

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE DE PROBLEMAS DE FLUXO EM MEIO POROSO NÃO SATURADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

AUTOR: JOSÉ CHRISTIANO MACHADO JÚNIOR

ORIENTADORA: Prof^ª. Christianne de Lyra Nogueira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Geotecnia.

Ouro Preto, março de 2000.

**ANÁLISE DE PROBLEMAS DE FLUXO EM MEIO POROSO NÃO
SATURADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

AUTOR: JOSÉ CHRISTIANO MACHADO JÚNIOR

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 24 de março de 2000, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof^ª. Christianne de Lyra Nogueira (Orientadora / UFOP)

Prof. Waldyr Lopes de Oliveira Filho (UFOP)

Prof. Luiz Gonzaga de Araújo (UFOP)

Prof. Eurípedes do Amaral Vargas (PUC-Rio)

DEDICATÓRIA

A Deus

AGRADECIMENTOS

- A Professora Christianne pela dedicação e pela atenção durante a realização deste trabalho.
- Aos meus pais, irmãos e à Daniela pela paciência e por toda ajuda nos momentos difíceis.
- Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, mestrado em geotecnia, pelos conhecimentos transmitidos e por toda ajuda, direta ou indireta, especialmente aos professores Waldyr e Luiz Gonzaga.
- Aos funcionários do DECIV, especialmente à Silvana
- Aos colegas de curso, especialmente Ana Paula, Gilberto, Sandra, Carlos e Sérgio pela amizade e companheirismo.
- A Ciomara pela ajuda com o Inglês.
- Aos funcionários da biblioteca e do laboratório de computação, especialmente à Aparecida, Vera, Fátima e ao Prof. Walter.
- A UFOP, Fundação Gorceix e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

RESUMO

Os problemas de fluxo em solos são de grande importância na engenharia. Pode-se destacar, dentro da engenharia geotécnica, problemas relacionados à estabilidade de obras de terra como barragens de terra e pavimentos rodoviários; assim como, problemas relacionados à estabilidade de taludes e encostas. Pode-se, ainda, destacar os problemas relacionados à geotecnia ambiental como o transporte de contaminantes em solos e a estabilidade de estruturas de disposição de rejeitos de mineração.

Para solos saturados, o tratamento do problema de fluxo é relativamente simples sendo baseado na Lei de Darcy, considerando a condutividade hidráulica constante independente do nível de sucção no solo. Para solos não saturados, verifica-se uma variação das propriedades hidráulicas do solo com o aumento da sucção. Devido a esta variação, o fluxo em solos não saturados constitui um problema não linear apresentando, quando possível, uma solução analítica complexa, o que exige alternativas mais elaboradas como as soluções numéricas baseadas nos métodos das diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno.

Este trabalho apresenta um modelo computacional em elementos finitos para a simulação do processo de fluxo em solos não saturados sob diferentes condições de contorno sem levar em conta a variação de volume e temperatura. São ressaltados alguns conceitos básicos relacionados ao processo de fluxo em solos não saturados, o equacionamento do problema e sua formulação via MEF. São apresentadas, ainda, a solução do problema no tempo, através do método das diferenças finitas, e a estratégia para o tratamento da não linearidade com a utilização do algoritmo preditor-corretor apresentado por Gerscovich (1994).

Como aplicação do modelo desenvolvido, apresenta-se uma série de exemplos de validação unidimensionais e bidimensionais. Finalmente, apresenta-se um estudo de caso real e as conclusões e sugestões sobre o trabalho como um todo.

Palavras chave: 1. mecânica dos solos. 2. percolação. 3 solo não saturado.

ABSTRACT

The water flow in soils is an important problem in geotechnical engineering. Problems such as stability of soil structures as dams and road pavements, slope stability, debris flow, spread of contaminants in soils, stability of tailings disposal structures are strongly affected by the water flow in soils.

The water flow in soils are commonly studied neglecting the unsaturated flow portion. However it's difficult to obtain an accurate answer to those geotechnical questions without considering the unsaturated flow. The unsaturated flow constitutes a transient non-linear problem that has a complex analytical answer. Because of this, it is more attractive to use computer numerical solutions such as those based in the finite element method.

This work presents a finite element model to simulate the water flow in unsaturated soils in a bidimensional domain under different boundary conditions. The time solution is based in a finite difference scheme and the non-linearity is solved by a predictor-corrector algorithm proposed by Gerscovich (1994).

The main concepts in unsaturated flow and the FEM formulation for the unsaturated flow problem without volume change and in isothermal conditions are presented. A brief discussion about the computer program is also introduced. Some analyses were carried out in order to validate the model. And finally a case study was developed and analyzed.

Key words: 1. soil mechanics. 2. seepage. 3 unsaturated soils

SUMÁRIO

página

Lista de tabelas	x
Lista de figuras	xiii
Lista de símbolos.....	xix
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 – PROCESSO DE FLUXO EM MEIO POROSO NÃO SATURADO	
2.1 – Introdução	4
2.2 - Curva de retenção de água.....	6
2.3 - Função de condutividade hidráulica.....	12
2.4 – Equação do fluxo em meio poroso não saturado	14
2.5 - Formulação do problema de fluxo em meio poroso não saturado via MEF	17
2.5.1 - Integração no tempo	20
2.5.2 - Estratégia de tratamento da não linearidade	21
CAPÍTULO 3 – O PROGRAMA COMPUTACIONAL GEOFLUX	
3.1 – Considerações gerais	24
3.1.1 - Os macro comandos.	25
3.1.2 - Fluxograma básico	27
3.1.3 – O macro comando SOLVE.....	29
3.2 – Tipos de elementos implementados.....	31
3.3– Matrizes e vetores característicos	34

CAPÍTULO 4 – EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

4.1 – Fluxo transiente unidimensional.....	44
4.1.1 – Infiltração e drenagem de uma coluna constituída de um único material.....	45
4.1.2 – Infiltração e drenagem de uma coluna constituída de dois materiais	53
4.2 – Fluxo transiente bidimensional.....	61
4.2.1 – Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície.....	62
4.2.2 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal	66
4.2.3 - Fluxo em uma barragem de terra homogênea	70

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE NUMÉRICA DO FLUXO NUMA PILHA DE REJEITO DE MINÉRIO DE FERRO

5.1 - Considerações gerais	73
5.2 - Determinação das propriedades do material	74
5.3 – Metodologia das análises.....	75
5.4 – Análise unidimensional	78
5.5 – Análise bidimensional	89

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 - Considerações Finais.....	93
6.2 – Conclusões.....	94
6.3 – Sugestões	97

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

98

ANEXO I - TÉCNICAS DE INTERPOLAÇÃO UTILIZADAS NA REPRESENTAÇÃO DAS PROPRIEDADES DO MATERIAL

I.1 – Interpolação linear	104
I.2 – Interpolação via spline cúbica	105

ANEXO II – MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA GEOFLUX

II.1 – Considerações gerais	107
II.2 – Entrada de dados	107
II.2.1 – Dados gerais	108
II.2.2 – Malha de elementos finitos	109
II.2.3 – Descrição dos materiais.....	111
II.2.4 – Condições de contorno	113
II.2.5 – Condições iniciais	115
II.3 – Resolução do problema e finalização.....	116
II.4 – Saída de dados.....	119

Lista de Tabelas

Capítulo 3

Tabela 3.1 - Coordenadas dos pontos nodais no sistema de coordenadas natural para o elemento Q4.....	32
Tabela 3.2 - Coordenadas dos pontos nodais no sistema de coordenadas natural para o elemento Q8.....	33
Tabela 3.3 - Pesos e coordenadas dos pontos de Gauss (Chapra e Canale, 1990).	36

Capítulo 4

Tabela 4.1 – Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material – parâmetros do exponencial	46
Tabela 4.2 – Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material – discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo)	47
Tabela 4.3 – Infiltração e drenagem em uma coluna de solo constituída de dois materiais - parâmetros do modelo exponencial	54
Tabela 4.4 – Infiltração em uma coluna de solo constituída de dois materiais - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo)	55
Tabela 4.5 – Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície - parâmetros do modelo exponencial	64
Tabela 4.6 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal – discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo)	68
Tabela 4.7 – Fluxo em uma barragem de terra homogênea - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo)	71

Capítulo 5

Tabela 5.1 – Parâmetros para o modelo de van Genuchten - rejeito de minério de ferro (Oliveira Filho, 1999)	74
Tabela 5.2 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 1 - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo).....	79
Tabela 5.3 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 2 – discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo)	82
Tabela 5.4 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 3 – drenagem- discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo)	85
Tabela 5.5 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise bidimensional – discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo).	91

Anexo II

Tabela II.1 – Arquivo de dados – dados gerais.....	110
Tabela II.2 – Arquivo de dados – malha de elementos finitos para $NF = 1$	111
Tabela II.3 – Arquivo de dados – malha de elementos finitos para $NF = 0$ e $NGELM \neq 0$	111
Tabela II.4 – Arquivo de dados – malha de elementos finitos	111
Tabela II.5 – Arquivo de dados – conectividades dos elementos.	111
Tabela II.6 – Arquivo de dados – distribuição dos materiais no domínio do problema.....	113
Tabela II.7 – Arquivo de dados – propriedades do material para $LCODE = 1$	113
Tabela II.8 – Arquivo de dados – propriedades do material para $LCODE = 2$ ou 3	113
Tabela II.9 – Arquivo de dados – propriedades do material para $LCODE = 4$	113
Tabela II.10 – Arquivo de dados – propriedades do material para $LCODE = 5$	113
Tabela II.11 – Arquivo de dados - condições de contorno em carga prescrita ($D=2$ ou 3).	114
Tabela II.12 – Arquivo de dados – condições de contorno em carga prescrita ($D = 1$)	115
Tabela II.13 - Arquivo de dados - condição de contorno em vazão nodal prescrita	115

Tabela II.14 – Arquivo de dados – condição de contorno em fluxo prescrito.....	116
Tabela II.15 – Arquivo de dados – condições iniciais via arquivo .INI.	116
Tabela II.16 – Arquivo de dados – condições iniciais via arquivo .POS	117
Tabela II.17 – Arquivo de dados – parâmetros para a solução do problema.....	118
Tabela II.18 – Arquivo de dados – controle da variação no incremento de tempo.	118
Tabela II.19 – Arquivo de dados – controle do processo de armazenamento da solução.	118
Tabela II.20 – Arquivo de dados – curvas dadas por pontos – arquivo .CV	119
Tabela II.21 – Arquivo de dados – fecha a execução	119
Tabela II.22 – Arquivo de dados – exemplo 4.2.2.....	119

Lista de Figuras

Capítulo 2

Figura 2.1 – Distribuição de poro-pressão típica em um horizonte de solo	3
Figura 2.2 - Modelo capilar	6
Figura 2.3 - Curva de retenção típica de um solo siltoso (Fredlund e Xing, 1994).....	7
Figura 2.4 – Trechos característicos de uma curva de retenção	8
Figura 2.5 – Curva de retenção, para um processo de drenagem, para diferentes tipos de solo (Fredlund e Xing, 1994)	9
Figura 2.6 – Forma típica da curva de retenção - modelo exponencial	10
Figura 2.7 – Forma típica da curva de retenção - modelo de van Genuchten (1980).	11
Figura 2.8 – Cubo elementar sujeito a um fluxo nas direções x, y e z	15

Capítulo 3

Figura 3.1 – Sequência de macro comandos típica para a solução de um problema de fluxo em meio não saturado.....	26
Figura 3.2 – Fluxograma básico do programa GEOFLUX.....	27
Figura 3.3 – Fluxograma básico da subrotina SOLVE_T	30
Figura 3.4 – Elemento Q4.....	31
Figura 3.5 – Elemento Q8.....	32
Figura 3.6 – Elementos Q4 e Q8 colapsados	33

Capítulo 4

Figura 4.1 – Exemplos de validação - problemas unidimensionais	
a) Infiltração em coluna de solo constituída de um único material	43
b) Drenagem de uma coluna de solo constituída de um único material	43
c) Infiltração em coluna de solo constituída por dois materiais	43

d) Drenagem de uma coluna de solo constituída por dois materiais	43
Figura 4.2 – Exemplos de validação – problemas bidimensionais	
a) Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície.....	44
b) Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal.....	44
c) Fluxo em uma barragem de terra homogênea.	44
Figura 4.3 - Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material – malha de elementos finitos	
	45
Figura 4.4 – Infiltração e drenagem em uma coluna de solo constituída de um único material – curvas características	
a) Função de condutividade hidráulica.....	46
b) Curva de retenção.....	46
Figura 4.5 - Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material – análise preliminar	
	47
Figura 4.6 – Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material - resultados	
a) Carga de pressão.....	48
b) Condutividade hidráulica	49
c) Teor de umidade volumétrica.....	49
Figura 4.7 - Drenagem em uma coluna de solo constituída de um único material – malha de elementos finitos	
	50
Figura 4.8 – Drenagem em uma coluna de solo constituída de um único material – resultados	
a) Carga de pressão.....	51
b) Condutividade hidráulica	52
c) Teor de umidade volumétrica.....	52
Figura 4.9 - Infiltração numa coluna de solo constituída de dois materiais – malha de elementos finitos.....	
	53
Figura 4.10 - Infiltração e drenagem em uma coluna de solo constituída de dois materiais – curvas características	
a) Função de condutividade hidráulica	54
b) Curva de retenção.	54
Figura 4.11 - Processo de Infiltração numa coluna de solo constituída de dois materiais - análise preliminar.	
	55

Figura 4.12 - Infiltração em uma coluna de solo constituída de dois materiais - resultados	
a) Carga de pressão.....	56
b) Condutividade hidráulica	56
c) Teor de umidade volumétrica.....	57
Figura 4.13 - Drenagem de uma coluna de solo constituída de dois materiais – malha de elementos finitos.....	58
Figura 4.14 - Drenagem em uma coluna de solo constituída de dois materiais - resultados	
a) Carga de pressão.....	60
b) Condutividade hidráulica	60
c) Teor de umidade volumétrica.....	61
Figura 4.15 – Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície	62
Figura 4.16 – Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície – malha de elementos finitos	63
Figura 4.17 - Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície – curvas características	
a) Função de condutividade hidráulica.....	64
b) Curva de retenção.....	64
Figura 4.18 - Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície – resultados (isóbaras).	
a) Instante 36min	65
b) Instante 72min.....	65
Figura 4.19 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal.....	66
Figura 4.20 - Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal – curvas características (Zaradny, 1993)	
a) Função de condutividade hidráulica.....	67
b) Curva de retenção.....	67
Figura 4.21 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal – malha de elementos finitos	67
Figura 4.22 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal – evolução da linha piezométrica com o tempo	69

Figura 4.23 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal – comparação entre a condição estacionária obtida pelo GEOFLUX e a solução analítica do problema.....	69
Figura 4.24 – Barragem de terra homogênea com dreno de pé horizontal	70
Figura 4.25 - Fluxo em uma barragem de terra homogênea – curvas características (GEOSLOPE, 1995)	
a) Função de condutividade hidráulica	70
b) Curva de retenção.....	70
Figura 4.26 – Fluxo em uma barragem de terra homogênea - malha de elementos finito	71
Figura 4.27 – Fluxo em uma barragem de terra homogênea - evolução da linha piezométrica com o tempo.	72
Figura 4.28 – Fluxo em uma barragem de terra homogênea – linha piezométrica na condição estacionária.....	72

Capítulo 5

Figura 5.1 – Curvas características - rejeito de minério de ferro	
a) Curva de retenção de água.....	75
b) Função de condutividade hidráulica.....	75
Figura 5.2 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – análise unidimensional	
a) Camada de rejeito inicialmente saturada	76
b) Camadas sobrepostas – camada inferior inicialmente em processo de drenagem	77
c) Camadas sobrepostas – camada inferior inicialmente na condição residual	77
Figura 5.3 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – análise bidimensional	78
Figura 5.4 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 1	78
Figura 5.5 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 1 – resultados em termos da carga de pressão	80
Figura 5.6 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 1 – resultados em termos da percentagem média de drenagem.	80

Figura 5.7 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 2	81
Figura 5.8 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 2 – drenagem/infiltração – resultados em termos da carga de pressão	83
Figura 5.9 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 2 - drenagem – resultados em termos da carga de pressão	83
Figura 5.10 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 2 – resultados em termos da percentagem média de drenagem	84
Figura 5.11 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 3	85
Figura 5.12 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 3 – drenagem/infiltração – resultados em termos da carga de pressão	86
Figura 5.13 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situação 3 - drenagem – resultados em termos da carga de pressão	87
Figura 5.14 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 3 – resultados em termos da percentagem média de drenagem	87
Figura 5.15 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situações 2 e 3 – condições iniciais e finais da etapa 2	88
Figura 5.16 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situações 2 e 3 – resultados em termos da percentagem média de drenagem	89
Figura 5.17 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – configuração adotada para a simulação	89
Figura 5.18 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – malha de elementos finitos	90

Figura 5.19 - Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – evolução da linha piezométrica com o tempo – resultados fornecidos pelo GEOFLUX	92
Figura 5.20 - Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – linha piezométrica na condição estacionária (10 anos) – SEEP/W	

Listagem de Símbolos

B	matriz que relaciona o gradiente hidráulico com a carga hidráulica total nodal
$C(\psi)$	capacidade de retenção específica
F	matriz de capacidade de retenção
FAT	fator multiplicador que introduz o efeito da anisotropia
H	matriz de fluxo do elemento
h_c	altura de ascensão capilar
h_e	carga de elevação
h_t	carga hidráulica total
i	gradiente hidráulico
J	matriz jacobiana
K	matriz de condutividade hidráulica
k	condutividade hidráulica
k_s	condutividade hidráulica saturada
m	parâmetro ajustável para o modelo de Mualem
M_w	massa de água
n	porosidade
N	matriz linha que contém as funções de interpolação (N_i)
ne	número de nós do elemento
N_i	funções de interpolação
NI	número de intervalos de tempo
nn	número de pontos nodais
p	parâmetro ajustável para o modelo de van Genuchten
q	parâmetro ajustável para o modelo de van Genuchten
Q	vetor de vazão nodal equivalente ao fluxo prescrito numa face do elemento
Q'	vetor de vazão nodal equivalente que traduz uma parcela da vazão relativa a efeitos gravitacionais

$R(\hat{\psi})$	resíduo
r	raio efetivo do poro
S	grau de saturação
T_s	tensão superficial
u	poro-pressão u
u_a	pressão de ar
u_e	pressão de entrada de ar
u_w	pressão de água
\bar{v}_x	componente da velocidade de fluxo na direção x
\bar{v}_y	componente da velocidade de fluxo na direção y
\mathbf{v}	vetor de velocidade superficial de fluxo
V	domínio de um dado problema
V_e	subdomínio de um dado problema
w_i, w_j	pesos de Gauss
x, y e z	sistema de coordenadas cartesianas
α	coeficiente que define o tipo de marcha no tempo
α_{exp}	parâmetro ajustável para o modelo exponencial
α_{vg}	parâmetro ajustável para o modelo de van Genuchten
β	ângulo de molhamento
γ_w	peso específico da água
θ	teor de umidade volumétrica
θ_r	teor de umidade volumétrica residual
θ_s	umidade volumétrica saturado
ξ, η	sistema de coordenadas natural
ξ_i, η_j	coordenadas dos pontos de Gauss
ψ	carga de pressão
ψ^*	carga de pressão aproximada
ψ_f	carga de pressão para a condição residual
ψ_t	carga de pressão em um instante t

$\hat{\psi}$	vetor de carga de pressão nodal
Γ	contorno de um dado problema
∇	operador diferencial nabla
ρ_w	massa específica da água

Capítulo 1

Introdução

A questão relativa aos solos não saturados está presente em várias áreas da ciência como a hidrologia, a geotecnia e as ciências agrárias.

Em geotecnia, tem-se os problemas relacionados à estabilidade de obras de terra como barragens (Li e Desai, 1983) e pavimentos rodoviários (Wilson, 1997), bem como, problemas relacionados à estabilidade de taludes e encostas (Gerscovich, 1994; Collins e Znidarcic, 1997). Pode-se destacar, ainda, os problemas relacionados à geotecnia ambiental como o transporte de contaminantes (Nielsen *et al*, 1986) e a estabilidade de estruturas de disposição de rejeitos de mineração (Machado Júnior e Oliveira Filho, 1999; Znidarcic, 1998). Estes problemas são fortemente afetados pelas condições de fluxo nos solos.

O processo de fluxo em solos é de grande importância dentro de estudos geológico-geotécnicos. Na prática da engenharia é comum se tratar este problema de maneira simplificada, desprezando-se o fluxo na região chamada não saturada, também conhecida como zona vadosa ou parcialmente saturada (Nielsen *et al*, 1986). Tal simplificação não permite, na maioria das vezes, uma análise com precisão satisfatória de problemas como os citados anteriormente que envolvem fundamentalmente a parcela de fluxo presente na zona não saturada.

Um solo não saturado pode ser idealizado como um conjunto de partículas em contato que possuem ar e água no seu entorno. Sendo estas partículas de pequena dimensão, a água presente neste meio promove forças capilares que são traduzidas em uma pressão de água negativa, também chamada de sucção. Esta sucção tem grande

influência no processo de fluxo, uma vez que a pressão de água controla o fluxo de água no solo entre pontos com a mesma elevação (Bennett e Wilson, 1999).

O tratamento do problema de fluxo para solos saturados é relativamente simples. Ele se baseia na Lei de Darcy considerando a condutividade hidráulica (propriedade intrínseca do material) constante. Para solos não saturados, a condutividade hidráulica é afetada pela variação da sucção e do teor de umidade volumétrica. O aumento da sucção devido à diminuição do teor de umidade volumétrica, e a conseqüente redução dos caminhos preferenciais de fluxo, implica numa diminuição da condutividade hidráulica. Isto pode ser representado graficamente pelas curvas denominadas função de condutividade hidráulica e curva de retenção (Rahardjo e Leong, 1997). Estas relações não são funções únicas da pressão, elas apresentam um ciclo histerético para etapas de infiltração e drenagem do solo (Nielsen *et al*, 1986), dificultando ainda mais as análises de fluxo em solos não saturados.

A determinação dessas funções pode ser feita através de ensaios de laboratório ou ensaios de campo (Benson e Gribb, 1997). Normalmente, determina-se experimentalmente a curva de retenção ajustando-se os resultados à uma função previamente estabelecida. A partir destes resultados, determina-se a função de condutividade hidráulica com a ajuda de modelos preditores como os propostos por Mualem (1976), van Genuchten (1980) e Fredlund *et al* (1994).

O processo de fluxo em solos não saturados constitui um problema não linear devido à variação das propriedades hidráulicas do material com a pressão de água que, por sua vez, controla o processo de fluxo na massa de solo. A complexidade deste problema aumenta caso seja considerada a variação de volume, de temperatura e a interação físico-química entre solo e água, o que não é objeto de estudo deste trabalho.

Vários modelos numéricos foram propostos para simulação do problema de fluxo em solos não saturados como os de Javandel e Witherspoon (1968), Freeze (1971), Neuman (1973), Papagianakins e Fredlund (1984), Lam e Fredlund (1984), Huayakorn *et al* (1986), Allen e Murphy (1986), Chung e Austin (1987), Tracy e Mariño (1987), Yu e Singh (1994) e Gerscovich (1994).

Os modelos numéricos que consideram fluxo na zona não saturada utilizam normalmente a técnica de diferenças finitas ou elementos finitos. Os modelos que

utilizam a técnica de elementos finitos permitem uma maior flexibilidade para análise de problemas com contorno irregular e de geometria multidimensional e também permitem a inclusão de propriedades não homogêneas com uma maior facilidade.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo computacional em elementos finitos para a simulação bidimensional de processos de fluxo em solos não saturados sob diferentes condições de contorno.

Este trabalho é apresentado em seis capítulos. No segundo capítulo tem-se como objetivo introduzir o problema de fluxo em solos não saturados. Para tanto, são apresentados alguns conceitos básicos relacionados ao problema e as propriedades hidráulicas dos solos, em especial o teor de umidade volumétrica e a condutividade hidráulica. Nesta discussão, são apresentados o modelo proposto por van Genuchten (1980) e o modelo exponencial adotado por Srivastava e Yeh (1991). Apresenta-se ainda, neste capítulo, a equação geral do problema de fluxo em solos não saturados e sua formulação via MEF.

O terceiro capítulo descreve a implementação computacional de maneira geral. Neste capítulo, apresentam-se os macro comandos e os fluxogramas básicos do programa, ressaltando o macro comando SOLVE. Também são apresentados os tipos de elementos finitos implementados, as matrizes e vetores característicos e as estratégias adotadas para a obtenção das propriedades do material. Informações mais detalhadas quanto à utilização do programa são apresentadas no Anexo II.

O quarto capítulo apresenta uma série de exemplos, envolvendo problemas unidimensionais e bidimensionais, para a validação do modelo computacional desenvolvido.

O quinto capítulo apresenta um estudo de caso seguindo a metodologia proposta por Machado Júnior e Oliveira Filho (1999). Foi escolhido o estudo de uma pilha de rejeito de minério de ferro apresentada por Gomes *et al* (1999a). Este capítulo busca ilustrar a aplicabilidade do modelo computacional desenvolvido para a análise de situações reais de campo.

O sexto e último capítulo apresenta um resumo das principais características do modelo implementado, as conclusões obtidas a partir dos estudos realizados e, finalmente, um conjunto de sugestões que podem ser a base para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Processo de Fluxo em Meio Poroso Não Saturado

2.1 – Introdução

A facilidade com a qual o solo permite a passagem da água é traduzida por uma propriedade hidráulica do solo denominada condutividade hidráulica ou permeabilidade. Para solos completamente saturados o valor da condutividade hidráulica permanece praticamente constante. Já para solos não saturados, o valor da condutividade hidráulica varia devido à presença de ar no meio.

A água armazenada no solo, além de afetar a condutividade hidráulica, controla a distribuição de pressões no meio. A Figura 2.1 mostra uma distribuição de poro-pressão (u) típica em um horizonte de solo. Nesta distribuição, destacam-se três zonas distintas: zona saturada, franja capilar e a zona não saturada.

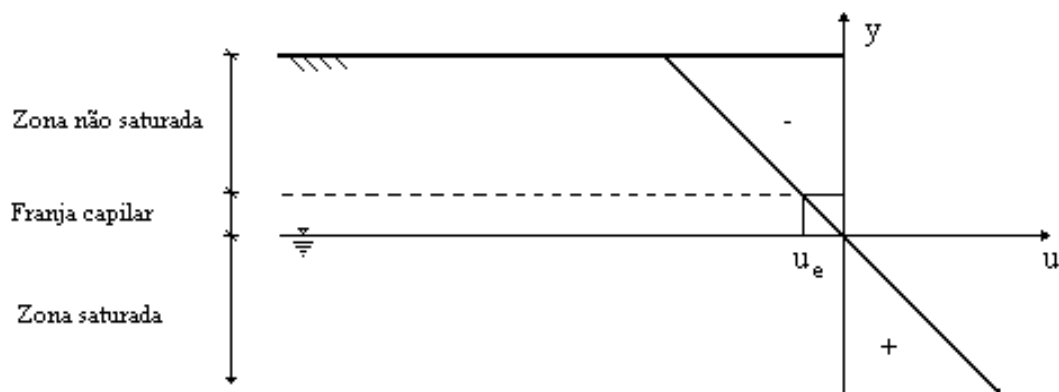


Figura 2.1 – Distribuição de poro-pressão típica em um horizonte de solo.

A zona saturada é a região na qual os vazios do solo estão totalmente preenchidos por água e a poro-pressão é positiva. A franja capilar, por sua vez, é a

região de ascensão capilar na qual o solo ainda se encontra saturado, porém sujeito a uma poro-pressão negativa. E a zona não saturada é a região sujeita a uma poro-pressão negativa, na qual os vazios do solo são preenchidos por ar e água. A poro-pressão u_e , indicada na Figura 2.1, é chamada pressão de entrada de ar. Ela caracteriza a interface entre a franja capilar e a zona não saturada.

A quantidade de água presente no solo pode ser representada através do grau de saturação (S) que relaciona o volume de água e o volume de vazios, ou pelo teor de umidade volumétrica (θ) que relaciona o volume de água e volume total de solo.

Para se caracterizar um solo não saturado é preciso entender como este solo armazena água. Barbour (1998) ressalta a existência de duas formas de interpretação para o mecanismo de armazenamento da água em solos. A primeira forma, proposta por Briggs (1897), atribui a capacidade de retenção de água de um solo à ação da tensão superficial de filmes de água ao redor de vários capilares e, ainda, à ação de forças de atração ao redor das partículas. A segunda forma de interpretação foi proposta por Buckingham (1907) o qual adotou uma abordagem baseada na energia da água presente no solo. Nesta abordagem, a energia da água intersticial, também chamada potencial capilar, controla a capacidade de retenção do solo. Buckingham (1907) descobriu que a relação entre o potencial capilar e o teor de umidade volumétrica constituía uma relação contínua a qual chamou de curva característica solo-água ou curva de retenção do solo.

Uma outra forma conceitual, segundo Barbour (1998), seria a interpretação de potencial capilar em termos da diferença de pressão ao longo de meniscos na interface ar-água dentro do solo. Neste modelo, denominado modelo capilar e proposto por Haines (1927), a interface ar-água em um solo pode ser aproximada por um menisco ar-água formado em tubo capilar de vidro, como ilustrado na Figura 2.2, onde h_c é a altura de ascensão capilar. O equilíbrio do menisco é mantido porque a diferença entre as pressões de ar (u_a) e de água (u_w), denominada sucção mátrica, atuando no tubo capilar é balanceada pela tensão superficial (T_s) atuando em um ângulo de molhamento (β) ao longo do contato ar-água.

De acordo com Taylor (1948), a sucção mátrica pode ser vista, nesse modelo, como sendo proporcional ao inverso do raio efetivo do poro (r). O modelo capilar, apesar de suas limitações devido à variação geométrica do meio, contribuiu para os estudos de características importantes dos solos não saturados como a resistência e o efeito de histerese na curva de retenção.

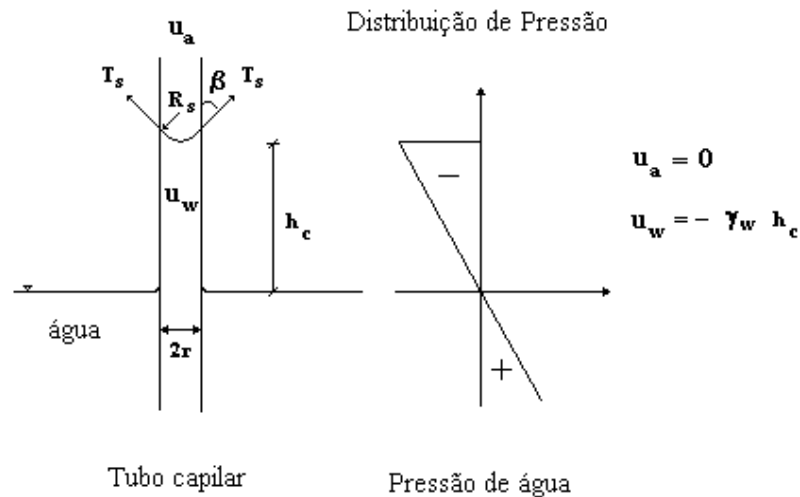


Figura 2.2 - Modelo capilar.

Através do modelo capilar, pode-se dizer que o aumento do teor umidade volumétrica (θ) implica em uma diminuição das tensões intersticiais solo-água, ou seja, uma diminuição da sucção. Nota-se, ainda, que ao diminuir-se a sucção, ocorrerá um aumento na condutividade hidráulica (k). Logo, pode-se dizer que a poro-pressão negativa (sucção) funciona como uma barreira à passagem de água, uma vez que o aumento da sucção proporciona uma diminuição da umidade volumétrica e, conseqüentemente, uma redução dos caminhos de percolação da água. De acordo com a definição de carga de pressão (u/γ_w) pode-se dizer que a condutividade hidráulica varia diretamente com a carga de pressão (ψ).

A variação das propriedades hidráulicas do solo com a carga de pressão (ψ) pode ser representada pelas curvas $k = k(\psi)$ e $\theta = \theta(\psi)$ chamadas de curvas características, sendo $k = k(\psi)$ a função de condutividade hidráulica e $\theta = \theta(\psi)$ a curva de retenção de água.

2.2 – Curva de Retenção de Água

Devido à existência de várias correntes de interpretação, a curva de retenção pode ser encontrada em diferentes formas. Destaca-se a definição sugerida por Fredlund e Xing (1994) que relaciona a umidade volumétrica e sucção mátrica (poro-pressão negativa). Uma curva típica para um solo siltoso apresentada por estes autores é mostrada na Figura 2.3.

As curvas apresentadas na Figura 2.3 descrevem o armazenamento de água no solo durante um ciclo de drenagem e infiltração. As curvas de drenagem e infiltração são diferentes devido à natureza histerética da curva de retenção. De acordo com Nielsen *et al* (1986) a histerese ocorre porque a estrutura do solo apresenta diferentes ângulos de contato durante os processos de drenagem e infiltração, e ainda, porque os poros, isoladamente, apresentam restrições geométricas. O efeito histerético é normalmente aumentado devido à presença de ar aprisionado no solo ou por fenômenos de expansão e contração do solo. A presença de ar aprisionado no solo (teor de ar residual) pode ainda defasar o ponto final da curva de infiltração do ponto inicial da curva de drenagem, ou seja, é possível que o teor de umidade volumétrica saturado para a curva de drenagem (θ_s) seja diferente do teor de umidade volumétrica saturado para a curva de infiltração (θ_s').

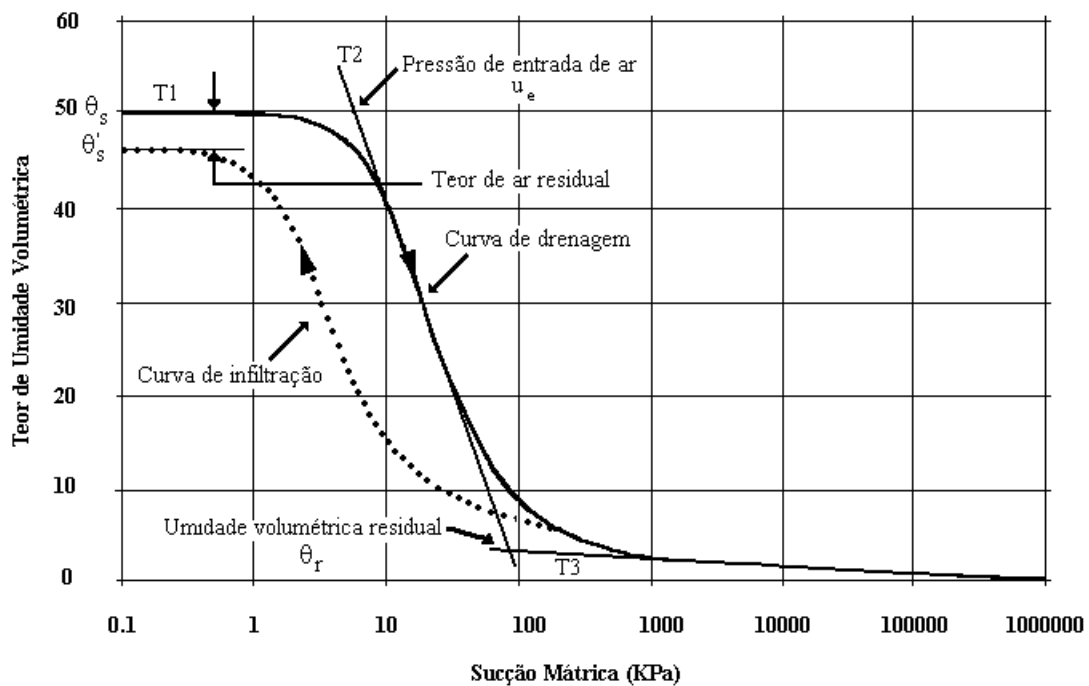


Figura 2.3 - Curva de retenção típica de um solo siltoso (Fredlund e Xing, 1994).

A pressão de entrada de ar (u_e) constitui um ponto característico da curva de retenção e representa o valor de sucção para a qual o ar começa a penetrar nos poros de maior diâmetro presentes no solo. Na Figura 2.3, Fredlund e Xing (1994) sugerem que este ponto seja dado pelo prolongamento das tangentes T1 e T2. Outro ponto característico da curva de retenção é o teor de umidade volumétrica residual (θ_r) que é o

teor de umidade para o qual é necessário um grande aumento na sucção para que se possa retirar água do solo. Segundo Fredlund e Xing (1994), o teor de umidade residual é determinado pela interseção das tangentes T2 e T3, como indicado na Figura 2.3.

Pode-se observar que a capacidade de retenção de um solo depende do nível de sucção presente no meio.

Devido à grande variação na estrutura dos solos a curva de retenção pode apresentar diferentes configurações. Em geral, a curva de retenção pode ser dividida em três regiões, como indicado na Figura 2.4. As regiões I e II são separadas pela pressão de entrada de ar e as regiões II e III são separadas pela pressão correspondente ao teor de umidade volumétrica residual. Pode-se dizer que o teor de umidade volumétrica varia bastante no trecho II, já nos trechos I e III a variação é bem menor, aproximando-se de zero. Pode-se notar ainda, que a inclinação da curva de retenção (razão entre a variação do teor de umidade volumétrica e a variação da sucção) é próxima de zero nos trechos I e III, e assumem valores diferentes de zero e dependentes do nível de sucção (Figura 2.3) no trecho II. Com isso, observa-se que, durante o processo de drenagem, solos com uma curva de retenção mais inclinada no trecho II têm uma tendência de perder mais água do que os solos que apresentam o trecho II mais suave.

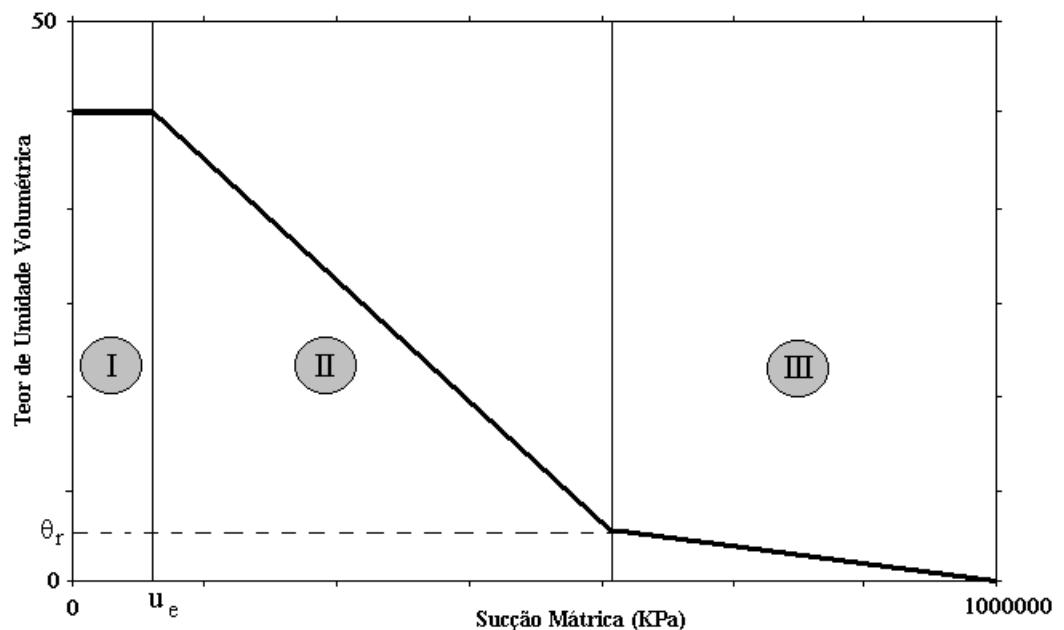


Figura 2.4 – Trechos característicos de uma curva de retenção.

O teor de umidade volumétrica saturada e a pressão de entrada de ar, em geral, aumentam com a plasticidade do solo. A Figura 2.5 apresenta alguns exemplos de curvas para diferentes tipos de solo. Apesar das variações, pode-se dizer que a curva de retenção possui, em geral, um formato sigmoide.

A curva de retenção pode ser determinada através de ensaios de laboratório ou ensaios de campo, ou ainda, através de modelos preditores. Os ensaios de laboratório são baseados no estabelecimento do equilíbrio termodinâmico entre a água intersticial e a água de um reservatório a um determinado nível de energia (Babour, 1998). Uma revisão mais ampla dos ensaios para a determinação da curva de retenção pode ser encontrada em Benson e Gribb (1997).

Vários modelos foram propostos para a representação da curva de retenção. Pode-se destacar o modelo exponencial adotado por Srivastava e Yeh (1991) e o modelo proposto por van Genuchten (1980).

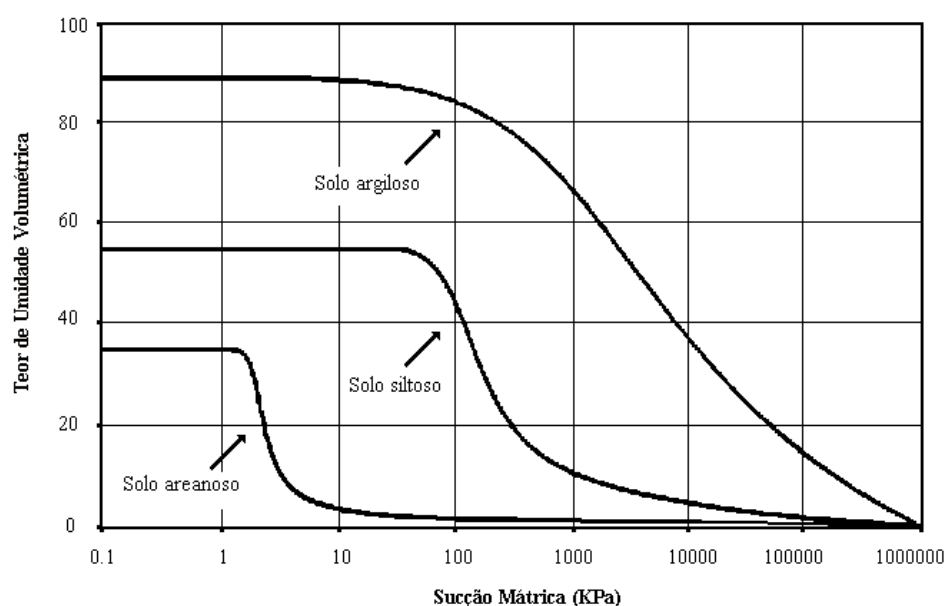


Figura 2.5 – Curva de retenção, para um processo de drenagem, para diferentes tipos de solo (Fredlund e Xing, 1994).

A função apresentada por van Genuchten (1980) vem sendo amplamente utilizada em vários trabalhos, pois propicia um bom ajuste para uma grande variedade de solos e ainda possui a vantagem de trabalhar com uma função contínua.

A partir da curva de retenção várias propriedades do solo podem ser determinadas, inclusive a condutividade hidráulica do meio que é necessária para a solução do problema em estudo.

a) Modelo exponencial

O modelo exponencial utilizado por Srivastava e Yeh (1991) define a seguinte relação para a curva de retenção de um material

$$\theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)e^{\alpha_{\text{exp}}\psi} \quad (2.1)$$

onde θ_r é o teor de umidade volumétrica residual, θ_s é o teor de umidade volumétrica saturado, α_{exp} é um parâmetro que varia de acordo com o tipo de solo e ψ é a carga hidráulica de pressão. O parâmetro α_{exp} representa a taxa de redução do teor de umidade volumétrica a medida que a carga de pressão diminui. O formato típico da curva de retenção para esta relação é apresentado na Figura 2.6.

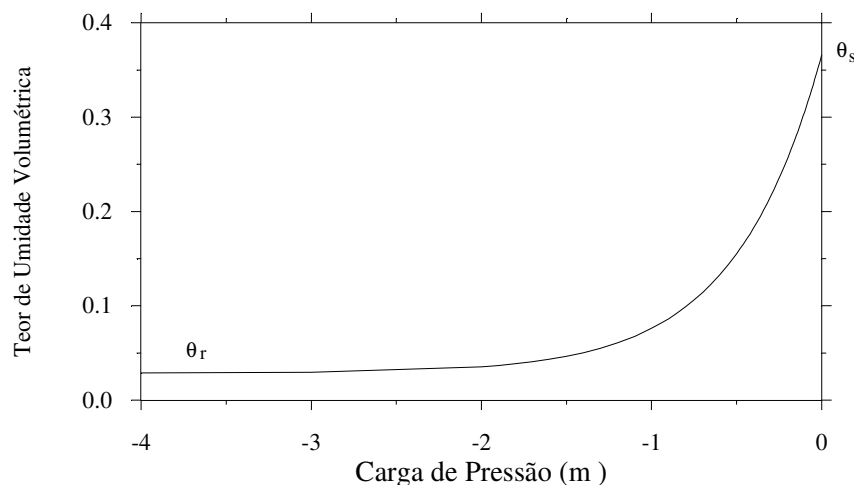


Figura 2.6 – Forma típica da curva de retenção - modelo exponencial.

Esse modelo apresenta um valor de capacidade de retenção específica diferente de zero para a situação de saturação a uma pressão nula. Em uma situação real, desprezando-se as variações de volume, isso não poderia acontecer. Assim, pode-se imaginar que esse modelo seria adequado para problemas que envolvam fluxo somente

na zona não saturada. Cabe ainda ressaltar que esse modelo não é capaz de reproduzir a zona de ascensão capilar caracterizada pela pressão de entrada de ar e também não representa a histerese (α_{exp} é o mesmo para ciclos de drenagem e infiltração).

b) Modelo de van Genuchten (1980)

van Genuchten (1980) propôs a seguinte relação para curva de retenção

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + \alpha_{vg} |\psi|^q\right]^p} \quad (2.2)$$

onde α_{vg} , p e q são parâmetros a serem ajustados de acordo com o solo. O parâmetro p pode ser escrito, de acordo com van Genuchten (1980), em função do parâmetro q como

$$p = 1 - \frac{1}{q} \quad (2.3)$$

Segundo Miller *et al* (1998) o parâmetro α_{vg} está relacionado com a dimensão média dos poros e o parâmetro q está relacionado com a uniformidade da distribuição dos poros de diferentes dimensões. O formato típico da curva para a relação proposta por van Genuchten (1980) é apresentado na Figura 2.7.

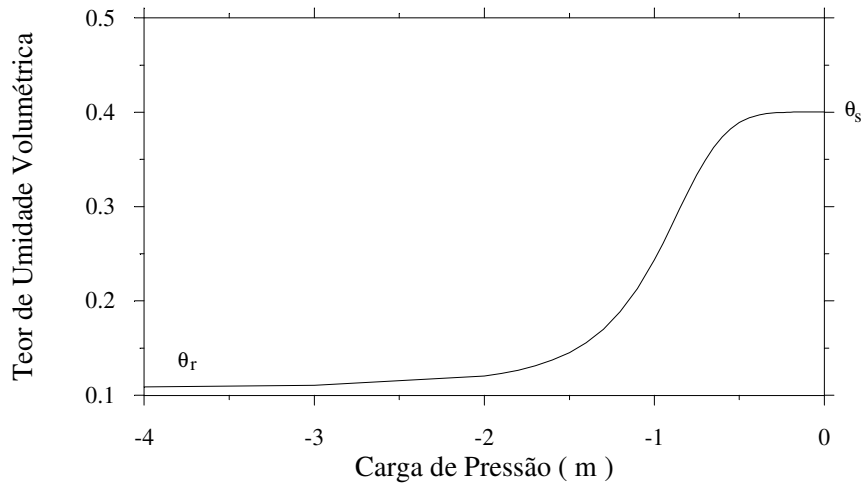


Figura 2.7 – Forma típica da curva de retenção - modelo de van Genuchten (1980).

Este modelo, ao contrário do anterior, apresenta uma capacidade de retenção nula para situação de saturação e ainda é capaz de caracterizar a zona de ascensão capilar. Com essas características, o modelo de van Genuchten pode aproximar melhor o comportamento hidráulico do solo. Porém, não considera, da mesma forma, o efeito da histerese para ciclos de drenagem e infiltração.

2.3 – Função de Condutividade Hidráulica

Como foi ressaltado, a condutividade hidráulica é função do teor de umidade volumétrica que por sua vez depende da sucção. O termo função de condutividade hidráulica, de acordo com Fredlund *et al* (1994), é sugerido para representar a relação entre a condutividade hidráulica e a sucção mátrica.

O formato da curva de condutividade hidráulica é similar ao formato da curva de retenção de água, inclusive apresentando a histerese para etapas de drenagem e infiltração.

A determinação da função de condutividade hidráulica pode ser efetuada, também, através de ensaios de laboratório, ensaios de campo e de modelos preditores. Benson e Gribb (1997) descrevem uma série de ensaios de laboratório e ensaios de campo para a determinação da função de condutividade hidráulica. Estes ensaios são, de maneira geral, de difícil execução por isso a utilização de modelos preditores, que tomam como base a curva de retenção, se mostra bastante atrativa.

De acordo com Fredlund *et al* (1994) existem basicamente dois tipos de abordagem para a determinação da função de condutividade hidráulica. A primeira linha de estudos é baseada em equações empíricas e a segunda em modelos estatísticos.

Dentro desta primeira linha de estudos, vale ressaltar o modelo exponencial empírico apresentado por Srivastava e Yeh (1991)

$$k(\psi) = k_s e^{\alpha_{\text{exp}} \psi} \quad (2.4)$$

onde k_s é a condutividade hidráulica do solo saturado, α_{exp} é um parâmetro que varia de acordo com o tipo de solo e ψ é a carga hidráulica de pressão.

Para a utilização de equações empíricas é necessário a obtenção de dados que relacionem a condutividade hidráulica à sucção através de várias medidas de permeabilidade. Já os modelos estatísticos exigem a medida da condutividade hidráulica saturada e o levantamento da curva de retenção. A campanha de ensaios necessária para a adoção da abordagem estatística é, de maneira geral, mais simples do que aquela exigida para a adoção de relações empíricas.

Dentre os modelos estatísticos que têm sido utilizados para descrever a função de condutividade hidráulica, pode-se destacar o modelo proposto por Mualem (1976) baseado na dimensão e na distribuição dos poros. Este modelo propõe, para a condutividade hidráulica, a seguinte função em termos do teor de umidade volumétrica e da carga hidráulica de pressão

$$k(\theta) = k_s \theta_e^m \left(\frac{\int_{\theta_r}^{\theta} \frac{d\theta}{\psi(\theta)}}{\int_{\theta_r}^{\theta_s} \frac{d\theta}{\psi(\theta)}} \right)^2 \quad (2.5)$$

onde

$$\theta_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.6)$$

é o teor de umidade volumétrica equivalente ou normalizado e m é uma constante que varia de acordo com o tipo de solo pois depende de propriedades específicas do solo e da água. Mualem sugere 0.5 como um valor ótimo para m .

Baseado no modelo apresentado por Mualem (1976), van Genuchten utilizando as Equações 2.2 e 2.5, propôs a seguinte equação para a função de condutividade hidráulica

$$k(\psi) = k_s \left\{ \frac{1}{[1 + \alpha_{vg} |\psi|^q]^p} \right\}^{1/2} \left[1 - \left(1 - \left\{ \frac{1}{[1 + \alpha_{vg} |\psi|^q]^p} \right\}^{\frac{1}{p}} \right)^p \right]^2 \quad (2.7)$$

em que α_{vg} , p e q são os parâmetros ajustáveis obtidos para a curva de retenção como apresentado no item anterior.

A adoção de relações explícitas para a função de condutividade hidráulica e para a curva de retenção propiciam uma resposta mais rápida e direta, tendo desta forma, um papel importante na modelagem de problemas de fluxo em solos não saturados, visto que estas propriedades precisam ser avaliadas diversas vezes no processo de cálculo.

Alternativas como técnicas de interpolação também podem ser utilizadas, mas para isso é necessário que se descreva as curvas características em termos de pontos isolados. Nesse trabalho adotou-se a interpolação linear e a spline cúbica como alternativas para a representação das curvas características do material. Maiores detalhes são fornecidos no Capítulo 3 e no Anexo I.

2.4 - Equação do Fluxo em Meio Poroso Não Saturado

Considerando um cubo elementar submetido a um fluxo de água nas direções x , y e z , como indicado na Figura 2.8, pode-se obter a equação diferencial do fluxo em um meio poroso (Freeze e Cherry, 1979), que na forma matricial é dada por

$$\nabla^T(\rho_w \mathbf{v})dx \, dy \, dz = -\frac{dM_w}{dt} \quad (2.8)$$

em que ρ_w é a massa específica da água, \mathbf{v} é o vetor de velocidade superficial de fluxo, e ∇ é um operador diferencial que depende da dimensão do problema. O termo a esquerda desta equação representa o balanço de massa nas três direções e o termo a direita representa, de acordo com o princípio da conservação da massa, a taxa de variação, no tempo, da massa de água (M_w) armazenada no elemento.

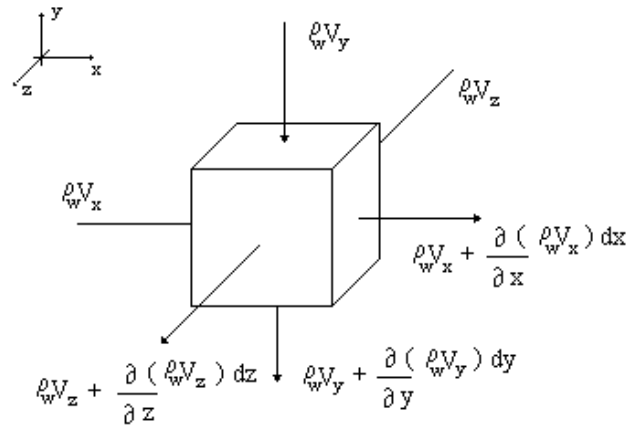


Figura 2.8 – Cubo elementar sujeito a um fluxo nas direções x, y e z.

A massa de água pode ser escrita em termos do grau de saturação (S) e da porosidade (n) como sendo

$$M_w = \rho_w S n \, dx dy dz \quad (2.9)$$

Desta forma, a Equação 2.8 pode ser reescrita como

$$\nabla^T(\rho_w \mathbf{v}) = -\frac{\partial(\rho_w S n)}{\partial t} \quad (2.10)$$

Partindo-se do conceito de grau de saturação e porosidade, e introduzindo-se o conceito de teor de umidade volumétrica ($\theta = nS$); e ainda, supondo o problema isotérmico com o fluido e o meio incompressíveis, a Equação 2.10 pode ser reescrita como

$$\nabla^T \mathbf{v} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.11)$$

Pela Lei de Darcy

$$\mathbf{v} = \mathbf{K} \mathbf{i} \quad (2.12)$$

onde \mathbf{K} é a matriz da condutividade hidráulica que para problemas de fluxo não saturado depende da carga de pressão e \mathbf{i} é o gradiente hidráulico.

Considerando a parcela de carga hidráulica total (h_t), utilizada na definição de gradiente hidráulico, constituída apenas pelas parcelas de carga de elevação (h_e) e de carga de pressão (ψ) tem-se

$$\mathbf{i} = -\nabla h_t = -\nabla(h_e + \psi) \quad (2.13)$$

Desta forma, usando-se as equações 2.12 e 2.13, pode-se reescrever a Equação 2.11 como

$$\nabla^T [\mathbf{K}(\psi)\mathbf{e} + \mathbf{K}(\psi)\nabla\psi] = \frac{\partial\theta(\psi)}{\partial t} \quad (2.14)$$

onde \mathbf{e} é um vetor de componente unitária na direção da aceleração da gravidade.

Como o teor de umidade volumétrica é uma função da carga de pressão, então pode-se trabalhar com a carga de pressão como variável dependente, introduzindo-se o termo de capacidade de retenção específica, $C(\psi)$. Desta forma, a equação de fluxo em um meio poroso não saturado pode ser escrita em termos da carga de pressão como

$$\nabla^T [\mathbf{K}(\psi)\mathbf{e} + \mathbf{K}(\psi)\nabla\psi] = C(\psi) \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (2.15)$$

onde

$$C(\psi) = \frac{\partial\theta}{\partial\psi} \quad (2.16)$$

A Equação 2.15 é a Equação de Richard escrita na sua forma matricial, e pode ser classificada como uma equação diferencial parcial de segunda ordem não linear. A não linearidade é devida a variação das propriedades hidráulicas do material com a carga de pressão.

A solução desta equação deverá atender às condições de contorno que podem ser em carga de pressão prescrita (condição de Dirichlet)

$$\psi(\mathbf{x},t) = \bar{\psi} \text{ em } \Gamma_1 \quad (2.17a)$$

ou em fluxo prescrito (condição de Neuman)

$$\mathbf{n}^T [\mathbf{K}(\psi)\mathbf{e} + \mathbf{K}(\psi)\nabla\psi] = \bar{v} \text{ em } \Gamma_2 \quad (2.17b)$$

sendo, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, o contorno do domínio (V) do problema.

A solução da Equação 2.15 deverá, ainda, atender à condição inicial do problema

$$\psi(\mathbf{x},0) = \bar{\psi}_0(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

Para obter-se a solução da Equação 2.15 é necessário a determinação das funções características $k = k(\psi)$ e $\theta = \theta(\psi)$ que, como foi destacado anteriormente, são propriedades intrínsecas do material para um dado fluido.

2.5 – Formulação do Problema de Fluxo em Meio Poroso Não Saturado via MEF

A Equação 2.15 deve ser atendida em todo domínio (V) do problema. Dividindo-se este domínio em subdomínios (V_e), tal como no MEF, pode-se rescrever a Equação 2.15 na sua forma residual como

$$R(\psi^*) = \nabla^T [\mathbf{K}(\psi)\mathbf{e} + \mathbf{K}(\psi)\nabla\psi^*] - C(\psi)\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \quad (2.19)$$

onde ψ^* é uma solução aproximada de ψ no domínio do elemento. Usando o MEF, a incógnita do problema pode ser escrita em termos dos seus valores nodais como

$$\psi^* = \mathbf{N}\hat{\psi} \quad (2.20)$$

onde \mathbf{N} é a matriz das funções de interpolação, definidas em função do tipo de elemento finito adotado (ver Capítulo 3) e $\hat{\psi}$ é o vetor de carga de pressão nodal. Pode-se, assim, rescrever a Equação 2.19 como

$$\mathbf{R}(\hat{\psi}) = \nabla^T [\mathbf{K}(\psi)\mathbf{e} + \mathbf{K}(\psi)\nabla\mathbf{N}\hat{\psi}] - C(\psi)\mathbf{N}\dot{\hat{\psi}} \quad (2.21)$$

O resíduo, $\mathbf{R}(\hat{\psi})$ (Equação 2.21), pode ser minimizado utilizando o método de Galerkin gerando a seguinte forma integral para a equação de governo do problema em questão

$$\int_{V_e} \mathbf{N}^T \{ \nabla^T [\mathbf{K}(\psi)\nabla\mathbf{N}\hat{\psi} + \mathbf{K}(\psi)\mathbf{e}] - C(\psi)\mathbf{N}\dot{\hat{\psi}} \} dV_e = 0 \quad (2.22)$$

Integrando-se por partes os dois primeiros termos de Equação 2.22 tem-se

$$\begin{aligned} \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T [\mathbf{K}(\psi)\nabla\mathbf{N}\hat{\psi}] dS_e - \int_{V_e} (\nabla\mathbf{N})^T \mathbf{K}(\psi)\nabla\mathbf{N}\hat{\psi} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T [\mathbf{K}(\psi)\mathbf{e}] dS_e - \\ \int_{V_e} (\nabla\mathbf{N}^T) \mathbf{K}(\psi)\mathbf{e} dV_e - \int_{V_e} \mathbf{N}^T C(\psi)\mathbf{N}\dot{\hat{\psi}} dV_e = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Tomando-se $\nabla\mathbf{N} = \mathbf{B}$, agrupando-se os termos no contorno e rearranjando-se os termos tem-se

$$\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(\psi) \mathbf{B} dV_e \hat{\psi} + \int_{V_e} \mathbf{N}^T C(\psi) \mathbf{N} dV_e \dot{\hat{\psi}} = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T [(\mathbf{K}(\psi)\mathbf{e} + \mathbf{K}(\psi)\mathbf{B}\hat{\psi})] dS_e - \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(\psi) \mathbf{e} dV_e \quad (2.24)$$

Aplicando-se a condição de contorno 2.17b tem-se

$$\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(\psi) \mathbf{B} dV_e \hat{\psi} + \int_{V_e} \mathbf{N}^T C(\psi) \mathbf{N} dV_e \dot{\hat{\psi}} = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{v}} dS_e - \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(\psi) \mathbf{e} dV_e \quad (2.25)$$

ou ainda

$$\mathbf{H} \hat{\psi} + \mathbf{F} \dot{\hat{\psi}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}' \quad (2.26)$$

onde

$$\mathbf{H} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(\psi) \mathbf{B} dV_e \quad (2.27)$$

é a matriz de fluxo do elemento,

$$\mathbf{F} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T C(\psi) \mathbf{N} dV_e \quad (2.28)$$

é a matriz de capacidade de retenção que traduz as variações do teor de umidade em relação à poro-pressão em cada elemento,

$$\mathbf{Q} = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{v}} dS_e \quad (2.29)$$

é o vetor de vazão nodal equivalente ao fluxo prescrito numa face do elemento e, finalmente,

$$\mathbf{Q}' = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(\psi) \mathbf{e} dV_e \quad (2.30)$$

é o vetor de vazão nodal equivalente que traduz uma parcela da vazão relativa a efeitos gravitacionais (carga de posição).

2.5.1 – Integração no Tempo

A solução da Equação 2.26 envolve a integração no tempo, devido ao termo $\mathbf{F}\dot{\hat{\Psi}}$. Assim sendo,

$$\int_{\Psi} \mathbf{F} d\hat{\Psi} = \int_t [-\mathbf{H}\hat{\Psi} + \mathbf{Q} - \mathbf{Q}'] dt \quad (2.31)$$

Discretizando-se o tempo em intervalos conhecidos, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, e supondo uma variação linear para as funções \mathbf{F} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} e \mathbf{Q}' , dentro deste intervalo de tempo, pode-se adotar as seguintes aproximações na Equação 2.31 (Hageman e Young, 1981)

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{H}\hat{\Psi} dt = \Delta t [\alpha \mathbf{H}^{n+1} \hat{\Psi}^{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{H}^n \hat{\Psi}^n] \quad (2.32a)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') dt = \Delta t [\alpha (\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}'^{n+1}) + (1 - \alpha) (\mathbf{Q}^n - \mathbf{Q}'^n)] \quad (2.32b)$$

Substituindo-se as aproximações e rearranjando-se os termos chega-se a

$$\left(\frac{\mathbf{F}}{\Delta t} + \alpha \mathbf{H}^{n+1} \right) \hat{\Psi}^{n+1} = \left[\frac{\mathbf{F}}{\Delta t} - (1 - \alpha) \mathbf{H}^n \right] \hat{\Psi}^n + \alpha (\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}'^{n+1}) + (1 - \alpha) (\mathbf{Q}^n - \mathbf{Q}'^n) \quad (2.33)$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é um coeficiente que define o tipo de marcha no tempo a ser empregada. Para $\alpha = 1$ tem-se um esquema de marcha no tempo puramente implícito, para $\alpha = 0$ tem-se um esquema explícito e para $\alpha = 1/2$ tem-se o esquema de Cranck-Nicolson .

De acordo com Neuman (1973), o esquema puramente implícito ($\alpha = 1$) é o que melhor se aplica a problemas que possuem, no seu domínio, fluxo em meio não

saturado e saturado. Ele ainda sugere que o cálculo dos coeficientes sejam efetuados no ponto médio do intervalo de tempo. Assim sendo, seguindo as sugestões de Neuman (1973), obtém-se a seguinte particularização para a Equação 2.33

$$\left(\frac{\mathbf{F}^{n+1/2}}{\Delta t} + \mathbf{H}^{n+1/2}\right)\hat{\Psi}^{n+1} = \frac{\mathbf{F}^{n+1/2}}{\Delta t}\hat{\Psi}^n + \mathbf{Q}^{n+1/2} - \mathbf{Q}'^{n+1/2} \quad (2.34)$$

ou ainda, em um formato mais condensado

$$\mathbf{D}^{n+1/2}\Psi^{n+1} = \mathbf{R}^{n+1/2} \quad (2.35)$$

em que

$$\mathbf{D}^{n+1/2} = \left(\frac{\mathbf{F}^{n+1/2}}{\Delta t} + \mathbf{H}^{n+1/2}\right) \quad (2.36)$$

e

$$\mathbf{R}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{F}^{n+1/2}}{\Delta t}\hat{\Psi}^n + \mathbf{Q}^{n+1/2} - \mathbf{Q}'^{n+1/2} \quad (2.37)$$

2.5.2 - Estratégia para o Tratamento da Não Linearidade

Segundo Paniconi *et al* (1991), a equação de Richard é altamente não linear devido à dependência estabelecida das propriedades do material, condutividade hidráulica e capacidade de retenção específica, com a carga de pressão. Paniconi ressalta ainda, que o tratamento da não linearidade é comumente realizado através de métodos iterativos, sendo mais comuns o método de Newton e método de Picard. Paniconi *et al* (1991) e Neuman (1973) destacam que o método de Newton além de mais complexo que o método de Picard não preserva a simetria das matrizes e é bastante sensível às estimativas iniciais em cada intervalo de tempo. Por estes motivos e principalmente pela

facilidade de implementação optou-se, neste trabalho, pelo método de Picard para o tratamento da não linearidade.

De acordo com Celia *et al* (1990), o método iterativo de Picard envolve a estimativa seqüencial de $\hat{\Psi}^{n+1}$ usando as estimativas anteriores de \mathbf{F} e \mathbf{H} . Neuman sugere ainda que os coeficientes sejam avaliados em $n+1/2$.

Neste trabalho foi adotado o algoritmo proposto por Gerscovich (1994) que utiliza o método de Picard baseado nas propostas de Neuman (1973) e de Huyakorn e Pinder (1983). Neste algoritmo, uma primeira aproximação para a carga de pressão ($\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1}$) é calculada a partir da condição inicial ($\hat{\Psi}_j^n = \hat{\Psi}^0$) considerando $\hat{\Psi}_j^{n+1/2} = \hat{\Psi}^0$. Em seguida, uma segunda aproximação ($\hat{\Psi}_j^{n+1}$) é calculada através de uma extrapolação linear. Os valores de $\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1}$ e $\hat{\Psi}_j^{n+1}$ são utilizados para a verificação do critério de convergência dado pela Equação 2.39.

$$\frac{\|\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1} - \hat{\Psi}_j^{n+1}\|}{\|\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1}\|} < \text{tolerância} \quad (2.39)$$

onde $\|\ \|\$ é a norma euclidiana de um vetor.

Se o critério de convergência não é verificado para uma dada tolerância pré-estabelecida, então o valor de $\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1/2}$ é atualizado utilizando-se a Equação 2.40

$$\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1/2} = \frac{\frac{\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1} + \hat{\Psi}_j^n}{2} + \hat{\Psi}_j^{n+1/2}}{2} \quad (2.40)$$

Com este novo valor $\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1/2}$ reavalia-se os coeficientes da Equação 2.34 e obtém-se uma nova aproximação para $\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1}$ e mais uma vez o critério de convergência (Equação 2.39) é avaliado. Esse processo é repetido até que o critério de convergência

seja verificado e neste caso, um novo valor de $\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1/2}$ é calculado usando-se a Equação 2.41.

$$\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1/2} = \hat{\Psi}_{j+1}^{n+1} + \frac{\hat{\Psi}_{j+1}^{n+1} - \hat{\Psi}_j^n}{2} \quad (2.41)$$

Concluído o ciclo iterativo, atualiza-se o valor de $\hat{\Psi}_j^n$ e dá-se continuidade à marcha no tempo.

Equação número (2.2)

Ao invés de

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + \alpha_{vg} |\psi|^q\right]^p} \quad (2.2)$$

Usar este

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + \left|\alpha_{vg} \psi\right|^q\right]^p} \quad (2.2)$$

Ao invés de

$$k(\psi) = k_s \left\{ \frac{1}{\left[1 + \alpha_{vg} |\psi|^q\right]^p} \right\}^{1/2} \left[1 - \left(1 - \left\{ \frac{1}{\left[1 + \alpha_{vg} |\psi|^q\right]^p} \right\}^{\frac{1}{p}} \right)^p \right]^2 \quad (2.7)$$

Usar este

$$k(\psi) = k_s \left\{ \frac{1}{\left[1 + \left|\alpha_{vg} \psi\right|^q\right]^p} \right\}^{1/2} \left[1 - \left(1 - \left\{ \frac{1}{\left[1 + \left|\alpha_{vg} \psi\right|^q\right]^p} \right\}^{\frac{1}{p}} \right)^p \right]^2 \quad (2.7)$$

Capítulo 3

O Programa Computacional GEOFLUX

3.1 – Considerações Gerais

O programa GEOFLUX foi desenvolvido a partir do programa ANLOG'98 (Nogueira, 1998) para análise não linear de obras geotécnicas. Foram efetuadas as adaptações necessárias para a resolução do problema proposto, mantendo-se a mesma estrutura em macro comandos do ANLOG'98.

Nesta primeira versão, o programa trata o problema de fluxo em meio não saturado em regime transiente e condições planas. O programa permite que se trabalhe, através do compartilhamento de arquivos neutros, com os pré e pós processadores MTOOL (TeCGRAF/PUC-Rio,1992) e MVIEW (TeCGRAF/PUC-Rio,1993) desenvolvidos pelo grupo de tecnologia de computação gráfica da PUC-Rio em convênio com a PETROBRAS.

O programa GEOFLUX trabalha no sistema operacional DOS e foi desenvolvido utilizando-se a versão 4.0 do compilador Microsoft FORTRAN Power Station. O programa não tem grandes requisitos computacionais porém, dependendo do problema a ser simulado, é fundamental que se trabalhe com uma máquina atualizada e com boa capacidade de memória e processamento. Para a realização das simulações descritas no Capítulo 4 foram utilizadas desde máquinas com capacidade de processamento de 133MHz e 32MB de memória RAM, a máquinas com capacidade de processamento de 450MHz e 96MB de memória RAM.

3.1.1 – Os Macro Comandos

O programa funciona como um interpretador de comandos onde cada comando ou macro comando é utilizado para acionar um conjunto de subrotinas responsável por uma tarefa específica. O programa GEOFLUX possui oito macro comandos. São eles:

'DADOS' – macro comando responsável pela entrada de dados, acionando para tanto as subrotinas que efetuam a leitura dos dados gerais, dos dados geométricos, das condições de contorno em carga prescrita e das propriedades do material.

'QPOIN' – macro comando responsável pela leitura do vetor de vazão nodal prescrita.

'QDIST' – macro comando responsável pela leitura das condições de contorno em fluxo normal prescrito na face de cada elemento isoladamente e pela determinação do vetor de vazão nodal equivalente.

'CHP_0' – macro comando responsável pela leitura das condições iniciais a partir de um arquivo texto independente que contém a carga de pressão inicial em cada nó da malha.

'GET_CHP' – macro comando responsável pela leitura das condições iniciais a partir de um arquivo de saída (.POS) pré-existente.

'SOLVE' – macro comando responsável pelo acionamento da subrotina SOLVE_T para a solução do problema e apresentação dos resultados.

'FEXEC' – macro comando responsável pela finalização da execução do programa.

Uma sequência típica de macro comandos para a resolução de um dado problema é mostrada na Figura 3.1.

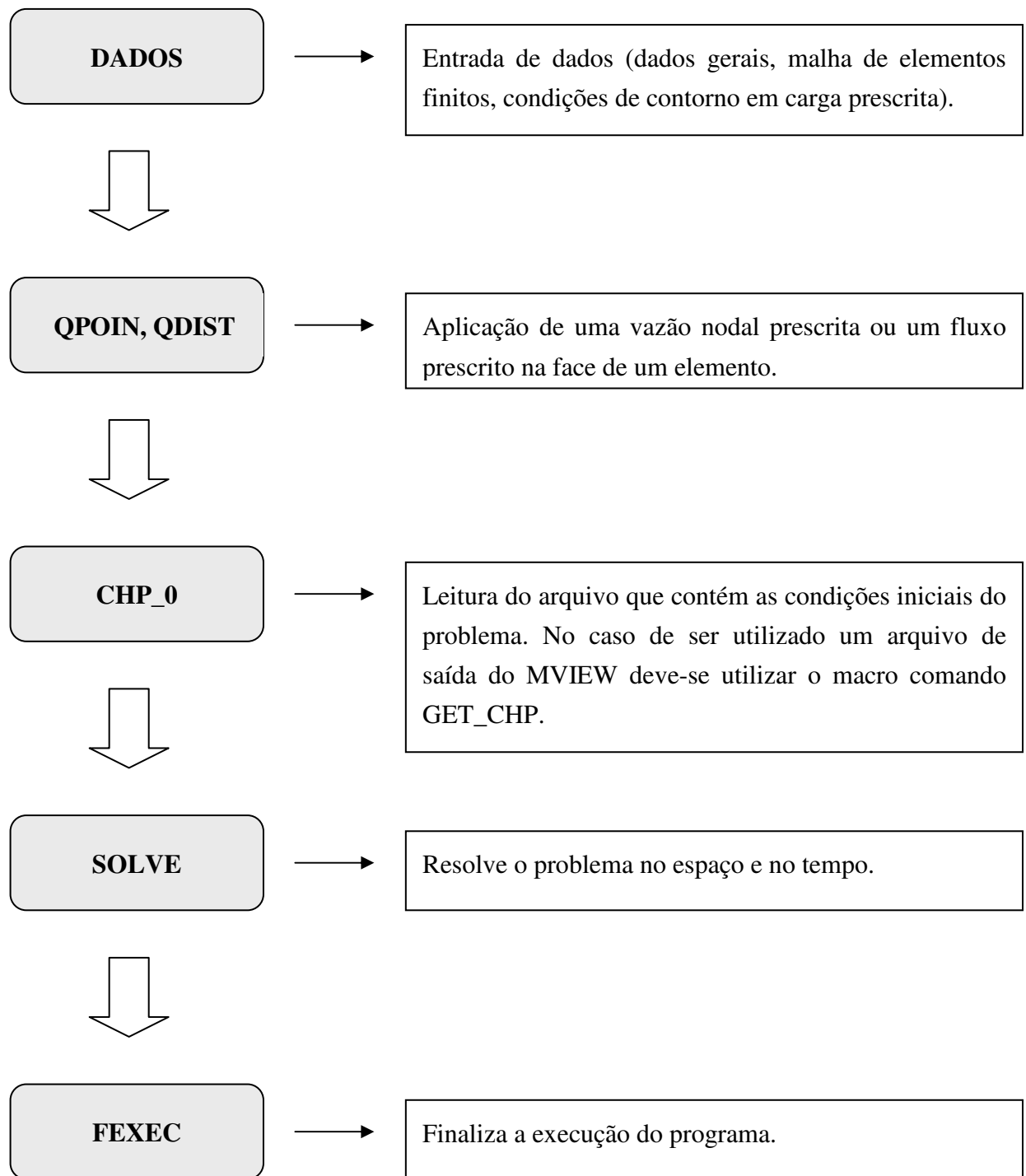


Figura 3.1 – Seqüência de macro comandos típica para a solução de um problema de fluxo em meio não saturado.

3.1.2 – Fluxograma Básico

A Figura 3.2 mostra um fluxograma simplificado do programa GEOFLUX onde estão apresentadas as seguintes subrotinas:

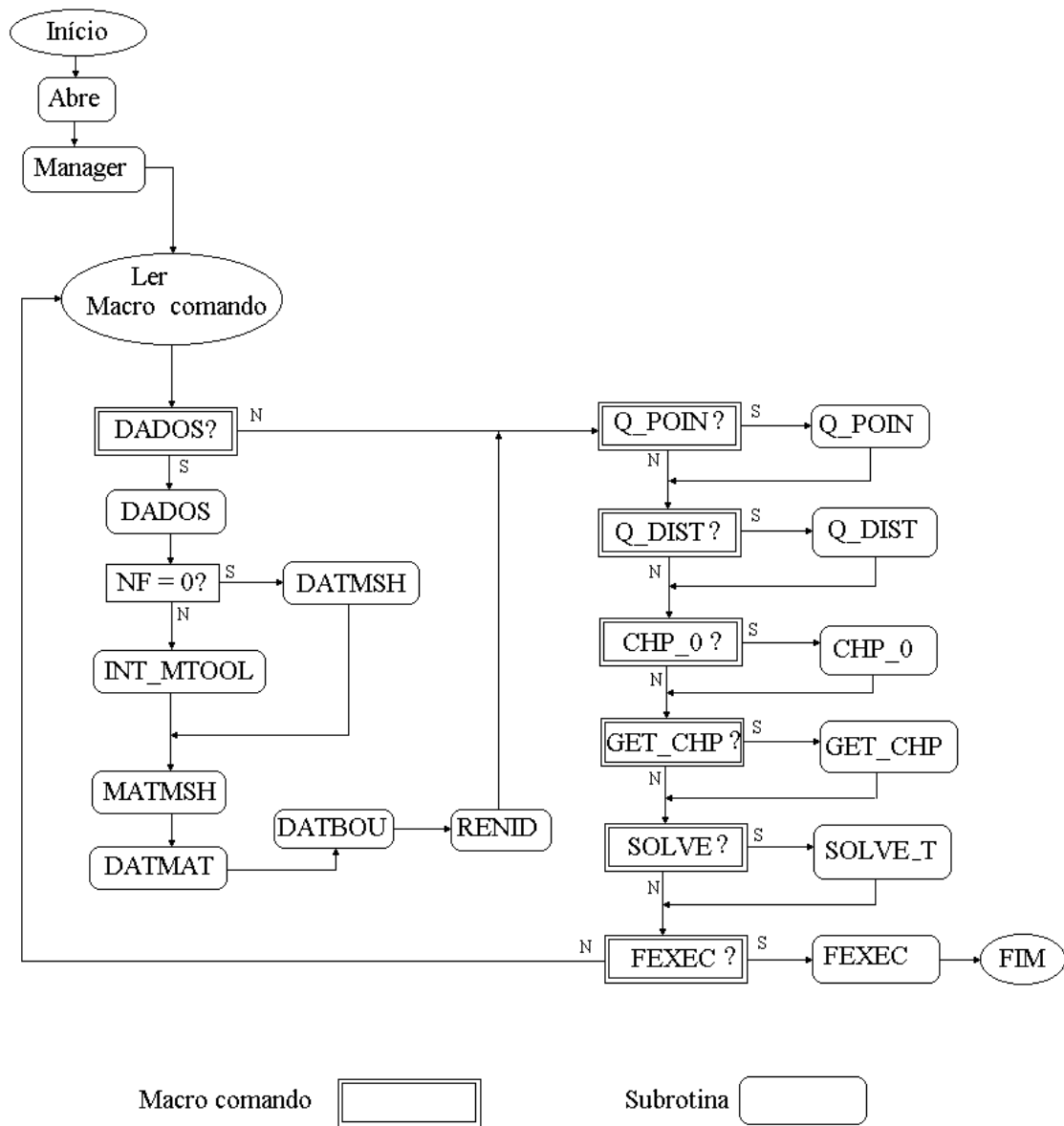


Figura 3.2 – Fluxograma básico do programa GEOFLUX.

ABRE – responsável pela abertura dos arquivos do tipo texto de entrada (*.D) e saída (*.S) de dados;

MANAGER - responsável pelo gerenciamento dos macro comandos;

DADOS - responsável pela leitura dos dados gerais via arquivo texto (*.D);

DATMSH - responsável pela leitura dos dados geométricos (coordenadas e conectividades) via arquivo texto (*.D);

INT_MTOOL - responsável pela leitura dos dados geométricos (coordenadas e conectividades) via arquivo neutro (*.NF) gerado pelo MTOOL;

MATMSH – responsável pela distribuição dos materiais no domínio do problema via arquivo texto (*.D);

DATMAT - responsável pela leitura dos dados dos materiais via arquivo texto (*.D);

DATBOU - responsável pela leitura das condições de contorno em carga prescrita via arquivo texto (*.D);

RENID - responsável pela contagem e numeração dos graus de liberdade de cada problema;

Q_POIN – responsável pela leitura da vazão nodal prescrita via arquivo texto (*.D);

Q_DIST – responsável pela leitura das condições de contorno em fluxo prescrito via arquivo texto (*.D) e pelo cálculo do vetor de vazão nodal equivalente;

CHP_0 – responsável pela leitura das condições iniciais via arquivo texto (*.INI) que contém a distribuição de carga de pressão no tempo $t = 0$;

GET_CHP - responsável pela leitura das condições iniciais via arquivo neutro (*.POS) gerado pelo GEOFLUX e utilizado para simulação em várias etapas;

SOLVE_T - responsável pelo gerenciamento do processo de solução no tempo e no espaço englobando o ciclo iterativo para solução não linear. Esta subrotina é considerada a principal do programa e será discutida no próximo item;

FEXEC - responsável pela finalização da análise.

3.1.3 – O Macro Comando SOLVE

O macro comando SOLVE, como foi mencionado anteriormente, aciona a subrotina SOLVE_T, esquematizada na Figura 3.3, que é responsável pela resolução do problema no espaço e no tempo, e pelo tratamento da não linearidade utilizando as seguintes subrotinas:

PSIO - monta o vetor global de carga de pressão ψ_0 inicial;

RESULT – efetua a saída de dados;

COEFS – calcula as matrizes da Equação 2.33 as quais são obtidas através de uma integração numérica tal como será descrito no item 3.3;

SOLVE – resolve a Equação 2.33.

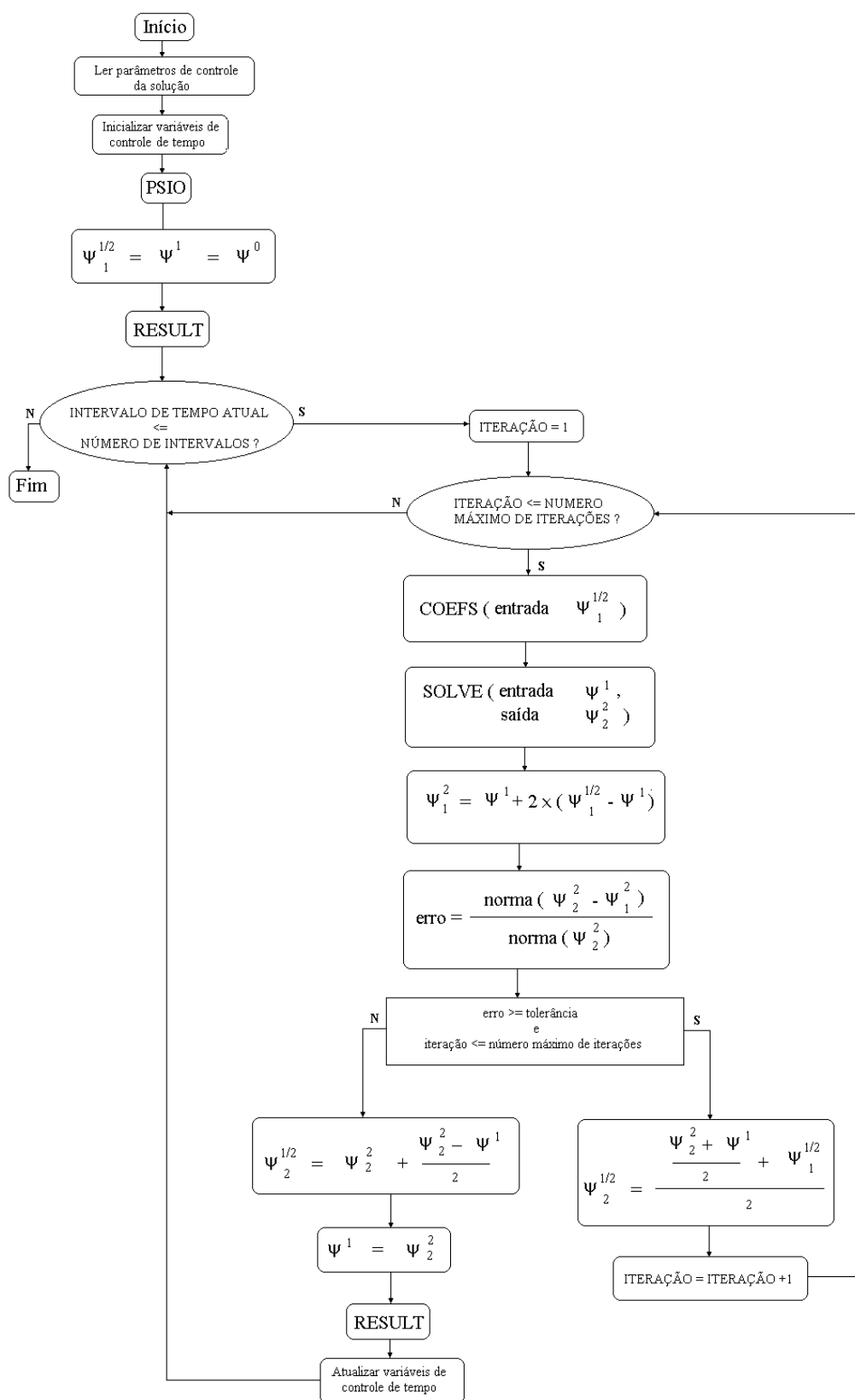


Figura 3.3 – Fluxograma básico da subrotina SOLVE_T.

3.2 – Tipos de Elementos Finitos Implementados

Para a discretização do domínio do problema trabalhou-se com elementos isoparamétricos quadrilaterais de quatro (Q4) e oito nós (Q8) (Bathe, 1982). Tem-se também a possibilidade de se trabalhar com estes elementos colapsados gerando assim elementos triangulares de três (T3) e seis (T6) nós. Porém, estes elementos são indicados somente para o caso de problemas cuja geometria requeira elementos triangulares, como o apresentado no item 4.2.3.

a) Elemento Q4

O elemento Q4, de aproximação linear, é ilustrado na Figura 3.4 e suas respectivas funções de interpolação (N_i) em relação ao sistema de coordenadas natural (ξ, η), são apresentadas na Equação 3.1.

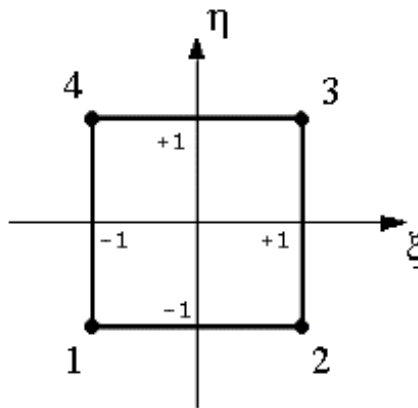


Figura 3.4 – Elemento Q4.

$$N_i(\xi, \eta) = 0.25(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (3.1)$$

onde i define o número de um dado nó do elemento. ξ_i e η_i são as coordenadas dos pontos nodais definidas na Tabela 3.1 e ilustradas na Figura 3.4.

Tabela 3.1 - Coordenadas dos pontos nodais no sistema de coordenadas natural para o elemento Q4.

NÓ	1	2	3	4
ξ_i	-1	+1	+1	-1
η_i	-1	-1	+1	+1

b) Elemento Q8

O elemento Q8, de aproximação quadrática, é ilustrado na Figura 3.5 e suas respectivas funções de interpolação (N_i) em relação ao sistema de coordenadas natural (ξ, η), são apresentadas na Equação 3.2.

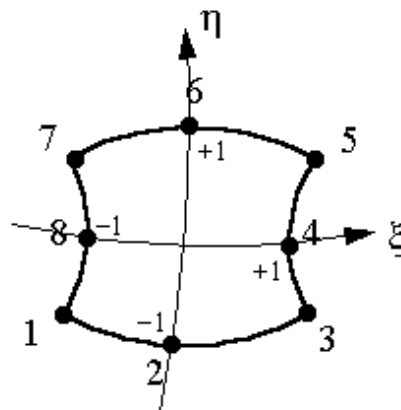


Figura 3.5 – Elemento Q8.

$$N_i(\xi, \eta) = 0.25(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad i=1,3,5,7 \quad (3.2a)$$

$$N_i(\xi, \eta) = 0.5(\xi_i^2)(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + 0.5(\eta_i^2)(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \quad i=2,4,6,8 \quad (3.2b)$$

onde i define o número de um dado nó do elemento. ξ_i e η_i são as coordenadas dos pontos nodais definidas na Tabela 3.2 e ilustradas na Figura 3.5.

Tabela 3.2 - Coordenadas dos pontos nodais no sistema de coordenadas natural para o elemento Q8.

NÓ	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ_i	-1	0	+1	+1	+1	0	-1	-1
η_i	-1	-1	-1	0	+1	+1	+1	0

Cabe ressaltar que para problemas com contorno curvo este tipo de elemento é mais indicado que o elemento Q4.

c) Elementos T3 e T6

Os elementos T3 e T6 apresentados na Figura 3.6, são obtidos a partir do elementos Q4 e Q8 colapsados, e portanto possuem as mesmas funções de interpolação destes elementos, respectivamente.

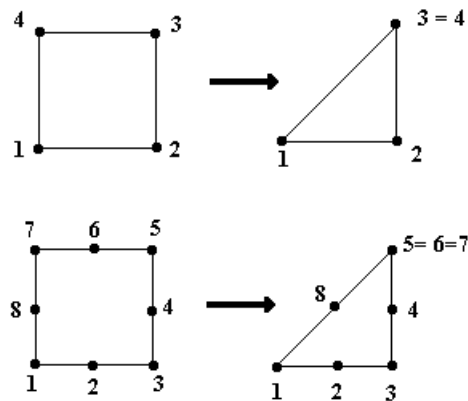


Figura 3.6 – Elementos Q4 e Q8 colapsados.

3.3 – Matrizes e Vetores Característicos

Neste item são apresentadas as matrizes **H** e **F** e os vetores **Q** e **Q'** definidos no item 2.5; bem como, as matrizes **N** e **B** que dependem do tipo de elemento finito utilizado. Apresenta-se ainda, como são obtidos a matriz **K**(ψ) e o coeficiente $C(\psi)$.

a) Matriz **B**

O gradiente hidráulica definido na Equação 2.13 poder ser escrito via MEF como

$$\mathbf{i} = -\nabla \mathbf{N} \hat{\mathbf{h}}_t = -(\mathbf{e} + \nabla \mathbf{N} \hat{\psi}) \quad (3.3)$$

onde $\hat{\mathbf{h}}_t$ e $\hat{\psi}$ são respectivamente os vetores de carga hidráulica total nodal e carga hidráulica de pressão nodal. ∇ é o operador diferencial definido para problemas planos como

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Pode-se definir a matriz **B** como a matriz que relaciona o gradiente hidráulico com a carga hidráulica total nodal, ou seja

$$\mathbf{i} = -\mathbf{B} \hat{\mathbf{h}}_t = -(\mathbf{e} + \mathbf{B} \hat{\psi}) \quad (3.6)$$

onde

$$\mathbf{B}_{2 \times ne} = \nabla_{2 \times 1} \mathbf{N}_{1 \times ne} \quad (3.7)$$

em que

$$\mathbf{N}_{1 \times ne} = [N_1(\xi, \eta) \dots N_{ne}(\xi, \eta)] \quad (3.8)$$

é a matriz linha que contém as funções de interpolação (N_i) apresentadas no item 3.2 e ne é número de nós do elemento.

Assim, operando-se, aplicando-se a regra da cadeia e rearranjando tem-se,

$$\mathbf{B}_{2 \times ne} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{ne}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{ne}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ou ainda

$$\mathbf{B}_{2 \times ne} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{ne}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{ne}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde,

$$\mathbf{J}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

é a matriz jacobiana que é responsável pela transformação das coordenadas do sistema global (x,y) para o sistema natural (ξ, η).

b) Matriz **H**

A matriz **H** é denominada matriz de fluxo. Esta matriz resulta da integral apresentada na Equação 2.27. Efetuando-se a transformação do sistema de coordenadas tem-se

$$\mathbf{H}_{\text{nexne}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_{\text{nex}2}^T \mathbf{K}(\psi)_{2 \times 2} \mathbf{B}_{2 \times \text{nex}} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.12)$$

onde $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz jacobiana e **K** é a matriz de condutividade hidráulica que depende da carga de pressão e cuja determinação será discutida a seguir.

Esta integração, assim como as demais, é resolvida pelo método da quadratura de Gauss fazendo

$$\mathbf{H}_{\text{nexne}} = \sum_{i=1}^{\text{ngauss}} \sum_{j=1}^{\text{ngauss}} w_i w_j \mathbf{f}(\xi_i, \eta_j) \quad (3.13)$$

em que

$$\mathbf{f}(\xi_i, \eta_j) = \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} |\mathbf{J}| \quad (3.14)$$

onde w_i , w_j , ξ_i e η_j são, respectivamente, os pesos e as coordenadas dos pontos de Gauss apresentados na Tabela 3.3. ngauss é o número de pontos de Gauss em uma dada direção.

Tabela 3.3 - Pesos e coordenadas dos pontos de Gauss (Chapra e Canale, 1990).

NGAUSS	i, j	w_i	w_j	ξ_i	η_j
2	1	1	1	-0.577350269	-0.577350269
	2	1	1	0.577350269	0.577350269
3	1	0.555555556	0.555555556	-0.7745596669	-0.7745596669

	2	0.888888889	0.888888889	0.0	0.0
	3	0.555555556	0.555555556	0.7745596669	0.7745596669

c) Matriz **F**

F é a matriz de capacidade de retenção que traduz as variações do teor de umidade em relação à pressão em cada elemento. Ela é obtida através da integral apresentada na Equação 2.28. Da mesma forma, fazendo-se a transformação do sistema de coordenadas tem-se

$$\mathbf{F}_{\text{nexne}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}_{\text{nexl}}^T \mathbf{C}(\psi)_{1 \times 1} \mathbf{N}_{1 \times \text{nex}} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.15)$$

onde $\mathbf{C}(\psi)$ é a capacidade de retenção específica cuja determinação será discutida a seguir.

Resolvendo-se a Equação 3.15 pelo método da quadratura de Gauss, tem-se

$$\mathbf{F}_{\text{nexne}} = \sum_{i=1}^{\text{ngauss}} \sum_{j=1}^{\text{ngauss}} w_i w_j \mathbf{f}(\xi_i, \eta_j) \quad (3.16)$$

em que

$$\mathbf{f}(\xi_i, \eta_j) = \mathbf{N}^T \mathbf{C}(\psi) \mathbf{N} |\mathbf{J}| \quad (3.17)$$

d) Vetor **Q**

Vetor que representa a condição de contorno natural, dada pela integral apresentada na Equação 2.29. O valor de \bar{v} é prescrito nos nós de uma face do elemento e é fornecido como dado de entrada. Assim, efetuando-se a transformação do sistema de coordenadas tem-se

$$\mathbf{Q}_{\text{nexl}} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}_{\text{nexl}}^T(\xi, 1) \mathbf{p}_{1 \times 1} d\xi \quad (3.18)$$

Utilizando-se a quadratura de Gauss, tem-se

$$\mathbf{Q}_{\text{nex}1} = \sum_{i=1}^{\text{ngauss}} w_i \mathbf{f}(\xi_i, 1) \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{f}(\xi, 1) = \mathbf{N}^T(\xi, 1) \mathbf{p} \quad (3.20)$$

em que

$$\mathbf{p} = \bar{v}_x \frac{dx}{d\xi} + \bar{v}_y \frac{dy}{d\xi} \quad (3.21)$$

onde \bar{v}_x e \bar{v}_y são as componentes da velocidade de fluxo nas direções x e y respectivamente.

e) Vetor \mathbf{Q}'

O Vetor \mathbf{Q}' traduz uma parcela de vazão relativa a efeitos gravitacionais (carga de posição) e é definido pela integral apresentada na Equação 2.30. Usando-se a transformação do sistema de coordenadas tem-se

$$\mathbf{Q}'_{\text{nex}1} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_{\text{nex}2}^T \mathbf{K}(\psi)_{2 \times 2} \mathbf{e}_{2 \times 1} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.22)$$

Da mesma forma, usando-se o método da quadratura de Gauss, tem-se

$$\mathbf{Q}'_{\text{nexl}} = \sum_{i=1}^{\text{ngauss}} \sum_{j=1}^{\text{ngauss}} w_i w_j \mathbf{f}(\xi_i, \eta_j) \quad (3.23)$$

em que

$$\mathbf{f}(\xi_i, \eta_j) = \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{e} | \mathbf{J} | \quad (3.24)$$

onde a matriz \mathbf{K} é a matriz de condutividade hidráulica que será definida a seguir.

f) Matriz $\mathbf{K}(\psi)$ e coeficiente $C(\psi)$

A matriz de condutividade hidráulica $\mathbf{K}(\psi)$ é dada, supondo x e y como direções principais de fluxo, por

$$\mathbf{K}(\psi) = \begin{bmatrix} k(\psi) & 0 \\ 0 & \text{FAT } k(\psi) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

onde $k(\psi)$ é a condutividade hidráulica na direção x e FAT é um fator multiplicador que introduz o efeito da anisotropia.

A condutividade hidráulica $k(\psi)$ e a capacidade de retenção específica, $C(\psi)$ podem ser determinadas de duas maneiras no programa GEOFLUX. Na primeira alternativa utiliza-se as equações apresentadas por Srivastava e Yeh (1991) ou o modelo proposto por van Genuchten (1980). Desta forma tem-se, para Srivastava e Yeh (1991)

$$k(\psi) = k_s e^{\alpha_{\text{exp}} \psi} \quad (3.26a)$$

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} = (\theta_s - \theta_r) \alpha_{\text{exp}} e^{\alpha_{\text{exp}} \psi} \quad (3.26b)$$

e para van Genuchten (1980)

$$k(\psi) = k_s \left\{ \frac{1}{[1 + \alpha_{vg} |\psi|^q]^p} \right\}^{1/2} \left[1 - \left(1 - \left\{ \frac{1}{[1 + \alpha_{vg} |\psi|^q]^p} \right\}^{\frac{1}{p}} \right)^p \right]^2 \quad (3.27a)$$

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\alpha_{vg} p q (\theta_s - \theta_r) (\alpha_{vg} |\psi|)^{q-1}}{[1 + (\alpha_{vg} |\psi|)^q]^{p+1}} \quad (3.27b)$$

A segunda opção para a obtenção do valor da condutividade hidráulica e da capacidade de retenção é a representação por pontos. Esta alternativa consta, basicamente, no fornecimento de valores conhecidos das curvas. A partir destes valores, o programa pode efetuar interpolações lineares ou via spline cúbica para a determinação dos dados necessários no processo de cálculo.

Os pontos fornecidos definem um conjunto de intervalos nos quais as curvas são aproximadas por polinômios interpoladores do primeiro ou terceiro grau para a interpolação linear ou spline cúbica, respectivamente. As técnicas de interpolação são discutidas mais detalhadamente no Anexo I.

Para a obtenção da condutividade hidráulica utiliza-se diretamente os polinômios interpoladores, já para a obtenção dos valores de capacidade de retenção específica são utilizadas as derivadas primeiras dos polinômios interpoladores.

Para os valores de pressão que, por ventura, ultrapassem o domínio dos pontos fornecidos é admitido o mesmo valor do ponto extremo mais próximo.

Segundo Paniconi *et al* (1991) para a zona saturada e para a zona de ascensão capilar a capacidade de retenção específica, é normalmente nula. Porém, é conveniente considerar um valor de $C(\psi)$ diferente de zero para estas regiões. Paniconi *et al* (1991) destacam que numericamente uma capacidade de retenção específica diferente de zero preserva o caráter parabólico da equação diferencial, superando portanto dificuldades na convergência que podem surgir caso a equação se torne elíptica tanto na região residual quanto na de saturação e as condições de contorno naturais não forneçam uma solução única. E ainda, uma capacidade de retenção específica não nula é necessária para evitar-

se uma singularidade na interface entre as regiões saturada e não saturada. Portanto, é adotado para a zona saturada, para a zona de ascensão capilar e ainda para a região de saturação residual um valor de $C(\psi)$ pequeno mas diferente de zero. Nos exemplos estudados adotou-se um valor da ordem de 10^{-10} .

Cabe ressaltar que em ambas as alternativas os valores de $k(\psi)$ e $C(\psi)$ são avaliados nos pontos de Gauss implicando numa determinação prévia da carga de pressão nestes pontos. Para tanto, utiliza-se a mesma função de interpolação dada pela Equação 2.20.

Capítulo 4

Exemplos de Validação

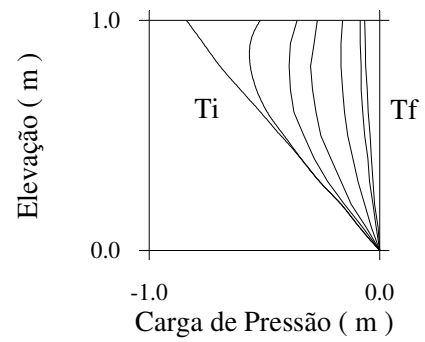
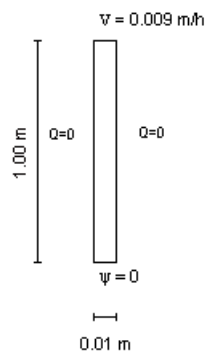
Este capítulo apresenta uma série de exemplos com o objetivo de validar o modelo computacional desenvolvido, sendo os mesmos mostrados de maneira sintética nas Figuras 4.1 e 4.2.

Os exemplos indicados na Figura 4.1 buscam o estudo do fluxo em solos não saturados em condições unidimensionais, para situações de drenagem e infiltração, sendo o domínio do problema composto de um ou dois materiais. Estes exemplos e suas respectivas soluções analíticas foram propostos por Srivastava e Yeh (1991). Os resultados destas análises são apresentados em termos da distribuição da carga de pressão, da condutividade hidráulica e do teor de umidade volumétrica no tempo e no espaço.

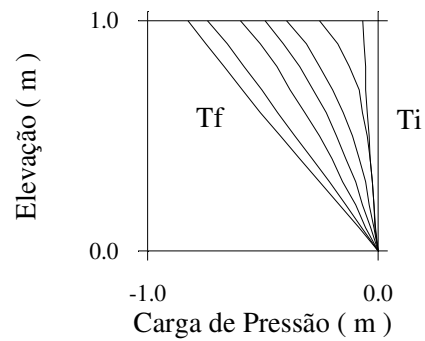
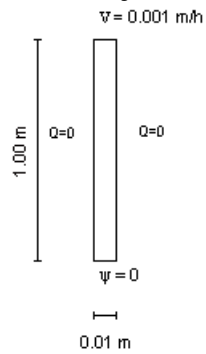
Os exemplos apresentados na Figura 4.2 visam o estudo de problemas de fluxo bidimensionais em solos não saturados. A Figura 4.2a propõe a simulação do processo de infiltração a uma velocidade de fluxo constante num domínio bidimensional. Os resultados obtidos são apresentados, em termos das equipotenciais em determinados instantes de tempo e comparados com a solução semi-analítica apresentada por Tsai *et al* (1993) juntamente com a solução analítica proposta por Warric e Lomen (1976).

O exemplo apresentado na Figura 4.2b visa a simulação do processo de infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal estudado por Zaradny (1993). Apresenta-se como resultado, a evolução da linha piezométrica com o tempo e a comparação entre a condição estacionária obtida pelo GEOFLUX e a obtida pela solução analítica apresentada por Zaradny (1993).

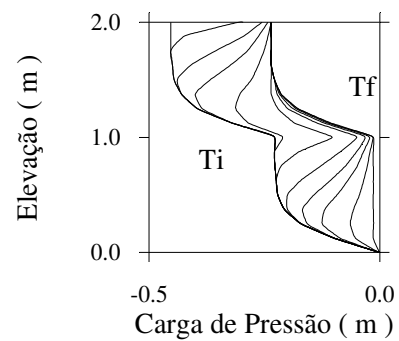
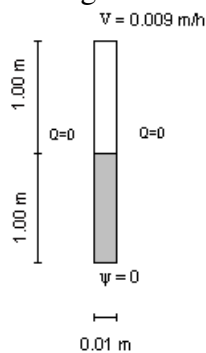
Finalmente, o exemplo mostrado na Figura 4.2c objetiva o estudo do fluxo transiente em uma barragem de terra homogênea supondo uma condição de enchimento instantâneo. Como resultado, é apresentada a evolução da linha piezométrica com o tempo e ainda uma comparação da condição estacionária com a solução gráfica de Kozeny.



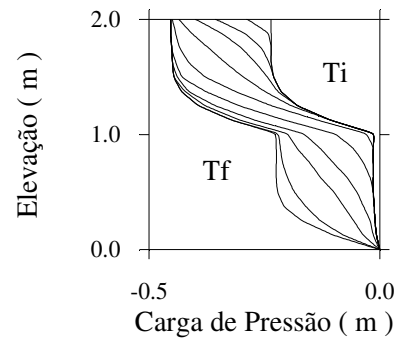
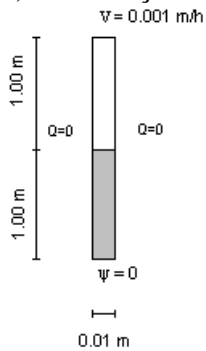
a) Infiltração em coluna de solo constituída de um único material.



b) Drenagem de uma coluna de solo constituída de um único material.

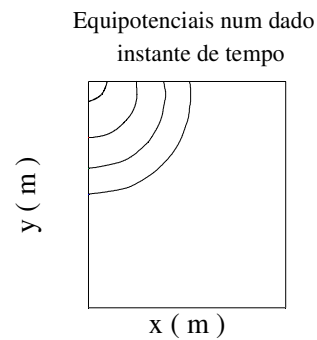
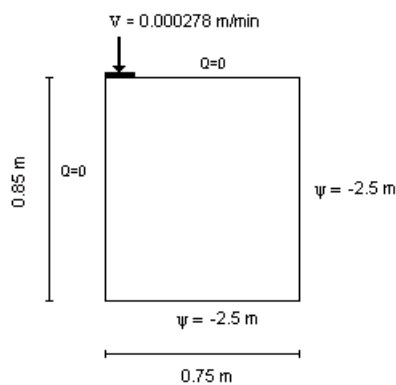


c) Infiltração em coluna de solo constituída por dois materiais.

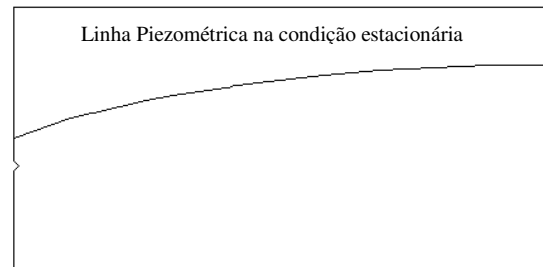
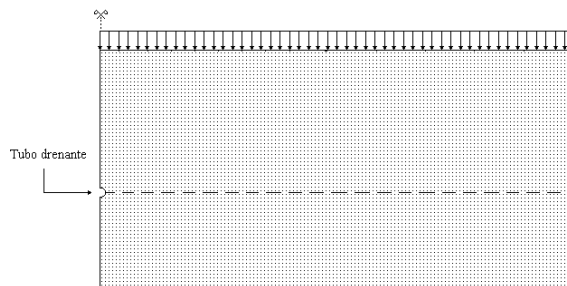


d) Drenagem de uma coluna de solo constituída por dois materiais.

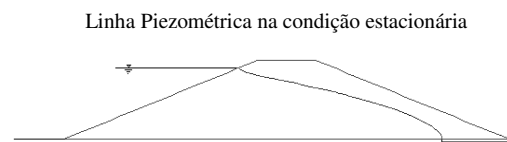
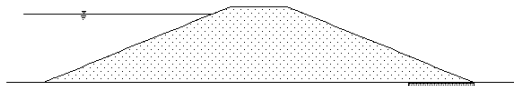
Figura 4.1 – Exemplos de validação - problemas unidimensionais.



- a) Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície.



- b) Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal.



- c) Fluxo em uma barragem de terra homogênea.

Figura 4.2 – Exemplos de validação – problemas bidimensionais.

4.1 – Fluxo Transiente Unidimensional

Os exemplos que serão apresentados neste item objetivam a simulação do fluxo em regime transiente em uma coluna de solo. Os problemas em questão tiveram suas soluções analíticas propostas por Srivastava e Yeh (1991) que estudaram as condições de fluxo transiente para situações de drenagem e infiltração em colunas compostas de um ou dois tipos de solo.

Duas situações são analisadas e comparadas com os exemplos apresentados por Srivastava e Yeh (1991): a infiltração e a drenagem ao longo de uma coluna de solo constituída apenas por um material; e, a infiltração e a drenagem ao longo de uma coluna de solo constituída por dois materiais.

Para este conjunto de exemplos foram utilizadas as Equações 2.1 e 2.4 apresentadas por Srivastava e Yeh (1991) para a descrição das propriedades do material.

4.1.1 – Infiltração e Drenagem em uma Coluna de Solo Constituída de um Único Material

A primeira situação analisada corresponde ao processo de infiltração devido a um fluxo de 0.009 m/h prescrito no topo de uma coluna de solo de um metro de altura constituída de um único material, como indica a Figura 4.3. Também é apresentada nesta figura a malha de elementos finitos adotada (50 elementos do tipo Q4) juntamente com as condições de contorno e a condição inicial do problema. Os valores adotados para as propriedades do material são apresentados na Tabela 4.1 e as correspondentes curvas características estão mostradas na Figura 4.4.

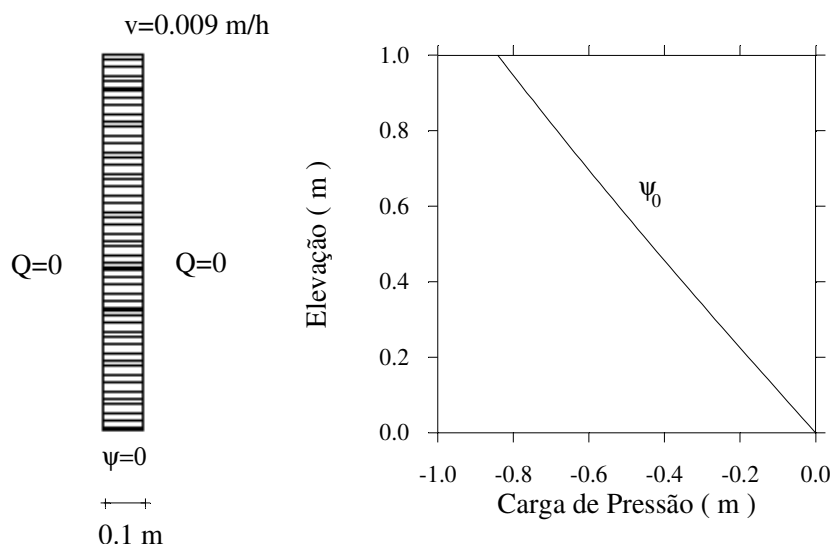
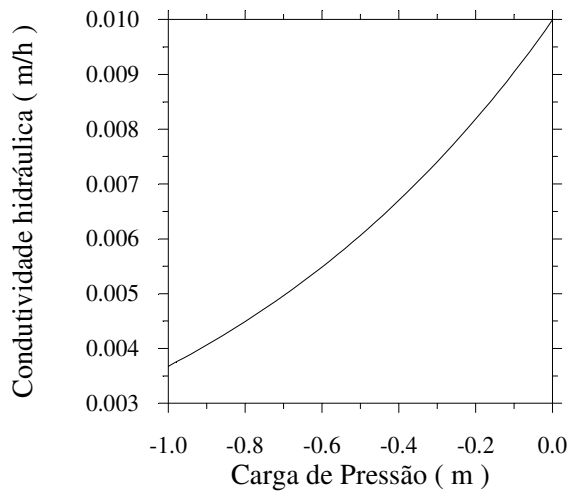


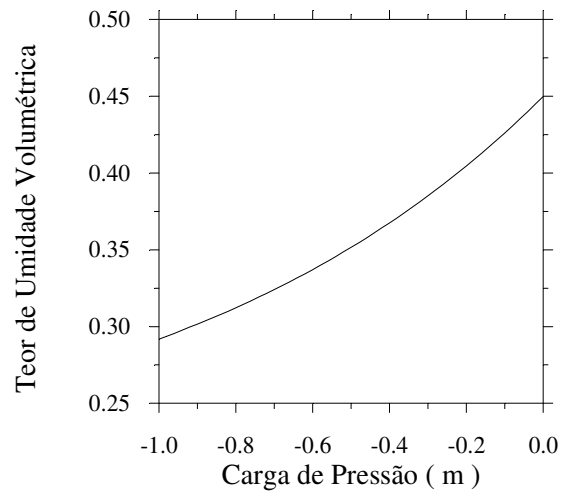
Figura 4.3 - Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material – malha de elementos finitos.

Tabela 4.1 – Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material - parâmetros do modelo exponencial.

α_{exp}	k_s	θ_r	θ_s
1.0	0.01 m/h	0.20	0.45



a) Função de condutividade hidráulica.



b) Curva de retenção.

Figura 4.4 – Infiltração e drenagem em uma coluna de solo constituída de um único material – curvas características.

A condição inicial desse processo de infiltração, indicada na Figura 4.3, é igual à condição estacionária estabelecida a partir de uma análise preliminar indicada na Figura 4.5. Esta análise preliminar consiste na simulação de um processo de infiltração devido a um fluxo de 0.001m/h prescrito no topo da coluna sendo a mesma sujeita, inicialmente, a uma distribuição de carga hidráulica total nula, como indicado na Figura 4.5.

O tempo foi discretizado em 30 intervalos sendo a distribuição dos incrementos apresentada na Tabela 4.2. A marcha no tempo foi dada por um esquema puramente implícito ($\alpha = 1$); e no tratamento da não linearidade adotou-se uma tolerância de 1 % e um número máximo de 50 iterações.

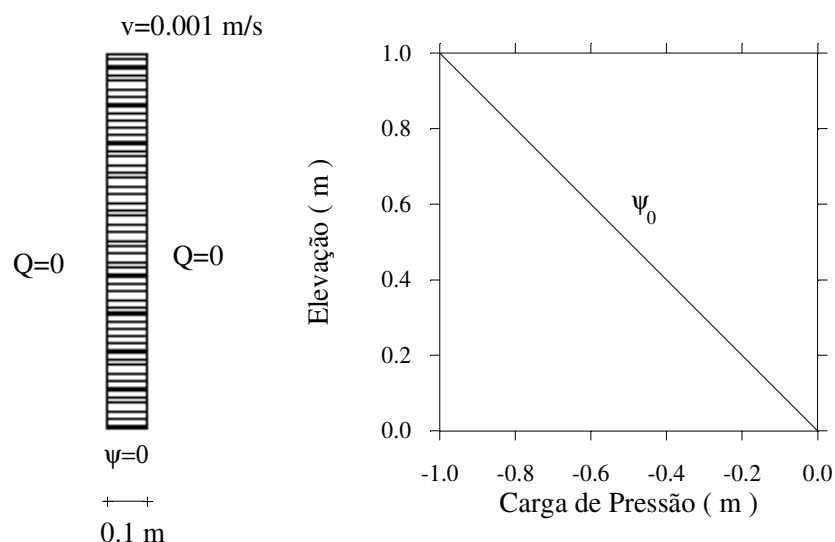


Figura 4.5 - Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material - análise preliminar.

Tabela 4.2 – Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo).

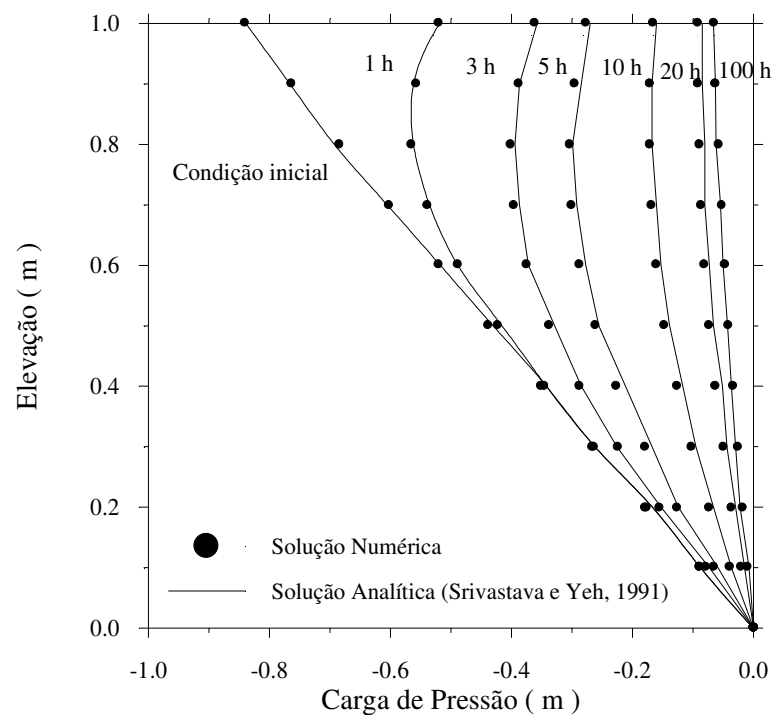
<i>NI</i>	<i>Δt (horas)</i>	<i>Tempo (horas)</i>
10	0.1	0.0-1.0
9	1.0	1.0-10.0
4	5.0	10.0-30.0
7	10.0	30.0-100.0

Os resultados fornecidos pelo programa GEOFLUX são apresentados na Figura 4.6 em termos da distribuição da carga de pressão, da condutividade hidráulica e do teor de umidade volumétrica, no tempo e no espaço. A partir da Figura 4.6a, pode-se notar que a solução numérica apresentou uma boa concordância com a solução analítica (Srivastava e Yeh, 1991) para todos os instantes de tempo avaliados.

A condição estacionária para este problema foi observada com aproximadamente 100 horas. Cabe ressaltar que nesta condição a camada de solo não atingiu a saturação completa, ou seja, a velocidade de fluxo imposta não foi suficiente para saturar a camada de solo. Para isto, seria necessário uma velocidade de fluxo prescrita maior que a condutividade hidráulica saturada.

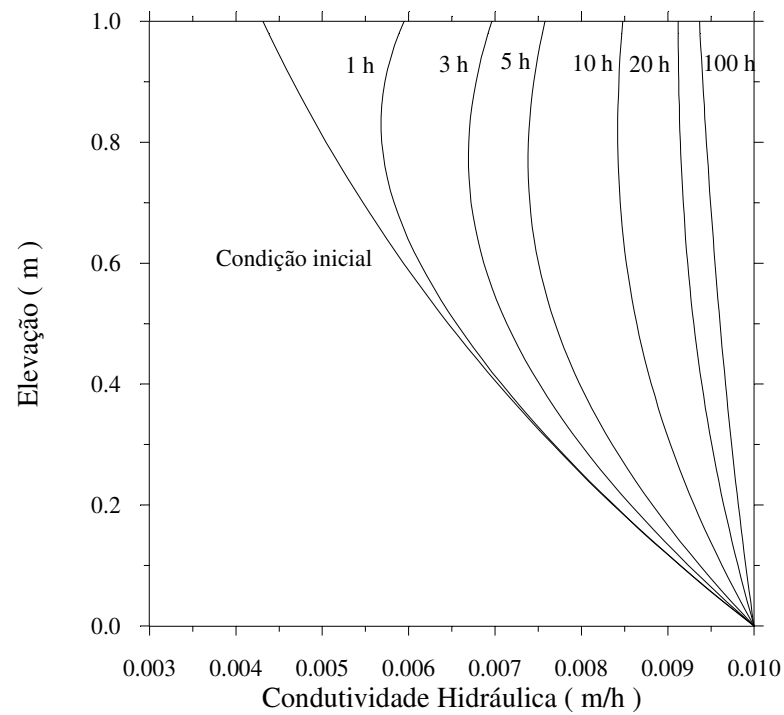
A Figura 4.6b apresenta a distribuição da condutividade hidráulica no espaço e no tempo. Pode-se observar que durante o processo de infiltração a condutividade hidráulica do material aumenta tendendo ao valor da condutividade hidráulica saturada (0.01m/h) apresentado na Tabela 4.1. Este aumento na condutividade hidráulica se deve ao aumento do teor de umidade volumétrica do solo no decorrer do processo de infiltração, como indica a Figura 4.6c.

O teor de umidade volumétrica aumenta à medida que a água ocupa no solo o espaço que antes era ocupado pelo ar, tendendo deste modo, a um valor constante e igual ao teor de umidade volumétrica do solo saturado (0.45). Pode-se perceber ainda, que a condutividade hidráulica e o teor de umidade volumétrica tiveram o mesmo comportamento, isto se deve à semelhança das equações adotadas por Srivastava e Yeh (1991) para representar as curvas características.

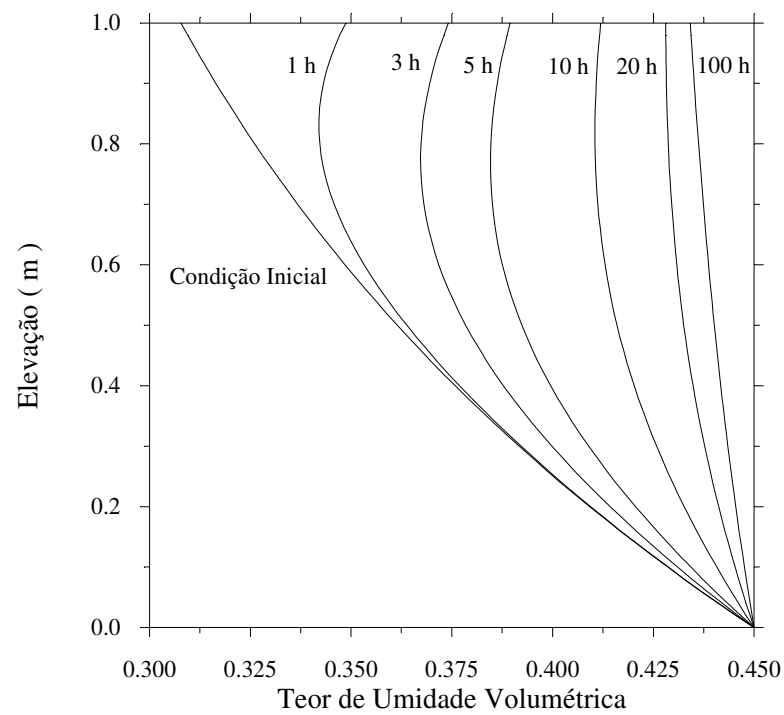


a) Carga de pressão.

Figura 4.6 – Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material – resultados.



b) Condutividade hidráulica.



c) Teor de umidade volumétrica.

Figura 4.6 – Infiltração em uma coluna de solo constituída de um único material – resultados.

A segunda situação analisada corresponde ao processo de drenagem desta coluna de solo devido à variação do fluxo prescrito no topo da camada de 0.009 m/h para 0.001 m/h, como indicado na Figura 4.7. A condição inicial, indicada também nesta figura, é igual à distribuição de pressões obtida para condição estacionária do processo de infiltração da Figura 4.3. O material, a discretização do tempo, o tipo de marcha no tempo e os parâmetros para o tratamento da não linearidade são iguais aos adotados para a situação anterior.

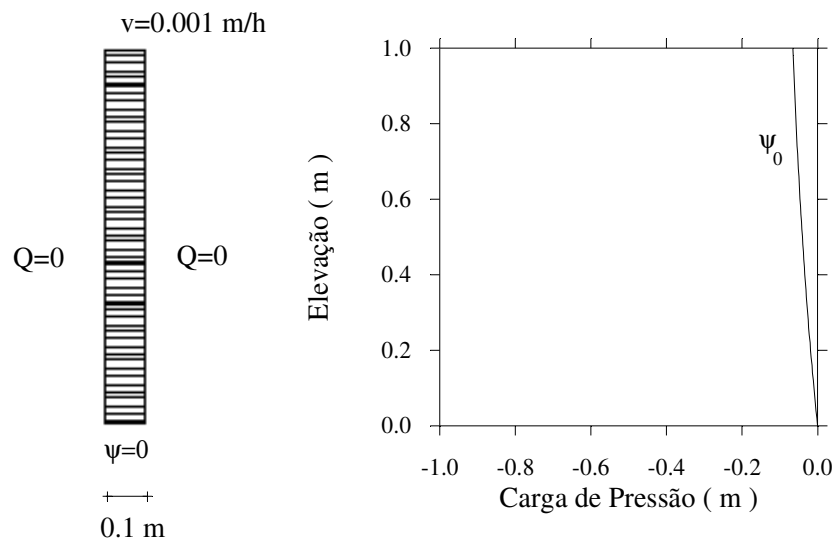


Figura 4.7 - Drenagem em uma coluna de solo constituída de um único material – malha de elementos finitos.

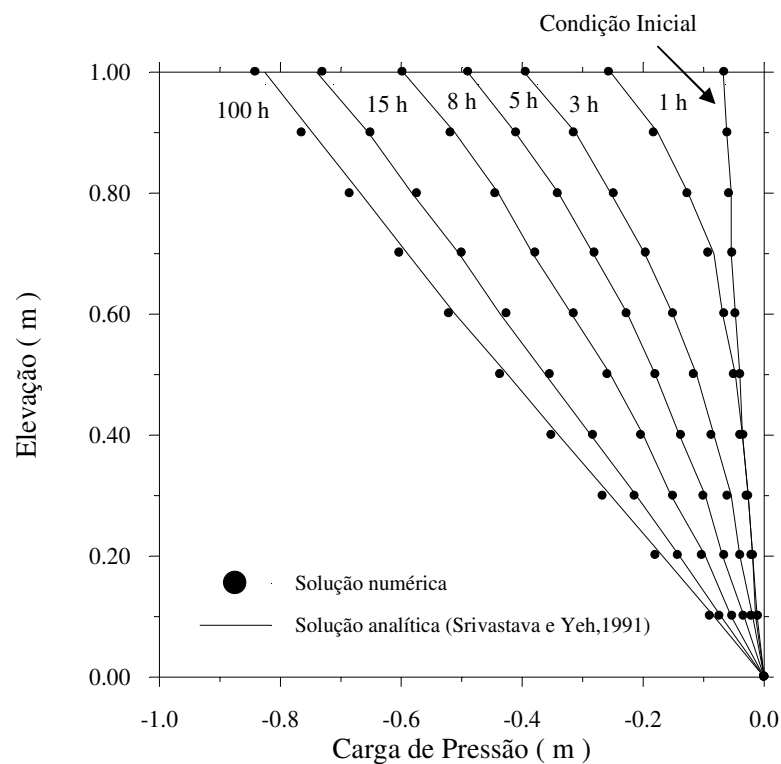
Os resultados obtidos são apresentados na Figura 4.8 em termos da distribuição, no tempo e no espaço, da carga de pressão, da condutividade hidráulica e do teor de umidade volumétrica.

Como mostra a Figura 4.8a, uma boa concordância entre a solução numérica e a solução analítica (Srivastava e Yeh, 1991) pode ser verificada para todos os instantes de tempo avaliados.

A condição estacionária foi obtida em aproximadamente 100 h. Ou seja, a drenagem da camada de solo ocorreu no mesmo período de tempo que o processo de infiltração. Isso se deve ao fato de ter-se adotado as mesmas curvas características para os processos de infiltração e drenagem sem levar em conta o efeito da histerese.

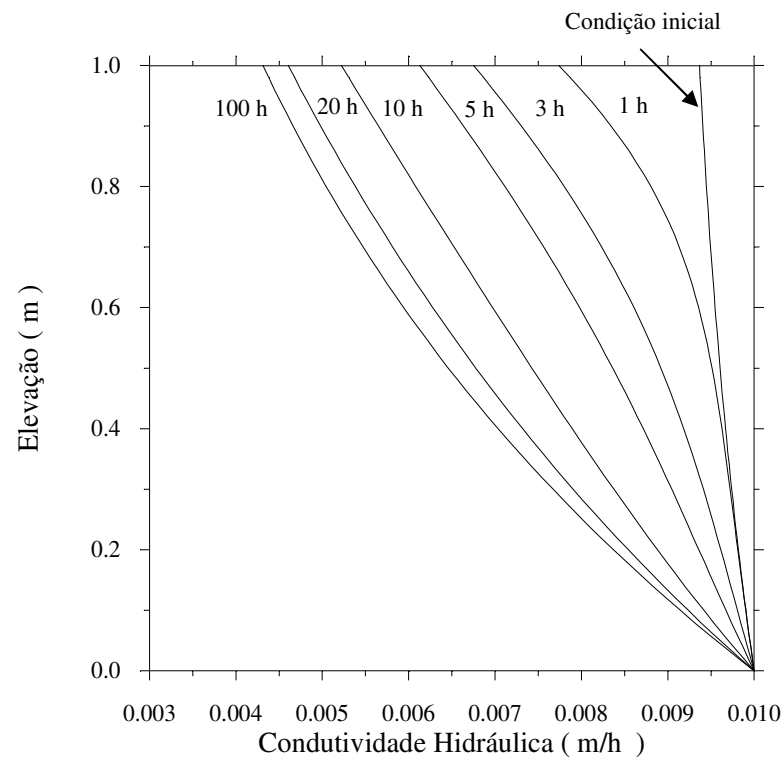
A Figura 4.8b apresenta a distribuição da condutividade hidráulica no espaço e no tempo. Ao contrário da situação anterior, pode-se observar que durante o processo de

drenagem a condutividade hidráulica do material diminui. Esta diminuição da condutividade hidráulica se deve à diminuição do teor de umidade volumétrica do solo no decorrer do processo de drenagem, como indica a Figura 4.8c. O teor de umidade volumétrica diminui à medida que a água abandona o solo, tendendo, deste modo, a um valor constante e igual ao teor de umidade volumétrica residual (θ_r).

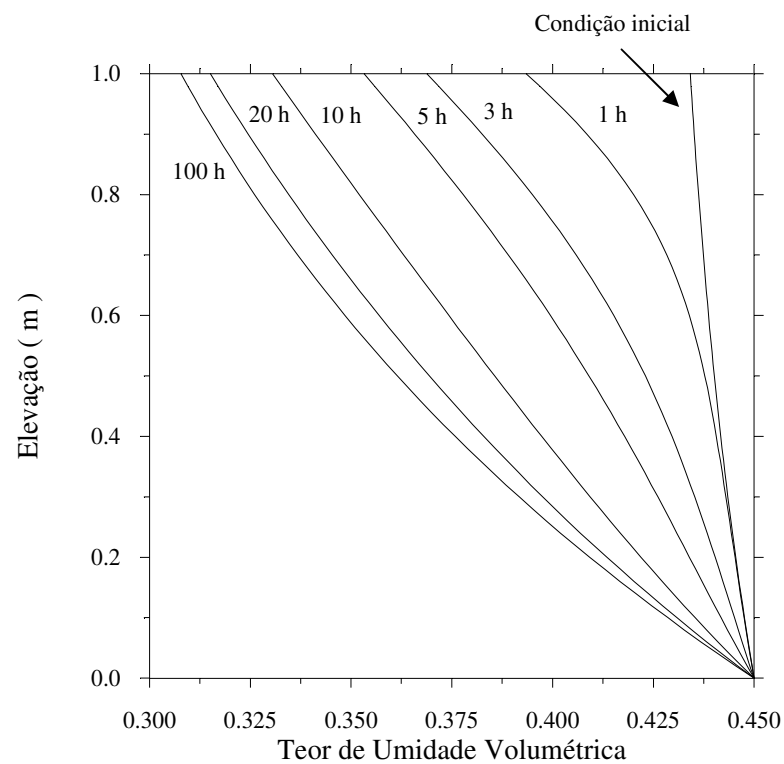


a) Carga de pressão.

Figura 4.8 – Drenagem em uma coluna de solo constituída de um único material – resultados.



b) Condutividade hidráulica.



c) Teor de umidade volumétrica.

Figura 4.8 – Drenagem em uma coluna de solo constituída de um único material – resultados.

4.1.2 – Infiltração e Drenagem em uma Coluna de Solo Constituída de Dois Materiais

Neste exemplo adotou-se a mesma estratégia do exemplo anterior. Ou seja, analisa-se inicialmente o processo de infiltração devido à um fluxo prescrito no topo da coluna de solo; e, em seguida, analisa-se o processo de drenagem desta coluna devido à variação do fluxo no topo da mesma. A diferença entre estes exemplos é que neste caso a camada de solo é constituída por dois materiais diferentes.

Assim sendo, a primeira situação a ser estudada é o processo de infiltração devido à um fluxo de 0.009 m/h prescrito no topo de uma coluna de solo de dois metros de altura constituída por dois materiais, como indica a Figura 4.9. Também é representada, nesta figura, a malha de elementos finitos adotada (100 elementos do tipo Q4) juntamente com as condições de contorno e condição inicial do problema. Os valores adotados para as propriedades dos materiais são apresentados na Tabela 4.3 e as respectivas curvas características estão representadas na Figura 4.10. Cabe observar que Srivastava e Yeh (1991) adotaram uma única curva de retenção para materiais diferentes. Isso aparentemente não traz inconvenientes numéricos, porém, em uma primeira análise, parece ser fisicamente inconsistente.

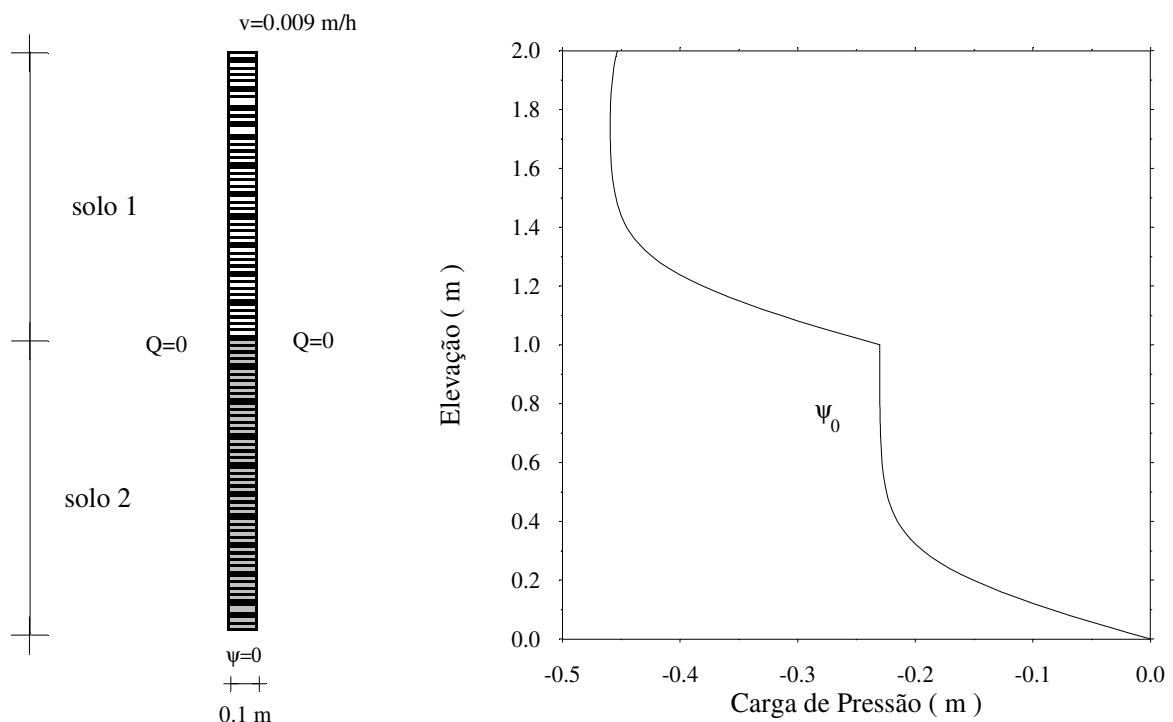
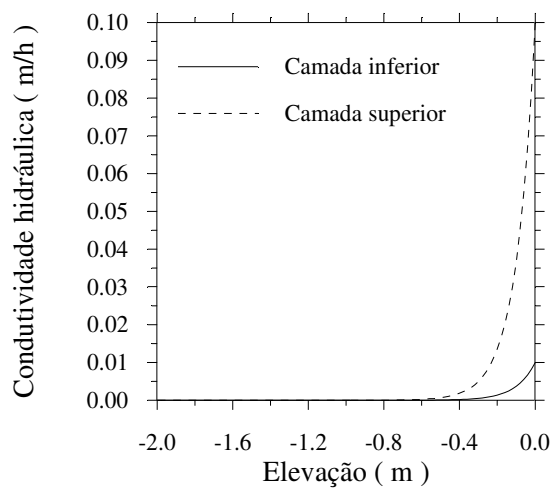


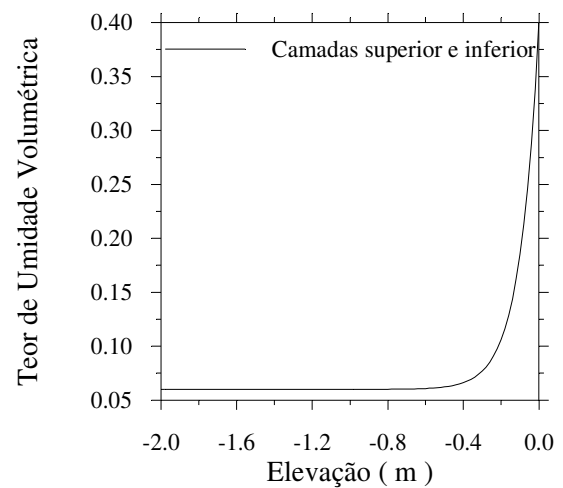
Figura 4.9 - Infiltração numa coluna de solo constituída de dois materiais – malha de elementos finitos.

Tabela 4.3 – Infiltração e drenagem em uma coluna de solo constituída de dois materiais - parâmetros do modelo exponencial.

Material	α	k_s	θ_r	θ_s
1 (camada superior)	10.0	0.10 m/h	0.06	0.40
2 (camada inferior)	10.0	0.01 m/h	0.06	0.40



a) Função de condutividade hidráulica.



b) Curva de retenção.

Figura 4.10 - Infiltração e drenagem em uma coluna de solo constituída de dois materiais – curvas características.

A condição inicial do processo de infiltração foi definida, de maneira análoga à apresentada no item 4.1.1, a partir de uma simulação prévia indicada na a Figura 4.11.

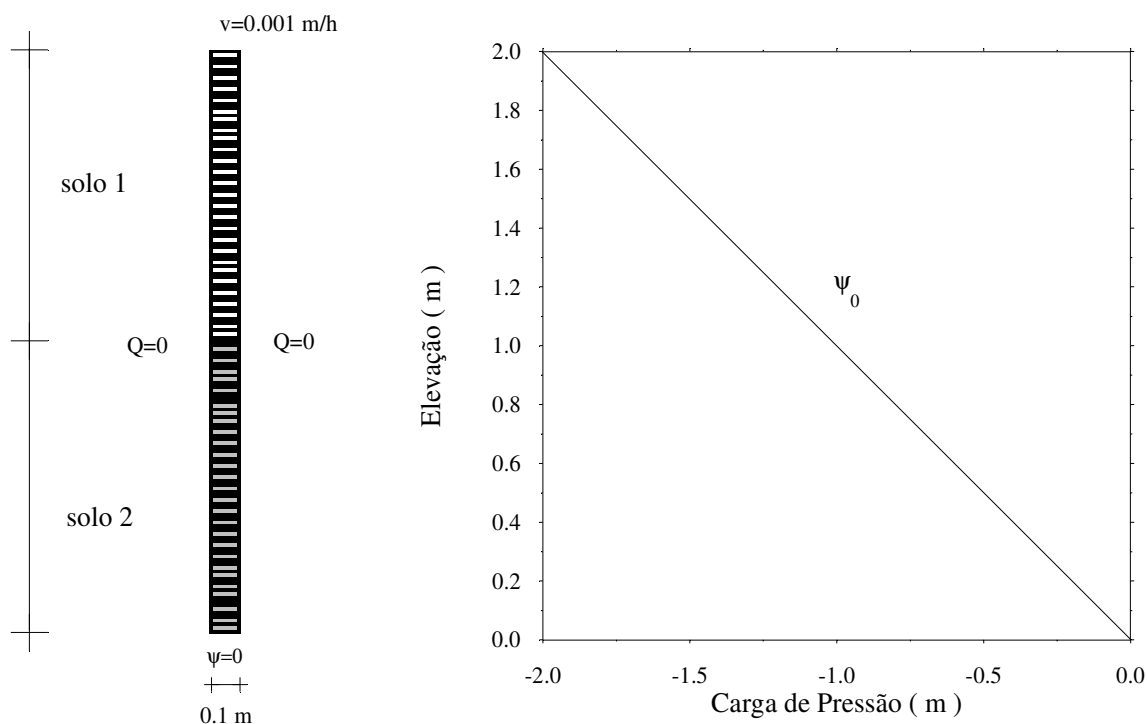


Figura 4.11 - Processo de Infiltração numa coluna de solo constituída de dois materiais - análise preliminar.

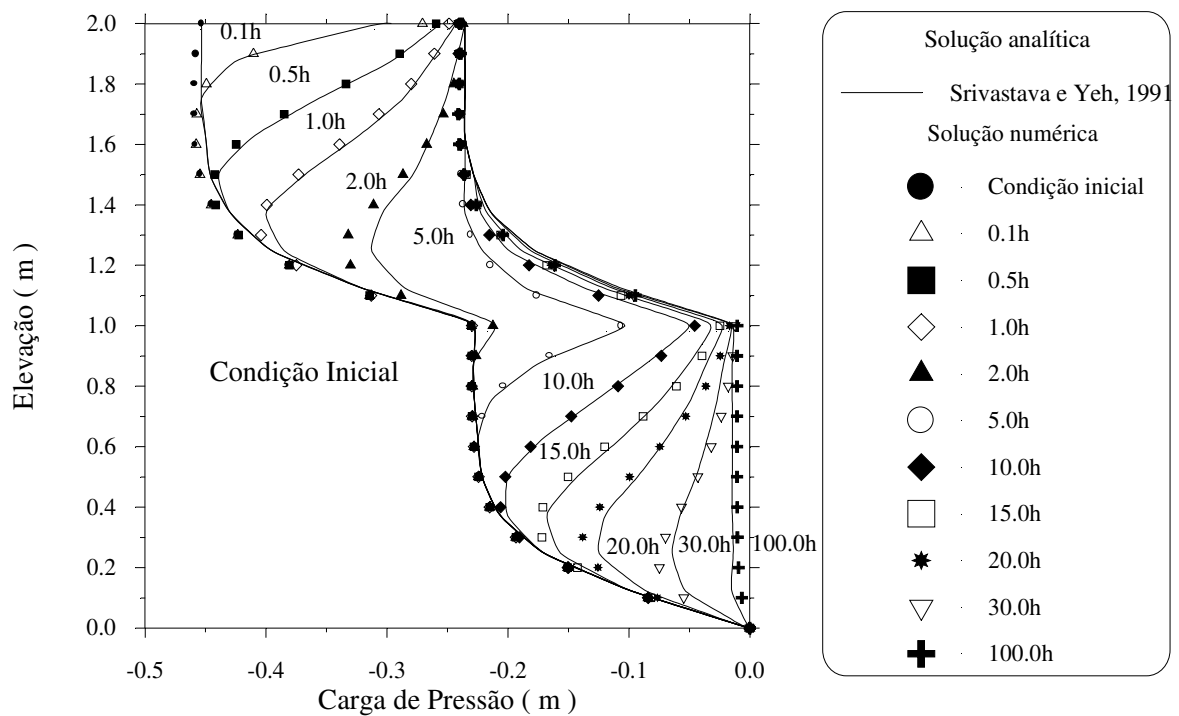
O tempo foi discretizado em 37 intervalos sendo a distribuição dos incrementos apresentada na Tabela 4.4. A marcha no tempo também foi dada por um esquema puramente implícito ($\alpha = 1$), e, no tratamento da não linearidade, adotou-se, da mesma forma, uma tolerância de 1 % e um número máximo de 50 iterações.

Tabela 4.4 – Infiltração em uma coluna de solo constituída de dois materiais - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo).

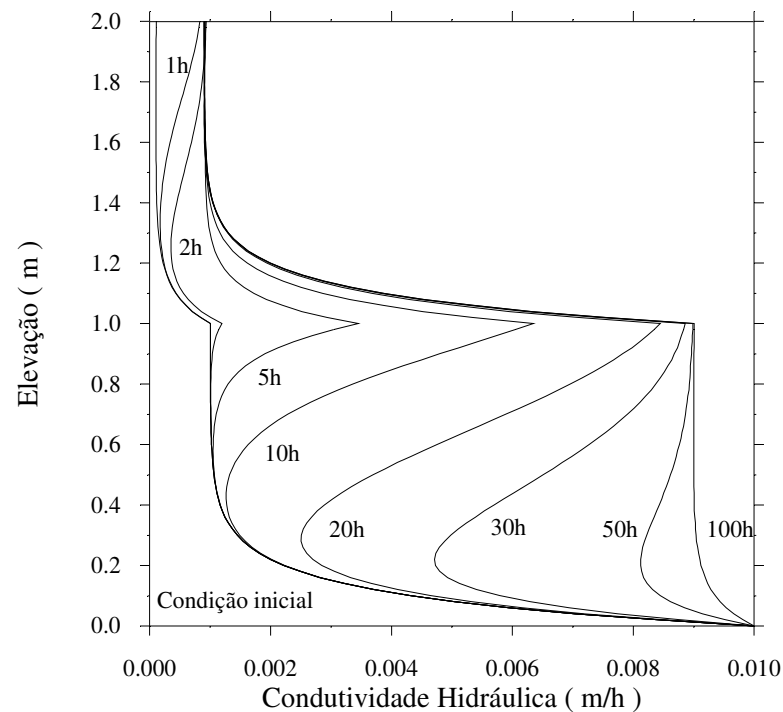
<i>NI</i>	<i>Δt (horas)</i>	<i>Tempo (horas)</i>
10	0.1	0.0-1.0
9	1.0	1.0-10.0
18	5.0	10.0-100.0

Os resultados fornecidos pelo programa GEOFLUX são apresentados na Figura 4.12 em termos da distribuição da carga de pressão, da condutividade hidráulica e do teor de umidade volumétrica, no espaço e no tempo. Mais uma vez, uma boa concordância entre a

solução numérica e a solução analítica (Srivastava e Yeh, 1991) foi verificada para todos os instantes de tempo avaliados, como mostra a Figura 4.12a.

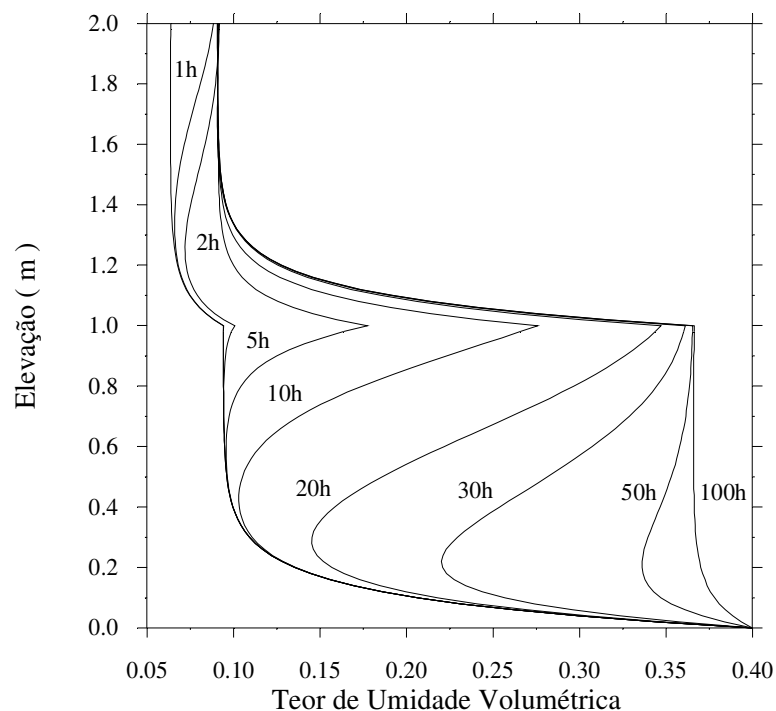


a) Carga de pressão.



b) Condutividade hidráulica.

Figura 4.12 - Infiltração em uma coluna de solo constituída de dois materiais – resultados.



c) Teor de umidade volumétrica.

Figura 4.12 - Infiltração em uma coluna de solo constituída de dois materiais - resultados.

A Figura 4.12b apresenta a distribuição da condutividade hidráulica no espaço e no tempo. Pode-se notar uma tendência de comportamento semelhante ao observado na situação de infiltração discutida no item 4.1.1. Ou seja, durante o processo de infiltração a condutividade hidráulica do material aumenta devido ao aumento do teor de umidade volumétrica do solo, como indica a Figura 4.12c.

Cabe observar que a velocidade de fluxo (0.009m/h) imposta no topo da coluna é aproximadamente um décimo do valor da condutividade hidráulica saturada (0.1m/h) do material que constitui a camada superior de solo. Isso indica que a camada superior, mesmo ao atingir o regime permanente, se encontrará longe da saturação completa. Já a camada inferior, possui condutividade hidráulica saturada (0.01m/h) aproximadamente igual à velocidade de fluxo prescrita. Deste modo, quando o regime permanente é atingido, ela se aproxima bastante do nível de saturação completa como indica a Figura 4.12b.

Analisando-se as Figuras 4.12b e 4.12c, pode-se notar ainda, um aumento do teor de umidade volumétrica e um correspondente aumento da condutividade hidráulica na base da camada superior. Isto se dá porque a camada superior é mais permeável que a inferior; e neste

caso, quando a água atinge a interface, ela encontra uma maior dificuldade para percolar, ocorrendo assim um acúmulo de água no topo da camada inferior. Este acúmulo aumenta o teor de umidade volumétrica, aumentando, conseqüentemente, a condutividade hidráulica nesta região da coluna.

Nas proximidades do topo da camada inferior, nota-se uma nova redução na condutividade hidráulica devido à presença de um menor teor de umidade volumétrica nesta região. Porém, com o passar do tempo a umidade da camada inferior aumenta devido à infiltração da água vinda da camada superior e conseqüentemente a condutividade hidráulica, nesta região da coluna, é aumentada. Este processo é estabilizado ao se atingir o regime permanente em aproximadamente 100 horas.

A segunda situação analisada corresponde ao processo de drenagem desta coluna de solo devido à variação do fluxo prescrito no topo da camada de 0.009 m/h para 0.001 m/h. A condição inicial, indicada na Figura 4.13, é igual à distribuição de pressões obtida para condição estacionária do processo de infiltração. Os materiais, a discretização do tempo, o tipo de marcha no tempo e os parâmetros para o tratamento da não linearidade são iguais aos adotados para a situação anterior.

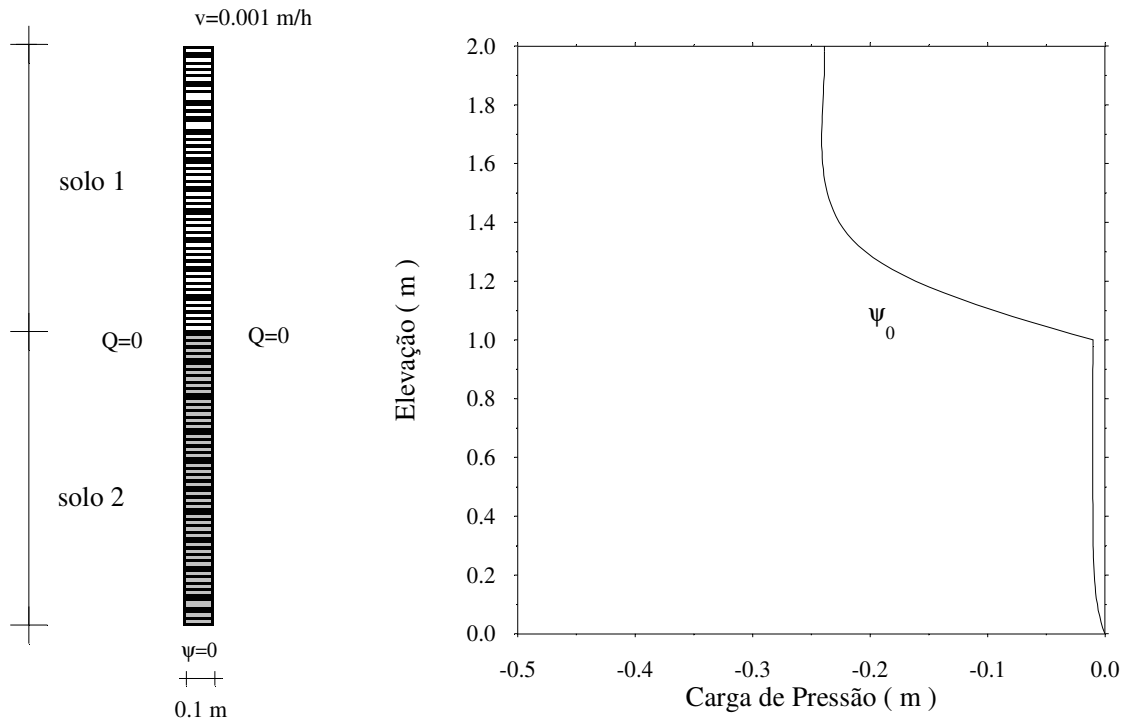


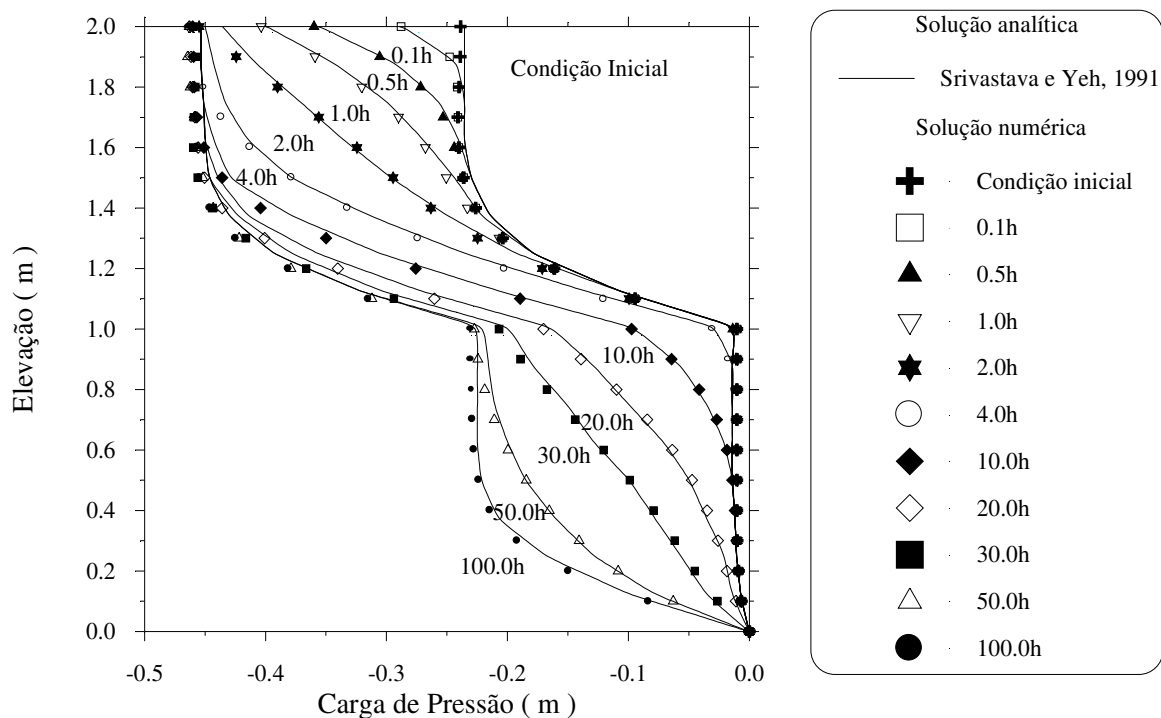
Figura 4.13 - Drenagem de uma coluna de solo constituída de dois materiais – malha de elementos finitos.

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 4.14 em termos da distribuição, no espaço e no tempo, da carga de pressão, da condutividade hidráulica e do teor de umidade volumétrica. A partir da Figura 4.14a, pode-se verificar uma boa concordância entre a solução numérica e a solução analítica (Srivastava e Yeh, 1991) para todos os instantes de tempo avaliados.

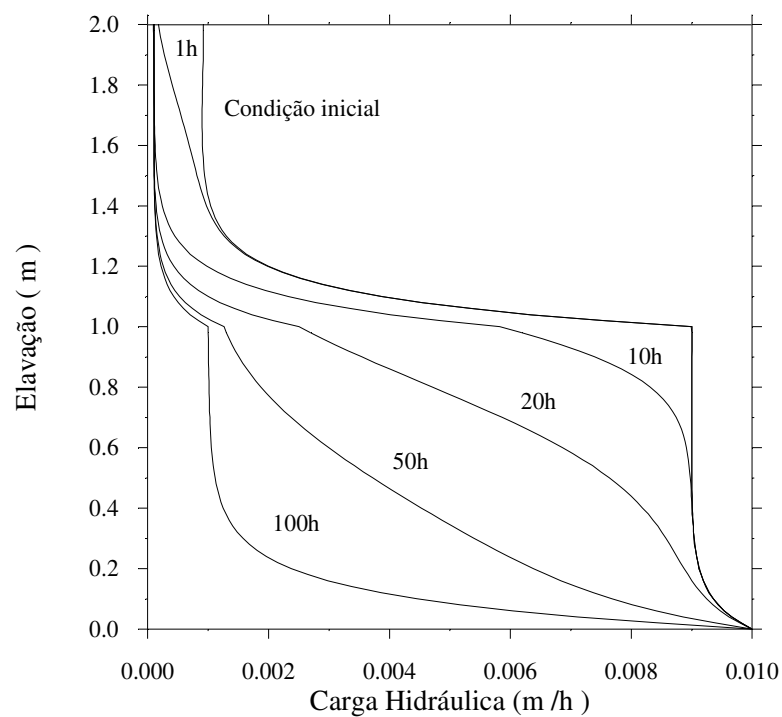
A Figura 4.14b apresenta a distribuição da condutividade hidráulica no espaço e no tempo. Da mesma forma, pode-se notar uma tendência de comportamento semelhante à observada na situação de drenagem discutida no item 4.1.2. Ou seja, durante o processo de drenagem a condutividade hidráulica do material diminui devido à diminuição do teor de umidade volumétrica do solo, como indicam as Figuras 4.8c e 4.14c.

Cabe observar que, o teor de umidade volumétrica da camada de solo superior cai relativamente rápido devido à sua maior condutividade hidráulica. Já na camada inferior, o teor de umidade volumétrica cai mais lentamente devido à baixa condutividade hidráulica do material. Este comportamento comprova a maior capacidade drenante do material da camada superior em relação ao material da camada inferior.

Nesta situação, a interface entre os materiais, funciona novamente como uma barreira à passagem da água. Isso pode ser notado na Figura 4.14c que apresenta um teor de umidade volumétrica, na base da camada superior, maior que os valores encontrados no topo, indicando, novamente, um acúmulo de água nesta região.

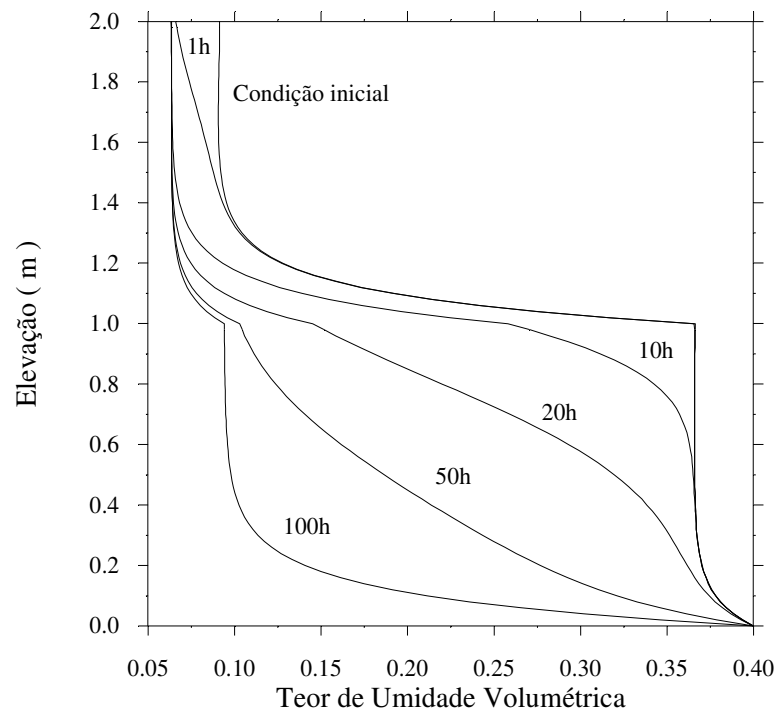


a) Carga de pressão.



d) Condutividade hidráulica.

Figura 4.14 - Drenagem em uma coluna de solo constituída de dois materiais – resultados.



c) Teor de umidade volumétrica.

Figura 4.14 - Drenagem em uma coluna de solo constituída de dois materiais –resultados.

4.2 – Fluxo Transiente Bidimensional

Os exemplos que serão apresentados neste item objetivam a simulação do fluxo em regime transiente em condições bidimensionais.

O primeiro exemplo estuda o processo de infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado a uma faixa da superfície desta camada. Este problema foi estudado por Tsai *et al* (1993) que propuseram uma solução semi-analítica para o problema.

O segundo objetiva a simulação do processo de infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal sendo avaliadas a evolução da linha piezométrica com o tempo e a condição estacionária obtida.

O último exemplo objetiva o estudo do fluxo transiente em uma barragem de terra homogênea supondo uma condição de enchimento instantâneo. Para tanto é efetuada uma análise da evolução da linha piezométrica com o tempo e ainda uma comparação da condição estacionária obtida pelo GEOFLUX com a solução gráfica de Kozeny.

4.2.1 – Infiltração em uma Camada de Solo Sujeita a um Fluxo Constante Aplicado a uma Faixa da Superfície.

O exemplo a ser discutido neste item objetiva a simulação do processo de infiltração em regime transiente em um domínio retangular constituído de uma camada de solo fino. A situação analisada, apresentada na Figura 4.15, corresponde ao processo de infiltração a um fluxo prescrito constante igual a 0.000278 m/min, aplicado numa pequena faixa 0.05m do domínio do problema.

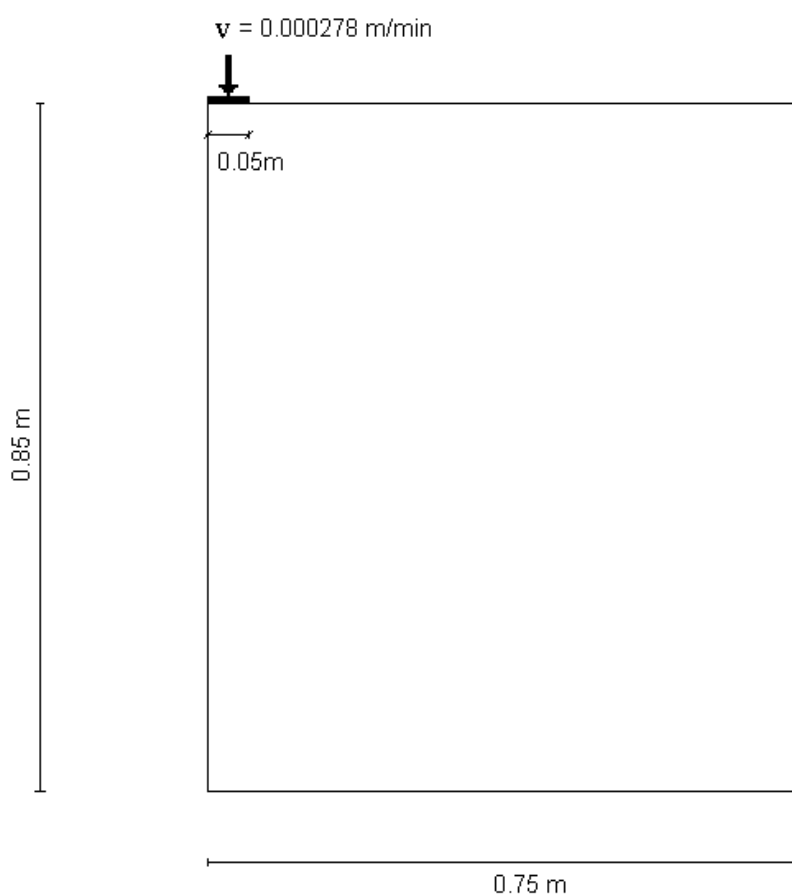


Figura 4.15 – Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície.

Tsai *et al* (1983) apresentaram uma solução semi-analítica para este problema a qual é comparada, juntamente com a solução analítica proposta por Warric e Lomen (1976), com os resultados numéricos obtidos pelo GEOFLUX.

Na solução analítica do problema, Warric e Lomen (1976) adotaram funções exponenciais semelhantes àsquelas adotadas por Srivastava e Yeh (1991) e apresentadas no Capítulo 2. Deste modo, para este exemplo, também adotou-se o modelo utilizado por Srivastava e Yeh (1991) para a representação das curvas características.

A Figura 4.16 apresenta a malha de elementos finitos adotada (196 elementos do tipo Q4) juntamente com as condições de contorno. O valor inicial da carga de pressão em todo domínio do problema foi definido como sendo igual a $-2,5$ m.

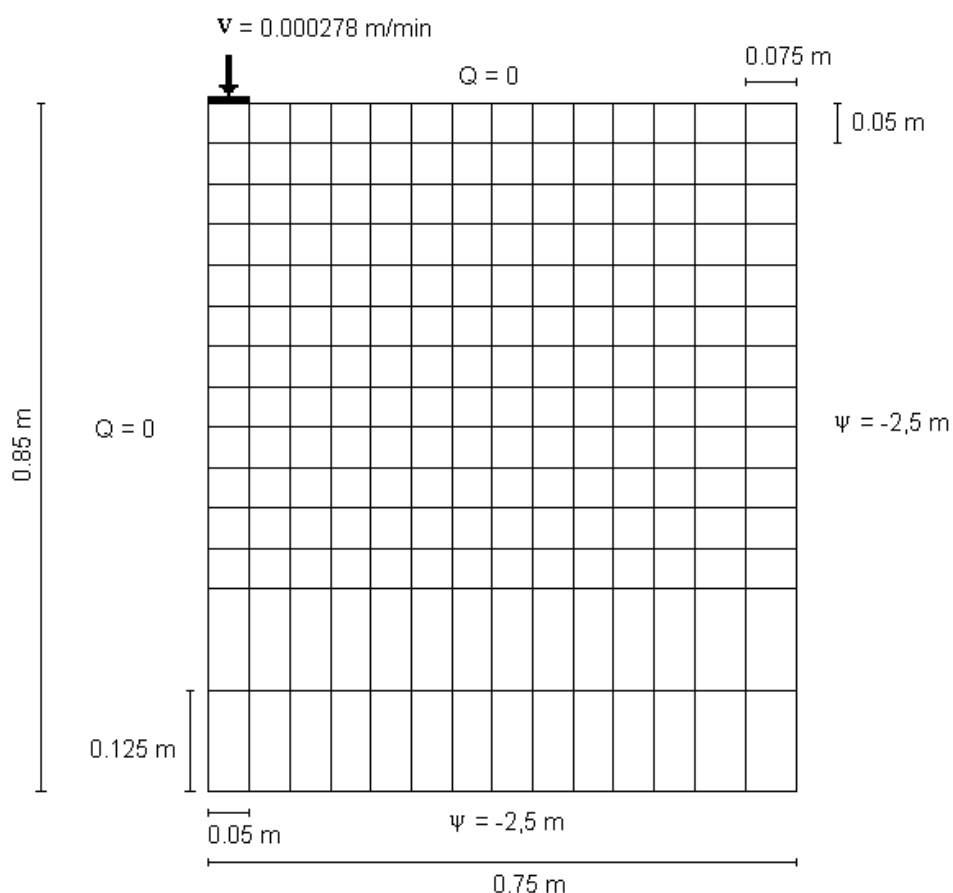


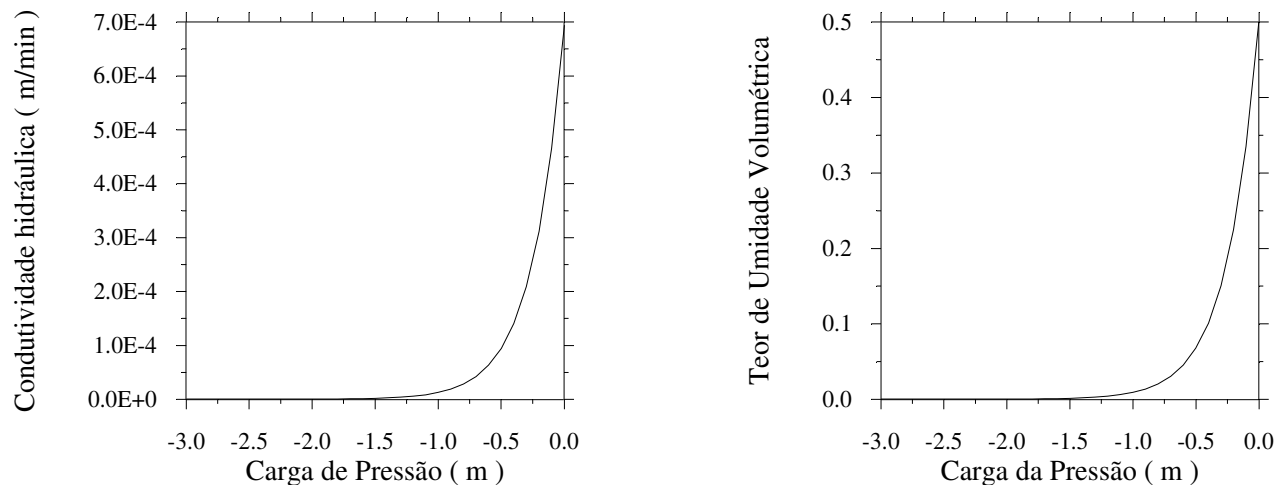
Figura 4.16 – Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície – malha de elementos finitos.

Os valores adotados para as propriedades dos materiais são apresentados na Tabela 4.5 e as respectivas curvas características estão ilustradas na Figura 4.17.

O tempo foi discretizado em 72 intervalos de 1 minuto e a marcha no tempo dada por um esquema puramente implícito ($\alpha = 1$). No tratamento da não linearidade adotou-se uma tolerância de 1 % e um número máximo de 50 iterações.

Tabela 4.5 – Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado a uma faixa da superfície – parâmetros do modelo exponencial.

α	k_s	θ_r	θ_s
4.0	0.000694 m/min	0.00	0.50

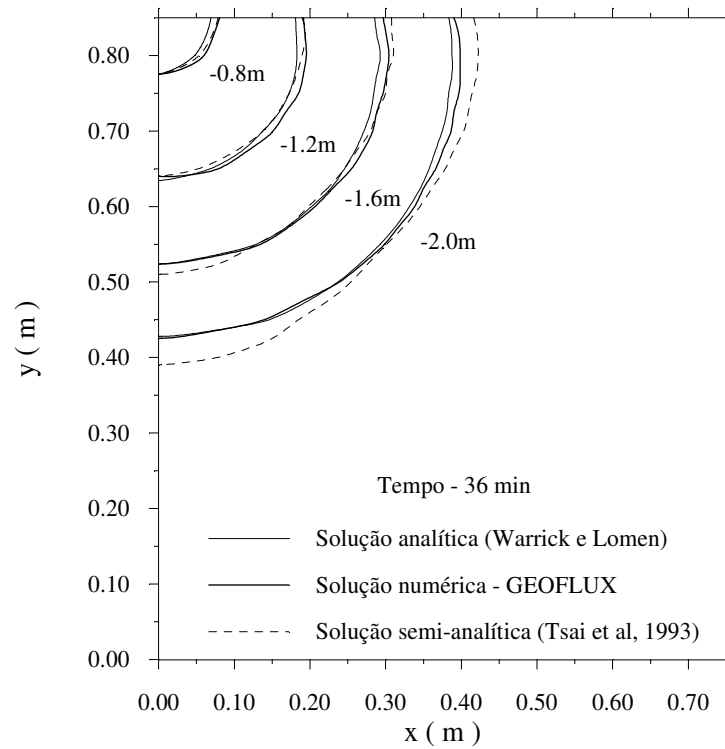


a) Função de condutividade hidráulica.

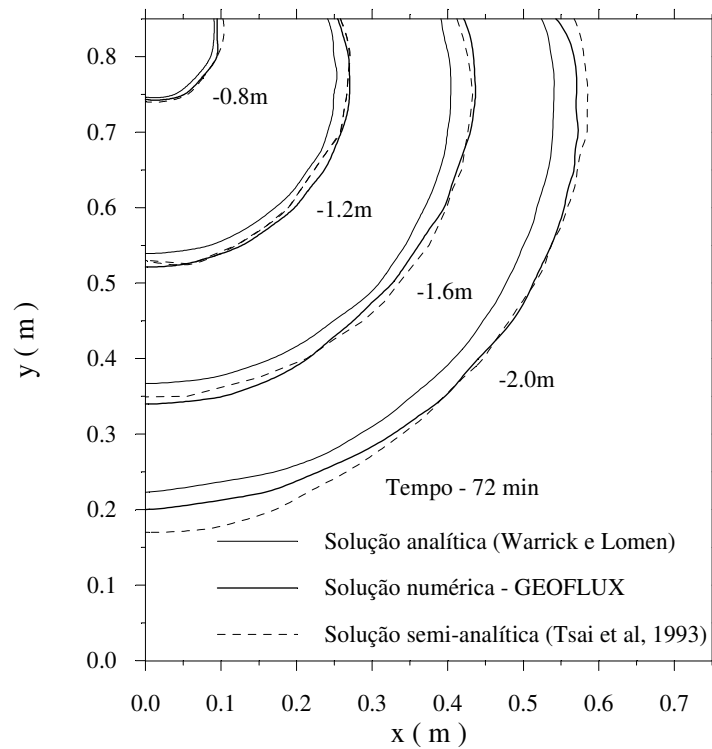
b) Curva de retenção.

Figura 4.17 - Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície – curvas características.

Os resultados em termos das curvas com mesma carga de pressão (isóbaras), fornecidos pelo programa GEOFLUX, para os instantes 36 e 72 minutos, são apresentados na Figura 4.18 juntamente com a solução analítica de Warric e Lomen (1976) e a solução semi-analítica apresentada por Tsai *et al* (1993). Como pode ser visto a solução numérica obtida pelo programa GEOFLUX apresentou uma boa concordância tanto com a solução analítica como com a solução semi-analítica. Cabe ressaltar que no instante 72 minutos houve uma maior dispersão dos resultados em relação à solução analítica. Porém a solução semi-analítica também apresenta esta dispersão. Deste modo, em relação às soluções apresentadas, o resultado fornecido pelo GEOFLUX se mostra satisfatório. A Figura 4.18 mostra ainda uma redução progressiva da sucção com o tempo. Isto se deve ao aumento do teor de umidade neste domínio devido ao avanço da frente de umedecimento no solo.



a) Instante 36min.



b) Instante 72min.

Figura 4.18 - Infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado numa faixa da superfície – resultados (isóbaras).

4.2.2 – Infiltração numa Camada de Solo Contendo um Dreno Longitudinal

Este exemplo objetiva a simulação do fluxo transiente em uma camada de solo contendo um dreno longitudinal. O problema apresentado na Figura 4.19 foi estudado por Zaradny (1993) e trata de uma camada de solo sujeita a um fluxo prescrito uniformemente distribuído no topo da camada e igual a 0.1 k_s . Esta camada possui um sistema drenante constituído de um tubo de 5 cm de diâmetro. O nível d'água inicial encontra-se a 1m acima da base da camada; e o tubo drenante foi considerado efetivo, ou seja, a carga de pressão no contorno do tubo permanece nula durante todo o processo.

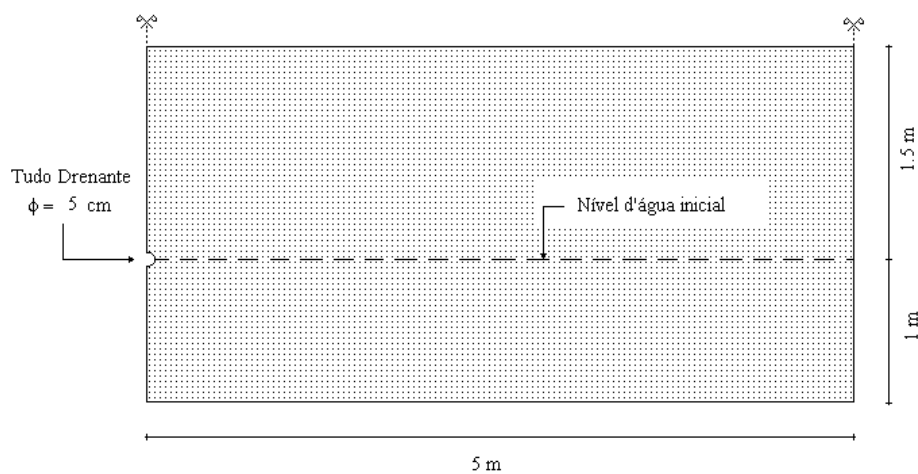
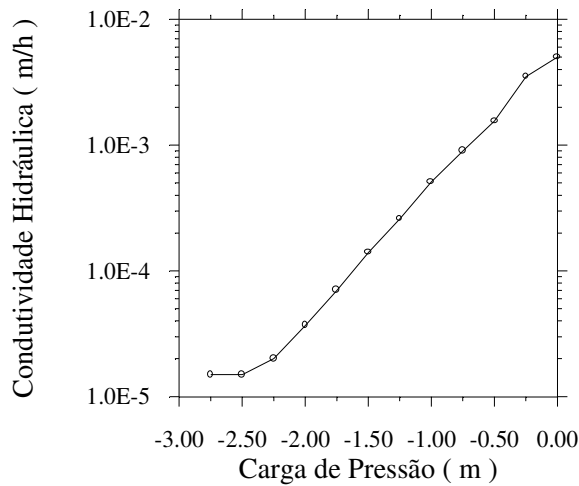
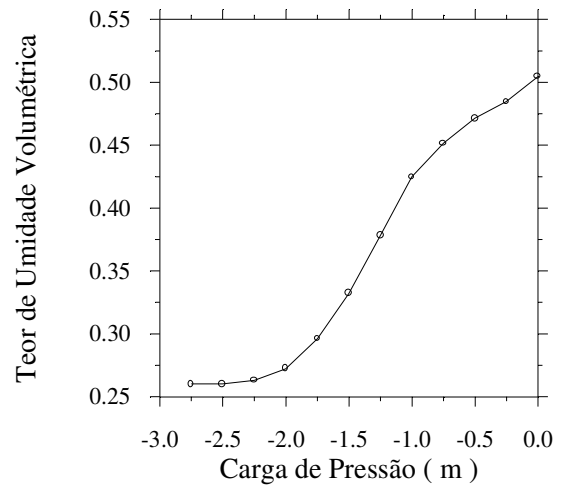


Figura 4.19 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal.

Para a descrição do material adotou-se as curvas mostradas na Figura 4.20 e apresentadas por Zaradny (1993). As curvas características foram representadas, no programa GEOFLUX, por um conjunto de pontos e aproximadas por trechos retos como descrito no Capítulo 3 e no Anexo I.



a) Função de condutividade hidráulica



b) Curva de retenção.

Figura 4.20 - Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal – curvas características (Zaradny, 1993).

A Figura 4.21 apresenta a malha de elementos finitos adotada (77 elementos dos tipos Q8 e T6) juntamente com as condições de contorno e condições iniciais do problema. Apresentado, ainda, um detalhe da discretização do dreno.

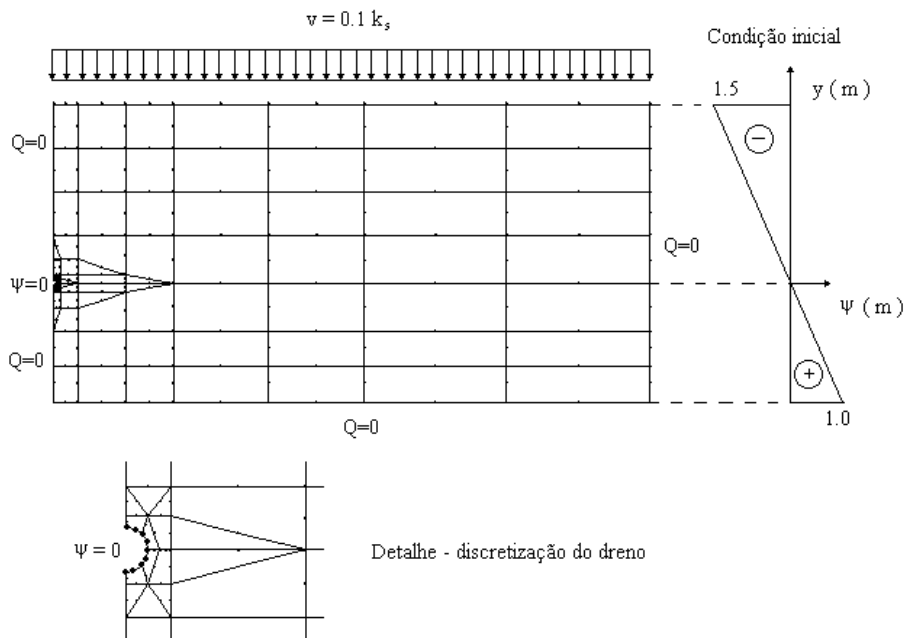


Figura 4.21 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal - malha de elementos finitos.

O tempo foi discretizado em 49 intervalos sendo a distribuição dos incrementos apresentada na Tabela 4.6, e para a marcha no tempo adotou-se um esquema puramente implícito ($\alpha = 1$). Para o tratamento da não linearidade admitiu-se uma tolerância de 1 % e um número máximo de 50 iterações.

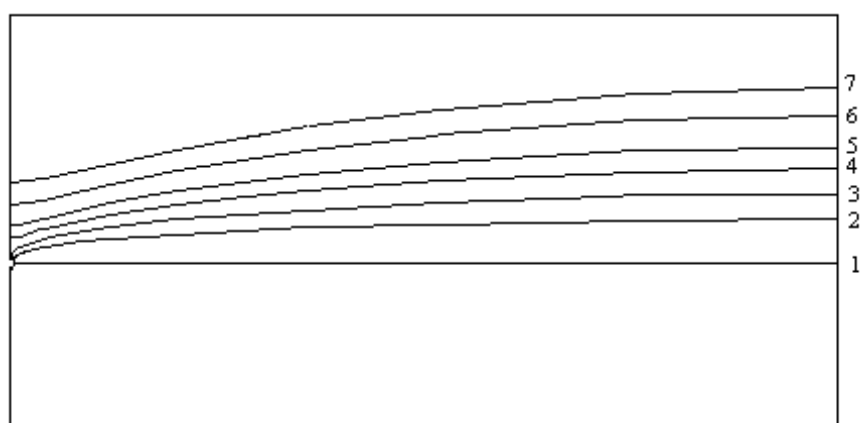
Tabela 4.6 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo).

<i>NI</i>	<i>Δt (horas)</i>	<i>Tempo (horas)</i>
5	0.2	0.0 – 1.0
4	0.4	1.0 – 2.6
5	0.8	2.6 – 6.6
5	1.6	6.6 – 14.6
5	3.2	14.6 – 30.6
5	16	30.6 – 110.6
5	32	110.6 – 270.6
5	64	270.6 – 590.6
5	128	590.6 – 1230.6
5	640	1230.6 – 4430.6

A solução obtida para o problema é apresentada na Figura 4.22 através da evolução da linha piezométrica com tempo, sendo a condição estacionária atingida com 590.6 horas.

Uma comparação da linha piezométrica, na condição estacionária, entre os resultados obtidos pelo GEOFLUX e pela solução analítica apresentada por Zaradny (1993) é mostrado na Figura 4.23 indicando uma boa qualidade dos resultados numéricos.

Notou-se, durante o processamento dos resultados, que antes de se atingir 110 horas a posição da linha piezométrica praticamente não variou. Só a partir deste instante a linha piezométrica começa a se elevar. Isso se deve à dificuldade encontrada pela água para vencer a zona de pressões negativas presente na parte superior da camada de solo no início da simulação como foi verificado nos exemplos unidimensionais.



Linha piezométrica	1	2	3	4	5	6	7
Tempo (horas)	0.0	110.6	142.6	174.6	206.6	238.6	590.6

Figura 4.22 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal - evolução da linha piezométrica com o tempo.

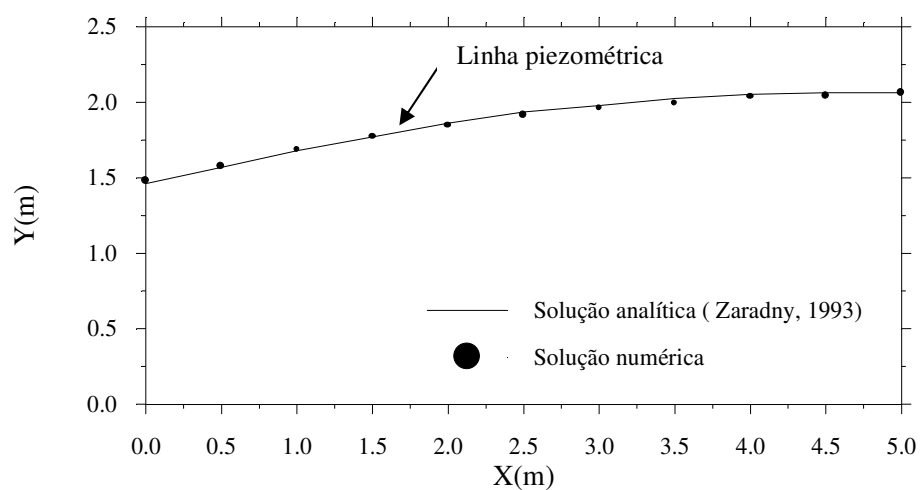


Figura 4.23 – Infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal - comparação entre a condição estacionária obtida pelo GEOFLUX e a solução analítica do problema.

4.2.3 – Fluxo em uma Barragem de Terra Homogênea

Este exemplo visa a simulação do fluxo transiente que ocorre durante o enchimento instantâneo do reservatório de uma barragem hipotética, homogênea e com dreno de pé horizontal, como ilustrado na Figura 4.24.

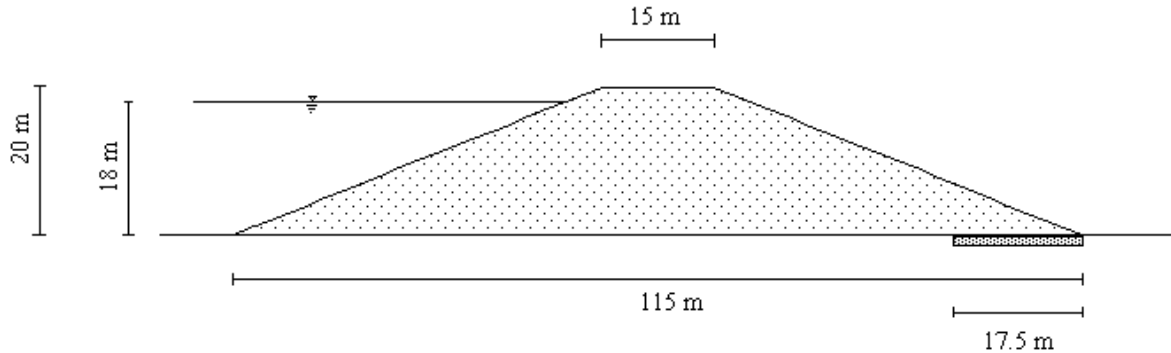


Figura 4.24 – Barragem de terra homogênea com dreno de pé horizontal.

Para a descrição do material foram adotadas as curvas apresentadas na Figura 4.25 (GEOSLOPE, 1995). As curvas características foram tratadas no programa GEOFLUX através de um conjunto de pontos e aproximadas por trechos retos como descrito no Capítulo 3 e no Anexo I.

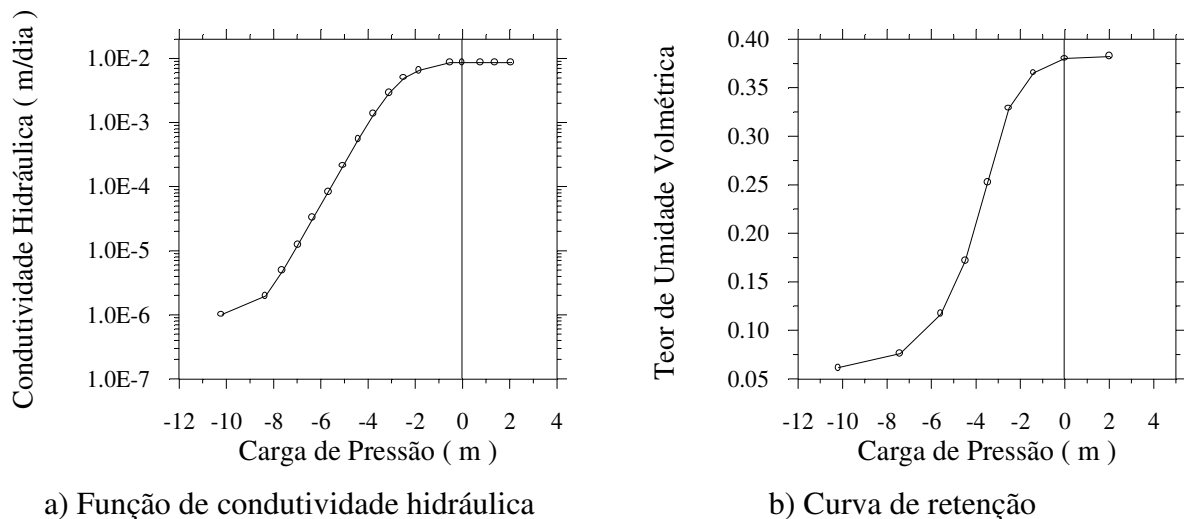


Figura 4.25 - Fluxo em uma barragem de terra homogênea – curvas características (GEOSLOPE, 1995).

A Figura 4.26 apresenta a malha de elementos finitos adotada (540 elementos dos tipos Q4 e T3) e as condições de contorno do problema em carga total (h_t) e em carga de pressão (ψ). Como condição inicial adotou-se uma distribuição de carga hidráulica total nula em todo o domínio do problema, exceto nos pontos indicados no talude de montante.

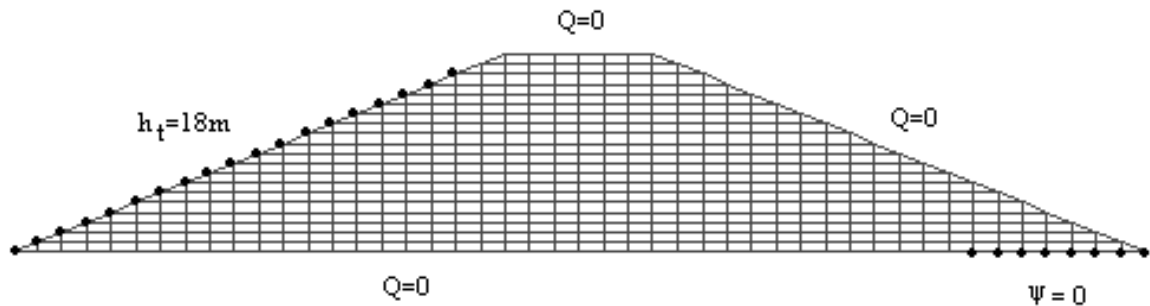


Figura 4.26 – Fluxo em uma barragem de terra homogênea - malha de elementos finito.

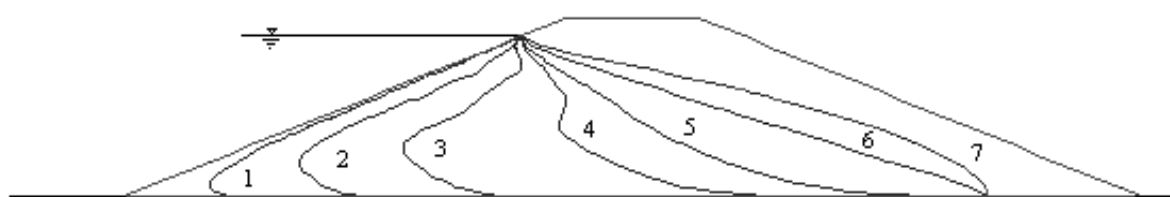
O tempo foi discretizado em 39 intervalos sendo a distribuição dos incrementos apresentada na Tabela 4.7. A marcha no tempo foi dada por um esquema puramente implícito ($\alpha = 1$). No tratamento da não linearidade adotou-se uma tolerância de 10 % e um número máximo de 20 iterações.

Tabela 4.7 – Fluxo em uma barragem de terra homogênea - discretização no tempo
(NI – número de intervalos de tempo).

<i>NI</i>	<i>Δt (dias)</i>	<i>Tempo (dias)</i>
4	0.5	0.0 – 2.0
5	1.0	2.0 – 7.0
3	7.0	7.0 – 28.0
5	28.0	28.0 – 168
7	168.0	168 – 1344
5	336	1344 – 3024
5	672	3024 – 6384
5	10752	6384 – 19824

A solução obtida para o problema é apresentada na Figura 4.27 através da evolução da linha piezométrica com tempo cuja configuração final, na condição estacionária, está de acordo com a solução gráfica de Kozeny (Figura 4.28). Cabe ressaltar que o ajuste da parábola de Kozeny no topo da barragem foi efetuado através de uma interpolação via spline.

A utilização de uma análise de fluxo não saturado permite a avaliação da evolução da frente de saturação com o tempo fornecendo, ainda, a distribuição de pressão na zona não saturada, e o tempo necessário para se atingir a condição estacionária, o que uma análise convencional pelo método gráfico não seria capaz de fornecer.



Linha piezométrica	1	2	3	4	5	6	7
Tempo (dias)	0.5	7.0	84.0	504	1008	2352	19824

Figura 4.27 – Fluxo em uma barragem de terra homogênea - evolução da linha piezométrica com o tempo.

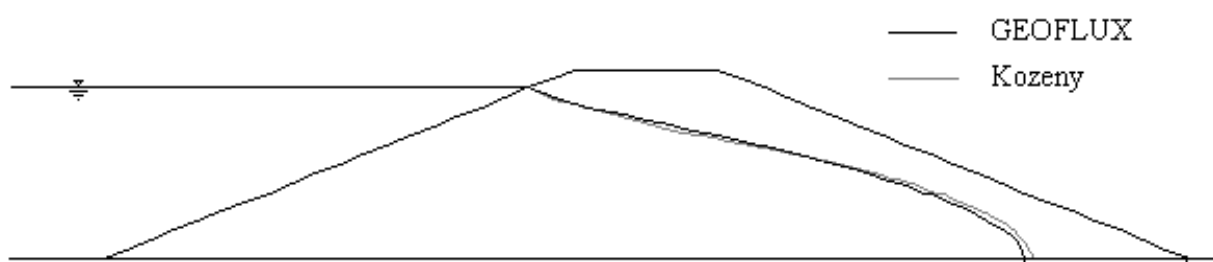


Figura 4.28 – Fluxo em uma barragem de terra homogênea – linha piezométrica na condição estacionária.

Capítulo 5

Análise Numérica do Fluxo numa Pilha de Rejeito de Minério de Ferro

5.1 - Considerações Gerais

Atualmente a disposição de rejeitos é um ponto de fundamental importância em uma atividade de mineração. As questões econômicas e ambientais relacionadas à disposição de rejeito têm motivado as empresas do setor de mineração na busca de novas tecnologias de disposição.

O problema que será estudado neste capítulo foi descrito por Gomes *et al* (1999a e 1999b) e constitui uma simulação do processo de fluxo em uma pilha de rejeitos que está para ser construída numa jazida exaurida de minério de ferro, permitindo não somente a disposição dos rejeitos mas também a recuperação da área degradada pela escavação.

Segundo Gomes *et al* (1999b), a exploração desta jazida de itabirito, por um período de 18 anos, resultou em uma cava de grandes dimensões (1,3 km de comprimento, 800 m de largura e 220 m de altura) delimitada por taludes de itabirito e filito em avançado processo de erosão.

A necessidade de recuperação desta área degradada juntamente com a necessidade de uma nova alternativa para a disposição dos rejeitos motivou a empresa mineradora a adotar a opção de empilhamento do rejeito nesta área.

As questões referentes aos condicionantes geológicos geotécnicos do projeto são discutidas por Gomes *et al* (1999a). Dentre elas, cabe ressaltar, a questão da

drenabilidade do rejeito que possui influência direta na estabilidade da pilha e nas técnicas a serem adotadas para o manejo do rejeito.

Gomes *et al* (1999a) destacam que as observações de campo indicam uma boa condição de drenagem para o rejeito, mas esta abordagem, qualitativa e restrita aos horizontes superficiais, não pode ser extrapolada no domínio total da pilha que deve atingir uma altura final de 160 m. Daí, a necessidade de um estudo mais criterioso acerca das características de drenagem da pilha como por exemplo uma análise de fluxo em meio não saturado.

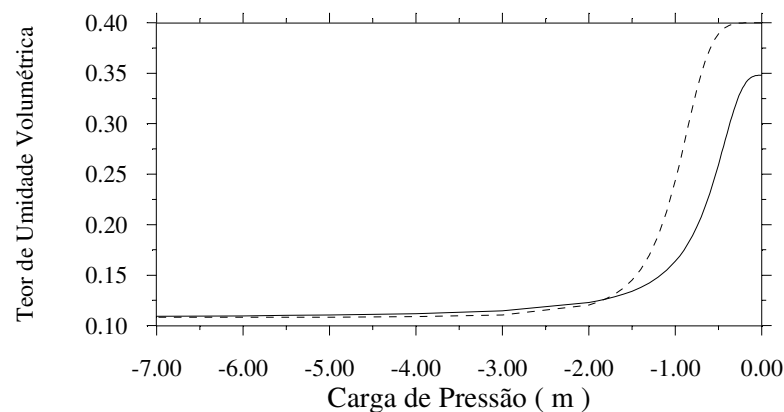
Com base nos estudos preliminares apresentados por Gomes *et al* (1999a e 1999b) foram feitas simulações numéricas, utilizando o GEOFLUX, de algumas situações que poderiam ocorrer no campo e que são apresentadas e discutidas neste capítulo.

5.2 – Determinação das Propriedades do Material

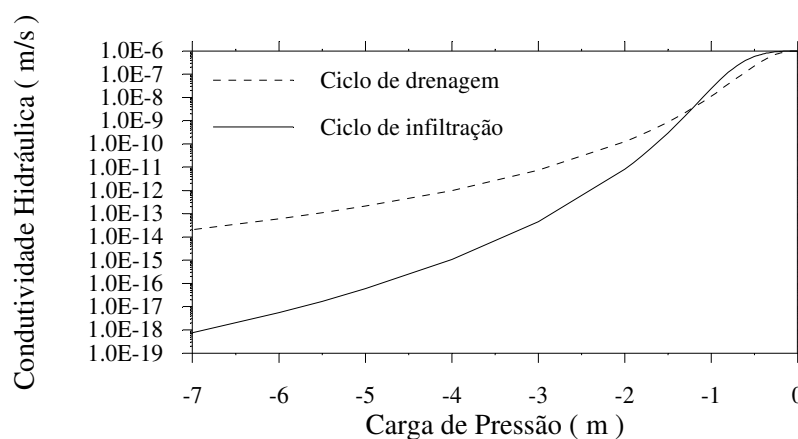
De acordo com Gomes *et al* (1999a), as propriedades hidráulicas do material foram determinadas através de um ensaio de controle de fluxo, em ciclos de infiltração e drenagem, com a utilização de uma bomba de fluxo. Os parâmetros para o modelo de van Genuchten foram obtidos por Oliveira Filho (1999) a partir dos resultados desses ensaios de controle de fluxo e são apresentados na Tabela 5.1. As respectivas curvas características são ilustradas na Figura 5.1. A condutividade hidráulica saturada, também, obtida nos ensaios de fluxo, é igual 1×10^{-6} m/s.

Tabela 5.1 – Parâmetros para o modelo de van Genuchten - rejeito de minério de ferro (Oliveira Filho, 1999).

Parâmetro	θ_s	θ_r	α_{vg}	q
Ciclo de Drenagem	0.400	0.108	1.1	5.0
Ciclo de Infiltração	0.348	0.108	2.0	3.0



a) Curva de retenção de água.



b) Função de condutividade hidráulica.

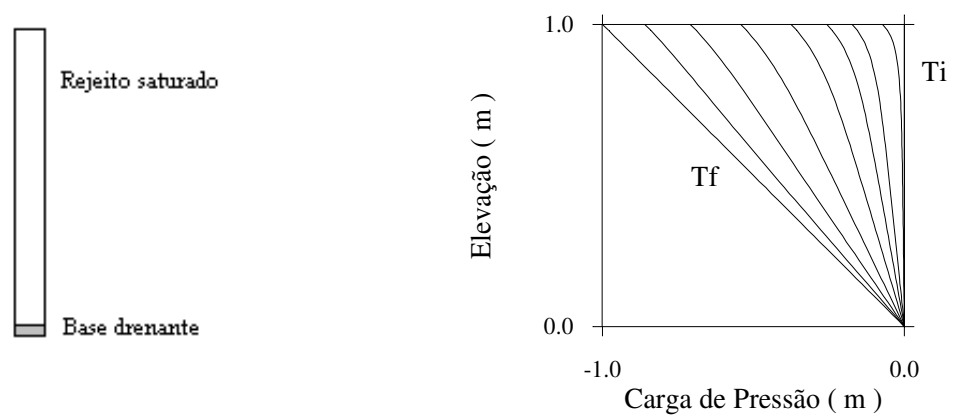
Figura 5.1 – Curvas características - rejeito de minério de ferro.

5.3 – Metodologia das Análises

A seguinte metodologia de análise foi adotada: simulação de situações unidimensionais visando análises localizadas e simulação de uma situação bidimensional visando uma análise global do problema. Estas situações são apresentadas de maneira sintética nas Figuras 5.2 e 5.3

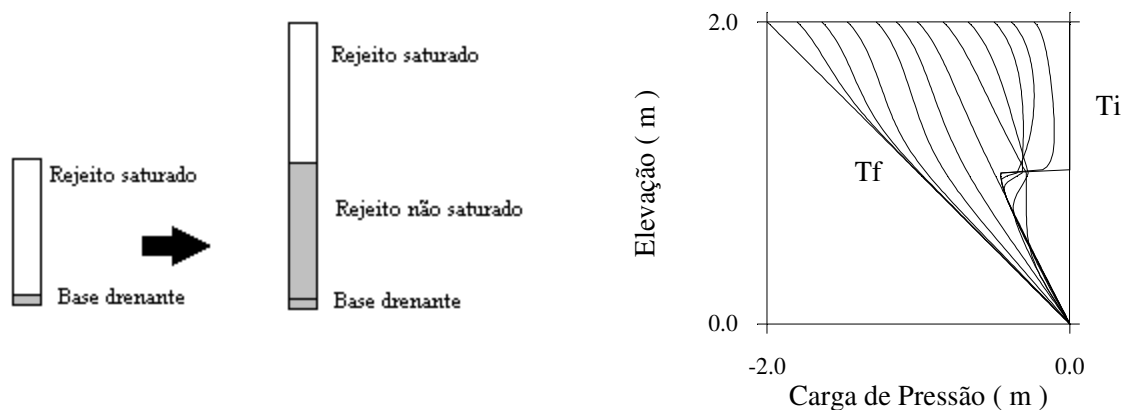
A primeira parte desse estudo visa a análise de prováveis situações de campo através de um conjunto de simulações unidimensionais. Este conjunto de simulações é

ilustrado na Figura 5.2 e foi baseado nas situações propostas por Machado Júnior e Oliveira Filho (1999). Três situações tipicamente unidimensionais foram analisadas: a situação 1, ilustrada na Figura 5.2a, visa a simulação do comportamento drenante de uma camada de rejeito de um metro de espessura partindo-se da condição de saturação completa; as situações 2 e 3, apresentadas nas Figuras 5.2b e c, objetivam a simulação do comportamento drenante de duas camadas sobrepostas partindo-se de diferentes condições de saturação. Na situação 2, a camada inferior se encontra em processo de drenagem quando a camada superior é disposta. Já na situação 3, a camada inferior se encontra na condição residual no momento em que a camada superior é disposta. Nas três situações considerou-se para a base da coluna uma condição de contorno, em carga de pressão, nula durante todo o processo transitório.

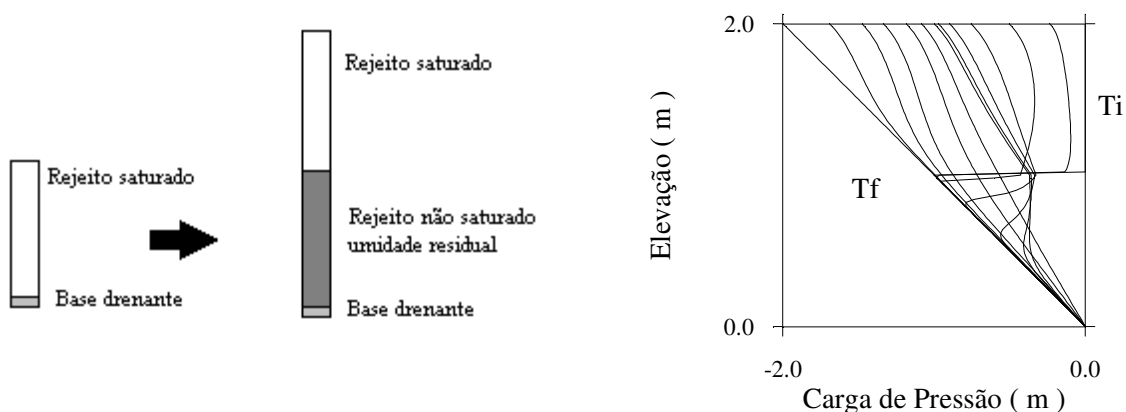


a) Camada de rejeito inicialmente saturada.

Figura 5.2 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – análise unidimensional.



b) Camadas sobrepostas – camada inferior inicialmente em processo de drenagem.



c) Camadas sobrepostas – camada inferior inicialmente na condição residual.

Figura 5.2 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – análise unidimensional.

A segunda parte do estudo objetiva a análise do comportamento global da pilha frente à situação hipotética da formação de um lago na parte superior da mesma como indica a Figura 5.3. Adotou-se para a pilha a mesma configuração apresentada por Gomes *et al* (1999b) introduzindo-se, no entanto, um sistema de drenagem composto por um dreno horizontal situado na base da pilha.

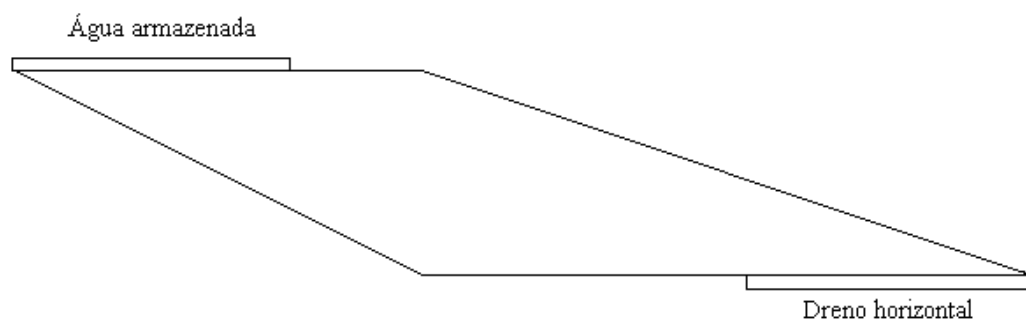


Figura 5.3 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – análise bidimensional.

5.4 – Análise Unidimensional

A primeira situação de fluxo analisada corresponde ao processo de drenagem em uma coluna de rejeito de um metro de altura como indica a Figura 5.4. Para esta simulação foi adotada a mesma malha de elementos finitos apresentada no item 4.1.1 (50 elementos do tipo Q4). As condições de contorno também são apresentadas na Figura 5.4, e para condição inicial adotou-se uma distribuição de carga de pressão nula em todos os pontos nodais, supondo saturada toda a coluna de rejeito.

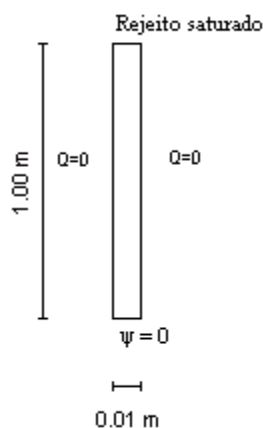


Figura 5.4 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional
- situação 1.

O tempo foi discretizado em 136 intervalos sendo a distribuição dos incrementos apresentada na Tabela 5.2 e a marcha no tempo dada por um esquema puramente implícito ($\alpha = 1$). No tratamento da não linearidade adotou-se uma tolerância de 1 % e um número máximo de 50 iterações.

Tabela 5.2 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 1 - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo).

<i>NI</i>	<i>Δt (horas)</i>	<i>Tempo (horas)</i>
10	0.0001	0.0000 - 0.0010
9	0.0010	0.0010 – 0.0100
9	0.0100	0.0100 – 0.1000
9	0.1000	0.1000 – 1.0000
23	1.0000	1.0000 – 24.0000
76	6.000	24.0000 – 480.0000

Os resultados fornecidos pelo programa GEOFLUX são apresentados na Figura 5.5. em termos da distribuição no tempo e no espaço da carga hidráulica de pressão. Como pode ser visto, o tempo necessário para que seja atingida uma situação teórica de drenagem completa é de dezesseis dias (384 horas).

Para melhor avaliar o processo de drenagem definiu-se a percentagem média de drenagem como

$$\%D_{re} = 100 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{nn} \psi_{fi} - \sum_{i=1}^{nn} \psi_{ti}}{\sum_{i=1}^{nn} \psi_{fi}} \right) \times 100 \quad (5.1)$$

onde ψ_f é a carga de pressão para a condição residual, ψ_t é a carga de pressão em um instante t e nn é o número de pontos nodais.

A Figura 5.6 apresenta a evolução da percentagem de drenagem com o tempo. Como pode ser observado, o processo de drenagem ocorre rapidamente nos instantes iniciais, apresentando uma percentagem média de drenagem de 50% em apenas uma

hora. À medida que o tempo avança, a velocidade do processo de drenagem diminui. No entanto, com 1 dia (24 horas) atinge-se uma condição de drenagem superior a 85% da condição residual, confirmando as boas condições de drenagem do material.

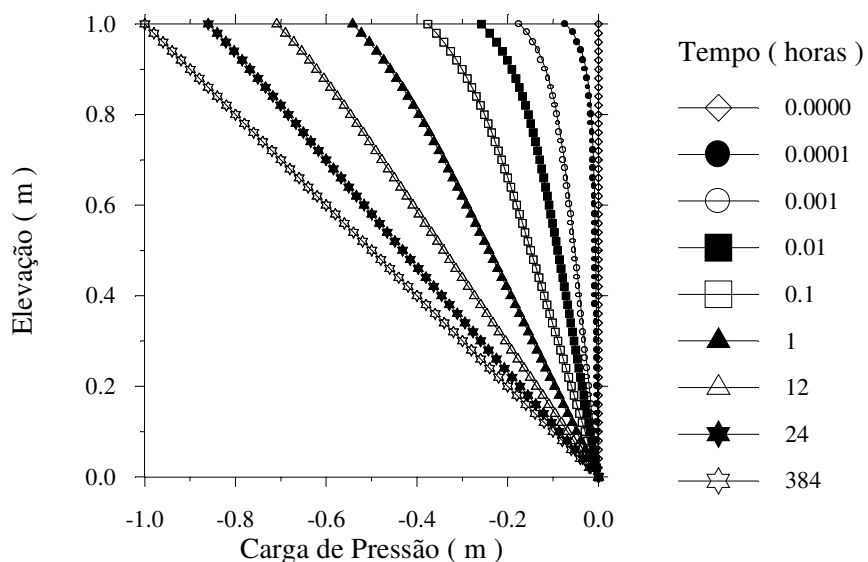


Figura 5.5 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 1 – resultados em termos da carga de pressão.

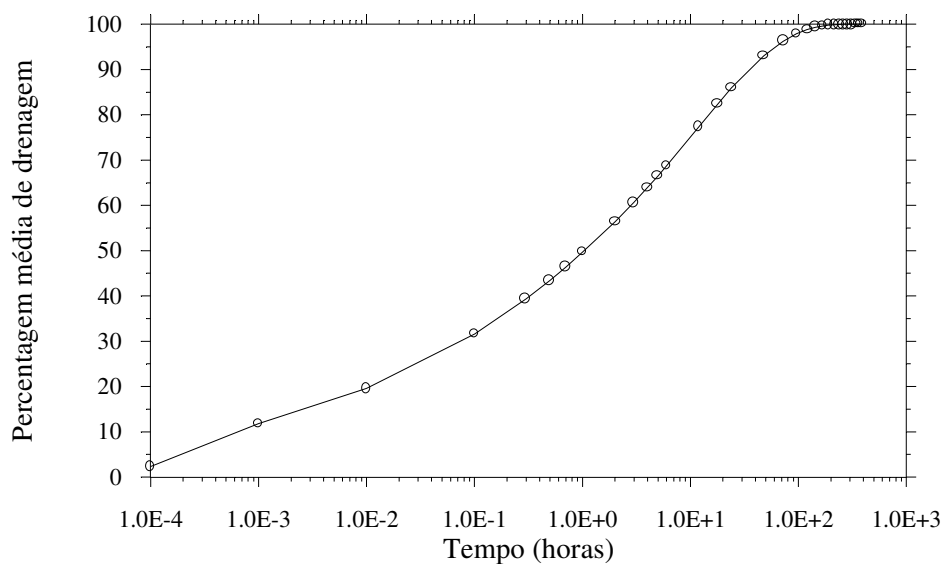


Figura 5.6 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 1 – resultados em termos da percentagem média de drenagem.

A segunda situação analisada corresponde ao processo de drenagem de duas camadas sobrepostas, como indica a Figura 5.7, sendo a segunda camada de rejeito lançada 1 hora após a disposição da primeira camada.

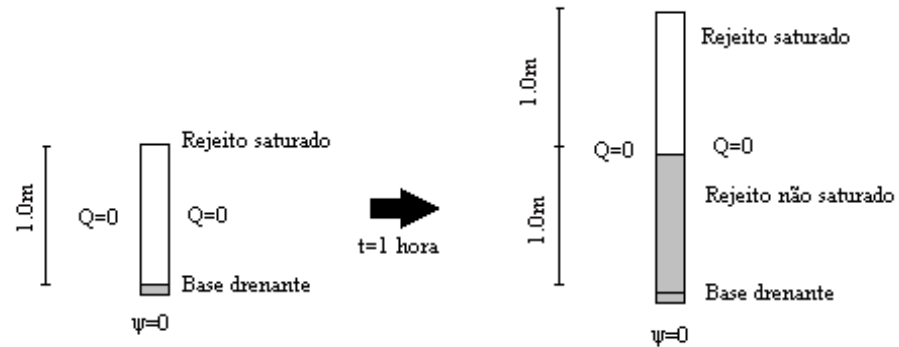


Figura 5.7 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 2

A condição inicial, para a camada inferior, é igual à distribuição de carga de pressão obtida na situação 1 para o instante de 1 hora. Para a camada superior, suposta inicialmente saturada, adotou-se um perfil de carga de pressão nulo como condição inicial.

De acordo com os resultados apresentados por Machado Júnior e Oliveira Filho (1999), a camada inferior interrompe o seu processo de drenagem após a disposição da segunda camada passando para um processo de infiltração e retornando posteriormente a uma condição de drenagem. Baseado neste comportamento dividiu-se a simulação em duas etapas.

Na primeira etapa, a camada inferior experimenta um processo de infiltração e a camada superior um processo de drenagem. Por isso adotou-se, para a camada inferior, os parâmetros do modelo de van Genuchten da curva de infiltração e para a camada superior os parâmetros do modelo de van Genuchten da curva de drenagem.

Na segunda etapa, as duas camadas se encontram em processo de drenagem. Com isso adotou-se, para as duas camadas, os parâmetros do modelo de van Genuchten da curva de drenagem.

O tipo de marcha no tempo e os parâmetros para o tratamento da não linearidade são iguais aos adotados na análise da situação 1.

Para a primeira etapa, drenagem/infiltração, o tempo foi discretizado da mesma maneira que para situação 1. A discretização do tempo para a segunda etapa, drenagem, é apresentada na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 2 - drenagem - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo).

<i>Intervalos</i>	<i>Δt (horas)</i>	<i>Tempo (horas)</i>
5	24	12 – 132
4	48	132 – 324
10	192	324 – 2244
20	768	2244 – 17604
10	3072	17604 – 48324

Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 5.8 e 5.9, em termos da carga de pressão, para as etapas de drenagem/infiltração e drenagem respectivamente; e na Figura 5.10 em termos da percentagem média de drenagem.

Como pode ser visto na Figura 5.8, os resultados da etapa de drenagem/infiltração mostram que com a disposição da segunda camada o processo de drenagem da primeira camada é interrompido e as poro-pressões na camada inferior começam a se elevar. Isto ocorre porque a camada superior está saturada cedendo, portanto, água à camada inferior. Como não existe reposição de água na camada superior a mesma sofre uma redução no seu nível de pressão à medida que seu teor de umidade volumétrica diminui.

A elevação das pressões na camada inferior ocorre até aproximadamente 12 horas após a disposição da segunda camada. A partir deste instante a camada inferior retoma seu processo de drenagem. Observa-se, ainda, que apesar da diminuição da sucção na camada inferior a mesma não atinge a saturação.

A Figura 5.9 apresenta a segunda etapa da simulação na qual as duas camadas se encontram em situação de drenagem. As camadas atingem uma condição de drenagem

teoricamente completa em um período de aproximadamente quatro anos e meio (39108 horas).

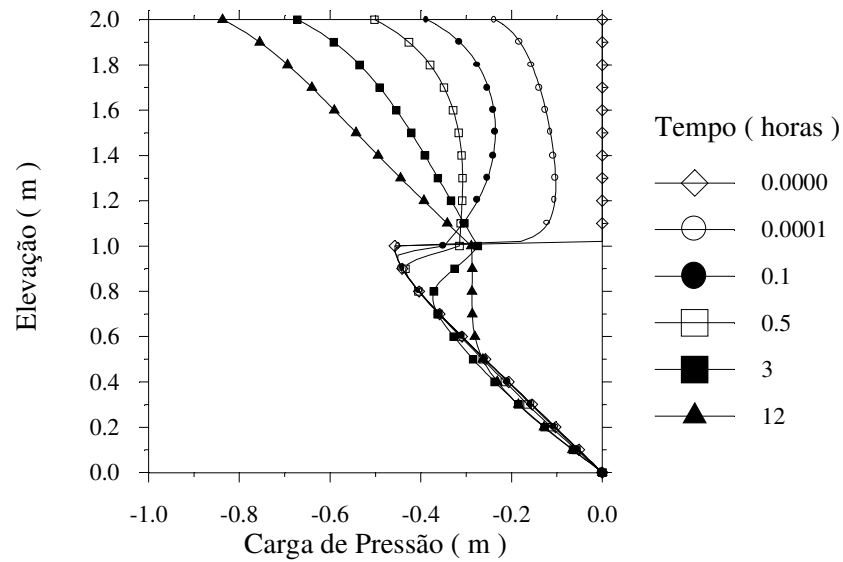


Figura 5.8 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 2 – drenagem/infiltração – resultados em termos da carga de pressão.

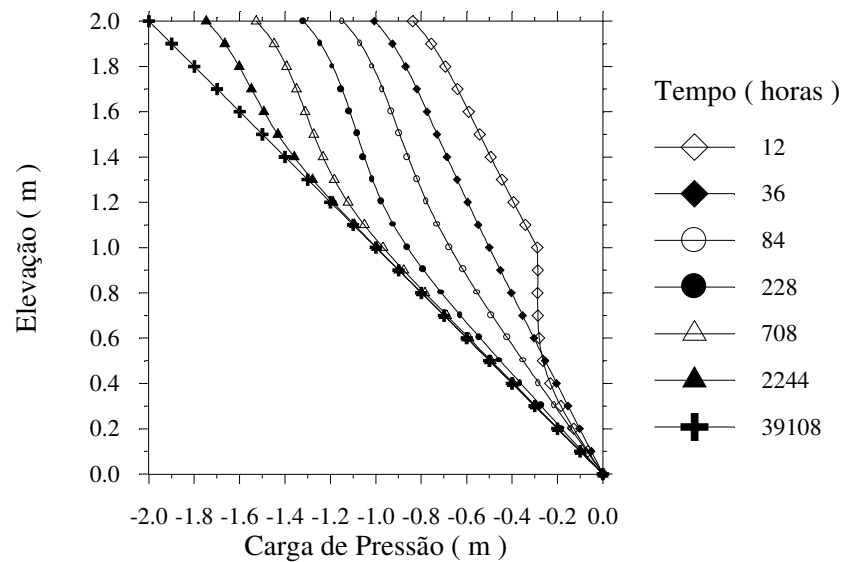


Figura 5.9 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 2 - drenagem – resultados em termos da carga de pressão.

Na Figura 5.10 tem-se a evolução da percentagem média de drenagem (Equação 5.1) no tempo. Como pode ser observado uma condição com 50% de drenagem média ocorre por volta de 1,6 dias (40 horas) e para se atingir 80% de drenagem média leva-se um tempo de aproximadamente 12,5 dias (300 horas).

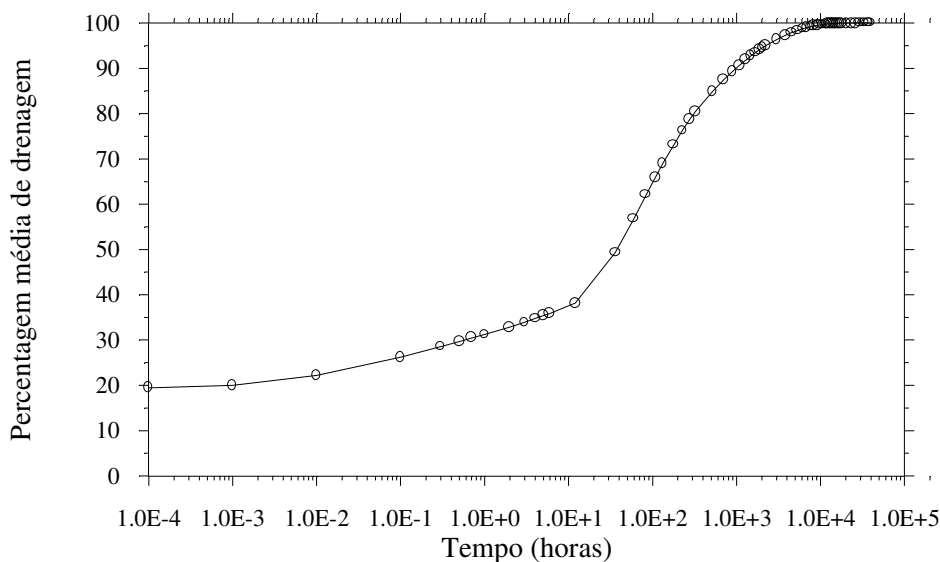


Figura 5.10 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 2 – resultados em termos da percentagem média de drenagem.

Da mesma forma como na situação 2, a terceira situação analisada corresponde ao processo de drenagem de duas camadas sobrepostas, como indica a Figura 5.11. No entanto, para esta situação a segunda camada de rejeito é lançada 16 dias após a disposição da primeira camada. Ou seja, quando a primeira camada encontrar-se aproximadamente na condição residual.

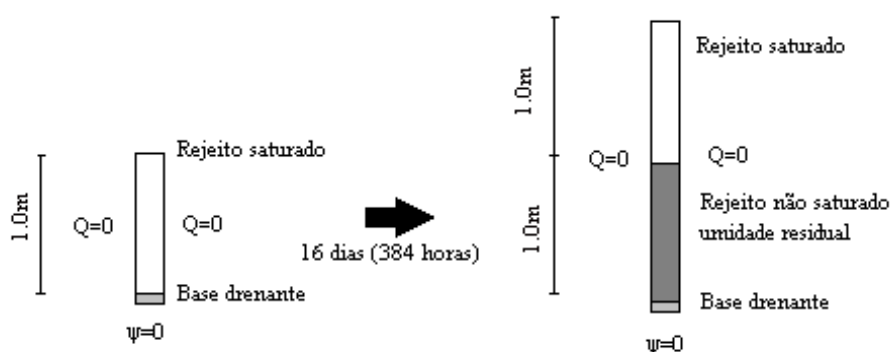


Figura 5.11 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 3

A condição inicial, para a primeira camada, é igual à distribuição final de pressões obtida na primeira situação. E para a segunda camada adotou-se um perfil de carga de pressões nulo, como condição inicial, considerando-a completamente saturada.

Da mesma forma como para a situação 2, adotou-se uma simulação em duas etapas considerando os parâmetros do modelo de van Genuchten de acordo com o processo de fluxo presente na camada.

O tipo de marcha no tempo e os parâmetros para o tratamento da não linearidade também são iguais aos adotados na análise da situação 1.

Para a primeira etapa o tempo foi discretizado da mesma forma que para a situação 1 e a discretização do tempo para a segunda etapa é apresentada na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 3 - drenagem - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo).

<i>NI</i>	<i>Δt (horas)</i>	<i>Tempo (horas)</i>
5	24	36 – 156
4	48	156 – 348
10	192	348 – 2268
20	768	2268 – 17628
10	3072	17628 – 48348

Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 5.12 e 5.13, em termos da carga de pressão, para as etapas de drenagem/infiltração e drenagem respectivamente; e na Figura 5.14 em termos da percentagem média de drenagem.

Da mesma forma, os resultados da etapa de drenagem/infiltração, ilustrados na Figura 5.12, mostram que com a disposição da nova camada inicia-se um processo de infiltração na camada inferior ocasionando um aumento das poro-pressões na mesma. Observa-se que este comportamento é mantido até o instante 36 horas quando a camada inferior inicia seu processo de drenagem. Devido a um maior nível de sucção presente na camada inferior a estabilização do processo de infiltração é mais lenta se comparada com a situação anterior.

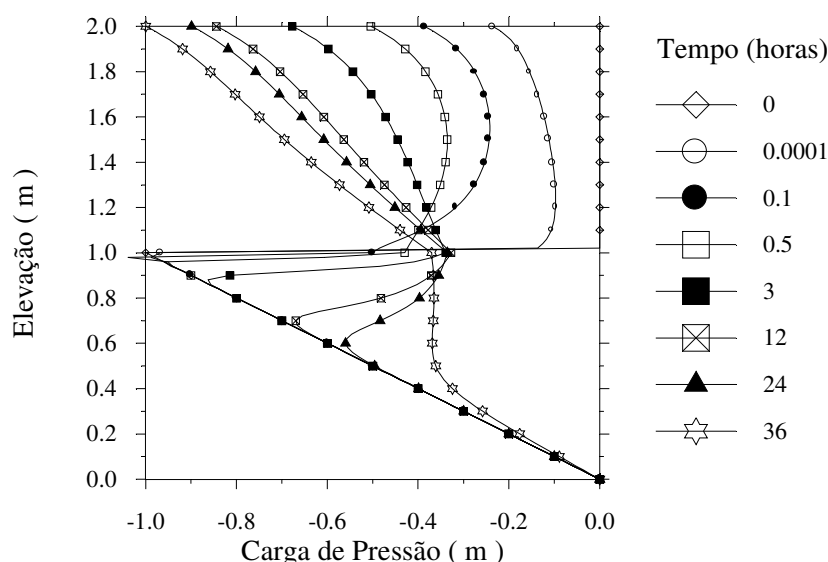


Figura 5.12 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 3 – drenagem/infiltração – resultados em termos da carga de pressão.

A Figura 5.13 apresenta os resultados da segunda etapa da simulação na qual as duas camadas se encontram em situação de drenagem. Novamente, as camadas atingem a condição de drenagem completa em um período de aproximadamente quatro anos e meio (39132 horas).

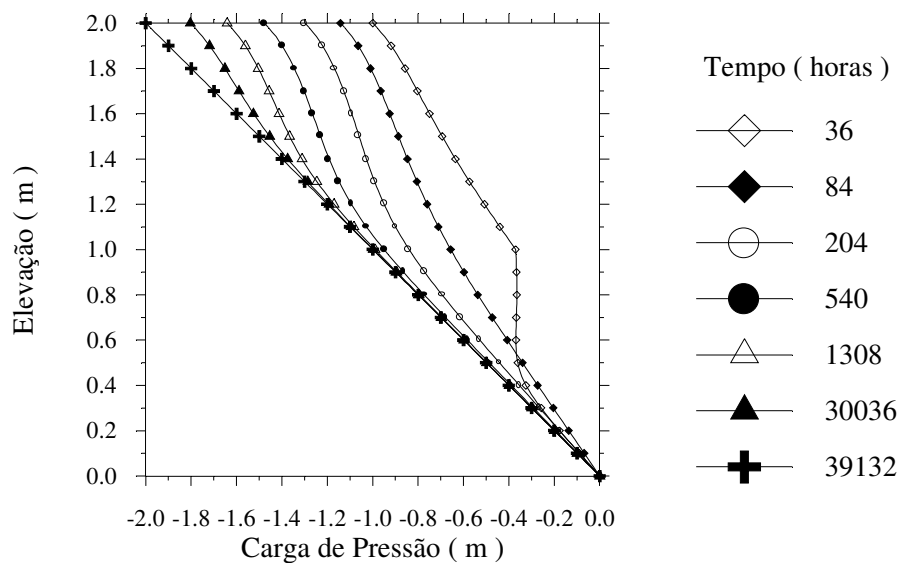


Figura 5.13 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 3 - drenagem – resultados em termos da carga de pressão.

A Figura 5.14 mostra a evolução da percentagem de drenagem com o tempo. Uma condição de drenagem média em torno de 50% da drenagem média teoricamente completa acontece em torno de 1,6 dias (40 horas) e uma drenagem média em torno de 80% acontece em aproximadamente 12,5 dias os resultados em termos de percentagem de drenagem média mostram uma concordância com a primeira situação.

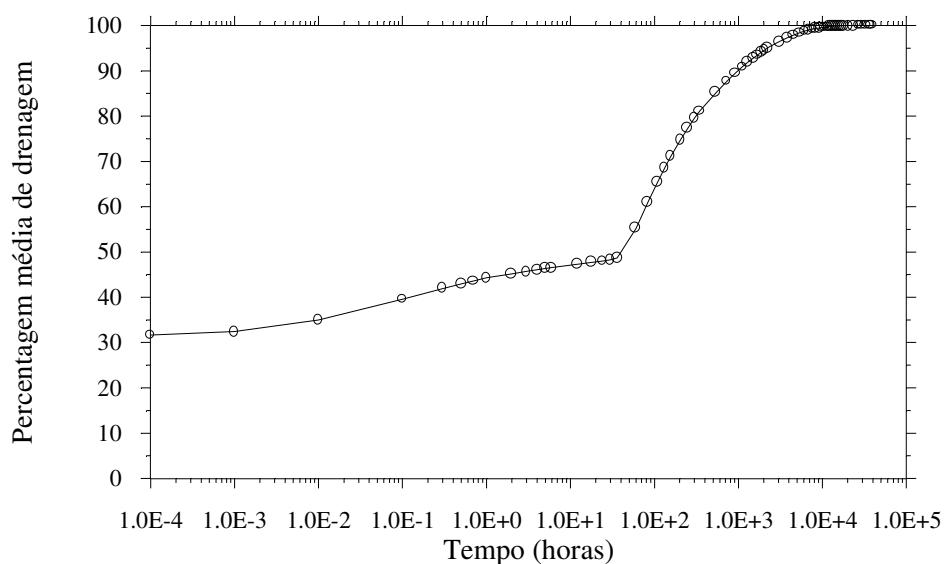


Figura 5.14 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional - situação 3 – resultados em termos da percentagem média de drenagem.

Como foi visto anteriormente a distribuição inicial da carga de pressão (situações 2 e 3) afeta a velocidade do processo de drenagem/infiltração (etapa1). Para a situação 2 o processo de infiltração na camada inferior leva 12 horas, enquanto que para a situação 3 este processo leva 36 horas. Este fato se deve à dificuldade encontrada pela água para vencer os níveis de sucção da camada inferior tornando o processo mais lento.

Porém, a condição inicial não afeta apenas a velocidade do processo de infiltração da camada inferior, mas também a distribuição de carga de pressão ao longo das camadas no instante em que este processo é cessado, como pode ser visto na Figura 5.15.

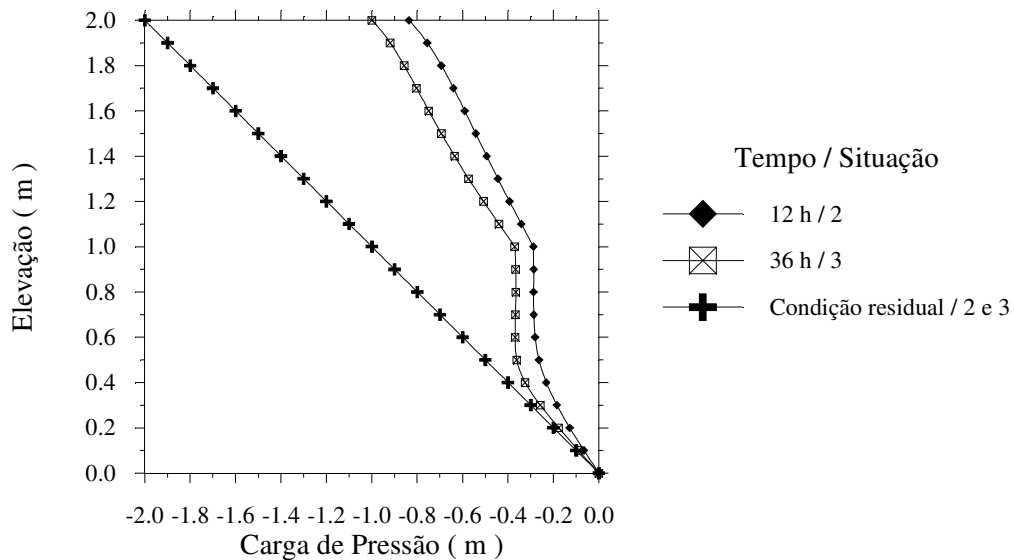


Figura 5.15 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situações 2 e 3 – condições iniciais e finais da etapa 2.

Pode ser visto ainda na Figura 5.15, que a condição residual do processo de drenagem das duas camadas (etapa 2) é a mesma, independente da condição inicial.

A Figura 5.16 apresenta a evolução da percentagem média de drenagem ao longo do tempo para as situações 2 e 3. Como pode ser observado, a etapa de drenagem evolui de forma semelhante para ambas as situações, acontecendo num mesmo período de tempo (39096 horas).

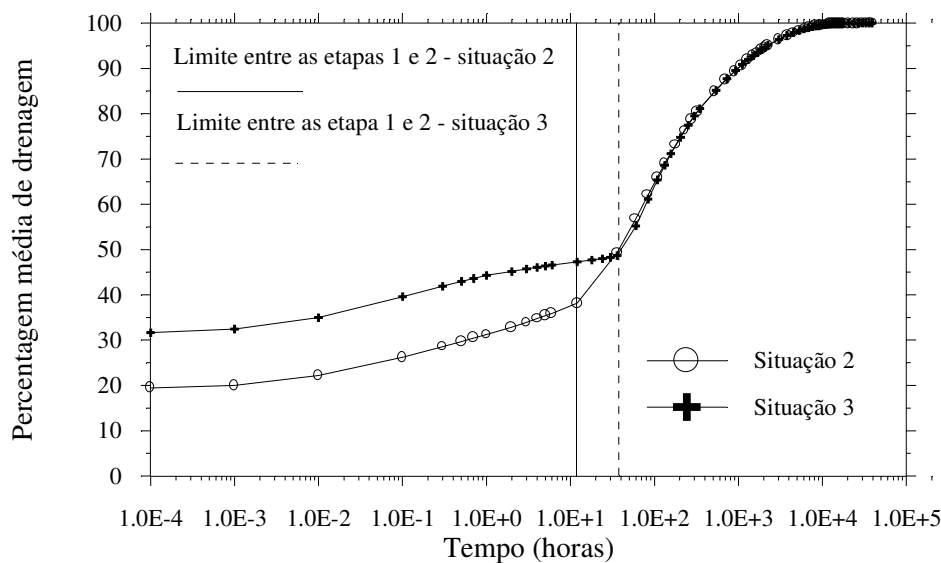


Figura 5.16 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito - análise unidimensional – situações 2 e 3 – resultados em termos da percentagem média de drenagem.

5.5 – Análise Bidimensional

Para a análise bidimensional foi adotada uma seção final da pilha baseada na configuração apresentada por Gomes *et al* (1999b), porém com um sistema de drenagem composto apenas por um dreno horizontal.

A situação bidimensional a ser estudada é ilustrada na Figura 5.17 e corresponde ao processo de fluxo na pilha de rejeito considerando a formação de um lago no topo da pilha.

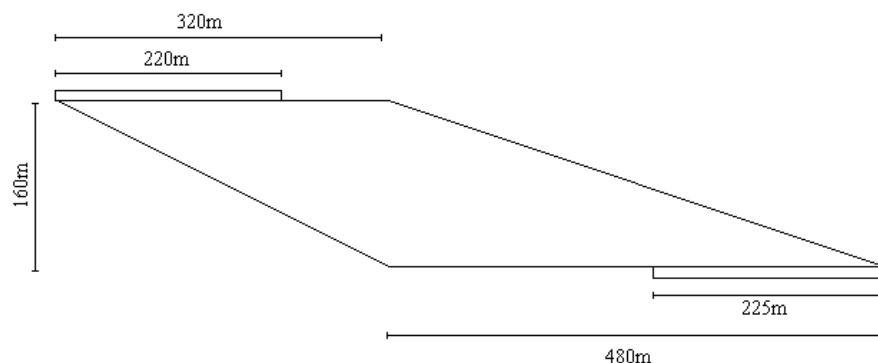


Figura 5.17 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – configuração adotada para a simulação.

Para esta simulação foi adotada a malha de elementos finitos apresentada na Figura 5.18 (1056 elementos dos tipos Q4 e T3). As condições de contorno também são ilustradas nesta figura. Para condição inicial, também mostrada na Figura 5.18, adotou-se a distribuição de carga de pressão correspondente a 10% da condição de drenagem completa da pilha.



Figura 5.18 – Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – malha de elementos finitos.

Foram considerados os parâmetros para o modelo de van Genuchten para o ciclo de infiltração apresentados na Tabela 5.1 e uma condutividade hidráulica saturada de 10^{-6} m/s.

Uma importante característica do GEOFLUX, utilizada nesta análise, é a possibilidade de se interromper o processamento dos dados num instante qualquer e reiniciá-lo a partir de um instante qualquer. Assim sendo, em função do elevado tempo de processamento desta análise (aproximadamente 2 dias), optou-se por realizar este estudo em cinco etapas conforme a discretização temporal apresentada na Tabela 5.5.

A marcha no tempo foi definida por um esquema puramente implícito ($\alpha = 1$). No tratamento da não linearidade, adotou-se uma tolerância de 10 % e um número máximo de 15 iterações.

Tabela 5.5 – Fluxo em uma pilha de rejeito - análise bidimensional - discretização no tempo (NI – número de intervalos de tempo).

<i>Etapas</i>	<i>NI</i>	<i>Δt (horas)</i>	<i>Tempo (horas)</i>
1	5	30	0 – 150
	4	60	150 – 390
	5	120	390 – 990
2	5	30	990 – 1140
	4	60	1140 – 1380
	5	120	1380 – 1980
	5	240	1980 – 3180
3	5	60	3180 – 3480
	4	120	3480 – 3960
	5	240	3960 – 5160
	10	480	5160 – 9960
	10	960	9960 – 19560
4	5	720	19560 – 23160
	4	1440	23160 – 28920
	5	2880	28920 – 43320
	10	5760	43320 – 100920
5	5	60	100920 – 101220
	4	120	101220 – 101700
	5	240	101700 – 102900
	5	480	102900 - 105300

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.19 em termos evolução da linha piezométrica com o tempo. Como pode ser verificado, o processo de infiltração atinge a condição permanente com aproximadamente 10 anos, porém com 3,6 anos atinge-se uma condição bem próxima à condição estacionária.

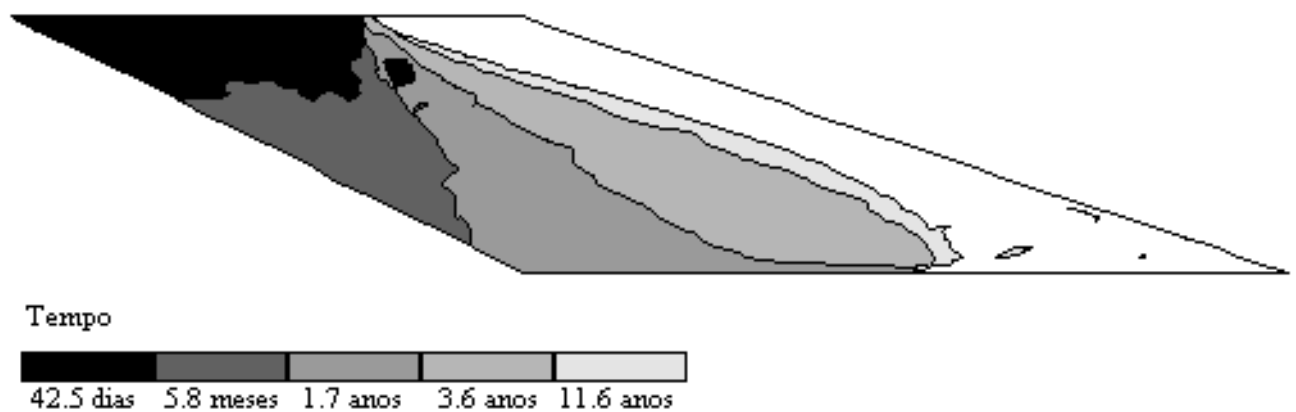


Figura 5.19 - Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – evolução da linha piezométrica com o tempo – resultados fornecidos pelo GEOFLUX.

Os resultados apresentaram algumas particularidades como a formação de regiões com elevados valores de sucção na área próxima à linha piezométrica. Este comportamento motivou a simulação do problema em estudo com a utilização do programa SEEP/W – GEOSLOPE. Os resultados dessa análise foram, em termos gerais, concordantes com os fornecidos pelo GEOFLUX, indicando uma condição permanente, ilustrada na Figura 5.20, também em aproximadamente 10 anos. Cabe ressaltar, que os resultados fornecidos pelo SEEP/W também apresentam regiões com elevados valores de sucção. A GEOSLOPE (1995) acredita que este tipo de dificuldade numérica se deve à presença de elevados gradientes em um mesmo elemento e sugere uma maior discretização para que estas dificuldades sejam superadas.

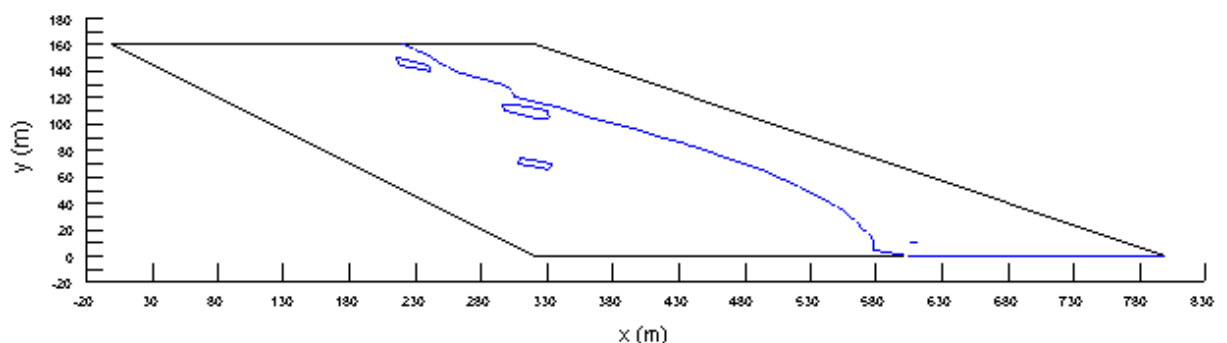


Figura 5.20 - Processo de fluxo em uma pilha de rejeito – linha piezométrica na condição estacionária (10 anos) – SEEP/W

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 - Considerações Finais

Este trabalho objetivou o desenvolvimento de um modelo computacional via MEF para o estudo de problemas de fluxo em meios porosos não saturados em condições planas.

Inicialmente foi efetuada uma breve discussão sobre problema apresentando-se as propriedades hidráulicas que afetam o fluxo em meios porosos não saturados, seu equacionamento desconsiderando as variações de volume e temperatura, sua formulação matemática via MEF utilizando Galerkin, e sua discretização no tempo utilizando um esquema de diferenças finitas. A questão da não linearidade foi tratada através do algoritmo preditor corretor apresentado por Gescovich (1994).

A concepção básica do programa computacional GEOFLUX foi apresentada juntamente com uma série de exemplos de validação e um estudo de caso real.

Pode-se destacar, como principais características do modelo desenvolvido:

- a) permite a análise de fluxo transiente, sob diferentes condições de contorno, para problemas planos;
- b) permite a utilização de elementos quadrilaterais isoparamétricos de 4 ou 8 nós, Q4 e Q8, permitindo, ainda, a utilização destes elementos colapsados;
- c) utiliza o modelo proposto por van Genuchten (1980) e o modelo adotado por Srivastava e Yeh (1991) para representar as curvas características;
- d) utiliza as técnicas de interpolação linear e spline cúbica na representação das curvas características por pontos;

- e) permite a introdução de características anisotrópicas do meio considerando os eixos coordenados x e y como direções principais de fluxo;
- f) permite a simulação em várias etapas partindo-se de resultados anteriores;
- g) permite a utilização dos pré e pós processadores MTOOL e MVIEW.

6.2 - Conclusões

Com relação aos exemplos de validação pode-se concluir:

a) os resultados das análises unidimensionais apresentados no Capítulo 4 indicaram uma boa concordância entre a solução numérica e a solução analítica (Srivastava e Yeh, 1991), tanto durante o processo de infiltração como durante o processo de drenagem;

b) durante o processo de infiltração, a condutividade hidráulica do material aumenta, tendendo ao valor da condutividade hidráulica saturada devido ao aumento do teor de umidade volumétrica;

c) durante o processo de drenagem, a condutividade hidráulica do material diminui devido à diminuição do teor de umidade volumétrica.

d) a velocidade de fluxo imposta no contorno do problema influencia o processo de infiltração, gerando uma resposta, na condição estacionária, tão próxima da saturação quanto mais próxima da condutividade hidráulica saturada for sua intensidade;

e) durante o processo de drenagem o teor de umidade volumétrica diminui tão mais rápido quanto maior for a condutividade hidráulica do meio;

f) a interface entre materiais com diferentes condutividades hidráulicas, funciona como uma barreira à passagem da água, tanto durante o processo de drenagem quanto durante o processo de infiltração;

g) a solução numérica obtida pelo programa GEOFLUX apresentou uma boa concordância tanto com a solução analítica (Warric e Lomen, 1976) quanto com a solução semi-analítica (Tsai *et al*, 1993) para o problema de infiltração em uma camada de solo sujeita a um fluxo constante aplicado a uma faixa da superfície. Os resultados mostraram uma redução progressiva da sucção com o tempo devido ao aumento do teor de umidade volumétrica como consequência do avanço da frente de umedecimento no solo;

h) a comparação da linha piezométrica, na condição estacionária, obtida pelo GEOFLUX e pela solução analítica apresentada por Zaradny (1993) indicou uma boa qualidade dos resultados para o caso de infiltração numa camada de solo contendo um dreno longitudinal;

i) a dificuldade encontrada pela água para vencer zonas de elevadas pressões negativas na camada de solo torna a simulação numérica mais lenta;

j) a configuração final da linha piezométrica na condição estacionária confere com a solução gráfica de Kozeny;

l) a utilização de uma análise de fluxo não saturado permite a avaliação da evolução da frente de saturação com o tempo, fornecendo ainda, a distribuição de pressão na zona não saturada e o tempo necessário para se atingir a condição estacionária, o que uma análise convencional pelo método gráfico não seria capaz de fornecer;

Com relação ao estudo de caso pode-se concluir:

a) o tempo necessário para a obtenção da condição estacionária durante o processo de drenagem em uma coluna de 1m de rejeito é de dezesseis dias. No entanto, como o processo de drenagem evolui rapidamente nos instantes iniciais, uma percentagem média de drenagem de 50% é atingida em apenas 1 hora e em em 1 dia atinge-se uma percentagem média de drenagem superior a 85%. Isto confirma as boas condições de drenagem do material;

b) a disposição de sucessivas camadas de rejeito interrompe o processo de drenagem das camadas inferiores, acarretando numa temporária elevação dos níveis de pressão. Isto ocorre porque a camada recém disposta cede água às camadas inferiores. Decorrido um dado período de tempo as camadas inferiores retomam seu processo de drenagem;

c) a distribuição inicial da carga de pressão nas camadas inferiores afeta a velocidade do processo de drenagem/infiltração no caso da disposição de camadas sucessivas. Este fato se dá devido à dificuldade encontrada pela água para vencer os diferentes níveis de sucção das camadas inferiores, tornando o processo mais lento. Quanto mais próxima da condição residual, uma dada camada estiver, no instante da disposição da nova camada, mais lento será este processo;

d) a condição residual do processo de drenagem de camadas sucessivas independe da condição inicial;

e) os resultados da análise bidimensional indicaram que o processo de infiltração atinge a condição permanente em aproximadamente 10 anos. Uma condição bem próxima à condição estacionária já é obtida a partir de 3,6 anos;

f) os resultados dessa análise foram, em termos gerais, concordantes com os fornecidos pelo SEEP/W que indicaram uma condição permanente, também, em aproximadamente 10 anos;

Com relação aos aspectos numérico-computacionais:

a) foram encontradas algumas dificuldades numéricas no exemplo 4.2.3 e no estudo do caso real. Baseado na literatura (GEOSLOPE, 1995) acredita-se que estas dificuldades sejam oriundas dos altos gradientes estabelecidos em um mesmo elemento que apresenta regiões saturadas e não saturadas. Apesar destas dificuldades os resultados finais se mostraram coerentes e uma melhoria na qualidade dos resultados foi alcançada através de uma maior discretização do domínio;

b) a forma de representação das curvas características pode influenciar bastante nos resultados. Desta forma, sugere-se que, para curvas dadas por pontos, se adote um conjunto representativo de valores;

c) a utilização do modelo adotado por Srivastava e Yeh (1991) para problemas que possuam zonas saturadas no seu domínio não é recomendada, porque este modelo apresenta um valor de capacidade de retenção específica diferente de zero para a situação de saturação a uma pressão nula;

d) existem, ainda, restrições ao uso do modelo adotado por Srivastava e Yeh (1991) para problemas nos quais o solo apresente elevados valores de pressão de entrada de ar, visto que o modelo exponencial não é capaz de reproduzir a zona de ascensão capilar;

e) a capacidade de retenção específica $C(\psi)$, no modelo de van Genuchten (1980), não é definida para valores do parâmetro n menores que 2;

6.3 - Sugestões

Pode-se destacar, para trabalhos futuros, as seguintes sugestões:

- a) implementação de novos modelos para a representação das curvas características;
- b) análise de sensibilidade do modelo GEOFLUX com relação aos diferentes tipos de representação das propriedades do material;
- c) análise de sensibilidade do modelo ao valor da função $C(\psi)$;
- d) implementação de alternativas para o tratamento da não linearidade;
- e) avaliação da influência do parâmetro de controle da marcha no tempo, α , na solução numérica. Nos exemplos apresentados foi utilizado apenas $\alpha = 1$ ou seja um esquema puramente implícito;
- f) cálculo de vazões a partir de seções definidas pelo usuário;
- g) implementação de funções que permitam a variação das condições de contorno com o tempo;
- h) implementação de algoritmos para o controle da marcha no tempo;
- i) tratamento dos contornos de fluxo sujeitos à pressão atmosférica;
- j) expansão do programa para análise tridimensional;
- k) tratamento do problema de fluxo acoplado às variações de volume do meio e às variações de temperatura;
- l) análise do caso real considerando a construção em etapas, de modo a se observar o comportamento da pilha durante a disposição das sucessivas camadas de rejeito;
- m) análise de estabilidade da pilha de rejeitos utilizando os resultados obtidos na análise de fluxo.

Referências Bibliográficas

Allen, M. B. e Murphy, C. L. (1986). A Finite Element Collocation Method for Variably Saturated Flow in Two Space Dimensions, *Water Resources Research*, v. 22, n. 11, p. 1537-1542.

Babour, S. L. (1998). Nineteenth Canadian Geotechnical Colloquium: The Soil-Water Characteristic Curve: A Historical Perspective, *Canadian Geotechnical Journal*, v 35, p. 873-894.

Bathe, E. K. (1982). *Finite Element Procedures in Engineer Analysis*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.

Bennett. R. e Wilson, S. (1999). Unsaturated Soils Come Home, *Ground Engineering*, may 1999, p. 26-28.

Benson, C. H. e Gribb, M. M. (1997). Measuring Unsaturated Hydraulic Conductivity in Laboratory and Field, *Unsaturated Soil Engineering Practice. Geotechnical Special Publication (68) ASCE*, p. 113-165.

Briggs, L. J. (1897). *The Mechanics of Soil Moisture*, U. S. Department of Agriculture, Soil Bulletin, 10.

Buckingham, E. (1907). *Studies of Movement of Soil Moisture*, U. S. Department of Agriculture, Soil Bulletin, 38.

Celia, M. A.; Bouloutas, E. T. e Zarba, R. L. (1990). A General Mass-Conservative Numerical Solution for Unsaturated Flow Equation, *Water Resources Research*, v. 26, n. 7, p. 1483-1496

Chapra, S. C. e Canale, R. P. (1990). Numerical Methods for Engineers, Mc Graw-Hill, New York.

Chung, S. e Austin, T. A. (1987). Modeling Saturated-Unsaturated Water Flow in Soils, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 113, n. 2, p. 233-250.

Collins, B. D. e Znidarcic, D. (1997). Triggering Mechanics of Rainfall Induced Debris Flows, Proceedings of 2nd Pan-American Symposium on Landslides and 2nd Brazilian Conference on Slope Stability, II PSL/COBRE, Vol.1, 277-286.

Fredlund, D. G. e Xing, A. (1994). Equations for Soil-Water Characteristic Curve, Canadian Geotechnical Journal, v. 31, n. 4, p.521-532.

Fredlund, D. G., Xing; A. e Huang, S. (1994). Predicting the Permeability Function Using the Soil-Water Characteristic Curve, Canadian Geotechnical Journal, v. 31, n. 4, p.533-546

Freeze, R. A. (1971). Three-Dimensional Saturated-Unsaturated Flow in Groundwater Basin, Water Resources Research, v. 7, n. 2, p. 347-365.

Freeze, R. A. e Cherry, J. A. (1979). Groundwater, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

GEOSLOPE International LTD. (1995). User Guide, SEEP/W – for finite element seepage analysis, Version 3.

Gerscovich, D. M. S. (1994). Fluxo em Meios Porosos Saturados-não Saturados: Modelagem Numérica com Aplicações ao Estudo de Estabilidade de Encostas do Rio de Janeiro, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 244p.

Gomes, R. C.; Araújo, L. G.; Oliveira Filho, W. L.; Ribeiro, S. G. S.; Nogueira, C. L. (1999a). Condicionantes Geológico-geotécnicos de Projeto de Disposição de Rejeito em Cava Exaurida de Mineração, VI Congresso Brasileiro de Geotecnia Ambiental, REGEO'99, p. 153-160

Gomes, R. C.; Araújo, L. G.; Oliveira Filho, W. L.; Ribeiro, S. G. S.; Nogueira, C. L. (1999b). Concepção e Projeto Básico da Disposição em Pilhas de Rejeito de Minério de Ferro em Cava Exaurida de Mineração, VI Congresso Brasileiro de Geotecnia Ambiental, REGEO'99, p. 161-168.

Haines, W. B. (1927). Studies on the Physical Properties of Soils, Journal of Agricultural Science, v. 17, p. 264-290.

Hageman, L. A. e Young, D. M. (1981). Applied Iterative Methods, Academic Press Inc, London.

Huyakorn, P. S. e Pinder, G. F. (1983). Computational Methods in Subsurface Flow, Academic Press Inc, London.

Huyakorn, P. S.; Springer, E. P.; Guvanasen, V. e Wadworth, T. D. (1986). A Three Dimensional Finite Element Model For Simulating Water Flow in Variably Saturated Porous Media, Water Resources Research, v.22, n. 13, p. 1790-1808.

Javandel, I. e Witherspoon, P. A. (1968). Application of Finite Element Method to Transient Flow in Porous Media, Society of Petroleum Engineers Journal, v. 8, n. 3, p. 241-252.

Lam, L. e Fredlund, D. G. (1984). Saturated-unsaturated Transient Finite Element Seepage Model for Geotechnical Engineering, Advanced Water Resources, v. 7, n. 3, p. 132-136.

Li, G. C. e Desai, C. S. (1983). Stress and Seepage Analysis of Earth Dams, *Journal of Geotechnical Engineering*, v.109, n. 7, p. 946-960.

Machado Júnior., J. C. e Oliveira Filho, W. L. (1999). Methodology for Drenability Studies of Stacked Mining Coarse Tailings, VI Congresso Brasileiro de Geotecnia Ambiental, REGEO'99, p. 233-240.

Miller, C. T.; Glenn, A. W.; Kelley, C. T. e Tocci, M. D. (1998). Robust Solution of Richard's Equation for Nonuniform Porous Media, *Water Resources Research*, v. 34, n. 10, p. 2599-2610.

Mualem, Y. (1976). A New Model for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Porous Media, *Water Resources Research*, v. 12, n. 3, p. 513-522.

Neuman, S. P. (1973). Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements, *Journal of Hydraulics Division ASCE*, v. 99, n. 12, p. 2233-2250.

Nielsen, D. R.; van Genuchten, M. T. e Biggar, J. W. (1986). Water Flow and Solute Transport Processes in Unsaturated Zone, *Water Resources Research*, v.22, n. 9, p. 89S-108S.

Nogueira, C. L. (1998). Análise não linear de Escavações e Aterros, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 252p.

Oliveira Filho, W. L. (1999). Relatório Técnico CEGEO – R017, Centro de Excelência em Geotecnia DECIV/EM/UFOP.

Paniconi, C.; Aldana, A. A. e Wood, E. F. (1991). Numerical Evaluation of Iterative and Noniterative Methods for the Nonlinear Richards Equation, *Water Resources Research*, v. 27, n. 6, p. 1147-1163.

Papagianakis, A. T. e Fredlund, D. G. (1984). A Steady State Model for Flow in Saturated-Unsaturated Soils, Canadian Geotechnical Journal, v. 21, p. 419-430.

Rahardjo, H. e Leong, E. C. (1997). Soil-water Characteristic Curves and Flux Boundary Problems, Unsaturated Soil Engineering Practice, Geotechnical Special Publication (68) ASCE, p. 82-112.

Srivastava R. e Yeh, T.-C. J. , (1991). Analytical Solutions for One-Dimensional, Transiente Infiltration Toward the Water Table in Homogeneous Layered Soils, Water Resources Research, v 27, n 5, p 753-726.

Taylor, D. W. (1948). Fundamentals of Soil Mechanics, John Wiley & Sons.

TeCGRAF/PUC-Rio(1992). MTOOL Bidimensional Mesh Tool Versão 1.0, Manual do Usuário, CENPES-PETRABRAS / PUC-Rio.

TeCGRAF/PUC-Rio(1993). MVIEW Bidimensional Mesh View Versão 1.1, Manual do Usuário, CENPES-PETRABRAS / PUC-Rio.

Tracy, J. C. e Mariño, M. A. (1987). Seepage into Variably Saturated Porous Medium, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 113, n. 2, p. 198-212.

Tsai, W. F.; Chen, C. J. e Tien, H. C. (1993). Finite Analytic Numerical Solutions for Unsaturated Flow with Irregularities Boundaries, Journal of Hydraulic Engineering – ASCE, v. 119, n. 11, p. 1274-1298.

Van Genuchten, M. T. (1980). A Closed Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils, Soil Science Society of America Journal, 44, 892-898.

Warrick, A. W. e Lomen, D. O. (1976). Time-dependent Linearized Infiltration: III Strip and Disc Sources. Soil Science Society American Journal, v. 40, p. 639-643.

Wilson, G. W. (1997). Surface Flux Boundary Modeling for Unsaturated Soils, Unsaturated Soil Engineering Practice, Geotechnical Special Publication (68) ASCE, p. 38-65.

Yu, F. X. e Singh, V. P. (1994). Modeling 3D Ground-Water Flow by Modified Finite Element Method, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, v. 120, n. 5, p. 892-909.

Zaradny, H. (1993). Groundwater Flow in Saturated and Unsaturated Soil, A. A. Balkema, Rotterdam.

Znidarcic, D. (1998). Report on the Review of Germano Exhausted Open Pit Project. Relatório Técnico de Consultoria, Ouro Preto, 20 agosto 1998. 5p.

Manual de Utilização do Programa GEOFLUX

II.1 - Considerações Gerais

O programa GEOFLUX foi baseado no programa ANLOG'98 (Nogueira, 1998) e da mesma forma trabalha com um sistema de entrada e saída que opera via arquivo de dados do tipo texto. Sendo que a entrada e a saída podem ser efetuadas através de uma interface com os pré e pós processadores MTOOL (TeCGRAF/PUC-Rio,1992) e MVIEW (TeCGRAF/PUC-Rio,1993) desenvolvidos pelo grupo de tecnologia de computação gráfica da PUC-Rio em convênio com a PETROBRAS.

O arquivo texto de entrada, além de informações básicas, contém os macro comandos que são responsáveis pelo controle da execução das várias etapas do processamento.

II.2 – Entrada de Dados

Como já foi ressaltado a entrada de dados é efetuada através de um arquivo de dados do tipo texto. Este arquivo deve possuir um nome com cinco dígitos sendo assumida uma extensão “.D”. Por exemplo: dados.D

II.2.1 –Dados Gerais

O primeiro conjunto de dados fornecido ao problema é denominado dado gerais e está representados na Tabela II.1.

A primeira linha do arquivo de dados é constituída pelo macro comando ‘DADOS’ que dá início à leitura dos dados.

A segunda linha do arquivo de dados deve apresentar uma identificação do problema com até 70 dígitos.

A terceira linha informa o número de nós da malha (NPOIN), o número de elementos da malha (NELEM), o número dos diferentes tipos de materiais envolvidos no problema (NMATS), o número de pontos de gauss adotados na simulação (NGAUSS)¹, a dimensão do problema (NDIME)², o número máximo de nós por elemento (NNOELM)³ e o número de componentes de fluxo (NCOMP)⁴.

A quarta linha informa o tipo de problema em estudo (LLTYPE)⁵. Esta linha informa, ainda, a utilização ou não dos pré e pós processadores MTOOL (NF)⁶ e MVIEW (POS)⁷.

1 - NGAUSS = 2 quando tem-se 2 pontos de gauss em cada direção.

- NGAUSS = 3 quando tem-se 3 pontos de gauss em cada direção.

2 - NDIME = 1 para problema 1D.

- NDIME = 2 para problema 2D.

3 - NNOELM = 4 se a malha de elementos finitos for constituída apenas por elementos Q4 ou T3.

- NNOELM = 8 se a malha de elementos finitos for constituída apenas por elementos Q8 ou no caso de uma malha mista composta de elementos Q8 e Q4.

4 - NCOMP = 2 para duas componentes de fluxo

5 - LLTYPE = 1 para problemas planos

- LLTYPE = 2 para problemas axissimétricos

6 - NF = 1 executa a leitura das coordenadas e das conectividades pelo arquivo neutro gerado pelo MTOOL.

- NF = 0 a leitura das coordenadas e conectividades são feitas no arquivo texto .D.

7 - POS = 1 gera um arquivo .pos para ser usado no MVIEW.

- POS = 0 não gera o arquivo .pos.

Tabela II.1 – Arquivo de dados – dados gerais.

‘DADOS’						
‘Identificação do problema com até 70 caracteres’						
NPOIN	NELEM	NMATS	NGAUSS	NDIME	NNOELM	NCOMP
LLTYPE		NF			POS	
:						

II.2.2 –Malha de Elementos Finitos

O segundo conjunto de dados a ser fornecido constitui a malha de elementos finitos que pode ser fornecida através de um arquivo de dados gerado pelo MTOOL, arquivo neutro (.NF), ou diretamente através do arquivo de dados tipo texto (.D).

Caso NF seja igual a 1, ou seja a malha seja fornecida através de um arquivo neutro .NF, a quinta linha deverá fornecer o nome do arquivo neutro (.NF) com cinco dígitos e sem a extensão como indica a Tabela II.2. Caso contrário deverá proceder da seguinte forma:

Na quinta linha do arquivo tipo texto .D deverá ser fornecido o número de grupos de elementos (NGELM) com o mesmo número de nós. Caso NGELM seja 0 o programa admite que todos os elementos tem o mesmo número de nós dados por NNOELM. Caso contrário, nas linhas subsequentes deverão ser fornecidos o número do elemento inicial (KEL1), o número do elemento final (KEL2), o incremento (INCR) e o número de nós dos elementos (NNOEL) deste grupo. Cada grupo definido por NGELM tem uma linha de dados que o identifica, como indica a Tabela II.3.

Na sequência deverão ser fornecidos, como indicado na Tabela II.4, o número do ponto nodal (IPOIN) e suas respectivas coordenadas cartesianas, X (XGL[1,IPOIN]) e Y (XGL[2,IPOIN]). E, ainda, as conectividades de cada elemento (IELEM) de acordo com o seu número de nós (NNOEL), como indica a Tabela II.5 na qual NNO_i é o número do i-ésimo nó. Cabe observar que para se definir o elemento T3 deve-se fornecer quatro nós sendo o quarto nó igual ao terceiro. Da mesma forma para a

definição de um elemento T6 deve-se fornecer oito nós sendo o oitavo e o sétimo nós iguais ao sexto.

Tabela II.2 – Arquivo de dados – malha de elementos finitos para $NF = 1$.

	:
NOMEX	:
	:

Tabela II.3 – Arquivo de dados – malha de elementos finitos para
 $NF = 0$ e $NGELM \neq 0$.

				:
NGELM				:
KEL1	KEL2	INCR	NNOEL	:
(repete-se a linha anterior NGELM vezes)				
				:

Tabela II.4 – Arquivo de dados – malha de elementos finitos.

:		
IPOIN	XGL(1,IPOIN)	XGL(2,IPON)
(repete-se a linha anterior NPOIN vezes)		
:		

Tabela II.5 – Arquivo de dados – conectividades dos elementos.

				:
IELEM		NNO1	NNO _{NNOEL}
(repete-se a linha anterior NELEM vezes)				
				:

II.2.3 – Descrição dos Materiais

O próximo conjunto de dados a ser fornecido é responsável pela definição das propriedades do material que é feita da seguinte forma: primeiramente deve ser fornecida a distribuição dos materiais no domínio do problema, como indica a Tabela II.6 e 7. Para tanto, na linha subsequente à etapa anterior, sexta para o caso de se utilizar o arquivo .NF, deverá ser fornecido o número de grupos de elementos (NGELM) com o mesmo tipo de material e nas próximas linhas, para cada grupo, deverão ser fornecidos o elemento inicial (KEL1), o elemento final (KEL2), o incremento (INCR), o número do material (LMAT) e o código para representação das curvas características (LCODE)⁸. Caso os códigos escolhidos forem 2 ou 3 deverão ser fornecidos na próxima linha, o número de pontos da função de condutividade hidráulica (NUMP_K) e o número de pontos da curva de retenção (NUMP_TETA) como mostra a Tabela II.8.

Na próxima linha deverão ser fornecidos, como indicam as Tabelas II.7 e II.8. Para LCODE igual a 1, 2 ou 3 o valor da condutividade hidráulica saturada (KX) e a relação entre a condutividade hidráulica na direção x e na direção y (FAT). Para um problema isotrópico FAT=1.

Já para LCODE igual a 4 deverão ser fornecidos, como mostra a Tabela II.9, além de KX e FAT, os valores da constante α (ALFA) e n (BETA) para o modelo de van Genuchten e ainda o valor da porosidade (POR) e da umidade volumétrica residual (TR). Para LCODE igual a 5 deverão ser fornecidos, como apresenta a Tabela II.10, além de KX e FAT, os valores da constante α (ALFA) para o modelo de Srivastava e Yeh, e ainda o valor da porosidade (POR) e da umidade volumétrica residual (TR). Cabe observar que o teor de umidade volumétrica saturada é considerada como sendo igual à porosidade.

8 – LCODE = 1 para problemas onde a condutividade hidráulica é sempre constante;
– LCODE = 2 para materiais cujas as curvas características são dadas por pontos e aproximadas por trechos retos;
– LCODE = 3 para materiais cujas as curvas características são dadas por pontos e aproximadas por uma spline cúbica;
– LCODE = 4 para materiais cujas curvas características são dadas pelo modelo de van Genuchten;
– LCODE = 5 para materiais cujas curvas características são dadas pelo modelo exponencial apresentado por Srivastava e Yeh.

Tabela II.6 – Arquivo de dados – distribuição dos materiais no domínio do problema.

⋮				
NGELM				
KEL1	KEL2	INCR	LMAT	LCODE
⋮				

Tabela II.7 – Arquivo de dados – propriedades do material para LCODE = 1.

⋮	
KX	FAT
⋮	

Tabela II.8 – Arquivo de dados – propriedades do material para LCODE = 2 ou 3.

⋮	
NUMP_K	NUMP_TETA
KX	FAT
⋮	

Tabela II.9 – Arquivo de dados – propriedades do material para LCODE = 4.

⋮					
KX	FAT	ALFA	BETA	POR	TR
⋮					

Tabela II.10 – Arquivo de dados – propriedades do material para LCODE = 5.

⋮				
KX	FAT	ALFA	POR	TR
⋮				

II.2.4 – Condições de Contorno

No próximo conjunto de dados define-se as condições de contorno do problema, que podem ser fornecidas como cargas prescritas ou como fluxo normal prescrito.

II.2.4.1 – Condições de Contorno em Carga Prescrita

Após fornecidos os parâmetros que caracterizam os diferentes tipos de materiais, deve-se fornecer na linha subsequente, como indica as Tabela II.11 e II.12, o número de condições de contorno prescritas geradas em grupo (NCBGR) e o número de condições de contorno geradas individualmente (NCBGI).

Para cada condição de contorno gerada em grupo, quando NCBGR é diferente de 0, deve-se fornecer o ponto inicial (PINIC), o ponto final (PFINL), o incremento adotado (INCR) e o código da condição de contorno (D)⁹. Caso a condição seja em carga prescrita não nula, deve-se fornecer na próxima linha o valor da carga prescrita (C_HID_P[IPOIN]).

Na sequência, para cada condição de contorno gerada individualmente deve-se fornecer o nó (IPOIN) e o código (D). Caso a condição seja em carga prescrita não nula deve-se fornecer na próxima linha o valor da carga prescrita.

Tabela II.11 – Arquivo de dados - condições de contorno em carga prescrita (D=2 ou 3).

				:
NCBGR		NCBGI		
PINIC	PFINL	INCR	D	
C_HID_P(IPOIN)				
				:
IPOIN		D		
C_HID_P(IPOIN)				
				:

9 - D = 1 para condição de contorno em carga de pressão prescrita nula;

- D = 2 para condição de contorno em carga de pressão prescrita não nula;

- D = 3 para condição de contorno em carga hidráulica total prescrita não nula.

Tabela II.12 – Arquivo de dados – condições de contorno em carga prescrita ($D = 1$).

		:	
NCBGR		NCBGI	
PINIC	PFINL	INCR	D
		:	
IPOIN		D	
		:	

II.2.4.2 – Condições de Contorno em Fluxo Normal Prescrito

Para se efetuar a entrada das condições de contorno em fluxo prescrito utiliza-se os macro comandos QPOIN e QDIST.

O macro comando QPOIN permite a entrada das condições de contorno em vazão nodal. Para tanto, basta fornecer o macro comando ‘QPOIN’ e nas linhas subsequentes o número do nó (IPOIN) e sua correspondente vazão prescrita (QPOIN[IPOIN]), como apresenta a Tabela II.13.

O macro comando QDIST, por sua vez, permite a entrada das condições de contorno em fluxo prescrito distribuído na face de um elemento. Assim, deve-se fornecer, como indica a Tabela II.14, o macro comando ‘QDIST’ e na próxima linha o número de faces sujeitas à fluxo prescrito (NEDEG). Nas linhas subsequentes, para cada face, deve-se fornecer o número do elemento sujeito ao fluxo (IEDEG), os números dos nós da face deste elemento fornecidos no sentido anti-horário, (NO[I]) e a magnitude da velocidade de fluxo normal a esta face (QN).

Tabela II.13 - Arquivo de dados - condição de contorno em fluxo normal prescrito nodal.

		:	
‘QPOIN’			
IPOIN		QPOIN[IPOIN])	
		:	

Tabela II.14 – Arquivo de dados – condição de contorno em fluxo prescrito distribuído.

⋮		
'QDIST'		
NEDGE		
IEDGE		
NO(1)	NO(2)	... NO(3) se NNOEL = 8
QN		
⋮		

II.2.5 – Condições Iniciais

Definidas as condições de contorno a etapa seguinte objetiva o estabelecimento das condições iniciais do problema que são fornecidas através de arquivos de dados do tipo texto com a utilização dos macro comandos CHP_0 e GET_CHP.

O macro comando CHP_0 utiliza um arquivo que contém em cada linha o número do ponto nodal e o valor inicial da carga de pressão para este ponto. Este arquivo deverá ser editado pelo usuário tendo o mesmo nome do arquivo de dados (.D) porém com a extensão (.INI). Para este tipo de leitura basta fornecer o macro comando 'CHP_0', como mostra a Tabela II.15.

O macro comando GET_CHP, por sua vez, utiliza um arquivo (.POS) gerado pelo programa GEOFLUX em uma análise anterior. Neste caso, o usuário deverá fornecer o macro comando 'GET_CHP' e na linha seguinte o nome do arquivo (.POS) contendo cinco dígitos. Na próxima linha, deverá ser fornecido o instante que será adotado como condição inicial (TIME_INI), como indica a Tabela II.16.

Tabela II.15 – Arquivo de dados – condições iniciais via arquivo .INI.

⋮		
'CHP_0'		
⋮		

Tabela II.16 – Arquivo de dados – condições iniciais via arquivo .POS.

	:
'GETCHP'	
NOMEX	
TIME_INI	
	:

II.3 – Resolução do Problema e Finalização

A última etapa visa a resolução do problema que é iniciada através do macro comando SOLVE. Antes de efetuar-se a resolução são ainda necessários alguns dados complementares. Sendo assim, na linha posterior ao macro comando 'SOLVE' deve-se fornecer, como indica a Tabela II.17, o número de instantes de tempo avaliados (NI=número de intervalos de tempo adotados + 1), o incremento inicial de tempo (DT), o número de mudanças no incremento de tempo durante a simulação (NCHANGE), o número máximo de iterações admitido (MAXITER), a tolerância adotada para a convergência (TOL), o valor de ALFA que determina o tipo de marcha no tempo e um valor para o controle do armazenamento dos resultados (SAVE_CONT)¹⁰.

Nas linhas seguintes deve-se fornecer, como indicado na Tabela II.18, se NCHANGE for diferente de zero, para cada mudança no incremento de tempo, o número do instante de tempo onde ocorrerá a mudança no incremento de tempo, seguido de um fator multiplicador que será aplicado ao incremento atual. Na seqüência, caso SAVE_CONT seja igual a zero, deve-se fornecer o número de instantes que terão os resultados armazenados (NUM_SAVE) e nas linhas seguintes para cada instante armazenado, deve-se fornecer um número referente ao armazenamento (ISAVE) e o número do instante que será armazenado (VET_STEP_SAVE[ISAVE]), como indicado na Tabela II.19.

10 - SAVE_CONT \neq 0 são armazenadas as repostas para os instantes de tempo múltiplos de
 SAVE_CONT
 - SAVE_CONT = 0 são armazenados somente os instantes requisitados pelo usuário.

Caso as propriedades do material sejam dadas por pontos, deve-se fornecer o nome do arquivo “.CV”, contendo cinco dígitos como mostra a Tabela II.20, no qual estão armazenados os dados referentes às curvas características. Este arquivo deve ser editado pelo usuário e a sua primeira linha deverá fornecer o código do material e as linhas subsequentes deverão apresentar, em ordem crescente, os pontos referentes à função de condutividade hidráulica e logo em seguida os pontos referentes à curva de retenção. Cabe lembrar que as propriedades hidráulicas devem ser fornecidas em função da carga de pressão e que para um novo material deverá ser apresentado um novo código e seus respectivos pontos.

Finalmente tem-se o macro comando 'FEXEC' para se terminar a execução do programa, como mostra a Tabela II.21.

A Tabela II.22 apresenta um exemplo de um arquivo de dados.

Tabela II.17 – Arquivo de dados – parâmetros para a solução do problema.

:					
'SOLVE'					
NI	DT	NCHANGE	MAXITER	TOL	SAVE_CONT
:					

Tabela II.18 – Arquivo de dados – controle da variação no incremento de tempo.

:	
ICHANGE	DTCHANGE(ICHANGE)
:	

Tabela II.19 – Arquivo de dados – controle do processo de armazenamento da solução.

:	
NUM_SAVE	
I_SAVE	VET_STEP_SAVE(I_SAVE)
:	

Tabela II.20 – Arquivo de dados – curvas dadas por pontos – arquivo .CV.

	:
NOMEX	:
	:

Tabela II.21 – Arquivo de dados – fecha a execução.

	:
'FEXEC'	:

Tabela II.22 – Arquivo de dados – exemplo 4.2.2.

'DADOS'	
'BARRAGEM'	...IDENT
567 540 1 2 2 4 2	...NPOIN,NELEM,NMATS,NGAUSS,NDIME,NNOELM,NCOMP
1 1 1	...LLTYPE,NF,POS
BARR2	
1	...NUMERO DE GRUPOS DE ELEMENTOS
1 540 1 1 2	...KEL1,KEL2,INCR,LMAT,LCODE SE LCODE=2 OU 3 LEIO NPK E NPT
17 9	... NPK E NPT
0.0086008 1	...PROPRIEDADES KX, FAT
1 19	...NCBGR NCBGI CONDIÇÕES DE BORDA GERADAS IND. OU EM GRUPO
40 47 1 1	
1 3	...NÓ CÓDIGO(1-NULO,2-PRESCRITA,3-CARGA TOTAL)
18.0	
57 3	
18.0	
96 3	
18.0	
137 3	
18.0	
180 3	
18.0	
222 3	
18.0	
254 3	
18.0	
291 3	
18.0	
324 3	
18.0	
353 3	
18.0	
382 3	
18.0	
410 3	

```

18.0
434 3
18.0
456 3
18.0
478 3
18.0
496 3
18.0
516 3
18.0
530 3
18.0
541 3
18.0
'CHP_0'
'SOLVE'
40 0.5 7 20 0.1 1.0 0      ...NI,DT,NCHANGE,MAXITER,TOL,SAVE_CONT
5 2
10 7
13 4
18 6
25 2
30 2
35 4
13
1 2
2 5
3 10
4 11
5 13
6 15
7 18
8 20
9 23
10 25
11 28
12 30
13 40
BARR2
'FEXEC'

```

II.4 – Saída de Dados

O programa fornece dois tipos de saída. A primeira utiliza um arquivo texto com extensão (.S) que contém, além de todos os dados fornecidos na entrada, a solução do problema em termos de carga de pressão, carga total, gradientes hidráulicos e velocidades. A segunda forma de saída é opcional e efetuada através de um arquivo (.POS) direcionado para o pós-processador MVIEW que permite a visualização gráfica dos resultados.

Técnicas de Interpolação Utilizadas na Representação das Propriedades do Material

Neste anexo são apresentadas as duas formas de interpolação utilizadas na representação das curvas características implementadas no programa GEOFLUX.

I.1 - Interpolação Linear

A interpolação linear é uma técnica bastante comum a qual aproxima os valores internos de cada intervalo, de um dado conjunto de pontos, através de um polinômio interpolador do primeiro grau. Assim, sendo P_1 um ponto de coordenadas (x_1, y_1) e P_2 de coordenadas (x_2, y_2) , um ponto P_3 que tenha a coordenada x_3 pertencente ao intervalo $[x_1, x_2]$ tem sua coordenada y_3 dada por

$$y_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_3 + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad (I.1)$$

A derivada de primeira ordem, para o polinômio interpolador de primeiro grau, avaliada no ponto x_3 pode ser obtida fazendo-se

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (I.2)$$

I.2 - Interpolação via Spline Cúbica

Como apresentado por Chapra e Canale (1988) a spline cúbica é uma técnica de interpolação que aproxima os valores internos de cada intervalo, em um dado conjunto de pontos, através de um polinômio interpolador de terceira ordem. Assim para o i -ésimo intervalo tem-se

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (I.3)$$

De acordo com a metodologia de solução apresentada por Chapra e Canale (1988), se cada intervalo é interpolado por uma lei cúbica, a derivada segunda da Equação I.3 é uma função do primeiro grau e pode ser representada por um polinômio interpolador de Lagrange de primeira ordem. Assim sendo,

$$f_i''(x) = f''(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f''(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (I.4)$$

onde $f_i''(x)$ é o valor da derivada segunda em um ponto qualquer do i -ésimo intervalo.

Integrando-se a Equação I.4 duas vezes e sabendo-se que para x_{i-1} tem-se $f(x)=f(x_{i-1})$, e para x_i tem-se $f(x)=f(x_i)$, obtém-se uma nova expressão para $f_i(x)$ dada por

$$\begin{aligned} f_i(x) = & \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})} (x_i - x)^3 + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})} (x - x_{i-1})^3 + \\ & + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1}) \end{aligned} \quad (I.5)$$

Deste modo, as incógnitas passam a ser as derivadas segundas, $f''(x_{i-1})$ e $f''(x_i)$, no início e no final do intervalo, respectivamente.

As derivadas segundas podem ser determinadas através da premissa de que as derivadas primeiras devem ser contínuas nos nós, Assim sendo,

$$f'_{i-1}(x_i) = f'_i(x_i) \quad (I.6)$$

Diferenciando a Equação I.5 para os intervalos i e $i-1$, e igualando-se os resultados tem-se

$$\begin{aligned} (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) = \\ = \frac{6}{x_{i+1} - x_i} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \end{aligned} \quad (I.7)$$

Escrevendo-se a Equação I.7 para todos os nós interiores de um conjunto de $n+1$ pontos tem-se um sistema de $n-1$ equações e $n+1$ incógnitas. Como se trata de uma spline cúbica natural, as derivadas segundas nos nós extremos são iguais a zero e o problema se reduz a um sistema de $n-1$ equações com $n-1$ incógnitas, que pode ser resolvido por um método de solução de sistemas de equações como o método da eliminação de Gauss.

Determinadas as derivadas segundas tem-se, então, um conjunto de polinômios interpoladores do terceiro grau para as aproximações desejadas. Sendo o valor da derivada de primeira ordem no ponto i dada por

$$\frac{df_i(x)}{dx} = -3a_i(x_i - x)^2 + 3b_i(x - x_{i-1})^2 - c + d \quad (I.8)$$

onde a , b , c e d são os coeficientes da Equação I.5.