



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**



# **Análise Não-Linear Geométrica de Vigas-Colunas com Interação Parcial**

**CLÁUDIO ERNANI MARTINS OLIVEIRA**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências da Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

**Ouro Preto, Agosto de 2009**



*“O que mata o antílope  
não é a mordida do leão...  
é a risada da hiena.”*

***Claudio Oliveira***

*Para corrigir o erro de nunca  
ter dedicado um convite,  
dedico este trabalho à minha mãe.*

# AGRADECIMENTOS

À Deus, por tudo o que já passou, pelos momentos de agora e pela possibilidade de um futuro.

À Universidade Federal de Ouro Preto, pelos 10 anos de vivência e ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador, professor João Batista, pela paciência, atenção, apoio e prontidão nos momentos de dúvida e dificuldade, e também ao Amilton, pelos arquivos e pela disposição em responder meus emails.

À Yasmim, pela felicidade que seu nascimento me propiciou.

À minha família, que não seria perfeita sem suas imperfeições.

Ao Rodrigo, por todos os momentos.

Aos amigos, pelas conversas sérias e pelas não tão sérias assim.

Ao professor Claret, por me ceder uma cadeira no LARin, e à Rovia, por pequenas e grandes ajudas nos momentos certos.

À mim mesmo, pela perseverança.

# RESUMO

A idealização de estruturas cada vez mais complexas, a adoção de formas arquitetônicas mais elaboradas e o desenvolvimento de novos materiais e métodos construtivos têm gerado grandes avanços na Engenharia Civil e na Arquitetura. Em geral, estes avanços são alcançados durante a busca pela superação de problemas construtivos e também durante tentativas de aperfeiçoamento das soluções clássicas destes problemas.

Quando se trata da análise estrutural, o aperfeiçoamento de uma técnica ou método geralmente está ligado ao tipo de análise feito. Assim, é comum separar estas técnicas ou métodos em dois grandes grupos: análise linear e análise não-linear. A característica linear pode ser atribuída às propriedades físicas, geométricas ou ambas. O mesmo é verdade para a análise não-linear.

O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento não-linear de vigas colunas mistas com interação parcial na superfície de deslizamento aplicando o Método dos Elementos Finitos. Para isto foi desenvolvido e implementado um elemento unidimensional para análise numérica. Em seguida foram feitas comparações entre os resultados obtidos aqui e resultados encontrados na literatura. Desta maneira, pretende-se verificar a confiabilidade e acurácia do elemento proposto e também a sua aplicabilidade a casos onde a análise dos efeitos de segunda ordem é especialmente importante.

# ABSTRACT

The idealization of more complex structures, the adoption of more elaborated architectural shapes and the development of new materials and constructive methods have generated large advances in Civil Engineering and Architecture. These advances are generally achieved during the search for the overcoming of constructive problems and also during attempts to improve the classical solutions of these problems.

When it comes to structural analysis, the improvement of a technique or method is usually connected to the kind of analysis performed. Thus, it is common to split these techniques or methods into two groups: linear and non-linear analysis. The linear characteristic may be associated to the physical, geometrical or both properties of the studied body. The same is also true to the non-linear characteristic.

The objective of this work is to analyze, through the Finite Element Method, the non-linear behaviour of composite beams that present partial interaction on the slipping surface. In order to do that, an one-dimensional element for numerical analysis was developed and implemented. In order to validate this element, comparisons between the results obtained here and the ones on the literature will be performed. By doing so, it's intended to verify the reliability, accuracy and applicability of the proposed element to cases in which the analysis of second order effects are especially important.

# SUMÁRIO

<b>RESUMO.....</b>	<b>V</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>VI</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>IX</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>XI</b>
 <b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....</b>	 <b>1</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.2 CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS.....	3
1.3 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS.....	7
1.4 APRESENTAÇÃO.....	8
 <b>CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA – VIGAS MISTAS.....</b>	 <b>9</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	9
2.1.1 Fatores de influência.....	10
2.2 VIGAS MISTAS – SOLUÇÕES ANALÍTICAS.....	12
2.2.1 A Equação de Newmark.....	12
2.2.2 A solução analítica de Girhammar e Gopu (1993).....	17
2.3 VIGAS MISTAS – SOLUÇÕES NUMÉRICAS.....	22
 <b>CAPÍTULO 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....</b>	 <b>30</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	30
3.2 FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....	31
3.2.1 Relação tensão – deformação.....	32
3.2.2 Formulação do problema de equilíbrio.....	35
3.2.3 Modelo de elementos finitos – equação de equilíbrio incremental.....	38
3.3 MODELO IMPLEMENTADO.....	40
3.3.1 A matriz de rigidez tangente.....	43
3.3.2 Derivadas dos esforços internos.....	46
3.3.3 Condensação estática.....	50
 <b>CAPÍTULO 4 EXEMPLOS.....</b>	 <b>52</b>
4.1 INTRODUÇÃO.....	52
4.2 COLUNA ENGASTADA SUBMETIDA À CARGA AXIAL.....	53
4.3 VIGA SUBMETIDA À CARGAS AXIAIS E TRANSVERSAIS.....	56
4.4 EFEITO DE MEMBRANA EM VIGA COM INTERAÇÃO PARCIAL.....	58
4.5 VIGA SUBMETIDA À CARGA AXIAL EXCÊNTRICA.....	60
4.6 VIGA DE DOIS VÃOS SUBMETIDA À CARGA CONCENTRADA – ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA.....	63
 <b>CAPÍTULO 5 CONSIDERAÇÕES E SUGESTÕES.....</b>	 <b>69</b>
5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	69
5.2 SUGESTÕES.....	71
 <b>ANEXO I ELEMENTO VIGA - COLUNA COM DESLIZAMENTO:</b>	
<b>Formulação em termos de matrizes deformação x deslocamento.....</b>	<b>73</b>
1.1 FORMULAÇÃO CLÁSSICA.....	73
	VII

I.1.1 Obtenção da matriz deformação versus deslocamento $\mathbf{B}$ .....	73
I.1.2 Obtenção do vetor de forças nodais $\mathbf{f}$ .....	77
I.1.3 Obtenção da matriz de rigidez $\mathbf{k}_T$ .....	79
<b>ANEXO II SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR.....</b>	<b>84</b>
II.1 FORMULAÇÃO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR.....	84
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>88</b>



# LISTA DE FIGURAS

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
Figura 1.1 Grancrete – Associação concreto - isopor.....	2
Figura 1.2 Elementos e projeto estrutural da Faculdade de Educação de Cambridge – Exemplo de associação aço-madeira.....	2
Figura 1.3 Steel Deck – Associação aço-concreto.....	3
Figura 1.4 Lunchtime atop a Skyscraper (Nova Iorque).....	4
Figura 1.5 Resting on a girder (Rockfeller Center, 1932) .....	4
Figura 1.6 Edifício Garagem América .....	5
Figura 1.7 Praça dos Três Poderes um ano após a inauguração de Brasília (Abril, 1961) .....	6
Figura 1.8 Escritório Central da CSN.....	6
<b>CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA – VIGAS MISTAS.....</b>	<b>9</b>
Figura 2.1 Conectores de cisalhamento em vigas.....	11
Figura 2.2 Viga com seção mista com interação parcial - esforços e deslocamentos.....	13
Figura 2.3 Deslizamento na interface.....	17
Figura 2.4 Elemento infinitesimal em configuração deformada.....	18
Figura 2.5 Elemento de Faella et al. (2002) e seus graus de liberdade.....	24
Figura 2.6 Elementos de 8, 10 e 12 DOF's.....	25
Figura 2.7 Elemento misto de 12DOF.....	25
Figura 2.8 Graus de liberdade do elemento de interface de Silva (2006).....	28
Figura 2.9 Elemento de interface de Silva (2006) aplicado à viga mista.....	28
<b>CAPÍTULO 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....</b>	<b>30</b>
Figura 3.1 Elemento implementado.....	31
Figura 3.2 Campo de deslocamentos de uma viga simples.....	32
Figura 3.3 Campo de deslocamentos da viga composta.....	33
Figura 3.4 Convenção de sinais dos esforços resistentes.....	37
<b>CAPÍTULO 4 EXEMPLOS.....</b>	<b>52</b>
Figura 4.1 Coluna mista.....	53
Figura 4.2 Relação entre deslocamento horizontal no topo da coluna e $K$ .....	54
Figura 4.3 Evolução da deformada da coluna.....	55
Figura 4.4 Viga mista sob cargas axiais e transversais.....	56
Figura 4.5 Exemplo 2 – Deformada da viga.....	57
Figura 4.6 Seção mista avaliada.....	58
Figura 4.7 Três deslocamentos axiais livres e um impedido (1 – 3).....	59
Figura 4.8 Dois deslocamentos axiais livres e dois impedidos (2 – 2).....	59
Figura 4.9 Quatro deslocamentos axiais impedidos (4 – 0).....	59
Figura 4.10 Efeito de membrana em vigas.....	60
Figura 4.11 Viga mista sob carga excêntrica.....	61
Figura 4.12 Deformada da viga mista ( $e = 11,50mm$ ).....	62
Figura 4.13 Deformada da viga mista ( $e = 13,25mm$ ).....	62
Figura 4.14 Deformada da viga mista ( $e = 15,00mm$ ).....	62

Figura 4.15 Comparação gráfica entre as deformadas da viga mista.....	63
Figura 4.16 Viga mista de três vãos (Salari e Spacone, 2001).....	64
Figura 4.17 Viga mista equivalente.....	64
Figura 4.18 Leis constitutivas.....	65
Figura 4.19 Deslocamento vertical no nó central – Elemento proposto.....	66
Figura 4.20 Deslocamento vertical no nó central (Salari e Spacone, 2001).....	66
Figura 4.21 Viga sob uma força axial.....	67
Figura 4.22 Deslocamento vertical no nó central .....	67
Figura 4.23 Vigas com restrição adicional.....	67
Figura 4.24 Deslocamento vertical no nó central (Efeito de membrana).....	68
<b>CAPÍTULO 5 CONSIDERAÇÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>69</b>
<b>ANEXO I ELEMENTO VIGA - COLUNA COM DESLIZAMENTO:</b>	
<b>Formulação em termos de matrizes deformação x deslocamento.....</b>	<b>73</b>
<b>ANEXO II SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR.....</b>	<b>84</b>
Figura II.1 Curva carga-deslocamento de problema não-linear.....	84

# LISTA DE TABELAS

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA – VIGAS MISTAS.....</b>	<b>9</b>
<b>CAPÍTULO 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....</b>	<b>30</b>
<b>CAPÍTULO 4 EXEMPLOS.....</b>	<b>52</b>
Tabela 4.1 Deslocamento $v$ ao longo da viga .....	57
Figura 4.2 Deslocamento vertical do nó 6.....	63
<b>CAPÍTULO 5 CONSIDERAÇÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>69</b>
<b>ANEXO I ELEMENTO VIGA - COLUNA COM DESLIZAMENTO:</b>	
<b>Formulação em termos de matrizes deformação x deslocamento.....</b>	<b>73</b>
<b>ANEXO II SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR.....</b>	<b>84</b>

# INTRODUÇÃO

## 1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

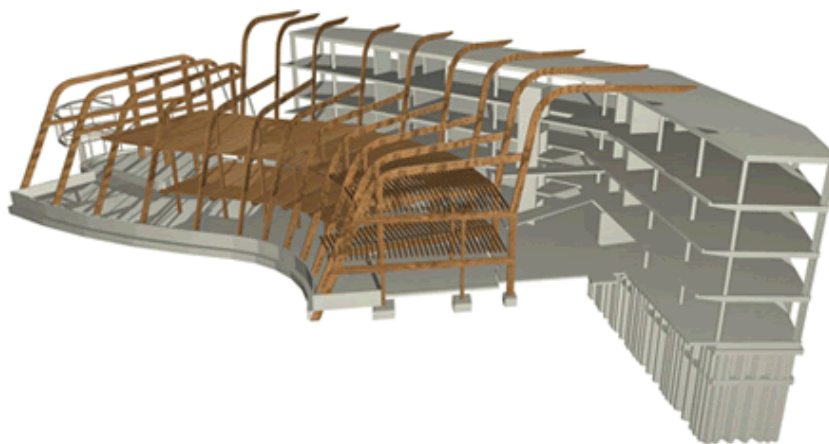
A associação de diferentes tipos de materiais na execução de elementos estruturais e de fechamento é feita por diversas razões e representa uma grande gama de soluções para problemas de natureza ainda mais variada. Na Aviação, por exemplo, é possível citar o uso conjunto de material plástico, isopor, madeira e aço de forma a promover segurança, otimização de espaço e, mais comumente, diminuição de peso das aeronaves. Em Arquitetura, quando se trata do conforto do usuário, estes mesmos materiais, aliados ao concreto, são utilizados para garantir que temperatura, nível de ruído e iluminação adequados sejam alcançados.

Na Engenharia Civil, no que diz respeito à execução, procura-se diminuir o peso total da estrutura e o tempo gasto para finalizar a mesma. Desta forma, a estrutura torna-se mais barata e vantajosa, principalmente quando existe um ponto de equilíbrio entre estas variáveis e uma terceira: a segurança. A utilização do conjunto aço-concreto supre estas necessidades, uma vez que o aço utilizado para a montagem do esqueleto estrutural além de ser mais leve também é capaz de suportar as cargas permanentes envolvidas sem a inconveniência da espera pelo tempo de cura do concreto. O concreto, que em alguns casos é utilizado somente para compor o fechamento da estrutura, vem complementar a ação do aço, oferecendo resistência aos esforços de compressão

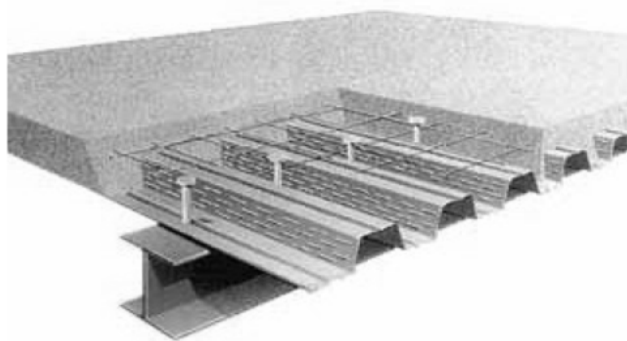
presentes nos elementos estruturais e proteção contra os efeitos da corrosão e das altas temperaturas de situações de incêndio. Assim, aço e concreto são utilizados na execução de vigas, pilares, lajes e outros elementos estruturais mistos.



**Figura 1.1** Grancrete – Associação concreto – isopor.  
**Fonte:** [sodesign.blogspot.com.br](http://sodesign.blogspot.com.br)



**Figura 1.2** Elementos e projeto estrutural da Faculdade de Educação de Cambridge –  
Exemplo de associação aço – madeira.  
**Fonte:** [www.arct.cam.ac.uk](http://www.arct.cam.ac.uk)



**Figura 1.3** Steel Deck – Associação aço – concreto.

**Fonte:** Silva, 2006

## **1.2. CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS**

O grande desenvolvimento econômico dos Estados Unidos no período de 1860 à 1930, impulsionado por avanços tecnológicos da época tais como o uso industrial da eletricidade e dos motores de combustão (Silva, 2004), criou um ambiente propício à experimentação de novos métodos construtivos. Em 1894, no início da chamada Era Progressiva (1890-1920), aparecem as primeiras estruturas mistas aço-concreto, aplicadas principalmente na construção de galpões industriais e arranha-céus. Em 1932, a imensa quantidade de mão de obra imigrante e a não observância de regras de segurança levaram o fotógrafo Charles C. Ebbets a querer retratar o cotidiano dos operários envolvidos na execução destes arranha-céus (Figuras 1.4 e 1.5).

No Brasil, no final da década de 20, a Cia. Siderúrgica Belgo Mineira começava a produção de aço, seguida pela Cia. Siderúrgica Nacional (CSN) na década de 40 e, na década de 50 pela Cia. Siderúrgica Paulista (Cosipa) e pela Usinas Siderúrgicas de Minas (Usiminas). Ainda na década de 50, a recém-criada Companhia Siderúrgica Nacional montou sua fábrica de estruturas metálicas, visando a expansão do mercado de construção civil brasileiro.



**Figura 1.4** Lunchtime atop a Skyscraper (Nova Iorque).

**Fonte:** ebbetsphoto-graphics.com



**Figura 1.5** Resting on a Girder (Rockfeller Center, 1932).

**Fonte:** ebbetsphoto-graphics.com

Politicamente, a década de 50 foi marcada pelo populismo no governo Vargas e o desenvolvimentismo incentivado por Juscelino Kubitschek. Estas duas doutrinas políticas alavancaram o crescimento econômico e a produção industrial brasileira. Situado neste contexto, em 1957 é erguido em São Paulo o Edifício Garagem-América

(Figura 1.6), passando a ser conhecido como primeiro edifício em estrutura metálica de tecnologia e material brasileiros. A mudança da capital nacional do Rio de Janeiro para a região central do país proposta por Juscelino também pode ser considerada um marco na história da utilização de estruturas mistas no país. Isto por que, dada a urgência solicitada, a rapidez da execução em aço-concreto se mostrava bastante eficaz e confirmou-se com a finalização da obra ao fim de três anos e dez meses e sua inauguração em 1960.



**Figura 1.6** Edifício Garagem América.

**Fonte:** [www.metalica.com.br](http://www.metalica.com.br)

A década de 60 abriga a data de construção do Escritório Central da CSN, localizado em Volta Redonda e desativado recentemente. Esta edificação torna-se parte integrante da História do Brasil por dois fatores principais: ter sido o primeiro edifício de múltiplos andares a utilizar perfis “I” compostos de chapas soldadas, substituindo os perfis rebitados, e ter servido de pano de fundo para a greve de 1988 que culminou com a morte de três operários após a intervenção das forças armadas.





**Figura 1.7** Praça dos Três Poderes um ano após a inauguração de Brasília (Abril, 1961).  
**Fonte:** [www.al.sp.gov.br](http://www.al.sp.gov.br)



**Figura 1.8** Escritório Central da CSN.  
**Fonte:** [www.cbca-ibs.org.br](http://www.cbca-ibs.org.br)

### 1.3. MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A utilização de elementos estruturais mistos em Engenharia e Arquitetura tem crescido na medida em que novas matérias primas são desenvolvidas, possibilitando novas associações destes materiais. Ao contrário do que ocorria na antiguidade, um método de tentativas e erros não é mais adequado, tampouco racional. Não é coerente construir uma edificação de múltiplos andares utilizando um novo método construtivo sem que haja algum tipo de simulação deste método. O estudo destas novas possibilidades é, portanto, atual e necessário, pois possibilita identificar as alternativas existentes e a forma correta de emprego das mesmas. Realizados estudos sobre tais alternativas construtivas, é necessária a busca pelo modelo que melhor representa o comportamento real do problema, para que então seja possível utilizá-lo como forma de balizamento e/ou ferramenta auxiliar na tomada de decisões.

Neste trabalho as estruturas mistas compostas serão estudadas tendo como motivações principais: a análise de soluções para problemas estruturais em Engenharia Civil e Arquitetura a partir de novas abordagens e um melhor entendimento das soluções já consagradas e comumente utilizadas. A recém atualizada NBR 8800 fornece opções generalizadas até mesmo para situações nas quais é desejado considerar a influência da não linearidade física, no entanto, isto não exclui a necessidade de que elementos estruturais sejam estudados individualmente na tentativa de conhecer suas particularidades. Deve-se também ressaltar que a não-linearidade geométrica de elementos estruturais abordada aqui ainda é assunto sobre o qual não existem muitas publicações.

Desta forma, o objetivo deste trabalho é desenvolver um elemento finito adequado à análise do problema de vigas-colunas mistas compostas por duas camadas de diferentes materiais, considerando o comportamento não-linear físico e geométrico das mesmas. Assim, enquadra-se este trabalho na linha de pesquisa denominada Mecânica Computacional, representando a continuidade de outros trabalhos desenvolvidos no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto: Caldas (2004), Muniz (2005) e Silva (2006). Como em Silva (2006), apesar de o objeto de estudo ser geralmente as vigas de aço e concreto, nada

impede que adequações e extrapolações venham a ser feitas e que o modelo passe a representar também elementos de mesmo comportamento, mas compostos por materiais diferentes.

## **1.4. APRESENTAÇÃO**

Este trabalho está dividido em cinco capítulos e dois anexos. O segundo capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre métodos de solução de vigas mistas com interação parcial tais como o método analítico de Newmark e alguns métodos numéricos recentemente utilizados e cujos autores consideraram o deslizamento de interface.

No Capítulo 3, apresenta-se o desenvolvimento de um elemento que considera a parcela referente a não-linearidade geométrica da viga mista. Para tal, utiliza-se da teoria de Euler-Bernoulli, do Princípio dos Trabalhos Virtuais e do Método dos Elementos Finitos.

O Capítulo 4 trata da validação do elementos criado. Esta validação é feita aplicando-o na solução de problemas cujos resultados (numéricos e/ou analíticos) já foram avaliados por outros autores e estabelecendo comparações entre estes resultados e os aqui obtidos. As análises são feitas de forma a verificar a ocorrência do efeito de membrana, a influência do ponto de aplicação de cargas axiais em relação aos centróides das seções e a consideração conjunta das não-linearidades física e geométrica.

No Capítulo 5 são apresentadas algumas considerações finais e sugestões sobre novas possibilidades de pesquisa relacionadas à análise numérica de elementos mistos.

Por fim, a formulação do elemento viga-coluna em termos das matrizes de rigidez elástica e de rigidez geométrica e uma formulação de solução de problemas não-lineares são apresentadas nos Anexos I e II, respectivamente.

# REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: VIGAS MISTAS

## 2.1. INTRODUÇÃO

Elementos estruturais mistos são aqueles nos quais ocorre a associação de dois ou mais materiais, buscando a complementação mútua de propriedades físicas ou em alguns casos, estéticas. No Brasil, a combinação aço-concreto é bastante utilizada na construção de edifícios e pontes sendo que outras variantes, tal como madeira-concreto, também são encontradas na forma de vigas, colunas e placas.

Em geral, vigas são projetadas para suportar cargas transversais distribuídas ao longo do seu comprimento, diferentemente das colunas, nas quais o carregamento preponderante é axial. Os esforços e reações destes elementos estruturais são comumente obtidos sob dois enfoques principais: as análises de primeira e segunda ordem. A análise de primeira ordem obtém esforços e caracteriza o equilíbrio da estrutura em sua condição indeformada e a análise de segunda ordem considera os efeitos do carregamento após a deformação, se aproximando mais do comportamento real da estrutura.

Sobre que análise é mais adequada, se a de primeira ou a de segunda ordem, pode-se dizer que muitos problemas de Engenharia são satisfatoriamente solucionados utilizando o primeiro enfoque, enquanto outros apresentam respostas que só podem ser previstas sob a ótica do segundo, como é o caso de vigas e colunas muito esbeltas e/ou sob carregamento axial. O trabalho desenvolvido aqui tem como foco os efeitos de segunda ordem, também denominados efeitos da não-linearidade geométrica.

Neste capítulo, inicialmente serão apresentadas as hipóteses geralmente feitas na análise de vigas mistas. Serão apresentadas a solução analítica desenvolvida por Newmark *et al.*(1951), aplicável à vigas sob carregamento transversal distribuído, e a solução desenvolvida por Girhammar e Gopu (1993) que considera os carregamentos axiais e efeitos de segunda ordem. Também será feita uma revisão bibliográfica sobre as soluções numéricas desenvolvidas recentemente, com enfoque nos casos onde o deslizamento na interface das seções é considerado e onde o Método dos Elementos Finitos tenha sido utilizado, premissas do desenvolvimento deste trabalho.

### **2.1.1. Fatores de influência**

Nas seções aço-concreto, a ligação na interface dos materiais é feita através de conectores, rígidos ou flexíveis (Figura 2.1). No caso das seções de madeira esta ligação geralmente é feita através de parafusos e/ou pregos, cuja função principal é transferir a força horizontal e assim garantir que a seção mista trabalhe de maneira uniforme.

A primeira definição a ser feita quando trata-se da análise de vigas mistas diz respeito à forma de interação que ocorre na interface dos materiais. A rigidez da ligação na interface influencia diretamente os deslocamentos relativos na mesma e, conseqüentemente, os deslocamentos totais da viga. O deslizamento relativo na interface, por sua vez, influi na distribuição dos esforços (momentos, força cortante e força normal). Portanto, pode-se dizer que a forma na qual é feita a conexão na interface tem influência direta sobre os esforços que aparecem na viga. Feita esta observação, define-se como sendo de “Interação Parcial” a viga cujos esforços são consideravelmente influenciados pelos deslizamentos relativos na interface. No caso em

que estes deslizamentos não tenham significativa influência, diz-se que a viga é de “Interação Total”.



**Figura 2.1** Conectores de cisalhamento em vigas.  
**Fonte:** ar-shearconnector.com

Além da forma na qual é feita a conexão na interface, Newmark *et al.* (1951) considera outro fator que se refere exclusivamente às seções de concreto e influencia os esforços na seção da viga: a retração.

A retração, que é a diminuição do volume do concreto que ocorre em decorrência da perda de água e pode ocorrer ao longo de toda a vida útil do concreto, é causada por fenômenos físicos, químicos ou uma combinação de ambos. Tal como a rigidez da conexão na interface, a existência de retração afeta os deslizamentos relativos entre seções que, como dito anteriormente, influenciam a distribuição de esforços na seção da viga através da força cortante na interface.

O fenômeno de retração não será considerado neste trabalho, sendo sua inclusão deixada como proposta de pesquisas futuras.

## **2.2. VIGAS MISTAS – SOLUÇÕES ANALÍTICAS**

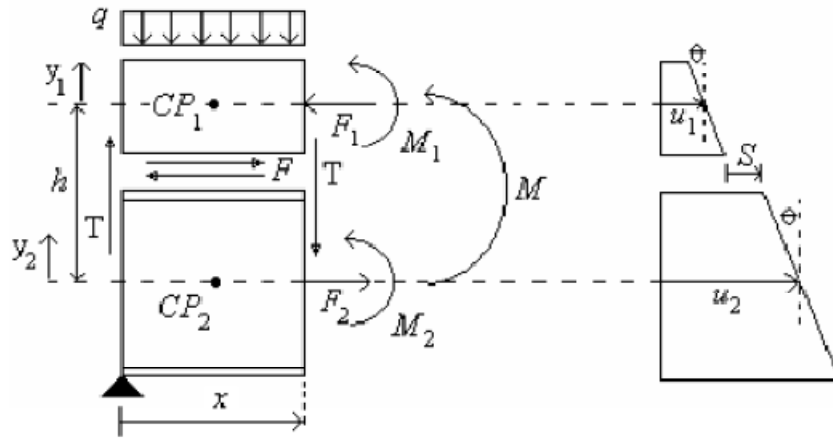
Obter equações que representam a solução analítica de uma viga mista para o caso geral não é uma tarefa simples, principalmente devido ao fato de que os materiais utilizados na execução deste tipo de estrutura geralmente possuem propriedades bastante diferentes entre si e, portanto, apresentam comportamentos também bastante diferentes, incluindo não-linearidades. Além disto, a diversidade de configurações de carregamento que podem ser aplicadas aumenta significativamente a complexidade envolvida no desenvolvimento de uma solução exata que represente todas as situações possíveis.

A seguir demonstra-se a obtenção da Equação de Newmark que é amplamente utilizada no estudo de vigas mistas com interação parcial. Faz-se o mesmo para uma equação similar, desenvolvida por Girhammar e Gopu (1993), aplicável a casos onde ocorre solicitação por carregamento distribuído transversalmente.

### **2.2.1. A Equação de Newmark**

Newmark *et al.* (1951) apresentam a solução do problema da viga mista através da curvatura de uma viga cuja distribuição do momento seja conhecida, cujas seções possuam propriedades geométricas constantes ao longo do comprimento e cujos materiais apresentem relações lineares entre tensão e deformação. Neste desenvolvimento, admite-se que não há separação vertical entre as seções superior e inferior, ou seja, admite-se interação total nesta direção. Esta consideração pode ser confirmada com base nos resultados obtidos por Salari e Spacone (2001) que afirmam ter os deslocamentos relativos na direção vertical pouca ou nenhuma influência na análise de vigas mistas. Assim, deslocamentos verticais e rotações de um mesmo plano são considerados os mesmos para quaisquer pontos de uma seção da viga. Já para os deslocamentos horizontais, considera-se o caso de interação parcial e a ocorrência de deslocamentos relativos entre a seção superior e a inferior é incluída no cálculo dos

esforços. Estas proposições sobre a força de interação presente na viga e sobre os deslocamentos podem ser observadas na Figura (2.2).



**Figura 2.2** Viga com seção mista com interação parcial - esforços e deslocamentos.

**Fonte:** Silva, 2006

A equação do deslizamento em função dos deslocamentos dos centros geométricos das seções ( $u_1$  e  $u_2$ ), da distância entre estes pontos ( $h$ ) e da rotação da seção mista ( $\theta$ ) é apresentada pela equação:

$$s(x) = u_2 - u_1 - h \cdot \text{tg}(\theta), \quad (2.1)$$

onde os índices 1 e 2 referem-se, respectivamente, à seção superior e inferior da viga.

A relação entre a curvatura da viga e os momentos atuantes nas seções inferior e superior pode se assim escrita:

$$\chi = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} \quad (2.2)$$

Neste caso, os momentos fletores são representados por:

$$M_1 = \chi E_1 I_1 \quad (2.3)$$

$$M_2 = \chi E_2 I_2 \quad (2.4)$$

$$\text{ou ainda,} \quad M_\alpha = \chi E_\alpha I_\alpha, \quad \text{onde } \alpha = 1, 2 \quad (2.5)$$



Observando a Figura (2.2) verifica-se a existência de um binário composto por forças  $F_1$  e  $F_2$ , de módulo  $F$ . Garantindo o equilíbrio de forças, o momento total pode ser representado como pela soma dos momentos aplicados à cada seção e o momento gerado pelo binário:

$$M_T = Fh + \chi \sum_{\alpha=1,2} (E_\alpha I_\alpha) \quad (2.6)$$

O somatório na Equação (2.6) refere-se à rigidez à flexão da seção transversal no caso em que não há conexão horizontal e será, a partir de agora, denominado  $(EI)_{free}$ .

O equilíbrio de vigas estabelece que a derivada segunda da equação que define o momento em uma viga fornece o valor negativo da carga distribuída  $q$  à qual a viga está submetida, sendo assim:

$$M''_T = \chi''(EI)_{free} + F''h = -q \quad (2.7)$$

A equação de  $F'$  pode ser obtida através de uma relação entre a força cortante longitudinal por unidade de comprimento e o deslizamento na interface (Equação 2.8).

$$F' = \frac{dF}{dx} = Ks \quad (2.8)$$

Esta equação mostra uma proporcionalidade entre o deslizamento  $s$  que ocorre na interface da viga e uma constante dependente do tipo de conexão utilizado na união entre as seções,  $K$ . Substituindo a equação do deslizamento (Equação 2.1) na Equação (2.8) obtêm-se o seguinte:

$$F' = K(u_2 - u_1 - hv') \quad (2.9)$$

, de onde vem a segunda derivada de  $F$

$$F'' = K(u'_2 - u'_1 - hv'') \quad (2.10)$$

Sabendo que as deformações na direção do eixo  $x$  podem ser obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos e que a equação da curvatura de uma viga equivale à segunda derivada da equação que rege os deslocamentos verticais, têm-se:

$$F'' = K(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - h\chi) \quad (2.11)$$

Newmark *et al.* (1951) considera esta deformação devido à retração do concreto através da parcela de valor constante  $\varepsilon_{sh}$ , que deverá ser somada à Equação (2.11) fornecendo:

$$F'' = K(\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_{sh}) - h\chi) \quad (2.12)$$

A diferença entre a deformação sofrida pela seção inferior e aquela da seção superior pode é dada por:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{F}{(EA)^*}, \quad (2.13)$$

onde

$$(EA)^* = \frac{(E_1 A_1)(E_2 A_2)}{(E_1 A_1) + (E_2 A_2)} \quad (2.14)$$

Desta forma, pode-se retornar à Equação (2.12) e assim representar a segunda derivada de  $F$  :

$$F'' = \frac{KF}{(EA)^*} - K\varepsilon_{sh} - Kh\chi \quad (2.15)$$

De posse da Equação (2.7) que fornece a carga distribuída a partir da segunda derivada do momento, na qual substitui-se o valor de  $F''$  (Equação 2.15), é possível obter:

$$-q = \chi''(EI)_{free} + \left( \frac{KF}{(EA)^*} - K\varepsilon_{sh} - Kh\chi \right) h \quad (2.16)$$

Agrupando os termos relacionados à curvatura da viga, obtêm-se:

$$\chi'' - \frac{Kh^2\chi}{(EI)_{free}} = -\frac{q}{(EI)_{free}} - \frac{KFh}{(EI)_{free}(EA)^*} + \frac{Kh\varepsilon_{sh}}{(EI)_{free}} \quad (2.17)$$

Nas Equações (2.18) e (2.19), convenientemente define-se  $(EI)_{full}$ , que representa a rigidez à flexão do elemento no caso de interação total na interface aço-concreto, e  $\alpha^2$ :

$$(EI)_{full} = (EI)_{free} + (EA)^* h^2 \quad (2.18)$$

$$\alpha^2 = \frac{K(EI)_{full}}{(EA)^*(EI)_{free}} \quad (2.19)$$

Reorganizando-se a Equação (2.17) obtêm-se uma equação diferencial em termos da curvatura que é conhecida como Equação de Newmark:

$$\chi'' - \alpha^2 \chi = -\frac{q}{(EI)_{free}} - \alpha^2 \frac{M}{(EI)_{full}} + \frac{Kh\varepsilon_{sh}}{(EI)_{free}} \quad (2.20)$$

Esta equação tem uso bastante restrito, pois é aplicável apenas ao caso específico de vigas mistas em que a seção e a rigidez longitudinal ( $K$ ) devido ao deslizamento na interface sejam constantes e, além disso, cujas relações tensão-deformação dos materiais sejam lineares e cujas distribuições de momento fletor sejam conhecidas.

Nas Equações (2.21) e (2.22), pode-se ver a solução da equação diferencial da curvatura e dos deslocamentos verticais, respectivamente, que foram utilizadas por Silva (2006) na verificação do seu elemento aplicado a uma viga biapoada de comprimento  $L$  com carregamento uniformemente distribuído  $q$ . As constantes de integração associadas à esta solução são apresentadas nas equações (2.23 – 2.27).

$$\chi(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + \frac{q}{\alpha^2 (EI)_{free}} - \frac{q}{\alpha^2 (EI)_{full}} + \frac{qL}{2(EI)_{full}} x - \frac{q}{2(EI)_{full}} x^2 \quad (2.21)$$

$$v(x) = -\frac{C_1 e^{\alpha x}}{\alpha^2} - \frac{C_2 e^{-\alpha x}}{\alpha^2} + C_3 x + C_4 + \left( \frac{q}{2\alpha^2 (EI)_{full}} - \frac{q}{2\alpha^2 (EI)_{free}} \right) x^2 - \frac{qL}{12(EI)_{full}} x^3 - \frac{q}{24(EI)_{full}} x^4 \quad (2.22)$$

$$C_1 = Q \left( \frac{1 - e^{-\alpha L}}{e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}} \right) \quad (2.23)$$

$$C_2 = Q \left( \frac{1 - e^{\alpha L}}{e^{-\alpha L} - e^{\alpha L}} \right) \quad (2.24)$$

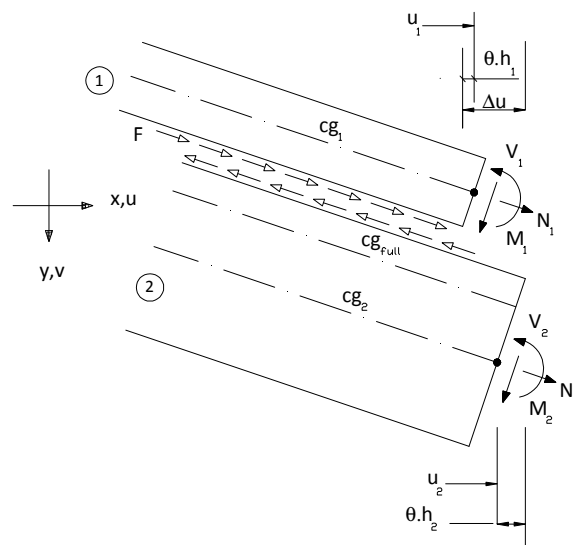
$$C_3 = C_1 \frac{e^{\frac{\alpha L}{2}}}{\alpha} - C_2 \frac{e^{-\frac{\alpha L}{2}}}{\alpha} - \frac{QL}{2} + \frac{qL^3}{24(EI)_{full}} \quad (2.25)$$

$$C_4 = \frac{1}{\alpha^2} (C_1 - C_2) \quad (2.26)$$

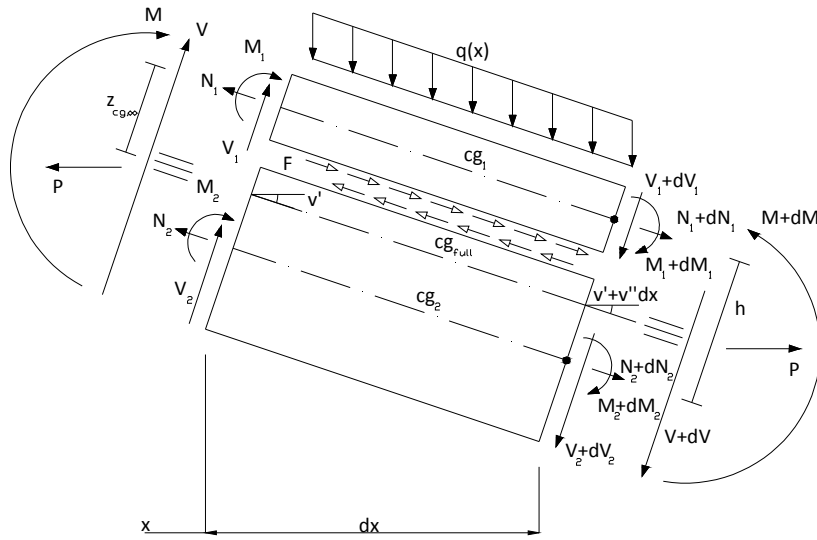
$$Q = \frac{q}{\alpha^2 (EI)_{full}} - \frac{q}{\alpha^2 (EI)_{free}} \quad (2.27)$$

### 2.2.2. A solução analítica de Girhammar e Gopu (1993)

Seguindo a mesma seqüência de passos para a obtenção da Equação (2.20), Girhammar e Gopu (1993) estenderam a Equação de Newmark para análises de segunda ordem. O diferencial desta formulação é a possibilidade de carregamento axial constante e a desconsideração da retração para seções de concreto (Figura 2.3).



**Figura 2.3** Deslizamento na interface.



**Figura 2.4** Elemento infinitesimal em configuração deformada.

A influência do carregamento axial é introduzida na formulação através das Equações (2.28) e (2.29), que devem ser satisfeitas para o equilíbrio do elemento infinitesimal (Figura 2.4).

$$M' = V \quad (2.28)$$

$$M'' = V' = -q - Pv'' \quad (2.29)$$

Analisando a face esquerda do elemento é possível estabelecer as relações de equivalência entre forças externas e internas:

$$P = N_1 + N_2 \quad (2.30)$$

$$V = V_1 + V_2 \quad (2.31)$$

$$M = M_1 + M_2 - N_1 h + P(h - z_{cg,too}) \quad (2.32)$$

A parcela  $z_{cg,too}$  é a distância entre o centróide da seção superior e o centróide da seção total, dada por:

$$z_{cg_{\infty}} = \frac{E_2 A_2}{(EA)_{free}} h, \quad (2.33)$$

onde

$$(EA)_{free} = E_1 A_1 + E_2 A_2 \quad (2.34)$$

Para o equilíbrio das forças horizontais, têm-se:

$$N'_1 = -F = -K(u_2 - u_1 + hv') \quad (2.35)$$

$$N'_2 = F \quad (2.36)$$

Na face direita, fazendo o somatório de momentos no centróide de cada seção, obtêm-se:

$$V_1 = M'_1 + Fh_1 \quad (2.37)$$

e

$$V_2 = M'_2 + Fh_2 \quad (2.38)$$

Nas Equações (2.37) e (2.38),  $h_1$  e  $h_2$  são as distâncias entre a superfície de interface e os centróides da seção superior e inferior, respectivamente.

Tal como para a Equação de Newmark:

$$v_1'' = -\frac{M_1}{E_1 I_1} \quad (2.39)$$

$$v_2'' = -\frac{M_2}{E_2 I_2} \quad (2.40)$$

Assim, aplicando a Equação (2.32) nas Equações (2.39) e (2.40), obtêm-se as equações de momento em cada seção:

$$M_1 = \frac{E_1 I_1}{(EI)_{free}} [M + N_1 h - P(h - z_{cg_{\infty}})] \quad (2.41)$$

$$M_2 = \frac{E_2 I_2}{(EI)_{free}} [M + N_2 h - P(h - z_{cg, \infty})] \quad (2.42)$$

Destas equações obtêm-se as equações diferenciais pra análise de segunda ordem da deflexão da viga:

$$v'' = - \frac{[M + N_1 h - P(h - z_{cg, \infty})]}{(EI)_{free}} \quad (2.43)$$

$$v^{IV} = \frac{q - N_1'' h}{(EI)_{free}} \quad (2.44)$$

Combinando as Equações (2.35) e (2.43) é possível definir a equação diferencial da força axial interna  $N_1$  :

$$N_1'' - \alpha^2 N_1 = \beta M - \gamma P \quad (2.45)$$

ou

$$N_1^{IV} - \alpha^2 N_1'' = -\beta(q + P v'') \quad (2.46)$$

O coeficiente  $\alpha$  é o mesmo definido para a Equação de Newmark na Equação (2.19). Define-se os coeficientes  $\beta$  e  $\gamma$  como sendo:

$$\beta = \frac{Kh}{(EI)_{free}} \quad (2.47)$$

$$\gamma = K \left( \frac{1}{E_2 A_2} + \frac{E_1 A_1 h^2}{(EA)_{free} (EI)_{free}} \right) \quad (2.48)$$

Combinando as Equações (2.43) e (2.45) obtêm-se a equação diferencial dos deslocamentos verticais da viga obtida por Girhammar e Gopu (1993):

$$v^{IV} - \alpha^2 v'' = - \frac{M''}{(EI)_{free}} + \alpha^2 \frac{M}{(EI)_{full}} \quad (2.49)$$

A mesma equação diferencial pode ainda ser representada em função da curvatura da viga:

$$\chi'' - \alpha^2 \chi = -\frac{M''}{(EI)_{free}} + \alpha^2 \frac{M}{(EI)_{full}} \quad (2.50)$$

Esta formulação é adequada à análise de vigas submetidas à carga distribuída transversal e cargas axiais. A carga axial total é o somatório das cargas axiais que atuam no centróide de cada seção. Estas forças, por sua vez, devem manter a proporção entre a rigidez axial da seção total e as rigidezes individuais de cada subseção. Desta forma, é garantido que o elemento estrutural analisado está submetido à deformação axial uniforme e que nenhuma flexão é introduzida por excentricidade dos pontos de aplicação de cargas. A formulação para análises de primeira ordem pode ser desenvolvida de forma análoga, sendo diferenciada pelo fato do elemento infinitesimal de viga utilizado ser considerado na configuração indeformada.

Girhammar e Gopu (1993) fornecem a solução desta equação diferencial para os casos de força normal de tração e compressão. As soluções para os dois casos têm forma geral igual a:

$$v = C_1 \sinh(\omega_1 x) + C_2 \cosh(\omega_1 x) + C_3 \sinh(\omega_2 x) + C_4 \cosh(\omega_2 x) + C_5 x + C_6 + v_{ps} \quad (2.51)$$

Para o caso em que  $P$  é uma força de tração são fornecidos os seguintes valores de coeficientes:

$$v_{ps} = \frac{1}{(EI)_{full}} \int_0^x \left[ \alpha^2 q(s) - \frac{(EI)_{full}}{(EI)_{free}} q''(s) \right] \left\{ -\frac{x-s}{\omega_1^2 \omega_2^2} + \frac{\sinh[\omega_1 (x-s)]}{\omega_1^3 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} - \frac{\sinh[\omega_2 (x-s)]}{\omega_2^3 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \right\} ds \quad (2.52)$$

$$\omega_1 = \left( \frac{1}{2} \left\{ \left( \alpha^2 + \frac{P}{(EI)_{free}} \right) + \left[ \left( \alpha^2 + \frac{P}{(EI)_{free}} \right)^2 - 4\alpha^2 \frac{P}{(EI)_{full}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$



$$\omega_2 = \left( \frac{1}{2} \left\{ \left( \alpha^2 + \frac{P}{(EI)_{free}} \right) - \left[ \left( \alpha^2 + \frac{P}{(EI)_{free}} \right)^2 - 4\alpha^2 \frac{P}{(EI)_{full}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

Já para o caso onde  $P$  é uma força de compressão igual a  $-p$ , têm-se:

$$v_{ps} = \frac{1}{(EI)_{full}} \int_0^x \left[ \alpha^2 q(s) - \frac{(EI)_{full}}{(EI)_{free}} q''(s) \right] \left\{ \frac{x-s}{\omega_1^2 \omega_2^2} - \frac{\sinh[\omega_1(x-s)]}{\omega_1^3(\omega_2^2 + \omega_1^2)} - \frac{\sinh[\omega_2(x-s)]}{\omega_2^3(\omega_2^2 + \omega_1^2)} \right\} ds \quad (2.55)$$

$$\omega_1 = \left( \frac{1}{2} \left\{ \left( \alpha^2 - \frac{P}{(EI)_{full}} \right) + \left[ \left( \alpha^2 - \frac{P}{(EI)_{free}} \right)^2 + 4\alpha^2 \frac{P}{(EI)_{full}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.56)$$

$$\omega_2 = \left( -\frac{1}{2} \left\{ \left( \alpha^2 - \frac{P}{(EI)_{free}} \right) - \left[ \left( \alpha^2 - \frac{P}{(EI)_{free}} \right)^2 + 4\alpha^2 \frac{P}{(EI)_{full}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.57)$$

Em ambos os casos (tensão ou compressão),  $v_{ps}$  é a solução particular da equação diferencial e os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  e  $C_6$  são definidos de acordo com as condições de contorno específicas de cada problema.

### 2.3. VIGAS MISTAS – SOLUÇÕES NUMÉRICAS

A Equação de Newmark e a de Girhammar e Gopu só podem ser aplicadas a conjuntos particulares de vigas mistas. A alternativa à análise analítica de problemas mais complexos é a utilização de formulações numéricas que resolvem tais problemas de forma aproximada. Por serem aproximadas, estas formulações apresentam erros e a ordem de grandeza destes, por sua vez, pode variar muito de formulação a formulação e até mesmo de viga a viga, quando a mesma formulação é utilizada. No entanto,

resultados bastante próximos das soluções analíticas são alcançados através das soluções numéricas, justificando a sua utilização. Neste tópico são citados alguns trabalhos que buscaram solucionar o problema de vigas mistas com deslizamento através deste tipo de abordagem.

Salari e Spacone (2001) apresentaram duas formulações que simulam o comportamento de vigas mistas com interface deformável: uma baseada no modelo clássico de deslocamentos e a outra baseada num modelo de forças proposto pelos autores. Para o segundo modelo, é proposto também um método de recuperação de forças diferente do utilizado para elementos baseados em deslocamentos. De acordo com os autores, este método garante a compatibilidade do elemento mesmo em casos onde não há convergência nos nós. Em tempo, um método de recuperação de forças é um método que permite computar as forças que correspondem aos deslocamentos do elemento. Os elementos apresentados ignoram a não-linearidade geométrica e desconsideram a existência de separação vertical entre as seções por, segundo os autores, não haver resultados experimentais suficientes que justifiquem a inclusão destes deslocamentos relativos na formulação.

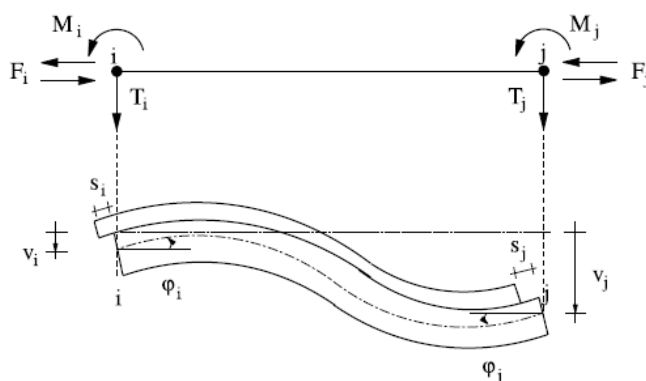
Salari e Spacone (2001) afirmam que os elementos baseados em um modelo de forças são especialmente interessantes na solução de problemas estáticos e dinâmicos não-lineares ligados à análise de eventos sísmicos e de edifícios. A justificativa é o fato de ser possível a utilização de apenas um elemento para cada membro, causando uma diminuição no número de graus de liberdade explorados na análise de pórticos.

Um dos casos utilizados por Salari e Spacone (2001) na validação de seus elementos foi o de uma viga composta de dois vãos e submetida a carga localizada transversal. O exemplo mostrou uma convergência mais rápida quando o elemento baseado em força foi utilizado. No entanto, mesmo com diferenças na velocidade de convergência, ambos os elementos apresentaram bons resultados. A este mesmo exemplo foi aplicado o elemento proposto nesta dissertação, obtendo-se os resultados que podem ser encontrados no Capítulo 4.

A Equação de Newmark foi utilizada por Faella *et al.* (2002) para a avaliação dos esforços e deslocamentos de uma viga mista aço-concreto, simplesmente apoiada, submetida à carga distribuída uniforme ao longo do comprimento. Para esta análise, os

autores utilizaram o Método dos Elementos Finitos e a Equação Diferencial (2.20) no desenvolvimento de uma solução que utiliza apenas um elemento para cada trecho entre dois apoios.

Faella *et al.* (2002) descrevem a formulação do que chamam de matriz de rigidez e vetor de forças nodais exatos. Esta designação é devida ao fato de que estes não introduzem qualquer aproximação no campo de deslocamentos da viga. Outro ponto de interesse neste elemento é a possibilidade de que seja utilizado apenas um elemento na simulação computacional de vigas. Para tanto, o elemento possui três graus de liberdade por nó (rotação, deslocamento vertical e deslocamento relativo, como na Figura 2.5) e a viga obedece as mesmas condições de aplicabilidade da Equação de Newmark (Equação 2.20), ou seja, seção e força longitudinal ( $K$ ) constantes, distribuição de momento atuante conhecida e relações tensão-deformação dos materiais lineares.



**Figura 2.5** Elemento de Faella *et al.* (2002) e seus graus de liberdade.

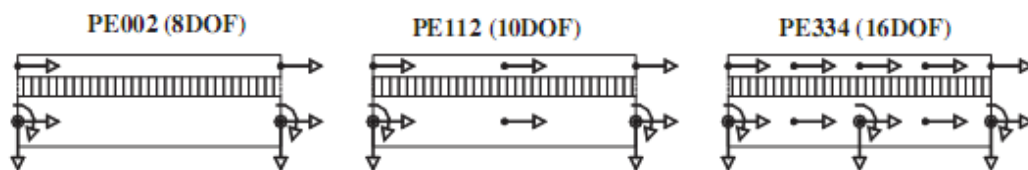
**Fonte:** Faella *et al.*, 2002

Com os resultados obtidos para uma série de exemplos, Faella *et al.* (2002) afirmam a eficácia do seu elemento na análise de problemas ligados à vida de serviço da laje de concreto de uma viga mista e a facilidade de adaptação computacional do mesmo para a solução de vigas com outras configurações e condições de carga.

Dall'Asta e Zona (2004a) descrevem os problemas de *slip locking* que podem ocorrer quando da análise de elementos estruturais com interação parcial via elementos finitos. Estes problemas afetam a descrição do comportamento de parâmetros como curvatura e deslocamentos verticais, fornecendo resultados que apontam para uma

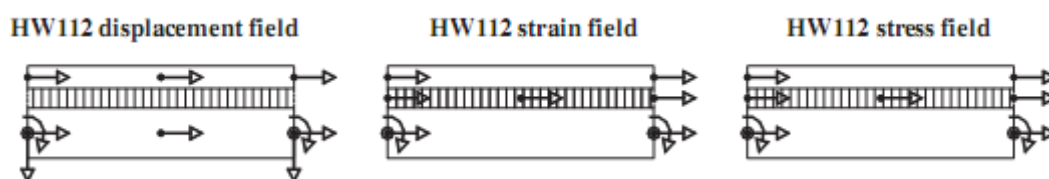
maior rigidez destas estruturas. O *slip locking*, segundo os autores, é o travamento que ocorre quando dois ou mais campos de deslocamento são utilizados em conjunto na representação dos graus de liberdade de um elemento. Este efeito está geralmente conectado a valores extremos de rigidez na conexão de interface, ou seja, valores muito elevados ou próximos de zero.

Os autores comparam elementos baseados em deslocamentos e um elemento de formulação mista que utiliza três campos diferentes para a representação dos deslocamentos, tensões e deformações. Então, Dall'Asta e Zona (2004a) variam o número de graus de liberdade e também a ordem das funções interpoladoras dos mesmos para, em seguida, comparar resultados. É sugerido o uso de funções de forma balanceadas ou a diminuição da ordem das funções que interpolam os deslocamentos e o deslizamento. Tomadas estas medidas é possível evitar o aparecimento do *slip locking* e conseguir uma melhor representação do comportamento real da estrutura, atentando ao fato de que a segunda sugestão pode levar a interpolações inadequadas.



**Figura 2.6** Elementos de 8, 10 e 12 DOF's.

**Fonte:** Dall'Asta e Zona, 2004b.



**Figura 2.7** Elemento misto de 12DOF.

**Fonte:** Dall'Asta e Zona, 2004b.

Dall'Asta e Zona (2004b) propõem e comparam um elemento de formulação mista a outros três elementos baseados em deslocamento (8 DOF, 10DOF e 16DOF) na avaliação da não-linearidade física de vigas mistas (Figuras 2.6 e 2.7). O elemento de

formulação mista é baseado no elemento 10DOF e possui campos aproximados de forma independente: um campo de deslocamentos, um de deformações (duas deformações axiais, curvatura e deslizamento na interface) e um campo de tensões (duas forças axiais, o somatório dos momentos fletores e a força cisalhante na interface).

A escolha das funções de interpolação feita pelos autores foi a seguinte:

- Campo de deslocamentos - funções polinomiais quadráticas para os deslocamentos axiais; funções hermitianas cúbicas para os deslocamentos transversais.
- Campo de deformações - funções lineares para as deformações axiais e curvatura; funções de segunda ordem para os deslizamentos na interface.
- Campo de tensões - funções lineares para as forças axiais e momento fletor; funções de segunda ordem para a força cisalhante.

No que diz respeito à descrição local do campo de tensões, os resultados obtidos por Dall'Asta e Zona (2004b) apontam que, comparado ao elemento 10DOF, o elemento misto fornece uma representação mais suave da força axial e do momento fletor e que aparecem descontinuidades na representação da força cisalhante. Nas comparações feitas com testes experimentais, os resultados fornecidos apresentaram boas representações do comportamento real da viga estudada.

Caldas (2004) apresentou modelos numéricos para a análise de pilares mistos de seções genéricas (perfil I envolto em concreto, perfil tubular preenchido com concreto, etc). Primeiramente, demonstrou como o Teorema de Green pode ser aplicado no cálculo dos esforços resistentes de um pilar. Em seguida, utilizou o método de Newton-Raphson na implementação de dois algoritmos aplicáveis à obtenção das relações entre momento e curvatura de um pilar. O primeiro destes algoritmos estabelece estas relações controlando o momento solicitante através de incrementos. O segundo realiza a mesma tarefa controlando a curvatura e, de acordo com Caldas (2004), é bastante útil na obtenção dos ramos descendentes destas relações.

Caldas (2004) utiliza um algoritmo baseado no método de Newton-Raphson e três parâmetros de deformação na obtenção de superfícies de interação de pilares

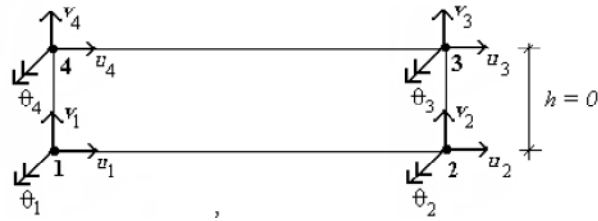
mistos. A superfície de interação de um elemento estrutural é a representação gráfica dos pontos que correspondem à resistência última da seção. No caso dos pilares, estes pontos de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são definidos pelos valores de  $N_x$ ,  $M_x$  e  $M_y$ , respectivamente, e representam as várias combinações possíveis destes esforços. Os valores destes esforços estão relacionados à geometria da seção, aos materiais que compõem a estrutura e aos valores estabelecidos como limites para a deformação.

Por fim, Caldas (2004) apresenta um modelo numérico que simula o comportamento de pilares esbeltos com seções genéricas que pode também ser utilizados na simulação de pórticos e outras estruturas mistas. Este elemento desenvolvido foi adaptado por Silva (2006) na simulação de vigas aço-concreto com deslizamento na interface.

Silva (2006) utilizou o Método dos Elementos Finitos no desenvolvimento de um elemento de interface retangular e espessura nula (Figura 2.8) que, quando utilizado em conjunto com dois outros elementos unidimensionais, é capaz de simular o deslizamento que ocorre na interface de contato das seções de uma viga mista. Este elemento considera a não-linearidade física dos materiais componentes da viga e sua forma de aplicação é exemplificada pela Figura 2.9.

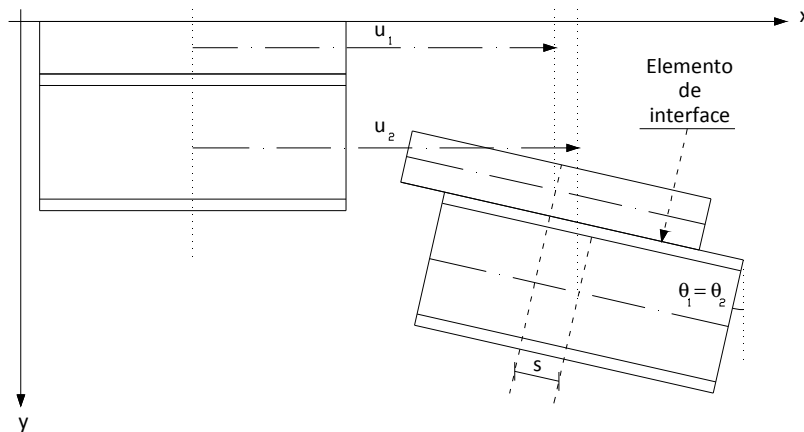
Silva (2006) esclarece que a solução de vigas mistas utilizando seu elemento de interface está vinculada à existência prévia ou implementação de elementos de viga que simulem o comportamento das seções inferior e superior (aço e concreto, neste caso). Afirmar que o elemento apresenta bons resultados quando utilizado em conjunto com um elemento unidimensional de viga para a análise de treliças metálicas sobre base em concreto e também que o mesmo é boa ferramenta na descrição da separação que pode ocorrer na interface.

No mesmo trabalho, Silva (2006) também desenvolve outro elemento unidimensional capaz de simular o deslizamento na interface de contato para seções transversais genéricas. A grande diferença entre as duas análises está no fato de que o segundo elemento desenvolvido engloba toda a seção da viga e incorpora o deslizamento relativo que ocorre entre as seções superior e inferior, não sendo necessária a associação à outros elementos para a simulação de vigas com uma linha de deslizamento.



**Figura 2.8** Graus de liberdade do elemento de interface de Silva (2006).

**Fonte:** Silva, 2006



**Figura 2.9** Elemento de interface de Silva (2006) aplicado à viga mista.

Tanto o elemento de interface com espessura nula quanto o elemento com deslizamento relativo incorporado, foram desenvolvidos por Silva (2006) utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais. Os deslocamentos axiais dos dois elementos podem ser interpolados através de funções polinomiais lineares e quadráticas, sendo que as últimas são mais adequadas pois eliminam o travamento no deslizamento (*slip locking*). Para os deslocamentos verticais e rotações, Silva (2006) utilizou funções polinomiais cúbicas.

O elemento com deslizamento incorporado desenvolvido neste trabalho é derivado daquele de Silva (2006) e inclui a parcela referente à não-linearidade geométrica da viga que é somada às deformações axiais. Salienta-se que, poucos trabalhos foram publicados referentes ao comportamento não-linear geométrico de vigas com interação parcial.

Krawczyk *et al.* (2007) desenvolveram um modelo de análise geométrica não linear em abordagem corrotacional, na qual o movimento total do elemento é decomposto em uma parcela relativa a movimento de corpo rígido e outra, referente às pequenas deformações. A primeira destas parcelas, segundo os autores, define um sistema local de coordenadas a partir do qual são definidas as deformações da segunda parcela.

O elemento estuda as estruturas mistas admitindo a divisão em camadas independentes, deformações de cisalhamento de primeira ordem e um campo de grandes deslocamentos, mas de deformações e deslizamentos moderados.

A abordagem utilizada nesta formulação permite a separação dos efeitos da não-linearidade física daqueles da não-linearidade geométrica. Além disso, permite que diferentes elementos de análise geométrica não-linear sejam obtidos através do mesmo elemento linear, uma vez que as matrizes de transformação entre sistemas de coordenadas não dependem do elemento escolhido.

Os resultados em Krawczyk e Rebora (2007) obtidos para o elemento de Krawczyk *et al.* (2007) mostram que seções que utilizam materiais com propriedades muito diferentes podem provocar o aparecimento de deformações de cisalhamento e efeitos não-lineares na viga.

Battini *et al.* (2009) descrevem a formulação de um elemento para análise não-linear geométrica de vigas-colunas mistas com interação parcial também utilizando uma descrição corrotacional. Um dos pontos de interesse neste elemento é a utilização dos deslizamentos em seus extremos como graus de liberdade em conjunto com as rotações e deslocamentos horizontal e vertical. Os autores adaptaram a formulação corrotacional ao problema da viga-coluna com interação parcial, sendo que a maior dificuldade foi a adaptação dos graus de liberdade adicionais nos elementos com deslizamento.

Por tratarem do mesmo tema desta dissertação sob uma diferente perspectiva, dois dos exemplos utilizados por Krawczyk e Rebora (2007) e Battini *et al.* (2009) foram também analisados no Capítulo 4.



# FORMULAÇÃO NUMÉRICA

## 3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentada uma formulação relacionada ao estudo da não-linearidade geométrica de vigas-colunas para uma barra prismática de comprimento  $L$ . Será seguida a mesma sequência utilizada por Silva (2006) na solução do problema não-linear físico, mas geometricamente linear. Baseado no elemento de Silva (2006) é desenvolvido um elemento de dez graus de liberdade que incorpora o deslizamento entre os materiais e é capaz de simular tanto a não-linearidade física quanto a geométrica. Estas modificações no elemento base estão relacionadas à matriz de rigidez tangente e ao vetor de forças internas do elemento.

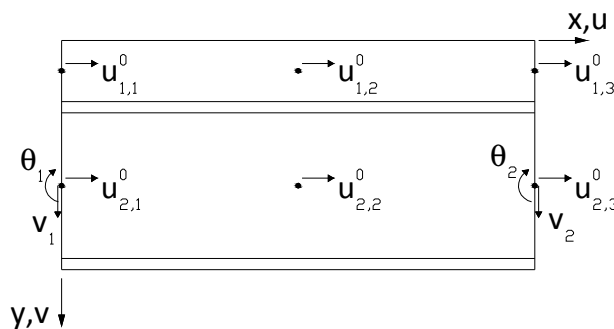
De posse desta formulação, foi possível utilizar a estrutura do programa existente em linguagem C++ (FEMOOP) para realizar análises não-lineares de estruturas com elementos que com uma ou mais interfaces de deslizamento, objetivo principal desta pesquisa.

### 3.2. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Considera-se uma seção genérica subdividida em duas outras que, por simplificação, são aqui denominadas simplesmente seção inferior e superior. Tal separação e a consideração da deformação que ocorre no vínculo de interface são necessárias para que o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) possa ser utilizado. Para os esforços resistentes desta seção mista, consideram-se curvas tensão-deformação formadas por polinômios até terceiro grau que definem as faixas de deformação das curvas utilizadas na integração dos esforços resistentes e rigidezes generalizadas.

Um modelo de vínculo distribuído ao longo da superfície de contato foi utilizado para simular o efeito da conexão deformável. A separação vertical que ocorre entre os dois materiais foi desconsiderada com base nos resultados obtidos por Salari e Spacone (2001) que evidenciam a pequena relevância da mesma no comportamento das vigas mistas. Admite-se então a hipótese de interação total na direção vertical.

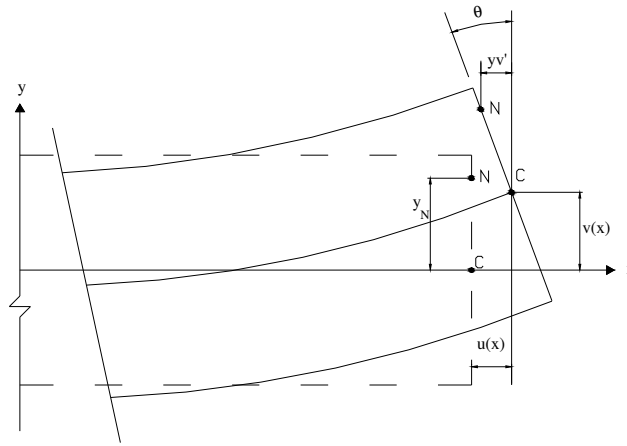
Segundo Dall'Asta e Zona (2004a), a inconsistência nas aproximações dos campos de deslocamento axial e de rotação fortalece a dependência entre o erro resultante da utilização do Método dos Elementos Finitos e a rigidez da conexão. Esta dependência pode gerar uma oscilação no deslizamento e/ou uma aproximação ruim da curvatura para valores elevados da rigidez da conexão. Portanto, para adequadamente interpolar os deslocamentos axiais e transversais que ocorrem nos nós do elemento (Figura 3.1) foram utilizados polinômios quadráticos e cúbicos, respectivamente.



**Figura 3.1** Elemento implementado.

### 3.2.1. Relação tensão – deformação

A Figura (3.2) representa uma viga bidimensional composta por apenas um material e na qual as seções transversais planas permanecem planas após as deformações. No campo de deslocamentos adotado  $u$  e  $v$  são as componentes de deslocamentos do ponto C nas direções globais  $x$  e  $y$ , respectivamente. O ângulo  $\theta$  define a inclinação da reta tangente à curva e é pequeno o bastante para que as relações  $\sin(\theta) \cong \theta$  e  $\cos(\theta) \cong 1$  sejam verdadeiras.

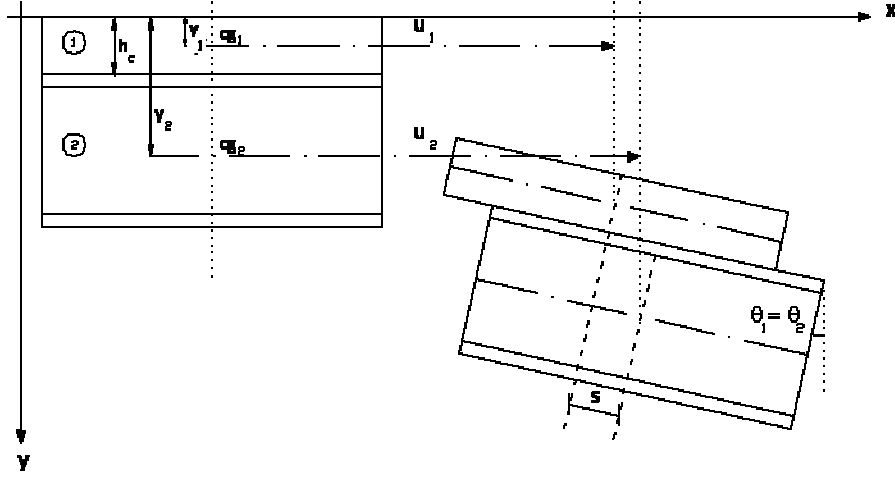


**Figura 3.2** Campo de deslocamentos de uma viga simples.

Admitindo o mesmo deslocamento vertical para qualquer ponto da seção analisada, apresentam-se as componentes de deslocamento para certo ponto N:

$$u_N = u(x) - yv'(x) \quad (3.1)$$

$$v_N = v(x) \quad (3.2)$$



**Figura 3.3** Campo de deslocamentos da viga composta.

A Figura (3.3) ilustra o campo de deslocamentos do problema não-linear da viga bi-dimensional composta por dois materiais. Neste modelo as rotações e os deslocamentos verticais são os mesmos e a separação vertical entre as seções foi ignorada. Os centros de gravidade das seções de concreto e aço estão localizados sobre os eixos  $cg_1$  e  $cg_2$ , respectivamente.

Assim, é análoga a forma de definir as componentes de deslocamento para esta viga:

$$u_\alpha(x, y) = u_\alpha^0(x) + (y_\alpha - y)\theta(x) \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.3)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (3.4)$$

O deslizamento na interface é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s(x) &= u_2(x, h_c) - u_1(x, h_c) \quad \therefore \\ s(x) &= u_2^0(x) - u_1^0(x) + (y_2 - h_c)\theta(x) + (h_c - y_1)\theta(x) \quad \therefore \\ s(x) &= u_2^0(x) - u_1^0(x) + (y_2 - y_1)\theta(x) \quad \therefore \\ s(x) &= u_2^0(x) - u_1^0(x) + h\theta(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $h = (y_2 - y_1)$  é a distância entre os eixos de referência.

Reagrupando as equações temos:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(x, y) &= u_{\alpha}^0(x) + (y_{\alpha} - y)v' \quad \alpha = 1, 2 \\ v(x, y) &= v(x) \\ s(x) &= u_2^0(x) - u_1^0(x) + hv' \end{aligned} \quad (3.6)$$

Crisfield (1991) e Garcia e Villaça (1999) fornecem a expressão de deformação com grandes deslocamentos e rotações moderadas para a componente de deformação axial:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

Utilizando uma notação simplificadora  $(\ )' = \partial(\ ) / \partial x$  e adequando a equação anterior para o caso bi-dimensional ( $w = 0$ ) obtêm-se:

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2}(v')^2 \quad (3.8)$$

Aplicadas as componentes de deslocamento e de deslizamento na interface da viga composta, obtêm-se a Equação (3.9) que fornece a deformação axial  $\varepsilon_x$  para cada subseção. A parcela  $\frac{1}{2}(v')^2$  na equação representa a consideração da não-linearidade geométrica da viga mista.

$$\varepsilon_{x,\alpha} = u_{\alpha}^0' + (y_{\alpha} - y)v'' + \frac{1}{2}(v')^2 \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.9)$$

Aplicando o operador variacional na equação da deformação axial (Equação 3.9) e naquela que representa o deslizamento na interface (Equação 3.5), são obtidas as relações utilizadas na formulação de solução da viga mista:

$$\delta s(x) = \delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta v' \quad (3.10)$$

$$\delta \varepsilon_{x,\alpha} = \delta u_{\alpha}^0' + (y_{\alpha} - y) \delta v'' + v' \delta v' \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.11)$$

### 3.2.2. Formulação do problema de equilíbrio

Tal como apresentado por Caldas (2004) e Silva (2006), a formulação do problema de equilíbrio deste elemento será feita baseada no PTV. Segundo este princípio, o trabalho virtual interno das tensões sobre as deformações virtuais é igual ao trabalho virtual externo das cargas sobre os deslocamentos virtuais ao qual se submete um sólido deformável em equilíbrio. Neste caso:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (3.12)$$

A expressão geral do trabalho interno realizado pelas tensões reais em função das tensões de Kirchhoff e das componentes de deformação de Green-Lagrange que ocorrem em um sólido de volume  $V$  é a seguinte:

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (3.13)$$

sendo  $\delta$  o operador variacional.

As tensões relevantes no estudo de vigas são as tensões axiais,  $\sigma_x$ , e as tensões de cisalhamento,  $\tau_{xy}$ . Associando esta informação ao modelo de vigas de Euller - Bernoulli em que as deformações de cisalhamento são desprezadas, é possível reduzir a equação anterior ao ponto de:

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \quad (3.14)$$

A Equação (3.14) é função da tensão axial,  $\sigma_x$ , e de sua correspondente deformação,  $\delta \varepsilon_x$ , produzida pelo campo de deslocamento virtual imposto ao elemento de volume  $V$ . Devidamente reorganizada, esta expressão passa a representar a soma do trabalho realizado pelas forças atuantes nas duas seções da viga composta e com o trabalho que é produzido pela deformação no vínculo de ligação entre as seções:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L \left( \iint_{A_1} \sigma_{x1} \delta \varepsilon_{x1} dA + \iint_{A_2} \sigma_{x2} \delta \varepsilon_{x2} dA + S_b \delta s \right) dx \quad (3.15)$$

Na Equação (3.15):

$S_b$  = força cortante na interface aço – concreto

$\delta s$  = deformação / deslizamento na interface aço – concreto

$L$  = comprimento da viga

Para que o Método dos Elementos Finitos possa ser utilizado é necessário subdividir a viga em  $m$  elementos de comprimento  $l_m$ . Após a discretização, o trabalho virtual interno passa a ser representado pelo somatório do trabalho virtual individual destes elementos como mostrado na equação seguinte.

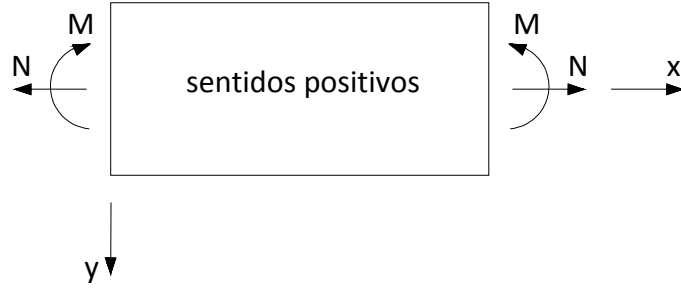
$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \int_{l_m} \left( \iint_{A_1} \sigma_{x1} \delta \varepsilon_{x1} dA + \iint_{A_2} \sigma_{x2} \delta \varepsilon_{x2} dA + S_b \delta s \right) dx \quad (3.16)$$

Aplicando as equações variacionais de deformação e deslizamento de (Equação 3.10) e (Equação 3.11) ao somatório dos trabalhos virtuais, obtêm-se

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \int_{l_m} \left[ \iint_{A_1} \sigma_{x1} (\delta u_1^{0'} + (y_1 - y) \delta v_1'' + v_1' \delta v_1') dA + \right. \\ \left. \iint_{A_2} \sigma_{x2} (\delta u_2^{0'} + (y_2 - y) \delta v_2'' + v_2' \delta v_2') dA + S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta v_1') \right] dx \quad (3.17)$$

Reorganizando a Equação (3.17) e omitindo o índice  $x$  referente ao eixo do elemento de viga mista com interação parcial, têm-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \int_{l_m} \left[ \iint_{A_1} \sigma_1 \delta u_1^{0'} dA + \iint_{A_1} \sigma_1 (y_1 - y) \delta v_1'' dA + \iint_{A_1} \sigma_1 v_1' \delta v_1' dA + \iint_{A_2} \sigma_2 \delta u_2^{0'} dA + \right. \\ \left. \iint_{A_2} \sigma_2 (y_2 - y) \delta v_2'' dA + \iint_{A_2} \sigma_2 v_2' \delta v_2' dA + S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta v_1') \right] dx \quad (3.18)$$



**Figura 3.4** Convenção de sinais dos esforços resistentes.

Obedecendo a convenção de sinais estabelecida na Figura 3.4, os esforços resistentes da seção são dados pelas seguintes integrais de área:

$$N_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} \sigma_{\alpha} dA \quad (3.19)$$

$$M_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} \sigma_{\alpha} (y - y_{\alpha}) dA \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.20)$$

Estas integrais aplicadas à Equação (3.18), fornecem:

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{ne} \int_{lm} [N_1 \delta u_1^0 + N_2 \delta u_2^0 + N_T v' \delta v' - M_T \delta v'' + S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta v')] dx \quad (3.21)$$

Os esforços  $N_T$  e  $M_T$  são os esforços resultantes totais:

$$N_T = N_1 + N_2 \quad (3.22)$$

$$M_T = M_1 + M_2 \quad (3.23)$$

As expressões apresentadas até o momento são aplicáveis a qualquer modelo de elementos finitos que considere apenas as deformações axiais e os deslizamentos relativos e que seja baseada em interpolação de deslocamentos.



### 3.2.3. Modelo de elementos finitos – equação de equilíbrio incremental

Na equação do trabalho interno (Equação 3.21) é necessário que se conheça a variação dos deslocamentos nodais generalizados, representados por  $\mathbf{q}$ . Isto significa conhecer a variação das funções de deslocamento, fornecidas nas Equações (3.3) e (3.4), e de suas respectivas derivadas:

$$\begin{aligned}\delta u_1^0 &= \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \delta \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right) & \delta u_2^0 &= \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \delta u_1^{0'} &= \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) & \delta u_2^{0'} &= \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \delta v' &= \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) & \delta v'' &= \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right)\end{aligned}\tag{3.24}$$

Aplicando estas equações àquela que representa a função variacional do trabalho interno de um elemento (Equação 3.21), têm-se:

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= \int_{lm} \left\{ N_1 \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_2 \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_T v' \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_T \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\ &\quad \left. S_b \left[ \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \right) - \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right) + h \delta \mathbf{q}^T \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \right\} dx\end{aligned}\tag{3.25}$$

Evidenciando o termo relativo aos deslocamentos nodais ( $\mathbf{q}$ ):

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= \delta \mathbf{q}^T \int_{lm} \left\{ N_1 \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_2 \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_T v' \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\ &\quad \left. S_b \left[ \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \right) - \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right) + h \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \right\} dx\end{aligned}\tag{3.26}$$

O trabalho virtual externo realizado em um elemento pode ser obtido relacionando o conjunto de deslocamentos nodais ao respectivo vetor de forças externas ( $\mathbf{r}_m$ ) aplicadas na direção dos graus de liberdade do elemento:

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{r}_m \quad (3.27)$$

Aplicando o PTV, ou seja, admitindo o equilíbrio entre o trabalho realizado pelas forças internas e pelas forças externas, têm-se:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \int_{l_m} \left\{ N_1 \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_2 \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_T v' \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\ \left. S_b \left[ \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \right) - \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right) + h \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \right\} dx - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{r}_m = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Esta equação é satisfeita no caso em que  $\delta \mathbf{q}^T = \mathbf{0}$ , no entanto esta opção não representa a solução do problema, pois significa que não houve deslocamento algum. Com isso, a solução deverá ser:

$$\begin{aligned} \int_{l_m} \left\{ N_1 \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_2 \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_T v' \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\ \left. S_b \left[ \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \right) - \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right) + h \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \right\} dx - \mathbf{r}_m = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde a integral (Equação 3.30) é a expressão da força interna de um elemento ( $\mathbf{f}_m$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_m = \int_{l_m} \left\{ N_1 \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_2 \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_T v' \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\ \left. S_b \left[ \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \right) - \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right) + h \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \right\} dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sendo  $\mathbf{R}$  o vetor de cargas externas, então o somatório da Equação (3.30) para os  $ne$  elementos utilizados na discretização da viga fornece a equação de equilíbrio incremental (3.31):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{ne} \int_{l_m} \left\{ N_1 \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_2 \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_T v' \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\ \left. S_b \left[ \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \right) - \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right) + h \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \right\} dx - \mathbf{R} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.31)$$

A Equação (3.31) pode ser representada de forma simplificada (Equação 3.32). Nesta equação,  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças internas da estrutura,  $\mathbf{P}$  é o vetor de cargas nodais representativo das cargas externas e  $\lambda$  é o valor escalar denominado fator de carga.

$$\Psi = \mathbf{F} - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (3.32)$$

Neste ponto é interessante ressaltar as diferenças entre a Equação (3.31), que inclui os efeitos geometricamente não-lineares e a Equação (3.34), obtida por Silva (2006) e que não considera estes efeitos. Comparando

$$\int_{l_m} \left\{ N_1 \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_2 \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_T v' \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) + S_b \left[ \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \right) - \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right) + h \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \right\} dx \quad e \quad (3.33)$$

$$\int_{l_m} \left\{ N_1 \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_2 \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) + S_b \left[ \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} \right) - \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} \right) + h \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \right\} dx, \quad (3.34)$$

verifica-se que a Equação (3.33) desenvolvida neste capítulo é diferente daquela de Silva (2006) (Equação 3.34) pois apresenta uma parcela relacionada à derivada da componente de deslocamento vertical e à força normal total que ocorre nas camadas componentes da viga. Esta parcela, representativa da não linearidade geométrica, é exposta abaixo.

$$N_T \left( v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \quad (3.35)$$

### 3.3. MODELO IMPLEMENTADO

O elemento utilizado para o estudo da viga mista com interação parcial e representado pela Figura 3.1 possui seis nós e dez graus de liberdade. Admite-se que os deslocamentos horizontais de cada seção são diferentes nas diferentes camadas de material e que os deslocamentos verticais e as rotações são os mesmos em toda a seção.

Esta situação configura a interação parcial e também foi utilizada por Dall'Asta e Zona (2004b), que chama atenção sobre a necessidade de que sejam utilizados polinômios quadráticos na interpolação dos deslocamentos axiais como forma de evitar o chamado *slip locking* ou “travamento do deslizamento”, em tradução livre.

Para entender a ocorrência do *slip locking* é necessário compreender o que ocorre nas equações das componentes de deslocamento (Equação 3.6), expostas novamente nas Equações (3.36) e (3.37).

$$u_{\alpha}(x, y) = u_{\alpha}^0(x) + (y_{\alpha} - y)v' \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.36)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (3.37)$$

O polinômio que interpola os deslocamentos transversais nas extremidades do elemento é o mesmo que interpola as rotações, por esta razão deve ser um polinômio de grau três, ou maior. As rotações, por sua vez, são obtidas utilizando a derivada deste polinômio, ou seja, um polinômio do segundo grau. Silva (2006) demonstrou que estas rotações estão presentes na equação do deslizamento e, nesta formulação, a Equação (3.36) mostra que estas rotações influenciam também os deslocamentos axiais. Então, a equação que interpola os deslocamentos axiais deve ser compatível com as rotações, o que implica na utilização de um polinômio de grau dois para a interpolação dos deslocamentos transversais. Esta recomendação é feita por Crisfield (1991) em sua discussão sobre quais seriam os polinômios de interpolação mais adequados para a análise de vigas.

Como dito na Seção (3.2.3),  $\mathbf{q}$  é o conjunto dos deslocamentos nodais e este conjunto e suas componentes são dados por:

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_{u_1}^T \quad \mathbf{q}_{u_2}^T \quad \mathbf{q}_v^T] \quad (3.38)$$

$$\mathbf{q}_{u_1}^T = [u_{1,1}^0 \quad u_{1,2}^0 \quad u_{1,3}^0]$$

$$\mathbf{q}_{u_2}^T = [u_{2,1}^0 \quad u_{2,2}^0 \quad u_{2,3}^0] \quad (3.39)$$

$$\mathbf{q}_{v_1}^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]$$

Daí, os deslocamentos e suas respectivas derivadas em função de  $x$  podem ser representados por

$$u_1^0 = \boldsymbol{\Phi}_u^T \mathbf{q}_{u_1} \quad u_1'^0 = \boldsymbol{\Phi}'_u{}^T \mathbf{q}_{u_1} \quad (3.40)$$

$$u_2^0 = \boldsymbol{\Phi}_u^T \mathbf{q}_{u_2} \quad u_2'^0 = \boldsymbol{\Phi}'_u{}^T \mathbf{q}_{u_2} \quad (3.41)$$

$$v = \boldsymbol{\Phi}_v^T \mathbf{q}_v \quad v' = \boldsymbol{\Phi}'_v{}^T \mathbf{q}_v \quad (3.42)$$

$$v'' = \boldsymbol{\Phi}''_v{}^T \mathbf{q}_v \quad (3.43)$$

Derivando as equações anteriores em relação ao vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ :

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial u_1'^0}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial u_2'^0}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}_v \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}'_v \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}''_v \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

Os vetores nulos das Equações (3.44-3.47) são dados por:

$$\mathbf{0}_u^T = [0 \quad 0 \quad 0] \quad (3.48)$$

$$\mathbf{0}_v^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (3.49)$$

Os polinômios que interpolam os deslocamentos nodais serão definidos em relação a um elemento finito genérico de extremidades  $\xi = -1$  e  $\xi = 1$ , sendo que a coordenada generalizada  $\xi$  obedece à relação  $\xi = \frac{2}{l}x - 1$ . As funções de forma, como são chamados estes polinômios, podem ser assim organizadas:

$$\Phi_{u_1} = \Phi_{u_2} = \Phi_u = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ 1-\xi^2 \\ \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\Phi_v = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{l}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{l}{2} \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Com isto pode-se definir suas derivadas em relação à variável  $x$ :

$$\begin{aligned} \Phi'^T_u &= \begin{bmatrix} \frac{2}{l} \left( \xi - \frac{1}{2} \right) & \frac{2}{l} (-2\xi) & \frac{2}{l} \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \\ \Phi'^T_v &= \begin{bmatrix} \frac{2}{l} \left( -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\xi^2 \right) & -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 & \frac{2}{l} \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\xi^2 \right) & -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 \end{bmatrix} \\ \Phi''^T_v &= \begin{bmatrix} \frac{4}{l^2} \left( \frac{3}{2}\xi \right) & \frac{2}{l} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi \right) & \frac{4}{l^2} \left( -\frac{3}{2}\xi \right) & \frac{2}{l} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$

### 3.3.1. A matriz de rigidez tangente

A matriz de rigidez do problema é obtida ao se derivar o vetor de forças internas de um elemento (Equação 3.30), obtido no final da Seção (3.2.3), em relação ao vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$ . Assim sendo, explicita-se esta derivada na Equação (3.53).

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_T &= \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{q}} \\
&= \int_{l_m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ N_1 \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_2 \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_T \left( v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) - M_T \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) + \right. \\
&\quad \left. S_b \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx
\end{aligned} \tag{3.53}$$

A Equação (3.54) exemplifica aplicação da regra da cadeia em um dos termos da equação anterior. Convenientemente, o termo escolhido como exemplo foi o que concentra a parcela de não-linearidade geométrica estudada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ N_T \left( v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] &= N_T \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) + \left( v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \left( \frac{\partial N_T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\
&= N_T \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left( v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \left( \frac{\partial N_T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Por fim, aplicando-se a regra da cadeia no restante dos termos da Equação (3.53), depara-se com a matriz de rigidez tangente para o elemento finito proposto em novo formato:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_T &= \int_{l_m} \left[ \left( \frac{\partial u_1^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) \left( \frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left( \frac{\partial u_2^{0'}}{\partial \mathbf{q}} \right) \left( \frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + N_T \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left( v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \left( \frac{\partial N_T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} \right) \left( \frac{\partial M_T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right) \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] dx
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Partindo da equação anterior, após substituir as Equações (3.44 – 3.47), que representam as derivadas em relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}$  dos deslocamentos no interior do elemento, obtêm-se a Equação (3.56).

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_T = \int_{l_m} & \left[ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \left( \frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} \left( \frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + N_T \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}'_v \end{Bmatrix} \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}'_v \end{Bmatrix} \left( \frac{\partial N_T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right. \\
& \left. - \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}''_v \end{Bmatrix} \left( \frac{\partial M_T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}'_v \end{Bmatrix} \right) \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] dx
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Da mesma forma, o vetor de forças nodais passa a ser:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_m = \int_{l_m} & \left[ N_1 \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + N_2 \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + N_T v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}'_v \end{Bmatrix} - \right. \\
& \left. M_T \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}''_v \end{Bmatrix} + S_b \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}'_v \end{Bmatrix} \right) \right] dx
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Reorganizando os termos das Equações (3.56) e (3.57) e agrupando os mesmos numa forma matricial mais simples, têm-se:

$$\mathbf{k}_T = \int_{l_m} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_u \left( \frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \boldsymbol{\varphi}_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \boldsymbol{\varphi}'_u \left( \frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \boldsymbol{\varphi}_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \boldsymbol{\varphi}'_v \left\{ N_T \left( \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + v' \left( \frac{\partial N_T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + h \left( \frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right\} - \boldsymbol{\varphi}''_v \left( \frac{\partial M_T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dx \tag{3.58}$$

$$\mathbf{f}_m = \int_{l_m} \begin{bmatrix} N_1 \boldsymbol{\varphi}'_u - S_b \boldsymbol{\varphi}_u \\ N_2 \boldsymbol{\varphi}'_u + S_b \boldsymbol{\varphi}_u \\ (N_T v' + h S_b) \boldsymbol{\varphi}'_v - M_T \boldsymbol{\varphi}''_v \end{bmatrix} dx \tag{3.59}$$

A matriz de rigidez tangente e o vetor de forças nodais apresentados não seguem o formato de representação geralmente utilizado quando se fala em análise numérica por meio de elementos finitos. Em geral, tanto um quanto outro são expressos em função de uma matriz deformações-deslocamentos,  $\mathbf{B}$ , e de uma matriz de tensões,  $\boldsymbol{\sigma}$ . Esta forma de representação e a sua formulação numérica são descritas no Anexo I.



### 3.3.2. Derivadas dos esforços internos

Para que se possa dar continuidade ao desenvolvimento da matriz de rigidez tangente, as derivadas dos esforços resistentes em relação aos deslocamentos nodais generalizados  $\mathbf{q}$  devem ser obtidas. Assim, define-se:

- as derivadas dos esforços normais

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \iint_{A_\alpha} \sigma_\alpha dA \right) = \iint_{A_\alpha} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_{A_\alpha} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_{A_\alpha} E_{T_\alpha} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \mathbf{q}} dA \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_T}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \iint_{A_1} \sigma_1 dA + \iint_{A_2} \sigma_2 dA \right) = \iint_{A_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{q}} dA + \iint_{A_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mathbf{q}} dA \\ &= \iint_{A_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \mathbf{q}} dA + \iint_{A_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \mathbf{q}} dA = \iint_{A_1} E_{T_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \mathbf{q}} dA + \iint_{A_2} E_{T_2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \mathbf{q}} dA \end{aligned} \quad (3.61)$$

- a derivada da força cortante na interface

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial S_b}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.62)$$

- a derivada do momento fletor

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \iint_{A_1} \sigma_1 (y - y_1) dA + \iint_{A_2} \sigma_2 (y - y_2) dA \right) \\ &= \iint_{A_1} E_{T_1} (y - y_1) \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \mathbf{q}} dA + \iint_{A_2} E_{T_2} (y - y_2) \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \mathbf{q}} dA \end{aligned} \quad (3.63)$$

Observa-se que  $E_T$  e  $E_{S_b}$  são definidos de forma análoga, diferindo somente no que diz respeito à curva utilizada para tal: curva tensão-deformação no primeiro caso e uma curva que relaciona a força cortante e o deslizamento do vínculo na interface aço-concreto.

Derivando as equações de deformação e deslizamento dadas nas Equações (3.9) e (3.5) em relação ao vetor de deslocamentos nodais, obtêm-se as Equações (3.64) e (3.65) que, por sua vez, estão relacionadas às derivadas das funções de deslocamento em relação ao vetor de deslocamentos nodais (Equações 3.44 – 3.47).

$$\frac{\partial \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \mathbf{q}} + (y_{\alpha} - y) \frac{\partial v''}{\partial \mathbf{q}} + v' \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_2^0}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial \mathbf{q}} + h \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.65)$$

Substituindo as Equações (3.64) e (3.65) nas equações das derivadas dos esforços resistentes (Equações 3.60 – 3.63) e explicitando as derivadas das equações de deslocamento (Equações 3.44 – 3.47), têm-se:

- as derivadas dos esforços normais

$$\frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} = \iint_{A_1} E_{T_1} \left[ \begin{Bmatrix} \Phi'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + (y_1 - y) \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \Phi''_v \end{Bmatrix} + v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \Phi'_v \end{Bmatrix} \right] dA \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} = \iint_{A_2} E_{T_2} \left[ \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \Phi'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + (y_2 - y) \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \Phi''_v \end{Bmatrix} + v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \Phi'_v \end{Bmatrix} \right] dA$$

$$\frac{\partial N_T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.67)$$

- a derivada da força cortante na interface

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \left[ \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \Phi_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Phi_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \Phi'_v \end{Bmatrix} \right] \quad (3.68)$$

- a derivada do momento fletor

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = & \iint_{A_1} E_{T_1} (y - y_1) \left[ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}'_u \\ \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + (y_1 - y) \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}''_v \end{Bmatrix} + v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}'_v \end{Bmatrix} \right] dA \\ & + \iint_{A_2} E_{T_2} (y - y_2) \left[ \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}'_u \\ \mathbf{0}_v \end{Bmatrix} + (y_2 - y) \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}''_v \end{Bmatrix} + v' \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}'_v \end{Bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

Reorganizando estas derivadas num formato matricial mais adequado, obtêm-se o seguinte arranjo:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Phi}'_u \iint_{A_1} E_{T_1} dA \\ \mathbf{0}_u \\ -\boldsymbol{\Phi}''_v \iint_{A_1} E_{T_1} (y - y_1) dA + \boldsymbol{\Phi}'_v v' \iint_{A_1} E_{T_1} dA \end{array} \right\} \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\Phi}'_u \iint_{A_2} E_{T_2} dA \\ -\boldsymbol{\Phi}''_v \iint_{A_2} E_{T_2} (y - y_2) dA + \boldsymbol{\Phi}'_v v' \iint_{A_2} E_{T_2} dA \end{array} \right\} \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial N_T}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Phi}'_u \iint_{A_1} E_{T_1} dA \\ \boldsymbol{\Phi}'_u \iint_{A_2} E_{T_2} dA \\ -\boldsymbol{\Phi}''_v \left[ \iint_{A_1} E_{T_1} (y - y_1) dA + \iint_{A_2} E_{T_2} (y - y_2) dA \right] + \boldsymbol{\Phi}'_v \left[ \iint_{A_1} E_{T_1} v' dA + \iint_{A_2} E_{T_2} v' dA \right] \end{array} \right\} \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}_u \\ \boldsymbol{\Phi}_u \\ h\boldsymbol{\Phi}'_v \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}'_u \iint_{A_1} E_{T_1} (y - y_1) dA \\ \boldsymbol{\varphi}'_u \iint_{A_2} E_{T_2} (y - y_2) dA \\ -\boldsymbol{\varphi}''_v \left[ \iint_{A_1} E_{T_1} (y - y_1)^2 dA + \iint_{A_2} E_{T_2} (y - y_2)^2 dA \right] + \boldsymbol{\varphi}'_v v' \left[ \iint_{A_1} E_{T_1} (y - y_1) dA + \iint_{A_2} E_{T_2} (y - y_2) dA \right] \end{array} \right\} \quad (3.74)$$

Como forma de simplificar as expressões dos esforços resistentes, utiliza-se a seguinte notação:

$${}^{\prime\prime}EA_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} E_T dA \quad (3.75)$$

$${}^{\prime\prime}ES_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} E_T y dA \quad (3.76)$$

$${}^{\prime\prime}EI_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} E_T y^2 dA \quad (3.77)$$

Esta notação possibilita o seguinte arranjo:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}'_u {}^{\prime\prime}EA_1 \\ \mathbf{0}_u \\ -\boldsymbol{\varphi}''_v {}^{\prime\prime}ES_1 + \boldsymbol{\varphi}'_v v' {}^{\prime\prime}EA_1 \end{array} \right\} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_u \\ \boldsymbol{\varphi}'_u {}^{\prime\prime}EA_2 \\ -\boldsymbol{\varphi}''_v {}^{\prime\prime}ES_2 + \boldsymbol{\varphi}'_v v' {}^{\prime\prime}EA_2 \end{array} \right\} \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial N_T}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}'_u {}^{\prime\prime}EA_1 \\ \boldsymbol{\varphi}'_u {}^{\prime\prime}EA_2 \\ -\boldsymbol{\varphi}''_v \left[ {}^{\prime\prime}ES_1 + {}^{\prime\prime}ES_2 \right] + \boldsymbol{\varphi}'_v \left[ {}^{\prime\prime}EA_1 + {}^{\prime\prime}EA_2 \right] \end{array} \right\} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \begin{Bmatrix} -\varphi_u \\ \varphi_u \\ h\varphi'_v \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \varphi'_u {}^{\prime\prime}ES_1 \\ \varphi'_u {}^{\prime\prime}ES_2 \\ -\varphi''_v [{}^{\prime\prime}EI_1 + {}^{\prime\prime}EI_2] + \varphi'_v v' [{}^{\prime\prime}ES_1 + {}^{\prime\prime}ES_2] \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

O valor de  $E_T$  equivale ao valor da derivada da curva tensão deformação no trecho analisado. Portanto, caso a curva tensão deformação seja linear,  $E_T$  terá valor constante. Já no caso de curva tensão deformação de grau  $n$ , o valor de  $E_T$  será obtido através de uma equação de grau  $n-1$ .

### 3.3.3. Condensação estática

Os modelos de elementos de barra do FEMOOP supõem elementos com dois nós apenas, um em cada extremidade, e de um a seis graus de liberdade por nó. Já o elemento descrito neste trabalho possui quatro graus de liberdade em cada nó e apresenta também, graus de liberdade no interior do elemento. Por este motivo, adequações devem ser feitas de forma que um elemento equivalente ao modelo aceito pelo FEMOOP represente o elemento aqui proposto.

A forma na qual esta condensação dos graus de liberdade é feita para o caso linear é descrita à seguir. Uma vez que análise não linear é composta de sucessivas e complementares análises lineares, o processo deve ser repetido e revertido ao início e fim de cada iteração, respectivamente.

Sendo  $\mathbf{q}$  os graus de liberdade do elemento proposto, os mesmo podem ser agrupados da seguinte maneira:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_r \quad \mathbf{q}_c]^T, \quad (3.83)$$

onde  $\mathbf{q}_c$  são os graus de liberdade que serão condensados e  $\mathbf{q}_r$  são aqueles que serão mantidos.

Têm-se  $\mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{r}$ , para  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{r}$  representando a matriz de rigidez do elemento e as forças nodais do mesmo, respectivamente. Esta relação pode ser reescrita em função dos graus de liberdade à ser condensados e daqueles à ser mantidos (Equação 3.84).

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{rr}\mathbf{q}_r + \mathbf{k}_{rc}\mathbf{q}_c = \mathbf{r}_r \\ \mathbf{k}_{cr}\mathbf{q}_r + \mathbf{k}_{cc}\mathbf{q}_c = \mathbf{r}_c \end{cases} \quad (3.84)$$

A resolução do sistema da Equação (3.85) é feita isolando a variável  $\mathbf{q}_c$  da segunda equação e substituindo este valor na primeira. Assim obtêm-se:

$$(\mathbf{k}_{rc} - \mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{k}_{cr})\mathbf{q}_r = \mathbf{r}_r - (\mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{r}_c) \quad (3.85)$$

Na Equação (3.85), o primeiro conjunto de parênteses representa a matriz de rigidez condensada e o segundo, o vetor de forças nodais condensadas.

A recuperação dos graus de liberdade condensados é feita através de:

$$\mathbf{q}_c = -\mathbf{k}_{cc}^{-1}(\mathbf{k}_{cr}\mathbf{q}_r - \mathbf{r}_c) \quad (3.86)$$

# EXEMPLOS

## 4.1. INTRODUÇÃO

Cinco exemplos de viga-coluna mista serão apresentados neste capítulo como forma de validar o elemento de análise não-linear proposto que, por simplificação, passará a ser denominado SLIPBNL. A utilização de exemplos clássicos e/ou que tenham sido estudados por outros autores foi intencional, de modo que assim houvesse uma base de comparação dos resultados obtidos.

Uma coluna feita de material com características lineares é o primeiro objeto de estudo deste capítulo. A escolha deste exemplo foi baseada no fato de que este é um caso clássico no estudo da flambagem de colunas e, portanto, de grande valia na afirmativa da eficácia do elemento em questão. Neste caso específico, procurou-se variar o parâmetro  $K$  (rigidez da conexão) e verificar a sua influência no comportamento da coluna.

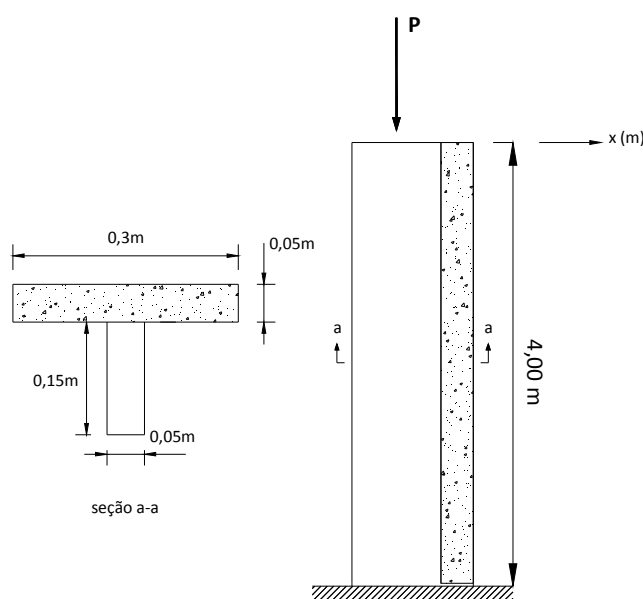
O segundo exemplo é o de uma viga submetida a cargas axiais e transversais. Os dois principais fatores de interesse no estudo deste elemento estrutural são: a possibilidade de se caracterizar o típico comportamento não-linear de uma viga-coluna e a demonstração de que a formulação desenvolvida aqui também se aplica a outros conjuntos de materiais, concreto e madeira neste caso específico.

O efeito de membrana é investigado no terceiro caso. Para tanto, utiliza-se uma viga submetida a carregamento distribuído transversal e variam-se as condições de contorno referentes aos deslocamentos axiais das seções inferior e superior.

O quarto exemplo trata de uma viga submetida a carregamento axial. O foco aqui é o ponto de aplicação desta força em relação ao centróide da seção de aço e a influência que esta excentricidade exerce sobre os deslocamentos verticais.

Por fim, utilizou-se um exemplo previamente analisado por Salari e Spacone (2000) e Silva (2006), que introduz o problema da não-linearidade física no estudo de vigas. O exemplo consiste de uma viga de dois vãos, sob carregamento distribuído transversal. Numa variante do problema, investiga-se o efeito da não-linearidade geométrica adicionando-se forças axiais e variando-se o valor das mesmas. Também neste exemplo procura-se caracterizar o efeito de membrana.

#### 4.2. COLUNA ENGASTADA SUBMETIDA À CARGA AXIAL



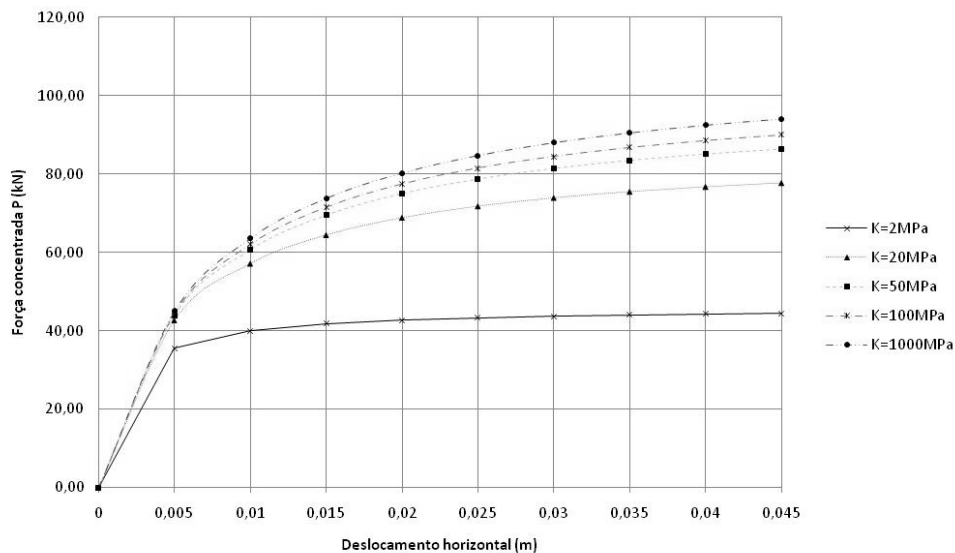
**Figura 4.1** Coluna mista.

A finalidade principal deste exemplo (Figura 4.1) consiste no teste de flambagem de uma coluna engastada e livre, submetida a carregamento axial aplicado



no centróide da seção da alma, e a caracterização do seu comportamento para diferentes valores de rigidez de conexão na interface. A discretização deste elemento estrutural foi feita utilizando-se 20 elementos e o método de controle de deslocamentos com passo de deslocamento de 5mm aplicado no topo da coluna foi utilizado na solução do problema. Foram admitidos  $E_{aba} = 8,00 \times 10^3 MPa$  e  $E_{alma} = 12,00 \times 10^3 MPa$  para os módulos de deformação do material da aba e da alma da viga, respectivamente. O valor do coeficiente  $K$  foi de  $2MPa$ ,  $20MPa$ ,  $50MPa$ ,  $100MPa$  e  $10^4 MPa$ . A geometria da coluna em estudo é definida na Figura (4.1).

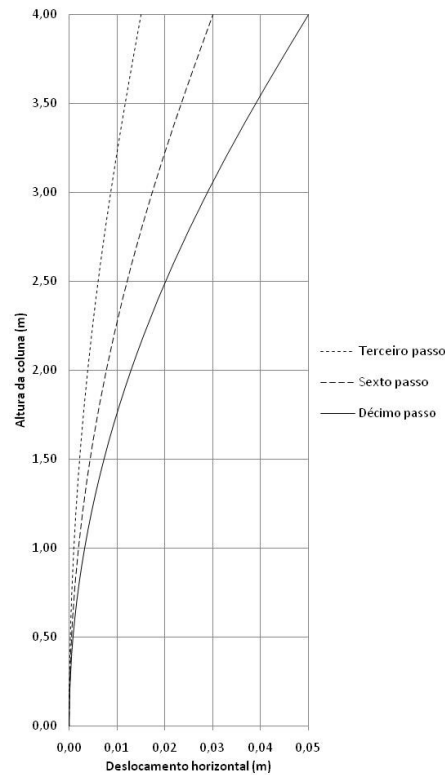
Variando o valor de  $K$  como descrito, os dados obtidos geram a figura abaixo:



**Figura 4.2** Relação entre deslocamento horizontal no topo da coluna e  $K$ .

Como esperado, é clara a relação entre o valor de rigidez na interface e o valor da força necessária para desenvolver os deslocamentos (Figura 4.2). Observa-se que, por exemplo, para  $K = 2MPa$  não há muita diferença entre os valores de força requeridos para o primeiro passo de deslocamentos e os seguintes. Isso acontece devido ao fato de que quanto menor for a ligação entre os dois materiais, maior será a facilidade de deslizamento e com isso maior será a liberdade de deformação da peça inferior. Por outro lado, ao aumentar a rigidez de conexão, a força necessária para impor

os deslocamentos aumenta até 100%, como é possível verificar nos últimos estágios de deslocamento. Atribui-se tal comportamento à soma das resistências à compressão dos materiais, que passam a trabalhar de forma conjunta.



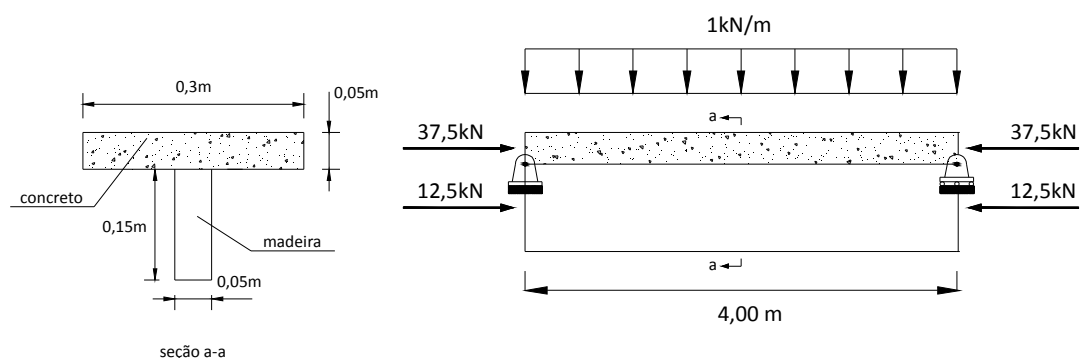
**Figura 4.3** Evolução da deformada da coluna.

Em uma segunda análise, fixou-se o valor de  $K$  em  $50MPa$ . A extremidade livre da coluna foi admitida como o ponto de referência no controle dos deslocamentos, recebendo passos de deslocamento de  $5mm$  até o deslocamento máximo de  $50mm$ . Assim, fez-se uma simulação que deu origem ao gráfico da Figura 4.3, representativo da evolução sofrida pela deformada da coluna durante o aumento de carga. Nesta figura ilustra-se a configuração deformada da coluna para deslocamentos de  $15mm$ ,  $30mm$  e  $50mm$ , correspondentes ao terceiro, sexto e décimo estágio de deslocamento, respectivamente.

### 4.3. VIGA SUBMETIDA À CARGAS AXIAIS E TRANVERSAIS

O próximo exemplo, representado na Figura 4.4, combina uma seção de concreto e outra de madeira sobre as quais são aplicadas cargas axiais concentradas e carregamento distribuído transversal. Seu propósito é confirmar a afirmativa de que o elemento proposto pode ser aplicado a outras combinações de materiais que não apenas aço e concreto. Girhammar e Gopu (1993) apresentaram uma solução analítica para este mesmo problema, que também foi estudado por Battini *et al.* (2009), com um elemento baseado na formulação co-rotacional.

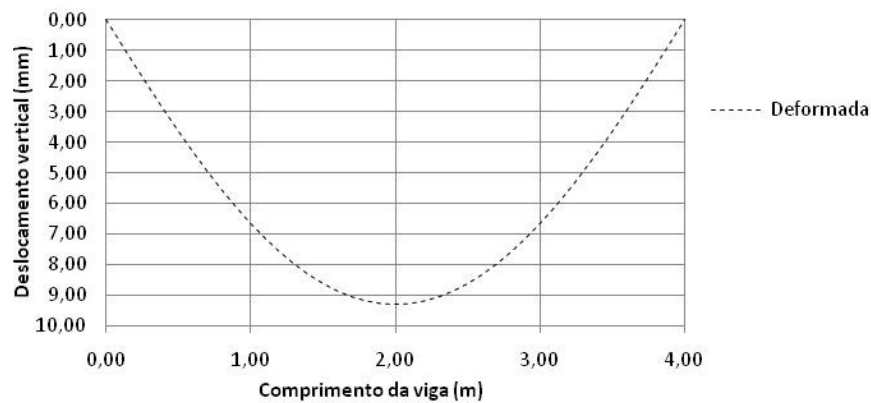
O arquivo de entrada deste problema foi escrito de forma que as forças axiais fossem aplicadas no centróide da seção, ou seja, admitiu-se que os respectivos eixos de referência para cálculo das propriedades geométricas de cada seção passavam pelo centróide das mesmas.



**Figura 4.4** Viga mista sob cargas axiais e transversais.

As propriedades físicas dos materiais utilizados são:  $E_C = 8,00 \times 10^3 \text{ MPa}$  (concreto) e  $E_M = 12,00 \times 10^3 \text{ MPa}$  (madeira) e  $K = 50 \text{ MPa}$ . Nesta análise utilizou-se o método de Newton-Raphson com controle de carga e considerou-se aplicação total do carregamento em apenas um passo de carga. A malha considerada possui 20 elementos e o ponto central da viga foi tomado como referência para comparação de resultados obtidos. A Figura (4.5) mostra a configuração deformada da viga e a Tabela (4.1)

mostra os valores de deslocamento vertical para cada nó até o ponto central. Os valores de deslocamento para os outros pontos obedecem à simetria da viga.



**Figura 4.5** Deformada da viga.

**Tabela 4.1**  
Deslocamento  $v$  ao longo da viga.

nó	$v(\text{mm})$	nó	$v(\text{mm})$
1	0,000	7	7,570
2	1,496	8	8,308
3	2,945	9	8,845
4	4,307	10	9,171
5	5,549	11	9,280
6	6,644		

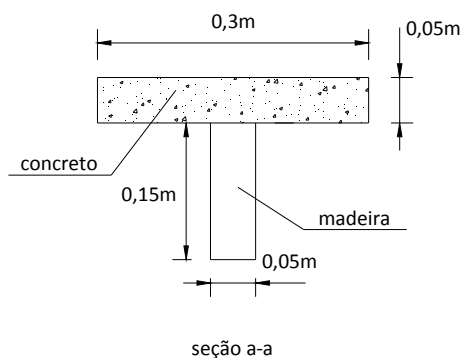
O resultado obtido para o nó 11 é bastante coerente com o que é encontrado na literatura. Girhammar e Gopu (1993) obtiveram um deslocamento vertical no centro da viga igual a  $9,276\text{mm}$ . Battini *et al.* (2009) obtiveram  $v = 9,249\text{mm}$  neste mesmo ponto também utilizando uma malha de 20 elementos.

A discussão sobre a influência da maior ou menor discretização da malha utilizada não será feita neste trabalho, sendo apresentada no Capítulo 5 como uma possibilidade de pesquisa futura.

#### 4.4. EFEITO DE MEMBRANA EM VIGA COM INTERAÇÃO PARCIAL

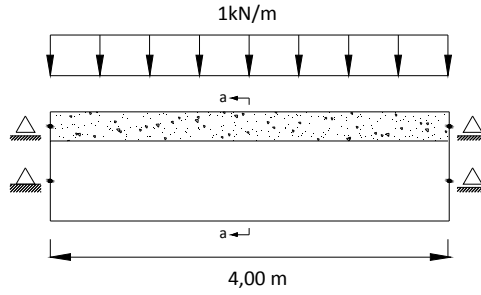
O efeito de membrana em vigas é um comportamento não-linear cuja natureza depende das condições de suporte vertical e das restrições impostas aos graus de liberdade que representam o deslocamento no plano da estrutura, ou seja, na direção axial. Sob este efeito, uma viga tende a redistribuir seus esforços e ganhar rigidez.

Para o estudo do efeito de membrana optou-se por utilizar uma viga biapoiada sob carregamento distribuído transversal com restrição aos deslocamentos verticais nos apoios, mas sem restrições para a ocorrência de rotações. A viga é composta de concreto ( $E_c = 8,00 \times 10^3 \text{ MPa}$ ) e madeira ( $E_m = 12,00 \times 10^3 \text{ MPa}$ ) com rigidez na interface igual à  $50 \text{ MPa}$ . A simulação é feita variando-se as condições de restrição dos graus de liberdade referentes aos deslocamentos axiais das seções inferior e superior.

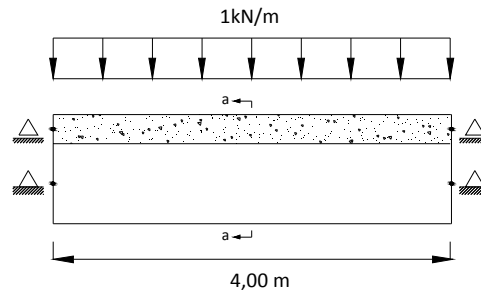


**Figura 4.6** Seção mista avaliada.

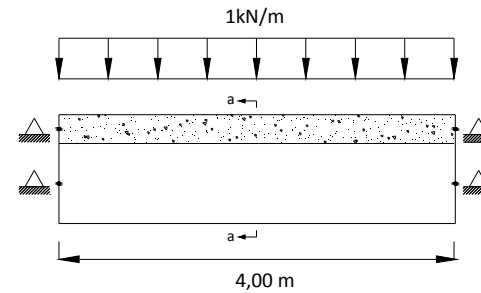
A Figura (4.6) descreve a seção utilizada neste exemplo. Já as Figuras (4.7 – 4.9) ilustram as variações das condições de contorno utilizadas. Os casos serão denominados de acordo com o número de restrições horizontais impostas seguindo a notação  $R-L$ , onde  $R$  representa o número de restrições impostas ao movimento horizontal e  $L$  representa o número de graus de liberdade sem restrição.



**Figura 4.7** Três deslocamentos axiais livres e um impedido (1–3).

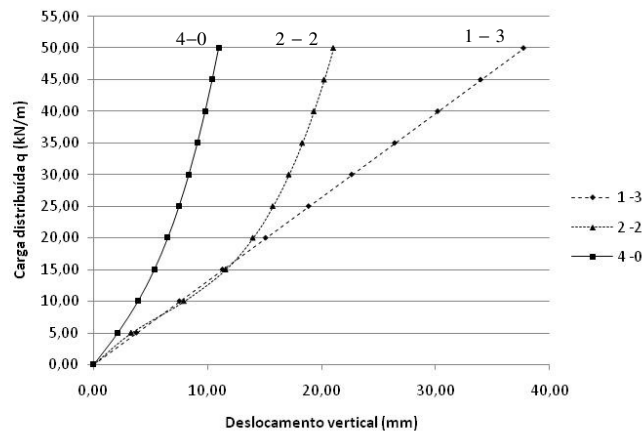


**Figura 4.8** Dois deslocamentos axiais livres e dois impedidos (2–2).



**Figura 4.9** Quatro deslocamentos axiais impedidos (4–0).

Utilizando o método de Newton-Raphson com controle de carga, passo de carga de 5 kN/m e dez elementos na discretização da viga é possível obter os valores que definem as curvas da Figura (4.10). Necessário esclarecer que, tanto o valor do passo de carga quanto o número de elementos utilizados na discretização do problema foram escolhidos de forma aleatória e não são objeto de estudo deste trabalho.



**Figura 4.10** Efeito de membrana em vigas.

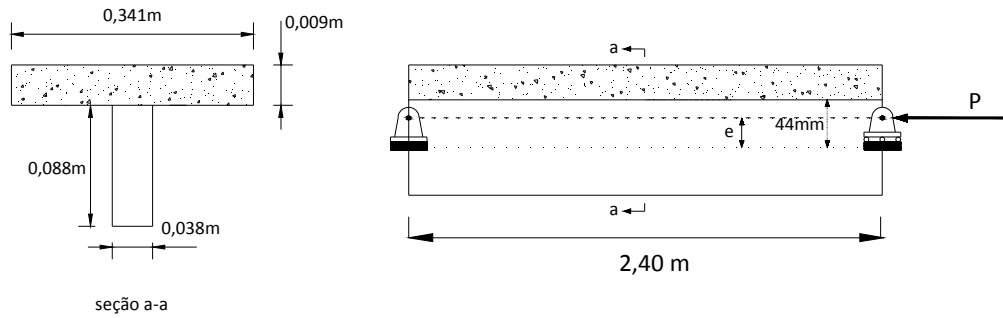
Analisando a figura fica claro o efeito que a restrição dos graus de liberdade horizontais: O caso 1-3 apresenta comportamento linear e a força necessária à ocorrência de deslocamentos é a menor dos três casos. O caso 4-0, por sua vez, apresenta comportamento não-linear devido aos efeitos de segunda ordem gerados pela restrição de todos os graus de liberdade do movimento horizontal. A força necessária para causar os mesmos deslocamentos do caso 1-3 é maior, evidenciando um enrijecimento da viga.

O caso 2-2 no qual somente os graus de liberdade referentes à seção de aço foram restringidos apresenta relação força-deslocamento intermediária aos casos anteriores. O ponto de atenção neste caso é o fato de que, os deslocamentos iniciais apresentam comportamento próximo do linear e valores também quase idênticos aos do caso 1-3, de forma que os efeitos da não-linearidade só foram notados a partir do terceiro passo de carga (15,00 kN/m).

#### 4.5. VIGA SUBMETIDA À CARGA AXIAL EXCÊNTRICA

Na Figura (4.11) pode-se visualizar o elemento estrutural estudado neste tópico e que também pode ser encontrado em Krawczyk e Rebora (2007) e Battini *et al.* (2009). Trata-se de uma placa de madeira fixada a uma coluna também em madeira, podendo o conjunto ser analisado tal como uma viga mista sob carregamento axial. Nesta análise

considera-se  $E_{Sup} = 7,84 \times 10^3 \text{ MPa}$ ,  $E_{Inf} = 4,90 \times 10^3 \text{ MPa}$ ,  $P = 40 \text{ kN}$  e  $K = 49 \text{ MPa}$ , que são valores do módulo de deformação do material da placa de madeira (superior), da coluna de madeira (inferior), da força axial aplicada à viga e da rigidez da conexão de interface, respectivamente.



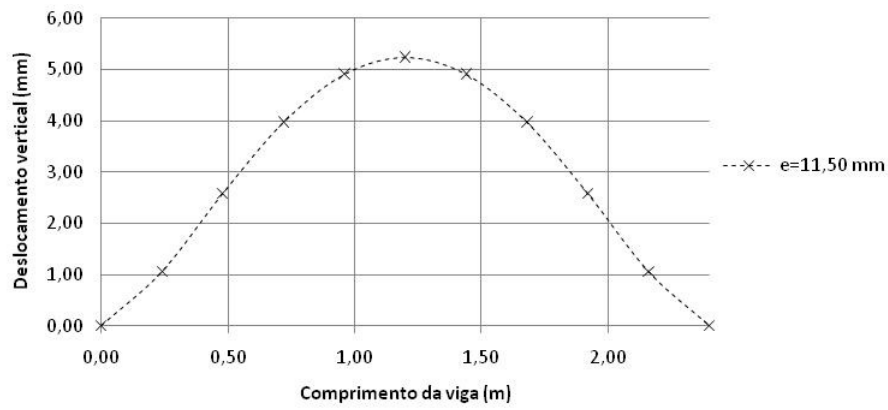
**Figura 4.11** Viga mista sob carga excêntrica.

Para este exemplo era desejado que a carga axial não fosse aplicada diretamente sobre o centróide da seção inferior, mas num ponto afastado de uma distância  $e$  deste centróide. Utilizando uma malha de dez elementos o método de Newton-Raphson com controle de carga, o deslocamento vertical da viga foi analisado para  $e = 11,50 \text{ mm}$ ,  $13,25 \text{ mm}$  e  $15,00 \text{ mm}$ .

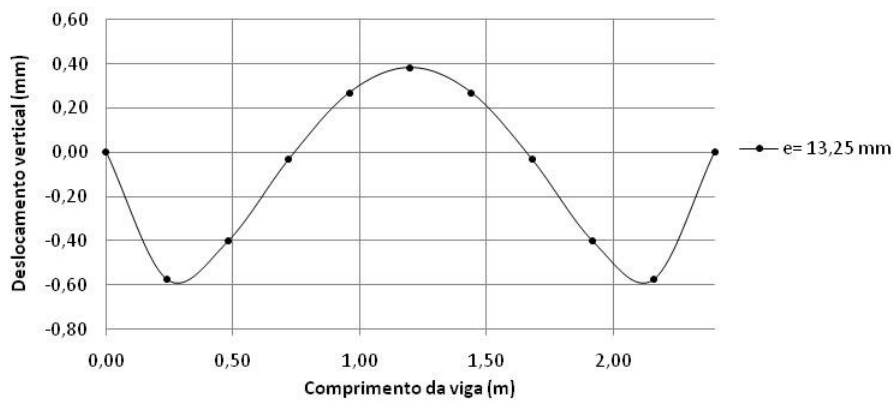
Os resultados são apresentados nas Figuras (4.12 - 4.14). Assim como em Battini *et al.* (2009), observa-se que a configuração deformada da viga muda completamente com variações pequenas no valor deste parâmetro. Comparando-se os casos da Figuras (4.12 e 4.14), por exemplo, verifica-se que a curvatura da viga foi invertida por uma variação de apenas  $3,50 \text{ mm}$ .

A Figura (4.15) apresenta uma comparação gráfica que deixa ainda mais clara a mudança de comportamento da deformada da viga quando ocorre mudança no valor da excentricidade de carga adotado.

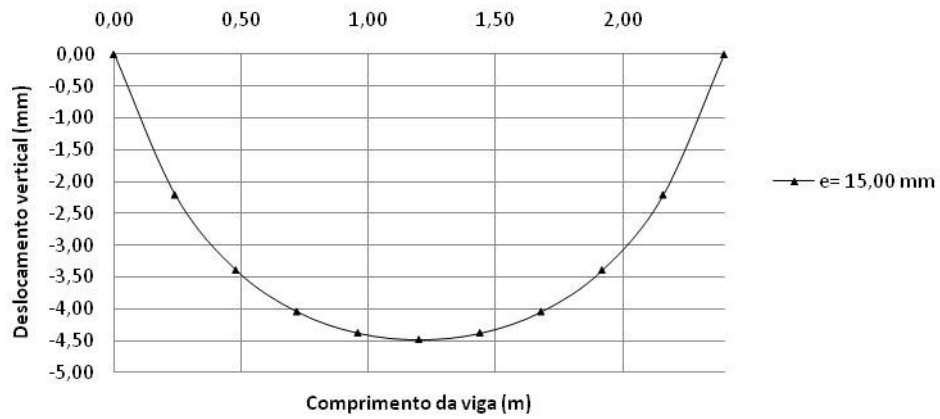




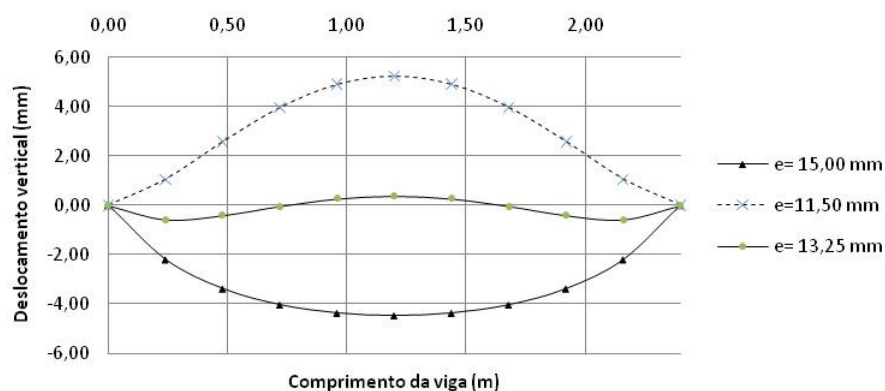
**Figura 4.12** Deformada da viga mista ( $e = 11,50 \text{ mm}$ ).



**Figura 4.13** Deformada da viga mista ( $e = 13,25 \text{ mm}$ ).



**Figura 4.14** Deformada da viga mista ( $e = 15,00 \text{ mm}$ ).



**Figura 4.15** Comparação gráfica entre as deformadas da viga mista.

A Tabela (4.2) compara os resultados obtidos aqui e aqueles obtidos por Krawczyk e Rebora (2007) e Battini *et al.* (2009), para o ponto central da viga e confirma a semelhança entre os mesmos. Krawczyk e Rebora (2007) indicam a utilização de 20 elementos na análise. Nenhuma referência foi encontrada no que diz respeito ao número de elementos utilizado em Battini *et al.* (2009).

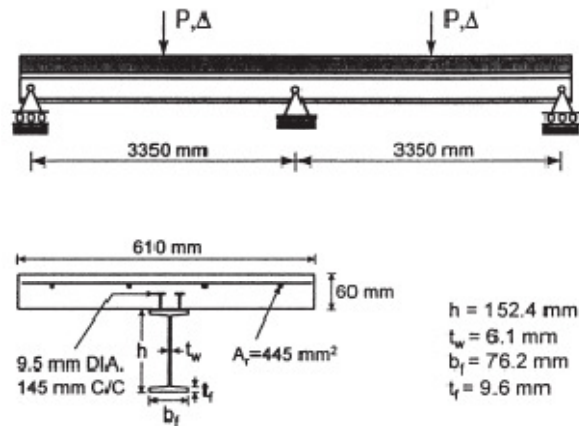
**Tabela 4.2** Deslocamento vertical do nó 6.

Excentricidade	SLIPBNL	KRAWCZYK e REBORA (2007)	BATTINI <i>et al</i> (2009)
$e = 11,50mm$	5,2451	5,2387	5,2143
$e = 13,25mm$	0,3824	0,3823	0,3827
$e = 15,00mm$	-4,4803	-4,4805	-4,4477

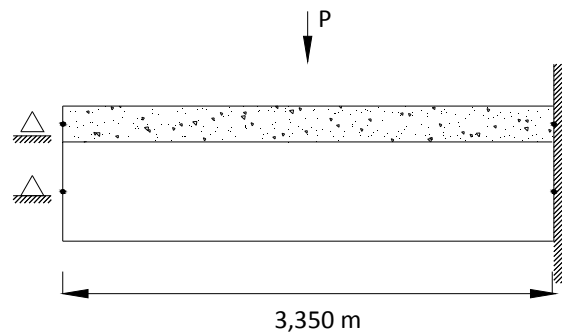
#### 4.6. VIGA DE DOIS VÃOS SUBMETIDA À CARGA CONCENTRADA – ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA

A Figura (4.16) apresenta a geometria de uma viga com três apoios e submetida à cargas concentradas no ponto central dos vãos. Esta viga foi analisada por Salari e Spacone (2001) através de uma formulação baseada em forças. Devido a sua configuração simétrica, é possível analisar somente metade desta estrutura. Assim, ao invés de analisar uma viga com dois vão, analisa-se uma outra, biapoiada, com restrição ao movimento vertical em um dos apoios e engastada no outro.

Outra consideração à ser feita diz respeito ao modelo apresentado na Figura (4.16) e o modelo realmente analisado. Apesar de a Figura apresentar uma viga com indicações de conectores e seus respectivos valores e também das armaduras, os resultados obtidos demonstram que a consideração destes elementos é de pouca influência. Assim, o modelo analisado não apresenta armaduras. No entanto, optou-se por manter a mesma figura utilizada por Salari e Spacone (2001).

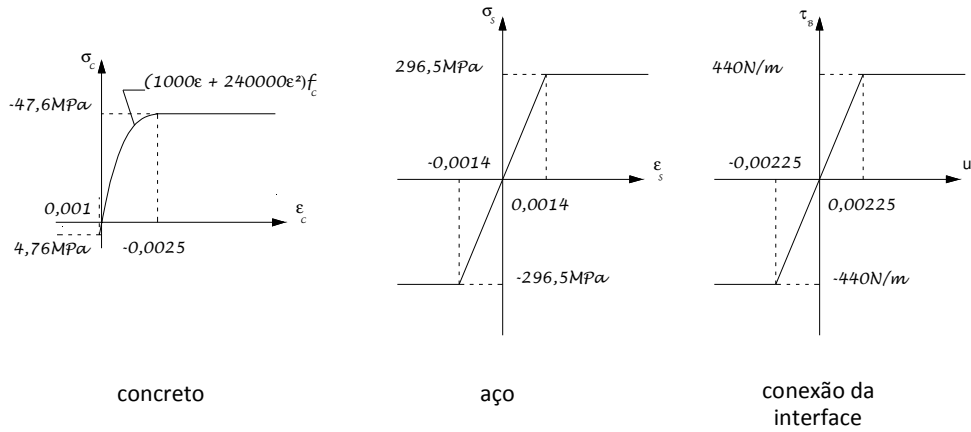


**Figura 4.16** Viga mista de três vãos (Salari e Spacone, 2001).



**Figura 4.17** Viga mista equivalente.

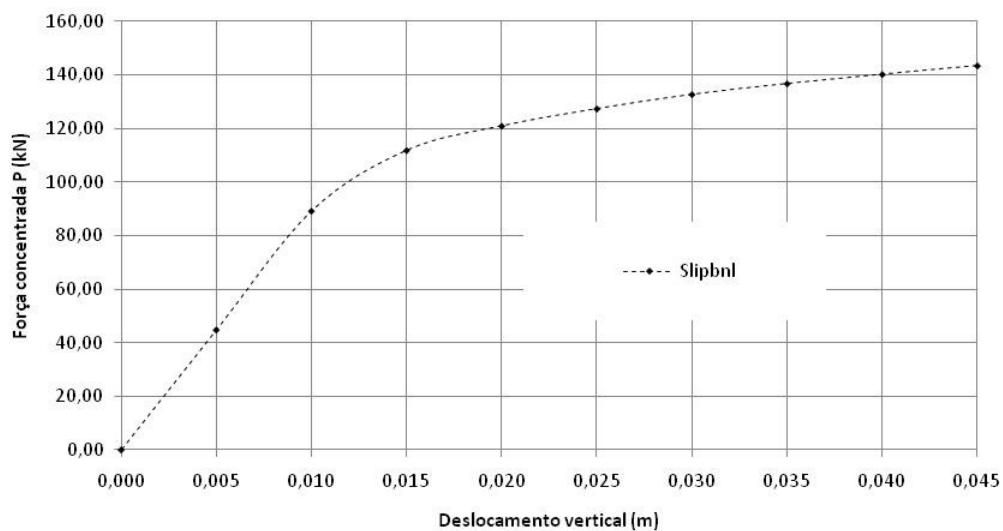
As leis constitutivas do aço e do concreto e a curva que define a rigidez da conexão na interface utilizadas neste exemplo Figura (4.17) são apresentadas na Figura (4.18).



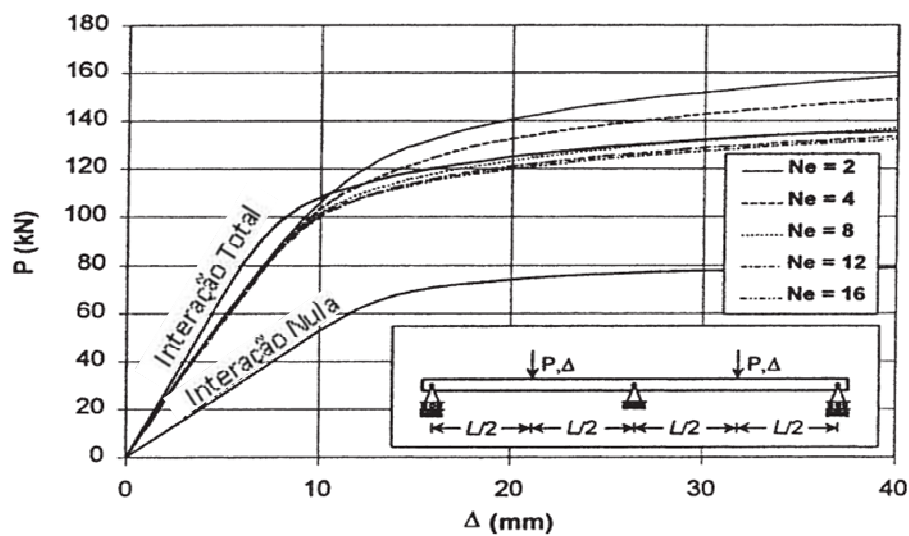
**Figura 4.18** Leis constitutivas.

De acordo com as leis constitutivas utilizadas, pode-se definir o valor da resistência do concreto à compressão e da sua correspondente deformação:  $f'_c = 47,6 \text{ MPa}$  e  $\epsilon_{c0} = 0,0025$ , respectivamente. O aço terá tensão de escoamento considerada  $f_y = 296,5 \text{ MPa}$  e módulo de deformação  $E_s = 2,04 \times 10^5 \text{ MPa}$ , valores para os quais considera-se uma taxa de encruamento de 0,005. Os valores  $\tau_1 = 440 \text{ N/m}$  e  $u_1 = 2,25 \text{ mm}$  são admitidos para a conexão de cisalhamento distribuída na interface aço-concreto e seu deslizamento correspondente.

A Figura (4.19) apresenta os resultados obtidos utilizando uma malha de oito elementos e o método de controle de deslocamentos para a solução do problema não-linear. A Figura (4.20), por sua vez, apresenta os resultados de Salari e Spacone (2001) utilizando 2, 4, 8, 12 e 16 elementos. Estes resultados referem-se ao deslocamento vertical do ponto médio da viga biapoada. Percebe-se a semelhança entre as curvas, em particular a curva de quatro elementos da Figura (4.20).

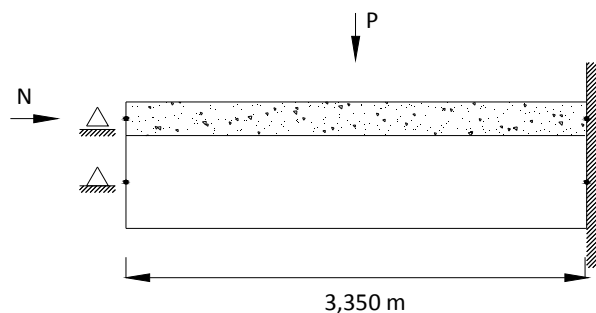


**Figura 4.19** Deslocamento vertical no nó central – Elemento proposto.

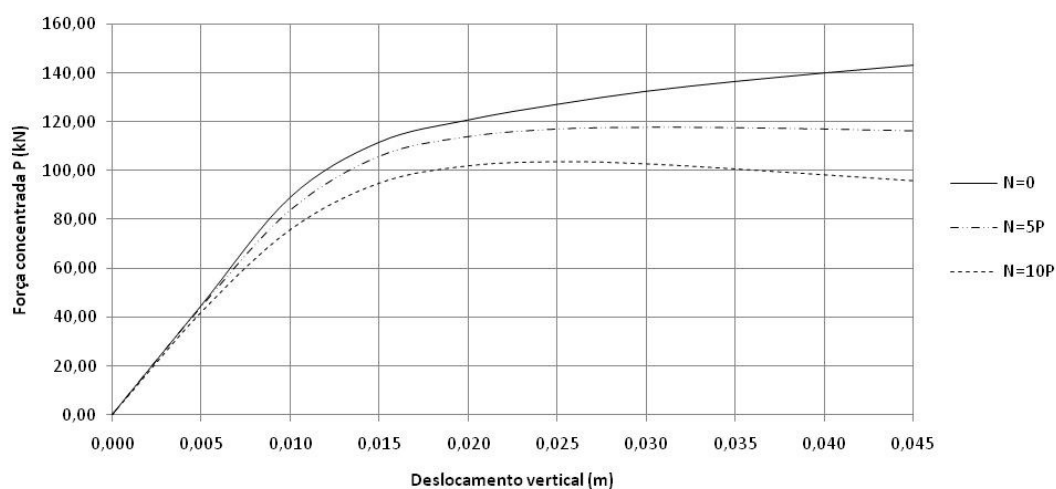


**Figura 4.20** Deslocamento vertical no nó central (Salari e Spacone, 2001).

A segunda etapa da análise deste exemplo foi a investigação da não-linearidade geométrica ao qual a viga foi induzida aplicando-se uma carga axial no eixo da seção de concreto (Figura 4.21). O resultado desta análise para carga  $N$  de intensidade  $5P$  e  $10P$  é apresentado na Figura (4.22).

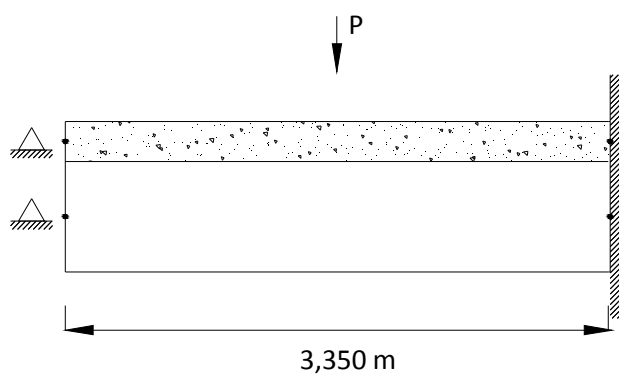


**Figura 4.21** Viga sob uma força axial.



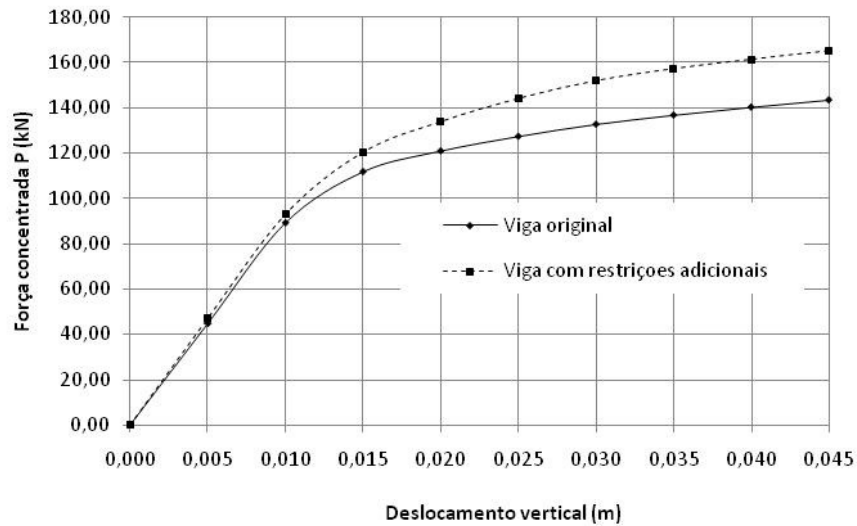
**Figura 4.22** Deslocamento vertical no nó central.

A partir dos resultados observa-se que a diferença entre o caso com força axial nula e aqueles com  $N = 5P$  e  $N = 10P$  é considerável. Por exemplo, ao comparar a força necessária para causar o deslocamento de 0,045m, verificou-se uma redução de 21% se  $N = 5P$  e de 36% para  $N = 10P$ .



**Figura 4.23** Vigas com restrição adicional.

Por fim, assim como no terceiro exemplo deste capítulo aqui também procurou-se estudar o efeito de membrana. Para tanto, restringiu-se os graus de liberdade referentes ao deslocamento horizontal tanto do aço quanto do concreto (Figura 4.23). Restringir estes graus de liberdade causou um enrijecimento da estrutura fazendo com que uma maior força fosse necessária para que se obtivessem os mesmos deslocamentos do caso original. Este resultado pode ser conferido na Figura (4.24).



**Figura 4.24** Deslocamento vertical no nó central (Efeito de membrana).

# CONSIDERAÇÕES E SUGESTÕES

## 5.1. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As estruturas mistas, em especial vigas e colunas, foram o objeto de estudo desta dissertação. Este trabalho dá continuidade aos trabalhos de Caldas (2004) e Silva (2006) que estudaram o comportamento destes elementos numa abordagem numérica. O diferencial em relação a estes trabalhos foi a consideração da não-linearidade geométrica no contexto de grandes deslocamentos e rotações moderadas.

No Capítulo 1 foram apresentadas algumas considerações sobre a utilização de elementos mistos em vários campos da Engenharia e Arquitetura. Começando no período da revolução industrial, procurou-se estabelecer uma comparação entre o uso destas estruturas no Brasil e nos EUA. No fim deste capítulo, foi estabelecido como objetivo criar um elemento finito capaz de simular o comportamento não-linear físico e geométrico de vigas mistas com interação parcial.

Para o Capítulo 2 foi feita uma revisão bibliográfica sobre métodos analíticos e numéricos de resolução do problema de vigas. Apresentaram-se duas soluções analíticas: a Equação de Newmark (1951) para problemas lineares e uma variante desta equação, desenvolvida por Girhammar e Gopu (1993), que considera os efeitos de segunda ordem. Verificou-se que estas soluções analíticas só são aplicáveis na prática



para casos simples como materiais com propriedades lineares e condições de contorno também simples, sendo necessário um método numérico para o tratamento dos casos mais gerais. Na área numérica, foram citados trabalhos que representam uma alternativa à solução analítica de vigas mistas com interação parcial. Seus autores sugerem formulações para o desenvolvimento de elementos com maior abrangência de casos. Observou-se que existem poucos trabalhos abordando o problema da não-linearidade geométrica e que a grande maioria se restringia aos problemas com não-linearidade física. Também foram citados trabalhos que tratam de problemas ligados à simulação numérica por meio de elementos finitos como, por exemplo, o *slip locking*.

A formulação do elemento proposto foi apresentada no Capítulo 3. Admitiu-se a hipótese de Euler-Bernoulli sobre a deformação de seções planas e, a partir desta hipótese, foram desenvolvidas equações que consideravam os efeitos de segunda ordem. Estas equações foram utilizadas, juntamente com o Princípio dos Trabalhos Virtuais e a definição dos esforços resistentes, para desenvolver a matriz de rigidez tangente de um elemento com dez graus de liberdade. Neste desenvolvimento admitiu-se interação total e parcial nas direções vertical e horizontal, respectivamente. Ao final do capítulo, demonstrou-se como foi feita a condensação estática dos graus de liberdade internos do elemento, visto que o programa utilizado na implementação (FEMOOP) supõe um número de graus de liberdade por nó constante e menor do que aquele do elemento proposto.

No Capítulo 4, foram utilizados exemplos retirados de alguns dos trabalhos citados na revisão bibliográfica para verificar a eficácia do elemento proposto. Os resultados obtidos mostraram-se bastante próximos daqueles da literatura, de forma que é correto dizer que o elemento proposto pode ser utilizado na solução de problemas de flambagem e grandes deslocamentos de vigas e pilares mistos, compostos por materiais como aço, concreto e madeira. Além disso, exemplos foram utilizados para demonstrar o efeito de membrana e a influência do ponto de aplicação de cargas axiais no comportamento de vigas. Verificou-se através destes exemplos que o ponto de aplicação de cargas axiais pode alterar totalmente a configuração da deformada, gerando resultados completamente diferentes para pequenas variações de excentricidade.

Assim, considera-se que o elemento desenvolvido atende ao seu propósito e é adequado à análise de vigas e colunas de seção mista com deslizamento na interface e compostas por dois materiais.

## 5.2. SUGESTÕES

O elemento proposto neste trabalho foi desenvolvido a partir daquele proposto por Silva(2004), que considera o deslizamento. Silva (2006) também propõe um elemento de interface com espessura nula que soluciona o problema não-linear físico de vigas colunas com interação parcial. Uma das possíveis formas de continuidade desta linha de pesquisa é a implementação da não-linearidade geométrica para este elemento.

O Teorema de Green é uma das possibilidades através das quais é possível calcular os esforços resistentes e as rigidezes generalizadas. Outra alternativa é a utilização de modelos de fibras como os utilizados por Salari e Spacone (2001) e Dall'Asta e Zona (2004a). Fica como sugestão a implementação de um modelo de análise de não-linearidade geométrica que utilize este processo de integração.

Sugere-se a implementação da formulação utilizando uma abordagem corrotacional como feito por Krawczyk *et al.* (2007) e também por Battini *et al.* (2009) na de solução de problemas com grandes rotações.

Também é possível o estudo sobre a influência do fenômeno da retração do concreto e da variação de temperatura em conjunto com as não-linearidades deste tipo de elemento estrutural. Outro fator cuja influência nos resultados pode ser estudada é o número de elementos utilizados na discretização do problema.

Outra sugestão é o desenvolvimento de um elemento com conectores de cisalhamento discretos, ou seja, um conector por elemento, como forma de melhor caracterizar o comportamento destes e verificar a influência de parâmetros como espaçamento, material componente, profundidade de penetração na seção superior, etc.

Por fim, sugere-se também a implementação de elementos baseados em forças e ou elementos mistos que solucionem o problema da não-linearidade geométrica de vigas e colunas mistas com interação parcial.

# **ELEMENTO VIGA - COLUNA COM DESLIZAMENTO : Formulação em termos de matrizes deformação x deslocamento**

## **I.1. FORMULAÇÃO CLÁSSICA**

Neste anexo é feita a apresentação da formulação desenvolvida no Capítulo 3 utilizando uma notação que é mais comumente encontrada em textos que tratam do Método dos Elementos Finitos.

### **I.1.1. Obtenção da matriz deformação versus deslocamento $B$**

Os deslocamentos  $v$  e  $u$  e o deslizamento relativo  $s$  que ocorre na interface de uma viga mista podem ser obtidos pelas seguintes equações, baseadas na teoria de Euler-Bernoulli (Equação I.1).

$$\begin{aligned}
v(x, y) &= v^0(x) \\
u_\alpha(x) &= u_\alpha^0(x) - (y - y_\alpha)\theta(x) , \\
s(x) &= u_2^0(x) - u_1^0(x) + h\theta(x)
\end{aligned} \tag{I.1}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
v(x, y) &= v'(x) \\
u_\alpha(x) &= u_\alpha^0(x) - (y - y_\alpha)v'(x) , \\
s(x) &= u_2^0(x) - u_1^0(x) + hv'(x)
\end{aligned} \tag{I.2}$$

onde  $\alpha = 1, 2$  para concreto e aço, respectivamente, e  $h$  é a distância entre os centros de gravidade das seções.

Para simplificar, pode-se omitir a indicação de que os parâmetros são função de  $x$  e utilizar ainda a seguinte notação que indica derivadas:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_{,x} \tag{I.3}$$

Assim sendo, utilizando as Equações (I.2), têm-se que:

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= v^0 \\
\bar{u}_\alpha &= u_\alpha^0 - (y - y_\alpha)v_{,x} \\
s &= u_2^0 - u_1^0 + hv_{,x}
\end{aligned} \tag{I.4}$$

A relação entre deformação e deslocamentos para o caso bi-dimensional é dada por:

$$\varepsilon_\alpha = u_{\alpha,x} + \frac{1}{2}(v_{,x})^2 \tag{I.5}$$

Substituindo a parcela de  $u_{\alpha,x}$ , obtêm-se:

$$\varepsilon_\alpha = u_{\alpha,x}^0 - (y - y_\alpha)v_{,xx} + \frac{1}{2}(v_{,x})^2 \tag{I.6}$$

$$\delta\varepsilon_\alpha = \delta u_{\alpha,x}^0 - (y - y_\alpha)\delta v_{,xx} + v_{,x}\delta v_{,x} \tag{I.7}$$

A Equação (I.7) fornece a equação variacional da deformação.

Fazendo  $\chi = -v_{,xx}$ , têm-se:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^0 + (y - y_\alpha)\chi \quad (\text{I.8})$$

$$\delta\varepsilon_\alpha = \delta\varepsilon_\alpha^0 + (y - y_\alpha)\chi, \quad (\text{I.9})$$

onde

$$\varepsilon_\alpha^0 = \underbrace{u_{\alpha,x}^0}_{1^a} + \underbrace{\frac{1}{2}(v_{,x})^2}_{2^a} \quad (\text{I.10})$$

$$\delta\varepsilon_\alpha^0 = \underbrace{\delta u_{\alpha,x}^0}_{1^a} + \underbrace{v_{,x}\delta v_{,x}}_{2^a} \quad (\text{I.11})$$

Nas Equações (I.10 e I.11) a primeira parcela corresponde ao problema linear e a segunda, à não-linearidade geométrica.

Vetorialmente, pode-se representar as deformações generalizadas como na Equação (I.12). Observe que termos em negrito indicam um vetor ou matriz.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \chi \\ s \end{Bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

Os deslocamentos  $v$  e  $u$  podem ser expressos em função das suas funções interpoladoras,  $\boldsymbol{\phi}_v^T$  e  $\boldsymbol{\phi}_u^T$ , e seus respectivos graus de liberdade,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}_\alpha$ . Assim sendo:

$$u_\alpha^0 = \boldsymbol{\phi}_u^T \mathbf{u}_\alpha \quad (\text{I.13})$$

$$v = \boldsymbol{\phi}_v^T \mathbf{v} \quad (\text{I.14})$$

Agrupando os deslocamentos num só vetor, têm-se:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^0 \\ \mathbf{u}_2^0 \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

O operador variacional, aplicado ao vetor de deslocamentos e ao vetor de deformações generalizadas, fornece:

$$\delta \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1^0 \\ \delta \mathbf{u}_2^0 \\ \delta \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.16})$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_1^0 \\ \delta \varepsilon_2^0 \\ \delta \chi \\ \delta s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta u_{1,x}^0 + v_{,x} \delta v_{,x} \\ \delta u_{2,x}^0 + v_{,x} \delta v_{,x} \\ \delta \chi \\ \delta(u_2^0 - u_1^0 + h v_{,x}) \end{Bmatrix} \quad (\text{I.17})$$

Expandindo a Equação (I.17):

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1^T \boldsymbol{\varphi}_{u,x} + \delta \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{u}_2^T \boldsymbol{\varphi}_{u,x} + \delta \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \mathbf{v} \\ - \delta \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,xx} \\ \delta \mathbf{u}_2^{0T} \boldsymbol{\varphi}_u - \delta \mathbf{u}_1^{0T} \boldsymbol{\varphi}_u + h \delta \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.18})$$

Alternativamente, a Equação (I.18) assume a seguinte forma:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{u,x}^T \delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \delta \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\varphi}_{u,x}^T \delta \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \delta \mathbf{v} \\ - \boldsymbol{\varphi}_{v,xx}^T \delta \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\varphi}_u^T (\delta \mathbf{u}_2^0 - \delta \mathbf{u}_1^0) + h \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \delta \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.19})$$

Matricialmente, têm-se:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_1^0 \\ \delta \varepsilon_2^0 \\ \delta \kappa \\ \delta s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{u,x}^T & \mathbf{0} & \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{u,x}^T & \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\varphi}_{v,xx}^T \\ -\boldsymbol{\varphi}_u^T & \boldsymbol{\varphi}_u^T & h \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1^0 \\ \delta \mathbf{u}_2^0 \\ \delta \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.20})$$

ou

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{d} = \mathbf{B}_0 \delta \mathbf{d} + \mathbf{B}_L \delta \mathbf{d} \quad (\text{I.21})$$

De maneira análoga:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \chi \\ s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{u,x}^T & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{u,x}^T & \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\varphi}_{v,xx}^T \\ -\boldsymbol{\varphi}_u^T & \boldsymbol{\varphi}_u^T & h \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^0 \\ \mathbf{u}_2^0 \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.23})$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \quad (\text{I.24})$$

ou ainda

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_0 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \mathbf{d} \quad (\text{I.25})$$

### I.1.2. Obtenção do vetor de forças nodais $\mathbf{f}$

De acordo com o Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (\text{I.26})$$



O trabalho virtual interno é obtido a partir das deformações virtuais e das tensões reais correspondentes:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_1} \delta \epsilon_1^T \sigma_1 + \int_{V_2} \delta \epsilon_2^T \sigma_2 + \int_0^L \delta s^T S dx \quad (\text{I.27})$$

Integrando sobre o comprimento  $l$  de um elemento:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \int_{A_1} \delta \epsilon_1^T \sigma_1 dA dx + \int_0^l \int_{A_2} \delta \epsilon_2^T \sigma_2 dA dx + \int_0^l \delta s^T S dx \quad (\text{I.28})$$

Inserindo as equações de deformação (Equações I.8):

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \int_{A_1} \{ [\delta \epsilon_1^0 + (y - y_1) \chi] \sigma_1 dA \} dx + \int_0^l \int_{A_2} \{ [\delta \epsilon_2^0 + (y - y_2) \chi] \sigma_2 dA \} dx + \int_0^l \delta s^T S dx \quad (\text{I.29})$$

Aplicando as Equações (3.20 e 3.21), que representam os esforços resistentes:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \delta \epsilon_1^0 N_1 dx + \int_0^l \delta \epsilon_2^0 N_2 dx + \int_0^l \delta \chi \overbrace{(M_1 + M_2)}^M dx + \int_0^l \delta s^T S dx \quad (\text{I.30})$$

Vetorialmente:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \begin{bmatrix} \delta \epsilon_1^0 & \delta \epsilon_2^0 & \delta \chi & \delta s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ M \\ S \end{bmatrix} dx \quad (\text{I.31})$$

ou ainda

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \delta \mathbf{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (\text{I.32})$$

Em função de  $\bar{\mathbf{B}}$  e  $\mathbf{d}$ :

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \delta \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \delta \mathbf{d}^T \int_0^l \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (\text{I.33})$$

Desta forma, obtêm-se o vetor de forças nodais para um elemento  $i$ :

$$\mathbf{f}_i = \int_0^l \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (\text{I.34})$$

### I.1.3. Obtenção da matriz de rigidez $\mathbf{k}_T$

A matriz de rigidez tangente  $\mathbf{k}_T$  é dada pela derivada do vetor de forças nodais  $\mathbf{f}$  em função da matriz de deslocamentos  $\mathbf{d}$ . Logo, para um elemento:

$$\mathbf{k}_T = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \int_0^l \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (\text{I.35})$$

Aplicando a regra da cadeia obtêm-se as matrizes  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  (Equação I.36), denominadas matriz de rigidez geométrica e matriz de rigidez elástica, respectivamente.

$$\mathbf{k}_T = \int_0^l \left( \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{k}_1} + \underbrace{\bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{k}_2} \right) dx, \quad (\text{I.36})$$

onde

$$\bar{\mathbf{B}}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{u,x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\varphi}_u \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{u,x} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_u \\ \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \mathbf{v} & \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \mathbf{v} & -\boldsymbol{\varphi}_{v,xx} & h \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \end{bmatrix} \quad (\text{I.37})$$

Na Equação (I.36), a solução de  $\mathbf{k}_1$  é dada por:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{k}_1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} (\mathbf{B}_1 N_1 + \mathbf{B}_2 N_2 + \mathbf{B}_3 M + \mathbf{B}_4 S) = \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{d}} N_1 + \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \mathbf{d}} N_2 \quad (\text{I.38})$$

Na Equação (I.38), têm-se que:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{u,x} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varphi}_{u,x} \\ \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\varphi}_{v,xx} \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varphi}_u \\ \boldsymbol{\varphi}_u \\ h\boldsymbol{\varphi}_{v,x} \end{bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

Desta forma obtêm-se o valor de  $\mathbf{k}_1$ :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{k}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \end{bmatrix} (N_1 + N_2) \quad (\text{I.40})$$

Na Equação (I.36),  $\mathbf{k}_1$  é geralmente chamada de matriz de rigidez geométrica e sua solução é dada por:

$$\underbrace{\bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{k}_2} = \bar{\mathbf{B}}^T \left( \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} \right) \quad (\text{I.41})$$

Para obter o valor de  $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}}$ , é necessário dividir a matriz  $\mathbf{B}$  em duas parcelas:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L, \quad (\text{I.42})$$

onde

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{u,x}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{u,x}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\varphi}_{v,xx}^T \\ -\boldsymbol{\varphi}_u^T & \boldsymbol{\varphi}_u^T & h\boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \end{bmatrix} \quad (\text{I.43})$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{I.44})$$

Assim sendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_0 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \mathbf{d} \quad (\text{I.45})$$

Segue o desenvolvimento da derivada de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \{ \mathbf{B}_0 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \mathbf{d} \} \therefore \quad (\text{I.46})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial [\mathbf{B}_0 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \mathbf{d}]}{\partial \mathbf{d}} + [\mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L] \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{d}} \therefore \quad (\text{I.47})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial \mathbf{d}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}_L}{\partial \mathbf{d}} \right] \mathbf{d} + [\mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L] \therefore \quad (\text{I.48})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{B}_L + \frac{\partial \mathbf{B}_L}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{d} \right] \therefore \quad (\text{I.49})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} [2 \mathbf{B}_L] \therefore \quad (\text{I.50})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L = \overline{\mathbf{B}} \quad (\text{I.51})$$

Daí:

$$\underbrace{\overline{\mathbf{B}}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{k}_2} = \overline{\mathbf{B}}^T \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \overline{\mathbf{B}} \quad (\text{I.52})$$

A matriz **C** é apresentada na Equação (I.53).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \varepsilon_1^0} & \frac{\partial N_1}{\partial \varepsilon_2^0} & \frac{\partial N_1}{\partial \chi} & \frac{\partial N_1}{\partial s} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \varepsilon_1^0} & \frac{\partial N_2}{\partial \varepsilon_2^0} & \frac{\partial N_2}{\partial \chi} & \frac{\partial N_2}{\partial s} \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_1^0} & \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_2^0} & \frac{\partial M}{\partial \chi} & \frac{\partial M}{\partial s} \\ \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_1^0} & \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_2^0} & \frac{\partial S}{\partial \chi} & \frac{\partial S}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \varepsilon_1^0} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \chi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \varepsilon_2^0} & \frac{\partial N_2}{\partial \chi} & 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_1^0} & \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_2^0} & \frac{\partial M}{\partial \chi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial S}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (\text{I.53})$$

Segue o desenvolvimento dos termos de **C** :

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha^0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\alpha^0} \int_A \sigma_\alpha dA = \int_A \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha^0} dA = \int_A E_\alpha \cdot 1 \cdot dA = "EA"_\alpha \quad (\text{I.54})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial k} &= \frac{\partial}{\partial k} \int_A \sigma_\alpha dA = \int_A \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \chi} dA = \int_A E_\alpha \cdot \frac{\partial [\varepsilon_\alpha^0 + (y - y_\alpha) \chi]}{\partial \chi} \cdot dA \\ &= \int_A E_\alpha \cdot (y - y_\alpha) \cdot dA = "ES"_\alpha \end{aligned} \quad (\text{I.55})$$

$$\frac{\partial M_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha^0} = \int_A \frac{\partial [\sigma_\alpha \cdot (y - y_\alpha)]}{\partial \varepsilon_\alpha^0} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha^0} (y - y_\alpha) dA = \int_A E_\alpha \cdot 1 \cdot (y - y_\alpha) \cdot dA = "ES"_\alpha \quad (\text{I.56})$$

$$\frac{\partial M_\alpha}{\partial \chi} = \int_A \frac{\partial [\sigma_\alpha \cdot (y - y_\alpha)]}{\partial \chi} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \chi} (y - y_\alpha) dA = \int_A E_\alpha \cdot (y - y_\alpha)^2 \cdot dA = "EI"_\alpha \quad (\text{I.57})$$

Estes termos, substituídos na matriz **C**, fornecem:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} "EA"_1 & 0 & "ES"_1 & 0 \\ 0 & "EA"_2 & "ES"_2 & 0 \\ "ES"_1 & "ES"_2 & "ES" & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix} \quad (\text{I.58})$$

Assim a matriz de rigidez passa a ser representada por:

$$\mathbf{k}_T = \int_0^l \overline{\mathbf{B}}^T \overline{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx + \int_0^l \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{v,x} \boldsymbol{\varphi}_{v,x}^T \\ & & \sim \sim \end{bmatrix} (N_1 + N_2) dx \quad (\text{I.59})$$

Na Equação (I.59):

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{u,x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Phi}_u \\ \mathbf{0} & \underset{\sim}{\phi}_{u,x} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_u \\ \boldsymbol{\Phi}_{v,x} \boldsymbol{\Phi}_{v,x}^T \mathbf{V} & \boldsymbol{\Phi}_{v,x} \underset{\sim}{\phi}_{v,x} \boldsymbol{\Phi}_{v,x}^T \mathbf{V} & -\underset{\sim}{\phi}_{v,xx} & h \boldsymbol{\Phi}_{v,x} \end{bmatrix}^T \quad (\text{I.60})$$

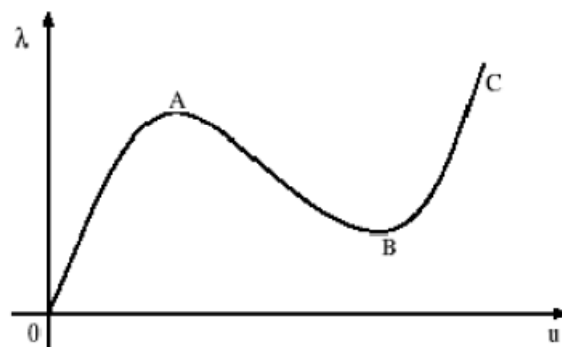
# SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR

## II.1. FORMULAÇÃO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR

Sendo  $\mathbf{F}(u)$  o vetor de forças internas em função dos deslocamentos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{P}$  o vetor de cargas externas aplicadas à estrutura em estudo, para um corpo em equilíbrio pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (\text{II.1})$$

, onde  $\lambda$  é uma variável chamada comumente de parâmetro de carga.



**Figura II.1** Curva carga-deslocamento de problema não-linear.

**Fonte:** Silva (2006)

A relação estabelecida pela Equação (II.1) define a equação de equilíbrio global (Equação II.2), graficamente apresentada na Figura (II.1).

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (\text{II.3})$$

Sendo  $n$  o número de graus de liberdade da estrutura, o fato de  $\lambda$  também ser uma variável do problema gera um sistema com mais variáveis que equações, portanto, indeterminado. Por este motivo, torna-se necessária a inclusão de uma condição de restrição para que seja possível a resolução do sistema. Matricialmente, pode-se representar o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) \\ R(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Na Equação (II.4),  $R(\mathbf{u}, \lambda)$  representa a equação de restrição imposta às variáveis do problema.

Partindo da formulação geral pode-se derivar vários métodos de solução de problemas não-lineares. A diferenciação destes métodos reside na equação de restrição que pode, como no caso dos métodos com controle de carga, fixar o valor do fator de carga em cada passo (Equação II.5) ou ainda fixar o valor de uma das componentes do vetor deslocamento (Equação II.6), no caso dos métodos com controle de deslocamentos.

$$R = \lambda - \bar{\lambda} = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$R = u_i - \bar{u}_i = 0 \quad (\text{II.6})$$

Pode-se linearizar as funções  $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)$  e  $R(\mathbf{u}, \lambda)$  em relação às variáveis  $\mathbf{u}$  e  $\lambda$  utilizando a série de Taylor. A forma geral desta série para uma função genérica  $f(x)$  em torno de um ponto  $(a, b)$  indica que:

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(a+h, b+k) = f(a, b) + df(a, b) + \frac{1}{2!} df^2 f(a, b) + \frac{1}{3!} df^3 f(a, b) + \dots \\ + \frac{1}{(n-1)!} df^{n-1} f(a, b) + F_n(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$



Na Equação (II.7):

$$x = a + h \quad (\text{II.8})$$

$$y = b + k \quad (\text{II.9})$$

$$df^n f(a, b) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) \quad (\text{II.10})$$

$$F_n(x, y) = \frac{1}{n!} df^n f(\xi_1, \xi_2), \quad \begin{cases} a < \xi_1 < x \\ b < \xi_2 < y \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Linearizada, a série de Taylor assume a seguinte forma:

$$f(x, y) = f(a + h, b + k) = f(a, b) + df(a, b) \quad (\text{II.12})$$

Aplicando a Equação (II.12) na Equação (II.2), para um ponto  $(x_i, \lambda_i)$ , têm-se que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_{i-1}) \\ R(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_{i-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}_i, \lambda_i) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda} \Delta \lambda \\ R(\mathbf{u}_i, \lambda_i) + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

O sistema da Equação (II.13) pode ainda ser representado da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}_i, \lambda_i) + \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} - P \Delta \lambda \\ R(\mathbf{u}_i, \lambda_i) + R_{T_u} \Delta \mathbf{u} + R_{T_\lambda} \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

, onde

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \quad (\text{II.15})$$

$$\mathbf{R}_{T_u} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{u}} \quad (\text{II.16})$$

$$R_{T_\lambda} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (\text{II.17})$$

Reorganizando a Equação (II.14), obtêm-se o sistema de equações que fornece a curva da Figura (II.1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T - P \\ \mathbf{R}_{T_u} + R_{T_\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}(\mathbf{u}_i, \lambda_i) \\ -R(\mathbf{u}_i, \lambda_i) \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

# BIBLIOGRAFIA

Battini, J-M., Nguyen, Q-H. e Hjiat, M. (2009). Non-linear finite element analysis of composite beams with interlayer slips. *Computer and Structures*, v. 87, p. 904-912.

Caldas, R. B. Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto, Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP, 2004.

Crisfield, M. A. (1991). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons, v. 1.

Dall'Asta, A. e Zona, A. (2004a). Slip locking in finite element for composite beam with deformable shear connection. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, p. 1907 -1930.

Dall'Asta, A. e Zona, A. (2004b). Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of continuous composite beams. *Computer & structures*, v. 82, p. 2117 – 2130.

Faella, C. Martinelli, E. e Nigro, E. (2002). Steel and Concrete composite beam with flexible shear connection: “exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Computer & structures*, v. 80, p. 1001 - 1009.

Garcia, L. F. T. e Villação, S. F. (1999). *Introdução à Elasticidade não Linear*. 3ª ed., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Girhammar, U. A. e Gopu, K. A.. Composite Beam-Columns with Interlayer Slip – Exact Analysis (1993). Journal of Structural Engineering, ASCE, v.119, n° 4, p. 1265-1282, Abril, 1993.

Krawczyk, P., Frey, F. e Zielinski, A. P., (2007a). Large deflections of laminated beams with interlayer slips, Part 1: model development. Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, v. 24 n° 1, p. 17-32.

Krawczyk, P. e Reborá, B., (2007b). Large deflections of laminated beams with interlayer slips, Part 2: finite element development. Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, v. 24 n° 1, p. 33-51.

Muniz, C.F.D.G. Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos, Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP, 2005.

NBR 8800 (2005). Projeto de Revisão. Projeto e Execução de Estruturas de Aço e Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

Newmark, N. M. Siess, C. P e Viest I. M. (1951). Test and analysis of composite beam with incomplete interaction. Proc Soc Exp Stress Anal, v. 9, p. 75-92.

Salari, M. K. e Spacone, E. (2001). Finite element formulation of one-dimensional elements with bond-slip. Engineering Structures, v. 23, p. 815-826.

Silva, A. R. (2006). Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial, Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP, Ouro Preto.

Silva, M. P. (2004). Estado e Corporações nos EUA da Era Progressiva – um estudo exploratório, Dissertação de Mestrado, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo.