



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA CIVIL



UM MÉTODO RECURSIVO DE GERAÇÃO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA

AUTOR: MARLON BATISTA FERREIRA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

Ouro Preto, Agosto de 2003.

F383m Ferreira, Marlon Batista.
Um método recursivo de geração da função de resposta complexa em
frequência / Marlon Batista Ferreira. -- Ouro Preto : UFOP, 2003.
xiv, 121p. : il., grafs., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Escola
de Minas. Departamento de Engenharia de Civil.

1. Dinâmica estrutural. 2. Análise no domínio da frequência. 3. Função
de resposta complexa em frequência. 4. Geração recursiva. I. Universidade
Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia
de Civil. II. Título.

CDU: 624.014

Júlio

Aos olhos da morte
Júlio se encontrou
e a coragem em seu olhar
salvar uma vida tentou

nas águas turvas, traiçoeiras
ao seu destino se abraçou
o amor em seu coração
a outras coisas superou

superou o amor amargo
que a vida o condenou
num heróico mergulho
a esse amor desprezou

em dor e tristeza
minha alma transbordou
não ouvirei mais sua voz
que meu mundo transformou

nas profundezas escuras de minha alma
Júlio se encontrou
E agora meu coração entona um canto triste
Júlio se afogou

Porém, a alegria de sua alma
essa meu coração não cantou
porque o meu egoísmo
a esse canto negou

porém, nem a mim e nem a morte
Júlio encontrou
mas sim ao criador do cosmos
eternamente alcançou

perante a grandeza de Júlio
meu egoísmo se curvou
e agora me pergunto
que homem hoje sou?

A um grande homem que, como todos os grandes homens ensinou e deixou entre nós a
sua riqueza maior

A capacidade de amar o próximo como a ele mesmo

A memória de meu primo querido
Júlio.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela oportunidade de existir e demonstrar que o impossível é possível;

Aos meus pais pelo exemplo de amor, humildade e luta;

Elisângela, Douglas e Helder por tudo que representam em minha vida;

À Elizabeth, a pessoa que desde o início de minha caminhada neste mundo esperei encontrar, por tudo que sempre fez por mim, pelo amor que dedica a mim.

Ao meu amigo Leonardo Pinheiro, pela lealdade e confiança.

Ao Prof. Antônio Maria Claret de Gouveia, pela orientação e apoio prestado na orientação deste trabalho;

Aos professores e funcionários do Mestrado em Construções Metálicas, em especial ao Prof. Ernani Carlos de Araújo;

Aos amigos e familiares;

A Escola de Minas.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo introduzir a formulação analítica para a geração recursiva da matriz de função de resposta complexa em frequência no uso do Método da Transformada Implícita de Fourier para o cálculo da resposta dinâmica de sistemas estruturais. A geração recursiva da matriz de função de resposta complexa em frequência tende a reduzir o trabalho computacional na análise dinâmica estrutural no domínio da frequência. Descreve-se o método de interpolação proposto por Clough e Penzien (1993) para a geração da matriz de função de resposta complexa em frequência. Discute-se ainda, um método de interpolação onde se utiliza os polinômios de Lagrange. Alguns exemplos numéricos são feitos com o objetivo de comparar os métodos de geração da matriz de função de resposta complexa em frequência.

ABSTRACT

This work aims to introduce an analytical formulation for the recursive generation of frequency complex response function matrix to use in the implicit Fourier transform method to calculate the dynamic response of structural systems. Recursive generation of complex response function matrix intends to reduce the computational effort in structural dynamics analysis in the frequency domain. In the same context interpolation method proposed by Clough and Penzien (1993) to generate complex response function matrix is discussed. An alternative strategy using Lagrange polynomials as interpolation function is verified. Numerical examples are given comparing computational efficiency of the strategies to generate complex response function matrix.

ÍNDICE

DEDICATÓRIA	iii
AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
CAPÍTULO 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
1.1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.2 - OBJETIVOS.....	4
1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
1.4 - REVISÃO SUMÁRIA	8
CAPÍTULO 2 - TÉCNICA DE CLOUGH E PENZIEN (1993) PARA A OBTENÇÃO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA POR INTERPOLAÇÃO	10
2.1 – INTRODUÇÃO	10
2.2 - MÉTODO PRÁTICO PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE MOVIMENTO ACOPLADAS	13
2.3 - MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO PARA A GERAÇÃO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA	16
2.4 - MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO PARA A GERAÇÃO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA PARA SISTEMAS DESACOPLADOS	23

CAPÍTULO 3 - GERAÇÃO RECURSIVA DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA PELO MÉTODO DA TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER	25
3.1 - INTRODUÇÃO.....	25
3.2 - FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE.....	26
3.3 - FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE.....	34
3.4 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA A GERAÇÃO RECURSIVA DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA	40
 CAPÍTULO 4 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO MÉTODO DA TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER COM A RESPOSTA CALCULADA PELA MATRIZ INVERSA DE [e]	45
4.1 - INTRODUÇÃO.....	45
4.2 – DETERMINAÇÃO DA SOLUÇÃO PRODUZIDA PELO MÉTODO DA TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER UTILIZANDO A MATRIZ $[e]^{-1}$	46
4.3 – DEFINIÇÃO DA MATRIZ $[e]^{-1}$	47
4.4 –VIABILIDADE DA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE SISTEMAS DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE	51
 CAPÍTULO 5 - ESTRATÉGIAS DE IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA	56
5.1 - INTRODUÇÃO.....	56
5.2 - IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO DA MATRIZ DE FOURIER.....	57
5.3 - IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO DA MATRIZ DE FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA	60
5.4 - IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO DA MATRIZ $[e]$	62
 CAPÍTULO 6 – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	66
6.1 - INTRODUÇÃO.....	66

6.2 - EXEMPLO 1	67
6.3 - EXEMPLO 2	73
6.4 - EXEMPLO 3	77
6.5 - EXEMPLO 4	86
6.4 - EXEMPLO 5	89
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES	100
7.1 - CONCLUSÕES	100
7.2 - SUGESTÕES	101
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102

LISTA DE FIGURAS

Página

CAPÍTULO 2

Figura (2.1) – Interpolação das funções de resposta complexa em frequência19

CAPÍTULO 3

Figura (3.1) – Sistema massa-mola-amortecedor26

CAPÍTULO 5

Figura (5.1) – Fluxograma do Método ImFT58

CAPÍTULO 6

Figura (6.1) – Sistema massa-mola-amortecedor67

Figura (6.2) – Histórico de deslocamentos para a massa m_1 – Exemplo 169

Figura (6.3) – Parte real da função de resposta para a massa m_1 – Exemplo 169

Figura (6.4) – Parte complexa da função de resposta para a
massa m_1 – Exemplo 170

Figura (6.5) – Histórico de deslocamentos para a massa m_2 70

Figura (6.6) – Parte real da função de resposta para a massa m_2 – Exemplo 171

Figura (6.7) – Parte complexa da função de resposta para para
a massa m_2 – Exemplo 171

Figura (6.8) – Sistema massa-mola-amortecedor73

Figura (6.9) – Histórico de deslocamentos da massa para
condições iniciais nulas74

Figura (6.10) – Histórico de deslocamentos da massa para
deslocamento inicial – Exemplo 274

Figura (6.11) – Parte real da função de resposta para o sistema – Exemplo 275

Figura (6.12) – Parte complexa da função de resposta para

o sistema – Exemplo 2.....	75
Figura (6.13) – <i>Shear Building</i>	77
Figura (6.14) – Carga atuante	77
Figura (6.15) – <i>Shear Building</i> discretizado.....	78
Figura (6.16) – Histórico de deslocamentos para a 1º massa concentrada – Exemplo 3.....	80
Figura (6.17) – Parte real da função de resposta para a 1º massa concentrada – Exemplo 3.....	81
Figura (6.18) – Parte complexa da função de resposta para a 1º massa concentrada – Exemplo 3.....	81
Figura (6.19) – Histórico de deslocamentos para a 2º massa concentrada – Exemplo 3.....	82
Figura (6.20) – Parte real da função de resposta para a 2º massa concentrada – Exemplo 3.....	82
Figura (6.21) – Parte complexa da função de resposta para a 2º massa concentrada – Exemplo 3.....	83
Figura (6.22) – Histórico de deslocamentos para a 3º massa concentrada – Exemplo 3.....	83
Figura (6.23) – Parte real da função de resposta para a 3º massa concentrada – Exemplo 3.....	84
Figura (6.24) – Parte complexa da função de resposta para a 3º massa concentrada – Exemplo 3.....	84
Figura (6.25) – Viga engastada.....	86
Figura (6.26) – Carga atuante	86
Figura (6.27) – Histórico de deslocamentos para a viga – Exemplo 4.....	87
Figura (6.28) – Parte real da função de resposta para a viga – Exemplo 4.....	87
Figura (6.29) – Parte complexa da função de resposta para a viga – Exemplo 4.....	88
Figura (6.30) – <i>Shear Building</i>	89
Figura (6.31) – Carga atuante	89
Figura (6.32) – <i>Shear Building</i> discretizado.....	90
Figura (6.33) – Histórico de deslocamentos para a 1º massa concentrada – Exemplo 5.....	92

Figura (6.34) – Parte real da função de resposta para a 1º massa concentrada – Exemplo 5.....	92
Figura (6.35) – Parte real da função de resposta para a 1º massa concentrada – Exemplo 5.....	93
Figura (6.36) – Histórico de deslocamentos para a 2º massa concentrada – Exemplo 5.....	93
Figura (6.37) – Parte real da função de resposta para a 2º massa concentrada – Exemplo 5.....	94
Figura (6.38) – Parte complexa da função de resposta para a 2º massa concentrada – Exemplo 5.....	94
Figura (6.39) – Histórico de deslocamentos para a 3º massa concentrada – Exemplo 5.....	95
Figura (6.40) – Parte real da função de resposta para a 3º massa concentrada – Exemplo 5.....	95
Figura (6.41) – Parte complexa da função de resposta para a 3º massa concentrada – Exemplo 5.....	96
Figura (6.42) – Parte real da função de resposta antes de ω_n – Exemplo 5.....	97
Figura (6.43) – Parte complexa da função de resposta antes de ω_n – Exemplo 5.....	97
Figura (6.44) – Parte real da função de resposta depois de ω_n – Exemplo 5	98
Figura (6.45) – Parte real da função de resposta depois de ω_n – Exemplo 5	98

LISTA DE TABELAS

Página

CAPÍTULO 3

Tabela (3.1) – Relação entre m e $m\Delta\bar{\omega}$ para N par27

LISTA DE SÍMBOLOS

(Somente a notação de uso genérico é apresentada. Símbolos utilizados uma vez e que são de natureza mais específica são identificados quando aparecem no texto)

- J = Número de graus de liberdade do sistema estrutural;
- $[m]$ = Matriz de massa ;
- $[c]$ = Matriz de amortecimento viscoso proporcional;
- $[k_D]$ = Matriz de amortecimento histerético;
- $[k]$ = Matriz de rigidez;
- $\{\ddot{v}(t)\}$ = Vetor de aceleração no domínio do tempo;
- $\{\dot{v}(t)\}$ = Vetor de velocidade no domínio do tempo;
- $\{v(t)\}$ = Vetor de deslocamentos no domínio do tempo;
- $\{p(t)\}$ = Vetor de cargas no domínio do tempo;
- $\{V(\bar{\omega})\}$ = Vetor de deslocamentos no domínio da frequência;
- $\{P(\bar{\omega})\}$ = Vetor de cargas no domínio da frequência;
- D = Constante de amortecimento histerético;
- $\bar{\omega}$ = Frequência discreta no espectro de frequências de Fourier;
- $[H(i\bar{\omega})]$ = Matriz de função de resposta complexa em frequência;
- Δt = Intervalo de tempo;
- N = Número de pontos na transformada discreta de Fourier;
- i = Unidade imaginária;
- $[I(i\bar{\omega})]$ = Matriz de Impedância ou matriz de rigidez dinâmica;
- $[I]$ = Matriz identidade;
- $\Delta\bar{\omega}$ = Intervalo de frequências no espectro de frequências de Fourier;
- ξ = Porcentagem de amortecimento;

- $[\Phi]$ = Matriz modal;
 $\{Y(i\bar{\omega})\}$ = Vetor de deslocamentos em coordenadas generalizadas;
 $\{\phi_i\}$ = Vetor do modo normal de vibração;
 $[K]$ = Matriz de rigidez modal;
 $[M]$ = Matriz de massa modal;
 $[C]$ = Matriz de amortecimento modal;
 A, B, C e D = Constantes complexas;
 ∇ = Número de intervalos no qual o espectro de frequências é dividido;
 δ = Número de frequências discretas em cada intervalo;
 q = Número de frequências discretas em cada subintervalo;
 T_p = Período estendido;
 $[E]$ = Matriz de Fourier;
 $[E^*]$ = Conjugada da Matriz de Fourier;
 $[e]$ = Matriz do tipo matriz de Toeplitz;
 $[\dot{e}]$ = Derivada da matriz do tipo Toeplitz;
 v_0 = Deslocamento inicial;
 $\{I\}$ = Vetor unitário;
 \dot{v}_0 = Velocidade inicial;
 $h(t)$ = Função de resposta impulso unitário;
 $\delta(t)$ = Impulso unitário;
 $\{\delta\}$ = Vetor com o primeiro elemento igual a 1 e os outros nulos;
 $[\Lambda]$ = Matriz espectral;
 $\{P_G(t)\}$ = Vetor de cargas generalizadas;
 β_{0j} = Relação entre a frequência fundamental do espectro de Fourier e a frequência natural do modo j ;
 $[e]^{-1}$ = Inversa da matriz do tipo matriz de Toeplitz;
 $[h]$ = Matriz inversa da matriz de função de resposta complexa em frequência;

$[\dot{H}]$ = Derivada da matriz de função de resposta complexa em frequência.

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES GERAIS

1.1 INTRODUÇÃO

A análise dinâmica linear e não linear tem-se desenvolvido crescentemente nas últimas décadas. Este fato é provocado pela evolução tecnológica criada com o advento do computador que, cada vez mais, se torna próprio para a análise de sistemas complexos. Tal desenvolvimento se deve, ainda, à necessidade da adoção de modelos dinâmicos mais realísticos e sofisticados que podem resultar em maior economia e segurança no cálculo de estruturas vitais ao desenvolvimento humano, tais como usinas nucleares, barragens, aviões, edifícios altos, plataformas marítimas, entre outras.

A resposta dos sistemas estruturais submetidos a excitações dinâmicas pode ser obtida no domínio do tempo ou no domínio da frequência, sendo que o método a ser adotado para a solução do problema depende das propriedades físicas do sistema e da excitação exercida sobre o mesmo.

Os métodos de análise de sistemas dinâmicos lineares baseados no domínio do tempo, onde a resposta é obtida pela solução da integral de Duhamel, podem ser aplicados utilizando-se coordenadas físicas ou coordenadas modais. As soluções em coordenadas físicas utilizam processos de integração passo-a-passo, porém, sua estabilidade e a precisão no processo de integração dependem do intervalo de tempo adotado (Bathe 1982). Com isso, pode ser exigido um esforço computacional muito grande na solução de sistemas onde se necessita de um intervalo de tempo muito pequeno na análise. Entre esses métodos, pode-se citar o método de Newmark- β (Newmark, 1959) e o método de Wilson- θ (Wilson, 1973). Já a solução em coordenadas modais utiliza o método de

superposição modal clássica, onde as equações dinâmicas são desacopladas pela transformação modal. A resposta para cada equação de equilíbrio dinâmico desacoplada é então obtida independentemente, uma a uma, por integração direta realizada de forma analítica, depois de utilizar um processo de linearização da carga.

O método de superposição modal apresenta duas vantagens sobre os métodos de integração passo-a-passo. A primeira refere-se à excelente interpretação do comportamento físico do sistema, através da análise das frequências naturais de vibração e dos modos normais de vibração, e a segunda vantagem relaciona-se à economia de esforço computacional devido a possibilidade de truncamento modal. No entanto, todos estes métodos já foram largamente estudados no passado e atualmente se encontram bem desenvolvidos em termos analíticos e computacionais.

Os métodos baseados no domínio da frequência utilizam como ferramenta matemática as transformadas de Fourier, cuja estabilidade permite que se usem intervalos de tempo maiores que os geralmente utilizados nos processos de integração no domínio do tempo. Além disso, existem situações onde as características físicas do sistema, tais como a rigidez e o amortecimento são dependentes da frequência de excitação, o que torna a análise no domínio da frequência a única forma eficiente de solução. Considere como exemplo os sistemas modelados com amortecimento histerético. Tais sistemas apresentam sua equação de equilíbrio dinâmico em uma forma que não pode ser escrita no domínio do tempo (Crandall, 1970), porque possui um termo que é função da frequência. Outro exemplo, são os sistemas que envolvem domínios infinitos, como ocorre por exemplo em sistemas solo-estrutura onde o solo possui uma extensão infinita. A dissipação de energia em tal situação ocorre predominantemente pela ação conjunta de mecanismos de amortecimento do tipo estrutural e geométrico e, dessa forma, também só podem ser tratados adequadamente no domínio da frequência (Hall, 1982).

Os métodos de análise dinâmica no domínio da frequência, em sua formulação clássica, empregam as transformadas discretas de Fourier (DFT) através do algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) para a obtenção da resposta de sistemas físicos reais. Apesar da

grande redução do consumo de esforço computacional fornecido pelo algoritmo FFT, ele apresenta duas restrições que se tornam desvantagens quando utilizado para o cálculo da resposta dinâmica de um sistema estrutural de grande porte.

A primeira desvantagem se deve ao fato de se impor ao número N de frequências discretas a condição de ser uma potência de 2, ou seja, $N = 2^j$, com j inteiro. Assim, havendo necessidade de aumento da precisão, dobra-se o número de pontos necessários para a análise, isto é, $N_1 = 2^{j+1} = 2N$, o que acarreta o aumento do esforço computacional.

O segundo problema refere-se ao fato de que, com uso da FFT, a resposta é calculada necessariamente em N pontos, enquanto o comportamento do sistema geralmente pode ser descrito com um número bem menor deles.

Pesquisa recente desenvolvida por Venâncio-Filho e A. M. Claret tem contribuído para o estabelecimento de uma formulação alternativa denominada Método da Transformada de Fourier Implícita, na qual não existe a condição acima sobre o número N de termos no cálculo das transformadas discretas de Fourier, e na qual a resposta pode ser calculada em um número arbitrário de pontos, desde que este número traduza adequadamente o comportamento do sistema. Outra grande vantagem desta formulação é que as transformadas discretas de Fourier, direta e inversa, são calculadas ao mesmo tempo, de forma implícita, no procedimento que leva diretamente à resposta no domínio do tempo.

Esse método, aplicável a sistemas dinâmicos fisicamente lineares e não-lineares, dotados de amortecimento viscoso, histerético ou dependente da frequência, é potencialmente econômico quanto ao esforço computacional quando comparado com o método clássico de análise no domínio da frequência, para análises não-lineares. No entanto, a necessidade da extração modal e do cálculo da função de resposta complexa em frequência constituem passos ainda muito demorados.

Em trabalho recente, Clough e Penzien (1993) combinam o processo clássico de solução das equações de equilíbrio dinâmico em coordenadas físicas no domínio da frequência, através do uso das transformadas discretas de Fourier, com o processo de interpolação para a geração das funções de resposta complexa em frequência. Paralelamente, Claret (2000) propôs uma técnica de geração recursiva da função de resposta complexa em frequência.

No presente trabalho utiliza-se o método da transformada implícita de Fourier, onde a função de resposta complexa em frequência é gerada recursivamente para a obtenção da resposta dinâmica. Uma breve discussão sobre a viabilidade em termos de eficiência computacional, da análise de sistemas dinâmicos não-lineares através do método ImFT, levando-se em consideração a geração recursiva da função de resposta complexa em frequência e a matriz inversa da matriz do tipo Toeplitz é apresentada.

Ainda, tomando como base a técnica de interpolação proposta por Clough e Penzien, desenvolve-se neste trabalho um método de interpolação para a determinação dos termos da matriz de função de resposta complexa em frequência. Exemplos numéricos são fornecidos para ilustrar a precisão do método proposto.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo introduzir a geração recursiva da função de resposta complexa em frequência, Claret (2000), na formulação do método ImFT (Implicit Transform Fourier) e discutir a viabilidade de sua aplicação à análise não-linear de sistemas dinâmicos.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise dinâmica no domínio da frequência tornou-se realidade com o surgimento do algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) devido a Cooley e Tukey (1965), que resultou na computação rápida das transformadas discretas de Fourier (DFT). Meek e Veletsos (1974) propõem um método de se computar as DFT onde o número de termos utilizados nas FFT é menor do que os normalmente necessários. Hall (1982) propõe uma modificação no algoritmo FFT para o uso na dinâmica estrutural, onde o número de termos necessários passa a ser igual a uma potência inteira de 2 multiplicada por 2 ou 3, ao invés de ser uma potência inteira de 2 como no algoritmo original. Humar e Hong Xia (1993) e Hall e Beck (1993) analisaram um método onde a função de resposta complexa em frequência original é substituída por uma função mais suave, através do aumento do amortecimento do sistema. Isto permite que se tome um período estendido menor para o cálculo das DFT, com conseqüente economia computacional.

Venâncio Filho e Claret (1991) apresentam a formulação matricial para a análise dinâmica de sistemas lineares de um grau de liberdade no domínio da frequência, onde as transformadas de Fourier, discreta e inversa, são realizadas implicitamente. Este procedimento foi posteriormente estendido por Claret (1991), Venâncio Filho (1994), Venâncio Filho e Claret (1996) para sistemas com múltiplos graus de liberdade, tanto lineares como não-lineares.

Em sistemas com vários graus de liberdade, quando o amortecimento for considerado distribuído de forma semelhante à da massa e da rigidez, ele é dito ser proporcional. Sistemas com amortecimento proporcional podem ter suas equações de movimento desacopladas pela transformação modal, Caughey e O'Kelly (1965). Com isso, a resposta em coordenadas físicas pode ser obtida pela superposição da resposta em coordenadas modais, tanto no domínio do tempo como no da frequência (Clough, 1996).

Para sistemas estruturais com características mais complexas de amortecimento, as equações de movimento não são desacopladas pela transformação modal e o amortecimento é dito não-proporcional. Foss (1952) e Hurty e Rubinstein (1964) sugerem a utilização de modos complexos para desacoplar as equações de movimento de tais sistemas. Porém, o problema de autovalor, neste caso, é duas vezes maior que o tradicional, e os modos complexos dificultam a interpretação física do problema, Mau (1988). Mesmo assim, esta solução foi empregada por Singh (1980), Veletsos e Ventura (1976), Singh e Ghafory-Ashtiany (1986), Singh e Suarez, (1986) e Chen e Taylor (1987), variando entre um e outro autor apenas o processo usado na extração dos modos complexos e na superposição para o cálculo da resposta.

Uma forma de se obter uma solução aproximada de um sistema com amortecimento não-proporcional, apresentada por Thomson *et al* (1974) e Warburton e Soni (1977), é desprezar os termos de fora da diagonal da matriz de amortecimento, após a transformação modal.

Outro procedimento que vem sendo empregado para tratar sistemas com amortecimento não-proporcional, e que, na verdade, pode ser empregado para sistemas com todos os tipos de não-linearidades é conhecido como método das pseudo-forças. Por esse processo, os termos não-lineares são transferidos para o lado direito das equações de movimento modais e tratados como pseudo-forças. O sistema resultante é resolvido por um processo iterativo, no domínio do tempo como o fazem Claret e Venâncio Filho, (1991) e Ibrahimbegovic e Wilson, (1989), ou por um processo misto domínio do tempo-domínio da frequência, como proposto por Ling e Wu (1987) e Cameron e Griffin (1989), e depois generalizado por Aprile *et al* (1994). Dentro desta linha há também os trabalhos de Kawamoto (1983) e Wolf e Darbre (1987).

Claret e Venâncio-Filho (1991) fazem um amplo estudo desse método, fornecendo inclusive sua condição de convergência e introduzindo os conceitos de índice de acoplamento e de índice de convergência para caracterizar o grau de não-proporcionalidade do sistema. Chen e Taylor (1990), utilizam uma base de vetores de Ritz para desacoplar as equações de movimento.

Claret (1991) estende a formulação matricial para sistemas não-lineares com vários graus de liberdade no que é seguido por Venâncio-Filho (1994), Venâncio-Filho e Claret (1996), e Ferreira (1998).

Venâncio-Filho e Claret (1995) apresentam um estudo sobre os métodos de solução de sistemas acoplados no domínio da frequência onde são apresentadas as formulações da resposta clássica em coordenadas nodais e da resposta utilizando o método das pseudo-forças em coordenadas modais, a fim de descrever o esforço computacional exigido em cada método.

Ribeiro (1998) desenvolve o embasamento analítico e a compreensão física da formulação matricial, em relação ao estabelecido anteriormente. Demonstra-se que a matriz que opera sobre a excitação produzindo a resposta é uma matriz de Toeplitz e que, pelo princípio da causalidade, ela é triangular inferior, o que simplifica a implementação, além de reduzir o trabalho computacional.

Clough e Penzien (1993) apresentam uma técnica de interpolação para a obtenção dos termos da matriz de função de resposta complexa em frequência onde, a partir da dedução de um polinômio interpolador, chega-se aos valores das funções de resposta para cada frequência discreta, determinando assim a matriz de função de resposta em frequência.

Mansur, Venâncio-Filho e Claret (1996) aplicam o método de interpolação da função de resposta complexa em frequência proposto por Clough à análise de problemas solo-estrutura submetidos a excitações sísmicas, verificando a redução do trabalho computacional e a boa convergência do processo.

Claret (2000), utilizando a formulação matricial para a análise dinâmica de sistemas lineares, propõe o desenvolvimento analítico da recursividade da função de resposta complexa em frequência para o amortecimento viscoso.

1.4 REVISÃO SUMÁRIA

O capítulo 2 apresenta um método de solução, proposto por Clough e Penzien (1993), no domínio da frequência e em coordenadas físicas, do conjunto de equações de equilíbrio dinâmico, geradas pela discretização de sistemas estruturais com vários graus de liberdade em elementos finitos. Por este método, a resposta é obtida através da solução clássica utilizando as transformadas discretas de Fourier com o uso da FFT onde os termos da matriz de função de resposta em frequência são obtidos por um processo de interpolação. Neste processo não se utiliza a extração modal, porém, deve-se determinar o polinômio interpolador a ser usado para a determinação de todos os termos da matriz de função complexa em frequência. Uma adaptação desse método é apresentada em que as funções de resposta complexa em frequência são calculadas por interpolação em coordenadas modais.

O capítulo 3 descreve a formulação matricial para a análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência para um grau de liberdade, o que, logo após, é feito para vários graus de liberdade. Desenvolve-se a formulação analítica para a geração recursiva dos termos da matriz de função de resposta complexa em frequência.

O capítulo 4 apresenta uma maneira alternativa de se resolver a equação desenvolvida pelo método ImFT, através da definição de uma matriz inversa da matriz de Toeplitz utilizada na equação clássica de tal método. Discute-se, de maneira resumida, a aplicação de tal equação à análise não-linear no domínio da frequência.

O capítulo 5 apresenta algumas formulações para a implementação computacional do método ImFT e realiza-se um estudo sobre a viabilidade, em termos da eficiência computacional, da geração recursiva dos termos da matriz de função de resposta complexa em frequência comparada à geração de tais termos na forma convencional.

No capítulo 6 são apresentados exemplos numéricos comparando os resultados obtidos com o uso da formulação matricial, utilizando a geração convencional e recursiva da matriz de função de resposta em frequência.

O capítulo 7 apresenta as conclusões e sugestões.

CAPÍTULO 2

TÉCNICA DE CLOUGH E PENZIEN (1993) PARA A OBTENÇÃO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA POR INTERPOLAÇÃO

2.1 INTRODUÇÃO

A análise dinâmica de estruturas com vários graus de liberdade envolve a solução do sistema de equações de movimento resultantes de sua discretização em elementos finitos.

Este sistema de equações pode ser resolvido diretamente em coordenadas físicas através de métodos de integração passo-a-passo no domínio do tempo ou, com uso das transformadas de Fourier, no domínio da frequência. Alternativamente, tal sistema de equações pode ser desacoplado, e as equações podem ser integradas independentemente, uma a uma, no domínio do tempo através do método de superposição modal.

O método da superposição modal exige que a matriz de amortecimento do sistema seja ortogonal à base modal, isto é, que as propriedades de amortecimento do sistema estrutural possam ser postas sob a forma de uma matriz de amortecimento proporcional o que é válido para estruturas comuns. Porém, em estruturas compostas, quando as propriedades de amortecimento de seus elementos são muito diferentes, em natureza ou magnitude, o amortecimento é não-proporcional. Sistemas estruturais com amortecimento não-proporcional não possuem modos normais de vibração e, conseqüentemente, o método de superposição modal não pode ser aplicado.

Considere-se o sistema de múltiplos graus de liberdade com J coordenadas nodais. O sistema possui amortecimento viscoso e histerético, sendo sua equação de equilíbrio dinâmico dada por

$$[m]\{\ddot{v}(t)\} + [c]\{\dot{v}(t)\} + i2D[k]\{v(t)\} + [k]\{v(t)\} = \{p(t)\}, \quad (2.1)$$

no domínio do tempo e por

$$[-\bar{\omega}^2[m] + (\bar{\omega}[c] + [k_D])i + [k]]\{V_0\} = \{P_0\}, \quad (2.2)$$

no domínio da frequência. Nestas equações $[m]$ e $[k]$ são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez de ordem J , $[c]$ é a matriz de amortecimento viscoso e $[k_D]$ é a matriz de amortecimento histerético, ambas de ordem J . $\{\ddot{v}(t)\}$, $\{\dot{v}(t)\}$ e $\{v(t)\}$ são, respectivamente, os vetores de aceleração, velocidade e deslocamentos da massa, todos de ordem J no domínio do tempo. $\{V_0\}$ e $\{P_0\}$ são, respectivamente, os vetores transformadas dos deslocamentos e da carga, de ordem J , na frequência $\bar{\omega}$. Da equação (2.2), obtém-se

$$\{V_0\} = [H(i\bar{\omega})]\{P_0\}, \quad (2.3)$$

onde

$$[H(i\bar{\omega})] = [-\bar{\omega}^2[m] + (\bar{\omega}[c] + [k_D])i + [k]]^{-1} \quad (2.4)$$

é a matriz de função de resposta complexa em frequência. Pode-se observar que $[H(i\bar{\omega})]$ não é função apenas de $\bar{\omega}$ e $\bar{\omega}^2$, mas também de $[c]$ e $[k]$, quando tais matrizes são dependentes da frequência.

Para uma carga arbitrária, $\{p(t)\}$, tem-se no domínio da frequência a equação

$$\{V(i\bar{\omega})\} = [H(i\bar{\omega})]\{P(i\bar{\omega})\} \quad (2.5)$$

onde $\{P(i\bar{\omega})\}$ e $\{V(i\bar{\omega})\}$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier da carga e dos deslocamentos nodais. A transformada discreta de Fourier de $\{p(t)\}$ é $\{P(i\bar{\omega})\}$, cujos elementos designados por $P(\bar{\omega}_m)$, são dados por

$$P(\bar{\omega}_m) = \Delta t \sum_{n=1}^N p(t_n) e^{-i2\pi(mn/N)}, \quad (2.6)$$

onde ω_m ($m = 1, 2, 3, \dots, N$) e t_n ($n = 1, 2, 3, \dots, N$) são, respectivamente, as frequências e os tempos discretos e N é o número de pontos na transformada discreta de Fourier. Levando (2.6) em (2.5) obtém-se a transformada discreta do deslocamento nodal, v_i , que é

$$V_i(\bar{\omega}_m) = \Delta t \sum_{j=1}^J H_{ij}(\bar{\omega}_m) \sum_{n=1}^N p_j(t_n) e^{-i2\pi(mn/N)}. \quad (2.7)$$

A resposta no domínio do tempo para o i -ésimo grau de liberdade, $v_i(t_n)$, é a transformada inversa discreta de Fourier de $V_i(\bar{\omega}_m)$ que é dada por

$$v_i(t_n) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{m=1}^N V_i(\bar{\omega}_m) e^{i2\pi(mn/N)}. \quad (2.8)$$

Levando à equação (2.8) a expressão de $V_i(\bar{\omega}_m)$ dada em (2.7), obtém-se a resposta no domínio do tempo

$$v_i(t_n) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{m=1}^N e^{i2\pi(mn/N)} \left[\sum_{j=1}^J H_{ij}(\bar{\omega}_m) \left(\sum_{n=1}^N p_j(t_n) e^{-i2\pi(mn/N)} \right) \right] \right\}. \quad (2.9)$$

O surgimento do algoritmo FFT teve um impacto positivo no campo da dinâmica estrutural, pois sendo um método de cálculo eficiente das transformadas de Fourier deu ao método de análise dinâmica no domínio da frequência competitividade em relação aos métodos de análise no domínio do tempo. Porém, a equação (2.9) acima demonstra que o esforço computacional envolvido é ainda muito grande quando comparado aos métodos de solução no domínio do tempo o que constitui um obstáculo ao uso prático de análises no domínio da frequência.

Este capítulo apresenta um método de solução para o sistema de equações dinâmicas acopladas, no domínio da frequência, proposto por Clough e Penzien (1993). A resposta do sistema é obtida pela solução clássica através das transformadas discretas de Fourier com o uso do algoritmo FFT, porém a função de resposta complexa é gerada por um processo de interpolação.

2.2 MÉTODO PRÁTICO PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE MOVIMENTO ACOPLADAS

As equações de movimento de um sistema com J graus de liberdade e dotado de amortecimento viscoso, em coordenadas físicas, são dadas por

$$[m]\{\ddot{v}(t)\} + [c]\{\dot{v}(t)\} + [k]\{v(t)\} = \{p(t)\}, \quad (2.10)$$

onde $[m]$, $[c]$ e $[k]$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento viscoso e rigidez, de ordem J , $\{\ddot{v}(t)\}$, $\{\dot{v}(t)\}$ e $\{v(t)\}$, são, respectivamente, os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, de ordem J , e $\{p(t)\}$ é o vetor de carga, de ordem J .

No domínio da frequência, o conjunto de equações (2.10) pode ser escrito como

$$\left[\left([k] - \bar{\omega}^2 [m] \right) + i \left(\bar{\omega} [c] \right) \right] \{V(i\bar{\omega})\} = \{P(i\bar{\omega})\} \quad (2.11)$$

sendo $\bar{\omega}$ uma frequência particular do espectro de N frequências e onde $\{V(i\bar{\omega})\}$ e $\{P(i\bar{\omega})\}$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier dos vetores de deslocamentos e cargas, ambos de ordem J . As equações (2.11) podem ser escritas como

$$[I(i\bar{\omega})] \{V(i\bar{\omega})\} = \{P(i\bar{\omega})\}, \quad (2.12)$$

onde

$$[I(i\bar{\omega})] = \left([k] - \bar{\omega}^2 [m] \right) + i \left(\bar{\omega} [c] \right) \quad (2.13)$$

é conhecida como a matriz de impedância ou matriz de rigidez dinâmica, e é quadrada, de ordem J . A solução clássica da equação (2.12) para o vetor de deslocamentos no domínio da frequência é dada por

$$\{V(i\bar{\omega})\} = [H(i\bar{\omega})] \{P(i\bar{\omega})\}, \quad (2.14)$$

onde $[H(i\bar{\omega})]$ é a matriz de resposta complexa em frequência, de ordem J obtida para cada frequência do espectro. Por outro lado, premultiplicando ambos os lados da equação (2.12) pelo inverso da matriz de impedância, o vetor de resposta $\{V(i\bar{\omega})\}$ pode ser obtido por

$$\{V(i\bar{\omega})\} = [I(i\bar{\omega})]^{-1} \{P(i\bar{\omega})\}, \quad (2.15)$$

de onde se conclui que

$$[H(i\bar{\omega})] = [I(i\bar{\omega})]^{-1} \quad (2.16)$$

sendo, obviamente,

$$[I(i\bar{\omega})]^{-1} [I(i\bar{\omega})] = [I]. \quad (2.17)$$

Embora seja possível criar programas computacionais que realizem este tipo de solução através da matriz inversa, pois o método computacional para a inversão da matriz complexa da equação (2.15) é o mesmo para uma matriz real, tal solução se torna impraticável. Por um lado, segundo Mansur *et alii* (1996), o esforço computacional para a inversão de uma matriz real de ordem N é da ordem de N^3 operações enquanto que para uma matriz complexa o mesmo esforço é da ordem de $(2N)^3$. Por outro lado, se usada diretamente, esta solução envolve J inversões dos termos da matriz de impedância complexa de ordem J , para cada frequência discreta pertencente ao espectro de frequências, o que exige um enorme esforço computacional, dessa forma inviabilizando este tipo de solução.

Uma forma alternativa de solução do sistema de equações (2.12) é através do método de Gauss. Tomando-se a matriz $[I(\bar{\omega}): \{V(i\bar{\omega})\}]$ utiliza-se de transformações lineares para reduzir tal matriz aumentada a uma matriz triangular superior. O sistema triangular é, então, resolvido por substituições retroativas. No entanto, segundo Burden e Faires (1993), o esforço computacional necessário para a obtenção da solução de um sistema real, cuja ordem de uma matriz seja N , é de $(2N^3)/3$ operações aritméticas, fato que inviabiliza o uso de tal método.

Clough e Penzien (1993) propõe um método em que as funções de resposta complexa em frequência $H_{ij}(i\bar{\omega})$ são obtidas para valores discretos de frequências $\bar{\omega}$ no espectro de Fourier. A partir da dedução de um polinômio interpolador que é função de quatro incógnitas, divide-se o espectro de frequências de Fourier em intervalos, e, cada intervalo em três subintervalos onde se determinam quatro equações para os valores de início e fim de cada subintervalo. Então, resolvendo o sistema de quatro equações complexas, determinam-se os valores das quatro incógnitas e, assim, a partir destes

valores conhecidos, usando o polinômio interpolador, calculam-se todos os outros valores das funções de resposta complexa.

Uma vez que a matriz de função de resposta complexa é obtida, as respostas do sistema de equações para múltiplos conjuntos de cargas podem ser produzidas facilmente, convertendo os vetores de cargas no domínio do tempo para o domínio da frequência pela transformada de Fourier através do algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) e, então, multiplicando os vetores resultantes em cada caso pela matriz de função de resposta complexa, gerando os deslocamentos no domínio da frequência. Encontrado os vetores de transformada dos deslocamentos para cada conjunto de cargas, ele pode ser convertido para o domínio do tempo através da transformada de Fourier inversa, obtendo assim o conjunto de deslocamentos no domínio do tempo.

2.3 MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO PARA A GERAÇÃO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA

A interpolação da função de resposta complexa em frequência em intervalos idênticos, $\Delta\bar{\omega}$, sobre o espectro de frequências pode ser realizada utilizando uma função de interpolação que corresponda à forma de tais funções, desde que ambas as partes, real e imaginária, sejam funções suaves de $\bar{\omega}$. Para efeito de exposição, a função de interpolação será obtida para um sistema com dois graus de liberdade com amortecimento hysterético.

As equações de movimento em coordenadas nodais para o sistema de dois graus de liberdade no domínio da frequência são dadas por

$$\left[\left([k] - \bar{\omega}^2 [m] \right) + i2D[k] \right] \{V(i\bar{\omega})\} = \{P(i\bar{\omega})\}, \quad (2.18)$$

em que $[m]$ e $[k]$ são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez de ordem 2, e o vetor $\{P(i\bar{\omega})\}$ é a transformada de Fourier do vetor de carga $\{p(t)\}$, de ordem 2.

Utilizando o método da superposição modal para a solução do conjunto de equações (2.18), efetua-se a seguinte transformação de coordenadas

$$\{V(i\bar{\omega})\} = [\Phi]\{Y(i\bar{\omega})\}, \quad (2.19)$$

onde $\{Y(i\bar{\omega})\}$ é o vetor de coordenadas generalizadas e $[\Phi]$ uma matriz de ordem 2, cujas colunas são os modos normais de vibração $\{\phi_i\}$ do sistema. Levando a equação (2.19) em (2.18) e premultiplicando-se os dois lados da equação por $[\Phi]^T$, tem-se

$$(K_1 - \bar{\omega}^2 M_1 + i2DK_1)Y_1(i\bar{\omega}) = \{\Phi_1\}^T \{P(i\bar{\omega})\} \quad (2.20)$$

$$(K_2 - \bar{\omega}^2 M_2 + i2DK_2)Y_2(i\bar{\omega}) = \{\Phi_2\}^T \{P(i\bar{\omega})\} \quad (2.21)$$

que são as equações de movimento do sistema em coordenadas modais, no domínio da frequência.

Deduz-se a expressão somente para uma função de resposta complexa em frequência, por exemplo, $H_{11}(i\bar{\omega})$, a qual é a função de resposta entre a carga $p_1(t)$ e o deslocamento $v_1(t)$. No domínio da frequência, $\{v(t)\}$ é dado em coordenadas modais por

$$V_1(i\bar{\omega}) = \phi_{11}Y_1(i\bar{\omega}) + \phi_{12}Y_2(i\bar{\omega}), \quad (2.22)$$

$$V_2(i\bar{\omega}) = \phi_{21}Y_1(i\bar{\omega}) + \phi_{22}Y_2(i\bar{\omega}). \quad (2.23)$$

Para gerar $H_{11}(i\bar{\omega})$, admite-se que $\{P(i\bar{\omega})\} = \{1 \ 0\}^T$, então

$$\{\Phi_1\}^T \{P(i\bar{\omega})\} = \{\phi_{11} \ \phi_{21}\} \{1 \ 0\}^T = \phi_{11} \quad (2.24)$$

$$\{\Phi_2\}^T \{P(i\bar{\omega})\} = \{\phi_{12} \ \phi_{22}\} \{1 \ 0\}^T = \phi_{12}. \quad (2.25)$$

As equações (2.20) e (2.21) podem ser colocadas sob a forma

$$Y_1(i\bar{\omega}) = \frac{\{\Phi_1\}^T \{P(i\bar{\omega})\}}{(K_1 - \bar{\omega}^2 M_1 + i2DK_1)}, \quad (2.26)$$

$$Y_2(i\bar{\omega}) = \frac{\{\Phi_2\}^T \{P(i\bar{\omega})\}}{(K_2 - \bar{\omega}^2 M_2 + i2DK_2)}. \quad (2.27)$$

A resposta clássica para o conjunto de equações (2.18) é da forma

$$\{V(i\bar{\omega})\} = [H(i\bar{\omega})] \{P(i\bar{\omega})\}, \quad (2.28)$$

e sendo a carga dada por $\{P(i\bar{\omega})\} = \{1 \ 0\}^T$ conclui-se que

$$V_1(i\bar{\omega}) = H_{11}(i\bar{\omega}). \quad (2.29)$$

Tomando o resultado de (2.24) e (2.25) em (2.26) e (2.27), substituindo em (2.22) e considerando (2.28) obtém-se

$$H_{11}(i\bar{\omega}) = \frac{\phi_{11}^2}{K_1 - \bar{\omega}^2 M_1 + i2DK_1} + \frac{\phi_{12}^2}{K_2 - \bar{\omega}^2 M_2 + i2DK_2}. \quad (2.30)$$

Esta equação pode ser colocada na forma de uma fração única equivalente dada por

$$H_{11}(i\bar{\omega}) = \frac{A\bar{\omega}^2 + B}{\bar{\omega}^4 + C\bar{\omega}^2 + D} \quad (2.31)$$

na qual A é uma constante real para o sistema adotado e B , C e D são constantes complexas. Repetindo o processo acima, o mesmo se encontra para cada uma das outras funções de resposta complexa, $H_{12}(i\bar{\omega})$, $H_{21}(i\bar{\omega})$ e $H_{22}(i\bar{\omega})$.

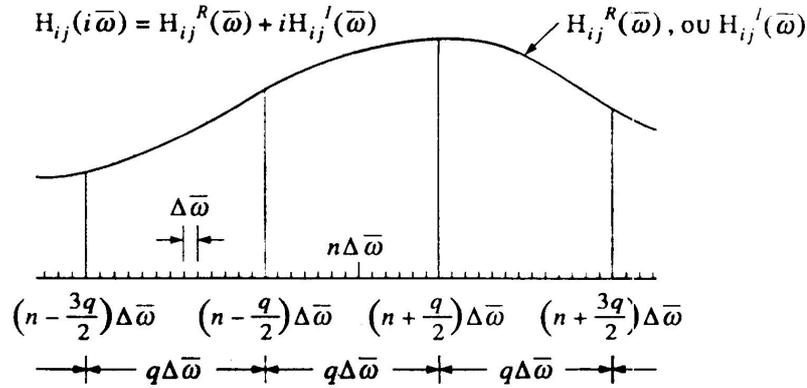


Figura (2.1) - Interpolação das funções de resposta complexa em frequência.

Segundo Clough e Penzien (1993), a equação (2.31) pode ser utilizada como uma função de interpolação para a determinação de qualquer função de resposta complexa $H_{ij}(i\bar{\omega})$ de um sistema de múltiplos graus de liberdade. Para a aplicação de tal processo de interpolação, deve-se, em primeiro lugar, dividir o espectro de frequências total em ∇ intervalos onde

$$\nabla = \frac{N}{\delta}, \quad (2.32)$$

em que N é o número total de frequências no espectro de frequências de Fourier e δ é o número de frequências que deve ser arbitrado em cada intervalo. Considerando cada intervalo, este é subdividido em três subintervalos onde se tomam quatro valores consecutivos de $\bar{\omega}$ que correspondem aos valores iniciais e finais de cada subintervalo. A partir destas considerações, tem-se a forma discreta de (2.31) que é

$$H_{ij}(i\bar{\omega}_m) = \frac{A_{mn}\bar{\omega}_m^2 + B_{mn}}{\bar{\omega}_m^4 + C_{mn}\bar{\omega}_m^2 + D_{mn}}, \quad \left(n - \frac{3}{2}q\right) < m < \left(n + \frac{3}{2}q\right), \quad (2.33)$$

em que $\bar{\omega}_m = m\Delta\bar{\omega}$, onde $\Delta\bar{\omega}$ é o incremento de frequência constante utilizado para a geração do espectro de frequências através da Transformada Rápida de Fourier. A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} e D_{mn} são todas tratadas como constantes complexas ainda que A_{mn} seja real. Estas quatro constantes complexas são avaliadas aplicando a equação (2.33) para cada um dos quatro valores discretos e consecutivos de $\bar{\omega}_m$. Como mostrado na Figura (2.1), estes valores são $m_1\Delta\bar{\omega}$, $m_2\Delta\bar{\omega}$, $m_3\Delta\bar{\omega}$ e $m_4\Delta\bar{\omega}$, onde

$$m_1 = \left(n - \frac{3}{2}q\right), m_2 = \left(n - \frac{1}{2}q\right), m_3 = \left(n + \frac{1}{2}q\right) \text{ e } m_4 = \left(n + \frac{3}{2}q\right). \quad (2.34)$$

Nesta equação, q ou $(\delta/3)$, representa o número de frequências pertencentes aos subintervalos definidos pelas frequências $\bar{\omega}_m$. Cada um dos quatro valores de m dados pela equação (2.34) são, então, introduzidos na equação (2.16) de forma a determinar os respectivos valores de $H_{ij}(i\bar{\omega}_m)$. Aplicando a equação (2.33) para cada um dos valores de $H_{ij}(i\bar{\omega}_m)$ determinados, obtêm-se quatro equações algébricas complexas envolvendo as incógnitas A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} e D_{mn} . Após resolver o sistema de equações, os valores numéricos das incógnitas são substituídos na equação (2.33), dessa forma, definindo a equação do polinômio interpolador a ser usado para a determinação dos valores das funções de resposta complexa em frequência correspondentes aos valores das frequências, variando no intervalo $(n - (3/2)q) < m < (n + (3/2)q)$. Este mesmo método é, então, repetido para $n = (3/2)q, (9/2)q, (15/2)q, (21/2)q, \dots$, até que o conjunto máximo de frequências seja abordado, de maneira a obter todos os valores das funções de resposta complexa.

Ainda segundo Clough e Penzien (1993), o conjunto de valores mais favoráveis a serem adotados para q ou $(\delta/3)$, levando em consideração a precisão e o esforço computacional, exige uma considerável experiência com o método. De qualquer forma, se deve atentar para o fato de que o intervalo de frequências, δ , nunca deve incluir mais de que duas frequências naturais devido a forma da função de interpolação ser aquela

deduzida para uma função de resposta complexa tomando como hipótese um sistema com dois graus de liberdade para o qual somente dois picos podem ser representados.

É interessante observar que o método de interpolação descrito acima não precisa ser empregado para a obtenção de todos os valores de $[H]$. Tal método pode ser aplicado apenas para a geração dos termos da matriz $[H]$ correspondentes à primeira parte do espectro de Fourier, sendo os outros valores obtidos pelo uso das propriedades dos números complexos conjugados. A resposta no domínio da frequência é, então, dada por

$$\{V(i\bar{\omega})\} = [H(i\bar{\omega})]\{P(i\bar{\omega})\}. \quad (2.35)$$

Clough afirma que a função de interpolação, a qual foi deduzida tomando como hipótese básica um sistema de dois graus de liberdade e uma carga dada por $\{P(i\bar{\omega})\} = \{1 \ 0\}^T$, pode ser usada para a obtenção dos termos da matriz $[H]$ para um sistema com múltiplos graus de liberdade¹. No entanto, a determinação do polinômio interpolador tomando como hipótese um sistema com três graus de liberdade pode ser realizada de forma análoga à descrita anteriormente para um sistema com dois graus de liberdade. Atenção especial deve ser dada a geração de $H_{11}(i\bar{\omega})$ que, para o caso descrito, deve admitir uma carga dada como

$$\{P(i\bar{\omega})\} = \{1 \ 0 \ 0\}^T. \quad (2.36)$$

Desta maneira, tem-se $H_{11}(i\bar{\omega})$ dado por

$$H_{11}(i\bar{\omega}) = \frac{\phi_{11}^2}{K_1 - \bar{\omega}^2 M_1 + i2DK_1} + \frac{\phi_{12}^2}{K_2 - \bar{\omega}^2 M_2 + i2DK_2} + \frac{\phi_{13}^2}{K_3 - \bar{\omega}^2 M_3 + i2DK_3}. \quad (2.37)$$

A equação (2.37) pode ser escrita em uma forma compacta dada por

¹ Vide Clough, R. W. e Penzien, J., 1993, Dynamics of structures. 2 ed., McGraw-Hill. pp-225.

$$H_{11}(i\bar{\omega}) = \frac{\Psi\bar{\omega}^4 + \lambda\bar{\omega}^2 + \sigma}{\bar{\omega}^6 + \beta\bar{\omega}^4 + \gamma\bar{\omega}^2 + \theta}, \quad (2.38)$$

onde Ψ é uma constante real para o sistema e λ , σ , β , γ e θ são constantes complexas. Repetindo o processo anterior, encontra-se para cada uma das outras funções de resposta complexa em frequência, $H_{ij}(i\bar{\omega})$, expressões análogas.

De maneira análoga ao caso do sistema com dois graus de liberdade deve-se, em primeiro lugar dividir o espectro de Fourier em ∇ intervalos. Posteriormente, cada intervalo deve ser novamente dividido em cinco subintervalos onde se tomam seis valores consecutivos de $\bar{\omega}$ correspondentes aos valores de início e fim de cada subintervalo. Determinam-se os valores de $H_{ij}(i\bar{\omega})$ para cada um dos seis valores discretos. Aplicando a equação (2.38) para cada um dos valores de $H_{ij}(i\bar{\omega}_m)$ determinados, obtêm-se seis equações algébricas complexas envolvendo as incógnitas Ψ , λ , σ , β , γ e θ . A solução de tal sistema complexo fornece todos os valores das constantes possibilitando assim, a determinação do polinômio interpolador a ser usado para a obtenção de todos os outros valores das funções de resposta complexa em frequência.

Para sistemas com quatro e cinco graus de liberdade, pode-se deduzir expressões para o polinômio interpolador de maneira idêntica aos casos anteriores. Tais expressões são dadas, respectivamente por

$$H_{11} = \frac{\Psi\bar{\omega}^6 + \lambda\bar{\omega}^4 + \sigma\bar{\omega}^2 + \Delta}{\bar{\omega}^8 + \beta\bar{\omega}^6 + \gamma\bar{\omega}^4 + \theta\bar{\omega}^2 + \Omega}, \quad (2.40)$$

$$H_{11} = \frac{\Psi\bar{\omega}^8 + \lambda\bar{\omega}^6 + \sigma\bar{\omega}^4 + \Delta\bar{\omega}^2 + \mu}{\bar{\omega}^{10} + \beta\bar{\omega}^8 + \gamma\bar{\omega}^6 + \theta\bar{\omega}^4 + \Omega\bar{\omega}^2 + \zeta}. \quad (2.41)$$

Conforme as equações anteriores observa-se que a equação para a obtenção do polinômio interpolador pode ser generalizada. Para um sistema estrutural com J graus de liberdade tem-se

$$H_{11} = \frac{\Psi_k \bar{\omega}^{2k}}{\bar{\omega}^{2J} + \eta_k \bar{\omega}^{2k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, J - 1. \quad (2.42)$$

onde Ψ_k e η_k com $k = 0, 1, 2, \dots, J - 1$ são todas tratadas como constantes complexas ainda que Ψ_0 seja real. Como descrito anteriormente, encontram-se, para cada uma das outras expressões das funções de resposta complexa, expressões análogas.

Para um sistema com J graus de liberdade deve-se determinar $2J$ constantes complexas a fim de definir o polinômio interpolador. Após dividir o espectro de frequências em α intervalos deve-se subdividir cada intervalo em $2J - 1$ subintervalos de modo a definir um sistema com $2J$ equações lineares. O sistema de equações é, então, resolvido determinando-se assim os valores de todas as constantes. Através dos valores destas constantes, define-se o polinômio interpolador que deve ser usado a fim de obter os valores das funções de resposta complexa em frequência.

2.4 MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO PARA A GERAÇÃO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA PARA SISTEMAS DESACOPLADOS

O método de interpolação proposto por Clough e Penzien (1993) sugere o desenvolvimento de um método semelhante aplicado a sistemas que, ao serem desacoplados pela transformação modal, podem ter suas equações de movimento resolvidas independentemente uma a uma.

Cada equação de equilíbrio dinâmico desacoplada pela transformação modal pode ser resolvida por um método de análise dinâmica no domínio da frequência conhecido

como Método da Transformada Implícita de Fourier. Por este método, para cada ponto da estrutura a ser analisado gera-se um espectro de frequências de Fourier que serve como base para a determinação dos termos da matriz de função de resposta complexa em frequência a qual possibilita a obtenção do histórico de deslocamentos para tal ponto da estrutura analisado.

Tomando como base o conhecimento de um certo conjunto de valores (x_i, y_i) de uma determinada função, podemos deduzir um polinômio interpolador, específico para tal função nos pontos (x_i, y_i) através de um processo de geração do polinômio interpolador conhecido como Método de Lagrange. Por este método, obtém-se um polinômio interpolador conhecido como polinômio interpolador de Lagrange através do qual calcula-se os outros valores incluídos dentro do conjunto de pontos tomados para a geração de tal polinômio.

O espectro de Fourier, gerado para cada ponto da estrutura a ser analisado através do Método ImFT, pode ser dividido em duas partes. A primeira parte corresponde aos valores de frequências discretas anteriores a ω_n e a segunda parte, corresponde aos valores das frequências discretas posteriores a ω_n . Em cada parte do espectro pode-se definir, a partir de um conjunto de valores $(\bar{\omega}, H_{ij}(\bar{\omega}))$, um polinômio interpolador de Lagrange que deve ser usado para o cálculo de todos os outros valores de $H_{ij}(\bar{\omega})$.

Este processo de interpolação pode ser realizado apenas para a primeira parte do espectro de Fourier. Os outros valores das funções de resposta complexa podem ser obtidos utilizando a propriedade de números complexos conjugados.

CAPÍTULO 3

GERAÇÃO RECURSIVA DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA PELO MÉTODO DA TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER

3.1 INTRODUÇÃO

A formulação da análise dinâmica no domínio da frequência com a Transformada Implícita de Fourier foi apresentada por Claret (1991) e Venâncio Filho e Claret, (1992). Este método é aplicável a sistemas dinâmicos com amortecimento viscoso, hysterético ou dependente da frequência e apresenta redução do esforço computacional quando comparado com o método clássico de análise que utiliza o algoritmo FFT.

Para a solução de problemas reais na engenharia, a análise dinâmica no domínio da frequência, utilizando a formulação matricial, torna-se elegantemente simplificada. No entanto, ainda existem dois problemas que afetam o desempenho numérico desta formulação. O primeiro é a necessidade da extração modal e o segundo refere-se ao processo de cálculo dos valores discretos da função de resposta complexa em frequência; estes problemas ainda exigem um considerável esforço computacional, principalmente na análise não-linear.

Neste capítulo, apresenta-se um método analítico para a geração recursiva dos termos da matriz de função de resposta complexa em frequência, reduzindo dessa maneira o trabalho computacional a ser consumido na análise da resposta dinâmica.

3.2 FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

O sistema de um grau de liberdade mostrado na Figura (3.1) está sujeito a uma excitação dinâmica $p(t)$ aplicada à massa m , a qual vibra a partir de condições iniciais nulas.

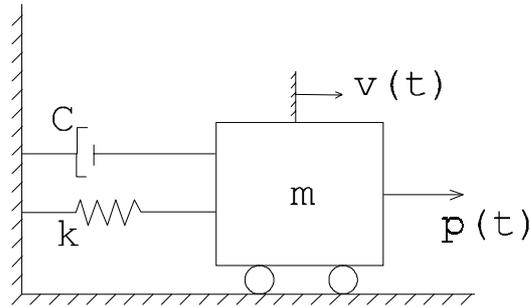


Figura (3.1) - Sistema massa-mola-amortecedor.

A equação de movimento é dada por

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t), \quad (3.1)$$

onde m é a massa, c é o amortecimento viscoso, k é a rigidez e $\ddot{v}(t)$, $\dot{v}(t)$ e $v(t)$ são, respectivamente, a aceleração, velocidade e o deslocamento da massa. A resposta deste sistema à excitação aplicada pode ser analisada no domínio da frequência através das transformadas de Fourier dadas por

$$P(m\Delta\bar{\omega}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(n\Delta t) e^{-i2\pi(mn/N)}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

$$v(n\Delta t) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P(m\Delta\bar{\omega}) H(m\Delta\bar{\omega}) e^{i2\pi(mn/N)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.3)$$

onde $H(m\Delta\bar{\omega})$ é dado por

$$H(m\Delta\bar{\omega}) = \frac{1}{-(m\Delta\bar{\omega})^2 + i(m\Delta\bar{\omega})c + k}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.4)$$

com as cargas e a resposta em suas formas discretizadas $p(n\Delta t)$ e $v(n\Delta t)$. Considerando o número de termos de Fourier, N , par, as frequências são computadas de 1 a N , mas são equivalentes às mostradas na Tabela (3.1) o que se deve a periodicidade implícita às transformadas de Fourier.

Termos de Fourier m	Frequência $\bar{\omega}_m = m\Delta\bar{\omega}$
0	0
1	$\Delta\bar{\omega}$
2	$2\Delta\bar{\omega}$
⋮	⋮
⋮	⋮
$N/2$	$[(N/2)-1]\Delta\bar{\omega}$
$(N/2)+1$	$(N/2)\Delta\bar{\omega}$
$(N/2)+2$	$-[(N/2)-1]\Delta\bar{\omega}$
⋮	⋮
⋮	⋮
$N-2$	$-2\Delta\bar{\omega}$
$N-1$	$-\Delta\bar{\omega}$

Tabela (3.1) – Relação entre m e $m\Delta\bar{\omega}$ para N par.

Os intervalos Δt e $\Delta\bar{\omega}$ são definidos como

$$\Delta t = \frac{T_p}{N}, \quad \Delta\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_p}, \quad (3.5)$$

onde T_p é conhecido como o período estendido, ou seja, o período adotado para a carga.

Do segundo teorema de Moivre, da teoria dos números complexos (Wyle e Barret, 1995) tem-se

$$\xi = e^{i(2\pi / N)}. \quad (3.6)$$

Assim, com a notação acima a equação, (3.2) toma a forma

$$P(m\Delta\bar{\omega}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \xi^{-mn} p(n\Delta t), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.7)$$

Tomando $P(m\Delta\bar{\omega})$ e $p(n\Delta t)$ como os vetores

$$\{P(m\Delta\bar{\omega})\} = \{P[0], P[\Delta\bar{\omega}], P[2\Delta\bar{\omega}], \dots, P[(N-1)\Delta\bar{\omega}]\}, \quad (3.8)$$

e

$$\{p(n\Delta t)\} = \{p[0], p[\Delta t], p[2\Delta t], \dots, p[(N-1)\Delta t]\}, \quad (3.9)$$

e ξ^{-mn} como o termo genérico da matriz

$$[E^*] = [\xi^{-mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \xi^{-1} & \xi^{-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi^{-(N-1)} \\ 1 & \xi^{-2} & \xi^{-4} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi^{-2(N-1)} \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi^{-(N-1)} & \xi^{-2(N-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi^{-(N-1)^2} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

as N equações expressas por (3.7) podem ser colocadas sob a seguinte forma matricial

$$\{P\} = \Delta t [E^*] \{p\} \quad (3.11)$$

Tomando agora $v(n\Delta t)$ como o vetor

$$\{v(n\Delta t)\} = \{v[0], v[\Delta t], v[2\Delta t], \dots, v[(N-1)\Delta t]\}, \quad (3.12)$$

e $[H(m\Delta\bar{\omega})]$ dado em (3.4) como a matriz

$$[H(m\Delta\bar{\omega})] = \begin{bmatrix} H(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & H(\Delta\bar{\omega}) & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & H(2\Delta\bar{\omega}) & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H[(N-1)\Delta\bar{\omega}] \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

as N equações expressas por (3.3) podem ser colocadas sob a seguinte forma matricial

$$\{v\} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} [E][H]\{P\}, \quad (3.14)$$

sendo $[E]$ a matriz

$$[E] = [\xi^{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^{(N-1)} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \dots & \xi^{2(N-1)} \\ 1 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \xi^{(N-1)} & \xi^{2(N-1)} & \dots & \xi^{(N-1)^2} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Levando (3.11) em (3.14), tem-se

$$\{v\} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \Delta t [E][H][E^*] \{p\}. \quad (3.16)$$

De (3.5) vem

$$\frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \Delta t = \frac{1}{N}, \quad (3.17)$$

que, quando levado em (3.16), produz

$$\{v\} = \frac{1}{N} [E][H][E^*] \{p\}. \quad (3.18)$$

Esta é a expressão que representa a formulação matricial para a análise dinâmica de sistemas de um grau de liberdade no domínio da frequência, da forma como foi apresentada por Venâncio Filho e Claret, (1991). Esta expressão contém a transformada de Fourier da carga, seu produto pela função de resposta complexa em frequência e a transformada inversa de Fourier deste produto, gerando dessa forma a resposta no domínio do tempo. Por este motivo, a equação foi denominada de ImFT (Implicit Fourier Transform) (Venâncio Filho, 1994).

A equação (3.18) pode ser colocada sob uma forma ainda mais compacta (Venâncio Filho e Claret, 1996)

$$\{v\} = \frac{1}{N} [e] \{p\}, \quad (3.19)$$

onde

$$[e] = [E][H][E^*]. \quad (3.20)$$

A expressão (3.19) representa uma forma compacta e simples para o cálculo da resposta.

O produto matricial em (3.20) envolve operações no domínio do tempo com operações no domínio da frequência, e por este motivo, deve ser resolvido de maneira que a equação (3.19) obedeça ao princípio da causalidade que vigora sobre todos os sistemas fisicamente realizáveis. A equação (3.19) será causal desde que $v(t)$ em um instante t dependa da história antecedente de excitação $p(\tau)$ para $\tau < t$ (Crandall, 1969). Para que isto ocorra, a matriz $[e]$ deve possuir, portanto, todos os seus termos acima da diagonal principal nulos.

Ribeiro (1998) demonstra que a matriz $[e]$ é do tipo Toeplitz, que é como são conhecidas as matrizes, geralmente cheias, com elementos constantes ao longo das diagonais,

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ e_{21} & e_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ e_{31} & e_{21} & e_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{(N-1)1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{N1} & e_{(N-1)1} & \cdot & \cdot & \cdot & e_{21} & e_{11} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

fato que permitiu além de aperfeiçoar a programação do método ImFT, grande economia de tempo computacional. Por (3.19) e (3.21), a resposta do sistema pode ser calculada por

$$v_i = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^i e_{ij} p_j, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (3.22)$$

De forma semelhante à equação (3.19), o histórico de velocidades pode ser obtido pela expressão matricial

$$\{\dot{v}\} = \frac{1}{N} [\dot{e}] \{p\}, \quad (3.23)$$

onde

$$[\dot{e}] = [E][\dot{H}][E^*], \quad (3.24)$$

sendo $[\dot{H}]$ uma matriz diagonal com o elemento genérico dado por

$$\dot{H}(m\Delta\bar{\omega}) = \frac{im\Delta\bar{\omega}}{-(m\Delta\bar{\omega})^2 + i(m\Delta\bar{\omega})c + k}, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (3.25)$$

Desta maneira, o histórico de velocidades do sistema é calculado por expressões semelhantes às do cálculo dos deslocamentos, a menos do fator $(im\Delta\bar{\omega})$.

Seja o sistema de um grau de liberdade mostrado na Figura (3.1) sujeito a uma excitação dinâmica $p(t)$, aplicada à massa m , a qual possui condições iniciais não nulas. As condições iniciais são um deslocamento v_0 e uma velocidade \dot{v}_0 .

A resposta do sistema a um deslocamento v_0 é encontrada deslocando-se a origem dos eixos para v_0 e aplicando (3.19) para uma força de magnitude igual a $-kv_0$. Por (3.19), tem-se

$$\{v_d\} = \frac{1}{N} [e](-kv_0\{1\}) + v_0\{1\}, \quad (3.26)$$

onde $\{1\}$ é um vetor unitário.

A expressão para a resposta devida a velocidade inicial \dot{v}_0 pode ser encontrada do fato de a resposta $h(t)$ de um sistema submetido a um impulso unitário $\delta(t)$ ser igual a resposta do mesmo sistema a uma velocidade inicial igual a $(1/m)$, Meirovitch (1986). Logo, a resposta a uma velocidade inicial igual a $\dot{v}_0 = m\dot{v}_0(1/m)$ vale

$$v(t) = m\dot{v}_0 h(t), \quad (3.27)$$

sendo a força, que produz a resposta dada por

$$p(t) = m\dot{v}_0 \delta(t), \quad (3.28)$$

onde $\delta(t)$ é a função impulso unitário aplicada em $t = 0$ e que, para ser utilizada na equação (3.19), deve ser posta sob a forma

$$\{\delta(t)\} = \frac{1}{\Delta t} \{\delta\}, \quad (3.29)$$

onde $\{\delta\}$ é um vetor com o primeiro elemento igual a 1 e os demais nulos.

Portanto, por (3.19) com $\{p\}$ dado por (3.28) e com a modificação dada em (3.29), a resposta a velocidade inicial vale

$$\{v_v\} = \frac{1}{N} \left([e] \left[\frac{m\dot{v}_0}{\Delta t} \right] \right) \{\delta\}. \quad (3.30)$$

A resposta total de um sistema submetido a uma carga $\{p\}$, deslocamento inicial v_0 e velocidade inicial \dot{v}_0 fica, portanto sob a forma

$$\{v\} = \frac{1}{N} [e] \left(\{p\} - kv_0 \{1\} + \left[\frac{m\dot{v}_0}{\Delta t} \right] \{\delta\} \right) + v_0 \{1\}. \quad (3.31)$$

A equação matricial para o cálculo do histórico de velocidades semelhante a equação (3.31) é

$$\{\dot{v}\} = \frac{1}{N} [\dot{e}] \left(\{p\} - kv_0 \{1\} + \left[\frac{(m\dot{v}_0)}{\Delta t} \right] \{\delta\} \right), \quad (3.32)$$

com

$$[\dot{e}] = [E][\dot{H}][E^*], \quad (3.33)$$

onde $[\dot{H}]$ é dado por (3.25).

3.3 FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

A análise de sistemas lineares com múltiplos graus de liberdade, em coordenadas físicas, envolve a solução das equações de movimento produzidas pela discretização de tais sistemas por elementos finitos, dadas em (2.10) e aqui repetidas

$$[m]\{\ddot{v}(t)\} + [c]\{\dot{v}(t)\} + [k]\{v(t)\} = \{p(t)\}. \quad (3.34)$$

Como exposto no capítulo II, as equações (3.34) representam um sistema acoplado de J equações com J incógnitas. Este sistema pode ser resolvido utilizando o método de superposição modal, em que, através de uma adequada transformação de coordenadas, o sistema é desacoplado em J equações independentes que podem ser resolvidas individualmente.

A transformação de coordenadas realizada é da forma

$$\{v(t)\} = [\Phi]\{Y(t)\}, \quad (3.35)$$

onde $\{Y(t)\}$ é o vetor de coordenadas generalizadas e $[\Phi]$ é uma matriz de ordem J cujas colunas são os modos normais de vibração $\{\phi_i\}$ do sistema.

A vibração livre não-amortecida do sistema é dada por

$$[m]\{\ddot{v}(t)\} + [k]\{v(t)\} = \{0\}. \quad (3.36)$$

Podemos adotar $\{Y(t)\}$ como sendo da forma

$$Y(t) = A \text{sen}(\omega t - \alpha), \quad (3.37)$$

onde A é a amplitude e α é a fase. Operando algebricamente sobre as expressões (3.36) a (3.37), chega-se ao problema de autovalor

$$[k][\Phi] - \omega_i^2 [m][\Phi] = \{0\}, \quad (3.38)$$

de cuja solução se obtém os modos, $\{\phi_i\}$, e as frequências naturais de vibração, ω_i , com $i = 1, 2, \dots, J$.

Cada um dos modos de vibração $\{\phi_i\}$ constitui uma configuração de deslocamento do sistema, com suas amplitudes podendo ser usadas como coordenadas generalizadas para descrever os deslocamentos físicos $\{v(t)\}$. A matriz $[\Phi]$ possui as seguintes propriedades de ortogonalidade em relação as matrizes de massa e rigidez

$$[\Phi]^T [m][\Phi] = [I], \quad (3.39)$$

$$[\Phi]^T [k][\Phi] = [\Lambda], \quad (3.40)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade de ordem J e $[\Lambda]$ é a matriz diagonal formada pelas frequências naturais de vibração elevadas ao quadrado, conhecida como matriz espectral.

Para que ocorra o desacoplamento total do sistema, também a matriz de amortecimento deve ser ortogonal à matriz modal $[\Phi]$. Admite-se, portanto, a seguinte relação

$$[\Phi]^T [c][\Phi] = [C], \quad (3.41)$$

onde $[C]$ é a matriz de amortecimento modal, diagonal, cujos elementos são da forma

$$C_{ii} = 2\xi_i \omega_i, \quad (3.42)$$

sendo ξ_i a taxa de amortecimento modal correspondente ao modo i e ω_i , a frequência natural de vibração associada a este modo. Conclui-se assim, que o amortecimento do sistema é por conveniência determinado através da taxa de amortecimento de cada modo e não pela avaliação direta dos coeficientes da matriz $[c]$. Esta técnica se justifica pelo fato de que, na maioria das estruturas, os mecanismos de perda de energia por dissipação ainda não são bem definidos, ao contrário das taxas de amortecimento que podem ser determinadas experimentalmente com precisão.

Alternativamente, pode-se obter a matriz de amortecimento viscoso, $[c]$, por meio da soma parcial da série

$$[c] = [m] \sum_b a_b ([m]^{-1} [k])^b, \quad (3.43)$$

em que b é tomado em um intervalo qualquer do conjunto de números inteiros. Adotando a proporcionalidade a $[m]$ e $[k]$, como proposto por Rayleigh (1945) e

ampliado por Caughey e O'Kelly (1965), tomam-se valores de b iguais a 0 e 1 e tem-se a matriz de amortecimento expressa por uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez isto é

$$[c] = a_0[m] + a_1[k]. \quad (3.44)$$

Assim, o amortecimento pode ser considerado como distribuído proporcionalmente por toda a estrutura, de forma análoga a massa e a rigidez. Por esta razão, este tipo de amortecimento é conhecido como amortecimento proporcional.

De (3.41) e (3.44) tem-se

$$C_{ii} = \{\phi_i\}^T [c] \{\phi_i\} = a_0 \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} + a_1 \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_i\}. \quad (3.45)$$

Utilizando as propriedades de ortogonalidade (3.39), (3.40) e (3.41) tem-se

$$2\xi_i \omega_i = a_0 + a_1 \omega_i^2, \quad (3.46)$$

logo

$$\xi_i = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1 \omega_i}{2}. \quad (3.47)$$

A partir, então, da estimativa de duas taxas de amortecimento ξ_m e ξ_n , e de duas frequências ω_m e ω_n , calcula-se as constantes a_0 e a_1 e por (3.44), determina-se uma expressão para a matriz de amortecimento $[c]$ proporcional e ortogonal a matriz modal $[\Phi]$.

Substituindo (3.35) em (3.34), pré-multiplicando os dois lados por $[\Phi]^T$ e considerando as propriedades de ortogonalidade da matriz modal em relação as matrizes de massa,

rigidez e amortecimento dadas por (3.39), (3.40) e (3.41), obtêm-se as seguintes equações em coordenadas modais

$$[I]\{\ddot{Y}(t)\} + [C]\{\dot{Y}(t)\} + [\Lambda]\{Y(t)\} = \{P_G(t)\}, \quad (3.48)$$

onde $\{P_G(t)\}$ é o vetor de cargas generalizadas, dado por

$$\{P_G(t)\} = [\Phi]^T \{p(t)\}. \quad (3.49)$$

A equação (3.48) representa um sistema de J equações desacopladas da forma

$$\ddot{Y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{Y}_i(t) + \omega_i^2 Y_i(t) = P_{Gi}(t), \quad i = 1, 2, \dots, J, \quad (3.50)$$

que podem ser resolvidas independentemente uma a uma. A resposta para uma determinada coordenada modal J , através da formulação matricial dada por (3.19) é

$$\{Y\}_j = \frac{1}{N} [e]_j \{P_G\}_j, \quad (3.51)$$

onde

$$[e]_j = [E][H]_j [E^*], \quad (3.52)$$

sendo

$$H(m\Delta\bar{\omega}) = \left[-(m\Delta\bar{\omega}) + im\Delta\bar{\omega}C_{jj} + \omega_j^2 \right]^{-1}, \quad (3.53)$$

com

$$\omega_j^2 = \Lambda_{jj}. \quad (3.54)$$

Depois de encontrada a resposta para cada coordenada modal, a resposta em cada modo j em coordenadas físicas é obtida pela superposição dos deslocamentos modais através da equação (3.35), ou seja, por

$$\{v_j(t)\} = \{\phi_1\}\{Y_1(t)\} + \{\phi_2\}\{Y_2(t)\} + \dots + \{\phi_N\}\{Y_N(t)\}, \quad (3.55)$$

razão pela qual a técnica aplicada para o desacoplamento das equações de movimento é conhecida como método da superposição modal, ou mais especificamente, método do deslocamento modal.

Para a maioria das cargas, a contribuição dos deslocamentos modais para a resposta dada em (3.55) é maior para os primeiros modos e decresce para os modos superiores, Ribeiro (1998). Desse modo, a equação acima pode ser truncada, desprezando-se a contribuição dos modos superiores para a resposta total. Para \tilde{J} modos, $\tilde{J} < J$, $\{v(t)\}$ pode ser aproximado por

$$\{v_j(t)\} = \{\phi_1\}\{Y_1(t)\} + \{\phi_2\}\{Y_2(t)\} + \dots + \{\phi_{\tilde{J}}\}\{Y_{\tilde{J}}(t)\}. \quad (3.56)$$

Entretanto, existem sistemas estruturais onde o amortecimento não pode ser idealizado como distribuído proporcionalmente por toda a estrutura como descrito anteriormente. Dessa forma a matriz de amortecimento não satisfaz a condição de ortogonalidade em relação a matriz modal sendo este tipo de amortecimento definido como não-proporcional. Quando se aplica a transformação modal a tais sistemas, da maneira como foi realizada anteriormente, a matriz de amortecimento modal resultante não é diagonal, apresentando termos não nulos fora da diagonal. Devido a este fato, o sistema permanece acoplado e o método de superposição modal em sua forma clássica não pode ser empregado. Tais sistemas podem ser tratados por vários métodos conhecidos na literatura, como o método dos autovetores complexos, os métodos de integração direta

passo-a-passo das equações de movimento em coordenadas modais usando os modos normais não amortecidos para a transformação de coordenadas ou o método das pseudo-forças, Claret (1991).

O método das pseudo-forças tem sido utilizado em vários trabalhos com a solução do sistema sendo realizada tanto no domínio do tempo Claret (1991) quanto no domínio da frequência, Claret e Venâncio-Filho (1991) como também por um processo misto, Kawamoto (1983). Por este método, os termos da matriz de amortecimento responsáveis pelo acoplamento das equações modais são transferidos para o lado direito das equações e tratados como pseudo-forças, deixando o primeiro membro desacoplado como ocorre nos sistemas constituídos de amortecimento proporcional. O sistema é então resolvido por um processo iterativo.

3.4 FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA A GERAÇÃO RECURSIVA DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA

Como exposto na seção anterior, a aplicação da formulação matricial utilizando o método de superposição modal para a solução de um sistema de múltiplos graus de liberdade requer o cálculo da matriz de resposta complexa de ordem N , onde N é o número de frequências no espectro de Fourier para cada grau de liberdade J . Este fato exige um esforço computacional considerável, uma vez que se deve gerar N termos complexos da matriz de resposta em frequência para cada grau de liberdade.

O problema em questão pode ser contornado adotando-se uma técnica de geração dos termos da matriz de resposta complexa em cada modo j , de forma recursiva como proposto por Claret (2000).

A expressão do equilíbrio dinâmico para o sistema dotado de amortecimento viscoso é dada pela equação (2.10) e aqui repetida

$$[m]\{\ddot{v}(t)\} + [c]\{\dot{v}(t)\} + [k]\{v(t)\} = \{p(t)\}. \quad (3.57)$$

A solução da equação acima pode ser obtida no domínio da frequência inicialmente considerando o sistema submetido a uma excitação harmônica na frequência $\bar{\omega}_n$, dada como

$$\{p(t)\} = \{e^{i\bar{\omega}_n t}\}. \quad (3.58)$$

Este tipo de excitação produz uma resposta da forma

$$\{v(t)\} = [H(\bar{\omega}_n)]\{e^{i\bar{\omega}_n t}\}. \quad (3.59)$$

Levando (3.58) e (3.59) com suas derivadas em (3.57) tem-se

$$[H(\bar{\omega}_n)] = \frac{1}{-m_j(\bar{\omega}_n)^2 + i(\bar{\omega}_n)c_j + k_j}, \quad (3.60)$$

em coordenadas físicas ou

$$[H(\bar{\omega}_n)] = \frac{1}{-(\bar{\omega}_n)^2 + i(\bar{\omega}_n)2\xi_j\omega_j + \omega_j^2}, \quad (3.61)$$

em coordenadas modais, onde $\bar{\omega}_n$ é uma dada frequência do espectro de frequências e $\bar{\omega}_j$ a frequência natural de vibração do modo j , obtida através da extração modal.

Define-se a relação entre a frequência fundamental do espectro de Fourier e a frequência natural de vibração do modo j como

$$\beta_{0j} = \frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_j}. \quad (3.62)$$

Observa-se que, para $1 \leq n \leq (N/2)+1$,

$$\bar{\omega}_n = (n-1)\bar{\omega}_0, \quad (3.63)$$

e, conseqüentemente,

$$\beta_{nj} = \frac{\bar{\omega}_n}{\bar{\omega}_j} = (n-1)\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_j} = (n-1)\beta_{0j}. \quad (3.64)$$

Portanto, tem-se

$$\beta_{(n+1)j} = n\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_j} = n\beta_{0j} = \beta_{nj} + \beta_{0j}. \quad (3.65)$$

Tomando ω_j^2 em evidência na equação (3.61), levando em conta (3.64) e definindo

$h_{nj} = H_{nj}^{-1}$ tem-se

$$h_{nj} = [-\beta_{nj}^2 + i2\xi_j\beta_{nj} + 1]\omega_j^2. \quad (3.66)$$

Para a freqüência $\bar{\omega}_{(n+1)} = n\bar{\omega}_0$ tem-se

$$h_{(n+1)j} = [-\beta_{(n+1)j}^2 + i2\xi_j\beta_{(n+1)j} + 1]\omega_j^2. \quad (3.67)$$

Substituindo (3.65) em (3.67) chega-se, após alguns rearranjos, à expressão recursiva para a geração da inversa da função de resposta complexa em freqüência para a primeira parte do espectro de freqüências, dada por

$$h_{(n+1)j} = h_{nj} + h_{2j} - \omega_j^2[1 + 2\beta_{0j}^2(n-1)], \quad 1 \leq n \leq (N/2)+1. \quad (3.68)$$

Para a segunda parte do espectro de frequências, os valores de h_{nj} podem ser obtidos considerando que

$$h_{nj} = \text{conjg}(h_{(N-j+2)j}), \quad (N/2)+2 \leq n \leq N. \quad (3.69)$$

Utilizando um raciocínio análogo ao descrito anteriormente, pode-se desenvolver a formulação recursiva da função de resposta complexa em frequência para o caso do amortecimento histerético. A equação de equilíbrio dinâmico para o sistema possuindo amortecimento histerético, é dada por

$$[m]\{\ddot{v}(t)\} + [k](1 + i2D)\{v(t)\} = \{p(t)\}, \quad (3.70)$$

equação esta que só pode ser rigorosamente tratada no domínio da frequência. Considere o sistema submetido a uma excitação harmônica na frequência $\bar{\omega}_n$, dada por

$$\{p(t)\} = \{e^{i\bar{\omega}_n t}\}. \quad (3.71)$$

Este tipo de excitação produz uma resposta da forma

$$\{v(t)\} = [H(\bar{\omega}_n)]\{e^{i\bar{\omega}_n t}\}. \quad (3.72)$$

Levando (3.71) e (3.72) com suas derivadas em (3.70) tem-se

$$[H(\bar{\omega}_n)] = \frac{1}{-m_j(\bar{\omega}_n)^2 + k_j(1 + i2D)}, \quad (3.73)$$

em coordenadas físicas ou

$$[H(\bar{\omega}_n)] = \frac{1}{-\bar{\omega}_n^2 + \omega_j^2(1 + i2D)}, \quad (3.74)$$

em coordenadas modais, onde $\bar{\omega}_n$ é uma certa frequência do espectro e $\bar{\omega}_j$, a frequência natural de vibração, como definidas anteriormente.

Analogamente ao caso do amortecimento viscoso, definem-se as relações entre β_{0j} , β_{nj} e $\beta_{(n+1)j}$ para $1 \leq n \leq (N/2)+1$.

Por um procedimento análogo ao da obtenção de (3.66) tem-se

$$h_{nj} = [-\beta_{nj}^2 + (1 + i2D)] \omega_j^2. \quad (3.75)$$

Para a frequência $\bar{\omega}_{(n+1)} = n \bar{\omega}_0$ temos

$$h_{(n+1)j} = [-\beta_{(n+1)j}^2 + (1 + i2D)] \omega_j^2. \quad (3.76)$$

Substituindo (3.65) em (3.76) chega-se, após algumas simplificações, à expressão recursiva para a geração da inversa da função de resposta complexa em frequência para a primeira parte do espectro de frequências dada por

$$h_{(n+1)j} = h_{nj} + \beta_{0j}^2 (1 - 2n) \omega_j^2, \quad 1 \leq n \leq (N/2)+1. \quad (3.77)$$

Para a segunda parte do espectro de frequências, os valores de h_{nj} podem ser obtidos de forma análoga ao caso anterior, pela expressão

$$h_{nj} = \text{conjg}(h_{(N-j+2)j}), \quad (N/2)+2 \leq n \leq N. \quad (3.78)$$

CAPÍTULO 4

FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO MÉTODO DA TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER COM A RESPOSTA CALCULADA PELA MATRIZ INVERSA DE $[e]$

4.1 INTRODUÇÃO

No estudo do Método da Transformada Implícita de Fourier descrito no capítulo 3, observa-se que, para cada grau de liberdade j da estrutura, a geração da matriz de função de resposta complexa em frequência ainda necessita da inversão de N termos complexos, o que exigiria um considerável esforço computacional em uma análise não linear passo-a-passo.

Neste capítulo, busca-se uma solução para as equações de movimento em que não há necessidade da inversão dos termos complexos das matrizes de função de resposta complexa em frequência o que deve ser obtido através da definição da matriz inversa $[e]^{-1}$.

4.2 DETERMINAÇÃO DA SOLUÇÃO PRODUZIDA PELO MÉTODO DA TRANSFORMADA IMPLÍCITA DE FOURIER UTILIZANDO A MATRIZ $[e]^{-1}$

A expressão que representa a formulação matricial para a análise dinâmica de sistemas no domínio da frequência dada por (3.19) é aqui repetida

$$\{v(t)\} = \frac{1}{N} [e] \{p(t)\}. \quad (4.1)$$

Se pré-multiplicarmos ambos os lados da equação (4.1) por $[e]^{-1}$ tem-se

$$[e]^{-1} \{v(t)\} = \frac{1}{N} \{p(t)\}, \quad (4.2)$$

onde

$$[e]^{-1} = \frac{1}{N^2} [E][h][E^*] \quad (4.3)$$

como se demonstrará, em seguida. A matriz $[e]$, sendo inversível, pois é quadrada e não possui elemento da diagonal nulo, gera uma matriz inversa $[e]^{-1}$ que também possui os elementos das diagonais idênticos, ou seja, a matriz $[e]^{-1}$ também é uma matriz do tipo Toeplitz. A matriz $[e]^{-1}$ envolve operações no domínio do tempo com operações no domínio da frequência. Por este motivo, a equação (4.2) deve obedecer ao princípio da causalidade e, para que este fato ocorra, a matriz $[e]^{-1}$ conseqüentemente deve possuir todos os seus elementos acima da diagonal principal nulos.

4.3 DEFINIÇÃO DA MATRIZ $[e]^{-1}$

As equações de movimento de um sistema linear com múltiplos graus de liberdade em coordenadas físicas, no domínio do tempo, são dadas por

$$[m]\{\ddot{v}(t)\} + [c]\{\dot{v}(t)\} + [k]\{v(t)\} = \{p(t)\}. \quad (4.4)$$

No domínio da frequência, o conjunto de equações (4.4) pode ser escrito como

$$(-[m]\bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}[c] + [k])\{V(\bar{\omega})\} = \{P(\bar{\omega})\}, \quad (4.5)$$

ou, de forma sintética,

$$[h]\{V(\bar{\omega})\} = \{P(\bar{\omega})\}. \quad (4.6)$$

Considere-se o par de transformadas de Fourier:

$$V(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt, \quad (4.7)$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega}. \quad (4.8)$$

Expressando a equação (4.8) em forma matricial, obtém-se

$$\{v(t)\} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} [E]\{V(\bar{\omega})\}. \quad (4.9)$$

Uma importante propriedade das matrizes de Fourier é demonstrada por Ribeiro (1998) onde tem-se

$$[E][E^*] = N[I], \quad (4.10)$$

ou seja, de (4.10) pode-se concluir que tanto $[E]$ e $(1/N)[E^*]$ como $[E^*]$ e $(1/N)[E]$ são matrizes inversas. Logo, levando a equação (4.10) na equação (4.9) e rearranjando os termos, tem-se

$$\{V(\bar{\omega})\} = \frac{2\pi}{\Delta\bar{\omega}} \frac{1}{N} [E^*] \{v(t)\}. \quad (4.11)$$

Pré-multiplicando ambos os lados de (4.11) por $[h]$ e tendo em vista (4.6) obtém-se

$$\{P(\bar{\omega})\} = \frac{2\pi}{N \Delta\bar{\omega}} [h][E^*] \{v(t)\}. \quad (4.12)$$

De (3.11) vem

$$\{P(\bar{\omega})\} = \Delta t [E^*] \{p(t)\}. \quad (4.13)$$

Levando (4.12) em (4.13) tem-se

$$\frac{2\pi}{N \Delta\bar{\omega} \Delta t} [h][E^*] \{v(t)\} = [E^*] \{p(t)\}. \quad (4.14)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (4.14) por $\frac{1}{N} [E]$ tem-se

$$\frac{1}{N^2} [E][h][E^*] \{v(t)\} = \frac{\Delta t}{2\pi} \Delta\bar{\omega} \{p(t)\}, \quad (4.15)$$

de onde, a partir do conhecimento de que $\Delta\bar{\omega} = \frac{2\pi}{N\Delta t}$, obtém-se

$$\frac{1}{N^2} [E][h][E^*] \{v(t)\} = \frac{1}{N} \{p(t)\}, \quad (4.16)$$

que resulta em

$$[e]^{-1} = \frac{1}{N^2} [E][h][E^*]. \quad (4.17)$$

Alternativamente, partindo de $V(\bar{\omega})$ tem-se que

$$\{V(\bar{\omega})\} = \Delta t [E^*] \{v(t)\}. \quad (4.18)$$

As transformadas da carga p podem ser expressas por

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}t} d\bar{\omega}, \quad (4.19)$$

$$P(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{i\bar{\omega}t} dt. \quad (4.20)$$

Expressando a equação (4.19) em forma matricial tem-se

$$\{p(t)\} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} [E] \{P(\bar{\omega})\}. \quad (4.21)$$

De (4.6) em (4.21) tem-se

$$\{p(t)\} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} [E][h] \{V(\bar{\omega})\}. \quad (4.22)$$

De (4.7) tem-se

$$\{V(\bar{\omega})\} = \Delta t [E^*] \{v(t)\}. \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.22) tem-se

$$\{p(t)\} = \frac{\Delta \bar{\omega}}{2\pi} \Delta t [E][h][E^*] \{v(t)\}, \quad (4.24)$$

de onde após algumas operações algébricas obtém-se

$$\frac{1}{N^2} [E][h][E^*] \{v(t)\} = \frac{1}{N} \{p(t)\}, \quad (4.25)$$

ou seja

$$[e]^{-1} = \frac{1}{N^2} [E][h][E^*]. \quad (4.26)$$

Uma maneira mais compacta de se obter a inversa da matriz $[e]$ pode ser feita utilizando as inversas das matrizes de Fourier $[E]$ e $[E^*]$ e a inversa da matriz $[H]$. As inversas das matrizes de Fourier podem ser obtidas pela relação (4.10). A matriz $[H]$ é inversível pois é uma matriz quadrada e não possui nenhum elemento da diagonal principal nulo. Sendo $[H]$ uma matriz diagonal sua inversa é obtida facilmente, apenas invertendo os termos da diagonal principal, ou seja, $[h]$ também é diagonal. Dessa forma, pela definição de $[e]$ temos

$$[e] = [E][H][E^*]. \quad (4.27)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (4.27) por $[E]^{-1} = \frac{1}{N} [E^*]$ tem-se

$$\frac{1}{N}[E^*][e] = [H][E^*]. \quad (4.28)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (4.28) por $[H]^{-1} = [h]$, tem-se

$$\frac{1}{N}[h][E^*][e] = [E^*]. \quad (4.29)$$

Finalmente, pré-multiplicando ambos os lados de (4.29) por $[E^*]^{-1} = \frac{1}{N}[E]$ tem-se

$$\frac{1}{N^2}[E][h][E^*][e] = [I], \quad (4.30)$$

ou seja,

$$[e]^{-1}[e] = [I], \quad (4.31)$$

onde

$$[e]^{-1} = \frac{1}{N^2}[E][h][E^*]. \quad (4.32)$$

4.4 VIABILIDADE DA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE SISTEMAS DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

A análise dinâmica não linear de sistemas estruturais, no domínio da frequência, pode ser realizada com o cálculo da resposta sendo obtido pelo método da Transformada Implícita de Fourier, utilizando a geração recursiva da função de resposta complexa em frequência e a matriz $[e]^{-1}$.

Em uma análise não linear, a resposta é avaliada para uma série de incrementos de tempos Δt pequenos e geralmente considerados do mesmo tamanho por conveniência computacional. A resposta completa é obtida usando a velocidade e o deslocamento calculado no fim de um intervalo precedente como condições iniciais para o próximo intervalo. A natureza não linear do sistema é considerada para o cálculo de novas propriedades adequadas ao estado de deformação, presente no início de cada incremento de tempo. Dessa forma, o processo segue passo-a-passo com a carga iniciando em qualquer tempo desejado, de maneira a aproximar o comportamento não linear como uma seqüência de sistemas lineares.

Seja um sistema estrutural de múltiplos graus de liberdade com amortecimento viscoso o qual possui não linearidade física. Suas equações de movimento são dadas por

$$[m]\{\ddot{v}(t)\} + [c]\{\dot{v}(t)\} + [k]\{v(t)\} = \{p(t)\}. \quad (4.33)$$

Como descrito no capítulo 3, o conjunto de equações (4.33) pode ser desacoplado em J equações independentes de um grau de liberdade por uma adequada transformação de coordenadas da forma

$$\{v(t)\} = [\Phi]\{Y(t)\}, \quad (4.34)$$

onde $\{Y(t)\}$ é o vetor de coordenadas generalizadas e $[\Phi]$ a matriz modal cujas colunas são os modos normais de vibração $\{\phi_i\}$ do sistema. Como demonstrado no capítulo 3, o seguinte problema de autovalor

$$[k]\{\phi_i\} - \omega_i^2 [m]\{\phi_i\} = \{0\} \quad (4.35)$$

permite obter os modos de vibração $\{\phi_i\}$ e também as frequências naturais de vibração ω_i , $i = 1, 2, \dots, j$.

Substituindo (4.34) em (4.33), pré-multiplicando-se os dois lados por $[\Phi]^T$ e levando em conta as propriedades de ortogonalidade da matriz modal em relação às matrizes de massa, rigidez e amortecimento, chega-se às seguintes equações em coordenadas modais

$$[I]\{\ddot{Y}(t)\} + [C]\{\dot{Y}(t)\} + [\Lambda]\{Y(t)\} = \{P(t)\}. \quad (4.36)$$

A equação (4.36) representa um sistema de J equações desacopladas da forma

$$\ddot{Y}_j(t) + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}_j(t) + \omega_j^2 Y_j(t) = P_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (4.37)$$

que podem ser resolvidas independentemente uma a uma através do método da transformada Implícita de Fourier dado por

$$\{v(t)\}_j = \frac{1}{N} [e]_j \{p(t)\}_j, \quad (4.38)$$

onde

$$[e]_j = [E][H]_j [E^*], \quad (4.39)$$

com $[H(\bar{\omega}_n)]_j$ dado por

$$[H(\bar{\omega}_n)]_j = \frac{1}{-(\bar{\omega}_n)^2 + i(\bar{\omega}_n)2\xi_j\omega_j + \omega_j^2}. \quad (4.40)$$

De (4.38) pode-se obter

$$[e]_j^{-1} \{v(t)\}_j = \frac{1}{N} \{p(t)\}_j, \quad (4.41)$$

onde

$$[e]_j^{-1} = \frac{1}{N^2} [E][h]_j [E^*]. \quad (4.42)$$

com $[h(\bar{\omega}_n)]_j$ dado por

$$[h(\bar{\omega}_n)]_j = -(\bar{\omega}_n)^2 + i(\bar{\omega}_n)2\xi_j\omega_j + \omega_j^2. \quad (4.43)$$

De forma semelhante, da equação (4.38), obtém-se a velocidade por

$$\{\dot{v}(t)\}_j = \frac{1}{N} [\dot{e}]_j \{p(t)\}_j, \quad (4.44)$$

onde

$$[\dot{e}]_j = [E][\dot{H}]_j [E^*]. \quad (4.45)$$

com $[\dot{H}(\bar{\omega}_n)]_j$ dado por

$$[\dot{H}(m\Delta\bar{\omega})] = \frac{i\bar{\omega}_n}{-\bar{\omega}_n^2 + i\bar{\omega}_n 2\xi_j\omega_j + \omega_j^2}. \quad (4.46)$$

De (4.44) pode-se obter

$$[\dot{e}]_j^{-1} \{\dot{v}(t)\}_j = \frac{1}{N} \{p(t)\}_j, \quad (4.47)$$

onde

$$[\dot{e}]_j^{-1} = \frac{1}{N^2} [E][\dot{h}]_j [E^*]. \quad (4.48)$$

com $[\dot{h}(\bar{\omega}_n)]_j$ dado por

$$[\dot{h}(\bar{\omega}_n)]_j = 2\xi_j \omega_j + \left[\bar{\omega} + \frac{\omega_j^2}{\bar{\omega}} \right] i. \quad (4.49)$$

A análise não-linear realizada em um sistema estrutural de múltiplos graus de liberdade que apresenta não linearidade física requer, em cada passo da análise, a atualização das propriedades físicas, dentre elas a da matriz de rigidez. Sendo a resposta calculada pelo Método da Transformada Implícita de Fourier, a cada mudança da matriz de rigidez, ou seja, em cada passo da análise, deve-se recalcular, para cada grau de liberdade do sistema, a matriz de função de resposta complexa em frequência para a realização do cálculo dos deslocamentos em cada incremento de tempo Δt , ou seja, em cada subpasso da análise. De forma análoga ao cálculo dos deslocamentos, deve-se determinar $[\dot{H}]$ para o cálculo da velocidade em cada incremento de tempo Δt também em cada grau de liberdade. Dessa forma, na análise não-linear, pode-se obter uma grande economia de tempo, quando se utiliza a geração da matriz de resposta complexa em frequência de forma recursiva como foi desenvolvida no capítulo 3.

O Método da Transformada Implícita de Fourier, usando a resposta dada pela equação (4.2), também proporciona uma grande economia de tempo uma vez que não há a necessidade de inversão dos N termos complexos que formam a matriz de função de resposta complexa em frequência, em cada modo da estrutura, e em cada atualização da matriz de rigidez, ou seja, em cada passo na análise.

CAPÍTULO 5

ESTRATÉGIAS DE IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA

5.1 INTRODUÇÃO

A implementação computacional do Método da Transformada Implícita de Fourier dada pela equação

$$\{v\} = \frac{1}{N} [E][H][E^*] \{p\}, \quad (5.1)$$

foi realizada inicialmente por Claret (1991). Ribeiro (1998) realizou a implementação computacional da equação (3.19), isto é

$$\{v\} = \frac{1}{N} [e] \{p\}. \quad (5.2)$$

O processo de implementação do método ImFT utilizando a matriz $[e]$ é representado no fluxograma da Figura (5.1).

O presente capítulo fornece, de uma maneira geral, as formulações para a implementação de algoritmos para a implementação do Método ImFT, evidenciando em especial, as formulações para a geração da função de resposta complexa em frequência pelo método recursivo. A implementação realizada de acordo com o fluxograma da

Figura (5.1) permite verificar a viabilidade de tal método, descrito anteriormente, em relação a métodos propostos na literatura.

5.2 IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO DA MATRIZ DE FOURIER

A matriz $[E]$ é conhecida como a matriz de Fourier, Wyle e Barret (1995). Esta matriz apresenta algumas propriedades derivadas da natureza de seu termo genérico ξ^{mn} e da escolha de um valor adequado para N , todas discutidas em Claret (1991), de tal maneira a permitir algumas simplificações em sua representação, que se reflete de forma favorável na implementação da equação (5.2).

O termo genérico da matriz $[E]$ é representado por

$$E_{mn} = \xi^{mn\alpha} = e^{imn\alpha} \quad (5.3)$$

com $\alpha = 2\pi/N$ e $m, n = 0, 1, \dots, N-1$. Esse termo, quando transformado para a forma trigonométrica através da fórmula de Euler, se torna

$$\begin{aligned} E_{mn} &= \xi^{mn} = \exp\left[i2\pi\left(\frac{mn}{N}\right)\right] = \\ &= \cos\left[2\pi\left(\frac{mn}{N}\right)\right] + i \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{mn}{N}\right)\right], \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para a primeira linha e para a primeira coluna, têm-se elementos $\xi^m = \xi^n = 1$. Para um número de termos de Fourier, N , par, o elemento $E_{m(N/2)}$ vale

$$\begin{aligned} E_{m(N/2)} &= \xi^{m(N/2)} = \exp\left[\left(i2\pi m \frac{N}{2} \frac{1}{N}\right)\right] = \exp(im\pi) = \\ &= \cos(m\pi) + i \operatorname{sen}(m\pi) = (-1)^m. \end{aligned} \quad (5.5)$$

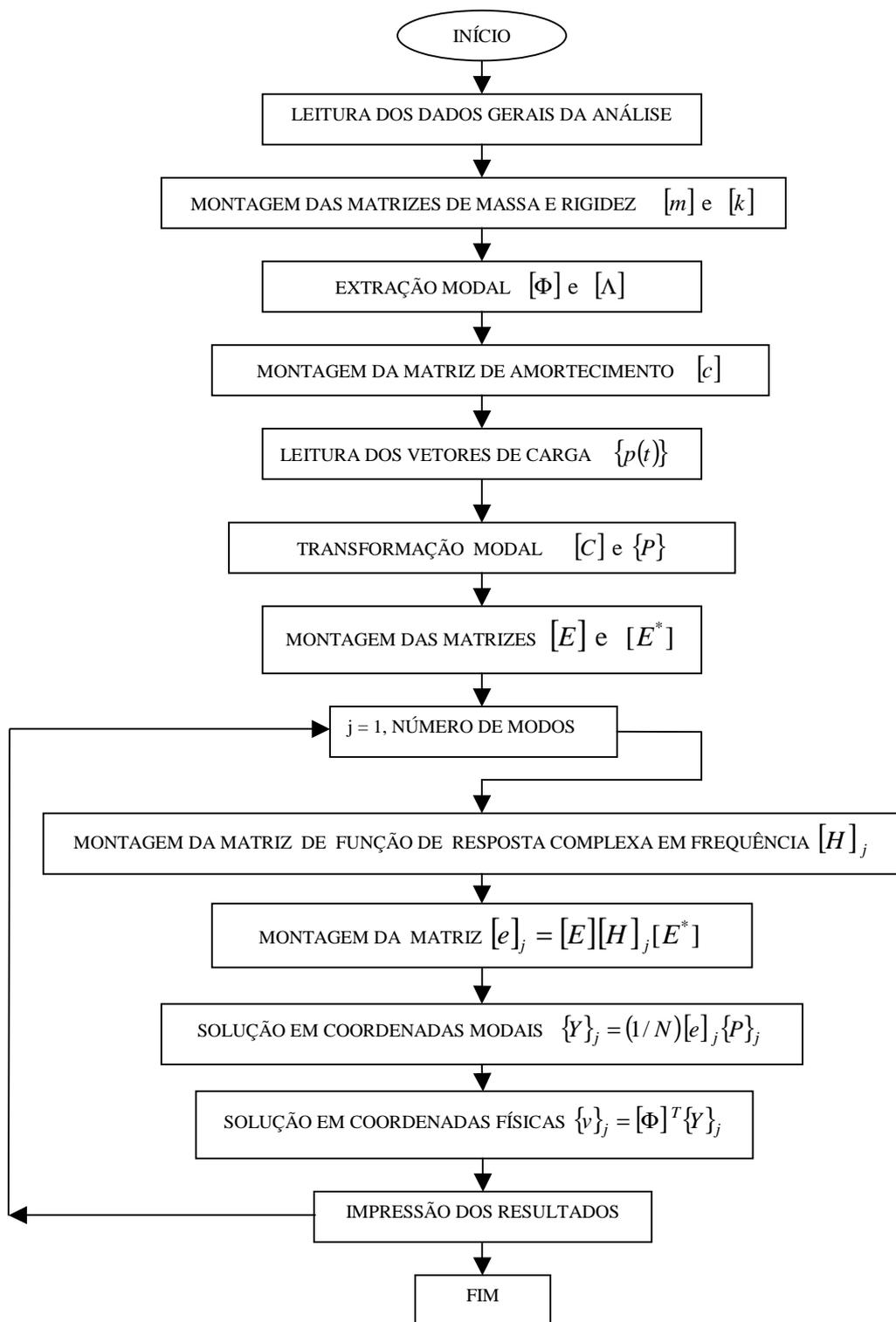


Figura (5.1) – Fluxograma do Método ImFT

Portanto, para qualquer linha m , o primeiro termo e o termo $E_{m(N/2)}$ são reais. Os outros termos da linha são conforme Claret (1991)

$$E_{mn} = \text{conjg} [E_{m(N-n)}], \quad (N/2) \leq n \leq N-1, \quad (5.6)$$

onde o operador **conjg** retorna o conjugado complexo do seu argumento.

Impondo-se mais uma restrição ao número N de termos do espectro de Fourier, a de que N seja múltiplo de 4, chega-se à seguinte expressão para os termos de uma linha m de $[E]$

$$E_{mn} = (-1)^m \text{conjg} \left[E_{m\left(\frac{N}{2}-n\right)} \right], \quad (N/4) \leq n \leq (N/2). \quad (5.7)$$

Portanto, de (5.5), (5.6) e (5.7) conclui-se que, para uma linha m da matriz $[E]$, gerando-se os $(N/4)+1$ primeiros termos de uma linha, os outros se tornam determinados. Observa-se que as relações (5.5), (5.6) e (5.7) também valem para a geração da matriz $[E^*]$.

A implementação da matriz de Fourier pode seguir o trecho de programa abaixo, em linguagem FORTRAN

```

pi=3.1415926
ALFA=(2.*pi)/N
DO m=2,NRESP
AUX=(-1)**(m-1)
DO j=2,(N/4)+1
ER=DCOS((m-1)*(j-1)*(ALFA))
EC=DSIN((m-1)*(j-1)*(ALFA))
EE(m,j)=CMPLX(ER,EC)
ENDDO
DO j=(N/4)+2,(N/2)
EE(m,j)=AUX*CONJG(EE(m,(N/2)-j+2))

```

```

ENDDO
EE(m,(N/2)+1)=AUX
DO j=(N/2)+2,N
EE(m,j)=CONJG(EE(m,N-j+2))
ENDDO
ENDDO
DO k=1,NRESP
DO j=1,N
EA(j,k)=CONJG(EE(k,j))
ENDDO
ENDDO

```

Devido a forma da matriz $[e]$, como mostrada na equação (3.21), $[E^*]$ só contribui com os elementos de sua coluna de ordem 1 que são iguais à unidade para a determinação do termo genérico da primeira coluna da matriz $[e]$.

5.3 IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO RECURSIVO DA MATRIZ DE FUNÇÃO DE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA

O desenvolvimento analítico do processo de geração recursiva dos termos da matriz de função de resposta complexa, dado pelas equações (3.68) e (3.69), para o caso de amortecimento viscoso, e (3.77) e (3.78), para o caso de amortecimento histerético, possibilitou o desenvolvimento de um algoritmo que oferece uma redução no tempo de processamento por meio da redução do número de operações com termos complexos.

Pela expressão (3.4) que fornece o termo genérico da matriz $[H]$ e através do espectro de frequências de Fourier para N par mostrado na Tabela (3.1), tem-se que $H(0)$ é real e vale $1/k$ e os outros termos, excluindo $H_{\frac{N}{2}}$, são tais que

$$H_m = \text{conjg}(H_{(N-m)}), \quad (N/2) < m < N-1. \quad (5.8)$$

Conforme Claret (1991) e Ribeiro (1998), a implementação computacional da função de resposta em frequência segue o trecho de programa em linguagem FORTRAN mostrado abaixo

Geração do Espectro de Fourier

```
WNo=WN(i)
Qsi=SC(i,i)/(2.*WNo)
pi=3.14159265358
Wo=(2.0*pi)/(N*DT)
DO j=1,(N/2)+1
W(j)=(j-1)*Wo
Beta(j)=W(j)/WNo
ENDDO
DO j=(N/2)+2,N
W(j)=-W(N-j+2)
Beta(j)=W(j)/WNo
ENDDO
```

Geração de H

```
DO j=1,(N/2)+1
HR=(1.0-Beta(j)**2)*WNo**2
HC=2.0*Beta(j)*Qsi*WNo**2
H(i,j)=1./(CMPLX(HR,HC))
ENDDO
DO j=(N/2)+2,N
H(i,j)=conjg(H(i,N-j+2))
ENDDO
```

Observa-se que o número de operações aritméticas executadas para a geração dos termos da matriz $[H]$ é da ordem de $7N$ operações. Por outro lado, a implementação do mesmo trecho de programa pode ser realizada utilizando a formulação recursiva para a geração da matriz de função de resposta complexa em frequência, desenvolvida no capítulo 3, conforme o trecho de programa a seguir

Geração do Espectro de Fourier

```
WNo=WN(i)
Qsi=SC(i,i)/(2.*WNo)
pi=3.14159265358
Wo=(2.0*pi)/(N*DT)
```

```

DO j=1,(N/2)+1
W(j)=(j-1)*Wo
Beta(j)=W(j)/WNo
ENDDO
DO j=(N/2)+2,N
W(j)=-W(N-j+2)
Beta(j)=W(j)/WNo
ENDDO

```

Geração de H Recursiva

```

AUX=WNo*WNo
DO j=1,3
hr=(1-Beta(j)**2)*AUX
hc=2*Qsi*Beta(j)*AUX
F(i,j)=CMPLX(hr,hc)
H(i,j)=1./F(i,j)
ENDDO
AUX1=2.*Beta(2)*Beta(2)*AUX
DO j=3,(N/2)
F(i,j+1)=F(i,j)+F(i,2)-1-(j-1)*AUX1
H(i,j+1)=1./F(i,j+1)
ENDDO
DO j=(N/2)+2,N
H(i,j)=CONJG(H(i,N-j+2))
ENDDO

```

de onde se conclui que o número de operações realizadas é da ordem de $5N$ operações.

5.4 IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO DA MATRIZ $[e]$

A expressão (3.20)

$$[e] = [E][H][E^*] \quad (5.9)$$

define a matriz que realiza implicitamente as transformadas direta e inversa de Fourier. Utilizando as expressões (5.5), (5.6), (5.7) e (5.8), um elemento genérico do triplo produto matricial, $[E][H][E^*]$ assume a forma

$$e_{mn} = [EHE^*]_{mn} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{k} + E_{m1}H_{11}E_{1n}^* + E_{m2}H_{22}E_{2n}^{**} + \dots + \\ E_{mN/2}H_{(N/2)(N/2)}E_{N/2}^* + \dots + \bar{E}_{m2}\bar{H}_{22}\bar{E}_{2n}^* + \bar{E}_{m1}\bar{H}_{11}\bar{E}_{1n}^* \end{array} \right] \quad (5.10)$$

onde a barra indica o complexo conjugado do elemento. Com (5.10), esta expressão pode ser simplificada para

$$e_{mn} = [EHE^*]_{mn} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{k} + E_{m1}H_{11} + E_{m2}H_{22} + \dots + \\ (-1)^m H_{(N/2)(N/2)} + \dots + \bar{E}_{m2}\bar{H}_{22} + \bar{E}_{m1}\bar{H}_{11} \end{array} \right] \quad (5.11)$$

A expressão (5.11) mostra que um elemento genérico de $[e]$, com as propriedades estabelecidas anteriormente, é formado pela soma de um termo real, um termo complexo e $(N/2)-1$ pares de complexos conjugados. Logo, este elemento terá uma parte real e outra imaginária, formada só pela parte imaginária do termo $(-1)^m H_{(N/2)(N/2)}$.

Como a resposta, dada por (3.18), deve ser real, esta parcela imaginária deve ser desprezada, o que pode ser realizado, tanto considerando apenas a parte real de $H_{(N/2)(N/2)}$ (Hall e Beck, 1993), como desprezando o termo inteiro (Claret, 1991). Este último trabalho demonstra que o fato de se desprezar todo o termo não afeta a precisão da resposta.

O produto matricial $[E][H][E^*]$ deve ser tomado de maneira que a equação (3.19)

$$\{v(t)\} = \frac{1}{N} [e] \{p(t)\}, \quad (5.12)$$

obedeça ao Princípio da Causalidade. Para que isto ocorra, a matriz $[e]$ deve, portanto, ser uma matriz triangular inferior. O termo genérico de ordem (k, l) da matriz $[e]$ vale portanto

$$e_{k,l} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N-1} E_{kj} H_{jj} E_{jl}^* = \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{kj} H_{jj} \xi^{-jl}, & k = 0, \dots, N-1; l = 0, \dots, k \\ 0, & k = 0, \dots, N-2; l = k+1, \dots, N-1 \end{cases} .$$

Tomando o termo de ordem $(k+1, l+1)$ da parte triangular inferior de $[e]$ vem

$$\begin{aligned} e_{k+1,l+1} &= \sum_{j=0}^{N-1} E_{(k+1)j} H_{jj} E_{j(l+1)}^* = \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(k+1)j} H_{jj} \xi^{-j(k+1)} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{kj} \xi^j H_{jj} \xi^{-kj} \xi^{-j} = \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{kj} H_{jj} \xi^{-kj}, \quad k = 0, \dots, N-2; l = 0, \dots, k \end{aligned} .$$

Logo

$$e_{(k+1)(l+1)} = e_{kl} . \tag{5.13}$$

A equação (5.13) indica, portanto, que a matriz $[e]$ tem elementos iguais ao longo das diagonais, fato que permitiu caracterizá-la como uma matriz de Toeplitz. Uma matriz de Toeplitz do tipo da matriz $[e]$ apresenta somente os termos da primeira coluna diferentes entre si. Tal matriz, de ordem N , pode, então, ser definida com apenas os N termos de sua primeira coluna. A partir da definição de um vetor $\{R\}$ formado por elementos da coluna 1, ordenados do último, $e_{(N-1)1}$, ao primeiro, e_{11} , o elemento genérico da matriz $[e]$ pode ser referenciado aos elementos deste vetor por

$$e_{ij} = R_{N-1-i+j} . \tag{5.14}$$

Por (3.19) e (3.22), a resposta do sistema pode ser calculada por

$$v_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^i e_{ij} p_j, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (5.15)$$

Levando, então, (5.14) em (5.15) tem-se a seguinte expressão

$$v_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^i R_{N-1-i+j} p_j, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (5.16)$$

onde a resposta pode ser calculada a partir de um vetor que armazena os elementos que não se repetem na matriz $[e]$. Abaixo segue o trecho de algoritmo em linguagem FORTRAN para a geração da matriz $[e]$.

```
DO j=1,NRESP
DO k=1,NRESP
e(j,k)=0.0
ENDDO
ENDDO
```

```
DO j=1,NRESP
DO k=1,N
ET(j,k)=ET(j,k)*H(i,k)
ENDDO
ENDDO
```

```
DO j=1,NRESP
AUXC=CMPLX (0.0,0.0)
DO m=1,N
AUXC=AUXC+ET(j,m)*EA(m,1)
ENDDO
e(j,1)=REAL(AUXC)
ENDDO
DO j=2,NRESP
e(j,j)=e(1,1)
ENDDO
DO j=3,NRESP
DO k=2,j-1
e(j,k)=e(j-1,k-1)
ENDDO
ENDDO
```

CAPÍTULO 6

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

6.1 INTRODUÇÃO

Alguns exemplos foram desenvolvidos com o objetivo de comparar a formulação analítica apresentada neste trabalho.

Para referência na verificação dos resultados, utilizou-se o método de integração direta no domínio do tempo e o método de superposição modal clássico.

As estruturas escolhidas são exemplos clássicos apresentados na literatura de modo a possibilitar uma demonstração das características da formulação em vez de representar casos práticos concretos.

O Método ImFT (Implicit Transform Fourier) onde os termos da matriz de função de resposta complexa em frequência são gerados pela definição e de forma recursiva é aplicado à análise de problemas com um e vários graus de liberdade.

6.2 EXEMPLO 1

O sistema massa-mola-amortecedor, em que cada massa possui um grau de liberdade, mostrado na Figura (6.1) foi exaustivamente analisado por Warburton e Soni (1977). No presente caso, as propriedades do sistema são consideradas as mesmas, no entanto, a carga aplicada é dada por $p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t)$ onde $p_0 = 1000 \text{ kN}$ e $\bar{\omega} = 19,5 \text{ rad/s}$. A carga é ressonante e é aplicada a massa m_2 durante um intervalo de tempo de $0,32 \text{ s}$. As constantes de mola são $k_1 = k_2 = 10 \text{ MN/m}$ e as massas são $m_1 = m_2 = 10000 \text{ kg}$. Para a análise linear, considera-se o amortecimento como sendo do tipo viscoso proporcional com uma taxa de amortecimento de 5% para todo o sistema.

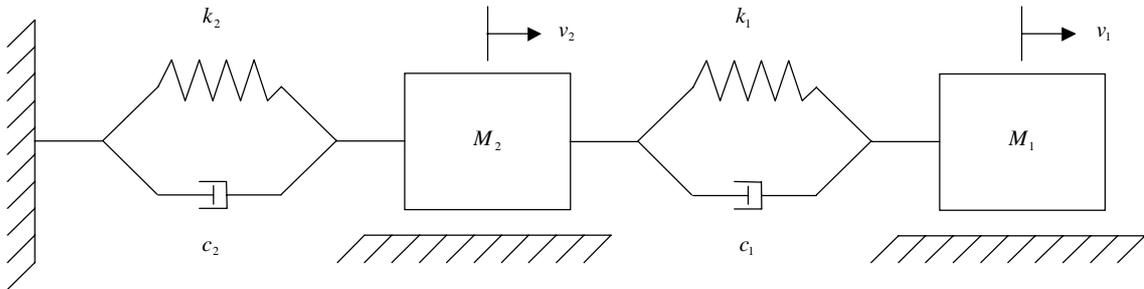


Figura (6.1) – Sistema massa-mola-amortecedor.

A resposta é calculada através do método da superposição modal, onde as equações de movimento são desacopladas pela transformação de coordenadas e resolvidas independentemente, uma a uma, por integração direta no domínio do tempo usando a integral de Duhamel (Solução Modal) e pelo método ImFT (Implicit Transform Fourier) com a função de resposta complexa em frequência sendo gerada pela definição (Solução ImFT - FRCF Definição) e de forma recursiva (Solução ImFT - FRCF Recursiva).

As matrizes de massa, rigidez e amortecimento proporcional viscoso, em coordenadas físicas são dadas por

$$m = (10^4 \text{ kg}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$k = (10^7 \text{ MN/m}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$c = (10^5 \text{ Nm/s}) \cdot \begin{bmatrix} 0,2828 & -0,1414 \\ 0,1414 & 0,4243 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo-se o problema de autovalor, determinam-se a matriz modal (autovetores) e os quadrados das frequências naturais (autovalores) do sistema que são dados por

$$\Phi = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0,8507 & -0,5257 \\ 0,5257 & 0,8507 \end{bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 382,0 \\ 2618,0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19,54 \\ 51,17 \end{Bmatrix} \text{ rad/s}.$$

Após a transformação modal, as matrizes modais de massa, rigidez e amortecimento tornam-se

$$M = (1 \text{ kg}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K = (10^3 \text{ MN/m}) \cdot \begin{bmatrix} 0,382 & 0 \\ 0 & 2,618 \end{bmatrix},$$

$$C = (10^5 \text{ Nm/s}) \cdot \begin{bmatrix} 1,954 & 0 \\ 0 & 5,117 \end{bmatrix}.$$

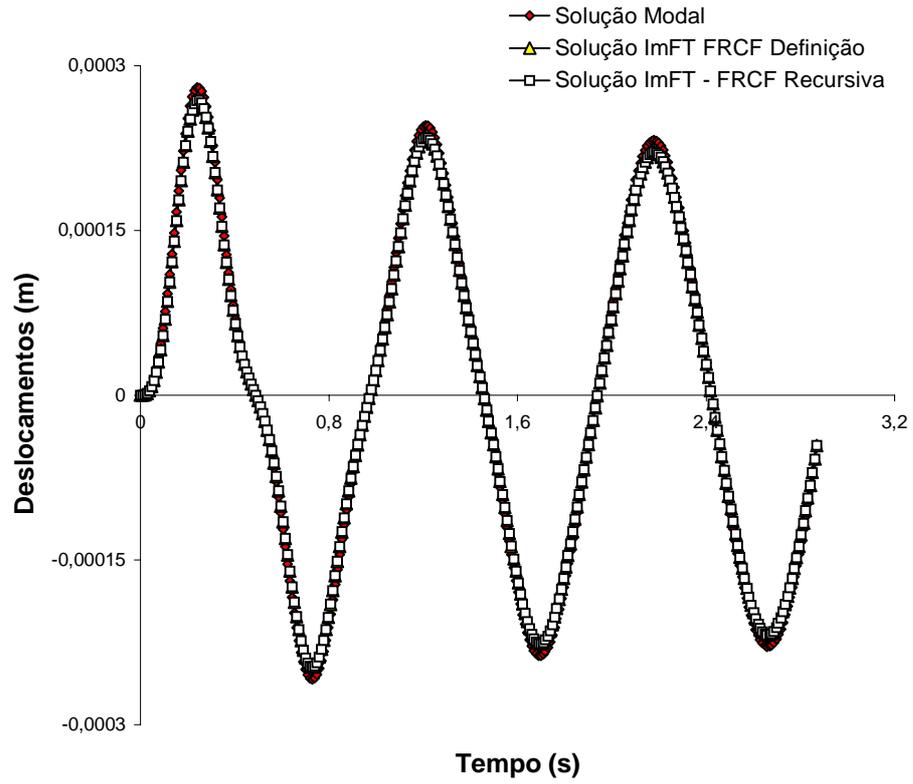


Figura (6.2) – Histórico de deslocamentos para a massa m_1 - Exemplo 1.

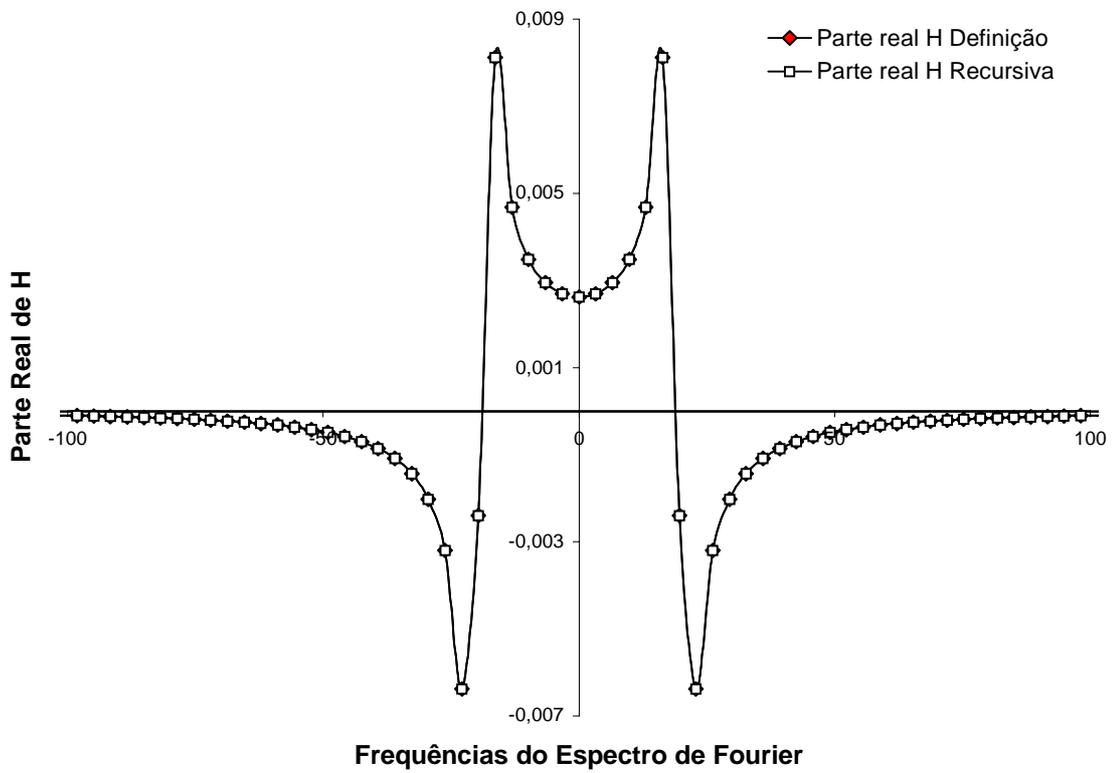


Figura (6.3) – Parte real da função de resposta para a massa m_1 – Exemplo 1.

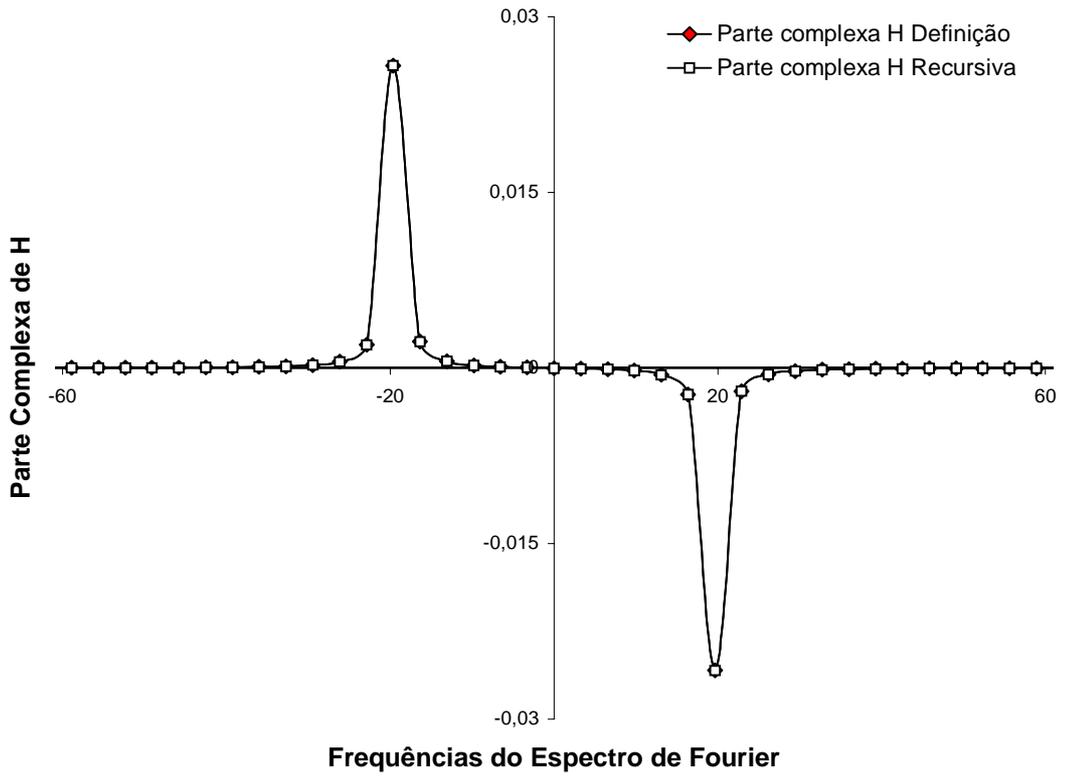


Figura (6.4) – Parte complexa da função de resposta para a massa m_1 – Exemplo 1.

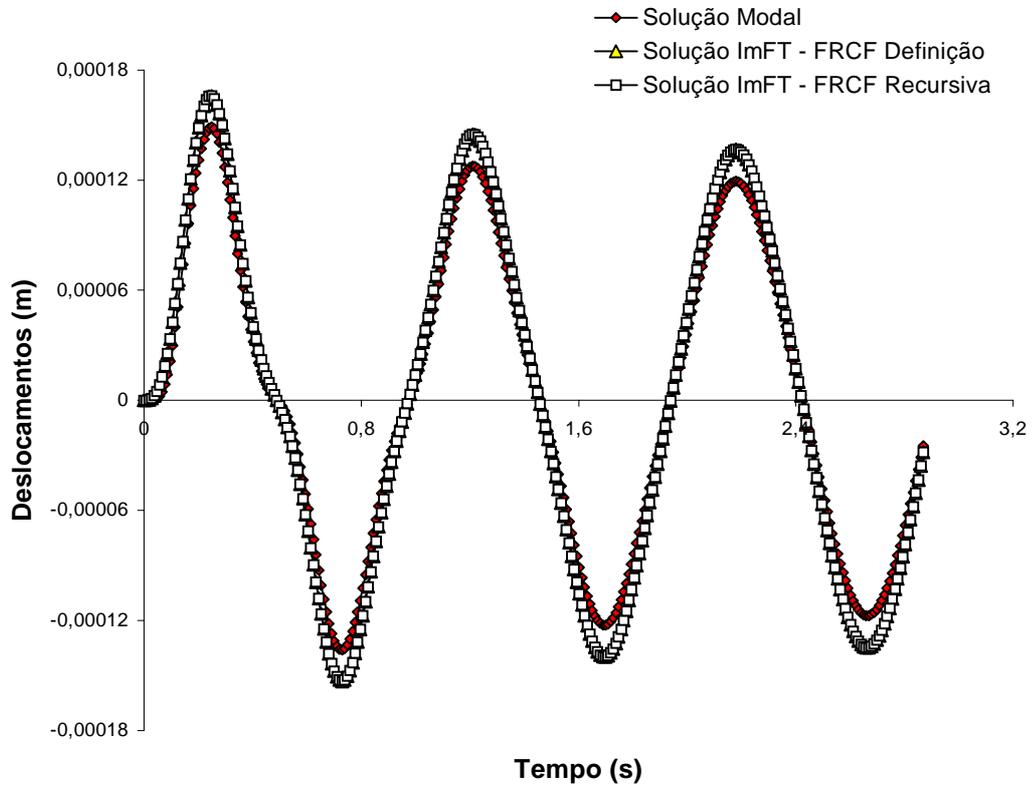


Figura (6.5) – Histórico de deslocamentos para a massa m_2 – Exemplo 1.

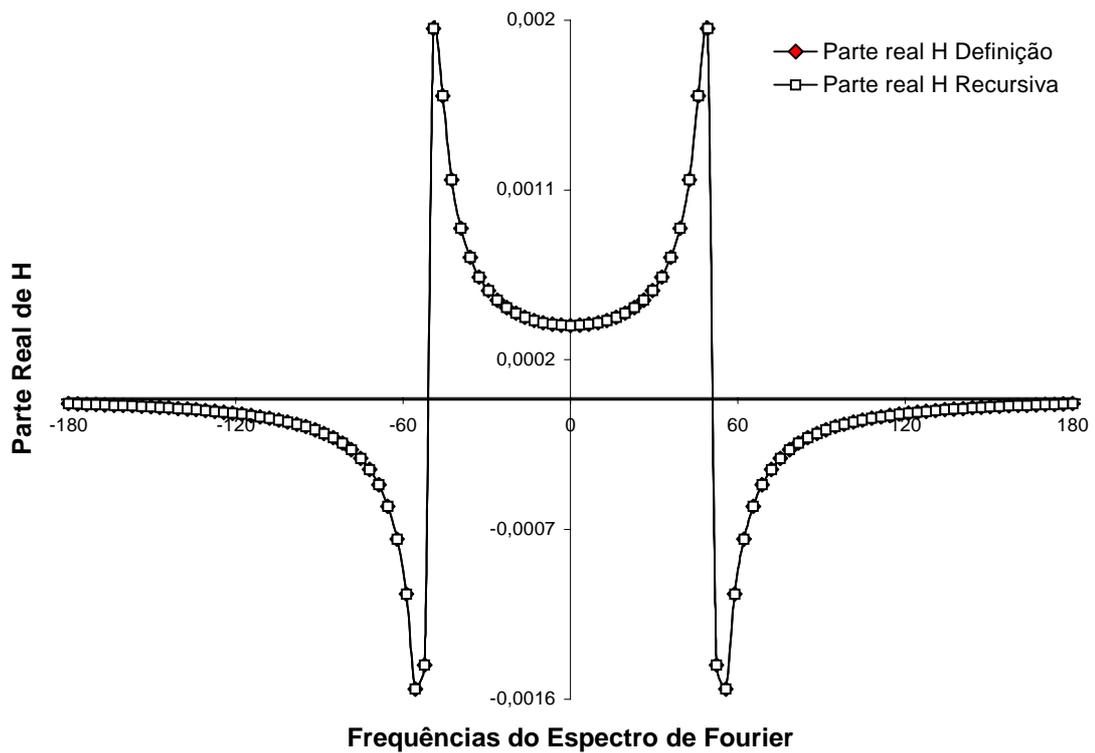


Figura (6.6) – Parte real da função de resposta para a massa m_2 – Exemplo 1.

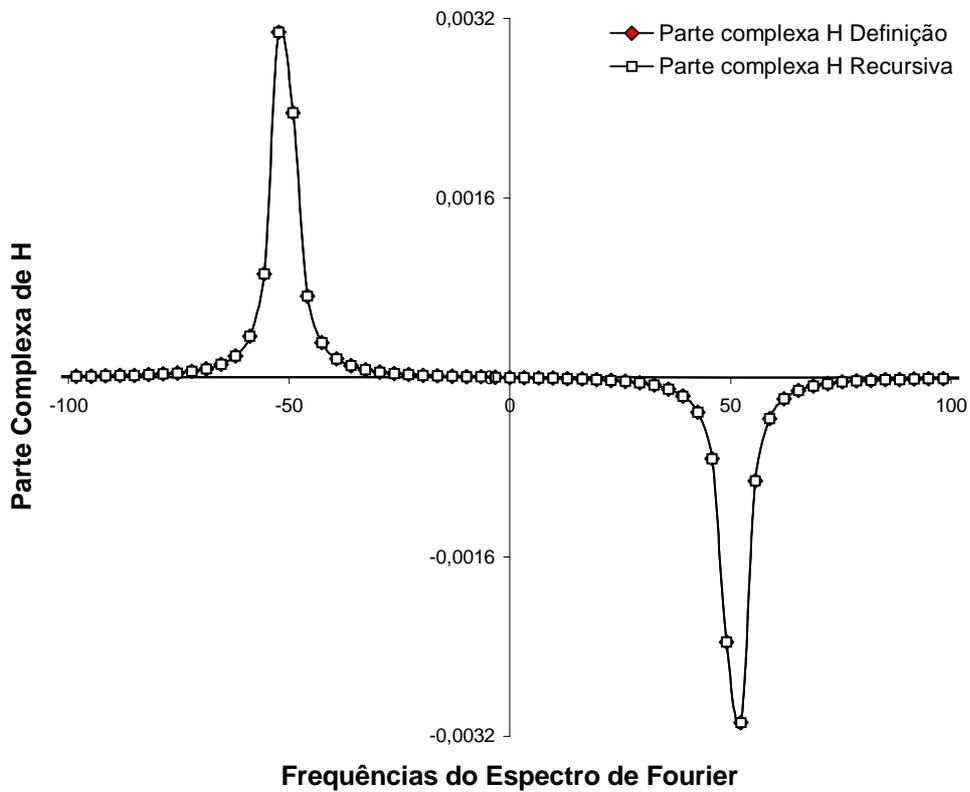


Figura (6.7) – Parte complexa da função de resposta para a massa m_2 – Exemplo 1.

O histórico de deslocamentos para as duas massas concentradas foram encontrados considerando um período estendido de $T_p = 19,2 s$ onde se adotou 2000 termos no espectro de Fourier sendo o intervalo de tempo, $\Delta t = 0,0096 s$.

Os valores plotados das funções de resposta complexa em frequência foram gerados utilizando-se 200 termos no espectro de Fourier.

Observa-se que os históricos de deslocamentos obtidos para as massas M_1 e M_2 através do método ImFT utilizando tanto a geração da função de resposta complexa em frequência pela definição quanto pela recursividade produzem resultados idênticos quando comparados aos resultados obtidos pelo método de integração direta no domínio do tempo, o que comprova a boa precisão dos resultados quando se utiliza o método ImFT com a função de resposta gerada de maneira recursiva, Figuras (6.2) e (6.5).

Os valores dos termos da matriz de função de resposta complexa necessários aos cálculos da resposta dinâmica quando se utiliza o método ImFT, obtidos através da geração recursiva, são tão precisos quanto estes mesmos valores calculados pela definição, fato que pode ser claramente observado quando se compara a parte real e complexa de tais valores, gerados através dos dois métodos, Figuras (6.3), (6.4), (6.6) e (6.7).

6.3 EXEMPLO 2

O sistema estrutural no qual a massa possui um grau de liberdade, mostrado na Figura (6.8) tem como propriedades físicas uma massa de $m = 45000 \text{ kg}$, uma rigidez de $k = 41100 \text{ kN/m}$ e um amortecimento do tipo histerético dado por um coeficiente $\lambda = 0,025$. Tal sistema está submetido a uma carga senoidal dada por $p(t) = p_0 \text{ sen}(\bar{\omega}t)$ com $\bar{\omega} = 15 \text{ rad/s}$ e $p_0 = 50000 \text{ kN}$. As condições iniciais são deslocamento inicial $v_0 = 0,4m$ e $\dot{v}_0 = 0$.

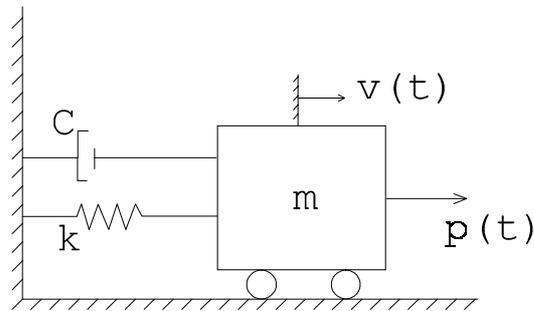


Figura (6.8) - Sistema massa-mola

A frequência natural e o período de vibração do sistema são dados por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{41100}{45}} = 30,22 \text{ rad/s},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \cong 0,21 \text{ s}.$$

Selecionado-se o intervalo de tempo, $\Delta t = 0,01 \text{ s}$, as respostas foram calculadas utilizando 2000 termos no espectro de Fourier. Dessa forma, o período estendido, $T_p = N\Delta t$, é igual a 20 s .

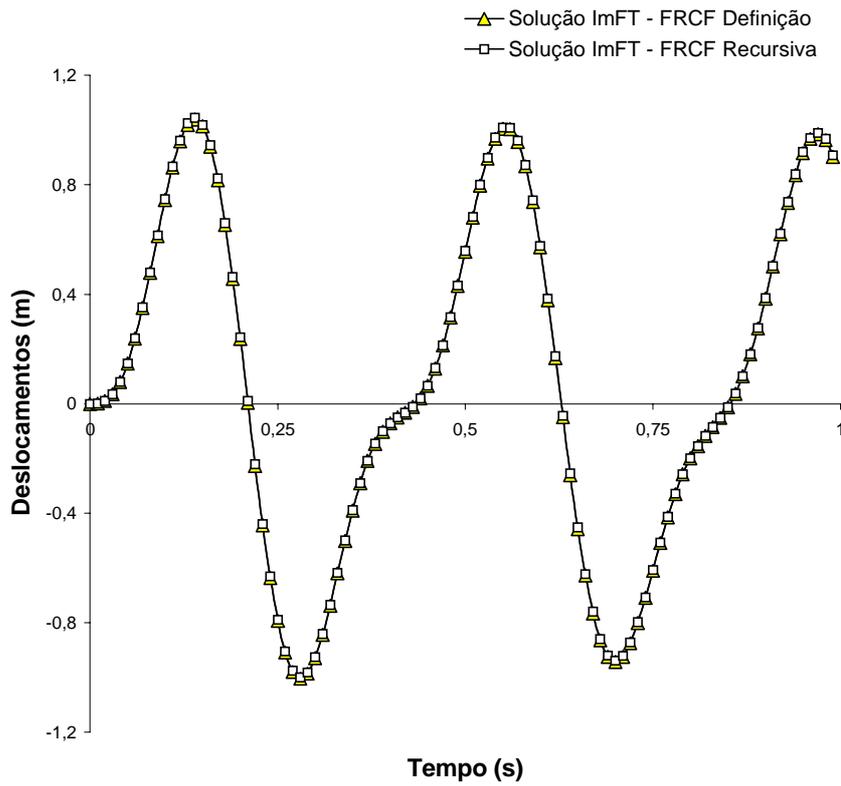


Figura (6.9) – Histórico de deslocamentos da massa para condições iniciais nulas – Exemplo 2.

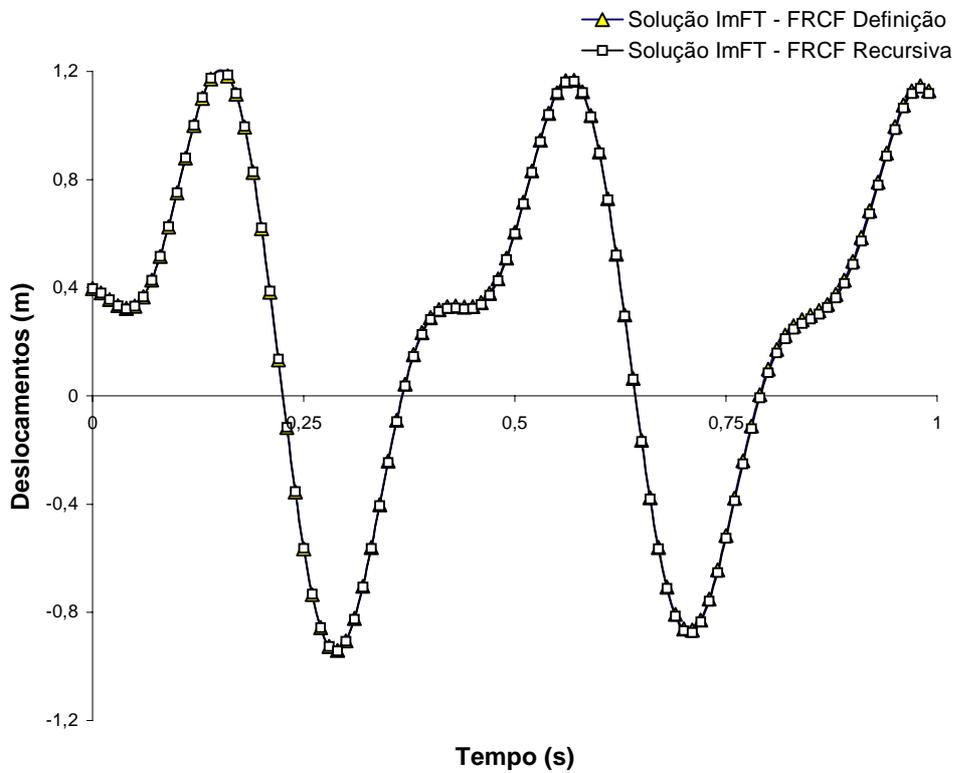


Figura (6.10) – Histórico de deslocamentos da massa para deslocamento inicial – Exemplo 2.

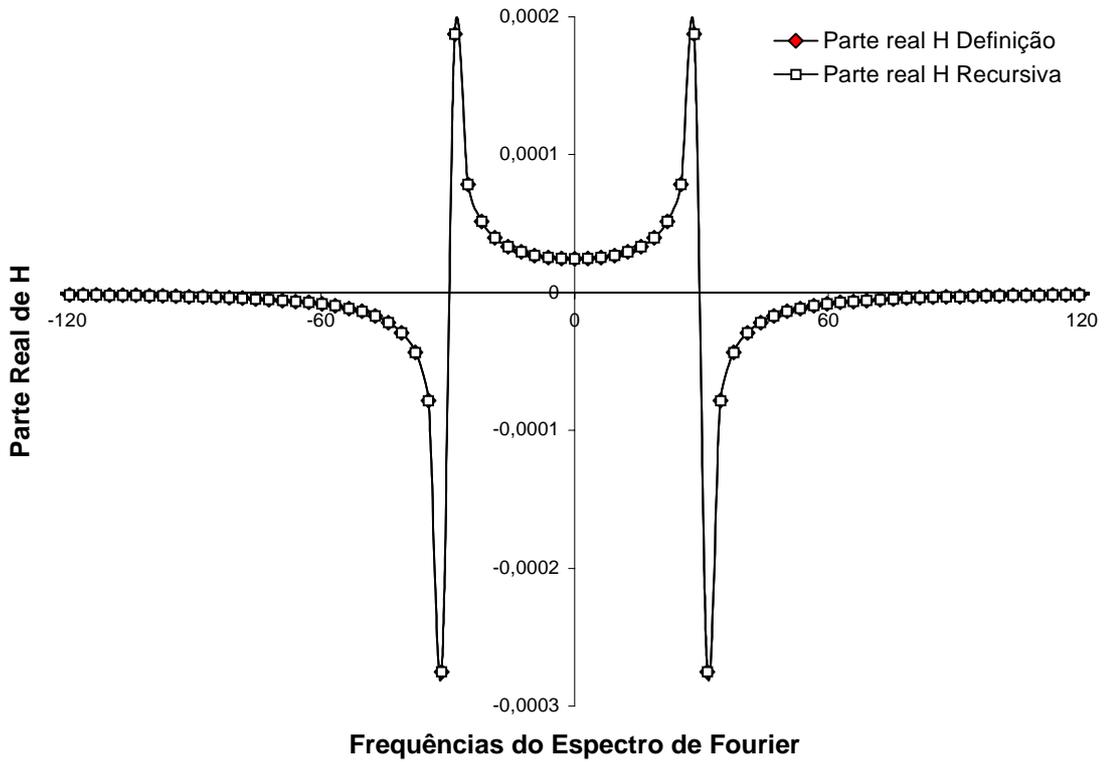


Figura (6.11) – Parte real da função de resposta para o sistema – Exemplo 2.

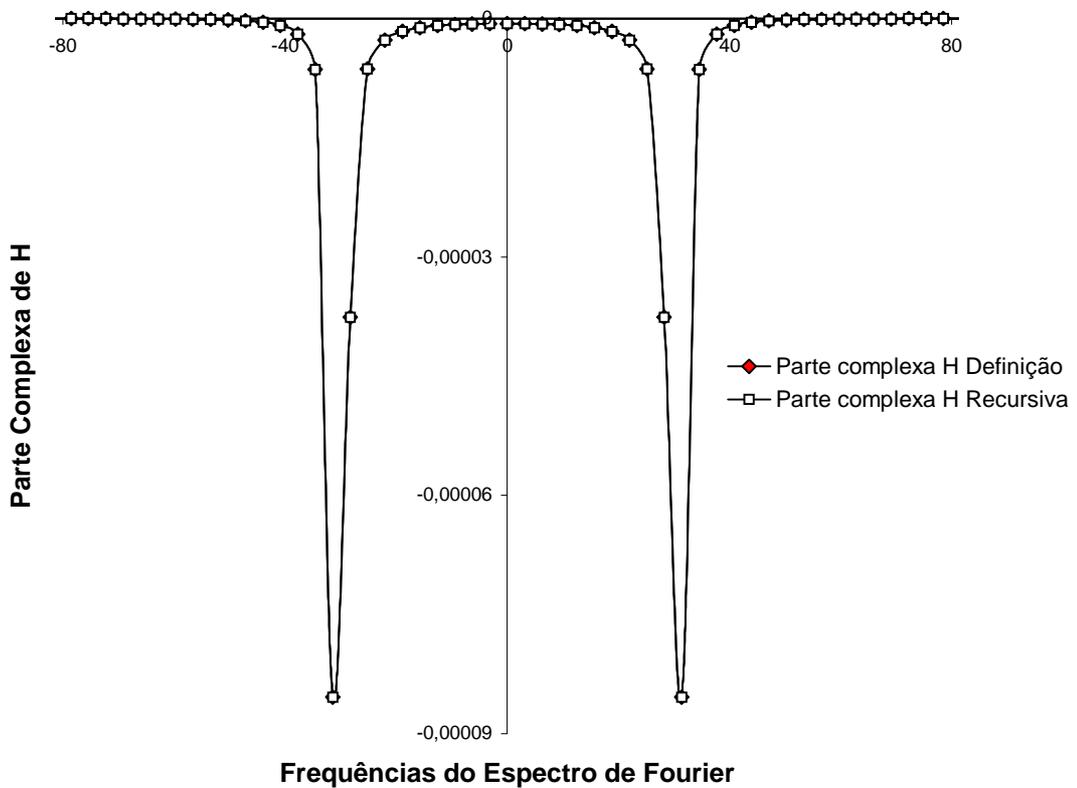


Figura (6.12) – Parte complexa da função de resposta para o sistema – Exemplo 2.

Os valores das funções de resposta complexa em frequência plotados acima foram obtidos usando um número de frequências no espectro de Fourier igual a 200.

Os históricos de deslocamentos para o sistema massa-mola-amortecedor partindo tanto da condição de repouso quanto da situação onde possui condições iniciais não nulas, Figuras (6.9) e (6.10), mostram a excelente precisão dos resultados quando se utiliza a função de resposta complexa gerada de maneira recursiva. Este fato pode ser melhor observado através dos valores da parte real e complexa da função de resposta complexa plotados tanto para a geração de tal função de maneira convencional quanto de forma recursiva, Figuras (6.11) e (6.12).

6.4 EXEMPLO 3

O *shear building* da Figura (6.13) foi analisado por Mario Paz (1979) e aqui será submetido a excitação mostrada na Figura (6.14), aplicada no piso mais elevado. Foi mantido o sistema de unidades utilizado naquele trabalho, para fins de comparação.

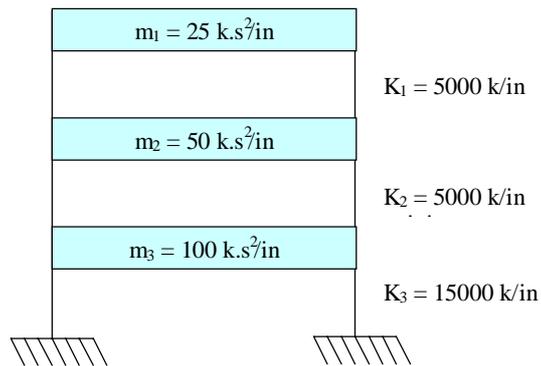


Figura (6.13) – Shear Building.

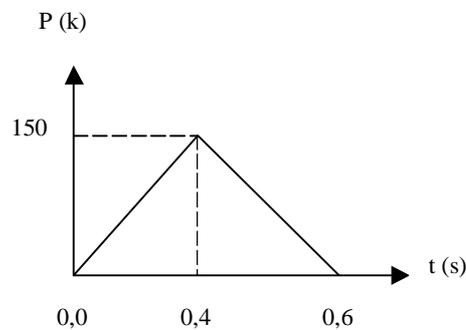


Figura (6.14) – Carga atuante.

Tomando um modelo de *shear building* discretizado em elementos finitos tem-se a massa de cada laje concentrada em um único ponto. Considerando que cada ponto de massa possui apenas um grau de liberdade, pode-se obter para tal grau de liberdade uma equação de equilíbrio dinâmico. Portanto, para o *shear building* da Figura (6.13) tem-se três graus de liberdade, sendo cada grau de liberdade associado a respectiva massa

concentrada de cada laje. Portanto, tem-se um conjunto de três equações de equilíbrio dinâmico acopladas, sendo o acoplamento causado pela rigidez e amortecimento do sistema.

A resposta do sistema pode ser obtida através da metodologia descrita na seção 1.1, isto é, desacoplando-se o sistema pela transformação modal e integrando-se as equações resultantes pela formulação matricial do Método ImFT (Implicit Transform Fourier method).

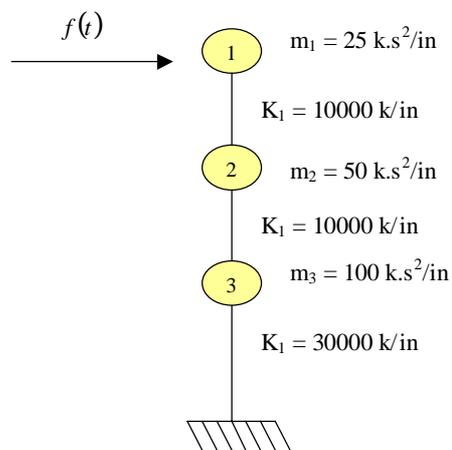


Figura (6.15) – *Shear Building* discretizado.

As matrizes de massa e rigidez em coordenadas físicas são

$$m = (1 \text{ kip} \cdot \text{s}^2/\text{in}) \cdot \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix},$$

$$k = (10^4 \text{ kips/in}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Adotando-se uma taxa de amortecimento viscoso de 5% para o primeiro modo de vibração e de 7% para o terceiro modo de vibração, chega-se à matriz de amortecimento em coordenadas físicas, dada por

$$c = (1 \text{ kip} \cdot \text{s/in}) \cdot \begin{bmatrix} 70,00 & -59,60 & 0 \\ -59,60 & 140,00 & -59,60 \\ 0 & -59,60 & 280,00 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo-se o problema de autovalor, determinam-se a matriz modal (autovetores) e os quadrados das frequências naturais (autovalores) do sistema

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,126 & -0,089 & 0,126 \\ 0,100 & 0 & -0,100 \\ 0,032 & 0,089 & 0,032 \end{bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 83,77 \\ 400 \\ 716,2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9,15 \\ 20 \\ 26,76 \end{Bmatrix} \text{ rad/s}.$$

Após a transformação modal, as matrizes modais de massa, rigidez e amortecimento tornam-se

$$M = (1 \text{ kip} \cdot \text{s}^2/\text{in}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K = (10^5 \text{ kips/in}) \cdot \begin{bmatrix} 83,77 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 716,2 \end{bmatrix},$$

$$C = (1 \text{ kip} \cdot \text{s/in}) \cdot \begin{bmatrix} 0,915 & 0 & 0 \\ 0 & 2,800 & 0 \\ 0 & 0 & 4,685 \end{bmatrix}.$$

Os históricos de deslocamentos correspondentes as respectivas massas concentradas foram obtidos considerando um período estendido de $T_p = 30 \text{ s}$ onde adotou-se 2000 termos no espectro de Fourier e um intervalo de tempo, $\Delta t = 0,015 \text{ s}$.

O histórico de resposta do sistema calculado pelo método ImFT utilizando a geração da função de resposta complexa em frequência de forma convencional e recursiva é comparado com o histórico de resposta obtido por um processo de integração no domínio do tempo usando a integral de Duhamel, figuras (6.16), (6.19) e (6.22).

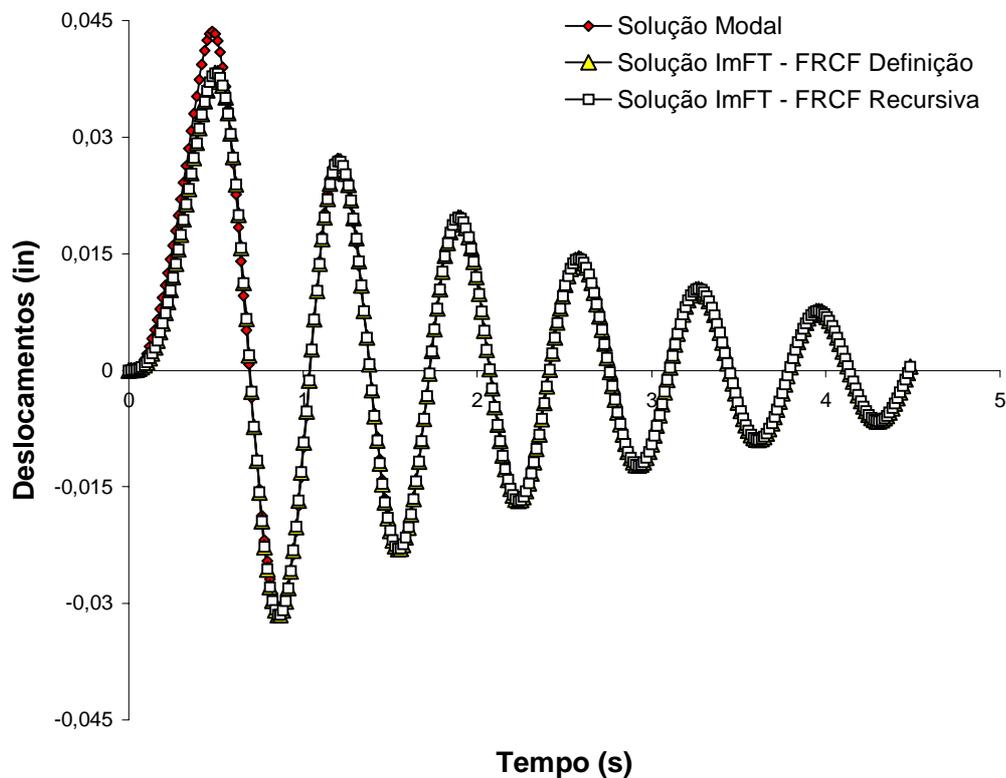


Figura (6.16) – Histórico de deslocamentos para a 1ª massa concentrada – Exemplo 3.

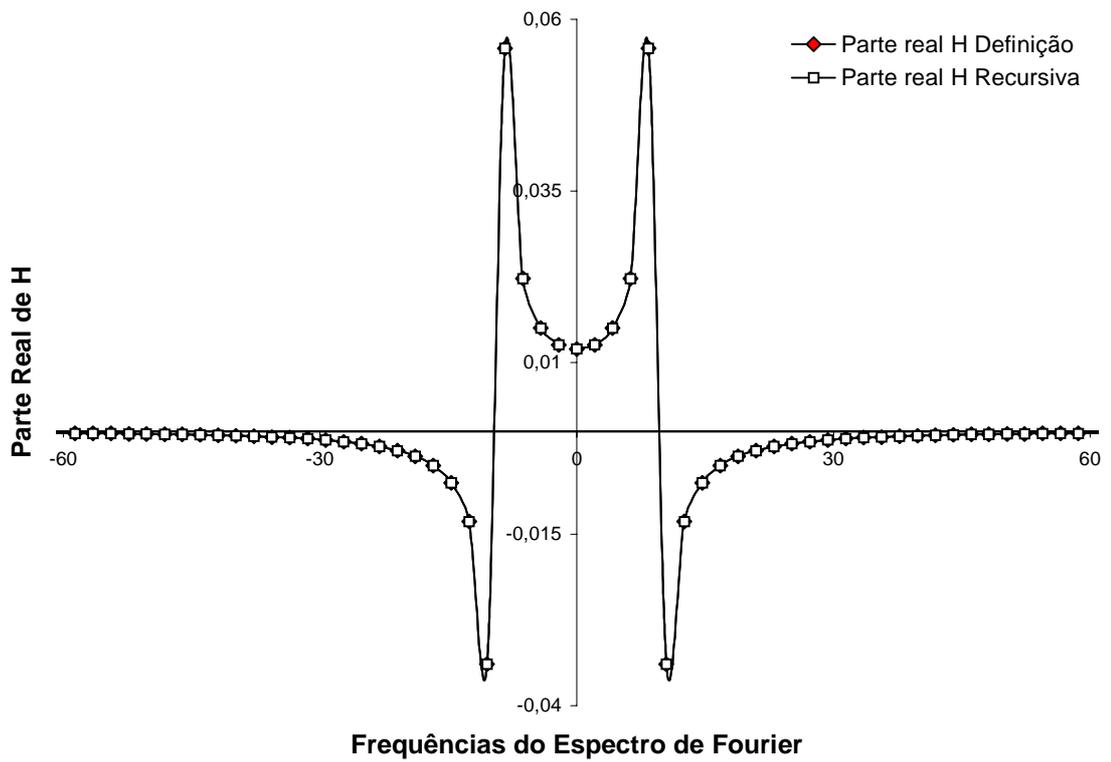


Figura (6.17) – Parte real da função de resposta para a 1^0 massa concentrada – Exemplo 3.

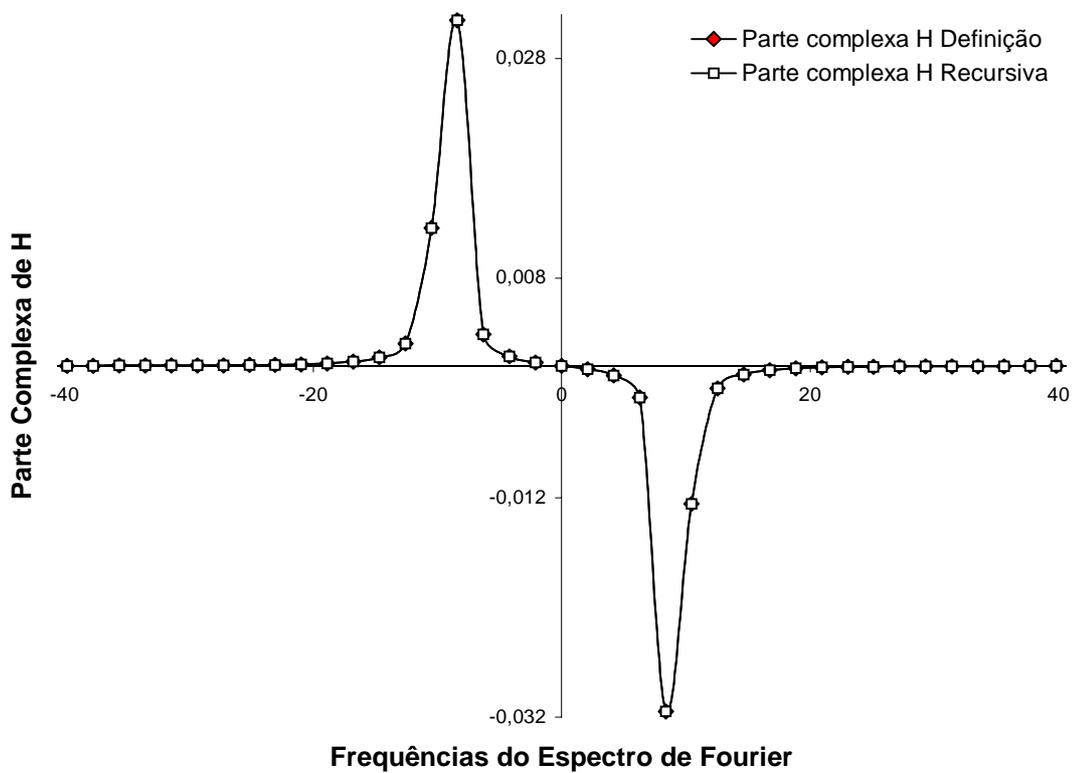


Figura (6.18) – Parte complexa da função de resposta para a 1^0 massa concentrada – Exemplo 3.

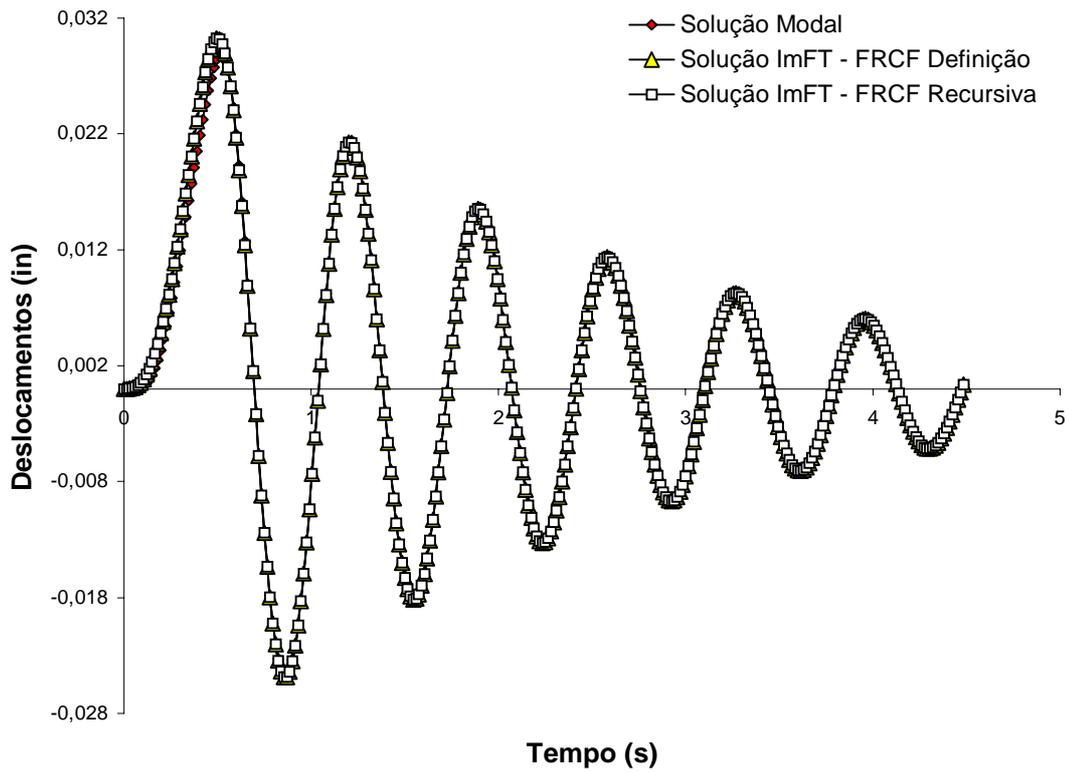


Figura (6.19) – Histórico de deslocamentos para a 2^0 massa concentrada – Exemplo 3.

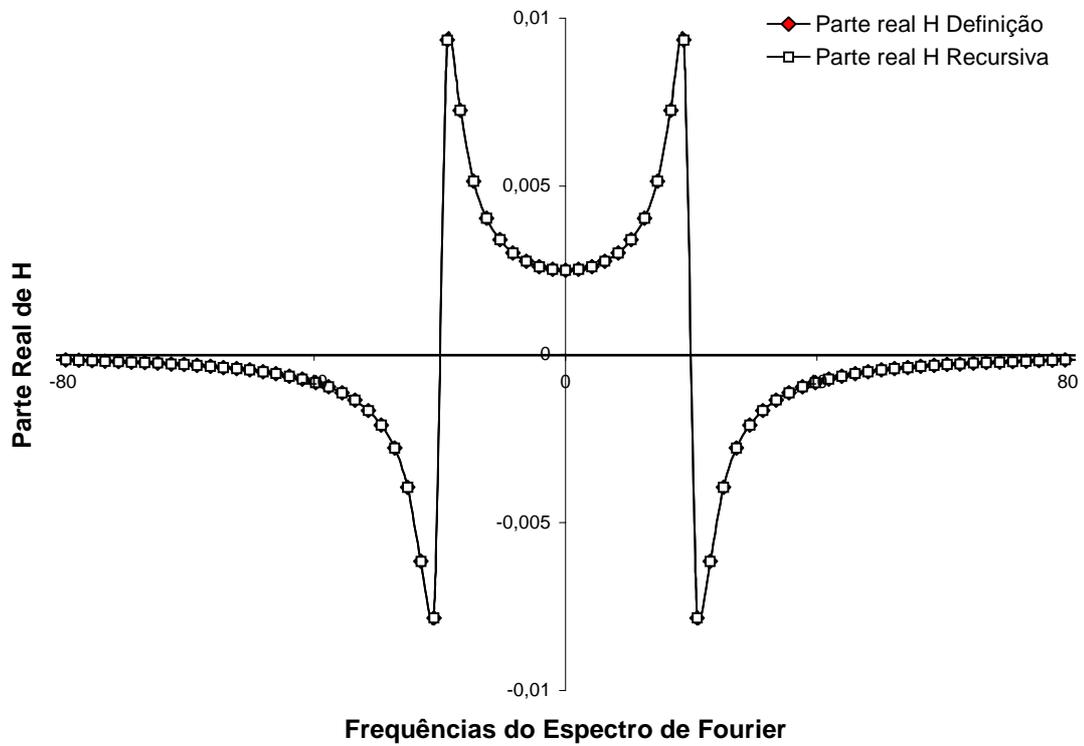


Figura (6.20) – Parte real da função de resposta para a 2^0 massa concentrada – Exemplo 3.

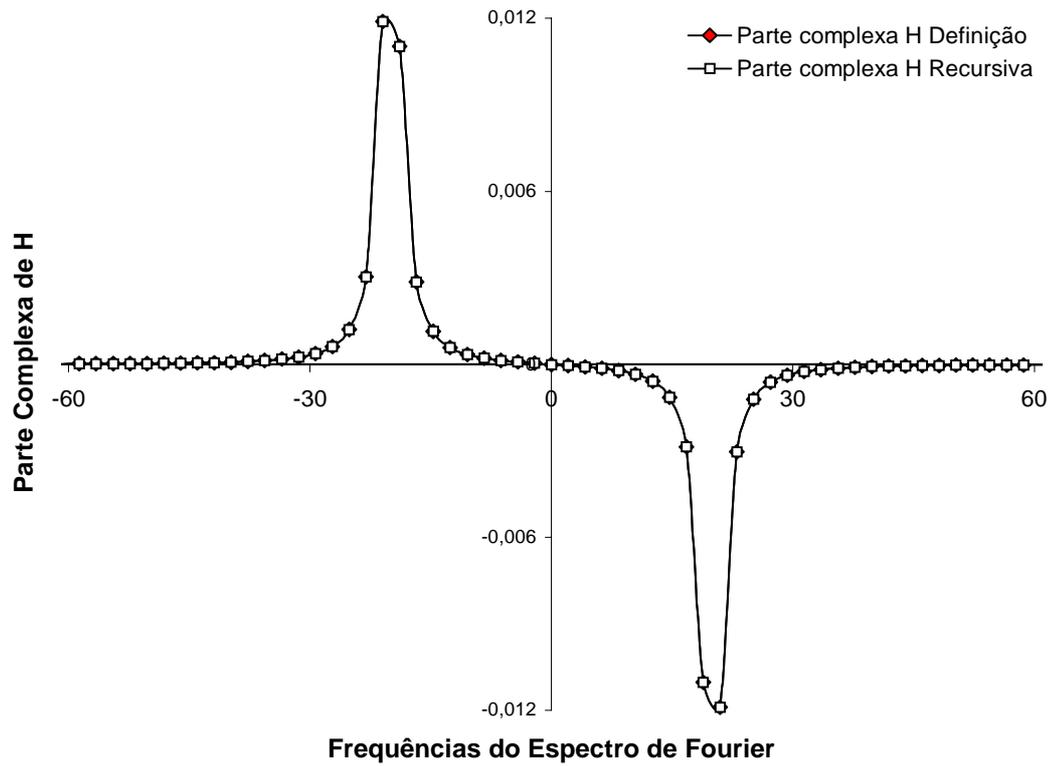


Figura (6.21) – Parte complexa da função de resposta para a 2^0 massa concentrada – Exemplo 3.

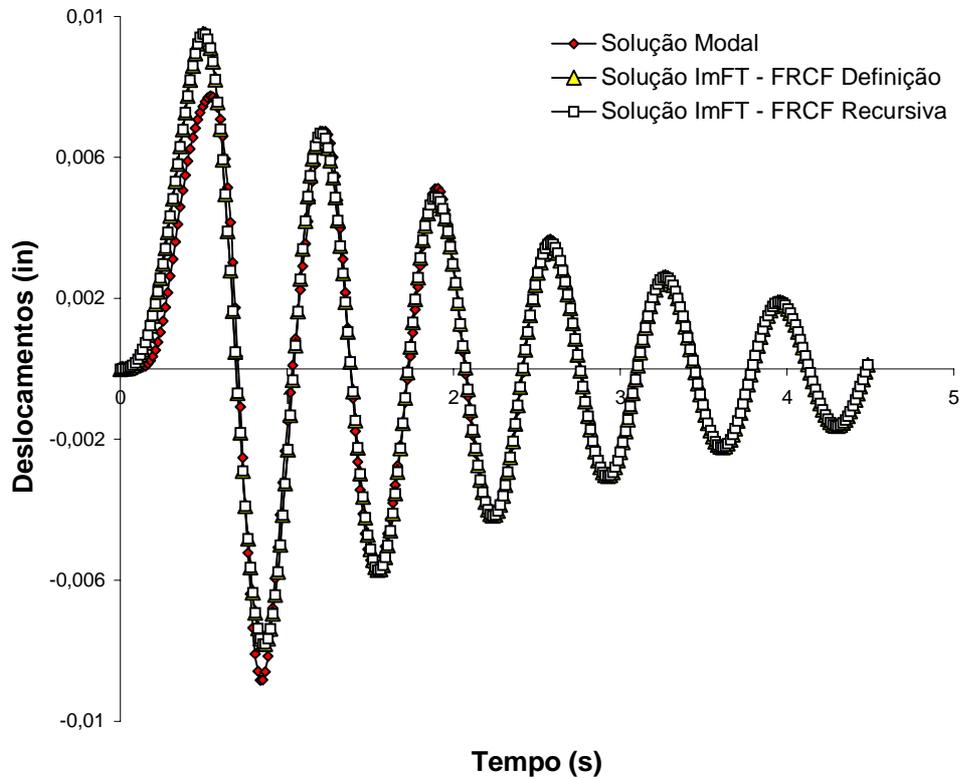


Figura (6.22) – Histórico de deslocamentos para a 3^0 massa concentrada – Exemplo 3.

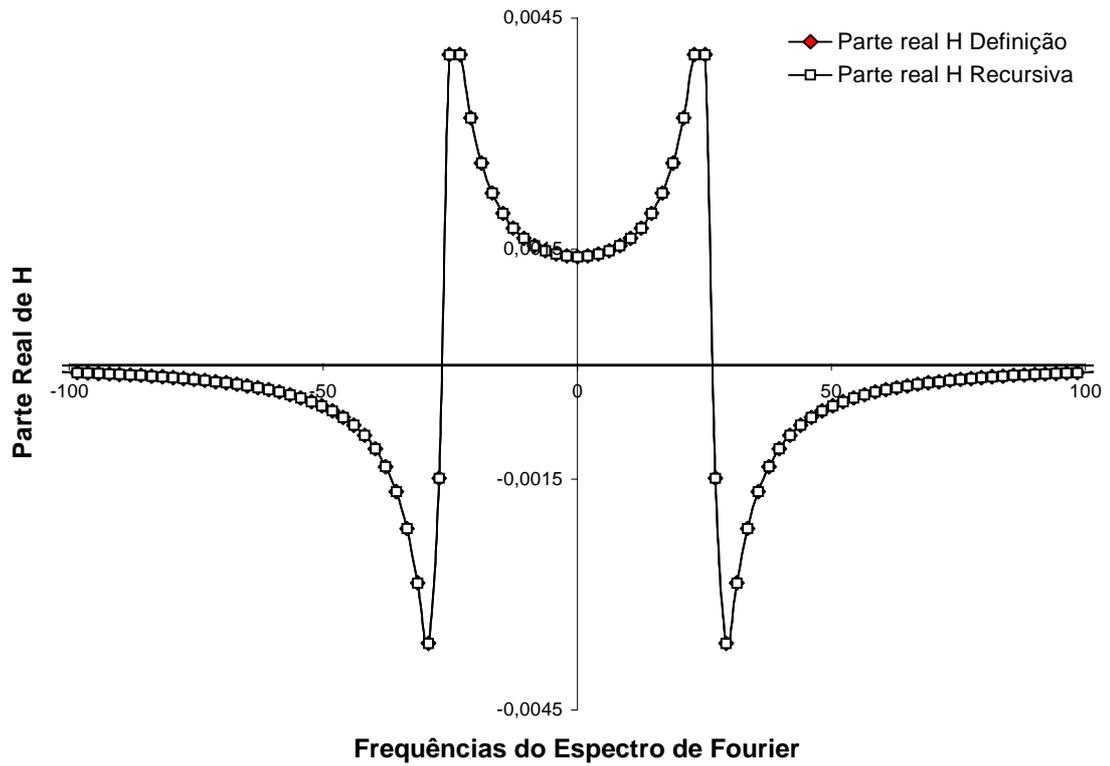


Figura (6.23) – Parte real da função de resposta para a 3^o massa concentrada – Exemplo 3.

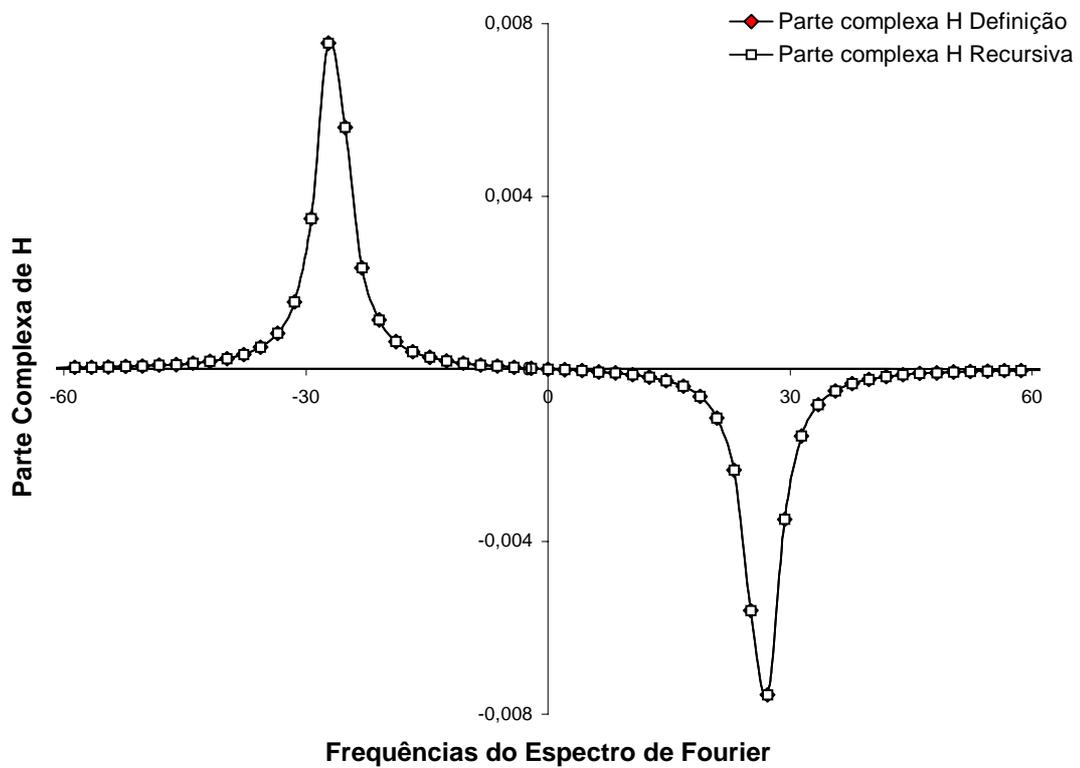


Figura (6.24) – Parte complexa da função de resposta para a 3^o massa concentrada – Exemplo 3.

Os valores discretos da função de resposta complexa em frequência, H , utilizando-se um número de frequências do espectro de Fourier igual a 200 são calculados tanto pela definição quanto pela geração recursiva. Verifica-se mais uma vez que a formulação recursiva não introduz erros numéricos significativos nos valores de H .

Novamente, podemos observar a precisão do método ImFT usando a geração recursiva dos termos da matriz $[H]$ para o cálculo do histórico de deslocamentos.

Observa-se uma pequena diferença entre as respostas transientes obtidas pelo método da solução Modal e pelo método ImFT, fato que pode ser atribuído a forma do carregamento considerada e ao valor do número de Fourier (valor de N) adotado para a solução do exemplo.

6.5 EXEMPLO 4

Seguindo um exemplo descrito por Wilson *et al.* (1973), a viga em balanço da Figura (6.25) é analisada sob a ação da carga que, neste exemplo, é considerada como mostrada na Figura (6.26). A viga tem como propriedades físicas uma massa específica $\gamma = 1 \text{ kg/m}^3$, inércia da seção transversal $I = 10^{-3} \text{ m}^4$, módulo de elasticidade $E = 10^6 \text{ N/m}$ e um vão de 10 m . Considera-se o sistema possuindo amortecimento do tipo viscoso proporcional com uma taxa de amortecimento $\xi = 5\%$.

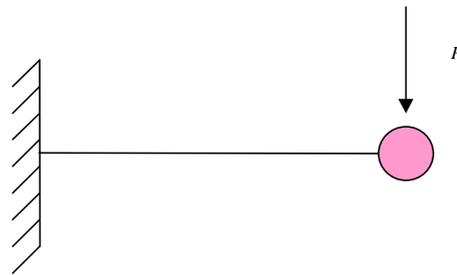


Figura (6.25) - Viga engastada.

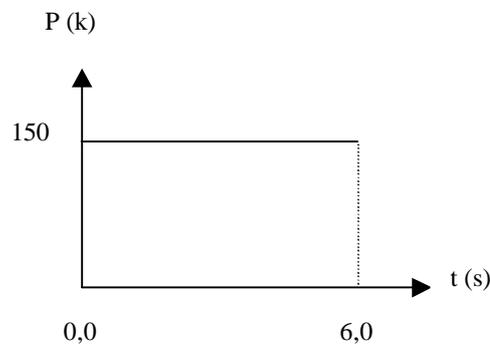


Figura (6.26) – Carga atuante.

Com o intervalo de tempo, $\Delta t = 0,01 \text{ s}$, as respostas foram calculadas utilizando 2000 termos no espectro de Fourier. Dessa forma, o período estendido, $T_p = N\Delta t$ é igual a 20 s .

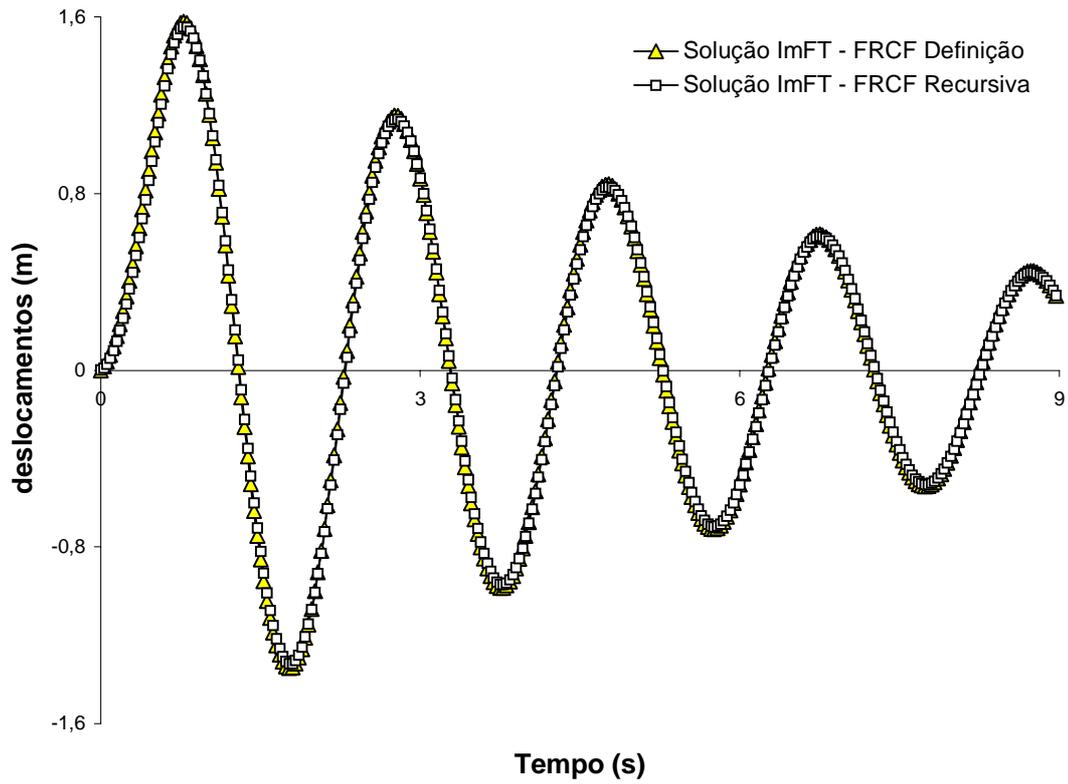


Figura (6.27) – Histórico de deslocamentos para a viga – Exemplo 4.

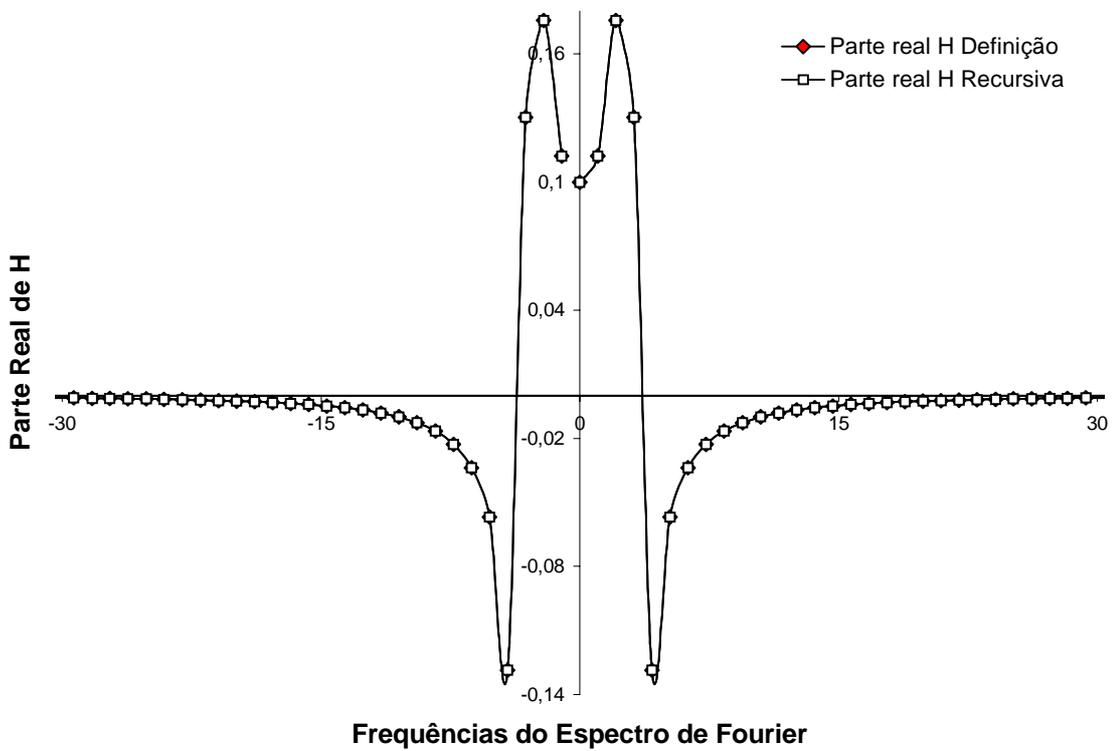


Figura (6.28) – Parte real da função de resposta para a viga - Exemplo 4.

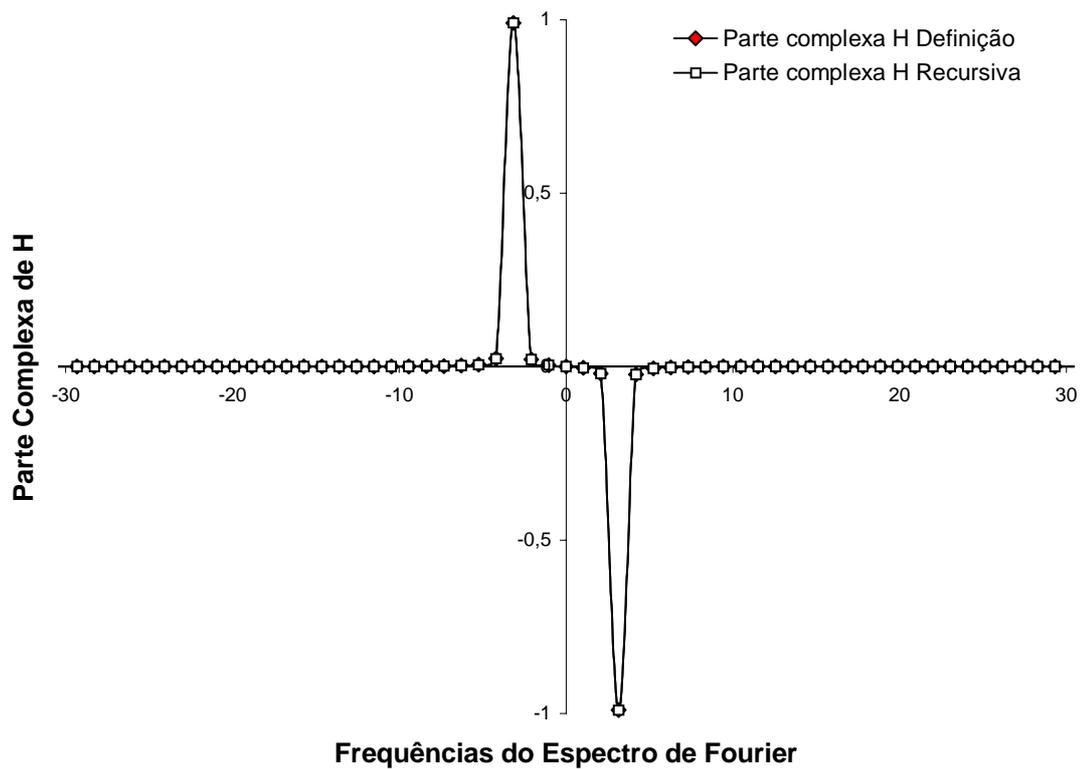


Figura (6.29) – Parte complexa da função de resposta para a viga – Exemplo 4.

A resposta foi calculada pelo método ImFT com a função de resposta complexa em frequência gerada pela definição e de forma recursiva.

Pelo exposto na Figura (6.27), o método ImFT utilizando a geração recursiva conduz a resultados idênticos em relação ao método ImFT usando a geração dos termos da matriz $[H]$ pela definição.

Para efeito de comparação, os valores discretos das funções de resposta complexa em frequência gerados pela definição e de forma recursiva são plotados, para 200 termos no espectro de Fourier, nas Figuras (6.28) e (6.29).

6.6 EXEMPLO 5

O *shear building* da Figura (6.30) foi analisado por Clough e Penzien (1993) e aqui será submetido à excitação mostrada na Figura (6.31), aplicada no piso mais elevado. Foi mantido o sistemas de unidades utilizado naquele trabalho para fins de comparação.

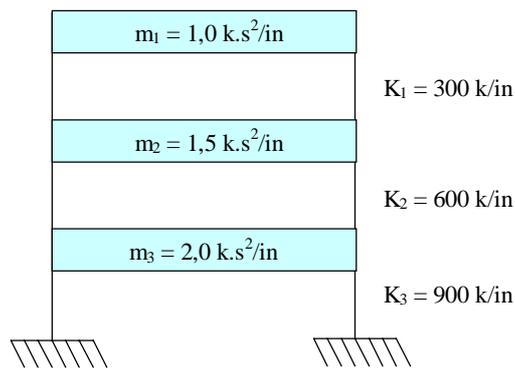


Figura (6.30) – *Shear Building*.

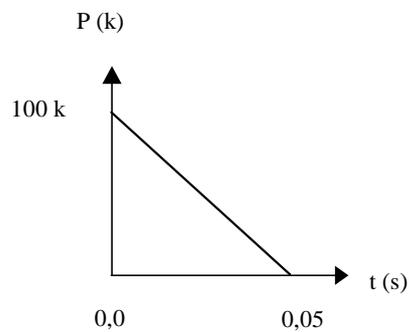


Figura (6.31) – Carga atuante.

A resposta foi calculada através da metodologia descrita na seção 1.1, isto é, desacoplando-se o sistema pela transformação modal e resolvendo as equações resultantes pela formulação matricial do Método ImFT (Implicit Transform Fourier method).

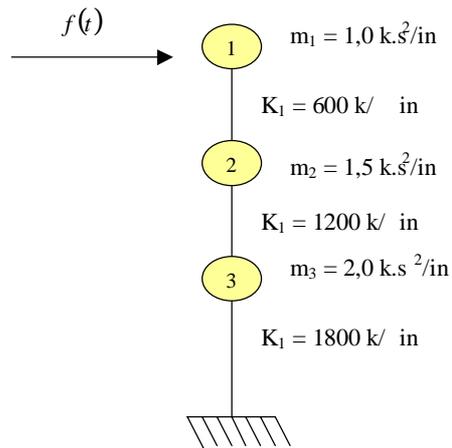


Figura (6.32) – *Shear Building* discretizado.

As matrizes de massa e rigidez em coordenadas físicas são

$$m = (1 \text{ kip} \cdot \text{s}^2/\text{in}) \cdot \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix},$$

$$k = (600 \text{ kips/in}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Adotando-se uma taxa de amortecimento viscoso de 5% para o primeiro e terceiro modos de vibração da estrutura, obtém-se a matriz de amortecimento em coordenadas físicas, dada por

$$c = (1 \text{ kip} \cdot \text{s}/\text{in}) \cdot \begin{bmatrix} 2,306 & -1,317 & 0 \\ -1,317 & 5,434 & -2,633 \\ 0 & -2,633 & 8,562 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo-se o problema de autovalor, determinam-se a matriz modal (autovetores) e os quadrados das frequências naturais (autovalores) do sistema

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,743 & -0,636 & 0,211 \\ 0,482 & 0,386 & -0,535 \\ 0,224 & 0,432 & 0,513 \end{bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 210,88 \\ 963,96 \\ 2125,29 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14,52 \\ 31,05 \\ 46,10 \end{Bmatrix} \text{ rad/s.}$$

Após a transformação modal, as matrizes modais de massa, rigidez e amortecimento tornam-se

$$M = (1 \text{ kip} \cdot \text{s}^2/\text{in}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K = (10^5 \text{ kips/in}) \cdot \begin{bmatrix} 210,88 & 0 & 0 \\ 0 & 963,96 & 0 \\ 0 & 0 & 2125,29 \end{bmatrix},$$

$$C = (1 \text{ kip} \cdot \text{s}/\text{in}) \cdot \begin{bmatrix} 1,45 & 0 & 0 \\ 0 & 3,10 & 0 \\ 0 & 0 & 5,65 \end{bmatrix}.$$

As respostas dos deslocamentos para os três graus de liberdade foram encontradas considerando um período estendido de $T_p = 20 \text{ s}$ onde adotou-se 2000 termos no espectro de Fourier e um intervalo de tempo, $\Delta t = 0,01 \text{ s}$.

A resposta do sistema é calculada pelo método ImFT onde a função de resposta complexa em frequência é gerada pela definição e de maneira recursiva.

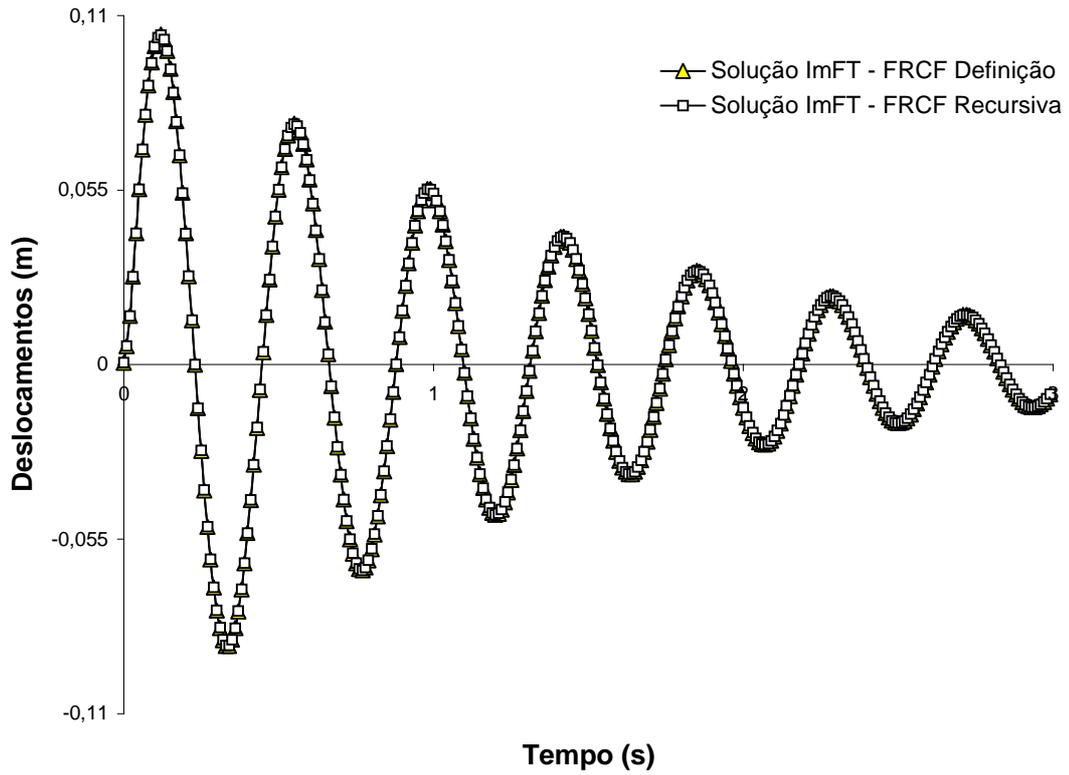


Figura (6.33) – Histórico de deslocamentos para a 1^0 massa concentrada – Exemplo 5.

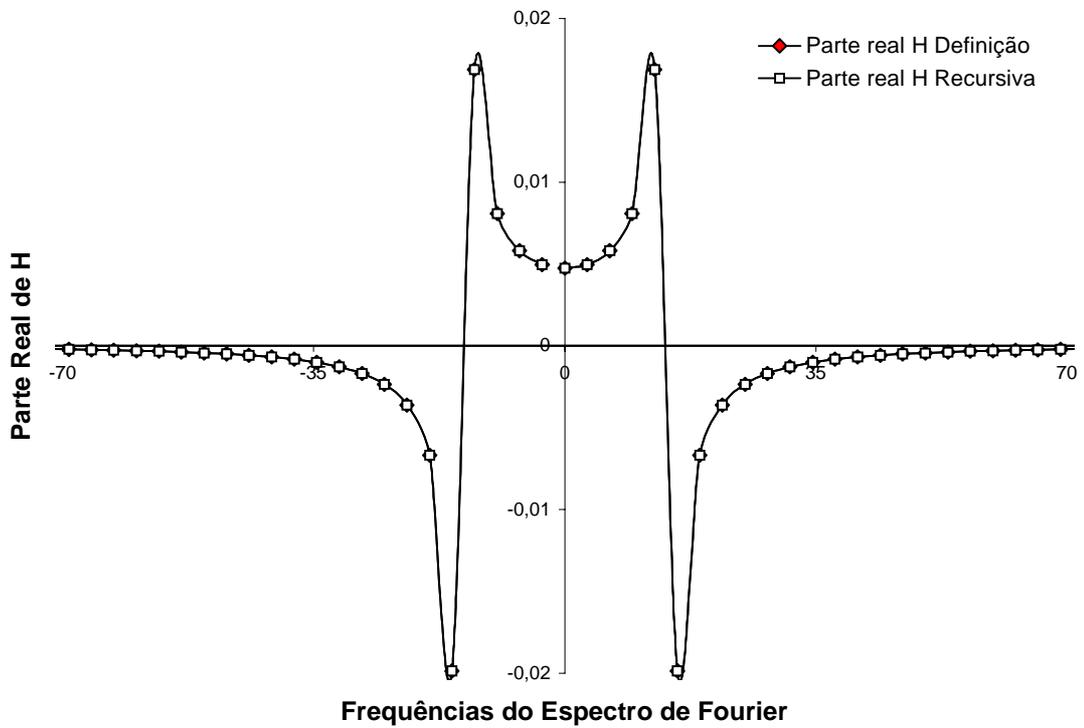


Figura (6.34) - Parte real da função de resposta para a 1^0 massa concentrada – Exemplo 5.

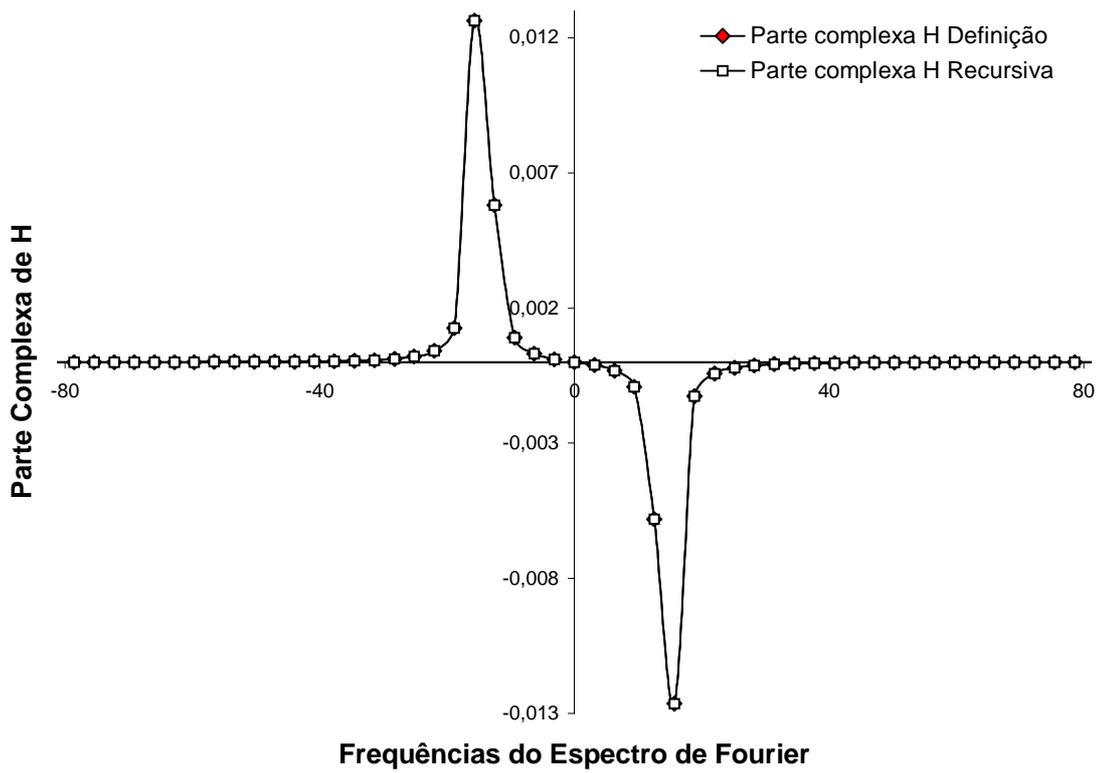


Figura (6.35) – Parte complexa da função de resposta para a 1⁰ massa concentrada – Exemplo 5.

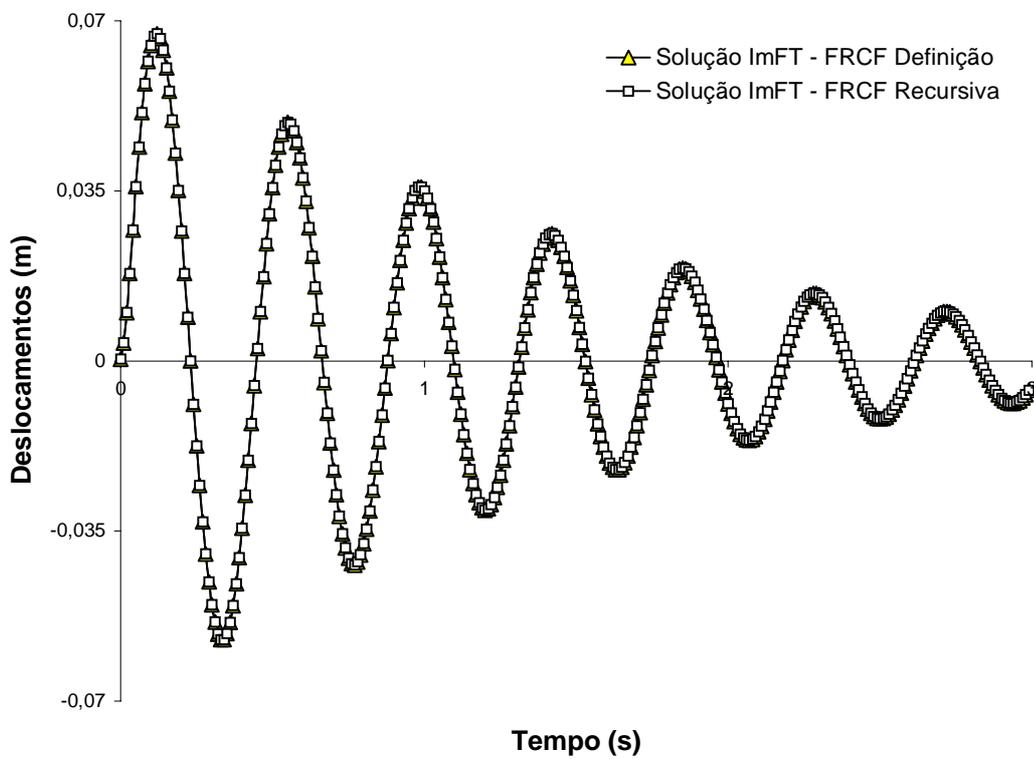


Figura (6.36) – Histórico de deslocamentos para a 2⁰ massa concentrada – Exemplo 5.

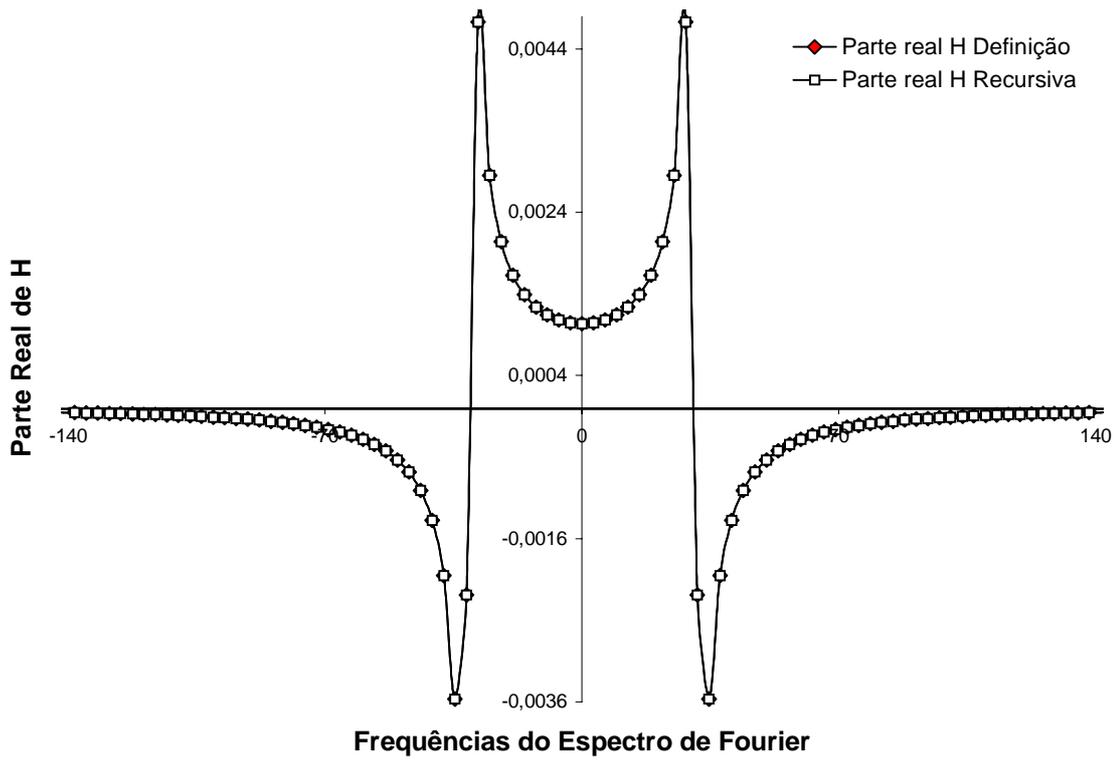


Figura (6.37) – Parte real da função de resposta para a 2^0 massa concentrada – Exemplo 5.

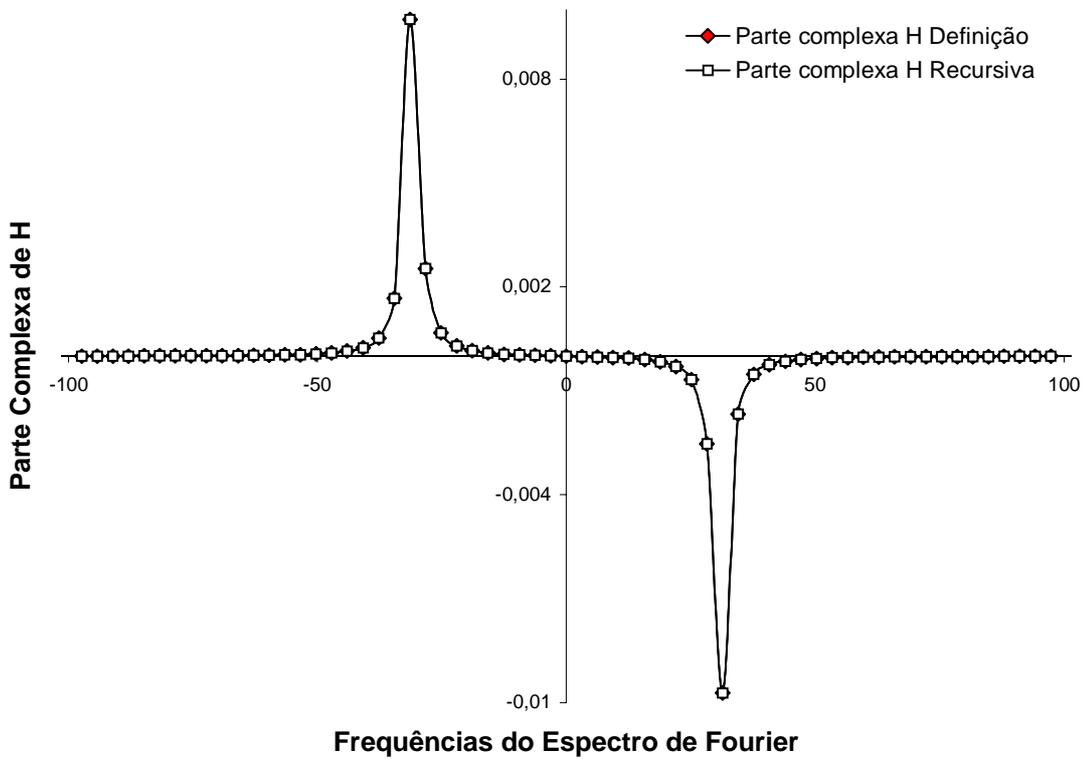


Figura (6.38) – Parte complexa da função de resposta para a 2^0 massa concentrada – Exemplo 5.

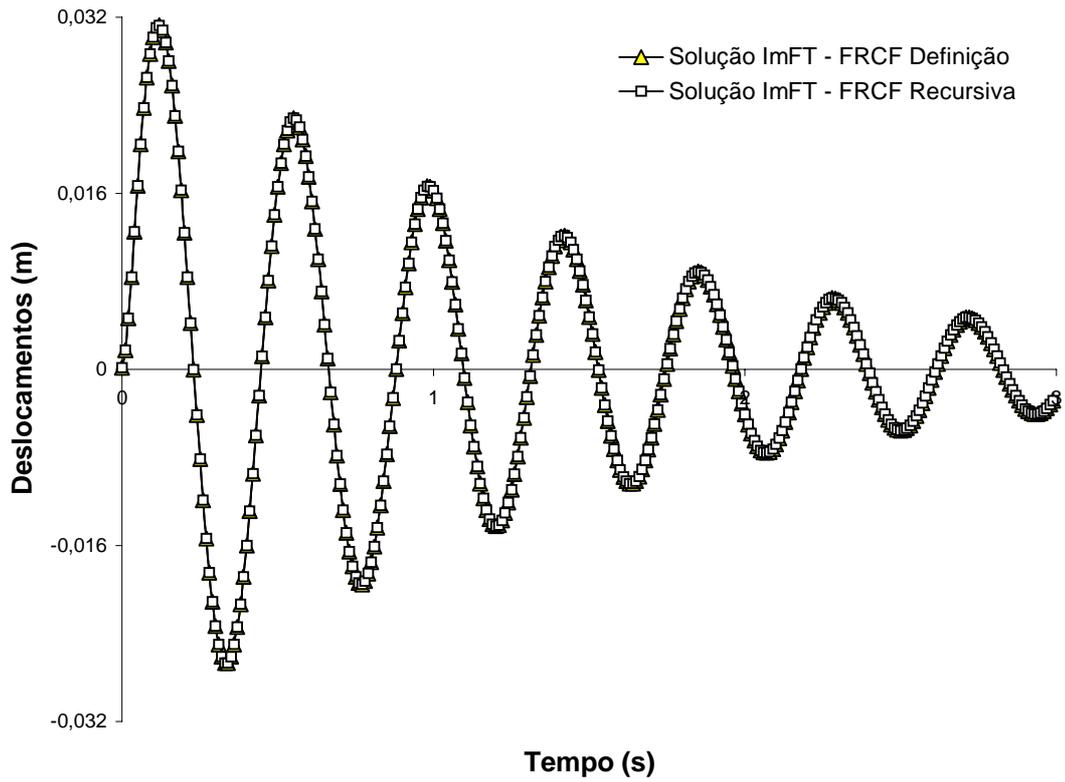


Figura (6.39) – Histórico de deslocamentos para a 3^0 massa concentrada – Exemplo 5.

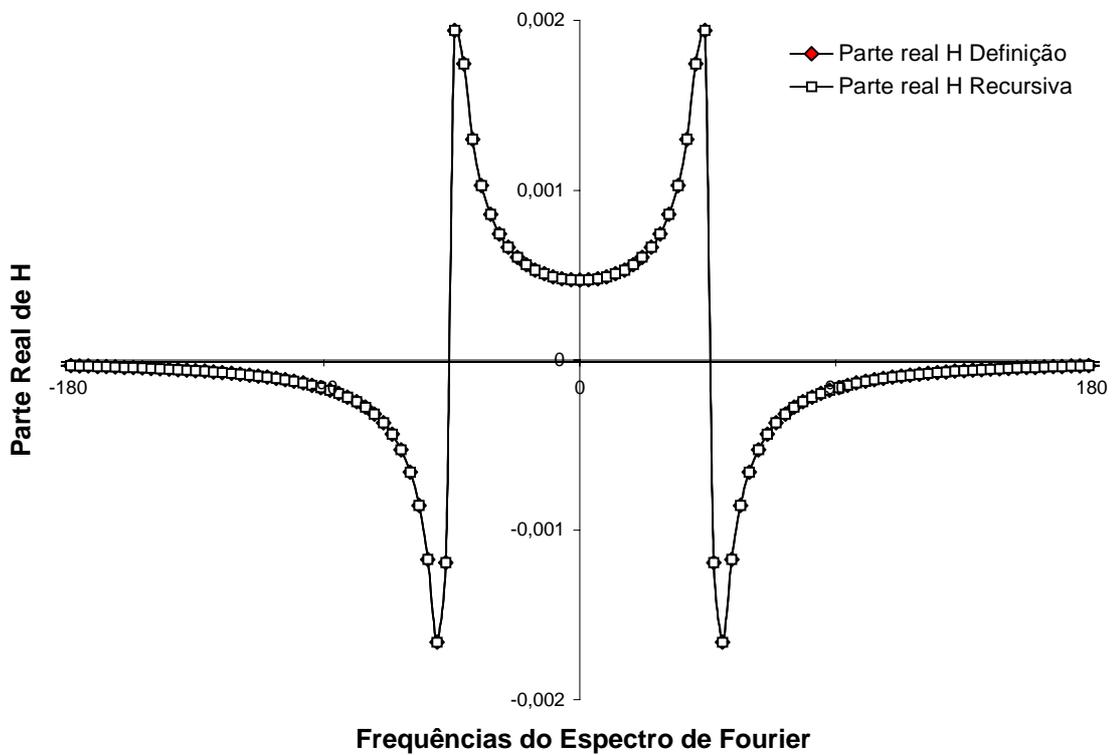


Figura (6.40) – Parte real da função de resposta para a 3^0 massa concentrada – Exemplo 5.

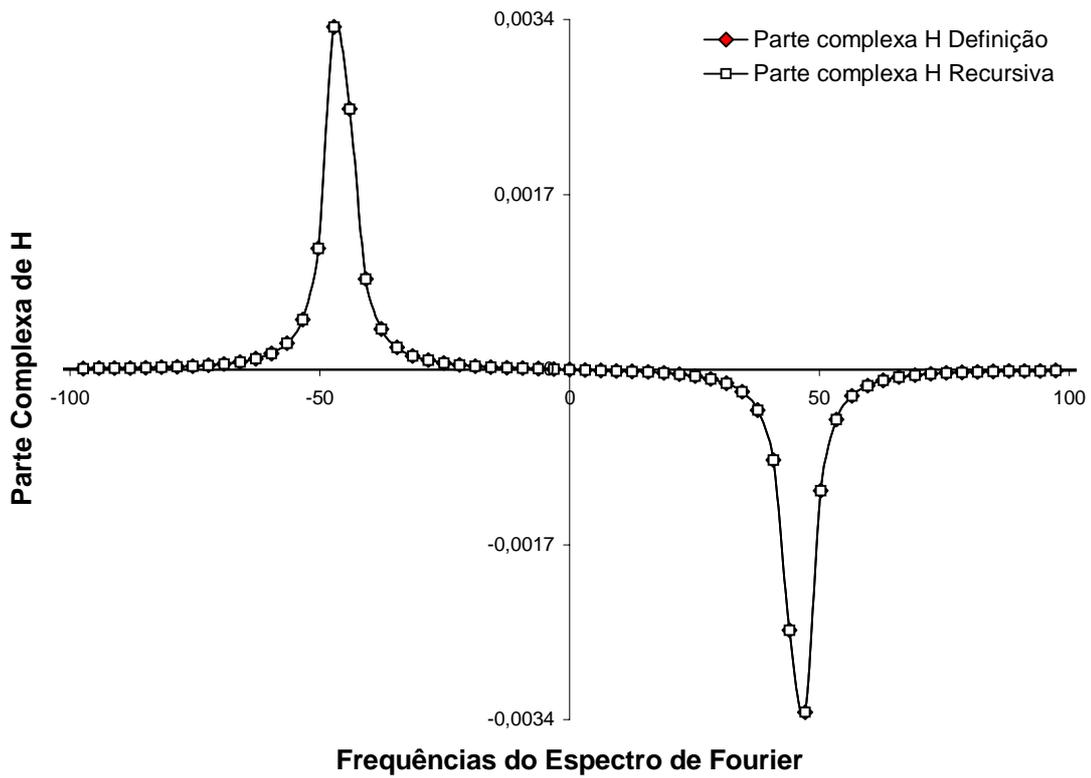


Figura (6.41) – Parte complexa da função de resposta para a 3^0 massa concentrada – Exemplo 5.

Os gráficos que mostram os valores da parte real e complexa dos termos da matriz $[H]$ foram plotados utilizando 200 termos no espectro de Fourier.

A fim de verificar o processo de interpolação usando o método de Lagrange, plota-se os valores da parte real e complexa da função de resposta complexa para o conjunto de valores de frequências pertencentes aos intervalos anterior e posterior a frequência natural no espectro de frequências para a primeira massa de laje concentrada.

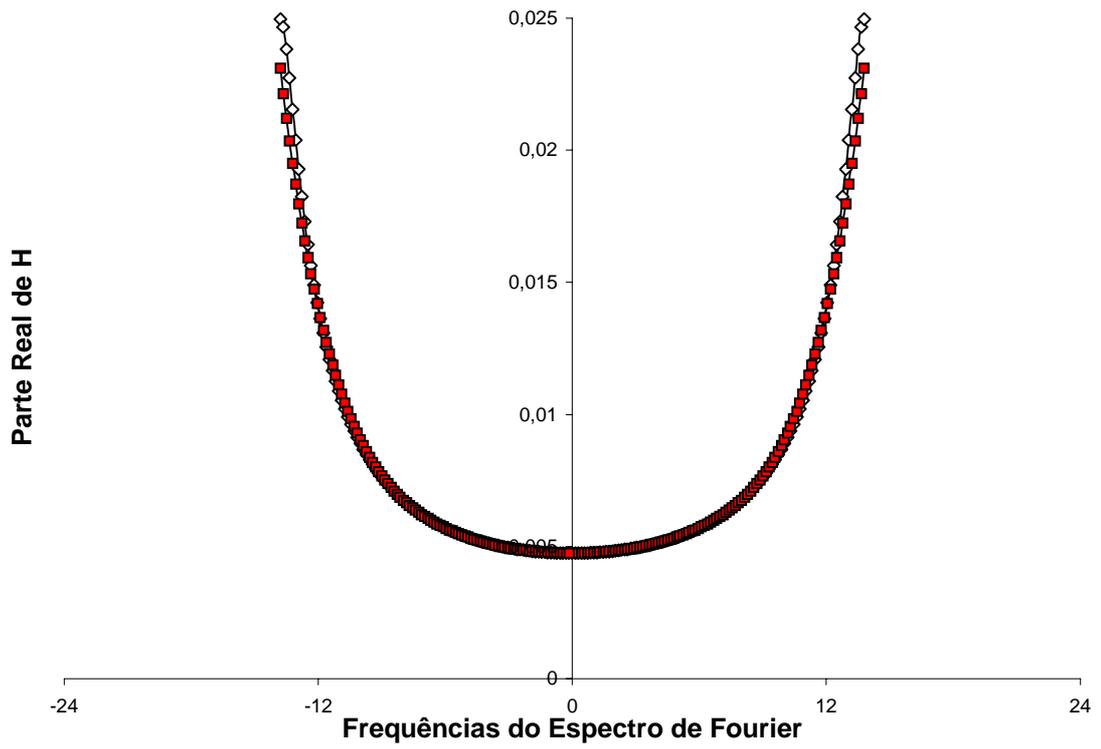


Figura (6.42) – Parte real da função de resposta antes de ω_n – Exemplo 5.

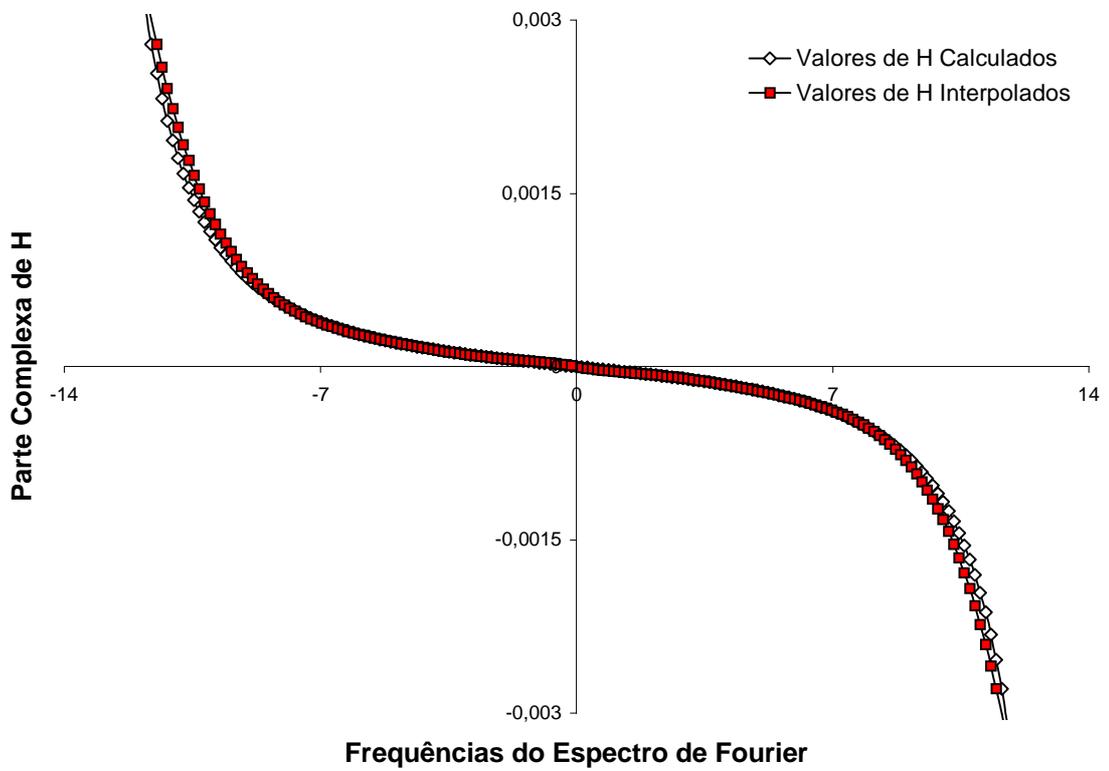


Figura (6.43) – Parte complexa da função de resposta antes de ω_n – Exemplo 5.

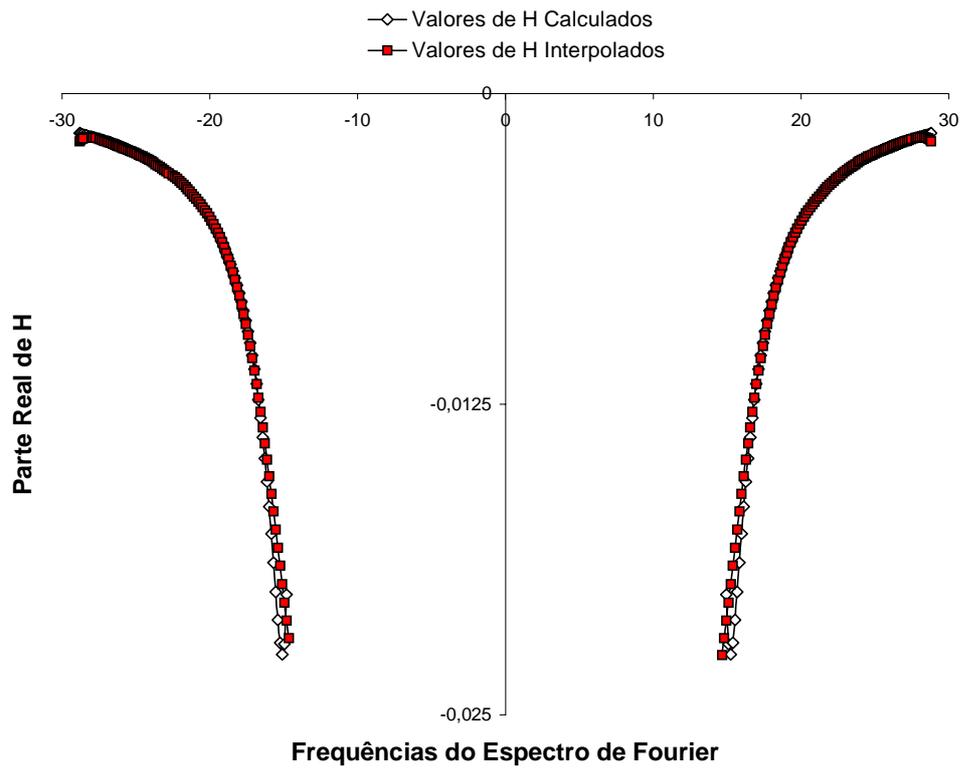


Figura (6.44) – Parte real da função de resposta depois de ω_n – Exemplo 5.

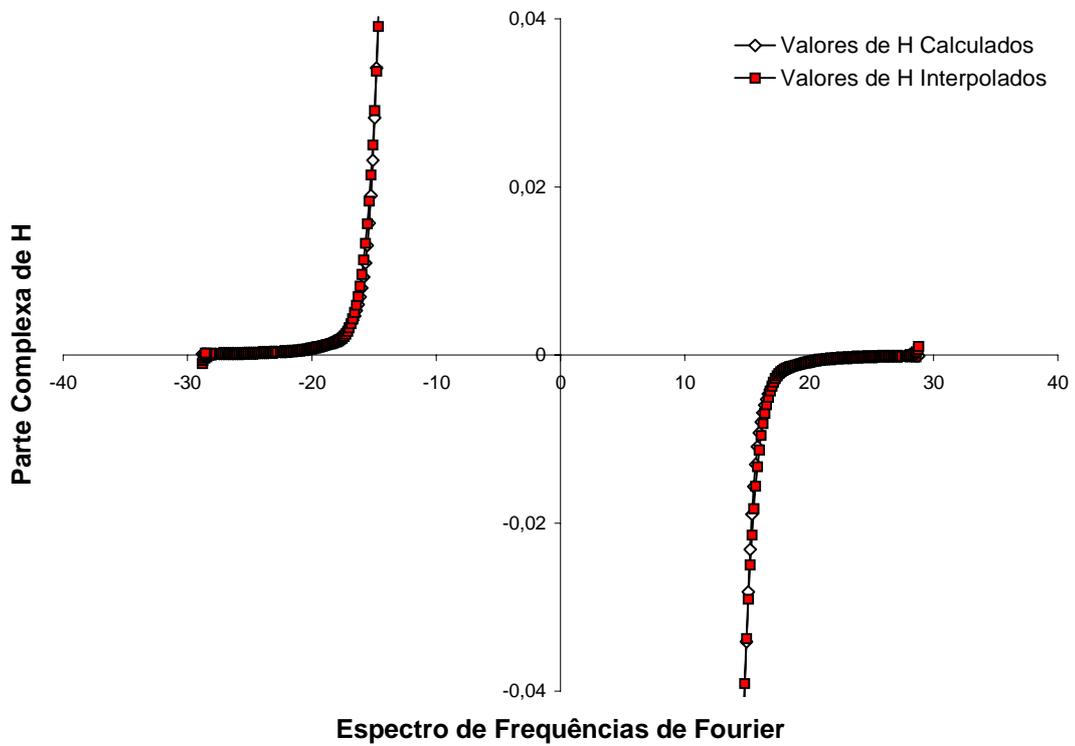


Figura (6.45) – Parte complexa da função de resposta depois de ω_n – Exemplo 5.

Através do exemplo, comprova-se mais uma vez o bom desempenho da geração recursiva dos termos da matriz $[H]$ para o cálculo do histórico de deslocamentos em todos os pontos da estrutura os quais foram analisados através do método ImFT, Figuras (6.33), (6.36) e (6.39).

O processo de interpolação o qual utiliza o método de Lagrange para a obtenção de um polinômio interpolador para o cálculo dos termos da matriz $[H]$ constitui-se em uma opção interessante para a determinação da função de resposta complexa em frequência uma vez que este processo apresenta bons resultados os quais podem ser vistos através das Figuras (6.42), (6.43), (6.44) e (6.45) as quais mostram a parte real e complexa dos valores dos termos de $[H]$.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 CONCLUSÕES

A análise dinâmica no domínio da frequência tornou-se competitiva com o aparecimento do algoritmo FFT. Ao longo de décadas este algoritmo foi sendo aperfeiçoado e adaptado para vários campos científicos, entre eles, o campo da dinâmica estrutural. O método ImFT (Implicit Transform Fourier) criado a partir do início da década de 1990, tem-se firmado nos últimos anos como um método alternativo à análise no domínio da frequência.

O método de interpolação para o cálculo da função de resposta complexa em frequência proposto por Clough e Penzien (1993) para a solução de sistemas acoplados, usando a Transformada Rápida de Fourier é potencialmente tão trabalhoso quanto a extração modal que o mesmo procura evitar.

O método de geração recursiva da função de resposta complexa em frequência mostrou-se tão preciso quanto o método de cálculo pela definição, ou seja, a geração recursiva não produz erros numéricos significativos, o que é comprovado pela excelente precisão dos resultados.

O cálculo da resposta pelo Método ImFT usando a geração da função de resposta complexa em frequência pela definição exige um número de operações aritméticas da ordem de $7N$, sendo N o número de termos do espectro de frequências. Já com a geração recursiva da função $H(i\bar{\omega})$, o número de operações aritméticas é da ordem de

$5N$. Para análises não lineares passo-a-passo, a diferença no número de operações da ordem de $2N$ pode ser significativa na economia de esforço computacional.

7.2 SUGESTÕES

Implementar a técnica de geração recursiva da função de resposta complexa em frequência na aplicação do Método ImFT na análise não linear passo-a-passo.

Pesquisar novas formas de geração recursiva da função de resposta complexa em frequência, por exemplo, a obtenção de h_{nj+1} em função de h_{nj} .

Pesquisar o método de interpolação de Clough e Penzien (1993) para múltiplos graus de liberdade ($J \geq 2$).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- APRILE, A., BENEDETTI, A., TROMBETTI, T., 1994, 'On non-linear dynamic analysis in the frequency domain: algorithm and applications'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 23, pp. 363 - 388.
- BATHE, K. J., 1982, 'Finite element procedures in engineering analysis'. New Jersey, Prentice-Hall.
- BINI, D., 1995, 'Toeplitz matrices, algorithms and applications'. *ERCIM NEWS* online edition, n°22, pp. 1-3.
- BURDEN, R.L., FAIRES, J.D., 1993, 'Numerical analysis'. 5^o ed., Boston, PWS Publishing Company., 768 p.
- CAUGHEY, T. K., O'KELLY, M. E. J., 1965, 'Classical normal modes in damped linear dynamic systems'. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, v.32, pp. 583 - 588.
- CRAIG, R. R. Jr., 1981, 'Structural dynamics – An introduction to computer methods'. 1^o ed., New York, Jhon Wiley & Sons, Inc., 527p.
- CAMERON, T. M., GRIFFIN, J. H., 1989, 'An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of non-linear dynamic systems'. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, v.56, pp. 149 - 1545.
- CHEN, T., TAYLOR, R. L., 1990, 'Solutions of viscous damped linear systems using a set of load-dependet vectors'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 19, pp. 653 - 665.

- CLARET, A. M., 1991, 'Solução de sistemas estruturais dinâmicos não-lineares com amortecimento não-proporcional e dependente da frequência. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Maio.
- CLARET, A. M., VENÂNCIO-FILHO, F., 1991, 'A modal superposition pseudo-force method for dynamic analysis of structural systems with non-proportional damping'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 20, pp. 303 - 315.
- CLARET, A. M., 2000, 'Geração da da função de resposta complexa em frequência na análise dinâmica com a transformada de Fourier implícita'. IV Seminário Internacional de Mecânica Computacional – SIMEC, Uberlândia, Minas Gerais, MG, Brasil.
- CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., 1993, *Dynamics of structures*. 2 ed. New York, McGraw-Hill.
- COOLEY, J. W., TUKEY, 1965, 'Na algorithm for machine calculation of complex Fourier series. *Mathematical Computations*, v.19, pp. 297 - 301.
- CRANDALL, S. H., 1970, 'The role of damping in vibration theory'. *Journal of Sound and Vibration*, v.11, pp. 3 - 18.
- FERREIRA, W.G., 1998, 'Análise dinâmica não-linear no domínio da frequência de sistemas estruturais com amortecimento não-proporcional. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- FERREIRA, W. G., CLARET, A. M., VENÂNCIO-FILHO, F., MANSUR, W.J., RIBEIRO, M.V., 1996, 'Interpolation procedure for dynamic analysis in frequency domain'. Join Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of computational Methods in Engineering, Padova, Italy, September.

- HALL, J. F., 1982, 'An FFT algorithm for structural dynamics'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 10, pp. 797 - 811.
- HALL, J. F, BECK, J. L., 1993, 'Linear system response by the DFT: analysis of recent modified method'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 22, pp. 599 - 615.
- HUMAR, J. L, XIA, H., 1993, 'Dynamic response analysis in the frequency domain'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 22, pp. 1 - 12.
- HURTY, W. C, RUBINSTEIN, M. F., 1964, 'Dynamics of structures. New Jersey, Prentice-Hall.
- IBRAHIMBEGOVIC, A, WILSON, E. L., 1989, 'Simple numerical algorithms for the mode superposition analysis of linear structural systems with non-proportional damping'. *Computers & Structures*, v. 33, pp. 523 – 531.
- KAWAMOTO, J. D., 1983, 'Solution of the nonlinear dynamic structural systems by a hybrid frequency-time domain approach'. MIT Research Report R83 - 5, Dept. of Civil Engineering, Cambridge.
- LING, F. H, WU, X. X., 1987, 'Fast Galerkin method and its application to determine periodic solution of non-linear oscillators'. *Int. J. Non-Linear Mech.*, v.22, pp. 89 - 98.
- MAU, S. T., 1988, 'A subspace modal superposition method for non-classically damped systems'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 16, pp. 931 - 942.
- MEEK, J. W, VELETOS, A. S., 1972, 'Dynamic analysis by extra fast Fourier transform'. *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, v.98, pp. 367 – 384.

- MEIROVITCH, L., 1986, 'Elements of vibration analysis'. 2° ed. Singapore, McGraw-Hill, 560p.
- NEWMARK, N. M., 1959, 'Methods of computation of structural dynamics'. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, v.85.
- PAZ, M., 1980, 'Structural dynamics Theory and computation'. 1° ed, Van Nostrand Reinhold Environmental Engineering Series.
- RAYLEIGH, L., 1945, 'Theory of sound'. New York, Dover Publication, v.1.
- RIBEIRO, M. V., 1998, 'Formulação matricial da análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência'. Tese de M.Sc., PROPEG/UFOP, Minas Gerais, MG, Brasil.
- RAO, S. S., 1995, 'Mechanical vibrations'. 3° ed,, Van Nostrand Reinhold Environmental Engineering Series.
- SINGH, M. P, CHAFORY-ASHTIANY, M., 1986, 'Modal time history analysis of non-classically damped structures for seismic motions'. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 14, pp. 797 - 811.
- SINGH, M. P., 1980, 'Seismic response by SRSS for nonproportional damping'. Journal of the Engineering Mechanics Division,, v.EM6, pp. 1405 - 1419.
- SINGH, M. P, SUAREZ, L. E., 1980, 'Seismic response analysis of structure-equipment systems with non-classical damping effects'. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 15, pp. 871 - 888.
- THOMSON, W. T, CALKINS, T., CARAVANI, P., 1974, 'A numerical study of damping'. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 3, pp. 97 - 103.

- VELETOS, A. S, VENTURA, C.E., 1976, 'Modal analysis of non-classically damped linear systems', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 14, pp. 217 - 243.
- VENÂNCIO-FILHO, F, CLARET, A. M., 1991, 'An implicit Fourier transform method for nonlinear dynamic analysis with frequency dependent damping'. *Damping 91 Conference, (Proceedings)*, San Diego, CA, USA, 16 pp.
- VENÂNCIO-FILHO, F, CLARET, A. M., 1992, 'Matrix formulation of the dynamic analysis of SDOF in the frequency domain', *Computers & Structures*, v. 14, pp. 217 - 243.
- VENÂNCIO-FILHO, F., 1994, 'Análise dinâmica no domínio da frequência'. *Conferência de Concurso para Professor titular da COPPE/UFRJ*, pp. 1 - 3.
- VENÂNCIO-FILHO, F, CLARET, A. M., 1995, 'Frequency domain analysis of MDOF systems: nodal and modal coordinates formulations', *Computers & Structures*, v. 56, n° 1, pp. 189 - 191.
- VENÂNCIO-FILHO, F, CLARET, A. M., 1996, 'Frequency domain dynamic analysis with application to soil-structure interaction: linear and nonlinear systems'. *Advances in computational Methods for simulation*, edited by B. H. V. Topping, Edinburgh, UK.
- WARBURTON, G. B, SONI, S. R., 1977, 'Errors in response calculations for non-classically damped structures'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 5, pp. 365 - 376.
- WILSON, E. L, FARHOOMAND, I. BATHE, K. J., 1973, 'Nonlinear dynamic analysis of complex structures'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 1, pp. 241 - 252.

WYLE, C. R, BARRET, J. L., 1995, 'Advanced engineering mathematics'. 6° ed., New York, McGraw-Hill, 1362 p.

WOLF, J. P., 1987, 'Nonlinear soil-structure interaction analysis based on hybrid frequency-time domain formulation. Zurich: electrowatt Engineering Services, pp. 25 - 32.