( \frac{d_C}{d_D} \tan \theta_{uC} \right) \end{aligned} \quad (8.6a-c)$$

nas quais as grandezas conhecidas possuem o subscrito (C) e as desejadas (D).

Para completar a aproximação, empregam-se os mesmos parâmetros de forma das curvas (C2 & C3) para as novas ligações (D2 & D3), respectivamente. Como as ligações (C2 & C3) são diferentes, a análise será dividida, então, em duas partes:

- a. ligação não linear rígida D2; e
- b. ligação não linear flexível D3.

### 8.9.1 LIGAÇÃO NÃO LINEAR RÍGIDA D2

Os parâmetros característicos [mm] são dados pela Eq. 8.3(a) conforme:

$$h_{sC} = 216 - 17,6 = 198,4 \quad h_{sD} = 414 - 16,14 = 397,9 \quad h_{sD} / h_{sC} = 397,9 / 198,4 \approx 2.$$

Como a ligação é rígida, pode-se fazer a melhor estimativa de  $M_u$  baseando-se na relação entre os  $M_p$  das seções correspondentes:

$$\begin{aligned} 8 \text{ WF } 48 \text{ em ASTM A7} \quad M_{pC} &= 23,5 \text{ kN/cm}^2 \times 803 \text{ cm}^3 = 18870 \text{ kNcm} \\ 16 \text{ WF } 50 \text{ em ASTM A36} \quad M_{pD} &= 25 \text{ kN/cm}^2 \times 1505 \text{ cm}^3 = 37625 \text{ kNcm} \\ M_{pD} / M_{pC} &= 37625 / 18870 = 1,994 \approx 2 \text{ (coincidência!)}. \end{aligned}$$

Como o ASTM A 36 é mais resistente que o ASTM A7, efeitos locais e deformações tendem a ser um pouco menores, o que poderia reduzir um pouco o ângulo de rotação última e aumentar um pouco a rigidez. Nesse exemplo, isso não foi considerado, pois as rotações finais das análises são pequenas e o possível acréscimo de rigidez é um benefício ignorado (de avaliação complexa).

Nesse caso, ambos os ajustes de  $M_u$  estimados (com  $h_s$  ou com  $M_p$ ) ficaram próximos. As propriedades da curva D2 são obtidas pelas propriedades da ligação C2, indicadas na Tab. 7.14 e das Eqs. 8.6(a-c). Substituindo os valores, chega-se a:

$$\begin{aligned} M_{uD} &= 2 M_{uC} = 2 \times 187 \approx 374 \text{ kNm} \\ R_{kiD} &= (2)^2 R_{kiC} = 4 \times 17273 = 69092 \text{ kNm/rad} \\ \theta_{uD} &= \arctg[215,9 \times \tan(0,05041) / 414] = 26,305 \text{ mrad} \end{aligned}$$

Os parâmetros da curva C2 com modelo *RBL* são calculados:

$$\kappa_A = R_{kA}/R_{ki} = 1461/17273 = 8,458\% \quad \kappa_p = R_{kp}/R_{ki} = 379/17273 = 2,194\%$$

Os coeficientes  $\alpha_i$  são definidos pelas Eqs. 2.66 e 2.67, fazendo:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= (R_{kp} \theta_u) / M_u = 379 \times 0,05041 / 187 = 0,102 \\ R_{k2}^* &= R_{ka}^* \theta_u / (\theta_u - \theta_a) = (1461-379) \times 0,05041 / (0,05041-0,01655) = 1610,9 \text{ kNm/rad} \\ \alpha_2 &= (R_{k2}^* \theta_u) / (2M_u) = 1610,9 \times 0,05041 / (2 \times 187) = 0,218 \\ \alpha_1 &= 1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 1 - 0,102 - 0,218 = 0,680 \quad \beta_L = \alpha_1 / (\alpha_1 + \alpha_2) = 0,757 \end{aligned}$$

Com os parâmetros de forma ( $\beta_L$  &  $\kappa_p$ ) calculados, encontram-se então:

$$\begin{aligned} R_{kp} &= \kappa_p R_{ki} = 2,194\% \times 69092 = 1515,9 \text{ kNm/rad} \\ \alpha_3 &= (R_{kp} \theta_u) / M_u = 1515,9 \times 0,026305 / 374 = 0,1066 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 - \alpha_3 = 1 - 0,1066 = 0,8934 \\ \alpha_1 &= \beta_L (\alpha_1 + \alpha_2) = 0,757 \times 0,8934 = 0,6763 \quad \alpha_2 = 0,8934 - 0,6763 = 0,2171 \\ R_{k2}^* &= 2 \alpha_2 M_u / \theta_u = 2 \times 0,2171 \times 374 / 0,026305 = 6173,4 \text{ kNm/rad} \\ R_{k2} &= R_{k2}^* + R_{kp} = 6173,4 + 1515,9 = 7689,3 \text{ kNm/rad} \\ \theta_A &= 2 \alpha_1 M_u / (R_{ki} - R_{k2}) = 2 \times 0,6763 \times 374 / (69092 - 7689,3) = 8,239 \text{ mrad} \\ R_{kA} &= R_{k2}^* (\theta_u - \theta_a) / \theta_u + R_{kp} = 6173,4 (26,305 - 8,239) / 26,305 + 1515,9 = 5755,5 \text{ kNm/rad} \\ M_A &= (R_{ki} + R_{kA}) / (2 \theta_a) = [(69092 + 5755,5) \times 0,08239] / 2 = 308,3 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Os resultados obtidos de forma numérica computacional (com várias casas de precisão) diferem um pouco e os parâmetros adotados para o modelo *RBL* das curvas (D2 & D3), com arredondamentos, são listados na Tab. 8.12.

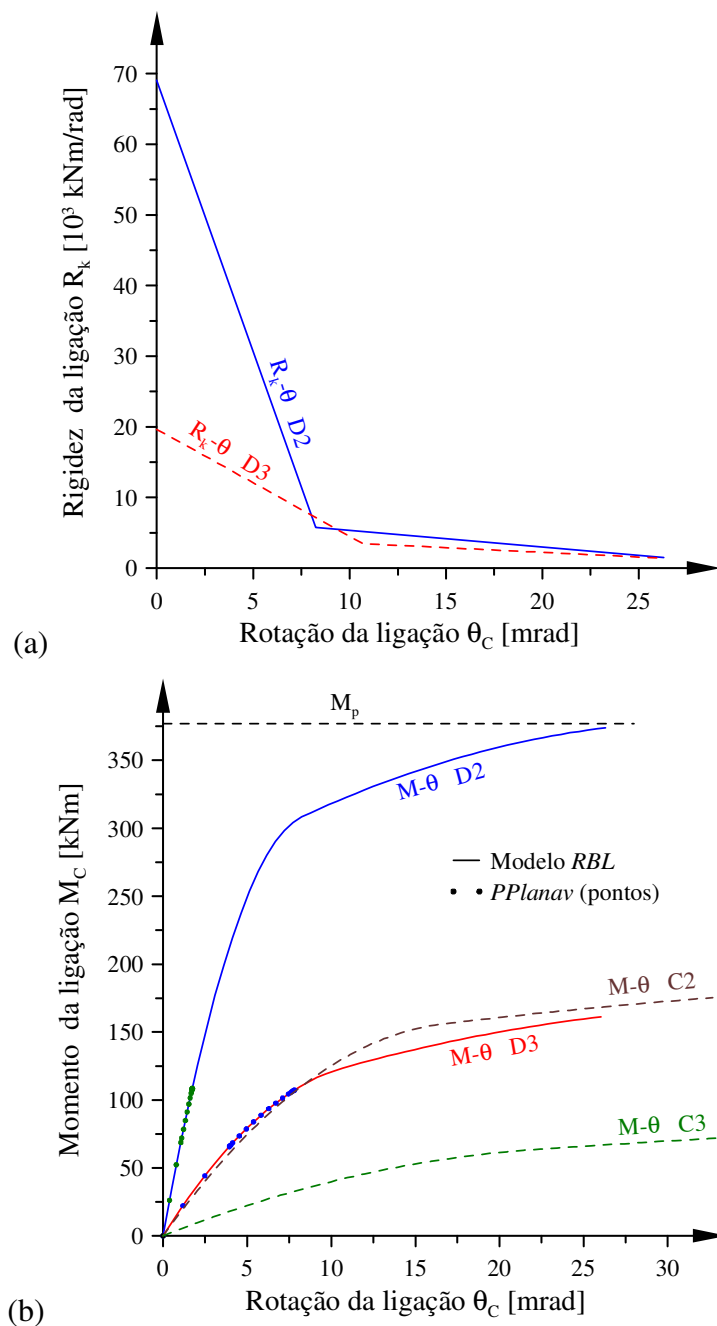
Os resultados anteriores geram as curvas  $R_k$ - $\theta$  do modelo *RBL*, indicadas na Fig. 8.25(a), e as curvas  $M$ - $\theta$  construídas por analogia (D2 & D3) da Fig. 8.25(b), notando-se que a curva  $M$ - $\theta$  D3 é muito próxima da C2 anterior, com menor rotação última. Lembre-se que, nas curvas (C2 & C3), a rotação última é  $\theta_u = 50$  mrad.

As grandezas do estado pré-colapso deste portal são apresentadas na Tab. 8.13, sobre a qual se fazem as seguintes observações:

**Tabela 8.12 Propriedades das curvas RBL análogas D2 e D3.**

Curva	Rotação [mrad]		Momentos [kNcm]		Rigidez [kNm/rad] <sup>(1)</sup>		
	$\theta_A$	$\theta_u^{(1)}$	$M_A$	$M_u^{(1)}$	$R_{ki}$	$R_{kA}$	$R_{kp}$
D2	8,238	26,304	308,3	374,0	69093	5756	1516
D3	10,692	26,049	123,6	161,2	19646	3465	1438

Nota: 1) Dados empregados na solução computacional de PPLANAVA.



**Figura 8.25** Curvas D2 e D3 obtidas por analogia:  
(a) Rigidez-rotação  $R_k$ - $\theta$ ; (b) Momento-rotação  $M$ - $\theta$ .

a. as rotações da ligação são todas de pequeno valor (inferiores a 2 mrad), o que indica que a ligação é rígida, e por outro, à medida que a plasticidade expande-se na coluna, a ligação deixa de atuar no problema;

- b. por essa razão, todas as formas de CI produzem a mesma carga de flambagem ( $\lambda = 89,3\%$ ), que é a mesma encontrada anteriormente; e
- c. os resultados obtidos mostram o mesmo comportamento descrito nos problemas das ligações lineares rígidas.

Foram detectados desvios entre o valor do momento da ligação e o obtido pelo EF, da mesma natureza indicada na seção 7.6. Esses desvios são pequenos, sendo o maior  $dM = 14,6$  kNcm, que corresponde a 0,42% do momento do EF.

Na figura 8.25 mostram-se os pontos da trajetória de equilíbrio ( $M-\theta$ ) referente à ligação em D (nó 16), na condição de carga ( $H + q_0/2$ ), na qual se observa que os pontos da análise numérica fazem parte da curva e que o momento pouco supera  $M_p/4 = 94,2$  kNm. A solicitação na coluna e a plasticidade decorrente determinam a flambagem e o colapso, antes que a não linearidade da ligação participe mais da resposta estrutural.

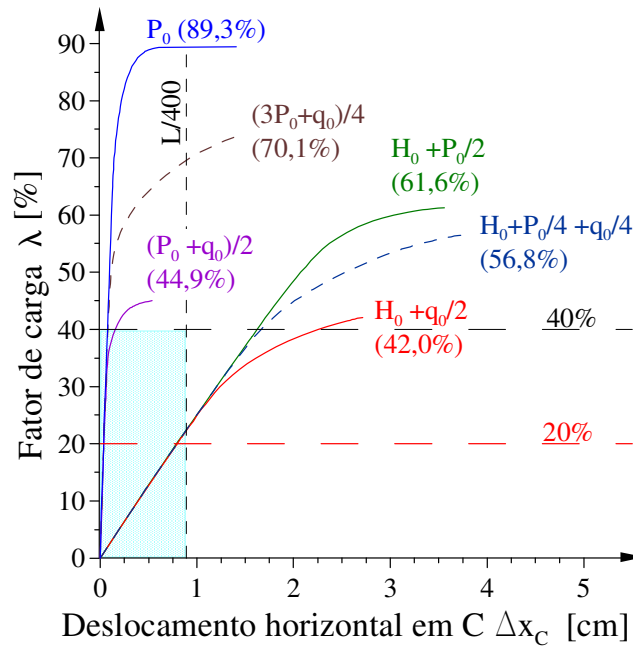
Avaliando as trajetórias de equilíbrio referentes às diversas condições de cargas, como mostra a Fig. 8.26, constata-se que não há diferenças significativas em relação ao diagrama da *Análise Avançada* da ligação *midirrígida* da Fig. 8.21 anterior. Ou seja, a ligação não linear tem um comportamento próximo do linear nesse 1/4 da extensão. Isso indica, também, que a aproximação linear da curva  $M-\theta$  pode ser empregada quando a ligação apresenta rotações muito pequenas (da ordem de no máximo 2,5 mrad).

**Tabela 8.13 Portal com ligação não linear rígida D2.**

Cargas aplicadas	Fator de carga [%]		Ligações: momentos e rotações				Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]	
	$\lambda_y$	$\lambda_c$	$M_C$	$-M_D$	$\theta_C$	$-\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
<sup>(1)</sup> Vertical										
– $P_0$	65,7	89,3	-1169	1115	-0,171	0,163	1335	1344	653	595
– $(P_0+q_0)/2$	25,6	44,9	7551	7644	1,169	1,184	673	674	-3572	5068
– $(3P_0+q_0)/4$	37,0	74,1	2326	3481	0,362	0,540	1109	1114	448	3250
H $P_0/2$	38,8	61,7	-9459	8954	-1,493	1,406	428	497	9725	9126
H $q_0/2$	21,1	42,0	1266	10812	0,188	1,732	298	334	4996	10057
H $(P_0+q_0)/4$	28,2	56,7	-5155	9702	-0,828	1,543	397	454	9392	9505

Cargas aplicadas	Deslocamentos		Momentos [kNcm]	Fatias plásticas [ ]
	$\Delta x_C$	$-\Delta y_E$		
<sup>(1)</sup> Vertical			$M_E$	
– $P_0$	0,607	0,438	–	5614
– $(P_0+q_0)/2$	0,782	3,844	37425	4049
– $(3P_0+q_0)/4$	1,513	2,263	34183	4665
H $P_0/2$	4,016	0,252	–	1846
H $q_0/2$	2,718	2,343	36193	2908
H $(P_0+q_0)/4$	3,795	1,538	26415	1683

Notas: 1) Carga horizontal; 2) resultados no estado pré-colapso.



**Figura 8.26** Trajetórias do portal com ligação rígida não linear D2.

### 8.9.2 LIGAÇÃO NÃO LINEAR FLEXÍVEL D3

Os parâmetros da analogia [mm] são calculados pela Eq. 8.4(b), pois se supõe que a dimensão da linha de base (da chapa de cabeça ou da cantoneira) ao furo do parafuso superior seja representativa, isto é:

$$h_{sC} = 160 - 32 = 128 \quad h_{sD} = 290 - 32 = 258 \quad h_{sD} / h_{sC} = 258 / 128 = 2,015 \approx 2$$

sendo as dimensões da chapa  $h_L = \{160, 290\}$  e o gabarito furo a borda  $p_L = 32$ , respectivamente. Como a união é flexível, a estimativa de  $M_u$  baseia-se na relação entre os parâmetros  $h_s$  mesmo. Obs.  $h_L = h_a$  [Fig. 2.17(b)] ou  $h_p$  [Fig. 2.17(h)].

As propriedades da curva D3 são calculadas com base nas propriedades da ligação C3 indicadas na Tab. 7.14 e das Eqs. 8.6(a-c), como na subseção anterior; achando-se:

$$M_{uD} = 2 M_{uC} = 2 \times 80,6 \approx 161,2 \text{ kNm}$$

$$R_{kiD} = (2)^2 R_{kiC} = 4 \times 4911,7 = 19646 \text{ kNm/rad}$$

$$\theta_{uD} = \arctg [ 215,9 \times \tan (0,04992) / 414 ] = 26,049 \text{ mrad}$$

Observe-se que, embora a ligação flexível tenha parâmetros  $h_s$  menores em valor que as da rígida, o cálculo da rotação é feito experimentalmente relacionado à dimensão da viga, por isso, não se faz o uso do  $h_s$  para o ajuste da rotação. No caso da ligação rígida, faria pouca diferença; já no caso da flexível, há uma diferença maior (24,782 mrad, 5%). Os parâmetros da curva C3 com modelo *RBL*, os coeficientes  $\alpha_i$  das Eqs. 2.66 e 2.67 são obtidos da mesma forma que para a curva C2, chegando-se aos valores:



$$\kappa_A = 17,67\% \quad \kappa_p = 7,32\% \quad \alpha_1 = 0,4962 \quad \alpha_2 = 0,2811 \quad \alpha_3 = 0,2227 \quad \beta_L = 0,638$$

Por meio dos parâmetros ( $\beta_L$  &  $\kappa_p$ ), encontram-se as demais grandezas com o mesmo processo adotado para a ligação D2, cujos valores arredondados estão incluídos na Tab. 8.12. Por simplicidade, as curvas  $R_k$ - $\theta$  e  $M$ - $\theta$  dessa ligação estão representadas nas Figs. 8.25(a-b) também. Constata-se que essa ligação é classificada pelo Eurocode 3 (1992) ou por Bjorhovde *et al.* (1990) como semirrígida. Ou seja, por causa do aumento de dimensões, essa união deixa de ser do tipo flexível. Veja-se que isso é bastante razoável quando se consideram as dimensões do perfil e da própria ligação (detalhe).

Na tabela 8.14 são listados os resultados no instante pré-colapso dessa estrutura. As trajetórias de equilíbrio são ilustradas na Fig. 8.27. Conclui-se que, apesar de se modificar a rigidez da ligação, os fatores de cargas limite, incluindo ou não o esforço horizontal, são praticamente os mesmos da Tab. 8.13.

Entretanto, as trajetórias de equilíbrio se mostram mais inclinadas, atestando maior deslocamento horizontal e rotação das ligações também. Na figura 8.25(b) marcam-se os pontos da curva  $M$ - $\theta$  análoga D3, empregados na análise por *PPLANAVA*.

Existem pequenos desvios entre o momento da ligação e o do EF, também, sendo o maior desvio  $dM = 28,4$  kNcm (0,29% do momento no EF), que é desprezível.

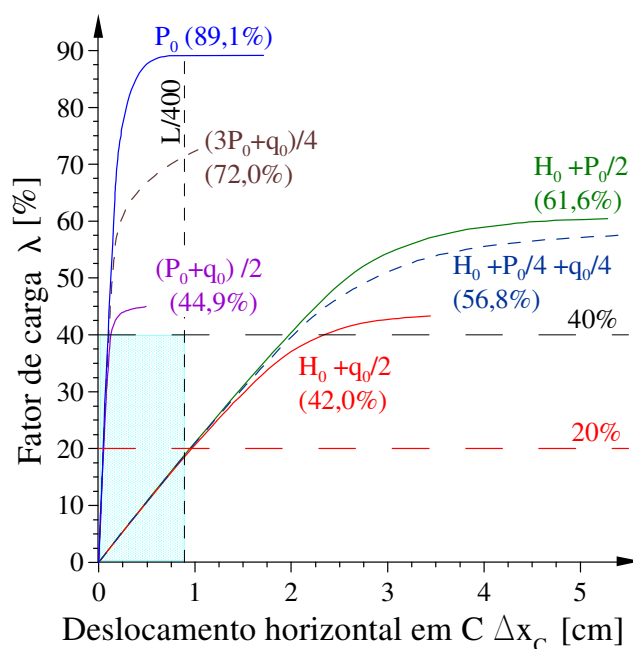
Outro aspecto interessante é verificar quais seriam as respostas produzidas pela ligação flexível não linear C3 (a curva original) mesmo que essa fosse inadequada ao perfil supra (portal CZ).

**Tabela 8.14 Portal com ligação não linear flexível D3.**

Cargas aplicadas	Fator de carga [%]		Ligações: momentos e rotações [kNcm]				Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]	
	$\lambda_y$	$\lambda_c$	$M_C$	$-M_D$	$\theta_C$	$-\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
<sup>(1)</sup> Vertical										
– $P_0$	66,0	89,0	-1213	1159	-0,633	0,604	1331	1339	774	707
– $(P_0+q_0)/2$	40,6	44,9	7485	7616	4,639	4,743	673	674	-3505	4926
– $(3P_0+q_0)/4$	28,1	72,5	2771	3681	1,583	2,156	1086	1089	-327	3185
H $P_0/2$	36,6	60,4	-9357	8946	-6,283	5,889	419	487	9975	9351
H $q_0/2$	24,5	43,2	1570	10731	0,825	7,813	307	341	6157	10316
H $(P_0+q_0)/4$	31,3	57,4	-6488	9636	-3,883	6,567	400	461	10042	9613

Cargas aplicadas	Deslocamentos		Momentos [kNm]	Fatias plásticas [ ]
	$\Delta x_C$	$-\Delta y_E$		
<sup>(1)</sup> Vertical			$M_E$	
– $P_0$	0,732	0,437	–	5724
– $(P_0+q_0)/2$	0,739	4,264	37482	4033
– $(3P_0+q_0)/4$	1,085	2,138	33053	4074
H $P_0/2$	5,287	0,266	–	1809
H $q_0/2$	3,345	3,196	37225	3205
H $(P_0+q_0)/4$	5,315	1,620	27413	1887

Notas: 1) Carga horizontal; 2) resultados no estado pré-colapso.



**Figura 8.27** Trajetórias do portal com ligação flexível não linear D3.

Na tabela 8.15 apresentam-se os resultados que comprovam uma pequena perda de capacidade, além de deslocamentos e momentos maiores. Isso pode justificar o emprego da aproximação D3, que parece ser mais coerente e vantajosa do que C3.

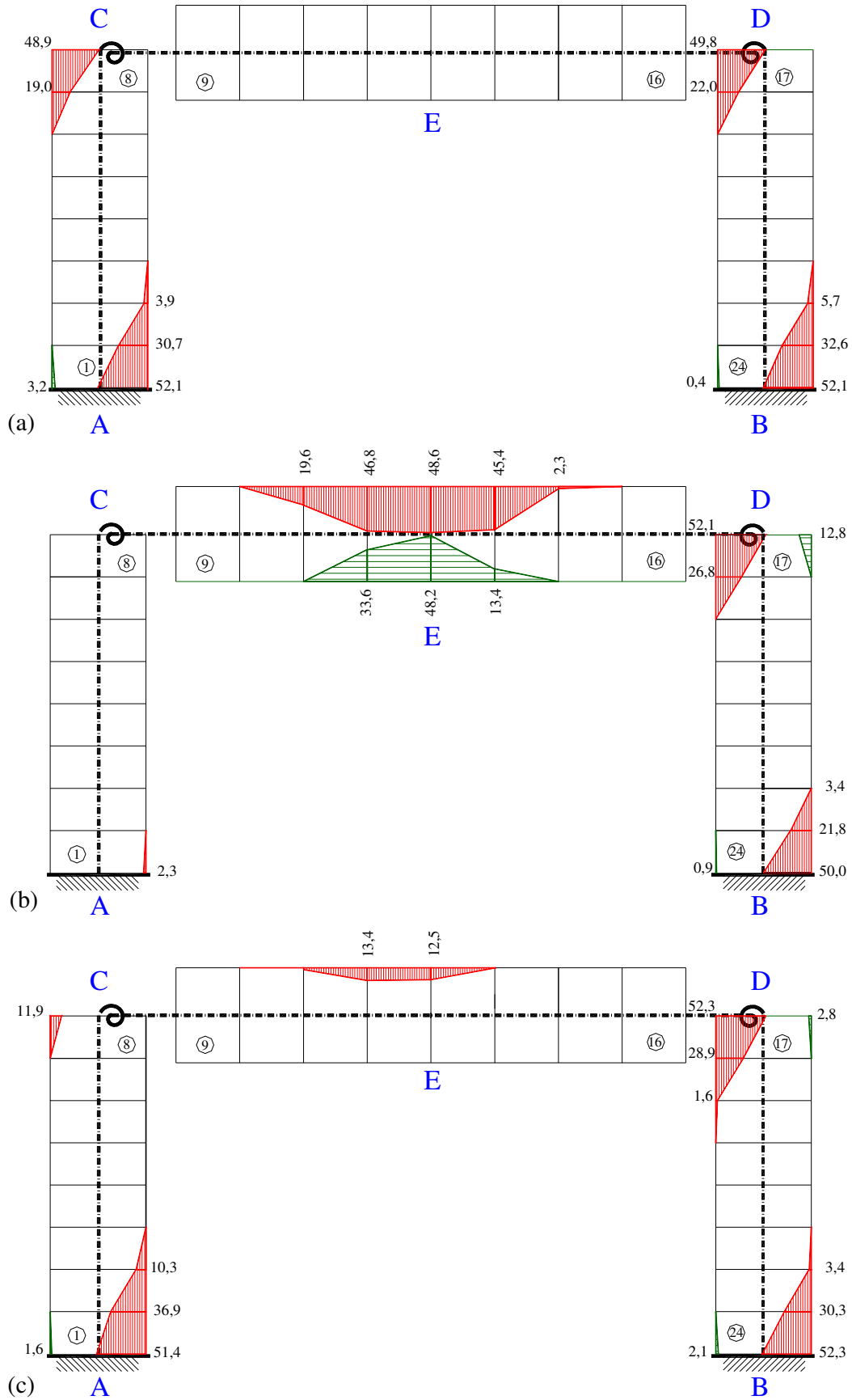
Finalizando este exemplo, na Fig. 8.28 representam-se as zonas plásticas do portal com a ligação D3, na qual a maior diferença é a presença levemente maior de fatias plásticas na viga e nas bases, com uma ínfima redução no topo das colunas também.

**Tabela 8.15** Portal com ligação não linear flexível C3.

Cargas aplicadas	Fator de carga [%]		Momentos [kNcm]		Rotações [mrad]		Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]	
	$\lambda_y$	$\lambda_c$	$M_C$	$-M_D$	$\theta_C$	$\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
<sup>(1)</sup> Vertical										
– $P_0$	66,0	86,9	-1271	1249	-2,726	-2,678	1299	1308	1164	1097
– $(P_0+q_0)/2$	26,1	41,9	4387	4843	11,350	-13,060	628	629	-2006	2732
– $(3P_0+q_0)/4$	49,8	76,5	1800	3088	4,153	7,467	1145	1150	260	2745
H $P_0/2$	31,7	50,3	-5836	5807	-17,880	-17,700	355	399	10568	10177
H $q_0/2$	25,6	40,9	524	6790	1,077	-27,430	295	319	8209	10270
H $(P_0+q_0)/4$	29,4	49,8	-5139	6757	-14,300	-27,000	351	396	10656	10272

Cargas aplicadas	Deslocamentos		Momentos [kNm]	Fatias plásticas [ ]
	$\Delta x_C$ [cm]	$-\Delta y_E$ [cm]		
<sup>(1)</sup> Vertical			$M_E$	
– $P_0$	1,123	0,425	–	5461
– $(P_0+q_0)/2$	0,365	3,508	37351	2462
– $(3P_0+q_0)/4$	1,170	2,502	35832	5327
H $P_0/2$	6,680	0,238	–	1303
H $q_0/2$	4,106	3,777	37402	2951
H $(P_0+q_0)/4$	7,701	1,495	24143	1421

Notas: 1) Carga horizontal; 2) resultados no estado pré-colapso.



**Figura 8.28 Zonas plásticas do portal com ligação não linear flexível D3:**  
 (a) carga H +50% de  $P_0$ ; (b) carga H +50% de  $q_0$ ; (c) carga H +25% de  $(P_0+q_0)$ ;  
 (e) convenção: (==) tração, (||) compressão.

## 8.10 COMENTÁRIOS FINAIS

É importante, neste instante, situar um pouco do que foi encontrado, aqui, em relação ao trabalho desenvolvido por Chen & Zhou (1987). Esses pesquisadores trataram do portal com rótulas nas bases mostrado na Fig. 8.3(c) e nesta tese adotaram-se as bases engastadas da Fig. 8.3(a), ambos introduzindo ligações na viga.

Na realidade, dada a flexibilidade da coluna em relação à viga, a plasticidade espalha-se rapidamente por toda a coluna quando submetida à compressão pura. Isso ocorre de tal forma que a carga de flambagem ( $0,951 N_y = 1400$  kN) obtida por aqueles pesquisadores coincide com a deste trabalho ( $0,952 P_0 = 1428$  kN). Isso reafirma as conclusões de Alvarenga (2005) no estudo desse portal (versão AA), em que se constatou que a presença do engaste na base para o portal travado não altera muito a resposta estrutural, isto é, não se pode considerar como um benefício tão significativo.

Confirmou-se, também, que, seja na condição com rótulas daqueles autores, seja com o benefício do engaste, a rotação das ligações continua muito pequena, correspondendo a um comportamento quase linear nesse trecho. Para uma ligação muito flexível, encontraram a carga máxima de flambagem ( $0,917 N_y = 1350$  kN), que é superior à encontrada com CI (+/+) ou s/CI ( $0,832 P_0 = 1256$  kN) e bem maior que a governante ( $0,751 P_0 = 1126$  kN). Isso pode ser imputado à imposição de não deslocabilidade do apoio no topo das colunas do portal original.

Na hipótese de carga  $(P_0+q_0)/2$ , encontrou-se ( $44,9\% q_0 = 126,3$  kN/m), que se aproxima do indicado por Chen & Zhou (1987) ( $46,1\% q_p = 127,3$  kN/m). Esses pesquisadores, porém, empregaram a curvatura das barras gerando a configuração simétrica (+/+), o que foi mostrado não ser a CI limitadora (ou seja, a CI simétrica leva a valores mais altos da carga limite). Por essa razão, algumas conclusões apresentadas no trabalho desses pesquisadores merecem um reestudo ou reavaliação, baseando-se nos novos recursos, o que não é o objetivo com este trabalho.

Ademais, comprovou-se o colapso do ponto E (seção do meio-vão da viga), onde os valores de momentos das hipóteses  $(P_0+q_0)/2$  e  $(H +q_0/2)$  estão próximos do plástico  $M_p = 37624$  kNcm para todas as ligações [por exemplo, D2: (99,47 e 96,2)%, D3: (99,62 e 98,94)%, respectivamente]. Em geral, quando ocorreram esses momentos elevados, a parada do processo de solução foi determinada também, por exceder o esforço cortante máximo que a seção elástica remanescente suporta, segundo o critério de von Mises (1913), indicado nas subseções 3.2.3 e 4.3.1 (Eq. 4.3).

Ao considerar apenas a carga  $P$  atuando, determina-se  $89,0 \leq \lambda_c \leq 89,3\%$ , que corresponde à carga teórica  $1335 \leq P \leq 1340$  kN, do que o coeficiente de comprimento efetivo de flambagem situa-se entre  $0,962 \leq k_{fl} \leq 0,981$  (AISC LRFD, 1993). Deve-se lembrar que, nesse caso,  $\lambda$  é um fator de  $P_0 = 1500$  kN (não fator de  $N_y = 1472,5$  kN). Ao verificar-se o esforço axial que atua propriamente na coluna, encontra-se  $1339 \leq N \leq 1344$  kN, dado ao efeito de portal e secundários. Observe-se que no engaste ( $R_k = \infty$ ), considerando os parâmetros ( $G_A = 0,001$ ;  $G_B = 0,25$ ) nas equações do ábaco de Julian & Lawrence (1959), encontra-se o coeficiente  $k_{fl} = 1,046$  e a carga teórica  $P = 1339,9$  kN máxima, que concorda com os resultados encontrados.

Considerando que a ligação seja qualificada por rígida, a adoção de  $k_{fl} = 1$  (ou seja,  $k_{fl} > 0,981$ ) é favorável à segurança, como já aprovado nas normas em alguns casos (Hajjar *et al.*, 1997). Isso é bastante coerente visto que o efeito secundário é avaliado por  $B_1/B_2$  (ou outras correções de mesma finalidade), que complementa a diferença entre a carga teórica e o esforço axial atuante na barra/EF.

Essas comparações de resultados servem para abalizar os agora encontrados e justificam algumas das conclusões do capítulo seguinte. Deve-se notar que não se preocupou aqui em estabelecer os fatores de combinação das hipóteses individualmente. Tomaram-se três condições de cargas verticais e três de verticais acopladas ao horizontal, com vista a mero estudo acadêmico. No projeto real, em cada uma dessas análises seriam empregadas as cargas fatoradas e se estabeleceria o fator de resistência com base na carga limite obtida. Considerando dessa forma o fator de carga limite final como ( $\lambda_{LIM} = 40\%$ ), deve-se incluir o fator de resistência (0,9) e, assim, a carga calculada de dimensionamento será:  $\lambda \leq 0,9 \lambda_{LIM} \rightarrow \lambda \leq 36\%$ .

O autor espera que esse conjunto de análises, juntamente com os exemplos dos capítulos 5, 6, 7 e 8, possa ser usado como banco de provas por outros pesquisadores no futuro. Ver apêndice A.11 para listagem de alguns resultados anexos no CD.

## 8.11 REFERÊNCIAS

- AISC LRFD (1993), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 2<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.
- Alvarenga, A.R. (2005), “Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço”, Diss. de Mestrado, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Alvarenga, A.R. (2008), “Estudos sobre ligações com análise avançada através da zona plástica em pórticos planos de aço”, Ex. de Qualificação, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Alvarenga R.A. & Silveira, R.A.M (2005), “Aspectos importantes na análise avançada de colunas de aço”, *Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering* – CILAMCE, Guarapari / ES.
- Bjorhovde, R., Colson, A. & Brozzetti, J. (1990), “Classification system for beam-to-column connections”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 11, pp. 3059-3076.
- Chan, S.L. & Chui, P.P.T. (2000), *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*, Elsevier, Oxford, Reino Unido.
- Chen, W.F. & Zhou, S.P. (1987), “Inelastic analysis of steel braced frames with flexible joints”, *Int. Jor. Solid and Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 631-649.
- Chwalla, E. (1938), “Die stabilitaet lotrecht belasteter rechteckrahmen”, *Dier Bauingenieur*, Vol. 19, pp. 69.
- Eurocode 3 (1992), *EUROCODE 3 Design of steel structures*, Part 1, European Committee for Standardization, ENV 1993 –1–1 E, Bruxelas.
- Galambos, T.V. (1982), *Structural members and frames*, Dept. Civil Engineering, Un. Minnesota, Minneapolis.
- Galambos, T.V. & Ketter, R.L. (1959), “Columns under combined bending and thrust”, *ASCE J. Eng. Mechanics*, Vol. 85, No. 2, pp. 1-30.
- Hajjar, J.F., & outros (1997), *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for American steel design*, ASCE, Nova Iorque.
- Julian, O.G. & Lawrence, L.S. (1959), *Notes on J and L nomographs for determination of effective lengths*. Reportagem não publicada de propriedade de Jackson & Moreland Eng. Boston, Massachusetts.
- Kishi, N. & Chen, W.F. (1987), “Moment-rotation relations of semi-rigid connections with angles”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 7, pp. 1813-1834.
- Lu, L.W. (1963), “Stability of frames under primary bending moments”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 89, No. 3, pp. 35-62.
- Machado, F.C.S. (2005), “Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos”, Diss. de Mestrado, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Meili, Z. (1994), “Principles and practice of similarity system theory”, *Intern. Journ. of General Systems*, Vol. 23, No. 1, pp. 39-48.
- Von Mises, R.E. (1913), em Hill, R. (1950), *The mathematical theory of plasticity*, Oxford, Clarendon Press.

# 9

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
9.1	Introdução	395
9.2	Conclusões .....	395
9.3	O conceito estrutural	405
9.4	Aspectos críticos .....	416
9.5	Continuação da pesquisa	419
9.6	Referências .....	420

## 9.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentam-se as conclusões, as críticas, as possíveis melhorias e a continuação deste trabalho de pesquisa.

Na seção 9.2, procuram-se sintetizar partes já apresentadas, ao longo deste e de outros trabalhos referentes a esta pesquisa. Na seção posterior, aborda-se a parte mais importante deste trabalho, o fechamento sobre o conceito estrutural.

Os limites e as falhas naturais contidos nas análises e valores aqui indicados, ou mesmo em outras fontes, são inseridos na seção 9.4. Em seguida se faz uma visão do futuro, incluindo uma perspectiva dos novos trabalhos e a busca de inserir as novas contribuições na realidade do projeto e nas normas.

## 9.2 CONCLUSÕES

Para manter-se uma relação mais precisa, entre as contribuições desta tese e as conclusões correspondentes, subdivide-se esta seção nos seguintes tópicos:

- a. *integração iterativa do esforço axial (IIEA)*;
- b. elemento finito com ligação;
- c. *controle do deslocamento generalizado (CGD)*;
- d. modelo de curva  $M-\theta$  com *rigidez bilinear (RBL)*; e
- e. *Análise Avançada* com ligações.

### 9.2.1 INTEGRAÇÃO ITERATIVA DO ESFORÇO AXIAL (IIEA)

Embora essa contribuição tenha nascido no trabalho de dissertação do autor (Alvarenga, 2005), esse processo iterativo foi reestudado, fundamentado e conceitos foram expandidos (Alvarenga, 2008; Alvarenga & Silveira, 2008c). A *IIEA* provou ser um instrumento de valia na obtenção de resultados coerentes e de qualidade.

Identificou-se que os efeitos causadores da *IIEA* se fundamentam na plasticidade (das fatias) que retira do sistema de equações e, portanto, do equilíbrio uma parcela das tensões acima do escoamento. Essa causa foi separada dos efeitos da excentricidade (que não devem provocar a *IIEA*), tratados na subseção posterior.

As variações do esforço axial provocadas pela excentricidade (variação do  $y_{CGP}$  abordada na subseção 3.6.3) são corrigidas pela média final das deformações médias, antes da plasticidade, e a *IIEA* entra apenas para ajustar os valores à média. Portanto, se



não houver plasticidade na iteração; mas houver a ação da excentricidade, a *IIEA* corrige ambos os esforços das seções dos nós pela média.

Os últimos ajustes realizados na *IIEA* permitiram atingir valores mais adequados no caso do colapso por flexão (o que antes a *IIEA* provocava um término prematuro ou antecipado) e, mais propriamente, determinar o colapso (“overflow”) pelo fato de todas as fatias estarem plásticas ou não haver meios de se realizar a *IIEA*. Alguns exemplos de processos inelásticos com caminhamento após a ultrapassagem da carga limite comprovaram isso (por exemplo, o portal de Chan & Chui, 2000). Não se descarta, todavia, que no futuro outras melhorias possam surgir.

Nos casos em que a *IIEA* não convergiu, comprovou-se, posteriormente, o que realmente havia ocorrido:

- a. grandes deslocamentos por flambagem, tipo salto dinâmico, mostrado na Fig. 4.4(b), que geraram esforços incompatíveis;
- b. seção com propriedades já próximas dos limites estabelecidos (inércia: 0,1%  $I_z$  original, e/ou área: 0,01%  $A_g$  bruta); e
- c. colapso por cisalhamento da seção [ver subseções 3.2.3 (e) e 4.3.1 Eq. 4.3].

O número de iterações gastas na *IIEA* reduziu bastante, manteve-se o mínimo de 2 ciclos, mas em nenhum caso paralisou por chegar em 100 iterações (limite adotado), ocorrendo: ou a solução, ou detectado o colapso da seção. Quando a *IIEA* empregou o método de Newton como solução os processos gastaram, no máximo, entre 15 e 20 iterações para convergir. Isso acelerou o processo de finalização (chegada à carga limite) e reduziu o tempo de processamento. Ou seja, pontos anteriores de parada de processamento sem convergência na *IIEA* deixaram de existir.

Foi prevista a situação especial em que a *IIEA* não encontrando um intervalo de solução para achar a deformação de correção, empregaria uma *pesquisa de extremos*. Essa ideia não teve sucesso, pois, quando se chega a esse ponto (de aplicá-la) a seção já está no limite (colapso), ou seja, não há como realizar qualquer ajuste pela *IIEA*. Prosseguindo, com o estado da seção sem o ajuste, o colapso é imediato. Assim, essa tarefa não trouxe qualquer benefício.

### 9.2.2 ELEMENTO FINITO COM LIGAÇÃO

Sobre este tópico existem várias considerações a fazer. Primeiramente, indicar o sucesso de nova matriz de rigidez do EF com o uso de propriedades médias mais calibradas, baseadas no trabalho de Chen *et al.* (1996), o que provou ser mais eficiente (rápido) e coerente do que o processo anterior com médias aritméticas simples.

As contribuições relativas ao caminho do CG plástico da subseção 4.5.4, com a correção dos efeitos da aplicação da carga axial e também da curvatura, não foram muito exploradas neste trabalho do ponto de vista do EF com ligação. Essa parte tem aplicação quando o EF de ligação está sujeito, também, à carga axial (bases de colunas, por exemplo). Em certos limites, porém, isso não impediu que fossem obtidos bons resultados, e constitui uma etapa para o futuro da pesquisa.

A formulação do EF com ligação provou-se capaz de obter resultados excelentes em nível de regime elástico e de bons para ótimos em regime inelástico. Dadas as diferenças de abordagem dos parâmetros das curvas de ligações, ficou evidente que há ainda pontos de ajuste nos dados, que interferiram em alguns resultados. Há casos de divergências e falhas numéricas ainda por analisar e obter alternativas de solução.

A adoção do ângulo de giro da ligação avaliado pelo método *S* (simples) mostrou-se bastante estável em várias soluções. O método *ME* também conseguiu bons resultados, embora não tenha sido adotado no capítulo 8 e mereça outros estudos. O método *XX* apresentou os resultados piores quando se teve a compressão e a plasticidade conjugadas, contudo serviu para entender como se comporta a ligação na formulação, bem como o significado e as necessidades do método *ME*.

Ainda assim, no caso de carregamentos que combinam esforços horizontais e verticais, aconteceu pequena diferença entre os momentos avaliados com o método *S*, e o obtido no EF. Todavia, essas diferenças foram de pequeno valor relativo. Presume-se que a introdução de cargas horizontais, combinadas com as verticais na viga, leva às diferenças de ajustes do ângulo de giro da ligação ( $\theta$ ), pois ele é determinado nas primeiras iterações (de cada passo) e fica estável daí para frente (não se modifica significativamente), enquanto o esforço no EF é corrigido até convergir. Então, mesmo que o método *S* procure acompanhar essa relação ( $dM/R_k$ ), a rigidez  $R_k$  fica quase fixa, embora a grandeza  $\eta$  esteja variando (por exemplo, com a plasticidade por meio de  $I_z$ ). [Para melhoria do método *S*, deve-se inserir o estiramento  $\xi$  como fator da Eq. 4.35 no futuro (ver apêndice A.5)].

Essa é uma indicação de que o método *ME* pode ter valia posterior. Como nos casos de viga estudados, em geral, os esforços axiais são pequenos, a influência do alongamento no cálculo do ângulo de giro próprio da ligação foi pequeno. Nos modelos do EF com ligação em bases de colunas, encontraram-se maiores diferenças entre esses métodos (ver subseção 7.6.2).

O parâmetro  $\eta$  de *giro próprio da ligação* (ou *semiflexibilidade nodal*) indica que há uma relação de rigidez elevada, ou um comportamento de ligação do tipo rígido, quando seu valor é inferior a 0,25, e um comportamento com tendências de flexível, quando supera 0,475; quando a viga tem rigidez superior à coluna ( $G > 1$ ), embora esses limites possam sofrer variações. O  $\eta$  é outro conceito novo introduzido neste trabalho, e espera-se que esse parâmetro possa ter maior emprego no futuro: um estudo mais profundo, com outras relações de rigidez nodal [(G), Eq. 8.1] e da sua influência.

Embora pudesse fazer sentido existir apenas um único  $\eta$ , a exigência de uma participação diferente no processo de solução levou aos dois tipos: um global e outro local ( $\eta_{EF}$ ). É o  $\eta$  global, todavia, o que tem maior importância em engenharia. Essas grandezas também variam quando a plasticidade atinge o EF com ligação, o que é outra novidade em relação aos parâmetros das ligações tradicionais. A determinação de que essas relações são separadas e a avaliação do efeito da plasticidade nelas constituiu uma etapa difícil de ser vencida. Natural para uma formulação totalmente nova e sobre a qual nada existia como guia.

O emprego de diversos modelos [lineares; bilineares; trilineares; de Frye & Morris, 1975; de Richard & Abbott, 1975; de Kishi & Chen, 1987; além do experimental (tabelas) e do proposto *RBL*] comprovou que o controle das curvas  $M-\theta$  e  $R_k-\theta$  funcionou corretamente. Foi visto que os pontos empregados por *PPLANAVA* faziam efetivamente parte das curvas descritas (ver subseção 7.2.3).

Ficaram evidenciados a tarefa de correção da curvatura e o ajuste da curva  $M-\theta$  não linear (processo indicado na subseção 4.5.4) pelos exemplos da seção 7.5.

Houve casos nos quais o colapso indicado *a priori* era superior às expectativas, nos quais apareceram desvios de convergência nos momentos da ligação, indicando que os resultados não eram adequados. Estudos posteriores mostraram que refinamentos de passos levam a resultados mais corretos e conseguiu-se finalizar tais problemas com sucesso. Uma vez que se determina o colapso, verifica-se que o estado de degradação da estrutura não permite continuar a solução, salvo com redução da carga.

Entretanto, como a meta do estudo desenvolvido no capítulo 8 era avaliar o comportamento da estabilidade dos portais (colunas), não se pode explorar a plasticidade no EF com ligação. A coluna é que sofreu plasticidade, tanto no portal de Chen & Zhou (1987) modificado CZ no qual a viga é bastante rígida, como na versão AA (Alvarenga, 2005) que é bastante flexível. Houve outros exemplos, que não foram selecionados para fazer parte do corpo desta tese, em que ocorreu a plasticidade no EF com ligação e sua interação com o restante da estrutura, obtendo-se bons resultados.

Destaque-se que não se constataram desvios numéricos por causa da presença de pequenas rotações e elevadas rigidezes nas soluções dos exemplos. Isso mostra que por meio das unidades escolhidas [kN, cm, rad] e do processo de solução adotado para controlar o caminho na curva  $M-\theta$ , conseguiu-se manter a coerência de resultados.

### **9.2.3 CONTROLE DO DESLOCAMENTO GENERALIZADO (CGD)**

Como visto, calibrando adequadamente as cargas, pode-se fazer um controle incremental eficiente com qualquer dos três processos tratados na subseção 4.3.2. Foram empregados os controles de deslocamento selecionado e generalizado em vários casos, com excelentes resultados no capítulo 7. Não houve muitas oportunidades para empregá-los no capítulo 8, pois cada hipótese tinha um início de escoamento diferente e, a partir daí, o processo numérico exige um passo menor e eficiente de incremento. Ou seja, seria necessário processar duas vezes cada portal, sem justificativa.

Uma parte importante e que justificou o desenvolvimento do controle dos deslocamentos foi ultrapassar o ponto limite de carga e prosseguir na trajetória descendente. Assim, pode-se avaliar como se propaga a plasticidade após esse ponto e até mesmo verificar o curso descendente ser reduzido por causa do colapso da seção ao cisalhamento, confirmando que o estado de limite de resistência (na parte mais solicitada da estrutura) sucede após a flambagem.

Além disso, o processo automático [que determina o início do escoamento (antiga versão *ELAST*) e o prosseguimento com refinamento de passos até o colapso (versão *PLAST*), que se fundem num só corpo do programa computacional *PPLANAVA*] mostrou ser bastante eficiente e confiável.

O processo incremental, com crescimento controlado, permitiu ultrapassar mais facilmente pontos de mudança de curvatura na presença de plasticidade, quando o EF ficaria instável entre duas ou mais configurações (Alvarenga & Silveira, 2006c).

#### 9.2.4 MODELO DE CURVA M- $\theta$ COM RIGIDEZ BILINEAR (RBL)

O modelo de curva M- $\theta$  com *Rigidez Bilinear (RBL)* proposto mostrou-se plenamente exequível. Apresenta, em geral, algumas diferenças em relação às curvas experimentais que supõe aproximar, mas pode ser ajustado com facilidade. Esse modelo permite, também, alguns empregos imediatos, inclusive como forma não linear das curvas trilineares do Eurocode 3 (1992), vistos na seção 2.8.

Considerando que o projetista tem meios de determinar várias de suas grandezas com alguma facilidade ( $M_u$ ,  $R_{ki}$ ,  $R_{kp}$ ) e que se disponha de recomendações sobre os parâmetros de forma [ $(\beta_L$  &  $\kappa_p)$  por tabelas, valores médios, expressões estimativas, etc.], torna-se muito fácil e expedito construir a curva e empregá-la.

Na ótica de simplicidade, confiabilidade e representatividade dos resultados (ver subseção 7.5.2), o modelo *RBL* correspondeu às exigências. Da mesma forma que os outros modelos existentes, têm também suas desvantagens – por exemplo, a curva não é tão suave como as dos modelos potenciais, não tem a precisão das exponenciais, etc.

No capítulo anterior, mostrou-se como fazer aproximações por meio de analogia (Meili, 1994). Essa é mais uma contribuição (ou ferramenta) que pode ser empregada pelo projetista. Note-se que, mesmo empregando outras curvas M- $\theta$ , o projetista passa a ter alternativas para estimar curvas novas, similares às conhecidas. Todavia, almejando-se construir um conjunto de curvas parametrizadas, baseado em dados experimentais existentes, de forma que sua utilização no meio não acadêmico seja efetiva, cabe, evidentemente, um trabalho complementar numérico e/ou experimental posterior comprovando a validade dessa proposta, avaliar eventuais níveis de discrepâncias (desvios) e melhorias.

Outro aspecto relevante é que por essa forma de analogia permitiu-se comprovar o ganho de propriedades (rigidez, resistência) com o simples aumento do tamanho da ligação (isto é, dada à altura da viga). Esse benefício pode ter sido muitas vezes negligenciado, ou pior, levado à consideração de momentos nas colunas menores que os reais. Conjugado a isso, alerta-se para a modificação da rotação última da ligação que se reduz com o aumento da sua dimensão. Esse fato pode transformar uma ligação capaz em uma que é apenas resistente (ver Fig. 2.10) e, também, uma ligação flexível numa semirrígida, como ocorreu na subseção 8.9.2.

O Eurocode 3 (2000) não mais utiliza a nomenclatura empregada no Capítulo 2, o que, de certa forma, deixa de elucidar o aspecto acima (o fato de a ligação ser capaz) e

isso pode levar o projetista a omissões (preocupar-se com a resistência em detrimento da capacidade de rotação, ver apêndice A.2). Note-se que a rotação máxima das ligações ensaiadas C2 e C3 adotadas por Chan & Chui (2000) foi estimada como 50 mrad, reduzindo-se à metade (26 mrad) nas ligações semelhantes (D2 e D3) quando a altura da viga dobrou. Essa é uma relação que não é conhecida, em geral, pelo projetista.

A curva *RBL* impede que se possa estar agindo contrariamente à segurança:

- a. ao se adotar uma curva  $M-\theta$  extensa usando modelos como os polinomiais, exponenciais, potenciais; nos quais não se estabelece o limite de validade, ou seja, o seu ponto final (rotação  $\theta_u$ ); e, também,
- b. nos casos quando o momento último não é alcançado (assíntota), como nas curvas potenciais de Kishi & Chen (1987) e similares.

Há um caminho longo para tornar essa curva *RBL* adequada para projetos, contudo, acredita-se que essa contribuição preencherá razoavelmente uma lacuna de informações e no futuro seja estendida ou conjugada ao método dos componentes. Deve-se indicar que, nessa linha, os valores das curvas  $M-\theta$  empregados em cada etapa do processo de solução permitem ao projetista identificar, também, o estado da ligação e os efeitos dos componentes correlacionados àquelas rotações ou momentos. Por exemplo, determina-se que no início do escoamento (primeira zona plástica) haja uma dada rotação e com ela verifica-se que a ligação está em regime elástico ou que as deformações já estão atuando de forma mais grave em algum componente, isso definirá se a ligação atende às exigências do estado limite de serviço.

### 9.2.5 ANÁLISE AVANÇADA INCLUINDO LIGAÇÕES

Esse é o tema do trabalho, e no capítulo 8 procurou-se corresponder a essas expectativas, embora como haja indicado Chen & Zhou (1987), nesse portal as ligações sofrem rotações muito pequenas, de tal forma que não aparece muito os efeitos da semirrigidez, tampouco da plasticidade na ligação. Ou seja, para que haja plasticidade no EF com ligação, a coluna deve ser mais rígida e resistente que a viga, desaparecendo o efeito da instabilidade, exceto quando atua uma carga vertical muito elevada, o que também tornaria o exemplo pouco real e improvável de ser reproduzido na prática (realizar ensaios de laboratório, por exemplo).

Isso pode servir de base para que se pesquise e se desenvolvam novos exemplos nos quais seja verificada maior participação da semirrigidez da ligação no problema estrutural, até mesmo, nas bases das colunas, sobre as quais também se dispõe hoje de poucos resultados ou análises.

Da análise do portal de Chen & Zhou (1987) modificado (CZ), no qual a viga é mais rígida que as colunas [isto é, a rigidez nodal  $G$  (Eq. 8.1)  $\geq 1$ ], as seguintes conclusões podem ser destacadas:

- a. em geral, as ligações com semiflexibilidade  $\eta \leq 0,25$  se comportaram como *rígidas*: aproximadamente a mesma carga limite (para todos  $\eta$  do intervalo), embora com respostas diferentes (deslocamentos e esforços). Nesse caso, a carga limite não é influenciada pela forma da curvatura inicial (CI) para cada  $\eta$ , embora as respostas sejam modificadas; e
- b. para as demais ligações, verificou-se o comportamento mais flexível, a influência da CI é maior e, nesse caso, todas as respostas se modificaram (cargas limites, deslocamentos, esforços, etc.) para cada semiflexibilidade  $\eta$  e para cada imperfeição combinada (FP+CI).

Comprovou-se, também, que quando a viga é mais flexível que as colunas (ou seja, o parâmetro  $G < 1$ ) que é o caso da seção 8.7, o *comportamento rígido* não pode ser estabelecido, e para cada valor de  $\eta$  se tem uma resposta diferente e uma carga limite também. Nessa condição, tanto a forma da CI como a ligação ( $\eta$ ) interferem diretamente nos resultados produzidos, principalmente, na forma e na distribuição da plasticidade.

O roteiro de cálculo para aplicação da *Análise Avançada*, já apresentado no trabalho anterior (Alvarenga, 2005), deve ser alterado para incluir, agora, a ligação. Em linhas gerais, o analista deve desenvolver os seguintes passos:

- a. fazer o lançamento da estrutura e esboçar a concepção estrutural;
- b. realizar um cálculo preliminar elástico de primeira ordem para uma visão inicial do comportamento estrutural, determinar onde estão as maiores necessidades de rigidez e inércia, proposição e compatibilização das seções, avaliação de pontos de esforços elevados ou movimentação excessiva;
- c. executar o cálculo elástico de segunda ordem, avaliando o estado de uso, determinar ligações e tipos de comportamento (rígido, flexível) esperados, obter uma configuração deslocada básica, avaliando da necessidade de uma análise

- inelástica ou não. Se os valores de tensões não atingirem o escoamento da seção de nenhuma forma, pode-se seguir para uma segunda etapa (passo g), porém, agora, introduzindo as imperfeições baseando-se nessa geometria deformada. Se as deformações forem pequenas e não esclarecerem uma direção adequada das CIs, realizar um novo cálculo impondo: pequenas cargas horizontais (nacionais), algo em torno de 2% do vertical (quando não há vento) ou a geometria imperfeita com o fora de prumo apenas;
- d. quando comprovado que os esforços estão elevados, que ocorrerá escoamento de seções sob cargas limite, proceder à análise inelástica de segunda ordem, incluindo as TRs; avaliar as ligações de forma linear (inicialmente, por exemplo, usando  $\eta = 0,25$  e  $\eta = 0,475$ , para as consideradas rígidas e flexíveis, respectivamente) e obter a deformada básica inelástica da estrutura sem imperfeições geométricas, para dado carregamento;
  - e. definir a forma das imperfeições FP+CI, baseando-se na deformada inelástica. Se isso não for possível (ou não ficar muito claro), introduzir o fora de prumo apenas no modelo, reprocessar a análise inelástica e trabalhar com essa nova deformada então obtida. No caso das colunas ligadas por rótulas (colunas escoras), a CI pode ser colocada em qualquer direção, todavia, deve-se preferir aquela em que o esforço horizontal (de vento, por exemplo) provoque o aumento do seu arqueamento, se existir essa condição. Observar o comportamento *dissimilar* (no caso de estruturas e cargas simétricas) e os comentários apresentados na seção 9.3 seguinte sobre a disposição das imperfeições iniciais;
  - f. realizar a *Análise Avançada*, comprovar se a deformada final correspondeu à forma das imperfeições geométricas iniciais. Se isso ocorreu, o modelo está correto. Caso contrário, corrigir a geometria imperfeita para que espelhe (reproduza aproximadamente) essa deformada;
  - g. ajustar perfis e ligações conforme o atendimento às condições de projeto (uniformizar perfis, materiais, ligações, reduzir movimentação, etc.), fazendo a otimização do processo de solução, retornando aos passos (d, e & f) quando necessário;
  - h. fazer isso para cada hipótese de carregamento, determinando, assim, o estado limite de dimensionamento de todo o conjunto;



- i. avaliar as ligações quanto aos seus componentes (parafusos, soldas, chapas, cantoneiras), determinando se os parâmetros ( $M_u$ ,  $\theta_u$ ,  $R_{ki}$ ) correspondem aos obtidos numericamente, e avaliar a necessidade fazer ajustes e revisões quando houver modificações maiores (por exemplo, redução de propriedades em 5%);
- j. tendo toda a estrutura com ligações sido aprovada pela *Análise Avançada*, ou seja, em cada hipótese (composta de carregamentos combinados de esforços de cálculo) se verificou que a sua aplicação representa 90% (ou menos) da carga limite obtida, faz-se a verificação final de estado limite de uso;
- k. não atendidas essas condições retorna-se aos passos anteriores; e
- l. atendidas todas as condições, segue-se para a avaliação dos componentes individuais das ligações, detalhes nos outros planos, e verificações complementares (painéis, enrijecedores, efeitos locais, etc.).

Outro aspecto importante para desenvolver a *Análise Avançada* está relacionado ao suporte gráfico. Isso significa fornecer meios para que o projetista possa avaliar os seguintes pontos:

- a. a ordem de surgimento, a distribuição e a forma das zonas plásticas;
- b. o comportamento da curva  $M-\theta$  empregada, em cada passo da solução;
- c. a deformada da estrutura no colapso, majorando os deslocamentos (com fator de escala  $FE = 50$  ou  $100$ , por exemplo);
- d. a modificação do comportamento de nós de vigas e colunas, provocada pela extensão da plasticidade (por exemplo, casos de bifurcação);
- e. identificar as rotações elevadas, rotação de contato da viga com a coluna, ou pontos fora da curva (nos quais a solução deixa de ser válida);
- f. a configuração geométrica inicial, para garantir que as imperfeições estejam dispostas de forma adequada; e
- g. visualizar o sentido de giro da ligação para não empregar curvas  $M-\theta$  inadequadas (caso de ligações que não são simétricas, por exemplo), etc.

Por fim, deve-se cuidar para que as tensões residuais sejam compatíveis com o material empregado. Supondo-se que, ao invés de laminados, o portal *CZ* do capítulo 8 fosse de perfis soldados, a plasticidade apareceria de forma antecipada, seria mais acentuada e com distribuição diferente.

### 9.3 O CONCEITO ESTRUTURAL

Esse é o maior objetivo com esta tese, por isso algumas outras análises e exemplos foram deixados para trabalhos futuros, bem como, separou-se esta parte das conclusões mais simples já apresentadas.

A principal questão que gerou esta tese foi: pode o *Teorema da Configuração Inicial (TCI)* ser válido quando se tem a plasticidade, a ligação e outros efeitos geométricos não lineares associados combinados?

Para responder essa questão, deve-se primeiro reler a sua ideia básica:

*Deseja-se definir a existência de um estado de flambagem inelástica, para o qual todas as configurações iniciais convergem; estado esse que independe da trajetória (histórico), e as diferenças encontradas nos fatores de cargas de colapso e esforços correspondentes, representam apenas uma medida de como a configuração inicial favorece ou não a estrutura atingir esse estado final (Alvarenga, 2005).*

E lembrar a sua proposição:

*A configuração de flambagem inelástica de uma estrutura com colunas robustas sujeita a um dado carregamento, corresponde a uma configuração geométrica com imperfeições iniciais de aspecto similar, na qual é necessário o menor o fator de carga  $\lambda$  para atingir o colapso que corresponde ao aparecimento de singularidade na MRG (Alvarenga, 2005).*

Foram realizadas muitas análises e estudos, desde sua proposição até as conclusões agora apresentadas. Essas informações foram agrupadas nos tópicos:

- a. antecedentes dessa proposta;
- b. comportamentos que justificam esse teorema;
- c. recomendações da atual pesquisa; e
- d. exemplo de demonstração.

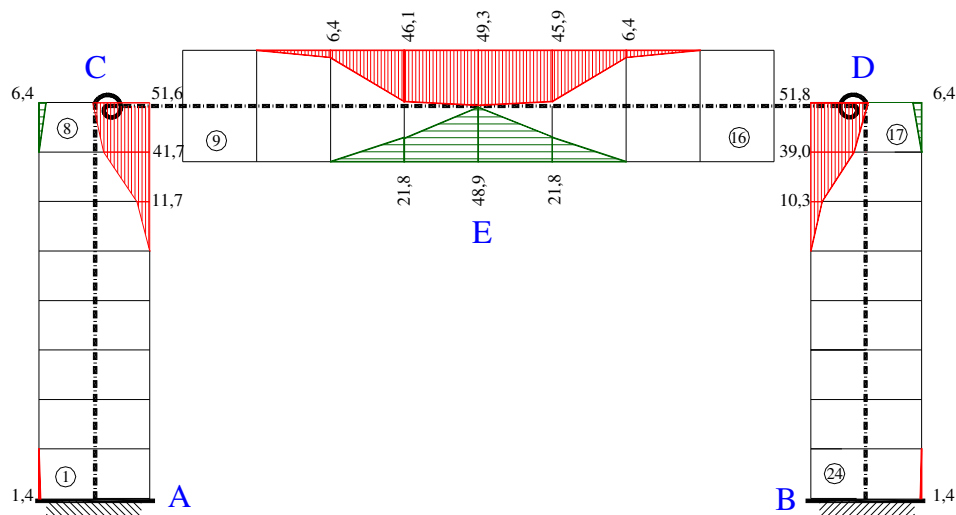
#### 9.2.1 ANTECEDENTES DESSA PROPOSTA

Informa-se que essa proposta de teorema segue as ideias de outros pesquisadores também (isto é, possui antecedente). Primeiramente, Chwalla (1938) e as *curvas de colunas defletidas* (“CDC, column deflection curves”), que são introduzidas no cálculo plástico por Higgins *et al.* (1971). Repare que as CDCs são as deformadas das colunas na flambagem inelástica construídas conhecendo-se os esforços que nela atuam.

Portanto, se a forma da coluna inicial seguir aproximadamente sua deformada, a carga que provocará a flambagem será menor (reduz-se o fator de carga), ou seja, o teorema proposto é um corolário da ideia desse pesquisador. Note-se que Chwalla (1938) apresentou um estudo sobre a flambagem com *galeio lateral* (“sidesway”), indicando que “a presença de momentos primários (cargas nas vigas) não alteram as características de flambagem do pórtico (deformada), mas as cargas aplicadas podem ser levemente menores que as cargas críticas aplicadas no topo das colunas”. Masur *et al.* (1961) refizeram o trabalho desse pesquisador e chegaram às mesmas conclusões. Como se verifica, esse é um precedente importante.

Masur foi pioneiro ao fazer emprego da MRG para análises elásticas de portais e chegar à sua carga crítica máxima e mínima. McMinn (1961) propõe uma forma de se determinar a carga crítica de pórticos planos. Lu (1963) realizou investigações experimentais com pórticos planos e concluiu que a carga crítica de portais simétricos ( $N_{crit} \approx 0,1935 N_e$ ,  $k_{fl} \approx 2,27$ ) modifica-se bastante quando o carregamento é aplicado na viga, e não no topo da coluna. Isso foi verificado também aqui, pois a carga de flambagem do portal foi reduzida consideravelmente [no caso  $(3P_0+q_0)/4$ , por exemplo]. Comprovou-se, porém, que a estrutura assimétrica é menos afetada pelos momentos iniciais (com se viu no caso da curvatura inicial) que a simétrica. Além disso, que a carga crítica obtida é bem inferior ( $N_{crit} \approx 0,1094 N_e$ , relação 56,5%, com  $k_{fl} \approx 3,02$ ).

Posteriormente, Chen & Zhou (1987) indicaram que “há uma troca de restrições entre as colunas e a viga, que depende do carregamento aplicado”, o que concorda com a proposta deste trabalho de utilizar a deformada inelástica para cada hipótese de carregamento. Além disso, informaram que, “algumas vezes, a viga transfere as cargas, e a coluna fornece o travamento, e em outras situações acontece o inverso”. Verifica-se, no caso da Fig. 8.28(a), por exemplo, que, embora as colunas tenham 2 ZPs cada, a viga não tem plasticidade e estabiliza as colunas até a flambagem. No caso da Fig. 8.28(b), a plasticidade toma conta da viga e da coluna C-D, mas a coluna A-B mantém o conjunto. Ou seja, estes resultados corroboram com as conclusões desses pesquisadores. Esses pesquisadores informaram, ainda, que, “se o momento último da ligação supera o momento plástico da coluna, a ligação se comporta como rígida” (como verificado), e que a “flexibilidade da ligação não reduz a capacidade de carga do portal”. Aqui aparece uma diferença, pois neste trabalho verificou-se que isso só ocorre quando a semiflexibilidade é  $\eta \leq 0,25$  (ligação rígida).



**Figura 9.1** Zonas plásticas do portal com ligação *midirrígida* e carga  $q_0$ : convenção: (—) tração, (||) compressão.

Deve-se lembrar de que no capítulo 3 indicou-se a possibilidade de formação de um mecanismo plástico de viga, incluindo a coluna, embora a ligação fosse semirrígida. Isso também foi comprovado, como mostra a Fig. 9.1, relativamente ao portal com ligação *midirrígida* somente com carga distribuída  $q_0$ . Observe-se que se a ligação não for resistente ou não tiver uma rotação última adequada (capaz), essa é que se romperá antes da flambagem e da formação de mecanismo [ver subseção 7.5.2, na qual o portal TC2 de Chan & Chui (2000) tem a formação de mecanismo plástico e o colapso da ligação quase simultaneamente].

Clarke *et al.* (1992) realizaram estudos similares aos de Alvarenga (2005), todavia sem cobrir todos os casos, e reconheceram que “é difícil definir recomendações sobre a forma de dispor essas imperfeições deixando isso aos cuidados e experiência do projetista”. Entretanto, recomendaram que “se coloquem as imperfeições da pior forma para a estrutura (se isso for possível)”, sugerindo que “uma alternativa é considerar a forma de flambagem elástica da estrutura sujeita às cargas verticais apenas”. Aqui há duas diferenças em relação ao teorema proposto:

- é importante a formação das zonas plásticas, porque são elas que determinam a deformada inelástica final, ou seja, isso identifica os pontos onde a plasticidade se manifesta modificando o comportamento estrutural; e
- não apenas a carga vertical, mas todo o carregamento é importante, pois para cada carregamento pode-se ter uma deformada limitadora diferente. Isso é comprovado no portal do capítulo 8, caso da carga  $q_0/2$  em que ocorre

mecanismo de viga e a geometria deixa de ser importante. Mas ao se incluir a carga  $H$ , mudou-se de CI limitadora, quando a semiflexibilidade  $\eta$  cresceu.

Hajjar *et al.* (1997) indicaram a mesma dificuldade. Em várias normas há prescrições para o fora de prumo (FP) e para se majorar tal imperfeição considerando que a curvatura inicial seja sobrepujada dessa forma, com cargas nocionais calibradas, ou mesmo adotando uma imperfeição dita equivalente (De Luca & Stefano, 1994).

### 9.2.2 COMPORTAMENTOS QUE JUSTIFICAM O TEOREMA

Esse *teorema da configuração inicial* mostrou-se coerente nas diversas etapas desta tese. Mesmo no caso da coluna birrotulada (escora) na qual se pode ter a CI nos dois sentidos, ou seja, duas configurações imperfeitas, sem que a resposta final (carga limite) seja alterada. Isso ocorre porque a rótula não transmite os efeitos da CI e, então, basta incluir a imperfeição na coluna escora. Porém, observe-se que:

- a. havendo cargas internas (na coluna escora), ocorrerá a deformada, então a CI deve acompanhá-la (como previsto pelo teorema); e
- b. sendo possíveis duas CIs, não modifica o fato de que a CI colocada segundo a deformada inelástica é governante, ou seja, não o contradiz; apenas cria outra possibilidade, que não modifica o resultado ou a aplicabilidade.

Deve-se indicar que a formação de mecanismos de colapso, efeito ligado ao comportamento plástico, se mistura, em geral, ao processo da flambagem inelástica. Ou seja, a coluna, por meio da plasticidade, perde sua estabilidade e tem uma expressiva deformação, caracterizada por um grande (ou descontrolado) movimento lateral que leva ao colapso.

Como se mostrou na seção 8.5, algumas vezes a combinação de carregamentos pode levar a estrutura a pontos estacionários da solução numérica. Isto é, ocorrem tendências opostas, um ponto de bifurcação da trajetória. Algumas situações exigem um deslocamento horizontal maior (para ocorrer a flambagem) e, por isso, o colapso da viga ou da ligação pode ocorrer antes.

Todavia, são pontos estacionários, mas a carga limite é definida ali. O eventual prolongamento da trajetória está muito mais ligado aos aspectos numéricos do modelo (folgas), do que ao conceito que é: *existem tendências antagônicas que findam a*

*trajetória e definem o ponto limite*, mesmo porque ambos os estados já são limites: a viga degenerando por elevada plasticidade e a coluna sem estabilidade flambando (ver Fig. 8.13). Naturalmente, o projetista verificará essas condições e determinará meios de reforçar a viga, se necessário, e assim, não havendo esse colapso da viga, sobrevém a *flambagem inelástica*, e a proposta continuará válida, visto que a mesma foi feita para esse estado limite apenas.

Procurou-se ilustrar a existência do fenômeno chamado *dissimilar*, que representa a tendência de estruturas simétricas e sob carregamento simétrico passarem (dar um salto) para um comportamento assimétrico, dada às pequenas diferenças existentes (mesmo numericamente), que quebram essa simetria e proporcionam cargas limites menores. Isso foi descoberto também por Chwalla (1938), segundo Lu (1963), que comprova que a carga crítica é menor para a forma antisimétrica que para a simétrica. No regime elástico, tanto o estudo de arcos (Pinheiro, 2003) como de portais em L mostraram que se encontravam trajetórias de equilíbrio bem diversas a partir de pequenas excentricidades de carga introduzidas no modelo, e que revelaram cargas críticas menores (ou mais graves) que as previstas em condições em que a simetria era preservada (Galvão *et al.*, 2005).

A contribuição desta tese é mais abrangente, pois está associada à carga limite, e emprega-se a *Análise Avançada*, na qual se incluíram, também, as tensões residuais, as imperfeições geométricas e, agora, as ligações semirrígidas.

Neste trabalho, verificou-se que algumas configurações de geometria inicial imperfeita (FP+CI), incluindo a ligação, obtiveram, por diferentes trajetórias, o mesmo fator  $\lambda_c$  de colapso, comprovando a ideia de um estado “único” proposto originalmente. Além dessas trajetórias diferentes, todavia, verificam-se esforços e deslocamentos diferentes, sendo que a trajetória com menores esforços e maiores deslocamentos (que é a limitadora) correspondeu à obtida aplicando o teorema. Nos casos em que não houve esse fator de carga de colapso único, o menor fator correspondeu à configuração indicada pelo teorema proposto (ver seção 8.4, por exemplo).

Pode acontecer que a deformada inelástica da estrutura perfeita, ainda assim, não seja tão conclusiva para o projetista como se deseja. Entretanto, no portal da Fig. 8.7(a), aplicou-se um pequeno fora de prumo, e a deformada inelástica então obtida permitiu definir as imperfeições geométricas preponderantes. Ou seja, há casos em que se pode

substituir a deformada inelástica da estrutura com geometria perfeita pela obtida apenas com o fora de prumo, para determinar o sentido adequado da curvatura inicial.

O caso das duplas ZPs em toda extensão da coluna, ou de ZPs em ambas as extremidades da coluna, ou na extremidade da viga e base da coluna associada, requer maiores cuidados. Em geral, as ZPs tendem a ser maiores quando o seu aparecimento é antecipado em relação às demais, e isso faz com que uma das formas da CI {"-(“ ou “)+”} seja preponderante sobre a outra, o que determina a condição de FP+CI limitadora.

Quando uma ZP possui maior plasticidade (extensão, efeito nas seções, etc.) para o carregamento da hipótese considerada, a deformada inelástica correspondente da estrutura tende a mostrar qual é o lado da CI mais limitador naturalmente, mesmo quando não há imperfeição geométrica incluída (como propõe o teorema).

De maneira geral, justifica-se essa conclusão porque a deformada inelástica identifica a formação de ZPs para aquele carregamento, então a disposição de imperfeições tende a minimizar essa energia, isto é, reduz a quantidade de carga necessária para que se atinja o colapso.

Portanto, em linhas gerais, nesta tese comprovou-se que o teorema é válido e que podem existir casos de configurações similares ou que se obtém o mesmo valor de carga limite, mas a obtida pelo teorema é a *configuração sempre limitadora*.

### 9.2.3 RECOMENDAÇÕES DA ATUAL PESQUISA

Uma importante constatação é que, em geral, as *configurações geométricas imperfeitas simétricas são menos limitadoras que as assimétricas* quando a geometria básica da estrutura e seu carregamento são simétricos. Não constitui novidade que a quebra da simetria leve a fatores de carga menores, mas é uma diretriz para o projetista.

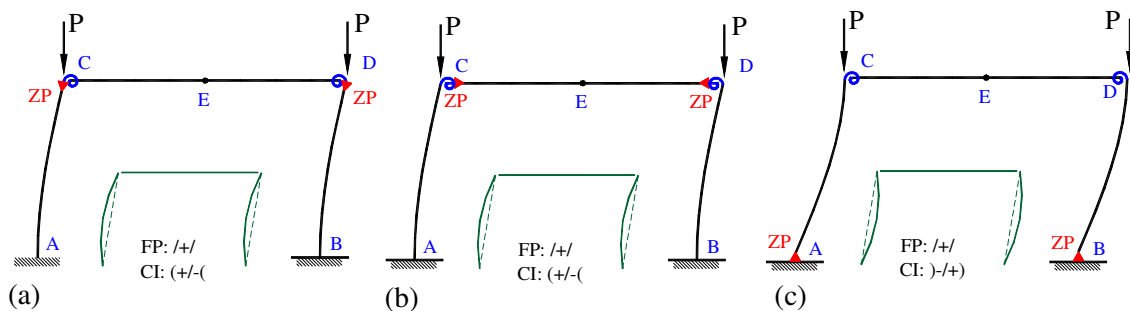
Na análise de várias imperfeições geométricas iniciais, verificou-se o seguinte:

- a. quando a formação de ZPs é maior no extremo da viga ou no topo das colunas do que na base dessas colunas (andar inferior), o portal tende a se comportar como se a viga fosse apenas uma escora e as colunas fossem independentes. Isso nos remete ao comportamento indicado nas Figs. 9.2(a-b), na qual a forma da imperfeição inicial limitadora é FP+CI (+/-), que corresponde a de uma coluna engastada e livre;

- b. quando a formação de ZPs é maior na base das colunas (do andar inferior) que no topo (ou na viga do patamar superior), o portal tende a se comportar como se tivesse a base com rótulas e houvesse um deslocamento de andar, para o qual a forma da imperfeição inicial limitadora é FP+CI  $\text{)-/+}$ , indicada na Fig. 9.2(c); e
- c. podem ocorrer, ainda, casos em que as 2 ZPs se formem simultaneamente, ou que não se consiga facilmente detectar qual a imperfeição FP+CI adequada a ser adotada. Quando as ZPs aparecem de forma conjugada, possuem a mesma plasticidade (tamanho e extensão) e a deformada inelástica sem imperfeição não permite maiores conclusões, é porque a estrutura não é sensível à CI, que pode ter então qualquer direção. Sugere-se que o projetista avalie essas situações independentemente (uma a uma) em caso de dúvidas.

São aspectos que devem ser avaliados no comportamento da estrutura:

- a. modificar seção da viga (rigidez) – provoca outro comportamento, como o exemplo da seção 8.7 do portal modificado AA (Alvarenga, 2005) no qual a FP+CI  $\text{)-/+}$  foi governante, enquanto no CZ (Chen e Zhou, 1987) a outra configuração de FP+CI  $\text{+/-}$  é que predominou;
- b. modificar a rigidez da ligação – também modificou o comportamento (por exemplo, no portal modificado AA só com cargas verticais da mesma seção 8.7);
- c. ligações não lineares rígidas podem ter o mesmo comportamento das lineares – (trechos até  $M \leq M_u/4$ ) modificando-se os deslocamentos (rotações), que tendem a aumentar. Esse crescimento dos deslocamentos pode gerar algum efeito  $P\Delta$  adicional, o que causa pequenas diferenças (ver seção 8.9);
- d. cargas diferentes (combinação ou tipo) – provocam respostas diferentes, portanto, a configuração limitadora será diferente em cada hipótese de cargas; e



**Figura 9.2 Efeito das ZPs na configuração inicial do portal:**

(a) ZP ▼ no topo da coluna; (b) ZP (►, ◄) nos extremos da viga; (c) ZP ▲ na base das colunas.

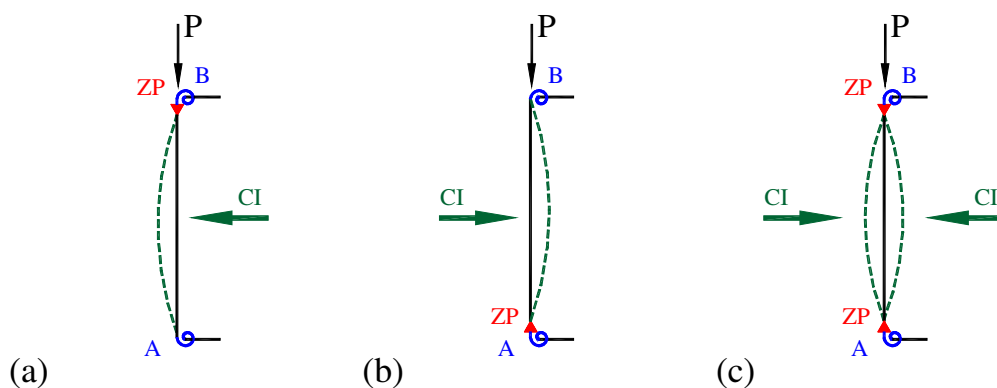


- e. rigidez nodal entre a viga e a coluna [(G), Eq. 8.3] – vigas com relação  $G > 1$  e ligações rígidas ( $\eta \leq 0.25$ ) são menos sensíveis às modificações da CI. Inversamente, tornam-se mais sensíveis quando  $G < 1$  com qualquer ligação.

Considerando o efeito horizontal do FP + (este deverá corresponder à direção do esforço horizontal atuante H, se houver), pode-se fazer um resumo para o projetista sobre o comportamento da CI limitadora da seguinte forma:

- quando a ZP se forma no topo da coluna (ou na extremidade da viga apoiada nesse ponto B), a curvatura limitadora dessa coluna deverá ser na forma “(” à esquerda [ver Fig. 9.3(a)];
- se a ZP aparece na base da coluna (ou na extremidade da viga apoiada nesse ponto A) primeiro e predomina, a curvatura limitadora será a oposta, “)” à direita [ver Fig. 9.3(b)]; e
- se as ZPs ocorrem igualmente em ambas as extremidades (A e B), essa coluna será insensível à direção da CI, que pode ter qualquer sentido, pois a diferença entre as duas situações torna-se pequena [ver Fig. 9.3(c)].

Essas definições são consequências da proposta original do teorema (pois têm o mesmo conceito) e acompanham o comportamento dos portais estudados. Entretanto, isso não quer dizer que todas as configurações assimétricas sejam limitadoras em relação aos diversos carregamentos. Ou seja, podem ocorrer carregamentos nos quais combinações simétricas e pouco usuais de FP+CI sejam as limitadoras.



**Figura 9.3 Direção da CI limitadora:**

- (a) ZP ▼ maior superior – CI à esquerda; (b) ZP ▲ maior inferior – CI à direita;  
 (c) 2 ZPs aproximadamente iguais (▲, ▼) – a CI pode ter qualquer direção.

### 9.2.4 EXEMPLO DEMONSTRATIVO

Para demonstrar a última recomendação, na Fig.9.4(a) ilustra-se o portal CZ de Chen & Zhou (1987) modificado, da seção 8.8, com ligação *midirrígida* ( $\eta = 0,25$ ) e sujeito a um carregamento especial ( $P = 1125$  kN,  $q = 140,6$  kN/m e  $H = 75$  kN).

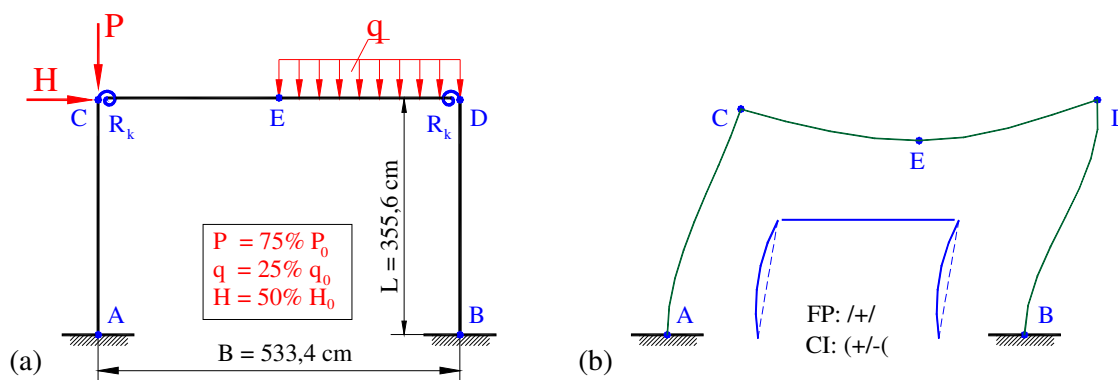
Alguns pesquisadores sugeriram que se empregue a deformada elástica da estrutura, que é representada na Fig. 9.4(b). Daí se poderia concluir que a geometria inicial imperfeita limitadora (inferior) seria a FP+CI (+/-), porém isso não é procedente, tampouco modificando as imperfeições para FP+CI (+/+).

Para determinar essa configuração inicial limitadora, aplica-se o teorema, e assim consegue-se a deformada inelástica mostrada na Fig. 9.5(b) que foi obtida da geometria perfeita e não é diferente da produzida com as imperfeições geométricas.

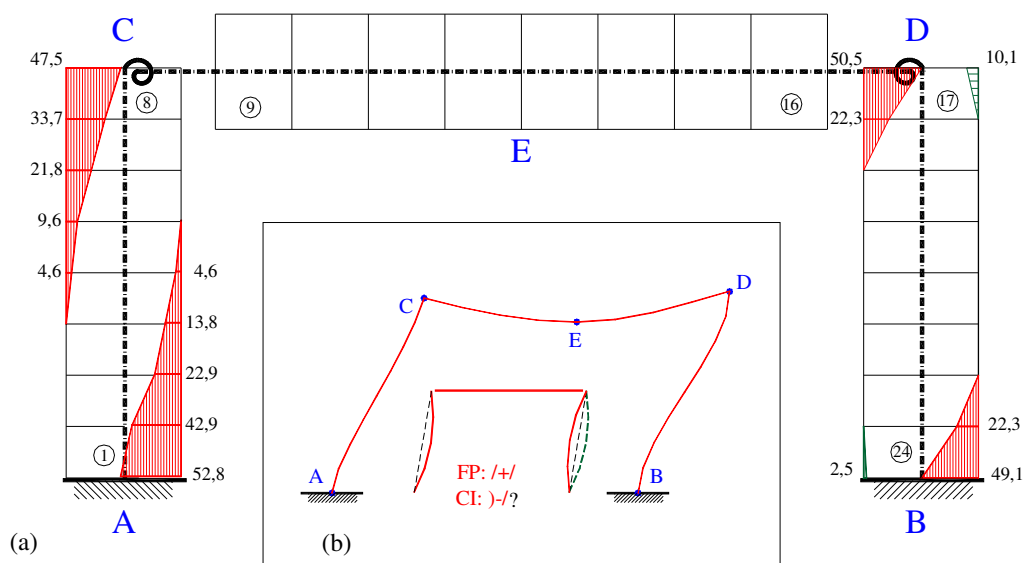
Todavia, ainda essa deformada inelástica pode permitir alguma dúvida se a CI a ser adotada para a coluna B-D seria de sinal “-” (“ou +”). Poder-se-ia ficar tentado a empregar a configuração assimétrica, mas deve-se lembrar de que o carregamento não é simétrico e, assim, o comportamento *dissimilar* não se aplica para esse caso.

A solução provém da avaliação das zonas plásticas (ZP): a sua ordem de formação e tamanho. Em todas as análises deste modelo, as ZPs se formam na sequência dos pontos A-D-B-C, significando que os pontos A & D possuem mais fatias plásticas que os demais. Essa informação é fundamental para se chegar a FP+CI limitadora.

Na figura 9.5(a) estão ilustradas as ZPs existentes no colapso da configuração limitadora (que produz menor número de ZPs), no qual se constata que o nó A (52,8%) está mais plástico do que o nó C (47,5%). Portanto, essa coluna possui a movimentação de andar, e a CI limitadora é “-”, conforme a Fig. 9.3(b).



**Figura 9.4 Portal com ligação *midirrígida* e carga especial:**  
(a) modelo com cargas; (b) deformada elástica do portal.



**Figura 9.5 Portal com ligação *midirrígida* e carga especial:**  
 (a) zonas plásticas [%]; (b) deformada inelástica e configuração imperfeita limitadora;  
 (c) convenção: (⇒) tração, (⇐) compressão

Já na outra coluna, o nó D ( $50,5+10,1= 60,6\%$ ) possui mais ZPs que B ( $49,1+2,5 = 51,6\%$ ). Disso se conclui que o ponto D faz como se a coluna fosse do tipo engastada e livre, tal que a CI limitadora é “-(-”, indicada na Fig. 9.3(a). Conclui-se, então, que esse exemplo possui a configuração imperfeita FP+CI  $\int-/-\int$  como limitadora [representada toda em linha cheia na Fig. 9.5(b)].

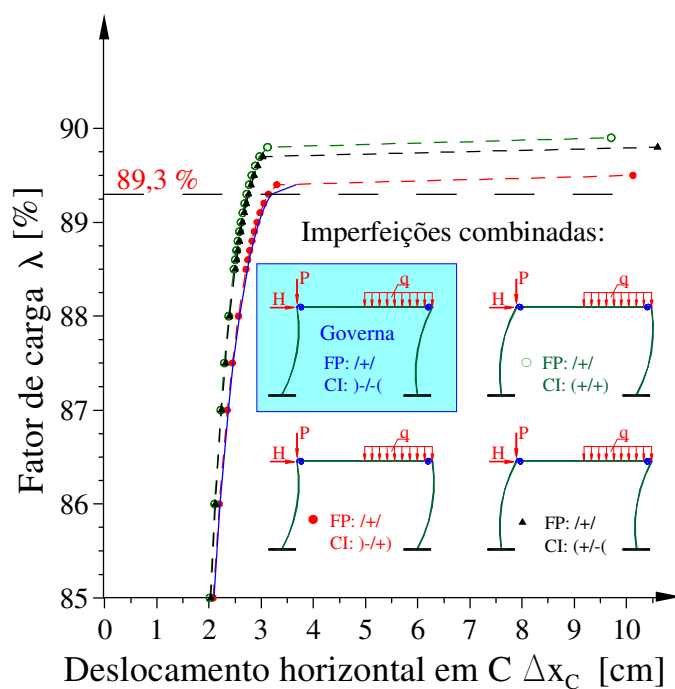
Na tabela 9.1 são apresentados os resultados obtidos dessa estrutura na situação pré-colapso para as diversas configurações de FP+CI e na Fig. 9.6, as trajetórias de equilíbrio correspondentes.

**Tabela 9.1 Limites do portal com ligação *midirrígida* e carga especial.**

Imperfeições Iniciais		Fator de Carga [%]		Ligações: momentos e rotações [kNcm] [mrad]				Esf. axiais bases [kN]		Momentos nas bases [kNcm]	
ZP	FP+CI	$\lambda_y$	$\lambda_c$	$-M_C$	$-M_D$	$-\theta_C$	$-\theta_D$	$N_A$	$N_B$	$M_A$	$M_B$
A-B	$\int-/+$	55,5	89,4	3457	11038	0,906	2,894	1062	279	3921	10789
A-D	$\int-/-$	55,5	89,3	3392	11033	0,889	2,893	1061	278	3927	10683
C-B	$(+ / +)$	57,9	89,8	3597	10980	0,943	2,879	1067	280	3842	10678
C-D	$(+ / -)$	57,8	89,7	3562	10978	0,934	2,878	1066	280	3845	10563

Imperfeições Iniciais		Deslocamentos		Momentos	Fatias Plásticas
ZP	FP+CI	$\Delta x_C$ [cm]	$-\Delta y_E$ [cm]	[kNcm] $M_E$	[%]
A-B	$\int-/+$	3,299	1,176	19595	1973
A-D	$\int-/-$	3,196	1,171	19545	1892
C-B	$(+ / +)$	3,121	1,189	19797	2156
C-D	$(+ / -)$	3,035	1,185	19756	2107

Notas: 1) resultados no estado pré-colapso; 2) a configuração limitadora (●).



**Figura 9.6** Trajetórias de equilíbrio do Portal com carga especial.

Verifica-se que a diferença entre as últimas configurações [FP+CI )-/( e )-/(+)] é pequena (0,1%) comprovando que a coluna B-D é quase insensível à direção da CI. Observe-se que se formam duas ZPs quase do mesmo tamanho, elucidando também o caso da Fig. 9.3(c).

No apêndice A.10 em anexo, inclui-se a listagem com os dados e os resultados produzidos pela última versão do programa computacional *PPLANAVA* deste portal com FP+CI )-/(. Mais detalhes desse exemplo, e de outros, desta tese, pode ser visto no CD, como se descreve no apêndice A.11.

Este exemplo foi deixado propositalmente na parte final para mostrar que mesmo configurações aparentemente absurdas, a primeira vista, podem, surpreendentemente, ser limitadoras, dependendo do carregamento aplicado. Isso mais uma vez justifica e demonstra o *teorema da configuração inicial* e os seus corolários complementares.

## 9.4 ASPECTOS CRÍTICOS

No trabalho de dissertação do autor (Alvarenga, 2005), foram citadas várias circunstâncias que propiciam divergências numéricas, computacionais e também de modelagem. Consideram-se válidos e aplicáveis todos os aspectos críticos anteriores, incluindo agora apenas os mais diretamente ligados a este trabalho (em particular, às ligações), ou seja:

- a. falhas decorrentes de modelos de ligação, nos quais nem todos os dados fornecidos estão coerentes;
- b. custo de obter a convergência (muitos ciclos de iteração) com dada tolerância em alguns incrementos, nos quais a *iteração ótima* permitiu seguir com a análise e chegar ao colapso;
- c. dificuldades para avaliar o comportamento da ligação, quando muitas decisões são baseadas em acréscimos de rotações nos quais pequenos desvios podem causar grandes diferenças;
- d. o ajuste do estado do EF com ligação na iteração seguinte. Seria ideal fazê-lo na própria iteração, mas isso cria um novo processo iterativo (similar ao *IIEA*), o que complica ainda mais a lógica e a eficiência computacional do programa;
- e. falhas das aproximações numéricas da formulação. Nesse caso, verificou-se que a precisão da avaliação da deformação média  $\varepsilon_m$  fica muito aquém de um valor calibrado, e essas aproximações são piores na medida em que os deslocamentos crescem. Portanto, foi necessária a redução do passo incremental em problemas com ligação para obter bons resultados;
- f. diferença do momento avaliado numa ligação não linear e seu ajuste em relação ao momento obtido no EF de ligação, encontrada nos métodos *S-XX-ME*, como já foi indicado. A natureza das diferenças e os estudos realizados para cada método funcionar adequadamente, a confiança nos resultados, em todo o processo, consumiu um período importante desta pesquisa, cujo resultado final só poderá ser avaliado no futuro;
- g. no cálculo da rigidez linear (para as ligações do portal do capítulo 8) considerou-se a inércia da viga um pouco menor ( $25430 \text{ cm}^4$ ), o que provocou um desvio de 7,9% (a ligação é um pouco menos rígida), mas o valor de  $\eta$  variou muito pouco;

- h. não se conseguiu reproduzir alguns exemplos, como o portal de Liew *et al.* (1997), que foi também estudado por Liu (2007). Embora empregando todos os dados fornecidos, bem como diversos modelos, as respostas produzidas ficaram a menos de 50% do previsto por esses pesquisadores. Isso também foi razão de outro período de resultados improdutivos;
- i. de igual forma citam-se os portais de Sekulovic & Salatic (2001) que são estruturas elásticas analisadas com ligações lineares. Esses pesquisadores, porém, mencionam duas ligações de cantoneiras (DWA e TSDWA), sendo que são ligações também lineares. Esse exemplo foi desenvolvido e conseguiram-se alguns resultados bons, mas foi retirado da tese, por ter poucas análises. Nessa lista podem-se colocar outros exemplos desenvolvidos, como portais de Ackroyd (1979) e de Lui & Chen (1988) não utilizados;
- j. há uma carência de exemplos completos e confiáveis. Pode-se citar, dentre eles, o exemplo 7.5 desta tese. Note-se que foram empregadas as curvas aproximadas por pontos (tabelada, ver apêndice A.8) e os modelos *RBL*, embora as curvas  $M-\theta$  sejam do modelo de Richard & Abbott (1975). Os autores não os forneceram no livro (Chan & Chui, 2000), e por consulta informaram que não possuíam os 4 parâmetros desse modelo para as 3 curvas mencionadas (C1-C3).

Houve situações em que o processo numérico mostrou divergências, cujas causas não foram ainda estabelecidas, mas isso ocorreu numa pequena parte das estruturas analisadas. Podem ser causas dessas divergências:

- a. as diferentes expressões para as curvas  $M-\theta$ ;
- b. o controle para acompanhar as curvas  $M-\theta$  feito pelo programa computacional;
- c. a correção da rotação específica das ligações não lineares, realizada na iteração seguinte; e
- d. conjugação dos efeitos da excentricidade, da ligação não linear e *IIEA*.

Do ponto de vista de procedimentos, podem-se indicar os seguintes comentários:

- a. o sucesso na atualização completa da linguagem do programa, de “TURBO-BASIC” (Miller, 1987) para “POWER-BASIC” (2005), incluindo a montagem e a solução (dupla, no caso de controle dos deslocamentos) do sistema de equações na memória, a passagem das operações nas fatias também na memória,

- otimização dos programas. A parte computacional e a de arquivos novos para o caso das ligações funcionaram de forma satisfatória;
- b. reduziu-se o tempo computacional de 4 horas para 1 hora em análises de portais inelásticos com ligação linear. Para estudos menores, como vigas e colunas, o tempo caiu de 1 hora para alguns minutos, em média;
  - c. o sistema Windows reduz a velocidade do processamento. Para melhorar o desempenho, faz-se a remoção de módulos de antivírus, desligam-se todos os componentes, inclusive a internet, e outros residentes “TSR” (Howe, 2010); para o programa *PPLANAVA* utilizar a máquina livremente, sem compartilhar outras tarefas;
  - d. a ferramenta “POWER-BASIC” (2005) é bastante versátil, tem várias opções de comandos disponíveis, mas nem todos são tão eficientes, como o próprio inversor de matrizes interno, que é um pouco lento. A parte de saída de resultados possui melhores recursos que a linguagem anterior. Também a parte de detecção de erro em tempo de execução (via simulação) auxilia muito. Não houve muito serviço perdido nessa transcrição ou retrabalho da parte já testada, além de gerar código compacto;
  - e. foram desenvolvidas 7 versões do módulo de ligações e testes *PPLANV8Cp*, 12 do *PPLANV8Bp* e, por compatibilidade, 6 do *PPLANV8Ap*. Do programa completo, foram feitas 6 versões, todas com alguns bons resultados parciais e uma parte aguardando modificações/ajustes do algoritmo. As duas últimas versões, nov./09 e jan./10, estão operacionais (funcionam corretamente);
  - f. a maior desvantagem é o elevado acesso direto ao HD, quando muitas das informações intermediárias antes ficavam em arquivos de memória (mais rápidos e eficientes). Ocorre que a plataforma do “WINDOWS” (2001) não trabalha com o módulo “RAMDRIVE.sys”, enquanto outros fornecedores (jogos, MP3 e etc.) aplicam esse software para aumentar-lhe a velocidade por meio indireto, descarregando nele seus componentes e parâmetros, ao mesmo tempo travando ou bloqueando o acesso por terceiros. Assim, uma possível melhoria que seria o emprego desse módulo, fica inacessível.

## 9.5 CONTINUAÇÃO DA PESQUISA

Na finalização do primeiro trabalho do autor (Alvarenga, 2005) foi apresentada uma proposta da constituição de linhas de pesquisa, com base nesse estudo, que envolve a Estabilidade, a Plasticidade, os Elementos Finitos, as Técnicas Numéricas, etc. Assim, aquelas possibilidades de pesquisa continuam válidas, e não tem sentido repeti-las aqui.

Entretanto, sobre o que se produziu de novidade neste trabalho, aparecem novas ideias e desdobramentos imediatos, descritas a seguir:

- a. fazer um estudo paramétrico dos coeficientes de forma ( $\beta_L$ ,  $\kappa_p$ ,  $\kappa_A$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  &  $\alpha_3$ ) da curva *RBL*, com vistas a reproduzir valores de tabelas como o do “Steel Connection Data Bank – SCDB” (Kishi & Chen, 1990). A mesma ideia pode ser estendida aos demais conjuntos de ligações, dados e parâmetros existentes de outros pesquisadores (Sherbourne & Bahari, 1994; Kukreti *et al.*, 1990);
- b. idêntico ao item (a), para as curvas limites do Eurocode 3 (2000), estendendo-se ao método dos componentes para ligações padronizadas (Faella *et al.*, 2000);
- c. *Análise Avançada* com outros tipos de ligação semirrígida, de estruturas assimétricas, com mais vãos e andares, como o pórtico de Ziemian (1990);
- d. inclusão da excentricidade da ligação, cuja formulação e implementação já foram desenvolvidas, mas não foram testadas;
- e. vários estudos de estruturas incluindo as ligações nas bases das colunas, incluindo curvas, parâmetros e formulação;
- f. *Análise Avançada* de portais em L (Galvão *et al.*, 2005) empregando, também, o controle do deslocamento selecionado e o generalizado, para melhor avaliar o seu desempenho.

Como se pode constatar, ainda existe muita pesquisa a ser realizada. O autor espera que esta tese seja o início de vários outros trabalhos a desenvolver e publicar. Espera, também, que a sua experiência na vida não acadêmica possa ajudar em contribuições significativas para os que estão hoje no projeto das estruturas de aço, seja no Brasil seja no exterior.



## 9.6 REFERÊNCIAS

Ackroyd, M.H. (1979), “*Nonlinear stability of flexibly-connected plane steel frames*”, PhD Diss., Dept. Civil, Env. Architecture Eng., Univ. Colorado Boulder, Colorado.

Alvarenga, A.R. (2005), “*Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*”, Diss. de Mestrado, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto / MG.

Alvarenga, A.R. (2008), “*Estudos sobre ligações com análise avançada através da zona plástica em pórticos planos de aço*”, Ex. de Qualificação, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto / MG.

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2006c), “*Detalhes numéricos na análise inelástica com zona plástica*”, Anais do XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, - CILAMCE, Belém / PA

Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008c), “*Integração iterativa do esforço axial na análise inelástica com zona plástica*”, Anais do XXIX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE, Maceió / AL.

Chan, S.L. & Chui, P.P.T. (2000), *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*, Elsevier, Oxford, Reino Unido.

Chen, W.F., Goto, Y. & Liew, J.Y.R. (1996), *Stability design of semi-rigid frames*,. John Willey and Sons, Nova Iorque.

Chen, W.F. & Zhou, S.P. (1987), “*Inelastic analysis of steel braced frames with flexible joints*”, *Int. Jor. Solid and Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 631-649.

Clarke, M.J., Bridge, R.Q., Hancock, G.J. & Trahair, N.S. (1992), “*Advanced analysis on steel building frames*”, *J. C. S. Research*, Vol. 23, pp 1-29.

Chwalla, E. (1938), “*Die stabilitaet lotrecht belasteter rechteckrahmen*”, *Dier Bauingenieur*, Vol. 19, pp. 69.

De Luca, A. & Stefano, M. (1994), “*A proposal for introduction of equivalent frame imperfections into Eurocode 3 provisions*”, *Proceed. Structural Stability Research Council, Annual Task Group Tech. Section, Lehigh Univ.*, pp. 457-466.

Eurocode 3 (1992), *EUROCODE 3 Design of steel structures*, Part 1, European Committee for Standardization, ENV 1993 –1–1 E, Bruxelas.

Eurocode 3 (2000) Design of steel structures - *Design of joints*, Part 1.8, European Committee for Standardization, PR-ENV 1993 –1–8 E, draft 2, Bruxelas.

Faella, C., Piluso, V. & Rizzano, G. (2000), *Structural steel semi-rigid connections – Theory, design and software*, CRC Press, Library of Congress, Boca Raton.

Frye, M.J. & Morris, G.A. (1975), “*Analysis of flexibly connected steel frames*”, *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 2, No. 3, pp. 280-291.

Galvão, A.S., Gonçalves, P.B., Pinheiro, L. & Silveira, R.A.M. (2005), “*Stability and vibration analysis of slender L-frames with semi-rigid connections*”, Anais do 18th *International Congress of Mechanical Engineering - COBEM*, Ouro Preto/MG.

Hajjar, J.F. & outros (1997), *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for American steel design*, ASCE, Nova Iorque.

Higgins, T.R. & outros (1971), *Plastic Design in Steel- A guide and commentary*, ASCE WRC, Manuals and reports on engineering practice, No. 41, Nova Iorque.

Howe, D. (2010), “*Terminate and Stay Resident*”, TSR, <http://dictionary.reference.com/browse/>.

- Kishi, N. & Chen, W.F. (1987), “Moment-rotation relations of semi-rigid connections with angles”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 7, pp. 1813-1834.
- Kishi, N. & Chen, W.F. (1990), “Semi-rigid steel beam-to-column connections data base and modeling”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 1, pp. 105-119.
- Kukreti, A.R., Ghassemieh, M. & Murray, T.M (1990), “Behavior and design of large capacity moment end plates”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 3, pp. 809-828.
- Liew, J.Y.R., Yu, C.H., Ng, Y.H. & Shanmugam, N.E. (1997), “Testing of semi-rigid unbraced frames for calibration of second-order inelastic analysis”, *J. C. S. Research*, Vol. 41, No. 2/3, pp. 159-195.
- Liu, Y. (2007), “*Progressive-failure analysis of steel buiding under abnormal loads*”, PhD Diss., Dept. Civil Eng., Univ. Waterloo, Ontário, Canadá.
- Lu, L.W. (1963), “Stability of frames under primary bending moments”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 89, No. 3, pp. 35-62.
- Lui, E.M. & Chen, W.F. (1988), “Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames”, *Int. Jor. Solid and Structures*, Vol. 24, No. 9, pp. 893-913.
- Masur, E.F., Chang, I.C. & Donnell, L.H. (1961), “Stability of frames in the presence of primary moments”, *ASCE J. Eng. Mechanics Div.*, Vol. 87, No. 4, (2442), pp. 19, conforme Lu (1963).
- McMinn, S.J. (1961), “The determination of critical loads of plane frames”, *The Structural Engineer.*, Vol. 39, No. 7, pp. 221.
- Meili, Z. (1994), “Principles and practice of similarity system theory”, *Intern. Journ. of General Systems*, Vol. 23, No. 1, pp. 39-48.
- Miller, AR (1987) “Turbo-basic programs for scientists and engineers”. Sybex, São Francisco.
- Pinheiro, L. (2003), “*Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos*”, Diss. de Mestrado, PROPEC / EM/UFOP, Ouro Preto / MG.
- Power-Basic (2005), *Console compiler for windows CC4 – Reference guide*, Powerbasic Inc, Flórida.
- Richard, R.M. & Abbott, B.J. (1975), “Versatile elastic-plastic stress and strain formula”, *ASCE J. Eng. Mechanics Div.*, Vol. 101, No. 4, pp. 511-515.
- Sekulovic, M. & Salatic R. (2001), “Nonlinear analysis of frames with flexible connections”, *Computer and Structures*, Vol. 79, pp. 1097-1107.
- Sherbourne, A.N. & Bahaari, M.R. (1994), “3D Simulation of End-plate Bolted Connections”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 120, No. 11, pp 3122-3136. Disc: Krisnamurthy, N. (1996), Vol. 122, No. 6, pp. 713-714.
- Windows (2001), *Windows New Technology eXPerience workstation*, Microsoft Corporation, version 5.1, service pack 2, St. <http://toastytech.com/guis/wxp.html>, Redmond, WA.
- Ziemian, R.D. (1990), “*Advanced methods of inelastic analysis in the limit states design of steel structures*”, PhD Diss., Grad. School of Cornell Univ., Ithaca, Nova Iorque.

# APÊNDICES

## SUMÁRIO

Seção	Título	Pag.
A.1	Limites de esbeltez para flambagem local e lateral	423
A.2	Critérios das normas na resistência das ligações	425
A.3	Estruturas contraventadas e não contraventadas	426
A.4	Deformações do ponto e da fibra	428
A.5	Participação do estiramento nas funções ( $v_0$ )	431
A.6	Matrizes de rotação	431
A.7	Termos de rigidez gerados pelas propriedades médias	433
A.8	Resultados gráficos obtidos de figuras impressas	434
A.9	Conceito de analogia adotado nesta tese	437
A.10	Listagem de saída do exemplo do capítulo 9	440
A.11	Notas sobre o CD (anexo)	459
A.12	Referências	460

## A.1 LIMITES DE ESBELTEZ PARA A FLAMBAGEM LOCAL E LATERAL

Na subseção 3.2.3 (item f.), foram indicados os limites de esbeltez para partes componentes dos perfis Is que sejam compactos [isto é, que suportem a formação de ZP (ou RP), com tensões de escoamento sem que ocorra a flambagem local] apresentados por Salmon & Johnson (1990), sob a ótica do AISC LRFD (1993). Como esses componentes da seção vão sofrer elevada plasticidade, então, a deformação plástica pode atingir a ordem de  $\varepsilon_p = [7 \text{ a } 9] \varepsilon_y$  (ou seja,  $\varepsilon_p = 8,75 \text{ a } 11,25 \text{ mm/m}$ ).

Para tanto, as normas definem valores limites, garantindo que os perfis sejam compactos, segundo os critérios:

- a. para a aba de colunas (com ou sem flexão):  $b/t \leq C_{fc} \sqrt{E/\sigma_y}$  [kN/cm<sup>2</sup>];
- b. para a aba de vigas (somente na flexão):  $b/t \leq C_{ff} \sqrt{E/\sigma_y}$  [kN/cm<sup>2</sup>];
- c. para a alma de colunas (com ou sem flexão):  $d_a/a \leq C_{dc} \sqrt{E/\sigma_y}$ ; e
- d. para a alma de vigas (somente na flexão):  $d_a/a \leq C_{df} \sqrt{E/\sigma_y}$ .

Definem-se os coeficientes de comportamento compacto da aba e da alma, para perfis laminados, em partes comprimidas e flexionadas ( $C_{fc}$ ,  $C_{dc}$ ,  $C_{ff}$ , e  $C_{df}$ ), respectivamente, pela Tab. A.1. Considerando  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ , como adotam as normas (AISC LRFD, 2005; NBR 8800, 2007 & Eurocode 3, 1992), obtêm-se os limites {108,2/158,3/533} dados por Salmon & Johnson (1990) para o cálculo plástico, que foram adotados nesta tese (■) e são mais rigorosos do que os das normas atuais.

Para manter a coerência com os resultados dos exemplos que foram abordados na tese, (e são daquele período), consideram-se válidos esses limites anteriores. Note-se que a razão principal dessa diferença é a falta de recursos (na época) para a medição precisa da capacidade de rotação da seção com plasticidade e maiores incertezas na avaliação da ductilidade pós-escoamento. Os critérios da norma americana e da brasileira são os mesmos; já a europeia separa condições de perfis soldados e laminados, dentre outros parâmetros. Os coeficientes de Higgins *et al.* (1971) são os mais restritivos, ligados ao início da aplicação do método rígido-plástico.

Além disso, aplicam-se as restrições nos comprimentos destravados transversais, indicadas na subseção 3.2.3 (item d.), para impedir a flambagem lateral ou por flexo-torção, ou sua combinação. Existem duas regiões de plasticidade a considerar:

- a. próximo as zonas plásticas, na qual  $L_t/r_y \leq C_{zp} (E/\sigma_y)$  [kN/cm<sup>2</sup>]; e
- b. trechos elásticos (sem escoamento), em que  $L_t/r_y \leq C_e (E/\sigma_y)$  [kN/cm<sup>2</sup>].

Nesse caso, há uma diferença, pois, na norma brasileira e na americana, indicam-se limites exigidos para vigas com perfis laminados (do padrão americano). Porém, quando se faz uma análise inelástica, nem sempre se pode garantir que a ZP (ou RP) será formada na viga apenas. Algumas vezes, a ZP pode-se formar na coluna, também.

Os valores desses parâmetros ( $C_{zp}$  &  $C_e$ ) são apresentados na Tab. A.2, tendo sido adotados, nesta tese ( ), os fornecidos por Higgins *et al.* (1990) que são mais rigorosos e observam a presença ou não da zona plástica (caso do coeficiente  $C_{zp}$ ).

**Tabela A.1 Coeficientes de comportamento compacto.**

Fonte	Compressão		Flexão	
	$C_{fc}$	$C_{dc}$	$C_{ff}$	$C_{df}$
AISC LRFD (2005)	1,12 <sup>(1)</sup>	1,49 <sup>(2)</sup>	0,76 <sup>(3)</sup>	3,76 <sup>(3)</sup>
Higgins <i>et al.</i> , (1971) <sup>(4)</sup>	0,63	0,31	0,63	0,50
Salmon & Johnson (1990) <sup>(5)</sup>	0,76	1,12	1,12	3,76
AISC SAC (1997) <sup>(6)</sup>	0,76	var. <sup>(11)</sup>	0,60	2,45
ABNT NBR 8800 (2007)	1,12 <sup>(7)</sup>	1,49 <sup>(7)</sup>	0,76 <sup>(8)</sup>	3,76 <sup>(8)</sup>
Eurocode 3 (1992)	0,64 <sup>(9)</sup>	1,16 <sup>(11)</sup>	0,64 <sup>(9)</sup>	2,55 <sup>(10)</sup>

Notas: 1) não limitado conforme nota 3; 2)  $C_{dc} \leq 1,12$  ( $2,33 - 1,12 N/N_y$ )  $\geq 1,49$ ; 3) ver Tab. B4.1 AISC LRFD (2005); 4) ver Eq.(6.30) a (6.32) da seção 6.2 e, também, Galambos (1982); 5) ver Tab. 9.6.1; 6) restrições de áreas sísmicas; 7) ver Tab. F.1; 8) ver Tab. G.1; 9) para classe 1, ver Tab. 5.3.1, adota-se 20f (18f) caso laminado (soldado); classe 2 para flexão, 22f (20f) para os mesmos casos (não depende de ser compressão por flexão); 10) para alma classe 1, ver Tab. 5.3.1 pp. 1, 33f (72f) para compressão e flexão, respectivamente, com  $f = (23,5/\sigma_y)^{0,5}$ ; 11) para  $C_a > 0,125$  (compressão)  $C_{dc} = 1,12(2,33 - C_a) \geq 1,49$ , senão (flexão)  $C_{df} = 3,14(1 - 1,154 C_a)$ , sendo  $C_a = N_d/(0,9 N_y)$ , ver Tab. I-8.1, também, subseção 8.2b; 12) as indicações dessas “notas” correspondem às fontes citadas.

**Tabela A.2 Comprimentos máximos para não ocorrer a flambagem lateral.**

Fonte	$C_{zp}$	$C_e$
AISC LRFD (2005) <sup>(1)</sup>	–	1,76
Salmon & Johnson (1990) <sup>(2)</sup>	–	1,76
Higgins <i>et al.</i> , (1971) <sup>(3)</sup>	0,45	0,70
AISC SAC (1997) <sup>(4)</sup>	0,48	0,97
ABNT NBR 8800 (2007) <sup>(5)</sup>	–	1,76
Eurocode 3 (1992) <sup>(6)</sup>	2d	0,63

Notas: 1) conforme Eq. F2-5, ver apêndice 1, também, Tab. B5.1 do AISC (2000); 2) ver Tab. 9.6.1 que equivale ao anterior AISC LRFD B5.1; 3) indicado o mínimo, ver seção 6.2 e Eq. [(6.47), (6.60) & (6.65)]; há variações dependendo do diagrama de momentos: avalia-se a extensão de transição entre a ZP e a parte elástica, tipo de perfil, etc.; 4)  $C_{zp}$  para colunas e  $C_e$  para vigas com ZP nas extremidades, ver subseções 9.8 & 10.8, atender Eq. A.6.7 & A.6.8 do apêndice 6; 5) ver Tab. G.1; mínimo  $L_t/r_y \leq 50$ ; 6) ver seção 5.5.2, listam-se os mínimos; 7) as indicações dessas “notas” são referentes às fontes.

## A.2 CRITÉRIOS DAS NORMAS PARA A RESISTÊNCIA DAS LIGAÇÕES

Foram estudados alguns parâmetros das ligações no capítulo 2, dando-se mais ênfase ao conceito de versões contemporâneas ao Eurocode 3 (1992), que difere um pouco tanto da versão atual como da forma empregada no AISC LRFD (2005) e, também, da norma brasileira (NBR 8800, 2007).

Indicou-se a ligação do tipo *resistência-plena* como a que naturalmente atende qualquer tipo de análise plástica (ou inelástica) sem qualquer limitação. Note-se que, não ocorrendo a formação prevista da zona plástica (ZP) ou rótula plástica (RP), ainda assim, a ligação é capaz de atender à demanda de rotação plástica (da viga) pela sua própria rotação, validando a análise empregada (atingir a rotação  $\theta_p$ ). Essa definição auxilia a realizar verificações mais expeditas, também, quando se emprega uma ligação padronizada numa viga que possui um momento plástico ( $M_p$ ) sabidamente menor que o último da ligação ( $M_u$ ). Essa ideia, entretanto, não foi mantida nas normas, porque a ligação não precisaria ter sua capacidade de rotação verificada, o que, então, passou a ser uma exigência.

Nas normas prevalece, agora, apenas o termo “resistente” significando que na ligação atuará um momento da ordem de  $M_p$  da viga. Dessa forma, a ligação terá um dado giro e a viga deverá fornecer com a ZP (ou RP) o giro adicional, que se soma ao anterior para suprir aquela demanda prevista na análise plástica (ou inelástica). Veja-se que isso não indica que a ligação seja *capaz*, ou melhor, caberá ao projetista comprovar que as rotações obtidas estão adequadas à situação de colapso prevista pelas análises.

Já na consideração “parcialmente resistente” fica implícito o comportamento semirrígido, logo, não se atinge  $M_p$  da viga em nenhum instante, porém a ligação deverá atender à demanda de rotação da análise. Ou seja, deve-se avaliar a capacidade de rotação. Isso equivale a um comportamento de um novo tipo de RP, no qual atua um momento menor ( $M_u$ ) que o da viga ( $M_p$ ), mas que corresponde a dada rotação ( $\theta_u$ ) que será realmente atingida.

No caso da ligação “flexível”, a atenção fica realmente com a capacidade de rotação, visto que essas ligações apresentam grandes deformações (giro próprio). Nessa condição, entretanto, o projetista deverá cuidar, pelos resultados da sua análise computacional, para que a rotação obtida não supere a do ângulo de contato ( $\theta_{cn}$ ), garantindo a segurança do projeto. Deve-se refazer a análise caso isso aconteça.

Portanto, o conceito ligação *capaz* foi, de certa maneira, abandonado nas normas atuais, o qual se procurou resgatar nesta tese. Para isso, apresentaram-se os conceitos, em separado, visando à maior clareza. Deve ser alertado, novamente, que algumas curvas  $M-\theta$  não incluem, no seu traçado, a rotação da viga, o que obriga o projetista a ter meios de avaliá-la com o programa computacional. Já, a capacidade de rotação passa a ser fundamental para a validade das análises e evitar o colapso da ligação por rotação excessiva quando essas rotações estiverem incluídas nas curvas.

### A.3 ESTRUTURAS CONTRAVENTADAS E NÃO CONTRAVENTADAS

Aqui cabe uma pequena discussão em relação às nomenclaturas adotadas para classificar o comportamento da estrutura quanto ao *galeio lateral* (“sidesway”).

Denomina-se “deslocável” a estrutura que não dispõe de suporte ou travamento lateral para garantir sua estabilidade. Assim, a própria estrutura responsabiliza-se por sua estabilidade e por resistir às cargas laterais atuantes.

Já a consideração “indeslocável” admite que a movimentação lateral seja minimizada, ou que a estabilidade é garantida, por meio de apoios laterais ou estruturas com tal finalidade. Esses termos são mais próprios da norma americana (AISC, 2005).

A estrutura é dita “contraventada” quando é impedida de deslocar-se lateralmente por meio do contraventamento, que é uma versão em estruturas de aço da chamada “viga-parede”, empregada nas estruturas de concreto. Já a estrutura que absorve os esforços horizontais, garantindo sua própria estabilidade, é dita não contraventada. Quando essa estrutura garante a estabilidade das demais partes, é chamada de “contraventamento”. Esses termos são mais conhecidos e aplicados no Brasil.

O contraventamento é, em geral, uma estrutura de treliças, um pórtico especial à momento, etc., que possuirá determinado deslocamento lateral, que é minimizado, tendo em vista a ação dos efeitos secundários (cargas verticais sob condições de excentricidade gerando momentos). No caso da construção em treliças, a adoção da forma composta por triângulos resultará num conjunto indeformável ou de menor movimentação lateral. Todavia, deve-se ter atenção com os seus deslocamentos laterais, seja em condições de serviço seja nas últimas, pois isso interfere na estabilidade das demais partes da construção que estiverem dependentes dele e cujas cargas nocionais (ou que desestabilizam) devem ser incluídas na análise do último.

Assim, deve-se considerar como “travada” a estrutura que se apoia nessa viga-parede de aço e dela obtém sua estabilidade (ou seja, tal estrutura torna-se, então, do tipo “indeslocável”), e “destravada”, a estrutura que não depende do contraventamento, ou seja, uma estrutura deslocável. O termo “deslocável” é mais empregado no contexto do Eurocode 3 (1992).

Verifica-se, em todos os casos, que essas classificações estão diretamente relacionadas com a gravidade do efeito  $P\Delta$  (P-delta) nas estruturas “destravadas”, “não contraventadas” ou “deslocáveis”. E quando essas estruturas são qualificadas como “travadas” ou “indeslocáveis” ou “contraventadas”, o efeito secundário da curvatura (entre os travamentos)  $P\delta$  (P-deltinha) passa a ser mais importante.

A NBR 8800 (2007), seguindo conceitos do AISC (2005), define um parâmetro de deslocabilidade relativa, que se confunde com uma forma de avaliação do fator de deslocabilidade  $B_2 = \Delta_{H2} / \Delta_{H1}$ , que relaciona os deslocamentos horizontais obtidos em uma análise elástica de segunda ordem ( $\Delta_{H2}$ ) com os de primeira ordem ( $\Delta_{H1}$ ), aplicando o mesmo carregamento (incluindo esforços horizontais, ou na sua falta, as cargas nocionais). Dessa forma, as seguintes “classes de deslocabilidade” podem ser adotadas:

- a. pequena – quando  $B_2 \leq 1,1$ ; ou seja, a estrutura tem bastante rigidez própria e a estrutura pode ser analisada até por um método elástico de primeira ordem;
- b. média – para  $1,1 < B_2 \leq 1,5$ ; consideração que exige o emprego de um método elástico de segunda ordem no mínimo; e
- c. grande – sendo  $1,5 < B_2$ ; caso em que se recomenda uma análise inelástica de segunda ordem (ou, mais propriamente, a análise avançada).



#### A.4 DEFORMAÇÕES DO PONTO E DA FIBRA

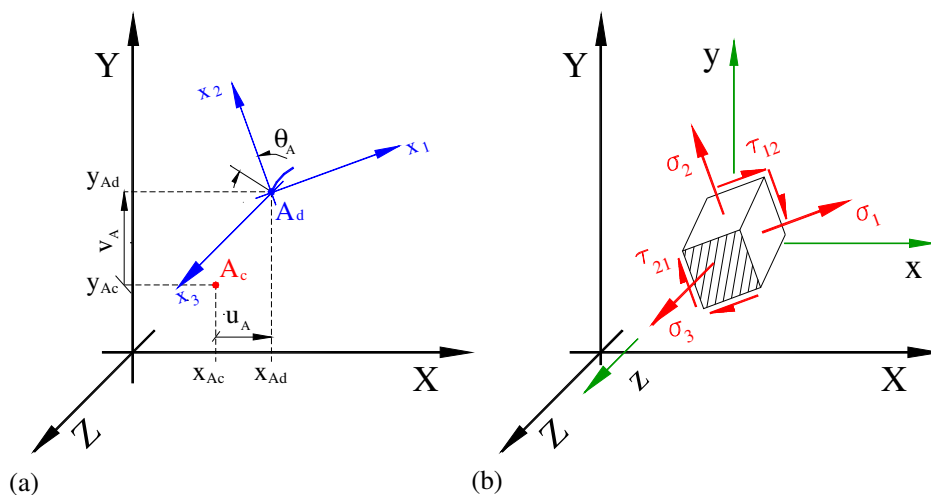
De forma geral, quando se abstrai um ponto (A) de um corpo, pode-se situá-lo no espaço definido por um sistema coordenado local, por exemplo,  $\hat{\mathbf{x}} = \{x_1, x_2, x_3\}$ , que é relacionado a um sistema coordenado de eixos globais,  $\hat{\mathbf{X}} = \{X, Y, Z\}$  que descreve todos os pontos desse corpo, como representado na Fig. A.1(a).

Seguindo a ideia do referencial lagrangiano atualizado (RLA), o ponto A descreve um movimento, quando parte do estado conhecido ( $A_c$ ) e atinge o deformado ( $A_d$ ), havendo 6 deslocamentos possíveis (3 lineares e 3 rotações):  $\hat{\mathbf{u}} = \{u_1, u_2, u_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ . Na figura A.1(a), por simplicidade, mostrou-se apenas os referentes à tese, para a análise no plano (x, y), ou seja,  $\mathbf{u} = \{u_A, v_A, \theta_A\}$ .

Esse movimento pode provocar tensões e deformações no corpo, avaliadas naquele ponto A (aqui representado como um cubo, para melhor visualização), ou seja, tensões  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}\}$ , como as mostradas na Fig. 1.A(b). Para o cisalhamento, indicam-se apenas as tensões do plano (x, y) e são adotados os índices (12) e (21), colocando-se a direção do eixo em que atuam no primeiro índice.

De forma similar, as deformações associadas a essas tensões desse ponto A podem ser definidas como  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}$ .

Por hipótese, supõe-se que o comportamento seja isotrópico e que obedeça, no primeiro instante, à lei de Hooke, considerando um material perfeitamente elástico ideal, quando essas grandezas podem ser relacionar pela expressão (Mase, 1970):



**Figura A.1** Comportamento geral de um ponto de um corpo:  
(a) coordenadas e movimento; (b) tensões.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} \kappa_d & \lambda_d & \lambda_d & 0 & 0 & 0 \\ & \kappa_d & \lambda_d & 0 & 0 & 0 \\ & & \kappa_d & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu_d & 0 & 0 \\ & & & & \mu_d & 0 \\ \textit{simétrico} & & & & & \mu_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

na qual, D representa um módulo de rigidez conforme definido na Fig. 3.3 e os parâmetros dentro da matriz (chamados constantes de Lamé) são:

$$\kappa_d = (\lambda_d + 2\mu_d) \quad \lambda_d = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu_d = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.2a-c})$$

em que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson (Timoshenko & Goodier, 1970)

Considerando, então, alinhados os eixos ( $z$ ) de  $\mathbf{x}$  e o global ( $Z$ ) de  $\mathbf{X}$ , admite-se o estado plano de tensões, do que as grandezas  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , ou seja, não existem esforços fora do plano ( $x, y$ ). Mas, haverá deformações fora do plano, consideradas insignificantes, sendo desprezadas para efeito de análise. Portanto, os vetores podem ser simplificados para: deslocamentos  $\mathbf{u} = \{u, v, \theta\}$ , tensões  $\boldsymbol{\sigma}^\# = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}$  e deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}^\# = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}\}$ , e, então, a expressão Eq. A.1 é rescrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} \kappa_d & \lambda_d & 0 \\ & \kappa_d & 0 \\ \textit{simétrico} & & \mu_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Como, também por hipótese, o efeito de Poisson é desprezado, fazendo-se o coeficiente  $\nu = 0$ , tem-se que  $\lambda_d = 0$ ,  $\mu_d = 0,5$  e  $\kappa_d = 1$ , do que a Eq. A.3 resulta em:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \textit{simétrico} & & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Considera-se que não ocorrem tensões transversais ( $\sigma_2 = 0$ ) e que o cisalhamento está aparecendo como condição de equilíbrio, desprezando-se a tensão  $\tau_{12} (\rightarrow 0)$ .

Além disso, desprezam-se as deformações transversais ao eixo da barra (também consideradas insignificantes em relação as que ocorrem no eixo das barras) [e, por extensão, dos elementos finitos (EF)], ou bem,  $\varepsilon_2 \approx \gamma_{12} \approx 0$ . Conclui-se, dessa forma, que para a fibra considera-se apenas  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ , que é outra forma da equação Eq. 3.3.

A forma mais adequada de obter essas deformações é utilizar-se um conjunto de grandezas conjugadas energeticamente. Dentre essas grandezas, existem as mais empregadas no MEF, que são as deformações de Green-Lagrange. Elas podem ser

estabelecidas, na forma de taxa de variação dos deslocamentos em relação às coordenadas em que são medidas, pela expressão geral indiciada (Bathe, 1996):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_k \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

que estão associadas às tensões de Piola-Kirchoff, expressas, normalmente, como tensores. Entretanto, esse tensor de tensões não tem muito sentido prático para a engenharia, por essa razão faz-se a conversão para o tensor de Cauchy (Mase, 1970).

Como já foram desprezadas as deformações transversais, a Eq. A.5 será reduzida apenas à direção axial também, sendo rescrita simplesmente como:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (\text{A.6})$$

Assim, a maior diferença entre a formulação da tese e a tradicional, é que em vez de empregar a expressão de Green-Lagrange e as tensões de Cauchy, adotam-se as deformações de engenharia (desprezando-se o segundo termo do lado direito da Eq. A.6) com as tensões de Biot (1939), que são conjugadas energéticas da última.

Ao se fazerem essas simplificações, os tensores de rotação, os invariantes e outras considerações formais adotadas no estudo de corpos (Mase, 1970) são ignoradas. Com essa abordagem mais simples, aproxima-se o comportamento da fibra como se existisse, apenas, a deformação axial, ou seja, trata-se como unifilar.

As hipóteses e definições usuais no estudo da plasticidade, como descreveram Chen & Han (1987), não foram adotadas nesta tese, em que se acompanha, tão-somente, o diagrama tensão-deformação. Por isso, também, não foram consideradas:

- a. a definição de superfícies de escoamento baseadas no critério de Tresca, de von Mises e de outros,
- b. a identificação da pressão hidrostática, bem como das tensões principais;
- c. a identificação de invariantes, tensor das deformações principais e de rotações;
- d. a expansão (ou variação) volumétrica; e
- e. a regra de fluxo plástico para materiais como Prandtl-Reuss (teoria  $J_2$ ).

Embora seja considerado o regime de encruamento isotrópico, não se leva em conta o efeito Bauschinger e a acomodação (“shakedown”, Chen & Han, 1987).

## A.5 PARTICIPAÇÃO DO ESTIRAMENTO NAS FUNÇÕES $v_0$

Ao se estabelecerem as funções de forma em relação ao deslocamento vertical do eixo do EF [ $v_0(x)$ ] e as suas derivadas, surge o questionamento sobre a presença do estiramento  $\xi = (1 + q_1/L_0)$ . Como mostrado na subseção 3.3.3, a função  $v_0(x)$  é definida pela Eq. 3.21 como o produto desse termo pela avaliação do comportamento rotacional da posição do ponto  $x$ : [ $\Psi_2 q_2 + \Psi_3 q_3$ ]. Os valores de  $v_0(x)/L_0$  são mostrados nas Figs. 3.11(a-b) com rotações unitárias  $q_2$  e  $q_3$ , respectivamente, para as *semiflexibilidades* de  $\eta = \{0/0,25/0,5\}$ , mas considerando-se  $q_1 = 0$ .

Ao se considerar apenas a rotação unitária em A ( $q_2 = 1$ ), ou em B ( $q_3 = 1$ ), para a *semiflexibilidade*  $\eta = 0,25$  (*midirrígido*), como se constata nas Figs. A.2(a-b), colocando-se ( $q_1/L_0$ ) como +10 (-10)%, os deslocamentos  $v_0(x)$  correspondentes ficam maiores (menores) que a função original.

Na figura A.3 fica claro qual é o efeito de  $q_1$  com a função  $\Psi_2$  (ou  $\Psi_3$ ) constante, correspondendo à rotação  $q_2$  (ou  $q_3$ ). Quando o comprimento do EF (que define a base da tangente) cresce (ou reduz), então,  $v_0(x)$  é afetado diretamente, visto que a função ( $\Psi_j$ ) é apenas um fator comprimento e ( $q_j$ ) representa o ângulo de giro (que confunde-se com a sua tangente). Isso indica que no futuro, deve-se incluir o fator  $\xi$  na Eq. 4.35.

## A.6 MATRIZ DE ROTAÇÃO

Na montagem da rigidez global ( $\mathbf{S}$ ), é necessário tanto realizar a ordenação dos GDLs como a rotação dos eixos locais de cada EF para o sistema coordenado global, utilizando o ângulo de giro atualizado  $\theta_g$ , ou seja, fazer a transformação linear descrita por Weaver Jr & Gere (1990):

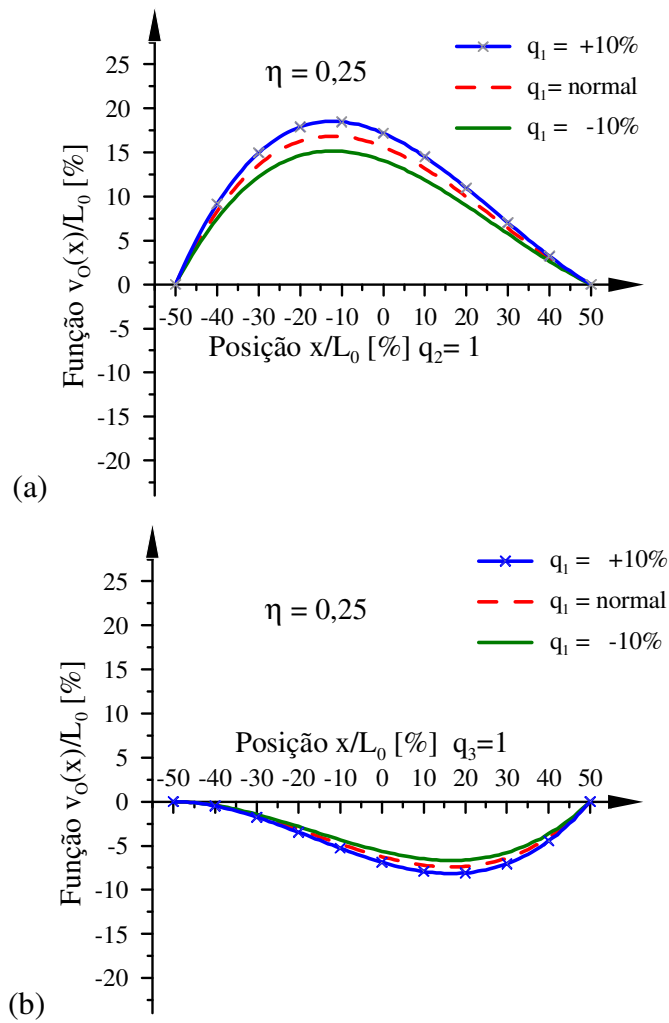
$$\mathbf{K}(\theta_g) = \mathbf{T}^T(\theta_g) \mathbf{K} \mathbf{T}(\theta_g) \quad (\text{A.7})$$

na qual a matriz de transformação  $\mathbf{T}(\theta_g)$  [6×6] é expressa como:

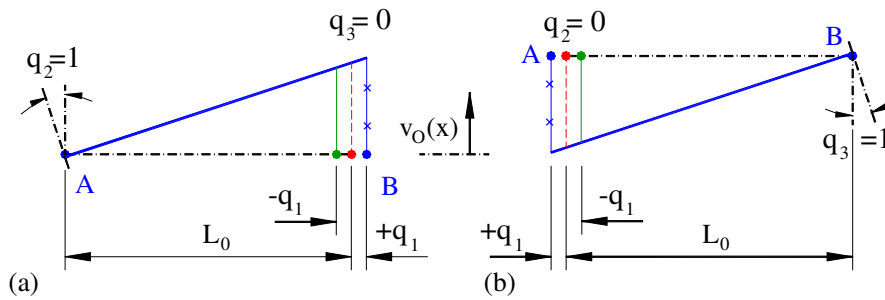
$$\mathbf{T}(\theta_g) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

sendo  $\mathbf{0}$  [3×3] a matriz nula de ordem 3 e,  $\mathbf{R}(\theta_g)$  [3×3] a matriz de rotação dada por:

$$\mathbf{R}(\theta_g) = \begin{bmatrix} +\cos(\theta_g) & +\sin(\theta_g) & 0 \\ -\sin(\theta_g) & +\cos(\theta_g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$



**Figura A.2** Efeito de  $q_1$  nos deslocamentos  $v_O(x)$ :  
 (a) com rotação unitária em A; (b) com rotação unitária em B.



**Figura A.3** Efeito de  $q_1$  nos deslocamentos  $v_O(x)$  com  $\Psi$  constante:  
 (a) com  $\Psi_2$  e rotação unitária  $q_2$ ; (b) com  $\Psi_3$  e rotação unitária  $q_3$ .

## A.7 TERMOS DE RIGIDEZ GERADOS PELAS PROPRIEDADES MÉDIAS

Quando se definiram as novas aproximações das propriedades médias do EF na subseção 3.4.4, empregando-se as Eqs. 3.92(a-b), os termos referentes à  $D_{1m}$  não se alteram. Os demais termos, porém, sofrem correções porque, agora, existem as grandezas  $\{D_{2A}, D_{2B}, D_{3Am}, D_{3Bm}$  e  $D_{3ABm}\}$ , que não são mais englobadas por  $\{D_{2m}$  e  $D_{3m}\}$ , respectivamente. Ou seja, os coeficientes e expressões com  $\eta$  que eram somados após realizar-se a transformação ( $f_T$ ) devem ser alterados, substituindo-se as Eqs. 3.80(a-j) pelas expressões:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{D_{1m}}{L_0} & B &= \frac{-(1+\eta)D_{2A} + (1-2\eta)D_{2B}}{L_0L_d} & C &= \frac{(1+\eta)D_{2A}}{L_0} \\
 D &= \frac{(1-2\eta)D_{2B}}{L_0} & H &= \frac{(1-\eta+\eta^2)(3D_{3A} + D_{3ABm})}{L_0} \\
 E &= \frac{3[(1-\eta+\eta^2)D_{3A} + (1-4\eta+4\eta^2)D_{3B} + (2-7\eta+7\eta^2)D_{3ABm}]}{L_0L_d^2} \\
 F &= \frac{3[(1-\eta+\eta^2)D_{3A} + (1-3\eta+3\eta^2)D_{3ABm}]}{L_0L_d^2} & G &= \frac{3(1-2\eta)^2(D_{3B} + D_{3ABm})}{L_0L_d} \\
 I &= \frac{2(1-2\eta)^2D_{3ABm}}{L_0} & e \quad J &= \frac{(1-2\eta)^2(3D_{3B} + D_{3ABm})}{L_0}
 \end{aligned} \tag{A.10a-j}$$

Basicamente, os termos afetados foram  $\{B, E, F, G$  e  $I\}$ . Nos termos  $\{H$  e  $J\}$ , as inércias chamadas “médias” ( $D_{3m}$ ) apenas foram substituídas por termos equivalentes no nó A:  $(3D_{3A}+D_{3ABm})$  ou no nó B:  $(3D_{3B}+D_{3ABm})$ . A mais interessante mudança é a dos termos  $\{I$  e  $J\}$  que, agora, são bem distintos (antes,  $J = 2 I$ ). Essas modificações da matriz  $\mathbf{K}_{ep}$  foram empregadas na tese a partir dos problemas inelásticos, incluindo vigas, colunas e portais do capítulo 7, permitindo, aparentemente, melhor rapidez (menor quantidade de iterações no processo de solução) e pequenas diferenças nos deslocamentos em relação ao anterior. Nos capítulos seguintes (8 & 9), adotaram-se essas equações para todos os exemplos.

## A.8 RESULTADOS GRÁFICOS OBTIDOS DE FIGURAS IMPRESSAS

Um dos desafios para se desenvolver uma formulação numérica é a validação por comparação dos resultados obtidos com os fornecidos na literatura mundial. Além de não se dispor, às vezes, de todos os dados, de existir eventuais falhas de edição, torna-se necessário, em geral, reproduzir os gráficos da literatura para uma forma que possibilite essa confrontação. Essa seção serve como informação complementar de como fazê-lo com alguma precisão.

O primeiro passo é conseguir a cópia (“Xerox”) de boa qualidade (definição). Às vezes, é melhor que seja em preto e branco, ou caso o documento possibilite (por exemplo, revista não muito grossa), a colocação de forma plana (sem forçar as folhas) sobre o vidro da máquina, reproduzi-la para o meio eletrônico via “scanner”, gerando um arquivo do tipo “JPEG” [extensão (.jpg), Hoffman (2003)]. Antes de seguir, é interessante abrir a figura da página reproduzida, selecionar apenas a informação necessária, cortar todas as bordas, girar para deixar o mais horizontal possível, aumentar um pouco o tamanho (dimensão visual), sem perder a nitidez da figura e salvando essa imagem final [por exemplo, com o “Picture manager”, Windows (2001)]. Na figura A.4(a-b), mostra-se a página “Xerox” do artigo de Chan & Chuí (2000) e a parte selecionada do “JPEG” que foi utilizada no processo posterior. [Deve-se mencionar que o autor (Chan) autorizou o emprego do seu material, neste trabalho de pesquisa, por correspondência eletrônica].

Em seguida, cria-se um arquivo de desenho no “AutoCAD” [extensão (.dwg), Stellman & Krishnan, 2002], insere-se a imagem “JPEG” (“Insert ►Raster image”), copiam-se as curvas usando camadas (“layers”) diferentes, com a melhor proximidade da figura possível (não exagerar no “zoom”), salvando-se apenas as linhas (“lines”) como blocos (“block”, por exemplo, BLK\_01). É importante definir o enquadro da figura (usando, em geral, apenas semirretas, ou seja, selecionados apenas os 2 pontos extremos para cada lado e 4 para o quadro. Além de mais simples, isso reduz os desvios).

Posteriormente, deve-se reinserir (“insert”) o bloco explodindo, ainda na mesma escala em que foi gerado, dispor os eixos coordenados (x, y), coincidindo a origem (O: 0.0, 0.0) com a do bloco, girar todo o bloco aplicando o comando de alinhar (“align”) sem corrigir dimensões, medir quantas unidades possui os pontos extremos do gráfico

[por exemplo, (301,5/248,3)]; e salvar novamente todo o bloco (“block”) com outro nome (por exemplo, BLK\_O1\_CV). Esse processo é ilustrado na Fig. A.5.

O próximo passo é reintroduzir o último bloco, porém, além de explodir, deve-se fazer o ajuste de escalas, para a figura sair com as dimensões necessárias à recuperação dos valores numéricos adequados. Esse ajuste significa calcular os fatores de escala que resultam dos limites do gráfico (fornecidos pelo autor) e divididos pelas medidas em unidades do bloco salvo, de tal forma, que na imagem final resultem as grandezas desejadas. No gráfico mostrado na Fig. A.5(a), as medidas do autor são [0,05 (rad) e 1,5 (M/M<sub>p</sub>)]. Adotam-se valores maiores [(500, 300), da ordem de centenas para fazer a etapa de leitura posterior], resultando nos fatores de escala (para o “AutoCAD”) na introdução desse bloco: [fator  $x = (500/301,5044 =) 1,65835$  e  $y = (300/248,2775 =) 1,20835$ ]. Acompanhando a Fig. A.6, agora, faz-se um arranjo horizontal do eixo y (“array horizontal”) copiando-o a cada 10 unidades, ou seja, no exemplo serão gerados 49 eixos paralelos, com cotas de 10, isto é, medidas  $x = \{10, 20, 30, \dots, 490 \text{ e } 500\}$ .

Em seguida, dever-se selecionar a linha gráfica da curva desejada e executa-se o corte (“trim”) das extremidades [aplica-se a opção “F” (“fence”) do comando], chegando-se ao estado representado na Fig. A.6(b).

Nesse instante, deve-se acionar um arquivo para “AutoLISP” desenvolvido antes, com o nome *TABELA.lsp*, que segue no CD anexo à tese. Esse arquivo é instalado no “AutoCAD” pelo comando de carregamento (“appload”) e possui dois módulos que simulam novos comandos para o “AutoCAD” (2002):

- a. *TAB* – que permite medir as linhas verticais (eixos y cópias) obtendo as cotas, automaticamente, salvando-as em um arquivo eletrônico. Com os dados desse arquivo eletrônico, pode-se regenerar o gráfico por meio de programas como o “Grapher” (2005) ou outros, e até mesmo corrigir os dados por fatores de escala [por exemplo, para (mrad) e 1,5 (M/M<sub>p</sub>) originais], etc.; e
- b. *ITAB* – que lista a tabela de dados em arquivo, quando desejado, no próprio desenho do AutoCAD.

Esses pseudo comandos requisitam os dados em cada módulo, diretamente, usando a tela e o teclado, no instante da operação, como se fosse um comando do próprio “AutoCAD” (2002), e o processo posterior é imediato (instantâneo). Pode, também, ser desfeito (pelo “undo”) ou paralisado [pela tecla “ESC” (“escape”)].



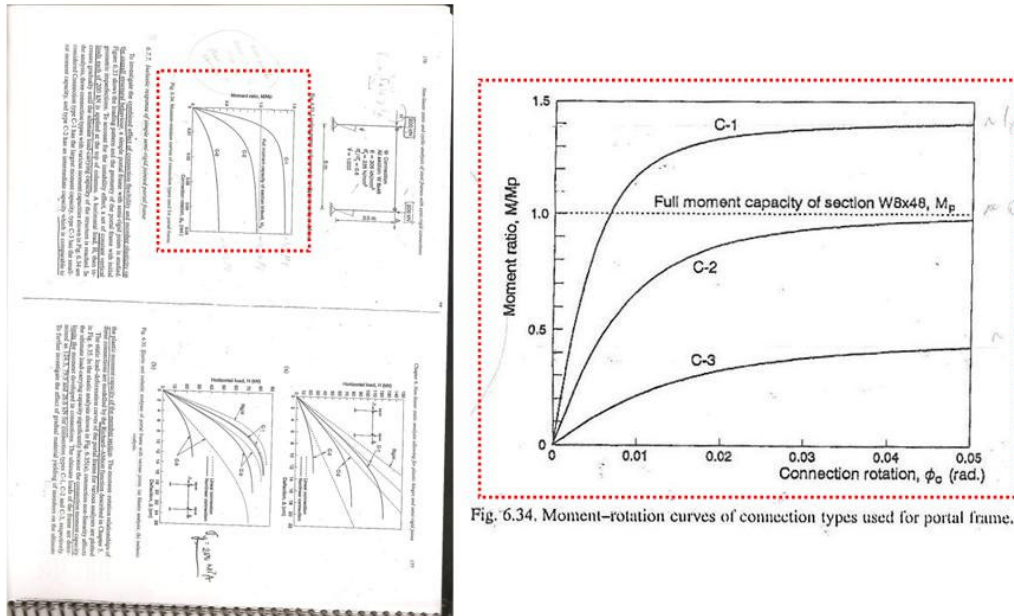
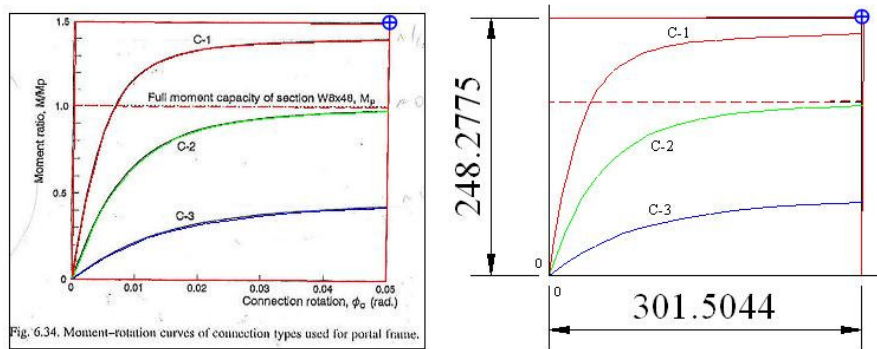
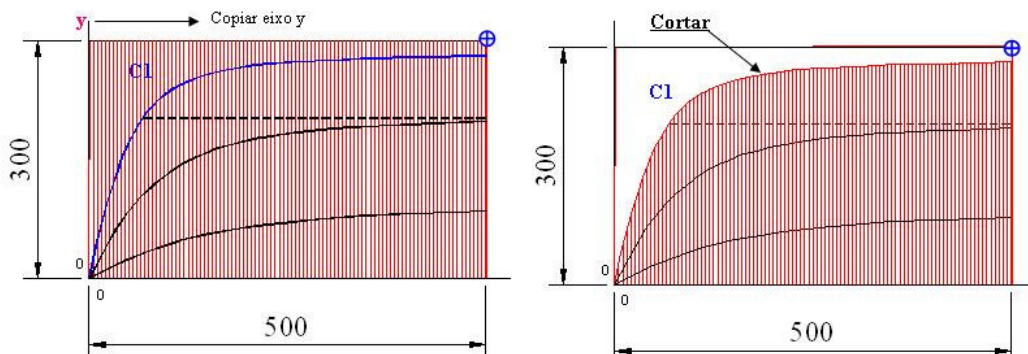


Fig. 6.34. Moment-rotation curves of connection types used for portal frame.

**Figura A.4 Reprodução de gráfico impresso:**  
 (a) Xerox da página para o scanner; (b) ajustes mínimos do “JPEG” .



**Figura A.5 Geração da cópia do gráfico via “AutoCAD” (2002):**  
 (a) copiar “JPEG” salvando bloco BLK\_01; (b) ajustando e salvando BLK\_01\_CV.



**Figura A.6 Geração da tabela da curva via “AutoCAD” (2002):**  
 (a) gerar cópias do eixo y; (b) cortar selecionando a curva C1.

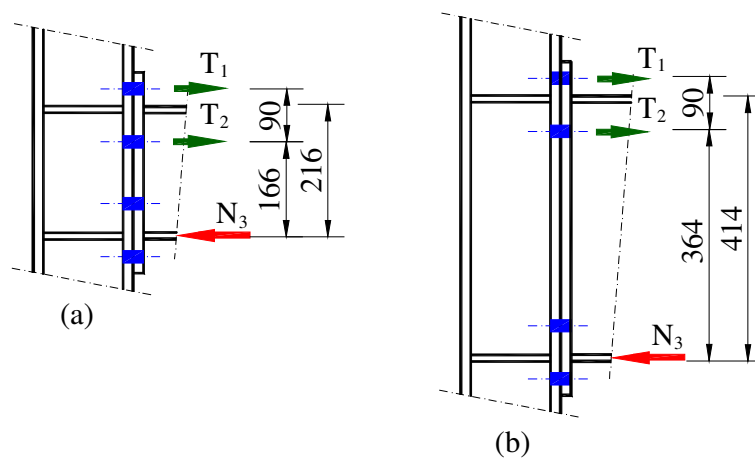
## A.9 CONCEITO DE ANALOGIA ADOTADO NESTA TESE

Uma parte que pode levar a alguma controvérsia, além de ser novidade, é a aproximação das curvas de ligação com o método *RBL* por analogia, apresentado na seção 8.9.

Partindo da Fig. 2.35, admite-se que os efeitos da ligação C2 são muito mais concentrados (menor área para dissipar efeitos locais) do que na ligação D2. O painel de alma da coluna C2 correspondente (181×181) é bem inferior a (180×381) e, embora a espessura seja maior (10,12 > 7,27) [mm], o aço é menos resistente ( $A7 < A36$ ). Como se faz a analogia considerando que a ligação é rígida, então se pode enrijecer a alma da coluna com chapas duplas e enrijecedores transversais, de tal forma que não serão esses os estados limites governantes (compressão e cisalhamento da alma da coluna).

Adotando-se ligações padronizadas do BCSA (1997), verifica-se que os esforços nos parafusos não se modificam muito, para ligações de aço grau 43 com parafusos M20, classe 8.8. Na tabela A3, reproduzem-se os esforços indicados para chapa de largura 200×20 mm de espessura, 50 mm de borda, considerando a viga da seção 254 UB 28 para a ligação C2 e, a 406 UB 46, para a D2. Obtêm-se os momentos resistentes  $M_r = \{9620,0 \text{ (C2)}, 19378,1 \text{ (D2)}\}$  [kNcm], com base nos quais se chega à relação:  $M_{D2}/M_{C2} = 19378,1 / 9620,0 = 2,014 \approx 2$ .

Comprova-se, assim, que usando ligações padronizadas (os mesmos elementos componentes da união), pode-se alcançar a relação de analogia proposta. Observe-se, ainda, que os momentos adotados {18700, 37400} [kNcm] são muito superiores aos da ligação padronizada, mesmo para o aço grau 50, quando  $M = 25400$  kNcm (68%).



**Figura A.7 Esforços nas ligações não lineares**  
(a) original C2; (b) aproximada por analogia D2. Obs. dimensões em [mm].

Verifica-se que a rigidez inicial dessa ligação depende, basicamente, da rigidez da coluna ao corte  $R_{cws}$ , à compressão  $R_{ca}$ , da rigidez dos parafusos  $R_{\Sigma b}$  e da altura média da seção, expressa pela equação (Faella *et al.*, 2000):

$$R_{ki} \approx \frac{h_s^2}{R_{cws}^{-1} + R_{ca}^{-1} + R_{\Sigma b}^{-1}} \quad (A.11)$$

Observa-se que a rigidez  $R_{\Sigma b}$  varia muito pouco (de 3 a 5)% nesse caso, concluindo-se, daí, que quando os valores de rigidez  $\{R_{cws}, R_{ca}, R_{\Sigma b}\}$  são aproximadamente os mesmos nas duas ligações (C2 e D2) o que interfere no resultado final será o parâmetro  $(h_s)^2$ , como previsto na Eq. 8.5(b).

Mediante o roteiro de Chen *et al.* (1996) para ligações 2 Ls de alma, com dimensões [mm]: {aba  $a_L = 101,6$ ; gabarito  $g_a = 76,2$ ; borda  $p_L = 32$ }, parafusos ASTM A 325, aço ASTM A 36 ( $E = 20000$ ,  $\sigma_y = 25$ ) kN/cm<sup>2</sup>, calcula-se a ligação flexível produzindo a Tab. A.4, com as seguintes relações:

a. cantoneira leve (espessura  $t_a = 9,5$  diâmetro parafuso  $d_b = 19,0$ ):

i. momentos  $M_{D2}/M_{C2} = 4443,6 / 1352,6 = 3,29 > 2$ ; e

ii. rigidez:  $R_{kD2}/M_{kC2} = 3346,0 / 711,8 = 4,84 > 4$ .

b. cantoneira pesada (espessura  $t_a = 25,4$  diâmetro parafuso  $d_b = 25,4$ ):

i. momentos  $M_{D2}/M_{C2} = 18885,6 / 8106,6 = 2,33 > 2$ ; e

ii. rigidez:  $R_{kD2}/M_{kC2} = 616511,4 / 179553,0 = \underline{3,43} < 4$ .

A cantoneira pesada extrapola a condição ligação “flexível”, observando-se, até mesmo, que a distância de borda é maior ( $p_L = 38 > 32$ ) que a empregada e que a espessura  $t_a = 25,4$  é improvável de ser adotada, com extensão tão pequena ( $h_a = 190$ ).

Verifica-se, então, que a ligação C2 é pouco flexível, visto que seu momento último ( $M_u = 80,6$  kNm) é superior ao de uma ligação com chapa cortada [Fig. 2.4(i)] do BCSA [(1997), com espessura 20 mm, 6 parafusos M 20, classe 8.8] para viga 254 UB 28, com  $M_u = 69$  kNm. Para esse tipo de ligação, a aproximação de  $h_s$  deverá ser redefinida (por exemplo, uma tentativa a ser avaliada no futuro) como:

$$h_s \approx (d + p_L + d_g) / 2 \quad (A.12)$$

na qual a distância de borda é ( $p_L$ ) e, ( $d_g$ ) é a entre parafusos mais extremos.

Para ligações desse tipo, seguindo os padrões do BCSA [(1997), com aço grau 43 com parafusos M20, classe 8.8, chapa de largura 200×20 mm de espessura, 50 mm de borda], considerando a viga da seção 254 UB 28 para a ligação C2, e, a 406 UB 46, para

a D2, são construídas a Tab. A.5 e, de forma similar, a Tab. A.3. Para esses dados, chega-se à relação:  $M_{D2}/M_{C2} = 14621,2 / 4717,6 = 3,10 > 2$ . Observa-se, mais uma vez, que a ligação C2 não atinge o momento último esperado ( $M_u = 80,6$  kNm), mas que a relação de momentos obtida supera o valor 2 previsto pelo parâmetro ( $h_s$ ).

Nesse caso, não é possível avaliar a rigidez, pois, como se percebe na Eq. A.11, sendo a ligação flexível, as rigidezes  $\{R_{cws}$  e  $R_{ca}\}$  serão menores, e isso afeta a grandeza desejada ( $R_{ki}$ ). Esse é um assunto que será alvo de pesquisa complementar, como proposto no capítulo 9. Comprova-se que a aproximação D3, feita na seção 8.9.2 por analogia, subestima um pouco os valores, trazendo, assim, um pequeno benefício, sem ser contra a segurança. A resposta real, entretanto, estará mais próxima dela do que a obtida com a ligação C3, que sequer pode ser construída com a nova viga proposta.

**Tabela A.3 Cálculo dos momentos das ligações rígidas com chapa de topo.**

Tipo	a. d = 216 (C2)			b. d = 414 (D2)		
	$F_x$ [kN]	y [cm]	$F_{x,y}$ [kNcm]	$F_x$ [kN]	y [cm]	$F_{x,y}$ [kNcm]
T <sub>1</sub>	+226	25,60	5785,6	+222	45,40	10078,8
T <sub>2</sub>	+274	15,60	4274,4	+274	35,40	9699,6
N <sub>3</sub> <sup>(1)</sup>	-500	0,88	-440,0	-496	0,81	-400,3
Soma			9620,0			19378,1

Notas: 1)  $N_3 = T_1 + T_2$ ; 2) para o caso  $d = 406$ , o padrão possui 3 linhas de parafusos, com o que  $T_3 = 118$  kN,  $y_3 = 26,4$  cm,  $T_3.y_3 = 3115,3$ ;  $N_4 = -614$ ;  $N_4.y_4 = -986,7$  (descontando 0,8 da altura); soma = 21906,9 kNcm (teórico 21800 kNcm, 99,5% do calculado).

**Tabela A.4 Cálculo dos momentos das ligações flexíveis com 2 Ls de alma.**

Ligação	d [mm]	$h_a$ [mm]	$\theta_0$ [mrad]	$M_u$ [kNcm]	$C_1$ <sup>(2)</sup>	$R_{ki}$ [kNm/rad]
a. Cantoneira leve (espessura $t_a = 9,5$ ; diâmetro $d_b = 19,0$ )						
C2	216	160	19,02	1352,6	1,677	711,8
D2	414	290	13,28	4443,6	1,471	3346,0
b. Cantoneira pesada (espessura $t_a = 25,4$ ; diâmetro $d_b = 25,4$ )						
C2	216	160	0,451	8106,6	0,573	179553,0
D2	414	290	0,306	18885,6	0,573	616511,4

Notas: 1)  $\theta_0 = M_u / R_{ki}$ ; 2) expoente Tab. 2.10 da curva M- $\theta$  potencial Eq. 2.31; 3) alturas: (d) da seção, ( $h_a$ ) da cantoneira; 4) resultados do "CONANA".for (Chen *et al.*, 1996).

**Tabela A.5 Cálculo dos momentos das ligações com chapa de cabeça.**

Tipo	a. d = 216 (C2)			b. d = 414 (D2)		
	$F_x$ [kN]	y [cm]	$F_{x,y}$ [kNcm]	$F_x$ [kN]	y [cm]	$F_{x,y}$ [kNcm]
T <sub>1</sub>	+274	15,60	4274,4	+274	35,40	9699,6
T <sub>2</sub>	+119	6,60	785,4	+201	26,40	5306,4
N <sub>3</sub> <sup>(1)</sup>	-393	0,88	-345,8	-475	0,81	-384,8
Soma			4717,6			14621,2

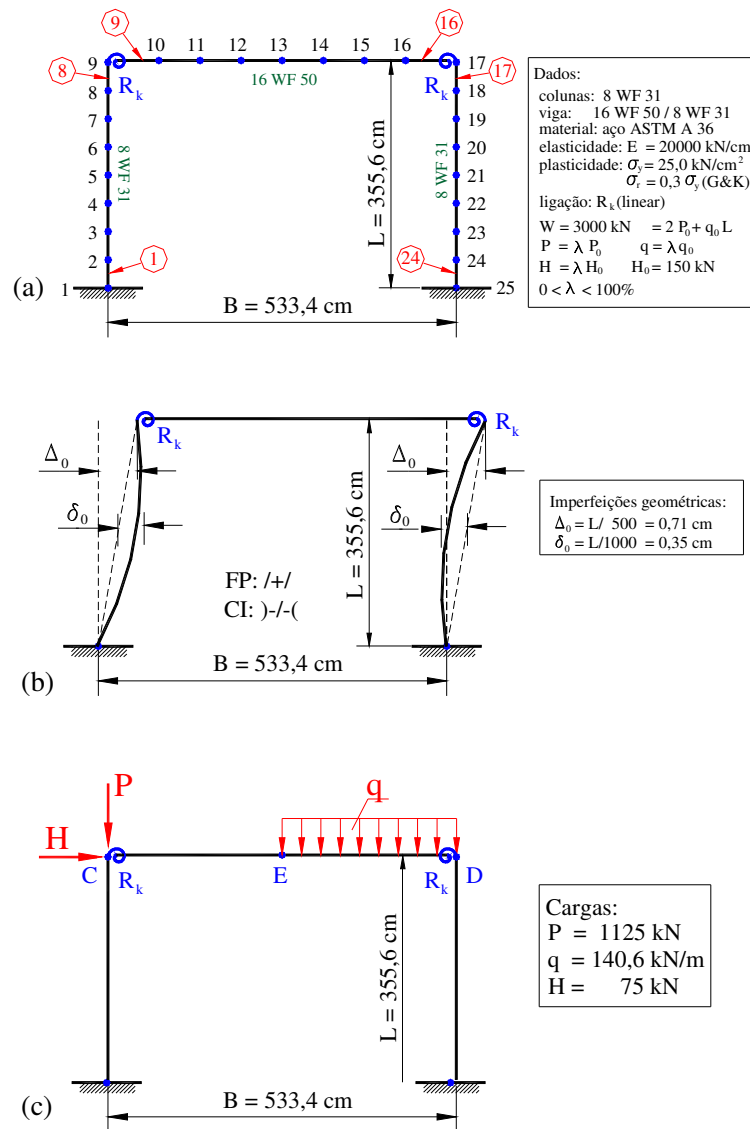
Notas: 1)  $N_3 = T_1 + T_2$ ; 2) para o caso  $d = 406$ , o padrão possui 3 linhas de parafusos, com o que  $T_3 = 128$  kN,  $y_3 = 17,4$  cm,  $T_3.y_3 = 2227,2$ ;  $N_4 = -603$ ;  $N_4.y_4 = -488,4$  (descontando 0,8 da altura); soma = 16744,8 kNcm (teórico 16200 kNcm, 96,7% do calculado).

## A.10 LISTAGEM DE SAÍDA DO EXEMPLO DO CAPÍTULO 9

Nesta seção, apresentam-se os dados e os resultados produzidos pelo sistema *PPLANAVA* para a análise do exemplo especial da subseção 9.3.4. Na figura A.7(a), indicam-se as coordenadas dos 25 nós, 24 EFs, etc., e na A.7(b), as imperfeições geométricas iniciais consideradas. Na figura A.7(c), mostram-se os carregamentos aplicados, sendo as demais características indicadas na seção 8.2 desta tese.

Para esse exemplo, empregou-se o processo de solução automático de *PPLANAVA* (2010), que produziu os seguintes *históricos*:

- a. versão ELAST: (13×4%, 1×2%, 1×1%, 5×0,1%, 1×0,5%, 44×1%);
- b. versão PLAST: (...1×0,5%, 31×1%, 3×0,5%, 20×0,1%).



**Figura A.8 Dados do portal especial:**  
(a) nós e EFs; (b) geometria imperfeita inicial; (c) cargas aplicadas.

As partes sublinhadas no *histórico* correspondem a ajustes que foram feitos no processo, por exemplo, na parte ELAST foram previstos 44 passos de 1%, que se transformaram em apenas 31, pois ocorre o primeiro colapso com  $\lambda = 90\%$  (em passos de 1%). Na versão PLAST, corrigem-se os 20 passos de 0,1%, que não foram necessários.

São fornecidas, a seguir, as seguintes partes da saída:

- a. listagem dos dados introduzidos em *PPLANAVA*, para solução desse problema;
- b. listagem inicial confirmando os dados fornecidos e, também, demais opções de processamento selecionadas;
- c. listagem de todos os resultados produzidos para:
  - i. incremento 20, fator de carga  $\lambda = 55,5\%$ , quando ocorre o escoamento da primeira fatia (final do regime elástico);
  - ii. incremento 63, fator de carga  $\lambda = 89,3\%$ , que é o último passo no qual ocorre a convergência antes do colapso; e
  - iii. incremento 64, fator de carga  $\lambda = 89,4\%$ , que é a última iteração previamente ao colapso, na qual o processo de análise é finalizado.

A listagem completa, em arquivo neutro “PDF” [extensão (.pdf), 1993], está disponível no CD que acompanha esta tese (veja descrição na próxima seção).

## A.10.1. Dados fornecidos.

```

"Identificação: ", "PORTAL B DE CHEN & ZHOU (1987)"
"Dados Gerais da Estrutura"
"Número de nós      Nnos =", 25
"Número de elementos Nele =", 24
"Número de barras   Nbar =", 3
"Número de restrições Nrst =", 6
"Número de nós suportes Nsup =", 2
"Número de materiais Nmr =", 1
"Número de propriedades Npr =", 2
"Número de tipos de lig. Ntl =", 1
"Número de rótulas   Nrot =", 0
"Número de ligações  Nlga =", 2
"Graus de liberdade Ngl =", 69
"Largura mín. banda S Lb =", 6
"Coordenadas dos Nós [cm]"
"Nó      coord X      coord Y"
1,0,0
2,0,44.45
3,0,88.9
4,0,133.35
5,0,177.8
6,0,222.25
7,0,266.7
8,0,311.15
9,0,355.6
10,66.675,355.6
11,133.35,355.6
12,200.025,355.6
13,266.7,355.6
14,333.375,355.6
15,400.05,355.6
16,466.725,355.6
17,533.4,355.6
18,533.4,311.15
19,533.4,266.7
20,533.4,222.25
21,533.4,177.8
22,533.4,133.35
23,533.4,88.9
24,533.4,44.45
25,533.4,0
" Incidência dos Elementos"
"Elem nó in nó fn      _Cx_   _Cy_   _L_cm_   _Fi_gr_"
1,1,2,0,1,44.45,90
2,2,3,0,1,44.45,90
3,3,4,0,1,44.45,90
4,4,5,0,1,44.45,90
5,5,6,0,1,44.45,90
6,6,7,0,1,44.45,90
7,7,8,0,1,44.45,90
8,8,9,0,1,44.45,90
9,9,10,1,0,66.675,0
10,10,11,1,0,66.675,0
11,11,12,1,0,66.675,0
12,12,13,1,0,66.675,0
13,13,14,1,0,66.675,0
14,14,15,1,0,66.675,0
15,15,16,1,0,66.675,0
16,16,17,1,0,66.675,0
17,17,18,0,-1,44.45,270
18,18,19,0,-1,44.45,270
19,19,20,0,-1,44.45,270
20,20,21,0,-1,44.45,270
21,21,22,0,-1,44.45,270
22,22,23,0,-1,44.45,270
23,23,24,0,-1,44.45,270
24,24,25,0,-1,44.45,270
"Dimensões das Seções e Número de Fatias"
"Núm. Dimensões do Perfil I [mm]      Quantidade de Fatias      "
"Prop Altura Largura  _Espessuras_  Metade Flange|Alma |Total"
"      Flange |  Alma  horiz.|vert. |vert.|"
1,20.32,20.307,1.12687,.7268,10,20,36
2,41.402,17.9578,1.6138,.9659,10,20,40
"Propriedades Geométricas das Seções"
"Núm. _Áreas [cm2] _Mód. Resistência [cm3] Inércia _Peso_"
"Prop Alma Flange Total Elástico Plástico [cm4] [kN/m]"
1,13.130557768,22.88334909,58.897255948,450.474804307577,498.508111565179,4576.8
2401176498,.45350885956584
2,36.87265296,28.98029764,94.83324824,1325.04593792553,1504.9717293489,27429.775
9609964,.730215993359993
"Propriedades dos Materiais"
"Diagrama de Análise F x e: "
"-Elástico perfeitamente plástico",2
" Tensões Residuais Fr: "
"-Diagrama linear flange e alma cte      ",3

```

```

"Módulo Elasticidade E[kN/cm2]=",20000
"Num. Escoamento Residual Parâmetros do Diagrama"
"Mat. [kN/cm2] [kN/cm2] Hy|a Hd|b e|n "
1,25,7.5,0,0,0
"Restrições Nodais"
"Nó Irx Iry Irz"
1,1,1,1
25,1,1,1
"Dados das Ligacoes"
"Ligacao considerando excentricidade ","N"
"Num Tipo Param Moment Ult Rotacao Ult Rigidez Inic Excentr."
"Lig mod. adic. Mu [kN.m] Tetu [mrad] Rki[kNm/rad] Exc [mm]"
"Param ----1-----2-----3-----4-----5-----"
1,1,1,130,50,38140.2,0
1,38140.2,0,0,0,0
"Materiais-Seções-Ligações-Curvatura-Prumo"
"Elem Barra Pos. Material Seção Extremo Ligação Curvatura Fora prumo"
1,101,1,1,0,0,-.001,.002
2,102,1,1,0,0,-.001,.002
3,103,1,1,0,0,-.001,.002
4,104,1,1,0,0,-.001,.002
5,105,1,1,0,0,-.001,.002
6,106,1,1,0,0,-.001,.002
7,107,1,1,0,0,-.001,.002
8,108,1,1,0,0,-.001,.002
9,201,1,2,1,1,0,.002
10,202,1,2,0,0,0,.002
11,203,1,2,0,0,0,.002
12,204,1,2,0,0,0,.002
13,205,1,2,0,0,0,.002
14,206,1,2,0,0,0,.002
15,207,1,2,0,0,0,.002
16,208,1,2,2,1,0,.002
17,301,1,1,0,0,-.001,.002
18,302,1,1,0,0,-.001,.002
19,303,1,1,0,0,-.001,.002
20,304,1,1,0,0,-.001,.002
21,305,1,1,0,0,-.001,.002
22,306,1,1,0,0,-.001,.002
23,307,1,1,0,0,-.001,.002
24,308,1,1,0,0,-.001,.002
"Modelo de barras com curvatura inicial ","S"
"Modelo com barras fora de prumo ","S"
"Matriz Indicadora de Deslocamentos"
1,70,71,72
2,1,2,3
3,4,5,6
4,7,8,9
5,10,11,12
6,13,14,15
7,16,17,18
8,19,20,21
9,22,23,24
10,25,26,27
11,28,29,30
12,31,32,33
13,34,35,36
14,37,38,39
15,40,41,42
16,43,44,45
17,46,47,48
18,49,50,51
19,52,53,54
20,55,56,57
21,58,59,60
22,61,62,63
23,64,65,66
24,67,68,69
25,73,74,75
"FINAL DA GEOMETRIA"
"Carregamento ",1
"CARGAS CONCENTRADAS NS COLUNAS P0"
"Cargas nodais Ncq=" ",1
"Nó Ic Fx [kN] Fy [kN] Mz [kN.m]"
9,2,0,-1500,0
"Soma Cargas SFx[kN] SFy[kN] SMz[kN.m]"
0,-1500,0
"Momento em O Mo Centro Cargas (Xc,Yc)"
0,0,0
"Carregamento ",2
"CARGA DISTRIBUIDA NA VIGA q0"
"Cargas nodais Ncq=" ",5
"Nó Ic Fx [kN] Fy [kN] Mz [kN.m]"
13,2,0,-187.5,0
14,2,0,-375.,0
15,2,0,-375.,0
16,2,0,-375.,0
17,2,0,-187.5,0
"Soma Cargas SFx[kN] SFy[kN] SMz[kN.m]"
0,-1500.,0
"Momento em O Mo Centro Cargas (Xc,Yc)"
-6000.75,400.05,0

```



```
"Carregamento ",3
"HORIZONTAL DE COLAPSO H0= 4 Mpc/A"
"Cargas nodais Ncq= ",1
"Nó Ic Fx [kN] Fy [kN] Mz [kN.m]"
9,2,150,0,0
"Soma Cargas SFx[kN] SFy[kN] SMz[kN.m]"
150,0,0
"Momento em O Mo Centro Cargas (Xc,Yc)"
-533.4,0,355.6
"FINAL DE CARREGAMENTOS",3
```

## A.10.2 Listagem da saída dos dados.

```
*****
* PERSEC Engenharia de Projetos Ltda 20:57:43 03-17-2010 *
* PPLANAVA - PB Sistema Computacional Pórtico Plano ANálise AVançada *
*****
```

Identificação: PORTAL B DE CHEN & ZHOU (1987)

### Dados Gerais da Estrutura

Número de nós Nnos = 25  
 Número de elementos Nele = 24  
 Número de barras Nbar = 3  
 Número de restrições Nrst = 6

Número de nós suportes Nsup = 2  
 Número de materiais Nmr = 1  
 Número de propriedades Npr = 2  
 Número de tipos de lig. Ntl = 1

Número de rótulas Nrot = 0  
 Número de ligações Nlga = 2  
 Graus de liberdade Ng1 = 69  
 Largura mín. banda s Lb = 6

### Coordenadas dos Nós [cm]

Nó	Coord X	Coord Y
1	0.0	0.0
2	0.0	44.5
3	0.0	88.9
4	0.0	133.3
5	0.0	177.8
6	0.0	222.2
7	0.0	266.7
8	0.0	311.1
9	0.0	355.6
10	66.7	355.6
11	133.3	355.6
12	200.0	355.6
13	266.7	355.6
14	333.4	355.6
15	400.1	355.6
16	466.7	355.6
17	533.4	355.6
18	533.4	311.1
19	533.4	266.7
20	533.4	222.2
21	533.4	177.8
22	533.4	133.3
23	533.4	88.9
24	533.4	44.5
25	533.4	0.0

### Incidência dos Elementos

Elem	nó in	nó fn	Cx	Cy	L_cm	Fi_gr
1	1	2	0.0000	1.0000	44.45	90.0000
2	2	3	0.0000	1.0000	44.45	90.0000
3	3	4	0.0000	1.0000	44.45	90.0000
4	4	5	0.0000	1.0000	44.45	90.0000
5	5	6	0.0000	1.0000	44.45	90.0000
6	6	7	0.0000	1.0000	44.45	90.0000
7	7	8	0.0000	1.0000	44.45	90.0000
8	8	9	0.0000	1.0000	44.45	90.0000
9	9	10	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
10	10	11	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
11	11	12	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
12	12	13	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
13	13	14	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
14	14	15	1.0000	0.0000	66.67	0.0000

15	15	16	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
16	16	17	1.0000	0.0000	66.67	0.0000
17	17	18	0.0000	-1.0000	44.45	270.0000
18	18	19	0.0000	-1.0000	44.45	270.0000
19	19	20	0.0000	-1.0000	44.45	270.0000
20	20	21	0.0000	-1.0000	44.45	270.0000
21	21	22	0.0000	-1.0000	44.45	270.0000
22	22	23	0.0000	-1.0000	44.45	270.0000
23	23	24	0.0000	-1.0000	44.45	270.0000
24	24	25	0.0000	-1.0000	44.45	270.0000

## Dimensões das Seções e Número de Fatias

Núm. Prop	Dimensões do Perfil I [mm]				Quantidade de Fatias			Total
	Altura	Largura	Espessuras		Metade Flange	Flange	Alma	
1	203.2	203.1	11.269	7.268	10	20	36	436
2	414.0	179.6	16.138	9.659	10	20	40	440

## Propriedades Geométricas das Seções

Núm. Prop	Áreas [cm <sup>2</sup> ]			Mód. Resistência [cm <sup>3</sup> ]		Inércia [cm <sup>4</sup> ]	Peso [kN/m]
	Alma	Flange	Total	Elastico	Plástico		
1	13.1	22.9	58.9	450.47	498.51	4577	0.454
2	36.9	29.0	94.8	1325.05	1504.97	27430	0.730

## Propriedades dos Materiais

Diagrama de Análise F x e: 2 -Elastico perfeitamente plástico  
Tensões Residuais Fr: 3 -Diagrama linear flange e alma cte

Módulo Elasticidade E[kN/cm<sup>2</sup>]= 20000.

Núm. Mat.	Escoamento [kN/cm <sup>2</sup> ]	Residual [kN/cm <sup>2</sup> ]	Parâmetros do Diagrama		
			Hy/a	Hd/b	e1/n
1	25.000	7.500	0.00	0.00	0.0000

## Restrições Nodais

Nó	Irx	Iry	Irz
1	1	1	1
25	1	1	1

## Dados das Ligacoes

Num Lig	Tipo mod.	Param adic.	Moment Mu [kN.m]	Ult	Rotacao Tetu [mrad]	Ult	Rigidez Rki [kNm/rad]	Inic	Excentr. Exc [mm]
1	1	1	130.0000	50.0000	.381402E+05	0.000			
Param	.38140E+05	.00000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.00000E+01	.00000E+01			

## Materiais-Seções-Ligações-Curvatura-Prumo

Elem	Barra	Pos.	Material	Seção	Extremo	Ligação	Curvatura	Fora prumo
1	1	1	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
2	1	2	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
3	1	3	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
4	1	4	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
5	1	5	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
6	1	6	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
7	1	7	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
8	1	8	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
9	2	1	1	2	1	1	0.0000	0.0020
10	2	2	1	2	0	0	0.0000	0.0020
11	2	3	1	2	0	0	0.0000	0.0020
12	2	4	1	2	0	0	0.0000	0.0020
13	2	5	1	2	0	0	0.0000	0.0020
14	2	6	1	2	0	0	0.0000	0.0020
15	2	7	1	2	0	0	0.0000	0.0020
16	2	8	1	2	2	1	0.0000	0.0020
17	3	1	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
18	3	2	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
19	3	3	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
20	3	4	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
21	3	5	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
22	3	6	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
23	3	7	1	1	0	0	-0.0010	0.0020
24	3	8	1	1	0	0	-0.0010	0.0020

Modelo de barras com curvatura inicial arco de senóide  
Modelo com barras fora de prumo

## Coordenadas dos Nós com Imperfeições [cm]

Nó	Coord Ximp	Coord Yimp
1	0.0000	0.0000
2	0.2445	44.4500
3	0.4445	88.9000
4	0.6001	133.3500
5	0.7112	177.8000
6	0.7779	222.2500

7	0.8001	266.7000
8	0.7779	311.1500
9	0.7112	355.6000
10	67.3862	355.6000
11	134.0612	355.6000
12	200.7362	355.6000
13	267.4112	355.6000
14	334.0862	355.6000
15	400.7612	355.6000
16	467.4362	355.6000
17	534.1112	355.6000
18	533.8667	311.1500
19	533.6667	266.7000
20	533.5111	222.2500
21	533.4000	177.8000
22	533.3333	133.3500
23	533.3111	88.9000
24	533.3333	44.4500
25	533.4000	0.0000

## Elementos com Imperfeições Geométricas

Elem	nó in	nó fn	Cx	Cy	L <sub>cm</sub>	Fi <sub>gr</sub>
1	1	2	0.0055	1.0000	44.451	89.6849
2	2	3	0.0045	1.0000	44.450	89.7422
3	3	4	0.0035	1.0000	44.450	89.7995
4	4	5	0.0025	1.0000	44.450	89.8568
5	5	6	0.0015	1.0000	44.450	89.9141
6	6	7	0.0005	1.0000	44.450	89.9714
7	7	8	-0.0005	1.0000	44.450	90.0286
8	8	9	-0.0015	1.0000	44.450	90.0859
9	9	10	1.0000	0.0000	66.675	0.0000
10	10	11	1.0000	0.0000	66.675	0.0000
11	11	12	1.0000	0.0000	66.675	0.0000
12	12	13	1.0000	0.0000	66.675	0.0000
13	13	14	1.0000	0.0000	66.675	0.0000
14	14	15	1.0000	0.0000	66.675	0.0000
15	15	16	1.0000	0.0000	66.675	0.0000
16	16	17	1.0000	0.0000	66.675	0.0000
17	17	18	-0.0055	-1.0000	44.451	269.6849
18	18	19	-0.0045	-1.0000	44.450	269.7422
19	19	20	-0.0035	-1.0000	44.450	269.7995
20	20	21	-0.0025	-1.0000	44.450	269.8568
21	21	22	-0.0015	-1.0000	44.450	269.9141
22	22	23	-0.0005	-1.0000	44.450	269.9714
23	23	24	0.0005	-1.0000	44.450	270.0286
24	24	25	0.0015	-1.0000	44.450	270.0859

## FINAL DA GEOMETRIA

## Carregamento 1. CARGAS CONCENTRADAS NS COLUNAS P0

Cargas nodais Ncg= 1

Nó	Ic	Fx [kN]	Fy [kN]	Mz [kN.m]
9	2	0.0	-1500.0	0.00

Soma Cargas	SFx [kN]	SFy [kN]	SMz [kN.m]
	0.0	-1500.0	0.00

Momento em O Mo	Centro Cargas (Xc, Yc)
0.00 kNm	0.00 cm 0.00 cm

## Carregamento 2. CARGA DISTRIBUIDA NA VIGA q0

Cargas nodais Ncg= 5

Nó	Ic	Fx [kN]	Fy [kN]	Mz [kN.m]
13	2	0.0	-187.5	0.00
14	2	0.0	-375.0	0.00
15	2	0.0	-375.0	0.00
16	2	0.0	-375.0	0.00
17	2	0.0	-187.5	0.00

Soma Cargas	SFx [kN]	SFy [kN]	SMz [kN.m]
	0.0	-1500.0	0.00

Momento em O Mo	Centro Cargas (Xc, Yc)
-6000.75 kNm	400.05 cm 0.00 cm

## Carregamento 3. HORIZONTAL DE COLAPSO H0= 4 Mpc/A

Cargas nodais Ncg= 1

Nó	Ic	Fx [kN]	Fy [kN]	Mz [kN.m]
9	2	150.0	0.0	0.00

Soma Cargas	SFx [kN]	SFy [kN]	SMz [kN.m]
	150.0	0.0	0.00

Momento em O Mo                      Centro Cargas (Xc,Yc)  
 -533.40 kNm                              0.00 cm                      355.60 cm

FINAL DE CARREGAMENTOS

-----

Hipótese: 1 FP+ +CI -/- ) (

Carregamento	Fator	Hipótese Incremental
1	0.750	Considerar todas as cargas como incrementais.
2	0.250	Considerar todas as cargas como incrementais.
3	0.500	Considerar todas as cargas como incrementais.

PROCESSO INCREMENTAL

N. vezes Incremento: AUTOMÁTICO  
 Passo Incremento %:

Incremento de cargas.

Algoritmo Nalg: 2 -Rigidez tangente Newton-Raphson  
 Número máximo iteração    Nitr: 400

Tolerância p/ convergência Tol: 0.00100  
 Critério de convergência usado: 7 -Norma das Cargas/Deslocamentos Separ.

Opção de saída: 1 -Resultado final, após convergência, (1 res)  
 Análise da rotação da Ligação: 5 -Método Simplificado (S) Ignorar tolerancia.

FINAL DE DADOS

\*\*\*\*\*

### Observações:

- 1- todas as cargas são incrementais e simultâneas, com os fatores 0,75 (1); 0,25 (2) e 0,50 (3);
- 2- processo incremental automático (em cargas);
- 3- ao superar 400 iterações no passo, o problema será finalizado;
- 4- critério de convergência 0,1% da norma das cargas, em separado, e dos deslocamentos, em separado [opção (g)];
- 5- rotação avaliada pelo método S (simplificado), ignorando a tolerância; e
- 6- resultado final após convergir apenas (1 saída, a da última iteração).

## A.10.3 Listagem da saída do incremento do início do escoamento.

```

=====
PROCESSO INCREMENTAL PARCIAL
N. vezes Incremento: 13      1      1      5      1
Passo Incremento  %: 4.000  2.000  1.000  0.100  0.500
N. vezes Incremento: 44      3      20     55
Passo Incremento  %: 1.000  0.500  0.100 -1.000
Início do escoamento com fator de carga Fcc = 0.555
=====

```

Hipótese 1 - 20.o Incremento - Fator 0.5550 - 12.a Iteração  
 Converge com: 0.0009 ( 93.78 % da tolerancia), com critério 7.

```

DESLOCAMENTOS NODAIS
Nó      Desloc. X      Desloc. Y      Rotação Z
-----cm-----cm-----rad-----grau-----
1      0.000000      0.000000      0.0000000      0.000000
2      0.031432      -0.025165     -0.0013745     -0.078755
3      0.117703      -0.050617     -0.0024672     -0.141358
4      0.246245      -0.076233     -0.0032766     -0.187736
5      0.404524      -0.101891     -0.0038056     -0.218043
6      0.580214      -0.127482     -0.0040608     -0.232664
7      0.761373      -0.152923     -0.0040528     -0.232207
8      0.936618      -0.178162     -0.0037960     -0.217496
9      1.095281      -0.203189     -0.0033084     -0.189556
10     1.093861      -0.393844     -0.0026827     -0.153705
11     1.092520      -0.554115     -0.0020740     -0.118829
12     1.091281      -0.663606     -0.0011595     -0.066433
13     1.090119      -0.701937     0.0000606      0.003470
14     1.088948      -0.651089     0.0014804      0.084822
15     1.087644      -0.507122     0.0027835      0.159482
16     1.086156      -0.291892     0.0035478      0.203271
17     1.084603      -0.055388     0.0016641      0.095344
18     1.094533      -0.049014     -0.0010978     -0.062898
19     0.997887      -0.042050     -0.0031308     -0.179381
20     0.827152      -0.034701     -0.0044312     -0.253890
21     0.614921      -0.027240     -0.0049979     -0.286361
22     0.393775      -0.019934     -0.0048326     -0.276885
23     0.196166      -0.012970     -0.0039394     -0.225709
24     0.054296      -0.006385     -0.0023253     -0.133231
25     0.000000      0.000000      0.0000000      0.000000

```

```

DESLOCAMENTOS MÁXIMOS DOS NÓS
Máx     1.095281      -0.701937      -0.0049979      -0.286361
Nó      9              13              21

```

```

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS
Elem    J Normal    J Corte    J Momento    K Normal    K Corte    K Momento
-----kN-----kN-----kNcm-----kN-----kN-----kNcm-----
1      661.974     12.988     3118.852     -661.974     -12.988     -2541.856
2      661.971     13.143     2541.856     -661.971     -13.143     -1957.985
3      661.972     13.110     1957.985     -661.972     -13.110     -1375.557
4      661.976     12.891     1375.557     -661.976     -12.891     -802.871
5      661.984     12.488     802.871     -661.984     -12.488     -248.085
6      661.994     11.907     248.085     -661.994     -11.907     280.896
7      662.007     11.157     -280.896     -662.007     -11.157     776.535
8      662.022     10.247     -776.535     -662.022     -10.247     1231.770
9      32.641     37.761     -1231.767     -32.641     -37.761     3749.407
10     32.658     37.746     -3749.405     -32.658     -37.746     6266.048
11     32.687     37.721     -6266.048     -32.687     -37.721     8781.033
12     32.727     37.686     -8781.033     -32.727     -37.686     11293.689
13     32.757     11.626     -11293.689     -32.757     -11.626     12068.864
14     32.661     -40.451     -12068.864     -32.661     40.451     9371.872
15     32.450     -92.516     -9371.872     -32.450     92.516     3203.447
16     32.236     -144.558     -3203.444     -32.236     144.558     -6434.765
17     170.283     33.648     6434.771     -170.283     -33.648     -4939.326
18     170.236     33.886     4939.326     -170.236     -33.886     -3433.310
19     170.213     33.999     3433.310     -170.213     -33.999     -1922.255
20     170.215     33.988     1922.255     -170.215     -33.988     -411.707
21     170.242     33.852     411.707     -170.242     -33.852     1092.789
22     170.294     33.591     -1092.789     -170.294     -33.591     2585.708
23     170.369     33.207     -2585.708     -170.369     -33.207     4061.560
24     170.467     32.701     -4061.560     -170.467     -32.701     5514.915

```

```

ESFORÇOS MÍNIMOS E MÁXIMOS DOS ELEMENTOS
Cond    Normal mín    Corte mín    Momento mín    Normal máx    Corte máx    Momento máx
-----kN-----kN-----kNcm-----kN-----kN-----kNcm-----
Esf.    -662.022     -144.558     -6434.771     -32.236     37.761     12068.864
Elem      8              16              17              16              9              14

```

## REAÇÕES DOS APOIOS

Nó	Força Fx	Força Fy	Momento Mz
----	----kN----	----kN----	---kNcm---
1	-8.876	662.042	3118.852
25	-32.749	170.458	5514.915

## ESTADO DAS LIGAÇÕES

Elem	Ligação	Momento	Rigidez	Rotação Z	mrad	Ic	g	Eta
----	IL Tipo	---kNcm---	--kNcm/rad---	--Ligação---	--C.Rig--	--	-----	-----
9	1 LN	-1231.767	.3814020E+07	-0.323	2.860	-4	0.270	0.2595
	EF	-1231.767	Diferença dM =	0.000	( 0.000%)		2.157	0.4481
	Rotação [mrad]:	-0.323 (S)	-0.323 (XX)	-0.323 (ME)			Adotado: (S)	
16	1 LN	-6434.765	.3814020E+07	-1.687	-3.547	-4	0.270	0.2595
	EF	-6434.765	Diferença dM =	0.000	( 0.000%)		2.157	0.4481
	Rotação [mrad]:	-1.687 (S)	-1.687 (XX)	-1.687 (ME)			Adotado: (S)	

## ESTADO DAS FATIAS NOS ELEMENTOS

Fatias do Elemento 1

Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 99.8% I/Ig= 99.7% NFPlás= 1 yg= 101.8 mm

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-25.000	Fatia=	10	Pos=	-0.182	Fatia=	427
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-23.754	Fatia=	10	Pos=	-1.460	Fatia=	427

Nó Inicial	Deform Plas: Neg=	-0.000002	Fatia=	10	Pos=	-0.000002	Fatia=	10
------------	-------------------	-----------	--------	----	------	-----------	--------	----

Fatias do Elemento 2

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-23.753	Fatia=	10	Pos=	-1.460	Fatia=	427
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-22.461	Fatia=	10	Pos=	-2.717	Fatia=	236

Fatias do Elemento 3

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-22.461	Fatia=	10	Pos=	-2.717	Fatia=	236
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-21.171	Fatia=	10	Pos=	-3.834	Fatia=	236

Fatias do Elemento 4

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-21.172	Fatia=	10	Pos=	-3.834	Fatia=	236
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-19.904	Fatia=	10	Pos=	-4.933	Fatia=	236

Fatias do Elemento 5

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-19.904	Fatia=	10	Pos=	-4.933	Fatia=	236
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-18.676	Fatia=	10	Pos=	-5.998	Fatia=	236

Fatias do Elemento 6

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-18.676	Fatia=	10	Pos=	-5.998	Fatia=	236
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-18.748	Fatia=	436	Pos=	-5.935	Fatia=	201

Fatias do Elemento 7

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-18.749	Fatia=	436	Pos=	-5.935	Fatia=	201
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-19.846	Fatia=	436	Pos=	-4.984	Fatia=	201

Fatias do Elemento 8

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-19.846	Fatia=	436	Pos=	-4.985	Fatia=	201
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-20.854	Fatia=	436	Pos=	-4.111	Fatia=	201

Fatias do Elemento 9

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-8.232	Fatia=	440	Pos=	3.792	Fatia=	201
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-10.129	Fatia=	440	Pos=	5.500	Fatia=	201

Fatias do Elemento 10

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-10.129	Fatia=	440	Pos=	5.500	Fatia=	201
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-12.025	Fatia=	440	Pos=	7.208	Fatia=	201

Fatias do Elemento 11

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-12.025	Fatia=	440	Pos=	7.208	Fatia=	201
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-13.919	Fatia=	440	Pos=	9.031	Fatia=	1

Fatias do Elemento 12

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-13.920	Fatia=	440	Pos=	9.030	Fatia=	1
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-15.813	Fatia=	440	Pos=	10.923	Fatia=	1

Fatias do Elemento 13

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-15.813	Fatia=	440	Pos=	10.923	Fatia=	1
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-16.397	Fatia=	440	Pos=	11.507	Fatia=	1

```

Fatias do Elemento 14
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -16.396 Fatia= 440 Pos= 11.508 Fatia= 1
Nó Final Tensões Max: Neg= -14.364 Fatia= 440 Pos= 9.476 Fatia= 1

Fatias do Elemento 15
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -14.362 Fatia= 440 Pos= 9.478 Fatia= 1
Nó Final Tensões Max: Neg= -9.715 Fatia= 440 Pos= 5.132 Fatia= 201

Fatias do Elemento 16
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -9.713 Fatia= 440 Pos= 5.134 Fatia= 201
Nó Final Tensões Max: Neg= -12.147 Fatia= 10 Pos= 7.327 Fatia= 240

Fatias do Elemento 17
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -24.024 Fatia= 10 Pos= 15.507 Fatia= 427
Nó Final Tensões Max: Neg= -20.713 Fatia= 10 Pos= 12.196 Fatia= 427

Fatias do Elemento 18
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -20.712 Fatia= 10 Pos= 12.197 Fatia= 427
Nó Final Tensões Max: Neg= -17.378 Fatia= 10 Pos= 8.863 Fatia= 427

Fatias do Elemento 19
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -17.378 Fatia= 10 Pos= 8.863 Fatia= 427
Nó Final Tensões Max: Neg= -14.032 Fatia= 10 Pos= 5.564 Fatia= 236

Fatias do Elemento 20
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -14.032 Fatia= 10 Pos= 5.564 Fatia= 236
Nó Final Tensões Max: Neg= -10.688 Fatia= 10 Pos= 2.666 Fatia= 236

Fatias do Elemento 21
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -10.689 Fatia= 10 Pos= 2.665 Fatia= 236
Nó Final Tensões Max: Neg= -12.197 Fatia= 436 Pos= 3.972 Fatia= 201

Fatias do Elemento 22
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -12.197 Fatia= 436 Pos= 3.971 Fatia= 201
Nó Final Tensões Max: Neg= -15.503 Fatia= 436 Pos= 6.985 Fatia= 1

Fatias do Elemento 23
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -15.504 Fatia= 436 Pos= 6.984 Fatia= 1
Nó Final Tensões Max: Neg= -18.771 Fatia= 436 Pos= 10.251 Fatia= 1

Fatias do Elemento 24
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -18.773 Fatia= 436 Pos= 10.250 Fatia= 1
Nó Final Tensões Max: Neg= -21.990 Fatia= 436 Pos= 13.467 Fatia= 1

RESUMO EFs plásticos: 1 Fatias plásticas: 1
Tensões Máximas [kN/cm2] Neg= -25.000 Elem = 1 Pos= 15.507 Elem = 17
Deformações Plásticas: Neg=-0.000002 Elem = 1 Pos= 0.000000 Elem = 0
Num. Fatias Plásticas: Nó Inicial= 1 Elem = 1

```

=====

### A.10.4 Listagem da saída do incremento de pré-colapso.

```

=====
                Hipótese 1 - 55.o Incremento- Fator 0.9000 - 42.a Iteração
Ruptura por cisalhamento da alma, seções: 4 indicando COLAPSO.
Corresponde a limite de resistência ou formar mecanismo.
*****
                PROCESSO INCREMENTAL FINAL
N. vezes Incremento: 13      1      1      5      1
Passo Incremento %: 4.000  2.000  1.000  0.100  0.500

N. vezes Incremento: 31      3      20
Passo Incremento %: 1.000  0.500  0.100
=====
                Hipótese 1 - 63.o Incremento - Fator 0.8930 - 192.a Iteração
Converge com: 0.0010 ( 98.72 % da tolerancia), com critério 7.
                DESLOCAMENTOS NODAIS
Nó      Desloc. X      Desloc. Y      Rotação Z
----      ----cm----      ----cm----      ---rad.-----grau---
1         0.000000         0.000000         0.0000000         0.000000
2         0.223999         -0.042888         -0.0080855         -0.463264
3         0.621674         -0.087559         -0.0096836         -0.554828
4         1.072414         -0.132022         -0.0105178         -0.602626
5         1.546922         -0.175944         -0.0107669         -0.616899
6         2.020734         -0.219291         -0.0104888         -0.600962
7         2.470647         -0.261931         -0.0096849         -0.554902
8         2.872447         -0.303829         -0.0083081         -0.476019
9         3.195477         -0.345084         -0.0060421         -0.346186
10        3.192656         -0.669757         -0.0045096         -0.258381
11        3.190091         -0.936159         -0.0034049         -0.195084
12        3.187819         -1.113532         -0.0018390         -0.105370
13        3.185755         -1.171158         0.0001871         0.010720
14        3.183654         -1.082144         0.0025030         0.143412
15        3.181191         -0.842284         0.0045988         0.263493
16        3.178242         -0.488904         0.0057951         0.332035
17        3.175142         -0.104614         0.0025198         0.144376
18        3.049363         -0.094266         -0.0065603         -0.375877
19        2.675305         -0.080556         -0.0100290         -0.574618
20        2.179055         -0.065584         -0.0120839         -0.692354
21        1.621285         -0.050226         -0.0127970         -0.733212
22        1.061607         -0.035396         -0.0121700         -0.697292
23        0.559382         -0.021837         -0.0102128         -0.585151
24        0.174189         -0.009883         -0.0068871         -0.394604
25        0.000000         0.000000         0.0000000         0.000000

                DESLOCAMENTOS MÁXIMOS DOS NÓS
Máx      3.195477      -1.171158      -0.0127970      -0.733212
Nó        9              13              21
=====
                ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS
Elem      J Normal      J Corte      J Momento      K Normal      K Corte      K Momento
----      ----kN----      ----kN----      ----kNcm---      ----kN----      ----kN----      ----kNcm---
1         1061.172         20.125         3926.965         -1061.172         -20.125         -3033.219
2         1061.109         23.213         3033.225         -1061.109         -23.213         -2002.338
3         1061.104         23.419         2002.338         -1061.104         -23.419         -962.307
4         1061.115         22.925         962.307         -1061.115         -22.925         55.779
5         1061.138         21.846         -55.779         -1061.138         -21.846         1025.956
6         1061.170         20.213         -1025.955         -1061.170         -20.213         1923.598
7         1061.210         18.001         -1923.598         -1061.210         -18.001         2723.006
8         1061.256         15.056         -2723.005         -1061.256         -15.056         3391.642
9         57.768         56.982         -3391.644         -57.768         -56.982         7190.829
10        57.818         56.932         -7190.829         -57.818         -56.932         10986.644
11        57.894         56.855         -10986.644         -57.894         -56.855         14777.309
12        57.996         56.751         -14777.309         -57.996         -56.751         18561.035
13        58.065         14.763         -18561.035         -58.065         -14.763         19545.361
14        57.797         -69.086         -19545.361         -57.797         69.086         14939.184
15        57.236         -152.902         -14939.184         -57.236         152.902         4744.750
16        56.682         -236.646         -4744.750         -56.682         236.646         -11033.142
17        277.682         60.361         11033.135         -277.682         -60.361         -8350.635
18        277.402         61.634         8350.640         -277.402         -61.634         -5611.632
19        277.293         62.119         5611.632         -277.293         -62.119         -2851.072
20        277.269         62.226         2851.072         -277.269         -62.226         -85.786
21        277.329         61.960         85.786         -277.329         -61.960         2667.696
22        277.470         61.324         -2667.696         -277.470         -61.324         5392.906
23        277.691         60.315         -5392.906         -277.691         -60.315         8073.288
24        278.034         58.718         -8073.285         -278.034         -58.718         10682.723

```



## ESFORÇOS MÍNIMOS E MÁXIMOS DOS ELEMENTOS

Cond	Normal mín	Corte mín	Momento mín	Normal máx	Corte máx	Momento máx
----	----kN----	----kN----	----kNcm----	----kN----	----kN----	----kNcm----
Esf.	-1061.256	-236.646	-11033.142	-56.682	62.226	19545.361
Elem	8	16	16	16	20	13

## REAÇÕES DOS APOIOS

Nó	Força Fx	Força Fy	Momento Mz
----	----kN----	----kN----	---kNcm----
1	-8.930	1061.325	3926.976
25	-58.045	278.175	10682.730

## ESTADO DAS LIGAÇÕES

Elem	Ligação	Momento	Rigidez	Rotação Z	mrاد	Ic	g	Eta
----	IL Tipo	---kNcm----	--kNcm/rad---	--Ligação--	--C.Rig--	--	-----	-----
9	1 LN	-3391.644	.3814020E+07	-0.889	4.870	-4	0.270	0.2595
	EF	-3391.644	Diferença dM =	0.000	( 0.000%)		2.157	0.4481
	Rotação [mrad]:	-0.889 (S)	-0.889 (XX)	-0.889 (ME)			Adotado: (S)	
16	1 LN	-11033.142	.3814020E+07	-2.893	-5.764	-4	0.270	0.2595
	EF	-11033.142	Diferença dM =	0.000	( 0.000%)		2.157	0.4481
	Rotação [mrad]:	-2.893 (S)	-2.893 (XX)	-2.893 (ME)			Adotado: (S)	

## ESTADO DAS FATIAS NOS ELEMENTOS

## Fatias do Elemento 1

Plasticidade: Nó	Inicial	A/Ag= 42.6%	I/Ig= 48.8%	NFPlás= 230	yg= 195.8 mm
Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-25.000	Fatia= 1	Pos= 0.937	Fatia= 427
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-24.976	Fatia= 192	Pos= -6.621	Fatia= 427
Nó Inicial	Deform Plas: Neg=	-0.005694	Fatia= 10	Pos=-0.000058	Fatia= 230
Nó Final	Deform Plas: Neg=	-0.000569	Fatia= 10	Pos=-0.000001	Fatia= 61

## Fatias do Elemento 2

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-24.977	Fatia= 192	Pos= -6.620	Fatia= 427
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-24.784	Fatia= 196	Pos= -9.268	Fatia= 427
Nó Inicial	Deform Plas: Neg=	-0.000569	Fatia= 10	Pos=-0.000003	Fatia= 51
Nó Final	Deform Plas: Neg=	-0.000304	Fatia= 10	Pos=-0.000027	Fatia= 196

## Fatias do Elemento 3

Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-24.784	Fatia= 196	Pos= -9.268	Fatia= 427
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-24.554	Fatia= 198	Pos= -11.388	Fatia= 236
Nó Inicial	Deform Plas: Neg=	-0.000304	Fatia= 10	Pos=-0.000027	Fatia= 196
Nó Final	Deform Plas: Neg=	-0.000152	Fatia= 10	Pos=-0.000010	Fatia= 198

## Fatias do Elemento 4

Plasticidade: Nó	Final	A/Ag= 96.1%	I/Ig= 95.4%	NFPlás= 20	yg= 97.7 mm
Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-24.554	Fatia= 198	Pos= -11.388	Fatia= 236
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-25.000	Fatia= 246	Pos= -13.192	Fatia= 201
Nó Inicial	Deform Plas: Neg=	-0.000152	Fatia= 10	Pos=-0.000009	Fatia= 198
Nó Final	Deform Plas: Neg=	-0.000034	Fatia= 10	Pos=-0.000001	Fatia= 246

## Fatias do Elemento 5

Plasticidade: Nó	Inicial	A/Ag= 96.1%	I/Ig= 95.4%	NFPlás= 20	yg= 97.7 mm
	Nó Final	A/Ag= 91.8%	I/Ig= 90.3%	NFPlás= 42	yg= 93.1 mm
Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-25.000	Fatia= 246	Pos= -13.192	Fatia= 201
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-25.000	Fatia= 245	Pos= -11.271	Fatia= 201
Nó Inicial	Deform Plas: Neg=	-0.000034	Fatia= 10	Pos=-0.000001	Fatia= 246
Nó Final	Deform Plas: Neg=	-0.000124	Fatia= 436	Pos=-0.000001	Fatia= 424

## Fatias do Elemento 6

Plasticidade: Nó	Inicial	A/Ag= 91.8%	I/Ig= 90.3%	NFPlás= 42	yg= 93.1 mm
	Nó Final	A/Ag= 81.5%	I/Ig= 78.0%	NFPlás= 95	yg= 79.8 mm
Nó Inicial	Tensões Max: Neg=	-25.000	Fatia= 245	Pos= -11.271	Fatia= 201
Nó Final	Tensões Max: Neg=	-25.000	Fatia= 243	Pos= -9.479	Fatia= 1
Nó Inicial	Deform Plas: Neg=	-0.000124	Fatia= 436	Pos=-0.000001	Fatia= 424
Nó Final	Deform Plas: Neg=	-0.000265	Fatia= 436	Pos=-0.000000	Fatia= 292

## Fatias do Elemento 7

## Fatias do Elemento 7

Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 81.5% I/Ig= 78.0% NFPlás= 95 yg= 79.8 mm  
 Nó Final A/Ag= 71.4% I/Ig= 66.0% NFPlás= 147 yg= 63.2 mm

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 243 Pos= -9.480 Fatia= 1  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 240 Pos= -7.507 Fatia= 1

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000265 Fatia= 436 Pos=-0.000001 Fatia= 292  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000444 Fatia= 436 Pos=-0.000002 Fatia= 369

## Fatias do Elemento 8

Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 71.4% I/Ig= 66.0% NFPlás= 147 yg= 63.2 mm  
 Nó Final A/Ag= 56.8% I/Ig= 50.9% NFPlás= 207 yg= 30.4 mm

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 240 Pos= -7.507 Fatia= 1  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 230 Pos= -5.265 Fatia= 1

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000444 Fatia= 436 Pos=-0.000002 Fatia= 369  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000865 Fatia= 436 Pos=-0.000003 Fatia= 230

## Fatias do Elemento 9

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -10.124 Fatia= 440 Pos= 4.993 Fatia= 201  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -12.986 Fatia= 440 Pos= 7.571 Fatia= 201

## Fatias do Elemento 10

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -12.986 Fatia= 440 Pos= 7.570 Fatia= 201  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -15.846 Fatia= 440 Pos= 10.427 Fatia= 1

## Fatias do Elemento 11

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -15.847 Fatia= 440 Pos= 10.426 Fatia= 1  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -18.702 Fatia= 440 Pos= 13.282 Fatia= 1

## Fatias do Elemento 12

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -18.703 Fatia= 440 Pos= 13.281 Fatia= 1  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -21.554 Fatia= 440 Pos= 16.131 Fatia= 1

## Fatias do Elemento 13

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -21.554 Fatia= 440 Pos= 16.130 Fatia= 1  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -22.296 Fatia= 440 Pos= 16.872 Fatia= 1

## Fatias do Elemento 14

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -22.293 Fatia= 440 Pos= 16.875 Fatia= 1  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -18.823 Fatia= 440 Pos= 13.405 Fatia= 1

## Fatias do Elemento 15

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -18.817 Fatia= 440 Pos= 13.411 Fatia= 1  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -11.138 Fatia= 440 Pos= 5.916 Fatia= 201

## Fatias do Elemento 16

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -11.132 Fatia= 440 Pos= 5.922 Fatia= 201  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -15.869 Fatia= 10 Pos= 10.474 Fatia= 431

## Fatias do Elemento 17

Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 40.2% I/Ig= 39.4% NFPlás= 264 yg= 185.8 mm  
 Nó Final A/Ag= 81.2% I/Ig= 77.5% NFPlás= 97 yg= 124.0 mm

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 1 Pos= 25.000 Fatia= 277  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 5 Pos= 18.073 Fatia= 427

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.004138 Fatia= 10 Pos= 0.000272 Fatia= 427  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000319 Fatia= 10 Pos=-0.000001 Fatia= 25

## Fatias do Elemento 18

Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 81.2% I/Ig= 77.5% NFPlás= 97 yg= 124.0 mm

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 5 Pos= 18.077 Fatia= 427  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -24.020 Fatia= 10 Pos= 11.866 Fatia= 427

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000318 Fatia= 10 Pos=-0.000001 Fatia= 25

## Fatias do Elemento 19

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -24.018 Fatia= 10 Pos= 11.868 Fatia= 427  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -17.907 Fatia= 10 Pos= 5.756 Fatia= 427

```

Fatias do Elemento 20
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -17.906 Fatia= 10 Pos= 5.756 Fatia= 427
Nó Final Tensões Max: Neg= -11.784 Fatia= 10 Pos= 0.222 Fatia= 236

Fatias do Elemento 21
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -11.785 Fatia= 10 Pos= 0.221 Fatia= 236
Nó Final Tensões Max: Neg= -17.501 Fatia= 436 Pos= 5.349 Fatia= 1

Fatias do Elemento 22
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -17.504 Fatia= 436 Pos= 5.347 Fatia= 1
Nó Final Tensões Max: Neg= -23.537 Fatia= 436 Pos= 11.380 Fatia= 1

Fatias do Elemento 23
Plasticidade: Nó Final A/Ag= 84.1% I/Ig= 80.9% NFPlás= 82 yg= 83.3 mm
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -23.541 Fatia= 436 Pos= 11.377 Fatia= 1
Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 244 Pos= 17.416 Fatia= 1
Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000269 Fatia= 436 Pos=-0.000004 Fatia= 273

Fatias do Elemento 24
Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 84.1% I/Ig= 80.9% NFPlás= 82 yg= 83.3 mm
                Nó Final A/Ag= 50.3% I/Ig= 47.3% NFPlás= 225 yg= 22.3 mm
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 244 Pos= 17.411 Fatia= 1
Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 223 Pos= 25.000 Fatia= 1
Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000270 Fatia= 436 Pos=-0.000004 Fatia= 273
Nó Final Deform Plas: Neg=-0.002399 Fatia= 436 Pos= 0.000094 Fatia= 1

RESUMO EFs plásticos: 10 Fatias plásticas: 1892
Tensões Máximas [kN/cm2] Neg= -25.000 Elem = 1 Pos= 25.000 Elem = 17
Deformações Plásticas: Neg=-0.005694 Elem = 1 Pos= 0.000272 Elem = 17
Num. Fatias Plásticas: Nó Inicial=264 Elem = 17 Nó Final=225 Elem = 24
=====

```

### A.10.5 Listagem da saída do incremento do colapso.

```

=====
Hipótese 1 - 64.o Incremento - Fator 0.8940 - 399.a Iteração
Não converge em 400 iter. - Paralizado.

DESLOCAMENTOS NODAIS

```

Nó	Desloc. X -----cm-----	Desloc. Y -----cm-----	Rotação Z ---rad.-----	Z -----grau-----
1	0.000000	0.000000	0.0000000	0.000000
2	0.273639	-0.043475	-0.0097608	-0.559251
3	0.745541	-0.089223	-0.0113471	-0.650141
4	1.269408	-0.134761	-0.0121437	-0.695780
5	1.814782	-0.179692	-0.0123281	-0.706350
6	2.355909	-0.223924	-0.0119534	-0.684878
7	2.867946	-0.267285	-0.0110098	-0.630815
8	3.323912	-0.309700	-0.0093999	-0.538572
9	3.679312	-0.351224	-0.0061960	-0.355005
10	3.676447	-0.680157	-0.0045580	-0.261155
11	3.673850	-0.948875	-0.0034268	-0.196340
12	3.671555	-1.126976	-0.0018398	-0.105415
13	3.669468	-1.184098	0.0002021	0.011579
14	3.667343	-1.093712	0.0025282	0.144856
15	3.664850	-0.851999	0.0046281	0.265169
16	3.661869	-0.496724	0.0058215	0.333547
17	3.658739	-0.110983	0.0025045	0.143497
18	3.488025	-0.100143	-0.0080812	-0.463020
19	3.045458	-0.085459	-0.0115849	-0.663763
20	2.479918	-0.069381	-0.0136428	-0.781676
21	1.853245	-0.052897	-0.0143355	-0.821363
22	1.226093	-0.037030	-0.0136647	-0.782931
23	0.658852	-0.022620	-0.0116406	-0.666955
24	0.212372	-0.010086	-0.0082083	-0.470301
25	0.000000	0.000000	0.0000000	0.000000

```

DESLOCAMENTOS MÁXIMOS DOS NÓS

```

Máx Nó	3.679312	-1.184098	-0.0143355	-0.821363
	9	13	21	

```

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

```

Elem	J Normal ----kN----	J Corte ----kN----	J Momento ----kNcm---	K Normal ----kN----	K Corte ----kN----	K Momento ----kNcm---
1	1062.613	20.451	3929.159	-1062.613	-20.451	-3020.931
2	1061.539	24.428	3035.940	-1061.540	-24.428	-1951.115
3	1061.534	24.607	1951.124	-1061.534	-24.607	-858.343
4	1061.549	24.059	858.364	-1061.549	-24.059	210.078
5	1061.585	22.895	-209.983	-1061.585	-22.895	1226.761
6	1061.647	21.137	-1226.543	-1061.647	-21.137	2165.237
7	1061.787	18.725	-2164.485	-1061.787	-18.725	2996.052
8	1062.705	15.045	-2991.217	-1062.705	-15.045	3659.353
9	58.410	56.381	-3672.889	-58.410	-56.381	7431.970
10	58.461	56.273	-7430.751	-58.461	-56.273	11182.656
11	58.537	56.194	-11182.656	-58.537	-56.194	14929.260
12	58.639	56.087	-14929.260	-58.639	-56.087	18668.776
13	58.706	14.051	-18668.776	-58.706	-14.051	19605.622
14	58.434	-69.894	-19605.622	-58.434	69.894	14945.593
15	57.868	-153.805	-14945.593	-57.868	153.805	4690.985
16	57.313	-237.615	-4690.378	-57.313	237.615	-11152.110
17	279.570	61.195	11135.487	-279.570	-61.195	-8415.898
18	278.344	62.719	8429.339	-278.344	-62.719	-5642.087
19	278.224	63.210	5642.206	-278.224	-63.210	-2833.169
20	278.200	63.314	2833.169	-278.200	-63.314	-19.499
21	278.262	63.039	19.498	-278.262	-63.039	2781.931
22	278.410	62.385	-2781.932	-278.410	-62.385	5554.308
23	278.662	61.353	-5554.061	-278.662	-61.353	8280.555
24	279.978	59.423	-8269.880	-279.978	-59.423	10910.640

```

ESFORÇOS MÍNIMOS E MÁXIMOS DOS ELEMENTOS

```

Cond	Normal mín ----kN----	Corte mín ----kN----	Momento mín ----kNcm---	Normal máx ----kN----	Corte máx ----kN----	Momento máx ----kNcm---
Esf.	-1062.705	-237.615	-11152.110	-57.313	63.314	19605.622

```

Elem      8      16      16      16      20      13

```

```

REAÇÕES DOS APOIOS

```

Nó	Força Fx ----kN----	Força Fy ----kN----	Momento Mz ----kNcm---
1	-8.363	1061.787	3957.423
25	-58.687	279.213	10929.388

## ESTADO DAS LIGAÇÕES

Elem	Ligação	Momento	Rigidez	Rotação Z	mrاد	Ic	g	Eta
----	IL Tipo	---kNcm---	--kNcm/rad---	--Ligação---	--C.Rig--	--	-----	-----
9	1 LN	-3672.889	.3814020E+07	-0.963	4.934	-4	0.270	0.2595
	EF	-3672.889	Diferença dM =	0.000 ( 0.000%)			2.157	0.4481
	Rotação [mrad]:	-0.963 (S)	-0.963 (XX)	-0.963 (ME)			Adotado: (S)	
16	1 LN	-11152.110	.3814020E+07	-2.924	-5.786	-4	0.270	0.2595
	EF	-11152.110	Diferença dM =	0.000 ( 0.000%)			2.157	0.4481
	Rotação [mrad]:	-2.924 (S)	-2.924 (XX)	-2.924 (ME)			Adotado: (S)	

## ESTADO DAS FATIAS NOS ELEMENTOS

## Fatias do Elemento 1

Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 41.9% I/Ig= 48.5% NFPlás= 231 yg= 196.2 mm

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 1 Pos= 1.919 Fatia= 427  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -24.977 Fatia= 192 Pos= -6.673 Fatia= 427

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.007175 Fatia= 10 Pos=-0.000141 Fatia= 231  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000569 Fatia= 10 Pos=-0.000001 Fatia= 61

## Fatias do Elemento 2

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -24.989 Fatia= 192 Pos= -6.621 Fatia= 427  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -24.690 Fatia= 196 Pos= -9.389 Fatia= 427

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000569 Fatia= 10 Pos=-0.000003 Fatia= 51  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000304 Fatia= 10 Pos=-0.000027 Fatia= 196

## Fatias do Elemento 3

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -24.690 Fatia= 196 Pos= -9.388 Fatia= 427  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -24.356 Fatia= 198 Pos= -11.594 Fatia= 236

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000304 Fatia= 10 Pos=-0.000027 Fatia= 196  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000152 Fatia= 10 Pos=-0.000010 Fatia= 198

## Fatias do Elemento 4

Plasticidade: Nó Final A/Ag= 96.1% I/Ig= 95.4% NFPlás= 20 yg= 97.7 mm

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -24.356 Fatia= 198 Pos= -11.595 Fatia= 236  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 246 Pos= -12.902 Fatia= 201

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000152 Fatia= 10 Pos=-0.000009 Fatia= 198  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000034 Fatia= 10 Pos=-0.000018 Fatia= 246

## Fatias do Elemento 5

Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 96.1% I/Ig= 95.4% NFPlás= 20 yg= 97.7 mm  
 Nó Final A/Ag= 88.3% I/Ig= 86.2% NFPlás= 60 yg= 88.9 mm

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 246 Pos= -12.903 Fatia= 201  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 244 Pos= -10.888 Fatia= 201

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000034 Fatia= 10 Pos=-0.000018 Fatia= 246  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000154 Fatia= 436 Pos=-0.000015 Fatia= 244

## Fatias do Elemento 6

Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 88.3% I/Ig= 86.2% NFPlás= 60 yg= 88.9 mm  
 Nó Final A/Ag= 80.0% I/Ig= 76.2% NFPlás= 104 yg= 77.6 mm

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 244 Pos= -10.889 Fatia= 201  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 242 Pos= -8.908 Fatia= 1

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000154 Fatia= 436 Pos=-0.000015 Fatia= 244  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000311 Fatia= 436 Pos=-0.000000 Fatia= 401

## Fatias do Elemento 7

Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 80.0% I/Ig= 76.2% NFPlás= 104 yg= 77.6 mm  
 Nó Final A/Ag= 65.0% I/Ig= 58.5% NFPlás= 180 yg= 50.0 mm

Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 242 Pos= -8.912 Fatia= 1  
 Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 238 Pos= -6.756 Fatia= 1

Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000312 Fatia= 436 Pos=-0.000000 Fatia= 401  
 Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000544 Fatia= 436 Pos=-0.000005 Fatia= 238

## Fatias do Elemento 8

Plasticidade:	Nó Inicial	A/Ag= 65.0%	I/Ig= 58.5%	NFPlás= 180	yg= 50.0 mm
	Nó Final	A/Ag= 51.2%	I/Ig= 50.0%	NFPlás= 216	yg= 19.1 mm
Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -25.000	Fatia= 238	Pos= -6.780	Fatia= 1
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -25.000	Fatia= 221	Pos= -3.634	Fatia= 1
Nó Inicial	Deform Plas:	Neg=-0.000545	Fatia= 436	Pos=-0.000006	Fatia= 238
Nó Final	Deform Plas:	Neg=-0.001501	Fatia= 436	Pos=-0.000035	Fatia= 221

## Fatias do Elemento 9

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -10.343	Fatia= 440	Pos= 5.177	Fatia= 201
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -13.174	Fatia= 440	Pos= 7.743	Fatia= 1

## Fatias do Elemento 10

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -13.174	Fatia= 440	Pos= 7.742	Fatia= 1
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -16.000	Fatia= 440	Pos= 10.568	Fatia= 1

## Fatias do Elemento 11

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -16.001	Fatia= 440	Pos= 10.567	Fatia= 1
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -18.823	Fatia= 440	Pos= 13.389	Fatia= 1

## Fatias do Elemento 12

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -18.824	Fatia= 440	Pos= 13.388	Fatia= 1
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -21.641	Fatia= 440	Pos= 16.205	Fatia= 1

## Fatias do Elemento 13

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -21.642	Fatia= 440	Pos= 16.205	Fatia= 1
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -22.348	Fatia= 440	Pos= 16.910	Fatia= 1

## Fatias do Elemento 14

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -22.345	Fatia= 440	Pos= 16.913	Fatia= 1
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -18.835	Fatia= 440	Pos= 13.403	Fatia= 1

## Fatias do Elemento 15

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -18.829	Fatia= 440	Pos= 13.409	Fatia= 1
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -11.104	Fatia= 440	Pos= 5.873	Fatia= 201

## Fatias do Elemento 16

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -11.098	Fatia= 440	Pos= 5.879	Fatia= 201
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -15.965	Fatia= 10	Pos= 10.557	Fatia= 431

## Fatias do Elemento 17

Plasticidade:	Nó Inicial	A/Ag= 34.3%	I/Ig= 34.3%	NFPlás= 288	yg= 187.8 mm
	Nó Final	A/Ag= 80.0%	I/Ig= 76.1%	NFPlás= 103	yg= 125.7 mm
Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -25.000	Fatia= 1	Pos= 25.000	Fatia= 257
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -25.000	Fatia= 5	Pos= 18.200	Fatia= 427
Nó Inicial	Deform Plas:	Neg=-0.005388	Fatia= 10	Pos= 0.000373	Fatia= 427
Nó Final	Deform Plas:	Neg=-0.000334	Fatia= 10	Pos=-0.000000	Fatia= 55

## Fatias do Elemento 18

Plasticidade:	Nó Inicial	A/Ag= 80.0%	I/Ig= 76.1%	NFPlás= 103	yg= 125.7 mm
Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -25.000	Fatia= 5	Pos= 18.251	Fatia= 427
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -24.103	Fatia= 10	Pos= 11.917	Fatia= 427
Nó Inicial	Deform Plas:	Neg=-0.000335	Fatia= 10	Pos=-0.000001	Fatia= 55

## Fatias do Elemento 19

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -24.102	Fatia= 10	Pos= 11.919	Fatia= 427
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -17.883	Fatia= 10	Pos= 5.701	Fatia= 427

## Fatias do Elemento 20

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -17.882	Fatia= 10	Pos= 5.701	Fatia= 427
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -11.653	Fatia= 10	Pos= 0.079	Fatia= 236

## Fatias do Elemento 21

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -11.654	Fatia= 10	Pos= 0.078	Fatia= 236
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -17.770	Fatia= 436	Pos= 5.587	Fatia= 1

## Fatias do Elemento 22

Nó Inicial	Tensões Max:	Neg= -17.773	Fatia= 436	Pos= 5.584	Fatia= 1
Nó Final	Tensões Max:	Neg= -23.910	Fatia= 436	Pos= 11.722	Fatia= 1

```

Fatias do Elemento 23
Plasticidade: Nó Final A/Ag= 81.9% I/Ig= 78.4% NFPlás= 93 yg= 80.4 mm
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -23.914 Fatia= 436 Pos= 11.717 Fatia= 1
Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 243 Pos= 17.890 Fatia= 1
Nó Final Deform Plas: Neg=-0.000307 Fatia= 436 Pos=-0.000001 Fatia= 431
Fatias do Elemento 24
Plasticidade: Nó Inicial A/Ag= 81.9% I/Ig= 78.4% NFPlás= 93 yg= 80.4 mm
                Nó Final A/Ag= 44.2% I/Ig= 42.7% NFPlás= 249 yg= 18.8 mm
Nó Inicial Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 243 Pos= 17.844 Fatia= 1
Nó Final Tensões Max: Neg= -25.000 Fatia= 219 Pos= 25.000 Fatia= 1
Nó Inicial Deform Plas: Neg=-0.000307 Fatia= 436 Pos=-0.000000 Fatia= 431
Nó Final Deform Plas: Neg=-0.003437 Fatia= 436 Pos= 0.000201 Fatia= 1
RESUMO Efs plásticos: 10 Fatias plásticas: 2104
Tensões Máximas [kN/cm2] Neg= -25.000 Elem = 1 Pos= 25.000 Elem = 17
Deformações Plásticas: Neg=-0.007175 Elem = 1 Pos= 0.000373 Elem = 17
Num. Fatias Plásticas: Nó Inicial=288 Elem = 17 Nó Final=249 Elem = 24

```

## A.11 NOTAS SOBRE O CD ANEXO

Terminando esta tese, envia-se em anexo um CD com o seguinte conteúdo:

- a. cópia impressa em “PDF” (1993) colorido da tese, em formato A4;
- b. cópia impressa em “PDF” (1993) preto e branco da tese, em formato A4;
- c. versão em FORTRAN do programa “SCDB.for” modificado por Alvarenga (2010), com saída para tela e arquivos para arquivos (.txt);
- d. programas FORTRAN “BCIN.for”, “FRAMP.for” e “FRAMH.for” conforme desenvolvido por Chen & Toma (1994) e a versão em “TURBO-BASIC” *FLEXCOMP* (2010) em formato [(.exe), compatível com Windows (2001)];
- e. listagem dos arquivos de dados (.dat) e resultados (.pdf) dos exemplos:
  - i. coluna de Van Kuren & Galambos (1964) seção 5.3;
  - ii. portal de Chen *et al.*, (1996), seção 5.5 ;
  - iii. portal de Arnold *et al.* (1968), seção 5.6;
  - iv. coluna de Hajar *et al.* (1997), seção 6.3;
  - v. coluna de Lu & Kamalvand (1968), seção 6.4;
  - vi. portal de Kanchanalai (1977), seção 6.5, caso D;
  - vii. portal de Hajar *et al.* (1997), seção 6.6, caso coluna CD 14WF74;
  - viii. viga biligada, seção 7.2, (casos diversos);
  - ix. coluna de Hajar *et al.* (1997), seção 7.3, (casos diversos);
  - x. portal de Yau & Chan (1994), seção 7.4;
  - xi. portal de Chan & Chuí (2000), seção 7.5, [CC, TC e RC (1-3)];
  - xii. portal de Chan & Zhou (1987), cap. 8, (casos diversos);
  - xiii. portal especial de Alvarenga (2010), cap. 9;
- f. apresentação [Power Point, Windows (2001, extensão (.PPS)] sonorizada, com os mesmos “slides” empregados na defesa desta tese ,em 30/04/2010; e
- g. arquivo *TABELA.lsp* para “AutoCAD” (20020), (ver seção A.8).

Solicitamos ao leitor, que comunique, por favor, qualquer falha de edição ou dificuldade de leitura ou entendimento, pelo endereço: [artalavarenga@ig.com.br](mailto:artalavarenga@ig.com.br) ou pela página “PROPEC” (PROgrama de Pós-graduação em Engenharia Civil) da EM/UFOP na Internet, com o endereço: <http://www.propec.ufop.br/>.



## A.12 REFERÊNCIAS

ABNT NBR 8800 (2007), *Projeto de revisão da norma NBR 8800 (1986)*, CB02, CE02. Comitê Brasileiro da Construção Civil e das Estruturas de Aço. 01/2007, Rio de Janeiro/RJ.

AISC LRFD (1993) “*Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*”. 2<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC LRFD (2005), *Specification for structural steel buildings*, ANSI/AISC 360-05, Chicago, Illinois.

AISC SAC (1997), *Background reports: metallurgy, fracture mechanics, welding, moment connections and frame system behavior*, Rep. SAC/BD-97/02.

AutoCAD (2002), Autocad, version 15.2, Autodesk Inc., San Rafael, California.

Bathe, K.J. (1996), *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. Jersey.

BCSA (1995), *Joints in steel construction. Moment connections*, The Steel Construction Institute, Shuttleworth & outros, Westminster, Londres, RU.

Biot, J.B. (1939), “Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for body under initial stress”, *Philosophical Magazine*, Vol. 27, pp. 468-485.

Chan, S.L. & Chui, P.P.T. (2000), *Nonlinear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*, Elsevier, Oxford, Reino Unido.

Chen, W.F., Goto, Y. & Liew, J.Y.R. (1996), *Stability design of semi-rigid frames*, John Willey and Sons, Nova Iorque.

Chen, W.F. & Han, D.J. (1987), *Plasticity for structural engineers*, Springer-Verlag, Nova Iorque.

Eurocode 3 (1992) *Design of steel structures*. Part 1. CEN European Committee for Standardization. ENV 1993 –1–1 E, Bruxelas.

Faella, C., Piluso, V. & Rizzano, G. (2000), *Structural steel semi-rigid connections – Theory, design and software*, CRC Press, Boca Raton/Flórida.

Galambos, T.V. (1982), *Structural members and frames*, Dept. Civil Engineering, Univ. Minnesota, Mineapolis.

Grapher (2005) *Grapher graphic system*, version 6.1, Golden Software, Colorado.

Hoffman, G. (2003) *JPEG Compression*, Wikipedia, “Joint photographic experts group”.

Higgins, TR; & outros (1971) “Plastic Design in Steel- A guide and commentary”. ASCE WRC. *Manuals and reports on engineering practice*. 41, Nova Iorque.

Mase, G.E. (1970), *Theory and problems of continuum mechanics*, Schaum Outline Series, Mc Graw Hill, N.York.

Salmon, C.G. & Johnson, J.E. (1990), *Steel structures – Design and behavior – Emphasizing load and resistance factor design*, Harper Collins Publishers, 3.a Ed., Nova Iorque.

Stellman, A.T. & Krishnan, G.V. (2002), *Harnessing AutoCAD 2002*, Autodesk Press, Vol. 1.

Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N. (1970), *Theory of elasticity*, 3<sup>a</sup> Ed., McGraw-Hill, Nova Iorque.

Weaver Jr, W. & Gere, J. M. (1990) “Matrix Analysis of Framed Structures”, 3<sup>a</sup> Ed., Van Nonstrand Reinhold, Nova Iorque.

(Obs. não foram listadas as referências da seção A.11, pois fazem parte do geral).

# REFERÊNCIAS (COMPLETAS)

Abdalla, KM & Chen, WF (1995), "Expanded database of semi-rigid steel connections", *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 4, pp. 553-564.

ABNT NBR 8800 (1986), *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios*, ABCEM, Rio de Janeiro/RJ.

ABNT NBR 8800 (2007), *Projeto de revisão da norma NBR 8800 (1986)*, CB02, CE02. Comitê Brasileiro da Construção Civil e das Estruturas de Aço. 01/2007, Rio de Janeiro/RJ.

Abolmaali, A., Kukreti, A.R. & Razavi, H. (2003), "Hysteresis behavior of semi-rigid double web angle steel connections", *J. Constr. Steel Research*, Vol. 59, pp. 1057-1082.

Abolmaali, A., Matthys, J.H., Farooqi, M. & Choi, Y. (2005), "Development of moment-rotation model equations for flush end-plate connections", *J. C. Steel Research*, Vol. 61, pp. 1595-1612.

Abramowitz, M. & Segun, I.A. (1972), *Handbook of mathematical functions: with formulas, graph and mathematical tables*, Dover Publications, N. Iorque.

Ackroyd, M.H. (1979), "*Nonlinear stability of flexibly-connected plane steel frames*", PhD Diss., Dept. Civil, Env. Architecture Eng., Univ. Colorado Boulder, Colorado.

Ackroyd, M.H. (1987), "Simplified frame design of type PR construction", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 141-146.

Ackroyd, M.H. & Gerstle, K.H. (1982), "Behavior of type 2 steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 108, No. 7, pp. 1541-1556.

Adey, B.T., Grodin, G.Y. & Chenye, J.J.R. (1998), "Extended end-plate moment connections under cyclic loading", *J. C. Steel Research*, Vol. 46, No. 1-3, pp. 435-436.

ADINA (2000), *ADINA Finite element system*. 8.6, ADINA R & D Inc., Watertown, Massachusetts.

Agerskov, H. (1976), "High-strength bolted connections subjected to prying", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 102, No. 1, pp. 161-175.

Aggarwal, AK (1994), "Comparative test on endplate beam-to-column connections", *Journal of Constr. Steel Research*, 30, pp. 151-175.

AISC (1972), *Manual of steel construction. Specification for structural steel buildings*, 7<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC (1976), *Manual of steel construction - Specification for structural steel buildings*, 8<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC ASD (1989), *Allowable stress design - Specification for structural steel buildings*, 9<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC LRFD (1986), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 1<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC LRFD (1993), *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*, 2<sup>a</sup> Ed., Chicago, Illinois.

AISC LRFD (2005), *Specification for structural steel buildings*, ANSI/AISC 360-05, Chicago, Illinois.

AISC SAC (1997), *Background reports: metallurgy, fracture mechanics, welding, moment connections and frame system behavior*, Rep. SAC/BD-97/02.

- Al-Bermani, F.G.A. & Kitipornchai, S. (1992), "Elastoplastic nonlinear analysis of flexibly jointed space frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 118, No. 1, pp. 108 -125.
- Al-Bermani, F.G.A., Li, B., Zhu, K. & Kitipornchai, S. (1994), "Cyclic and seismic response of flexibly jointed frames", *Engineering Structures*, Vol. 16, No. 4, pp. 249-255.
- Al-Mashary, F. & Chen, W.F. (1991), "Simplified second-order inelastic analysis for steel frames", *The Structural Engineer*, Vol. 69, No. 23(3), pp. 395-399.
- Almeida, A.C.B. (2006), "*Análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais nos perfis estruturais de aço*", Diss. de Mestrado, PROPEE / EE-UFMG, Belo Horizonte/MG.
- Almusallam, T.H. & Richard, R.M. (1993), "Steel frame analysis with flexible joints exhibiting-strain-softening behavior", *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 1, pp. 55-65.
- Al-Salloum, Y.A. & Almusallam, T.H. (1995), "Optimally and safety of rigid and flexibly-jointed steel frames", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 35, pp. 189-215.
- Altman, W.G. Jr, Azizinamini, A., Bradburn, J.H. & Radziminski, J.B. (1982), "*Moment-rotation characteristics of semi-rigid steel beam-to-column connection*", Report to NSF for Grant n. PFR7923520, Dep. of Civil Eng., Univ. of South-California, Columbia.
- Alvarenga, A.R. (2005), "*Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço*", Diss. de Mestrado, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto/MG.
- Alvarenga, A.R. (2008), "Estudos sobre ligações com análise avançada através da zona plástica em pórticos planos de aço", Ex. de Qualificação, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto/MG.
- Alvarenga, A.R. (2010), "Estudo sobre as ligações em estruturas de aço", Relatório Interno de Desenvolvimento. PROPEC/EM-UFOP, Curso de Doutorado em Construções Metálicas.
- Alvarenga A.R. & Silveira, R.A.M. (2005), "Aspectos importantes na análise avançada de colunas de aço", *Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2005*, Guarapari / ES.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2006a), "Efeito das tensões residuais na análise avançada de estruturas simples de aço", *Anais das XXXII Jornadas Sul-Americanas de Eng. Estrutural*, pp. 1493-1503.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2006b), "A configuração geométrica inicial na análise avançada de portais planos de aço", *REM Revista Escola de Minas*, Vol. 70, No. 2, pp. 185-196.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2006c), "Detalhes numéricos na análise inelástica com zona plástica", *Anais do XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering CILAMCE*, Belém / PA.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008a), "Lean columns by plastic zone advanced analysis view", *Anais do 5th European Conference on Steel and Composite Structures, EUROSTEEL 2008*, Graz, Áustria, Vol. B, pp 1659-1664.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008b), "Análise avançada de portais com colunas escoras". *Anais do XXXIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, Vol. EST05-320, pp. 1-12.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2008c), "Integração iterativa do esforço axial na análise inelástica com zona plástica", *Anais do XXIX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Maceió/AL.
- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2009a), "Introduzindo as ligações na análise com EF empregando zona-plástica - Uma nova formulação", *Anais do XXX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Búzios/RJ.

- Alvarenga, A.R. & Silveira, R.A.M. (2009b), "Second-order plastic-zone analysis of steel frames part I: Numerical formulation and examples of validation", *Latin American J. of Solids and Struct.*, Vol. 6, No. 2, pp. 131-152.
- Alvarez, R.J. & Birnstiel, C. (1969), "Inelastic analysis of multistory multibay frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 95, No. 11, pp 2477-2503.
- Aoki, T. & Fukumoto, Y. (1983), "Experiments on end-restrained steel welded H columns", 3<sup>rd</sup> *International colloquium on stability of metal structures*, Paris, França, pp. 71-76.
- Anderson, D & Tahir, MM (1996), "Economic comparison between simple and partial strength design of braced frames", em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R., *Connections in steel structures III*, Trento, Itália, pp. 527-553.
- Ang, V.M. & Morris, G.A. (1984), "Analysis of three dimensional frames with flexible beam-to-column connections", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 11, pp. 245-254.
- ANSYS (2005), *Structural nonlinearities*, Seminar for revision 4.4, Swanson Analysis System Inc., ANSYS Inc., Canonsburg, Pennsylvania.
- ANSYS (2009), *Ansys academic research*, Version 12.0. CFS. Ansys Inc., Canonsburg, Pennsylvania.
- Arbabi, F. (1982), "Drift on flexibly connected frames", *Computers & Structures*, Vol 15, No. 2, pp. 103-108.
- Argyris, J.H. (1964), *Recent advances in matrix methods of structural analysis*, Pergamon Press, Ankara.
- Arnold, P., Adams, P.F. & Lu, L.W. (1968), "Strength and behavior of an inelastic hybrid frame", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 94, No. 1, pp. 243-266.
- AS 4100 (1990), *Steel structures*, Standards Association of Australia, Sidnei, Austrália.
- Astaneh-Asl, A. (1999), "Seismic performance and design of bolted steel moment-resisting frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 105-120.
- Astaneh\_Asl, A. (2003), "World Trade Center collapse. Field investigation and analysis", Notas de leitura. Proceedings 9<sup>th</sup> *Arab Structural Eng. Conference*, Abu Dhabi, UAE.
- Astaneh-Asl, A., Call, S.M. & McMullin, K.M. (1989), "Design of single plate shear connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 21-32.
- Attalla, M.R., Deierlein, G.G. & McGuire, W. (1994), "Spread of plasticity: a quasi-plastic hinge approach", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 120, No. 8, pp 2451-2473.
- Attiogbe, E. & Morris, G. (1991), "Moment-rotation functions for steel connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 117, No. 6, pp. 1703-1718.
- AutoCAD (2002), *Autocad*, version 15.2, Autodesk Inc., San Rafael, California.
- Azizinamini, A., Bradburn, J.H. & Radziminski, J.B.(1985), "*Static and cyclic behavior of semi-rigid steel beam-connections*", Struct. Res. Studies, Dept. of Civil Eng., Univ. South-Carolina/Columbia.
- Azizinamini, A. & Radziminski, J.B. (1989), "Static and cyclic performance of semi-rigid steel beam-to-column connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 115, No. 12, pp. 2979-2999.
- Bahaari, M.R., & Sherbourne, A.N. (1994), "Computer modeling of an extended end-plate bolted connection", *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 5, pp. 879-893.
- Bahaari, M.R., & Sherbourne, A.N. (1996), "Structural behavior of end-plate bolted connections to stiffened columns", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 8, pp. 926-935.
- Bahari, M.R. & Sherbourne, A.N. (2000), "Behavior of eight-bolt large capacity endplate connections",

*Computer and Structures*, Vol. 72, pp. 699-711.

Bahia, C.S., Graham, J. & Martin, L.H. (1981), "Experiments on rigid beam to column connections subject to shear and bending forces", *Int. Conf. Joints in Struct. Steelwork*, Teeside Polytechnic.

Bailey, J.R. (1970), "Strength and rigidity of bolted beam to column connections", *Proceedings of the Conference on Joints in Structures*, Vol. 1, pp. 4, Un. de Sheffield / RU.

Baker, J.F. (1934), "A note on effective length of-pillar forming part of-continuous member in-building frame", 2<sup>nd</sup> Report Steel Structures Research Committee, Dept. of Scientific and Industrial Research of Grand Britain, pp. 13-34, HMSO. Londres/RU.

Barakat, M. & Chen, W.F. (1990), "Practical analysis of semi-rigid frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 54-68.

Barsan, G.M. & Chiorean C.G. (1999), "Computer program for large deflection elasto-plastic analysis of semi-rigid steel frame-works", *Computers & Structures*, Vol. 72, pp 699-711.

Barsom, J.M. & Pellegrino, J.V. Jr (2002), "Failure analysis of welded steel moment-resisting frame connections", *ASCE Journal of Materials in Civil Eng.*, Vol. 14, No. 1, pp. 24-34.

Bathe, K.J. (1996), *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. Jersey.

Batho, C. & Lash, S.D. (1936), "Further investigations on beam and stanchion connections encase concrete. Together with laboratory investigation on-full scale steel frame", Final report. SSRC, Dept. of Scientific and Ind. Research, pp. 276-363, HMSO, Londres/RU.

Batho, C. & Rowan, H.C. (1934), "Investigation of beam and stanchion connections", Steel Structures Res. Committee, 2<sup>nd</sup> Report, Londres, HMSO pp. 61-137, em Morris & Packer, (1987). Já Abdalla & Chen (1995), citaram pp. 92; e, 1<sup>st</sup> Report Batho, C. (1931), pp. 61-137.

BCSA (1995), *Joints in steel construction. Moment connections*, The Steel Construction Institute, Shuttleworth & outros, Westminster, Londres, RU.

Beal, A.N. (2000), "Who invented Young's modulus", *The Structural Engineer*, Vol. 78, No. 14, pp. 27-32.

Beaulieu, D. & Giroux, Y.M. (1974), "Etude experimentale d'un joint rigide entre un poteau tubulaire et des poutres en double-tê", Rap. GCT-74-06-02 Dep. de Génie Civil, Univ. Laval, Quebec, Canadá.

Beedle, L. & Christopher, R. (1964), "Tests of steel moment connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 116-125.

Benuzzi, F., Nethercot, D.A. & Zandonini, R. (1996), "Experimental behavior of semi-rigid connections in frames", em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R., *Connections in steel structures III*, Trento/Itália, pp. 57-66.

Bergan, P.G., Horrigmore, G., Krakeland, G. & Soreide, T.H. (1978), "Solutions techniques for nonlinear finite element problems", *Int. Jour. Numer. Meth. in Eng.*, Vol. 12, pp. 1677-1696.

Bernoulli, D. (1728), em Witmer (1991-1992), "Elementary Bernoulli-Euler beam theory", *MIT Unified Engineering Course*, Notes: pp. 5.114-5.164, & Speiser, D. (1982), "Daniel Bernoulli" (1700-1782), *Helvetica Physica Acta*, Vol. 55, pp. 504-523.

Bhatti, M.A. & Hingtgen, J.D. (1995), "Effects of connection stiffness and plasticity on the service load behavior of unbraced steel frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 21-33.

Biot, J.B. (1939), "Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for body under initial stress", *Philosophical Magazine*, Vol. 27, pp. 468-485.

Birkemoe, PC. & Gilmor, M.I. (1978), "Behavior of bearing critical double-angle bema connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 109-115.

- Bjorhovde, R. (1984), "Effect of end-restraint on column strength – Practical applications", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 1-13.
- Bjorhovde, R. (1988), "Column: from theory to practice", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp 21-33.
- Bjorhovde, R., Brozzetti, J. & Colson, A. (1987), *Connections in steel structures I – Behavior, strength and design*, Cachan, França. Elsevier Applied Science, Londres/RU.
- Bjorhovde, R., Colson, A. & Brozzetti, J. (1990), "Classification system for beam-to-column connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 11, pp. 3059-3076.
- Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R. (1996), *Connections in steel structures III – Behavior, strength and design*, Trento, Itália. Pergamon Press.
- Bose, B. & Hughes, A.F. (1995), "Verifying the performance of standard ductile connections for semi-continuous steel-frames", *Structures & Buildings*, Vol. 110, No. 11, pp. 441-457.
- Briquet, C., Guisse, S., Jaspard, J.P., Lognard, B. & Maquoi, R. (1994), "Research activities under COST C1 at the department MSM of the University of Liège", Proc. of 2<sup>nd</sup> COST C1 Workshop on Semi-rigid behavior of civil engineering structural connections. Praga, República Tcheca.
- Brown, J.H. (1986), "Moments on beam-columns with flexible connections in braced frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 157-165.
- Broderick, B.M. & Thomson, A.W. (2005), "Moment-rotation response of flush end-plate joints under cyclic loading", *Steel structures*, Vol. 5, pp. 441-451.
- Brun, P. & Picard, A. (1976), "Etude d'un assemblage imparfaitement rigide et des effets de son utilisatio dans um multi-étage", Rap. GCT-76-03 Dep. de Génie Civil, Un. Laval, Quebec/Canadá.
- Bursi, O.S. & Jaspard, J.P. (1997), "Calibration of-finite element model for isolated bolted endplate steel connection", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 44, No. 3, pp. 225-262.
- Bushnell, D. (1977), "A strategy for the solution of problems involving large deflections, plasticity and creep", *Int. Journal of Num. Meth. in Eng.*, Vol. 11, No. 4, pp. 683-708.
- BS 5950 (1990), *Structural use of steelwork in building*, Part I, Code of practice for design in simple and continuous construction: hot-rolled sections, British Standards Institution, Londres/RU.
- Calado, L. (2003), "Nonlinear cyclic model of top and seat with web angle for steel beam-to-column connections", *Engineering Structures*, Vol. 25, pp. 1189-1197.
- Carskaddan, P.S., Haaijer, G. & Grubb, M.A. (1984), "Adjusting the beam-line for positive-moment yielding", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 217-221.
- Challa, V.R.M. & Hall, J.F. (1994), "Earthquake collapse analysis of steel frames", *Earthquake Eng. and Struct. Dynamic.*, Vol. 23, No. 4, pp. 1199-1218.
- Chan, S.L. (1988), "Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method", *Int. Jour. Numer. Meth. in Eng.*, Vol. 26, pp. 2657-2669.
- Chan, S.L. & Chui, P.P.T. (2000), *Nonlinear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*, Elsevier, Oxford/RU.
- Chan, S.L., Huang, H.Y. & Fang, L.X. (2005), "Advanced analysis of imperfect portal frames with semi-rigid base connections", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 6, pp. 633-640.
- Chen, W.F. (1988), *Steel beam-to-column connections*, Elsevier Applied Science, R. Narayan Ed., Londres/RU.
- Chen, W.F. & Chan, S.L. (1995), "Second-order inelastic analysis of steel frames using element with midspan and end springs", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 121, No. 3, pp. 530-541.

- Chen, W.F. & Han, D.J. (1987), *Plasticity for structural engineers*, Springer-Verlag, Nova Iorque.
- Chen, W.F. & Lui, E.M. (1985), “Columns with end restraint and bending in load and resistance design factor”, *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 105-132.
- Chen, W.F. & Lui, E.M. (1991), *Stability design of steel frames*, CRC Press Inc, Boca Raton, Flórida.
- Chen, W.F. & Lui, E.M. (2000), *Stability design of steel frames*, CRC Press, Boca Raton/Flórida.
- Chen, W.F., Goto, Y. & Liew, J.Y.R. (1996), *Stability design of semi-rigid frames*, John Willey and Sons, Nova Iorque.
- Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames- Theory software and applications*, CRC Press, Boca Raton/Flórida.
- Chen, W.F. & White, D.W. (1993), *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames – An assessment of the state-of-the-art*, SSRC, Bethlehem.
- Chen, W.F. & Zhou, S.P. (1987), “Inelastic analysis of steel braced frames with flexible joints”, *Int. Jor. Solid and Structures*, Vol. 23, No. 5, pp 631-649.
- Chiorean, C.G. & Barsan, G.M. (2005), “Large deflection distributed plasticity analysis of 3D steel frameworks”, *Computer and Structures*, Vol. 83, pp. 1555-1571.
- Chisala, M.L. (1999), “Modeling M- $\Phi$  curves for Standard beam-to-column connections”, *Engineering Structures*, Vol. 21, pp. 1066-1075.
- Christopher, J.E. & Bjorhovde, R. (1999), “Semi-rigid frame design methods for practicing engineers”, *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 12-28.
- Chwalla, E. (1938), “Die stabilitaet lotrecht belasteter rechteckrahmen”, *Dier Bauingenieur*, Vol. 19, pp. 69.
- CISC (1983), *A project analysis approach to building costs*, Canadian Institute of Steel Construction, Willowdale, Ontário, Canadá. (CISC, 1997, *Handbook of steel construction*, 7.a Ed).
- Citipitioglu, A.M., Haj-Ali, R.M. & White, D.W. (2002), “Refined 3D finite element modeling of partially-restrained connections including slip”, *J. C. Steel Research*, Vol. 58, No. 1-3, pp. 995-1013.
- Clarke, M.J. (1994), “Plastic-zone analisys of frames”. Em Chen, W.F. & Toma, S. (1994), *Advanced analysis of steel frames: theory, software and applications*, CRC Press, Boca Raton.
- Clarke, M.J., Bridge, R.Q., Hancock, G.J. & Trahair, N.S. (1992), “Advanced analysis on steel building frames”, *J. C. S. Research*, Vol. 23, pp 1-29.
- Coelho, A.M.G., Bijlaard, F.S.K. & Silva, L.S. (2004a), “Experimental assessment of the ductility of extended end plate connections”, *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 1185-1206.
- Coelho, A.M.G., Bijlaard, F.S.K., Gresnit, N. & Silva, L.S. (2004b), “Experimental assessment of the behavior of bolted T-stub connections made up of welded plates”, *J. C. Steel Research*, Vol. 60, pp. 269-311.
- Colson, A. & Louveau, J.M. (1983), “Connections incidence on the inelastic behavior of steel structural”, *Euromech Colloquium*, No. 174.
- Cook, N.E. Gerstle, K.H. (1987), “Safety type 2 steel frames”, Part II “Under cyclic loads”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 113, No. 7, pp. 1444 -1456 e 1457-1467.
- Cox, M. (1972), “The numerical evaluation of B-splines”, *Journal of Inst. Math. Applic.*, Vol. 10, pp. 134-139.
- Crisfield, M.A. (1981), “A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through”,

*Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 55-62.

Crisfield, M.A. (1991), *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 1, Willey & sons, Nova Iorque, pp. 1-20.

CSA S16 (1994), *Limit states design of steel structures*, CAN/CSA-S16.1-M94, Canadian Standards Association, Rexdale, Ontário/Canadá.

Cunningham, R. (1990), "Some aspects of semi-rigid connections in structural steelwork", *The Structural Engineer*, Vol. 68, No. 5, pp. 85-92.

Dannemann, R.W. (1963), disc. em Monforton, G.R. & Wu, T.S. (1963), *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 90, No. 4, pp. 287 -290.

Davison, J.B., Kirby, P.A. & Nethercot, D.A. (1987), "Column behavior in PR construction: experimental behavior", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 113, No. 9, pp. 2032-2050.

De Back, L. & Zoetemeijer, P. (1972), "High strength bolted beam to column connections: the computation of bolts, T-stub flanges and column flanges", Stevin Laboratory 6-72-13, Delft Univ. of Technology, Delft/Holanda.

De Falco, F. & Marino, F.J. (1966), "Column stability in type 2 construction", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 67-71.

Deierlein G.G. (1992), "An inelastic analysis and design system for steel frames with partially restrained connections", em Bjorhovde, R., Colson, A., Haaijer, G. & Stark, J.W.B., *Connections in Steel Structures II – Behavior, design and Strength*, AISC, pp. 408-415, Chicago.

De Luca, A. & Stefano, M. (1994), "A proposal for introduction of equivalent frame imperfections into Eurocode 3 provisions", Proceed. *Structural Stability Research Council*, Annual Task Group Tech. Section, Lehigh Univ., pp. 457-466.

Det Norske Veritas (1977), *Norwegian rules for the design construction and inspection of offshore structures*, DNV, Hovik/Norway.

De Wolf, J.T. & Sarisley, E.F. (1980), "Column base plates with axial loads and moment", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 106, pp. 2167-2184.

DIN 1025-5 (1994), *Hot rolled I and H sections (IPE series) dimensions, mass and static parameters*, Deutsches Institut für Normung, Berlim.

Disque, R.O. (1964), "Wind connections with simple framing", *AISC Eng. Journal*, Vol. 3/4, pp. 101-103.

Dhillon, B.S. & Majid, S.A. (1990), "Interactive analysis and design of flexibly connected frames", *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 2, pp. 189-202.

Dhillon, B.S., O'Malley III, J.W. (1999), "Interactive design of semi-rigid steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 125, No. 5, pp. 556 -564.

Dong, Q. (1994), "Microcomputer analysis of reinforced concrete flat-plate structures subjected to lateral loading", MSc Tese. Dept. Civil Eng., Univ. of Manitoba, Winnepeg/Canadá.

Douty, R.T., McGuire, W. (1965), "High-strength bolted moment connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 91, No. 2, pp. 101-128.

Drake, R.M. & Elkin, S.J. (1999), "Beam-column base plate design – LRFD method", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 29-38. [Erratas: (2000), Vol. 2/4, pp. 81; e (2000), Vol. 4/4, pp. 170].

Driscoll, G.C. (1987), "Elastic plastic analysis of top- and seated angle connections", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 8, pp. 119-136.

Dubina, D. & Stratan, A. (2002), "Behavior of welded connections of moment resisting frames beam-to-



column joints”, *Engineering Structures*, Vol. 24, pp. 1431-1440.

Dumas, M., Beaulieu, D. & Piccard, A. (2004), “Introduction of the true behavior of connections in structural steel analyses”, 5.o Structural Specialty Conf. of the *Canada Society for Civil Eng.*, Saskatoon/Canada.

ECCS (1984), *Ultimate limit states calculations of sway frame with rigid joints*, Technical working group 8.2, Vol. 33, European Convention for Constructional Steelwork, pp. 20.

El-Ghazaly, H.A. (1995), “Elasto-plastic rotational capacity of welded symmetrical moment connections”, *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 4, pp. 676-685.

El-Tawil, S. (2000), “Panel zone yielding in steel”, *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 120-131.

El-Zanaty, M.H., Murray, D.W. & Bjorhovde, R. (1980), “*Inelastic behavior of multi-story steel frames*”, Structural Engineering Report., No. 83, Univ. Alberta, Canadá.

Engelhardt, M.D. & Husain, A.S. (1993), “Cyclic-loading performance of welded flange-bolted web connections”, *ASCE Journal of Struct. Eng.*, Vol. 119, No. 12, pp. 3537-3550.

Engesser, F. (1889), “Ueber die knickfestigkeit gerader stäbe”. *Zeitschrift für architekture and ingenieurwesen*, pp. 455.

Engesser, F. (1895), “Knickfragen”. *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 26, pp. 24.

Ermopoulos, J.C. & Stamatopoulos, G.N. (1996a), “Mathematical modeling of column base plate connections”, *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 36, No. 2, pp. 79-100.

Ermopoulos, J.C. & Stamatopoulos, G.N. (1996b), “Analytical modeling of column base plates under cyclic loading”, *Journal of Constr. Steel Research*, Vol.40, No. 3, pp. 225-238.

Ermopoulos, J.C. & Michaltsos G.T. (1998), “Analytical modeling of stress distribution under column base plates”, *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 46, No. 1-3, pp. 246-247.

Estrin, GY (1992), “Determination of bending moments in semi-rigid steel framing joints”, *Computers & Structures*, Vol. 45, No. 5/6, pp. 189-202.

Euler, G. (1759), “Sur les forces des colones”, *Memoires de L’Academie Royale des Science et Belles Lettres*, Vol. 13, pp 252, Berlim/Alemanha. Traduzido para o inglês por Van der Broek, J.A.; em *American Journal of Physics*, (1947), Vol. 15, pp. 309.

Eurocode 3 (1992), *Design of steel structures*, Part 1, CEN - European Committee for Standardization. ENV 1993 –1–1 E, Bruxelas.

Eurocode 3 (1997), *Revised Anex J: Joint in building frames*, Part 1.1, CEN - European Committee for Standardization, versão aprovada. (Revisão 1998, segundo Simões *et al.*, 2002).

Eurocode 3 (2000), *Design of steel structures - Design of joints*, Part 1.8, CEN - European Committee for Standardization, PR-ENV 1993 –1–8 E, draft 2, Bruxelas.

ECCS (1984), *Ultimate limit states calculations of sway frame with rigid joints*, Technical working group 8.2 Publicação 33. European Convention for Constructional Steelwork, pp. 20.

Faella, C., Piluso, V. & Rizzano, G. (1994), “Connection influence on the elastic and inelastic behavior of steel frames”, International workshop and seminar *Behavior of steel structures on seismic areas*. STESSA, Timisoara/Romênia.

Faella, C., Piluso, V. & Rizzano, G. (1996), “Prediction of the flexural resistance of bolted connections with angle”, *IABSE Colloquium on Semi-rigid Structural Connections*. Istambul/Turquia.

Faella, C., Piluso, V. & Rizzano, G. (2000), *Structural steel semi-rigid connections – Theory, design and software*, CRC Press, Boca Raton/Flórida.

Fafard, M. & Massicotte, B. (1993), "Geometrical interpretation of the arc-length method", *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 4, pp. 603-615.

FEMA (1995), *Evaluation, repair, modification and design of welded steel moment structures*, Report n. 267, Federal Agency Management Agency. Advisory 1, n. 267A (1997).

Foley, C.M., Vinnacota, S. (1995), "Toward design office moment-rotation curves for end-plate beam-to-column connections", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 35, pp. 217-253.

Foley, C.M. & Vinnakota, S. (1999), "Inelastic behavior of multistory partially restrained steel frames - Part I - II", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 125, No. 8, pp. 854-861, 862-868.

Frye, M.J. & Morris, G.A. (1975), "Analysis of flexibly connected steel frames", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 2, No. 3, pp. 280-291. Disc.: Nixon, D. & Adams, P.F. (1976), *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 3, No. 2, pp. 349-350, Picard, A., Giroux, Y.M. & Brun, P. (1976), pp. 350-352.

Fujii, F., Choong, K.K. & Gong, S.X. (1992), "Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic frames", *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 1-2, pp. 133-136.

Galambos, T.V. (1982), *Structural members and frames*, Dept. Civil Engineering, Univ. Minnesota, Minneapolis.

Galambos, T.V. (2000), "Recent research and design developments in steel and composite structures in USA", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 55, pp. 289-303.

Galambos, T.V. & Ketter, R.L. (1959), "Columns under combined bending and thrust", *ASCE J. Eng. Mechanics*, Vol. 85, No. 2, pp. 1-30.

Galambos, T.V., & outros (1988), *SSRC Guide to stability design criteria for metal structures*, 4<sup>a</sup> Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.

Galambos, T.V. & outros (1998), *Guide to stability design criteria for metal structures*, SSRC – Steel Structures Research Council, 5.a Ed., John Wiley and Sons, Nova Iorque.

Galvão, A.S., Gonçalves, P.B., Pinheiro, L. & Silveira, R.A.M. (2005), "Stability and vibration analysis of slender L-frames with semi-rigid connections", *Anais do 18th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM*, Ouro Preto/MG.

Galvão, A.S., Silveira, R.A.M. & Gonçalves, P.B. (2000), "Buckling and post-buckling behavior of L frames", *Anais do XXI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering CILAMCE*, PUC-RJ, Rio de Janeiro / RJ.

Gao, L. & Haldar, A. (1995), "Safety evaluation of frames with PR connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 121, No. 7, pp. 1101-1109.

Gantes, C.J. & Lemonis, M.E. (2003), "Influence of equivalent bolt length in finite element modeling of T-stub steel connections", *Computer and Structures*, Vol. 81, pp. 595-604.

Garlock, M.M., Ricles, J.M. & Sause, R. (2003), "Cyclic load tests and analysis of bolted top-and-seat angle connections", *ASCE Journal of Struct. Eng.*, Vol. 119, No. 12, pp. 1615-1625.

Gebbeken, N., Binder, B. & Rothert, H. (1992), "Zur numerischen analyze von kopfplatten-verbindungen", *Stahlbau*, Vol. 61, pp. 265-274, Berlim/Alemanha.

Gerschwindner, L.F. (1991), "A simplified look at partially restrained beams", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 73-78.

Gerstle, K.H. (1988), "Effect of connections on frames", *J. C. Steel Research*, Vol. 10, pp. 241-267.

Ghassemieh, M., Kukreti, A.R. & Murray, T.M. (1983), "Inelastic finite element analysis of stiffened end-plate moment connections", Res. Report n. FSEL/MBMA 83-02 Fears Structural Eng. Lab. School of Civil and Env. Science, Univ. of Oklahoma, Norman/Oklahoma.

- Gioncu, V. & Pectu, T. (1997), "Available rotation capacity of wide-flange beams and beam-columns", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 43, No. 1-3, pp. 161-217.
- Goel, S.C., Lee, K.H. & Stojasdinovik, B. (2000), "Design of welded moment connections using truss analogy", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 31-40.
- Goldberg, J.E. & Richard, R.M. (1963), "Analysis of nonlinear structures", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 89, No. 4, pp. 333-351.
- Gomes, F.C.T., Kuhlmann, U., De Matteis, G. & Mandara, A. (1998), "Recent developments on classification of joints", *COST C1 Workshop*, Liege/França.
- Goto, Y. & Miyashita, S. (1998), "Classification system for rigid and semi-rigid connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 124, No. 7, pp. 750-757.
- Goverdham, A.V. (1984), "A collection of experimental moment-rotation curves and evaluation of prediction equations for semi-rigid connections", MSc. Tese. Vanderbilt Univ., Nashville/Tennessee.
- Goverdham, A.V. (1988), "Moment-rotation characteristics of end-plate connections", PhD Dissertation. Vanderbilt Univ., Nashville/Tennessee.
- Graham, I. (1993), "Observations from the behaviour of bolted beam to unstiffened column rigid connections", *The Structural Engineer*, Vol. 71, No. 6, pp. 99-105.
- Grapher (2005) *Grapher graphic system*, version 6.1, Golden Software, Colorado.
- Guisse, S. & Jaspert, J.P. (1996), "Influence of structural frame behavior on joint design", em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R. *Connections in steel structures III*, Trento/Itália., pp. 321-330.
- Hajjar, J.F. & outros (1997), *Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for american steel design*, ASCE, Nova Iorque.
- Hasan, R., Kishi, N. & Chen, W.F. (1998), "A new nonlinear connection classification system", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 47, pp. 119-140.
- Hayalioglu, M.S. & Degertekin, S.O. (2005), "Minimum cost design of steel frames with semi-rigid connections and column bases via genetic optimization", *Computer & Structures*, Vol. 83, pp. 1849-1863.
- Hayes, J.G. (1974), "Numerical methods for curve and surface fitting", *The Institute of Mathematics and its Application*, Vol. 5-6, pp. 144-152, Londres/RU.
- Hellesland, J. & Bjorhovde, R. (1996a), "Part I: restraint demand factors and effective lengths of braced columns", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 10, pp. 1216-1224.
- Hellesland, J. & Bjorhovde, R. (1996b), "Part II: improved frame stability analysis with effective length" *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 11, pp. 1275-1283.
- Hermite, C. (1848), em Stander, D. (1988), "Makers of modern mathematics: Charles Hermite". *Bull. Inst. Math. Appl*, Vol. 24, No. 7-8, pp. 120-121.
- Hetchman, R.A. & Johnson, B.G. (1947), "Riveted semi-rigid beam-to-column building connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 11.
- Hickerson, T. (1937), "*Statically indeterminate frame works*", Chapel Hill, N.C. em Dannemann (1963).
- Higgins, T.R. & outros (1971), *Plastic Design in Steel- A guide and commentary*, ASCE WRC, Vol. 41, Nova Iorque.
- Ho, W.M.G. & Chan, S.L. (1992), "Semibifurcation and bifurcation analysis of flexibly connected steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 117, No. 8, pp. 2299-2319.
- Hoffman, G. (2003) *JPEG Compression*, Wikipedia, "Joint photographic experts group".

- Hon, K.K. & Melchers, R.E. (1987), "Moment-rotation curves for 'pinned' column-bases", *The Structural Engineer*, Vol. 65, No. 9, pp. 54-59.
- Horne, M.R. (1979), *Plastic theory of structures*, 2<sup>a</sup> Ed. Pergamon Press, Oxford.
- Howe, D. (2010), "Terminate and Stay Resident", TSR, <http://dictionary.reference.com/browse/>.
- IBM PC DOS (1993), (IBM Personal Computer Disk Operation System), *IBM PC DOS and Microsoft Windows User's Guide*, Microsoft Corporation, Indianapolis, IN.
- Iwankin, N. (1997), "Rational basis for increased fillet weld strength", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 68-70. [Errata: (1997), Vol. 3/4, pp. 112].
- Jaspart, J.P. & Vandegans, D. (1998), "Application of the component method to column bases", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 48, pp. 89-106.
- Jenkins, W.M., Tong, S. & Prescott, A.T. (1986), "Moment transmitting end-plate connections in steel construction and proposed basis for flush end-plate design", *The Structural Engineer*, Vol. 64, No. 5, pp. 121-132.
- Jones, S.W., Kirby, P.A. & Nethercot, D.A. (1982), "Columns with semi-rigid joints", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 108, No. 2, pp. 361-372.
- Johnson, B. & Green, L. (1940), "Flexible welded angle connections", *AWS Journal*, Vol. 19, No. 10, pp. 402-408.
- Johnson, L.G., Cannon, J.C. & Spooner, L.A. (1959), "Joints in high tensile preload bolts – tests on joints designed to develop full plastic moments of connected members", *Proc. Jubilee Symposium on high strength bolts*, Londres/RU, IStrutE, pp. 70-80.
- Johnson, R.P. & Law, C.L.C. (1981), "Semi-rigid joints for composite frames", em "Joints in structural steel works", John Wiley & Sons, pp. 3.3-3.19, Nova Iorque.
- Johnston, N.D. & Walpole, W.R. (1981), "Bolted end-plate beam-to-column connections under earthquake type loading", Res. Rep. 81-7, Depto. of Civil Eng., Univ. of Canterbury, Christchurch/N. Zelândia.
- Julian, O.G. & Lawrence, L.S. (1959), "Notes on J and L nomographs for determination of effective lengths". Reportagem não publicada de propriedade de Jackson & Moreland Eng., Boston, Massachusetts.
- Kam, T.Y., Rossow, E.C. & Corotis, R.B. (1983), "Inelastic tangential stiffness for 2-D frames", *ASCE J. Struct. Division.*, Vol. 109, No. 11, pp. 2685-2697.
- Kanchanalai, T. (1977), *The design and behavior of beam-column in unbraced steel frames*, AISI Project 189, Rep. 2, Univ. Texas, Austin, Civil Eng./Structural Research Lab.
- Kassimali, A. (1983), "Large deformation analysis of elastic-plastic frames", *ASCE J. Struct. Division.*, Vol. 109, No. 8, pp. 1869-1886.
- Kawashima, S. & Fujimoto, T. (1984), "Vibration analysis of frames with semi-rigid connections", *Computers & Structures*, Vol. 19, pp. 85-92.
- Kemp, A.R. & Dekker, N.W. (1991), "Available rotation capacity in steel and composite beams", *The Structural Engineer*, Vol. 69, No. 05, pp. 88-94.
- Kennedy, D.J.L. (1969), "Moment-rotation characteristics of shear connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 105-115.
- Kim, K.D. & Englehardt, M.D. (2007), "Non-prismatic beam element for beams with RBS connections in steel moment frames", *ASCE J. Structural Engineer*, Vol. 133, No. 2, pp. 176-184.
- Kim, S.E. & Chen, W.F. (1996a), "Practical advanced analysis for unbraced steel frame design – Part I", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 11, pp. 1259-1265.

- Kim, S.E. & Chen, W.F. (1996b), "Practical advanced analysis for braced steel frame design – Part II", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 11, pp. 1266-1274.
- Kim, S.E. & Chen, W.F. (1996c), "Practical advanced analysis for semi-rigid frame design", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 129-141.
- Kim, S.E. & Chen, W.F. (1999), "Guidelines to unbraced frame design with LRFD", *The Structural Design of Tall Buildings*, Vol. 8, pp. 273-288.
- Kim, S.E. & Lee, D.H. (2002), "Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames", *Engineering Structures*, Vol. 24, pp. 735-744.
- Kim, S.E., Ngo-Huu, C. & Lee, D.H. (2006), "Second-order inelastic dynamic analysis of 3D steel frames", *Int. Jour. Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 1693-1709.
- Kim, Y. & Chen, W.F. (1998), "Design tables for top- and seat-angle with double web-angle connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 50-75.
- King, W.S. (1994), "The limit loads of steel semi-rigid frames analyzed with different methods", *Computers & Structures*, Vol. 51, No. 5, pp. 475-487.
- King, W.S.; White, D.W. & Chen, W.F. (1992), "Second-order inelastic analysis methods for steel-frame design", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 118, No. 2, pp. 408-428.
- Kishi, N. & Chen, W.F. (1987), "Moment-rotation relations of semi-rigid connections with angles", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 7, pp. 1813-1834.
- Kishi, N. & Chen, W.F. (1990), "Semi-rigid steel beam-to-column connections data base and modeling", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 1, pp. 105-119.
- Kishi, N., Chen, W.F., Goto, Y. & Hasan, R. (1996), "Behavior of tall buildings with mixed use of rigid and semi-rigid connections", *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1193-1206.
- Kishi, N., Chen, W.F., Goto, Y., Komuro, M. (1998), "Effective length factor of columns in flexibly jointed and braced frames", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 47, pp. 93-118.
- Kishi, N., Chen, W.F., Matsuoka, K.G. & Nomachi, S.G. (1987), "Moment-rotation of top- and seat angle with double web angle connections", em Bjorhovde, R., Brozzetti, J. & Colson, A. *Connections in steel structures I*, Cachan/França, pp. 135-149.
- Kontoleon, M.J., Mistakidis, E.S., Baniotopoulos, C.C. & Panagiotopoulos, P.D. (1999), "Parametric analysis of the structural response of steel base plate connections", *Computer & Structures*, Vol. 71, pp. 87-103.
- Kottlyar, P.E.N. (1996), "Formulas for beams with semi-rigid connections", *AISC Eng. Journal*, Vol. 4/4, pp. 142-146.
- Kouhia, R. (1992), "On the solution of nonlinear finite element equations", *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 1-2, pp. 243-254.
- Krishnamurthy, N., Huang, H.T., Jeffrey, P.K. & Avery, L.K. (1979), "Analytical M-tetha curves for end-plate connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 105, No. 1, pp. 133 -145.
- Kukreti, A.R., Ghassemieh, M. & Murray, T.M. (1990), "Behavior and design of large capacity moment end plates", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 3, pp. 809-828.
- Kukreti, A.R., Murray, T.M. & Abolmaali, A. (1987), "End-plate connection moment-rotation relationship", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 8, pp. 137-157.
- Lavall, A.C.C. (1996), "Uma formulação teórica consistente para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal", Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos/SP.

- Lau, H.H., Godley, M.H.R. & Beale, R.G. (2003), "The influence of base connectivity on the ultimate load of columns", *Computer & Structures*, Vol. 81, pp. 1827-1849.
- Lee, S.S. & Moon, T.S. (2002), "Moment-rotation model of semi-rigid connections with angles", *Engineering Structures*, Vol. 24, pp. 227-237.
- Leon, R.T. (1999), "Partially restrained connections", em *Handbook of structural steel connection design and details*, Tamboli, AR. McGraw-Hill.
- Lewitt, C.W., Chesson, E.J. & Munse, W.H. (1966), "Restraint characteristics of flexible riveted and bolted beam to column connections", *Struct. Res. Series*, 296, Dept. Civil Eng. Illinois/Urbana II.
- Liew, J.Y.R., White, D.W. & Chen, W.F. (1993), "Second-order refined plastic-hinge analysis for Frame Design", Part I-II, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 119, No. 11, pp. 3196-3237.
- Liew, J.Y.R. & Yu, C.H. (1995), "Influence of semi-rigid joint actions on the design and behavior of building frames", *Proc. PSSC 4 Pacific Steel Structures Conf.*, Vol. 1, pp. 71-80.
- Liew, J.Y.R., Yu, C.H., Ng, Y.H. & Shanmugam, N.E. (1997), "Testing of semi-rigid unbraced frames for calibration of 2nd-order inelastic analysis", *J. C. Steel Research*, Vol. 41, No. 2-3, pp. 159-195.
- Lightfoot, F. & LeMesurier, A.P. (1974), "Elastic analysis of frameworks with elastic connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 100, No. 6, pp. 1297-1309.
- Li, G.Q. & Li, J.J. (2007), *Advanced analysis and design*, John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Lima L.R.O., Silva, L.S., Vellasco, P.C.G.S. & Andrade, S.A.L. (2004), "Experimental evaluation of extended endplate beam-to-column joints subjected to bending and axial force", *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 1333-1347.
- Lindsey, S.D., Ioannides, S.A. & Goverdham, A.V. (1985), "The effect of connection flexibility on steel members and frame stability", em Chen, W.F., *Connection flexibility on steel frames*, ASCE.
- Lionberger, S.R. (1967), "Statics and dynamics of building frames with non-rigid connections", PhD Diss., Stanford Univ., Califórnia.
- Lionberger, S.R. & Weaver, J.W. (1969), "Dynamic response of frames with non-rigid connections", *ASCE J. Mechanical Div.*, Vol. 95, No. EM1, pp. 95-114.
- Lipson, S.L. (1968), "Single angle and single plate beam framing connections", *1<sup>st</sup> Canadian Structural Eng. Conference*.
- Liu, Y. (2007), "Progressive-failure analysis of steel buiding under abnormal loads", PhD Diss., Dept. Civil Eng., Univ. Waterloo, Ontário, Canadá.
- Liu, Y., Xu, L. & Grierson, D.E. (2008), "Compound-element modeling accounting for semi-rigid connections and member plasticity", *Engineering Structures*, Vol. 30, pp. 1292-1307.
- Lo, D.S.K. & Stiemer, S.F. (1995), "A practical method for incorporating flexible connections in plane frame analysis", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 22, pp. 871-882.
- Lothers, J.E. (1951), "Elastic restraint equation for semi-rigid connections", *Transactions of J. Struct. Engng. ASCE*, Vol. 116, pp. 480-502.
- Lourenço, P.B., Cruz, P.J.S. & Moreno, C.L.M. (1997), "Simulação de ligações semi-rígidas submetidas a carregamentos cíclicos em construção metálica e mista", em A. Lamas, P. Cruz & L. Calado Proc. *1. Encontro Nacional da Construção Metálica e Mista*, pp. 827-838, Porto/ Portugal.
- Lui, E.M. (1988), "A practical P-delta analysis method for type FR and PR Frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 85-99.
- Lui, E.M. & Chen, W.F. (1986), "Analysis and behavior of flexibly-jointed frames", *Engineering Structures*, Vol. 8, pp. 107-118.

- Lui, E.M. & Chen, W.F. (1987), "Effects of joint flexibility on the behavior of steel frames", *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 5, pp. 719-732.
- Lui, E.M. & Chen, W.F. (1988), "Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames", *Int. Jor. Solid and Structures*, Vol. 24, No. 9, pp. 893-913.
- Lu, L.W. (1963), "Stability of frames under primary bending moments", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 89, No. 3, pp. 35-62.
- Lu, L.W. & Kamalvand, H. (1968), "Ultimate strength of laterally loaded columns", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 94, No. 6, pp. 1505-1523.
- Machado, F.C.S. (2005), "*Análise inelástica de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos*". Diss. de Mestrado, PROPEC / EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Maggi, Y.I., Gonçalves, R.M., Leon, R.T. & Ribeiro, L.F.L. (2005), "Parametric analysis of steel bolted end plate connections using finite element modeling", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 61, pp. 689-708.
- Mander, J.B., Chen, S. & Pekcan, G. (1994), "Low-cycle fatigue of semi-rigid top- and seat-angle connection", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 111-122.
- Mann, A.P. (1968), "*Plastically designed endplates*", PhD Diss., Univ. Leeds/RU.
- Mase, G.E. (1970), *Theory and problems of continuum mechanics*, Schaum Outline Series, Mc Graw Hill, N.York.
- Masur, E.F., Chang, I.C. & Donnell, L.H. (1961), "Stability of frames in the presence of primary moments", *ASCE J. Eng. Mechanics Div.*, Vol. 87, No. 4, (2442), pp. 19, conforme Lu (1963).
- Maxwell, S.M., Jenkins, W.M. & Howlett, J.N. (1981), "A theoretical approach to the analysis of connection behavior", *Proceedings of Conference on Joints on Steelwork*. Teeside Polytechnic/RU.
- McCormick, M.M. (1974), *Background to AISC standard connections*, Melbourne Research Laboratory, BHP/Austrália. (Australian Institute of Steel Construction).
- McMinn, S.J. (1961), "The determination of critical loads of plane frames", *The Structural Engineer.*, Vol. 39, No. 7, pp. 221.
- Meili, Z. (1994), "Principles and practice of similarity system theory", *Intern. Journ. of General Systems*, Vol. 23, No. 1, pp. 39-48.
- Melchers, R.E. (1992), "Column-base response under applied moment", *J. C. Steel Research*, Vol. 23, pp. 127-143.
- Melchers, R.E. & Kaul, D. (1982), "Behavior of frames with flexible joints", Proc. 8<sup>th</sup> *Australian Conference on Mechanics of Structural Materials*, Newcastle/Austrália.
- Menegotto, M. & Pinto, P.E. (1973), "Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal stress in the base", *IABSE symposium on the resistance and ultimate deformability*.
- Meyer, C. (1973), "Solution of linear equations – State of the art", *ASCE J. Struct. Division.*, Vol. 99, No. 7, pp. 1507-1526.
- Miller, A.R. (1987), *Turbo-basic programs for scientists and engineers*, Sybex, São Francisco.
- Mofid, M., Azizpour, S. & McCabe, S.L. (2001), "On the analytical model of beam-to-column semi-rigid connections, using plate theory", *Thin-walled Structures*, Vol. 39, pp. 307-325.
- Mofid, M., Mohammadi, M.R.S. & McCabe, S.L. (2005), "Analytical approach of endplate connection: ultimate and yielding moment", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 131, No. 3, pp. 449-456.

- Mohamed, S.E., Kounadist, A.N. & Simitses, G.J. (1991), "Elastic-plastic instability of flexibly connected non-orthogonal frames", *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 6, pp. 663-669.
- Moncarz, P.D. & Gerstle, K.H. (1981), "Steel frames with nonlinear connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 107, No. 8, pp. 1427-1440.
- Monforton, G.R. & Wu, T.S. (1963), "Matrix analysis of semi-rigidly connected steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 89, No. 6, pp. 13-42.
- Morris, G.A. & Packer, J.A. (1987), "Beam-to-column connections in steel frames", *Canadian Jour. Civil Eng.*, Vol. 14, pp. 68-76. Disc: Nethercot, D.A. & Zandonini, R. (1988), Vol. 15, pg 282-286.
- Morris, G.A., Huang, J. & Scerbo, M. (1995), "Accounting for connection behavior in steel frame design", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 22, pp. 955-969.
- Moses, F. (1964), "Inelastic frame buckling", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 90, No. 6, pp. 105-121.
- Munse, W.H., Bell, W.G. & Chesson, E. (1959), "Behavior of riveted and bolted beam-to-column connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 85, No. 3, pp. 29-50.
- Murray, T.M. (1983), "Design of lightly loaded steel column base plates", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 143-152.
- Nader, M.N. & Astaneh-Asl, A. (1992), "Seismic behavior and design of semi-rigid steel frames", Report No. UCB/SEMM 67-31, Dept. Civil Eng. Univ. of California, Berkeley/Califórnia.
- Nair, R.S., Birkemoe, P.C. & Munse, W.H. (1974), "High strength bolts subject to tension and prying", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 100, No. 2, pp. 351-372.
- Navier, C.L.M.H. (1823), em El-Picon (1988), "Navier and the introduction of suspension bridges in France construction history", Vol. 4, pp. 21-34.
- Neal, B.G. (1977), *The plastic methods of structural analysis*, 3.a Ed., Chapman and Hall, Londres, Reino Unido.
- Nemati, N., Le Houdec, D. & Zandonini, R. (2000), "Numerical modeling of the cyclic behavior of the basic components of steel endplate connections", *Advances in Eng. Software*, Vol. 31, pp. 837-849.
- Nethercot, D.A. (1985), "Steel beam-to-column connections. A review of test data and its applicability to the evaluation of joint behavior in the performance of steel frames", *CIRIA Project RP 338*.
- Nethercot, D.A. (2000), "Frame structures: global performance. Static and stability behavior. General report", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 55, pp. 109-124.
- Nethercot, D.A., Davison, J.B. & Kirby, P.A. (1988), "Connection flexibility and beam design in non-sway frames", *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 99-108.
- Nethercot, D.A. & Zandonini, R. (1990), "Methods of prediction of joint behavior: beam-to-column connections", em Narayan, R, editor *Structural connections: stability and strength*, Elsevier Applied Science, Londres/RU, Cap.2, pp. 22-62.
- Nethercot, D.A., Li, T.Q. & Ahmed, B. (1998), "Unified classification system for beam-to-column connections", *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 57, pp. 661-694.
- Nyssen, C. (1981), "An efficient and accurate iterative method allowing large incremental steps to solve elasto-plastic problems", *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 63-71.
- Onuah, C., Morris, G. & Attiogbe, E. (1989), "Moment-rotation behavior of double web angle connections", *Proceedings of Canadian Soc. of Civil Eng.*, Vol. 1B, pp. 424-444.
- Oran, C. (1973), "Tangent stiffness in plane frames", *ASCE J. Struct. Engin.*, Vol. 73, No 6, pp. 973-985.
- Ostraender, J.R. (1970), "An experimental investigation of end-plate connections", MSc Tese, Univ. of



Saskatchewan, Saskatoon/Canadá.

Owen, D.R.J. & Hinton, E. (1980), *Finite elements in plasticity: theory and practice*, Pineridge Press Ltd, Swansea, Reino Unido.

Owens, G.W. & Cheal, B.D. (1989), *Structural steelwork connections*, Butterworths, Londres/RU.

Owens, G.W. & Moore, D.B. (1992), “Steel connections: the robustness of simple connections”, *The Structural Engineer*, Vol. 70, No. 3-4, pp. 37-45.

Packer, J.A. (1975), “A study of tension region of plastically design bolted beam to column connections”, MSc Tese, Manchester/RU.

Packer, J.A. & Morris, J.L. (1977), “A Limit-state design method for the tension region of bolted beam-column connections”, *The Structural Engineer*, Vol. 10, No. 5, pp. 446-458.

Patel, K.V. & Chen, W.F. (1984), “Nonlinear analysis of steel moment connections”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 110, No. 8, pp. 1861-1874.

Peters, D.J., Puri, S.P.S., Kratky, R.J., Huang, Y.H., Heroux, J.P. & Adams, L.A. (1998), Editorial “Computer misuse in civil engineering”, *Journal of. Comp. in Civil Eng.*, Vol. 10, pp. 169-180.

Picard, A., Giroux & Brun, P. (1976), Disc: “Analysis of flexibly connected steel frames”, Frye & Morris (1975), *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 3, No. 2, pp. 350-352.

Piluso, V., Faella, C. & Rizzano, G. (2001), “Ultimate behavior of bolted T-stubs. I: theoretical model, II: model validation”, *ASCE J. Structural Engineer.*, Vol. 127, No. 6, pp. 686-704.

Pilvin, A. (1983), “Modelisation du comportement des assemblages de structures-barres”, PhD Diss., Univ. de Paris/França.

Pimenta, P.M. (1986), “Aspectos da análise não-linear de estruturas reticuladas”, *Anais do 7º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia*, São Carlos, São Paulo.

Pinheiro, L. (2003), “Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos”, Diss. de Mestrado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto / MG.

Pippard, A.J.S. & Backer J.F. (1936), *The analysis of engineering structures*, 3<sup>rd</sup>. Ed., Londres/RU.

Poggi, C. & Zandonini, R. (1987), “A finite element for the analysis of semi-rigid frames”, em Bjorhovde, R., Brozzetti, J. & Colson, A., *Connections in steel structures I*, Cachan/França, pp. 238-247.

Popov, E. & Pinkney, R.B. (1969), “Cyclic yield reversal in steel building connections”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 95, No. 3, pp. 327-353.

Popov, E., Tsai, K.C. & Englehardt, M.D. (1993), “Some unresolved issues in seismic codes”, *Preceedings Structures Congress ASCE*, Irvine/Califórnia.

Power-Basic (2005), *Console compiler for windows CC4 – Reference guide*, Powerbasic Inc, Flórida.

Pucinotti, R. (2001), “Top-and-seat and web angle connections: prediction via mechanical model”, *Journal of Constr. Steel Research*, Vol. 57, pp. 661-694.

Queiroz, G., Pimenta, R.J. & Paula, L.A.C. (2001), *Elementos das estruturas mistas aço-concreto*, Ed. O lutador.

Radziminski, J.B. & Azizinamini, A. (1987), “Prediction of moment-rotation behavior of semi-rigid beam-to-column connections”, em Bjorhovde, R., Brozzetti, J. & Colson, A. (1987), *Connections in steel structures I*, Cachan/França, pp. 33-40.

Ramberg, W. & Osgood, W.R. (1943), “Description of stress-strain curves by 3 parameters”, Tech. Rep. 902, National Advisory Committe for Aeronautics, Washington.

- Ramm, E. (1981), "Strategies for tracing the nonlinear response near limit points", em Bathe, K.J., Wunderlich, W. & Stein, E. (1982), *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, pp. 63-69, Springer, Berlim.
- Rathbun, J.C. (1936), "Elastic properties of riveted connections", *Transactions ASCE*, Vol. 107, pp. 993-1019.
- Rauscher, T.R. & Gerstle, K.H. (1992), "Reliability of rotational behavior of framing connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 1/4, pp. 12-19.
- Razzaq, Z. (1983), "End restraint effect on steel column strength", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 109 No. 2, pp. 314-334.
- Richard, R.M. & Abbott, B.J. (1975), "Versatile elastic-plastic stress and strain formula", *ASCE J. Mechanical Div.*, Vol. 101, No. 4, pp. 511-515.
- Richard, R.M., Gillett, P.E., Kriegh, J.D. & Lewis, B.A. (1980), "The analysis and design of single plate framing connections", *AISC Engineering Journal*, Vol. 2/4, pp. 30-52.
- Rocha, G. (2000), "*Estratégias de incremento de carga e de iteração para a análise não-linear de estruturas*", Diss. de Mestrado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto / MG.
- Romstad, K.M. & Subramanian, C.V. (1970), "Analysis of frame connection rigidity", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 96, No. 11, pp. 2283-2300.
- Saje, M., Planinc, I., Turk, G. & Vratnar, P. (1996), "A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames", *Comp. Meth. Appl. Mechanics and Eng.*, Vol. 144, pp. 125-151.
- Salmon, C.G. & Johnson, J.E. (1990), *Steel structures – Design and behavior – Emphasizing load and resistance factor design*, Harper Collins Publishers, 3.a Ed., Nova Iorque.
- Salmon, C.G., Schenker, L. & Johnston, B.G. (1955), "Moment-rotation characteristics of column anchorages", *Transactions ASCE J. Struct. Engng.*, Vol. 122, No. 2852, pp. 132-154.
- Santos, M.N., Rocha, P.A.S., Silva, A.R.D. & Silveira, R.A.M. (2008), "Applications of a hybrid finite element - Advanced nonlinear analysis of steel frames", *Anais do 5th European Conference on Steel and Composite Structures - Eurosteel 2008*, Vol. B, pp. 1891-1896, Graz, Áustria.
- Savard, M., Beaulieu, D. & Fafard, M. (1994), "Nonlinear finite element analysis of three dimensional frames", *Canadian J. Civil Eng.*, Vol. 21, pp. 461-470.
- Scacco, M.N. (1992), "Design aid: anchor bolt interaction of shear and tension loads", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp. 137-140.
- Schuab, S. (1998), "*Cyclic behavior of flush end plate connections*", MSc Tese, Dept. Civil Eng., Univ. of Oklahoma, Norman/Oklahoma.
- Sekulovic, M. & Slatic R. (2001), "Nonlinear analysis of frames with flexible connections", *Computer and Structures*, Vol. 79, pp. 1097-1107.
- Siat-Moy, F.C. (1986), "K-factor paradox", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 8, pp. 1747-1760.
- Shen, J. & Astaneh-Asl, A. (1999), "Hysteretic behavior of bolted-angle connections", *Journal of Constr. Steel Research.*, Vol. 51, pp. 201-218.
- Shen, Z.Y. & Zheng, W.G. (1995), "A new numerical integration method for the analysis of steel structural stability", *Pacific Steel Structures Conference 4 PSSC*, Vol. 1, pp. 543-550.
- Sherbourne, A.N. (1961), "Bolted beam-to-column connections", *The Structural Engineer.*, Vol. 39, No. 6, pp. 203-210.
- Sherbourne, A.N. & Bahaari, M.R. (1994), "3D Simulation of end-plate bolted connections", *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 120, No. 11, pp. 3122-3136. Disc: Krisnamurthy, N. (1996), Vol. 122, No. 6, pp.

713-714.

Sherbourne, A.N. & Bahaari, M.R. (1997), "Finite element prediction of end plate bolted connection behavior I: Parametric study, II: Analytic formulation", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 123, No. 2, pp. 157-175.

Shi, G. & Atluri, S.N. (1989), "Static and dynamic analysis of space frames with nonlinear connections", *Int. J. for Numeric Methods in Eng.*, Vol. 28, pp. 2635-2650.

Shi, Y.J., Chan, S.L. & Wong, Y.L. (1996), "Modeling for moment-rotation characteristics for end-plate connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 122, No. 11, pp. 1300 -1306.

Shutz, F.W. (1959), "Strenght of moment connections using high tensile strength bolts", *Proceeding National Eng. Conference, AISC*.

Siat-Moy, F.C. (1999), "An improved K-factor formula", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 125, No. 2, pp. 169-174. Disc: Hellesland, J., (2000), Vol. 126, No. 5, pp. 633-635.

Silva, A.D.R. (2009), "*Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*", Tese de Doutorado, PROPEC/EM-UFOP, Ouro Preto/MG.

Silveira, R.A.M. (1995), "*Análisede elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterias de contato*", Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC/RJ, Rio de Janeiro/RJ.

Silveira, R.A.M. (1999), "*Estratégias numéricas para análise de elementos estruturais esbeltos*", Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG, Relatório Final de Pesquisa.

Silveira, R.A.M. (2009), "*Análise numérica avançada de estruturas metálicas*", Relatório Final de Pesquisa, Programa Pesquisador Mineiro I (PPM I), Edital 03/07, FAPEMIG.

Silveira, R.A.M.; Rocha, G. & Gonçalves, P.B. (1999), "Estratégias numéricas para análises geometricamente não-lineares", *Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM, Águas de Lindóia / SP*.

Simões, L.M.C. (1996), "Optimization of frames with semi-rigid connections", *Computers & Structures*, Vol. 60, No. 4, pp. 531-539.

Simpson, S. (1740), *The nature and laws of chance*, em O'Connor, J.J. & Robertson, E.F. (1966), "Thomas Simpson", *MacTutor History of Mathematics Archive, HNMI Holistic Numerical Methods Institute*. Baseado em Rouse Ball, W.W. (1908), "*A short account of history of mathematics*", (anos 1701-1761), 4. Ed.

Sivakumaram, K.S. (1988), "Seismic response of multi-storey steel buildings with flexible connections", *Engineering Structures*, Vol. 10, pp. 239-248.

Sommer, W.H. (1969), "*Behaviour of welded header plate connections*", MSc Tese, Univ. Toronto/ Canadá.

Sonmez, M. (1996), "*Second-order analysis of elastic plane frames using finite element methods*", MSc Tese, Univ. of Pensilvannia.

Sourochnikoff, B. (1949), "Wind stresses in semi-rigid connections of steel framework", *Proceeding ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 2, No. 2402, pp. 382-402.

SSRC (1981), *General principles for the stability design of metal structures*, Technical Memorandum No. 5, ASCE.

Stellman, A.T. & Krishnan, G.V. (2002), *Harnessing AutoCAD 2002*, Autodesk Press, Vol. 1.

Stelmack, T.W., Marley, M.I. & Gerstle, K.H. (1986), "Analysis and tests of flexibly connected steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 7, pp. 1573-1589.

- Struik, J.H. & De Back, J. (1969), “*Tests on bolted T-stubs with respect to bolted beam-to-column connections*”, Report 6-69-13, Stevin Laboratory Delft Univ. of Technology, Delft/Holanda.
- Sugimoto, H. & Chen, W.F. (1982), “Small end restraint effects on strength of H-columns”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 108, No. 3, pp. 661-681.
- Surtes, J.O. & Mann, A.P. (1970), “Endplate connections in plastically designed structures”, *Conf. of Joints in Structures*, Un. of Sheffield/RU.
- Swanson, J.A. (2002), “Ultimate strength prying models for bolted T-stub connections”, *AISC Engineering Journal*, Vol. 3/4, pp. 136-147.
- Swanson, J.A. & Leon, R.T. (2001), “Bolted steel connections: tests on T-stub components”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 126, No. 1, pp. 50-56.
- Tarpy, T.S. & Cardinal, J.W. (1981), “Behavior of semi-rigid beam to column end plate connections”, *Proceedings of Conference on Joints on Steelwork*, Pentach Press, RU.
- Teh, L.H. & Clarke, M.J. (1999) “Co-rotational and lagrangian formulations for elastic 3D beam finite element”, *J. Constr. Steel Research*, Vol. 48, pp. 123-144.
- Terro, J.M. & Hamoush, S.A. (1996), “Inelastic analysis of sections subjected to axial force and bending moment”, *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 1, pp. 13-19.
- Thambiratnam, D.P. & Paramasivam, P. (1986), “Base plates under axial loads and moments”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 5, pp. 1166-1181.
- Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N. (1970), *Theory of elasticity*, 3<sup>a</sup> Ed., McGraw-Hill, Nova Iorque.
- Tin-Loi, F. & Misa, J.S. (1996), “Large displacement elasto-plastic analysis of semi-rigid steel frames”, *Int. Journal of Num. Meth. In Eng.*, Vol. 39, pp. 741-762.
- Troup, K., Xiao, R.Y. & Siat-Moy, S.J. (1998), “Numerically modeling of bolted steel connections”, *Journal of Constr. Steel Research.*, Vol. 46, No. 1-3, pp. 269-276.
- Tsai, K.C., & Popov, E.P. (1990), “Cyclic behavior of end-plate moment connection”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 116, No. 7, pp. 2917-2930.
- Tschermmernegg, F. & Queiroz, G. (1996), “Mechanical modeling of semi-rigid joints for the analysis of framed steel and composite structures” em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R., *Connections in steel structures III*, Trento, Itália, pp. 237-246.
- UEGOR (1985), *Design of tubular joints for offshore structures*, Vol. 1-3, Underwater Engineering Group Offshore Research, CIRIA, Londres/RU.
- Van Kuren, R.C. & Galambos, T.V. (1964), “Beam-column experiments”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 90, No. 2, pp. 223-256.
- Vasconcelos Filho, A. (2002), *Análise estrutural de edifícios altos*, Notas de aula, EEUFMG, Belo Horizonte/MG.
- Vinnakota, S (1982), “Planar strength of restrained beam columns”, *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 108, No. 11, pp. 2496-2516.
- Vlassov, B.E. (1962), em Mori, D.D. (1988), “*Flexo-torção: Teorias de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordem, Automatização do cálculo*”, Dissertação de Mestrado, EESC/USP, São Carlos/SP.
- Von Mises, R.E. (1913), em Hill, R. (1950), *The mathematical theory of plasticity*, Oxford, Clarendon Press.
- Wald, F., Sokol, Z. & Steenhuis, M. (1996), “Proposal of the stiffness design model of the column bases”, em Bjorhovde, R., Colson, A. & Zandonini, R., *Connections in steel structures III*, Trento /Itália, pp. 249-258.

Weaver Jr, W. & Gere, J. M. (1990) "Matrix Analysis of Framed Structures", 3<sup>a</sup> Ed., Van Nostrand Reinhold, Nova Iorque.

Weinand, K. (1992), "SERICON Databank on joints in building frames", Proceedings of the 1<sup>st</sup> COST C1 Workshop Strasbourg, pp. 28-30.

Widjaja, B.R. (1998), "Path-following technique based on residual energy suppression for nonlinear finite element analysis", *Computers & Structures*, Vol. 66, No. 2-3, pp. 201-209.

WMI (2001), *Maple 7.0 Worksheet environment, numerical, calculations, algebraic computations, graphic, calculus, differential equations, linear algebra, finance and statistics, programming, software*, Waterloo Maple Inc. Star division GmbH.

White, D.D. (1985), "Material and geometric nonlinear analysis of local planar behavior in steel frames using iterative computer graphics", MS Thesis, Cornell Univ., Ithaca, Nova Iorque.

White, D.D. & Hajjar, J.F. (1991), "Application of second-order elastic analysis in LRFD: research to practice", *AISC Engineering Journal*, Vol. 4/4, pp.133-148.

Wilson, W.M. & Moore, H.F. (1917), "Tests to determine the rigidity of riveted joints in steel structures", *Engineering Experimental Station*, Bulletin 104, Urbana II/Illinois.

Windows (2001), *Windows New Technology eXPerience workstation*, Microsoft Corporation, version 5.1, service pack 2, St. <http://toastytech.com/guis/wxp.html>, Redmond, WA.

Wood, B.R., Beaulieu, D. & Adams, P.F. (1976), "Column Design by P-Delta Method", *ASCE Journal of Struct. Division*, Vol. 102, No. 2, pp. 411-427.

Wu, F.H. & Chen, W.F. (1990), "A design model for semi-rigid connections", *Engineering Structures*, Vol. 12, No. 4, pp. 88-97.

Xu, L. (1999), "Optimal design of steel frameworks with semi-rigid connections", PhD Diss., Waterloo Univ./Canadá.

Xu, L. (2001), "Second-order analysis for semi-rigid steel frame design", *Canadian Jour. Civil Eng.*, Vol. 28, pp. 59-76.

Xu, L. & Grierson, D.E. (1993), "Computer-automated design of semi-rigid steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 119, No. 6, pp. 1740-1760.

Xu, Z. & Mirmiran, A. (1997), "Looping behavior of arches using co-rotational finite element", *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 6, pp. 1059-1071.

Yang, Y.B. & Kuo, S.R. (1994), *Theory and analysis of nonlinear framed structures*, Prentice Hall / Simon & Schuster Parte. Ltd., Singapura.

Yang, Y.B. & Shieh, M.S. (1990), "Solution method for nonlinear problems with multiple critical points", *American Inst. of Aeronautics and Astronautics J.*, Vol. 28, No. 12, pp. 2110-2116.

Yau, C.Y. & Chan, S.L. (1994), "Inelastic and stability analysis of flexibly connected steel frames by springs-in-series model", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 120, No. 10, pp. 2803-2819.

Yee, Y.L. & Melchers, R.E. (1986), "Moment rotation curves for bolted connections", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 112, No. 3, pp. 615-634.

Yardimici, N., Yorgun, C. & Arda, T.S. (1996), "Testes on beam-columns strong and weak axis connections", *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 3, pp. 393-399.

Young, C.R. (1917), Bulletin 4 *Engineering Experiment Station*, University of Illinois/Urbana II.

Young, C.R. & Dunbar, W.B. (1928), "Permissible stress on rivets in tension", Bulletin 8 Section 16, *School of Engineering*, Univ. of Toronto/Canadá.

- Young, C.R. & Jackson, K.B. (1934), "The relative rigidity of welded and riveted connections", *Canadian Journal of Research*, Vol. II, No. 1, pp. 62-100, Vol. II, No. 2 pp. 101-134.
- Yourgun, C. & Bayramoglu, G. (2001), "Cyclic test for welded-plate sections with end-plate connections", *Journal of Constr. Steel Research.*, Vol. 57, No. 12, pp. 1309-1320.
- Youssef-Agha, W., Aktan, H.M. & Olowokere, O.D. (1989), "Seismic response of low-rise steel frames", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 115, No. 3, pp. 594-607.
- Yu, C.H., Liew, J.Y.R., Shanmugan, N.E. & Ng, Y.H. (1998), "Collapse behavior of sway frames with end-plate connections", *Journal of Constr. Steel Research.*, Vol. 48, pp. 169-188.
- Yu, C.H. & Shammugan, N.E. (1986), "Stability of frames with semi-rigid joints", *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 639-648.
- Zandonini, R. & Zanon, P. (1996), "Experimental analysis of steel beams with semi-rigid joints", *Advances in Steel Structures ICSAS*, Vol. I, pp. 359-364.
- Zhiliang, F. (1994), "A study of variable step-length incremental/iterative methods for nonlinear finite element equations", *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 6, pp. 1269-1275.
- Zhou, D.P., Duan, L. & Chen, W.F. (1990), "Comparison of design equations for steel beam columns", *Structural Engineer. Review*, Vol. 2, No. 1, pp. 45-53; em Liew *et al.* (1993) ed.
- Zhu, K., Al-Bermani, F.G.A., Kitipornchai, S. & Li, B. (1995), "Dynamic response of flexibly jointed frames", *Engineering Structures*, Vol. 17, No. 8a, pp. 575-580.
- Ziemian, R.D. (1990), "*Advanced methods of inelastic analysis in the limit states design of steel structures*", PhD Diss., Grad. School of Cornell Univ., Ithaca, Nova Iorque.
- Ziemian, R.D. & McGuire, W. (2001), "Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 128, No. 10, pp 1301-1307.
- Ziemian, R.D., McGuire, W. & Deierlein, G.G. (1992), "Inelastic limit states design", Part I: "Planar frames studies", Part II: "Three-dimensional frame study", *ASCE J. Struct. Engineer.*, Vol. 118, No. 9, pp. 2352- 2568.
- Zoetemeijer, P. (1974), "*A design method for tension side of statically loaded, bolted beam to column connections*", Heron 20, No. 1, Delft Univ. of Technology, Delft/Holanda.

## F I M

Apresentado: 29/04/2010

Revisado: 30/07/2010

*Arthur Ribeiro de Alvarenga*

CREA-MG 26.303/D

Direitos Autorais Reservados