

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas  
Departamento de Engenharia Civil  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais Impostas por Bases Elásticas**

**Felipe Vieira Maciel**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Ouro Preto, Junho de 2012

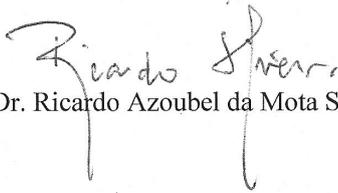
M152e	<p>Maciel, Felipe Vieira. Equilíbrio e estabilidade de elementos estruturais com restrições bilaterais impostas por bases elásticas [manuscrito] / Felipe Vieira Maciel - 2012.</p> <p>viii, 98f.: il. color.; graf.; tabs.</p> <p>Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira. Profª Drª Andréa Regina Dias da Silva.</p> <p>Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil. Área de concentração: Construção Metálica.</p> <p>1. Colunas - Teses. 2. Estabilidade - Teses. 3. Engenharia de estruturas - Problema de contato bilateral - Teses. 4. Fundações (Engenharia) - Fundação elástica - Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.</p> <p>CDU: 624.014.2:624.15</p>
-------	--

Catlogação: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)

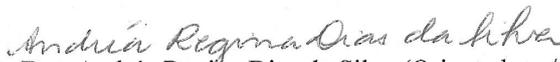
**EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS  
COM RESTRIÇÕES BILATERAIS IMPOSTAS POR BASES ELÁSTICAS**

**AUTOR: FELIPE VIEIRA MACIEL**

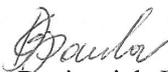
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 29 de junho de 2012, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (Orientador / UFOP)



Prof. Dra. Andréa Regina Dias da Silva (Orientadora / UFOP)



Prof. Dr. Geraldo Donizetti de Paula (UFOP)



Prof. Dr. Alexandre da Silva Galvão (UFF)

# Agradecimentos

Ao Professor Doutor Ricardo Azoubel da Mota Silveira e à Professora Doutora Andréa Regina Dias da Silva pela orientação.

Aos moradores da Alfa 27.

Aos meus pais.

À Fundação Gorceix e Fapemig pelo apoio financeiro através de bolsa de pesquisa e equipamentos.

Resumo da Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais  
Impostas por Bases Elásticas**

**Felipe Vieira Maciel**

Junho/2012

*Orientadores:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Andréa Regina Dias da Silva

Este trabalho estuda o equilíbrio e a estabilidade de elementos estruturais com restrições de contato impostas por bases elásticas, que reagem tanto às solicitações de tração quanto às de compressão. O contato entre os corpos (estrutura-base) é definido assim como bilateral. O estudo é basicamente dividido em três partes. Na primeira parte propõe-se uma metodologia numérica geral para solução do problema geometricamente não linear em questão, aonde se chega — no contexto do método dos elementos finitos (MEF) — às equações de equilíbrio do sistema estrutural (estrutura-base) na forma matricial; mostra-se também como esse sistema de equações algébricas não lineares pode ser resolvido através de uma estratégia incremental que acopla iterações de Newton-Raphson às técnicas de continuidade. Na segunda parte desta pesquisa essa metodologia geral é particularizada para barras com restrições bilaterais de contato impostas por fundações elásticas, que são representadas aqui através de modelos discretos e contínuos; atenção especial é dada então à teoria não linear do elemento de viga-coluna empregado na modelagem da estrutura bem como aos fundamentos teóricos dos modelos discretos (molas elásticas) e contínuos (tipos Winkler e Pasternak) usados na representação do solo ou meio elástico. Com a implementação computacional desses modelos de base no CS-ASA (Silva, 2009), foi criado um novo módulo denominado CS-ASA/BC (*Bilateral Contact*). A terceira e última parte destina-se à análise linear e não linear de vários problemas práticos da engenharia estrutural e geotécnica envolvendo vigas e colunas em contato com fundações elásticas. Ficam evidenciadas nessas análises numéricas, por exemplo, a possibilidade de se adotar um modelo de base misto (discreto-contínuo), através do CS-ASA/BC, para se chegar numa representação mais realística do solo; a grande influência da representação da imperfeição (modos de instabilidade) na avaliação da carga crítica de colunas em contato com uma base do tipo Winkler; e a avaliação do ganho de rigidez do sistema ao se considerar o segundo parâmetro da base elástica, isto é, ao se adotar o modelo de Pasternak na representação do solo.

Abstract of Dissertation presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

**Equilibrium and Stability of Structural Elements with Bilateral Contact Constraints  
Imposed by Elastic Foundations**

**Felipe Vieira Maciel**

June/2012

*Advisors:* Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Andréa Regina Dias da Silva

This dissertation presents a study of equilibrium and stability of structural elements under bilateral contact constraints imposed by elastic foundations. This study was basically divided into three parts. The first one proposes a general geometrically nonlinear numerical methodology, within the Finite Element Method (FEM) context, for solving the proposed problem. This approach leads to the nonlinear equations for the structural equilibrium system (structure-base) in matrix form, which are solved here by an incremental strategy with Newton-Raphson iterations coupled to the path-following techniques. The second part adapted this general methodology for bars with bilateral contact constraints imposed by elastic foundations. Special attention is given to the beam-column element nonlinear theory and to the approximate models adopted to the elastic foundations. Theoretical fundamentals of discrete modeling (elastic springs) and continuous modeling (Winkler and Pasternak-type foundations), used here in the representation of soils or elastic mediums, are presented. With the computational implementation of these foundation models in CS-ASA (Silva, 2009), a new module inside this computational tool was created and denominated CS-ASA/BC (*Bilateral Contact*). Finally, in the third part are the linear and nonlinear analyses for various structural-geotechnical engineering practical problems that involve beams and columns in contact with elastic foundations. Through these numerical analyses, it became evident that there is a possibility of adopting an approximate foundation model with a mixed approach (discrete-continuous) using the CS-ASA/BC program to arrive at a more realistic representation of the soil; also, that there is a great influence in the representation of the imperfections (instability modes) in the evaluation of the critical load on column under contact constraint imposed by Winkler-type foundation. In addition, the structural system stiffness increase is evaluated when considering the second parameter of the elastic foundation model; that is, when the Pasternak-type foundation is adopted to represent the soil.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>1. Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais, Objetivos e Organização .....	1
1.2 O CS-ASA e o Módulo CS-ASA/BC .....	3
1.3 Referências Relacionadas .....	7
<b>2. Formulação Geral do Problema de Contato Bilateral</b>	<b>10</b>
2.1 Introdução.....	10
2.2 Formulação do Problema de Contato Bilateral.....	10
2.3 Metodologia de Solução Numérica.....	15
2.3.1 Discretização do Sistema Estrutural .....	16
2.3.2 Estratégias de Solução: Análise Linear e Análise Não Linear .....	20
2.4 Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração .....	26
2.4.1 Comprimento de Arco .....	27
2.4.2 Deslocamento Generalizado.....	28
2.4.3 Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais.....	29
<b>3. Modelagem da Estrutura e da Base Elástica via MEF</b>	<b>31</b>
3.1 Introdução.....	31
3.2 Modelagem da Estrutura .....	32
3.3 Modelagem da Base Elástica .....	40
3.3.1 Modelo de Molas Discretas.....	41
3.3.2 Modelo de Winkler .....	42
3.3.3 Modelos de Pasternak e Filonenko-Borodich .....	45
<b>4. Exemplos Numéricos</b>	<b>49</b>
4.1 Introdução.....	49
4.2 Análises Lineares .....	50

4.2.1	Viga Biapoiada em Contato Bilateral com uma Base Elástica .....	51
4.2.2	Estaca-Coluna Parcialmente Enterrada.....	57
4.2.3	Sistema Estrutural: Viga-Base Elástica Tipo Pasternak .....	62
4.3	Análises Não Lineares.....	67
4.3.1	Colunas com Apoio Elástico Discreto Intermediário .....	68
4.3.2	Colunas Biapoiadas em Contato Bilateral com Bases do Tipo Winkler	72
4.3.3	Vigas com Grandes Deflexões Laterais em Contato com Fundação do Tipo Pasternak.....	78
4.3.4	Estabilidade de Colunas em Contato Bilateral com Bases do Tipo Pasternak .....	80
<b>5.</b>	<b>Conclusões e Sugestões</b>	<b>86</b>
5.1	Conclusões.....	86
5.2	Sugestões para Futuras Pesquisas .....	87
<b>6.</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Entrada de Dados</b>	<b>95</b>
A.1	Introdução.....	95
A.2	Modificação no Arquivo de Dados .....	95

# Lista de Figuras

1.1	O programa CS-ASA: análises e efeitos considerados .....	5
1.2	Arquivos de entrada e saída de dados do CS-ASA. ....	5
1.3	Exemplo de parte de arquivo de entrada FILEIN1.D <i>que contém o macro comando CONT</i> (ver anexo A). ....	6
2.1	Problema de contato bilateral, modelo numérico adotado e configurações de equilíbrio. ....	11
2.2	Diferentes situações definindo a região de contato $S_c$ . ....	14
2.3	Estratégias de solução linear e não linear adotadas neste trabalho. ....	21
3.1	Elemento de viga-coluna adotado para discretizar a estrutura. ....	33
3.2	Comportamento da seção transversal do elemento finito (Silveira, 1995). ....	34
3.3	Força axial e momentos fletores na configuração de equilíbrio t. ....	35
3.4	Deslocamentos naturais $\delta$ , $\phi_i$ e $\phi_j$ do elemento finito considerado. ....	40
3.5	Base elástica modelada por molas discretas. ....	41
3.6	Viga sobre uma base elástica representada pelo modelo de Winkler. ....	43
3.7	Estruturas sobre base elástica com dois parâmetros. ....	46
4.1	Problemas de contato bilateral: soluções lineares. ....	51
4.2	Viga biapoiada em contato bilateral com uma fundação elástica. ....	52
4.3	Deflexão lateral da viga em contato bilateral com uma base elástica. ....	56
4.4	Estaca parcialmente enterrada. ....	58
4.5	Configurações deformadas da estaca parcialmente enterrada considerando várias modelagens para o solo. ....	60
4.6	Viga com extremidades livres em contato com uma argila arenosa. ....	63
4.7	Análise de uma viga submetida a um momento fletor no meio do vão em contato com argila arenosa. ....	64
4.8	Resposta momento aplicado versus rotação da viga em $X = L/2$ . ....	65
4.9	Variação da deflexão e da rotação da viga com o parâmetro de rigidez $k_G$	

(ou $\beta_2$ ) da base. ....	66
4.10 Colunas com diferentes condições de bordo e apoio elástico discreto intermediário .....	68
4.11 Cargas críticas de colunas biapoiadas com apoio elástico discreto intermediário.	70
4.12 Cargas críticas de colunas engastada-livre com apoio elástico discreto intermediário .....	71
4.13 Cargas críticas de colunas engastada-bi apoiada com apoio elástico discreto intermediário. ....	71
4.14 Cargas críticas de colunas biengastadas com apoio elástico discreto intermediário .....	72
4.15 Coluna biapoiada em contato bilateral com base elástica do tipo Winkler. ....	73
4.16 Trajetórias de equilíbrio da coluna biapoiada com restrições bilaterais de contato .....	74
4.17 Trajetórias de equilíbrio do sistema estrutural para $\beta = 16$ e $\beta = 48$ , e diferentes valores de n. ....	76
4.18 Cargas críticas para coluna biapoiada obtidas de forma analítica (equação (4.1)) e numericamente (CS-ASA/BC). ....	77
4.19 Vigas com diferentes condições de contorno e carregamento em contato bilateral com uma base elástica do tipo Pasternak. ....	79
4.20 Caminhos de equilíbrio da viga biapoiada sob carga uniformemente distribuída em contato bilateral com bases elásticas dos tipos Winkler e Pasternak. ....	79
4.21 Caminhos de equilíbrio da viga biengastada sob carga concentrada em contato bilateral com bases elásticas dos tipos Winkler e Pasternak. ....	80
4.22 Colunas com diferentes condições de apoios em contato bilateral com uma base elástica do tipo Pasternak. ....	81
4.23 Coluna engastada-livre: trajetórias de equilíbrio para diferentes combinações de $\beta_1$ e $\beta_2$ . ....	84
4.24 Coluna biapoiada: trajetórias de equilíbrio para diferentes combinações de $\beta_1$ e $\beta_2$ .....	84
4.25 Coluna biengastada: trajetórias de equilíbrio para diferentes combinações de $\beta_1$ e $\beta_2$ . ....	85
A.1 Membro estrutural em contato com diferentes tipos de bases elásticas ....	96
A.2 Parte do arquivo de entrada mostrando a modelagem das bases elásticas ....	98

# Lista de Tabelas

2.1	Metodologia de solução numérica não linear .....	25
4.1	Solução analítica para diferentes valores de $\beta = kL^4/EI$ : V e M em $X = L/5$ ; $\Theta$ em $X = 0$ . .....	53
4.2	Modelo Contínuo de Winkler: solução numérica para diferentes malhas e valores de $\beta = kL^4/EI$ (V e M em $X = L/5$ ; $\Theta$ em $X = 0$ ). .....	54
4.3	Modelo Discreto: solução numérica para diferentes malhas e valores de $\beta = kL^4/EI$ (V e M em $X = L/5$ ; $\Theta$ em $X = 0$ ). .....	55
4.4	Deslocamentos U e V para pontos nodais da malha de EF adotada. ....	59
4.5	Deslocamentos horizontal e vertical nos pontos A (topo) e B (base) da estaca para diferentes malhas de EF. ....	62
4.6	Resultado do estudo de convergência. ....	74
4.7	Resultados do estudo da influência da rigidez da base no modo crítico .....	75
4.8	Coluna engastada-livre: carga crítica $\Omega_{cr}$ ( $P_{cr}L^2/EI$ ) para diferentes combinações de $\beta_1$ e $\beta_2$ . ....	83
4.9	Coluna biapoiada: carga crítica $\Omega_{cr}$ ( $P_{cr}L^2/EI$ ) para diferentes combinações de $\beta_1$ e $\beta_2$ . ....	83
4.10	Coluna biengastada: carga crítica $\Omega_{cr}$ ( $P_{cr}L^2/EI$ ) para diferentes combinações de $\beta_1$ e $\beta_2$ . ....	83

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais, Objetivos e Organização

Na engenharia estrutural e geotécnica é bastante comum se encontrar vigas e colunas em contato (ou mesmo apoiados) com um meio elástico ou com restrições de deslocamentos pontuais. Dentre os problemas de engenharia onde é possível encontrar essa interação estrutura-meio, destacam-se: trilhos apoiados em dormentes numa ferrovia, tubulações enterradas, estacas-coluna de fundação, contravento lateral de colunas em edificações, e o problema de contato entre as chapas (alma e mesa) que compõem um perfil metálico.

Por motivos econômicos ou técnicos, as estruturas tendem a se tornar cada vez mais leves e esbeltas, e dessa forma, mais susceptíveis a sofrer grandes deslocamentos e problemas de instabilidade. Sabe-se que quanto mais esbelto o elemento estrutural, viga ou coluna, maiores são os efeitos não lineares geométricos. Segundo Silveira (1995), esses efeitos dão origem a fenômenos relacionados à existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos de fronteira ou críticos (pontos limites e pontos de bifurcação) ao longo do caminho não linear de equilíbrio. Para ser incluída na análise, entretanto, a não linearidade geométrica deve estar presente tanto na teoria da formulação das equações de equilíbrio (definidas através da configuração deformada do corpo), quanto nas relações deformação-deslocamento.

Em problemas estruturais não lineares com restrições bilaterais de contato, onde a base elástica reage tanto às solicitações de tração quanto às solicitações de compressão, como os de interesse desta dissertação, o caminho não linear de equilíbrio do sistema pode ser fortemente influenciado pelas propriedades e características do meio elástico que impõe essas restrições

de deslocamentos. Em outras palavras, a solução do problema pode depender do modelo matemático utilizado para representar o meio elástico ou fundação. Intuitivamente, para se analisar o comportamento de um meio elástico (ou fundação), espera-se que, com a escolha de um modelo mais rigoroso do ponto de vista mecânico, se encontre melhores resultados. Mas, as dificuldades em se determinar os parâmetros elásticos ou mesmo plásticos envolvidos em tais modelos podem resultar em divergências nos resultados a serem alcançados. Adicionalmente, como em muitas situações práticas o interesse na resposta da fundação elástica limita-se à obtenção das forças na região de contato, e não no estado de tensões ou campo de deslocamentos que se desenvolvem no seu interior, é possível o emprego de modelos matemáticos relativamente simples para descrever com razoável precisão o comportamento da base na região de contato (Silveira, 1995; Silva, 1998). Dessa forma, utiliza-se nesta dissertação modelos matemáticos discretos e contínuos relativamente simples, que podem ser definidos com um ou dois parâmetros elástico, mas que podem descrever de forma razoável o comportamento da fundação ou base elástica.

Este trabalho tem como principal objetivo, portanto, a elaboração de um estudo sobre o equilíbrio e a estabilidade de elementos estruturais com restrições bilaterais de contato impostas por fundações ou bases elásticas. Esse estudo será dividido aqui em três grandes partes, que são organizadas em capítulos.

Na primeira parte (Capítulo 2) propõe-se uma metodologia numérica geral do problema de contato em questão, a partir da qual se chega, no contexto do método dos elementos finitos (MEF), às equações de equilíbrio do sistema estrutural (estrutura-base) na forma matricial. Os efeitos não lineares geométricos são considerados. Mostra-se também como esse sistema de equações algébricas não lineares pode ser resolvido através de uma estratégia incremental que acopla iterações de Newton-Raphson às técnicas de continuidade (Riks, 1972 e 1979; Wempner, 1971; Crisfield, 1991; Silva, 2009).

No Capítulo 3, segunda parte da pesquisa, particulariza-se a metodologia geral, desenvolvida no Capítulo 2, para barras com restrições bilaterais de contato impostas por fundações elásticas, que podem ser representadas aqui, como já mencionado, através de modelos discreto e contínuo. Atenção especial é dada à teoria não linear do elemento de viga-coluna empregado na modelagem da estrutura (Alves, 1995; Yang e Kuo, 1994; Galvão, 2000; Silva, 2009), bem como aos fundamentos teóricos dos modelos discreto — representado por molas elásticas (Silveira, 1995; Silva, 1998) — e contínuo — descrito pelos modelos de Winkler, Pasternak e Filonenko-Borodich (Kerr, 1964; Silveira, 1995; Silva, 1998; Dutta e Roy, 2002; Pereira, 2003; Wang *et al.*, 2005) — usados na representação

do solo ou meio elástico. Com as alterações na estrutura de dados e implementações computacionais desses modelos de fundação no programa para análise estrutural CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; Silva, 2009), foi criado um novo módulo nessa ferramenta numérica denominado CS-ASA/BC (*Bilateral Contact*). A próxima seção e o Anexo A trazem maiores detalhes dessa intervenção no CS-ASA.

O Capítulo 4, que corresponde à terceira grande parte desta dissertação, destina-se à análise linear e não linear de vários problemas práticos da engenharia estrutural-geotécnica envolvendo vigas e colunas em contato com fundações elásticas. Ficam evidenciadas nessas análises numéricas, por exemplo, a possibilidade de se adotar um modelo de base misto (discreto-contínuo), através do CS-ASA/BC, para se chegar numa representação mais realística do solo; a grande influência da representação da imperfeição (modos de instabilidade) na avaliação da carga crítica de colunas em contato com uma base do tipo Winkler; e a avaliação do ganho de rigidez do sistema, isto é, ao se adotar o modelo de Pasternak na representação do solo.

No Capítulo 5 estão as conclusões desta dissertação bem como algumas sugestões para futuros desenvolvimentos.

Por fim, vale destacar os seguintes pontos relevantes sobre esta dissertação:

i. faz parte de um amplo projeto de pesquisa intitulado “*Análise não linear estática e dinâmica de sistemas estruturais metálicos*” (Silveira, 2011);

ii. o tema desenvolvido é uma continuação direta das pesquisas inicialmente realizadas por Silveira (1995), Silva (1998), Pereira (2003), Silveira *et al.* (2008a,b), Silva (2009), e mais recentemente por Silveira *et al.* (2012); nesses trabalhos, entretanto, atenção especial foi dada à modelagem do problema de contato unilateral entre os corpos e aqui o estudo é direcionado apenas para os *Problemas de Contato Bilateral*; e

iii. se insere na linha de pesquisa de *Mecânica Computacional* do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC)/Deciv/EM da UFOP.

## **1.2 O CS-ASA e o Módulo CS-ASA/BC**

Como já mencionado, esta dissertação utilizou como base computacional para realização de suas implementações o programa CS-ASA (Silva, 2009), que foi escrito em linguagem *Fortran 95* (Chapman, 2003). Com essa linguagem e uma programação estruturada em módulos, Silva (2009) idealizou um sistema fácil de ser alterado com a inclusão de novos módulos e funcionalidades sem, contudo, modificar a estrutura ou organização do programa

original. Desde então, isso vem favorecendo a melhoria da produtividade da programação, e facilitando a expansão do CS-ASA, como aconteceu recentemente, em Maximiano (2012), que propôs que uma condição de perpendicularidade — técnica do fluxo normal — fosse satisfeita ao longo do processo iterativo de solução não linear para superar certas inconsistências da estratégia do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995) nas proximidades dos pontos limites de carga ou deslocamento existentes.

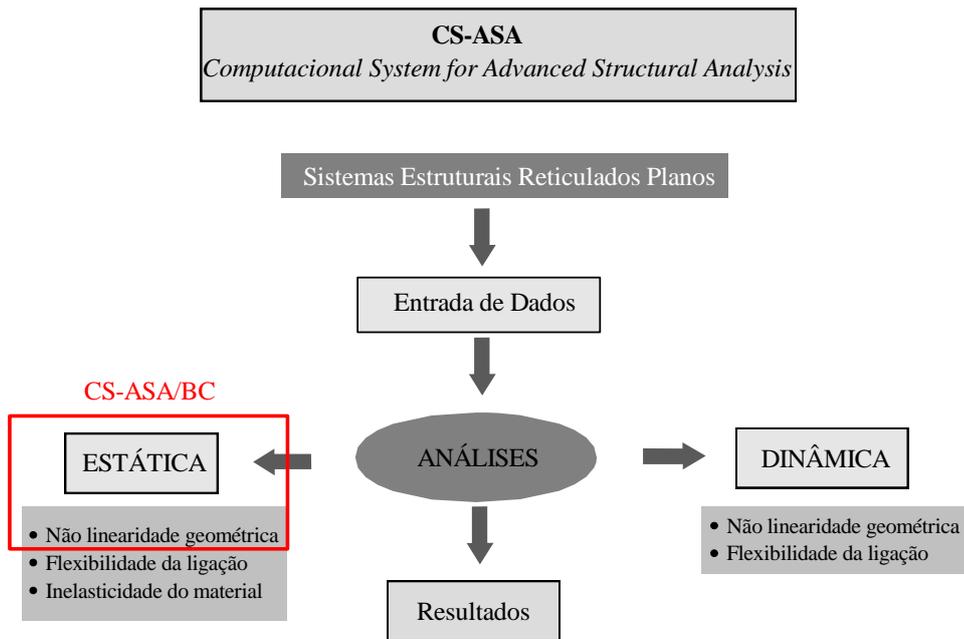
O CS-ASA segue o formato convencional de um programa de elementos finitos (EF) e é capaz de realizar análises estáticas e dinâmicas de estruturas metálicas, como ilustrado na Figura 1.1. Essas análises podem ser lineares e não lineares. Em busca de uma modelagem estrutural mais realista, tal ferramenta possui formulações de elementos finitos reticulados planos que consideram os efeitos da não linearidade geométrica (Alves, 1995; Yang e Kuo, 1994; Galvão, 2000), a semirrigidez da ligação (Chan e Chui, 2000), e os efeitos inelásticos na seção dos membros estruturais (Liew, 1992; Chan e Chui, 2000). Os efeitos não lineares que podem ser simulados nas análises estática e dinâmica estão indicados também na Figura 1.1.

É importante ressaltar que as principais intervenções desta dissertação aconteceram apenas na parte do CS-ASA que realiza a análise estática de estruturas considerando o efeito da não linearidade geométrica, como destacado na mesma Figura 1.1. Com essas intervenções computacionais, que são relacionadas com a inclusão dos modelos de bases elásticas no sistema — ou, mais precisamente, as matrizes de rigidez e vetores de forças internas de um elemento finito genérico usado para esses modelos de fundação (ver Capítulo 3) — e com as alterações que foram necessárias na estrutura de leitura e impressão de dados, chegou-se a um novo módulo do programa denominado aqui de CS-ASA/BC.

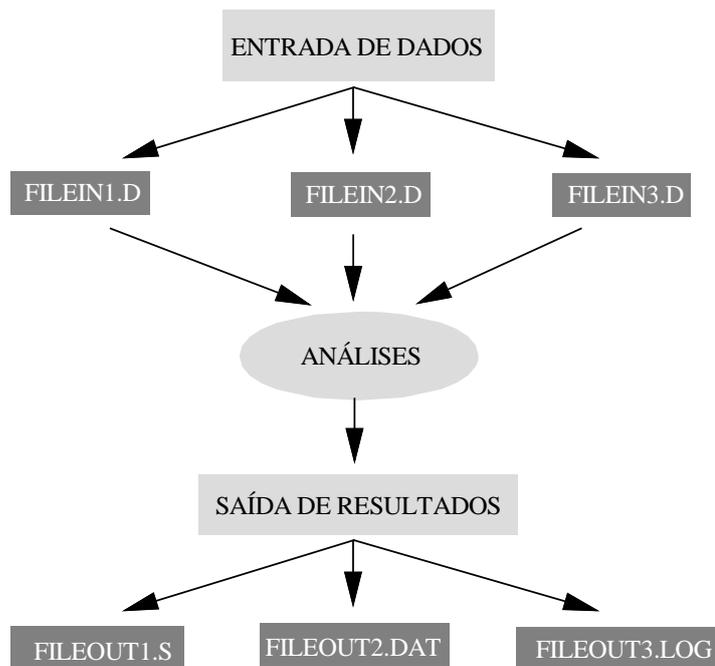
O processo de simulação numérica com o CS-ASA/BC segue basicamente as três etapas de qualquer programa de EF, isto é: pré-processamento, análise e pós-processamento. Essas etapas normalmente são tratadas de formas independentes. O pré-processamento (entrada de dados), etapa na qual o usuário faz a modelagem do problema a ser analisado (topologia e solvers), é dividida em três arquivos com formato texto, como ilustrado na Figura 1.2. O arquivo FILEIN3.D, que trata da análise dinâmica, não será detalhado aqui.

No primeiro arquivo, FILEIN1.D, o usuário deve definir o tipo de análise, se linear ou não linear. É necessário informar também as características geométricas e físicas do modelo estrutural, a discretização em elementos finitos, as condições de contorno e o carregamento atuante. Esse arquivo de entrada, que é organizado em macro comandos, foi modificado de forma que fosse possível, no caso mais geral, a modelagem de diversos modelos de bases

elásticas numa na mesma análise (linear ou não linear). Foi introduzido então *o macro comando CONT* e uma linha com dados referentes ao número e tipo de modelos de base foi acrescentada na parte inicial do arquivo, como ilustrado na Figura 1.3. Uma descrição das alterações estabelecidas no arquivo FILEIN1.D para incluir a modelagem das bases elásticas é feita no Anexo A.



**Figura 1.1** O Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados



**Figura 1.2** Arquivos de entrada e saída de dados do CS-ASA.

```

Problema de contato 1 ...title
estatica ...tipo analise (estatica ou dinamica)
POR ...estrutura(POR, TRE)
0 ...ntype = tipo de solucao (linear ou não linear)
1 1 ...n° regioes (discreto, contínuo)
0 ...ligacao semirrigida
11 10 2 2 3 1 1 1 2 ...npoin,nelem,nnode,ndime,ndofn,nmats,npmat,nsecs,npsec
coor ...MACRO-COMANDO
ppor ...MACRO-COMANDO
11
1 1 0.000 0.000 ...no,ng,x,y
11 1 5.000 0.000
CONT ...MACRO-COMANDO
1 ...tipo de formulacao de contato
3081 0. 12449. ...k1, k2, k3
1 ...ngnos
1 3 ...noini,nofin
2 ...tipo de formulacao de contato
100 5000. ...k1, k2
1 ...ngelm
6 10 ...elini,elfin
...

```

**Figura 1.3** Exemplo de parte de arquivo de entrada FILEIN1.D que contém o macro comando *CONT* (ver Anexo A).

No segundo arquivo, FILEIN2.D, o usuário escolhe uma das formulações não lineares presentes no CS-ASA, e define os parâmetros que gerenciam a estratégia incremental-iterativa baseada no método de Newton-Raphson (padrão ou modificado). Dentre esses parâmetros, podem ser citados: o número de passos de carga; o máximo de iterações desejadas; o incremento inicial do parâmetro de carga; as estratégias do parâmetro de carga e de iteração; e a tolerância para a convergência (Silva, 2009; Maximiano, 2012).

A entrada de dados por meio dos arquivos FILEIN1.D e FILEIN2.D foi feita manualmente usando um programa de editor de texto. Destaca-se que um pré-processador gráfico e interativo, CS-ASA *Preprocessor* (Prado, 2012), foi desenvolvido recentemente para o CS-ASA, mas não contempla ainda a possibilidade de inclusão de bases elásticas no modelo estrutural para análise do problema de contato.

Os arquivos com extensão .S, .DAT e .LOG são gerados pelo programa e auxiliam o usuário na etapa de pós-processamento, que é a etapa da verificação dos resultados obtidos. O arquivo FILEOUT1.S fornece uma listagem completa das informações da análise, ou seja, nele estão os dados de entrada do problema e os dados de saída, como deslocamentos, forças internas nodais e coordenadas atualizadas em cada passo incremental. Esse arquivo foi alterado nessa dissertação para conter informações relacionadas com os modelos de bases elásticas. Já o arquivo FILEOUT2.DAT é usado para a construção de gráficos do tipo carga-

deslocamento. No arquivo FILEOUT3.LOG estão impressos os resultados da análise dinâmica linear e não linear.

### 1.3 Referências Relacionadas

Esta seção traz algumas referências relacionadas direta e indiretamente com esta dissertação. Inicialmente, destacam-se uma tese de doutorado (Silveira, 1995) e duas dissertações de mestrado (Silva, 1998; Pereira, 2003), e na sequência, quatro publicações em periódicos internacionais (Silva *et al.*, 2001; Silveira *et al.* 2008a, 2008b e 2012) que estão relacionadas diretamente com esta pesquisa. Todos esses trabalhos citados tiveram a participação do orientador desta dissertação.

Silveira (1995), em sua tese de doutorado, desenvolveu uma metodologia de solução numérica não linear para resolver problemas de instabilidade de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato; em Silva (1998) e Silva *et al.* (2001) estão os fundamentos da solução numérica, via MEF, para problemas de equilíbrio de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato, mas considerando pequenos deslocamentos e deformações e material elástico linear; já em Pereira (2003) e Silveira *et al.* (2008a,b) podem ser encontradas duas formulações capazes de resolver o problema de contato unilateral entre uma estrutura esbelta e uma fundação elástica, ou seja: na primeira formulação, que é mais geral, o MEF foi usado tanto para discretizar a estrutura quanto a base, e técnicas de programação matemática são adotadas na solução do problema de otimização (Pereira, 2003; Silveira *et al.*, 2008b); na segunda formulação foi usado o método de Ritz para a redução espacial e o método de Newton-Raphson para a solução das equações não-lineares (Silveira *et al.*, 2008a). Mais recentemente, Silveira *et al.* (2012) desenvolveram um estudo envolvendo arcos e anéis com restrições unilaterais de contato; nesse mesmo artigo pode ser encontrada uma ampla pesquisa bibliográfica sobre análises estáticas e dinâmicas de problemas envolvendo barras, placas, anéis e cascas cilíndricas com restrições de contato.

No que se referem aos trabalhos cuja proposta principal é os modelos de bases elásticas, merecem destaque: Hetenyi (1946); Kerr (1964); Dutta e Roy (2002); e Wang *et al.* (2005). A primeira referência traz a solução analítica para vários problemas de vigas em contato com uma base do tipo Winkler e foi bastante usada nesta dissertação na validação das implementações computacionais; em Kerr (1964), são definidas as equações que regem o comportamento de vários modelos de fundação (Winkler, Pasternak, Reissner, Filonenko-Borodich, entre outros); Dutta e Roy (2002) e Wang *et al.* (2005) trazem o estado da arte

sobre as soluções analíticas e numéricas de problemas de contato envolvendo estruturas e fundações elásticas.

Além do livro do Hetenyi (1946) e de alguns trabalhos já citados (Pereira, 2003; por exemplo), outras publicações foram usadas nesta dissertação na validação de suas implementações computacionais e análises (ver Capítulo 4). Merecem destaque: Brush e Almroth (1975); Aljanabi *et al.* (1990); Shirima e Giger (1992); Naidu e Rao (1995); Badie e Salmon (1996); Horibe e Asano (2001); Kien (2004); Simitzes e Hodges (2006); Sapountzakis e Kampitsis (2010); Mullapudi e Ayoub (2010); e Shen (2011).

Os livros do Brush e Almroth (1975), e Simitzes e Hodges (2006), que são referências clássicas sobre o tema estabilidade estrutural, trazem a solução analítica do problema de colunas em contato com uma base do tipo Winkler e fornecem a expressão da carga crítica da barra biapoiada como uma função do número de semi-ondas e do parâmetro adimensional da fundação. Esse parâmetro, definido como  $\beta = kL^4/(\pi^4EI)$ , expressa a relação entre a rigidez da fundação e a rigidez à flexão da coluna. Ainda na linha dos problemas de estabilidade, uma solução numérica para colunas com contraventamento lateral rígido foi apresentada por Galvão *et al.* (2002), que apresentaram a influência das diversas condições de contorno sobre a carga crítica da barra. Recentemente, um método para se calcular cargas críticas e os modos de flambagem para colunas com apoio unilateral intermediário foi apresentado por Tzaros e Mistakidis (2011).

O problema de uma estaca parcialmente enterrada em um meio elástico (ou solo) é encontrado como um “estudo de caso” em Aljanabi *et al.* (1990), que desenvolveram um elemento finito de contato para a base que inclui além da de rigidez transversal do solo (ou normal),  $k_n$ , a sua rigidez cisalhante,  $k_s$ , (atrito estrutura-solo); posteriormente, Badie e Salmon (1996) resolveram o mesmo problema, mas utilizando elemento de contato de ordem quadrática para a base incluindo os dois parâmetros  $k_n$  e  $k_s$  anteriores, e mais a interação entre as molas, e assim se aproximando do modelo de Pasternak.

A importância de se considerar o segundo parâmetro da base na modelagem do solo — mais especificamente, as implicações de se adotar o modelo do tipo de Pasternak para representar a fundação —, foi explorada por Shirima e Giger (1992) e mais recentemente por Mullapudi e Ayoub (2010), que analisaram uma viga de tamanho finito em contato com uma argila arenosa. Shirima e Giger (1992) resolveram esse problema através do MEF, mas usando na discretização o elemento de viga de Timoshenko que incorpora os dois parâmetros de rigidez da base; Mullapudi e Ayoub (2010) apresentaram uma formulação mista

(aproximações independentes de forças e deslocamentos) para um elemento finito inelástico que pode ser adotado na modelagem de problemas de vigas em contato ou “repousando” sobre fundações elásticas do tipo Pasternak.

O estudo da estabilidade elástica de colunas com restrições impostas por bases elásticas do tipo Pasternak é encontrado nos trabalhos de Naidu e Rao (1995), Kien (2004) e Shen (2011). Já a análise do comportamento de uma viga com grandes deslocamentos em contato com uma base do tipo Pasternak (ou Filonenko-Borodich) foi feita por Horibe e Asano (2001) através do método dos elementos de contorno (MEC).

Por fim, vale destacar alguns trabalhos relacionados com esta dissertação, mas não usados diretamente na validação dos resultados obtidos usando o módulo CS-ASA/BC, ou seja: Chai (1998); Morfidis *et al.* (2002); e Matos Filho *et al.* (2005). O primeiro realizou um estudo experimental e analítico até a deformação pós-crítica de colunas em contato bilateral com uma base elástica; Morfidis *et al.* (2002) apresentaram a solução via MEF (teoria de viga de Timoshenko) para problemas de contato modelados com bases elástica de dois parâmetros (foram considerados os efeitos da deformação cisalhante e das ligações semirrígidas); por fim, Matos Filho *et al.* (2005) apresentaram um modelo numérico via combinação MEF-MEC para análise da interação estaca-solo, com as barras sujeitas a carregamentos horizontais e verticais (as estacas foram modeladas usando o MEF e o solo através do MEC).

# Capítulo 2

## Formulação Geral do Problema de Contato Bilateral

### 2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar uma metodologia geral de solução de problemas estruturais (ou sistemas de suporte) envolvendo contato bilateral entre corpos deformáveis, e considerando grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações. Ressalta-se que um dos corpos será sempre uma base elástica e que o método dos elementos finitos (MEF) será a técnica numérica de discretização adotada neste trabalho.

Na Seção 2.2 são apresentadas as equações básicas que regem o problema de contato bilateral em estudo. É apresentado também o indicador variacional usado na solução numérica desse problema.

A discretização do sistema estrutural é fornecida na Seção 2.3. Na sequência, são abordados os procedimentos computacionais presentes no CS-ASA (Silva, 2009) para a solução linear e não linear do sistema de equações algébricas que rege o problema de contato em questão. No caso da análise não linear, apenas os efeitos geométricos são considerados.

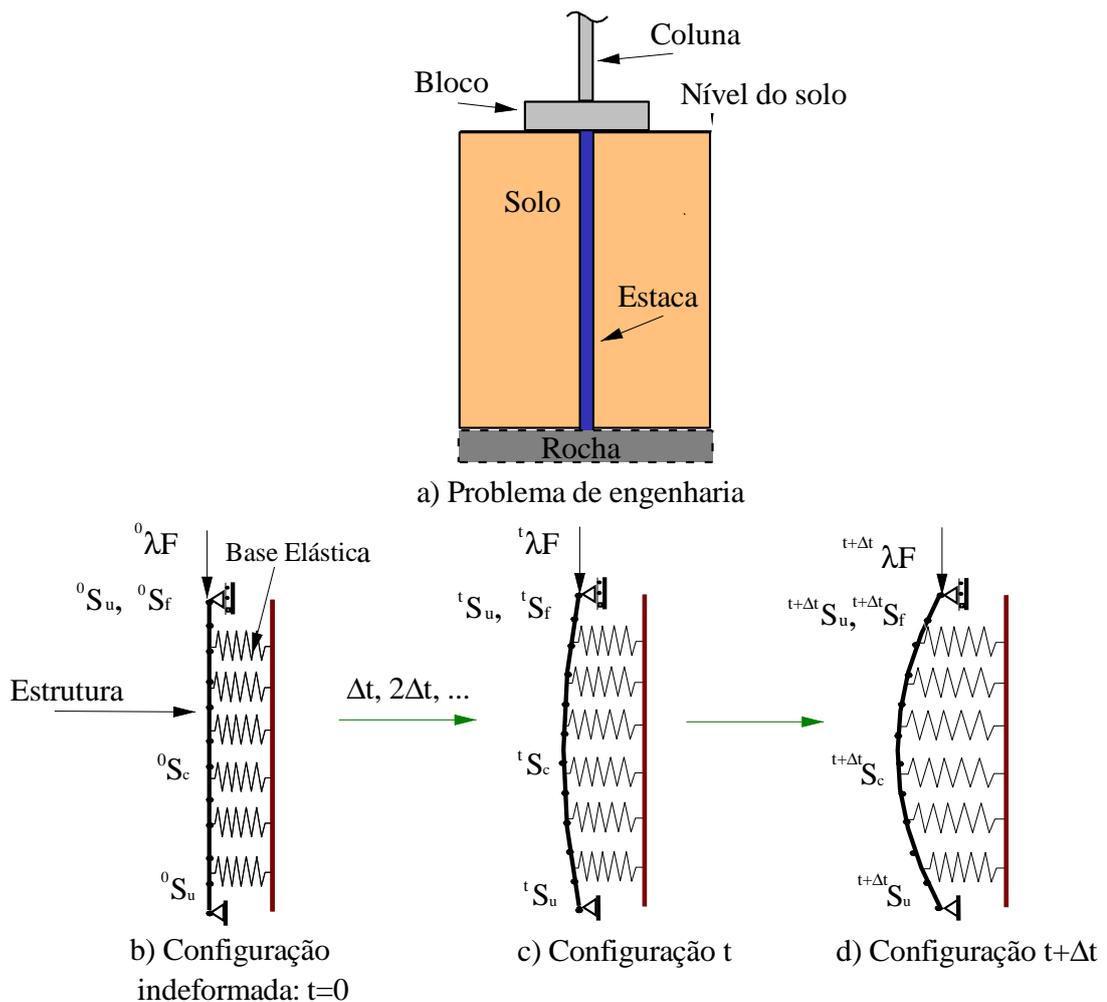
Por fim, na Seção 2.4, e no contexto da solução não linear do problema, são resumidas as estratégias de incremento de carga e de iterações usadas nesta dissertação.

### 2.2 Formulação do Problema de Contato Bilateral

Considere inicialmente o sistema estrutural ilustrado na Figura 2.1a, onde pode ser observada uma estaca em contato com o meio deformável (ou solo) no qual está inserida. Considere também que esse meio ofereça reação tanto às solicitações de compressão como às de tração,

caracterizando assim o contato entre os corpos como bilateral, e que esse problema possa ser modelado de acordo com a Figura 2.1b. Nessa última figura, a estaca é representada por uma coluna biapoiada na sua configuração indeformada ( $t = 0$ ), de onde se pode observar também a discretização da barra através do MEF. O solo é representado aqui por um sistema molas elásticas, que podem se apresentar na forma discreta ou contínua, como será visto adiante.

Considerando ainda que a coluna seja um sólido elástico contínuo que possa sofrer grandes deslocamentos, mas pequenas deformações, e que, no caso geral, seja adotada uma estratégia de solução não linear em *referencial Lagrangiano atualizado* (Silveira, 1995; Galvão, 2000; Silva, 2009), assume-se que as variáveis estáticas e cinemáticas do sistema sejam conhecidas nas configurações de equilíbrio  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$  (Figura 2.1c), e que se deseja obter a solução em  $t+\Delta t$  (Figura 2.1d). Considera-se então que a configuração de referência seja a última configuração de equilíbrio, isto é, a configuração  $t$ .



**Figura 2.1** Problema de contato bilateral, modelo numérico adotado e configurações de equilíbrio.

Como se considera apenas o contato bilateral entre os corpos (estrutura e base elástica), não se perde o contato durante o acréscimo do carregamento atuante, que é representado genericamente aqui por  $\lambda F$ , sendo  $\lambda$  o parâmetro que controla a intensidade. Portanto,  ${}^0\lambda$ ,  ${}^t\lambda$  e  ${}^{t+\Delta t}\lambda$  representam a intensidade de  $F$  nas configurações de equilíbrio  $0$ ,  $t$  e  $t+\Delta t$ , respectivamente. Ainda da Figura 2.1, note que a coluna, na configuração de equilíbrio  $i$ , ocupa o domínio  ${}^iV$  ( $i = 0, t, t+\Delta t$ ), cujo contorno é composto por três partes distintas,  ${}^iS_u$ ,  ${}^iS_f$  e  ${}^iS_c$ . Verifique que  $S_u$  é a parte do contorno onde os deslocamentos são conhecidos, ou prescritos;  $S_f$  a região onde as forças de superfície são conhecidas; e  $S_c$  é a região de contato entre os corpos.

Ao se utilizar uma estratégia de solução incremental não linear, é necessária a adoção de tensores de tensão e deformação que sejam energeticamente conjugados (Bathe, 1996). Basendo-se, então, em Galvão (2000) e Silva (2009), em que estão presentes várias formulações geometricamente não lineares, são adotados aqui o tensor de tensão Piola-Kirchhoff II e o tensor de deformação de Green-Lagrange. Assim, para o sistema estrutural em estudo, as equações de equilíbrio, as relações cinemáticas e as relações constitutivas são dadas, respectivamente, por:

$$\Delta S_{ij,j} + \left( \Delta u_{i,j} \quad {}^{t+\Delta t}S_{jk,i} \right)_{,k} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} \quad (2.2)$$

$$\Delta S_{ij} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (2.3)$$

Nas expressões anteriores é utilizada uma notação indicial com a convenção usual de somatório. Na Equação (2.1),  $\Delta u_i$  são os incrementos de deslocamento e  $\Delta S_{ij}$  são as componentes incrementais do tensor de Piola-Kirchhoff II, incógnitas do problema;  ${}^{t+\Delta t}S_{ik}$  são as componentes cartesianas do mesmo tensor para a configuração  $t+\Delta t$  (Silveira, 1995). Na Equação (2.2),  $\Delta \varepsilon_{ij}$  representa o tensor incremento de deformação de Green-Lagrange,  $\Delta e_{ij}$  caracterizam as componentes do tensor infinitesimal de Cauchy, ou seja:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} \right) \quad (2.4)$$

e  $\Delta \eta_{ij}$  as componentes não lineares, que são dadas por:

$$\Delta\eta_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j}) \quad (2.5)$$

Na Equação (2.3), o tensor  $C_{ijkl}$  fornece as propriedades dos materiais da estrutura.

Como neste trabalho objetiva-se a resposta da fundação apenas na região de contato entre os corpos, é possível representá-la com modelos matemáticos simples, mas que apresentam precisão satisfatória. Dessa forma, a reação da base pode ser descrita genericamente através da seguinte equação:

$$\Delta r_{bi} = C_b \Delta u_{bi} \quad (2.6)$$

em que  $\Delta r_{bi}$  e  $\Delta u_{bi}$  são, respectivamente, os incrementos da reação e do deslocamento da fundação elástica;  $C_b$  é o parâmetro de rigidez da fundação.

Para os corpos elásticos em contato bilateral, as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

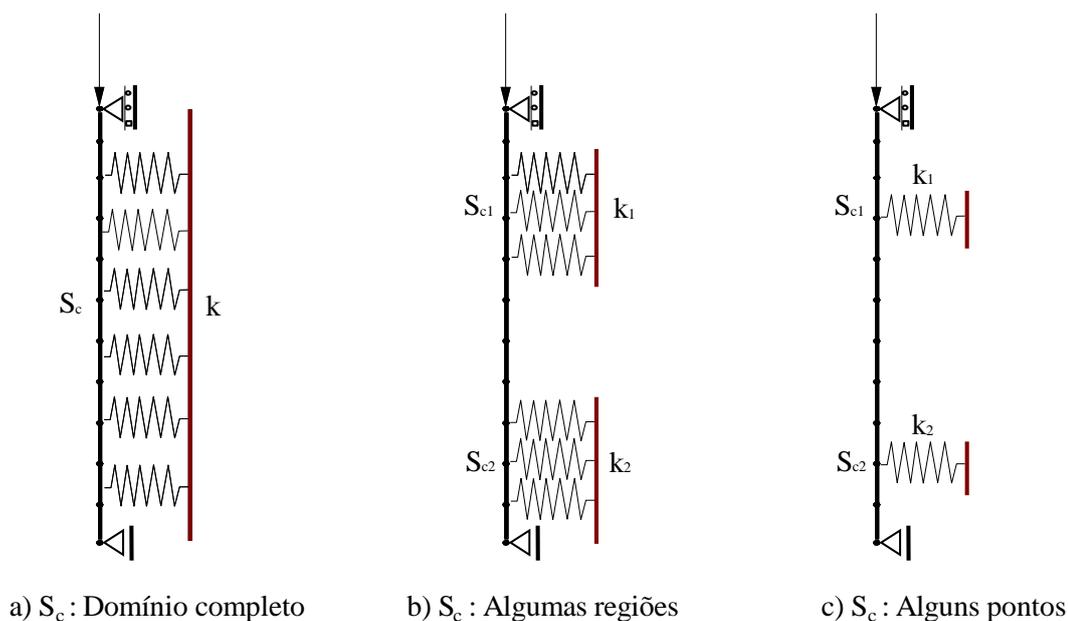
$$\Delta u_i = \Delta \bar{u} \quad \text{em } S_u \quad (2.7)$$

$$F_i = {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} {}^{t+\Delta t}n_j \quad \text{em } S_f \quad (2.8)$$

$$\varphi = \Delta u_i - \Delta u_{bi} = 0 \quad \therefore \Delta u_i = \Delta u_{bi} \quad \text{em } S_c \quad (2.9)$$

A Equação (2.7) representa a condições de contorno essenciais do problema, com  $\Delta \bar{u}$  sendo um valor prescrito em  $S_u$ ; já a Equação (2.8) fornece o equilíbrio de forças que deve existir em  $S_f$  e  $n_j$  é a normal; por fim, através da igualdade (2.9), é informado que a distância entre os dois corpos,  $\varphi$ , em  $S_c$  é nula, ou seja, que o deslocamento da estrutura e base elástica são iguais na região de contato. Essa última condição é típica da situação de contato bilateral entre corpos. A Figura (2.2) ilustra diversas situações para a região  $S_c$ , que vai desde o domínio completo do sistema a casos onde a restrição é imposta apenas em alguns pontos do domínio, ou seja, quando a base elástica é representada por molas discretas.

Para um dado incremento de carga, a solução do problema de contato bilateral em estudo pode ser obtida, portanto, através da resolução da Equação (2.1), com o auxílio das relações (2.2) e (2.3), respeitando-se as condições de contorno (2.7) e (2.8), e considerando as equações impostas na região de contato entre os corpos, isto é, Equações (2.6) e (2.9).



**Figura 2.2** Diferentes situações definindo a região de contato  $S_c$ .

A não-linearidade presente na Equação (2.2), bem como as diversas possibilidades de se considerar as restrições bilaterais impostas pela base elástica, tornam a solução direta (ou analítica) do problema estrutural em questão uma tarefa difícil. Casos particulares foram tratados e analisados por Brush e Almroth (1975) e Simitzes e Hodges (2006). Dessa forma, parte-se agora para a formulação do problema de minimização equivalente, como proposto em Silveira (1995), Silva (1998) e Pereira (2003), mas adaptado para o caso do problema de contato bilateral desta dissertação, para que uma análise numérica via MEF possa ser convenientemente empregada na sua solução.

Seguindo então a formulação do problema de minimização equivalente, e, como já relatado, fazendo-se as adaptações pertinentes, tem-se que a solução o problema proposto pode ser achada através de:

$$\text{Min } \Pi \tag{2.10}$$

$$\text{Sujeito a: } \varphi = 0, \text{ em } S_c \tag{2.11}$$

em que  $\Pi$  é a energia potencial do sistema em estudo, que pode ser definida através da expressão:

$$\Pi = U_e + U_b + V_f \tag{2.12}$$

ou,

$$\Pi = \int_{t_V} \left( {}^t\sigma_{ij} + \frac{1}{2} \Delta S_{ij} \right) \Delta \varepsilon_{ij} {}^t dV + \int_{t_{S_c}} \left( {}^t r_{bi} + \frac{1}{2} \Delta r_{bi} \right) \Delta u_{bi} {}^t dS_c - \int_{0_{S_f}} F_i \Delta u_i {}^0 dS_f \quad (2.13)$$

Nas equações anteriores,  $U_e$  e  $U_b$  definem a quantidade de energia armazenada na estrutura e na base elástica, respectivamente, para se moverem da configuração de equilíbrio  $t$  até  $t + \Delta t$ ;  $V_f$  representa a energia potencial do carregamento externo, que aqui é assumido, por simplicidade, independente da deformação da estrutura; e que a restrição (2.11) impõe a condição de contato bilateral. Na Equação (2.13),  $\Delta u_i$  é o deslocamento incremental da estrutura;  $\Delta u_b$  é o deslocamento incremental da base elástica;  ${}^t\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de Cauchy na configuração de referência  $t$ , que são conhecidas;  $\Delta S_{ij}$  são as componentes do tensor tensão Piola-Kirchhoff II, incógnitas do problema;  $\Delta \varepsilon_{ij}$  são as componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange;  ${}^t r_b$  e  $\Delta r_b$  definem a reação da base na configuração  $t$  e seu incremento, respectivamente; e  $F_i$  representam as componentes das forças externas atuantes nas regiões  $S_f$ .

Antes da reformulação do problema em espaços de aproximação via MEF, entretanto, com a substituição da Equação (2.2) e as relações constitutivas (2.3) e (2.6) na Equação (2.13), chega-se numa nova expressão para a energia potencial do sistema, que é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{t_V} C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \Delta \varepsilon_{ij} {}^t dV + \int_{t_V} {}^t\sigma_{ij} \Delta e_{ij} {}^t dV + \int_{t_V} {}^t\sigma_{ij} \Delta \eta_{ij} {}^t dV + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_{S_c}} C_{bi} \Delta u_{bi}^2 {}^t dS_c + \int_{t_{S_c}} {}^t r_{bi} \Delta u_{bi} {}^t dS_c - \int_{0_{S_f}} F_i \Delta u_i {}^0 dS_f \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.3 Metodologia de Solução Numérica

Apresenta-se agora a metodologia numérica utilizada para a solução aproximada do problema de contato bilateral entre dois corpos elásticos com restrições bilaterais de contato. Como características básicas dessa metodologia, destacam-se:

i. o emprego do MEF, em que o domínio original dos corpos (estrutura e base elástica) e seus respectivos contornos são substituídos por uma malha de elementos finitos; como consequência, chega-se, na forma discreta, na equação de equilíbrio não linear que rege o

problema de contato bilateral em estudo (Seção 2.3.1);

ii. uma estratégia incremental-iterativa de solução para o problema de equilíbrio discreto não linear (Seção 2.3.2).

### 2.3.1 Discretização do Sistema Estrutural

Para um elemento finito genérico da estrutura, como ilustrado na Figura 2.1, tem-se, de uma maneira geral, que os deslocamentos incrementais  $\Delta \mathbf{u}$  em seu interior podem ser relacionados aos deslocamentos nodais incrementais  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

em que  $\mathbf{H}$  representa a matriz que contém as funções de interpolação do elemento considerado.

No caso das deformações da estrutura, o tensor de Green-Lagrange pode ser escrito, na forma matricial, como segue:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta} \quad (2.16)$$

com  $\Delta \mathbf{e}$  e  $\Delta \boldsymbol{\eta}$  relacionando-se com os deslocamentos nodais incrementais  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  segundo as expressões:

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_L \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (2.17)$$

$$\Delta \boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}_{NL} \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (2.18)$$

sendo  $\mathbf{B}_L$  a matriz deformação-deslocamento, ou matriz cinemática, para deslocamentos e deformações infinitesimais. Os componentes dessa matriz são obtidos combinando-se e diferenciando-se de forma apropriada as linhas de  $\mathbf{H}$ . Já a matriz  $\mathbf{B}_{NL}$  não somente depende de  $\mathbf{H}$ , mas também é função dos deslocamentos nodais incrementais  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  (Bathe, 1996). Pode-se então reescrever as componentes incrementais do tensor de Green-Lagrange em função dos deslocamentos nodais como:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (2.19)$$

Ainda para a estrutura, a forma incremental matricial da Equação (2.3), em que se define o tensor de Piola-Kirchhoff II (Bathe, 1996), é dado por:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.20)$$

com  $\mathbf{C}$  definindo a matriz constitutiva.

No caso da base elástica, escrevem-se, as seguintes equações matriciais:

$$\Delta \mathbf{u}_b = \mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (2.21)$$

$$\Delta \mathbf{r}_b = \mathbf{C}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (2.22)$$

em que  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b$  é o vetor dos deslocamentos nodais da base, que no caso de contato bilateral é igual ao vetor  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  do elemento considerado ( $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b = \Delta \hat{\mathbf{u}}$ ); e  $\mathbf{B}_b$  é a matriz que contém as funções de interpolação que descreve o deslocamento da base. A Equação (2.22) representa a forma discreta da relação constitutiva (2.6), sendo  $\mathbf{C}_b$  a matriz que contém os parâmetros de rigidez da base.

Portanto, para um elemento genérico do sistema estrutural em estudo, substituindo-se as equações apresentadas nesta subsecção no indicador variacional (2.14), chega-se à expressão de  $\bar{\Pi}$  na forma discretizada, ou seja:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = & \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[ \int_{t\bar{V}} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L \, {}^t d\bar{V} \right] \Delta \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[ \int_{t\bar{V}} (\mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{NL}) \, {}^t d\bar{V} \right] \Delta \hat{\mathbf{u}} + \\ & + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[ \int_{t\bar{V}} \mathbf{B}_L^T \, {}^t \boldsymbol{\sigma} \, d\bar{V} \right] + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[ \int_{t\bar{V}} \mathbf{B}_{NL}^T \, {}^t \boldsymbol{\sigma} \, {}^t d\bar{V} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[ \int_{t\bar{S}_c} \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \, {}^t d\bar{S}_c \right] \Delta \hat{\mathbf{u}} + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[ \int_{t\bar{S}_c} \mathbf{B}_b^T \, {}^t \mathbf{r}_b \, {}^t d\bar{S}_c \right] - \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[ \int_{0\bar{S}_f} \mathbf{H}^T \, {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^0 \, d\bar{S}_f \right] \quad (2.23) \end{aligned}$$

Considerando agora a contribuição de cada elemento finito do sistema estrutural em estudo, com ou sem contato com a base elástica, e em seguida fazendo a variação de  $\bar{\Pi}$  em relação a um campo de deslocamentos nodais cinematicamente compatíveis, chega-se na equação matricial de equilíbrio procurada, que é dada por:

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_b] \Delta \mathbf{U} + {}^t \mathbf{F}_{ic} + {}^t \mathbf{F}_{ib} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \quad (2.24)$$

em que  $\Delta \mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais incrementais que deve ser calculado através da estratégia incremental-iterativa que será descrita ainda neste capítulo;  $\mathbf{K}_L$ ,  $\mathbf{K}_\sigma$  e  $\mathbf{K}_{NL}$

correspondem às matrizes de rigidez da estrutura, e  $\mathbf{K}_b$  a matriz de rigidez da base elástica, que serão descritas a seguir;  ${}^t\mathbf{F}_{ie}$  e  ${}^t\mathbf{F}_{ib}$  são os vetores de forças internas da estrutura e base elástica na configuração de equilíbrio  $t$ , conhecidos; e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$  o carregamento nodal equivalente aplicado ao sistema em  $t+\Delta t$ . Observe que a equação anterior pode ser escrita numa forma mais compacta, isto é:

$$\Delta^t\mathbf{F}_{iS}(\Delta\mathbf{U}) + {}^t\mathbf{F}_{iS} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \quad \therefore \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{iS}(\Delta\mathbf{U}) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \quad (2.25)$$

com:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{iS}(\Delta\mathbf{U}) = \Delta^t\mathbf{F}_{iS}(\Delta\mathbf{U}) + {}^t\mathbf{F}_{ie} + {}^t\mathbf{F}_{ib} \quad (2.26)$$

e,

$$\Delta^t\mathbf{F}_{iS}(\Delta\mathbf{U}) = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_b] \Delta\mathbf{U} \quad (2.27)$$

sendo  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{iS}$  e  $\Delta^t\mathbf{F}_{iS}$  os vetores de forças internas generalizados total e incremental, respectivamente, do sistema estrutural em estudo (estrutura e base elástica) no passo de carga  $t+\Delta t$ . A Equação (2.25), ou mesmo (2.24), deve ser satisfeita, em um processo iterativo do tipo Newton-Raphson (Cook *et al.*, 1989), para se atingir o equilíbrio do sistema.

As matrizes de rigidez presentes na Equação (2.24), assim como os vetores existentes nas equações anteriores, mas ainda não definidos, serão apresentados a seguir:

- i.  $\mathbf{K}_L$  é a matriz de rigidez linear da estrutura, ou seja:

$$\mathbf{K}_L = \sum_m \int_{\bar{V}} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L d^t\bar{V} \quad (2.28)$$

com  $m$  representando o número total de elementos finitos da estrutura.

- ii.  $\mathbf{K}_\sigma$  é a matriz das tensões iniciais, ou matriz de rigidez geométrica, que é dada por:

$$\mathbf{K}_\sigma = \sum_m \int_{\bar{V}} \mathbf{B}_{NL}^T {}^t\boldsymbol{\tau} d^t\bar{V} \quad (2.29)$$

- iii.  $\mathbf{K}_{NL}$  é a matriz de grandes deslocamentos (Zienkiewicz e Taylor, 1991), que contém termos lineares e quadráticos dos deslocamentos nodais incrementais, isto é:

$$\mathbf{K}_{NL} = \sum_m \int_{\bar{V}^t} (\mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{NL}) d^t \bar{V} \quad (2.30)$$

iv.  $\mathbf{K}_b$  é a matriz de rigidez da fundação ou base elástica, ou seja:

$$\mathbf{K}_b = \sum_{m_c} \int_{\bar{S}_c^t} \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b d^t \bar{S}_c \quad (2.31)$$

com  $m_c$  sendo o número de elementos na região de contato.

v.  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$  é o vetor de carregamento nodal equivalente, dado por:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} = \sum_{ms} \int_{\bar{S}_f^0} \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} d^0 \bar{S}_f \quad (2.32)$$

que é assumido independente da deformação da estrutura. Para a estratégia de solução não linear adotada neste trabalho, é conveniente representar o carregamento externo através da equação:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} = {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{R}_r \quad (2.33)$$

em que  $\mathbf{R}_r$  é um vetor de cargas nodais de referência (esse vetor é arbitrário e apenas a sua direção é importante), e  ${}^{t+\Delta t} \lambda$  é um parâmetro escalar que define a intensidade da carga aplicada, sendo definido por:

$${}^{t+\Delta t} \lambda = {}^t \lambda + \Delta \lambda + \delta \lambda \quad (2.34)$$

com  ${}^t \lambda$  sendo a intensidade do parâmetro de carga na configuração de equilíbrio  $t$ , portanto, conhecida;  $\Delta \lambda$  é o valor do parâmetro de carga também conhecido, acumulado durante o processo iterativo, a ser apresentado; e  $\delta \lambda$  é a incógnita da iteração corrente, que deve ser calculada segundo alguma estratégia de iteração (ver Seção 2.4).

vi.  ${}^t \mathbf{F}_{ie}$  é o vetor das forças internas generalizado da estrutura na configuração de equilíbrio  $t$ . Esse vetor é conhecido e calculado por meio da integração das tensões internas no volume de cada elemento, e depois somando-as da forma usual, ou seja:

$${}^t \mathbf{F}_{ie} = \sum_m \int_{\bar{V}^t} \mathbf{B}_L^T {}^t \boldsymbol{\sigma} d^t \bar{V} \quad (2.35)$$

- vii.  $\mathbf{F}_{ib}$  é o vetor das forças internas generalizado da base elástica em  $t$ , também conhecido, e é dado por:

$${}^t\mathbf{F}_{ib} = \sum_{mc} \int_{{}^t\bar{S}_c} \mathbf{B}_b^T \mathbf{r}_b {}^{t+\Delta t}\bar{dS}_c \quad (2.36)$$

em que são considerados na montagem desse vetor apenas os elementos presentes na região de contato.

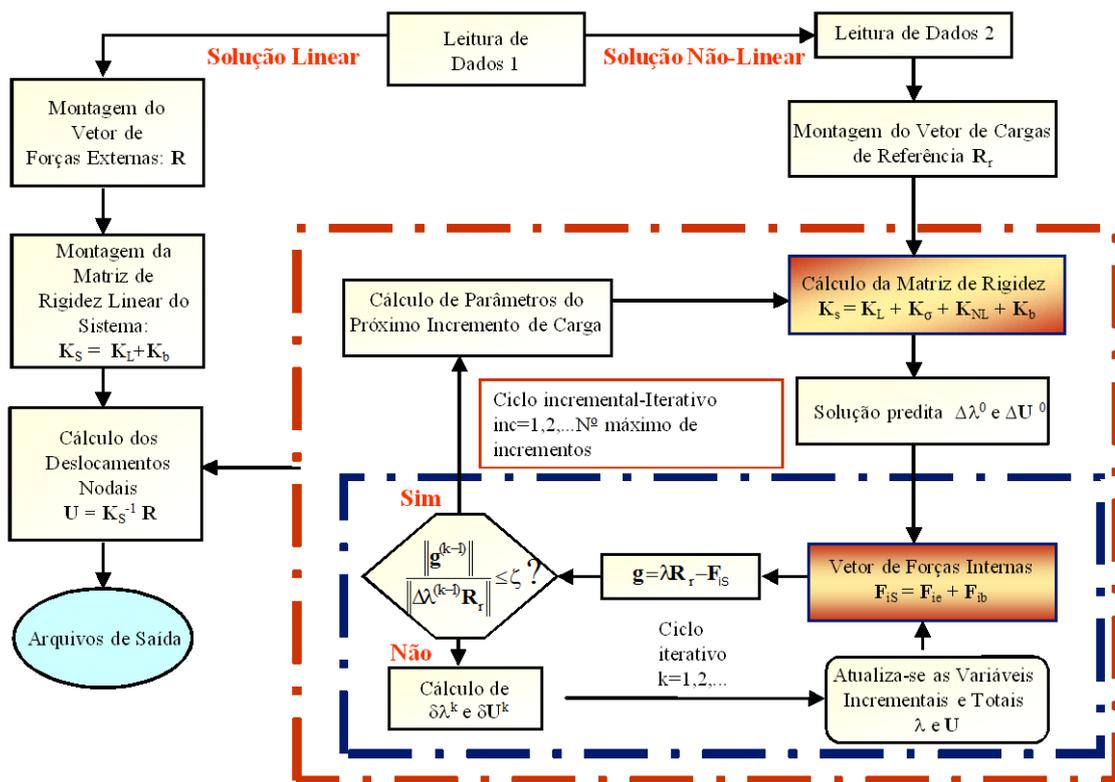
### 2.3.2 Estratégias de Solução: Análise Linear e Análise Não Linear

No caso do sistema estrutural em estudo sofrer pequenos deslocamentos e deformações, com o material de ambos os corpos em contato exibindo comportamento elástico, é possível a adoção da teoria elástica linear. Dessa forma, as equações de equilíbrio podem ser formuladas considerando apenas a configuração indeformada do sistema (configuração de equilíbrio  $t = 0$ ; Figura 2.1) e, como consequência, a solução do problema pode ser obtida de uma forma direta, resolvendo-se:

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_b] \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (2.37)$$

na qual  $\mathbf{K}_L$  e  $\mathbf{K}_b$ , como já mencionado, representam as matrizes de rigidez da estrutura e da base elástica, respectivamente;  $\mathbf{R}$  é o carregamento nodal equivalente; e o vetor  $\mathbf{U}$  contém os deslocamentos nodais, incógnitas do problema. O algoritmo presente no CS-ASA, e adotado neste trabalho, para solução de (2.37) é apresentado resumidamente na Figura 2.3 (lado esquerdo da figura).

No caso de grandes deslocamentos e rotações, mesmo considerando pequenas deformações e que o material obedeça à lei de Hooke, as equações de equilíbrio do sistema devem ser formuladas baseando-se na sua configuração deformada (configuração  $t$ , por exemplo), e a solução do problema estrutural deve seguir o procedimento numérico descrito, também de forma resumida, na Figura 2.3. Esse procedimento numérico será detalhado a seguir.



**Figura 2.3** Estratégias de solução linear e não linear adotadas neste trabalho.

Como pode ser visto na Figura 2.3, e como já mencionado anteriormente, o esquema de solução não linear adotado neste trabalho baseia-se numa estratégia incremental-iterativa, onde, para um dado passo de carga, duas fases ou etapas distintas podem ser identificadas (Silva, 2009; Maximiano, 2012). A primeira delas, denominada fase predita, envolve a solução dos deslocamentos incrementais a partir de um determinado acréscimo de carga; a segunda fase, denominada corretiva, tem como objetivo a correção das forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos pela utilização de um processo iterativo. Tais forças internas são somadas às forças internas da configuração  $t$  e em seguida comparadas com o carregamento externo, obtendo-se daí a quantificação do desequilíbrio existente entre forças internas e externas. O processo corretivo é feito até que, por intermédio de um critério de convergência, a estrutura esteja em equilíbrio. Essas duas fases de solução são detalhadas a seguir, porém, antes, é necessário fazer algumas observações relacionadas à notação a ser adota:

- i. Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura e da base elástica no passo de carga  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga  $t + \Delta t$ ;
- ii.  $k$  é o contador do número de iterações em um determinado passo de carga. Para  $k = 0$ , tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo;
- iii.  $\lambda$  e  $\mathbf{U}$  definem o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;
- iv.  $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{U}$  caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- v.  $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}$  denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais que ocorrem ao longo do ciclo iterativo.

### ***1. Solução Incremental Predita***

Como pode ser visto na Figura 2.3, a primeira etapa para a obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente,  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$ , consiste na montagem da matriz de rigidez tangente do sistema  $\mathbf{K}_S$  (que aqui deverá incluir a contribuição da estrutura e base elástica), utilizando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura. A partir daí, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{U}_t$ , usando a expressão:

$$\delta\mathbf{U}_t = \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{R}_t \quad (2.38)$$

Por meio de uma estratégia de incremento de carga é possível que se faça uma seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . As estratégias de incremento de carga usadas neste trabalho serão apresentadas na Seção 2.4. Definido o incremento inicial,  $\Delta\lambda^0$ , chega-se no vetor deslocamentos nodais incrementais tangenciais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ , escalonando-se  $\delta\mathbf{U}_t$ , ou seja,

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_t \quad (2.39)$$

Em seguida, são atualizados o parâmetro de carga e os deslocamentos totais através do seguinte procedimento:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad \text{e} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (2.40a,b)$$

em que  $\lambda$  e  $\mathbf{U}$  definem o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga. A solução descrita por (2.40a,b) raramente satisfaz a condição de equilíbrio do sistema. Assim, iterações subsequentes são necessárias para que se possa restaurar o equilíbrio. Esse processo iterativo será descrito a seguir.

## 2. Ciclo de Iterações

No esquema tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante durante o ciclo iterativo. Mas, caso se pretenda obter a trajetória de equilíbrio de forma completa, com possíveis passagens por pontos limites, é necessária uma estratégia que permita a variação do parâmetro de carga  $\lambda$  em cada iteração. Seguindo então a técnica proposta por Batoz e Dhatt (1979), na qual a variação de carga é permitida, considera-se a mudança de deslocamentos nodais governada pela seguinte equação:

$$\mathbf{K}_S^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (2.41)$$

na qual  $\mathbf{g}$  representa o vetor gradiente (forças desequilibradas) que deve ser anulado ao longo do ciclo iterativo, indicando que um novo ponto de equilíbrio foi encontrado. A matriz de rigidez  $\mathbf{K}_S$  em (2.41) deve conter as contribuições da estrutura e base elástica. Como indicado na equação anterior, o vetor  $\mathbf{g}$  é função dos deslocamentos nodais totais  $\mathbf{U}^{(k-1)}$  calculados na última iteração e do parâmetro de carga total corrente,  $\lambda^k$ , que agora também é uma incógnita do problema. Sabendo-se que o vetor  $\mathbf{g}$  na iteração corrente é dado por:

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{F}_{iS}^{(k-1)} - (\lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k) \mathbf{R}_r \quad (2.42)$$

pode-se reescrever (2.41) como:

$$\mathbf{K}_S^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = -\left[ \mathbf{F}_{iS}^{(k-1)} - (\lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k) \mathbf{R}_r \right] \quad (2.43)$$

Nas duas equações anteriores:

$$\mathbf{F}_{iS}^{(k-1)} = \mathbf{F}_{ie}^{(k-1)} + \mathbf{F}_{ib}^{(k-1)} \quad (2.44)$$

com os vetores  $\mathbf{F}_{ie}^{(k-1)}$  e  $\mathbf{F}_{ib}^{(k-1)}$  representando, respectivamente, a contribuição da base elástica e da estrutura na montagem do vetor das forças internas. O produto  $\lambda^{(k-1)} \mathbf{R}_r$  caracteriza o vetor das forças externas atuantes na última iteração. A Equação (2.43) pode ser reescrita de forma a ser trabalhada durante o ciclo iterativo como segue:

$$\mathbf{K}_S^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \mathbf{R}_r \quad (2.45)$$

Observe que a equação anterior fornece os deslocamentos nodais iterativos procurados, que podem ser decompostos em duas parcelas, ou seja:

$$\delta \mathbf{U}^k = \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (2.46)$$

com:

$$\delta \mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}_S^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (2.47)$$

$$\delta \mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}_S^{-1(k-1)} \mathbf{R}_r \quad (2.48)$$

em que  $\delta \mathbf{U}_g^k$  é a correção do deslocamento proveniente das forças desequilibradas do sistema estrutural em estudo; e  $\delta \mathbf{U}_r^k$  é o vetor de deslocamentos iterativos resultante da aplicação do vetor de cargas de referência  $\mathbf{R}_r$ .

Note também que se for adotado o método de Newton-Raphson modificado,  $\delta \mathbf{U}_r^k$  é igual ao vetor de deslocamentos tangenciais  $\delta \mathbf{U}_t$ , calculado através da Equação (2.38), pois a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_S$  não se altera durante o ciclo iterativo. A correção do parâmetro de carga,  $\delta \lambda^k$ , única incógnita da Equação (2.46), pode ser determinada seguindo uma das estratégias de iteração que serão fornecidas na próxima seção. Após determinar  $\delta \lambda^k$ , retorna-se à Equação (2.46) para obtenção da correção dos deslocamentos  $\delta \mathbf{U}^k$ .

Com a obtenção da solução iterativa ( $\delta \lambda^k$  e  $\delta \mathbf{U}^k$ ), faz-se a atualização das variáveis incrementais e totais do problema, ou seja:

$$\Delta \lambda^k = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{U}^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (2.49a,b)$$

$${}^{t+\Delta t} \lambda = {}^t \lambda + \Delta \lambda^k \quad \text{e} \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^k \quad (2.50a,b)$$

Os procedimentos descritos nessa seção são repetidos até que um dos critérios de convergência implementados no CS-ASA (Silva, 2009) seja respeitado.

A Tabela 2.1 fornece os detalhes da estratégia numérica adotada neste trabalho para solução não linear do problema de contato bilateral em questão. Trata-se, na realidade, de um complemento ao esquema de solução não linear apresentado na Figura 2.3. Note, através do

**Tabela 2.1** Metodologia de solução numérica não linear

---



---

1. Configuração inicial: ${}^t\mathbf{u}$ , ${}^t\lambda$ , ${}^t\mathbf{S}_c$
2. Solução incremental predita: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$
2.1. Calcula-se: $\mathbf{K}_S = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_b$
2.2. Resolve-se: $\delta\mathbf{U}_t = \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{R}_r$
2.3. Define-se : $\Delta\lambda^0 \rightarrow$ <b>SEÇÃO 2.4</b> , Equações (2.53 e 2.59)
2.4. Calcula-se: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_t$
2.5. Atualiza-se: ${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
3. Iterações de Newton-Raphson : $k = 1, 2, \dots, N_i$
3.2. Calcula-se: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{iS}^{(k-1)} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{NL}] \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \mathbf{K}_b\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + {}^t\mathbf{F}_{ic} + {}^t\mathbf{F}_{ib}$
3.3. Calcula-se: $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{iS}^{(k-1)} - {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{R}_r$
3.4. Verifica-se a convergência caso seja utilizado o critério baseado em forças ou em forças e deslocamentos conjuntamente:
<u>Sim</u> (Critério de forças): Vá para o passo 4
3.5 Se Newton-Raphson padrão, atualiza-se a matriz de rigidez $\mathbf{K}_S$
3.6 Corrige o parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$ , usando uma estratégia de iteração. $\rightarrow$ <b>SEÇÃO 2.4</b> , Equações (2.57, 2.62 e 2.65)
3.7. Calcula-se (Silva, 2009): $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r$ , onde,
$\delta\mathbf{U}_g = -\mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}$ e $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{R}_r$
3.8. Verifica-se a convergência caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente.
<u>Sim</u> (Critério de deslocamentos): Vá para o passo 4
<u>Sim</u> (Critério de forças e deslocamentos): Vá para o passo 4, se houve a convergência em 3.4
3.9. Atualizam-se as variáveis:
Incrementais: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
Totais: ${}^{t+\Delta t}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$ . Retorne para o passo 3
4. Novo incremento de carga. Vá para o passo 1

---



---

algoritmo apresentado, que a definição dos valores de  $\Delta\lambda^0$  e  $\delta\lambda$  dependem, respectivamente, de uma determinada estratégia de incremento de carga e iteração. Essas estratégias serão apresentadas de forma resumidas na próxima seção.

Veja na Figura 2.3 que o critério de convergência usado é baseado em forças. Outro critério de convergência também implementado no CS-ASA, e referenciado na Tabela 2.1, é baseado apenas em deslocamentos, como segue:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (2.51)$$

sendo o numerador a norma Euclidiana dos deslocamentos nodais iterativos e o denominador representa a norma Euclidiana dos deslocamentos nodais incrementais.

## 2.4 Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração

Esta seção tem como objetivo fornecer as expressões para a determinação da solução incremental predita ( $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$ ) e da solução corretiva ( $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}$ ). Na realidade, a atenção é voltada apenas para a avaliação dos parâmetros de carga  $\Delta\lambda^0$  e  $\delta\lambda$ , uma vez que os vetores  $\Delta\mathbf{U}^0$  e  $\delta\mathbf{U}$  são obtidos usando-se as Equações (2.39) e (2.46), respectivamente. Serão mostradas apenas as expressões de  $\Delta\lambda^0$  e  $\delta\lambda$  das estratégias que se mostraram mais eficientes na solução não linear dos problemas de contato bilateral que são mostrados no Capítulo 4. Várias outras opções, entretanto, estão presentes no CS-ASA (Silva, 2009). Além das técnicas de iteração descritas em Silva (2009), o CS-ASA dispõe de mais uma estratégia de iteração que é apresentada em Maximiano (2012).

A definição da solução incremental predita tem como procedimento fundamental a avaliação de  $\Delta\lambda^0$ , para em seguida se chegar em  $\Delta\mathbf{U}^0$  através da Equação (2.39). A seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$  é importante e deve refletir o grau de não linearidade do sistema estrutural. Assim, uma estratégia eficiente deve: fornecer grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear; levar a pequenos valores de  $\Delta\lambda^0$  quando a resposta for fortemente não linear; e ser capaz de escolher o sinal correto para  $\Delta\lambda^0$ , introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximos e mínimos são ultrapassados.

O processo corretivo, que se baseia no método de Newton-Raphson acoplado à alguma estratégia que permita a variação do parâmetro de carga  $\delta\lambda$ , tem como objetivo determinar as

raízes ou zeros de uma equação não linear; fisicamente falando, a obtenção do equilíbrio entre as forças internas e externas no sistema estrutural. Como relatado em Silva (2009), uma boa estratégia de iteração deve ser eficiente computacionalmente, o que significa que, para um dado passo de carga, a configuração de equilíbrio do sistema estrutural em estudo deve ser obtida da forma mais rápida possível. Porém, não se pode esperar de nenhuma estratégia a resolução de problemas fortemente não lineares com igual eficiência computacional.

### 2.4.1 Comprimento de Arco

Riks (1972), Crisfield (1981), Ramm (1981; 1982) podem ser considerados os idealizadores da estratégia de solução não linear que utiliza a restrição de comprimento de arco, ou seja:

$$\Delta \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{U} + (\Delta \lambda)^2 \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_r = \Delta l^2 \quad (2.52)$$

em que  $\Delta l$  representa o incremento do comprimento de arco.

Assim, procurando atender à restrição anterior na etapa da solução predita, em que  $\Delta \lambda = \Delta \lambda^0$  e  $\Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{U}^0$ , e ainda considerando a Equação (2.39), chega-se, após manipulações algébricas, na seguinte expressão para o parâmetro de carga inicial:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{U}_t^T \delta \mathbf{U}_t + \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_r}} \quad (2.53)$$

ou, como sugerido por Crisfield (1981), desprezando-se os “termos de carga” da equação anterior, escreve-se:

$$\delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{U}_t^T \delta \mathbf{U}_t}} \quad (2.54)$$

Nas Equações (2.53) e (2.54), o incremento do comprimento de arco  $\Delta l$  pode ser obtido através da expressão a seguir (Silva, 2009):

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left( \frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (2.55)$$

em que  $I_d$  é o número de iterações desejado pelo usuário;  $I_{p,a}$  é o número de iterações que foi necessário para convergência do processo no passo de carga anterior; e  $\Delta l_{p,a}$  representa o comprimento de arco no passo de carga anterior.

Riks (1972) e Ram (1981; 1982) procuraram linearizar a Equação (2.52) ao longo do ciclo iterativo e encontraram expressões bastante simples para o cálculo do parâmetro de carga corretivo  $\delta\lambda$ . Através da solução de diversos problemas estruturais com número elevado de variáveis, Crisfield (1981) concluiu que o “termo de carga” na Equação (2.52) tinha também pouco efeito, e propôs que a seguinte equação deveria ser satisfeita ao longo do ciclo iterativo:

$$\Delta\mathbf{U}^{\text{Tk}} \Delta\mathbf{U}^{\text{k}} = \Delta\mathbf{l}^2 \quad (2.56)$$

com o sobrescrito k representando a iteração corrente. Substituindo a Equação (2.49b) na expressão anterior e fazendo as manipulações algébricas necessárias, chega-se na seguinte equação quadrática:

$$A \delta\lambda^k + B \delta\lambda^k + C = 0 \quad (2.57)$$

cuja solução fornece o valor do parâmetro de carga corretivo  $\delta\lambda^k$  procurado; A, B e C constantes cujas expressões são encontradas em Silva (2009). Nesse trabalho é encontrado um procedimento que permite a escolha do melhor valor para o parâmetro de carga entre as duas raízes solução de (2.57).

#### 2.4.2 Deslocamento Generalizado

Yang e Kuo (1994) propuseram que, nas duas etapas do processo de solução não linear (solução incremental predita e ciclo de iterações), a seguinte equação de restrição deveria ser respeitada:

$$\mathbf{C}^T \delta\mathbf{U}^k + k_1 \delta\lambda^k = \mathbf{H}^k \quad (2.58)$$

em que  $\mathbf{C}$  é uma matriz cujos elementos são constantes,  $k_1$  também é constante e  $\mathbf{H}^k$  é um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco ou trabalho externo). Em função de valores selecionados para essas variáveis, chega-se a diferentes estratégias de incremento de carga e de iteração.

Seguindo então os trabalhos de Yang e Shieh (1990), Silva (2009) e Maximiano (2012), em que são atribuídos valores para os diversos parâmetros da equação anterior na definição da solução incremental predita, escreve-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (2.59)$$

sendo o parâmetro de rigidez generalizado do sistema GSP (*Generalized Stiffness Parameter*) dado por:

$$\text{GSP} = \frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T)^1\delta\mathbf{U}_r}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T)\delta\mathbf{U}_r} \quad (2.60)$$

Nas duas equações anteriores, o subscrito e sobrescrito 1 estão relacionados com o primeiro passo de carga; já o sobrescrito t representa a última configuração de equilíbrio.

Durante o ciclo iterativo, seguindo recomendação de Yang e Kuo (1994), é assumido que a seguinte expressão deve ser considerada para a correção do parâmetro de carga ao longo do processo de solução não linear:

$$\delta\lambda^k = -\frac{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T\delta\mathbf{U}_g^k}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T\delta\mathbf{U}_r^k} \quad (2.61)$$

A dedução da equação anterior pode também ser encontrada em Silva (2009) e Maximiano (2012).

Por fim, note que o sinal do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , nas Equações (2.53), (2.54) e (2.59), pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância para o sucesso da estratégia de incremento de carga. Este trabalho seguiu os critérios de escolha do sinal implementados no sistema CS-ASA, que estão bem definidos em Silva (2009).

### 2.4.3 Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais

A metodologia de solução não linear proposta por Chan (1988) não faz nenhuma restrição em relação à estratégia de incremento de carga a ser seguida, de forma que qualquer das Equações (2.54) e (2.59) pode ser empregada. Entretanto, Chan propõe uma estratégia de iteração que, ao invés de se usar restrições geométricas e de energia, procura eliminar diretamente os deslocamentos residuais (ou deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas. Vale ressaltar que esse é o objetivo principal do ciclo iterativo.

Para implementar a estratégia proposta, escreve-se a componente j do vetor de deslocamentos residuais  $\delta\mathbf{U}$  (Equação (2.47)) em uma dada iteração k na forma:

$$e_j = \delta\mathbf{U}^k(j) = \delta\mathbf{U}_g^k(j) + \delta\lambda\delta\mathbf{U}_r^k(j) \quad (2.62)$$

sendo  $e_j$  definido como um dado erro. Chan então propôs que a condição de mínimos quadrados desse erro, para um sistema de  $m$  graus de liberdade, poderia ser expressa de acordo com:

$$\frac{d\left(\sum_{j=1}^m (e_j)^2\right)}{d\delta\lambda^k} = 0 \quad (2.63)$$

Escrevendo a equação anterior de uma forma mais adequada:

$$\frac{d(\delta\mathbf{U}^{Tk}\delta\mathbf{U}^k)}{d\delta\lambda^k} = 0 \quad (2.64)$$

substituindo a Equação (2.46) em (2.64), e em seguida fazendo derivada em relação a  $\delta\lambda$ , chega-se à expressão procurada para corrigir o parâmetro de carga:

$$\delta\lambda = -\frac{\delta\mathbf{U}_r^{Tk}\delta\mathbf{U}_g^k}{\delta\mathbf{U}_r^{Tk}\delta\mathbf{U}_r^k} \quad (2.65)$$

# Capítulo 3

## Modelagem da Estrutura e da Base Elástica via MEF

### 3.1 Introdução

A metodologia geral de solução numérica apresentada no capítulo anterior pode ser empregada na análise linear e não linear de problemas estruturais (ou sistemas de suporte) com restrições bilaterais de contato.

É de interesse deste trabalho, entretanto, aplicar a formulação apresentada ao caso particular de problemas envolvendo barras, como vigas e colunas, em contato com uma fundação elástica. Dentre as formulações geometricamente não lineares de elemento de viga-coluna existentes no CS-ASA (Silva, 2009), foi utilizada a formulação SOF-1 (*Second-Order Formulation 1*) na maioria das modelagens das estruturas dos exemplos do Capítulo 4. O que significa a adoção do elemento finito não linear idealizado por Alves (1995), que já foi bastante testado e usado por Silva (2009), Galvão (2000) e Silveira (1995) em várias análises estáticas e dinâmicas. Apresenta-se na próxima seção, Seção 3.2, um resumo dos fundamentos da teoria não linear desse elemento finito, em que a atenção é direcionada à obtenção da sua matriz de rigidez e seu vetor das forças internas.

Na Seção 3.3 estão os modelos de bases elástica adotados neste trabalho para representar o solo, ou qualquer meio elástico, em contato com a estrutura. Modelos de bases contínuos e discretos são considerados. No caso dos modelos contínuos, a atenção é voltada às aproximações de Winkler e Pasternak (Pereira, 2003; Silva, 1998). Por fim, serão definidos a matriz de rigidez e o vetor das forças internas do elemento finito usado para representar essas fundações.

## 3.2 Modelagem da Estrutura

Como já destacado no capítulo anterior, a não linearidade geométrica está presente na teoria da elasticidade tanto nas equações de equilíbrio (definidas utilizando-se a configuração deformada do corpo), quanto nas relações deformação-deslocamento. A formulação do elemento finito apresentada a seguir baseia-se na teoria de Euler-Bernoulli, na qual se considera que:

- i. a seção transversal do elemento permanece plana após a flexão (deformação) e se mantém perpendicular à direção local do eixo deformado;
- ii. não se considera a variação na altura da seção transversal durante o processo de deformação da viga;
- iii. o eixo horizontal do sistema de referência da viga intercepta os centroides das seções transversais.

Adicionalmente:

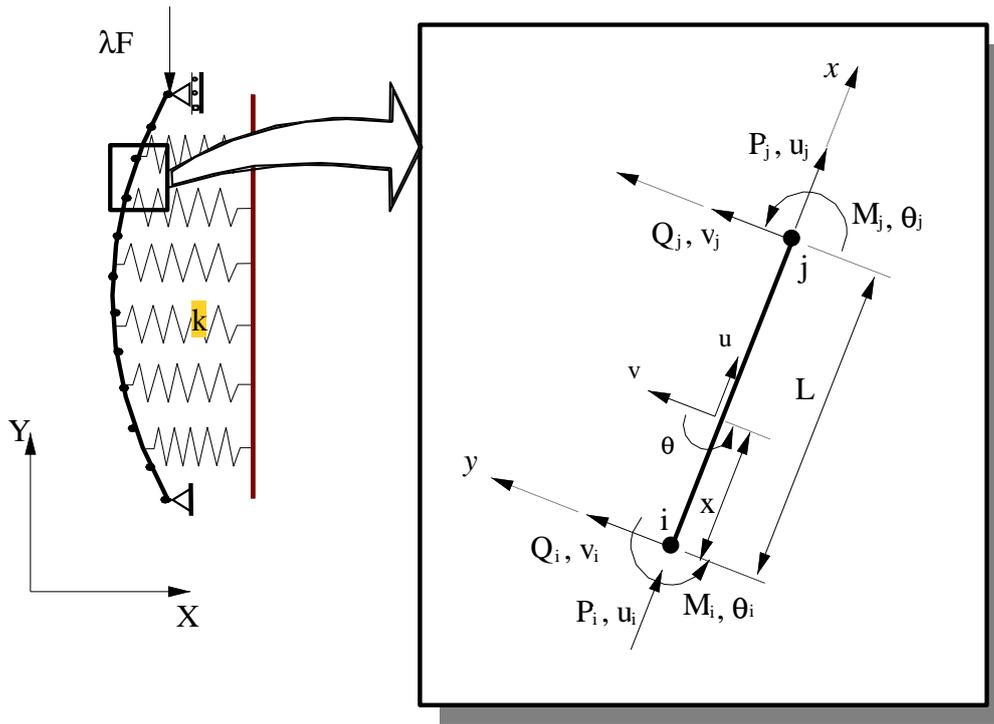
- iv. as tensões e deformações do membro são assumidas pequenas, mas grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos;
- v. é desprezado o encurtamento axial devido à flexão no membro.

O elemento de viga-coluna adotado é apresentado na Figura 3.1. Trata-se de um elemento reticulado plano limitado pelos nós  $i$  e  $j$ , que se deforma no plano da estrutura. Cada um desses pontos nodais possui três graus de liberdade, que são os deslocamentos axial,  $u$ , transversal,  $v$ , e uma rotação,  $\theta$ . As forças nodais também estão indicadas nessa figura.

De acordo com Alves (1995) e Silveira (1995), o tensor de Green-Lagrange na sua forma completa é a representação mais fiel e adequada para a relação deformação-deslocamento envolvendo grandes deslocamentos e rotações. Assim, considerando as deformações axiais incrementais desse tensor, tem-se:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta \bar{u}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

em que  $\Delta \bar{u}$  é o deslocamento axial de um ponto distante  $y$  da linha neutra da seção, e  $\Delta v$  é o deslocamento transversal desse ponto.



**Figura 3.1** Elemento de viga-coluna adotado para discretizar a estrutura.

Como proposto pela teoria de vigas, as seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a deformação, como ilustrado na Figura 3.2. Escreve-se então:

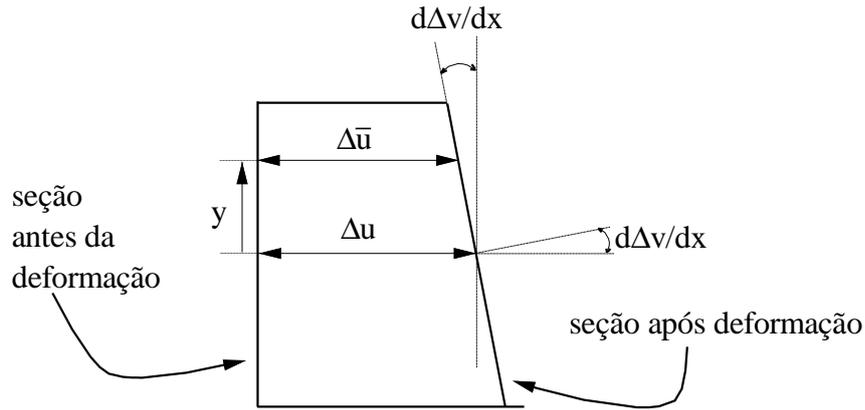
$$\Delta \bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (3.2)$$

com  $\Delta u$  sendo o deslocamento axial resultante do esforço extensional atuante, que é constante ao longo da seção; e a parcela  $y(d\Delta v/dx)$  é devida aos esforços de flexão que variam linearmente com a distância  $y$  da linha neutra. Ao substituir (3.2) em (3.1), e fazendo as manipulações algébricas necessárias, chega-se a:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

sendo que a parcela que representa a componente linear do tensor de Green-Lagrange,  $\Delta \epsilon_{xx}$ , é definida por:

$$\Delta \epsilon_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \quad (3.4)$$



**Figura 3.2** Comportamento da seção transversal do elemento finito (Silveira, 1995).

e a componente não linear, como:

$$\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

Substituindo em (3.3) as funções de interpolação convencionais para o elemento de viga-coluna (Alves, 1995), que serão apresentadas mais adiante, constatam-se dois problemas:

- i. quando o elemento finito sofre movimentos de translação e rotação de corpo rígido, nota-se o aparecimento de deformações para o caso de rotação, que deveriam ser nulas. Conclui-se, então, que as funções de interpolação usadas só descrevem perfeitamente translações de corpo rígido. O aparecimento de deformação para as rotações de corpo rígido se deve à admissão de  $\Delta\theta = d\Delta v/dx$  no cálculo das funções de interpolação, que só é válida para pequenas rotações;
- ii. com intuito de simplificar, foram adotadas, como será visto, apenas funções lineares para aproximar o deslocamento axial  $\Delta u$ . Rigorosamente, baseando-se em (3.2), e com  $\Delta v$  assumido cúbico, dever-se-ia adotar uma aproximação de quinto grau para  $\Delta u$  de modo a balancear as funções, de modo a garantir a representação da deformação de membrana constante e, em particular, obter deformação de membrana nula associada a problemas de flexão inextensional (Crisfield, 1991).

Visando suavizar os efeitos dessas incompatibilidades, alguns procedimentos foram sugeridos por Alves (1995) e implementados por Silveira (1995), Galvão (2000) e Silva

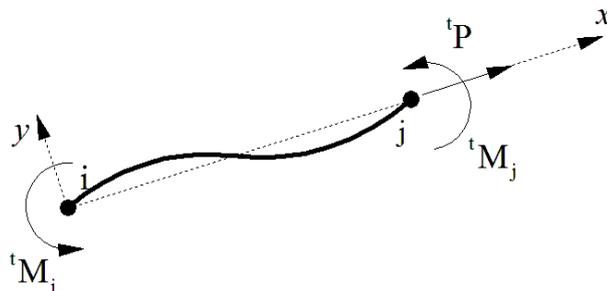
(2009). Um deles é utilizar uma formulação em *referencial Lagrangiano atualizado*. Outro procedimento é estabelecer o cálculo das forças internas levando em consideração a mudança de geometria do elemento. Para contornar a impossibilidade de representação de deformação de membrana uniforme, ou nula (caso os deslocamentos nodais do elemento sejam compatíveis com esse tipo de deformação), seguindo a sugestão feita por Crisfield (1991) e Alves (1995), é considerado um valor médio da parcela  $(d\Delta v/dx)^2$  no último termo da Equação (3.3), ou seja:

$$\frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 dx \quad (3.6)$$

Como já mencionado no capítulo anterior, assume-se que a solução para as variáveis estáticas e cinemáticas é conhecida na configuração de equilíbrio  $t$  (configuração de referência), e que se deseja calcular a solução para a configuração  $t+\Delta t$ . É importante então, que se conheça, para o elemento finito considerado, o estado de tensões ou de deformações em  $t$ . Assim, assume-se que deformação na configuração  $t$  seja dada pela expressão:

$${}^t\varepsilon = \frac{{}^tP}{EA} + \frac{y}{EI} \left[ {}^tM_i - \frac{({}^tM_i - {}^tM_j)}{L} x \right] \quad (3.7)$$

sendo o produto  $EA$  a rigidez axial do elemento; o produto  $EI$  é a rigidez de flexão; e,  $P$ ,  $M_i$  e  $M_j$  são, respectivamente, a força axial e os momentos fletores que atuam no elemento finito nessa configuração de equilíbrio, como ilustrado na Figura 3.3.



**Figura 3.3** Força axial e momentos fletores na configuração de equilíbrio  $t$ .

Para o elemento finito considerado, utilizando as relações cinemáticas (3.3), (3.4) e (3.5), e assumindo um comportamento linear elástico para a estrutura e base elástica, isto é,

$\Delta S_{xx} = E \Delta \epsilon_{xx}$ ,  ${}^t\sigma = E {}^t\epsilon$  e  $\Delta r_b = C_b \Delta u_b$ , obtém-se, a partir da Equação (2.14), a seguinte expressão do funcional  $\Pi$  em termos de energia de deformação:

$$\Pi = U_0 + U_L + U_\sigma + U_1 + U_2 + U_b - \int_{{}^0S_f} F_i \Delta u_i d{}^0S_f + \int_{{}^tS_c} {}^t r_b \Delta u_b {}^t S_f \quad (3.8)$$

que para o elemento considerado:

$$U_0 = \int_{{}^tV} E {}^t\epsilon_{xx} \Delta e_{xx} {}^t dV \quad (3.9a)$$

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{{}^tV} E \Delta e_{xx}^2 {}^t dV \quad (3.9b)$$

$$U_\sigma = \int_{{}^tV} E {}^t\epsilon_{xx} \Delta \eta_{xx} {}^t dV \quad (3.9c)$$

$$U_1 = \int_{{}^tV} E \Delta e_{xx} \Delta \eta_{xx} {}^t dV \quad (3.9d)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{{}^tV} E \Delta \eta_{xx}^2 {}^t dV \quad (3.9e)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{{}^{t+\Delta t}S_c} C_b \Delta u_b^2 {}^{t+\Delta t} dS_c \quad (3.9f)$$

A energia de deformação  $U_0$  está associada ao estado de tensão existente na configuração  $t$ , e pode ser eliminada ao se considerar como verdadeira a igualdade  $U_0 = \int_s {}^t F_1 \Delta u_i {}^0 dS_s$ ; o termo energético  $U_L$  é responsável pela parcela linear da matriz de rigidez;  $U_\sigma$  decorre da influência das deformações iniciais e originará a matriz geométrica ou matriz das tensões iniciais;  $U_1$  e  $U_2$  darão origem às matrizes de rigidez que são funções lineares e quadráticas dos deslocamentos nodais incrementais, respectivamente; por fim, termo  $U_b$  está associado à energia de deformação da base elástica (na Seção 3.3 esse termo será definido para alguns modelos de bases elásticas).

No contexto do MEF, os deslocamentos incrementais  $\Delta u$  e  $\Delta v$  ao longo do eixo  $x$  podem ser relacionados aos deslocamentos nodais do elemento. Como já comentado, considera-se, de forma simplificada, uma função linear para aproximar o deslocamento axial

$\Delta u$ , porém, para o deslocamento transversal  $\Delta v$  utiliza-se uma função do terceiro grau. Dessa forma, escreve-se:

$$\Delta u = H_1 \Delta u_i + H_2 \Delta u_j \quad (3.10a)$$

$$\Delta v = H_3 \Delta v_i + H_4 \Delta \theta_i + H_5 \Delta v_j + H_6 \Delta \theta_j \quad (3.10b)$$

em que  $H_j$ , ( $j = 1,6$ ) descrevem as funções de interpolação dadas por:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.11a)$$

$$H_2 = \frac{x}{L} \quad (3.11b)$$

$$H_3 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.11c)$$

$$H_4 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.11d)$$

$$H_5 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.11e)$$

$$H_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.11f)$$

De acordo com Alves (1995) e Silveira (1995), consegue-se exprimir o funcional de energia em função dos deslocamentos incrementais e das forças nodais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = \Delta \hat{\mathbf{u}}^T & \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K}_L^e + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\sigma^e + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1^e(\Delta \hat{\mathbf{u}}) + \frac{1}{24} \mathbf{K}_2^e(\Delta \hat{\mathbf{u}}, \Delta \hat{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_b^e \right] \Delta \hat{\mathbf{u}} + \\ & + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T {}^t \mathbf{F}_{ie}^e + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T {}^t \mathbf{F}_{ib}^e - \Delta \hat{\mathbf{u}}^T {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{R}_r^e \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo  $\Delta \hat{\mathbf{u}}^T = \{\Delta u_i \ \Delta v_i \ \Delta \theta_i \ \Delta u_j \ \Delta v_j \ \Delta \theta_j\}$  o vetor de deslocamentos nodais incrementais; os vetores  ${}^t \mathbf{F}_{ie}^e$  e  ${}^t \mathbf{F}_{ib}^e$  caracterizam forças internas nodais da estrutura e da base elástica, respectivamente, na configuração de equilíbrio  $t$ ; e  ${}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{R}_r^e$  representa o vetor das forças externas nodais totais.

As componentes das matrizes de rigidez em (3.12) podem ser obtidas diretamente da energia de deformação, ou seja (Silva, 2009; Galvão, 2000; Silveira, 1995; Alves, 1995):

$$\mathbf{k}_{L(i,j)} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{k}_{\sigma(i,j)} = \frac{\partial^2 U_\sigma}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (3.13b)$$

$$\mathbf{k}_{I(i,j)} = \frac{\partial^3 U_I}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j \partial \Delta u_k} \Delta u_k \quad (3.13c)$$

$$\mathbf{k}_{2(i,j)} = \frac{\partial^4 U_2}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j \partial \Delta u_k \partial \Delta u_l} \Delta u_k \Delta u_l \quad (3.13d)$$

$$\mathbf{k}_{b(i,j)} = \frac{\partial^2 U_b}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \quad (3.13e)$$

Levando-se em conta agora a contribuição de todos os elementos finitos do sistema estrutura-base, sem esquecer a necessidade que o somatório dos vetores e matrizes seja realizado em um referencial comum, chega-se a uma expressão similar à (3.12), mas agora para todo o sistema. Da condição de equilíbrio do sistema, isto é, da condição de estacionaridade de  $\bar{\Pi}$ , chega-se na expressão matricial da equação que deve ser satisfeita na configuração de equilíbrio  $t+\Delta t$ , isto é:

$$\left[ \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta U) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta U, \Delta U) + \mathbf{K}_b \right] \Delta U + {}^t \mathbf{F}_{ie} + {}^t \mathbf{F}_{ib} = {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{R}_r \quad (3.14)$$

que é equivalente à Equação (2.24) do capítulo anterior. Veja que é possível reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$${}^{\Delta t} \mathbf{F}_{ie}(\Delta U) + {}^{\Delta t} \mathbf{F}_{ib}(\Delta U) + {}^t \mathbf{F}_{ie} + {}^t \mathbf{F}_{ib} = {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{R}_r \quad (3.15)$$

com:

$${}^{\Delta t} \mathbf{F}_{ie} = \left[ \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta U) + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\Delta U, \Delta U) \right] \Delta U \quad (3.16)$$

$${}^{\Delta t} \mathbf{F}_{ib} = \mathbf{K}_b \Delta U \quad (3.17)$$

sendo os vetores de forças internas incrementais da estrutura e da base elástica, respectivamente. A Equação (3.15) pode ainda ser reescrita da seguinte forma (ver Equação (2.25)):

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_{is}(\Delta\mathbf{U}) + {}^t\mathbf{F}_{is} = {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{R}_r \quad (3.18)$$

em que  ${}^{\Delta t}\mathbf{F}_{is}$  é o vetor das forças internas incrementais do sistema estrutural (estrutura-base elástica) a ser determinado; e  ${}^t\mathbf{F}_{is}$  é o vetor das forças internas do sistema estrutural na configuração de equilíbrio  $t$ , que é conhecido.

A Equação (3.14), ou mesmo (3.18), representa um sistema de equações algébricas não lineares que deve ser resolvido seguindo a estratégia incremental-iterativa apresentada no capítulo anterior.

Para o sistema estrutural em estudo, a sua matriz de rigidez pode ser definida derivando-se mais uma vez (3.14) em relação a  $\Delta\mathbf{U}$ . Com esse procedimento, chega-se a:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{U}) + \frac{1}{6}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{U}) + \mathbf{K}_b \quad (3.19a)$$

ou,

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_b \quad (3.19b)$$

em que  $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{U})/2 + \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{U})/6$  e  $\mathbf{K}_b$  são as matrizes de rigidez da estrutura e da base elástica, respectivamente.

No sentido de diminuir a influência de modos espúrios de deformação — que faz com que apareça forças indevidas devido à deslocamentos de corpo rígido —, Galvão (2000) e Silva (2009) adotaram um procedimento adicional no processo de avaliação do vetor das forças internas da estrutura. Eles utilizaram os chamados deslocamentos naturais incrementais  $\Delta\hat{\mathbf{u}}_n$ . Esses deslocamentos são os que realmente causam deformação no elemento, e suas componentes, que são definidas a seguir, podem ser vistas na Figura 3.4:

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}_n^T = [0 \quad 0 \quad \phi_i \quad \delta \quad 0 \quad \phi_j] \quad (3.20a)$$

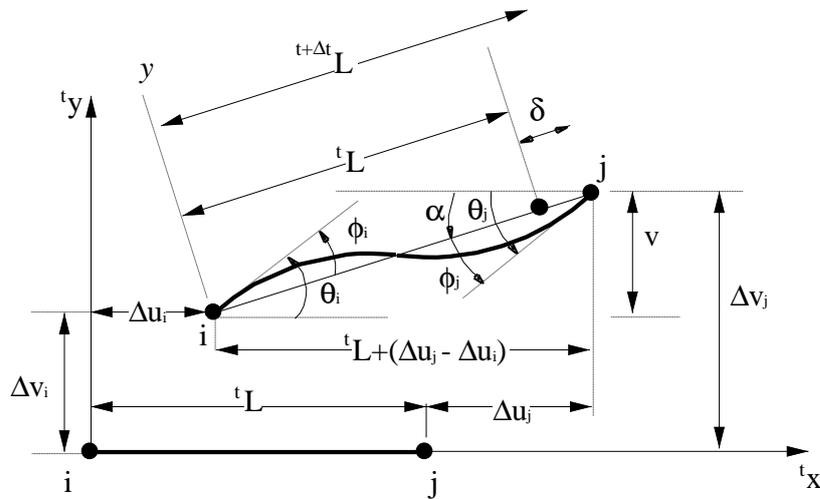
$$\delta = {}^{t+\Delta t}\mathbf{L} - {}^t\mathbf{L} \quad (3.20b)$$

$$\phi_i = \Delta\theta_i - \alpha \quad (3.20c)$$

$$\phi_j = \Delta\theta_j - \alpha \quad (3.20d)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[ \frac{(\Delta v_j - \Delta v_i)}{{}^tL} \right] \quad (3.20e)$$

Vale ressaltar que os deslocamentos naturais incrementais,  $\Delta\hat{\mathbf{u}}_n$ , são utilizadas apenas na força interna da estrutura. Para as forças internas da base,  $\mathbf{F}_{ib}$ , utilizam-se o deslocamentos nodais incrementais  $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ .



**Figura 3.4** Deslocamentos naturais  $\delta$ ,  $\phi_i$  e  $\phi_j$  do elemento finito considerado.

### 3.3 Modelagem da Base Elástica

Como já relatado, quando a atenção ou interesse da resposta da base elástica é voltado apenas para a região de contato entre os corpos, é possível utilizar modelos mais simples para representá-la (Silveira, 1995; Silva, 1998). Nas próximas subseções são apresentados os modelos matemáticos para as bases elásticas adotados neste trabalho. São modelos que podem ser definidos com um ou dois parâmetros elásticos. No caso dos modelos com um parâmetro, apresenta-se inicialmente o modelo discreto formado por molas que são ligadas, no contexto do MEF, aos pontos nodais da estrutura, e depois o modelo contínuo de Winkler. Na sequência, são apresentados os modelos contínuos de Pasternak e Filonenko-Borodich, que utilizam dois parâmetros. Informações adicionais sobre esses e vários outros modelos de bases elásticas podem ser encontradas nos trabalhos de Kerr (1964), Silveira (1995), Silva (1998), Pereira (2003), Mullapudi e Ayoub (2009) e Shen (2011).

### 3.3.1 Modelo de Molas Discretas

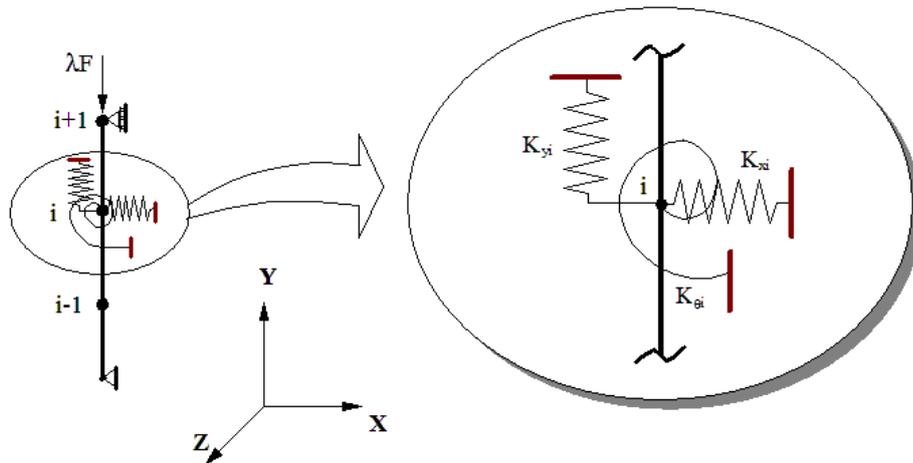
Como ilustrado na Figura 3.5, esse modelo de base elástica é representado por molas discretas que, no contexto do MEF, podem ser conectadas ou ligadas aos pontos nodais da estrutura. Para o ponto nodal  $i$  do modelo, por exemplo, a intensidade da reação de cada mola é diretamente proporcional ao deslocamento ou rotação da mola nesse nó, ou seja:

$$R_{bx_i} = K_{x_i} U_i \quad (3.21a)$$

$$R_{by_i} = K_{y_i} V_i \quad (3.21b)$$

$$M_{b\theta_i} = K_{\theta_i} \theta_i \quad (3.21c)$$

em que  $U_i$ ,  $V_i$  e  $\theta_i$  são os deslocamentos nodais da estrutura no ponto nodal  $i$ , e  $K_{x_i}$ ,  $K_{y_i}$  e  $K_{\theta_i}$  são os parâmetros de rigidez das molas conectadas a esse mesmo ponto.



**Figura 3.5** Base elástica modelada por molas discretas.

Considerando as relações anteriores, pode-se escrever a energia interna de deformação armazenada pela base, associada a essas molas no ponto nodal genérico  $i$  como:

$$U_{bi} = \frac{1}{2} K_{x_i} U_i^2 + \frac{1}{2} K_{y_i} V_i^2 + \frac{1}{2} K_{\theta_i} \theta_i^2 \quad (3.22)$$

A expressão (3.13e) pode ser aplicada considerando os deslocamentos nodais do sistema global, de forma que, usando a equação anterior, encontram-se as componentes da matriz de rigidez desse modelo discreto, que podem ser organizadas da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{bi} = \begin{bmatrix} K_{Xi} & 0 & 0 \\ 0 & K_{Yi} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta i} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Note que  $\mathbf{K}_{bi}$  é a contribuição de rigidez da base elástica associada ao ponto nodal  $i$ . Se for considerada a contribuição de todos os pontos nodais com molas discretas, chega-se na matriz de rigidez global da base elástica  $\mathbf{K}_b (= \sum_i \mathbf{K}_{bi})$ , que é uma matriz diagonal. Essa matriz pode ser somada diretamente à matriz de rigidez da estrutura para formar a matriz de rigidez do sistema, como mostrado pela Equação (3.19b).

Para esse modelo de fundação, o vetor de forças internas nodais incrementais pode ser obtido diretamente através da Equação (3.17), que é escrita novamente abaixo:

$${}^{\Delta t} \mathbf{F}_{ib} = \mathbf{K}_b \Delta \mathbf{U} \quad (3.24)$$

As componentes diagonais nulas de  $\mathbf{K}_b$  estão associadas às deslocabilidades dos pontos nodais do modelo sem restrições impostas pelas molas.

### 3.3.2 Modelo de Winkler

Trata-se de um modelo matemático bastante utilizado por pesquisadores e engenheiros para aproximar o comportamento da base elástica. Dentre as referências encontradas na literatura que trazem aplicações desse modelo de base, merecem destaque: o livro clássico do Hetényi (1946), que fornece a solução de vários problemas de contato bilateral envolvendo barras e fundações elásticas; as dissertações de Silva (1998) e Pereira (2003), no âmbito do PROPEC/Deciv/EM/UFOP; e os trabalhos recentemente publicados pelo orientador deste trabalho, com destaque para Silveira *et al.* (2008a; 2008b; 2012). Nesse último, Silveira *et al.* (2012), pode ser encontrada diversas referências que utilizaram as hipóteses de Winkler nas suas modelagens.

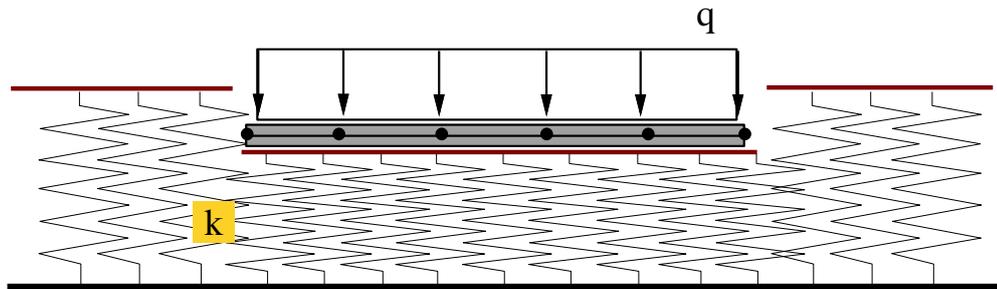
Como ilustrado na Figura 3.6a, e já no contexto do MEF, o modelo contínuo de Winkler assume que a base elástica possa ser representada como um conjunto de molas independentes estreitamente espaçadas, e que apenas um parâmetro é necessário para definir o comportamento (ou rigidez) dessas molas. Esse parâmetro é definido aqui como o parâmetro de rigidez elástico  $k$ . O modelo de Winkler é equivalente a uma fundação líquida.

Para um elemento genérico “e” do modelo estrutural em contato com a base elástica considerado (Figura 3.6b), pode-se escrever a seguinte relação envolvendo o incremento de

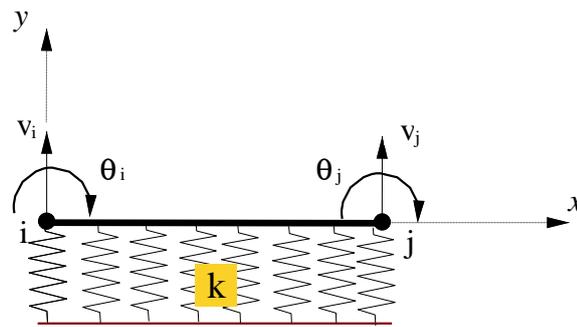
reação da base  $\Delta r_b$  e o incremento de deslocamento  $\Delta u_b$  em qualquer ponto desse elemento:

$$\Delta r_b = k \Delta u_b \quad (3.25)$$

A expressão anterior é a relação constitutiva a ser adotada para uma fundação que se comporte segundo idealização de Winkler (ver Equação (2.6)).



a) Base elástica representada pelo modelo de Winkler.



b) Elemento genérico "e".

**Figura 3.6** Viga sobre uma base elástica representada pelo modelo de Winkler.

Ainda para esse elemento finito genérico “e”, tem-se que sua energia interna de deformação  $U_b$  é dada por:

$$U_b = \frac{k}{2} \int_0^L \Delta u_b^2 dx \quad (3.26)$$

em que o parâmetro de rigidez  $k$  é considerado constante; e  $L$  é o comprimento do elemento finito considerado (ver Figura 3.6). Já o incremento de deslocamento  $\Delta u_b$  pode se relacionar com os valores nodais desse elemento  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b$  através de (2.21), que é reescrita a seguir:

$$\Delta u_b = \mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.27)$$

com  $\mathbf{B}_b$  sendo a matriz que contém as funções de interpolação do elemento da base. Essas funções são iguais às funções de interpolação de Hermite (3.11c-f), e são organizadas em  $\mathbf{B}_b$  da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_b^T = [0 \quad H_3 \quad H_4 \quad 0 \quad H_5 \quad H_6] \quad (3.28)$$

Observe que ao substituir (3.27) em (3.26), e sabendo que  $\mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b = \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{B}_b^T$ , chega-se na seguinte forma discreta da energia interna de deformação da base:

$$U_b = \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_b^e \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.29)$$

com  $\mathbf{K}_b^e$  sendo a matriz de rigidez da base para o elemento considerado, cuja expressão geral é dada por (ver Equação 2.31):

$$\mathbf{K}_b^e = k \int_0^L \mathbf{B}_b^T \mathbf{B}_b \, dx \quad (3.30)$$

Note que a Equação (2.31) traz a expressão dessa matriz para um elemento finito qualquer. Ao substituir (3.28) na equação anterior, e em seguida realizando as integrações necessárias, chega-se nas componentes dessa matriz de rigidez da base, ou seja:

$$\begin{aligned} k_{b(2,2)} = k_{b(5,5)} = \frac{13kL}{35}; \quad k_{b(2,3)} = -k_{b(5,6)} = \frac{11kL^2}{210}; \quad k_{b(2,5)} = \frac{9kL}{70}; \\ k_{b(2,6)} = -k_{b(3,5)} = -\frac{13kL^2}{420}; \quad k_{b(3,3)} = k_{b(6,6)} = \frac{kL^3}{105}; \quad e \quad k_{b(3,6)} = -\frac{kL^3}{140} \end{aligned} \quad (3.31a)$$

que estão organizados na matriz como segue:

$$\mathbf{K}_b^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{b(2,2)} & k_{b(2,3)} & 0 & k_{b(2,5)} & k_{b(2,6)} \\ & & k_{b(3,3)} & 0 & k_{b(3,5)} & k_{b(3,6)} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \textit{Simétrica} & & & k_{b(5,5)} & k_{b(5,6)} \\ & & & & & k_{b(6,6)} \end{bmatrix} \quad (3.31b)$$

Em (3.31a),  $L$  é o comprimento do elemento finito considerado.

Para o sistema estrutural em estudo, ao se considerar o modelo de Winkler e os elementos que definem a região ou regiões de contato entre os corpos elásticos, tem-se que a

contribuição da base elástica para as forças internas nodais incrementais é dada pela Equação (3.17). Para o elemento, pode-se reescrever (3.17) da seguinte forma:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e = \mathbf{K}_b^e \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.32)$$

em que  $\Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e$  é o vetor das forças internas incrementais do elemento da base. Considerando a soma da contribuição de todos os elementos que fazem parte das regiões de contato entre os corpos, chega-se no vetor de forças internas nodais incrementais cuja participação da fundação é dada por:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib} = \sum_{mc} \Gamma^{eT} \Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e \quad (3.33)$$

sendo  $\Gamma^e$  a matriz de rotação usada na transformação das forças internas do sistema local do elemento para o sistema global de coordenadas; e mc define o número de elementos na região de contato.

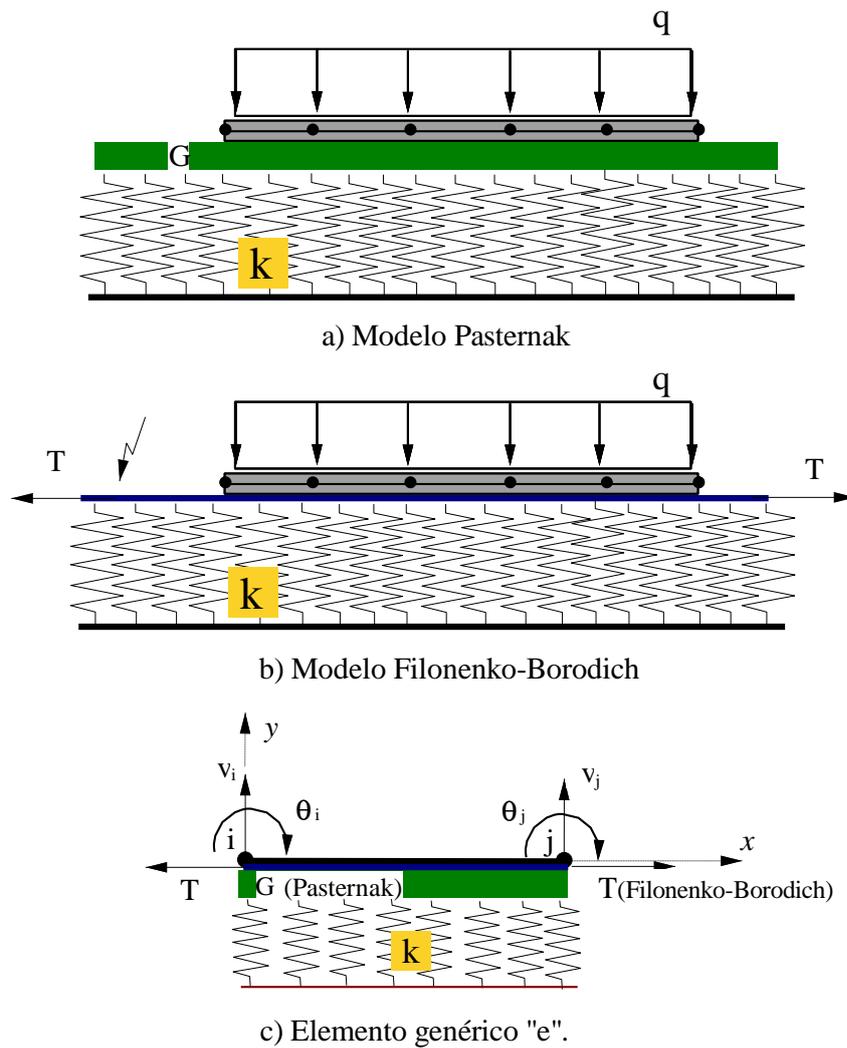
### 3.3.3 Modelos de Pasternak e Filonenko-Borodich

São modelos idealizados no sentido de melhorar a aproximação proposta por Winkler. Na realidade, eles procuram estabelecer certa interação entre as molas usadas no modelo de Winkler, introduzindo um parâmetro de rigidez adicional a ser empregado. Kerr (1964), Naidu e Rao (1995), Silva (1998), Horibe e Asano (2001), Kien (2004), Mullapudi e Ayoub (2009) e Shen (2011) são exemplos de trabalhos que utilizam esses modelos para representar a fundação elástica.

O modelo de Pasternak assume que as molas estão conectadas por uma camada incompressível, como ilustrada na Figura 3.7a, que se deforma apenas sob tensões de cisalhamento. Para esse caso, o incremento da reação da base é dado por:

$$\Delta \mathbf{r}_b = k \Delta \mathbf{u}_b - G \nabla^2 \Delta \mathbf{u}_b \quad (3.34)$$

em que, como no modelo de Winkler,  $k$  é o parâmetro de rigidez elástico transversal da base, e  $G$  é o parâmetro de rigidez cisalhante da camada.



**Figura 3.7** Estruturas sobre base elástica com dois parâmetros.

Já o modelo de Filonenko-Borodich considera que, para se atingir certo grau de interação entre as molas, deve-se assumir que suas extremidade superiores, como apresentado na Figura 3.7b, sejam conectadas por uma membrana esticada e dessa forma sujeita a um campo constante de tração  $T$ . Assim, a relação incremental força-deslocamento para esse modelo de base é dada por:

$$\Delta r_b = k \Delta u_b - T \nabla^2 \Delta u_b \quad (3.35)$$

Para esses modelos com dois parâmetros, a energia interna de deformação, para o elemento finito “e” considerado (ver Figura 3.7), pode ser genericamente definida através da seguinte expressão:

$$U_b = \frac{k_1}{2} \int_0^L \Delta u_b^2 dx + \frac{k_2}{2} \int_0^L \left( \frac{d\Delta u_b}{dx} \right)^2 dx \quad (3.36)$$

com a constante  $k_1$  sendo equivalente ao parâmetro de rigidez elástico transversal  $k$  na Equação (3.34) ou (3.35); e  $k_2$  é o parâmetro que considera a iteração entre as molas, sendo igual a  $G$ , quando se considera o modelo de Pasternak ou igual a  $T$ , quando o modelo de base adotado é o de Filonenko-Borodich.

Como na seção anterior, assume-se, para o elemento genérico “e” considerado, que o incremento de deslocamento  $\Delta u_b$  pode se relacionar com os valores nodais desse elemento  $\Delta \hat{u}_b$  através de (3.27), e sabendo que:  $d\Delta u_b/dx = d\mathbf{B}_b/dx \Delta \hat{u}_b$ ;  $\mathbf{B}_b \Delta \hat{u}_b = \Delta \hat{u}_b^T \mathbf{B}_b^T$ , e  $(d\mathbf{B}_b/dx) \Delta \hat{u}_b = \Delta \hat{u}_b^T (d\mathbf{B}_b^T/dx)$ , é possível escrever expressão da energia interna de deformação da base na sua form discreta, ou seja:

$$U_b = \frac{1}{2} \Delta \hat{u}_b^T \mathbf{K}_{b1}^e \Delta \hat{u}_b + \frac{1}{2} \Delta \hat{u}_b^T \mathbf{K}_{b2}^e \Delta \hat{u}_b \quad (3.37)$$

em que  $\mathbf{K}_{b1}^e$  é a matriz de rigidez da base do modelo de Winkler, que é definida pela Equação (3.30), com componentes dadas em (3.31a); já a matriz  $\mathbf{K}_{b2}^e$  é dada por:

$$\mathbf{K}_{b2}^e = k_2 \int_0^L \mathbf{B}_{b,x}^T \mathbf{B}_{b,x} dx \quad (3.38)$$

sendo  $\mathbf{B}_{b,x}$  a derivada da função de interpolação  $\mathbf{B}_b$  em relação a  $x$ . Assim, efetuando-se essas derivadas e, em seguida, realizando a integração existente em (3.38), chegam-se nas componentes da matriz  $\mathbf{K}_{b2}^e$ , ou seja:

$$\begin{aligned} k_{b2(2,2)} = k_{b2(5,5)} &= \frac{6k_2}{5L}; k_{b2(2,3)} = -k_{b2(5,6)} = \frac{k_2}{10}; k_{b2(2,5)} = -\frac{6k_2}{5L}; \\ k_{b2(2,6)} = -k_{b2(3,5)} &= -\frac{k_2}{10}; k_{b2(3,3)} = k_{b2(6,6)} = \frac{2k_2L}{15}; k_{b2(3,6)} = -\frac{k_2L}{30} \end{aligned} \quad (3.39a)$$

que são organizadas na matriz como mostrado a seguir:

$$\mathbf{K}_{b2}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{b2(2,2)} & k_{b2(2,3)} & 0 & k_{b2(2,5)} & k_{b2(2,6)} \\ & & k_{b2(3,3)} & 0 & k_{b2(3,5)} & k_{b2(3,6)} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \textit{Simétrica} & & & k_{b2(5,5)} & k_{b2(5,6)} & \\ & & & & & k_{b2(6,6)} \end{bmatrix} \quad (3.39b)$$

Em (3.39a),  $L$  é o comprimento do elemento finito considerado.

Ainda para o modelo de base considerado, tem-se que o vetor das forças internas nodais incrementais do elemento genérico “e” é dado por:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e = (\mathbf{K}_{b1}^e + \mathbf{K}_{b2}^e) \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.40)$$

onde vale lembrar que no caso de contato bilateral:  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b = \Delta \hat{\mathbf{u}}$ . E, finalmente, como na seção anterior, ao se considerar todos os elementos que fazem parte da região de contato, chega-se então na contribuição da base elástica ao vetor de forças internas nodais incrementais, isto é:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib} = \sum_{mc} \mathbf{\Gamma}^{eT} \Delta^t \mathbf{F}_{ib}^e \quad (3.41)$$

com  $\mathbf{\Gamma}^e$ , mais uma vez, sendo a matriz de rotação usada na transformação das forças internas do sistema local do elemento para o sistema global de coordenadas; e  $mc$  definindo o número de elementos na região de contato.

# Capítulo 4

## Exemplos Numéricos

### 4.1 Introdução

Este capítulo traz algumas análises computacionais com o objetivo de validar as implementações realizadas e a metodologia numérica apresentada no Capítulo 2, e que foi particularizada no Capítulo 3 para o caso de sistemas estruturais formados por barras (vigas e colunas) com restrições bilaterais de contato impostas por bases elásticas.

Mais uma vez, vale enfatizar que este trabalho utilizou o sistema CS-ASA como base de suas implementações. Essas implementações computacionais estão relacionadas diretamente com a inclusão dos modelos de bases elásticas (ou fundações), que foram apresentados no final do capítulo anterior, no programa idealizado por Silva (2009). Dessa forma foi criado um novo módulo de análise no CS-ASA, que é aqui denominado CS-ASA/BC (*Bilateral Contact*). Esse módulo, que inclui quase todas as funcionalidades do programa original (estrutura de dados, solvers, impressão de resultados, etc.), viabilizou as análises estruturais lineares e não lineares que serão mostradas nas Seções 4.2 e 4.3 deste capítulo. Os resultados apresentados nessas duas seções serão referenciados usando a abreviatura CS-ASA/BC.

Na Seção 4.2 são feitas três análises lineares de estruturas (vigas e colunas) em contato com fundações elásticas. Esses exemplos iniciais, apesar de serem mais simples que os apresentados na Seção 4.3, permitiram o autor verificar a funcionalidade dos novos blocos de dados criados e as implementações dos modelos discreto e contínuos usados para representar a fundação. Esses exemplos permitiram também desenvolver diferentes estratégias de modelagem do sistema estrutura-base.

Na Seção 4.3 são analisados quatro sistemas estruturais geometricamente não lineares em que são incluídas as restrições bilaterais de contato. Essas análises são genericamente descritas da seguinte forma: avaliação das cargas críticas de colunas com várias condições de bordo e um apoio elástico discreto intermediário; estudo da estabilidade elástica de colunas biapoiadas em contato bilateral com fundações do tipo Winkler; análise de uma viga com grandes deslocamentos em contato com uma base do tipo Pasternak (ou Filonenko-Borodich); e, finalmente, o estudo da estabilidade de colunas com restrições impostas por bases elásticas do tipo Pasternak. Vale ressaltar que as estratégias de solução não linear apresentadas no final do Capítulo 2 foram usadas na solução desses problemas.

## **4.2 Análises Lineares**

Os problemas estruturais a serem analisados nesta seção estão ilustrados na Figura 4.1. Esses exemplos, além de ajudar o autor na verificação da funcionalidade dos novos blocos de dados criados e aferição das matrizes de rigidez dos modelos de bases elásticas, como já mencionado, servirão também para averiguar:

- i. a influência da discretização, via MEF, e dos valores do parâmetro de rigidez transversal (normal) da fundação na resposta do sistema estrutura-base;
- ii. a possibilidade de substituir o modelo contínuo de Winkler pelo modelo discreto formado por molas elásticas (Seção 4.2.1);
- iii. a possibilidade de se combinar os modelos contínuos com o modelo discreto na representação do meio no qual está inserida uma estaca-coluna parcialmente enterrada (Seção 4.2.2);
- iv. a influência da base elástica do tipo Pasternak no comportamento de uma viga com extremidades livres e com carga momento aplicada no meio do vão (Seção 4.2.3).

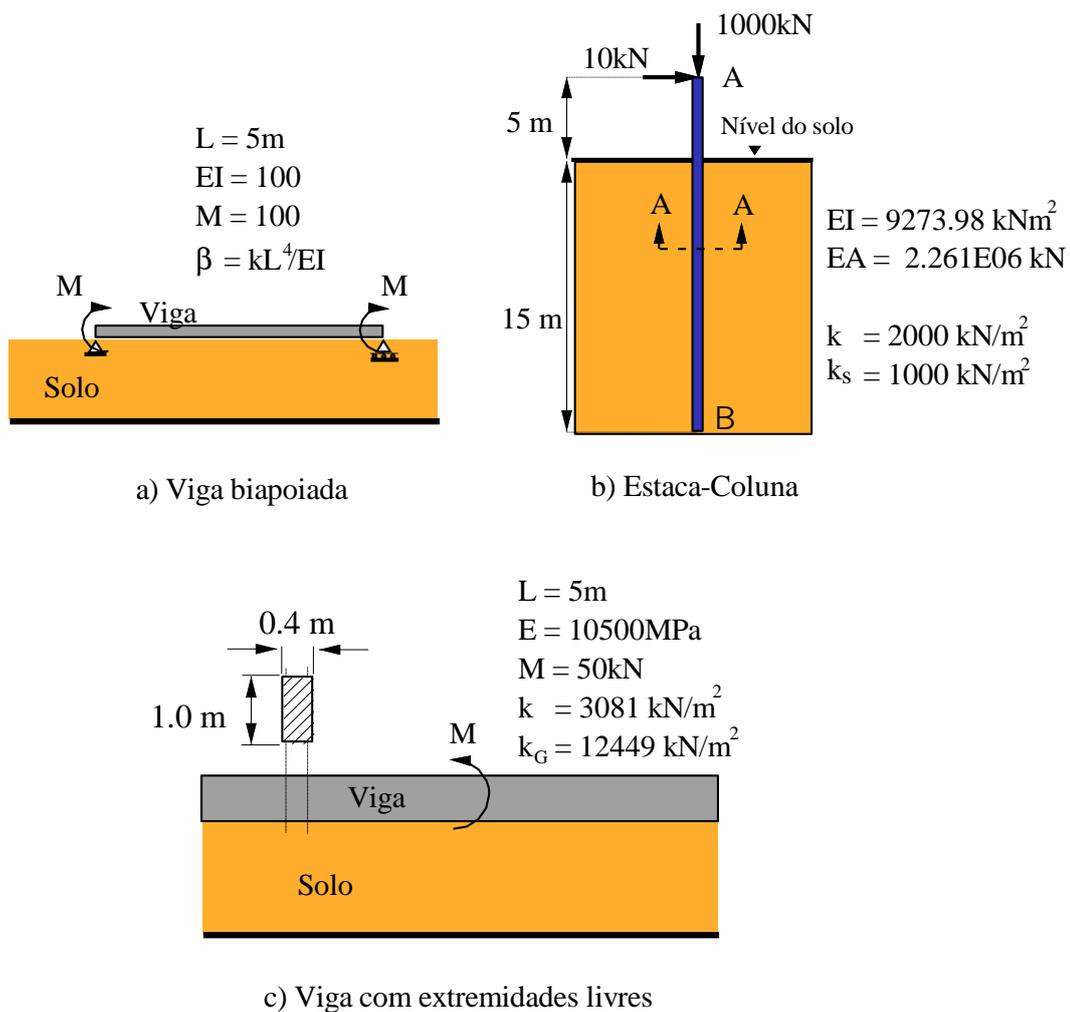


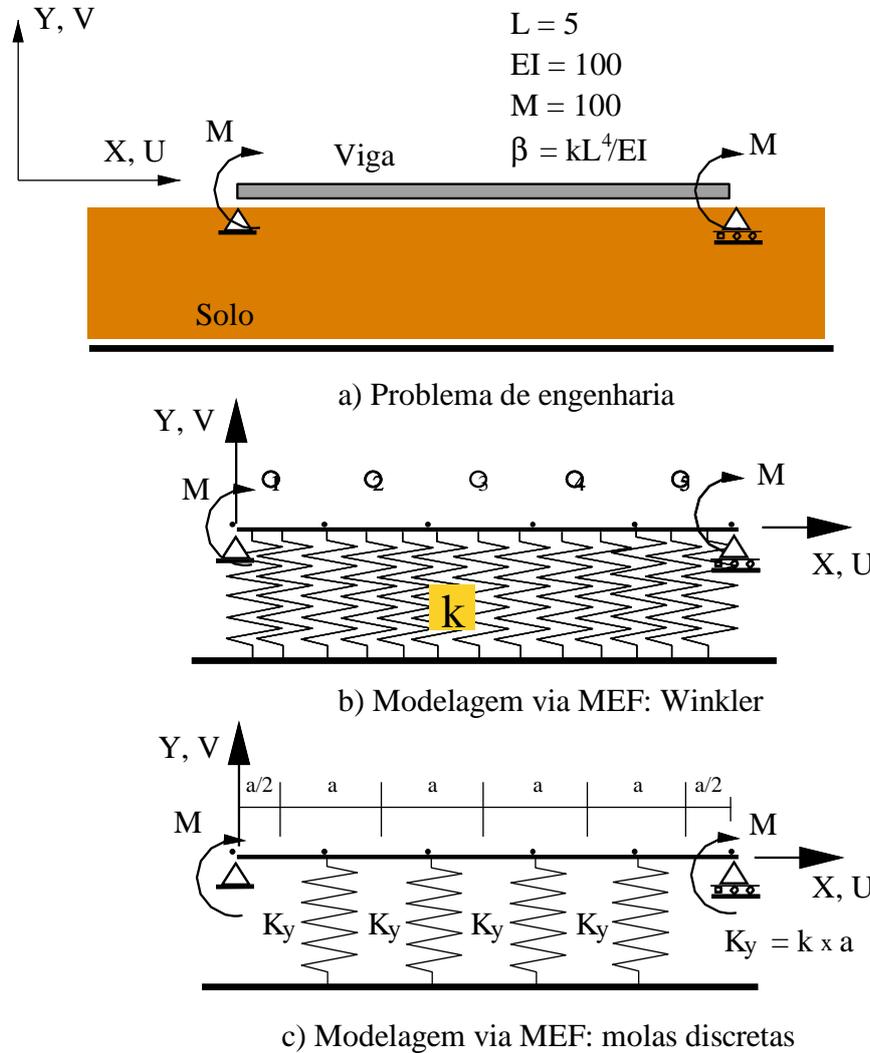
Figura 4.1 Problemas de contato bilateral: soluções lineares.

#### 4.2.1 Viga Biapoiada em Contato Bilateral com uma Base Elástica

O primeiro exemplo a ser abordado é apresentado na Figura 4.2a, onde são apresentados, adicionalmente, os valores adotados para o comprimento da barra  $L$ , para os momentos fletores  $M$  aplicados nas extremidades e para a rigidez à flexão da viga  $EI$ . Considere que esses valores adotados estejam em unidades compatíveis.

A solução analítica deste problema de contato pode ser encontrado em Hetényi (1946), ou mesmo em Pereira (2003), que considerou a rigidez da base sendo definida pelo parâmetro adimensional  $\beta = kL^4/EI$ . Esse último trabalho também apresenta resultados numéricos baseados no MEF; já Silveira *et al.* (2008a) modelou esse problema através do método de Ritz; e, mais recentemente, Sapountzakis e Kampitsis (2010) usou o método dos elementos de

contorno (MEC). Nesses trabalhos, uma base do tipo Winkler foi considerada na modelagem do solo ou meio em contato com a estrutura, como pode ser visto na Figura 4.2b.



**Figura 4.2** Viga biapoçada em contato bilateral com uma fundação elástica.

A Tabela 4.1 apresenta a solução analítica, para diferentes valores do parâmetro de rigidez elástico adimensional da base  $\beta = kL^4/EI$ , da deflexão lateral da viga  $V$  em  $X = L/5$ , da rotação  $\Theta$  em  $X = 0$  e do momento fletor  $M$  em  $X = L/5$ . Esses valores de  $V$ ,  $\Theta$  e  $M$  foram calculados através das expressões analíticas fornecidas em Hetényi (1946) por meio do princípio da superposição dos efeitos e considerando para a base as hipóteses de Winkler.

**Tabela 4.1** Solução analítica para diferentes valores de  $\beta = kL^4/EI$ : V e M em  $X = L/5$ ;  $\Theta$  em  $X = 0$ .

$\beta$	V	$\Theta$	M
6.25	-0.039846	-0.083127	59.75
62.5	-0.038515	-0.081345	57.63
625	-0.028958	-0.068488	42.29
6250	-0.008768	-0.039911	8.58
62500	-0.000840	-0.022361	-6.59

As Tabelas 4.2 e 4.3 trazem as soluções numéricas do problema em questão obtidas nesta dissertação para a fundação representada pelo modelo contínuo de Winkler e modelo discreto (molas), respectivamente. Ambas as tabelas foram construídas considerando diferentes valores do parâmetro de rigidez adimensional da base ( $\beta$ ) e malhas de EF (Nelem); os erros percentuais (Erro%) foram calculados tomando-se como referência os valores mostrados na Tabela 4.1. Ao se analisar, inicialmente, os valores apresentados nas Tabelas 4.2a-e, é possível fazer as seguintes considerações:

- i. inicialmente, vale ressaltar que, até  $\beta = 6250$ , os valores obtidos para V,  $\Theta$  e M apresentam boa concordância com a solução analítica, mesmo para a malha menos refinada (5 EF);
- ii. para  $\beta = 6.25$  e  $\beta = 62.5$  (bases mais flexíveis), os valores apresentados para V,  $\Theta$  e M são coincidentes com os respectivos analíticos, independente da malha;
- iii. como esperado, à medida que se aumenta o número de elementos (estrutura-base), o erro percentual diminui, independente da variável observada;
- iv. como também esperado, os erros para uma determinada malha e valor do parâmetro  $\beta$  da base são mais acentuados para o momento fletor M;
- v. esse erro também fica mais evidente, de um modo geral, a medida que se aumenta o parâmetro de rigidez  $\beta$  da base;
- vi. como mostrado na Tabela 4.2e, e ilustrado também na Figura 4.3, no caso de uma base com rigidez elevada, a deflexão lateral da viga diminui e, dependendo da malha adotada, problemas numéricos podem acontecer (Silveira, 1995).

Considerando agora o modelo discreto formado por molas, como apresentado na Figura 4.2c, e verificando os resultados apresentados nas Tabelas 4.3a-e, e Figura 4.3, pode-se fazer os seguintes comentários:

- i. as seis observações anteriores para o modelo contínuo de Winkler são também válidas para o modelo discreto;

**Tabela 4.2** Modelo Contínuo de Winkler: solução numérica para diferentes malhas e valores de

$$\beta = kL^4/EI \text{ (V e M em } X = L/5; \Theta \text{ em } X = 0).$$

a)  $\beta = 6.25$

Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.039846	0.000	-0.083128	0.000	59.75	0.000
10	-0.039846	0.000	-0.083128	0.000	59.75	0.000
20	-0.039846	0.000	-0.083128	0.000	59.75	0.000
30	-0.039846	0.000	-0.083128	0.000	59.75	0.000
40	-0.039846	0.000	-0.083128	0.000	59.75	0.000

b)  $\beta = 62.5$

Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.038515	0.000	-0.081345	0.000	57.63	3.560
10	-0.038515	0.000	-0.081345	0.000	57.63	0.000
20	-0.038515	0.000	-0.081345	0.000	57.63	0.000
30	-0.038515	0.000	-0.081345	0.000	57.63	0.000
40	-0.038515	0.000	-0.081345	0.000	57.63	0.000

c)  $\beta = 625$

Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.028948	0.037	-0.068474	-0.021	42.28	0.038
10	-0.028958	-0.002	-0.068487	-0.001	42.29	0.002
20	-0.028958	0.000	-0.068488	0.000	42.29	0.000
30	-0.028958	0.000	-0.068488	0.000	42.29	0.000
40	-0.028958	0.000	-0.068488	0.000	42.29	0.000

d)  $\beta = 6250$

Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.008678	-1.024	-0.039755	0.390	8.45	1.479
10	-0.008762	-0.064	-0.039902	-0.022	8.57	0.113
20	-0.008768	-0.004	-0.039911	-0.001	8.58	0.007
30	-0.008768	-0.001	-0.039911	0.000	8.58	0.002
40	-0.008768	0.000	-0.039911	0.000	8.58	0.000

e)  $\beta = 62500$

Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.000625	25.675	-0.021290	4.793	-6.41	2.665
10	-0.000829	-1.304	-0.022311	-0.226	-6.59	0.105
20	-0.000840	-0.081	-0.022358	-0.013	-6.59	0.007
30	-0.000840	-0.016	-0.022361	-0.003	-6.59	0.001
40	-0.000840	-0.005	-0.022361	-0.001	-6.59	0.000

**Tabela 4.3** Modelo Discreto: solução numérica para diferentes malhas e valores de

$$\beta = kL^4/EI \text{ (V e M em } X = L/5; \Theta \text{ em } X = 0).$$

a)  $\beta = 6.25$ 

Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.039847	0.003	-0.083134	0.008	59.72	0.056
10	-0.039846	0.000	-0.083128	0.001	59.75	0.014
20	-0.039846	0.000	-0.083128	0.000	59.75	0.004
30	-0.039985	0.347	-0.083313	0.223	59.98	-0.370
40	-0.039846	0.000	-0.083128	0.000	59.75	0.001

b)  $\beta = 62.5$ 

Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.038526	0.028	-0.081410	0.080	57.31	4.097
10	-0.038516	0.002	-0.081349	0.005	57.55	0.139
20	-0.038515	0.000	-0.081345	0.000	57.61	0.035
30	-0.038515	0.000	-0.081345	0.000	57.62	0.016
40	-0.038515	0.000	-0.081345	0.000	57.62	0.009

c)  $\beta = 625$ 

Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.029055	0.333	-0.069037	0.801	39.89	5.679
10	-0.028964	0.020	-0.068524	0.053	41.69	1.424
20	-0.028959	0.001	-0.068491	0.003	42.14	0.356
30	-0.028958	0.000	-0.068489	0.001	42.23	0.159
40	-0.028958	0.000	-0.068488	0.000	42.26	0.089

d)  $\beta = 6250$ 

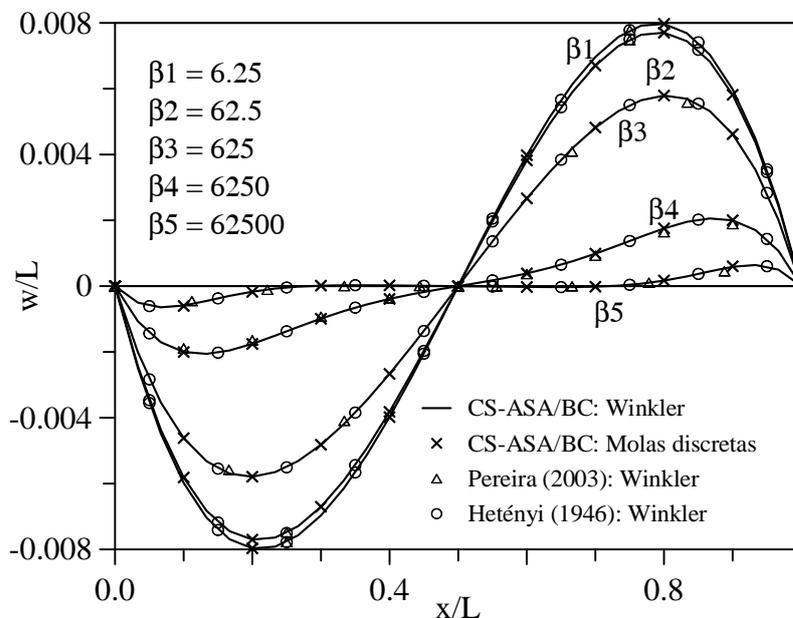
Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.009153	4.387	-0.042655	6.876	1.02	88.145
10	-0.008789	0.246	-0.040117	0.515	6.76	21.241
20	-0.008769	0.015	-0.039925	0.033	8.12	5.317
30	-0.008768	0.003	-0.039914	0.007	8.38	2.365
40	-0.008768	0.001	-0.039912	0.002	8.46	1.331

e)  $\beta = 62500$ 

Nelem	V	Erro(%)	$\Theta$	Erro(%)	M	Erro(%)
5	-0.001441	71.488	-0.031299	39.967	20.85	216.658
10	-0.000866	3.077	-0.023372	4.520	8.42	27.909
20	-0.000842	0.190	-0.022434	0.325	7.02	6.660
30	-0.000841	0.038	-0.022376	0.066	6.78	2.953
40	-0.000840	0.012	-0.022366	0.021	6.70	1.661

- ii. porém, os resultados para um determinado valor de  $\beta$  e malha, são mais precisos para o modelo contínuo; isso acontece de uma forma mais explícita a medida que se aumenta o parâmetro de rigidez  $\beta$ ;
- iii. de um modo geral, o modelo discreto pode ser usado para representar o comportamento da base, porém uma malha mais refinada é necessária;
- iv. por fim, cuidado deve ser tomado ao se adotar o parâmetro de rigidez da mola discreta, cujo valor é dependente da malha; ou seja, como mostrado na Figura 4.2c, para uma malha com 5 EFs, a rigidez da mola  $K_y = a k$  ( $K_x = 0$ ;  $K_\theta = 0$ ), com  $a = 1$ . Para 10, 20, 30 e 40 EFs, os valores adotados para  $a$  são 0.5, 0.25, 0.1667 e 0.125, respectivamente.

A Figura 4.3 fornece as configurações deformadas da viga em estudo quando o modelo de Winkler e o discreto são adotados para a fundação. Veja que os valores do parâmetro de rigidez  $\beta$  da base são os mesmos usados na construção das Tabelas 4.2 e 4.3. Veja também que os resultados obtidos aqui para uma malha com 10 EFs são coincidentes com aqueles analíticos (Hetényi, 1946), bem como os outros valores numéricos extraídos de Pereira (2003).



**Figura 4.3** Deflexão lateral da viga em contato bilateral com uma base elástica.

## 4.2.2 Estaca-Coluna Parcialmente Enterrada

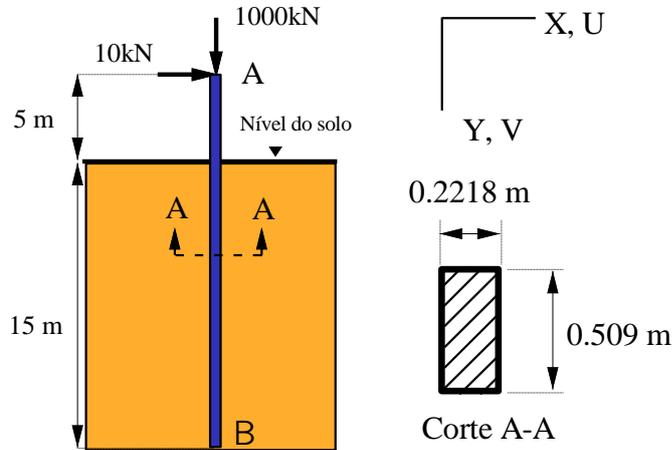
O segundo problema de contato bilateral estudado é ilustrado na Figura 4.4a. Trata-se de uma estaca parcialmente enterrada em um meio elástico (ou solo). Esse exemplo é encontrado como um “estudo de caso” em Aljanabi *et al.* (1990), que desenvolveram um elemento finito de contato que inclui além da de rigidez transversal do solo (Winkler)  $k$ , a sua rigidez cisalhante  $k_s$  (para representar o atrito solo-estrutura). Posteriormente, Badie e Salmon (1996) resolveram o mesmo problema, mas utilizando elemento de contato de ordem quadrática com os dois parâmetros  $k$  e  $k_s$  anteriores, e considerando adicionalmente a interação entre as molas base (modelo de Pasternak). O carregamento atuante no topo da estaca, o seu comprimento  $L$ , as suas rigidezes axial e à flexão,  $EA$  e  $EI$ , e as propriedades de rigidez do solo são fornecidas também na Figura 4.4a.

As Figuras 4.4b e 4.4c fornecem os modelos numéricos adotados neste trabalho para se aproximar o comportamento do sistema estrutural em estudo. Observe que em todos os modelos foram considerados 15 EFs para a barra. No primeiro caso, na parte enterrada da coluna, considerou-se apenas o modelo de Winkler para o solo e um apoio simples no nó inferior da estaca (Figura 4.4c;  $k_G = 0$ ); no segundo caso, foi feita a combinação do modelo de Winkler com molas discretas posicionadas na direção Y (Figura 4.4b;  $k_G = 0$ ;  $K_y \neq 0$ ;  $K_x = K_\Theta = 0$ ); no terceiro modelo, adotou-se a base do tipo Pasternak e um apoio simples no nó inferior da estaca (Figura 4.4c,  $k_G \neq 0$ ); por fim, no último modelo, o modelo de Pasternak e molas discretas foram usadas para representar o solo (Figura 4.4b;  $k_G \neq 0$ ;  $K_y \neq 0$ ;  $K_x = K_\Theta = 0$ ). Veja na Figura 4.4b o detalhe do cálculo dos valores da rigidez translacional  $K_y$  da mola.

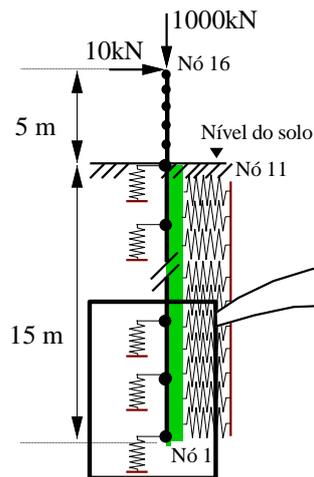
Os resultados obtidos nesta dissertação considerando esses 4 modelos numéricos são fornecidos nas Tabelas 4.4a-d e Figuras 4.5a-d. A Figura 4.5 traz uma composição das configurações deformadas da estaca para os modelos adotados aqui e aqueles de Aljanabi *et al.* (1990) e Badie e Salmon (1996). Dessas análises, os seguintes comentários podem ser feitos, quando se comparam essas configurações deformadas e, por exemplo, os valores dos deslocamentos horizontal ( $U$ ) e vertical ( $V$ ) com os obtidos por Badie e Salmon (1996) para os pontos nodais 11 (nível do solo) e 16 (topo da coluna):

- i. o modelo numérico 1 (Winkler sem molas discretas), aproxima de forma adequada o campo de deslocamento horizontal  $U$  da estaca, porém falha na representação do

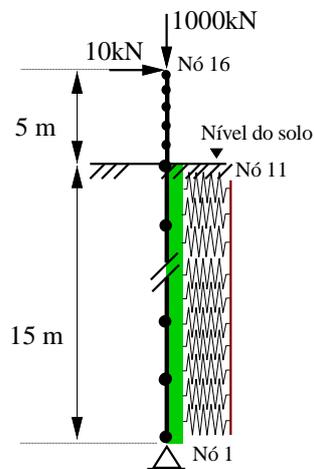
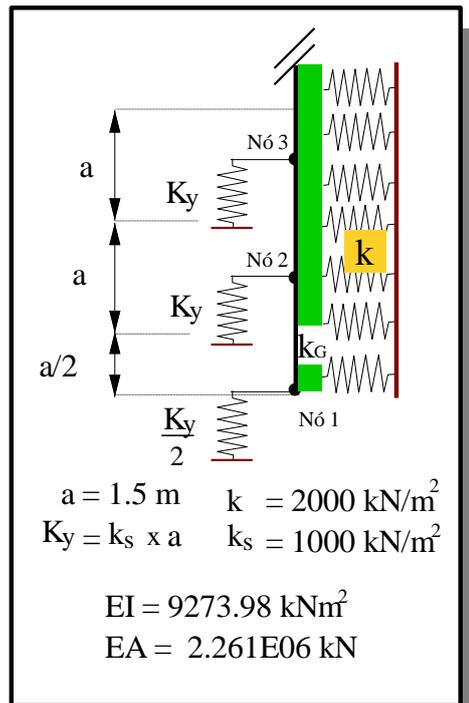
campo de deslocamento vertical V (com erros de 95% e 30% para os pontos nodais 11 e 16, respectivamente);



a) Problema de engenharia



b) Modelagem com molas discretas



c) Modelagem sem molas discretas

Figura 4.4 Estaca parcialmente enterrada

**Tabela 4.4** Deslocamentos U e V para pontos nodais da malha de EF adotada.

a) Modelo numérico 1: Winkler sem molas discretas

Nó	CS-ASA/BC		Badie e Salmon (1996)	
	U [m]	V [m]	U [m]	V [m]
1 (base)	2.889E-05	0.00000	3.463E-05	0.06557
6	2.498E-04	0.00332	2.425E-04	0.06391
11	1.642E-02	0.00332	1.635E-02	0.06886
14	7.637E-02	0.00796	7.557E-02	0.07109
16 (topo)	0.12893	0.08845	0.12765	0.06811

b) Modelo numérico 2: Winkler com molas discretas

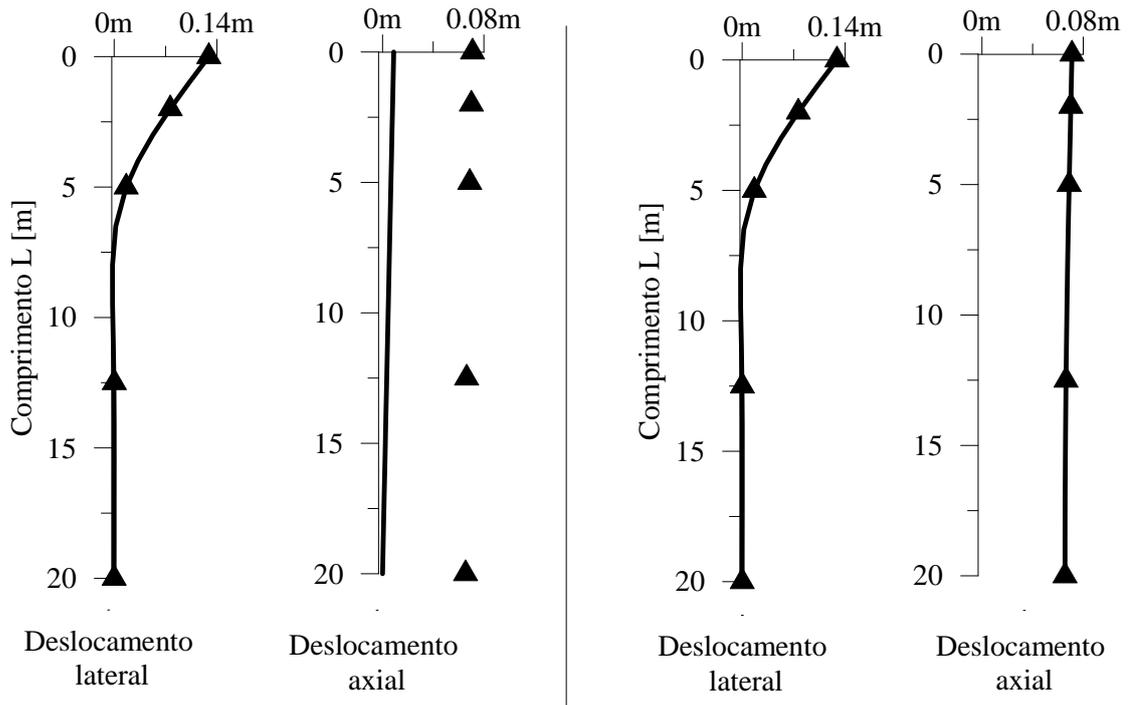
Nó	CS-ASA/BC		Badie e Salmon (1996)	
	U [m]	V [m]	U [m]	V [m]
1 (base)	2.889E-05	0.06557	3.463E-05	0.06557
6	2.498E-04	0.06639	2.425E-04	0.06391
11	1.642E-02	0.06886	1.635E-02	0.06886
14	7.637E-02	0.07018	7.557E-02	0.07109
16 (topo)	0.12893	0.07107	0.12765	0.06811

c) Modelo numérico 3: Pasternak sem molas discretas

Nó	CS-ASA/BC						Badie e Salmon (1996)	
	$k_G = k/2$		$k_G = k$		$k_G = 1.5k$		U [m]	V [m]
	U [m]	V [m]	U [m]	V [m]	U [m]	V [m]		
1 (base)	6.04E-06	0.	1.87E-06	0.	3.78E-06	0.	3.46E-05	0.06557
6	2.31E-04	0.0033171	2.05E-04	0.003317	1.77E-04	0.003317	2.43E-04	0.06391
11	1.36E-02	0.0066342	1.16E-02	0.006634	1.01E-02	0.006634	1.64E-02	0.06886
14	6.74E-02	0.0079618	6.12E-02	0.007961	5.66E-02	0.007961	7.56E-02	0.07109
16 (topo)	0.1159	0.0088456	0.106879	0.008845	0.100233	0.008845	0.12765	0.06811

d) Modelo numérico 4: Pasternak com molas discretas

Nó	CS-ASA/BC						Badie e Salmon (1996)	
	$k_G = k/2$		$k_G = k$		$k_G = 1.5k$		U [m]	V [m]
	U [m]	V [m]	U [m]	V [m]	U [m]	V [m]		
1 (base)	6.04E-06	0.0655683	1.87E-06	0.065568	3.78E-06	0.065568	3.46E-05	0.06557
6	2.31E-04	0.0663856	2.05E-04	0.066386	1.77E-04	0.066386	2.43E-04	0.06391
11	1.36E-02	0.0688577	1.16E-02	0.068858	1.01E-02	0.068858	1.64E-02	0.06886
14	6.74E-02	0.0701845	6.12E-02	0.070185	5.66E-02	0.070185	7.56E-02	0.07109
16 (topo)	0.1159	0.0710691	0.106879	0.071069	0.100233	0.071069	0.12765	0.06811

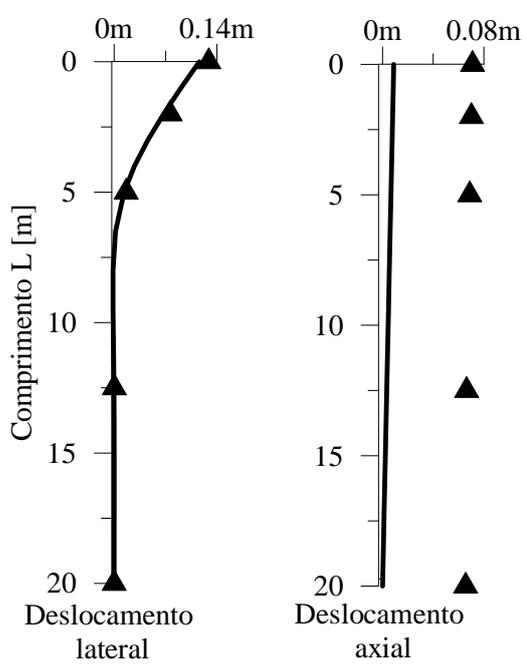


a) Modelagem Winkler sem molas discretas

b) Modelagem Winkler com molas discretas

— CS-ASA/BC

▲ Aljanabi *et al* (1990)



c) Modelagem Pasternak sem molas discretas

d) Modelagem Pasternak com molas discretas

**Figura 4.5** Configurações deformadas da estaca parcialmente enterrada considerando várias modelagens para o solo.

- ii. o modelo de Pasternak sem molas discretas (modelo numérico 3) apresentou-se como a pior combinação para representar o comportamento do solo no problema em questão (erros em torno de 90% para V nos pontos considerados; 17% e 9%, respectivamente, para o deslocamento U dos pontos nodais 11 e 16);
- iii. já o modelo de Winkler com molas (modelo numérico 2) pode ser considerada a melhor combinação; os resultados para os pontos considerados, bem como o perfil de deslocamentos obtido, estão muito próximo daqueles da literatura;
- iv. com Pasternak e molas discretas (modelo numérico 4), foi possível aproximar de forma adequada o campo de deslocamento vertical V da estaca, porém esse modelo não foi tão eficiente na representação do campo de deslocamento U (erros de 17% e 9% para os pontos nodais 11 e 16, respectivamente);
- v. por fim, para o problema de contato em análise, pode-se concluir que a melhor representação do solo (ou meio elástico) foi obtida através da combinação de um modelo discreto (molas) e um contínuo (Winkler). Essa estratégia, portanto, pode ser seguida na solução de problemas de contato complexos na engenharia civil.

Utiliza-se agora o modelo numérico 2 (Figura 4.4b; Winkler com molas discretas) para realizar um estudo de convergência relacionado com a discretização do sistema. Modela-se então a parte da estaca em contato com o solo usando-se 2, 4, 5, 10, 20, e 30 EFs; no trecho da estaca acima do solo considera-se sempre 5 EFs. Os resultados desse estudo são apresentados na Tabela 4.5, onde se considera deslocamentos U (horizontal) e V (vertical) no ponto nodal A (topo) e do ponto B (inferior) da estaca. A diferença percentual mostrada foi calculada em relação aos resultados obtidos para o modelo com 30 EFs. Através dessa tabela, nota-se que o deslocamento horizontal U no ponto B é o mais afetado quando se utiliza uma malha com poucos elementos (2 e 4 EFs). Observe também que o deslocamento vertical V em ambos os pontos A e B foi menos sensível à variação da malha de EF. O mesmo acontece para o deslocamento U no ponto A, no topo da coluna.

**Tabela 4.5** Deslocamentos horizontal e vertical nos pontos A (topo) e B (base) da estaca para diferentes malhas de EF.

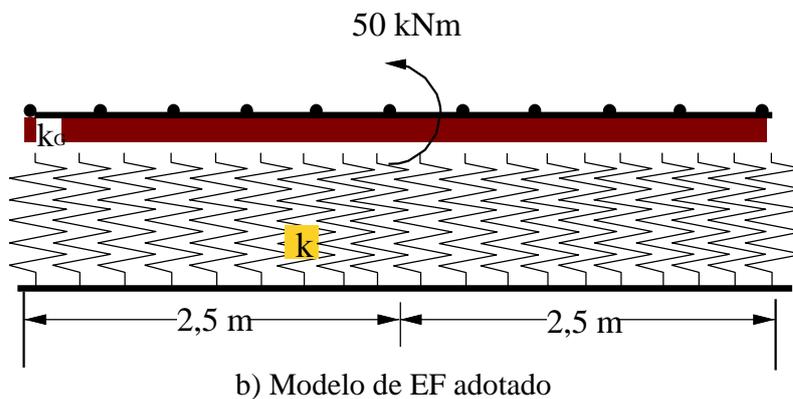
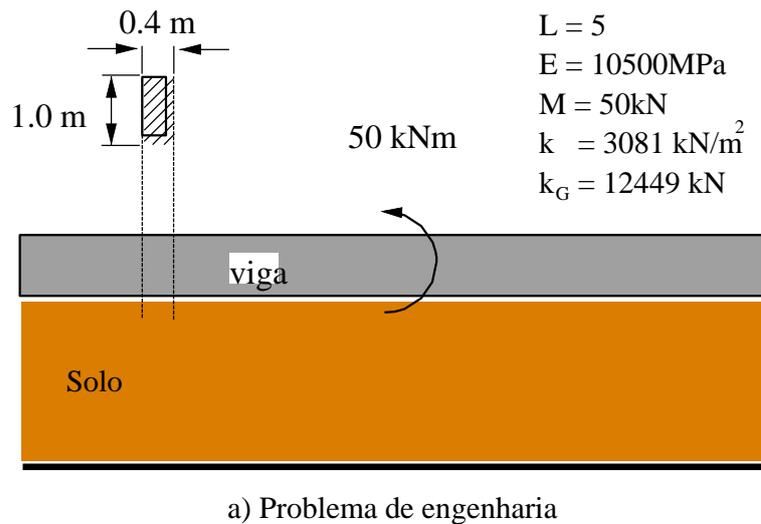
N° de Elementos na Região de Contato	U [m]				V [m]			
	Ponto A	Dif. (%)	Ponto B	Dif. (%)	Ponto A	Dif. (%)	Ponto B	Dif. (%)
2	0.12537	2.86%	1.5835E-05	82.50%	7.0928E-02	0.21%	6.5441E-02	0.20%
4	0.12870	0.20%	3.0457E-05	5.12%	7.1038E-02	0.05%	6.5540E-02	0.05%
5	0.12873	0.18%	2.9238E-05	1.16%	7.1051E-02	0.03%	6.5552E-02	0.03%
10	0.12893	0.03%	2.8890E-05	0.03%	7.1069E-02	0.01%	6.5568E-02	0.01%
20	0.12896	0.00%	2.8898E-05	0.00%	7.1300E-02	0.32%	6.5799E-02	0.34%
30	0.12896	-	2.8899E-05	-	7.1074E-02	-	6.5573E-02	-

#### 4.2.3 Sistema Estrutural: Viga-Base Elástica Tipo Pasternak

Esta subseção traz uma análise sobre a importância de se considerar o segundo parâmetro da base na modelagem do solo, ou, mais especificamente, as implicações de se adotar o modelo do tipo de Pasternak para representar a fundação no problema apresentado na Figura 4.6a.

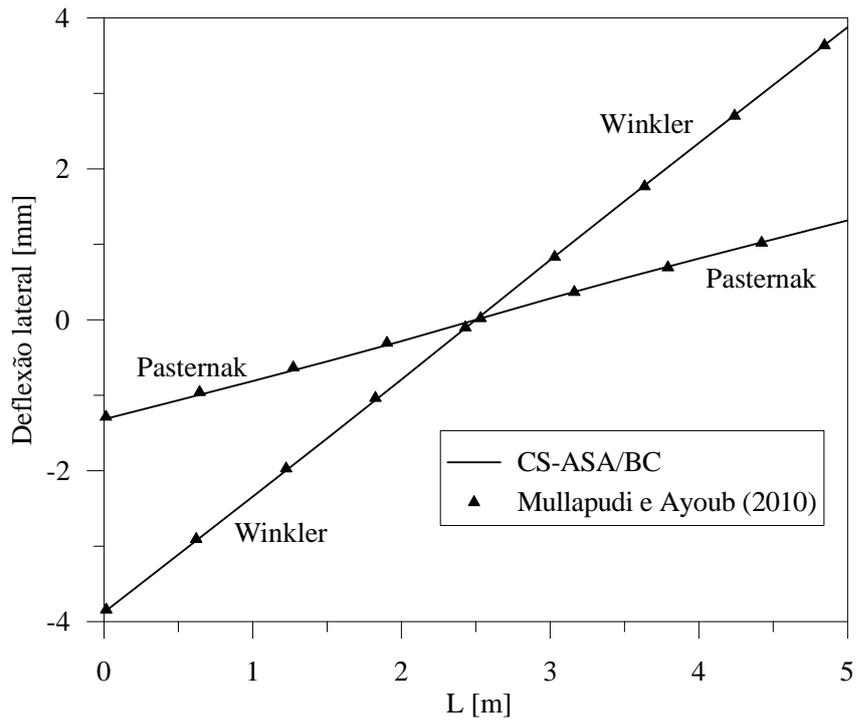
Esse problema, que foi estudado inicialmente por Shirima e Giger (1992) e mais recentemente por Mullapudi e Ayoub (2010), envolve uma viga de tamanho finito em contato com uma argila arenosa. Shirima e Giger (1992) resolveram o problema em questão através do MEF, mas usando um elemento de viga de Timoshenko que incorpora os dois parâmetros de rigidez da base; esses pesquisadores fornecem a expressão da matriz de rigidez da viga que inclui explicitamente os dois parâmetros de rigidez da base. Mullapudi e Ayoub (2010) apresentaram uma formulação mista (aproximações independentes de forças e deslocamentos) para um elemento finito inelástico que pode ser adotado na modelagem de problemas de vigas em contato ou “repousando” sobre fundações elásticas do tipo Pasternak.

Observe que a viga ilustrada na Figura 4.6a apresenta as extremidades livres e está sujeita a um momento concentrado no centro de intensidade 50 kNm. A viga é de madeira, possui um módulo de elasticidade  $E_v = 10500$  MPa e um coeficiente de Poisson  $\nu_v = 0.25$ ; o solo, como já comentado, é uma argila arenosa com um módulo de elasticidade  $E_s = 45.5$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0.21$ . Os valores dos parâmetros da fundação  $k$  e  $k_G$  ( $k_1$  e  $k_2$ ) são  $3081 \text{ kN/m}^2$  e  $12449 \text{ kN}$ , respectivamente, que foram avaliados por Shirima e Giger (1992) de acordo com as expressões apresentadas por Zhaohua e Cook (1985).

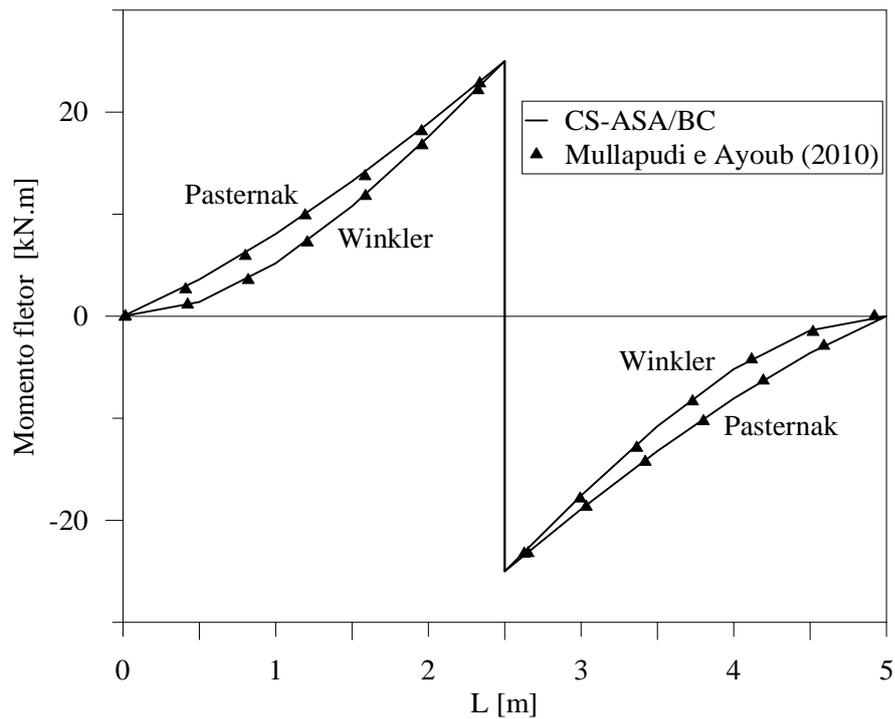


**Figura 4.6** Viga com extremidades livres em contato com uma argila arenosa.

Este trabalho adotou 10 elementos finitos para modelar a barra, como ilustrado na Figura 4.6b. Para analisar o efeito do modelo da base, e seguindo o artigo de Mullapudi e Ayoub (2010), adotou-se aqui além da base do tipo Pasternak, o modelo Winkler para representar a argila arenosa. Os resultados dessas análises são apresentados inicialmente nas Figuras 4.7a e 4.7b, onde estão a variação da deflexão lateral e do momento fletor ao longo do comprimento da barra, para o momento 50 kNm aplicado no centro da viga. Na Figura 4.8 é mostrada a variação da rotação da viga no meio do vão, à medida que se aumenta o momento  $M$  no centro da barra.

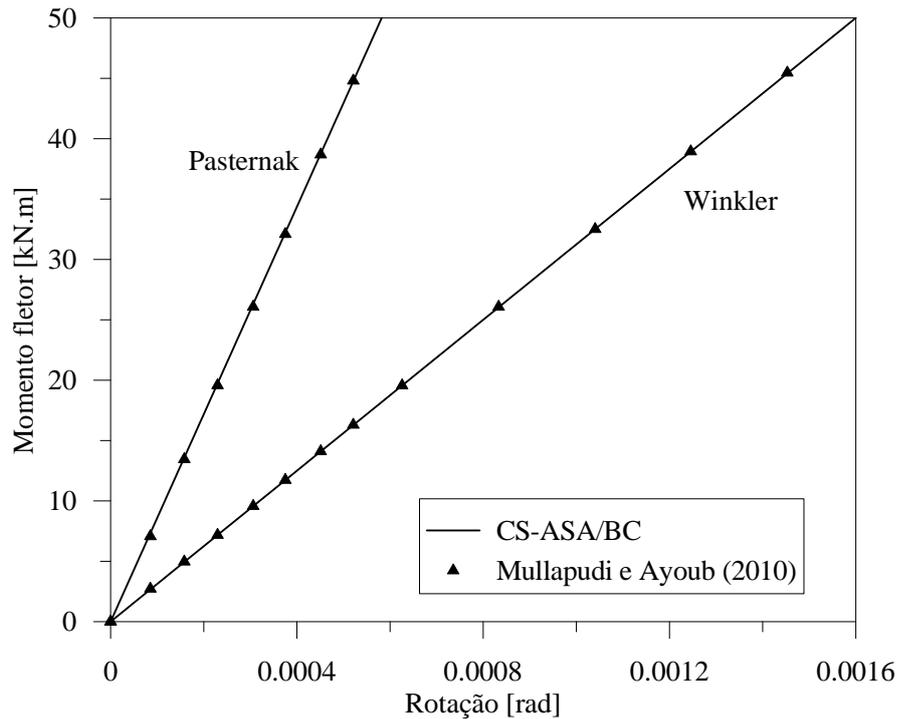


a) Variação da deflexão lateral da viga



b) Variação do momento fletor da viga

**Figura 4.7** Análise de uma viga submetida a um momento fletor no meio do vão em contato com argila arenosa.



**Figura 4.8** Resposta momento aplicado versus rotação da viga em  $X = L/2$ .

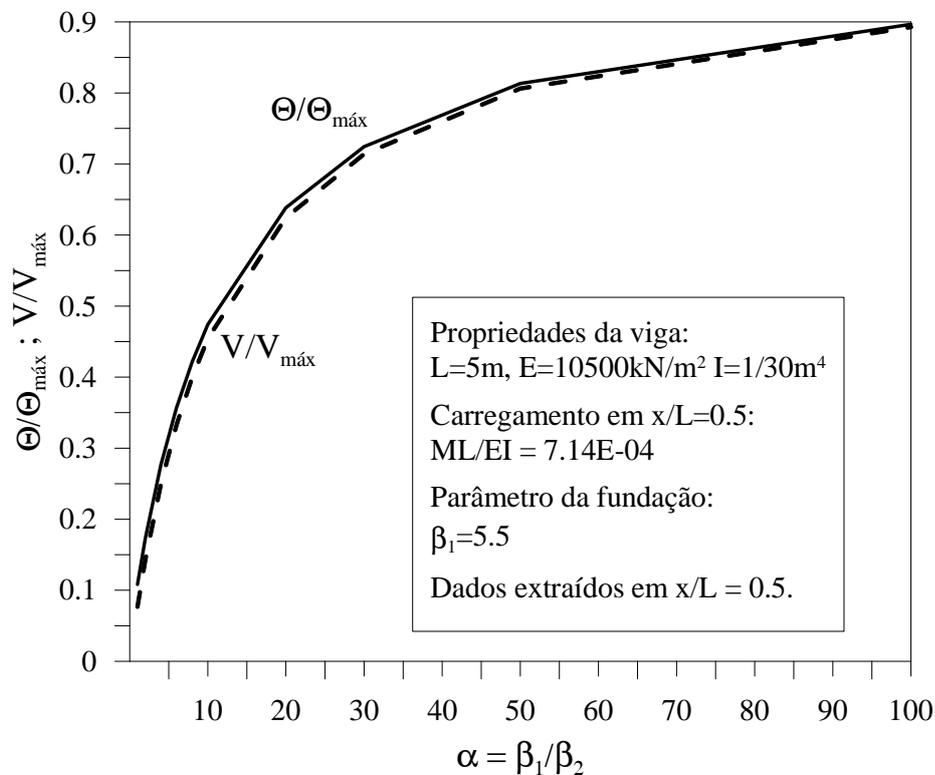
Através dessas figuras, pode-se chegar às seguintes conclusões:

- i. inicialmente, destaca-se a boa concordância dos resultados obtidos neste trabalho com os da literatura;
- ii. a deflexão da barra, ao se considerar o modelo de Winkler, é quase 3 vezes maior que o obtido quando se considera para o solo a base do tipo Pasternak;
- iii. o momento fletor é ligeiramente subestimado quando não se considera na modelagem o efeito do segundo parâmetro da base (Pasternak);
- iv. a Figura 4.8 indica que para um momento  $M = 50$  kNm aplicado, a rotação da viga no meio do vão, caso se adote o modelo de Winkler, é quase 2.7 vezes daquela se a base fosse do tipo Pasternak;
- v. por fim, os resultados mostram, pelo menos para o sistema estrutural em questão, que a interação entre as molas usadas para representar a base elástica não pode ser desprezada.

Para finalizar a análise do problema em questão, faz-se agora um estudo sobre a influência do segundo parâmetro  $k_G$  ( $k_2$ ) no comportamento da viga. Considera-se então a variação da relação  $\alpha = \beta_1/\beta_2$ , em que  $\beta_1 = kL^4/EI$  e  $\beta_2 = k_G L^2/EI$  são os parâmetros adimensionais da base, e estuda-se o que acontece com a deflexão  $V$  na extremidade e a

rotação  $\Theta$  no meio da viga. Os resultados desse estudo são apresentados na Figura 4.9 para o mesmo carregamento das análises anteriores, ou seja, para um momento  $M = 50$  kNm aplicado em  $X = L/2$ . Nessa figura,  $V_{\text{máx}}$  e  $\Theta_{\text{máx}}$  representam os valores da deflexão e rotação obtidas nos pontos considerados quando a base é tipo Winkler. Para elaboração dessa figura, considerou-se, adicionalmente,  $\beta_1$  com um valor fixo igual a 5.5, e variou-se o segundo parâmetro adimensional  $\beta_2$ . Pode-se concluir dessa figura que:

- i. tanto a deflexão lateral como a rotação variam de forma não linear com  $\alpha$ , ou seja, com a variação do segundo parâmetro de rigidez elástico  $k_G$  (ou  $\beta_2$ ) da base;
- ii. tanto a deflexão lateral como a rotação apresentam variação mais acentuada para valores de  $\alpha$  entre 1 e 50;
- iii. mais uma vez, verifica-se a importância de se determinar um valor coerente para o segundo parâmetro da base elástica; nas análises anteriores tem-se que  $\alpha = 6.2$ ;
- iv. para valores de  $\alpha$  acima de 100, embora não apresentados, a influência de  $\beta_2$  é pequena para as variáveis estudadas (deflexão e rotação) — no máximo 10%.



**Figura 4.9** Variação da deflexão e da rotação da viga com o parâmetro de rigidez  $k_G$  (ou  $\beta_2$ ) da base.

### 4.3 Análises Não Lineares

Como relatado no início deste capítulo, esta seção se destina à análise de quatro problemas estruturais com restrições bilaterais de contato impostas por bases elásticas considerando os efeitos da não linearidade geométrica. Assim, nas próximas subseções, atenção será dada aos seguintes estudos:

- i. Avaliação da carga crítica de colunas com várias condições de bordo e um apoio elástico discreto intermediário. A solução analítica para o caso particular da coluna biapoiada é fornecida em Almroth e Brush (1975) e será usada nesta dissertação para validar as implementações realizadas (Subseção 4.3.1);
- ii. Estabilidade elástica de colunas biapoiadas em contato bilateral com uma base elástica do tipo Winkler. Mais uma vez, o livro do Brush e Almroth (1975) é usado na validação dos resultados aqui obtidos. Outra boa referência usada para esse problema particular é o livro de Smitses e Hodges (2006) (Subseção 4.3.2);
- iii. Análise do comportamento de uma viga considerando grandes deslocamentos em contato com uma base do tipo Pasternak (ou Filonenko-Borodich). Trata-se de um problema não linear inicialmente resolvido por Horibe e Asano (2001) (Subseção 4.3.3);
- iv. E, finalmente, o estudo da estabilidade elástica de colunas com restrições impostas por bases elásticas do tipo Pasternak; um estudo paramétrico é conduzido e os resultados obtidos através do CS-ASA/BC são comparados com aqueles analíticos e numéricos apresentados na literatura (Naidu e Rao, 1995; Kien, 2004; Shen, 2011; Subseção 4.3.4).

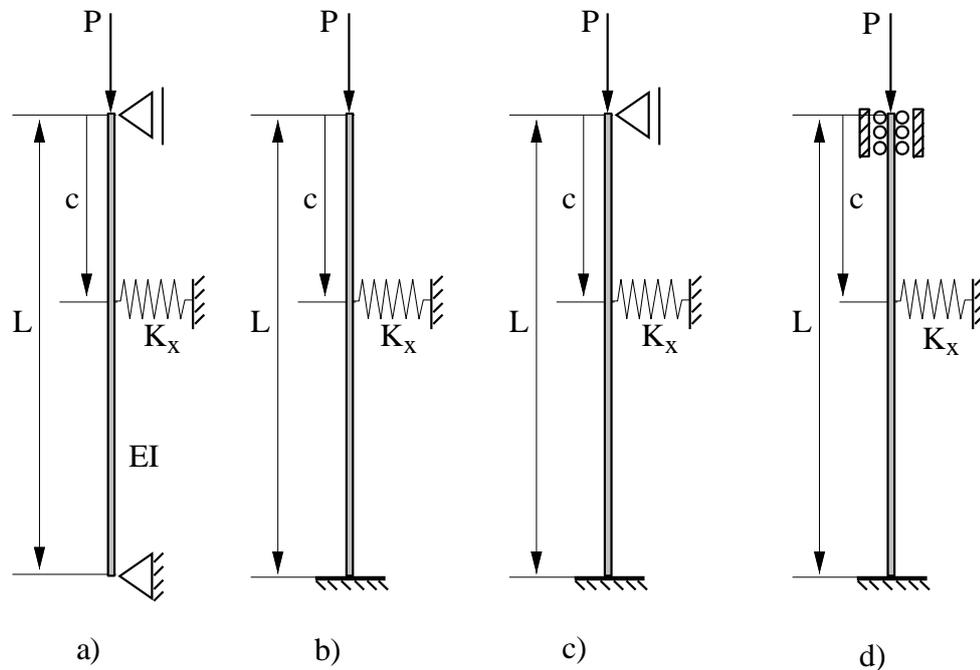
A metodologia de solução não linear apresentada no final do Capítulo 2, que já se encontrava no CS-ASA (Silva, 2009), foi usada na solução desses problemas. Em geral, procurou-se adotar:

- O método de Newton-Raphson modificado (isto é, a matriz de rigidez tangente é mantida constante durante o processo iterativo);
- Estratégias de incremento de carga e de iteração: deslocamento generalizado;
- Número máximo de iterações: 10;
- Tolerância para convergência do processo iterativo:  $10^{-4}$ ;
- Critério de convergência: baseado em deslocamentos; e
- Incremento inicial de do parâmetro de carga: pequeno.

### 4.3.1 Colunas com Apoio Elástico Discreto Intermediário

As colunas abordadas nesta seção são apresentadas na Figura 4.10. A solução analítica do primeiro problema, ou seja, o caso da coluna biapoiada com apoio elástico intermediário a uma distância “ $c$ ” do apoio superior foi apresentada por Brush e Almroth (1975). Considerando a coluna numa posição ligeiramente deformada, esses autores definiram a equação de equilíbrio crítico dessa barra, cuja solução para diversos valores de  $c$  (ou  $c_b$ ) e  $K_x$  (ou  $\beta$ ) é apresentada na Figura 4.11.

Antes de analisar os resultados numéricos aqui obtidos, entretanto, vale ressaltar um estudo sobre a influência do contraventamento lateral no comportamento de colunas, com várias condições de bordo, apresentado por Galvão *et al.* (2002). Esses pesquisadores avaliaram, em particular, a influência da posição desses contraventamentos — considerado um apoio rígido do primeiro gênero —, na carga crítica das colunas. Recentemente, Tzaros e Mistakidis (2011) propuseram um método para calcular cargas críticas e os modos de flambagem em colunas também contraventadas, mas considerando restrições unilaterais de contato impostas ao problema.



**Figura 4.10** Colunas com diferentes condições de bordo e apoio elástico discreto intermediário.

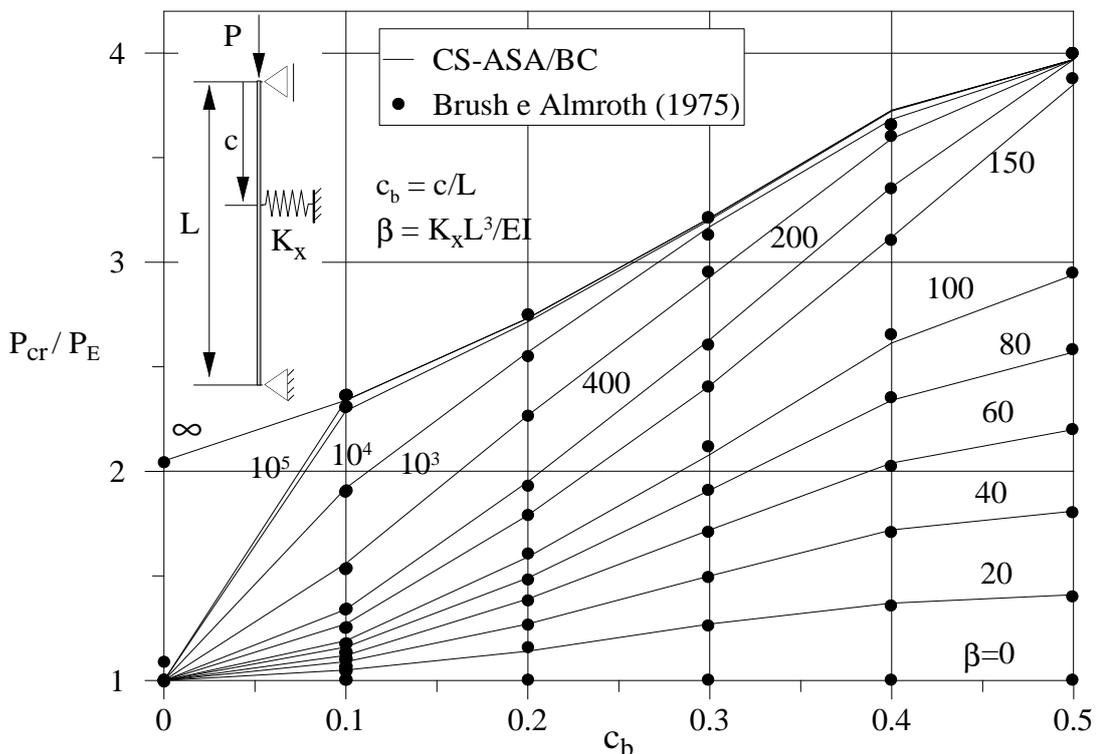
Para investigar então a influência da posição e do valor da rigidez do apoio elástico discreto intermediário na carga crítica da coluna, analisou-se o problema em função de dois parâmetros adimensionais: o primeiro é  $\beta = K_x L^3 / EI$ , em que  $L$  é o comprimento da coluna,  $EI$  é a rigidez à flexão da barra e  $K_x$  a rigidez linear da mola na direção horizontal  $X$ ; e o segundo é  $c_b = c/L$ , com  $c$  representando a distância da mola à extremidade superior da coluna. Os resultados obtidos nesta dissertação são apresentados nas Figuras 4.11-4.14, nas quais no eixo da ordenada está a razão entre a carga crítica da coluna obtida ( $P_{cr}$ ) com o apoio elástico discreto intermediário, e a carga crítica de Euler ( $P_E = \pi^2 EI / L^2$ ; coluna biapoiada). Dessas figuras, pode-se fazer os seguintes comentários:

- i. da Figura 4.11, cabe enfatizar, inicialmente, a boa concordância entre os resultados numéricos via MEF obtidos aqui e aqueles de Brush e Almroth (1975). Como pode ser visto nessa figura, para  $c_b = 0.5$  e valores de  $\beta$  acima de 150, a mola se apresenta-se como um apoio rígido, com o valor da carga crítica  $P_{cr} \cong 4P_E$ , que é a carga crítica da coluna biapoiada de comprimento  $L/2$ . Para valores de  $c_b$  diferente de 0.5, nota-se que são necessários valores da rigidez mais elevados que 150 para que a mesma se comporte como rígida. Para uma mola de rigidez elevada localizada bem próxima de um dos apoios, chega-se no valor da carga  $P_{cr} \cong 2.05 P_E$ , que é igual à carga de flambagem de uma coluna engastada-apoiada;
- ii. para o caso da coluna engastada-livre, como ilustrado na Figura 4.12, nota-se, primeiramente, que para valores de  $\beta$  acima de 100, a restrição elástica discreta já se comporta como se fosse um apoio rígido, independente do valor de  $c_b$ . Como esperado, para valores elevados de  $\beta$ , e mola próxima do bordo livre ( $c_b = 0$ ), chega-se numa a carga crítica da coluna de aproximadamente  $P_{cr} \cong 2.05 P_E$ , que é a carga crítica de uma coluna engastada-apoiada;
- iii. na Figura 4.13 são apresentados os resultados para a coluna engastada-apoiada com apoio elástico intermediário. Como também esperado, para valores reduzidos de  $\beta$ , obtém-se  $P_{cr} \cong 2.05 P_E$ . A segunda carga de flambagem associada à coluna com essas condições de bordo é  $P_{cr} \cong 6.04 P_E$ , e seu modo de flambagem é composto por duas semi-ondas cujo deslocamento nulo é localizado em  $c_b = 0.36$ . Analisando-se o gráfico, percebe-se que a partir de  $\beta = 220$ , o apoio elástico discreto comporta-se como rígido exatamente em  $c_b = 0.36$ ; entretanto, valores de

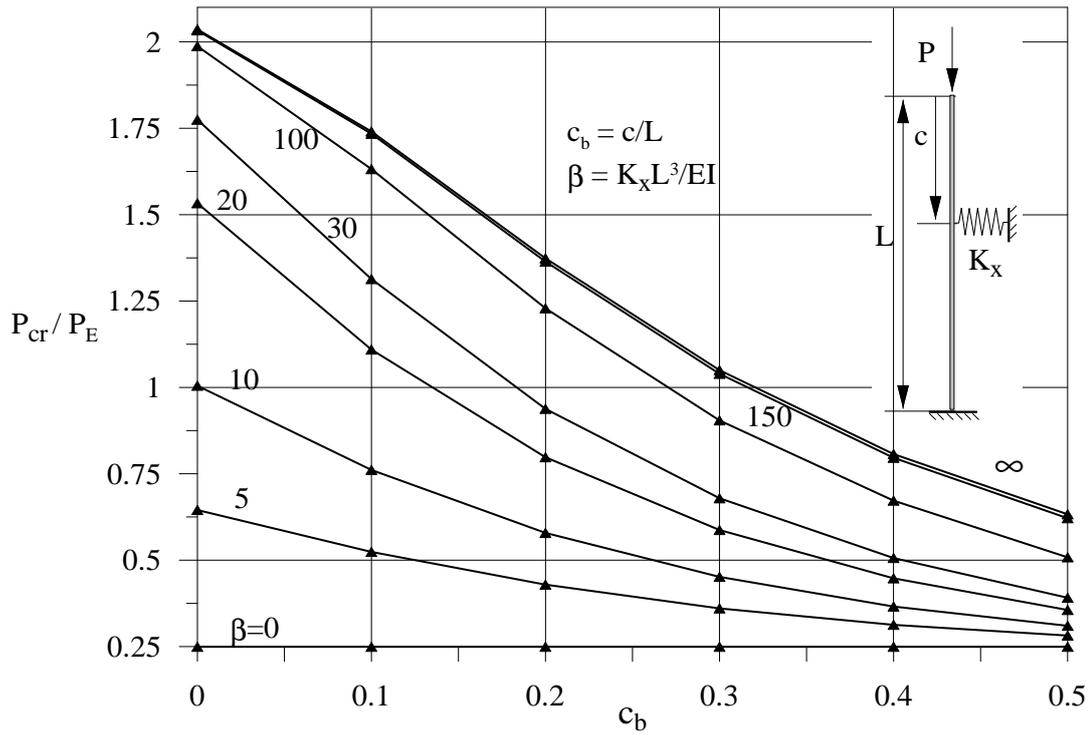
$\beta$  mais elevados são necessários para que o apoio discreto se comporte como rígido para outros valores de  $c_b$ ;

- iv. finalmente, na Figura 4.17 estão as respostas para o caso da coluna biengastada (o deslocamento axial é livre na extremidade superior da coluna) e um apoio elástico discreto intermediário. Para essa configuração, grande energia elástica é necessária para que o apoio discreto se comporte como rígido. Note que para valores de  $\beta$  acima de  $10^3$  e  $c_b \cong 0.5$ , restrição bilateral no meio do vão, a carga crítica atingida é igual à segunda carga de flambagem da coluna biengastada, isto é,  $P_{cr} \cong 16 P_E$ . Para outras situações de  $c_b$ , é necessário valores mais elevados de  $\beta$  para que o apoio se torne rígido.

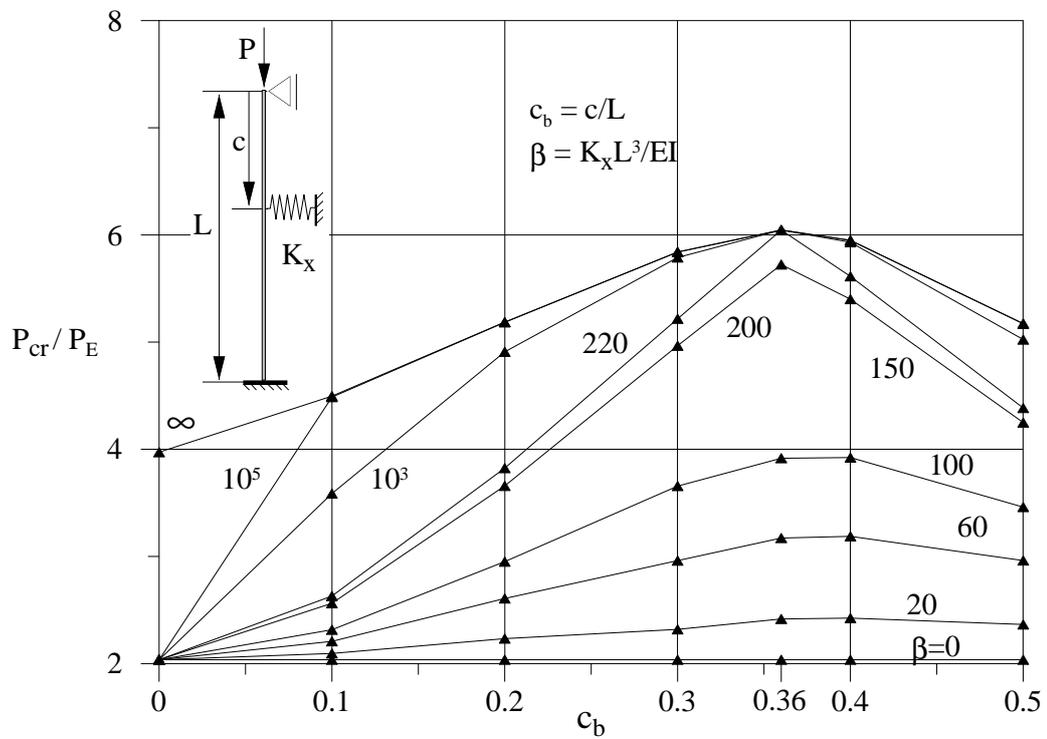
Esses resultados demonstram, de um modo geral, que quanto maior a carga de flambagem de uma coluna, maior será o valor necessário de  $\beta$  para que o apoio elástico discreto intermediário seja considerado rígido.



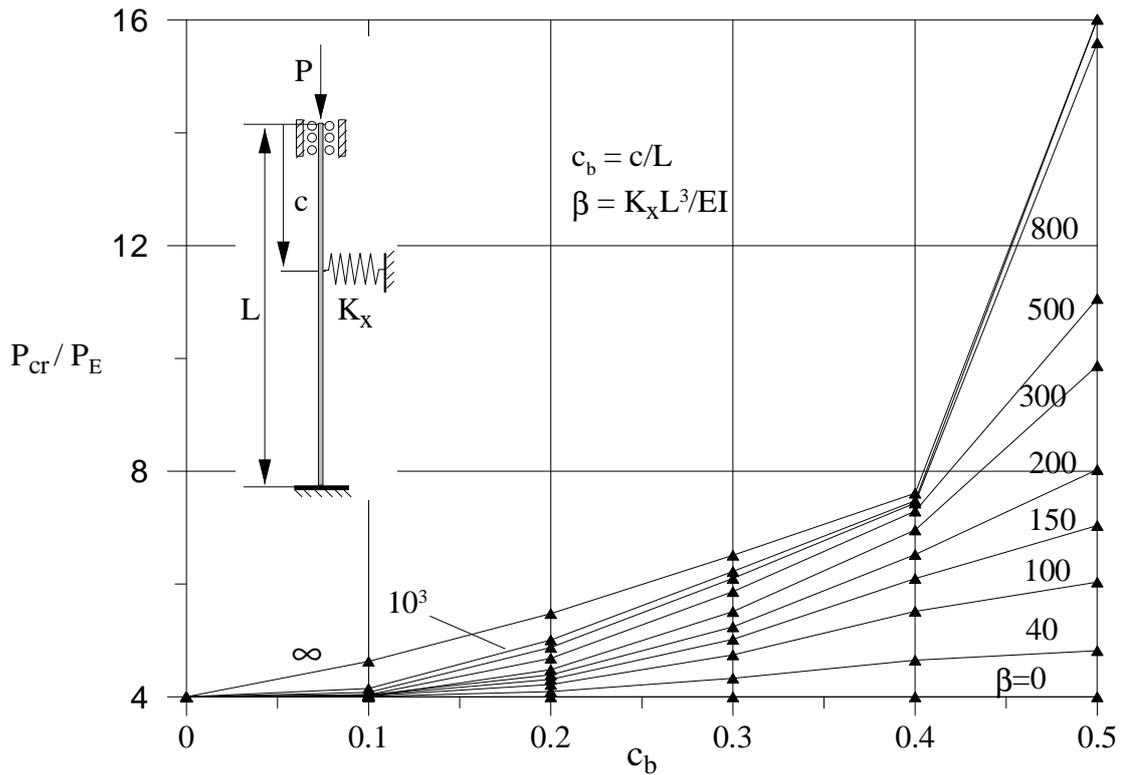
**Figura 4.11** Cargas críticas de colunas biapoiciadas com apoio elástico discreto intermediário.



**Figura 4.12** Cargas críticas de colunas engastada-livre com apoio elástico discreto intermediário.



**Figura 4.13** Cargas críticas de colunas engastada-biapoziata com apoio elástico discreto intermediário.



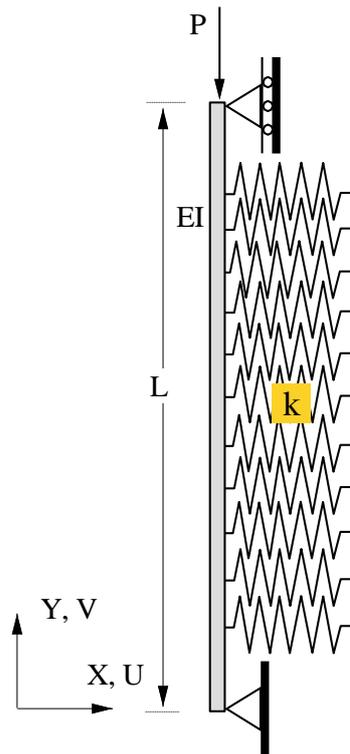
**Figura 4.14** Cargas críticas de colunas biengastadas com apoio elástico discreto intermediário.

### 4.3.2 Colunas Biapoiadas em Contato Bilateral com Bases do Tipo Winkler

A atenção é voltada agora para o estudo do problema clássico estrutural-geotécnico apresentado na Figura 4.15; ou seja, para o estudo a estabilidade elástica de colunas esbeltas em contato bilateral com bases do tipo Winkler ao longo de todo seu comprimento.

Brush e Almroth (1975) e Smitses e Hodges (2006) demonstraram que, assim como no estudo da instabilidade elástica de placas e cascas, o modo de flambagem tem papel de destaque na estabilidade desse tipo de problema. Isso significa que o número de semi-ondas do modo de deformação a ser considerado na solução analítica tem grande influência sobre o valor da carga crítica da coluna. Desses trabalhos, foi concluído que a carga crítica de uma coluna em contato com uma base elástica do tipo Winkler poderia ser calculada através da seguinte expressão:

$$\frac{P_{cr}}{P_E} = n^2 + \frac{\beta}{n^2} \quad (4.1)$$



**Figura 4.15** Coluna biapoiada em contato bilateral com base elástica do tipo Winkler.

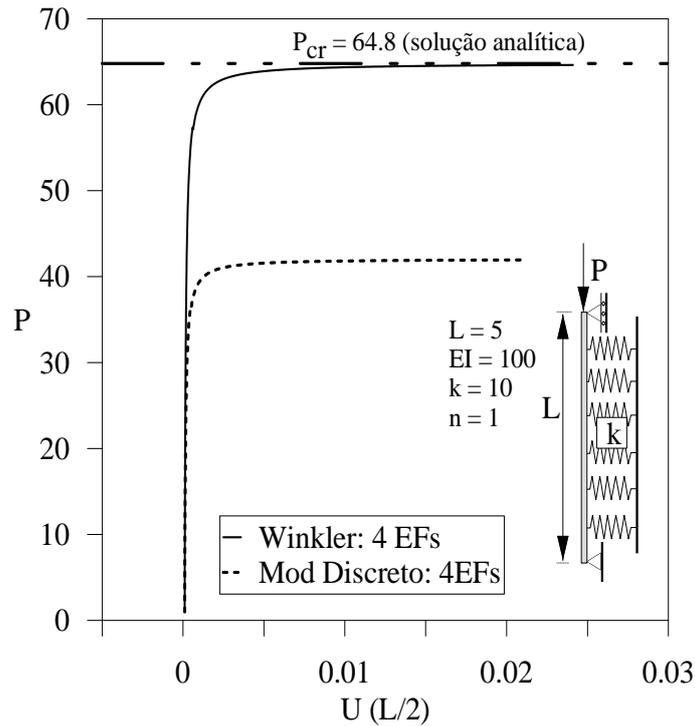
em que  $n$  é o número de semi-ondas a ser considerado na análise;  $\beta = kL^4/(\pi^4EI)$  é o parâmetro de rigidez adimensional da base; e  $P_E$  é a carga crítica de Euler ( $\pi^2EI/L^2$ ).

Para a solução numérica via MEF desse problema, considera-se, inicialmente, uma análise de convergência no sentido de se verificar a influência da malha na precisão dos resultados ao se adotar o modelo contínuo (no caso Winkler) e o modelo discreto (molas elásticas) na representação da fundação. Adotou-se então para o sistema estrutural ilustrado na Figura 4.15:  $L = 5$ ,  $EI = 100$  e  $k = 10$  (em unidades compatíveis). A partir desses valores e considerando  $n = 1$  (uma semi-onda) na Equação (4.1), chega-se no valor de  $P_{cr} \cong 64.8$ .

Os resultados obtidos nesta dissertação para malhas com 4, 6, 8, 10 e 20 EFs, e os dois modelos de bases considerados, são apresentados na Tabela 4.6, onde se comparam os valores da carga crítica obtidas numericamente com o analítico  $P_{cr} \cong 64.8$ . Deve-se mencionar que considerou-se na modelagem da coluna uma imperfeição geométrica inicial senoidal, com uma semi-onda de amplitude (1.0E-4). Observe, através dessa tabela, a boa convergência para ambos os modelos a partir de uma malha com 6 EFs. Para as análises apresentadas a seguir nesta seção, portanto, serão considerados 10 EFs. Na Figura 4.16 estão as trajetórias de equilíbrio da coluna com restrições bilaterais de contato para os dois os modelos de base e as malhas desse estudo.

**Tabela 4.6** Resultado do estudo de convergência.

N° EFs	Apoio Discreto	Erro (%)	Winkler	Erro (%)
4	41.96	35.26%	64.67	0.21%
6	65.48	1.04%	69.03	6.51%
8	64.57	0.37%	64.55	0.40%
10	64.56	0.38%	64.68	0.20%
20	64.63	0.28%	64.69	0.18%



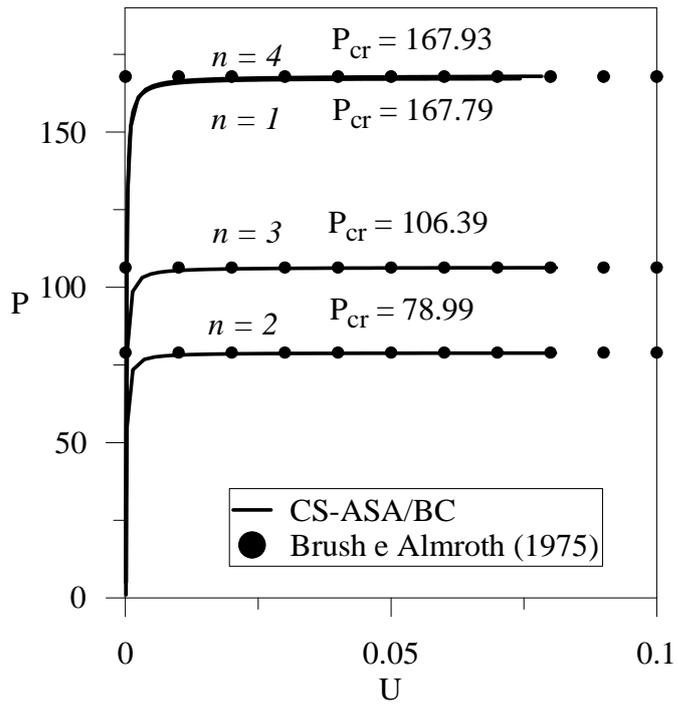
**Figura 4.16** Trajetórias de equilíbrio da coluna biapoiada com restrições bilaterais de contato.

Considerando o mesmo problema ilustrado na Figura 4.15, mas assumindo para o comprimento da coluna  $L = 10$  e sua rigidez à flexão  $EI = 100$  (unidades compatíveis), pretende-se estudar agora o efeito da rigidez da base elástica  $k$ , ou do seu parâmetro adimensional  $\beta = kL^4/\pi^4EI$ , no modo crítico de instabilidade. São adotados assim os seguintes valores para  $\beta$ : 16 e 48. A Tabela 4.7 e a Figura 4.17 apresentam os resultados desse estudo. Na Tabela 4.7 é feita uma análise comparativa entre os valores numéricos e analíticos, em que fica evidenciada a influência da rigidez da base elástica no modo crítico de instabilidade. Veja que, com a variação da rigidez da base, alterou-se também o modo crítico de instabilidade da coluna; isto é, para  $\beta = 16$ , o modo crítico se dá com  $n = 2$  e  $P_{cr} = 78.51$ ; e para  $\beta = 48$ , o modo crítico acontece para  $n = 3$  e  $P_{cr} = 141.41$ . Através desses resultados, percebe-se a

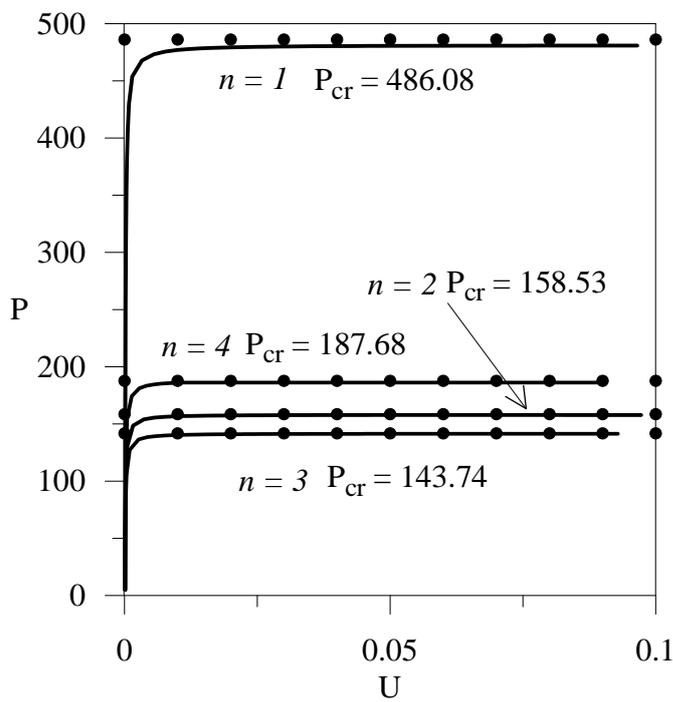
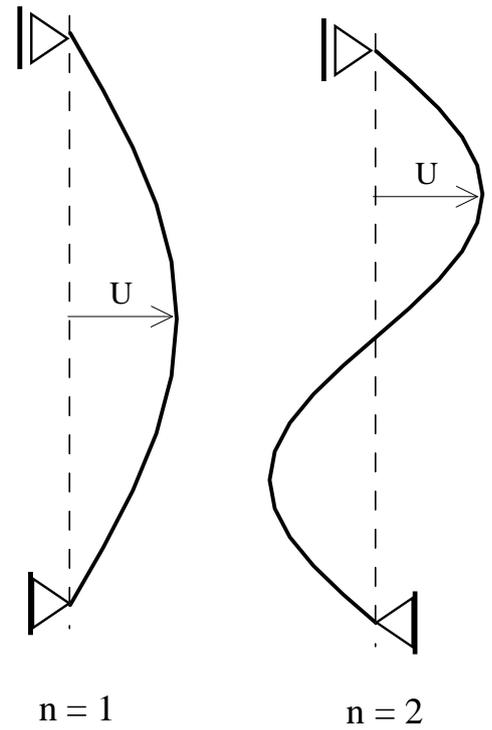
importância da consideração e da forma das imperfeições iniciais em colunas em contato com bases elásticas. Na Figura 4.17 são apresentados os caminhos de equilíbrio não lineares do sistema estrutural em estudo quando se considera  $\beta = 16$  e  $\beta = 48.4$ , e os primeiros modos senoidais.

**Tabela 4.7** Resultados do estudo da influência da rigidez da base no modo crítico

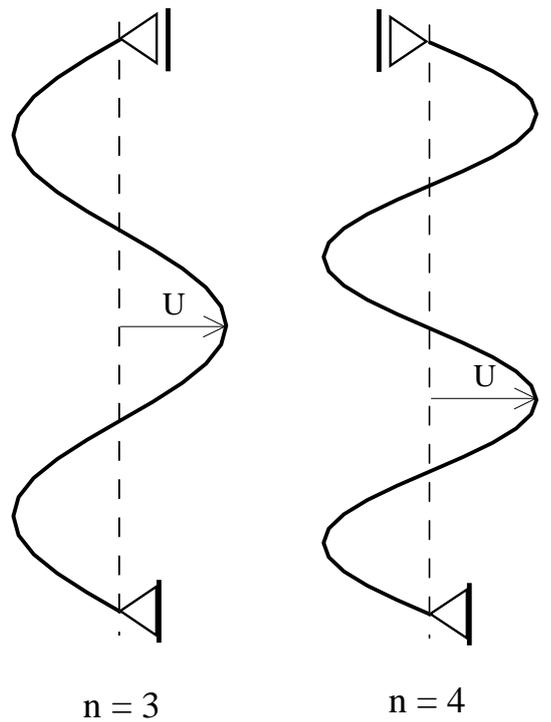
<b>Número de Semi-ondas</b>	<b><math>\beta = 16</math></b>	<b>Erro (%)</b>	<b><math>\beta = 48</math></b>	<b>Erro (%)</b>
1	167.11	0.49%	480.47	1.15%
2	78.51	0.61%	157.68	0.54%
3	107.03	0.60%	141.41	0.23%
4	167.39	0.24%	188	0.17%



a)  $\beta = 16$



b)  $\beta = 48$

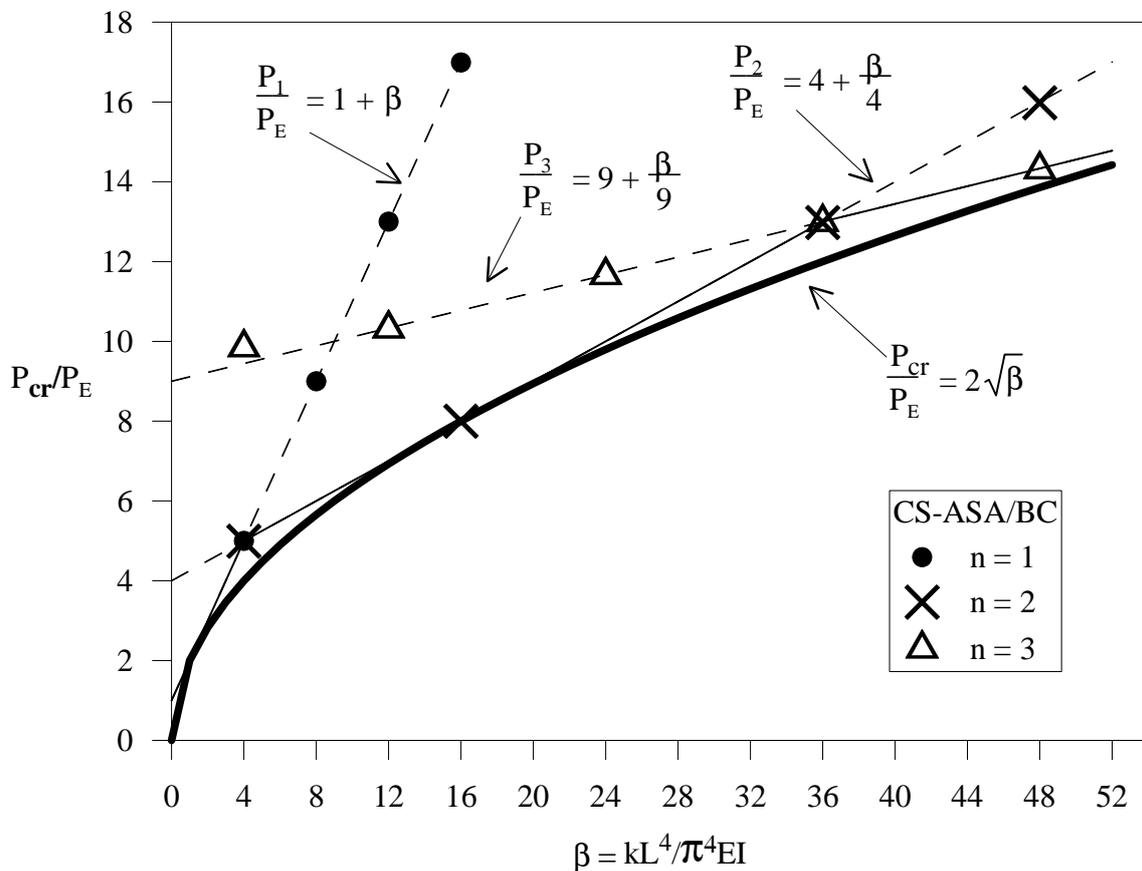


**Figura 4.17** Trajetórias de equilíbrio do sistema estrutural para  $\beta = 16$  e  $\beta = 48$ , e diferentes valores de  $n$ .

Por fim, vale comentar que Smitses e Hodges (2006) ainda fornecem, para esse mesmo problema de contato bilateral, uma aproximação para a carga crítica da coluna que depende apenas do parâmetro de rigidez adimensional  $\beta$ , ou seja:

$$P_{cr} = 2 P_E \sqrt{\beta} \quad (4.2)$$

Como ilustrado na Figura 4.18, note que a expressão anterior se torna mais precisa a medida que  $\beta$  cresce. Nessa mesma figura são plotados os valores de  $P_n/P_E$ , em função do parâmetro  $\beta$  da base e para  $n = 1, 2$  e  $3$ , calculados através da Equação (4.1) e usando o CS-ASA/BC. Veja que os resultados analíticos e numéricos são coincidentes.



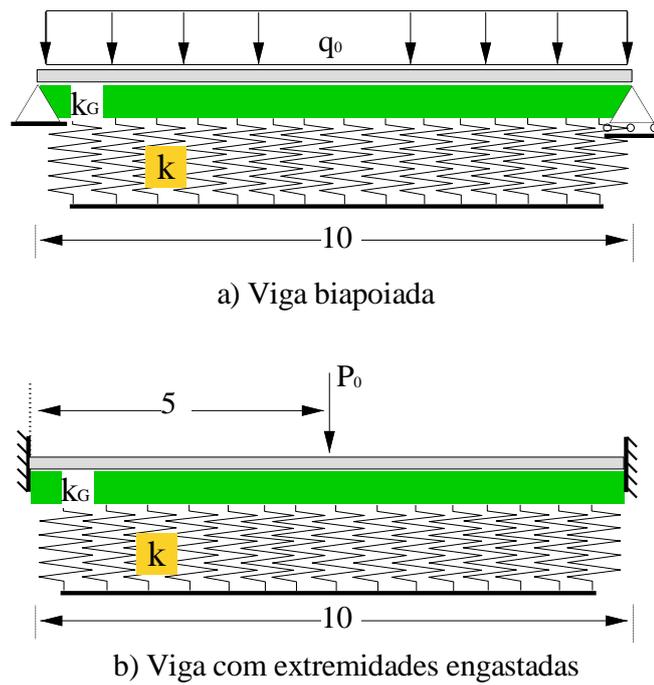
**Figura 4.18** Cargas críticas para coluna biapoada obtidas de forma analítica (Equação (4.1)) e numericamente (CS-ASA/BC).

### 4.3.3 Vigas com Grandes Deflexões Laterais em Contato com Fundação do Tipo Pasternak

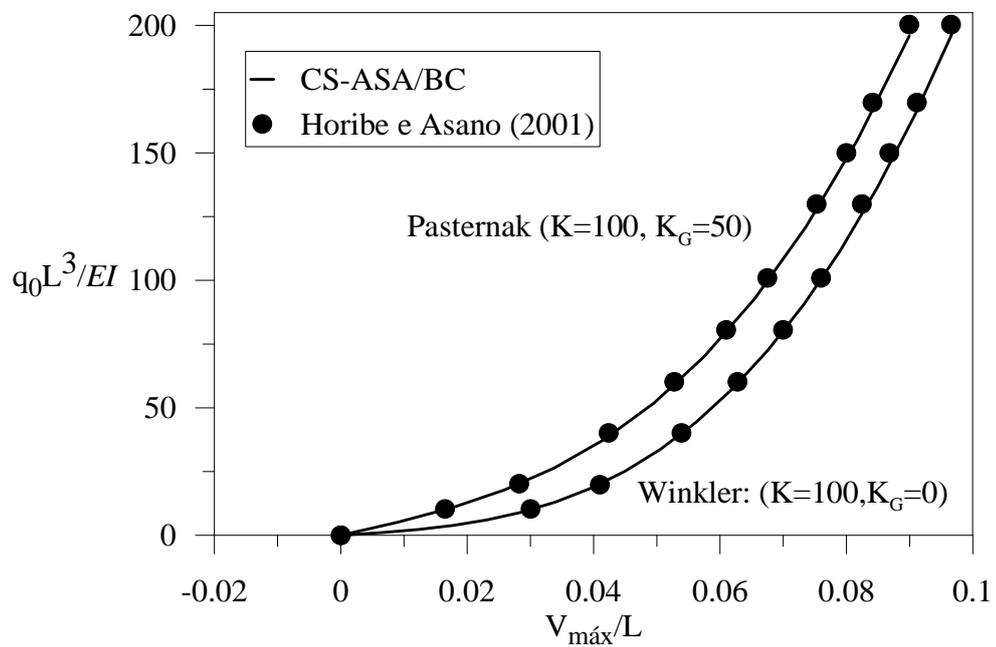
Esta subseção traz análises não lineares de vigas em contato com fundações elásticas do tipo Pasternak. Os dois sistemas de suporte estudados aqui são ilustrados na Figura 4.19 e foram extraídos do artigo Horibe e Asano (2001), que desenvolveram uma estratégia numérica baseada no MEC para calcular grandes deflexões laterais de vigas em uma fundação definida com dois parâmetros. Veja que o primeiro problema (Figura 4.19a) envolve uma biapojada submetida a um carregamento transversal distribuído com restrições bilaterais de contato; e o segundo (Figura 4.19b) é basicamente a mesma barra, mas com extremidades engastadas e com uma carga concentrada aplicada no meio do vão. Esses dois problemas não lineares foram recentemente resolvidos por Shen (2011) usando a “técnica de perturbação”.

Os resultados numéricos via MEF obtidos nesta dissertação, para os dois problemas em questão, são apresentados nas Figuras 4.20 e 4.21. Foram adotados para ambos os sistemas estruturais: 10 EFs;  $L = 10$ ;  $EI = 100$ ; e os parâmetros adimensionais da base  $\beta_1 = kL^4/(EI)$  e  $\beta_2 = k_G L^2/(EI)$ . Com o intuito de analisar o efeito desse segundo parâmetro  $\beta_2$ , os dois problemas de contato foram também modelados considerando para a base elástica apenas as hipóteses de Winkler, isto é, fazendo-se  $k_G = 0$  ( $\beta_2 = 0$ ).

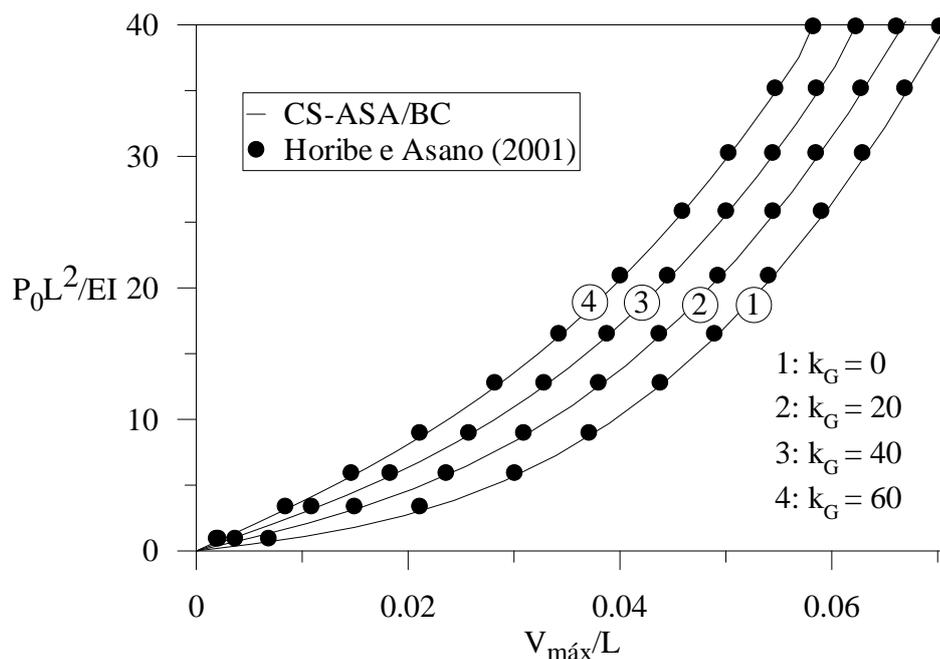
Para o primeiro sistema estrutural, por exemplo, foram considerados os seguintes conjuntos de parâmetros adimensionais da base ( $\beta_1 = 100$ ;  $\beta_2 = 50$ ) e ( $\beta_1 = 100$ ;  $\beta_2 = 0$ ), de forma que a Figura 4.20 foi construída incrementando-se a carga distribuída  $q_0$  (ou,  $\Omega = q_0 L^3/EI$ ) e acompanhando a deflexão lateral máxima da viga  $V_{\text{máx}}$  (ou,  $V_{\text{máx}}/L$ ) no meio do vão ( $X = L/2$ ). Como esperado, e já observado em exemplos anteriores, o modelo de Pasternak contribui com uma rigidez adicional ao sistema, uma vez que para um mesmo valor de  $q_0$  a deflexão lateral é menor ao se considerar esse tipo de base. Observe também que os resultados obtidos através da formulação numérica proposta são bem próximos daqueles da literatura.



**Figura 4.19** Vigas com diferentes condições de contorno e carregamento em contato bilateral com uma base elástica do tipo Pasternak.



**Figura 4.20** Caminhos de equilíbrio da viga biapoiada sob carga uniformemente distribuída em contato bilateral com bases elásticas dos tipos Winkler e Pasternak.

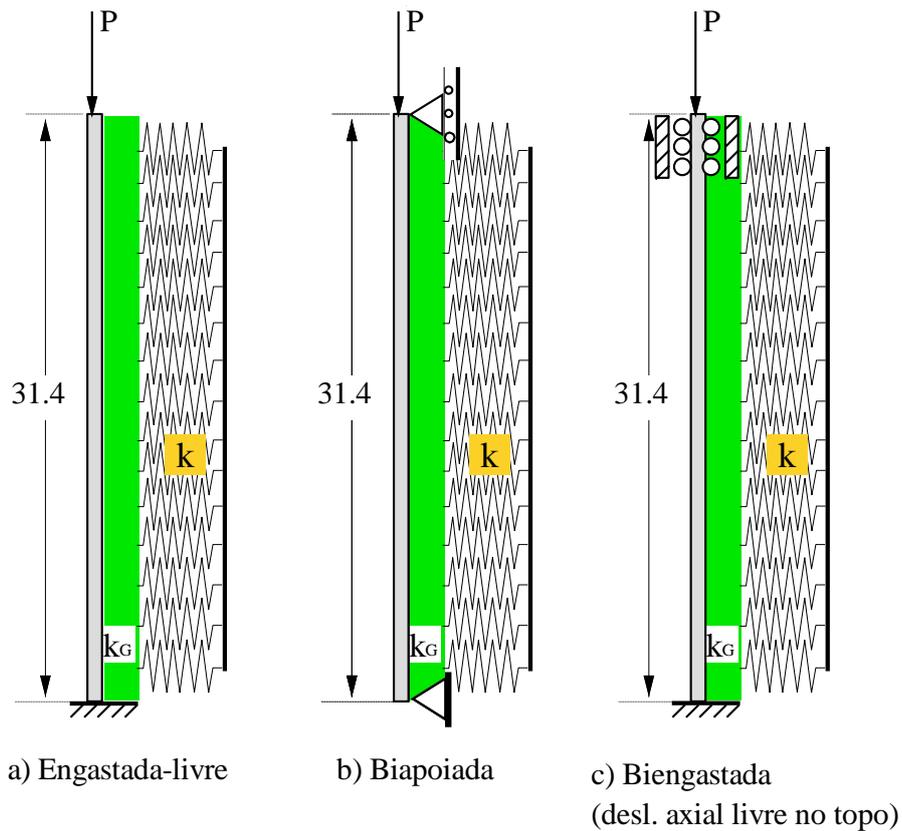


**Figura 4.21** Caminhos de equilíbrio da viga biengastada sob carga concentrada em contato bilateral com bases elásticas dos tipos Winkler e Pasternak.

Os resultados obtidos na solução do segundo problema são apresentados na Figura 4.21. Observe que as quatro trajetórias não lineares são construídas controlando-se a carga concentrada  $P_0$  (ou,  $P_0 L^2 / EI$ ) e a deflexão lateral máxima da viga  $V_{máx}$  (ou,  $V_{máx} / L$ ) no meio do vão ( $x = L/2$ ), para quatro combinações dos parâmetros adimensionais da base, ou seja: ( $\beta_1 = 100; \beta_2 = 60$ ); ( $\beta_1 = 100; \beta_2 = 40$ ); ( $\beta_1 = 100; \beta_2 = 20$ ); e ( $\beta_1 = 100; \beta_2 = 0$ ). Como no exemplo anterior, essa última combinação corresponde à adoção do modelo de Winkler para representar a base. Mais uma vez, as trajetórias apresentadas confirmam o efeito não linear significativo na deflexão lateral de vigas ao se considerar para a base elástica o modelo de Pasternak.

#### 4.3.4 Estabilidade de Colunas em Contato Bilateral com Bases do Tipo Pasternak

Esta última subseção se destina à análise da estabilidade dos sistemas estruturais ilustrados na Figura 4.22. Soluções numéricas via MEF para essas colunas com restrições de contato do tipo Pasternak foram inicialmente apresentadas por Naidu e Rao (1995); posteriormente, Kien (2004) e Shen (2011) apresentaram as cargas de flambagem para o caso particular da coluna biapoiada com restrições bilaterais impostas por fundações do tipo Winkler e Pasternak (Figura 4.22b).



**Figura 4.22.** Colunas com diferentes condições de apoios em contato bilateral com uma base elástica do tipo Pasternak.

As referências citadas no parágrafo anterior são então usadas para validar as análises de estabilidade realizadas através do CS-ASA/BC, em que foram consideradas para todas as colunas: 20 EFs;  $L = 31.4$ ;  $EI = 10$ ; e os parâmetros de rigidez adimensionais da base elástica  $\beta_1 = kL^4/(EI)$  e  $\beta_2 = k_G L^2/(\pi^2 EI)$ . Os resultados dessas análises são apresentados nas Tabelas 4.8-4.10 e Figuras 4.23-4.25. Observe que essas tabelas e figuras são organizadas para cinco combinações dos parâmetros adimensionais da base, ou seja:  $(\beta_1 = 0; \beta_2 = 0)$ ;  $(\beta_1 = 1; \beta_2 = 0)$ ;  $(\beta_1 = 100; \beta_2 = 0)$ ;  $(\beta_1 = 100; \beta_2 = 0.5)$ ; e  $(\beta_1 = 100; \beta_2 = 2.5)$ .

As Tabelas 4.8-4.10 fornecem as cargas críticas dessas colunas, obtidas através do CS-ASA/BC, para as cinco combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  descritas; já nas Figuras 4.23-4.25 estão as trajetórias de equilíbrio para essas mesmas três colunas. Veja que essas figuras foram construídas incrementando-se a carga de compressão  $P$  (ou,  $PL^2/EI$ ) aplicada em uma das extremidades da barra, e verificando-se o que acontece com o deslocamento transversal  $V_{\text{máx}}$  (ou,  $V_{\text{máx}}/L$ ) em algum ponto da barra (esse ponto é indicado nas figuras).

Dos resultados apresentados nessas tabelas e figuras, é possível fazer os seguintes comentários:

- i. Inicialmente, verifica-se a boa concordância dos resultados obtidos nesta dissertação com aqueles da literatura;
- ii. Para a primeira combinação de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ : (0; 0), que representa o problema clássico de estabilidade de colunas sem restrições de contato, observe que os valores obtidos para a carga crítica  $\Omega_{cr}$  ( $P_{cr}L^2/EI$ ) através do CS-ASA/BC, bem como os da literatura, estão bem próximos dos da solução analítica para as três colunas, ou seja: 2.4674; 9.8696; e 39.4784;
- iii. Na segunda e a terceira combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  ((1; 0); (100; 0)) consideram-se apenas as hipóteses de Winkler. Assim, para a coluna biapoiada imperfeita na forma senoidal e uma semi-onda ( $n=1$ ), chegam-se, através da Equação (4.1), nos seguintes valores de  $\Omega_{cr}$  ( $P_{cr}L^2/EI$ ): 9.9681; e 20.0051. Verifique que os valores encontrados nesta dissertação para  $\Omega_{cr}$  (segunda e terceira linha da Tabela 4.9) apresentam boa concordância com esses analíticos, bem como com os respectivos valores da literatura;
- iv. Com a consideração da base como sendo representada pelo modelo de Pasternak e combinação  $\beta_1$  e  $\beta_2$ : (100; 2.5), chegam-se nos seguintes valores da relação  $\Omega_{cr}(\text{Pasternak})/\Omega_{cr}(\text{sem contato})$  para as três colunas consideradas: 14.8; 4.5; 1.8. Em outras palavras, a coluna engastada-livre foi mais sensível ao acréscimo de rigidez proporcionado pela base elástica.

**Tabela 4.8** Coluna engastada-livre: carga crítica  $\Omega_{cr}$  ( $P_{cr}L^2/EI$ ) para diferentes combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .

$(\beta_1; \beta_2)$	Naidu e Rao (1995)	CS-ASA/BC
(0; 0)	2.4674	2.4629
(1; 0)	2.6499	2.6450
(100; 0)	11.996	11.972
(100; 0.5)	16.931	16.891
(100; 2.5)	36.670	36.569

**Tabela 4.9** Coluna biapoçada: carga crítica  $\Omega_{cr}$  ( $P_{cr}L^2/EI$ ) para diferentes combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .

$(\beta_1; \beta_2)$	Kien (2004)	Naidu e Rao (1995)	Shen (2011)	CS-ASA/BC
(0; 0)	9.9023	9.8696	9.8696	9.8556
(1; 0)	10.0034	9.9709	9.9709	9.9566
(100; 0)	20.0095	20.002	20.0017	19.950
(100; 0.5)	24.9331	24.937	24.9365	24.8787
(100; 2.5)	44.4883	44.676	44.6757	44.5922

**Tabela 4.10** Coluna biengastada: carga crítica  $\Omega_{cr}$  ( $P_{cr}L^2/EI$ ) para diferentes combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .

$(\beta_1; \beta_2)$	Naidu e Rao (1995)	CS-ASA/BC
(0; 0)	39.479	39.374
(1; 0)	39.555	39.449
(100; 0)	47.007	46.887
(100; 0.5)	51.492	51.804
(100; 2.5)	71.681	71.471

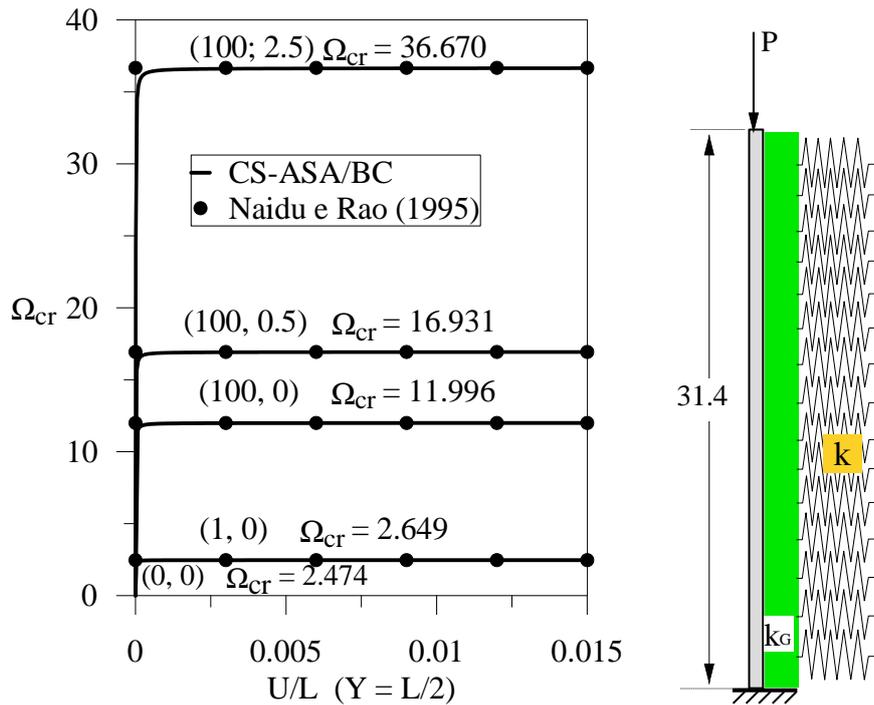


Figura 4.23 Coluna engastada-livre: trajetórias de equilíbrio para diferentes combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .

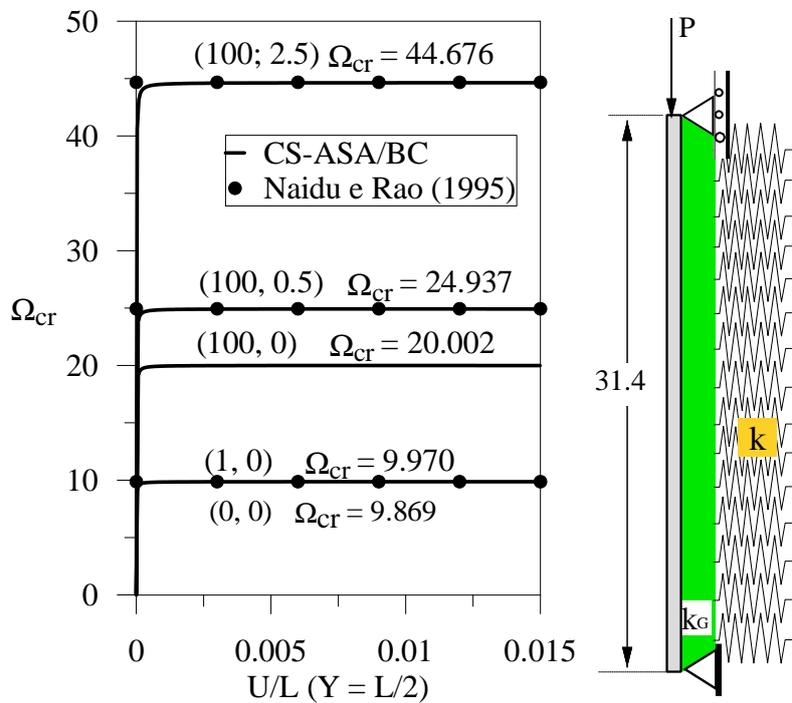
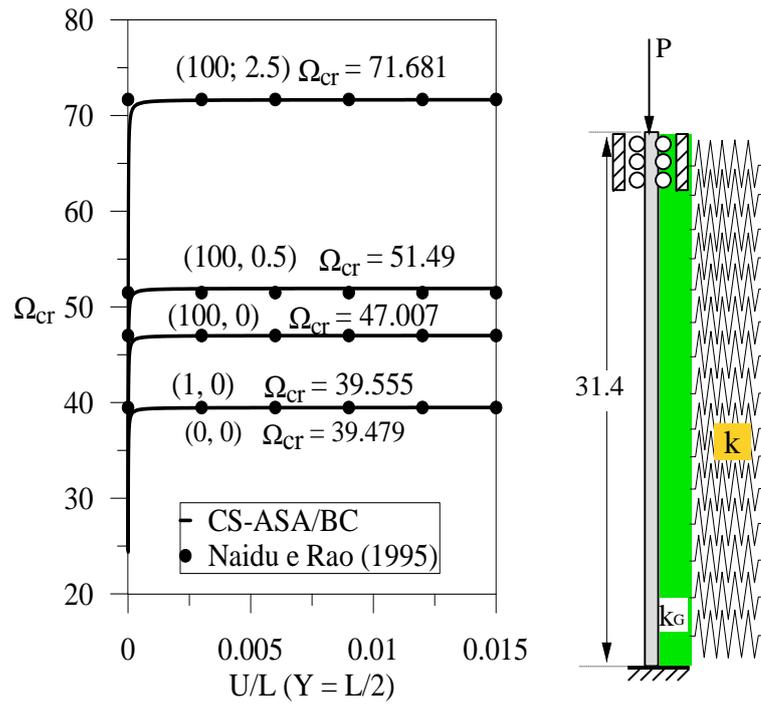


Figura 4.24 Coluna biapoiada: trajetórias de equilíbrio para diferentes combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .



**Figura 4.25** Coluna biengastada: trajetórias de equilíbrio para diferentes combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .

# Capítulo 5

## Conclusões e Sugestões

### 5.1 Conclusões

Este trabalho avaliou o equilíbrio e a estabilidade de vigas e colunas em contato bilateral com fundações elásticas. Para isso foi utilizado o sistema computacional CS-ASA (Silva, 2009) para implementar um módulo de contato bilateral (CS-ASA/BC), que permite estudar o problema em questão. Essas implementações computacionais estão relacionadas diretamente com a inclusão dos modelos de bases elásticas (ou fundações) no sistema CS-ASA (Silva, 2009), sendo eles: o modelo discreto, o contínuo de um parâmetro (Winkler) e contínuo de dois parâmetros (Pasternak e Filonenko-Borodich), que foram descritos no final do Capítulo 3. A metodologia de solução fundamentou-se no emprego do método dos elementos finitos (MEF) e no método de Newton-Raphson.

Os exemplos apresentados no capítulo anterior validam as implementações computacionais feitas no CS-ASA através da inclusão do módulo CS-ASA/BC. Os resultados apresentados já permitiram estabelecer algumas conclusões que serão resumidas a seguir.

As análises lineares tiveram como objetivo: averiguar a influência da discretização e dos modelos e seus respectivos parâmetros na análise; a possibilidade de substituir o modelo contínuo de Winkler pelo modelo discreto formado por molas elásticas e a possibilidade de combinar modelos discretos e contínuos simultaneamente para discretizar um problema. Em relação a essas análises, concluiu-se que:

- i. o modelo de molas discretas pode ser usado para representar o comportamento da base. Porém, para um determinado valor da razão entre a rigidez da base elástica e da

estrutura, observa-se que o modelo contínuo é mais preciso. Isso acontece de uma forma mais explícita a medida que se aumenta a essa razão;

- ii. ao se adotar um modelo misto (discreto-contínuo), observou-se a vantagem do modelo de molas discretas, que possibilita representar outros fenômenos físicos não considerados nas formulações de Winkler e Pasternak, tais como o atrito solo-estrutura;
- iii. em problemas onde o solo foi representado pelo modelo de Pasternak, estudos paramétricos permitiram visualizar a relação não linear existente entre a resposta da estrutura e do segundo parâmetro de rigidez da base elástica, verificando-se a importância de se determinar um valor coerente para o segundo parâmetro.

Além os objetivos descritos para a análise linear, a análise não linear teve como objetivos: avaliar a carga crítica de colunas com um apoio elástico discreto intermediário para diversas condições de contorno; a grande influência da representação da imperfeição (modos de instabilidade) na avaliação da carga crítica de colunas em contato com uma base do tipo Winkler e a avaliação do ganho de rigidez do sistema ao se considerar o segundo parâmetro da base elástica, isto é, ao se adotar o modelo de Pasternak na representação do solo. Em relação às soluções não lineares, concluiu-se que:

- i. quanto maior a carga crítica de flambagem de uma coluna, na qual o deslocamento lateral é restringido por uma única mola elástica, maior é o valor da rigidez para que a mola aja como um apoio rígido e, conseqüentemente, nas condições geométricas específicas para cada caso, altere o modo de flambagem da mesma;
- ii. ao se analisar a instabilidade de colunas em contato bilateral com bases elásticas, as imperfeições iniciais juntamente com a formulação utilizada para representar a fundação tem grande importância na determinação da carga crítica;
- iii. a formulação apresentada no trabalho encontrou o patamar da carga crítica das colunas esbeltas ao traçar a trajetória de equilíbrio, porém não foi capaz de traçar a curva pós-crítica, pois apresentou uma instabilidade numérica;
- iv. ao se adotar o modelo de Pasternak para representar a fundação elástica, quanto maior for a carga crítica de flambagem de uma coluna, menor é a influência do segundo parâmetro da base elástica.

## 5.2 Sugestões para Futuras Pesquisas

Para desenvolvimento de futuras pesquisas, recomenda-se:

- i. traçar curvas pós críticas em análises não lineares;
- ii. implementar modelos não lineares de fundação;
- iii. considerar o contato entre estrutura e base como unilateral;
- iv. estudar a resposta dinâmica linear e não linear de estruturas em contato (bilateral e unilateral) com bases elásticas.

# Referências Bibliográficas

- Aljanabi, A.I.M., Farid, B.J.M., e Mohamad Ali, A.A.A., 1990. The interaction of plane frames with elastic foundation having normal and shear moduli of subgrade reactions. *Comput. Struct.* v. Xi, pp. 1047-1056.
- Alves, R.V., 1993a. *Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Total*. 1o Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Alves, R.V., 1993b. *Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado*. 3º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Alves, R.V., 1995. *Instabilidade não-linear de estruturas reticuladas espaciais*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Badie, S.S., e Salmon, D.C., 1996. A quadratic order elastic foundation finite element. *Comput Struct*, v.58(3), pp.435–443.
- Bathe, K.J., 1996. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice–Hall. Englewood Cliffs, NJ.
- Batoz, J.L., e Dhatt, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, pp. 1262-1267.
- Brush, D.O e Almroth, B.O., 1975. *Buckling of bars, plates and shell*. International student edition.
- Chai, H., 1998. The post-buckling response of a bi-laterally constrained column. *J. Mech. Phys. Solids*. v.46(7), pp.1155–1181.
- Chan, S.L., 1988. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical*

- Methods in Engineering*, v. 26, pp. 2657-2669.
- Chan, S.L., e Chui, P.P.T., 2000. *Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford.
- Chapman, S.J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., New York, John Wiley and Sons, Inc.
- Crisfield, M.A., 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snapthrough. *Computers and Structures*, v. 13, pp. 52-62.
- Crisfield, M.A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. v. 1, John Wiley and Sons Inc., USA.
- Dutta, S.C., e Roy, R., 2002. A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system. *Computers and Structures*, v.80, pp. 1579-1594.
- Galvão, A.S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Galvão, A.S., Pereira, A., Gonçalves, P.B., e Silveira, R.A.M., 2002. Efeito do contraventamento lateral na estabilidade de colunas. In: Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 2002, Brasília - DF. *Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, V.1, pp.1-17.
- Hetényi, M., 1946. *Beams on Elastic Foundation*. University of Michigan Press, Mich.
- Horibe, T., e Asano, N., 2001. Large deflection analysis of beams on two-parameter elastic foundation using the boundary integral equation method. *JSME International Journal*. v.44(2), pp.231-236.
- Kerr, A.D., 1964. *Elastic and Viscoelastic Foundation Models*. J. Appl. Mech., ASME, v.31, pp.491-498.
- Kien, N.D., 2004. Postbuckling behavior of beams on two-parameter elastic foundation, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. v.4, pp. 21-43.

- Kien, N.D., 2004. Postbuckling behavior of beams on two-parameter elastic foundation, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. v.4, pp. 21-43.
- Krenk, S., 1995. An orthogonal residual Procedure for non-linear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, pp. 823-839.
- Liew, J.Y.R., 1992. *Advanced Analysis for Frame Design*. Ph.D. Thesis, Purdue University, West Lafayette, IN.
- Matos Filho, R., Mendonca, A.V, e Paiva, J.B., 2005. Static boundary element analysis of piles subjected to horizontal and vertical loads. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 29, pp. 195–203.
- Maximiano, D.P., 2012. *Uma Técnica Eficiente para Estabilizar a Estratégia do Resíduo Ortogonal na Análise Não Linear de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Meek, J.L., e Tan, H.S., 1984. Geometrically nonlinear analysis of space by an incremental iterative technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. v.47, pp. 261-282.
- Morfidis, K, e Avramidis, IE, 2002. Formulation of a generalized beam element on a two-parameter elastic foundation with semi-rigid connections and rigid offsets. *Comput Struct*; v.80, pp. 1919–34.
- Mullapudi, R., e Ayoub, A.N., 2009. Nonlinear finite element modeling of beams on two-parameter foundations. *Computers and Geotechnics*. v.37, pp.334–342.
- Naidu, N.R., e Rao, G.V., 1995. Stability behaviour of uniform columns on a class of two parameter elastic foundation. *Computers and Structures*. v.57, pp. 551-553.
- Nogueira, C.L., Carvalho, M.T.M., e Silveira, R.A.M. (1990). *Modelagem de Vigas sobre Base Elástica*, trabalho da disciplina “Método dos Elementos Finitos na Engenharia Mecânica”, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).
- Pereira, W.L., 2003. *Formulações Numéricas para Análise de Vigas em Contato com Bases Elásticas*, Ouro Preto, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG.

- Prado, I.M., 2012. *CS-ASA Preprocessor: Sistema Gráfico Interativo de Pré-processamento para Análise Avançada de Estruturas*, Ouro Preto, Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, A.A., e Vetterling, W.T., 1992. *Numerical Recipes—The Art of Scientific Computing (FORTRAN Version)*. Cambridge University Press.
- Ramm, E., 1981. *Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89.
- Ramm, E., 1982. The Riks/Wempner Approach - An extension of displacement control method in non-linear analysis. *Non-linear Computational Mechanics*, ed. E. Hinton et al., Pineridge, Swansea, pp. 63-86.
- Riks, E., 1972. The Application of Newton's Methods to the Problems Elastic Stability. *Journal of Applied Mechanics*, v. 39, pp. 1060-1066.
- Riks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, pp. 529-551.
- Sapountzakis, E.J., Kampitsis, A.E., 2010. Nonlinear analysis of shear deformable beam-columns partially supported on tensionless Winkler foundation, *International Journal of Engineering, Science and Technology*. v. 2(4), pp. 31-53.
- Shen, H.S., 2011. A novel technique for nonlinear analysis of beams on two-parameter elastic foundations. *Int. Journal of Struc. Stability and Dynamics*. v.11(6), pp. 999-1014.
- Shirima, L.M., Giger, M.W., 1992. Timoshenko beam element resting on two-parameter elastic foundation. *J Eng Mech*. v.118(2), pp. 280–295.
- Silva, A.R.D., 1998. *Análise de Placas com Restrições de Contato*, Dissertação de Mestrado, PROPEC/Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Silva, A.R.D., Silveira, R.A.M., e Gonçalves, P.B., 2001. Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations, *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, 2083-2100, 2001.

- Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Silveira, R.A.M., 2010. *Análise não linear estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Projeto CNPq, Modalidade Produtividade em Pesquisa (PQ), Processo 304318/2010-8.
- Silveira, R.A.M., Nogueira, C.L., Gonçalves, P.B., 2012. A numerical approach for stability analysis of slender arches and rings under contact constraints (artigo aceito para publicação no *International Journal of Solids and Structures*).
- Silveira, R.A.M., Pereira, W.L.A., e Gonçalves, P.B., 2008a. Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact constraints by a Ritz type approach. *International Journal of Solids and Structures*, v.45, pp. 2629-2650.
- Silveira, R.A.M., Pereira, W.L.A., e Gonçalves, P.B., 2008b. Constrained and unconstrained optimization formulations for structural elements in unilateral contact with an elastic foundation. *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1-15.
- Simitses, G.J., e Hodges, D.H., 2006. *Fundamentals of Structural Stability*, Elsevier, New York.
- Tzaros, K.A., e Mistakidis, E.S., 2011. The unilateral contact buckling problem of continuous beams in the presence of initial geometric imperfections: An analytical approach based on the theory of elastic stability, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 46(9), pp. 1265-1274.
- Wang, Y.H., Tham, L.G., e Cheung, Y.K., 2005. Beams and plates on elastic foundations: a review, *Progress in Structural Engineering and Materials*, v. 7(4), p.174-182.
- Wempner, G.A., 1971. Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. *International Journal of Solids and Structures*, v. 7, pp. 1581-1599.
- Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.
- Yang, Y.B., e Shieh, M.S., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, v. 28(12), pp. 2110-2116.

Zhaohua, F., e Cook, R.D., 1985. Beam elements on two parameter elastic foundation. *Struct. Mech.*, ASCE. v. 109(6), pp. 1390-1402

Zienkiewicz, O.C., e Taylor, R.L., 1991. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company (UK), v. 2.

# Anexo A

## Entrada de Dados

### A.1 Introdução

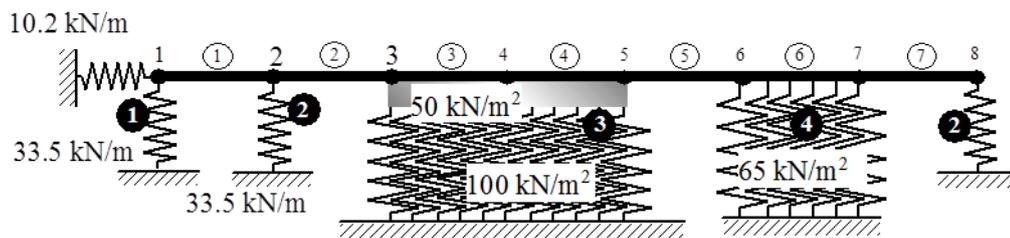
Neste anexo são apresentadas as informações necessárias para modelar a base elástica e definir assim as regiões de contato. Como destacado no Capítulo 3, essa modelagem pode ser estabelecida através de um modelo matemático discreto ou contínuo com um ou dois parâmetros. A combinação desses modelos também pode ser adotada. Essas informações são fornecidas no arquivo de dados 1, FILEIN1.D, usado pelo programa CS-ASA. Destaca-se que uma descrição completa dos arquivos de dados e todo o processo de geração do modelo estrutural podem ser encontrados em Prado (2012).

### A.2 Modificação no Arquivo de Dados

Para ilustrar como deve ser feita a entrada de dados referente às propriedades das bases elásticas caso o problema de contato seja a opção do analista, considere o membro estrutural ilustrado na Figura A.1. Na discretização da barra, oito elementos finitos foram adotados. O modelo discreto e os modelos contínuos serão usados na representação do contato entre a barra e o meio elástico.

Quatro diferentes regiões de contato podem ser identificadas na Figura A.1. A primeira região, representada por molas discretas com rigidezes translacionais de intensidades 10.2 kN/m e 33.5 kN/m, simula apenas o contato do ponto nodal 1 com o meio exterior. A representação da base elástica através de molas discretas ou apoios elásticos pode ser observada também nos contatos com os pontos nodais 2 e 8. Nessas duas situações, o meio

oferece reação apenas ao deslocamento vertical desses nós, e a rigidez do apoio elástico é 33.5 kN/m. As demais regiões de contato, 3 e 4, são representadas pelos modelos contínuos. Nesse caso, os elementos finitos estão em contato com a base elástica. Os elementos 3 e 4 apoiam-se em um meio que será representado matematicamente pelo modelo de Pasternak e, o elemento 6 está em contato com uma base tipo Winkler. No modelo de Pasternak, dois parâmetros de rigidez, elástico e cisalhante, são necessários para descrever o comportamento da base elástica. Já para o modelo de Winkler, apenas um parâmetro é requerido.



**Figura A.1** Membro estrutural em contato com diferentes tipos de bases elásticas

As informações sobre a consideração de bases elásticas na modelagem são repassadas ao programa de análise através do arquivo de dados 1. Esse arquivo está organizado na forma de blocos de informações com características semelhantes, que são precedidos por um determinado macro-comando. No caso das bases elásticas, as informações estão relacionadas com os parâmetros de rigidez e dos elementos ou nós que definem as regiões de contato. O número e o tipo de regiões de contato devem, entretanto, ser fornecidos primeiramente. A quinta linha destacada em parte do arquivo ilustrado na Figura A.2 é usada com esse objetivo. Observe que dois números devem ser informados. O primeiro deles refere-se ao número de regiões cuja base elástica é modelada com molas discretas. O outro valor define a quantidade de regiões nas quais os modelos contínuos são usados. De acordo com o problema descrito no início desta seção, têm-se duas diferentes regiões de contato cujo comportamento é descrito usando o modelo discreto, e outras duas regiões distintas que usam os modelos contínuos. Destaca-se que, embora existam três regiões de contato cujo comportamento é descrito por molas discretas, duas delas possuem as mesmas características, ou seja, as mesmas rigidezes à translação e à rotação. Nesse caso, é possível considerar apenas duas regiões de contato (ver primeiro número da quinta linha na Figura A.2). Caso não se tenha interesse em realizar uma análise de contato, esses dois valores deverão ser iguais à zero.

Havendo regiões de contato, após definir a malha de elementos finitos, o macro-comando CONT é usado para indicar o início de leitura de um conjunto de dados com as propriedades das regiões de contato. Esse bloco de informações pode ser observado na outra área destacada na Figura A.2. Inicialmente devem ser fornecidas as propriedades das bases modeladas através de molas discretas, caso haja essa situação. Observe que após o macro-comando CONT, o número 1 refere-se ao modelo discreto ou apoio elástico usado na modelagem da base. Nesse caso, três valores correspondentes aos parâmetros de rigidez elástica translacional,  $K_1$  e  $K_2$ , e rotacional,  $K_3$ , devem ser fornecidos para cada uma das diferentes regiões. Na região de contato 1, esses parâmetros têm valores 10.2 N/m para a rigidez na direção horizontal, e 33.5 N/m para a rigidez na direção vertical. A rigidez à rotação nesse caso é nula. Através da Figura A.1 é possível ver que apenas uma região de contato apresenta essas mesmas propriedades de rigidez. Após informar os três parâmetros de rigidez, na linha seguinte, o valor um (1) indica o número de grupos de pontos nodais com esse tipo de apoio. Na sequência, indicam-se os nós inicial e final de cada grupo. Como existe um único ponto nodal nessa primeira região, os dois valores coincidem e são iguais ao ponto nodal que contém os apoios elásticos descritos. Nas regiões de contato 2 (Figura A.1), apoios elásticos também são usados. Nesse caso, as mesmas informações usadas para na descrição da região 1 devem ser fornecidas. Cabe destacar que, agora, o número de nós com as características informadas é dois, ou seja, pontos nodais 2 e 8. Apenas a rigidez na direção vertical é diferente de zero e tem valor 33.5 N/m. Como não há sequência de numeração nesse caso, dois grupos de nós são fornecidos, como mostra a Figura A.2.

Efetuada a entrada de dados das duas regiões de contato cujas bases são descritas pelo modelo discreto, deve-se informar as características das duas regiões nas quais os modelos contínuos são usados. O processo de entrada de dados é basicamente o mesmo descrito anteriormente para molas discretas. O número de parâmetros de rigidez agora é dois, e os elementos que definem a região de contato devem ser informados. A região 3 é modelada segundo Pasternak com rigidez elástica e cisalhante iguais a  $100 \text{ kN/m}^2$  e  $50 \text{ kN}$ , respectivamente. Em contato com esse tipo de base estão os elementos 3 e 4. Como existe sequência na numeração, um grupo é usado para definir esse conjunto de elementos. Definido o grupo, na linha seguinte os elementos que o pertencem são fornecidos. Finalizando a entrada de dados referente ao comportamento das bases elásticas, as características da região 4, na qual adota-se o modelo de Winkler, são fornecidas. Embora um único parâmetro de rigidez seja usado, dois devem ser fornecidos. O primeiro deles de intensidade  $65 \text{ kN/m}^2$ , refere-se à rigidez elástica, e o segundo parâmetro deve ser nulo. O elemento 6 está em

contato com essa região. Sendo assim, um único grupo de elementos precisa ser definido, e os elementos inicial e final desse grupo é 6. Mais uma vez, destaca-se que outras informações referentes à montagem dos arquivos de dados usados pelo CS-ASA encontram-se em Prado (2012).

```

Exemplo A.1      ...title
estatica        ...tipo analise (estatica ou dinamica)
POR             ...estrutura(POR, TRE)
1              ...ntype = tipo de solucao (linear ou não linear)
2 2            ...n° de regiões (discreto, contínuo)
0              ...ligacao semirrigida
8 7 2 2 3 1 1 1 3 ...npoin,nelem,ndime,ndofn,nmats,npmat,nsecs,npsec
coor           ...MACRO-COMANDO
ppor          ...MACRO-COMANDO
8
1 1 0.0 0.    ...no,ng,x,y
8 1 5.0 0.    ...no,ng,x,y
CONT          ...MACRO-COMANDO
1             ...formulacao (1=disc.,2=contínuo)
10.2 33.5 0.  ...k1,k2,k3
1            ...ngnos
1 1          ...noini, nofinal
0. 33.5 0.   ...k1,k2,k3
2           ...ngnos
2 2         ...noini, nofinal
8 8
2           ...formulacao (1=disc.,2=contínuo)
100.0 50.   ...k1,k2
1          ...ngelm
3 4        ...elmini, elmfinal
65.0 0.    ...k1,k2
1         ...ngelm
6 6        ...elmini, elmfinal

```

**Figura A.2** Parte do arquivo de entrada mostrando a modelagem das bases elásticas