

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ESTUDO NUMÉRICO DE PROBLEMAS DE
ESTABILIDADE EM SOLOS REFORÇADOS VIA
ANÁLISE LIMITE**

AUTORA: LILIANE STELA MARIS ROCHA DE SOUSA

ORIENTADOR: PROF. DR. LUIZ GONZAGA DE ARAÚJO

CO-ORIENTADORA: PROF^a. DR^a. CHRISTIANNE DE LYRA NOGUEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Geotecnia.

Ouro Preto, março de 2001.

AGRADECIMENTOS

- ❖ A Deus, a minha família e ao querido Paulo Osterne;
- ❖ Ao Prof. Luiz Gonzaga e à Ana;
- ❖ À Prof^a. Christianne e ao Prof. Romero;
- ❖ A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, mestrado em Geotecnia, pelos conhecimentos transmitidos e por todo apoio, especialmente aos professores Frederico e Teresinha;
- ❖ Aos amigos Aline e Renzo e todo o pessoal do mestrado;
- ❖ Aos funcionários do DECIV;
- ❖ Ao Prof. Walter Dornellas;
- ❖ À UFOP, CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo de problemas de estabilidade em meios contínuos, fraturados ou reforçados pela técnica da Análise Limite, via Método dos Elementos Finitos (MEF).

A formulação implementada, baseada no método de equilíbrio, fornece um Limite Inferior da carga de colapso para problemas geotécnicos, sob condição de deformação plana.

A formulação para meios fraturados pelo modelo contínuo equivalente considera problemas que apresentam uma ou mais famílias de descontinuidades. No modelo discreto de juntas são considerados os problemas que apresentam uma ou mais (poucas) descontinuidades.

Os problemas em solo reforçado são estudados por dois modelos distintos. O primeiro é o modelo do contínuo equivalente, que modela o solo reforçado como um contínuo anisotrópico. O segundo é o modelo discreto, que modela o solo e o reforço individualmente. Ambos modelos consideram reforços planos de espessura desprezível.

O problema de programação matemática resultante da formulação foi aproximado por um problema de Programação Linear (PL).

Vários exemplos são estudados pela implementação realizada, onde a solução numérica é comparada com outras encontradas na literatura técnica, obtidas pelas vias analítica e numérica.

ABSTRACT

This work presents a study of stability problems in continuous, fractured media or reinforced soils by the technique of Limit Analysis and the Finite Element Method (FEM).

The implemented formulation, based on the equilibrium method, supplies an Inferior Limit of the collapse load for geotechnical problems under plane strain assumptions.

The formulation for fractured media by the equivalent continuum model deals with problems that present one or more joint families. In the discrete model, problems that present one or more isolated joints are considered.

The problems in reinforced soil are studied by two different models. The first is the equivalent continuous model, which treats the reinforced soil as an anisotropic continuum. The second is the discrete model, which models the soil and the reinforcement individually. Both approaches consider plane reinforcements of zero thickness.

The mathematical programming problem which results from the formulation is approximated and numerically solved by Linear Programming Algorithm.

Several examples are analyzed using the implementation, and the numerical solutions obtained with other analytic and numerical solutions from the technical literature.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	VIII
-------------------------------	-------------

LISTA DE FIGURAS	IX
-------------------------------	-----------

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades.....	1
1.2 Síntese das formulações numéricas de análise limite	2
<i>1.2.1 Formulações para meios contínuos.....</i>	<i>2</i>
<i>1.2.2 Formulações para meios fraturados.....</i>	<i>3</i>
<i>1.2.2 Formulações para meios reforçados</i>	<i>3</i>
1.3 Objetivos e organização do trabalho.....	4

CAPÍTULO 2 - CARACTERÍSTICAS DE COMPORTAMENTO MECÂNICO DE SOLOS REFORÇADOS

2.1 Introdução	5
2.2 Comportamento mecânico do reforço.....	7
2.3 Comportamento mecânico da interface solo-reforço	8
2.4 Comportamento mecânico da estrutura em solo reforçado.....	11

CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÕES DE ANÁLISE LIMITE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 Introdução	14
3.2 Teoremas da análise limite.....	14
3.3 Formulação de limite inferior para meios contínuos.....	16
<i>3.3.1 Equilíbrio no domínio do elemento</i>	<i>17</i>
<i>3.3.2 Equilíbrio na interface entre elementos.....</i>	<i>18</i>
<i>3.3.3 Condições de contorno em tensão</i>	<i>19</i>
<i>3.3.4 Critério de escoamento do material</i>	<i>20</i>
<i>3.3.5 Função objetivo</i>	<i>20</i>

3.4	Formulação para meios fraturados.....	21
3.4.1	<i>Modelo contínuo equivalente.....</i>	21
3.4.2	<i>Modelo discreto de juntas.....</i>	23
3.5	Formulação para solos reforçados	24
3.5.1	<i>Técnica do contínuo equivalente</i>	24
3.5.2	<i>Técnica discreta.....</i>	28
CAPÍTULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA REALIZADA		
4.1	Introdução	33
4.2	Matrizes e vetores característicos.....	34
4.3	Fluxograma.....	40
4.4	Exemplo ilustrativo.....	42
CAPÍTULO 5 - PROBLEMAS ESTUDADOS		
5.1	Introdução	47
5.2	Problema em meio contínuo.....	48
5.2.1	<i>Capacidade de carga de uma fundação em terreno inclinado</i>	48
5.3	Problemas em meios fraturados	50
5.3.1	<i>Fundação em meio multilaminado</i>	50
5.3.2	<i>Talude com um plano de fraqueza.....</i>	52
5.4	Problemas de solo reforçado.....	53
5.4.1	<i>Técnica do contínuo equivalente</i>	53
5.4.2	<i>Técnica discreta.....</i>	58
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES		
6.1	Conclusões	70
6.2	Sugestões	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		
7.1	Referências bibliográficas complementares	75

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 5

Tabela 5. 1 – Capacidade de carga de uma fundação em terreno inclinado	49
Tabela 5. 2 – Capacidade de carga (adimensional) de uma fundação em solo reforçado	55
Tabela 5. 3 – Capacidade de carga (adimensional) de uma fundação em solo reforçado	56
Tabela 5. 4 – Números de estabilidade para um problema de talude reforçado	58
Tabela 5. 5 – Fatores de segurança para um talude reforçado, pela técnica da análise discreta	63
Tabela 5. 6 – Fatores de segurança para o problema de aterro sobre solo mole.....	67
Tabela 5. 7 – Fatores de segurança para o problema, sob diferentes hipóteses.....	68

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

Figura 2. 1 – Estrutura de contenção em solo reforçado	5
Figura 2. 2 – Curva τ x δ_h	8
Figura 2. 3 – Curvas de ensaios de tração confinada em geotêxtil não tecido/ solo granular	9
Figura 2. 4 – Curva τ x δ_h típica em ensaios de cisalhamento direto	10
Figura 2. 5 – Esforços solicitantes numa estrutura de solo reforçado	10
Figura 2. 6 – Zonas “ativa” e “resistente” em um muro de solo reforçado	12
Figura 2. 7 - Mecanismos de ruptura interna de maciços de solos reforçados	13

CAPÍTULO 3

Figura 3. 1 – Elemento triangular de três nós, linear em tensão	17
Figura 3. 2 – Tensões normal e cisalhante na interface de dois elementos	18
Figura 3. 3 – Condição de contorno em tensão	19
Figura 3. 4 – Região viável para o critério de escoamento numa descontinuidade	22
Figura 3. 5 – (a) Tensões no solo e no reforço; (b) Tensões no contínuo equivalente ...	25
Figura 3. 6 – Elemento de interface solo-reforço segundo análise discreta	28
Figura 3. 7 – Elemento de reforço segundo análise discreta	29
Figura 3. 8 – Dois elementos de reforço segundo análise discreta	31

CAPÍTULO 4

Figura 4. 1 – Fluxograma	41
Figura 4. 2 – Compressão simples	42

CAPÍTULO 5

Figura 5. 1 – Capacidade de carga de uma fundação em terreno inclinado	48
Figura 5. 2 – Capacidade de carga de uma fundação em meio fraturado	50
Figura 5. 3 – Comparação entre q e q_{yu} em função de θ	51
Figura 5. 4 – Estabilidade de um bloco de rocha.....	52
Figura 5. 5 – Capacidade de carga de uma fundação em solo reforçado.....	54
Figura 5. 6 – Estabilidade de talude em solo reforçado.....	57
Figura 5. 7 – Arrancamento de reforço.....	59
Figura 5. 8 – Tensões na interface solo-reforço.....	60
Figura 5. 9 – Estabilidade de um talude com um reforço	62
Figura 5. 10 – Variação da tensão no reforço (7m)	64
Figura 5. 11 – Variação da tensão no reforço (5m)	64
Figura 5. 12 – Superfície de ruptura para um talude, pelo software Slope/W	64
Figura 5. 13 – Estabilidade de aterro sobre solo mole.....	66
Figura 5. 14 - Superfície de ruptura para um aterro, pelo software Slope/W	66
Figura 5. 15 – Variação da tensão no reforço, em um aterro sobre solo mole	67
Figura 5. 16 – Variação da tensão no reforço em função de parâmetros de interface....	69

624.131(043.3)

S726e

Sousa, Liliane Stela Maris Rocha de.

Estudo numérico de problemas de estabilidade em solos reforçados via análise limite / Liliane Stela Maris Rocha de Sousa. – Ouro Preto : Universidade Federal de Ouro Preto, 2001.

x, 77 p.

Orientação Prof. Dr. Luiz Gonzaga de Araújo ; Co-orientação Profa. Dra. Christianne de Lyra Nogueira.

1. Solos reforçados – dissertação. 2. Análise limite. 3. Solos - estabilidade. I. Título.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Para a determinação da carga de colapso em problemas geotécnicos, adota-se em geral um dos seguintes métodos:

- equilíbrio limite;
- análise limite.

O método da análise limite, formulado pelo método dos elementos finitos (MEF), destaca-se entre os outros métodos por permitir a análise de problemas com geometrias e carregamentos complexos e meios estratificados ou heterogêneos.

A solução completa e rigorosa de um problema elastoplástico da Mecânica dos Sólidos é demasiadamente complexa e a solução exata do problema é raramente expressa por via analítica. De fato, esta solução deve satisfazer a um conjunto de condições, constituído por:

- equações de equilíbrio;
- equações de compatibilidade;
- critérios de escoamento;
- condições de contorno.

Soluções aproximadas podem ser obtidas, desconsiderando parte destas condições mencionadas.

Pelo teorema do Limite Inferior ou teorema Estático, são satisfeitas as equações de equilíbrio, o critério de escoamento e as condições de contorno em termos de tensões, permitindo a obtenção de uma aproximação inferior para a verdadeira carga de colapso.

Pelo teorema do Limite Superior ou teorema Cinemático, satisfazem-se as equações de compatibilidade, o critério de escoamento e as condições de contorno em termos de deslocamentos, permitindo uma aproximação superior da verdadeira carga de colapso de um dado problema.

O modelo de Formulação Mista contempla, de maneira mais balanceada, os aspectos de equilíbrio e da consistência cinemática; são exatamente satisfeitos o critério de escoamento e as condições de contorno, sendo as condições de equilíbrio e de compatibilidade satisfeitas em termos aproximados.

1.2 SÍNTESE DAS FORMULAÇÕES NUMÉRICAS DE ANÁLISE LIMITE

1.2.1 Formulações para meios contínuos

Dentre as formulações de limite inferior para meios contínuos, Lysmer (1970) trata o problema representando as tensões normais atuantes nos nós das faces dos elementos, usando o artifício de eliminar a tensão cisalhante da formulação. Este artifício reduz o número de variáveis do problema. As formulações de Bottero et al. (1978) e Sloan (1987) apresentam grandes semelhanças entre si e empregam tensões nodais como variáveis primárias. A diferença entre estas formulações se deve ao algoritmo empregado na solução do problema de Programação Linear (PL).

Singh e Basudhar (1993-a) empregam a mesma formulação de Lysmer, resolvendo o problema de programação matemática pela técnica de programação não linear do gradiente conjugado. Arai e Nakagawa (1988) e Arai e Jinki (1990) apresentam aplicações do método do limite inferior a problemas de estabilidade de taludes.

Em relação à formulação de limite superior, destacam-se as proposições de Tamura et al. (1984, 1987), a de Sloan (1989) e a de Jiang (1995).

Em Christiansen (1981), em Casciaro e Cascini (1982) e em Farfán (2000) são empregadas formulações mistas para meios contínuos, sendo que o último utiliza, inclusive, formulações mistas para meios de Cosserat. Estas formulações caracterizam-se pela interpolação independente dos campos de tensões e de velocidades no interior do elemento.

1.2.2 Formulações para meios fraturados

Extensões da formulação de análise limite para meios contínuos podem ser desenvolvidas para meios fraturados. Esta metodologia foi utilizada, por exemplo, pelos autores Yu e Sloan (1994), Araújo (1997) e Araújo et al. (2000), baseadas em formulações de limite inferior.

A formulação mista aplicada a meios fraturados é tratada nos trabalhos de Tamura e Pak (1989), Faria (1992), Araújo et al. (1996) e Araújo et al. (1997).

1.2.3 Formulações para meios reforçados

As formulações de análise limite para meios reforçados encontradas na literatura técnica são recentes.

Em Singh e Basudhar (1993-b), o solo reforçado é tratado como um contínuo equivalente em uma formulação de limite inferior, empregando-se a técnica de Programação Não Linear, enquanto que em Asaoka (1994) o reforço é considerado como um elemento discreto numa formulação pelo limite superior.

Em Yu e Sloan (1997) e em Francescato e Pastor (1997), propõe-se uma técnica na qual o solo reforçado é tratado como um contínuo equivalente, empregando-se as formulações de limite superior e inferior. O primeiro autor considera reforços planares e, no segundo caso, são estudados reforços unidimensionais.

Em Michalowski (1998) e em Porbaha et al. (2000), são feitas formulações de limite superior para solos reforçados, nas quais o solo reforçado é tratado como um contínuo equivalente. O primeiro autor compara as soluções numéricas obtidas com soluções de equilíbrio limite. Já em Porbaha et al., são comparadas as soluções de limite superior com resultados experimentais, verificando-se o potencial da metodologia empregada.

1.3 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho trata da aplicação da formulação da Análise Limite pelo Teorema do Limite Inferior, via Método dos Elementos Finitos, a problemas geotécnicos em meios contínuos, fraturados ou reforçados, em condições de deformação plana.

Foram analisados problemas incluindo materiais com juntas ou famílias de juntas, bem como problemas em solos reforçados analisados sob duas hipóteses distintas, considerando-se o conjunto solo-reforço como um material contínuo, cujas características podem ser determinadas pelas características de seus componentes e modelando-se o solo e o reforço isoladamente.

Uma revisão bibliográfica resumida das principais características do comportamento mecânico de solos reforçados é apresentada no Capítulo 2. No Capítulo 3, descrevem-se as formulações de análise limite para problemas de estabilidade pelo MEF para meios contínuos, fraturados e reforçados, via método estático.

As implementações numéricas estão resumidamente descritas no Capítulo 4. No Capítulo 5, mostram-se os exemplos de problemas de estabilidade clássicos da Engenharia Geotécnica resolvidos por via numérica, para validação da implementação realizada.

Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para futuros estudos.

CAPÍTULO 2

CARACTERÍSTICAS DE COMPORTAMENTO MECÂNICO DE SOLOS REFORÇADOS

2.1 INTRODUÇÃO

O processo de reforço de solo consiste da associação do solo com um material capaz de resistir a elevados esforços de tração, compressão, flexão e/ou cisalhamento.

Um maciço de solo reforçado é definido como uma estrutura composta basicamente por dois materiais, solo e reforço, desempenhando funções específicas (Figura 2.1). O paramento não possui função estrutural propriamente dita, atuando apenas como elemento de contenção do solo próximo à extremidade livre do aterro e conferindo ao conjunto um padrão estético adequado.

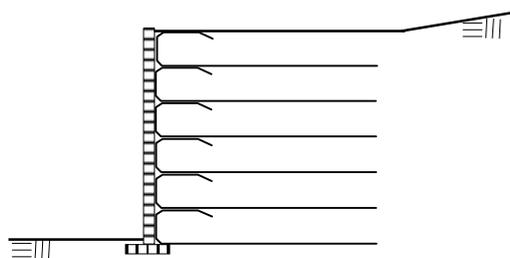


Figura 2. 1 – Estrutura de contenção em solo reforçado

O emprego da técnica de solo reforçado tem aumentado nas últimas décadas e este impacto deve-se, principalmente, aos seguintes fatores:

- baixos custos em relação às técnicas convencionais;
- rapidez e facilidade das metodologias construtivas;

- versatilidade das soluções disponíveis;
- desenvolvimento contínuo de novos materiais como elementos de reforço, particularmente, os geossintéticos;
- desenvolvimento de pesquisas e análises do comportamento de obras reais, ampliando o conhecimento sobre os mecanismos de interação solos-reforços.

Os objetivos da inclusão de reforços no solo são os de aumentar a estabilidade da estrutura e/ou reduzir a deformabilidade do maciço. Estes objetivos são alcançados graças à redistribuição das tensões e das deformações no maciço de solo reforçado.

Pode-se dizer que o princípio de solo reforçado é similar ao do concreto armado; em ambos os sistemas são empregados materiais com elevada resistência à tração para restringirem as deformações que se desenvolvem no maciço devido ao peso próprio do solo, associado ou não à aplicação de carregamento externo. No concreto armado, a transferência dos esforços para a armadura dá-se por aderência entre os materiais; no solo reforçado, este processo resulta, principalmente, dos esforços de atrito mobilizados na interface solo-reforço.

Os parâmetros de projeto para a análise de uma estrutura em solo reforçado devem incluir dados sobre as propriedades físicas, mecânicas, hidráulicas, de durabilidade e de interação do reforço com o maciço de terra.

Neste capítulo será apresentada uma síntese das características de comportamento mecânico do reforço, da interface solo-reforço e do maciço reforçado. Neste estudo, enfoca-se os reforços como estruturas planares que trabalham à tração.

2.2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DO REFORÇO

Como elementos de reforço numa obra geotécnica, os materiais dos reforços devem atender aos seguintes requisitos de projeto:

- elevada resistência à tração;
- baixa susceptibilidade à fluência;
- elevada durabilidade;
- elevada resistência a danos de instalação;
- elevado grau de interação com o solo adjacente.

A resistência à tração de um material sintético, por exemplo, está diretamente associada à natureza do polímero presente e ao processo de fabricação da estrutura do reforço, sendo afetada também pela geometria da amostra, temperatura e velocidades de carregamento, razão pela qual é imprescindível a sistematização do ensaio.

O comportamento tensão-deformação dos reforços é afetado, em larga escala, pelos efeitos de fluência, por sua maior ou menor resistência a quaisquer danos de natureza física, química ou biológica e pelo grau de interação com o solo adjacente.

As características mais viáveis de modelagem são a deformabilidade e o escoamento à tração.

Comumente são utilizados ensaios de tração não confinada de faixa larga para determinação dos parâmetros de deformabilidade e de escoamento do reforço. O ensaio consiste em se submeter uma amostra retangular de reforço a esforços de tração, crescentes e unidirecionais, registrando-se as deformações até o escoamento do reforço. A Figura 2.2 ilustra uma curva típica deste ensaio, onde τ é a tensão aplicada no ensaio e δ_h é o deslocamento longitudinal do reforço. Um modelo constitutivo que pode ser utilizado nestas análises é o modelo rígido-plástico, indicado pela linha b na Figura 2.2.

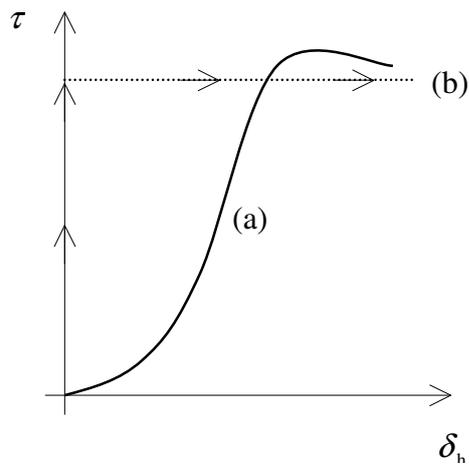


Figura 2. 2 – Curva τ x δ_h

(a) típica para o ensaio de tração simples do reforço e (b) modelo rígido-plástico

2.3 COMPORTAMENTO MECÂNICO DA INTERFACE SOLO-REFORÇO

Num maciço reforçado, as propriedades mecânicas da interface solo-reforço condicionam os processos de distribuição de tensões e deformações no interior do maciço.

Estas propriedades podem ser representadas pelos mecanismos de atrito e de coesão mobilizados na interface solo-reforço, que permitem uma transferência de esforços entre os dois materiais de modo que, no reforço, desenvolvam esforços de tração. Desta forma, o escoamento da interface solo-reforço pode ser interpretado com base no critério de escoamento de Mohr-Coulomb.

A determinação dos parâmetros de interface, coesão e ângulo de atrito, é feita, geralmente, por ensaios de cisalhamento direto, preferencialmente com caixas de grandes dimensões.

A estimativa dos parâmetros de escoamento de interface solo-reforço pode ser feita, também, a partir da interpretação dos resultados de ensaios de arrancamento.

Diversos aspectos restringem a aplicabilidade deste ensaio a materiais mais rígidos, como as geogrelhas (Gomes, 1993).

Outro ensaio empregado é a tração confinada. A compressão das fibras e a impregnação das partículas de solo na matriz do reforço constituem aspectos que influenciam os mecanismos de interação solo-reforço. Assim, ensaios de tração confinada são particularmente importantes para a obtenção de parâmetros representativos das condições operacionais dos geotêxteis, por exemplo, em obras reais, pois o confinamento do reforço pode afetar o comportamento tensão deformação do material. Vários autores têm estudado formas de obtenção dos parâmetros de tração confinada em geossintéticos.

A Figura 2.3 ilustra a influência do confinamento sobre as características mecânicas de um geotêxtil não tecido em interface com um solo granular, ocorrendo um maior acréscimo de tensões no reforço, para um dado alongamento, quanto maior for a tensão confinante.

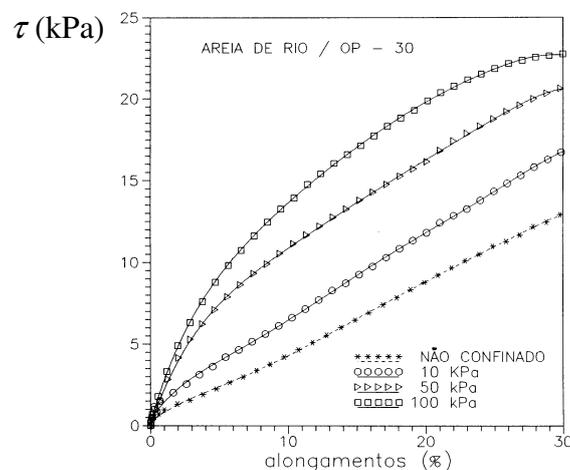


Figura 2. 3 – Curvas de ensaios de tração confinada em interface geotêxtil não tecido/ solo granular (Gomes, 1993)

Alguns resultados experimentais, obtidos através de ensaios de cisalhamento direto de grande porte, mostram que a curva tensão-deslocamento para interfaces solos-reforços pode ser da forma ilustrada na Figura 2.4. Nota-se que uma idealização desta

curva pode ser feita, utilizando-se o modelo elástico perfeitamente plástico para o comportamento da mesma (curva b da Figura 2.4).

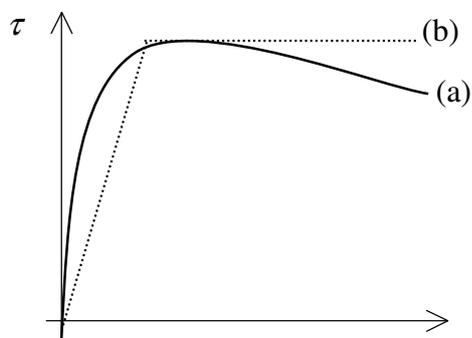
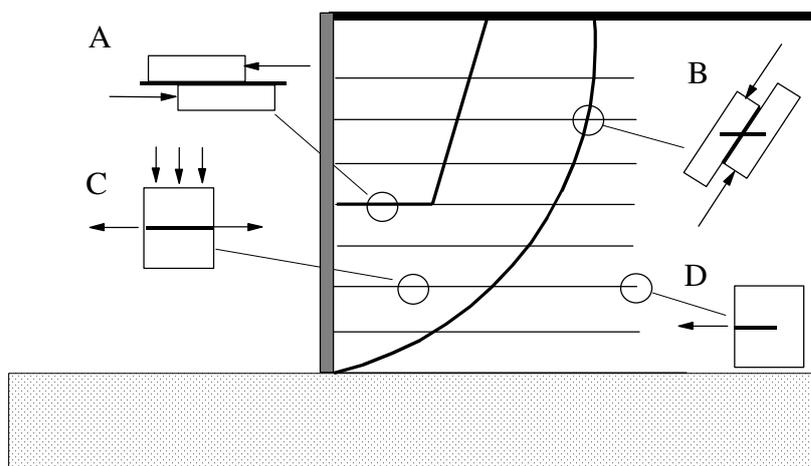


Figura 2. 4 – Curva $\tau \times \delta_h$ típica em ensaios de cisalhamento direto

Os mecanismos de interação solo-reforço implicam uma completa redistribuição das tensões e das deformações no maciço reforçado, estando intimamente associados aos domínios específicos do sistema solo-reforço (Figura 2.5) e à orientação dos reforços.



**Figura 2. 5 – Esforços solicitantes numa estrutura de solo reforçado
(Martins, 2000)**

Na Figura 2.5, em um elemento tal como A, prevalece um processo de deslizamento do solo ao longo do plano do reforço. Em B, a mobilização dos esforços induz um cisalhamento do solo e do reforço simultaneamente, como um material composto. Para um elemento como C da zona ativa, a mobilização dos esforços é essencialmente pela tração do reforço enquanto em D, na zona resistente, os efeitos tendem a provocar o arrancamento do reforço no caso de insuficiência da ancoragem. Estas condições ilustradas pela Figura 2.5 são adequadamente simuladas através de ensaios de cisalhamento direto e ensaios de arrancamento.

O mecanismo de interação solo-reforço pode apresentar comportamento dilatante se o solo é granular. O arrancamento do reforço induz tensões cisalhantes em uma determinada zona do solo que a circunda e esta zona pode dilatar. Este efeito é mais acentuado se o solo está sob baixas tensões de confinamento e isto resulta em um aumento da tensão de escoamento da interface solo-reforço.

2.4 COMPORTAMENTO MECÂNICO DA ESTRUTURA EM SOLO REFORÇADO

O princípio básico da transferência de esforços baseia-se na interação entre o solo e o reforço, os quais condicionam os processos de distribuição de tensões no interior da massa de solo.

A mobilização da tensão cisalhante que atua na interface ocorre pelo deslocamento relativo do reforço em relação ao solo.

A Figura 2.6 mostra uma seção transversal típica de um muro em solo reforçado, subdividida em duas zonas: uma zona “ativa” e uma zona “resistente” ou “passiva”. Os elementos de reforço, na zona passiva, funcionam como elementos de “ancoragem” da zona ativa.

A linha de esforços de tração máximos nos elementos de reforço constitui a superfície potencial de ruptura do muro de solo reforçado, cuja posição depende de fatores tais como geometria do sistema, cargas aplicadas e deformabilidade dos elementos de reforço.

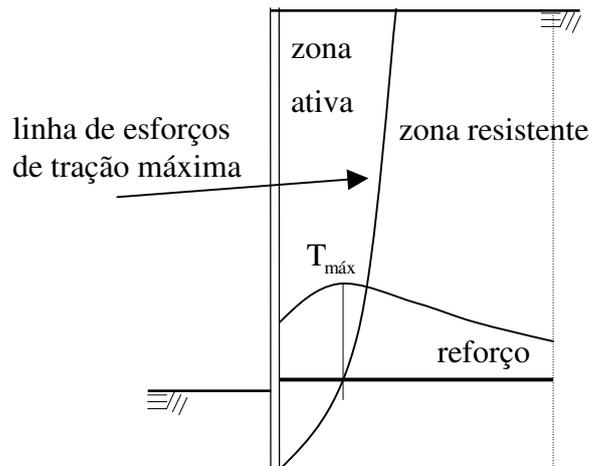
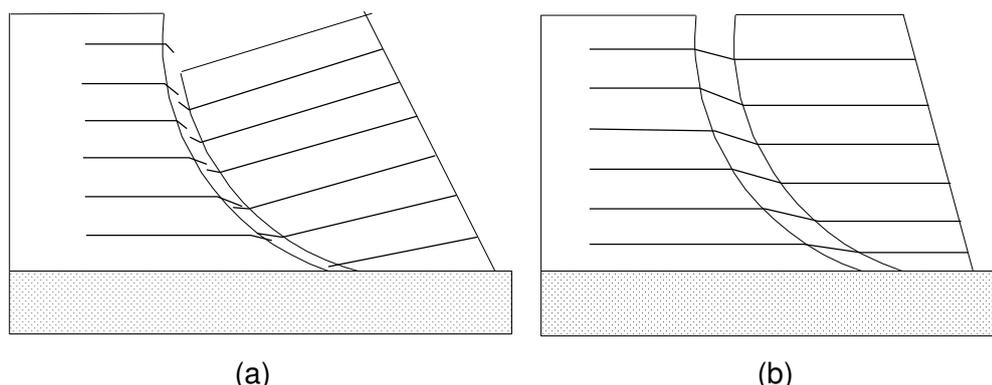


Figura 2. 6 – Zonas “ativa” e “resistente” em um muro de solo reforçado

Estudos experimentais têm demonstrado a existência de dois mecanismos básicos de ruptura: o primeiro caracterizado pelo deslizamento do reforço, por perda de aderência com o solo adjacente (ruptura da interface solo-reforço) e o segundo, pela ruptura dos próprios elementos de reforço, característico de elevadas condições de confinamento.

A análise do comportamento de uma estrutura em solo reforçado abrange a verificação de suas condições de estabilidade interna e externa.

Em termos de estabilidade interna, podem constituir mecanismos determinantes de colapso das estruturas de solo reforçado: ruptura das inclusões, por tensões excessivas de tração ou por efeitos de fluência; ou arrancamento das inclusões da massa de solo confinante, devido à deficiência na ancoragem (Figura 2.7). Assim, as bases do dimensionamento de uma estrutura deste tipo consistem na determinação do comprimento e do espaçamento entre os reforços.



**Figura 2. 7 - Mecanismos de ruptura interna de maciços de solos reforçados
(a) ruptura do reforço e (b) ruptura por arrancamento**

Em termos de estabilidade externa, as análises abrangem a segurança contra a ruptura pelos seguintes mecanismos: deslizamento ao longo da base ou qualquer outra interface, tombamento, ruptura do solo de fundação, controle de recalques excessivos e estabilidade global do sistema.

Entretanto, na maioria dos casos, o mecanismo de ruptura pode estar associado ao maciço reforçado e ao solo adjacente simultaneamente.

Os métodos de análise de estruturas em solo reforçado comportam duas abordagens: os métodos por equilíbrio limite e os métodos numéricos.

As análises de estabilidade pelo método do equilíbrio limite utilizam o equilíbrio de forças e/ou momentos ao longo de uma dada superfície potencial de ruptura. Consideram, ainda, que o material é idealmente plástico, ruptura sob condição de deformação plana e pequenas variações de geometria no colapso.

Pelos métodos numéricos, as estruturas de solos reforçados podem ser tratadas pelo modelo contínuo equivalente, no qual a massa de solo reforçado é tratada como um meio homogêneo e anisotrópico ou pela representação discreta, na qual o reforço e o solo são tratados individualmente.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÕES DE ANÁLISE LIMITE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as formulações de Análise Limite implementadas no presente trabalho. A diferença entre estas formulações, basicamente, está no modo de idealização do meio, que pode ser modelado como contínuo, fraturado ou reforçado.

3.2 TEOREMAS DA ANÁLISE LIMITE

A análise limite é fundamentada em dois teoremas da plasticidade, conhecidos como teoremas dos limites superior e inferior. Estes teoremas baseiam-se nas seguintes hipóteses (Chen, 1975):

- as variações de geometria são pequenas até o ponto de início do colapso plástico do material;
- convexidade da superfície de escoamento;
- associatividade do fluxo plástico;
- material elasto plástico ideal.

Firmando-se nestas hipóteses, os teoremas da análise limite são enunciados a seguir e as demonstrações podem ser encontradas em Chen (1975).

Teorema do Limite Superior (Teorema Cinemático)

“O colapso deve ocorrer se, para qualquer mecanismo de deformação compatível, considerado puramente plástico, a potência das forças externas iguala ou excede à dissipação interna” (Finn, 1967).

Teorema do Limite Inferior (Teorema Estático)

“Qualquer campo de tensões estaticamente admissível fornecerá um limite inferior da verdadeira carga de colapso.

Um campo de tensões é dito estaticamente admissível quando satisfaz às condições de contorno em termos de tensões, de equilíbrio e da condição de escoamento” (Sloan, 1987).

O teorema cinemático fornece uma aproximação superior para a verdadeira carga de colapso, enquanto o teorema estático permite a obtenção de uma aproximação inferior para a mesma.

A formulação implementada neste trabalho fornece um limite inferior da carga de colapso de problemas geotécnicos, sob condição de deformação plana.

Utilizando-se de adequada aproximação linear da superfície de escoamento, objetivou-se computar um campo de tensões estaticamente admissível, via elementos finitos e programação linear.

O campo de tensões é modelado discretizando-se o domínio do problema em elementos triangulares de três nós, lineares em tensão, podendo ser a interface dos elementos zonas de descontinuidades de tensões.

A imposição de condições que geram um campo de tensões estaticamente admissível conduz a uma determinada carga de colapso. A carga de colapso encontrada é o limite inferior da verdadeira carga de colapso, e por isto, é considerada segura.

3.3 FORMULAÇÃO DE LIMITE INFERIOR PARA MEIOS CONTÍNUOS

Nesta seção será apresentada uma síntese da formulação de limite inferior para meios contínuos utilizando elementos finitos, como apresentada por Sloan (1987).

Um campo de tensões estaticamente admissível é aquele que satisfaz às condições:

- de contorno em termos de tensões;
- de equilíbrio;
- de escoamento do material.

A maior dificuldade para obtenção de uma solução analítica é a construção do campo de tensões estaticamente admissível manualmente, como pode ser visto em Chen (1975).

A maior vantagem da formulação numérica do teorema do limite inferior, pelo método dos elementos finitos, é que pode ser aplicada a problemas com carregamentos e geometria complexos; e ainda pode-se modelar materiais heterogêneos ou estratificados.

Para aproximar o campo de tensões, Sloan utiliza o elemento triangular de três nós, como ilustra a Figura 3.1, supondo uma variação linear das tensões dentro do elemento. Em cada nó, têm-se três componentes de tensão e cada nó pertence a um único elemento, podendo mais de um nó ter as mesmas coordenadas.

Nas interfaces entre os triângulos são permitidas descontinuidades de tensão estaticamente admissíveis.

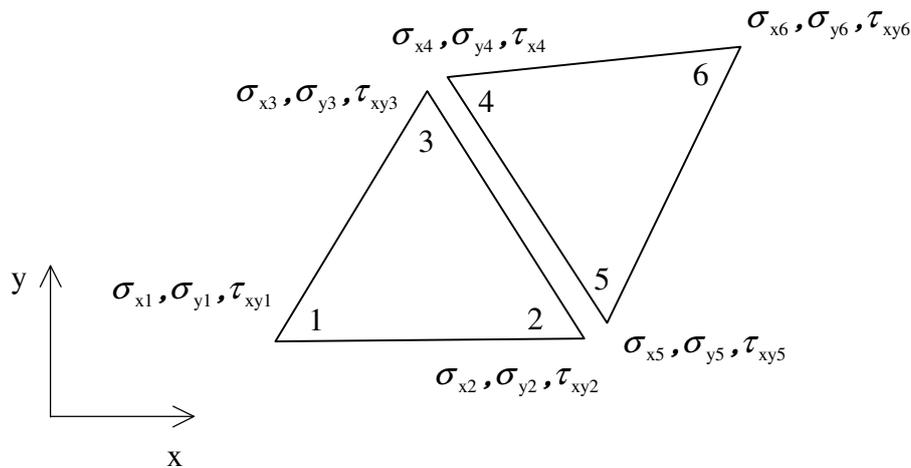


Figura 3. 1 – Elemento triangular de três nós, linear em tensão (Sloan, 1987)

3.3.1 Equilíbrio no domínio do elemento

O equilíbrio em cada elemento triangular é satisfeito se as tensões obedecem às equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \gamma \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde γ é o peso específico do solo.

Usando-se a aproximação por elementos finitos, pode-se reescrever a relação 3.1 sob a forma discreta

$$\mathbf{A}^e \boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{b}^e \quad (3.2)$$

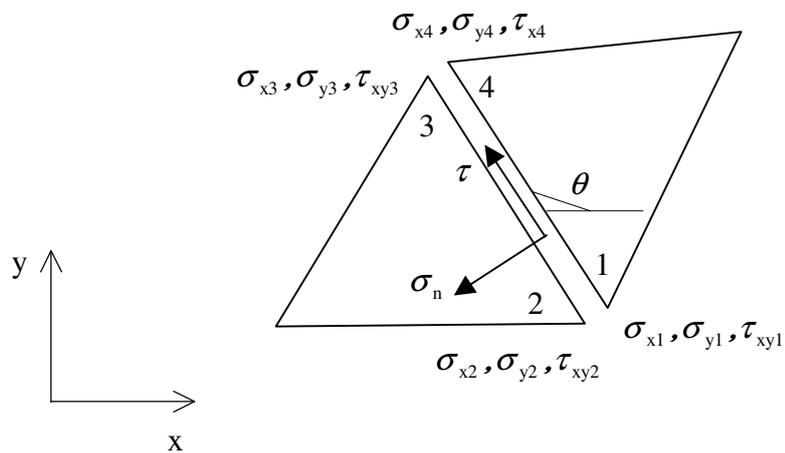
onde \mathbf{A}^e é a matriz de equilíbrio do elemento, $\boldsymbol{\sigma}^e$ é o vetor das componentes de tensão nodais do elemento e \mathbf{b}^e é o vetor das componentes de força de massa do elemento.

A condição de equilíbrio em cada elemento (Equação 3.2) gera duas restrições de igualdade nas componentes de tensão nodal de cada triângulo. As matrizes e vetores apresentados neste capítulo serão definidas no Capítulo 4.

3.3.2 Equilíbrio na interface entre elementos

Nas interfaces dos elementos triangulares (Figura 3.2) são permitidas descontinuidades de tensão estaticamente admissíveis, porém, deve-se assegurar a continuidade nas tensões normal (σ_n) e cisalhante (τ), ou seja

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} &= \sigma_{n2} \\ \tau_1 &= \tau_2 \\ \sigma_{n3} &= \sigma_{n4} \\ \tau_3 &= \tau_4 \end{aligned} \tag{3.3}$$



**Figura 3. 2 – Tensões normal e cisalhante na interface de dois elementos
(Sloan, 1987)**

Escrevendo as tensões normais e cisalhantes em termos das componentes de tensão nodais da interface (σ^{ie}), pode-se chegar a seguinte equação de equilíbrio na interface entre elementos

$$\mathbf{A}^{ie} \sigma^{ie} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

onde \mathbf{A}^{ie} é a matriz de equilíbrio na interface entre elementos.

A condição de equilíbrio na interface entre elementos gera quatro restrições de igualdade nas componentes de tensão nodal da interface (Equação 3.4).

3.3.3 Condições de contorno em tensão

A condição de equilíbrio numa face do contorno pode ser obtida fazendo

$$\begin{aligned}\sigma_{n1} &= q_1 \\ \tau_1 &= t_1 \\ \sigma_{n2} &= q_2 \\ \tau_2 &= t_2\end{aligned}\tag{3.5}$$

onde q_1 , t_1 , q_2 e t_2 são, respectivamente, os carregamentos normal e cisalhante nos pontos 1 e 2 do contorno, como ilustrados na Figura 3.3.

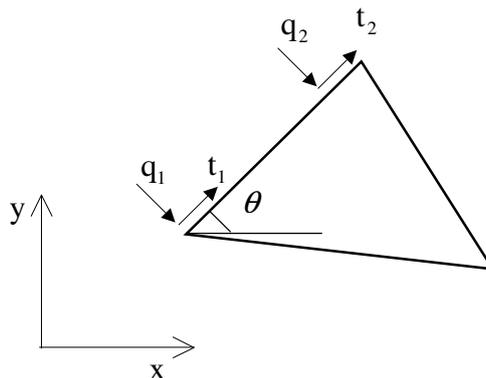


Figura 3.3 – Condição de contorno em tensão (Sloan, 1987)

Dessa forma, pode-se escrever a condição de contorno em termos das componentes de tensão nodais na face do contorno (σ^c) fazendo

$$\mathbf{A}^c \boldsymbol{\sigma}^c = \mathbf{b}^c\tag{3.6}$$

onde \mathbf{A}^c é a matriz das condições de contorno em tensão e \mathbf{b}^c é o vetor do carregamento aplicado numa face do contorno.

Assim, em cada face de contorno com forças de superfície prescritas, são geradas quatro restrições de igualdade (Equação 3.6).

3.3.4 Critério de escoamento do material

Assumindo a condição de estado plano de deformação e que as tensões de tração são positivas, o critério de escoamento de Mohr-Coulomb pode ser expresso sob a forma

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - (2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi)^2 = 0 \quad (3.7)$$

Para satisfazer o teorema do limite inferior é necessário que o estado de tensão esteja no interior ou sob a superfície de escoamento, ou seja, $F \leq 0$ em todo ponto nodal (Sloan, 1987).

Uma vez que se deseja formular o problema em questão como um problema de programação linear, deve-se linearizar a superfície de escoamento não linear (Equação 3.7). Assim sendo, pode-se gerar uma nova superfície de escoamento, inscrita à superfície original de modo a respeitar a característica de limite inferior da carga de colapso.

A forma de representação poliédrica, ou linearizada, da superfície de escoamento está descrita em Sloan (1987) e em Araújo (1997), e resulta no seguinte sistema de inequação

$$\mathbf{A}_y \boldsymbol{\sigma}^i \leq \mathbf{b}_y \quad (3.8)$$

onde \mathbf{A}_y é a matriz de escoamento do material, $\boldsymbol{\sigma}^i$ é o vetor das componentes de tensão num ponto nodal e \mathbf{b}_y é o vetor dos termos independentes das restrições de fluxo.

3.3.5 Função objetivo

Os problemas formulados por análise limite, via método dos elementos finitos, podem ser colocados sob a forma de um problema de programação linear (PL) do tipo

$$\text{Max } \mathbf{c} \mathbf{X} \quad (3.9)$$

$$\text{Submetido a } \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{X} = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{X} \leq \mathbf{b}_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

onde \mathbf{c} é o vetor dos coeficientes da função objetivo; \mathbf{X} é o vetor global das componentes de tensão nodais; \mathbf{A}_1 é a matriz global das restrições de igualdade que contém as matrizes \mathbf{A}^e , \mathbf{A}^{ie} e \mathbf{A}^c ; \mathbf{A}_2 é matriz global das restrições de desigualdade que contém as matrizes \mathbf{A}_y de cada ponto nodal; \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 são vetores de termos independentes.

A solução do problema de PL pode ser obtida usando, p. ex., o programa LINDO (Schrage, 1991).

Ao contrário da forma padrão do problema tipo PL, as componentes \mathbf{X} podem assumir valores negativos (ver, no Capítulo 4, a forma de tratar desta peculiaridade).

Em alguns problemas (p.ex., problemas de estabilidade de taludes), a função objetivo é definida pelo peso específico do material (Yu e Sloan, 1997).

3.4 FORMULAÇÃO PARA MEIOS FRATURADOS

3.4.1 Modelo contínuo equivalente

Os meios fraturados que apresentam uma ou mais famílias de descontinuidades podem ser idealizados como um meio contínuo equivalente. A carga de colapso encontrada, neste caso, dependerá das propriedades do material intacto, além das propriedades da(s) família(s) de descontinuidade(s), bem como de suas orientações.

O modelo contínuo equivalente, neste caso, é adequado quando o maciço rochoso apresenta uma ou mais famílias de descontinuidades com espaçamento médio muito menor que a dimensão do problema em questão (Araújo, 1997).

Sloan (1994) e Araújo (1997) apresentam uma formulação para o contínuo equivalente cuja diferença entre a apresentada na seção 3.3 é a restrição adicional que prescreve o critério de escoamento de Mohr-Coulomb para a descontinuidade.

As componentes de tensão normal (σ_n^d) e cisalhante (τ^d) no plano da descontinuidade são definidas no sistema de referência local da descontinuidade da seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.11)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^{dT} = [\sigma_n^d \quad \tau^d]$ é o vetor das componentes normais e cisalhantes em cada família de descontinuidade e \mathbf{T} é a matriz de rotações de tensões, a qual depende do ângulo (θ) entre o plano horizontal e o plano da descontinuidade, conforme a convenção da trigonometria.

As tensões numa determinada descontinuidade devem obedecer ao critério de escoamento de Mohr-Coulomb, definindo a região viável (Figura 3.4) como

$$\begin{aligned} \tau^d &\leq -\sigma_n^d \operatorname{tg} \varphi^d + c^d \\ -\tau^d &\leq -\sigma_n^d \operatorname{tg} \varphi^d + c^d \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde φ^d e c^d são, respectivamente, o ângulo de atrito e a coesão da descontinuidade.

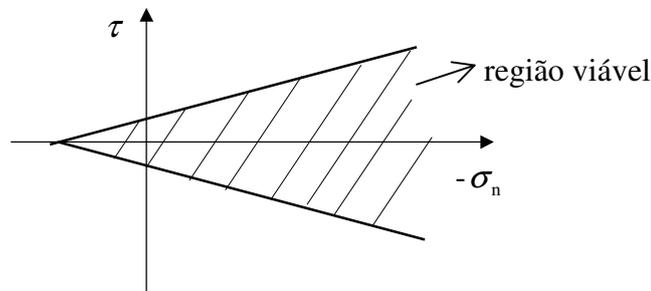


Figura 3. 4 – Região viável para o critério de escoamento numa descontinuidade

As inequações 3.12 podem ser colocadas na forma matricial abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} \varphi^d \\ -1 & \operatorname{tg} \varphi^d \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^d \leq \mathbf{R}^d \quad (3.13)$$

onde

$$\mathbf{R}^T = [c^d \quad c^d] \quad (3.14)$$

O sistema de inequações (Inequação 3.13) pode ser expresso em função das componentes de tensão no sistema global de coordenadas $x - y$, resultando a expressão

$$\begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg}\varphi^d \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi^d \end{bmatrix} \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma} \leq \mathbf{R} \quad (3.15)$$

que é da forma

$$\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \leq \mathbf{R} \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg}\varphi^d \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi^d \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (3.17)$$

Assim, para o modelo de escoamento descrito acima e detalhado em Araújo (1997), são prescritas duas restrições adicionais em cada nó para cada família de descontinuidade considerada.

3.4.2 Modelo discreto de juntas

Uma outra alternativa para o problema que apresenta uma ou mais descontinuidades no material é a modelagem através da discretização das descontinuidades. O processo aqui descrito, conforme Araújo (1997), considera a interface dos triângulos como uma junta de espessura nula e cada descontinuidade considerada deve coincidir com uma interface entre elementos.

Assim, em relação à formulação para meios contínuos, são acrescentadas duas restrições que consideram o critério de escoamento de Mohr-Coulomb nos pontos nodais de cada descontinuidade (Inequação 3.16).

A montagem de todas as restrições de igualdade (Equações 3.2, 3.4 e 3.6) e desigualdades (Inequações 3.8 e 3.16) conduz ao problema de PL para obtenção de um campo de tensões estaticamente admissível similar às Equações 3.9 e 3.10, acrescentado-se apenas a matriz \mathbf{Q}^T na matriz \mathbf{A}_2 e o vetor \mathbf{R} no vetor \mathbf{b}_2 .

3.5 FORMULAÇÃO PARA SOLOS REFORÇADOS

Dado o crescente aumento da utilização de reforços na engenharia geotécnica, é importante que se tenha uma metodologia de análise confiável para estruturas em solo reforçado. Existem vários estudos com soluções analíticas aproximadas e outros, empregando elementos finitos, que consideram a geometria do reforço e suas propriedades elasto-plásticas (Yu e Sloan, 1997).

O teorema do limite inferior, que se tem mostrado um meio efetivo para cálculo da carga de colapso em vários tipos de problemas em mecânica dos solos, é uma alternativa para se estudar a estabilidade de estruturas de solos reforçados.

Na formulação de Yu e Sloan (1997), considera-se que o solo reforçado tem comportamento de um contínuo equivalente, porém de propriedades anisotrópicas, cuja característica de escoamento equivalente pode ser determinada pelas características de escoamento de seus componentes. Esta técnica tem sido aplicada com sucesso por vários pesquisadores no estudo de fundações e taludes reforçados. É aplicável a problemas de solo reforçado, quando o espaçamento entre as camadas de reforço é relativamente pequeno, quando comparado à dimensão do problema.

Pela formulação aqui apresentada, o conjunto solo-reforço é estudado como um material não contínuo, composto por dois tipos de materiais com comportamentos distintos: solo e reforço. O reforço (unidimensional) resiste à tração, enquanto o solo possui as características de escoamento convencionais. É aplicável a problemas de solo reforçado, quando no domínio da análise existe uma (ou poucas) camada(s) de reforço, viabilizando a discretização do solo, do reforço e das interfaces.

3.5.1 Técnica do contínuo equivalente

A metodologia aqui descrita segue a empregada por Yu e Sloan (1997), na qual o solo reforçado é analisado como um material contínuo, porém, com propriedades anisotrópicas.

A Figura 3.5 ilustra esquematicamente o contínuo equivalente utilizado, na qual σ_t^r é a tensão de tração no reforço; σ_x^s , σ_y^s e τ_{xy}^s são as componentes de tensão no solo e σ_x , σ_y e τ_{xy} são as componentes de tensão no meio equivalente.

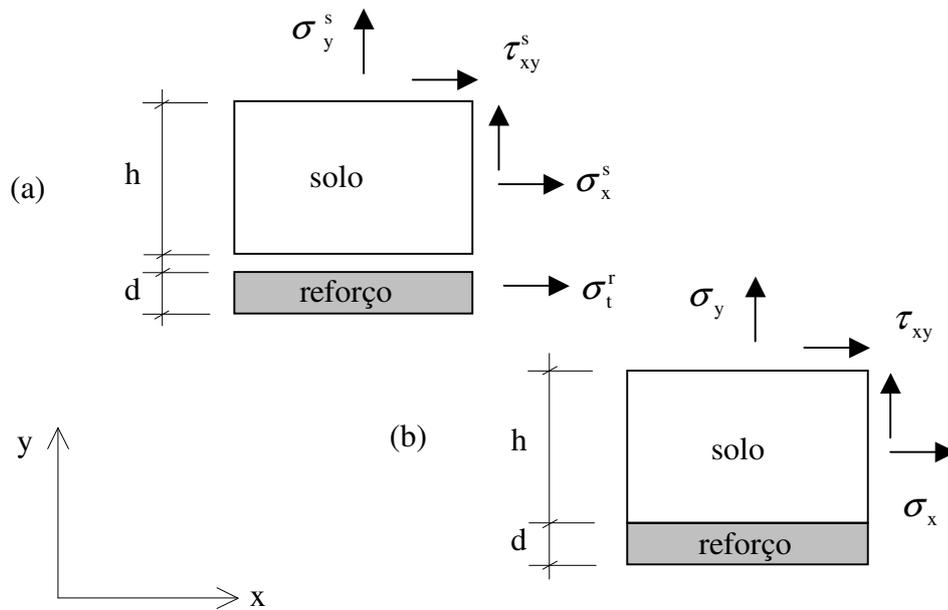


Figura 3.5 – (a) Tensões no solo e no reforço; (b) Tensões no contínuo equivalente (Yu e Sloan, 1997)

Considerando-se, ainda, que no plano $x - y$, o reforço tem espessura d e está uniformemente distribuído no contínuo com espaçamento h , se $d/h \ll 1$, então as componentes de tensão no solo podem ser dadas por

$$\sigma_x^s = \sigma_x - \sigma^r \cos^2 \theta \quad (3.18)$$

$$\sigma_y^s = \sigma_y - \sigma^r \sin^2 \theta \quad (3.19)$$

$$\tau_{xy}^s = \tau_{xy} - \sigma^r \sin \theta \cos \theta \quad (3.20)$$

onde θ é o ângulo entre o plano horizontal e o plano do reforço, medido no sentido trigonométrico e σ^r é a tensão de tração no reforço (σ_t^r) vezes a razão d/h .

Nesta técnica, as condições de equilíbrio (Equações 3.2, 3.4 e 3.6) são escritas em termos das componentes de tensão no contínuo equivalente. No entanto, o critério de escoamento deve ser observado no solo, na interface solo-reforço e no reforço.

a) Critério de escoamento do solo

Considerando-se a condição de estado plano de deformação e que as tensões de tração são positivas, pode-se escrever o critério de escoamento de Mohr-Coulomb para o solo fazendo

$$F_s = (\sigma_x - \sigma_y - \sigma^r \cos 2\theta)^2 + (2\tau_{xy} - \sigma^r \sin 2\theta)^2 - (2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y - \sigma^r) \sin \varphi)^2 = 0 \quad (3.21)$$

Tal como apresentado anteriormente, para satisfazer ao teorema do limite inferior é necessário que $F_s \leq 0$ em cada ponto nodal. Dessa forma, utilizando, a mesma representação poliédrica descrita por Araújo (1997), pode-se escrever o critério de escoamento de Mohr-Coulomb para o solo na forma linearizada

$$\mathbf{A}_y^s \boldsymbol{\sigma}^s \leq \mathbf{b}_y^s \quad (3.22)$$

onde \mathbf{A}_y^s é a matriz de escoamento do solo; $\boldsymbol{\sigma}^s$ é o vetor das componentes de tensão nodal do contínuo equivalente, incluindo-se a tensão de tração relativa ao reforço σ^r e \mathbf{b}_y^s é um vetor de termos independentes.

Para satisfazer ao critério de escoamento de Mohr-Coulomb em todo domínio, a Inequação 3.22 deve ser imposta em cada ponto nodal.

b) Critério de escoamento da interface solo-reforço

O escoamento de um nó de interface solo-reforço, segundo o critério de Mohr-Coulomb, pode ser escrito sob a forma

$$F^{sr} = |\tau| - c^{sr} + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi^{sr} = 0 \quad (3.23)$$

onde τ é a tensão cisalhante, c^{sr} é a coesão, σ_n é a tensão normal e φ^{sr} é o ângulo de atrito num nó de interface solo-reforço.

Se o critério de escoamento da interface é colocado em função das tensões no meio equivalente, tem-se

$$F^{sr} = \frac{1}{2} \left| \sin 2\theta (\sigma_y - \sigma_x) + 2 \cos 2\theta \tau_{xy} \right| - c^{sr} + (\sin^2 \theta \sigma_x + \cos^2 \theta \sigma_y - \sin 2\theta \tau_{xy}) \operatorname{tg} \varphi^{sr} = 0 \quad (3.24)$$

Para satisfazer ao teorema do limite inferior, é necessário que $F^{sr} \leq 0$ em cada nó, conduzindo a uma inequação do tipo

$$\mathbf{A}_y^{sr} \boldsymbol{\sigma} \leq \mathbf{b}_y^{sr} \quad (3.25)$$

onde \mathbf{A}_y^{sr} é uma matriz de escoamento da interface solo-reforço e \mathbf{b}_y^{sr} é um vetor de termos independentes.

Para satisfazer o critério de escoamento de Mohr-Coulomb, a Inequação 3.25 deve ser imposta em todo ponto nodal. Assim, em cada nó tem-se duas inequações adicionais que condicionam o escoamento da interface solo-reforço.

c) Escoamento à tração do reforço

Segundo esta metodologia, o reforço apenas escoar à tração e não escoar quando solicitado a esforços de cisalhamento, de flexão ou de compressão. Dessa forma, adotou-se o seguinte critério de escoamento para o reforço

$$\mathbf{I} \boldsymbol{\sigma}^r = \mathbf{b}_y^r \quad (3.26)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade, $\boldsymbol{\sigma}^r$ é o vetor da tensão à tração relativa nos pontos nodais do reforço e \mathbf{b}_y^r é o vetor de componentes iguais à tensão de escoamento relativa ao reforço (σ_0), definida como a tensão de escoamento à tração no reforço (σ_y^r) vezes a razão d/h .

A montagem de todas as restrições de igualdade (Equações 3.2, 3.4 e 3.6) e desigualdades (Inequações 3.22, 3.25 e 3.26) conduz ao problema de PL para obtenção

de um campo de tensões estaticamente admissível similar às equações 3.9 e 3.10, onde a matriz \mathbf{A}_2 é constituída pelo arranjo global das matrizes \mathbf{A}_y^s , \mathbf{A}_y^{sr} e \mathbf{I} ; e o vetor \mathbf{b}_2 pelo arranjo global dos vetores \mathbf{b}_y^s , \mathbf{b}_y^{sr} e \mathbf{b}_y^r .

3.5.2 Técnica discreta

Por esta formulação, o solo reforçado é modelado como um sistema discreto onde o solo e o reforço são tratados individualmente. O reforço é considerado como um elemento plano, resistindo unicamente à tração, e a interface solo-reforço, tal como esquematizada na Figura 3.6, é modelada como um elemento planar de espessura nula. O traço a - b representa o reforço e as linhas 1-2 e 3-4 representam, cada uma, os lados dos elementos que faceiam o reforço.

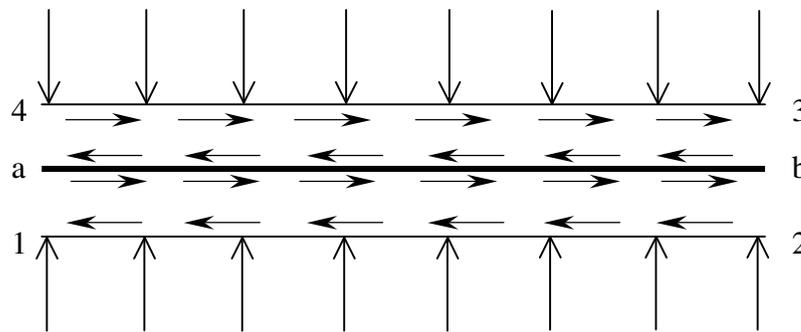


Figura 3. 6 – Elemento de interface solo-reforço segundo análise discreta

Segundo esta metodologia, além da condição de equilíbrio no elemento, na interface entre elementos e no contorno, se faz necessário estabelecer o equilíbrio, também, no reforço e na interface solo-reforço. Devendo, ainda, serem verificadas as condições de escoamento na interface solo-reforço e o escoamento à tração do reforço.

a) Equilíbrio da interface solo-reforço

O equilíbrio na interface solo-reforço é verificado impondo-se apenas a continuidade das tensões normais nos pontos nodais, ou seja

$$\begin{aligned}\sigma_{n1} &= \sigma_{n4} \\ \sigma_{n2} &= \sigma_{n3}\end{aligned}\quad (3.27)$$

Esta condição conduz ao seguinte sistema de equação

$$\mathbf{A}^{sr} \boldsymbol{\sigma}^{sr} = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

onde \mathbf{A}^{sr} é a matriz de equilíbrio na interface solo-reforço e $\boldsymbol{\sigma}^{sr}$ é o vetor das componentes de tensão nos pontos nodais da interface solo-reforço.

b) Equilíbrio do reforço

Considere a Figura 3.7, onde a linha a - b representa o reforço. No ponto a atua a tensão de tração por metro de largura do reforço T e no ponto b atua $T + dT$. Na face superior do reforço atua a tensão cisalhante τ_s e na face inferior atua a tensão cisalhante τ_i .

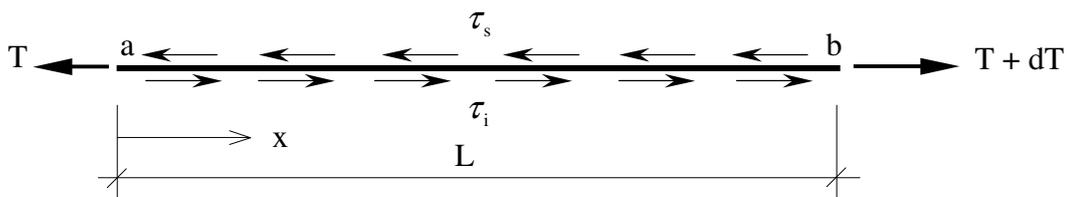


Figura 3.7 – Elemento de reforço segundo análise discreta

Assim, o equilíbrio do reforço pode ser escrito como

$$-\tau_s dx + \tau_i dx - T + T + dT = 0 \quad (3.29)$$

ou ainda

$$\frac{dT}{dx} = \tau_s - \tau_i \quad (3.30)$$

Escrevendo as tensões cisalhantes nas faces superior e inferior do reforço como, respectivamente, funções lineares das tensões cisalhantes (τ_3, τ_4) nos pontos 3 e 4 e das tensões cisalhantes (τ_1, τ_2) nos pontos 1 e 2, obtém-se

$$\begin{aligned} \tau_s &= N_1 \tau_4 + N_2 \tau_3 \\ \tau_i &= N_1 \tau_1 + N_2 \tau_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde N_1 e N_2 são funções de interpolação lineares definidas no sistema de referência local como

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde L é o comprimento do elemento de reforço.

Substituindo as expressões 3.31 em 3.30, tem-se que

$$\frac{dT}{dx} = (\tau_4 - \tau_1) + \frac{x}{L} [(\tau_3 - \tau_2) - (\tau_4 - \tau_1)] \quad (3.33)$$

Para a hipótese de variação linear do esforço de tração no reforço, o segundo termo do lado direito da Equação 3.33 deve ser nulo, ou seja

$$(\tau_3 - \tau_2) - (\tau_4 - \tau_1) = 0 \quad (3.34)$$

Portanto, a Equação 3.33 assume a forma

$$\frac{dT}{dx} = (\tau_4 - \tau_1) \quad (3.35)$$

Integrando-se a Equação 3.35 no domínio do elemento de reforço chega-se a

$$T_b - T_a = (\tau_4 - \tau_1)L \quad (3.36)$$

Pela Figura 3.8, a continuidade do esforço de tração atuante entre dois elementos de reforço fornece a expressão seguinte

$$T_b = T_c \quad (3.37)$$

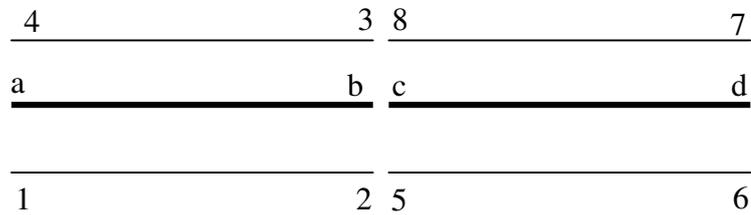


Figura 3. 8 – Dois elementos de reforço segundo análise discreta

As expressões 3.34, 3.36 e 3.37 garantem o equilíbrio do reforço.

Observação: As expressões aqui deduzidas são relativas ao sistema local de referência do reforço. Este sistema coincide com o sistema global de referência para o caso de posicionamento horizontal do reforço. No caso geral, haverá que ser feita uma rotação apropriada de tensões.

c) Escoamento da interface solo-reforço

Nesta técnica utiliza-se a mesma expressão da Equação 3.25 para modelar a condição de fluxo plástico na interface solo-reforço. Entretanto, esta equação deve ser prescrita apenas nos pontos nodais de interfaces de elementos onde haja reforço.

d) Escoamento à tração do reforço

Segundo esta metodologia, desde que se considere o escoamento à tração do reforço, esta condição pode ser expressa sob a forma

$$0 \leq T \leq T_y \quad (3.38)$$

onde T_y é o esforço de escoamento à tração do reforço.

A inequação acima deve ser imposta em cada ponto nodal dos elementos de reforço.

A montagem de todas as restrições de igualdade (Equações 3.2, 3.4, 3.6, 3.28, 3.34, 3.36 e 3.37) e desigualdades (Inequações 3.8, 3.25 e 3.38) conduz ao problema de PL para obtenção de um campo de tensões estaticamente admissível similar às equações 3.9 e 3.10.

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA REALIZADA

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as principais características da implementação numérica realizada neste trabalho. A implementação objetiva a modelagem da carga de colapso em meios contínuos, fraturados ou reforçados, sob condição plana de deformação.

Há várias possibilidades de formular, pelo método dos elementos finitos, os problemas de estabilidade pela análise limite (ver Araújo, 1997). Entretanto, em todos os problemas aqui examinados, empregou-se uma implementação numérica baseada na formulação de Limite Inferior descrita no Capítulo 3.

Foram fatores importantes para a escolha do tratamento do problema de estabilidade, via Limite Inferior, com representação poliédrica da superfície de escoamento, pelo método dos elementos finitos:

- a disponibilidade do programa de Análise Limite pela formulação de equilíbrio para meios contínuos e meios fraturados (Araújo, 1997);
- a disponibilidade do software de otimização LINDO (Schrage, 1991), que é um programa comercial utilizado para resolver problemas de Programação Linear (PL).

O programa implementado (ANALIM) neste trabalho foi desenvolvido utilizando-se a versão 4.0 do compilador Microsoft FORTRAN Power Station.

O tempo gasto para gerar o problema de PL, através da implementação, foi menor que 10 segundos para todos os casos estudados. Porém, o tempo gasto para

solução do problema de PL, via LINDO, pode ser grande, dependendo da velocidade do processador utilizado e do tamanho do problema. O problema de PL gerado pelo exemplo 5.4.2-b (17850 restrições) pode ser solucionado em até 12 minutos, em um processador pentium de 400 MHz. Entretanto, os outros problemas deste trabalho são resolvidos em menos de 20 segundos.

4.2 MATRIZES E VETORES CARACTERÍSTICOS

Nesta seção são explicitadas as matrizes e os vetores apresentados no Capítulo 3.

a) Aproximação do campo de tensões

De acordo com o MEF e utilizando o elemento finito triangular linear ilustrado na Figura 3.1, as componentes de tensão (σ_x , σ_y e τ_{xy}) em qualquer ponto do domínio do elemento podem ser escritas em função das componentes de tensão nodais (σ_{xi} , σ_{yi} e τ_{xyi}) como

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{xi} \\ \sigma_y &= \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{yi} \\ \tau_{xy} &= \sum_{i=1}^3 N_i \tau_{xyi}\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde N_i são funções de forma lineares definidas como

$$\begin{aligned}N_1 &= (\xi_1 + \eta_1 x + \zeta_1 y) / 2A \\ N_2 &= (\xi_2 + \eta_2 x + \zeta_2 y) / 2A \\ N_3 &= (\xi_3 + \eta_3 x + \zeta_3 y) / 2A\end{aligned}\tag{4.2}$$

em que

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\
\xi_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \\
\xi_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= y_2 - y_3 \\
\eta_2 &= y_3 - y_1 \\
\eta_3 &= y_1 - y_2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= x_3 - x_2 \\
\zeta_2 &= x_1 - x_3 \\
\zeta_3 &= x_2 - x_1
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$2A = |\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1| \tag{4.6}$$

b) Equilíbrio no domínio do elemento

A Equação 3.2 representa o equilíbrio das tensões no domínio do elemento. Nesta equação, o vetor das componentes de tensões nodais ($\boldsymbol{\sigma}^e$), a matriz de equilíbrio (\mathbf{A}^e) e o vetor das componentes de força de massa (\mathbf{b}^e) são definidos, respectivamente, como

$$\boldsymbol{\sigma}^{eT} = [\sigma_{x1} \quad \sigma_{y1} \quad \tau_{xy1} \quad \sigma_{x2} \quad \sigma_{y2} \quad \tau_{xy2} \quad \sigma_{x3} \quad \sigma_{y3} \quad \tau_{xy3}] \tag{4.7}$$

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & \zeta_1 & \eta_2 & 0 & \zeta_2 & \eta_3 & 0 & \zeta_3 \\ 0 & \zeta_1 & \eta_1 & 0 & \zeta_2 & \eta_2 & 0 & \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{b}^{eT} = [0 \quad \gamma] \tag{4.9}$$

onde γ é o peso específico do solo em um elemento.

c) Equilíbrio na interface entre elementos

Conforme a Figura 3.2, as tensões normal (σ_n) e cisalhante (τ), no plano da interface entre elementos, podem ser definidas na forma

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \text{sen}^2\theta \sigma_x + \text{cos}^2\theta \sigma_y - \text{sen}2\theta \tau_{xy} \\ \tau &= -\frac{1}{2}\text{sen}2\theta \sigma_x + \frac{1}{2}\text{sen}2\theta \sigma_y + \text{cos}2\theta \tau_{xy}\end{aligned}\quad (4.10)$$

onde θ é o ângulo formado pelo plano horizontal e o plano da interface entre elementos (positivo no sentido anti-horário).

A partir da Equação 4.10 e atendendo as condições das Equações 3.3 pode-se chegar a equação de equilíbrio na interface entre elementos (Equação 3.4) onde o vetor das componentes de tensão nodais da interface (σ^{ie}) é definido como

$$\sigma^{ieT} = \left[\sigma_{x1} \quad \sigma_{y1} \quad \tau_{xy1} \quad \sigma_{x2} \quad \sigma_{y2} \quad \tau_{xy2} \quad \sigma_{x3} \quad \sigma_{y3} \quad \tau_{xy3} \quad \sigma_{x4} \quad \sigma_{y4} \quad \tau_{xy4} \right] \quad (4.11)$$

e a matriz de equilíbrio na interface entre elementos (A^{ie}) é definida na forma

$$A^{ie} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & -\mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & -\mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

em que

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \text{sen}^2\theta & \text{cos}^2\theta & -\text{sen}2\theta \\ -\frac{1}{2}\text{sen}2\theta & \frac{1}{2}\text{sen}2\theta & \text{cos}2\theta \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

d) Condições de contorno em tensão

Pela Equação 3.6, a matriz das condições de contorno em tensão (A^c) é definida na forma

$$A^c = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

onde \mathbf{T} é a matriz definida pela Equação 4.13. O vetor das componentes de tensões numa face do contorno (σ^c) é definido na forma

$$\sigma^{cT} = \left[\sigma_{x1} \quad \sigma_{y1} \quad \tau_{xy1} \quad \sigma_{x2} \quad \sigma_{y2} \quad \tau_{xy2} \right] \quad (4.15)$$

e o vetor de carregamento aplicado numa face do contorno (b^c) é definido na forma

$$\mathbf{b}^{cT} = [q_1 \quad t_1 \quad q_2 \quad t_2] \quad (4.16)$$

e) Critério de escoamento do material

O critério de Mohr-Coulomb na forma linearizada, indicada a seguir e descrita por Araújo (1997), é utilizado para descrever o escoamento do material.

$$A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} \leq D_k; k = 1, 2, \dots, p \quad (4.17)$$

em que

$$\begin{aligned} A_k &= \cos(2\pi k/p) + \sin \varphi \cos(\pi/p) \\ B_k &= \sin \varphi \cos(\pi/p) - \cos(2\pi k/p) \\ C_k &= 2 \sin(2\pi k/p) \\ D_k &= 2c \cos \varphi \cos(\pi/p) \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde c e φ são, respectivamente, a coesão e o ângulo de atrito do material, k é o k -ésimo vértice do polígono que aproxima a superfície de escoamento e p é o número de lados do mesmo polígono.

Desta forma, a matriz de escoamento do material (\mathbf{A}_y), citada na Equação 3.8, pode ser definida como

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_k & B_k & C_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_p & B_p & C_p \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

O vetor das componentes de tensão num ponto nodal ($\boldsymbol{\sigma}^i$) e o vetor dos termos independentes das restrições de fluxo (\mathbf{b}_y) são definidos, respectivamente, como

$$\boldsymbol{\sigma}^{iT} = [\sigma_{xi} \quad \sigma_{yi} \quad \tau_{xyi}] \quad (4.20)$$

$$\mathbf{b}_y^T = [D_1 \quad \dots \quad D_k \quad \dots \quad D_p] \quad (4.21)$$

f) Critério de escoamento do solo reforçado – técnica do contínuo equivalente

Para análise de solos reforçados pela técnica do contínuo equivalente, utiliza-se a mesma representação poliédrica descrita anteriormente, porém levando em conta a tensão de tração relativa ao reforço (σ^r), ou seja

$$A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} + D_k \sigma^r \leq E_k; k = 1, 2, \dots, p \quad (4.22)$$

em que

$$\begin{aligned} A_k &= \cos(2\pi k/p) + \sin\varphi \cos(\pi/p) \\ B_k &= \sin\varphi \cos(\pi/p) - \cos(2\pi k/p) \\ C_k &= 2 \sin(2\pi k/p) \\ D_k &= -\cos 2\theta \cos(2\pi k/p) - \sin 2\theta \sin(2\pi k/p) - \sin\varphi \cos(\pi/p) \\ E_k &= 2c \cos\varphi \cos(\pi/p) \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde c e φ são, respectivamente, a coesão e o ângulo de atrito do solo, θ é o ângulo entre o plano horizontal e o plano do reforço (positivo no sentido anti-horário), k é o k -ésimo vértice do polígono que aproxima a superfície de escoamento, e p é o número de lados do mesmo polígono.

Pela Equação 3.22, a matriz de escoamento do solo (\mathbf{A}_y^s) é definida como

$$\mathbf{A}_y^s = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_k & B_k & C_k & D_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_p & B_p & C_p & D_p \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

O vetor das componentes de tensão nodal do contínuo equivalente ($\boldsymbol{\sigma}^s$) é definido como

$$\boldsymbol{\sigma}^s = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \sigma^r] \quad (4.25)$$

e o vetor de termos independentes \mathbf{b}_y^s é definido como

$$\mathbf{b}_y^{sT} = [E_1 \quad \dots \quad E_k \quad \dots \quad E_p] \quad (4.26)$$

g) Critério de escoamento da interface solo-reforço

Tanto a técnica do contínuo equivalente quanto a técnica discreta, empregada para a análise de solo reforçado, utiliza o critério de escoamento da interface solo-reforço (Equação 3.24) escrita na forma linearizada

$$A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} \leq D_k ; k = 1,2 \quad (4.27)$$

em que

$$\begin{aligned} A_k &= \sin^2 \theta \operatorname{tg} \varphi^{sr} + (-1)^k \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ B_k &= \cos^2 \theta \operatorname{tg} \varphi^{sr} - (-1)^k \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ C_k &= -\sin 2\theta \operatorname{tg} \varphi^{sr} - (-1)^k \cos 2\theta \\ D_k &= c^{sr} \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde c^{sr} e φ^{sr} são, respectivamente, a coesão e o ângulo de atrito da interface solo-reforço e θ é o ângulo entre o plano horizontal e o plano do reforço (positivo no sentido anti-horário).

Pela Equação 3.25, a matriz de escoamento da interface solo-reforço (\mathbf{A}_y^{sr}) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{A}_y^{sr} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

e o vetor de termos independentes (\mathbf{b}_y^{sr}) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{b}_y^{srT} = [D_1 \quad D_2] \quad (4.30)$$

h) Escoamento à tração no reforço

De acordo com a Equação 3.26 que representa o critério de escoamento à tração do reforço pode-se definir o vetor da tensão à tração relativa nos pontos nodais do reforço (σ^r) e o vetor (\mathbf{b}_y^r), respectivamente como

$$\boldsymbol{\sigma}^r = [\sigma_1^r \quad \dots \quad \sigma_n^r] \quad (4.31)$$

onde n é o número de pontos nodais reforçados e

$$\mathbf{b}_y^r = [\sigma_0 \quad \dots \quad \sigma_0] \quad (4.32)$$

em que σ_0 é a tensão de escoamento relativa no reforço, definida como a tensão de escoamento à tração no reforço (σ_y^r) vezes a razão d/h.

i) Equilíbrio da interface solo-reforço – técnica discreta

A matriz (\mathbf{A}^{sr}) de equilíbrio na interface solo-reforço e o vetor ($\boldsymbol{\sigma}^{sr}$) das componentes de tensão nos pontos nodais da interface solo-reforço são, respectivamente, definidos como

$$\boldsymbol{\sigma}^{srT} = [\sigma_{x1} \quad \sigma_{y1} \quad \tau_{xy1} \quad \sigma_{x2} \quad \sigma_{y2} \quad \tau_{xy2} \quad \sigma_{x3} \quad \sigma_{y3} \quad \tau_{xy3} \quad \sigma_{x4} \quad \sigma_{y4} \quad \tau_{xy4}] \quad (4.33)$$

$$\mathbf{A}^{sr} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^* & -\mathbf{T}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}^* & -\mathbf{T}^* \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

em que

$$\mathbf{T}^* = [\text{sen}^2\theta \quad \text{cos}^2\theta \quad -\text{sen}2\theta] \quad (4.35)$$

4.3 FLUXOGRAMA

A seqüência de passos para a solução de um determinado problema segue os procedimentos do fluxograma indicado pela Figura 4.1.

Entrada de dados gerados pelo MTOOL - O MTOOL é um gerador de malhas de elementos finitos planos, desenvolvido pelo grupo de Computação Gráfica da PUC/Rio, onde é desenhada a malha empregada para determinado problema. Este programa gera um arquivo padrão denominado “neutral file” (exemplo.nf), onde são editados dados adicionais que serão utilizados na etapa seguinte.

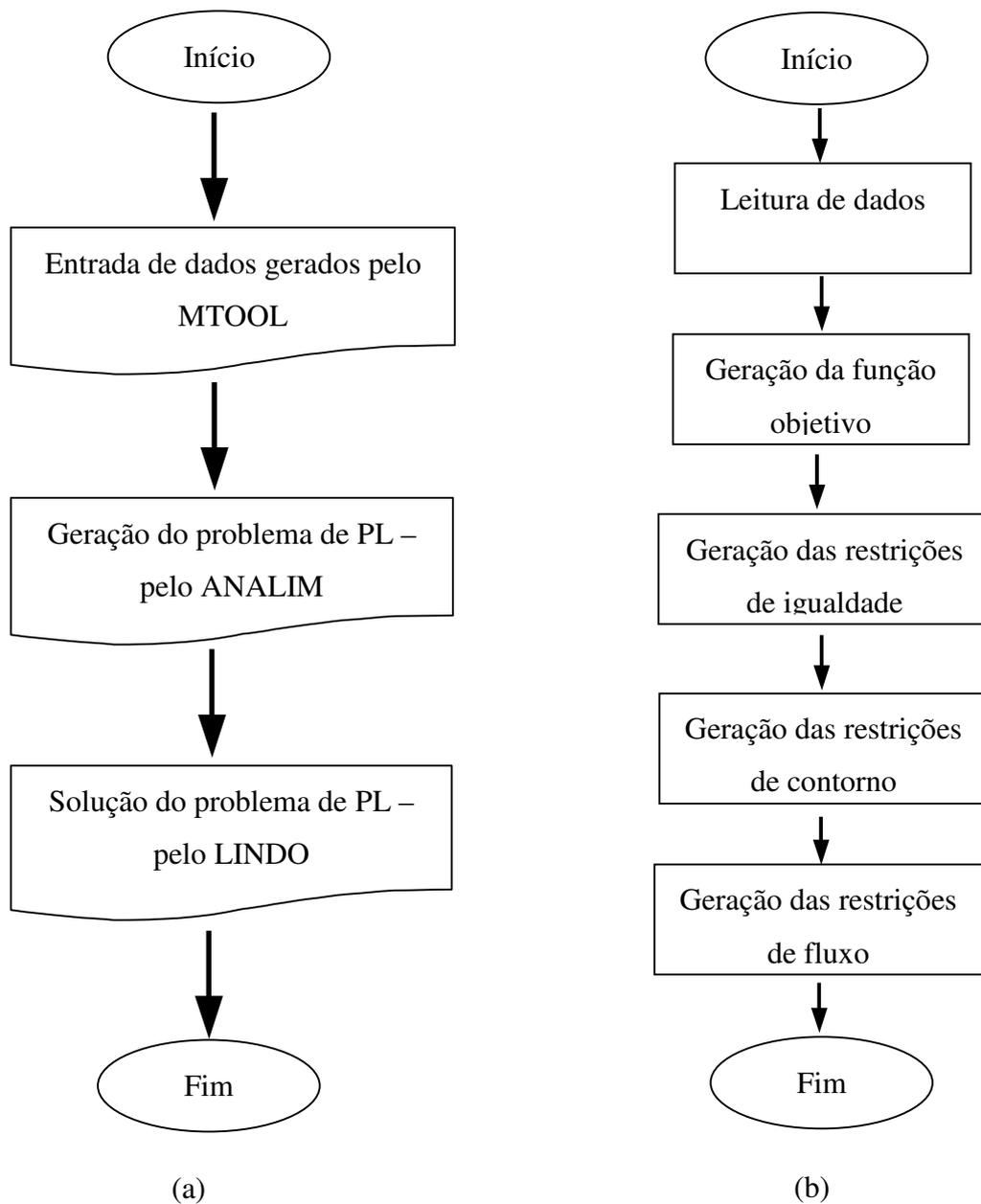


Figura 4. 1 – Fluxograma geral e (b) ANALIM

Geração do problema de PL pelo ANALIM – as restrições geradas pelo programa implementado, conforme indicado no fluxograma do programa (Figura 4.1-b), são escritas na notação usual da Programação Matemática. Como as componentes de

tensão podem ter qualquer sinal, as variáveis são declaradas como “FREE” no arquivo de entrada do LINDO, exceto as variáveis que representam a tensão de tração no reforço. O problema de PL gerado é armazenado em arquivo (exemplo.lin).

Solução do problema de PL pelo LINDO – o problema de PL gerado na etapa anterior é solucionado pelo software LINDO. O arquivo de saída gerado pelo LINDO (exemplo.prn) armazena a solução do problema.

Na saída do software LINDO, é principalmente observada a carga de colapso resultante do problema (função objetivo). Outros valores no arquivo de saída são as componentes de tensão em cada ponto nodal ou a tensão de tração nos nós do reforço.

4.4 EXEMPLO ILUSTRATIVO

O problema de compressão simples da Figura 4.2-a é um exemplo usado para ilustrar a utilização da implementação realizada neste trabalho.

A malha gerada pelo MTOOL é mostrada pela Figura 4.2-b, onde está indicada a numeração dos nós.

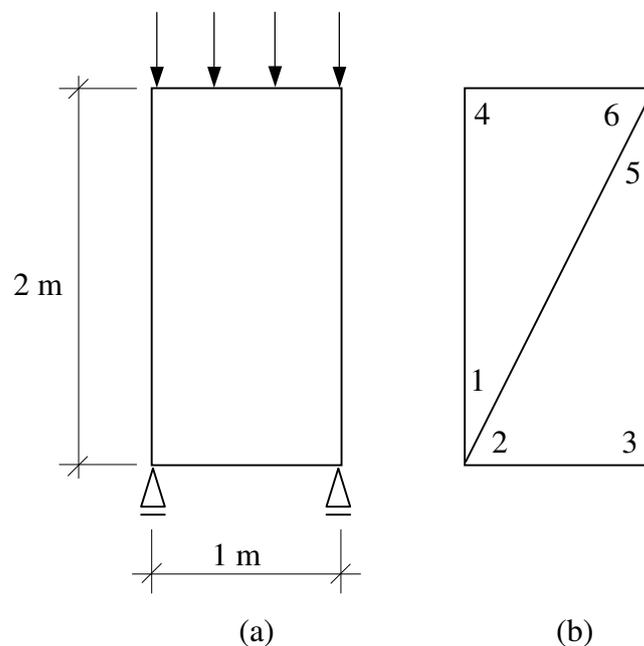


Figura 4. 2 – Compressão simples

(a) descrição esquemática do problema e (b) malha

As condições de contorno do problema são as seguintes:

faces 1-4 e 3-5: $\sigma_n = 0$ e $\tau = 0$;

face 2-3: $\tau = 0$;

face 4-6: σ_n é uniforme e $\tau = 0$.

Atribui-se as seguintes características ao material:

$\gamma = 0$ kN/m³;

número de hiperplanos: 4; $c = 1$ kPa e $\phi = 0^\circ$.

Os dados gerados pelo MTOOL são os seguintes. O texto em **negrito** foi editado manualmente.

```
%HEADER
File created by mtool program
%HEADER.ANALYSIS
'plane_stress'
%NODE
6
%NODE.COORD
6
1 0.000000 0.000000 0.000000
2 0.000000 0.000000 0.000000
3 1.000000 0.000000 0.000000
4 0.000000 2.000000 0.000000
5 1.000000 2.000000 0.000000
6 1.000000 2.000000 0.000000
%MATERIAL.MOHR_COULOMB
1
1 0 4 1 0
%INTEGRATION.ORDER
1
1 0 0 0 0 0 0
%ELEMENT
3
%ELEMENT.INTERFACE
1
1 0 0 0 6 1 2 5
%ELEMENT.T3
2
2 1 0 1 6 4 1
3 1 0 1 2 3 5
%LOAD.CASE.EDGE.FORCES
2
1 4 1 0 0 0 0
2 5 3 0 0 0 0
%LOAD.CASE.EDGE.TALZERO
2
```

```

1 2 3
%LOAD.CASE.EDGE.OPTIMIZED
1
1 4 6
%END

```

onde

“%LOAD.CASE.EDGE.FORCES” representam as faces livres e assim:

```

%LOAD.CASE.EDGE.FORCES
número de faces livres

```

```

(número da face) (1° nó da face) (2° nó da face)  $\sigma_{n1}$   $\tau_1$   $\sigma_{n2}$   $\tau_2$ 
(número da face) (1° nó da face) (2° nó da face)  $\sigma_{n1}$   $\tau_1$   $\sigma_{n2}$   $\tau_2$ 

```

“%LOAD.CASE.EDGE.TALZERO” representam as faces onde $\tau = 0$ e assim:

```

%LOAD.CASE.EDGE.TALZERO
número de nós onde  $\tau = 0$ 

```

```

(número qualquer) 1° nó, 2° nó

```

“%LOAD.CASE.EDGE.OPTIMIZED” representam as faces onde o carregamento deve ser otimizado, desse modo:

```

%LOAD.CASE.EDGE.OPTIMIZED
número de faces
(número da face) 1° nó da face, 2° nó da face

```

O arquivo anterior, nomeado EXEMPLO.NF, contém os dados de entrada do programa ANALIM, cuja saída é a seguinte:

```

Max -.500 X11 -.500 X17
Subject to
!Restrições de equilíbrio dos elementos
2) +1.000000 X16 -1.000000 X10 +.500000 X12 -.500000 X3 = .00
3) +1.000000 X18 +.500000 X11 -1.000000 X12 -.500000 X2 = .00
4) -1.000000 X4 +1.000000 X7 -.500000 X9 +.500000 X15 = .00
5) -1.000000 X6 -.500000 X8 +1.000000 X9 +.500000 X14 = .00
!Restrições de equilíbrio da descontinuidade
6) +.8000 X16 +.2000 X17 -.8000 X18 -.8000 X13 -.2000 X14 +.8000 X15 = 0.0
7) +.8000 X1 +.2000 X2 -.8000 X3 -.8000 X4 -.2000 X5 +.8000 X6 = 0.0
8) -.4000 X16 +.4000 X17 -.6000 X18 +.4000 X13 -.4000 X14 +.6000 X15 = 0.0
9) -.4000 X1 +.4000 X2 -.6000 X3 +.4000 X4 -.4000 X5 +.6000 X6 = 0.0
!Restrições de força no contorno
10) +1.0000 X10 = .000
11) -1.0000 X12 = .000
12) +1.0000 X1 = .000
13) -1.0000 X3 = .000
14) +1.0000 X13 = .000
15) -1.0000 X15 = .000
16) +1.0000 X7 = .000
17) -1.0000 X9 = .000

```

```

!Restrições do tipo carregamento uniforme
18)+1.000 X11 -1.000 X17 = .00
!Restrições do tipo carregamento s/ atrito
19) X12 = 0.0
20) X18 = 0.0
!Restrições do tipo "tal = zero"
21) X6 = 0.0
22) X9 = 0.0
!Restrições de fluxo do material intacto
23)+2.0000 X3 < 1.414214
24)-1.0000 X1 +1.0000 X2 < 1.414214
25)-2.0000 X3 < 1.414214
26)+1.0000 X1 -1.0000 X2 < 1.414214
27)+2.0000 X6 < 1.414214
28)-1.0000 X4 +1.0000 X5 < 1.414214
29)-2.0000 X6 < 1.414214
30)+1.0000 X4 -1.0000 X5 < 1.414214
31)+2.0000 X9 < 1.414214
32)-1.0000 X7 +1.0000 X8 < 1.414214
33)-2.0000 X9 < 1.414214
34)+1.0000 X7 -1.0000 X8 < 1.414214
35)+2.0000 X12 < 1.414214
36)-1.0000 X10 +1.0000 X11 < 1.414214
37)-2.0000 X12 < 1.414214
38)+1.0000 X10 -1.0000 X11 < 1.414214
39)+2.0000 X15 < 1.414214
40)-1.0000 X13 +1.0000 X14 < 1.414214
41)-2.0000 X15 < 1.414214
42)+1.0000 X13 -1.0000 X14 < 1.414214
43)+2.0000 X18 < 1.414214
44)-1.0000 X16 +1.0000 X17 < 1.414214
45)-2.0000 X18 < 1.414214
46)+1.0000 X16 -1.0000 X17 < 1.414214
End
Free X1
Free X2
Free X3
Free X4
Free X5
Free X6
Free X7
Free X8
Free X9
Free X10
Free X11
Free X12
Free X13
Free X14
Free X15
Free X16
Free X17
Free X18

```

Este arquivo, nomeado EXEMPLO.LIN, contém o problema de PL que é solucionado pelo LINDO. O arquivo de saída do LINDO é o que segue (EXEMPLO.PRN).

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 14

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1.982890

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	-1.982890	0.000000
X17	-1.982890	0.000000
X16	0.000000	0.000000
X10	0.000000	0.000000
X12	0.000000	0.000000
X3	0.000000	0.000000
X18	0.000000	0.000000
X2	-1.982890	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X7	0.000000	0.000000
X9	0.000000	0.000000
X15	0.000000	0.000000
X6	0.000000	0.000000
X8	-1.982890	0.000000
X14	-1.982890	0.000000
X13	0.000000	0.000000
X1	0.000000	0.000000
X5	-1.982890	0.000000

No arquivo EXEMPLO.PRN pode ser observada a função objetivo, além das outras variáveis que representam as tensões nodais. Por exemplo, para o ponto 2 da Figura 4.2, σ_x , σ_y e τ_{xy} são representados, respectivamente, por X4, X5 e X6.

CAPÍTULO 5

PROBLEMAS ESTUDADOS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada uma série de exemplos de problemas clássicos da literatura geotécnica. Estes exemplos são estudados segundo a metodologia descrita nos Capítulos 3 e 4.

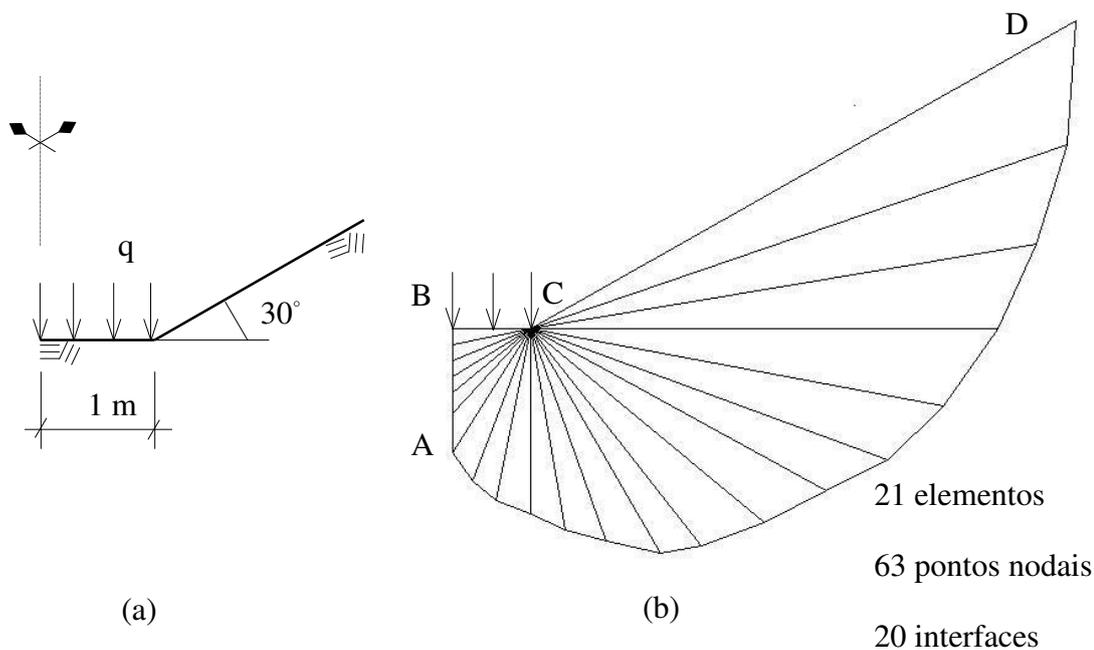
Os casos estudados têm a finalidade de validar as implementações computacionais realizadas para análise de problemas de solos reforçados pelas técnicas do contínuo equivalente e discreta, e ainda, apresentar a aplicação para análise de problemas em meios contínuos e fraturados.

O tamanho do problema de PL gerado é condicionado, principalmente, pelo número de hiperplanos usados na representação poliédrica da superfície de escoamento e pelo número de elementos da malha empregada. Portanto, em todos os problemas estudados, a superfície de escoamento de Mohr-Coulomb é aproximada por um poliedro com 24 lados ($p = 24$).

5.2 PROBLEMA EM MEIO CONTÍNUO

5.2.1 Capacidade de carga de uma fundação em terreno inclinado

A Figura 5.1 ilustra o problema e a malha utilizada.



**Figura 5. 1 – Capacidade de carga de uma fundação em terreno inclinado
definição esquemática do problema e (b) malha**

Considerando que a fundação é lisa e flexível, pode-se definir as seguintes condições de contorno do problema

face A - B : $\tau = 0$ (simetria)

face B - C : $\sigma_n^B = \sigma_n^C$ e $\tau = 0$

face C - D : $\sigma_n = \tau = 0$

onde σ_n e τ são, respectivamente, a tensão normal e a tensão cisalhante na face especificada.

Para o material foram adotadas as seguintes propriedades: coesão unitária ($c = 1 \text{ kPa}$) e peso próprio nulo ($\gamma = 0 \text{ kN/m}^3$).

A Tabela 5.1 mostra o valor da carga de colapso (q) em função do ângulo de atrito do material (φ). Como era de se esperar, quanto maior o ângulo de atrito do material maior a capacidade de carga da fundação.

Tabela 5. 1 – Capacidade de carga de uma fundação em terreno inclinado

Superfície do terreno	$\varphi(^{\circ})$	0	10	20	30
Inclinada	$q \text{ (kN/m)}$	6,12	11,04	22,51	54,51
Horizontal	$q^* \text{ (kN/m)}$	5,10	8,23	14,52	29,16

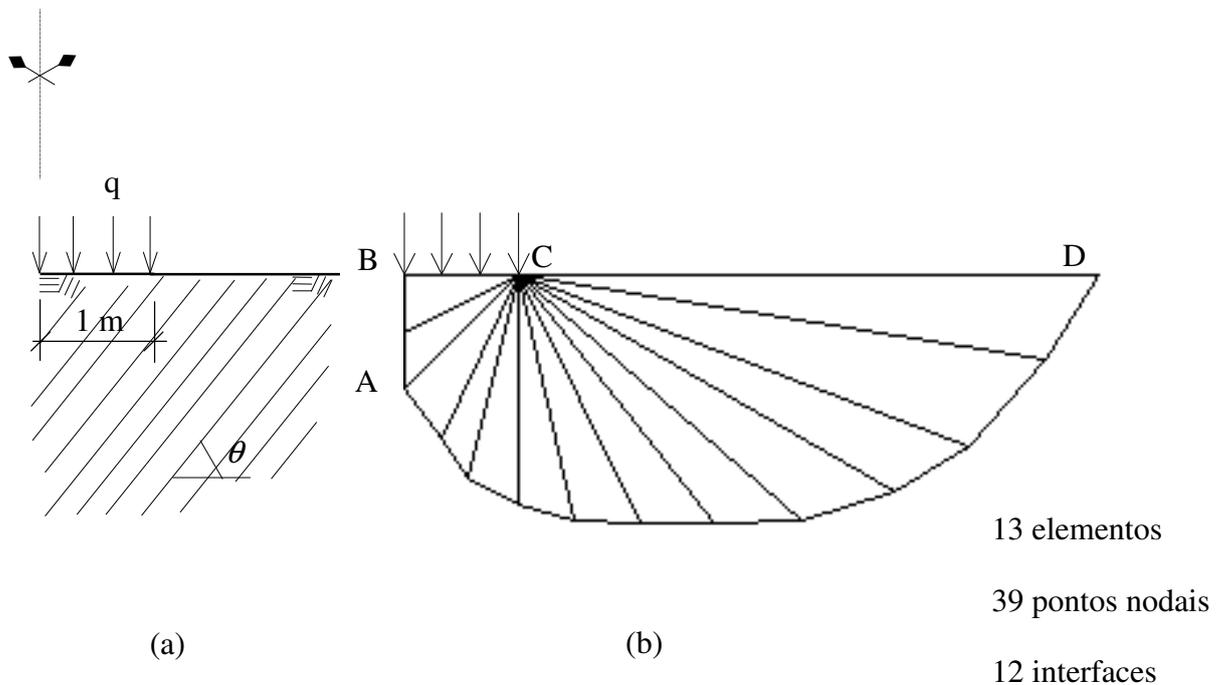
Apresenta-se, ainda, nesta tabela, a carga de colapso (q^*) obtida considerando-se a superfície do terreno horizontal. Como pode ser observado, a inclinação do terreno tem o efeito de aumentar a capacidade de carga da fundação.

5.3 PROBLEMAS EM MEIOS FRATURADOS

Aqui se analisam dois casos de problemas em meios fraturados. O primeiro utilizando o modelo do contínuo equivalente e o segundo empregando o modelo discreto de juntas (descontinuidades).

5.3.1 Fundação em meio multilaminado

Neste exemplo, analisa-se, através do modelo do contínuo equivalente, uma fundação em meio multilaminado, como ilustrado na Figura 5.2-a.



**Figura 5. 2 – Capacidade de carga de uma fundação em meio fraturado
definição esquemática do problema e (b) malha**

Este problema foi estudado por Yu e Sloan (1994) e Araújo (1997), baseando-se na mesma formulação implementada neste trabalho.

A malha de elementos finitos utilizada é apresentada na Figura 5.2-b e as condições de contorno adotadas foram as seguintes

face A - B : $\tau = 0$ (simetria)

face B - C : $\sigma_n^B = \sigma_n^C$ e $\tau = 0$

face C - D : $\sigma_n = \tau = 0$

O peso específico do solo foi desprezado ($\gamma = 0 \text{ kN/m}^3$) e os parâmetros de resistência do solo foram adotados como: $c = 1 \text{ kPa}$ e $\varphi = 35^\circ$. Para a família de descontinuidades foram adotados os seguintes parâmetros de resistência: $c_j = 0,1 \text{ kPa}$ e $\varphi_j = 35^\circ$.

A Figura 5.3 mostra os resultados obtidos para a carga de colapso (q) e a carga de colapso de Yu e Sloan (q_{Yu}), em função do ângulo entre o plano horizontal e o plano da família de descontinuidades (θ). Como pode ser observado, a carga q obtida é praticamente a mesma obtida por Yu e Sloan, e este fato valida a implementação realizada.

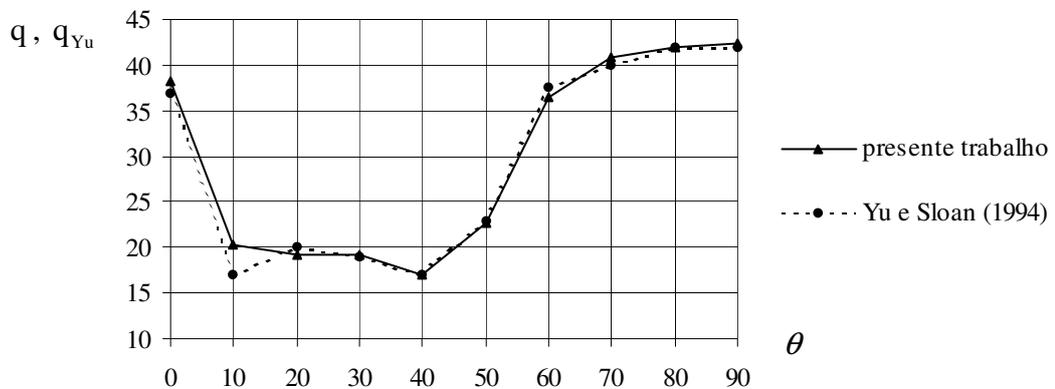
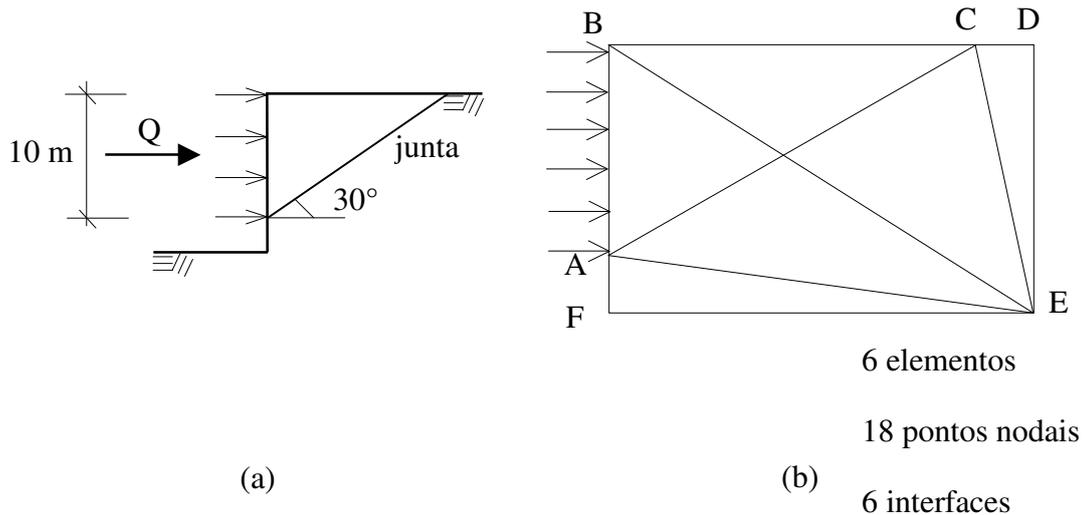


Figura 5. 3 – Comparação entre q e q_{Yu} em função de θ

5.3.2 Talude com um plano de fraqueza

O objetivo deste problema é a determinação, através do modelo discreto de juntas, da carga Q mínima para manter estável o talude vertical ilustrado na Figura 5.4-a.



**Figura 5. 4 – Estabilidade de um bloco de rocha
definição esquemática do problema e (b) malha**

A solução analítica, via equilíbrio limite, pode ser obtida através da equação de equilíbrio do bloco

$$w \sin 30^\circ = Q \cos 30^\circ + (w \cos 30^\circ - Q \sin 30^\circ) \operatorname{tg} \varphi_j$$

onde w é o peso do bloco e Q é a carga concentrada resultante. Supondo $\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$, $c_j = 0 \text{ kPa}$ e $\varphi_j = 26,565^\circ$, obtém-se uma carga de colapso de $Q = 252 \text{ kN}$.

A solução numérica foi obtida, supondo o material idealmente rígido, utilizando-se a malha de elementos finitos ilustrada na Figura 5.4-b e adotando-se as seguintes condições de contorno

$$\text{face A - B: } \sigma_n^A = \sigma_n^B \text{ e } \tau = 0$$

faces F - A , B - C e C - D : $\sigma_n = \tau = 0$

O valor obtido através da solução numérica coincide com a solução analítica exata do problema, validando a implementação realizada neste trabalho.

5.4 PROBLEMAS DE SOLO REFORÇADO

Neste item apresentam-se exemplos de análise de solos reforçados pelas técnicas do contínuo equivalente e discreta.

Nos dois casos analisados, o reforço está na posição horizontal ($\theta = 0$).

5.4.1 Técnica do contínuo equivalente

a) Fundação em solo reforçado

A fundação em solo reforçado ilustrada na Figura 5.5-a é analisada numericamente utilizando-se a malha de elementos finitos indicada na Figura 5.5-b, considerando o solo não coesivo ($c = 0$ kPa) e desprezando o peso próprio do material ($\gamma = 0$ kN/m³).

As condições de contorno do problema adotadas são

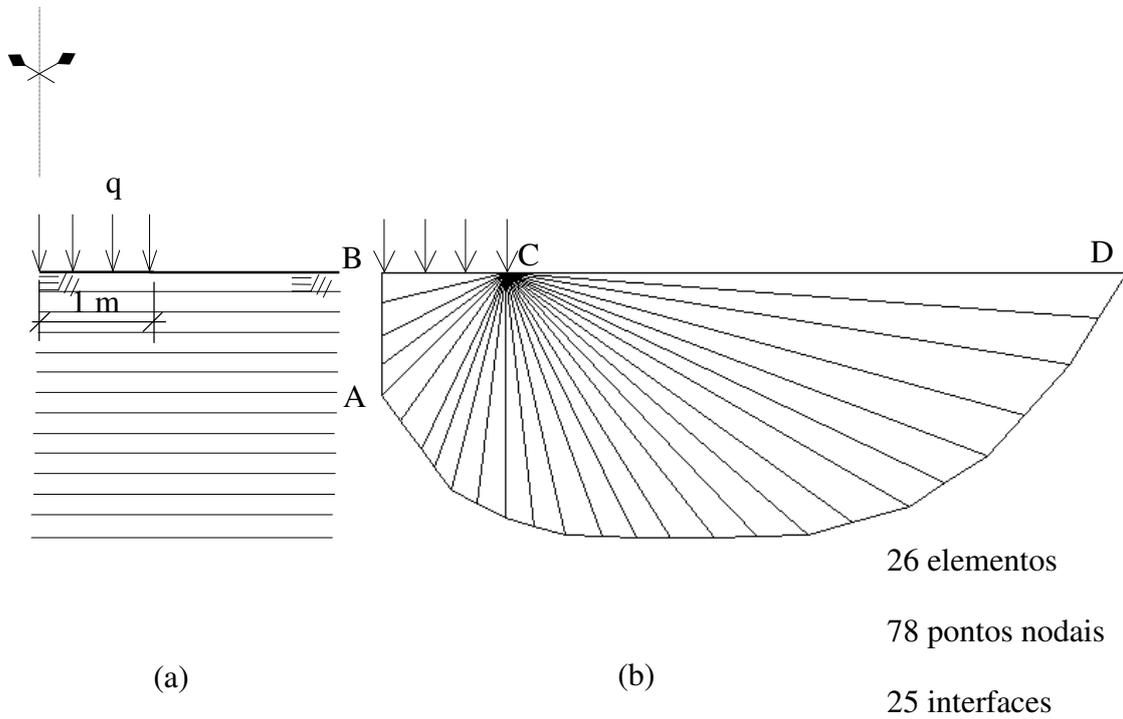
face A - B : $\tau = 0$ (simetria)

face B - C : $\sigma_n^B = \sigma_n^C$ e $\tau = 0$

face C - D : $\sigma_n = \tau = 0$

Adotou-se um valor unitário para a tensão de escoamento relativa ao reforço, ou seja, $\sigma_0 = 1$ kPa, e para a interface solo-reforço duas hipóteses foram feitas. A primeira (hipótese 1) considera esta interface com tensão de escoamento ilimitada e os resultados são comparados com a solução numérica apresentada por Yu e Sloan (1997) e a solução exata apresentada por Sawicki (ver Yu e Sloan). A segunda (hipótese 2) considera a

variação dos parâmetros de resistência da interface observando a sua interferência nos resultados numéricos.



**Figura 5. 5 – Capacidade de carga de uma fundação em solo reforçado
definição esquemática do problema e (b) malha**

a.1) Hipótese 1

Os resultados mostrados na Tabela 5.2 foram obtidos sem prescrever as restrições de desigualdade para escoamento da interface solo-reforço.

Tabela 5. 2 – Capacidade de carga (adimensional) de uma fundação em solo reforçado

$\varphi(^{\circ})$	10	15	20	25	30	35
$\frac{q}{\sigma_0}$	1,6	2,0	2,7	3,5	4,9	7,0
$\frac{q_{Yu}}{\sigma_0}$	1,4	1,9	2,4	3,0	3,6	4,8
$\frac{q_{Sawicki}}{\sigma_0}$	1,6	2,1	2,7	3,6	5,0	7,2

q_{Yu} - carga de colapso encontrada por Yu e Sloan (1997)

$q_{Sawicki}$ - carga de colapso encontrada por Sawicki (Yu e Sloan, 1997)

Analisando-se a Tabela 5.2, verifica-se que a carga de colapso q encontrada no presente trabalho reproduz com grande precisão a solução exata de Sawicki (Yu e Sloan). Em relação à diferença entre a carga (q) e a encontrada por Yu e Sloan (q_{Yu}), conclui-se que é devida a utilização de malhas diferentes, uma vez que a formulação empregada nos dois casos são idênticas.

a.2) Hipótese 2

A carga de colapso q obtida pela formulação de limite inferior, implementada neste trabalho, é comparada com a carga de colapso q_{Yu}^* obtida por Yu e Sloan, pela formulação de limite superior.

A Tabela 5.3 mostra os valores de capacidade de carga em função do ângulo de atrito do material (φ) e do ângulo de atrito da interface solo-reforço (φ_i).

Tabela 5.3 – Capacidade de carga (adimensional) de uma fundação em solo reforçado

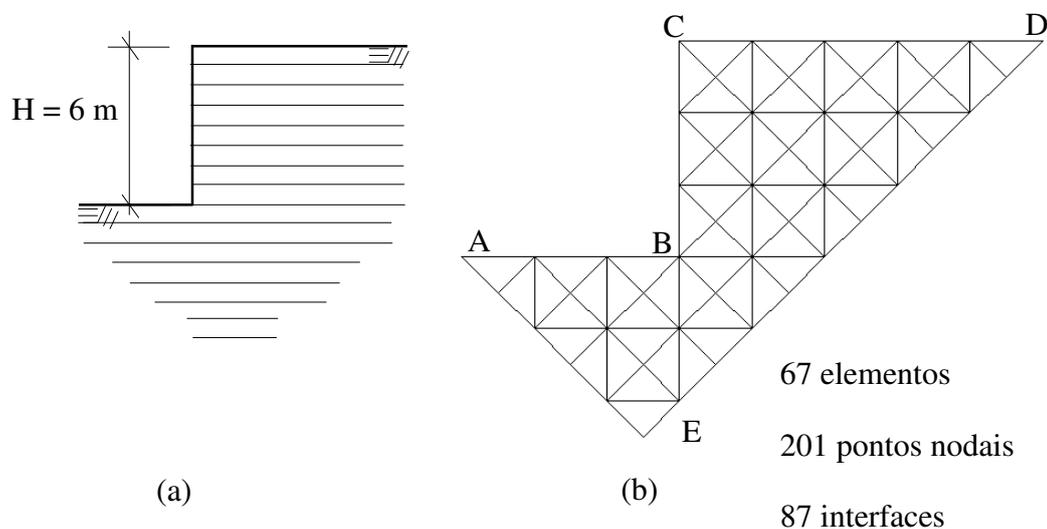
	$\varphi(^\circ)$	10	15	20	25	30	35
$\varphi_i = 0$	$\frac{q}{\sigma_0}$	1,4	1,7	2,0	2,4	3,0	3,6
	$\frac{q_{Yu}^*}{\sigma_0}$	1,4	1,8	2,3	2,7	3,1	3,8
$\varphi_i = \frac{\varphi}{2}$	$\frac{q}{\sigma_0}$	1,4	1,9	2,3	3,2	4,1	5,2
	$\frac{q_{Yu}^*}{\sigma_0}$	1,6	2,1	2,6	3,5	4,4	6,1
$\varphi_i = \varphi$	$\frac{q}{\sigma_0}$	1,6	2,0	2,7	3,5	4,9	7,0
	$\frac{q_{Yu}^*}{\sigma_0}$	1,7	2,3	2,8	4,1	5,5	8,5

Nota-se que, para todos os casos analisados de φ_i , as cargas de colapso q e q_{Yu}^* são muito próximas. Observa-se, também, que a capacidade de carga da fundação aumenta com o aumento de φ_i e o aumento da capacidade de carga é mais significativo para ângulos de atrito mais altos. Estes resultados mostram que as características de resistência da interface influem consideravelmente na capacidade de carga da fundação.

Observa-se que, para o caso de $\varphi = \varphi_1$, a solução é equivalente àquela da hipótese 1, validando, mais uma vez, a implementação numérica deste trabalho.

b) Talude reforçado

Um talude vertical de 6m de altura, Figura 5.6-a, constituído por um material não coesivo ($c = 0$ kPa) é reforçado por um sistema de reforço onde $d/h \ll 1$. Nesta análise não foram prescritas as condições de escoamento da interface solo-reforço.



**Figura 5. 6 – Estabilidade de talude em solo reforçado
(a) definição esquemática do problema e (b) malha**

Utilizando a técnica do contínuo equivalente, Yu e Sloan (1997) chegaram à seguinte relação para o número de estabilidade (λ)

$$\lambda = \frac{\gamma H}{\sigma_0} \quad (5.1)$$

onde γ é o peso específico do solo, H é a altura do talude e σ_0 é a tensão de escoamento relativa ao reforço.

Adotando-se $H = 6\text{ m}$ e $\sigma_0 = 6\text{ kPa}$ e substituindo-se na equação 5.1, tem-se que $\lambda = \gamma$. Assim sendo, o número de estabilidade, neste problema, é obtido pela maximização do peso específico do solo.

A malha de elementos finitos empregada é apresentada na Figura 5.6-b e as condições de contorno adotadas são

$$\text{faces A - B, B - C e C - D: } \sigma_n = \tau = 0$$

A Tabela 5.4 mostra os valores de λ em função do ângulo de atrito do material (φ). Apresenta-se, ainda, nesta tabela, os valores dos números de estabilidade (λ_{Yu}) encontrados por Yu e Sloan (1997). Como pode ser observado, os valores obtidos neste trabalho conferem com os obtidos por Yu e Sloan, validando as implementações realizadas.

Tabela 5. 4 – Números de estabilidade para um problema de talude reforçado

$\varphi(^{\circ})$	10	15	20	25	30	35	40
λ	1,85	2,36	3,02	3,81	4,78	5,90	7,18
λ_{Yu}	1,9	2,4	3,0	3,8	4,8	5,9	7,2

5.4.2 Técnica discreta

São analisados, por esta técnica, problemas de arrancamento de reforço, de um talude inclinado reforçado e de um aterro sob solo mole.

a) Arrancamento de reforço

O problema de arrancamento de reforço é ilustrado na Figura 5.7, juntamente com a malha de elementos finitos empregada.

As análises que se seguem consideram o solo idealmente rígido e com peso próprio desprezível ($\gamma = 0 \text{ kN/m}^3$); o reforço, representado pela linha B-E, tem extremidade B livre; e a interface solo-reforço é considerada não coesiva ($c_i = 0 \text{ kPa}$) com ângulo de atrito igual a $\text{tg}\varphi_i = 0,5$.

Duas situações são idealizadas: na situação 1 (Figura 5.7-a) considera-se a resistência ao cisalhamento nas faces inferior e superior do reforço e na situação 2 (Figura 5.7-b) despreza-se a resistência ao cisalhamento na face superior. A solução numérica é dada pela maximização da tensão de tração na extremidade direita do reforço (T_b).

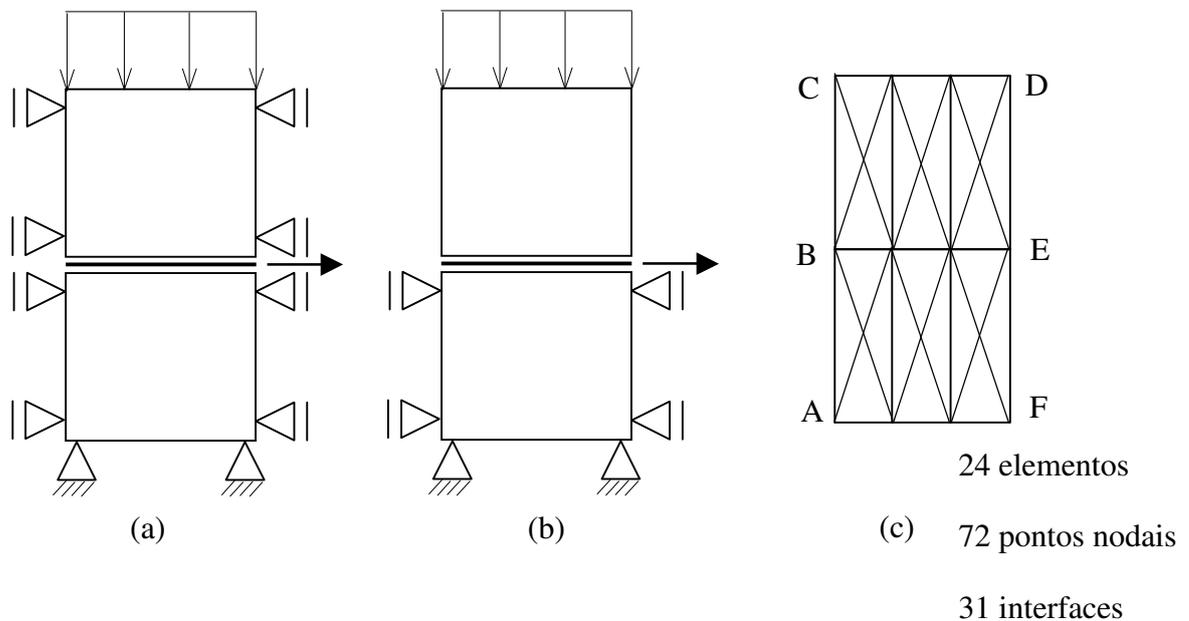


Figura 5. 7 – Arrancamento de reforço
(a) situação 1, (b) situação 2 e (c) malha

a.1) Situação 1

Neste caso foram adotadas as seguintes condições de contorno

faces A - B , B - C , F - E e D - E : $\tau = 0$

face C-D: $\tau = 0$ e $\sigma_n^C = \sigma_n^D = 10 \text{ kPa}$

A solução analítica deste problema pode ser obtida considerando o esquema da interface solo-reforço indicado na Figura 5.8.

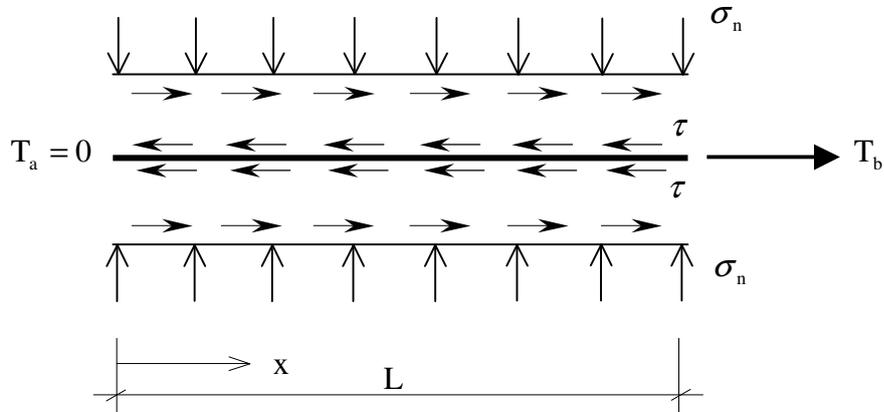


Figura 5.8 – Tensões na interface solo-reforço

O equilíbrio no reforço conduz à seguinte equação (ver equação 3.30)

$$\frac{dT}{dx} = 2\tau \quad (5.2)$$

Na ruptura, como $c = 0$ kPa, a expressão anterior toma a forma abaixo

$$\frac{dT}{dx} = 2\sigma_n \operatorname{tg}\varphi_i \quad (5.3)$$

onde σ_n é a tensão normal na interface solo-reforço.

A integração de 5.3, admitindo-se σ_n constante, conduz ao resultado

$$T_b - T_a = 2\sigma_n \operatorname{tg}\varphi_i L \quad (5.4)$$

Como $T_a = 0$, então

$$T_b = 2\sigma_n \operatorname{tg}\varphi_i L \quad (5.5)$$

Considerando $L = 3$ m, a equação 5.5 fornece $T_b = 30$ kN/m, onde T_b é a força de arrancamento para a situação 1.

O resultado numérico encontrado coincide com a solução analítica do problema, validando a implementação realizada.

A distribuição de tensão de tração obtida pela via numérica, ao longo do comprimento do reforço, é triangular, como é esperado pela solução analítica.

a.2) Situação 2

As condições de contorno adotadas, neste caso, são as seguintes

faces A - B e F - E : $\tau = 0$

faces B - C e E - D : $\sigma_n = \tau = 0$

face C - D : $\tau = 0$ e σ_n uniforme

A solução analítica deste problema é obtida verificando-se o equilíbrio do reforço e considerando-se que a tensão de escoamento na interface solo-reforço superior é nula (coesão e ângulo de atrito nulos). Assim sendo, tem-se

$$\frac{dT}{dx} = \tau \quad (5.6)$$

Na ruptura, se $c = 0$ kPa , a expressão anterior toma a forma abaixo

$$\frac{dT}{dx} = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_i \quad (5.7)$$

A integração de 5.7, para σ_n constante, conduz à expressão

$$T_b - T_a = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_i L \quad (5.8)$$

Como $T_a = 0$, então

$$T_b = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi_i L \quad (5.9)$$

Considerando $L = 3$ m, tem-se $T_b = 15$ kN/m , a qual coincide com a solução numérica.

Figura 5. 1**Figura 5. 2****Figura 5. 3**uuuuu
Figura 5. 4**Figura 5. 5****Figura 5. 6**
Figura 5. 7**Figura 5. 8**
Tabela 5. 1**Tabela 5. 2****Tabela 5. 3****Tabela 5. 4**

(5.1)

(5.2)

(5.3)

(5.4)

(5.5)

(5.6)

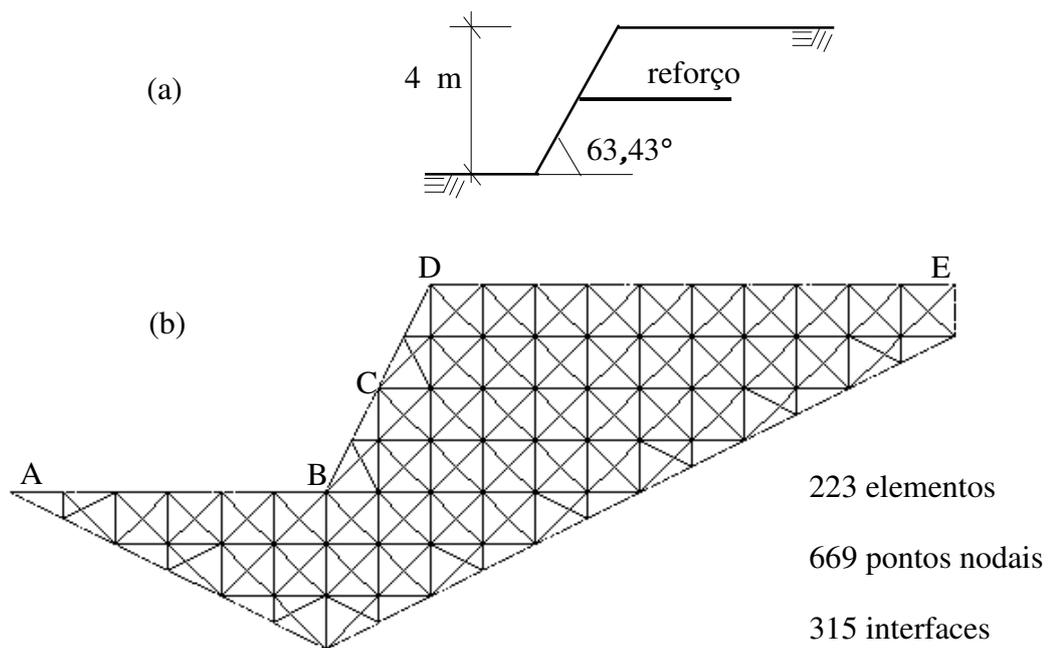
(5.7)

(5.8)

(5.9)

b) Talude reforçado

Este problema foi estudado por Asaoka et al. (1994), empregando-se uma formulação de limite superior. A Figura 5.9 mostra a definição do problema e a malha empregada na solução, considerando um solo puramente coesivo ($c = 9,8 \text{ kPa}$) e com peso específico $\gamma = 16,3 \text{ kN/m}^3$.



**Figura 5. 9 – Estabilidade de um talude com um reforço
definição esquemática do problema e (b) malha**

As condições de contorno do problema são as seguintes:

faces A - B , B - C , C - D e D - E: $\sigma_n = \tau = 0$.

O reforço é inserido na direção horizontal, a partir do ponto C (Figura 5.9-b), na altura média do talude, tendo comprimento variável (Tabela 5.5), supondo a tensão de tração nula nas extremidades.

Em Asaoka et al., não são consideradas as propriedades do reforço, mas apenas a condição que estabelece que o comprimento do reforço não varia na ruptura. Para

efeito de comparação, não foram consideradas as restrições de fluxo do reforço e da interface solo-reforço.

A solução do problema é obtida pela maximização do peso específico do solo γ_{eq} e os resultados encontrados estão na Tabela 5.5. Assim, o fator de segurança numérico é definido por

$$FS = \frac{\gamma_{eq}}{\gamma} \quad (5.10)$$

onde $\gamma = 16,3 \text{ kN/m}^3$ é o peso específico do solo adotado por Asaoka et al.

Tabela 5. 5 – Fatores de segurança para um talude reforçado, pela técnica da análise discreta

Caso	Comprimento do reforço	γ_{eq} (kN/m^3)	FS	FS _{Asaoka}	FS _{Slope/W}
I	7 m	12,39	0,760	0,844	0,858
II	5 m	12,08	0,741	0,807	0,772
III	Sem reforço	11,76	0,721	0,796	0,770

FS_{Asaoka} é o fator de segurança encontrado por Asaoka et al.;

FS_{Slope/W} é o fator de segurança encontrado pelo método Bishop, utilizando o software Slope/W, versão 4.23.

Como era de se esperar, os fatores de segurança encontrados por Asaoka et al., que utilizam a formulação do limite superior, são maiores, independentemente do comprimento do reforço, que os fatores de segurança obtidos por este trabalho.

A variação da tensão de tração no reforço pode ser observada pelas Figuras 5.10 e 5.11. Como pode ser notado, a tensão máxima de tração no reforço, independente do seu comprimento, ocorre em algum ponto próximo da superfície de ruptura encontrada pelo software Slope/W (Figura 5.12).

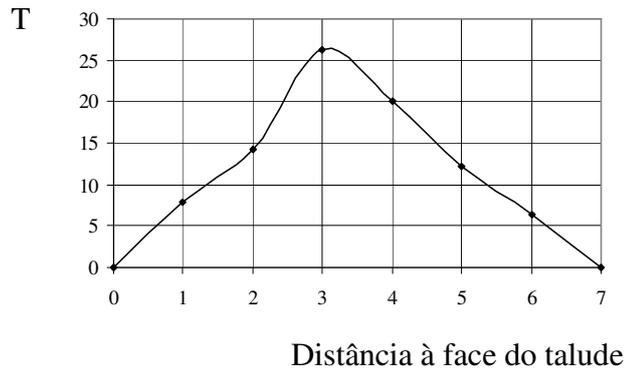


Figura 5. 10 – Variação da tensão no reforço (7m)

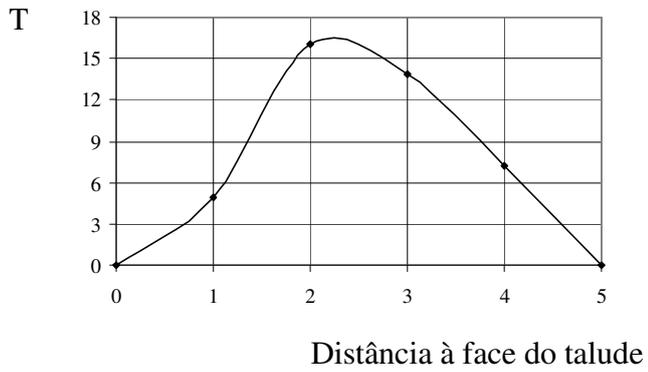


Figura 5. 11 – Variação da tensão no reforço (5m)

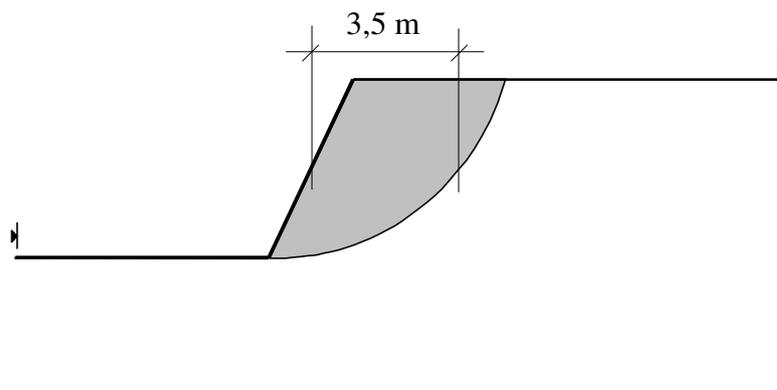


Figura 5. 12 – Superfície de ruptura para um talude, pelo software Slope/W

É importante salientar que o Slope/W, além de ser um método de equilíbrio limite, trata o reforço como um tirante. Portanto, os resultados obtidos por esta via servem apenas como referência e não validação das implementações realizadas.

Para comparar o efeito do refinamento do domínio, outra malha, com 111 elementos triangulares, foi empregada para resolução deste problema. Comparando-se as tensões de tração no reforço nestas malhas, observou-se que estes valores podem variar até 20% com o refinamento da malha. Quanto aos fatores de segurança encontrados em uma e outra malha, nota-se que a variação entre estes parâmetros é desprezível.

c) Estabilidade de aterro sobre solo mole

O problema proposto visa estudar a estabilidade de um aterro sobre solo mole. Neste caso o reforço é inserido na fundação do aterro na interface com o solo mole, como ilustra a Figura 5.13-a.

A resolução do problema pela formulação implementada é comparada com a solução obtida via equilíbrio limite, através do software Slope/W, versão 4.23.

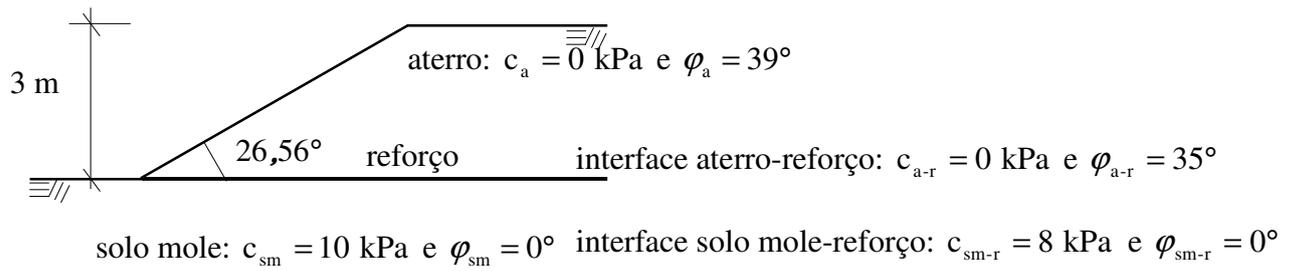
As propriedades do solo do aterro, do solo mole, do reforço e das interfaces solo mole-reforço e aterro-reforço são, também, indicadas na Figura 5.13-a.

A malha de elementos finitos com o reforço representado pela linha B - E é apresentada na Figura 5.13-b. As tensões de tração nas extremidades B e E do reforço foram tomadas como nulas e as condições de contorno adotadas são as seguintes:

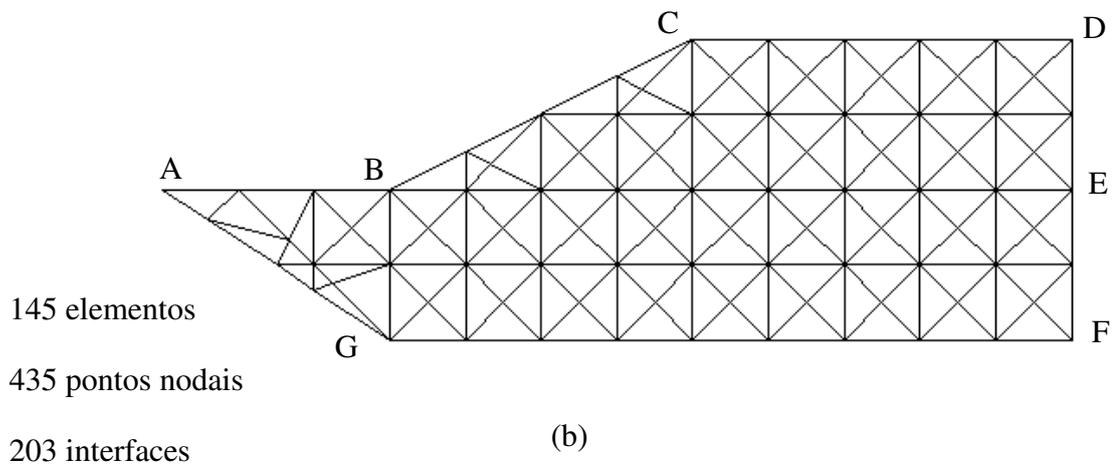
$$\text{faces A - B, B - C e C - D: } \sigma_n = \tau = 0.$$

O peso específico de colapso do solo γ_{eq} é obtido pela maximização do mesmo. O fator de segurança (FS) é definido na forma da equação 5.10, adotando-se um peso específico do solo $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$.

Primeiramente, analisou-se o problema pelo software Slope/W, encontrando-se a superfície de ruptura ilustrada pela Figura 5.14, onde a superfície de ruptura do talude é circular e passa a 3 metros abaixo do topo da camada de solo mole.



(a)



**Figura 5. 13 – Estabilidade de aterro sobre solo mole
definição esquemática do problema e (b) malha**

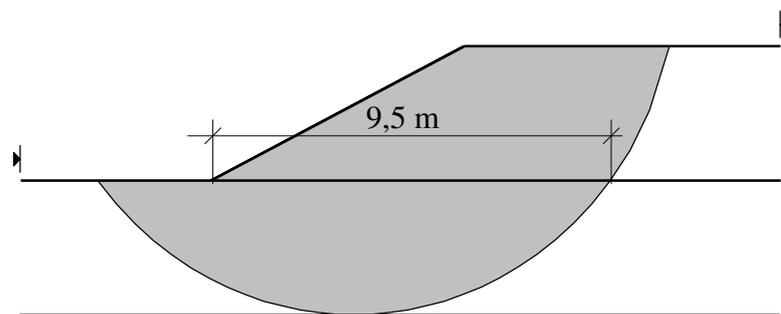


Figura 5. 14 - Superfície de ruptura para um aterro, pelo software Slope/W

Posteriormente, o problema foi estudado utilizando-se a expressão de equilíbrio de momento do método do equilíbrio limite, manualmente, adotando-se esta superfície

de ruptura. Assim, para um fator de segurança de 1,2 para o talude reforçado, a tensão de tração no reforço deve ser igual a 45,8 kPa.

Daí, para todos os casos estudados nesta seção, exceto os casos I e II, empregou-se uma tensão de escoamento do reforço igual a 45,8 kPa.

Os resultados encontrados são mostrados na Tabela 5.6.

Tabela 5. 6 – Fatores de segurança para o problema de aterro sobre solo mole

Tipo de análise	γ_{eq} (kN/m ³)	FS	FS _{Slope/W}
Com reforço	22,57	1,254	1,125
Sem reforço	19,64	1,091	1,118

Observa-se que o fator FS_{Slope/W}, na análise de talude reforçado, é conservativo. Para o mesmo talude não reforçado, o fator de segurança encontrado pelo método de Bishop é próximo ao encontrado pela formulação implementada.

A variação da tensão de tração no reforço, segundo a formulação implementada, pode ser observada pela Figura 5.15, onde nota-se que o reforço está submetido a uma tensão de tração, em quase toda sua extensão, igual à sua tensão de escoamento.

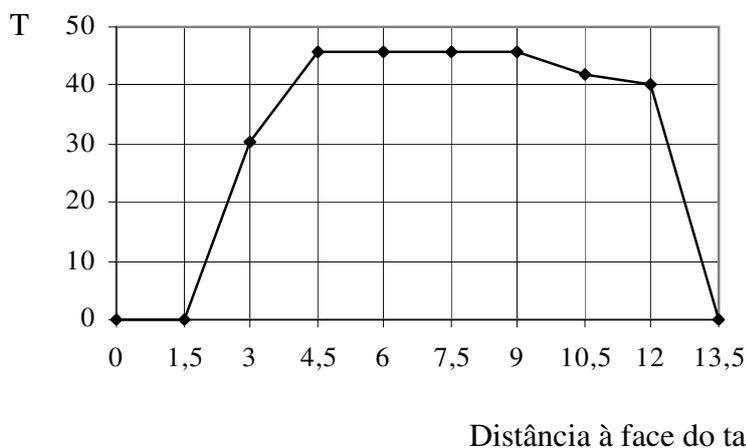


Figura 5. 15 – Variação da tensão no reforço, em um aterro sobre solo mole

Estudou-se o problema aqui descrito, segundo a formulação descrita no Capítulo 3, nas seguintes hipóteses:

- escoamento dos solos e das interfaces; o reforço é considerado rígido (caso I);
- escoamento dos solos; as interfaces e o reforço são considerados rígidos (caso II);
- alterando-se as propriedades de interface aterro-reforço para $c_{a-r} = 0$ kPa, $\varphi_{a-r} = 20^\circ$ e de interface solo mole-reforço para $c_{sm-r} = 5$ kPa, $\varphi_{sm-r} = 0^\circ$ (caso III) e mantendo-se as propriedades dos solos e do reforço;
- alterando-se as propriedades de interface aterro-reforço para $c_{a-r} = 0$ kPa, $\varphi_{a-r} = 10^\circ$ e de interface solo mole-reforço para $c_{sm-r} = 2,5$ kPa, $\varphi_{sm-r} = 0^\circ$ (caso IV) e mantendo-se as propriedades dos solos e do reforço.

A Tabela 5.7 mostra os resultados dos fatores de segurança obtidos para cada caso avaliado do problema em questão. Observa-se que estes números variam pouco, para os diferentes casos estudados. Portanto, os fatores de segurança são pouco sensíveis aos parâmetros de resistência das interfaces, para o problema em consideração.

Tabela 5. 7 – Fatores de segurança para o problema, sob diferentes hipóteses

Caso	γ_{eq} (kN/m ³)	FS
I	23,03	1,279
II	23,04	1,280
III	22,42	1,246
IV	21,22	1,179

A variação de tensão de tração no reforço nos casos I, II, III e IV pode ser observada pela Figura 5.16. Nota-se que a tensão de tração máxima no reforço é bastante variável, e é maior no caso II. Comparando os valores de T nos casos III e IV, observa-se que o reforço é menos solicitado quanto menor os valores das propriedades de interface.

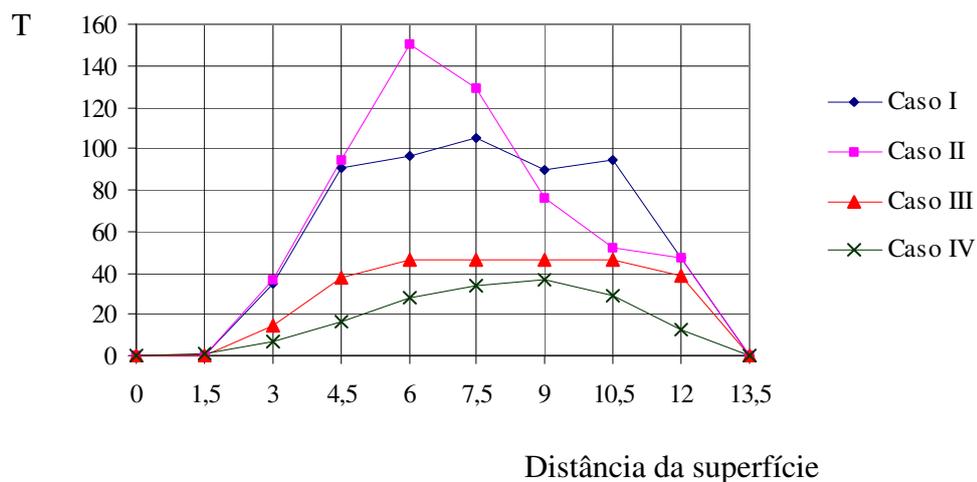


Figura 5. 16 – Variação da tensão no reforço em função de parâmetros de interface

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi apresentada uma síntese da formulação numérica, via MEF, do teorema do limite inferior da plasticidade para solução de problemas de estabilidade em meios contínuos ou fraturados, na condição de deformação plana para material elasto plástico ideal.

Generalizações foram feitas para contemplar tais estudos em solo reforçado pelas técnicas do contínuo equivalente e discreta.

O problema de programação matemática não linear resultante foi aproximado por um problema de PL, que pode ser resolvido eficientemente por programas comerciais, apesar do tamanho considerável da forma linearizada.

Vários exemplos foram resolvidos pela implementação realizada. A comparação destes resultados com outros encontrados na literatura técnica, obtidos pelas vias analítica ou numérica, demonstra a potencialidade da metodologia apresentada para solução de problemas práticos importantes da engenharia civil.

Em comparação com o método de equilíbrio limite, a metodologia desenvolvida no presente trabalho pode simular de modo mais realista a interação solo-reforço.

6.2 SUGESTÕES

A seguir são apresentados temas sobre análise limite para futuros trabalhos.

- (i) Desenvolvimento e implementação de formulação mista para estudo de problemas de estabilidade em solos reforçados;
- (ii) Desenvolvimento e implementação de formulação de limite superior para estudo de problemas de estabilidade em solos reforçados ou fraturados;
- (iii) Implementação de métodos não lineares para solução do problema de Programação Matemática resultante da formulação de análise limite dos problemas de estabilidade em geotecnia;
- (iv) Generalização de formulações e suas implementações para estudos de problemas axissimétricos de estabilidade em materiais geotécnicos;
- (v) Implementação de formulações para problemas de estabilidade em estruturas carregadas lateralmente, sob condição plana de deformação;
- (vi) Implementação de formulações capazes de levar em conta o propalado efeito do confinamento na estabilidade da estrutura de solo reforçado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arai, K. e Jinki, R. (1990). A Lower-Bound Approach to Active Passive Earth Pressure Problems. *Soils and Foundations*, v.30, n.4, p.25-41.
- Arai, K. e Nakagawa, M. (1988). A New Limit Equilibrium Analysis of Slope Stability Based on Lower-Bound Theorem. *Soils and Foundations*, v. 28, n. 1, p.1-15.
- Araújo, L.G. (1997). Estudo Numérico de Problemas de Estabilidade em Materiais Geotécnicos através da Análise Limite. Tese de Doutorado, PUC/Rio.
- Araújo, L.G.; Macias, J.; Vargas, E. e Vaz, L.E. (1997). Numerical Limit Analysis of Rock Mechanics Problems. *Numerical Models in Geomechanics*, p.747-751.
- Araújo, L.G.; Vargas, E. e Vaz, L.E. (1996). Applications of Limit Analysis to Stability Problems of Rock Masses. *Proc. 2nd North American Rock Mech. Symposium, 2nd NARMS*, p.523-528, Montreal.
- Araújo, L.G.; Vargas, E.; Vaz, L.E. e Campos J.N.B. (2000). Estudo Numérico de Problemas de Estabilidade em Meios Fraturados. 21st Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 2000, p.1-15, Rio de Janeiro.
- Asaoka, A.; Kodaka, T. e Pokharel, G. (1994). Stability Analysis of Reinforced Soil Structures Using Rigid Plastic Finite Element Method. *Soils and Foundations*, v. 34, n.1, p.107-118.
- Bottero, A.; Negre, R.; Pastor, J. e Turgeman, S. (1978). Finite Element Method and Limit Analysis Theory for Soil Mechanic Problems. *Computer Meth. in Applied Mech. and Engng*, v.22, p.131-149.
- Casciaro, R. e Cascini, L. (1982). A Mixed Formulation and Mixed Finite Elements for Limit Analysis. *Int. J. num. Meth. Engng*, v.18, p.211-243.
- Chen, W. F. (1975). *Limit Analysis and Soil Plasticity*. Elsevier Science Publishers, BV, Amsterdam, The Netherlands.

- Christiansen, E. (1981). Computation of Limit Loads. *Int. J. num. Meth. Engng*, v.17, p.1547-1570.
- Farfán, A.D. (2000). Aplicações da Análise Limite a Problemas Geotécnicos Modelados como Meios de Contínuos Convencionais e Meios de Cosserat. Tese de Doutorado, PUC/Rio.
- Faria, P.O. (1992). Análise Limite de Problemas Geotécnicos. Dissertação de Mestrado, PUC/Rio.
- Francescato, P. e Pastor, J. (1997). Lower and Upper Numerical Bounds to the Off-axis Strength of Unidirectional Fiber-reinforced Composites by Limit Analysis Methods. *Eur. J. Mech., A/Solids*, v.16. n.2, p.213-234.
- Gomes, R.C. (1993). Interação Solo Reforço e Mecanismos de Ruptura em Solos Reforçados com Geotêxteis. Tese de Doutorado, USP/ São Carlos.
- Lysmer, J. (1970). Limit Analysis of Plane Problems in Soil Mechanics. *J. of Soil Mech. and Foundations Div., ASCE*, v.96, SM4, p.1311-1334.
- Martins, C.C. (2000). Análise e Reavaliação de Estruturas em Solos Reforçados com Geotêxteis. Dissertação de Mestrado, UFOP, Ouro Preto/MG.
- Michalowski, R.L. (1998). Limit Analysis in Stability Calculations of Reinforced Soil Structures. *Geotextiles and Geomembranes*, v.16, p.311-331.
- Porbaha, A.; Zhao, A.; Kobayashi, M. e Kishida, T. (2000). Upper Bound Estimate of Scaled Reinforced Soil Retaining Walls. *Geotextiles and Geomembranes*, v.18, p.403-413.
- Schrage, L. (1991). *LINDO - User's Manual*. The Scientific Press.
- Singh, D. N. e Basudhar, P. K. (1993-a). Determination of the Optimal Lower Bound Bearing Capacity of Reinforced Soil-Retaining Walls by Using Finite Elements and Non-Linear Programming. *Geotextiles and Geomembranes*, v.12, p.665-686.
- Singh, D. N. e Basudhar, P. K. (1993-b). Optimal Lower Bound Bearing Capacity of Strip Footings. *Soils and Foundations*, v.33, n.4, p.18-25.

- Sloan, S. W. (1987). Lower Bound Limit Analysis Using Finite Elements and Linear Programming. Report N° 020.01.87, The University Of New Castle, Australia.
- Sloan, S. W. (1989). Upper Bound Limit Analysis Using Finite Elements and Linear Programming. *Int. J. Numer. and Analytical Methods in Geomech*, v.13, p.263-282.
- Tamura, T. e Pak, R. Y. S. (1989). Rigid-plastic Limit Analysis of Discontinuous Media By Finite Element Method. *Can. Geotech. J.*, v.26, p.369-374.
- Tamura, T.; Kobayashi, S. e Sumi, T. (1984). Limit Analysis of Soil Structure by Rigid Plastic Finite Element Method. *Soils and Foundations*, v.24, n.1, p.34-42.
- Tamura, T.; Kobayashi, S. e Sumi, T. (1987). Rigid-plastic Finite Element Method for Frictional Materials. *Soils and Foundations*, v.27, n.3, p.1-12.
- Yu, H.S. e Sloan, S.W. (1994). Bearing Capacity of Jointed Rock. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, p.2403-2408.
- Yu, H.S. e Sloan, S.W. (1997). Finite Element Limit Analysis of Reinforced Soils. *Computers & Structures*, v.63, n.3, p.567-577.

7.1 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMPLEMENTARES

- Abramento, M. e Whittle, A.J. (1995). Analysis of Pullout Tests for Planar Reinforcements in Soil. *J. of Geotechnical Engineering*, junho, p.476-485.
- Adachi, T. e Tamura, T. (1992). A Limit Load Analysis by Rigid-plastic Finite Element Method. *Numerical Models in Geomechanics*, Pande & Pietruszczak.
- Asaoka, A. e Kodaka, T. (1992). Bearing Capacity of Foundations on Clays by the Rigid Plastic Finite Element. *Numerical Models in Geomechanics*, Pande & Pietruszczak.
- Assadi, A. e Sloan, S.W. (1991). Undrained Stability of Shallow Square Tunnel. *Journal of Geotechnical Engineering*, v.117, p.1152-1173.
- Bauer, G.E. e Mowaty, Y.M. (1985). A Non-linear Finite Element Analysis of Reinforced Embankments. *Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, p.905-918.
- Beer, G. (1985). An Isoparametric Joint/ Interface Element for Finite Element Analysis. *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, v.21, p.585-600.
- Bollo-Kamara, N.; Bourdeau, Y.; Bahloul, F. e Ogunro, V. (1995). A Study of Friction Mobilization at a Soil/ Geotextile Interface Using a Bi-dimensional Analogic Model. *Geosynthetics*, p.1071-1083.
- Chalaturnyk, R.J.; Scott, J.D.; Chan, D.H.K. e Richards, E.A. (1990). Stresses and Deformations in a Reinforced Soil Slope. *Can. Geotech. J.*, v.27, p.224-232.
- Chang, J.C. e Forsyth, R.A. (1997). Finite Element Analysis of Reinforced Earth Wall. *J. of the Geotechnical Engineering Division*, julho, p.711-723.
- Chen, W. F. e Liu, X.L. (1990). *Limit Analysis in Soil Mechanics*. Elsevier Science Publishers, BV, Amsterdam, The Netherlands.
- De Borst, R. e Vermeer, P.A. (1984). *Possibilities and Limitations of Finite Elements for Limit Analysis*.

- Finn, W.D.L. (1967). Application of Limit Plasticity in Soil Mechanics. J. of the Soil Mechanics And Foundations Div., ASCE.
- Gens, A.; Carol, I. e Alonso E.E. (1988). An Interface Element Formulation for the Analysis of Soil-reinforcement Interaction. Computers and Geotechnics, v.7, p.133-151.
- Gerrard, C.M. e Pande, G.N. (1985). Numerical Modelling of Reinforced Jointed Rock Masses I. Theory. Computers and Geotechnics, v.1, p.293-318.
- Ghaboussi, J.; Wilson, E.L. e Isenberg, J. (1973). Finite Element for Rock Joints and Interfaces. J. the Soil Mechanics and Foundations Division, outubro, p.833-848.
- Goodman, R.E.; Taylor, R.L e Brekke T.L. (1968). A Model for the Mechanics of Jointed Rock. J. of the Soil Mechanics and Foundations Division, maio, p.637-659.
- Griffiths, D.V. (1985). Numerical Modelling of Interfaces Using Conventional Finite Elements. Fifth Int. Conference on Num. Methods in Geomechanics, abril, p.837-844.
- Hachich, W.; Falconi, F.F.; Saes J.L; Frota, R.G.Q.; Carvalho, C.S. e Niyama, S. (1998). Fundações: Teoria e Prática. PINI, 2 ed., São Paulo.
- Hird, C.C.; Pyrah, I.C. e Russel, D. (1990). Finite Element Analysis of the Collapse of Reinforced Embankments on Soft Ground. Geotechnique, v.40, n.4, p.633-640.
- Hird, C.C.; Pyrah, I.C. e Russel, D. (1991). Finite Element Analysis of the Collapse of Reinforced Embankments on Soft Ground. Geotechnique, v.41, n.4, p.627-630.
- Karpurapu, R. e Bathurst, R. (1992). Analysis of Geosynthetic Reinforced Soil Wall by the Finite Element Method. Num. Models in Geomechanics, p.861-870.
- Long, P.V.; Bergado, P.T.; Balasubraniam, A.S. e Delmas, P. (1990). Interaction between Soil an Geotextile Reinforcement.
- Lyamin, A.V. e Sloan, S.W. (1997). A Comparison of Linear and Nonlinear Programming Formulations for Lower Bound Limit Analysis. Numerical Models in Geomechanics, Pande & Pietruszczak.

- Miura, N.; Sakai, A.; Taesiri, Y.; Yamanouchi, T. e Yasuhara, K. (1990). Polymer Grid Reinforced Pavement on Soft Clay Grounds. *Geotextiles and Geomembranes*, v.9, p.99-123.
- Naylor, D.J. e Richards, H. (1978). Slipping Strip Analysis of Reinforced Earth. *Int. J. for Num. and Analytical Methods in Geomechanics*, v.2, p.343-366.
- Omar, M.T.; Das, B.M.; Puri, V.K; Yen, S.C e Wright, M.A. A Comparison of the Ultimate Bearing Capacity of Square and Strip Foundations on Geogrid-Reinforced Sand. *Num. Models in Geomechanics*, p.967-976.
- Salgado, M.T. e Nogueira, C.L. (1998). Modelagem Numérica de Estruturas de Solos Reforçados. Program Institucional de Bolsas de Iniciação Científica, PIBIC/ CNPq/ UFOP/ Ouro Preto.
- Smith, I.M. (1992). Three-dimensional Analysis of Reinforced and Nailed Soil. *Num. Models in Geomechanics*, p.829-838.
- Turgeman, S. e Pastor, J. (1982). Limit Analysis: A Linear Formulation of the Kinematic Approach for Axisymmetric Mechanic Problems. *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v.6, p.109-128.
- Varadarajan, A.; Sharma, K.G. e Aly M.A.A. (1999). Finite Element Analysis of Reinforced Embankment Foundation. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, v.13, p.103-114.
- Yi, C.T.; Chan, D.H. e Scott, J.D. (1995). A Large Slipping Finite Element Model for Geosynthetics Interface Modelling. *Geosynthetics*, p.93-104.
- Yu, H.S. e Sloan, S.W. (1994). Upper-Bound Limit Analysis of a Rigid-Plastic Body with Frictional Interfaces. *Int. J. Mech. Sci.*, v.36, n.3, p.219-229.
- Yu, H.S.; Salgado, R.; Sloan, S.W. e Kim, J.M. (1998). Limit Analysis versus Limit Equilibrium for Slope Stability. *J. of Geotech. and Geoenvironmental Engineering*, v.124, n.1, p.1-11.