

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Análise não-linear física e geométrica de
sistemas aporticados com elementos de
rigidez variável em concreto armado

Autor:

Tatiane Maga Pereira MENDES

Orientador:

Dr-Ing Francisco Célio de ARAÚJO

Dissertação de Mestrado

Mestre em Ciências da Engenharia Civil

na área de concentração em Construção Metálica

PROPEC

Escola de Minas

Setembro, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Análise não-linear física e geométrica de sistemas aporticados com elementos de rigidez variável em concreto armado

Autor:

Tatiane Maga Pereira MENDES

Orientador:

Dr-Ing Francisco Célio de ARAÚJO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências da Engenharia Civil na área de concentração em Construção Metálica

PROPEC
Escola de Minas

Setembro, 2017

M538a Mendes, Tatiane Maga Pereira.
Análise não-linear física e geométrica de sistemas aporticados com elementos de rigidez variável em concreto armado [manuscrito] / Tatiane Maga Pereira Mendes. - 2017.
92f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.
Área de Concentração: Construção Metálica.

1. Análise funcional. 2. Pórticos estruturais. 3. Concreto armado. I. Araújo, Francisco Célio de . II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624.012.45

Catálogo: www.sisbin.ufop.br

**ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA DE SISTEMAS
AORTICADOS COM ELEMENTOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL EM
CONCRETO ARMADO**

AUTORA: TATIANE MAGA PEREIRA MENDES

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 06 de setembro de 2017, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:


Prof. Francisco Célio de Araújo, Dr.- Ing. – UFOP (Presidente)


Prof. Francisco de Assis das Neves, D. Sc. – UFOP


Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D. Sc. – UFOP


Prof. Gabriel de Oliveira Ribeiro, D. Sc. – UFMG

*“Que nada nos defina, que nada nos
sujeite. Que a liberdade seja a nossa
própria substância, já que viver é ser
livre.”*

Simone de Beauvoir

Agradecimentos

À minha irmã, Adália Táci, por todo companheirismo e amizade durante a vida.

A Vinícius por todas as noites de Vingadores, Avatar e Homem Aranha.

À Tia Sônia pelo amor, carinho e aconselhamento.

À Débora e Karine pelo exemplo de guerreira a ser seguido.

Ao Grupo Bikers das Minas, em especial a Ana, Cleide, Mari, Dani e Luana, pela a amizade e brutalidade.

À Luíza pelos abraços nos momentos difíceis.

À Iara pela amizade, disposição em ajudar e companheirismo.

Ao amigo Mcglennon pela ajuda com o Latex

Ao meu orientador, Francisco Célio, por todos ensinamentos e pela dedicação.

A todos professores do PROPEC pelos ensinamentos.

A todos meus colegas de mestrado pela companhia no dia a dia.

Às divas, Marília Mendonça, Naira Azevedo, Simone, Simaria, Ludimila, Adele, Katy Perry, Sia, P!nk e é claro à Rainha Beyoncé, pela trilha sonora.

À Capes pelo auxílio financeiro para realização desta pesquisa.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Resumo

Escola de Minas

PROPEC

Mestre em Ciências da Engenharia Civil
na área de concentração em Construção Metálica

Análise não-linear física e geométrica de sistemas aporticados com elementos de rigidez variável em concreto armado

Tatiane Maga Pereira MENDES

Neste trabalho apresentam-se estratégias para a análise não-linear física e geométrica de pórticos planos em concreto armado. A não-linearidade física será incluída de duas formas: via modelo de Ghali-Favre e via processo de equilíbrio direto de esforços na seção. No modelo de Ghali-Favre, a rigidez em uma dada seção de um elemento, para certo nível de solicitação no estágio II, é determinada a partir interpolação das deformações generalizadas nos estádios I e II puro. No método de equilíbrio direto da seção, faz-se uso de uma estratégia iterativa de equilíbrio, onde deformações axiais e flexionais são iterativamente impostas e os correspondentes esforços internos calculados, até que se verifique equilíbrio entre esforços resistentes e solicitantes. Assim, pode-se determinar as rigidezes axial e flexional, em uma dada seção, correspondente ao nível de solicitação. De posse então da rigidez (variável) ao longo do elemento estrutural, emprega-se uma formulação baseada no Método da Rigidez Direta (MRD) que possibilita modelar essa variação de rigidez segundo leis matemáticas quaisquer. Ademais, se incluem, na formulação, opções de modelagem de seções de formas geométricas quaisquer, eventualmente variáveis ao longo do elemento. Para a análise não-linear, adota-se um esquema incremental-iterativo de Newton-Raphson no qual a matriz de rigidez geométrica é atualizada, em cada iteração do processo incremental-iterativo, enquanto a matriz de rigidez física é atualizada apenas a cada novo incremento de carga. Assim, tanto a degradação por fissuração do concreto como grandes deslocamentos são considerados na análise. Nesse algoritmo, um referencial corrotacional é também considerado. Comparações com resultados experimentais são mostradas para atestar a eficiência da estratégia.

FEDERAL UNIVERSITY OF OURO PRETO

Abstract

Escola de Minas

PROPEC

Master of Science in Civil Engineering
in the area of concentration in Metallic Construction

Non-linear physical and geometric analysis of framed systems with elements of variable stiffness in reinforced concrete

by Tatiane Maga Pereira MENDES

This work presents a strategy for the physical and geometric non-linear analysis of plane reinforced concrete frames. The physical non-linearity is included by means of two different processes: the Ghali-Favre process, and the direct equilibrium process of the cross section. In the Ghali-Favre process, the rigidity at a given cross section of a frame element, for a given load level, is determined by interpolating the generalized strains associated with the I and pure II states (fully cracked section) as a function of the corresponding generalized stresses. In the direct equilibrium process of the cross section, an iterative balance strategy is proposed in which axial and flexural deformations are iteratively imposed, and the corresponding internal forces evaluated, until balance between resisting and acting forces is attained. This allows measuring the axial and flexural rigidity at a given cross section. Thus, with the (variable) rigidity along the element, one employs a formulation based on the Direct Stiffness Method (DSM), which allows for modeling that rigidity according generic mathematical laws. In addition, one also implements options for modeling cross sections of any geometric shapes, possibly variable along the element length. To carry out the non-linear analysis, an incremental-iterative Newton-Raphson scheme is employed in which the geometric stiffness matrix is updated at every iteration of the incremental-iterative process, and the physical stiffness matrix is updated only at every new load increment. Thus, concrete degradation by cracking and large displacements are taken into account in the analysis. Besides, in this algorithm a co-rotational reference system is considered to increase the response accuracy. Comparisons with experimental results are shown to attest the efficiency of the strategy.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Estrutura da Dissertação	3
2 Método da Rigidez Direta	5
2.1 Formulação Matricial	6
2.2 Matriz de rigidez física de elemento do pórtico plano (K_f)	7
2.3 Matriz de rigidez geométrica de elemento do pórtico plano (K_g)	13
2.4 Variação de rigidez em elementos de concreto armado	18
3 Análise não-linear física de estruturas em Concreto Armado	21
3.1 Comportamento do CA à flexão	22
3.2 Comportamento do CA à tração	23
3.3 Modelo de Branson(1965)	24
3.4 Modelo de Ghali e Favre (1986)	26
3.4.1 Tração Axial	26
3.4.2 Flexão Simples	28
3.4.3 Flexão Composta	28
3.4.4 Cálculo da rigidez de seções em concreto armado - Ghali e Favre	30
3.5 Equilíbrio Direto da Seção	32
3.5.1 Cálculo da rigidez de seções em concreto armado - Equilíbrio direto	40
3.5.2 Estratégia para curvas $Mx\psi$ e $Nx\varepsilon$	41
3.6 Considerações Normativas	43
3.7 Aplicações Preliminares	43
4 Análise não-linear geométrica	46
4.1 Análise não-linear geométrica	46
4.1.1 Parâmetro de instabilidade α	47

4.1.2	Coefficiente γ_z	48
4.2	Estratégia de solução não-linear	49
5	Aplicações	52
5.1	Aplicação 1	52
5.2	Aplicação 2	58
5.3	Aplicação 3	63
5.4	Aplicação 4	66
6	Conclusões	69
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	70
A	Apêndice A	71
A.1	Propriedades nos Estádios I e II	71
A.1.1	Linha Neutra	71
	Linha Neutra - Estádio I	72
	Linha Neutra - Estádio II	72
	Algoritmo para obtenção da linha neutra	72
A.1.2	Área e Momento de Inércia da Seção	73
A.2	Esforços nos Estádios I e II	74
A.2.1	Momento de início de fissuração, M_r	74
A.2.2	Momento de plastificação das armaduras, M_p	75
A.2.3	Normal de início de fissuração, N_r	75
B	Apêndice B	76
B.1	Determinação do Momento Último de uma Seção de Concreto Armado	76
	Referências	78

Lista de Figuras

1.1	Twin Towers - Kuala Lumpur - Concreto de 80Mpa até o 60º andar	2
2.1	Pórtico Plano - Fonte: Ribeiro (2016)	5
2.2	Elemento de pórtico plano	7
2.3	Elemento de pórtico plano com o segundo nó restringido	9
2.4	Elemento de pórtico plano com o primeiro nó restringido	11
2.5	Elemento de pórtico plano deformado com o segundo nó restringido	13
2.6	Decomposição das forças f_{1k} e f_{2k} no eixo deformado	13
2.7	Elemento de pórtico plano deformado com o primeiro nó restringido	16
2.8	Decomposição das forças f_{4k} e f_{5k} no eixo deformado	16
2.9	Funções de interpolação	20
3.1	Curva Tensão-deformação para o concreto. Fonte: Adaptado de Desayi e Krishnan (1964)	21
3.2	Aços estruturais laminados a quente.	22
3.3	Elemento de CA fletido.	23
3.4	Diagrama momento curvatura da seção solicitada a flexão simples.	24
3.5	Comportamento do CA à tração. a- Fissuras em um elemento solicitado à tração, b- tensão na barra de aço, c- aderência e d- tensão no concreto. Fonte: Adaptado de Ghali, Favre e Elbadry (2002)	25
3.6	Distribuição de fissuras na viga. Fonte: Adaptado de Guarda (2005).	25
3.7	Força axial versus deformação no aço. Fonte: Adaptado de Ghali, Favre e Elbadry (2002)	27
3.8	Elemento de CA sujeito à flexão composta (a) seção no estádio I (b) seção no estádio II. Fonte: Adaptado de Ghali, Favre e Elbadry (2002)	29
3.9	Elemento estrutural e pontos de integração ao longo de seu eixo.	31
3.10	Elemento estrutural e seção solicitada	33
3.11	Diagrama tensão-deformação do concreto (a)NBR6118, 2014 e (b)Eurocode2, 1999	34
3.12	Comportamento concreto simples à tração, adaptado de Desayi e Krishnan (1964)	35
3.13	Comportamento do aço segundo NBR6118, 2014	36

3.14 (a) Malha de contorno da seção transversal e sua discretização em faixas (b) detalhe de uma faixa com seus pontos de integração	37
3.15 Processo de equilíbrio direto da seção - primeiro passo de carga	39
3.16 Processo de equilíbrio direto da seção - demais passos de carga	40
3.17 Seções transversais(a) trapezoidal com furo (b) e seção T	44
3.18 Curva momento-curvatura para seção trapezoidal com furo	45
3.19 Curva momento-curvatura para seção T	45
4.1 Configuração deformada. Adaptado de Silvestre e Camotim (2007)	47
4.2 Efeitos de segunda ordem $P - \Delta$. Adaptado de Silvestre e Camotim (2007)	47
4.3 Efeitos de segunda ordem $P - \delta$. Adaptado de Silvestre e Camotim (2007)	48
4.4 Método de Newton-Raphson. Adaptado de Ribeiro, 2016	50
4.5 Fluxograma de solução não-linear. Adaptado de Ribeiro, 2016	51
5.1 Viga aplicação 1	52
5.2 Seções transversais aplicação 1	53
5.3 Curva momento-curvatura para a viga de 3 φ de 10mm.	54
5.4 Curva momento-curvatura para a viga de 5 φ de 10mm.	55
5.5 Curva momento-curvatura para a viga de 7 φ de 10mm.	55
5.6 Momento fletor em função da posição da linha neutra.	56
5.7 Rigidez Flexional em função do momento fletor.	56
5.8 Deslocamento vertical no meio da viga com 3 φ de 10mm.	57
5.9 Deslocamento vertical no meio da viga com 5 φ de 10mm.	57
5.10 Deslocamento vertical no meio da viga com 7 φ de 10mm.	58
5.11 Viga bi apoiada e carregamento - Aplicação 2	59
5.12 Seção transversal - Aplicação 2	59
5.13 Curva momento-curvatura - aplicação 2.	60
5.14 Rigidez flexional versus momento fletor - aplicação 2.	61
5.15 Momento fletor versus posição da linha neutra - aplicação 2.	61
5.16 Deslocamento vertical do meio do vão da viga analisada.	62
5.17 (a)Pilar - Aplicação 3, (b) Seção Transversal	63
5.18 Carga em função da deformação no centro do pilar	64
5.19 Carga em função da deformação no centro do pilar	65
5.20 Carga em função da deformação no centro do pilar	65
5.21 (a)Pilar - Aplicação 4, (b) Discretização e (c) Seção Transversal	66
5.22 Curva momento curvatura para diversas forças normais solicitantes	67
5.23 Carga P pelo deslocamento horizontal no topo do pilar	68
A.1 Seção transversal - Estádios I e II	71
A.2 Malha de contorno e elemento genérico de contorno	73

B.1 Diagrama momento-curvatura e estádios	76
---	----

Lista de Tabelas

3.1	Dados dos materiais - Seção trapezoidal	44
3.2	Dados dos materiais - Seção T	44
5.1	Dados da seção - Aplicação 1	53
5.2	Dados dos materiais - Aplicação 1	53
5.3	Valores de momento de fissuração, plastificação e último para a viga de 3 φ de 10mm.	54
5.4	Curvaturas referentes aos valores de momento de fissuração, plastificação e último para a viga de 3 φ de 10mm.	54
5.5	Dados da seção - Aplicação 2	59
5.6	Dados dos materiais - Aplicação 2	59
5.7	Dados dos materiais - Aplicação 3	63
5.8	Dados dos materiais - Aplicação 4	66

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto e Motivação

Um dos desafios da engenharia estrutural está ligado à criação de tecnologias que permitam uma redução do peso das estruturas, observando aspectos bem definidos de segurança (Gonçalves, 2003). Consequência óbvia da redução de material é também a redução de custos na construção dos sistemas estruturais. Nesse contexto, não apenas se inserem as pesquisas na área de materiais, sobretudo em compósitos avançados, em que se objetivam o desenvolvimento de materiais com elevada relação de resistência mecânica por densidade de massa, mas também as pesquisas que visem o desenvolvimento de processos avançados de simulação computacional desses sistemas estruturais. Obviamente, estruturas arquitetonicamente complexas, muito altas, esbeltas, como as *Twin Towers* mostradas na Figura 1.1, também demandam o emprego de processos computacionais avançados em seu projeto.

No caso do concreto, pode-se, hoje, chegar a resistências superiores a 50MPa (Moncavo, 2011), o que possibilita elementos mais esbeltos e leves, de modo que considerações de efeitos não-lineares geométricos tornam-se relevantes. No entanto, por se tratar de estruturas em concreto armado, há, ademais, que se considerar o processo de fissuração em sua análise.

Também está ligado ao desenvolvimento da engenharia estrutural, a criação de formulações que descrevem os fenômenos físicos que ocorrem nas estruturas, ou seja, a resposta do sistema estrutural às ações externas. No entanto, a aplicação dessas formulações a problemas reais está associada à geração de sistemas com um grande número de equações, impossíveis de serem resolvidas por processos manuais. Desse modo, o emprego de recursos computacionais, disponíveis, na verdade, desde a década de 60 (Martha, 2010), têm sido o meio possível para a obtenção de respostas precisas, mais próximas da realidade, desses sistemas estruturais. O fato de o computador realizar um elevado número de operações matemáticas em pouco tempo de processamento tem possibilitado o desenvolvimento de formulações e ferramentas de projetos estruturais muito sofisticadas.



FIGURA 1.1: Twin Towers - Kuala Lumpur - Concreto de 80Mpa até o 60º andar

Cálculos mais rigorosos incluem opções de consideração da não-linearidade geométrica (NLG), da não-linearidade física (NLF) e de efeitos dinâmicos. Em estruturas esbeltas, os fenômenos de NLG tornam-se bastante relevantes. O colapso, neste caso, se dá antes do escoamento do material devido a grandes deslocamentos laterais. A NLF está ligada ao comportamento do material, e manifesta-se nas relações tensão-deformação, ou também nas relações físicas que envolvem resultantes de tensão e correspondentes deformações generalizadas. Mais especificamente no concreto, a NLF está ligada à perda de rigidez devido à fissuração, ao deslizamento entre armadura e concreto, à plastificação do aço e à fluência do concreto (Gelatti, 2012).

A norma atual de concreto (NBR6118, 2014) prevê simplificações quanto à consideração das não-linearidades, o que diminui consideravelmente o tempo de análise (Ribeiro, 2016). No entanto para certas estruturas é conveniente analisar o problema completamente, com técnicas numéricas complexas, empregando recursos computacionais.

1.2 Objetivos

Vê-se a relevância da consideração das não-linearidades física e geométrica em estruturas cada vez mais esbeltas. Neste trabalho, propõe-se a consideração desses 2 tipos de não-linearidade. Em relação à não-linearidade geométrica, a formulação considerada aborda essencialmente a determinação do caminho de equilíbrio até a carga crítica da estrutura (pre-buckling phase).

Quanto à NLF incluem-se relações físicas que descrevem a perda de rigidez ao longo dos elementos estruturais. Neste contexto, são consideradas, neste trabalho, para a simulação de perda de rigidez, tanto modelos já difundidos na literatura técnica (Ghali, Favre e Elbadry, 2002) como a estratégia proposta aqui de equilíbrio direto da seção. Ressalta-se, que essas formulações foram computacionalmente implementadas no código computacional NAESY-2Dframework, que baseia-se no Método de Rigidez Direta (MRD) e dispõe de opções de análise que possibilitam a simulação de elementos com rigidez variável. Note-se que esse tipo de opção de modelagem será fundamental para simular a perda de rigidez do elementos de concreto armado em decorrência do processo de fissuração. Um esquema geral de análise não-linear geométrica via método de Newton-Raphson já se encontrava implementado no programa NAESY-2Dframework, o qual foi complementado com o presente trabalho pela inclusão dos efeitos da NLF. O programa NAESY-2Dframework é uma base computacional que vem sendo desenvolvida por Araújo, 1994, e recebendo contribuições de dissertações e trabalhos de conclusão de curso, entre os quais citam-se os trabalhos de Pereira (2013), Maga (2015), Ribeiro (2016) e Pereira (2015).

Para validar as formulações desenvolvidas e implementadas, foram utilizados exemplos de trabalhos experimentais e numéricos. Como mencionado acima, o foco das aplicações será estruturas em concreto armado (CA).

1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação contém seis capítulos e dois apêndices. No capítulo 2 descreve-se a formulação do Método da Rigidez Direta. Este método possibilita a modelagem de elementos estruturais de pórtico plano, com rigidez variável segundo leis quaisquer, inclusão de efeitos de deformação por cisalhamento, e seções de formas geométricas quaisquer. Também no capítulo 2 é feita a dedução das matrizes de rigidez física e geométrica de elemento, e são feitas observações sobre a obtenção das ações de engastamento perfeito.

No capítulo 3, abordam-se as características de não-linearidade física do concreto armado, e como este material se comporta segundo diversos tipos de solicitações. Em seguida, descrevem-se modelos analíticos desenvolvidos ao longo dos anos, e que se propõem a descrever a rigidez em elementos de concreto armado. Por fim, descrevem-se as estratégias desenvolvidas e implementadas neste trabalho, que são o modelo de Ghali-Favre e a estratégia de equilíbrio direto da seção transversal. Ainda faz-se o estudo dos diagramas momento-curvatura através de aplicações parciais com seções não usuais.

Faz-se no capítulo 4 uma descrição dos aspectos da não-linearidade geométrica e consideração normativas. Também descreve-se a estratégia de solução não-linear de Newton-Raphson com

controle de carga. Esta estratégia considera sistemas de referência corrotacionais e a mesma também possibilita descrição de respostas com grandes deslocamentos.

No capítulo 5, são feitas aplicações com o objetivo de validar as formulações implementadas. Estas aplicações são focadas em estruturas de concreto armado e os resultados são todos comparados com resultados experimentais.

Por fim, no capítulo 6 fazem-se conclusões sobre este trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Método da Rigidez Direta

Neste trabalho, essencialmente propõem-se estratégias voltadas para a resolução de estruturas reticuladas (elementos de barra), que se caracterizam por possuírem elementos que têm uma dimensão preponderante em relação às demais (Soriano, 2005). Particularmente consideram-se pórticos planos (vide Figura 2.1), onde o eixo principal de todas as seções é perpendicular ao plano da estrutura e as ações do tipo força encontram-se no plano da estrutura e as do tipo cargas-momento são perpendiculares ao mesmo.

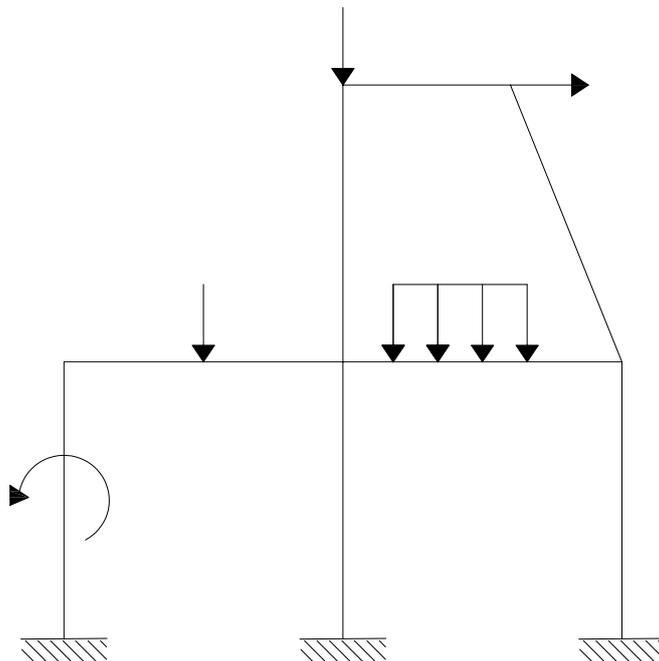


FIGURA 2.1: Pórtico Plano - Fonte: Ribeiro (2016)

Para a análise dessa classe de sistemas estruturais empregou-se o Método da Rigidez Direta

(MRD), o qual consiste na obtenção do sistema de equações de equilíbrio do sistema estrutural a partir dos valores diretos dos coeficientes de rigidez e das cargas nodais equivalentes (Clough, 1990). O MRD é uma formulação que vem sendo empregada desde a década de 50 e no qual se baseia qualquer formulação de Elementos Finitos (Araújo e Pereira, 2017). Este método possibilita a modelagem de elementos estruturais de pórtico plano com rigidez variável, segundo leis quaisquer, inclusão de efeitos de deformação por cisalhamento, e com seções de formas geométricas quaisquer. Nas seções seguintes deste capítulo, apresenta-se um processo que permite a obtenção das expressões exatas dos coeficientes do sistema de equações algébricas desse método.

2.1 Formulação Matricial

Neste capítulo, descrevem-se as expressões genéricas que se empregam na obtenção do sistema de equações de equilíbrio do Método da Rigidez Direta (MRD), dado por

$$\mathbf{K}_t \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad , \quad (2.1)$$

onde \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente da estrutura, \mathbf{f} o vetor de ações nodais equivalentes e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais, incógnitos ou prescritos. Neste trabalho, a matriz de rigidez \mathbf{K}_t será obtida pela soma de duas outras matrizes, quais sejam, a matriz de rigidez elástica (ou física), \mathbf{K}_f , e a matriz de rigidez geométrica, \mathbf{K}_g . Na matriz de rigidez física, incluem-se as relações constitutivas do material, quais expressam também os efeitos da não-linearidade física como a degradação de rigidez conforme o nível de tensão em pontos da seção transversal. Já a matriz de rigidez geométrica, \mathbf{K}_g , surge da consideração do equilíbrio da estrutura em uma configuração deformada, ou seja, levam-se em conta os chamados efeitos de segunda ordem. Pode-se então escrever

$$(\mathbf{K}_f - \lambda \mathbf{K}_g) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad , \quad (2.2)$$

sendo λ um número associado ao incremento de cargas na estrutura.

As matrizes \mathbf{K}_f e \mathbf{K}_g descrevem a estrutura como um todo, e para obtê-las é necessário um somatório das matrizes de rigidez físicas e geométricas de cada elemento da estrutura. Assim, no processo de construção da matriz de rigidez da estrutura, inicialmente obtêm-se os coeficientes de rigidez e de ações em nível de elemento, e por um processo de transformação de rotação de vetores e matrizes determina-se a correspondente matriz global da estrutura. Para isso, na formulação do Método da Rigidez Direta aqui empregada, aplica-se o Princípio das Forças Virtuais (PFV), que possibilita a obtenção das expressões exatas para cálculo dos

coeficientes do respectivo sistema de equações, em casos nos quais os elementos estruturais apresentem características físicas e geométrica quaisquer.

2.2 Matriz de rigidez física de elemento do pórtico plano (K_f)

Apresenta-se genericamente, nesta seção, a forma de obtenção da matriz de rigidez física (ou elástica) de elemento do pórtico plano. Neste processo é possível considerar a degradação da rigidez devido a não-linearidade física em situações quaisquer, inclusive em elementos em concreto armado, onde, devido à fissuração, não é possível determinar a rigidez pelo cálculo direto de características geométricas da seção. Para desenvolvimento da formulação, considera-se o elemento de pórtico plano mostrado na Figura 2.2.

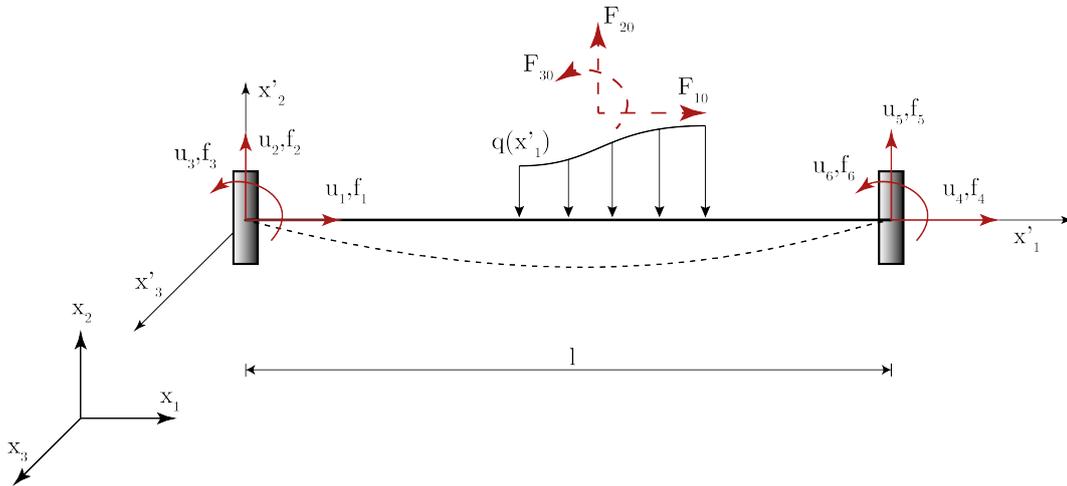


FIGURA 2.2: Elemento de pórtico plano

As equações de equilíbrio para esse elemento são dadas por

$$\begin{cases} \sum F_{x_1} = f_1 + f_4 + F_{10} = 0 \\ \sum F_{x_2} = f_2 + f_5 + F_{20} = 0 \\ \sum F_{x_3} = f_3 + f_6 - f_2 \cdot l + F_{30} = 0 \end{cases}, \quad (2.3)$$

sendo f_i as ações de extremidade de elemento ($i = 1, \dots, 6$), l é o comprimento do elemento, F_i são as resultantes devidas à ação externa $q(x'_1)$. Pode-se perceber que, do equilíbrio de

forças, resultam apenas três equações, mas há seis incógnitas a serem determinadas. Aplica-se então o Princípio das Forças Virtuais (PFV) para completar o sistema de equações, e estabelecem-se assim as seguintes equações de compatibilidade de deslocamento:

$$\bar{f}_i u_i = \int_l \bar{M}_i d\theta + \int_l \bar{N}_i d\delta + \int_l \bar{Q}_i d\lambda \quad , \quad (2.4)$$

em que u_i são os deslocamentos que se desejam calcular, $d\theta$, $d\delta$ e $d\lambda$ são respectivamente os deslocamentos flexional, axial e transversal relativos em uma seção do elemento, e \bar{M}_i , \bar{N}_i , e \bar{Q}_i são os correspondentes esforços internos (momento fletor, força normal e força cortante) devidos ao estado de carregamento virtual definido por $\bar{f}_i = 1$, ou seja,

$$\bar{M}_i = \bar{M}_i(f_i) \quad , \quad \bar{N}_i = \bar{N}_i(f_i) \quad , \quad \bar{Q}_i = \bar{Q}_i(f_i) \quad . \quad (2.5)$$

Note que para a obtenção das equações de compatibilidade, escreve-se a relação 2.4 para pontos e direções em que os deslocamentos sejam conhecidos (prescritos).

Quando o material se comporta segundo a lei de Hooke, linearmente, pode-se escrever,

$$d\theta = \psi ds = \frac{M}{EI} ds \quad (2.6)$$

$$d\delta = \varepsilon_o ds = \frac{N}{EA} ds \quad (2.7)$$

$$d\lambda = \frac{Q}{GA_s} ds \quad (2.8)$$

No entanto, objetiva-se, neste trabalho, considerar a não-linearidade do material, e como dito anteriormente, a fissuração que ocorre no concreto impossibilita a determinação de uma geometria bem definida ao longo do elemento. Sendo assim, não será possível calcular as rigidezes em uma certa seção do elemento em termos de suas características geométricas (A , A_s e I), e portanto escrevem-se as relações 2.6, 2.7 e 2.8 como

$$d\theta = \psi ds = \frac{M}{k_b} ds \quad , \quad (2.9)$$

$$d\delta = \varepsilon_o ds = \frac{N}{k_a} ds \quad , \quad (2.10)$$

$$d\lambda = \frac{Q}{k_s} ds \quad , \quad (2.11)$$

sendo k_b a rigidez flexional, k_a a rigidez axial e k_s a rigidez ao cisalhamento.

Utilizando as Equações 2.3, 2.4 e 2.5, e considerando os dois sistemas de análise mostrados nas Figuras 2.3 e 2.4, designados como sistemas I e II, obtêm-se os sistemas de equações algébricas que possibilitam a determinação dos coeficientes de rigidez e ações de engastamento nos casos mais gerais possíveis. Para se chegar porém a esses sistemas, expressam-se, inicialmente, as funções de esforços simples no elemento em termos das ações incógnitas, f_i , $i = 1, 2, 3$, e do carregamento externo (aqui genericamente representado por q), substituem-se essas expressões nas relações de deslocamentos dadas em 2.9, 2.10 e 2.11 e, finalmente, escrevem-se as equações de compatibilidade pertinentes a partir de 2.4. Para cada um dos sistemas de análise I e II, obtêm-se então as expressões explícitas desses sistemas de equações, mostradas a seguir.

Caso I: $u_4 = u_5 = u_6 = 0$ (engaste no segundo nó) Neste caso, os deslocamentos relativos

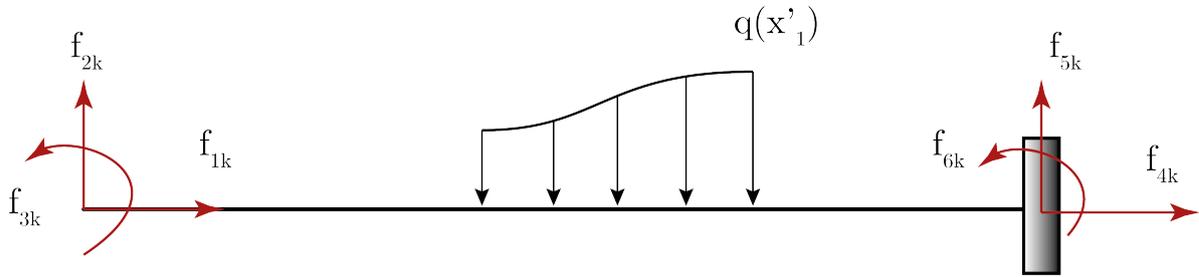


FIGURA 2.3: Elemento de pórtico plano com o segundo nó restringido

(Equações 2.9–2.11) em dada seção podem ser escritos na forma

$$d\theta = \sum_{j=1}^3 \frac{M_j}{k_b} ds + \frac{M_0^I}{k_b} ds \quad , \quad (2.12)$$

$$d\delta = \sum_{j=1}^3 \frac{N_j}{k_a} ds + \frac{N_0^I}{k_a} ds \quad , \quad (2.13)$$

$$d\lambda = \sum_{j=1}^3 \frac{Q_j}{k_s} ds + \frac{Q_0^I}{k_s} ds \quad , \quad (2.14)$$

que substituídas na Equação 2.4 fornecem

$$u_i = \sum_{j=1}^3 \left(\int_l \frac{\bar{M}_i M_j}{k_b} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N_j}{k_a} ds + \int_l \frac{\bar{Q}_i Q_j}{k_s} ds \right) + u_{i0} \quad , i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

onde $M_i = M(f_i)$, $N_i = N(f_i)$, $Q_i = Q(f_i)$ denotam as funções de esforços simples devidas às ações incógnitas, e u_{i0} é o deslocamento na direção do i -ésimo grau de liberdade em função

da carga de elemento, q , dado por

$$u_{i0} = \int_l \frac{\bar{M}_i M_0^{(I)}}{k_b} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N_0^{(I)}}{k_a} ds + \int_l \frac{\bar{Q}_i Q_0^{(I)}}{k_s} ds, i = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

com $M_0^{(I)} = M(q)$, $N_0^{(I)} = N(q)$, $Q_0^{(I)} = Q(q)$.

Denotando-se as ações incógnitas com 2 índices, por exemplo, na forma f_{ik} (vide Figuras 2.3 e 2.4), onde o segundo índice da variável exprime a causa que gera as ações (deslocamentos prescritos ou carga de elemento), a expressão integral na Equação 2.15 associada a um certo índice j pode ser escrita na forma

$$\int_l \frac{\bar{M}_i M_j}{k_b} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N_j}{k_a} ds + \int_l \frac{\bar{Q}_i Q_j}{k_s} ds = a_{ik} f_{ik} \quad , \quad (2.17)$$

em que a_{ik} é o coeficiente que resulta quando evidencia-se a ação f_{ik} . Assim, em forma matricial, expressa-se o conjunto de equações de compatibilidade por

$$\mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{Ik} = \mathbf{u}_{Ik} - \mathbf{u}_{I0} \quad , k = 1, 2, 3, \quad (2.18)$$

onde o subscrito I denota o caso I (com engaste no segundo nó). Explicitamente, a matriz \mathbf{A}_{II} é dada por

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{bmatrix} \int_l \frac{1}{k_a} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_l \frac{x_1^2}{k_b} + \frac{1}{k_s} dx_1 & \int_l -\frac{x_1}{k_a} dx_1 \\ 0 & \int_l -\frac{x_1}{k_b} dx_1 & \int_l \frac{1}{k_b} dx_1 \end{bmatrix} \quad , \quad (2.19)$$

onde seus coeficiente são obtidos da expressão 2.17. Escrevendo-se, por fim, as equações de equilíbrio 2.3 juntamente com as equações de compatibilidade 2.18, obtém o sistema de equações algébricas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{A}_{II} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ik} \\ \mathbf{f}_{Fk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{u}_{Ik} - \mathbf{u}_{I0} \end{bmatrix}, k = 1, 2, 3, \quad (2.20)$$

sendo,

$$\mathbf{E}_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{IF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{Ik} = \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{Fk} = \begin{bmatrix} f_{4k} \\ f_{5k} \\ f_{6k} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{Ik} = \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ u_{3k} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.21)$$

Ressalta-se que em 2.20 f_{Ik} e f_{Fk} contêm ou os coeficientes da matriz de rigidez (solução para deslocamentos unitários prescritos) ou as ações nodais equivalentes (solução para cargas de membro com deslocamentos nodais nulos).

Caso II: $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ (engaste no primeiro nó)

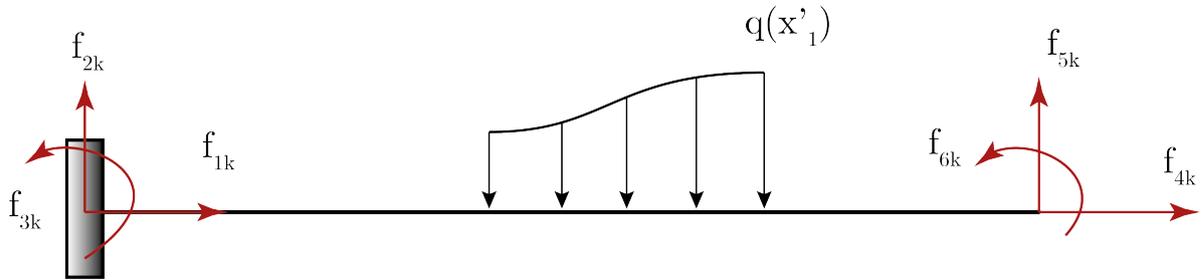


FIGURA 2.4: Elemento de pórtico plano com o primeiro nó restringido

Para o caso II, de forma análoga ao caso I, escreve-se

$$u_i = \sum_{j=1}^3 \left(\int_l \frac{\bar{M}_i M_j}{k_b} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N_j}{k_a} ds + \int_l \frac{\bar{Q}_i Q_j}{k_s} ds \right) + u_{i0} \quad , i = 4, 5, 6 \quad (2.22)$$

$$u_{F0} = \int_l \frac{\bar{M}_i M_0^{(F)}}{k_b} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N_0^{(F)}}{k_a} ds + \int_l \frac{\bar{Q}_i Q_0^{(F)}}{k_s} ds \quad , i = 4, 5, 6 \quad (2.23)$$

com $M_0^{(F)} = M(q)$, $N_0^{(F)} = N(q)$ e $Q_0^{(F)} = Q(q)$. Como no caso I, expressa-se o conjunto de equações de compatibilidade 2.22 em forma matricial por

$$\mathbf{A}_{FF} \mathbf{f}_{Fk} = \mathbf{u}_{Fk} - \mathbf{u}_{F0} \quad , \quad (2.24)$$

onde seus coeficiente são obtidos da expressão 2.22, após isolamento dos termos associados a uma certa ação f_{ik} , exatamente como feito no caso I. Do mesmo modo, obtém-se o sistema de equações algébricas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ 0 & \mathbf{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ik} \\ \mathbf{f}_{Fk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{u}_{Fk} - \mathbf{u}_{F0} \end{bmatrix} \quad , k = 4, 5, 6, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{f}_{Ik} = \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{Fk} = \begin{bmatrix} f_{4k} \\ f_{5k} \\ f_{6k} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{Fk} = \begin{bmatrix} u_{4k} \\ u_{5k} \\ u_{6k} \end{bmatrix} \quad , \quad (2.26)$$

com \mathbf{A}_{FF} dada por

$$\mathbf{A}_{FF} = \begin{bmatrix} \int_l \frac{1}{k_a} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_l \frac{(l-x_1)^2}{k_b} + \frac{1}{k_s} dx_1 & \int_l -\frac{(l-x_1)}{k_b} dx_1 \\ 0 & \int_l -\frac{(l-x_1)}{k_b} dx_1 & \int_l \frac{1}{k_b} dx_1 \end{bmatrix} . \quad (2.27)$$

Novamente, os termos f_{Ik} e f_{Fk} denotam ou os coeficientes da matriz de rigidez para deslocamentos unitários no nó final (segundo nó) ou as ações nodais equivalentes.

A avaliação das integrais que compõem as expressões das matrizes \mathbf{A}_{II} e \mathbf{A}_{FF} devem ser feitas por um esquema de integração numérica. Percebe-se que, considerando a não-linearidade física em elementos em concreto armado (CA), não existe rigidez constante ao longo do elemento, então mesmo para estruturas com seções geometricamente constantes ao longo do elemento faz-se necessário utilizar algum método de integração para cálculo dos coeficientes das matrizes em 2.19 e 2.27. No presente trabalho, emprega-se o processo de integração de Gauss-Legendre (Bathe, 1996) para cálculo numérico desses coeficientes.

Em resumo, para se obter os coeficientes da matriz de rigidez de elemento, considera-se $F_0 = 0$ (elemento livre de carga) nas Equações 2.20 e impõem-se os deslocamentos nodais prescritos $u_i = \delta_{ik}, k = 1, \dots, 6$. Obtém-se

$$\mathbf{f}_{Ik} = \mathbf{A}_{II}^{-1} \mathbf{u}_{Ik}, \quad \mathbf{f}_{Fk} = -\mathbf{E}_{II} \mathbf{f}_{Ik}; k = 1, 2, 3 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{f}_{Fk} = \mathbf{A}_{FF}^{-1} \mathbf{u}_{Fk}, \quad \mathbf{f}_{Ik} = -\mathbf{E}_{II}^{-1} \mathbf{f}_{Fk}; k = 4, 5, 6 \quad (2.29)$$

Logo, a matriz de rigidez física de elemento é dada por,

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ik} & \mathbf{f}_{Ik} \\ \mathbf{f}_{Fk} & \mathbf{f}_{Fk} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

com $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Para determinar as ações de engastamento através dos Sistemas 2.20 e 2.25, impõem-se as condições de contorno $\mathbf{u}_{Ik} = \mathbf{u}_{Fk} = 0$ e calculam-se \mathbf{f}_{Ik} e \mathbf{f}_{Fk} . Os deslocamentos devido às ações externas são calculados conforme as Equações 2.16 e 2.23 e os sistemas podem ser escritos como

$$\mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{Ik} = \mathbf{u}_{I0} \quad , \quad (2.31)$$

$$\mathbf{A}_{FF} \mathbf{f}_{Fk} = \mathbf{u}_{F0} \quad , \quad (2.32)$$

2.3 Matriz de rigidez geométrica de elemento do pórtico plano (K_g)

Neste trabalho, a matriz de rigidez geométrica será obtida pelo mesmo procedimento mostrado anteriormente, mais bem detalhado em Ribeiro (2016). Temos, portanto, os casos I e II discutidos abaixo.

Caso I: $u_4 = u_5 = u_6 = 0$ (engaste no segundo nó)

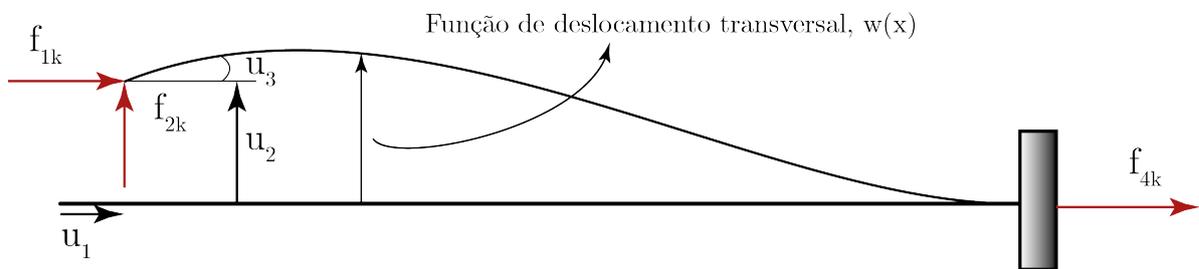


FIGURA 2.5: Elemento de pórtico plano deformado com o segundo nó restringido

Aqui, surge um momento fletor adicional, em decorrência da carga (f_{1k}), que pode ser expressado por,

$$M_1 = M(f_{1k}) = -f_{1k}[w(x_1) - u_2] \quad . \quad (2.33)$$

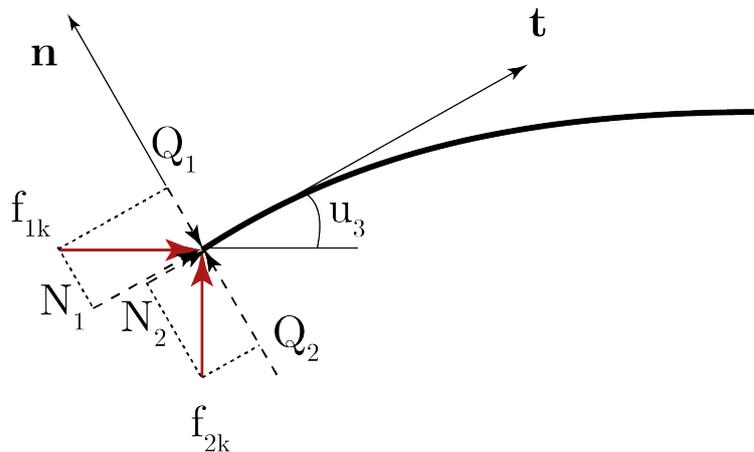


FIGURA 2.6: Decomposição das forças f_{1k} e f_{2k} no eixo deformado

Da Figura 2.6, em que se mostra a decomposição das forças f_{1k} e f_{2k} segundo as componentes tangencial e normal, obtêm-se as seguintes expressões dos esforços cortante, (Q_1), e normal (N_2). Tem-se

$$Q_1 = Q(f_{1k}) = -f_{1k}w'(x_1) \quad , \quad (2.34)$$

$$N_2 = N(f_{2k}) = f_{1k}u'(x_1) \quad , \quad (2.35)$$

sendo $u(x)$ a função que descreve os deslocamentos axiais.

Adicionando-se a contribuição destes esforços na Equação 2.17, podemos obter os novos termos da matriz \mathbf{A}_{II} , dados por,

$$a_{i1} = \int_l \frac{\overline{M}_i[w(x_1) - u_2]}{k_b} ds + \int_l \frac{\overline{Q}_i - [w'(x_1)]}{k_s} ds, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.36)$$

$$a_{i2} = \int_l \frac{\overline{N}_i N_2}{k_a} ds, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.37)$$

De acordo com as Equações 2.36 e 2.37, as expressões de a_{12} , a_{21} e a_{31} são,

$$a_{12} = \int_l \frac{u'}{k_a} dx_1 \quad (2.38)$$

$$a_{21} = \int_l \frac{x_1}{k_b} [w(x_1) - u_2] dx_1 + \int_l \frac{-1}{k_s} [w'(x_1)] dx_1 \quad (2.39)$$

$$a_{31} = \int_l \frac{w(x_1) - u_2}{k_b} dx_1 \quad (2.40)$$

Neste trabalho, aproximam-se os deslocamentos transversais e axiais, $w(x)$ e $u(x)$, por funções de interpolação cúbicas, de modo a satisfazer as seguintes condições de contorno relativas ao caso I:

$$w(0) = u_2, \quad w'(0) = u_3, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (2.41)$$

$$u(0) = u_1, \quad u(l) = 0 \quad (2.42)$$

A interpolação dos deslocamentos ao longo do elemento será dada então por,

$$w(x_1) = \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 \quad (2.43)$$

$$u(x_1) = \varphi_1 u_1 \quad (2.44)$$

sendo,

$$\varphi_1(x_1) = 1 - \frac{x_1}{l}, \quad \varphi_2(x_1) = 2\frac{x_1^3}{l^3} - 3\frac{x_1^2}{l^2}, \quad \varphi_3(x_1) = \frac{x_1^3}{l^2} - 2\frac{x_1^2}{l} + x_1, \quad (2.45)$$

e desse modo,

$$a_{12} = v_{11}u_1, \quad a_{21} = v_{22}u_2 + v_{23}u_3, \quad a_{31} = v_{32}u_2 + v_{33}u_3, \quad (2.46)$$

com

$$v_{11} = \int_l \frac{\varphi_1'(x_1)}{k_a} dx_1, \quad (2.47)$$

$$v_{22} = \int_l \frac{x_1}{k_b} [1 - \varphi_2(x_1)] dx_1 + \int_l \frac{-1}{k_s} [\varphi_2'(x_1)] dx_1, \quad (2.48)$$

$$v_{23} = \int_l \frac{x_1}{k_b} [1 - \varphi_3(x_1)] dx_1 + \int_l \frac{-1}{k_s} [\varphi_3'(x_1)] dx_1, \quad (2.49)$$

$$v_{32} = \int_l \frac{1}{k_b} [\varphi_2(x_1) - 1] dx_1, \quad (2.50)$$

$$v_{33} = \int_l \frac{\varphi_3(x_1)}{k_b} dx_1 \quad (2.51)$$

Finalmente, pode-se determinar o sistema de equações para cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez geométrica de pórtico, que será dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{A}_{II} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ik} \\ \mathbf{f}_{Fk} \end{bmatrix} = -f_{1i} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{v}_{II} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.52)$$

sendo,

$$\mathbf{v}_{II} = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} & v_{23} \\ 0 & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Note que os termos de A_{II} em 2.52 serão idênticos àqueles definidos na Equação 2.19.

Caso II: $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ (engaste no primeiro nó)

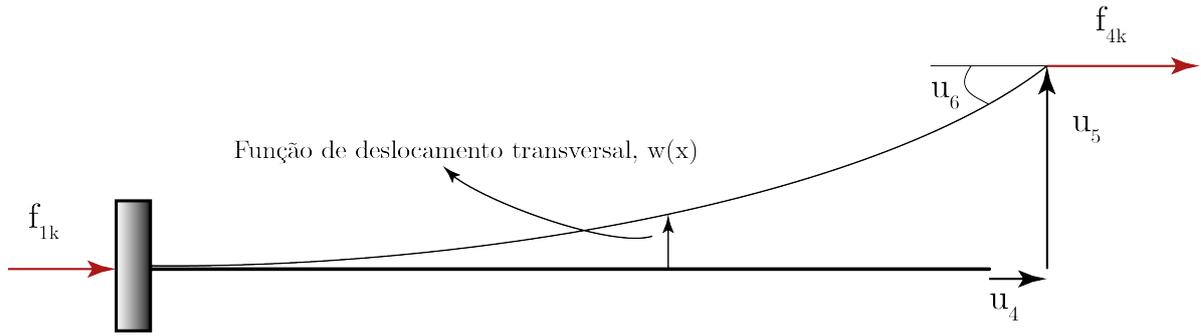


FIGURA 2.7: Elemento de pórtico plano deformado com o primeiro nó restringido

De forma análoga ao caso I, procede-se no caso II, a fim se de obter os coeficientes da matriz de rigidez geométrica (Figura 2.7).

Nota-se há um momento fletor adicional, em decorrência da carga (f_{4k}), e assim tem-se

$$M_4 = M(f_{4k}) = -f_{4k}[u_4 - w(x)] \quad (2.54)$$

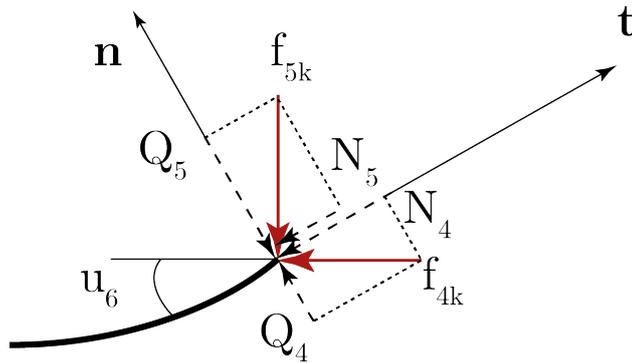


FIGURA 2.8: Decomposição das forças f_{4k} e f_{5k} no eixo deformado

Da Figura 2.8, pode-se ver a decomposição das forças f_{4k} e f_{5k} e suas componentes tangencial e normal ao eixo do elemento, e assim obtêm-se as expressões dos esforços cortante, (Q_4), e normal, (N_5), dados por

$$Q_4 = Q(f_{4k}) = f_{4k}w'(x), \quad N_5 = N(f_{5k}) = f_{5k}u'(x) \quad (2.55)$$

Adicionando a contribuição destes esforços na Equação 2.22, obtêm-se os novos termos da matriz \mathbf{A}_{FF} , dados por

$$a_{f4} = \int_l \frac{\overline{M}_f[w(x_1) - u_5]}{k_b} ds + \int_l \frac{\overline{Q}_f - [w'(x_1)]}{k_s} ds, \quad f = 4, 5, 6 \quad (2.56)$$

$$a_{f5} = \int_l \frac{\overline{N}_f N_5}{k_a} ds, \quad f = 4, 5, 6 \quad (2.57)$$

De acordo com as Equações 2.56 e 2.57, as expressões de a_{45} , a_{54} e a_{64} são,

$$a_{45} = \int_l \frac{u'}{k_a} dx_1 \quad (2.58)$$

$$a_{54} = \int_l \frac{(l-x_1)}{k_b} [w(x_1) - u_5] dx_1 + \int_l \frac{-1}{k_s} [w'(x_1)] dx_1 \quad (2.59)$$

$$a_{64} = \int_l \frac{w(x_1) - u_5}{k_b} dx_1 \quad (2.60)$$

Aproximam-se os deslocamentos transversais e axiais, $w(x)$ e $u(x)$ por funções de interpolação cúbicas, de modo a satisfazer as seguintes condições de contorno relativas ao Caso II:

$$w(l) = u_5, \quad w'(l) = u_6, \quad w(0) = w'(0) = 0 \quad (2.61)$$

$$u(l) = u_4, \quad u(0) = 0 \quad (2.62)$$

A interpolação dos deslocamentos é feita pelas funções

$$w(x_1) = \varphi_5 u_5 + \varphi_6 u_6 \quad (2.63)$$

$$u(x_1) = \varphi_4 u_4 \quad (2.64)$$

sendo,

$$\varphi_4(x_1) = 1 - \frac{x_1}{l}, \quad \varphi_5(x_1) = -2\frac{x_1^3}{l^3} + 3\frac{x_1^2}{l^2}, \quad \varphi_6(x_1) = \frac{x_1^3}{l^2} - \frac{x_1^2}{l} \quad (2.65)$$

Assim, vê-se que os coeficientes da matriz A_{FF} são dados por

$$a_{45} = v_{44}u_4, \quad a_{54} = v_{55}u_5 + v_{56}u_6, \quad a_{64} = v_{65}u_5 + v_{66}u_6 \quad (2.66)$$

sendo,

$$v_{44} = \int_l \frac{\varphi_4'(x_1)}{k_a} dx_1 \quad (2.67)$$

$$v_{55} = \int_l \frac{(l-x_1)}{k_b} [\varphi_5(x_1) - 1] dx_1 - \int_l \frac{1}{k_s} [\varphi_5'(x_1)] dx_1 \quad (2.68)$$

$$v_{56} = \int_l \frac{(l-x_1)}{k_b} \varphi_6(x_1) dx_1 - \int_l \frac{-1}{k_s} [\varphi_6'(x_1)] dx_1 \quad (2.69)$$

$$v_{65} = \int_l \frac{1}{k_b} [\varphi_5(x_1) - 1] dx_1 \quad (2.70)$$

$$v_{66} = \int_l \frac{\varphi_6(x_1)}{k_b} dx_1 \quad (2.71)$$

Finalmente, chega-se ao sistema de equações abaixo para cálculo dos coeficientes da matriz rigidez geométrica no caso II,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ 0 & \mathbf{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ik} \\ \mathbf{f}_{Fk} \end{bmatrix} = -f_{4k} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{v}_{FF} \end{bmatrix}, \quad k = 4, 5, 6 \quad (2.72)$$

sendo,

$$\mathbf{v}_{FF} = \begin{bmatrix} v_{44} & 0 & 0 \\ 0 & v_{55} & v_{56} \\ 0 & v_{65} & v_{66} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Os demais termos em 2.72 serão idênticos àqueles definidos na Equação 2.25

A matriz de rigidez geométrica de elemento, \mathbf{K}_g , compõe-se, portanto, dos termos \mathbf{f}_{Ik} e \mathbf{f}_{Fk} , $k = 1, 2, \dots, 6$, calculados a partir de 2.52 e 2.72 e organizados em forma matricial conforme se indica na Equação 2.30.

2.4 Variação de rigidez em elementos de concreto armado

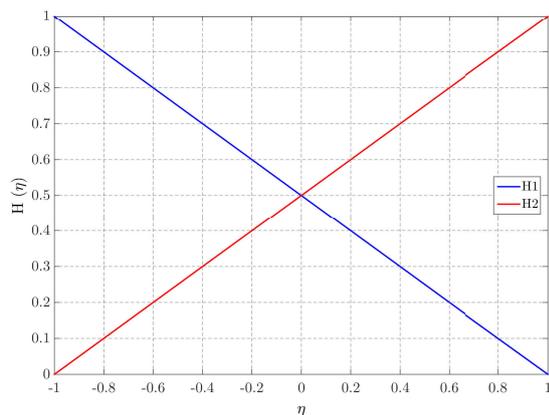
Em elementos de concreto armado a variação de rigidez ao longo do comprimento do elemento se dá tanto pela variação das características geométricas propriamente como pelo nível de solicitação em cada seção. Vê-se, porém, que a formulação do Método da Rigidez Direta (MRD), descrita acima, é muito conveniente para modelar essa variação de rigidez. A fim de calcular os coeficientes de \mathbf{A}_{II} , \mathbf{A}_{FF} , \mathbf{v}_{II} e \mathbf{v}_{FF} faz-se necessário utilizar um método de integração numérica. Neste trabalho emprega-se o processo de integração de Gauss-Legendre, segundo o qual o domínio é mapeado em um intervalo de -1 a 1. Destaca-se que para integrar

um polinômio de grau n são necessários $2n - 1$ pontos. Portanto, para uma função linear de 1º grau é necessário apenas um ponto para integração exata. Assim, definem-se posições dentro do intervalo, -1 a 1 , em que se avalia a função a ser integrada. Os coeficientes a_{ij} e v_{ij} (Ribeiro, 2016) são então obtidos pelas expressões

$$a_{ij} = \int_l g_{ij} dx_1 = \int_{-1}^1 g_{ij} [x(\eta)] |J(\eta)| d\eta = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{npg} g_{ij} [x(\eta_k)] \omega_k \quad , \quad (2.74)$$

$$v_{ij} = \int_l h_{ij} dx_1 = \int_{-1}^1 h_{ij} [x(\eta)] |J(\eta)| d\eta = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{npg} h_{ij} [x(\eta_k)] \omega_k \quad , \quad (2.75)$$

em que as funções g_{ij} e h_{ij} são relacionadas a a_{ij} e v_{ij} , $|J(\eta)|$ é o jacobiano de transformação, e η_k e ω_k denotam as posição e respectivos pesos do processo de Gauss-Legendre. Para aproximação dos integrandos em 2.74 e 2.75, dados nas relações 2.19 e 2.27 (expressões para g_{ij}), e nas relações de 2.47 a 2.51 e de 2.67 a 2.71 (expressões para h_{ij}), empregam-se as funções de interpolação mostradas na Figura 2.9.



(a) Função de interpolação de primeiro grau

$$H_1 = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

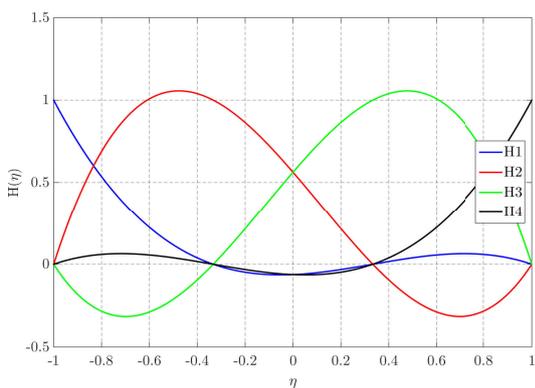


(b) Função de interpolação de segundo grau

$$H_1 = \frac{1}{2}(1 + \eta)\eta$$

$$H_2 = 1 - (\eta^2)$$

$$H_3 = \frac{1}{2}(\eta - 1)\eta$$



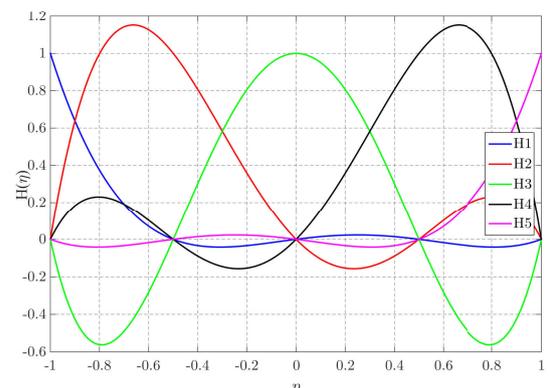
(c) Função de interpolação de terceiro grau

$$H_1 = \frac{9}{16}(1 - \eta)(\eta^2 - \frac{1}{9})$$

$$H_2 = \frac{29}{16}(\frac{1}{3} - \eta)(1 - \eta^2)$$

$$H_3 = \frac{29}{16}(\frac{1}{3} + \eta)(1 - \eta^2)$$

$$H_4 = \frac{9}{16}(1 + \eta)(\eta^2 - \frac{1}{9})$$



(d) Função de interpolação de quarto grau

$$H_1 = -\frac{4}{6}\eta(1 - \eta)(\eta^2 - \frac{1}{4})$$

$$H_2 = \frac{4}{3}\eta(1 - 2\eta)(\eta^2 - 1)$$

$$H_3 = 4(1 - \eta^2)(\frac{1}{4} - \eta^2)$$

$$H_4 = -\frac{4}{3}\eta(1 + \eta)(\eta^2 - 1)$$

$$H_5 = \frac{4}{6}\eta(1 + \eta)(\eta^2 - \frac{1}{4})$$

FIGURA 2.9: Funções de interpolação

Capítulo 3

Análise não-linear física de estruturas em Concreto Armado

A não-linearidade física manifesta-se devido ao comportamento não-linear dos materiais. Especificamente, no concreto armado (CA), há mais complexidade devido ao comportamento não-linear de ambos materiais, aço e concreto, e a interação entre eles. O concreto simples pode ser considerado linear até $0,5f_{ck}$, no trecho relativo à compressão (Carvalho, Filho e Rodrigues, 2013) vide Figura 3.1 . Quanto à tração, o concreto também apresenta comportamento não-linear, resultado da fissuração que ocorre nas fibras tracionadas quando a tensão atuante supera o valor de f_{ct} (Figura 3.1). Ressalta-se, que o concreto já se encontra inicialmente fissurado devido ao processo de cura e retração e durante o carregamento acontece a propagação dessas fissuras

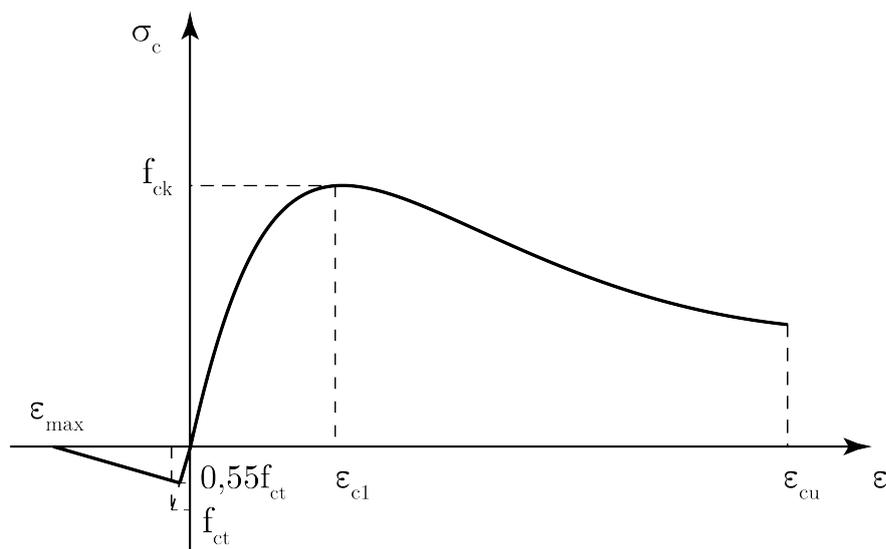


FIGURA 3.1: Curva Tensão-deformação para o concreto. Fonte: Adaptado de Desayi e Krishnan (1964)

É importante também mencionar o efeito da fluência no concreto, como sendo uma das causas da não-linearidade em estruturas de CA. A fluência é o aumento da deformação nas

seções a um carregamento constante, no entanto este efeito não será considerado no presente trabalho.

Nota-se o comportamento não-linear advindo do aço em seu diagrama tensão–deformação (vide Figura 3.2), obtido em um ensaio de tração. Verifica-se um comportamento linear no trecho na fase elástica, e após este trecho, o regime torna-se plástico, tendo comportamento não-linear.

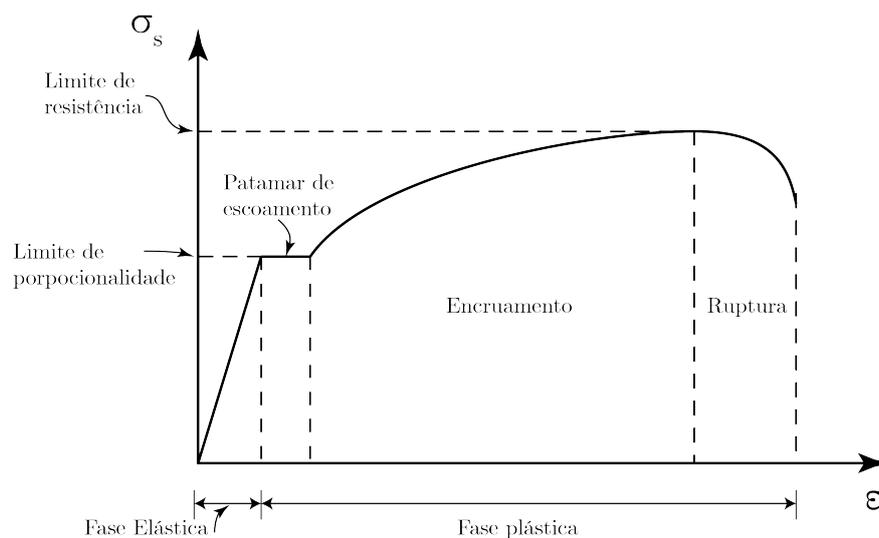


FIGURA 3.2: Aços estruturais laminados a quente.

3.1 Comportamento do Concreto Armado à Flexão

Sob flexão, um elemento em concreto armado apresenta o comportamento mostrado na Figura 3.3, em que σ_c é a função de tensão no concreto, $F_s = \sigma_s A_s$ é a resultante de tração na armadura, $F'_s = \sigma'_s A'_s$ é a resultante de compressão, e y_n é a posição da linha neutra relativa ao respectivo estádio, medida a partir da borda mais comprimida. Nota-se que a região abaixo da linha neutra (l.n.) está tracionada, ocorrendo fissuras quando o momento solicitante ultrapassa o chamado momento de fissuração, M_r , que separa o estádio I do estádio II.

A curvatura em uma seção pode ser calculada como,

$$\psi = \frac{M}{k_b} \quad (3.1)$$

ou observando a Figura 3.3,

$$\psi = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{cu}}{d} \quad (3.2)$$

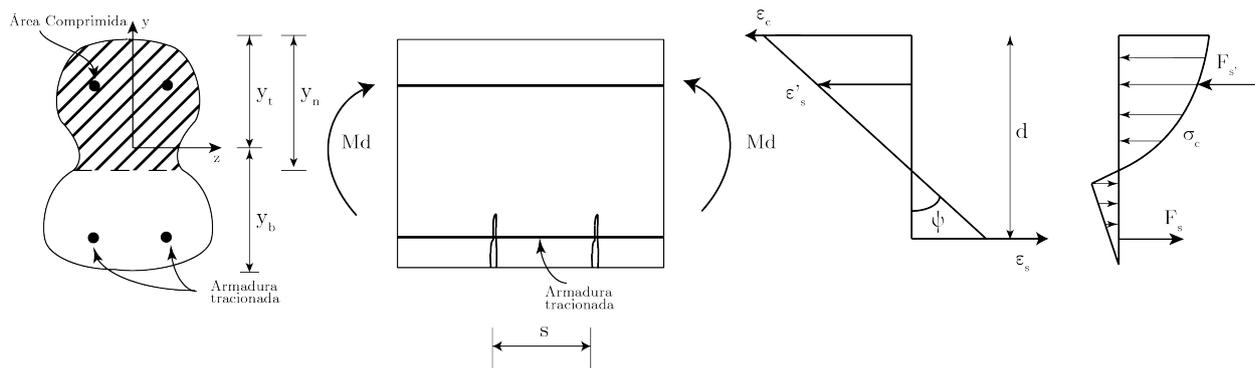


FIGURA 3.3: Elemento de CA fletido.

sendo ψ a curvatura, k_b a rigidez flexional, ε_s a deformação no aço e ε_{cu} a deformação na fibra mais comprimida do concreto.

Atesta-se, também, o comportamento não-linear do concreto armado pelas curvas momento curvatura das seções transversais (vide Figura 3.4). É possível observar o desenvolvimento das fissurações e a plastificação dos materiais.

No **estádio I** a deformação do concreto e do aço são iguais (Ghali, Favre e Elbadry, 2002) e ambos os materiais trabalham no regime elástico, logo o diagrama tensão–deformação é linear, não há fissuras visíveis e não se excede a tensão de tração máxima do concreto. Quando a tensão de tração é porém ultrapassada, ocorrem fissuras, assume-se que só o aço resista às tensões de tração, pois a zona tracionada estaria totalmente fissurada. Além disso, as fissuras tornam-se visíveis e o momento fletor está entre M_r e M_p , caracterizando o **estádio II**.

No **estádio III**, o momento fletor está acima de M_p , próximo ao momento último, M_u . Nesta configuração, as fissuras se aproximam da linha neutra fazendo com que sua profundidade diminua e, conseqüentemente, a correspondente área comprimida de concreto Carvalho, Filho e Rodrigues, 2013. O **estádio III** representa o estado limite último, que indica o esgotamento da resistência da seção.

3.2 Comportamento do Concreto Armado à Tração

Um elemento em concreto armado submetido a esforço de tração vai estar livre de fissuras quando o esforço solicitante N for menor que N_r , sendo N_r o valor de esforço normal que produz a primeira fissura em dada seção. Antes do processo de fissuração começar a ocorrer, a seção se encontra no estágio I. Imediatamente após atingir o esforço N_r , a seção encontra-se no estágio II e ocorrem as primeiras fissuras. No estágio II puro, a tensão de tração no

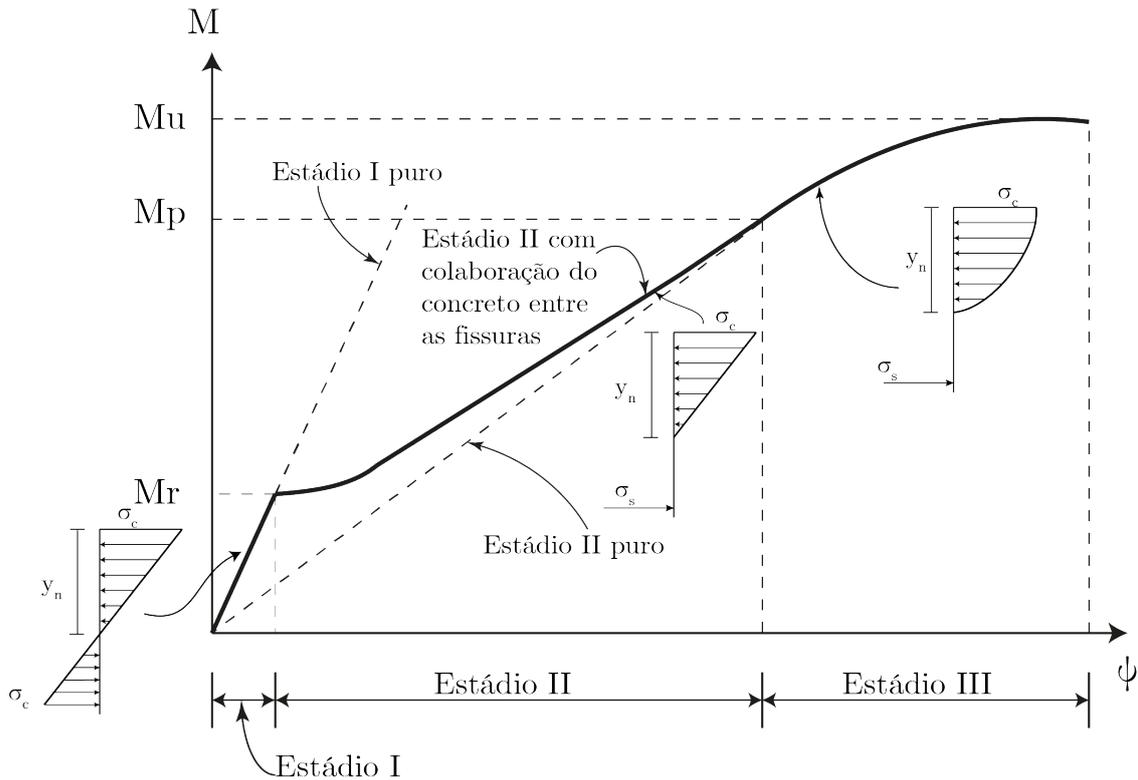


FIGURA 3.4: Diagrama momento curvatura da seção solicitada a flexão simples.

concreto vai a zero e o aço resiste ao esforço de tração completamente nesta seção, provocando um aumento na deformação do aço, abrindo a fissura. (Ghali, Favre e Elbadry, 2002)

Longe das fissuras, a aderência entre concreto e aço faz com que o concreto resista à parte da solicitação de tração. A Figura 3.5 mostra a variação do esforço de tração no aço, no concreto, e a aderência ao longo de um elemento em concreto armado sujeito a esforço normal solicitante N , $N > N_r$. (Ghali, Favre e Elbadry, 2002)

Ao longo dos anos, vários modelos analíticos foram propostos para descrever a rigidez em elementos em CA, usualmente considerando uma rigidez média Ghali, Favre e Elbadry (2002), Branson (1965) e Khuntia (2004)

3.3 Modelo de Branson(1965)

Branson propôs uma formulação semiempírica para quantificar o momento de inércia efetivo em uma seção de concreto armado. Segundo Branson, cada seção em concreto armado apresenta um valor de rigidez médio dependendo do volume de fissuras. Portanto, os valores de rigidez a flexão se modificam ao longo do elemento, de modo que haverá um valor de inércia diferente em cada seção do elemento. Como exemplo, indica-se na viga mostrado na Figura 3.6, o aspecto geral da distribuição de fissuras ao longo de um elemento em CA

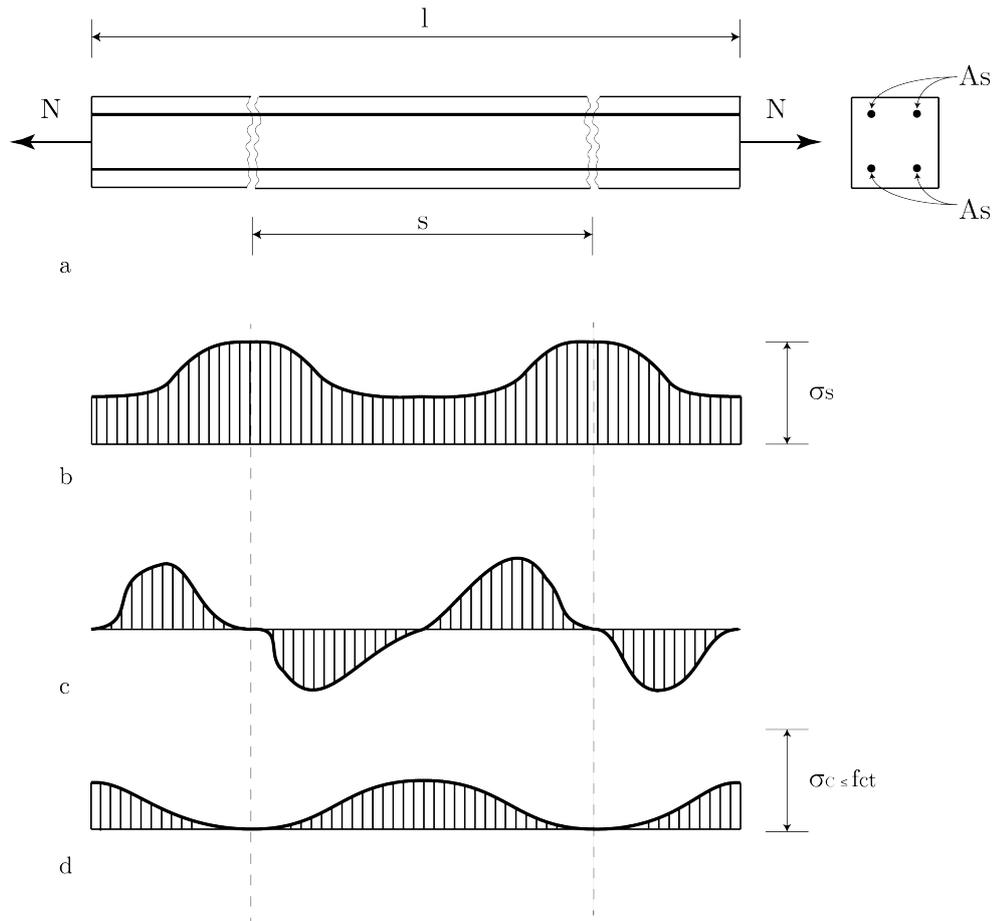


FIGURA 3.5: Comportamento do CA à tração. a- Fissuras em um elemento solicitado à tração, b- tensão na barra de aço, c- aderência e d- tensão no concreto. Fonte: Adaptado de Ghali, Favre e Elbadry (2002)

sob flexão. Infere-se que a região central possui uma inércia menor por apresentar maior nível de fissuração, enquanto a região nas proximidades dos apoios encontra-se mais íntegra, portanto tem um valor de inércia maior. A formulação de Branson considera um momento de inércia efetivo, que é a média dos momentos de inércia da seção nos estádios I e II puro, como se mostra na Equação 3.3

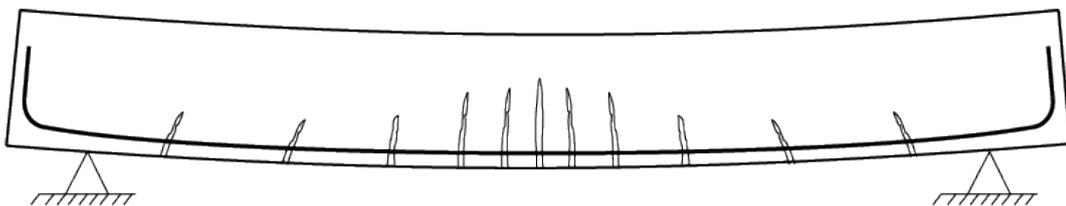


FIGURA 3.6: Distribuição de fissuras na viga. Fonte: Adaptado de Guarda (2005).

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m \cdot I_i + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m\right] \cdot I_{ii} \quad , \quad (3.3)$$

onde M_r é o momento de fissuração, M_a é o momento atuante na seção transversal ou o momento máximo positivo atuante em todo o vão, I_i é o momento de inércia da seção homogeneizada no estágio I, I_{ii} é momento de inércia da seção homogeneizada no estágio II, e m é um índice de valor igual a 4, para situações em que a análise é feita em apenas uma seção da peça, ou igual a 3, quando feita ao longo de todo seu comprimento.

3.4 Modelo de Ghali e Favre (1986)

Já segundo o modelo de Ghali, Favre e Elbadry (2002), a estratégia para avaliar a rigidez em uma seção de concreto armado baseava-se na curvatura média, definida como a média das curvaturas da seção nos estádios I e II puro, como se mostra na Equação 3.10. Abaixo, demonstram-se as expressões matemáticas básicas de modelo de Ghali-Favre.

3.4.1 Tração Axial

Em um elemento sob tração, na região entre as duas fissuras a tensão no concreto é menor do que f_{ct} (resistência do concreto à tração) e a tensão no aço é menor que σ_{s2} (tensão no aço no estágio II). Já nas seções fissuradas (no estágio II puro), a tensão no concreto se anula e a tensão de tração é completamente resistida pelo aço, ou seja, $\sigma_s = \sigma_{s2}$. Vê-se assim que a deformação no aço varia ao longo do elemento, e seu valor médio poderá ser calculado por,

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\Delta l}{l} \quad , \quad (3.4)$$

sendo l o comprimento original, Δl o alongamento do elemento e ε_{sm} é a deformação média no elemento. Sabendo-se que $\varepsilon_{sm} < \varepsilon_{s2}$, onde ε_{s2} é a deformação no aço na seção fissurada, tem-se que

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \Delta\varepsilon_s \quad , \quad (3.5)$$

onde $\Delta\varepsilon_s$ é uma redução na deformação do aço devido a colaboração do concreto. O maior valor dessa colaboração, $\Delta\varepsilon_{smáx}$, ocorre imediatamente antes da formação da primeira fissura, onde $N = N_r$. Na verdade, $\Delta\varepsilon_s$ tem uma variação hiperbólica, como mostra a Figura 3.7 e pode ser dado por

$$\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_{smáx} \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad , \quad (3.6)$$

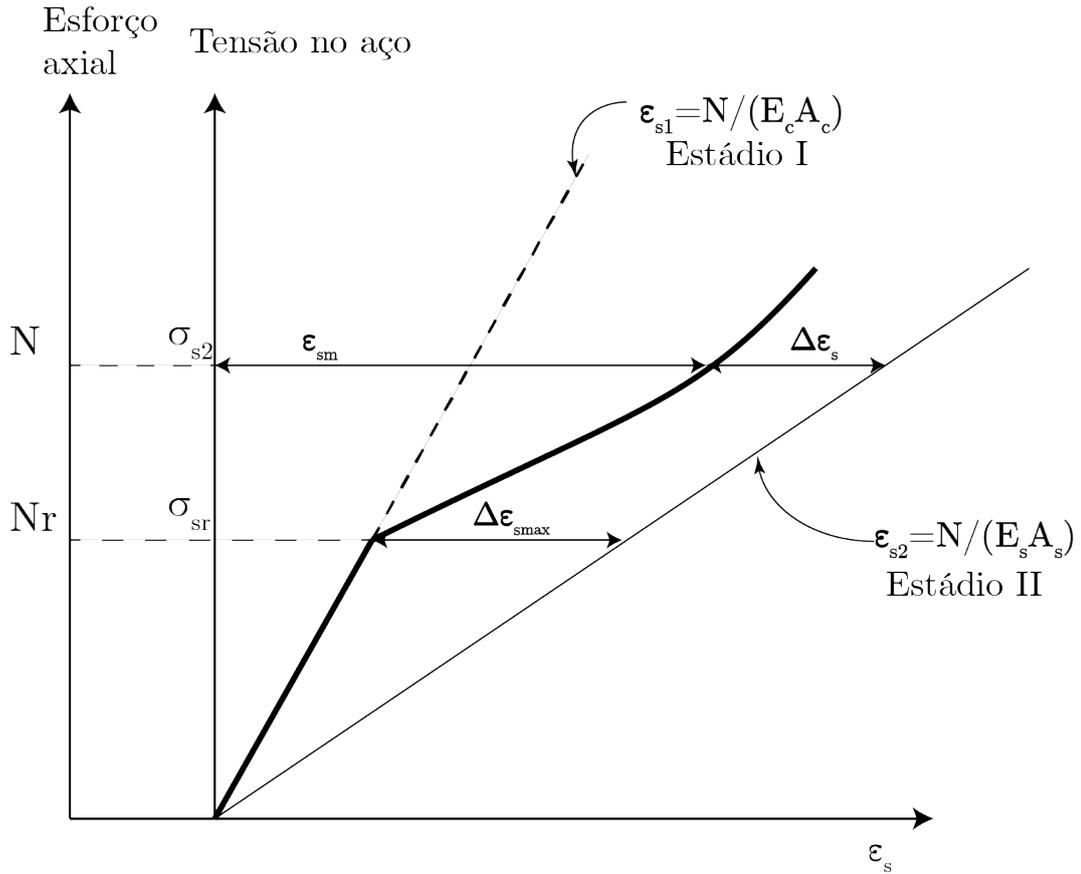


FIGURA 3.7: Força axial versus deformação no aço. Fonte: Adaptado de Ghali, Favre e Elbadry (2002)

onde o valor de $\Delta\epsilon_{sm\acute{a}x}$ pode ser calculado por

$$\Delta\epsilon_{sm\acute{a}x} = (\epsilon_{s2} - \epsilon_{s1}) \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad . \quad (3.7)$$

Substituindo as Equações 3.6 e 3.7 em 3.5, pode-se interpolar, em certa seção do elemento em CA, a deformação média no aço pela expressão

$$\epsilon_{sm} = (1 - \zeta)\epsilon_{s1} + \zeta\epsilon_{s2} \quad , \quad (3.8)$$

onde ζ é um coeficiente adimensional entre 0 e 1 (parâmetro de interpolação), com $\zeta = 0$ para $N < N_r$, e $0 < \zeta < 1$ para $N \geq N_r$, ζ dado por

$$\zeta = 1 - \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 \quad \text{com } \sigma_{sr} > \sigma_{s2} \quad . \quad (3.9)$$

3.4.2 Flexão Simples

Ghali e Favre assumiram que a fissuração, em um elemento em concreto armado sob flexão, teria um efeito similar, na curvatura, ao efeito da sollicitação de tração na deformação axial discutida anteriormente. Assim, eles exprimiram a curvatura média de forma análoga à Equação 3.8, ou seja, estabeleceram que

$$(\psi)_m = (1 - \zeta) \cdot (\psi)_I + \zeta \cdot (\psi)_{II} \quad , \quad (3.10)$$

sendo ζ um coeficiente de interpolação entre os estádios I e II, $(\psi)_I$ a curvatura da seção no estádio I e $(\psi)_{II}$ é a curvatura da seção no estádio II, expressadas pelas equações,

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M} \right)^2 \quad , \quad (3.11)$$

$$(\psi)_I = \frac{M}{E_c I_1} \quad , \quad (3.12)$$

$$(\psi)_{II} = \frac{M}{E_c I_2} \quad , \quad (3.13)$$

sendo M_r o momento de fissuração, $\beta_1 = 1$ para barras nervuradas, $\beta_1 = 0,5$ para barras lisas, $\beta_2 = 1$ para o primeiro carregamento ou para cargas pouco representativas e $\beta_2 = 0,5$ para cargas permanentes ou cíclicas. I_1 e I_2 são os momento de inércia da seção nos estádio I e II puro, respectivamente. A estratégia de cálculo implementada para cálculo das propriedades geométricas nos estádios I, II e III é descrita no Apêndice A

3.4.3 Flexão Composta

Para uma seção sob flexão composta (Figura 3.8), especificamente sob flexo-tração e flexo-compressão com excentricidade fora do núcleo central, Ghali e Favre também propuseram uma interessante forma de calculo da deformação axial e da curvatura média. A excentricidade da força normal é calculada por

$$e = \frac{M}{N} \quad (3.14)$$

e os valores da força normal de fissuração e do correspondente momento fletor são dados

$$N_r = f_{ct} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{e}{W_{bot1}} \right)^{-1} \quad (3.15)$$

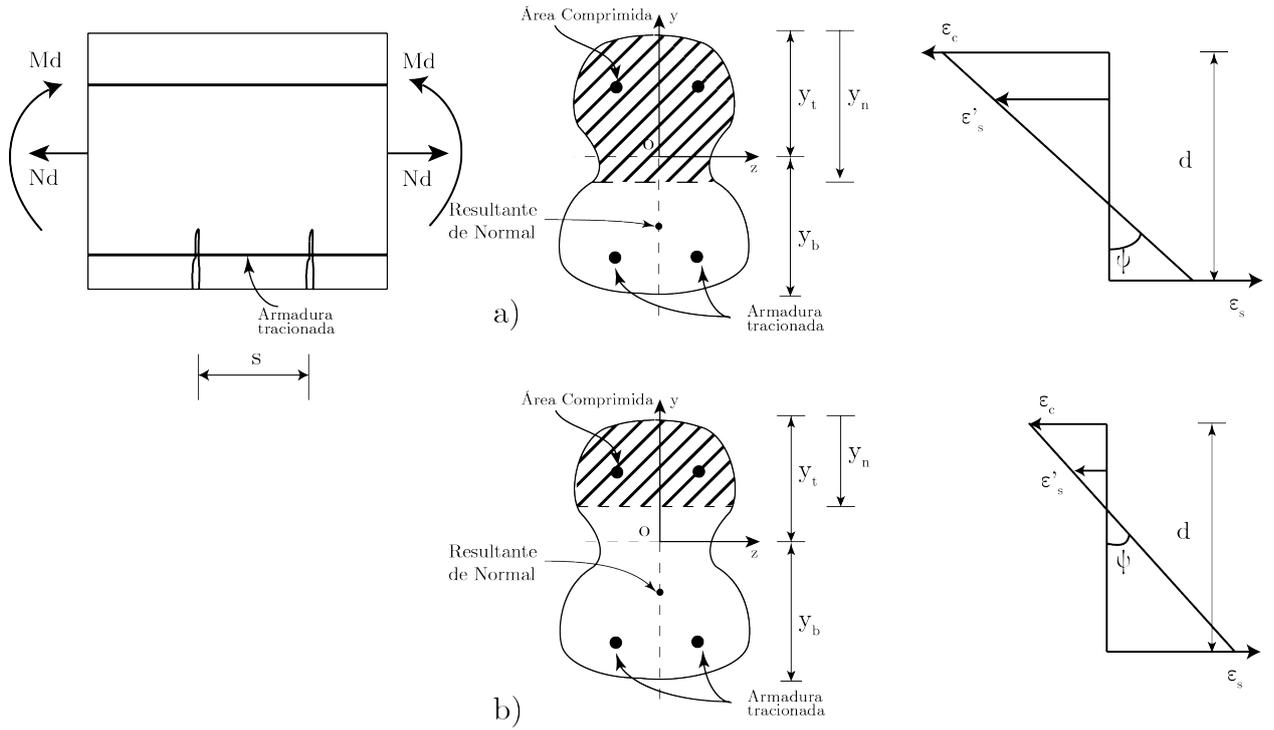


FIGURA 3.8: Elemento de CA sujeito à flexão composta (a) seção no estágio I (b) seção no estágio II. Fonte: Adaptado de Ghali, Favre e Elbadry (2002)

$$M_r = eN_r \tag{3.16}$$

sendo A_1 e W_{bot1} a área da seção e módulo resistente no estágio I. Ressalta-se que a equação 3.15 não se aplica quando a seção encontra-se totalmente sob compressão, ou seja quando o esforço normal resultante está dentro do núcleo central do elemento. De forma análoga, às subseções anteriores, aplicam-se as equações de interpolação abaixo:

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta)\varepsilon_{s1} + \zeta\varepsilon_{s2} \tag{3.17}$$

$$(\psi)_m = (1 - \zeta) \cdot (\psi)_I + \zeta \cdot (\psi)_{II} \tag{3.18}$$

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{N_r}{N}\right)^2 \tag{3.19}$$

ou,

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{M_r}{M}\right)^2 \tag{3.20}$$

Como percebe-se da discussão acima, há mudança na posição da linha neutra de acordo com o nível de carregamento, ou seja, há uma variação de rigidez ao longo do elemento e

em função do nível de solicitação. Portanto para a análise de pórticos em concreto armado, faz-se necessário considerar a não-linearidade física (NLF), que se implementa via processo incremental-iterativo. No processo que se considera neste trabalho, a matriz de rigidez física (levando em conta os efeitos de não-linearidade física) será atualizada ao final do equilíbrio de cada incremento de carga.

3.4.4 Cálculo da rigidez de seções em concreto armado - Ghali e Favre

Um dos modelos adotados neste trabalho para a consideração de NLF em elementos de concreto armado foi o modelo de Ghali e Favre, implementado conforme descreve-se genericamente no algoritmo abaixo:

- Calculam-se as propriedades geométricas no estágio I, a saber, área da seção transformada não fissurada, A_1 , momento de inércia, I_1 , módulo de resistência elástica, W_1 , para todas as seções transversais que encontrem nos pontos de integração numérica ao longos dos elementos. Essas seções são definidas por uma malha de contorno conforme se mostra no Apêndice A. Também determinam-se o momento fletor de fissuração, M_r , e o correspondente normal, N_r
- Calculam-se as propriedades geométricas no estágio II, a saber, área da seção transformada fissurada, sem consideração do concreto tracionado, A_2 , momento de inércia, I_2 , e módulo de resistência elástica, W_2 para todas as seções transversais nos pontos de integração do elemento. Também determinam-se o momento de escoamento, M_p e o normal de escoamento das armaduras, N_p
- Para o estágio III calcula-se o momento último da seção com um processo descrito no apêndice B. O estágio III foi considerado como uma reta, portanto sendo o momento solicitante $M_p < M < M_u$, a curvatura média foi interpolada linearmente

Da análise não-linear, têm-se os esforços no início e final de cada elemento que compõe a estrutura, $N_d^{i,f}$ e $M_d^{i,f}$, e nestes elementos são definidos pontos de integração (Figura 3.9), necessários para o cálculo dos coeficientes de rigidez descritos no capítulo 2. Dessa forma é necessário interpolar os esforços, em cada ponto de integração, utilizando interpolação linear (vide Figura 2.9). Obtém-se

$$N_d^k = N_d^i H_1(\eta) + N_d^f H_2(\eta) \quad , \quad (3.21)$$

$$M_d^k = M_d^i H_1(\eta) + M_d^f H_2(\eta) \quad , \quad (3.22)$$

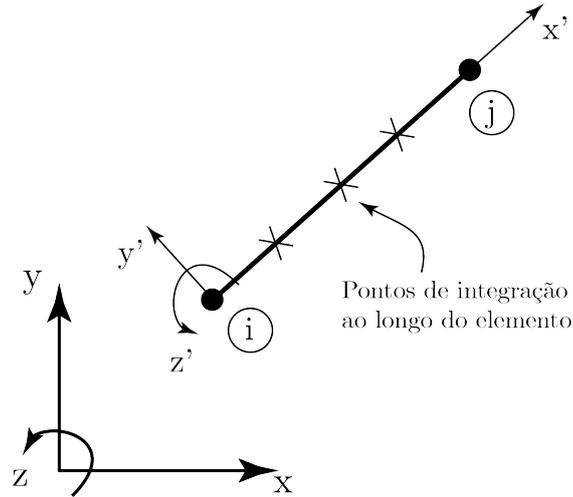


FIGURA 3.9: Elemento estrutural e pontos de integração ao longo de seu eixo.

sendo N_d^k e M_d^k os esforços solicitantes normal e momento fletor nos pontos de integração do elemento, k , com $k = 1, 2 \dots npg$. $H(\eta)$ são as funções de interpolação lineares adotadas.

Então para certos esforços N_d^k e M_d^k , define-se qual tipo de sollicitação se trata (se flexão simples, flexão composta ou normal pura), e baseado-se na curvatura média da seção e na deformação axial, pode-se determinar os valores de rigidez médios, k_{bm} e k_{am} , necessários para calcular a matriz de rigidez do elemento de pórtico em concreto armado, de acordo com os casos abaixo:

- Se $N_d^k < tol$ e $M_d^k > tol \rightarrow$ Flexão simples

Neste caso, utilizam-se as expressões 3.10 e 3.11 para calcular ψ_m . Tem-se

$$k_{am} = EA_1 \tag{3.23}$$

$$k_{bm} = \frac{M_d^k}{\psi_m} \tag{3.24}$$

- Se $N_d^k > tol$ e $M_d^k < tol \rightarrow$ Normal puro

Utilizam-se as expressões 3.8 e 3.9 para encontrar ε_{sm}

$$k_{am} = \frac{N_d^k}{\varepsilon_{sm}} \tag{3.25}$$

$$k_{bm} = EI_1 \tag{3.26}$$

- Se $N_d^k > tol$ e $M_d^k > tol \rightarrow$ Flexão composta

Utilizam-se as expressões 3.15 e 3.16 para encontrar ε_{sm} e ψ_m

$$k_a m = \frac{N_d^k}{\varepsilon_{sm}} \quad (3.27)$$

$$k_b m = \frac{M_d^k}{\psi_m} \quad (3.28)$$

Os valores de rigidez flexional, k_{bm} e de rigidez axial k_{am} , obtidos são incluídos nos coeficientes da matriz de rigidez do elemento.

3.5 Equilíbrio Direto da Seção

Visto que o método de Ghali, Favre e Elbadry (2002) não abrange a não-linearidade física em elementos estruturais sob compressão centrada ou sob flexão-compressão com a resultante de normal dentro do núcleo central do elemento, uma estratégia geral de degradação da rigidez baseada no equilíbrio direto de esforços na seção foi desenvolvida. Designa-se então esta estratégia por estratégia de equilíbrio direto, e nela a rigidez flexional, k_b , e a axial, k_a , são calculadas a partir das deformações necessárias, nessa seção, para gerar os esforços resistentes que equilibrem os solicitantes. Escrevem-se então as seguintes equações de equilíbrio:

$$|M_r| - |M_d| = 0 \quad , \quad (3.29)$$

$$|N_r| - |N_d| = 0 \quad , \quad (3.30)$$

sendo M_d e N_d os esforços solicitantes, e M_r e N_r os correspondentes esforços resistentes, obtidos pela deformação da seção de modo que os valores de M_d e N_d se igualem aos valores de M_r e N_r .

Na Figura 3.10 define-se o eixo do elemento, formado por um segmento de reta entre os pontos O^i e O^f , onde o ponto O estabelece a posição do eixo na seção. Este ponto O pode ser um ponto qualquer na seção, no entanto, no algoritmo proposto aqui, estabeleceu-se sua posição como sendo o centroide da área equivalente não fissurada de aço e concreto. Note-se que os esforços solicitantes nos elementos estruturais são calculados no ponto O de cada seção.

Assim, os esforços solicitantes N_d^k e M_d^k (medidos no ponto O^k de cada seção) serão equilibrados por uma deformação axial e uma curvatura, ε_o e ψ , calculadas também em relação

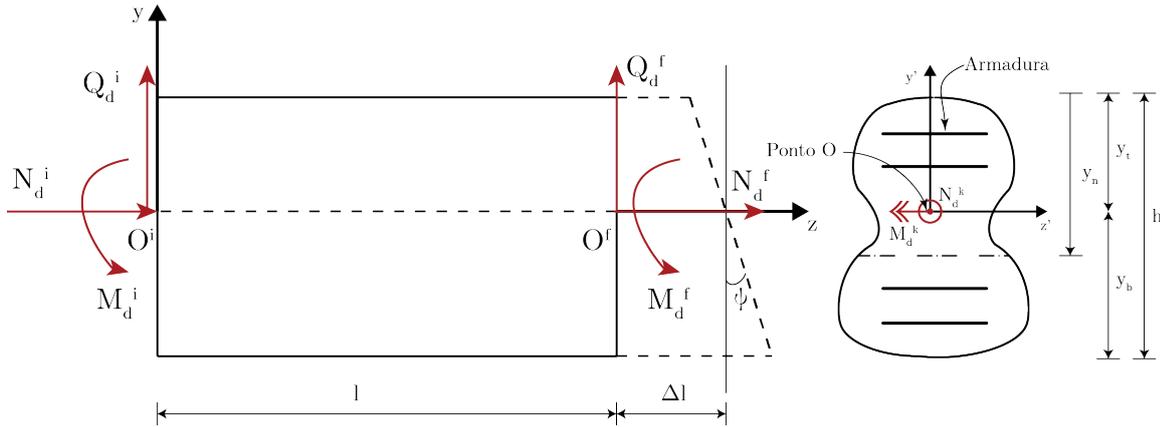


FIGURA 3.10: Elemento estrutural e seção solicitada

ao ponto O^k . Obtêm-se:

$$\varepsilon_o = \frac{\Delta l}{l} = \frac{d\delta}{ds} \quad , \quad (3.31)$$

$$\psi = \frac{d\theta}{ds} \quad (3.32)$$

Inicialmente, tem-se os esforços no início e final de cada elemento da estrutura, $N_d^{i,f}$ e $M_d^{i,f}$, e nestes elementos são definidos os pontos de integração (Figura 3.9) necessários para o cálculo dos coeficientes de rigidez descritos no capítulo 2. Os esforços são então linearmente interpolados ao longo do elemento pelas funções em 3.21, de onde obtêm-se os esforços solicitantes, normal, N_d^k , e momento fletor, M_d^k , nos pontos de integração k , com $k = 1, 2, \dots, npg$ do elemento. Os esforços resistentes também devem ser calculados em relação a O^k e, as correspondentes expressões de cálculo são

$$N_r^k = F_c + \sum_{i=1}^n F_{si} \quad (3.33)$$

$$M_r^k = M_c + \sum_{i=1}^n F_{si} y_i \quad (3.34)$$

onde, N_r^k é a força normal resistente da seção, F_c é a força resultante no concreto, F_s é a força resultante no aço, M_r^k é o momento resistente da seção, M_c é a parcela de momento resistente da seção devida ao concreto e $\sum_{i=1}^n F_{si} y_i$ é a parcela de momento resistente devida ao aço. Em 3.33 e 3.34, as parcelas de esforços resistentes associados ao concreto são dadas por

$$F_c = \int \sigma_c dA \quad (3.35)$$

$$M_c = \int \sigma_c y dA \quad (3.36)$$

sendo σ_c a função de tensão no concreto e y a variável de integração que indica a posição do infinitesimal de área dA . Implementaram-se duas leis de tensão-deformação (Figura 3.11) para o concreto comprimido. A primeira, baseada na NBR6118 (2014), dada por (vide Figura 3.11a)

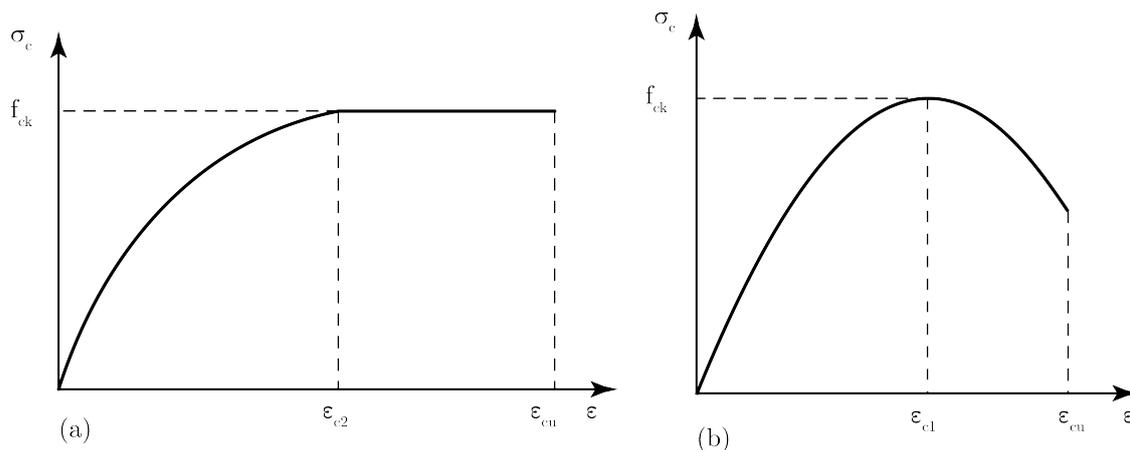


FIGURA 3.11: Diagrama tensão-deformação do concreto (a)NBR6118, 2014 e (b)Eurocode2, 1999

$$\sigma_c = f_{ck} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (3.37)$$

onde os valores de n em 3.37 são dados conforme os intervalos abaixo dos valores de f_{ck} :

$$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rightarrow n = 2 \quad ,$$

$$f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rightarrow n = 1,4 + 23,4 \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \quad .$$

Também em 3.37, o parâmetro de deformação específica de encurtamento, ε_{c2} , e o parâmetro de deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura, ε_{cu} , são definidos como indica-se abaixo:

- Para concretos de classe até C50

$$\varepsilon_{c2} = 2\text{‰}$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$$

- Para concretos de classe C55 até C90

$$\varepsilon_{c2} = 2\text{‰} + 0,085\text{‰} (f_{ck} - 50)^{0,53}$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4$$

A segunda relação tensão-deformação no concreto considerada neste trabalho é a relação proposta pelo Eurocode2 (1999), dada por

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - \eta)\eta} \quad , \quad (3.38)$$

onde,

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$$

$$\varepsilon_{c1} = 0,7f_{cm}^{0,35} \leq 2,8$$

com f_{cm} em MPa e ε_{c1} e ε_c em ‰.

Para o concreto tracionado adotou-se a parte da curva tensão deformação proposta por Desayi e Krishnan (1964), mostrada a Figura 3.12,

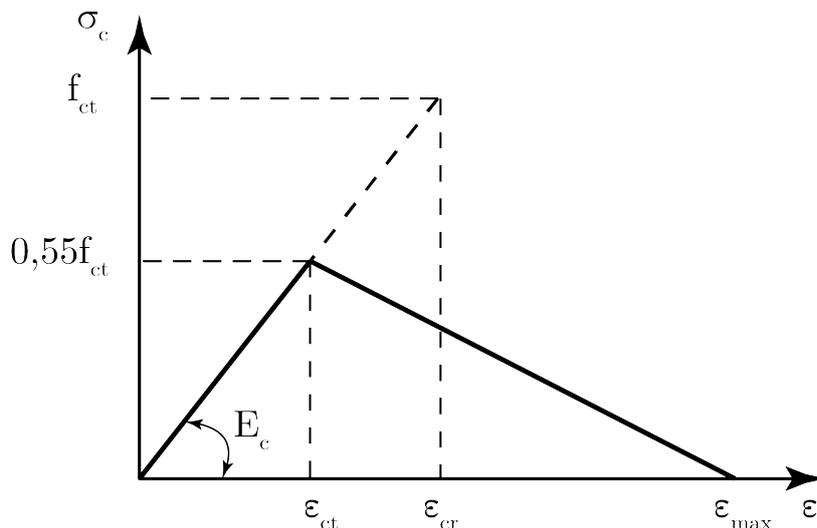


FIGURA 3.12: Comportamento concreto simples à tração, adaptado de Desayi e Krishnan (1964)

onde $\varepsilon_{ct} = 0,55f_{ct}/E_c$ e $\varepsilon_{max} = 0,7\%$. Tem-se então para o primeiro trecho, $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{ct}$, a relação tensão-deformação

$$\sigma_c = \varepsilon_c E_c \quad , \quad (3.39)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade inicial do concreto, e para o segundo trecho, $\varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{max}$, a relação

$$\sigma_c = \frac{0,55f_{ct}}{\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{max}} (\varepsilon_c - \varepsilon_{max}) \quad . \quad (3.40)$$

A curva tensão-deformação do aço utilizada foi a fornecida pela NBR6118 (2014), com a deformação específica de escoamento característica no aço dada por $\varepsilon_y = f_{yk}/E_s$ e ε_u é a deformação última no aço.

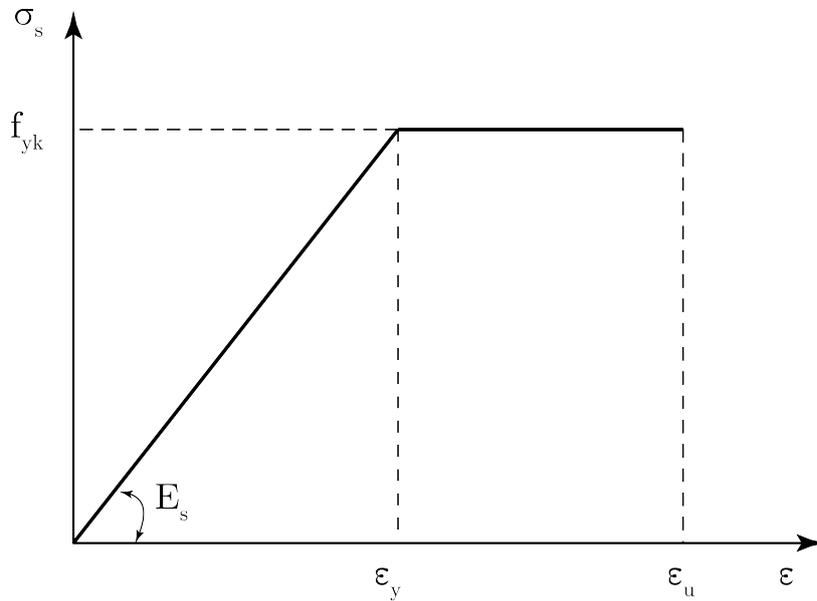


FIGURA 3.13: Comportamento do aço segundo NBR6118, 2014

Para o primeiro trecho, $\varepsilon_s \leq \varepsilon_y$, tem-se

$$\sigma_s = \varepsilon_s E_s \quad , \quad (3.41)$$

sendo E_s o módulo de elasticidade do aço. Para o segundo trecho, $\varepsilon_y \leq \varepsilon_s < \varepsilon_u$, tem-se

$$\sigma_s = f_{yk} \quad . \quad (3.42)$$

Nota-se que o cálculo das forças e momentos resultantes no aço, devido à geometria, é realizado de forma simples devido à geometria simples dessas áreas. No entanto para calcular as ações resultantes no concreto, dadas pelas integrais das Equações 3.35 e 3.36, é necessário o fornecimento de uma malha de contorno para definir a geometria da seção transversal (que pode ser complexa), nos pontos de integração ao longo do elemento onde se objetiva equilibrar a seção. Para isso, a seção é ainda dividida em faixas, e nestas faixas são definidos pontos de integração ao longo da altura da seção, como se mostra na Figura 3.14.

Aplicando o processo de integração de Gauss-Legendre nas Equações 3.35 e 3.36, obtêm-se as expressões numéricas para as resultantes no concreto:

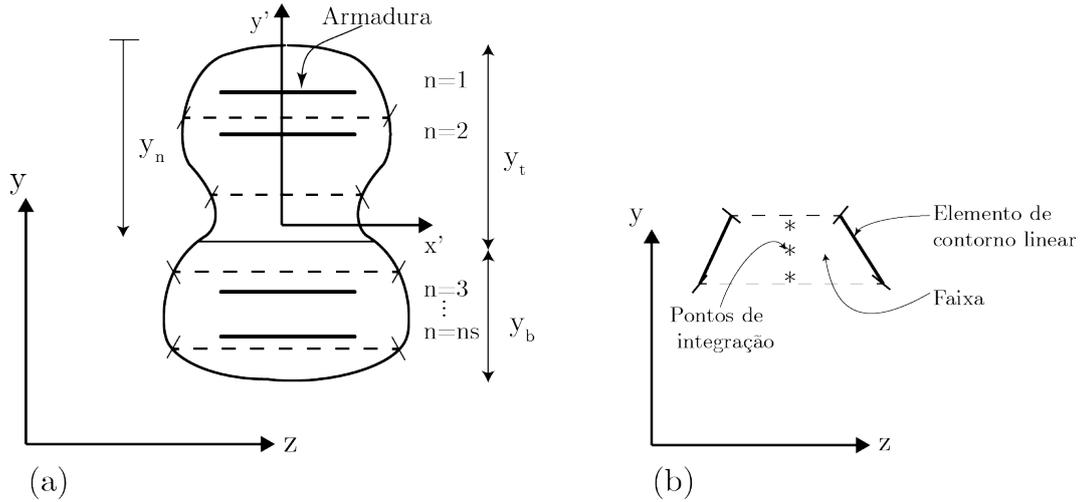


FIGURA 3.14: (a) Malha de contorno da seção transversal e sua discretização em faixas (b) detalhe de uma faixa com seus pontos de integração

$$F_c = \sum_{i=1}^{nstrip} \int \sigma_c(y)b(y)dy \quad (3.43)$$

$$= \sum_{i=1}^{nstrip} \frac{\Delta strip}{2} \int_{-1}^1 \sigma_c(y(\eta))b(y(\eta))d\eta \quad (3.44)$$

$$= \frac{\Delta strip}{2} \sum_{i=1}^{nstrip} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_c(y(\eta))b(y(\eta))\omega_j \quad , \quad (3.45)$$

$$M_c = \sum_{i=1}^{nstrip} \int \sigma_c(y)b(y)ydy \quad (3.46)$$

$$= \sum_{i=1}^{nstrip} \frac{\Delta strip}{2} \int_{-1}^1 \sigma_c(y(\eta))b(y(\eta))yd\eta \quad (3.47)$$

$$= \frac{\Delta strip}{2} \sum_{i=1}^{nstrip} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_c(y(\eta))b(y(\eta))\omega_j \quad (3.48)$$

Percebe-se que os valores de esforços são função da posição da linha neutra, y_n , da curvatura ψ , e da deformação axial da seção no ponto O^k , ε_o . Sabendo-se que a geometria da seção é qualquer e que a área comprimida de concreto também é função da posição da linha neutra, portanto, é necessário saber de antemão a posição da linha neutra e a curvatura. A partir deste entendimento, observou-se que seria necessária uma estratégia iterativa para determinar a solução, ou seja, dada uma posição inicial de linha neutra, y_{s0} , e uma curvatura,

calculam-se os esforços resistentes da seção, comparam-se com os esforços solicitantes até que se obtenha a convergência em relação ao equilíbrio. O processo iterativo implementado divide-se em duas partes: na primeira faz-se o equilíbrio do esforço normal e, na segunda, do momento fletor, como descreve-se abaixo:

– Equilíbrio do esforço normal

1. Arbitra-se inicialmente uma deformação no ponto O , $\varepsilon_o^0 = \varepsilon_o^i$
2. Calculam-se as forças nas camadas de aço e no concreto e obtém-se, $N_r = F_c + \sum_{i=1}^n F_{si}$
3. Calcula-se o desequilíbrio entre o normal resistente e o normal solicitante, $|N_r| - |N_d|$
 - Se $||N_r| - |N_d|| \leq tol$, Equilíbrio do momento
 - Se $||N_r| - |N_d|| > tol$, passo 4
4. Determina-se a deformação, ε_o^{i+1} , da próxima iteração
 - Se $|N_r| - |N_d| < 0,0 \rightarrow \varepsilon_o^{i+1} = \varepsilon_o^i + \frac{\varepsilon_o^0}{2^i}$, passo 2
 - Se $|N_r| - |N_d| > 0,0 \rightarrow \varepsilon_o^{i+1} = \varepsilon_o^i - \frac{\varepsilon_o^0}{2^i}$, passo 2

– Equilíbrio do momento fletor

- 5 Arbitra-se, inicialmente, uma curvatura, ψ^0 , uma posição de linha neutra, $y_n^0 = y_n^j$, e um incremento de deformação na fibra mais comprimida do concreto (superior), $\delta\varepsilon_j$, a partir da configuração de equilíbrio do normal (vide Figura 3.15)
- 6 Calcula-se as forças e os momentos nas camadas de aço e no concreto, obtém-se, $N_r = F_c + \sum_{i=1}^n F_{si}$ e $M_r = M_c + \sum_{i=1}^n F_{si}y_i$
- 7 Calcula-se o desequilíbrio entre o normal resistente e o normal solicitante, $|N_r| - |N_d|$
 - Se $||N_r| - |N_d|| \leq tol$, passo 9
 - Se $||N_r| - |N_d|| > tol$, passo 8
- 8 Determina-se a posição da linha neutra e a curvatura, y_n^{j+1} e ψ^{j+1} , da próxima iteração
 - Se $|N_r| - |N_d| < 0,0 \rightarrow y_n^{j+1} = y_n^j + \frac{y_n^0}{2^j}$
 - Se $|N_r| - |N_d| > 0,0 \rightarrow y_n^{j+1} = y_n^j - \frac{y_n^0}{2^j}$
$$\rightarrow \psi^{j+1} = \frac{\delta\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_0}{y_n^{j+1}}$$

→ Passo 2

9 Calcula-se o desequilíbrio entre o momento resistente e o momento solicitante, $|M_r| - |M_d|$

- Se $||M_r| - |M_d|| \leq tol$, Fim do processo
- Se $||M_r| - |M_d|| > tol$, passo 6

10 Calcula-se o incremento de deformação da fibra mais comprimida ou tracionada do concreto e a nova posição da linha neutra

$$\rightarrow \delta\varepsilon_{j+1} = \delta\varepsilon_{j+1} - \frac{|M_r| - |M_d|}{\psi^j} y_n^j$$

$$\rightarrow y_n^{j+1} = \frac{\delta\varepsilon_{j+1} + \varepsilon_0}{\psi^j}$$

→ Passo 2

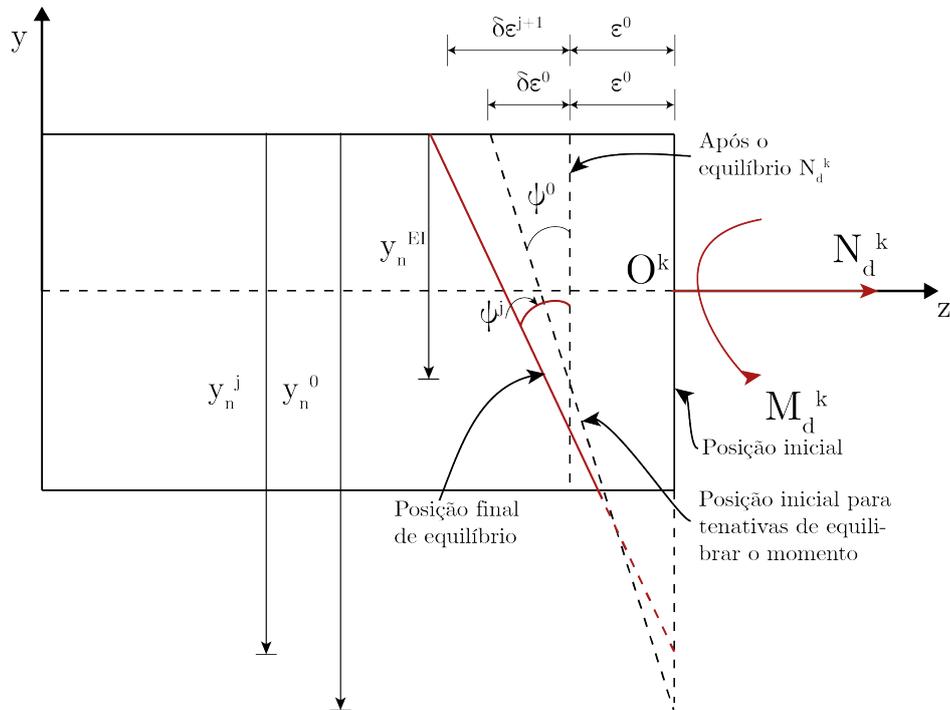


FIGURA 3.15: Processo de equilíbrio direto da seção - primeiro passo de carga

Ressalta-se que para a primeira correção dos coeficientes k_b e k_a (primeiro incremento de carga) a deformação no ponto ε_0^0 e o incremento de deformação na fibra externa mais comprimida, $\delta\varepsilon_j$, são definidos pela solução no estágio I correspondente ao passo de carga. E a linha neutra inicial y_n^0 é a linha da seção íntegra, que é igual ao centroide da área transformada não-fissurada. Para os passos de carga subsequentes, estes valores iniciais são os valores da solução anterior vide Figura 3.16.

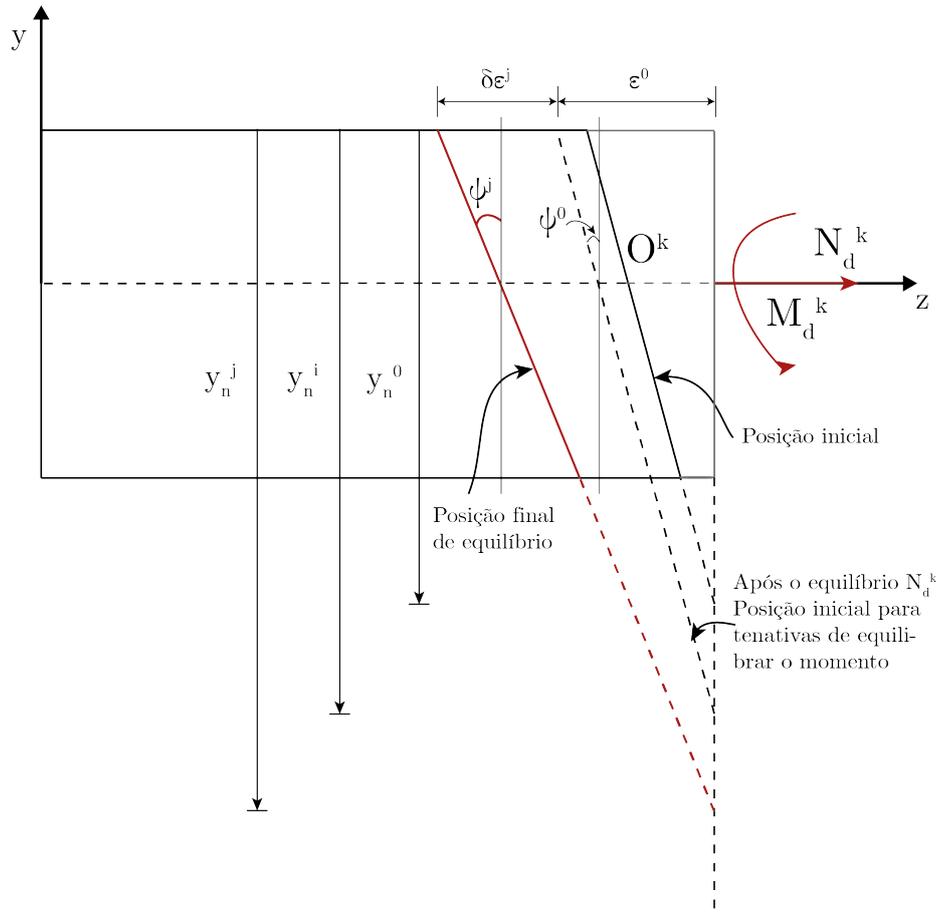


FIGURA 3.16: Processo de equilíbrio direto da seção - demais passos de carga

3.5.1 Cálculo da rigidez de seções em concreto armado - Equilíbrio direto

Como mencionado anteriormente, a formulação do Método da Rigidez Direta (MRD) descrita no capítulo 2 possibilita a consideração de todas essas variações de rigidez, de forma precisa e conveniente, bastando para isso que sejam calculadas as rigidezes nos pontos de integração do elemento. Equilibrada a seção, consideram-se, nas seções que correspondem aos pontos de integração, as relações

$$k_a = \frac{N_r^k}{\varepsilon_o^k} \quad , \quad (3.49)$$

$$k_b = \frac{M_r^k}{\psi_o^k} \quad , \quad (3.50)$$

que fornecem os valores de rigidez flexional e axial do elemento em concreto armado, nas seções localizadas nos pontos de integração. Vê-se assim que o processo permite, perfeitamente, o cálculo preciso da matriz de rigidez do elemento em concreto armado levando em conta características gerais de variação de rigidez ao longo do elemento, sejam elas devidas

ao comportamento não-linear física do material ou devidas a eventuais variações geométricas de seção. O processo também permitirá modelar seções de formas geométricas quaisquer.

3.5.2 Estratégia para curvas $Mx\psi$ e $Nx\varepsilon$

Para traçar as curvas momento versus curvatura e normal versus deformação axial utilizou-se uma estratégia similar à estratégia de equilíbrio direto de esforços na seção, embora neste caso tenha-se meramente aplicado incrementos sucessivos de deformação generalizada (axial ou flexional), e para estes valores de deformação os correspondentes esforço resistentes resultantes tenham sido calculados. Em geral, os passos abaixo foram seguidos.

- Determina-se para qual elemento e qual seção quer-se traçar
- Determina-se qual tipo de curva se quer traçar
- Determina-se o número de pontos que vão compor a curva, $npdcurv$

Para a construção da curva de esforços normais resistentes ($N \times \varepsilon$, $M = 0$) tem-se:

1. Calcula-se $\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_{c2}}{npdcurv}$ e $\delta\varepsilon^i = 0.0$
2. Calcula-se $\delta\varepsilon^i = \delta\varepsilon^i + \Delta\varepsilon$
3. Calcula-se o esforço normal resistente para $\delta\varepsilon^i$, N_r
4. Escreve-se o par ordenado $\delta\varepsilon^i$, N_r e retorna-se para o passo 2

Nota-se que neste caso a curvatura é igual a zero e a linha neutra está no infinito

Para a curva de momentos resistentes ($M \times \psi$, $N = 0$), tem-se:

1. Calcula-se $\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_{cu}}{npdcurv}$ e $\delta\varepsilon^i = 0.0$
2. Calcula-se $\delta\varepsilon^i = \delta\varepsilon^i + \Delta\varepsilon$
3. A linha neutra inicial $y_n^0 = y^j$ é a linha da seção íntegra e a curvatura inicial é $\psi_i^0 = \frac{\delta\varepsilon^i}{y_n^0}$
4. Calcula-se as forças e os momentos nas camadas de aço e no concreto, obtém-se, $N_r = F_c + \sum_{i=1}^n F_{si}$ e $M_r = M_c + \sum_{i=1}^n F_{si}y_i$
5. Calcula-se o desequilíbrio entre o normal resistente e o normal solicitante $|N_r| - |N_d|$, sendo $|N_d| = 0.0$
 - Se $||N_r| - |N_d|| \leq tol$, passo 7
 - Se $||N_r| - |N_d|| > tol$, passo 6
6. Determina-se a posição da linha neutra e a curvatura, y_s^{j+1} e ψ^{j+1} , da próxima iteração

- Se $|N_r| - |N_d| < 0, 0 \rightarrow y_n^{j+1} = y_n^j + \frac{y_n^0}{2^j}$
 - Se $|N_r| - |N_d| > 0, 0 \rightarrow y_n^{j+1} = y_n^j - \frac{y_n^0}{2^j}$
- $\rightarrow \psi^{j+1} = \frac{\delta \varepsilon_i}{y_n^{j+1}}$
- \rightarrow Passo 4

7. Calcula-se o momento fletor resistente para $\delta \varepsilon^i$, M_r .

8. Escreve-se o par ordenado $\delta \varepsilon^i$, M_r e retorna-se para o passo 2

Para a curva de momentos resistentes com um esforço normal constante ($Mx\psi$, $N = cte$), tem-se:

- Leitura do valor de normal constante
- Equilíbrio do esforço normal
 1. Arbitra-se inicialmente uma deformação no ponto O , $\varepsilon_o^0 = \varepsilon_o^i$
 2. Calculam-se as forças nas camadas de aço e no concreto e obtém-se, $N_r = F_c + \sum_{i=1}^n F_{si}$
 3. Calcula-se o desequilíbrio entre o normal resistente e o normal solicitante, $|N_r| - |N_d|$
 - Se $||N_r| - |N_d|| \leq tol$, Equilíbrio do momento
 - Se $||N_r| - |N_d|| > tol$, passo 4
 4. Determina-se a deformação, ε_o^{i+1} , da próxima iteração
 - Se $|N_r| - |N_d| < 0, 0 \rightarrow \varepsilon_o^{i+1} = \varepsilon_o^i + \frac{\varepsilon_o^0}{2^i}$, passo 2
 - Se $|N_r| - |N_d| > 0, 0 \rightarrow \varepsilon_o^{i+1} = \varepsilon_o^i - \frac{\varepsilon_o^0}{2^i}$, passo 2
- Incremento de deformação e determinação do momento resistente
 1. Calcula-se $\Delta \varepsilon = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon^i}{npdcurv}$ e $\delta \varepsilon^i = 0.0$
 2. Calcula-se $\delta \varepsilon^i = \delta \varepsilon^i + \Delta \varepsilon$
 3. A linha neutra inicial $y_n^0 = y^j$ é a linha da seção íntegra e a curvaturas inicial é $\psi_i^0 = \frac{\delta \varepsilon^i}{y_n^0}$
 4. Calcula-se as forças e os momentos nas camadas de aço e no concreto, obtém-se, $N_r = F_c + \sum_{i=1}^n F_{si}$ e $M_r = M_c + \sum_{i=1}^n F_{si} y_i$
 5. Calcula-se o desequilíbrio entre o normal resistente e o normal solicitante $|N_r| - |N_d|$, sendo $|N_d| = 0.0$

- Se $||N_r| - |N_d|| \leq tol$, passo 7
 - Se $||N_r| - |N_d|| > tol$, passo 6
6. Determina-se a posição da linha neutra e a curvatura, y_s^{j+1} e ψ^{j+1} , da próxima iteração
- Se $|N_r| - |N_d| < 0,0 \rightarrow y_n^{j+1} = y_n^j + \frac{y_n^0}{2^j}$
 - Se $|N_r| - |N_d| > 0,0 \rightarrow y_n^{j+1} = y_n^j - \frac{y_n^0}{2^j}$
- $\rightarrow \psi^{j+1} = \frac{\delta \varepsilon_i}{y_n^{j+1}}$
- \rightarrow Passo 4
7. Calcula-se o momento fletor resistente para $\delta \varepsilon^i$, M_r
8. Escreve-se o par ordenado $\delta \varepsilon^i$, M_r e retorna-se para o passo 2

3.6 Considerações Normativas

Segundo os princípios básicos de cálculo, item 15.3 da NBR6118, 2014, a não-linearidade física, presente nas estruturas de concreto armado, deve ser obrigatoriamente considerada, quando considera-se também a não-linearidade geométrica. Para a análise dos esforços globais de segunda ordem, esse tipo de não-linearidade pode ser considerada de maneira aproximada, tomando-se como rigidez dos elementos estruturais os seguintes valores:

- Lajes: $(EI)_{sec} = 0,3 \cdot E_{ci} I_c$
- Vigas: $(EI)_{sec} = 0,4 \cdot E_{ci} I_c$, para $A'_s \neq A_s$
 $(EI)_{sec} = 0,5 \cdot E_{ci} I_c$, para $A'_s = A_s$
- Pilares: $(EI)_{sec} = 0,8 \cdot E_{ci} I_c$

sendo I_c a inércia bruta. Alternativamente, quando a estrutura de contraventamento for composta exclusivamente por vigas e pilares e γ_z for inferior a 1,3, pode-se considerar tanto para as vigas quanto para os pilares, a rigidez equivalente dada por $(EI)_{sec} = 0,7 \cdot E_{ci} I_c$. Ressalta-se que esses valores reduzidos de rigidez estabelecidos pela norma são aproximados.

3.7 Aplicações Preliminares

Apresentam-se algumas aplicações preliminares que têm por objetivo determinar a curva momento-curvatura de algumas seções de concreto armado. Duas seções foram escolhidas para estas aplicações preliminares. A primeira, uma seção trapezoidal com furo na parte

tracionada é considerada e, a segunda, uma seção T retirada do capítulo 7 do livro Ghali, Favre e Elbadry (2002). Empregou-se a estratégia descrita na seção 3.5.2 para construção das curvas $Mx\psi$ com $N = 0$. Os resultados são mostrados nos gráficos das Figuras 3.17 e 3.18. Ressalta-se que os patamares verificados nas curvas obtidas com o modelo de Ghali-Favre devem-se à consideração do parâmetro $\beta_2 = 0,5$. A estratégia baseada no equilíbrio direto descreve um comportamento mais real do fenômeno físico, vez que não se fundamenta nas observações empíricas que embasam o modelo de Ghali-Favre. Por outro lado, vê-se que o modelo de Ghali-Favre descreve razoavelmente bem o comportamento do elemento em concreto armado sob flexão simples.

TABELA 3.1: Dados dos materiais - Seção trapezoidal

Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{ci} = 2920kN/cm^2$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 19600kN/cm^2$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,204kN/cm^2$
Resistência à compressão do concreto	$f_c = 2,55kN/cm^2$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 50kN/cm^2$

TABELA 3.2: Dados dos materiais - Seção T

Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{ci} = 3000kN/cm^2$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 20000kN/cm^2$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,204kN/cm^2$
Resistência à compressão do concreto	$f_c = 2,55kN/cm^2$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 50kN/cm^2$

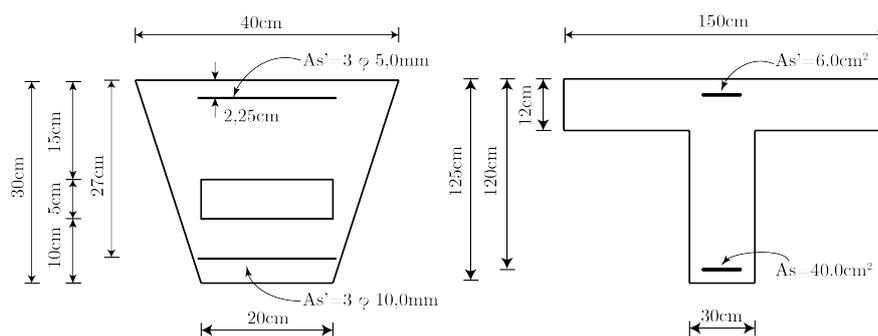


FIGURA 3.17: Seções transversais(a) trapezoidal com furo (b) e seção T

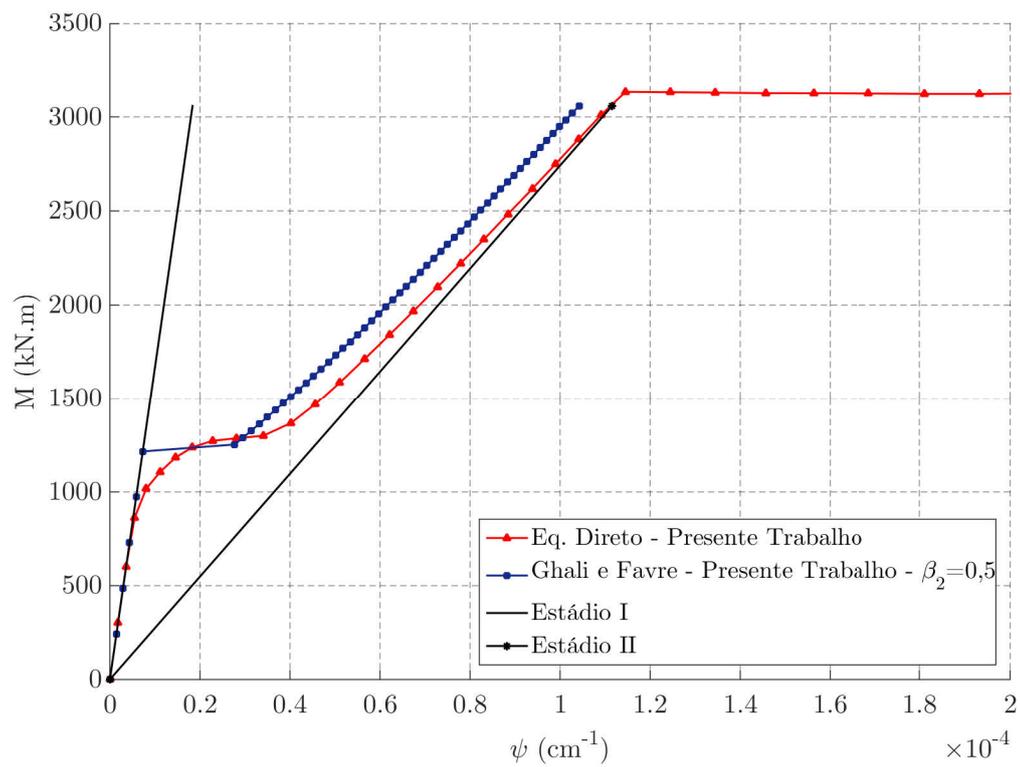


FIGURA 3.18: Curva momento-curvatura para seção trapezoidal com furo

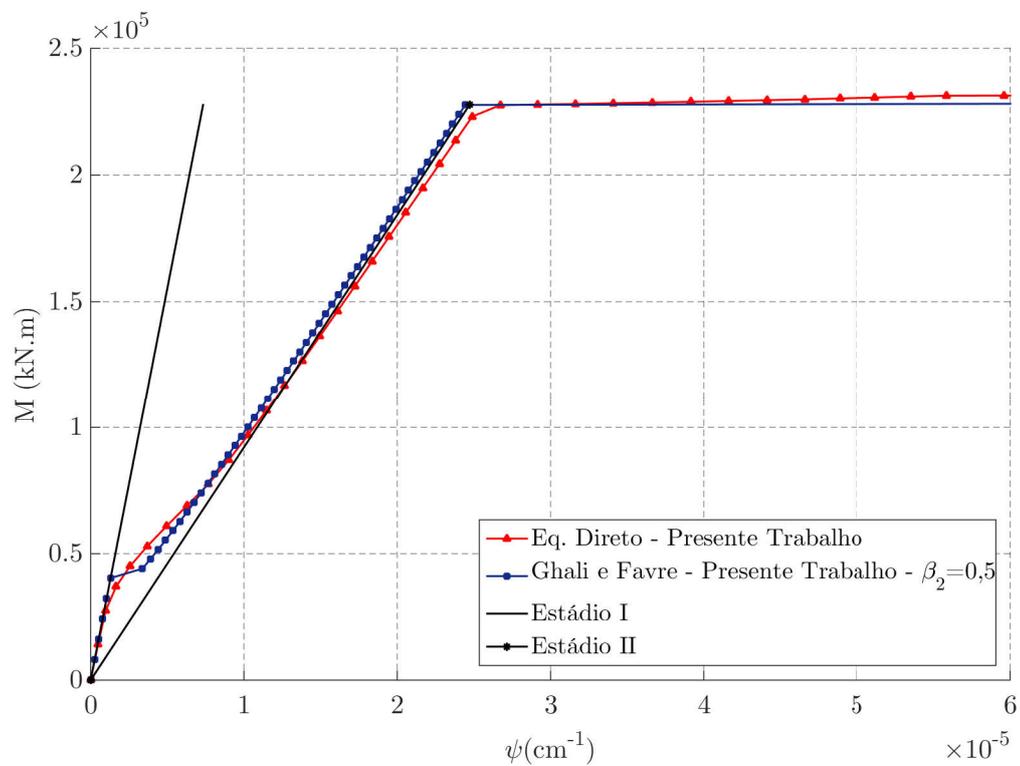


FIGURA 3.19: Curva momento-curvatura para seção T

Capítulo 4

Análise não-linear geométrica

4.1 Análise não-linear geométrica

Uma estrutura resiste as ações a ela impostas se deformando, ou seja, seus nós mudam de posição, de modo a gerar uma configuração deformada em que haja equilíbrio entre esforços solicitantes e resistentes. As forças horizontais, inicialmente paralelas ao elemento, agora interagem com os deslocamentos laterais gerando esforços adicionais. A este fenômeno dá-se o nome de efeitos de segunda ordem ou não-linearidade geométrica (NLG). Em uma análise NLG, o equilíbrio da estrutura é obtido a partir da configuração deformada. Além disso, surgem diversas configurações de equilíbrio ao longo do processo de carregamento da estrutura, que definem a sua trajetória de equilíbrio.

Dessa forma pode-se definir os efeitos $P - \Delta$ e $P - \delta$ para estruturas planas de acordo com a (NBR:8800, 2008). O efeito $P - \Delta$ Figura 4.2, também chamado de efeito global de segunda ordem, está ligado ao momento que surge no apoios do pórtico devido a multiplicação da carga P pelo deslocamento Δ . Já o efeito $P - \delta$ (vide Figura 4.3) é um efeito não-linear geométrico em nível de elemento, ou seja, que está associado à configuração deformada de cada elemento.

Particularmente para estruturas em concreto, a norma brasileira NBR6118:2014 determina que os efeitos de segunda ordem devam ser considerados quando estes superarem os efeitos de primeira ordem em 10 %. Desse modo, as estruturas podem ser classificadas como de nós fixos, quando o acréscimo de esforço é inferior aos 10%, e de nós móveis, quando o acréscimo é superior a 10%. Para verificar se é necessária a consideração dos efeitos existem dois parâmetros, quais sejam, o parâmetro de instabilidade α e o coeficiente γ_z .

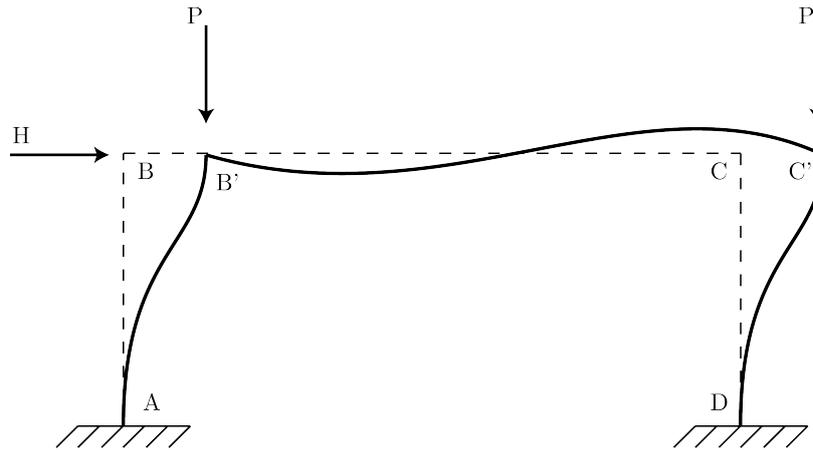


FIGURA 4.1: Configuração deformada.
Adaptado de Silvestre e Camotim (2007)

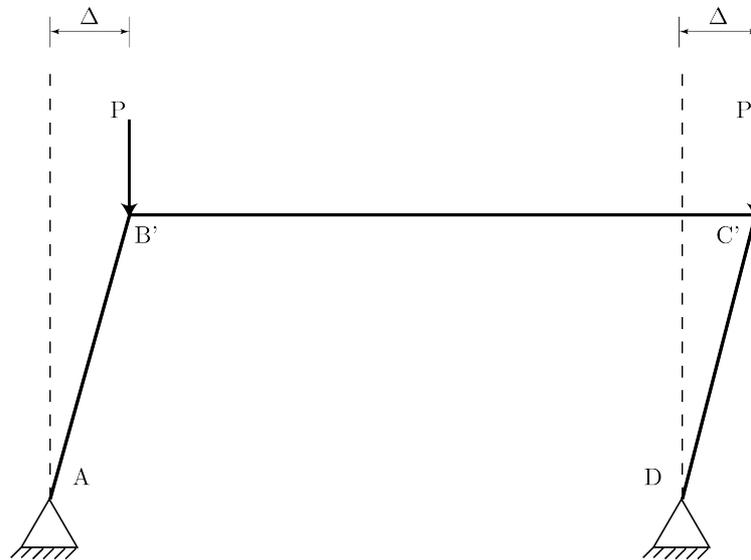


FIGURA 4.2: Efeitos de segunda ordem $P - \Delta$.
Adaptado de Silvestre e Camotim (2007)

4.1.1 Parâmetro de instabilidade α

Idealizado por Beck e König, em 1967, o parâmetro α permite a classificação da estrutura quanto sua estabilidade global. É calculado segundo a NBR:8800, 2008 como,

$$\alpha = H_{tot} \cdot \sqrt{\frac{N_k}{E_{cs} \cdot I_c}} \quad , \quad (4.1)$$

sendo H_{tot} a altura total da estrutura medida a partir do topo da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo, N_k o somatório de todas as cargas verticais atuantes com seu valor característico, e $E_{cs} \cdot I_c$ representa o somatório dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada, que no caso de estruturas de pórticos, treliças ou mistas,

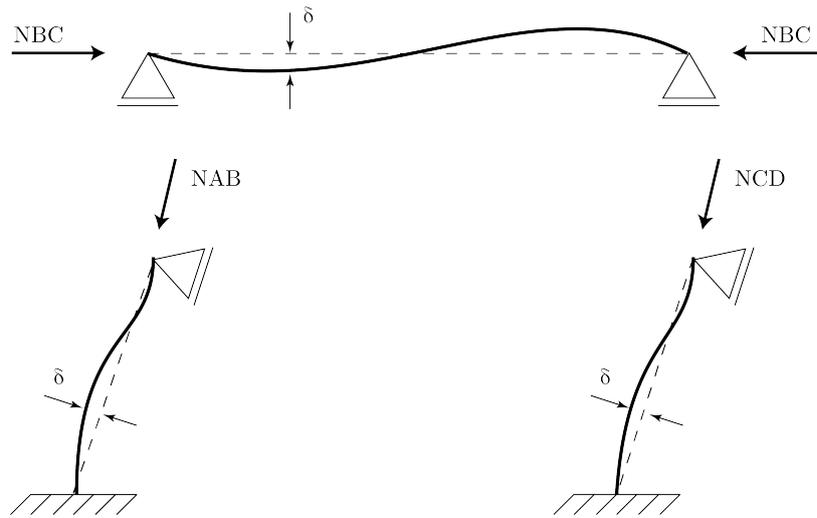


FIGURA 4.3: Efeitos de segunda ordem $P - \delta$.
Adaptado de Silvestre e Camotim (2007)

pode ser considerado o valor da rigidez de um pilar equivalente de seção constante. Para ser considerada de nós fixos, o parâmetro α de uma estrutura deve ser menor que um α_1 calculado como sendo,

$$\alpha_1 = 0,2 + 0,1 \cdot n \text{ se } n \leq 3$$

$$\alpha_1 = 0,6 \text{ se } n \geq 4$$

sendo n o número de andares acima da fundação

4.1.2 Coeficiente γ_z

O coeficiente γ_z também é utilizado para avaliar a importância dos esforços de segunda ordem. O valor de γ_z é dado por

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad , \quad (4.2)$$

sendo $M_{1,tot,d}$ o momento de tombamento, obtido através da soma dos momentos de todas as forças horizontais em relação à base da estrutura, e $\Delta M_{tot,d}$ a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de 1ª ordem. Para ser considerada de nós fixos, a estrutura deve ter $\gamma_z \leq 1,1$. No caso de estruturas com $1,1 \leq \gamma_z \leq 1,3$ pode-se calcular o esforço de forma aproximada majorando-se as ações horizontais de $0,95 \cdot \gamma_z$

4.2 Estratégia de solução não-linear

No presente trabalho, o método iterativo utilizado para resolver o sistema não-linear de equações é o procedimento de Newton-Raphson, mostrado na Figura 4.4, com controle de carga. A atualização da matriz de rigidez geométrica é realizada a cada iteração, enquanto a atualização da matriz de rigidez física é realizada apenas ao final do incremento de carga.

O referido método foi implementado conforme o fluxograma da Figura 4.5 e é descrito abaixo.

→ A rotina de solução não-linear começa com o conhecimento prévio de algumas grandezas, a saber, a matriz de rigidez inicial, \mathbf{K}_0 , calculada na configuração indeformada da estrutura, o vetor de forças externas de referência, $\hat{\mathbf{p}}$, o fator de carga, λ , a tolerância para se determinar a convergência do processo iterativo, tol , e o número de passos de carga, $numpc$.

- Início do processo incremental, $i = 1, numpc$
- Montagem do vetor de forças externas, \mathbf{p}_i^j .
- Início do processo iterativo, j , que busca encontrar o equilíbrio do sistema estrutural, na configuração deformada, em que as forças internas se igualem às externas segundo a tolerância definida
 - Determinação da correção de deslocamentos, $\delta\mathbf{u}$, pela solução de

Se $j=1$ calcula-se $\mathbf{K}_{(j-1)}^i \delta\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}}$ e posterior multiplicação da correção de deslocamentos pelo fator de carga, $\delta\mathbf{u} = \lambda\hat{\mathbf{u}}$

Se $j > 1$ $\mathbf{K}_{(j-1)}^i \delta\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r}$

- Decomposição de $\delta\mathbf{u}$ em suas parcelas $\delta\mathbf{u}_n$ (deslocamentos naturais) e $\delta\mathbf{u}_r$ (deslocamentos de corpo rígido) utilizando a abordagem corrotacional, aplicada localmente em cada elemento
- Cálculo da correção de esforços internos associados a $\delta\mathbf{u}_n$ para cada elemento
- Atualização das coordenadas
- Atualização da matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{(j-1)}^i \rightarrow \mathbf{K}_j^i$
- Cálculo do vetor de forças internas $\mathbf{f}_j^i = \mathbf{f}_{(j-1)}^i + \delta\mathbf{f}_j^i$
- Determinação do desequilíbrio de forças (gradiente de energia potencial) através da equação $\mathbf{r}_j^i = \mathbf{p}_j^i + \mathbf{f}_j^i$

- Cálculo da norma relativa e verificação da tolerância $\|\mathbf{r}\|/\|\mathbf{p}_j^i\| \leq tol.$ caso haja convergência a rotina segue para a atualização da matriz de rigidez física, se não, retoma-se o processo iterativo
- Atualização da matriz de rigidez física $\mathbf{K}^i = \mathbf{K}^{i+1}$
- Se $i \leq numpc$, retoma-se o processo incremental, se não, fim do processo incremental-iterativo

Alguns pontos dessa estratégia merecem especial atenção. Primeiramente, cita-se que a atualização das coordenadas é feita, a cada iteração, a partir da correção dos deslocamentos $\delta \mathbf{u}$, e posteriormente, com as coordenadas atualizadas, procede-se à atualização da matriz de rigidez tangente, com degradação da rigidez. Ressalta-se, também, que para a avaliação do vetor de forças internas, utilizaram-se somente os incrementos de deslocamentos naturais, $\delta \mathbf{u}_n$. A decomposição dos deslocamentos, como mencionado acima, consiste na denominada abordagem corrotacional e permite descrever grandes deslocamentos.

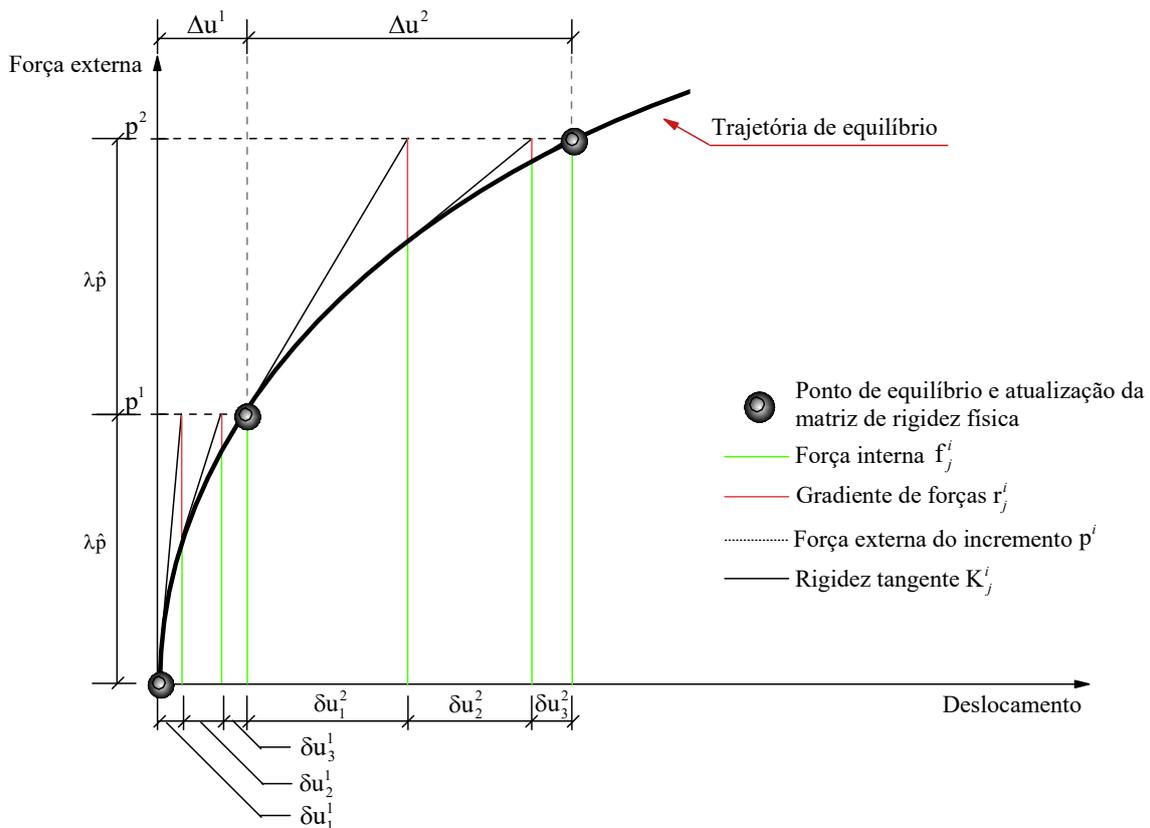


FIGURA 4.4: Método de Newton-Raphson. Adaptado de Ribeiro, 2016

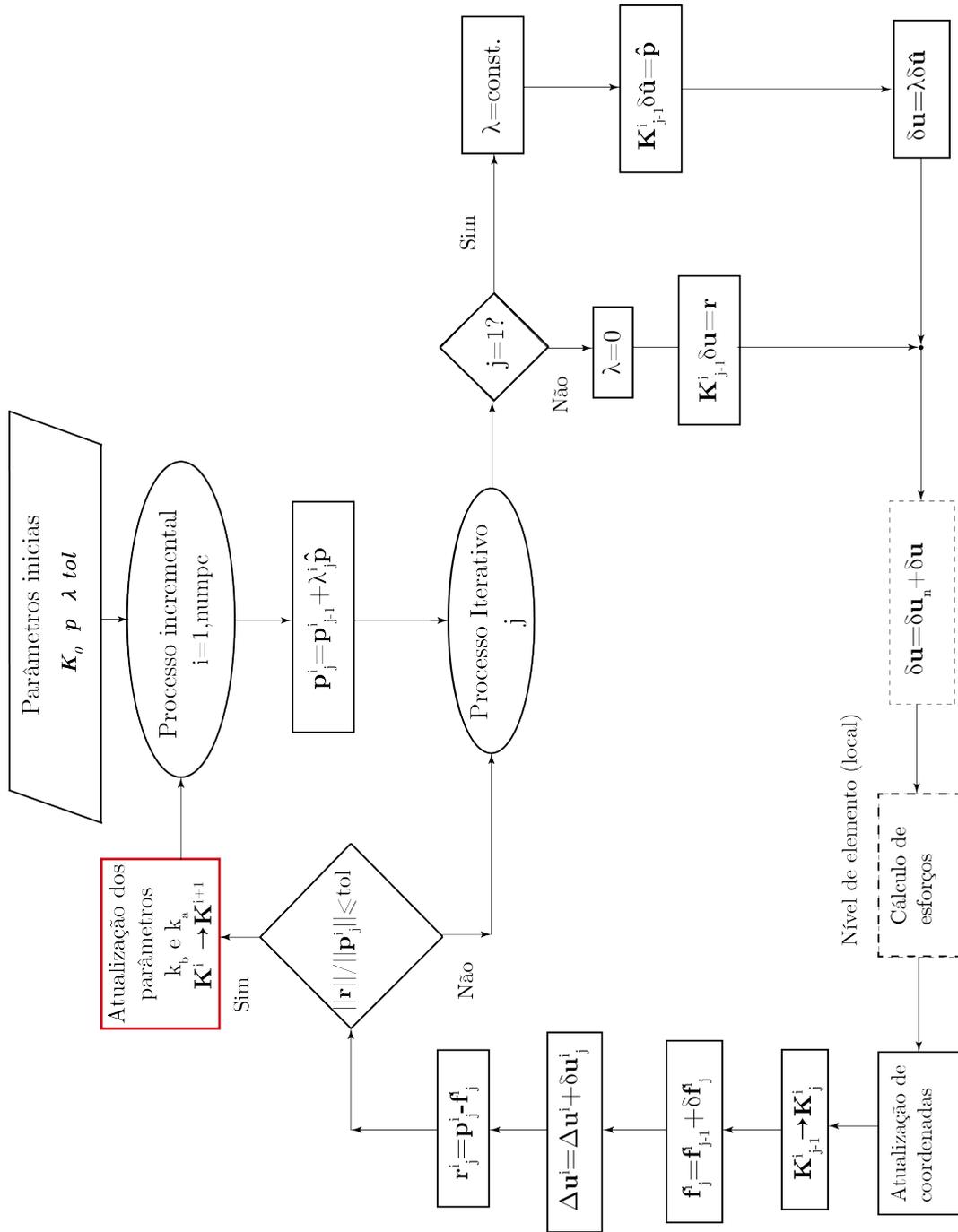


FIGURA 4.5: Fluxograma de solução não-linear. Adaptado de Ribeiro, 2016

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo, realizam aplicações destinadas a validar as estratégias de análise de estruturas em concreto armado propostas nesta dissertação. Na verdade, em todas as aplicações consideradas, comparam-se os resultados obtidos com as estratégias propostas com resultados experimentais publicados na literatura técnica.

5.1 Aplicação 1

Esta aplicação tem por objetivo validar o processo implementado de degradação da rigidez. Para isso, foram calculados os valores de deslocamento verticais no meio do vão de vigas biapoiadas ensaiadas por Álvares (1993) e mostrada na Figura 5.1. Os ensaios foram feitos em três grupos de vigas, sendo cada grupo composto por duas vigas com mesmos detalhes de armadura, variando-se porém a quantidade de armadura positiva de grupo para grupo (Figura 5.2). O resultado também foi comparado com a análise realizada por Silva (2012). Os dados dos materiais, fornecidos em Silva (2012), são mostrados na Tabela 5.2.

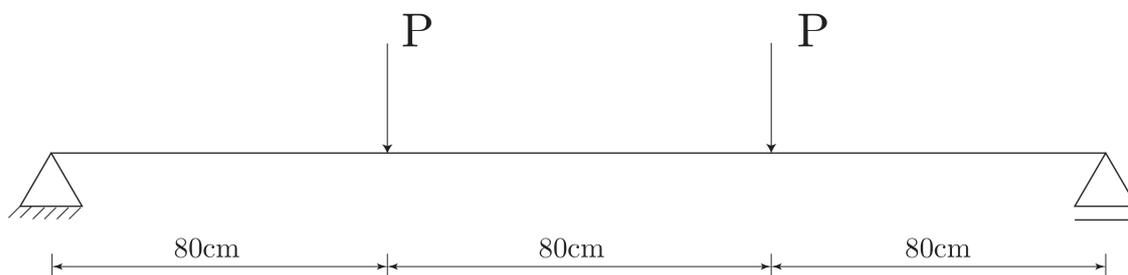


FIGURA 5.1: Viga aplicação 1

Para a viga 1, com armadura inferior de 3φ de 10mm, apresentam-se nas Tabelas 5.3 e 5.4 os valores de momento de fissuração, plastificação, último e suas respectivas curvaturas. Os valores foram obtidos com as estratégias descritas nos apêndices A e B e comparados com Silva (2012).

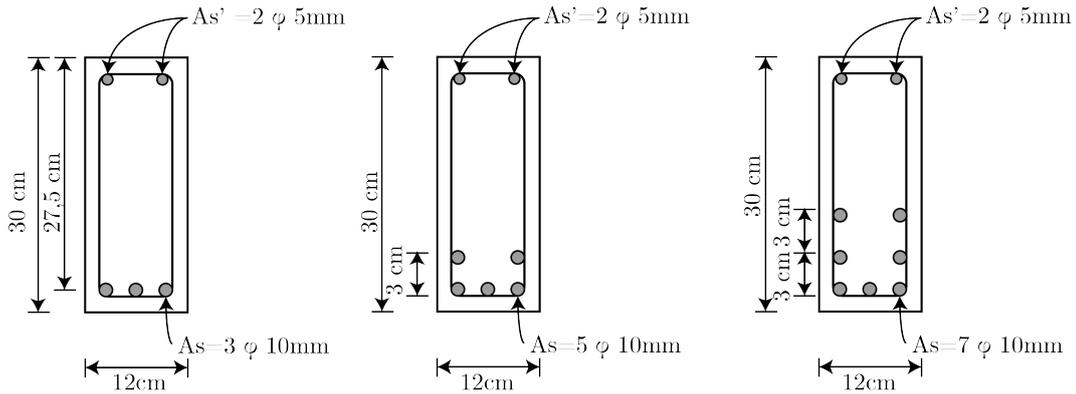


FIGURA 5.2: Seções transversais aplicação 1

TABELA 5.1: Dados da seção - Aplicação 1

Base	$b = 12,0\text{cm}$
Altura	$h = 30,0\text{cm}$
Altura útil	$d = 27,5\text{cm}$
Posição da armadura comprimida	$d' = 2,25\text{cm}$

TABELA 5.2: Dados dos materiais - Aplicação 1

Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{ci} = 2920\text{kN/cm}^2$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 19600\text{kN/cm}^2$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,204\text{kN/cm}^2$
Resistência à compressão do concreto	$f_c = 2,55\text{kN/cm}^2$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 50\text{kN/cm}^2$

Traçaram-se os diagramas momento-curvatura de uma seção (constante) de cada uma das vigas usando as estratégias mencionadas no item 3.5.2 e utilizando o processo de equilíbrio direto de esforços na seção. A seção foi discretizada em 5 faixas e em cada faixa usaram-se 3 pontos de integração. Respostas para $\beta_2 = 1$, $\beta_2 = 0,5$ e para o processo de equilíbrio são calculadas. Nota-se que as curvas obtidas fazendo $\beta_2 = 0,5$ têm uma descontinuidade na passagem do estágio I para o II (vide Figuras 5.3, 5.4 e 5.5). As curvas obtidas através do processo de equilíbrio direto mostraram um comportamento próximo às curvas obtidas com o processo de Ghali, Favre e Elbadry (2002). Ressalta-se que, no processo de equilíbrio direto, usou-se o digrama parábola-retângulo da NBR6118 (2014) e no método de Ghali, Favre e Elbadry (2002) admite-se diagrama tensão deformação linear (interpolação entre o estágio I e o II puro).

Ainda plotou-se as curvas do momento fletor em função da posição da linha neutra e da rigidez flexional em função do momento fletor para todas as vigas. O comportamento das curvas é como descrito em Hsu (1993).

Obtidas as curvas, partiu-se para o processo incremental iterativo não-linear de resolução do

TABELA 5.3: Valores de momento de fissuração, plastificação e último para a viga de 3 φ de 10mm.

Viga 1	Silva(2012)	Presente Trabalho
M_r	641	639,8
M_p	2940	2953.6
M_u	3022	2966.3

TABELA 5.4: Curvaturas referentes aos valores de momento de fissuração, plastificação e último para a viga de 3 φ de 10mm.

Viga 1	Silva(2012)	Presente Trabalho
ψ_r	$8,523 \times 10^{-6}$	$8,550 \times 10^{-6}$
ψ_p	$1,280 \times 10^{-4}$	$1,292 \times 10^{-4}$
ψ_u	$7,798 \times 10^{-4}$	$7,240 \times 10^{-4}$

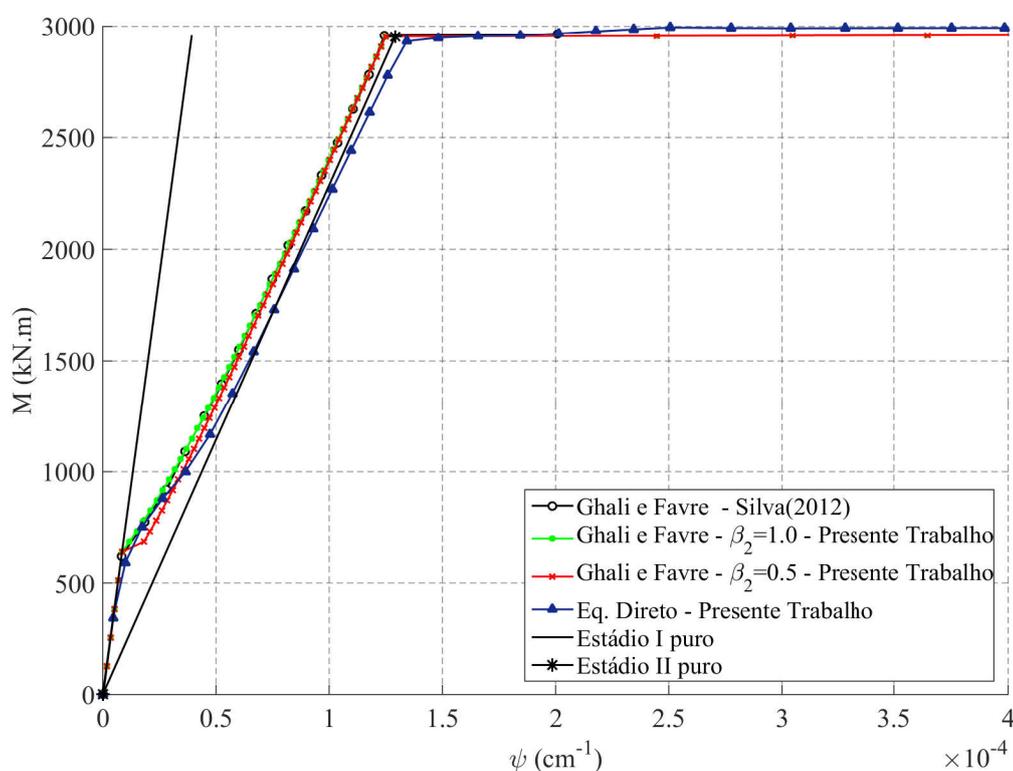


FIGURA 5.3: Curva momento-curvatura para a viga de 3 φ de 10mm.

problema. Plotam-se as soluções para o método de Ghali, Favre e Elbadry (2002), $\beta_2 = 1$ e $\beta_2 = 0,5$, e para o processo de equilíbrio direto. Também mostram-se os resultados obtidos por Silva (2012) (Figuras 5.8, 5.9 e 5.10). O peso próprio foi considerado em todas as análises como uma carga uniformemente distribuída de valor $q = 0,009kN/cm$.

Os resultados da análise, comparados aos experimentais de Álvares (1993), apresentam excelente concordância. Verifica-se, na verdade, nas curvas Px_{u_y} (vide Figuras 5.8, 5.9 e 5.10)

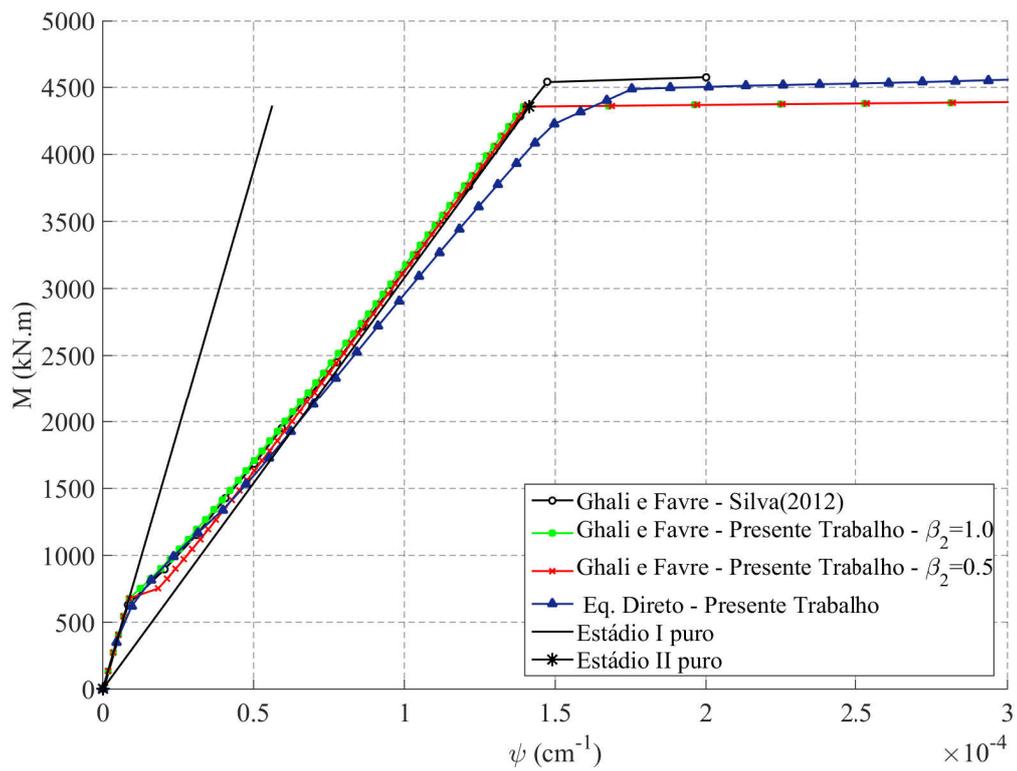


FIGURA 5.4: Curva momento-curvatura para a viga de 5 φ de 10mm.

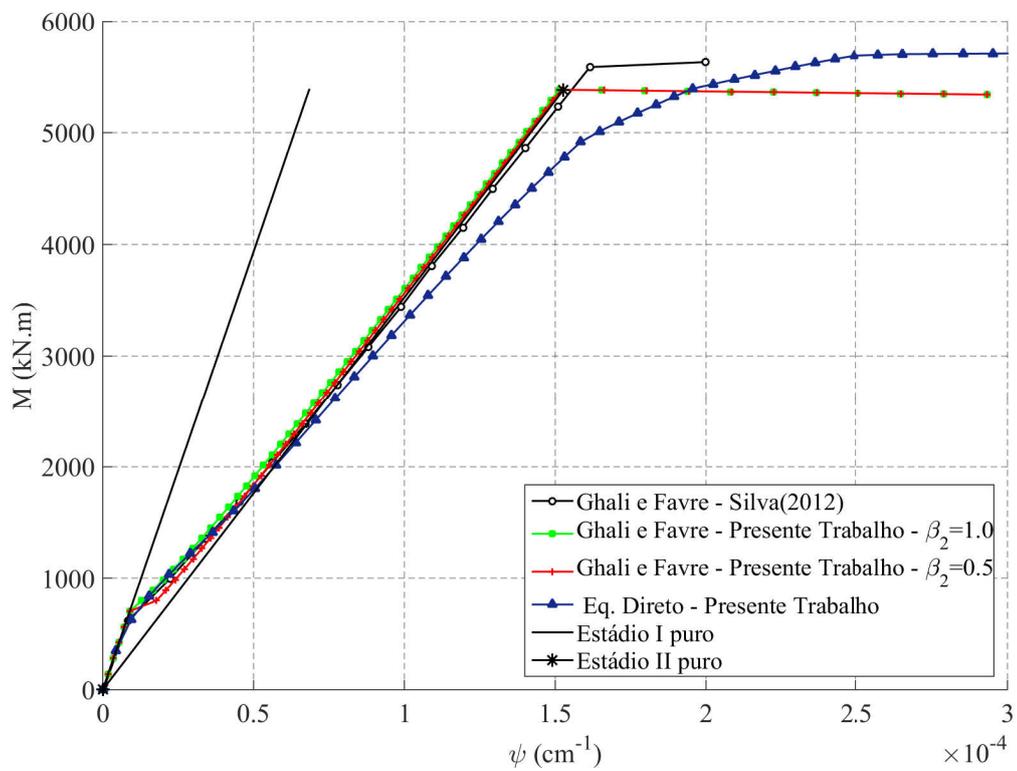


FIGURA 5.5: Curva momento-curvatura para a viga de 7 φ de 10mm.

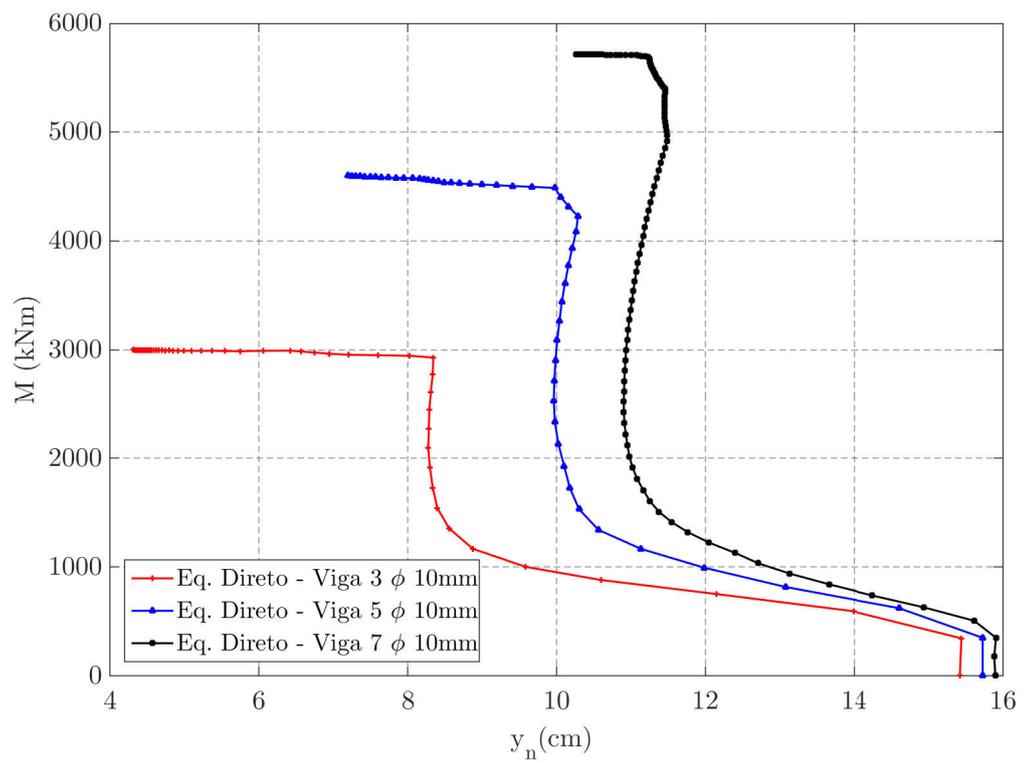


FIGURA 5.6: Momento fletor em função da posição da linha neutra.

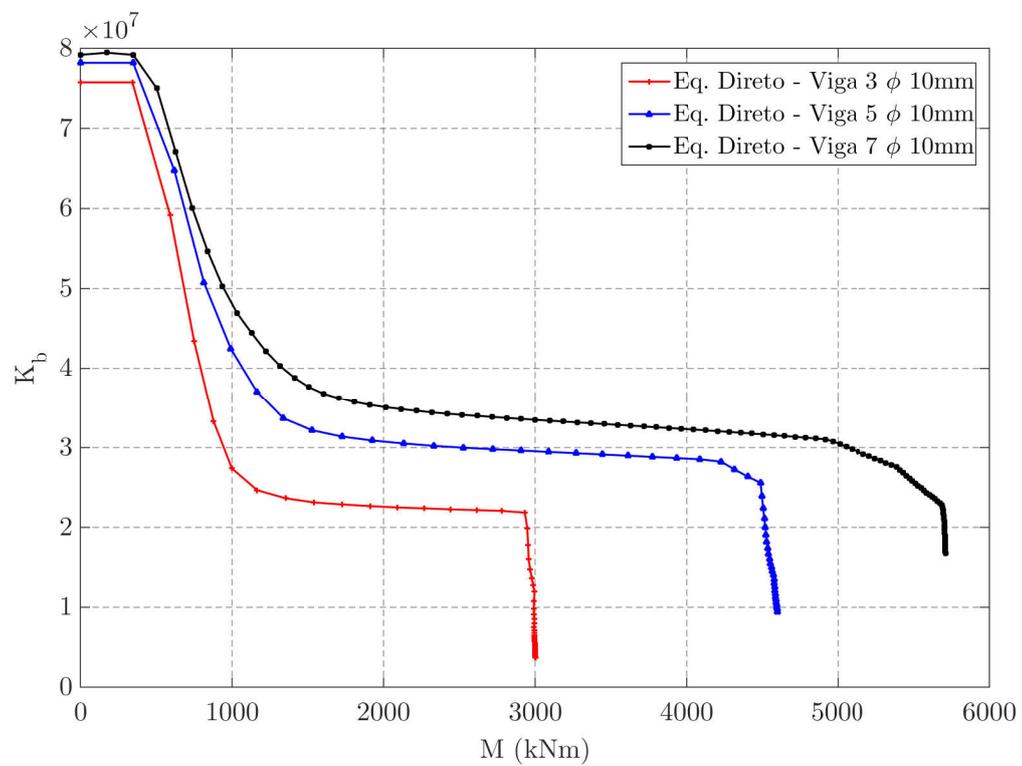


FIGURA 5.7: Rigidez Flexional em função do momento fletor.

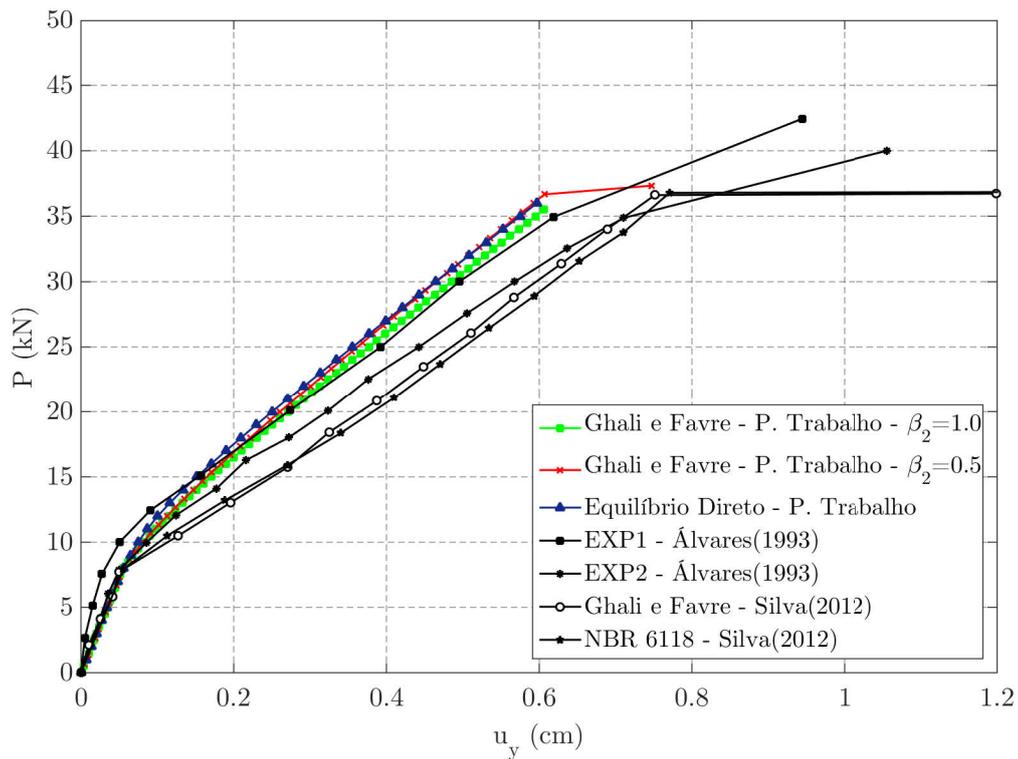


FIGURA 5.8: Deslocamento vertical no meio da viga com 3 φ de 10mm.

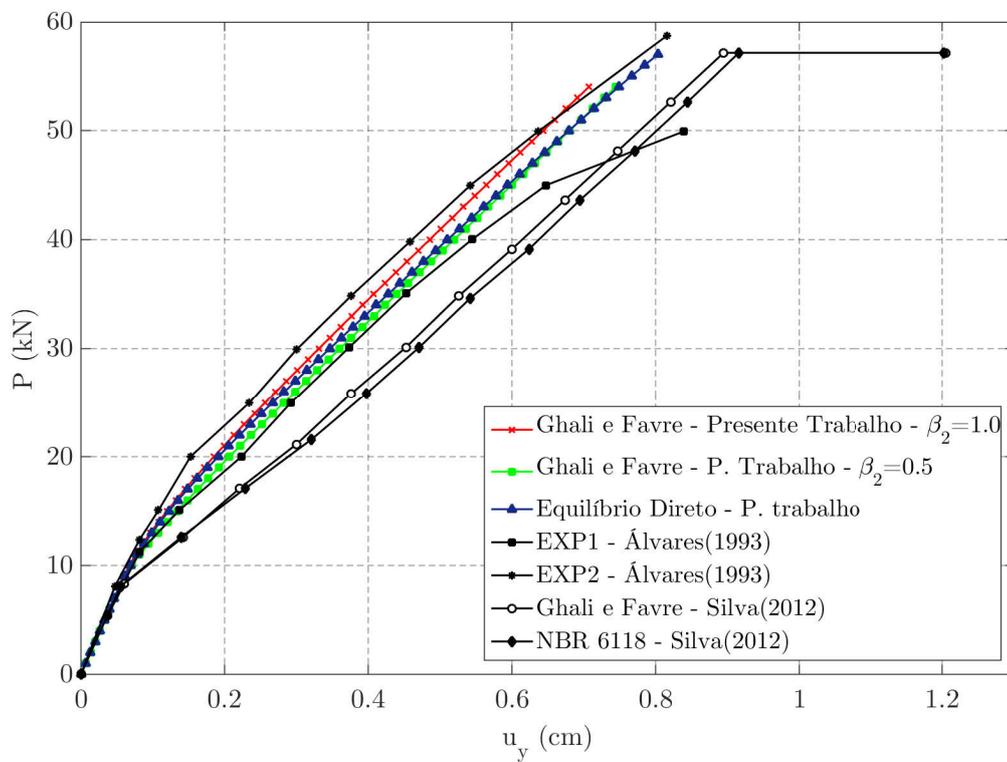


FIGURA 5.9: Deslocamento vertical no meio da viga com 5 φ de 10mm.

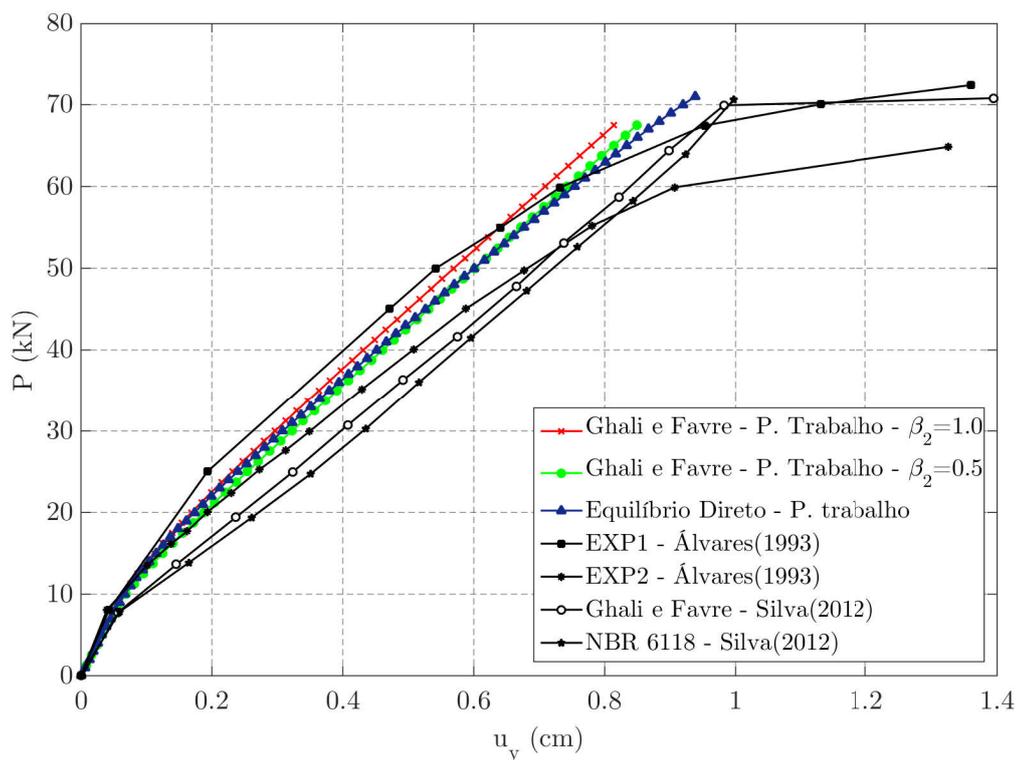


FIGURA 5.10: Deslocamento vertical no meio da viga com 7φ de 10mm.

pouca diferença entre a utilização do coeficiente $\beta_2 = 0,5$ ou $\beta_2 = 1,0$. Também observa-se ótimo desempenho do processo de equilíbrio direto implementado. Ressalta-se que, em Silva (2012), um processo simplificado de cálculo de deslocamentos na viga (integrando-se duplamente a curvatura) é adotado, e respostas menos precisas são obtidas. Ademais, diferentemente do presente trabalho, no processo de cálculo adotado por Silva (2012), não se incluem efeitos de 2ª ordem.

5.2 Aplicação 2

Para testar o modelamento de seções não usuais, quaisquer, estudou-se uma viga de seção I de concreto armado, ensaiada por Neves (2000). A viga foi dividida em 12 elementos de mesmo tamanho e suas dimensões encontram-se na Figura 5.11 e na Tabela 5.5. No experimento foi aplicada a carga P de $60kN$ em incrementos de $5kN$. No presente trabalho, foram aplicados incrementos de $1kN$. Além disso foi considerado o peso próprio como uma carga uniformemente distribuída $q = 0.0064746kN/m$.

Adverte-se que algumas propriedades dos materiais foram adotadas segundo Nogueira (2010), por falta de referências em Neves (2000). Ademais, neste trabalho, foi adotado um valor de

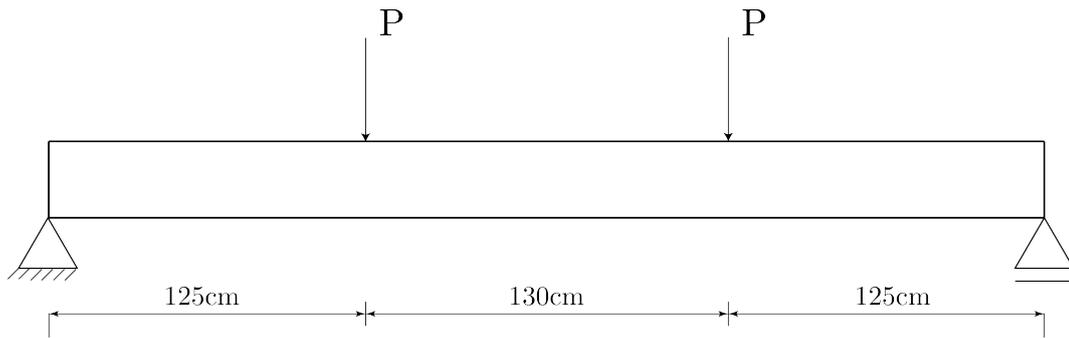


FIGURA 5.11: Viga bi apoiada e carregamento - Aplicação 2

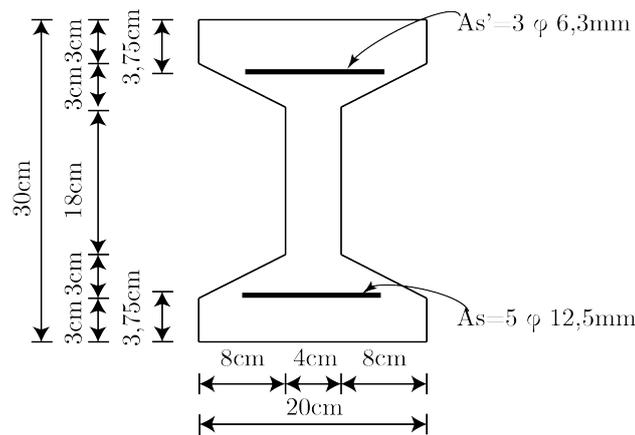


FIGURA 5.12: Seção transversal - Aplicação 2

TABELA 5.5: Dados da seção - Aplicação 2

Base	$b = 20,0\text{cm}$
Altura	$h = 30,0\text{cm}$
Altura útil	$d = 26,25\text{cm}$
Posição da armadura comprimida	$d' = 3,75\text{cm}$

TABELA 5.6: Dados dos materiais - Aplicação 2

Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{ci} = 2963,2\text{kN/cm}^2$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 17789,0\text{kN/cm}^2$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,28\text{kN/cm}^2$
Resistência média à compressão do concreto	$f_{cm} = 2,80\text{kN/cm}^2$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 50\text{kN/cm}^2$

cobrimento da armadura longitudinal em concordância com a NBR6118, 2014 (vide Figura 5.12).

Primeiramente, traçou-se a curva momento-curvatura utilizando o modelo de Ghali, Favre e Elbadry (2002) e o processo de equilíbrio direto desenvolvido neste trabalho (vide Figura 5.13). Para isso, a seção foi fornecida segundo uma malha de 12 elementos e 12 nós, dividida

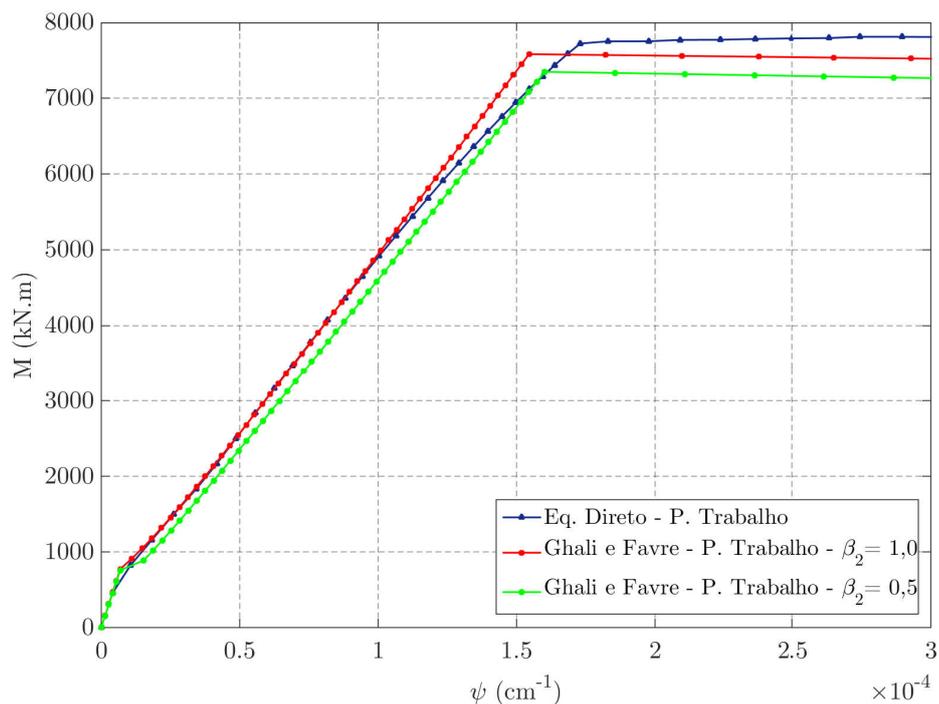


FIGURA 5.13: Curva momento-curvatura - aplicação 2.

em nove faixas e em cada faixa usaram-se 3 pontos de integração. Assim como na Aplicação 1, também plotou-se a curva do momento resistente em função da posição da linha neutra e a curva da rigidez flexional em função do momento fletor atuante (Figura 5.14).

Discretizando-se a viga em 12 elementos, obteve-se a trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 5.16, em que plota-se a carga em função do deslocamento vertical no nó central do modelo.

Novamente, os diagramas momento-curvatura indicados na Figura 5.13 indicam boa concordância entre o processos de Ghali-Favre e de equilíbrio direto. Da comparação com os resultados experimentais por Neves (2000), vê-se que com o processo de equilíbrio direto proposto, a resposta obtida se aproxima mais da experimental.

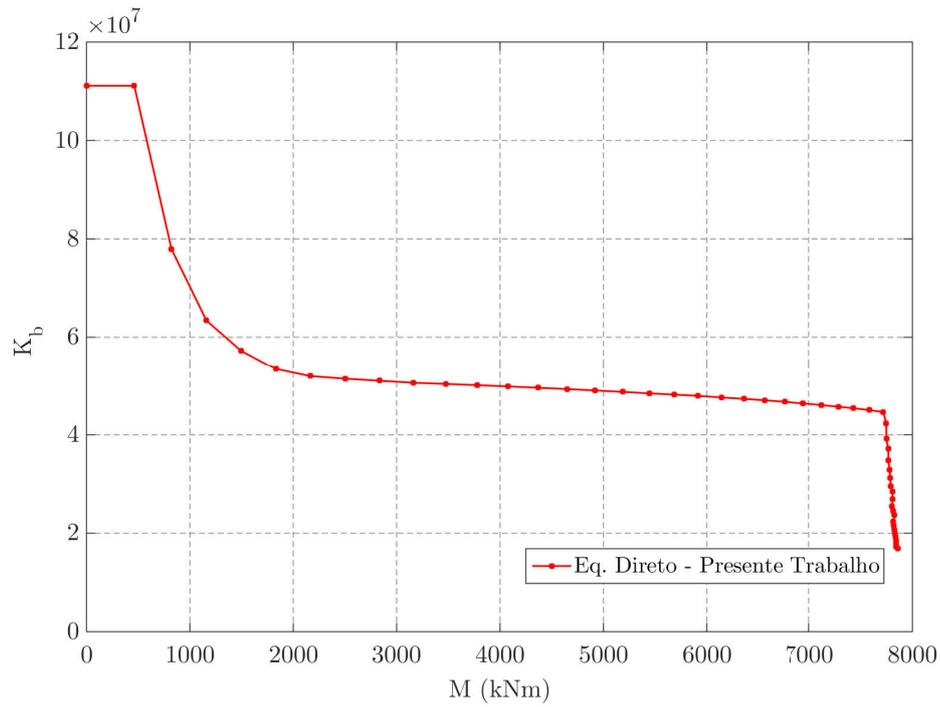


FIGURA 5.14: Rigidez flexional versus momento fletor - aplicação 2.

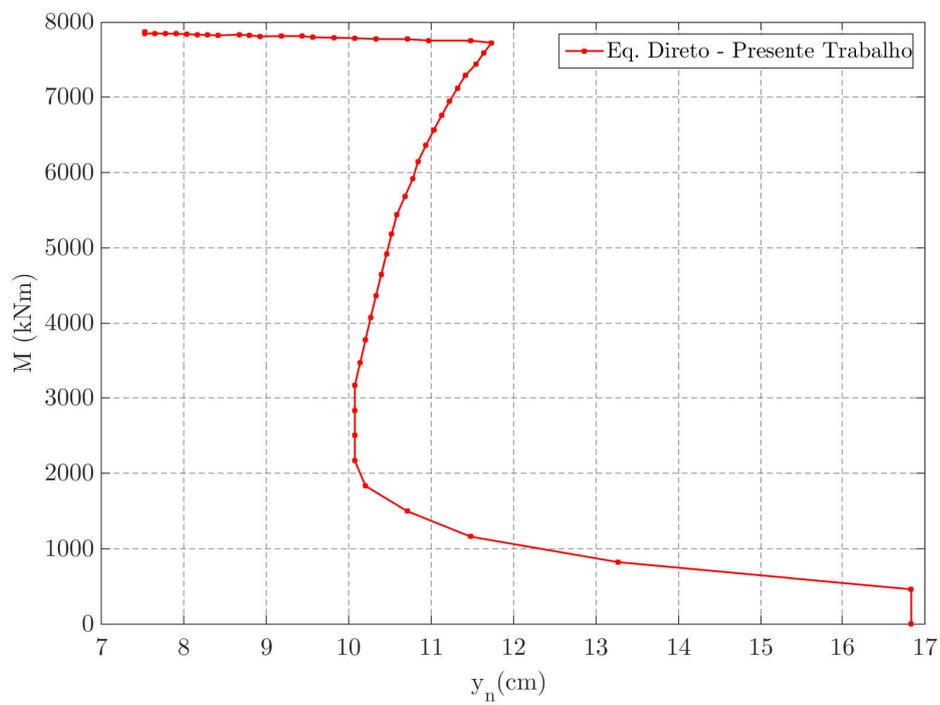


FIGURA 5.15: Momento fletor versus posição da linha neutra - aplicação 2.

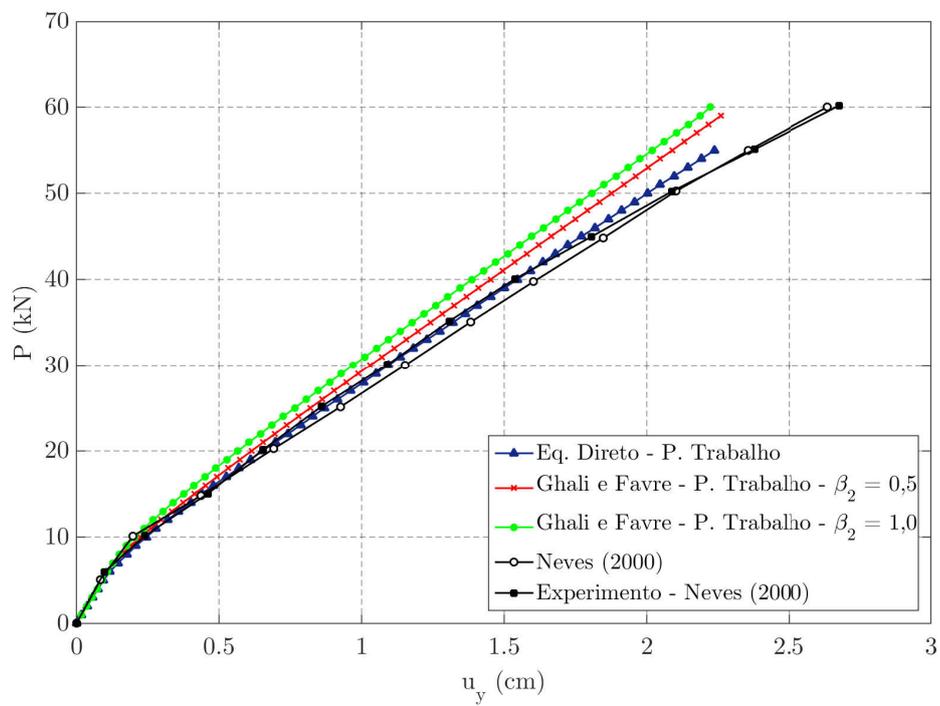


FIGURA 5.16: Deslocamento vertical do meio do vão da viga analisada.

5.3 Aplicação 3

Afim de validar o processo de degradação da rigidez axial implementado, estudou-se o seguinte pilar (Figura 5.17), sujeito a compressão centrada. Uma série de pilares foi ensaiada por Razvi e Saatcioglu (1989), nos quais diferentes espaçamentos entre os estribos são considerados. Para fins de comparação, escolheram-se, entre os pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989), aqueles com espaçamento entre estribos de $35mm$ (pilar nº 3 em Razvi e Saatcioglu (1989)) e de $75mm$ (pilar nº 4 em Razvi e Saatcioglu (1989)). As características da seção transversal estão na Figura 5.17, e as características dos materiais, na Tabela 5.7

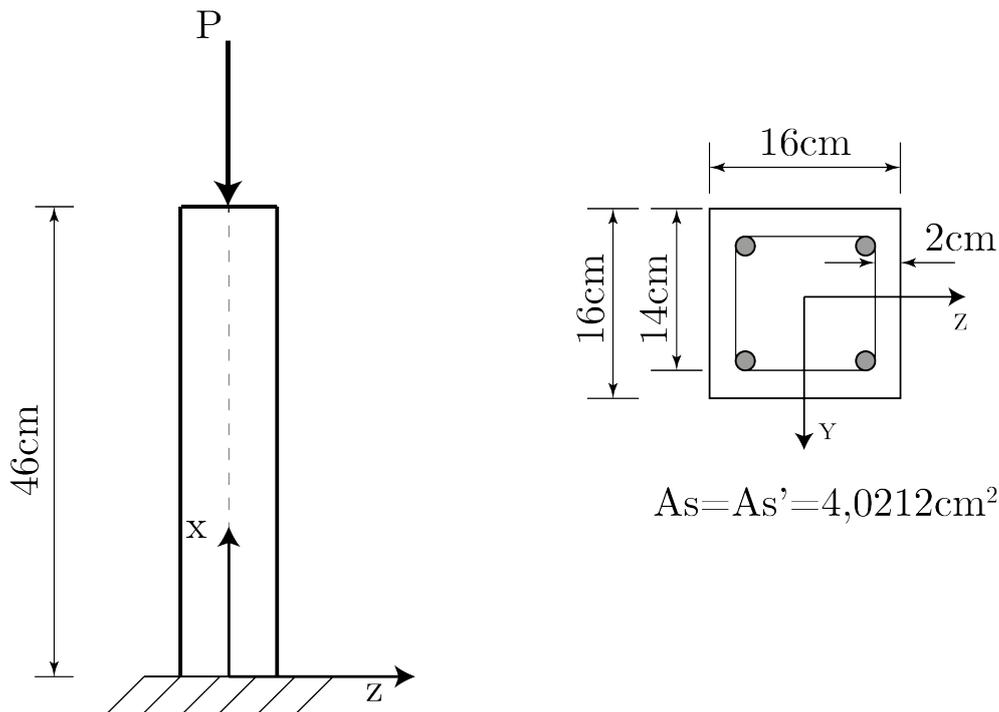


FIGURA 5.17: (a) Pilar - Aplicação 3, (b) Seção Transversal

TABELA 5.7: Dados dos materiais - Aplicação 3

Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{ci} = 3360kN/cm^2$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 21000kN/cm^2$
Resistência do concreto à tração direta	$f_{ct} = 0,32kN/cm^2$
Resistência média à compressão do concreto	$f_{cm} = 3,20kN/cm^2$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 47kN/cm^2$

O pilar foi discretizado em 7 elementos e, em cada elemento, utilizaram-se 3 pontos de integração. Na Figura 5.19, plota-se a carga P em função da deformação ε_c , no meio do pilar, na seção que se encontra no segundo ponto de integração do quarto elemento. Experimentalmente, para medir a deformação no centro do pilar Razvi e Saatcioglu (1989) colocaram um LVDT (linear variable differential transformer) em cada face da coluna. Neste exemplo,

utilizaram-se as curvas tensão-deformação no concreto da NBR6118 (2014), do Eurocode2 (1999) e a curva fornecida por Razvi e Saatcioglu (1989) (vide Figura 5.18). Ressalta-se que a seção foi dividida em 5 faixas e, em cada faixa, consideraram-se 3 pontos de integração de Gauss.

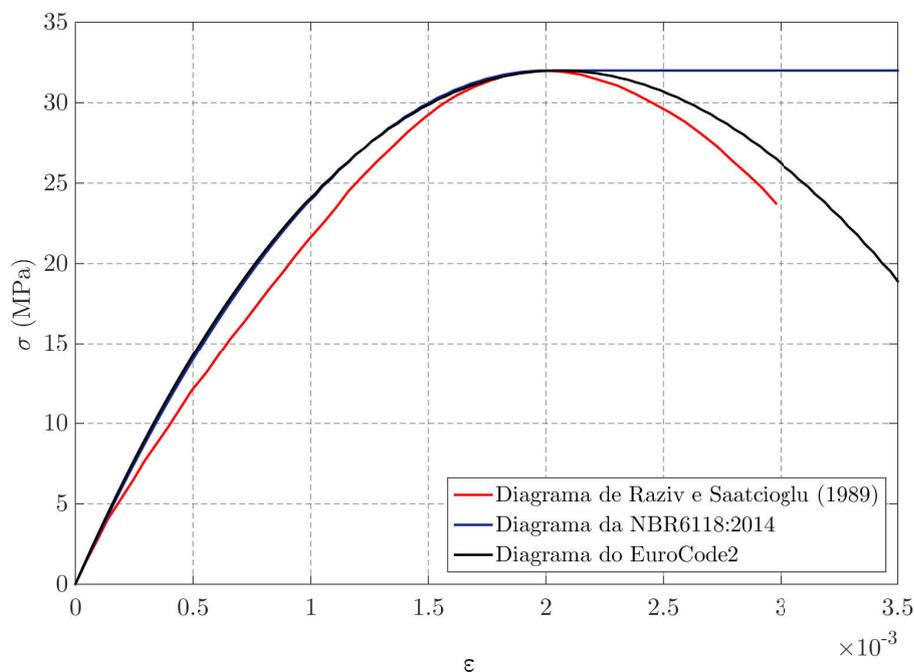


FIGURA 5.18: Carga em função da deformação no centro do pilar

Nos gráficos da Figura 5.19, a comparação com os resultados experimentais indicam maior rigidez do modelo de análise pelo processo de equilíbrio direto, principalmente nos níveis mais elevados de carga. Para visualizar mais claramente as curvas $P-\epsilon_c$, apresentam-se as curvas amplificadas na Figura 5.20. Segundo Razvi e Saatcioglu (1989), flambagem das barras longitudinais e rigidez degradada de forma desigual no pilar causam excentricidade nos níveis de solicitação próximos à carga máxima do ensaio. Nesses níveis de carga, Razvi e Saatcioglu (1989) também mencionam que as medidas feitas pelo LVDT (linear variable differential transformer) apresentam diferenças consideráveis.

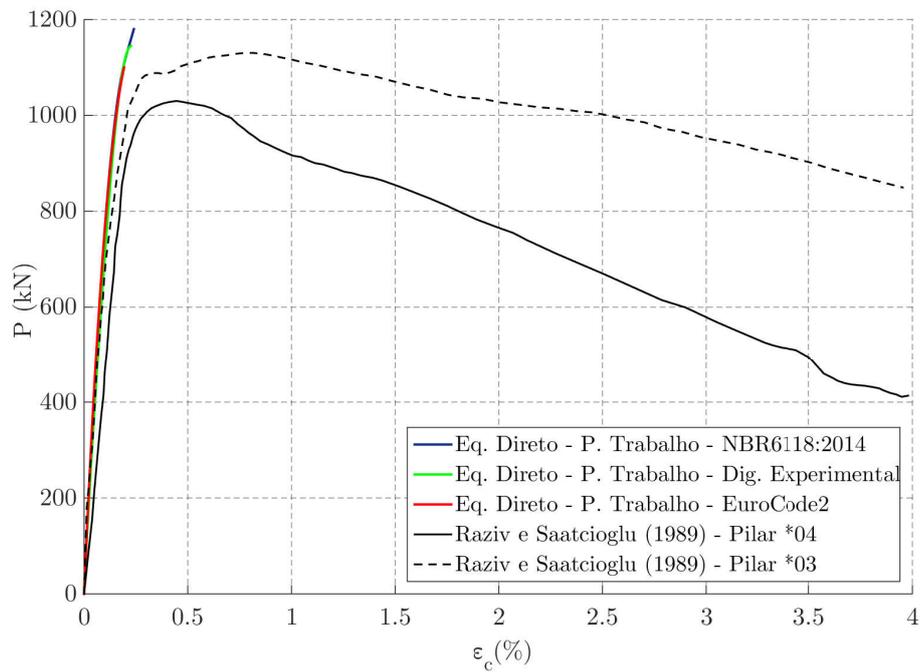


FIGURA 5.19: Carga em função da deformação no centro do pilar

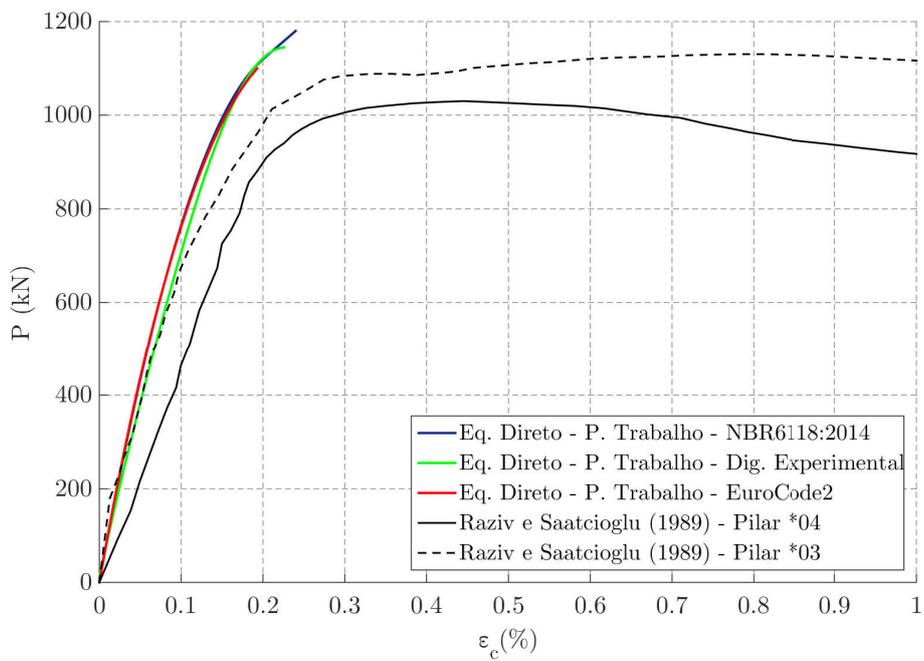


FIGURA 5.20: Carga em função da deformação no centro do pilar

5.4 Aplicação 4

A aplicação 04 trata de uma coluna sujeita a uma carga P com excentricidade de $1,5\text{cm}$ analisada em S. Bratina (2004). Este problema tem sido considerado por vários pesquisadores como um problema padrão (benchmark) para testar modelos de análise de elementos em concreto armado com a consideração de não-linearidades física e geométrica. As características da coluna, da discretização e da seção transversal estão na Figura 5.21. Esta coluna foi ensaiada por Espion (1993), que fornece os dados dos materiais presentes na Tabela 5.8. Para averiguação inicial do comportamento da seção sob diversos níveis de carga axial, plotam-se na Figura 5.22 as relações momento-curvatura para cargas de 0 a 400 kN , em incrementos de 100 kN . Nota-se que o trecho linear da relação aumenta com o aumento da carga axial.

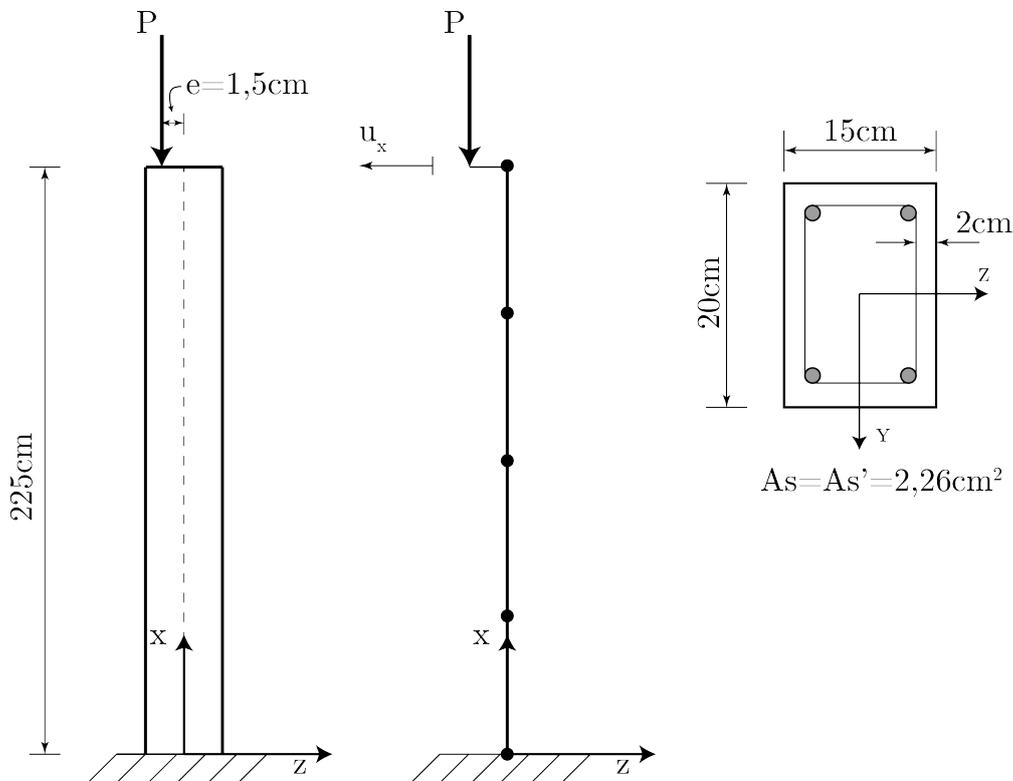


FIGURA 5.21: (a) Pilar - Aplicação 4, (b) Discretização e (c) Seção Transversal

TABELA 5.8: Dados dos materiais - Aplicação 4

Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto	$E_{cm} = 3360\text{kN/cm}^2$
Módulo de elasticidade do aço	$E_s = 20000\text{kN/cm}^2$
Resistência à compressão do concreto	$f_{cm} = 3,83\text{kN/cm}^2$
Resistência ao escoamento do aço	$f_y = 46,5\text{kN/cm}^2$

Para verificação da resposta, plota-se a trajetória de equilíbrio na Figura 5.23, em que se comparam os resultados experimentais por Espion (1993) e numéricos por S. Bratina (2004)

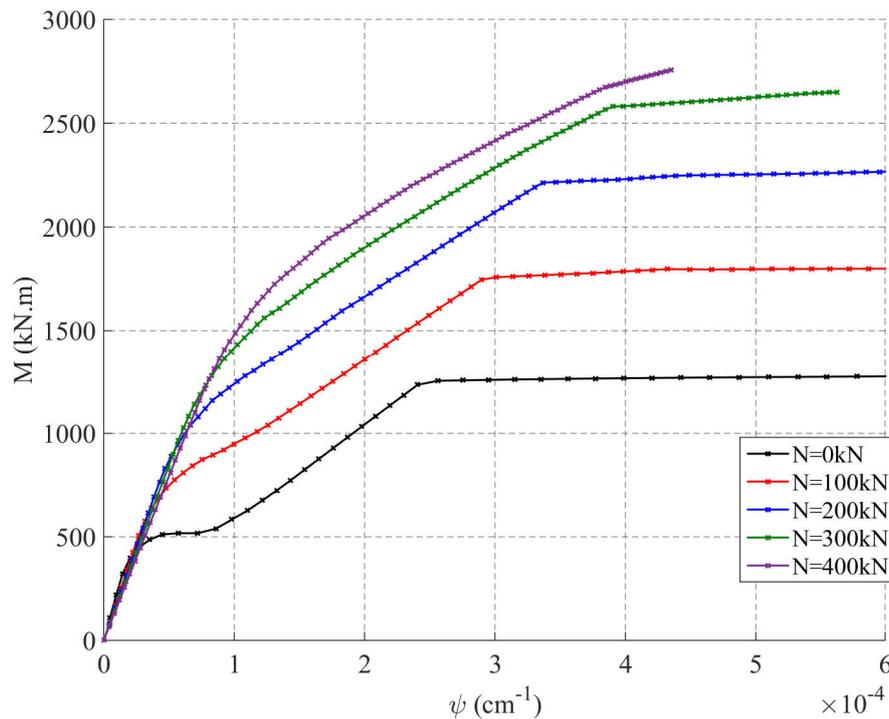


FIGURA 5.22: Curva momento curvatura para diversas forças normais solicitantes

e pelo processo de equilíbrio direto proposto neste trabalho. Nas análises nesta dissertação, consideram-se tanto o diagrama tensão-deformação no concreto segundo a NBR6118 (2014) como segundo o Eurocode2 (1999). O grau de liberdade de controle (onde plotava-se a resposta) foi o horizontal do nó superior da coluna. Na análise aqui, com o processo de equilíbrio direto, consideraram-se 4 faixas e 3 pontos de integração ao longo da altura da seção, enquanto na análise apresentada em S. Bratina (2004), 5 faixas e 10 pontos de integração. Como vê-se excelente concordância com os resultados experimentais foi verificada.

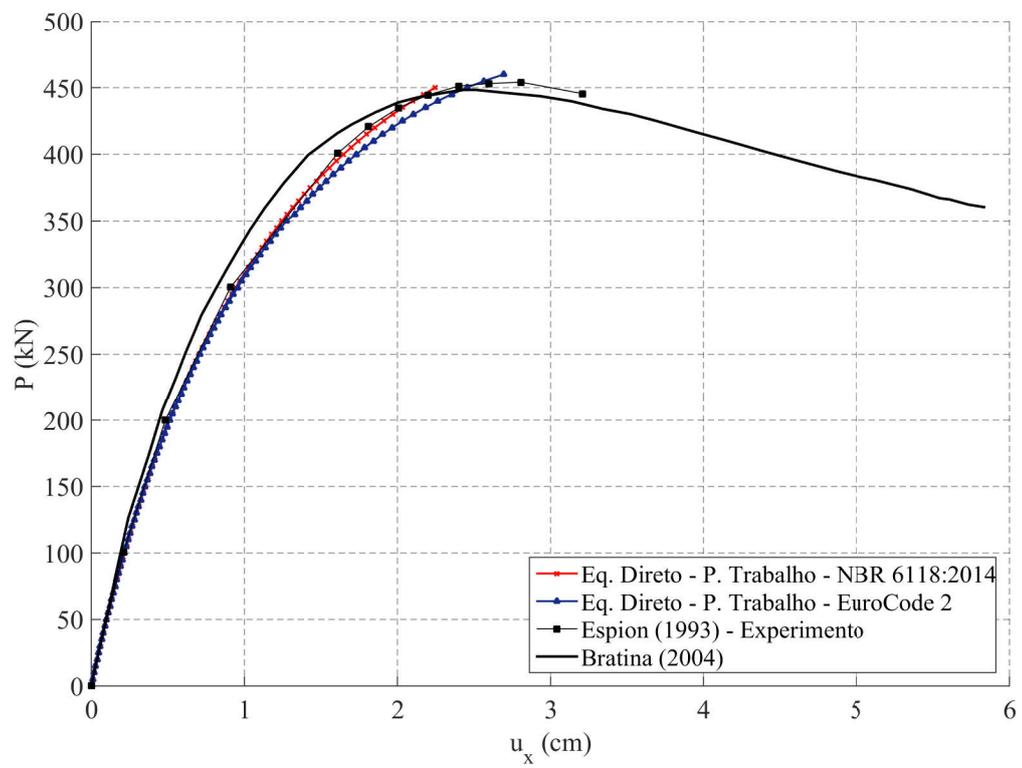


FIGURA 5.23: Carga P pelo deslocamento horizontal no topo do pilar

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, o objetivo foi construir estratégias para a análise não-linear física e geométrica de pórticos planos em concreto armado, com seções quaisquer e rigidez variável ao longo do elemento. Para modelar a variação de rigidez, inclusive em elementos de concreto armado, onde, devido à fissuração, a rigidez é naturalmente variável em função do nível de solicitação, emprega-se a formulação especial do Método da Rigidez Direta apresentada no capítulo 2, que permite a obtenção da matriz de rigidez do elemento de pórtico nas situações mais gerais possíveis de variação de características físicas e geométricas. Particularmente para elementos em concreto armado, adotou-se uma estratégia baseada no equilíbrio direto de esforços para determinar os parâmetros de rigidez flexional, k_b e axial, k_a , nas seções do elemento. Além dessa estratégia de equilíbrio direto, também empregou-se o método de Ghali-Favre para medir essas rigidezes.

No que tange às estratégias para a consideração da não linearidade física, ressalta-se que, o modelo de Ghali e Favre limita-se exclusivamente a casos em que haja tração envolvida. Desse modo, o processo restringe-se aos casos de tração pura, flexão simples e de flexo-tração com resultante de força normal dentro do núcleo central do elemento. Nesses casos, verifica-se porém que o modelo fornece bons resultados. Já no modelo de equilíbrio direto da seção transversal, a degradação da rigidez é feita de forma geral, diretamente a partir da consideração do diagrama tensão-deformação no aço e no concreto, de modo que o processo se aplica a todas as situações possíveis, quer dizer, também nos casos em que as seções do elemento estejam integralmente sob tensão de compressão (flexo-compressão de pequena excentricidade). Vê-se que a implementação das faixas de integração ao longo da seção, necessárias ao cálculo do esforços resistentes, apresenta bom desempenho, demandando em geral não mais que três pontos de integração para convergência. Note que, por ocasião da implementação das faixas de integração, a geometria da seção transversal é descrita por meio de uma malha de elementos para discretização do contorno, que possibilita modelar seções de forma geométrica quaisquer.

Nas aplicações realizadas percebe-se a eficiência dos modelos desenvolvidos. Nos problemas 1

e 2 foram modeladas vigas sujeitas a cargas pontuais e ao peso próprio. Verifica-se que os resultados via Ghali e Favre e via equilíbrio direto da seção apresentam excelente concordância com os experimentais. Atenção especial dá-se à aplicação 2, em que se faz a modelagem de uma seção I em concreto armado, mostrando a eficiência do processo proposto na consideração de seções quaisquer. Na aplicação 3 foi modelado um pilar sujeito a compressão centrada. Ressalta-se, nessa aplicação, a comparação feita entre os diagramas tensão-deformação implementados e o diagrama fornecido pelo trabalho de Razvi e Saatcioglu (1989). Nota-se boa correspondência entre os resultados obtidos com os diversos diagramas tensão-deformação. Em geral, neste problema, salvo o trecho da trajetória de equilíbrio nas proximidades da carga última do ensaio (em que se observam, nos ensaios, flambagem longitudinal das barras longitudinais e degradação não uniforme de material), há boa concordância entre os resultados experimentais e aqueles obtidos com o processo proposto de equilíbrio direto. Aqui, o modelo de degradação segundo Ghali-Favre não se aplica. Na aplicação 4, destaca-se o funcionamento da estratégia para traçar as curvas momento-curvatura, que foram obtidas para diversos níveis de carga axial (Figura 5.22). Vê-se aqui excelente concordância entre a trajetória de equilíbrio obtida experimentalmente por Espion (1993) e pelo presente processo de equilíbrio direto proposto no trabalho. Menciona-se que não foi possível obter a trajetória completa de equilíbrio nos problemas 3 e 4 porque o método de solução não-linear empregado, de Newton-Raphson com controle de carga, não possibilita a passagem por um ponto limite de carga.

Por fim, conclui-se que a estratégia adotada neste trabalho, na simulação da rigidez variável de elementos estruturais com seções geométricas quaisquer, combinada com o processo proposto por Ghali e Favre (quando possível a sua aplicação) e com o processo de equilíbrio direto da seção, mostrou-se muito eficaz para a consideração da não-linearidade física e geométrica de estruturas em concreto armado. Sendo estes processo fundamental para o projeto de estruturas em concreto armado, as quais constituem-se, pelo processo de fissuração, essencialmente de elementos com rigidez variável.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

- Inclusão dos efeitos da não-linearidade física na rigidez ao cisalhamento k_s ;
- Extensão da base computacional para interação solo-estrutura em aço e concreto armado via formulação acoplada FEM-BEM;
- Extensão dos processos não-lineares (físicos e geométricos) discutidos nesta pesquisa ao módulo de análise de estruturas espaciais do programa NAESY;
- Análise de estruturas com ligações semirrígidas.

Apêndice A

Apêndice A

A.1 Propriedades nos Estádios I e II

Nesta seção, apresentam-se processos para cálculo das propriedades geométricas de seções transversais de concreto armado, admitindo-se que a seção encontra-se em dois estados distintos, a saber, nos estádios I e II. No estágio I admite-se que a seção esteja íntegra, não fissurada. Já no estágio II, despreza-se o concreto tracionado, situado abaixo da linha neutra (Figura A.1).

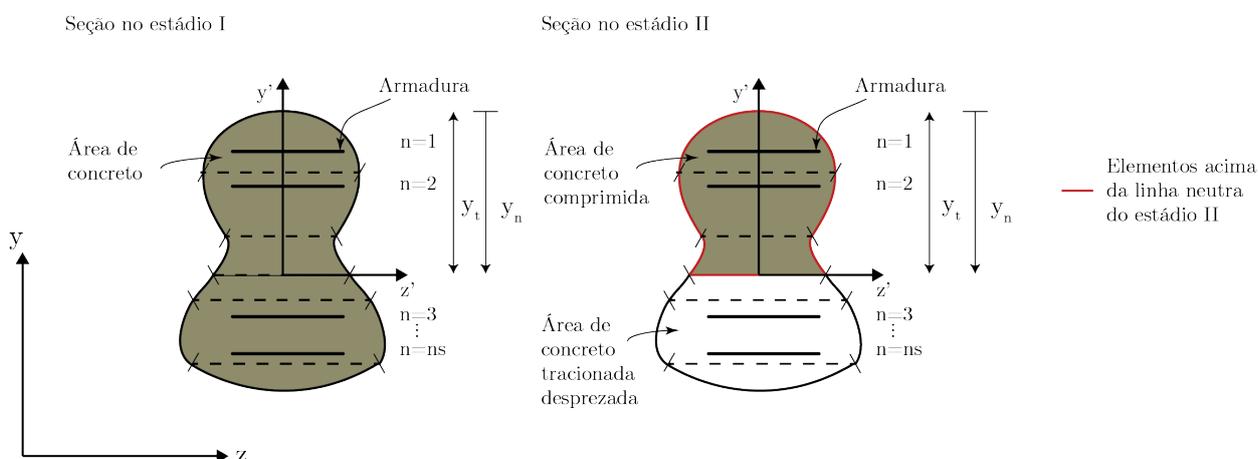


FIGURA A.1: Seção transversal - Estádios I e II

A.1.1 Linha Neutra

A linha neutra ou eixo neutro é definida pelos pontos da seção transversal com deformação normal nula. No caso de flexão simples, vê-se que o momento estático da seção em relação a este eixo é zero. Neste trabalho, parte-se deste princípio para a obtenção da linha neutra nos estádios I e II.

Linha Neutra - Estádio I

Como mencionado acima, sabe-se que na flexão simples o momento estático em relação a posição da linha neutra é zero e que no Estádio I a seção está íntegra. Portanto a expressão para o momento estático fica

$$M_{sI} = \int_0^{y_t} y dA + \alpha \sum_{j=1}^n [A_{sj} y_{sj}] + \int_{y_b}^0 -y dA = 0 \quad , \quad (\text{A.1})$$

sendo n o número de camadas de armadura, A_{sj} a área de aço da camada, y_{sj} a distância da camada de aço até a posição da linha neutra e α é o coeficiente de homogeneização, que pode ser calculado por

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c} \quad , \quad (\text{A.2})$$

onde E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço e E_c é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

Linha Neutra - Estádio II

No estádio II, a área de concreto situada abaixo da linha neutra encontra-se fissurada devido aos esforços de tração e, desta forma, despreza-se a contribuição da área tracionada no cálculo do momento estático. Sua expressão fica

$$M_{sII} = \int_0^{y_t} y dA + \alpha \sum_{j=1}^n [A_{sj} y_{sj}] = 0 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Para seções quaisquer, as Equações A.1 e A.3 devem ser resolvidas por tentativa. Deste modo foi implementado um esquema iterativo para obtenção das posições de linha neutra nos estádios I e II. Este algoritmo procura a posição da linha neutra sob condição de que o momento estático da seção se anule. O algoritmo proposto é o mesmo para os dois estádios, e denota-se no estádio I, $M_s = M_{sI}$, e no estádio II, $M_s = M_{sII}$.

Algoritmo para obtenção da linha neutra

1. Arbitra-se como posição inicial da l.n., $y_n^0 = h/2$, onde $h/2$ é a metade da altura da seção. Então para iterações $i = 1, 2, \dots$, até a convergência, para uma dada tolerância, calcula-se o momento estático da seção em concreto armado, M_s , em relação à l.n.

- Se $|M_s| \leq tol$ fim $y_n = y_n^i$
 - Se $|M_s| > tol$ passo 3
2. Determina-se a posição da l.n. na próxima iteração, y_n^{i+1} , pela expressão
- Se $M_s > tol \rightarrow y_n^{i+1} = y_n^i - \frac{y_n^0}{2^{it}}$
 - Se $M_s < tol \rightarrow y_n^{i+1} = y_n^i + \frac{y_n^0}{2^{it}}$
3. Translação da origem do sistema de referência para a nova posição da l.n., y_n^{i+1} , e atualização das coordenadas dos elementos que definem o contorno da seção (usada no cálculo de M_s , vide Figura A.1) e volte para o passo 2.

Ao fim do processo, tem-se a linha neutra no estádio I ou no estádio II de acordo com a expressão de M_s considerada. A linha neutra no estádio I será designada por ynI e no estádio II, por $ynII$.

A.1.2 Área e Momento de Inércia da Seção

A área da seção de concreto (sem aço) e momento de inércia foram calculados via integrais de contorno. A Figura A.2 mostra a malha de contorno da seção transversal e o detalhe de cada elemento da malha. Para o estádio I a seção foi considerada íntegra, ou seja, toda área geométrica da seção foi contabilizada. Já no estádio II, apenas a área acima da linha neutra foi contabilizada vide Figura A.1. As expressões integrais de contorno empregadas são mostradas a seguir

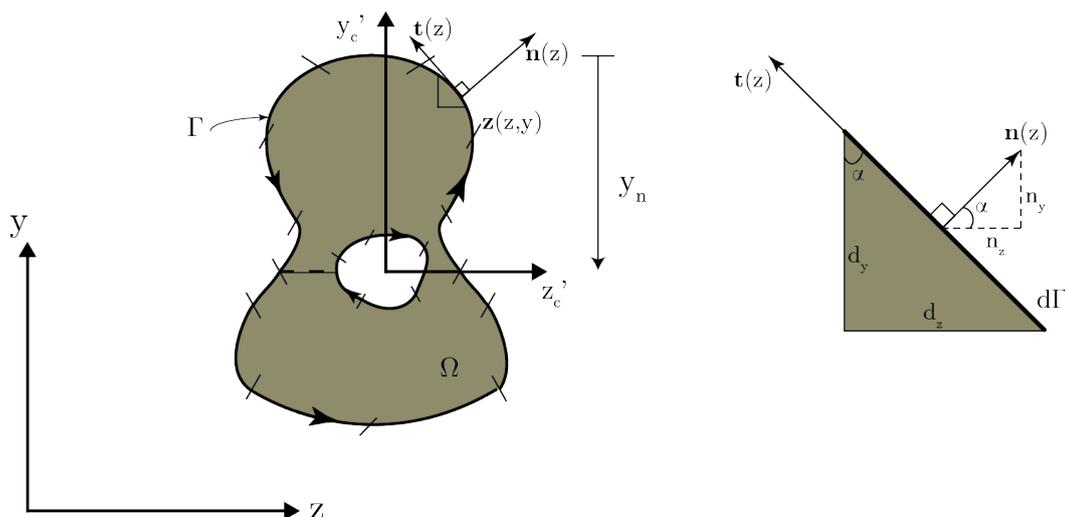


FIGURA A.2: Malha de contorno e elemento genérico de contorno

$$A_c = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(x)}{\partial x} = \oint_{\Gamma} x \mathbf{n}_x d\Gamma \quad , \quad (\text{A.4})$$

A área total transformada (aço + concreto) é dada por

$$A_t = A_c + \alpha \sum_{j=1}^n A_{sj} \quad , \quad (\text{A.5})$$

sendo A_t a área da seção equivalente no estágio I ou no estágio II de acordo com os elementos considerados na integração da Equação A.4. O momento de inércia em torno de z é calculado de forma similar como segue

$$I_c = \int_{\Omega} y^2 d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = \oint_{\Gamma} xy^2 \mathbf{n}_x d\Gamma \quad , \quad (\text{A.6})$$

sendo que no estágio I todos elementos da malha de contorno são considerados na integração. Já no estágio II apenas os elementos acima da linha neutra serão considerados. O momento de inércia total (aço + concreto) é dado por

$$I_t = I_c + \alpha \sum_{j=1}^n A_{sj} y_s j \quad . \quad (\text{A.7})$$

A área da seção considerando o estágio I é designada, A_I , e no estágio II, A_{II} . De forma análoga para os momentos de inércia tem-se I_I e I_{II}

A.2 Esforços nos Estádios I e II

Para utilização do modelo de Ghali e Favre é necessário determinar os pontos do diagrama momento-curvatura que são o momento de início de fissuração da seção, M_r , a curvatura correspondente a este momento, ψ_r , o momento de escoamento das armaduras, M_y e a curvatura correspondente, ψ_p . Também precisa-se determinar o valor do esforço normal de fissuração, N_r , e a deformação axial correspondente, ε_r . Para isso, utilizam-se as propriedades geométricas determinadas acima.

A.2.1 Momento de início de fissuração, M_r

O momento de fissuração é obtido fazendo

$$M_r = \alpha_e W_{bot} f_{ct} \quad , \quad (\text{A.8})$$

sendo α_e um coeficiente que relaciona a resistência do concreto obtida no ensaio de tração com a resistência à flexão e W_{bot} o módulo elástico, calculado como $W_{bot} = I_I / (h - y_{nI})$. De posse de M_r pode-se obter ψ_r segundo a relação

$$\psi_r = \frac{M_r}{E_c I_I} \quad . \quad (\text{A.9})$$

A.2.2 Momento de plastificação das armaduras, M_p

O momento de plastificação das armaduras é dado por

$$M_p = \frac{f_y k I_{II}}{\alpha (d - y_{nII})} \quad , \quad (\text{A.10})$$

sendo $f_y k$ a tensão de escoamento da armadura e d a altura útil da camada mais externa das armaduras. Ressalta-se que esta expressão contabiliza apenas o início do escoamento da armadura, ou seja, quando existem mais de uma camada de aço o modelo não capta este fenômeno. Assim, com o valor de M_p calcula-se ψ_p

$$\psi_p = \frac{M_p}{E_c I_{II}} \quad . \quad (\text{A.11})$$

A.2.3 Normal de início de fissuração, N_r

Determina-se o normal de fissuração e a deformação axial correspondente pelas expressões

$$N_r = f_{ct} A_I \quad , \quad (\text{A.12})$$

$$\varepsilon_r = \frac{N_r}{E_c A_I} \quad . \quad (\text{A.13})$$

Apêndice B

Apêndice B

B.1 Determinação do Momento Último de uma Seção de Concreto Armado

Como mencionado, admitiu, no modelo de Ghali e Favre, que o estágio III seja descrito uma relação linear (vide Figura B.1). Para isso foi necessário determinar o momento último da seção. Uma estratégia similar ao processo de equilíbrio direto foi empregada, no entanto, aqui, a deformação na fibra mais comprimida de concreto foi fixada em $3,5\%$ e como trata-se de flexão simples, $|N_d| = 0,0$. Abaixo descreve-se o algoritmo implementado

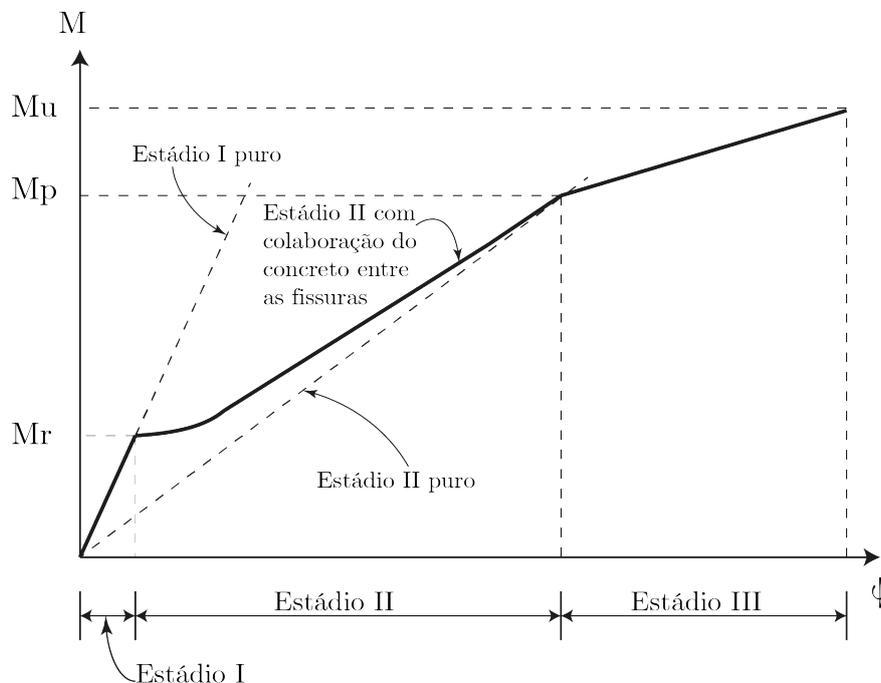


FIGURA B.1: Diagrama momento-curvatura e estádios

1. Arbitra-se, inicialmente, uma posição de linha neutra, $y_n^0 = y_n^j = h/2$, sendo h a altura da seção, e a deformação na fibra mais comprimida do concreto (superior) é fixada, $\varepsilon_0 = 3,5\%$.
2. Calcula-se as forças e os momentos nas camadas de aço e no concreto, obtém-se, $N_r = F_c + \sum_{i=1}^n F_{si}$ e $M_r = M_c + \sum_{i=1}^n F_{si}y_i$
3. Calculam-se o desequilíbrio entre o normal resistente e o normal solicitante, $|N_r| - |N_d|$
 - Se $||N_r| - |N_d|| \leq tol$, passo 5
 - Se $||N_r| - |N_d|| > tol$, passo 4
4. Determina-se a posição da linha neutra, y_n^{j+1} , da próxima iteração
 - Se $|N_r| - |N_d| < 0,0 \rightarrow y_n^{j+1} = y_n^j + \frac{y_n^0}{2^j}$
 - Se $|N_r| - |N_d| > 0,0 \rightarrow y_n^{j+1} = y_n^j - \frac{y_n^0}{2^j}$
 → Passo 2
5. $M_u = M_r$ e $y_{nIII} = y_n^j$

Assim, obtém-se o momento ultimo da seção, M_u , e a linha neutra do estágio III. Ressalta-se que são considerados os diagramas tensão-deformação mencionados no capítulo 03.

A curvatura relativa a este estágio é dada por,

$$\psi_u = \frac{\varepsilon_u}{y_{nIII}} \quad . \quad (B.1)$$

Referências

- Álvares, Manuel Silva (1993). “Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos.” Em: *Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos*.
- Araújo, F. C. de (1994). “Timedomain solution of threedimensional linear problems of elastodynamics by means of a BE/FE coupling process (in German)”. Tese de doutorado. Technical University of Braunschweig, Germany.
- Araújo, F. C. de e R. T. Pereira (2017). “Boundary-integral-based process for calculating stiffness matrices of space frame elements with axially varying cross section.” Em: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, n. 77, p.61-69.
- Bathe, K. J (1996). *Finite Element Procedures in Eng. Analysis*. Ed. por New Jersey PrenticeHall Inc. PrenticeHall, Inc., New Jersey.
- Branson, D. E. (1965). “Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams”. Em: *HPR Publication, Alabama Highway Department, U. S. Bureau of Publis Roads*, n. 7, part 1, p. 1-78 aug. 1965.
- Carvalho, Roberto Chust, Figueiredo Filho e Jasson Rodrigues (2013). *Calculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado*. Ed. por Edufscar. Edufscar.
- Clough, Ray W. (1990). “Original formulation of the finite element method”. Em: *Finite Elements in Analysis and Design*.
- Desayi, P. e S. Krishnan (1964). “Equation for the stressstrain curve of concrete”. Em: *Journal of American Concrete Institute*.
- Espion, B. (1993). “Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs, Creep and shrinkage of concrete”. Em: *TC 114 RILEM. E&FN Spon*.
- Eurocode2 (1999). “Design of concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings”. Em: *prEN 1992-1: 2001, 1st draft*.
- Gelatti, Flavia (2012). “Análise Não Linear Física e Geométrica de Pórticos Planos de Concreto Armado: Modelagem por Elementos Finitos de Barra”. Diss. de mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina.
- Ghali, A., R. Favre e M. Elbadry (2002). *Concrete Structures Stresses and Deformations*. Ed. por London 11 New Fetter Lane. 11 New Fetter Lane, London.
- Gonçalves, P. B. (2003). *Análise Elástica de Estruturas Reticuladas*. Apostila com notas de aula. Rio de Janeiro, UFRJ.

- Guarda, Mônica Cristina Cardoso da (2005). “Cálculo de Deslocamentos em Pavimentos de Edifícios de Concreto Armado”. Em: *Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.*
- Hsu, T.T.C. (1993). “Unified theory of reinforced concrete”. Em: *CRC Press.*
- Khuntia M.; Ghosh, S. K (2004). “Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: analytical approach”. Em: *ACI Structural Journal. Title n. 101-S36. p. 350-363.*
- Maga, T. (2015). *Desenvolvimento de programa computacional com módulos integrados de análise e dimensionamento de estruturas em concreto armado planas (2D) com seções quaisquer.* Rel. téc. Universidade Federal de Ouro Preto.
- Martha, Luís Fernando (2010). *Análise de Estruturas: conceitos e métodos básicos.* Ed. por Campus. Campus.
- Moncavo, Winston Junior Zumaeta (2011). *Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado.* Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.
- NBR6118 (2014). “Projeto de estruturas de concreto - procedimento”. Em: *Associação Brasileira de Normas Técnicas.*
- NBR:8800 (2008). “Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios”. Em: *Associação Brasileira de Normas Técnicas.*
- Neves, R. A. (2000). “Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios considerando-se a influência das tensões cisalhantes”. Diss. de mestrado. Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Nogueira, Caio Gorla (2010). “Desenvolvimento de Modelos mecânicos, de Confiabilidade e de Otimização para Aplicação em Estruturas de Concreto Armado”. Diss. de mestrado. Universidade de São Paulo.
- Pereira, Renato A. Tavares (2013). *Estratégias para Automatização do Dimensionamento de Sistemas Estruturais em Concreto Armado (Vigas).* Rel. téc. Universidade Federal de Ouro Preto.
- (2015). “Análise de Estruturas Reticuladas Espaciais com Barras de Seções Variáveis”. Em: *Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.*
- Razvi, S. R. e M. Saatcioglu (1989). “Confinement of Reinforced columns with welded wire fabric”. Em: *ACI Structural Journal.*
- Ribeiro, Iara Souza (2016). “Análise Não-linear geométrica de sistemas aporticados planos com elementos de rigidez variável aplicações em estruturas de aço e de concreto armado”. Diss. de mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto.
- S. Bratina M. Saje, I. Planinc (2004). “On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames”. Em: *International Journal of Solids and Structures.*

- Silva, Aline Alessandra Eduarda Farias da (2012). “Contribuições ao Estudo da Não-Linearidade Física em Vigas de Concreto Armado”. Em: *Tese de mestrado da Universidade Federal De Santa Maria*.
- Silvestre, N. e D. Camotim (2007). “Elastic buckling and secondorder behavior of pitched roof steel frames”. Em: *Journal of Constructional Steel Research*.
- Soriano, Humberto Lima (2005). *Análise de Estruturas - Formulação Matricial e Implementação Computacional*. Ed. por Ciência Moderna. Ciência Moderna.