



Universidade Federal de Ouro Preto

Departamento de Engenharia Civil

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil



# **Implementação de um Código Computacional Destinado à Solução de Sistemas de Equações Lineares e Não lineares via Métodos Iterativos: Aplicações em Treliças Metálicas**

**Reinaldo Antonio dos Reis**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas e Construção

**Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha**

Ouro Preto, Março de 2019

R375i

Reis, Reinaldo Antonio.

Implementação de um Código Computacional Destinado à Solução de Sistemas de Equações Lineares e Não lineares via Métodos Iterativos: Aplicações em Trelças Metálicas [manuscrito] / Reinaldo Antonio Reis. - 2019.

91f.: il.: color; graf; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Anderson Santana Rocha .

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Análise Linear. 2. Análise Não Linear Física. 3. Métodos Iterativos. 4. Trelças Metálicas. I. Rocha , Paulo Anderson Santana. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624.01

**IMPLEMENTAÇÃO DE UM CÓDIGO COMPUTACIONAL DESTINADO À  
SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E NÃO LINEARES  
VIA MÉTODOS ITERATIVOS. APLICAÇÕES EM TRELIÇAS PLANAS**

**AUTOR: REINALDO ANTÔNIO DOS REIS**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 19 de março de 2019, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, stylized initial 'P' followed by the letters 'A S R R O'.

Prof. Paulo Anderson Santana Rocha, D. Sc. – UFOP (Presidente)

A handwritten signature in black ink, reading 'Jaime Florêncio Martins' in a cursive script.

Prof. Jaime Florêncio Martins, D. Sc. – UFOP

A handwritten signature in black ink, reading 'Alexandre da Silva Galvão' in a cursive script.

Prof. Alexandre da Silva Galvão, D. Sc. – UFSJ

## **Agradecimentos**

À Deus por estar sempre presente.

Aos meus pais pela educação, presença e por nunca permitirem que eu desistisse.

Aos meus irmãos; Fabricio, Berenice, Acássio, Fabiula, Danúbia e Anajara; pelo amor, apoio, carinho e atenção.

Aos que me acompanharam de pertinho durante essa jornada; Rodrigo, Júlia, Mariana, Laís, Bruno, Marina; pela convivência, pelos momentos engraçados e ensinamentos.

À turma da salinha do mestrado pela amizade e companheirismo.

Ao meu orientador, prof. Paulo Anderson Santana Rocha, pela confiança e ensinamentos.

Aos Doutores da Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas pelos ensinamentos.

À Capes pela ajuda financeira.

# **Implementação de um Código Computacional destinado à Solução de Sistemas de Equações Lineares e Não lineares via Métodos Iterativos: Aplicações em Treliças Metálicas**

**Reinaldo Antonio dos Reis**

Março/2019

**Resumo:** O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para análise estática linear e não linear física de treliças metálicas via métodos iterativos. No contexto da Engenharia Estrutural, a solução dos sistemas lineares e não lineares definem a resposta da estrutura frente à um determinado carregamento. Para encontrar a solução de tais sistemas são utilizadas técnicas diretas e iterativas. Estruturas com comportamento elástico linear sempre geram equações lineares, nestes casos, utilizou-se o método direto de eliminação de Gauss e o método iterativo de Gauss-Seidel. As estruturas que têm comportamento plástico do material desde o início do carregamento foram analisadas via Teorema de Castigliano e aquelas que possuem comportamento plástico somente após o elemento atingir a tensão de escoamento foram modeladas usando um parâmetro para módulo de endurecimento. Nestes problemas, o método Newton-Raphson e o método de Potra-Pták foram implementados para solucionar tais sistemas de equações não lineares que surgem durante o processo de modelagem. Os exemplos apresentados são comparados com resultados da literatura e/ou resultados de softwares, demonstrando a consistência e precisão do programa desenvolvido. O método de Gauss-Seidel teve convergência alcançada para sistemas simples. A medida que se aumentava os graus de liberdade e sua complexidade os sistemas perdiam sua característica de diagonal dominante e não alcançaram a convergência. Nas análises não lineares o método iterativo de Potra-Pták mostrou-se bastante eficiente em termos do reduzido número de iterações necessárias para a convergência em comparação com o método de Newton-Raphson padrão e modificado.

Palavras-Chave: Análise Linear, Análise Não Linear Física, Métodos Iterativos, Treliças Metálicas.

# **Implementation of a Computational Code for the Solution of Systems of Linear and Nonlinear Equations by Iterative Methods: Applications in Steel Trusses**

**Reinaldo Antonio dos Reis**

March/2019

**Abstract:** The present work aims to develop a computational tool for linear and nonlinear physical analysis of steel trusses using iterative methods. In the context of Structural Engineering, the solution of linear and nonlinear systems describes the response of the structure under a certain load. Direct and iterative techniques are used to find the solution of such systems. Structures with linear elastic behavior always generate linear equations, in these cases, the direct method of Gauss elimination and the iterative Gauss-Seidel method were used. Structures that the material has a plastic behavior since the start of loading were analyzed by Castigliano's Theorem. Those that have plastic behavior only after the yielding was modeled using a parameter for hardening module. In these problems, the Newton-Raphson method and the Potra-Pták method were implemented to solve such systems of non-linear equations that arise during the modeling process. The presented examples are compared with results of the literature and/or results of softwares, demonstrating the consistency and precision of the program developed. The Gauss-Seidel method has achieved convergence for simple systems. As the degrees of freedom and their complexity increased, the systems were no longer dominant diagonal and did not reach convergence. In the non-linear analyzes, the iterative method of Potra-Pták proved to be very efficient in terms of the reduced number of iterations required for convergence compared to the standard and the modified Newton-Raphson method.

**Keywords:** Linear Analysis, Nonlinear Physical Analysis, Iterative Methods, SteelTrusses.

# Sumário

<b>Capítulo 1</b> .....	<b>1</b>
<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais .....	1
1.2 Objetivos .....	3
1.3 Justificativa.....	3
1.4 Organização do Trabalho .....	4
<b>Capítulo 2</b> .....	<b>6</b>
<b>Estado da Arte: Solução dos Sistemas via Métodos Iterativos</b> .....	<b>6</b>
2.1 Sistemas Lineares .....	6
2.2 Solução de Sistemas Lineares .....	7
2.2.1 Método iterativo de Gauss-Seidel.....	9
2.1 Sistemas não lineares.....	14
2.1.1 Método de Newton-Raphson.....	15
2.1.2 Método de Potra-Pták .....	20
2.1.3 Critério de Parada dos métodos iterativos .....	22
<b>Capítulo 3</b> .....	<b>23</b>
<b>Análise Linear de Treliças Metálicas</b> .....	<b>23</b>
3.1 Introdução.....	23
3.2 Análise Linear de Treliças.....	25
3.2.1 Formulação Generalizada do Método dos Elementos Finitos .....	26
3.2.2 Formulação do MEF Para Elemento de Treliça .....	30
<b>Capítulo 4</b> .....	<b>36</b>
<b>Análise Não Linear Física de Treliças Metálicas</b> .....	<b>36</b>
4.1 Introdução .....	36
4.2 Formulação Inelástica Baseada no Teorema de Castigliano .....	38
4.3 Modelo Elastoplástico Unidimensional para Análise de Treliças Metálicas .....	39
4.3.1 Análise Elastoplástica Incremental .....	41
4.4 Metodologia de Solução Não Linear.....	44
4.4.1 Método Incremental-Iterativo de Newton-Raphson .....	46

4.4.2	Método Incremental-Iterativo de Potra-Pták .....	49
4.4.3	Critério de Convergência para Análise Não Linear.....	50
4.4.4	Algoritmos para Análise Não Linear Física de Treliças.....	51
<b>Capítulo 5 .....</b>		<b>54</b>
<b>Aplicações Numéricas .....</b>		<b>54</b>
5.1	Sistemas Lineares e Análise Linear de Treliças .....	54
5.1.1	Sistema Linear com 4 Incógnitas.....	54
5.1.2	Análise dos Critérios de Convergência de Gauss-Seidel .....	55
5.1.3	Treliça Plana com 5 Elementos .....	56
5.1.4	Treliça Plana Hiperestática.....	58
5.1.5	Análise de Convergência para Treliças com Sistemas Diferentes .....	59
5.1.6	Treliça espacial.....	61
5.2	Análise Não Linear.....	63
5.2.1	Sistema com 2 incógnitas .....	63
5.2.2	Análise não linear via método de Castigliano .....	64
5.2.3	Treliça Plana Hiperestática em Regime Elastoplástico .....	67
5.2.4	Análise Elastoplástica de Treliça Plana Isostática.....	74
<b>Capítulo 6 .....</b>		<b>79</b>
<b>Conclusões.....</b>		<b>79</b>
<b>Referências.....</b>		<b>81</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

Dentro da engenharia, na maioria das vezes, é necessário tratar os fenômenos físicos por modelos matemáticos, permitindo a compreensão dos mais variados problemas. Assim, citam-se os problemas: lineares e não lineares, estáticos ou dinâmicos, de mecânica dos sólidos, de mecânica dos fluidos, de eletromagnetismo, do fluxo de calor, de filtração em meios porosos, campo elétrico, acústica, dentre outros. A maioria dos problemas clássicos da Mecânica dos Meios Contínuos, que estão sempre submetidos aos mais variados tipos de carregamentos, passam por esse processo com o intuito de se obter a resposta estrutural, governados por equações diferenciais ordinárias ou parciais.

Em muitas situações é impossível ou inviável obter uma solução de forma analítica, especialmente nos problemas que possuem geometrias ou condições de contorno complexas. Neste contexto, uma ferramenta de grande importância é o processo de solução numérica. Enquanto a solução analítica é obtida com a dedução de uma expressão que leva a um valor exato, a solução numérica iterativa é obtida em um processo que começa a partir de uma solução aproximada e é seguido de um procedimento no qual se determina uma solução com uma precisão desejada.

Os sistemas de equações lineares e não lineares podem ser solucionados com os métodos diretos ou iterativos. Os métodos diretos, tais como, substituição, eliminação de Gauss, fatoração LU, fatoração de Cholesky, fornecem uma solução exata do sistema linear, a menos dos arredondamentos, após um número finito de operações, caso tal solução exista. Já nos métodos iterativos, como o método de Gauss-Seidel, método de Gauss-Jacobi, método de Newton-Raphson e método de Potra-Pták, diferentemente dos métodos diretos, a solução é obtida após várias iterações que convergem para o resultado com a precisão desejada.

As estruturas reticuladas, compostas por elementos de barras, são uma idealização de um sistema físico real a fim de se alcançar um modelo matemático para análise de um dado sistema estrutural. Gere e Weaver (1981) classificam as estruturas reticuladas em seis categorias: vigas, treliças planas, treliças espaciais, pórticos planos, pórticos espaciais e grelhas. Uma das características que as tornam distintas é o número de graus de liberdade por nó. Neste trabalho

analisou-se a categoria das treliças planas e espaciais, que possuem dois e três graus de liberdade por nó, respectivamente.

A modelagem dessas estruturas se baseia no método dos elementos finitos, que é um procedimento amplamente usado na Engenharia Civil e discretiza o meio contínuo em um meio discreto. Esta característica, associada à mecânica dos sólidos, considera o comportamento linear ou não linear e gera os sistemas de equações que deverão ser resolvidos por métodos matemáticos apropriados para cada caso. Os procedimentos gerais de análise e dimensionamento de estruturas em aço são regulamentados pelas normas ABNT NBR 8800 (2008), ABNT NBR 14762 (2010) e ABNT NBR 16239 (2013). Tais prescrições normativas são baseadas na avaliação do estado limite último e estado limite de serviço. Estas, por sua vez, indicam dois tipos de análises, linear e não linear. Na análise linear supõe-se um comportamento em que as propriedades da seção e do material não mudarão durante o processo de deformação, ou seja, a alteração da rigidez é considerada pequena. Caso contrário, quando uma estrutura se deforma sob uma carga e sua rigidez muda substancialmente, devido a um ou mais fatores, a estrutura tem um comportamento não linear.

Nos casos de estruturas que possuem elementos esbeltos, os efeitos da não linearidade geométrica do sistema são mais pronunciados, tornando-se necessária uma análise não linear geométrica. A não linearidade física deve ser considerada na análise estrutural quando as cargas atuantes na estrutura superam aquelas que causam o escoamento do material. Esta fonte de não linearidade está associada ao comportamento inelástico do material, caracterizado por uma relação constitutiva não linear, e a consequente perda de resistência e rigidez do material durante o carregamento.

Nos últimos anos, a análise estrutural tem caminhado ao lado dos avanços dos sistemas computacionais. As estruturas com grande número de graus de liberdade e que necessitam de uma análise não linear, requerem a execução de uma grande quantidade de cálculos, com matrizes de grandes dimensões e geralmente esparsas, além da necessidade do uso de métodos iterativos para a solução dos problemas. Diante desse contexto, vê-se a necessidade de busca de métodos de solução mais eficientes ou que se adequem às necessidades dos avanços nas análises da Engenharia Civil.

Finalmente, para a validação do programa implementado, foram analisados alguns exemplos de treliças metálicas e as respostas obtidas comparadas com programas de análise estrutural e/ou com resultados disponíveis na literatura.

O presente trabalho se enquadra nas seguintes linhas de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto :

- *Mecânica Computacional*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
- *Comportamento e Dimensionamento de Estrutura*: que visa estudar isoladamente ou em conjunto o comportamento das diversas partes de uma estrutura.

## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal a implementação de um código computacional que visa solucionar os sistemas de equações lineares (comportamento linear) e não lineares (comportamento não linear físico) obtidos durante o processo de análise estrutural de treliças metálicas, sob carregamento estático, via métodos iterativos.

Objetivos específicos:

- Estudo dos fundamentos teóricos e das formulações matemáticas que governam o comportamento de treliças metálicas, considerando a estrutura sob regime linear elástico e inelástico;
- desenvolvimento de um programa para análise estrutural de treliças metálicas baseado no método dos elementos finitos unidimensional;
- estudo, implementação e validação do método iterativo de Gauss-Seidel para solucionar os sistemas de equações lineares, comparando-o com os métodos diretos de solução, bem como, as suas particularidades quanto ao processo de convergência;
- estudo, implementação e validação a cerca do método clássico de Newton-Raphson e um método iterativo mais recente, Potra-Pták, para solução de sistemas não lineares.

## 1.3 Justificativa

As análises estruturais, considerando o material como elástico linear e a plasticidade, são obtidos por diversos softwares comerciais de análise e cálculo estrutural. No entanto, a maioria dos usuários operam esses programas sem entender os conceitos e fundamentos matemáticos que envolvem estes tipos de análises.

Existem na literatura diversos livros, dissertações, teses e artigos científicos que descrevem os métodos matemáticos para solução de sistemas de equações e os conceitos que governam os mais variados tipos de análises estruturais, sendo estes instrumentos essenciais para a formação de um profissional que venha a ser usuário desses softwares. É fundamental que o analista ao utilizar um programa entenda como é feito os cálculos de todas as incógnitas envolvidas neste tipo de análise estrutural dos elementos e como os métodos numéricos são utilizados dentro dos programas para a solução de todas as etapas.

No ensino da análise elástica linear e não linear das estruturas são abordados os conceitos da mecânica dos sólidos e quais métodos numéricos podem ser usados para a obtenção dos resultados para o problema matemático embutido na análise. A automatização do processamento dos dados de entrada, acoplado com um programa que leia essas informações e as traduzam em resposta do problema estrutural passam por uma rotina de cálculos que envolve a interligação dos métodos matemáticos e os fundamentos da mecânica dos sólidos. Para tal entendimento fora proposto o desenvolvimento de um código computacional para análise elástica linear de treliças usando os métodos diretos, amplamente utilizados nos softwares comerciais, e métodos iterativos. O código também fará a análise não linear física usando o método iterativo clássico e um mais recente.

## **1.4 Organização do Trabalho**

Todo o estudo realizado no presente trabalho é apresentado em diversos capítulos, conforme a seguinte organização.

O capítulo 2 compreende à revisão bibliográfica sobre os métodos iterativos utilizados nesta dissertação. Tem como intuito explicitar toda a formulação matemática envolvida durante o processo de solução dos sistemas e as suas particularidades.

O capítulo 3 é dedicado à apresentação dos conceitos e fundamentos da análise linear de treliças, baseado no método de elementos finitos unidimensional, além disso deixa explícito toda as operações matemáticas envolvidas na geração dos sistemas de equações e o programa implementado para a solução destes sistemas via método iterativo de Gauss-Seidel.

No capítulo 4 é apresentado os conceitos e fundamentos da análise não linear física de treliças, com toda a abordagem matemática para se considerar o efeito da plasticidade nos seus elementos. Neste capítulo também é desenvolvido os conceitos dos métodos iterativos e a implementação do código para solução dos sistemas não lineares.

No capítulo 5 são apresentados os exemplos numéricos e estruturais para a validação do programa implementado. Os resultados obtidos são comparados com os resultados da literatura e com resultados obtidos por softwares, já consagrados para análise de estruturas reticuladas.

No capítulo 6, finaliza-se o estudo proposto considerando as principais conclusões e sugestões de trabalhos futuros para que possa ampliar os objetivos do programa computacional, com intuito de melhorar e completar o processo de análise de treliças metálicas.

# Capítulo 2

## Estado da Arte: Solução dos Sistemas via Métodos Iterativos

### 2.1 Sistemas Lineares

Dentro da engenharia civil, a hipótese de um comportamento linear das estruturas ocasiona sistemas lineares.

Todo sistema de equações lineares pode ser reduzido em uma forma matricial do tipo  $Ax = b$ . Existem diversas formas de se encontrar a solução de um sistema linear. De acordo com Sperândio, Mendes e Silva (2003) as resoluções de sistemas de equações lineares são agrupadas em métodos diretos, iterativos e de otimização. Todos estes métodos permitem encontrar um resultado, desde que as condições de existência de solução e a convergência para uma solução sejam satisfeitas. Existem dois aspectos importantes na escolha do método de solução de sistemas lineares:

- a) A propagação dos erros de arredondamento, isto é, a estabilidade numérica do método com relação a sua sensibilidade à acumulação de erros de arredondamento.
- b) A questão do armazenamento na matriz dos coeficientes deve estar de acordo com a sua estrutura.

Franco (2006) afirma que a escolha do método numérico dependerá do nível da precisão da solução que se deseja alcançar e sob quais condições ela existirá. Este fato é exemplificado no caso de solução de sistemas de grande porte onde deve-se escolher um método numérico adequado que preserve a máxima precisão.

Trata-se de um método direto quando, na ausência de erros de arredondamento, determina-se a solução exata do sistema por meio de um número finito de passos previamente conhecidos. Os métodos diretos, em sua maioria, transformam o sistema original num sistema triangular equivalente, sendo os mais populares: Regra de Cramer, matriz inversa, método da eliminação de Gauss, decomposição LU e Fatoração de Cholesky.

Quando é necessário resolver um sistema de equações lineares de pequeno e médio porte geralmente utilizam-se os métodos diretos, pois o uso dos métodos iterativos para determinar tal solução não se justifica devido a um maior tempo de processamento. Porém, quando se

analisa sistemas de grande porte e/ou com alto número de elementos nulos os métodos iterativos tornam-se vantajosos (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015).

Os métodos iterativos estão associados aos conceitos de iteração (aproximação sucessiva) e de aproximação local. Em sentido lato, iteração significa a repetição sucessiva de um processo. De acordo com Vital (2004), Gilat e Subramaniam (2008), Sperândio, Mendes e Silva (2003), um método iterativo pode ser resumido em três processos:

1. Aproximação inicial: consiste em uma primeira aproximação para a solução desejada do problema numérico.
2. Equação recursiva: equação por meio da qual, dada uma aproximação inicial,  $x^{(0)}$ , são realizadas as iterações ou as aproximações sucessivas para a solução desejada,  $x^{(k)}$ .
3. Convêrgencia: instrumento por meio do qual a solução do processo iterativo é verificada e o procedimento é finalizado. Quando convergente, a sequência tenderá à solução no caso de  $k \rightarrow \infty$ .

A solução exata por um método iterativo exige a realização de um número infinito de operações. No entanto, face aos recursos limitados disponíveis, os processos iterativos terminam após um número finito de operações. O alcance da convergência se dá após a verificação de um parâmetro de tolerância do problema analisado.

## 2.2 Solução de Sistemas Lineares

Os primeiros métodos iterativos surgiram no início do século XIX. Naquela época havia uma preocupação com o número de cálculos necessários para a solução de sistemas lineares que levou Jacobi a desenvolver, em 1846, o método conhecido como Gauss-Jacob ou apenas método de Jacobi.

Philip Ludwing Von Seidel (1821-1896) trabalhou como assistente de Jacobi, resolvendo problemas com sistemas de equações lineares que tinham como base o trabalho de Gauss. As equações resultavam em um sistema em que geralmente existiam elementos fora da diagonal que eram muito menores que os coeficientes da diagonal. Se tratando deste tipo de problema os métodos iterativos eram bem mais eficientes. De acordo com Varga (1992), o método de Gauss-Seidel foi, primeiramente, apresentado por Gauss, em 1823, e mais tarde, em 1873, por Seidel. Portanto, esses métodos antes de serem aplicados para tal finalidade, já eram conhecidos por Gauss.

No século XX, o primeiro método iterativo a surgir foi o método de Richardson (1910). Na primeira metade deste século, houve a intenção de acelerar o método Gauss-Seidel. As intensas pesquisas proporcionaram o surgimento de métodos de relaxações sucessivas (SOR – Successive Over-Relaxation) introduzidos por Frankel e Young (FRANKEL, 1950; YOUNG, 1950). O método SOR e suas variações tornaram-se muito populares e com aplicações de grandes dimensões, que duraram até os anos 80, quando técnicas mais eficientes começaram a ser aplicadas, embora ainda sejam usados em muitas aplicações, como preconditionadores.

De acordo com Ruggiero e Lopes (2014), a determinação da solução de sistemas lineares via métodos iterativos têm vantagens sobre os métodos diretos quando, sendo elas:

*Esparsidade da matriz:* em casos de grandes sistemas e esparsos, a aplicação dos métodos diretos pode preencher as posições que originalmente estavam nulas com coeficientes não nulos. Devido a este fato, o método direto exigirá técnicas especiais para escolha de um pivô, através de técnicas de pivotamento, fazendo com que se tenha solução com tal método. No entanto, existem situações em que pode ser impossível aplicar o método direto, implicando a utilização dos métodos iterativos que tem como vantagem não alterar a estrutura original da matriz.

*Erros de arredondamento:* as técnicas de pivotamento adotadas nos métodos diretos tem como intuito evitar os sérios problemas com os erros de arredondamento provenientes do uso deste método. A convergência dos métodos iterativos que independe da aproximação inicial, salvo os critérios suficientes para a convergência, carregam somente erros cometidos na última iteração. Os erros cometidos nas iterações anteriores fazem com que o método não tenha convergência na iteração corrente, passando para uma nova iteração que fará a correção deste erro de arredondamento. Portanto, os métodos iterativos têm menores erros quando comparado com os métodos diretos.

Segundo Jerônimo Júnior (2015), um outro fator pode ser acrescentado ao quadro de vantagens dos métodos iterativos sobre os métodos diretos.

*Número de Operações:* Os métodos iterativos requerem metade das operações realizadas através dos métodos diretos. Enquanto o primeiro necessita de  $2n^2$  números de operações, o segundo exige operações da ordem de  $n^3$ , sem contar com estratégias de pivotamento.

Devido a essas vantagens dos métodos iterativos, o presente trabalho tem como intuito desenvolver um código computacional para analisar sistemas estruturais que tenham comportamento linear aplicando o método iterativo de Gauss-Seidel. A justificativa se dá pelo

fato de que cada vez sistemas mais complexos estão sendo projetados gerando matrizes de grande porte, que por sua vez, possuem um alto número de elementos nulos e matrizes esparsa. Caso tais sistemas sejam concebidos serão necessárias rotinas que sejam capazes de solucioná-las sem que problemas com erros de arredondamento, exigência de técnicas de pivotamento e alto número de operações interfiram na análise estrutural a ser desenvolvida.

Os métodos iterativos clássicos utilizados como técnicas de resolução de sistemas de equações lineares são os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel. Estes são frequentemente usados para sistemas de médio e grande porte, que podem apresentar esparsidade.

### 2.2.1 Método iterativo de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel pode ser obtido a partir do sistema linear  $Ax = b$ , onde  $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n,n}$  é uma matriz (real),  $b = (b_j)_{j=1}^n$  é o vetor dos termos constantes e  $x = (x_j)_{j=1}^n$  é o vetor contendo as incógnitas.

Em sua forma mais ampla, tem-se:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.1)$$

Isolando a incógnita  $x_i$  de cada equação  $i$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + \dots + a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k+1)})}{a_{nn}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

O índice  $k$  refere-se à cada passo iterativo.

A generalização da fórmula recursiva, equação 2.3, para o método de Gauss-Seidel é dada por:

$$x^{(1)} = \text{aproximação\_inicial}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad (2.3)$$

A grande diferença entre o método de Jacobi e o de Gauss-Seidel é que neste último a convergência para a solução se dá de forma mais rápida que no primeiro método. Isso acontece pelo fato de que, ainda dentro de uma certa iteração,  $(k + 1)$ , as incógnitas já calculadas,  $x_1^{(k+1)}$ , são utilizadas para determinar as demais  $(x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$ , enquanto que no método de Jacobi o cálculo depende apenas dos valores encontrados na iteração anterior. Dessa forma, considerando o custo computacional, seria mais vantajosa a utilização do método de Gauss-Seidel.

### 2.2.1.1 Análise de convergência

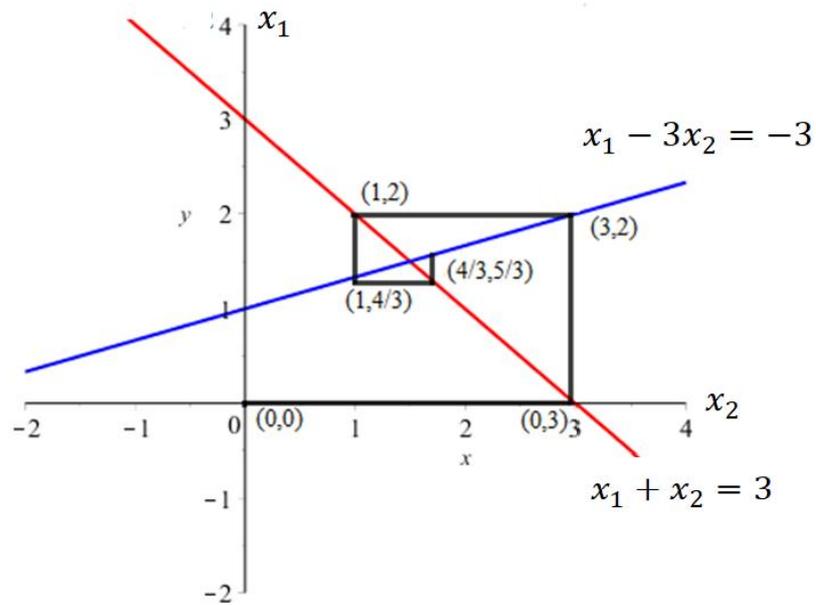
Durante o processo de análise estrutural o analista terá a liberdade de enumerar os elementos e os nós de maneira aleatória. Considerando como método de solução os métodos diretos, talvez seja necessária uma técnica de pivoteamento para contornar problemas que aconteçam eventualmente. Embora a ordem das equações em um sistema linear não mude a solução exata, as sequências iterativas oriundas do método de Gauss-Seidel dependem fundamentalmente da disposição das equações.

Para demonstrar tal condição, faz-se a interpretação geométrica de um caso simples com 2 incógnitas.

Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$$

O esquema iterativo do Método de Gauss-Seidel, utilizando a Equação (2.3), partindo da aproximação inicial  $x^{(1)} = [0 \ 0]^T$  alcançará a convergência após atingir a tolerância desejada. Geometricamente, este esquema iterativo pode ser interpretado num gráfico, apresentado na Figura 2.1, com a componente  $x_1$  na abscissa e a componente  $x_2$  na ordenada.

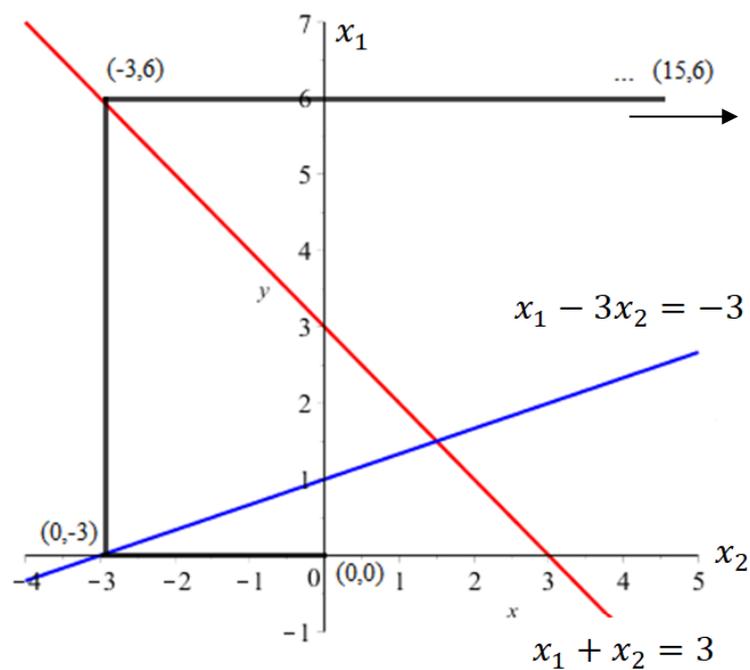


**Figura 2.1** Estudo da convergência pelo Método de Gauss-Seidel

Modificando a ordem das equações do sistema linear anterior, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

O esquema iterativo do método de Gauss-Seidel, utilizando a Equação 2.3, partindo da aproximação inicial  $x^{(1)} = [0 \ 0]^T$ , não convergirá. A Figura 2.2, apresenta a interpretação geométrica.



**Figura 2.2** Estudo da convergência pelo Método de Gauss-Seidel

Percebe-se que a sequência de convergência gerada pelo método de Gauss-Seidel depende fortemente da maneira com que as equações estarão dispostas.

### 2.2.1.2 Critérios de convergência

Existem critérios dentro do processo iterativo de Gauss-Seidel que são suficientes, porém, não necessários, para garantir a convergência do método. De acordo com Vital (2014), caso estes critérios sejam atendidos a convergência do sistema não dependerá da escolha da aproximação inicial,  $x^{(1)}$ , mas somente na rapidez para que tal convergência aconteça. Dentro desse contexto existem o critério de linhas e o critério de Sassenfeld.

#### Critério de linhas

Uma das condições suficientes para que o método de Gauss-Seidel atinja a convergência é a que a matriz seja estritamente diagonal dominante.

Sendo assim, dado um sistema linear  $Ax = b$ , a matriz  $A$  é dita estritamente diagonal dominante quando

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

e ela é diagonal dominante quando:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (2.5)$$

Define-se  $\alpha = \max \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Se o sistema gerado pela modelagem do problema atender a esse critério, o método de Gauss-Seidel gerará uma sequência  $x^{(k+1)}$  convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial  $x^{(1)}$ . A matriz que satisfaz o critério de linhas é aquela na qual para todas as linhas da matriz o módulo do coeficiente da matriz na diagonal é maior que a soma dos módulos de todos os demais coeficientes (não-diagonais) daquela linha. Este raciocínio também se aplica para as colunas.

#### Critério de Sassenfeld

Seja o sistema linear  $Ax = b$ . O parâmetro  $\beta$  é obtido de acordo com as Equações (2.6) e (2.7).

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} \quad (2.6)$$

$$\beta_i = \frac{|a_{i1}| \beta_1 + |a_{i2}| \beta_2 + \dots + |a_{i(i-1)}| \beta_{(i-1)} + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|}{|a_{ii}|}, i = 2, 3, \dots, n \quad (2.7)$$

Define-se  $\beta = \max \beta_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Se  $\beta < 1$ , qualquer que seja a aproximação inicial  $x^{(1)}$ , o método de Gauss-Seidel convergirá para a solução do sistema. Outro fato associado a este critério é que quanto menor for o valor de  $\beta$  mais rápida será a convergência. Uma característica importante desses dois procedimentos é que se o critério de linhas for satisfeito o de Sassenfeld também será. Porém, se nenhum dos dois forem atendidos pode ser que o sistema ainda tenha uma solução.

Conclui-se que quando os dois critérios de convergência não forem satisfeitos, deve-se tentar uma permutação de linhas e ou/colunas a fim de obter uma disposição para a qual a matriz atenda o critério de linhas ou de Sassenfeld. Esse processo não influenciará no resultado obtido pelo método iterativo. Porém, nem sempre é possível obter tal disposição. Modificações deste tipo são difíceis de serem realizadas em sistemas reais. A implementação de uma rotina que faça tal mudança de linhas e/ou coluna pode ser realizada. No entanto, como o método tem como vantagem a aplicação em sistemas de grandes dimensões essa mudança resultará num grande esforço computacional e incertezas quanto a sua eficiência, podendo inviabilizar o uso do método iterativo frente ao método direto com rotinas de pivotamento.

### 2.2.1.3 Critério de parada

Não é possível obter soluções exatas para muitos problemas da engenharia. Portanto, não se pode calcular exatamente os erros associados aos métodos numéricos. Nestes casos, é preciso contentar-se com uma aproximação ou estimativa dos erros. Um dos desafios dos métodos numéricos é determinar estimativas de erro na ausência de conhecimento do valor verdadeiro. Os processos iterativos geralmente estão associados a problemas complexos com estas características. Ao se calcular as respostas, em tais abordagens, a aproximação atual é feita com base na aproximação anterior. Esse processo é realizado repetidamente, ou iterativamente, para se calcular com sucesso as aproximações cada vez melhores. Para tais casos, o erro é frequentemente estimado como a diferença entre a aproximação anterior e a corrente.

Para tal finalidade adota-se no método de Gauss-Seidel o teste do erro absoluto ou do erro relativo. O processo iterativo é repetido várias vezes até que o vetor  $x^{(k)}$  esteja tão próximo do vetor  $x^{(k+1)}$  com a precisão desejada. O erro absoluto de cada componente, é calculado considerando a distância entre os termos  $x_i^{(k)}$  e  $x_i^{(k+1)}$ , no fim da iteração atual. O erro absoluto adotado,  $\xi_a^{(k+1)}$ , é o maior valor do módulo da distância entre os componentes que compõem o vetor solução.

$$\xi_a^{(k+1)} = \max \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

O erro relativo,  $\xi_r^{(k+1)}$ , é a relação entre o erro absoluto adotado e o módulo do maior componente,  $x_i^{(k+1)}$ , da iteração corrente.

$$\xi_r^{(k+1)} = \frac{\xi_a^{(k+1)}}{\max \left| x_i^{(k+1)} \right|}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

O erro relativo pode quantificar em porcentagem o maior erro entre os componentes do vetor solução. Este erro aumenta a precisão nos cálculos quando comparado com o erro absoluto. O erro absoluto se mostra eficiente quando os componentes do vetor solução tem ordem de grandeza elevada, como o caso das forças. Já o erro relativo converge mais rapidamente quando a variável em questão tem ordem de grandeza pequena, como os deslocamentos que são considerados pequenos ao se considerar uma análise linear.

## 2.1 Sistemas não lineares

Em muitos problemas da engenharia, matemática, robótica e ciências da computação os sistemas de equações não lineares surgem devido à natureza não linear do problema. Segundo Taylor (2005), ao contrário dos problemas lineares a maioria dos problemas não lineares é impossível de ser resolvida de forma analítica. Nos últimos anos, com o desenvolvimento de computadores cada vez mais eficientes e rápidos, a investigação de problemas não lineares e de métodos numéricos para sua resolução tem aumentado drasticamente (ALLGOWER; GEORG,1990; ARGYROS, 2007).

De acordo com Chapra e Canale (2008) é possível solucionar problemas não lineares por um método direto, empregando-se a técnica de eliminação de Gauss. Porém, esse processo deverá ser repetido iterativamente para se obter estimativas refinadas.

Segundo Babajee (2010) o método de Newton-Raphson é um dos métodos iterativos mais populares para encontrar soluções aproximadas de equações não-lineares. Tem como principal vantagem a sua convergência quadrática quando a solução da iteração corrente está próxima da raiz. Porém, o método de Newton-Raphson é sensível a algumas instabilidades numéricas.

Existem métodos que também visam solucionar equações não lineares, como o método de Broyden, método da máxima descida, método de Steffensen, método de Halley, método de Chebyshev, Método de Halley-Cuyt. Estes métodos numéricos exigem derivadas de ordem superiores e/ou mais operações matemáticas quando comparados com o de Newton-Raphson fazendo com que o seu uso tenha um maior custo computacionalmente (SOUZA, 2015).

Babajee (2010) fez um estudo dos métodos iterativos que requer apenas cálculos de derivadas de primeira ordem e mais eficientes em comparação com o método de Newton-Raphson. Dentro destes métodos destaca-se o método iterativo de Potra-Pták que possui convergência cúbica e somente necessita da derivada primeira. Os critérios de comparação mais utilizados entre estes métodos são a ordem de convergência e o índice de eficiência.

### **2.1.1 Método de Newton-Raphson**

Isaac Newton (1642-1727) desenvolveu vários trabalhos no fim do século XVII, sendo este um período de muito entusiasmo para a ciência e a matemática. No entanto, sua descrição difere substancialmente da descrição moderna apresentada na literatura. Newton aplicou o método apenas a polinômios não considerando as aproximações sucessivas  $x^{(k)}$ , mas uma seqüência de cálculo dos polinômios para chegar à aproximação da raiz  $f(x)$ . Portanto, Newton viu o método como puramente algébrico. (YUMPA, 1995).

Joseph Raphson (1648-1715) descreveu o método atribuído a Newton em 1690, creditando-o como a fonte da descoberta, mas nenhum dos dois pesquisadores utilizaram, de forma explícita a derivada em sua descrição, pois ambos consideraram apenas funções polinomiais (BURDEN; FAIRE; BURDEN, 2015).

O método de Newton foi generalizado pela primeira vez para a resolução de sistemas não lineares por Thomas Simpson (1710-1761). Em 1740, além de aplicar sua técnica à uma equação linear, Simpson dá um exemplo aplicado à uma equação não linear. Esta é a primeira formulação do método iterativo para equações gerais não-lineares, com base no uso de derivadas. A aplicação de Simpson no contexto de resolver equações não lineares era altamente inovadora. Porém, esta contribuição significativa recebeu pouco reconhecimento. A formulação do método usando a conhecida notação de derivada,  $f'(x)$ , foi publicada por

Joseph-Louis Lagrange em 1798. Lagrange não faz referência ao trabalho de Simpson, embora Newton e Raphson sejam ambos mencionados em seu trabalho (YUMPA, 1995).

### 2.1.1.1 Metodologia de Solução

O uso do método de Newton-Raphson tem como objetivo determinar as raízes ou zeros de uma equação não linear. Neste método, admite-se que, dada uma estimativa inicial para a raiz, o problema consiste em determinar uma sequência de correções até que se atinja a solução com uma precisão desejada. Para isto, a equação não linear, cujas raízes deverão ser determinadas, é aproximada através de uma série de Taylor (RUGGIERO; LOPES, 2014; PACITTI; ATKINSON,1983).

Seja uma função não linear  $f(x)$  apresentada na Figura 2.3.

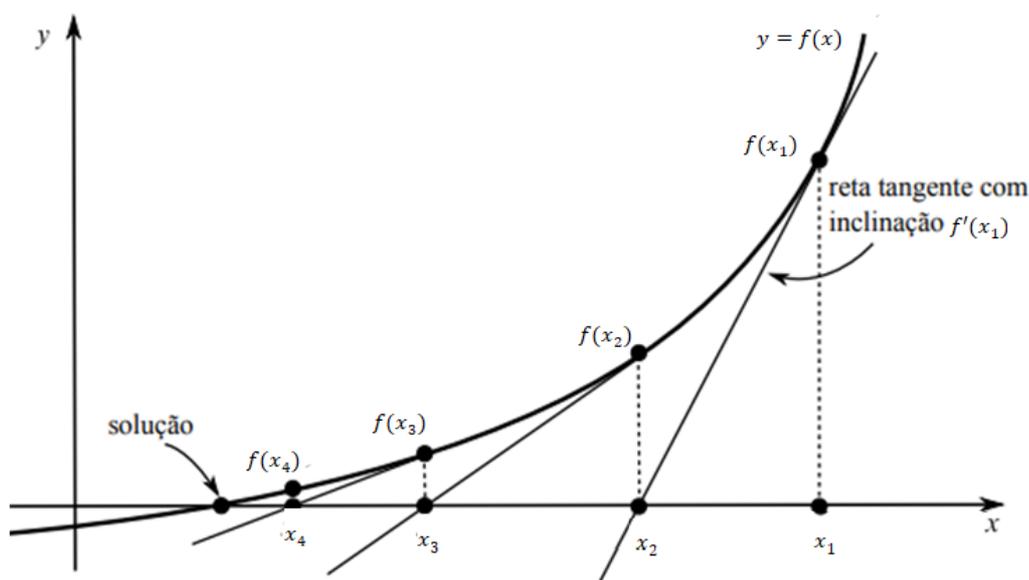


Figura 2.3 Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson

O processo iterativo começa com a escolha do ponto  $x_1$ , como aproximação inicial. A segunda aproximação,  $x_2$ , é obtida fazendo o cruzamento da reta tangente a  $f(x)$  no ponto  $(x_1, f(x_1))$  com o eixo  $x$ . A aproximação seguinte,  $x_3$ , se dá pela intersecção da reta tangente à  $f(x)$  no ponto  $(x_2, f(x_2))$  com o eixo  $x$ , e assim por diante. Matematicamente, a inclinação,  $f'(x_1)$ , da tangente no ponto  $(x_1, f(x_1))$ , na primeira iteração é dada por:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} \quad (2.10)$$

Resolvendo a equação 2.10 para  $x_2$ , obtem-se:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2.11)$$

Escrevendo a equação 2.11 de uma maneira generalizada para uma análise iterativa, tem-se:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})} \quad (2.12)$$

A equação 2.12 é a fórmula iterativa do método de Newton-Raphson. Esta mesma equação pode ser obtida a partir da série de Taylor. A expansão da série de Taylor de  $f(x)$  em torno de  $x_1$  é dada por:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2!}(x - x_1)^2 f''(x_1) + \dots \quad (2.13)$$

Se  $x_2$  é uma raiz da equação e  $x_1$  é um valor próximo a  $x_2$ , então:

$$f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2!}(x_2 - x_1)^2 f''(x_1) + \dots \quad (2.14)$$

Considerando somente os dois primeiros termos da série, a solução aproximada pode ser obtida resolvendo a equação 2.14 para  $x_2$ :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2.15)$$

A fórmula generalizada para da solução da  $k$ -ésima iteração é igual àquela dada pela equação 2.12.

Seja um sistema de equações não lineares com  $n$  equações e  $n$  incógnitas, equação 2.16:

$$F(x) = \begin{cases} f_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Onde cada função  $f_i$  pode ser expressada como um mapeamento de um vetor  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  de um espaço  $n$ -dimensional do espaço  $\mathbb{R}^n$  dentro de um conjunto de números reais  $\mathbb{R}$ . Este sistema de  $n$  equações não lineares pode ser representada em uma forma vetorial,  $F(x) = 0$ .

A solução deste sistema consiste em um conjunto de valores de  $x$  que resultam simultaneamente em igualar todas as equações a zero. Para isto o método de Newton-Raphson pode ser aplicado.

O método de Newton-Raphson para a solução de  $n$  equações não lineares é deduzida de maneira idêntica ao processo de solução de uma equação. Entretanto, a série de Taylor deve ser estendida para um caso de  $n$  variáveis para representar o fato de que mais de uma variável, independentemente, contribui para a determinação da raiz. Como se viu no método de Newton-Raphson para equações de uma variável, a cada iteração determina-se a reta tangente ao gráfico da função no ponto inicial. No caso de sistemas de  $n$  equações, determina-se o hiperplano tangente ao politopo determinado pelo sistema de equações no ponto inicial.

Para um caso mais simples  $F(x)$  é a solução de duas equações não lineares.

$$F(x) = \begin{cases} f_1 = f(x_1, x_2) = 0 \\ f_2 = f(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

O processo de solução começa com uma aproximação inicial,  $x_1^1$  e  $x_2^1$ . Se  $x_1^2$  e  $x_2^2$  é a solução exata do sistema e ambas estão suficientemente próximas de  $x_1^1$  e  $x_2^1$ , então os valores de  $f_1$  e  $f_2$  nos pontos  $x_1^2$  e  $x_2^2$  podem ser expressos usando a expansão em série de Taylor das funções  $f_1(x_1, x_2)$  e  $f_2(x_1, x_2)$  em torno de  $(x_1^1, x_2^1)$ :

$$\begin{aligned} f_1(x_1^2, x_2^2) &= f_1(x_1^1, x_2^1) + (x_1^2 - x_1^1) \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_1^1, x_2^1} + (x_2^2 - x_2^1) \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_1^1, x_2^1} + \dots \\ f_2(x_1^2, x_2^2) &= f_2(x_1^1, x_2^1) + (x_1^2 - x_1^1) \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_1^1, x_2^1} + (x_2^2 - x_2^1) \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_1^1, x_2^1} + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como  $x_1^2$  e  $x_2^2$  estão próximos de  $x_1^1$  e  $x_2^1$ , os valores aproximados para  $f_1(x_1^2, x_2^2)$  e  $f_2(x_1^2, x_2^2)$  podem ser calculados sem que sejam considerados termos de ordem mais elevada. Como  $f_1(x_1^2, x_2^2) = 0$  e  $f_2(x_1^2, x_2^2) = 0$ , a equação (2.18) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_1^1, x_2^1} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_1^1, x_2^1} \Delta x_2 &= -f_1(x_1^2, x_2^2) \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_1^1, x_2^1} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_1^1, x_2^1} \Delta x_2 &= -f_2(x_1^2, x_2^2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $\Delta x_1 = x_1^2 - x_1^1$  e  $\Delta x_2 = x_2^2 - x_2^1$ .

Rearranjando o sistema da equação 2.19 em forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

A matriz que contém as derivadas parciais das funções não lineares é denominada matriz Jacobiana,  $J$ .

Por se tratar de um sistema de equações não lineares o problema é resolvido através de uma técnica iterativa. A forma genérica do processo iterativo de Newton-Raphson é descrita da seguinte maneira:

$$J(x_i^{(k)}) \Delta x_i^{(k)} = -F(x_i^{(k)}) \quad (2.21)$$

Isolando o vetor de incógnitas, tem-se:

$$\Delta x_i^{(k)} = -[J(x_i^{(k)})]^{-1} F(x_i^{(k)}) \quad (2.22)$$

Fazendo  $\Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}$ , chega-se:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - [J(x_i^{(k)})]^{-1} F(x_i^{(k)}) \Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)} \quad (2.23)$$

Portanto, para  $n$  funções não lineares a matriz Jacobiana é escrita da seguinte maneira:

$$J(x_i) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{Bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

Destaca-se que essa formulação do método de Newton-Raphson, utilizando a notação do cálculo de derivadas, deve-se a Lagrange (YUMPA, 1995). Observa-se que a equação 2.23 representa um sistema de equações lineares. Em cada iteração do método para sistemas de equações não lineares resolve-se um sistema de equações lineares.

### **2.1.1.2 Análise de Convergência**

O método Newton-Raphson apresenta situações que podem ocasionar um desempenho insatisfatório. Uma característica expressiva está na convergência lenta em alguns casos. A aproximação inicial deve estar bem próxima da solução exata do problema. Além da convergência lenta, outras dificuldades podem aparecer durante o processo iterativo de Newton-Raphson. Por exemplo, a ocorrência de um ponto de inflexão,  $f''(x) = 0$ , na vizinhança de uma raiz e um salto de uma aproximação inicial que esteja próxima da raiz para uma posição distante. Este desastre é provocado por uma inclinação nula,  $f'(x) = 0$ , que faz com que a equação geral de Newton-Raphson tenha uma divisão por zero e a solução dispare horizontalmente e nunca atinja o eixo  $x$ .

O método iterativo de Newton-Raphson não possui um critério suficiente de convergência geral. A sua convergência depende da natureza da função e da precisão da aproximação inicial. Neste contexto, o analista deve ter um conhecimento geral das condições do problema físico ou dos artifícios, tais como os gráficos, que forneçam informação sobre o comportamento da solução. A falta de um critério de convergência geral também sugere que um bom software de computador deveria ser planejado para reconhecer convergência lenta ou divergência.

## **2.1.2 Método de Potra-Pták**

O procedimento proposto por Newton em 1669 e depois por Raphson em 1690 para resolver uma equação algébrica ainda é uma técnica central para resolver equações não-lineares tanto no campo da matemática quanto dentro da Engenharia Estrutural. Muitas pesquisas ainda são realizadas com intuito de construir novos métodos iterativos, a partir do método de Newton-Raphson. Dentro desse contexto, um método iterativo atraente foi proposto por Vlastimil Pták e Florian Alexandru Potra na década de 80.

Vlastimil Pták (1925-1999) foi um matemático tcheco, que trabalhou com análise funcional, teoria da análise numérica e álgebra linear. Em seus primeiros trabalhos ele se dedicou a estudar os progressos que poderiam ser atingidos com a aplicação do método de indução matemática não discreta, com o intuito de obter o intervalo de convergência do método de Newton-Raphson. O interesse inicial de Pták era centrado principalmente em torno da análise funcional, que tratava das pesquisas sobre espaços vetoriais. Desde 1979, com a

colaboração de Florian Alexandru Potra, um novo método iterativo foi proposto, resultando em importantes conclusões sobre o método iterativo de Potra-Pták (ARGYROS, 1988). Vale ressaltar que toda a teoria se encontra em Potra e Pták (1984).

Dentro da matemática aplicada e numérica, os métodos iterativos são uma ferramenta poderosa para resolver equações não lineares. O método de Newton-Raphson e os *Newton-like*s de convergência quadráticas são ainda os mais utilizados, visto que, os métodos iterativos que possuem convergência cúbica exigem um maior custo computacional, fazendo com que sejam desvantajosos no seu uso geral. A principal dificuldade prática relacionada com os métodos clássicos de terceira ordem é a avaliação da derivada segunda que implica uma grande quantidade de operações para avaliar cada iteração (AMAT et al., 2016).

O método iterativo de Potra-Pták é mais barato do que qualquer método clássico de terceira ordem que requer avaliação da segunda derivada. De acordo com Soleymani *et al.* (2012) o conhecido método de Newton-Raphson requer uma avaliação da função e uma avaliação da primeira derivada por cada iteração para atingir a taxa de convergência quadrática e o índice de eficiência  $2^{1/2} = 1.4142$ , enquanto que o método de Potra-Pták consiste em duas avaliações da função e uma avaliação da primeira derivada, fornecendo um método de convergência cúbica e o índice de eficiência  $3^{1/3} = 1.4422$ .

### 2.1.2.1 Metodologia de Solução

Segundo Babajee e Dauhoo (2006) os métodos multipontos derivados do Newton-Raphson que possuem convergência cúbica são mais precisos quando analisados em duas etapas. Soleymani *et al.* (2012) descrevem os dois passos desenvolvidos por Potra-Pták que solucionam um problema não linear, conforme mostram as equações 2.25 e 2.26.

$$y_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \quad (2.25)$$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1}) + f(y_i)}{f'(x_{i-1})} \quad (2.26)$$

O método de Potra-Pták já é bastante conhecido dentro dos métodos iterativos para solução de sistemas não lineares. Desde a sua origem que data do início da década de 80, inúmeros trabalhos surgiram com o intuito de melhorar o método em termos da ordem local de convergência, dentre eles pode-se citar Herceg e Herceg (2015), Soleymani, *et al.* (2012), Cordero, *et al.* (2010). Estes autores desenvolveram, a partir do método iterativo de Potra-Pták, novos esquemas iterativos de convergência superior. Porém, é necessário que se aumente o

número de equações para cada avaliação da função, fazendo com que os métodos tenham um maior custo computacional.

### 2.1.3 Critério de Parada dos métodos iterativos

O ideal de uma técnica iterativa é que as iterações sejam interrompidas quando uma solução exata é obtida. Isso significa que o valor de  $x_i^{(k+1)}$  deve ser tal que  $F(x_i^{(k+1)})=0$ . Geralmente, conforme discutido na Seção 2.2.1, a solução exata não pode ser obtida computacionalmente. Na prática a solução obtida é resultado de uma série de tentativas que cessam quando o erro do resultado anterior ficar muito próximo do resultado atual que se deseja. Duas estimativas de erro tipicamente utilizadas são:

*Erro relativo estimado:* as iterações são cessadas quando o erro relativo estimado é menor que um valor pré-definido  $\varepsilon$  :

$$\frac{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{|x_i^{(k)}|} \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

*Tolerância em  $f(x)$  :* as iterações são interrompidas quando o valor de  $f(x_i)$  é menor que a tolerância  $\delta$  :

$$|f(x_i^{(k+1)})| \leq \delta, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

# Capítulo 3

## Análise Linear de Treliças Metálicas

### 3.1 Introdução

As treliças apresentam-se como uma solução estrutural simples e econômica para muitas situações de engenharia, especialmente em projeto de passarelas, pontes e coberturas de estádios e galpões. A treliça apresenta a grande vantagem de conseguir vencer grandes vãos, podendo suportar cargas elevadas quando comparadas com o seu peso próprio. Pode-se ainda observar as estruturas treliçadas em torres de transmissão, vigas de lançamento, gruas e em inúmeras outras estruturas de engenharia. Estas características fazem com que as estruturas treliçadas as tornem mais econômicas em termos de materiais e custo global.



**Figura 3.1** Modelo de treliça plana usada na construção da Arena do Corinthians



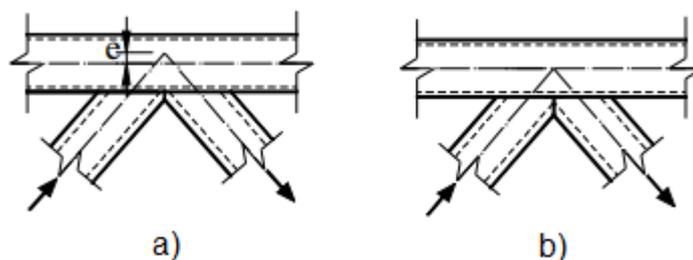
**Figura 3.2** Aplicação de treliças espaciais na cobertura da cervejaria Brahma -RJ

Dependendo do número de nós, da estaticidade externa e interna da treliça, é possível analisá-las por meio analítico através dos métodos dos nós ou da seção. Atualmente, as treliças planas e espaciais com dimensões e complexidade cada vez maiores têm sido usadas numa grande variedade de aplicações práticas da Engenharia, Figuras 3.1 e 3.2, necessitando de algoritmos numéricos que auxiliem no processo de análise estrutural.

A análise estrutural é uma etapa onde se obtém uma previsão sobre o comportamento da estrutura frente a um conjunto de solicitações impostas sobre ela. Para isto, é criado um modelo matemático, denominado modelo estrutural, adotando-se várias simplificações para que se alcance um resultado mais próximo da realidade. A partir desse modelo determinam-se os deslocamentos e suas correspondentes deformações, os esforços internos e externos (reações de apoio), além das tensões. Esses resultados antecedem o dimensionamento da estrutura usadas na Engenharia Civil, passo importante de um projeto estrutural.

Um modelo estrutural é concebido de acordo com as hipóteses sobre o comportamento do material: relação tensão *versus* deformação, condições de ligação entre seus elementos, equilíbrio entre forças e entre tensões. Desde que atendidas algumas hipóteses, as treliças podem ser analisadas como sendo treliças ideais. Neste caso toda a estrutura é formada unicamente por elementos retilíneos conectados em juntas localizadas nas extremidades de cada elemento, sendo estas rotuladas, com as cargas aplicadas somente nos nós rotulados. Essas hipóteses fazem com que nos membros de uma treliça atuem duas forças de mesmo módulo e direção, mas de sentidos opostos.

A configuração da ligação de uma treliça ideal faz com que os eixos dos montantes e diagonais coincidam com o eixo do banzo. Caso exista uma excentricidade,  $e$ , como apresentada na Figura 3.3a, momentos fletores nas rótulas surgirão. O mesmo não aparece na ligação de uma treliça ideal, Figura 3.3b. Neste caso o efeito global de transferência de carga é de tal maneira que os esforços normais prevaleçam. Este tipo de ligação das barras criará sempre pequenas restrições à rotação relativa das barras nos nós, com o aparecimento de pequenos momentos, mas, esses efeitos são desprezados no dimensionamento de treliças ideais. Portanto, este tipo de sistema estrutural não apresenta momentos fletores e esforços cortantes como forças internas, existindo apenas os esforços normais (MARTHA, 2010; SORIANO, 2005).



**Figura 3.3** Exemplos de ligação de elementos de treliça

A análise elástica linear adotando-se o modelo de treliça ideal, sem imperfeições iniciais e tensões residuais é, geralmente, suficiente para analisar as treliças planas e espaciais. Essas hipóteses não consideram as excentricidades, variações de temperatura, esforços provenientes da montagem, variações de seção nas extremidades das barras e tipo do nó que podem influenciar significativamente na resposta estrutural das barras e da estrutura como um todo, tanto nos resultados dos deslocamentos quanto na distribuição dos esforços internos. Neste tipo de análise, é habitual considerar que os deslocamentos provocados pelas ações exteriores são muito pequenos quando comparados com as dimensões dos componentes da estrutura, ou seja, admite-se que não exista influência da modificação da geometria da estrutura na distribuição dos esforços e das tensões. Toda a análise é feita com base na geometria inicial indeformada.

## 3.2 Análise Linear de Treliças

Em uma grande parcela dos problemas de análise estrutural a teoria da elasticidade serve de base para o dimensionamento dos elementos que a compõem, visto que a maioria das estruturas da engenharia civil possuem comportamento linear.

Algumas características das estruturas e do comportamento da estrutura justificam o motivo pelo qual se prefere utilizar a análise linear. Até o advento dos computadores, esse tipo de análise era o mais simples de ser entendido e calculado. A superposição de efeitos, que pode ser feita no regime elástico linear, permite obter as tensões e deformações geradas por um sistema de carregamentos complexos aplicados a uma estrutura como a soma de tensões e carregamentos gerados por cada uma das ações aplicadas isoladamente. O regime linear é usado como uma primeira aproximação do comportamento da estrutura quando se requer a consideração de não linearidades, além da análise não linear ser desenvolvida através de sucessivas etapas lineares (SERGINI, 2000).

A teoria da elasticidade linear considera válida as hipóteses de linearidade geométrica, considerando pequenos deslocamentos, pequenas rotações e pequenas deformações, e linearidade física onde o comportamento estrutural permite a adoção da relação linear entre tensões e deformações, que segue a lei de Hooke, quando as estruturas estão submetidas a cargas não muito elevadas que atuam de um modo suficientemente lento, tornando desprezíveis as forças de inércia. Neste caso, as equações de equilíbrio são descritas na posição indeformada da estrutura, chamada de análise de primeira ordem, tornando a análise estrutural mais simples.

O modelo estrutural dos elementos das treliças é idealizado como sendo unidimensionais com dois graus de liberdade por nó (treliças planas) e três graus de liberdade por nó (treliças espaciais). Nesse contexto, é possível usar um método analítico, métodos das forças, métodos dos deslocamentos para sua análise. Porém, com o advento da análise matricial e métodos básicos que possibilitam a transformação do modelo estrutural contínuo em um modelo discreto, optou-se pelo uso e estudo do Método dos Elementos Finitos (MEF). Este método é hoje um dos mais difundidos, tanto no meio acadêmico, como entre os engenheiros e técnicos para modelagem computacional em engenharia de uma forma geral (BATHE,1996).

### **3.2.1 Formulação Generalizada do Método dos Elementos Finitos**

Concomitantemente ao surgimento dos computadores nos anos de 1950, os métodos envolvendo matrizes na análise estrutural tiveram um grande desenvolvimento. O Método dos Elementos Finitos teve sua origem junto com estes acontecimentos, onde as primeiras aplicações englobavam apenas estruturas reticuladas. As primeiras contribuições aparecem nos trabalhos de Turner *et al.* (1956) e Argyris e Kelsey (1960). Neste último trabalho os autores apresentaram uma série de artigos publicados em *Aircraft Engineering* entre outubro de 1954 e maio de 1955. Desde então, diversas pesquisas têm sido publicadas sobre a análise de

estruturas baseadas no MEF. Na bibliografia básica podem-se citar: Reddy (1984, 1993), Hughes (1987), Cook; Malkus e Plesha (1989), Zienkiewicz e Taylor (1989), Cook (1995), Bathe (1996) e Dym e Shames (1996).

O MEF tem como objetivo transformar os elementos contínuos em elementos discretos com um número finito de graus de liberdade. A vantagem do MEF é que a equação de movimento para o sistema global pode ser obtida pelo agrupamento das equações determinadas individualmente para cada elemento finito utilizado na modelo. O movimento em qualquer ponto no interior de cada um destes elementos é obtido por intermédio de interpolação sendo, geralmente, as funções de interpolação, polinômios de grau reduzido e iguais para elementos do mesmo tipo.

Neste trabalho, as equações obtidas para resolver os problemas da mecânica dos sólidos foram formuladas pelo MEF como sendo uma extensão do método dos deslocamentos desenvolvidos através do princípio dos trabalhos virtuais (PTV). O método dos deslocamentos tem sido utilizado por muitos anos na análise de estruturas reticuladas, onde as incógnitas são os deslocamentos nodais. Ele utiliza as condições de equilíbrio de forças, condições de compatibilidade e de deslocamentos e a relação entre força e o deslocamento, de acordo com o comportamento da estrutura (SORIANO, 2005).

A formulação básica do MEF para a análise estática linear apresentada neste trabalho é baseada no método dos deslocamentos ou método da rigidez direta. Maiores detalhes podem ser vistos em Bathe (2006) e Zienkiewicz e Taylor (1988).

Assumindo um corpo contínuo elástico linear, a energia potencial total é dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV - \int_V u^T f^B dV - \int_{S_f} u^{S_f^T} f^{S_f} dV - \sum_i u^{i^T} F^i \quad (3.1)$$

O primeiro termo do lado direito da equação 3.1 está relacionado com a energia de deformação interna, enquanto os outros três termos, negativos, correspondem ao trabalho realizado pelas forças externas, como as forças de corpo  $f^B$ , as forças de superfície  $f^S$  e as forças concentradas em pontos de aplicação  $F^i$ .

Considerando-se a estacionariedade  $\delta\pi$  da equação 3.1, isto é,  $\delta\pi = 0$ , tem-se:

$$\int_V \delta\varepsilon^T \sigma dV = \int_V \delta u^T f^B dV + \int_{S_f} \delta u^{S_f^T} f^{S_f} dV + \sum_i \delta u^{i^T} F^i \quad (3.2)$$

Para determinar os deslocamentos a partir do funcional de energia, a equação 3.1 deve atender as condições de contorno de deslocamentos. Na equação 3.2 consideram-se quaisquer variações de deslocamentos que satisfaçam as condições de contorno e a sua correspondente deformação. Portanto, ao utilizar a estacionaridade do funcional de energia equivale usar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Este, por sua vez, é a base dos procedimentos para o MEF que tem os deslocamentos como incógnitas. O PTV estabelece que na condição de equilíbrio, para qualquer deslocamento virtual imposto, infinitesimal e compatível com as restrições de vinculação, o trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo. Portanto, pode-se escrever a variação de deslocamentos e deformação como:

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon &\equiv \bar{\varepsilon} \\
\delta u &\equiv \bar{u} \\
\delta u^{S_f} &\equiv \bar{u}^{S_f} \\
\delta u^i &\equiv \bar{u}^i
\end{aligned} \tag{3.3}$$

A equação 3.2 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_V \bar{\varepsilon}^T \sigma dV = \int_V \bar{u}^T f^B dV + \int_{S_f} \bar{u}^{S_f T} f^{S_f} dV + \sum_i \bar{u}^{i T} F^i \tag{3.4}$$

Agora passa-se a considerar o PTV como um mecanismo para as equações do MEF que governam o problema estrutural.

A estrutura é discretizada por elementos que estão conectados entre si por meio de pontos nodais em suas superfícies externas, garantindo a compatibilidade de deslocamentos. Demonina-se  $N^i$  é a matriz que contém as funções de interpolação de deslocamentos, de cada elemento  $i$ , que são compostas por expressões definidas em função dos valores nodais. O vetor que contém a aproximação do campo de deslocamentos de cada elemento é dado por:

$$\bar{u}^i = N^i \hat{u} \tag{3.5}$$

O vetor  $\hat{u}$  contém as três componentes dos deslocamentos,  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$  de todos os pontos nodais. Portanto,  $\hat{u}$  é um vetor com dimensão  $3N$ .

$$\hat{u}^T = [u_1 v_1 w_1 \quad u_2 v_2 w_2 \quad \cdots \quad u_N v_N w_N] \tag{3.6}$$

Os deslocamentos são definidos em um sistema de coordenadas globais  $X, Y, Z$ .

Submetida a algum carregamento externo qualquer e suas devidas condições de apoio, a estrutura se deformará. Esta medida é quantificada pelos campos de deformação,  $\varepsilon$ , que estão associados aos campos de tensão,  $\sigma$ , devido à condição de equilíbrio. Os campos de deformação e de tensão, respectivamente, para cada elemento são:

$$\bar{\varepsilon}^i = B^i \bar{u} \quad (3.7)$$

$$\sigma^i = D^i \bar{\varepsilon}^i \quad (3.8)$$

A matriz  $B$  expressa a relação entre deslocamentos e o campo de deformação, enquanto a matriz  $D$  representa a matriz de constantes elásticas.

Usando-se a aproximação dos deslocamentos para cada elemento, como apresentado na equação 3.5, pode-se agora deduzir a equação de equilíbrio do sistema global. Primeiro reescreve-se a equação 3.3 como um somatório da contribuição de cada elemento finito.

$$\sum_i \int_{V^{(i)}} \bar{\varepsilon}^{(i)T} \sigma^{(i)} dV^{(i)} = \sum_i \int_{V^{(i)}} \bar{u}^{(i)T} f^{(i)B} dV^{(i)} + \sum_i \int_{S^{(i)}_f} \bar{u}^{S^{(i)T}_f} f^{S^{(i)}_f} dS^{(i)} + \sum_i \bar{u}^{iT} F^i \quad (3.9)$$

Substituindo na equação 3.9 os deslocamentos, as deformações e as tensões, com o auxílio de 3.5, 3.7 e 3.8, obtêm-se:

$$\bar{u}^T \left[ \sum_i \int_{V^{(i)}} B^{(i)T} D^{(i)} B^{(i)} dV^{(i)} \right] \hat{u} = \bar{u}^T \left[ \left\{ \sum_i \int_{V^{(i)}} N^{(i)T} f^{(i)B} dV^{(i)} \right\} + \left\{ \sum_i \int_{S^{(i)}_f} N^{S^{(i)T}_f} f^{S^{(i)}_f} dS^{(i)} \right\} + F \right] \quad (3.10)$$

A matriz de interpolação dos deslocamentos da superfície,  $N^{(i)S}$ , é obtida pela matriz de interpolação dos deslocamentos,  $N^{(i)}$ , com a substituição das coordenadas do elemento de superfície.  $F$  é o vetor das forças externas aplicada no nó de cada elemento.

Para obter da equação 3.10, que corresponde às equações para os deslocamentos nodais desconhecidos, aplica-se o PTV com imposição de deslocamento virtual unitário para todos os componentes de deslocamentos, ou seja,  $\bar{u}^T = I$  onde  $I$  é a matriz identidade. Fazendo-se  $\hat{u} = U$ , a equação de equilíbrio da estrutura global é dada por:

$$KU = R \quad (3.11)$$

Para a obtenção do vetor de forças  $R$ , consideram-se todas as cargas externas impostas à estrutura. Este, por sua vez, é obtido fazendo-se a integração do segundo membro da equação

3.11, em que o primeiro, segundo e o terceiro termo, correspondem, respectivamente, às forças do peso próprio, às cargas distribuídas ao longo da superfície e as cargas concentradas.

A matriz de rigidez do elemento, a ser considerada na matriz de rigidez da estrutura, é dada por:

$$K = \sum_i \underbrace{\int_{V^{(i)}} B^{(i)T} D^{(i)} B^{(i)} dV^{(i)}}_{=K^i} \quad (3.12)$$

O somatório das integrais de volumes dos elementos na equação 3.12, expressa a adição direta das matrizes de rigidez de cada elemento para a montagem da matriz de rigidez global do sistema. O mesmo acontece para a montagem do vetor de forças. Este processo é chamado de método da rigidez direta. A equação 3.11 se refere a problemas de natureza estática, obtendo-se a solução para uma posição de equilíbrio da estrutura, que fornece o vetor de deslocamentos nodais,  $U$ .

A partir desses valores, considerando-se as matrizes de interpolação de cada elemento, obtêm-se os deslocamentos nos pontos do meio contínuo. Das equações 3.7 e 3.8, determinam-se também, as deformações e tensões.

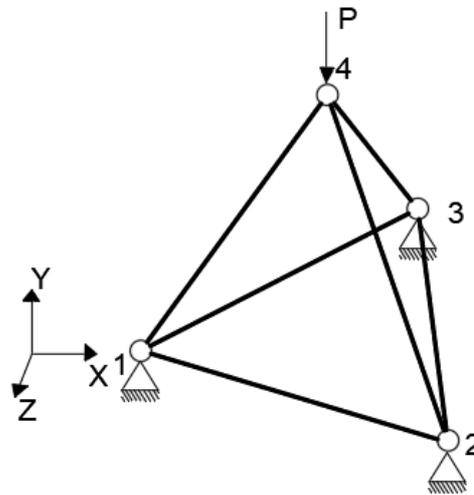
Portanto, observa-se a importância da discretização para se gerar a aproximação do método numérico, pois esta dependerá do tamanho da malha de elementos finitos, das funções de interpolação e também da cinemática da deformação empregada. A função de interpolações pode ser desde uma escolha linear até funções de ordens elevadas. A aproximação linear é a mais comum e de menor esforço computacional e sua qualidade dependerá dos resultados adequados de deformação e tensão. Diferentes funções de interpolação podem ser usadas, mas conhecer melhor a natureza e o comportamento da estrutura a ser analisada, ajuda no processo de decisão.

### 3.2.2 Formulação do MEF Para Elemento de Treliça

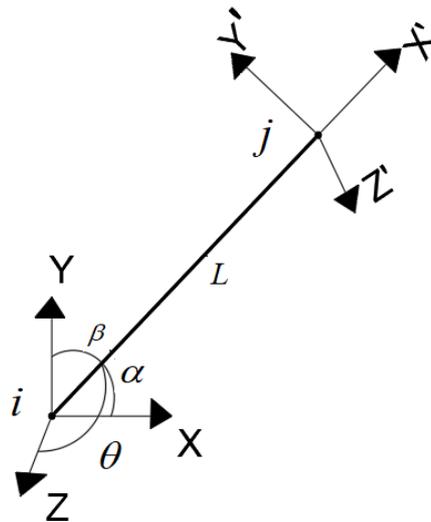
A formulação apresentada anteriormente pode ser usada para análise de qualquer corpo tridimensional que tenha comportamento elástico linear submetido a um carregamento estático. Passa-se agora para as considerações de elementos unidimensionais, que é o caso das treliças.

As treliças são estruturas reticuladas formadas por elementos retos, conectados em seus nós extremos e submetidos somente a esforços axiais (Figura 3.1). A modelagem das treliças é feita a partir do elemento de barra. Assume-se, ainda, que o material dos elementos tenha

comportamento linear elástico (lei de Hooke) e considerando-se que suas deformações são pequenas.



**Figura 3.4** Treliça Espacial



**Figura 3.5** Elemento de treliça no sistema de referência global e sistema de referência local

Como citado anteriormente, as treliças ideais estão submetidas somente aos esforços axiais. Devido à geometria das ligações dos elementos, desprezam-se os efeitos dos momentos fletores que podem surgir nas ligações. Vale informar que as forças de corpo e de superfície serão desprezadas. Assim, o funcional de energia apresentado na equação 3.1 pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV - \sum_i u^i F^i \quad (3.13)$$

A partir deste funcional de energia para a treliça ideal e aplicando-se o princípio da estacionariedade,  $\delta\pi = 0$ , passa-se a definir as funções de forma, o campo de deformações e matriz de rigidez dos elementos.

### 3.2.2.1 Funções de Forma

Considerando-se que todos os deslocamentos estão ao longo do eixo  $X$  e que a função  $u(x)$  corresponde ao campo de deslocamentos,  $u_i$  e  $u_j$ , se somente se:

$$\begin{aligned}u(0) &= u_i \\ u(L) &= u_j\end{aligned}\tag{3.14}$$

As funções de forma, também chamadas de funções de interpolação, podem ser obtidas de várias maneiras. Caberá ao analista/programador decidir a melhor função de interpolação para gerar as respostas de deslocamentos, deformação e tensão. No caso do elemento de treliça, onde os graus de liberdades são os deslocamentos axiais, a função de Interpolação de Lagrange é bastante comum

Neste trabalho utilizou-se a seguinte função polinomial de Lagrange com aproximação linear:

$$u(x) = N_1(x)u_i + N_2(x)u_j\tag{3.15}$$

em que as funções de forma são dadas por:

$$N_1(x) = \frac{-x + L}{L}\tag{3.16}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{L}\tag{3.17}$$

A principal característica das funções  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$  consiste no fato de que a função  $N_1(x)$  assume o valor unitário no nó  $i$  e nulo no nó  $j$ . A função  $N_2(x)$  assume o valor unitário no nó  $j$  e nulo no nó  $i$ .

### 3.2.2.2 Campo de Deformação

No elemento de treliça, o campo de deformações é definido do seguinte modo:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}\tag{3.18}$$

Substituindo-se a equação 3.15 na equação 3.18, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{d}{dx} (N_1(x)u_i + N_2(x)u_j) \quad (3.19)$$

Como os deslocamentos nodais  $u_i$  e  $u_j$  não dependem de  $x$ , a derivação resulta em:

$$\varepsilon = \frac{dN_1}{dx} u_i + \frac{dN_2}{dx} u_j \quad (3.20)$$

e em notação matricial, vem:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

A matriz  $B$  da equação 3.5 para o elemento de treliça é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Substituindo na equação 3.21, as derivadas das funções de forma, definidas pelas equações 3.16 e 3.17, para o elemento de treliça, conclui-se que:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

### 3.2.2.3 Matriz de Rigidez do Elemento

Designando-se por  $A$  a área da seção transversal da barra, tem-se:

$$dV = Adx \quad (3.24)$$

Uma vez que, o eixo da barra coincide com o eixo  $x$ , obtêm-se:

$$dL = dx \quad (3.25)$$

A relação constitutiva para o caso de regime elástico linear obedece a lei de Hooke.

$$\sigma = D\varepsilon \quad (3.26)$$

A matriz  $D$  é composta pelo módulo de elasticidade do material  $E$ .

Substituindo todas estas equações na equação 3.12 obtêm-se a rigidez de cada elemento da treliça. Admite-se  $E$  e  $A$  sejam constantes.

$$K^e = EA \int_0^L B^T B dx \quad (3.27)$$

Substituindo-se a equação 3.23 em 3.27 e efetuando-se os cálculos necessários, chega-se à matriz de rigidez do elemento de treliça na sua forma usual.

$$K^e = EA \int_0^L \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} dx \quad (3.28)$$

$$K^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Neste caso simples os elementos da matriz de rigidez coincidem com os que se obtêm diretamente a partir do método dos deslocamentos.

#### 3.2.2.4 Matriz de Rotação

Para a montagem da matriz de rigidez da estrutura, a matriz de rigidez de cada elemento será superposta adequadamente de acordo com as conexões dos nós. A montagem desta matriz é feita de acordo com a localização do elemento, isto é, trata-se de um problema vetorial. Portanto, a determinação da matriz de rigidez da estrutura, do vetor de forças e de deslocamentos, associados a cada elemento são relacionados com um sistema de referência. Neste contexto, o sistema de referência local corresponde ao eixo ao longo do elemento, como na Figura 3.5.

Uma estrutura real é formada por vários elementos que precisam ser correlacionados com um único sistema de coordenadas. Por isso surge o conceito da matriz de rotação que relaciona a matriz de rigidez do elemento no sistema local com a matriz de rigidez deste elemento no sistema global.

Considerando  $u'_i$  e  $u'_j$  os deslocamentos nodais no sistema de coordenadas local, com a mesma direção  $x$  do sistema de coordenadas local. Em termos de cossenos diretores  $u'_i$  e  $u'_j$ , as equações podem ser expressas da seguinte forma:

$$u'_i = u_{ix} \cos \alpha + u_{iy} \cos \beta + u_{iz} \cos \theta \quad (3.30)$$

$$u'_j = u_{jx} \cos \alpha + u_{jy} \cos \beta + u_{jz} \cos \theta \quad (3.31)$$

Escrevendo-se a equação 3.30 e 3.31 em uma forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ u_{jz} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

A matriz de rotação T converte o vetor de deslocamentos do sistema local para o sistema global.

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

A matriz de rigidez do elemento, definida pela equação 3.29, está referenciada no sistema local. Para transformar esta matriz para o sistema global, realiza-se a seguinte operação:

$$[K]^e = [T]^T [K'] [T] \quad (3.34)$$

Fazendo-se os cálculos necessários, a matriz de rigidez do elemento no sistema de referência global é dada por:

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \theta & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \cos \theta \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \theta & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \beta \cos \theta \\ \cos \alpha \cos \theta & \cos \beta \cos \theta & \cos^2 \theta & -\cos \alpha \cos \theta & -\cos \beta \cos \theta & -\cos^2 \theta \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \cos \theta & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \theta \\ -\cos \alpha \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \beta \cos \theta & \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \theta \\ -\cos \alpha \cos \theta & -\cos \beta \cos \theta & -\cos^2 \theta & \cos \alpha \cos \theta & \cos \beta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

# Capítulo 4

## Análise Não Linear Física de Treliças Metálicas

### 4.1 Introdução

Na busca por análises estruturais mais realísticas, tornando as estruturas mais econômicas sem afetar a sua segurança estrutural, a consideração das não linearidades físicas e geométricas têm-se mostrado mais perto do comportamento real da estrutura.

O comportamento não linear estrutural pode surgir da não linearidade do material ou geométrica. Na primeira, a relação constitutiva que descreve o material é não linear, e a resposta estrutural associada a fenômenos físicos, como a plasticidade, deve ser levado em consideração; na segunda, a não linearidade é devida a mudanças na geometria, decorrentes de grandes deformações e/ou rotações, que entram na formulação da relação deformação *versus* deslocamento não linear, e podem ocorrer mesmo que a relação constitutiva seja linear (REDDY, 2004; LEON et al., 2011).

Para as treliças ideais é conveniente que a não linearidade geométrica seja considerada. Os deslocamentos da estrutura podem alterar significativamente o equilíbrio, podendo conduzir algumas barras a esforços maiores que os previstos na análise teórica elástica linear. Estes esforços internos adicionais podem provocar a falha prematura de barras ou de toda a estrutura. A maioria dos trabalhos envolvendo a análise não linear de treliças planas e espaciais consideram a não linearidade geométrica. Citam-se como trabalhos relevantes as pesquisas desenvolvidas por Silva (2015), Greco, *et al.* (2006), Pinheiro e Silveira (2004) e Pinheiro (2003).

A não linearidade física está relacionada com o comportamento do material podendo subestimar os deslocamentos e superestimar os esforços internos, associando as regiões de concentração de tensão, em particular os nós, onde os efeitos da não linearidade física são importantes.

A plasticidade é um estado em que o elemento estrutural apresenta deformações irreversíveis ou deformações permanentes mesmo depois que o esforço é retirado. Devido à natureza das deformações permanentes ou residuais, o processo plástico tem uma descrição

matemática diferenciada da descrição puramente elástica e também mais complexa, conforme descrito por Souza Neto (2009), Lubliner (2008), Chen (1994) e Chen e Han (1988).

O estado de tensões de uma estrutura é extremamente complexo. Tensões secundárias surgem durante o processo de fabricação, de transporte e de montagem. Estas tensões combinadas com as tensões iniciais desconhecidas e a concentração e redistribuição das tensões devidas às descontinuidades da estrutura tornam os cálculos baseados na Teoria da Elasticidade bastante imprecisos. Portanto, a Teoria da Plasticidade surge como uma extensão necessária desta primeira que tem como base a análise de tensões e de deformações da estrutura em regime elástico e plástico (SANTOS, 2002).

Segundo Chen e Han (1988) a Teoria da Plasticidade tem dois aspectos importantes. O primeiro é a determinação de relações tensão *versus* deformação para os materiais elasto-plásticos, tanto nos casos de encruamento como nos casos de amolecimento. O segundo é um procedimento geral para solucionar estruturas em regime elastoplástico sob efeito de cargas e/ou deslocamentos impostos. Este por sua vez, utiliza-se normalmente processos numéricos, com caráter não linear das respostas em regimes plásticos.

Em casos de estruturas muito esbeltas o colapso ocorre quando todos os pontos da estrutura se encontram no domínio elástico o que leva a um estudo considerando somente a não linearidade geométrica. Caso contrário, nas estruturas menos esbeltas, o colapso pode ocorrer quando alguns pontos se encontram já no regime plástico. Por esse motivo, a consideração da não linearidade física se torna indispensável (REIS; CAMOTIN, 2000).

A não linearidade física considera a perda de rigidez do material durante a história de carregamento da estrutura. Este fato fará com que, a partir de um certo valor de carga, os elementos que compõem a estrutura perderão a capacidade de recuperar a sua forma inicial quando descarregados, ou seja, acumulam deformações permanentes, chamadas de deformações plásticas (SILVA, 2009).

Durante a análise de uma estrutura reticulada, existirão barras que estarão solicitadas acima do escoamento do material. Quando as barras de uma estrutura alcançarem um certo estágio de solicitação acima deste limite alguns pontos da seção transversal começam a plastificar. A inclusão dos efeitos da não linearidade física propiciará a descrição do comportamento da estrutura reticulada de forma mais precisa. Alguns autores analisaram treliças considerando esta não linearidade, dentre eles podem-se citar: Saffari *et al.* (2013), Driemeir, Proença e Alves (2005), Leite (2000), Blandford (1996), Ramesh e Krishnamoorthy (1994) e Papadrakakis (1983).

Santos (2002) analisou treliças planas, que também já haviam sido analisadas no trabalho de Rodrigues (1997), ambos observaram que os resultados obtidos via comportamento linear e não linear geométrico apresentaram entre si diferenças desprezíveis. Por outro lado, quando se considerou a não-linearidade física, os deslocamentos tiveram um aumento significativo em relação à análise linear, demonstrando a importância de se considerar tal fonte de não linearidade.

A discretização do problema estrutural e emprego de formulações não lineares geram um sistema de equações não lineares, fazendo com que os métodos numéricos sejam bastante úteis nesse tipo de análise. Os métodos puramente incrementais têm como vantagem a sua simplicidade na formulação e implementação e como desvantagem o fato de que as forças internas correspondentes à configuração deformada da estrutura estarão desequilibradas com as cargas externas ao final de cada passo incremental, acumulando erros à medida que o número de passos de carga aumenta. Para contornar este problema é necessário utilizar uma formulação que combine procedimentos incrementais e iterativos na obtenção da solução, reduzindo significativamente os erros devido às iterações realizadas dentro de cada passo de carga. Desta forma, o equilíbrio entre forças internas e as cargas externas aplicadas na estrutura é praticamente alcançado (MAXIMIANO, 2012). No caso da análise destas estruturas, o método iterativo de Newton–Raphson é frequentemente utilizado (YANG; KUO, 1994; BATHE, 1996).

Afim de melhor descrever o comportamento de materiais sólidos em regime plástico, foram desenvolvidos modelos elastoplásticos que descrevem o fenômeno da plastificação. Neste trabalho será implementado uma formulação inelástica baseada no Teorema de Castigliano e uma formulação elastoplástica bilinear.

## **4.2 Formulação Inelástica Baseada no Teorema de Castigliano**

O aumento da complexidade das estruturas impulsionou decisivamente o desenvolvimento de modelos matemáticos para descrever a geometria, as deformações e os esforços internos. A avaliação do seu comportamento tornou-se mais sofisticada com o avanço dos ensaios de laboratórios e das técnicas matemáticas. Em 1868, Tresca apresentou resultados experimentais sobre o comportamento plástico de metais submetidos a grandes pressões propondo a primeira condição de escoamento, ou seja, o estado em que o material escoava quando a tensão máxima atingia seu valor crítico. Estes resultados logo despertaram o interesse de outros grandes pesquisadores da época. Em 1870 Saint-Venant introduziu as relações constitutivas para materiais perfeitamente plásticos no plano de tensões. Em 1873, Alberto Castigliano formulou

o teorema que leva o seu nome. A generalização do Teorema de Castigliano, feita em 1889 por Engesser, eliminou a limitação de sua aplicação somente em casos em que a relação entre forças externas aplicadas e deslocamentos seja linear. O primeiro Teorema de Castigliano permitiu tratar os problemas cuja relação entre forças externas e deslocamentos era não linear (CHEN; HAN, 1988).

Para a análise de uma estrutura, a energia de deformação total é expressa na equação 3.11. A consideração do comportamento inelástico da estrutura se dá com a modificação na energia interna de deformação. O teorema de Castigliano diz que a derivada parcial da energia interna de deformação,  $U$ , em relação ao deslocamento generalizado,  $u_i$ , que fornece a força generalizada,  $F_i$ . A equação 4.1 representa o Teorema de Castigliano.

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \quad (4.1)$$

A energia interna de deformação por unidade de volume,  $U(\varepsilon)$ , considerando uma relação constitutiva não linear do material é dada por:

$$U(\varepsilon) = \int_{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.2)$$

A energia interna de deformação total para o elemento é obtida por meio da equação 4.3.

$$U_T(\varepsilon) = \int_V U(\varepsilon) dV \quad (4.3)$$

Por se tratar de um elemento linear e fazendo  $dV = A dx$ , a equação 4.3 pode ser reescrita da seguinte forma:

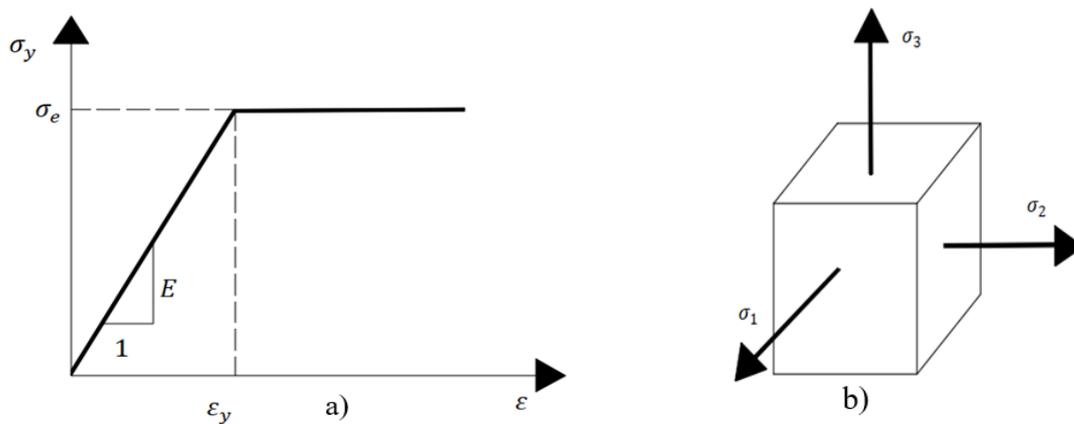
$$U_T(\varepsilon) = \int_L [\sigma(\varepsilon) d\varepsilon] A dx \quad (4.4)$$

A relação constitutiva para a análise inelástica é deduzida a partir do comportamento do material frente ao carregamento aplicado. O processo de análise inelástica envolve uma modelagem matemática da relação constitutiva real. Vale ressaltar que nas estruturas metálicas, considerara-se a fase elástica, a fase elasto-plástica e fase plástica. A análise ainda pode levar em conta o endurecimento do material, estrição e as tensões residuais.

### **4.3 Modelo Elastoplástico Unidimensional para Análise de Treliças Metálicas**

A não linearidade física na análise de estruturas treliçadas de aço sujeitas à ações estáticas, pode ser concebida com a implementação numérica de modelos com endurecimento linear, tais como o modelo cinemático, isotrópico e misto, através do desenvolvimento de equações matemáticas que simulem o comportamento estrutural do aço e da criação de um algoritmo computacional adequado, que armazene toda a história anterior da relação tensão *versus* deformação dos elementos estruturais.

Considerando-se um elemento diferencial em um ponto de um corpo de material perfeitamente elástoplástico submetido a tensões multidirecionais. Presume-se que o material tenha uma relação de tensão *versus* deformação uniaxial conhecida, conforme mostre a Figura 4.1a, e, em um dado ponto as tensões principais estão representadas na Figura 4.1b.



**Figura 4.1** Elementos da teoria da plasticidade

A avaliação da tensão que o elemento está submetido durante o processo de carregamento da estrutura tem que ser avaliado ao longo de cada incremento. Para um material virgem e no começo deste processo de carga, as deformações elásticas são as únicas que existem, então  $\varepsilon = \varepsilon^e$ .

$$\varepsilon^e = \frac{1}{E} \sigma \quad (4.5)$$

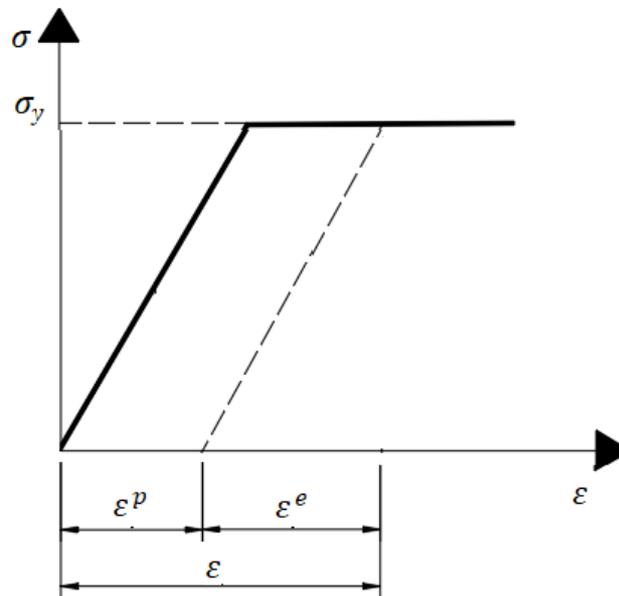
Caso seja produzida alguma plastificação verifica-se que o valor da deformação plástica,  $\varepsilon^p$ , é dada por:

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e \quad (4.6)$$

ou

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \frac{1}{E} \sigma \quad (4.7)$$

A deformação plástica calculada segundo a equação 4.7 coincide com o modelo em regime elasto plástico perfeito, conforme mostra a Figura 4.2.



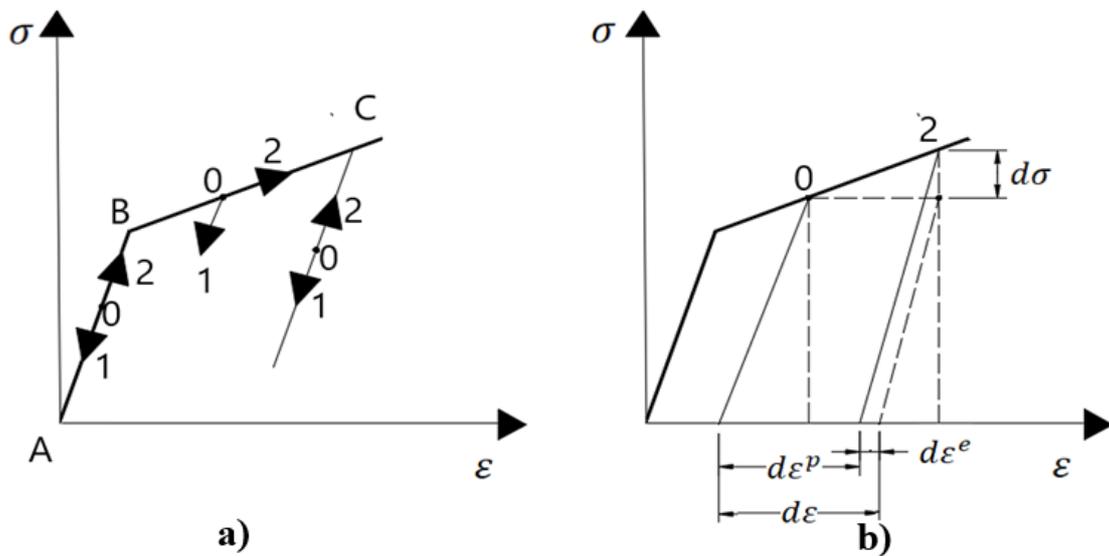
**Figura 4.2** Relação constitutiva um material no regime elasto-plástico perfeito

Assume-se que no regime plástico, a deformação na direção de uma componente é a soma de uma deformação elástica recuperável  $\varepsilon^e$  e uma deformação plástica irreversível  $\varepsilon^p$ , ver Figura 4.2.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4.8)$$

### 4.3.1 Análise Elastoplástica Incremental

A Figura 4.3 idealiza o comportamento elastoplástico através de um diagrama bilinear, onde se distingue um comportamento elástico na região  $AB$  com módulo de elasticidade  $E$  e uma região plástica  $BC$  com “endurecimento” linear (*strain hardening*) com módulo tangente  $E_t$ .



**Figura 4.3 a) Processos incrementais b) Relação entre incrementos de tensão e deformação**

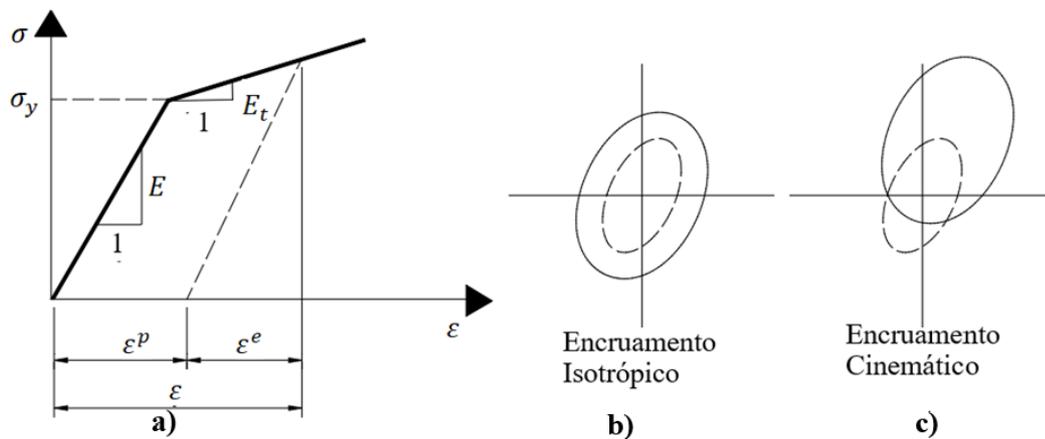
Considerando-se que o incremento de deformação possa ser decomposto em um incremento elástico e outro plástico, tem-se que:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (4.9)$$

Durante o processo incremental, Figura 4.4a, o material inicialmente se deforma segundo o módulo de elasticidade  $E$  até que a tensão atuante atinge o valor  $\sigma_y$ , denominada tensão de escoamento. Neste caso, a deformação elástica é obtida pela equação 4.7 e o acréscimo de deformação total pela equação 4.9, com  $d\epsilon^p = 0$ . Se a partir deste ponto continua a se aplicar carga sobre o material, este passa a se deformar segundo o módulo tangente  $E_t$ . Analisando a Figura 4.4b, tem-se que em algum estágio após o escoamento inicial o acréscimo de tensão  $d\sigma$  é acompanhado de um acréscimo de deformação  $d\epsilon$ .

Para materiais com ou sem endurecimento tem-se que as tensões possíveis para um elemento se encontram necessariamente contidas em um segmento do eixo das ordenadas no diagrama da tensão *versus* deformação. Caso o valor do carregamento seja responsável por originar a tensão de escoamento, ao continuar a aplicação da carga serão iniciados processos (infinitesimais) plásticos. Neste contexto, a tensão será crescente em material com endurecimento ou constante em material perfeitamente plástico. No limite da fronteira entre o processo elástico e plástico também é possível iniciar processos (infinitesimais) puramente elásticos mediante o descarregamento. Essa fronteira é chamada de curva de plastificação.

Segundo McGuire, Gallager e Ziemian (2014), as duas regras de encruamento mais comumente usadas, são a isotrópico e cinemático. No encruamento isotrópico, ver Figura 4.3b, a curva de escoamento cresce em tamanho mantendo sua forma original. Neste caso, as tensões para escoamento na tração e compressão são as mesmas. Já no cinemático, ver Figura 4.4c, a superfície de escoamento inicial é deslocada a uma nova posição no espaço de tensão, sem mudar de forma ou tamanho. No cinemático, a diferença entre as tensões de escoamento, sob carregamento de tração e compressão, permanece constante e igual a duas vezes o limite de escoamento do material.



**Figura 4.4** a) Modelo elastoplástico bilinear b) superfície de plastificação com encruamento isotrópico c) superfície de plastificação com encruamento cinemático

Durante o processo incremental é preciso avaliar se o elemento está em regime elástico ou regime plástico, para isso é necessário definir uma função de plastificação,  $f^0(\sigma)$ . Neste trabalho adotou-se que, caso (b)

$$f^0(\sigma) = \sigma - \sigma_y < 0 \quad (4.10)$$

caracteriza-se a fase elástica, e quando

$$f^0(\sigma) = \sigma - \sigma_y \geq 0 \quad (4.11)$$

inicia-se a plastificação. Quando se consideram os modos de plastificação de tração e compressão faz-se necessário adaptar esta função de plastificação, equação 4.12:

$$f^0(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \quad (4.12)$$

Em função da definição da taxa de deformação elástica adotada, mostrada na equação 4.5, o módulo de elasticidade pode ser determinado com a seguinte equação:

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e} \therefore \varepsilon^e = \frac{1}{E} \sigma \quad (4.13)$$

Da mesma forma, em um processo plástico, o módulo tangente é definido por:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \therefore \varepsilon = \frac{1}{E_t} \sigma \quad (4.14)$$

O módulo de endurecimento por:

$$E_p = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \therefore \varepsilon^p = \frac{1}{E_p} \sigma \quad (4.15)$$

O módulo de endurecimento  $E_p$  é uma função de  $\sigma$  sempre positiva para materiais cuja a curva tensão *versus* deformação é sempre crescente. Daí, substituindo as equações 4.13, 4.14 e 4.15 em 4.8, resulta:

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_e} + \frac{1}{E_p} \quad (4.16)$$

$$E_t = \frac{E}{E + E_p} E_p \quad (4.17)$$

Para materiais idealmente plásticos  $E_t = 0$  e  $E_p = 0$ .

Na implementação do programa é considerado que na fase elástica

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (4.15)$$

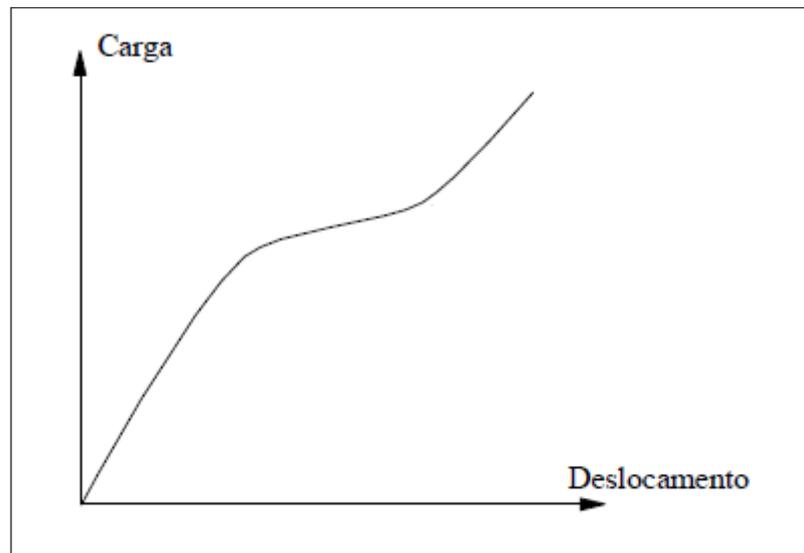
e na fase elastoplástica

$$d\sigma = E_t d\varepsilon = \left( \frac{E}{E + E_p} E_p \right) d\varepsilon \quad (4.16)$$

Sustentados por evidências experimentais, estes conceitos e a ideia subjacente de que as deformações podem ser tratadas como a soma de partes elásticas e plásticas é possível que grande parte da teoria da plasticidade seja aplicável à análise estrutural. Eles podem, por exemplo, ser incorporados nas relações constitutivas de programas de elementos finitos inelásticos, transportados para o nível de membros por meio de um processo de integração numérica e a nível do sistema pela análise global (BATHE, 1996).

#### 4.4 Metodologia de Solução Não Linear

Crisfield (1997) explica que a resposta da análise de uma estrutura antes de se alcançar os pontos críticos possa ser suficiente para os propósitos de projeto. A determinação da resposta no intervalo pós-crítico é essencial quando se deseja estudar o comportamento não linear com o intuito de se conhecer a carga de colapso da estrutura. A curva carga *versus* deslocamento completa descreve a variação do comportamento global do sistema estrutural à medida que se variam os parâmetros de controle, como a força externa aplicada e o deslocamento. A Figura 4.5 representa esta curva, sendo esta uma forma comum de representação gráfica da resposta estática não linear de uma estrutura. Cada um de seus pontos representa uma configuração de equilíbrio estático.



**Figura 4.5** Curva carga *versus* deslocamento

A análise não linear tem como objetivo encontrar a configuração de equilíbrio da estrutura sob a ação de forças aplicadas. As condições de equilíbrio para o método dos elementos finitos que representam uma estrutura podem ser expressas pelo seguinte sistema de equações não lineares (BATHE, 2006):

$$F_i = \lambda F_r \quad (4.17)$$

Na equação 4.17,  $F_r$  é o vetor de referência que contém o carregamento externo aplicado,  $\lambda$  é um parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de  $F_r$  e  $F_i$  é o vetor de forças internas, em função dos deslocamentos nodais  $u$  e da relação constitutiva não linear do material.

A solução usando os métodos iterativos fornece um simples ponto no caminho do equilíbrio. Para obter todos os pontos é necessário utilizar uma metodologia incremental-iterativa. Num contexto computacional, para um dado passo de carga, esse processo pode ser

resumido em dois ciclos. O primeiro ciclo, denominado ciclo incremental, envolve a determinação dos deslocamentos incrementais partindo de um determinado valor do acréscimo de carga. A segunda etapa é a estratégia de iteração que tem por objetivo corrigir as forças internas incrementais obtidas com o resultado da primeira etapa através da utilização de um método iterativo.

#### 4.4.1 Método Incremental-Iterativo de Newton-Raphson

Somente com o processo incremental nem sempre se consegue satisfazer a condição de equilíbrio do sistema de equações não lineares. Devido a este fato serão necessárias fazer iterações subsequentes para que se possa restaurar o equilíbrio. O método de Newton-Raphson, apresentado no capítulo 2, é uma técnica bastante utilizada em análises numéricas para solucionar problemas estruturais que tenham comportamento não linear (BATHE, 1996).

Para o método iterativo de Newton-Raphson é necessário definir um vetor de forças desequilibradas,  $g$ , que deve se anular no decorrer do ciclo de iteração. Isto ocorrerá quando o ponto de equilíbrio da estrutura for atingido. Assim, sendo, tem-se que:

$$g = \lambda F_r - F_i = 0 \quad (4.18)$$

Para cada novo incremento de carga, entra-se em um novo ciclo iterativo. A cada iteração  $k$ , dada uma solução aproximada, calcula-se a correção dos deslocamentos  $\Delta u_k$ , tal que:

$$g(u_{k-1} + \Delta u_k) = 0 \quad (4.19)$$

A partir da expansão em série de Taylor da equação 4.19 em torno de  $u_{k-1}$ , a correção  $\Delta u_k$  pode ser obtida.

$$g(u_{k-1} + \Delta u_k) \cong g(u_{k-1}) + \frac{\partial g}{\partial u_{k-1}} \Delta u_k + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 g}{(\partial u_{k-1})^2} \Delta u_k^2 + \dots \quad (4.20)$$

Usando somente os dois primeiros termos da série e igualando a zero para atender a equação 4.19, tem-se:

$$\Delta u_k \cong - \left( \frac{\partial g}{\partial u_{k-1}} \right)^{-1} g(u_{k-1}) \quad (4.21)$$

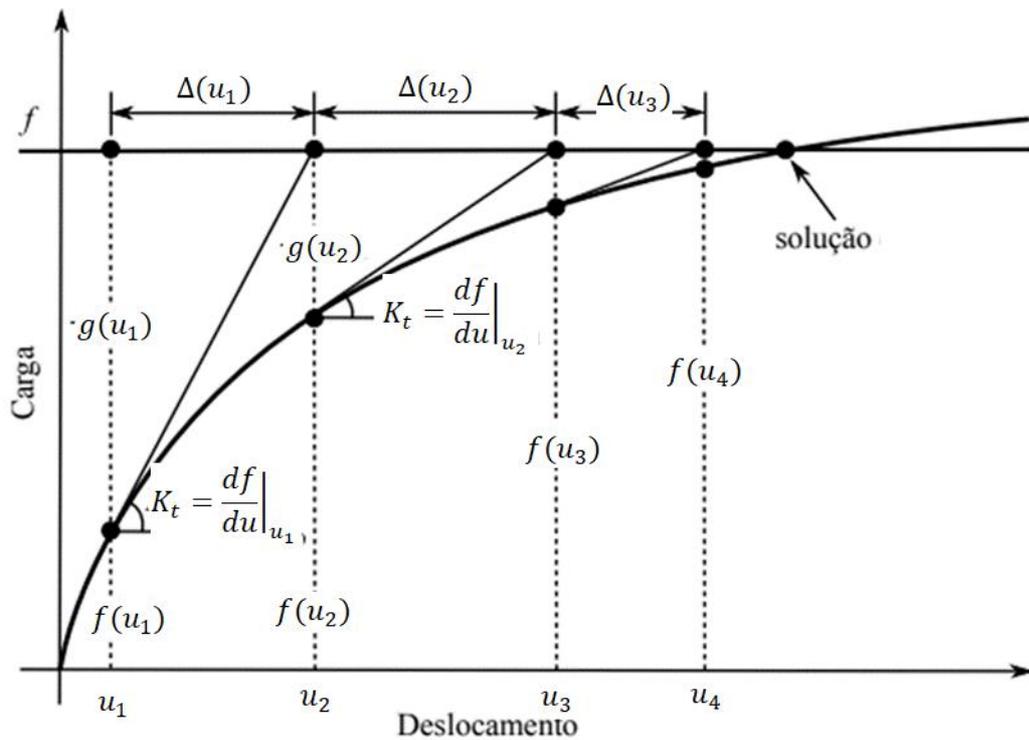
A derivada, inclinação da reta tangente à curva que descreve o equilíbrio do sistema, em termos estruturais corresponde fisicamente à matriz de rigidez tangente,  $K_t$ . Assim, a equação 4.21 pode ser reescrita em termos da rigidez da estrutura e o vetor de forças desequilibradas da seguinte forma:

$$\Delta u_k = K_{k-1}^{-1} g(u_{k-1}) \quad (4.22)$$

A nova estimativa do deslocamento é dada por:

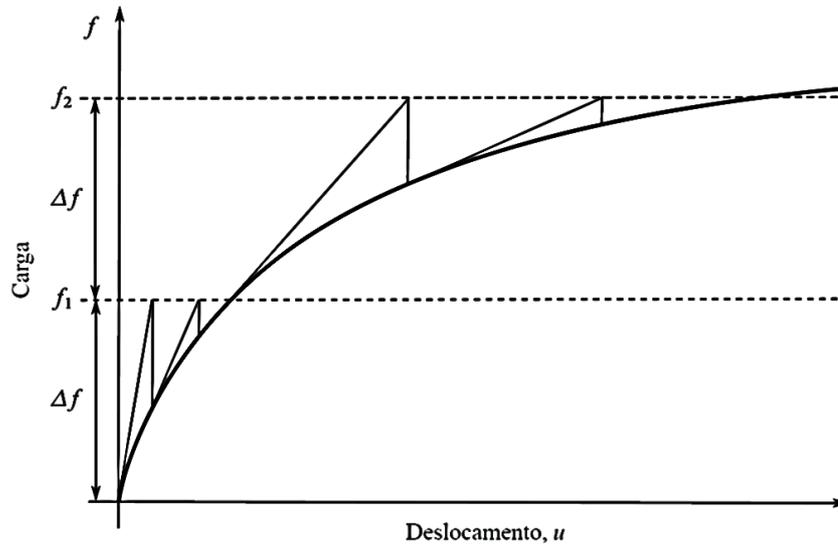
$$u_k = u_{k-1} + \Delta u_k \quad (4.23)$$

A Figura 4.6 exemplifica o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson.



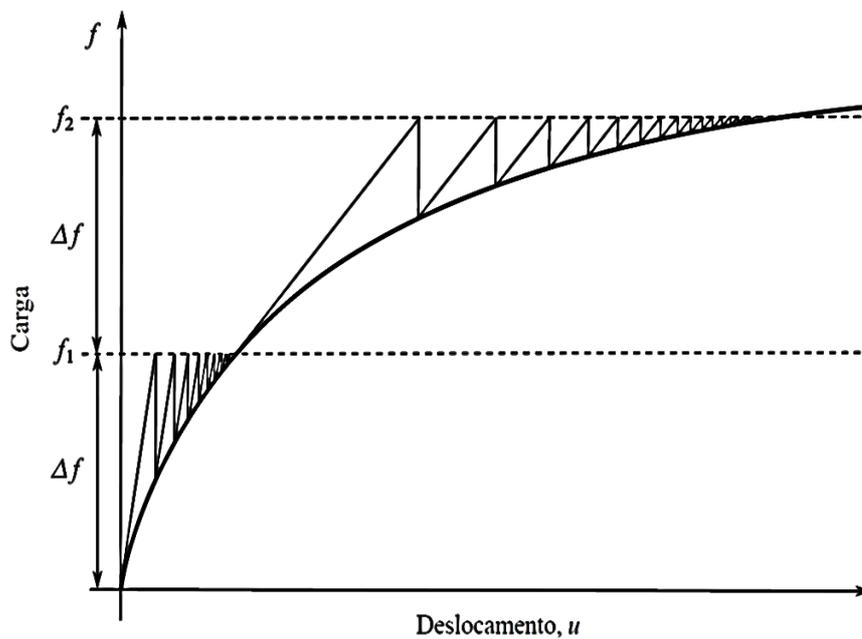
**Figura 4.6** Método de Newton-Raphson resolvendo a equação de equilíbrio

A interpretação geométrica do método de Newton-Raphson padrão está representada graficamente na Figura 4.7. Neste método, a cada iteração, a inclinação da reta tangente é modificada. Como explicitado no capítulo 2, o método converge quadraticamente. Para que se alcance a convergência, a inversa da matriz de rigidez  $K_t$  deve existir em todas as iterações necessárias até a precisão ser alcançada.



**Figura 4.7** Interpretação geométrica dos métodos de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson modificado, Figura 4.8, é uma alteração da técnica padrão, na qual a inclinação da reta tangente obtida na primeira iteração é mantida constante. Em termos da análise estrutural não linear, a matriz de rigidez permanece inalterada, fazendo com que o número de iterações necessárias possa ser maior que o da técnica padrão (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1989).



**Figura 4.8** Interpretação geométrica dos métodos de Newton-Raphson padrão

No contexto geral, o uso do método de Newton-Raphson padrão na solução incremental leva a uma maior precisão do que aquela obtida com o uso do método Newton-Raphson

modificado, uma vez que, se ocorrer convergência, o erro da solução diminui muito rapidamente nas últimas iterações.

#### **4.4.2 Método Incremental-Iterativo de Potra-Pták**

O método iterativo de Newton-Raphson ainda é o mais usado dentro do campo da Engenharia Estrutural como método de solução dos sistemas de equações não lineares gerado pelo MEF devido ao comportamento não linear, tanto da geometria quanto do material. Durante muito tempo não se pensava em usar um método iterativo com ordem de convergência superior devido ao seu alto custo computacional, não sendo vantajoso em comparação com o método clássico. O método de Potra-Pták já é bastante conhecido dentro da matemática numérica, tendo bons resultados devido as suas vantagens de usar somente a derivada primeira para alcançar a convergência cúbica.

O presente trabalho tem como um de seus objetivos adaptar esse método iterativo para análise não linear física de treliças metálicas. Na literatura, poucos são os autores que consideram tal método para as análises não lineares. Souza *et al.* (2017), desenvolveram um estudo para análise de treliças espaciais considerando a não linearidade geométrica. Os algoritmos implementados foram baseados nos métodos de Potra-Pták, Ponto Médio e Chun, associados à técnica de Comprimento de Arco Linear. As análises não lineares efetuadas com os métodos do Ponto Médio e Potra-Pták tiveram bons resultados, uma vez que não ocorreu instabilidades numéricas durante as simulações, para a classe de problemas testados. Constatou-se que estes métodos iterativos alcançaram a solução com um menor número de passos de força e iterações acumuladas, necessitando de um menor tempo de processamento, em comparação com as análises feitas com os métodos tradicionais de Newton-Raphson padrão, Newton-Raphson modificado e de Broyden.

Souza *et al* (2018) apresentaram um estudo com novos algoritmos baseados nos métodos Potra-Pták, Chebyshev e Super-Halley associados com a técnica de continuação do comprimento do arco linear. No trabalho foram analisadas treliças planas e espaciais com não linearidade geométrica. Os resultados numéricos das simulações mostraram que os métodos iterativos implementados tiveram melhor eficiência devido ao reduzido tempo de processamento, menor número de passos de carga e iterações acumuladas, necessárias até a convergência, em comparação com os métodos clássicos de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificado.

A seguir, estão descritas as equações que transformam o método matemático de Potra-Pták, apresentados pelas equações 2.25 e 2.26, em um processo incremental iterativo para análise linear física.

O vetor de correção dos deslocamentos do primeiro passo do método de Potra-Pták, mostrado na equação 2.25, coincide com o vetor de correção do método de Newton-Raphson, apresentado pela equação 4.22. Daí, conclui-se que:

$$\Delta y_k = K_{k-1}^{-1} g(u_{k-1} + \Delta_{k-1}) \quad (4.18)$$

A partir deste resultado, calcula-se um novo vetor de cargas desequilibradas

$$g_k = g(u_{k-1} + \Delta y_k) \quad (4.24)$$

e um novo vetor de correção dos deslocamentos, mantendo a matriz de rigidez constante

$$\Delta u_k = K_{k-1}^{-1} g(u_{k-1} + \Delta y_k) \quad (4.25)$$

determinando-se o vetor de deslocamentos de cada iteração

$$u_k = u_{k-1} + \Delta u_k \quad (4.26)$$

Este, por sua vez, é considerado a solução do problema quando um determinado critério de convergência for satisfeito.

### 4.4.3 Critério de Convergência para Análise Não Linear

Como em todo processo iterativo, a solução é calculada aproximadamente, em que o valor de  $u_k$  será considerado solução somente quando este satisfizer a um determinado critério de convergência. O processo incremental-iterativo busca a configuração do deslocamento correspondente ao tempo  $t + \Delta t$ . No final de cada iteração é necessário que os deslocamentos estejam dentro de uma certa tolerância  $\xi$  da solução de deslocamento real. Assim, um critério de convergência é baseado na convergência dos deslocamentos, equação 4.27.

$$\frac{\|\Delta u_k^i\|}{\|u_{k-1}^i\|} \leq \xi \quad (4.27)$$

Um segundo critério de convergência é obtido pela relação da norma do vetor de cargas desequilibradas com o vetor de forças de referência.

$$\frac{\|g_k\|}{\|\lambda F_{rk}\|} \leq \xi \quad (4.28)$$

Uma dificuldade deste critério é que o deslocamento obtido em cada iteração não entra no critério de convergência. Por exemplo, considere uma treliça elastoplástica com um módulo tangente muito pequeno entrando na fase plástica. Neste caso, as cargas desequilibradas podem ser muito pequenas, enquanto os deslocamentos ainda podem estar muito distantes da convergência.

Um terceiro critério de convergência, que pode ser bastante útil, relaciona o incremento da energia interna durante cada iteração, isto é, a razão da quantidade de trabalho exercida pelas cargas desequilibradas nos incrementos de deslocamento com o incremento da energia interna da iteração anterior.

$$\frac{(\Delta u^i)^T \left( {}^{t+\Delta t} F_i - {}^{t+\Delta t} \lambda F_r \right)}{(\Delta u^1)^T \left( {}^t F_i - {}^{t+\Delta t} \lambda F_r \right)} \leq \xi \quad (4.29)$$

Uma vez que esse critério de convergência contém os deslocamentos e as forças é na prática um valor atraente. De acordo com Bathe (1996), uma característica importante é que a tolerância para a convergência pode ser muito pequena em algumas soluções para alcançar uma boa precisão de solução.

#### 4.4.4 Algoritmos para Análise Não Linear Física de Treliças

As Tabelas 4.1 e 4.2 resumem todas as operações envolvidas no processo incremental iterativo para análise não linear física via método de Newton-Raphson e Potra-Pták, respectivamente.

**Tabela 4.1** Metodologia incremental iterativa via método de Newton-Raphson

<b>1 Processo Incremental:</b> e $u = u^0$
1.1 Determinar o incremento do vetor de forças: $\Delta F_r = \lambda F_r$
1.2 Realocar o vetor de forças de referência: $F_r = \Delta F_r$
1.3 Determinar a matriz de rigidez tangente: $K$
<b>2 Processo Iterativo: Newton-Raphson</b>
2.1 Determinar o vetor de forças internas: $F_{ik} = F_{ik-1} + K \Delta u_k$
2.2 Calcular o vetor de forças desequilibradas: $g_k = F_r - F_{ik}$

---

2.3 Determinar o vetor de correção dos deslocamentos do passo 1:  $\Delta u_k = K^{-1} g_k$

2.7 Atualizar a matriz de rigidez tangente  $K$

2.8 Verificar a convergência:  $\left\| \frac{\Delta u^k}{u^k} \right\| \leq \xi$

Sim → Pare o processo iterativo e passe para o passo 3

Não → Se  $k < ninter$ , volta ao passo 2

→ Se  $k = ninter$ , reduza  $\lambda = \lambda / 2$  e volte ao passo 1

### 3 Fim do Processo iterativo e atualização das variáveis

3.1 Atualize o vetor de deslocamento:  $u^k = u^{k-1} + \Delta u^k$

3.2 Atualizar o vetor de forças de referência:  $F_r = F_r + \Delta F_r$

---

**Tabela 4.2** Metodologia incremental-iterativa via método de Potra-Pták

---

#### 1 Processo Incremental: e $u = u^0$

1.1 Determinar o incremento do vetor de forças:  $\Delta F_r = \lambda F_r$

1.2 Realocar o vetor de forças de referência:  $F_r = \Delta F_r$

1.3 Determinar a matriz de rigidez tangente:  $K$

#### 2 Processo Iterativo: Potra-Pták

2.1 Determinar o vetor de forças internas:  $F_{ik} = F_{ik-1} + K \Delta u_k$

2.2 Calcular o vetor de forças desequilibradas:  $g_k = F_r - F_{ik}$

2.3 Determinar o vetor de correção dos deslocamentos do passo 1:  $\Delta y_k = K^{-1} g_k$

2.4 Determinar o vetor de forças internas:  $F_{ik} = F_{ik} + K \Delta y_k$

2.5 Calcular o vetor de forças desequilibradas:  $g_k = F_r - F_{ik}$

2.6 Determinar o vetor de correção dos deslocamentos do passo 2:  $\Delta u_k = K^{-1} g_k$

2.7 Atualizar a matriz de rigidez tangente  $K$

2.8 Verificar a convergência:  $\left\| \frac{\Delta u^k}{u^k} \right\| \leq \xi$

Sim → Pare o processo iterativo e passe para o passo 3

Não → Se  $k < ninter$ , volta ao passo 2

→ Se  $k = ninter$ , reduza  $\lambda = \lambda / 2$  e volte ao passo 1

### 3 Fim do Processo iterativo e atualização das variáveis

3.1 Atualize o vetor de deslocamento:  $u^k = u^{k-1} + \Delta u^k$

---

---

3.2 Atualizar o vetor de forças de referência:  $F_r = F_r + \Delta F_r$

---

# Capítulo 5

## Aplicações Numéricas

Os exemplos numéricos, apresentados a seguir, têm como objetivo validar toda a implementação computacional. Primeiramente, foram analisados três sistemas lineares para a validação do método de Gauss-Seidel e estudo dos critérios de convergência. Posteriormente, este método foi usado para solucionar sistemas de treliças planas e espaciais e os resultados foram comparados com o método de eliminação de Gauss e o software Mastan2. Para análise de sistemas não lineares iniciou-se com a solução de equações usando o método de Newton-Raphson. Em seguida, foi feita uma análise de uma treliça plana com modelo constitutivo não linear desde o início do carregamento, baseado no Teorema de Castigliano. Finalmente, o modelo elastoplástico com endurecimento foi usado para solucionar duas treliças planas e os resultados foram comparados com a literatura.

### 5.1 Sistemas Lineares e Análise Linear de Treliças

#### 5.1.1 Sistema Linear com 4 Incógnitas

O sistema linear a seguir é bastante simples e tem como intuito comparar os resultados obtidos por Burden *et al.* (2015), usando o método iterativo de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} 10x_1 - 1x_2 + 2x_3 & = 6 \\ -1x_1 + 11x_2 - 1x_3 + 3x_4 & = 25 \\ 2x_1 - 1x_2 + 10x_3 - 1x_4 & = -11 \\ 3x_2 - 1x_3 + 8x_4 & = 15 \end{cases}$$

Iniciando com a aproximação  $x^0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e fazendo as iterações até que  $\xi \leq 10^{-3}$ , tem-se os resultados apresentados na Tabela 5.1

**Tabela 5.1** Solução do Sistema via Método de Gauss-Seidel

	Burden <i>et al.</i> (2015)	Presente Trabalho $\xi_r$	Erro (%)	Presente Trabalho $\xi_a$	Erro (%)
$x_1$	1.0001	1.000	0.00	1.000	0.00
$x_2$	2.0000	2.000	0.00	1.999	0.1
$x_3$	-1.0000	-1.000	0.00	-0.999	0.1
$x_4$	1.0000	1.000	0.00	0.999	0.1

A convergência da solução pelo método de Gauss-Seidel obtido por Burden *et al.* (2015) ocorreu após 5 iterações, enquanto que o presente trabalho necessitou de 8 iterações usando-se o erro absoluto e 7 iterações usando o erro relativo. Os resultados obtidos validam a implementação do método de Gauss-Seidel para resolver sistemas lineares.

### 5.1.2 Análise dos Critérios de Convergência de Gauss-Seidel

Os critérios de convergência do método iterativo de Gauss-Seidel, critérios de linhas e critério de Sanssefeld, são suficientes para a convergência, quando atendidos. Porém, caso isto não ocorra pode ser que o sistema de equações ainda apresente a convergência. Os sistemas de equações lineares 2.1 e 2.2 ilustram este fato.

$$\begin{cases} 7.5x_1 + 2x_2 - 1x_1 + 3x_4 + 1x_5 = 9.15 \\ 2.2x_1 - 8x_2 + 1.1x_3 - 4x_4 + 2.5x_5 = -19.49 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10.5x_3 + 0.8x_4 - 3.2x_5 = -2.59 \\ -0.5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7.5x_4 + 0.5x_5 = 38.10 \\ 1x_1 + 0.5x_2 + 1x_3 - 0.5x_4 + 4x_5 = 22.85 \end{cases} \quad \text{Sistema 2.1}$$

$$\begin{cases} 7.5x_1 + 8x_2 - 6x_1 + 3x_4 + 1x_5 = 9.15 \\ 2.2x_1 - 8x_2 + 1.1x_3 - 4x_4 + 2.5x_5 = -19.49 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10.5x_3 + 10x_4 - 3.2x_5 = -2.59 \\ -0.5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 7.5x_4 + 0.5x_5 = 38.10 \\ 1x_1 + 0.5x_2 + 1x_3 - 0.5x_4 + 4x_5 = 22.85 \end{cases} \quad \text{Sistema 2.2}$$

A solução do sistema linear está apresentada na Tabela 5.2

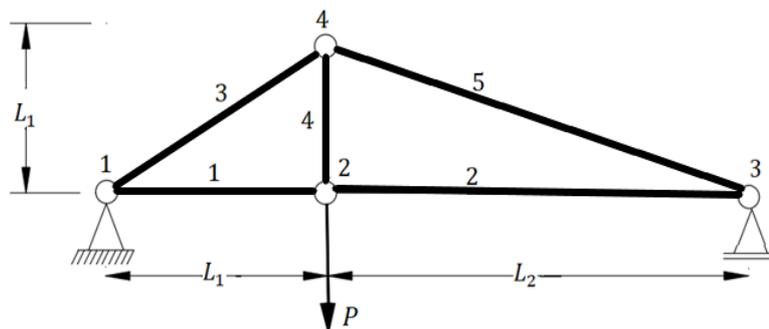
**Tabela 5.2** Estudo da convergência do método de Gauss-Seidel

	Sistema 2.1	Sistema 2.2
$x_1$	-1.500	-----
$x_2$	2.200	-----
$x_3$	1.100	-----
$x_4$	3.700	-----
$x_5$	6.000	-----

O problema considerou a aproximação inicial  $x^0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e tolerância  $\xi \leq 10^{-4}$ . O valor numérico dos critérios suficientes de convergência obtidos pelo programa para o sistema 2.1 é  $\alpha = 1.225$  e  $\beta = 0.80$  enquanto que para o sistema 2.2 o valor de  $\alpha = 2.4$  e  $\beta = 1.333$ . Ambos os sistemas não satisfazem o critério de linhas, mas, o primeiro atende ao critério de Sanssefeld obtendo sua convergência após 13 iterações. Estas avaliações servem para entender como o método de Gauss-Seidel se comporta quando uma matriz é ou não diagonalmente dominante.

### 5.1.3 Treliça Plana com 5 Elementos

A treliça plana da Figura 5.1 está submetida a uma carregamento pontual  $P = 10kN$  no nó 2. A estrutura é composta por 5 elementos e 4 nós. Todos os elementos possuem módulo de elasticidade longitudinal  $E = 205GPa$ , área constante  $A = 100mm^2$  e comprimentos  $L_1 = 1m$  e  $L_2 = \sqrt{3}m$ .



### Figura 5.1 Treliza Plana

Uma matriz com dimensão  $8 \times 8$  descreve a matriz de rigidez desta estrutura composta por 46 elementos nulos e 18 não nulos. Matrizes com uma alta porcentagem de elementos nulos são chamadas de esparsas e são frequentemente resolvidas usando um método iterativo ao invés de técnicas diretas. Os resultados obtidos, mostrados na Tabela 5.3, apresentam os deslocamentos dos nós em *mm* dos nós em cada direção, usando um método direto, eliminação de Gauss, e o método iterativo de Gauss-Seidel.

**Tabela 5.3** Deslocamentos obtidos pelo do método de Gauss-Seidel para treliza plana

Nó/Direção	Escalonamento de Gauss	Gauss-Seidel	
		Erro Relativo	Erro Absoluto
		Iterações:76	Iterações:75
2/X	0.309	0.309	0.309
2/Y	-2.100	-2.098	-2.099
3/X	0.845	0.844	0.844
4/X	0.738	0.737	0.737
4/Y	-1.612	-1.611	-1.611

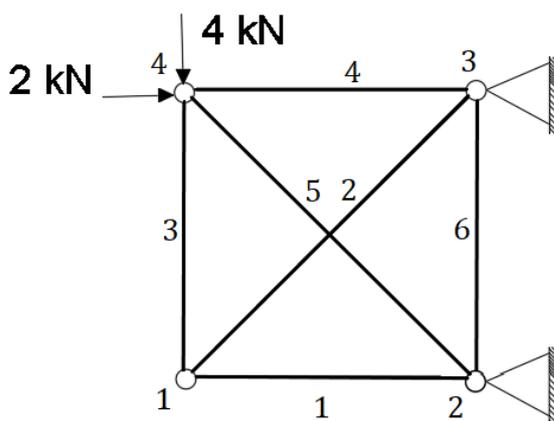
Conclui-se que mesmo a matriz sendo considerada esparsa, os resultados obtidos pelo escalonamento de gauss são bem próximos daqueles obtidos pelo método de Gauss-Seidel. Para essa treliza plana, mudaram-se a numeração dos nós e/ou dos elementos. Após uma análise dos resultados somente a mudança da posição dos nós é capaz de mudar os coeficientes da matriz de rigidez. Isto acontece devido ao fato de que a matriz de rigidez da estrutura é montada considerando os graus de liberdades dos nós e a partir destes valores que são alocados em cada elemento da matriz. Caso seja necessário fazer uma troca de linhas ou colunas para que o sistema tenha convergência pelo método de Gauss-Seidel, somente a mudança da posição dos nós da treliza será necessária. Para este exemplo todas as novas configurações apresentaram convergência. Na configuração da Figura 5.1 os valores dos critérios suficientes foram  $\alpha = 1.23$  e  $\beta = 0.91$ , tendo a convergência garantida pelo Critério de Sanssefeld.

Nesse exemplo o método de Gauss-Seidel obteve sua convergência, para o mesmo resultado e com a mesma precisão, com praticamente o mesmo número de iterações, usando o

erro absoluto e o erro relativo, confrontando a explicação presente na literatura sobre a escolha de qual método deve-se escolher.

### 5.1.4 Treliça Plana Hiperestática

A treliça apresentada na Figura 5.2 possui restrição nos nós 2 e 3, em ambas direções, composta por 6 elementos e 4 nós. Todos os elementos possuem módulo de elasticidade longitudinal  $E = 207GPa$ , área  $A = 968mm^2$  e lados  $L = 10m$ .



**Figura 5.2** Treliça plana hiperestática

A Tabela 5.4 apresenta os deslocamentos obtidos pelo Software Mastan2, eliminação de Gauss e pelo método iterativo de Gauss-Seidel. Para o método iterativo considerou-se a tolerância de  $\xi \leq 10^{-4}$ .

**Tabela 5.4** Deslocamentos em  $mm$  da treliça plana hiperestática

Nó/Direção	Mastan2	Presente Trabalho		
		Escalonamento de Gauss	Método de Gauss-Seidel $\xi_a$ Iterações:36	Método de Gauss-Seidel $\xi_r$ Iterações:49
1/X	0.0767	0.0768	0.0767	0.0767
1/Y	-0.2938	-0.2938	-0.2937	-0.2937
4/X	-0.0231	-0.0231	-0.0230	-0.0231
4/Y	-0.3706	-0.3705	-0.3704	-0.3705

Ao analisar os resultados, percebe-se que houve uma convergência dos resultados obtidos pelo programa Mastan2 com ambos os métodos de solução implementados no presente trabalho. Os critérios suficientes de convergência tiveram como resultados  $\alpha = 1.00$  e  $\beta = 1.00$ . À medida que se aumenta a complexidade das estruturas, associada ao aumento das incógnitas e na dimensão das matrizes, os erros começam a se distanciar, porém ainda mantendo a mesma precisão.

O programa, ainda, tem como objetivo determinar os esforços normais de cada elemento além das reações de apoio da estrutura. Após calcular os deslocamentos é possível obter as forças internas que posteriormente serão utilizadas no dimensionamento estrutural. A Tabela 5.5 mostra as forças internas via Mastan2 e aquelas obtidas pelo presente trabalho. As forças negativas são de compressão e as positivas de tração.

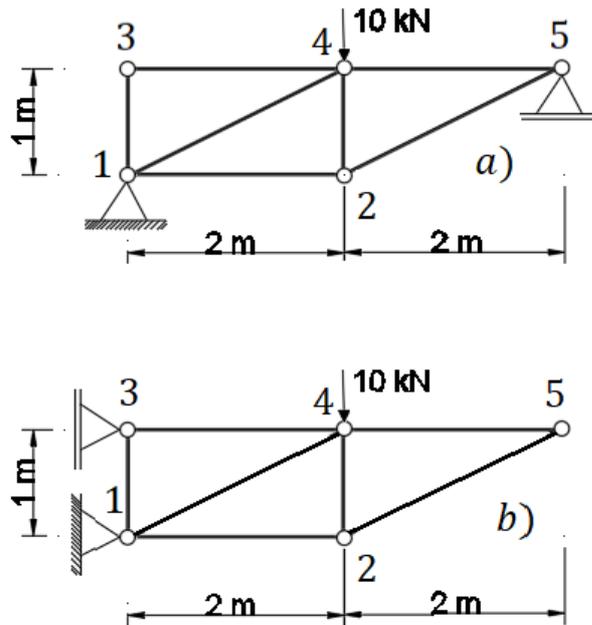
**Tabela 5.5** Forças em  $kN$  de cada elemento da treliça

Elemento	Mastan2	Presente Trabalho
1	-1.538	-1.538
2	2.175	2.175
3	-1.538	-1.538
4	-0.462	-0.462
5	-3.482	-3.482
6	0	0

Os resultados apresentados nas Tabelas 5.4 e 5.5 validam a implementação computacional do programa para análise linear de treliças planas.

### **5.1.5 Análise de Convergência para Treliças com Sistemas Diferentes**

As treliças da Figura 5.3 foram utilizadas para a verificação de convergência após a mudança da vinculação da estrutura utilizando o método iterativo de Gauss-Seidel. As treliças 5.3a e 5.3b são compostas por 7 elementos e 5 nós. Todos os elementos possuem módulo de elasticidade longitudinal,  $E = 205GPa$  e área,  $A = 968mm^2$ . A tolerância para este exemplo foi de  $\xi = 10^{-4}$ .



**Figura 5.3** Treliças planas com mudança de vinculação

A treliça 5.3a obteve  $\alpha=1.25$  e  $\beta=1.21$  como coeficientes para o critério de convergência, enquanto a treliça 5.3b obteve  $\alpha=5.00$  e  $\beta=5.00$ . Nenhuma das duas configurações atenderam ao critério de linhas e nem ao critério de Sanssefeld. As Tabelas 5.6 e 5.7 apresentam os resultados dos deslocamentos para cada uma treliça estudada, usando os dois métodos.

**Tabela 5.6** Convergência do método de Gauss-Seidel treliça 5.3a

Nó/Direção	Escalonamento de Gauss	Gauss-Seidel $\xi_r$ 313 iterações	Gaus-Seidel $\xi_a$ 277 iterações
2/X	0.1008	0.1008	0.1008
2/Y	-0.4707	-0.4706	-0.4706
3/X	0.1071	0.1071	0.1071
3/Y	0.0000	0.0000	0.0000
4/X	0.1071	0.1071	0.1071
4/Y	-0.4959	-0.4959	-0.4959
5/X	0.0063	0.0063	0.0063

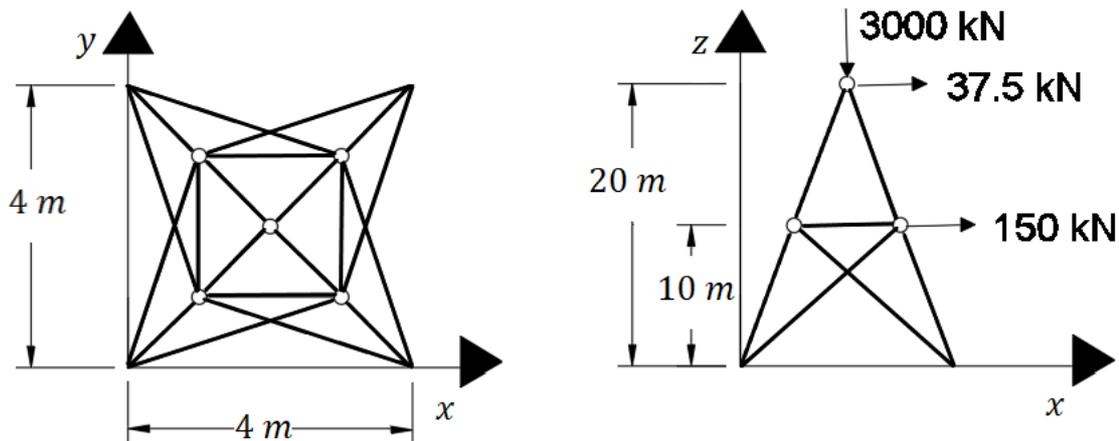
**Tabela 5. 7** Convergência do método de Gauss-Seidel treliça 5.3b

Nó/Direção	Escalonamento de Gauss	Método de Gauss-Seidel
2/X	0.0000	-----
2/Y	-0.9665	-----
3/Y	-0.0000	-----
4/X	0.2016	-----
4/Y	-0.9665	-----
5/X	0,2016	-----
5/Y	-1,3696	-----

Apesar de ambas as estruturas não atenderem ao critério de suficiência de convergência, a treliça 5.3b obteve solução. De acordo com a literatura, quanto menor o valor de  $\beta$  mais rápido será a convergência. Porém, como a estrutura 5.3a teve um valor alto de  $\beta$  configurando um número maior de iterações, 313 (erro relativo) e 277 (erro absoluto). O uso do método de escalonamento de Gauss conseguiu gerar com precisão os deslocamentos para ambas as estruturas. Este fato demonstra que desde que a matriz de rigidez seja não singular, este método sempre apresentará resultados.

### 5.1.6 Treliça espacial

A treliça espacial apresentada na Figura 5.4 foi usada para testar a análise linear para sistemas espaciais considerando os métodos de solução implementados no programa. A torre tem uma base quadrada de  $4m$  e  $20m$  de altura. As barras das coluna possuem seção transversal com  $A = 35cm^2$  e os restantes das barras apresentam  $A = 7.5cm^2$ . O módulo de elasticidade considerado foi igual a  $E = 210000kN/cm^2$ . As forças aplicadas são:  $3000kN$  na direção  $z$  e uma força de  $37.5kN$  na direção  $x$  no nó 9,  $150kN$  na direção  $x$  no nó 7 e 8. Todos os nós em  $z = 0$  estão restringidos nas três direções.



**Figura 5.4** Treliça espacial

Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 5.8

**Tabela 5. 8** Deslocamentos em cm da treliça espacial

Nó	Escalonamento de Gauss			Mastan2			Gauss-Seidel
	X	Y	Z	X	Y	Z	
5	0.4189	-0.0015	-0.0852	0.4189	-0.0015	-0.0852	-----
6	0.4189	0.0015	-0.0852	0.4189	0.0015	-0.0852	-----
7	0.4336	0.0037	-0.0600	0.4336	0.0037	-0.0600	-----
8	0.4336	-0.0037	-0.0600	0.4336	-0.0037	-0.0600	-----
9	0.4630	0.0000	-0.1817	0.4630	0.0000	-0.1817	-----

A treliça foi analisada numericamente no software Mastan2, já usado como ferramenta para análise estrutural linear e não linear de estruturas reticuladas, com o propósito de validar a implementação computacional de treliças espaciais. Ao analisar a Tabela 5.8 percebe-se que houve convergência entre os resultados obtidos pelo Mastan2 quando comparado com a solução baseada no escalonamento de Gauss. Este fato valida o código para análise linear de treliças espaciais.

Ao se aumentar a complexidade dos sistemas estruturais, com o acréscimo do número de nós e dos elementos, a matriz de rigidez começa a ser mais esparsa devido ao aumento dos valores nulos e vai perdendo a característica de matriz diagonal dominante ou estritamente diagonal dominante, critérios suficientes para a convergência do método de Gauss-Seidel. Neste caso, os coeficientes  $\alpha = 12.00$  e  $\beta = 12.00$  são muito superiores ao necessário. Fato

este que se propaga por todos os casos de treliças usuais. Constatase que o método iterativo de Gauss-Seidel não é um bom método para resolver sistemas estruturais em comparação com o método direto de eliminação de Gauss.

## 5.2 Análise Não Linear

### 5.2.1 Sistema com 2 incógnitas

O sistema de equações não lineares será analisado a partir do método iterativo de Newton-Raphson para verificar a sua convergência.

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 - 8$$

$$f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2^2 - 12$$

A matriz Jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ -2 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

A seqüência iterativa do método de Newton-Raphson está apresentada na Tabela 5.9. Iniciando com a aproximação  $x^0 = [1 \ 1]^T$  e fazendo as iterações até que  $\xi \leq 10^{-4}$ , tem-se:

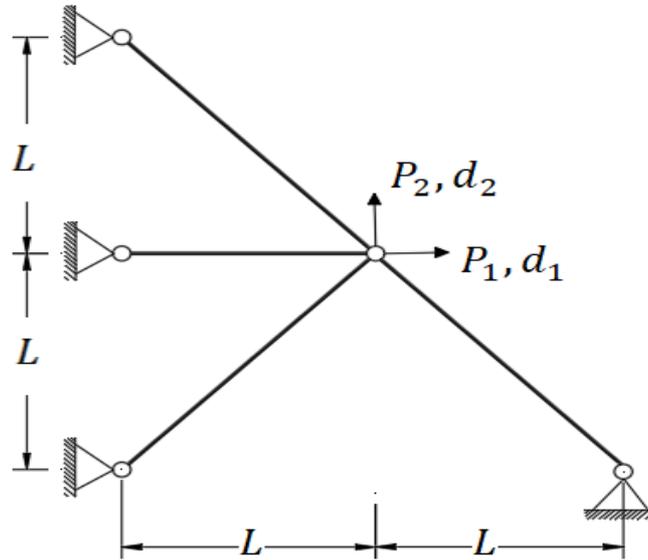
**Tabela 5.9** Seqüência iterativa do método de Newton-Raphson

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$x_1$	0.8335	2.3335	2.0090	1.9998	1.9999
$x_2$	7.3330	4.8048	4.0693	4.0013	4.0000

Após a primeira iteração obter um resultado distante da solução exata do sistema, o método convergiu na quinta iteração. Os erros diminuem rapidamente, o que sugere a tendência da convergência quadrática do método de Newton-Raphson.

## 5.2.2 Análise não linear via método de Castigliano

Nesta aplicação, a treliça 5.5 foi analisada analiticamente através do método de Castigliano considerando uma relação constitutiva não linear.



**Figura 5.5** Treliça plana para análise elasto-plástica

A treliça possui comprimento  $L = 1m$  e elementos com área constante e iguais a  $A = 1cm^2$ . As cargas aplicadas na estrutura são:  $P_1 = 24kN$  e  $P_2 = 12kN$ . A relação constitutiva não linear é dada por:

$$\sigma(\varepsilon) = a\varepsilon - b\varepsilon^2$$

As constantes  $a = 1 \times 10^5$  e  $b = 16 \times 10^5$  definem o comportamento inelástico do material. A energia de deformação de cada elemento é dada pela equação 4.4. Assim, substituindo estes valores na equação, tem-se:

$$U_T(\varepsilon) = \int_L [(a\varepsilon - b\varepsilon^2) d\varepsilon] A dx$$

Para determinar o sistema de equação não linear da estrutura é preciso definir as deformações de cada elemento em termos dos deslocamentos não restringidos,  $d_1$  e  $d_2$ .

$$\varepsilon_1 = \left( d_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - d_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) x \frac{1}{L}$$

$$\varepsilon_2 = (d_1) x \frac{1}{L}$$

$$\varepsilon_3 = \left( d_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + d_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) x \frac{1}{L}$$

$$\varepsilon_4 = \left( -d_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + d_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) x \frac{1}{L}$$

Efetuada-se o cálculo da integral utilizando as deformações de cada elemento é possível definir o vetor de forças internas e a matriz de rigidez do sistema.

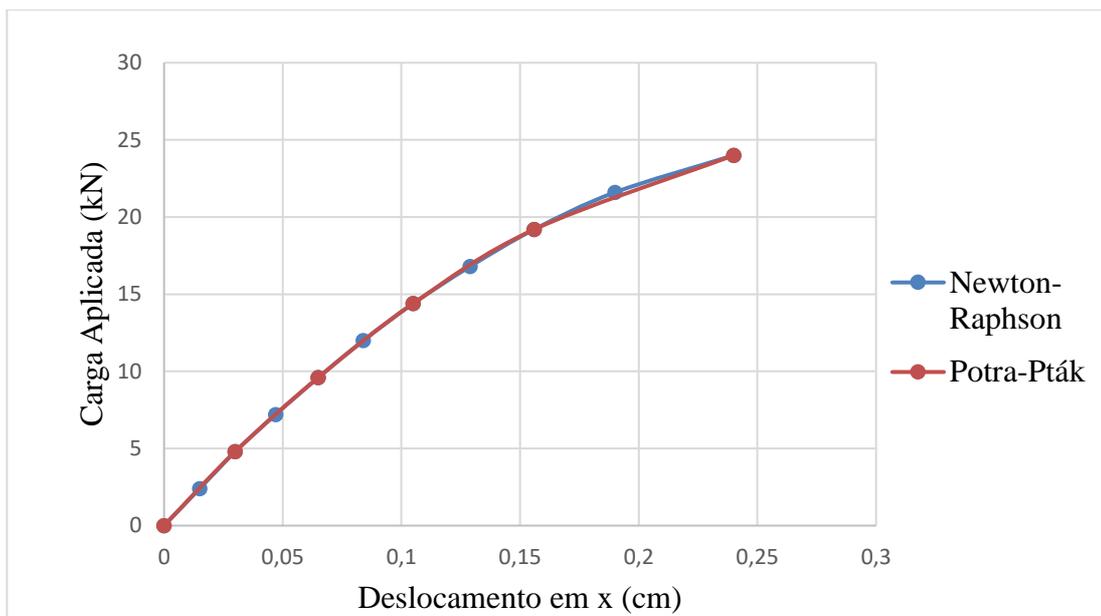
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial d_1} \\ \frac{\partial U}{\partial d_2} \end{Bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial d_1} & \frac{\partial F_1}{\partial d_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial d_1} & \frac{\partial F_2}{\partial d_2} \end{bmatrix}$$

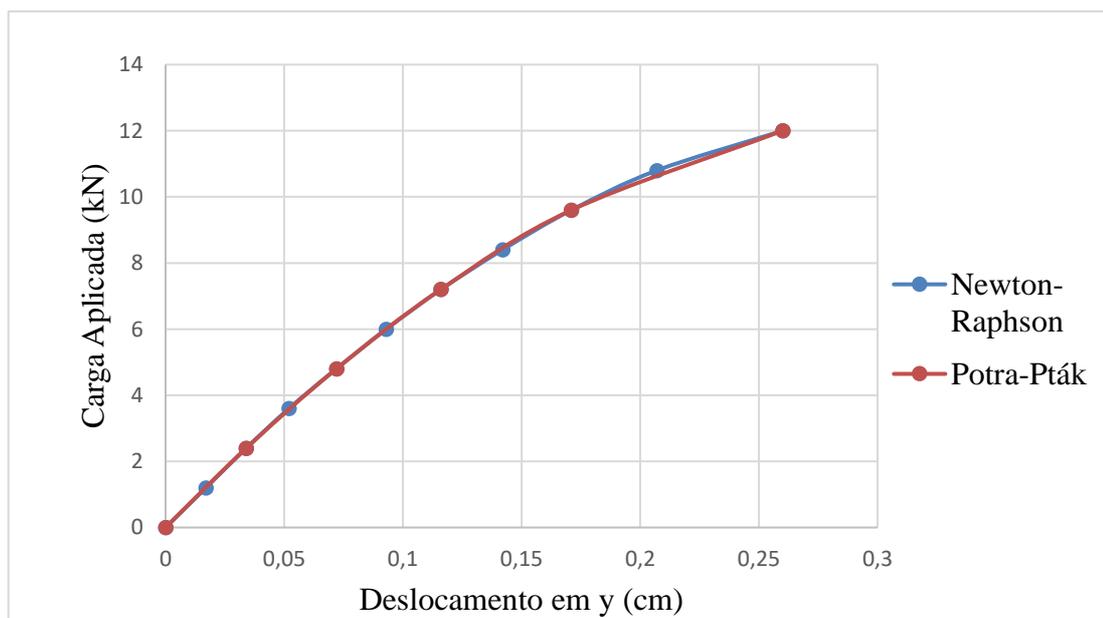
O sistema de equações em forma matricial para a análise estrutural é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

As Figuras 5.6 e 5.7 apresentam o resultado da análise não linear física para as duas direções.



**Figura 5.6** Curva carga *versus* deslocamento na direção x



**Figura 5.7** Curva carga *versus* deslocamento na direção x

Neste exemplo foi possível traçar todos os pontos de equilíbrio. Percebe-se que a trajetória é altamente não linear. Os dois métodos conseguiram alcançar os pontos de equilíbrio com os mesmos valores. Isso demonstra que o método de Potra-Pták pode ser usado como método de solução para análise não linear de estruturas. A tabela 5.10 mostra a comparação entre o número de iterações de cada método, utilizando  $\lambda = 0.1$  e  $\xi = 10^{-4}$ .

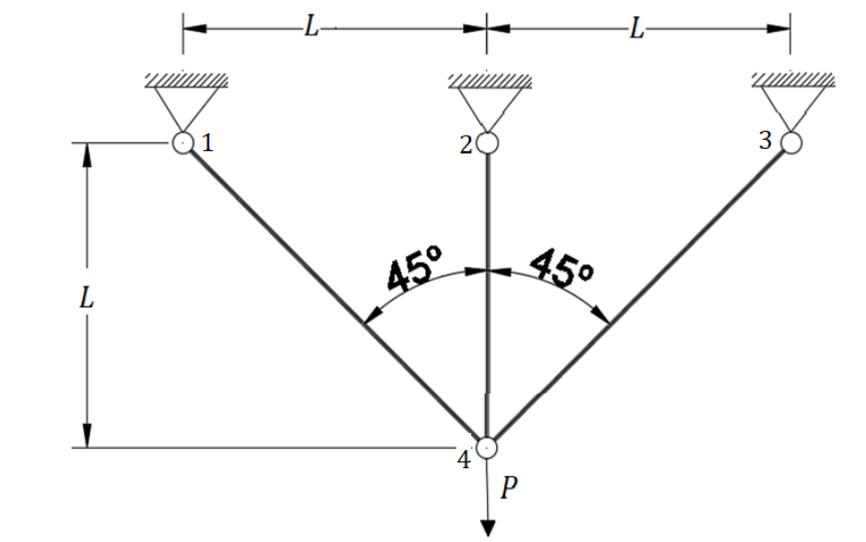
**Tabela 5. 10** Comparação entre os métodos numéricos para análise não linear via Teorema de Castigliano

Método iterativo	Incrementos	Iterações
Newton-Raphson Padrão	11	77
Potra-Pták	11	36

Analisando os resultados obtidos percebeu-se que o número de iterações para a convergência do resultado requerido é menor quando se usa o método de Potra-Pták. Este fato deve-se à característica de convergência cúbica do método numérico, ou seja, a cada iteração o erro tende a diminuir cubicamente, enquanto no método de Newton-Raphson o erro diminui quadraticamente. No entanto, o método de Potra-Pták necessita de duas avaliações do vetor de forças, isso faz com que o número de operações matemáticas envolvidas no problema seja maior, mas como a treliça analisada é bastante simples o tempo de processamento é irrelevante fazendo-se com que o menor número de iterações demonstre a vantagem desse método iterativo.

### 5.2.3 Treliça Plana Hiperestática em Regime Elastoplástico

A treliça da Figura 5.6 já foi estudada por alguns autores para validação da implementação de um código computacional para análise elastoplástica, visto que a treliça é simples e com fácil solução analítica.



**Figura 5.6** Treliça plana em regime elasto-plástica

Usando como solução analítica o método dos deslocamentos é possível determinar quais os esforços normais suportados por cada barra. Considerando uma variação de comprimento  $\cos \theta$  que corresponde a um esforço normal igual a  $EA/(L \cos \theta)$ .

Após a determinação dos coeficientes da matriz de rigidez e o estabelecimento das equações de equilíbrio, segundo os respectivos graus de liberdade, podem-se determinar as componentes do vetor deslocamento no nó de aplicação da força  $P$ .

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

O esforço normal em cada uma das barras pode ser calculado por:

$$F = \frac{EA}{L} u \cos \theta + \frac{EA}{L} v \cos \theta$$

Para o conjunto das três barras, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 45 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 45 \\ \cos 90 & \sin 90 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 135 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 135 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ 2 - \sqrt{2} \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} P$$

Os esforços calculados, que apenas são válidos enquanto todas as barras estiverem no regime linear elástico, permitem concluir que a barra vertical é a que suporta um maior esforço normal. Durante o processo de carregamento incremental esta barra será a primeira a atingir a carga correspondente à tensão de escoamento. Com base neste raciocínio é possível determinar o valor da força  $P'$  que leva a primeira barra da estrutura a atingir a carga de escoamento:

$$F_2 = P_e = (2 - \sqrt{2})P \rightarrow P' = \frac{P_e}{(2 - \sqrt{2})}$$

que corresponde a um deslocamento vertical no nó de aplicação da força,  $v'$

$$v' = \frac{L}{EA} \frac{P'}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{L}{EA} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{P_e}{(2 - \sqrt{2})} = \frac{L}{EA} P_e$$

Devido à simetria do problema, as duas barras restantes atingirão simultaneamente a carga de escoamento, o que ocorrerá quando a força  $P$  atingir um valor  $P''$ . Para o cálculo deste valor pode-se recorrer ao equilíbrio vertical no nó de aplicação da força.

A carga de ruptura é atingida quando os esforços normais  $F_1$  e  $F_3$  se igualarem à carga de escoamento,  $P_e$ . A equação de equilíbrio vertical permite escrever:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_e + F_1 \cos 45 + F_3 \cos 45 - P = 0$$

Fazendo-se  $F_1 \equiv F_3 = P_e$  e  $P = P_r$ , resulta:

$$P_r = (1 + \sqrt{2})P_e$$

As componentes do vetor deslocamento do nó de aplicação da força assumem os seguintes valores:

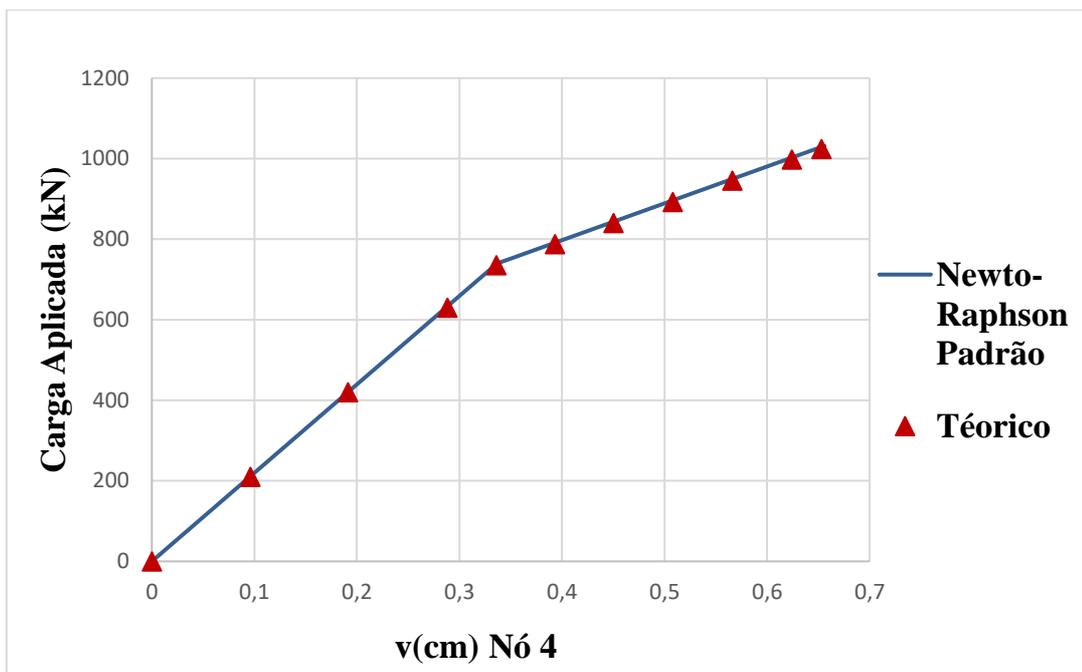
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P - P_e \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ P - P_e \end{Bmatrix}$$

Para uma dada força de  $P \equiv P_r$ , o deslocamento vertical toma o valor de  $v_r = 2P_e L / EA$

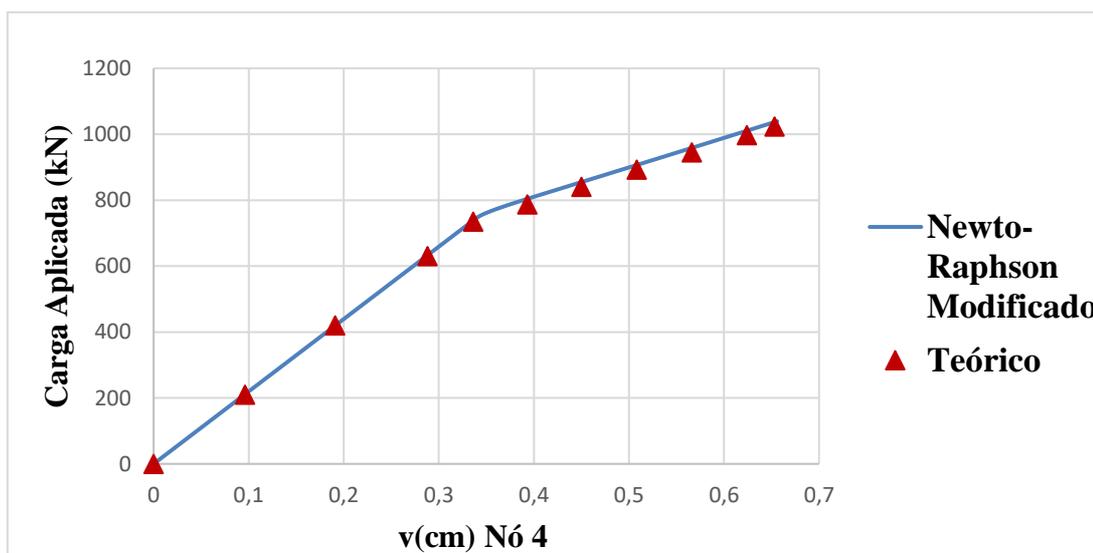
De posse da solução analítica do problema, passa-se agora a considerar um exemplo numérico para análise a não linear física. A estrutura indicada na Figura 5.6 possui todas as barras com o mesmo módulo de elasticidade  $E = 20500kN / cm^2$ , tensão limite de escoamento  $\sigma_y = 34.5kN / cm^2$  e a mesma área da seção transversal  $A = 12.51cm^2$ . A carga pontual aplicada na direção vertical tem intensidade de  $P = 1050kN$ . Para este exemplo a carga de escoamento da barra vertical é  $P' = 736.78kN$  e a carga de ruptura do sistema estrutural é  $P_r = 1041.46kN$ .

Primeiramente, foi considerado o regime elastoplástico perfeito  $E_t = 0$  para a análise não linear física. Neste exemplo a tolerância desejada foi de  $\xi = 10^{-4}$  e utilizaram-se dois incrementos de carga  $\Delta P = 10.5kN$  e  $\Delta P = 105kN$ .

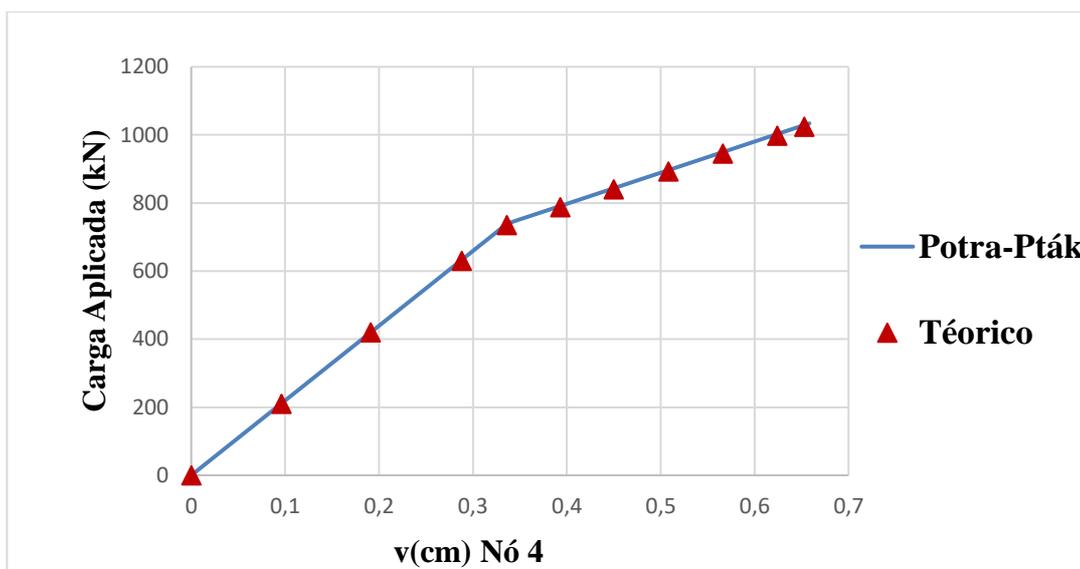
As Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 apresentam os resultados obtidos com o programa implementado, comparando-os com os resultados analíticos.



**Figura 5.7** Análise não linear física via método iterativo de Newton-Raphson Padrão



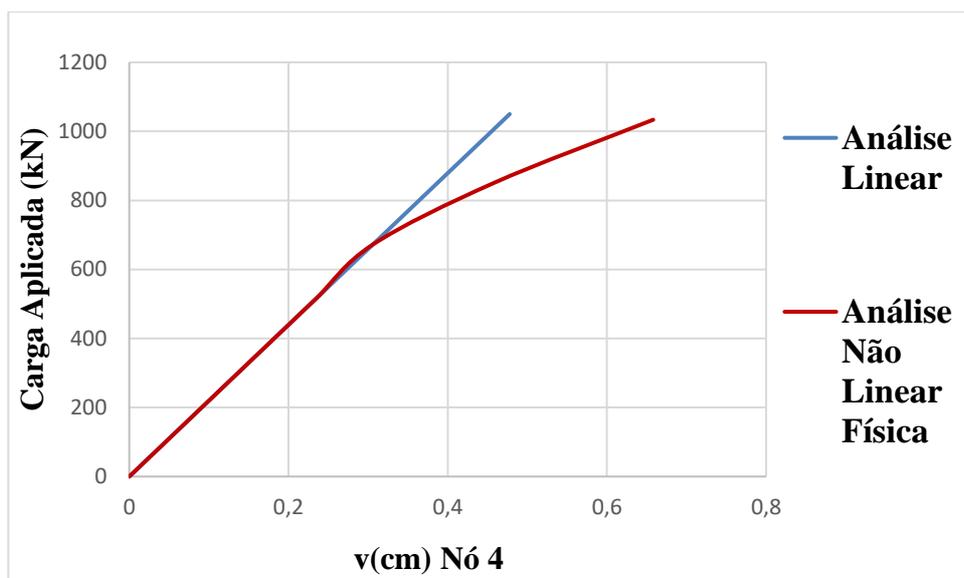
**Figura 5. 8** Análise não linear física via método de Newton-Raphon modificado



**Figura 5.9** Análise não linear física via método de Potra-Pták

Percebe-se que os três métodos iterativos estão em conformidade com o resultado teórico, e ambos alcançaram a carga de escoamento com o mesmo valor da análise teórica. Este fato valida toda a implementação computacional para análise a não linear física de treliças metálicas.

A consideração da plasticidade do material faz com que se tenha um ganho de resistência do sistema estrutural, mesmo após o elemento ter alcançado a tensão de escoamento. A Figura 5.10 apresenta a comparação entre os resultados da análise linear e a análise não linear física. Após o elemento atingir a tensão de escoamento, tem-se uma diminuição da sua rigidez fazendo-se com que os deslocamentos sejam maiores para o mesmo valor do carregamento. Este fato é justificado pela consideração que quando um elemento entra no regime plástico tem-se ainda um aumento das deformações sem aumento das tensões, permitindo que se utilize uma maior capacidade de resistência do elemento estrutural.



**Figura 5.10** Análise linear *versus* análise não linear física

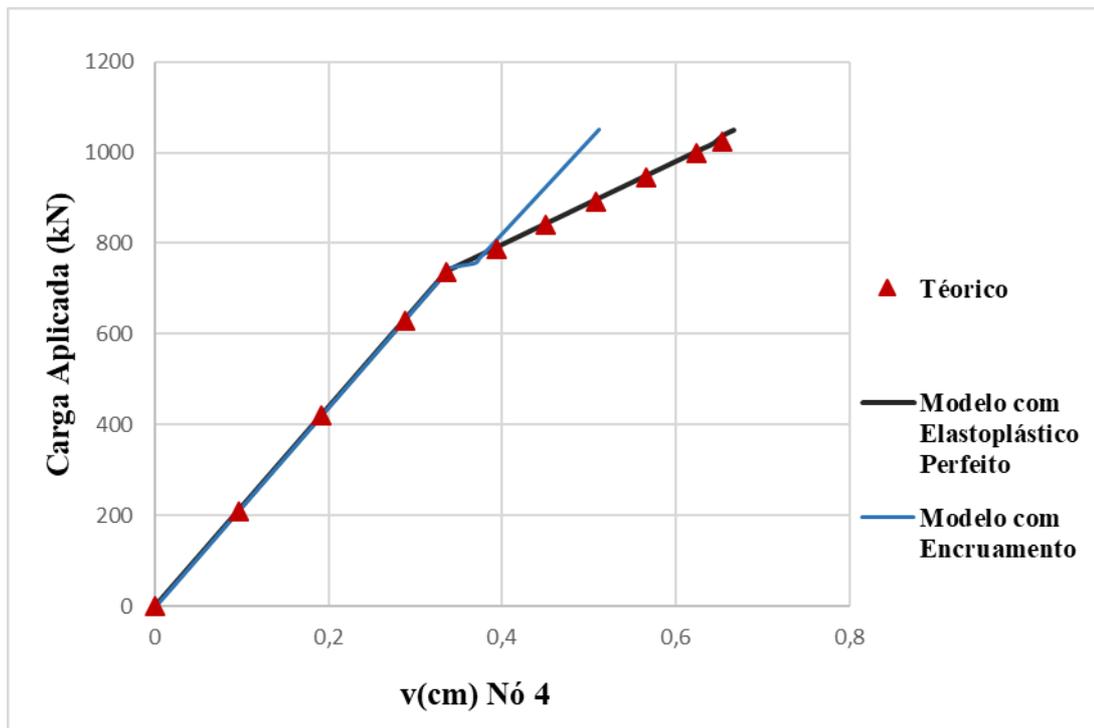
A Tabela 5.11 apresenta o número de iterações necessárias para que cada método numérico alcance os resultados obtidos nas Figuras 5.8, 5.9 e 5.10. Foram utilizados dois parâmetros de incremento de carga, um pequeno e um maior, a fim de que se possa verificar a eficácia do método de Potra-Pták perante ao método de Newton-Raphson. Como era de se esperar, o método modificado apresentou um número de iterações superior ao método padrão. Percebe-se o menor número de iterações necessárias para convergência do método de Potra-Pták, devido a sua convergência cúbica. Para este exemplo, constatou-se que o método de Potra-Pták foi bastante eficiente.

**Tabela 5. 11** Comparação entre os métodos iterativos para análise não linear

Método iterativo	$\Delta P = 10.5kN$		$\Delta P = 105kN$	
	Incrementos	Iterações	Incrementos	Iterações
Newton-Raphson Padrão	100	198	34	66
Newton-Raphson Modificado	100	226	34	74
Potra-Pták	100	101	34	35

Para testar o modelo elasto-plástico implementado, verificou-se esse exemplo considerando que o material tenha comportamento elasto-plástico bilinear. Para o estudo em questão, considerou-se o módulo tangente  $E_t = 2050kN / cm^2$ . A Figura 5.11 apresenta a curva carga

*versus* deslocamento, referente ao nó do ponto de aplicação da carga, a partir dos pontos de equilíbrio obtidos pelo programa.



**Figura 5.11** Carga *versus* deslocamento da treliça em regime elastoplástico com encruamento.

Ao analisar a Figura 5.11 vê-se que a carga de escoamento obtida com o resultado numérico considerando o modelo elastoplástico com endurecimento tem o mesmo valor que o resultado numérico considerando o regime elastoplástico perfeito, sendo esta força igual a  $P = 736.78kN$ . A primeira barra a atingir a tensão de escoamento foi a vertical. A continuidade da aplicação da carga na estrutura após esta barra apresentar a plastificação faz com que se tenha uma redução na rigidez global do sistema estrutural. Essa redução acontece em menor valor quando se considera o endurecimento do material.

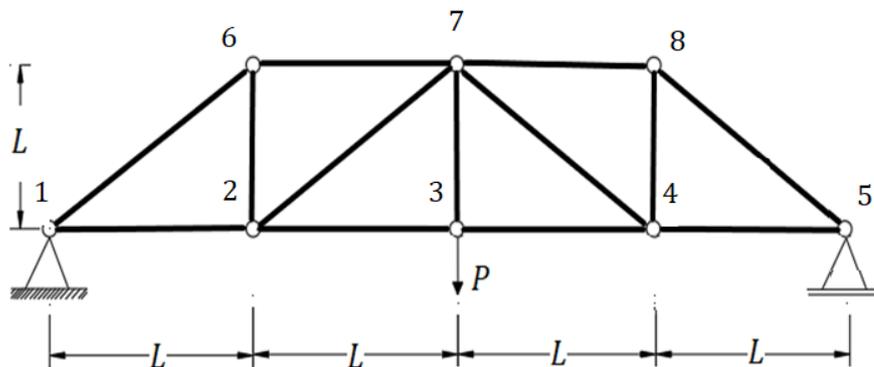
Em uma análise não linear física mais precisa de estruturas treliçadas de aço, faz-se necessária a implementação numérica de modelos constitutivos, através do desenvolvimento de equações matemáticas, que simulem o comportamento estrutural do aço e da criação de um algoritmo computacional adequado que armazene toda a história anterior da relação tensão *versus* deformação dos elementos estruturais. No modelo elastoplástico implementado as deformações plásticas não são contabilizadas de maneira precisa. Entre um deslocamento obtido pela iteração anterior e a corrente é possível que os deslocamentos gerem deformações que não são reais, como apresentado na Figura 5.11 logo após o elemento alcançar a tensão de escoamento, não permitindo que essa região tenha uma curva suave. Para contornar essa

situação é necessário que se implemente a verificação de cada deformação ao fim de cada iteração.

### 5.2.4 Análise Elastoplástica de Treliça Plana Isostática

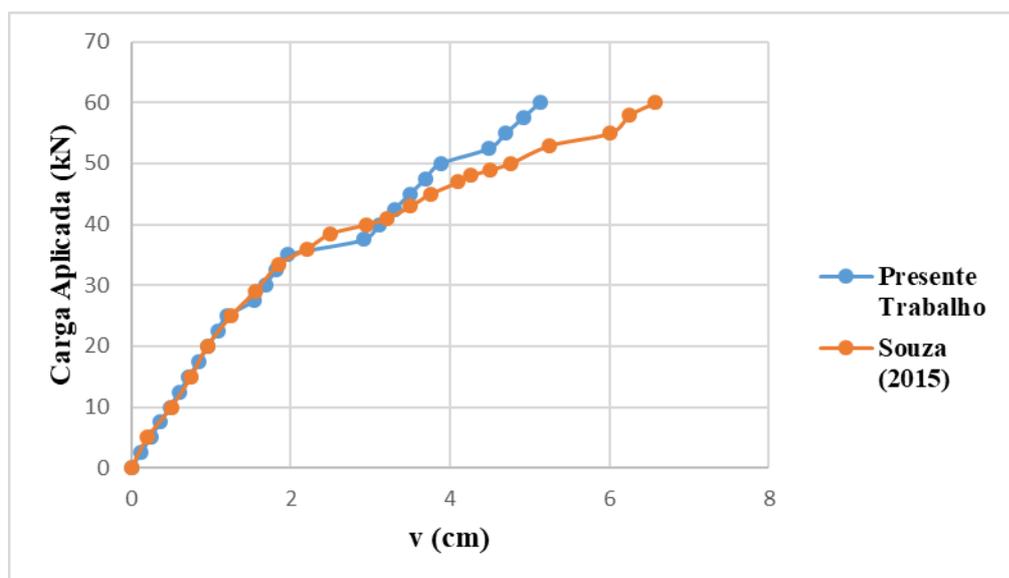
Este exemplo, também analisado por Santos (2002), Rodrigues e Venturini (2005) e Souza (2015), é composto por uma treliça metálica biapoiada de 13 barras com área da seção transversal  $A = 1\text{cm}^2$  e comprimento  $L = 200\text{cm}$ . A estrutura é solicitada por uma força concentrada  $P$  de intensidade  $60\text{kN}$  no nó central inferior, na direção vertical e sentido para baixo. Os elementos que compõem a estrutura apresentam comportamento elastoplástico bilinear (encruamento linear/endurecimento). O módulo de elasticidade de todos os elementos é  $E = 21000\text{kN/cm}^2$  e o módulo de rigidez tangente  $E_t = 5000\text{kN/cm}^2$ . A tensão de escoamento do material é  $\sigma_y = 24\text{kN/cm}^2$ .

Para as simulações com a técnica incremental-iterativa, adotou-se o incremento de força igual a  $\Delta P = -5\text{kN}$  e tolerância igual a  $\xi = 10^{-5}$ .



**Figura 5.22** Treliça em regime elastoplástico com encruamento

A Figura 5.13 apresenta a curva carga *versus* deslocamento do nó 3 na direção vertical.



**Figura 5.33** Curva carga versus deslocamento com módulo de rigidez tangente

$$E_t = 5000 \text{ kN/cm}^2$$

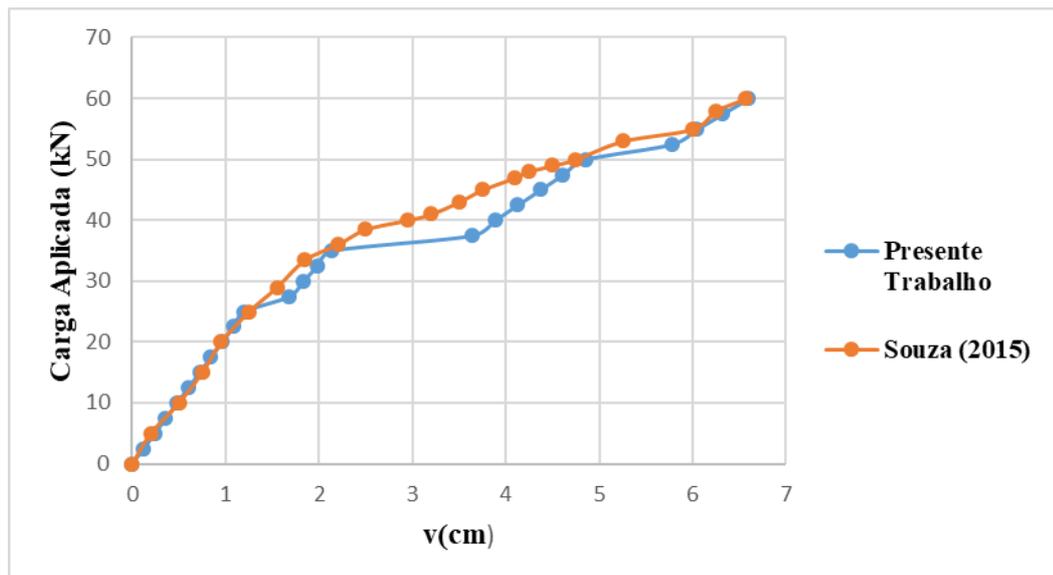
Ao analisar os resultados obtidos pelo programa implementado é possível perceber que até a formação da segunda rotula plástica, em alguns elementos, com deslocamento de  $u = 2.93 \text{ cm}$ , a curva de carga *versus* deslocamento está em conformidade com os resultados obtidos a partir da pesquisa de Souza (2015). Após este deslocamento, a curva tende a se distanciar do resultado requerido. Ao fim do processo incremental-iterativo o valor do deslocamento para a força de  $60 \text{ kN}$  foi de  $u = 5.48 \text{ cm}$ .

A Tabela 5.12 apresenta o deslocamento vertical em *cm* no nó 3, obtido por Santos (2002), Rodrigues e Venturini (2005) e Souza (2015). O valor do deslocamento alcançado pelo programa foi inferior aos demais, superestimando a capacidade da estrutura de resistir às deformações, após a carga de  $40 \text{ kN}$  e a plastificação das diagonais. Este fato pode ser explicado pela simplicidade do modelo elastoplástico com um parâmetro de encruamento adotado no presente trabalho. Porém, para pequenas deformações o método mostrou-se eficiente.

**Tabela 5. 12** Deslocamento em cm no nó 3

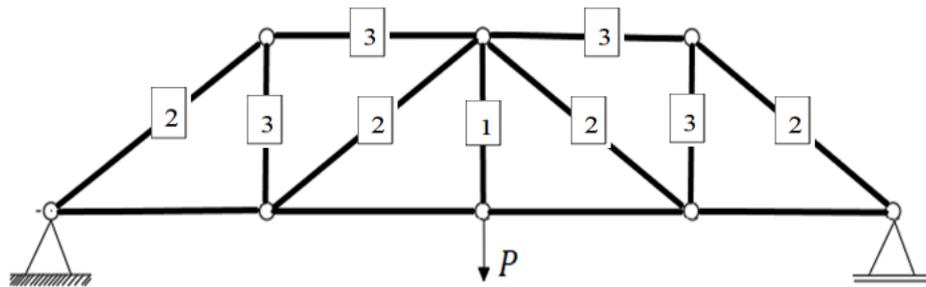
Autor	Modelo Constitutivo	Deslocamento vertical no nó 3
Santos (2002)	Elastoplástico bilinear	-6.685
Rodrigues e Venturini (2005)	Elastoplástico bilinear	-6.611
Souza (2015)	Mecânica do Dano	-6.60
Souza (2015)	Elastoplástico bilinear	-6.57
Presente Trabalho	Elastoplástico bilinear	-5.48

Uma pequena modificação no valor do módulo de elasticidade tangente provoca uma grande mudança na análise não linear física. Ao se mudar o módulo de elasticidade tangente para  $E_t = 6000\text{kN/cm}^2$  a estrutura passou a subestimar os valores dos deslocamentos após a formação da segunda rótula. Porém, neste exemplo o valor do deslocamento no nó 3 foi de  $u = 6.57\text{cm}$  para a carga de  $60\text{kN}$ . Este resultado converge com os resultados obtidos na literatura.

**Figura 5.44** Curva carga *versus* deslocamento usando módulo de rigidez tangente

$$E_t = 6000\text{kN/cm}^2$$

Percebe-se nas Figuras 5.13 e 5.14 pontos de descontinuidade na curva carga *versus* deslocamento. Estes pontos acontecem quando se verifica a plastificação de um ou mais elementos da treliça, tornando-a menos rígida. A formação das rótulas se dá primeiramente no elemento vertical após a estrutura se deslocar  $1.203\text{cm}$  no nó 3. A Figura 5.15 mostra a sequência de formação das rótulas e em quais elementos elas ocorrem. Os elementos com índice 2 apresentaram sua seção plastificada quando o nó 3 atinge o deslocamento de  $2.93\text{cm}$  e os com índice 3, plastifica-se quando a estrutura atinge o deslocamento de  $3.88\text{cm}$ .

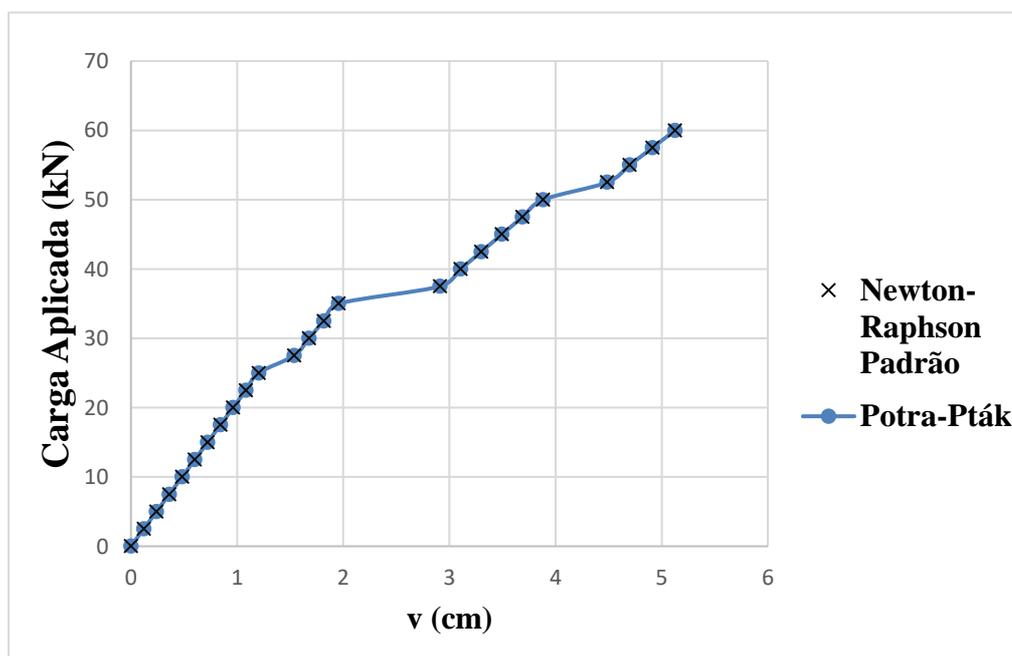


**Figura 5.55** Curva carga *versus* deslocamento usando módulo de rigidez tangente

$$E_t = 5000\text{kN/cm}^2$$

A cada elemento que se plastifica a estrutura vai ficando menos rígida. Fato este que pode ser constatado a cada salto na trajetória de equilíbrio, Figuras 5.13 e 5.14.

A Figura 5.16 apresenta os resultados obtidos usando o método iterativo de Potra-Pták. Neste exemplo, verificou-se excelente convergência entre este método e o método de Newton-Raphson.



**Figura 5.66** Análise não linear física via método de Potra-Pták

Por fim, a Tabela 5.13 apresenta a comparação entre o número de iterações do método de Newton-Raphson Padrão e o de Potra-Pták. Percebe-se que o número de iterações deste último método foi menor. Essa tendência foi observada em todos os exemplos analisados comprovando a sua eficiência para resolver tais sistemas de equações.

**Tabela 5. 13** Comparação entre os métodos iterativos para análise não linear

Método iterativo	$\Delta P = -5kN$	
	Incrementos	Iterações
Newton-Raphson Padrão	25	48
Potra-Pták	25	26

# Capítulo 6

## Conclusões

A partir de toda base teórica, implementação computacional e análise dos resultados é possível obter conclusões importantes sobre o trabalho desenvolvido.

A análise linear de estruturas é um método simplificado de análise estrutural de treliças metálicas bastante utilizado para obter os deslocamentos dos elementos. Os métodos diretos de solução já são amplamente testados e usados neste tipo de análise. O presente trabalho teve como intuito investigar o uso do método iterativo de Gauss-Seidel em sua formulação tradicional para análise de estruturas, devido as suas vantagens frente aos métodos diretos. A matriz de rigidez estrutural das treliças possui sim a característica de matrizes esparsas. No entanto, este método necessita que matriz seja diagonalmente dominante para alcançar a convergência. Ao analisar a matriz de rigidez da estrutura é possível perceber, após a implementação dos critérios suficientes de convergência, que a medida que se aumenta o número de graus de liberdade da estrutura a mesma vai perdendo essa característica, diagonal dominante. Nestes casos, o método de iterativo de Gauss-Seidel não é um bom método para solucionar tais sistemas, devido as suas restrições.

Na literatura é apresentando que o método iterativo de Gauss-Seidel com o uso do erro absoluto é o mais indicado quando os valores das incógnitas são pequenos. O mesmo não foi constatado ao longo das análises numéricas, como no exemplo 5.1.5, onde os resultados mostraram que o erro absoluto convergiu com um menor número de iterações.

O método numérico de Gauss-Seidel tem sua formulação melhorada a partir do uso do método da relaxação. Além desse método, tem-se na literatura outros métodos eficientes para solução de sistemas lineares esparsos e com um grande número de elementos, associados com técnica de armazenamento e paralelização, como o método dos gradientes conjugados. Tais métodos podem ser verificados em termos de análises estruturais para que se possa ultrapassar os problemas gerados quando se utiliza métodos numéricos diretos em sistemas com tais características.

A plasticidade é um fenômeno conhecido a muito tempo. Porém, ganhou-se mais notoriedade com o surgimento dos computadores e métodos numéricos para solucionar os sistemas com a consideração da análise no regime plástico. O algoritmo implementado é capaz de fazer uma análise não linear física de treliças metálicas considerando o regime elastoplástico perfeito e com encruamento. Estas características é um avanço em termos de análises estruturas pois permite considerar uma reserva de rigidez pós-crítica da estrutura, o que não acontece nas

análises lineares, fazendo com que se conceba estruturas cada vez mais complexas usando o máximo de resistência dos seus elementos.

Com a discretização da estrutura pelo MEF e a consideração da relação constitutiva não linear geram-se sistemas de equações não lineares, necessitando de métodos numéricos apropriados para tal solução. Ao analisar os resultados obtidos com o uso do código implementado foi possível perceber que o método iterativo de Potra-Pták se mostra bastante promissor como um método para análises não lineares de estruturas. A redução do número de incrementos associado com a redução do número de iterações faz com que sua convergência cúbica seja eficiente em comparação com a convergência quadrática do Newton-Raphson padrão e modificado. No presente trabalho o tempo de processamento não foi verificado devido a simplicidade das estruturas analisadas.

A implementação computacional teve sua validação a partir de resultados da literatura e do software Mastan2. O código sem mostrou eficiente em termos de automatização do processo de análise linear e não linear física de treliças metálicas.

### **Sugestões de Trabalhos Futuros:**

- Considerar o efeito da não linearidade geométrica e da flambagem dos elementos para análise completa e mais realística das treliças.
- Considerar a efetuação de ciclos de carregamento e descarregamento, e adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica.
- Considerar o efeito da mudança da geometria nas extremidades dos elementos, a consideração de carregamento distribuído e o efeito da não linearidade física concentrada nas extremidades.
- Estender o algoritmo para outras estruturas reticuladas para que se possa aumentar a complexidade das análises e verificar a eficácia do método de Potra-Pták para a solução de sistemas de equações não lineares.

# Referências

ALLGOWER, E. L.; GEORG, K. **Computational solution of nonlinear systems of equations**. American Mathematical Society, 1990.

AMAT, S.; BUSQUIER, S.; EZQUERRO, J. A.; HERNÁNDEZ-VERÓN, M. A. A Steffensen type method of two steps in Banach spaces with applications. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, n.291, pp. 317–331, 2016.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14762**: dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio. Rio de Janeiro, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16239**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações com perfis tubulares. Rio de Janeiro, 2013.

ARGYRIS, J.H.; KELSEY, S. Energy theorems and structural analysis. 1960

ARGYROS, I. K. 1988. On Newton's method and nondiscrete mathematical induction. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, v. 38, pp.131-140, 1988.

ARGYROS, I. K. **Computational theory of iterative methods**. Elsevier Science, San Diego, 2007.

BABAJEE, D. K. R.; DAUHOO, M. Z., 2006. An analysis of the properties of the variants of Newton's method with third order convergence. **Applied Mathematics and Computation**, v. 183, pp.659-684, 2006.

BATHE, K.J. **Finite element procedures**. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

BATOZ, J.L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, pp.1262-1267, 1979.

BLANDFORD, G. E. Large deformation analysis of inelastic space truss structures. **Journal of Structural Engineering**, v.122, pp.407-415, 1996.

BURDEN, R.; FAIRES, D.J.; BURDEN, A.M. **Análise numérica**. São Paulo, Cengage, 2015.

CHAPMAN, S.J. **Fortran for scientists and engineers**. McGraw-Hill, 2017.

CHAPRA, C.S.; CANALE, R. P. **Numerical methods for engineers**. New York, McGraw-Hill Education, 2008.

CHEN, W. F. **Constitutive Equations for Engineering Materials: Plasticity and Modeling**. Amsterdam, Elsevier Science, 1994.

CHEN, W.F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. New York, Springer-Verlag Inc., 1988.

CRISFIELD, M.A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. John Wiley & Sons, 1997.

COOK, R. D. **finite element modeling for stress analysis**. J. Wiley, New York, 1995.

COOK, R.D.; Malkus, D.S.; Plesha, M.E. **Concepts and applications of finite element analysis**, 3 ed., New York, John Wiley and Sons, Inc., 1989.

CORDERO, A.; HUESCO, J.L.; MARTÍNEZ, E.; TORREGROSSA, J.R. New modifications of Potra-Pták's method with optimal fourth and eighth orders of convergence. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, n. 234, pp.2969-2976, 2010.

DRIEMEIR, L.; PROENÇA, S. P.B.; ALVES, M. A contribution to the numerical nonlinear analysis of three-dimensional truss systems considering large strains, damage and plasticity. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**. n.10, pp. 515-535, 2005.

DYM, C. L.; SHAMES, I. H. **Energy and finite element methods in structural mechanics**, McGraw-Hill, 1996.

FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**. Pearson, São Paulo, 2006.

FRANKEL, S. Convergence rates of iteratives treatments of partial differential equations, **MTAC**, pp. 65-75, 1950.

HUGHES, T. J. R. **Finite element method - linear static and dynamic finite element analysis**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs., 1987.

GERE, J. M; Weaver, J. W. **Análise de estruturas reticuladas**. Van Nostrand Reinhold Ltd, 1981.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando MATLAB**. New York, John Wiley and Sons, Inc., 2008.

GONÇALVES, P. B. **Análise elástica de estruturas reticuladas**. Apostila com notas de aula. Rio de Janeiro, UFRJ, 2003.

GRECO, M.; GESUALDO, F.A.R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H.B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**. v. 42, pp. 1079-1086, 2006.

HERCEG, D.; HERCEG, D. A family of methods for solving nonlinear equations. **Applied Mathematics and Computational**, Sérvia, n. 259, pp. 882-895, 2015.

JERÔNIMO JÚNIOR, A. **Implementação de métodos iterativos e computacionais para resolução de sistemas de equações lineares: um estudo aplicado**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2015.

KRENK, S.; HEDEDAL, O. A dual orthogonality procedure for nonlinear finite element equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.123, pp. 95-107, 1995.

LEITE, N.F. 2000. **Uma formulação teórica consistente para análise não linear de estruturas treliçadas espaciais**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Brasília, Brasil, DF, Brasil, 2000.

LEON, S. E.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M.; LAGES, E. N. A Unified Library of Nonlinear Solution Schemes. **Applied Mechanics Reviews**, v.64,pp.1-26, 2011.

MARTHA, L. F. **Análises de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Elsevier, Rio de Janeiro, 2010.

MAXIMIANO, D.P. **Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil, 2012.

PACITTI, T.; ATKINSON, C. P. **Programação e métodos computacionais**. LTC. 4ed. Rio de Janeiro, 1983.

PAPADRAKAKIS, M. Inelastic post-buckling analysis of trusses. **Journal of Structural Engineering**, v.109,n.9, pp.2129-2147, 1983.

PINHEIRO, L. **Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil, 2003.

PINHEIRO, L.; SILVEIRA, R. A. M. Análise da Estabilidade de Treliças Espaciais. **Revista Escola de Minas**, v. 57, n.2, pp. 85-92, 2004.

RAMESH, G.; KRISHNAMOORTHY, C.S. Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method. **Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.37, pp.3633-3657, 1994.

REDDY, J. N. **Energy and variational methods in applied mechanics with an introduction to the finite element method**, J. Wiley, New York, 1984.

REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. McGraw-Hill Book Co., 1993.

REDDY, J. N. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. Oxford University Press, New York, 2004.

REIS, A.; CAMOTIM, D. **Estabilidade estrutural**. McGraw-Hill, 2000.

RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stress in a masonry dam. **Phil. Trans. R. Soc. London. A**, v. 210. pp. 307-357, 1910.

RODRIGUES, R. O. **Análise dinâmica bidimensional não linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. Tese de Doutorado- Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, Brasil, 1997.

RODRIGUES, R. O.; VENTURINI, W.S. Análise dinâmica bidimensional não linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 7, n. 23, pp. 61-93, 2005.

RUGGIERO, M. A. G.; Lopes, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2ed, Pearson Makron Books, São Paulo, 2014.

SAFFARI, H.; MIRZAI, N. M.; MANSOURI, I.; BAGHERIPOUR, M. H. Efficient numerical method in second-order inelastic analysis of space trusses. **Journal of Computing in Civil Engineering**, v.27, pp.129-138, 2013.

SANTOS, R.M. **Análise de estruturas metálicas reticuladas planas considerando a não-linearidade física em sistemas não-conservativos**. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia, Departamento de Estruturas, Campinas, SP, Brasil, 2002.

SERGINI, S. C. A. **Estudo comparativo de formulações para a análise não-linear geométrica de treliças**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2000.

SILVA, A. R. D. **Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas (CS–ASA)**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil, 2009.

SILVA, T. R. **Desenvolvimento de um programa para análise não linear geométrica e física de treliças planas através da formulação co-rotacional**. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Instituto de Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Belém, PA, Brasil, 2015.

SORIANO, H. L. **Análise de estruturas: formulação matricial e implementação computacional**. Ciência Moderna, 2005.

SOUZA, E. A. **Métodos iterativos para problemas não lineares**. Dissertação de mestrado Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, Brasil, 2015.

SOUZA, L. A. F. Análise não linear física de treliças planas por elementos finitos considerando a mecânica do dano. **In: IX EPCC–Encontro Internacional de Produção Científica UniCesumar**, 9., 2015, Maringá. Anais... Maringá: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2015. pp. 4-8.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; MACHADO, R. D. Métodos iterativos de terceira e quarta ordem associados à técnica de comprimento de arco linear. **Ciência e Engenharia**, v.26, pp.39-49, 2017.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; ALIANO FILHO, A.; MACHADO, R. D. Trusses nonlinear problems solution whit numerical methods of cubic convergence order. **Tendências em Matemática e Computacional**, v.19, n.1, pp.161-179, 2018.

SOLEYMANI, F.; SHARMA, R.; LI, X.; TOHIDI, E. An optimized derivative-free form of the Potra-Pták method. **Mathematical and Computer Modelling**, v.56, pp.97-104, 2012.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; MONKEY E SILVA. L. H. **Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2003.

TAYLOR, J. R. **Classical mechanics**. University Science Books, 2005.

TURNER, M.J; CLOUGH, R.W; MARTIN, H.C. Stiffnes and deflection analysis of complex structures. **Journal of Aeronautical Science**, v.23, n. 9, pp.805-823, 1956.

VARGA, H.S. **Matrix iterative analysis**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nova Jersey, 1992.

VITAL, F.T. **Métodos de resolução de sistemas lineares e custo Computacional**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Brasília, Brasília, DF, 2014.

YANG, Y.B.; KUO, S.B. **Theory & analysis of nonlinear framed structures**. Prentice Hall, 1994.

YPMA, T. J. Historical development of the Newton-Raphson method. **SIAM Review**, Bellingham, vol. 37, n. 4, pp. 531–551, 1995.

YOUNG, D. M. **Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic type**. Tese de Pós-Doutorado, Universidade de Harvard, Cambridge, USA, 1950.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **Finite element method-basic formulation and linear problems**. McGraw-Hill Co., New York, 1989.