



MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA  
ESCOLA DE  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

GENTIL ROCHA

# ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA E DE ITERAÇÃO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

*Orientador: Ricardo Azoubel da Mota Silveira*

Convênio USIMINAS/UFOP/FUNDAÇÃO  
Ouro Preto, dezembro de 2000

R672e	<p>Rocha, Gentil. Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não-linear de estruturas \ Gentil Rocha. – Ouro Preto :UFOP, 2000. xxv, 176p. :il.</p> <p>Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil.</p> <p>1. Estabilidade Estrutural. 2. Métodos dos Elementos Finitos. I. Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. II. Título.</p>
	CDU:624.04

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração para Análise  
Não-Linear de Estruturas

**AUTOR: GENTIL ROCHA**

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construções Metálicas.

Ouro Preto, dezembro de 2000.

*“... a condução do sábio não desperta paixões mas procura manter o discípulo na sobriedade e dar-lhe as coisas necessárias. Não lhe oferece erudição, mas dá-lhe a cultura do coração. Quem possui verdadeira sapiência não necessita de erudição...”*

***Lao-tsé***

*Aos meus pais.  
À minha esposa.*

## **MEUS AGRADECIMENTOS**

*“Não se pode ser bom pela metade.  
O sábio termina a sua obra, e está sempre  
no princípio. E por isso a sua obra  
prospera.”*

**Leon Tolstoi**

*Ao meu professor orientador.*

- Aos professores do DECIV, Escola de Minas.
- Aos colegas de mestrado.
- À Escola Técnica Federal de Ouro Preto (ETFOP).
- À CAPES - CNPq e à USIMINAS.

# RESUMO

Este trabalho tem como objetivo a implementação computacional e a análise de estratégias de incremento de carga e de iteração encontradas na literatura. Essas estratégias acopladas ao método de Newton-Raphson (padrão ou modificado) são usadas nesta dissertação para estudar o equilíbrio e a estabilidade de sistemas estruturais esbeltos. Num contexto computacional essas estratégias são implementadas aqui, para um dado passo de carga, em duas etapas:

i) a partir de uma dada configuração de equilíbrio da estrutura, calcula-se uma solução incremental inicial (ou predita) seguindo alguma *estratégia de incremento de carga*. Atenção especial é dada neste trabalho às estratégias baseadas na relação  $I_d$  (número de iterações desejada) /  $I$  (número de iterações do passo de carga anterior) e no parâmetro de rigidez GSP (*General Stiffness Parameter*);

ii) em seguida, corrige-se essa solução predita com iterações subseqüentes do tipo Newton-Raphson até se atingir a nova configuração de equilíbrio. A fim de evitar problemas de convergência da solução próxima a pontos limites e de bifurcação da trajetória de equilíbrio, utilizam-se *estratégias de iteração* que, associadas ao esquema usual do tipo Newton-Raphson, permitem alcançar respostas da estrutura além desses pontos críticos. Entre os procedimentos implementados aqui, destacam-se: as formas linearizadas e quadráticas do método do comprimento de arco (comprimento de arco esférico e cilíndrico), a resposta ponderada constante, a norma mínima dos deslocamentos residuais, a técnica do resíduo ortogonal e o método do deslocamento generalizado.

No final da dissertação, através da análise de vários sistemas estruturais esbeltos (colunas, pórticos e arcos), faz-se uma avaliação da eficiência computacional dessas estratégias. O objetivo é chegar na melhor modelagem numérica para o traçado completo da trajetória de equilíbrio da estrutura (curva carga-deslocamento) indicando regiões de ganho e de perda de rigidez, os pontos limites de carga ("*snap-through*") e de deslocamento ("*snap-back*") e, se possível, indicar a presença de pontos de bifurcação.

# ABSTRACT

This study aims to present incremental-iterative solution techniques for structural non-linear analysis. The solution methods documented here are based on a finite element application. In order to solve the resulting algebraic non-linear equations and to obtain non-linear equilibrium paths, the Newton-Raphson method (full or modified) is used together with traditional continuation methods. In a computational context, two distinct steps are required for the successful completion of a single load step in an incremental-iterative scheme:

i) The selection of a suitable external load following some strategies for automatic load incrementation. The choice of increment size is important and should reflect the current degree of non-linearity. Various methods for controlling the increment size have been implemented here, where special attention is given for the use of the ratio  $I_d$  (desired number of iterations) /  $I$  (actual number of iterations required for convergence in the previous load step) and the use of generalised stiffness parameter (GSP);

ii) The selection of an appropriate iterative strategy, adapted in Newton schemes, for application in subsequent iterative cycles with the aim of restoring equilibrium as rapidly as possible. Special attention is given here to the linear and quadratic arc-length strategy, the constant 'weighted response', the minimum unbalanced displacement norm, the generalized displacement control technique, and the orthogonal residual procedure. These iterative strategies allow limit points to be passed and, consequently, snap buckling phenomena to be identified. Additionally, the use of very small random nodal imperfections enables one to identify bifurcation points and the associated post-bifurcation solution.

Finally both computational capabilities and performance of these path-following techniques are investigated with model problems of columns, frames and arches showing geometrically non-linear behaviour.

# |SUMÁRIO

<b>Resumo</b> .....	V
<b>Abstract</b> .....	VI
<b>Lista de Figuras</b> .....	X
<b>Lista de Tabelas</b> .....	XIII
<b>Lista de Quadros</b> .....	XVI
<b>Lista de Símbolos</b> .....	XVII

## *Capítulo 1 - INTRODUÇÃO*

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	1
1.2 - OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	2
1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4

## *Capítulo 2 - METODOLOGIA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS*

### **NÃO-LINEARES**

2.1 - INTRODUÇÃO.....	10
2.2 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR.....	10
2.2.1 - Solução Incremental Predita.....	12
2.2.2 - Ciclo de Iterações .....	14
2.3 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO NÃO-LINEAR .....	18
2.3.1 - Relações Deformação-Deslocamento.....	18
2.3.2 - Indicador Variacional .....	22
2.3.3 - Elemento Finito Adotado .....	24
2.3.4 - Matriz de rigidez.....	26
2.3.5 - Vetor de forças internas.....	27

### **Capítulo 3 ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA**

3.1 - INTRODUÇÃO.....	30
3.2 - ESTRATÉGIAS BASEADAS NA RELAÇÃO $I_d/I$ .....	31
3.2.1 - Incremento Direto do Parâmetro de Carga.....	31
3.2.2 - Incremento do Comprimento de Arco.....	32
3.2.3 - Incremento de uma Componente de Deslocamento Seleccionada.....	34
3.2.4 - Incremento do Trabalho Externo.....	36
3.3 - INCREMENTO DE CARGA BASEADO NO PARÂMETRO DE RIGIDEZ GSP .....	37
3.4. - SINAL DO INCREMENTO INICIAL DO PARÂMETRO DE CARGA.....	40

### **Capítulo 4 - ESTRATÉGIAS DE ITERAÇÃO**

4.1 - INTRODUÇÃO.....	42
4.2 - ITERAÇÃO BASEADA NA CARGA CONSTANTE .....	43
4.3 - ITERAÇÃO BASEADA NO DESLOCAMENTO CONSTANTE.....	44
4.4 - ITERAÇÃO BASEADA NO TRABALHO EXTERNO CONSTANTE .....	46
4.5 - ITERAÇÃO BASEADA NO COMPRIMENTO DE ARCO CONSTANTE ...	47
4.5.1 - Comprimento de Arco Linear - Riks (1972 e 1979).....	47
4.5.2 - Comprimento de Arco Linear - Ramm (1981 e 1982) .....	48
4.5.3 - Comprimento de Arco Esférico - Crisfield (1981 e 1991) .....	49
4.5.4 - Comprimento de Arco Cilíndrico - Crisfield (1981 e 1991) .....	51
4.6 - ITERAÇÃO BASEADA NA RESPOSTA PONDERADA CONSTANTE.....	53
4.7 - ITERAÇÃO BASEADA NA NORMA MÍNIMA DOS DESLOCAMENTOS RESIDUAIS.....	57
4.8 - ITERAÇÃO BASEADA NA NORMA MÍNIMA DAS FORÇAS DESEQUILIBRADAS .....	59
4.9 - ITERAÇÃO BASEADA NO RESÍDUO ORTOGONAL .....	62
4.10 - ITERAÇÃO BASEADA NO DESLOCAMENTO GENERALIZADO .....	69
4.11 - CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA ADOTADOS.....	71

## *Capítulo 5 - PROGRAMA COMPUTACIONAL*

5.1 - INTRODUÇÃO.....	72
5.2 - PROGRAMA PRINCIPAL.....	73
5.3 - SUBROTINAS IMPLEMENTADAS.....	77
5.3.1 - Subrotina INPUT1.....	77
5.3.2 - Subrotina INPUT2.....	82
5.3.3 - Subrotina SCALUP.....	92
5.3.4 - Subrotina ITER.....	94
5.3.5 - Subrotina NEXING.....	96
5.4 - PROGRAMA DE PÓS-PROCESSAMENTO.....	94

## *Capítulo 6 - EXEMPLOS ANALISADOS*

6.1 - INTRODUÇÃO.....	102
6.2 - COLUNA ENGASTADA-LIVRE.....	109
6.3 - ARCO ABATIDO BIRROTULADO.....	116
6.4 - PÓRTICOS EM FORMA DE L.....	126
6.4.1 - Pórtico de Lee.....	126
6.4.2 - Pórtico de Rooda.....	133
6.5 - ARCO CIRCULAR ROTULADO-ENGASTADO.....	141
6.6 - ARCO CIRCULAR PARCIALMENTE CARREGADO.....	148
6.7 - ARCO CIRCULAR POUCO ABATIDO.....	153

## *Capítulo 7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES*

7.1 - CONCLUSÕES.....	159
7.3 - SUGESTÕES.....	166

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>167</b>
--	------------

# | LISTA DE FIGURAS

	Página
<b>Capítulo 2</b>	
Figura 2.1 - Organização do Capítulo 3.....	12
Figura 2.2 - Solução incremental-iterativa. ....	13
Figura 2.3 - Organização do Capítulo 4.....	14
Figura 2.4 - Passos básicos da metodologia de solução não-linear. ....	17
Figura 2.5 - Fluxograma da metodologia de solução não-linear. ....	17
Figura 2.6 - Deformação inicial: configuração de equilíbrio t .....	21
Figura 2.7 - Elemento de viga-coluna adotado .....	24
Figura 2.8 - Cálculo das forças internas .....	29
<b>Capítulo 3</b>	
Figura 3.1 - Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado GSP .....	41
<b>Capítulo 4</b>	
Figura 4.1 - Iteração a carga constante .....	43
Figura 4.2 - Iteração a deslocamento constante .....	45
Figura 4.3 - Iteração a trabalho externo constante .....	46
Figura 4.4 - Método de Riks-Wempner .....	48
Figura 4.5 - Método de Ramm.....	49
Figura 4.6 - Iteração a comprimento de arco constante .....	52
Figura 4.7 - Método do comprimento de arco cilíndrico .....	53
Figura 4.8 - Iteração a resposta ponderada constante .....	57
Figura 4.9 - Iteração a norma mínima dos deslocamentos residuais .....	59
Figura 4.10 - Iteração a norma mínima das forças desequilibradas.....	61
Figura 4.11 - Estratégia baseada no resíduo ortogonal .....	65

Figura 4.12 - Iteração a resíduo ortogonal: duas condições de ortogonalidade.....	68
Figura 4.13 - Iteração a deslocamento generalizado constante.....	70

## Capítulo 5

Figura 5.1 - Esquema simplificado do programa.....	73
Figura 5.2 - Fluxograma da subrotina INPUT1 .....	78
Figura 5.3 - Alocação dinâmica .....	80
Figura 5.3 - Exemplo de um arquivo de dados - Subrotina INPUT1 .....	81
Figura 5.4 - Exemplo de um arquivo de dados - Subrotina INPUT2 .....	91

## Capítulo 6

Figura 6.1a - Exemplos de validação.....	107
Figura 6.1b - Exemplos de validação.....	108
Figura 6.2 - Coluna engastada-livre.....	109
Figura 6.3 - Trajetórias de equilíbrio da coluna engastada-livre.....	112
Figura 6.4 - Trajetórias de equilíbrio: influência do momento fletor M e condições de ortogonalidade. ....	113
Figura 6.5 - Arco abatido birrotulado .....	116
Figura 6.6 - Trajetória de equilíbrio: sistema estrutural perfeito .....	117
Figura 6.7 - Trajetória de equilíbrio: sistema estrutural imperfeito.....	120
Figura 6.8 - Configurações deformadas nos pontos limites de carga .....	120
Figura 6.9 - Trajetórias de equilíbrio: ILDC, IDIS, ITEC, IMFD .....	121
Figura 6.10 - Pórtico de Lee .....	126
Figura 6.11 - Trajetórias de equilíbrio do pórtico de Lee.....	129
Figura 6.12 - Análise das estratégias ICA4 e IGSP.....	132
Figura 6.13 - Pórtico de Roorda.....	133
Figura 6.14 - Comparação do presente trabalho, resultados teórico e experimental	135
Figura 6.15 - Deformadas do pórtico de Roorda ( $e = \pm L/10000$ ).....	135
Figura 6.16 - Trajetória de equilíbrio: escolha do sinal de $\Delta\lambda^0$ .....	140
Figura 6.17 - Arco circular rotulado-engastado.....	141
Figura 6.18 - Trajetória de equilíbrio do arco rotulado-engastado .....	144

Figura 6.19 - Configurações deformadas do arco rotulado-engastado .....	144
Figura 6.20 - Arco circular parcialmente carregado .....	148
Figura 6.21 - Trajetória de equilíbrio do arco parcialmente carregado .....	150
Figura 6.22 - Configurações deformadas do arco parcialmente carregado .....	150
Figura 6.23 - Arco circular pouco abatido .....	153
Figura 6.24 - Trajetória de equilíbrio: sistema estrutural perfeito .....	155
Figura 6.25 - Trajetória de equilíbrio: sistema estrutural imperfeito.....	156
Figura 6.26 - Configurações deformadas do sistema estrutural imperfeito .....	156

# | LISTA DE TABELAS

	Página
<b>Capítulo 5</b>	
Tabela 5.1 - Parâmetros de controle .....	78
Tabela 5.2 - Declaração dos macro-comandos .....	79
Tabela 5.3 - Formulações de elementos finitos não-lineares.....	82
Tabela 5.4 - Variáveis de controle .....	83
Tabela 5.5 - Estratégias de iterações.....	84
Tabela 5.6 - Estratégias de incremento automático do parâmetro de carga.....	85
Tabela 5.7 - Variáveis de controle do ciclo iterativo .....	86
Tabela 5.8 - Parâmetros de impressão .....	87
Tabela 5.9 - Parâmetros de impressão .....	88
Tabela 5.10 - Variáveis usadas no algoritmo de busca linear.....	89
Tabela 5.11 - Variáveis usadas no incremento automático do parâmetro de carga....	89
Tabela 5.12 - Variáveis para incremento automático do comprimento de arco .....	90
Tabela 5.13 - Variáveis usadas no algoritmo de acelerador de convergência .....	90
Tabela 5.14 - Variáveis usadas no controle de deslocamento .....	91

	Página
<b>Capítulo 6</b>	
Tabela 6.1a- Resumo das Estratégias .....	103
Tabela 6.1b - Resumo das Estratégias .....	104
Tabela 6.2 - Parâmetros usados para avaliação das estratégias não-lineares.....	106
Tabela 6.3 - Parâmetros usados no gerenciamento da solução não-linear do problema .....	106
Tabela 6.4 - Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.....	111
Tabela 6.5 - Coluna engastada-livre: estratégias de solução não-linear .....	111

Tabela 6.6 - Influência do momento fletor M e condições de ortogonalidade .....	113
Tabela 6.7- Influência do métodos NRM e NRP .....	114
Tabela 6.8 - Influência do carregamento no cálculo de $\Delta\lambda^0$ .....	115
Tabela 6.9 - Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.....	118
Tabela 6.10 - Arco abatido birrotulado: estratégias de solução não-linear.....	118
Tabela 6.11 - Comparação entre ICA4 e IRO1.....	122
Tabela 6.12- Análise da estratégia IMFD.....	123
Tabela 6.13 - Influência do carregamento no cálculo de $\Delta\lambda^0$ .....	124
Tabela 6.14 - Influência do incremento inicial do parâmetro de carga ${}^1\Delta\lambda^0$ .....	125
Tabela 6.15 - Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.....	128
Tabela 6.16 - Pórtico de Lee: estratégias de solução não-linear.....	128
Tabela 6.17- Comparação entre ICA4 e IRO1.....	129
Tabela 6.18 - Influência do parâmetro $\alpha$ e do número de iterações desejadas $I_d$ .....	130
Tabela 6.19 - Avaliação das estratégias de solução não-linear.....	131
Tabela 6.20 - Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.....	136
Tabela 6.21 - Pórtico de Roorda: estratégias de solução não-linear .....	136
Tabela 6.22 - Número de passos de carga e CPU: ICA4 e IGSP .....	138
Tabela 6.23 - Influência do incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda_1^0$ .....	138
Tabela 6.24 - Influência do critério de escolha do sinal de $\Delta\lambda^0$ .....	139
Tabela 6.25 - Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.....	143
Tabela 6.26 - Arco circular rotulado-engastado: estratégias de solução não-linear .	143
Tabela 6.27 - Número de passos de carga e CPU: IRP2 e IGSP .....	143
Tabela 6.28 - Influência do incremento inicial do parâmetro de carga ${}^1\Delta\lambda^0$ .....	143
Tabela 6.29- Análise dos critérios de convergência .....	146
Tabela 6.30 - Influência do fator de tolerância $\zeta$ .....	147
Tabela 6.31 - Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.....	149
Tabela 6.32 - Arco circular parcialmente carregado: estratégias de solução não-linear .....	149
Tabela 6.33 - Pontos limites de carga da trajetória de equilíbrio .....	151
Tabela 6.34 - Influência do valor de $\Delta\lambda_{\min}$ .....	152
Tabela 6.35 - Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.....	155

Tabela 6.36 - Arco circular pouco abatido: estratégias de solução não-linear .....	155
Tabela 6.37 - Ponto limite de carga (PL).....	157
Tabela 6.38 - Critério de escolha do sinal do incremento de carga $\Delta\lambda^0$ .....	158

# | LISTA DE QUADROS

	Página
<b>Capítulo 5</b>	
Quadro 5.1 - Algoritmo do Programa Principal .....	74
Quadro 5.2 - Algoritmo da Subrotina SCALUP .....	92
Quadro 5.3 - Algoritmo da Subrotina ITER .....	94
Quadro 5.4 - Algoritmo da Subrotina NEXINC .....	96
Quadro 5.5 - Algoritmo da Subrotina PPLOTF .....	100

# | LISTA DE SÍMBOLOS

## Capítulo 2

$t$	Última configuração de equilíbrio processada.
$t + \Delta t$	Configuração de equilíbrio procurada no passo de carga corrente.
$k$	Contador do número de iterações.
$\lambda$	Parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de $\mathbf{F}_r$ .
$\lambda^0$	Parâmetro de carga inicial.
$\Delta\lambda^0$	Incremento inicial do parâmetro de carga.
$\Delta\lambda$	Incremento do parâmetro de carga.
$\Delta\lambda^{(k-1)}$ e $\Delta\lambda^k$	Incremento do parâmetro de carga avaliado na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\delta\lambda^{(k-1)}$ e $\delta\lambda^k$	Correção do parâmetro de carga, avaliado na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
${}^t\lambda$ e ${}^{t+\Delta t}\lambda$	Parâmetro de carga avaliados na configuração de equilíbrio t e no passo de carga corrente.
$\lambda^{k-1}$ e $\lambda^k$	Parâmetro de carga avaliados na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\delta\lambda$	Correção do parâmetro de carga avaliado ao longo do ciclo iterativo.
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais.
$\mathbf{u}^0$	Vetor de deslocamentos nodais inicial.
$\Delta\mathbf{u}^0$	Incremento inicial dos deslocamentos nodais.
$\Delta\mathbf{u}$	Incremento do deslocamento nodal, medido a partir da última configuração de equilíbrio.
$\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$ e $\Delta\mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais avaliados na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.

$\delta \mathbf{u}^{(k-1)}$ e $\delta \mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos residuais incrementais avaliado na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
${}^t \mathbf{u}$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais avaliados na configuração de equilíbrio t e no passo de carga corrente.
$\mathbf{u}^{k-1}$ e $\mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos nodais avaliados na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\mathbf{g}$	Vetor de forças residuais.
$\delta \mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos residuais.
$\delta \mathbf{u}_g$	Parcela de $\delta \mathbf{u}$ referente às forças residuais $\mathbf{g}$ .
$\delta \mathbf{u}_r$	Deslocamentos nodais tangente.
$\delta \mathbf{u}_r^k$	Vetor de deslocamentos iterativos resultante da aplicação de $\mathbf{F}_r$ .
$\delta \mathbf{u}_g^k$	Correção obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia convencional de incremento do parâmetro de carga constante.
$\mathbf{F}_i^{(k-1)}$	Vetor das forças internas.
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez elementar.
$\mathbf{K}^{(k-1)}$	Matriz de rigidez avaliada na iteração anterior.
$\mathbf{K}_{gl}$	Matriz de rigidez global do sistema estrutural.
$\mathbf{K}_\tau$	Matriz de rigidez geométrica.
$\mathbf{K}_L$	Matriz de rigidez linear.
$k_L$ e $k_\tau$	Componentes das matrizes $\mathbf{K}_L$ e $\mathbf{K}_\tau$ .
$\mathbf{F}_r$	Vetor de forças de referência.
$\mathbf{F}_i^{(k-1)}$	Vetor de forças internas.
$\bar{J}$	Indicador variacional.
${}^t \varepsilon$	Deformação axial na configuração de equilíbrio t.
$\varepsilon_{xx}$ e $\varepsilon_{xy}$	Deformações axial e cisalhante, respectivamente.
$\Delta \varepsilon_{xx}$ e $\Delta \varepsilon_{xy}$	Incrementos de deformação axial e transversal, respectivamente.
$\Delta \varepsilon_{xx}$ e $\Delta \varepsilon_{xy}$	Parcelas lineares de $\Delta \varepsilon_{xx}$ e $\Delta \varepsilon_{xy}$ .
$\Delta \eta_{xx}$ e $\Delta \eta_{xy}$	Parcelas de $\Delta \varepsilon_{xx}$ e $\Delta \varepsilon_{xy}$ que contém os termos quadráticos.

$\Delta u$ e $\Delta v$	Deslocamentos incrementais de um ponto qualquer do elemento, na direção dos eixos $x$ e $y$ respectivamente.
$\Delta \bar{u}$	Incremento de deslocamento axial de um ponto distante $y$ da linha neutra da seção transversal.
$P$	Força axial.
$Q$	Esforço cortante.
$M$	Momento fletor.
$M_1$ e $M_2$	Momentos nodais.
${}^tP$	Força axial na configuração de equilíbrio $t$ .
${}^tQ$	Esforço cortante na configuração de equilíbrio $t$ .
${}^tM$	Momento fletor na configuração de equilíbrio $t$ .
$\tau_{xx}$ e $\tau_{xy}$	Tensões de cisalhamento transversais nos planos $x-x$ e $x-y$ , respectivamente.
${}^t\tau_{xx}$ e ${}^t\tau_{xy}$	Tensões de cisalhamento transversais na configuração de equilíbrio $t$ .
$\Delta^t\tau_{xx}$ e $\Delta^t\tau_{xy}$	Incremento de tensões cisalhantes.
$S_{xy}^l$ e $S_{xy}^n$	Parcelas linear e não linear do incremento de tensões cisalhantes.
$E$	Módulo de elasticidade do material que compõe o elemento.
$h$	Altura da seção transversal do elemento de viga.
$u$ e $v$	Deslocamentos de um ponto qualquer do elemento, na direção dos eixos $x$ e $y$ respectivamente.
$u_1$ e $u_2$	Deslocamentos nodais, na direção do eixo $x$ .
$\Delta u_1$ e $\Delta u_2$	Incremento de deslocamentos nodais, na direção do eixo $x$ .
$v_1$ e $v_2$	Deslocamentos nodais, na direção do eixo $y$ .
$\Delta v_1$ e $\Delta v_2$	Incremento de deslocamentos nodais, na direção do eixo $y$ .
$\Delta \Pi$	Incremento da energia potencial total.
$\Pi$	Energia potencial total.
$\Delta V$	Incremento da energia potencial das forças externas.
$V$	Energia potencial das forças externas.
$\Delta U$	Incremento da energia interna de deformação.
$U, U_0, U_L$	Energia interna de deformação.

$a_0, a_1$	Constantes.
$b_0, b_1, b_2$ e $b_3$	Constantes.
$H_1, H_2, \dots$ e $H_6$	Funções de interpolação.
$\Delta \mathbf{d}$	Vetor de deslocamentos incrementais.
$\mathbf{H}$	Matriz que contém as funções de interpolação que relacionam os deslocamentos incrementais $\Delta \mathbf{d}$ com os deslocamentos nodais incrementais $\Delta \mathbf{u}$ .
$\Delta \mathbf{u}_{gl}$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais no sistema de coordenadas global XY.
$\mathbf{R}$	Matriz de rotação do elemento.
$\Delta \mathbf{F}_i$	Incremento do vetor de forças internas.
${}^t \mathbf{F}_i$	Força interna da estrutura na configuração de equilíbrio $t$ .
${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i$	Vetor de forças internas calculadas no passo de carga corrente.
${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{i,gl}$	Vetor de forças internas calculado no sistema global de referências.
$\Delta^t \mathbf{F}_i$	Incremento das forças internas da estrutura.
$\psi$	Rotação de corpo rígido (total ou incremental).
$\theta$	Rotação de um ponto qualquer do elemento.
$\Delta \theta$	Rotação incremental de um ponto qualquer do elemento.
$\theta_1$ e $\theta_2$	Rotações nodais.
$\delta, \phi_1$ e $\phi_2$	Deslocamentos naturais (totais ou incrementais).
$A$	Área da seção transversal do elemento.
$L$	Comprimento inicial do elemento.
${}^t L$ e ${}^{t+\Delta t} L$	Comprimento do elemento avaliados na configuração de equilíbrio $t$ e $t + \Delta t$ .

### Capítulo 3

$t$	Última configuração de equilíbrio processada.
$I_d$	Número de iterações desejadas para cada incremento.
${}^tI$	Número de iterações que foram necessárias para fazer convergir o passo de carga anterior.
$\alpha$	Parâmetro que varia de 0.5 a 2.0.
$k$	Contador do número de iterações.
$\Delta\lambda$	Incremento do parâmetro de carga.
${}^t\Delta\lambda^0$ e $\Delta\lambda^0$	Incremento inicial no passo de carga anterior e no passo de carga corrente.
${}^1\Delta\lambda^0$	Incremento inicial no primeiro passo de carga.
$\Delta l$	Comprimento de arco da trajetória de equilíbrio.
${}^t\Delta l$ e ${}^1\Delta l$	Comprimento de arco no passo de carga anterior e no primeiro passo de carga.
${}^t\Delta\mathbf{u}^0$ e $\Delta\mathbf{u}^0$	Incremento inicial dos deslocamentos no passo de carga anterior e no passo de carga corrente.
${}^1\Delta\mathbf{u}^0$	Incremento inicial dos deslocamentos.
$\Delta\mathbf{u}_1$	Incremento do vetor de deslocamentos obtido no primeiro passo de carga.
$\Delta\mathbf{u}_{\max}$	Incremento máximo do vetor de deslocamentos.
${}^t\Delta u_j$ e $\Delta u_j$	Incrementos da componente $j$ do vetor deslocamento no passo de carga anterior e no passo de carga corrente.
${}^t\Delta W$ e $\Delta W$	Incrementos do trabalho externo e no passo de carga anterior e no passo de carga corrente.
$\delta\mathbf{u}_r(j)$	Deslocamentos nodais tangente referente à componente $j$ .
${}^t\delta\mathbf{u}_r$ e $\delta\mathbf{u}_r$	Deslocamentos nodais tangente, no passo de carga anterior e no passo de carga corrente.
$\delta\mathbf{u}_r^0$ e ${}^1\delta\mathbf{u}_r$	Deslocamentos nodais tangente, no passo de carga inicial e no primeiro passo de carga.
$\delta\mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos residuais avaliado na iteração corrente ( $k$ ).

$\delta\lambda^k$	Correção do parâmetro de carga avaliado na iteração corrente (k).
$\mathbf{g}^{(k-1)}$	Vetor de forças residuais avaliado na iteração anterior (k-1).
$\delta\mathbf{u}_g^0$	Parcela de $\delta\mathbf{u}$ referente às forças residuais $\mathbf{g}$ , no passo de carga corrente.
$\mathbf{F}_r$	Vetor de forças de referência.
$\mathbf{C}$ e $k_1$	Constantes.
GSP	Parâmetro de rigidez generalizado.
H	Parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo).
$H_0$	Deslocamento generalizado.
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez representativa do sistema estrutural.
$\mathbf{K}^{(k-1)}$	Matriz de rigidez avaliada na iteração anterior (k-1).

#### Capítulo 4

t	Última configuração de equilíbrio processada.
${}^t\lambda$ e ${}^{t+\Delta t}\lambda$	Parâmetro de carga avaliados na configuração de equilíbrio t e no passo de carga corrente.
${}^t\mathbf{u}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais avaliados na configuração de equilíbrio t e no passo de carga corrente.
$\delta\lambda$	Correção do parâmetro de carga avaliado ao longo do ciclo iterativo.
$\delta\lambda^k$	Correção do parâmetro de carga avaliado na iteração corrente (k).
${}^t\Delta\lambda^0$	Incremento inicial no passo de carga anterior.
$\Delta\lambda^0$	Incremento inicial no passo de carga corrente.
$\Delta\lambda^{(k-1)}$ e $\Delta\lambda^k$	Incremento do parâmetro de carga avaliado na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\delta\mathbf{u}_j$	Vetor de deslocamentos residuais.
$\delta\mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos residuais avaliado na iteração corrente (k).
$\delta\mathbf{u}_{r(j)}$	Deslocamentos nodais tangente referente à componente j.

${}^t\delta\mathbf{u}_r$ e $\delta\mathbf{u}_r^k$	Deslocamentos nodais tangente, no passo de carga anterior e na iteração corrente (k).
$\delta\mathbf{u}_g^k$	Parcela de $\delta\mathbf{u}$ referente às forças residuais $\mathbf{g}$ avaliada na iteração corrente (k).
$\delta W^k$	Vetor de trabalho externo avaliado na iteração corrente (k).
${}^t\Delta\mathbf{u}^0$ e $\Delta\mathbf{u}^0$	Incremento inicial dos deslocamentos no passo de carga anterior e no passo de carga corrente.
$\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$ e $\Delta\mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais avaliados na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\Delta\mathbf{u}^k$	Incremento inicial dos deslocamentos avaliado na iteração corrente (k).
$\Delta\mathbf{u}_1$	Incremento do vetor de deslocamentos obtido no primeiro passo de carga.
$\Delta\mathbf{u}_{\max}$	Incremento máximo dos deslocamentos.
$\Delta u_j$	Incremento da componente j do vetor deslocamento no passo de passo de carga corrente.
${}^t\Delta W_j$	Incremento da componente j do trabalho externo e no passo de carga anterior.
$\Delta W_j$	Incremento do trabalho externo correspondente à componente j.
$\Delta W^k$	Incremento do trabalho externo avaliado na iteração corrente (k).
$\Delta l$	Comprimento de arco da trajetória de equilíbrio.
$I_d$	Número de iterações desejadas para cada incremento.
${}^tI$	Número de iterações que foram necessárias para fazer convergir o passo de carga anterior.
$\mathbf{F}_r$	Vetor de forças de referência.
$\mathbf{F}_i$	Incremento do vetor de forças internas.
$\mathbf{F}_i^{(k-1)}$	Incremento do vetor de forças internas avaliado na iteração anterior (k-1).
$\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$	Matrizes diagonais com dimensão de rigidez e flexibilidade.
$L$	Comprimento do vetor resposta ponderada.

$\Delta\bar{\mathbf{u}}^{(k-1)}$ e $\Delta\bar{\lambda}^{(k-1)}$	Segmento ortogonal ao vetor incremental ponderado no começo de cada iteração.
<b>I</b>	Matriz identidade.
GSP	Parâmetro de rigidez generalizado.
$H_0$	Deslocamento generalizado.
<b>K</b>	Matriz de rigidez representativa do sistema estrutural.
${}^t\mathbf{K}$	Matriz de rigidez no passo de carga anterior.
$\xi$ e $\eta$	Fatores de escala utilizado no processo de iteração a resíduo ortogonal.
$\mathbf{F}_i^{(k-1)}$	Vetor de forças internas.
<b>g</b>	Vetor de forças residuais.
$\tilde{\mathbf{g}}$	Vetor das forças residuais correspondente aos deslocamentos da última iteração processada no passo corrente e ao parâmetro de carga da última configuração de equilíbrio.
$\delta\tilde{\mathbf{u}}^k$	Vetor dos deslocamentos iterativos.
$\zeta$	Tolerância ao resíduo requerida no processo de convergência.
$\zeta_1$	Fator de convergência baseado em relações de força.
$\zeta_2$	Fator de convergência baseado em relações de deslocamentos.

## Capítulo 5

$t$	Última configuração de equilíbrio processada.
$\lambda$	Parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de $\mathbf{F}_r$ .
${}^t\lambda$ e ${}^{(t-1)}\lambda$	Parâmetro de carga avaliados na configuração de equilíbrio $t$ e no passo de carga anterior.
$\lambda^{k-1}$ e $\lambda^k$	Parâmetro de carga avaliados na iteração anterior ( $k-1$ ) e na iteração corrente $k$ .
$\lambda_{old}$	Parâmetro de carga avaliados no passo de carga anterior.
$\Delta\lambda^0$	Incremento inicial no passo de carga corrente.
${}^t\Delta\lambda^0$	Incremento inicial no passo de carga anterior.

${}^1\Delta\lambda^0$	Incremento inicial no primeiro passo de carga.
$\Delta\lambda^{(k-1)}$ e $\Delta\lambda^k$	Incremento do parâmetro de carga avaliado na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\delta\lambda^k$	Correção do parâmetro de carga avaliado na iteração corrente (k).
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais.
$\mathbf{u}_{old}$	Vetor de deslocamentos nodais avaliados no passo de carga anterior.
$\mathbf{u}^0$	Vetor de deslocamentos nodais inicial.
${}^t\mathbf{u}$ e ${}^{(t-1)}\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais avaliados na configuração de equilíbrio t e no passo de carga anterior.
$\Delta\mathbf{u}^0$	Incremento inicial dos deslocamentos nodais.
$\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$ e $\Delta\mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais avaliados na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\delta\mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos residuais avaliado na iteração corrente (k).
$\delta\mathbf{u}_g^k$	Parcela de $\delta\mathbf{u}$ referente às forças residuais $\mathbf{g}$ avaliada na iteração corrente (k).
$\delta\mathbf{u}_r^k$	Parcela de $\delta\mathbf{u}$ referente às forças de referência $\mathbf{F}_r$ avaliada na iteração corrente (k).
$\mathbf{R}$	Vetor de cargas nodais.
$\mathbf{R}_d$	Vetor de cargas nodais não-proporcionais.
$\mathbf{F}_d$	Vetor de forças residuais não-proporcionais.
$\mathbf{F}_r$	Vetor de referência.
$\mathbf{F}_i$	Vetor de forças internas.
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez representativa do sistema estrutural.
$\mathbf{K}^{(k-1)}$	Matriz de rigidez avaliada na iteração anterior (k-1).
$\zeta$	Tolerância ao resíduo requerida no processo de convergência.
$\mathbf{g}^{(k-1)}$	Vetor de forças residuais avaliado na iteração anterior (k-1).
$\eta$	Fator utilizado para escalar $\delta\mathbf{u}$ .

# 1

# INTRODUÇÃO

## 1.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Tornar os sistemas estruturais mais econômicos, através da redução do seu peso e do consumo de materiais, sem, no entanto, diminuir a sua segurança e durabilidade, tem sido um dos principais objetivos da engenharia estrutural. Nessa área, portanto, as pesquisas têm sido direcionadas no sentido de obtenção de sistemas estruturais cada vez mais leves e esbeltos.

À medida que o elemento estrutural se torna mais esbelto, a não-linearidade geométrica se torna cada vez mais importante e dá origem a vários fenômenos que não são encontrados em sistemas lineares. Esses fenômenos incluem a existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos críticos (pontos limites e de bifurcação) ao longo do caminho não-linear de equilíbrio, onde a estrutura pode exibir saltos dinâmicos. A presença da não-linearidade exige o desenvolvimento de técnicas de cálculo mais sofisticadas e um conhecimento cada vez mais profundo do comportamento estrutural.

O conhecimento do comportamento não-linear de elementos esbeltos, tais como colunas, arcos, anéis, placas e cascas, é de fundamental importância na solução de problemas de estabilidade/instabilidade local e/ou global de sistemas estruturais complexos, pois, na maioria das aplicações de engenharia, esses sistemas são formados a partir da união daqueles elementos.

A análise da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos, através do Método dos Elementos Finitos (MEF), envolve invariavelmente a solução de um sistema de equações algébricas não-lineares. Existem basicamente duas classes de métodos de

solução desse sistema de equações: a primeira classe consiste na adaptação computacional do método de perturbação desenvolvido por Koiter (1970); a outra classe está relacionada aos métodos que procuram resolver as equações não-lineares passo a passo.

Incluídos nessa última classe estão os métodos puramente incrementais e os esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos, que são considerados atualmente os mais eficientes.

Na solução de problemas estruturais não-lineares, esses procedimentos incrementais-iterativos mantêm o parâmetro de carga ( $\lambda$ ) constante durante o ciclo de iterações, o que faz com que a solução divirja próxima a pontos críticos (pontos limites e pontos de bifurcação) da trajetória de equilíbrio.

Com o propósito de resolver esses problemas de convergência, são usadas técnicas numéricas que, associadas às iterações usuais do tipo Newton, permitem alcançar respostas da estrutura além desses pontos. Essas técnicas numéricas estão associadas diretamente com as diversas estratégias de incremento de carga e de iteração.

Assim, através do estudo de um dado problema de estabilidade estrutural, é importante que essas estratégias de solução não-linear permitam o traçado completo da trajetória de equilíbrio da estrutura (curva carga-deslocamento), indicando regiões de ganho e de perda de rigidez, pontos limites de carga (“*snap through*”) e de deslocamento (“*snap back*”), e, se possível, identificar a existência de pontos de bifurcação.

Essas considerações iniciais formam a base do desenvolvimento do presente trabalho.

## **1.2 - OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo e a implementação computacional de algumas estratégias de incremento de carga e de iteração encontradas na literatura para análise do equilíbrio e da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos.

Serão analisados, em particular, sistemas estruturais modelados por elementos finitos reticulados planos.

A presente dissertação consiste em um aprofundamento dos seguintes trabalhos: Silveira (1995), Silveira e Gonçalves (1997), Silveira (1999) e Silveira *et al.* (1999a,b). Em Silveira (1995), algumas estratégias de solução de sistemas de equações não-lineares foram implementadas e testadas com o intuito de resolver problemas de estabilidade de sistemas estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato; em Silveira e Gonçalves (1997), foi verificada a eficiência computacional do método do comprimento de arco e suas variações (linear, cilíndrico e esférico); em Silveira (1999) e Silveira *et al.* (1999a,b) são comparadas várias estratégias de solução não-linear.

Além do estudo e verificação do desempenho computacional das estratégias de incremento de carga e de iteração abordadas nos trabalhos citados no parágrafo anterior, atenção especial será dada aqui à implementação computacional e análise da *técnica do resíduo ortogonal* proposta por Krenk (1995) e Krenk e Hededal (1993 e 1995) e do *método do controle do deslocamento generalizado* sugerido por Yang e Kuo (1994).

É importante destacar ainda que este trabalho é parte integrante das seguintes linhas de pesquisa do Mestrado em Construção Metálica do Departamento de Engenharia Civil/EM/UFOP:

- *Análise Numérica e Computacional em Engenharia*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos, como o MEF e/ou o Método dos Elementos de Contorno (MEC), na determinação de respostas de sistemas de engenharia; e
- *Instabilidade das Estruturas*: cujo objetivo principal é o estudo do equilíbrio e estabilidade de elementos estruturais esbeltos.

Os tópicos necessários para entendimento das estratégias de incremento de carga e de iteração são apresentados nos demais capítulos que compõem esse trabalho. Ainda neste capítulo, na Seção 1.3, é feita uma pequena revisão bibliográfica.

Detalhes da metodologia geral de solução não-linear inicialmente implementada por Silveira (1995), e usada neste trabalho, são fornecidos no Capítulo 2. Basicamente, ela é caracterizada por um esquema de solução incremental-iterativo, onde, após cada incremento inicial de carga, iterações subseqüentes do tipo Newton são realizadas para estabelecer uma nova configuração de equilíbrio da estrutura. No final do Capítulo 2, é

apresentada a formulação do elemento finito não-linear que será adotada na modelagem dos sistemas estruturais esbeltos (Galvão, 2000).

No Capítulo 3, são apresentadas as estratégias para o incremento automático do parâmetro inicial de carga.

No Capítulo 4, são discutidas as formulações teóricas das estratégias de iterações que permitem variações do parâmetro de carga ao longo do ciclo de iterações.

O sistema computacional empregado, incluindo as diversas opções de estratégias de incremento de carga e de iteração, é apresentado no Capítulo 5.

A análise do equilíbrio e da estabilidade de vários sistemas estruturais esbeltos é feita no Capítulo 6. Vários sistemas estruturais com características fortemente não-lineares são estudados com o intuito de verificar a eficiência computacional das várias estratégias de incremento de carga e de iteração apresentadas, respectivamente, nos Capítulos 3 e 4.

Finalmente, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e observações relacionadas ao emprego das diversas estratégias utilizadas nos problemas estudados no Capítulo 6. São fornecidas, ainda, algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

### **1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Para que uma análise numérica computacional, via MEF, seja capaz de avaliar todos os aspectos importantes do comportamento não-linear de sistemas estruturais complexos, torna-se importante abordar os seguintes assuntos:

- Formulações de elementos finitos não-lineares bidimensionais (2D) e/ou tridimensionais (3D);
- Procedimentos numéricos capazes de determinar de forma completa as trajetórias de equilíbrio, atingindo e ultrapassando todos os pontos críticos (pontos limites e bifurcação) que eventualmente possam existir;
- Técnicas que permitam definir com precisão os pontos críticos ao longo do caminho de equilíbrio;

- Procedimentos computacionais que possibilitem seguir as trajetórias secundárias (branch switching techniques) existentes ao longo do caminho de equilíbrio;
- Implementações de rotinas gráficas de pré e pós-processamento com o intuito de facilitar a análise do sistema estrutural.

Nesta seção, destaque especial será dado aos trabalhos diretamente relacionados com o tema de pesquisa da dissertação: estratégias de incremento de carga e de iteração.

Trabalhos recentes, entretanto, trazem algumas novidades sobre formulações não-lineares de elementos finitos reticulados planos, 2D (Spacone *et al.*, 1996 e Neuenhofer e Filippou, 1997). Entre essas novidades estão: o emprego da teoria de Timoshenko, a utilização de barras curvas e formulações com termos de flexibilidade. Ao contrário da teoria de Bernoulli, na teoria de vigas de Timoshenko os efeitos devidos às deformações cisalhantes na seção transversal não são desprezados no cálculo da matriz de rigidez da estrutura. Formulações baseadas na teoria de vigas de Timoshenko foram propostas por Lee *et al.* (1994), Petrolito (1995), e Pascoste e Eriksson (1997).

Formulações não-lineares em referenciais Lagrangianos (total e atualizado) foram apresentadas por vários pesquisadores, dentre os quais pode-se citar: Chages e Churchill (1987), Goto e Chen (1987), Wong e Loi (1990), Yang e Kuo (1994), Alves (1993a,b) e Torkamani *et al.* (1997). Yang e Kuo (1994) sugeriram uma forma incremental de se calcular o vetor de forças internas. Pascoste e Eriksson (1995 e 1997) forneceram formulações em referencial Lagrangiano total baseadas em ‘relações melhoradas’ de deformação-deslocamento, cuja não-linearidade se expressa por funções trigonométricas.

Um procedimento geral para a obtenção de matrizes de rigidez simétricas foi proposto por Moran *et al.* (1998). Neuenhofer e Filippou (1998) propuseram uma formulação baseada no método da flexibilidade. Galvão (2000) estudou e implementou computacionalmente várias formulações geometricamente não-lineares para elementos finitos reticulados planos.

Paralelamente aos elementos bidimensionais, tem-se desenvolvido o estudo de elementos finitos para análise geometricamente não-linear de pórticos tridimensionais. Vale lembrar, entretanto, que uma formulação não-linear tridimensional não é uma

simples extensão do caso bidimensional, pois as rotações finitas tridimensionais não são quantidades vetoriais. Recentemente, vários pesquisadores têm publicado formulações não-lineares para análise estática de pórticos tridimensionais. Pode-se destacar, por exemplo, Yang e Kuo (1994) que propuseram formulações para elementos tridimensionais retos e curvos; Choi e Lim (1995), com uma formulação de elemento curvo; Ammar *et al.* (1996), com formulações para elementos de vigas esbeltos e não-esbeltos; Matsununga (1996) com uma formulação para pilares não-esbeltos; Pacoste e Eriksson (1997) que propuseram formulações com abordagem total e corrotacional; Rhim e Lee (1998) que desenvolveram uma formulação dando um tratamento vetorial à geometria do problema; e Li (1998) que elaborou uma formulação aplicando a teoria de rotações finitas.

Juntamente com as pesquisas relativas às formulações de elementos finitos não-lineares, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos com a finalidade de se determinar a melhor estratégia para se processar a solução não-linear. Como já destacado, os métodos que têm mostrado maior eficiência nesse sentido são os que combinam procedimentos incrementais e iterativos.

Como marco inicial no desenvolvimento de métodos incrementais, faz-se necessário destacar Argyris (1964) com a aplicação de um método incremental para solução não-linear. Seguem Mallet e Marçal (1968), que utilizaram iterações do tipo Newton-Raphson para contornarem os possíveis erros nas aproximações incrementais; Brebbia e Connor (1969), que utilizaram métodos incrementais-iterativos para resolução de problemas não-lineares. Estudo comparativo entre diferentes formas de solução numérica não-linear foi elaborado por Bergan e Soreide (1973). Zienkiewicz (1971) e Crisfield (1981) apresentaram uma modificação no método de Newton-Raphson, fazendo com que a matriz de rigidez só fosse atualizada a cada passo de carga.

Bergan *et al.* (1978) introduziram um método para controle do tamanho do incremento inicial do parâmetro de carga baseando-se na medida do grau de não-linearidade do sistema estrutural, definido pelo “parâmetro de rigidez corrente”. Com essa estratégia eles procuraram manter aproximadamente o mesmo número de iterações para convergir em cada passo de carga.

Uma estratégia de incremento de carga que relaciona o tamanho do incremento inicial de carga com a curvatura da trajetória de equilíbrio não-linear foi desenvolvida por Den Heijer e Rheinboldt (1981). Procedimento semelhante foi apresentado no trabalho de Bergan e Soreide (1973), em que é usada uma aproximação parabólica da resposta carga-deflexão.

No livro de Crisfield (Crisfield, 1991) podem ser encontradas diferentes estratégias de incremento de carga. Na publicação de Yang e Kuo (Yang e Kuo, 1994) é fornecida uma estratégia de incremento de carga, baseada no “parâmetro de rigidez generalizado”, GSP (*General Stiffness Parameter*). Analogamente ao “parâmetro de rigidez corrente”, CSP (*Current Stiffness Parameter*) proposto por Bergan *et al* (1978), GSP pode ser usado como um parâmetro representativo da rigidez da estrutura no passo de carga corrente.

A determinação do sinal correto do incremento inicial do parâmetro de carga, com a introdução de medidas capazes de detectar quando pontos de máximos e mínimos são ultrapassados, é um dos aspectos mais importantes de qualquer estratégia de incremento de carga.

Experiências mostraram que o sinal do determinante da matriz de rigidez tangente, conforme sugerido por Crisfield (1981), Wagner e Wriggers (1988) e Clarke e Hancock (1990), pode ser tomado como um critério de sucesso, na maioria dos casos, para determinação do sinal do parâmetro inicial de carga. Em outra definição equivalente, Crisfield (1991) sugere que o sinal do incremento inicial do parâmetro de carga ( $\Delta\lambda^0$ ) deve seguir aquele do incremento anterior. Como relatado em Meek e Tan (1984), esse procedimento pode falhar em estruturas exibindo múltiplos autovalores negativos.

Como proposto por Bergan *et al.* (1978), os pontos limites da trajetória de equilíbrio podem ser detectados, checando o sinal do incremento do trabalho externo. Caso o sinal do incremento do trabalho externo corrente seja diferente daquele do passo de carga anterior, modifica-se o sinal de  $\Delta\lambda^0$ . Em Clarke e Hancock (1990) é comentado que esse critério pode tornar-se inseguro na vizinhança de pontos limites de deslocamento.

Krenk e Hededal (1993 e 1995) propõem que o sinal de  $\Delta\lambda^0$  seja determinado analisando o produto interno entre o deslocamento incremental obtido no passo de carga anterior e o incremento de deslocamento corrente. Os mesmos autores comentam que esse procedimento pode apresentar falhas em estruturas que exibem pontos de bifurcação. Estudos desenvolvidos por Feng *et al.* (1996 e 1997) e por Neto e Feng (1999) utilizam método semelhante.

Segundo Yang e Shieh (1990) e Yang e Kuo (1994), o sinal do parâmetro de rigidez generalizado (GSP) torna-se negativo para os passos de carga incrementais próximos aos pontos limites. Para os demais passos, este permanecerá sempre positivo.

Uma estratégia de iteração eficiente deve atender basicamente aos seguintes requisitos: grande eficiência computacional, o que proporciona a resolução de problemas com menor tempo de execução; facilidade de convergência, o que auxilia na resolução de problemas com grande não-linearidade; e menor espaço de memória computacional, o que ajuda a resolver problemas em grande escala.

Batoz e Dhatt (1979) desenvolveram uma técnica na qual o ciclo iterativo é realizado não a carga constante, mas a deslocamento constante; ou seja, eles selecionaram uma componente do vetor de deslocamentos nodais que foi tomada constante durante todo o processo iterativo. Esquema semelhante foi sugerido por Powell e Simons (1981).

Meek e Tan (1984) apresentaram um resumo das principais técnicas para se ultrapassarem os pontos limites, das quais a técnica do comprimento de arco foi reconhecida como uma das mais eficientes. Contribuíram com essa técnica: Riks (1972 e 1979), Crisfield (1981, 1991 e 1997), Ramm (1981), Ford e Stiemer (1987) e Lam e Morley (1992), dentre outros.

Kouhia e Mikkola (1989) fizeram um estudo para unificação dos métodos sugeridos por Wempner (1971), Riks (1979), Ramm (1981), Crisfield (1981) e Fried (1984). A interpretação geométrica do método do comprimento de arco pode ser encontrada no artigo de Fafard e Massicotte (1993) que desenvolveram uma estratégia de iteração combinando os esquemas de Crisfield e Ramm.

Gierlinsk e Graves Smity (1985) desenvolveram uma metodologia geral de iteração, denominada resposta ponderada constante, capaz de englobar como casos

particulares as estratégias propostas por Riks (1979), Powell e Simons (1981) e Crisfield (1991). Uma definição mais ampla do método do comprimento de arco é apresentada por Lin *et al.* (1993). Em Zhiliang (1994) e Zhou e Murray (1994), são feitos estudos envolvendo as estratégias incrementais iterativas baseadas no método do comprimento de arco e controle de deslocamento para estruturas de casca.

Chan (1988) apresentou uma estratégia de iteração bastante eficiente definida como o método dos deslocamentos residuais (MDR). Nessa estratégia, ao invés de se usarem restrições geométricas e de energia, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas.

No artigo de Yang e Shieh (1990) e no livro de Yang e Kuo (1994) é encontrada uma estratégia de correção do parâmetro de carga  $\lambda$  durante o ciclo iterativo, baseada no chamado deslocamento generalizado H.

Uma nova estratégia de iteração foi elaborada por Krenk e Hededal (1993 e 1995). Esses pesquisadores propuseram o emprego de duas condições de ortogonalidade em cada iteração do processo de solução não-linear: a primeira, entre o vetor de cargas residuais e o incremento de deslocamento; a outra, entre o incremento de forças e o vetor de deslocamentos iterativos.

A determinação, com relativa precisão, dos pontos críticos existentes no caminho de equilíbrio, bem como a definição das trajetórias secundárias, são de fundamental importância no processo de análise da estabilidade de um sistema estrutural. Existem hoje alguns procedimentos numéricos que podem determinar esses pontos de forma direta (*Formulação Secante*) ou indireta (*Bisseção, Interpolação, etc*), ou através da combinação desses. Entre os trabalhos sobre esse assunto merecem destaque: Shi e Crisfield (1994) e Crisfield (1997).

Adicionalmente, métodos numéricos para determinação dos pontos críticos usados em conexão com o MEF foram apresentados também por Wagner e Wriggers (1988), Wriggers e Simo (1990), Chan (1993) e Oñate e Matias (1996).

# 2

## **METODOLOGIA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO-LINEARES**

### **2.1 - INTRODUÇÃO**

Este capítulo tem como objetivo apresentar a metodologia de solução de equações não-lineares que foi usada nesta dissertação para implementação computacional das várias estratégias de incremento de carga e de iteração que serão estudadas nos Capítulos 3 e 4, respectivamente. Na Seção 2.2, são encontrados os passos mais importantes para entendimento da metodologia proposta.

Adicionalmente, os detalhes da formulação do elemento finito, usado na modelagem dos sistemas estruturais analisados no Capítulo 6, são descritos na segunda parte deste capítulo, Seção 2.3.

### **2.2 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR**

Uma metodologia eficiente de solução de sistemas não-lineares deve ser capaz de traçar toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundários) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos (pontos limites de carga e de deslocamento e/ou pontos de bifurcação) que possam existir.

A metodologia adotada no presente trabalho, utiliza basicamente um processo incremental-iterativo. Num contexto computacional, para um dado passo de carga, esse processo pode ser resumido em duas etapas:

1. A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é selecionado um incremento de carga, definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga —  $\Delta\lambda^0$  —, procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção de  $\Delta\lambda^0$ , determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais  $\Delta\mathbf{u}^0$ . As aproximações  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{u}^0$  caracterizam a chamada *solução incremental predita*. Os detalhes dessa etapa de solução são fornecidos no Capítulo 3;
2. Na segunda etapa de solução, procura-se, através de uma dada estratégia de iteração, corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura o mais rápido possível. Se as iterações realizadas envolvem não só os deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ , mas também o parâmetro de carga  $\lambda$ , então uma equação adicional de restrição é requerida. A forma desta equação de restrição é o que distingue as várias estratégias de iteração. O Capítulo 4 fornece as várias estratégias de iteração implementadas neste trabalho.

Os passos principais dessa metodologia são apresentados nas seções subseqüentes. Antes, porém, é necessário fazer algumas observações relacionadas à notação a ser adotada:

- considere que são conhecidos o campo de deslocamento e estado de tensão da estrutura para o passo de carga  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga  $t+\Delta t$ ;
- $k$  é referido como um contador do número de iterações;
- para  $k = 0$ , tem-se a solução incremental predita;
- para  $k = 1, 2, \dots$  tem-se o ciclo iterativo de Newton-Raphson;
- $\lambda$  e  $\mathbf{u}$  definem o parâmetro de carga e deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{u}$  caracterizam os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{u}$  são as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidas durante o processo iterativo.

### 2.2.1 - Solução Incremental Preditada

O primeiro passo para a obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente —  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{u}^0$  — consiste na montagem, usando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura, da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$ . Após a definição de  $\mathbf{K}$ , resolve-se o sistema de equações:

$$\mathbf{K} \delta\mathbf{u}_r = \mathbf{F}_r \quad (2.1)$$

para determinar os deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{u}_r$ . A magnitude desse vetor é arbitrária, apenas a sua direção é importante;  $\mathbf{F}_r$  é o vetor de forças nodais tomado como referência.

As estratégias de incremento de carga fornecidas no Capítulo 3, e que podem ser vistas resumidamente na Figura 2.1, permitem que se faça uma seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . Essa seleção pode estar condicionada a uma equação de restrição adicional imposta ao problema como mostrado na Figura 2.2 para a restrição do *comprimento de arco* (Crisfield, 1991).

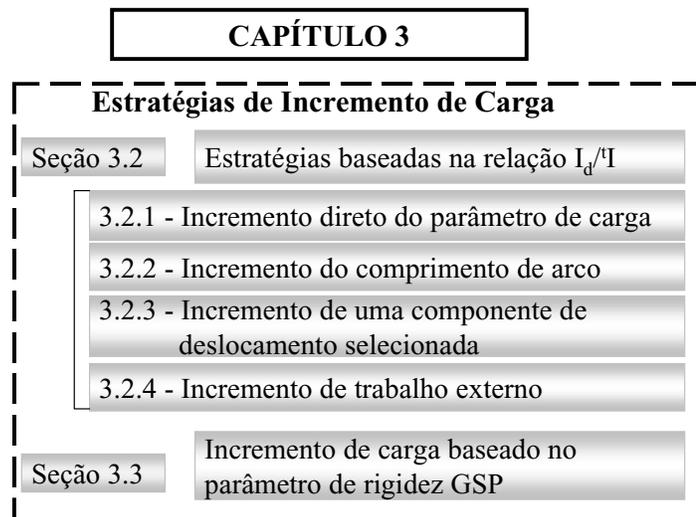


Figura 2.1 - Organização do Capítulo 3.

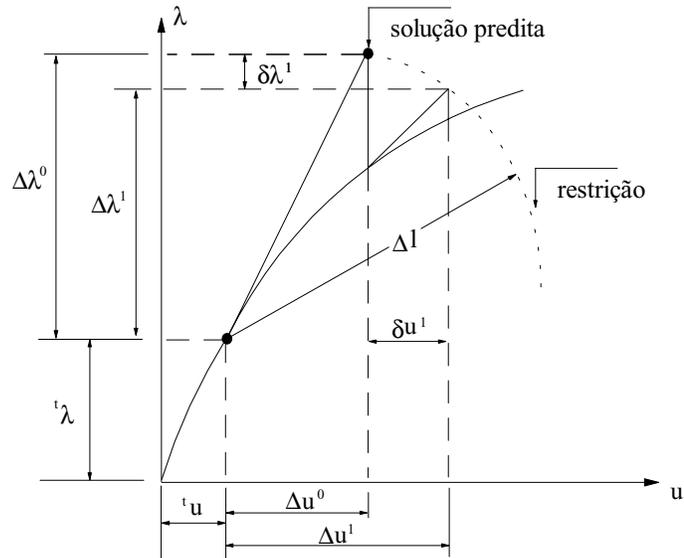


Figura 2.2 - Solução incremental-iterativa.

Com a definição de  $\Delta\lambda^0$ , calculam-se os deslocamentos nodais incrementais tangenciais escalonando-se  $\delta\mathbf{u}_r$  como indicado:

$$\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{u}_r \quad (2.2)$$

Nesse estágio o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais são atualizados, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = \lambda^0 = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (2.3)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0 \quad (2.4)$$

onde  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{u}$  caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga, como indicado na Figura 2.2, e  ${}^{t+\Delta t}\lambda$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$  foram tomados iguais a  $\lambda^0$  e  $\mathbf{u}^0$ , respectivamente, para facilitar o entendimento da seção seguinte.

As Soluções (2.3) e (2.4) raramente satisfazem a condição de equilíbrio do sistema, de forma que iterações subsequentes são necessárias para que se possa restaurar o equilíbrio. Os procedimentos numéricos envolvendo estratégias de iterações que permitem variações do parâmetro de carga são encontrados no Capítulo 4. A Figura 2.3, no entanto, fornece um resumo de como esse capítulo está organizado.

<b>CAPÍTULO 4</b>	
<b>Estratégias de Iteração</b>	
Seção 4.2	Iteração baseada na carga constante
Seção 4.3	Iteração baseada no deslocamento constante
Seção 4.4	Iteração baseada no trabalho externo constante
Seção 4.5	Iteração baseada no comprimento de arco constante
Seção 4.6	Iteração baseada na resposta ponderada constante
Seção 4.7	Iteração baseada na norma mínima do deslocamento residual
Seção 4.8	Iteração baseada na norma mínima das forças desequilibradas
Seção 4.9	Iteração baseada no resíduo ortogonal
Seção 4.10	Iteração baseada no deslocamento generalizado

Figura 2.3 - Organização do Capítulo 4.

### 2.2.2 - Ciclo de Iterações

No esquema tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante durante o ciclo iterativo. Porém, caso se pretenda acompanhar todo o traçado da trajetória de equilíbrio, com possíveis passagens pelos pontos limites, é necessário que seja permitida a variação de  $\lambda$  a cada iteração.

Seguindo, então, a técnica geral de solução inicialmente proposta por Batoz e Dhatt (1979), em que é permitida a variação do parâmetro de carga, escreve-se que a mudança nos deslocamentos nodais é governada pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{g}$  representa, na terminologia da programação matemática, o vetor gradiente que deve se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando, assim, que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido. Na Equação (2.5), nota-se que  $\mathbf{g}$  é função dos deslocamentos nodais totais  $\mathbf{u}^{(k-1)}$ , calculados na última iteração, e do valor corrente do parâmetro de carga total  $\lambda^k$ , que agora também é incógnita.  $\lambda^k$  pode ser escrito como:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad (2.6)$$

onde  $\delta \lambda^k$  é a correção do parâmetro de carga. Substituindo (2.6) em (2.5) e expandindo o seu lado direito, chega-se a:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^k = -\left[ \mathbf{F}_i^{(k-1)} - (\lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k) \mathbf{F}_r \right] \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{F}_i^{(k-1)}$  representa o vetor das forças internas. Em (2.7) o produto  $\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r$  caracteriza o vetor das forças externas total atuante na última iteração.

A Equação (2.7) pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r \quad (2.8)$$

que é a equação procurada para se trabalhar durante o ciclo iterativo. De (2.8), tem-se que os deslocamentos nodais iterativos podem ser decompostos em duas parcelas:

$$\delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \quad (2.9)$$

onde:

$$\delta \mathbf{u}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (2.10)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (2.11)$$

Aqui  $\delta \mathbf{u}_g^k$  é a correção que seria obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia convencional de incremento do parâmetro de carga constante;  $\delta \mathbf{u}_r^k$  é o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de  $\mathbf{F}_r$ . Caso seja adotado o método de Newton-Raphson modificado,  $\delta \mathbf{u}_r^k$  é igual ao vetor de deslocamentos tangenciais  $\delta \mathbf{u}_r$  calculado na seção anterior através da Equação (2.1) e não se modifica durante as iterações, pois  $\mathbf{K}$  não se altera.

A correção do parâmetro de carga,  $\delta \lambda^k$  — única incógnita da Equação (2.9) —, é determinada seguindo uma das estratégias de iteração que serão fornecidas no Capítulo 5, onde se introduzirá uma equação de restrição que deverá ser respeitada a cada iteração. Com a determinação de  $\delta \lambda^k$ , retorna-se à Equação (2.9) para a obtenção da correção dos deslocamentos.

Com a obtenção da solução iterativa  $\delta \lambda^k$  e  $\delta \mathbf{u}^k$ , faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema:

$$\Delta \lambda^k = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad (2.12)$$

$$\Delta \mathbf{u}^k = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \quad (2.13)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais têm-se que:

$${}^{t+\Delta t} \lambda = \lambda^k = {}^t \lambda + \Delta \lambda^k \quad (2.14)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = \mathbf{u}^k = {}^t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^k \quad (2.15)$$

Os procedimentos descritos nessa seção são repetidos até que um dado critério de convergência seja atendido (ver Capítulo 4, Seção 4.11).

Um resumo dos procedimentos descritos nesta seção e na anterior é apresentado na Figura 2.4 e no fluxograma da Figura 2.5.

1. Configuração inicial:  $t\mathbf{u}$  e  $t\lambda$
2. Definição da solução predita:  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{u}^0$
3. Iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$
4. Verifica a convergência:  $\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta$ ?  
Sim: pare o ciclo de iterações, siga para o passo 7  
Não: calcule  $\delta\mathbf{u}^k = \delta\mathbf{u}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{u}_r^k$
5. Atualização das variáveis:
  - i. incrementais:  $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{u}^k = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^k$
  - ii. totais:  ${}^{t+\Delta t}\lambda = \lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = \mathbf{u}^k = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^k$
6. Retorne ao passo 3
7. Faça novo incremento de carga e recomece o processo

Figura 2.4 - Passos básicos da metodologia de solução não-linear.

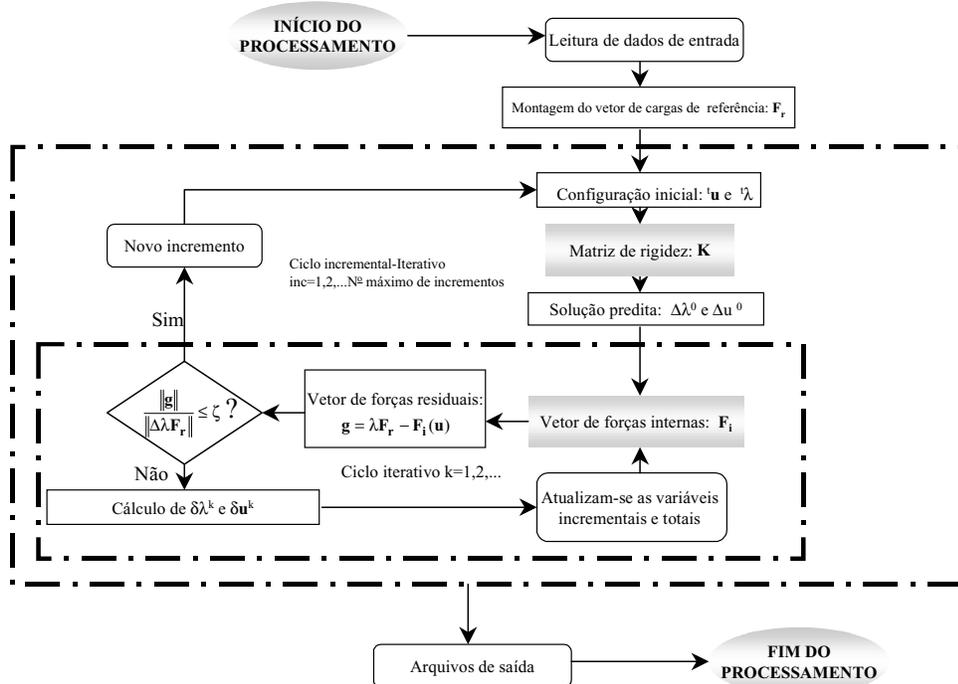


Figura 2.5 - Fluxograma da metodologia de solução não-linear.

## 2.3 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO NÃO-LINEAR

A metodologia de solução proposta na seção anterior pode genericamente ser empregada na análise não-linear geométrica de sistemas estruturais, formados por barras, placas e cascas esbeltas.

A validação e a eficiência desses procedimentos, juntamente com as implementações computacionais de várias estratégias de incremento de carga e de iteração, serão avaliadas no Capítulo 6, através de exemplos numéricos, abordando o comportamento não-linear de colunas, pórticos e arcos. Esta seção limita-se, portanto, a descrever a formulação matemática do elemento finito não-linear, usado na modelagem dessas estruturas.

A teoria a ser apresentada a seguir é baseada no trabalho de Galvão (2000), que implementou e comparou várias formulações geometricamente não-lineares para análise de sistemas estruturais planos formado por barras. Entre as formulações implementadas, merecem destaques aquelas propostas por Alves (1993b) e Yang e Kuo (1994).

Inicialmente serão apresentadas as relações deformação-deslocamento para o elemento finito considerado; em seguida, serão definidos a energia potencial total do sistema na forma incremental, as equações não-lineares de equilíbrio que se pretende resolver, a matriz de rigidez tangente e, finalmente, o vetor de forças internas do elemento considerado.

### 2.3.1 - Relações Deformação-Deslocamento

Yang e Kuo (1994) sugeriram que as seguintes componentes de deformação axial e transversal, baseadas no tensor de Green-Lagrange, fossem adotadas:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.16)$$

$$\Delta \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\Delta \bar{u}}{dy} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{d\Delta \bar{u}}{dy} \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{d\Delta v}{dy} \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (2.17)$$

que podem também ser expressas, separando-se as parcelas lineares das não-lineares, de acordo com:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx} \quad (2.18)$$

$$\Delta \epsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + \Delta \eta_{xy} \quad (2.19)$$

para as quais se tem:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \quad \Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.20)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\Delta \bar{u}}{dy} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad \Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\Delta \bar{u}}{dy} \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{d\Delta v}{dy} \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (2.21)$$

onde  $\Delta \bar{u}$  é o deslocamento axial de um ponto distante  $y$  da linha neutra da seção.

Aceitando-se a hipótese da teoria de vigas de Bernoulli, segundo a qual as seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a deformação, escreve-se:

$$\Delta \bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (2.22)$$

onde a primeira parcela,  $\Delta u$ , é consequência dos esforços axiais atuantes e é constante ao longo da seção; e a segunda parcela,  $y(d\Delta v/dx)$ , é devido aos esforços de flexão, e varia linearmente com a distância à linha neutra.

Substituindo-se (2.22) em (2.20), tem-se para as deformações axiais:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \quad (2.23)$$

$$\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.24)$$

Substituindo-se (2.22) em (2.21), tem-se para as deformações transversais:

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] = 0 \quad (2.25)$$

$$\Delta\eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} + y \left( \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right) \right] \quad (2.26)$$

Para um referencial Lagrangiano atualizado (RLA) é indispensável que se defina, para o elemento finito considerado, o estado de tensões, ou de deformações, na última configuração de equilíbrio obtida no processo de solução incremental, ou seja, configuração  $t$ . Nessa configuração, as forças iniciais resultantes axiais  ${}^tP$ , cisalhantes  ${}^tQ$ , e momento fletor  ${}^tM$ , podem ser definidas por:

$${}^tP = \int_A {}^t\tau_{xx} dA \quad (2.27)$$

$${}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA \quad (2.28)$$

$${}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (2.29)$$

e de acordo com a Figura 2.6, tem-se que:

$${}^tM = -M_1 + \frac{(M_1 + M_2)}{L} x \quad {}^tQ = -\frac{(M_1 + M_2)}{L} \quad (2.30)$$

Para um elemento de pórtico plano no qual a hipótese de Bernoulli tenha sido adotada, apenas as tensões axiais  $\Delta{}^t\tau_{xx}$  podem ser obtidas diretamente da lei constitutiva:  $\Delta{}^t\tau_{xx} = E\Delta\epsilon_{xx}$ . O mesmo não deve ser feito para as tensões cisalhantes incrementais  $\Delta{}^t\tau_{xy}$ ;

essas devem ser determinadas indiretamente, ou seja, das condições de equilíbrio. Fazendo assim, a seguinte relação deve ser considerada:

$$\Delta^t \tau_{xy} = S_{xy}^l + S_{xy}^n \quad (2.31)$$

onde as parcelas linear e não linear do incremento de tensões cisalhantes são dadas por:

$$S_{xy}^l = \frac{E}{2} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \quad (2.32)$$

$$S_{xy}^n = \frac{E}{2} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d \Delta u}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \quad (2.33)$$

sendo E o módulo de elasticidade e h a altura da seção transversal do elemento de viga.

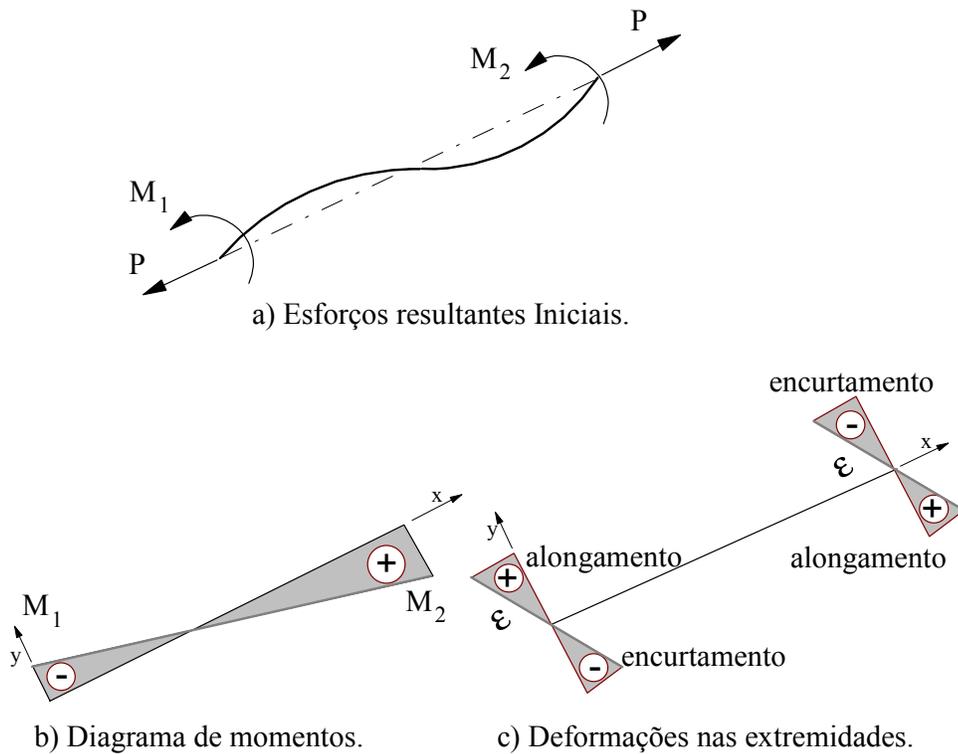


Figura 2.6 - Deformação inicial: configuração de equilíbrio no passo de carga t.

### 2.3.2 - Indicador Variacional

O funcional de energia potencial total ( $\Delta\Pi$ ) na configuração  $t+\Delta t$  é definido de acordo com:

$$\Delta\Pi = \Delta U + \Delta V \quad (2.34)$$

sendo o incremento de energia de deformação,  $\Delta U$ , definido, para o *referencial Lagrangiano atualizado* (RLA), como:

$$\Delta U = \int_{Vol} \int_{\epsilon_{ij}^t}^{\epsilon_{ij}^t + \Delta\epsilon_{ij}} (\Delta\tau_{ij} d\epsilon_{ij}) dV \quad (2.35)$$

Considerando-se, então, as deformações axiais e cisalhantes, escreve-se:

$$\Delta U = \iint_{Vol} \left( {}^t\tau_{xx} \Delta\epsilon_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \Delta\epsilon_{xy} \right) dAdx + \iint_{Vol} \left( \frac{E}{2} \Delta\epsilon_{xx}^2 + 2 {}^{\Delta t}\tau_{xy} \Delta\epsilon_{xy} \right) dAdx \quad (2.36)$$

O incremento da energia potencial das forças externas  $\Delta V$  é definido como:

$$\Delta V = - \int_s F_i \Delta u_i ds = - \left[ \int_s {}^t F_i \Delta u_i ds + \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds \right] \quad (2.37)$$

Assume-se que as deformações incrementais são tão pequenas que as parcelas não-lineares destas podem ser desprezadas, e, levando-se em conta (2.18), (2.19) e (2.25) a Equação (2.36) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\Delta U = \iint_{Vol} \left( {}^t\tau_{xx} \Delta\epsilon_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \Delta\epsilon_{xy} \right) dAdx + \iint_{Vol} \left( \frac{E}{2} \Delta\epsilon_{xx}^2 \right) dAdx \quad (2.38)$$

Assim, seguindo a proposta de Alves (1993b), pode-se definir o funcional de energia da seguinte forma:

$$\Delta\Pi = U_0 + U_\tau + U_L - \left[ \int_s {}^t F_i \Delta u_i ds + \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds \right] \quad (2.39)$$

onde, usando-se (2.27) a (2.29), tem-se:

$$U_0 = \int_{vol} \left( {}^t \tau_{xx} \Delta e_{xx} + 2 {}^t \tau_{xy} \Delta e_{xy} \right) dV \quad (2.40a)$$

$$U_\tau = \frac{1}{2} \int_0^L {}^t P \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left( \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ {}^t M \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[ {}^t Q \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \right] dx \quad (2.40b)$$

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{{}^t Vol} E \Delta e_{xx}^2 {}^t dV \quad (2.40c)$$

Com o objetivo de se obter uma equação na forma incremental, efetuou-se uma simplificação baseada na seguinte expressão, semelhante à do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_{vol} \left( {}^t \tau_{xx} \Delta e_{xx} + 2 {}^t \tau_{xy} \Delta e_{xy} \right) dvol = \int_s {}^t F_i \Delta u_i ds \quad (2.41)$$

ou:

$$U_0 = \int_s {}^t F_i \Delta u_i ds \quad (2.42)$$

onde o lado direito da equação corresponde ao trabalho virtual das forças externas acumuladas até a configuração t. O funcional de energia pode, então, ser reescrito como:

$$\Delta\Pi = U_\tau + U_L - \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds \quad (2.43)$$

### 2.3.3 - Elemento Finito Adotado

O elemento de viga-coluna adotado é o esquematizado na Figura 2.7. Trata-se de um segmento reto, limitado pelos nós 1 e 2, que se deforma no plano de definição da estrutura. Cada elemento define um sistema local de coordenadas  $xy$ , rotacionado em relação a um sistema de coordenadas global  $XY$  de um certo ângulo  $\alpha$ .

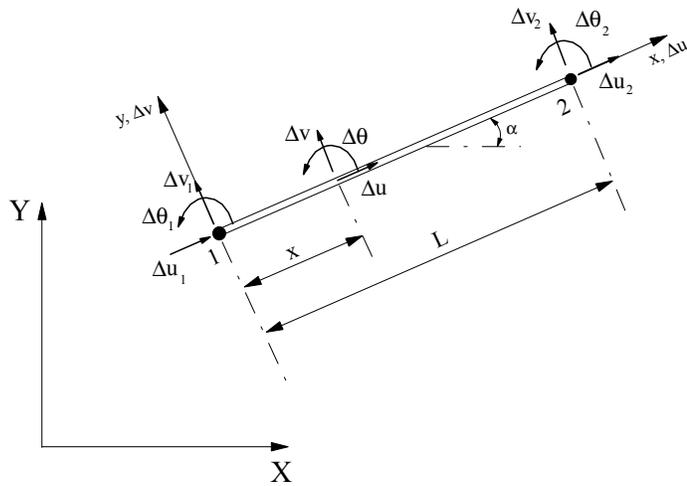


Figura 2.7 - Elemento de viga-coluna adotado.

Para que haja continuidade de deslocamentos e rotação nos bordos dos elementos adjacentes, é suficiente considerar, para aproximar o deslocamento axial incremental  $\Delta u$ , uma função linear, enquanto para a componente transversal  $\Delta v$ , admitindo-se  $\Delta \theta = d\Delta v/dx$ , deve ser usada uma função do terceiro grau. Dessa forma, escreve-se:

$$\Delta u = a_0 + a_1 x \quad (2.44)$$

$$\Delta v = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (2.45)$$

onde  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são constantes a serem determinadas através das condições de contorno do elemento: em  $x = 0$ ,  $\Delta u = \Delta u_1$ ,  $\Delta v = \Delta v_1$  e  $\Delta \theta_1 = d\Delta v_1/dx$ ; e em  $x = L$ ,

$\Delta u = \Delta u_2$ ,  $\Delta v = \Delta v_2$  e  $\Delta \theta_2 = d\Delta v_2/dx$ . Dessas condições chega-se às expressões para  $\Delta u$  e  $\Delta v$  em termos dos valores nodais:

$$\Delta u = H_1 \Delta u_1 + H_2 \Delta u_2 \quad (2.46)$$

$$\Delta v = H_3 \Delta v_1 + H_4 \Delta \theta_1 + H_5 \Delta v_2 + H_6 \Delta \theta_2 \quad (2.47)$$

onde  $H_1, H_2, \dots$  e  $H_6$  são as funções de interpolação:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L}; \text{ e } H_2 = \frac{x}{L} \quad (2.48)$$

$$H_3 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; \quad H_4 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2};$$

$$H_5 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \text{ e } H_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.49)$$

Matricialmente, tem-se que os deslocamentos  $\Delta u$  e  $\Delta v$ , e a rotação  $\Delta \theta$  de um dado ponto do elemento, a uma distância  $x$  do nó 1, são dados por:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} \quad (2.50)$$

onde  $\Delta \mathbf{d} = \{\Delta u \Delta v \Delta \theta\}^T$ ;  $\Delta \mathbf{u} = \{\Delta u_1 \Delta v_1 \Delta \theta_1 \Delta u_2 \Delta v_2 \Delta \theta_2\}^T$ ; e  $\mathbf{H}$  tem a seguinte forma:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} N_u \\ N_v \\ N'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_3 & H_4 & 0 & H_5 & H_6 \\ 0 & H_{3,x} & H_{4,x} & 0 & H_{5,x} & H_{6,x} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

A transformação de  $\Delta \mathbf{u}$  para o sistema de coordenadas global XY (referencial comum) é dada por:

$$\Delta \mathbf{u}_{gl} = \mathbf{R}^T \Delta \mathbf{u} \quad (2.52)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação do elemento, dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

### 2.3.4 - Matriz de rigidez

De acordo com Alves (1995), consegue-se exprimir o indicador variacional em função dos deslocamentos e forças nodais da seguinte forma:

$$\bar{J} = \Delta\mathbf{u}^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K}_L + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\tau \right] \Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^T {}^t\mathbf{F}_i - \Delta\mathbf{u}^T {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r \quad (2.54)$$

onde as componentes das matrizes  $\mathbf{K}_L$  e  $\mathbf{K}_\tau$  são obtidas diretamente da energia interna de deformação, ou seja:

$$k_{L(i,j)} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (2.55a)$$

$$k_{\tau(i,j)} = \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (2.55b)$$

Em (2.54), o vetor  ${}^t\mathbf{F}_i$  caracteriza a força interna da estrutura na configuração de equilíbrio  $t$ .

Levando-se em conta a contribuição de todos os elementos finitos, sem esquecer que o somatório dos vetores e das matrizes deve ser efetuado em relação a um

referencial comum ( $\mathbf{K}_{gl} = \sum_{m=1}^n \mathbf{R}^T \mathbf{K}^m \mathbf{R}$ ), chega-se a uma expressão semelhante à (2.54)

para o sistema estrutural em estudo. Do princípio da energia potencial total estacionária, ou seja, aplicando  $\partial J / \partial \Delta \mathbf{u} = 0$ , tem-se que a condição de equilíbrio do sistema na configuração  $t + \Delta t$  é dada por:

$$\Delta t \mathbf{F}_i + {}^t \mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_r \quad (2.56)$$

ou:

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau] \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{g} = (-{}^t \mathbf{F}_i + {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_r) \quad (2.57)$$

sendo:

$$\Delta t \mathbf{F}_i = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau] \Delta \mathbf{u} \quad (2.58)$$

definido como o incremento das forças internas da estrutura.

Da equação anterior, pode-se definir a matriz de rigidez global como sendo:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau] \quad (2.59)$$

### 2.3.5 - Vetor de forças internas

Nesta abordagem, pretende-se obter o vetor  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i$ , de maneira incremental, ou seja, calculando a cada passo incremental o acréscimo nas forças internas. Para isso considera-se válida a relação:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i = {}^t \mathbf{F}_i + \Delta t \mathbf{F}_i \quad (2.60)$$

onde  ${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i$  é obtido diretamente da relação (2.58).

O vetor de *deslocamentos naturais incrementais* do elemento,  $\Delta\mathbf{u}^k$ , no sistema local, é definido como:

$$(\Delta\mathbf{u}^k)^T = [ 0 \quad 0 \quad \phi_1 \quad \delta \quad 0 \quad \phi_2 ] \quad (2.61)$$

para o qual se tem da Figura 2.8:

$$u = \Delta u_2 - \Delta u_1 \quad (2.62a)$$

$$v = \Delta v_2 - \Delta v_1 \quad (2.62b)$$

$$\Psi = \tan^{-1}\left(\frac{v}{t_L}\right) \quad (2.62c)$$

onde  $\Psi$  é a rotação de corpo rígido que o elemento sofre. A partir desses valores, chega-se, observando a mesma figura, às expressões dos deslocamentos que provocam deformação, ou seja:

$$\delta = {}^{t+\Delta t}L - {}^tL \quad (2.63a)$$

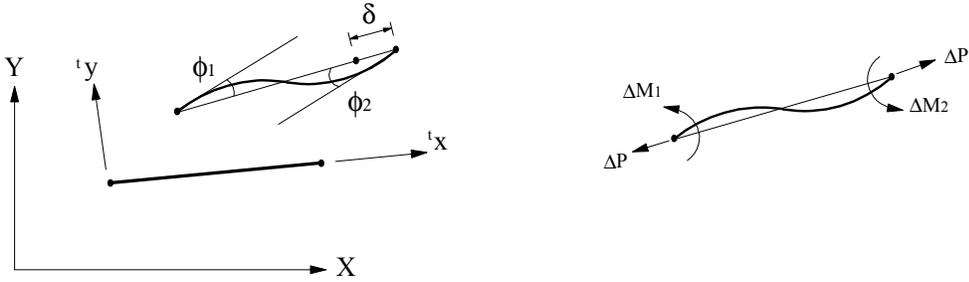
$$\phi_1 = \Delta\theta_1^e - \Psi \quad (2.63b)$$

$$\phi_2 = \Delta\theta_2 - \Psi \quad (2.63c)$$

Utilizando a relação (2.57) obtém-se, portanto, o vetor de forças nodais absorvidas pela estrutura até a configuração  $t+\Delta t$ , determinado no sistema local. O vetor de forças internas é obtido, somando-se os esforços internos absorvidos por cada elemento, devidamente transformados para o sistema global de referência, ou seja:

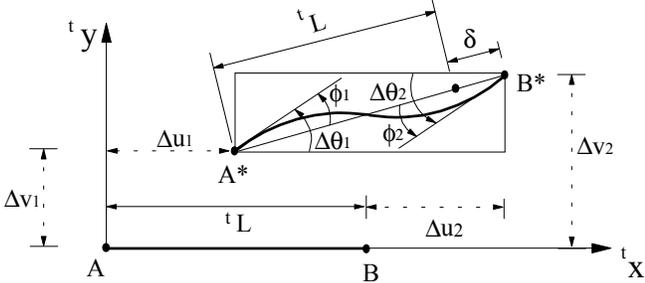
$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{igl} = \sum_{m=1}^n \mathbf{R}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i \quad (2.64)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação do elemento.



a) Deslocamentos que provocam deformações.

b) Tensões relacionadas com  $\delta, \phi_1, \phi_2$ .



c) Geometria deformada

Figura 2.8 - Cálculo das forças internas.

# 3

## ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA

### 3.1 - INTRODUÇÃO

A obtenção da solução incremental predita (Seção 2.2.1) tem como passo fundamental a definição do parâmetro de carga inicial  $\Delta\lambda^0$ . A seleção automática do tamanho do incremento desse parâmetro é importante e deve refletir o grau de não-linearidade corrente do sistema estrutural em estudo. Em outras palavras, uma estratégia eficiente de incremento automático de carga deve satisfazer basicamente os seguintes requerimentos:

- fornecer grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear;
- levar a pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear;
- ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximo e mínimo são ultrapassados.

As Seções 3.2 e 3.3, a seguir, apresentam algumas estratégias de incremento automático do parâmetro de carga encontradas na literatura. Elas foram idealizadas procurando satisfazer, de alguma forma, os requerimentos acima.

Na Seção 3.4 são encontrados alguns procedimentos para escolha do sinal correto do incremento  $\Delta\lambda^0$ . Esses procedimentos, juntamente com as estratégias de incremento de carga apresentadas, foram implementados no programa computacional desenvolvido.

### 3.2 - ESTRATÉGIAS BASEADAS NA RELAÇÃO $I_d/tI$

Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982) sugeriram estratégias de incremento automático de carga e de outros parâmetros (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo) baseadas no emprego da relação:

$$\left( \frac{I_d}{tI} \right)^\alpha \quad (3.1)$$

onde  $I_d$  é o número de iterações desejadas para convergência do processo iterativo corrente, que é especificado pelo usuário do programa;  $tI$  é o número de iterações que foram necessárias para convergir no passo de carga anterior; e  $\alpha$  é um expoente cujo valor encontra-se usualmente entre 0.5 e 2.0.

As estratégias baseadas na Equação (3.1) que foram implementadas, são descritas nas seções seguintes.

#### 3.2.1 - Incremento Direto do Parâmetro de Carga

Usando um esquema de solução incremental juntamente com o método convencional de Newton-Raphson, Crisfield (1981) adotou o seguinte procedimento para calcular o parâmetro de carga inicial:

$$\Delta\lambda^0 = t\Delta\lambda^0 \left( \frac{I_d}{tI} \right) \quad (3.2)$$

onde  $t\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\lambda^0$  caracterizam os incrementos iniciais nos passos de carga anterior e corrente, respectivamente; note que foi assumido para  $\alpha$  o valor unitário. Em Crisfield (1991), seguindo sugestão de Ramm (1982), passou-se a adotar  $\alpha = 1/2$ .

Se for utilizada uma estratégia de iteração que permita a variação do parâmetro de carga  $\lambda$ , então a seguinte expressão deve ser usada para o incremento automático do parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda^0 = \pm {}^t\Delta\lambda^0 \left( \frac{{}^tI_d}{{}^tI} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

onde na Seção 3.4 são descritos os critérios para escolha do sinal correto para a expressão anterior.

### 3.2.2 - Incremento do Comprimento de Arco

Como proposto em Crisfield (1991), a Equação (3.1) pode ser empregada na definição do incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente, ou seja:

$$\Delta l = {}^t\Delta l \left( \frac{{}^tI_d}{{}^tI} \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

onde  ${}^t\Delta l$  e  $\Delta l$  representam os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior (valor conhecido) e no passo de carga corrente (incógnita), respectivamente.

Através da Equação (3.4) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial, ou seja,

$$(\Delta \mathbf{u}^0)^T \Delta \mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \quad (3.5)$$

chega-se facilmente, usando-se a Equação (2.2) em (3.5), à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}} \quad (3.6)$$

Caso a equação de restrição proposta por Riks (1972) seja imposta à solução incremental predita, ou seja,

$$(\Delta\mathbf{u}^0)^T \Delta\mathbf{u}^0 + (\Delta\lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (3.7)$$

obtém-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \quad (3.8)$$

Embora, muitas vezes não se tenha a idéia do incremento do parâmetro de carga no primeiro passo de carga para uma dada análise, especificado  ${}^1\Delta\lambda^0$ , a técnica fornecida em (3.3) pode levar a um cálculo automático dos incrementos iniciais nos passos de cargas seguintes.

Entretanto, em geral, o usuário não tem idéia da magnitude que deve considerar para o incremento de partida do comprimento de arco,  ${}^1\Delta l$ . Para resolver esse problema, no programa desenvolvido neste trabalho, o usuário deve especificar  ${}^1\Delta\lambda^0$  como dado de entrada, sendo este valor usado em seguida para calcular  ${}^1\Delta\mathbf{u}^0$  através da Equação (2.2). Substituindo-se, então,  $\Delta\mathbf{u}^0$  na Equação (3.5) ou (3.7), chega-se a  ${}^1\Delta l$ . Para os passos de carga seguintes, calcula-se automaticamente  $\Delta l$  através de (3.4). Na Seção 3.4 são descritos os critérios para escolha do sinal correto para as expressões representadas em (3.6) ou (3.8).

### 3.2.3 - Incremento de uma Componente de Deslocamento Seleccionada

Caso seja adotado o método de controle de deslocamento, o incremento de uma dada componente do vetor de deslocamentos da estrutura deve ser escolhido com o objetivo de limitar o incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . Como na técnica do comprimento de arco, pode-se calcular o incremento de uma dada componente  $j$  do vetor de deslocamentos para o passo corrente de carga de acordo com:

$$\Delta u_j = {}^t\Delta u_j \left( \frac{I_d}{{}^tI} \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

onde  ${}^t\Delta u_j$  e  $\Delta u_j$  são os incrementos da componente  $j$  do vetor deslocamento no passo de carga anterior e no passo de carga corrente, respectivamente. Tem-se, então, que a componente  $j$  da solução incremental predita,  $\Delta \mathbf{u}^0$ , deve satisfazer à seguinte relação:

$$\Delta \mathbf{u}^0(j) = \Delta u_j \quad (3.10)$$

Usando-se a Equação (2.2) em (3.10), chega-se à expressão procurada para  $\Delta\lambda^0$ , ou seja:

$$\Delta\lambda^0 = \frac{\Delta u_j}{\delta \mathbf{u}_r(j)} \quad (3.11)$$

Novamente, o usuário deve fornecer como dado de entrada o incremento inicial de  $\lambda$  para o primeiro passo de carga,  ${}^1\Delta\lambda^0$ . A partir desse valor, consegue-se obter o incremento inicial da componente  $j$  do vetor deslocamento,  $\Delta u_{j(1)}^0$ , através da Equação (3.10). Para os outros passos de carga o processo é automatizado com o uso de (3.9).

Uma outra forma de controle do incremento inicial dos deslocamentos foi proposta por Krenk e Hededal (1993 e 1995), considerando a inequação:

$$\|\Delta \mathbf{u}^0\| \leq \Delta \mathbf{u}_{\max} = C \|\Delta \mathbf{u}_1\| \quad (3.12)$$

onde,  $\Delta \mathbf{u}_1$  é o incremento do vetor de deslocamentos obtido no primeiro passo de carga e  $C$  é uma constante cujo valor encontra-se entre 1.5 a 2.5.

Adicionalmente, Krenk (1995) propôs que a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais iniciais, no passo de carga corrente, poderia ser controlada pela relação:

$$\|\Delta \mathbf{u}^0\| = \|\mathop{\Delta \mathbf{u}}^t\| \left( \frac{I_d}{I} \right)^\alpha \quad (3.13).$$

sendo  $\|\mathop{\Delta \mathbf{u}}^t\|$  a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais do passo de carga anterior;  $\alpha$  é um expoente escolhido de forma conveniente, mas que normalmente encontra-se entre 0,5 e 2. Usando-se, então, a Equação (2.2) e considerando a relação anterior ou (3.12) para cálculo de  $\|\Delta \mathbf{u}^0\|$ , chega-se a uma nova expressão para  $\Delta \lambda^0$ , ou seja:

$$\Delta \lambda^0 = \frac{\|\Delta \mathbf{u}^0\|}{\|\delta \mathbf{u}_r\|} \quad (3.14)$$

A estratégia de obtenção de  $\Delta \lambda^0$  através de (3.14), e os procedimentos mencionados a seguir:

- incremento direto do parâmetro de carga através da Equação (3.3);
- incremento do comprimento de arco, e em seguida o emprego da relação (3.6);
- incremento do parâmetro de carga do passo de carga corrente igual ao do passo anterior, isto é:  $\Delta \lambda^0 = \mathop{\Delta \lambda}_1^t$ , (3.15)

foram adaptadas ao algoritmo de solução não-linear proposto por Krenk e Hededal (1993 e 1995) e Krenk (1995) (ver Figuras 4.8 e 4.9, Capítulo 4). Alguns exemplos no Capítulo 6 fazem uma avaliação dessas estratégias.

### 3.2.4 - Incremento do Trabalho Externo

Uma estratégia baseada no incremento do trabalho externo pode ser adotada para limitar o incremento inicial do parâmetro de carga. Como nas seções anteriores, o incremento do trabalho externo para o passo de carga corrente pode ser expresso por:

$$\Delta W = {}^t\Delta W \left( \frac{I_d}{{}^tI} \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

onde  ${}^t\Delta W$  e  $\Delta W$  são os incrementos do trabalho externo no passo de carga anterior e no passo de carga corrente, respectivamente. Se o incremento de trabalho para o passo de carga corrente é dado por:

$$\Delta W = \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u}_r \quad (3.17)$$

tem-se, então, que  $\Delta\lambda^0$  é simplesmente:

$$\Delta\lambda^0 = \frac{\Delta W}{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u}_r} \quad (3.18)$$

Como nas seções anteriores, a análise é inicializada, especificando-se  $\Delta\lambda_1^0$  e, através de (3.17), calcula-se o incremento do trabalho externo para o primeiro passo de carga. Para os demais passos de carga a Equação (3.16) é empregada.

### 3.3 - INCREMENTO DE CARGA BASEADO NO PARÂMETRO DE RIGIDEZ GSP

Nas subseções anteriores, demonstrou-se que, dependendo da forma da restrição imposta, diferentes expressões para obtenção de  $\Delta\lambda^0$  podem ser obtidas. Yang e Kuo (1994) propuseram, adicionalmente, que a seguinte equação de restrição deveria ser respeitada nas duas etapas de solução não-linear (solução predita e ciclo de iterações):

$$\mathbf{C}^T \delta\mathbf{u}^k + k_1 \delta\lambda^k = H_k \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{C}$  e  $k_1$  são constantes e  $H$  um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo). Em função de valores selecionados para essas variáveis, chega-se a diferentes estratégias de incremento de carga e de iteração.

A equação de restrição anterior, juntamente com a Equação (2.8), rescrita abaixo:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta\mathbf{u}^k = \delta\lambda^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.20)$$

formam um sistema de equações com  $N+1$  incógnitas. Essas duas equações podem ser combinadas de forma que, após manipulações algébricas e matriciais, chega-se à seguinte expressão para o parâmetro de carga (Yang e Kuo, 1994):

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta\mathbf{u}_r^k + k_1} (H_k - \mathbf{C}^T \delta\mathbf{u}_g^k) \quad (3.21)$$

Seguindo a sugestão de Yang e Shieh (1990) para os valores de  $\mathbf{C}$  e  $k_1$ , ou seja:

$$\mathbf{C} = \Delta\lambda^0 {}^t\delta\mathbf{u}_r \quad \text{e} \quad k_1 = 0, \quad (3.22)$$

onde  ${}^t\delta\mathbf{u}_r$  é o vetor de deslocamentos nodais tangenciais do passo de carga anterior (ver Equação 2.1, Seção 2.2.1), chega-se a uma nova expressão para  $\delta\lambda$ , ou seja:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^0 \text{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r^k} (\mathbf{H}_k - \Delta\lambda^0 \text{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^k). \quad (3.23)$$

A solução incremental inicial  $\Delta\lambda^0$  é, então, obtida fazendo-se, na equação anterior,  $k = 0$ ,  $\delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0$ ,  $\delta\mathbf{u}_g^0 = 0$  e  $\delta\mathbf{u}_r^0 = \delta\mathbf{u}_r$ . Dessa forma escreve-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{H_0}{\text{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}}. \quad (3.24)$$

O valor do parâmetro incremental  $H_0$  (no caso, *deslocamento generalizado*) pode ser definido usando a equação anterior e assumindo que, no primeiro passo de carga, se conhece o valor de  $\Delta\lambda^0$  (valor fornecido pelo analista). Assim, pode-se escrever:

$$H_0 = (\Delta\lambda_1^0)^2 \text{}^1\delta\mathbf{u}_r^T \text{}^1\delta\mathbf{u}_r \quad (3.25)$$

Observe que, com a substituição de (3.25) em (3.24), chega-se a:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{\text{}^1\delta\mathbf{u}_r^T \text{}^1\delta\mathbf{u}_r}{\text{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}}. \quad (3.26)$$

Adicionalmente, a consideração do *parâmetro de rigidez generalizado* (GSP – Generalized Stiffness Parameter) do sistema como segue:

$$\text{GSP} = \frac{\text{}^1\delta\mathbf{u}_r^T \text{}^1\delta\mathbf{u}_r}{\text{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r} \quad (3.27)$$

permite rescrever (3.27) da seguinte forma:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (3.28)$$

onde o critério utilizado para escolher o sinal correto na expressão anterior é baseado no sinal do parâmetro GSP (veja a Seção 3.4). Como já destacado, para o primeiro incremento,  $\Delta\lambda^0$  é um valor prescrito (GSP = 1).

Vale informar que as expressões (3.8), (3.11) e (3.18) podem ser obtidas diretamente da Equação (3.21), fazendo as seguintes considerações:

- Controle do comprimento de arco:  $k = 0$ ,  $k_1 = \Delta\lambda^0$ ,  $\delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0$ ,  $\delta\mathbf{u}_g^0 = 0$ ,  $\delta\mathbf{u}_r^0 = \delta\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{C} = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{u}_r$  e  $H_0 = \Delta l^2$ ;
- Controle de uma componente de deslocamento selecionada:  $k = 0$ ,  $k_1 = 0$ ,  $\delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0$ ,  $\delta\mathbf{u}_g^0 = 0$ ,  $\delta\mathbf{u}_r^0 = \delta\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{C}^T = \{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0\}$  e  $H_0 = \Delta u_j$ ;
- Controle do trabalho externo:  $k = 0$ ,  $k_1 = 0$ ,  $\delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0$ ,  $\delta\mathbf{u}_g^0 = 0$ ,  $\delta\mathbf{u}_r^0 = \delta\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{F}_r$  e  $H_0 = \Delta W$ .

### 3.4 - SINAL DO INCREMENTO INICIAL DO PARÂMETRO DE CARGA

Nas Equações (3.3), (3.6), (3.8), (3.26) ou (3.28) observa-se que o sinal do incremento inicial de carga pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância na definição de seqüências de soluções  $(\mathbf{u}, \lambda)$  que permitam um avanço contínuo na resposta carga-deslocamento. Este trabalho segue um dos quatro procedimentos descritos a seguir para a escolha do sinal de  $\Delta\lambda^0$ :

1. Segundo Crisfield (1991), considera-se o sinal positivo sempre que a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  (no início do incremento) for positiva definida. Em outra definição equivalente, Crisfield sugere que o sinal de  $\Delta\lambda^0$  deva seguir aquele do incremento anterior, a menos que o determinante da matriz de rigidez tangente mude de sinal. Como relatado em Meek e Tan (1984), esse procedimento pode falhar em estruturas exibindo múltiplos autovalores negativos;
2. Como proposto por Bergan *et al.* (1978), os pontos limites da trajetória de equilíbrio podem ser detectados checando o sinal do incremento do trabalho externo dado pela Equação (3.17). Caso o sinal do incremento do trabalho externo corrente seja diferente daquele do passo de carga anterior, modifica-se o sinal de  $\Delta\lambda^0$ . Em Clarke e Hancock (1990), é comentado que esse critério pode tornar-se inseguro na vizinhança de pontos limites de deslocamento;
3. Krenk e Hededal (1993 e 1995) propõe que o sinal de  $\Delta\lambda^0$  seja determinado, analisando o produto interno entre o deslocamento incremental obtido no passo de carga anterior e o incremento de deslocamento corrente, ou seja:  ${}^t\Delta\mathbf{u}^T\Delta\mathbf{u}^0 > 0$ . Nesse mesmo artigo é comentado que esse procedimento pode apresentar falhas no caso de sistemas estruturais exibindo pontos de bifurcação, o que não acontece quando os mesmos apresentam pontos limites;
4. De acordo com Yang e Kuo (1994), o sinal do parâmetro de rigidez corrente depende exclusivamente dos vetores  ${}^t\delta\mathbf{u}_r$  (passo de carga anterior) e  $\delta\mathbf{u}_r$  (passo de carga corrente), conforme ilustrado na Equação (3.27). Portanto, o parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões

próximas aos pontos limites. Para os demais passos este permanecerá sempre positivo, o que pode ser visto na Figura 3.1.

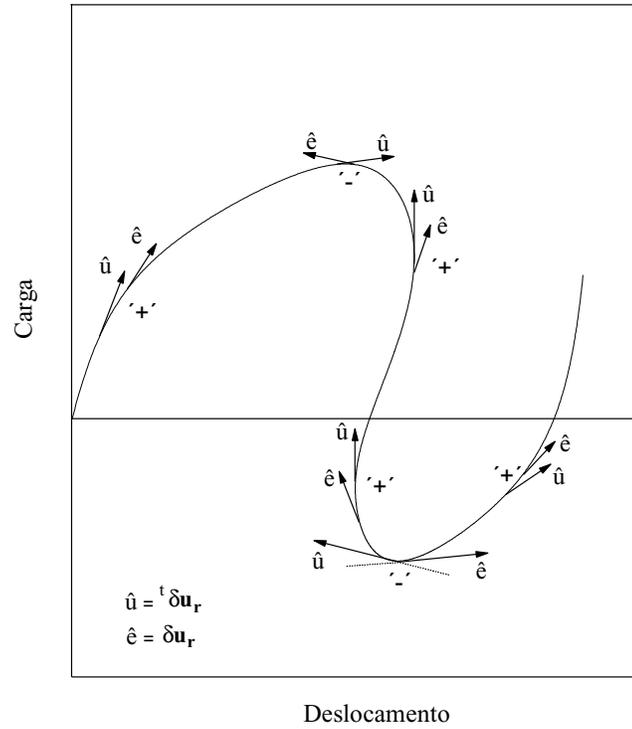


Figura 3.1 - Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado GSP.

# 4

## ESTRATÉGIAS DE ITERAÇÃO

### 4.1 - INTRODUÇÃO

A determinação do parâmetro de carga iterativo,  $\delta\lambda$  (Equação 2.9, Capítulo 2), é função de uma dada estratégia de iteração, ou equação de restrição imposta ao problema.

Uma dada estratégia de determinação de  $\delta\lambda$  (e em seguida dos deslocamentos iterativos  $\delta\mathbf{u}$ ) deve atender, principalmente, como já comentado no Capítulo 1, o requisito de ser eficiente computacionalmente. Isso significa que, para um dado passo de carga, a configuração de equilíbrio do sistema estrutural em estudo deve ser obtida da forma mais rápida possível.

De antemão, é importante destacar que não se pode esperar de nenhuma estratégia a resolução de diferentes problemas fortemente não-lineares com a mesma eficiência computacional. Procurando, então, uma maior flexibilidade na escolha da forma de solução não-linear, foram implementadas no programa computacional desenvolvido as seguintes estratégias:

1. Iteração baseada na carga constante;
2. Iteração baseada no deslocamento constante;
3. Iteração baseada no trabalho externo constante;
4. Iteração baseada no comprimento de arco constante;
5. Iteração baseada na resposta ponderada constante;
6. Iteração baseada na norma mínima dos deslocamentos residuais;
7. Iteração baseada na norma mínima das forças desequilibradas;
8. Iteração baseada no resíduo ortogonal;
9. Iteração baseada no deslocamento generalizado.

As próximas seções apresentam os detalhes dessas estratégias. Este capítulo é concluído com a apresentação dos critérios de convergência adotados.

## 4.2 - ITERAÇÃO BASEADA NA CARGA CONSTANTE

Essa estratégia de iteração caracteriza o método tradicional de controle de carga constante, no qual o parâmetro de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo. Para esse caso, tem-se que a equação de restrição se reduz à expressão trivial:

$$\delta\lambda^k = 0 \quad (4.1)$$

Dessa forma, a Equação (2.9) é reduzida aos deslocamentos fornecidos pelo método convencional de Newton-Raphson.

A Figura 4.1 apresenta os passos principais envolvidos na solução não-linear proposta nesta seção.

---

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Predita:

$$\begin{cases} \Delta\lambda^0 = \pm {}^t\Delta\lambda^0 (I_d / {}^t I)^\alpha \\ \Delta\mathbf{u}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \end{cases}$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \delta\lambda^k = 0 \\ \delta\mathbf{u}^k = \delta\mathbf{u}_g^k \end{cases}$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta\lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n_{\text{máx}}$ .

---

Figura 4.1 - Iteração a carga constante.

### 4.3 - ITERAÇÃO BASEADA NO DESLOCAMENTO CONSTANTE

Batoz e Dhatt (1979) desenvolveram uma estratégia de iteração em que uma dada componente do vetor de deslocamentos nodais incrementais é escolhida como variável independente ou de controle, ao invés do parâmetro de carga usual. Durante o ciclo iterativo, essa componente de deslocamento é definida como uma quantidade especificada, de acordo com a seguinte expressão:

$$\Delta \mathbf{u}^k(j) = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}(j) + \delta \mathbf{u}(j) = \Delta u_j \quad (4.2)$$

onde  $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}(j)$  e  $\delta \mathbf{u}(j)$  são as componentes  $j$  dos vetores  $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$  e  $\delta \mathbf{u}$ ; e  $\Delta u_j$  é o valor prescrito para a componente  $\Delta \mathbf{u}^k(j)$ . Substituindo, então, (2.9) na equação anterior, obtém-se:

$$\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}(j) + \delta \mathbf{u}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k(j) = \Delta u_j \quad (4.3)$$

de onde chega-se à expressão:

$$\delta \lambda^k = \frac{\Delta u_j - \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}(j) - \delta \mathbf{u}_g^k(j)}{\delta \mathbf{u}_r^k(j)} \quad (4.4)$$

Por outro lado, Powell e Simons (1981) estabeleceram uma estratégia incremental-iterativa baseada nos seguintes procedimentos:

1. na solução incremental predita, uma dada componente  $j$  do vetor de deslocamentos é acrescida de uma certa quantidade especificada (veja a Seção 3.2.3, Capítulo 3);
2. essa componente, entretanto, é mantida constante durante as iterações subseqüentes, de modo que a seguinte equação de restrição deve ser respeitada:

$$\delta \mathbf{u}^k(j) = \delta \mathbf{u}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k(j) = 0 \quad (4.5)$$

Resolvendo, então, a equação acima para  $\delta \lambda$ , chega-se a:

$$\delta \lambda^k = -\frac{\delta \mathbf{u}_g^k(j)}{\delta \mathbf{u}_r^k(j)} \quad (4.6)$$

Um algoritmo mostrando a correção do parâmetro de carga através de (4.6) é fornecido na Figura 4.2.

---

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Predita:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_j = {}^t \Delta \mathbf{u}_j (I_d / {}^t I)^\alpha \Rightarrow \Delta \mathbf{u}^0(j) = \Delta \mathbf{u}_j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \lambda^0 = \frac{\Delta \mathbf{u}_j}{\delta \mathbf{u}_r(j)} \\ \Delta \mathbf{u}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r \end{array} \right. \end{cases}$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \delta \mathbf{u}^k(j) = \delta \mathbf{u}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k(j) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta \lambda = -\frac{\delta \mathbf{u}_g^k(j)}{\delta \mathbf{u}_r^k(j)} \\ \delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \end{array} \right. \end{cases}$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta \lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n_{\text{máx}}$

---

Figura 4.2 - Iteração a deslocamento constante

#### 4.4 - ITERAÇÃO BASEADA NO TRABALHO EXTERNO CONSTANTE

Como caso particular de um procedimento geral proposto por Powell e Simons (1981), tem-se a condição de que o incremento de trabalho externo deve permanecer constante ao longo do processo iterativo. Sabe-se que, para o acréscimo de carga  $\delta\lambda \mathbf{F}_r$ , a variação do trabalho externo é dada por:

$$\delta W = \delta\lambda^k \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u} \quad (4.7)$$

Com a restrição  $\delta W = 0$ , e a substituição de (2.9) em (4.7), chega-se à correção procurada do parâmetro de carga, ou seja:

$$\delta\lambda^k = -\frac{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u}_g^k}{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u}_r^k} \quad (4.8)$$

A Figura 4.3 ilustra a estratégia de solução não-linear baseada na equação anterior.

---

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Predita:

$$\begin{cases} \Delta W_j = {}^t \Delta W_j (I_d / {}^t I)^\alpha \Rightarrow \Delta W_j = \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u}_r \Rightarrow \left\{ \Delta\lambda^0 = \frac{\Delta W_j}{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u}_r} \right. \\ \left. \Delta \mathbf{u}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \right. \end{cases}$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \delta W^k = \delta\lambda^k \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u}^k = 0 \Rightarrow \left\{ \delta\lambda = -\frac{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u}_g^k}{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{u}_r^k} \right. \\ \left. \delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}_g^k + \delta\lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \right. \end{cases}$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta\lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare de incrementar carga quando:  $i = n_{\text{máx}}$

---

Figura 4.3 - Iteração a trabalho externo constante.

## 4.5 - ITERAÇÃO BASEADA NO COMPRIMENTO DE ARCO CONSTANTE

As idéias originalmente propostas por Riks (1972) e Wempner (1971) propiciaram o surgimento de diversas estratégias que impõem, em cada iteração, a condição de comprimento de arco constante. As técnicas mais conhecidas são apresentadas a seguir.

### 4.5.1 - Comprimento de Arco Linear - Riks (1972 e 1979)

A restrição de comprimento de arco constante (Equação 3.7) foi utilizada por Riks (1972 e 1979) e Wempner (1971) apenas para a obtenção do incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$  (ver a Seção 3.2.2). No processo iterativo subsequente ( $k \geq 1$ ), a equação de restrição usada para calcular  $\delta\lambda$  é obtida fazendo com que a solução iterativa  $(\delta\mathbf{u}^k, \delta\lambda^k \mathbf{F}_r)$  seja ortogonal à solução incremental predita  $(\Delta\mathbf{u}^0, \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r)$ , ou seja:

$$(\delta\mathbf{u}^k)^T \Delta\mathbf{u}^0 + \delta\lambda^k \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (4.9)$$

A substituição de (2.9) em (4.9) fornece a expressão procurada para a determinação da correção do parâmetro de carga, ou seja:

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\Delta\mathbf{u}^0)^T \delta\mathbf{u}_g^k}{((\Delta\mathbf{u}^0)^T \delta\mathbf{u}_r^k + \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r)} \quad (4.10)$$

Do ponto de vista geométrico, como ilustrado na Figura 4.4, o esquema proposto por Riks (1972) pode ser visto como iterações em planos normais à linha tangente varrida por  $(\Delta\mathbf{u}^0, \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r)$ .

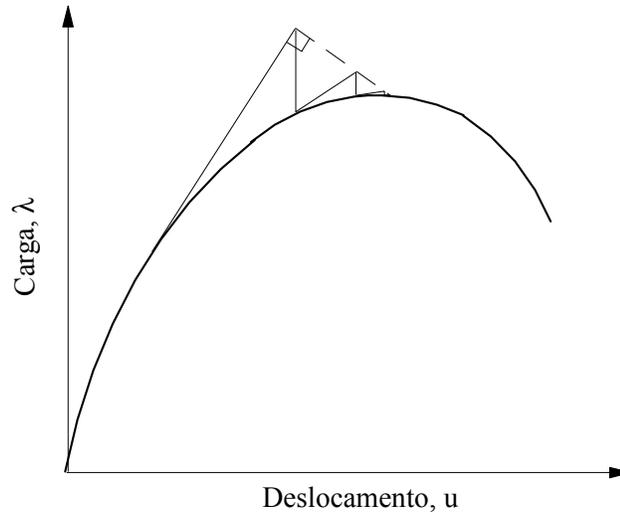


Figura 4.4 - Método de Riks-Wempner.

#### 4.5.2 - Comprimento de Arco Linear - Ramm (1981 e 1982)

Um procedimento iterativo alternativo àquele usado por Riks foi sugerido por Ramm (1981 e 1982). Ele propôs basicamente a substituição da solução incremental predita na Equação (4.9) pela solução "secante"  $(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}, \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r)$ . Isto garante que as correções  $(\delta \mathbf{u}^k, \delta \lambda^k \mathbf{F}_r)$  sejam ortogonais à solução incremental da iteração anterior, ou seja:

$$\delta \mathbf{u}^{kT} \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (4.11)$$

Mais uma vez, substituindo (2.9) em (4.11), chega-se a:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \delta \mathbf{u}_g^k}{(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \delta \mathbf{u}_r^k + \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r)} \quad (4.12)$$

A Figura 4.5 apresenta a estratégia de iteração proposta por Ramm.

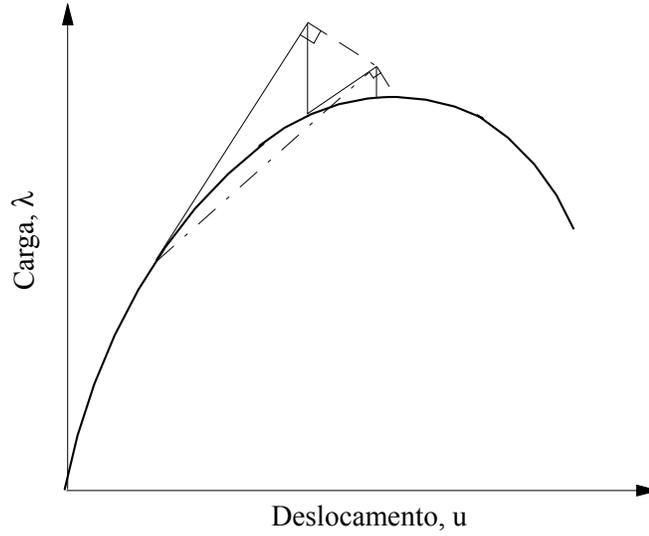


Figura 4.5 - Método de Ramm.

#### 4.5.3 - Comprimento de Arco Esférico - Crisfield (1981 e 1991)

Crisfield (1981 e 1991) sugeriu inicialmente, baseado na Equação (3.7), que a seguinte condição:

$$(\Delta \mathbf{u}^k)^T \Delta \mathbf{u}^k + (\Delta \lambda^k)^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (4.13)$$

onde,  $\Delta \lambda^k$  e  $\Delta \mathbf{u}^k$  representam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais na iteração corrente, deveria ser respeitada a cada iteração do processo. A substituição de (2.12) e (2.13) na Equação (4.13) resulta na equação quadrática:

$$A(\delta \lambda^k)^2 + B\delta \lambda^k + C = 0 \quad (4.14)$$

onde os coeficientes A, B e C são assim definidos:

$$A = (\delta \mathbf{u}_r^k)^T \delta \mathbf{u}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (4.15a)$$

$$B = 2(\delta \mathbf{u}_r^k)^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) + 2\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (4.15b)$$

$$C = (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k)^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) + \Delta \lambda^{(k-1)2} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r - \Delta l^2 \quad (4.15c)$$

Com a resolução de (4.14), chega-se a dois valores de  $\delta \lambda$ ,  $\delta \lambda_1$  e  $\delta \lambda_2$ , de forma que se deve escolher entre as soluções

$$\Delta \mathbf{u}_1^k = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda_1^k \delta \mathbf{u}_r^k \quad (4.16)$$

$$\Delta \mathbf{u}_2^k = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda_2^k \delta \mathbf{u}_r^k \quad (4.17)$$

aquela que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior,  $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$ . Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado. Um procedimento bastante simples a ser seguido, e que foi implementado nesse trabalho, consiste em se achar o menor ângulo entre  $\Delta \mathbf{u}^k$  e  $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$ . Isto equiivale a achar o máximo cosseno do ângulo:

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \Delta \mathbf{u}^k}{\Delta l^2} = \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k)}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2}^k \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \delta \mathbf{u}_r^k}{\Delta l^2} \quad (4.18)$$

Como a Equação (4.14) é quadrática, ela poderá ter raízes imaginárias se o termo “ $B^2 - 4AC$ ” for menor que zero. Essa situação pode existir quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto (Meek e Tan, 1984).

#### 4.5.4 - Comprimento de Arco Cilíndrico - Crisfield (1981 e 1991)

Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982) observaram, através de vários exemplos numéricos, que, em problemas práticos com número elevado de variáveis, o "termo de carga" da Equação (4.13) tinha pequeno efeito. Crisfield, então, propôs, que, a cada iteração, a seguinte equação fosse satisfeita:

$$(\Delta \mathbf{u}^k)^T \Delta \mathbf{u}^k = \Delta l^2 \quad (4.19)$$

Substituindo (2.13) na equação anterior, chega-se novamente a uma equação quadrática em  $\delta \lambda$ , ou seja:

$$A(\delta \lambda^k)^2 + B\delta \lambda^k + C = 0 \quad (4.20)$$

onde, agora, os coeficientes A, B e C têm a seguinte forma:

$$A = (\delta \mathbf{u}_r^k)^T \delta \mathbf{u}_r^k \quad (4.21a)$$

$$B = 2(\delta \mathbf{u}_r^k)^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) \quad (4.21b)$$

$$C = (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k)^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) - \Delta l^2 \quad (4.21c)$$

A escolha entre as raízes  $\delta \lambda_1^k$  e  $\delta \lambda_2^k$  segue o mesmo critério adotado na seção anterior.

O algoritmo de solução não-linear (solução predita e ciclo iterativo) que utiliza o método do comprimento de arco é apresentado na Figura 4.6. A Figura 4.7 ilustra o ciclo iterativo com a restrição do comprimento de arco.

Solução Preditada:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta \mathbf{u}^0)^T \Delta \mathbf{u}^0 + (\Delta \lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2, \text{ ou} \\ (\Delta \mathbf{u}^0)^T \Delta \mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \Rightarrow \\ \Delta \mathbf{u}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \\ \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r}} \end{array} \right.$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta \mathbf{u}^k)^T \Delta \mathbf{u}^k + \Delta \lambda^k{}^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2, \text{ ou} \\ \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} = \Delta l^2 \Rightarrow \\ \delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \delta \lambda^k = - \frac{(\Delta \mathbf{u}^0)^T \delta \mathbf{u}_g^k}{((\Delta \mathbf{u}^0)^T \delta \mathbf{u}_r^k + \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r)} \\ \delta \lambda^k = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \delta \mathbf{u}_g^k}{(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \delta \mathbf{u}_r^k + \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r)} \\ A(\delta \lambda^k)^2 + B\delta \lambda^k + C = 0 \end{array} \right.$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta \lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n_{\text{máx}}$

---

Figura 4.6 - Iteração a comprimento de arco constante.

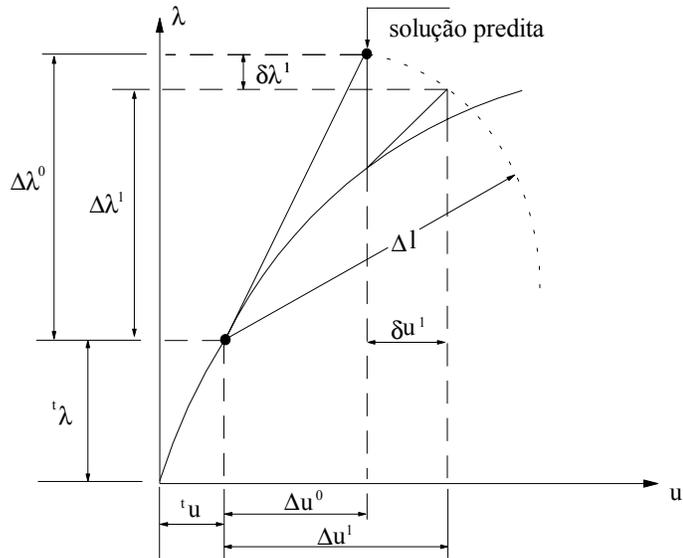


Figura 4.7 - Método do comprimento de arco cilíndrico.

#### 4.6 - ITERAÇÃO BASEADA NA RESPOSTA PONDERADA CONSTANTE

Gierlinski e Graves Smith (1985) desenvolveram uma metodologia geral de iteração capaz de englobar como casos particulares as estratégias propostas por Crisfield (1991), Riks (1979) e Powell e Simons (1981).

Essa metodologia baseia-se no fato de que a resposta da estrutura pode controlar tanto a seleção do incremento inicial de carga como o ciclo iterativo responsável pela restauração do equilíbrio. Dessa forma, foi estabelecido um critério adequado de medida da resposta estrutural, função escalar de  $\mathbf{u}$  e  $\lambda \mathbf{F}_r$ , definido por:

$$L^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u} + \lambda^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (4.22)$$

onde  $L$  representa o comprimento do vetor resposta ponderada:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

com  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \mathbf{G}^{1/2}$  e  $\bar{\mathbf{R}} = \lambda \mathbf{F}_r \mathbf{H}^{1/2}$ ; sendo  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  matrizes diagonais com dimensão de rigidez e de flexibilidade, respectivamente. Escolhas diferentes de  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  caracterizam formas diferentes de respostas ponderadas  $L$ , como ilustrado nos exemplos a seguir:

1. Se  $G_{jj} = 1$  e  $H_{jj} = 0$ , tem-se que a Equação (4.22) se transforma em:

$$L^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u} \quad (4.24)$$

Nota-se que (4.24), na sua forma incremental, caracteriza a estratégia de iteração proposta por Crisfield (1991), e já descrita na Seção 4.5.4;

2. Uma medida da resposta da estrutura contendo as componentes dos vetores de deslocamento e de carga é obtida introduzindo-se  $G_{jj} = 1$  e  $H_{jj} = 1$ , que leva (4.22) a:

$$L^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \lambda^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (4.25)$$

que genericamente é igual às equações de restrições adotadas em, Riks (1979), Ramm (1982) e Crisfield (1991), e podem ser vistas na Seções 4.5.1, 4.5.2 e 4.5.3, respectivamente;

3. Os critérios anteriores têm a desvantagem de tratar todos os parâmetros ou incógnitas de forma idêntica, mesmo que, em alguns pontos na seqüência de carregamento, a estrutura possa ser mais sensível à variação de alguns parâmetros que de outros. Tentando reduzir esse problema, Gierlinski e Graves Smith (1985) procuraram incluir na definição de  $L$  as componentes da matriz de rigidez tangente inicial. Isto foi efetuado usando-se em (4.22):

$$G_{jj} = K_{jj} \text{ e } H_{jj} = 1/K_{jj} \quad (4.26)$$

onde  $K_{jj}$  são os elementos da diagonal principal da matriz de rigidez tangente.

Durante o ciclo iterativo, o incremento na resposta ponderada da estrutura,  $\Delta L$  — de maneira análoga ao comprimento de arco fornecido na Seção (4.5.3) — pode ser expresso para a iteração corrente de acordo com:

$$\Delta L^k = \Delta \mathbf{u}^k \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}^k + (\Delta \lambda^k)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (4.27)$$

Uma estratégia conveniente para se calcular a correção do parâmetro de carga,  $\delta \lambda$ , pode ser, então, estabelecida, considerando que, a cada iteração, a variação de  $L$  é nula. Em termos matemáticos, essa restrição é expressa como:

$$\delta \Delta L = \Delta L^k - \Delta L^{(k-1)} = 0 \quad (4.28)$$

onde  $\Delta L^{(k-1)}$  é a medida do incremento da resposta da estrutura na iteração anterior. Substituindo a Equação (2.13) em (4.27), e em seguida esta em (4.28), chega-se mais uma vez a uma equação quadrática em  $\delta \lambda$ :

$$A(\delta \lambda^k)^2 + B\delta \lambda^k + C = 0 \quad (4.29)$$

onde A, B e C são dados por:

$$A = (\delta \mathbf{u}_r^k)^T \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (4.30a)$$

$$B = 2(\delta \mathbf{u}_r^k)^T \mathbf{G} (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) + 2\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (4.30b)$$

$$C = (2\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k)^T \mathbf{G} \delta \mathbf{u}_g^k \quad (4.30c)$$

A escolha correta de uma das raízes,  $\delta \lambda_1^k$  e  $\delta \lambda_2^k$ , segue o mesmo critério adotado na Seção (4.5.3). É interessante destacar que a superfície de interseção produzida pelo método da resposta ponderada é um elipsóide, e (4.29) representa a interseção do vetor

tangente com essa superfície em dois pontos, que correspondem às duas raízes dessa equação.

Gierlinski e Graves Smith (1985) propõem ainda, uma modificação na estratégia de iteração anterior, visando a reduzir o esforço numérico no cálculo e escolha do valor de  $\delta\lambda$ . Eles observaram que a superfície de interseção elipsoidal poderia ser aproximada por superfícies planas, com cada segmento ortogonal ao vetor incremental ponderado  $(\Delta\bar{\mathbf{u}}^{(k-1)}, \Delta\bar{\lambda}^{(k-1)} \mathbf{F}_r)$ , no começo de cada iteração, ou seja:

$$(\delta\mathbf{u}^k)^T \mathbf{G} \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r = 0 \quad (4.31)$$

Introduzindo então (2.9) em (4.31), chega-se a:

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\delta\mathbf{u}_g^k)^T \mathbf{G} \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}}{((\delta\mathbf{u}_r^k)^T \mathbf{G} \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r)} \quad (4.32)$$

Observe na Figura 4.8 como seriam utilizadas as expressões (4.29) ou (4.32).

---

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Predita:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta \mathbf{u}^0)^T \Delta \mathbf{u}^0 + (\Delta \lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2, \text{ ou} \\ (\Delta \mathbf{u}^0)^T \Delta \mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \Rightarrow \\ \Delta \mathbf{u}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \\ \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r}} \end{array} \right.$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \Delta L = \Delta L^k - \Delta L^{(k-1)} = 0 \Rightarrow \\ \delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A(\delta \lambda^k)^2 + B\delta \lambda^k + C = 0 \\ \delta \lambda^k = -\frac{(\delta \mathbf{u}_g^k)^T \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}}{(\delta \mathbf{u}_r^{kT} \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r)} \end{array} \right.$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta \lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n_{\text{máx}}$

---

Figura 4.8 - Iteração a resposta ponderada constante.

#### 4.7 - ITERAÇÃO BASEADA NA NORMA MÍNIMA DOS DESLOCAMENTOS RESIDUAIS

Chan (1988) apresentou uma estratégia de iteração bastante eficiente, definida como o método dos deslocamentos residuais (MDR). Nessa estratégia, ao invés de se usarem restrições geométricas e de energia como nas seções anteriores, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas. Note que este é o objetivo principal do ciclo iterativo. Mais especificamente, o procedimento desenvolvido fornece a norma mínima dos deslocamentos residuais a cada iteração.

Para implementar o MDR, deve-se rescrever a componente  $j$  do vetor de deslocamentos  $\delta \mathbf{u}$ , numa dada iteração  $k$ , na forma:

$$e_j = \delta \mathbf{u}^k(j) = \delta \mathbf{u}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k(j) \quad (4.33)$$

onde  $e_j$  é definido como um dado erro. Chan, então, propôs que a condição de mínimos quadrados desse erro, para um sistema de  $m$  graus de liberdade, poderia ser expressa de acordo com:

$$\frac{d \left( \sum_{j=1}^m (e_j)^2 \right)}{d \delta \lambda^k} = 0 \quad (4.34)$$

A equação anterior é equivalente à condição da norma mínima dos deslocamentos residuais, escrita numa forma mais adequada como:

$$\frac{d \left[ (\delta \mathbf{u}^k)^T \delta \mathbf{u}^k \right]}{d \delta \lambda^k} = 0 \quad (4.35)$$

Substituindo, então, a Equação (2.9) em (4.35), e derivando essa com relação a  $\delta \lambda$ , chega-se a:

$$\delta \lambda^k = - \frac{(\delta \mathbf{u}_r^k)^T \delta \mathbf{u}_g^k}{(\delta \mathbf{u}_r^k)^T \delta \mathbf{u}_r^k} \quad (4.36)$$

Na Figura 4.9 pode ser visto o algoritmo de solução não-linear em que no ciclo iterativo é usada a Equação (4.36).

---

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Preditada:

$$\begin{cases} (\Delta \mathbf{u}^0)^T \Delta \mathbf{u}^0 + (\Delta \lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2, \text{ ou} \\ (\Delta \mathbf{u}^0)^T \Delta \mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \Rightarrow \\ \Delta \mathbf{u}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r \end{cases} \begin{cases} \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \\ \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r}} \end{cases}$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \frac{d[(\delta \mathbf{u}^k)^T \delta \mathbf{u}^k]}{d\delta \lambda^k} = 0 \Rightarrow \left\{ \delta \lambda^k = - \frac{(\delta \mathbf{u}_r^k)^T \delta \mathbf{u}_g^k}{(\delta \mathbf{u}_r^k)^T \delta \mathbf{u}_r^k} \right. \\ \left. \delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \right. \end{cases}$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta \lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n_{\text{máx}}$

---

Figura 4.9 - Iteração a norma mínima dos deslocamentos residuais.

#### 4.8 - ITERAÇÃO BASEADA NA NORMA MÍNIMA DAS FORÇAS DESEQUILIBRADAS

A idéia básica dessa estratégia, como descrita por Bergan (1980), consiste no ajuste da força externa aplicada ao sistema, de modo que ela corresponda, o mais próximo possível, ao estado de forças internas calculado no começo da iteração. Essa estratégia garante que a "distância", expressa como uma norma Euclidiana do estado de forças desequilibradas da iteração corrente à trajetória de equilíbrio, seja minimizada.

O estado de forças desequilibradas pode ser obtido da Equação (2.8), que é rescrita abaixo seguindo uma nova notação, ou seja:

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{F}_i^{(k-1)} - \lambda^k \mathbf{F}_r \quad (4.37)$$

onde  $\mathbf{F}_i^{(k-1)}$  é o vetor das forças internas na iteração anterior e  $\lambda^k$  é o parâmetro de carga total na iteração corrente. Tem-se, então, que o quadrado da norma Euclidiana de  $\mathbf{g}^k$  é dado por:

$$G = (\mathbf{g}^k)^T \mathbf{g}^k \quad (4.38)$$

Como a equação anterior é a distância a ser minimizada, tem-se que a equação de restrição apropriada é obtida através da condição:

$$\frac{dG}{d\lambda^k} = 0 \quad (4.39)$$

que fornece, com a substituição de (4.37):

$$\lambda^k = \frac{\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_i^{(k-1)}}{\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \quad (4.40)$$

Como  $\lambda^{(k-1)}$  é o parâmetro de carga total da iteração anterior, chega-se à correção do parâmetro de carga procurada, fazendo simplesmente:

$$\delta\lambda^k = \lambda^k - \lambda^{(k-1)} \quad (4.41)$$

A Figura 4.10 ilustra o emprego da equação anterior durante o ciclo iterativo.

---

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Predita:

$$\begin{cases} (\Delta \mathbf{u}^0)^T \Delta \mathbf{u}^0 + (\Delta \lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2, \text{ ou} \\ (\Delta \mathbf{u}^0)^T \Delta \mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \Rightarrow \\ \Delta \mathbf{u}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r \end{cases} \begin{cases} \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \\ \Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r}} \end{cases}$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \lambda^k = \frac{\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_i^{(k-1)}}{\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \Rightarrow \{\delta \lambda^k = \lambda^k - \lambda^{(k-1)}\} \\ \delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \end{cases}$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta \lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n_{\text{máx}}$

---

Figura 4.10 - Iteração a norma mínima das forças desequilibradas.

#### 4.9 - ITERAÇÃO BASEADA NO RESÍDUO ORTOGONAL

Uma outra estratégia de correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo foi proposta por Krenk (1995) e Krenk e Hededal (1993 e 1995). Nessa estratégia, um fator de correção de carga é obtido a partir da condição de ortogonalidade entre o vetor das forças residuais (forças desequilibradas) da iteração corrente e o incremento de deslocamento correspondente. A seguir serão descritos os passos básicos do algoritmo proposto por estes pesquisadores.

Mais uma vez, considera-se o estado de equilíbrio da estrutura em  ${}^t\mathbf{u}$  e  ${}^t\lambda\mathbf{F}_r$ . Esse será o ponto de partida para obtenção dos deslocamentos e parâmetro de carga na configuração  $t + \Delta t$ , ou seja:  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$  e  ${}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r$ . A solução incremental predita é obtida assumindo o incremento de carga  $\Delta\lambda^0\mathbf{F}_r$  e resolvendo-se o sistema de equações abaixo:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0\mathbf{F}_r \quad (4.42)$$

onde  $\mathbf{K}$  pode ser definido como a matriz de rigidez tangente ao campo de deslocamento  ${}^t\mathbf{u}$  (ver Figura 2.2). Observe que, nesse novo campo de deslocamentos  ${}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0$  as forças internas da estrutura podem ser determinadas:  $\mathbf{F}_i({}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0)$ . Como o problema é não-linear, essas forças não estarão em equilíbrio com as solicitações externas:  $({}^t\lambda + \Delta\lambda^0)\mathbf{F}_r$ . O equilíbrio do sistema estrutural é, então, estabelecido por uma seqüência de iterações. A estratégia de iteração a ser proposta se preocupará primeiro em ajustar o incremento de carga  $\Delta\lambda^0\mathbf{F}_r$ , para em seguida calcular o vetor resíduo  $\mathbf{g}$  que será usado no cálculo dos deslocamentos iterativos  $\delta\mathbf{u}$ .

Observe que, no começo da iteração  $k$  ( $k \geq 1$ ), o vetor dos deslocamentos incrementais  $\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$  é conhecido, de forma que as forças internas do sistema  $\mathbf{F}_i({}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(k-1)})$  podem ser obtidas. O vetor de forças externas totais correspondente a este estado de deslocamento pode ser escrito da forma  $({}^t\lambda + \xi_k\Delta\lambda^0)\mathbf{F}_r$ , onde o fator de escala  $\xi_k$  deverá ser obtido conforme procedimento descrito a seguir.

De acordo com a teoria apresentada, tem-se que o vetor das forças residuais  $\mathbf{g}$  pode ser definido por:

$$\mathbf{g} = ({}^t\lambda + \xi_k \Delta\lambda^0) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i({}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}) \quad (4.43)$$

ou,

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + \xi_k \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \quad (4.44)$$

onde,

$$\tilde{\mathbf{g}} = {}^t\lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i({}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}) \quad (4.45)$$

é o vetor das forças residuais correspondente aos deslocamentos da iteração corrente e parâmetro de carga da última configuração de equilíbrio.

De acordo com Krenk (1995), o fator de escala  $\xi_k$  poderá ser obtido, considerando-se os seguintes argumentos. A existência de forças residuais  $\mathbf{g}$  irá induzir o cálculo adicional de deslocamentos ( $\delta\mathbf{u}$ ). Assumindo aqui os deslocamentos incrementais  $\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$  como a melhor aproximação na direção deslocamentos incrementais verdadeiros, tem-se, então, que a magnitude desse vetor irá aumentar ou diminuir de acordo com o sinal do produto escalar entre  $\mathbf{g}^T \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$ , ou seja, com a projeção do vetor resíduo no vetor dos deslocamentos incrementais. Tem-se, então, que uma escolha “ótima” do vetor dos deslocamentos incrementais acontece se a seguinte condição for considerada:

$$\mathbf{g}^T \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} = 0 \quad (4.46)$$

Substituindo a força residual dada pela Equação (4.44) na condição de ortogonalidade anterior, chega-se ao fator de escala procurado:

$$\xi_k = -\frac{\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}}{\Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}} \quad (4.47)$$

Dessa forma, o vetor das forças residuais, após o ajuste no parâmetro de carga, é calculado através da Equação (4.44). Conhecendo esse vetor, avaliam-se os deslocamentos iterativos através da seguinte expressão:

$$\delta \mathbf{u}^k = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} \quad (4.48)$$

onde nessa relação  $\mathbf{K}$  pode ser a mesma matriz usada na Equação (4.42) (Newton-Raphson modificado) ou pode ser uma atualizada (Newton-Raphson padrão). No final de cada iteração, atualizam-se os deslocamentos incrementais através das Equações (2.12) e (2.13).

A Figura 4.11 fornece um resumo dos procedimentos apresentados nos parágrafos anteriores.

Krenk e Hededal (1993 e 1995) mostraram que a condição de ortogonalidade (4.46) poderia ser usada para derivar uma atualização da matriz de rigidez a cada iteração seguindo os métodos quasi-Newton, em particular o esquema do tipo Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) – (ver Crisfield, 1979 e 1980). A idéia básica dos métodos quasi-Newton é que a matriz de rigidez corrente satisfaça a relação linear entre os incrementos de deslocamentos e forças já estabelecidos, ou conhecidos. Como já definido, tem-se na iteração  $k$  que os vetores de deslocamentos e forças internas incrementais podem ser escritos como:  $\Delta \mathbf{u}$  e  $\Delta \mathbf{F}_i = -\tilde{\mathbf{g}}$  (Equação 4.45). Esses dois vetores se relacionam através da seguinte relação de rigidez:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F}_i \quad (4.49)$$

---

Estado de equilíbrio:  ${}^t\mathbf{u}$ ,  ${}^t\lambda$

Solução predita:  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{u}^0 = \mathbf{K}^{-1}\Delta\lambda^0\mathbf{F}_r$

Ciclo de Iterações:  $k = 1, 2, 3, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} &= {}^t\lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i({}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}) \\ \xi_k &= -\frac{\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}}{\Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}} \\ \mathbf{g} &= \tilde{\mathbf{g}} + \xi_k \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} = 0$$

$$\delta\mathbf{u}^k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$$

$$\Delta\mathbf{u}^k = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^k$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| < \zeta \xi_k \Delta\lambda^0 \|\mathbf{F}_r\|$

Atualize as variáveis:  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^k$  e  ${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \xi_k \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r$

---

Figura 4.11 - Estratégia baseada no resíduo ortogonal.

No caso unidimensional, a equação anterior corresponde à condição secante, porém para problemas estruturais com várias dimensões pode-se estabelecer diversas formas de atualização da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . As formas mais utilizadas de correção de  $\mathbf{K}$  empregam o método de Newton-Raphson padrão e o chamado método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) - (ver Crisfield, 1979 e 1980). Para este último, se escreve:

$$\mathbf{K} = {}^t\mathbf{K} - \frac{({}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u})({}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u})^T}{\Delta\mathbf{u}^T {}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}} + \frac{\Delta\mathbf{F}_i \Delta\mathbf{F}_i^T}{\Delta\mathbf{F}_i^T \Delta\mathbf{u}} \quad (4.50)$$

Observe que se ambos os lados da equação anterior forem multiplicados por  $\Delta\mathbf{u}$ , chega-se à Equação (4.49). A inversa dessa matriz atualizada pode ser encontrada explicitamente pela fórmula de Sherman-Morrison (Luenberger, 1984), ou seja:

$$\mathbf{K}^{-1} = \left( \mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{u} \Delta \mathbf{F}_i^T}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} \right)^t \mathbf{K}^{-1} \left( \mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{u}^T}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} \right) + \frac{\Delta \mathbf{u} \Delta \mathbf{u}^T}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} \quad (4.51)$$

Em aplicações do MEF, essa fórmula é freqüentemente usada na forma fatorizada proposta por Matthies e Strang (1979), mas, devido à condição de ortogonalidade (4.46), ela pode ser utilizada diretamente aqui.

Dessa forma, tem-se a inversa da matriz atualizada e através de (4.48) obtêm-se os deslocamentos iterativos  $\delta \mathbf{u}$ . Note, entretanto, que, quando o vetor das forças residuais  $\mathbf{g}$  satisfaz a condição de ortogonalidade (4.46) e a inversa da matriz é dada por (4.51), chega-se a uma expressão particularmente simples para  $\delta \mathbf{u}$ , ou seja:

$$\delta \mathbf{u}^k = \left( \mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{u} \Delta \mathbf{F}_i^T}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} \right)^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} \quad (4.52)$$

Essa expressão pode ser adicionalmente modificada, introduzindo o vetor dos deslocamentos iterativos definido por:

$$\delta \tilde{\mathbf{u}}^k = {}^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} \quad (4.53)$$

Tem-se, então, que os deslocamentos iterativos são obtidos através da seguinte expressão:

$$\delta \mathbf{u}^k = \delta \tilde{\mathbf{u}}^k - \eta \Delta \mathbf{u} \quad (4.54)$$

onde o fator  $\eta$  é dado por:

$$\eta = \frac{\Delta \mathbf{F}_i^T \delta \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} = \frac{\tilde{\mathbf{g}}^T \delta \tilde{\mathbf{u}}}{\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta \mathbf{u}} \quad (4.55)$$

Essa estratégia de atualização ou obtenção dos deslocamentos iterativos é bastante eficiente, pois envolve o cálculo adicional de apenas um produto interno:  $\tilde{\mathbf{g}}^T \delta \mathbf{u}$ . Note que o produto interno do denominador já foi avaliado como parte dos procedimentos necessários para obtenção do fator de escala  $\xi_k$  (Equação 4.47).

Em qualquer método quasi-Newton, a matriz de rigidez atualizada, satisfazendo a relação (4.49), é usada na determinação dos deslocamentos iterativos  $\delta \mathbf{u}$  através da Equação (4.53). Isso leva à seguinte relação entre os produtos escalares:

$$\Delta \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} \quad (4.56)$$

Observe-se, assim, que o uso da relação (4.49), aliada à condição de ortogonalidade (4.46), implica numa nova condição de ortogonalidade, ou seja:

$$\Delta \mathbf{F}_i \delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{g}}^T \delta \mathbf{u} = 0 \quad (4.57)$$

A estratégia de solução não-linear proposta por Krenk e Hededal (1993 e 1995) é caracterizada, portanto, pelo uso de duas condições de ortogonalidade: a primeira entre o incremento de deslocamento  $\Delta \mathbf{u}$  e o resíduo da iteração corrente  $\mathbf{g}$ ; e a outra entre o vetor das forças internas incremental  $\tilde{\mathbf{g}}$  e o novo deslocamento iterativo  $\delta \mathbf{u}$ . Essa segunda condição de ortogonalidade pode ser facilmente implementada e adaptada ao algoritmo fornecido na Figura 4.11.

Observe que na Figuras 4.11 não foi definida a estratégia de incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta \lambda^0$ . Como já mencionado no capítulo anterior desta dissertação, vários procedimentos de obtenção  $\Delta \lambda^0$  foram implementados no programa, desenvolvidos e adaptados às estratégias de solução não-linear propostas nesta seção. A Figura 4.12 ilustra esses procedimentos. Independentemente da escolha da estratégia de incremento de carga, a seguinte inequação deve ser respeitada (Krenk, 1995):

$$\|\Delta \mathbf{u}^0\| \leq \Delta \mathbf{u}_{\max} = C \|\Delta \mathbf{u}_1\| \quad (4.58)$$

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Preditada:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \Delta\lambda^0 = {}^t\Delta\lambda^0 \\ 2. \Delta\lambda^0 = \pm {}^t\Delta\lambda^0 \left( \frac{I_d}{{}^tI} \right)^\alpha \\ 3. \|\Delta\mathbf{u}^0\| = \|{}^t\Delta\mathbf{u}\| \left( \frac{I_d}{{}^tI} \right)^\alpha \Rightarrow \Delta\lambda^0 = \frac{\|\Delta\mathbf{u}^0\|}{\|\delta\mathbf{u}_r\|} \\ 4. \|\Delta\mathbf{u}^0\| = \Delta\mathbf{u}_{\text{max}} = C \|\Delta\mathbf{u}_1\| \Rightarrow \Delta\lambda^0 = \frac{\|\Delta\mathbf{u}^0\|}{\|\delta\mathbf{u}_r\|} \\ 5. \Delta\mathbf{u}^{0T} \Delta\mathbf{u}^0 + (\Delta\lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2, \text{ ou} \\ \Delta\mathbf{u}^{0T} \Delta\mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \\ \Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}} \end{array} \right. \\ \|\Delta\mathbf{u}^0\| \leq \Delta\mathbf{u}_{\text{max}} = C \|\Delta\mathbf{u}_1\| \end{array} \right.$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{g}} = {}^t\lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i({}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}) \\ \xi_k = - \frac{\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}}{\Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}} \\ \mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + \xi_k \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta\tilde{\mathbf{u}}^k = {}^t\mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} \\ \eta = \frac{\Delta\mathbf{F}_i^T \delta\tilde{\mathbf{u}}}{\Delta\mathbf{F}_i^T \Delta\mathbf{u}} = \frac{\tilde{\mathbf{g}}^T \delta\tilde{\mathbf{u}}}{\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta\mathbf{u}} \\ \delta\mathbf{u}^k = \delta\tilde{\mathbf{u}}^k - \eta \Delta\mathbf{u} \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{\mathbf{g}}^T \delta\mathbf{u} = 0$$

$$\Delta\mathbf{u}^k = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^k$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| < \zeta \xi_k \Delta\lambda^0 \|\mathbf{F}_r\|$

Atualize as variáveis:  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^k$  e  ${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \xi_k \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n_{\text{máx}}$

Figura 4.12 - Iteração a resíduo ortogonal: duas condições de ortogonalidade.

#### 4.10 - ITERAÇÃO BASEADA NO DESLOCAMENTO GENERALIZADO

No Capítulo 3, Seção 3.3, foi mostrado que, de acordo com o trabalho de Yang e Kuo (1994), a seguinte expressão deveria ser considerada para o parâmetro de carga ao longo da solução não-linear:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^0 \mathbf{t}\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r^k} (\mathbf{H}_k - \Delta\lambda^0 \mathbf{t}\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^k). \quad (4.59)$$

Na obtenção da solução incremental predita ( $k = 0$ ), os referidos pesquisadores definiram que o parâmetro incremental  $H_0$  (no caso, *deslocamento generalizado*) deveria ser obtido de acordo com a Equação (3.25); durante o ciclo iterativo é assumido que esse parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, isto é:  $H_k = 0$ , para  $k > 0$ . Dessa forma, pode-se rescrever (4.59) como:

$$\delta\lambda^k = - \frac{\mathbf{t}\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^k}{\mathbf{t}\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r^k}. \quad (4.60)$$

que é a expressão procurada para correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

O emprego de (4.60), em conjunto com a Equação (3.28) para cálculo de  $\Delta\lambda^0$ , é apresentado na Figura 4.13.

Como no Capítulo 3, a Equação (3.21) pode ser usada diretamente na obtenção das expressões (4.10), (4.8) e (4.6) fazendo as seguintes considerações:

- Controle do comprimento de arco:  $k \geq 1$ ,  $k_1 = \Delta\lambda^0$ ,  $\mathbf{C} = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{u}_r$  e  $H_k = 0$ ;
- Controle de uma componente de deslocamento selecionada:  $k \geq 1$ ,  $k_1 = 0$ ,  $\mathbf{C}^T = \{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0\}$  e  $H_k = 0$ ;
- Controle do trabalho externo:  $k \geq 1$ ,  $k_1 = 0$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{F}_r$  e  $H_k = 0$ .

---

Incremento de carga:  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{máx}}$

Solução Preditada:

$$\begin{cases} \Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 |\text{GSP}|^{1/2} \\ \Delta\mathbf{u}^0 = \mathbf{K}^{-1} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r \end{cases}$$

Ciclo de iterações:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

$$\begin{cases} \delta\lambda^k = - \frac{{}^t \delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^k}{{}^t \delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r^k} \\ \delta\mathbf{u}^k = \delta\mathbf{u}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{u}_r^k \end{cases}$$

Pare o ciclo iterativo quando:  $\|\mathbf{g}\| \leq \zeta \Delta\lambda \|\mathbf{F}_r\|$

Pare o incremento de carga quando:  $i = n_{\text{máx}}$

---

Figura 4.13 - Iteração a deslocamento generalizado constante.

#### 4.11 - CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA ADOTADOS

O processo iterativo descrito no Capítulo 2 termina indicando uma nova posição de equilíbrio para o sistema estrutural em análise, quando um dos dois, ou ambos os critérios de convergência apresentados abaixo forem atendidos:

1. O primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior. Ele é definido como segue:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (4.61)$$

onde  $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|$  é igual à norma Euclidiana do vetor das forças desequilibradas, que é calculada usando-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior;  $\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|$  é a norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo; e  $\zeta$  é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada;

2. O segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos e é sempre verificado ao final da iteração corrente. Ele é definido por:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{u}^k\|}{\|\Delta\mathbf{u}^k\|} \leq \zeta \quad (4.62)$$

onde  $\|\delta\mathbf{u}^k\|$  é a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos (residuais);  $\|\Delta\mathbf{u}^k\|$  é a norma euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo; e  $\zeta$  segue a mesma definição do critério anterior.

# 5

## PROGRAMA COMPUTACIONAL

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os procedimentos computacionais adotados na implementação do esquema de solução não-linear, fornecido no Capítulo 2, incluindo as estratégias de incremento de carga e de iteração, apresentadas nos Capítulos 3 e 4.

Foi utilizado como base para este trabalho o programa de análise estrutural desenvolvido, em linguagem *Fortran*, por Silveira (1995) como parte integrante de sua Tese de Doutorado.

A Seção 5.2 apresenta o algoritmo do programa principal. Algumas das subrotinas gerenciadas por ele são apresentadas nas seções subsequentes. Basicamente, esse programa é composto por três módulos principais, como ilustrado na Figura 5.1:

1. No módulo 1 (**Entrada de Dados**), é feita a leitura dos dados necessários à análise do problema. Inicialmente são lidos os parâmetros que definem o modelo de elementos finitos adotado para o sistema estrutural. Em seguida são fornecidos ao programa os parâmetros que controlam a estratégia de solução não-linear;
2. No módulo 2 (**Análise do Problema**), é realizada a análise do sistema estrutural em estudo. Para cada passo de carga, um problema de equilíbrio é resolvido;
3. No módulo 3 (**Saída de Resultados**), é feita a impressão dos resultados em arquivos de saída e/ou em arquivos neutros. Esses arquivos neutros podem ser utilizados como arquivos dados para o programa de pós-processamento implementado, usando rotinas gráficas do *Fortran*. Detalhes da implementação desse programa de visualização são fornecidos na Seção 5.4.

Como o esquema de solução proposto baseia-se numa estratégia incremental, os módulos 2 e 3 são executados para cada passo de carga.



Figura 5.1 - Esquema simplificado do programa.

## 5.2 - O PROGRAMA PRINCIPAL

Essa seção tem o propósito de fornecer um resumo, na forma de algoritmo, do programa principal, incluindo os passos básicos envolvidos na implementação computacional da metodologia de solução não-linear. Esses passos são mostrados no quadro a seguir.

Quadro 5.1 - Algoritmo do programa principal.

---

1. A primeira tarefa realizada pelo programa principal consiste na leitura do arquivo de dados contendo informações relevantes sobre o modelo de elementos finitos adotado para o sistema estrutural em estudo, a saber (veja Seção 5.3.1, **Subrotina INPUT1**):

- Título da análise;
- Número de pontos nodais, número de elementos, dimensão do problema, número de materiais, número de seções, número de parâmetro da seção;
- Coordenadas da estrutura;
- Incidência dos elementos finitos;
- Propriedades físicas e geométricas dos elementos;
- Condições de contorno; etc.

2. Monta-se o vetor de carregamento nodal de referência:  $\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r$ . Na estratégia de solução adotada, apenas a direção desse vetor é importante.

3. Faz-se a leitura dos parâmetros que controlam a estratégia de solução incremental-iterativa escolhida (veja Seção 5.3.2, **Subrotina INPUT2**). Alguns desses parâmetros são dados abaixo:

- Número de passos (ou incrementos) de carga:  $I_c$ ;
- Número máximo de iterações - problema de equilíbrio:  $I_{m\acute{a}x}$ ;
- Indicador de incremento automático de carga:  $I_{AUTO}$ ;
- Indicador de reanálise:  $I_{REA}$ . Esta variável indica se a solução do problema deve ser feita a partir de uma configuração de equilíbrio já obtida de uma análise anterior. Se  $I_{REA} = 0$ , o programa realiza uma solução dita padrão; caso  $I_{REA} = 1$ , é feita uma reanálise.
- Incremento de carga inicial:  $\Delta\lambda_1^0$ ;
- Tolerância para convergência - problema de equilíbrio:  $\zeta$ ; etc.

4. Faz-se a verificação de reanálise:  $I_{REA} = 0$  ?

- Sim; são inicializados: parâmetro de carga total:  $\lambda = 0$ ; os deslocamentos nodais totais:  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ; estado de tensão na estrutura;
- Não; são lidos do arquivo de dados **REANA** as variáveis necessárias para inicializar a solução do problema a partir de uma dada configuração de referência, a saber: parâmetro de carga total:  $\lambda$ ; deslocamentos nodais totais:  $\mathbf{u}$ ; coordenadas da estrutura na configuração de referência; estado de tensão na estrutura na configuração de referência.

### 5. Loop de passos de carga: $i = 1, 2, \dots, I_c$

5.1 São salvos os parâmetros relacionados à última configuração de equilíbrio:

- Parâmetro de carga total:  $\lambda_{old} = (i-1)\lambda$ ;
- Deslocamentos nodais totais:  $\mathbf{u}_{old} = (i-1)\mathbf{u}$ .

5.2 Monta-se a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$ ;

5.3 Resolve-se:  $\mathbf{K}\delta\mathbf{u}_r = \mathbf{F}_r$  para obtenção dos deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{u}_r$ .

5.4 Calcula-se a solução incremental tangente:  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{u}^0$ . A subrotina que realiza esta tarefa é fornecida na Seção 5.3.3. Um resumo dos passos importantes dessa subrotina são dados abaixo:

- Caso seja adotada a técnica do comprimento de arco proposta por Riks (1979), tem-se que:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}},$$

onde  $\Delta l$  é o comprimento de arco. A escolha do sinal correto para  $\Delta\lambda^0$  é feita através de um dos procedimentos fornecidos na Seção 3.4.

- Calcula-se:  $\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{u}_r$ .
- Fazem-se as atualizações de  $\lambda$  e  $\mathbf{u}$ :  ${}^t\lambda = ({}^{t-1})\lambda + \Delta\lambda^0$  e  ${}^t\mathbf{u} = ({}^{t-1})\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0$ .

5.5 É realizada uma correção, usando a técnica iterativa de Newton-Raphson, na solução incremental tangente, até que um novo ponto de equilíbrio da estrutura seja atingido. A rotina responsável por esta correção é apresentada na Seção 5.3.4. Resumidamente, tem-se:

- *Loop* de iterações - problema de equilíbrio:  $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$ , para resolver:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r, \text{ ou } \delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k$$

onde:  $\delta \mathbf{u}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$ ;  $\delta \mathbf{u}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$ ; e  $\delta \lambda$  é definido de acordo com a estratégia de iteração escolhida (Capítulo 4);

- No final de cada iteração, são feitas as atualizações das variáveis incrementais:

$$\Delta \lambda^k = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \text{ e } \Delta \mathbf{u}^k = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^k; \text{ e variáveis totais: } {}^t \lambda^k = {}^{(t-1)} \lambda + \Delta \lambda^k \text{ e } {}^t \mathbf{u}^k = {}^{(t-1)} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^k.$$

- O ciclo é interrompido quando o critério de convergência escolhido for atendido (veja Seção 4.11).

5.6 Verifica-se a adoção de estratégias de incremento automático de carga:  $I_{\text{AUTO}} = 0$  ?

- Sim; são feitas: a atualização das coordenadas da estrutura; a atualização das variáveis incrementais  $\Delta \lambda$  e  $\Delta \mathbf{u}$ ; a impressão dos resultados (deslocamentos nodais, parâmetro de carga, esforços nas barras) em arquivos neutros e de saída;
- Não; além dos procedimentos anteriores, são calculados certos parâmetros (comprimento de arco, deslocamento e trabalho externo) que permitem ao programa fazer o cálculo automático do próximo incremento de carga. A subrotina encarregada de fazer esses cálculos é fornecida na Seção 5.3.5.

6. É testado se o incremento de carga corrente é o último:  $I = I_c$  ?

- Sim; siga para o passo 7;
- Não: faz-se um novo incremento de carga, isto é, retorna-se ao passo 5.

7. Imprimem-se no arquivo **REANA** os dados da última configuração de equilíbrio. Esses dados podem ser tomados como ponto de partida (ou referência) de uma possível reanálise.

8. Finaliza-se o programa.

---

### 5.3 - SUBROTINAS IMPLEMENTADAS

As subrotinas que participam do algoritmo de solução proposto na Seção 5.2 serão apresentadas com detalhe a seguir.

#### 5.3.1 - Subrotina INPUT1

Uma vez elaborado o desenho esquemático da malha cobrindo o domínio do sistema estrutural a ser analisado — incluindo numeração dos nós, elementos, tipos de materiais, etc — prepara-se um arquivo de dados de entrada com o objetivo de transmitir informações suficientes do modelo de elementos finitos adotado.

Como já destacado na Seção 5.2, a Subrotina INPUT1 é responsável pela leitura das informações contidas neste arquivo. Na passagem por esta subrotina, um conjunto de vetores e matrizes é pré-estabelecido para armazenar: coordenadas nodais; conectividades dos elementos; propriedades dos materiais; forças nodais; etc; além da definição da dimensão dos vetores e matrizes usados nos próximos módulos do programa. A Figura 5.4 apresenta um exemplo desse arquivo de dados.

Os procedimentos a serem seguidos para montagem deste arquivo são comentados a seguir:

1. Nas três primeiras linhas do arquivo, são fornecidas informações sobre o tipo de problema a ser analisado e os parâmetros de controle do programa, como mostrado na Tabela 5.1. Essas informações são utilizadas na leitura dos dados subsequentes;
2. Uma vez fornecidos os parâmetros de controle, o programa espera ler uma série de dados para a descrição da malha. O fluxo destes dados é controlado por um conjunto de *macro-comandos*, como ilustrado na Figura 5.2. A Tabela 5.2 fornece quais os macro-comandos possíveis de serem lidos, e a correspondente tarefa associada;

Tabela 5.1 - Parâmetros de controle.

Variável	Descrição
<i>1ª linha</i>	
<b>TITLE</b>	Título do problema a ser analisado
<i>2ª linha</i>	
<b>NPOIN</b>	Número de pontos nodais
<b>NELEM</b>	Número de elementos
<b>NDIME</b>	Dimensão espacial
<i>3ª linha</i>	
<b>NCASE</b>	Número de casos de carga
<b>NTYPE</b>	Tipo da análise (linear ou não-)
<b>NPLOT</b>	Indicador de plotagem

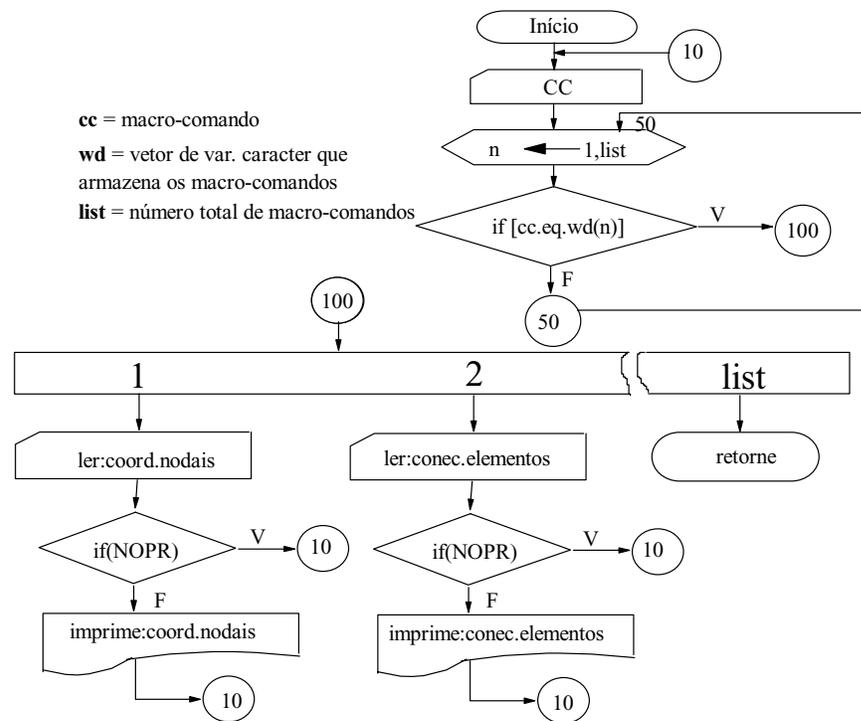


Figura 5.2 - Fluxograma da subrotina INPUT1.

Tabela 5.2 - Declaração dos macro-comandos.

<b>Macro-Comando</b>	<b>Descrição</b>
<b>COOR</b>	Dados para coordenadas
<b>ELEM</b>	Dados para elementos
<b>MATE</b>	Dados para material
<b>SECA</b>	Dados para seção transversal
<b>PLOT</b>	Dados para plotagem (pós-processamento)
<b>GRAF</b>	Dados para montagem de gráficos
<b>PRIN</b>	Imprime os dados lidos
<b>NOPR</b>	Não imprime os dados lidos
<b>END</b>	Último macro-comando; Finaliza os dados da malha

3. O uso de macro-comandos permite que se especifiquem apenas aqueles itens de dados necessários para cada análise, além de diminuir as chances de erro na montagem do arquivo pelo usuário;
4. Seguido ao macro-comando COOR, deve existir outro macro caracterizando o tipo da estrutura;
5. O macro BOUN encarrega-se da leitura subsequente dos nós da malha que estão impedidos ou livres de se deslocarem. A partir destes dados, calcula-se o número total de deslocabilidades do sistema, NEQ. Esta variável define a dimensão dos vetores e matrizes utilizados nos próximos módulos do programa;
6. São utilizadas algumas rotinas extraídas de Zienkiewicz e Taylor (1991) com objetivo de gerar automaticamente algumas quantidades nodais e de elementos;
7. Ao invés da forma convencional de armazenar os vetores e matrizes num único vetor — *vetor-trabalho* —, o programa utiliza os comandos ALLOCATE, ALLOCATABLE e DEALLOCATE do *Fortran* (Microsoft FORTRAN PowerStation, 1993), que permitem que cada vetor (ou matriz) seja alocado dinamicamente. Um exemplo de como funciona este armazenamento é mostrado na Figura 5.3. Essa forma de armazenamento permite que se dimensionem vetores e matrizes de caráter local numa subrotina, com o espaço de memória estritamente

necessário. Na saída desta subrotina, este espaço de memória pode ser recuperado através da função DEALLOCATE;

```

INTEGER dataset[ALLOCATABLE] (:,:),
+       results[ALLOCATABLE] (:,:,)
INTEGER reactor, level, calcs, error
DATA   reactor, level, calcs / 10, 50, 100 /

ALLOCATE (dataset(reactor,level),
+       results(reactor,level,calcs), STAT = error)

IF (error .NE. 0)
+ STOP ' Not enough storage for data; stopping...'

DEALLOCATE (dataset, STAT = error)
DEALLOCATE (results, STAT = error)

```

Figura 5.3 - Alocação dinâmica.

8. O último passo para montagem do arquivo de dados diz respeito à especificação dos parâmetros necessários para montagem do vetor de carregamento nodal de referência,  $F_r$ . É incluída também no programa a possibilidade de analisar a atuação de cargas não-proporcionais, como, por exemplo, o peso próprio da estrutura. O regime de cargas proporcionais e não-proporcionais é implementado no programa como uma seqüência de carregamento, envolvendo dois vetores. Neste caso, o carregamento externo atuante é representado por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_d + \lambda \mathbf{F}_r \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{R}_d$  corresponde ao vetor de cargas nodais não-proporcionais.

ESTABILIDADE DE COLUNAS	...title
21,20,2,1,1,1,3	...npoin,nelem,ndime,nmats,npmat,nsecs,npsec

```

1, 1, 1, 2, 3      ...ncase,ntype,nplot,nnode,ndofn

coor              ...MACRO-COMANDO
ppor             ...MACRO-COMANDO
1, 1, 0., 0.     ...no,ng,x,y
21, 0, 5., 0.

boun             ...MACRO-COMANDO
1, 1, 1, 1, 0   ...no,ng,dx,dy,dz
21, 0, 0, 1, 0

elem            ...MACRO-COMANDO
1, 1, 2, 1      ...el,noi,noj,lx
20, 20, 21, 0

mate            ...MACRO-COMANDO
1.e3            ...E
1               ...ngelm
1, 20          ...kel1,kel2

seca            ...MACRO-COMANDO
1.2e4, 1.0, 1.e-8 ...A,I,be
1               ...ngelm
1, 20          ...kel1,kel2

plot            ...MACRO-COMANDO
'mesh', 1.e3, 0.0 ...lci,ct(1),ct(2)

graf            ...MACRO-COMANDO
21, 15          ...npl,ndl

end             ...MACRO-COMANDO

0               ...idl
CARGA CONCENT. ...title
1, 0           ...iplod,iedge
21, -1.e0, 0., 0. ...no,PX,PY,MX

```

Figura 5.4 - Exemplo de um arquivo de dados - Subrotina INPUT1.

### 5.3.2 - Subrotina INPUT2

Esta subrotina faz a leitura de um segundo arquivo de dados que contém os parâmetros responsáveis pelo gerenciamento da estratégia incremental-iterativa, adotada na solução não-linear do problema. A seguir são descritos os passos necessários para montagem deste arquivo:

1. Inicialmente é especificado o tipo de elemento finito não-linear a ser adotado de acordo com uma das formulações apresentadas na Tabela 5.3. Todas essas formulações foram implementadas e testadas com sucesso por Galvão (2000). Vale informar que, nos exemplos analisados no Capítulo 6, foram utilizadas basicamente as formulações propostas por Alves (1993) e Yang e Kuo (1994);

Tabela 5.3 - Formulações de elementos finitos não-lineares.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>ALVES</b>	Se ALVES $\neq$ 0, usa-se Alves (1993)
<b>TORK</b>	Se TORK $\neq$ 0, usa-se Torkamani (1997)
<b>YANG</b>	Se YANG $\neq$ 0, usa-se Yang e Kuo (1994)
<b>PACOS</b>	Se PACOS $\neq$ 0, usa-se Pacoste e Eriksson (1997)

2. São especificadas as variáveis de controle apresentadas na Tabela 5.4;
3. Em seguida, define-se o tipo de estratégia de iteração a ser adotada, usando-se as variáveis indicadas na Tabela 5.5;
4. A estratégia de incremento automático do parâmetro de carga é definida de acordo com as variáveis da Tabela 5.6;

Tabela 5.4 - Variáveis de controle.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>FACI</b>	Valor inicial de $\Delta\lambda$
<b>NINC</b>	Número de passos de carga
<b>IAUTO</b>	Parâmetro de controle de incremento automático de carga
<b>IACC</b>	Parâmetro que define o emprego do acelerador de convergência fornecido em Crisfield (1981) (apenas para o Newton-Raphson modificado)
<b>IRES</b>	Parâmetro indicador de re-análise. Para soluções padrões, IRES = 0; se IRES = 1 é feita uma análise a partir de uma dada configuração de equilíbrio
<b>TINC</b>	Parâmetro indicador da estratégia de incremento de carga: Se TINC = 1, usa-se a relação $(I_d/\Delta I)$ Se TINC = 2, usa-se certa estratégia de incremento de carga em conjunto com a estratégia de iteração resíduo ortogonal Se TINC = 3, usa-se certa estratégia de incremento de carga em conjunto com a estratégia de iteração deslocamento generalizado

Tabela 5.5 - Estratégias de iterações.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>ILC</b>	Iteração baseada na carga constante Se $ILC \neq 0$ , usa-se a Equação (4.1)
<b>IDIS</b>	Iteração baseada no deslocamento constante Se $IDIS \neq 0$ , usa-se a Equação (4.6)
<b>ITEC</b>	Iteração baseada no trabalho externo constante Se $ITEC \neq 0$ , usa-se a Equação (4.8)
<b>IARC</b>	Iteração baseada no comprimento de arco constante Se $IARC = 1$ , usa-se a Equação (4.10) Se $IARC = 2$ , usa-se a Equação (4.12) Se $IARC = 3$ , usa-se a Equação (4.14) Se $IARC = 4$ , usa-se a Equação (4.20)
<b>IRPC</b>	Iteração baseada na resposta ponderada constante Se $IRPC = 1$ , usa-se a Equação (4.32) Se $IRPC = 2$ , usa-se a Equação (4.28)
<b>IMDO</b>	Iteração baseada na norma mínima dos deslocamentos residuais Se $IMDO \neq 0$ , usa-se a Equação (4.36)
<b>IMFO</b>	Iteração baseada na norma mínima das forças desequilibradas Se $IMFO \neq 0$ , usa-se a Equação (4.41)
<b>IKRENK</b>	Iteração baseada no resíduo ortogonal Se $IKRENK = 1$ , usa-se a Equação (4.48) Se $IKRENK = 2$ , usam-se as Equações (4.48 e 4.53)
<b>IYANG</b>	Iteração baseada no deslocamento generalizado Se $IYANG \neq 0$ , usa-se a Equação (4.60)

Tabela 5.6 - Estratégias de incremento automático do parâmetro de carga.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>INCL</b>	Incremento direto do parâmetro de carga Se $INCL \neq 0$ , usa-se a Equação (3.3)
<b>INCA</b>	Incremento do comprimento de arco Se $INCA \neq 0$ , usa-se a Equação (3.6 ou 3.8)
<b>INCD</b>	Incremento da componente de deslocamento selecionada Se $INCD \neq 0$ , usa-se a Equação (3.11 ou 3.14 ou 3.15)
<b>INCW</b>	Incremento do trabalho externo Se $INCW \neq 0$ , usa-se a Equação (3.18)
<b>INCGD</b>	Incremento do deslocamento generalizado Se $INCGD \neq 0$ , usa-se a Equação (3.28)

5. Na quinta linha, são introduzidos parâmetros adicionais que controlam o processo iterativo. Esses parâmetros são definidos na Tabela 5.7. Caso  $NLSMAX \neq 0$ , utiliza-se o algoritmo de busca linear proposto em Crisfield (1981) para melhorar o processo de convergência. Este algoritmo tem o objetivo de definir um fator  $\eta$  usado para escalar  $\delta\mathbf{u}$ . Após a busca linear, os deslocamentos nodais incrementais na iteração corrente são dados por:

$$\Delta\mathbf{u}^k = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \eta\delta\mathbf{u}^k \quad (5.2)$$

Tabela 5.7 - Variáveis de controle do ciclo iterativo.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>BETOK</b>	Fator de tolerância para convergência
<b>ITERTY</b>	Define o tipo de iteração adotada Se ITERTY = 1 → Newton-Raphson padrão Se ITERTY = 2 → Newton-Raphson modificado
<b>NITMAX</b>	Numero máximo de iterações
<b>NLSMX</b>	Número máximo de calculos extras das forças desequilibradas durante a busca-linear (caso haja correção de $\lambda$ durante o processo iterativo, NLSMAX = 0)
<b>CCONV</b>	Critério de convergência Se CCONV = 1 → Carga Se CCONV = 2 → Deslocamento Se CCONV = 3 → Carga e deslocamento

6. Nas duas linhas seguintes, o usuário deve definir uma série de parâmetros que controlam a impressão de resultados (deslocamentos, tensões, deformações, etc) em arquivos de saída e em arquivos "neutros", empregados em programas de pós-processamento. Estes parâmetros estão definidos na Tabela 5.8;

Tabela 5.8 - Parâmetros de impressão.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>IWRT</b>	Parâmetro de impressão principal Se $IWRT \neq 0$ , são impressos deslocamentos, tensões, etc, no final do passo de carga
<b>IWRIT</b>	Parâmetro de impressão secundário Se $IWRIT \neq 0$ , são impressas diversas variáveis durante o processo iterativo
<b>KTEST</b>	Parâmetro que define o critério para mudança do sinal em $\Delta\lambda$ Se $KTEST = 0$ → Critério de Crisfield (1991) Se $KTEST = 1$ → Critério de Bergan (1978) Se $KTEST = 2$ → Critério de Krenk e Hededal (1993 e 1995) Se $KTEST = 3$ → Critério de Yang (1994)
<b>KPLOT</b>	Parâmetro controlador de saída gráfica Indica de quantos em quantos passos de carga é visualizada a deformada da estrutura na tela
<b>KWINC</b>	Parâmetro controlador de impressão na tela do contador do número de passos de carga

Tabela 5.9 - Parâmetros de impressão.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>KMVIE</b>	Número máximo de impressões em arquivo neutro; este arquivo é usado pelo programa de pós-processamento POS-3D (ref, 1992)
<b>KVIEW</b>	Número que indica de quanto em quanto passos de carga são impressos os resultados a serem visualizados pelo POS-3D (ref, 1992)
<b>KMVDE</b>	Número máximo de impressões em arquivo neutro; este arquivo é usado pelo programa de pós-processamento apresentado na Seção 5.4
<b>KVDEF</b>	Número que indica de quanto em quanto passos de carga são impressos os resultados a serem visualizados pelo pós-proces. da Seção 5.4
<b>IMPR</b>	Número que indica de quanto em quanto passos de carga são impressos os resultados no arquivo GRAF.DAT
<b>REL</b>	Parâmetro para impressão do relatório no arquivo de saída: Se REL = 0 → Imprime Se REL = 1 → Não imprime

7. Caso NLSMX ≠ 0, são fornecidos os parâmetros descritos na Tabela 5.10;

Tabela 5.10 - Variáveis usadas no algoritmo de busca linear.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>PERMLS</b>	Fator de tolerância da busca linear
<b>AMPMX</b>	Fator de amplificação máximo
<b>ETMXA</b>	Comprimento do passo máximo
<b>ETMNA</b>	Comprimento do passo mínimo

8. Se IAUTO = 1, são fornecidos os parâmetros apresentados na Tabela 5.11;

Tabela 5.11 - Variáveis usadas no incremento automático do parâmetro de carga.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>IDES</b>	Número de iterações desejadas
<b>FACMX</b>	Incremento máximo do parâmetro de carga
<b>FACMN</b>	Incremento mínimo do parâmetro de carga
<b>ISWCH</b>	Parâmetro indicador de troca de estratégias de incremento de carga e iteração

9. Se INCA  $\neq$  0, ou INCD  $\neq$  0, ou INCW  $\neq$  0, são fornecidos os parâmetros mostrados na Tabela 5.12;

Tabela 5.12 - Variáveis para incremento automático do comprimento de arco.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>DLDES</b>	Incremento desejado do comprimento de arco (ou deslocamento, ou trabalho)
<b>DLDMX</b>	Incremento máximo do comprimento de arco (ou deslocamento, ou trabalho)
<b>DLDMN</b>	Incremento mínimo do comprimento de arco (ou deslocamento, ou trabalho)
<b>FMX</b>	Fator multiplicador máximo $dldmx = FMX * dldes$ ; ou $ddmx = FMX * ddes$ ; ou $wdmx = FMX * wdes$
<b>FMN</b>	Fator multiplicador mínimo $dldmn = FMN * dldes$ ; ou $ddmn = FMN * ddes$ ; ou $wdmn = FMN * wdes$

10. Se  $IACC = 1$ , são fornecidos os parâmetros destacados na Tabela 5.13;

Tabela 5.13 - Variáveis usadas no algoritmo de acelerador de convergência.

<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
<b>R1C</b>	Em Crisfield (1982) foi recomendado valores para R1C entre 2 e 3; em Crisfield (1991) foi usado $R1C = 3.5$
<b>R2C</b>	Em Crisfield (1982) foi recomendado valores para R2C entre 0.3 e 1; em Crisfield (1991) foi usado $R2C = 0.3$

11. Na décima primeira linha encontram-se as variáveis utilizadas quando  $IDIS \neq 0$  e  $INCD \neq 0$  (controle de deslocamento).

Tabela 5.14 - Variáveis usadas no controle de deslocamento.

Variável	Descrição
<b>NODES</b>	Nó usado para o controle de deslocamento
<b>COMSEL</b>	Componente de deslocamento selecionada do nó NODES Se COMSEL = 1 → Deslocamento horizontal (u) Se COMSEL = 2 → Deslocamento transversal (w) Se COMSEL = 3 → Rotação ( $\theta$ )

A Figura 5.4 apresenta um exemplo de arquivo que utiliza a formulação geometricamente não-linear, proposta por Yang e Kuo (1994) na definição do elemento finito e as estratégias de incremento do parâmetro de carga e de iteração baseadas na técnica de deslocamento constante.

0 0 1 0	...Alves, Tork, Yang, Pacos
1.e2 1000 1 0 0 1	...faci, ninc, iauro, iacc, ires, tinc
0 1 0 0 0 0 0 0 0	...ilc, idis, iarc, itec, imdo, imfo, irpc, ipro, ikrenk, iyang
0 1 0 0 0	...incl, incd, inca, incw incgd
1.e-3 1 21 0 1	...betok, iterty, nitmax, nlsmx, cconv
0 0 1 0 10	...iwrt, iwrit, ktest, kplot, kwinc
1 10 16 30 1 0	...kmvie, kview, kmvde, kvdef, impr, rel
3 10. 0.1 0	...ides, facmx, facmn, iswch
0. 0. 0. 10. 0.1	...dldes, dldmx, dldmn, fmx, fmn
11 2	...nodes, comsel

Figura 5.4 - Exemplo de um arquivo de dados - Subrotina INPUT2.

### 5.3.3 - Subrotina SCALUP

Esta subrotina é chamada a partir do programa principal logo após o cálculo dos deslocamentos nodais tangenciais  $\delta \mathbf{u}_r$ . Sua função principal resume-se à implementação computacional dos procedimentos descritos na Seção 2.2.1: o cálculo da solução incremental inicial tangente,  $\Delta \lambda^0$  e  $\Delta \mathbf{u}^0$ . Os passos mais importantes desta rotina são apresentados no quadro abaixo:

Quadro 5.2 - Algoritmo da subrotina **SCALUP**

- 
1. Se  $IAUTO = 0$ , segue-se para o passo 5
  2. Se  $ISWCH = 0$ , segue-se para o passo 4
  3. Verifica-se a necessidade de mudança da estratégia de solução não-linear. Caso seja necessário, a estratégia de iteração baseada no parâmetro de carga constante é trocada pela estratégia do comprimento de arco cilíndrico. Em seguida, são calculados:

$$DLDES = \Delta \lambda^0 \sqrt{\delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r} ; DLDMX = 5 \times DLDES; \text{ e } DLDMN = 0.1 \times DLDES$$

4. O parâmetro inicial de carga,  $\Delta \lambda^0$ , é calculado seguindo-se uma das opções mostradas a seguir:

4.1 - Se  $TINC = 1$ , chamar a Subrotina SCALUP1

Se  $INCL \neq 0$ , calcula-se  $\Delta \lambda^0$  através da Equação (3.3):

- Se  $KTEST = 0$ : critério de Crisfield (1991) para mudança de sinal da carga
- Se  $KTEST = 1$ : critério de Bergan (1982) para mudança de sinal da carga

Se  $INCD \neq 0$ , calcula-se  $\Delta \lambda^0$  através da Equação (3.11);

Se  $INCA \neq 0$ , calcula-se  $\Delta \lambda^0$  através da Equação (3.6 ou 3.8):

- Se  $KTEST = 0$ : critério de Crisfield (1991) para mudança de sinal da carga
- Se  $KTEST = 1$ : critério de Bergan (1982) para mudança de sinal da carga

Se  $INCW \neq 0$ , calcula-se  $\Delta \lambda^0$  através da Equação (3.18).

4.2 - Se **TINC = 2**, chamar a Subrotina SCALUP2 (**resíduo ortogonal**)

Se INCL  $\neq 0$ , calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.3)

Se INCD = 1, calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.12)

Se INCD = 2, calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.13)

Se INCD = 3, calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.15)

Se INCA  $\neq 0$ , calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.6 ou 3.8)

4.3 - Se **TINC = 3**, chamar a Subrotina SCALUP3 (**deslocamento generalizado**)

Se INCL  $\neq 0$ , calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.3)

Se INCD  $\neq 0$ , calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.11)

Se INCA  $\neq 0$ , calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.6 ou 3.8)

Se INCW  $\neq 0$ , calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.18)

Se INCGD  $\neq 0$ , calcula-se  $\Delta\lambda^0$  através da Equação (3.28)

5.  $\Delta\mathbf{u}^0$  é obtido fazendo-se um escalonamento em  $\delta\mathbf{u}_r$ , ou seja:  $\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{u}_r$

6. Atualizam-se  $\lambda$  e  $\mathbf{u}$ :  $\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$  e  $\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0$

7. Se IWRIT = 1, são impressos:  $\Delta\lambda^0$ ,  $\Delta\mathbf{u}^0$ ,  $\lambda$  e  $\mathbf{u}$

8. Retorna-se ao programa principal.

---

### 5.3.4 - Subrotina ITER

O objetivo desta subrotina consiste basicamente na implementação computacional dos procedimentos descritos na Seção 2.2.2; isto é, a realização do processo iterativo baseado na técnica de Newton-Raphson (padrão ou modificado) para encontrar um novo ponto de equilíbrio para a estrutura. No esquema de iteração implementado, é possível modificar o esquema tradicional de Newton introduzindo, a variação do parâmetro de carga  $\lambda$  durante o ciclo iterativo.

Caso não haja variação do parâmetro de carga  $\lambda$  ao longo do ciclo iterativo (esquema tradicional), pode-se utilizar os algoritmos de busca linear e acelerador de convergência propostos em Crisfield (1991).

Os passos importantes desta rotina são descritos no quadro a seguir:

Quadro 5.3 - Algoritmo da subrotina **ITER**

---

Inicializa-se o *loop* de iterações: ITE=1, NITMAX

1. Se ITE = 1 ou NLSMX = 0, são calculados: O vetor das forças internas da estrutura:  $\mathbf{F}_i$ ; Se ITERTY = 1 (N-R padrão), calcula-se  $\mathbf{K}$

2. Calcula-se o vetor da forças desequilibradas:  $\mathbf{F}_d = -\mathbf{g}^{(k-1)} = -(\mathbf{F}_i^{(k-1)} - \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r)$

3. Calcula-se o fator de convergência BET1:  $BET1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\|}$

4. Resolve-se o sistema:  $\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_g = \mathbf{F}_d$

5. Caso ITERTY = 1 (N-R padrão) e ILC = 0 ( $\lambda$  varia), resolve-se o sistema:  $\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_r = \mathbf{F}_r$

6. Se IWRIT = 1, imprime-se:  $\mathbf{g}^{(k-1)}$ ,  $\delta \mathbf{u}_g$  e  $\delta \mathbf{u}_r$

7. Se ILC = 0, calcula-se  $\delta\lambda$  de acordo com uma das estratégias de iterações abaixo:

- Se IDIS  $\neq 0$ , calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.6);
- Se ITEC  $\neq 0$ , calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.8);
- Se IARC  $\neq 0$ , verifica-se o valor de IARC:
  - Se IARC = 1, calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.10);
  - Se IARC = 2, calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.12);
  - Se IARC = 3, calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.14);
  - Se IARC = 4, calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.20).
- Se IRPC  $\neq 0$ , verifica-se o valor de IRPC:
  - Se IRPC = 1, calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.32);
  - Se IRPC = 2, calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.28).
- Se IMDO  $\neq 0$ , calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.36);
- Se IMFO  $\neq 0$ , calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.41);
- Se IKRENK  $\neq 0$ , verifica-se o valor de IKRENK:
  - Se IKRENK = 1, calcula-se  $\delta\lambda$  considerando a condição de ortogonalidade dada pela Equação (4.48);
  - Se IKRENK = 2, calcula-se  $\delta\lambda$  considerando as condições de ortogonalidade dadas pelas Equações (4.48 e 4.53).
- Se IYANG  $\neq 0$ , calcula-se  $\delta\lambda$  através da Equação (4.60).

Após a obtenção de  $\delta\lambda$ , são atualizadas as variáveis incrementais  $\Delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{u}^k$  (Equações (2.12 e 2.13)) e totais  $\lambda$  e  $\mathbf{u}$  (Equações (2.14) e (2.15));

8. Se ILC  $\neq 0$ :

- Se IACC =1, utiliza-se o algoritmo de aceleração de convergência implementado (**Subrotina ACCEL**);
- Atualizam-se as variáveis incrementais  $\Delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{u}^k$  e totais  $\lambda$  e  $\mathbf{u}$ ;
- Se NLSMX  $\neq 0$ , realiza-se a busca linear (**Subrotina LSLOOP**).

9. Se IWRT =1, imprime-se:  $\Delta\lambda^k$ ,  $\Delta\mathbf{u}^k$ ,  $\lambda$  e  $\mathbf{u}$ ;

10. Calcula-se o fator de convergência BET2:  $BET2 = \frac{\|\delta \mathbf{u}\|}{\|\Delta \mathbf{u}^k\|}$ ;

11. Verifica-se a convergência:

- Caso  $BET1 \leq BETOK$  e  $BET2 \leq BETOK$ , segue-se para o passo 12;
- Caso  $BET1 > BETOK$  ou  $BET2 > BETOK$ , realiza-se uma nova iteração; retorna-se ao passo 1

12. Retorna-se ao programa principal.

---

### 5.3.5 - Subrotina NEXINC

Esta subrotina é chamada do programa principal se IAUTO = 1. **NEXINC** tem o objetivo de calcular e atualizar os parâmetros utilizados no próximo passo de carga. A seguir são descritas as tarefas realizadas por esta subrotina:

#### Quadro 5.4 - Algoritmo da subrotina **NEXINC**

---

1. Caso  $ITE \geq NITMAX$ , conclui-se que não foi atingido o ponto de equilíbrio da estrutura durante o processo iterativo. Executam-se, então, os seguintes procedimentos:

1.1 - Calcula-se o fator de redução - FAC:

- $FAC = BETOK/BET1$
- Se  $FAC > 0.5$ , faz-se:  $FAC = 0.5$ ;
- Se  $FAC < 0.1$ , faz-se:  $FAC = 0.1$ .

1.2 -  $\lambda$  e  $\mathbf{u}$  volta a ter os valores do passo de carga anterior:  $\lambda = \lambda_{old}$ ;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{old}$ ;

1.3 - Inicializam-se  $\Delta \lambda^k$  e  $\Delta \mathbf{u}^k$ :  $\Delta \lambda^k = 0$  e  $\Delta \mathbf{u}^k = 0$ ;

1.4 - Segue-se para o passo 3.

2. Caso  $ITE < NITMAX$ , conclui-se que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido. Assim:

2.1 - Calcula-se FAC:  $FAC = \sqrt{\frac{IDES}{ITE - 1}}$ ;

2.2 - Se  $IWRT = 1$ , imprime-se:  $\lambda$  e  $\mathbf{u}$ ;

2.3 - Atualizam-se as coordenadas da estrutura;

2.4 - São impressos resultados num arquivo de saída para montagem do gráfico:  $\lambda \times \mathbf{u}^*$ , onde  $\mathbf{u}^*$  representa as componentes de  $\mathbf{u}$  para o nó lido após o macro comando GRAF;

2.5 - Se  $NPLOT > 1$  e  $IPLOT = KPLOT$ : chama-se a **Subrotina PPLOTF** para plotar a deformada da estrutura na tela; inicializa-se o contador de passos de carga,  $IPLOT = 0$ ;

2.6 - Caso  $IMVIE \leq KMVIE$  e  $IVIEW = KVIEW$ : imprimem-se diversos parâmetros (coordenadas,  $\lambda$ ,  $\mathbf{u}$ , tensões) em arquivo neutro. Este arquivo poderá ser utilizado pelo programa de pós-processamento PÓS-3D; atualiza-se  $IMVIE$ :  $IMVIE = IMVIE + 1$ ; inicializa-se  $IVIEW$ :  $IVIEW = 0$ ;

2.7 - Caso  $IMVDE < KMVDE$  e  $IVDEF = KVDEF$ : Imprimem-se diversos parâmetros (coordenadas,  $\lambda$ ,  $\mathbf{u}$ , tensões) em arquivo neutro. Este arquivo poderá ser utilizado pelo programa de pós-processamento apresentado na Seção 5.4; atualiza-se  $IMVDE$ :  $IMVDE = IMVDE + 1$ ; inicializa-se  $IVDEF$ :  $IVDEF = 0$ ;

2.8 - Inicializam-se  $\Delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{u}^k$ :  $\Delta\lambda^k = 0$  e  $\Delta\mathbf{u}^k = 0$ .

3. É utilizada uma das estratégias de incremento automático do parâmetro de carga:

**Se TINC = 1 ou TINC = 3**

Se  $INCL \neq 0$ , calcula-se:

- $\Delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0 * FAC$
- Se  $\Delta\lambda^0 > FACMX$ , faz-se:  $\Delta\lambda^0 = FACMX$
- Se  $\Delta\lambda^0 < FACMN$ , faz-se:  $\Delta\lambda^0 = FACMN$

Se  $INCD \neq 0$ , calcula-se:

- $DDES = DDES * FAC$
- Se  $DDES > DDMX$ , faz-se:  $DDES = DDMX$
- Se  $DDES < DDMN$ , faz-se:  $DDES = DDMN$

Se INCA  $\neq$  0, calcula-se:

- $DLDES = DLDES * FAC$
- Se  $DLDES > DLDMX$ , faz-se:  $DLDES = DLDMX$
- Se  $DLDES < DLDMN$ , faz-se:  $DLDES = DLDMN$

Se INCW  $\neq$  0, calcula-se:

- $WDES = WDES * FAC$
- Se  $WDES > WDMX$ , faz-se:  $WDES = WDMX$
- Se  $WDES < WDMN$ , faz-se:  $WDES = WDMN$

**Se TINC = 2**

Se INCL  $\neq$  0, calcula-se:

- $\Delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0 * FAC$
- Se  $\Delta\lambda^0 > FACMX$ , faz-se:  $\Delta\lambda^0 = FACMX$
- Se  $\Delta\lambda^0 < FACMN$ , faz-se:  $\Delta\lambda^0 = FACMN$

Se INCD = 1 ou IDES = 2, calcula-se:

- $DDES = DDES * FAC$
- Se  $DDES > DDMX$ , faz-se:  $DDES = DDMX$
- Se  $DDES < DDMN$ , faz-se:  $DDES = DDMN$

Se INCA  $\neq$  0, calcula-se:

- $DLDES = DLDES * FAC$
- Se  $DLDES > DLDMX$ , faz-se:  $DLDES = DLDMX$
- Se  $DLDES < DLDMN$ , faz-se:  $DLDES = DLDMN$

4. Retorna-se ao programa principal.

---

## 5.4 - PROGRAMA DE PÓS-PROCESSAMENTO

Seguindo algumas instruções e rotinas fornecidas em Zienkiewicz e Taylor (1991), foi desenvolvido por Silveira (1995) um programa de pós-processamento com o objetivo de visualizar o estado deformado da estrutura. Esse programa gráfico foi bastante usado neste trabalho como pode ser visto nos exemplos do Capítulo 6.

Esse pós-processador utiliza os recursos gráficos da versão do *Fortran* mais recente desenvolvido pela Microsoft (Microsoft *Fortran* PowerStation, 1994-1995). Essa versão, além de ser para Windows, inclui uma biblioteca de funções gráficas que suporta: gráficos baseados em pixels, coordenadas gráficas, textos para Windows e fontes de caracteres, etc.

Os parâmetros a serem plotados são lidos em um arquivo neutro gerado durante a execução do programa de análise. A configuração deformada da estrutura é gerada, somando-se os valores dos deslocamentos nodais às coordenadas correspondentes.

Durante o programa de análise, existe também a possibilidade de visualizar a deformada da estrutura na tela; para isto é necessário que a **Subrotina PLOTF** seja chamada. O esquema de trabalho desta subrotina segue basicamente o mesmo algoritmo empregado no programa de pós-processamento desenvolvido. Um resumo desse algoritmo é fornecido no quadro mostrado a seguir. Vale destacar que os arquivos, funções e subrotinas escritos em *itálico-negrito* são encontrados na biblioteca de funções gráficas do *Fortran*.

Quadro 5.5 - Algoritmo da subrotina **PPLOTF**.

- 
1. Inclui-se o arquivo que contém as funções e subrotinas declaradas na forma de INTERFACE ("**FGRAPH.FT**");
  
  2. Inclui-se o arquivo que contém as declarações de estruturas, constantes simbólicas e declaração EXTERNAL para cada rotina ("**FGRAPH.FD**");
  
  3. Abrem-se os arquivos: **ARQE1** (arquivo neutro não-formatado gerado pelo programa de análise) e **ARQE2** (arquivo formatado que contém fator de escala, endereço das fontes, tipo de caracter, etc);
  
  4. São lidos em **ARQE1**:
    - Número de pontos nodais, elementos, dimensão espacial, etc;
    - Coordenadas nodais, conectividade dos elementos;
    - Valores dos deslocamentos nodais da estrutura nos passos de carga selecionados;
    - Valores dos parâmetros de carga nos incrementos selecionados;
    - Número máximo de passos de carga selecionados – **KMDEF**.
  
  5. Lê-se **ARQE2**;
  
  6. Através da *Função REGISTERFONTS*, verifica-se a possibilidade de achar o endereço especificado em **ARQE2** do diretório que contém os arquivos fontes para as variáveis caracteres;
  
  7. Abre-se a *estação gráfica* de trabalho:
    - Chama-se a *Subrotina GETVIDEOCONFIG*, donde se recebe a configuração do vídeo;

- Seleciona-se o modo da tela apropriado para uma dada configuração de hardware através da *Função SETVIDEOCONFIG*. Usando-se o argumento *\$MAXRESMODE* nessa função, consegue-se o modo gráfico de maior resolução na tela;
- Seleciona-se a visibilidade do cursor com a *Função DISPLAYCURSOR*.

8. Desenha-se um quadro ao redor da região possível de ser trabalhada na tela;

9. A **Subrotina FRAME** é chamada para:

- Determinar as coordenadas da janela;
- Achar os valores máximos e mínimos das coordenadas nodais da estrutura;
- Re-escalar a janela;
- Determinar os fatores de escala para plotar a deformada.

10. É estabelecido um *loop* para desenhar e mostrar a deformada na tela: **I=1,KMDEF**;

10.1 - Chama-se a *Função SETCOLOR* para definir a cor da linha da deformada;

10.2 - Calcula-se a posição deformada da malha bidimensional: **COORD = COORD + U**, onde **COORD** e **U** representam, respectivamente, as coordenadas e os deslocamentos nodais da estrutura; este último é selecionado a cada valor de **I** (passo de carga);

10.3 - Usando-se a *Subrotina MOVETO* e a *Função LINETO*, plota-se a deformada da estrutura na tela;

10.4 - Através da *Função SAVEIMAGE*, salva-se a imagem gerada na tela num arquivo do tipo BIPMAP;

10.5 - Se  $I \neq KMDEF$ , retorna-se ao passo 10; Se  $I = KMDEF$ , segue-se para o passo 11.

11. Utiliza-se a *Subrotina UNREGISTERFONTS* para recuperar a memória alocada pela *Função REGISTERFONTS*;

12. Fecha-se a *estação gráfica* de trabalho e finaliza-se o programa.

---

# 6

## EXEMPLOS ANALISADOS

### 6.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo verificar a eficiência computacional das estratégias de incremento de carga e de iteração apresentadas nos Capítulos 3 e 4, respectivamente, por meio da análise de vários problemas, que apresentam comportamento estruturais geometricamente não-lineares, encontrados na literatura.

Um resumo dessas estratégias é mostrado na Tabela 6.1, onde se destacam as abreviaturas usadas para sua identificação. Na mesma tabela são apresentadas as equações características de cada estratégia. Observe-se que, para algumas estratégias de iteração existe a possibilidade de se empregarem diferentes formas de incremento de carga. Note-se também que, ao se adotar a *técnica do comprimento de arco constante*, existe a possibilidade de escolha de quatro estratégias de iteração (ICA1, ICA2, ICA3, ICA4); já para a *técnica do resíduo ortogonal*, as estratégias de incremento de carga definem as diferentes opções (IRO1, IRO2, ..., IRO5).

Como foi destacado, essas estratégias de incremento de carga e de iteração foram adaptadas ao esquema geral de solução não-linear apresentada no Capítulo 2. Nesse mesmo capítulo, é apresentado o elemento finito não-linear que será usado agora na modelagem dos problemas (Galvão, 2000).

A partir da Seção 6.2 serão analisados vários sistemas estruturais encontrados na literatura (Southwell, 1941; Wood e Zienkiewicz, 1977; Yang e Kuo, 1994; etc). Em função da confiabilidade dessas análises, seus resultados têm o objetivo de avaliar a qualidade dos resultados produzidos neste trabalho usando as diferentes metodologias de solução não-linear.

Tabela 6.1a - Resumo das Estratégias.

ESTRATÉGIAS	ABREV.	EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA	EQ.
Carga constante	<b>ILDC</b>	<b>E.Inc.</b> $\Delta\lambda^0 = \pm^t \Delta\lambda^0 (\mathbf{I}_d / \mathbf{I})^{1/2}$	(3.3)
		<b>E.Iter.</b> $\delta\lambda^k = 0$	(4.1)
Deslocamento constante	<b>IDIS</b>	<b>E.Inc.</b> $\Delta\lambda^0 = \Delta u_j / \delta u_r(j)$	(3.11)
		<b>E.Iter.</b> $\delta\lambda^k = -\delta u_g(j) / \delta u_r(j)$	(4.6)
Trabalho externo constante	<b>ITEC</b>	<b>E.Inc.</b> $\Delta\lambda^0 = \Delta W / \mathbf{F}_r^T \delta u_r$	(3.18)
		<b>E.Iter.</b> $\delta\lambda^k = -\mathbf{F}_r^T \delta u_g / \mathbf{F}_r^T \delta u_r$	(4.8)
Comprimento de arco constante	<b>E.Inc.</b>	$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta l / \sqrt{\delta u_r^T \delta u_r}$	(3.6)
		$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta l / \sqrt{\delta u_r^T \delta u_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}$	(3.8)
Linear	<b>ICA1</b>	<b>E.Iter.</b> $\delta\lambda^k = -\Delta u^{0T} \delta u_g / (\Delta u^{0T} \delta u_r + \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r)$	(4.10)
		<b>E.Iter.</b> $\delta\lambda^k = -\Delta u^{(k-1)T} \delta u_g / (\Delta u^{(k-1)T} \delta u_r + \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r)$	(4.12)
Quadrático	<b>ICA3</b>	<b>E.Iter.</b> $A(\delta\lambda^k)^2 + B\delta\lambda^k + C = 0$	(4.14)
			e (4.15)
		<b>E.Iter.</b> $A(\delta\lambda^k)^2 + B\delta\lambda^k + C = 0$	(4.20)
		e (4.21)	
Resposta ponderada constante	<b>E.Inc.</b>	$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta l / \sqrt{\delta u_r^T \delta u_r}$	(3.6)
Linear	<b>IRP1</b>	<b>E.Iter.</b> $\delta\lambda^k = -\delta u_g^T \mathbf{G} \Delta u^{(k-1)} / (\delta u_r^{kT} \mathbf{G} \Delta u^{(k-1)} + \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r)$	(4.32)
Quadrática	<b>IRP2</b>	<b>E.Iter.</b> $A(\delta\lambda^k)^2 + B\delta\lambda^k + C = 0$	(4.29)
			e (4.30)

Tabela 6.1b - Resumo das Estratégias.

ESTRATÉGIAS	ABREV.	EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA	EQ.
Norma mínima dos deslocamentos residuais	<b>IMDO</b>	<b>E.Inc.</b> $\Delta\lambda^0 = \pm\Delta l / \sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}$	(3.6)
		<b>E.Iter.</b> $\delta\lambda^k = -\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g / \delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r$	(4.36)
Norma mínima das forças desequilibradas	<b>IMFD</b>	<b>E.Inc.</b> $\Delta\lambda^0 = \pm\Delta l / \sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}$	(3.6)
		<b>E.Iter.</b> $\delta\lambda^k = \lambda^k - \lambda^{(k-1)}$	(4.41)
Resíduo ortogonal	<b>IRO1</b>	<b>E.Inc.</b> $\Delta\lambda^0 = {}^t\Delta\lambda_1^0$	(3.15)
		<b>E.Inc.</b> $\Delta\lambda^0 = \pm {}^t\Delta\lambda^0 (I_d / {}^tI)^{1/2}$	(3.3)
		<b>E.Inc.</b> $\ \Delta\mathbf{u}^0\  = \ \Delta\mathbf{u}\  (I_d / {}^tI)^\alpha$ ; $\Delta\lambda^0 = \ \Delta\mathbf{u}^0\  / \ \delta\mathbf{u}_r\ $	(3.13) e (3.14)
		<b>E.Inc.</b> $\ \Delta\mathbf{u}^0\  \leq \Delta\mathbf{u}_{\max} = C \ \Delta\mathbf{u}_1\ $ ; $\Delta\lambda^0 = \ \Delta\mathbf{u}^0\  / \ \delta\mathbf{u}_r\ $	(3.12) e (3.14)
		<b>E.Inc.</b> $\Delta\lambda^0 = \pm\Delta l / \sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}$	(3.6)
	<b>E.Iter.</b>	$\Delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} = 0$ (uma condição de ortogonalidade)	(4.46)
		$\Delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} = 0$ e $\tilde{\mathbf{g}}^T \delta\mathbf{u} = 0$ (duas condições de ortogonalidade)	(4.46) e (4.57)
Deslocamento generalizado	<b>IGSP</b>	<b>E.Inc.</b> $\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{ \text{GSP} }$	(3.28)
		<b>E.Iter.</b> $\delta\lambda^k = - {}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g / {}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r$	(4.60)

A Figura 6.1 fornece os exemplos estruturais utilizados como testes.

A coluna engastada-livre mostrada na Figura 6.1a, o arco circular esbelto birrotulado submetido a uma carga pontual centrada e excêntrica (Figura 6.1b), e os pórticos em forma de L com as duas extremidades rotuladas ('Lee Frame' e 'Roorda Frame', Figuras 6.1c,d), são analisados através de todas as estratégias implementadas com o intuito de se verificar a eficiência computacional destas, destacando-se as suas principais características e diferenças.

As análises do arco circular com diferentes condições de bordo, do arco circular com carga uniformemente distribuída até a metade e do arco circular pouco abatido com extremidades rotuladas (Figuras 6.1e,f,g, respectivamente), têm o objetivo de avaliar e comparar as estratégias mais eficientes nos quatro primeiros exemplos. Adicionalmente, atenção é dada às estratégias de iteração baseadas no resíduo ortogonal (Krenk e Hededal, 1993 e 1995; Krenk, 1995) e deslocamento generalizado (Yang e Kuo, 1994).

Em cada exemplo, com o intuito de verificar a eficiência computacional das estratégias de solução não-linear, dá-se ênfase à análise dos parâmetros apresentados na Tabela 6.2. Em  $N_{tot}$ , não são contados os passos de carga em que não se obteve convergência no processo iterativo. Quando isso acontece, o processo é reinicializado, considerando-se metade do incremento de carga (ou deslocamento, trabalho externo, comprimento de arco, etc.), calculado inicialmente no passo de carga corrente. O tempo de processamento (CPU) é avaliado num microcomputador AMD-K6(tm) com 56MB de memória RAM. Neste trabalho, o 'erro percentual' do valor da carga (ou deslocamento) obtido nos pontos limites das trajetórias de equilíbrio, em relação ao valor apresentado na literatura, é calculado através da expressão:

$$\text{Erro (\%)} = 100 \times \frac{\text{resultado literatura} - \text{resultado presente trabalho}}{\text{resultado literatura}}$$

Nos exemplos em que não vêm indicados os critérios concernentes à mudança de sinal do incremento parâmetro de carga, considere-se: em IGSP, a proposta de Yang e Kuo (1994) (KTEST = 3); nas técnicas do resíduo ortogonal, a sugestão de Krenk e Hededal (1995) (KTEST = 2); em ITEC, a de Bergan *et al.* (1978) (KTEST = 1); nas demais, a proposição de Crisfield (1991) (KTEST = 0). Para o critério de convergência, adote-se CCONV = 1, quando não houver outra indicação.

Tabela 6.2 – Parâmetros usados para avaliação das estratégias não-lineares.

ABREV.	Descrição
$N_{tot}$	Número total de passos de carga
$I_{med}$	Número médio de iterações/passos de carga
$I_{tot}$	Número total de iterações
CPU	Tempo de processamento (segundos)
Rein.	Número de reinicialização do processo
Erro (%)	'Erro percentual' do valor da carga (ou deslocamento)

Nos exemplos, é fornecido também o modelo de elementos finitos adotado, bem como algumas variáveis ou parâmetros responsáveis pelo gerenciamento da estratégia incremental-iterativa adotada na solução não-linear do problema (ver Seção 5.3.2, Subrotina INPUT2). A Tabela 6.3 fornece alguns desses parâmetros. Os valores mínimos e máximos do parâmetro de carga (ou deslocamento, trabalho externo, comprimento de arco, etc.) são escolhidos de forma que as diferentes estratégias tenham desempenhos equivalentes no início do processo de solução (passos de carga iniciais).

Tabela 6.3 – Parâmetros usados no gerenciamento da solução não-linear do problema.

Parâmetro	Descrição
Método (ITERTY = 1 ou 2)	NRP = Newton-Raphson padrão NRM = Newton-Raphson modificado
$\Delta\lambda_1^0$ (FACI)	Valor inicial de $\Delta\lambda$
$I_{m\acute{a}x}$ (NITMAX)	Numero máximo de iterações
$I_{des}$ (IDES)	Numero de iterações desejadas
CCONV	Critério de convergência adotado
KTEST	Critério de escolha do sinal de $\Delta\lambda^0$
$\zeta$ (BETOK)	Fator de tolerância para convergência
$\Delta\lambda_{min}$ (FACMN), $\Delta\lambda_{m\acute{a}x}$ (FACMX)	Incremento mínimo e máximo de $\Delta\lambda$
$\Delta u_{min}$ (DDMN), $\Delta u_{m\acute{a}x}$ (DDMX)	Incremento mínimo e máximo de $\Delta u$
$\Delta w_{min}$ (WDMN), $\Delta w_{m\acute{a}x}$ (WDMX)	Incremento mínimo e máximo de $\Delta w$
$\Delta l_{min}$ (DLDMN), $\Delta l_{m\acute{a}x}$ (DLDMX)	Incremento mínimo e máximo de $\Delta l$

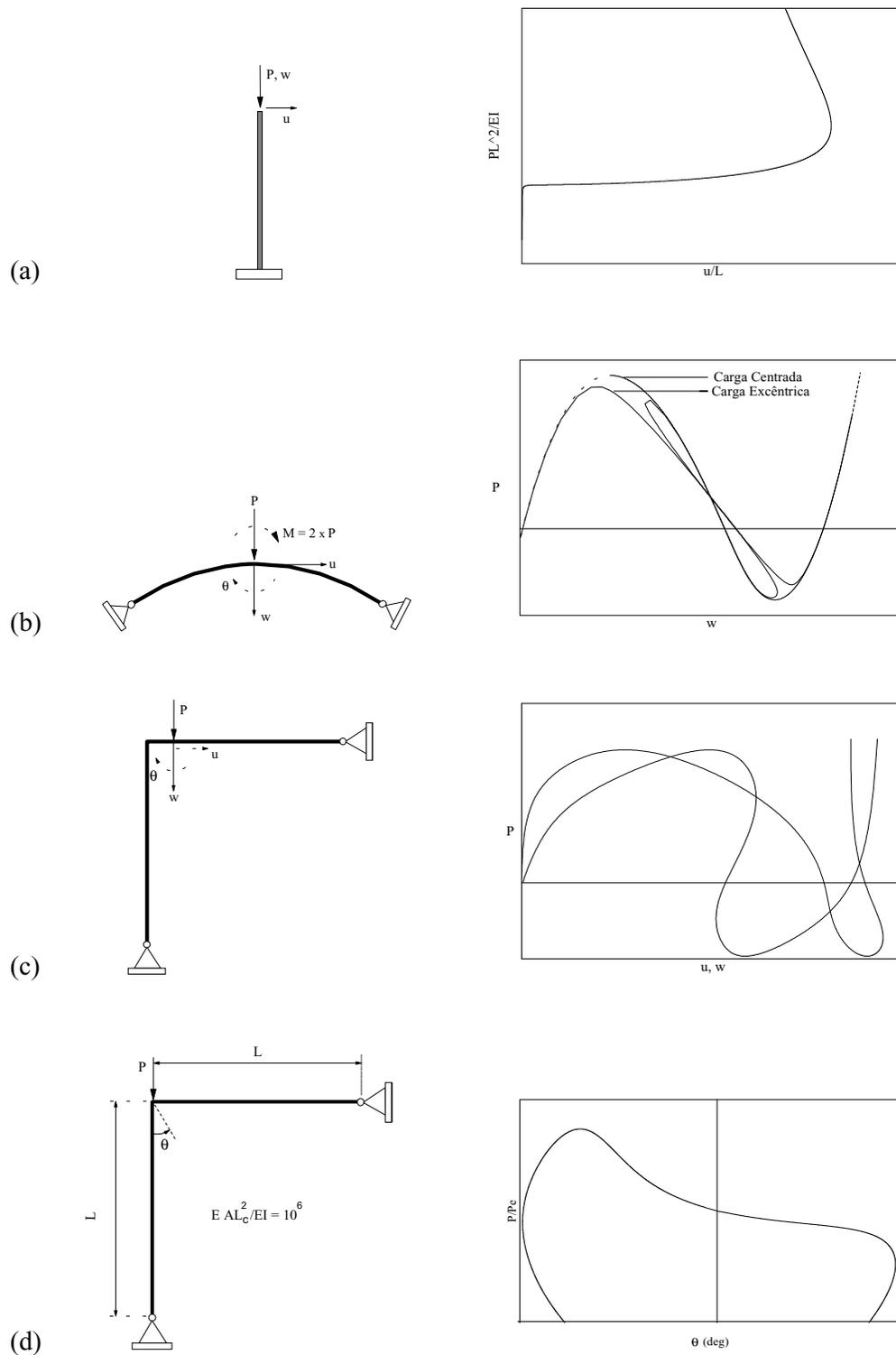


Figura 6.1a - Exemplos de validação.

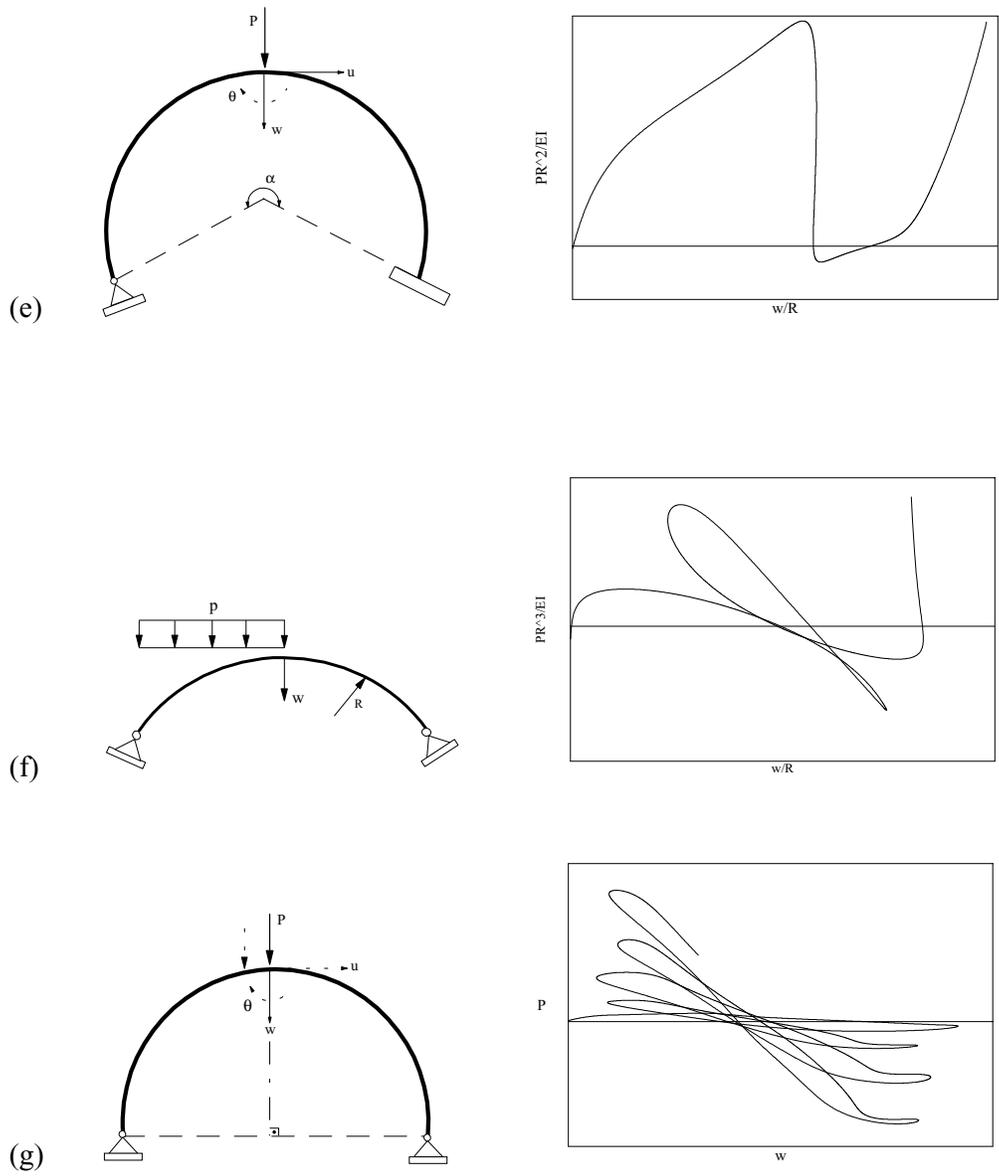


Figura 6.1b - Exemplos de validação.

## 6.2 - COLUNA ENGASTADA-LIVRE

Considere-se como primeiro exemplo a coluna engastada-livre, submetida a uma carga vertical  $P$ , aplicada no seu topo, conforme ilustrado na Figura 6.2. Com o objetivo de evitar dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação, foi introduzido um momento fletor na extremidade da coluna ( $M = 0.01 PL$ ).

A solução analítica deste problema foi apresentada por Southwell (1941), sendo desde então utilizada para avaliar vários modelos de elementos finitos e estratégias de solução não-linear (Kouhia e Mikkola, 1990; Yang e Kuo, 1994; Galvão, 2000).

Para esse primeiro exemplo, as seguintes análises são apresentadas:

1. Estudo geral de todas as estratégias da Tabela 6.1;
2. Influência do momento fletor  $M$ ;
3. Newton-Raphson modificado (NRM) x Newton-Raphson padrão (NRP);
4. Influência do carregamento na definição do parâmetro  $\Delta\lambda^0$ .

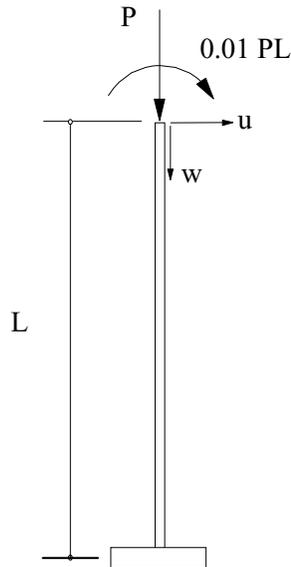


Figura 6.2 - Coluna engastada-livre.

### ***1. Estudo geral de todas as estratégias da Tabela 6.1***

Os resultados apresentados na Tabela 6.5 foram obtidos considerando-se a coluna discretizada com 10 elementos finitos e adotando-se para algumas variáveis de gerenciamento da solução não-linear os valores apresentados na Tabela 6.4. Nessa tabela, os valores para  $N_{tot}$ ,  $I_{tot}$ , ..., e CPU correspondem a uma análise completa da estrutura (ou seja, o traçado completo da trajetória de equilíbrio da coluna).

Observe-se a equivalência do desempenho computacional das estratégias ITEC, ICA4, IRP1, IRP2, IMDO, IRO5 e IGSP. A primeira apresenta um número maior de passos de carga, assim como tempo de processamento; em IRO5 são obtidos menores tempo de CPU, passos de carga e número total de iterações, constatando-se então a melhor performance computacional. As trajetórias de equilíbrio e as configurações deformadas da coluna, obtidas usando IRO5, são apresentadas na Figura 6.3.

Para as estratégias ICA1, ICA2, ICA3 e ICA4 (comprimento de arco), os resultados apresentados na Tabela 6.5 foram obtidos considerando-se como estratégia de incremento de carga a Equação (3.6), em que se despreza a contribuição da carga ( $F_r$ ). Esse procedimento de cálculo automático de  $\Delta\lambda^0$  não se mostrou adequado para a estratégia de iteração comprimento de arco esférico, ICA3, pois foram obtidos incrementos muito pequenos, acarretando assim um número elevado de passos de carga ( $> 50000$ ). ICA1 e ICA2 (comprimento de arco linear) apresentaram desempenhos equivalentes, exigindo, porém, um número elevado de passos de carga para o traçado completo do caminho de equilíbrio.

Os resultados apresentados para IRO1, IRO2, IRO3 IRO4 e IRO5 foram obtidos considerando-se as duas condições de ortogonalidade:  $\Delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} = 0$  e  $\tilde{\mathbf{g}}^T \delta\mathbf{u} = 0$ . IRO1, IRO3 e IRO4 apresentaram desempenhos equivalentes, sendo necessária uma reinicialização do processo incremental. IRO2, que se baseia no incremento direto e automático de  $\Delta\lambda^0$  (Equação 3.3), apresentou fraco desempenho computacional.

Números elevados de passos de carga, iterações totais e tempo de processamento foram obtidos também para ILDC, IMFD. Com IDIS não foi possível ultrapassar o ponto limite de deslocamento (D).

Tabela 6.4 – Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.

Número de elementos: <b>10</b>							
Método: <b>NRM</b>							
${}^1\Delta\lambda^0$	<b>0.3P<sub>cr</sub></b>	$I_{des}$	<b>5</b>	$I_{m\acute{a}x}$	<b>21</b>	$\zeta$	<b><math>10^{-4}</math></b>
$\Delta\lambda_{m\acute{i}n}$	<b>0.1</b>	$\Delta u_{m\acute{i}n}$	<b>1.0</b>	$\Delta w_{m\acute{i}n}$	<b>0.1</b>	$\Delta l_{m\acute{i}n}$	<b>1.0</b>
$\Delta\lambda_{m\acute{a}x}$	<b>100</b>	$\Delta u_{m\acute{a}x}$	<b>100</b>	$\Delta w_{m\acute{a}x}$	<b>100</b>	$\Delta l_{m\acute{a}x}$	<b>100</b>

Tabela 6.5 – Coluna engastada-livre: estratégias de solução não-linear.

<b>Estrat.</b>	<b>N<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>med</sub></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>
<b>ILDC</b>	3539	9118	3	1	29.01
<b>IDIS</b>	252 <sup>D</sup>	1866	7	34	8.35
<b>ITEC</b>	544	2145	4	0	9.34
<b>ICA1</b>	1587	10140	6	1	17.68
<b>ICA2</b>	1557	10649	7	1	17.47
<b>ICA3</b>	-	-	-	-	-
<b>ICA4</b>	478	2388	5	0	7.74
<b>IRP1</b>	478	2388	5	0	6.26
<b>IRP2</b>	478	2388	5	0	6.64
<b>IMDO</b>	478	2388	5	0	6.70
<b>IMFD</b>	1448	9505	7	2	18.64
<b>IRO1</b>	633	2291	4	1	4.12
<b>IRO2</b>	2363	5023	2	0	16.43
<b>IRO3</b>	629	2298	4	1	6.64
<b>IRO4</b>	615	2352	4	1	6.04
<b>IRO5</b>	459	2241	5	0	3.90
<b>IGSP</b>	501	2404	5	0	4.62

D – ponto limite de deslocamento.

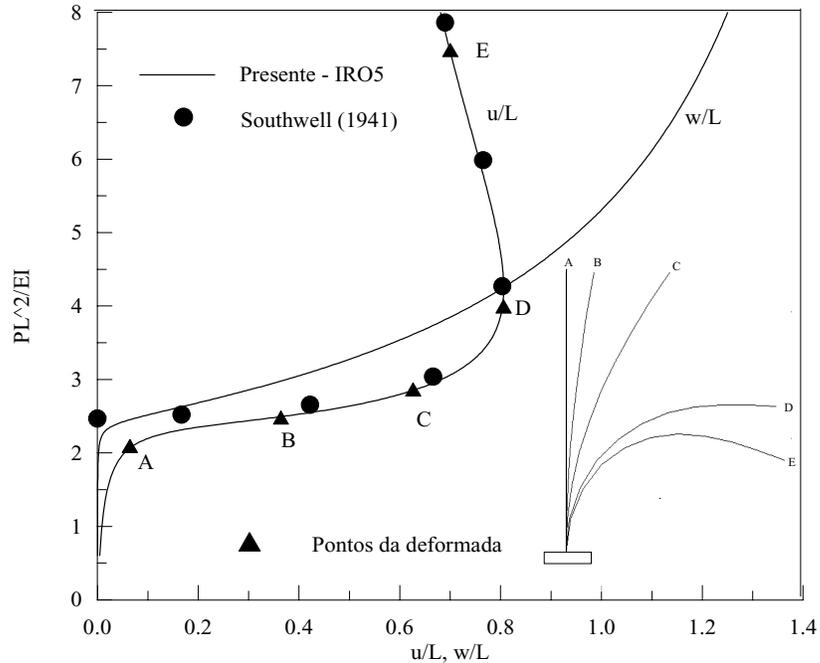


Figura 6.3 - Trajetórias de equilíbrio da coluna engastada-livre ( $f_e$ : 1.5).

## 2. Influência do momento fletor $M$

A análise da influência da magnitude do momento fletor  $M$ , ou imperfeição do carregamento, é realizada nesta seção. Apenas as estratégias ICA4 (comprimento de arco cilíndrico) e IRO5 (resíduo ortogonal) foram consideradas, sendo a última com uma e duas condições de ortogonalidade. Basicamente, foram usados os mesmos valores para os parâmetros governantes da solução não-linear da seção anterior e dessa forma chegou-se aos resultados apresentados na Tabela 6.6 e aos caminhos de equilíbrio mostrados na Figura 6.4.

Observe-se que os melhores resultados para  $M = 0.01PL$  são obtidos para IRO5 usando duas condições de ortogonalidade. Para esse exemplo, se apenas uma condição de ortogonalidade é empregada, essa estratégia fornece um elevado número de passos de carga e iterações, e ainda uma reinicialização do processo. Contudo, o tempo de CPU foi inferior ao obtido através de ICA4.

IRO5 deixa de ser eficiente, mesmo com duas condições de ortogonalidade, quando  $M = 0.0001PL$ , ou seja, quando os resultados se aproximam da trajetória de equilíbrio da coluna perfeita. Nota-se que o pequeno aumento na curvatura da trajetória de equilíbrio teve grande influência sobre o desempenho computacional de IRO5. Esse valor de  $M$  fez com que o número de passos de carga, de iterações totais e o tempo de CPU praticamente dobrassem para ICA4.

Tabela 6.6 – Influência do momento fletor  $M$  e condições de ortogonalidade.

Estrat	M = 0.01PL					M = 0.0001PL				
	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU
ICA4	478	2388	5	0	7.74	1189	5913	5	0	16.20
IRO5*	966	3195	3	1	7.09	27361	52373	2	0	182.2
IRO5**	459	2241	5	0	3.90	27361	52373	2	0	277.82

\*uma condição de ortogonalidade; \*\* duas condições de ortogonalidade

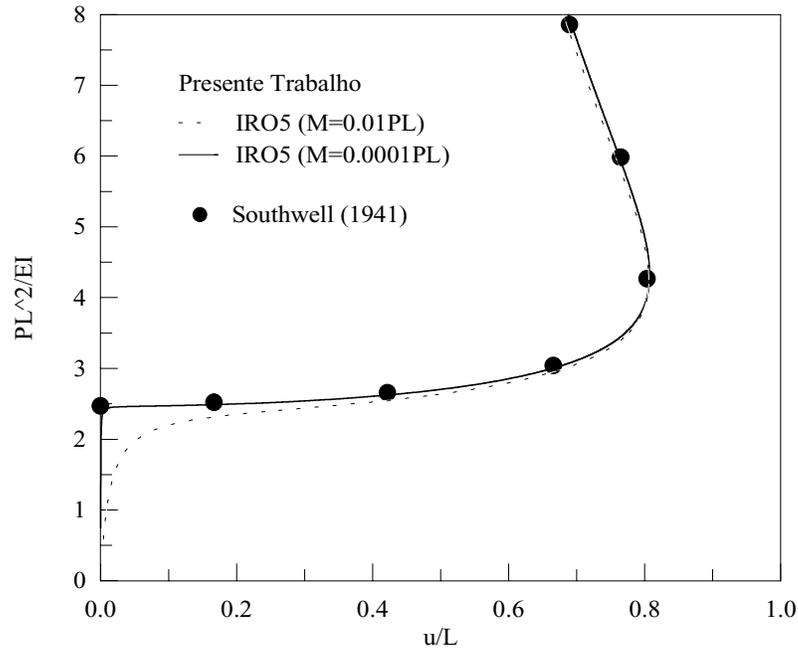


Figura 6.4 – Trajetórias de equilíbrio: influência do momento fletor  $M$  e condições de ortogonalidade.

### 3. *Newton-Raphson modificado (NRM) x Newton-Raphson padrão (NRP)*

A Tabela 6.7 mostra os resultados obtidos quando se compara a influência dos métodos de Newton-Rapson modificado (NRM) e padrão (NRP) para as estratégias ICA4 (comprimento de arco cilíndrico) e IGSP (deslocamento generalizado). Considerou-se nessa análise o valor de 0.01PL para o momento fletor na extremidade da coluna e, para os demais parâmetros, aqueles valores da Tabela 6.4.

ICA4 e IGSP apresentaram, no caso da utilização do NRM, desempenhos computacionais equivalentes; já no caso do NRP, nota-se uma sensível melhoria da performance da estratégia ICA4. Ao se analisar IGSP, apesar de o número total de iterações ter diminuído, o número total de passos de carga se manteve constante. Isso contribuiu para elevar o tempo de CPU em relação ao NRM, pois a cada iteração a matriz de rigidez é atualizada.

Tabela 6.7 – Influência do métodos NRM e NRP.

Estrat	NRM					NRP				
	N <sub>tot</sub>	I <sub>tot</sub>	I <sub>med</sub>	Rein	CPU	N <sub>tot</sub>	I <sub>tot</sub>	I <sub>med</sub>	Rein	CPU
<b>ICA4</b>	475	2373	5	0	12.31	50	229	5	0	5.71
<b>IGSP</b>	501	2390	5	0	12.14	501	1002	2	0	20.98

### 4. *Influência do carregamento na definição do parâmetro $\Delta\lambda^0$*

As técnicas que utilizam o comprimento de arco são analisadas nesta seção em relação à estratégia de incremento de carga. Os resultados apresentados na Tabela 6.8 mostram o emprego das Equações (3.6) e (3.8) para a definição do incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$ . Mais uma vez, os valores fornecidos na Tabela 6.4 foram usados na solução e foi considerado para o momento,  $M = 0.01PL$ .

Tabela 6.8 - Influência do carregamento no cálculo de  $\Delta\lambda^0$ .

$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta l / \sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}$						$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta l / \sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}$				
Estrat	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU
ICA1	1587	10140	6	1	17.68	1710	10612	6	10	15.33
ICA2	1557	10649	7	1	17.47	1710	10612	6	10	15.55
ICA3	-	-	-	-	-	1710	10612	6	10	16.31
ICA4	478	2388	4	0	7.74	204	2299	11	14	10.60

Como já comentado, quando se despreza a contribuição do carregamento no cálculo de  $\Delta\lambda^0$  (Equação 3.6), só se consegue obter de forma completa a trajetória de equilíbrio através de ICA3 (comprimento de arco esférico), com um número bastante elevado de passos de carga. Note-se que, para este exemplo, ICA3 parece trabalhar mais adequadamente quando se considera a contribuição da carga. Note-se também que, para essa forma de cálculo de  $\Delta\lambda^0$ , ICA3 apresenta resultados idênticos a ICA1 e ICA2.

Já as formas linearizadas do comprimento de arco, ICA1 e ICA2, mostraram, para esse exemplo, desempenhos equivalentes para ambas as fórmulas de  $\Delta\lambda^0$ . Observe-se, entretanto, que o emprego da Equação (3.8) parece produzir incrementos de carga maiores, haja visto o número elevado de reinicializações do processo de solução.

A estratégia que utiliza o comprimento de arco cilíndrico, ICA4, foi a que apresentou o melhor desempenho computacional para os dois procedimentos de obtenção de  $\Delta\lambda^0$ . Com a Equação (3.6), apesar de o número de passos de carga ter sido mais elevado, o tempo de processamento foi menor. Isso talvez possa ser explicado pelo elevado número de reinicializações obtido usando a Equação (3.8).

### 6.3 - ARCO ABATIDO BIRROTULADO

O arco abatido birrotulado mostrado na Figura 6.5 é analisado nesta seção para duas situações de carregamento: carga centrada (*sistema estrutural perfeito*) e carga excêntrica (*sistema estrutural imperfeito*). Para a segunda situação, a carga excêntrica será representada por uma força vertical, aplicada no eixo de simetria do arco, associada a uma carga momento.

Os resultados obtidos neste trabalho são comparados com aqueles fornecidos em Yang e Kuo (1994) usando um modelo com 20 elementos finitos. Para o sistema estrutural perfeito, considerou-se na modelagem apenas metade do arco (10 elementos), onde foram impedidos a rotação ( $\theta$ ) e o deslocamento tangencial ( $u$ ) do ponto nodal que coincide com o eixo de simetria. As seguintes análises são realizadas nesta seção:

1. Estudo geral de todas as estratégias da Tabela 6.1;
2. Análise da estratégia IMFD (Norma Mínima das Forças Desequilibradas);
3. Influência do carregamento na definição do parâmetro  $\Delta\lambda^0$ ;
4. Influência do incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda_1^0$  (FACI);

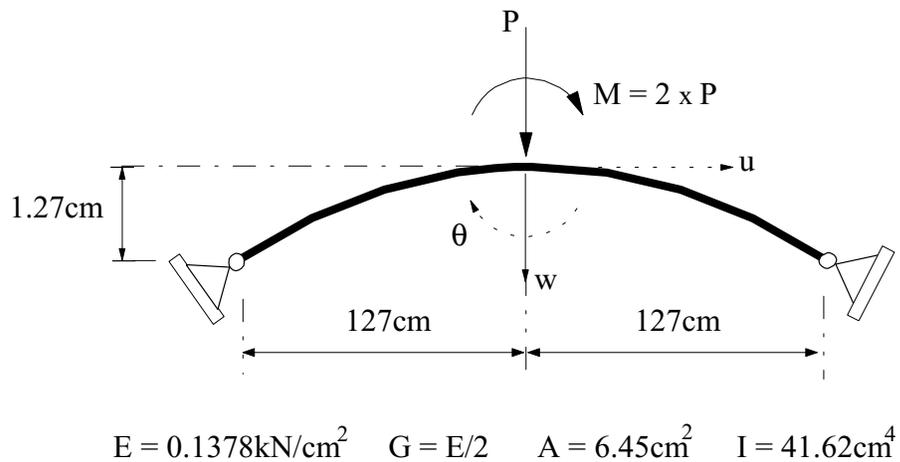


Figura 6.5 - Arco abatido birrotulado.

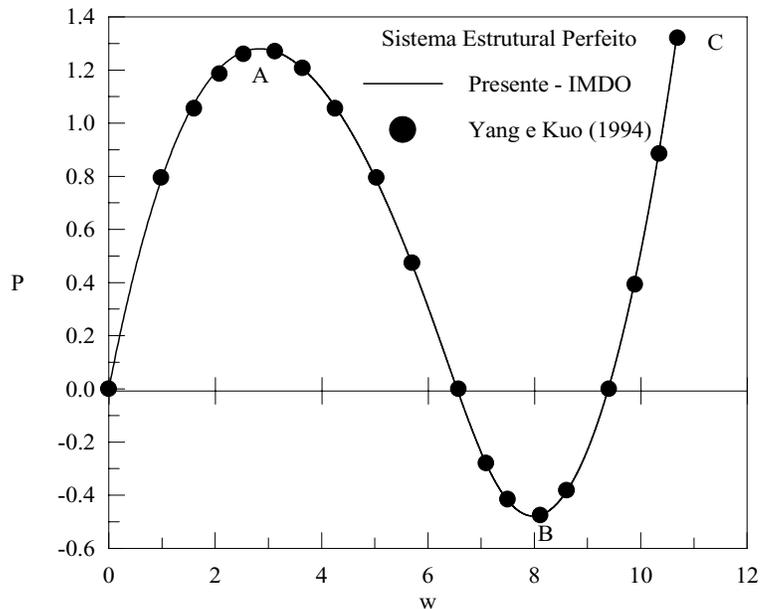
### 1. Estudo geral de todas as estratégias da Tabela 6.1

- Sistema Estrutural Perfeito (SP)

Com exceção de ILDC (carga constante) e IMFD (norma mínima das forças desequilibradas), nota-se, de acordo com a Tabela 6.10, uma boa performance computacional de todas as outras estratégias de solução não-linear. IDIS, ITEC e IGSP apresentaram, no entanto, um número um pouco mais elevado de passos de carga; sendo necessário ainda em IDIS e IGSP um certo número de reinicializações do processo. A Tabela 6.9 fornece os valores usados para algumas variáveis responsáveis pelo controle da solução não-linear.

Como esperado, com ILDC só foi possível obter a trajetória de equilíbrio até o primeiro ponto limite de carga; o mesmo aconteceu com IMFD (veja a próxima seção).

No caso das técnicas de comprimento de arco, vale destacar o emprego da Equação (3.6) para cálculo de  $\Delta\lambda^0$ , e resíduo ortogonal, com apenas uma condição de ortogonalidade ( $\Delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} = 0$ ), para IRO1, IRO2, IRO3 IRO4 e IRO5. A Figura 6.6 fornece a trajetória de equilíbrio do sistema estrutural perfeito obtida através de IMDO.



A e B – pontos limites de carga.

Figura 6.6 – Trajetória de equilíbrio: sistema estrutural perfeito.

Tabela 6.9 – Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.

Número de elementos (SP): <b>10</b>							
Número de elementos (SI): <b>20</b>							
Método: <b>NRM</b>							
$I_{\Delta\lambda^0}$	<b>0.40</b>	$I_{des}$	<b>5</b>	$I_{m\acute{a}x}$	<b>21</b>	$\zeta$	<b><math>10^{-3}</math></b>
$\Delta\lambda_{m\acute{i}n}$	<b>1.0</b>	$\Delta u_{m\acute{i}n}$	<b>5.0</b>	$\Delta w_{m\acute{i}n}$	<b>0.5</b>	$\Delta l_{m\acute{i}n}$	<b>1.0</b>
$\Delta\lambda_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>	$\Delta u_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>	$\Delta w_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>	$\Delta l_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>

Tabela 6.10 – Arco abatido birrotulado: estratégias de solução não-linear.

Estrat.	Sistema Perfeito					Sistema Imperfeito				
	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU
<b>ILDC</b>	17 <sup>A</sup>	102	9	13	3.84	21 <sup>c1</sup>	110	6	16	4.36
<b>IDIS</b>	19	145	8	5	0.33	31 <sup>d1</sup>	298	10	17	1.32
<b>ITEC</b>	21	150	9	0	0.60	37 <sup>d1</sup>	294	8	13	1.87
<b>ICA1</b>	16	135	8	0	0.17	97	561	6	2	2.75
<b>ICA2</b>	16	135	8	0	0.17	97	557	6	2	2.80
<b>ICA3</b>	16	135	8	0	0.16	84	545	7	1	2.42
<b>ICA4</b>	16	135	8	0	0.27	82	546	6	1	1.87
<b>IRP1</b>	16	138	8	0	0.17	93	553	7	2	3.02
<b>IRP2</b>	16	134	8	0	0.22	82	544	7	1	2.91
<b>IMDO</b>	16	135	8	0	0.17	99	572	6	2	2.86
<b>IMFD</b>	19 <sup>A</sup>	88	4	9	0.44	34 <sup>c1</sup>	81	2	15	1.26
<b>IRO1</b>	17	151	9	1	0.22	6819	7719	1	8	93.92
<b>IRO2</b>	17	120	7	0	0.16	10218	10382	1	8	110.0
<b>IRO3</b>	17	115	6	1	0.16	39145	39681	1	8	487.2
<b>IRO4</b>	14	120	9	1	0.17	6886	7085	1	8	82.39
<b>IRO5</b>	17	120	7	0	0.17	10219	10383	1	8	122.6
<b>IGSP</b>	18	137	8	3	0.27	25 <sup>d1</sup>	201	8	3	0.6

A – primeiro ponto limite de carga (SP). c1 – primeiro ponto limite de carga (SI).

d1 – primeiro ponto limite de deslocamento.

- Sistema Estrutural Imperfeito (SI)

Como ilustrado na Figura 6.7, no caso da carga excêntrica, o arco exibe um comportamento fortemente não-linear, apresentando quatro pontos limites de carga e dois pontos limites para os deslocamentos. A Figura 6.8 fornece as configurações deformadas do arco nos pontos limites de carga.

Mais uma vez, ILDC e IMFD não foram capazes de ultrapassar o primeiro ponto limite de carga (c1) (veja Figuras 6.9a,d). Em IDIS, ITEC e IGSP, só foi possível obter configurações de equilíbrio do sistema estrutural até o primeiro ponto limite de deslocamento (d1) (veja Figuras 6.9b,c). Observe-se ainda que, para IDIS e ITEC, foi necessário um grande número de reinicializações do processo até chegar em (d1). A técnica IGSP é analisada com mais detalhe adiante.

Em termos do melhor desempenho computacional, vale destacar aqui o emprego do comprimento de arco esférico (ICA3) e cilíndrico (ICA4), bem como a forma quadrática da resposta ponderada constante (IRP2). As formas linearizadas do comprimento de arco, ICA1 e ICA2, juntamente com IRP1 e IMDO, forneceram também bons resultados. Todas essas estratégias utilizaram a Equação (3.6) para  $\Delta\lambda^0$ .

As estratégias IRO1, IRO2, IRO3, IRO4 e IRO5 foram testadas inicialmente com apenas uma condição de ortogonalidade,  $\Delta\mathbf{u}^T\mathbf{g} = 0$ , porém, nenhuma delas conseguiu ultrapassar o primeiro ponto limite de deslocamento (d1). Com a introdução da segunda condição de ortogonalidade,  $\tilde{\mathbf{g}}^T\delta\mathbf{u} = 0$ , pôde-se obter o traçado completo da trajetória de equilíbrio. Entretanto, conforme apresentado na Tabela 6.10, um número bastante elevado de passos de carga foi necessário e, como consequência, um tempo de CPU também elevado.

Na Tabela 6.11 é fornecida uma comparação de desempenho computacional entre a técnica de comprimento de arco cilíndrico (ICA4) e a estratégia de resíduo ortogonal que apresentou melhor performance, IRO1, que faz o incremento automático do parâmetro de carga através da Equação (3.15). Observe-se, por exemplo, que até o primeiro ponto limite de carga (c1), os desempenhos de ICA4 e IRO1 são equivalentes. Após esse ponto, os incrementos de carga em IRO1 passaram a ser muito pequenos aumentando-se assim o número de passos de carga. Veja-se que, para obtenção da

trajetória de equilíbrio entre os pontos (d2) e (c4), foram necessários 2995 passos de carga.

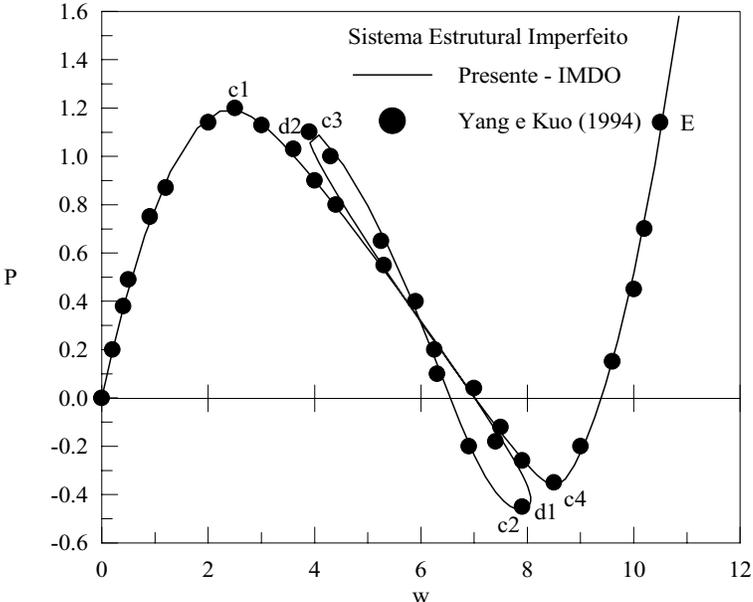


Figura 6.7 – Trajetória de equilíbrio: sistema estrutural imperfeito.

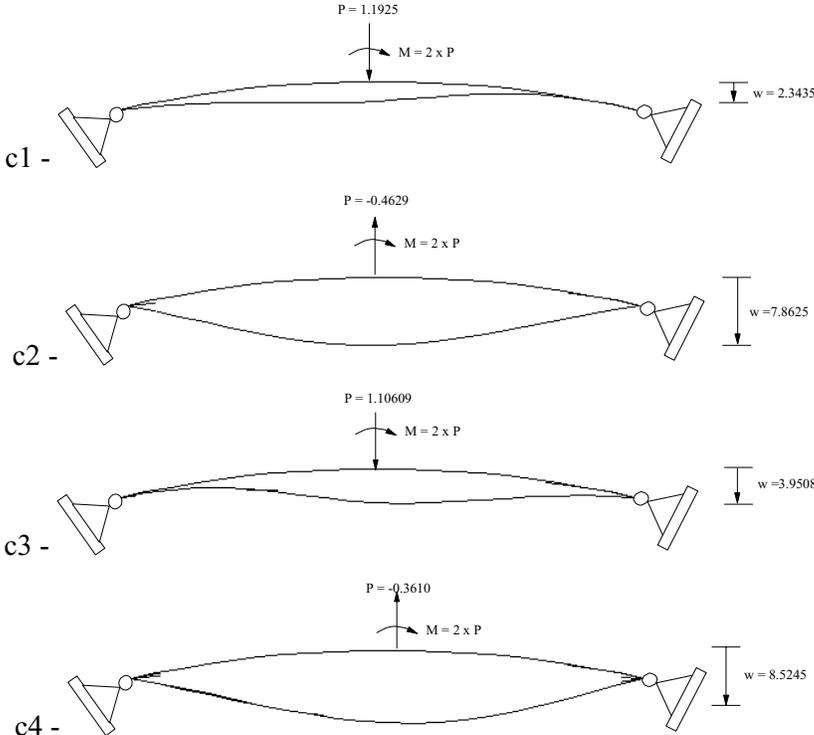
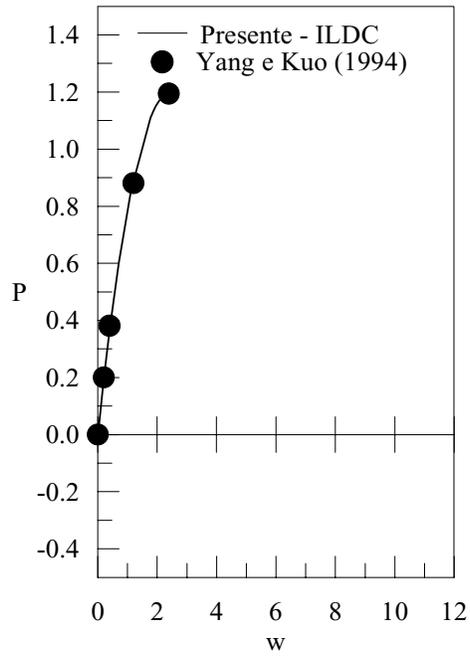
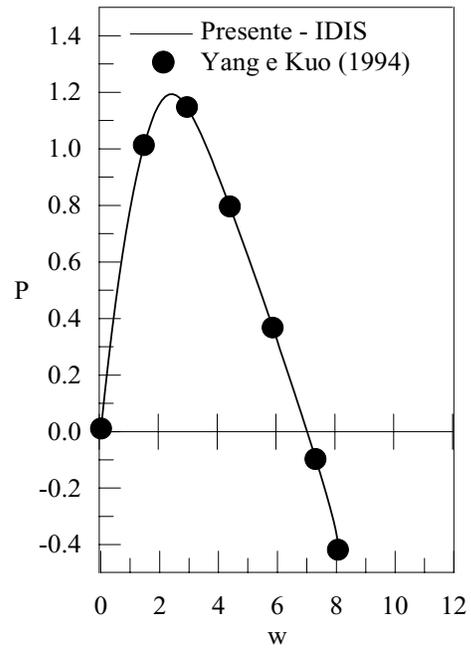


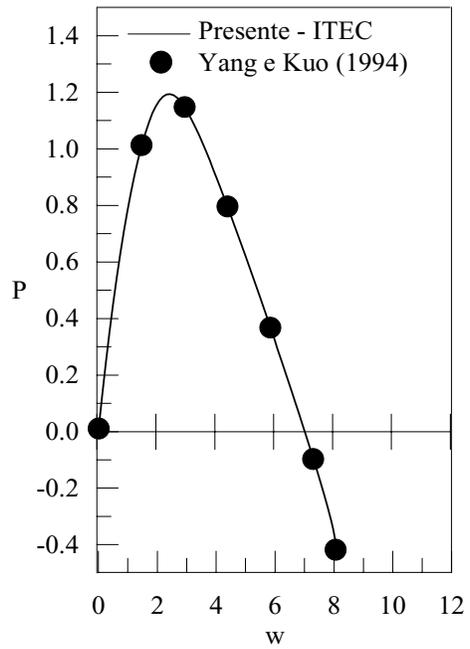
Figura 6.8 – Configurações deformadas nos pontos limites de carga (fe: 1.5).



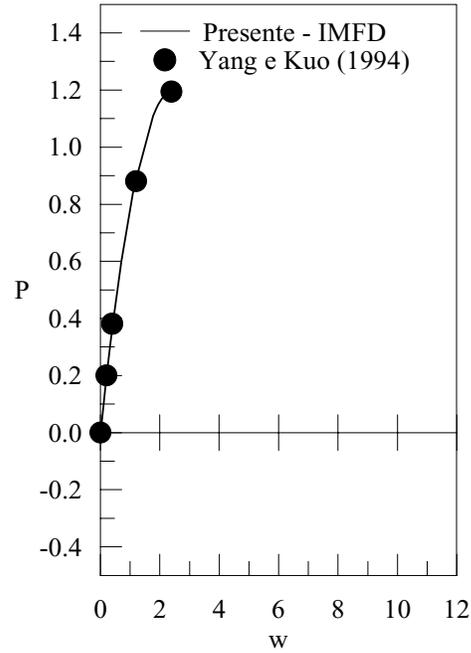
a.



b.



c.



d.

Figura 6.9 – Trajetórias de equilíbrio: ILDC, IDIS, ITEC, IMFD.

Tabela 6.11 – Comparação entre ICA4 e IRO1.

	ICA4		IRO1	
	$\Delta N_{tot}$	CPU ( $\Delta t$ )	$\Delta N_{tot}$	CPU ( $\Delta t$ )
<b>0 - c1</b>	5	0.16	5	0.11
<b>c1 - d1</b>	21	0.50	50	0.99
<b>d1 - c2</b>	2	0.05	176	4.45
<b>c2 - c3</b>	10	0.17	2430	39.66
<b>c3 - d2</b>	2	0.05	78	0.93
<b>d2 - c4</b>	36	0.83	2995	34.27
<b>c4 - E</b>	6	0.11	1085	16.51

## 2. Análise da estratégia IMFD

O sistema estrutural perfeito é escolhido para analisar o desempenho da estratégia de iteração que usa a norma mínima das forças desequilibradas, IMFD. Na seção anterior, utilizando-se os parâmetros de controle da Tabela 6.9, observou-se que esta estratégia foi incapaz de ultrapassar o primeiro ponto limite de carga dos caminhos de equilíbrio do arco perfeito e imperfeito. Não foi possível obter convergência no processo iterativo próximo ao primeiro ponto crítico da trajetória.

Procurando contornar esse problema, IMFD é analisada agora considerando pequenos valores para o incremento de carga  $\Delta\lambda^0$ . Como a estratégia de incremento de carga usada em conjunto com IMFD é baseada no comprimento de arco, foram utilizados valores menores de  $\Delta l_{m\acute{a}x}$  e  $\Delta l_{m\acute{i}n}$  como forma de controlar  $\Delta\lambda^0$ . Os resultados apresentados na Tabela 6.12 foram obtidos fixando-se  $\Delta l_{m\acute{a}x} = 1.0$  e considerando para  $\Delta l_{m\acute{i}n}$  os valores 0.01, 0.1 e 0.9, respectivamente. Os demais parâmetros de controle da solução não-linear foram os mesmos da Tabela 6.9. Note-se que, para  $\Delta l_{m\acute{i}n} = 0.01$  e 0.1, isto é, para incrementos de carga bem pequenos, foi possível o traçado completo da trajetória de equilíbrio, porém com um elevado número de passos de carga, iterações

totais e CPU. Não se observa também diferença entre os resultados produzidos por  $\Delta l_{\min} = 0.01$  e  $0.1$ , caracterizando-se assim uma maior influência de  $\Delta l_{\max}$  no processo. Já com  $\Delta l_{\min} = 0.9$  não se conseguiu ultrapassar o segundo ponto limite de carga.

Tabela 6.12 - Análise da estratégia IMFD.

$\Delta l_{\min}$	$N_{\text{tot}}$	$I_{\text{tot}}$	$I_{\text{med}}$	Rein	CPU
<b>0.01</b>	21105	23649	1	5	97.11
<b>0.1</b>	21105	23649	1	5	97.82
<b>0.9</b>	11083 <sup>B</sup>	13146	1	11	57.58

B – segundo ponto limite de carga (SP).

### 3. Influência do carregamento no cálculo de $\Delta \lambda^0$

As formas linearizadas e quadráticas do comprimento de arco são analisadas, novamente, em relação à influência do vetor de cargas de referência  $F_r$  no cálculo de  $\Delta \lambda^0$ . Os resultados para essa análise estão presentes na Tabela 6.13 para o sistema estrutural imperfeito, considerando, para os parâmetros da solução não-linear, aqueles mesmos valores dados na Tabela 6.9.

Diferentemente do exemplo anterior, observa-se aqui que o vetor de cargas de referência  $F_r$  apresenta pequena influência no processo de solução. A Tabela 6.13 mostra que o tempo de CPU, de um modo geral, é ligeiramente inferior para a estratégia de incremento de carga que não utiliza  $F_r$ , Equação (3.6). ICA3, que não trabalhava de forma adequada no exemplo anterior empregando essa equação, mostra agora um bom desempenho computacional.

Como no caso da coluna engastada-livre, observa-se para o arco que o desempenho computacional das formas linearizadas do comprimento de arco (ICA1 e ICA2) é similar e que ICA4 parece produzir os melhores resultados, independentemente da equação a ser adotada para o incremento de carga.

Tabela 6.13 - Influência do carregamento no cálculo de  $\Delta\lambda^0$ .

$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta l / \sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}$						$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta l / \sqrt{\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}$				
Estrat	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU
<b>ICA1</b>	97	561	6	2	2.75	97	565	6	3	3.79
<b>ICA2</b>	97	557	6	2	2.80	89	551	6	2	3.35
<b>ICA3</b>	84	545	7	1	2.42	87	547	6	2	4.07
<b>ICA4</b>	82	546	6	1	1.87	84	535	6	2	1.92

#### 4. Influência do incremento inicial do parâmetro de carga ${}^1\Delta\lambda^0$ (FACI)

Considerando novamente o sistema imperfeito, estuda-se agora a eficiência computacional das estratégias ICA4 (comprimento de arco cilíndrico) e IGSP (deslocamento generalizado) em relação aos valores do incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda_1^0$  (FACI). Para  ${}^1\Delta\lambda^0$ , adotaram-se os valores: 0.15, 0.2 e 0.4; os demais parâmetros de solução não-linear são aqueles da Tabela 6.9. Em ICA4, considerou-se a Equação (3.6) como procedimento de obtenção do incremento do parâmetro de carga.

Como esperado, observa-se nas duas estratégias um aumento do número de passos de carga, iterações e CPU, com a redução de  ${}^1\Delta\lambda^0$ . IGSP foi capaz de traçar de forma completa a trajetória de equilíbrio para  ${}^1\Delta\lambda^0 = 0.15$  e 0.2, porém mostrando sempre um desempenho computacional inferior a ICA4. Como observado anteriormente, IGSP só consegue ir até o primeiro ponto limite de deslocamento (d1) quando  ${}^1\Delta\lambda^0 = 0.4$ . ICA4 fornece, independente do valor de  ${}^1\Delta\lambda^0$ , um número praticamente constante de iterações médias e reinicializações.

Tabela 6.14 - Influência do incremento inicial do parâmetro de carga  ${}^1\Delta\lambda^0$  (FACI).

$\Delta\lambda_1^0$	ICA4					IGSP				
	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU
<b>0.15</b>	121	603	5	1	2.47	176	682	4	2	3.36
<b>0.2</b>	111	581	5	1	2.31	132	614	5	5	2.86
<b>0.4</b>	82	546	6	1	1.87	25 <sup>d1</sup>	201	8	3	0.6

d1 – primeiro ponto limite de deslocamento.

## 6.4 - PÓRTICOS EM FORMA DE L

As estratégias de solução não-linear são usadas agora na análise de pórticos esbeltos birrotulados em forma de L. Esses pórticos estão ilustrados nas Figuras 6.10 e 6.13, e são conhecidos, respectivamente, como o pórtico de Lee (Lee *et al.*, 1990) e o pórtico de Roorda (Roorda, 1965). Ambos apresentam forte comportamento geometricamente não-linear.

### 6.4.1 - Pórtico de Lee

O pórtico de Lee (Lee *et al.*, 1990) vem sendo freqüentemente usado por pesquisadores para validar suas formulações e estratégias de solução não-linear (Schweizerhof e Wriggers, 1986; Silveira *et al.*, 1999; Galvão, 2000; Galvão *et al.*, 2000). Trata-se de um sistema estrutural em que problemas de instabilidade são verificados só depois de terem acontecido grandes deslocamentos. As seguintes análises são feitas :

1. Estudo geral de todas as estratégias da Tabela 6.1;
2. Influência do parâmetro  $\alpha$  e do número de iterações desejadas  $I_d$ ;
3. Influência do incremento inicial do parâmetro de carga  ${}^1\Delta\lambda^0$  (FACI).

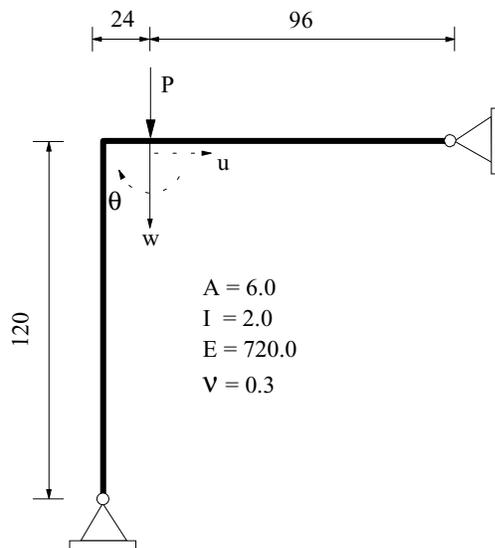


Figura 6.10 - Pórtico de Lee.

## ***1. Estudo geral de todas as estratégias da Tabela 6.1***

Utilizando-se a Tabela 6.15 como referência, chegou-se aos resultados apresentados na Tabela 6.16 para as diversas estratégias de solução não-linear estudadas neste trabalho. A trajetória de equilíbrio do pórtico é mostrada na Figura 6.11 e foi obtida com a estratégia que apresentou melhor performance: ICA4. Esses resultados são comparados com aqueles extraídos do artigo de Schweizerhof e Wriggers (1986).

Novamente, ILDC e IMFD não foram capazes de ultrapassar o primeiro ponto limite de carga (A). Para ILCD isso já era esperado; IMFD parece requerer, outra vez, incrementos de carga pequenos para evitar problemas de convergência.

Comportamentos equivalentes foram observados com o emprego de IDIS, ITEC, IRO2 e IRO3, em que só foi possível obter a trajetória de equilíbrio até o primeiro ponto limite de deslocamento (B). Como no caso do arco imperfeito, ITEC mostrou-se inadequada para o traçado de caminhos de equilíbrio com *snap-back*. Considerou-se apenas uma condição de ortogonalidade em IRO2 e IRO3. Vale destacar que, com IRO3, após ser atingido o ponto (B), aconteceu um retorno ao primeiro ponto limite de carga. A inclusão da segunda condição de ortogonalidade em IRO2 alterou seu desempenho computacional, possibilitando obter a trajetória de equilíbrio de forma completa com 50477 passos de carga.

ICA1, ICA2, ICA3, ICA4, IRP1, IRP2 e IMDO apresentaram desempenhos computacionais bastante próximos. O sistema permaneceu estável e houve apenas uma reinicialização do processo de solução. A Equação (3.6) foi utilizada para calcular o incremento de carga em todas essas estratégias de solução.

Com IRO5 e IGSP, não foi possível ultrapassar o segundo ponto limite de carga (C). Já com o emprego de IRO1 e IRO4, pôde-se obter a trajetória de forma completa. Contudo, necessitou-se um número elevado número de passos de carga e de reinicializações; o esforço computacional foi compensado com o baixo número de iterações necessárias para convergência em cada ciclo. Com a inclusão da segunda condição de ortogonalidade, só foi possível obter até o primeiro ponto limite de deslocamento (B).

Tabela 6.15 – Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.

Número de elementos: <b>20</b>							
Método: <b>NRM</b>							
${}^1\Delta\lambda^0$	<b>0.05</b>	$I_{des}$	<b>5</b>	$I_{m\acute{a}x}$	<b>21</b>	$\zeta$	<b><math>10^{-3}</math></b>
$\Delta\lambda_{m\acute{i}n}$	<b>0.05</b>	$\Delta u_{m\acute{i}n}$	<b>5.0</b>	$\Delta w_{m\acute{i}n}$	<b>0.2</b>	$\Delta l_{m\acute{i}n}$	<b>1.0</b>
$\Delta\lambda_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>	$\Delta u_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>	$\Delta w_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>	$\Delta l_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>

Tabela 6.16 – Pórtico de Lee: estratégias de solução não-linear.

<b>Estrat.</b>	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	<b>Rein.</b>	<b>CPU</b>
<b>ILDC</b>	348 <sup>A</sup>	3559	10	25	19.77
<b>IDIS</b>	410 <sup>B</sup>	4095	10	27	20.33
<b>ITEC</b>	414 <sup>B</sup>	2388	6	0	14.88
<b>ICA1</b>	770	6146	8	1	30.93
<b>ICA2</b>	771	6178	8	1	31.52
<b>ICA3</b>	771	6166	8	1	31.64
<b>ICA4</b>	770	6157	8	1	28.84
<b>IRP1</b>	781	6351	8	1	31.75
<b>IRP2</b>	780	6165	8	1	31.42
<b>IMDO</b>	770	6146	8	1	30.81
<b>IMFD</b>	1708 <sup>A</sup>	10784	6	32	79.87
<b>IRO1</b>	10751	14863	1	6	132.37
<b>IRO2</b>	524 <sup>B</sup>	2620	5	3	12.08
<b>IRO3</b>	477 <sup>B</sup>	1957	4	3	8.78
<b>IRO4</b>	12358	16691	1	6	165.23
<b>IRO5</b>	2001 <sup>C</sup>	5258	3	8	36.48
<b>IGSP</b>	305 <sup>C</sup>	2828	9	1	13.40

A – primeiro ponto limite de carga, B – primeiro ponto limite de deslocamento e C – segundo ponto limite de deslocamento.

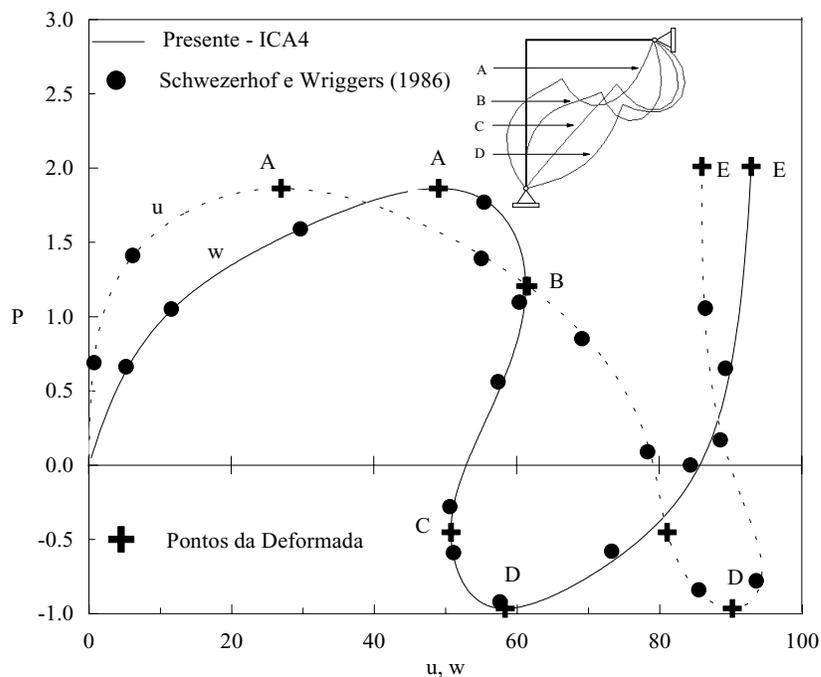


Figura 6.11 – Trajetórias de equilíbrio do pórtico de Lee ( $f_e: 1.5$ ).

Tabela 6.17 - Comparação entre ICA4 e IRO1.

	ICA4		IRO1	
	$\Delta N_{tot}$	CPU ( $\Delta t$ )	$\Delta N_{tot}$	CPU ( $\Delta t$ )
<b>0 - A</b>	149	5.65	206	3.84
<b>A - B</b>	112	5.55	381	5.93
<b>B - C</b>	141	8.02	1981	25.38
<b>C - D</b>	101	3.95	2149	25.65
<b>D - E</b>	267	5.67	6034	71.57

Na Tabela 6.17, é feita uma comparação entre as estratégias ICA4 e IRO1. Observe-se que o desempenho de IRO1 pode ser considerado muito bom até o primeiro ponto limite de deslocamento (B). Verificou-se, entretanto, uma dificuldade dessa estratégia em contornar esse ponto limite; adicionalmente, o incremento de carga ficou

muito pequeno, de forma que um número bastante elevado de passos de carga tornou-se necessário para a obtenção de todo o caminho de equilíbrio.

## 2. Influência do parâmetro $\alpha$ e do número de iterações desejadas $I_d$

Nesta seção, deseja-se verificar o comportamento da estratégia de incremento de carga baseada na Equação (3.6), a qual depende do valor de  $\Delta l$ , calculado através da Equação (3.4). Essa equação foi testada para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$  (veja Equação 3.1) e do número de iterações desejadas  $I_{des}$ . Os resultados dessa análise são mostrados nas Tabelas 6.18a,b para ICA4 e para os mesmos valores dos parâmetros da Tabela 6.15, com exceção de  $I_{des}$ .

Os valores apresentados na Tabela 6.18a foram obtidos variando-se o parâmetro  $\alpha$  e considerando-se  $I_{des} = 5$ . Já na Tabela 6.18b, variou-se  $I_{des}$  e manteve-se  $\alpha = 0.5$ . Note-se que a variação do expoente  $\alpha$  não produziu grandes alterações nos resultados; os números de passos de carga, iterações médias, reinicializações e CPU não sofreram grandes modificações. Entretanto, ao se analisar a Tabela 6.18b quando  $I_{des}$  cresce, verifica-se que o número de passos de carga diminui e o número de iterações médias aumenta, mas o tempo de CPU diminui, melhorando assim a performance computacional.

Tabela 6.18 - Influência do parâmetro  $\alpha$  e do número de iterações desejadas  $I_d$ .

a. Parâmetro $\alpha$ .						b. Parâmetro $I_{des}$ .					
$\alpha$	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU	$I_{des}$	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU
<b>0.25</b>	774	6175	8	1	28.79	<b>3</b>	786	6077	8	1	29.99
<b>0.5</b>	770	6157	8	1	28.84	<b>5</b>	770	6157	8	1	28.84
<b>1.0</b>	766	6448	8	2	30.10	<b>7</b>	670	5998	9	1	28.62
<b>2.0</b>	750	6211	8	1	31.48	<b>9</b>	592	5967	10	1	27.03
<b>3.0</b>	751	6125	8	2	28.51	<b>11</b>	526	6085	12	1	26.97

### 3. Influência do incremento inicial do parâmetro de carga ${}^1\Delta\lambda^0$ (FACI)

Novamente as estratégias ICA4 e IGSP são analisadas para vários valores do incremento inicial do parâmetro de carga  ${}^1\Delta\lambda^0$ . Utilizando-se o método de NRM e a Tabela 6.15 como referência, chegou-se aos resultados apresentados na Tabela 6.19.

Fica evidente que a performance computacional de ICA4 vai melhorando à medida que  ${}^1\Delta\lambda^0$  aumenta. Para  ${}^1\Delta\lambda^0 = 0.05$ , obtêm-se os menores números de passos de carga, iterações totais e tempo de processamento. Já IGSP parece trabalhar de forma mais adequada para pequenos valores de  ${}^1\Delta\lambda^0$ . Observe-se que, para valor igual ou maior que  ${}^1\Delta\lambda^0 = 0.03$ , só se consegue obter a trajetória de equilíbrio até o segundo ponto limite de deslocamento (C). Note-se, no entanto, que IGSP apresenta melhor desempenho computacional para  ${}^1\Delta\lambda^0 = 0.028$  — em que nenhuma reinicialização foi necessária — do que para  ${}^1\Delta\lambda^0 = 0.02$ . Na Figura 6.12, onde se mostra a variação do incremento de carga  $\Delta\lambda$  com o deslocamento  $w$  no ponto de aplicação da carga, pode-se verificar que, para  ${}^1\Delta\lambda^0 = 0.028$ , IGSP apresenta-se mais estável que ICA4, para um incremento inicial  ${}^1\Delta\lambda^0 = 0.05$ .

Tabela 6.19 - Avaliação das estratégias de solução não-linear.

ICA4						IGSP				
${}^1\Delta\lambda^0$	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU
<b>0.020</b>	1111	6290	6	0	31.29	1364	6630	5	1	42.40
<b>0.028</b>	969	6360	7	0	30.27	974	6277	6	0	31.97
<b>0.030</b>	1079	6454	6	1	31.64	564 <sup>C</sup>	3655	6	1	18.84
<b>0.040</b>	900	6211	7	1	29.33	401 <sup>C</sup>	3113	8	1	16.14
<b>0.050</b>	770	6157	8	1	28.84	305 <sup>C</sup>	2828	9	1	13.40

C – segundo ponto limite de deslocamento.

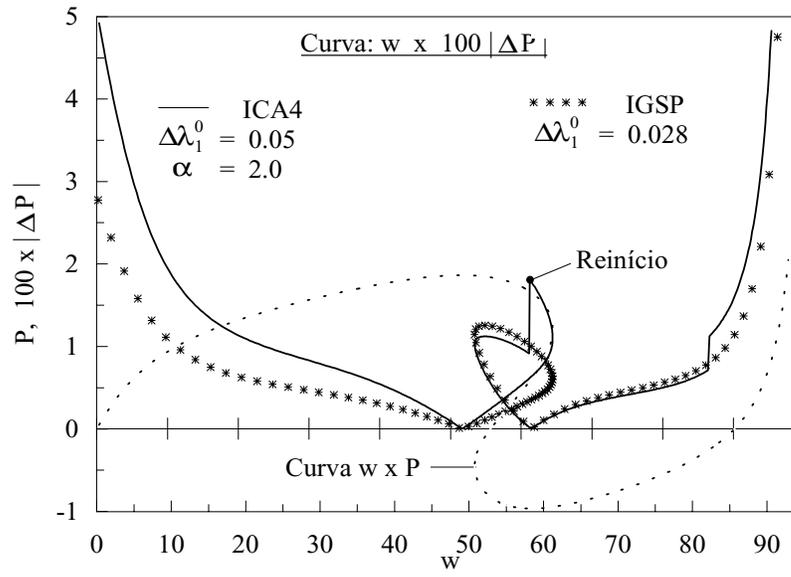


Figura 6.12 – Análise das estratégias ICA4 e IGSP.

## 6.4.2 - Pórtico de Roorda

Um segundo sistema estrutural em forma de L, ilustrado na Figura 6.13, é estudado nesta seção. Trata-se do pórtico de Roorda (Roorda, 1965). É uma estrutura que apresenta bifurcação assimétrica e, como no caso do Pórtico de Lee, tem sido usado por pesquisadores em diversas análises geometricamente não-lineares (Koiter, 1967; Kouhia e Mikkola, 1989; Rizzi *et al.*, 1990; Galvão *et al.*, 2000).

São realizadas as seguintes análises para o sistema estrutural em questão:

1. Estudo geral de todas as estratégias da Tabela 6.1;
2. Estudo comparativo envolvendo ICA4 e IGSP;
3. Influência do critério de escolha do sinal do incremento de carga  $\Delta\lambda^0$ .

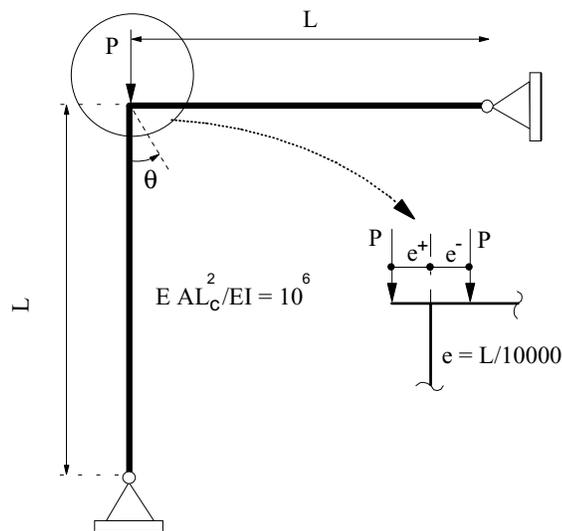


Figura 6.13 - Pórtico de Roorda.

### ***1. Estudo geral de todas as estratégias da Tabela 6.1***

Considerou-se, em todas as análises, um modelo com 21 elementos finitos: 10 elementos para a coluna e 11 elementos para a viga. Como no caso da coluna engastada-livre (Seção 6.2), para evitar dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação, foi considerada uma pequena excentricidade para a carga concentrada  $P$  ( $\pm e = L/10000$ ). Observe-se através da Figura 6.14 que, caso essa excentricidade seja positiva ( $e+$ ;  $\theta+$ ), a coluna flamba para a direita (veja Figura 6.15b), a carga  $P$  máxima que o pórtico pode suportar é igual à carga de bifurcação, a resistência do sistema diminui com o aumento das deformações e finalmente é verificada uma sensibilidade às imperfeições geométricas. No caso da excentricidade negativa ( $e-$ ;  $\theta-$ ), a coluna flamba para a esquerda (veja Figura 6.15a), o pórtico pode suportar cargas maiores que a carga de bifurcação, a resistência do sistema aumenta com o aumento das deformações e não é verificada sensibilidade às imperfeições geométricas (Galvão *et al.*, 2000).

As trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 6.14 foram obtidas usando a estratégia de iteração ICA4 e são comparadas com as soluções fornecidas em outros trabalhos (Roorda, 1965; Koiter, 1967; Rizzi *et al.*, 1990). Os parâmetros da Tabela 6.20 foram usados como controle da solução não-linear. A seguir, todas as estratégias apresentadas da Tabela 6.1 são analisadas para as duas situações de excentricidade e comportamento do pórtico de Roorda.

- Excentricidade positiva ( $e+$ ;  $\theta+$ )

De acordo com os resultados da Tabela 6.21, novamente ILDC e IMFD só foram capazes de obter as configurações de equilíbrio do sistema estrutural até o primeiro ponto limite de carga (A). Como esperado, com a técnica IDIS não foi possível prosseguir além do ponto limite de deslocamento (B). Observe-se que um número muito grande de passos de carga foi necessário até ser atingido esse ponto. ITEC não trabalhou de forma adequada neste exemplo e problemas de convergência foram verificados antes mesmo de ser atingido o ponto de bifurcação (A).

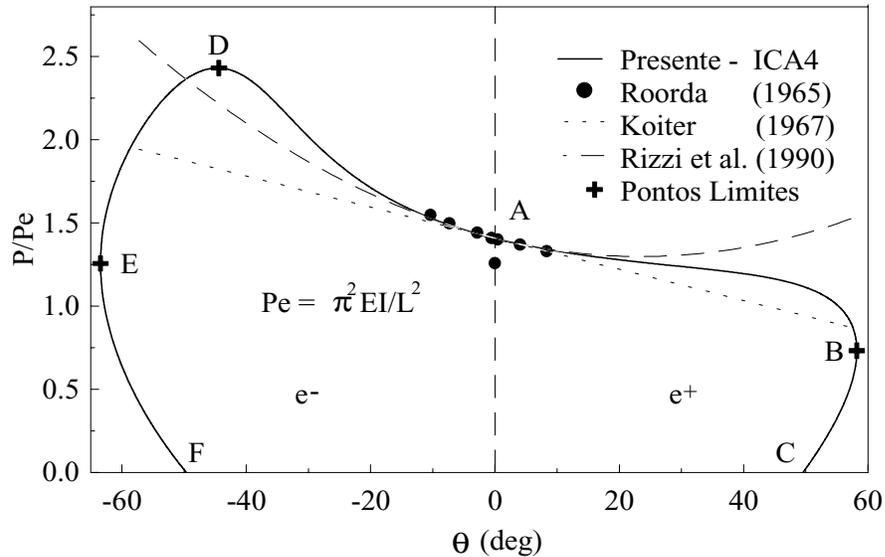


Figure 6.14 - Comparação do presente trabalho, resultados teórico e experimental.

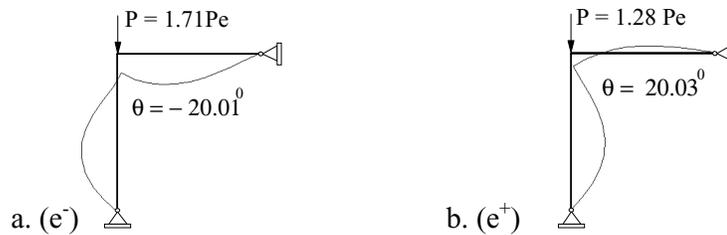


Figure 6.15 - Deformadas do pórtico de Roorda ( $e = \pm L/10000$ ) -  $f_e: 1.5$ .

As estratégias ICA1, ICA2, ICA3, ICA4, IMDO, IRP1 e IRP2 apresentaram desempenhos computacionais equivalentes. Observe-se, todavia, que, em ICA2, ICA4, IMDO, IRP1 e IRP2, foi necessária uma reinicialização do processo de solução não-linear. Dessa vez, foi a forma linearizada do comprimento de arco, ICA2, que apresentou o menor tempo de CPU.

O emprego de IGSP, IRO1, IRO2, IRO3, IRO4 e IRO5 permitiu o traçado completo do caminho de equilíbrio, porém com um número elevado de passos de carga e tempo de processamento. Considerou-se, para as estratégias de resíduo ortogonal, apenas uma condição de ortogonalidade:  $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = 0$ . Vale ressaltar que a consideração de duas condições de ortogonalidade conduziu, neste exemplo, a problemas de convergência da solução a partir do ponto de bifurcação.

Tabela 6.20 – Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.

Número de elementos: <b>21</b>							
Método: <b>NRM</b>							
${}^1\Delta\lambda^0$	<b>1.71Pe</b>	$I_{des}$	<b>5</b>	$I_{m\acute{a}x}$	<b>21</b>	$\zeta$	<b><math>10^{-3}</math></b>
$\Delta\lambda_{m\acute{i}n}$	<b>0.05</b>	$\Delta u_{m\acute{i}n}$	<b>5.0</b>	$\Delta w_{m\acute{i}n}$	<b>0.2</b>	$\Delta l_{m\acute{i}n}$	<b>1.0</b>
$\Delta\lambda_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>	$\Delta u_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>	$\Delta w_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>	$\Delta l_{m\acute{a}x}$	<b>10</b>

Tabela 6.21 – Pórtico de Roorda: estratégias de solução não-linear.

Estrat.	$e^+$					$e^-$				
	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein.	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein.	CPU
<b>ILDC</b>	113 <sup>A</sup>	763	7	24	3.95	3087 <sup>D</sup>	18004	6	28	69.70
<b>IDIS</b>	41168 <sup>B</sup>	46942	1	6	503.44	48933 <sup>E</sup>	8809	0.5	1	602.8
<b>ITEC</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>ICA1</b>	1752	8754	5	0	36.91	2891	14441	5	1	72.44
<b>ICA2</b>	1756	8768	5	1	36.69	2895	14461	5	1	73.88
<b>ICA3</b>	1752	8756	5	0	40.15	2943	14718	5	0	78.93
<b>ICA4</b>	1756	8765	5	1	37.29	2894	14473	5	0	69.59
<b>IRP1</b>	1845	9212	5	1	38.06	3226	16122	5	1	77.99
<b>IRP2</b>	1845	9212	5	1	38.78	3226	16122	5	1	70.86
<b>IMDO</b>	1756	8765	5	1	40.76	2891	14441	5	1	60.86
<b>IMFD</b>	2551 <sup>A</sup>	1973	1	10	34.66	3609 <sup>D</sup>	9071	3	8	59.15
<b>IRO1</b>	11768	19646	2	0	296.66	20366 <sup>E</sup>	32566	2	1	277.70
<b>IRO2</b>	17651	24890	1	0	221.95	10204 <sup>E</sup>	16610	2	1	152.86
<b>IRO3</b>	86465	87457	1	0	1406.0	499990	50214	1	5	6148.6
<b>IRO4</b>	57295	59294	1	0	745.88	31180 <sup>D</sup>	31197	1	0	406.78
<b>IRO5</b>	17651	24889	1	0	221.18	10184 <sup>E</sup>	16614	2	1	146.76
<b>IGSP</b>	18397	25204	1	1	331.25	19019	27956	1	1	502.24

A e D – pontos limites de carga, B e E – pontos limites de deslocamentos.

- Excentricidade negativa ( $e^-$ ;  $\theta^-$ )

De uma forma geral, as estratégias de solução não-linear se comportaram de forma semelhante ao caso da excentricidade positiva ( $e^+$ ), isto é: as técnicas ILDC e IMFD não foram capazes de ultrapassar o primeiro ponto limite de carga (D); com IDIS só foi possível obter as configurações de equilíbrio do sistema estrutural até o primeiro ponto limite de deslocamento (E); os mesmos problemas de convergência foram encontrados em ITEC; as estratégias ICA1, ICA2, ICA3, ICA4, IRP1, IRP2 e IMDO apresentaram as melhores performances computacionais; e com IGSP foi possível obter a trajetória de forma completa, porém com um elevado número de passos de carga.

Ao analisar as técnicas que utilizaram o resíduo ortogonal, observa-se que apenas IRO3 foi capaz de obter todas as configurações de equilíbrio do pórtico, contudo, também com um número elevado de incrementos de carga e CPU, além de 5 reinicializações no processo de solução. Com IRO4, foi possível chegar apenas até o primeiro ponto limite de carga (D); já com IRO1, IRO2, e IRO5, a trajetória de equilíbrio foi obtida até o ponto limite de deslocamento (E). Apenas uma condição de ortogonalidade,  $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = 0$ , foi considerada em todas essas estratégias. Como no caso da excentricidade positiva ( $e^+$ ), a introdução da segunda condição de ortogonalidade,  $\tilde{\mathbf{g}}^T \delta \mathbf{u} = 0$ , não propiciou nenhuma melhora de desempenho.

## ***2. Estudo comparativo envolvendo ICA4 e IGSP***

A Tabela 6.22 apresenta, para as duas situações de excentricidade e para as estratégias ICA4 e IGSP, o número de passos de carga e tempo de processamento necessários para percorrer os vários trechos das trajetórias de equilíbrio. Os parâmetros da Tabela 6.20 foram usados na modelagem. Em todos os trechos da trajetória, observa-se um melhor desempenho computacional da estratégia comprimento de arco cilíndrico, ICA4. Note-se também que, para ambas as estratégias, o número de passos de carga e CPU para percorrer o trecho A-B ( $e^+$ ) é bem superior aos valores encontrados para os outros trechos.

Tabela 6.22 – Número de passos de carga e CPU: ICA4 e IGSP.

		ICA4		IGSP	
	Trecho	$\Delta N_{tot}$	CPU ( $\Delta t$ )	$\Delta N_{tot}$	CPU ( $\Delta t$ )
e+	<b>0 - A</b>	25	0.50	105	1.92
	<b>A - B</b>	1295	32.02	13697	253.70
	<b>B - C</b>	436	4.77	4595	75.63
e-	<b>A - D</b>	1108	27.30	8246	300.5
	<b>D - E</b>	944	21.97	6342	136.65
	<b>E - F</b>	842	20.32	4431	65.09

Tabela 6.23 – Influência do incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda_1^0$ .

		ICA4					IGSP				
${}^1\Delta\lambda^0$	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein.	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein.	CPU	
<b>1.00 Pe</b>	2266	9050	4	0	41.42	30780	35138	1	0	417.17	
<b>1.28Pe</b>	1758	8773	5	1	43.50	24059	29949	1	1	331.86	
<b>1.50Pe</b>	1767	8830	5	1	35.86	20517	26972	1	1	282.37	
<b>1.60Pe</b>	1757	8789	5	1	40.21	19237	25921	1	1	265.07	
<b>1.65Pe</b>	1765	8812	5	1	35.81	18394	25202	1	1	271.28	
<b>1.71Pe</b>	1756	8765	5	1	37.28	18397	25204	1	1	331.25	

Considerando a excentricidade positiva (e+), ICA4 e IGSP foram analisadas também para diferentes valores do parâmetro inicial de carga  ${}^1\Delta\lambda^0$  (FACI). Novamente utilizou-se a Tabela 6.20 como referência e os resultados obtidos são mostrados na Tabela 6.23. ICA4 parece não sofrer influência de  ${}^1\Delta\lambda^0$  para valores deste acima de 1.28Pe. Observe-se que, quando  ${}^1\Delta\lambda^0 \geq 1.28$  Pe, é necessária uma reinicialização do processo e, quando isso acontece, o incremento do comprimento de arco no passo de

carga corrente é reduzido à metade. A estratégia do deslocamento generalizado IGSP parece realmente ser mais sensível às variações de  ${}^1\Delta\lambda^0$ .

### 3. Influência dos critérios de escolha do sinal do incremento de carga $\Delta\lambda^0$

Considerando mais uma vez o caso da excentricidade positiva (e+) e a estratégia ICA4, verificam-se agora os critérios de escolha do sinal do incremento do parâmetro de carga dado pela Equação (3.6). No Capítulo 3, Seção 3.4, são descritos alguns critérios ou estratégias para escolha desse sinal; no Capítulo 5 foi definido que a variável **KTEST** seria responsável pela escolha de um desses critérios.

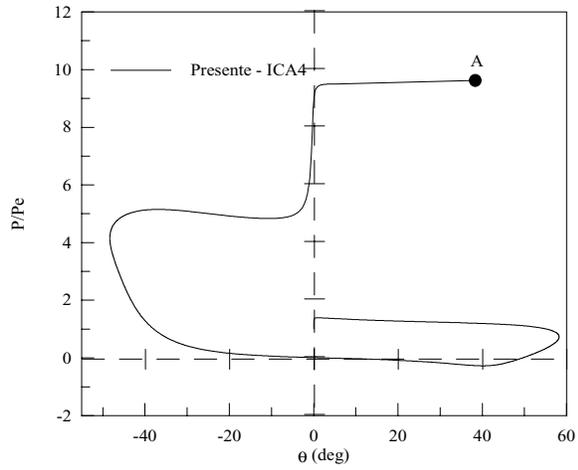
Os resultados dessa análise são apresentados na Tabela 6.24 e Figuras 6.16a,b,c para **KTEST** = 0 (análise do sinal do determinante de **K**), **KTEST** = 1 (análise do sinal do incremento do trabalho externo dado pela Equação (3.16)), **KTEST** = 2 (análise do produto interno entre o deslocamento incremental obtido no passo de carga anterior e o incremento de deslocamento corrente,  ${}^t\Delta\mathbf{u}^T\Delta\mathbf{u}^0$ ) e **KTEST** = 3 (análise do sinal do parâmetro de rigidez GSP). As trajetórias mostradas nas Figuras 6.16a,b,c vão além da configuração de equilíbrio do ponto (C) na Figura 6.14, quando  $P \cong 0.0$  e  $\theta \cong 50.0^\circ$ . Com **KTEST** = 2 e 3, a análise só foi interrompida quando se chegou ao número máximo de passos de carga estabelecido pelo usuário (variável **NINC**, veja Capítulo 5, Tabela 5.4). Quando se utilizou **KTEST** = 0, só foi possível obter as configurações de equilíbrio até o ponto (A) da Figura 6.16a. Para **KTEST** = 1, as configurações de equilíbrio só puderam ser obtidas até o ponto (C) da Figura 6.14.

Tabela 6.24 - Influência do critério de escolha do sinal de  $\Delta\lambda^0$ . ICA4

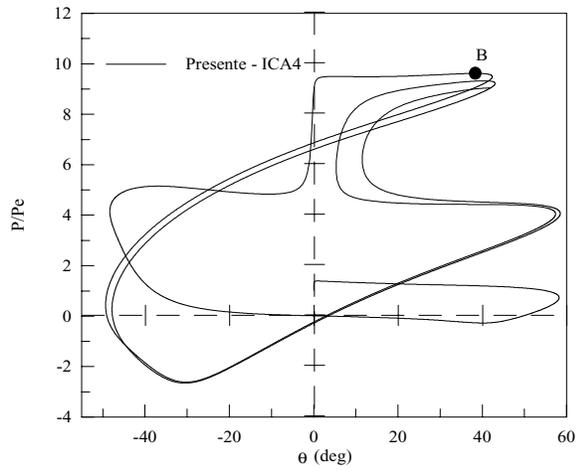
<b>KTEST</b>	<b>N<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>med</sub></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>
<b>0</b>	5896 <sup>A</sup>	29460	5	1	238.92
<b>1</b>	3594 <sup>C</sup>	17940	5	1	84.91
<b>2</b>	20958	104770	5	1	453.36
<b>3</b>	20958	104770	5	1	413.04

A – primeiro ponto limite de carga,

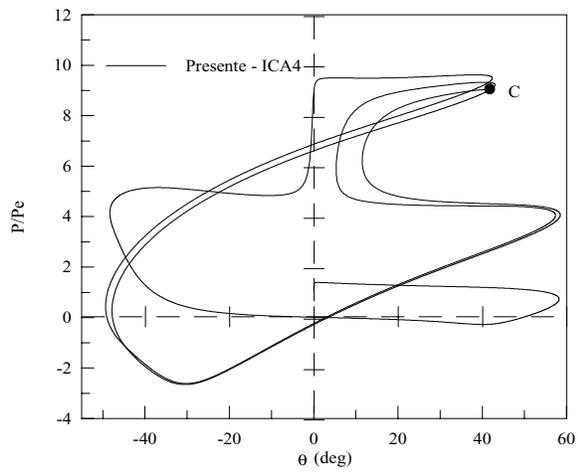
C – primeira configuração de equilíbrio.



a. KTEST = 0



b. KTEST = 2



c. KTEST = 3

Figura 6.16 – Trajetória de equilíbrio: escolha do sinal de  $\Delta\lambda^0$ .

## 6.5 - ARCO CIRCULAR ROTULADO-ENGASTADO

O arco circular rotulado-engastado submetido a uma carga concentrada, conforme ilustrado na Figura 6.17, é usado nesta seção para analisar algumas estratégias de solução não-linear. Vale informar que, a partir desta seção, serão consideradas apenas algumas estratégias da Tabela 6.1.

O sistema estrutural em questão, que foi inicialmente estudado por Da Deppo e Schmit (1975), exibe um comportamento fortemente não-linear. Resultados analíticos para esse problema foram apresentados por Wood e Zienkiewicz (1977); já Kouhia e Mikkola (1989) e Galvão (2000) utilizaram o MEF para analisar numericamente o arco.

Apenas as estratégias IRP1, IRP2 (resposta ponderada constante), IRO1 (resíduo ortogonal) e IGSP (deslocamento generalizado) são aqui objetos de estudo, com atenção voltada para as seguintes análises:

1. Estudo comparativo envolvendo IRP1, IRP2, IRO1 e IGSP;
2. Influência do critério de convergência (CCONV) e fator de tolerância  $\zeta$ .

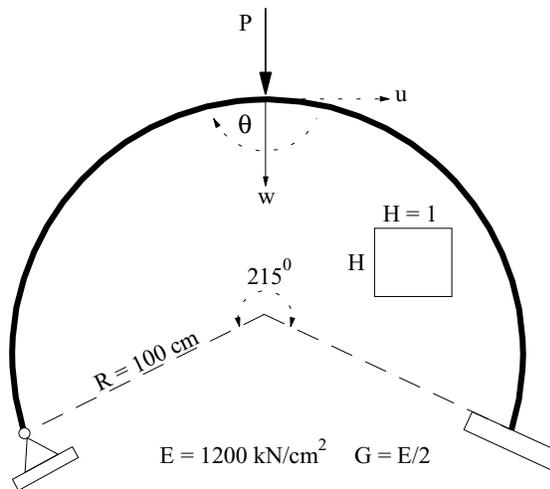


Figura 6.17 - Arco circular rotulado-engastado.

### ***1. Estudo comparativo envolvendo IRP1, IRP2, IRO1 e IGSP***

Os resultados apresentados na Tabela 6.26 para as estratégias IRP1, IRP2, IRO1 e IGSP foram obtidos utilizando a Tabela 6.25 como referência. Observe-se que a forma quadrática da estratégia resposta ponderada constante, IRP2, foi a que apresentou melhor desempenho computacional em termos de tempo de processamento. O caminho de equilíbrio, obtido usando esse esquema de solução, é apresentado na Figura 6.18, onde são plotados também os resultados extraídos da literatura (Wood e Zienkiewicz, 1977; Kouhia e Mikkola, 1989). Na Figura 6.19, são ilustradas as deformadas do arco nos pontos A, B, D e E da trajetória. B e D caracterizam os dos pontos limites de carga da trajetória.

IRP1, que representa a forma linearizada da resposta ponderada constante, consegue também traçar com facilidade a trajetória de equilíbrio do arco. Como comprovam os resultados da Tabela 6.26, esse esquema apresentou desempenho computacional bastante próximo de IRP2. Em função de um número médio de iterações maior por incremento de carga, IRP1 forneceu um tempo de CPU um pouco mais elevado que IRP2.

IGSP apresentou comportamento semelhante ao observado em alguns exemplos anteriores: um número elevado de passos de carga e alguma dificuldade em ultrapassar certos pontos limites da trajetória. Observe-se que com essa estratégia foi possível obter a trajetória até o ponto limite de carga D. IGSP ainda mostrou um número médio de iterações por passo de carga menor que IRP1 e IRP2. Na Tabela 6.27, são apresentados para IRP2 e IGSP o número de passos de carga e o tempo de processamento necessários para percorrer os dois primeiros trechos do caminho de equilíbrio: 0-B e B-D. Observe-se que IRP2, principalmente no primeiro trecho 0-B, apresenta performance computacional bem superior a IGSP. Os resultados mostrados em seguida, na Tabela 6.28, indicam que, quando o incremento de carga é reduzido, IGSP mostra-se capaz de obter todas as configurações de equilíbrio da estrutura. Essa tabela, mais uma vez, demonstra a superioridade de IRP2 em relação a IGSP, independentemente do incremento inicial do passo de carga utilizado.

Tabela 6.25 – Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.

Número de elementos: <b>32</b>					Método: <b>NRM</b>				
${}^1\Delta\lambda^0$	<b>1.5PR<sup>2</sup>/EI</b>	$I_{des}$	<b>5</b>	CCONV	<b>2</b>	$\Delta l_{min}$	<b>1.0</b>	$\Delta u_{min}$	<b>0.1</b>
$I_{máx}$	<b>21</b>	$\zeta$	<b>10<sup>-3</sup></b>	KTEST	<b>0, 2, 3</b>	$\Delta l_{máx}$	<b>10.0</b>	$\Delta u_{máx}$	<b>10</b>

Tabela 6.26 – Arco circular rotulado-engastado: estratégias de solução não-linear.

<b>Estrat.</b>	<b>N<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>med</sub></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>
<b>IRP1</b>	5151	44322	9	1	283.91
<b>IRP2</b>	5257	43854	8	1	272.60
<b>IRO1</b>	10443 <sup>B</sup>	39878	4	6	575.84
<b>IGSP</b>	3876 <sup>D</sup>	25946	7	2	210.53

B – primeiro ponto limite de carga, D – segundo ponto limite de carga.

Tabela 6.27 – Número de passos de carga e CPU: IRP2 e IGSP.

	<b>IRP2</b>		<b>IGSP</b>	
	<b><math>\Delta N_{tot}</math></b>	<b>CPU (<math>\Delta t</math>)</b>	<b><math>\Delta N_{tot}</math></b>	<b>CPU (<math>\Delta t</math>)</b>
<b>0 – B</b>	1242	52.79	2396	96.61
<b>B – D</b>	1478	82.49	1482	113.92

Tabela 6.28 – Influência do incremento inicial do parâmetro de carga  ${}^1\Delta\lambda^0$ .

	<b>IRP2</b>					<b>IGSP</b>				
$\Delta\lambda_1^0$	<b>N<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>med</sub></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>	<b>N<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>med</sub></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>
<b>0.5PR<sup>2</sup>/EI</b>	10697	59296	5	0	437.87	18969	71087	4	0	743.14
<b>1.0PR<sup>2</sup>/EI</b>	6734	48750	7	0	316.31	9484	58620	6	0	562.50
<b>1.5PR<sup>2</sup>/EI</b>	5257	43854	8	1	272.60	3876 <sup>D</sup>	25946	7	2	210.53
<b>1.8PR<sup>2</sup>/EI</b>	6068	45624	8	1	415.40	3080 <sup>D</sup>	21823	7	2	148.67

D – segundo ponto limite de carga.

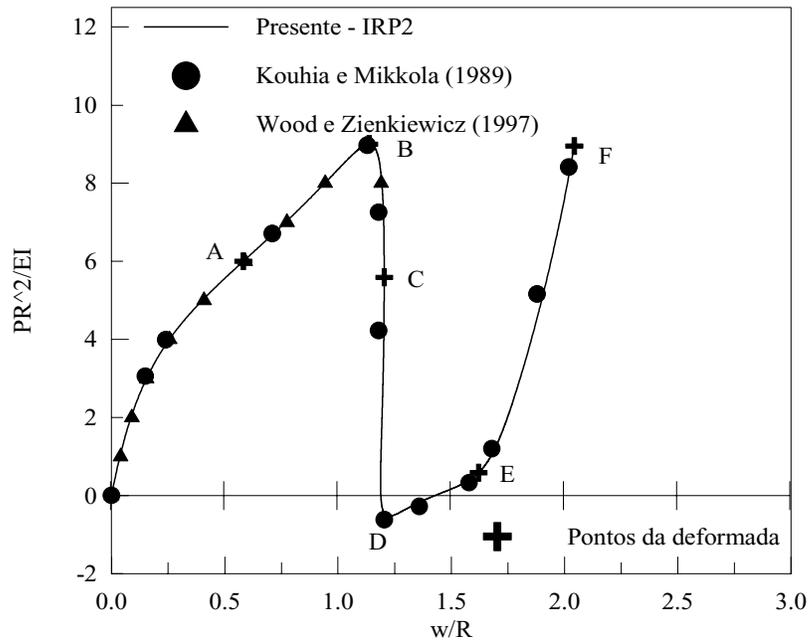


Figure 6.18 – Trajetória de equilíbrio do arco rotulado-engastado.

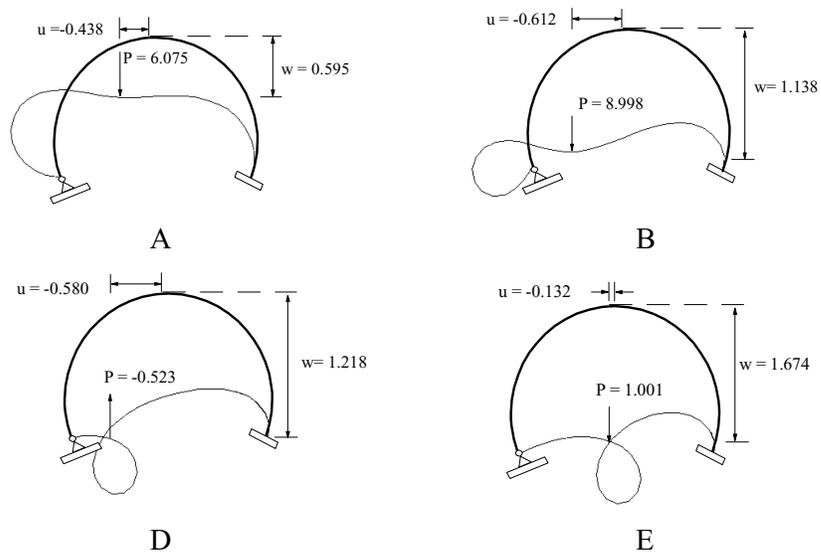


Figura 6.19 - Configurações deformadas do arco rotulado-engastado ( $f_e: 1.5$ ).

Os desempenhos computacionais das estratégias que utilizam resíduo ortogonal (IRO1, IRO2, IRO3, IRO4 e IRO5) foram equivalentes: todas apresentaram dificuldade em contornar o primeiro ponto limite de carga B e obter configurações de equilíbrio além desse ponto, como comprova o resultado apresentado na Tabela 6.26 para IRO1. Tentando solucionar esse problema, considerou-se então para  $I_{m\acute{a}x}$  o valor 241. Mesmo com esse valor para  $I_{m\acute{a}x}$ , só foi possível chegar até o ponto C da trajetória de equilíbrio, com um número bastante elevado de passos de carga e algumas reinicializações. Apenas uma condição de ortogonalidade foi considerada na análise. A introdução da segunda condição de ortogonalidade não produziu o efeito desejado.

## ***2. Influência do critério de convergência (CCONV) e fator de tolerância $\zeta$***

É realizado neste exemplo um estudo para verificar a influência dos critérios de convergência no processo de solução não-linear. Os resultados mostrados na Tabela 6.29, para as estratégias IRP1, IRP2, IRO1 e IGSP, foram obtidos considerando-se o critério baseado em relações de forças (Equação 4.60; CCONV = 1 na Tabela 5.7), aquele que obedece a relações de deslocamentos (Equação 4.61; CCONV = 2), e o critério baseado em relações de forças e deslocamentos (CCONV = 3). Nesse último, o processo iterativo só termina, indicando uma nova posição de equilíbrio para o sistema estrutural em análise, quando os dois critérios anteriores forem atendidos simultaneamente. Os parâmetros da Tabela 6.25 foram usados como referência, exceto para IRO1 em que se considerou para  $I_{m\acute{a}x}$  o valor 241.

A Tabela 6.28 indica que com IRP1 e IRP2 consegue-se obter a trajetória de equilíbrio de forma completa, independente do critério de convergência adotado. A forma quadrática da resposta ponderada constante apresentou desempenho superior ao da forma linearizada nos três critérios. Entretanto, os valores de  $N_{tot}$ ,  $I_{tot}$  e  $I_{med}$  mostram que, para esse exemplo, o critério baseado em relações de forças apresenta-se mais rigoroso que aquele baseado em deslocamentos. Note-se que, quando CCONV = 2, IGSP consegue obter todas as configurações de equilíbrio do arco. A estratégia IRO1, independente do critério usado, só consegue ir até o ponto C do caminho de equilíbrio.

Tabela 6.29 – Análise dos critérios de convergência.

a. CCONV = 1 (forças)

<b>Estrat.</b>	<b>N<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>med</sub></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>
<b>IRP1</b>	5151	44322	9	1	283.91
<b>IRP2</b>	5257	43854	8	1	272.60
<b>IRO1</b>	10448 <sup>C</sup>	41311	4	4	363.11
<b>IGSP</b>	3876 <sup>D</sup>	25946	7	2	210.53

b. CCONV = 2 (deslocamentos)

<b>IRP1</b>	4327	17673	4	7	179.22
<b>IRP2</b>	3206	18309	6	0	143.85
<b>IRO1</b>	10574 <sup>C</sup>	28821	3	4	337.74
<b>IGSP</b>	6322	23437	4	0	246.45

c. CCONV = 3 (forças e deslocamentos)

<b>IRP2</b>	5151	44321	9	1	484.94
<b>IRP2</b>	5257	43851	8	1	345.7
<b>IRO1</b>	29941 <sup>C</sup>	74092	2	6	114.6
<b>IGSP</b>	3876 <sup>D</sup>	25949	7	2	186.15

C – ponto limite de deslocamento, D – segundo ponto limite de carga.

A influência do fator de tolerância,  $\zeta$ , na solução do problema, pode ser vista na Tabela 6.30 para as mesmas estratégias anteriores. Nessa tabela, são apresentados os resultados para os seguintes valores de  $\zeta$ :  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$ . Nesse estudo, considerou-se o critério de convergência CCONV = 2 e novamente a Tabela 6.25 foi adotada, com exceção do valor de  $\zeta$ .

De acordo com os resultados fornecidos, verifica-se que IRP1, IRP2 e IGSP conseguem obter, para os valores do fator de tolerância  $\zeta$  escolhidos, o traçado completo da trajetória de equilíbrio. Como esperado, com a diminuição de  $\zeta$ , observa-se, principalmente, que o número de iterações média por passo de carga,  $I_{med}$ , aumenta, contribuindo assim para que  $I_{tot}$  seja também elevado. O tempo de CPU também

aumenta com a diminuição do fator de tolerância  $\zeta$ . Note-se que, para  $\zeta = 10^{-4}$  e  $\zeta = 10^{-5}$ , não se verifica mais em IRP1 a necessidade de reinicialização do processo iterativo.

Em IGSP, apesar da elevação de quase todos os parâmetros de análise com a diminuição de  $\zeta$ , o número total de passos de carga manteve-se praticamente constante. As observações do parágrafo anterior são válidas também para IRO1, todavia, com essa estratégia, só foi possível chegar até o ponto C da trajetória, independente do valor de  $\zeta$ .

Tabela 6.30 – Influência do fator de tolerância  $\zeta$ .

a.  $\zeta = 10^{-3}$

<b>Estrat.</b>	<b>N<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>med</sub></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>
<b>IRP1</b>	4327	17673	4	7	179.22
<b>IRP2</b>	3206	18309	6	0	143.85
<b>IRO1</b>	10574 <sup>C</sup>	28821	3	4	337.74
<b>IGSP</b>	6322	23437	4	0	246.45

b.  $\zeta = 10^{-4}$

<b>IRP1</b>	3759	27084	7	0	183.78
<b>IRP2</b>	3920	25856	7	0	204.65
<b>IRO1</b>	29547 <sup>C</sup>	36693	1	6	1225.8
<b>IGSP</b>	6322	32217	5	0	271.16

c.  $\zeta = 10^{-5}$

<b>IRP1</b>	4389	35749	8	0	240.74
<b>IRP2</b>	4549	34518	8	0	216.63
<b>IRO1</b>	64065 <sup>C</sup>	187822	3	25	3329.1
<b>IGSP</b>	6322	41300	7	0	433.47

C – ponto limite de deslocamento.

## 6.6 - ARCO CIRCULAR PARCIALMENTE CARREGADO

Nesta seção, dá-se atenção às estratégias ICA4, IMDO, IRO1 e IGPS no estudo da estabilidade do arco circular birrotulado e parcialmente carregado mostrado na Figura 6.20. Esse sistema estrutural foi inicialmente estudado por Harrison (1982) e recentemente por Xu e Mirmiran (1997), que usaram, na modelagem do arco, elementos finitos com formulação corrotacional e a estratégia de solução não-linear proposta por Riks (1979) (no caso, ICA1, implementada nesta dissertação).

As seguintes análises encontram-se a seguir:

1. Estudo comparativo envolvendo ICA4, IMDO, IRO1 e IGPS;
2. Pontos limites da trajetória: presente trabalho x Xu e Mirmiran (1997);
3. Influência do valor de  $\Delta l_{\min}$ .

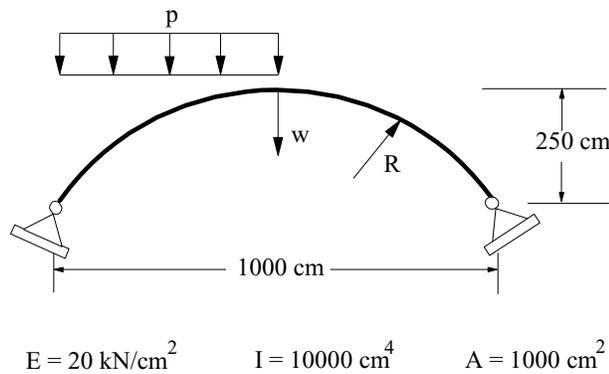


Figura 6.20 - Arco circular parcialmente carregado.

### ***1. Estudo comparativo envolvendo ICA4, IMDO, IRO1 e IGPS***

Considerando-se um modelo com 20 elementos finitos, o método de Newton-Raphson modificado e demais parâmetros da Tabela 6.31, chegou-se aos resultados apresentados na Tabela 6.32 para as estratégias ICA4 (comprimento de arco cilíndrico), IMDO (norma mínima dos deslocamentos residuais), IRO1 (resíduo ortogonal) e IGPS (deslocamento generalizado).

Tabela 6.31 – Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.

Número de elementos: <b>20</b>				Método: <b>NRM</b>					
$I_{\Delta\lambda^0}$	<b>0.01</b>	$I_{des}$	<b>5</b>	CCONV	<b>2</b>	$\Delta I_{mín}$	<b>1.0</b>	$\Delta u_{mín}$	<b>1.0</b>
$I_{máx}$	<b>21</b>	$\zeta$	<b><math>10^{-6}</math></b>	KTEST	<b>3</b>	$\Delta I_{máx}$	<b>100.0</b>	$\Delta u_{máx}$	<b>100.0</b>

Tabela 6.32 – Arco circular parcialmente carregado: estratégias de solução não-linear.

<b>Estrat.</b>	<b><math>N_{tot}</math></b>	<b><math>I_{tot}</math></b>	<b><math>I_{med}</math></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>
<b>ICA4</b>	1713	8704	5	0	32.41
<b>IMDO</b>	1714	8709	5	0	45.14
<b>IRO1</b>	11141 <sup>B</sup>	35123	2	10	243.81
<b>IGSP</b>	4012	12614	3	0	99.58

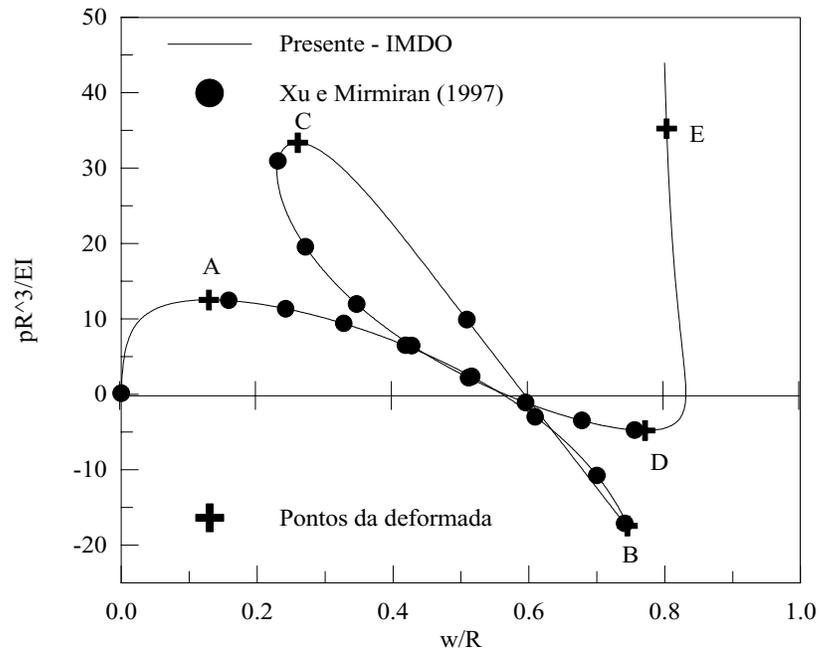
B – segundo ponto limite de carga.

Como nos exemplos anteriores, ICA4 e IMDO apresentaram desempenhos computacionais bem equivalentes. Para o esquema de solução não-linear empregado (Tabela 6.31), observe-se que os valores apresentados na Tabela 6.32 para  $N_{tot}$ ,  $I_{tot}$ ,  $I_{med}$  e Rein estão bem próximos nessas estratégias; apenas o tempo de processamento é diferente. Nesse requisito, ICA4 mostrou-se computacionalmente mais eficiente que IMDO. Nas Figuras 6.21 e 6.22 são fornecidas a trajetória de equilíbrio e as configurações deformadas do arco parcialmente carregado, respectivamente. Resultados extraídos do artigo de Xu e Mirmiran (1997) são também indicados na Figura 6.21.

IGSP foi também capaz de obter a trajetória de equilíbrio de forma completa, porém com números elevados de passos de carga e iterações totais, apesar de o número de  $I_{med}$  ser inferior a ICA4 e IMDO. O tempo de CPU de IGSP foi quase três vezes o de ICA4.

Entre as quatro estratégias mostradas na Tabela 6.32, IRO1 foi a que apresentou o mais fraco desempenho computacional. Como no exemplo anterior, todas as estratégias

que utilizam resíduo ortogonal (IRO1, IRO2, IRO3, IRO4 e IRO5) foram testadas, considerando apenas uma condição de ortogonalidade, e mostraram-se incapazes de contornar o primeiro ponto limite de deslocamento B. IRO4 foi a que apresentou o pior desempenho. Aqui, a introdução da segunda condição de ortogonalidade também não produziu o efeito desejado, pois as estratégias só foram capazes de ir um pouco além do primeiro ponto limite de carga A.



A, B, C e D são pontos limites de carga.

Figure 6.21 – Trajetória de equilíbrio do arco parcialmente carregado.

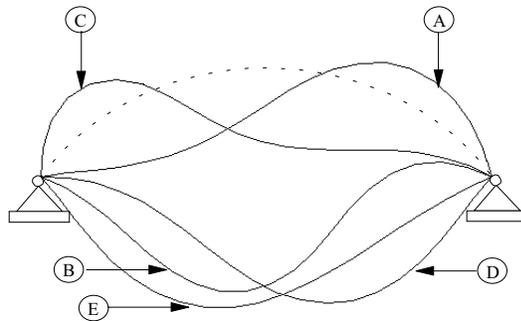


Figura 6.22 - Configurações deformadas do arco parcialmente carregado ( $f_e: 1.5$ ).

## 2. Pontos limites da trajetória: presente trabalho x Xu e Mirmiran (1997)

Na Tabela 6.33 podem ser vistos os valores do parâmetro de carga adimensional  $pR^3/EI$  nos pontos limites A, B e C, obtidos no presente trabalho através das técnicas ICA4 e IGSP. Esses valores são comparados com os resultados numéricos fornecidos no artigo de Xu e Mirmiran (1997). Os dados da Tabela 6.31 foram usados na modelagem do problema.

Observe-se inicialmente que ICA4 e IGSP forneceram os mesmos valores do parâmetro de carga nos pontos limites selecionados; esses resultados para os dois primeiros pontos apresentam, no entanto, certa divergência em relação àqueles de Xu e Mirmiran (1997), já o valor de  $p_C R^3/EI$  ficou bem próximo daquele fornecido pelos referidos pesquisadores.

É importante informar que foram testadas outras estratégias de iteração e incremento de carga, outras formulações não-lineares e melhores modelos de elementos finitos, bem como outros parâmetros da Tabela 6.31 ( ${}^1\Delta\lambda^0$ ,  $\zeta$ , CCONV, KTEST) na tentativa de aproximar os valores de  $p_A R^3/EI$  e  $p_B R^3/EI$  daqueles fornecidos por Xu e Mirmiran (1997). Contudo, os resultados obtidos foram sempre semelhantes aos apresentados para ICA4 e IGSP, usando um modelo de 20 elementos finitos e dados da Tabela 6.31. Observou-se, entretanto, uma maior concordância dos resultados à medida que se reduzia o número de elementos do modelo, levando-se a crer que a formulação corrotacional proposta por Xu e Mirmiran (1997) fornece modelos mais rígidos que a utilizada neste trabalho, a qual seguiu basicamente a implementação de Galvão (2000) para as formulações propostas por Yang e Kuo (1994) e Alves (1995).

Tabela 6.33 – Pontos limites de carga da trajetória de equilíbrio.

	$p_A R^3/EI$	$p_B R^3/EI$	$p_C R^3/EI$
<b>ICA4</b>	12.51	-17.47	33.34
<b>IGSP</b>	12.51	-17.47	33.34
<b>Xu e Mirmiran (1997)</b>	13.77	-20.09	33.99
<b>Erro %</b>	<b>9.15</b>	<b>13.04</b>	<b>1.91</b>

### 3. Influência do valor de $\Delta l_{\min}$

Na Tabela 6.34, pode-se ver a influência do comprimento de arco mínimo  $\Delta l_{\min}$ , definido pelo usuário do programa, no desempenho computacional da estratégia ICA4. Como se sabe,  $\Delta l_{\min}$  pode ter influência no valor de  $\Delta l$ , que participa diretamente no cálculo de  $\Delta \lambda^0$ , como indicado na Equação (3.6). Para o valor de  $\Delta l_{\max}$  e demais parâmetros de controle da solução, foi usada novamente a Tabela 6.31.

Observa-se que, quando  $\Delta l_{\min}$  aumenta, ocorre uma diminuição de  $N_{\text{tot}}$ ,  $I_{\text{tot}}$  e do tempo de processamento, com apenas um aumento do número médio de iterações  $I_{\text{med}}$ . Quando  $\Delta l_{\min}$  atingiu o valor 5, houve a necessidade de uma reinicialização do processo de solução.

Tabela 6.34 - Influência do valor de  $\Delta l_{\min}$ .

$\Delta l_{\min}$	$N_{\text{tot}}$	$I_{\text{tot}}$	$I_{\text{med}}$	Rein	CPU
<b>0.1</b>	1741	8719	5	0	35.76
<b>0.5</b>	1741	8719	5	0	33.40
<b>1.0</b>	1713	8704	5	0	32.41
<b>1.5</b>	1604	8406	5	0	30.81
<b>2.0</b>	1513	8242	5	0	29.93
<b>5.0</b>	1258	7784	6	1	26.15

## 6.7 - ARCO CIRCULAR POUCO ABATIDO

O último exemplo a ser analisado neste capítulo é ilustrado na Figura 6.23. Trata-se do arco circular pouco abatido com as duas extremidades rotuladas. Como no caso do arco abatido da Seção 6.3, as estratégias de solução não-linear são estudadas para duas situações de carregamento: carga centrada (*sistema estrutural perfeito*) e carga excêntrica (*sistema estrutural imperfeito*). Nessa segunda situação, a carga  $P$  será deslocada e aplicada no ponto nodal mais próximo do centro. As trajetórias de equilíbrio apresentadas nas páginas seguintes indicam, para ambos os sistemas estruturais, um comportamento fortemente não-linear com vários pontos limites de carga (*snap-through*) e de deslocamento (*snap-back*).

Resultados numéricos para esse arco- sistema foram apresentados por Yang e Kuo (1994), usando o MEF e a estratégia de solução não-linear IGSP, cuja implementação vê-se nesta dissertação. Galvão (2000) utilizou também este exemplo para testar várias formulações geometricamente não-lineares de elementos finitos reticulados planos.

Nesta seção são efetuadas as seguintes análises:

1. Estudo comparativo envolvendo ICA2, ICA4, IRO5 e IGPS;
2. Pontos limites das trajetórias: presente trabalho  $x$  Yang e Kuo (1994);
3. Influência do critério de escolha do sinal do incremento de carga  $\Delta\lambda^0$ .

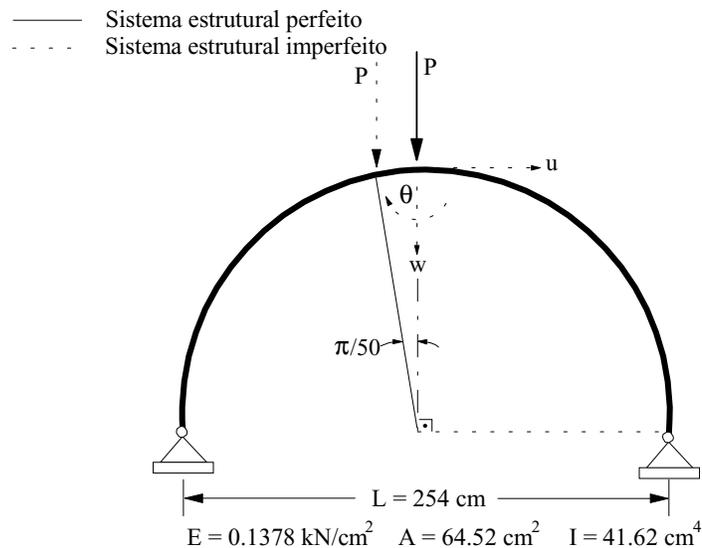


Figura 6.23 - Arco circular pouco abatido.

## ***1. Estudo comparativo envolvendo ICA2, ICA4, IRO5 e IGPS***

O sistema estrutural perfeito foi modelado considerando-se apenas metade do arco, 13 elementos finitos, e restringindo-se o deslocamento axial e a rotação do ponto nodal do eixo de simetria; já no estudo do sistema imperfeito, consideraram-se 26 elementos finitos e o arco completo. Os resultados para esses dois sistemas e para as estratégias ICA2, ICA4 (comprimento de arco linear e quadrático, respectivamente), IRO5 (resíduo ortogonal) e IGPS (deslocamento generalizado) podem ser vistos na Tabela 6.36. Os dados fornecidos na Tabela 6.35 serviram na modelagem da solução não-linear.

Observe-se que as duas técnicas ICA2 e ICA4 apresentaram, de um modo geral, performance computacional bem superior a IRO5 e IGPS. Para o arco perfeito, os resultados apresentados para ICA2 e ICA4 indicam uma equivalência computacional entre as duas estratégias, embora o tempo de processamento de ICA2 tenha sido ligeiramente superior. No caso do arco imperfeito, os números apresentados para  $N_{tot}$ ,  $I_{tot}$ ,  $I_{med}$  e Rein indicam também uma equivalência entre ICA2 e ICA4, porém o tempo de CPU da última estratégia foi bem superior, indicando assim uma melhor performance para ICA2.

O emprego da estratégia IGSP possibilitou o traçado completo das trajetórias de equilíbrio dos dois sistemas, como ilustrado nas Figuras 6.24 e 6.25. Os resultados da Tabela 6.35, entretanto, mostram que foram necessários números elevados de  $N_{tot}$ ,  $I_{tot}$  e CPU para obtenção desses caminhos, apesar do reduzido número médio de iterações por passo de carga. Note-se que, com IGSP, ICA2 e ICA4, não houve a necessidade de reinicialização do processo de solução não-linear. A Figura 6.26 fornece as configurações deformadas do arco imperfeito nos pontos limites de carga A, B, C e D.

Novamente IRO5 apresentou dificuldade em ultrapassar os pontos limites de deslocamento. No caso de arco perfeito, a solução com essa estratégia foi até o ponto H da trajetória (veja Figura 6.24); no sistema imperfeito, o emprego de IRO5 permitiu apenas chegar até o ponto J (veja Figura 6.25). Considerou-se neste estudo apenas uma condição de ortogonalidade,  $\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = 0$ ; a inclusão da segunda condição de ortogonalidade não alterou o desempenho computacional de IRO5.

Vale informar que, nas estratégias supra citadas, exceto para IRO5, a mudança do sinal do incremento parâmetro de carga foi monitorada pela proposta de Yang e Kuo (1994) (KTEST = 3). Em IRO5, foi usada a sugestão de Krenk e Hededal (1995).

Tabela 6.35 – Modelo de elementos finitos e parâmetros da solução não-linear.

Número de elementos (SP): 13				Método: NRM			
Número de elementos (SI): 26							
$I_{\Delta\lambda^0}$	0.03	$I_{des}$	5	CCONV	1	$\Delta I_{min}$	0.1
$I_{máx}$	21	$\zeta$	$10^{-3}$	KTEST	3	$\Delta I_{máx}$	120.0

Tabela 6.36 – Arco circular pouco abatido: estratégias de solução não-linear.

Estrat.	Sistema Perfeito					Sistema Imperfeito				
	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{med}$	Rein	CPU
<b>ICA2</b>	4995	24982	5	0	58.55	11239	56215	5	0	371.02
<b>ICA4</b>	5000	25010	5	0	53.20	11168	56948	5	0	570.07
<b>IRO5</b>	3060 <sup>H</sup>	7532	2	8	27.79	4992 <sup>J</sup>	15529	3	7	138.80
<b>IGSP</b>	8585	29472	3	0	136.54	25996	76042	3	0	836.90

H e J – pontos limite de deslocamento.

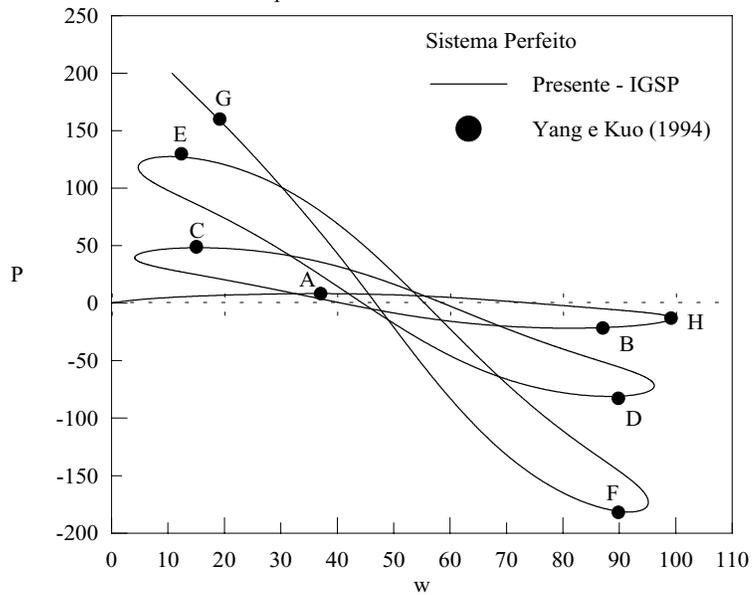


Figura 6.24 – Trajetória de equilíbrio: sistema estrutural perfeito.

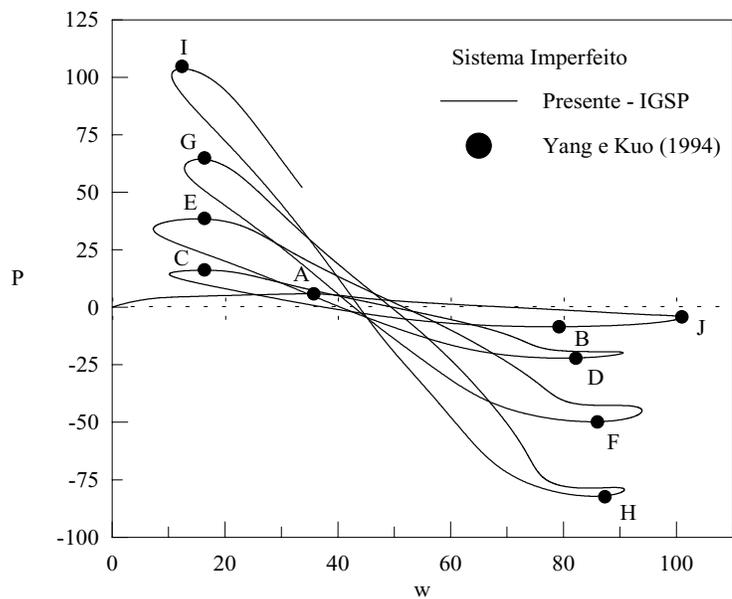


Figura 6.25 – Trajetória de equilíbrio: sistema estrutural imperfeito.

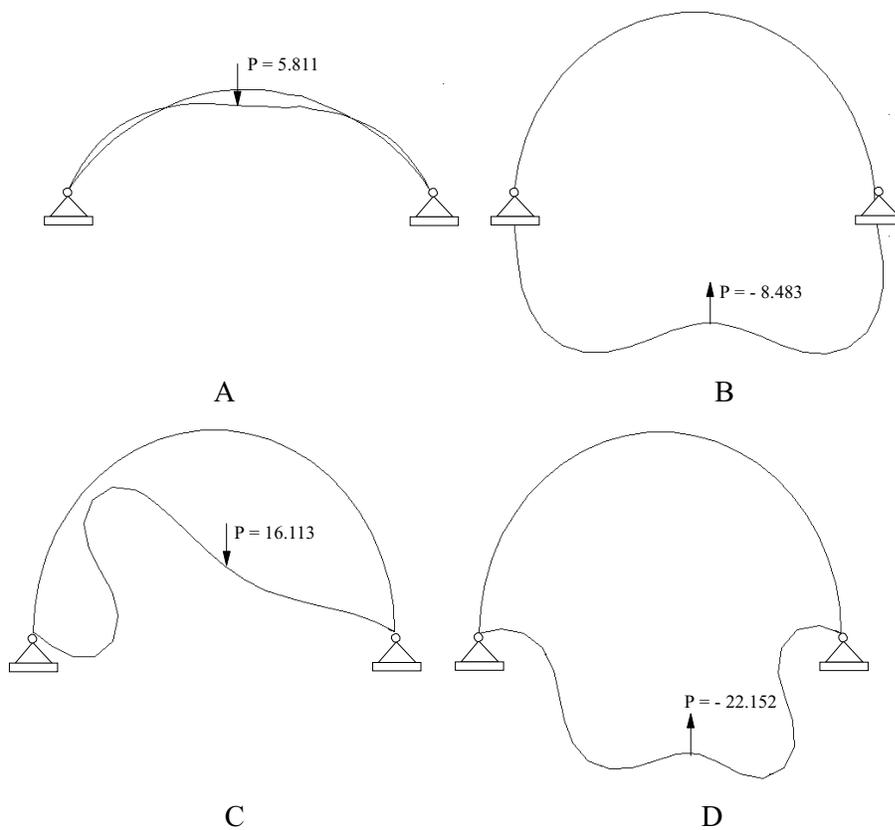


Figura 6.26 - Configurações deformadas do sistema estrutural imperfeito ( $fe: 1.0$ ).

## 2. Pontos limites das trajetórias: presente trabalho x Yang e Kuo (1994)

Nas Tabelas 6.37a,b, são apresentados os valores da carga nos pontos limites F (arco perfeito, veja Figura 6.24) e I (arco imperfeito, veja Figura 6.25), obtidos usando as estratégias ICA2, ICA4 e IGSP. Esses valores são comparados com aqueles fornecidos no livro do Yang e Kuo (1994).

Foram empregados os mesmos modelos de elementos finitos da seção anterior, bem como a Tabela 6.35. Observe-se que os resultados apresentados estão bem próximos daqueles fornecidos por Yang e Kuo (1964), ou seja, o erro encontrado para os pontos limites de carga nos dois sistemas é menor que 1%. No caso do arco perfeito, ICA2 e ICA4 forneceram resultados idênticos, e diferentes de IGSP apenas a partir da segunda casa decimal. No arco imperfeito, os valores de PL I para as três estratégias divergem apenas a partir da terceira casa decimal.

Tabela 6.37 – Ponto limite de carga (PL).

a. Sistema estrutural perfeito: PL F		
<b>Estrat.</b>	<b>PL F</b>	<b>Erro %</b>
<b>ICA2</b>	-181.619	0.21
<b>ICA4</b>	-181.619	0.21
<b>IGSP</b>	-181.621	0.21
<i>Yang e Kuo (1994): PL F= -182.003</i>		

b. Sistema estrutural imperfeito: PL I		
<b>Estrat.</b>	<b>PL I</b>	<b>Erro %</b>
<b>ICA2</b>	103.674	0.90
<b>ICA4</b>	103.675	0.89
<b>IGSP</b>	103.679	0.89
<i>Yang e Kuo (1994): PL I= 104.611</i>		

### 3. Influência do critério de escolha do sinal do incremento de carga $\Delta\lambda^0$

Assim como no caso do pórtico de Roorda (Seção 6.4.2), é realizado nesta seção um estudo para verificar a influência na solução não-linear dos critérios de escolha do sinal do incremento do parâmetro de carga dado pela Equação (3.6). Os resultados são apresentados na Tabela 6.38 para ICA4, considerando o arco perfeito, o arco imperfeito e os seguintes valores de **KTEST**: 0, 1, 2 e 3 (veja Capítulos 3 e 5, e Seção 6.4.2). Mais uma vez os dados da Tabela 6.35 foram usados como referência.

Para **KTEST** = 0 (análise do sinal do determinante de **K**; Crisfield, 1991), as configurações de equilíbrio, tanto do arco perfeito como imperfeito, só puderam ser obtidas até o terceiro ponto limite de carga (PL C). Em **KTEST** = 1 (Bergan *et al.*, 1978), as configurações de equilíbrio, para os dois sistemas analisados, só puderam ser obtidas até o primeiro ponto limite de deslocamento (PL H, sistema perfeito e PL J, sistema imperfeito). Os resultados para **KTEST** = 2 (Krenk e Hededal, 1995) e **KTEST** = 3 (Yang e Kuo, 1994) demonstram uma equivalência, nos dois sistemas, entre esses critérios de escolha do sinal do incremento do parâmetro de carga. Observe-se, entretanto, que o tempo de CPU para **KTEST** = 2, no caso do arco imperfeito, foi bem inferior àquele fornecido para **KTEST** = 3, indicando assim um melhor desempenho computacional.

Tabela 6.38 - Critério de escolha do sinal do incremento de carga  $\Delta\lambda^0$ .

<b>KTEST</b>	<b>Sistema Perfeito</b>					<b>Sistema Imperfeito</b>				
	<b>N<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>med</sub></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>	<b>N<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>tot</sub></b>	<b>I<sub>med</sub></b>	<b>Rein</b>	<b>CPU</b>
<b>0</b>	1770 <sup>C</sup>	8859	5	0	18.95	3311 <sup>C</sup>	16557	5	0	92.88
<b>1</b>	690 <sup>H</sup>	3453	5	0	7.31	2137 <sup>J</sup>	10684	5	0	69.37
<b>2</b>	5000	25010	5	0	66.18	11168	56948	5	0	397.50
<b>3</b>	5000	25010	5	0	53.20	11168	56948	5	0	570.07

C – ponto limite de carga, H e J – pontos limite de deslocamento.

# 7

## CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 7.1 - CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um estudo computacional de várias estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não-linear de estruturas. Esse estudo representou uma continuação de trabalhos anteriores do autor e do orientador desta dissertação (Silveira, 1995; Silveira e Gonçalves, 1997; Silveira, 1999; e Silveira *et al.*, 1999a,b). Os artigos de Krenk (1995) e Krenk e Hededal (1993 e 1995), bem como o livro de Yang e Kuo (1994), foram de fundamental importância nas implementações realizadas.

No Capítulo 6 foram abordados vários exemplos de problemas estruturais encontrados na literatura com o objetivo de validar as implementações realizadas. Em cada exemplo, para que se pudesse efetuar comparações entre as estratégias, procurou-se manter a mesma formulação de elementos finitos e discretização dos modelos estruturais, variando-se as estratégias (incremento de carga e de iteração) e verificando-se a influência de certos parâmetros (como o valor do incremento inicial do parâmetro de carga, número de iterações desejadas, dentre outros) no processo de solução não-linear.

Decorrente das análises dos problemas estruturais presentes nas Seções 6.2, 6.3 e 6.4 — onde se procurou investigar o desempenho de todas as estratégias da Tabela 6.1a,b — e dos exemplos das Seções 6.5, 6.6 e 6.7 — onde se procurou fazer um estudo das melhores estratégias, além de compará-las com a *técnica do resíduo ortogonal* e com o *método do deslocamento generalizado* — pode-se chegar às seguintes conclusões:

ILDC – Como esperado, nos exemplos analisados com essa estratégia só foi possível obter as configurações de equilíbrio dos sistemas estruturais até o primeiro ponto limite de carga. Na Seção 6.2 (coluna engastada-livre), quando se conseguiu obter os caminhos de equilíbrio de forma completa, constatou-se, com o emprego de ILDC, um esforço computacional elevado.

IDIS – A utilização dessa técnica permitiu obter as trajetórias de equilíbrio dos sistemas estruturais analisados apenas até o primeiro ponto limite de deslocamento. Nos casos onde era possível o traçado completo do caminho de equilíbrio, observou-se um grande número de passos de carga e tempo de processamento CPU. Essa estratégia mostrou-se bastante sensível em relação ao valor de  $\Delta u_{\min}$ . Os resultados obtidos através do emprego da Equação (4.4), proposta por Batoz e Dhatt (1979), foram idênticos àqueles fornecidos usando a Equação (4.6), definida por Powell e Simons (1981).

ITEC – Essa técnica apresentou-se de forma instável na maioria dos sistemas estruturais analisados. Foram detectados problemas de convergência para ultrapassar os pontos limites de deslocamento. Foi empregado em ITEC o critério de mudança de sinal do parâmetro de carga sugerido por Bergan *et al.* (1978) (os pontos limites da trajetória de equilíbrio podem ser detectados checando o sinal do incremento do trabalho externo dado pela Equação (3.16)). Como no trabalho de Clarke e Hancock (1990), verificou-se aqui que esse critério pode tornar-se inseguro na vizinhança de pontos limites de deslocamento. Em geral, ITEC apresentou desempenho computacional semelhante a IDIS. Vale destacar a boa performance computacional dessa estratégia de solução não-linear dos Exemplos 6.2 e 6.3 (carga centrada).

ICA1, ICA2, ICA3 e ICA4 – O emprego dessas estratégias permitiu a passagem por todos os pontos críticos presentes nas trajetórias de equilíbrio dos sistemas estruturais analisados e com isso pôde-se conhecer a resposta completa da estrutura. As formas linearizadas caracterizaram-se por apresentar desempenhos

computacionais equivalentes. ICA3 pareceu mais sensível à mudança de estratégia de incremento de carga. ICA4 apresentou, de um modo geral, grande estabilidade e ótimo desempenho computacional em todos os problemas analisados. As formas quadráticas cilíndrica e esférica (ICA3 e ICA4) têm a vantagem de impor durante o processo iterativo que a solução sempre aponte para o mesmo ponto. Entretanto, as observações feitas por Meek e Tan (1984) no que diz respeito à obtenção de raízes imaginárias, puderam ser comprovadas nos exemplos em que se considerou o valor do incremento inicial do parâmetro de carga muito elevado; adicionalmente, como relatado em Silveira (1995), essas formas quadráticas forneceram também raízes imaginárias na solução de sistemas estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato. Para esse tipo de problema as versões linearizadas mais simples do comprimento de arco constante (ICA1 e ICA2) apresentaram-se mais adequadas.

IRP1 e IRP2 – Apresentaram-se estáveis e capazes de obter todas as configurações de equilíbrio dos sistemas estruturais analisados. Na realidade, IRP1 e IRP2 tiveram, em quase todos os exemplos, desempenhos computacionais equivalentes ao de ICA4. A forma quadrática (IRP2) apresentou em alguns exemplos desempenho superior ao da versão linearizada (IRP1).

IMDO – Apresentou performance computacional equivalente às estratégias *resposta ponderada constante* (IRP1 e IRP2). O emprego de IMDO possibilitou a passagem de todos os pontos críticos presentes nas trajetórias de equilíbrio dos sistemas estudados. Em alguns exemplos chegou a apresentar desempenho equivalente ou melhor que as versões linearizadas e quadráticas do comprimento de arco.

IMFD – Não foi capaz de traçar de forma completa as trajetórias de equilíbrio dos problemas analisados, apresentando sempre problemas de convergência já no primeiro ponto limite de carga. Em algumas análises variou-se os valores mínimos e máximos do comprimento de arco de tal sorte que os incrementos dos passos de carga iniciais ficassem bem pequenos e dessa forma conseguiu-se obter todas as

configurações de equilíbrio. Isso pôde ser verificado na Seção 6.2 (carga centrada). Essa estratégia pareceu trabalhar de forma mais adequada para pequenos valores do incremento de carga.

*IRO1, IRO2, IRO3, IRO4 e IRO5* – Essas estratégias apresentaram-se de forma eficiente na modelagem dos problemas estruturais exibindo apenas pontos limites de carga. Porém, pode-se verificar o grande esforço computacional quando elas eram usadas na solução de estruturas exibindo ‘snap-back’. Após o ponto limite de deslocamento, observou-se uma grande redução do passo de carga e como conseqüência a elevação do número de passos de carga e tempo computacional de análise. Certos pontos limites da trajetória não puderam ser ultrapassados em alguns exemplos. Constatou-se em algumas análises que a inclusão da segunda condição de ortogonalidade poderia melhorar o desempenho computacional; em outros casos, a inclusão dessa segunda condição de ortogonalidade não produziu o efeito desejado. A consideração de um valor maior para o número de iterações máximas ( $I_{max}$ ), fez com que o desempenho computacional de algumas dessas estratégias melhorassem. IRO1 foi o esquema de solução sugerido originalmente por Krenk e Hededal (1993 e 1995); as outras estratégias foram variações sugeridas pelo autor desta dissertação (modificando apenas a forma de se obter  $\Delta\lambda^0$ ). Foi observado em alguns problemas que IRO1 trabalhou realmente de forma mais adequada; entretanto, outras soluções não-lineares foram obtidas mais facilmente através de IRO5.

*IGSP* – Nos vários problemas não-lineares resolvidos usando essa técnica pode-se notar, de um modo geral, um número elevado de passos de carga e alguma dificuldade em ultrapassar certos pontos críticos da trajetória. Em alguns exemplos, constatou-se que a utilização de um valor pequeno para o incremento inicial do parâmetro de carga ( $\Delta\lambda_1^0$ ) contribuiu para que os resultados melhorassem consideravelmente. IGSP destacou-se por apresentar valores pequenos do número de iterações médias e de reinicialização do processo iterativo. A adoção do critério de convergência baseado nos deslocamentos ( $C_{CONV} = 2$ ) mostrou-se

fundamental para a obtenção de todas as configurações de equilíbrio do arco circular rotulado-engastado da Seção 6.5.

Vários parâmetros contribuíram para obtenção de resultados expressivos nas aplicações das diversas estratégias, dentre eles, destacam-se:

Incremento inicial do parâmetro de carga,  ${}^1\Delta\lambda^0$ . A consideração de um valor muito pequeno teve como principal desvantagem o aumento do número total de incrementos de carga para resolver de forma completa os problemas apresentados. IGSP e IMFD trabalharam de forma mais adequada com valores pequenos de  ${}^1\Delta\lambda^0$ . Na maioria dos exemplos, verificou-se que o valor médio desse parâmetro implica em melhores performances computacionais.

Número de iterações desejadas,  $I_{des}$ . Quando ocorre aumento desse parâmetro, observa-se que o incremento de carga aumenta, conseqüentemente o número de passos de carga diminui e o número de iterações médias aumenta, mas o tempo de CPU diminui, melhorando assim a performance computacional do sistema estrutural analisado. Isso pode ser comprovado na Seção 6.4.1.

Parâmetro  $\alpha$ , presente na Equação (3.1). Foi verificado que a variação desse parâmetro não produz grandes alterações nos resultados, o que pode ser constatado na Seção 6.3. Esse parâmetro foi tomado igual a 0.5 na maioria das aplicações.

Determinação dos valores mínimos de incremento: carga,  $\Delta\lambda_{\min}$ ; deslocamento,  $\Delta u_{\min}$ ; trabalho,  $\Delta w_{\min}$ ; e comprimento de arco,  $\Delta l_{\min}$ . A adoção desses valores requer cuidados especiais em função da grande influência sobre o desempenho da solução não-linear. Na Seção 6.6 pode-se verificar a influência de  $\Delta l_{\min}$  na determinação de  $\Delta l$ , que participa diretamente no cálculo de  $\Delta\lambda^0$ , como indicado na Equação (3.6). Constatou-se que um aumento de  $\Delta l_{\min}$  produz uma diminuição

de  $N_{\text{tot}}$ ,  $I_{\text{tot}}$  e tempo de CPU.  $\Delta u_{\text{mín}}$  tem grande influência na performance computacional de IDIS, assim como  $\Delta w_{\text{mín}}$  no desempenho de ITEC.

Métodos de Newton-Raphson padrão (NRP) e modificado (NRM). Em algumas aplicações foi observado uma melhoria nos resultados obtidos com o emprego do método NRP, principalmente com a estratégia do comprimento de arco cilíndrico (ICA4). Em outras estratégias verificou-se que, apesar do número de iterações ter diminuído, o número total de passos de carga permaneceu constante, contribuindo assim para elevar o tempo de CPU em relação ao método NRM. A forma modificada (NRM) pareceu mais adequada na solução dos problemas não-lineares analisados nesta dissertação.

Influência do carregamento ( $F_r$ ) na definição do parâmetro  $\Delta \lambda^0$ . Verificou-se que em geral a consideração  $F_r$  no cálculo do incremento da carga tinha pouca influência no processo de solução não-linear (Equações 3.6 e 3.8). No entanto, na Seção 6.2 (coluna engastada-livre), pode-se observar que a técnica ICA3 trabalhou mais adequadamente quando se considerou a contribuição da carga (Equação 6.8).

Fator de tolerância,  $\zeta$ . Contribuiu para verificar a eficiência computacional das técnicas de solução não-linear. Observou-se que, quando  $\zeta$  diminui, ocorre um aumento do número de iterações médio por passo de carga ( $I_{\text{med}}$ ), o que contribui para que o número de iterações totais seja também mais elevado. Verificou-se ainda que o tempo de processamento aumenta com a diminuição do fator de tolerância  $\zeta$ . O número de passos de carga ( $N_{\text{tot}}$ ) foi o parâmetro que permaneceu constante com a variação de  $\zeta$ .

Critério de convergência, CCONV. Na maioria dos problemas estruturais analisados adotou-se o critério baseado em relações de forças (CCONV = 1). No entanto, foi verificado nas Seções 6.5 e 6.6 que esse critério apresentava-se de forma rigorosa que aquele baseado nos deslocamentos (CCONV = 2). Algumas

estratégias reagiram de forma mais adequada quando foi adotado o critério baseado em deslocamentos.

Critério de escolha do sinal do incremento de carga  $\Delta\lambda^0$ . De acordo com análises realizadas (Seções 6.4.2 e 6.7), verificou-se que esse parâmetro pode contribuir de forma relevante para um melhor desempenho computacional das estratégias de solução não-linear estudadas.

A modelagem do sistema estrutural destaca-se também como fator de grande importância na precisão dos resultados obtidos pelas estratégias não-lineares. Procurou-se trabalhar nesta dissertação com modelos de elementos finitos que fornecessem resultados precisos.

## 7.2 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

A seguir são apresentadas algumas propostas para desenvolvimento de trabalhos futuros:

1. Implementar outras estratégias adaptativas de incremento automático de carga (Bergan e Soreide, 1973 e Bergan *et al.*, 1978);
2. Implementar outras estratégias iterativas de solução não-linear;
3. Implementar procedimentos numéricos que consigam determinar com precisão pontos críticos (bifurcação, máximos e mínimos) ao longo das trajetórias de equilíbrio (Wagner e Wriggers, 1988; Wriggers e Simo, 1990; Chan, 1993; Shi e Crisfield, 1994; Crisfield, 1997 e Oñate e Matias, 1996);
4. Utilizar as estratégias implementadas nesta dissertação para a análise não-linear de treliças planas e espaciais, bem como pórticos espaciais;
5. Estender as estratégias implementadas nesta dissertação para análise não-linear de placas e cascas;
6. Melhorar os métodos de controle de deslocamentos e de controle de trabalho externo (Fujii *et al.*, 1992 e Chen, 1993);
7. Combinar a estratégia de Reinicialização com a de mudança do método de Newton-Raphson (Modificado para Padrão).

# | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves, R.V. (1993a), “Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Total”, 1º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ.

Alves, R.V. (1993b), “Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado”, 3º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ.

Alves, R.V. (1995), “Instabilidade Não-Linear Elástica de Estruturas Reticuladas Espaciais”, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

Ammar, S., Dhatt, G. e Fafard, M. (1996), “Exact Stability Model of Space Frames”, *Computers & Structures*, Vol. 60, N° 1, pp. 59-71.

Argyris, J.H. (1964), “Recent Advances in Matrix Methods of structural Analysis”, Pergamon Press.

Batoz, J.L. e Dhatt, G. (1979), “Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 14, pp. 1262-1267.

Bergan, P.G. e Soreide, T. (1973), “A Comparative Study of Different Numerical Solution Techniques as Applied to a Nonlinear Structural Problem”, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 2, pp. 185-201.

Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Krakeland, B. e Soreide, T. (1978), "Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 12, pp. 1677-1696.

Brebbia, C. e Connor, J. (1969), "Geometrically Non-Linear Finite Element Analysis", *Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Proc. Paper 6516*.

Chan, S.L. (1988) "Geometric and Material Nonlinear Analysis of Beam-Columns and Frames Using the Minimum Residual Displacement Method", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 26, pp. 2657-2669.

Chan, S.L. (1993), "A Non-Linear Numerical Method for Accurate Determination of Limit and Bifurcation Points", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 36, pp. 2779-2790.

Chen, H. (1993), "Work-Incremental-Control Method for Non-Linear Analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 36, pp. 909-930.

Clarke, M.J. e Hancock, M.J. (1990), "A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear Analyses", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 29, pp. 1365-1391.

Chajes, A. e Churchill, J.E. (1987), "Nonlinear Frame Analysis by Finitiy Element Methods", *Journal of Strucural Engineering*, Vol. 113, N<sup>o</sup>. 6, pp 1221-1235.

Choi, J.K. e Lim, J.K (1995), "General Curved Beam Elements Based on The Assumed Strain Fields", *Computers & Structures*, Vol. 55, N<sup>o</sup>. 3, pp. 379-386.

Crisfield, M.A. (1979), "A Faster Modified Newton-Raphson Iteration", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 20, pp. 267-278.

Crisfield, M.A. (1980), "Alternative Methods Derived from the BFGS Formula", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15, pp. 1419-1420.

Crisfield, M.A. (1981), "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles (Snap-Through)", *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 52-62.

Crisfield, M.A. (1991), "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", John Wiley & Sons, Vol 1.

Crisfield, M.A. (1997), "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", John Wiley & Sons, Vol 2.

Da Deppo, D.A. e Schmidt R. (1975), "Instability of clamped-Hinged Circular arches Subjected to a Point Load", *Trans. ASME*, pp. 894-896.

Fafard, M. e Massicotte, B. (1993), "Geometrical Interpretation of the Arc-Length Method", *Computers & Structures*, Vol. 46, N<sup>o</sup>. 4, pp. 603-615.

Feng, Y.T.; Perié, D. e Owen, D.R.J. (1996), "A New Criterion for Determination of Initial Loading Parameter in Arc-Length Methods", *Computers & Structures*, Vol. 58, N<sup>o</sup>. 3, pp. 479-485.

Feng, Y.T.; Perié, D. e Owen, D.R.J. (1997), "On the Sign of the Determinant of the Structural Stiffness Matrix for Determination of Loading Increment in Arc-Length algorithms", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, pp. 47-49.

Forde, B. W.R. e Stiemer, S.F. (1987), "Improved Arc Length Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 27, pp. 625-630.

Fried, I. (1984), "Orthogonal Trajectory Accession to the Nonlinear Equilibrium Curve", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 47, pp. 283-297.

Fujii, F., Choong, K.K. e Gong, S.X. (1992), “Variable Displacement Control to Overcome Turning Points of Nonlinear Elastic Frames”, *Computers & Structures*, Vol. 44, pp. 133-136.

Gierlinski, J.T. e Graves Smith, T.R. (1985), “A Variable Load Iteration Procedure for Thin-Walled Structures”, *Computers & Structures*, Vol. 21, pp. 1085-1094.

Galvão, A.S. (2000), “Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos”, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas - UFOP, Ouro Preto, MG.

Galvão, A.S., Silveira, R.A.M. e Gonçalves, P.B (2000), “Buckling and Post-Buckling Behavior of L-Frames”, XXI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia (XXI CILAMCE), PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Goto, Y. e Chen, W. (1987), “Second-Order Elastic Analysis for Frame Design”, *Journal of the Structural Engineering*, Vol. 113, N<sup>o</sup>. 7, pp. 1500-1519.

Heijer, C.D. e Rheinboldt, W.C. (1981), “On Steplength Algorithms for a Class of Continuation Methods”, *SIAM J. Num. Analysis*, Vol. 18, pp. 925-948.

Harrison, H.B. (1982), “In-Plane Stability of Parabolic Arches”, *Journal of the Structural Division*. Vol. 108, pp. 195-205.

Koiter, W.T. (1967), “Post-Buckling Analysis of Simple Two-Bar Frame in Recent Progresses in Applied Mechanics”, Broberg. Ed. Almqvist and Wiksell, Sweden.

Koiter, W.T. (1970), “On the Stability of Elastic Equilibrium”, (Tradução do Alemão), Relatório Técnico, AFFDL-TR-70-25, Airforce Flight Dynamics Lab.

Kouhia, R. e Mikkola, M. (1989), "Tracing the Equilibrium Path Beyond Simple Critical Points", *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, Vol. 28, pp. 2923-2941.

Krenk, S. e Hededal, O. (1993), "A Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations", *Engineering Mechanics Comput. Departamento de Tecnologia da Construção e Engenharia Estrutural, Aalborg University, Denmark*, N<sup>o</sup>. 12, pp. 01-18.

Krenk, S. e Hededal, O. (1995), "A Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations", *Comput. Methods appl. Mech. Engrg.* Vol. 123, pp. 95-107.

Krenk, S. (1995), "An Orthogonal Residual Procedure for Non-Linear Finite Element Equations", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 38, pp. 823-839.

Lee, S.S.; Koo, J.S. e Choi, J.M. (1994), "Variational Formulation for Timoshenko Beam Element by Separation of Deformation Mode", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 599-610.

Lam, W.F. e Morley, C.T. (1992), "Arc-Length Method for Passing Limit Points in Strutural Calculation", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, N<sup>o</sup>. 1, pp. 169-185.

Li, M. (1998), "The Finite Deformation Theory for Beam, Plate and Shell Part III, The Three-dimensional Beam Theory and the FE formulation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* N<sup>o</sup>. 162, pp. 287-300.

Lin, T.W.; Yang, Y.B. e Shiau, H.T. (1993), "A Work Weighted State Vector Control Method For Geometrically Nonlinear Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 46, N<sup>o</sup>. 4, pp. 689-694.

Luenberger, D.G. (1984), "Linear and Nonlinear Programming", 2<sup>a</sup> Edição (Addison Wesley, Reading, Massachusetts).

Microsoft FORTRAN PowerStation. Version 4.0. (1994-1995), Microsoft Corporation.

Mallett, R.H. e Marcal, P.V. (1968), “Finite Element Analysis of Nonlinear Structures”, Journal of the Structural Division. Proc. ASCE, Vol. 94, N°. ST9, pp. 2081-2103.

Matsununga, H. (1996), “Buckling Instabilities of Thick Elastic Beams Subjected to Axial Stresses”, Computers & Structures, Vol. 59, N°. 5, pp. 859-868.

Matthies, H. e Strang, G. (1979), “The solution of nonlinear finite element equations”, Int. J. Numer. Methods Engrg, Vol. 14, pp. 1613-1626.

Meek, J.L. e Tan, H.S. (1984) “Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique”, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol. 47, pp. 261-282.

Moran, A.; Oñate, E. e Miquel, J. (1998), “A general Procedure for Deriving Symmetric Expressions Matrioces in Finite Element Analysis”, Int. J. Numer. Meth. in Engng. John Wiley & Sons, N°. 42, pp. 219-236.

Neuenhofer, A. e Filippou, F.C. (1997), “Evaluation of Nonlinear Frame Finite-Element Models”, Journal of the Structural Engineering, Vol. 123, N°. 7.

Neuenhofer, A. e Filippou, F.C. (1998), “Geometrically Nonlinear Flexibility-Based Frame Finite Element”, Journal of the Structural Engineering, Vol. 124, N°. 6, pp. 704-711.

Neto, E.A.S. e Feng, Y.T. (1999), “On the Determination of the Path Direction for Arc-Length Methods in the Presence of Bifurcations and (Snap-Backs)”, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol. 179, pp. 81-89.

Oñate, E. e Matias, W.T. (1996), “A Critical Displacement Approach for Predicting Structural Instability”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., N°. 134, pp. 135-161.

Pacoste, C. e Eriksson, A. (1995), "Element behaviour in post-critical plane frames analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, N<sup>o</sup>. 125, pp. 319-343.

Pacoste, C. e Eriksson, A. (1997), "Beam Elements in Instability Problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, N<sup>o</sup>. 144, pp. 163-197.

Petrolito, J. (1995), "Stiffness Analysis of Beam Using a Higher-Order Theory", *Computers & Structures*, Vol. 55, N<sup>o</sup>. 1, pp. 33-39.

Powell, G. e Simons, J. (1981), "Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 17, pp. 1455-1467.

Ramm, E. (1981), "Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", Springer-Verlag, Berlim, pp. 63-89.

Riks, E. (1972), "The Application of Newton's Methods to the Problems Elastic Stability", *Int. J. Solids Structures*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp. 1060-1066.

Riks, E. (1979), "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 15, pp. 529-551.

Rizzi e Gioncu, V. (1990), "Structural Stability", Theory and Practice. Short Course, COPPE-UFRJ.

Rocha, G. e Silveira, R.A.M. (2000), "Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração para Análise Não-Linear de Estruturas", *Anais do IV Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional (SIMMEC/2000)*, Uberlândia/MG, Brasil, Maio, 01-03/05/2000, pp. 353-361.

Roorda, J. (1965), "The Instability of Imperfect Elastic Structures", Ph. D. University College London, England.

Rhim, J. e Lee, S.W. (1998), "A Vectorial Approach to Computational Modelling of Beams Undergoing Finite Rotations", *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* N<sup>o</sup>. 41, pp. 527-540.

Schweizerhof, K.H. e Wriggers, P. (1986), "Consistent Linearization for Path Following Methods in Nonlinear FE Analysis", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 59, pp. 269-279.

Shi, J. e Crisfield, M.A. (1994), "A Semi-Direct Approach for the Computation of Singular Points", *Computers & Structures*, Vol. 51, N<sup>o</sup>. 1, pp. 107-115.

Spacone, E., Ciampi, V. e Filippou, F.C. (1996), "Mixed formulation of Nonlinear Beam Finite Element", *Computers & Structures*, Vol. 58, pp. 71-83.

Silveira, R.A.M. (1995), "Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato", Tese de Doutorado. PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ.

Silveira, R.A.M. e Gonçalves, P.B. (1997), "Solução de Sistemas de Equações Não-Lineares - O Método do Comprimento de Arco", XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, São Carlos/SP.

Silveira, R.A.M. (1999), "Estratégias Numéricas para Análise de Elementos Estruturais Esbeltos", Relatório Técnico-Científico Final. Ref.: TEC 2496/96. Departamento de Engenharia Civil/Escola de Minas - Universidade Federal de Ouro Preto.

Silveira, R.A.M., Rocha, G., e Gonçalves, P.B. (1999a), "Estratégias Numéricas para Análises Geometricamente Não-Lineares", Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM/99), Águas de Lindóia/SP, Brasil, Novembro, 22-26/11/1999, 10 páginas, CD-ROM, ISBN: 85-85769-03-3.

Silveira, R.A.M., Rocha, G., e Gonçalves, P.B. (1999b), “Estratégias de Incremento de Carga e Iteração para Análise Não-Linear de Estruturas”, Anais do XX Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia (XX CILAMCE), Universidade de São Paulo, São Paulo/SP, Brasil, Novembro, pp. 213.1-213.20, CD-ROM, ISBN: 85-901027-1-8.

Southwell, R.V. (1941), “An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists”, 2ª Edição, Oxford University Press, Oxford, England.

Software GRAPHER. (1993/1994), “2-D Graphing System”, Version 1.09, Golden Software, Inc.

Torkamani, M.A.M.; Sonmez, M. e Cao, J. (1997), “Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method”, Journal of Structural Engineering, Vol 12, Nº. 9, pp. 1225-1235.

Wagner, W. e Wriggers, P. (1988), “A Simple Method for the Calculation of Post-Critical Branches”, Engng. Comput. Vol. 5, pp 103-109.

Wriggers, P. e Simo, J.C. (1990), “A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points”, Int. J. Numer. Methods Engrg., Vol. 30, pp 155-176.

Wempner, G.A. (1971), “Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids”, Int. J. Solids Struct., Vol. 7, pp. 1581-1599.

Widjaja, B.R. (1998), “Path-Following Technique Based on Residual Energy Suppression for Nonlinear Finite Element Analysis”, Computers & Structures, Vol. 66, Nºs. 2-3, pp. 201-209.

Wood, R.D. e Zienkiewicz, O.C. (1977), “Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells”, Computers & Structures, Vol. 7, pp. 725-735.

Wong, M.B. e Tin-Loi, F. (1990), “Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures”, *Computers & Structures*, Vol. 34, N° 4, pp. 633-640.

Xu, Z. e Mirmiran, A. (1997), “Looping Behavior of Arches Using Corotational Finite Element”, *Computers & Structures*, Vol. 62, N° 6, pp. 1059-1071.

Yang, Y.B. e Shieh, M.S. (1990), “Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 28, N° 12, pp. 2110-2116.

Yang, Y.B. e Kuo, S.B. (1994), “Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures”, Prentice Hall.

Zienkiewicz, O.C. (1971), “The Finite Element in Engineering Science”, McGraw-Hill, London.

Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L. (1991), “The Finite Element Method”, McGraw-Hill Book Company (UK), Vol. 2.

Zhiliang, F. (1994), “A Study of Variable Step-Length Incremental/Iterative Methods for Nonlinear Finite Element Equations”, *Computers & Structures*, Vol. 52, N° 6, pp. 1269-1275.

Zhou, Z. e Murray, D.W. (1994), “An Incremental Solution Technique for Unstable Equilibrium Paths of Shell Structures”, *Computers & Structures*, Vol. 55, N° 5, pp. 749-759.