



MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
ESCOLA DE
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

ALEXANDRE DA SILVA GALVÃO

Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Orientadores: Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Convênio USIMINAS/UFOP/FUNDAÇÃO
Ouro Preto, março de 2000

(consultar a biblioteca setorial para elaboração da ficha catalográfica)

P567p	Galvão, Alexandre da Silva
2000	Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos, Ouro Preto, UFOP/DECIV, 2000. VIII, 168p. Dissertação (Mestrado) UFOP. DECIV 1. Elementos Finitos - Formulações – Não-linearidade geométrica. I. UFOP/EM/DECIV II. Título (Série) CDU: 545:32

FORMULAÇÕES NÃO-LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS PARA
ANÁLISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS METÁLICOS
RETICULADOS PLANOS

AUTOR: ALEXANDRE DA SILVA GALVÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos

AUTOR: ALEXANDRE DA SILVA GALVÃO

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construções Metálicas.

Ouro Preto, março de 2000.

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 24 de março de 2000, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (Presidente, EM/UFOP)

Prof. Dr. Marcílio Sousa Rocha Freitas (EM/UFOP)

Prof. Dr. Paulo Batista Gonçalves (PUC-Rio)

Prof. Dr. Roque Luiz Pitangueira (UFMG)

*“...A ciência é a potência do homem, e, o amor, a sua força;
o homem só se torna homem pela inteligência, mas só é homem
pelo coração.*

Saber, amar e poder; eis a vida completa.”

Henri-Frédéric Amiel (1821-1891)

A minha família.

MEUS AGRADECIMENTOS

*“Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio,
e eu faço mover o mundo.”*

Arquimedes (287AC-217AC)

- Aos meus pais e ao meu irmão, por serem o meu mundo.
- Ao meu professor e orientador Ricardo Azoubel da Mota Silveira, por ter sido a alavanca e o apoio dessa nossa empreitada.
- À Escola de Minas, por ser parte da minha vida.
- Aos meus colegas, pelo prazer da convivência nesses dois anos.
- À CAPES e à USIMINAS, pela ajuda financeira.

| RESUMO

Este trabalho tem como principais objetivos o estudo e a implementação computacional de formulações geometricamente não-lineares para elementos finitos reticulados planos encontradas na literatura recente. Essas formulações, além de permitir a determinação da matriz de rigidez e do vetor de forças internas de forma direta, podem ser acopladas com relativa facilidade a várias estratégias de solução não-linear.

Procurando fornecer diferentes opções de modelagem de problemas de instabilidade usando esses elementos finitos reticulados planos, foram implementadas as seguintes formulações geometricamente não-lineares: (i) formulações definidas por Alves (1993b) e Torkamani et al. (1997), implementadas aqui com procedimentos distintos de se avaliar o vetor de forças internas: forma *total* e forma *incremental*; (ii) formulações propostas por Yang e Kuo (1994), que se basearam em modelos *linearizado*, *linearizado-simplificado* e com termos de *ordem elevada*; foram ainda introduzidas por esses autores duas abordagens diferentes, implementadas neste trabalho, de obtenção do vetor de forças internas: *deslocamentos naturais incrementais* e *rigidez externa*; e (iii) formulações em referencial Lagrangiano total, propostas por Pacoste e Eriksson (1997), baseadas em diferentes relações cinemáticas e definições de deformações; cinco formulações foram sugeridas por esses pesquisadores, onde todas foram testadas no presente trabalho.

Essas formulações foram adaptadas à metodologia de solução não-linear que usa o método de Newton-Raphson (Silveira, 1995), acoplado às diferentes estratégias de incremento de carga e de iteração que permitem a ultrapassagem de pontos críticos (bifurcação e limite) que possam existir ao longo da trajetória de equilíbrio.

A avaliação da eficiência computacional dessas formulações é feita no final do trabalho através da análise de problemas estruturais fortemente não-lineares encontrados na literatura.

-
- Alves, R.V. (1993b). Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado. 3^o Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ.
 - Pacoste, C. e Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., N^o 144, p. 163-197.
 - Silveira, R.A.M. (1995). Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato. Tese de Doutorado. PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ.
 - Torkamani, M.A.M., Sonmez, M. e Cao, J. (1997). Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method. Journal of Structural Engineering, Vol 12, N^o 9, p. 1225-1235.
 - Yang, Y.B. e Kuo, S.B. (1994). Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures, Prentice Hall.

| ABSTRACT

The main objectives of this work are the computational implementation and study of geometrically non-linear formulations for two dimensional frame elements. In the formulations here studied, the stiffness matrix and the internal forces vector can be obtained directly, and they can be easily coupled to different non-linear solution strategies.

In order to give different options for the solutions of instability problems these two dimensional frame elements, the following geometrically non-linear formulations were implemented: (i) Alves (1993b) e Torkamani et al. (1997) formulations, where two different procedures to obtain the internal forces vector (*total* and *incremental approaches*) were tested; (ii) Yang and Kuo (1994) formulations, where a simplified, a linear-simplified and a higher order planar frame element were used; these authors introduced two methodologies to obtain the internal load vector: *natural deformation* and *external stiffness approaches*; (iii) Pacoste and Eriksson (1997) formulations, where a total reference frame (total Lagrangian formulation) was adopted, and different kinematic assumptions and strain definitions were used; five different formulations were presented and tested in the present work.

These formulations were coupled to the non-linear solution methodology implemented initially by Silveira (1995), which solves the resulting non-linear equations and obtains the non-linear equilibrium paths through the Newton-Raphson method together with path following techniques, such as the arc-length schemes proposed by Crisfield and orthogonal residual procedures derived by Krenk.

The performance and capacity of these formulations are illustrated by means of several numerical examples.

-
- Alves, R.V. (1993b). Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado. 3^o Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ.
 - Pacoste, C. and Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., N^o 144, p. 163-197.
 - Silveira, R.A.M. (1995). Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato. Tese de Doutorado. PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ.
 - Torkamani, M.A.M., Sonmez, M. and Cao, J. (1997). Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method. Journal of Structural Engineering, Vol 12, N^o 9, p. 1225-1235.
 - Yang, Y.B. and Kuo, S.B. (1994). Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures, Prentice Hall.

|SUMÁRIO

Resumo	V
Abstract.....	VI
Lista de Figuras.....	XI
Lista de Tabelas	XIV
Lista de Símbolos	XVI
 Capítulo 1 – INTRODUÇÃO	
1.1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
1.2 – OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO.....	3
1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
 Capítulo 2 – ASPECTOS IMPORTANTES DE UMA SOLUÇÃO NÃO-LINEAR	
2.1 – INTRODUÇÃO	9
2.2 - SOLUÇÃO NÃO-LINEAR.....	10
2.3 – REFERENCIAIS LAGRANGIANOS	15
2.4 – ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA.....	17
2.4.1 – Incremento do Comprimento de Arco	18
2.4.2 – Incremento Baseado no Parâmetro GSP	19
2.5 – ESTRATÉGIAS DE ITERAÇÃO	21
2.5.1 – Comprimento de Arco Cilíndrico	21
2.5.2 – Iteração a Deslocamento Generalizado.....	22
2.5.3 – Iteração a Resíduo Ortogonal	23
2.6 – CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA	27

**Capítulo 3 – FORMULAÇÕES NÃO-LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS:
ALVES (1993b) e TORKAMANI et al. (1997)**

3.1 – INTRODUÇÃO	29
3.2 – RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO	30
3.3 – FUNCIONAL DE ENERGIA	35
3.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO	38
3.4.1 – Matriz de rigidez	40
3.4.2 – Vetor de forças internas	43
3.4.2.1 – Deslocamentos naturais totais (Alves, 1993b)	44
3.4.2.2 – Deslocamentos naturais incrementais (Yang e Kuo, 1994)	47
3.5 – RESUMO	50

**Capítulo 4 – FORMULAÇÕES NÃO-LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS:
YANG e KUO(1994)**

4.1 – INTRODUÇÃO	51
4.2 – RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO	52
4.3 – FUNCIONAL DE ENERGIA	55
4.3.1 – Formulação linearizada	56
4.3.2 – Formulação linearizada-simplificada	57
4.3.3 – Formulação com termos de ordem elevada	58
4.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO	58
4.4.1 – Matriz de rigidez	59
4.4.2 – Vetor de forças internas	61
4.4.2.1 – Deslocamentos naturais incrementais	62
4.4.2.2 – Matriz de rigidez externa	63
4.5 – RESUMO	66

**Capítulo 5 – FORMULAÇÕES NÃO-LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS:
PACOSTE e ERIKSSON (1997)**

5.1 – INTRODUÇÃO	67
5.2 – RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO	68
5.2.1 – Relações baseadas no Tensor de Green-Lagrange	68
5.2.1.1 – Relações de segunda ordem	68

5.2.1.2 – Relações lineares.....	69
5.2.2 – Relações melhoradas.....	70
5.3 – FUNCIONAL DE ENERGIA	73
5.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO	74
5.4.1 – Formulação total: Timoshenko	74
5.4.2 – Formulação total: Bernoulli	76
5.4.2.1 – Aproximações de primeira ordem.....	78
5.4.2.2 – Aproximações de segunda ordem	78
5.4.2.3 – Vetor de forças internas e matriz de rigidez	79
5.4.3 – Formulação corrotacional – Bernoulli	80
5.4.3.1 – Relações lineares.....	83
5.4.3.2 – Relações de segunda ordem	83
5.4.3.3 – Vetor de forças internas e matriz de rigidez	84
5.5 – RESUMO	85

Capítulo 6 – PROGRAMA COMPUTACIONAL

6.1 – INTRODUÇÃO	87
6.2 – PROGRAMA PRINCIPAL	88
6.2.1 – Subrotina MATRIG	91
6.2.2 – Subrotina ITER	92
6.2.3 – Subrotina VETFI.....	94
6.2.4 – Subrotina NEXINC.....	97

Capítulo 7 – EXEMPLOS NUMÉRICOS

7.1 – INTRODUÇÃO	98
7.2 – EXEMPLOS CLÁSSICOS.....	101
7.2.1 - Viga Engastada-Livre.....	103
7.2.2 - Coluna Engastada-Livre	109
7.2.3 – Arco Birrotulado sob Carregamento Distribuído.....	114
7.2.4 – Arco Biengastado sob Pressão Radial	119
7.2.5 – Pórtico de Williams	126
7.3 – PROBLEMAS FORTEMENTE NÃO-LINEARES.....	136

7.3.1 – Arco Abatido Birrotulado sob Carga Pontual.....	138
7.3.2 – Arco Circular Rotulado-Engastado Sob Carga Pontual Centrada	149
7.3.3 – Arco Circular Birrotulado	157
7.3.4 – Pórtico de Lee	165
7.3.5 – Arco Circular Pouco Abatido	171

Capítulo 8 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES

8.1 – INTRODUÇÃO	177
8.2 – CONCLUSÕES	178
8.3 – SUGESTÕES.....	182

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	184
--	------------

| LISTA DE FIGURAS

	Página
Capítulo 2	
Figura 2.1 - Solução incremental-iterativa: sistema com um grau de liberdade.....	13
Figura 2.2 – Solução não-linear para um incremento de carga.....	14
Figura 2.3 – Referencial Lagrangiano total.	16
Figura 2.4 – Referencial Lagrangiano atualizado.	17
Capítulo 3	
Figura 3.1 - Comportamento da seção transversal.....	30
Figura 3.2 - Deformação inicial: configuração de equilíbrio t.	34
Figura 3.3 - Elemento de viga-coluna adotado	38
Figura 3.4 - Cálculo das forças internas: deslocamentos naturais totais	45
Figura 3.5 - Cálculo das forças internas: deslocamentos naturais incrementais.....	49
Capítulo 4	
Figura 4.1 – Rotação de corpo rígido	64
Capítulo 5	
Figura 5.1 – Relações geométricas	70
Figura 5.2 – Relações geométricas: total	77
Figura 5.3 – Relações geométricas: corrotacional	82
Capítulo 6	
Figura 6.1 – Programa computacional.....	87
Figura 6.2 – Programa principal	88

Figura 6.3 – Arquivo de dados: solução não-linear	89
---	----

Capítulo 7

Figura 7.1 - Exemplos clássicos	102
Figura 7.2 - Viga engastada-livre	103
Figura 7.3 – Trajetória de equilíbrio: PT2 (2 elem.).....	108
Figura 7.4 - Coluna engastada-livre.....	109
Figura 7.5 – Trajetória de equilíbrio: PTT (5 elem).	110
Figura 7.6 – Trajetórias pós-crítica: TFT.....	113
Figura 7.7 – Arco birrotulado sob carga distribuída.....	114
Figura 7.8 – Trajetórias de equilíbrio: YGN e YGE (8 elem)	115
Figura 7.9 - Trajetória de equilíbrio: proximidades do 2º ponto limite.....	117
Figura 7.10 - Trajetória de equilíbrio: proximidades do 2º ponto limite.....	118
Figura 7.11 – Arco biengastado sob pressão radial	119
Figura 7.12 – Trajetórias de equilíbrio: AFT e TFT	121
Figura 7.13 – Trajetórias de equilíbrio: AFT (10 – 20 elem.).	121
Figura 7.14 – Trajetórias de equilíbrio: AFT e AFI (8 –16 elem.).	125
Figura 7.15 – Pórtico de Williams (Pacoste e Eriksson, 1997).	126
Figura 7.16 – Trajetórias de equilíbrio: YGN, PTT, PT2, AFT (4 elem.).....	127
Figura 7.17 – Evolução das soluções: YGN	128
Figura 7.18 – Evolução das soluções: PTT.....	129
Figura 7.19 – Trajetórias de equilíbrio: pórticos com diferentes alturas H	130
Figura 7.20 – Trajetórias de equilíbrio: $H = H_c = 18.305$	131
Figura 7.21 – Evolução dos resultados: PTT	133
Figura 7.22 – Trajetórias de equilíbrio: YGN (8 elem.).	135
Figura 7.23 – Problemas fortemente não-lineares	137
Figura 7.24 - Arco abatido birrotulado sob carga pontual excêntrica.....	138
Figura 7.25 – Trajetórias de equilíbrio	140
Figura 7.26 – Cálculo do erro de posição de B em relação a A.....	142
Figura 7.27 – Evolução das trajetórias apresentadas pelo elemento tipo PTT	145
Figura 7.28 – Carga excêntrica: YGN (100 elem.).	146
Figura 7.29 - Arco circular rotulado-engastado sob carga pontual centrada	149

Figura 7.30 – Solução não-linear: PTT (32 elem.).	151
Figura 7.31 – Trajetórias de Equilíbrio: AFI, TFI, YGN (16 elem.).	153
Figura 7.32 – Evolução dos resultados obtidos	154
Figura 7.33 - Arco circular birrotulado	157
Figura 7.34 – Trajetórias de equilíbrio	158
Figura 7.35 – Configurações deformadas da estrutura: YGN (16 elem.).	160
Figura 7.36 – Evolução dos resultados: carga centrada	161
Figura 7.37 – Pórtico de Lee.	165
Figura 7.38– Trajetórias de equilíbrio	166
Figura 7.39 – Trajetória de equilíbrio e deformadas: AFI (100 elem.).	167
Figura 7.40 – Trajetórias de equilíbrio: AFT e TFT (20 elem.).	169
Figura 7.41 – Evolução das soluções: AFI e TFI.	169
Figura 7.42 – Arco circular pouco abatido	171
Figura 7.43 – Trajetórias de equilíbrio: YGN (100-50 elem.).	172
Figura 7.44 – Deformadas da estrutura.	173
Figura 7.45 – Evolução dos resultados obtidos por PTT	176

| LISTA DE TABELAS

	Página
Capítulo 7	
Tabela 7.1 – Resumo das formulações	99
Tabela 7.2 – Resumo das formulações	100
Tabela 7.3- Solução analítica: viga engastada-livre	104
Tabela 7.4a – Erro percentual médio de u/L	105
Tabela 7.4b – Erro percentual médio de w/L	106
Tabela 7.5a – Carga crítica: Valores de $P_{cr} L^2 / EI$	111
Tabela 7.5b – Ponto limite de deslocamento : Valores de u/L	112
Tabela 7.6a – Valor de P/h no 1º ponto limite.....	116
Tabela 7.6b – Valor de P/h no 2º ponto limite.....	116
Tabela 7.7 – Variação de $\Delta\lambda_1^0$: YGE (8 elem.).....	117
Tabela 7.8 - Valores limites de P/h : YGE (8 elem. – GSP).....	118
Tabela 7.9a – Valor de PhR^2/EI no 1º ponto limite	122
Tabela 7.9b – Valor de PhR^2/EI no 2º ponto limite	123
Tabela 7.10a– Valor de PhR^2/EI no 1º ponto de bifurcação.....	124
Tabela 7.10b– Valor de PhR^2/EI no 2º ponto de bifurcação	124
Tabela 7.11– Valores da carga de bifurcação máxima: Pacoste e Eriksson (1997)...	134
Tabela 7.12 – Valor da bifurcação máxima obtida no presente trabalho.....	134
Tabela 7.13a – ‘Erros’ percentuais médios: carga centrada	143
Tabela 7.13b – ‘Erros’ percentuais médios: carga excêntrica	144
Tabela 7.14 – Eficiência computacional	147
Tabela 7.15 – PR^2/EI no 1º ponto limite.....	152
Tabela 7.16 - 1º ponto limite: diversas formulações	156
Tabela 7.17 – 1ª Carga crítica.....	163

Tabela 7.18 – Eficiência das formulações: arco completo (26 elem.)	164
Tabela 7.19 – Eficiência: AFI e TFI	170
Tabela 7.20 – Eficiência computacional das formulações.....	174
Tabela 7.21 – Comparação: Total x Corrotacional.....	176

| LISTA DE SÍMBOLOS

Capítulo 2

λ	Parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de \mathbf{F}_r .
ζ	Tolerância ao resíduo requerida no processo de convergência.
ζ_1	Fator de convergência baseado em relações de força.
ζ_2	Fator de convergência baseado em relações de deslocamentos.
$\delta\lambda$	Correção do parâmetro de carga avaliado ao longo do ciclo iterativo.
$\Delta\lambda$	Incremento do parâmetro de carga.
$\Delta\lambda^{(k-1)}$ e $\Delta\lambda^k$	Incremento do parâmetro de carga avaliado na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\Delta\lambda_0$	Incremento inicial do parâmetro de carga.
$\delta\lambda^k$ e $\delta\lambda^{(k-1)}$	Correção do parâmetro de carga, avaliado na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
ξ_k	Fator de escala utilizado no processo de iteração a resíduo ortogonal.
\mathbf{F}_i	Vetor de forças internas.
\mathbf{F}_r	Vetor de referência.
\mathbf{g}	Vetor de forças residuais.
$\tilde{\mathbf{g}}$	Vetor das forças residuais correspondente aos deslocamentos da última iteração processada no passo corrente e ao parâmetro de carga da última configuração de equilíbrio.
GSP	Parâmetro de rigidez generalizado.
H	Deslocamento generalizado.
\mathbf{I}	Matriz identidade.
I_d	Número de iterações desejadas para cada incremento.
tI	Número de iterações que foram necessárias para fazer convergir o passo de carga anterior.

\mathbf{K}	Matriz de rigidez representativa do sistema estrutural.
Δl	Comprimento de arco da trajetória de equilíbrio.
t	Última configuração de equilíbrio processada.
$t + \Delta t$	Configuração de equilíbrio procurada no passo de carga corrente.
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos nodais.
$\Delta \mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais.
$\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$ e $\Delta \mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais avaliado na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\Delta \mathbf{u}^0$	Incremento inicial dos deslocamentos nodais.
$\delta \mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos residuais.
$\delta \mathbf{u}_g$	Parcela de $\delta \mathbf{u}$ referente às forças residuais \mathbf{g} .
$\delta \mathbf{u}^{(k-1)}$ e $\delta \mathbf{u}^k$	Vetor de deslocamentos residuais incrementais avaliado na iteração anterior (k-1) e na iteração corrente k.
$\delta \mathbf{u}_r$	Parcela de $\delta \mathbf{u}$ referente às forças de referência \mathbf{F}_r .
$\delta \mathbf{u}_T$	Vetor dos deslocamentos tangenciais.
$\tilde{\delta \mathbf{u}}^k$	Vetor dos deslocamentos iterativos.

Capítulo 3

Π	Energia potencial total.
ψ	Rotação de corpo rígido (total ou incremental).
$\Delta \theta$	Rotação incremental de um ponto qualquer do elemento.
$\Delta \Pi$	Incremento da energia potencial total.
$\Delta \sigma$	Incremento de tensão axial.
$\Delta \epsilon_{xx}$	Incremento de deformação axial.
Δe_{xx}	Parcela linear de $\Delta \epsilon_{xx}$.
$\Delta \eta_{xx}$	Parcela de $\Delta \epsilon_{xx}$ que contém os termos quadráticos.
${}^t \epsilon$	Deformação axial na configuração de equilíbrio t.
δ, ϕ_1 e ϕ_2	Deslocamentos naturais (totais ou incrementais).
A	Área da seção transversal do elemento.
\mathbf{A}^*	Matriz de compatibilidade cinemática.

$\Delta \mathbf{d}$	Vetor de deslocamentos incrementais.
E	Módulo de elasticidade do material que compõe o elemento.
EI	Rigidez à flexão da viga.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$	Vetor de forças internas calculadas na iteração corrente.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^*$	Vetor de forças internas equivalente.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{i_{gl}}$	Vetor de forças internas calculado no sistema global de referências.
$\Delta t \mathbf{F}_i$	Incremento do vetor de forças internas.
${}^t\mathbf{F}_i$	Vetor de forças internas calculadas na configuração de equilíbrio t .
\mathbf{F}_r	Vetor de forças de referência.
\mathbf{g}	Vetor de forças residuais.
\mathbf{H}	Matriz que contém as funções de interpolação que relacionam os deslocamentos incrementais $\Delta \mathbf{d}$ com os deslocamentos nodais incrementais $\Delta \mathbf{u}$.
\mathbf{K}	Matriz de rigidez elementar.
\mathbf{K}_{gl}	Matriz de rigidez global do sistema estrutural.
\mathbf{K}_τ	Matriz de rigidez geométrica.
\mathbf{K}_L	Matriz de rigidez linear.
\mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2	Matrizes de rigidez não-linear de primeira ordem e segunda ordem.
L	Comprimento inicial do elemento.
tL	Comprimento do elemento na configuração de equilíbrio t .
${}^{t+\Delta t}L$	Comprimento do elemento na configuração corrente $t+\Delta t$.
M	Momento fletor na configuração de equilíbrio t .
M_1 e M_2	Momentos nodais na configuração de equilíbrio t .
P	Força axial na configuração de equilíbrio t .
${}^0\mathbf{R}$	Matriz de rotação do elemento genérico 'e', na configuração inicial indeformada $t = 0$.
\mathbf{R}_a	Matriz de rotação entre o sistema global de referências e o sistema local atualizado na última iteração processada, t .
${}^t\mathbf{R}$	Matriz de rotação do elemento calculada na última configuração de equilíbrio computada, t .

\mathbf{u}_n^*	Vetor de deslocamentos naturais equivalente.
$\Delta \mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais.
$\Delta \mathbf{u}_n$	Vetor de deslocamentos naturais incrementais.
$\Delta \bar{u}$	Incremento de deslocamento axial de um ponto distante y da linha neutra da seção transversal.
ΔU	Incremento da energia interna de deformação.
ΔV	Incremento da energia potencial das forças externas.
Δu e Δv	Deslocamentos incrementais de um ponto qualquer do elemento, na direção dos eixos x e y respectivamente.
U	Energia interna de deformação.
U_τ	Parcela de ΔU que corresponde à influência das deformações iniciais.
U_0	Parcela de ΔU associada às forças acumuladas até a configuração de equilíbrio t .
U_1 e U_2	Parcelas de ΔU que resultarão matrizes de rigidez não-linear \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 .
U_L	Parcela de ΔU que dá origem à matriz de rigidez linear \mathbf{K}_L .
V	Energia potencial das forças externas.

Capítulo 4

ψ	Rotação incremental de corpo rígido.
$\Delta \theta$	Rotação incremental de um ponto qualquer do elemento.
$\Delta \Pi$	Incremento da energia potencial total.
$\Delta t \tau_{xy}$	Incremento de tensão cisalhante.
$\Delta \epsilon_{xx}$	Incremento de deformação axial.
$\Delta \epsilon_{xy}$	Incremento de deformação cisalhante.
Δe_{xx}	Parcela linear de $\Delta \epsilon_{xx}$.
$\Delta \eta_{xx}$	Parcela de $\Delta \epsilon_{xx}$ que contém os termos quadráticos.
Δe_{xy}	Parcela linear de $\Delta \epsilon_{xy}$.
$\Delta \eta_{xy}$	Parcela de $\Delta \epsilon_{xy}$ que contém os termos quadráticos.
δ, ϕ_1 e ϕ_2	Deslocamentos naturais (incrementais).
A	Área da seção transversal do elemento.

E	Módulo de elasticidade do material que compõe o elemento.
EI	Rigidez à flexão da viga.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$	Vetor de forças internas calculadas na iteração corrente.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{i\,gl}$	Vetor de forças internas calculado no sistema global de referências.
$\Delta t\mathbf{F}_i$	Incremento do vetor de forças internas.
${}^t\mathbf{F}_i$	Vetor de forças internas calculadas na configuração de equilíbrio t .
\mathbf{F}_r	Vetor de forças de referência.
\mathbf{g}	Vetor de forças residuais.
\mathbf{K}	Matriz de rigidez elementar.
\mathbf{K}_{gl}	Matriz de rigidez global do sistema.
\mathbf{K}_τ	Matriz de rigidez geométrica.
\mathbf{K}_L	Matriz de rigidez linear.
\mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2	Matrizes de rigidez não-linear de primeira ordem e segunda ordem.
\mathbf{K}_{re}	Matriz de rigidez externa.
tL	Comprimento do elemento na configuração de equilíbrio t .
${}^{t+\Delta t}L$	Comprimento do elemento na configuração corrente $t+\Delta t$.
tM	Momento fletor na configuração de equilíbrio t .
M_1 e M_2	Momentos nodais na configuração de equilíbrio t .
tP	Força axial na configuração de equilíbrio t .
tQ	Esforço cortante na configuração de equilíbrio t .
\mathbf{R}_a	Matriz de rotação entre o sistema global de referências e o sistema local atualizado na última iteração processada, t .
${}^t\mathbf{R}$	Matriz de rotação do elemento calculada na última configuração de equilíbrio computada, t .
S_{xy}^l	Parcela linear de $\Delta t\tau_{xy}$.
S_{xy}^n	Parcela não-linear de $\Delta t\tau_{xy}$.
U_τ	Parcela de ΔU que corresponde à influência das deformações iniciais.
U_0	Parcela de ΔU associada às forças acumuladas até a configuração de equilíbrio t .
U_1 e U_2	Parcelas de ΔU que resultarão matrizes de rigidez não-linear \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 .

U_L	Parcela de ΔU que dá origem à matriz de rigidez linear \mathbf{K}_L .
$\Delta \mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais.
$\Delta \mathbf{u}_n$	Vetor de deslocamentos naturais incrementais.
$\Delta \mathbf{u}_{re}$	Vetor de deslocamentos incrementais de corpo rígido.
ΔU	Incremento da energia interna de deformação.
Δu e Δv	Deslocamentos incrementais de um ponto qualquer do elemento, na direção dos eixos x e y respectivamente.
$\Delta \bar{u}$	Incremento de deslocamento axial de um ponto distante y da linha neutra da seção transversal.
ΔV	Incremento da energia potencial das forças externas.

Capítulo 5

θ_r	Rotação de corpo rígido.
θ_n	Rotação natural.
θ	Rotação de um ponto qualquer do elemento.
θ_1 e θ_2	Rotações nodais.
Π	Energia potencial total.
ϵ_{xx}	Deformação axial.
ϵ_{xy}	Deformação cisalhante.
γ	Deformação cisalhante: $\gamma = 2 \cdot \epsilon_{xy}$.
$\mathbf{a}(x)$	Vetor unitário ortogonal a (S).
A	Área da seção transversal do elemento.
\mathbf{A}_f , \mathbf{A}_{f1} e \mathbf{A}_{f3}	Relações de transformação entre o campo dos parâmetros generalizados e o campo dos deslocamentos nodais.
\mathbf{A}_e , \mathbf{A}_{e1} , \mathbf{A}_{e2} , \mathbf{A}_{e3}	Relações de transformação entre o campo dos deslocamentos naturais totais e o campo dos deslocamentos nodais.
$\mathbf{b}(x)$	Vetor unitário paralelo a (S).
E	Módulo de elasticidade do material que compõe o elemento.
EI	Rigidez à flexão do elemento.
f_1 , f_2 , f_3 e f_4	Parâmetros generalizados.

f_{i_i}	Componentes de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$	Vetor de forças internas calculadas na iteração corrente.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{i_{gl}}$	Vetor de forças internas calculado no sistema global de referências.
f_{g_i}	Componentes de \mathbf{F}_g .
\mathbf{F}_g	Vetor de forças generalizadas.
GA	Rigidez do elemento ao cisalhamento.
\overline{EA} , \overline{GA} e \overline{EI}	Valores de rigidez equivalentes.
k	Curvatura da viga.
k_{ii}	Componentes de \mathbf{K} .
\mathbf{K}	Matriz de rigidez elementar.
\mathbf{K}_{gl}	Matriz de rigidez global do sistema.
$K_{g_{ij}}$	Componentes de \mathbf{K}_g .
\mathbf{K}_g .	Matriz de rigidez correspondente a \mathbf{F}_g .
0L	Comprimento do elemento na configuração de equilíbrio inicial $t = 0$.
${}^{t+\Delta t}L$	Comprimento do elemento na configuração corrente $t+\Delta t$.
M	Momento fletor.
P	Força axial.
Q	Esforço cortante.
$\mathbf{r}(x)$	Vetor de posição do elemento.
$\mathbf{r}_{,x}$	Vetor tangente ao eixo da viga deformada: $\mathbf{r}_{,x} = \partial \mathbf{r}(x) / \partial x$.
${}^0\mathbf{R}$	Matriz de rotação do elemento genérico 'e', na configuração inicial indeformada $t = 0$.
(S)	Seção transversal.
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos nodais totais.
\mathbf{u}_n	Vetor de deslocamentos naturais totais.
\bar{u}	Deslocamento axial de um ponto distante y da linha neutra da seção transversal.
U	Energia interna de deformação.
u_1 e u_2	Deslocamentos nodais, na direção dos eixos x.
u_{n2} , θ_{n1} e θ_{n2}	Deslocamentos naturais totais.

u e v Deslocamentos de um ponto qualquer do elemento, na direção dos eixos x e y respectivamente.

V Energia potencial das forças externas.

v_1 e v_2 Deslocamentos nodais, na direção do eixo y .

1 INTRODUÇÃO

1.1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS

O desenvolvimento de novos materiais e técnicas construtivas, bem como os recursos computacionais disponíveis hoje, têm levado ao emprego de elementos estruturais cada vez mais esbeltos. A medida que se aumenta a esbeltez de um dado elemento estrutural, este torna-se cada vez mais susceptível a sofrer grandes deflexões laterais, que tendem a ocorrer antes da ruptura física. Para se projetar esse tipo de estrutura deve-se usar o chamado critério de estabilidade. O estudo da não-linearidade geométrica desses elementos estruturais torna-se, portanto, cada vez mais importante, possibilitando em certos casos o aparecimento de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis), e a existência de pontos críticos (pontos limites e pontos de bifurcação) ao longo do caminho não-linear de equilíbrio onde a estrutura pode exibir saltos dinâmicos.

Portanto, o conhecimento do comportamento não-linear de elementos estruturais esbeltos, tais como colunas, arcos, anéis, placas e cascas, é de fundamental importância na solução de problemas de estabilidade/instabilidade local e/ou global de sistemas estruturais complexos, pois na maioria das aplicações de engenharia esses sistemas são formadas a partir da união desses elementos.

A análise da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos através do Método dos Elementos Finitos (MEF) envolve invariavelmente a solução de um sistema de equações algébricas não-lineares. Como relatado no artigo de Riks (1979) e também destacado em Silveira (1995), existem basicamente duas classes de solução desse sistema de equações:

1. Adaptação computacional do método de perturbação desenvolvido por Koiter (1970). Durante muitos anos o método de Koiter foi considerado inadequado ao contexto de elementos finitos, entretanto, trabalhos recentes como os desenvolvidos por Salerno e Lanzo (1997) e Wu e Wang (1997) provam o contrário, renovando o interesse dos pesquisadores por esse método;
2. Métodos que procuram resolver as equações não-lineares passo a passo. Incluídos nessa segunda classe estão os métodos puramente incrementais, as técnicas baseadas em relações de rigidez secante e os esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos, que são atualmente considerados os mais eficientes e que serão utilizado no presente trabalho.

Recentemente, muitos pesquisadores têm desenvolvido formulações geometricamente não-lineares para elementos finitos (Alves 1993a-b; Crisfield, 1991; Yang e Kuo, 1994; Pacoste e Eriksson, 1997; Torkamani et al., 1997; Neuenhofen e Fillippou, 1997 e 1998), que têm sido adequadamente empregadas na modelagem de vários sistemas estruturais esbeltos. Essas formulações permitem a determinação da matriz de rigidez e do vetor de forças internas de forma direta e podem ser acopladas com relativa facilidade às várias estratégias de solução não-linear.

Essas considerações motivaram a adoção desse tema para a presente dissertação de mestrado.

1.2 – OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é parte integrante das seguintes linhas de pesquisa do Mestrado em Construção Metálica (Deciv/EM/UFOP):

- *Análise Numérica e Computacional em Engenharia*: tem como objetivo a aplicação de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos (MEF) e/ou o método dos elementos de contorno (MEC), na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
- *Instabilidade das Estruturas*: objetiva o estudo do equilíbrio e estabilidade de elementos estruturais esbeltos (colunas, arcos, anéis, placas e cascas) submetidos a carregamentos diversos.

O principal objetivo deste trabalho é o estudo e implementação computacional de formulações geometricamente não-lineares, para elementos finitos reticulados planos. Essas formulações serão integradas à metodologia de solução numérica implementada por Silveira (1995) e expandida por Rocha (2000), que implementou com sucesso algumas estratégias de solução não-linear encontradas recentemente na literatura.

A seguir, na Seção (1.3), é feita uma revisão bibliográfica onde atenção especial é dada aos trabalhos que tratam diretamente de formulações geometricamente não-lineares.

No Capítulo 2 é feita uma explanação geral sobre a metodologia de solução não-linear adotada, apresentando de maneira resumida as estratégias de incremento de carga e iterações usadas no presente trabalho.

Os Capítulos 3, 4 e 5 pretendem apresentar de forma detalhada o desenvolvimento teórico das formulações de elementos finitos não-lineares, que é o principal objeto de estudo desta dissertação. Na descrição dessas formulações merecem destaque as relações deformação-deslocamento, as deduções das equações de equilíbrio, o tipo de elemento finito e as funções de interpolação utilizadas e, finalmente, a obtenção dos vetores de forças internas e das matrizes de rigidez.

O Capítulo 6 apresenta de forma resumida os procedimentos adotados na implementação computacional das formulações apresentadas nos Capítulos 3, 4 e 5, onde atenção especial é dada à montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças internas.

As formulações apresentadas nos Capítulos 3, 4 e 5 são analisadas no Capítulo 7, que apresenta exemplos de problemas estruturais encontrados na literatura. A Seção (7.2) fornece cinco exemplos clássicos que, por serem mais simples, têm soluções analíticas (exatas) encontradas na literatura. Em função da confiabilidade dessas análises, seus resultados têm o objetivo de avaliar a qualidade dos resultados produzidos pelas diferentes formulações. Com o intuito de validar as observações feitas na Seção (7.2), são abordados na Seção (7.3) cinco problemas estruturais de estabilidade elástica fortemente não-lineares, cujas soluções, obtidas numericamente por diversos pesquisadores, são encontradas na literatura.

Finalmente, no Capítulo 8, são apresentadas as conclusões sobre o emprego das diversas formulações analisadas nos exemplos do Capítulo 7. São fornecidas também algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nas últimas décadas as técnicas de análise de estruturas geometricamente não-lineares têm tido grande interesse por parte dos pesquisadores. Particular atenção tem sido direcionada ao desenvolvimento de formulações de elementos finitos reticulados planos que, além de possibilitar uma análise rápida e eficaz de muitos sistemas estruturais reais, possibilita o emprego direto de estratégias de solução não-lineares que, posteriormente, podem ser adaptadas para outros tipos de elementos.

Na década de 60 foram introduzidas várias formulações geometricamente não-lineares de elementos finitos para análise de pórticos planos, com solução direta e incremental. Entre elas pode-se destacar as formulações em referencial Lagrangiano total (RLT) desenvolvidas por Mallet e Marçal (1968) e Jennings (1968), que incluíram as matrizes de ordem elevada \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 no cálculo da matriz de rigidez do elemento. Martin (1965), que desenvolveu uma formulação em referencial Lagrangiano atualizado (RLA), incluiu no cálculo da matriz de rigidez do elemento a matriz geométrica \mathbf{k}_τ , porém desprezou a contribuição de \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 . Ebner (1972) realizou um estudo

comparativo entre as formulações de Argyris (1964), Martin (1965), Jennings (1968), Mallet e Marçal (1968) e Powell (1969).

Epstein e Murray (1976) desenvolveram uma formulação para elementos de pórticos planos análoga à formulação para elementos de casca, para grandes deformações, apresentada por Budiansky (1968).

Recentemente, formulações em referenciais Lagrangianos (RLT e RLA) foram apresentadas por vários pesquisadores, dos quais pode-se citar: Wen et al. (1983); Chajes et al. (1987); Goto et al. (1987); Wong e Loi (1990); Alves (1993a-b) e Torkamani et al. (1997). Yang e Kuo (1994) sugeriram uma forma incremental de se calcular o vetor de forças internas com duas abordagens diferentes para os deslocamentos nodais: *deslocamentos naturais incrementais* e *rigidez externa*. Pacoste e Eriksson (1995 e 1997) introduziram formulações em RLT baseadas em relações deformação-deslocamento denominadas '*relações melhoradas*', com a não-linearidade expressa por funções trigonométricas.

Singh e Singh (1992) propuseram um modelo com matriz de rigidez e vetor de forças internas modificáveis de acordo com a natureza das forças axiais.

Um procedimento geral para a obtenção de matrizes de rigidez simétricas foi proposto por Moran et al. (1998). Neuenhofer e Filippou (1998) propuseram uma formulação baseada no método da flexibilidade.

Crisfield (1991) afirmou em seu livro que o termo *corrotacional* tem sido utilizado na literatura em diferentes contextos, sendo portanto, como afirmam ainda Pacoste e Eriksson (1997), uma denominação inconsistente. A idéia central desse tipo de formulação é o cálculo da matriz rigidez e do vetor de forças internas no campo dos deslocamentos naturais (ou locais), que são os deslocamentos referidos a um sistema de coordenadas que é atualizado a cada passo de carga, acompanhando a rotação sofrida pelo elemento. Das formulações com abordagem corrotacional publicadas recentemente pode-se destacar a formulação em RLA proposta por Crisfield (1991) e as formulações desenvolvidas em RLT por Pacoste e Eriksson (1997) e Xu e Mirmiran (1997).

Ao contrário da teoria de vigas de Bernoulli, na teoria de vigas de Timoshenko os efeitos devidos às deformações cisalhantes na seção transversal não são desprezados no cálculo da rigidez da estrutura. Formulações baseadas na teoria de vigas de Timoshenko

foram propostas por Iwakuma (1990), Lee et al. (1994), Petrolito (1995) e Pacoste e Eriksson (1997).

Os sistemas estruturais formados por barras curvas podem ser analisados com as formulações de elementos finitos de vigas retas. Porém, com o intuito de melhorar a eficiência dessas análises foram desenvolvidas formulações de elementos finitos curvos. Entre os trabalhos recentes, merecem destaque as formulações de elementos curvos propostas por Marquist e Wang (1989), Kim e Kim (1998), e Raveendranath et al. (1999); e as formulações de elementos parabólicos propostas por Litewka e Rakowski (1997 e 1998).

Paralelamente aos elementos para análises bidimensionais, têm-se desenvolvido o estudo de elementos finitos para análise geometricamente não-linear de pórticos tridimensionais. Sabe-se de antemão que uma formulação não-linear tridimensional não é uma simples extensão de uma formulação bidimensional porque as rotações finitas tridimensionais não são quantidades vetoriais. Recentemente, vários pesquisadores têm publicado formulações não-lineares para análise estática de pórticos tridimensionais. Entre eles pode-se destacar Yang e Kuo (1994), que propôs formulações para elementos tridimensionais retos e curvos; Choi e Lim (1995), com uma formulação de elemento curvo; Ibrahimbegovic' et al. (1996); Ammar et al. (1996), com formulações para elementos de vigas esbeltas e não-esbeltas; Matsununga (1996), com uma formulação para pilares não-esbeltos; Pacoste e Eriksson (1997), que propuseram formulações com abordagem total e corrotacional; Rhim e Lee (1998), que desenvolveram uma formulação dando um tratamento vetorial à geometria do problema; e Li (1998), que elaborou uma formulação aplicando a teoria de rotações finitas.

Tem-se produzido também um grande número de formulações geometricamente não-lineares incluindo análise elasto-plástica de sistemas estruturais reticulados. Essas formulações têm como principal característica a adoção do critério de escoamento plástico na determinação das tensões. Nessa linha de pesquisa pode-se destacar os seguintes trabalhos já publicados: Hsiao et al. (1988), Lee (1988), Meek e Loganathan (1990), Chang-New Chen (1996), Park e Lee (1996), Ovunc e Ren (1996), Saje et al. (1997), Saje et al. (1998), Waszczyszyn e Michalska (1998).

Nos últimos 20 anos, os avanços tecnológicos e as exigências do mercado de engenharia, que introduziram maior complexidade e eficiência aos cálculos estruturais, levaram os pesquisadores a procurarem metodologias de solução que ao mesmo tempo produzissem resultados precisos e fossem de rápido processamento. Juntamente com as pesquisas relativas ao desenvolvimento de formulações não-lineares, muitos trabalhos têm sido produzidos com a finalidade de se determinar a melhor estratégia de solução não-linear. Os métodos que têm mostrado maior eficiência são os que combinam procedimentos incrementais e iterativos. Como trabalhos pioneiros podem ser citados os desenvolvidos por: Argyris (1964), com a aplicação de um método incremental para solução não-linear; Mallet e Marçal (1968), que utilizaram iterações do tipo Newton para contornarem os possíveis erros nas aproximações incrementais; Zienkiewicz (1971), que apresentou uma modificação no método de Newton-Raphson, fazendo com que a matriz de rigidez só fosse atualizada a cada passo de carga.

Diversos trabalhos têm sido publicados apresentando diferentes estratégias de controle automático do processo incremental, bem como diferentes estratégias de iteração. Utilizando um ‘parâmetro de rigidez corrente’ como indicador do grau de não-linearidade do sistema, Bergan et al. (1978) e Bergan (1980) suprimiram as iterações de equilíbrio nas zonas críticas da trajetória, até os pontos limites serem atravessados; os trabalhos de Bergan et al. (1978) e Heijer e Rheinbold (1981) forneceram diferentes estratégias de incremento de carga.

Batoz e Dhatt (1979) apresentaram uma técnica na qual o ciclo iterativo é realizado não à carga constante, mas a deslocamento constante, o que permite se obter os pontos limites de carga mas não os de deslocamento; Riks (1979) apresentou um método, baseado no parâmetro comprimento de arco Δl , capaz de calcular pontos limites de carga e de deslocamento com a introdução de um parâmetro que controla o progresso dos cálculos ao longo do caminho de equilíbrio; Meek e Tan (1984) apresentaram um resumo das principais técnicas para se ultrapassar os pontos limites, das quais a técnica do comprimento de arco foi reconhecida como uma das mais eficientes. Contribuíram com essa técnica: Riks (1972 e 1979), Ramm (1981), Schweizerhof e Wriggers (1986) e Crisfield (1981, 1991 e 1997).

Yang e Kuo (1994) introduziram estratégias de incremento de carga e iteração baseadas em relações de restrição para as quais é definido um parâmetro generalizado,

Krenk (1993 e 1995) elaborou uma nova estratégia de iteração, introduzindo duas condições de ortogonalidade: a primeira entre o vetor de cargas residuais e o incremento de deslocamento e a outra entre o incremento de forças internas e o vetor de deslocamentos iterativos.

Crisfield (1997) introduziu procedimentos numéricos que permitem avaliar com precisão os pontos críticos existentes, e obter as trajetórias de equilíbrio secundárias.

Silveira et al. (1999a-b) forneceram uma metodologia geral de solução de sistemas de equações algébricas não-lineares que, num contexto computacional pode ser resumida em duas partes: (i) a partir de uma dada configuração de equilíbrio da estrutura é calculada uma solução incremental inicial; (ii) em seguida, essa solução é corrigida com iterações do tipo Newton até ser atingida a nova configuração de equilíbrio. Nesses dois trabalhos diversas estratégias de iteração e incremento de carga foram testadas. Utilizando a mesma metodologia, Rocha (2000), em sua Dissertação de Mestrado, vem realizando um estudo comparativo de diversas estratégias de iteração e incremento de carga através da análise de vários exemplos numéricos de sistemas estruturais.

2

SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

2.1 – INTRODUÇÃO

A análise da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos através do método de elementos finitos (MEF) envolve invariavelmente a solução de um sistema de equações algébricas não-lineares. Pretende-se utilizar aqui os métodos que procuram resolver essas equações não-lineares passo a passo, em particular os esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos, atualmente considerados os mais eficientes.

Porém, para que uma análise numérica computacional via MEF seja capaz de avaliar todos os aspectos importantes do comportamento não-linear (instabilidade) desses sistemas estruturais complexos, são indispensáveis os seguintes ingredientes:

- A escolha de eficientes formulações bidimensionais (2D) e/ou tridimensionais (3D) não-lineares de elementos finitos reticulados planos ou curvos;
- Procedimentos numéricos capazes de determinar de forma completa as trajetórias de equilíbrio, atingindo e ultrapassando todos os pontos críticos (pontos limites e bifurcação) que eventualmente possam ocorrer;
- Técnicas que permitam definir com precisão os pontos críticos (pontos limites e bifurcação) ao longo do caminho de equilíbrio;
- Procedimentos computacionais que possibilitam seguir as trajetórias secundárias ‘branch switching techniques’ existentes ao longo do caminho de equilíbrio;
- Modelagem de ligações semi-rígidas, no sentido de se conhecer mais realisticamente o comportamento das conexões entre vigas e pilares;
- Implementações de rotinas gráficas de pré e pós-processamento com o intuito de facilitar a análise do sistema estrutural.

No presente trabalho, atenção especial é direcionada ao primeiro item.

A Seção (2.2) pretende mostrar de maneira sucinta a metodologia de solução não-linear (incremental-iterativa), que foi implementada por Silveira (1995), e será utilizada como base do presente trabalho.

Na Seção (2.3) são apresentados os referenciais Lagrangianos (total e atualizado) em que as formulações não-lineares de elementos finitos são deduzidas. Por serem o principal objeto de estudo deste trabalho, essas formulações não-lineares serão abordadas detalhadamente nos Capítulos 3, 4 e 5.

As Seções (2.4), (2.5) e (2.6) apresentam, respectivamente, as estratégias de incremento de carga, as estratégias de iteração, e os critérios de convergência, que serão empregados nas análises dos exemplos do Capítulo 7.

2.2 - SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

O problema estrutural não-linear a ser resolvido pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (2.1)$$

onde \mathbf{F}_i é vetor das forças internas, função dos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura \mathbf{u} , e λ é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de \mathbf{F}_r , que é um vetor de referência e de magnitude arbitrária.

A solução da Equação (2.1) deve ser obtida de forma incremental, ou seja, para uma seqüência de incrementos do parâmetro de carga $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3, \dots$, é calculada a seguinte seqüência de incrementos de deslocamentos nodais: $\Delta\mathbf{u}_1, \Delta\mathbf{u}_2, \Delta\mathbf{u}_3, \dots$. Como \mathbf{F}_i é uma função não-linear dos deslocamentos, a solução do problema $(\Delta\lambda, \Delta\mathbf{u})$ não satisfaz *a priori* a Equação. (2.1). Tem-se então uma força residual \mathbf{g} definida por:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

Os vários algoritmos existentes apresentam como passo fundamental a avaliação dessas forças residuais, em particular das forças internas da estrutura, e uma nova estimativa para os deslocamentos através da relação:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (2.3)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural e $\delta \mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos residuais. Segundo Crisfield (1991) essa estimativa dos deslocamentos não pode ser obtida de uma maneira direta através da solução de (2.3). Isso acontece porque esses deslocamentos residuais são definidos como a soma de duas componentes, ou seja:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_g + \delta \lambda \delta \mathbf{u}_r \quad (2.4)$$

onde $\delta \lambda$ é o parâmetro de carga que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo; $\delta \mathbf{u}_g$ e $\delta \mathbf{u}_r$ são obtidos através das relações:

$$\delta \mathbf{u}_g = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} \quad (2.5a)$$

$$\delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r \quad (2.5b)$$

Observe que esses vetores de deslocamentos podem ser obtidos de forma imediata, pois \mathbf{K} , \mathbf{g} e \mathbf{F}_r são conhecidos. A definição de $\delta \lambda$ em (2.4) vai depender da equação de restrição imposta adicionalmente ao problema não-linear. Uma das estratégias usadas nesse trabalho para se chegar ao valor de $\delta \lambda$ é baseada no emprego da técnica do comprimento de arco constante, que consiste em adicionar à Equação (2.1) a seguinte restrição:

$$\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (2.6)$$

onde, Δl é o comprimento de arco da trajetória de equilíbrio. A adição de (2.6) ao sistema permite que se faça o ajuste no parâmetro de carga λ durante o ciclo iterativo,

possibilitando, dessa forma, que se ultrapasse possíveis pontos críticos existentes nos caminhos primários e secundários. Um novo estado de equilíbrio é estabelecido após a realização de uma série de iterações. A iteração k fornece os sub-incrementos $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{u}$, e portanto, após essa iteração, os incrementos de carga e deslocamento são escritos da seguinte forma:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (2.7a)$$

$$\Delta\mathbf{u}^k = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^k \quad (2.7b)$$

A correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$ — única incógnita da Equação (2.4) —, é determinada seguindo uma das estratégias de iteração fornecidas na Seção (2.5), onde será introduzida uma equação de restrição que deve ser respeitada a cada iteração.

Num contexto computacional, é vantajoso introduzir a equação de restrição seguindo as duas etapas de solução apresentadas a seguir:

1. A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é selecionado um incremento de carga, definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema (Equação 2.6, por exemplo). Após a seleção de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{u}^0$ através da equação:

$$\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{u}_T \quad (2.8)$$

onde:

$$\delta\mathbf{u}_T = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r \quad (2.9)$$

sendo que $\delta\mathbf{u}_T$ é o vetor dos deslocamentos tangenciais. As aproximações $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{u}^0$ caracterizam a chamada *solução incremental predita*. Os detalhes dessa etapa de solução são fornecidos na Seção (2.4);

2. Na segunda etapa de solução, procura-se, através de iterações do tipo Newton, corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o intuito de restaurar o equilíbrio da estrutura o mais rápido possível. Se as iterações realizadas envolvem não só os deslocamentos \mathbf{u} , mas também o parâmetro de carga λ , então uma equação adicional de restrição é requerida. A forma dessa equação de restrição é o que distingue as várias técnicas de solução. A Seção (2.5) apresenta algumas estratégias de iteração usadas neste trabalho.

A Figura 2.1 fornece um esquema de solução incremental-iterativa para sistemas com um grau de liberdade, onde os parâmetros de carga e o deslocamento são atualizados seguindo a restrição de comprimento de arco cilíndrico (Crisfield, 1991).

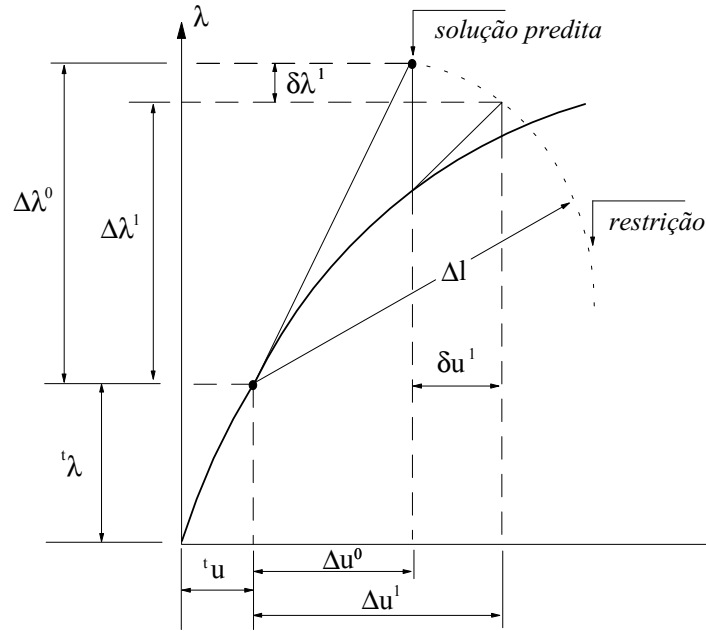


Figura 2.1 - Solução incremental-iterativa: sistema com um grau de liberdade.

Com o propósito de fornecer um resumo dos procedimentos anteriores, são mostrados, no esquema da Figura 2.2, os passos básicos envolvidos na implementação computacional da metodologia de solução numérica proposta.

-
1. Configuração inicial: $\mathbf{t}\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}\lambda$
 2. Definição da solução predita: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{u}^0$
 3. Iterações: $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$
 4. Verifica a convergência: $\zeta_1 = \|\mathbf{g}^{(k-1)}\| / \|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\| \leq \zeta$?
Sim: pare o ciclo de iterações, siga para o passo 7;
Não: calcule $\delta\mathbf{u}^k = \delta\mathbf{u}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{u}_r^k$
 5. Atualização das variáveis:
 i. incrementais: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{u}^k = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^k$
 ii. totais: ${}^{t+\Delta t}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^k = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^k$
 6. Retorne ao passo 3
 7. Faça novo incremento de carga e recomece o processo
-

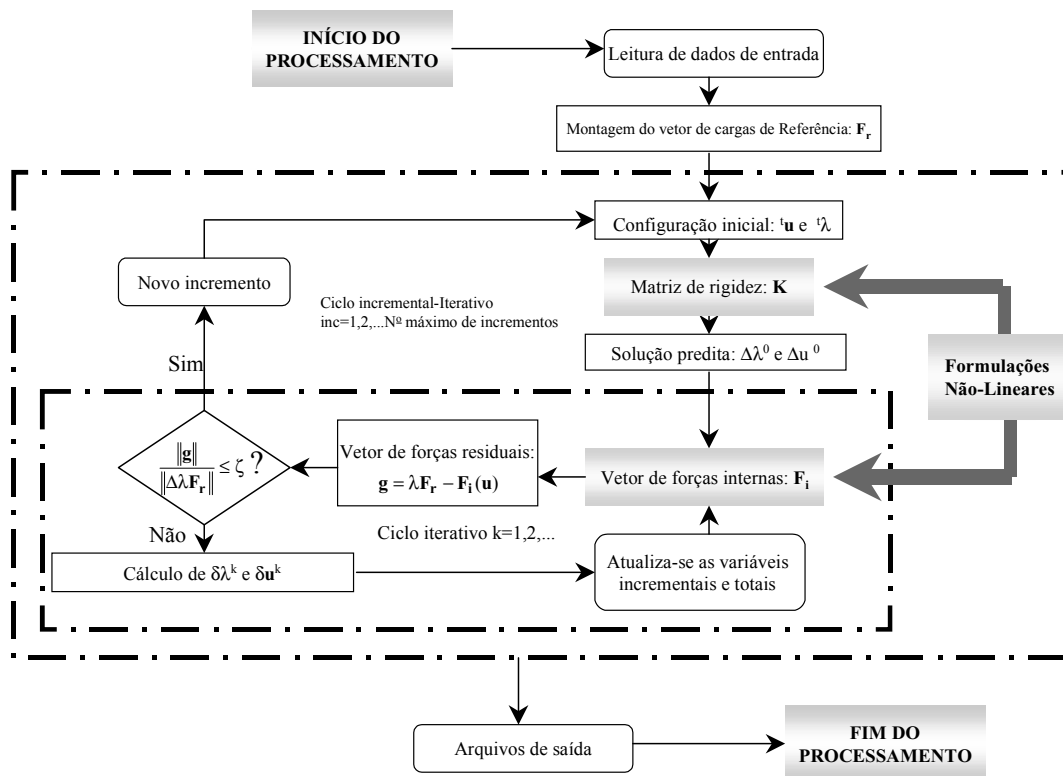


Figura 2.2 – Solução não-linear para um incremento de carga.

A qualidade dos resultados obtidos em uma análise numérica depende fundamentalmente da formulação não-linear utilizada, ou em outras palavras, da determinação da matriz de rigidez K e do vetor de forças internas F_i . Os fatores que caracterizam uma formulação de elementos finitos podem ser resumidos em: (i) qualidade das relações cinemáticas empregadas; (ii) funções de interpolação utilizadas para aproximar os deslocamentos; (iii) referencial de obtenção dos deslocamentos (referencial Lagrangiano total ou referencial Lagrangiano atualizado); (iv) forma de se calcular as forças internas.

Os Capítulos 3, 4 e 5 apresentam detalhadamente o desenvolvimento das formulações que foram implementadas no presente trabalho. Essas formulações foram todas desenvolvidas em referenciais Lagrangianos, que são apresentados a seguir.

2.3. – REFERENCIAIS LAGRANGIANOS

A maioria das formulações de elementos finitos com não-linearidade geométrica encontradas na literatura se baseiam em referenciais Lagrangianos. Nesses referenciais os deslocamentos em um sistema estrutural, decorrentes de um dado carregamento, são medidos em relação a uma configuração inicial deste sistema. Numa análise não-linear incremental pode-se adotar duas formas de referenciais Lagrangianos: referencial Lagrangiano total (RLT) e referencial Lagrangiano atualizado (RLA). As diferenças entre estes dois referenciais são apresentadas a seguir.

No RLT os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial indeformada, como mostra o esquema da Figura 2.3.

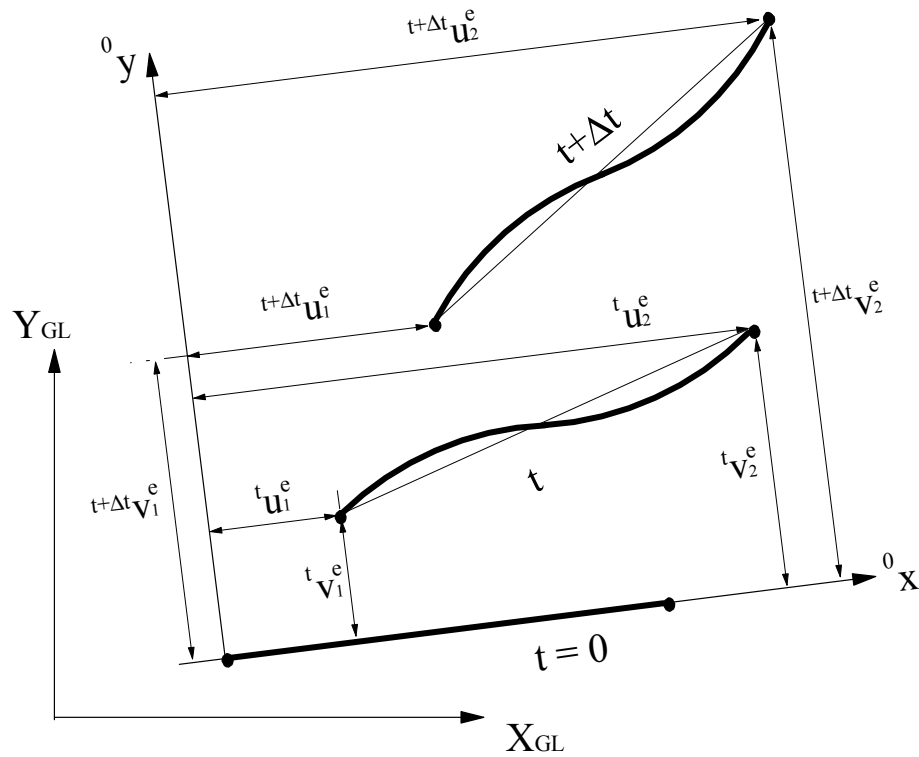


Figura 2.3 – Referencial Lagrangiano total.

Alves (1993b) mostrou que, devido aos eventuais deslocamentos de corpo rígido ocorridos durante o processo incremental, cujas influências não são perfeitamente consideradas, bem como devido à utilização de funções de interpolação simplificadas, a tendência é que os resultados obtidos em RLT se afastem do comportamento real a medida que a configuração deformada se distancia da configuração original.

No RLA os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga, conforme ilustrado na Figura 2.4. Nesse caso as rotações de corpo rígido são divididas em partes menores e podem ser melhor aproximadas pelas funções de interpolação.

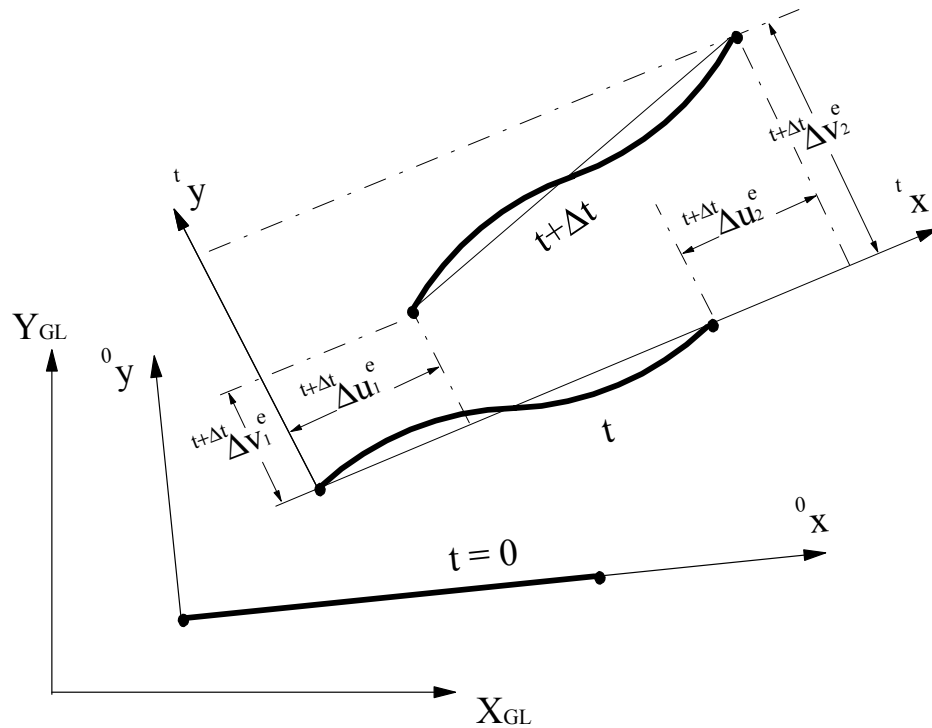


Figura 2.4 – Referencial Lagrangiano atualizado.

Nas Seções (2.4) e (2.5) serão mostradas, de forma resumida, algumas estratégias de incremento de carga e iteração, que são responsáveis diretas pela obtenção dos parâmetros incrementais $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{u}^0$; e dos sub-incrementos $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{u}$, conforme o algoritmo mostrado na Figura 2.2.

2.4 – ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA

A obtenção da solução incremental inicial tem como passo fundamental a definição do parâmetro de carga inicial $\Delta\lambda^0$. A seleção automática do tamanho do incremento desse parâmetro é importante, e deve refletir o grau de não-linearidade corrente do sistema estrutural em estudo. Em outras palavras, uma estratégia eficiente de incremento automático de carga deve satisfazer basicamente os seguintes requerimentos: (i) produzir grandes incrementos quando a resposta da estrutura for aproximadamente linear; (ii) gerar pequenos incrementos quando a resposta da estrutura

for fortemente não-linear; (iii) ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando os pontos limites são ultrapassados.

A seguir são apresentadas algumas estratégias de incremento de carga que satisfazem esses requerimentos.

2.4.1 – Incremento do Comprimento de Arco

Como proposto por Crisfield (1991), o incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente pode ser definido como:

$$\Delta l = {}^t\Delta l \left(\frac{I_d}{{}^tI} \right)^{1/2} \quad (2.10)$$

onde ${}^t\Delta l$ e Δl representam os incrementos do comprimento de arco no passos de carga anterior (valor conhecido) e no passo de carga corrente (incógnita), respectivamente; I_d é o numero de iterações desejadas para o processo iterativo corrente, especificado pelo usuário, e tI é o numero de iterações que foram necessárias para convergir no passo de carga anterior.

Através da Equação (2.10) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial:

$$\Delta \mathbf{u}^{0T} \Delta \mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \quad (2.11)$$

chega-se facilmente, usando-se a Equação (2.8) em (2.11), à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{u}_T^T \delta \mathbf{u}_T}} \quad (2.12)$$

O critério utilizado, nos exemplos do Capítulo 7, para escolher o sinal correto na expressão (2.12) é o sugerido por Yang e Shieh (1990) e Yang e Kuo (1994), baseando-se no sinal do parâmetro GSP, que será apresentado na seção seguinte.

No programa desenvolvido nesse trabalho, o usuário deve especificar $\Delta\lambda_1^0$ como dado de entrada, sendo este valor usado em seguida para calcular $\Delta\mathbf{u}_1^0$ através de (2.8). Substituindo-se, então, $\Delta\mathbf{u}^0$ na Equação (2.11) chega-se a Δl_1 . Para os passos de carga seguintes, calcula-se automaticamente Δl através de (2.10).

2.4.2 – Incremento Baseado no Parâmetro GSP

Uma estratégia baseada na introdução de um parâmetro de rigidez generalizado foi adotada por Yang e Shieh (1990) e Yang e Kuo (1994) para limitar o incremento inicial do parâmetro de carga. O método de solução é denominado de estratégia de controle de deslocamento generalizado. Em termos gerais, Yang e Kuo (1994) propuseram a seguinte equação para avaliar o parâmetro de carga:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta\mathbf{u}_r^k + k} (\mathbf{H} - \mathbf{C}^T \delta\mathbf{u}_g^k) \quad (2.13)$$

onde \mathbf{C} e k são constantes a serem definidas e \mathbf{H} é denominado de deslocamento generalizado da equação de restrição. Yang e Shieh (1990), por exemplo, propuseram os seguintes valores:

$$\mathbf{C} = \Delta\lambda^0 {}^t\delta\mathbf{u}_r \quad \text{e} \quad k = 0 \quad (2.14)$$

e assim (2.13) pode ser reescrito como:

$$\delta\lambda^k = \frac{\mathbf{H} - \Delta\lambda^0 {}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_g^T}{\Delta\lambda^0 {}^t\delta\mathbf{u}_r \delta\mathbf{u}_r} \quad (2.15)$$

Para obtenção da solução predita $\Delta\lambda^0$, faz-se $\delta\mathbf{u}_g^k = 0$ e $\delta\lambda^k = \Delta\lambda^0$ na equação anterior, e dessa forma chega-se a:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{H}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T \delta\mathbf{u}_r}} \quad (2.16)$$

Yang e Shieh (1990) sugeriram para H a seguinte relação:

$$H = {}^1\Delta\mathbf{u}_0^T {}^1\Delta\mathbf{u}_0^0 = ({}^1\Delta\lambda^0)^2 {}^t\delta\mathbf{u}_r^T {}^1\delta\mathbf{u}_r \quad (2.17)$$

e dessa forma pode-se escrever $\Delta\lambda^0$ como sendo:

$$\Delta\lambda^0 = \pm {}^1\Delta\lambda^0 \sqrt{\frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^T {}^1\delta\mathbf{u}_r}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T {}^t\delta\mathbf{u}_r}} \quad (2.18)$$

Adicionalmente, considerando-se o parâmetro de rigidez generalizado (GSP) do sistema como segue:

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^T {}^1\delta\mathbf{u}_r}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^T {}^t\delta\mathbf{u}_r} \quad (2.19)$$

pode-se, portanto, reescrever (2.18) da seguinte forma:

$$\Delta\lambda^0 = \pm {}^1\Delta\lambda^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (2.20)$$

Segundo os autores citados, o sinal do parâmetro de rigidez generalizado depende exclusivamente dos vetores ${}^t\delta\mathbf{u}_r$ e $\delta\mathbf{u}_r$, conforme mostra a Equação (2.19).

2.5 – ESTRATÉGIAS DE ITERAÇÃO

A determinação do parâmetro de carga iterativo, $\delta\lambda$ é função de uma dada estratégia de iteração, ou equação de restrição imposta ao problema, que tem a função de otimizar a convergência do processo iterativo. A seguir são apresentadas duas estratégias bastante eficientes que serão utilizadas nos exemplos do Capítulo 7.

2.5.1 – Comprimento de Arco Cilíndrico

Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982) propuseram, que, a cada iteração, a seguinte equação de restrição seja satisfeita:

$$\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} = \Delta l^2 \quad (2.21)$$

Substituindo (2.4) em (2.7b) e o resultado na equação anterior, chega-se a uma equação quadrática em $\delta\lambda$, ou seja:

$$A \delta\lambda^2 + B \delta\lambda + C = 0 \quad (2.22)$$

onde, os coeficientes A, B e C têm a seguinte forma:

$$A = \delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r \quad (2.23a)$$

$$B = 2\delta \mathbf{u}_r^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) \quad (2.23b)$$

$$C = (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k)^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) - \Delta l^2 \quad (2.23c)$$

Com a resolução de (2.23) chega-se aos dois valores $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$, de forma que se deve escolher entre as soluções:

$$\Delta \mathbf{u}_1 = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta\lambda_1 \delta \mathbf{u}_r \quad (2.24a)$$

$$\Delta \mathbf{u}_2 = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda_2 \delta \mathbf{u}_r \quad (2.24b)$$

aquela que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior, $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$. Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado. Um procedimento utilizado, consiste em se achar o menor ângulo entre $\Delta \mathbf{u}^k$ e $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$. Isto equivale a achar o máximo cosseno do ângulo:

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \Delta \mathbf{u}^k}{\Delta I^2} = \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \left(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k \right)}{\Delta I^2} + \delta \lambda_{1,2} \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \delta \mathbf{u}_r}{\Delta I^2} \quad (2.25)$$

Como (2.22) é uma equação quadrática, ela poderá ter raízes imaginárias se $(B^2 - 4AC)$ for menor que zero. Essa situação pode existir quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto (Meek e Tan, 1984).

2.5.2 – Iteração usando Deslocamento Generalizado

Yang e Kuo (1994) chegaram à expressão para a correção do parâmetro de carga fazendo $H = 0$ na equação de restrição dada em (2.15), ou seja:

$$\delta \lambda^k = - \frac{{}^t \delta \mathbf{u}_r^k T \delta \mathbf{u}_g^k}{{}^t \delta \mathbf{u}_r^T \delta \mathbf{u}_r} \quad (2.26)$$

2.5.3 – Iteração usando Resíduo Ortogonal

Uma outra estratégia de correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo foi proposta recentemente por Krenk (1993). O fator de correção é obtido a partir da condição de ortogonalidade do vetor resíduo da iteração corrente em relação ao incremento de deslocamento correspondente. A seguir serão descritos os passos básicos do algoritmo não-linear proposto por Krenk.

Mais uma vez a configuração de equilíbrio ${}^t\mathbf{u}$ e ${}^t\lambda\mathbf{F}_r$ será o ponto de partida para obtenção dos deslocamento e parâmetro de carga na configuração $t + \Delta t$, ou seja: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ e ${}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r$. A solução incremental predita é obtida assumindo o incremento de carga $\Delta\lambda^0\mathbf{F}_r$ e resolvendo-se o sistema de equações abaixo:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0\mathbf{F}_r \quad (2.27)$$

Observe que nesse novo estado de deslocamento ${}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0$ as forças internas da estrutura podem ser determinadas: $\mathbf{F}_i({}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0)$. Como o problema é não-linear, essas forças não estarão em equilíbrio com as solicitações externas: $({}^t\lambda + \Delta\lambda^0)\mathbf{F}_r$. O equilíbrio do sistema estrutural é então estabelecido por uma seqüência de iterações. A estratégia de iteração a ser apresentada se preocupará primeiro em ajustar o incremento de carga $\Delta\lambda^0\mathbf{F}_r$, para, em seguida, calcular o vetor resíduo \mathbf{g} que será usado no cálculo dos deslocamentos iterativos $\delta\mathbf{u}$.

Observe que, no começo da iteração k , o vetor dos deslocamentos incrementais $\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$ é conhecido, de forma que as forças internas do sistema $\mathbf{F}_i({}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(k-1)})$ podem ser obtidas. O vetor de forças externas totais correspondente a este estado de deslocamento pode ser escrito da forma $({}^t\lambda + \xi_k\Delta\lambda^0)\mathbf{F}_r$, onde o fator de escala ξ_k deverá ser obtido conforme procedimento descrito a seguir.

De acordo com a teoria apresentada, o vetor das forças residuais \mathbf{g} pode ser definido por:

$$\mathbf{g} = (\lambda^t + \xi_k \Delta \lambda^0) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}^t + \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}) \quad (2.28)$$

ou,

$$\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + \xi_k \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r \quad (2.29)$$

onde,

$$\tilde{\mathbf{g}} = \lambda^t \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{u}^t + \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}) \quad (2.30)$$

é o vetor das forças residuais correspondente aos deslocamentos da última iteração processada no passo corrente e ao parâmetro de carga da última configuração de equilíbrio.

De acordo com Krenk (1995), o fator de escala ξ_k é obtido considerando-se os seguintes argumentos. A existência de forças residuais \mathbf{g} irá induzir o cálculo adicional de deslocamentos ($\delta \mathbf{u}$). Assumindo aqui os deslocamentos incrementais $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$ como a melhor aproximação na direção dos deslocamentos incrementais verdadeiros, tem-se então que a magnitude desse vetor irá aumentar ou diminuir de acordo com o sinal do produto escalar entre $\mathbf{g}^T \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$, ou seja, com a projeção do vetor resíduo no vetor dos deslocamentos incrementais. Tem-se então que uma escolha ótima do vetor dos deslocamentos incrementais acontece se a seguinte condição for verificada:

$$\mathbf{g}^T \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} = 0 \quad (2.31)$$

Substituindo a força residual obtida na Equação (2.29) na condição de ortogonalidade anterior, chega-se o fator de escala procurado:

$$\xi_k = - \frac{\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}}{\Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \Delta \mathbf{u}^{(k-1)}} \quad (2.32)$$

Dessa forma, o vetor das forças residuais, após o ajuste no parâmetro de carga, é calculado através da Equação (2.29). Conhecendo este vetor, avalia-se os deslocamentos iterativos através da seguinte expressão:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}^k = \mathbf{g} \quad (2.33)$$

No final de cada iteração, atualizam-se os deslocamentos incrementais através das Equações (2.7a e 2.7b).

Krenk (1995) mostrou que a condição de ortogonalidade (2.31) poderia ser usada para se obter uma atualização da matriz de rigidez a cada iteração, seguindo os métodos quasi-Newton, em particular métodos do tipo Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). A idéia básica dos métodos quasi-Newton é requerer que a matriz de rigidez corrente satisfaça a relação linear de rigidez para os incrementos de deslocamentos e forças internas já estabelecidos, ou conhecidos. Como já definido, tem-se na iteração k que vetor dos deslocamentos e forças internas incrementais podem ser escritos como: $\Delta \mathbf{u}$ e $\Delta \mathbf{F}_i = -\tilde{\mathbf{g}}$. Assim, a condição quasi-Newton para esses dois vetores é dada por:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F}_i \quad (2.34)$$

No caso unidimensional, a relação anterior corresponde à condição secante, porém para problemas estruturais com várias dimensões pode-se estabelecer diversas formas de atualização da matriz de rigidez \mathbf{K} . A forma mais utilizada de correção de \mathbf{K} é o chamado método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), onde se escreve:

$$\mathbf{K} = {}^t\mathbf{K} - \frac{({}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u})({}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u})^T}{\Delta\mathbf{u}^T {}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}} + \frac{\Delta\mathbf{F}_i\Delta\mathbf{F}_i^T}{\Delta\mathbf{F}_i^T\Delta\mathbf{u}} \quad (2.35)$$

Observe que, se ambos os lados da equação anterior for multiplicado por $\Delta \mathbf{u}$, chega-se na Equação (2.34). A inversa dessa matriz atualizada pode ser obtida explicitamente pela fórmula de Sherman-Morrison (Luenberger, 1984), a saber:

$$\mathbf{K}^{-1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{u} \Delta \mathbf{F}_i^T}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} \right)^t \mathbf{K}^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{u}^T}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} \right) + \frac{\Delta \mathbf{u} \Delta \mathbf{u}^T}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} \quad (2.36)$$

Em aplicações do MEF, essa fórmula é freqüentemente usada na forma fatorizada proposta por Matthies e Strang (1979), mas devido a condição de ortogonalidade (2.31) ela pode ser utilizada nesta forma.

Dessa forma tem-se a inversa da matriz atualizada e através de (2.33) obtém-se os deslocamentos iterativos $\delta \mathbf{u}$. Note, entretanto, que quando o vetor das forças residuais \mathbf{g} satisfaz a condição de ortogonalidade (2.31) e a inversa da matriz é dada por (2.36), chega-se a uma expressão particularmente simples para $\delta \mathbf{u}$, ou seja:

$$\delta \mathbf{u}^k = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{u} \Delta \mathbf{F}_i^T}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} \right)^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} \quad (2.37)$$

Essa expressão pode ser adicionalmente modificada introduzindo o vetor dos deslocamentos iterativos definido por:

$$\tilde{\delta \mathbf{u}}^k = {}^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} \quad (2.38)$$

Tem-se então que os deslocamentos iterativos são obtidos através da seguinte expressão:

$$\delta \mathbf{u}^k = \tilde{\delta \mathbf{u}}^k - \eta \Delta \mathbf{u} \quad (2.39)$$

onde o fator η é dado por:

$$\eta = \frac{\Delta \mathbf{F}_i^T \tilde{\delta \mathbf{u}}}{\Delta \mathbf{F}_i^T \Delta \mathbf{u}} = \frac{\tilde{\mathbf{g}}^T \tilde{\delta \mathbf{u}}}{\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta \mathbf{u}} \quad (2.40)$$

Essa estratégia de atualização ou obtenção dos deslocamentos iterativos é bastante eficiente pois envolve o cálculo adicional de apenas um produto interno: $\tilde{\mathbf{g}}^T \delta \mathbf{u}$. Note que o produto interno do denominador já foi avaliado como parte dos procedimentos necessários para obtenção do fator de escala ξ_k , Equação (2.32).

Em qualquer método quasi-Newton, a matriz de rigidez atualizada, satisfazendo a relação (2.34), é usada na determinação dos deslocamentos iterativos $\delta \mathbf{u}$ através da Equação (2.38). Isso leva à seguinte relação entre os produtos escalares:

$$\Delta \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} \quad (2.41)$$

Observe então que o uso da relação (2.34) em conexão com a condição de ortogonalidade (2.31), implica numa nova condição de ortogonalidade, ou seja:

$$\Delta \mathbf{F}_i \delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{g}}^T \delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.42)$$

A estratégia de solução não-linear proposta por Krenk (1993-1995) é caracterizada portanto, pelo uso de duas condições de ortogonalidade: a primeira entre o incremento de deslocamento $\Delta \mathbf{u}$ e o resíduo da iteração corrente \mathbf{g} ; e a outra entre o vetor das forças internas incremental $\tilde{\mathbf{g}}$ e o novo deslocamento iterativo $\delta \mathbf{u}$.

2.6 – CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

O processo iterativo descrito termina indicando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura em análise quando um dos dois, ou os dois critérios de convergência apresentados abaixo forem atendidos:

(i) o primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior. Ele é definido como segue:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (2.43)$$

onde $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|$ é igual à norma euclidiana do vetor das forças desequilibradas, que é calculada usando-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior, $\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|$ é a norma euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo e ζ é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada.

(ii) o segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos e é sempre verificado no final da iteração corrente. Ele é definido por:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{u}\|}{\|\Delta\mathbf{u}^k\|} \leq \zeta \quad (2.44)$$

onde $\|\delta\mathbf{u}\|$ é a norma euclidiana dos deslocamentos iterativos (residuais), $\|\Delta\mathbf{u}^k\|$ é a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo, e ζ segue a mesma definição do critério anterior.

(iii) o terceiro critério de convergência consiste em obedecer a ambas as relações (forças e deslocamentos) dadas em (2.43) e (2.44), assim este critério é verificado se:

$$\zeta_1 \leq \zeta \text{ e } \zeta_2 \leq \zeta \quad (2.45)$$

onde ζ , ζ_1 e ζ_2 são definidos nos itens (i) e (ii).

3

FORMULAÇÕES NÃO-LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS: ALVES (1993b) e TORKAMANI et al. (1997)

3.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as formulações não-lineares de elementos finitos de sistemas estruturais reticulados planos baseadas nos trabalhos de Alves (1993b) e Torkamani et al. (1997).

Inicialmente, na Seção (3.2), são apresentadas as relações deformação-deslocamento não-lineares usadas nas duas formulações, que basicamente são representadas pelo tensor de Green-Lagrange para as deformações axiais, com a introdução de simplificações relativas à teoria de vigas de Bernoulli. Alves (1993b) utiliza a forma completa do tensor de Green-Lagrange e contorna a impossibilidade de representação pelas funções de interpolação empregadas de um estados de tensões de membrana uniforme ou nula seguindo a sugestão feita por Crisfield (1991) de uniformizar as deformações. Torkamani et al (1997) utiliza o tensor de Green-Lagrange numa forma simplificada e dispensa a uniformização das deformações. Como as duas formulações foram idealizadas em RLA faz-se necessário o cálculo das deformações na última configuração de equilíbrio.

Utilizando-se o princípio da energia potencial total estacionária, chega-se, na Seção (3.3), às equações de equilíbrio do sistema estrutural.

Finalmente, na Seção (3.4), é apresentada a discretização do sistema em elementos finitos e, em seguida, a obtenção da matriz de rigidez no referencial Lagrangiano atualizado (RLA). Na Seção (3.4.2) são mostrados dois procedimentos de cálculo do vetor das forças internas. No primeiro procedimento utiliza-se os *deslocamentos naturais totais*; no segundo usa-se os *deslocamentos naturais incrementais*.

3.2 – RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

As formulações tratadas neste capítulo foram baseadas no tensor de Green-Lagrange sendo que, enquanto Alves (1993b) utiliza a forma completa do tensor de Green-Lagrange, com ‘uniformização das deformações’, Torkamani et al. (1997) utiliza uma forma simplificada.

O tensor de Green-Lagrange, na sua forma completa, para as deformações axiais ‘incrementais’ é expresso da seguinte forma:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

onde $\Delta \bar{u}$ é o deslocamento axial de um ponto distante y da linha neutra da seção.

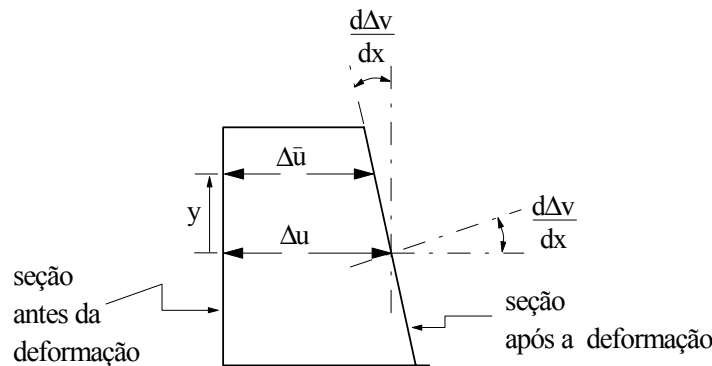


Figura 3.1 - Comportamento da seção transversal.

Aceitando a hipótese da teoria de vigas de Bernoulli de que as seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a deformação, tem-se, conforme ilustrado na Figura 3.1:

$$\Delta \bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (3.2)$$

onde a primeira parcela, Δu , é uma consequência dos esforços extencionais atuantes e é constante ao longo da seção; a segunda parcela, $y(d\Delta v/dx)$, é devida aos esforços de flexão, e varia linearmente com a distância à linha neutra.

Substituindo-se (3.2) em (3.1), pode-se escrever:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx} \quad (3.3)$$

onde o tensor de deformações infinitesimais é definido como sendo:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \quad (3.4)$$

e o tensor de deformações que contém os termos quadráticos, como:

$$\Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} + y^2 \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

Aqui algumas considerações são necessárias. Ao se substituir em (3.3) as funções de interpolação, que serão apresentadas na Seção (3.4), constata-se o surgimento de dois problemas:

- (i) supondo que o elemento finito adotado sofra movimentos independentes de translação e rotação de corpo rígido, observa-se, para o caso de rotação, o aparecimento de deformações que, obviamente, deveriam ser nulas. Conclui-se, portanto, que as funções de interpolação usadas só descrevem de forma adequada

as translações de corpo rígido. O aparecimento de deformação para as rotações de corpo rígido se deve à admissão de $\Delta\theta = d\Delta v/dx$ no cálculo das funções de interpolação, que só é válida para o caso de pequenas rotações;

- (ii) procurando satisfazer apenas as condições de continuidade, são adotadas, por simplicidade, apenas funções lineares para aproximar o deslocamento axial Δu . Crisfield (1991) mostra que, rigorosamente, com Δv assumido cúbico, deveria-se adotar uma aproximação de quinto grau para Δu de modo a balancear as funções e, assim, poder garantir a representação da deformação de membrana constante e, em particular, se obter deformação de membrana nula associada a problemas de flexão inextensional

Os procedimentos adotados para minorar os efeitos dessas incompatibilidades são descritos a seguir:

- (i) os problemas decorrentes dos movimentos de corpo rígido são suavizados com a atualização do referencial, isto é, adotando-se uma formulação com *referencial Lagrangiano atualizado* (RLA). Assim, na análise incremental implementada, ao final de cada passo de carga, o referencial é transferido para a nova posição ou configuração de equilíbrio, recém-calculada.
- (ii) na Seção (3.4.2) é apresentado outro procedimento usado nesse trabalho que visa amenizar as incompatibilidades decorrentes dos deslocamentos de corpo rígido: o cálculo das forças internas levando em consideração a mudança de geometria do elemento;
- (iii) a técnica adotada para contornar a impossibilidade de representação de deformação de membrana uniforme, ou nula — caso os deslocamentos nodais do elemento sejam compatíveis com este tipo de deformação —, segue a sugestão feita em Crisfield (1991) e Alves (1993b). Esta técnica consiste em *uniformizar as deformações*, ou seja, considerar para as equações (3.3) e (3.5) um valor médio da parcela $(d\Delta v/dx)^2$. Assim (3.5) toma a forma:

$$\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left(\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 dx \right] \quad (3.6)$$

A formulação sugerida por Torkamani et al. (1997) baseia-se numa forma simplificada do tensor de Green-Lagrange, que é obtido desprezando-se a parcela $(d\Delta\bar{u}/dx)^2$ a *uniformização das deformações*. Assim, o tensor de deformações que contém os termos quadráticos assume a forma simplificada:

$$\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \quad (3.7)$$

Para um *referencial Lagrangeano atualizado* (RLA), assume-se que a solução é conhecida na configuração de equilíbrio t — configuração de referência —, e que se deseja calcular a solução para a configuração $t+\Delta t$. É indispensável, portanto, que se defina para o elemento finito considerado o estado de tensões, ou de deformações, na configuração t . Segundo Alves (1993b), pode-se escrever para a deformação:

$${}^t\varepsilon = \frac{P}{EA} - y \frac{M}{EI} \quad (3.8)$$

onde EA e EI são, respectivamente, a rigidez de membrana e a rigidez de flexão do elemento considerado. Assumindo uma variação linear para M ao longo da barra, como indicado na Figura 3.2b, escreve-se que:

$$M = -M_1 + \frac{(M_1 + M_2)}{L} x \quad (3.9)$$

Substituindo, então, (3.9) em (3.8), chega-se a:

$${}^t\varepsilon = \frac{P}{EA} + \frac{y}{EI} \left[M_1 - \frac{(M_1 + M_2)}{L} x \right] \quad (3.10)$$

onde se respeita a convenção de sinal dada na Figura 3.2c.

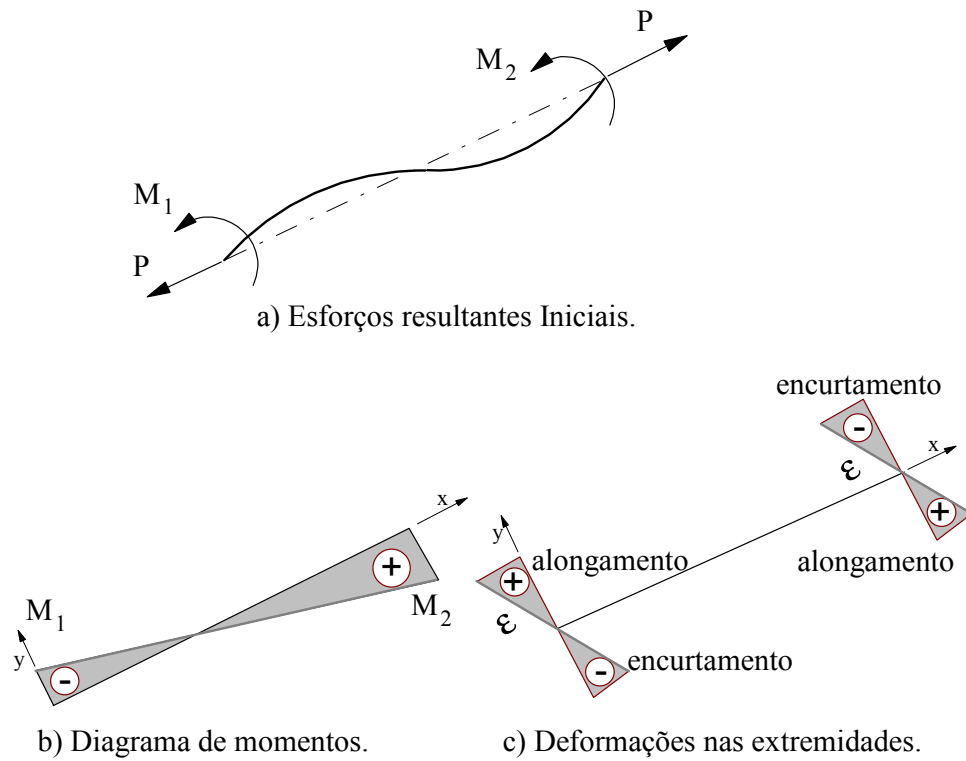


Figura 3.2 - Deformação inicial: configuração de equilíbrio t.

Segundo Torkamani et al. (1997) pode-se desprezar os efeitos do momento fletor, no estado de deformações da configuração de referência, t . Assim, escreve-se para a deformação axial:

$${}^t\varepsilon = \frac{P}{EA} \quad (3.11)$$

3.3 – FUNCIONAL DE ENERGIA

O incremento de energia de deformação, ΔU , é definida, para o *referencial Lagrangiano atualizado* (RLA), como:

$$\Delta U = \int_{Vol} \int_{{}^t\varepsilon}^{{}^t\varepsilon + \Delta\varepsilon} (\Delta\sigma \, d\varepsilon) \, dVol \quad (3.12)$$

Assumindo o comportamento linear elástico, $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$, a Equação (3.12) fica:

$$\Delta U = \iint_{Vol} \left(E \, {}^t\varepsilon \, \Delta\varepsilon + \frac{E}{2} \Delta\varepsilon^2 \right) dAdx \quad (3.13)$$

O incremento da energia potencial das forças externas ΔV , é definido como:

$$\Delta V = - \int_s F_i \, \Delta u_i \, ds = - \left[\int_s {}^t F_i \, \Delta u_i \, ds + \int_s \Delta F_i \, \Delta u_i \, ds \right] \quad (3.14)$$

O funcional de energia na configuração $t+\Delta t$ pode ser definido como:

$${}^{t+\Delta t}\Pi = {}^{t+\Delta t}U + {}^{t+\Delta t}V = {}^tU + \Delta U + {}^tV + \Delta V \quad (3.15)$$

Sabe-se do princípio da energia potencial total estacionária que a condição necessária e suficiente para o equilíbrio do sistema estrutural em estudo pode ser obtida fazendo-se:

$$\delta^{(1)} {}^{t+\Delta t}\Pi = \delta^{(1)} ({}^tU + {}^tV) + \delta^{(1)} (\Delta U + \Delta V) = 0 \quad (3.16)$$

Como, por hipótese, a configuração t está em equilíbrio, a parcela $\delta^{(1)} ({}^tU + {}^tV)$ é nula. Pode-se, portanto, reescrever (3.16) da seguinte forma:

$$\delta^{(1)} {}^{t+\Delta t}\Pi = \delta^{(1)} \Delta \Pi = \delta^{(1)} (\Delta U + \Delta V) = 0 \quad (3.17)$$

onde:

$$\Delta \Pi = \Delta U + \Delta V \quad (3.18)$$

Alves (1993b) sugeriu a seguinte forma de se organizar o funcional de energia:

$$\Delta \Pi = U_0 + U_\tau + U_L + U_1 + U_2 - \left[\int_s {}^tF_i \Delta u_i ds + \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds \right] \quad (3.19)$$

onde:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_{{}^tVol} E {}^t\epsilon_{xx} \Delta e_{xx} {}^tdVol \quad (3.20a)$$

$$U_\tau = \int_{{}^tVol} E {}^t\epsilon_{xx} \Delta \eta_{xx} {}^tdVol \quad (3.20b)$$

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{t_{Vol}} E \Delta e_{xx}^2 {}^t dVol \quad (3.20c)$$

$$U_1 = \int_{t_{Vol}} E \Delta e_{xx} \Delta \eta_{xx} {}^t dVol \quad (3.20d)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{t_{Vol}} E \Delta \eta_{xx}^2 {}^t dVol \quad (3.20e)$$

Aqui, o termo U_0 está associado às forças acumuladas atuantes até a configuração de equilíbrio t ; U_τ corresponde à influencia das deformações iniciais e originará a matriz de tensões iniciais; U_L dá origem à parcela linear da matriz de rigidez; U_1 e U_2 resultarão na parcela não-linear, correspondendo respectivamente as matrizes de rigidez de primeira e segunda ordem.

Com o objetivo de se obter uma equação na forma incremental, efetuou-se uma simplificação baseada na seguinte expressão, semelhante a do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_{vol} E {}^t \epsilon_{xx} \Delta e_{xx} dvol = \int_s {}^t F_i \Delta u_i ds \quad (3.21)$$

ou:

$$U_0 = \int_s {}^t F_i \Delta u_i ds \quad (3.22)$$

onde o lado direito da equação corresponde ao trabalho virtual das forças externas acumuladas até a configuração t . O funcional de energia pode então ser reescrito:

$$\Delta \Pi = U_\tau + U_L + U_1 + U_2 - \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds \quad (3.23)$$

Substituindo-se em (3.23) as funções de interpolação que serão introduzidas na Seção (3.4) e aplicando (3.17), obtém-se a equação de equilíbrio do sistema.

3.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

O elemento de viga-coluna adotado por Alves (1993b) e por Torkamani et al. (1997) é o esquematizado na Figura 3.3. Trata-se de um segmento reto, limitado pelos nós 1 e 2, que se deforma no plano de definição da estrutura. Cada elemento define um sistema local de coordenadas xy , rotacionado em relação a um sistema de coordenadas global XY de um certo ângulo α . Nessa mesma figura é fornecida a simbologia adotada para os deslocamentos nodais incrementais (formulação incremental).

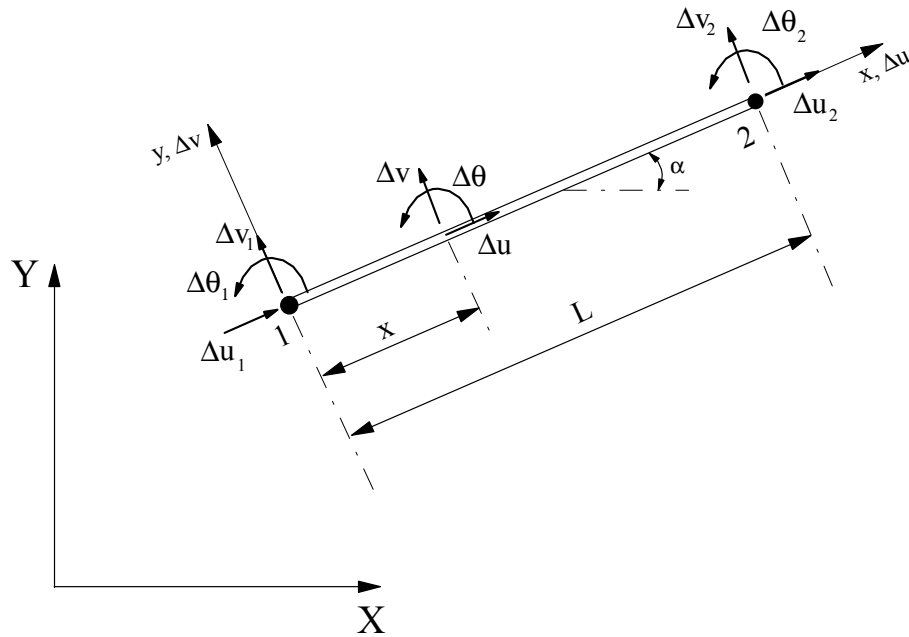


Figura 3.3 - Elemento de viga-coluna adotado.

Para que haja continuidade de deslocamentos e rotação nos bordos dos elementos adjacentes, é suficiente considerar, para aproximar o deslocamento axial incremental Δu , uma função linear, enquanto para a componente transversal Δv , admitindo-se $\Delta \theta = d\Delta v / dx$, deve ser usada uma função do terceiro grau. Dessa forma, escreve-se:

$$\Delta u = a_0 + a_1 x \quad (3.24)$$

$$\Delta v = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (3.25)$$

onde $a_0, a_1, b_0, b_1, \dots$ e b_3 são constantes a serem determinadas através das condições de contorno do elemento: em $x = 0$, $\Delta u = \Delta u_1$, $\Delta v = \Delta v_1$ e $\Delta \theta_1 = d\Delta v_1/dx$; e em $x = L$, $\Delta u = \Delta u_2$, $\Delta v = \Delta v_2$ e $\Delta \theta_2 = d\Delta v_2/dx$. Dessas condições chega-se às expressões para Δu e Δv em termos dos valores nodais:

$$\Delta u = H_1 \Delta u_1 + H_2 \Delta u_2 \quad (3.26)$$

$$\Delta v = H_3 \Delta v_1 + H_4 \Delta \theta_1 + H_5 \Delta v_2 + H_6 \Delta \theta_2 \quad (3.27)$$

onde H_1, H_2, \dots e H_6 são as funções de interpolação:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L}; \text{ e } H_2 = \frac{x}{L} \quad (3.28a)$$

$$H_3 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; H_4 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2};$$

$$H_5 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \text{ e } H_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.28b)$$

Matricialmente, tem-se que os deslocamentos Δu e Δv , e a rotação $\Delta \theta$ de um dado ponto do elemento, a uma distância x do nó 1, são dadas por:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} \quad (3.29)$$

onde $\Delta \mathbf{d} = \{\Delta u \Delta v \Delta \theta\}^T$; $\Delta \mathbf{u} = \{\Delta u_1 \Delta v_1 \Delta \theta_1 \Delta u_2 \Delta v_2 \Delta \theta_2\}^T$; e \mathbf{H} tem a seguinte forma:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} N_u \\ N_v \\ N'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_3 & H_4 & 0 & H_5 & H_6 \\ 0 & H_{3,x} & H_{4,x} & 0 & H_{5,x} & H_{6,x} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A transformação de $\Delta \mathbf{u}$ para o sistema de coordenadas global XY (referencial comum) é dada por:

$$\Delta \mathbf{u}_{gl} = \mathbf{R}^T \Delta \mathbf{u} \quad (3.31)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de rotação do elemento.

3.4.1 – Matriz de rigidez

De acordo com Alves (1993b) e Silveira (1995), consegue-se exprimir o indicador variacional (3.23) em função dos deslocamentos e forças nodais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = \Delta \mathbf{u}^T & \left[\frac{1}{2} \mathbf{K}_L + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \Delta \mathbf{u} \\ & + \Delta \mathbf{u}^T {}^t \mathbf{F}_i - \Delta \mathbf{u}^T {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_r \end{aligned} \quad (3.32)$$

As matrizes \mathbf{K}_L , \mathbf{K}_τ , \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 são obtidas diretamente da energia interna de deformação definida pelos termos dados em (3.20) ou seja:

$$k_{L(i,j)} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (3.33a)$$

$$k_{\tau(i,j)} = \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (3.33b)$$

$$k_{1(i,j)} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j \partial \Delta u_k} \Delta u_k \quad (3.33c)$$

$$k_{2(i,j)} = \frac{\partial^4 U_2}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j \partial \Delta u_k \partial \Delta u_l} \Delta u_k \Delta u_l \quad (3.33d)$$

Observa-se que a definição das componentes das matrizes por diferenciação conduz a um procedimento geral que garante a simetria e, ainda, as propriedades de distributividade e comutatividade. Destaca-se ainda para o elemento considerado, que esse procedimento é mais adequado do que a forma tradicional de elementos finitos, onde as matrizes de rigidez são definidas em termos de matrizes de interpolação, sem, no entanto, efetuar a integração no volume do elemento.

Em (3.32), o vetor ${}^t\mathbf{F}_i$ caracteriza a força interna da estrutura na configuração de equilíbrio t .

Levando-se em conta a contribuição de todos os elementos finitos, sem esquecer que o somatório dos vetores e das matrizes deve ser efetuado em relação a um referencial comum (global), chega-se a uma expressão semelhante à (3.32) para o sistema estrutural global em estudo. Do princípio da energia potencial total estacionária, ou seja, aplicando $\partial\Delta\Pi/\partial\Delta\mathbf{u} = 0$, tem-se que a condição de equilíbrio do sistema na configuração $t+\Delta t$ é dada por:

$$\Delta t \mathbf{F}_i + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (3.34)$$

ou:

$$\left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \right] \Delta\mathbf{u} + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (3.35)$$

onde:

$$\Delta t \mathbf{F}_i = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \right] \Delta\mathbf{u} \quad (3.36)$$

e é definido como o incremento das forças internas da estrutura. O vetor \mathbf{g} é definido como o vetor de forças desequilibradas, com sinal negativo, ou seja: $\mathbf{g} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r - {}^t\mathbf{F}_i$.

Na Seção (3.4.2) são mostradas duas diferentes maneiras de se obter o vetor de forças internas $\Delta t \mathbf{F}_i$, levando-se em conta os deslocamentos de corpo rígido.

O vetor \mathbf{g} é definido como sendo igual ao vetor de forças desequilibradas, com sinal negativo.

As Equações (3.34) ou (3.35), representam um sistema de equações algébricas não-lineares. Como já mencionado, a solução desse sistema é obtida neste trabalho através da técnica iterativa de *Newton-Raphson*. Para este esquema de solução, define-se a matriz de rigidez incremental \mathbf{K} .

Alves (1993b) define a matriz de rigidez derivando a expressão das forças internas, Equação (3.36), em relação a $\Delta \mathbf{u}$. Dessa forma, escreve a matriz de rigidez \mathbf{K} sob a forma:

$$\mathbf{K} = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_1(\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \quad (3.37)$$

Torkamani et al. (1997) reescreve a Equação (3.36) na forma: $\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = {}^{\Delta t} \mathbf{F}_i$, onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema:

$$\mathbf{K} = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \quad (3.38)$$

A parcela $(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau)$, independente dos deslocamentos nodais, é a matriz de rigidez tangente ao ponto de equilíbrio inicial. \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez linear; \mathbf{K}_τ é a matriz de tensões iniciais (ou matriz de rigidez geométrica) que é função das forças nodais iniciais. A inclusão da parcela não-linear com as matrizes de primeira e segunda ordem, \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 , corrige a rigidez dada pela matriz de rigidez tangente.

As componentes dessas matrizes serão apresentadas no Apêndice A.

3.4.2 – Vetor de forças internas

Ao se utilizar diretamente a Equação (3.36) para um movimento de corpo rígido, verifica-se a ocorrência de forças internas não nulas referentes à rotação do corpo rígido, o que logicamente não deveria ocorrer.

Dois procedimentos são adotados aqui com o intuito de minorar esse problema. São eles:

- (i) utilização de um *referencial Lagrangiano atualizado* (RLA), pois assim a deformada a ser calculada não se distancia daquela tomada como referência e as rotações de corpo rígido são divididas em partes menores, sendo portanto melhor aproximadas pelas funções de interpolação.
- (ii) cálculo das forças internas da estrutura levando-se em consideração a geometria deformada da barra.

Para as formulações tratadas neste capítulo, foram implementadas duas maneiras diferentes de se obter as forças internas. A primeira maneira a ser analisada nesta seção, proposta por Alves (1993b) e implementada com sucesso por Silveira (1995), consiste em calcular as forças internas, em cada iteração, através dos deslocamentos que realmente provocam deformações, obtidos em relação à configuração inicial indeformada (*deslocamentos naturais totais*). A segunda maneira, sugerida por Yang e Kuo (1994), consiste em se obter as forças internas através dos *deslocamentos naturais incrementais*, isto é, através dos deslocamentos que realmente causam deformações, medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental de solução.

3.4.2.1 – Deslocamentos naturais totais (Alves, 1993b)

Para a obtenção da configuração de equilíbrio $t+\Delta t$, é importante distinguir, para o elemento considerado, os deslocamentos e rotações de corpo rígido daqueles que acarretam realmente deformação. Na Figura 3.4a é mostrado o elemento na configuração deformada e os deslocamentos que realmente provocam deformação; na Figura 3.4b estão presentes as tensões resultantes que se relacionam com estes deslocamentos. Portanto é necessário que se estabeleça uma relação entre ϕ_1 , ϕ_2 e δ , e os deslocamentos nodais do elemento. Da Figura 3.4c, onde é definida a geometria da configuração deformada, escreve-se inicialmente:

$$u = u_2 - u_1 \quad (3.39a)$$

$$v = v_2 - v_1 \quad (3.39b)$$

$$\Psi = \tan^{-1} \left(\frac{v}{L + u} \right) \quad (3.39c)$$

onde Ψ é a rotação de corpo rígido que o elemento sofre. A partir destes valores intermediários, chega-se, observando a mesma figura, às expressões dos *deslocamentos naturais totais* que provocam deformação, ou seja:

$$\delta = \sqrt{(L + u)^2 + v^2} - L \quad (3.40a)$$

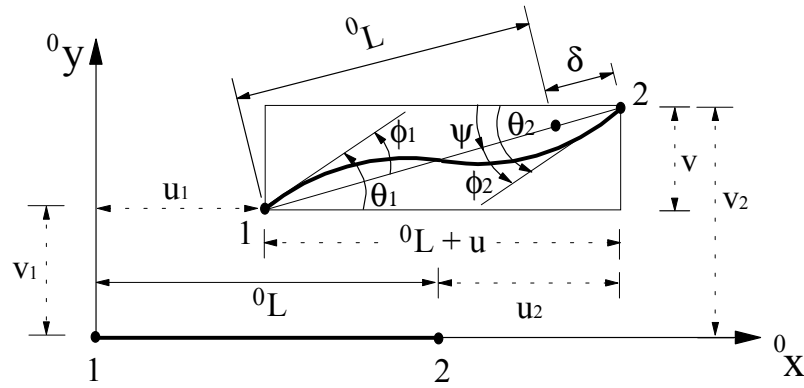
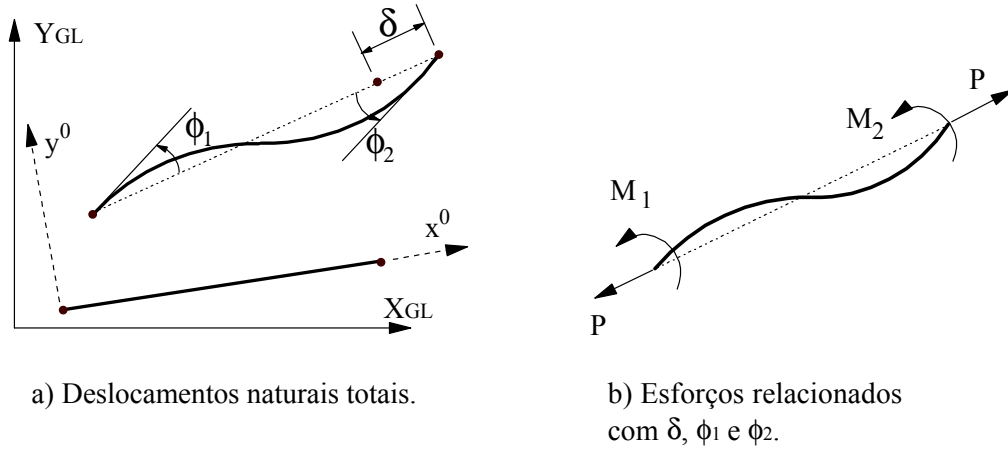
$$\phi_1 = \theta_1 - \Psi \quad (3.40b)$$

$$\phi_2 = \theta_2 - \Psi \quad (3.40c)$$

Essas três componentes definem o vetor de *deslocamentos naturais equivalente* \mathbf{u}_n^* . As forças nodais referentes a \mathbf{u}_n^* são conhecidas usando-se diretamente a Equação (3.36), ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^* = \left[\mathbf{K}_L + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\mathbf{u}_n^*) + \frac{1}{6}\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_n^*, \mathbf{u}_n^*) \right] \mathbf{u}_n^* \quad (3.41)$$

com a exclusão da matriz \mathbf{K}_τ , pois se refere ao estado inicial indeformado $t = 0$.



c) Geometria deformada

Figura 3.4 - Cálculo das forças internas: deslocamentos naturais totais.

Observe, entretanto, que é necessário obter um sistema de forças internas equivalente a ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^*$, escrito na forma completa (6 componentes), para uma possível comparação com as forças nodais externas atuantes no elemento. Como as forças

internas são funções não-lineares de \mathbf{u}_n^* , este sistema equivalente é obtido invocando o princípio dos trabalhos virtuais, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^T \mathbf{du} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{*T} \mathbf{du}_n^* \quad (3.42)$$

onde \mathbf{du} e \mathbf{du}^* são deslocamentos nodais virtuais cinematicamente compatíveis; e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$ é o vetor de forças internas procurado, equivalente a ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^*$.

Das relações geométricas (3.39) e (3.40) podem ser extraídas as seguintes relações entre os deslocamentos virtuais:

$$d\delta = \frac{d\delta}{du_1} du_1 + \frac{d\delta}{dv_1} dv_1 + \frac{d\delta}{d\theta_1} d\theta_1 + \frac{d\delta}{du_2} du_2 + \frac{d\delta}{dv_2} dv_2 + \frac{d\delta}{d\theta_2} d\theta_2 \quad (3.43a)$$

$$d\phi_1 = \frac{d\phi_1}{du_1} du_1 + \frac{d\phi_1}{dv_1} dv_1 + \frac{d\phi_1}{d\theta_1} d\theta_1 + \frac{d\phi_1}{du_2} du_2 + \frac{d\phi_1}{dv_2} dv_2 + \frac{d\phi_1}{d\theta_2} d\theta_2 \quad (3.43b)$$

$$d\phi_2 = \frac{d\phi_2}{du_1} du_1 + \frac{d\phi_2}{dv_1} dv_1 + \frac{d\phi_2}{d\theta_1} d\theta_1 + \frac{d\phi_2}{du_2} du_2 + \frac{d\phi_2}{dv_2} dv_2 + \frac{d\phi_2}{d\theta_2} d\theta_2 \quad (3.43c)$$

que pode ser expresso matricialmente por:

$$\mathbf{du}_n^* = \mathbf{A}^* \mathbf{du} \quad (3.44)$$

onde \mathbf{A}^* é a matriz de compatibilidade cinemática. Após os cálculos das derivadas em (3.43), chega-se a:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -\frac{L+u}{L+\delta} & -\frac{v}{L+\delta} & 0 & \frac{L+u}{L+\delta} & \frac{v}{L+\delta} & 0 \\ -\frac{v}{(L+\delta)^2} & \frac{L+u}{(L+\delta)^2} & 1 & \frac{v}{(L+\delta)^2} & -\frac{L+u}{(L+\delta)^2} & 0 \\ -\frac{v}{(L+\delta)^2} & \frac{L+u}{(L+\delta)^2} & 0 & \frac{v}{(L+\delta)^2} & -\frac{L+u}{(L+\delta)^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Substituindo-se (3.44) em (3.42), o princípio dos trabalhos virtuais assume a seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^T d\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{*T} \mathbf{A}^* d\mathbf{u} \quad (3.46)$$

que após simplificação, fica:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = \mathbf{A}^{*T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^* \quad (3.47)$$

Tem-se então que o vetor de forças nodais absorvidas pela estrutura até a configuração $t+\Delta t$, no sistema global de referências, aqui denominado por ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{i_{gl}}$, é determinado somando-se os esforços internos absorvidos por cada elemento, devidamente transformados para o sistema global de referência, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{i_{gl}} = \sum_{e=1}^m {}^0\mathbf{R}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i \quad (3.48)$$

onde ${}^0\mathbf{R}$ é a matriz de rotação do elemento genérico ‘e’, na configuração inicial indeformada.

3.4.2.2 – Deslocamentos naturais incrementais (Yang e Kuo, 1994)

Nesta abordagem, pretende-se também obter o vetor ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$, só que de maneira incremental, ou seja, obtendo a cada passo incremental o acréscimo nas forças internas. Para isso considera-se válida a relação:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + {}^{\Delta t}\mathbf{F}_i \quad (3.49)$$

onde ${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i$ é obtido diretamente da Equação (3.36), com os deslocamentos naturais incrementais ($\Delta\mathbf{u}_n$), ou seja:

$$\Delta^t \mathbf{F}_i = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta \mathbf{u}_n) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}_n, \Delta \mathbf{u}_n) \right] \Delta \mathbf{u}_n \quad (3.50)$$

Observe que neste contexto a inclusão de \mathbf{K}_τ é necessária porque se refere ao estado deformado da configuração de equilíbrio t . $\Delta \mathbf{u}_n$ é o vetor de *deslocamentos naturais incrementais* (Figura 3.5a), definido como:

$$\Delta \mathbf{u}_n^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \phi_1 & \delta & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

para o qual se tem:

$$u = \Delta u_2 - \Delta u_1 \quad (3.52a)$$

$$v = \Delta v_2 - \Delta v_1 \quad (3.52b)$$

$$\Psi = \tan^{-1} \left(\frac{v}{u} \right) \quad (3.52c)$$

onde Ψ é a rotação de corpo rígido que o elemento sofre. A partir destes valores intermediários, chega-se, observando a mesma figura, às expressões dos deslocamentos que provocam deformação, ou seja:

$$\delta = {}^{t+\Delta t}L - {}^tL \quad (3.53a)$$

$$\phi_1 = \Delta \theta_1 - \Psi \quad (3.53b)$$

$$\phi_2 = \Delta \theta_2 - \Psi \quad (3.53c)$$

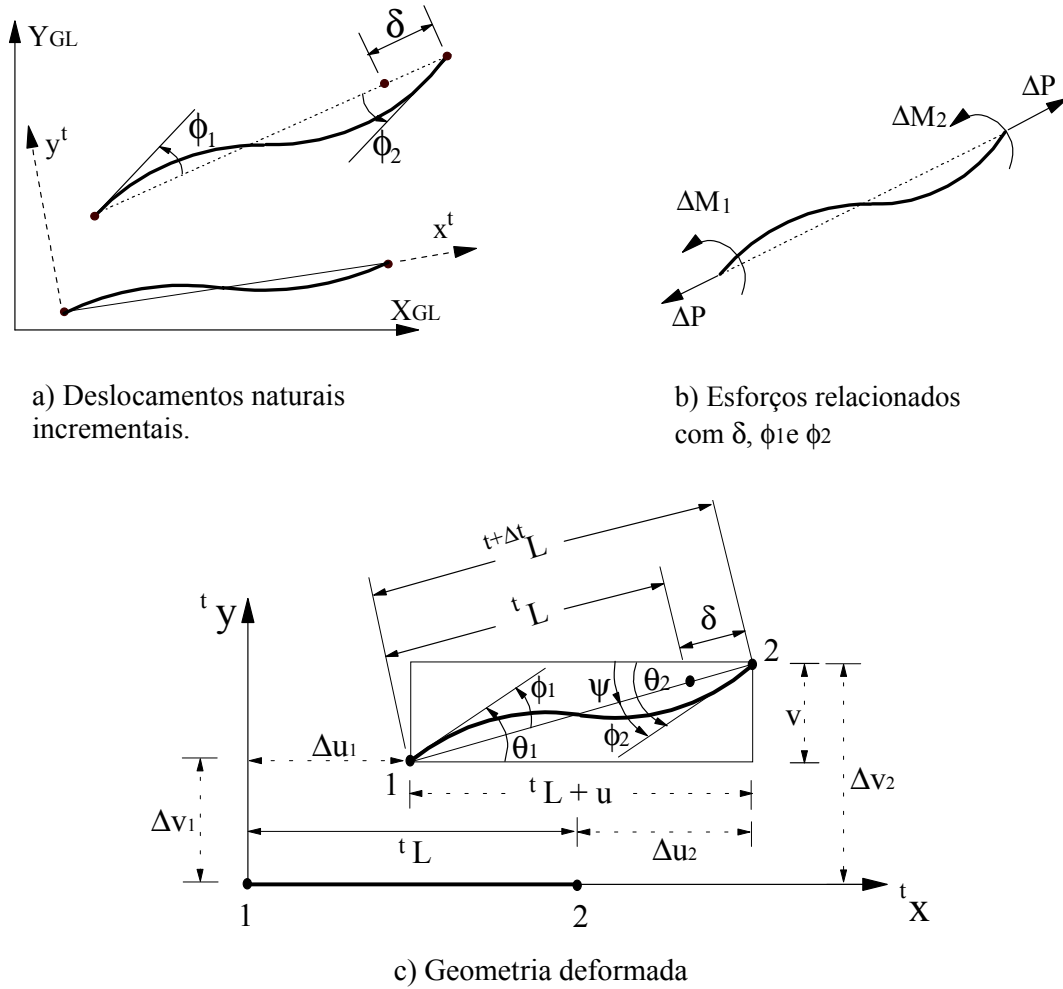


Figura 3.5 - Cálculo das forças internas: deslocamentos naturais incrementais.

Utilizando a relação (3.49) juntamente com (3.50) chega-se ao vetor de forças nodais absorvidas pela estrutura na configuração de equilíbrio $t+\Delta t$, determinado no sistema local para o elemento genérico e .

O vetor de forças internas deve ser transformado para o sistema global através da matriz \mathbf{R}_a , que é a matriz de rotação entre o sistema global de referências e o sistema local atualizado na última iteração processada. O vetor de forças internas do sistema é, então, obtido na forma global somando-se os esforços internos absorvidos por cada elemento, devidamente transformados para o sistema global de referência, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{i\text{ gl}} = \sum_{e=1}^m \mathbf{R}_a^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i \quad (3.54)$$

3.5 – RESUMO

A Figura 3.6 fornece os principais aspectos das formulações desenvolvidas neste capítulo juntamente com símbolos pelos quais serão designadas ulteriormente.

Alves (1993b)

<p>- Tensor de Green completo: $\Delta\epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta\eta_{xx}$</p> $\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2\Delta v}{dx^2}$ $\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left(\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 dx \right]$ <p>- Funcional de energia:</p> $\Delta\Pi = \Delta u^T \left[\frac{1}{2} \mathbf{K}_L + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\Delta u) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2(\Delta u, \Delta u) \right] \Delta u + \Delta u^T {}^t\mathbf{F}_i - \Delta u^T {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r$ <p>- Matriz de rigidez no RLA com termos de ordem elevada:</p> $\mathbf{K} = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_1(\Delta u) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_2(\Delta u, \Delta u) \right]$	<p>AFT</p> <p>AFI</p>	<p>- Vetor de forças internas: <i>deslocamentos naturais totais:</i></p> ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^* = \left[\mathbf{K}_L + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(u_n^*) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(u_n^*, u_n^*) \right] u_n^*$ ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = \mathbf{A}^{*T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^*$ <p>- Vetor de forças internas: <i>deslocamentos naturais incrementais:</i></p> $\Delta^t \mathbf{F}_i = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta u_n) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta u_n, \Delta u_n) \right] \Delta u_n$ ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \Delta^t \mathbf{F}_i$
--	-------------------------------------	--

Torkamani et al. (1997)

<p>- Tensor de Green simplificado: $\Delta\epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta\eta_{xx}$</p> $\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2\Delta v}{dx^2}$ $\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2$ <p>- Efeitos dos momentos desprezados do estado inicial de tensões: ${}^t\epsilon = \frac{p}{EA}$</p> <p>- Funcional de energia:</p> $\Delta\Pi = \Delta u^T \left[\frac{1}{2} \mathbf{K}_L + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\Delta u) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2(\Delta u, \Delta u) \right] \Delta u + \Delta u^T {}^t\mathbf{F}_i - \Delta u^T {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r$ <p>- Matriz de rigidez no RLA com termos de ordem elevada:</p> $\mathbf{K} = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta u) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta u, \Delta u) \right]$	<p>TFT</p> <p>TFI</p>	<p>- Vetor de forças internas: <i>deslocamentos naturais totais:</i></p> ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^* = \left[\mathbf{K}_L + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(u_n^*) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(u_n^*, u_n^*) \right] u_n^*$ ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = \mathbf{A}^{*T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^*$ <p>- Vetor de forças internas: <i>deslocamentos naturais incrementais:</i></p> $\Delta^t \mathbf{F}_i = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta u_n) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta u_n, \Delta u_n) \right] \Delta u_n$ ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \Delta^t \mathbf{F}_i$
---	-------------------------------------	--

Figura 3.6 – Resumo das formulações: Alves (1993b) e Torkamani et al. (1997).

4

FORMULAÇÕES NÃO-LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS: YANG e KUO (1994)

4.1 – INTRODUÇÃO

As formulações não-lineares de elementos finitos a serem tratadas neste capítulo para modelagem de sistemas reticulados planos foram introduzidas por Yang e Kuo (1994).

Essas formulações são baseadas em relações deformação-deslocamento geradas a partir do tensor de Green-Lagrange, correspondentes às deformações axiais e transversais, para as quais é aceita a hipótese da teoria de vigas de Bernoulli, conforme apresentado na Seção (4.2).

A Seção (4.3) mostra a obtenção das equações de equilíbrio através do princípio da energia potencial total, para três casos diferentes: o modelo ‘*linearizado*’, para o qual se despreza as parcelas não-lineares das relações correspondentes às deformações incrementais; o modelo ‘*linearizado-simplificado*’, para o qual, além das simplificações da formulação anterior, não se considera a parcela $(d\Delta\bar{u}/dx)^2$ da relação referente às deformações axiais iniciais; e, finalmente, o modelo com termos de ‘*ordem elevada*’ para o qual se usa as relações completas.

Na Seção (4.4) serão apresentadas as matrizes de rigidez dessas formulações, obtidas em *referencial Lagrangeano atualizado* (RLA), e os vetores de forças internas, cuja obtenção é feita a partir de duas abordagens diferentes: através dos ‘*deslocamentos naturais incrementais*’ e usando a matriz de ‘*rigidez externa*’.

4.2 – RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

Da mesma maneira que os modelos introduzidos por Alves (1993b) e por Torkamani et al. (1997), as formulações de elementos finitos não-lineares sugeridas por Yang e Kuo (1994) foram baseadas em relações deformação-deslocamento geradas a partir do tensor de Green-Lagrange. Entretanto, além das relações correspondentes às deformações axiais, são consideradas também as relações correspondentes às deformações cisalhantes, conforme mostrado a seguir:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

$$\Delta \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta \bar{u}}{dy} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta \bar{u}}{dy} \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{d\Delta v}{dy} \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (4.2)$$

que podem também ser expressas, separando-se as parcelas lineares das não-lineares da seguinte forma:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx} \quad (4.3)$$

$$\Delta \epsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + \Delta \eta_{xy} \quad (4.4)$$

para as quais se tem:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \quad \Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta \bar{u}}{dy} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad \Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta \bar{u}}{dy} \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{d\Delta v}{dy} \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (4.6)$$

onde $\Delta \bar{u}$ é o deslocamento axial de um ponto distante y da linha neutra da seção.

Aceitando-se a hipótese da teoria de vigas de Bernoulli de que as seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a deformação, escreve-se, conforme visto na Figura 3.1:

$$\Delta \bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (4.7)$$

onde a primeira parcela, Δu , é uma consequência dos esforços extencionais atuantes e é constante ao longo da seção; a segunda parcela, $y(d\Delta v/dx)$, é devida aos esforços de flexão, e varia linearmente com a distância à linha neutra.

Substituindo-se (4.7) em (4.5), tem-se para as deformações axiais as seguintes relações:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \quad (4.8a)$$

$$\Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} + y^2 \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (4.8b)$$

que são semelhantes às relações (3.4) e (3.5), utilizadas por Alves (1993b) e Torkamani et al. (1997). Substituindo-se (4.7) em (4.6), tem-se para as deformações cisalhantes:

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] = 0 \quad (4.9a)$$

Portanto, a parcela linear das deformações transversais, ao se considerar a hipótese de Bernoulli, se anula. Entretanto, o mesmo não ocorre para a parcela não-linear que fica da seguinte forma:

$$\Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} + y \left(\frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) \right] \quad (4.9b)$$

Para um *referencial Lagrangiano atualizado* (RLA) é indispensável que se defina para o elemento finito considerado o estado de tensões, ou de deformações, na última configuração de equilíbrio obtida no processo de solução incremental, ou seja, na configuração t . Os esforços iniciais resultantes (axiais tP , cisalhantes tQ , e momento fletor tM) podem ser definidos por:

$${}^tP = \int_A {}^t\tau_{xx} dA \quad (4.11)$$

$${}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA \quad (4.12)$$

$${}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (4.13)$$

A partir da Figura 3.2 do capítulo anterior, Yang e Kuo (1994) definem:

$${}^tM = -M_1 + \frac{(M_1 + M_2)}{L}x \quad {}^tQ = -\frac{(M_1 + M_2)}{L} \quad (4.14)$$

Para um elemento de pórtico plano cuja hipótese de Bernoulli tenha sido adotada, apenas as tensões axiais $\Delta^t\tau_{xx}$ podem ser obtidas diretamente da lei constitutiva: $\Delta^t\tau_{xx} = E\Delta\epsilon_{xx}$. O mesmo não deve ser feito para as tensões cisalhantes incrementais $\Delta^t\tau_{xy}$; essas devem ser determinadas indiretamente, ou seja, das condições de equilíbrio. Fazendo assim, Yang e Kuo (1994) determinou que a seguinte relação deveria ser considerada:

$$\Delta^t\tau_{xy} = S_{xy}^l + S_{xy}^n \quad (4.15)$$

onde as parcelas linear e não linear do incremento de tensões cisalhantes são dadas por:

$$S_{xy}^l = \frac{E}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \quad (4.16a)$$

$$S_{xy}^n = \frac{E}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \quad (4.16b)$$

sendo h igual a altura da seção transversal do elemento de viga.

4.3 – FUNCIONAL DE ENERGIA

O funcional de energia na configuração $t+\Delta t$ é definido como na Equação (3.18), ou seja:

$$\Delta \Pi = \Delta U + \Delta V \quad (4.17)$$

sendo o incremento de energia de deformação, ΔU , definido, para o *referencial Lagrangiano atualizado* (RLA) como:

$$\Delta U = \int_{Vol} \int_{\epsilon_{ij}^t}^{\epsilon_{ij}^t + \Delta \epsilon_{ij}} (\Delta \tau_{ij} d\epsilon_{ij}) dVol \quad (4.18)$$

Considerando-se então as deformações axiais e cisalhantes, escreve-se:

$$\begin{aligned} \Delta U = & \iint_{Vol} \left(\tau_{xx}^t \Delta \epsilon_{xx} + 2 \tau_{xy}^t \Delta \epsilon_{xy} \right) dAdx \\ & + \iint_{Vol} \left(\frac{E}{2} \Delta \epsilon_{xx}^2 + 2 \tau_{xy}^{\Delta t} \Delta \epsilon_{xy} \right) dAdx \end{aligned} \quad (4.19)$$

O incremento da energia potencial das forças externas ΔV é definido como:

$$\Delta V = - \int_s F_i \Delta u_i ds = - \left[\int_s \tau_{ij}^t \Delta u_i ds + \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds \right] \quad (4.20)$$

Três diferentes abordagens serão feitas a seguir, dando origem a três diferentes formulações de elementos finitos não-lineares.

4.3.1 – Formulação linearizada

Nessa abordagem, assume-se que as deformações incrementais são tão pequenas que as parcelas não-lineares destas podem ser desprezadas. Assim, levando-se em conta (4.8a), a Equação (4.19) pode ser reescrita:

$$\Delta U = \iint_{Vol} \left({}^t\tau_{xx} \Delta \epsilon_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \Delta \epsilon_{xy} \right) dAdx + \iint_{Vol} \left(\frac{E}{2} \Delta e_{xx}^2 \right) dAdx \quad (4.21)$$

Seguindo a proposta de Alves (1993b), pode-se definir o funcional de energia da seguinte forma:

$$\Delta \Pi = U_0 + U_\tau + U_L - \left[\int_s {}^tF_i \Delta u_i ds + \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds \right] \quad (4.22)$$

onde, usando-se (4.11) a (4.13), tem-se:

$$U_0 = \int_{vol} \left({}^t\tau_{xx} \Delta e_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \Delta e_{xy} \right) dvol \quad (4.23a)$$

$$U_\tau = \frac{1}{2} \int_0^L {}^tP \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left(\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^tM \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^tQ \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \right] dx \quad (4.23b)$$

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{Vol} E \Delta e_{xx}^2 {}^t dVol \quad (4.23c)$$

Com o objetivo de obter equações de equilíbrio na forma incremental, efetuou-se uma simplificação semelhante à mostrada no capítulo anterior pelas Equações (3.21) e (3.22):

$$\int_{vol} \left({}^t\tau_{xx} \Delta e_{xx} + 2 {}^t\tau_{xy} \Delta e_{xy} \right) dvol = \int_s {}^tF_i \Delta u_i ds \quad (4.24)$$

ou então, de (4.23a) tem-se :

$$U_0 = \int_s {}^tF_i \Delta u_i ds \quad (4.25)$$

onde o lado direito da equação corresponde ao trabalho virtual das forças externas acumuladas até a configuração t. O funcional de energia pode então ser reescrito na forma:

$$\Delta \Pi = U_\tau + U_L - \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds \quad (4.26)$$

4.3.2 – Formulação linearizada-simplificada

Para a formulação ‘linearizada-simplificada’, a parcela $(d\Delta \bar{u}/dx)^2$ é desprezada da relação (4.5). Nesse caso, em (4.26) assume-se $U_\tau = U_{\tau-s}$, onde:

$$U_{\tau-s} = \frac{1}{2} \int_0^L {}^tP \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L {}^tQ \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} dx \quad (4.27)$$

4.3.3 – Formulação com termos de ordem elevada

Nessa abordagem as parcelas não-lineares das deformações incrementais não são desprezadas. Além dessas formulações proposta por Yang e Kuo (1994) e das formulações introduzidas por Alves (1993b) e Torkamani et al. (1997), que foram implementadas e analisadas no presente trabalho, pode-se citar diversas outras que da mesma forma adotam os termos de ordem elevada, como por exemplo as formulações propostas por Ebner (1972), Wen et al. (1983), Chages et al. (1987).

Considerando as relações (4.8a), (4.8b) e (4.9b), a Equação (4.26) é então reescrita com a adição dos termos de ordem elevada da seguinte forma:

$$\Delta\Pi = U_\tau + U_L + U_1 + U_2 - \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds \quad (4.28)$$

onde, U_L e U_τ são idênticos aos dados em (4.23); substituindo-se (4.3), (4.4) e (4.15) em (4.19), chega-se a:

$$U_1 = \int_{Vol} \left(E \Delta e_{xx} \Delta \eta_{xx} + 2 S_{xy}^l \Delta \eta_{xy} \right) dVol \quad (4.29a)$$

$$U_2 = \int_{Vol} \left(\frac{E}{2} \Delta \eta_{xx}^2 + 2 S_{xy}^n \Delta \eta_{xy} \right) dVol \quad (4.29b)$$

Substituindo nessas equações as relações (4.5), (4.6) e (4.16), e considerando-se algumas simplificações, pode-se escrever:

$$U_1 = \int_0^L \left[\frac{EA}{2} \left(\frac{d\Delta u}{dx}^2 + \frac{d\Delta v}{dx}^2 \right) + \frac{3EI}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + EI \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d\Delta u}{dx} \right] dx \quad (4.30a)$$

$$U_2 = \int_0^L \left[\frac{EA}{8} \left(\frac{d\Delta u}{dx}^2 + \frac{d\Delta v}{dx}^2 \right)^2 + \frac{EI}{8} \left(\frac{d\Delta u}{dx}^2 + \frac{d\Delta v}{dx}^2 \right) \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) + \frac{EI}{2} \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + EI \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \right] dx \quad (4.30b)$$

4.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

O elemento de viga-coluna adotado por Yang e Kuo (1994) é o mesmo elemento que foi adotado por Alves (1993b) e Torkamani et al. (1997) e está esquematizado na Figura 3.1 do capítulo anterior. Trata-se, portanto, de um segmento reto, limitado por dois nós, que se deforma no plano de definição da estrutura. Cada elemento define um sistema local de coordenadas xy , rotacionado em relação a um sistema de coordenadas global XY de um certo ângulo α .

As funções de interpolação são também as mesmas utilizadas para as formulações do Capítulo 3 e definidas pelas Equações (3.28a) e (3.28b), linear para o deslocamento axial incremental Δu e cúbica para a componente transversal Δv , garantindo assim a continuidade de deslocamentos e rotação nos bordos dos elementos adjacentes.

4.4.1 – Matriz de rigidez

De acordo com Alves (1993b) e Silveira (1995) consegue-se exprimir o indicador variacional em função dos deslocamentos e forças nodais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = \Delta \mathbf{u}^T & \left[\frac{1}{2} \mathbf{K}_L + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \Delta \mathbf{u} \\ & + \Delta \mathbf{u}^T {}^t \mathbf{F}_i - \Delta \mathbf{u}^T {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_r \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde as componentes das matrizes \mathbf{K}_L , \mathbf{K}_τ , \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 são obtidas diretamente da energia interna de deformação definida pelas componentes dadas em (4.23), (4.27) e (4.30) ou seja:

$$k_{L(i,j)} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (4.32a)$$

$$k_{\tau(i,j)} = \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (4.32b)$$

$$k_{1(i,j)} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j \partial \Delta u_k} \Delta u_k \quad (4.32c)$$

$$k_{2(i,j)} = \frac{\partial^4 U_2}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j \partial \Delta u_k \partial \Delta u_l} \Delta u_k \Delta u_l \quad (4.32d)$$

sendo que \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 só são obtidas e consideradas para a formulação com ‘*ordem elevada*’.

Em (4.31), o vetor ${}^t\mathbf{F}_i$ caracteriza a força interna da estrutura na configuração de equilíbrio t .

Levando-se em conta mais uma vez a contribuição de todos os elementos finitos, sem esquecer que o somatório dos vetores e das matrizes deve ser efetuado em relação a um referencial comum (global), chega-se a uma expressão semelhante à (4.31) para o sistema estrutural em estudo. Do princípio da energia potencial total estacionária tem-se que a condição de equilíbrio do sistema na configuração $t+\Delta t$ é dada por:

$$\Delta t \mathbf{F}_i + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (4.33)$$

ou:

$$\left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \Delta \mathbf{u} + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (4.34)$$

onde:

$$\Delta t \mathbf{F}_i = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \right] \Delta \mathbf{u} \quad (4.35)$$

é definido como o incremento das forças internas da estrutura. O vetor \mathbf{g} é definido como o vetor de forças desequilibradas, com sinal negativo, ou seja:

$$\mathbf{g} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r - {}^t\mathbf{F}_i \quad (4.36)$$

No Apêndice B serão fornecidas as componentes das matrizes \mathbf{K}_L , \mathbf{K}_τ , \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 .

A seguir, na Seção (4.4.2), serão mostradas duas formas diferentes, sugeridas por Yang e Kuo (1994), de se calcular o vetor de forças internas levando-se em conta os deslocamentos de corpo rígido.

Yang e Kuo (1994) afirmam que não é necessária a utilização dos termos de ordem elevada no cálculo da solução predita, mas que, para a formulação com termos de ‘ordem elevada’, esses devem ser incluídos na fase corretiva da solução incremental-iterativa, ou seja, no cálculo do vetor de forças internas. Assim, para as três formulações, pode-se considerar a matriz de rigidez da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau] \quad (4.37)$$

4.4.2 – Vetor de forças internas

Para as formulações tratadas neste capítulo, foram implementadas as duas formas diferentes de se obter as forças internas sugeridas por Yang e Kuo (1994).

A primeira maneira a ser abordada consiste em se calcular as forças internas através dos *deslocamentos naturais incrementais*, a segunda forma baseia-se na definição de uma ‘*matriz de rigidez externa*’, e que segundo Yang e Kuo (1994), é o procedimento mais sistemático de se obter o vetor de forças internas, pois pode ser utilizado para outros tipos de elementos.

Essas duas abordagens para o cálculo das forças internas introduzidas para as três formulações anteriores, geram seis esquemas diferentes. No presente trabalho, a abordagem da ‘*matriz de rigidez externa*’ só foi introduzida para o modelo ‘*linearizado*’. Assim, somente quatro, desses seis possíveis esquemas, serão considerados neste trabalho.

4.4.2.1 – Deslocamentos naturais incrementais

Pretende-se nesta abordagem obter o vetor ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$ de maneira incremental, ou seja, a cada passo de carga o acréscimo nas forças internas deve ser calculado. Para isso considera-se válida a relação:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \Delta^t\mathbf{F}_i \quad (4.38)$$

onde $\Delta^t\mathbf{F}_i$ é obtido diretamente da relação:

$$\Delta^t\mathbf{F}_i = \mathbf{K} \Delta\mathbf{u}_n \quad (4.39)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez para as formulações ‘*linearizada*’ e ‘*linearizada-simplificada*’ dada por:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau] \quad (4.40a)$$

ou para o modelo com termos de ‘*ordem elevada*’:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{u}_n) + \frac{1}{6}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{u}_n, \Delta\mathbf{u}_n) \quad (4.40b)$$

e $\Delta\mathbf{u}_n$ é o vetor de *deslocamentos naturais incrementais* do elemento, no sistema local, que é definido como:

$$\Delta\mathbf{u}_n = [0 \quad 0 \quad \phi_1 \quad \delta \quad 0 \quad \phi_2]^T \quad (4.41)$$

da mesma Figura 3.5, pode-se escrever:

$$u = \Delta u_2 - \Delta u_1 \quad (4.42a)$$

$$v = \Delta v_2 - \Delta v_1 \quad (4.42b)$$

$$\Psi = \tan^{-1} \left(\frac{v}{t_L} \right) \quad (4.42c)$$

onde Ψ é a rotação de corpo rígido que o elemento sofre. A partir desses valores, chega-se, observando a mesma figura, às expressões dos deslocamentos que provocam deformação, ou seja:

$$\delta = {}^{t+\Delta t}L - {}^tL \quad (4.43a)$$

$$\phi_1 = \Delta \theta_1 - \Psi \quad (4.43b)$$

$$\phi_2 = \Delta \theta_2 - \Psi \quad (4.43c)$$

Utilizando a relação (4.39) juntamente com (4.38) chega-se, portanto, ao vetor de forças nodais absorvidas pela estrutura na configuração de equilíbrio $t+\Delta t$, determinado no sistema local para o elemento genérico.

O vetor de forças internas deve ser transformado para o sistema global através da matriz \mathbf{R}_a , que é a matriz de rotação entre o sistema global de referências e o sistema local atualizado na última iteração processada. O vetor de forças internas do sistema é, então, obtido na forma global somando-se os esforços internos absorvidos por cada elemento, devidamente transformados para o sistema global de referência, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{i\text{gl}} = \sum_{e=1}^m \mathbf{R}_a^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i \quad (4.44)$$

4.4.2.2 – Matriz de rigidez externa

Esta abordagem tem a vantagem de ser mais geral e sistemática, podendo ser estendida à análise de estruturas compostas por outros tipos de elementos.

As rotações de corpo rígido, conforme ilustrado na Figura 4.1, podem ser descritas pelo vetor:

$$\Delta \mathbf{u}_{re} = [0 \quad 0 \quad \Psi \quad 0 \quad L\Psi \quad \Psi]^T \quad (4.45)$$

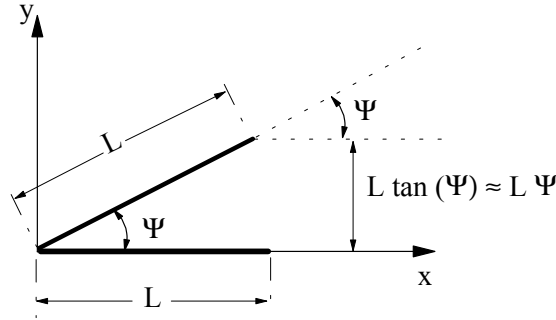


Figura 4.1 – Rotação de corpo rígido.

Observa-se que para o elemento de pórtico plano, nenhuma força é gerada pela matriz de rigidez elástica, pois $\mathbf{K}_L \Delta \mathbf{u}_{re} = \{\mathbf{0}\}$. Porém a matriz \mathbf{K}_τ não passa no teste de corpo rígido. Por exemplo, para o modelo ‘linearizado’ tem-se que:

$$\mathbf{K}_\tau \Delta \mathbf{u}_{re} = \left\{ -\frac{M_1 + M_2}{L} \Psi \quad -P\Psi \quad 0 \quad \frac{M_1 + M_2}{L} \Psi \quad P\Psi \quad 0 \right\}^T \quad (4.46)$$

Considerando-se a aproximação para a rotação de corpo rígido: $\Psi = (v_2 - v_1)/L$, pode-se definir a matriz de rigidez externa, \mathbf{K}_{re} , reorganizando-se (4.46) na forma do seguinte produto:

$$\mathbf{K}_\tau \Delta \mathbf{u}_{re} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{M_1 + M_2}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{M_1 + M_2}{L^2} & 0 \\ \frac{M_1 + M_2}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 & -\frac{M_1 + M_2}{L^2} & -\frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M_1 + M_2}{L^2} & 0 & 0 & \frac{M_1 + M_2}{L^2} & 0 \\ -\frac{M_1 + M_2}{L^2} & -\frac{P}{L} & 0 & \frac{M_1 + M_2}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{re} \Delta \mathbf{u} \quad (4.47)$$

onde, considerando-se as aproximações mostradas na Figura 4.1, foram inseridos alguns termos na matriz \mathbf{K}_{re} com o objetivo de torná-la simétrica.

Finalmente, o vetor de forças internas incrementais pode ser obtido levando-se em consideração os efeitos de corpo rígido da seguinte forma:

$$\Delta^t \mathbf{F}_i = (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{re}) \Delta \mathbf{u} \quad (4.48)$$

O vetor de forças internas do sistema na forma global, considerando-se (4.38), é obtido somando-se os esforços internos absorvidos por cada elemento, devidamente transformados para o sistema global de referência através da seguinte relação:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{i\,gl} = \sum_{e=1}^m \mathbf{R}_a^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i \quad (4.49)$$

Pode-se afirmar que a abordagem com a introdução da ‘*matriz de rigidez externa*’ tende a produzir valores para as forças internas tanto mais próximos daqueles obtidos usando ‘*deslocamentos naturais incrementais*’ quanto menores forem os deslocamentos. Uma maneira de se visualizar esta afirmação é reescrever a Equação (4.48) da seguinte forma:

$$\Delta^t \mathbf{F}_i = \mathbf{K} [\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_{re}] \quad (4.50)$$

observando as propriedades da matriz \mathbf{K} , pode-se rearranjar (4.50) como segue:

$$\Delta^t \mathbf{F}_i = \mathbf{K} [\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_{re}] = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \theta_1 - \psi \\ \Delta u_2 - \Delta u_1 \\ 0 \\ \Delta \theta_2 - \psi \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Observe que o vetor de deslocamentos mostrado acima, para pequenas rotações, é aproximadamente igual ao vetor $\Delta \mathbf{u}_n$, cujas componentes são dadas em (4.42).

4.5 – RESUMO

A Figura 4.1 apresenta um resumo das formulações desenvolvidas neste capítulo juntamente com símbolos pelos quais serão designadas na sequência deste trabalho.

Características gerais:

- Tensor de Green completo:

i- deformações axiais:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right]$$

ii- deformações cisalhantes:

$$\Delta \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta \bar{u}}{dy} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta \bar{u}}{dy} \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{d\Delta v}{dy} \frac{d\Delta v}{dx} \right]$$

- Vetor de forças internas,
com exceção de **YGE**,
calculado através dos:
deslocamentos naturais incrementais:

$$\Delta^t \mathbf{F}_i = \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_n$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i = {}^t \mathbf{F}_i + \Delta^t \mathbf{F}_i$$

- No cálculo da solução predita,
considera-se apenas a parcela linear
da matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau]$$

YGN	{	- Formulação <i>linearizada</i> :
		$\Delta \Pi = U_\tau + U_L - \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds$
YGE	{	- Matriz de rigidez:
		$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau]$
YGE	{	- Formulação <i>linearizada</i> :
		$\Delta \Pi = U_\tau + U_L - \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds$
		- Matriz de rigidez:
		$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau]$
YGE	{	- Vetor de forças internas:
		<i>matriz de rigidez externa:</i>
		$\Delta^t \mathbf{F}_i = (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{re}) \Delta \mathbf{u}$
		${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i = {}^t \mathbf{F}_i + \Delta^t \mathbf{F}_i$
YSN	{	- Formulação <i>linearizada-simplificada</i> :
		$\Delta \Pi = U_{\tau-s} + U_L - \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds$
YSN	{	- Matriz de rigidez:
		$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau]$
YHN	{	- Formulação com <i>ordem elevada</i> :
		$\Delta \Pi = U_\tau + U_L + U_1 + U_2 - \int_s \Delta F_i \Delta u_i ds$
YHN	{	- Matriz de rigidez:
		$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u}) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})$

Figura 4.2 – Resumo das formulações: Yang e Kuo (1994).

5

FORMULAÇÕES NÃO-LINEARES DE ELEMENTOS FINITOS: PACOSTE e ERIKSSON (1997)

5.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as formulações de elementos finitos propostas recentemente por Pacoste e Eriksson (1997). Essas formulações, diferentemente daquelas apresentadas nos capítulos anteriores, são desenvolvidas em *referencial Lagrangiano total* (RLT), com duas abordagens diferentes para os deslocamentos: a abordagem total propriamente dita, em que os deslocamentos nodais são referidos a um sistema de coordenadas locais fixo; e a abordagem corrotacional, onde a matriz de rigidez e o vetor de forças internas são calculados no campo dos deslocamentos naturais totais, isto é, os deslocamentos são referidos a um sistema de eixos que é continuamente atualizado à medida que o elemento gira.

A Seção (5.2) pretende expor as diferentes relações deformação-deslocamento consideradas nas formulações propostas, mostrando, mais uma vez a participação do tensor de Green-Lagrange e introduzindo as chamadas relações ‘melhoradas’ sugeridas por Pacoste e Eriksson (1997).

A Seção (5.3) fornece, de um modo geral, o funcional de energia do sistema em estudo.

Finalmente, na Seção (5.4), são apresentadas detalhadamente as cinco formulações de elementos finitos com as considerações das diferentes funções de interpolação e definições das matrizes de rigidez e dos vetores de forças internas.

5.2 – RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

As cinco formulações de elementos finitos introduzidas por Pacoste e Eriksson (1997) foram baseadas em diferentes relações deformação-deslocamento. As duas formulações com abordagem ‘corrotacional’, assim como todas as outras formulações de elementos finitos apresentadas nos Capítulos 3 e 4 utilizam relações do tensor de Green-Lagrange, com a aceitação da hipótese da teoria de vigas de Bernoulli. As outras três formulações, cuja abordagem foi denominada ‘total’, foram baseadas em relações ‘melhoradas’, com a introdução da não-linearidade através de funções trigonométricas.

Uma observação importante é que todas as formulações apresentadas em Pacoste e Eriksson (1997), ao contrário daquelas dos capítulos anteriores, utilizam o *referencial Lagrangiano total* (RLT). Portanto, as relações apresentadas neste capítulo são referentes a deslocamentos e deformações ‘totais’ e não ‘incrementais’.

5.2.1 – Relações baseadas no Tensor de Green-Lagrange

As formulações de elementos finitos introduzidas por Pacoste e Eriksson (1997) que se basearam numa abordagem ‘corrotacional’, consideram as relações deformação-deslocamento do tensor de Green-Lagrange, aceitando-se adicionalmente a hipótese da teoria de vigas de Bernoulli. Dessa forma, são apresentadas a seguir as relações consideradas.

5.2.1.1 – Relações de segunda ordem

Estas relações são geradas pelo tensor de Green-Lagrange incompleto, pois despreza-se o termo $(d\bar{u}/dx)^2$ da relação correspondente às deformações axiais. É ainda realizada uma uniformização das deformações axiais, semelhante à sugerida por Alves (1993b), para contornar os efeitos de ‘membrane locking’, ou seja:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (5.1a)$$

Considerando-se apenas a parcela linear das deformações transversais e a hipótese de Bernoulli, conforme mostrado na Equação (4.9a) do capítulo anterior, chega-se a:

$$\gamma = 2 \epsilon_{xy} = 2 e_{xy} = 0 \quad (5.1b)$$

A curvatura k da viga é aproximada pela relação:

$$k = \frac{d\theta}{dx} \quad (5.1c)$$

onde foi assumido $\theta = \frac{dv}{dx}$. As relações constitutivas correspondentes são dadas por:

$$P = EA\epsilon_{xx} \quad M = EI k \quad (5.2)$$

5.2.1.2 – Relações lineares

Caso as parcelas não lineares das relações anteriores sejam desprezadas, pode-se escrever:

$$\epsilon_{xx} = \frac{d\bar{u}}{dx} \quad (5.3a)$$

$$\gamma = 0 \quad (5.3b)$$

$$k = \frac{d\theta}{dx} \quad (5.3c)$$

As relações constitutivas a serem consideradas aqui são as mesmas de (5.2).

5.2.2 – Relações melhoradas

Com o objetivo de obter um elemento de viga não-linear, capaz de representar corretamente os termos de energia de ordem elevada, serão introduzidas as relações deformação-deslocamento ‘melhoradas’.

A configuração corrente deformada dos eixos da viga, conforme a Figura 5.1, pode ser descrita por uma curva regular definida pelo vetor posição:

$$\mathbf{r}(x) = [x + u(x)]\mathbf{i} + v(x)\mathbf{j} \quad (5.4)$$

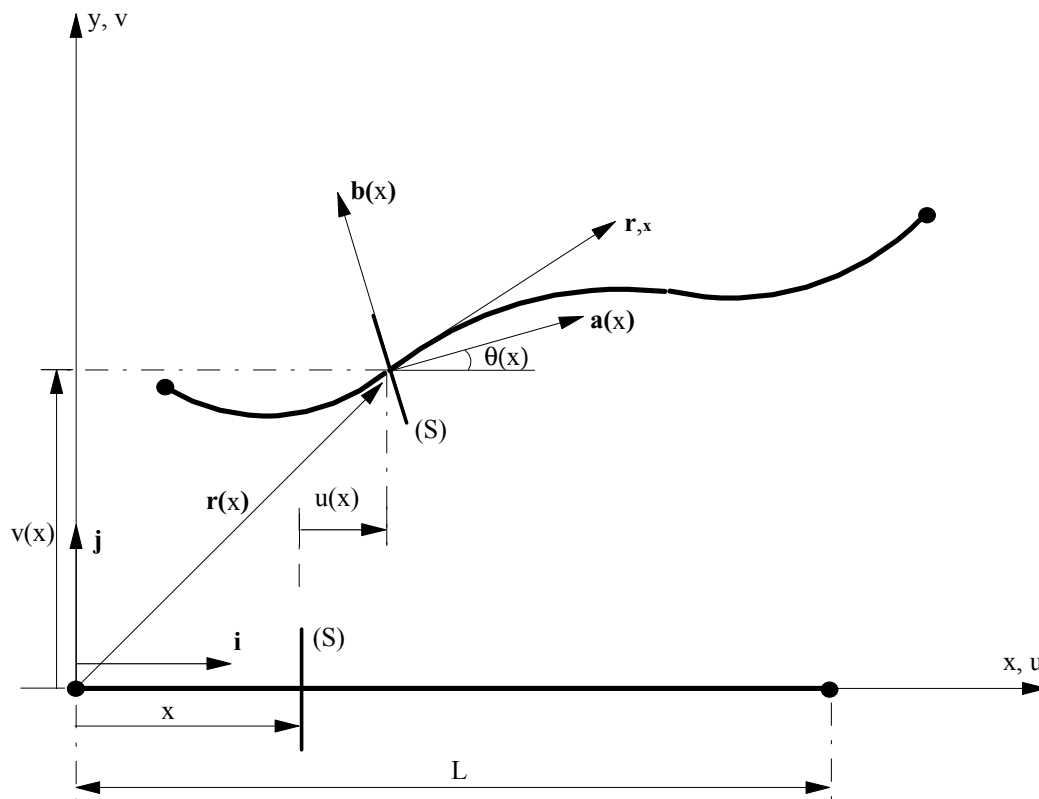


Figura 5.1 – Relações geométricas.

onde cada ponto do eixo da viga é associado a uma seção transversal (S); o ângulo $\theta(x)$ define a rotação da seção transversal na configuração deformada.

O vetor tangente ao eixo da viga deformada, no ponto da seção (S), pode ser descrito pelas deformações ϵ_{xx} , γ e k da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_{,x} = [1 + \epsilon_{xx}] \mathbf{a} + \gamma \mathbf{b} \quad (5.5)$$

onde o vetor unitário ortogonal a (S) é dado por:

$$\mathbf{a}(x) = \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j} \quad (5.6)$$

e o vetor unitário paralelo a (S) é dado por:

$$\mathbf{b}(x) = -\sin(\theta) \mathbf{i} + \cos(\theta) \mathbf{j} \quad (5.7)$$

Derivando-se (5.4) em relação a x , impondo a igualdade (5.5) e considerando as relações (5.6) e (5.7), chega-se a:

$$\epsilon_{xx} = \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \cos(\theta) + \left(\frac{dv}{dx}\right) \sin(\theta) \quad (5.8a)$$

$$\gamma = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cos(\theta) - \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \sin(\theta) \quad (5.8b)$$

$$k = \frac{d\theta}{dx} \quad (5.8c)$$

As relações constitutivas correspondentes são dadas por:

$$P = \overline{EA} \epsilon_{xx} \quad Q = \overline{GA} \gamma \quad M = \overline{EI} k \quad (5.9)$$

onde os valores de rigidez equivalentes \overline{EA} , \overline{GA} e \overline{EI} não são necessariamente iguais aos tradicionais EA , GA e EI .

Observe que os vetores $\mathbf{r}_{,x}$ e \mathbf{a} tornam-se co-lineares se a hipótese da teoria de vigas de Bernoulli é assumida. Assim (5.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_{,x} = [1 + \varepsilon_{xx}] \mathbf{a} \quad (5.10)$$

Realizando adicionalmente uma uniformização das deformações axiais, para contornar os efeito de ‘membrane locking’, obtém-se as expressões:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{L} \int_0^L \left[\left(1 + \frac{du}{dx} - \cos(\theta) \right) \frac{1}{\cos(\theta)} \right] dx \quad (5.11a)$$

$$\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{dv}{dx} \right) = \left(1 + \frac{du}{dx} \right) \tan(\theta) \quad (5.11b)$$

$$k = \frac{d\theta}{dx} \quad (5.11c)$$

As relações constitutivas correspondentes são dadas por:

$$P = \overline{EA} \varepsilon_{xx} \quad e \quad M = \overline{EI} k \quad (5.12)$$

Observa-se que as relações baseadas no tensor de Green-Lagrange podem ser obtidas como casos particulares das representadas em (5.11). Assim, utilizando-se uma aproximação de segunda ordem para a função trigonométrica $\cos(\theta)$, ou seja:

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \quad e \quad \sin(\theta) \approx \theta \quad (5.13)$$

consegue-se relações equivalentes às dadas em (5.1). Por outro lado, se for utilizada uma aproximação de primeira ordem para o $\cos(\theta)$ ou seja:

$$\cos(\theta) \approx 1 \quad e \quad \sin(\theta) \approx \theta \quad (5.14)$$

chega-se nas relações equivalentes às fornecidas em (5.3).

Observando esse fato, Pacoste e Eriksson (1997) concluíram que os valores de rigidez equivalentes \overline{EA} , \overline{GA} e \overline{EI} no caso de pequenas deformações, poderiam ser consideradas iguais aos tradicionais EA , GA e EI .

5.3 – FUNCIONAL DE ENERGIA

O funcional de energia é definido como na Equação (3.15), ou seja:

$$\Pi = U + V \quad (5.15)$$

sendo que a energia de deformação U é definida no *referencial Lagrangiano total* (RLT) como:

$$U = \int_{Vol} \int_0^{\epsilon_{ij}} (\tau_{ij} d\epsilon_{ij}) dVol \quad (5.16)$$

Integrando na área da seção transversal e considerando-se as relações constitutivas (5.9) com $\overline{EA} = EA$, $\overline{GA} = GA$ e $\overline{EI} = EI$, pode-se reescrever (5.16) da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \epsilon_{xx}^2 + GA \gamma^2 + EI k^2 \right] dx \quad (5.17)$$

Para os casos em que se considera a hipótese de Bernoulli são utilizadas as relações (5.11) e a energia de deformação pode ser expressa simplesmente por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \epsilon_{xx}^2 + EI k^2 \right] dx \quad (5.18)$$

A energia potencial das forças externas V , é definida como:

$$V = - \int_s F_i u_i ds \quad (5.19)$$

5.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

Em Pacoste e Eriksson (1997) podem ser encontradas as cinco diferentes formulações de elementos finitos não-lineares apresentadas a seguir.

As três primeiras formulações a serem analisadas são denominadas de ‘total’, pois, os termos de energia são expressos em função dos deslocamentos totais. O primeiro elemento finito desse grupo é baseado na teoria de vigas de Timoshenko, assim, não despreza as deformações transversais das seções devido às tensões cisalhantes. Os outros dois modelos consideram a hipótese da teoria de vigas de Bernoulli, desprezando portanto os efeitos cisalhantes.

As duas formulações de elementos finitos restantes são denominadas ‘corrotacional’ e os deslocamentos totais são expressos em coordenadas locais, coordenadas estas que são constantemente atualizadas, girando e transladando com o elemento. Para esses elementos finitos também é aceita a hipótese de Bernoulli.

5.4.1 – Formulação total: Timoshenko

Para esta formulação foram utilizadas as relações deformação-deslocamento ‘melhoradas’, representadas pelas Equações (5.8), sem aproximações para as funções trigonométricas. Em compensação foram adotadas funções de interpolação lineares para aproximar os deslocamentos u e v :

$$u = H_1 u_1 + H_2 u_2 \quad (5.20a)$$

$$v = H_1 v_1 + H_2 v_2 \quad (5.20b)$$

e a curvatura k foi aproximada por:

$$k = \frac{d\theta}{dx} = \frac{dH_1}{dx} \theta_1 + \frac{dH_2}{dx} \theta_2 \quad (5.20c)$$

sendo $\theta(x)$, definido como o valor médio $\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$; H_1 e H_2 são funções de interpolação dadas por:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad H_2 = \frac{x}{L} \quad (5.21)$$

Com as aproximações (5.20) e as relações (5.9), pode-se integrar numericamente a Equação (5.17) utilizando-se, por exemplo, a quadratura de Gauss com um ponto de integração chega-se para um elemento genérico:

$$U = \frac{L}{2} \left[EA \epsilon_{xx}^2 + GA \gamma^2 + EI k^2 \right] \quad (5.22)$$

As componentes f_i do vetor de forças internas ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i$ absorvidas pelo elemento, e as componentes k_{ij} da matriz de rigidez elementar ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}$ são determinados no sistema local diretamente das equações:

$$f_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \quad (5.23)$$

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \quad (5.24)$$

Observe que no cálculo das componentes f_i os efeitos de rotação de corpo rígido foram desprezados.

O vetor de forças internas na sua forma global é obtido, somando-se os esforços internos absorvidos por cada elemento, devidamente transformados para o sistema global de referência como segue:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{i\text{ gl}} = \sum_{e=1}^m {}^0\mathbf{R}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i \quad (5.25)$$

onde ${}^0\mathbf{R}$ é a matriz de rotação do elemento genérico ‘e’, na configuração de equilíbrio inicial indeformada $t=0$.

Já a matriz de rigidez do sistema na sua forma global é dada por:

$$\mathbf{K}_{\text{gl}} = \sum_{e=1}^m {}^0\mathbf{R}^T \mathbf{K} {}^0\mathbf{R} \quad (5.26)$$

5.4.2 – Formulação total: Bernoulli

Para este caso, Pacoste e Eriksson (1997), com o objetivo de levar em consideração os deslocamentos de corpo rígido, introduziram os seguintes ‘*parâmetros generalizados*’:

$$f_1 = \arctan\left(\frac{v_2 - v_1}{L + u_2 - u_1}\right) \quad (5.27a)$$

$$f_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad (5.27b)$$

$$f_3 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - f_1 \quad (5.27c)$$

$$f_4 = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (5.27d)$$

Esses parâmetros são utilizados para definir du/dx e dv/dx , ou seja:

$$\frac{du}{dx} = f_4 \quad (5.28a)$$

$$\frac{dv}{dx} = (1 + f_4) \tan(f_1) \quad (5.28b)$$

e conforme a Figura 5.2 tem-se:

$$\theta = \theta_r + \theta_n \quad (5.29)$$

onde a rotação de corpo rígido, θ_r , e a rotação natural, θ_n , são interpoladas por:

$$\theta_r = f_1 \quad (5.30a)$$

$$\theta_n = \left(1 - \frac{2x}{L}\right)f_2 + \left(1 - \frac{6x}{L} + \frac{6x^2}{L^2}\right)f_3 \quad (5.30b)$$

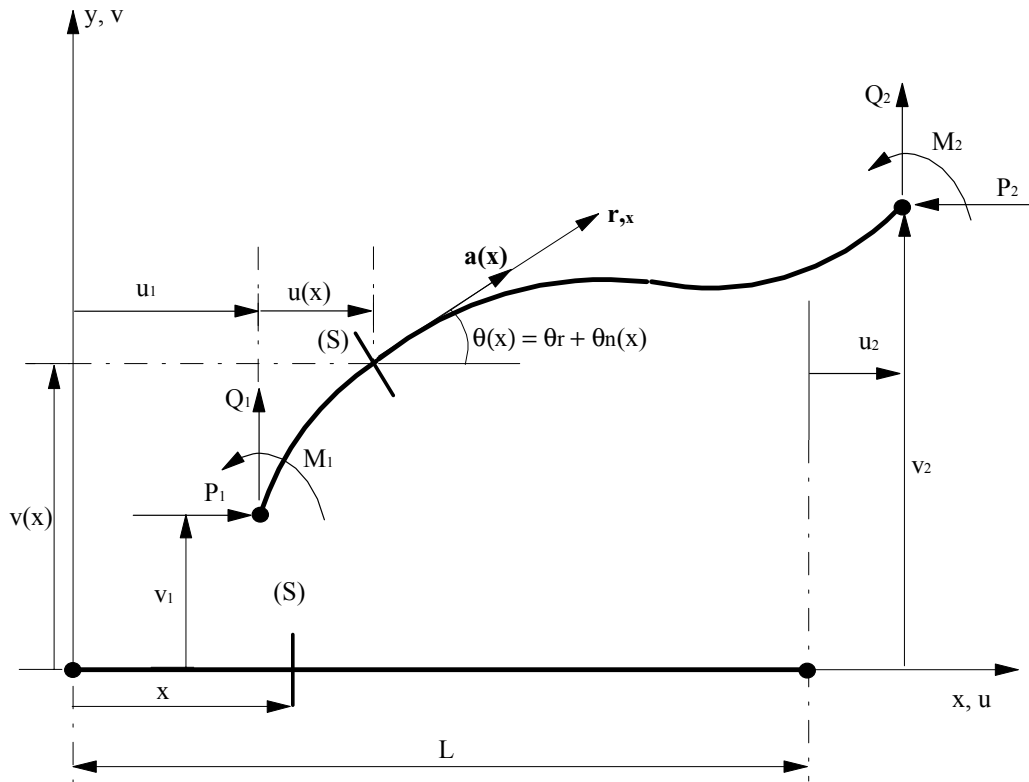


Figura 5.2 – Relações geométricas: total.

Para a definição da energia de deformação são considerados dois casos, que consequentemente, geram duas formulações de elementos finitos diferentes. No

primeiro caso são assumidas para as funções trigonométricas as aproximações de primeira ordem (5.14); no segundo caso são utilizadas as aproximações de segunda ordem (5.13).

5.4.2.1 – Aproximações de primeira ordem

Fazendo-se as aproximações de primeira ordem (5.14), com relação geométrica (5.29), chega-se a:

$$\cos(\theta) = \cos(\theta_r) - \theta_n \sin(\theta_r) \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \sin(\theta_r) - \theta_n \cos(\theta_r) \quad (5.31)$$

Com as relações (5.28), (5.29) e (5.30), e as relações deformação-deslocamento (5.11), reescreve-se a expressão da energia interna dada em (5.18), em função dos parâmetros generalizados, da seguinte forma:

$$U(f_1, f_2, f_3, f_4) = \frac{EAL}{2} \left\{ (1 + f_4 - \cos f_1)^2 + [(1 + f_4) \tan f_1 - \sin f_1]^2 \right\} + \frac{2EI}{L} (f_2^2 + 3f_3^2)^2 \quad (5.32)$$

5.4.2.2 – Aproximações de segunda ordem

Com as aproximações de segunda ordem (5.13) e com a relação geométrica (5.29), chega-se:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \left(1 - \frac{\theta_n^2}{2} \right) \cos(\theta_r) - \theta_n \sin(\theta_r) \\ \sin(\theta) &= \left(1 - \frac{\theta_n^2}{2} \right) \sin(\theta_r) - \theta_n \cos(\theta_r) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Da mesma forma pode-se reescrever a expressão da energia interna dada em (5.18), em função dos parâmetros generalizados, da seguinte forma:

$$U(f_1, f_2, f_3, f_4) = \frac{EAL}{2} \left[1 + f_4 - \left(1 - \frac{f_2^2}{6} - \frac{f_3^2}{10} \right) \cos(f_1) \right]^2 + \frac{EAL}{2} \left[(1 + f_4) \tan(f_1) - \left(1 - \frac{f_2^2}{6} - \frac{f_3^2}{10} \right) \sin(f_1) \right]^2 + \frac{2EI}{L} (f_2^2 - 3f_3^2) \quad (5.34)$$

5.4.2.3 – Vetor de forças internas e matriz de rigidez

Para um elemento genérico tem-se que o vetor de forças ‘generalizadas’, $\mathbf{Fg} = \{fg_i\}$, e a matriz de rigidez, $\mathbf{Kg} = \{kg_{ij}\}$, têm, no sistema local, suas componentes dadas por:

$$fg_i = \frac{\partial U}{\partial f_i} ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.35a)$$

$$kg_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial f_i \partial f_j} ; \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (5.35b)$$

Obtém-se, então, o vetor de forças nodais e a matriz de rigidez elementar com 6 graus de liberdade, através das seguintes relações:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i = \mathbf{A}_f^T \mathbf{Fg} \quad (5.36a)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K} = \mathbf{A}_f^T \mathbf{Kg} \mathbf{A}_f + fg_1 \mathbf{A}_{f1} + fg_3 \mathbf{A}_{f3} \quad (5.36b)$$

onde se escreve:

$$\mathbf{A}_f = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} ; \quad f_i = f_1, f_2, f_3, f_4 \quad e \quad u_j = u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2 \quad (5.37a)$$

$$\mathbf{A}_{f1} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_i \partial u_j} ; \quad u_i = u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2 \quad (5.37b)$$

$$\mathbf{A}_{f3} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial u_i \partial u_j} ; \quad u_i = u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2 \quad (5.37b)$$

Mais uma vez o vetor de forças internas é obtido somando-se os esforços internos absorvidos por cada elemento, devidamente transformados para o sistema global de referência, ou seja:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{i\,gl} = \sum_{e=1}^m {}^0 \mathbf{R}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i \quad (5.38)$$

Da mesma forma, levando-se em conta a contribuição de todos os elementos finitos escreve-se para a matriz de rigidez global:

$$\mathbf{K}_{gl} = \sum_{e=1}^m {}^0 \mathbf{R}^T \mathbf{K} {}^0 \mathbf{R} \quad (5.39)$$

5.4.3 – Formulação corrotacional – Bernoulli

Crisfield (1991) observa em seu livro que o termo ‘corrotacional’ tem sido utilizado na literatura em contextos diferentes, sendo portanto, como afirmam ainda os próprios Pacoste e Eriksson (1997), uma denominação inconsistente. Para os modelos ‘corrotacionais’ a serem discutidos no presente trabalho, a idéia central é se calcular a matriz de rigidez e o vetor de forças internas no campo dos deslocamentos naturais totais, introduzindo um sistema de coordenadas locais que é atualizado a cada passo de carga. Pacoste e Eriksson (1997) afirmam que as duas abordagens, ‘total’ e

‘corrotacional’, da maneira como são apresentadas, só são diferentes na forma de agrupar e interpretar os termos de uma mesma fórmula.

Os deslocamentos totais podem ser expressos em coordenadas locais de acordo com:

$$\mathbf{u}_n = [u_{ni}(u_j)] \quad (5.40)$$

onde o vetor de deslocamentos naturais totais, conforme pode-se ver na Figura 5.3, tem três componentes, $\mathbf{u}_n = [u_{n2} \ \theta_{n1} \ \theta_{n2}]^T$, que podem ser calculados pela relações:

$$u_{n2} = {}^{t+\Delta t}L - {}^0L \quad \theta_{n1} = \theta_1 - \theta_r \quad \theta_{n2} = \theta_2 - \theta_r \quad (5.41)$$

Nessas relações, 0L é o comprimento elementar inicial dado por:

$${}^0L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (5.42)$$

${}^{t+\Delta t}L$ é comprimento elementar, na configuração de equilíbrio corrente, dado por:

$${}^{t+\Delta t}L = \sqrt{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2} \quad (5.43)$$

e a rotação de corpo rígido, θ_r é calculada através da seguinte relação:

$$\theta_r = \arctan \left(\frac{(x_2 - x_1)(v_2 - v_1) - (y_2 - y_1)(u_2 - u_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1 + u_2 - u_1) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1 + v_2 - v_1)} \right) \quad (5.44)$$

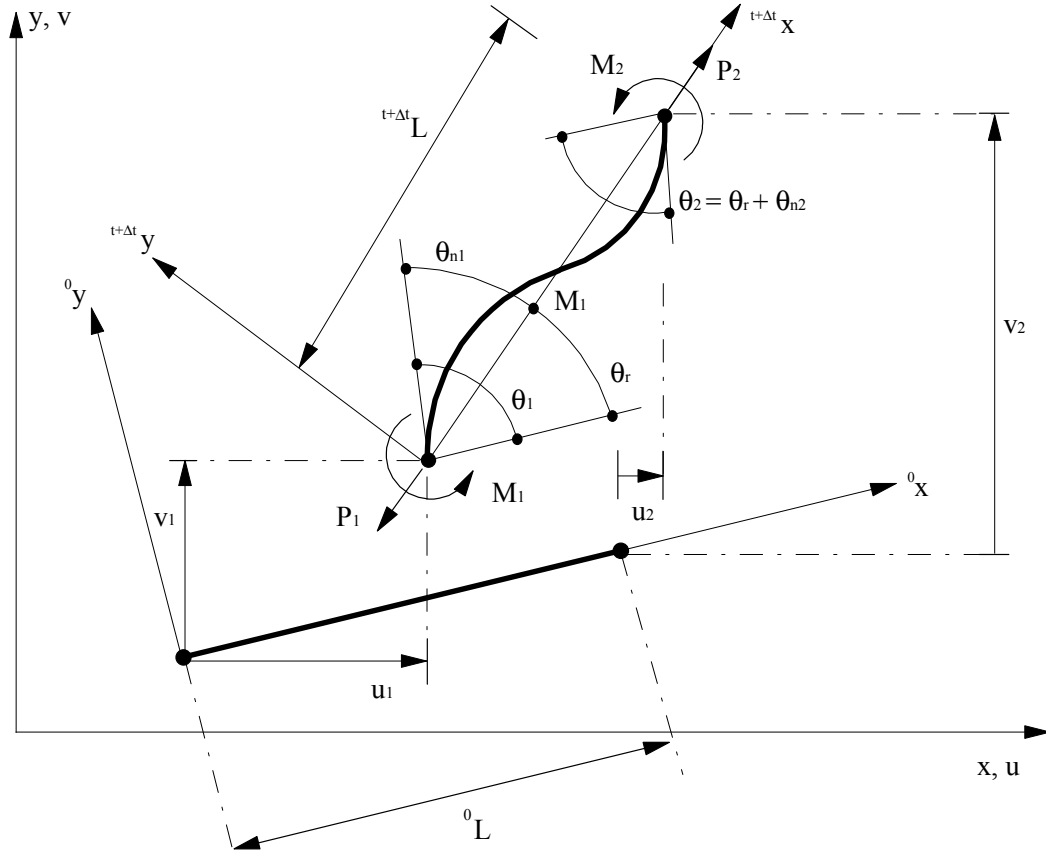


Figura 5.3 – Relações geométricas: corrotacional.

Para a definição da energia de deformação em coordenadas locais, são considerados dois casos que, conseqüentemente, geram duas formulações de elementos finitos. No primeiro caso são assumidas as relações lineares (5.3) e no segundo caso são utilizadas as relações de segunda ordem (5.1). Como foi observado na Seção (5.2), essas relações equivalem às utilizadas nas formulações com abordagem total, para as quais foram feitas aproximações de primeira e segunda ordem para as funções trigonométricas.

Nos dois casos são usadas as aproximações:

$$u_n = H_2 u_{n2} \quad (5.45a)$$

$$\theta_n = H_3 \theta_{n1} + H_4 \theta_{n2} \quad (5.45b)$$

onde H_2 é a função linear:

$$H_2 = \frac{x}{L} \quad (5.46a)$$

e H_3 e H_4 são as funções quadráticas:

$$H_3 = \frac{1}{4} \left(-1 - \frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \quad \text{e} \quad H_4 = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \quad (5.46b)$$

5.4.3.1 – Relações lineares

Substituindo-se as relações lineares (5.3) na Equação (5.18), usando funções de interpolação (5.46), obtém-se a seguinte expressão para a energia interna das deformações:

$$U = \frac{EA}{2L} u_{n2}^2 + 2 \frac{EI}{L} \left(\theta_{n1}^2 + \theta_{n1} \theta_{n2} + \theta_{n2}^2 \right) \quad (5.47)$$

5.4.3.2 – Relações de segunda ordem

Substituindo-se as relações de segunda ordem (5.1) na Equação (5.18), usando-se as funções de interpolação (5.46), obtém-se a seguinte expressão para a energia interna de deformação:

$$U = \frac{EA}{2L} \left[u_{n2} + \frac{L}{15} \left(\theta_{n1}^2 - \frac{1}{2} \theta_{n1} \theta_{n2} + \theta_{n2}^2 \right) \right]^2 + 2 \frac{EI}{L} \left(\theta_{n1}^2 + \theta_{n1} \theta_{n2} + \theta_{n2}^2 \right) \quad (5.48)$$

5.4.3.3 – Vetor de forças internas e matriz de rigidez

O vetor de forças internas e a matriz de rigidez podem ser obtidos em coordenadas globais para o elemento, aplicando-se sucessivas diferenciações, de acordo com:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = \left\{ \frac{\partial U}{\partial u_{ni}} \frac{\partial u_{ni}}{\partial u_i} \right\} \quad \begin{array}{l} u_{ni} = u_{n2}, \theta_{n1}, \theta_{n2} \\ u_i = u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2 \end{array} \quad (5.49a)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K} = \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial u_{ni} \partial u_{nj}} \frac{\partial u_{ni}}{\partial u_k} \frac{\partial u_{nj}}{\partial u_l} + \frac{\partial U}{\partial u_{ni}} \frac{\partial^2 u_{ni}}{\partial u_k \partial u_l} \right\} \quad (5.49b)$$

que pode ser reorganizado na seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = \mathbf{A}_c^T \mathbf{F}_n \quad (5.50a)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{K}_n \mathbf{A}_c + P \mathbf{A}_{c1} + M_1 \mathbf{A}_{c2} + M_2 \mathbf{A}_{c3} \quad (5.50b)$$

onde \mathbf{F}_n e \mathbf{K}_n são definidos como:

$$\mathbf{F}_n = [P \quad M_1 \quad M_2]^T = \left[\frac{\partial U}{\partial u_{n2}} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_{n1}} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_{n2}} \right]^T \quad (5.51a)$$

$$\mathbf{K}_n = \{k_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial u_{ni} \partial u_{nj}} \right\}; \quad \begin{array}{l} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{array} \quad (5.51b)$$

e as matrizes de transformação \mathbf{A}_c , \mathbf{A}_{c1} , \mathbf{A}_{c2} e \mathbf{A}_{c3} definidas como:

$$\mathbf{A}_c = \left\{ \frac{\partial u_{ni}}{\partial u_j} \right\}; \quad \begin{array}{l} i=1,2,3 \\ j=1,2,3,4,5,6 \end{array} \quad (5.52a)$$

$$\mathbf{A}_{c1} = \left\{ \frac{\partial^2 u_{n2}}{\partial u_i \partial u_j} \right\}; \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3,4,5,6 \\ j = 1,2,3,4,5,6 \end{array} \quad (5.52b)$$

$$\mathbf{A}_{c2} = \left\{ \frac{\partial^2 \theta_{n1}}{\partial u_i \partial u_j} \right\} = \left\{ -\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial u_i \partial u_j} \right\}; \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3,4,5,6 \\ j = 1,2,3,4,5,6 \end{array} \quad (5.52c)$$

$$\mathbf{A}_{c3} = \left\{ \frac{\partial^2 \theta_{n2}}{\partial u_i \partial u_j} \right\} = \left\{ -\frac{\partial^2 \theta_r}{\partial u_i \partial u_j} \right\}; \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3,4,5,6 \\ j = 1,2,3,4,5,6 \end{array} \quad (5.52c)$$

Levando-se em conta a contribuição de todos os elementos finitos, tem-se:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{i\,gl} = \sum_{e=1}^m {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i \quad (5.53a)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{gl} = \sum_{e=1}^m {}^{t+\Delta t} \mathbf{K} \quad (5.53b)$$

Observe que \mathbf{K} e \mathbf{F}_i já foram obtidos no sistema de referências global em (5.50).

Seguindo a sugestão de Pacoste e Eriksson (1997), utilizou-se procedimentos do software MAPLE V (v 3.0 RELEASE For Windows) para se calcular os vetores e as matrizes desenvolvidos no presente capítulo, gerando diretamente os resultados em linguagem FORTRAN. Esses procedimentos são apresentadas no Apêndice C.

5.5 – RESUMO

A Figura 5.4 apresenta as principais características de cada uma das formulações desenvolvidas neste capítulo juntamente com símbolos pelos quais estas serão designadas na seqüência do presente trabalho.

<p>Abordagem <i>total</i> - Timoshenko</p> <p>Relações melhoradas:</p> $\bar{f}_{i1} = \frac{\partial U}{\partial u_i}; \quad k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j}$ ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K} = \{k_{ij}\} \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i = \{\bar{f}_{i1}\} \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$	<p>PTT</p> <ul style="list-style-type: none"> - Relações melhoradas - Teoria de Timoshenko: $\epsilon_{xx} = \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \cos(\theta) + \left(\frac{dv}{dx}\right) \sin(\theta); \quad \gamma = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cos(\theta) - \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \sin(\theta); \quad e \quad k = \frac{d\theta}{dx}$ - Funções de interpolação lineares para u, v e θ: - Integração numérica - 1 ponto de integração: $U = \frac{L}{2} \left[EA \epsilon_{xx}^2 + GA \gamma^2 + EI k^2 \right]$
<p>Abordagem <i>total</i> - Bernoulli</p> <p>Relações aproximadas:</p> $\bar{f}_{gi} = \frac{\partial U}{\partial f_i}; \quad k_{gij} = \frac{\partial^2 U}{\partial f_i \partial f_j} \quad i, j = 1, 2, 3, 4$ ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i = \mathbf{A}_f^T \mathbf{F}_g$ ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K} = \mathbf{A}_f^T \mathbf{K}_g \mathbf{A}_f + \bar{f}_{g1} \mathbf{A}_{f1} + \bar{f}_{g3} \mathbf{A}_{f3}$	<p>PT1</p> <ul style="list-style-type: none"> - Relações com aproximações de 1ª ordem: $\cos(\theta) = \cos(\theta_r) - \theta_n \sin(\theta_r) \quad e \quad \sin(\theta) = \sin(\theta_r) - \theta_n \cos(\theta_r)$ - Cálculo no campo dos parâmetros generalizados: $U = \frac{EAL}{2} \left\{ (1 + f_4 - \cos f_1)^2 + [(1 + f_4) \tan f_1 - \sin f_1]^2 \right\} + \frac{2EI}{L} (f_2^2 + 3f_3^2)^2$ <p>PT2</p> <ul style="list-style-type: none"> - Relações com aproximações de 2ª ordem: $\cos(\theta) = \left(1 - \frac{\theta_n^2}{2}\right) \cos(\theta_r) - \theta_n \sin(\theta_r) \quad e \quad \sin(\theta) = \left(1 - \frac{\theta_n^2}{2}\right) \sin(\theta_r) - \theta_n \cos(\theta_r)$ - Cálculo no campo dos parâmetros generalizados: $U = \frac{EAL}{2} \left[1 + f_4 - \left(1 - \frac{f_2^2}{6} - \frac{f_3^2}{10}\right) \cos(f_1) \right]^2 + \frac{EAL}{2} \left[(1 + f_4) \tan(f_1) - \left(1 - \frac{f_2^2}{6} - \frac{f_3^2}{10}\right) \sin(f_1) \right]^2 + \frac{2EI}{L} (f_2^2 - 3f_3^2)$
<p>Abordagem <i>corrotacional</i>:</p> $\mathbf{F}_n = \left[\frac{\partial U}{\partial u_{n2}} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_{n1}} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_{n2}} \right]^T$ $\mathbf{K}_n = \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial u_{ni} \partial u_{nj}} \right\} \quad i, j = 1, 2, 3, 4$ ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i = \mathbf{A}_c^T \mathbf{F}_n$ ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{K}_n \mathbf{A}_c + \mathbf{P} \mathbf{A}_{c1} + \mathbf{M}_1 \mathbf{A}_{c2} + \mathbf{M}_2 \mathbf{A}_{c3}$	<p>PC1</p> <ul style="list-style-type: none"> - Relações lineares: $\epsilon_{xx} = \frac{d\bar{u}}{dx} \quad e \quad k = \frac{d\theta}{dx}$ - Cálculo no campo dos <i>deslocamentos naturais totais</i>: $U = \frac{EA}{2L} u_{n2}^2 + 2 \frac{EI}{L} (\theta_{n1}^2 + \theta_{n1} \theta_{n2} + \theta_{n2}^2)$ <p>PC2</p> <ul style="list-style-type: none"> - Relações de segunda ordem: $\epsilon_{xx} = \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{v}}{dx} \right)^2 \right] dx \quad e \quad k = \frac{d\theta}{dx}$ - Cálculo no campo dos <i>deslocamentos naturais totais</i>: $U = \frac{EA}{2L} \left[u_{n2} + \frac{L}{15} \left(\theta_{n1}^2 - \frac{1}{2} \theta_{n1} \theta_{n2} + \theta_{n2}^2 \right) \right]^2 + 2 \frac{EI}{L} (\theta_{n1}^2 + \theta_{n1} \theta_{n2} + \theta_{n2}^2)$

6

PROGRAMA COMPUTACIONAL

6.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo traz os procedimentos computacionais utilizados na implementação das formulações de elementos finitos não-lineares mostradas nos Capítulos 3, 4 e 5.

Foi utilizado como base o programa computacional desenvolvido, em linguagem FORTRAN, por Silveira (1995) como parte integrante de sua Tese de Doutorado. Esse programa é capaz de efetuar análises linear e não-linear (geométrica) de sistemas reticulados planos com restrições unilaterais de contato. No caso de se optar por solução não-linear, são dadas ao usuário opções de estratégias de solução não-linear (incremento de carga e de iteração) e impressão de resultados (arquivos de pós-processamento). No presente trabalho foram implementadas várias opções de formulações geometricamente não-lineares.

A Figura 6.1 apresenta o esquema geral do programa computacional desenvolvido.

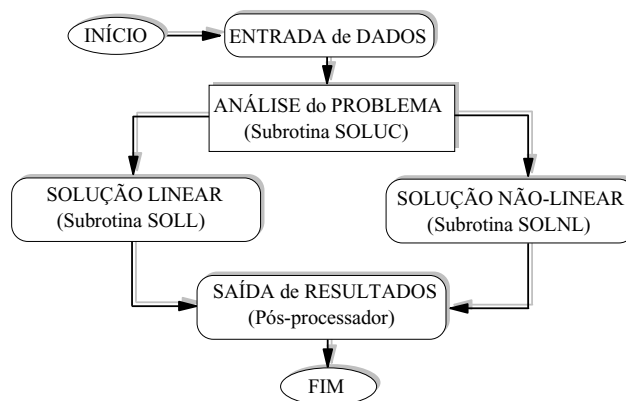


Figura 6.1 – Programa computacional.

A Seção (6.2) apresenta um algoritmo do programa principal. As subrotinas gerenciadas por ele são apresentadas nas seções seguintes.

6.2 – PROGRAMA PRINCIPAL

A Figura 6.2 apresenta o fluxograma do programa principal que é responsável pelo gerenciamento de chamada das diversas subrotinas implementadas.

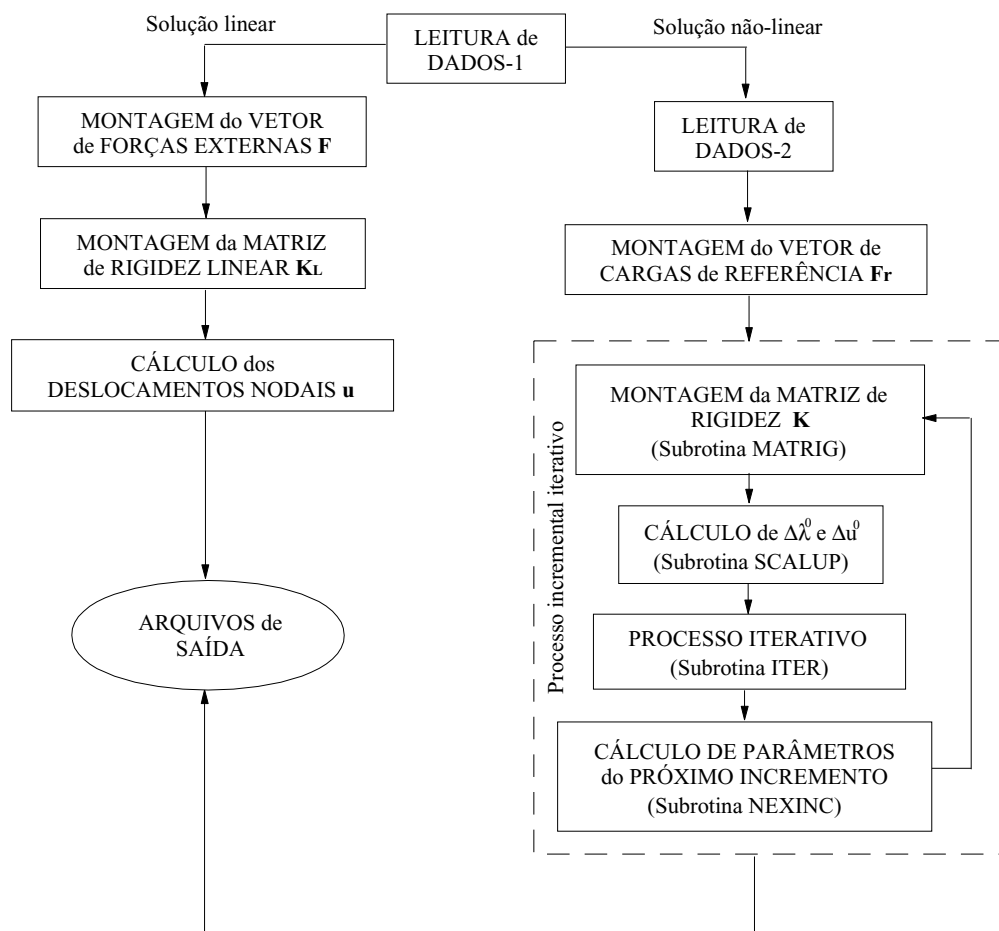


Figura 6.2 – Programa principal.

O primeiro procedimento a ser realizado pelo programa principal é a leitura do primeiro arquivo de dados de entrada. Esses dados definem a geometria do modelo

estrutural com o número de pontos nodais, de elementos e condições de contorno; as propriedades físicas dos materiais que compõem a estrutura; e o carregamento externo atuante.

Caso se deseje realizar uma análise linear, os passos seguintes são a montagem do vetor de forças externas \mathbf{F} e da matriz de rigidez linear \mathbf{K}_L , e o cálculo dos deslocamentos nodais através de $\mathbf{K}_L \mathbf{u} = \mathbf{F}$.

Caso a análise não-linear seja a escolhida, o passo seguinte é a leitura dos dados de entrada complementares, onde estão as informações necessárias a esse tipo de análise, como, por exemplo, a formulação não-linear a ser empregada, a estratégia de solução, o valor inicial do parâmetro de carga, o número de incrementos, o critério de convergência, o número máximo de iterações por incremento, e outros parâmetros relativos à estratégia de solução escolhida. A Figura 6.3 apresenta um exemplo desse arquivo de dados.

2 0 0 0	...Alves,Tork,Yang,Pacos
0.5 3000 1 0 0 3	...faci,ninc,iauto,iacc,ires,tinc
0 0 0 0 0 0 0 1	...ilc,idis,iarc,itec,imdo,imfo,irpc,ikrenk,iyang
0 0 0 0 1 0	...incl,incd,inca,incw,incgd,incwy
1.e-4 2 21 0 1	...betok,iterty,nitmax,nlsmx,cconv
0 0 3 0 100	...iwrt,iwrit,ktest,kplot,kwinc
1 1 5 5 1 0	...kmvie,kview,kmvde,kvdef,Impr,rel
0 0. 0. 0	...ides,facmx,facmn,iswch
0. 0. 0. 0. 0.	...dlldes,dldmx,dldmn,fxm,fxn

Figura 6.3 – Arquivo de dados: solução não-linear.

Observe que, na primeira linha, a variável diferente de zero indica a formulação não-linear a ser utilizada na análise. Assim, se a variável $\text{Alves} \neq 0$, uma das formulações propostas por Alves (1993b) é empregada na análise; se $\text{Tork} \neq 0$, é utilizada uma das formulações de Torkamani et al. (1997); $\text{Yang} \neq 0$, Yang e Kuo (1994); e $\text{Pacos} \neq 0$, Pacoste e Eriksson (1997). No exemplo em questão, a variável

Alves = 2, indica a utilização da formulação proposta por Alves (1993b), que calcula as forças internas através dos *deslocamentos naturais incrementais*.

Após a leitura dos dados é chamada a subrotina LOADF para montagem do vetor de cargas de referência \mathbf{F}_r . Entra-se então no processo incremental-iterativo de solução, que é resumido a seguir:

- chama a subrotina MATRIG para montar a matriz de rigidez \mathbf{K} , de acordo com a formulação escolhida, e obtém-se os deslocamentos nodais tangenciais $\delta \mathbf{u}_T$;
- calcula em SCALUP a solução predita, $\Delta \lambda^0$ e Δu^0 , de acordo com a estratégia de incremento de carga escolhida;
- corrige a solução predita pelo processo iterativo através da subrotina ITER;
- em NEXINC são atualizados todos os parâmetros necessários ao próximo incremento de carga;
- se o número de passos de carga é menor do que o desejado recomeça-se o processo.

Os resultados são então apresentados em arquivos de saída. O arquivo gerado com extensão (.dat) pode ser lido, por exemplo, pelo software GRAPHER (1992/1993), que possibilita a impressão das diversas curvas necessárias à visualização da análise; o arquivo neutro DEPOS pode ser utilizado no pós-processador gráfico, implementado em linguagem FORTRAN por Silveira (1995), para a visualização das configurações deformadas do sistema estrutural analisado; o arquivo de saída RELAT.S contém informações sobre as ocorrências do processo de solução.

A seguir são apresentadas algumas subrotinas de maneira mais detalhada.

6.2.1 – Subrotina MATRIG

Esta subrotina é responsável pela montagem da matriz de rigidez global do sistema estrutural, de acordo com a formulação de elementos finitos não-linear escolhida para a análise. Para cada elemento do modelo estrutural são executados os seguintes procedimentos:

1) Para a Formulação PTT:

- calcula a matriz de rotação inicial ${}^0\mathbf{R}$ do elemento;
- obtém através de ${}^0\mathbf{R}$ os deslocamentos nodais (totais) em coordenadas locais;
- calcula as componentes da matriz de rigidez elementar;
- transforma, através de ${}^0\mathbf{R}$, a matriz de rigidez para o sistema global;

Para as Formulações PT1 e PT2:

- calcula a matriz de rotação ${}^0\mathbf{R}$ do elemento;
- obtém através de ${}^0\mathbf{R}$, os deslocamentos nodais (totais) em coordenadas locais;
- calcula os parâmetros generalizados f_1 , f_2 , f_3 e f_4 ;
- calcula as dezesseis componentes da matriz de rigidez *generalizada* \mathbf{Kg} ;
- calcula as matrizes de transformação \mathbf{A}_f , \mathbf{A}_{f1} e \mathbf{A}_{f3} e a suas transpostas;
- calcula as forças *generalizadas* fg_1 e fg_3 ;
- calcula a matriz de rigidez elementar no sistema local através da relação:
$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_f^T \mathbf{Kg} \mathbf{A}_f + fg_1 \mathbf{A}_{f1}^T + fg_3 \mathbf{A}_{f2}^T;$$
- transforma, através de ${}^0\mathbf{R}$, a matriz de rigidez elementar para o sistema global.

Para as Formulações PC1 e PC2:

- calcula as três componentes do vetor de *deslocamentos naturais* (totais) \mathbf{u}_n ;
- calcula as nove componentes da matriz \mathbf{K}_n ;
- calcula as matrizes de transformação \mathbf{A}_c , \mathbf{A}_{c1} e \mathbf{A}_{c3} e a suas transpostas;
- calcula os esforços P , M_1 e M_2 ;

- calcula a matriz de rigidez, diretamente no sistema global de referências, através da relação $\mathbf{K} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{K}_n \mathbf{A}_c + \mathbf{P} \mathbf{A}_{c1} + \mathbf{M}_1 \mathbf{A}_{c2} + \mathbf{M}_2 \mathbf{A}_{c3}$.

Para as Formulações AFT, AFI, TFT, TFI, YGN, YGE, YSN e YHN:

- calcula a matriz de rotação (configuração de equilíbrio anterior), ${}^t\mathbf{R}$, do elemento;
- obtém, através de ${}^t\mathbf{R}$, os deslocamentos nodais (incrementais) em coordenadas locais;
- calcula as componentes da matriz de rigidez do elemento;
- transforma, através de ${}^t\mathbf{R}$, a matriz de rigidez elementar para o sistema global.

- 2) Armazena a matriz de rigidez elementar obtida na matriz de rigidez global do sistema estrutural.

6.2.2 – Subrotina ITER

Esta subrotina é responsável pelo processo iterativo baseado na técnica de *Newton-Raphson* (padrão ou modificado) para encontrar um novo ponto de equilíbrio para a estrutura. Os passos mais importantes desta rotina são descritos a seguir:

- 1) Para as formulações que calculam as forças internas de forma **total**: AFI, TFI, YGN, YGE, YSN e YHN:
 - calcula as coordenadas atualizadas dos nós;
 - calcula o vetor de forças internas \mathbf{F}_i na subrotina VETFI com as coordenadas nodais *atualizadas* e com os deslocamentos nodais *incrementais*.

Para as formulações que calculam as forças internas de forma **total**: AFT, TFT, PTT, PT1, PT2, PC1, PC2:

- calcula o vetor de forças internas \mathbf{F}_i na subrotina VETFI com as coordenadas nodais *iniciais* e com os deslocamentos nodais *totais*.

- 2) Para o método de *Newton-Raphson modificado* passe para o próximo passo;

Para o método de *Newton-Raphson padrão* deve-se calcular a matriz de rigidez a cada iteração, assim:

- para as Formulações em RLT (Pacoste e Eriksson, 1997) calcula-se a matriz de rigidez \mathbf{K} na subrotina MATRIG com os deslocamentos nodais *totais*; para as formulações em RLA (todas as outras implementadas) calcula-se a matriz de rigidez \mathbf{K} na subrotina MATRIG com os deslocamentos nodais *incrementais*;

- 3) Calcula o vetor de forças desequilibradas: $\mathbf{F}_d = -\mathbf{g}^{(k-1)} = -(\mathbf{F}_i^{(k-1)} - \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r)$;

- 4) Calcula o fator de convergência $\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\|}$;

- 5) Resolve o sistema: $\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_g = \mathbf{F}_d$;

- 6) Para o método de *Newton-Raphson padrão* resolve-se o sistema: $\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_r = \mathbf{F}_r$; para o método de *Newton-Raphson modificado* faz-se $\delta \mathbf{u}_r = \delta \mathbf{u}_T$, onde $\delta \mathbf{u}_T$ é o vetor de deslocamentos nodais tangente;

- 7) Calcula $\delta \lambda$, de acordo com a estratégia de iteração escolhida, e corrige-se as variáveis incrementais $\Delta \lambda^k$ e $\Delta \mathbf{u}^k$, e totais λ e \mathbf{u} ;

- 8) Calcula o fator de convergência $\zeta_2 = \frac{\|\delta \mathbf{u}\|}{\|\Delta \mathbf{u}^k\|}$;
- 9) Se o critério de convergência escolhido pelo usuário do programa (carga: $\zeta_1 \leq \zeta$; deslocamento: $\zeta_2 \leq \zeta$; ou carga e deslocamento: ζ_1 e $\zeta_2 \leq \zeta$) for atendido retorna ao programa principal; senão volta ao passo 1.

6.2.3 – Subrotina VETFI

Esta subrotina tem a função de calcular o vetor de forças internas globais do sistema estrutural. Para cada elemento do modelo estrutural são efetuados os seguintes procedimentos:

- 1) Para a Formulação PTT:
- calcula a matriz de rotação inicial ${}^0\mathbf{R}$ do elemento;
 - obtém, através de ${}^0\mathbf{R}$, os deslocamentos nodais (totais) em coordenadas locais;
 - monta o vetor de forças internas calculando suas componentes
 - transforma, através de ${}^0\mathbf{R}$, o vetor de forças internas para o sistema global.

Para as Formulações PT1 e PT2:

- calcula a matriz de rotação inicial, ${}^0\mathbf{R}$, do elemento;
- obtém, através de ${}^0\mathbf{R}$ os deslocamentos nodais (totais) em coordenadas locais;
- calcula os parâmetros generalizados f_1, f_2, f_3 e f_4 ;
- calcula as quatro componentes do vetor de forças generalizadas \mathbf{Fg} ;
- calcula as matrizes de transformação \mathbf{A}_f e a sua transposta \mathbf{A}_f^T ;
- calcula o vetor de forças internas através da relação $\mathbf{F}_i = \mathbf{A}_f^T \mathbf{Fg}$;
- transforma, através de ${}^0\mathbf{R}$, o vetor de forças internas para o sistema global.

Para as Formulações PC1 e PC2:

- calcula as três componentes do vetor de *deslocamentos naturais totais* \mathbf{u}_n ;
- calcula as três componentes do vetor \mathbf{F}_n ;
- calcula as matrizes de transformação \mathbf{A}_c e a sua transposta \mathbf{A}_c^T ;
- calcula o vetor de forças internas, diretamente no sistema global de referências, através da relação $\mathbf{F}_i = \mathbf{A}_c^T \mathbf{F}_n$.

Para as Formulações de Alves (1993b) e Torkamani et al. (1997), com o cálculo das forças internas de forma *total*:

- calcula a matriz de rotação inicial ${}^0\mathbf{R}$ do elemento;
- obtém, através de ${}^0\mathbf{R}$, os deslocamentos nodais (totais) em coordenadas locais;
- monta a matriz de compatibilidade cinemática \mathbf{A}^* ;
- calcula os *deslocamentos naturais totais*;
- calcula as componentes do vetor de forças internas;
- transforma, através de ${}^0\mathbf{R}$, o vetor de forças internas para o sistema global.

Para as Formulações de Alves (1993b), Torkamani et al. (1997), Yang e Kuo (1994), com o cálculo das forças internas de forma *incremental*:

- calcula a matriz de rotação (configuração de equilíbrio anterior), ${}^t\mathbf{R}$, do elemento;
- calcula a matriz de rotação atualizada (a cada iteração), \mathbf{R}_a , do elemento;
- obtém através de ${}^t\mathbf{R}$ os deslocamentos nodais (incrementais) em coordenadas locais;
- calcula os *deslocamentos naturais incrementais*;
- calcula as componentes do vetor de forças internas (incrementais);
- soma as forças internas incrementais com as forças internas obtidas até o passo de carga anterior, ou seja, obtém-se ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + {}^{\Delta t}\mathbf{F}_i$;
- ¹transforma, através da matriz de rotação atualizada, \mathbf{R}_a , o vetor de forças internas para o sistema global.

- 2) Armazena o vetor elementar de forças internas obtido no vetor de forças internas do sistema estrutural.

¹Observação: Nos procedimentos, mostrados acima, para a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de forças internas, foram utilizadas as três diferentes matrizes de rotação definidas a seguir:

- (i) ${}^0\mathbf{R}$: matriz de rotação entre o sistema global de referências e o sistema local inicial (estrutura indeformada). Utilizada quando a matriz de rigidez ou o vetor de forças internas são calculados em RLT;
- (ii) ${}^t\mathbf{R}$: matriz de rotação entre o sistema global de referências e o sistema local, atualizado na configuração de equilíbrio t . Transforma os deslocamentos nodais para o referencial local de referências, possibilitando a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de forças internas, quando calculados em RLA;
- (iii) \mathbf{R}_a : matriz de rotação entre o sistema global de referências e o sistema local atualizado na última iteração. Utilizada para transformar o vetor de forças internas, calculado da forma *incremental* proposta por Yang e Kuo (1994), ao sistema global de referências.

6.2.4 – Subrotina NEXINC

Esta subrotina tem o objetivo de calcular e atualizar os parâmetros utilizados no próximo passo de carga. A seguir são descritas as tarefas realizadas por esta subrotina.

- 1) Caso o último passo de carga não tenha convergido, ou seja, o número de iterações tenha sido maior que o número máximo de iterações estipulado, executam-se procedimentos para reduzir os acréscimos do parâmetro de carga e reinicializa-se então o processo da última configuração de equilíbrio encontrada; caso o ponto de equilíbrio tenha sido encontrado com sucesso o processamento continua no passo seguinte.
- 2) São impressos os parâmetros necessários ao traçado de gráficos no arquivo de saída com extensão (.dat); no arquivo neutro DEPOS são impressas as variáveis necessárias ao traçado das deformadas no programa de pós-processamento;
- 3) São calculados na subrotina LOADPI os esforços internos resultantes que serão utilizados no cálculo da matriz de rigidez e do vetor de forças internas;
- 4) Atualiza todas as variáveis necessárias à continuidade do processo incremental;
- 5) Calcula, dependendo da estratégia escolhida para aplicar o novo passo de carga, o comprimento de arco, o incremento do deslocamento selecionado, o deslocamento generalizado, etc.;
- 6) Retorna ao programa principal.

7

EXEMPLOS NUMÉRICOS

7.1 – INTRODUÇÃO

Através da análise de problemas estruturais encontrados na literatura, pretende-se verificar neste capítulo a eficiência das formulações de elementos finitos não-lineares estudadas neste trabalho, juntamente com as respectivas implementações computacionais realizadas.

Um resumo dessas formulações não-lineares é apresentado nas Tabelas 7.1 e 7.2 onde são destacadas as abreviaturas usadas ao longo do capítulo para identificar cada uma delas. Nas mesmas tabelas são apresentadas também algumas características importantes de cada formulação.

Na Seção (7.2) serão abordados problemas estruturais clássicos com soluções analíticas (exatas) encontradas na literatura. Em função da confiabilidade dessas análises, seus resultados terão o objetivo de avaliar a qualidade dos resultados produzidos pelas diferentes formulações.

Com o intuito de ratificar as observações feitas na Seção (7.2) e analisar a eficiência computacional dos diversos modelos, serão abordados, na Seção (7.3), problemas estruturais de estabilidade elástica fortemente não-lineares, cujas soluções, obtidas numericamente por diversos pesquisadores, são encontradas na literatura.

Tabela 7.1 – Resumo das formulações.

TRABALHOS	FORM.	CARACTERÍSTICAS
Alves (1993b) <ul style="list-style-type: none"> - Tensor de Green completo; - Função de interpolação linear para u e cúbica para v; - Matriz de rigidez obtida no RLA; - Uniformização das deformações devido ao efeito de membrana ('membrane locking effect'). 	AFT - AFI -	As forças internas são obtidas com os <i>deslocamentos naturais totais</i> , isto é, medidos em relação à configuração inicial indeformada (referencial Lagrangiano total – RLT). As forças internas são obtidas com os <i>deslocamentos naturais incrementais</i> , isto é, medidos em relação à última configuração de equilíbrio (referencial Lagrangiano atualizado – RLA).
Torkamani et al. (1997) <ul style="list-style-type: none"> - Tensor de Green simplificado; - Função de interpolação linear para u e cúbica para v; - Desprezado os efeitos dos momentos iniciais no estado inicial de tensões; - Matriz de rigidez obtida no RLA. 	TFT - TFI -	As forças internas são obtidas com os <i>deslocamentos naturais totais</i> , (RLT). As forças internas são obtidas com os <i>deslocamentos naturais incrementais</i> , (RLA).
Yang e Kuo (1994) <ul style="list-style-type: none"> - Tensor de Green (deformações axiais e cisalhantes); - Função de interpolação linear para u e cúbica para v; - Matriz de rigidez e vetor de forças internas, obtidos no RLA; - Com exceção de YGE, todas as formulações têm as forças internas obtidas com <i>deslocamentos naturais incrementais</i>. 	YSN - YGN - YGE - YHN -	Equação de equilíbrio linearizada; Tensor de Green simplificado. Equação de equilíbrio linearizada.. Equação de equilíbrio linearizada; Forças internas obtidas usando a <i>matriz de rigidez externa</i> . Equação de equilíbrio não-linearizada, obtendo assim uma matriz de rigidez com 'ordem elevada'.

Tabela 7.2 – Resumo das formulações.

TRABALHOS	FORM.	CARACTERÍSTICAS
Pacoste e Eriksson (1997) - Diferentes Relações tensão–deformação; - Todos os modelos, com exceção de PTT, fazem a uniformização das deformações devido ao efeito de membrana (‘membrane locking effect’); - Matriz de rigidez e vetor de forças internas obtidos no RLT.	PTT	- Formulação total; - Relações tensão–deformação melhoradas (funções trigonométricas); - Teoria de Timoshenko; - Integração numérica do funcional de energia; - Funções de interpolação lineares para u , v e θ .
	PT1	- Formulação total; - Expressões em função dos ‘parâmetros generalizados’; - Expansão de primeira ordem das funções trigonométricas.
	PT2	- Formulação total; - Expressões em função dos ‘parâmetros generalizados’; - Expansão de segunda ordem das funções trigonométricas.
	PC1	- Abordagem corrotacional; - Teoria de Bernoulli; - Relações deformação-deslocamento lineares.
	PC2	- Abordagem corrotacional; - Teoria de Bernoulli; - Relações deformação-deslocamento de segunda ordem.

7.2 – EXEMPLOS CLÁSSICOS

Esta seção tem o objetivo de validar as formulações de elementos finitos não-lineares estudadas e implementadas neste trabalho. Para esse propósito serão abordados exemplos clássicos de problemas de equilíbrio e estabilidade estrutural que possuem resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura.

A viga em balanço mostrada na Figura 7.1a, que possui solução analítica apresentada em Timoshenko e Gere (1982), e a coluna em balanço da Figura 7.1b, com solução analítica apresentada em Southwell (1941), serão analisadas usando-se todas as formulações implementados com o intuito de destacar as suas principais características e diferenças.

O exemplo que consiste de um arco senoidal abatido com carga uniformemente distribuída (Figura 7.1c) terá o objetivo de comparar as duas formas de se obter o vetor de forças internas propostas por Yang e Kuo (1994), '*deslocamentos naturais incrementais*' e '*rigidez externa*'.

As formulações propostas por Alves (1993b) e Torkamani et al. (1997) que, como pode ser visto no Capítulo 3 e na Tabela 7.1a, possuem várias similaridades, serão analisadas e comparadas no exemplo ilustrado na Figura 7.1d, que consiste de um arco circular sob pressão radial. Uma solução analítica para esse sistema estrutural foi apresentada por Kerr e Soifer (1969).

O último exemplo desta seção consiste de um pórtico, Figuras 7.1e e 7.1f, que será analisado para diferentes condições de apoio e alturas de topo, com as formulações de elemento finitos que se mostraram mais representativas nos exemplos anteriores.

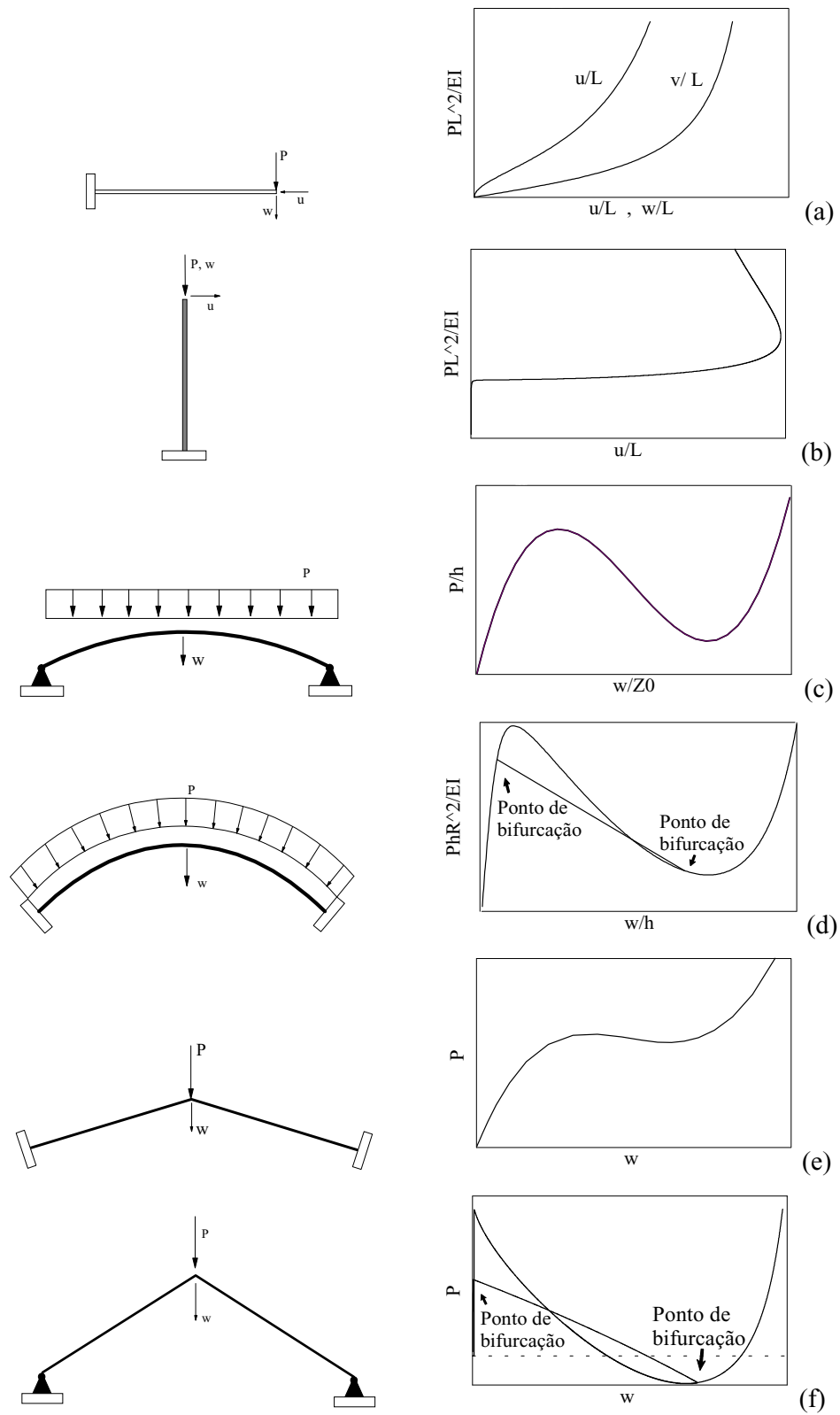


Figura 7.1 - Exemplos clássicos.

7.2.1 - Viga Engastada-Livre

O primeiro exemplo a ser abordado trata-se de uma viga engastada-livre submetida a uma carga concentrada P , conforme ilustrado na Figura 7.2. As propriedades físicas e geométricas necessárias à análise podem ser vistas nessa mesma figura.

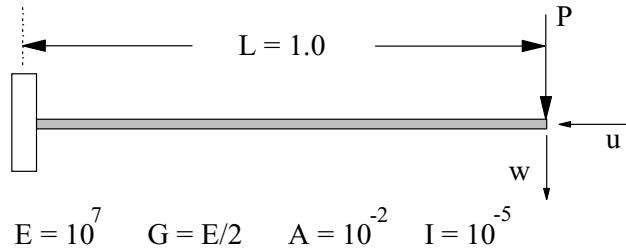


Figura 7.2 - Viga engastada-livre.

Resultados analíticos desse problema são apresentados por Mattiassons (1981) e Timoshenko e Gere (1982) e são frequentemente usados para validar modelos numéricos (Alves, 1993a; Yang e Kuo, 1994).

O objetivo deste exemplo é verificar e comparar a capacidade das formulações não-lineares, implementadas neste trabalho, em resolver problemas estruturais com grandes deslocamentos e rotações.

Neste exemplo foram analisadas todas as formulações citadas com as seguintes modelagens numéricas: 2, 3, 4 e 5 elementos finitos.

A trajetória de equilíbrio desse sistema estrutural, conforme ilustra a Figura 7.3, não apresenta pontos críticos (pontos limites e bifurcação), podendo, portanto, ser obtida adotando-se um esquema de solução simples que consiste na aplicação do método de *Newton-Raphson modificado*, com incremento constante para o parâmetro inicial de carga, $\Delta\lambda^0$, e *iteração a carga constante*.

Como o objetivo deste exemplo é comparar os resultados obtidos com a solução analítica dada na Tabela 7.3, será adotado para o parâmetro de carga o valor: $\Delta\lambda_1^0 = 0.025$. Foi ainda adotada uma tolerância $\zeta = 10^{-3}$.

O erro percentual médio apresentado na Tabela 7.4a e 7.4b foi avaliado fazendo-se a média aritmética dos erros percentuais obtidos em relação às configurações fornecidas pela Tabela 7.3.

Tabela 7.3- Solução analítica: viga engastada-livre.

PL^2/EI	w/L	u/L
0	0	0
0.25	0.083	0.004
0.50	0.162	0.016
0.75	0.235	0.034
1	0.302	0.056
2	0.494	0.160
3	0.603	0.255
4	0.670	0.329
5	0.714	0.388
6	0.744	0.434
7	0.767	0.472
8	0.785	0.504
9	0.799	0.531
10	0.811	0.555

Tabela 7.4a – Erro percentual médio de u/L .

Formul.	Número de Elementos			
	2	3	4	5
AFT	10.77	6.64	3.90	2.97
AFI	1.96	1.08	0.82	0.68
TFT	19.03	6.49	2.53	1.35
TFI	2.10	1.19	0.94	0.80
YSN	2.17	1.06	0.81	0.67
YGN	2.06	0.99	0.72	0.57
YGE	3.81	2.85	2.43	2.22
YHN	1.95	0.97	0.71	0.57
PTT	7.77	3.23	1.56	0.93
PT1	2.22	0.94	0.70	0.61
PT2	0.72	0.53	0.50	0.48
PC1	2.22	0.94	0.70	0.61
PC2	0.72	0.53	0.50	0.48

Solução analítica: Timoshenko e Gere (1982)

Observando-se a Tabela 7.4a, onde estão definidos os erros percentuais para os deslocamentos, da extremidade livre da viga, na direção do eixo axial, pode-se concluir:

- as formulações AFI e TFI obtiveram resultados melhores que as AFT e TFT, que apresentaram erros consideráveis para os modelos mais simples;
- ao se melhorar o modelo estrutural, aumentando-se o número de elementos, os resultados de TFT melhoraram de maneira mais sensível do que os de AFT;
- os quatro tipos de elementos apresentados por Yang e Kuo (1994) obtiveram resultados praticamente idênticos, com ligeira vantagem para os modelos YGN e YHN;
- os modelos PT2 e PC2 apresentaram ótimos resultados mesmo para um modelo estrutural mais simples, com 2 elementos; entretanto, resultados semelhantes só foram obtidos com PTT, PT1 e PC1 aumentando-se o número de elementos.

Tabela 7.4b – Erro percentual médio de w/L .

Formul.	Número de Elementos			
	2	3	4	5
AFT	3.61	2.90	1.63	1.29
AFI	2.39	1.17	0.77	0.60
TFT	8.24	2.70	0.61	0.17
TFI	2.50	1.26	0.85	0.67
YSN	2.57	1.31	1.31	0.72
YGN	2.43	1.21	0.81	0.64
YGE	2.69	1.47	1.07	0.90
YHN	2.42	1.20	0.81	0.64
PTT	2.20	1.01	0.70	0.58
PT1	2.81	1.39	0.94	0.74
PT2	0.20	0.37	0.40	0.42
PC1	2.81	1.39	0.94	0.74
PC2	0.20	0.37	0.40	0.42
Solução analítica: Timoshenko e Gere (1982)				

Da Tabela 7.4b, onde estão indicados os erros percentuais para os deslocamentos transversais w , na extremidade da viga, pode-se destacar:

- mais uma vez nota-se uma maior sensibilidade da formulação TFT em relação à discretização estrutural;
- mais uma vez, observa-se que para modelos estruturais mais simples, os resultados obtidos com as formulações AFI e TFI foram melhores que as obtidas por AFT e TFT; porém, com o aumento do número de elementos nota-se uma melhor performance da formulação TFT em relação a TFI;

- Os resultados produzidos por PT2 e PC2 para o deslocamento w foram muito precisos para o modelo com 2 elementos finitos, porém, apresentaram uma pequena perda de eficiência com o refinamento da malha.

Pode-se ainda destacar as seguintes observações de caráter geral:

- as formulações de elementos finitos que obtêm o vetor de forças internas com os deslocamentos '*naturais incrementais*', ou seja, AFI, TFI, YSN, YGN e YHN, produziram resultados semelhantes;
- com YGE, que obtém o vetor de forças internas com deslocamentos incrementais, porém não o fazendo com os deslocamentos '*naturais incrementais*' e sim corrigindo os efeitos de corpo rígido com a introdução da '*matriz de rigidez externa*', chegou-se a resultados ligeiramente inferiores àqueles fornecidos pelas formulações citadas no parágrafo anterior. O modelo YGE merecerá uma análise especial no exemplo da Seção (7.2.3);
- os melhores resultados deste exemplo foram os obtidos com as formulações PT2 e PC2, introduzidas por Pacoste e Eriksson (1997) e que se baseiam em relações cinemáticas com aproximações de segunda ordem para as funções trigonométricas. Os resultados apresentaram erros médios menores que 1% mesmo para o modelo estrutural mais simples, com 2 elementos finitos. As trajetórias de equilíbrio obtidas por PT2 estão representadas na Figura 7.3;
- as formulações PTT, PT1 e PC1 não produziram resultados tão bons quanto PT2 e PC2, mas evidenciaram melhoras significativas com o refinamento da malha;
- foi verificada ainda uma semelhança dos resultados para PT1 e PC1, assim como para PT2 e PC2. Isso coincide com as observações encontradas em Pacoste e Eriksson (1997).

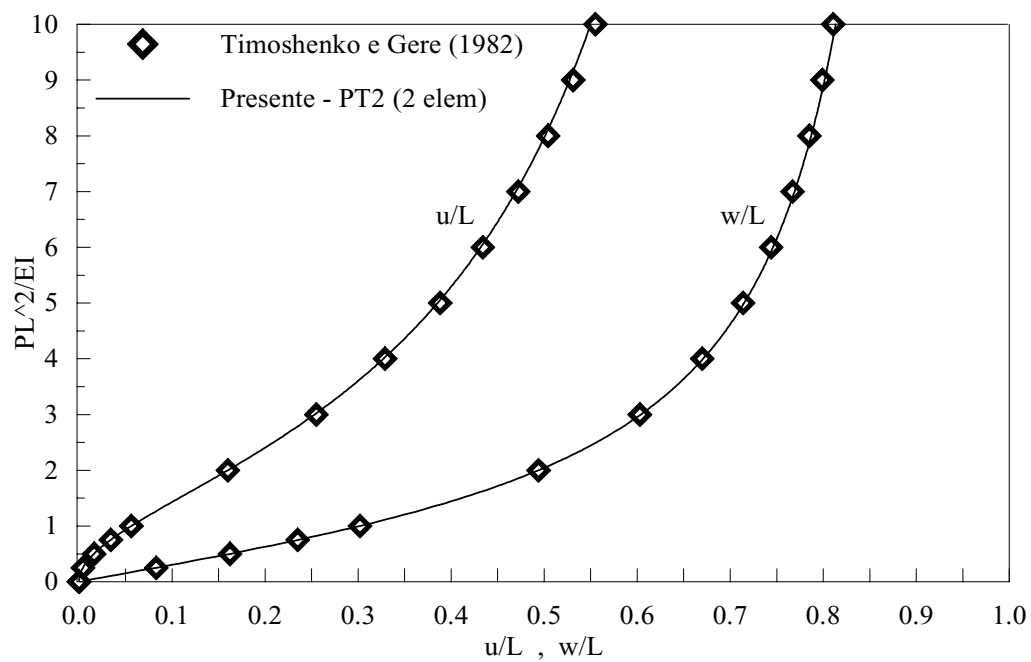


Figura 7.3 – Trajetória de equilíbrio: PT2 (2 elem.).

7.2.2 - Coluna Engastada-Livre

Este exemplo, conforme ilustra a Figura 7.4, consiste de uma coluna engastada-livre submetida a uma carga vertical P aplicada no seu topo associada a uma pequena imperfeição do tipo momento, introduzida com o objetivo de evitar as dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação.

Como os resultados a serem apresentados estão adimensionalizados, não há necessidade de especificar as propriedades físicas e geométricas da estrutura, porém é necessário indicar que, para a formulação PTT, desenvolvida a partir da teoria de Timoshenko, considerou-se um módulo de elasticidade transversal $G = E/2$.

Para avaliar a qualidade dos resultados obtidos, será utilizada a solução analítica apresentada por Southwell (1941).

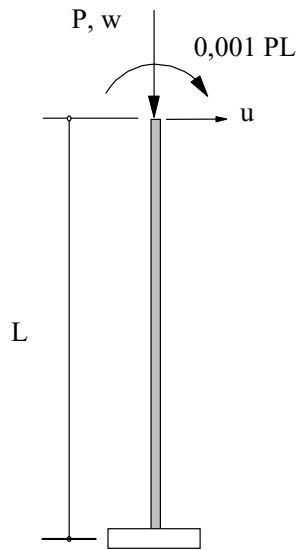


Figura 7.4 - Coluna engastada-livre.

Com este exemplo, pretende-se verificar a eficiência das formulações estudadas na análise de problemas estruturais que, além de envolverem grandes rotações, apresentam na sua trajetória de equilíbrio uma região de grandes deslocamentos e carga

praticamente constante, seguida ainda por um ponto limite de deslocamento, como ilustrado na Figura 7.5.

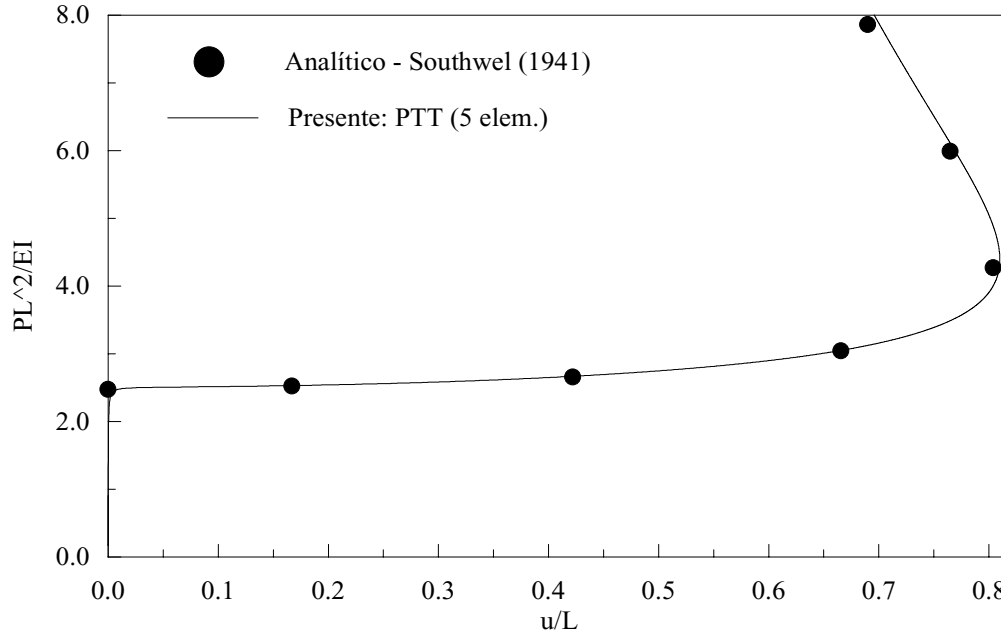


Figura 7.5 – Trajetória de equilíbrio: PTT (5 elem.).

Como no exemplo anterior, foram analisadas todas as formulações estudadas usando-se na modelagem do sistema: 2, 3, 5 e 10 elementos finitos.

O procedimento de solução não-linear adotado foi o método *Newton-Raphson modificado* junto com a estratégia de iteração proposta por Yang e Kuo (1994), *controle dos deslocamentos generalizados*, com incremento automático do parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$ baseado no parâmetro de rigidez generalizado, *GSP*. Foi utilizado um incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda_1^0 = 0.17 EI/PL^2$ e uma tolerância $\zeta = 10^{-4}$.

A Tabela 7.5a fornece os valores encontrados para a carga crítica adimensionalizada, $P_{cr}L^2/EI$, com o seu respectivo erro percentual. Adotou-se o critério de avaliar como valor crítico, a carga que corresponde o menor valor de *GSP* pois, como foi definido em Yang e Kuo (1994), o valor nulo de *GSP* indica um ponto onde a reta tangente à curva carga–deslocamento torna-se paralela ao eixo dos deslocamentos.

A Tabela 7.5b apresenta os valores de u/L no ponto limite de deslocamento com os respectivos erros percentuais.

Tabela 7.5a – Carga crítica: Valores de $P_{cr} L^2/EI$.

Formul.	Número de Elementos							
	2		3		5		10	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
AFT	2.465	0.089	2.466	0.061	2.467	0.028	2.467	0.012
AFI	2.468	0.020	2.468	0.036	2.468	0.024	2.469	0.081
TFT	2.474	0.255	2.474	0.288	2.479	0.482	2.469	0.049
TFI	2.470	0.097	2.469	0.049	2.468	0.036	2.468	0.036
YSN	2.470	0.097	2.469	0.049	2.468	0.040	2.469	0.061
YGN	2.470	0.081	2.468	0.036	2.468	0.020	2.468	0.020
YGE	2.470	0.081	2.468	0.032	2.468	0.024	2.468	0.020
YHN	2.470	0.081	2.468	0.032	2.468	0.024	2.468	0.020
PTT	2.745	11.243	2.584	4.742	2.508	1.658	2.477	0.401
PT1	2.597	5.261	2.525	2.326	2.488	0.843	2.473	0.227
PT2	2.469	0.070	2.468	0.028	2.468	0.020	2.468	0.016
PC1	2.597	5.261	2.525	2.326	2.488	0.843	2.473	0.227
PC2	2.469	0.070	2.468	0.028	2.468	0.020	2.468	0.016
Solução analítica : $P_{cr} L^2/EI = \pi^2/4 \approx 2.467$ (Southwel, 1941).								

Pode-se destacar da Tabela 7.5a as seguintes observações:

- As formulações PTT, PT1 e PC1 apresentaram erros relativamente grandes da carga crítica para os modelos estruturais mais simples, e melhoraram esses resultados com o aumento da discretização;
- As demais formulações forneceram bons resultados para todos os modelos de elementos finitos;
- ficou evidente mais uma vez a identidade dos resultados produzidos por PT1 e PC1, bem como para os obtidos por PT2 e PC2.

Tabela 7.5b – Ponto limite de deslocamento : Valores de u/L .

Formul.	Número de Elementos							
	2		3		5		10	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
AFT	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
AFI	0.846	5.224	0.821	2.114	0.811	0.871	0.807	0.373
TFT	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
TFI	0.845	5.099	0.821	2.114	0.811	0.871	0.807	0.373
YSN	0.846	5.224	0.821	2.114	0.811	0.871	0.807	0.373
YGN	0.846	5.224	0.821	2.114	0.811	0.871	0.807	0.373
YGE	0.846	5.224	0.821	2.114	0.811	0.871	0.808	0.497
YHN	0.846	5.224	0.821	2.114	0.811	0.871	0.807	0.373
PTT	0.833	3.607	0.817	1.617	0.810	0.746	0.807	0.373
PT1	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
PT2	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
PC1	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
PC2	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
Solução analítica : $u_{cr}/L = 0.804$ (Southwel, 1941).								

Da Tabela 7.5b as seguintes observações podem ser destacadas:

- com exceção de PTT, todas as formulações que obtêm o vetor de forças internas através dos deslocamentos totais, ou seja, AFT, TFT, PT1, PC1, PT2 e PC2, apresentaram problemas de convergência, mostrando-se incapazes de atingir o ponto limite de deslocamento;
- a formulação PTT, apesar de ter apresentado os piores resultados para a carga crítica, apresentou os melhores resultados para o ponto limite de deslocamento;
- a formulação TFT mostrou grandes erros na obtenção da trajetória de equilíbrio pós-crítica para os modelos mais simples, como mostra a Figura 7.6;

- como no exemplo anterior, pode-se observar a semelhança dos resultados produzidos pelas formulações que obtêm o vetor de forças internas a partir dos deslocamentos naturais incrementais.

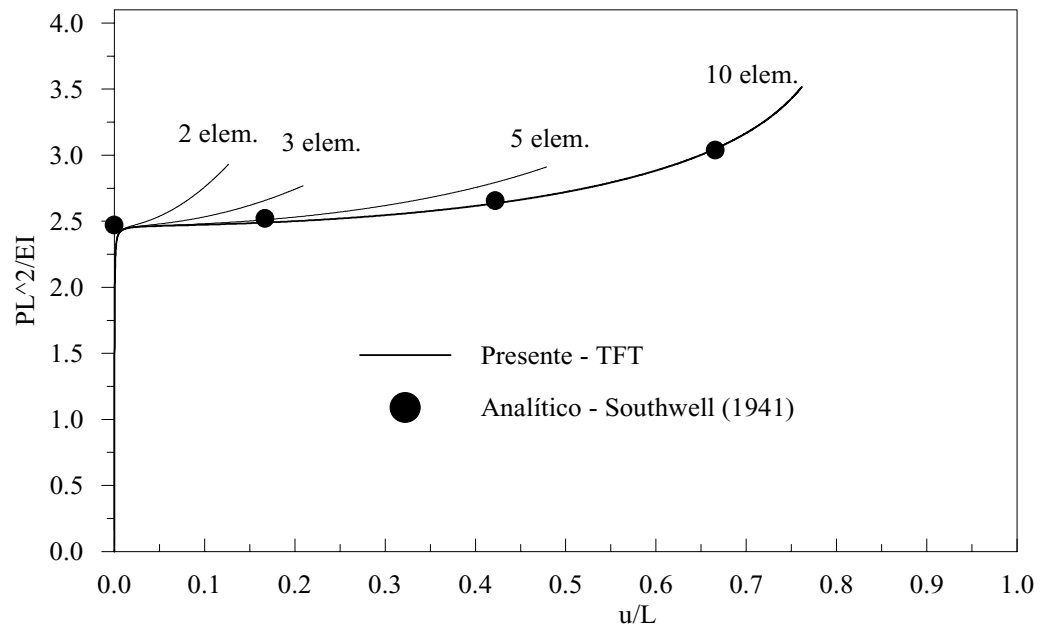


Figura 7.6 – Trajetórias pós-crítica: TFT.

7.2.3 – Arco Birrotulado sob Carregamento Distribuído

O problema a ser tratado nesta seção consiste de uma arco senoidal birrotulado submetido a uma carga vertical P uniformemente distribuída. As propriedades físicas e geométricas desse sistema estrutural estão apresentadas na Figura 7.7.

O objetivo deste exemplo é analisar e comparar as duas formas de se obter o vetor de forças internas propostas por Yang e Kuo (1994): a) através dos deslocamentos naturais - YGN -; b) usando a matriz de rigidez externa - YGE-.

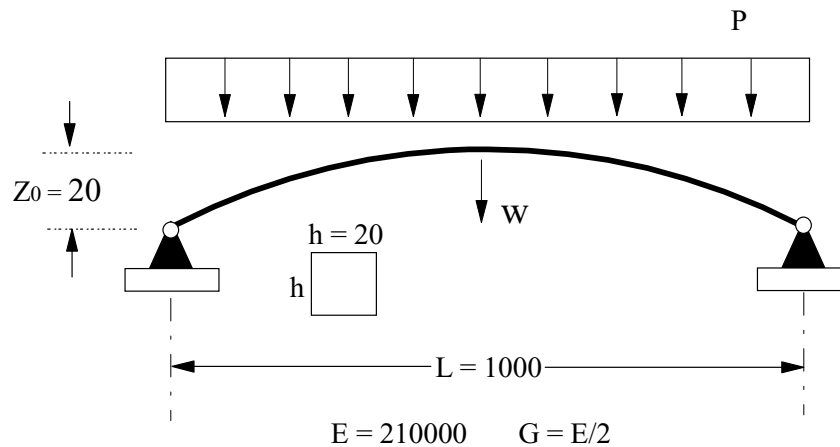


Figura 7.7 – Arco birrotulado sob carga distribuída.

As Tabelas 7.6a e 7.6b apresentam, para os modelos estruturais com 3, 4, 5 e 8 elementos, os valores da carga nos dois pontos limites de carga, bem como o erro percentual em relação à solução numérica obtida por Bergan (1980).

A solução não-linear foi obtida usando-se a estratégia de iteração *comprimento de arco cilíndrico*, com o método *Newton-Raphson modificado*; o incremento automático do comprimento de arco foi adotado como controlador do valor inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$. Adotou-se para o primeiro incremento: $\Delta\lambda_1^0 = 0.5 \times 10^{-3}$. Para controlar a convergência foi adotada uma tolerância $\zeta = 10^{-3}$.

A Figura 7.8 fornece as trajetórias de equilíbrio para as duas formulações em estudo. Observe que, à medida que os deslocamentos crescem, o caminho de equilíbrio encontrado através da formulação YGE se afasta da solução esperada.

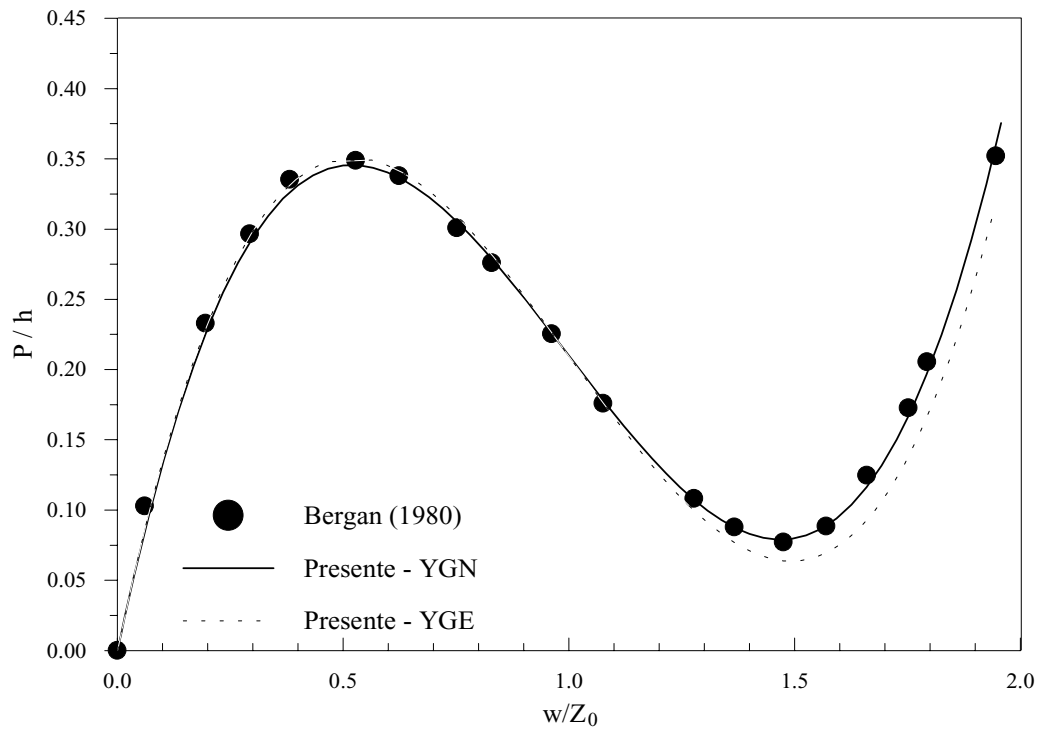


Figura 7.8 – Trajetórias de equilíbrio: YGN e YGE (8 elem).

Tabela 7.6a – Valor de P/h no 1º ponto limite.

Formul.	Número de Elementos							
	3		4		5		8	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
YGN	0.334	4.2	0.340	2.5	0.342	1.9	0.345	0.8
YGE	0.339	2.8	0.345	1.1	0.348	0.2	0.351	0.6

Valor de referência: $^1P_{cr} = 0.349$ (Bergan, 1980)

Tabela 7.6b – Valor de P/h no 2º ponto limite.

Formul.	Número de Elementos							
	3		4		5		8	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
YGN	0.075	2.5	0.077	0.1	0.078	1.4	0.079	2.7
YGE	0.059	23.3	0.061	20.7	0.062	19.4	0.064	16.8

Valor de referência: $^2P_{cr} = 0.077$ (Bergan, 1980)

As Tabelas 7.6a e 7.6b confirmam que há um erro significativo para a formulação YGE na obtenção do segundo ponto limite. Este erro pode ser explicado pelas aproximações que se fizeram necessárias na definição da *matriz de rigidez externa*. Estas aproximações forneceram, entretanto, erros desprezíveis quando os deslocamentos incrementais foram suficientemente pequenos. Faz-se portanto necessário um estudo a respeito da variação dos resultados ao se utilizar diferentes valores para estes deslocamentos incrementais, através de uma variação do valor médio dos incrementos de carga.

A Tabela 7.7 e a Figura 7.9, obtidas para o modelo com 8 elementos, evidenciam que ao se diminuir o valor médio do incremento de carga, os valores obtidos por YGE se aproximam dos fornecidos pela formulação YGN.

Tabela 7.7 – Variação de $\Delta\lambda_1^0$: YGE (8 elem.).

$\Delta\lambda_1^0$	Valor médio do incremento de P/h	Valor de P/h 1º Ponto limite	Valor de P/h 2º Ponto limite
5×10^{-3}	0.0139	0.351	0.064
2×10^{-3}	0.00547	0.348	0.073
1×10^{-3}	0.00278	0.347	0.076
5×10^{-4}	0.0013938	0.346	0.077
5×10^{-5}	0.000139697	0.345	0.079
YGN (8 elem. - $\Delta\lambda_1^0=5 \times 10^{-3}$)		0.345	0.079

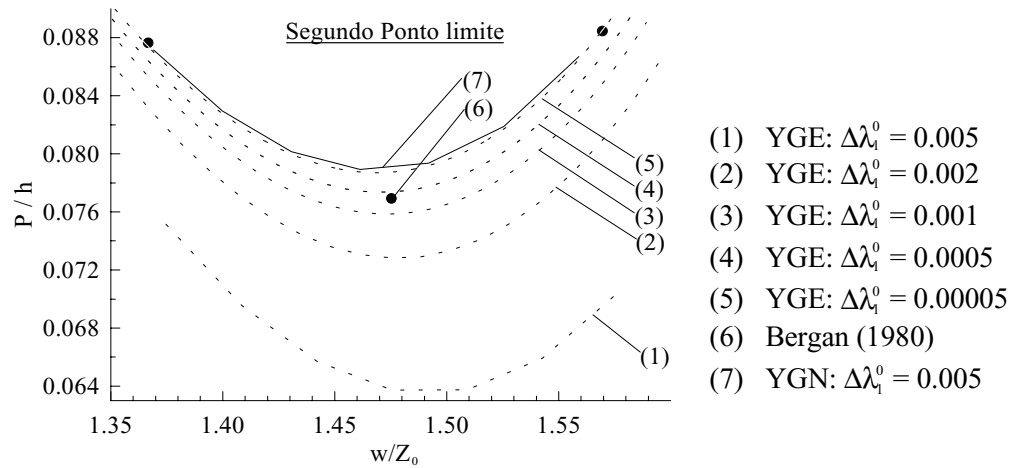


Figura 7.9 - Trajetória de equilíbrio: proximidades do 2º ponto limite.

A diminuição do valor médio do incremento de carga foi conseguida com a redução do valor de $\Delta\lambda_1^0$. Outras estratégias, entretanto, podem ser empregadas. Utilizando-se, por exemplo, solução não-linear proposta por Yang e Kuo (1994), com controle de incremento de carga baseado no parâmetro *GSP* e estratégia de iteração denominada *controle dos deslocamentos generalizados*, com $\Delta\lambda_1^0 = 5 \times 10^{-3}$, chegou-se aos resultados apresentados na Tabela 7.8 e na Figura 7.10.

Tabela 7.8 - Valores limites de P/h: YGE (8 elem. – GSP).

$\Delta\lambda_1^0$	Valor médio do incremento de P/h	Valor de P/h 1º Ponto limite	Valor de P/h 2º Ponto limite
5×10^{-3}	0.000075	0.345	0.079
YGN (8 elem - $\Delta\lambda_1^0 = 5 \times 10^{-3}$)		0.345	0.079

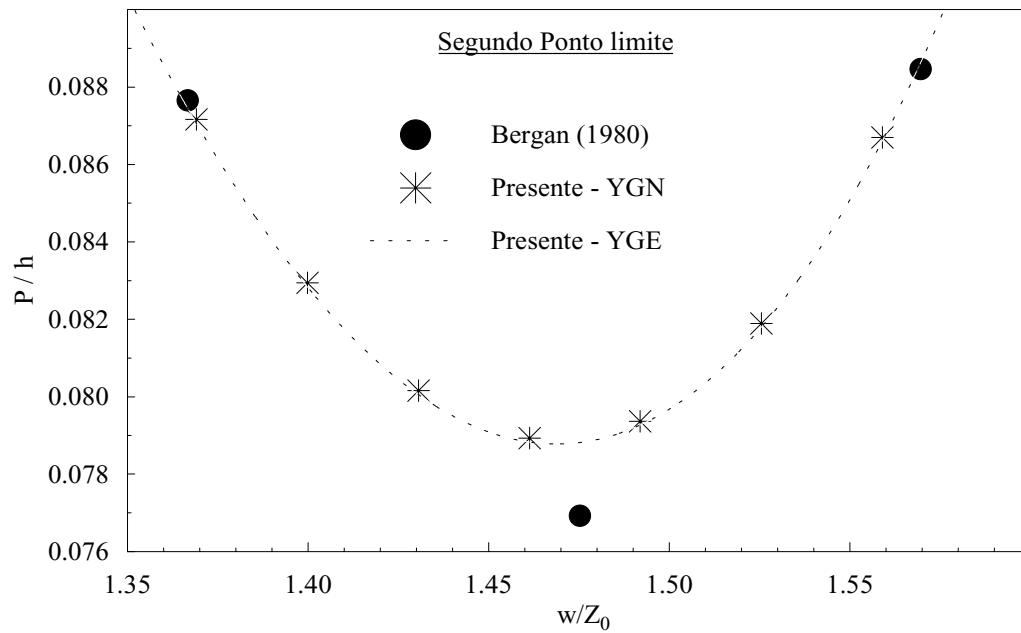


Figura 7.10 - Trajetória de equilíbrio: proximidades do 2º ponto limite.

7.2.4 – Arco Biengastado sob Pressão Radial

Um arco circular biengastado é submetido a uma pressão radial uniforme conforme mostrado na Figura 7.11. Nesta mesma figura estão representados os parâmetros geométricos que definem o arco bem como o seu o módulo de elasticidade.

Resultados analíticos para esse problema foram apresentados por Kerr e Soifer (1969), sendo usados, desde então, para validar formulações numéricas (Antonini, 1987; Alves, 1993b).

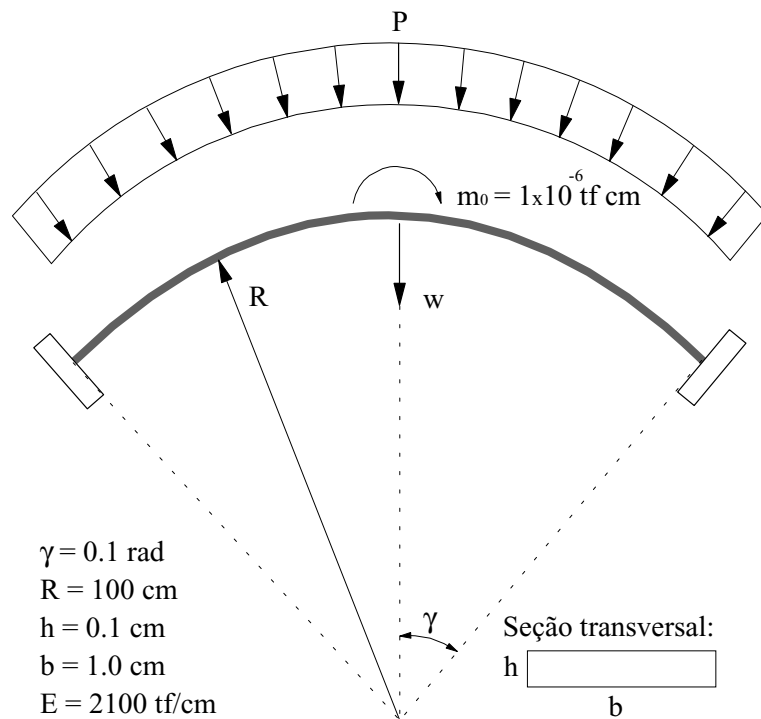


Figura 7.11 – Arco biengastado sob pressão radial.

Trata-se de uma estrutura que apresenta um caminho de equilíbrio acentuadamente não-linear com perda de estabilidade por ponto limite associada a um modo de deformação simétrico. Entretanto, sob a ação de pequenas perturbações assimétricas, pode ser identificado, ao longo do caminho não-linear de equilíbrio, um ponto de bifurcação associado a um modo de deformação anti-simétrico. Na presente

análise estas pequenas perturbações são introduzidas por um momento inicial, m_0 , como mostrado na figura.7.11.

Alves (1993b) mostrou que o acréscimo de pequenas imperfeições aleatórias às coordenadas nodais é uma estratégia numérica bastante eficiente para detectar pontos de bifurcação ao longo da trajetória não-linear de equilíbrio. Na realidade, este procedimento é justificado tanto em termos da Teoria Geral da Estabilidade Elástica (Koiter, 1970; Thompson & Hunt, 1973) como através da Teoria da Catástrofe (Thom, 1975; Poston & Stewart, 1978).

Ambas as teorias mostram que imperfeições aleatórias infinitesimais, apesar de destruírem os pontos de bifurcação, geram um caminho de equilíbrio que inicialmente praticamente coincide com o caminho fundamental de equilíbrio da estrutura perfeita e que ao atingir a vizinhança do primeiro ponto de bifurcação, onde a trajetória fundamental se torna instável, passa a seguir a trajetória pós-crítica de equilíbrio. Também, sendo a distribuição de imperfeições aleatória, esta "contém", em uma representação modal equivalente, todos os modos críticos, o que permite detectar caminhos que emergem tanto de pontos de bifurcação isolados quanto de pontos de bifurcação múltiplos.

Este exemplo é utilizado aqui com objetivo de analisar as formulações não-lineares propostas por Alves (1993b): AFT e AFI, e por Torkamani et al. (1997): TFT e TFI. Essas formulações têm processos semelhantes de obtenção da matriz de rigidez e do vetor de forças internas, sendo que Torkamani et al. (1997) propôs um modelo mais simples, como mostrado resumidamente na Tabela 7.1 (veja também Capítulo 3).

Para a realização da análise, primeiramente considerou-se o arco perfeitamente simétrico. A estrutura foi então representada por 4 modelos diferentes considerando-se apenas metade do arco, ou seja: 3, 4, 8 e 10 elementos. Para tornar esses modelos compatíveis, foram introduzidas restrições à rotação e ao deslocamento tangencial do ponto que coincide com o eixo de simetria.

Em seguida, foram considerados outros 4 modelos estruturais do arco completo, ou seja, com 6, 8, 16 e 20 elementos respectivamente. Nesses modelos uma carga inicial tipo momento, m_0 , foi introduzida.

A solução não-linear seguiu a estratégia de iteração proposta por Crisfield (1991), *comprimento de arco cilíndrico*, junto ao método de *Newton-Raphson modificado*, com

incremento automático do comprimento de arco controlando o carregamento. No caso da estrutura simétrica (metade do arco), foi utilizado um incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda_1^0 = 10^{-6}$, e para o caso da estrutura completa, $\Delta\lambda_1^0 = 10^{-7}$. Foi adotada uma tolerância $\zeta = 10^{-3}$.

As Figuras 7.12 e 7.13 ilustram as trajetórias de equilíbrio da estrutura perfeita e com imperfeições iniciais. Foram considerados 10 e 20 elementos, respectivamente, na modelagem desses sistemas estruturais.

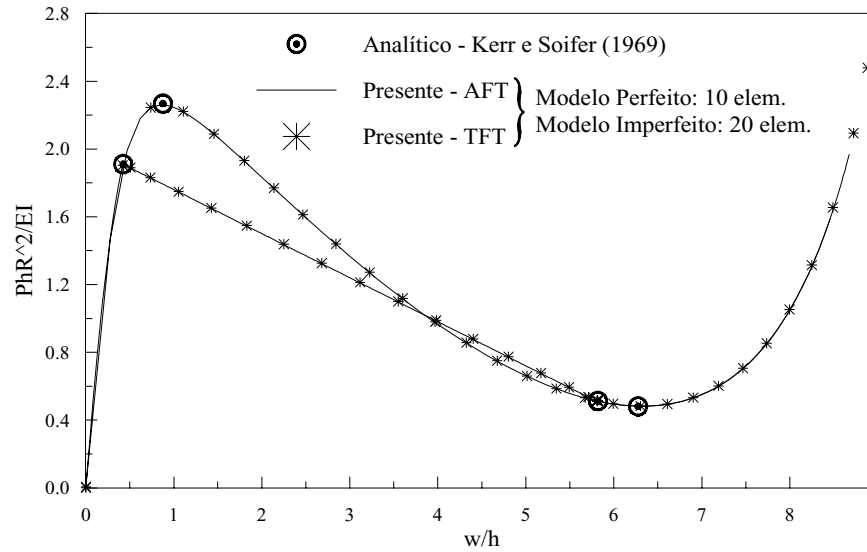


Figura 7.12 – Trajetórias de equilíbrio: AFT e TFT.

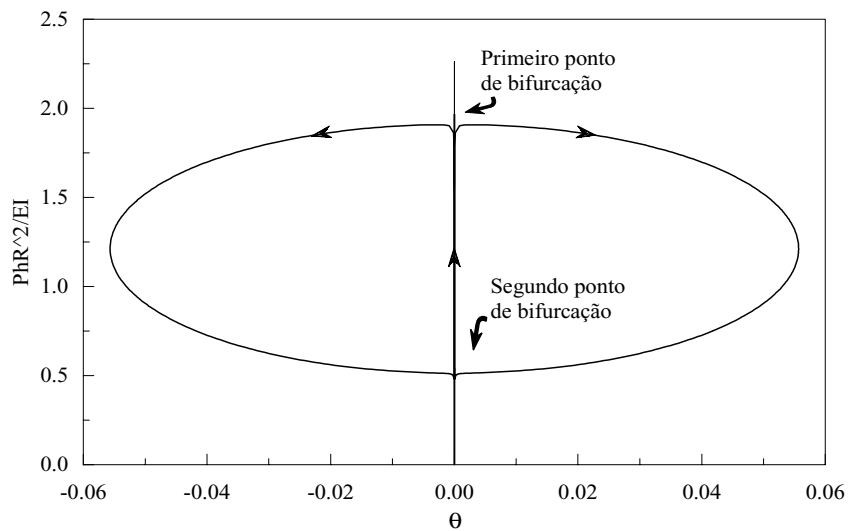


Figura 7.13 – Trajetórias de equilíbrio: AFT (10 – 20 elem.).

Observe que até o primeiro ponto de bifurcação, o comportamento da estrutura é próximo daquele do modelo perfeito; no regime pós-crítico, as deformações assimétricas tornam-se bastante pronunciadas, e a partir do segundo ponto de bifurcação o comportamento do arco volta a se aproximar daquele do modelo perfeito.

Para as 4 formulações em estudo as soluções obtidas nos dois pontos limites de carga para a estrutura simétrica, bem como o erro percentual em relação ao valor analítico, estão representadas nas Tabelas 7.9a e 7.9b.

Tabela 7.9a – Valor de PhR^2/EI no 1º ponto limite.

Formul.	Número de Elementos: metade do arco							
	3		4		8		10	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
AFT	2.288	0.88	2.272	0.18	2.269	0.04	2.260	0.35
AFI	2.352	3.70	2.313	1.98	2.280	0.53	2.267	0.04
TFT	2.310	1.85	2.284	0.71	2.271	0.13	2.261	0.31
TFI	2.352	3.70	2.313	1.98	2.280	0.53	2.268	0.00
Solução analítica: $^1P_{lim}hR^2/EI = 2.268$ (Kerr e Soifer, 1969)								

Tabela 7.9b – Valor de PhR^2/EI no 2º ponto limite.

Formul.	Número de Elementos: metade do arco							
	3		4		8		10	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
AFT	0.474	1.46	0.479	0.42	0.481	0.00	0.482	0.21
AFI	0.312	35.14	0.392	18.50	0.460	4.37	0.469	2.50
TFT	0.652	35.55	0.520	8.11	0.484	0.62	0.483	0.42
TFI	0.312	35.14	0.392	18.50	0.460	4.37	0.469	2.49
Solução analítica: ${}^2P_{\text{lim}}\text{hR}^2/\text{EI} = 0.481$ (Kerr e Soifer, 1969)								

As seguintes observações podem ser destacadas das Tabelas 7.9a e 7.9b:

- os erros tornam-se mais evidentes a medida que os deslocamentos crescem;
- os resultados apresentados pelas formulações em análise que adotam o procedimento de cálculo do vetor de forças internas através dos *deslocamentos naturais incrementais*, isto é, AFI e TFI, mostraram comportamentos semelhantes;
- como esperado, AFT apresentou resultados melhores que TFT;
- para este problema em particular, as formulações AFI e TFI apresentaram erros maiores do que AFT e TFT.

As Tabelas 7.10a e 7.10b contêm as soluções obtidas e o erro percentual em relação ao valor analítico nos dois pontos de bifurcação.

Tabela 7.10a– Valor de PhR^2/EI no 1º ponto de bifurcação

Formul.	Número de Elementos Para o Arco Completo							
	6		8		16		20	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
AFT	1.919	0.47	1.911	0.05	1.907	0.16	1.907	0.16
AFI	1.931	1.10	1.919	0.47	1.910	0.00	1.909	0.05
TFT	1.923	0.68	1.913	0.16	1.908	0.10	1.908	0.10
TFI	1.932	1.15	1.919	0.47	1.911	0.05	1.910	0.00
Solução analítica: $^1P_{bif}hR^2/EI = 1.910$ (Kerr e Soifer, 1969)								

Tabela 7.10b– Valor de PhR^2/EI no 2º ponto de bifurcação.

Formul.	Número de Elementos Para o Arco Completo.							
	6		8		16		20	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
AFT	---	---	---	---	0.515	0.39	0.515	0.39
AFI	0.337	34.31	0.408	20.47	0.485	5.46	0.498	2.92
TFT	---	---	---	---	0.515	0.39	0.515	0.39
TFI	0.337	34.31	0.408	20.47	0.485	5.46	0.498	2.92
Solução analítica: $^2P_{bif}hR^2/EI = 0.513$ (Kerr e Soifer, 1969)								

Analisando as Tabelas 7.10a e 7.10b, pode-se acrescentar às observações destacadas anteriormente que, para os modelos mais simples, AFT e TFT tiveram problemas de convergência, não atingindo o segundo ponto de bifurcação.

A Figura 7.14 superpõe as trajetórias de equilíbrio das formulações AFT e AFI, para o par de modelos estruturais 8-16 elementos (perfeito e imperfeito), ilustrando assim as diferenças encontradas entre as duas diferentes formas de cálculo do vetor de forças internas. Observe que a divergência entre as duas soluções é maior após a passagem do segundo ponto crítico (bifurcação), quando os deslocamentos são mais pronunciados.

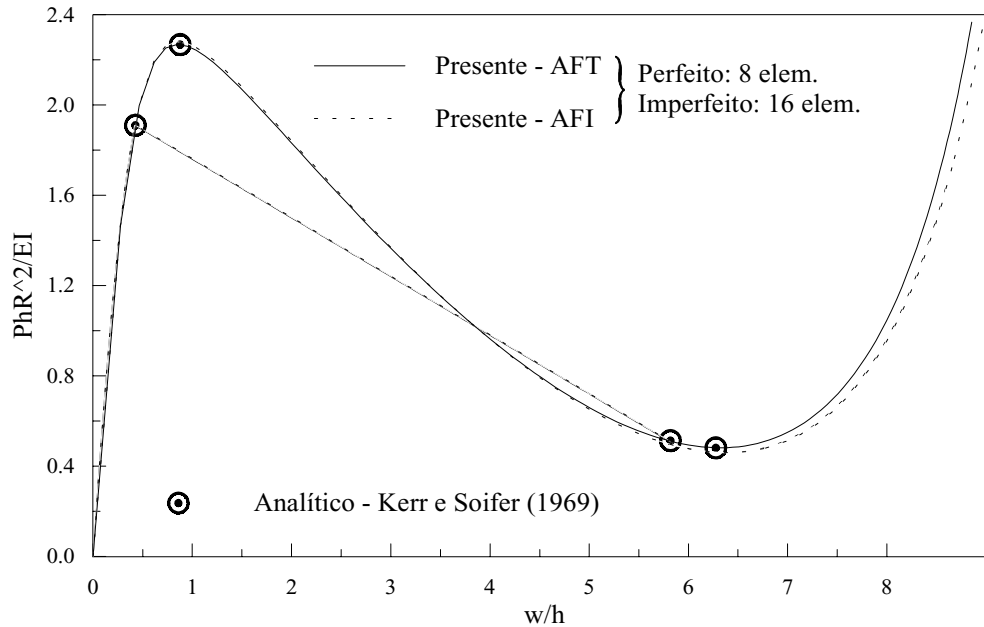


Figura 7.14 – Trajetórias de equilíbrio: AFT e AFI (8 –16 elem.).

Algumas considerações gerais podem ser levantadas a partir dos resultados encontrados:

- este exemplo mostrou a existência de diferenças nos resultados obtidos por formulações baseadas nas mesmas relações constitutivas e cinemáticas mas que se utilizam de processos diferentes no cálculo do vetor de forças internas;
- a forma ‘incremental’ de obtenção do vetor de forças internas, mostra-se mais eficiente no traçado de trajetórias que apresentam uma não-linearidade muito forte. Esta observação ficará mais evidente nos exemplos da Seção (7.3). entretanto, no presente exemplo, os resultados obtidos pelas formulações AFT e TFT apresentaram erros menores que os apresentados por AFI e TFI;
- observa-se ainda no presente exemplo que AFT, que foi baseada em uma relação deformação-deslocamento mais completa, apresentou resultados ligeiramente superiores a TFT. Entretanto, não houve diferenças relevantes entre os resultados apresentados por AFI e TFI.

Essas formulações de elementos finitos voltarão a ser tratadas no Exemplo (7.3.4).

7.2.5 – Pórtico de Williams

A Figura 7.15 apresenta os sistemas estruturais a serem considerados neste exemplo. Na mesma figura estão ainda representados os parâmetros geométricos e físicos necessários à análise.

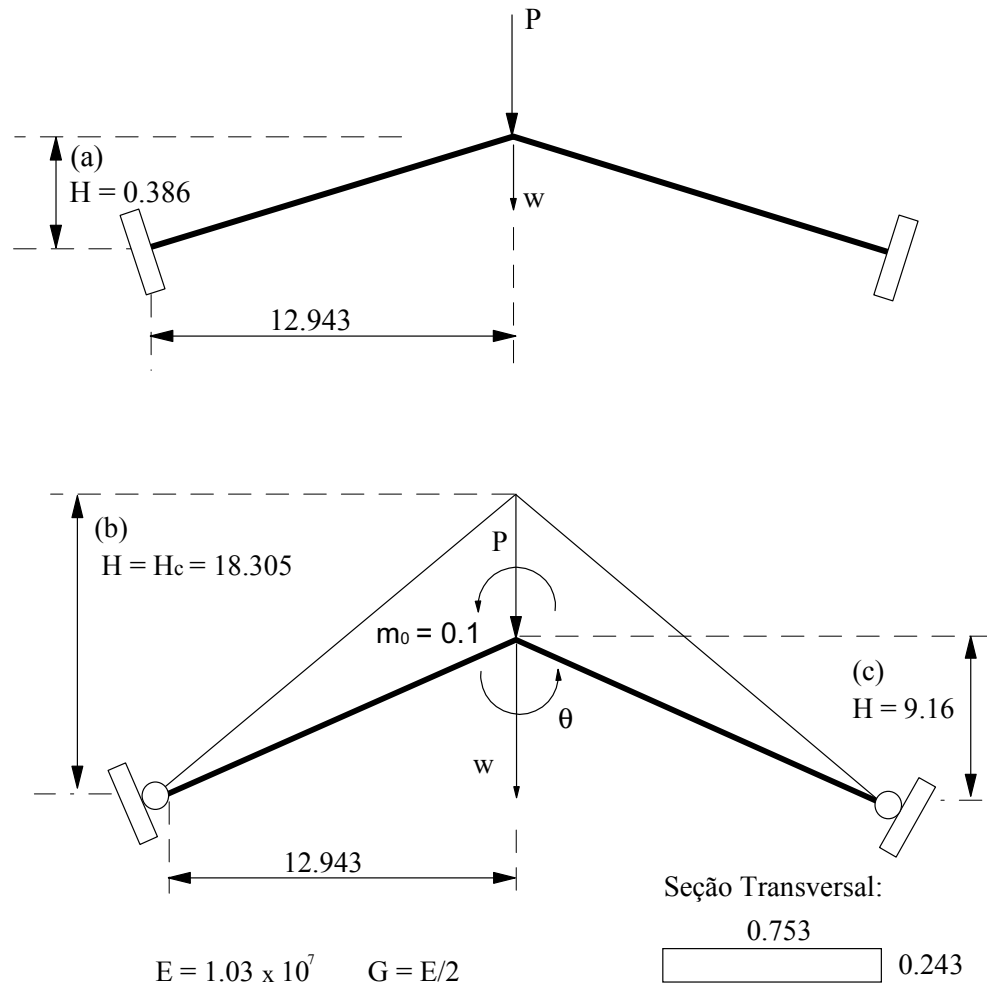


Figura 7.15 – Pórtico de Williams (Pacoste e Eriksson, 1997).

O objetivo deste exemplo é testar e comparar novamente algumas formulações já analisadas nos exemplos anteriores. Para este fim serão utilizadas as formulações AFT, YGN, PTT e PT2, que representam, cada uma delas, um grupo de formulações que apresentaram soluções semelhantes, conforme informações obtidas dos exemplos anteriores. Neste exemplo as modelagens serão feitas para a estrutura completa, ou seja, não levando em conta as condições de simetria. Será adotada uma tolerância $\zeta = 10^{-3}$.

Primeiramente, será analisado o pórtico abatido biengastado representado na Figura 7.15a. Este problema possui resultados analíticos e experimentais apresentados por Williams (1964), sendo frequentemente utilizados para validar modelos numéricos (Wood e Zienkiewics, 1977; Alves, 1993a; Yang e Kuo, 1994; Pacoste e Eriksson, 1997). Esta estrutura apresenta um caminho de equilíbrio acentuadamente não linear com perda de estabilidade por ponto limite associada.

Nesta análise será utilizada a estratégia de iteração proposta por Krenk (1995), com uma condição de ortogonalidade acoplada ao esquema de *Newton-Raphson modificado*, e incremento do parâmetro de carga sendo controlado pelo *comprimento de arco*. Valor inicial adotado para o parâmetro de carga: $\Delta\lambda_1^0 = 0.15$.

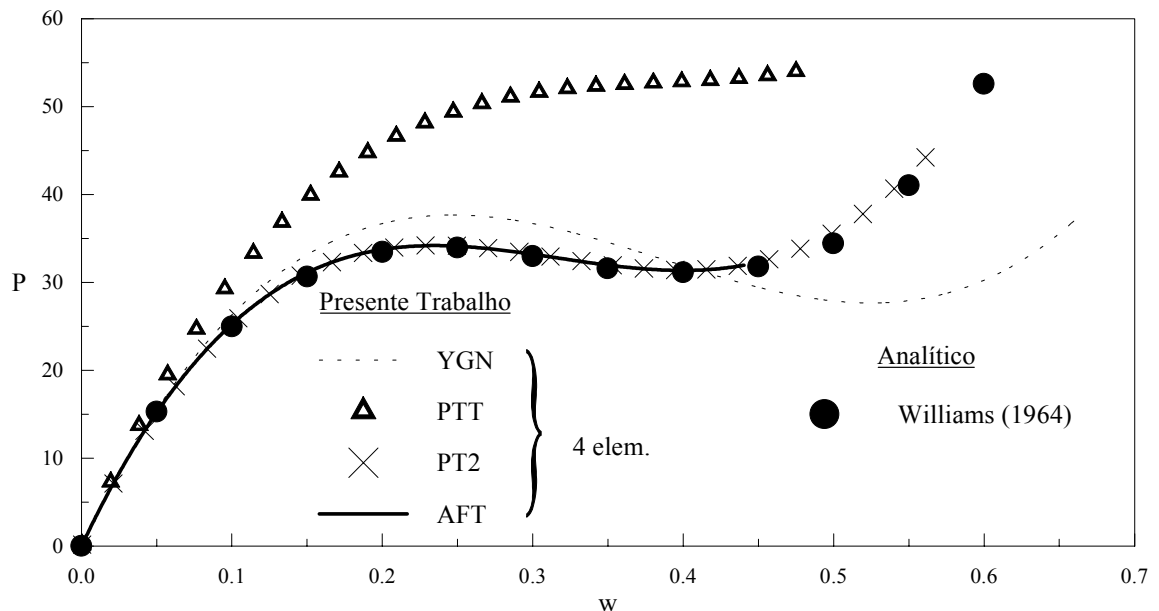


Figura 7.16 – Trajetórias de equilíbrio: YGN, PTT, PT2, AFT (4 elem.).

Observa-se na Figura 7.16 a ocorrência de um grande erro para a formulação PTT no traçado do caminho de equilíbrio para o modelo estrutural formado por quatro elementos finitos, evidenciando uma excessiva rigidez. YGN também apresentou um erro significativo, mostrando a necessidade de um melhor modelo estrutural. A formulação AFT, assim como PT2, apresentou bons resultados, porém AFT mostrou problemas de convergência no traçado da trajetória após o segundo ponto limite, este problema persistiu quando se melhorou o modelo.

As Figuras 7.17 e 7.18 mostram a evolução dos resultados obtidos por PTT e YGN ao se melhorar o modelo estrutural aumentando-se o número de elementos finitos.

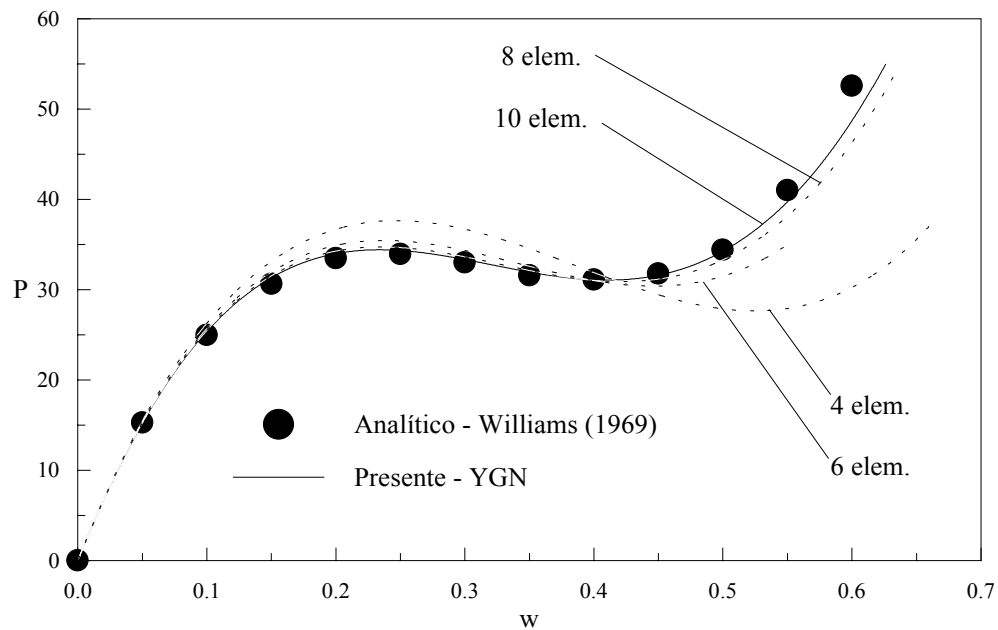


Figura 7.17 – Evolução das soluções: YGN.

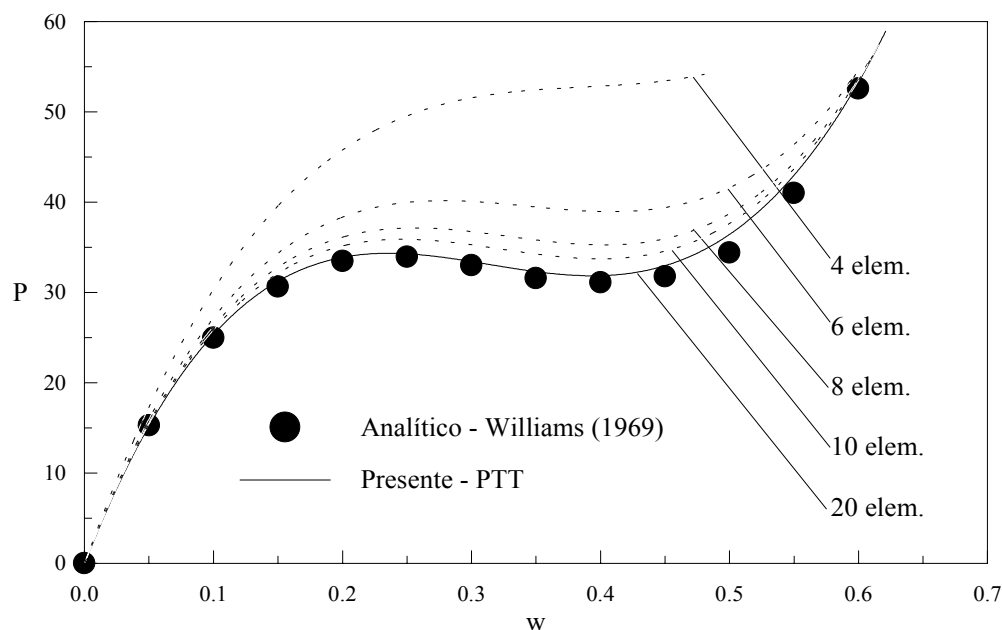


Figura 7.18 – Evolução das soluções: PTT.

A formulação PTT mostrou-se a menos eficiente na análise deste problema, ou seja, só com 20 elementos finitos pôde-se chegar a resultados tão bons quanto os que foram obtidos por AFT e PT2 utilizando 4 elementos. Já YGN necessitou de um modelo estrutural com 10 elementos.

A Figura 7.19 pretende ilustrar o comportamento do pórtico para diferentes alturas. As trajetórias foram obtidas usando-se a formulação PT2, que se mostrou bastante eficiente na análise do problema em questão. Apenas 4 elementos foram utilizados na discretização do sistema.

Ao se comparar os resultados obtidos no presente trabalho com os apresentados em Eriksson (1998), que utilizou 8 elementos, observa-se que o modelo com 4 elementos mostrou-se razoável para os pórticos com alturas inferiores a $H = 0.5$. Os resultados apresentaram uma diferença de aproximadamente 3% em relação aos valores apresentados por Eriksson (1998). Com o aumento de H , a diferença tornou-se maior.

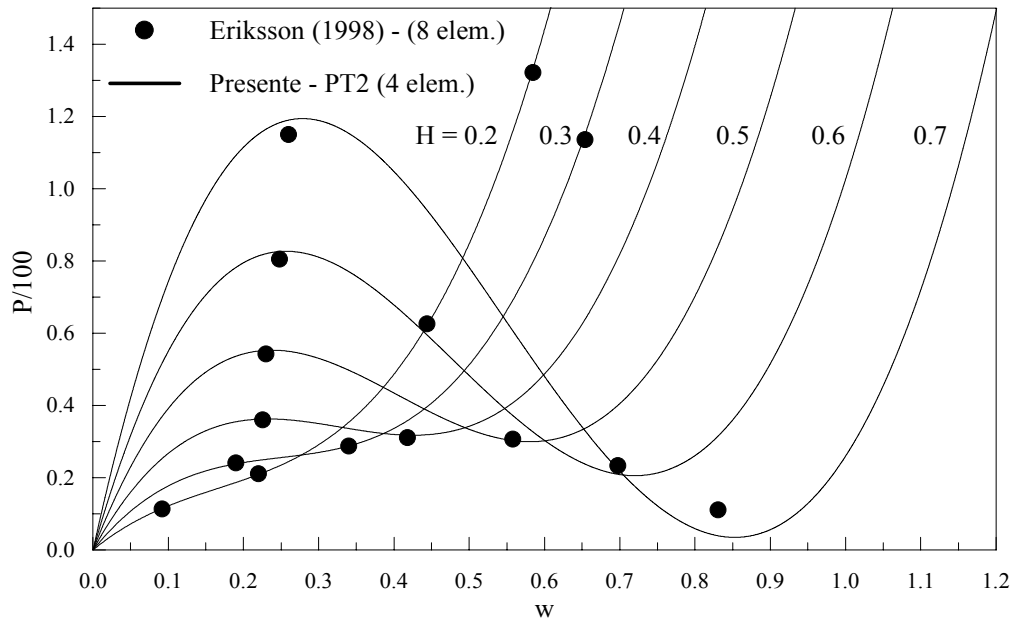


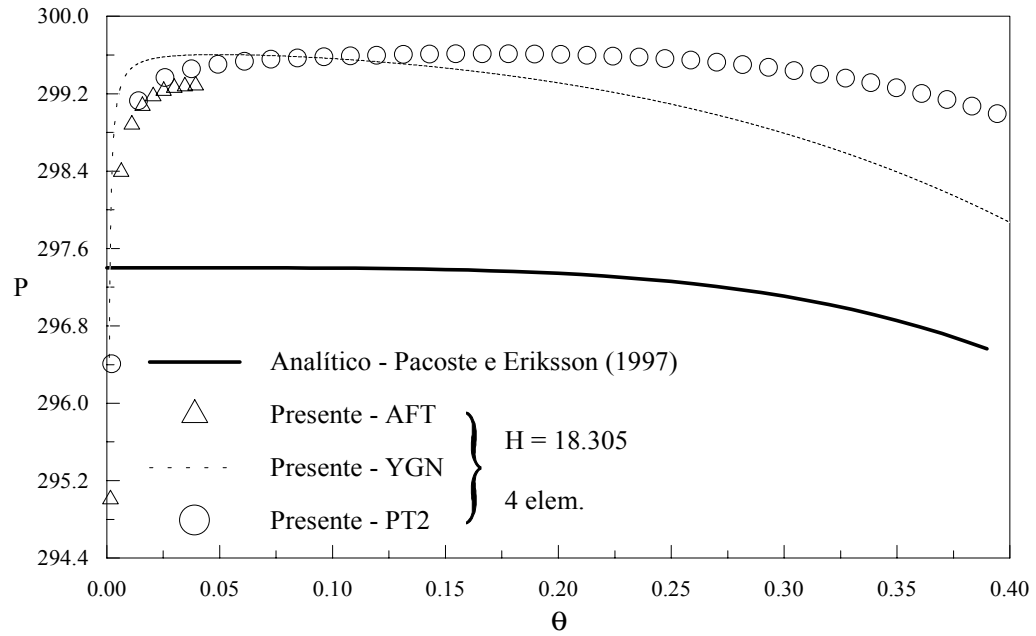
Figura 7.19 – Trajetórias de equilíbrio: pórticos com diferentes alturas H .

Será analisado agora o pórtico birrotulado inicialmente deformado pela carga m_0 , conforme indicado no esquema (b) da Figura 7.15. Este problema foi largamente estudado por Eriksson (1998) e Pacoste e Eriksson (1995 e 1997). Nesses trabalhos a altura $H_c = L / \sqrt{2} \approx 18.305$, indicada na Figura 7.15, foi apresentada como sendo a altura que gera um comportamento pós-crítico no limite entre instável e estável, ou seja, o comportamento pós-crítico é instável se $H < H_c$ e estável se $H > H_c$. Para essa altura foi apresentado em Pacoste e Eriksson (1997) a seguinte expressão analítica para carga, em função da rotação no topo do pórtico: $P = P_{cr} \times (1 - 0.12304 \times \theta^4)$, sendo o valor da carga crítica: $P_{cr} = 297.4$.

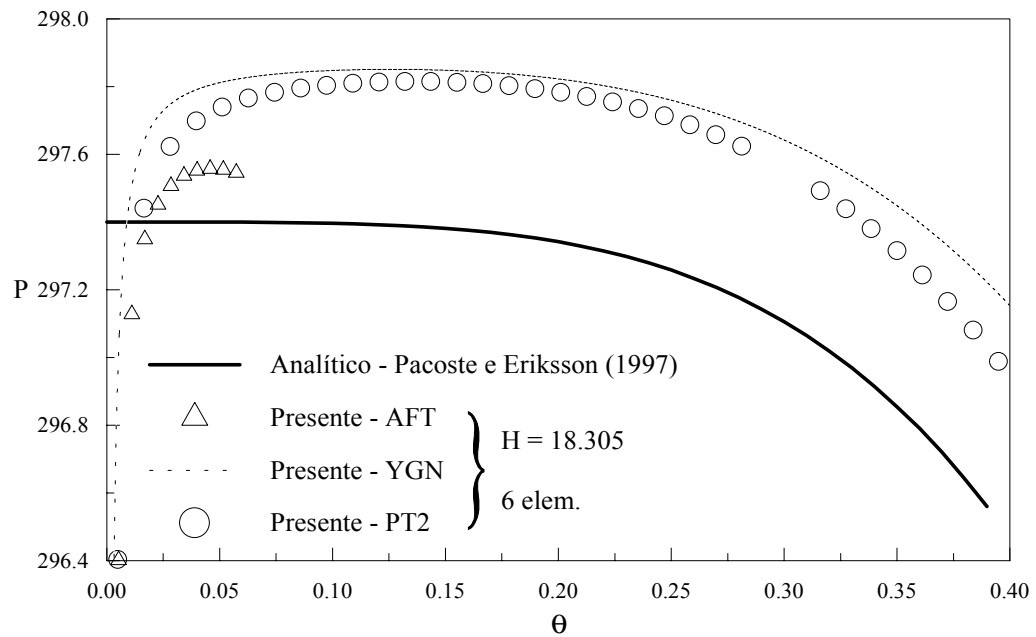
Para a obtenção dos resultados mostrados a seguir foi usado o método de *Newton-Raphson modificado* com a estratégia de iteração *controle dos deslocamentos generalizados* e incremento de carga baseada no parâmetro *GSP*. O parâmetro de carga inicial utilizado foi: $\Delta\lambda_1^0 = 21$.

Os gráficos da Figura 7.20 mostram as trajetórias de equilíbrio para AFT, YGN e PT2 considerando modelos estruturais formados, respectivamente, por 4, 6 e 8

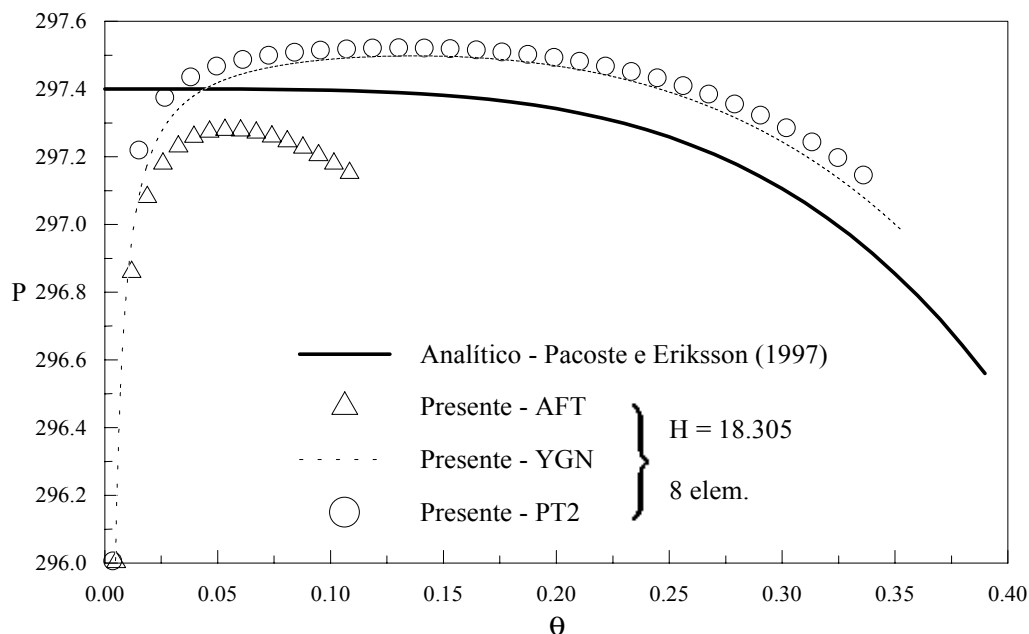
elementos finitos. A solução analítica apresentada em Pacoste e Eriksson (1997) também está desenhada nestes gráficos.



(a) 4 elementos finitos.



(b) 6 elementos finitos.



(c) 8 elementos finitos.

Figura 7.20 – Trajetórias de equilíbrio: $H = H_c = 18.305$.

Observa-se na Figura 7.20a, para o modelo com 4 elementos, que os melhores resultados são obtidos usando-se a formulação PT2, com o caminho pós crítico praticamente paralelo ao analítico, porém ainda distante deste.

Com o aumento da discretização pode-se observar que YGN apresenta uma grande melhora dos resultados, com estes se aproximando do comportamento pós-crítico esperado.

Para AFT, pode-se afirmar que a carga crítica foi encontrada de forma satisfatória, porém o comportamento pós-crítico evidenciou um equilíbrio mais instável. É importante ainda destacar que AFT apresentou problemas de convergência na obtenção do caminho pós crítico.

A formulação não-linear tipo PTT produziu erros bem maiores que as demais, caracterizando uma excessiva rigidez, necessitando portanto de modelos estruturais mais refinados para obtenção de resultados aceitáveis. Esta observação está ilustrada na Figura 7.21.

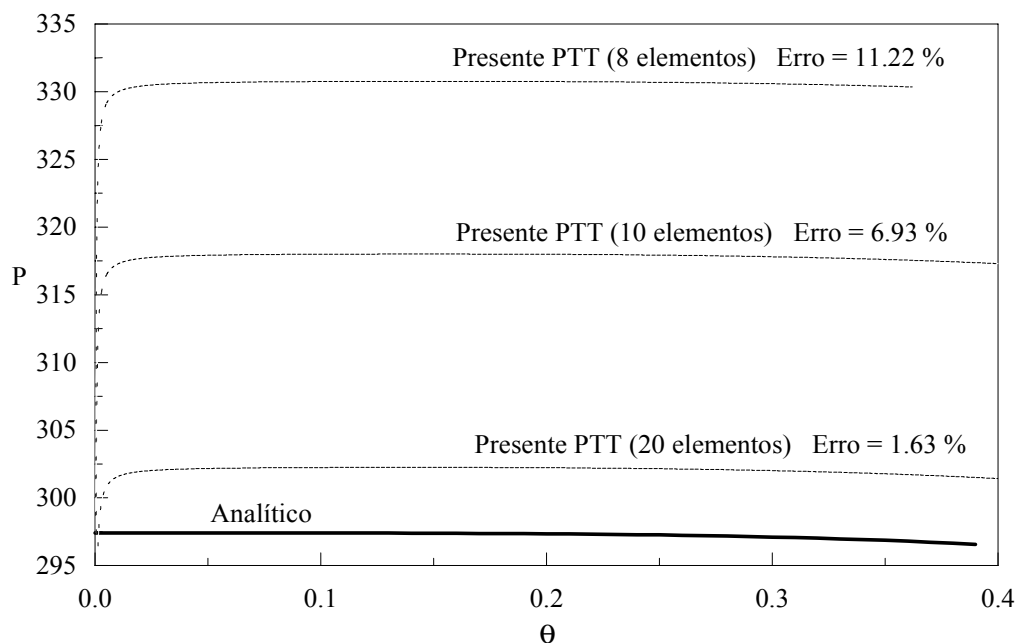


Figura 7.21 – Evolução dos resultados: PTT.

Atenção será dada agora ao pórtico (c) da Figura 7.15 que tem altura $H = 9.16$. Segundo Pacoste e Eriksson (1997), $H = 9.16$ corresponde à altura do pórtico que apresenta o maior valor da carga de bifurcação. Nesse mesmo trabalho se chegou à conclusão de que há bifurcação para todo pórtico com altura $H \geq H_0 \approx 0.4$.

Pretende-se comparar os resultados obtidos pelas mesmas formulações, AFT, YGN, PTT e PT2, com os obtidos também numericamente por Pacoste e Eriksson (1997) utilizando os modelos PTT, PC1 e PC2, e um sistema discretizado com 8 elementos finitos conforme indica a Tabela 7.11. As formulações implementadas por Pacoste e Eriksson (1997) serão aqui designadas por: PE-PTT, PE-PC1 e PE-PC2.

Tabela 7.11– Valores da carga de bifurcação máxima: Pacoste e Eriksson (1997).

Modelo	Nº elem.	Bifurc. máx
PE-PTT	8	443.8
PE-PC1	8	442.6
PE-PC2	8	420.7

A Tabela 7.12 fornece os resultados obtidos pelas formulações AFT, YGN, PTT e PT2, para os modelos estruturais formados por: 4, 8, 10, 20 e 100 elementos.

Tabela 7.12 – Valor da bifurcação máxima obtida no presente trabalho.

Formul.	Número de Elementos				
	4	8	10	20	100
AFT	422.97	420.081	419.97	419.90	419.90
YGN	423.56	420.448	420.29	420.16	420.14
PTT	680.63	467.235	449.23	426.98	420.26
PT2	423.29	420.353	420.23	420.15	420.14

Novamente é verificada uma excessiva rigidez para o elemento PTT, o que provavelmente se deve à simplicidade de suas funções de interpolação, lineares para u , v e θ , e também à desconsideração dos deslocamentos de corpo rígido na obtenção do vetor de forças internas. Como ilustrado na Tabela 7.12, esse problema pode ser contornado empregando-se um número maior de elementos.

Observe que a carga de bifurcação máxima fornecida por Pacoste e Eriksson (1997), empregando PTT e um modelo estrutural com 8 elementos finitos, é ligeiramente melhor que a obtida no presente trabalho. Acredita-se que esse fato se deve a considerações computacionais adicionais não fornecidas no artigo citado.

Mais uma vez, AFT apresentou problemas de convergência na obtenção do caminho pós-crítico para os modelos estruturais mais simples.

A Figura 7.22 ilustra o comportamento do sistema estrutural em estudo, apresentando as trajetórias de equilíbrio obtidas ao se utilizar YGN para um modelo estrutural formado por 8 elementos.

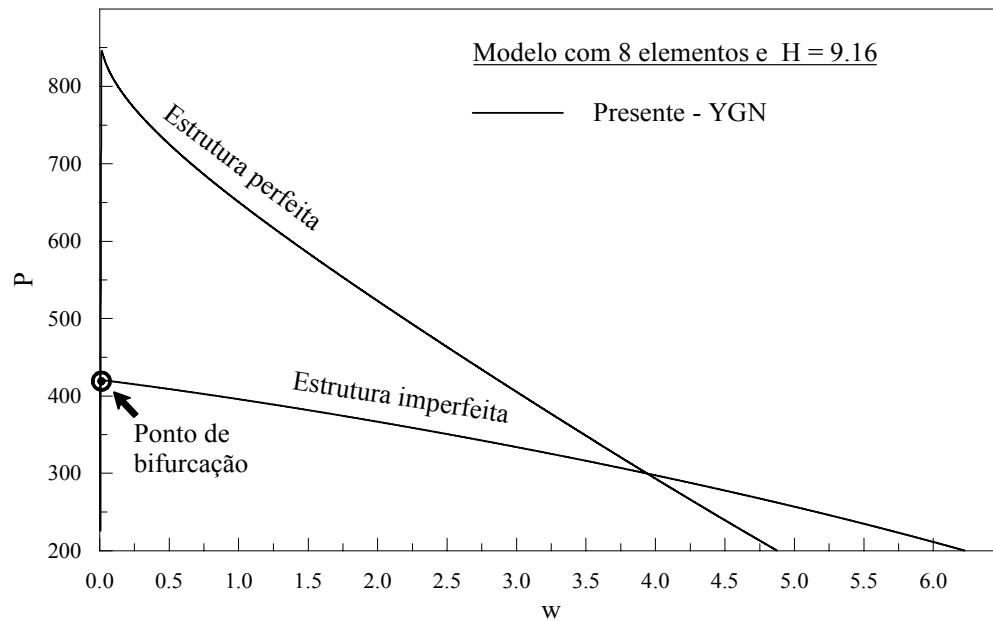


Figura 7.22 – Trajetórias de equilíbrio: YGN (8 elem.).

7.3 – PROBLEMAS FORTEMENTE NÃO-LINEARES

Esta seção pretende verificar a capacidade das formulações não-lineares implementadas neste trabalho em analisar problemas estruturais fortemente não-lineares. Soluções numéricas, ou analíticas, encontradas na literatura serão utilizadas para testar a eficiência computacional dessas formulações.

Com a intenção de ratificar as observações dos exemplos anteriores serão utilizadas todas as formulações implementadas neste trabalho na análise do arco abatido mostrado na Figura 7.23a, usando como referência os resultados extraídos de Yang e Kuo (1994).

A análise do arco circular ilustrado na Figura 7.23b terá o objetivo de analisar e comparar as formulações que se mostraram mais eficientes nos exemplos anteriores: AFI, TFI, YGN, PTT e PT2. Serão usados como referência a solução analítica para o primeiro ponto limite apresentada em Wood e Zienkiewicz (1977) e os resultados numéricos fornecidos por Kouhia e Mikkola (1989).

O exemplo de arco circular, cujo comportamento fortemente não-linear é mostrado na Figura 7.23c, terá o objetivo de analisar as formulações apresentadas por Yang e Kuo (1994): YSN, YGN, YGE e YHN.

As formulações sugeridas por Alves (1993b) e Torkamani et al. (1994) serão novamente analisadas na solução do pórtico de Lee, Figura 7.23d, com o objetivo de preencher algumas lacunas deixadas nas observações finais do Exemplo (7.2.4).

A eficiência computacional das formulações propostas por Pacoste e Eriksson (1997) será avaliada através da análise do arco pouco-abatido da Figura 7.23e em cuja trajetória de equilíbrio pode ser identificado um ponto de bifurcação.

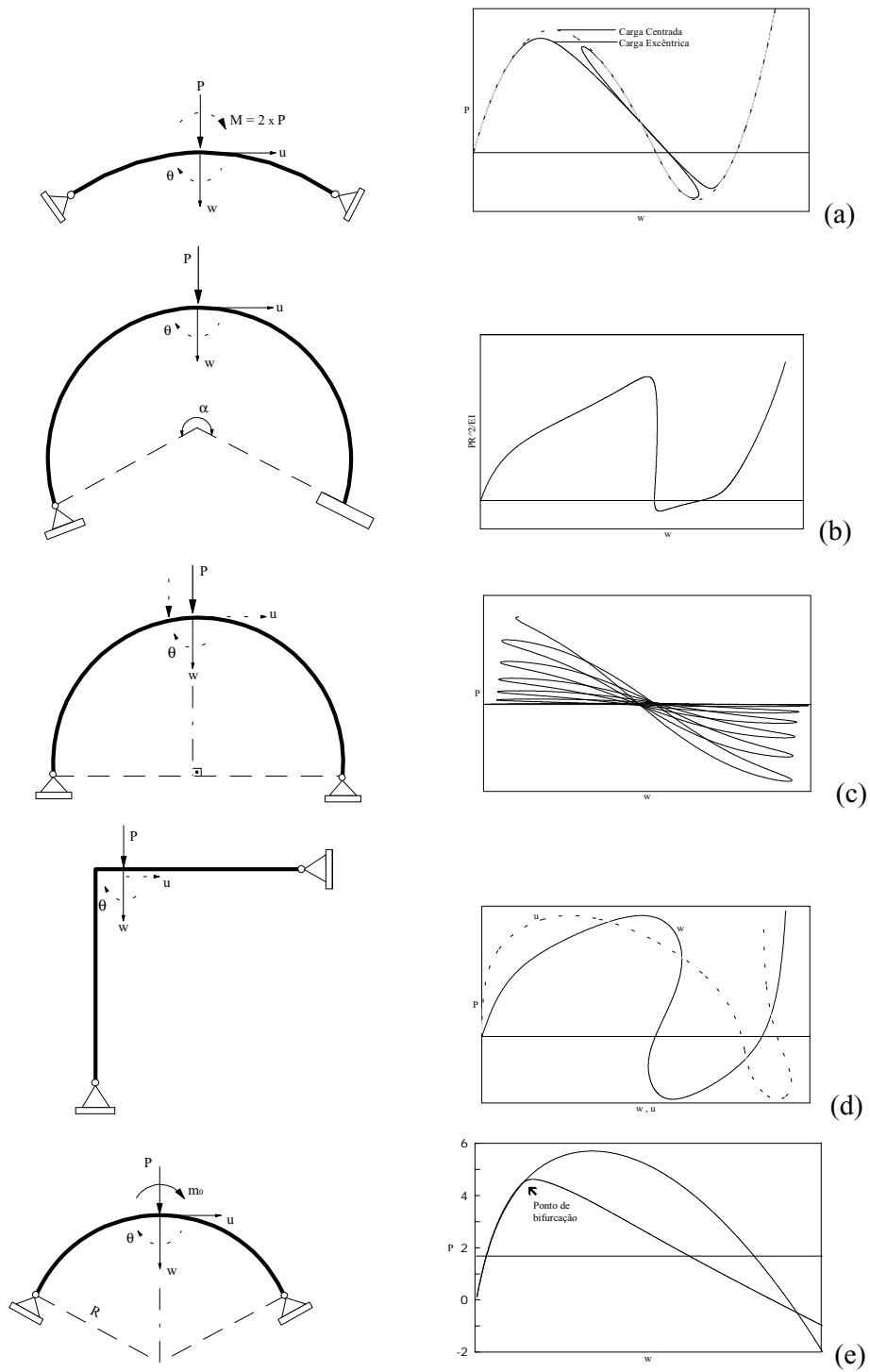


Figura 7.23 – Problemas fortemente não-lineares.

7.3.1 – Arco Abatido Birrotulado sob Carga Pontual

O arco circular abatido birrotulado ilustrado na Figura 7.24 será analisado para duas situações de carregamento: carga pontual centrada e carga excêntrica. Com o objetivo de facilitar a modelagem da estrutura, a carga excêntrica será representada por uma carga vertical aplicada no eixo de simetria do arco, associada a uma carga momento. Nesta mesma figura estão indicados todos os parâmetros geométricos e físicos da estrutura a serem considerados na análise.

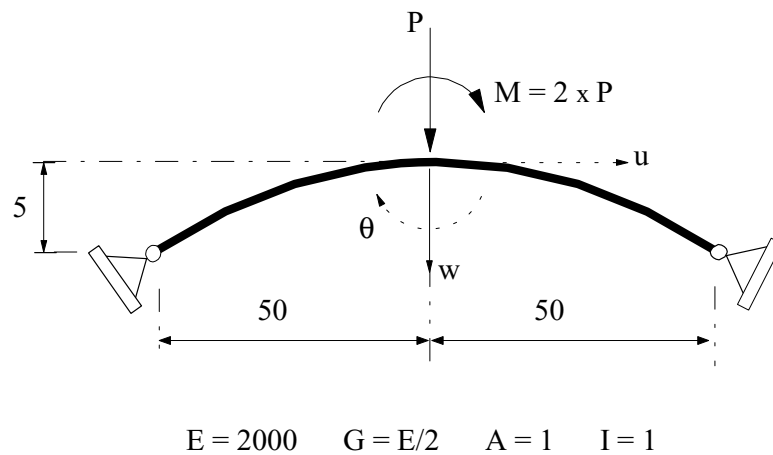


Figura 7.24 - Arco abatido birrotulado sob carga pontual excêntrica.

Por ser o primeiro dessa nova série de exemplos, também aqui, como aconteceu nas Seções (7.2.1) e (7.2.2), serão analisadas todas as formulações estudadas neste trabalho. Esse procedimento tem o objetivo de ratificar as observações feitas naquelas seções e verificar a eficiência computacional dessas formulações na solução de um problema fortemente não-linear.

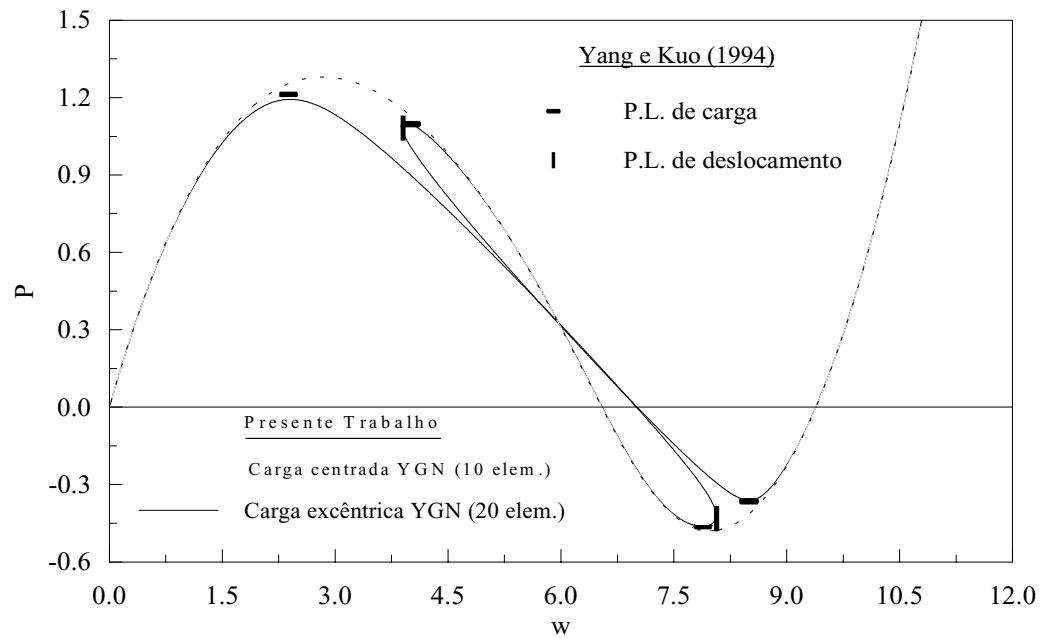
Os resultados obtidos usando-se as formulações implementadas neste trabalho serão comparados com aqueles fornecidos em Yang e Kuo (1994), obtidos para um modelo estrutural com 26 elementos usando YGN, que também está implementada no presente trabalho.

Para o caso em que a estrutura é submetida à carga centrada, isto é, aplicada no eixo de simetria do arco, foram modelados semi-arcos formados por: 2, 3, 5 e 10 elementos, com restrições à rotação θ e ao deslocamento tangencial u , no nó coincidente com o eixo de simetria do arco. Para o caso em que a carga é excêntrica, foram analisados modelos formados por: 4, 6, 10 e 20 elementos finitos.

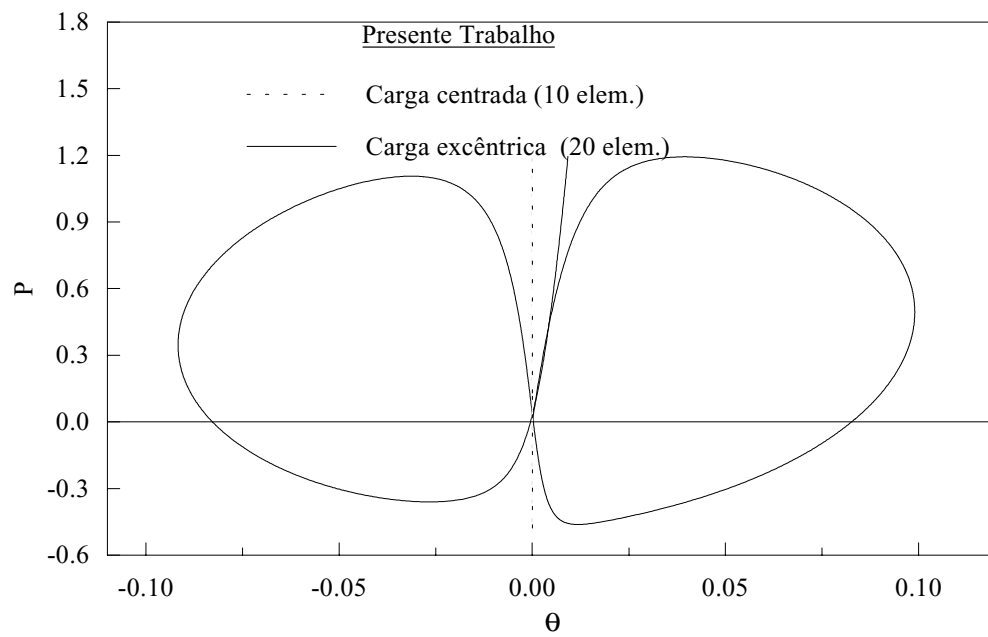
Para a solução não-linear foi utilizado o método de *Newton-Raphson modificado* junto com a estratégia de iteração *deslocamentos generalizados* e a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro *GSP*. Foi adotada uma tolerância $\zeta = 10^{-3}$.

A obtenção exata dos pontos singulares (pontos limites e de bifurcação) e o desenvolvimento de técnicas para o traçado das trajetórias secundárias (branch switching techniques) têm sido objeto de recentes pesquisas. Entretanto, na presente dissertação não foi implementado nenhum desses métodos. O procedimento utilizado aqui para obtenção dos pontos limites com precisão, foi adotar um valor ‘pequeno’ para o parâmetro inicial de carga, da ordem de 0.01.

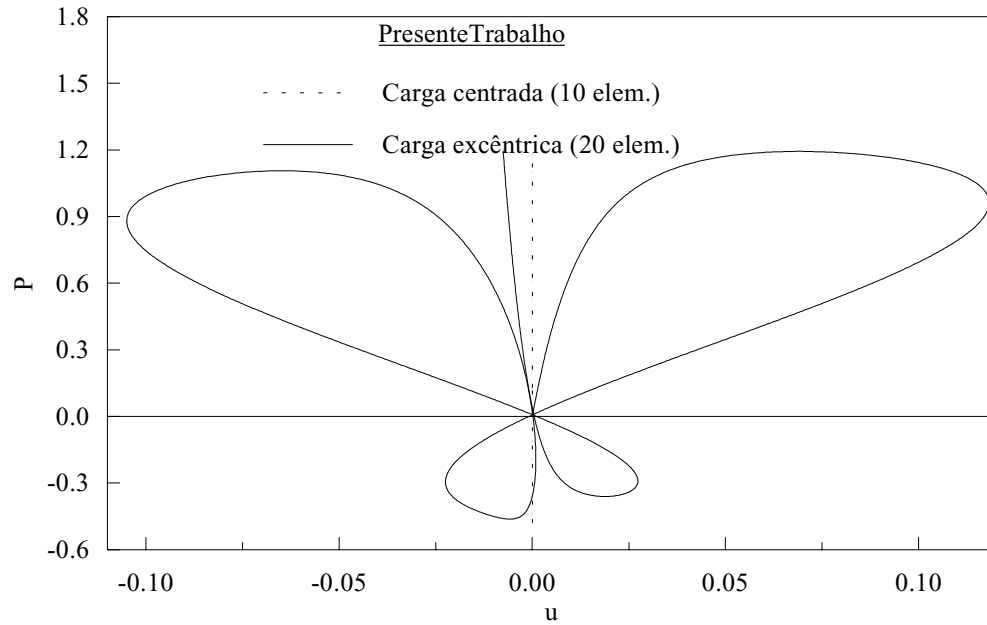
Este sistema estrutural, no caso da carga excêntrica, exhibe um comportamento altamente não-linear, apresentando quatro pontos limites de carga, dois pontos limites para os deslocamentos w e θ e quatro pontos limites para o deslocamento u . Os gráficos apresentados na Figura 7.25 ilustram essas observações; e foram obtidas usando YGN com o modelo estrutural formado por 20 elementos finitos. No caso da carga centrada é observada a presença apenas de dois pontos limites de carga para o gráfico $P \times w$ (Figura 7.25a).



(a) Curva $P \times w$.



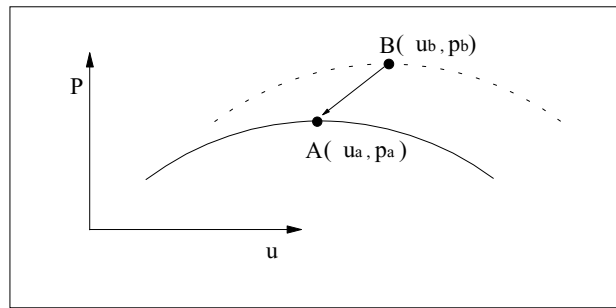
(b) Curva $P \times \theta$.



(b) Curva $P \times u$.

Figura 7.25 – Trajetórias de equilíbrio.

As Tabelas 7.13a e 7.13b foram construídas com o objetivo de verificar as formulações, usando como referência os resultados extraídos diretamente do gráfico apresentado em Yang e Kuo (1994). Nessas tabelas são apresentados os valores da média aritmética dos ‘erros percentuais’ nos pontos limites (carga e deslocamento), dos valores obtidos nesta dissertação em relação aos apresentados no trabalho citado. Estes ‘erros’ foram calculados conforme o procedimento da Figura 7.26.



$$E_{b/a} = 100 \times \left(\sqrt{\left(\frac{p_b - p_a}{p_a} \right)^2 + \left(\frac{u_b - u_a}{u_a} \right)^2} \right) \%$$

Figura 7.26 – Cálculo do erro de posição de B em relação a A.

A Tabela 7.13a mostra portanto a média aritmética entre os ‘erros’ calculados nos 2 pontos limites de carga da estrutura submetida ao carregamento centrado. A Tabela 7.13b fornece a média aritmética entre ‘erros’ nos 6 pontos limites (4 de carga e 2 de deslocamento) da mesma estrutura quando submetida à carga excêntrica.

Tabela 7.13a – ‘Erros’ percentuais médios: carga centrada.

Formul.	Número de Elementos: metade do arco			
	2	3	5	10
AFT	18.95	9.25	4.60	2.81
AFI	9.12	5.03	2.01	0.78
TFT	20.49	8.31	3.11	1.26
TFI	9.34	5.17	2.19	0.56
YSN	9.02	4.92	1.96	0.92
YGN	9.12	5.05	2.05	0.75
YGE	10.49	6.09	3.05	1.37
YHN	9.19	5.00	1.98	0.77
PTT	20.31	8.89	2.90	1.25
PT1	11.14	5.39	2.15	1.28
PT2	17.63	7.78	3.04	1.25
PC1	11.14	5.39	2.15	1.28
PC2	17.63	7.78	3.04	1.25

Observa-se na Tabela 7.13a que, para os modelos estruturais mais simples, os melhores resultados foram os apresentados pelas formulações que calculam o vetor de forças internas com os deslocamentos incrementais, ou seja, AFI, TFI, YSN, YGN, YGE e YHN.

Tabela 7.13b – ‘Erros’ percentuais médios: carga excêntrica.

Formul.	Número de Elementos para o Arco			
	4	6	10	20
AFT	18.63	9.19	4.82	3.09
AFI	20.37	9.71	3.76	1.30
TFT	---	8.05	3.29	1.57
TFI	20.10	9.46	3.56	1.26
YSN	20.63	10.01	4.03	1.56
YGN	20.79	10.13	4.20	1.72
YGE	19.82	9.44	3.64	1.89
YHN	20.82	10.18	4.18	1.74
PTT	---	14.64	3.55	1.49
PT1	22.37	6.66	2.57	1.79
PT2	17.43	7.72	3.26	1.56
PC1	22.37	6.66	2.57	1.79
PC2	17.43	7.72	3.26	1.56

Para o arco submetido à carga excêntrica pode-se afirmar que:

- AFT apresentou dificuldades na obtenção do caminho de equilíbrio para o modelo estrutural formado por quatro elementos, provocando a ocorrência de muitas iterações (até 718) para satisfazer o critério de convergência nas configurações próximas aos pontos críticos;
- Com esse mesmo modelo (4 elementos), TFT não foi capaz de atingir o segundo ponto limite de carga;
- PTT apresentou novamente um comportamento mais rígido que as demais, necessitando portanto de um modelo estrutural mais refinado. Para o modelo estrutural com 4 elementos, o ‘erro’ médio do elemento tipo PTT não consta na Tabela 7.13b porque a trajetória obtida por este não foi similar à esperada,

apresentando apenas dois pontos limites de carga, se assemelhando à do arco sob carga centrada. A Figura 7.27 ilustra a evolução dos resultados obtidos pelo elemento tipo PTT, para a curva carga-deslocamento tangencial.

- Neste exemplo foi novamente verificada a semelhança dos resultados obtidos por PT1 e PC1, bem como PT2 e PC2.

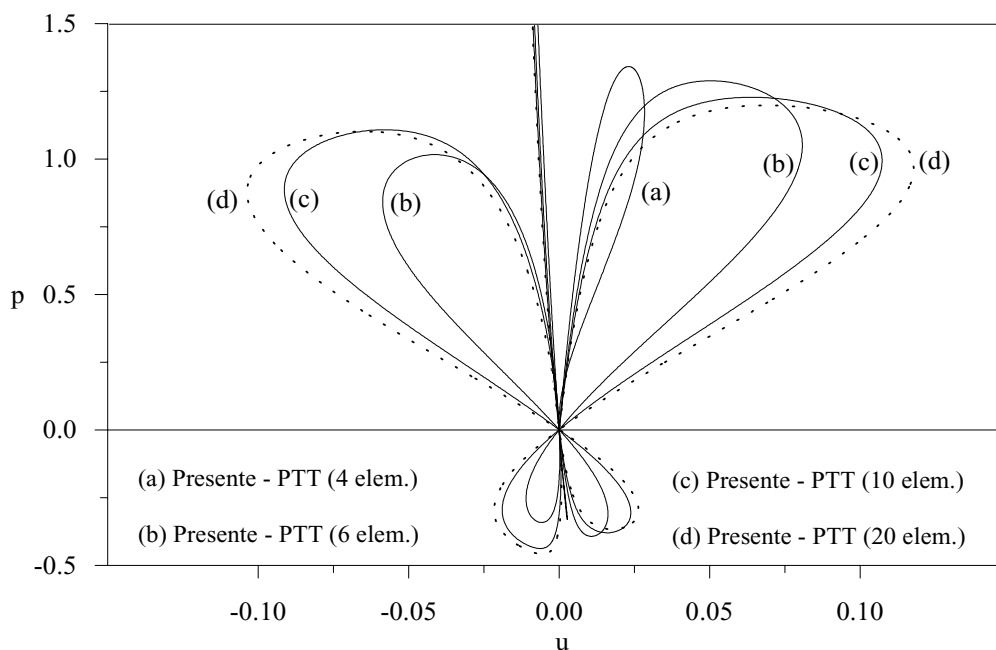
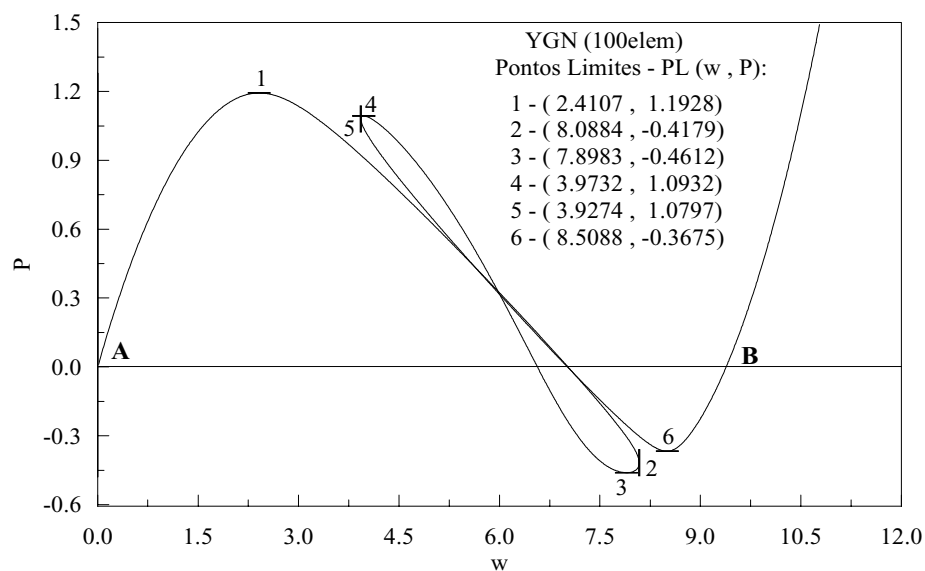
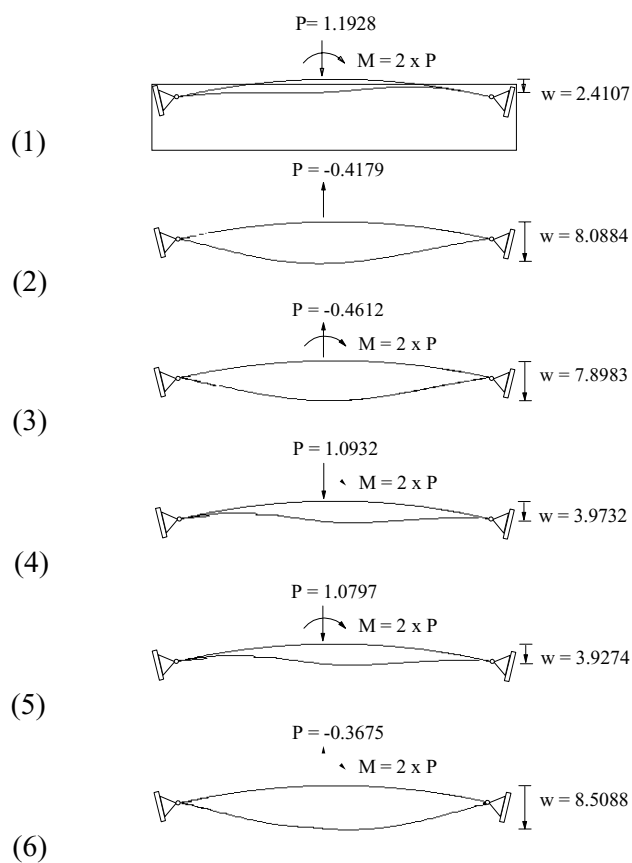


Figura 7.27 – Formulação PTT: refinamento da malha.

A Figura 7.28 apresenta os valores de P e w (ponto nodal central) nos pontos limites de carga e de deslocamentos obtidos usando YGN e modelo formado por 100 elementos finitos. Esses valores (considerados exatos) serão utilizados a seguir como referência para verificar todas as formulações implementadas. Nessa mesma figura são apresentadas as configurações deformadas nos 6 pontos limites da estrutura.



(a) Trajetória de equilíbrio.



(b) Configurações deformadas nos pontos limites: *fator de escala* = 1.5.

Figura 7.28 – Carga excêntrica: YGN (100 elem.).

A Tabela 7.14 exhibe, para todas as formulações implementadas e um modelo estrutural com 20 elementos finitos, a média aritmética dos erros percentuais de posição, nos seis pontos limites, em relação aos resultados fornecidos na Figura 7.28. Essa mesma tabela, fornece o tempo de processamento necessário para se traçar a trajetória de A até B, medido nas mesmas condições com um equipamento do tipo: Pentium II 350 / 32MB.

Tabela 7.14 – Eficiência computacional.

Formul.	Arco Completo: 20 Elementos	
	Erro médio %	Tempo A-B (seg.)
AFT	1.94	97.1
AFI	0.52	86.0
TFT	0.44	55.4
TFI	0.93	44.7
YSN	0.89	33.9
YGN	0.79	35.9
YGE	1.59	36.6
YHN	0.79	119.9
PTT	0.45	54.9
PT1	0.66	125.2
PT2	0.42	152.6
PC1	0.66	164.4
PC2	0.42	169.2

Baseado na Tabela 7.14 algumas observações são destacadas a seguir:

- PC2 apresentou o maior tempo de processamento, 399% maior do que o apresentado por YSN (menor tempo);
- AFI mostrou erro menor do que TFI, entretanto necessitou de um tempo de processamento 92% maior;
- YSN, YGN e YGE necessitaram dos menores tempos de processamento, sendo que YGE apresentou erro maior do que as demais formulações propostas por Yang e Kuo (1994). YHN necessitou de um tempo de processamento 254% maior do que o tempo gasto por YSN;
- PC1 e PC2 apesar de terem apresentados erros idênticos aos obtidos, respectivamente, por PT1 e PT2, necessitaram de tempos maiores de processamento.

7.3.2 – Arco Circular Rotulado-Engastado Sob Carga Pontual Centrada

Um arco circular rotulado-engastado submetido a uma carga pontual centrada em seu eixo de simetria, conforme indicado na Figura 7.29, será analisado nesta seção.

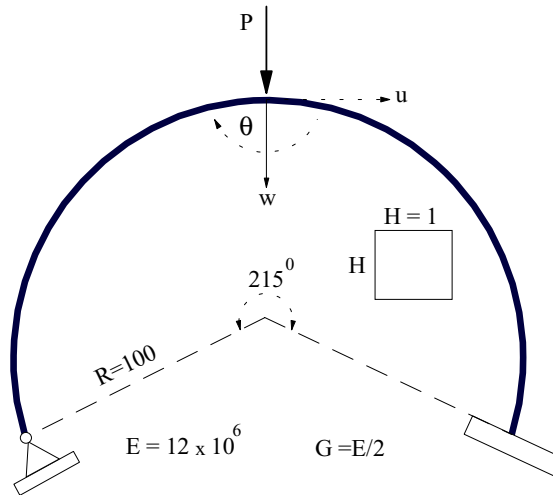
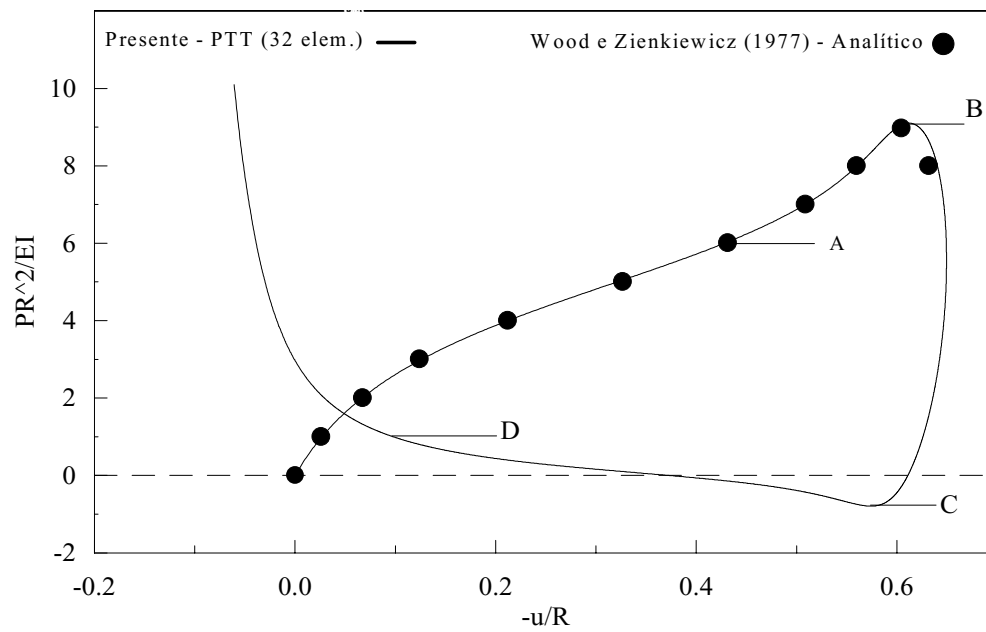
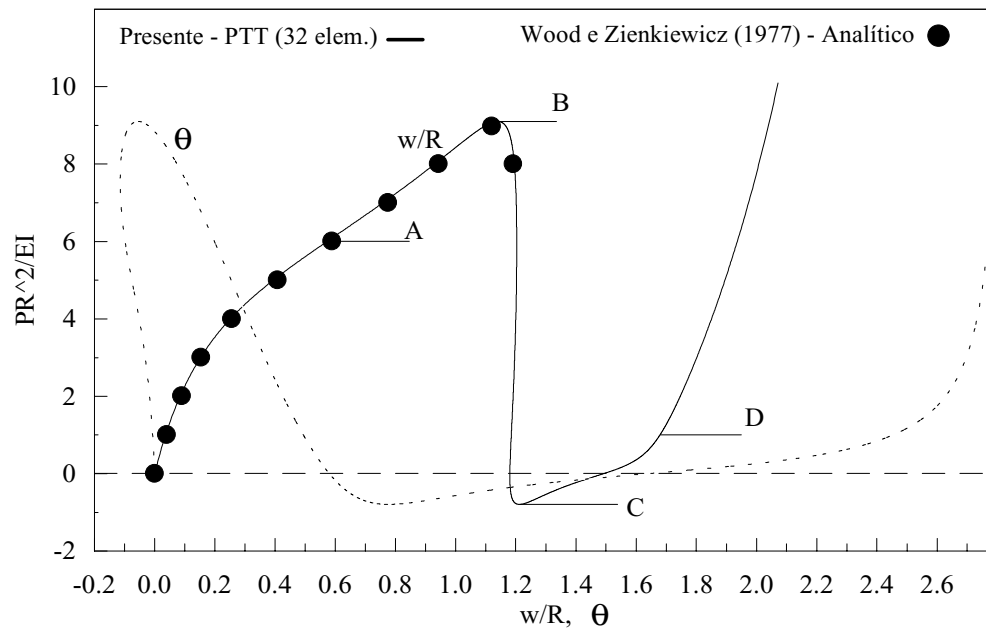


Figura 7.29 - Arco circular rotulado-engastado sob carga pontual centrada.

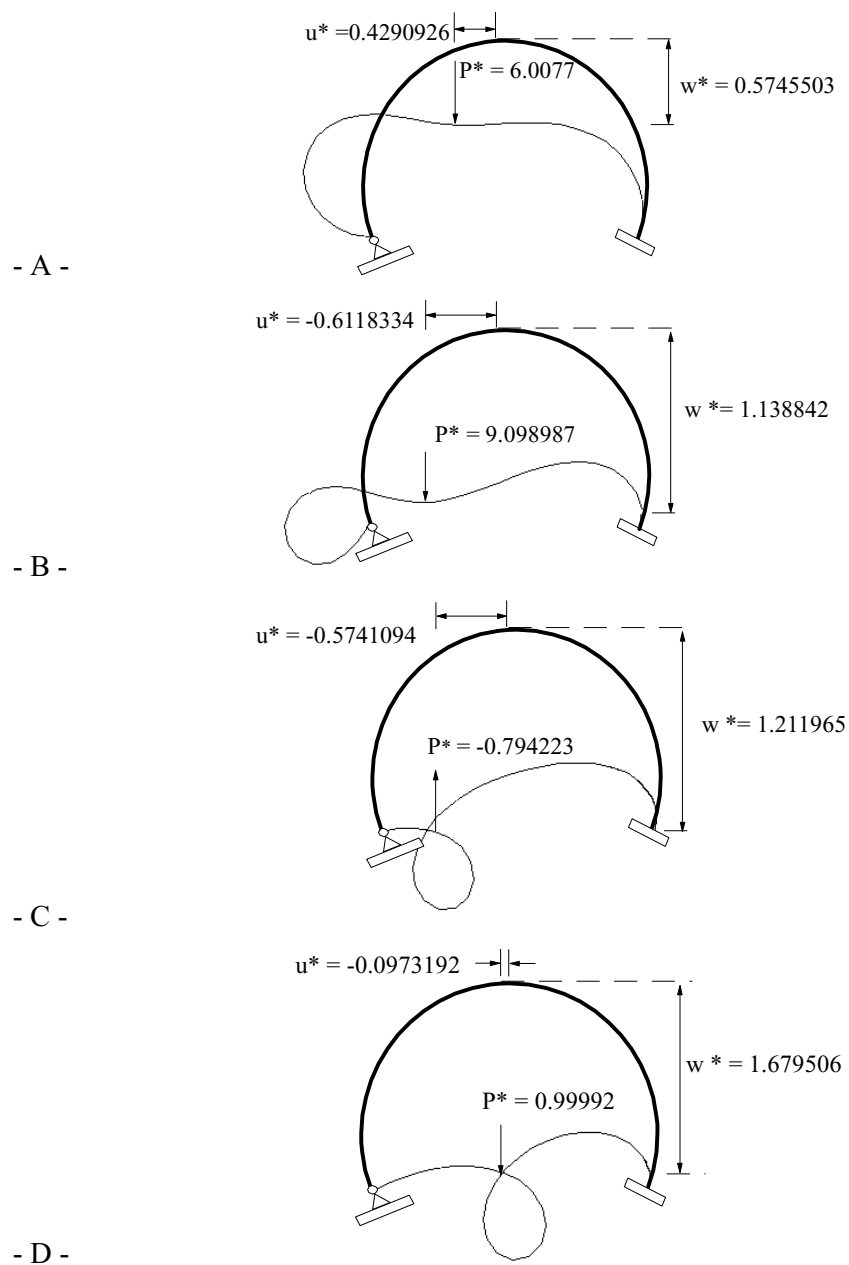
A análise deste problema, cujo comportamento, como ilustrado na Figura 7.30, é fortemente não linear, terá o objetivo de verificar e comparar mais uma vez formulações que se mostraram mais eficientes nos exemplos anteriores. Assim, serão utilizadas as formulações: AFI; TFI; YGN; PTT e PT2.

A solução analítica, até o primeiro ponto limite de carga, apresentada em Wood e Zienkiewicz (1977) e os resultados numéricos obtidos por um modelo estrutural formado por 64 elementos finitos, apresentados em Kouhia e Mikkola (1989) serão usados como referência.

A solução não-linear seguiu a estratégia de iteração *comprimento de arco cilíndrico* acoplada ao método de *Newton-Raphson modificado*. O comprimento de arco foi usado como controlador do parâmetro de carga, inicialmente adotado: $\Delta\lambda_1^0 = 0.5$. Uma tolerância $\zeta = 10^{-4}$ foi empregada.



(a) Trajetórias de equilíbrio.



$$P^* = PR^2/EI; \quad w^* = w/R; \quad u^* = u/R$$

(b) Configurações deformadas.

Figura 7.30 – Solução não-linear: PTT (32 elem.).

A Tabela 7.15 fornece os valores obtidos para o primeiro ponto limite de PR^2/EI , juntamente com o erro percentual deste em relação ao valor analítico.

Tabela 7.15 – PR^2/EI no 1º ponto limite.

Formul.	Número de Elementos							
	8		10		16		32	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
AFI	9.32	3.90	9.15	2.00	9.07	1.11	9.00	0.33
TFI	9.32	3.90	9.15	2.00	9.07	1.11	9.00	0.33
YGN	9.32	3.90	9.15	2.00	9.07	1.11	9.00	0.33
PTT	11.34	26.42	10.38	15.72	9.50	5.91	9.10	1.45
PT2	---	---	---	---	---	---	---	---
Solução analítica: $PR^2/EI = 8.97$ (Wood e Zienkiewicz, 1977)								

Baseado nessa tabela, pode-se fazer os seguintes comentários:

- PTT, como já esperado, apresentou uma rigidez excessiva, fornecendo um valor elevado para a carga no primeiro ponto crítico;
- PT2 apresentou problemas de convergência e não foi capaz de atingir o primeiro ponto limite de carga;
- AFI, TFI e YGN apresentaram valores rigorosamente iguais. O gráfico apresentado na Figura 7.31 ratifica esta observação, exibindo a trajetória de equilíbrio obtida por AFI, TFI e YGN para um modelo estrutural formado por 16 elementos. Vale lembrar que essas formulações têm em comum a forma incremental de obtenção do vetor de forças internas.

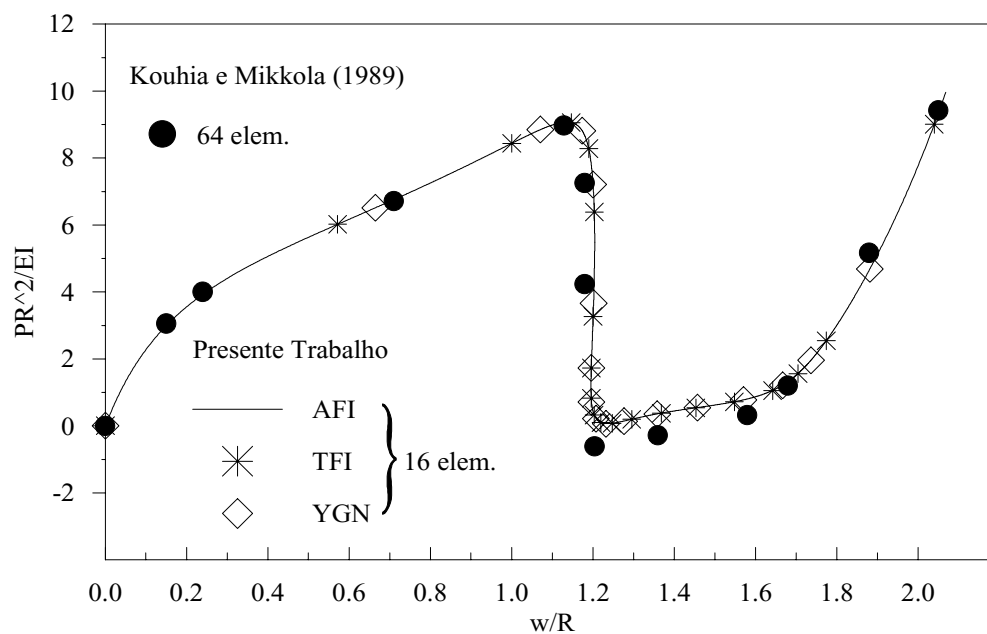
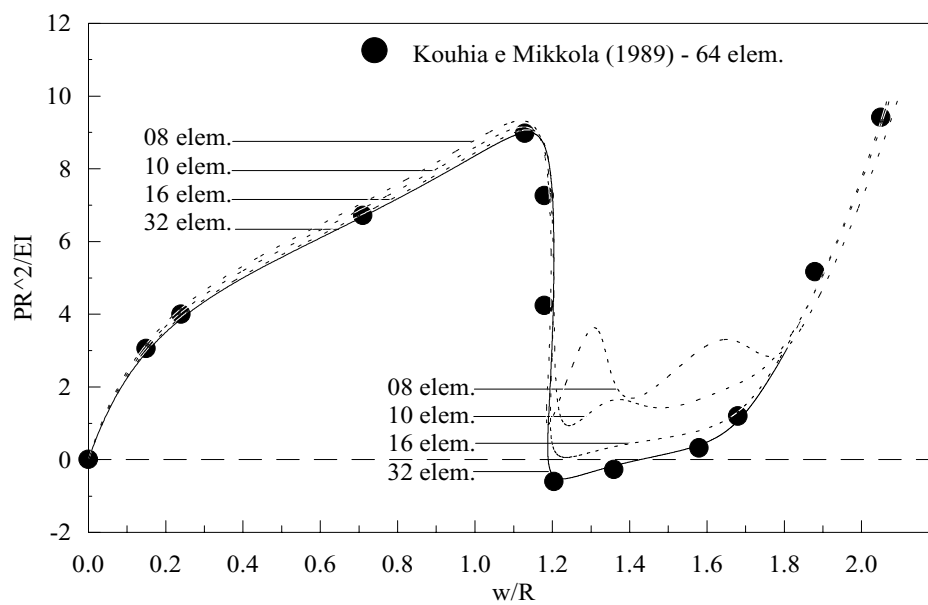
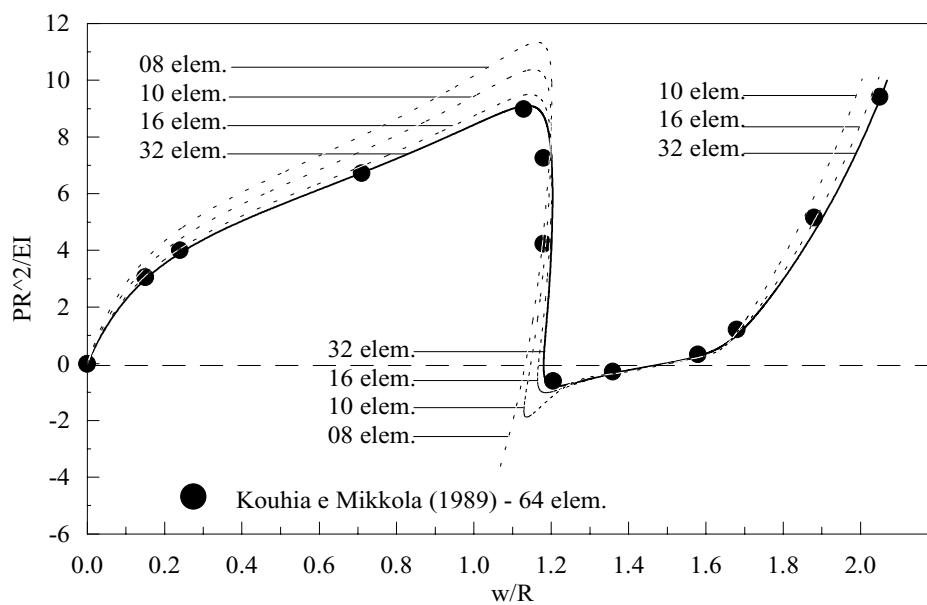


Figura 7.31 – Trajetórias de Equilíbrio: AFI, TFI, YGN (16 elem.).

A Figura 7.32 pretende ilustrar a evolução dos resultados obtidos pelo formulações analisadas. Como AFI, TFI e YGN apresentaram resultados semelhantes, são representados apenas os resultados obtidos por YGN.



(a) YGN.



(b) PTT.

Figura 7.32 – Evolução dos resultados obtidos.

Pode-se destacar da presente análise as seguintes observações:

- pode-se notar na Figura 7.32b que, para o modelo com 8 elementos, PTT apresenta um comportamento absurdo para a trajetória de equilíbrio que se segue ao primeiro ponto crítico, porém, melhorando-se a discretização do modelo estrutural, nota-se uma aproximação do comportamento esperado. Essa aproximação é mais rápida em PTT que nas outras formulações analisadas. Esse fato deve-se provavelmente às relações deformação-deslocamento fortemente não-lineares definidas para este elemento a partir de funções trigonométricas sem aproximações;
- PT2, que tem em comum com o elemento PTT a maneira de se obter o vetor de forças internas, mostrou-se ineficiente na obtenção da trajetória, não sendo capaz de atingir o primeiro ponto crítico;
- AFI e TFI, que foram gerados a partir de relações deformação-deslocamento mais simples, mas que calcula o vetor de forças internas de forma incremental, atingiram com sucesso todos os pontos limites;
- mais uma vez, as formulações que calculam o vetor de forças internas de forma ‘incremental’ mostraram-se mais eficientes no traçado de trajetórias de equilíbrio com acentuada não-linearidade. Essas formulações atingiram e ultrapassaram pontos limites que outros tipos de formulações, mesmo tendo relações deformação-deslocamento mais completas, não puderam atingir ou contornar. Exceção a essa observação é feita a PTT, pois esta é baseada em relações deformação-deslocamento fortemente não-lineares, porém, devido às funções de interpolação lineares, esta formulação necessita de modelos estruturais melhores.

Finalmente, na Tabela 7.16, os resultados obtidos no presente trabalho são comparados com os fornecidos em Saje et al. (1998) para formulações publicadas na década de 90.

Tabela 7.16 - 1º ponto limite: diversas formulações.

Formulação	Nº de elem.	PR ² /EI	Erro %
Presente trabalho			
AFI	32	9.00	0.33
TFI	32	9.00	0.33
YGN	32	9.00	0.33
PTT	32	9.10	1.45
Trabalhos recentes			
Sandhu et al. (1990)	6	8.97	0.00
Wagner (1991)	20	9.27	3.34
Borri e Bottasso (1994)	10	9.07	1.11
Kegl et al. (1995)	4	8.97	0.00
Ibrahimbegovic (1995)	20	8.97	0.00
Franchi e Montelaghi (1996)	40	8.98	0.11
Saje et al. (1998)	4	8.97	0.00
Solução analítica: PR ² /EI = 8.97 (Wood e Zienkiewicz, 1977)			

7.3.3 – Arco Circular Birrotulado

O sistema estrutural a ser analisado nesta seção é o arco circular birrotulado submetido às duas situações de carga indicadas na Figura 7.33. Essas duas situações de carga provocam na estrutura um comportamento fortemente não-linear, como ilustram as trajetórias de equilíbrio mostradas na Figura 7.34.

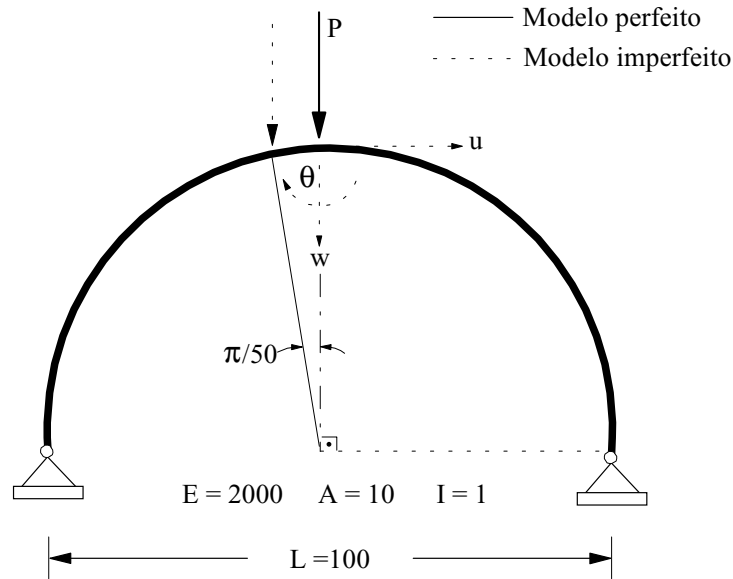
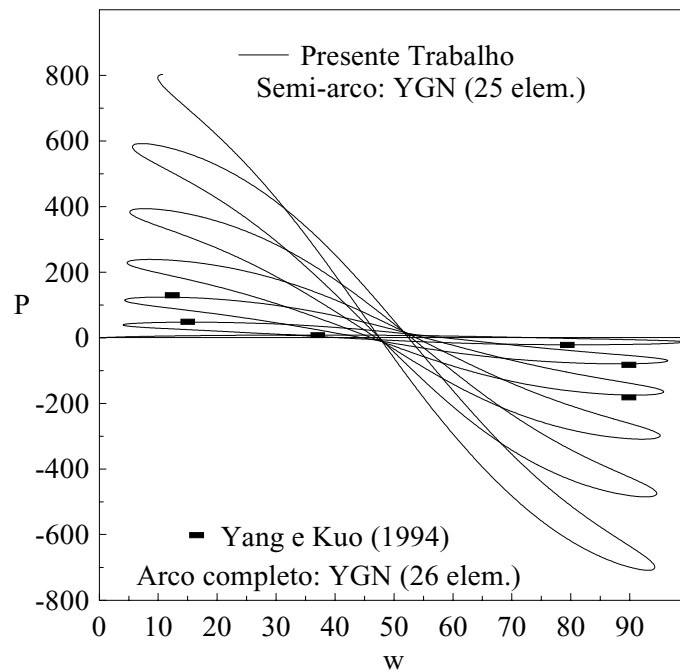


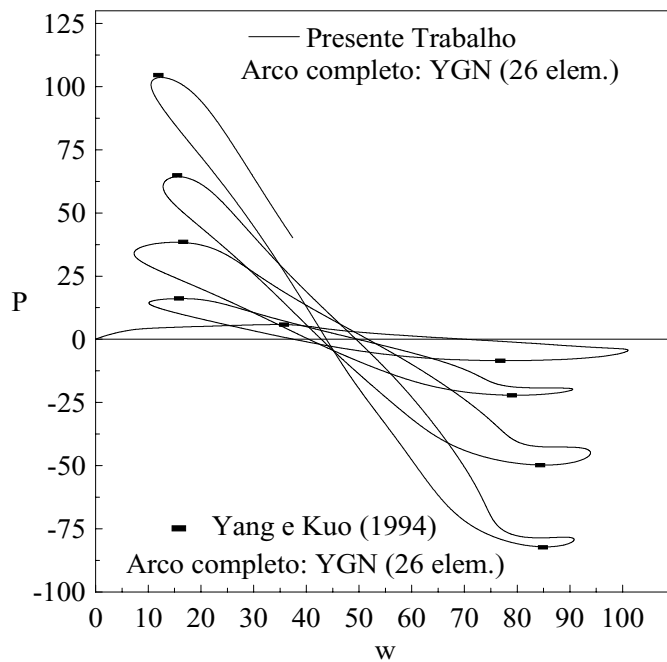
Figura 7.33 - Arco circular birrotulado.

Este exemplo tem o objetivo de verificar e comparar, mais uma vez, a eficiência computacional das formulações apresentadas em Yang e Kuo (1994), ou seja: YSN, YGN, YGE e YHN.

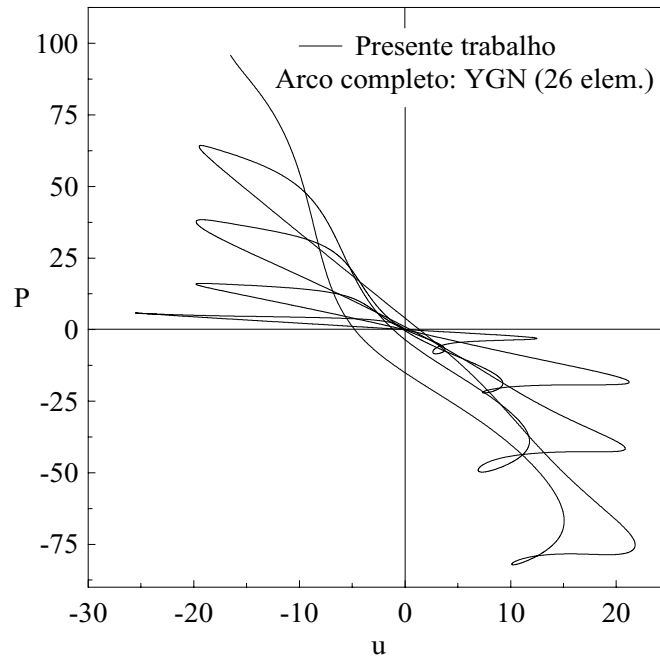
Para realizar a análise não-linear deste problema foram utilizadas, juntamente com o método de *Newton-Raphson modificado*, a estratégia de iteração *Deslocamentos generalizados* e a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro *GSP*. Com essas estratégias, utilizando a formulação YGN e um modelo com 25 elementos para metade do arco se chegou à trajetória da Figura 7.34a, para a estrutura perfeita. As demais trajetórias dessa figura foram obtidas com o modelo imperfeito de arco completo composto por 26 elementos.



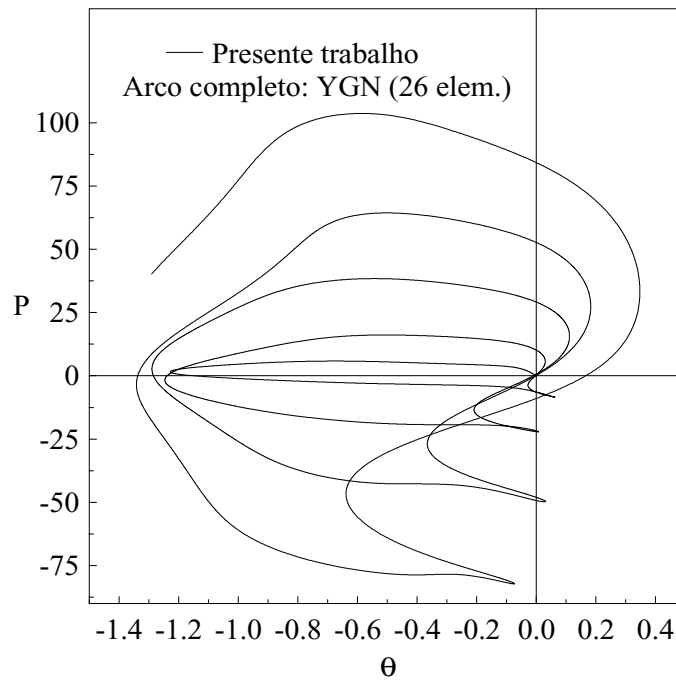
(a) Carga centrada: $P \times w$.



(b) Carga excêntrica: $P \times w$.

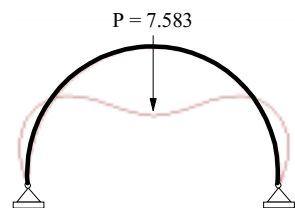
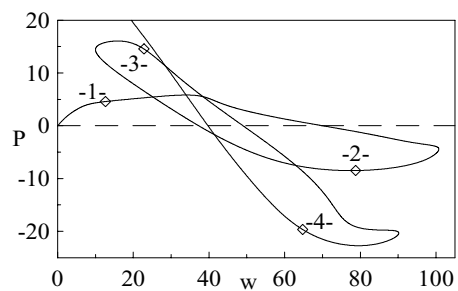
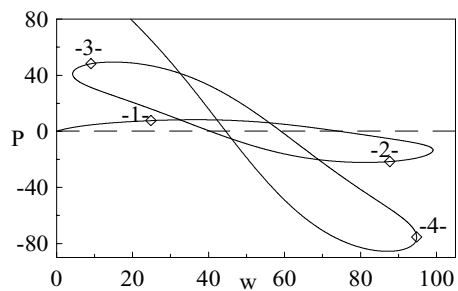


(c) Carga excêntrica: $P \times u$.

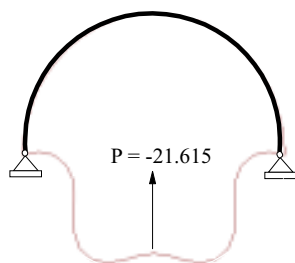
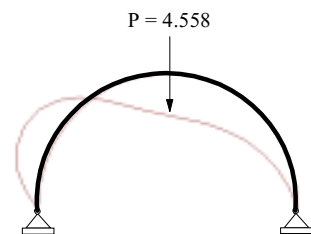


(d) Carga excêntrica: $P \times \theta$.

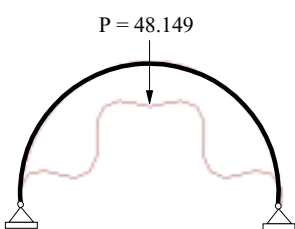
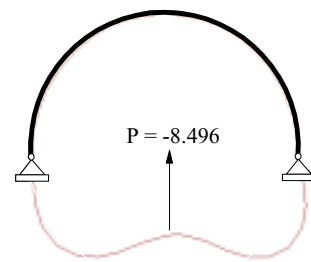
Figura 7.34 – Trajetórias de equilíbrio.



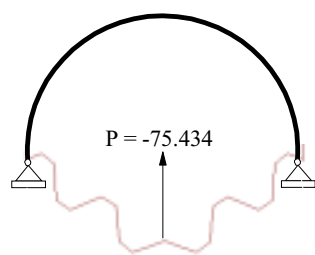
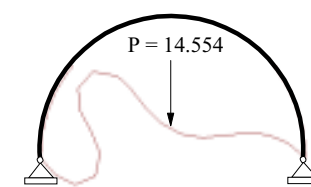
- 1 -



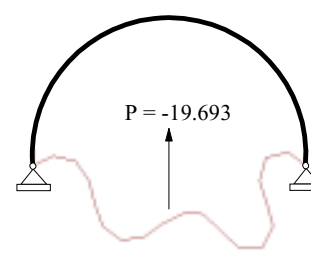
- 2 -



- 3 -



- 4 -



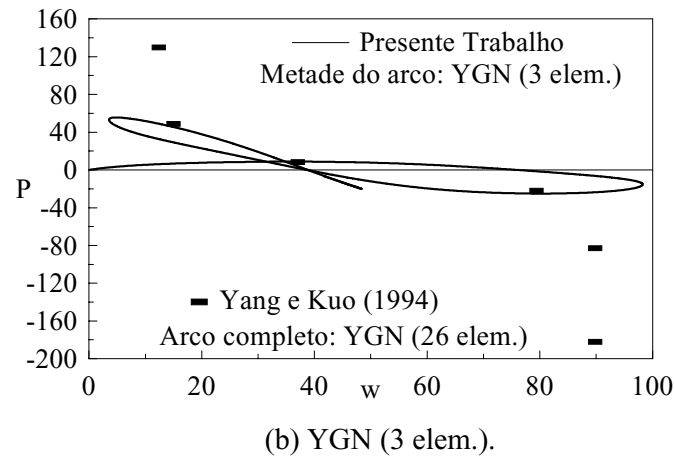
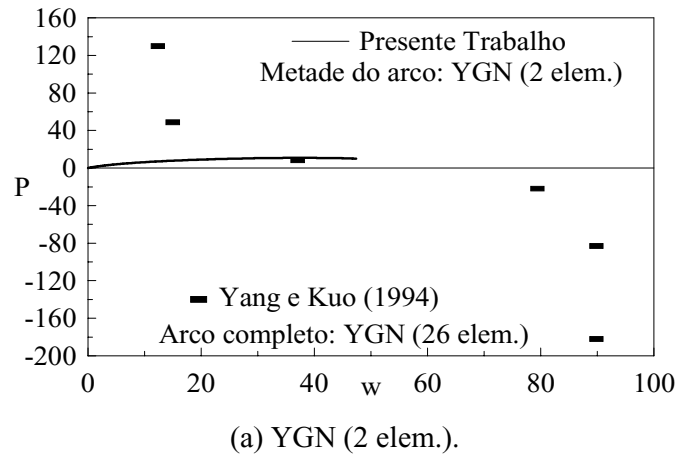
(a) Carga centrada.

(b) Carga excêntrica

Figura 7.35 – Configurações deformadas da estrutura: YGN (16 elem.).

Para as duas situações de carga o arco apresenta um comportamento cíclico. Esse comportamento é ilustrado na Figura 7.35 que mostra as deformadas da estrutura para as diversas situações de carregamento. Pode-se observar nessa figura uma subdivisão do arco a cada ciclo. Dessa observação conclui-se que, após cada ciclo, os resultados tornam-se menos precisos, pois o número de elementos utilizados no modelo estrutural torna-se menos eficiente na representação da estrutura.

A Figura 7.36 ilustra essa observação, mostrando a evolução da solução para a situação de carga centrada, em relação ao apresentado por Yang e Kuo (1994), à medida que se melhora o modelo estrutural.



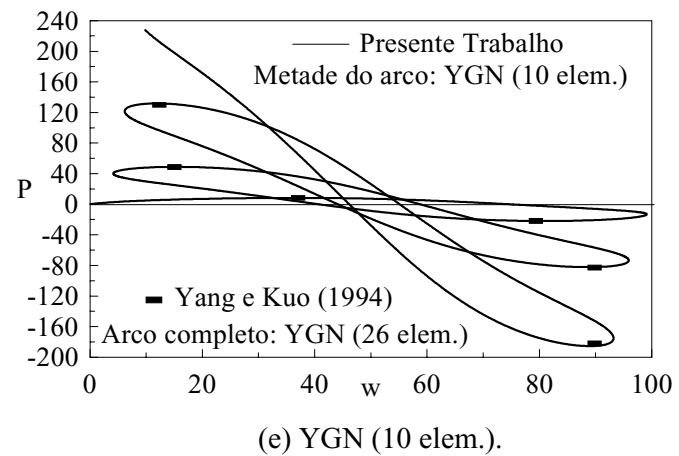
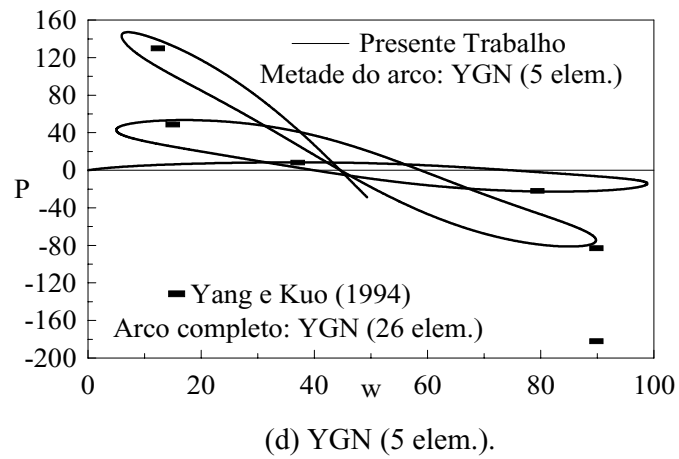
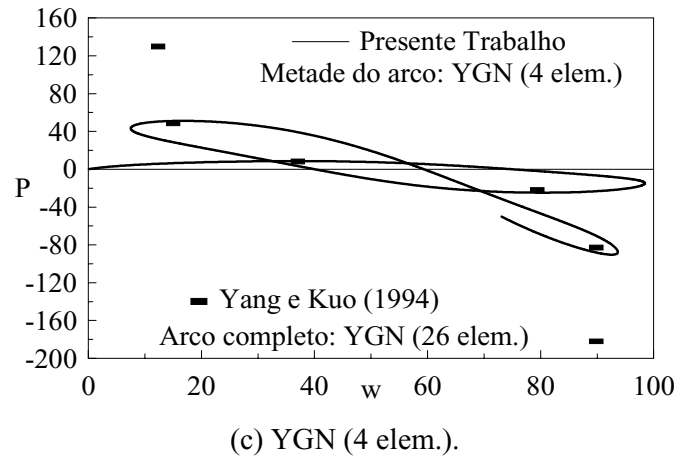


Figura 7.36 – Evolução dos resultados: carga centrada.

As trajetórias de equilíbrio obtidas pelas outras formulações em estudo coincidiram com as trajetórias mostradas na Figura 7.36, portanto, não há necessidade de mostrá-las. Entretanto, é notável que uma formulação baseada em relações com termos de ordem elevada, YHN, produza resultados semelhantes a uma formulação tão simplificada como YSN.

A Tabela 7.17 mostra, para o caso do arco sujeito à carga centrada, os resultados para a primeira carga crítica obtidos pelas formulações YSN, YGN, YGE e YHN. Para isso foram utilizados modelos com 2, 3, 4 e 5 elementos finitos, respectivamente, para a metade do arco, restringindo-se a rotação e o deslocamento tangencial no nó que coincide com o eixo de simetria.

Tabela 7.17 – 1ª Carga crítica.

Formul.	Número de Elementos: metade do arco							
	2		3		4		5	
	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%	Valor	Erro%
YSN	10.784	31.74	8.752	6.91	8.609	5.17	8.442	3.13
YGN	10.782	31.71	8.751	6.90	8.607	5.14	8.440	3.10
YGE	10.782	31.71	8.751	6.90	8.608	5.16	8.441	3.12
YHN	10.754	31.37	8.748	6.87	8.605	5.12	8.439	3.09
Valor de referência: $^1P_{cr} = 8.186$ (Yang e Kuo, 1994)								

Pode-se observar nessa tabela que os resultados encontrados com as formulações em questão, ao se utilizar o mesmo número de elementos, foram praticamente idênticos, com a diferença entre eles menor que 0.6%.

As Tabelas 7.18a e 7.18b pretendem comparar a eficiência computacional das formulações implementadas mostrando, para o caso do carregamento excêntrico: os valores de carga obtidos nos pontos limites de carregamento, o tempo gasto na execução do problema, o número de incrementos necessários, a média de iterações por incremento de carga e a diferença percentual média dos resultados obtidos no presente trabalho em relação aos apresentados por Yang e Kuo (1994) nos pontos limites de

carga. Para isso foi considerado um modelo estrutural formado por 26 elementos finitos. Novamente, o tempo de processamento apresentado está relacionado ao emprego do equipamento: Pentium II 350 / 32MB.

Tabela 7.18 – Eficiência das formulações: arco completo (26 elem.).

(a) Pontos limites de carregamento.

Form.	1º P.L.	2º P.L.	3º P.L.	4º P.L.	5º P.L.	6º P.L.	7º P.L.	8º P.L.	9º P.L.
YSN	5.812	-8.487	16.127	-22.176	38.456	-48.899	64.542	-82.471	104.143
YGN	5.811	-8.483	16.113	-22.152	38.391	-49.790	64.345	-82.189	103.679
YGE	5.812	-8.476	16.090	-22.142	38.309	-49.664	64.143	-81.933	103.353
YHN	5.811	-8.483	16.113	-22.152	38.392	-49.791	64.352	-82.187	103.703
Ref.	5.813	-8.498	16.149	-22.162	38.566	-49.896	64.875	-82.420	104.611

(b) Eficiência computacional.

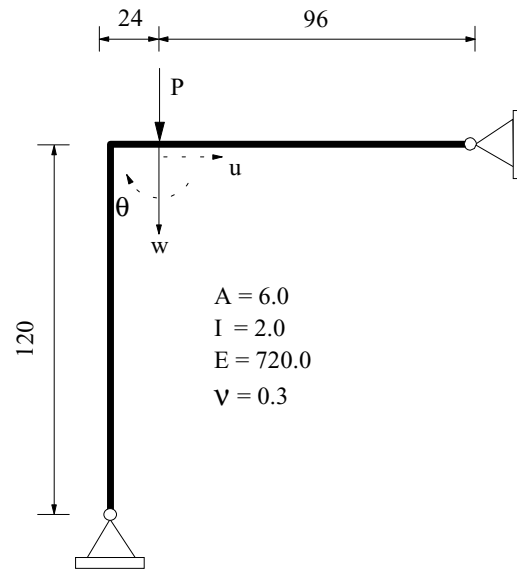
Formul.	Tempo (seg.)	Nº increm.	Média de iterações	Erro Médio %
YSN	1137	38999	3.453	0.65
YGN	1587	38999	3.442	0.82
YGE	1134	39193	2.07	1.01
YHN	4302	38999	3.429	0.83

A principal conclusão deste exemplo é que, das formulações estudadas, as baseadas em relações mais simples, isto é, YSN, YGN e YGE mostraram maior eficiência computacional. Da Tabela 7.18 pode-se fazer as seguintes observações que ratificam essa afirmação:

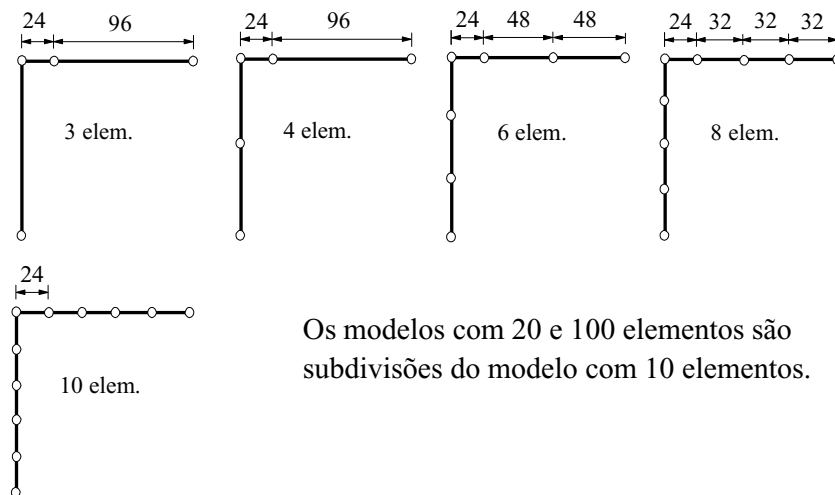
- praticamente não houve diferença entre os valores das cargas críticas obtidas pelas diferentes formulações analisadas;
- YHN necessitou de um tempo de processamento 171 % maior do que o tempo necessário a YGN, 278 % maior do que YSN e 279% maior do que YGE.

7.3.4 – Pórtico de Lee

A Figura 7.37 ilustra o exemplo a ser abordado, bem como os modelos discretos utilizados. Trata-se do Pórtico de Lee, que é usado frequentemente por pesquisadores para validar estratégias de solução não-linear.



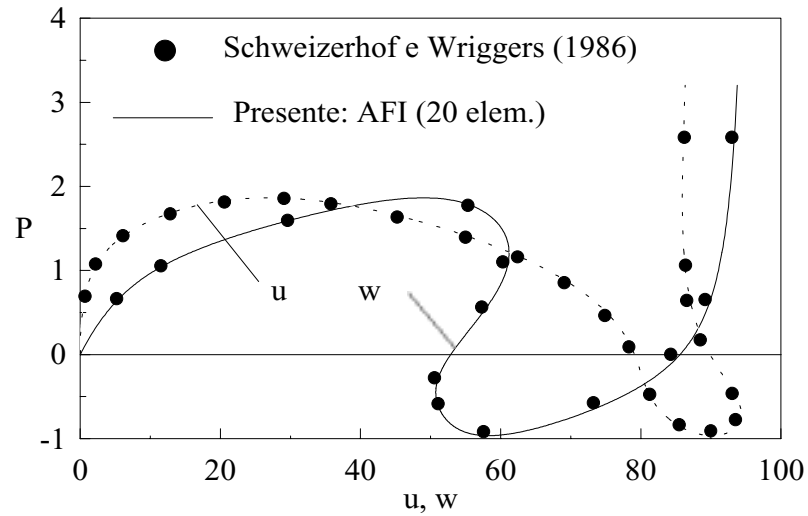
(a) Sistema estrutural.



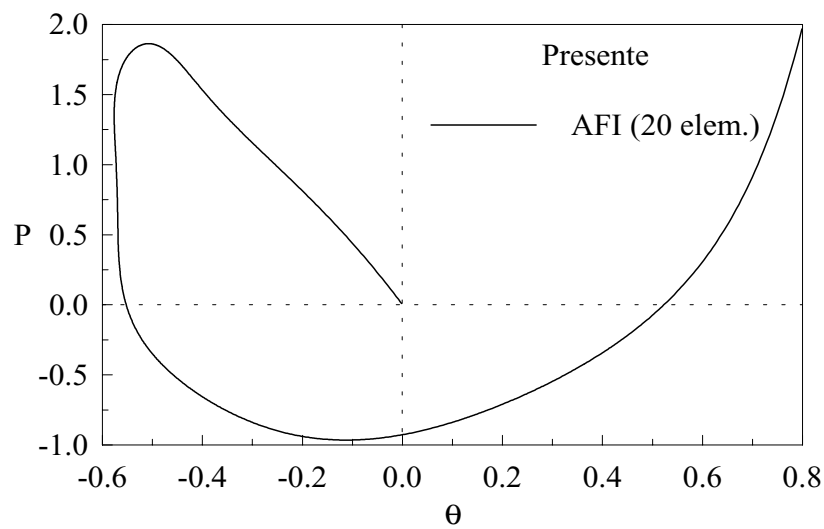
(b) Modelos discretos.

Figura 7.37 – Pórtico de Lee.

Neste exemplo o fenômeno de instabilidade só ocorre após o aparecimento de grandes deslocamentos. As trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 7.38, obtidas usando-se AFI com 20 elementos, mostram a presença de pontos limites de carga e também de pontos limites de deslocamento.



(a) $P \times u, w$.



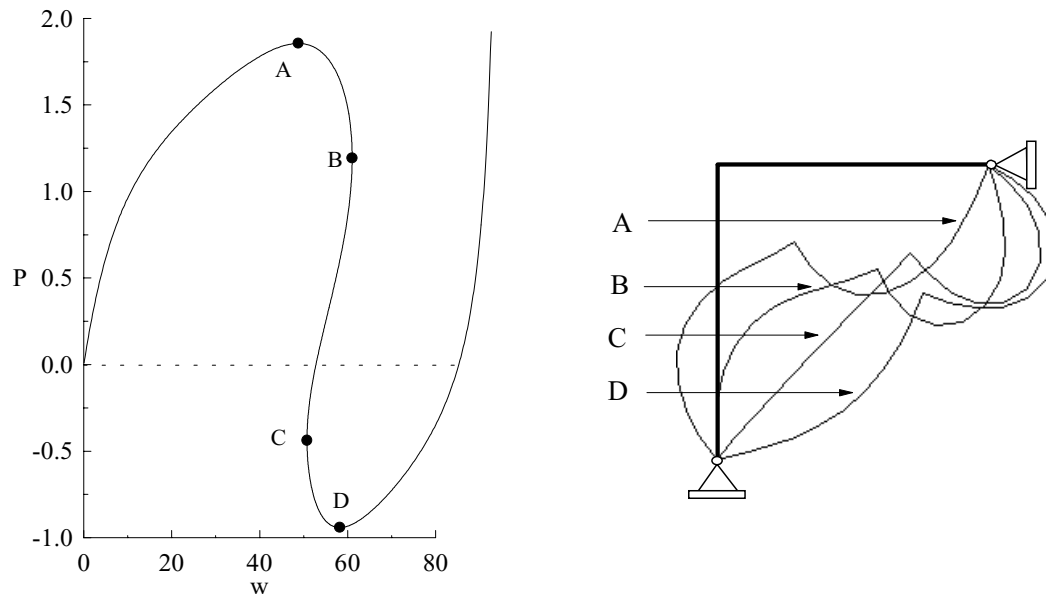
(b) $P \times \theta$.

Figura 7.38– Trajetórias de equilíbrio.

O objetivo deste exemplo é preencher as lacunas deixadas nas observações finais do Exemplo (7.2.4), para as formulações de elementos finitos propostas por Alves (1993b): AFT e AFI; e Torkamani et al. (1997): TFT e TFI.

Adotou-se a estratégia de iteração *comprimento de arco cilíndrico* juntamente com o método de *Newton-Raphson modificado*, com incremento automático do comprimento de arco controlando o valor inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$. No início do processo adotou-se: $\Delta\lambda_1^0 = 0.01$. Para controlar a convergência foi adotado $\zeta = 10^{-3}$.

Foram efetuadas análises para modelos estruturais com: 3, 4, 6, 8, 10 e 20 elementos finitos. Para servir de referência e avaliar a precisão dos resultados analisados foi realizada a seguir a análise do pórtico considerando um modelo com 100 elementos, cujos pontos limites podem ser vistos na Figura 7.39. Com o mesmo objetivo foram usados resultados numéricos extraídos de Schweizerhof e Wriggers (1986), que também utilizaram elementos finitos.



Pontos limites: A (48.791 , 1.856)

B (61.006 , 1.192)

C (50.749 , -0.438)

D (58.188 , -0.942)

Figura 7.39 – Trajetória de equilíbrio e deformadas: AFI (100 elem.).

A seguir são feitas algumas observações relacionadas ao desempenho das formulações em estudo:

- AFT e TFT não foram capazes de obter a trajetória de equilíbrio de forma completa, apresentando problemas de convergência nas proximidades do primeiro ponto limite;
- como pode ser visto na Figura 7.40, para um modelo estrutural formado por 20 elementos, a trajetória obtida com AFT ultrapassa o primeiro ponto limite, enquanto TFT não só não atinge o ponto limite como visivelmente apresenta erros. Esse fato, somado a observações feitas em exemplos anteriores, mostra que no caso de formulações que calculam o vetor de forças internas de forma ‘total’ (ou em RLT), a qualidade das relações cinemáticas é importante;
- AFI e TFI não apresentaram problemas de convergência e obtiveram toda a trajetória de equilíbrio;
- AFI e TFI produziram resultados semelhantes. A Figura 7.41 ilustra esse fato mostrando as soluções obtidas com diferentes modelos estruturais;
- observe que com modelos estruturais discretizados em 6 ou mais elementos, AFI e TFI apresentaram um comportamento próximo do esperado, com 2 pontos limites de carga e 2 pontos limites de deslocamento.

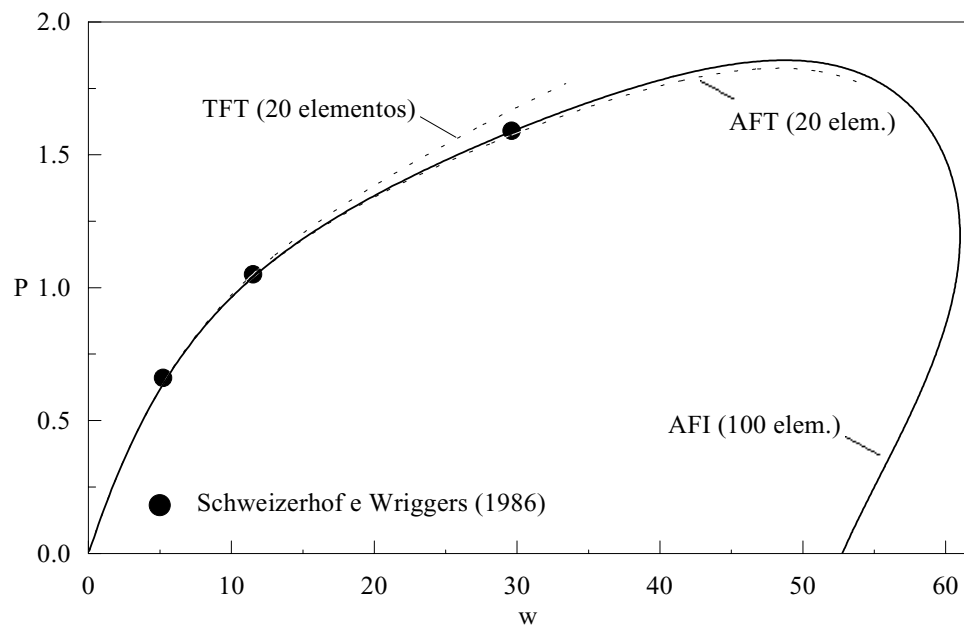


Figura 7.40 – Trajetórias de equilíbrio: AFT e TFT (20 elem.).

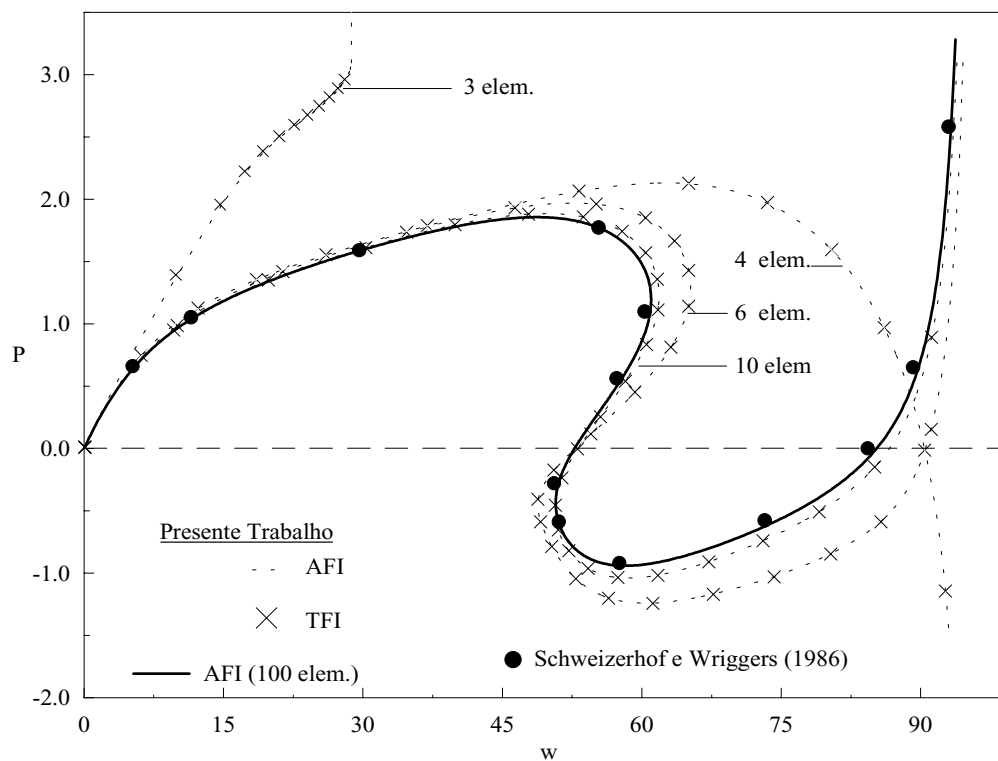


Figura 7.41 – Evolução das soluções: AFI e TFI.

A Tabela 7.19 foi elaborada com o objetivo de comparar a eficiência computacional de AFI e TFI. Esta tabela apresenta o tempo de processamento da análise e a média aritmética dos erros percentuais dos valores encontrados nos pontos limite em relação aos fornecidos na Figura 7.39. O tempo foi medido do começo do processamento até o ponto da trajetória de equilíbrio que, após ultrapassar os dois pontos limite de carga, atinge o valor de carga $P = 3.0$. Novamente foi utilizado o equipamento: Pentium II 350 / 32MB.

Tabela 7.19 – Eficiência: AFI e TFI.

Form.	Número de Elementos							
	06		08		10		20	
	Erro %	T (seg.)	Erro %	T (seg.)	Erro %	T (seg.)	Erro %	T (seg.)
AFI	14.63	26.47	7.32	30.60	6.92	40.87	1.87	81.9
TFI	14.55	16.86	7.41	18.23	6.95	25.65	1.71	48.5

Como em outros exemplos, nota-se que quase não há diferenças entre os valores limites de carga obtidos com as formulações que têm em comum a obtenção do vetor de forças internas de forma ‘incremental’. Entretanto, o fato de AFI ser baseado em relações deformação-deslocamento mais completas do que as que se baseiam TFI, fez com que o tempo de processamento de AFI fosse em média 60% maior que o tempo gasto por TFI.

7.3.5 – Arco Circular Pouco Abatido

O arco circular pouco abatido sob uma carga pontual vertical aplicada no seu topo, conforme mostrado na Figura 7.42, será analisado considerando as seguintes condições: estrutura perfeitamente simétrica, $m_0 = 0$; e estrutura com imperfeições iniciais, $m_0 = 72.15$.

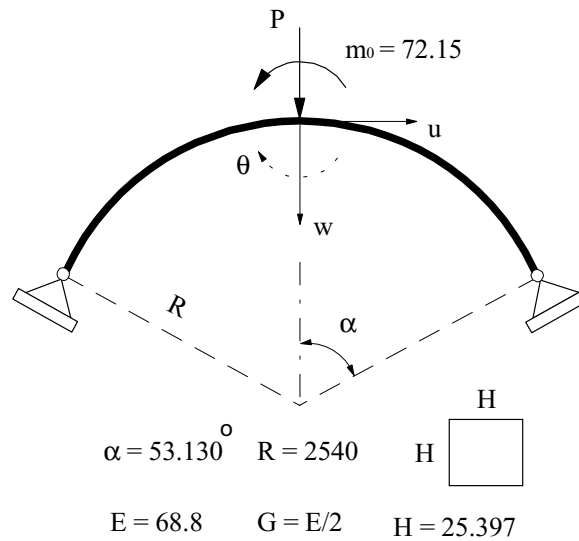
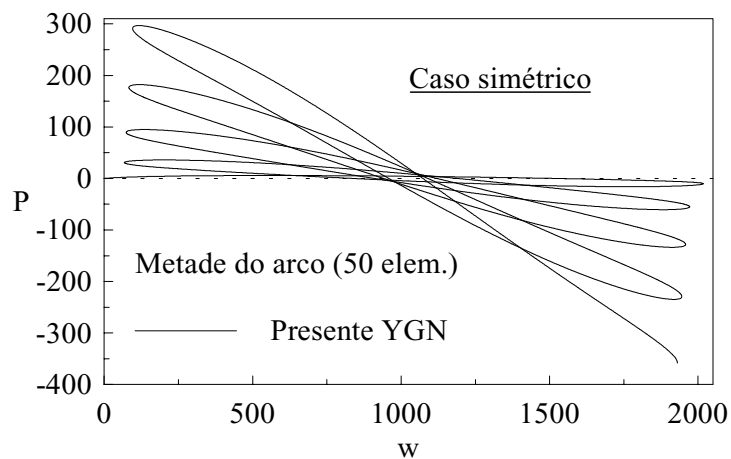


Figura 7.42 – Arco circular pouco abatido.

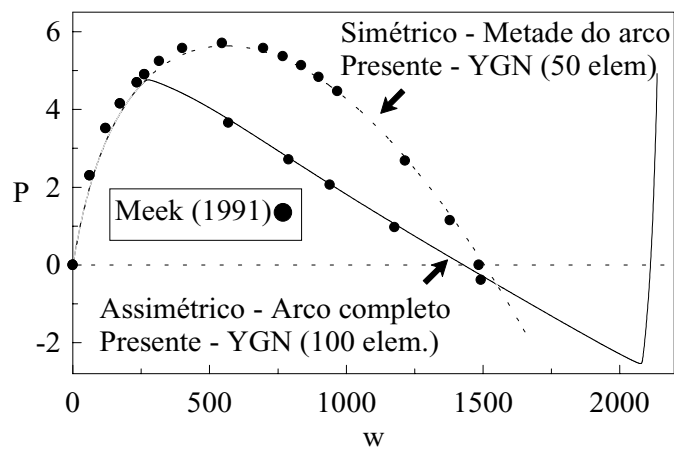
Este exemplo tem o objetivo de analisar as formulações propostas por Pacoste e Eriksson (1997) que foram implementadas neste trabalho: PTT, PT1, PT2, PC1 e PC2.

Serão usados os resultados fornecidos por Meek (1991), cuja solução foi obtida numericamente para um modelo estrutural com 8 elementos finitos. Adicionalmente, serão usados como referência, resultados numéricos obtidos usando a formulação YGN e um modelo estrutural com 100 elementos, para o caso em que há imperfeições iniciais, e um modelo de metade do arco com 50 elementos para o caso perfeitamente simétrico.

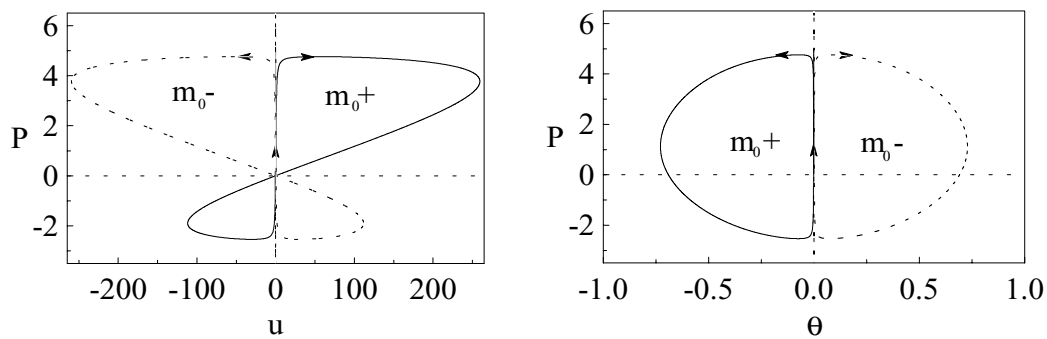
No caso do arco perfeito, o comportamento do sistema é semelhante ao do Exemplo (7.3.3), entretanto, a introdução de imperfeições permite identificar um ponto de bifurcação ao longo da trajetória. A Figura 7.43 ilustra essas afirmações mostrando as trajetórias de equilíbrio nos dois casos citados.



(a) Caso simétrico: $P \times w$.



(b) Casos simétrico e assimétrico: $P \times w$.



(c) Caso assimétrico: $(P \times u)$ e $(P \times \theta)$.

Figura 7.43 – Trajetórias de equilíbrio: YGN (100-50 elem.).

Verifica-se, portanto, que pequenas deformações assimétricas na configuração inicial da estrutura provocam um comportamento diferente do comportamento observado para a estrutura perfeita, com a ocorrência de um caminho de equilíbrio, pós-bifurcação, instável.

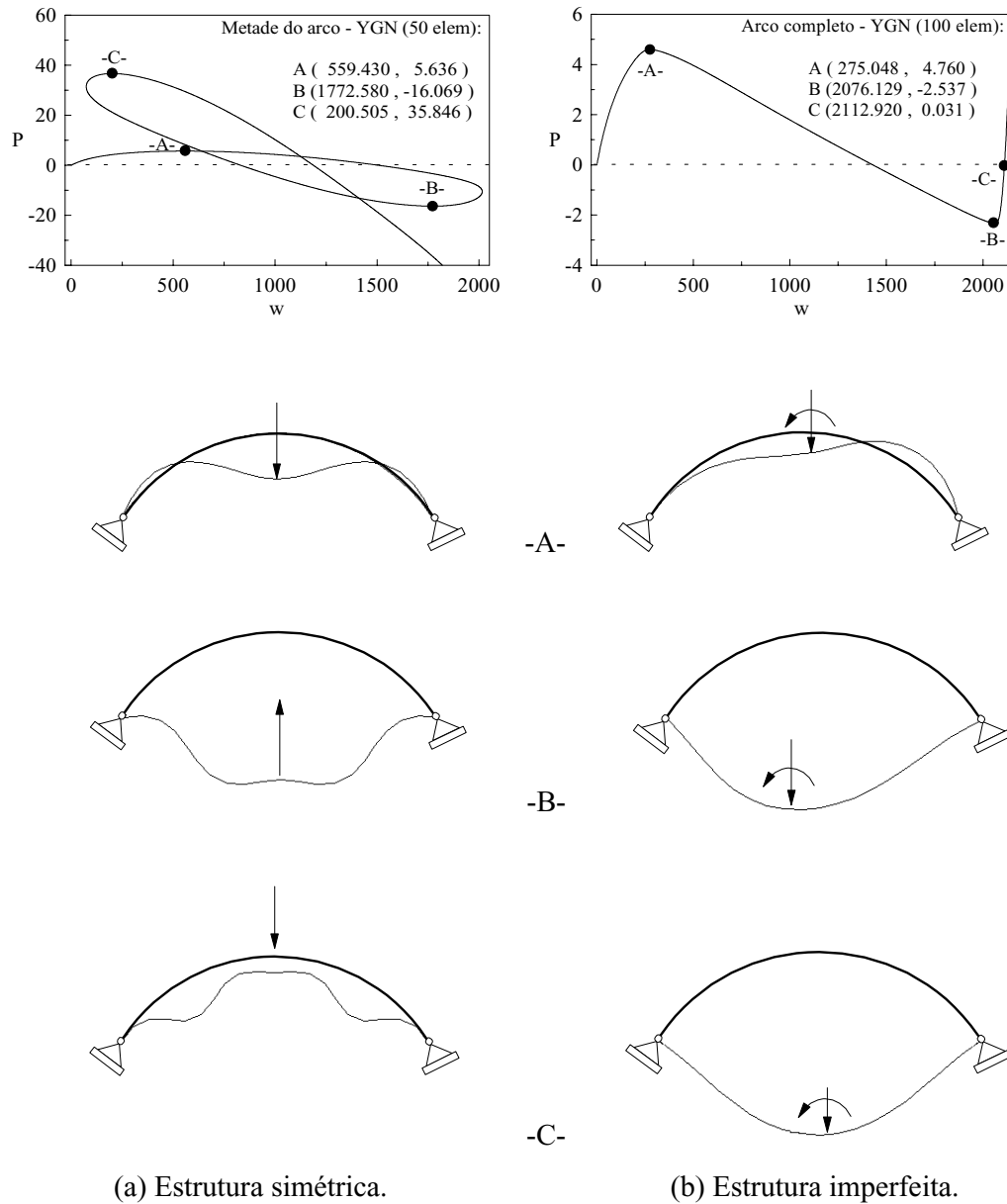


Figura 7.44 – Deformadas da estrutura.

A Figura 7.44 ilustra as deformadas do arco para diferentes situações de carga (A, B e C). Observe que a estrutura perfeita apresenta um comportamento cíclico, semelhante ao do Exemplo (7.3.3). Para o arco com imperfeições iniciais não é observado esse comportamento cíclico.

Para a análise das formulações, a estratégia de solução não-linear foi baseada no emprego do método de *Newton-Raphson modificado* com a estratégia de iteração *deslocamentos generalizados*. O incremento de carga foi controlado pelo parâmetro GSP, com valor inicial: $\Delta\lambda_0^1 = 0.05$. A tolerância adotada foi $\zeta = 10^{-4}$.

As Tabelas 7.20a e 7.20b apresentam erro percentual obtido para as cargas críticas (1º ponto limite e bifurcação) usando-se as formulações PTT, PC1 e PC2 para diferentes modelos estruturais. É mostrado também o tempo de processamento necessário para o traçado da trajetória de equilíbrio, do início do processo até o primeiro valor de carga $P = 0$. Utilizou-se para avaliação desse tempo um equipamento PII 350 / 32MB.

Tabela 7.20 – Eficiência computacional das formulações.

(a) Caso simétrico: 1º ponto limite de carga.

Form.	Número de Elementos: Metade do arco									
	04		05		06		10		15	
	E %	T (s)	E %	T (s)	E %	T (s)	E %	T (s)	E %	T (s)
PTT	25.4	9.28	15.03	9.77	9.99	9.78	3.35	14.23	1.42	18.01
PC1	9.77	20.59	6.23	26.75	4.31	25.37	1.53	46.58	0.66	72.00
PC2	1.14	22.52	0.66	27.24	0.43	30.81	0.12	50.70	0.04	73.05
P_{lim} = 5.636 (presente YGN - 50 elem.)										

(b) Caso imperfeito: ponto de bifurcação.

Form.	Número de Elementos: Arco Completo									
	08		10		12		20		30	
	Erro%	T (s)	Erro%	T (s)	Erro%	T (s)	Erro%	T (s)	Erro%	T (s)
PTT	11.18	36.0	6.95	42.6	5.93	52.2	1.68	65.4	0.72	108.9
PT1	4.95	71.6	3.16	88.1	2.20	101.4	0.78	166.5	0.35	263.1
PT2	0.83	97.1	0.52	116.3	0.37	133.0	0.13	209.4	0.07	309.2
PC1	4.95	104.3	3.16	128.3	2.20	147.5	0.78	212.5	0.35	341.2
PC2	0.83	123.7	0.52	147.9	0.37	170.1	0.13	237.9	0.07	349.4
Valor de referência: $P_{bif} = 4.588$ (presente YGN - 100 elem.)										

A seguir são feitas algumas observações relativas às análises realizadas:

- PTT necessitou de modelos melhores para obter resultados tão bons quanto PC2, entretanto, observa-se, pelo tempo de processamento, que a eficiência computacional destes dois tipos de elementos se equivalem;
- PTT não apresentou problemas de convergência, sendo capaz de atingir e ultrapassar o segundo ponto limite de carga, para o caso do arco imperfeito;
- PT1, PT2, PC1 e PC2 apresentaram problemas de convergência nas proximidades do segundo ponto limite de carga. A Figura 7.45 ilustra esse fato mostrando ainda, a evolução dos resultados encontrados por PTT ao se melhorar o modelo estrutural;
- PC1 e PT1, bem como PT2 e PC2, como já observado em outros exemplos, apresentam resultados idênticos. Essas formulações, entretanto, não apresentam o mesmo tempo de processamento.

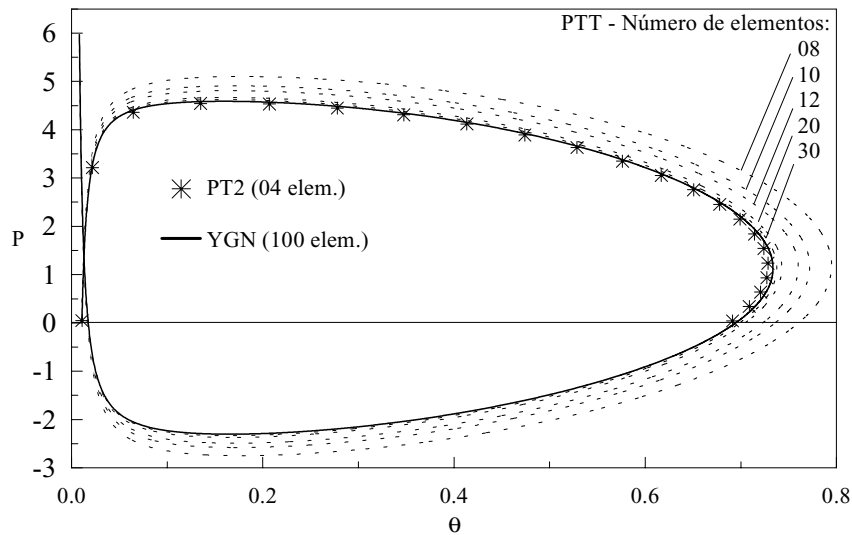


Figura 7.45 – Evolução dos resultados obtidos por PTT.

A Tabela 7.21 compara a eficiência computacional de PC1 e PC2, que têm abordagem ‘Corrotacional’, com PT1 e PT2, com abordagem ‘Total’, mostrando o erro percentual da carga de bifurcação e o tempo necessário para obtenção da trajetória de equilíbrio (até o primeiro ponto em que a carga P assume o valor nulo). Foi utilizado um modelo assimétrico com 30 elementos. Observe que as formulações com abordagem ‘Total’, apesar de apresentarem resultados rigorosamente idênticos às formulações ‘Corrotacionais’, mostraram-se mais eficientes quanto ao tempo necessário ao processamento.

Tabela 7.21 – Comparação: Total x Corrotacional.

Form.	Modelo: Arco Completo (30 Elem.)		
	Valor de P	Erro percentual	Tempo (s)
PC1	4.60424827	0.35	341.2
PT1	4.60424827	0.35	263.1
PC2	4.58538117	0.07	349.4
PT2	4.58538117	0.07	309.2
P_{bif} = 4.588 (presente YGN - 100 elem.)			

8

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

8.1 – INTRODUÇÃO

Considerando as análises mostradas no Capítulo 7, são apresentadas na Seção (8.2) algumas conclusões de carácter geral relacionadas à eficiência das formulações geometricamente não-lineares, presentes nos Capítulos 3, 4 e 5, para análise não-linear de sistemas reticulados planos.

Na apreciação dessas conclusões deve-se levar em conta os aspectos computacionais considerados na implementação das formulações e da metodologia de solução. Os principais aspectos do programa computacional desenvolvido neste trabalho estão expostos no Capítulo 6.

Visando a continuidade do presente trabalho, são fornecidas na Seção (8.3) algumas sugestões para trabalhos futuros.

8.2 – CONCLUSÕES

Formulações geometricamente não-lineares de elementos finitos planos de viga-coluna, propostas por Alves (1993b), Yang e Kuo (1994), Torkamani et al. (1997) e Pacoste e Eriksson (1997), foram implementadas com sucesso na metodologia de solução de sistemas de equações não-lineares proposta por Silveira (1995).

Com o objetivo de validar essas implementações e avaliar a eficiência computacional dessas formulações, foram estudados vários exemplos de problemas estruturais encontrados na literatura. Esses exemplos e suas respectivas análises foram apresentadas no Capítulo 7.

De acordo com essas análises pode-se chegar às seguintes conclusões com respeito às formulações, na forma como estão implementadas:

- 1 - Pode-se observar nos Exemplos (7.2.1, 7.2.2, 7.3.1, 7.3.2 e 7.3.3) que as formulações AFI, TFI, YSN, YGN e YGH, que calculam o vetor de forças internas através dos *deslocamentos naturais incrementais*, na forma proposta por Yang e Kuo (1994), apresentaram resultados bem semelhantes. Dessa observação se conclui que as formulações desse grupo baseadas em relações mais simples, por envolverem menos operações e necessitarem de um tempo de processamento menor, são computacionalmente mais eficientes;
- 2 - Da conclusão expressa no item anterior pode-se destacar a formulação YSN, que, apesar de ser baseada em uma equação de equilíbrio linearizada e relações deformação-deslocamento simplificadas, não apresentou nenhum problema de convergência nos exemplos analisados neste trabalho;
- 3 - As formulações AFI e TFI produziram resultados, em média, melhores que AFT e TFT, que são baseadas, respectivamente, nas mesmas relações que AFI e TFI, mas diferem destas por calcularem o vetor de forças internas com os *deslocamentos naturais totais*, na forma proposta por Alves (1993b). Isto pode ser constatado nos Exemplos (7.2.1, 7.2.2, 7.3.1 e 7.3.4), entretanto, no Exemplo (7.2.4), que trata de

um arco biengastado sob pressão radial, AFT e TFT apresentaram resultados mais precisos que AFI e TFI;

- 4 - Todas as formulações citadas em (1) foram capazes de traçar, de forma completa, as trajetórias de equilíbrio dos problemas do Capítulo 7, não apresentando nenhum problema de convergência. As demais formulações, que calculam as forças internas com os *deslocamentos totais*, com exceção de PTT, apresentaram problemas de convergência nos Exemplos (7.2.2, 7.2.4, 7.3.2 e 7.3.4), e não foram capazes de traçar toda a trajetória de equilíbrio. Dessas observações, pode-se concluir que a forma total de obtenção do vetor de forças internas necessita de melhores relações cinemáticas. Portanto, a forma ‘incremental’ de obtenção do vetor de forças internas, proposta por Yang e Kuo (1994), é mais eficiente na obtenção de trajetórias de equilíbrio não-lineares que apresentam trechos com mudanças bruscas de direção;
- 5 - A formulação YGE se diferencia de YGN por calcular o vetor de forças internas através da *matriz de rigidez externa*. Essa forma de cálculo tem a vantagem de ser mais geral e sistemática do que a forma que utiliza os *deslocamentos naturais*, podendo ser estendida à análise de estruturas compostas por outros tipos de elementos. Entretanto, a Seção (4.4.2.2) mostra que, na definição da chamada *matriz de rigidez externa*, Yang e Kuo (1994), admitindo serem os deslocamentos incrementais suficientemente pequenos, introduziram algumas aproximações no cálculo dos deslocamento nodais. As aplicações numéricas mostraram que a acuidade dessas aproximações dependem da estratégia de incremento de carga utilizada. Assim, no Exemplo (7.2.3), que trata de um arco birrotulado sob carregamento distribuído, os resultados produzidos por YGE tendem a se aproximar dos fornecidos por YGN à medida que se diminui o valor médio dos incrementos de carga;
- 6 - Analisando-se os resultados obtidos pelas formulações AFT e TFT, observa-se que, em geral, AFT, que é baseada em relações deformação-deslocamento mais completas do que TFT e possui considerações adicionais, produziu resultados

melhores que TFT. Exceções são observadas nos Exemplos (7.2.1 e 7.3.1), onde, ao se melhorar os modelos estruturais aumentando-se o número de elementos, a melhora dos resultados foi mais sensível em TFT do que em AFT;

- 7 - Ao se analisar as soluções obtidas pelas formulações PTT, PT1, PT2, PC1 e PC2 nos Exemplos (7.2.1, 7.2.2, 7.2.5 e 7.3.1), para um mesmo modelo estrutural, constata-se que, em média, os resultados mais precisos foram os produzidos por PT2 e PC2, que se baseiam em aproximações melhores para as relações deformação-deslocamento. Entretanto, como já comentado no item (4), em alguns exemplos estruturais com forte não-linearidade, essas duas formulações, bem como PT1 e PC1, apresentam problemas de convergência e não foram capazes de traçar toda a trajetória de equilíbrio;
- 8 - As formulações PT1 e PT2 apresentaram resultados idênticos a PC1 e PC2, concordando assim com as observações presentes em Pacoste e Eriksson (1997). Essa afirmação pode ser constatada nos Exemplos (7.2.1, 7.2.2, 7.2.5 e 7.3.1). Porém, as Tabelas (7.14 e 7.21) mostram que o tempo de processamento de PC1 e PC2 é superior àquele apresentado por PT1 e PT2. Assim, no presente trabalho, a abordagem *total* mostrou melhor eficiência computacional do que a abordagem *corrotacional*;
- 9 - PTT necessitou de modelos estruturais melhores que as demais formulações para produzir bons resultados. Isto se deve às funções de interpolação lineares e a desconsideração dos efeitos de corpo rígido. Entretanto, como pode ser observado no Exemplo (7.3.5), esta deficiência é compensada pelo pequeno tempo computacional apresentado por essa formulação. Além disso, como já comentado em (4), essa formulação mostrou ser capaz de atingir e ultrapassar pontos críticos não atingidos pelas outras formulações que também calculam as forças internas de forma ‘total’;
- 10 - No Exemplo (7.2.5), verificou-se uma pequena diferença entre os resultados obtidos no presente trabalho pela formulação PTT (Tabela 7.12), e os fornecidos

por Pacoste e Eriksson (1994) para a mesma formulação (Tabelas 7.11). Além disso, as implementações do presente trabalho para as formulações PT1, PT2, PC1 e PC2, em algumas análises, apresentaram problemas de convergência não observadas no citado trabalho. Essas constatações sugerem que esses autores utilizaram procedimentos computacionais adicionais, não fornecidos no artigo citado, para contornarem alguns problemas. Portanto, as conclusões observadas acima são restritas à implementação computacional realizada no presente trabalho para essas formulações;

- 11 - Para que se pudesse efetuar comparações entre as formulações, em cada exemplo procurou-se manter as mesmas estratégias de solução não-linear (incremento de carga e iteração), variando-se a formulação e a discretização dos modelos estruturais. Em geral, as estratégias de iteração escolhidas mostraram-se eficientes, ou seja, permitiram a obtenção das trajetórias de forma completa, entretanto, as seguintes observações relacionadas às estratégias de incremento de carga merecem destaque:
 - (i) No Exemplo (7.2.3), como já comentado em (5), a formulação YGE não apresentou bons resultados ao utilizar a estratégia do *comprimento arco* para controlar $\Delta\lambda^0$, pois foram obtidos valores médios de incremento de carga relativamente grandes, o que diminui a precisão dessa formulação. Esse problema foi minorado de duas formas diferentes: a) reduzindo-se o valor inicial do parâmetro de carga; b) utilizando-se a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro GSP;
 - (ii) A escolha do parâmetro GSP como controlador de $\Delta\lambda^0$, juntamente com o critério de escolha do sinal e as formulações empregadas, foi determinante para se conseguir obter toda a trajetória de equilíbrio ‘cíclico’ dos arcos dos Exemplos (7.3.3 e 7.3.5).
- 12 - Nas análises realizadas neste trabalho, os aspectos que se mostraram de maior relevância na precisão dos resultados obtidos pelas formulações não-lineares são:

- (i) A modelagem do sistema estrutural: como exemplifica o item (9), uma discretização melhorada do modelo estrutural pode compensar eventuais problemas com a formulação;
- (ii) O referencial de obtenção dos deslocamentos (RLT ou RLA);
- (iii) A forma de se calcular o vetor de forças internas: o fato de AFI e TFI terem apresentado melhor desempenho que AFT e TFT mostra a importância desse aspecto na convergência dos resultados obtidos;
- (iv) A qualidade das relações cinemáticas: esse aspecto torna-se especialmente importante se o cálculo do vetor de forças internas for feito de forma ‘total’;
- (v) Funções de interpolação utilizadas para os deslocamentos: um exemplo da importância desse aspecto é mostrado no item (9);

8.3 – SUGESTÕES

A metodologia de solução não-linear empregada no presente trabalho, incluindo as formulações, pode ser adaptada para a solução de grande diversidade de problemas estruturais, caracterizando, portanto, uma base implementada, para vários trabalhos futuros.

A seguir são apresentadas algumas sugestões que podem ser implementadas no sistema computacional atual dando continuidade ao presente trabalho:

- 1 - Outras formulações geometricamente não-lineares de elementos finitos planos de viga-coluna, propostas em publicações recentes, podem ser implementadas. Entre elas, por exemplo, destaca-se a formulação mista baseada no método da flexibilidade, proposta por Neuenhofer e Filippou (1998) e as formulações de elementos finitos parabólicos introduzidas por Litewka e Rakowski (1997 e 1998);
- 2 - O sistema atual pode ser facilmente adaptado para que se possa implementar formulações não-lineares de pórticos tridimensionais, como por exemplo, as

formulações tridimensionais de elementos finitos retos e curvos propostas por Yang e Kuo (1994);

- 3 - Pode-se implementar também formulações geometricamente não-lineares que incluem a elasto-plasticidade de sistemas estruturais reticulados, como, por exemplo, as propostas por Park e Lee (1996), Ovunc e Ren (1996) e Saje et al. (1998);
- 4 - Dar continuidade ao trabalho que vem sendo desenvolvido por Rocha (2000), implementando-se no atual sistema outras estratégias de solução não-linear, incluindo novas estratégias de incremento de carga e de iteração;
- 5 - Implementação de procedimentos numéricos que permitam avaliar com precisão os pontos críticos existentes, e obter as trajetórias de equilíbrio secundárias (Crisfield, 1997);
- 6 - O sistema computacional pode ser estendido facilmente à análise de sistemas estruturais com ligações semi-rígidas (Saldanha, 1997);
- 7 - O sistema desenvolvido neste trabalho pode também ser adaptado à análise do comportamento de estruturas reticuladas sob incêndio (Bailey, 1998);
- 8 - Adaptação das formulações implementadas no presente trabalho ao programa implementado por Silveira (1995) para análise de sistemas estruturais com restrições unilaterais de contato.

|REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves, R.V. (1993a). Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Total. 1º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ.

Alves, R.V. (1993b). Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado. 3º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ.

Ammar, S.; Dhatt, G. e Fafard, M. (1996). Exact Stability Model of Space Frames. Computers & Structures, Vol. 60, N° 1, p. 59-71.

Antonini, R.C. (1986). Uma Formulação Discretizada da Teoria da Estabilidade Elástica para Análise Estrutural via Elementos Finitos. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

Bailey, C. G. (1998). Development of Computer Software to Simulate the Structural Behaviour of Steel-Framed Buildings in fire. Computers & Structures, Vol. 67, p. 421-438.

Batoz, J.L. e Dhatt, G. (1979). Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems. Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 14, p. 1262-1267.

Bergan, P. G., Horrigmoe, G., Krakeland, B. e Soreide, T. (1978). Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems. Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 12, p. 1677-1696.

Bergan, P.G. (1980). Solution Algorithms for Nonlinear Structural Problems. Computers & Structures, Vol. 12, p. 497-509.

Borri, M. e Bottasso, C. (1994). An Intrinsic Beam Model Based on Helicoidal Approximation-Part II/: Linearization and Finite Element Implementation. Int J. Numer. Meth. Engng, N° 37, p. 2291-2309.

Budiansky, B. (1968). Notes on nonlinear shell theory, ASME J. Appl. Mech. N° 00.

Chajes, A. e Churchill, J. E. (1987). Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods. Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 6, p. 1221-1235.

Chen, Chang-New. (1996). A Finite Element Study On Bifurcation and Limit Point Buckling of Elastic-Plastic Arches. Computers & Structures, Vol. 60, N°2, p. 189-196.

Choi, J. K. e Lim, J. K (1995). General Curved Beam Elements Based on The Assumed Strain Fields. Computers & Structures, Vol. 55, N° 3, p. 379-386.

Crisfield, M.A. (1981). A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-Through", Computers & Structures, Vol. 13, pp. 52-62.

Crisfield, M.A. (1991). Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol 1, John Wiley & Sons.

Crisfield, M.A. (1997). Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol 2, John Wiley & Sons.

Ebner, A. M. (1972). A Theoretical and Numerical Comparison of Elastic Nonlinear Finite Element Methods. Computers & Structures, Vol. 2, P 1043-1061.

Epstein, M. e Murray, D. W. (1976). Large Deformation in Plane Analysis of Elastic Beams. Computers & Structures, Vol. 6, P 1-9.

Eriksson, A. (1998). Structural Instability Analysis Based on Generalised Path-Following. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* N° 156, p. 45-74.

Franchi, C. G. e Montelaghi, F. (1996). A Weak-Weak Formulation for Large Displacement Beam Statics: a Finite Volumes approximation. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* John Wiley & Sons, N° 39, p. 585-604.

Goto, Y. e Chen, W. (1987). Second-Order Elastic Analysis for Frame Design. *Journal of the Structural Engineering*, Vol. 113, N° 7, p. 1500-1519.

Heijer, C. D. e Rheinboldt, W.C. (1981). On Steplength Algorithms for a Class of Continuation Methods. *SIAM J. Num. Analysis*, Vol. 18, p. 925-948.

Hsiao, K.M.; Hou, F.Y. e Spiliopoulos, K.V. (1988). Large Displacement Analysis of Elasto-Plastic Frames. *Computers & Structures*, Vol. 28, N° 5, p. 627-633.

Ibrahimbegovic', A. (1995). On Finite element implementation of Geometrically Nonlinear Reissner's Beam Theory: Three-Dimensional Curved Beam Elements. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* N° 122, p. 11-26.

Ibrahimbegovic', A.; Shakourzadeh, H.; Batoz, J. L.; Al Mikdad, M.; Guo, Y. Q. (1996). On The Role of Geometrically Exact and Second-Order Theories in Buckling and Post-Buckling Analysis of Three-Dimensional Beam Structures. *Computers & Structures*, Vol. 61, N° 6, p. 1101-1114.

Iwakuma, T. (1990). Timoshenko Beam Theory with Extension Effect and Its Stiffness Equation for Finite Rotation. *Computers & Structures* , Vol. 34, N° 2, p. 239-250.

Jennings, A. (1968). Frame Analysis Including Change of Geometry. *Journal of the Structural Division. ASCE*, Vol. 94, p. 627-644.

Kegl, M.; Butinar, B.J. e Oblak, M.M. (1995). Shape Optimal Design of Elastic Planar Frames with Non-Linear Response. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.*, N^o 38, p. 3227-3242.

Kerr, A.D. e Soifer, M.J. (1969). The Linearization of Prebuckling State and Its Effect on the Determined Instability Loads. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, pp. 775-783.

Kim, J. G. e Kim, A. Y. Y. (1998). A New Higher-Order Hybrid-Mixed Curved Beam Element. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* N^o 43, p. 925-940.

Koiter, W.T. (1970). On the Stability of Elastic Equilibrium (Translation from Dutch). Tech. Rep. AFFDL-TR-70-25, Airforce Flight Dynamics Lab.

Kouhia, R. e Mikkola, M. (1989). Tracing the Equilibrium Path Beyond Simple Critical Points. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.*, Vol. 28, p. 2923-2941.

Krenk, S. (1993). Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations. *Engineering Mechanics. Department of Buiding Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark*, N^o. 12, p. 01-18.

Krenk, S. (1995), An Orthogonal Residual Procedure for Non-Linear Finite Element Equations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 38, p. 823-839.

Lee, J. D. (1988). Finite Element Procedures for Large Strain Elastic-Plastic Theories. *Computers & Structures*, Vol. 28, N^o 3, p. 395-406.

Lee, S. S.; Koo, J. S.; Choi, J. M. (1994). Variational Formulation for Timoshenko Beam Element by Separation of Deformation Mode. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, p. 599-610.

Li, M. (1998). The Finite Deformation Theory for Beam, Plate and Shell Part III, The Three-dimensional Beam Theory and the FE formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* N° 162, p. 287-300.

Litewka, P. e Rakowski, J. (1997). An Efficient Curved Beam Finite Element. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* N° 40, p. 2629-2652.

Litewka, P. e Rakowski, J. (1998). The Exact Thick Arch Finite Element. *Computers & Structures*, Vol. 68, N° 6, p. 369-379.

Mallett, R. H. e Marcal, P. V. (1968). Finite Element Analysis of Nonlinear Structures. *Journal of the Structural Division. Proc. ASCE*, Vol. 94, No. ST9, p. 2081-2103.

Marquist, J. P. e Wang, T. M. (1989). Stiffness Matrix of Parabolic Beam Element. *Computers & Structures*, Vol. 31, N° 6, p. 863-870

Martin, H. C. (1965). On The Derivation of Stiffness Matrices for The Analysis of Large Deflection and Stability Problems. *Conference of Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.

Mattiasson, K. (1981). Numerical Results from Large Deflection beam and Frame Problems Analysed by means of Elliptic Integrals, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 17(1), p. 145-153.

Matthies, H. e Strang, G. (1979). The Solution of Nonlinear Finite Element Equations. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* N° 14, p. 1613-1626.

Matsununga, H. (1996). Buckling Instabilities of Thick Elastic Beams Subjected to Axial Stresses. *Computers & Structures*, Vol. 59, N° 5, p. 859-868.

Meek, J. L. e Loghanathan, S. (1990). Geometric and Material Non-Linear Behaviour of Beam-Columns. *Computers & Structures*, Vol. 34, N° 1, p. 87-100.

Meek, J.L. e Tan, H.S. (1984). Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 47, p. 261-282.

Meek, J.L. (1991). *Computer Methods in Structural Analysis*. E & FN SPON, Chapman & Hall.

Microsoft FORTRAN PowerStation. Version 4.0. (1995), Microsoft Corporation.

Moita, G. F. e Crisfield, M. A. (1996). A Finite Element Formulation for 3-D Continua Using The Co-Rotational Technique. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* N^o 39, p. 3775-3792.

Morán, A.; Oñate, E. e Miquel, J. (1998). A general Procedure for Deriving Symmetric Expressions Matrioces in Finite Element Analysis. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* John Wiley & Sons, N^o 42, p. 219-236.

Neuenhofer, A. e Filippou, F.C. (1997). Evaluation of Nonlinear Frame Finite-Element Models. *Journal of the Structural Engineering*, Vol. 123, No. 7, p. 958-966.

Neuenhofer, A. e Filippou, F.C. (1998). Geometrically Nonlinear Flexibility-Based Frame Finite Element. *Journal of the Structural Engineering*, Vol. 124, No. 6, p. 704-711.

Ovunc, B. A. e Ren, T. (1996). Nonlinearities in the Analysis of Frames. *Computers & Structures*, Vol. 61, N^o 6, p. 1177-1184.

Pacoste, C. e Eriksson, A. (1995). Element behaviour in post-critical plane frames analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, N^o 125, p. 319-343.

Pacoste, C. e Eriksson, A. (1997). Beam elements in instability problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, N° 144, p. 163-197.

Park, M. S. e Lee, B. C. (1996). Geometrically Non-Linear and Elastoplastic Three-Dimensional Shear Flexible Beam Element of Von-Mises-Type Hardening Material. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* Vol 39, p. 383-408.

Petrolito, J. (1995). Stiffness Analysis of Beam Using a Higher-Order Theory. *Computers & Structures*, Vol. 55, N° 1, p. 33-39.

Poston, T. e Stewart, I. (1978). *Catastrophe Theory and Its Applications*, Pitman, London.

Powell, G. H. (1969). Theory of nonlinear elastic structures. *J. struct. Div., ASCE*, Vol 95, N° 12, p. 2687-2701.

Ramm, E. (1981). Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89.

Raveendranath, P.; Singh, G. e Pradhan, B. (1999). A Two-Noded Locking-Free Shear Flexible Curved Beam Element. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* N° 44, p. 265-280.

Rhim, J. e Lee, S. W. (1998). A Vectorial Approach to Computational Modelling of Beams Undergoing Finite Rotations. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.* N° 41, p. 527-540.

Riks, E. (1972). The Application of Newton's Methods to the Problems Elastic Stability. *Int. J. Solids Structures*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp. 1060-1066.

Riks, E. (1979). An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 15, p. 529-551.

Rocha, G., 2000, Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração para Análise Não-Linear de Sistemas Estruturais, Dissertação de Mestrado, Deciv-UFOP, Ouro Preto (a ser defendida).

Saje, M.; Turk, G.; Planinc, I. e Vratnar, B. (1997). A Kinematically Exact Finite Element Formulation of Planar Elastic-Plastic Frames. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, N° 144, p. 125-151.

Saje, M.; Turk, G.; Kalagaidu, A. e Vratnar, B. (1998). A Kinematically Exact Finite Element Formulation of Elastic-Plastic Curved Beams. *Computers & Structures*, Vol. 67, p. 197-214.

Saldanha, A. C. (1997). Análise Não-Linear do Comportamento de Pórticos Metálicos com Ligações Semi-Rígidas, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas/UFOP.

Salerno, G. e Lanzo, D. A. (1997). A Nonlinear Beam Finite Element for the Post-Buckling Analysis of Plane Frames by Koiter's Perturbation Approach. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, N° 146, p. 325-349.

Sandhu, J. S.; Stevens, K., A.; Davies, G. A. O. (1990). A 3-D Co-rotational, Curved and Twisted Beam Element. *Comput. Struct.*, N° 35, p. 69-79.

Schweizerhof, K. H. e Wriggers, P. (1986). Consistent Linearization for path Following Methods in Nonlinear FE Analysis. . *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 59, p. 269-279.

Silveira, R.A.M. (1995). Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato. Tese de Doutorado. PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ.

Silveira, R.A.M., Rocha, G., e Gonçalves, P.B. (1999a). Estratégias numéricas para análises geometricamente não-lineares. *Anais do XV Congresso Brasileiro de*

Engenharia Mecânica (COBEM/99), Águas de Lindóia/SP, Brasil, Novembro, 22-26/11/1999, 10 páginas, CD-ROM, ISBN: 85-85769-03-3.

Silveira, R.A.M., Rocha, G., e Gonçalves, P.B. (1999b). Estratégias de incremento de carga e iteração para análise não-linear de estruturas. *Anais do XX Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia (XX CILAMCE)*, Universidade de São Paulo, São Paulo/SP, Brasil, Novembro, pp. 213.1-213.20, CD-ROM, ISBN: 85-901027-1-8.

Singh, H. e Singh, G. M. (1992). Non-Linear Analysis of Frames. *Computers & Structures*, Vol. 44, N° 6, p. 1377-1379.

Software GRAPHER. (1993/1994). 2-D Graphing System. Version 1.09, Golden Software, Inc.

Southwell, R. V. (1941). An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists, 2ª edn., Oxford University Press, Oxford, England.

Thom, R. (1975). Structural Stability and Morphogenesis, (Transl. from the French by D. H. Fowler), Benjamin, Reading, UK.

Thompson, J.M.T. e Hunt, G.W. (1973). A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, Inc.

Timoshenko, S.P. e Gere, J.E. (1963). Theory of Elastic Stability. Mechanical Engineering Series, McGraw-Hill.

Timoshenko, S.P. e Gere, J.E. (1982). Mecânica dos Sólidos. Livros Técnicos e Científicos, Vol 01.

Torkamani, M.A.M.; Sonmez, M. e Cao, J. (1997). Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method. *Journal of Structural Engineering*, Vol 12, N° 9, p. 1225-1235.

Wagner, W. (1991). A Path-Following Algorithm with quadratic predictor. *Comp Struct*. N° 39, p. 339-348.

Waszczyszyn, Z e Janus-Michalka, M. (1998). Numerical Approach to the 'Exact' Finite Element Analysis of in-Plane Finite Displacement of Framed Structures. *Computers & Structures*, Vol. 69, p. 525-535.

Wen, R.K.; e Rahimzadeh J. (1983). Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Element. *Journal of the Structural Engineering*, Vol. 109, N° 8, p. 1952-1971.

Williams, F.W. (1964). An Approach to the Nonlinear Behavior of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 17(4), p. 451-469, 1964.

Wong, M.B. e Tin-Loi, F. (1990). Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures. *Computers & Structures*, Vol. 34, No. 4, p. 633-640.

Wood, R.D. e Zienkiewicz, O. C. (1977). Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells. *Computers & Structures*, Vol. 7, p. 725-735.

Wu, B. e Wang, Z. (1997). A perturbation method for the determination of the buckling strength of imperfection-sensitive structures. *Methods Appl. Mech. Engrg*, N° 145, p. 203-215.

Xu, Z. e Mirmiran, A. (1997). Looping Behavior of Arches Using Corotational Finite Element. *Computers & Structures*, Vol. 62, N° 6, p. 1059-1071.

Yang, Y. B. e Shieh, M. S. (1990). Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol. 28, N° 12, p. 2110-2116.

Yang, Y. B. e Kuo, S. B. (1994). Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures, Prentice Hall.

Zienkiewicz, O.C. (1971). The Finite Element in Engineering Science, McGraw-Hill, London.

| APÊNDICE A

MATRIZES DE RIGIDEZ: ALVES (1993B) e TORKAMANI *et AL.* (1997)

A.1 ALVES (1993b)

Alves (1993b) define a matriz de rigidez derivando a expressão das forças internas, Equação (3.36), em relação a $\Delta \mathbf{u}$. Dessa forma, escreve a matriz de rigidez \mathbf{K} sob a forma: $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_T + \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u}) + 1/2 \mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})]$. A seguir serão apresentadas as componentes das matrizes \mathbf{K}_L , \mathbf{K}_T , $\mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u})$ e $\mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})$.

A.1.1 Matriz \mathbf{K}_L

Levando-se a relação (3.4) em (3.20c), considerando-se as aproximações (3.26) e (3.27), e levando-se o resultado encontrado em (3.33a), obtém-se as componentes da matriz de rigidez linear elástica \mathbf{K}_L . Desta forma, escreve-se:

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} k_{L(1,1)} & 0 & 0 & k_{L(1,4)} & 0 & 0 \\ & k_{L(2,2)} & k_{L(2,3)} & 0 & k_{L(2,5)} & k_{L(2,6)} \\ & & k_{L(3,3)} & 0 & k_{L(3,5)} & k_{L(3,6)} \\ \text{Simétrica} & & & k_{L(4,4)} & 0 & 0 \\ & & & & k_{L(5,5)} & k_{L(5,6)} \\ & & & & & k_{L(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$k_{L(1,1)} = k_{L(4,4)} = -k_{L(1,4)} = \frac{EA}{L};$$

$$k_{L(2,2)} = k_{L(5,5)} = -k_{L(2,5)} = \frac{12EI}{L^3};$$

$$k_{L(2,3)} = k_{L(2,6)} = -k_{L(3,5)} = -k_{L(5,6)} = \frac{6EI}{L^2};$$

$$k_{L(3,3)} = k_{L(6,6)} = \frac{4EI}{L}; \text{ e}$$

$$k_{L(3,6)} = \frac{2EI}{L}.$$

A.1.2 Matriz \mathbf{K}_τ

Levando-se as relações (3.6) e (3.10) em (3.20b), considerando-se as aproximações (3.26) e (3.27), e a seguir, levando-se o resultado encontrado em (3.33b), obtém-se as componentes da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_τ . Desta forma, escreve-se:

$$\mathbf{K}_\tau = \begin{bmatrix} k_{\tau(1,1)} & k_{\tau(1,2)} & k_{\tau(1,3)} & k_{\tau(1,4)} & k_{\tau(1,5)} & k_{\tau(1,6)} \\ & k_{\tau(2,2)} & k_{\tau(2,3)} & k_{\tau(2,4)} & k_{\tau(2,5)} & k_{\tau(2,6)} \\ & & k_{\tau(3,3)} & k_{\tau(3,4)} & k_{\tau(3,5)} & k_{\tau(3,6)} \\ \textit{Simétrica} & & & k_{\tau(4,4)} & k_{\tau(4,5)} & k_{\tau(4,6)} \\ & & & & k_{\tau(5,5)} & k_{\tau(5,6)} \\ & & & & & k_{\tau(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

onde:

$$k_{\tau(1,1)} = k_{\tau(4,4)} = -k_{\tau(1,4)} = \frac{P}{L};$$

$$k_{\tau(1,2)} = -k_{\tau(1,5)} = -k_{\tau(2,4)} = k_{\tau(4,5)} = -\frac{(M_1 + M_2)}{L^2};$$

$$k_{\tau(1,3)} = -k_{\tau(3,4)} = -\frac{M_1}{L};$$

$$k_{\tau(1,6)} = -k_{\tau(4,6)} = -\frac{M_2}{L};$$

$$k_{\tau(2,2)} = -k_{\tau(2,5)} = k_{\tau(5,5)} = \frac{6P}{5L} + \frac{12P}{L^3} \left(\frac{EI}{EA} \right);$$

$$k_{\tau(2,3)} = k_{\tau(2,6)} = -k_{\tau(3,5)} = -k_{\tau(5,6)} = \frac{P}{10} + \frac{6P}{L^2} \left(\frac{EI}{EA} \right);$$

$$k_{\tau(3,3)} = k_{\tau(6,6)} = \frac{2PL}{15} + \frac{4P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right); \text{ e}$$

$$k_{\tau(3,6)} = -\frac{PL}{30} + \frac{2P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right).$$

A.1.3 Matriz \mathbf{K}_1

Levando-se as relações (3.4) e (3.6) em (3.20d), considerando-se as aproximações (3.26) e (3.27), e a seguir, levando-se o resultado em (3.33c), obtém-se as componentes da matriz de rigidez com não-linearidade de primeira ordem \mathbf{K}_1 . Desta forma, escreve-se:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_{1(1,1)} & k_{1(1,2)} & k_{1(1,3)} & k_{1(1,4)} & k_{1(1,5)} & k_{1(1,6)} \\ & k_{1(2,2)} & k_{1(2,3)} & k_{1(2,4)} & k_{1(2,5)} & k_{1(2,6)} \\ & & k_{1(3,3)} & k_{1(3,4)} & k_{1(3,5)} & k_{1(3,6)} \\ \text{Simétrica} & & & k_{1(4,4)} & k_{1(4,5)} & k_{1(4,6)} \\ & & & & k_{1(5,5)} & k_{1(5,6)} \\ & & & & & k_{1(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

onde:

$$k_{1(1,1)} = k_{1(4,4)} = -k_{1(1,4)} = \frac{3EA}{L^2}(\Delta u_2 - \Delta u_1);$$

$$k_{1(1,2)} = -k_{1(1,5)} = -k_{1(2,4)} = k_{1(4,5)} = \frac{EA}{10L}(12\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) + \frac{18EI}{L^3}(2\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2);$$

$$k_{1(1,3)} = -k_{1(3,4)} = \frac{EA}{30}(3\Delta\theta_0 - 4\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) + \frac{6EI}{L^2}(3\Delta\theta_0 - 2\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2);$$

$$k_{1(1,6)} = -k_{1(4,6)} = \frac{EA}{30}(3\Delta\theta_0 + \Delta\theta_1 - 4\Delta\theta_2) + \frac{6EI}{L^2}(3\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - 2\Delta\theta_2);$$

$$k_{1(2,2)} = -k_{1(2,5)} = k_{1(5,5)} = \frac{6EA}{5L^2}(\Delta u_2 - \Delta u_1) + \frac{36EI}{L^4}(\Delta u_2 - \Delta u_1);$$

$$k_{1(2,3)} = k_{1(2,6)} = -k_{1(3,5)} = -k_{1(5,6)} = \frac{EA}{10L}(\Delta u_2 - \Delta u_1) + \frac{18EI}{L^3}(\Delta u_2 - \Delta u_1);$$

$$k_{1(3,3)} = k_{1(6,6)} = \frac{2EA}{15}(\Delta u_2 - \Delta u_1) + \frac{12EI}{L^2}(\Delta u_2 - \Delta u_1); e$$

$$k_{1(3,6)} = -\frac{EA}{30}(\Delta u_2 - \Delta u_1) + \frac{6EI}{L^2}(\Delta u_2 - \Delta u_1),$$

com $\Delta\theta_0 = (\Delta v_2 - \Delta v_1) / L$.

A.1.4 Matriz \mathbf{K}_2

Levando-se a relação (3.6) em (3.20e), considerando-se as aproximações (3.26) e (3.27), e levando-se o resultado em (3.33e), obtém-se as componentes da matriz de rigidez com não-linearidade de segunda ordem \mathbf{K}_2 . Desta forma, escreve-se:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{2(1,1)} & k_{2(1,2)} & k_{2(1,3)} & k_{2(1,4)} & k_{2(1,5)} & k_{2(1,6)} \\ & k_{2(2,2)} & k_{2(2,3)} & k_{2(2,4)} & k_{2(2,5)} & k_{2(2,6)} \\ & & k_{2(3,3)} & k_{2(3,4)} & k_{2(3,5)} & k_{2(3,6)} \\ \textit{Simétrica} & & & k_{2(4,4)} & k_{2(4,5)} & k_{2(4,6)} \\ & & & & k_{2(5,5)} & k_{2(5,6)} \\ & & & & & k_{2(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

onde:

$$\begin{aligned} k_{2(1,1)} &= k_{2(4,4)} = -k_{2(1,4)} = \frac{3EA}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\ &+ \frac{EA}{15L} (18\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 2\Delta\theta_1^2 - \Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 2\Delta\theta_2^2) + \\ &+ \frac{12EI}{L^3} (3\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + \Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_1\Delta\theta_2 + \Delta\theta_2^2); \\ k_{2(1,2)} &= -k_{2(1,5)} = -k_{2(2,4)} = k_{2(4,5)} = \frac{EA}{5L^2} (\Delta u_1 - \Delta u_2) (12\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) + \\ &+ \frac{36EI}{L^4} (\Delta u_2 - \Delta u_1) (2\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2); \\ k_{2(1,3)} &= -k_{2(3,4)} = \frac{EA}{15L} (\Delta u_2 - \Delta u_1) (3\Delta\theta_0 - 4\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) + \\ &+ \frac{12EI}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1) (3\Delta\theta_0 - 2\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2); \\ k_{2(1,6)} &= -k_{2(4,6)} = \frac{EA}{15L} (\Delta u_2 - \Delta u_1) (3\Delta\theta_0 + \Delta\theta_1 - 4\Delta\theta_2) + \\ &+ \frac{12EI}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1) (3\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - 2\Delta\theta_2); \\ k_{2(2,2)} &= -k_{2(2,5)} = k_{2(5,5)} = \frac{6EA}{5L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{36EI}{L^5} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\ &+ \frac{EA}{50L} (216\Delta\theta_0^2 - 36\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 36\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 9\Delta\theta_1^2 - 2\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 9\Delta\theta_2^2) + \\ &+ \frac{4EI}{5L^3} (108\Delta\theta_0^2 - 63\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 63\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 11\Delta\theta_1^2 + 11\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 11\Delta\theta_2^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{72E\Psi}{5L^5} (54\Delta\theta_0^2 - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 16\Delta\theta_1^2 + 22\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 16\Delta\theta_2^2); \\
k_{2(2,3)} = -k_{2(3,5)} &= \frac{EA}{10L^2} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{18EI}{L^4} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
& + \frac{EA}{150} (54\Delta\theta_0^2 - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_1 + 6\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 6\Delta\theta_1^2 + 2\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + \Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{2EI}{5L^2} (63\Delta\theta_0^2 - 44\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 22\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 9\Delta\theta_1^2 + 6\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 3\Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{36E\Psi}{5L^4} (54\Delta\theta_0^2 - 64\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 44\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 21\Delta\theta_1^2 + 22\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 11\Delta\theta_2^2); \\
k_{2(2,6)} = -k_{2(5,6)} &= \frac{EA}{10L^2} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{18EI}{L^4} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
& + \frac{EA}{150} (54\Delta\theta_0^2 + 6\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + \Delta\theta_1^2 + 2\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 6\Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{2EI}{5L^2} (63\Delta\theta_0^2 - 22\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 44\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 3\Delta\theta_1^2 + 6\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 9\Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{36E\Psi}{5L^4} (54\Delta\theta_0^2 - 44\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 64\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 11\Delta\theta_1^2 + 22\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 21\Delta\theta_2^2); \\
k_{2(3,3)} &= \frac{2EA}{15L} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{12EI}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
& + \frac{EAL}{150} (27\Delta\theta_0^2 - 12\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 2\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 8\Delta\theta_1^2 - 4\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 3\Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{4EI}{5L} (11\Delta\theta_0^2 - 9\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 4\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_1\Delta\theta_2 + \Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{24E\Psi}{5L^3} (48\Delta\theta_0^2 - 63\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 33\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 22\Delta\theta_1^2 + 19\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 7\Delta\theta_2^2); \\
k_{2(3,6)} &= -\frac{EA}{30L} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{6EI}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 - \\
& - \frac{EAL}{150} (3\Delta\theta_0^2 + 2\Delta\theta_0\Delta\theta_1 + 2\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 2\Delta\theta_1^2 - 6\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 2\Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{2EI}{5L} (11\Delta\theta_0^2 - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + \Delta\theta_1^2 + 4\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + \Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{12E\Psi}{5L^3} (66\Delta\theta_0^2 - 66\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 66\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 19\Delta\theta_1^2 + 28\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 19\Delta\theta_2^2); \text{ e} \\
k_{2(6,6)} &= \frac{2EA}{15L} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{12EI}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{EAL}{150} (27\Delta\theta_0^2 - 2\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 12\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 3\Delta\theta_1^2 - 4\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 8\Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{4EI}{5L} (11\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 9\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + \Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 4\Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{24E\Psi}{5L^3} (48\Delta\theta_0^2 - 33\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 63\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 7\Delta\theta_1^2 + 19\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 22\Delta\theta_2^2),
\end{aligned}$$

onde:

$$\Delta\theta_0 = (\Delta v_2 - \Delta v_1) / L, \text{ e}$$

$$\Psi = \int_A y^4 dA, \text{ que para uma seção retangular assume o valor: } \Psi = \frac{bh^5}{80}.$$

A.2 TORKAMANI *et AL.* (1997)

Torkamani et al. (1997) reescreve a Equação (3.36) na forma: $\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \Delta^t \mathbf{F}_i$, onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema que é expressa sob a forma: $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + 1/2 \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u}) + 1/6 \mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})]$. A seguir serão apresentadas as componentes das matrizes \mathbf{K}_L , \mathbf{K}_τ , $\mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{u})$ e $\mathbf{K}_2 (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})$.

A.2.1 Matriz \mathbf{K}_L

As componentes da matriz de rigidez linear elástica \mathbf{K}_L , para a formulação de Torkamani et al. (1997), é semelhante à apresentada em (A.1) para a formulação de Alves (1993b).

A.2.2 Matriz \mathbf{K}_τ

Levando-se as relações (3.7) e (3.11) em (3.20b), com as aproximações (3.26) e (3.27), e levando-se o resultado em (3.33b), obtém-se as componentes da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_τ . Desta forma, escreve-se:

$$\mathbf{K}_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{\tau(2,2)} & k_{\tau(2,3)} & 0 & k_{\tau(2,5)} & k_{\tau(2,6)} & \\ & k_{\tau(3,3)} & 0 & k_{\tau(3,5)} & k_{\tau(3,6)} & \\ \textit{Simétrica} & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & k_{\tau(5,5)} & k_{\tau(5,6)} & \\ & & & & k_{\tau(6,6)} & \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

onde:

$$k_{\tau(2,2)} = -k_{\tau(2,5)} = k_{\tau(5,5)} = \frac{6P}{5L} ;$$

$$k_{\tau(2,3)} = k_{\tau(2,6)} = -k_{\tau(3,5)} = -k_{\tau(5,6)} = \frac{P}{10} ;$$

$$k_{\tau(3,3)} = k_{\tau(6,6)} = \frac{2PL}{15} ; \text{ e } k_{\tau(3,6)} = -\frac{PL}{30} .$$

A.2.3 Matriz \mathbf{K}_1

Levando-se as relações (3.4) e (3.7) em (3.20d), com as aproximações (3.26) e (3.27), e levando-se o resultado em (3.33c), obtém-se as componentes da matriz de rigidez com não-linearidade de primeira ordem \mathbf{K}_1 . Desta forma, escreve-se

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_{1(1,1)} & k_{1(1,2)} & k_{1(1,3)} & k_{1(1,4)} & k_{1(1,5)} & k_{1(1,6)} \\ & k_{1(2,2)} & k_{1(2,3)} & k_{1(2,4)} & k_{1(2,5)} & k_{1(2,6)} \\ & & k_{1(3,3)} & k_{1(3,4)} & k_{1(3,5)} & k_{1(3,6)} \\ \textit{Simétrica} & & & k_{1(4,4)} & k_{1(4,5)} & k_{1(4,6)} \\ & & & & k_{1(5,5)} & k_{1(5,6)} \\ & & & & & k_{1(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

onde:

$$k_{1(1,1)} = k_{1(4,4)} = k_{1(1,4)} = 0 ;$$

$$k_{1(1,2)} = -k_{1(1,5)} = -k_{1(2,4)} = k_{1(4,5)} = \frac{EA}{10L} (12\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) ;$$

$$k_{1(1,3)} = -k_{1(3,4)} = \frac{EA}{30} (3\Delta\theta_0 - 4\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) ;$$

$$k_{1(1,6)} = -k_{1(4,6)} = \frac{EA}{30} (3\Delta\theta_0 + \Delta\theta_1 - 4\Delta\theta_2) ;$$

$$k_{1(2,2)} = -k_{1(2,5)} = k_{1(5,5)} = \frac{6EA}{5L^2} (\Delta u_2 - \Delta u_1) ;$$

$$k_{1(2,3)} = k_{1(2,6)} = -k_{1(3,5)} = -k_{1(5,6)} = \frac{EA}{10L} (\Delta u_2 - \Delta u_1) ;$$

$$k_{1(3,3)} = k_{1(6,6)} = \frac{2EA}{15} (\Delta u_2 - \Delta u_1) ; \text{ e}$$

$$k_{1(3,6)} = -\frac{EA}{30} (\Delta u_2 - \Delta u_1) ,$$

com $\Delta\theta_0 = (\Delta v_2 - \Delta v_1) / L$.

A.2.4 Matriz \mathbf{K}_2

Levando-se a relação (3.7) em (3.20e) considerando-se as aproximações (3.26) e (3.27), e levando-se o resultado encontrado em (3.33e), obtém-se as componentes da matriz de rigidez com não-linearidade de segunda ordem \mathbf{K}_2 . Desta forma, escreve-se:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{2(1,1)} & k_{2(1,2)} & k_{2(1,3)} & k_{2(1,4)} & k_{2(1,5)} & k_{2(1,6)} \\ & k_{2(2,2)} & k_{2(2,3)} & k_{2(2,4)} & k_{2(2,5)} & k_{2(2,6)} \\ & & k_{2(3,3)} & k_{2(3,4)} & k_{2(3,5)} & k_{2(3,6)} \\ \text{Simétrica} & & & k_{2(4,4)} & k_{2(4,5)} & k_{2(4,6)} \\ & & & & k_{2(5,5)} & k_{2(5,6)} \\ & & & & & k_{2(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

onde:

$$k_{2(1,1)} = k_{2(4,4)} = k_{2(1,4)} = k_{2(1,2)} = k_{2(1,5)} = k_{2(2,4)} = k_{2(4,5)} = 0 ;$$

$$k_{2(1,3)} = k_{2(3,4)} = k_{2(1,6)} = k_{2(4,6)} = 0 ;$$

$$k_{2(2,2)} = -k_{2(2,5)} = k_{2(5,5)} = \frac{EA}{70} \left[\frac{18}{L} (\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2) + 432 \frac{L}{EA} \Delta\theta_0^2 - \frac{108}{L} \Delta\theta_0 (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) \right] ;$$

$$k_{2(2,3)} = -k_{2(3,5)} = \frac{EA}{140} \left[3(\Delta\theta_2^2 - \Delta\theta_1^2 + 2\Delta\theta_1 \Delta\theta_2) + 108\Delta\theta_0^2 - 72\Delta\theta_1 \Delta\theta_0 \right] ;$$

$$k_{2(2,6)} = -k_{2(5,6)} = \frac{EA}{140} \left[3(\Delta\theta_1^2 - \Delta\theta_2^2 + 2\Delta\theta_1 \Delta\theta_2) + 108\Delta\theta_0^2 - 72\Delta\theta_2 \Delta\theta_0 \right] ;$$

$$k_{2(3,3)} = \frac{EAL}{70} \left[12\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2 - 3\Delta\theta_1 \Delta\theta_2 + 18 \Delta\theta_0^2 + 3 \Delta\theta_0 (\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) \right] ;$$

$$k_{2(3,6)} = \frac{EAL}{140} \left[-3(\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2) + 4\Delta\theta_1 \Delta\theta_2 - 6\Delta\theta_0 (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) \right] ; e$$

$$k_{2(6,6)} = \frac{EAL}{70} \left[\Delta\theta_1^2 + 12\Delta\theta_2^2 - 3\Delta\theta_1 \Delta\theta_2 + 18 \Delta\theta_0^2 + 3 \Delta\theta_0 (\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1) \right] ,$$

$$\text{com } \Delta\theta_0 = (\Delta v_2 - \Delta v_1) / L .$$

| APÊNDICE B

MATRIZES DE RIGIDEZ: YANG e KUO (1994)

B.1 YANG e KUO (1994)

Nesta seção serão apresentadas as componentes das matrizes de rigidez \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_τ , que são matrizes independentes dos deslocamentos e, conforme a sugestão de Yang e Kuo (1994), são utilizadas para se calcular a solução predita mesmo para formulação de ordem elevada YHN. Serão também fornecidas as componentes das matrizes de ordem elevada \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 , que devem ser empregadas somente no cálculo do vetor de forças internas pela a formulação de ordem elevada YHN.

B.1.1 Matriz \mathbf{K}_L

As componentes da matriz de rigidez linear elástica \mathbf{K}_L para as formulações de Yang e Kuo. (1994) são semelhantes às apresentadas no Apêndice A, para as formulações de Alves (1993b) e Torkamani *et al.* (1997).

B.1.2 Matrizes \mathbf{K}_τ e $\mathbf{K}_{\tau-s}$

Considerando-se as aproximações (3.26) e (3.27) em (4.23b), levando o resultado em (4.32b), obtém-se as componentes da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_τ das formulações YGN, YGE e YHN. Desta forma, escreve-se:

$$\mathbf{K}_{\tau} = \begin{bmatrix} k_{\tau(1,1)} & k_{\tau(1,2)} & k_{\tau(1,3)} & k_{\tau(1,4)} & k_{\tau(1,5)} & k_{\tau(1,6)} \\ & k_{\tau(2,2)} & k_{\tau(2,3)} & k_{\tau(2,4)} & k_{\tau(2,5)} & k_{\tau(2,6)} \\ & & k_{\tau(3,3)} & k_{\tau(3,4)} & k_{\tau(3,5)} & k_{\tau(3,6)} \\ \textit{Simétrica} & & & k_{\tau(4,4)} & k_{\tau(4,5)} & k_{\tau(4,6)} \\ & & & & k_{\tau(5,5)} & k_{\tau(5,6)} \\ & & & & & k_{\tau(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

onde:

$$k_{\tau(1,1)} = k_{\tau(4,4)} = -k_{\tau(1,4)} = \frac{P}{L};$$

$$k_{\tau(1,2)} = k_{\tau(1,5)} = k_{\tau(2,4)} = k_{\tau(4,5)} = 0;$$

$$k_{\tau(1,3)} = -k_{\tau(3,4)} = -\frac{M_1}{L}; \quad k_{\tau(1,6)} = -k_{\tau(4,6)} = -\frac{M_2}{L};$$

$$k_{\tau(2,2)} = -k_{\tau(2,5)} = k_{\tau(5,5)} = \frac{6P}{5L} + \frac{12P}{L^3} \left(\frac{EI}{EA} \right);$$

$$k_{\tau(2,3)} = k_{\tau(2,6)} = -k_{\tau(3,5)} = -k_{\tau(5,6)} = \frac{P}{10} + \frac{6P}{L^2} \left(\frac{EI}{EA} \right);$$

$$k_{\tau(3,3)} = k_{\tau(6,6)} = \frac{2PL}{15} + \frac{4P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right); \quad e \quad k_{\tau(3,6)} = -\frac{PL}{30} + \frac{2P}{L} \left(\frac{EI}{EA} \right).$$

Da mesma forma, obtém-se a matriz geométrica simplificada $\mathbf{K}_{\tau-s}$, para a formulação linearizada-simplificada (YSN), com a Equação (4.27) no lugar de (4.23b).

Assim, tem-se:

$$\mathbf{K}_{\tau-s} = \begin{bmatrix} k_{\tau-s(1,1)} & k_{\tau-s(1,2)} & k_{\tau-s(1,3)} & k_{\tau-s(1,4)} & k_{\tau-s(1,5)} & k_{\tau-s(1,6)} \\ & k_{\tau-s(2,2)} & k_{\tau-s(2,3)} & k_{\tau-s(2,4)} & k_{\tau-s(2,5)} & k_{\tau-s(2,6)} \\ & & k_{\tau-s(3,3)} & k_{\tau-s(3,4)} & k_{\tau-s(3,5)} & k_{\tau-s(3,6)} \\ \textit{Simétrica} & & & k_{\tau-s(4,4)} & k_{\tau-s(4,5)} & k_{\tau-s(4,6)} \\ & & & & k_{\tau-s(5,5)} & k_{\tau-s(5,6)} \\ & & & & & k_{\tau-s(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

onde:

$$k_{\tau-s(1,1)} = k_{\tau-s(4,4)} = -k_{\tau-s(1,4)} = \frac{P}{L};$$

$$k_{\tau-s(1,2)} = -k_{\tau-s(1,5)} = -k_{\tau-s(2,4)} = k_{\tau-s(4,5)} = \frac{(M_1 + M_2)}{L^2};$$

$$k_{\tau-s(1,3)} = k_{\tau-s(3,4)} = 0; \quad k_{\tau(1,6)} = -k_{\tau(4,6)} = 0;$$

$$k_{\tau-s(2,2)} = -k_{\tau-s(2,5)} = k_{\tau-s(5,5)} = \frac{6P}{5L};$$

$$k_{\tau-s(2,3)} = k_{\tau-s(2,6)} = -k_{\tau-s(3,5)} = -k_{\tau-s(5,6)} = \frac{P}{10};$$

$$k_{\tau-s(3,3)} = k_{\tau-s(6,6)} = \frac{2PL}{15}; \quad e \quad k_{\tau(3,6)} = -\frac{PL}{30}.$$

B.1.3 Matriz K_1

Considerando-se as aproximações (3.26) e (3.27) em (4.30a), obtém-se as componentes da matriz de rigidez com não-linearidade de primeira ordem K_1 . Desta forma, escreve-se

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{1(1,1)} & k_{1(1,2)} & k_{1(1,3)} & k_{1(1,4)} & k_{1(1,5)} & k_{1(1,6)} \\ & k_{1(2,2)} & k_{1(2,3)} & k_{1(2,4)} & k_{1(2,5)} & k_{1(2,6)} \\ & & k_{1(3,3)} & k_{1(3,4)} & k_{1(3,5)} & k_{1(3,6)} \\ \text{Simétrica} & & & k_{1(4,4)} & k_{1(4,5)} & k_{1(4,6)} \\ & & & & k_{1(5,5)} & k_{1(5,6)} \\ & & & & & k_{1(6,6)} \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

onde:

$$k_{1(1,1)} = k_{1(4,4)} = -k_{1(1,4)} = \frac{3EA}{L^2}(\Delta u_2 - \Delta u_1);$$

$$\begin{aligned}
k_{1(1,2)} &= -k_{1(1,5)} = -k_{1(2,4)} = k_{1(4,5)} = \frac{EA}{10L} (12\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) + \\
&+ \frac{18EI}{L^3} \left(\frac{4}{3} \Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2 \right); \\
k_{1(1,3)} &= -k_{1(3,4)} = \frac{EA}{30} (3\Delta\theta_0 - 4\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) + \frac{EI}{L^2} (18\Delta\theta_0 - 16\Delta\theta_1 - 8\Delta\theta_2); \\
k_{1(1,6)} &= -k_{1(4,6)} = \frac{EA}{30} (3\Delta\theta_0 + \Delta\theta_1 - 4\Delta\theta_2) + \frac{EI}{L^2} (18\Delta\theta_0 - 8\Delta\theta_1 - 16\Delta\theta_2); \\
k_{1(2,2)} &= -k_{1(2,5)} = k_{1(5,5)} = \frac{6EA}{5L^2} (\Delta u_2 - \Delta u_1) + \frac{24EI}{L^4} (\Delta u_2 - \Delta u_1); \\
k_{1(2,3)} &= k_{1(2,6)} = -k_{1(3,5)} = -k_{1(5,6)} = \frac{EA}{10L} (\Delta u_2 - \Delta u_1) + \frac{18EI}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1); \\
k_{1(3,3)} &= k_{1(6,6)} = \frac{2EA}{15} (\Delta u_2 - \Delta u_1) + \frac{16EI}{L^2} (\Delta u_2 - \Delta u_1); \text{ e} \\
k_{1(3,6)} &= -\frac{EA}{30} (\Delta u_2 - \Delta u_1) + \frac{8EI}{L^2} (\Delta u_2 - \Delta u_1),
\end{aligned}$$

com: $\Delta\theta_0 = (\Delta v_2 - \Delta v_1) / L$.

B.1.4 Matriz \mathbf{K}_2

Considerando-se as aproximações (3.26) e (3.27), em (4.30b), obtém-se as componentes da matriz de rigidez com não-linearidade de segunda ordem \mathbf{K}_2 . Desta forma, escreve-se

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{2(1,1)} & k_{2(1,2)} & k_{2(1,3)} & k_{2(1,4)} & k_{2(1,5)} & k_{2(1,6)} \\ & k_{2(2,2)} & k_{2(2,3)} & k_{2(2,4)} & k_{2(2,5)} & k_{2(2,6)} \\ & & k_{2(3,3)} & k_{2(3,4)} & k_{2(3,5)} & k_{2(3,6)} \\ \text{Simétrica} & & & k_{2(4,4)} & k_{2(4,5)} & k_{2(4,6)} \\ & & & & k_{2(5,5)} & k_{2(5,6)} \\ & & & & & k_{2(6,6)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

onde:

$$\begin{aligned}
k_{2(1,1)} = k_{2(4,4)} = -k_{2(1,4)} = \frac{3EA}{L^3}(\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
+ \frac{EA}{15L} \left(18\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 2\Delta\theta_1^2 - \Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 2\Delta\theta_2^2 + \frac{3}{2L}\Delta v_2 \right) + \\
+ \frac{EI}{L^3} \left(-18\Delta\theta_0^2 - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 10\Delta\theta_1^2 + 10\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 10\Delta\theta_2^2 + \frac{3}{L}\Delta v_2\Delta\theta_2 \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2(1,2)} = -k_{2(1,5)} = -k_{2(2,4)} = k_{2(4,5)} = \frac{EA}{5L^2}(\Delta u_2 - \Delta u_1)(12\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) + \\
+ \frac{6EI}{L^4}(\Delta u_2 - \Delta u_1)(6\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2(1,3)} = -k_{2(3,4)} = \frac{EA}{15L}(\Delta u_2 - \Delta u_1)(3\Delta\theta_0 - 4\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) + \\
+ \frac{2EI}{L^3}(\Delta u_2 - \Delta u_1)(3\Delta\theta_0 - 10\Delta\theta_1 - 5\Delta\theta_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2(1,6)} = -k_{2(4,6)} = \frac{EA}{15L}(\Delta u_2 - \Delta u_1)(3\Delta\theta_0 + \Delta\theta_1 - 4\Delta\theta_2) + \\
+ \frac{2EI}{L^3}(\Delta u_2 - \Delta u_1)(3\Delta\theta_0 - 5\Delta\theta_1 - 10\Delta\theta_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2(2,2)} = -k_{2(2,5)} = k_{2(5,5)} = \frac{6EA}{5L^3}(\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 - \frac{18EI}{L^5}(\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
+ \frac{EA}{35L} \left(216\Delta\theta_0^2 - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 54\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 9\Delta\theta_1^2 + 9\Delta\theta_2^2 \right) + \\
+ \frac{6EI}{35L^3} \left(108\Delta\theta_0^2 - 45\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 45\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 6\Delta\theta_1^2 + 5\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 6\Delta\theta_2^2 \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2(2,3)} = -k_{2(3,5)} = \frac{EA}{10L^2}(\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{3EI}{L^4}(\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
+ \frac{EA}{140} \left(108\Delta\theta_0^2 - 72\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 3\Delta\theta_1^2 + 6\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 3\Delta\theta_2^2 \right) + \\
+ \frac{EI}{35L^2} \left(135\Delta\theta_0^2 - 72\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 30\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 60\Delta\theta_1^2 + 8\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 4\Delta\theta_2^2 \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2(2,6)} = & -k_{2(5,6)} = \frac{EA}{10L^2} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{3EI}{L^4} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
& + \frac{3EA}{140} (36\Delta\theta_0^2 - 24\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + \Delta\theta_1^2 - \Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{EI}{35L^2} (135\Delta\theta_0^2 - 30\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 72\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 4\Delta\theta_1^2 + 8\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 60\Delta\theta_2^2); \\
k_{2(3,3)} = & \frac{2EA}{15L} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{10EI}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
& + \frac{EAL}{70} (18\Delta\theta_0^2 + 3\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 12\Delta\theta_1^2 - 3\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + \Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{2EI}{35L} (18\Delta\theta_0^2 - 60\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 4\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 64\Delta\theta_1^2 + 16\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + \Delta\theta_2^2); \\
k_{2(3,6)} = & -\frac{EA}{30L} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{5EI}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
& + \frac{EAL}{140} (-6\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 6\Delta\theta_0\Delta\theta_2 - 3\Delta\theta_1^2 + 4\Delta\theta_1\Delta\theta_2 - 3\Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{EI}{35L} (15\Delta\theta_0^2 - 8\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 8\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 16\Delta\theta_1^2 + 4\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 16\Delta\theta_2^2); \text{ e} \\
k_{2(6,6)} = & \frac{2EA}{15L} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \frac{10EI}{L^3} (\Delta u_2 - \Delta u_1)^2 + \\
& + \frac{EAL}{70} (18\Delta\theta_0^2 - 3\Delta\theta_0\Delta\theta_1 + 3\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + \Delta\theta_1^2 - 3\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 12\Delta\theta_2^2) + \\
& + \frac{EI}{35L} (36\Delta\theta_0^2 - 8\Delta\theta_0\Delta\theta_1 - 120\Delta\theta_0\Delta\theta_2 + 2\Delta\theta_1^2 + 32\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 128\Delta\theta_2^2),
\end{aligned}$$

com: $\Delta\theta_0 = (\Delta v_2 - \Delta v_1) / L$.

| APÊNDICE C

CÁLCULO DAS COMPONENTES DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E DOS VETORES DE FORÇAS INTERNAS: PACOSTE e ERIKSSON (1997)

Seguindo a sugestão de Pacoste e Eriksson (1997), neste trabalho foi utilizado o software MAPLE V (v 3.0 RELEASE For Windows) para se calcular as componentes das matrizes de rigidez e dos vetores de forças internas. Este software têm a vantagem de permitir a geração direta dos resultados em códigos da linguagem de programação FORTRAN. Nesta seção serão apresentadas os procedimentos utilizados nesses cálculos.

C.1 FORMULAÇÃO TOTAL-TIMOSHENKO: PTT

As componentes f_i do vetor de forças internas F_i , e as componentes k_{ij} da matriz de rigidez elementar K são determinadas através dos seguintes procedimentos no software MAPLE V:

```
> #####  
> #                               Formulação total: PTT                               #  
> #                               componentes de Fi e K                               #  
> #####  
> #  
> restart; with (linalg); readlib(fortran);  
> ux:=(u2-u1)/l;   vx:=(v2-v1)/l;  
> t:=(t1+t2)/2;    tx:=(t2-t1)/l;
```

```

> #
> e:=(1+ux)*cos(t)+vx*sin(t)-1;
> g:=vx*cos(t)-(1+ux)*sin(t);
> k:=tx;
> #
> Ue:=1/2*I*EA*e^2;
> Ug:=1/2*I*GA*g^2;
> Uk:=1/2*I*EI*k^2;
> U:=Ue+Ug+Uk;
> #
> Fi:=grad(U,[u1,v1,t1,u2,v2,t2]);
> K:=hessian(U,[u1,v1,t1,u2,v2,t2]);
> #
> ##### Gerar em linguagem FORTRAN #####
> fortran(Fi,mode=double);
> fortran(K,mode=double);
> ##### Fim de PTT #####

```

C.2 FORMULAÇÕES TOTAIS: PT1 e PT2

A matriz de rigidez elementar \mathbf{K} e o vetor de forças internas \mathbf{F}_i são obtidos através das equações:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = \mathbf{A}_f^T \mathbf{F}_g \quad \text{e}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K} = \mathbf{A}_f^T \mathbf{K}_g \mathbf{A}_f + fg_1 \mathbf{A}_{f1} + fg_3 \mathbf{A}_{f3}$$

As componentes fg_i do vetor de forças generalizadas \mathbf{F}_g , e as componentes kg_{ij} da matriz de rigidez correspondente \mathbf{K}_g são determinadas, juntamente com as matrizes \mathbf{A}_f , \mathbf{A}_{f1} e \mathbf{A}_{f3} , através dos seguintes procedimentos no software MAPLE V:

```

>#####
>#                      Formulações totais: PT1 e PT2                      #
>#                      componentes de Fg, Kg, Af, Af1 e Af3                  #
> #####
#
> restart; with (linalg); readlib(fortran);
> Dt2:=1-2*x/l;   Dt3:=1-6*x/l+6*x^2/l^2;
> Dtx2:=diff(Dt2,x);   Dtx3:=diff(Dt3,x);
> tetae:=Dt2*f2+Dt3*f3;   tetax:=diff(tetae,x);
> #
> ux:=f4;   vx:=(1+f4)*tan(f1);
> #
> ##### Para PT1 tire o comentário '#' da linha a abaixo #####
> # ep1:=1+ux-cos(f1);   ga:=vx-sin(f1);
> #
> ##### Para PT2 tire os comentários '#' das duas linhas a seguintes #####
> # ep1:=1+ux-cos(f1)*(1-1/6*f2^2-1/10*f3^2);
> # ga:=vx-sin(f1)*(1-1/6*f2^2-1/10*f3^2);
> #
> k:=tetax;
> #
> Ue:=(1/2*int(e*a*ep1^2,x=0..1));
> Ug:=(1/2*int(e*a*ga^2,x=0..1));
> Uk:=expand(1/2*int(e*i*k^2,x=0..1));
> U:=Ue+Ug+Uk;
> #
> Fg:=grad(U,[f1,f2,f3,f4]);
> Kg:=hessian(U,[f1,f2,f3,f4]);

```

```

> #
> ##### Matrices de transformação: Af, Af1 e Af3 #####
> f1:=arctan((v2-v1)/(1+u2-u1));
> f2:=(t2-t1)/2;  f3:=(t1+t2)/2-f1;  f4:=(u2-u1)/l;
> ff:=vector([f1,f2,f3,f4]);
> #
> Afs:=jacobian(ff,[u1,v1,ti,u2,v2,t2]);
> Af:=map(simplify,Afs);
> Af1:=hessian(f1,[u1,v1,ti,u2,v2,t2]);
> Af3:=hessian(f3,[u1,v1,ti,u2,v2,t2]);
> #
> ##### Gerar em linguagem FORTRAN #####
> fortran(Kg,mode=double);
> fortran(Fg,mode=double);
> fortran(Af,mode=double);
> fortran(Af1,mode=double);
> fortran(Af3,mode=double);
> ##### Fim de PT1 e PT2 #####

```

C.3 FORMULAÇÕES CORROTACIONAIS: PC1 e PC2

A matriz de rigidez elementar \mathbf{K} e o vetor de forças internas \mathbf{F}_i são obtidos através das equações:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = \mathbf{A}_c^T \mathbf{F}_n \quad e$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{K}_n \mathbf{A}_c + P \mathbf{A}_{c1} + M_1 \mathbf{A}_{c2} + M_2 \mathbf{A}_{c3}$$

As componentes P , M_1 e M_2 do vetor de forças naturais totais \mathbf{F}_n , e as componentes k_{ij} da matriz de rigidez correspondente \mathbf{K}_n são determinadas, juntamente

com as matrizes A_c , A_{c1} , A_{c2} e A_{c3} , através dos seguintes procedimentos no software MAPLE V:

```
> #####
> #                               Formulações corrotacionais: PC1 e PC2                               #
> #                               componentes de Fn, Kn, Ac, Ac1, Ac2 e Ac3                               #
> #####
> #
> restart; with (linalg); readlib(fortran);
> H3:=1/4*(-1-2*xi+3*xi^2);   H4:=1/4*(-1+2*xi+3*xi^2);
> dH3:=1/1*(-1+3*xi);   dH4:=1/1*(1+3*xi);
> k:=dH3*tn1+dH4*tn2;
> #
> #=====> Para PC1 tire o comentário '#' da linha a abaixo #####
> # ep:=un2/l;
> #
> #=====> Para PC2 tire o comentário '#' da linha a abaixo #####
> # ep:=un2/l+1/(4)*int((H3*tn1+H4*tn2)^2,xi=-1..1);
> #
> Ue:=(1/2)*(1/2)*int(EA*ep^2,xi=-1..1);
> Uk:=simplify((1/2)*(1/2)*int(EI*k^2,xi=-1..1));
> U:=Ue+Uk;
> #
> Fn:=grad(U,[un2,tn1,tn2]);
> Kn:=hessian(U,[un2,tn1,tn2]);
> #
> ##### Matrizes de Transformação: Ac, Ac1, Ac2 e Ac3 #####
> dx:=x2-x1; dy:=y2-y1;
> dxn:=x2-x1+u2-u1; dyn:=y2-y1+v2-v1;
> tr:=arctan(((x2-x1)*(v2-v1)-(y2-y1)*(u2-u1))/(dx*dxn+dy*dyn));
```



```

> tn1:=t1-tr; tn2:=t2-tr;
> un2:=((x2-x1+u2-u1)^2+(y2-y1+v2-v1)^2)^(1/2)-((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^(1/2);
> un:=vector([un2,tn1,tn2]);
> #
> Aes:=jacobian(un,[u1,v1,t1,u2,v2,t2]);
> Ae:=map(simplify,Aes);
> Ae1:=hessian(un2,[u1,v1,t1,u2,v2,t2]);
> Ar:=hessian(-tr,[u1,v1,t1,u2,v2,t2]);
> #
> ##### Gerar em linguagem FORTRAN #####
> fortran(Fn,mode=double);
> fortran(Kn,mode=double);
> fortran(Ae,mode=double);
> fortran(Ae1,mode=double);
> fortran(Ar,mode=double);
> ##### Fim de PC1 e PC2 #####

```
