

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE NUMÉRICA VIA MEF DE PROBLEMAS DE  
ADENSAMENTO DEVIDO À VARIAÇÃO DO NÍVEL  
D'ÁGUA

**AUTOR: MARCELO ANTONIO FURTADO PINTO**

ORIENTADORA: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Christianne de Lyra Nogueira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.  
Área de concentração: Geotecnia.

Ouro Preto, junho de 2004.

*Pinto, Marcelo Antonio Furtado.*

**código** análise numérica via mef de problemas de adensamento devido à variação do nível d'água / Marcelo Antônio Pinto Furtado. -- Ouro Preto : UFOP, 2004.

viii, xxp. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto.  
Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil.

1. Geotecnia. 2. Modelagem numérica. 3. Problema acoplado. 4.  
Elementos finitos.

I. Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de  
Engenharia Civil.

II. Título.

CDU: 624.13

# **ANÁLISE NUMÉRICA VIA MEF DE PROBLEMAS DE ADENSAMENTO DEVIDO À VARIAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA**

**AUTOR: MARCELO ANTONIO FURTADO PINTO**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 30 de junho de 2004, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

Profa. Dra. Christianne de Lyra Nogueira (Orientador / UFOP)

Prof. Dr. Saulo Gutemberg Silva Ribeiro (UFOP)

Profa. Dra. Izabel Christina d'Almeida Duarte de Azevedo (UFV)

Às nossas famílias, porque  
acredito ser a família a mais  
importante instituição que um  
homem pode fundar.

## ***Meus agradecimentos***

A Deus.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional e formação educacional a mim proporcionados.

Ao Prof. José Carlos Araújo (UFC), por sua amizade, confiança e apoio, e por ser o grande incentivador do meu aprendizado acadêmico.

À minha orientadora, Prof<sup>ª</sup>. Christianne, pelo importante direcionamento e apoio fornecidos durante a elaboração deste trabalho.

À infra-estrutura do Laboratório de Mecânica Computacional da Escola de Minas (LAMEC), sem a qual este trabalho não poderia ser realizado de forma adequada.

À Fundação Gorceix, pelo amparo financeiro, sou grandemente agradecido.

Aos meus colegas e professores Francisco Célio de Araújo, João Batista, Francisco de Assis, Ricardo Azoubel, Marcílio Freitas e ao amigo Rodrigo Rodrigues Vieira, pelas discussões e importantes trocas de informações sobre essa área tão fabulosa que é a área numérica.

Aos professores Waldyr Lopes Oliveira e Saulo Gutemberg por me ajudarem a melhor compreender os problemas da engenharia geotécnica.

Aos meus amigos e “Pajés”: William, Roberto, Davidson, Thiago, José Bernardo, Marcus Dilásio, Ednelson Paulo André, Wagner Nahas e Tumate (fifi) pelo companheirismo e por compartilharmos o mesmo lar, ainda que por um breve período de tempo.

À Fernanda e Alessandra, por serem pessoas tão corretas e amigas e me despertarem profunda admiração.

Ao Prof. Walter Dornelas e à Rovia pela ajuda e dedicação que têm com todos os alunos do mestrado

Um agradecimento especial ao Prof. John C. Small (Universidade de Sydney) pela sua generosidade em prover importantes informações para a elaboração deste trabalho.

Marcelo Antonio F. Pinto  
Junho de 2004.

# RESUMO

---

O objetivo deste trabalho é apresentar uma formulação que resolva problemas de adensamento considerando o rebaixamento da superfície freática. Portanto, uma formulação acoplada baseada no método de elementos finitos foi desenvolvida para simular este fenômeno físico. Utilizando elementos isoparamétricos de oito nós para aproximar a carga total hidráulica e os deslocamentos como variáveis primárias, a formulação é verificada na solução de problemas sob condições transientes de fluxo e deformação. O modelo físico utilizado para representar o comportamento tensão-deformação é linear-elástico. A redução de permeabilidade devido às poro-pressões negativas, é considerada no presente trabalho. O processo de localização da superfície freática baseia-se no procedimento de fluxo residual (Desai, 1976 e Bathe, 1982) e onde sua aplicação é discutida e verificada neste trabalho. Embora seja apresentado um esquema iterativo para solução do sistema de equações, neste trabalho o sistema algébrico é resolvido utilizando um esquema puramente incremental. São apresentados exemplos de validação, onde comparações entre soluções analíticas e numéricas são realizadas. Comparações com resultados do programa comercial da GEOSLOPE® International Ltd. também são apresentadas no presente trabalho.

# ABSTRACT

---

The objective of this work is to present a formulation to solve consolidation problems also incorporating the drawdown of the water table. Thus, a fully coupled formulation based on the finite element method is presented for this physical phenomenon. Using an 8-node isoparametric element to approximate the hydraulic total head and displacements as field variables, the formulation is capable to solve a problem under conditions of transient flow - deformation. The model which represents the stress-strain relationship is considered to be linear elastic. The hydraulic conductivity is considered varying with the negative pressure heads. To the location of the free surface, the residual flow procedure proposed by Desai (1976) and Bathe (1982) is discussed and its application is verified. Although an iterative scheme is recommended to solve the non-linear flow behavior (Hsi and Small, 1992a), in the present work this iterative scheme is presented, but only incremental solution procedure is implemented. Validation examples that compare numerical and analytical solutions are presented. Comparisons with results from the commercial package from GEOSLOPE® International Ltd. are also done in this work.

---

# SUMÁRIO

---

	Pág.
<b>Lista de Figuras</b> .....	v
<b>Lista de Tabelas</b> .....	viii
<b>Lista de Quadros</b> .....	ix
 <b>Capítulo 1 – INTRODUÇÃO</b>	
1.1 - Considerações Gerais .....	1
1.2 - Objetivo e Descrição do Trabalho .....	8
 <b>Capítulo 2 - O PROBLEMA DO ADENSAMENTO DEVIDO À VARIAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA</b>	
2.1 - O problema físico .....	9
2.1.1 - Os Aquíferos e a Acumulação de Água no Solo .....	10
2.1.2 - O Rebaixamento do NA .....	14
2.2 - O modelo matemático.....	21
 <b>Capítulo 3 - MODELO NUMÉRICO</b>	
3.1 - Equações governadoras via MEF .....	24
3.2 - Integração no Tempo .....	30
3.3 - Estratégias de Solução de Sistemas de Equações .....	33
3.3.1 - Processo Puramente Incremental .....	33
3.3.2 - Processo Iterativo .....	34
3.4 - Processo de localização da superfície livre .....	38
3.5 - Função de condutividade hidráulica .....	41



## **Capítulo 4 - IMPLEMENTAÇÕES COMPUTACIONAIS**

4.1 - Macro - comandos .....	45
4.2 -Elemento e matrizes características .....	47
4.2.1 - Aproximação do deslocamento e carga total .....	48
4.2.2 - Aproximação da geometria.....	49
4.2.3 - Operadores diferenciais .....	50
4.3 - O macro- comando SOLVE.....	52
4.4 - Localização da superfície livre .....	54
4.5 - Redução da permeabilidade.....	57
4.6 - Exemplos de validação .....	59
4.6.1 - Adensamento unidimensional devido um carregamento de superfície .....	60
4.6.2 -Adensamento bidimensional .....	65
4.6.3 - Adensamento unidimensional devido ao rebaixamento do NA .....	69
4.6.4 - Fluxo bidimensional e a superfície transiente .....	73

## **Capítulo 5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

5.1 - Adensamento em meio não homogêneo .....	80
5.2 - Rebaixamento rápido do reservatório de uma barragem homogênea.....	89
5.2.1 - Análise de fluxo transiente .....	89
5.2.2 -Análise acoplada considerando o rebaixamento do NA .....	101

## **Capítulo 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

6.1 - Conclusões.....	115
6.2 - Sugestões .....	117

<b>Referências Bibliográficas</b> .....	118
---	-----

# LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1.1 - Fluxo não-confinado. (Adaptado de Cernica, 1995) .....	2
Figura 2.1 – Detalhe esquemático do rebaixamento unitário do NA em dois materiais distintos: $(A_2 = S_{y2}) > (A_1 = S_{y1})$ . Adaptado de Freeze e Cherry (1979).....	14
Figura 2.2 – Adensamento unidimensional devido à variação do nível d'água .....	15
Figura 2.3 - Variação no NA num problema de fluxo não-confinado .....	16
Figura 2.4 - Descrição do movimento de uma partícula de água sobre a superfície livre - detalhe 1.....	17
Figura 2.5 - Descrição do movimento de uma partícula de água sobre a superfície livre - detalhe 2 .....	19
Figura 2.6 - Descrição do movimento de uma partícula de água sobre a superfície livre - detalhe 3 .....	20
Figura 3.1 – Coordenadas locais da superfície livre no interior de um elemento.....	39
Figura 3.2 – Função de condutividade hidráulica (Liakopoulos, 1965) .....	42
Figura 3.3 – Função de condutividade hidráulica. ....	43
Figura 4.1 – Seqüência de macro- comandos do programa ANLOG .....	46
Figura 4.2 – Elemento Q8Q8 .....	47
Figura 4.3 – Superfície passando (a) e (b) parcialmente no elemento, (c) totalmente no interior do elemento e (d) fora do elemento.....	55
Figura 4.4 – Algoritmo para localização da superfície freática .....	56
Figura 4.5 - Curvas de permeabilidade vs. poro-pressão .....	57
Figura 4.6 – Problemas de (a), (b) e (c) adensamento e de (d) superfície freática.....	59
Figura 4.7 – Adensamento unidimensional - Malha de elementos finitos.....	61
Figura 4.8 – Adensamento Unidimensional / Isócronas dos excessos de poro-pressão .	62
Figura 4.9 – Adensamento 1D - Percentagem média de adensamento vs .Fator tempo .	63
Figura 4.10 - Adensamento 1D - Deslocamento superficial vs. Fator tempo .....	64
Figura 4.11 - Adensamento 2D - Malha de elementos finitos .....	65
Figura 4.12 – Adensamento 2D - Excessos de poro-pressão - $x/b=0.0$ e $T=0.1$ .....	66

Figura 4.13 – Adensamento 2D - Tensões normalizadas <i>versus</i> tempo .....	68
Figura 4.14 – Adensamento 1D devido ao rebaixamento do NA - $U \times T$ .....	70
Figura 4.15 – Adensamento 1D por rebaixamento do NA – $d \times T$ .....	70
Figura 4.16 – Adensamento 1D por rebaixamento do NA / Isócronas de poro-pressão. 71	
Figura 4.17 – Evolução da superfície livre com o tempo .....	72
Figura 4.18 – Evolução dos perfis de poro-pressões no tempo .....	72
Figura 4.19 – Malha de elementos finitos - barragem quadrada.....	74
Figura 4.20 – Rebaixamento do NA através de uma barragem quadrada – comparação com a solução de Herbert (1968).....	76
Figura 4.21 – Rebaixamento do NA através de uma barragem quadrada – comparação com a solução de Bathe <i>et al.</i> (1982).....	77
Figura 4.22 – Rebaixamento do NA através de uma barragem quadrada – comparação com a solução de Hsi e Small (1992).....	78
Figura 5.1 - Adensamento em meio não-homogêneo - Malha de elementos finitos.....	80
Figura 5.2 – Oscilação numérica.....	82
Figura 5.3 – Evolução no tempo da dissipação dos excessos de carga total <i>vs.</i> $y$ .....	85
Figura 5.4 – Evolução no tempo dos deslocamentos verticais <i>vs.</i> $y$ em $x/b = 0$ .....	86
Figura 5.5 – Evolução no tempo dos deslocamentos verticais <i>vs.</i> $y$ em $x=2b$ .....	86
Figura 5.6 – Evolução no tempo dos deslocamentos horizontais <i>vs.</i> $y$ em $x=2b$ .....	87
Figura 5.7 – Deformada da malha do programa ANLOG em $t = 1s$ .....	88
Figura 5.8 – Deformada da malha do programa ANLOG em $t = 32.8 h$ .....	88
Figura 5.9 – Problema de fluxo incorporando a variação da posição da superfície livre	90
Figura 5.10 – Curva de retenção do material utilizada do programa SEEP/W.....	92
Figura 5.11 – Função de condutividade hidráulica estimada. ....	93
Figura 5.12 - Rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Evolução da superfície livre do problema de fluxo obtida pelo ANLOG.....	95
Figura 5.13 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 0.75 dia .....	96
Figura 5.14 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 1.5 dias .....	97

Figura 5.15 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 3 dias. ....	98
Figura 5.16 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 5.5 dias ....	99
Figura 5.17 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 74 dias. ....	100
Figura 5.18 – Barragem homogênea - Adensamento devido ao rebaixamento da superfície livre. ....	102
Figura 5.19 - Rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Evolução da superfície livre do problema de adensamento obtida pelo ANLOG. ....	103
Figura 5.20 – Barragem homogênea – Comparação da posição da superfície livre obtida em análise de fluxo e análise de adensamento.....	104
Figura 5.21 – Barragem homogênea - Posição da superfície livre em 0.75 dia do problema acoplado.....	106
Figura 5.22 – Barragem homogênea - Posição da superfície livre em 1.5dias do problema acoplado.....	107
Figura 5.23 – Barragem homogênea - Posição da superfície livre em 3 dias do problema acoplado. ....	108
Figura 5.24 – Barragem homogênea - Posição da superfície livre em 5.5 dias do problema acoplado.....	109
Figura 5.25 - Barragem homogênea - Posição final da superfície livre em 115 dias do problema acoplado.....	110
Figura 5.26 – Seções escolhidas para avaliação dos deslocamentos .....	111
Figura 5.27 – Recalque em $t = 1.5$ dias / Seções 1-h e 2-h.....	113
Figura 5.28 – Recalque em $t = 115$ dias / Seções 1-h e 2-h.....	113
Figura 5.29 – Deslocamento horizontal em $t = 1.5$ dias / Seções 1-v e 2-v.....	114
Figura 5.30 – Deslocamento horizontal em $t = 115$ dias / Seções 1-v e 2-v.....	114

# LISTA DE TABELAS

---

Tabela 2.1 – Faixas representativas de porosidade e rendimentos específicos..... 18

Tabela 4.1 – Coordenadas naturais dos pontos nodais do elemento Q8Q8. .... 48

# LISTA DE QUADROS

---

Quadro 4.1 - Seqüência básica do macro comando SOLVE .....	52
Quadro 4.2 - Algoritmo de solução incremental - Rotina INCREM. ....	53

# LISTA DE SIGLAS

---

**ANLOG** – Programa computacional para análise não-linear de obras geotécnicas desenvolvido em Zornberg (1989), Nogueira (1992 e 1998), Pereira (2003) e no presente trabalho.

**CRISP90** – Programa computacional desenvolvido por Britto(1991) e Gonçalves (1996).

**SEEP/W** – Programa da GEOSLOPE® International Ltd. para análise de fluxo nos regimes permanente e transiente em condições saturadas ou não-saturadas.

**SIGMA/W** – Programa da GEOSLOPE® International Ltd. para análise linear e não-linear de tensão-deformação.

**[SIGMA/W-SEEP/W]** – Acoplamento entre os programas da GEOSLOPE® International Ltd., SEEP/W e SIGMA/W para solução de problemas de adensamento bidimensional e axissimétrico.

# LISTA DE SÍMBOLOS

---

$A$  – área

$a, c, m$  – parâmetros do método preditivo de van Genuchten

$b$  – espessura do aquífero

$\mathbf{b}$  – vetor das forças de corpo

$\mathbf{B}_u$  – matriz deformação-deslocamento

$\mathbf{B}_h$  – matriz gradiente-carga total

$\mathbf{C}$  – matriz de acoplamento característica

$c_v$  – coeficiente de adensamento

$d$  – recalque da superfície

$d_{\text{máx}}$  – recalque máximo da superfície

$\Delta \mathbf{d}$  – vetor solução do sistema de equações

$\mathbf{D}$  – matriz constitutiva elástica

$E$  – módulo de elasticidade

$\mathbf{F}$  – vetor de forças externas

$\mathbf{F}_t$  – parcela do vetor de forças externas representado as forças de superfície

$\mathbf{F}_b$  – parcela do vetor de forças externas representado as forças de corpo

$\mathbf{F}_e$  – parcela do vetor de forças externas representado as forças relativas à carga de elevação

$\Delta \mathbf{F}$  – vetor das variáveis independentes do sistema de equações

$G$  – módulo cisalhante

$\mathbf{G}^{\text{FS}}$  – matriz de imposição de fluxo na superfície livre

$h$  – carga hidráulica total

$h_e$  – carga hidráulica de elevação

$h_p$  – carga hidráulica de pressão

$\mathbf{h}$  – vetor das cargas hidráulicas totais

$\hat{\mathbf{h}}$  – vetor das cargas totais nodais

$\mathbf{H}$  – matriz de fluxo característica



$H$  – altura da camada de solo  
 $H_d$  – comprimento do caminho de drenagem  
 $\mathbf{i}$  – vetor gradiente hidráulico  
 $\mathbf{J}$  – matriz Jacobiana  
 $\mathbf{K}$  – matriz de rigidez característica  
 $\mathbf{K}_G$  – matriz tangente global  
 $k$  - permeabilidade  
 $k_x$  – permeabilidade saturada na direção  $x$   
 $k_y$  – permeabilidade saturada na direção  $y$   
 $k_{xx}, k_{xy}, k_{yx}, k_{yy}$  – componentes da matriz de permeabilidades  
 $k_1, k_3$  – permeabilidades saturadas nas direções principais  
 $k_{lim}$  – permeabilidade limite  
 $k_{sat}$  – permeabilidade saturada  
 $L$  = distância média entre os nós da malha de elementos finitos  
 $m_v$  – compressibilidade do material  
 $\mathbf{m}^T (\nabla_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}})$  – matriz de deformação volumétrica  
 $\mathbf{n}$  – vetor normal à superfície  
 $N_i$  – função de interpolação para o nó  $i$   
 $\mathbf{N}_h$  – vetor das funções de interpolação de carga total  
 $\mathbf{N}_u$  – vetor das funções de interpolação de deslocamento  
 $n$  – porosidade  
 $n_e$  – porosidade efetiva  
 $NA$  – nível d'água  
 $ndiv$  – número de divisões do elemento  
 $p$  – poro-pressão  
 $p_e$  – pressão de entrada de ar  
 $p_{lim}$  – pressão limite  
 $q$  – taxa de infiltração na superfície  
 $Q$  – magnitude do carregamento distribuído de superfície  
 $\mathbf{Q}$  – vetor de fluxo nodal equivalente a uma taxa de infiltração  $q$

$S_\sigma, S_u, S_v, S_h, S^{FS}$  – superfícies com condições de contorno prescritas  
 $S$  – termo de armazenamento (*storativity*)  
 $S_r$  – retenção específica (*specific retention*)  
 $S_s$  – acumulação específica (*specific storage*)  
 $S_y$  – rendimento específico (*specific yield*)  
 $SL$  – declividade da curva de retenção hídrica  
 $t$  – tempo  
 $T$  – fator tempo  
 $\bar{\mathbf{T}}$  – vetor de forças prescritas de tração  
 $TOLER$  – tolerância  
 $\mathbf{u}$  – vetor dos deslocamentos  
 $\hat{\mathbf{u}}$  – vetor dos deslocamentos nodais  
 $U$  – percentagem média de adensamento  
 $u_e$  – excesso de poro-pressão  
 $v$  – velocidade de fluxo normal à superfície livre  
 $v_x, v_y$  – componentes da velocidade de fluxo normal à superfície livre  
 $\mathbf{v}$  – vetor das velocidades de fluxo  
 $V_t$  – volume da matriz sólida  
 $V_w$  – volume de água  
 $W$  – parâmetro utilizado na redução de permeabilidade do ponto de Gauss  
 $\hat{\mathbf{x}}$  – vetor das coordenadas cartesianas locais dos pontos nodais  
 $x, y$  – coordenadas cartesianas globais  
 $x_i, y_i$  – coordenadas cartesianas locais nodais  
 $\mathbf{X}_{load}$  – vetor de carregamento nodal equivalente às forças de superfície  
 $z$  – profundidade  
 $Z$  – profundidade normalizada  
 $\alpha$  – constante de integração temporal  
 $\beta$  – ângulo entre o segmento da superfície livre e a direção horizontal  
 $\chi$  – compressibilidade da matriz sólida  
 $\epsilon_{vol}$  – deformação volumétrica

$\boldsymbol{\varepsilon}$  – vetor das deformações  
 $\gamma_{xy}$  – componente da deformação cisalhante no plano  $xy$   
 $\gamma_w$  – peso específico da água  
 $\varphi$  – ângulo de rotação das direções principais 1 e 3 em relação aos eixos cartesianos  $x$  e  $y$   
 $\lambda_c$  – incremento de carga  
 $\lambda_t$  – incremento de tempo  
 $\nu$  - coeficiente de Poisson  
 $\theta$  – teor de umidade volumétrica  
 $\theta_p$  – teor de umidade volumétrica médio  
 $\theta_r$  – teor de umidade volumétrica residual  
 $\boldsymbol{\sigma}'$  – tensão efetiva  
 $\boldsymbol{\sigma}$  – tensão total  
 $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$  – componentes do tensor de tensões efetivas  
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – componentes do tensor de tensões totais  
 $\boldsymbol{\sigma}'$  – vetor das tensões efetivas  
 $\boldsymbol{\sigma}$  – vetor das tensões totais  
 $\tau_{xy}$  – componente da tensão cisalhante no plano  $xy$   
 $\omega$  – compressibilidade da água  
 $\xi, \eta$  – coordenadas naturais  
 $\Psi$  - sucção matricial  
 $\boldsymbol{\zeta}$  - vetor da força desequilibrada  
 $\nabla_h$  – operador diferencial em carga hidráulica total  
 $\nabla_u$  – operador diferencial em deslocamento

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUÇÃO

### 1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O adensamento é definido como um fenômeno que ocorre durante um processo de escoamento transitório em que são observadas deformações decorrentes da transferência de carga do poro-líquido para o esqueleto sólido, resultando numa variação dos campos de tensões e deformações.

A obtenção de uma solução exata, de forma acoplada, de um problema de adensamento considerando condições de contorno e geométricas complexas, é deveras complicada. No entanto, uma solução aproximada baseada, por exemplo, no Método dos Elementos Finitos (MEF), pode ser obtida com um aceitável grau de precisão dentro do ponto de vista da engenharia geotécnica.

De maneira geral, uma previsão confiável dos movimentos do solo é fundamental em qualquer domínio em que seja importante avaliar as deformações do meio devido a um carregamento externo aplicado.

No entanto, além do problema de adensamento devido ao carregamento externo aplicado, um outro tipo de solicitação pode ser considerado, como a variação da posição do nível d'água.

Encontram-se na literatura, alguns trabalhos relacionados ao rebaixamento do nível d'água em conjunto com um carregamento externo aplicado (Duncan e Clough, 1971; Walker e Morgan, 1977; Borja, 1992). Todos esses trabalhos tratam o problema de forma desacoplada, ou seja, resolvendo de forma separada o problema de

fluxo não-confinado e o problema de equilíbrio estático, em geral relacionado a uma escavação.

Um procedimento totalmente acoplado foi apresentado por Hsi (1992) em que o problema de adensamento é resolvido considerando a variação do nível freático juntamente com a remoção de tensões do solo devido a um processo de escavação.

Problemas de fluxo confinado ocorrem quando a variável primária ou sua derivada são conhecidas ao longo de todo contorno do domínio do problema. Caso contrário, o problema de fluxo é dito não-confinado. Um problema típico de fluxo não-confinado é o problema de fluxo através de uma barragem de terra homogênea, como ilustrado na Figura 1.1. Nesse caso, a superfície freática ao longo da qual a carga de pressão é nula e a velocidade de fluxo é tangente pode ser definida no regime permanente através da parábola de Kozeny.

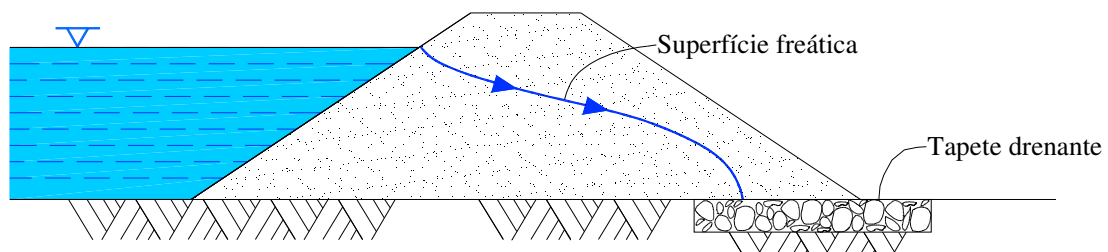


Figura 1.1 - Fluxo não-confinado. (Adaptado de Cernica, 1995)

No entanto, durante um processo de escoamento em regime transiente esta superfície deverá ser localizada em cada instante de tempo e condições de contorno especiais deverão ser prescritas ao longo dela de modo que a condição de continuidade possa ser garantida no domínio do problema.

Com o desenvolvimento da mecânica computacional, os métodos numéricos tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Diferenças Finitas (MDF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC) passaram a ter um importante papel no estudo de problemas geotécnicos. Assim, problemas de geometria irregular, envolvendo anisotropia e não-homogeneidade do meio, fluxo de contorno móvel e

problemas tridimensionais passaram a serem resolvidos com razoável grau de aproximação.

No estudo de problemas de percolação em meio poroso podem ser encontrados na literatura vários trabalhos envolvendo o emprego de métodos numéricos como o MDF (Remson *et al.*, 1965; Jeppson, 1969; Desai e Sherman, 1971; Dvinoff e Harr, 1971; Freeze, 1971; Herbert e Zytynski, 1972), o MEF (Zienkiewicz *et al.*, 1966; Taylor e Brown, 1967; Finn, 1967; Neuman e Witherspoon, 1971; Desai, 1972; Bathe, 1982; Bathe *et al.*, 1982; Cividini e Gioda, 1984; Gerscovich, 1994; Gonçalves, 1996; Machado Júnior, 2000), e o MEC (Niwa *et al.*, 1974; Cruse e Rizzo, 1975; Brebbia, 1978; Banerjee e Butterfield, 1981; Chang, 1981 e 1988; Ligget e Liu, 1984) para obtenção de soluções aproximadas.

Segundo Gioda e Desideri (1988), o procedimento via MEF para o problema de fluxo transiente não-confinado pode ser dividido em dois grupos: técnica de malha variável e técnica de malha constante (ou malha fixa). Ambos os grupos tratam evidentemente da localização da superfície piezométrica variável ao longo do processo e muitas vezes denominada de superfície livre.

A técnica de localização da superfície piezométrica, através do procedimento de malha variável, requer um processo iterativo que modifica a geometria da malha de modo que parte do seu contorno coincida com essa superfície até que se alcance uma solução convergente.

Segundo Cividini e Gioda (1984), esta técnica é geralmente mais acurada que a técnica da malha constante. Entretanto, ela demanda um grande esforço computacional uma vez que as matrizes elementares devem ser recalculadas e rearranjadas de forma global a cada iteração em que uma nova configuração de malha é requerida. A estabilidade da solução do problema utilizando a técnica da malha variável foi estudada por Gioda e Gentile (1987). Em casos de geometrias complexas ou mesmo quando a superfície livre intercepta mais de um tipo de material, a solução pode se mostrar instável (Vargas *et al.*, 1990 e Hsi, 1992).

Finn (1967) apresentou uma análise de fluxo através de barragens, na qual a superfície freática era assumida como a linha de fluxo mais alta. A partir daí uma malha de elementos finitos era proposta e o problema era então resolvido para esta configuração. Com o resultado deste problema uma nova superfície era encontrada e

mais uma vez uma nova configuração de malha era definida e o processo de solução era repetido. O processo atingia o regime permanente quando a posição da freática não mais se alterava com o passar do tempo.

Neuman e Witherspoon (1971) apresentaram um novo método de aproximação iterativo para problemas de fluxo transiente não-confinado. Tratava-se de um método incondicionalmente estável e apenas uma pequena quantidade de incrementos de tempo era necessária para se atingir o regime permanente. À malha era permitido contrair-se ou expandir-se a fim de acomodar a posição da superfície livre. Este método apresentava um certo grau de sofisticação uma vez que era capaz de resolver problemas com geometria complicada, heterogeneidade e anisotropia do meio.

Desai (1972) apresentou um procedimento em que a posição da superfície piezométrica era ajustada pelo cálculo do movimento dos nós ao longo desta superfície utilizando um esquema iterativo.

A técnica da malha fixa não requer mudanças na geometria da malha de elementos finitos durante o processo de solução (Desai, 1976). Desta forma, o esforço computacional é bastante reduzido quando comparado à técnica anterior.

Uma solução simplificada e aproximada via MEF de uma equação linearizada para o fluxo transiente unidimensional foi apresentada por Desai (1973). Tanto o rebaixamento quanto a elevação do NA baseavam-se na consideração de um esquema indireto conhecido como método de Pavlovsky ou método dos fragmentos (Desai e Sherman, 1971; Divinoff e Harr, 1971).

Cathie e Dungar (1975) apresentaram uma formulação geral, via MEF, para solução de problemas de fluxo não-confinado em regime permanente e aplicou-a para análise de duas barragens. Nesta formulação, uma relação não-linear de permeabilidade *versus* poro-pressão foi utilizada para simular um fluxo reduzido acima do NA.

Desai (1976) propôs uma aproximação mais adequada para localização da superfície livre baseado em um esquema de fluxo residual. A expressão “fluxo residual” advém do fluxo resultante da variação da posição da superfície livre o qual deveria ser imposto ao longo desta superfície. A posição correta da superfície piezométrica era encontrada quando os potenciais nodais não variavam, considerando-se uma certa tolerância, após duas iterações sucessivas. Este método posteriormente foi expandido

para problemas tridimensionais em trabalhos de Desai e Baseghi (1988) e Baseghi e Desai (1990).

Um esquema efetivo para problemas de fluxo permanente utilizando malha fixa foi proposto por Bathe e Khoshgoftaar (1979). Eles utilizaram um algoritmo de permeabilidade não-linear para simular o comportamento do fluxo na zona não-saturada acima da superfície livre.

Bathe *et al.* (1982) apresentaram um procedimento baseado no conceito de fluxo residual para análise de problemas de fluxo não-confinando transiente via MEF. Eles propuseram de forma evidente que todo o fluxo liberado pelo solo em função da variação da superfície livre deveria ser imposto ao longo desta superfície, possibilitando assim, determinar sua nova posição. Adicionalmente, a permeabilidade do solo acima dessa superfície, no caso de rebaixamento, deveria ser reduzida em função dos valores negativos de poro-pressão que surgem após o rebaixamento.

Desai e Li (1983), através de uma formulação variacional, apresentaram um procedimento de fluxo residual para problemas de fluxo não-confinado em regime permanente. Este procedimento envolvia o cálculo de um vetor chamado vetor de correção ou vetor residual em que, por um processo iterativo, obtinha-se o valor das cargas hidráulicas totais. Uma relação permeabilidade *versus* poro-pressão também foi adotada para considerar o efeito da zona não-saturada acima da superfície piezométrica. Em Li e Desai (1983), apresentou-se uma formulação desacoplada para análise de problemas de fluxo *versus* deformação. Uma aplicação para verificação da estabilidade de uma barragem foi conduzida.

Cividivi e Gioda (1984) propuseram uma solução via MEF para problemas de fluxo não-confinado transiente. A estratégia era fazer coincidir a superfície piezométrica com os lados dos elementos e através de iterações encontravam-se valores mínimos de fluxo através dessas superfícies.

Dos processos existentes para localização da superfície livre, baseados na técnica da malha fixa, dois merecem destaque: o esquema de fluxo residual proposto por Bathe *et al.* (1982) e por Desai e Li (1983) (discutido em detalhes no Capítulo 3); e o processo de fluxo residual modificado proposto por Cividini e Gioda (1984) muito útil em problemas de escavações e empregado nos trabalhos de Hsi (1992), Hsi e Small (1992a, 1992b, 1992c e 1993) e Gonçalves (1996).



Com relação ao problema do adensamento, a Teoria de Terzaghi (1923) foi a primeira teoria consistente formulada para descrever este fenômeno. De forma simplificada, Terzaghi considerava basicamente que o fluxo e as deformações ocorriam numa única direção, que a tensão total permanecia constante ao longo de todo processo e que a relação tensão-deformação do esqueleto sólido era linear e elástica.

Biot (1941) estendeu a teoria de Terzaghi para a condição tridimensional em que deformação e poro-pressão são tratadas como variáveis primárias e obtidas simultaneamente em uma única solução considerando uma relação tensão-deformação linear elástica. Biot (1955 e 1956) incluiu em sua formulação os efeitos de anisotropia e visco-elasticidade.

Algumas soluções analíticas, baseadas na Teoria de Biot, para problemas de adensamento com condições geométricas, de contorno, de drenagem e de carregamento simplificados podem ser encontradas na literatura (Mandel, 1953a e 1953b; Gibson e McNamee, 1957; McNamee e Gibson, 1960; Schiffman *et al.*, 1969; e, Gibson *et al.*, 1970).

Sandhu e Wilson (1969a) foram pioneiros no emprego do MEF para resolver o problema de adensamento utilizando uma formulação variacional. Christian e Bohemer (1970) utilizaram o MEF para solução de problemas de adensamento sob condições de deformação plana.

Hwang *et al.* (1971) compararam os resultados da formulação de Sandhu e Wilson (1969a) com as soluções analíticas obtidas por Schiffman *et al.* (1969) e Gibson *et al.* (1970). Uma formulação para o problema de adensamento baseado no método dos resíduos ponderados foi apresentada por Hwang *et al.* (1972). Neste trabalho, resultados de um limitado estudo paramétrico da influência do parâmetro A de Skempton e do coeficiente de Poisson no processo do adensamento, foram apresentados.

Um estudo para o adensamento em meios elásticos, anisotrópicos e heterogêneos utilizando o MEF, foi proposto por Yokoo *et al.* (1971). Ghaboussi e Wilson (1973) incluíram o efeito da compressibilidade do poro-líquido e do esqueleto sólido. Booker e Small (1975) investigaram a estabilidade numérica dos algoritmos de integração temporal utilizados na solução do problema de adensamento via MEF. Small

*et al.* (1976) apresentaram uma proposta para o adensamento elastoplástico do solo em que o fluxo plástico era definido pelo critério de plastificação de Mohr-Coulomb.

Sandhu *et al.* (1977) apresentaram uma análise do desempenho numérico dos vários esquemas de discretização espacial e temporal encontrados na literatura. Reed (1984) desenvolveu uma técnica para suavizar o erro oscilatório na poro-pressão inicial associado à utilização de elementos isoparamétricos quadráticos na modelagem do problema de adensamento.

Richter (1979) empregou o modelo hiperbólico de Duncan e Chang (1970) e um modelo elastoplástico baseado no critério de plastificação de Drucker-Prager com fluxo não-associado para a análise do adensamento.

Carter *et al.* (1979) apresentaram a formulação para o adensamento via MEF considerando o efeito da não-linearidade geométrica. Desai e Siriwardane (1981) apresentaram dois esquemas de solução para o problema do adensamento não-linear adotando o modelo elastoplástico Camclay com fluxo associado.

Em Prevost (1983) é apresentado um esquema implícito-explicito para integração temporal das equações não-lineares do adensamento. Borja (1986) formulou variacionalmente o problema do adensamento não-linear e em 1989 apresentou a linearização das equações do adensamento elastoplástico a serem empregadas no método de Newton. Duas matrizes modulares tangentes são apresentadas: uma considerando o modelo elástico perfeitamente plástico com o critério de plastificação de Drucker-Prager e fluxo não-associado e outra considerando um modelo elastoplástico com endurecimento linear e critério de plastificação de Von-Mises. Uma aplicação da formulação anterior para o modelo elastoplástico Camclay é mostrada em Borja (1991).

Nogueira (1992), apresentou uma proposta para o adensamento via MEF utilizando a formulação variacional de Sandhu e Wilson (1969b), para análise de problemas de escavação usando a técnica proposta por Mana (1978). Mais tarde, utilizando uma formulação baseada no princípio dos trabalhos virtuais, Nogueira (1998) estende seu trabalho implementando três modelos constitutivos elastoplásticos e um modelo não-linear elástico. A proposta de Nogueira estudava o adensamento devido aterros e escavações considerando o nível d'água constante utilizando o procedimento proposto por Brown e Booker (1985).

Hsi e Small (1992a) apresentaram uma formulação via MEF para a solução de problemas de adensamento devido à escavação considerando a variação do nível d'água. Para a solução do problema, eles adotam a técnica de malha fixa para localização da superfície livre. Nesse trabalho, a carga hidráulica total e os deslocamentos são adotados como variáveis primárias.

Gonçalves (1996) incorpora o modelo proposto por Hsi e Small (1992b) no programa computacional CRISP90.

## **1.2. OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO**

O objetivo desta dissertação consiste no desenvolvimento de um modelo numérico para análise de problemas acoplados de fluxo e deformação considerando a variação do nível d'água.

Este modelo foi implementado no programa computacional ANLOG e apenas situações envolvendo o comportamento linear elástico do solo foram consideradas. Quanto ao processo de localização da superfície livre, foi adotada a técnica da malha fixa utilizando o processo do fluxo residual proposto por Bathe *et al.* (1982) e utilizado por Hsi e Small (1992). A estratégia de solução incremental iterativa é apresentada, mas apenas o procedimento puramente incremental foi implementado no presente trabalho.

Esta dissertação é apresentada em 6 Capítulos, incluindo esta introdução. No Capítulo 2, apresenta-se o problema físico e sua modelagem matemática. O modelo numérico baseado no MEF é apresentado no Capítulo 3, juntamente com o processo de localização da superfície livre.

No Capítulo 4, mostram-se detalhes sobre as implementações computacionais realizadas no programa ANLOG, juntamente com os exemplos de validação.

No Capítulo 5 são apresentadas algumas aplicações do ANLOG e comparações dos resultados com programas da GEOSLOPE® International Ltd. e no Capítulo 6 têm-se as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

# CAPÍTULO 2

---

## O PROBLEMA DO ADENSAMENTO E A VARIAÇÃO DO NÍVEL D'ÁGUA

### 2.1. O PROBLEMA FÍSICO

Inicialmente em equilíbrio estático e sujeita a um potencial hidráulico conhecido, uma camada de solo compressível e de baixa permeabilidade pode ser submetida a um gradiente hidráulico devido a uma solicitação externa ou devido à variação da posição do seu nível d'água. Neste caso, observa-se a ocorrência de fluxo de água da região de maior para a de menor potencial hidráulico, acompanhada da variação das tensões efetivas e, conseqüentemente da deformação do solo.

O fenômeno descrito acima relaciona simultaneamente a variação dos campos de tensões e deformações com um processo de escoamento transitório onde são observadas deformações decorrentes da transferência de carga do poro-líquido para o esqueleto sólido. Ele envolve, portanto, uma análise simultânea de um problema de equilíbrio de sólidos deformáveis e um problema de fluxo transiente em meio poroso. Este fenômeno é conhecido como **Adensamento**.

Antes de se formular o problema de adensamento devido à variação do NA, torna-se necessária uma abordagem sobre o processo de acumulação de água no solo, bem como sobre o problema do rebaixamento do NA que são apresentados nos itens 2.1.1 e 2.1.2, respectivamente.

### 2.1.1 - Os Aquíferos e a Acumulação de Água no Solo

Um aquífero é uma formação geológica que pode transmitir, armazenar e liberar significantes volumes de água (Mariño, 2003). Os aquíferos podem ser ditos confinados quando forem limitados acima e abaixo por contornos impermeáveis (o nível d'água localiza-se no contorno superior) ou não-confinados quando forem limitados superiormente pela superfície livre, onde a pressão é nula.

Em contraste aos aquíferos, existem os aquicludes e aquitardos que são formações geológicas (geralmente estratos argilosos) com altas razões de pré-adensamento e de permeabilidades muito baixas capazes de impedir ou dificultar a transmissividade e o rendimento de fluido. Para efeitos práticos, os aquicludes são considerados impermeáveis e os aquitardos semi-impermeáveis.

A rigor, acumulação e transmissão de água de um aquífero dependem de dois relevantes parâmetros: a compressibilidade da água  $\omega$  e a compressibilidade da matriz sólida  $\chi$  que podem ser obtidas através das seguintes relações constitutivas:

$$\omega = \frac{-dV_w / V_w}{dp} \quad (2.1a)$$

$$\chi = \frac{-dV_t / V_t}{d\sigma'} \quad (2.1b)$$

em que  $(-dV_w / V_w)$  é a deformação volumétrica do fluido induzida pela variação de poro-pressão  $dp$  e  $(-dV_t / V_t)$  é a deformação volumétrica do meio poroso induzida pela variação de tensões efetivas,  $d\sigma'$ .

Para fluidos incompressíveis,  $\omega = 0$ . Freeze e Cherry (1979) tomam o valor de  $\omega$  como sendo igual a  $4.4 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$ .

### Acumulação específica ( $S_s$ )

A acumulação específica de um aquífero saturado corresponde ao volume de água que uma unidade de volume do aquífero libera para cada unidade de decréscimo da carga total (Freeze e Cherry, 1979). No SI, sua dimensão, portanto, é obtida em termos de  $m^{-1}$ .

O decréscimo na carga total implica na diminuição da pressão de fluido  $dp$  e no aumento de tensão efetiva  $d\sigma'$ . A liberação de água implica na ocorrência de dois mecanismos bem definidos: a redução volumétrica do aquífero devido ao ganho de tensões efetivas e a expansão da água devido ao decréscimo da poro-pressão.

Considerando primeiramente a redução volumétrica do aquífero, tem-se da Equação 2.1b que:

$$dV_w = -dV_t = \chi V_t d\sigma' \quad (2.2)$$

em que a redução volumétrica da matriz sólida corresponde ao volume de água expulso do solo,  $dV_w$ .

Pelo princípio das tensões efetivas, considerando-se que não haja variação da tensão total, sabe-se que:

$$d\sigma' = -dp = -\gamma_w dh \quad (2.3)$$

em que  $dh$  é a variação de carga total e  $\gamma_w$  o peso específico da água.

Considerando um volume unitário  $V_t=1$  e um decréscimo unitário de carga total  $dh=-1$  e substituindo estes valores nas Equações 2.2 e 2.3 tem-se que:

$$dV_w = \chi \gamma_w \quad (2.4)$$

Considerando agora a parcela relativa à expansão de água, tem-se:

$$V_w = n V_t \quad (2.5)$$

em que  $n$  é a porosidade do solo.

Substituindo a Equação 2.5 na Equação 2.1a e novamente considerando  $V_t=1$  e  $dh=-1$ , tem-se a parcela da variação volumétrica do fluido relativa à expansão de água:

$$dV_w = \omega n \gamma_w \quad (2.6)$$

A acumulação específica é obtida pela adição entre as Equações 2.4 e 2.6:

$$S_s = \gamma_w (\chi + n\omega) \quad (2.7)$$

### **Coefficiente de Armazenamento (S)**

O coeficiente de armazenamento é um parâmetro largamente utilizado na hidrologia para análise de redução volumétrica de aquíferos e conseqüente liberação de água (Loaiciga e Hudak, 2003). É definido como o volume de água liberado por unidade de decréscimo na carga total e por unidade de área (Loiaciga e Hudak, 2003), sendo, portanto, um parâmetro adimensional.

Num aquífero confinado de espessura  $b$ , a equação do coeficiente de armazenamento é:

$$S = bS_s \quad (2.8)$$

Em geral, o valor do coeficiente de armazenamento de aquíferos confinados não ultrapassa 0.5%.

Em aquíferos não-confinados, devido à possibilidade de variação do nível d'água, a espessura do solo saturado pode variar implicando na mudança da poro-pressão na porção saturada do aquífero. Neste caso, ao coeficiente de armazenamento, deve-se incluir a parcela relativa ao rebaixamento do NA,  $S_y$ :

$$S = S_y + bS_s \quad (2.9)$$

Também conhecido como rendimento específico,  $S_y$  é muito maior que o valor de  $S_s$  em aquíferos não-confinados, pois estes são geralmente mais permeáveis que os aquíferos confinados. Nesse caso, o termo de armazenamento,  $S$ , se confunde com o rendimento específico, isto é,  $S \approx S_y$ .

### **Rendimento específico ( $S_y$ )**

Conforme já mencionado, o rendimento específico  $S_y$  é a parcela do termo de armazenamento referente ao rebaixamento do NA. De forma conceitual,  $S_y$  corresponde ao volume de água que um aquífero não-confinado libera por unidade de área e por decréscimo de uma unidade na elevação do nível d'água (Freeze e Cherry, 1979). O rendimento específico é o fator que diferencia as condições de armazenamento de água entre aquíferos confinados e não-confinados. Esse parâmetro representa fisicamente a quantidade de água a ser drenada exclusivamente sob a ação da gravidade. A faixa de variação de  $S_y$  é muito maior do que os termos de armazenamento dos aquíferos confinados. Segundo Walton (1970),  $S_y$  varia entre 0.01 e 0.30. Através de ensaios experimentais, Morris (1967) apresentou alguns materiais com valores de  $S_y$  podendo chegar a 0.47.

O rendimento específico é também conhecido como porosidade efetiva ( $n_e$ ). Ele é sempre menor que a porosidade do solo  $n$ , porque não é possível drenar toda a quantidade de água do poro-espço que se encontrava inicialmente armazenada (Loaiciga e Hudak, 2003). A porosidade de um solo é a soma da retenção específica  $S_r$  com o rendimento específico  $S_y$ . Por sua vez, a retenção específica corresponde ao volume de água retido contra a ação da drenagem gravitacional por unidade de volume do aquífero.

Fatores, como o arranjo dos grãos e das partículas, influenciam no valor de  $S_y$  porque afetam diretamente a porosidade de materiais pouco consolidados. Portanto, uma areia grossa siltosa possui menor rendimento específico do que uma areia grossa uniforme, por exemplo. É intuitivo perceber que as pequenas partículas de silte preenchem parte dos espaços entre os grãos de areia levando o solo a apresentar uma menor porosidade. Nesse caso, assim como a porosidade é menor, o valor de  $S_y$  também o é.



Para melhor visualização da idéia de rendimento específico, a Figura 2.1 mostra o rebaixamento do NA de duas colunas de solo com diferentes materiais e seções transversais unitárias. Considerando que o decréscimo do NA da Figura 2.1 foi de uma unidade, as áreas das regiões hachuradas  $A_1$  e  $A_2$  das curvas de teor de umidade volumétrica ( $\theta$ ) vs. profundidade representam os rendimentos específicos dos materiais 1 e 2, respectivamente. Com isso, pode-se mostrar que dois aquíferos formados por materiais distintos, quando submetidos a rebaixamentos idênticos, podem liberar diferentes quantidades de água, isto é, podem apresentar diferentes rendimentos específicos.

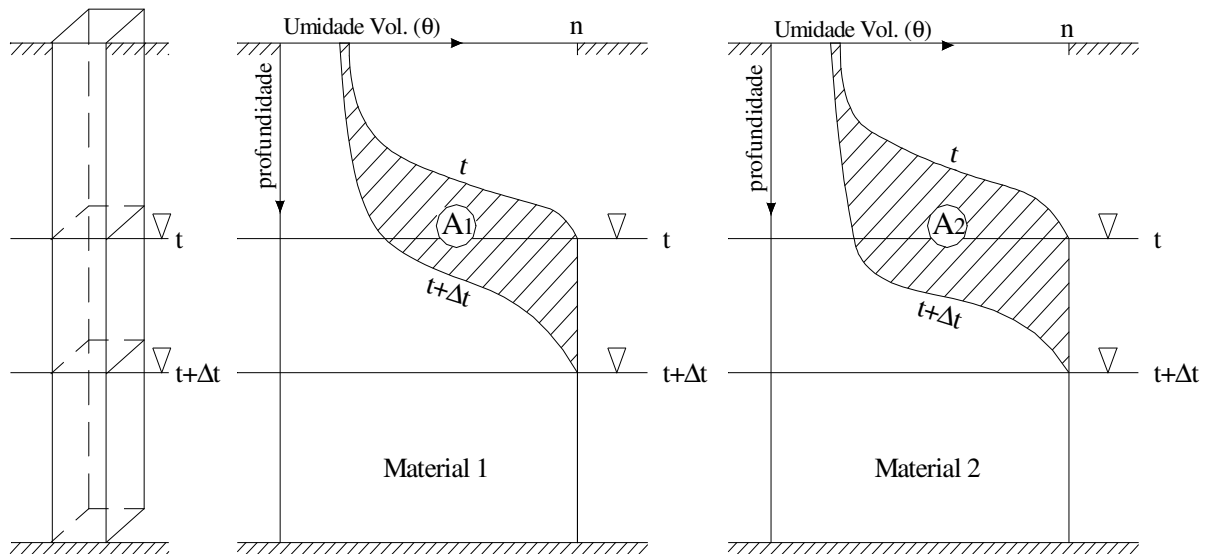
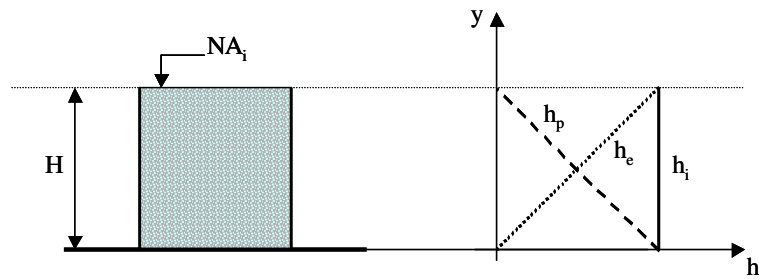


Figura 2.1 – Detalhe esquemático do rebaixamento unitário do NA em dois materiais distintos:  $(A_2 = S_{y2}) > (A_1 = S_{y1})$ . Adaptado de Freeze e Cherry (1979).

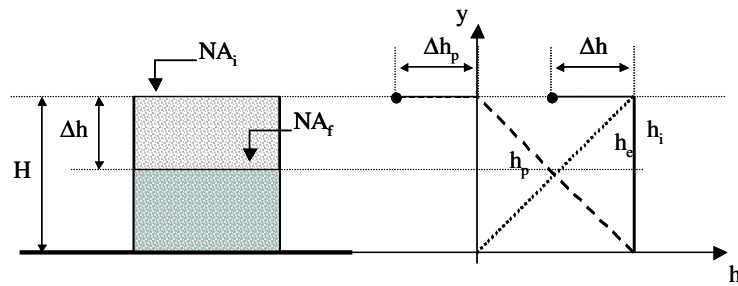
### 2.1.2 - O Rebaixamento do NA

Para explicar o efeito da variação do nível d'água numa massa de solo, consideremos a situação unidimensional indicada na Figura 2.2, na qual é provocada uma variação instantânea,  $\Delta h$ , da carga hidráulica total no contorno superior da coluna de solo. Imediatamente após esta variação, dar-se-á início a um processo de fluxo

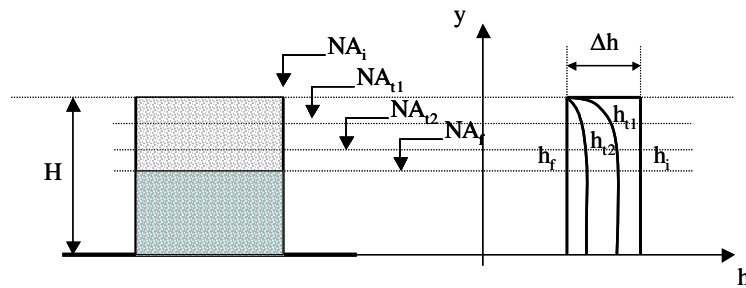
transiente no interior da massa de solo, dos pontos de maior potencial (base) para os pontos de menor potencial (topo) até que o regime estacionário seja alcançado (Figura 2.2c).



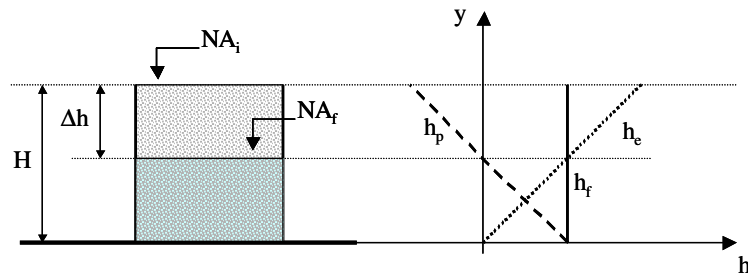
a) Configuração inicial.



b) Imediatamente após a variação instantânea do NA.



c) Dissipação da variação da carga hidráulica.



d) Configuração Final - Após o Adensamento.

Figura 2.2– Adensamento unidimensional devido à variação do nível d'água.

A variação da carga hidráulica inicial corresponde, neste caso, à variação da cota do nível d'água. De acordo com a equação de Bernoulli e considerando que o referencial é fixo, esta variação será igual à da carga de pressão  $h_p$  a qual afeta a poropressão e conseqüentemente a tensão efetiva.

Para a situação descrita anteriormente, posição final da superfície freática é conhecida previamente estabelecendo-se assim uma situação de fluxo confinado. Para situações de fluxo não-confinado, no entanto, o mesmo não ocorre.

A maior dificuldade dos problemas de fluxo não-confinado em condições transientes está na determinação da posição da superfície piezométrica no espaço e no tempo, a qual é tratada como um contorno móvel em que condições especiais são aplicadas. Estas condições estão relacionadas à pressão nula sobre a superfície do nível d'água e à velocidade com a qual esta superfície se movimenta.

Para ilustrar melhor o problema em questão, consideremos a situação indicada na Figura 2.3, que indica a variação do nível d'água em apenas um dos contornos do domínio ilustrado. A superfície livre assumirá várias posições ao longo do tempo, até alcançar sua posição final na condição do regime permanente.

Para avaliar a movimentação da superfície do NA, tomemos como referência a trajetória descrita por uma partícula de água com velocidade  $\mathbf{v}'$ , inicialmente na posição P sobre a superfície livre num instante genérico t, conforme ilustrado na Figura 2.4. Após um intervalo de tempo dt, esta partícula se desloca no espaço ocupando, a posição P', sobre a nova superfície livre neste instante.

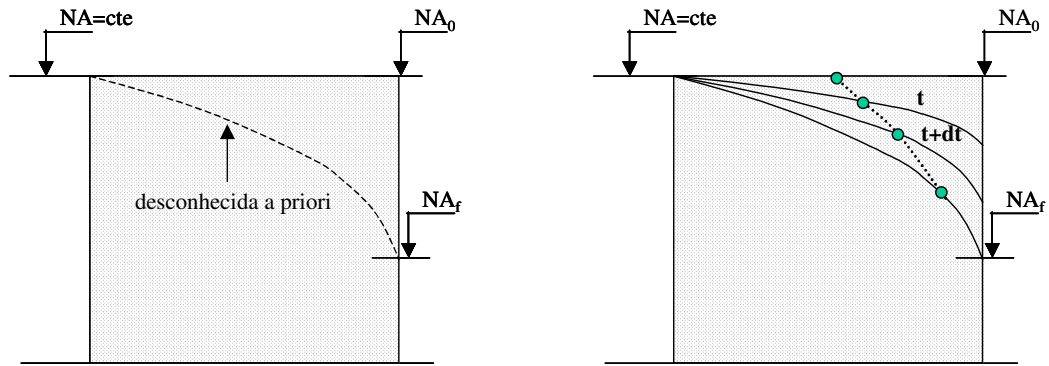


Figura 2.3 - Variação no NA num problema de fluxo não-confinado

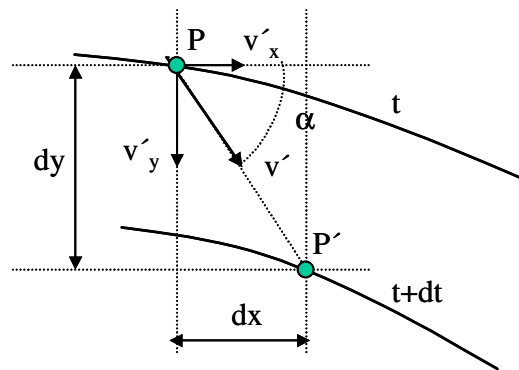


Figura 2.4 - Descrição do movimento de uma partícula de água sobre a superfície livre  
- detalhe 1.

No instante  $t$  o vetor velocidade  $\mathbf{v}'$  desta partícula de água encontra-se orientado de um ângulo  $\alpha$  com a horizontal definido como:

$$\operatorname{tg} \alpha = v'_y / v'_x \quad (2.10)$$

e tem magnitude definida como

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} \quad (2.11)$$

em que

$$v'_x = \frac{v_x}{S_y} \quad (2.12a)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{S_y} \quad (2.12b)$$

$v_x$  e  $v_y$  são, respectivamente, as componentes cartesianas da velocidade de um ponto sobre a superfície livre, ou simplesmente velocidade de fluxo superficial e  $S_y$  é o rendimento específico do solo usado em problemas de fluxo não-confinado. Walton (1970) sugere, como mostrado na Tabela 2.1, valores típicos para a porosidade  $n$  e para o rendimento específico  $S_y$  de alguns tipos de solo. Valores elevados de  $S_y$  refletem um maior rendimento na quantidade de água drenada dos poros de um aquífero não-confinado. Para solos saturados, o valor de  $S_y$  é idêntico ao da porosidade efetiva  $n_e$  (Hsi e Small, 1992a).

Tabela 2.1 – Faixas representativas de porosidade e rendimentos específicos.

Solo /Rocha	Porosidade (n) (%)	Rendimento Específico ( $S_y$ ) (%)
Argila	45 – 55	1 – 10
Areia	35 – 40	10 – 30
Pedregulho	30 – 40	15 – 30
Areia e pedregulho	20 – 35	15 – 25
Arenito	10 – 20	5 – 15
Granito	1 – 10	0.5 – 5
Calcário	1 – 10	0.5 – 5

(Walton, 1970)

A variação na carga hidráulica total  $dh^{FS}$  entre as superfícies freáticas do instante  $t$  para  $t+dt$ , pode ser determinada fazendo:

$$dh^{FS} = dy - dx \operatorname{tg} \beta = v'_y dt - v'_x dt \operatorname{tg} \beta \quad (2.13)$$

em que  $\beta$  é o ângulo entre o segmento da superfície freática e a direção  $x$  e é positivo no sentido horário, conforme ilustrado na Figura 2.5.

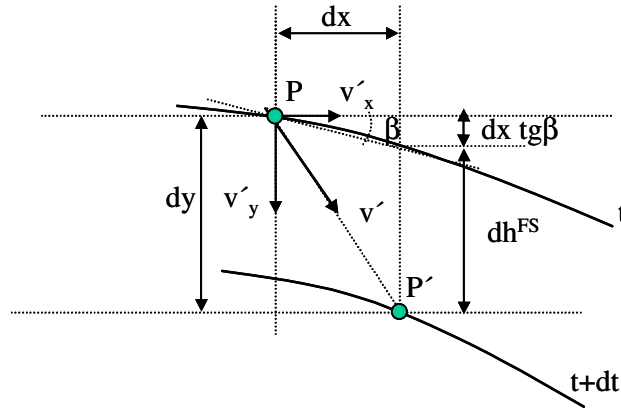


Figura 2.5 - Descrição do movimento de uma partícula de água sobre a superfície livre  
- detalhe 2.

Pré-multiplicando a Equação 2.13 por  $\cos\beta$  e re-arranjando os termos obtém-se a distância  $dh^{FS} \cos\beta$  entre as superfícies, na direção normal à superfície freática no instante  $t$ , conforme ilustrado na Figura 2.6. Assim sendo,

$$dh^{FS} \cos\beta = (v'_y \cos\beta - v'_x \sin\beta) dt \quad (2.14)$$

ou ainda,

$$dh^{FS} \cos\beta = v'_n dt \quad (2.15)$$

em que

$$v'_n = v'_y \cos\beta - v'_x \sin\beta \quad (2.16)$$

é a velocidade real da partícula de água sobre a superfície freática na direção da normal. Analogamente à definição das Equações 2.12, tem-se que a velocidade de fluxo na direção normal a superfície freática é tomada como:

$$v_n = S_y v'_n = S_y v'_y \cos\beta - S_y v'_x \sin\beta \quad (2.17)$$

ou ainda,

$$v_n = v_y \cos\beta - v_x \sin\beta \quad (2.18)$$

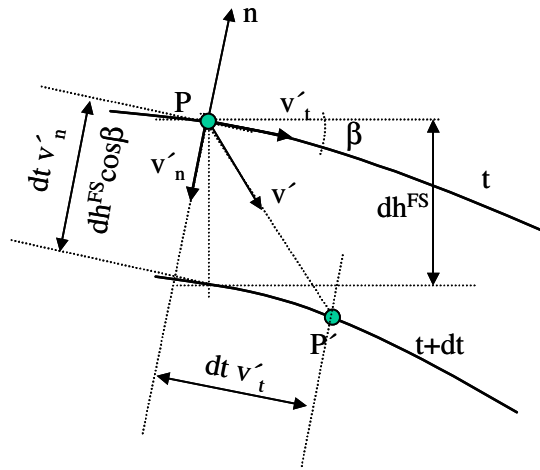


Figura 2.6 - Descrição do movimento de uma partícula de água sobre a superfície freática - detalhe 3.

Na forma matricial, a Equação 2.9 é dada por:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{n} = -v_n \quad (2.19)$$

em que

$$\mathbf{n}^T = [-\sin \beta \quad \cos \beta] \quad (2.20)$$

$$\mathbf{v}^T = [v_x \quad -v_y] \quad (2.21)$$

e representa a condição de contorno que deverá ser imposta ao longo da superfície livre (piezométrica) de modo a garantir o equilíbrio e conservação de massa durante a variação do nível d'água. A magnitude da velocidade normal de fluxo ao longo da superfície livre é obtida a partir da Equação 2.6, ou seja:

$$v_n = S_y \frac{dh^{FS}}{dt} \cos \beta \quad (2.22)$$

## 2.2 - O MODELO MATEMÁTICO

Seja um meio poroso saturado e deformável definido por um domínio  $V$  e limitado por uma superfície de contorno  $S$ , sujeito a pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Supondo os grãos sólidos e o fluido que preenche os vazios incompressíveis, podem-se escrever as equações diferenciais parciais que governam o problema do adensamento como sendo:

$$\nabla_u^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ em } V \quad (2.23a)$$

$$\nabla_h^T \mathbf{v} + \mathbf{m}^T (\nabla_u \dot{\mathbf{u}}) = 0 \text{ em } V \quad (2.23b)$$

A Equação 2.23a representa a condição de equilíbrio estático escrita em termos da tensão total  $\boldsymbol{\sigma}$  e a Equação 2.23b, a condição de continuidade.

Para a condição de estado plano de deformação tem-se que  $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy}]$  é o vetor das tensões totais;  $\mathbf{b}^T = [0 \quad -\gamma_{\text{sat}}]$  é o vetor de força de corpo em que  $\gamma_{\text{sat}}$  é o peso específico saturado do solo;  $\mathbf{m}^T (\nabla_u \dot{\mathbf{u}})$  é a taxa de deformação volumétrica em que  $\mathbf{u}^T = [u_x \quad u_y]$  é o vetor deslocamento;  $\mathbf{m}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$  é um vetor de ajuste de equações;  $\mathbf{v}^T = [v_x \quad v_y]$  é o vetor de velocidade superficial de fluxo; e ,  $\nabla_u$  e  $\nabla_h$  são operadores diferenciais em deslocamento e carga hidráulica total, respectivamente, para condição plana de deformação e fluxo.

Pelo princípio das Tensões Efetivas tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + p\mathbf{m} \quad (2.24)$$

em que

$$p = \gamma_w h_p = \gamma_w (h - h_e) \quad (2.25)$$



é o escalar poro-pressão em que  $h_p$  é a carga hidráulica de pressão,  $h$  é a carga hidráulica total,  $h_e$  é a carga hidráulica de elevação e  $\gamma_w$  é o peso específico da água.

O vetor das componentes de tensão efetiva  $\boldsymbol{\sigma}'^T = [\sigma'_x \quad \sigma'_y \quad \sigma'_z \quad \tau_{xy}]$  se relaciona com o vetor das componentes de deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy}]$  através da matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.26)$$

A matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  depende do modelo constitutivo adotado para representar a relação tensão-deformação (Nogueira, 1998).

O vetor das componentes de deformação, por sua vez, se relaciona com o vetor dos deslocamentos através da seguinte relação cinemática:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\nabla_u \mathbf{u} \quad (2.27)$$

O sinal negativo nesta relação indica a convenção de sinal de compressão positiva.

Supondo válida a lei de Darcy, tem-se:

$$\mathbf{v} = \mathbf{k}\mathbf{i} \quad (2.28)$$

em que

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

é a matriz das permeabilidades em que

$$k_{xx} = k_1 \cos^2 \varphi + k_3 \sin^2 \varphi \quad (2.30a)$$

$$k_{yy} = k_1 \sin^2 \varphi + k_3 \cos^2 \varphi \quad (2.30b)$$

$$k_{xy} = k_{yx} = (k_1 - k_3) \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.30c)$$

sendo  $\varphi$  o ângulo formado entre a direção  $x$  e a direção principal maior; e,  $k_1$  e  $k_3$  as permeabilidades principais maior e menor.

O vetor gradiente hidráulico é dado por

$$\mathbf{i} = -\nabla_h h \quad (2.31)$$

Substituindo as Equações 2.25, 2.26 e 2.27 na 2.24 e a equação 2.31 na 2.28, e aplicando o resultado nas equações 2.23, chega-se às equações de governo do problema em questão escrita em termos dos deslocamentos e carga hidráulica total.

$$\nabla_u^T (-D \nabla_u \mathbf{u}) + \gamma_w h \mathbf{m} - \gamma_w h_e \mathbf{m} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ em } V \quad (2.32a)$$

$$\nabla_h^T (-\mathbf{k} \nabla_h h) + \mathbf{m}^T (\nabla_u \dot{\mathbf{u}}) = 0 \text{ em } V \quad (2.32b)$$

Estas equações deverão atender às seguintes condições de contorno:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = -\bar{\mathbf{T}} \text{ em } S_\sigma \quad (2.33a)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } S_u \quad (2.33b)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{n} = -q \text{ em } S_v \quad (2.33c)$$

$$h = \bar{h} \text{ em } S_h \quad (2.33d)$$

$$h^{FS} = h_e = f(x, y, t) \text{ em } S^{FS} \quad (2.33e)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{n} = -v_n = -(\dot{S}_y h^{FS} \cos \beta) \text{ em } S^{FS} \quad (2.33f)$$

em que  $\mathbf{n}$  representa o vetor normal a uma dada superfície;  $\bar{\mathbf{T}}$  representa as forças de superfície atuando num contorno  $S_\sigma$ ;  $\bar{\mathbf{u}}$  representa os deslocamentos prescritos num contorno  $S_u$ ;  $q$  representa um fluxo prescrito num contorno  $S_v$ ;  $\bar{h}$  representa a carga hidráulica prescrita num contorno  $S_h$ ; e,  $S^{FS}$  corresponde à superfície livre (piezométrica).

As Equações 2.32, também, deverão atender à seguinte condição inicial:

$$\mathbf{m}^T (\nabla_u \dot{\mathbf{u}}) = 0 \text{ em } t = 0^+ \quad (2.33g)$$

indicando uma de deformação volumétrica nula, imediatamente após uma dada sollicitação, o que corresponde a uma resposta não drenada no solo.

# CAPÍTULO 3

---

## O MODELO NUMÉRICO

### 3.1 - EQUAÇÕES GOVERNADORAS VIA MEF

As Equações 2.32, reapresentadas a seguir, governam o problema do adensamento considerando o efeito da variação do nível d'água, conforme apresentado no Capítulo 2 deste trabalho.

$$\nabla_u^T (\mathbf{D}(-\nabla_u \mathbf{u}) + \gamma_w h \mathbf{m} - \gamma_w h_e \mathbf{m}) - \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ em } V$$

$$\nabla_h^T (-\mathbf{k} \nabla_h h) + \mathbf{m}^T (\nabla_u \dot{\mathbf{u}}) = 0 \text{ em } V$$

Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), pode-se obter a seguinte forma integral para essas equações:

$$\int_V \mathbf{u}^{*T} \{ \nabla_u^T [\mathbf{D}(-\nabla_u \mathbf{u}) + \gamma_w (h - h_e) \mathbf{m}] \} dV - \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV = 0 \quad (3.1a)$$

$$\int_V h^* \nabla_h^T (-\mathbf{k} \nabla_h h) dV + \int_V h^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (3.1b)$$

ou ainda,

$$\int_V \mathbf{u}^{*T} (\nabla_u^T \mathbf{D}(-\nabla_u \mathbf{u})) dV + \int_V \mathbf{u}^{*T} \nabla_u^T (\gamma_w h \mathbf{m}) dV - \int_V \mathbf{u}^{*T} \nabla_u^T (\gamma_w h_e \mathbf{m}) dV - \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV = 0 \quad (3.2a)$$

$$\int_V h^* \nabla_h^T (-\mathbf{k} \nabla_h h) dV + \int_V h^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (3.2b)$$

em que  $\mathbf{u}^*$  e  $h^*$  são, respectivamente, o vetor de deslocamentos virtuais e a carga hidráulica total virtual.

Aplicando o Teorema da Divergência e integrando por partes os três primeiros termos da Equação 3.2a e apenas o primeiro termo da Equação 3.2b, tem-se:

$$\begin{aligned} & - \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D}(-\nabla_u \mathbf{u}) dV + \int_S \mathbf{u}^{*T} \boldsymbol{\sigma}' n dS - \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h \mathbf{m} dV + \gamma_w \int_S \mathbf{u}^{*T} h \mathbf{m} n dS \\ & + \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h_e \mathbf{m} dV - \gamma_w \int_S \mathbf{u}^{*T} h_e \mathbf{m} n dS - \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV = 0 \end{aligned} \quad (3.3a)$$

$$- \int_V (\nabla_h h^*)^T (-\mathbf{k} \nabla_h h) dV + \int_S h^* (-\mathbf{k} \nabla_h h) n dS + \int_V h^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (3.3b)$$

Agrupando os termos do contorno,

$$\begin{aligned} & - \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D}(-\nabla_u \mathbf{u}) dV - \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h \mathbf{m} dV + \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h_e \mathbf{m} dV + \\ & \int_S \mathbf{u}^{*T} [\underbrace{\mathbf{D}(-\nabla_u \mathbf{u}) + \gamma_w (h - h_e) \mathbf{m}}_{\boldsymbol{\sigma}}] n dS - \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV = 0 \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$- \int_V (\nabla_h h^*)^T (-\mathbf{k} \nabla_h h) dV + \int_S h^* [\underbrace{-\mathbf{k} \nabla_h h}_{\mathbf{v}}] n dS + \int_V h^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (3.4b)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & - \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D}(-\nabla_u \mathbf{u}) dV - \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h \mathbf{m} dV + \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h_e \mathbf{m} dV + \\ & \int_S \mathbf{u}^{*T} \boldsymbol{\sigma} n dS - \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV = 0 \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$- \int_V (\nabla_h h^*)^T (-\mathbf{k} \nabla_h h) dV + \int_S h^* \mathbf{v} n dS + \int_V h^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (3.5b)$$

Aplicando-se agora as condições de contorno naturais (Equações 2.33), tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D} (-\nabla_u \mathbf{u}) dV - \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T \mathbf{h} \mathbf{m} dV + \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T \mathbf{h}_e \mathbf{m} dV \\
& - \int_S \mathbf{u}^{*T} \mathbf{T} dS - \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.6a}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_V (\nabla_h \mathbf{h}^*)^T (-\mathbf{k} \nabla_h \mathbf{h}) dV + \underbrace{\int_{S_v} \mathbf{h}^* (-q) dS_v}_{\text{parcela devido ao fluxo prescrito } q} + \underbrace{\int_{S_{FS}} \mathbf{h}^{FS*} (v_n) dS_{FS}}_{\text{parcela devido a variação do NA}} \\
& + \int_V \mathbf{h}^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0
\end{aligned} \tag{3.6b1}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
& - \int_V (\nabla_h \mathbf{h}^*)^T (-\mathbf{k} \nabla_h \mathbf{h}) dV - \int_{S_v} \mathbf{h}^* (q) dS_v + \int_{S_{FS}} \mathbf{h}^{FS*} (S_y \dot{\mathbf{h}}^{FS} \cos \beta) dS_{FS} + \int_V \mathbf{h}^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0
\end{aligned} \tag{3.6b2}$$

O vetor deslocamento  $\mathbf{u}$  e a carga hidráulica total  $h$  podem ser aproximados através do MEF em função dos vetores de deslocamentos e cargas hidráulicas nodais,  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\hat{\mathbf{h}}$ , respectivamente, como

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \tag{3.7a}$$

$$h = \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}} \tag{3.7b}$$

em que  $\mathbf{N}_u$  e  $\mathbf{N}_h$  são as matrizes que contém as funções de forma  $N_i$  do elemento Q8Q8 isoparamétrico quadrilateral quadrático de 8 nós, utilizado nesta dissertação.

Aplicando a aproximação pelo MEF (Equações 3.7) nas Equações 3.6, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_V (\nabla_u [\mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}^*])^T \mathbf{D} \nabla_u \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} dV - \gamma_w \int_V (\nabla_u [\mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}^*])^T \mathbf{m} \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}} dV \\
& + \gamma_w \int_V (\nabla_u [\mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}^*])^T \mathbf{m} \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}_e dV - \int_S [\mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}^*]^T \mathbf{T} dS - \int_V [\mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}^*]^T \mathbf{b} dV = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.8a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_V (\nabla_h [\mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}^*])^T (\mathbf{k} \nabla_h \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}) dV + \int_V [\mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}^*] \mathbf{m}^T [\nabla_u \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}] dV \\
& - \int_{S_v} [\mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}^*] q dS_v + \int_{S_{FS}} [\mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}^{FS*}] S_y \mathbf{N}_h \dot{\hat{\mathbf{h}}}^{FS} \cos \beta dS_{FS} = 0
\end{aligned} \tag{3.8b}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{u}}^{*T} \int_V \underbrace{(\nabla_u \mathbf{N}_u)^T}_{\mathbf{B}_u} \underbrace{\mathbf{D}(\nabla_u \mathbf{N}_u)}_{\mathbf{B}_u} \hat{\mathbf{u}} dV - \gamma_w \hat{\mathbf{u}}^{*T} \int_V \underbrace{(\nabla_u \mathbf{N}_u)^T}_{\mathbf{B}_u} \mathbf{m} \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}} dV \\
& + \gamma_w \hat{\mathbf{u}}^{*T} \int_V \underbrace{(\nabla_u \mathbf{N}_u)^T}_{\mathbf{B}_u} \mathbf{m} \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}_e dV - \hat{\mathbf{u}}^{*T} \int_S \mathbf{N}_u^T \mathbf{T} dS - \hat{\mathbf{u}}^{*T} \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.9a}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{h}}^{*T} \int_V \underbrace{(\nabla_h \mathbf{N}_h)^T}_{\mathbf{B}_h} \underbrace{(\mathbf{k} \nabla_h \mathbf{N}_h)}_{\mathbf{B}_h} \hat{\mathbf{h}} dV + \hat{\mathbf{h}}^{*T} \int_V \mathbf{N}_h^T \mathbf{m}^T \underbrace{\nabla_u \mathbf{N}_u}_{\mathbf{B}_u} \hat{\mathbf{u}} dV \\
& - \hat{\mathbf{h}}^{*T} \int_{S_v} \mathbf{N}_h^T q dS_v + \hat{\mathbf{h}}^{FS*T} \int_{S_{FS}} \mathbf{N}_h^T S_y \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}^{FS} \cos \beta dS_{FS} = 0
\end{aligned} \tag{3.9b}$$

continuando

$$\underbrace{\hat{\mathbf{u}}^{*T} \left\{ \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}} dV - \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}} dV + \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}_e dV - \int_S \mathbf{N}_u^T \mathbf{T} dS - \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV \right\}}_{=0} = \mathbf{0} \tag{3.10a}$$

$$\underbrace{\hat{\mathbf{h}}^{*T} \left\{ \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{k} \mathbf{B}_h \hat{\mathbf{h}} dV + \int_V \mathbf{N}_h^T \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}} dV - \int_{S_v} \mathbf{N}_h^T q dS_v + \int_{S_{FS}} \mathbf{N}_h^T S_y \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}^{FS} \cos \beta dS_{FS} \right\}}_{=0} = 0 \tag{3.10b}$$

Como  $\mathbf{u}^*$  e  $\mathbf{h}^*$  são valores quaisquer diferentes de zero, as equações anteriores serão sempre satisfeitas se:

$$\int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}} dV - \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_h dV \hat{\mathbf{h}} + \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_h dV \hat{\mathbf{h}}_e - \int_S \mathbf{N}_u^T \mathbf{T} dS - \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV = \mathbf{0} \tag{3.11a}$$

$$\int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{k} \mathbf{B}_h dV \hat{\mathbf{h}} + \int_V \mathbf{N}_h^T \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u dV \hat{\mathbf{u}} - \int_{S_v} \mathbf{N}_h^T q dS_v - \int_{S_{FS}} \mathbf{N}_h^T S_y \mathbf{N}_h \cos \beta dS_{FS} \hat{\mathbf{h}}^{FS} = 0 \tag{3.11b}$$

ou ainda,

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} - \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{F} \tag{3.12a}$$

$$\mathbf{C}^T \dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{G}^{FS} \dot{\hat{\mathbf{h}}}^{FS} + \mathbf{H} \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{Q} \quad (3.12b)$$

em que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_e \quad (3.13)$$

representa a força externa constituída das parcelas:

$$\mathbf{F}_t = \int_S \mathbf{N}_u^T \mathbf{T} dS \quad (3.14)$$

devido às forças de superfície  $\mathbf{T}$ ;

$$\mathbf{F}_b = \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV \quad (3.15)$$

devido à força de peso próprio  $\mathbf{b}$ ; e,

$$\mathbf{F}_e = \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{N}_h \mathbf{m} dV \hat{\mathbf{h}}_e = \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_e \quad (3.16)$$

devido à força de corpo referente à carga hidráulica de elevação; e

$$\mathbf{Q} = \int_{S_v} \mathbf{N}_h^T q dS_v \quad (3.17)$$

representa o vetor de fluxo nodal equivalente a uma taxa de infiltração prescrita  $q$ ;

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u dV \quad (3.18)$$

é a matriz de rigidez do esqueleto sólido;

$$\mathbf{C} = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_h dV \quad (3.19)$$

é a matriz de acoplamento,

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{k} \mathbf{B}_h dV \quad (3.20)$$

é a matriz de fluxo; e,

$$\mathbf{G}^{\text{FS}} = \int_{S_{\text{FS}}} \mathbf{N}_h^T \mathbf{S}_y \mathbf{N}_h \cos \beta dS_{\text{FS}} \quad (3.21)$$

é a matriz da superfície livre do meio.

Pré-multiplicando-se a Equação 3.12b por  $(-\gamma_w)$ , tem-se

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} - \gamma_w \mathbf{C}\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{F} \quad (3.22a)$$

$$-\gamma_w \mathbf{C}^T \dot{\hat{\mathbf{u}}} - \gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \dot{\hat{\mathbf{h}}}^{\text{FS}} - \gamma_w \mathbf{H}\hat{\mathbf{h}} = -\gamma_w \mathbf{Q} \quad (3.22b)$$

As Equações 3.22 podem ser agrupadas na seguinte forma compacta

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.23)$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\gamma_w \mathbf{C} & -\gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\gamma_w \mathbf{C}^T \\ \mathbf{0} & -\gamma_w \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{h}} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\dot{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{u}}} \\ \dot{\hat{\mathbf{h}}} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\gamma_w \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

A Equação 3.23 é classificada como uma equação diferencial ordinária de primeira ordem em relação ao tempo. Isto devido ao vetor  $\dot{\mathbf{d}}$  que contém a taxa de



variação dos vetores de deslocamentos e cargas hidráulicas totais nodais. Com isso, tem-se uma resposta dependente do tempo para as variáveis primárias do problema, deslocamento e carga hidráulica total. No Item 3.2, é apresentada a metodologia proposta neste trabalho para solução desta equação diferencial através de um esquema de integração no tempo.

### 3.2 - INTEGRAÇÃO NO TEMPO

Deseja-se encontrar a solução  $\mathbf{d}=\mathbf{d}(t)$  do sistema de equação diferencial ordinária de primeira ordem, representado pela Equação 3.23 e conhecendo-se seu valor inicial em  $t=0$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{h}}_e \end{Bmatrix}$$

Este problema pode ser resolvido numericamente discretizando o domínio do tempo em intervalos de tempo finitos; e, avaliando-se a solução no tempo em instantes conhecidos ( $t_{n+1}$ ,  $t_n$ , ...,  $t_0$ ) de modo que

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta \mathbf{d} \quad (3.29)$$

em que  $\Delta \mathbf{d}$  é obtido integrando-se a Equação 3.23 dentro do incremento de tempo  $\Delta t$ .

Dentre os métodos de passo simples para solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, do tipo da Equação 3.23, os mais difundidos são os da família de métodos trapezoidais generalizados, através dos quais pode-se obter a seguinte aproximação:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{d}} dt \cong \Delta t \left[ (1 - \alpha) \dot{\mathbf{d}}_n + \alpha \dot{\mathbf{d}}_{n+1} \right] \quad (3.30)$$

em que  $\alpha$  é uma constante de integração que depende do tipo de marcha no tempo adotada. Quando  $\alpha=0$  tem-se uma marcha explícita e o algoritmo gerado é conhecido

como *Forward Euler*. Para  $\alpha=0.5$  tem-se o algoritmo de Crank-Nicolson e para  $\alpha=1$  o algoritmo *Backward Euler*, ambos definindo uma marcha implícita.

Reescrevendo-se a Equação 3.23 no início, em  $t_n$ , e no final, em  $t_{n+1}$ , do intervalo de tempo  $\Delta t$ , tem-se

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{B}\mathbf{d}_n = \mathbf{f}_n \quad (3.31a)$$

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{B}\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (3.31b)$$

Assim sendo, pré-multiplicando-se a Equação 3.31a por  $(1-\alpha)\Delta t$  e a Equação 3.31b por  $\alpha\Delta t$ , e em seguida somando o resultado, chega-se a

$$\mathbf{A}\Delta t[(1-\alpha)\dot{\mathbf{d}}_n + \alpha\dot{\mathbf{d}}_{n+1}] + \alpha\Delta t[\mathbf{B}\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1}] + (1-\alpha)\Delta t[\mathbf{B}\mathbf{d}_n - \mathbf{f}_n] = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

Utilizando-se a definição da Equação 3.30, tem-se

$$\mathbf{A}[\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n] + \alpha\Delta t[\mathbf{B}\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1}] + (1-\alpha)\Delta t[\mathbf{B}\mathbf{d}_n - \mathbf{f}_n] = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

ou,

$$[\mathbf{A} + \alpha\Delta t\mathbf{B}][\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n] + \Delta t\mathbf{B}\mathbf{d}_n - \alpha\Delta t\Delta\mathbf{f} - \Delta t\mathbf{f}_n = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

Substituindo as definições 3.23 a 3.25 na Equação 3.34, tem-se,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \alpha\Delta t\mathbf{K} & -\alpha\Delta t\gamma_w\mathbf{C} \\ -\gamma_w\mathbf{C}^T & -\gamma_w\mathbf{G}^{\text{FS}} - \alpha\Delta t\gamma_w\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{u}} \\ \Delta\hat{\mathbf{h}} \end{Bmatrix} + \\ & \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\gamma_w\mathbf{C}^T \\ \mathbf{0} & -\gamma_w\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{h}} \end{Bmatrix}_n - \Delta t \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\gamma_w\mathbf{Q} \end{Bmatrix}_n - \alpha\Delta t \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{F} \\ -\gamma_w\Delta\mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Desmembrando-se os termos, tem-se,

$$\alpha\Delta t\mathbf{K}\Delta\hat{\mathbf{u}} - \alpha\Delta t\gamma_w\mathbf{C}\Delta\hat{\mathbf{h}} + \Delta t[\underbrace{\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}}_n - \gamma_w\mathbf{C}\hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{F}_n}_{=0}] - \alpha\Delta t\Delta\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.36a)$$

$$-\gamma_w \mathbf{C}^T \Delta \hat{\mathbf{u}} - \alpha \Delta t \gamma_w \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{h}} - \gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \Delta \hat{\mathbf{h}}^{\text{FS}} - \Delta t \gamma_w \mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n + \Delta t \gamma_w \mathbf{Q}_n + \alpha \Delta t \gamma_w \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.36b)$$

A componente de equilíbrio,  $\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_n - \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{F}_n = \mathbf{0}$ , da Equação 3.36a se anula, pois representa o equilíbrio no final do passo anterior, desta forma, tem-se

$$\mathbf{K} \Delta \hat{\mathbf{u}} - \gamma_w \mathbf{C} \Delta \hat{\mathbf{h}} = \Delta \mathbf{F} \quad (3.37a)$$

$$-\gamma_w \mathbf{C}^T \Delta \hat{\mathbf{u}} - \alpha \Delta t \gamma_w \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{h}} = \gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \Delta \hat{\mathbf{h}}^{\text{FS}} + \gamma_w \Delta t [\mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta \mathbf{Q}] \quad (3.37b)$$

em que

$$\mathbf{K} \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (3.38a)$$

representa o incremento de força interna devido o incremento de tensão efetiva  $\Delta \sigma'$ ;

$$\gamma_w \mathbf{C} \Delta \hat{\mathbf{h}} \quad (3.38b)$$

representa o incremento de força interna devido à variação da carga hidráulica total  $\Delta \hat{h}$ ;

$$\Delta \mathbf{F} \quad (3.38c)$$

representa o incremento de força externa aplicada no passo corrente;

$$\Delta t [\mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta \mathbf{Q}] \quad (3.38d)$$

representa a variação de volume imposta num dado incremento de tempo;

$$\mathbf{G}^{\text{FS}} \Delta \hat{\mathbf{h}}^{\text{FS}} \quad (3.38e)$$

representa a variação de volume imposta devido à variação do nível d'água;

$$\mathbf{C}^T \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (3.38f)$$

representa a variação de volume devido à variação da tensão efetiva;

$$-\alpha \Delta t \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{h}} \quad (3.38g)$$

representa a variação de volume devido à variação da carga hidráulica total.

### 3.3 - ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES GOVERNADORAS

A Equação 3.37 pode ser utilizada nos casos de fluxo confinado e não-confinado. No primeiro caso, a parcela  $\gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \Delta \hat{\mathbf{h}}^{\text{FS}}$  é conhecida a priori e uma solução puramente incremental pode ser adotada na solução do sistema de equação algébrico. No segundo caso, essa parcela não é conhecida a priori, ou ao menos, não é conhecida ao longo de toda superfície livre. Assim sendo, um esquema iterativo torna-se necessário para a solução do sistema de equações.

#### 3.3.1 - Processo Puramente Incremental

No esquema de solução puramente incremental a parcela  $\gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \Delta \hat{\mathbf{h}}^{\text{FS}}$  é conhecida e o seguinte sistema de equação é resolvido:

$$\mathbf{K}_G \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{F} \quad (3.39)$$

em que  $\mathbf{K}_G$  é a matriz global tomada como constante para o passo corrente e definida como:

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\gamma_w \mathbf{C} \\ -\gamma_w \mathbf{C}^T & -\gamma_w (\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

em função da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , da matriz de acoplamento  $\mathbf{C}$ , da matriz de fluxo  $\mathbf{H}$ , da matriz da superfície livre,  $\mathbf{G}^{\text{FS}}$ , do incremento de tempo  $\Delta t$ , e da marcha no tempo adotada.

Na Equação 3.39,  $\Delta \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \Delta \hat{\mathbf{h}} \end{Bmatrix}$  é o vetor das variáveis dependentes (incremento

de deslocamento e carga hidráulica) e  $\Delta \mathbf{F}$  é o vetor de variáveis independentes, definido como

$$\Delta \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \Delta F \\ \gamma_w \Delta t [\mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta \mathbf{Q}] \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.3.2 - Processo Iterativo

Conforme mencionado no Item 3.2, no caso de problemas de fluxo não-confinado, a Equação 3.37 é não-linear uma vez que a parcela  $\gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \Delta \hat{\mathbf{h}}^{\text{FS}}$  não é conhecida a priori, ou ao menos, não é conhecida ao longo de toda superfície livre.

Por conveniência, a fim de se tratar a questão relacionada à não-linearidade, torna-se necessário reescrever as Equações 3.37 no instante  $t_{n+1}$ . Desta forma, considerando que

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_n \quad (3.42a)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}_{n+1} - \hat{\mathbf{h}}_n \quad (3.42b)$$

e aplicando na Equação 3.37, chega-se a

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_{n+1} - \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_{n+1} = \Delta \mathbf{F} + [\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_n - \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_n] \quad (3.43a)$$

$$\begin{aligned} -\gamma_w \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_{n+1} - \gamma_w [\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}] \hat{\mathbf{h}}_{n+1} = & -\gamma_w \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_n - \gamma_w [\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}] \hat{\mathbf{h}}_n \\ & + \gamma_w \Delta t [\mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta t \gamma_w \Delta \mathbf{Q}] \end{aligned} \quad (3.43b)$$

A seguinte fórmula de recorrência é utilizada no processo de solução iterativo

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^k = \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1} + \delta \hat{\mathbf{u}}^k \quad (3.44a)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_{n+1}^k = \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1} + \delta \hat{\mathbf{h}}^k \quad (3.44b)$$

Substituindo os termos em  $t_{n+1}$  da Equação 3.43 pela fórmula de recorrência (Equação 3.44), chega-se a

$$\mathbf{K} \delta \hat{\mathbf{u}}^k - \gamma_w \mathbf{C} \delta \hat{\mathbf{h}}^k = \Delta \mathbf{F} + [\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_n - \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_n] - [\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1} - \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1}] \quad (3.45a)$$

$$\begin{aligned} -\gamma_w \mathbf{C}^T \delta \hat{\mathbf{u}}^k - \gamma_w [\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}] \delta \hat{\mathbf{h}}^k = & \gamma_w \Delta t [\mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta t \gamma_w \Delta \mathbf{Q}] + \\ & [-\gamma_w \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_n - \gamma_w [\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}] \hat{\mathbf{h}}_n] - [-\gamma_w \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1} - \gamma_w [\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}] \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1}] \end{aligned} \quad (3.45b)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\gamma_w \mathbf{C} \\ -\gamma_w \mathbf{C}^T & -\gamma_w (\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}^k \\ \delta \mathbf{h}^k \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\zeta}_{n+1}^{k-1} \quad (3.46)$$

em que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_{n+1}^{k-1} = & \left\{ \gamma_w \Delta t [\mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta t \gamma_w \Delta \mathbf{Q}] \right\} + \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\gamma_w \mathbf{C} \\ -\gamma_w \mathbf{C}^T & -\gamma_w [\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}] \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{h}} \end{Bmatrix}_n - \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\gamma_w \mathbf{C} \\ -\gamma_w \mathbf{C}^T & -\gamma_w [\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}] \end{bmatrix}_{n+1}^{k-1} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{h}} \end{Bmatrix}_{n+1}^{k-1} \end{aligned} \quad (3.47)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_{n+1}^{k-1} = & \left\{ \gamma_w \Delta t [\mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta t \gamma_w \Delta \mathbf{Q}] \right\} + \\ & + \left\{ \begin{aligned} & [\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_n - \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_n] - [\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1} - \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1}] \\ & [-\gamma_w \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_n - \gamma_w [\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}] \hat{\mathbf{h}}_n] - [-\gamma_w \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1} - \gamma_w [\mathbf{G}^{\text{FS}} + \alpha \Delta t \mathbf{H}] \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1}] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Das Equações 3.18, 3.19 e 3.20, tem-se que

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_n = \int_V \mathbf{B}_u^T \underbrace{\mathbf{D} \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}}_n}_{-\boldsymbol{\sigma}'_n} dV = - \int_V \mathbf{B}_u^T \boldsymbol{\sigma}'_n dV \quad (3.49a)$$

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1} = \int_V \mathbf{B}_u^T \underbrace{\mathbf{D} \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1}}_{-\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{k-1}} dV = - \int_V \mathbf{B}_u^T \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{k-1} dV \quad (3.49b)$$

$$-\gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_n = -\gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \underbrace{\mathbf{m} \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}_n}_{\mathbf{h}_n} dV = -\gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{h}_n dV \quad (3.50a)$$

$$-\gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1} = -\gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \underbrace{\mathbf{m} \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1}}_{\mathbf{h}_{n+1}^{k-1}} dV = -\gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{h}_{n+1}^{k-1} dV \quad (3.50b)$$

$$-\gamma_w \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_n = -\gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \underbrace{\mathbf{m}^T \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}}_n}_{-\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}_n}} dV = \gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}_n} dV \quad (3.51a)$$

$$-\gamma_w \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1} = -\gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \underbrace{\mathbf{m}^T \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1}}_{-\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}n+1}^{k-1}} dV = \gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}n+1}^{k-1} dV \quad (3.51b)$$

$$-\alpha \Delta t \gamma_w \mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n = -\alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T \underbrace{\mathbf{k} \mathbf{B}_h \hat{\mathbf{h}}_n}_{-\mathbf{v}_n} dV = \alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{v}_n dV \quad (3.52a)$$

$$-\alpha \Delta t \gamma_w \mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1} = -\alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T \underbrace{\mathbf{k} \mathbf{B}_h \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1}}_{-\mathbf{v}_{n+1}^{k-1}} dV = \alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{v}_{n+1}^{k-1} dV \quad (3.52b)$$

Logo, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_{n+1}^{k-1} = & \left\{ \gamma_w \Delta t [\mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta t \gamma_w \Delta \mathbf{Q}] \right\}^+ \\ & \left\{ \begin{aligned} & - \int_V \mathbf{B}_u^T \boldsymbol{\sigma}'_n dV - \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} h_n dV \\ & \gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}n} dV + \alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{v}_n dV - \gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \hat{\mathbf{h}}_n \end{aligned} \right\}^- \\ & \left\{ \begin{aligned} & - \int_V \mathbf{B}_u^T \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{k-1} dV - \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} h_{n+1}^{k-1} dV \\ & \gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}n+1}^{k-1} dV + \alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{v}_{n+1}^{k-1} dV - \gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_{n+1}^{k-1} = & \left\{ \gamma_w \Delta t [\mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta t \gamma_w \Delta \mathbf{Q}] \right\}^+ \\ & \left\{ \begin{aligned} & \int_V \mathbf{B}_u^T (\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{k-1} - \boldsymbol{\sigma}'_n) dV + \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} (h_{n+1}^{k-1} - h_n) dV \\ & - \gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \mathbf{m} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{k-1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n) dV - \alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T (\mathbf{v}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{v}_n) dV + \gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} (\hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1} - \hat{\mathbf{h}}_n) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Então fazendo:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}'^{k-1} = \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{k-1} - \boldsymbol{\sigma}'_n \quad (3.55a)$$

$$\Delta h^{k-1} = h_{n+1}^{k-1} - h_n \quad (3.55b)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{k-1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (3.55c)$$

$$\Delta \mathbf{v}^{k-1} = \mathbf{v}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{v}_n \quad (3.55d)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{h}}^{k-1} = \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1} - \hat{\mathbf{h}}_n \quad (3.55e)$$

chega-se a

$$\zeta_{n+1}^{k-1} = \left\{ \gamma_w \Delta t \left[ \mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta t \gamma_w \Delta \mathbf{Q} \right] \right\} + \left\{ \begin{aligned} & \int_V \mathbf{B}_u^T \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{k-1} dV + \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \Delta \mathbf{h}^{k-1} dV \\ & - \gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \mathbf{m} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1} dV - \alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T \Delta \mathbf{v}^{k-1} dV + \gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \Delta \hat{\mathbf{h}}^{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

ou ainda, numa forma compacta:

$$\zeta_{n+1}^{k-1} = \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} - \Delta \mathbf{F}_{\text{int}}^{k-1} \quad (3.57)$$

em que

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} = \left\{ \gamma_w \Delta t \left[ \mathbf{H} \hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta t \gamma_w \Delta \mathbf{Q} \right] \right\} \quad (3.58a)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{int}}^{k-1} = \left\{ \begin{aligned} & - \int_V \mathbf{B}_u^T \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{k-1} dV - \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \Delta \mathbf{h}^{k-1} dV \\ & \gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \mathbf{m} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1} dV + \alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T \Delta \mathbf{v}^{k-1} dV - \gamma_w \mathbf{G}^{\text{FS}} \Delta \hat{\mathbf{h}}^{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.58b)$$

O ciclo iterativo é interrompido quando o seguinte critério de convergência é observado

$$\frac{\|\delta \hat{\mathbf{h}}^k\|}{\|\hat{\mathbf{h}}_{n+1}^k\|} < \text{TOLER} \quad (3.59)$$



### 3.4 - PROCESSO DE LOCALIZAÇÃO DA SUPERFÍCIE LIVRE

Durante a solução de um problema de fluxo não-confinado em regime transiente, torna-se necessária a localização da superfície livre em cada instante. No presente trabalho, a técnica de fluxo residual (Bathe *et al*, 1982 e Desai e Li 1983) com a malha fixa é empregada para localização da superfície livre.

#### 3.4.1 - Procedimento de Fluxo Residual

O procedimento de fluxo residual é uma das técnicas empregadas para solução de problemas que leva em conta o rebaixamento do nível d'água. Esta técnica considera que a água, inicialmente armazenada nos poros do solo entre duas superfícies livres consecutivas, é liberada e precisa ser imposta sob forma de fluxo ao longo da superfície livre atual. Desta forma, uma nova posição da superfície livre pode ser determinada.

Nas Equações governadoras, o termo relativo à superfície livre,  $\mathbf{G}^{FS}$ , impõe o fluxo nos nós dos elementos através dos quais a superfície livre passa. Esta matriz, no entanto, é avaliada ao longo da superfície livre que por sua vez deverá ser localizada a partir de uma posição anteriormente conhecida.

Sobre uma superfície livre (piezométrica), a carga total  $h$  é igual à carga de elevação  $h_e$ . Desta forma, pode-se obter a posição da superfície livre no sistema de coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$  resolvendo, em nível de cada elemento, a seguinte equação:

$$h - h_e = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta)(h_i - h_{e,i}) = 0 \quad (3.60)$$

em que  $N_i$  são as funções de forma do elemento finito adotado.

Assim, para um elemento isoparamétrico de 8 nós, a Equação 3.60 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} h - h_e &= N_1(\xi, \eta)(h_1 - h_{e,1}) + N_2(\xi, \eta)(h_2 - h_{e,2}) + \dots \\ &\dots + N_8(\xi, \eta)(h_8 - h_{e,8}) = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Hsi (1992) adotou o seguinte procedimento para determinação das coordenadas locais e globais ao longo da superfície livre:

1. Para qualquer elemento, a direção  $\xi$  pode ser dividida em segmentos iguais de acordo com a Figura 3.1. A extensão de cada segmento é dada por:

$$\Delta\xi = \frac{(+1)-(-1)}{ndiv} = \frac{2}{ndiv} \quad (3.62)$$

em que  $ndiv$  é o número de divisões na direção  $\xi$ .

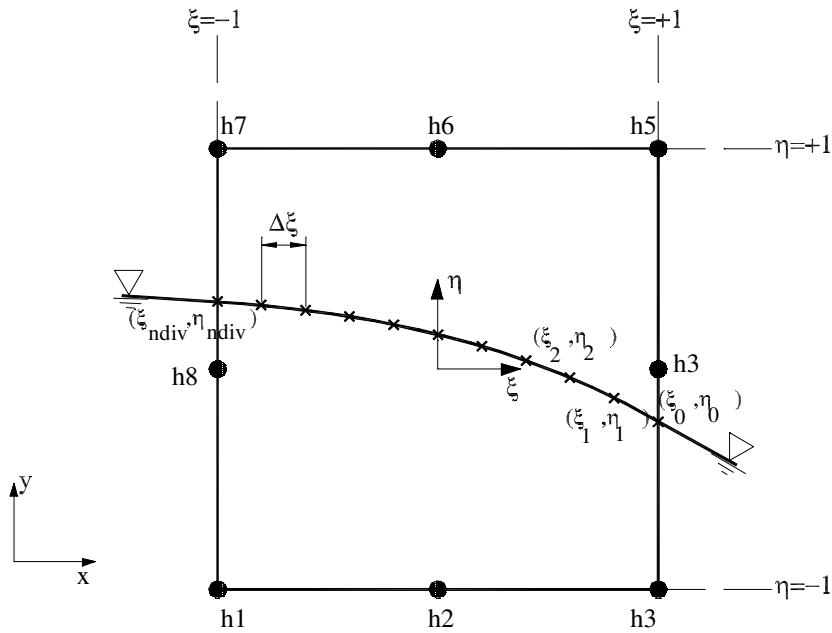


Figura 3.1 – Coordenadas locais da superfície livre no interior de um elemento (Hsi, 1992).

2. As coordenadas locais  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  mostradas na Figura 3.1, podem ser obtidas da seguinte forma:

$$\xi_k = \xi_{k-1} + \Delta\xi \quad (3.63)$$

em que  $k = 1, 2, 3, \dots, ndiv$  e  $\xi_0 = -1$  e  $\xi_n = +1$

3. A Equação 3.61 pode ser escrita em termos da coordenada natural  $\eta_k$  de um ponto k da seguinte forma:

$$A\eta_k^2 + B\eta_k + C = 0 \quad (3.64)$$

em que

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{4}\gamma_w(h_1 - h_{e,1})(1 - \xi_k) + \frac{1}{4}\gamma_w(h_3 - h_{e,3})(1 + \xi_k) + \\ & + \frac{1}{2}\gamma_w(h_4 - h_{e,4})(-1 - \xi_k) + \frac{1}{4}\gamma_w(h_5 - h_{e,5})(1 + \xi_k) + \\ & + \frac{1}{4}\gamma_w(h_7 - h_{e,7})(1 - \xi_k) + \frac{1}{2}\gamma_w(h_8 - h_{e,8})(-1 + \xi_k) \end{aligned} \quad (3.65a)$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{4}\gamma_w(h_1 - h_{e,1})(\xi_k - \xi_k^2) + \frac{1}{2}\gamma_w(h_2 - h_{e,2})(-1 + \xi_k^2) + \\ & + \frac{1}{4}\gamma_w(h_3 - h_{e,3})(-\xi_k - \xi_k^2) + \frac{1}{4}\gamma_w(h_5 - h_{e,5})(\xi_k + \xi_k^2) + \\ & + \frac{1}{2}\gamma_w(h_6 - h_{e,6})(1 - \xi_k^2) + \frac{1}{4}\gamma_w(h_7 - h_{e,7})(-\xi_k + \xi_k^2) \end{aligned} \quad (3.65b)$$

$$\begin{aligned} C = & \frac{1}{4}\gamma_w(h_1 - h_{e,1})(-1 + \xi_k^2) + \frac{1}{2}\gamma_w(h_2 - h_{e,2})(1 - \xi_k^2) + \\ & + \frac{1}{4}\gamma_w(h_3 - h_{e,3})(-1 + \xi_k^2) + \frac{1}{2}\gamma_w(h_4 - h_{e,4})(1 + \xi_k) + \\ & + \frac{1}{4}\gamma_w(h_5 - h_{e,5})(-1 + \xi_k^2) + \frac{1}{2}\gamma_w(h_6 - h_{e,6})(1 - \xi_k^2) + \\ & + \frac{1}{4}\gamma_w(h_7 - h_{e,7})(-1 + \xi_k^2) + \frac{1}{2}\gamma_w(h_8 - h_{e,8})(1 - \xi_k) \end{aligned} \quad (3.65c)$$

A Equação 3.64 deverá ser resolvida para todos os n pontos no interior do elemento e sua solução deverá pertencer ao intervalo de  $-1$  a  $+1$ . Caso  $\eta_k < -1$  ou  $\eta_k > +1$ , a superfície livre não pertencerá ao interior daquele elemento em  $\xi = \xi_k$ .

4. As coordenadas globais  $(x_k, y_k)$  ao longo da superfície livre no interior de um elemento podem ser calculadas quando existirem da seguinte forma:

$$x_k = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_k, \eta_k) x_i \quad (3.66a)$$

$$y_k = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_k, \eta_k) y_i \quad (3.66b)$$

em que  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas globais do nó  $i$ .

Seguindo os passos de 1 a 4 para cada elemento finito da malha, pode-se encontrar uma série de coordenadas  $(x,y)$  para a superfície livre e ao longo da qual deverá ser avaliada a matriz  $\mathbf{G}^{FS}$ .

Em problemas práticos de rebaixamento do NA, além do procedimento de fluxo residual, Hsi e Small (1992a, 1992b, 1992c, 1993) empregam o procedimento modificado de Cividini e Gioda (1984). Hsi e Small mostram que a simulação de escavação em solos mais permeáveis, onde a dissipação dos excessos negativos de poro-pressão é mais rápida, o método de fluxo residual pode ser aplicado com sucesso. Já em escavações realizadas em materiais pouco permeáveis, onde a dissipação desses excessos é muito lenta, o procedimento de fluxo residual pode não ser adequado, uma vez que este procedimento baseia-se na busca de contorno de poro-pressões nulas e nos estágios iniciais de uma escavação é comum o aparecimento de contornos nulos de poro-pressão que não sejam necessariamente a superfície livre. Portanto, enquanto as poro-pressões negativas não se dissiparem, o emprego do procedimento modificado de Cividini e Gioda (1984) é recomendado.

Nesta dissertação, foi implementado apenas o procedimento de fluxo residual por ser mais acurado e por não se tratar de um problema de remoção de tensões.

### 3.5 FUNÇÃO DE CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA

À medida que o nível d'água é rebaixado, o solo acima da superfície piezométrica torna-se "não-saturado". A região não-saturada aqui passará a ser chamada de região "seca" uma vez que uma condição de fluxo muito reduzida passa a ocorrer nessa região.

Dados experimentais têm demonstrado a existência de uma relação não-linear entre a condutividade hidráulica  $k$  e a poro-pressão ( $p = \gamma_w h_p$ ) e que esta relação não é única durante processos de infiltração e drenagem (comportamento histerético), como é ilustrado na Figura 3.2

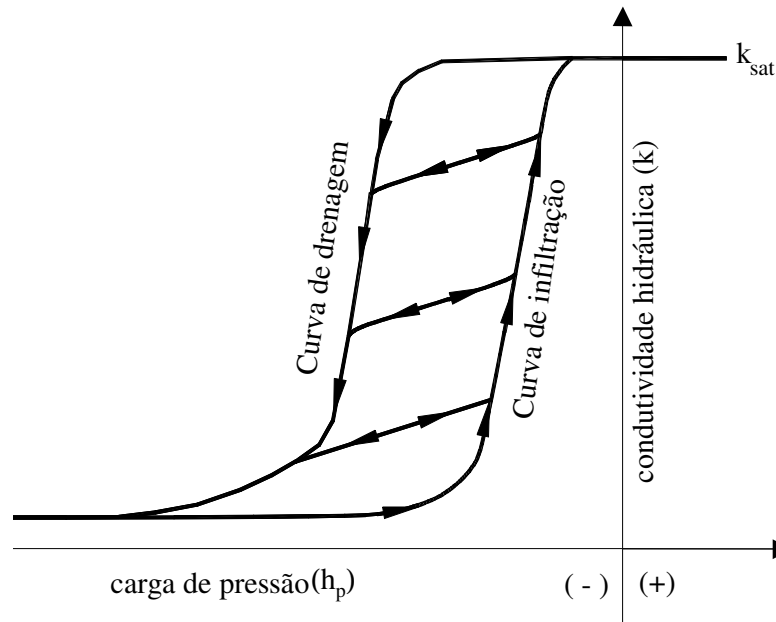


Figura 3.2 – Função de condutividade hidráulica (Liakopoulos, 1965).

Durante um processo de drenagem, a redução da saturação é acompanhada pela redução da poro-pressão, implicando na diminuição do valor da condutividade hidráulica. Da mesma forma, durante um processo de infiltração, a condutividade hidráulica terá seu valor aumentado em função do aumento da poro-pressão do meio, atingindo seu valor máximo na condição de saturação total.

Nas análises de problemas de fluxo envolvendo variação do nível d'água, a metodologia da redução da permeabilidade do solo acima da superfície livre é utilizada como forma de minimizar o fluxo nesta região (Desai e Li, 1983; Hsi e Small, 1992a). Com este procedimento, pode-se perfazer uma análise mais próxima das condições de campo. No entanto, problemas de instabilidade numérica foram observados e dois procedimentos podem ser adotados na tentativa de solucionar esta questão:

1. Adoção de uma função de condutividade hidráulica, tal como, ilustrada na Figura 3.3, para a qual o decréscimo da permeabilidade está linearmente relacionado com a diminuição da poro pressão ( $p = \gamma_w h_p$ ) até atingir-se um valor limite,  $p_{lim}$ , a partir do qual a condutividade hidráulica atinge também o seu valor mínimo  $k_{lim}$  (Bower, 1964; Freeze, 1971; Cathie e Dungar, 1975; Desai e Li, 1983; Hsi e Small, 1992; Gonçalves, 1996).

O valor de  $p_{lim}$  também pode ser obtido experimentalmente ou podem-se admitir pequenos valores negativos. Hsi e Small (1992) utilizam uma faixa de variação de  $-5\text{ kPa}$  a  $-50\text{ kPa}$ . Gonçalves (1996) observou problemas de instabilidade numérica em análises realizadas adotando-se valores de  $p_{lim}$  entre 0 e  $-20\text{ kPa}$ .

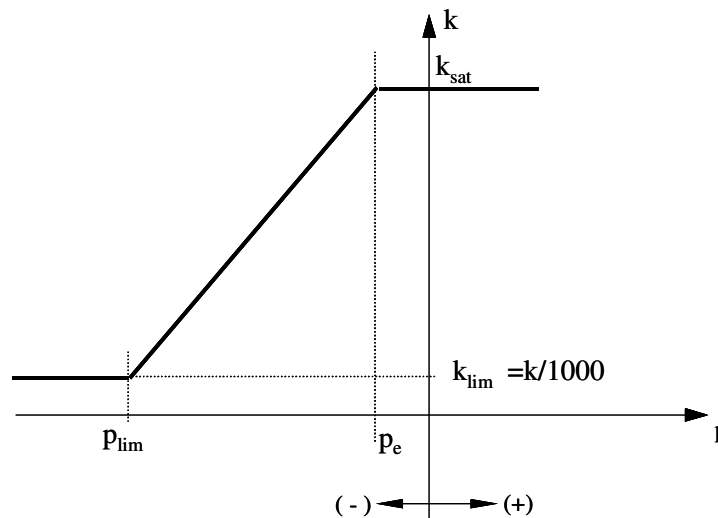


Figura 3.3 – Função de condutividade hidráulica.

2. As permeabilidades nos pontos de Gauss dos elementos em que a superfície livre passa, não devem ser reduzidas (Hsi, 1992).

A Figura 3.3 mostra ainda da pressão de entrada de ar no solo,  $p_e$ , que é definida como o valor limite entre o estado saturado e o não-saturado. Solos finos tendem a desenvolver razoável capilaridade e valores negativos de  $p_e$  devem ser considerados podendo ser determinados experimentalmente.

# CAPÍTULO 4

---

## IMPLEMENTAÇÕES COMPUTACIONAIS

Inicialmente desenvolvido por Zornberg (1989), o programa ANLOG (Análise Não-Linear de Obras Geotécnicas) foi implementado para análises elastoplásticas de problemas de equilíbrio estático sob condições de deformação plana e axissimétrica através do método de elementos finitos.

Nogueira (1998) expandiu o ANLOG para análises com acoplamento de fluxo e deformações considerando deslocamento e poro-pressão como variáveis primárias. Nessa versão, elementos finitos superparamétricos em poro-pressão e isoparamétricos em deslocamentos foram utilizados. Adicionalmente, foram incorporados outros modelos constitutivos, outras técnicas de solução de problemas não - lineares, e ainda, a técnica de simulação de escavações baseada na técnica proposta por Ghaboussi e Pecknold (1984) e na formulação de Brown e Booker (1985).

Nessas versões, a característica principal para gerenciamento do programa é o uso de estrutura em macro-comandos. O emprego de macro-comandos tem a vantagem de possibilitar a simulação de seqüências construtivas de aterros e escavações de forma muito simples. Eles foram utilizados na análise de diversos casos históricos (Zornberg, 1989; Azevedo *et al.*, 1994; Azevedo e Azevedo 1994; Nogueira, 1992; Nogueira 1998, Pereira, 2003).

Pereira (2003) desenvolveu a versão para análise de estruturas de solos reforçados considerando o elemento de interface entre o elemento de barra (reforço) e o elemento de solo.

Neste trabalho, uma formulação numérica utilizando carga hidráulica total como variável primária em fluxo foi implementada. O rebaixamento da superfície livre, como fator causador do processo de adensamento, foi incorporado nesta formulação e o método de solução do problema acoplado é puramente incremental.

Subrotinas para prescrição de valores não-nulos das variáveis primárias utilizando técnicas propostas em Cook *et al.*(1989), também foram implementadas no presente trabalho.

O ANLOG pode ser utilizado juntamente com os pré e pós-processadores gráficos **MTOOL** e **MVIEW** desenvolvidos pelo Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica da PUC-Rio em convênio com a PETROBRÁS.

## **4.1 - MACRO - COMANDOS**

A seqüência mais usual de macro-comandos do ANLOG e que segue o modelo tradicional de um programa de elementos finitos é ilustrada na Figura 4.1

O macro-comando DADOS ativa um bloco de rotinas responsável pela leitura dos dados geométricos (coordenadas e conectividades), dos materiais (modelo constitutivo e seus parâmetros), e das condições de contorno de uma malha de elementos finitos.

Os macro-comandos CPOIN, CEDGE e CGRAV são responsáveis pela montagem do vetor de carregamento nodal equivalente devido às forças pontuais, de superfície e de corpo (peso próprio), respectivamente.

De forma análoga, QEDGE é responsável pelo cálculo da vazão nodal equivalente a uma taxa de infiltração numa dada superfície.



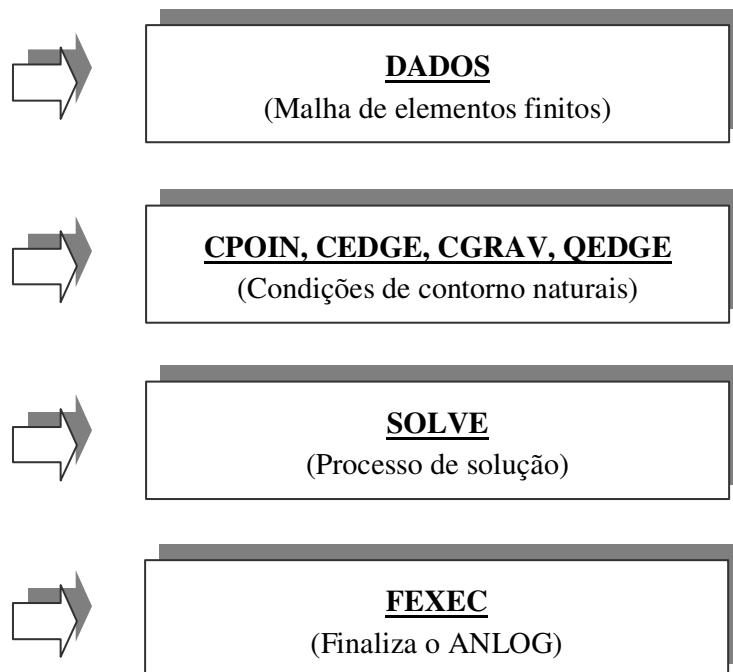


Figura 4.1 – Seqüência de macro- comandos do programa ANLOG

SOLVE monta as matrizes elementares e resolve o sistema de equações. Este comando é responsável também pela obtenção das variáveis secundárias (deformação, tensão, gradiente hidráulico e velocidade de fluxo).

Além dos macro-comandos convencionais (DADOS, CPOIN, CEDGE, CGRAV e SOLVE) apresentados na Figura 4.1, tem-se, ainda:

- Macro-comandos para definição de estado de tensões iniciais isotrópicas e geostáticas (TINIS e TINK0).
- Macro-comandos utilizados na simulação de processos construtivos tais como: escavações, aterros e ativação e desativação de elementos de tirante e estronca (ESCAV, ATERR, BARAT e BARDE).
- Macro-comandos para geração de arquivos de saída gráfica (POSD, POSR, MVIEW, MV\_NT).

## 4.2 - ELEMENTO E MATRIZES CARACTERÍSTICAS

O elemento a ser utilizado por um programa depende do tipo de análise a ser realizada. Com o programa ANLOG três tipos de análise podem ser conduzidos:

- Análise não – acoplada (tensão – deformação) identificada na entrada de dados pela variável LLACOP=0.
- Análise acoplada (fluxo – deformação) utilizando poro-pressão como variável primária de fluxo (LLACOP=1).
- Análise acoplada (fluxo – deformação) utilizando carga total hidráulica como variável primária de fluxo (LLACOP=2) e considerando (DRDOWN=1) ou não (DRDOWN=0) o rebaixamento da superfície livre.

No caso de análises acopladas, utilizando carga total como variável primária utiliza-se o elemento plano Q8Q8 isoparamétrico em deslocamento e carga total com 24 graus de liberdade e mostrado na Figura 4.2.

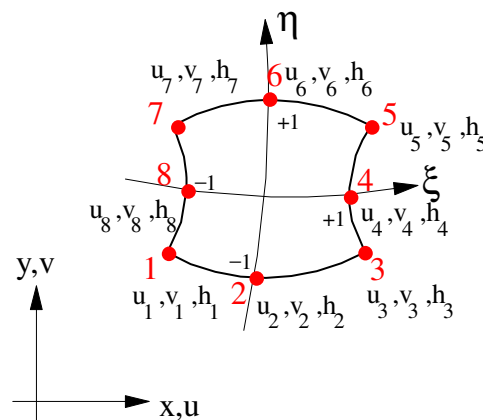


Figura 4.2 – Elemento Q8Q8

As funções de interpolação utilizadas na presente formulação (elemento Q8Q8) são funções quadráticas assim definidas:

$$N_i(\xi, \eta) = 0.25(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), i=1, 3, 5 \text{ e } 7 \quad (4.1)$$

$$N_i(\xi, \eta) = 0.5(\xi_i^2)(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + 0.5(\eta_i^2)(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2), i=2, 4, 6 \text{ e } 8 \quad (4.2)$$

em que  $\xi_i$  e  $\eta_i$  são os valores das coordenadas naturais,  $\xi$  e  $\eta$ , dos pontos nodais dos elementos as quais pertencem ao intervalo de  $-1$  a  $+1$  e são indicadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Coordenadas naturais dos pontos nodais do elemento Q8Q8.

NÓ	1	2	3	4	5	6	7	8
$\xi_i$	-1	0	+1	+1	+1	0	-1	-1
$\eta_i$	-1	-1	-1	0	+1	+1	+1	0

#### 4.2.1 - Aproximação do deslocamento e carga total

Neste trabalho, deslocamento e carga hidráulica total, em qualquer ponto no domínio do elemento, são escritos em função de suas respectivas variáveis nodais como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \quad (4.3)$$

em que

$$\mathbf{N}_{u[2 \times 8]} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (4.3a)$$

é a matriz das funções de interpolação em deslocamento e

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad v_1 \quad \dots \quad u_8 \quad v_8] \quad (4.3b)$$

é o vetor de deslocamentos nodais em que  $u$  e  $v$  são, respectivamente, as componentes do vetor de deslocamento nas direções  $x$  e  $y$ .

$$\mathbf{h} = \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}} \quad (4.4)$$

em que

$$\mathbf{N}_{h[1 \times 8]} = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_7 \quad N_8] \quad (4.4a)$$

é a matriz das funções de interpolação para a carga total e

$$\mathbf{h}^T = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_7 \quad h_8] \quad (4.4b)$$

é o vetor de cargas totais nodais.

#### 4.2.2 - Aproximação da geometria

As coordenadas de um determinado ponto são escritas em função das coordenadas dos pontos nodais através das funções de interpolação quadráticas.

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{x}} \quad (4.5)$$

em que

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad y_1 \quad \dots \quad x_8 \quad y_8] \quad (4.5a)$$

é o vetor das coordenadas locais dos pontos nodais.

A matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  é utilizada na transformação de sistema de coordenadas local - natural ( $xy$  e  $\xi\eta$ ) e para problemas planos é definida como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

em que

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \quad (4.6b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad (4.6c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \quad (4.6d)$$

O volume elementar  $dV = dx dy dz$  pode ser escrito em coordenadas naturais como

$$dV = t \det J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.7)$$

em que

$t = 1$  para problemas de deformação plana.

$t = 2\pi r$  para problemas de deformação axissimétrica.

$t =$  espessura para problemas de tensão plana.

#### 4.2.3 - Operadores diferenciais

Os operadores diferenciais,  $\nabla_u$  e  $\nabla_h$ , são operadores que aplicados às funções de interpolação dão origem às matrizes  $\mathbf{B}_u$  e  $\mathbf{B}_h$  que contêm as derivadas das funções de interpolação em deslocamento e carga total, respectivamente.

A matriz,  $\mathbf{B}_u$ , relaciona as deformações aos deslocamentos nodais. Assim sendo

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{[4 \times 1]} = \mathbf{B}_{u[4 \times 16]} \hat{\mathbf{u}}_{[16 \times 1]} \quad (4.8)$$

em que

$$\mathbf{B}_{u[4 \times 16]} = [\mathbf{B}_{u1} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{u8}] \quad (4.8a)$$

e

$$\mathbf{B}_{u_i} = \nabla_u \mathbf{N}_{u_i} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{N}_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial \mathbf{N}_i / \partial y \\ 0 & 0 \\ \partial \mathbf{N}_i / \partial y & \partial \mathbf{N}_i / \partial x \end{bmatrix} \quad (4.8b)$$

para problemas planos de deformação e tensão e

$$\mathbf{B}_{u_i} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{N}_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial \mathbf{N}_i / \partial y \\ \mathbf{N}_i / x & 0 \\ \partial \mathbf{N}_i / \partial y & \partial \mathbf{N}_i / \partial x \end{bmatrix} \quad (4.8c)$$

ara problemas axissimétricos.

Cada termo do operador diferencial  $\mathbf{B}_u$  pode ser obtido aplicando-se a regra da cadeia

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.8d)$$

De forma análoga, a matriz  $\mathbf{B}_h$ , relaciona o gradiente hidráulico às cargas totais:

$$\mathbf{i}_{[2 \times 1]} = \mathbf{B}_{h[2 \times 8]} \mathbf{h}_{[8 \times 1]} \quad (4.9)$$

em que

$$\mathbf{B}_{h[2 \times 8]} = [\mathbf{B}_{h1} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{h8}] \quad (4.9a)$$

e

$$\mathbf{B}_{h_i} = \nabla_h \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.9b)$$

para problemas planos.

### 4.3 - O MACRO- COMANDO SOLVE

O macro-comando SOLVE ativa a rotina de mesmo nome cuja função é resolver o problema definido pelo usuário. Neste item, são apresentadas as principais sub-rotinas que compõem a rotina SOLVE. No Quadro 4.1 são apresentados, na forma de um algoritmo, os passos básicos envolvidos na solução do problema ativados pelo macro-comando SOLVE.

Quadro 4.1 - Seqüência básica do macro comando SOLVE.

1. Define a dimensão das matrizes.
2. Inicializa os vetores de força desequilibrada ( $\delta \Delta \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ) e incremento de deslocamento/carga total ( $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$ ) e a matriz global  $\mathbf{K}_G = \mathbf{0}$ .
3. Define o número de blocos carga e tempo.
4. Inicializa os fatores de carga e tempo,  $\lambda_c = 0.0$  e  $\lambda_t = 0.0$ .
5. Define a função de carga e tempo através dos vetores de fatores de carga e tempo  $\lambda_c$  e  $\lambda_t$ .
6. Loop de número de blocos de carga e tempo.
  - 6.1. Inicializa o contador de número de incrementos de carga e tempo por bloco (iincs=0).
  - 6.2. Determina os fatores de incremento de carga e tempo iniciais,  $\Delta \lambda_c$  e  $\Delta \lambda_t$ .
  - 6.3. Leitura dos parâmetros de solução (LLALGR, LLINT, IAUTO, MITER)
  - 6.4. Loop de incrementos de carga para problemas sem acoplamento (LLACOP=0)  
enquanto  $\lambda_c < \lambda_c$  (iblok)
    - 6.4.1. Incrementa o contador de número de incrementos: iincs=iincs+1
    - 6.4.2. Atualiza o fator de carga:  $\lambda_c = \lambda_c + \Delta \lambda_c$
    - 6.4.3. Resolve o problema incrementalmente (CALL INCREM)
  - 6.5. Loop de incrementos de tempo para problemas com acoplamento (LLACOP=1 ou LLACOP = 2)  
enquanto  $\lambda_t < \lambda_t$  (iblok)
    - 6.5.1. Incrementa o contador de número de incrementos: iincs=iincs+1
    - 6.5.2. Atualiza o fator de carga e tempo:  $\lambda_c = \lambda_c + \Delta \lambda_c$  e  $\lambda_t = \lambda_t + \Delta \lambda_t$
    - 6.5.3. Determina o incremento de tempo  $\Delta t$
    - 6.5.4. Atualiza a contagem do tempo,  $t=t+\Delta t$
    - 6.5.5. Resolve o problema incrementalmente (CALL INCREM)
7. Inicializa o vetor de carregamento ( $\mathbf{X}_{load} = \mathbf{0}$ )

No Quadro 4.2 apresenta-se o algoritmo de solução incremental implementado na rotina INCREM.

Quadro 4.2 - Algoritmo de solução incremental - Rotina INCREM.

1. Inicializa o *loop* de elementos.
  - 1.1. Lê a matriz de acoplamento do elemento em arquivo temporário.
  - 1.2. Monta o vetor dos graus de liberdade globais do elemento.
  - 1.3. Efetua a busca da superfície livre no elemento.
  - 1.4. Calcula as coordenadas locais e globais da superfície livre do interior do elemento (caso existam).
  - 1.5. Calcula a matriz da superfície livre ( $\mathbf{G}^{FS}$ )
  - 1.6. Calcula a matriz constitutiva linear elástica do elemento.
  - 1.7. Inicializa o *loop* de pontos de Gauss.
    - 1.7.1. Calcula a matriz de rigidez do elemento.
    - 1.7.2. Calcula a matriz característica das permeabilidades, podendo reduzir ou não a permeabilidade do ponto de Gauss.
    - 1.7.3. Calcula a matriz de fluxo do elemento.
  - 1.8. Monta a parcela hidráulica do vetor de carregamento externo relativa ao elemento ( $\Delta \mathbf{F}$ )
  - 1.9. Monta todas as matrizes características na matriz tangente global ( $\mathbf{K}_G$ )
2. Monta a parcela de equilíbrio do vetor de forças externas ( $\Delta \mathbf{F}$ ).
3. Obtém a solução predita:  $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{K}_G \Delta \mathbf{F}$
4. Calcula o incremento de tensão efetiva ;  $\Delta \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{f}(\Delta \mathbf{d})$ ;
5. Atualiza a tensão efetiva  $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}' + \Delta \boldsymbol{\sigma}'$  (Nogueira, 1998)
6. Se o algoritmo é puramente incremental (LLALGR=5)
  - 6.1. Atualiza o vetor de deslocamento, carga total e deformação.
    - 6.1.1. Imprime os resultados
7. Volta para SOLVE

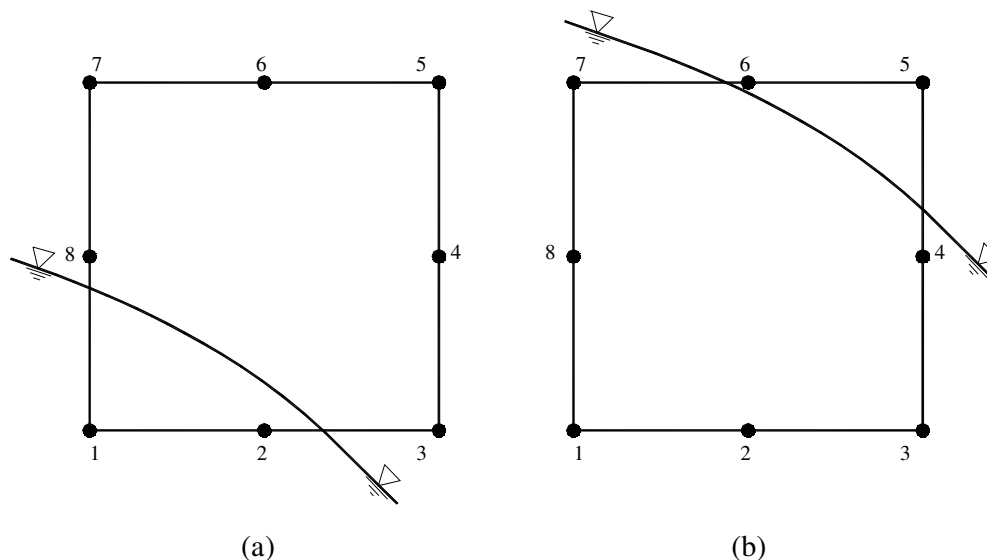


## 4.4 - LOCALIZAÇÃO DA SUPERFÍCIE LIVRE

A condição para localizar a superfície livre no interior de um elemento (caso ela exista) em cada instante, é encontrar os pontos interiores a este elemento em que as poro-pressões sejam nulas (Equação 3.60). Desta forma, é possível obter-se a configuração da superfície no interior de um elemento. Esta busca é feita pela subrotina MLOC\_FREE que avalia, inicialmente, as faces esquerda e direita de cada elemento, respectivamente. Se a condição da Equação 3.64 não é satisfeita em nenhuma das duas faces do elemento ( $\xi = -1$  e  $\xi = +1$ ), então a busca passa automaticamente para o próximo elemento, e assim sucessivamente até que seja satisfeita a condição da Equação 3.64.

Portanto, o processo de localização superfície livre no interior do elemento, só é efetivamente realizado para os elementos que eventualmente sejam interceptados total ou parcialmente pela superfície livre. Esta estratégia pode trazer razoável economia de tempo de processamento no caso de malhas muito refinadas e, principalmente nos casos em que os elementos sejam divididos internamente em um número muito grande de faixas de incremento  $\Delta\xi$  (Figura 3.1).

Quatro possibilidades para a posição da superfície livre em relação a um elemento qualquer são apresentadas na Figura 4.3.



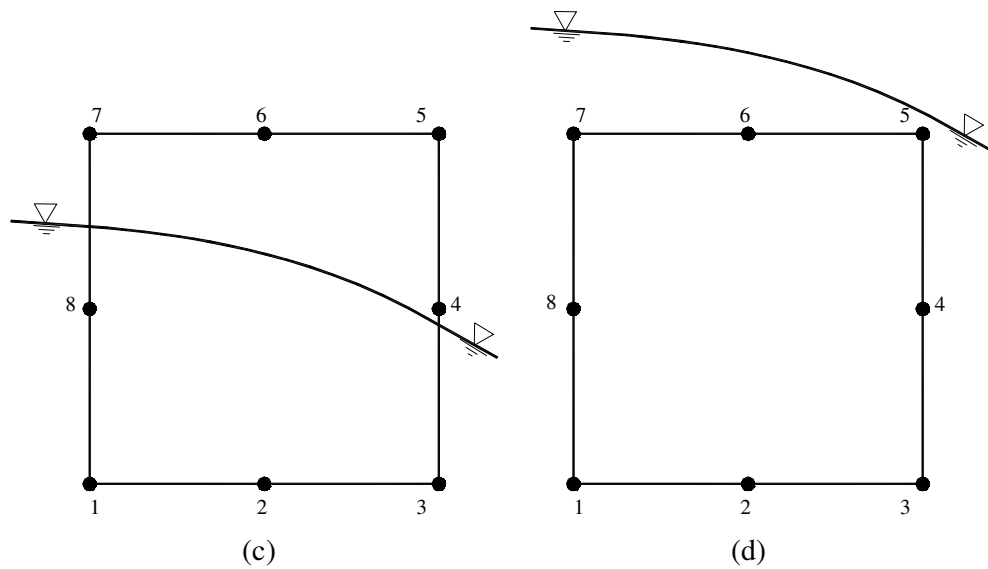


Figura 4.3 – Superfície passando (a) e (b) parcialmente no elemento, (c) totalmente no interior do elemento e (d) fora do elemento.

O algoritmo da Figura 4.4, implementado na subrotina MLOC\_FREE, ilustra a maneira de se localizar a superfície livre no interior de um dado elemento através do procedimento de fluxo residual (Desai e Li, 1976 e Bathe *et al.*, 1982).

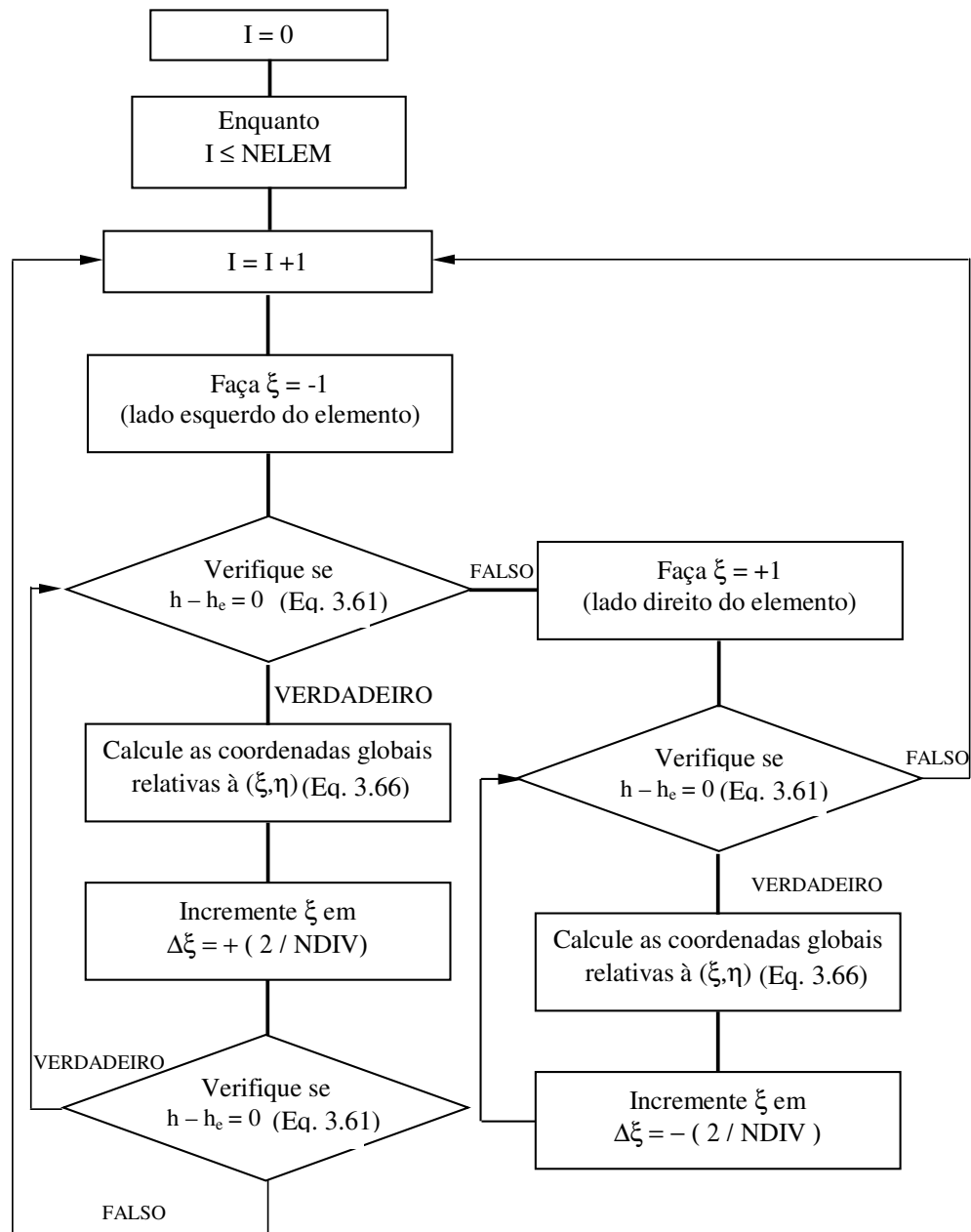


Figura 4.4 – Algoritmo para localização da superfície livre

## 4.5 - REDUÇÃO DA PERMEABILIDADE

Neste trabalho, o problema do adensamento é resolvido considerando o solo saturado. Ainda assim, é possível simular o fluxo não-saturado nas regiões que se encontram acima da superfície livre através da redução da permeabilidade quando as pressões se tornam negativas. Parâmetros como a pressão de entrada de ar  $p_e$ , permeabilidade limite  $k_{lim}$  e pressão limite  $p_{lim}$  são dados de entrada necessários para que se possa criar a curva de redução de permeabilidade (Figura 4.5). Neste sentido, as implementações no código tornaram-no flexível para se gerar vários tipos de curva de redução de permeabilidade em função da poro-pressão. Alguns exemplos de curva permeabilidade vs. poro-pressão obtidos são mostrados na Figura 4.5.

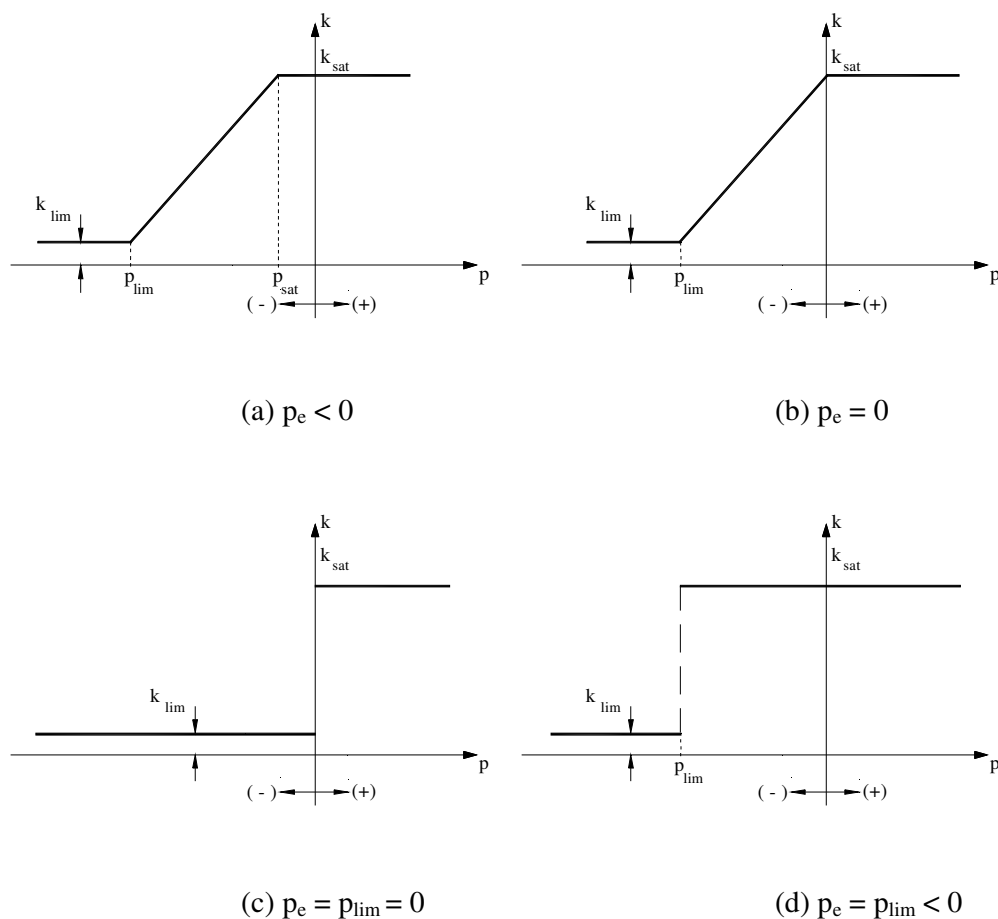


Figura 4.5 - Curvas de permeabilidade vs. poro-pressão

Através da implementação de uma simples interpolação linear, o valor da permeabilidade  $k$  é calculado em cada ponto de Gauss do elemento utilizando a seguinte equação:

$$k = \frac{k_{\text{sat}} - (k_{\text{lim}})}{W} + (k_{\text{lim}}) \quad (4.12)$$

em que

$$W = \frac{[(p_{\text{sat}} - p_{\text{lim}}) / \gamma_w]}{h_p - (p_{\text{lim}} / \gamma_w)} \quad (4.13)$$

é um parâmetro que varia de 0 a  $+\infty$  no seguinte intervalo de carga de pressão:

$$\frac{p_{\text{lim}}}{\gamma_w} < h_p \leq \frac{p_{\text{sat}}}{\gamma_w} \quad (4.14)$$

e  $h_p$  é a carga de pressão avaliada no ponto de Gauss, ou seja:

$$h_p = \sum_{i=1}^{\text{nnoel}} N_i(\xi, \eta)(h - h_e)_i \quad (4.15)$$

em que  $N_i$  é a função de interpolação do nó  $i$  e  $\text{nnoel}$  é o número de nós do elemento.

A subrotina do programa ANLOG envolvida no cálculo da redução de permeabilidade chama-se MUDCC\_K. Depois de calculados os novos valores de permeabilidade dos elementos não – saturados (acima da linha piezométrica), procede-se o cálculo da matriz de fluxo do elemento (Equação 3.20) e em seguida a mesma é montada na matriz tangente global.

## 4.6 - EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

Neste item, são apresentados alguns exemplos com a finalidade de validar as implementações computacionais.

O problema de adensamento unidimensional de Terzaghi (1943) é esquematizado nas Figuras 4.6a e 4.6c. O primeiro refere-se ao fenômeno devido a uma solicitação externa e, o segundo, exclusivamente devido ao rebaixamento do NA.

A Figura 4.6b mostra o problema de adensamento bidimensional e os resultados numéricos são confrontados com a solução analítica de Schiffman *et al.* (1969).

Um problema de fluxo bidimensional, em que os resultados do ANLOG são comparados à solução de Herbert (1968), é esquematizado na Figura 4.6d.

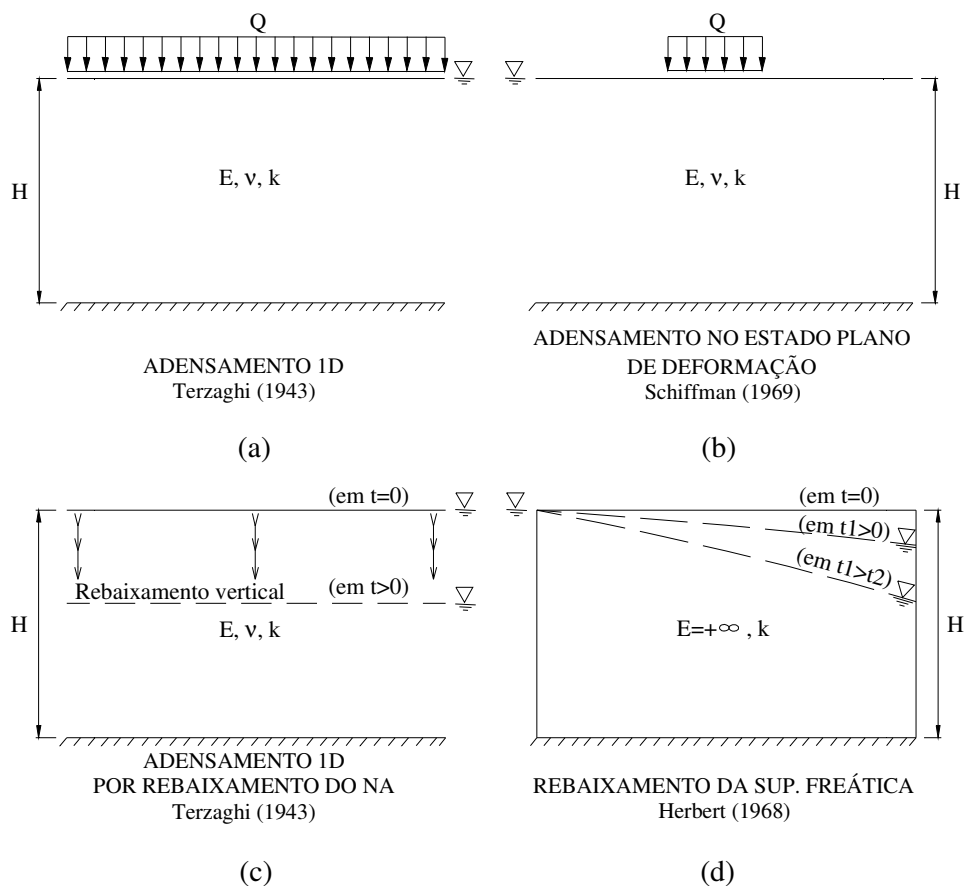


Figura 4.6 – Problemas de (a), (b) e (c) adensamento e de (d) superfície livre

#### 4.6.1 - Adensamento unidimensional devido um carregamento de superfície

Consideremos uma camada de solo de espessura  $H$  assente no topo rochoso e submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade  $Q$  na superfície do terreno, como ilustrado na Figura 4.6a.

De acordo com a teoria de Terzaghi (1943), os excessos de poro-pressões  $u_e$  ao longo da vertical de uma camada de solo podem ser obtidos em função do espaço e do tempo pela seguinte equação:

$$u_e = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2Q}{M} \sin(MZ) \exp(-M^2 T) \quad \text{com} \quad M = \frac{\pi}{2}(2m+1) \quad (4.16)$$

em que  $Z$  é a profundidade adimensional e  $T$  o fator tempo definidos como

$$Z = \frac{z}{H_d} \quad (4.17)$$

$$T = \frac{c_v}{H_d^2} t \quad (4.18)$$

em que  $z$  é a profundidade,  $t$  é o tempo real,  $H_d$  é o comprimento do caminho de drenagem ( $H_d = H$  para simples drenagem;  $H_d = H/2$  para dupla drenagem) e  $c_v$  é o coeficiente de adensamento definido como

$$c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w} \quad (4.19)$$

em que  $k$  é o coeficiente de permeabilidade na direção do fluxo,  $\gamma_w$  é o peso específico da água e  $m_v$  é o módulo de deformabilidade volumétrica unidimensional definido como

$$m_v = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \quad (4.20)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

O problema unidimensional analisado via MEF consiste numa coluna de solo de 20m de espessura representada por uma malha de elementos finitos constituída de 10 elementos Q8Q8 e 53 pontos nodais, como ilustrado na Figura 4.7, onde também são apresentados os dados do material. Condições de contorno em deslocamento restrito na direção horizontal foram adotadas para simular a condição unidimensional de deformação. Da mesma forma, para simular a condição unidimensional de fluxo na direção vertical, considerou-se a superfície do terreno, que coincide com a cota do NA, como um contorno “drenante”, ou ainda, em que  $h_p=0$  ( $h=h_e$ ). Neste caso,  $H_d = H$  e um problema de simples drenagem é avaliado. Um carregamento uniformemente distribuído de 100 kPa é aplicado instantaneamente na superfície do terreno. Uma marcha no tempo puramente implícita ( $\alpha = 1.0$ ) com incrementos de tempo de 20s foi adotada.

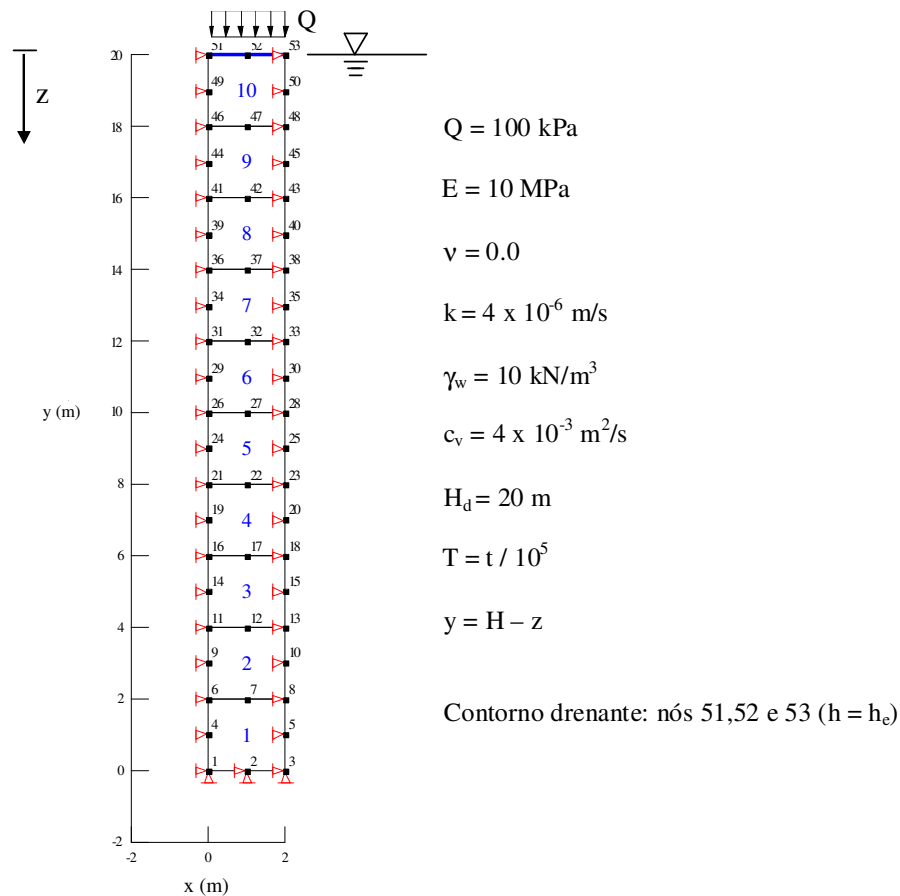


Figura 4.7 – Adensamento unidimensional - Malha de elementos finitos.



A distribuição de excessos de poro-pressões  $u_e$  no tempo e no espaço é mostrada na Figura 4.8, em que  $y$  é a coordenada medida a partir da base da camada. Os excessos de poro - pressões nodais foram obtidos fazendo:

$$u_e = \gamma_w (h_p(T) - h_{p0}) \text{ com } h_p(T) = h(T) - h_e \quad (4.21)$$

em que  $h_{p0}$  é a carga de pressão no instante  $t = 0$ ,  $h_e$  é a carga de elevação e  $h(T)$  é a variável primária da presente formulação avaliada num instante  $t$  correspondente ao fator tempo  $T$ .

Observando a Figura 4.8, nota-se que uma boa concordância foi obtida entre a resposta numérica via MEF do presente trabalho e a solução de Terzaghi (1943).

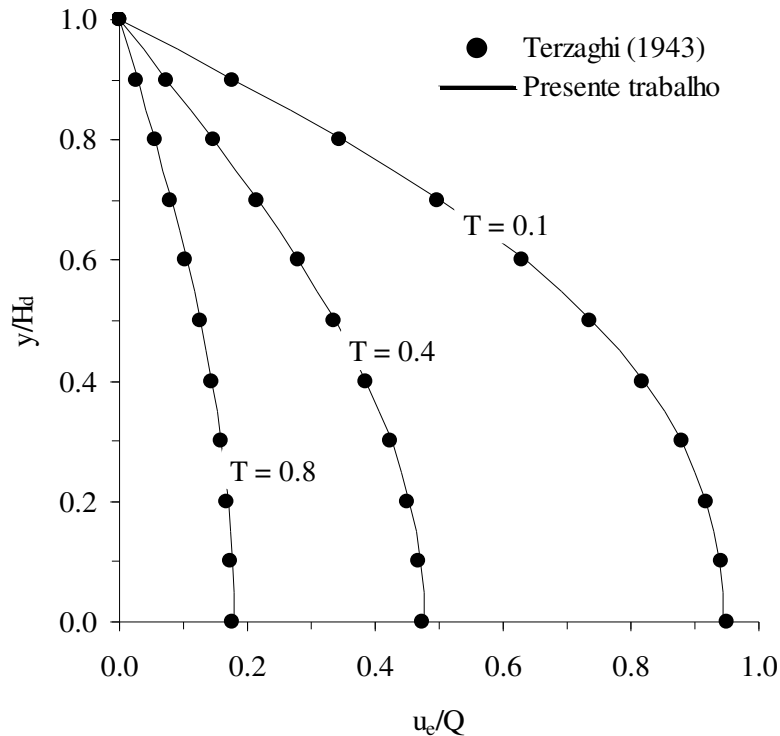


Figura 4.8 – Adensamento Unidimensional / Isócronas dos excessos de poro-pressão.

A curva da percentagem média de adensamento com o fator tempo é apresentada na Figura 4.9. Esta percentagem média de adensamento pode ser obtida de forma aproximada fazendo:

$$\text{Para } U < 0.6, T = \frac{\pi}{4} U^2 \quad (4.22)$$

$$\text{Para } U > 0.6, T = -0.933 \log(1 - U) - 0.085 \quad (4.23)$$

Com a resposta numérica, a percentagem média de adensamento pode ser calculada por:

$$U(\%) = \sum_{i=1}^{npoin} [1 - (u_{e_i}(T) / u_{e_0})] 100 \quad (4.24)$$

em que  $u_{e0}$  é o excesso de poro – pressão gerado no instante  $t = 0$ .

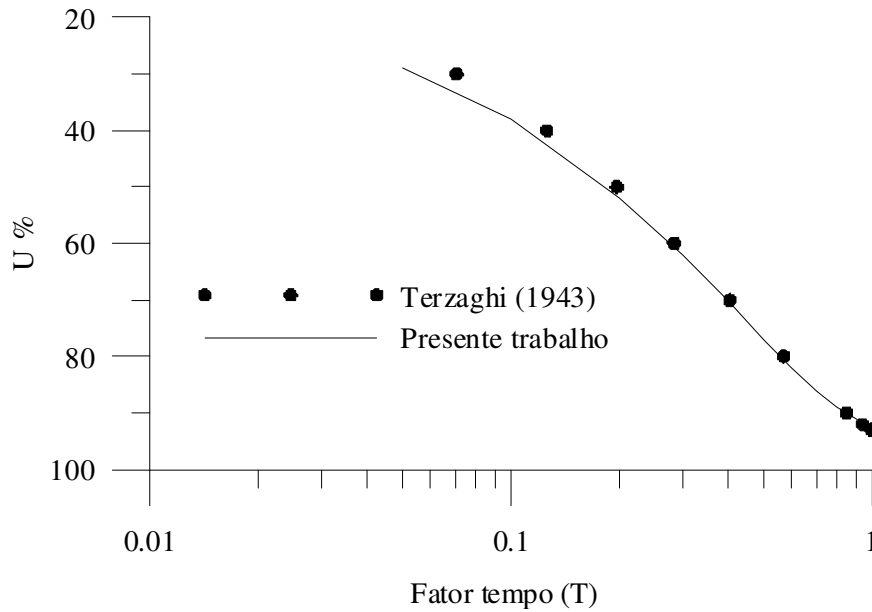


Figura 4.9 – Adensamento 1D - Percentagem média de adensamento vs. Fator tempo.

Na Figura 4.10 mostra-se a curva recalque superficial  $d$  com o fator tempo  $T$  que pode ser obtida fazendo:

$$d(T) = d_{\text{máx}} U(\%) \quad (4.25)$$

em que  $d_{\text{máx}}$  é o deslocamento superficial correspondente ao final do adensamento o qual pode ser obtido através da teoria da elasticidade por:

$$d_{\text{máx}} = m_v H Q \quad (4.26)$$

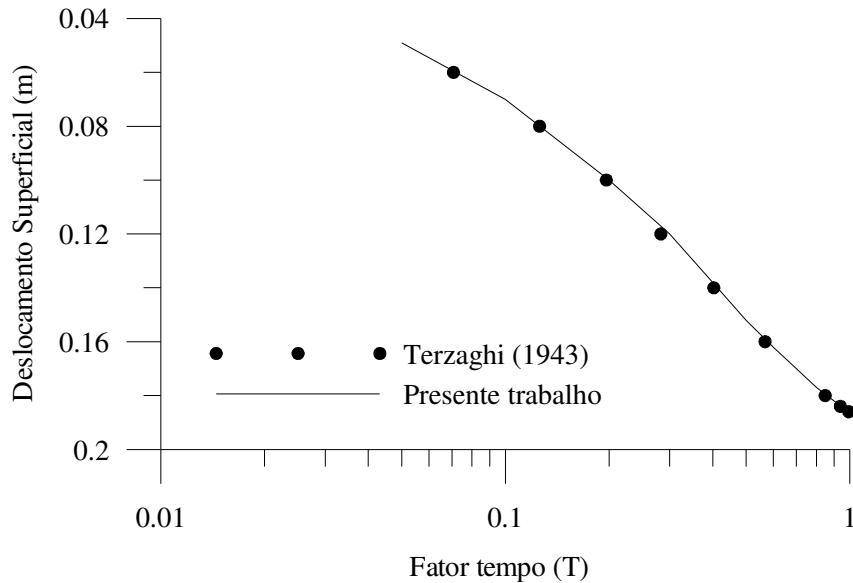


Figura 4.10 - Adensamento 1D - Deslocamento superficial vs. Fator tempo

Conforme observado, os resultados obtidos pela versão atual do programa ANLOG, através do emprego de uma formulação acoplada, utilizando carga total como variável primária para a parcela de fluxo, validam o presente método de solução para problemas de adensamento unidimensional.

#### 4.6.2 - Adensamento bidimensional

Neste item, verifica-se o processo do adensamento em uma camada de solo compressível de baixa permeabilidade, representada por um semi-espço infinito, quando submetida a um carregamento em faixa distribuído no centro do domínio de largura finita,  $2b$ , e de intensidade  $Q$ . O nível d'água é mantido constante na superfície do terreno.

A malha de elementos finitos é apresentada na Figura 4.11. Tratando-se de um problema simétrico, somente metade do domínio foi discretizado. Assim como em Nogueira (1998), a malha é constituída de 144 elementos finitos Q8Q8 e 481 pontos nodais. As condições de contorno em deslocamento e drenagem também estão indicadas na Figura 4.11 com a drenagem ocorrendo apenas pelo topo da camada de solo. As comparações dos resultados numéricos (utilizando carga total como variável primária) e os resultados analíticos, apresentados por Schiffman *et al.* (1969) e baseados na teoria do adensamento tridimensional de Biot, são apresentados nas Figuras 4.12 e 4.13.

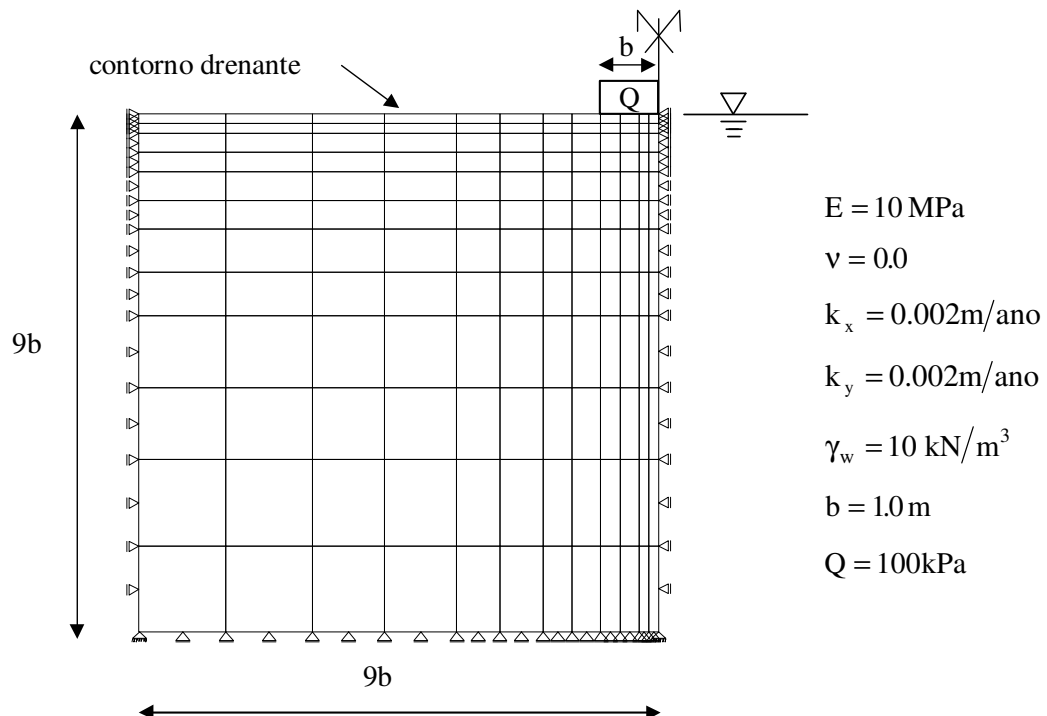


Figura 4.11 - Adensamento 2D - Malha de elementos finitos.

Na Figura 4.12, tem-se a variação do excesso de poro-pressão,  $u_e$ , ao longo da profundidade no centro da carga para um fator tempo,  $T$ , igual a 0.1, definido por Schiffman *et al.* (1969) como

$$T = \frac{\bar{c}}{b^2} t \quad (4.27)$$

em que

$$\bar{c} = \frac{2Gk}{\gamma_w} \quad (4.28)$$

e

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.29)$$

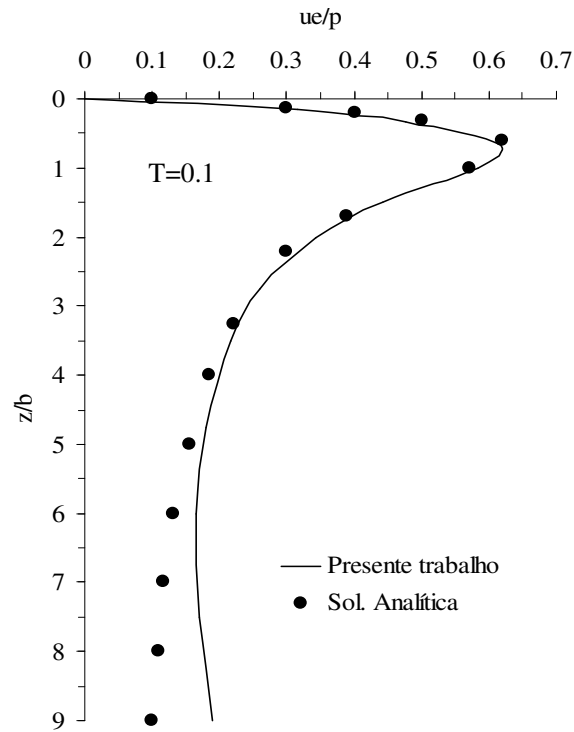


Figura 4.12 – Adensamento 2D - Excessos de poro-pressão -  $x/b=0.0$  e  $T=0.1$ .

A Equação 4.30 obtida analiticamente em Schiffman *et al.* (1969) e que define o excesso de poro-pressão para os instantes iniciais no caso de drenagem livre na superfície é:

$$u_e = \frac{Q}{\pi} \left\{ b \tan \frac{2bz}{z^2 + x^2 - b^2} + \left[ 2 \left( \frac{b}{\eta} \right) \sqrt{\frac{T}{\pi}} \left[ \frac{x+b}{z^2 + (x+b)^2} - \frac{x-b}{z^2 + (x-b)^2} \right] \right] \right\} \quad (4.30)$$

em que  $b$  é a extensão do carregamento,  $z$  é a profundidade,  $Q$  é a magnitude do carregamento e  $\eta$  é uma constante auxiliar dada por:

$$\eta = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \quad (4.31)$$

No ANLOG, os excessos de poro-pressões nodais  $u_e$  são obtidos através da Equação 4.21.

Na Figura 4.13, apresenta-se a evolução no tempo das tensões octaédricas, total  $\sigma$  e efetiva  $\sigma'$  e as poro-pressões  $p$ , de forma normalizada, para um ponto situado no centro da carga e a 1m de profundidade. São comparados os valores de poro-pressões normalizadas com os valores obtidos pela solução analítica de Schiffman *et al.* (1969). Pode ser observado, nesta figura, o efeito de Mandel-Cryer, pelo qual ocorre aumento dos excessos de poro-pressões nos estágios iniciais do processo de adensamento bi e tridimensional.

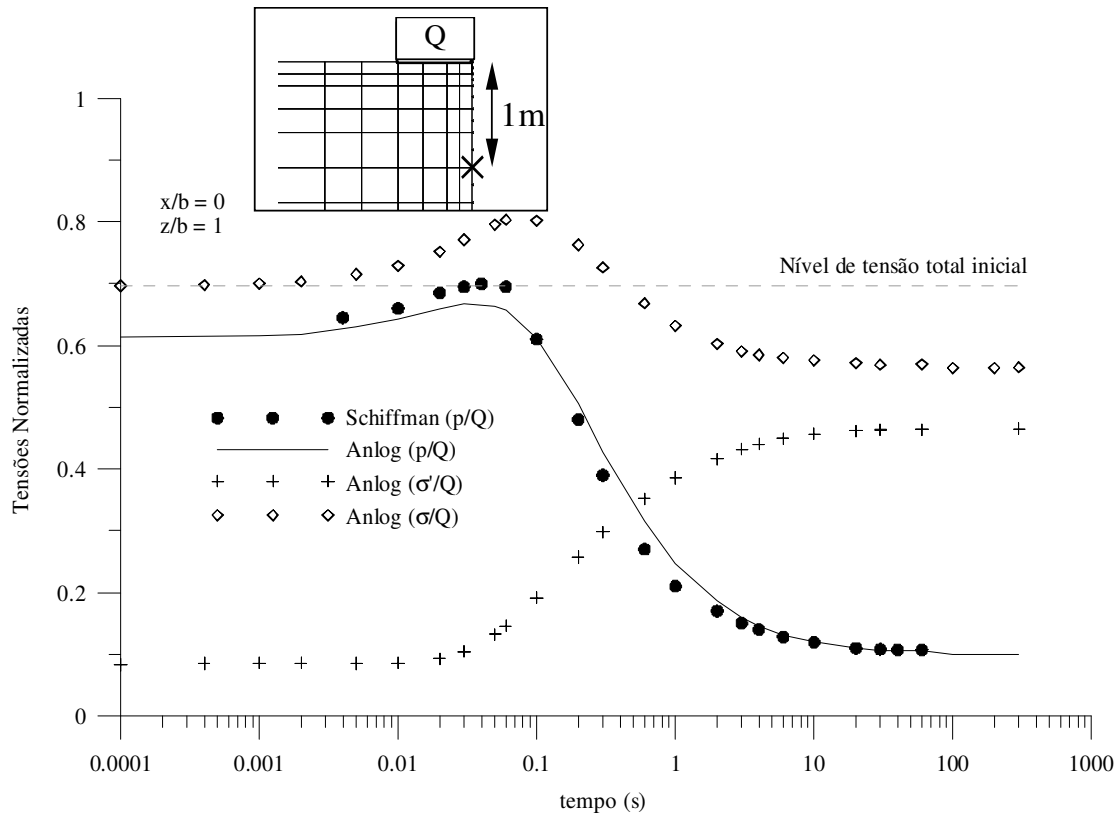


Figura 4.13 – Adensamento 2D - Tensões normalizadas *versus* tempo

Interpretações físicas posteriores aos trabalhos de Mandel (1950, 1953a e 1953b) e Cryer (1963) foram propostas em Gibson *et al.*(1963), Josselin (1963), e Schiffman (1965). Tais interpretações avaliam pequenos estágios iniciais de tempo após a aplicação do carregamento. Nesta fase, os elementos da superfície dissiparam os excessos de poro – pressão praticamente de forma instantânea devido à proximidade do contorno de drenante. Como consequência, esses elementos se deformam e sofrem um ganho de tensão total por causa do aumento da tensão efetiva. Considerando agora, para aquele mesmo instante inicial, um elemento no interior da malha, percebe-se que este ainda não iniciou o processo de drenagem e, portanto não começou a se deformar. Logo, para que haja compatibilidade entre as deformações dos elementos de superfície e os do interior, parte do ganho de tensões totais da superfície é transferida para o interior ocasionando um aumento de tensões totais acima dos valores iniciais nos elementos interiores para os primeiros estágios do adensamento, caracterizando assim, o efeito de Mandel – Cryer.

#### 4.6.3 - Adensamento unidimensional devido ao rebaixamento do NA

Consideremos agora a coluna de solo da Figura 4.7 com o nível d'água inicialmente na superfície do terreno. O objetivo deste item é mostrar o efeito do rebaixamento do NA nas deformações do solo.

Assim como no item 4.6.1, condições de contorno em fluxo e deslocamento restrito na direção horizontal foram adotadas.

Os parâmetros utilizados na análise são:  $E = 10 \text{ MPa}$ ,  $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$ ,  $k_y = 4 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ ,  $v = 0$ ,  $S_y = 0$  e  $H_d = H$  (drenagem apenas pelo topo). Mais uma vez a constante de integração no tempo é  $\alpha = 1.0$  (algoritmo implícito). Neste exemplo, durante o processo de rebaixamento, a permeabilidade acima do nível d'água não foi reduzida, para que o adensamento ocorresse de forma compatível com a teoria de Terzaghi. Portanto, adotou-se  $k_{lim} = k_{sat} = 4 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ .

Analiticamente, a consideração para o cálculo do deslocamento superficial é análoga àquela da Equação 4.25. A variação do nível d'água, acarretará um ganho de tensão efetiva de 200 kPa (rebaixamento de 20m) ao longo de toda camada. Considerando as propriedades elásticas adotadas neste exemplo chega-se a um valor de deslocamento superficial máximo de 0.40m no final do adensamento.

Utilizando a Equação 4.25, pode-se calcular o deslocamento superficial em qualquer instante. As Figuras 4.14, 4.15 e 4.16 apresentam a comparação de resultados entre a solução de Terzaghi (1943) e o ANLOG, indicando uma boa concordância entre os resultados numéricos e a solução analítica.



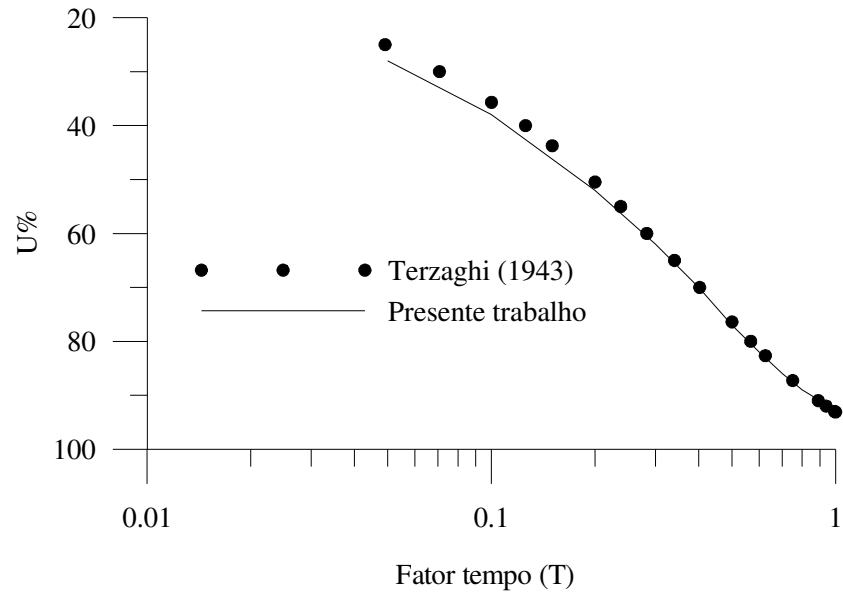


Figura 4.14 – Adensamento 1D devido ao rebaixamento do NA -  $U \times T$

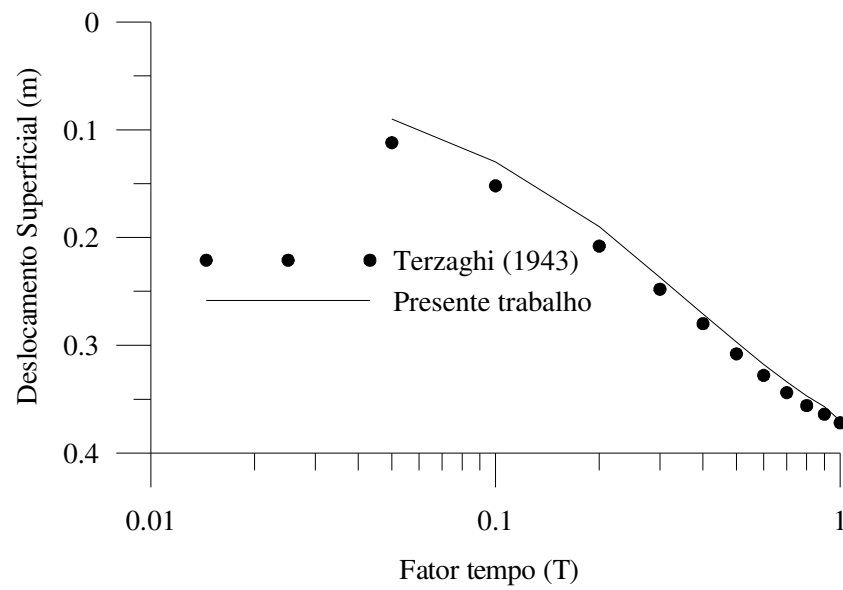


Figura 4.15 – Adensamento 1D por rebaixamento do NA –  $d \times T$ .

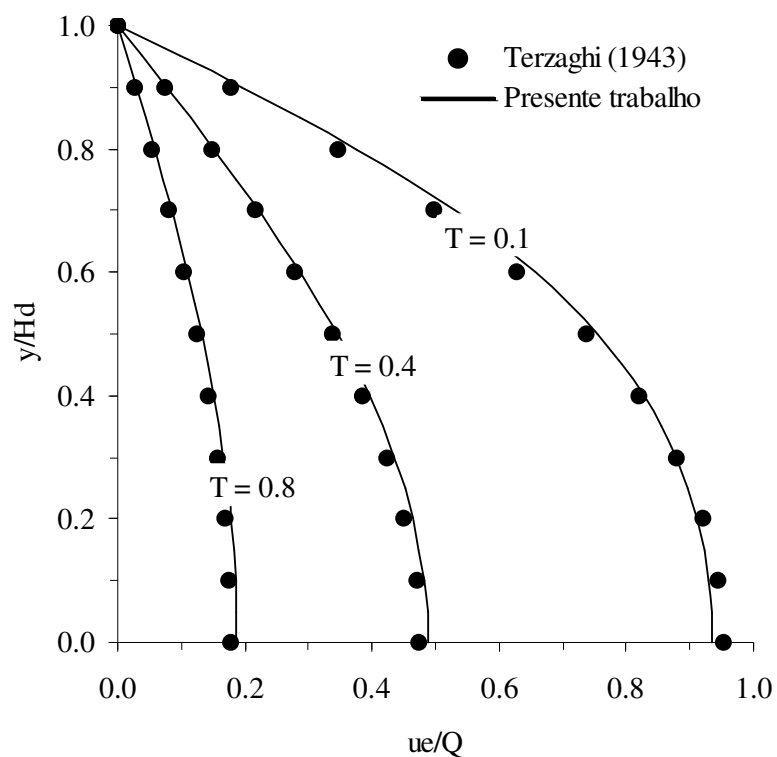


Figura 4.16 – Adensamento 1D por rebaixamento do NA / Isócronas de poro-pressão

Os excessos de poro-pressões são obtidos através dos resultados do ANLOG pela equação:

$$u_e = \gamma_w [1 - (h_p(T) - h_{p0})] \quad \text{com} \quad h_p(T) = h(T) - h_e \quad (4.32)$$

em que  $h_{p0}$  é a carga de pressão no instante  $t = 0$ ,  $h_e$  é a carga de elevação e  $h(T)$  é a variável primária da presente formulação avaliada num instante  $t$  correspondente ao fator tempo  $T$ .

A Figura 4.17 mostra o rebaixamento do NA no tempo, onde, assim como o deslocamento máximo, 99% do rebaixamento total é obtido em  $t = 200000s = 55.6h$  ( $T=2$ ).

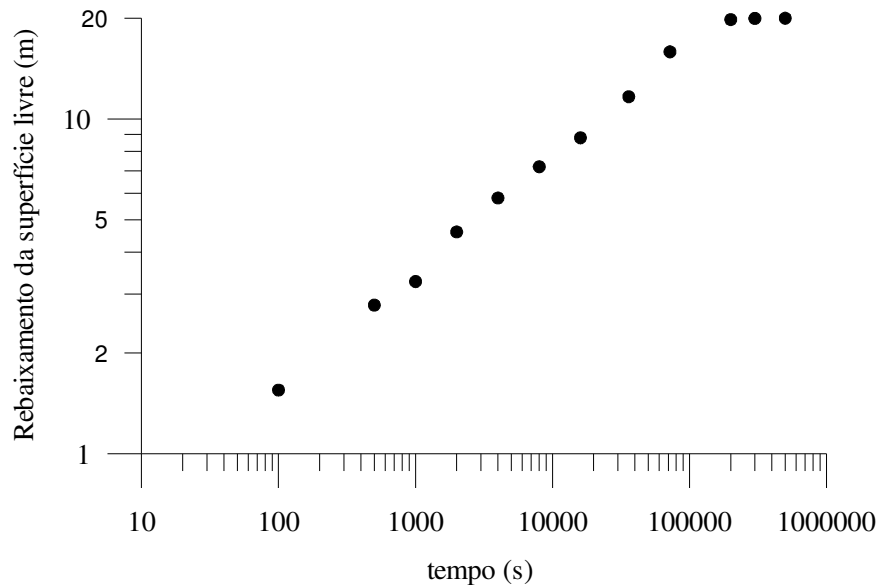


Figura 4.17 – Rebaixamento da superfície livre no tempo.

A Figura 4.18 mostra a evolução dos perfis de poro-pressões com o tempo obtida pelo ANLOG. Na superfície, todo o excesso é dissipado instantaneamente devido às condições de contorno prescritas:  $h = 0$  ( $p = -200\text{kPa}$ ). No restante do domínio, o perfil movimenta-se gradativamente no sentido de atingir a condição hidrostática de poro-pressões negativas.

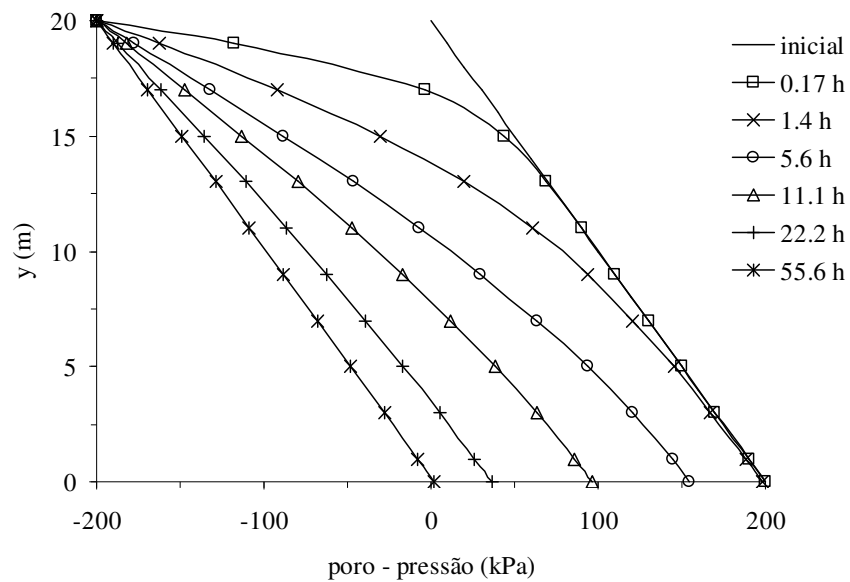


Figura 4.18 – Evolução dos perfis de poro-pressões no tempo.

#### 4.6.4 - Fluxo bidimensional e a superfície transiente

Neste item, faz-se uma abordagem do problema de fluxo em que a posição da superfície transiente é averiguada. Assim, é verificada a técnica de localização da superfície livre utilizada neste trabalho, bem como, a imposição de fluxo ao longo dessa superfície.

Problemas numéricos de fluxo envolvendo a superfície livre foram bastante estudados por Bathe e Khoshgoftaar (1979), Bathe *et al.* (1982), Cividini e Gioda (1984), Desai e Li (1983), Desai e Baseghi (1988), Gioda e Desideri (1988). Na maioria desses trabalhos, os autores procuraram inicialmente validar suas formulações numéricas comparando seus resultados com as respostas propostas por Herbert (1968). Esse autor investigou o problema da superfície livre utilizando uma técnica denominada “malhas de resistência” (*resistance networks*) em analogia ao problema de potencial elétrico. Basicamente, o fluxo elétrico era avaliado sobre uma malha de superfícies equipotenciais utilizando o método das diferenças finitas.

O exemplo consiste numa barragem quadrada com as dimensões mostradas na Figura 4.19. Assume-se que a barragem possui isotropia de permeabilidade, está inicialmente saturada e com o nível d’água na superfície. Provoca-se então uma queda instantânea (em  $t = 0^+$ ) do nível d’água em um dos lados da barragem. Essa diferença de potencial hidráulico faz com que o nível d’água da barragem passe a sofrer o processo de rebaixamento até que atinja o regime de fluxo estacionário.

Este problema também foi analisado por Hsi (1992) e Bathe *et al.* (1982) adotando uma rigidez elevada para o esqueleto sólido da barragem quadrada de modo a torná-la “indeformável”. Assim, pode-se observar um problema em que apenas a parcela de fluxo é considerada.

A malha de elementos finitos, constituída por 64 elementos Q8Q8, utilizada nesta análise é ilustrada na Figura 4.19 e é idêntica àquela utilizada em Hsi (1992).

Para efeito de comparação, cinco instantes de tempo foram estipulados como sendo 1.89, 4.19, 7.19, 12.19 e 100.00 dias, neste último já tendo sido atingido o regime permanente.

$$\begin{aligned}
 k_x &= 0.1 \text{ pé/dia } (\cong 3.5 \times 10^{-7} \text{ m/s}) \\
 k_y &= 0.1 \text{ pé/dia} \\
 \nu &= 0.30 \\
 E &= 10^{20} \text{ lbf/pé}^2 (\cong 5 \times 10^{18} \text{ kPa}) \\
 \gamma_w &= 62.4 \text{ lbf/pé}^3 (\cong 9.81 \text{ kN/m}^3) \\
 S_y &= 0.1
 \end{aligned}$$

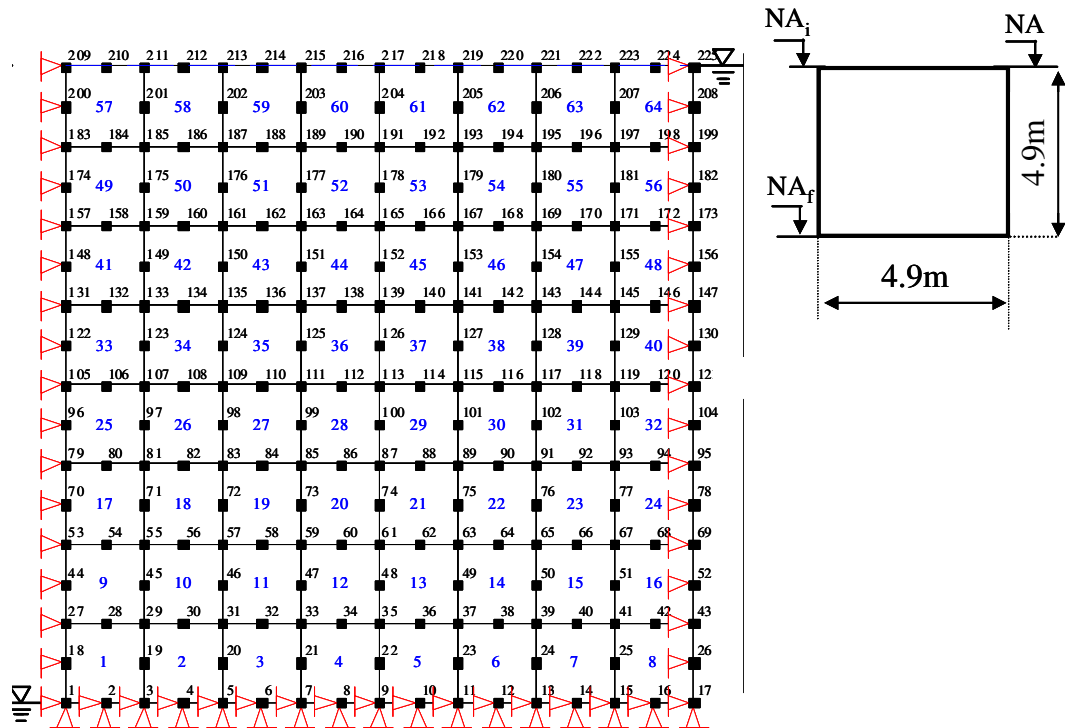


Figura 4.19 – Malha de elementos finitos - barragem quadrada.

Mais uma vez, a constante da marcha de integração no tempo escolhida para todos os instantes de tempo foi  $\alpha=1.0$  (*Algoritmo implícito*) e o processo de solução utilizado foi puramente incremental.

As Figuras 4.20, 4.21 e 4.22 mostram comparações entre os resultados do ANLOG e a soluções de Herbert (1968), Bathe *et al.* (1982) e Hsi (1992), respectivamente.

Para a Figura 4.20, pode-se concluir que o procedimento de fluxo residual (mesmo através do processo de solução puramente incremental) foi capaz, na maioria das vezes, de localizar a superfície livre de maneira satisfatória. Nos instantes 3 e 4 observa-se uma discrepância razoável entre o ANLOG e a solução de Herbert quando a superfície livre se aproxima da face de surgência ( $x = 0$ ).

Para a Figura 4.21, conclui-se que as diferenças encontradas entre os resultados do programa ANLOG e de Bathe *et al.*, podem ser atribuídas, em parte, à maneira de resolver o problema. Em Bathe *et al.* a solução é obtida através de um processo iterativo. A formulação do programa ANLOG resolve o mesmo problema de maneira puramente incremental. Ambos os trabalhos utilizam o procedimento de fluxo residual para localização da superfície livre.

Por fim, os resultados encontrados na Figura 4.22 obtidos pelo ANLOG, são comparados com a solução de Hsi (1992). Em  $t=7.19$ ,  $t=12.19$  e  $t=100$  dias, percebe-se nitidamente que próximo à face de surgência ( $x=0$ ), as concavidades das superfícies de ambas as soluções estão invertidas entre si. Com o procedimento de solução puramente incremental (ANLOG), o equilíbrio não é totalmente garantido e, na região mencionada, verificaram-se diferenças em relação à solução iterativa de Hsi (1992).

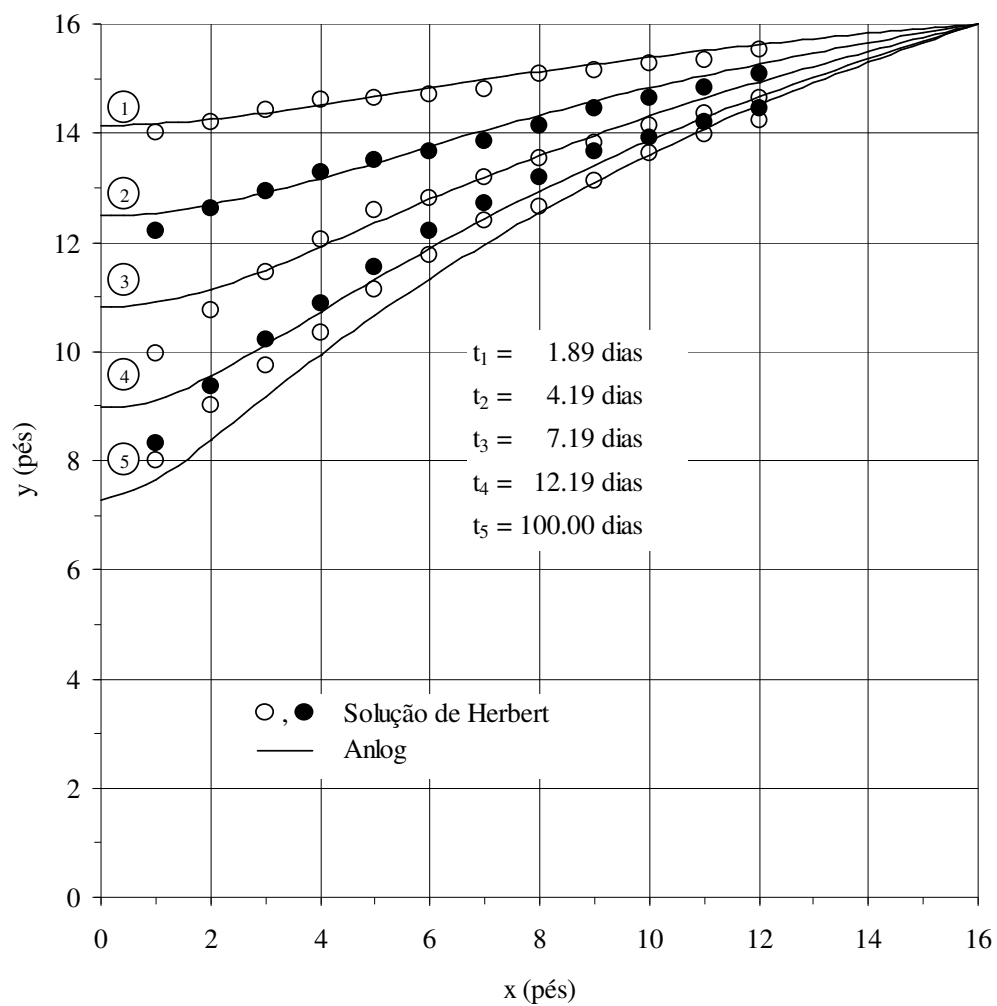


Figura 4.20 – Rebaixamento do NA através de uma barragem quadrada – comparação com a solução de Herbert (1968)

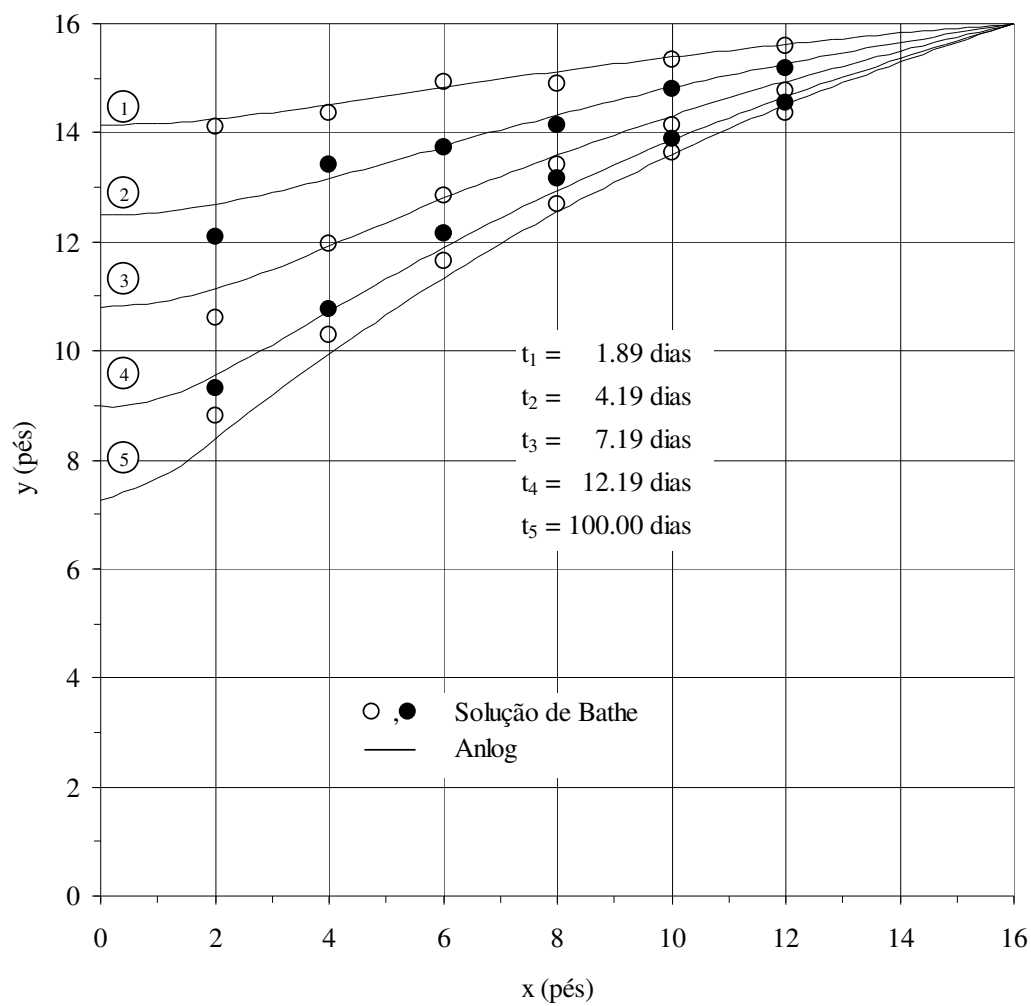


Figura 4.21 – Rebaixamento do NA através de uma barragem quadrada – comparação com a solução de Bathe *et al.*(1982)



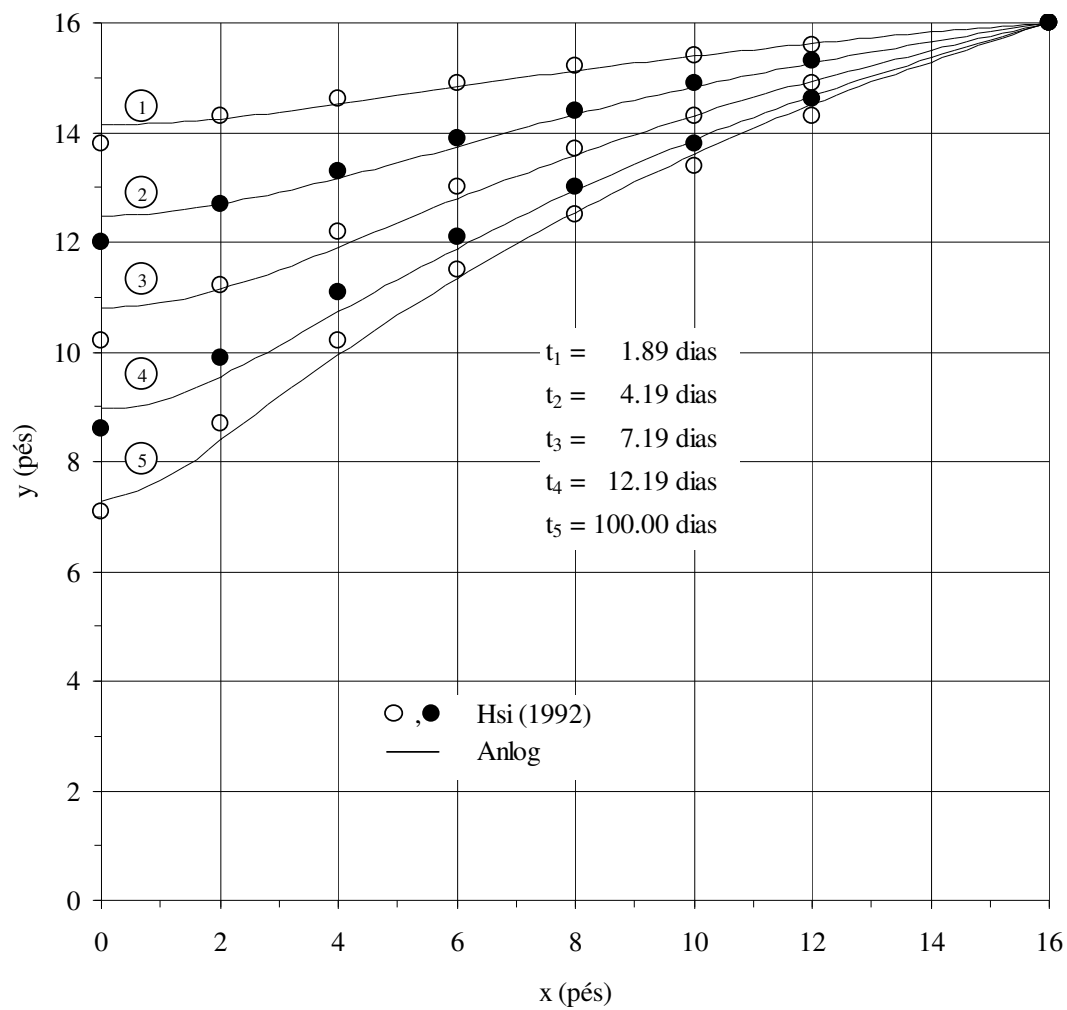


Figura 4.22 – Rebaixamento do NA através de uma barragem quadrada – comparação com a solução de Hsi e Small (1992)

# CAPÍTULO 5

---

## EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns exemplos de aplicação do programa ANLOG para solução de problemas de adensamento comparando os resultados com os do pacote comercial GEO-SLOPE®.

Dois exemplos são apresentados neste capítulo. O primeiro consiste na solução de um problema de adensamento em estado plano de deformação devido a uma solicitação por um carregamento externo uniformemente distribuído na superfície de um terreno. Uma avaliação das oscilações numéricas obtidas nos instantes iniciais também é apresentada neste exemplo.

O segundo exemplo envolve o problema de adensamento em uma barragem devido a um rebaixamento rápido do NA do reservatório. Duas situações são investigadas. A primeira considera o material da barragem rígido perfeito de modo a se verificar apenas a evolução da superfície livre durante o regime transiente até atingir-se o regime permanente. Desta forma, os resultados do ANLOG podem ser comparados com os resultados do programa SEEP/W da GEO-SLOPE®. A segunda situação leva em conta a deformabilidade do corpo da barragem durante o regime de fluxo transiente e a influência que estas deformações causam na posição da superfície livre. Os resultados do programa ANLOG são comparados com os resultados do programa [SIGMA-SEEP/W] da GEO-SLOPE®.

## 5.1 - ADENSAMENTO EM MEIO NÃO-HOMOGÊNEO

Este exemplo trata do adensamento num meio não - homogêneo constituído por dois materiais com parâmetros constitutivos distintos e indicados na Figura 5.1. Nesta figura, também são apresentados: a geometria do problema, a malha constituída por 84 elementos finitos Q8Q8, as condições de contorno e carregamento.

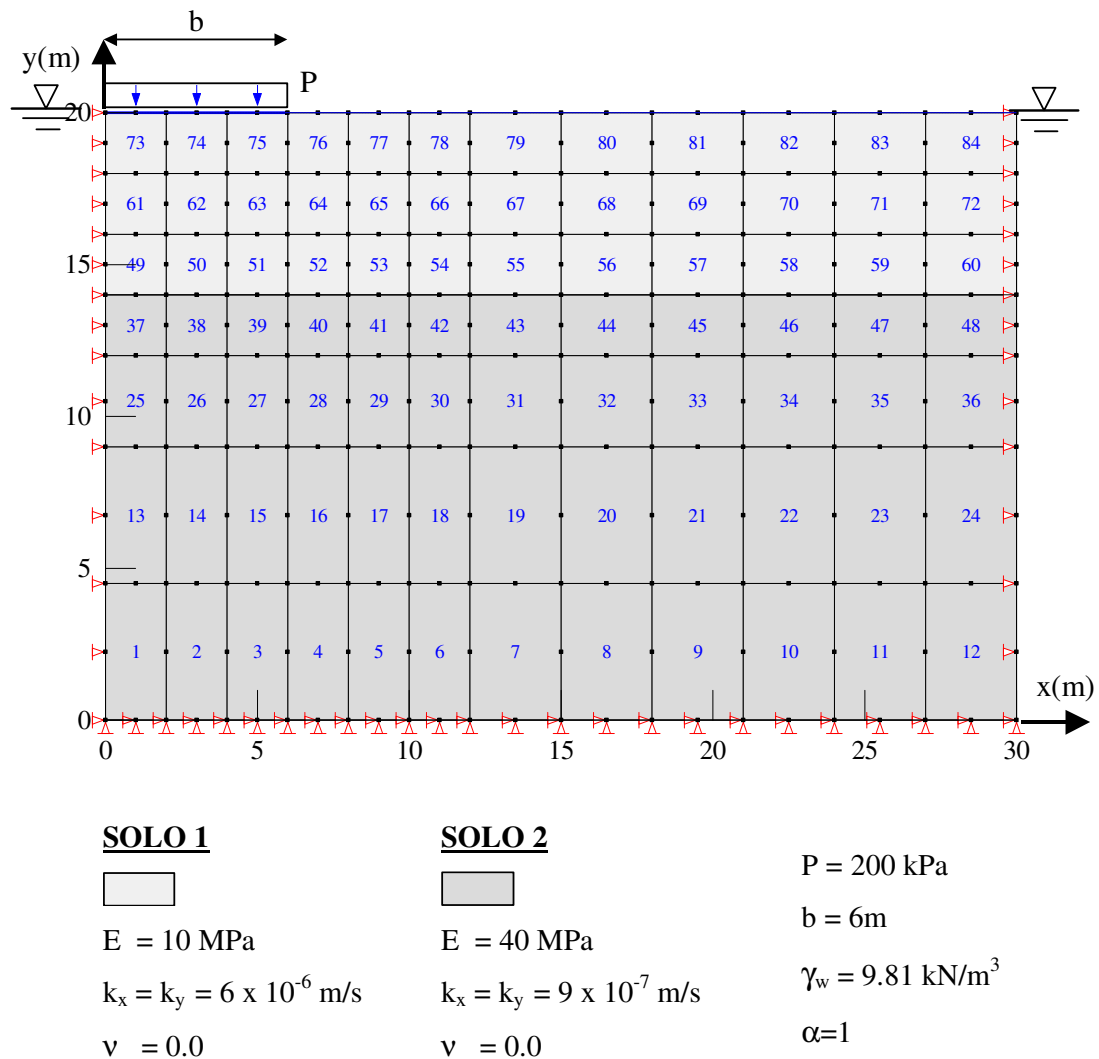


Figura 5.1 - Adensamento em meio não homogêneo - Malha de elementos finitos

Reed (1984) apresentou um estudo sobre a oscilação numérica que ocorre em instantes de tempo iniciais, logo após a aplicação do carregamento, em problemas de adensamento. Desta forma, foram escolhidos os instantes de tempo  $t = 1s$ ,  $t = 2.15s$ ,  $t = 20.3s$  e  $t = 41s$ , para se avaliar a carga hidráulica total ao longo da ordenada  $y$  sob o centro do carregamento superficial.

Na Figura 5.2, são apresentados os resultados do ANLOG e do [SIGMA-SEEP/W] para os instantes mencionados em que se observa o comportamento oscilatório dos dois códigos computacionais. Reed (1984) mostra que a presença de um contorno drenante em uma malha de elementos finitos submetida a um carregamento de superfície pode levar a erros oscilatórios como os encontrados na Figura 5.2 para valores de tempo muito pequenos. Nesses instantes, Reed mostra que os resultados “flutuam” em torno da solução tida como correta, devido a um mau condicionamento da matriz tangente global. É importante salientar, que tal oscilação numérica dificilmente é reduzida de forma significativa mesmo quando se utiliza uma malha mais refinada nas regiões de maior gradiente hidráulico. Em seu trabalho, Reed utiliza um procedimento denominado “técnica de suavização” para atenuar erros oscilatórios em problemas de adensamento utilizando elementos finitos quadráticos.

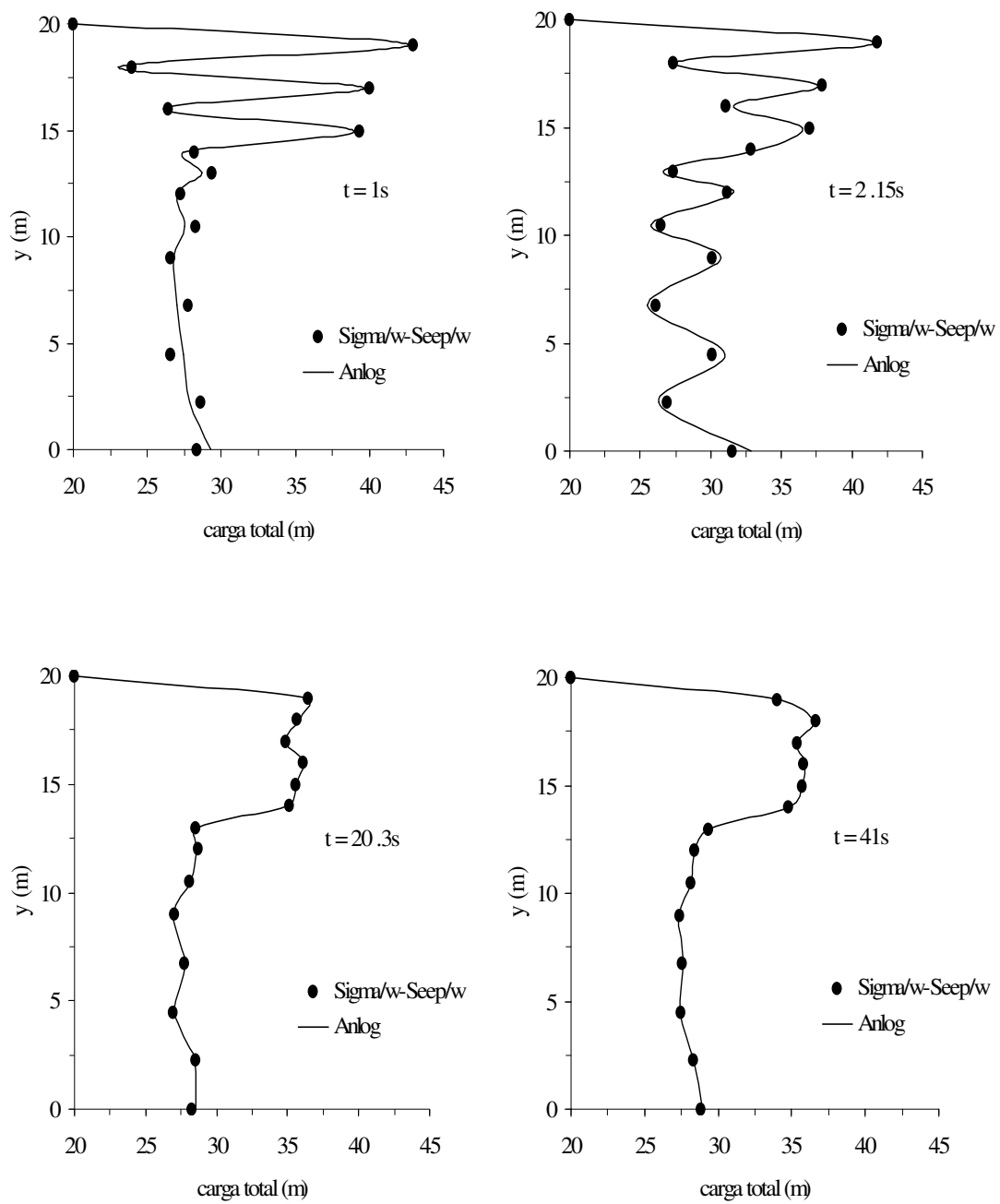


Figura 5.2 – Oscilação numérica

Para se evitar problemas de oscilação numérica, Britto e Gunn (1987) estipularam um procedimento para obter o tamanho do incremento de tempo mínimo especialmente para os instantes iniciais. Para o problema de adensamento o valor do incremento de tempo mínimo recomendado pelos autores obedece à seguinte expressão:

$$\Delta t_{\min} \geq \frac{L^2}{12c_v} = \frac{\gamma_w L^2 (1 + \nu)(1 - 2\nu)}{12kE(1 - \nu)} \quad (5.1)$$

em que  $\Delta t_{\min}$  é o tamanho do incremento de tempo mínimo,  $L$  é a distância média entre os nós,  $\gamma_w$  é o peso específico da água,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $k$  é a condutividade hidráulica.

Na maioria dos casos, Britto e Gunn recomendam que a Inequação 5.1 seja aplicada nas áreas onde se esperam encontrar os maiores gradientes hidráulicos. Desta forma, para este exemplo, adotando-se valores médios para os parâmetros da Inequação 5.1, na região próxima ao carregamento aplicado, obteve-se o valor aproximado de  $\Delta t_{\min} = 21s$ . Observando a Figura 5.2, percebe-se que nos instantes  $t = 1s$  e  $t = 2.15s$  grandes oscilações são encontradas, uma vez que os incrementos de tempo são de  $1s$  e  $1.5s$ , respectivamente. Aumentando-se os valores do incrementos de tempo para  $\Delta t = 18.15s$  e  $\Delta t = 20.70s$ , observou-se oscilações sensivelmente menores em ambas as soluções (ANLOG e [SIGMA-SEEP/W]).

Resultados de oito instantes de tempo representativos até atingir praticamente completa dissipação da carga total, são mostrados na Figura 5.3. A variável carga total é avaliada sob o centro de carregamento ao longo da direção  $y$ . Neste exemplo, em  $t_3$ , já se pode notar uma leve descontinuidade da curva na coordenada  $y=14m$  (limite entre os dois materiais) que se acentua com o passar do tempo. Isto se deve, principalmente, à diferença de permeabilidade dos materiais em que a relação  $(k_1 / k_2)$  é da ordem de sete vezes. Embora os excessos iniciais de carga total gerados tenham sido maiores no Solo 1, este atingiu a condição final ( $h = 20m$ ) mais rápido que o Solo 2, mostrando mais uma vez que a diferença de permeabilidades exerce forte influência sobre a dissipação de poro - pressões.

A concordância de resultados entre o ANLOG e o SIGMA/W-SEEP/W foi muito boa, especialmente nos instantes de tempo fora da zona de oscilação numérica (a

partir de  $t_1$ ) em que erros máximos de 5% foram encontrados para os valores de carga total entre ambos os programas.

Os deslocamentos também foram comparados e são apresentados nas Figuras 5.4, 5.5 e 5.6. A Figura 5.4 contém os deslocamentos verticais dos nós abaixo do centro de carregamento externo. A progressão e a intensidade dos recalques são maiores na camada superior (Solo 1). Esta camada é menos rígida e mais compressível que a camada inferior (Solo 2).

Na Figura 5.5 os deslocamentos nas duas direções são avaliados agora em  $x=2b$ , ou seja, distante 12m do centro de carga. Em  $t_1$  ( $t=1s$ ), observa-se que os nós se deslocam para a direita e para cima.

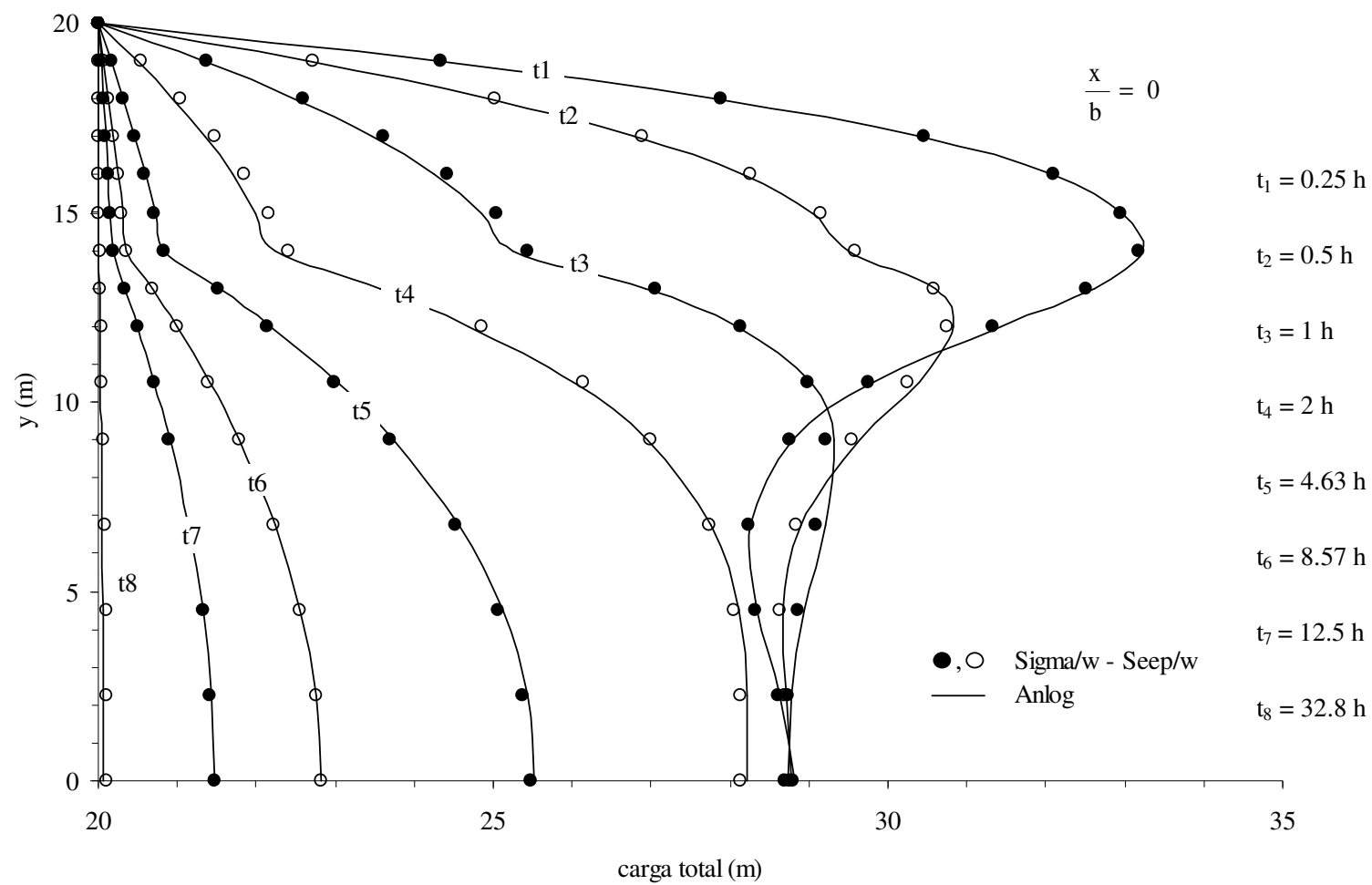


Figura 5.3 – Evolução no tempo da dissipação dos excessos de carga total vs. y



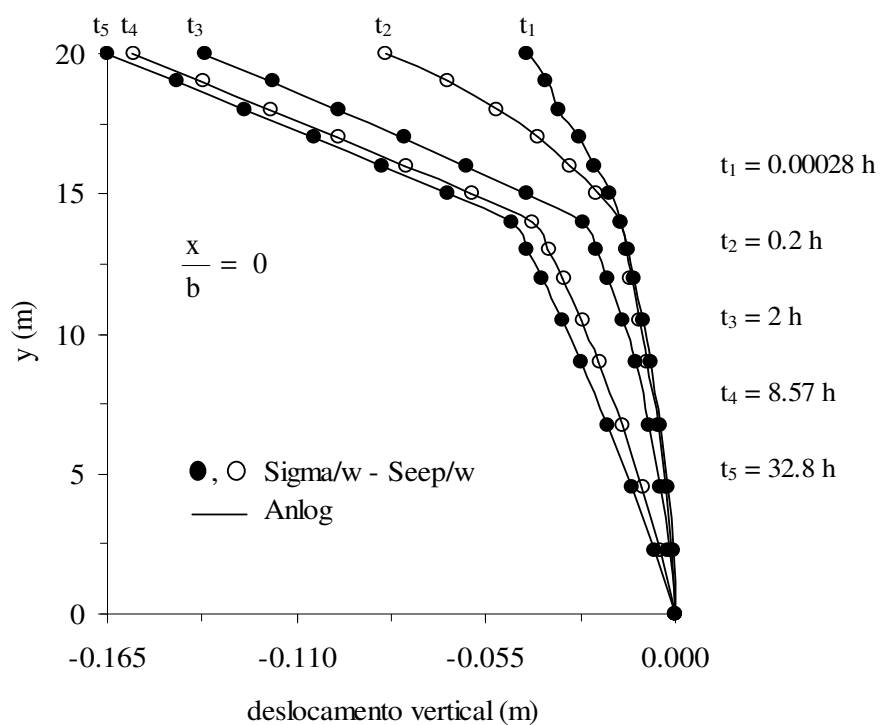


Figura 5.4 – Evolução no tempo dos deslocamentos verticais vs.  $y$  em  $x/b = 0$

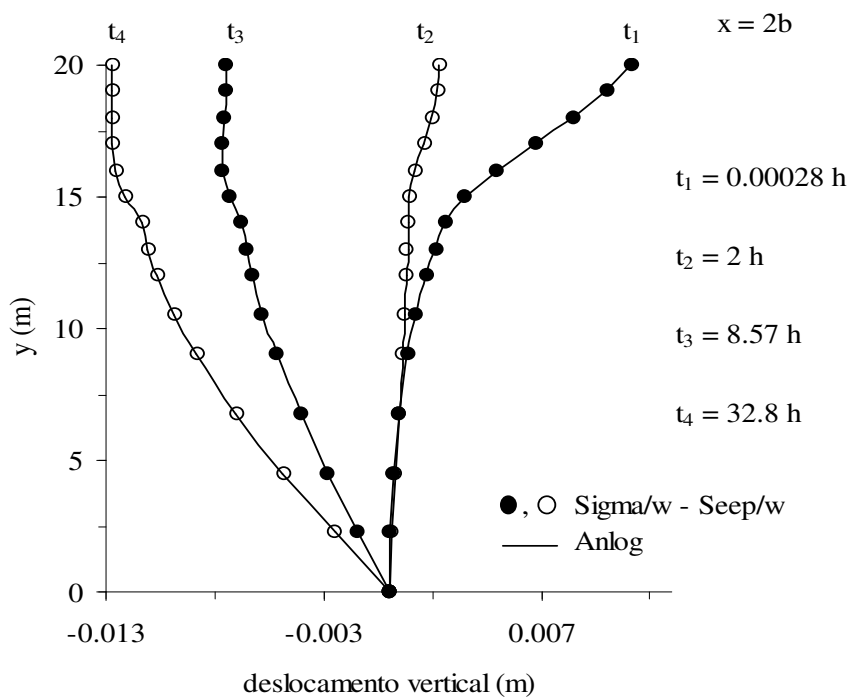


Figura 5.5 – Evolução no tempo dos deslocamentos verticais vs  $y$  em  $x=2b$

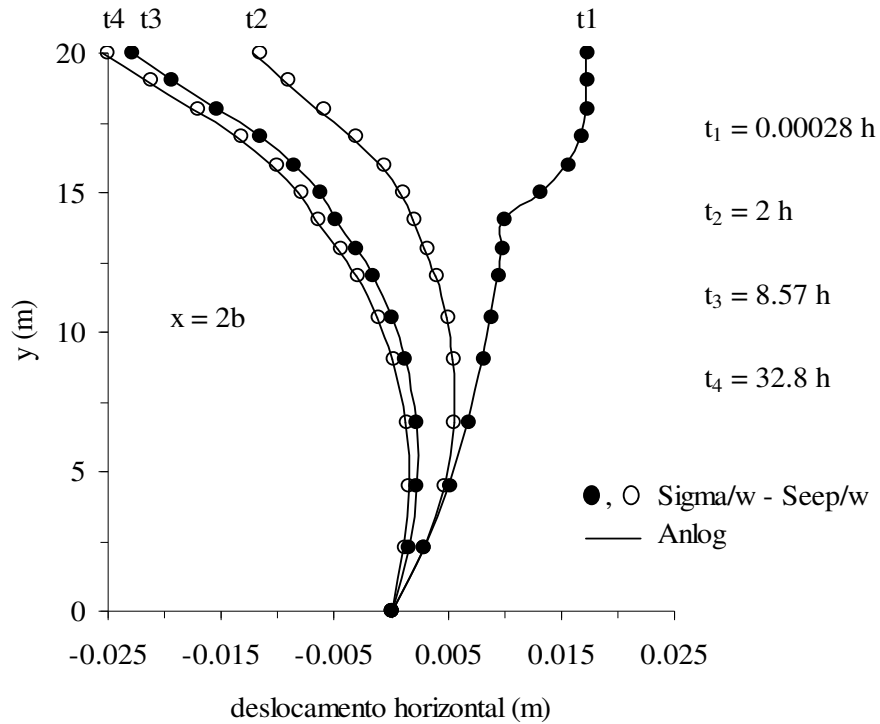


Figura 5.6 – Evolução no tempo dos deslocamentos horizontais vs.  $y$  em  $x=2b$

A Figura 5.7 ilustra a malha deformada em que os deslocamentos estão com uma magnitude de dez vezes o valor real, para melhor visualização. Nos instantes posteriores, ocorre uma tendência de inversão (Figuras 5.5 e 5.6) nos vetores de deslocamento em  $x$  e  $y$ .

A Figura 5.8 mostra a configuração deformada no instante  $t=32.8h$ . Uma magnitude de dez vezes os valores reais também foi utilizada para melhor ilustrar o exemplo. A maior diferença encontrada entre os deslocamentos obtidos pelo ANLOG e [SIGMA-SEEP/W] para todos os instantes analisados foi de 1%.

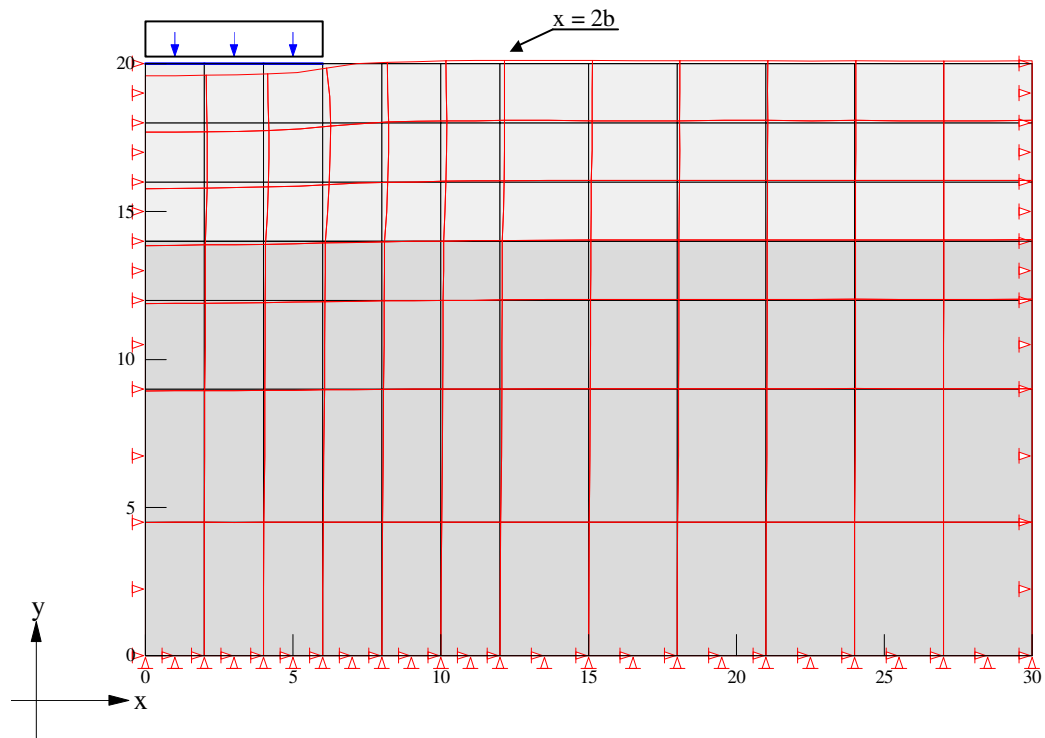


Figura 5.7 – Deformada da malha do programa ANLOG em  $t = 1 \text{ s}$  ( $0.00028 \text{ h}$ )

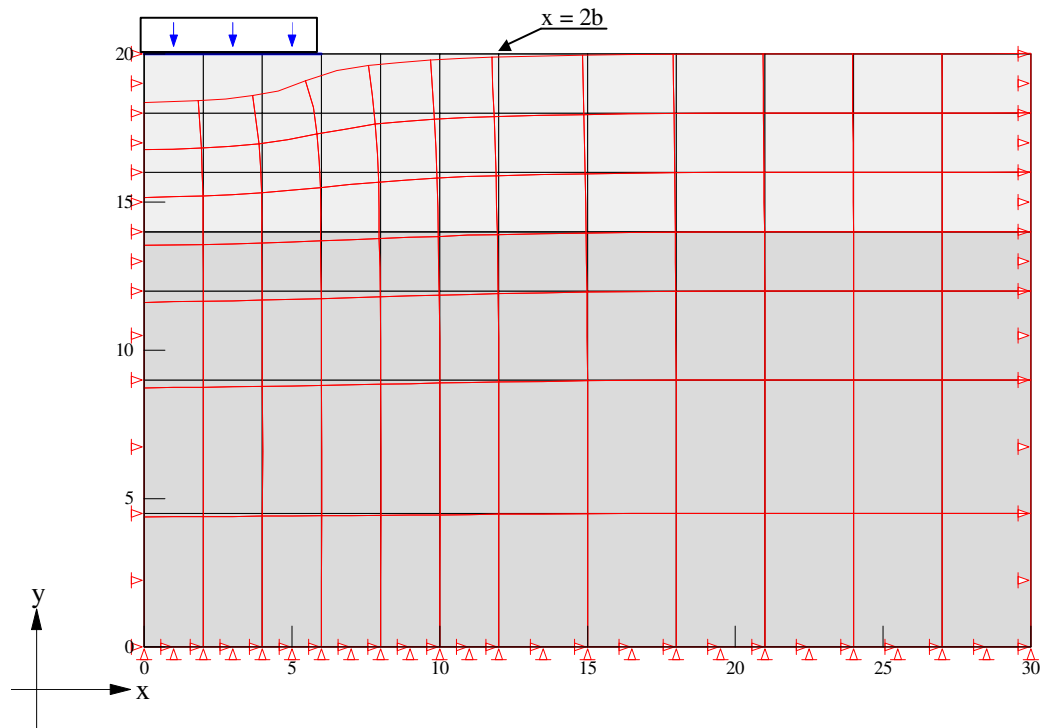


Figura 5.8 – Deformada da malha do programa ANLOG em  $t = 32.8 \text{ h}$

## **5.2 - REBAIXAMENTO RÁPIDO DO RESERVATÓRIO DE UMA BARRAGEM HOMOGÊNEA**

Duas situações são exploradas neste item. Na primeira, um problema puramente de fluxo é apresentado incluindo a localização da superfície livre transiente devido ao rebaixamento rápido do reservatório de barragem homogênea. Na segunda, o problema de adensamento devido o rebaixamento do NA é avaliado. A posição da superfície livre é avaliada em cada instante e são obtidos os efeitos do rebaixamento dessa superfície sobre o processo de deformação do meio.

### **5.2.1 - Análise de fluxo transiente**

Um problema considerando apenas a parcela de fluxo da presente formulação e incorporando o rebaixamento do NA no tempo é verificado neste exemplo. O domínio do problema é representado pela seção de uma barragem homogênea discretizada por 522 elementos Q8Q8 e 1661 pontos nodais, como ilustrado na Figura 5.9. A barragem está sujeita a um nível d'água à montante inicialmente na cota  $y = 53\text{m}$ , ao qual está associada a superfície freática inicial.

Definida a condição inicial, submete-se o nível d'água do reservatório a um abrupto rebaixamento causando uma perda de carga hidráulica total de 10.80 metros. Assim, o NA deste reservatório varia da cota 53m para a cota 42.20m instantaneamente.

A drenagem ocorre nos nós 1, 60, 90, 149, 179, 238, 268 no contorno do enrocamento de pé. Nestes nós, foi adotada a condição de contorno prescrita  $h = h_e$  ( $h_p=0$ ), conforme mostrada na Figura 5.9.

O objetivo deste exemplo é avaliar o efeito que uma perda de carga no contorno provoca no fluxo interno da barragem alterando, a cada instante, a posição da superfície livre.

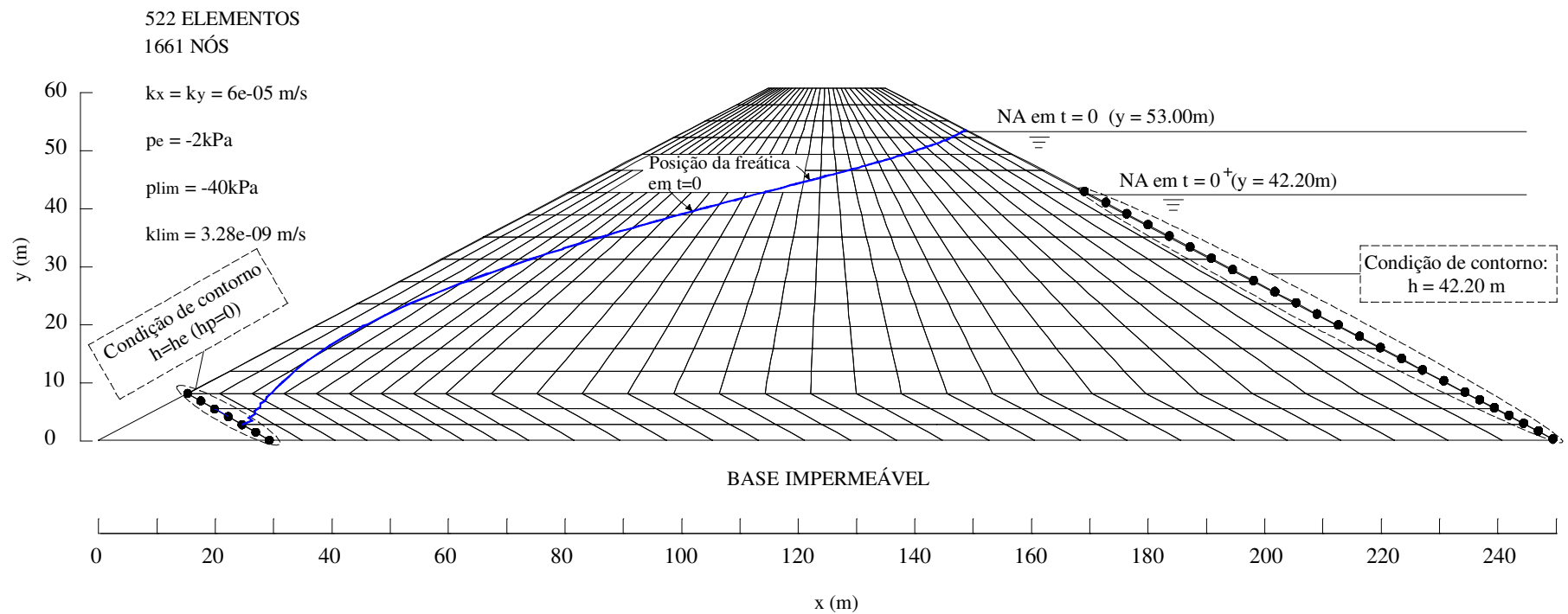


Figura 5.9 – Problema de fluxo incorporando a variação da posição da superfície livre.

A simulação do problema de fluxo no programa ANLOG pode ser feita utilizando a formulação acoplada, porém restringindo todos os graus de liberdade em deslocamento ( $\Delta u_i = 0$ ) da malha de elementos finitos. Assim, somente a parcela de fluxo é computada, uma vez que os deslocamentos não sofrerão qualquer variação devido à restrição imposta.

Adicionalmente, comparam-se os resultados do ANLOG com o programa SEEP/W versão 4, em que as posições da superfície livre são confrontadas em cinco instantes de tempo até que se atinja uma nova posição em regime permanente.

Para simulação do problema de fluxo, o programa SEEP/W utiliza uma função em que o teor de umidade volumétrica  $\theta$  do material varia com a sucção  $\psi$ . A partir da curva de retenção ( $\theta$  vs.  $\psi$ ) o SEEP/W estima a função de condutividade hidráulica do solo utilizando o método preditivo de van Genuchten (1980), em que a condutividade hidráulica não – saturada,  $k$ , é obtida fazendo

$$k = \frac{k_{\text{sat}}[1 - (a\psi^{(c-1)}).(1 + (a\psi)^c)^{(-m)}]^2}{((1 + a\psi)^c)^{m/2}} \quad (5.2)$$

em que  $a$  e  $m$  são parâmetros de forma,  $c=1/(1-m)$ ,  $\psi$  é o valor de sucção matricial atribuído ( $= -p/\gamma_w$ ) e  $p$  é a poro–pressão.

Os parâmetros  $a$  e  $m$  dependem da declividade,  $SL$ , que por sua vez depende do coeficiente angular da reta tangente a um dado ponto da curva de retenção hídrica. O valor de  $SL$  é assim obtido:

$$SL = \frac{1}{(\theta_{\text{sat}} - \theta_r)} \left| \frac{d\theta_p}{d[\log(\psi_p)]} \right| \quad (5.3)$$

em que  $\theta_{\text{sat}}$  é teor de umidade volumétrica do solo saturado,  $\theta_r$  é o teor de umidade volumétrica residual,  $\theta_p$  é o teor de umidade volumétrica obtida através do ponto médio entre  $\theta_{\text{sat}}$  e  $\theta_r$  do eixo das ordenadas da curva de retenção hídrica e  $\psi_p$  é a sucção matricial correspondente ao valor de  $\theta_p$ .

Portanto,  $m$  e  $a$  podem ser calculados fazendo:

$$m = 1 - e^{(-0.8SL)} \quad \text{para } 0 \leq SL \leq 1 \quad (5.4a)$$

$$m = 1 - \frac{0.5755}{SL} + \frac{0.1}{SL^2} + \frac{0.025}{SL^3} \text{ para } SL > 1 \quad (5.4b)$$

$$a = \frac{1}{\psi} \left( 2^{\frac{1}{m}} - 1 \right)^{(1-m)} \quad (5.5)$$

A curva de teor de umidade volumétrica empregada no programa SEEP/W é mostrada na Figura 5.10. O material, na sua condição saturada, possui um teor de umidade volumétrica igual a 0.35 e quando submetido a uma sucção de 40 kPa apresenta umidade residual de aproximadamente 0.15.

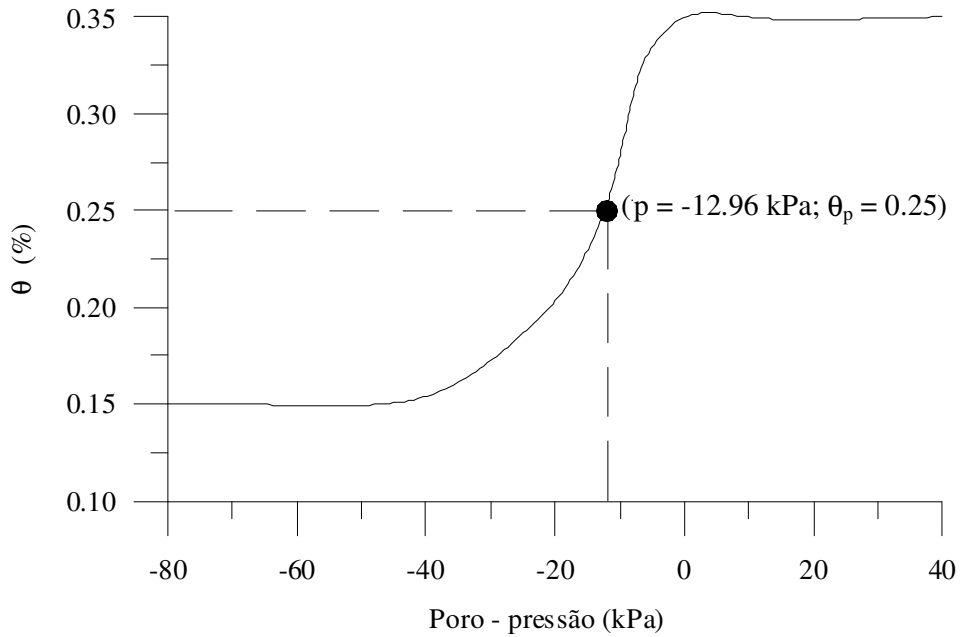


Figura 5.10– Curva de retenção do material utilizada do programa SEEP/W

Através da Figura 5.10, pode-se obter:

$$\theta_{\text{sat}} = 0.35, \theta_r = 0.15, \theta_p = 0.25 \text{ e } p = -12.96 \text{ kPa} \therefore \psi_p \cong 1.32 \text{ kPa.}$$

Com os dados da Figura 5.10, pode-se determinar a curva de condutividade hidráulica do material.

A função de condutividade hidráulica obtida pelo programa SEEP/W é mostrada na Figura 5.11. Desta figura, podem ser obtidos três importantes dados de entrada para execução do programa ANLOG:  $p_{\text{sat}} = -2$  kPa,  $p_{\text{lim}} = -40$  kPa e  $k_{\text{lim}} = 3.28 \times 10^{-9}$  m/s.

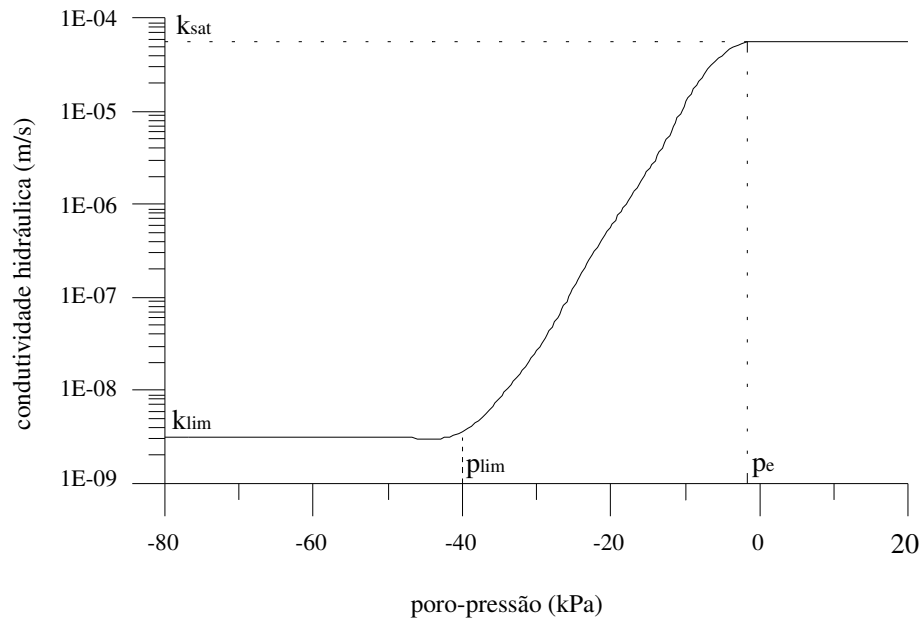


Figura 5.11 – Função de condutividade hidráulica estimada.

A posição da superfície livre em cinco instantes de tempo obtida pelo ANLOG é mostrada na Figura 5.12. Após provocada uma queda de potencial instantâneo no contorno à montante, a superfície livre no interior da barragem “cai” lentamente até estacionar em nova posição de equilíbrio.

A posição da superfície livre em cada instante de tempo determinada pelo ANLOG é comparada com o SEEP/W e mostrada nas Figuras 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17. Como a formulação do presente trabalho resolve apenas o processo de fluxo em meio saturado, a condição não saturada foi simulada através do emprego da redução de permeabilidade (Figura 5.11). O valor de  $S_y$  foi obtido através de uma sucessão de tentativas. Atribuindo inicialmente o valor do teor de umidade volumétrica saturada (0.35) para o rendimento específico, por tentativa e erro, chegou-se ao valor de  $S_y$  que melhor se ajustou ao problema para todos os instantes de tempo: 0.28. Como se pode



observar nas Figuras 5.13 a 5.17, as respostas de ambos os programas foram bastante próximas e a nova condição de regime permanente foi alcançada 74 dias depois de iniciado o processo.

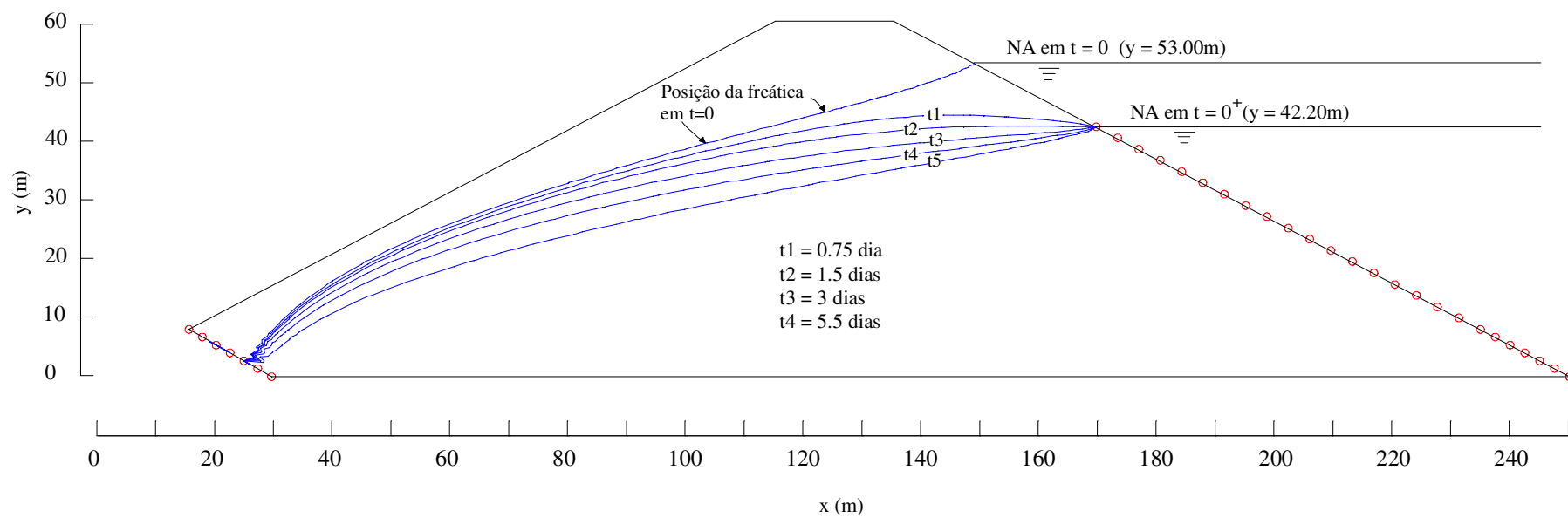


Figura 5.12 - Rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Evolução da superfície livre do problema de fluxo obtida pelo ANLOG.

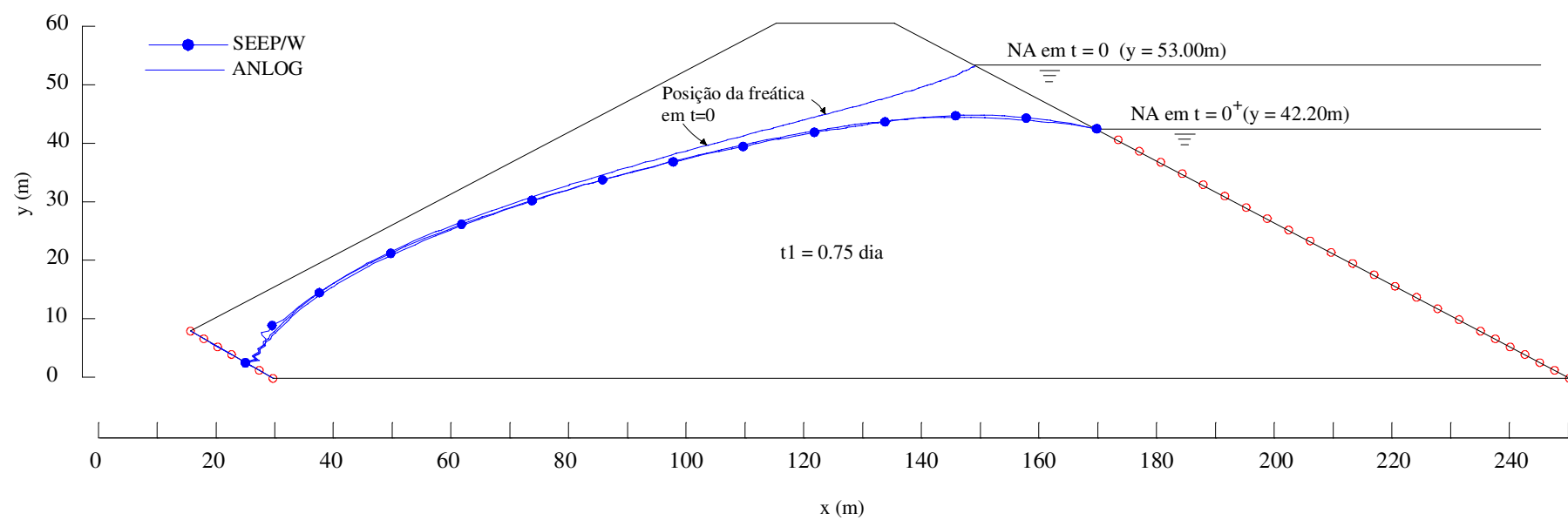


Figura 5.13 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 0.75 dia

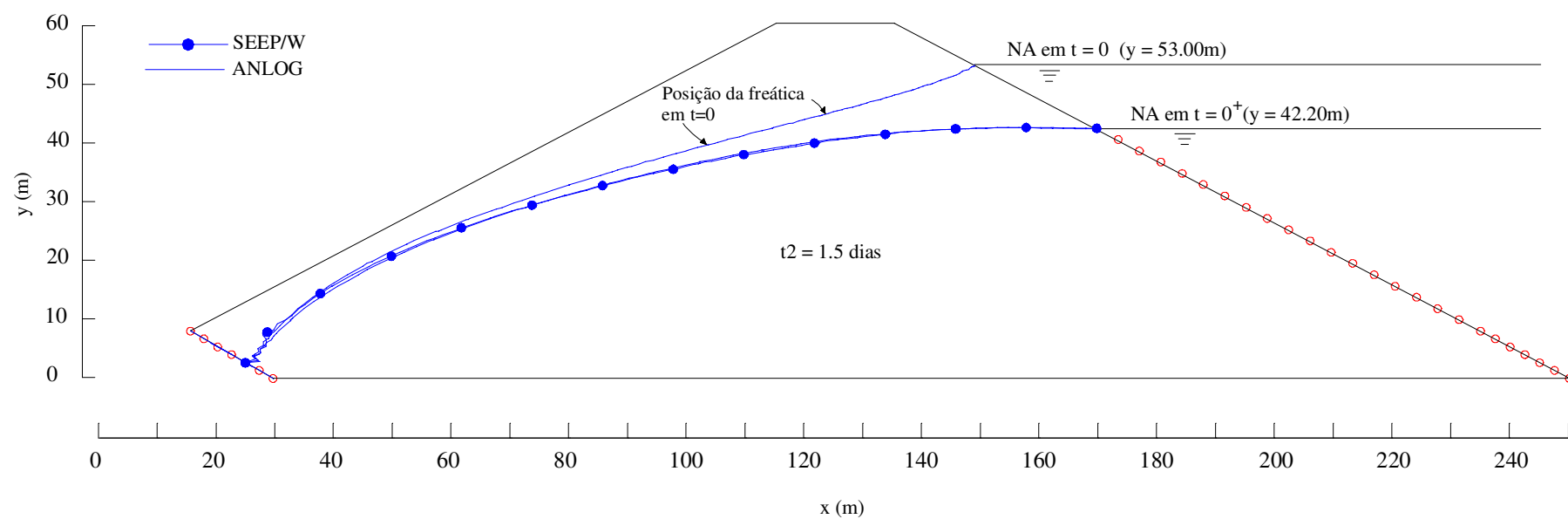


Figura 5.14 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 1.5 dias

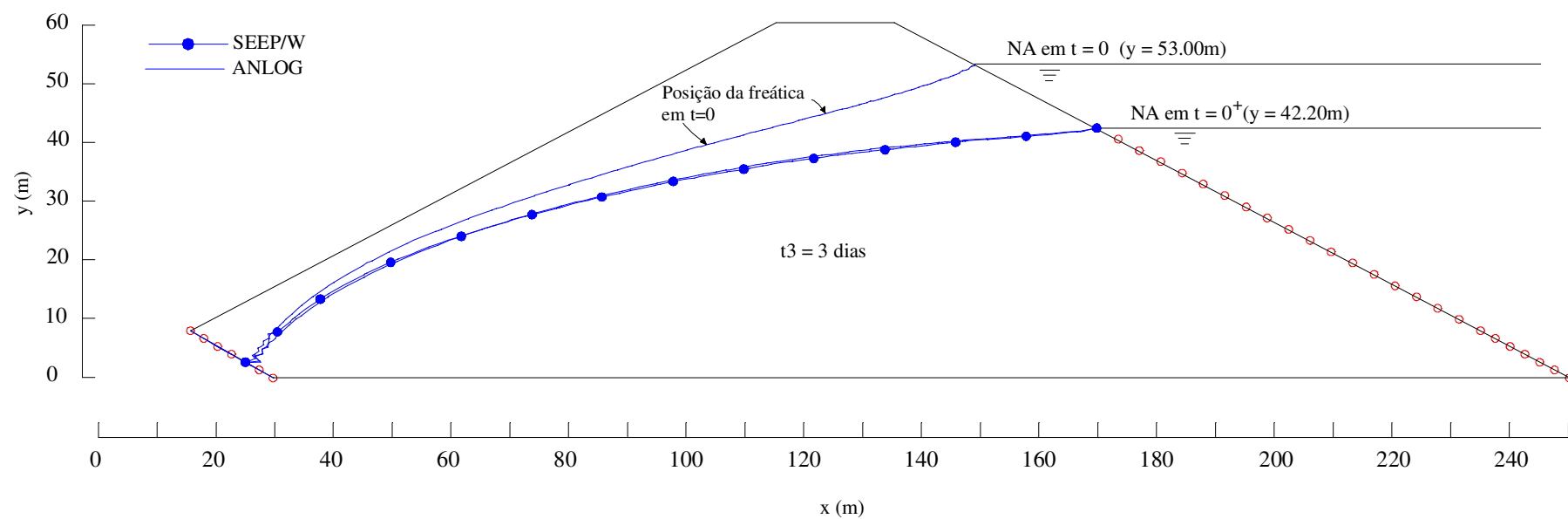


Figura 5.15 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 3 dias.

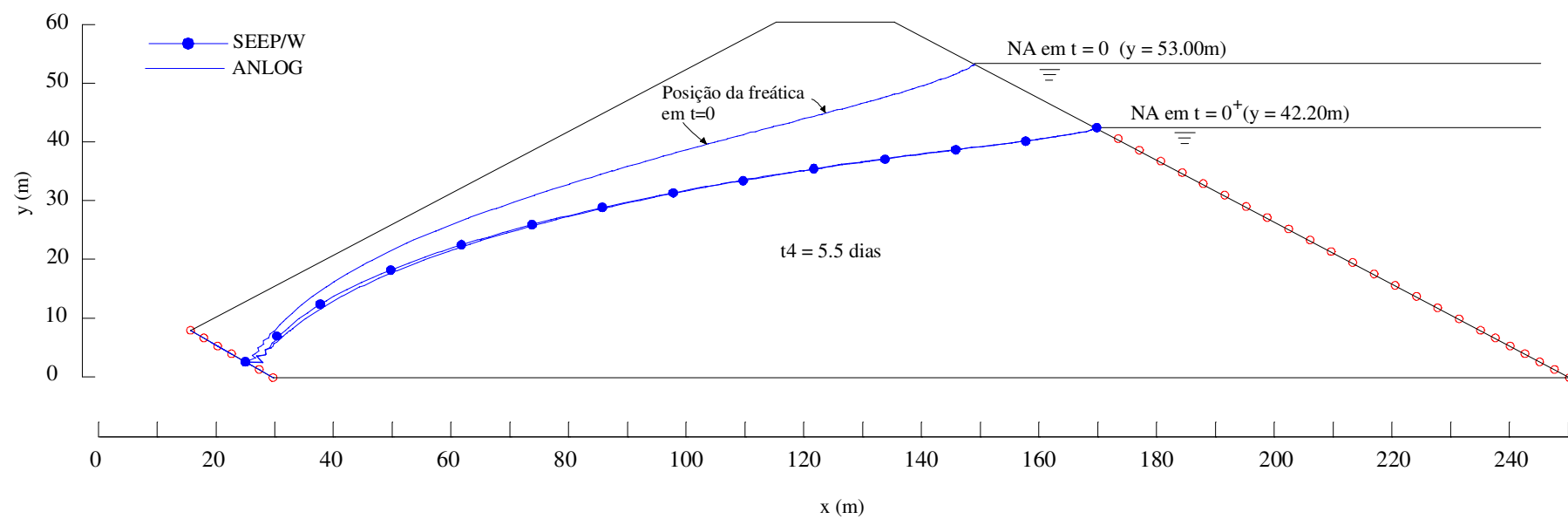


Figura 5.16 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 5.5 dias.

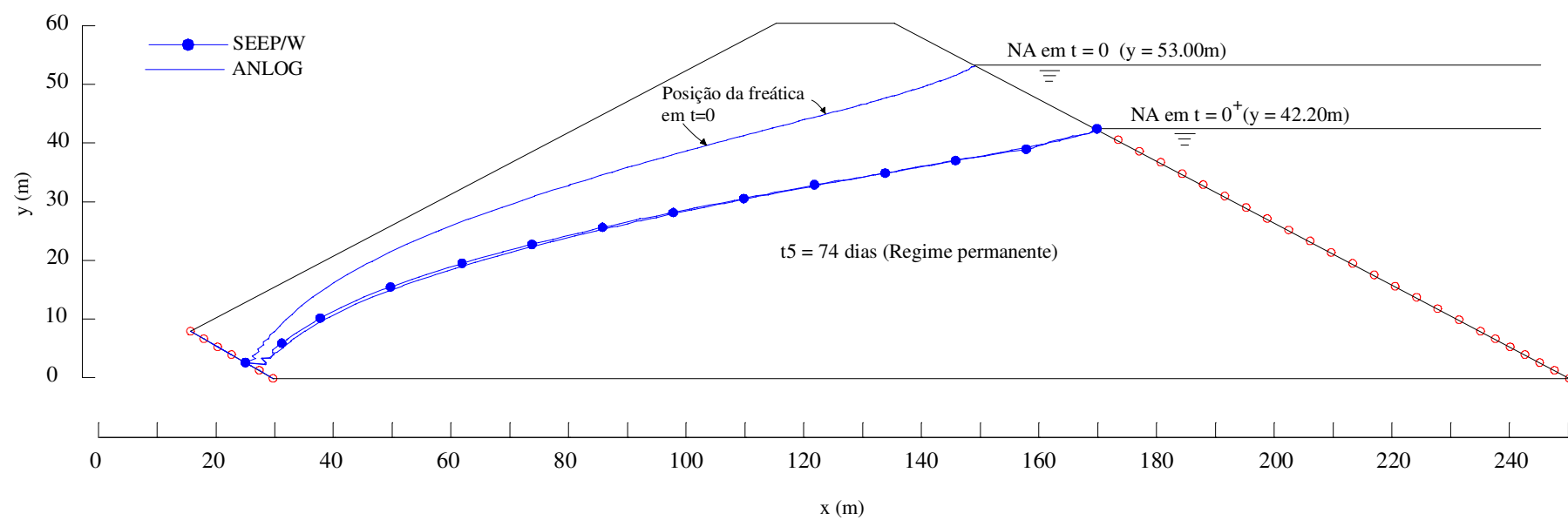


Figura 5.17 – Efeito do rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Posição da superfície livre em 74 dias.

### 5.2.2 - Análise Acoplada considerando o rebaixamento do NA

A situação analisada neste item refere-se ao adensamento devido ao rebaixamento rápido do nível d'água à montante da barragem homogênea, ilustrada na Figura 5.9.

A malha de elementos finitos, as propriedades do material, as condições de contorno e inicial são apresentadas na Figura 5.18. Os parâmetros  $k$ ,  $p_{sat}$ ,  $p_{lim}$ ,  $p_{lim}$  e  $S_y$ , utilizados nesta análise, são os mesmos do item 5.2.1. Para realizar uma análise de adensamento, apenas os graus de liberdade relativos aos deslocamentos horizontais e verticais dos nós da base da barragem e do contato com o enrocamento foram restringidos. O restante dos nós foi liberado em ambas as direções. Um módulo de elasticidade  $E = 8 \text{ MPa}$  e um coeficiente de Poisson  $\nu=0.3$  foram adotados como propriedades elásticas do material do corpo da barragem.

O objetivo deste exemplo é avaliar a posição da superfície livre no tempo e verificar a deformação causada pelo regime de fluxo. Desta vez, fez-se comparações numéricas do ANLOG com o acoplamento dos programas [SIGMA-SEEP/W]. A curva de retenção e a função de condutividade hidráulica empregadas no [SIGMA-SEEP/W] são as mesmas do item 5.2.1 (Figuras 5.10 e 5.11, respectivamente).

A Figura 5.19 mostra a evolução da superfície livre obtida pelo ANLOG. Desta vez, a posição de regime permanente da superfície livre foi alcançada somente em 115 dias, mostrando que no problema acoplado a deformabilidade do meio influi na evolução da posição da superfície livre. De forma mais evidente, a Figura 5.20 mostra a diferença entre a posição da superfície livre em um mesmo instante para os dois tipos de problema. Observa-se que quando o problema é acoplado, para quatro instantes de tempo, a superfície livre “cai” mais lentamente quando comparado ao problema desacoplado (apenas de fluxo).

É intuitivo perceber, que na análise acoplada, para qualquer instante (exceto no regime estacionário), ocorre uma minoração das condições de estabilidade do barramento, quando comparada à análise de fluxo. O fator de segurança deverá ser menor no problema acoplado, em função de uma posição mais alta da superfície livre (maiores valores dos excessos de poro-pressão) encontrada para cada instante avaliado (exceto na posição estacionária).



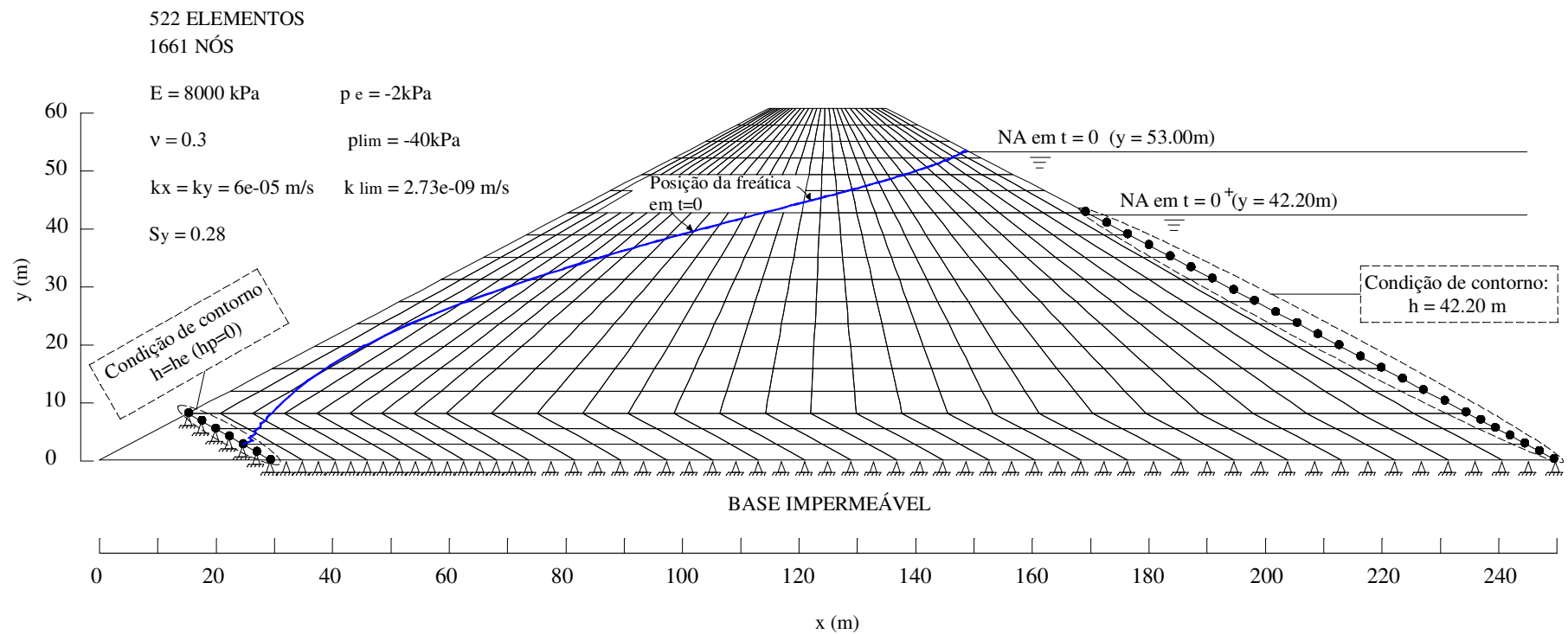


Figura 5.18 – Barragem homogênea - Adensamento devido ao rebaixamento da superfície livre.

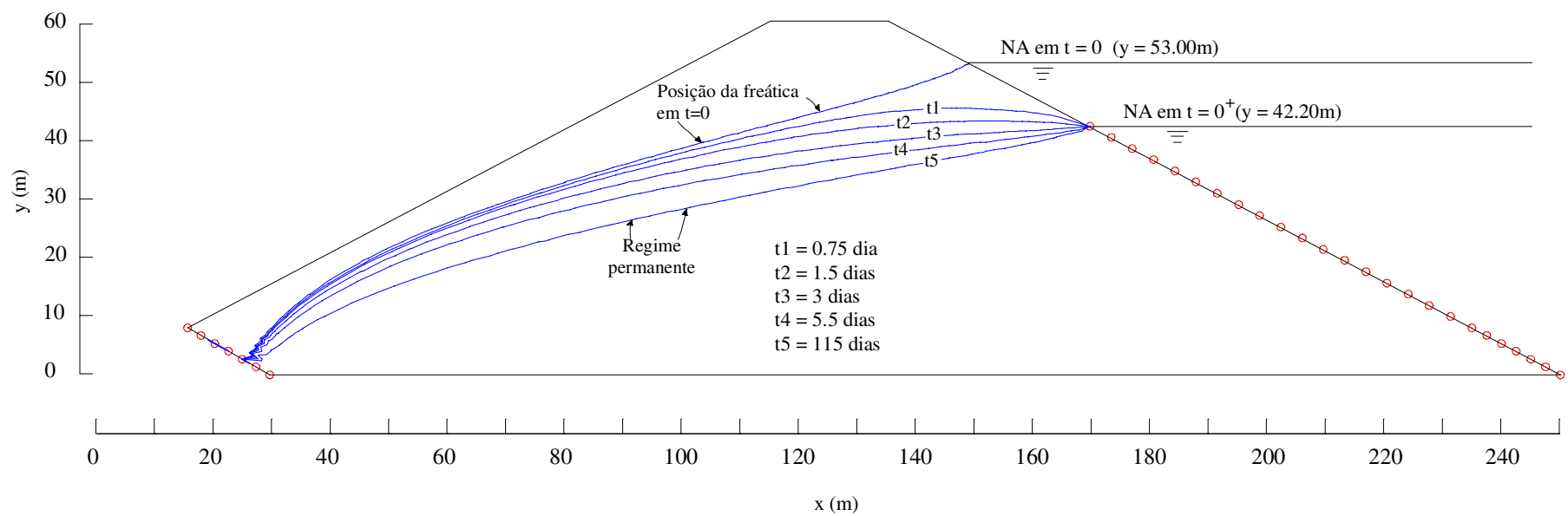


Figura 5.19 - Rebaixamento rápido de reservatório em barragem homogênea - Evolução da superfície livre do problema de adensamento obtida pelo ANLOG.

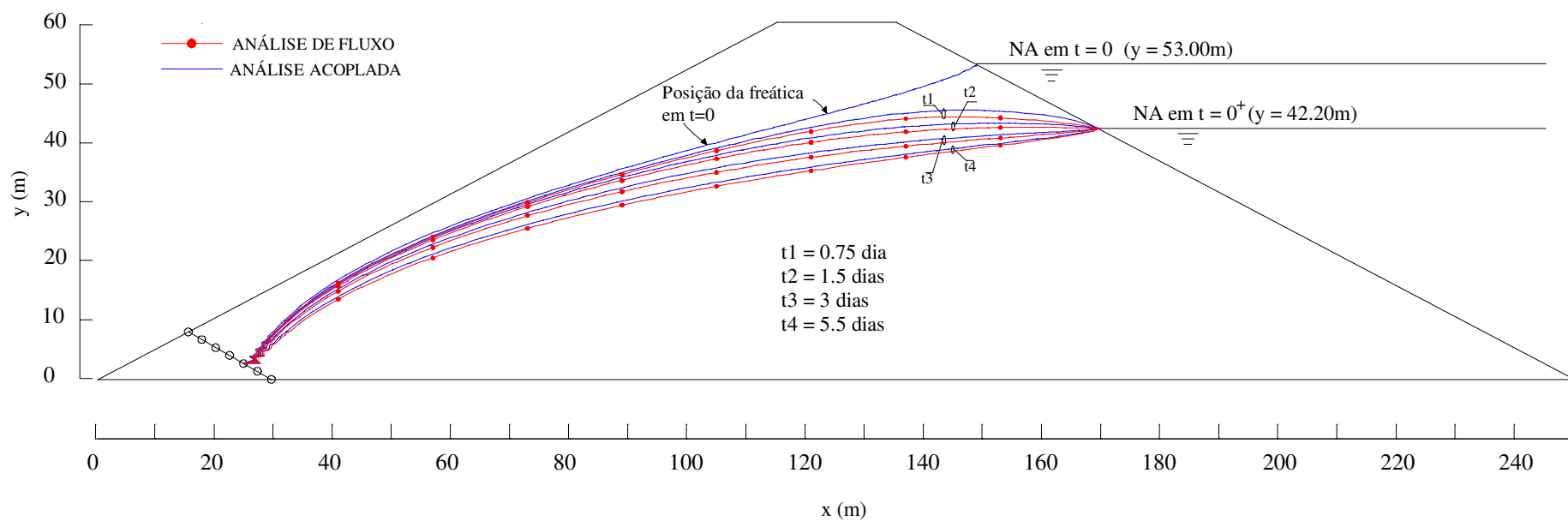


Figura 5.20 – Barragem homogênea – Comparação da posição da superfície livre obtida em análise de fluxo e análise de adensamento (acoplada).

Nas duas situações (fluxo e adensamento), a mesma posição estacionária (embora em instantes distintos) foi encontrada. Isso mostra que a posição e a forma da superfície livre no regime permanente independe da compressibilidade do meio. Este fato também foi constatado em Hsi (1992).

As Figuras 5.21, 5.22, 5.23, 5.24 e 5.25 comparam os resultados, para cada instante, entre ANLOG e [SIGMA-SEEP/W]. Nota-se que para os mesmos instantes há uma diferença crescente entre ambos os resultados. O programa [SIGMA-SEEP/W] fornece uma posição para a superfície piezométrica no regime permanente, mais alta do que aquela obtida pelo programa SEEP/W no item 5.2.1. Isto pode significar que a formulação do [SIGMA-SEEP/W] encontra uma posição de equilíbrio para a superfície livre quando teoricamente ainda há excessos de poro-pressão a serem dissipados.

A Figura 5.26 mostra um esquema em que quatro seções (duas verticais e duas horizontais) são escolhidas arbitrariamente para avaliação dos deslocamentos em dois instantes, inicial ( $t_2=1.5$ dias) e final ( $t_5=115$ dias). Nesta figura, pode-se observar o plano em que cada seção cruza o barramento. Os deslocamentos são apresentados da seguinte forma:

- Seção **1-h**: Recalques ao longo da horizontal ( $y=21.30$ m).
- Seção **2-h**: Recalques ao longo da horizontal ( $y=60$ m).
- Seção **1-v**: Deslocamentos horizontais ao longo da vertical ( $x=134$ m).
- Seção **2-v**: Deslocamentos horizontais ao longo da vertical ( $x=175$ m)

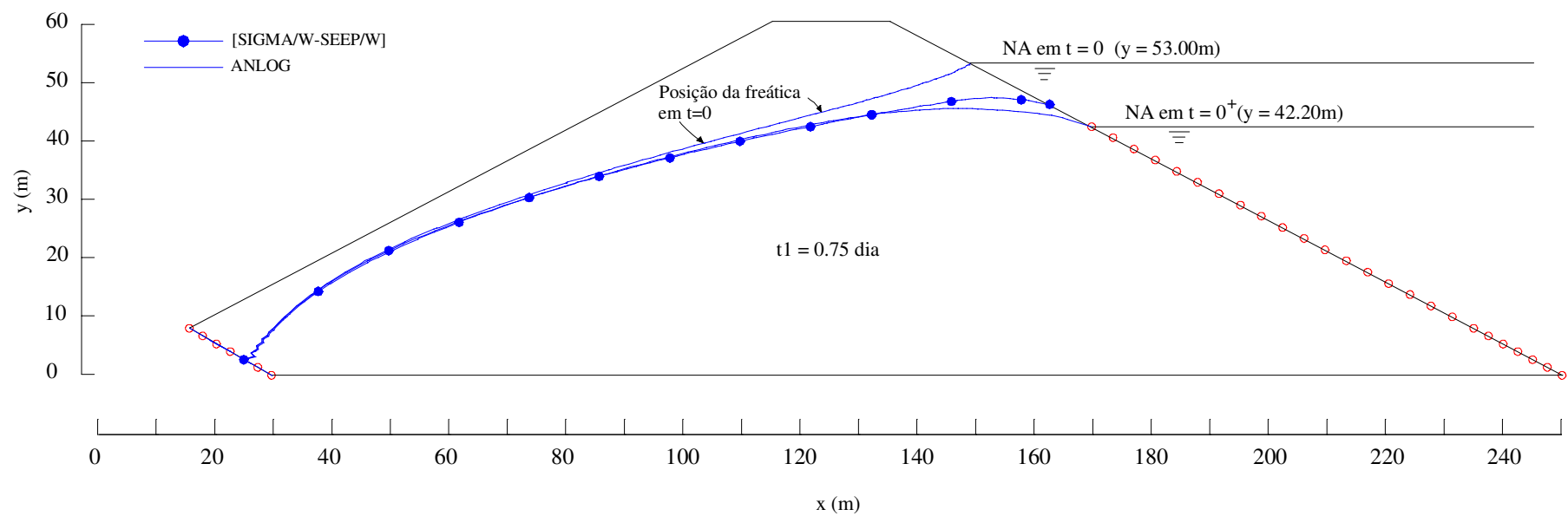


Figura 5.21 – Barragem homogênea - Posição da superfície livre em 0.75 dia do problema acoplado

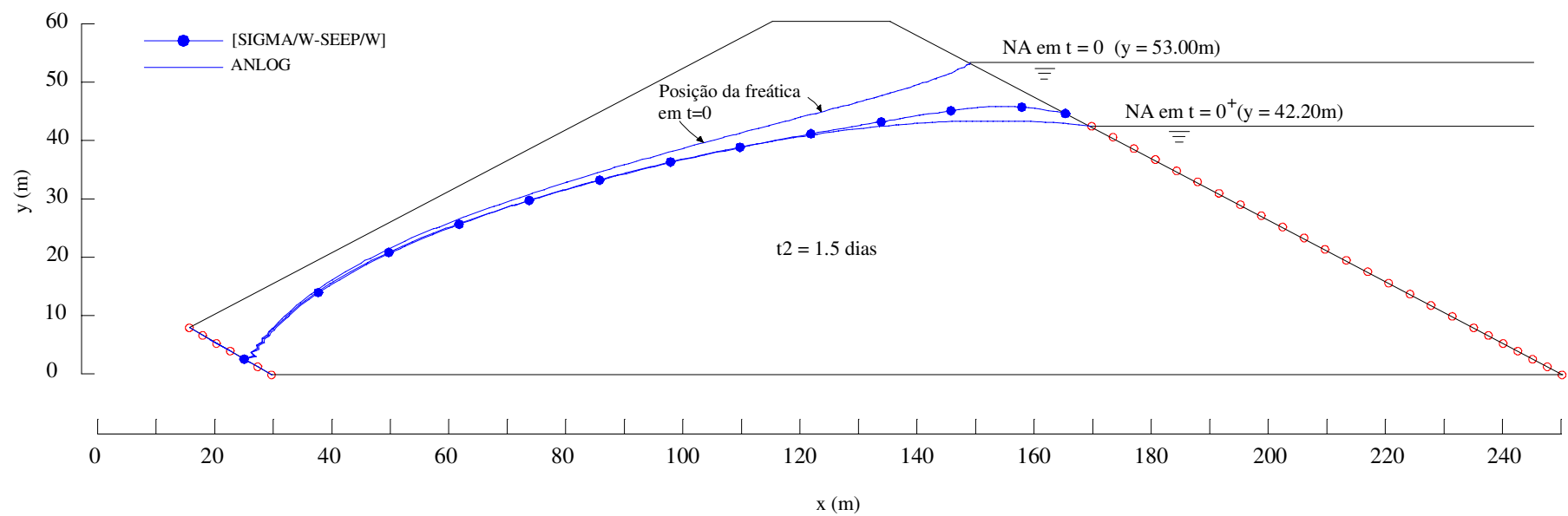


Figura 5.22 – Barragem homogênea - Posição da superfície livre em 1.5dias do problema acoplado.

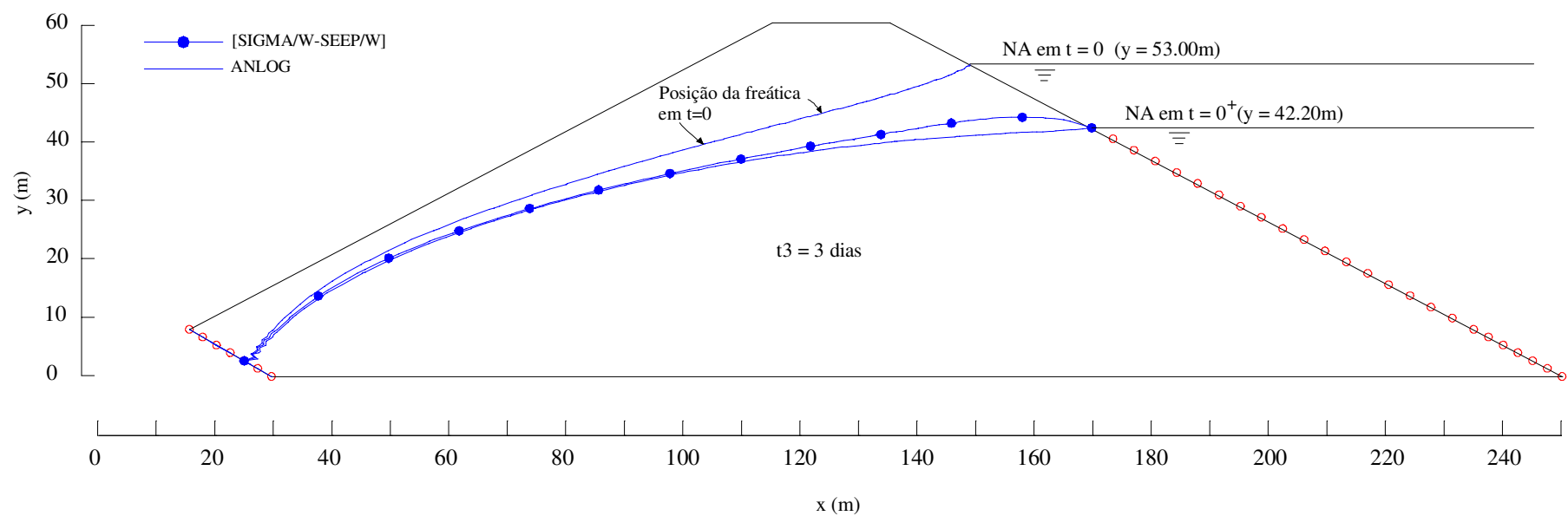


Figura 5.23 – Barragem homogênea - Posição da superfície livre em 3 dias do problema acoplado.

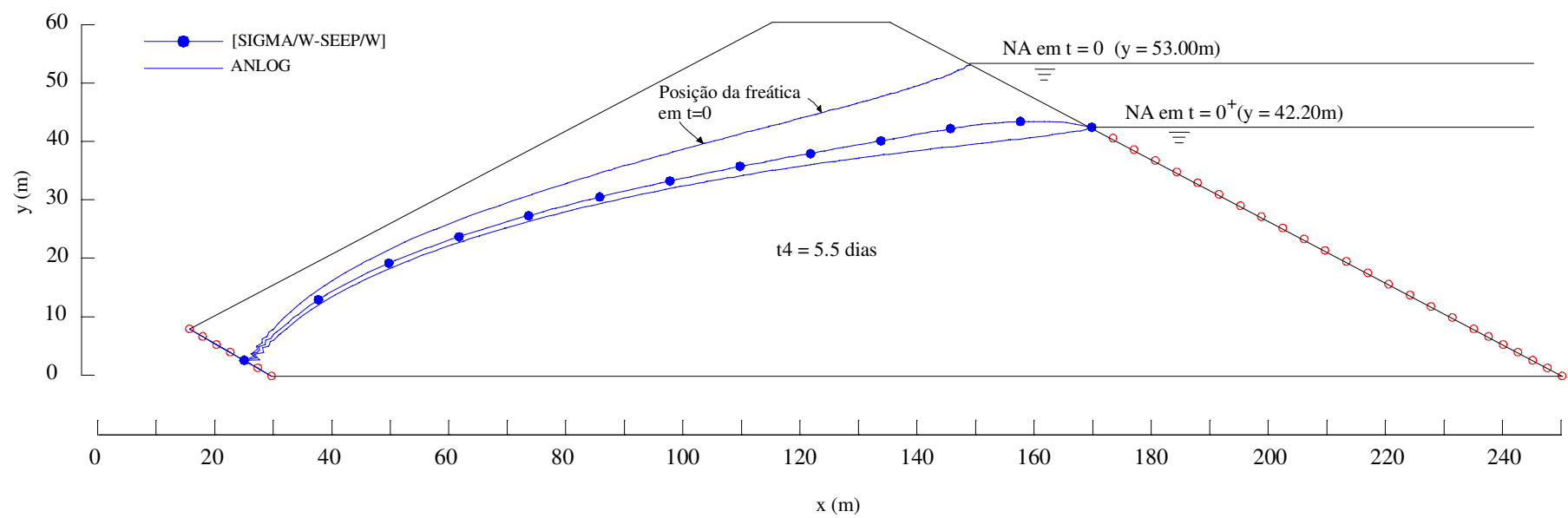


Figura 5.24 – Barragem homogênea - Posição da superfície livre em 5.5 dias do problema acoplado.



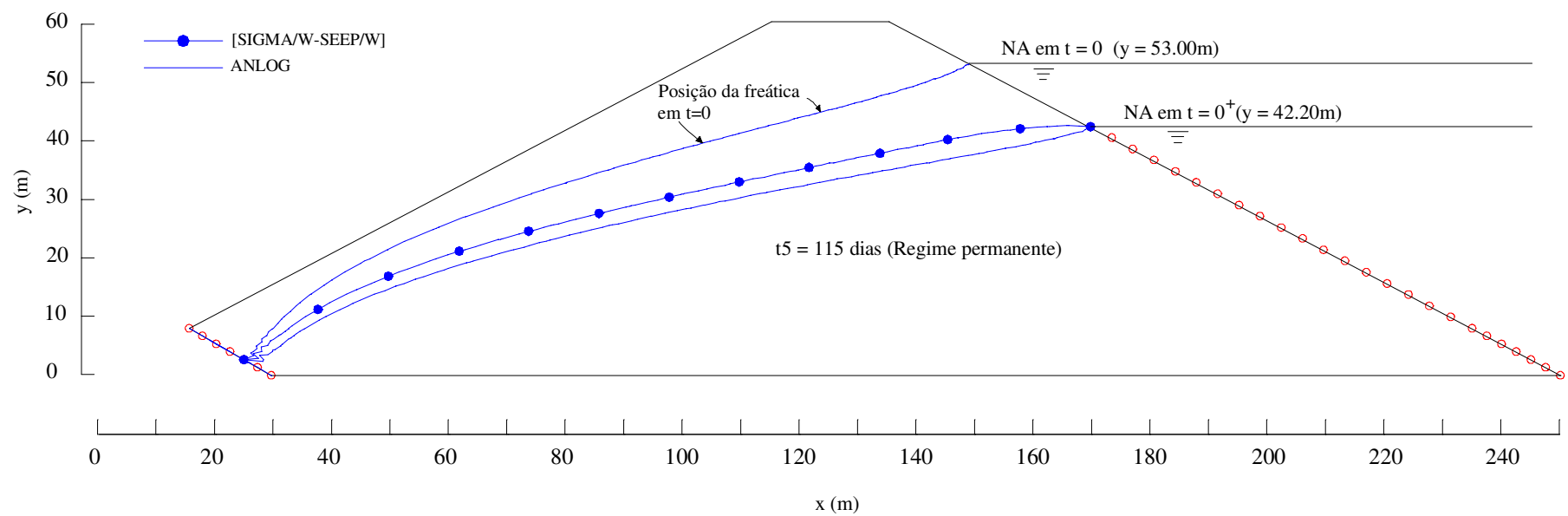


Figura 5.25 - Barragem homogênea - Posição final da superfície livre em 115 dias do problema acoplado.

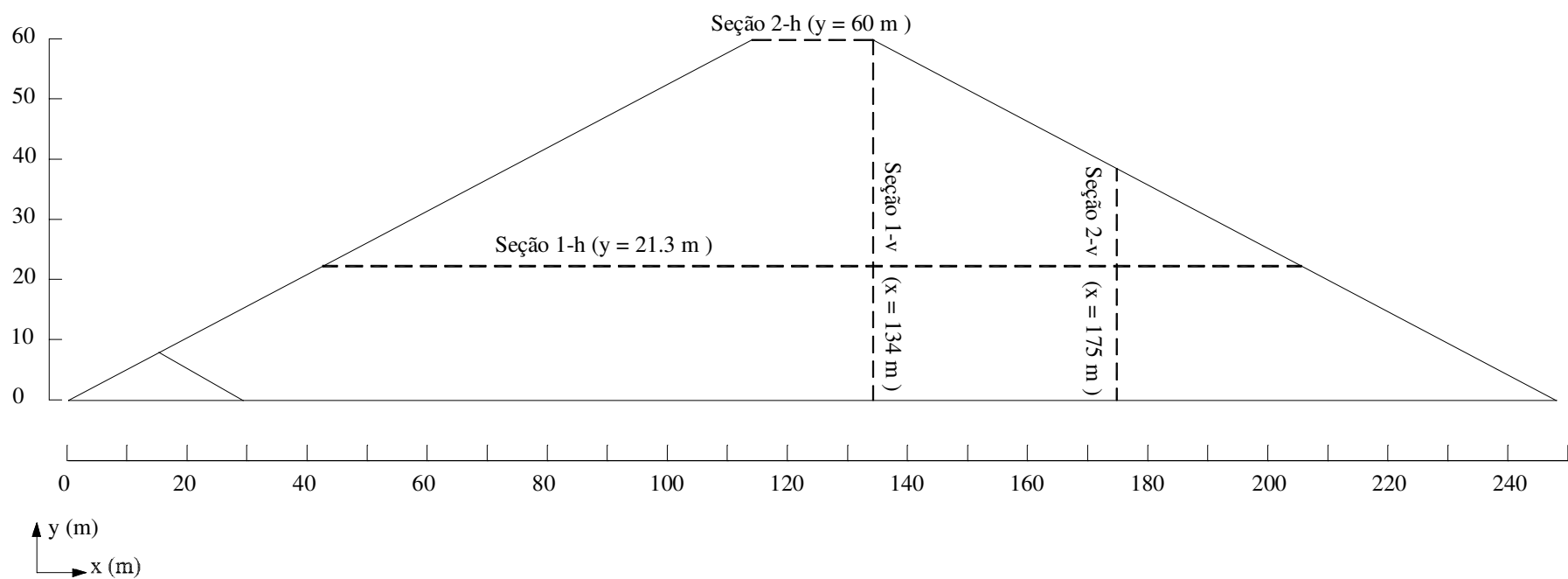


Figura 5.26– Seções escolhidas para avaliação dos deslocamentos

A Figura 5.27 mostra os recalques nas seções 1-h e 2-h numa fase inicial do processo de adensamento por rebaixamento ( $t_2=1.5$  dias). Os resultados obtidos entre o ANLOG e o [SIGMA-SEEP/W] foram bastante parecidos. Os maiores recalques ocorreram do lado direito da barragem, no sentido do fluxo e, onde esperam-se encontrar os maiores ganhos de tensão efetiva.

Na Figura 5.28, os recalques finais das seções 1-h e 2-h são apresentados. Avaliando a seção 1-h, observaram-se maiores deslocamentos em sua porção média, resultado da “queda” mais tardia da superfície livre naquela região. Na seção 2-h, um comportamento análogo ao encontrado na Figura 5.27 foi observado. As diferenças obtidas entre os resultados de ambos os códigos computacionais, devem-se, essencialmente, à diferença na posição da superfície livre encontrada por cada programa no instante final ( $t=115$  dias).

As Figuras 5.29 e 5.30 mostram os deslocamentos horizontais das seções 1-h e 2-h em 1.5 dias e 115 dias, respectivamente. Menores magnitudes para os deslocamentos horizontais foram observadas, quando comparadas com os deslocamentos verticais (Figuras 5.27 e 5.28). Quanto às diferenças encontradas entre ANLOG e [SIGMA-SEEP/W], estas podem ser atribuídas mais uma vez à diferença de poro-pressões obtidas, especialmente em  $t = 115$  dias, o que implica também em uma diferença na posição da superfície livre encontrada por cada programa. Ainda assim, a tendência de comportamento dos deslocamentos horizontais foi semelhante entre os dois códigos computacionais.

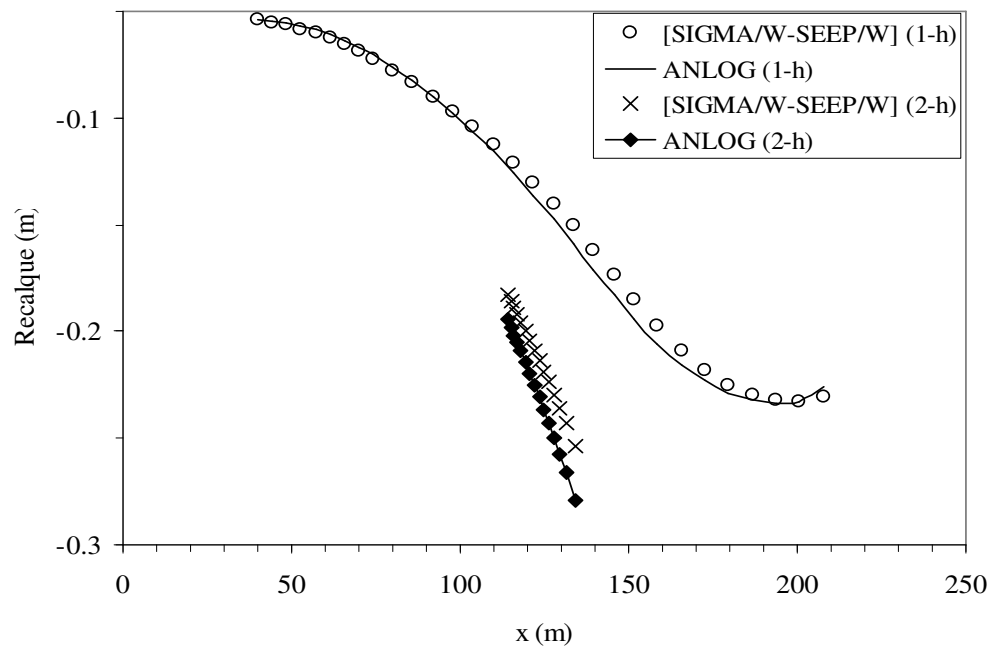


Figura 5.27 – Recalque em t = 1.5 dias / Seções 1-h e 2-h.

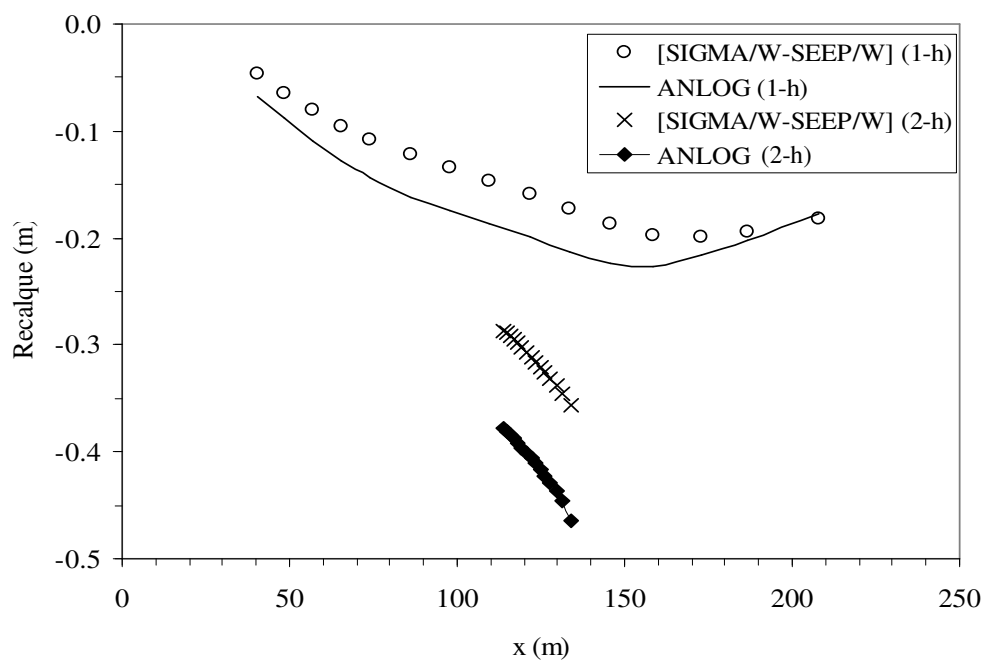


Figura 5.28 – Recalque em t = 115 dias / Seções 1-h e 2-h.

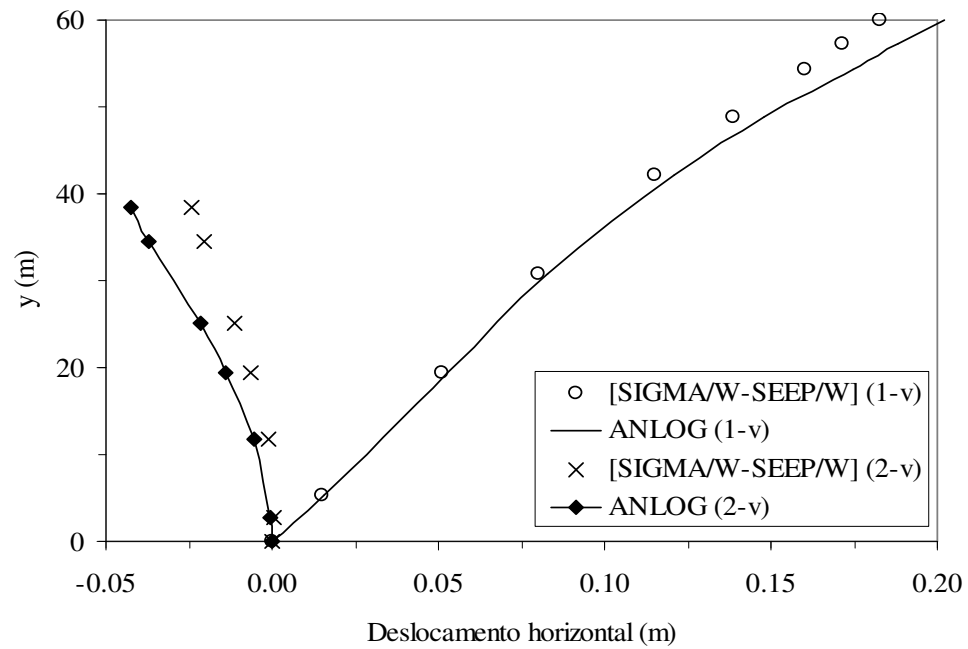


Figura 5.29 – Deslocamento horizontal em  $t = 1.5$  dias / Seções 1-v e 2-v.

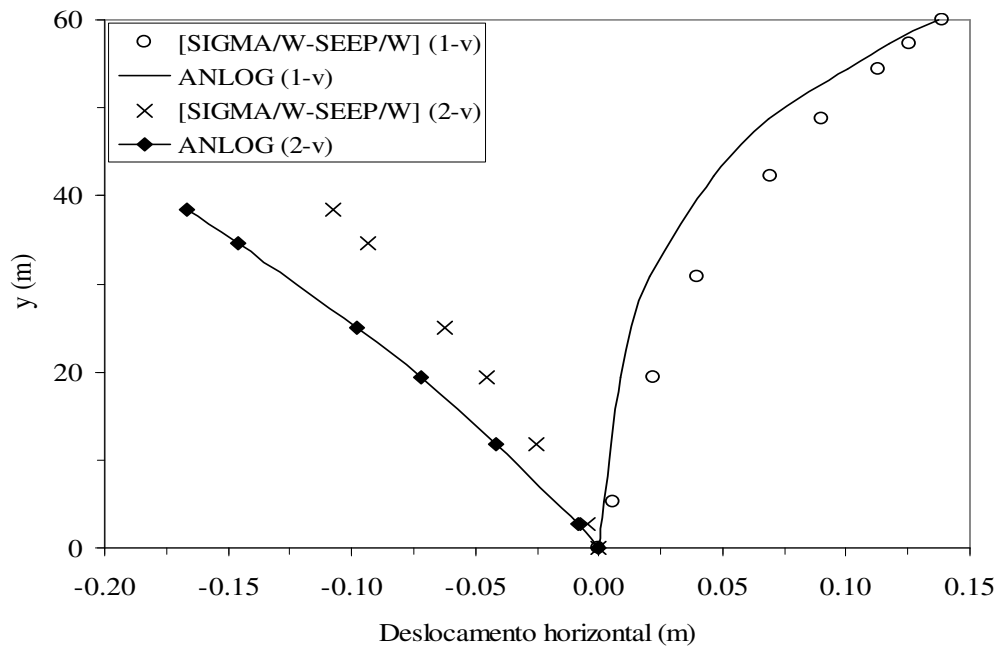


Figura 5.30 – Deslocamento horizontal em  $t = 115$  dias / Seções 1-v e 2-v.

# CAPÍTULO 6

---

## CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 6.1 - CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolveu-se uma formulação acoplada de fluxo-deformação em elementos finitos capaz de resolver problemas de adensamento incorporando ou não, a variação do nível da superfície livre de um meio poro-elástico.

A primeira contribuição relevante do presente trabalho foi a implementação da formulação numérica no programa ANLOG, que passou a utilizar carga hidráulica total como variável primária da parcela de fluxo. Desta forma, a resposta do problema de adensamento considerando a variação do NA pode ser obtida de maneira semelhante à solução de Hsi (1992).

As contribuições mais importantes deste trabalho caracterizaram-se pela capacidade de localização da superfície livre em qualquer instante, pela implementação de funções não-lineares de redução de permeabilidade para simular o fluxo acima do nível d'água e pela introdução da parcela do rebaixamento do nível d'água representada pela matriz de superfície livre  $\mathbf{G}^{FS}$  (Equação 3.21).

Para redução da permeabilidade, implementou-se uma função capaz de simular o comportamento do fluxo em meio não-saturado. Para a localização da superfície livre, foi implementado o procedimento de fluxo residual (Bathe *et al.*, 1982 e Desai e Li, 1983) que tem por objetivo, a busca, em cada instante, do contorno de poro-pressões nulas. Quanto à matriz  $\mathbf{G}^{FS}$ , esta representa, fisicamente, a quantidade de água liberada que deve ser imposta ao longo de toda a superfície livre contabilizando assim, a parcela transiente do rebaixamento no sistema de equações algébricas.

Exemplos de validação de adensamento unidimensional e bidimensional e de fluxo bidimensional, considerando ou não o rebaixamento da superfície livre, foram apresentados neste trabalho e os resultados puderam validar a presente formulação.

Uma abordagem sobre problemas de oscilação numérica foi realizada em que verificou-se que para um dado valor da constante de integração temporal, parâmetros como o número de elementos, a permeabilidade e a compressibilidade do material, exercem influência sobre o tamanho ideal do incremento de tempo a ser utilizado em uma análise de adensamento. Este fato é mais evidente nos instantes iniciais do processo de adensamento, quando são gerados maiores gradientes hidráulicos. Respostas das cargas totais são comparadas com os programas [SIGMA-SEEP/W] tendo sido obtida boa concordância entre ambos os resultados.

Exemplos de aplicação de fluxo e adensamento bidimensionais também foram apresentados. Em ambos os problemas, obteve-se a posição da superfície livre para instantes de tempo diversos. No problema de adensamento, além da posição da superfície livre, foram ainda obtidos os deslocamentos nos referidos instantes de tempo.

Verificou-se, ainda, que a posição da superfície livre é dependente do tipo de análise, isto é, para um dado instante de tempo, o NA evolui de maneira diferente entre o problema acoplado fluxo-deformação e o problema desacoplado de fluxo. Nas análises realizadas, observou-se que para um mesmo instante de tempo, a altura da superfície livre encontrada é maior nas análises acopladas e menor nas análises de fluxo. Isso mostra a importância de se considerar o processo de deformação do material em conjunto com o processo de fluxo para se obter uma posição mais realista dessa superfície. Na análise acoplada, a posição da superfície **transiente** obtida pode ser bem diferente daquela obtida numa análise puramente de fluxo, especialmente no caso de se utilizar materiais muito compressíveis.

Finalmente, comparações dos resultados deste trabalho com os de outra ferramenta numérica (SEEP/W e [SIGMAW-SEEP/W]) foram realizadas. Inicialmente, procedeu-se uma análise de fluxo em que foram feitas comparações entre o programa ANLOG e o SEEP/W a fim de se obter o valor mais adequado para o coeficiente de rendimento específico,  $S_y$ , do material. Em seguida, procedeu-se à análise de adensamento e verificaram-se diferenças (especialmente nos estágios finais) entre o ANLOG e o [SIGMA/W-SEEP/W], para a posição da superfície livre. Vale salientar

que o [SIGMA/W-SEEP/W] apresentou uma posição muito acima da esperada para o último instante de tempo (regime permanente). Na análise de fluxo, o SEEP/W já havia apresentado uma posição bem mais baixa para o regime permanente. Independentemente do tempo necessário para se atingir o regime permanente a resposta entre o SEEP/W e o [SIGMA/W-SEEP/W] para a posição estacionária deveria ser a mesma.

## 6.2 - SUGESTÕES

Como sugestões para futuras pesquisas tem-se:

- Implementação computacional do processo de solução baseado no esquema iterativo apresentado no item 3.3.1. Desta forma, a posição da superfície livre no problema acoplado, poderá ser ajustada de forma mais precisa.
- Introdução de outra formulação numérica acoplada em que seja possível simular o problema de adensamento em meio não-saturado.
- Inclusão, na presente formulação, da parcela relativa à remoção de tensões a fim de simular um problema de escavação com nível d'água variável. Sendo assim, para localização da superfície transiente, será necessária a implementação do método modificado de Cividini e Gioda, uma vez que o processo de escavação pode gerar contornos de poro - pressões que sejam confundidos com a superfície livre pelo procedimento de fluxo residual.



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

Azevedo, R. N. e Azevedo, R. F. (1994) – Elasto-plastic analysis of Beliche dam during construction and first impounding – Applications of Computational mechanics in Geotechnical Engineering – pp 317-339. Edited by Azevedo, R. F., Vargas, E. A., Sousa, L. M. R. e Fernandes, M. M.

Azevedo, R. F.; Parreira, A. B. e Zornberg, J. G. (1994) – Elasto-plastic finite element analysis of a braced excavation and a tunnel – Applications of Computational mechanics in Geotechnical Engineering – pp 255-274. Edited by Azevedo, R. F., Vargas, E. A., Sousa, L. M. R. e Fernandes, M. M.

Banerjee, P. K. e Butterfield, R. (1981). Boundary element methods in engineering science. McGraw-Hill Book Co., Ltd., New York, N. Y.

Baseghi, B. e Desai, C. S. (1990). Laboratory verification of the residual flow procedure for 3-D free surface flow. Journal of Water Resources Research, v. 26, No. 2, p. 259-272.

Bathe, K. J. e Khoshgoftaar, M. R. (1979). Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v. 3, p. 13-22.

Bathe, K. J. (1982). Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall.

Bathe, K. J., Sonnad, V. e Domigan, P. (1982). Some experiences using finite element methods for fluid flow problems. Proceedings of the 4th International Conference on the Finite Element Method in Water Resources, Hannover, p. 9.3-9.16

Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, v. 12, p. 155-164.

Biot, M. A. (1955). Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, v. 26, n° 2, p. 182-185.

Biot, M. A. (1956). Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, v. 27, n° 5, p. 459-467.

Booker, J. R. e Small, J. C. (1975). An investigation of the stability of Biot's equations of consolidation. *International Journal for Solids Structures*, v. 11, p. 907-917.

Borja, R. I. (1986). Finite element formulation for transient pore pressure dissipation: a variational approach. *International Journal for Solids Structures*, v. 22, p. 1201-1211.

Borja, R. I. e Kishnani, S. S. (1991). On the solution of elliptic free - boundary problems via Newton's method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 88, p. 341-361.

Borja, R. I. (1992). Free boundary, fluid flow and seepage forces in excavations. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, v. 118, n° 1, p. 125-146

Bower, H. (1964). Unsaturated flow in ground – water hydraulics. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, v. 90, n° HY5, p. 121-144

Brebbia, C. A. (1978). *The boundary element method for engineers*. Pentech Press Limited, Plymouth Devon, England.

Britto, A. M. (1991). *CRISP90 – User's and Programmer's Guide*, Cambridge University.

Britto, A. M. e Gunn, M. (1987). Critical state soil mechanics via finite elements. Ellis Horwood Ltd.

Brown, P. T. e Booker, J. R. (1985) – Finite element analysis of excavation. Computers and Geotechnics, v. 1, p. 207-220.

Carter, J. P., Booker, J. R. e Small, J. C. (1979). The analysis of finite elastoplastic consolidation. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v. 3, p. 107-129.

Cathie, D. N. e Dungar, R. (1975). The influence of the pressure - permeability relationship on the stability of a rock - filled dam. Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams, Swansea, U.K., p. 830-845.

Cernica, J. N. (1995). Geotechnical engineering: soil mechanics. New York, John Wiley and Sons.

Chang, C. S. (1981). Boundary element method in seepage analysis with a free surface. Proceedings of Implementation of Computer Procedures and Stress-Strain Laws in Geotechnical Engineering, Chicago, Ill., p. 421-431.

Chang, C. S. (1988). Boundary - element analysis for unconflned seepage problems. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, v. 114, n°. 5, p. 556-572.

Christian, J. T. e Bohemer, J. W. (1970). Plane strain consolidation by finite elements. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, v. 96 n° 4, p. 1435 - 1457.

Cividini, A. e Gioda, G. (1984). An approximate F.E. analysis of seepage with a free surface. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v. 8, p. 549-566.

Cividini, A. e Gioda, G. (1989). On the variable mesh finite element analysis of unconfined seepage problems. *Geotechnique*, v. 2, p. 251-267.

Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E. (1989). Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons.

Cruse, T. e Rizzo, F. (1975). Boundary integral equation methods: computational applications in applied mechanics. ASME Special Publication AMD.

Cryer, C. W. (1963). A Comparison of the three – dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. 16, p. 401-412.

Desai, C. S. (1972). Seepage analysis of earth banks under drawdown. *J. Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, v. 98 (SM11), p. 1143-1162.

Desai, C. S. (1973). Approximate solution for unconfined seepage. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*, v. 99, n°. IR1, p. 71-87.

Desai, C. S. (1976). Finite element residual schemes for unconfined flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, p. 1415-1418.

Desai, C. S. e Baseghi, B. (1988). Theory and verification of residual flow procedure for 3-D free surface seepage. *Advances in Water Resources*, v. 11, p. 195-203.

Desai, C. S. e Li, G. C. (1983). A residual flow procedure and application for free surface flow in porous media. *Adv. in water resources*, v. 6, p. 27-35.

Desai, C. S. e Sherman, W. C. (1971). Unconfined transient seepage in sloping banks. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, v. 97, n°. SM2, p. 357-373.

Desai, C. S. e Siriwardane, H. J. (1981). Two numerical schemes for nonlinear consolidation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 17, p. 405-426.

Duncan, J. M. e Chang C. S. (1970). Nonlinear analysis of stress and strain in soil. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, SM5, p. 1629-1653.

Duncan, J. M. e Clough, G. W. (1971). Finite element analyses of Port Allen lock. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, v. 97, nº. SMB, p. 1053-1068.

Dvinoff, A. H. e Harr, M. E. (1971). Phreatic surface location after drawdown. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, v. 97, nº. SM1, p. 47-58.

Finn, W. D. L. (1967). Finite - element analysis of seepage through dams. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, v. 93, nº. SM6, p. 41-48.

Freeze, R. A. (1971). Three – dimensional, transient, saturated – unsaturated flow in a groundwater basin. *Water Resources Research*, v. 7, nº 2, p. 347-366.

Freeze, R. A. e Cherry, J. A. (1979). *Groundwater*, Prentice Hall, NJ.

Gerscovich, D. M. S. (1994). Fluxo em meios porosos saturados-não saturados: modelagem numérica com aplicações ao estudo de estabilidade de encostas do Rio de Janeiro. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro.

Ghaboussi, J. e Wilson, E. L. (1973). Flow of compressible fluid in porous elastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 5, nº 3, p. 419-442.

Ghaboussi, J. e Pecknold, D. A. (1984). Incremental finite element analysis of geometrically altered structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 2051-2064.

Gibson, R. E., Knight, K. e Taylor, P. W. (1963). A critical experiment to examine theories of three – dimensional consolidation. *Proceedings, European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Weisbaden*, v. 1, p. 69-76.

Gibson, R. E., Schiffman, R. L. e Pu, S. L. (1970). Plane strain and axial symmetric consolidation of a clay layer on smooth impervious base. *Q. Journal for Mechanical Applied and Mathematical*, v. 23.

Gibson, R. E. e McNamee, J. (1957). The consolidation settlement of a load uniformly distributed over rectangular area. *Fourth International Congress to Soil Mechanics and Foundation Engineering*, v. 1, p. 297-299.

Gioda, G. e Desideri, A. (1988). Some numerical techniques for free-surface seepage analysis. *Numerical Methods in Geomechanics*, p. 71-84.

Gioda, G. e Gentile, C. (1987). A nonlinear programming analysis of unconfined steady-state seepage. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 11, p. 283-305.

Gonçalves, A. J. M. (1996). Análise transiente de escavações em solos saturados. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Herbert, R. (1968). Time variant ground water flow by resistance network analogues. *Journal of Hydrology*, v. 6, p. 237-264.

Herbert, R. e Zytynski, M. (1972). A new technique for time-variant ground water flow Analysis. *Journal of Hydrology*, v. 16, p. 77-92.

Hsi, J. P. (1992). Analysis of excavation involving drawdown of the water table. Ph.D. Thesis, University of Sydney, Sydney.

Hsi, J. P. e Small, J. C. (1992a). Simulation of excavation in a poro – elastic material. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v. 16, p. 25-43.

Hsi, J. P. e Small, J. C. (1992b). Analysis of excavation in a elasto – plastic soil involving drawdown of the water table. Computer and Geotechnics, v. 13, p. 1-19.

Hsi, J. P. e Small, J. C. (1992c). Ground settlements and drawdown of the water table around an excavation. Canadian Geotechnical Journal, v. 29, nº 5, p. 740-756.

Hsi, J. P. e Small, J. C. (1993). Application of a fully coupled method to the analysis of an excavation. Soils and Foundations, Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, v. 33, nº 4, p. 36-48.

Hwang, C. T., Morgenstern, N. R. e Murray, D. T. (1972). Application of the finite element method to consolidation problems. Proc. Symposium Application of the Finite Element Methods in Geotechnical Engineering, p. 739-765, Vicksburg.

Hwang, C. T., Morgenstern, N. R. e Murray, D. T. (1971). On solutions of plane strain consolidation problems by finite element methods. Canadian Geotechnical Journal, v. 8 nº 1, p. 109-118.

Jeppson, R. W. (1969). Free-surface flow through heterogeneous porous media. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, v. 95, nº. HY1, p. 363-382.

Liakopoulos, A. C. (1965). Theoretical solution of the unsteady unsaturated flow problems in soils. Bull. Intern. Assoc. Sci. Hydrol., v. 10, p. 5-39.

Liggett, J. A. e Liu P. L. (1984). Applications of boundary element methods to fluid mechanics. Topics in Boundary Element Research, O A Brebbia, ed., v. 1, Springer-Verlag, New York, N. Y., p. 78-96.

Loaiciga, Hugo A. e Hudak, Paul F. (2003). Storativity and specific yield. Encyclopedia of Water Science, p. 937-941.

Machado Júnior, J. C. (2000). Análise de Problemas de fluxo em meio poroso não saturado pelo método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, DECIV/UFOP-EM, Ouro Preto.

McNamee, J. e Gibson, R. E. (1960) - Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum. Q. Journal for Mechanical Applied and Mathematical, v. 13, p. 210-227.

Mandel, J. (1953a). Étude mathématique de la consolidation des sols. Geotechnique, v. 3, p. 9-19.

Mandel, J. (1953b). Consolidation des sols (Étude mathématique). Geotechnique, v. 3, p. 287-299.

Mariño, Miguel A. (2003). Aquifers. Encyclopedia of Water Science, p. 30-32.

Morris, D. A. (1967). Summary of Hydrological and Physical Properties of Rock and Soil as Analyzed by the Hydrologic Laboratory of the U. S. Geological Survey, United States Geological Survey Water Supply Paper 1839-D, Reston, 1967.

Neuman, S. P. e Witherspoon, P. A. (1971). Analysis of nonsteady flow with a free surface using the finite element method. Water Resources Research, v.7, nº 3, p. 611-623.

Niwa, Y. Kobayashi, S. e Fukui, T. (1974). An application of the integral equation method to seepage problems," Theoretical and Applied Mechanics, v. 24, Proceedings



of the 24th Japan National Congress for Applied Mechanics, p. 479-486.

Nogueira, C. L. (1992). Análise de Escavações com Acoplamento de Fluxo e Deformações. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro.

Nogueira, C. L. (1998). Análise não-linear de escavações e aterros. Tese de Doutorado, UFOP, Ouro Preto.

Pereira, A. R. (2003). Análise não-linear física de estruturas de solos reforçados. Dissertação de Mestrado, DECIV/EM-UFOP, Ouro Preto.

Prevost, J. H. (1983). Implicit - explicit schemes for nonlinear consolidation. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, v. 39, p. 225-239

Reed, M. B. (1984). An investigation of numerical errors in the analysis of consolidation by finite elements. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 8, p. 243-257.

Remson, I., Appel, C. A. e Webster, R. A. (1965). Groundwater models solved by digital computer. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, v. 91, nº. HY3, p. 133-147.

Richter, T. (1979). Nonlinear consolidation models for finite element computations. *Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, p. 181-191, Aachen.

Sandhu, R. S. e Wilson, E. L. (1969a). Finite element analysis of land subsidence. *Proc. International Symposium on Land - International association hydrologic research, IAHR, Tokyo*.

Sandhu, R. S. e Wilson, E. L. (1969b). Finite element analysis of seepage in elastic media. *Journal Engineering Mechanics Division, ASCE*, v. 95, nº 3, p. 641-652.

Sandhu, R. S., Liu, H. e Singh, K. J. (1977). Numerical performance of some finite element schemes for analysis of seepage in porous elastic media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 1, p. 177-194.

Schiffman, R. L., Chen, A. T. e Jordan, J. C. (1969). An analysis of consolidation theories. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, v. 95, p. 285-312.

Small, J. C., Booker, J. R. e Davis, E. H. (1976). Elasto-plastic consolidation of soil. *International Journal for Solids and Structures*, v. 12, p. 431-448.

Taylor, R. L. e Brown, C. B. (1967). Darcy flow solutions with a free surface. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, v. 93, nº 2, p. 25-33.

Terzaghi, K. (1923). Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungserscheinungen. Artigo original publicado em 1923 e reimpresso em *From theory to practice in soil mechanics*, New York, John Wiley and Sons, 1960, p. 133-146.

Terzaghi, K. (1943). *Theoretical soil mechanics*. John Wiley and Sons, Inc.

Vargas Júnior, E. A., Lehtola, R. e Costa Filho, L. M. (1990). Fluxo não-confinado, em regime permanente, através de pilhas de rejeitos, utilizando o m.e.f. e a técnica da malha fixa. *Anais 9º COBRANSEF*, p129-133.

van Genuchten, M. Th. (1980). A closed – form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, v. 44, p. 892,898.

Walker, L. K. e Morgan, J. R. (1977). Field performance of a firm silty clay. *Proceedings of the ninth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tokyo*, v. 1, p. 341-346.

Walton, W. C. (1970). *Groundwater resource evaluation*, McGraw-Hill, mc.

Yokoo, Y., Yamagata, K. e Nagaoka, H. (1971). Finite element method applied to Biot's consolidation theory. Soil and Foundation, v. 11, nº 1, p. 25-35.

Zienkiewicz, O. C., Mayer, P. e Cheung, Y. K. (1966). Solution of anisotropic seepage by finite elements. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 92, nº. EM1, p. 111-120.

Zornberg, J. G. (1989). Análise por elementos finitos do comportamento de escavações utilizando um modelo elasto - plástico. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro.

GEO-SLOPE International Ltd. (1991). SIGMA/W version 4.24 user's guide. Calgary, Alberta, Canada. Site: [www.geo-slope.com](http://www.geo-slope.com)

GEO-SLOPE International Ltd. (1991). SEEP/W version 4.24 user's guide. Calgary, Alberta, Canada. Site: [www.geo-slope.com](http://www.geo-slope.com)