

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

# Emprego de Elemento Finito Híbrido na Análise Não-Linear de Estruturas Metálicas

**AUTOR: Marcelo Nascimento Santos**

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Estruturas Metálicas.

Ouro Preto, junho de 2007.

S237e

Santos, Marcelo Nascimento.

Emprego de elemento finito híbrido na análise não linear de estruturas metálicas [manuscrito] / Marcelo Nascimento Santos - 2007.

xx, 144f.: il., color.; graf.; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.

Área de concentração: Construção Metálica.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Análise numérica - Teses.  
3. Ligações metálicas - Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto.  
II. Título.

CDU: 624.014

Catálogo: [sisbin@sisbin.ufop.br](mailto:sisbin@sisbin.ufop.br)

# **EMPREGO DE ELEMENTO FINITO HÍBRIDO NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS METÁLICAS**

**AUTOR: MARCELO NASCIMENTO SANTOS**

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 05 de junho de 2007, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (Orientador / UFOP)

Prof. Dr. Alexandre da Silva Galvão (Orientador / UFF)

Profa. Dra. Arlene Maria Sarmanho Freitas (UFOP)

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira (UFMG)

“Penso, logo existo.”

“Nada existirá de tão distante, que não será alcançado, nem tão escondido, que não seja descoberto.”

René Descartes (1596-1650)

# AGRADECIMENTOS

- ❖ A Deus, por ter me dado força e saúde para concluir mais essa etapa da minha vida;
- ❖ Aos meus pais Antônio D' Assunção Santos e Sônia Maria Santos, pela educação, carinho e dedicação que me foram dados durante todos estes anos;
- ❖ A meus avós José e Beatriz, aos meus irmãos Cíntia, Carlos e Leonardo, pelo incentivo, compreensão e ajuda nos momentos difíceis da minha vida, e à minha namorada Elizabeth pelo carinho, companheirismo e apoio que me foram dados em todos os momentos desta jornada;
- ❖ Ao meu orientador, Professor Ricardo Azoubel, pela amizade, confiança, incentivo e grande dedicação, e ao meu Co-orientador Professor Alexandre Galvão, pelo apoio e paciência ao longo deste trabalho;
- ❖ Ao Arthur Alvarenga pela atenção e presteza que me foram de grande valia para conclusão deste trabalho;
- ❖ Ao Leonardo Pinheiro, Paulo Rocha e ao Fernando Scheffer pela atenção nos momentos de dúvidas;
- ❖ Ao meu “irmão” Flávio Teixeira pela amizade e conselhos sempre precisos e a meus grandes amigos Kátia Inácio (kaká), Mário Cabello (Cabello), Richer Lucas e Rodrigo Bahiense (Pardal) pelos momentos de descontração;
- ❖ Ao Professor Luiz Fernando Rispoli Alves (Rispoli) pelo apoio, incentivo e confiança em meu potencial;
- ❖ À minha turma de mestrado, Aldo (Caverna), José Maria (o mestre), Gustavo (Ponte), Manoel, Maila e Michel pelo companheirismo e amizade;
- ❖ Aos professores e funcionários do DECIV e da Escola de Minas;
- ❖ À VALLOUREC & MANNESMANN TUBES e à Fundação Gorceix pela ajuda financeira.

# RESUMO

Neste trabalho, um elemento finito híbrido que incorpora em sua formulação os efeitos não-lineares de segunda ordem, da inelasticidade do aço e da rigidez da ligação, é utilizado para analisar alguns sistemas estruturais reticulados planos em aço (rígidos, semi-rígidos ou rotulados) submetidos a cargas aplicadas estaticamente. Na realidade, trata-se do elemento finito clássico de pórtico plano que apresenta em suas extremidades pares de molas dispostas em série. Uma das molas é representada, na formulação matemática deste elemento, pelo parâmetro  $S_c$  que define o grau de rigidez da ligação entre os membros do sistema estrutural; na outra mola é definido o parâmetro  $S_s$  que avalia a plastificação da seção. A matriz de rigidez desse elemento incorpora todos os efeitos não-lineares supracitados. O objetivo desta dissertação é averiguar a eficiência computacional desse elemento finito híbrido na simulação isolada e combinada desses efeitos não-lineares. São estudados inicialmente problemas clássicos de equilíbrio e estabilidade que apresentam como característica principal um comportamento fortemente não-linear e possuem em suas trajetórias de equilíbrio regiões com grandes deslocamentos e pontos críticos (pontos limites de carga e/ou deslocamento). Em seguida, sistemas estruturais semi-rígidos com imperfeições geométricas iniciais são avaliados com o intuito de se verificar a contribuição da rigidez das ligações no valor da carga crítica e na natureza do mecanismo de colapso. Por fim são efetuadas análises inelásticas, baseadas no método da rótula plástica refinado, de pórticos planos rígidos e semi-rígidos com contraventamento ou não. Conclui-se dessa forma um ciclo de análises numéricas que visa validar a implementação computacional e o emprego desse elemento finito híbrido na discretização de sistemas estruturais em aço. No final deste trabalho são apresentadas considerações adicionais envolvendo os resultados obtidos e algumas propostas para prosseguimento dessa linha de pesquisa.

# ABSTRACT

A hybrid finite element that incorporates the second-order effect, material yielding and connection flexibility effects, is presented in this work to study the behavior of plane steel frames (rigid, semi-rigid or pinned frames) subjected to static loads. In fact, it is the classic beam-column finite element that presents, in its ends, pairs of springs arranged in sequence. One of the springs is represented in the mathematical formulation of this element by the parameter  $S_c$  that defines the joint stiffness of the members; the other spring, whose rigidity is simulated by the parameter  $S_s$ , evaluates the plastification of the cross section. The element stiffness matrix incorporates these three non-linear effects mentioned. Therefore, the aim of this work is to investigate the computer efficiency of this hybrid finite element in the isolated and combined simulation of these nonlinear effects. Initially, equilibrium and stability of classic structural problems with high non-linear behavior and critical points in the equilibrium paths are studied. Hereinafter, semi-rigid structural systems with initial geometric imperfections are evaluated with the objective of estimate the contribution of the joint stiffness and of the geometric imperfections in the critical load and in the pattern of collapse mechanism. Later, the hybrid element is tested in the inelastic analysis, based on refined plastic-hinge method, of rigid and semi-rigid braced and unbraced frames. So through these examples is possible validate and verify the accuracy of numerical models of structural systems obtained using the hybrid finite element proposed. Additional considerations and suggestions to the continuation of this research are presented at the end this work.

# SUMÁRIO

<b>SUMÁRIO</b> .....	<b>VII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>VIII</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	<b>IX</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	<b>XVI</b>

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	1
1.2 – OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	4
1.3 – PESQUISA BIBLIOGRÁFICA .....	7
1.3.1 – Efeitos de Segunda Ordem .....	7
1.3.2 – Rigidez das Ligações .....	8
1.3.3 – Inelasticidade do Aço.....	9
1.3.4 – Análise Avançada .....	10

<b>CAPÍTULO 2 – ELEMENTO FINITO HÍBRIDO NÃO-LINEAR DE PÓRTICO PLANO</b> .....	<b>12</b>
2.1 – INTRODUÇÃO .....	12
2.2 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO HÍBRIDO NÃO-LINEAR.....	13
2.2.1 – Transformações de Coordenadas .....	20
2.2.2 – Avaliação das Rotações .....	24
2.2.3 – Casos Particulares .....	25
2.3 – DEFINIÇÃO DO GRAU DE RIGIDEZ DA LIGAÇÃO ( $S_C$ ).....	28
2.3.1 – Modelo Linear.....	31
2.3.2 – Modelos Exponenciais .....	33
2.3.2.1 – Modelo exponencial modificado .....	36
2.3.3 – Modelo de Richard e Abbott.....	37

2.4 – DEFINIÇÃO DO GRAU DE INELASTICIDADE DA SEÇÃO ( $S_s$ ) .....	39
<b>CAPÍTULO 3 – PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS.....</b>	<b>45</b>
3.1 – INTRODUÇÃO .....	45
3.2 – VISÃO GERAL DO PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	46
3.3 – ETAPAS BÁSICAS PARA SOLUÇÃO NÃO-LINEAR .....	49
3.3.1 – Arquivos de Entrada de Dados (bloco-1) .....	51
3.3.2 – Solução do Problema Não-Linear (bloco-2).....	56
3.3.2.1 – Solução incremental predita.....	58
3.3.2.2 – Ciclo de iterações .....	59
3.3.3 – Arquivos de Saída de Dados (bloco-3) .....	63
3.3.3.1 – Arquivo de saída-1 .....	63
3.3.3.2 – Arquivos de saída-2 .....	64
3.3.3.3 – Arquivos de saída-3 .....	66
3.3.3.4 – Pós-processador gráfico (VTOOL-V1.0) .....	70
<b>CAPÍTULO 4 – EXEMPLOS NUMÉRICOS: EFEITO DE SEGUNDA ORDEM...</b>	<b>74</b>
.....	74
4.1 – INTRODUÇÃO .....	74
4.2 – VIGA ENGASTADA-LIVRE.....	77
4.3 – COLUNA ENGASTADA-LIVRE .....	79
4.4 – ARCO CIRCULAR ABATIDO SIMPLEMENTE APOIADO .....	82
4.5 – PÓRTICO DE LEE.....	86
4.6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	89
<b>CAPÍTULO 5 – EXEMPLOS NUMÉRICOS: EFEITO DA RIGIDEZ DAS</b>	
<b>LIGAÇÕES .....</b>	<b>90</b>
5.1 – INTRODUÇÃO .....	90
5.2 – COLUNA SEMI-RÍGIDA .....	93

5.3 – ARCO TRELIÇADO SEMI-RÍGIDO.....	98
5.4 – PÓRTICOS DE QUADROS SIMPLES COM VARIAÇÃO DE ALTURA ..	103
5.5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	107
<b>CAPÍTULO 6 – EXEMPLOS NUMÉRICOS: EFEITO INELÁSTICO E</b>	
<b>EFEITOS COMBINADOS .....</b>	<b>108</b>
6.1 – INTRODUÇÃO .....	108
6.2 – PÓRTICO TRAVADO LATERALMENTE.....	111
6.3 – PÓRTICO TIPO GALPÃO .....	116
6.4 – PÓRTICOS SEMI-RÍGIDOS CONTRAVENTADOS .....	121
6.5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	129
<b>CAPÍTULO 7 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>131</b>
7.1 – INTRODUÇÃO .....	131
7.2 – CONCLUSÕES .....	131
7.3 – SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS .....	133
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>134</b>

# LISTA DE FIGURAS

## CAPÍTULO 2

Figura 2.1 – Elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano (Chan e Chui, 2000).	13
Figura 2.2 – Transformações entre sistemas de coordenadas co-rotacional básico e global do elemento (Machado, 2006).	21
Figura 2.3 – Elemento finito híbrido não-linear sem rótulas plásticas nas extremidades.	26
Figura 2.4 – Elemento finito híbrido não-linear com uma rótula plástica no nó 2.	27
Figura 2.5 – Elemento finito híbrido não-linear com rótulas plásticas em ambas as extremidades.	28
Figura 2.6 – Exemplos de curvas momento-rotação das conexões, modelos linear e não-linear (Chan e Chui, 2000).	33
Figura 2.7 – Tipos de ligação entre viga e coluna utilizadas para obtenção dos parâmetros do modelo exponencial de Chen e Lui (1988).	34
Figura 2.8 – Curvas momento-rotação de ligações adotando o modelo exponencial de Chen e Lui (1988), conforme Pinheiro (2003).	36
Figura 2.9 – Rigidez das ligações adotando o modelo exponencial de Chen e Lui (1988), conforme Pinheiro (2003).	36
Figura 2.10 – Forma típica das curvas momento-rotação no modelo de Richard e Abbott (Chan e Chui, 2000).	38
Figura 2.11 – Exemplo de superfície de interação, AISC-LRFD (1986).	41
Figura 2.12 – Perfil estudado e a distribuição de tensões proposta no conceito da “seção montada”, AISC-LRFD (1986), Machado (2005).	42
Figura 2.13 – Superfície de interação do perfil HEB 220 obtida pelo conceito da “seção montada”, Machado (2005).	43

## CAPÍTULO 3

Figura 3.1 – Esquema geral do programa computacional.	47
---	----

Figura 3.2 – Esquema geral dos tipos de estrutura analisados no programa computacional.....	48
Figura 3.3 – Esquema geral dos parâmetros para cada tipo de estrutura.....	49
Figura 3.4 – Fluxograma geral do programa computacional.....	50
Figura 3.5 – Modelo do arquivo de entrada de dados (entrada-1).....	52
Figura 3.6 – Arquivo de entrada de dados para solução não-linear (entrada-2).....	56
Figura 3.7 – Estratégia de solução não-linear adotada (Crisfield, 1991; Rocha, 2006).	62
Figura 3.8 – Ciclo iterativo de Newton-Raphson N-R (Machado, 2005).....	63
Figura 3.9 – Modelo do arquivo de saída-1 (extensão “*.s”). .....	64
Figura 3.10 – Modelo dos arquivos de saída-2.....	65
Figura 3.11 – Modelo do arquivo de saída com a superfície de interação “*e.dat”. .....	66
Figura 3.12 – Arquivos neutros utilizado pelo pós-processador gráfico. ....	67
Figura 3.13 – Algumas telas do pós-processador gráfico.....	73

## **CAPÍTULO 4**

Figura 4.1 – Problemas estruturais submetidos à análise não-linear de segunda ordem.	75
Figura 4.2 – Cálculo do desvio ( $D_{a/b}$ ). .....	76
Figura 4.3 – Viga engastada-livre.....	77
Figura 4.4 – Trajetórias de equilíbrio da viga engastada-livre. ....	78
Figura 4.5 – Coluna engastada-livre.....	80
Figura 4.6 – Trajetória de equilíbrio da coluna engastada-livre. ....	81
Figura 4.7 – Arco circular abatido simplesmente apoiado. ....	82
Figura 4.8 – Trajetórias de equilíbrio do arco perfeito ( $M = 0$ ).....	83
Figura 4.9 – Trajetórias de equilíbrio do arco imperfeito ( $M \neq 0$ ). ....	84
Figura 4.10 – Pórtico de Lee.....	86
Figura 4.11 – Trajetória de equilíbrio do Pórtico de Lee (deslocamento vertical $w$ ). ....	88
Figura 4.12 – Trajetória de equilíbrio do Pórtico de Lee (deslocamento horizontal $u$ )..	89

## **CAPÍTULO 5**

Figura 5.1 – Sistemas estruturais semi-rígidos. ....	91
--	----

Figura 5.2 – Coluna semi-rígida. ....	93
Figura 5.3 – Trajetória de equilíbrio da coluna semi-rígida. ....	94
Figura 5.4 – Variação do parâmetro GSP com a carga axial normalizada ( $P/P_e$ ). ....	95
Figura 5.5 – Variação da carga de flambagem elástica da coluna semi-rígida com a rigidez da ligação $S_c$ . ....	97
Figura 5.6 – Arco treliçado semi-rígido. ....	99
Figura 5.7 – Trajetórias de equilíbrio do arco treliçado semi-rígido. ....	101
Figura 5.8 – Influência do comprimento efetivo de flambagem da barra, na carga crítica do arco treliçado semi-rígido. ....	102
Figura 5.9 – Pórticos de quadros simples com variação de altura (Sekulovic e Salatic, 2001). ....	104
Figura 5.10 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de quadro simples com um pavimento. ....	105
Figura 5.11 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de quadro simples com dois pavimentos. ....	106
Figura 5.12 – Influência da rigidez da ligação no valor da carga crítica. ....	106

## **CAPÍTULO 6**

Figura 6.1 – Resumo dos sistemas estruturais estudados. ....	109
Figura 6.2 – Pórticos com restrição ao movimento lateral (Chan e Chui, 2000). ....	111
Figura 6.3 – Diagrama de momento fletor e carga axial dos pórticos. ....	112
Figura 6.4 – Variação das forças internas nas colunas e na viga. ....	114
Figura 6.5 – Trajetórias de equilíbrio para os pórticos com restrição lateral. ....	115
Figura 6.6 – Pórtico tipo galpão (Chan e Chui, 2000; Machado, 2005). ....	116
Figura 6.7 – Trajetória de equilíbrio: análise elasto-plástica. ....	118
Figura 6.8 – Trajetória de equilíbrio: análise plástica-refinada. ....	118
Figura 6.9 – Trajetória de equilíbrio: análise elasto-plástica. ....	119
Figura 6.10 – Trajetória de equilíbrio: análise plástica-refinada. ....	119
Figura 6.11 – Diagramas de esforços no instante do colapso da estrutura. ....	120
Figura 6.12 – Pórticos semi-rígidos contraventados (Chan e Chui, 2000). ....	122
Figura 6.13 – Modelo discreto dos pórticos semi-rígidos contraventados. ....	122

Figura 6.14 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases rotuladas (Ligação tipo A).....	125
Figura 6.15 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases rotuladas (Ligação tipo B).....	126
Figura 6.16 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases rotuladas (Ligação tipo C).....	126
Figura 6.17 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases rotuladas (Ligação tipo D).....	127
Figura 6.18 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases engastadas (Ligação tipo A).....	127
Figura 6.19 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases engastadas (Ligação tipo B).....	128
Figura 6.20 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases engastadas (Ligação tipo C).....	128
Figura 6.21 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases engastadas (Ligação tipo D).....	129

# LISTA DE TABELAS

## CAPÍTULO 2

Tabela 2.1 – Parâmetros do modelo exponencial de Chen e Lui (1988), utilizados para alguns tipos de ligação. ....	35
---	----

## CAPÍTULO 3

Tabela 3.1 – Parâmetros gerais do arquivo de entrada-1. ....	53
--	----

## CAPÍTULO 4

Tabela 4.1 – Propriedades geométricas da seção I da viga engastada-livre. ....	77
Tabela 4.2 – Análise de convergência para a viga engastada-livre ( $u/L$ ). ....	78
Tabela 4.3 – Análise de convergência para a viga engastada-livre ( $w/L$ ). ....	79
Tabela 4.4 – Propriedades geométricas da seção I da coluna engastada-livre. ....	80
Tabela 4.5 – Análise de convergência para a coluna engastada-livre. ....	81
Tabela 4.6 – Propriedades geométricas da seção I do arco abatido. ....	82
Tabela 4.7 – Convergência para o arco abatido perfeito ( $M = 0$ ). ....	83
Tabela 4.8 – Convergência para o arco abatido imperfeito ( $M \neq 0$ ). ....	85
Tabela 4.9 – Propriedades geométricas da seção I do pórtico de Lee. ....	87
Tabela 4.10 – Convergência dos modelos adotados para o pórtico de Lee. ....	88

## CAPÍTULO 5

Tabela 5.1 – Propriedades geométricas equivalentes para a coluna semi-rígida. ....	93
Tabela 5.2 – Valores da carga crítica normalizada para a coluna semi-rígida. ....	96
Tabela 5.3 – Análise paramétrica da carga crítica normalizada para imperfeições geométricas de amplitudes diferentes. ....	96
Tabela 5.4 – Análise comparativa para a carga crítica de flambagem da coluna semi-rígida. ....	97
Tabela 5.5 – Coordenadas nodais do arco treliçado semi-rígido. ....	99
Tabela 5.6 – Conectividade entre as barras do arco treliçado semi-rígido. ....	99

Tabela 5.7 – Área da seção transversal das barras do arco treliçado semi-rígido. ....	100
Tabela 5.8 – Propriedades geométricas da seção I parao arco treliçado semi-rígido. ..	100
Tabela 5.9 – Análise comparativa para a posição do ponto de bifurcação do arco treliçado semi-rígido. ....	102
Tabela 5.10 – Propriedades geométricas da seção I equivalente para os pórticos de quadros simples com variação de altura. ....	104
Tabela 5.11 – Carga crítica do pórtico de um pavimento ( $P = 450\text{kN}$ , $H = 0.005P$ )....	105

## **CAPÍTULO 6**

Tabela 6.1 – Resumo das formulações empregadas. ....	110
Tabela 6.2 – Propriedades geométricas das seções transversais. ....	112
Tabela 6.3 – Forças internas normalizadas nos elementos: bases engastadas. ....	113
Tabela 6.4 – Forças internas normalizadas nos elementos: bases rotuladas. ....	113
Tabela 6.5 – Propriedades geométricas das seções transversais. ....	117
Tabela 6.6 – Comparação entre os fatores de carga limite $\lambda$ (análise elasto-plástica)..	117
Tabela 6.7 – Comparação entre os fatores de carga limite $\lambda$ (análise plástica-refinada). .....	117
Tabela 6.8 – Propriedades geométricas das seções transversais. ....	122
Tabela 6.9 – Comparação entre os valores de carga crítica [kN] para os pórticos contraventados. ....	123
Tabela 6.10 – Comparação entre os valores de carga limite [kN] para os pórticos sem contraventamento e contraventados. ....	124
Tabela 6.11 – Comparação entre os valores de carga limite [kN] para os modelos de ligação linear e não-linear. ....	124

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Gregos:

$\rho$	Índice de rigidez.
$\eta$	Fator de rigidez.
$\gamma$	Fator fixo de rigidez.
$\phi_c$	Rotação relativa da ligação.
$\phi_k$	Rotação inicial das componentes lineares, para modelo exponencial modificado.
$\delta \mathbf{u}$	Correção do vetor de deslocamentos nodais.
$\delta \mathbf{u}_t$	Correção do vetor de deslocamentos nodais tangenciais.
$\delta \mathbf{u}^k$	Correção do vetor de deslocamentos nodais na iteração corrente (k).
$\delta \mathbf{u}^{(k-1)}$	Correção do vetor de deslocamentos nodais na iteração anterior (k-1).
$\delta \mathbf{u}_g^k$	Correção no vetor de deslocamentos nodais, após a aplicação do método de Newton-Raphson, na iteração corrente (k).
$\delta \mathbf{u}_r^k$	Correção no vetor de deslocamentos nodais iterativos, resultante da aplicação do vetor $\mathbf{F}_r$ ; na iteração corrente (k).
$\Delta \mathbf{u}$	Vetor de incremento de deslocamentos nodais.
$\Delta \mathbf{u}_N$	Vetor de incremento de deslocamentos nodais no sistema de referência co-rotacional natural.
$\Delta \mathbf{u}_r$	Vetor de deslocamentos nodais no sistema de referência co-rotacional transformado.
$\Delta \mathbf{u}_t$	Vetor de deslocamentos nodais incrementais tangenciais.
$\Delta \mathbf{u}^0$	Incremento inicial no vetor de deslocamentos nodais.
$\Delta \mathbf{u}^k$	Incremento do vetor de deslocamentos nodais na iteração corrente (k).
$\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$	Incremento do vetor de deslocamentos nodais na iteração anterior (k-1).
$\lambda$	Parâmetro de carga.
$\lambda^k$	Parâmetro de carga na iteração corrente (k).
$\lambda^{(k-1)}$	Parâmetro de carga na iteração anterior (k-1).
${}^t\lambda$	Parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio (t).
${}^{t+\Delta t}\lambda$	Parâmetro de carga na configuração corrente (t+ $\Delta t$ ).
$\Delta \lambda$	Incremento do parâmetro de carga.

$\Delta\lambda^0$	Incremento inicial do parâmetro de carga.
$\Delta\lambda^k$	Incremento do parâmetro de carga na iteração corrente (k).
$\Delta\lambda^{(k-1)}$	Incremento do parâmetro de carga na iteração anterior (k-1).
$\delta\lambda$	Correção do parâmetro de carga.
$\delta\lambda^k$	Correção do parâmetro de carga na iteração corrente (k).
$\Delta\mathbf{f}$	Vetor de incremento de forças internas.
$\Delta\mathbf{f}_N$	Vetor de incremento de forças internas no sistema de referência co-rotacional básico.
$\Delta\mathbf{M}$	Incremento de momento fletor.
$\Delta\mathbf{M}_{b1}$ e $\mathbf{M}_{b2}$	Incremento de momento fletor no elemento de pórtico plano (nó-1 e nó-2).
$\Delta\mathbf{M}_{c1}$ e $\mathbf{M}_{c2}$	Incremento de momento fletor no elemento de mola que simula a ligação (nó-1 e nó-2).
$\Delta\mathbf{M}_{s1}$ e $\mathbf{M}_{s2}$	Incremento de momento fletor no elemento de mola que simula a seção transversal (nó-1 e nó-2).
$\Delta\mathbf{P}$	Incremento de força axial.
$\Delta\mathbf{Q}$	Incremento de força cisalhante.
$\Delta\theta_{b1}$ e $\Delta\theta_{b2}$	Incremento de rotação no elemento de pórtico plano (nó-1 e nó-2).
$\Delta\theta_{c1}$ e $\Delta\theta_{c2}$	Incremento de rotação no elemento de mola que simula a ligação (nó-1 e nó-2).
$\Delta\theta_{s1}$ e $\Delta\theta_{s2}$	Incremento de rotação no elemento de mola que simula a seção transversal (nó-1 e nó-2).
$\alpha$	Fator de escala, para o modelo exponencial.
$\beta_{cs}$	Parâmetro de rigidez que promove a interação entre os pares de molas das duas extremidades do elemento híbrido (nó-1 e nó-2).
$\xi$	Metade da parcela da alma que suporta a força axial.
$\sigma_r$	Tensão de residual do material.
$\sigma_y$	Tensão de escoamento do material.
$\Delta r$	Raio utilizado na equação de restrição da técnica de comprimento de arco.
$\tau$	Tolerância adotada para verificação da convergência numérica.
$\theta$	Direção adotada para acompanhamento da rotação do nó.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$\psi$	Amplitude da imperfeição geométrica no ponto nodal médio da coluna.

**Romanos:**

<b>A</b>	Área da seção transversal do elemento.
<b>A'</b>	Área da seção transversal equivalente.
<b>B<sub>f</sub></b>	Comprimento da mesa (aba) da seção transversal real.
<b>B'<sub>f</sub></b>	Comprimento da mesa (aba) da seção transversal equivalente.
<b>C<sub>j</sub></b>	Coefficientes de ajuste de curva do modelo exponencial.
<b>D</b>	Altura total da seção transversal real.
<b>d</b>	Altura total da alma da seção transversal real.
<b>d'</b>	Altura total da alma da seção transversal equivalente.
<b>D<sub>a/b</sub></b>	Média aritmética entre as coordenadas de dois pontos pertencentes a trajetórias de equilíbrio diferentes.
<b>D<sub>k</sub></b>	Coefficiente de ajuste de curva para a parcela linear da função degrau unitária (ou Heaviside).
<b>E</b>	Módulo de elasticidade do material que compõe o elemento.
<b>EA</b>	Rigidez ao esforço axial do elemento.
<b>EI</b>	Rigidez à flexão do elemento.
<b>F<sub>e</sub></b>	Vetor de forças externas.
<b>F<sub>i</sub></b>	Vetor de forças internas.
<b>F<sub>i</sub><sup>(k-1)</sup></b>	Vetor de forças internas na configuração anterior (k-1).
<b>f<sub>N</sub></b>	Vetor forças no sistema de referência co-rotacional natural.
<b>F<sub>ps</sub></b>	Vetor de pseudo-forças.
<b>F<sub>ps</sub><sup>(k-1)</sup></b>	Vetor de pseudo-forças na configuração anterior (k-1).
<b>f<sub>r</sub></b>	Vetor forças no sistema de referência co-rotacional transformado.
<b>F<sub>r</sub></b>	Vetor de forças nodais de referência.
<b>g</b>	Vetor gradiente.
<b>G</b>	Módulo de cisalhamento.
<b>g e f</b>	Funções aproximadoras para o comportamento da ligação.
<b>g<sup>(k-1)</sup></b>	Vetor gradiente na configuração anterior (k-1).
<b>GSP</b>	Parâmetro de rigidez generalizado.
<b>H</b>	Função degrau unitário (ou Heaviside).
<b>I</b>	Momento de inércia da seção transversal real.
<b>I'</b>	Momento de inércia da seção transversal equivalente.

$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez tangente do elemento.
$k$	Rigidez inicial da ligação para o modelo de Richard e Abbott.
$\mathbf{K}^{(k-1)}$	Matriz de rigidez na configuração anterior (k-1).
$\mathbf{K}_g$	Matriz de rigidez tangente no sistema de referência global do elemento.
$\mathbf{K}_{ij}$	Termos da matriz de rigidez elástica do elemento de pórtico plano convencional.
$\mathbf{K}_N$	Matriz de rigidez tangente no sistema de referência co-rotacional natural.
$k_p$	Rigidez plástica no final da trajetória, para o modelo de Richard e Abbott.
$\mathbf{K}_r$	Matriz de rigidez tangente no sistema de referência co-rotacional transformado.
$L$	Comprimento inicial do elemento.
$L_b$	Comprimento total da barra (viga, coluna ou tirante).
$L_f$	Comprimento de flambagem elástica da barra.
$L_i$	Comprimento de cada elemento finito híbrido da barra (viga, coluna ou tirante).
$M$	Momento fletor.
$M_0$	Momento fletor inicial na ligação, para o modelo exponencial.
$M_1$	Momento fletor na extremidade A (nó-1) do elemento finito.
$M_2$	Momento fletor na extremidade B (nó-2) do elemento finito.
$M_{er}$	Momento fletor de início de escoamento reduzido da seção transversal.
$M_p$	Momento fletor de plastificação da seção transversal do elemento.
$M_{pr}$	Momento fletor de plastificação reduzido da seção transversal.
$M_y$	Momento fletor de início de escoamento da seção transversal.
$\mathbf{N}$	Matriz de translação.
$n$	Parâmetro de curvatura do diagrama momento-rotação, para o modelo de Richard e Abbott.
$n_e$	Número de elementos finitos que compõe a barra (viga, coluna ou tirante).
$P$	Carga axial atuante.
$P_a$	Ordenada referente ao ponto A de uma trajetória de equilíbrio qualquer.
$P_b$	Ordenada referente ao ponto B de uma trajetória de equilíbrio qualquer.
$P_{cr}$	Carga crítica extraída da análise numérica.
$P_e$	Carga crítica de flambagem elástica de Euler.
$P_y$	Carga axial que causa o início do escoamento do aço.
$R_{kf}$	Parâmetro de rigidez plástica da ligação, para o modelo exponencial.
$S_c$	Parâmetro de rigidez do elemento de mola que simula a ligação.

$S_c^0$	Rigidez inicial da ligação.
$S_{c1}$ e $S_{c2}$	Parâmetro de rigidez do elemento de mola que simula a ligação no elemento finito híbrido (nó-1 e nó-2).
$S_{cs1}$ e $S_{cs2}$	Parâmetro de rigidez combinada para o elemento finito híbrido (nó-1 e nó-2).
$S_s$	Parâmetro de rigidez do elemento de mola que simula a seção transversal.
$S_{s1}$ e $S_{s2}$	Parâmetro de rigidez do elemento de mola que simula a seção transversal no elemento finito híbrido (nó-1 e nó-2).
<b>T</b>	Matriz de transformação.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos na configuração corrente ( $t+\Delta t$ ).
$t_f$	Espessura da mesa (aba) da seção transversal real.
$t_f'$	Espessura da mesa (aba) da seção transversal equivalente.
${}^t\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos na última configuração de equilíbrio ( $t$ ).
$t_w$	Espessura da alma da seção transversal real.
$t_w'$	Espessura da alma da seção transversal equivalente.
<b>u</b>	Vetor de deslocamentos nodais.
<b>u</b>	Direção adotada para acompanhamento do deslocamento horizontal do nó.
$\mathbf{u}^{(k-1)}$	Vetor de deslocamentos nodais na configuração anterior ( $k-1$ ).
$u_a$	Abscissa referente ao ponto A de uma trajetória de equilíbrio qualquer.
$u_b$	Abscissa referente ao ponto B de uma trajetória de equilíbrio qualquer.
$V_{cal.}$	Valor calculado, para cálculo da média aritmética $D_{a/b}$ .
$V_{ref.}$	Valor referência, para cálculo da média aritmética $D_{a/b}$ .
<b>W</b>	Módulo de resistência elástica da seção transversal.
<b>w</b> e <b>v</b>	Direção adotada para acompanhamento do deslocamento vertical do nó.
$W'$	Módulo de resistência elástica da seção transversal equivalente.
$X_G$	Eixo das abscissas para o sistema de referência global.
$X_N$	Eixo das ordenadas do sistema de referência co-rotacional natural.
$Y_G$	Eixo das ordenadas para o sistema de referência global.
$y_N$	Eixo axial do elemento no sistema de referência co-rotacional natural.
<b>Z</b>	Módulo de resistência plástica da seção transversal real.
$Z'$	Módulo de resistência plástica da seção transversal equivalente.
$Z_N$	Eixo das abscissas do sistema de referência co-rotacional natural.

# 1

# INTRODUÇÃO

## 1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O projeto da maioria das estruturas, em especial as metálicas, pode ser dividido em duas etapas distintas. A primeira, denominada de análise estrutural tem como objetivo determinar as solicitações resultantes (tensões, deformações, forças e deslocamentos) para uma dada estrutura sob determinadas condições de contorno e carregamento. A segunda trata do dimensionamento dos membros desta estrutura para que estes sejam capazes de suportar os esforços calculados na etapa de análise estrutural, e também atender aos limites de segurança estipulados por normas técnicas de projeto e ao fator viabilidade econômica.

As pesquisas recentes na área de engenharia civil tendem a buscar a melhor forma de integrar a análise e o dimensionamento estrutural que, como exposto anteriormente, ainda são tratados de forma um pouco isolada. Juntamente a essa tendência, diversos pesquisadores, apoiados no crescente avanço da informática, buscam utilizar metodologias mais precisas, que forneçam resultados realistas do comportamento da estrutura, evitando demasiadas simplificações no projeto estrutural (análise/dimensionamento).

Atualmente, as metodologias empregadas para projeto de estruturas em aço, fornecidas geralmente por normas técnicas de projeto nacionais ou internacionais (AISC 1986, 2005; AS4100 1990; BS5950 1990; CSA 1994; Eurocode 3 1990; NBR 8800 1986, 2003), que sugerem o emprego de análises lineares, bem como a separação entre análise e dimensionamento estrutural, passam por uma mudança de paradigma. Nota-se, a grande tendência em se adaptar as análises lineares com a introdução de efeitos não-

lineares (P- $\Delta$  e P- $\delta$ ). Essas análises já vêm sendo substituídas, progressivamente, por análises não-lineares que podem considerar simultaneamente os efeitos de segunda-ordem, da rigidez das ligações, da inelasticidade do aço, das tensões residuais, das imperfeições geométricas, do contato unilateral, efeitos dinâmicos, dentre outros.

No caso específico das estruturas em aço, a separação entre as duas etapas do projeto estrutural, sugeridas nas normas técnicas de projeto, fica evidente com o uso do comprimento efetivo de flambagem K, para a verificação da capacidade resistente dos membros. Observa-se aí uma tentativa de estabelecer a ligação entre cada membro isolado e o desempenho global do sistema estrutural.

Pode-se afirmar, entretanto, que o comportamento (resistência e estabilidade) da estrutura e de seus membros (vigas, colunas e outros) é interdependente e os métodos de projeto usuais, adotados pelas normas técnicas de projeto, consideram essa interdependência de forma inconsistente e com aproximações. Em geral, são feitas análises elásticas de segunda ordem e os resultados obtidos são aplicados em equações de interação que consideram a plastificação da seção. Isso demonstra uma mistura de conceitos que deveria ser evitada. Esse fato, juntamente com a evolução dos recursos computacionais, clama por uma nova metodologia de projeto (análise e dimensionamento), capaz de avaliar a estrutura como um sistema e não de forma isolada.

No contexto das metodologias e formulações numéricas e, em particular, no emprego do método dos elementos finitos (MEF), essa interação entre a análise e o dimensionamento da estrutura tem sido alcançada através da chamada *Análise Avançada* (Chen e Kim, 1997; Chan e Chui, 2000; Machado, 2005; Alvarenga, 2005; Rocha, 2006). A idéia básica dessa análise é introduzir, nos modelos e nas formulações numéricas não-lineares, todos os fatores considerados relevantes para o projeto estrutural permitindo ao projetista avaliar, de forma precisa e segura, a estrutura metálica. Dentre os fatores supramencionados destacam-se: os efeitos decorrentes dos grandes deslocamentos que o sistema estrutural pode sofrer, os efeitos introduzidos pela consideração da rigidez das ligações e da inelasticidade do aço, e, adicionalmente, a influência de imperfeições geométricas, físicas (tensões residuais no material, variação do módulo de elasticidade) e de carregamento. A seguir, são apresentados alguns motivos que tornam indispensáveis na avaliação destes efeitos não-lineares.

O avanço nas técnicas construtivas, no processo de fabricação do aço, e o desenvolvimento de materiais cada vez mais resistentes, aliado ao fator econômico que conduz a uma redução no consumo de aço vêm tornando as estruturas metálicas cada vez mais leves e esbeltas. Esse aumento de esbeltez pode introduzir mudanças de ordem qualitativa no mecanismo de colapso da estrutura. Assim, a consideração dos efeitos de segunda ordem, provenientes dos deslocamentos globais do sistema estrutural ( $P-\Delta$ ) e da deformação isolada de cada membro ( $P-\delta$ ) durante o processo de carregamento, torna-se indispensável. As imperfeições geométricas como o desaprumo da estrutura e a curvatura inicial dos membros (Alvarenga, 2005) também devem ser considerados. Por conseguinte, para que estes efeitos geometricamente não-lineares possam ser adequadamente tratados, formulações numéricas apropriadas (Galvão, 2000; Rocha, 2000) são requeridas.

A não-linearidade física é decorrente das características mecânicas dos materiais que constituem a estrutura. Portanto, dois efeitos principais devem ser considerados, a saber: a semi-rigidez das ligações e a inelasticidade do aço.

O comportamento da ligação entre a viga e a coluna, ou mesmo entre algum membro e os apoios, têm sido idealizado simplificadaamente através dos casos extremos, a saber: *ligações rotuladas* (onde nenhum momento é transferido entre os membros e esses se comportam de forma independente) e *rígidas* (onde ocorre a transmissão total de momento fletor). Entretanto, nas estruturas reais, a maioria das ligações entre os elementos estruturais deve ser tratada como semi-rígida, o que tem sido demonstrado nas análises experimentais e numéricas (Galvão *et al.*, 2005). Torna-se necessário, portanto, incorporar o efeito da rigidez da ligação na análise e, dessa forma, representar o comportamento real do sistema estrutural (Chan e Chui, 2000; Pinheiro, 2003; Rocha, 2006).

O fenômeno de plastificação caracteriza-se pela perda gradativa da rigidez da seção que ocorre quando partes da mesma atingem a tensão de escoamento do aço. A partir desse instante, as relações tensão-deformação do material deixam de ser proporcionais, isto é, o material passa a se comportar no regime inelástico. Esse efeito torna-se relevante, pois introduz na análise o efeito da redução na resistência dos membros quando submetidos à combinação de momento fletor e carga axial (Alvarenga, 2005; Machado, 2005; Rocha, 2006), o que não é contabilizado em análises

puramente elásticas, nas quais a resistência dos elementos não se altera ao longo de todo o processo de carregamento da estrutura. Adicionalmente, devem ser considerados também os efeitos das tensões residuais que podem amplificar a redução da capacidade resistente da seção transversal do membro.

Portanto, uma *Análise Avançada* da estrutura só pode ser realizada se todos os efeitos supracitados puderem ser considerados conjuntamente no modelo discreto escolhido para simular o comportamento real da estrutura.

No sentido de aproximar os procedimentos de análise e de projeto estrutural, vários pesquisadores têm estudado e desenvolvido formulações com o objetivo de examinar o comportamento não-linear de estruturas metálicas apertadas onde, mais especificamente, a inclusão do efeito inelástico do aço tem recebido atenção. Nessa linha de pesquisa destacam-se os trabalhos de Chen e Shohal (1995) e Chan e Chui (1997, 2000). Esses últimos pesquisadores adotaram o conceito da “*seção montada*” para levar em consideração a plastificação na seção. Destacam-se ainda os artigos de Liew *et al.* (1993a, b) e os publicados recentemente por Zhou e Chan (2004), Chan e Zhou (2004), Gu e Chan (2005), Yu e Kim (2005), e Gizejowski *et al.* (2006). No Brasil, a análise inelástica de sistemas estruturais metálicos planos tem despertado interesse de grandes centros de pesquisa e várias dissertações e teses já foram produzidas sobre o tema (Vellasco 1987; Lavall 1996; Vieira 1997; Martins 1999; Landesmann 1999, 2003; Carneiro 2000; Assaid 2001; Lanza 2003; Machado 2005; Alvarenga 2005; Rocha 2006).

## **1.2 – OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

Esta dissertação é uma continuação direta do trabalho de Rocha (2006), que implementou um elemento finito híbrido de pórtico plano capaz de incorporar, em sua formulação, os efeitos não-lineares de segunda ordem, da semi-rigidez das ligações e da inelasticidade do aço, e faz parte de um amplo projeto de pesquisa intitulado “*Análise Não-Linear Estática e Dinâmica de Sistemas Estruturais Metálicos*” (Silveira 2003).

O presente trabalho compõe as seguintes linhas de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC), com ênfase em Estruturas Metálicas (Deviv/EM/UFOP):

*Mecânica Computacional*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação da resposta de sistemas de engenharia;

*Comportamento e Dimensionamento de Estruturas Metálicas*: onde é estudado, isoladamente ou em conjunto, o comportamento dos diversos membros da estrutura metálica.

Neste trabalho o elemento finito híbrido, implementado por Rocha (2006), é empregado para simular o comportamento não-linear de um conjunto de sistemas estruturais reticulados planos. Estes sistemas estruturais são separados em quatro grupos distintos, de acordo com o efeito não-linear (geométrico, das ligações, da inelasticidade, e efeitos associados) predominante na resposta da estrutura às solicitações externas.

Pretende-se, com isso, avaliar computacionalmente o desempenho (velocidade de convergência) do elemento finito híbrido, tanto na simulação isolada dos efeitos não-lineares como na combinação de todos estes efeitos. Adicionalmente, objetiva-se complementar o grupo de análises numéricas não-lineares, realizadas em pórticos planos semi-rígidos, por Rocha (2006).

Para atingir os objetivos almejados, utilizou-se o sistema computacional, desenvolvido em linguagem Fortran versão *Power Station 4.0* ( Microsoft Developer Studio, 1994), que foi concebido em fase inicial por Silveira (1995), que investigou a instabilidade elástica de colunas, arcos e anéis com restrições unilaterais de contato. Esse sistema foi expandido posteriormente por Galvão (2000), que programou formulações numéricas não-lineares para elementos de pórtico plano; Rocha (2000) implementou diversas estratégias de solução não-linear para o traçado completo da trajetória de equilíbrio; Galvão (2001) que contribuiu com o módulo de análise de vibração em treliças planas, pórticos planos e espaciais; Pinheiro (2003) concentrou-se no estudo e implementação de formulações não-lineares para análise de sistemas treliçados 2D e 3D, e também, a possibilidade do modelamento de pórticos planos com ligações semi-rígidas; Machado (2005), implementou formulações não-lineares que consideram o efeito da inelasticidade do aço em pórticos rígidos 2D. Recentemente,

Rocha (2006), associou os efeitos não-lineares possibilitando a análise de segunda ordem inelástica em estruturas metálicas com ligações semi-rígidas.

A seguir, na seção (1.3), são apresentados alguns trabalhos relacionados com os vários efeitos não-lineares tratados no escopo desta dissertação.

O Capítulo 2 traz a formulação numérica não-linear do elemento finito híbrido de pórtico plano empregado nas análises do presente trabalho. São mostrados também aspectos importantes relativos à atualização dos parâmetros e responsáveis pela consideração da rigidez das ligações e da inelasticidade do aço.

No capítulo 3 são apresentados os processos computacionais adotados para obtenção da solução não-linear dos problemas estruturais mostrados no escopo desta dissertação.

Com o capítulo 4, objetiva-se verificar a eficiência e o desempenho computacional do elemento finito híbrido através do acompanhamento da convergência da resposta numérica de problemas de equilíbrio e estabilidade em estruturas esbeltas, nos quais os efeitos de segunda ordem têm grande relevância.

Posteriormente, no capítulo 5, emprega-se o elemento finito híbrido no estudo do comportamento de sistemas estruturais semi-rígidos. Neste capítulo, os efeitos decorrentes da variação na rigidez das ligações bem como aqueles originados pelas imperfeições geométricas, são avaliados.

Já o capítulo 6 destina-se, inicialmente à avaliação dos efeitos inelásticos em pórticos planos rígidos, e, posteriormente, à observação do comportamento do elemento finito híbrido quando utilizado para discretizar pórticos planos semi-rígidos com quadros contraventados, nos quais todos os efeitos não-lineares são considerados conjuntamente.

Por fim, no capítulo 7, apresentam-se algumas conclusões, de caráter geral, referentes aos resultados alcançados com o presente trabalho, juntamente com algumas sugestões para continuação dessa linha de pesquisa.

### 1.3 – PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

Nas últimas décadas os métodos e procedimentos para análise não-linear de sistemas estruturais reticulados vem ganhando destaque especial, pois propiciam uma avaliação rápida e eficaz de muitas estruturas reais.

Várias formulações geometricamente não-lineares, com solução direta ou incremental (Galvão, 2000), têm sido desenvolvidas desde a década de 60. Um amplo histórico da evolução das metodologias e estratégias para análise não-linear pode ser encontrado no trabalho de Rocha (2000). A idéia da “*Análise Avançada de Estruturas*” surge mais recentemente no sentido de aproximar procedimentos de análise e dimensionamento estrutural. Vários pesquisadores têm direcionado seus trabalhos para o desenvolvimento de formulações capazes de incluir todos os efeitos não-lineares necessários à correta avaliação do comportamento da estrutura metálica. Nessa linha de pesquisa, diretamente ligadas aos objetivos do PROPEC, destacam-se os trabalhos Chan e Chui (1997, 2000), Galvão (2000, 2001), Pinheiro (2003), Alvarenga (2005), Machado (2005) e Rocha (2006). Nesses trabalhos são fornecidas diversas referências bibliográficas relacionadas com os efeitos não-lineares tratados neste trabalho, a saber: efeitos de segunda ordem, da rigidez das ligações e da inelasticidade do aço. Desta forma, visto que o presente trabalho é continuação imediata da dissertação de Rocha (2006), uma síntese das referências associadas ou utilizadas por esta dissertação é apresentada a seguir, de acordo com cada efeito não-linear.

#### 1.3.1 – Efeitos de Segunda Ordem

Formulações geometricamente não-lineares em referenciais Lagrangeanos (Total RLT e atualizado RLA) foram apresentadas por diversos pesquisadores dentre os quais destacam-se: Chajes *et al.* (1987); Alves (1993a,b); Torkamani *et al.* (1997); Yang e Kuo (1994) e Chan e Chui (2000). Yang e Kuo (1994) sugeriram uma forma incremental para calcular o vetor de forças internas decorrentes de duas abordagens diferentes para os deslocamentos nodais: deslocamentos naturais (ou co-rotacionais) incrementais e rigidez externa. Pacoste e Eriksson (1995, 1997) apresentaram

formulações em RLT baseadas em relações deformação-deslocamento melhoradas, com a não-linearidade expressa através de funções trigonométricas. Já Neuenhofer e Filippou (1998) propuseram uma formulação de segunda ordem com fundamentos no método da flexibilidade.

Mais recentemente, formulações com abordagem co-rotacional, onde a idéia central é o cálculo da matriz de rigidez e do vetor de forças internas no campo dos deslocamentos naturais (duas rotações e uma translação) foram publicadas. Destas formulações destacam-se a formulação em RLA proposta por Crisfield (1991, 1997) e Chan e Chui (2000), e também, as desenvolvidas em RLT por Pacoste e Eriksson (1997) e Xu e Mirmiran (1997).

Com relação à seção transversal, formulações geometricamente não-lineares baseadas na teoria de vigas de Timoshenko, onde os efeitos das deformações cisalhantes são contabilizados na rigidez da estrutura, foram propostas por Petrolito (1995) e Pacoste e Eriksson (1997).

Adicionalmente, destacam-se algumas formulações desenvolvidas para análise não-linear de pórticos tridimensionais, a saber: Yang e Kuo (1994); Choi e Lim (1995), com uma formulação de elemento curvo; Matsununga (1996), através da formulação para pilares não-esbeltos; Pacoste e Eriksson (1997) e Li (1998), que utilizam a teoria de rotações finitas.

Alguns trabalhos recentes, que contaram com a participação do autor do presente trabalho, podem ser citados, a saber: Santos *et al.* (2006), que trata da estabilidade elástica de sistemas estruturais treliçados planos com o emprego de uma formulação elástica não-linear; Pinheiro (2003) e Pinheiro *et al.* (2006), onde treliças planas e espaciais são analisadas através de uma formulação geometricamente não-linear que adota o referencial Lagrangeano atualizado.

### **1.3.2 – Rigidez das Ligações**

Em face à grande sensibilidade que as estruturas podem apresentar, atingindo, inclusive, o colapso por perda de estabilidade, devido à variação da rigidez das ligações, como foi comprovado nos trabalhos de Sekulovic e Salatic (2001) e Galvão *et. al*

(2005), vários trabalhos tem tratado do tema ligações semi-rígidas. Este assunto é bastante explorado nos livros de Chen e Lui (1991), Chen e Toma (1994), Chen e Sohal (1995) e Chan e Chui (2000). Essas referências, dentre outras, serviram para o desenvolvimento dos trabalhos de Pinheiro (2003) e Rocha (2006); e foram utilizadas, posteriormente, por esta dissertação.

Alguns pesquisadores, entretanto, têm direcionado seus trabalhos para o estudo, desenvolvimento e ajuste de curvas de variação momento-rotação ( $M-\phi_c$ ) que visam reproduzir o comportamento semi-rígido real das ligações. Seguindo essa abordagem, podem ser citados os trabalhos de Richard e Abbott (1975), Frye e Morris (1975), Ang e Morris (1984), que se basearam nos trabalhos de Ramberg e Osgood (1943), Lui e Chen (1986, 1988), Kishi e Chen (1986a, 1986b), Al-Bermani *et al.* (1994) e Zhu *et al.* (1995), Santos e Silveira (2003), entre outros.

### **1.3.3 – Inelasticidade do Aço**

Existem basicamente dois tipos de abordagem numérica usualmente empregadas numa análise inelástica de sistemas estruturados em aço: o método da *zona plástica* e o método da *rótula plástica*.

O método da zona plástica (ou plasticidade distribuída) consiste em discretizar tanto o sistema como a seção transversal dos elementos. Com esse método é possível considerar, facilmente, atributos físicos e geométricos como tensões residuais e imperfeições geométricas. Como comprovado em Alvarenga (2005), análises feitas com o método da zona plástica podem ser tratadas como soluções próximas das exatas, dada a precisão oferecida. Entretanto, esse procedimento numérico envolve um alto custo computacional. Assim, em termos práticos, o método da zona plástica é normalmente empregado para simulação de estruturas simples, que podem servir de calibração para outros modelos e formulações numéricas (Vogel, 1985; Ziemian, 1993; Meek e Loganathan 1990; Li e Lui 1995; Foley e Vinnakota 1999a,b; Foley 2001; Torkamani e Sonmez, 2001; Foley e Schinler 2003; Alvarenga 2005; Alvarenga e Silveira 2005, 2006).

O método da rótula plástica (ou plasticidade concentrada) considera a formação da rótula em seções transversais localizadas nas extremidades do elemento finito de pórtico plano. Nessa abordagem numérica, quando as forças internas presentes no elemento são menores que sua capacidade plástica, assume-se um comportamento totalmente elástico; se sua capacidade plástica é atingida, uma rótula é formada provocando a redução da rigidez do elemento, e, por conseguinte, de todo o sistema estrutural (Liew 1992; Liew *et al.* 1993a,b; Chen e Sohal, 1995; Chen *et al.* 1996; Chen e Kim, 1997; Chan e Chui, 1997, 2000; Sekulovic e Nefovska-Danilovic 2004; Machado, 2005; Rocha, 2006 ). Seguindo essa linha, duas formulações são identificadas (Machado, 2005 e Rocha, 2006), a saber: a da rótula elasto-plástica (EP) e a da rótula plástica refinada (PR). Na primeira formulação, a seção metálica assume apenas dois comportamentos: perfeitamente elástico, quando as forças internas são inferiores à capacidade resistente da seção, e perfeitamente plástico, quando as forças internas se igualam à capacidade resistente. A segunda formulação permite a degradação da rigidez da seção à medida que as forças internas aproximam-se da capacidade limite dessa seção.

No Brasil, a análise inelástica de estruturas tem despertado o interesse de grandes centros de pesquisa e várias dissertações e teses sobre o tema já foram concluídas (Velasco, 1987; Vieira, 1997; Martins, 1999; Landesmann, 1999, 2003; Carneiro, 2000; Assaid, 2001; Soares Filho, 2002; Lazanha, 2003; Machado, 2005; Alvarenga, 2005 e Rocha, 2006).

Adicionalmente, são citados alguns trabalhos recentes sobre esse tema, a saber, Santos e Silveira (2004), que traz o estudo da aplicação do método da rótula plástica na análise inelástica de estruturas metálicas, e Machado *et al.* (2004) que aborda a análise inelástica de sistemas estruturais metálicos.

#### **1.3.4 – Análise Avançada**

O tema “*Análise Avançada*” é mais recente e trata, como mencionado nas seções anteriores, de formulações não-lineares que incorporam os efeitos de segunda-ordem, da flexibilidade (ou rigidez) das ligações, da inelasticidade do aço e, adicionalmente, buscam atender aos requisitos de algumas normas técnicas nacionais e internacionais

(AISC-LRFD, 1986; AS4100, 1990; BS5950, 1990; Eurocode 3, 1990; NBR 8800, 1986, 2003), o efeito das tensões residuais e das imperfeições geométricas do material.

Nessa linha de pesquisa, destacam-se os livros de Chen *et al.* (1996) e Chan e Chui (2000), que trazem formulações não-lineares para elementos finitos reticulados de pórtico plano, e que foram amplamente empregados no trabalho de Rocha (2006), assim como no presente trabalho. Alguns artigos mais recentes, a respeito do tema “*Análise Avançada*” também podem ser enunciados, a saber: Sekulovic e Nefovska (2004) que trata da solução numérica avançada de pórticos planos em aço, e, Santos *et al.* (2007) que analisa problemas clássicos de estabilidade, com comportamento fortemente não-linear, através do elemento finito híbrido de pórtico plano.

# **2** ELEMENTO FINITO HÍBRIDO NÃO-LINEAR DE PÓRTICO PLANO

## **2.1 – INTRODUÇÃO**

O presente capítulo apresenta, na seção (2.2), a formulação do elemento finito híbrido não-linear de viga-coluna, utilizado nas análises numéricas que serão mostradas nos capítulos subseqüentes. Esse elemento foi estudado inicialmente por Chan e Chui (2000) que propuseram aproximações à formulação de um elemento finito de pórtico plano para torná-lo capaz de incorporar tanto os efeitos da flexibilidade das ligações quanto os da inelasticidade do aço. Esses efeitos representam importantes fontes de não-linearidade no comportamento de um sistema estruturado em aço, conduzindo assim a uma modelagem mais realista da estrutura. Posteriormente, Rocha (2006), empregando a formulação apresentada por Chan e Chui (2000), desenvolveu parte da ferramenta computacional que aplica, dentro de um contexto matricial, via método dos elementos finitos (MEF), as expressões propostas por aqueles autores. Essa ferramenta computacional é utilizada no presente trabalho para simular os efeitos supracitados e também a associação desses efeitos.

A seção (2.3) destina-se a discorrer a respeito das formas de atualização do parâmetro que avalia a flexibilidade da ligação semi-rígida. Em seguida, são apresentados alguns dos modelos que visam simular o comportamento (momento-rotação) da ligação semi-rígida. Posteriormente, na seção (2.4), após uma breve explicação a respeito do método da rótula plástica (RP), juntamente com suas vantagens e desvantagens, é apresentada uma metodologia baseada no conceito da “seção montada” (Chan e Chui, 1997, 2000; Sekulovic e Nefovska, 2004; Machado, 2005). Com essa abordagem, é possível acompanhar a degradação da resistência da seção,

provocada pela plastificação do material. Assim, pode-se avaliar o valor do parâmetro que representa o efeito da inelasticidade do material.

## 2.2 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO HÍBRIDO NÃO-LINEAR

O elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano, representado na figura (2.1), é um elemento que possui um par de molas em série em cada uma de suas extremidades. Cada uma dessas molas destina-se à simulação de um efeito não-linear. Assim, para cada extremidade do elemento, uma das molas irá incorporar à análise o efeito da rigidez da ligação e a outra mola representará os efeitos da plastificação da seção.

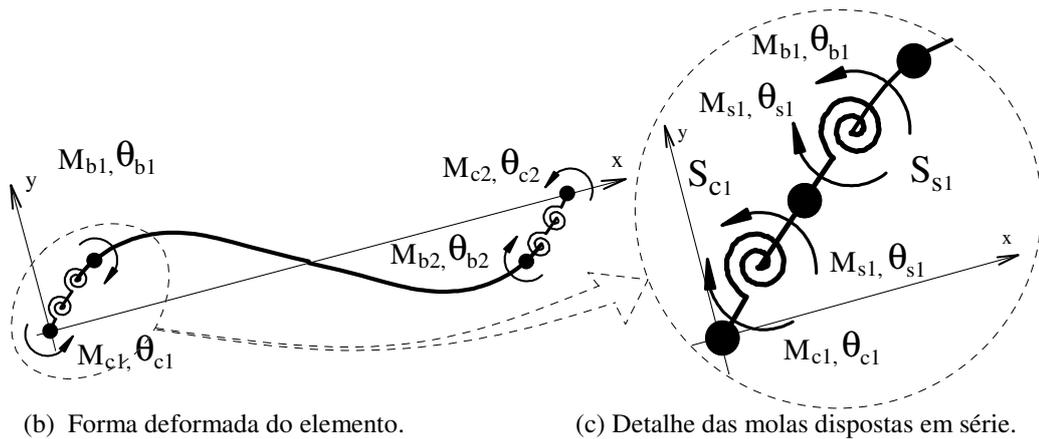
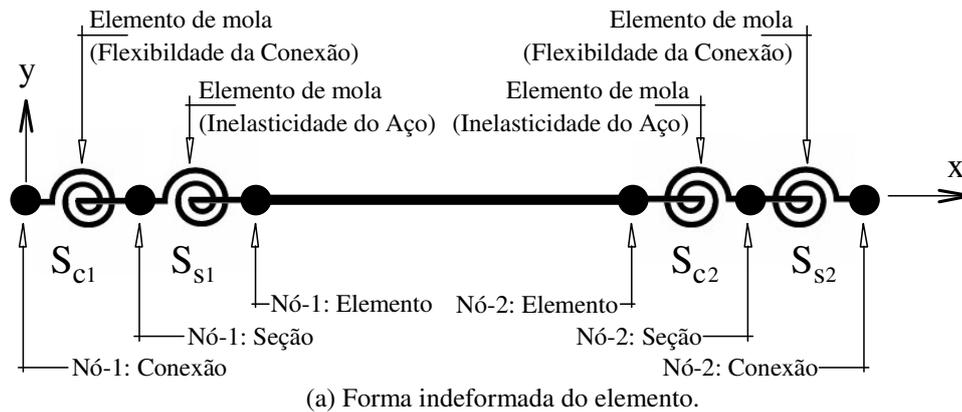


Figura 2.1 – Elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano (Chan e Chui, 2000).

Admite-se que, na grande maioria das estruturas de aço, os esforços de cisalhamento têm pequena participação no comportamento da ligação. Portanto, considera-se que as deformações são preponderantemente provocadas pelos esforços de flexão (Chan e Chui, 2000). Por essa razão, apenas a deformação rotacional do elemento de mola é considerada nas análises. Dessa forma, definem-se os parâmetros  $S_c$  e  $S_s$ , que representam, respectivamente, os efeitos provenientes da rigidez da ligação e da inelasticidade do material.

O efeito da inelasticidade do material, como dito anteriormente, é simulado pelas molas mais internas do elemento finito híbrido. No contexto do método da rótula plástica (Chan e Chui, 2000; Machado, 2005; Rocha, 2006), essas molas têm a finalidade de reproduzir a plastificação da seção naqueles pontos. Assim, a rigidez dessas “pseudo-molas”, definida por  $S_s$ , são avaliadas a partir das forças internas axiais  $\Delta P$ , de cisalhamento  $\Delta Q$  e de flexão  $\Delta M$  e das características geométricas da seção do elemento híbrido.

Por simplicidade, ambos os elementos de mola são modelados como pontuais (isto é, possuem tamanho desprezível), embora alguns autores já considerem em seus trabalhos um valor de excentricidade, caracterizada pela distância entre o eixo da coluna e o ponto de contato da viga com a ligação semi-rígida (Sekulovic e Salatic, 2001).

Considerando as relações momento-rotação no nó esquerdo do elemento, em destaque na figura (2.1c), escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{s1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{c1} & -S_{c1} \\ -S_{c1} & S_{c1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{s1} \end{Bmatrix} \quad (2.1a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{s1} \\ \Delta M_{b1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{s1} & -S_{s1} \\ -S_{s1} & S_{s1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{s1} \\ \Delta \theta_{b1} \end{Bmatrix} \quad (2.1b)$$

onde, para o nó 1, ter-se-á  $S_{c1}$  e  $S_{s1}$  como parâmetros que avaliam a rigidez da ligação e a resistência da seção, respectivamente. E ainda, os parâmetros  $\Delta M_{c1}$ ,  $\Delta M_{s1}$  e  $\Delta M_{b1}$ , e  $\Delta \theta_{c1}$ ,  $\Delta \theta_{s1}$ ,  $\Delta \theta_{b1}$  que são os incrementos dos momentos e das rotações nodais associados à ligação semi-rígida, seção e viga, respectivamente.

Combinando as equações de equilíbrio anteriores, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{s1} \\ \Delta M_{b1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{c1} & -S_{c1} & 0 \\ -S_{c1} & S_{c1} + S_{s1} & -S_{s1} \\ 0 & -S_{s1} & S_{s1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{s1} \\ \Delta \theta_{b1} \end{Bmatrix} \quad (2.2a)$$

Assim, de maneira similar, para o nó 2, situado no lado direito do elemento, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{c2} \\ \Delta M_{s2} \\ \Delta M_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{s2} & -S_{s2} & 0 \\ -S_{s2} & S_{s2} + S_{c2} & -S_{c2} \\ 0 & -S_{c2} & S_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{c2} \\ \Delta \theta_{s2} \\ \Delta \theta_{b2} \end{Bmatrix} \quad (2.2b)$$

O elemento finito utilizado neste trabalho segue a mesma relação momento-rotação estabelecida para os elementos flexo-comprimidos convencionais (Galvão, 2000). Essa relação pode ser escrita na forma seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{b1} \\ \Delta M_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{b1} \\ \Delta \theta_{b2} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

com os coeficientes  $K_{ij}$  representando os valores das rigidezes elásticas desse elemento.

Para se realizar uma análise de segunda ordem, necessita-se de uma formulação não-linear que expresse satisfatoriamente o comportamento do elemento finito. No caso de membros submetidos a forças axiais  $P$ , de moderada magnitude ( $P < 0,5P_y$ : onde  $P_y$  é a carga que causa o escoamento do aço), Chan e Chui (1997) sugerem o uso de uma formulação bastante simplificada para determinação dos coeficientes  $K_{ij}$ , definidos por:

$$K_{11} = K_{22} = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (2.4a)$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{2EI}{L} + \frac{PL}{30} \quad (2.4b)$$

em que,  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal,  $L$  é o comprimento do elemento finito e  $P$  é a carga axial atuante. Para análises em que a carga  $P$  aproxima-se da carga de flambagem do elemento finito, adota-se, alternativamente, formulações mais refinadas, como as desenvolvidas por Yang e Kuo (1994) e Alves (1995), que foram implementadas com sucesso por Galvão (2000).

Considerando-se agora o elemento finito do sistema molas-viga-molas e combinando as relações mostradas nas equações (2.2a), (2.2b) e (2.3), chega-se à equação matricial apresentada a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{s1} \\ \Delta M_{b1} \\ \Delta M_{b2} \\ \Delta M_{s2} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{c1} & -S_{c1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_{c1} & S_{c1}+S_{s1} & -S_{s1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{s1} & K_{11}+S_{s1} & K_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21} & K_{22}+S_{s2} & -S_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_{s2} & S_{s2}+S_{c2} & -S_{c2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{c2} & S_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{s1} \\ \Delta \theta_{b1} \\ \Delta \theta_{b2} \\ \Delta \theta_{s2} \\ \Delta \theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Pressupondo ainda, que no sistema anterior os incrementos dos momentos fletores internos  $\Delta M_{s1}$  e  $\Delta M_{s2}$  (situados na segunda e quinta linhas) são nulos, pois todas as cargas são aplicadas nos nós externos do elemento (sistema global de coordenadas), chega-se, após algumas manipulações algébricas, às seguintes expressões para as rotações  $\Delta \theta_{s1}$  e  $\Delta \theta_{s2}$ :

$$\begin{Bmatrix} \Delta \theta_{s1} \\ \Delta \theta_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{c1} + S_{s1}) & 0 \\ 0 & (S_{c2} + S_{s2}) \end{bmatrix}^{-1} \left[ \begin{bmatrix} S_{c1} & 0 \\ 0 & S_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{c2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{s1} & 0 \\ 0 & S_{s2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{b1} \\ \Delta \theta_{b2} \end{Bmatrix} \right] \quad (2.6)$$

Pode-se também, a partir da equação (2.5), efetuar uma nova expressão matricial para os incrementos de momento fletor nas ligações  $\Delta M_{c1}$  e  $\Delta M_{c2}$ , e  $\Delta M_{b1}$  e  $\Delta M_{b2}$ , como mostrado:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{c1} & 0 \\ 0 & S_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{c2} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{c1} & 0 \\ 0 & S_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{s1} \\ \Delta \theta_{s2} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{b1} \\ \Delta M_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} + S_{s1} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} + S_{s2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{b1} \\ \Delta \theta_{b2} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{s1} & 0 \\ 0 & S_{s2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{s1} \\ \Delta \theta_{s2} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

substituindo a equação (2.6) nas equações (2.7) e (2.8), obtém-se as expressões:

$$\Delta M_{c1} = S_{cs1} (\Delta \theta_{c1} - \Delta \theta_{b1}) \quad (2.9a)$$

$$\Delta M_{c2} = S_{cs2} (\Delta \theta_{c2} - \Delta \theta_{b2}) \quad (2.9b)$$

$$\Delta M_{b1} = S_{cs1} (\Delta \theta_{b1} - \Delta \theta_{c1}) + K_{11} \Delta \theta_{b1} + K_{12} \Delta \theta_{b2} \quad (2.9c)$$

$$\Delta M_{b2} = S_{cs2} (\Delta \theta_{b2} - \Delta \theta_{c2}) + K_{22} \Delta \theta_{b2} + K_{21} \Delta \theta_{b1} \quad (2.9d)$$

nas quais;  $S_{cs1}$  e  $S_{cs2}$  são definidos como parâmetros que avaliam os efeitos combinados da semi-rigidez da ligação e da inelasticidade do aço, e que são expressos por:

$$S_{cs1} = \frac{S_{c1} S_{s1}}{(S_{c1} + S_{s1})} \quad (2.10a)$$

$$S_{cs2} = \frac{S_{c2} S_{s2}}{(S_{c2} + S_{s2})} \quad (2.10b)$$

Reorganizando as equações (2.9a-d) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{b1} \\ \Delta M_{b2} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cs1} & -S_{cs1} & 0 & 0 \\ -S_{cs1} & K_{11} + S_{cs1} & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{21} & K_{22} + S_{cs2} & -S_{cs2} \\ 0 & 0 & -S_{cs2} & S_{cs2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{b1} \\ \Delta \theta_{b2} \\ \Delta \theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Novamente, como as cargas são aplicadas diretamente aos nós externos do elemento (nós globais), podem-se desprezar os incrementos de momento  $\Delta M_{b1}$  e  $\Delta M_{b2}$ . Dessa forma chega-se às equações:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{b1} \\ \Delta\theta_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cs1} + K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & S_{cs2} + K_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{cs1} & 0 \\ 0 & S_{cs2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{c1} \\ \Delta\theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.12a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{b1} \\ \Delta\theta_{b2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\beta_{cs}} \begin{bmatrix} S_{cs2} + K_{22} & -K_{12} \\ -K_{21} & S_{cs1} + K_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cs1} & 0 \\ 0 & S_{cs2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{c1} \\ \Delta\theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.12b)$$

nas quais o parâmetro  $\beta_{cs}$ , é dado por:

$$\beta_{cs} = (S_{cs1} + K_{11})(S_{cs2} + K_{22}) - K_{12}K_{21} \quad (2.13)$$

Essa grandeza deve ser destacada, pois intercala, em uma única expressão, todas as variáveis responsáveis pela avaliação de rigidez tanto dos elementos finitos de mola quanto do elemento finito de pórtico plano que, juntos, formam o elemento finito híbrido.

Substituindo-se os valores obtidos para  $\Delta\theta_{b1}$  e  $\Delta\theta_{b2}$  nas equações (2.9a) e (2.9b), conforme a equação (2.12), e reorganizando os termos de forma mais concisa, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\beta_{cs}} \begin{bmatrix} \beta_{cs}S_{cs1} - S_{cs1}^2(S_{cs2} + K_{22}) & S_{cs1}K_{12}S_{cs2} \\ S_{cs2}K_{21}S_{cs1} & \beta_{cs}S_{cs2} - S_{cs2}^2(S_{cs1} + K_{11}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{c1} \\ \Delta\theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Conseqüentemente, pode-se escrever a relação força-deslocamento do elemento considerado, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\beta_{cs}} \begin{bmatrix} \beta_{cs} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{cs}S_{cs1} - S_{cs1}^2(S_{cs2} + K_{22}) & S_{cs1}S_{cs2}K_{12} \\ 0 & S_{cs2}S_{cs1}K_{21} & \beta_{cs}S_{cs2} - S_{cs2}^2(S_{cs1} + K_{11}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \Delta\theta_{c1} \\ \Delta\theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

ou, sinteticamente;

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^* & K_{12}^* \\ 0 & K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

onde,

$$K_{11}^* = S_{cs1} - \frac{S_{cs1}^2 (S_{cs2} + K_{22})}{\beta_{cs}} \quad (2.17a)$$

$$K_{12}^* = K_{21}^* = \frac{S_{cs1} S_{cs2} K_{12}}{\beta_{cs}} \quad (2.17b)$$

$$K_{22}^* = S_{cs2} - \frac{S_{cs2}^2 (S_{cs1} + K_{11})}{\beta_{cs}} \quad (2.17c)$$

A equação (2.16) traduz a relação incremental de equilíbrio do tipo  $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}$  para o elemento finito híbrido não-linear (já com as molas dispostas em série). Nessa equação  $\Delta \mathbf{f}$  e  $\Delta \mathbf{u}$  são vetores que armazenam, respectivamente, os incrementos de força e os incrementos de deslocamento. O termo entre colchetes representa a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$ . Assim, pode-se dizer que as equações apresentadas anteriormente constituem ferramentas adequadas para a análise de sistemas estruturados em aço, pois, possibilitam a utilização de um elemento híbrido mais sofisticado que os elementos de pórtico plano convencionais sem, contudo, aumentar o custo computacional para resolução desses problemas, uma vez que o número de equações não se altera. Posto isso se adota, no presente trabalho, o elemento finito cujo comportamento é representado pela equação (2.16). Pretende-se desta forma chegar a resultados que complementem aqueles obtidos por Rocha (2006) e, adicionalmente, validar a utilização do referido elemento na análise de sistemas estruturais em aço, destacando-se aqueles que apresentam comportamento fortemente não-linear e também aqueles providos de barras de contraventamento.

### 2.2.1 – Transformações de Coordenadas

Como mostrado anteriormente, a equação (2.16) exhibe a condição de equilíbrio para o elemento finito híbrido. Observa-se nesta equação, que o vetor de incrementos de força  $\Delta \mathbf{f}$  é formado pelas componentes ditas naturais ou básicas ( $\Delta \mathbf{P}$ ,  $\Delta \mathbf{M}_{c1}$  e  $\Delta \mathbf{M}_{c2}$ ). Para obtenção da equação (2.16), foi adotado como referência um sistema cartesiano ortogonal, no qual o eixo das abscissas sempre é paralelo à direção axial do elemento finito. Esse sistema é denominado *sistema co-rotacional básico*, devido ao fato desse referencial ser sempre utilizado na presença das forças naturais (ou básicas). Além disso, os sistemas estruturais planos possuem genericamente três possibilidades de deslocamento para cada nó, o que resulta em um vetor de incremento de forças internas formado por seis componentes. Por isso, deve-se transformar as grandezas do *sistema co-rotacional básico*, que possui três componentes de deslocamento e três componentes de força para cada elemento finito, em grandezas do sistema *co-rotacional transformado*, que apresenta seis componentes de força e seis componentes de deslocamento, efetuando conjuntamente a transformação reversa. Por conseguinte, para que se possa analisar a estrutura é necessário que a matriz de rigidez do elemento finito seja montada adotando-se, como referência, um sistema de coordenadas único capaz de retratar a posição real de cada elemento no instante da composição da matriz de rigidez global da estrutura, independentemente da sua inclinação. Esse sistema local de eixos ortogonais, paralelo ao sistema de eixos que é adotado para a estrutura completa, é denominado *sistema de coordenadas global do elemento*. Para maior clareza ortográfica, os sistemas de coordenadas co-rotacional natural (ou básico), co-rotacional transformado e sistema global do elemento estão identificados nas equações seguintes através dos sub-índices N, r e g, respectivamente. A figura (2.2) exhibe as componentes de força presentes no elemento finito de pórtico plano, para cada um dos três sistemas de referência descritos anteriormente.

Posto isto, parte-se da notação simplificada da equação (2.16), sob forma matricial:

$$\Delta \mathbf{f}_N = \mathbf{K}_N \Delta \mathbf{u}_N \quad (2.18a)$$

$$\Delta \mathbf{f}_N = \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{N1} \\ f_{N2} \\ f_{N3} \end{Bmatrix} \quad (2.18b)$$

em que  $\Delta \mathbf{f}_N$  e  $\Delta \mathbf{u}_N$  constituem os vetores que armazenam as variáveis naturais ou básicas (força e deslocamento), como ilustrado na figura (2.2).

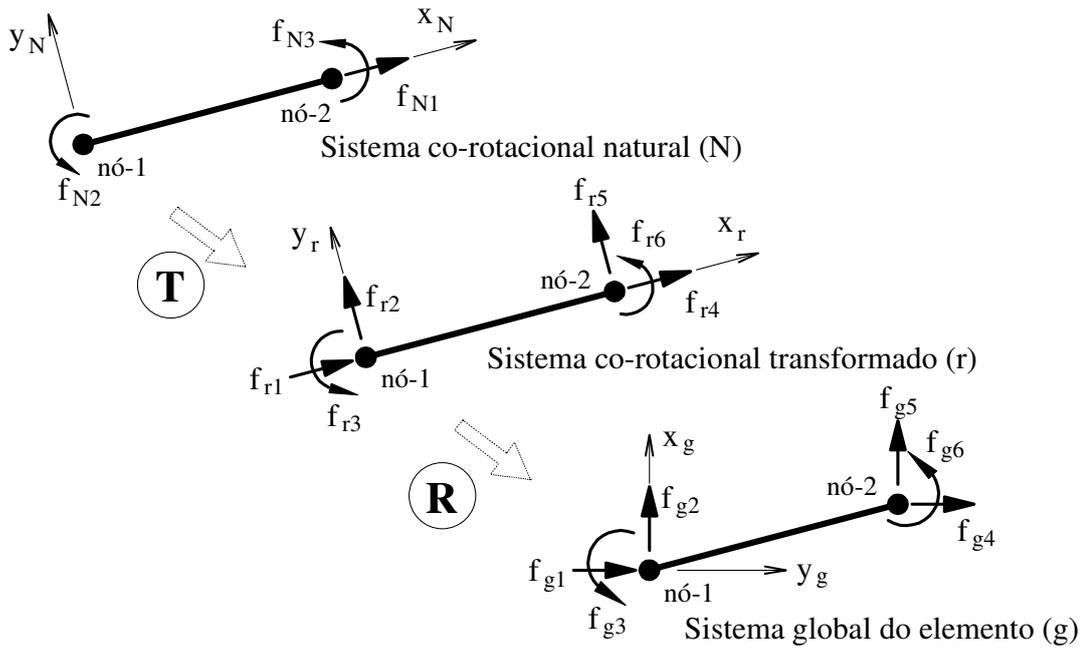


Figura 2.2 – Transformações entre sistemas de coordenadas co-rotacional básico e global do elemento (Machado, 2006).

A partir da figura (2.2), é possível correlacionar as seis componentes de força do *sistema co-rotacional transformado* às três componentes do *sistema co-rotacional natural*, como se escreverá em seguida:

$$f_{r1} = -f_{N1} \quad (2.19a)$$

$$f_{r2} = \frac{f_{N2}}{L} + \frac{f_{N3}}{L} \quad (2.19b)$$

$$f_{r3} = f_{N2} \quad (2.19c)$$

$$f_{r4} = f_{N1} \quad (2.19d)$$

$$f_{r5} = -\frac{f_{N2}}{L} - \frac{f_{N3}}{L} \quad (2.19e)$$

$$f_{r6} = f_{N3} \quad (2.19f)$$

onde  $L$  representa o comprimento do elemento finito. Agora, pode-se reorganizar matricialmente as equações (2.19a-f) obtendo:

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{T}\mathbf{f}_N \quad (2.20)$$

na qual  $\mathbf{T}$  é a chamada matriz de transformação. Expandindo a equação (2.20), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} f_{r1} \\ f_{r2} \\ f_{r3} \\ f_{r4} \\ f_{r5} \\ f_{r6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1/L \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{N1} \\ f_{N2} \\ f_{N3} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Por conseguinte, desenvolvendo a equação (2.20), pode-se obter a variação (ou incremento) do vetor de forças  $\mathbf{f}_r$ , escrevendo-se:

$$\Delta\mathbf{f}_r = \Delta(\mathbf{T}\mathbf{f}_N) = \mathbf{T}\Delta\mathbf{f}_N + \Delta\mathbf{T}\mathbf{f}_N \quad (2.22)$$

Na equação (2.22), o vetor de incrementos de força  $\Delta\mathbf{f}_r$  é constituído por duas parcelas. A primeira ( $\mathbf{T}\Delta\mathbf{f}_N$ ) representa a parcela gerada pelo incremento das componentes de força ( $\Delta\mathbf{f}_N$ ) do sistema de coordenadas co-rotacional natural; já a segunda parcela ( $\Delta\mathbf{T}\mathbf{f}_N$ ), surge do trabalho realizado pelas componentes de forças naturais  $\mathbf{f}_N$ , presentes no elemento (antes da deformação causada pelos incrementos de carga). Assim, substituindo essa segunda parcela pelo produto da matriz  $\mathbf{N}$  pelo vetor de deslocamentos nodais  $\Delta\mathbf{u}_r$ , (Chan e Chui, 2000), ter-se-á:

$$\Delta \mathbf{f}_r = \mathbf{T} \Delta \mathbf{f}_N + \mathbf{N} \Delta \mathbf{u}_r \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & P/L & 0 & 0 & -P/L & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & P/L & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23b)$$

Aplicando o princípio do “contra-gradiente” (Rocha, 2006), encontra-se a relação entre as componentes de deslocamento no *sistema co-rotacional natural* e no *sistema co-rotacional transformado*, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{u}_N = \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{u}_r \quad (2.24)$$

Substituindo as equações (2.18) e (2.24) na equação (2.23a), chega-se à expressão que fornece a condição de equilíbrio para o elemento finito no *sistema de coordenadas co-rotacional transformado* (sistema local do elemento com seis componentes), dada por:

$$\Delta \mathbf{f}_r = (\mathbf{T} \mathbf{K}_N \mathbf{T}^T + \mathbf{N}) \Delta \mathbf{u}_r \quad (2.25)$$

ou ainda, simplesmente,

$$\Delta \mathbf{f}_r = \mathbf{K}_r \Delta \mathbf{u}_r \quad (2.26)$$

onde  $\mathbf{K}_r$  é a matriz de rigidez tangente do elemento finito híbrido, no *sistema de coordenadas co-rotacional transformado* e  $\mathbf{N}$  é a matriz de translação (Machado, 2005). Observe que a transformação dessa matriz de rigidez, do *sistema co-rotacional transformado* (sistema local do elemento) para o *sistema global do elemento*, é realizada na forma tradicional (Gere e Wever, 1981; Rocha, 2006), isto é:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_r \mathbf{R} \quad (2.27)$$

sendo  $\mathbf{R}$  a matriz de rotação que contém os co-senos diretores do elemento e  $\mathbf{K}_g$  a matriz de rigidez tangente do elemento finito no *sistema global do elemento* (Rocha, 2006).

### 2.2.2 – Avaliação das Rotações

Deve-se determinar agora o valor dos incrementos de rotação  $\Delta\theta_{b1}$ ,  $\Delta\theta_{b2}$ ,  $\Delta\theta_{s1}$  e  $\Delta\theta_{s2}$ , a partir do valor dos incrementos de rotação já conhecidos  $\Delta\theta_{c1}$  e  $\Delta\theta_{c2}$  (função da curva momento-rotação da ligação entre a viga e a coluna), presentes nos elementos finitos de mola que simulam a ligação semi-rígida. Assim, acompanhando a figura (2.1), pode-se reescrever a equação (2.12b) da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{b1} \\ \Delta\theta_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{c1} \\ \Delta\theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

na qual as componentes  $T_{ij}$  são definidas por:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_{cs}} \begin{bmatrix} S_{cs1}(S_{cs2} + K_{22}) & -S_{cs2}K_{12} \\ -S_{cs1}K_{21} & S_{cs2}(S_{cs1} + K_{11}) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Considerando também as equações (2.6) e (2.31), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{s1} \\ \Delta\theta_{s2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\beta_s} \begin{bmatrix} (S_{c2} + S_{s2}) & 0 \\ 0 & (S_{c1} + S_{s1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{c1} & 0 \\ 0 & S_{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{c1} \\ \Delta\theta_{c2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{s1} & 0 \\ 0 & S_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{c1} \\ \Delta\theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

e, após algumas manipulações algébricas, encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{s1} \\ \Delta\theta_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_{c1} + S_{s1}T_{11}}{S_{c1} + S_{s1}} & \frac{T_{12}S_{s1}}{S_{c1} + S_{s1}} \\ \frac{T_{21}S_{s2}}{S_{s2} + S_{c2}} & \frac{S_{c2} + S_{s2}T_{22}}{S_{s2} + S_{c2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{c1} \\ \Delta\theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

que é a expressão final para determinação dos incrementos de rotação  $\Delta\theta_{s1}$  e  $\Delta\theta_{s2}$ .

### 2.2.3 – Casos Particulares

Nesta subsecção, são apresentadas algumas variantes das condições de extremidade para o elemento finito híbrido não-linear, tendo em vista a relação de equilíbrio para esse elemento (equação 2.15). Essas variantes estão relacionadas diretamente à plastificação da seção. Assim, em um primeiro instante é analisado o caso em que não há formação de rótulas plásticas, posteriormente, investiga-se a situação de formação de rótula plástica em apenas uma das extremidades do elemento e, por fim, a plastificação de ambas as extremidades. Para tanto, considera-se que a ligação entre a viga e a coluna é infinitamente rígida, isto é,  $S_{c1} = S_{c2} \rightarrow \infty$ .

#### a. Ausência de rótulas plásticas:

Para os casos em que o elemento finito trabalha no regime elástico, os parâmetros que avaliam o grau de plastificação da seção  $S_{S1}$  e  $S_{S2}$ , deverão possuir valores numéricos muito elevados (ou seja,  $S_{S1} = S_{S2} \rightarrow \infty$ ), conforme ilustra a figura (2.3), na qual são adotadas, para maior clareza ortográfica, as abreviações seguintes: RO = nó idealmente rotulado; RP = nó com rótula plástica; RI = nó rígido. Por conseguinte, aplicando as equações (2.10), (2.11) e (2.16), tem-se que  $K_{11}^* = K_{11}$ ,  $K_{22}^* = K_{22}$ ,  $K_{12}^* = K_{12}$ ,  $K_{21}^* = K_{21}$ , que resulta em:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

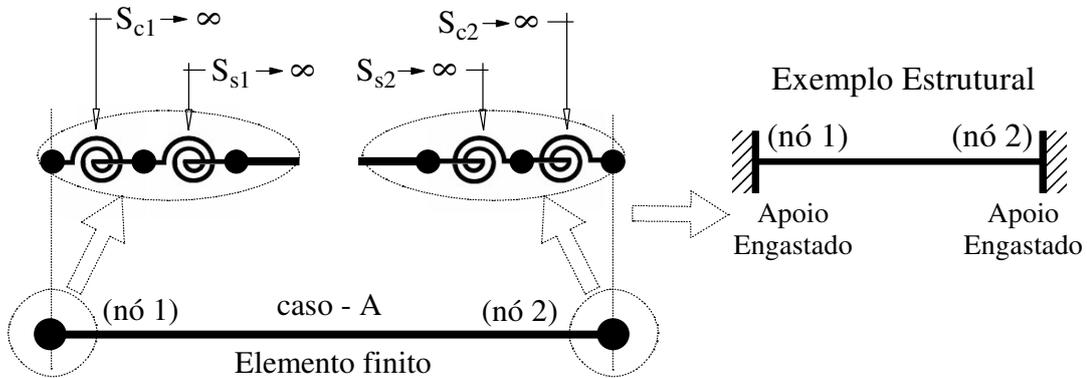


Figura 2.3 – Elemento finito híbrido não-linear sem rótulas plásticas nas extremidades.

Portanto, pode-se utilizar este elemento finito híbrido para modelar problemas estruturais simplesmente elásticos, adotando-se valores elevados para as variáveis  $S_{s1}$  e  $S_{s2}$ , uma vez que, dessa forma, as tensões nas seções transversais do elemento finito não atingem o valor da tensão de escoamento do aço  $\sigma_y$ , o que impede a plastificação dessa seção. Esse processo está detalhado na seção (2.4) deste trabalho.

#### b. Presença de rótula plástica em uma das extremidades:

Quando ocorre a formação de rótula plástica em uma das extremidades do elemento finito (nó 1 ou nó 2), o parâmetro que avalia a flexibilidade da ligação nessa extremidade é nulo, isto é,  $S_{c1} = 0$  ou  $S_{c2} = 0$ , como ilustra a figura (2.4). Neste caso, é assumido que o outro extremo do elemento finito permanece em regime elástico e que, neste extremo, a ligação rígida entre a viga e a coluna é rígida (isto corresponde a:  $S_{c1} = S_{s1} \rightarrow \infty$  ou  $S_{c2} = S_{s2} \rightarrow \infty$ ). Assume-se ainda que o nó com rótula plástica não suporte incrementos adicionais de momento fletor ( $\Delta M_{c1} = 0$  ou  $\Delta M_{c2} = 0$ ). Levando essas hipóteses (Rocha, 2006), às equações (2.6a) e (2.6b), e ignorando a contribuição da força axial  $P$ , conclui-se que  $K_{11} = K_{22} = 4EI/L$  e  $K_{12} = K_{21} = 2EI/L$ . Dessa forma, a relação de rigidez apresentada na equação (2.32) é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

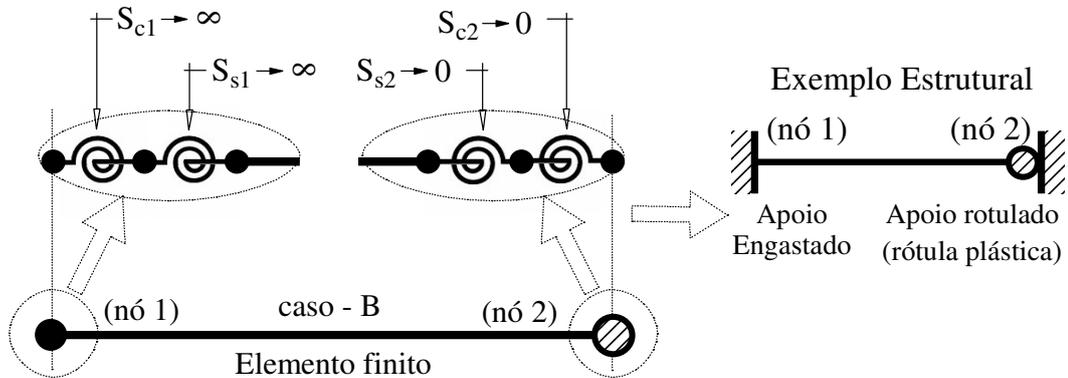


Figura 2.4 – Elemento finito híbrido não-linear com uma rótula plástica no nó 2.

Observa-se que a expressão (2.33) é idêntica àquela obtida para o equilíbrio de um elemento finito com uma extremidade engastada e a outra rotulada.

### c. Presença de rótula plástica em ambas as extremidades:

No caso da ocorrência de rótulas em ambas as extremidades do elemento finito, ter-se-á  $S_{c1} = S_{s1} = S_{c2} = S_{s2} \rightarrow 0$ . Com o que se obtém a condição de equilíbrio:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{c1} \\ \Delta M_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \Delta \theta_{c1} \\ \Delta \theta_{c2} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Portanto, a equação (2.34) equivale à condição de equilíbrio de um elemento finito com ambas as extremidades rotuladas (similar a uma barra de treliça plana), conforme simula a figura (2.5).

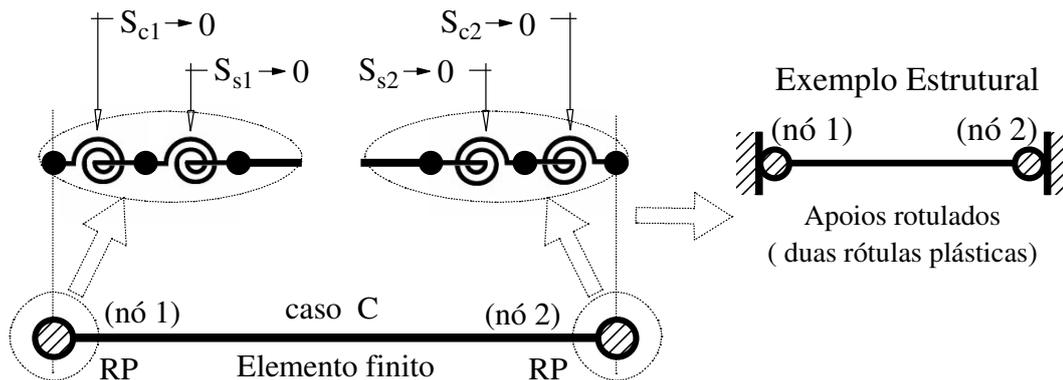


Figura 2.5 – Elemento finito híbrido não-linear com rótulas plásticas em ambas as extremidades.

Cabe destacar aqui que a formulação apresentada anteriormente é incapaz de detectar a ocorrência de rótulas plásticas no interior do elemento finito, ou seja, as rótulas só poderão ser identificadas se presentes nas extremidades do elemento. Assim, como alternativa a essa incapacidade de identificação das rótulas no interior do elemento finito, sugere-se efetuar o refinamento da malha adotada para modelar o sistema estrutural. Contudo, alguns autores já propõem formulações que visam contornar os problemas supracitados. Essas formulações, através do emprego de funções de forma polinomiais de alta ordem, propiciam a formação e identificação dessas rótulas que, porventura, venham a situar-se no interior do elemento (Chan e Zhou, 2004). Com isso, a análise de estruturas com forma geométrica mais elaborada ou aquelas que estejam submetidas a carregamentos diversificados torna-se mais simples, pois malhas de elementos finitos menos refinadas podem ser adotadas.

### 2.3 – DEFINIÇÃO DO GRAU DE RIGIDEZ DA LIGAÇÃO ( $S_C$ )

Em geral, o comportamento real das ligações pode ser descrito através de curvas que ilustram a forma de variação das rotações provocadas pela aplicação de momento na ligação entre a viga e a coluna (curvas momento-rotação  $M-\phi_c$ ). Essas curvas são apresentadas na forma:

$$M = f(\phi_c) \tag{2.35}$$

ou,

$$\phi_c = g(M) \quad (2.36)$$

onde  $f$  e  $g$  são as funções aproximadoras,  $M$  é o momento fletor e  $\phi_c$  é a rotação relativa da ligação. A obtenção dessas funções, que descrevem as curvas momento-rotação, pode ser agrupada em três modelos básicos:

**a. Modelos analíticos:** em tais modelos (Youssef-Agha e Aktan, 1989; Shi *et al.*, 1996), a curva momento-rotação é avaliada através de parâmetros físicos (por exemplo: tensão de escoamento do aço das chapas da ligação, tensão de escoamento dos parafusos, soldas, etc.), e das dimensões geométricas dos elementos constituintes desta ligação (diâmetro dos parafusos, garganta efetiva dos cordões de solda, distância dos furos às bordas da chapa da ligação, etc.);

**b. Modelos de interpolação (ou matemáticos):** nesses modelos a curva momento-rotação é aproximada por equações matemáticas nas quais as constantes são obtidas de ajuste de resultados experimentais, aplicando-se diretamente estas constantes através de uma expressão única (Richard e Abbott, 1975; Colson e Louveau, 1983; Chen e Lui, 1986);

**c. Modelos mistos:** nos denominados modelos mistos, as constantes de ajuste da curva momento-rotação, são determinadas como função dos parâmetros físicos e geométricos da ligação (Fry e Morris, 1975; Ang e Morris, 1984).

Comparando os modelos mistos aos modelos analíticos identificam-se algumas semelhanças visto que ambos utilizam os parâmetros físicos e geométricos dos elementos constituintes da ligação para promover o ajuste das curvas momento-rotação. Se comparado aos modelos de interpolação (ou matemáticos), os modelos mistos caracterizam-se por requerer um número menor de parâmetros, o que favorece a utilização das expressões ditas mistas na obtenção das curvas  $M-\phi_c$  das ligações.

Dentre os vários modelos de interpolação e modelos mistos empregados para representar as curvas momento-rotação das ligações, merecem destaque: (a) o modelo linear (Chan, 1994), que é considerado o mais simples por depender apenas da rigidez

inicial da ligação (obtida facilmente em análises experimentais); (b) os modelos bi-linear (Youssef-Agha, 1989) e tri-linear (Gerstle, 1988), extensões do modelo linear, porém possibilitam a consideração de grandes deslocamentos e a mudança da rigidez inicial da ligação; (c) o modelo polinomial (Fry e Morris, 1975), que fornece uma curva de variação momento-rotação mais suave, se comparada aos modelos multilíneares; (d) o modelo B-spline ou gabarito-B cúbico (Jones *et al.*, 1980) que visa dividir a curva momento-rotação em vários segmentos cujos dados de ajuste são expressos em um polinômio cúbico; (e) o modelo de bounding-line ou linha de contorno (Al-Bernani *et al.*, 1994; Zhu *et al.*, 1995), baseado na divisão da curva  $M-\phi_c$  em três trechos nos quais o primeiro, encontra-se no regime linear elástico e o terceiro no regime linear plástico sendo que ambos são unidos por uma curva de transição suave que caracteriza o segundo trecho; e, (f) o modelo de potências (Kishi e Chen, 1987a; King e Chen, 1993), que é constituído por funções com expoentes constantes determinados através de ajuste das curvas momento-rotação obtidas dos ensaios experimentais.

Cabe destacar ainda alguns modelos mistos para a curva momento-rotação que são encontrados na literatura e foram desenvolvidos por:

**a. Ramberg e Osgood (1943):** utilizado também por Ang e Morris (1984) e Shi e Atluri (1989), esse modelo destaca-se por requerer poucos parâmetros e poder representar a curva momento-rotação com variação não-linear suave e com boa curvatura;

**b. Richard e Abbott (1975):** que é um modelo de quatro parâmetros e se destaca por considerar o efeito do encruamento do aço na ligação representado por um desses parâmetros;

**c. Chen e Lui (1988):** empregado numa expressão exponencial estabelecida por cinco parâmetros, em geral, esse modelo fornece uma boa aproximação do comportamento não-linear da curva momento-rotação da ligação e sua precisão é semelhante à obtida com a adoção do modelo de gabarito B cúbico, porém, o primeiro apresenta desvantagens, como requerer um número elevado de parâmetros e de, caso a curva  $M-\phi_c$  apresente mudanças abruptas de declividade, não representar adequadamente o comportamento da ligação.

Dentre os diversos modelos para aproximação da curva momento-rotação das ligações, foi programado por Rocha (2006) os modelos linear (Monforton e Wu, 1963), exponencial (Chen e Lui, 1988), exponencial modificado (Kishi e Chen, 1986), que é um refinamento do modelo exponencial (ver seção 2.3.2), e o modelo de Richard e Abbott (1975). Esses modelos serão empregados neste trabalho, razão pela qual se torna necessário a apresentação das suas características principais.

### 2.3.1 – Modelo Linear

Este é o modelo mais simples para caracterizar a curva momento-rotação da ligação e necessita de apenas um parâmetro que é a rigidez inicial dessa ligação. Por sua simplicidade o modelo linear tem sido amplamente utilizado em análises elásticas de primeira ordem (pequenas deflexões), nos estágios iniciais de desenvolvimento de análises para ligações semi-rígidas (Monforton e Wu, 1963) e nos problemas de vibração e instabilidade em pórticos com ligações semi-rígidas que apresentam trajetórias de equilíbrio com pontos de bifurcação (Chan, 1994; Chan e Chui, 2000; Galvão, 2004). A curva momento-rotação é reduzida à semi-reta expressa pela equação:

$$M = S_c^o \phi_c \quad (2.37)$$

em que  $S_c^o$  é a constante de rigidez inicial da ligação, que pode ser determinada experimentalmente. Analiticamente, uma expressão simples para representar  $S_c^o$  é obtida através da rigidez relativa do elemento, como:

$$S_c^o = \rho \frac{4EI}{\left( \sum_{i=1}^{n_e} L_i \right)} \quad (2.38a)$$

$$\sum_{i=1}^{n_e} L_i = L_b \quad (2.38b)$$

onde  $EI$ ,  $n_e$ ,  $L_i$  e  $L_b$  são, respectivamente, a rigidez à flexão, o número de elementos finitos na barra, o comprimento do  $i$ -ésimo elemento finito e o comprimento total da barra (viga, coluna ou tirante); e  $\rho$  (que foi proposto para indicar o grau de flexibilidade da ligação) é denominado, no presente trabalho, índice de rigidez. O valor de  $\rho$  varia de zero, para o caso de uma rotulada ideal, até um valor muito elevado (tende a infinito), para o caso de ligação perfeitamente rígida.

Alternativamente, a equação (2.38) pode ser reescrita pela adoção do chamado fator de rigidez  $\eta$ , sugerido inicialmente por Romstad e Subramanian (1970) e adotado também por Yu e Shanmugam (1986), conforme a expressão:

$$S_c^o = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{4EI}{\left( \sum_{i=1}^{n_e} L_i \right)} \quad (2.39)$$

Note que esse fator de rigidez  $\eta$  deverá ser nulo para ligações rotuladas e, unitário para ligações rígidas. Já Simões (1996) e Sekulovic e Salatic (2001), adotam uma variante da equação (2.39). Para esse caso, utiliza-se um fator fixo de rigidez  $\gamma$  que possui a mesma concepção do fator  $\eta$  da equação (2.39), que agora é escrita como:

$$S_c^o = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{3EI}{\left( \sum_{i=1}^{n_e} L_i \right)} \quad (2.40)$$

O modelo linear é simples porque a rigidez inicial da ligação (obtida pela inclinação da reta tangente à curva momento-rotação,  $dM/d\phi_c$ ) é constante ao longo de toda a análise. No entanto, como ilustra a figura (2.6), o modelo linear é pouco preciso quando comparado aos modelos com variação momento-rotação não-linear.

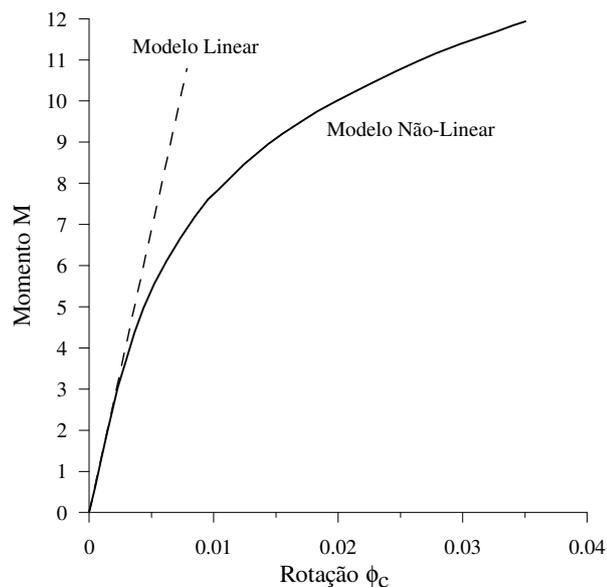


Figura 2.6 – Exemplos de curvas momento-rotação das conexões, modelos linear e não-linear (Chan e Chui, 2000).

Esse fato é comprovado quando se adota um valor constante e elevado para a rotação  $\phi_c$ , no gráfico da figura (2.6), o que conduzirá a uma grande diferença no valor do momento limite da ligação obtido por esse modelo. De forma similar, observa-se ao se fixar um momento limite para a ligação, valores bem diferentes de rotação  $\phi_c$ .

### 2.3.2 - Modelos Exponenciais

Lui e Chen (1986, 1988) propuseram um modelo exponencial para descrever a curva momento-rotação sob a forma:

$$M = M_o + \sum_{j=1}^n C_j \left[ 1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) \right] + R_{kf} |\phi_c| \quad (2.41)$$

neste caso, a rigidez tangente da ligação é definida por

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \Big|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{2j\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) + R_{kf} \quad (2.42)$$

e a rigidez inicial corresponderá a:

$$S_c^o = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=0} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{2j\alpha} + R_{kf} \quad (2.43)$$

nas quais,  $M$  é o valor do momento na ligação;  $|\phi_c|$  é o módulo da rotação atribuída à ligação;  $M_o$  é o momento inicial na ligação;  $R_{kf}$  é a rigidez plástica (devida ao encruamento do aço da ligação) determinada no final da curva momento-rotação;  $\alpha$  é um fator de escala;  $n$  é o número de termos considerados e  $C_j$  é um coeficiente de ajuste da curva. Baseados em resultados experimentais, Lui e Chen (1988) determinaram os valores dos parâmetros de ajuste de curvas no modelo exponencial para quatro tipos de ligações, representadas na figura (2.7), como segue: cantoneira de alma simples, cantoneiras de topo e assento, ligação com chapa de topo e ligação com chapa de topo estendida.

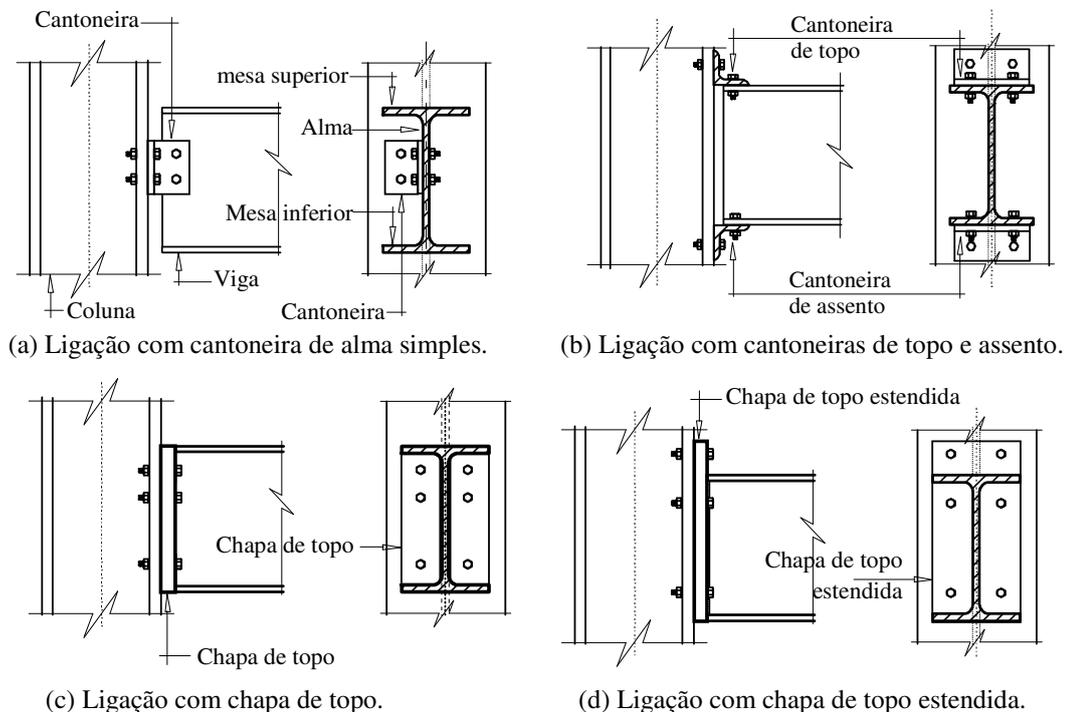


Figura 2.7 – Tipos de ligação entre viga e coluna utilizadas para obtenção dos parâmetros do modelo exponencial de Chen e Lui (1988).

Já os valores dos parâmetros empregados nestas curvas estão sumarizados na tabela (2.1). As curvas próprias de cada ligação, adotando-se o modelo exponencial são apresentadas na figura (2.8) e as rigidezes correspondentes na figura (2.9).

Tabela 2.1 – Parâmetros do modelo exponencial de Chen e Lui (1988), utilizados para alguns tipos de ligação.

<b>Tipos de ligação (unidades: kip e in)</b>				
<b>Parâmetros</b>	<b>Tipo-A</b>	<b>Tipo-B</b>	<b>Tipo-C</b>	<b>Tipo-D</b>
	Cantoneira de alma Simples (Richard et al., 1982)	Cantoneira de topo e Assento (Azizinamini et al., 1985)	Ligação com chapa de Topo (Ostrander, 1970)	Ligação com chapa de topo estendida (Johnson e Walpole, 1981)
$M_0$	0	0	0	0
$R_{kf}$	$0,47104 \times 10^2$	$0,43169 \times 10^2$	$0,96415 \times 10^2$	$0,41193 \times 10^3$
$\alpha$	$0,51167 \times 10^{-3}$	$0,31425 \times 10^{-3}$	$0,31783 \times 10^{-3}$	$0,67083 \times 10^{-3}$
$C_1$	$-0,43300 \times 10^2$	$-0,34515 \times 10^3$	$-0,25038 \times 10^3$	$-0,67824 \times 10^3$
$C_2$	$0,12139 \times 10^4$	$0,52345 \times 10^4$	$0,50736 \times 10^4$	$0,27084 \times 10^4$
$C_3$	$-0,58583 \times 10^4$	$-0,26762 \times 10^5$	$-0,30396 \times 10^5$	$-0,21389 \times 10^5$
$C_4$	$0,12971 \times 10^5$	$0,61920 \times 10^5$	$0,75338 \times 10^5$	$0,78563 \times 10^5$
$C_5$	$-0,13374 \times 10^5$	$-0,65114 \times 10^5$	$-0,82873 \times 10^5$	$-0,99740 \times 10^5$
$C_6$	$0,52224 \times 10^4$	$0,25506 \times 10^5$	$0,33927 \times 10^5$	$0,43042 \times 10^5$
$S_c^0$	$0,48000 \times 10^5$	$0,95219 \times 10^5$	$0,11000 \times 10^6$	$0,30800 \times 10^6$

O modelo exponencial de Chen e Lui (1988) fornece, geralmente, uma boa representação do comportamento não-linear da ligação e sua precisão é comparável ao modelo de gabarito B cúbico (Chan e Chui, 2000), porém, o modelo de gabarito requer um número maior de parâmetros para ajuste de curva. Além disso, se houver uma mudança abrupta na declividade da curva  $M-\phi_c$ , o modelo de Chen e Lui (1988) pode não representá-la adequadamente.

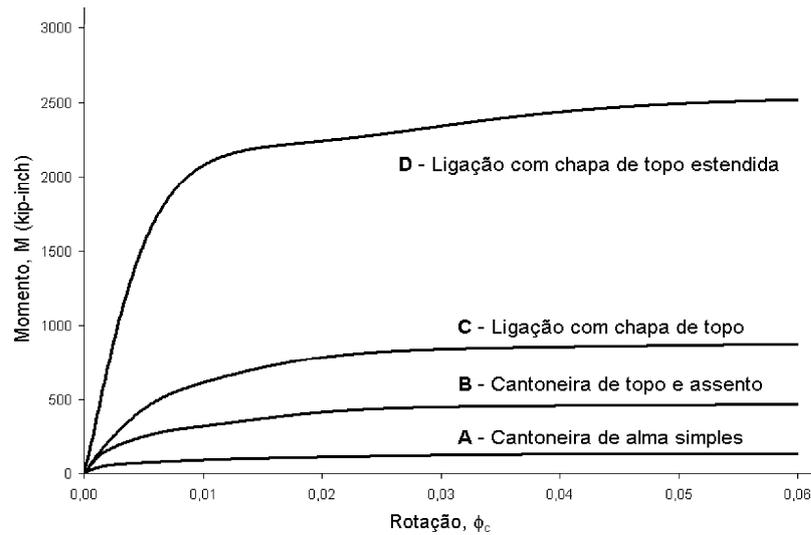


Figura 2.8 – Curvas momento-rotação de ligações adotando o modelo exponencial de Chen e Lui (1988), conforme Pinheiro (2003).

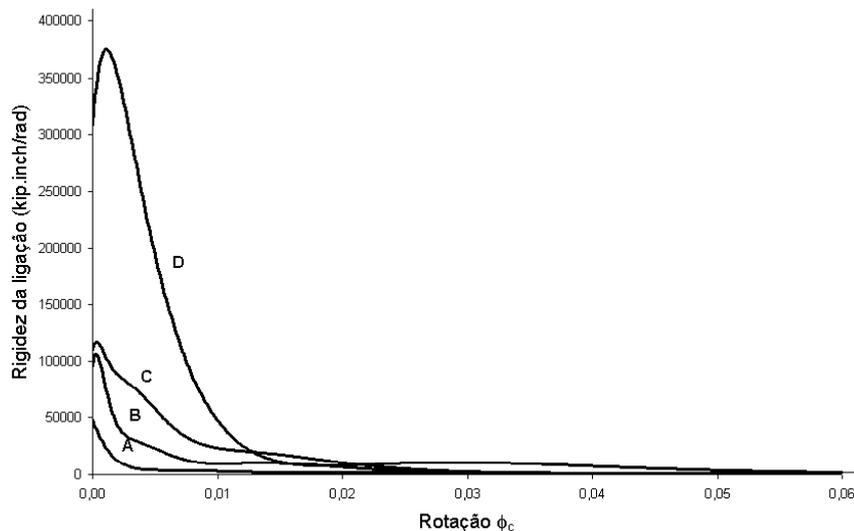


Figura 2.9 – Rigidez das ligações adotando o modelo exponencial de Chen e Lui (1988), conforme Pinheiro (2003).

### 2.3.2.1 – Modelo exponencial modificado

Em virtude do que foi exposto na seção anterior, Kishi e Chen (1986) refinaram o modelo exponencial para que esse pudesse acomodar melhor as mudanças acentuadas na curva  $M-\phi_c$ . Por isso, foi classificado de modelo exponencial modificado. Logo, no carregamento da ligação, a equação proposta por esses pesquisadores é escrita conforme:

$$M = M_o + \sum_{j=1}^m C_j \left[ 1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) \right] + \sum_{k=1}^n D_k (|\phi_c| - |\phi_k|) H[|\phi_c| - |\phi_k|] \quad (2.44)$$

com a rigidez tangente da ligação sendo

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{2j\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2j\alpha}\right) + \sum_{k=1}^n D_k H[|\phi_c| - |\phi_k|] \quad (2.45)$$

e a rigidez inicial fornecida por

$$S_c^o = \left. \frac{dM}{d\phi_c} \right|_{|\phi_c|=0} = \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{2j\alpha} + \sum_{k=1}^n D_k H[|\phi_c|]_{k=1} \quad (2.46)$$

nas quais  $M_o$ ,  $\alpha$  e  $C_j$  são as mesmas grandezas já definidas nas equações (2.41), (2.42) e (2.43);  $\phi_k$  é a rotação inicial das componentes lineares,  $D_k$  um coeficiente de ajuste para a porção linear da curva e  $H[\phi]$  é a função de passo de Heaviside ou função degrau unitário (Oliveira, 2005), definida como:

$$H[\phi] = 1; \quad \text{quando } \phi \geq 0, \quad (2.47a)$$

$$H[\phi] = 0; \quad \text{quando } \phi < 0. \quad (2.47b)$$

### 2.3.3 – Modelo de Richard e Abbott

Esse modelo foi proposto originalmente por Richard e Abbott (1975) e requer quatro parâmetros. Nesse Caso, a curva momento-rotação é descrita pela expressão:

$$M = \frac{(k - k_p)|\phi_c|}{\left[1 + \left|\frac{(k - k_p)|\phi_c|}{M_o}\right|^n\right]^{1/n}} + k_p|\phi_c| \quad (2.48)$$

e a rigidez da ligação é obtida por

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \Big|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \frac{(k - k_p)}{\left[1 + \left|\frac{(k - k_p)|\phi_c|}{M_o}\right|^n\right]^{(n+1)/n}} + k_p \quad (2.49)$$

sendo  $k$  a rigidez inicial,  $k_p$  a rigidez plástica no final da trajetória,  $n$  é o parâmetro que define a curvatura do diagrama e  $M_o$  é um momento de referência, obtido pelo prolongamento da reta tangente ao trecho inelástico da curva  $M-\phi_c$  até o eixo das ordenadas. A figura (2.10) ilustra a forma típica das curvas obtidas através do modelo de Richard e Abbott. Visto que apenas quatro parâmetros são empregados para definir a curva  $M-\phi_c$ , quando  $k_p > 0$  a rigidez plástica será positiva, isso conduzirá a uma maior eficiência computacional.

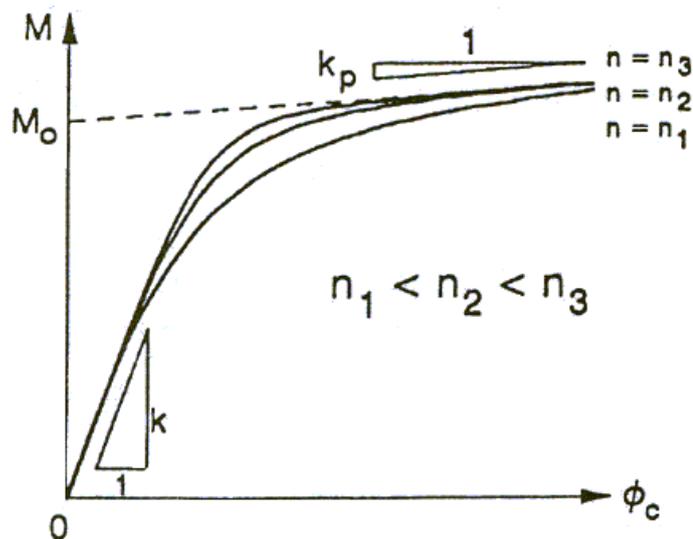


Figura 2.10 – Forma típica das curvas momento-rotação no modelo de Richard e Abbott (Chan e Chui, 2000).

## 2.4 – DEFINIÇÃO DO GRAU DE INELASTICIDADE DA SEÇÃO ( $S_s$ )

Seguindo a abordagem do método da rótula plástica (RP), duas formulações serão consideradas, a saber: a elasto-plástica (EP) e a plástico-refinada (PR), (Machado, 2005). Considera-se essas formulações, como uma alternativa à superfície de interação (momento-carga axial aplicada, M-P) da seção fornecida pela norma AISC-LRFD (1986), o conceito da seção montada que foi proposto por Chan e Chui (1997, 2000) sendo adotado posteriormente tanto por Sekulovic e Nefovska (2004) como em Machado (2005).

Na formulação elasto-plástica (EP), considera-se que a seção atua dentro do regime elástico até o instante no qual toda se atinge o limite de escoamento do aço ( $\sigma_y$ ). A partir daí, assume-se que a seção não é mais capaz de suportar incrementos de esforços, pois plastificou-se completamente (isto é: formou-se uma rótula elasto-plástica,  $S_s \cong 0$ ). Apesar da boa precisão fornecida pelo método elasto-plástico (Machado, 2005), cabe destacar aqui algumas deficiências apresentadas por esse método, como:

**a.** A incapacidade de representar tensões residuais provenientes da desigualdade no resfriamento das seções do material que ocorre após o aço atingir temperaturas muito elevadas em processos de laminação, corte com maçarico e soldagem. Podem ocorrer também por processos a frio, como o caso de dobramento da chapa (Alvarenga, 2005). Essas tensões podem causar a redução na capacidade de carga da estrutura podendo, com isso, levá-la ao colapso para cargas inferiores à carga crítica obtida através da análise elasto-plástica;

**b.** Não detectar claramente os pontos de colapso por não levar em consideração a degradação parcial da resistência da seção;

Na análise de sistemas estruturais com barras muito solicitadas, as deficiências supracitadas poderão influenciar na redistribuição de esforços da estrutura, conduzindo a resultados imprecisos para avaliação do comportamento estrutural.

A formulação plástico-refinada surgiu na tentativa de contornar as deficiências mencionadas anteriormente. Nesse método, dois conceitos são geralmente adotados pela AISC-LRFD (1986) visando melhores aproximações:

**a. O conceito do módulo tangente:** no qual se propõe aproximar os efeitos da tensão residual e da deformação axial na redução gradual da elasticidade do material, devido à ação da força axial;

**b. O conceito da degradação da rigidez da seção:** que procura aproximar de forma mais realista os efeitos da perda de rigidez da seção, associados aos esforços (axial e momento) ali atuantes;

Dentro da formulação plástico-refinada (PR), na tentativa de avaliar o grau de segurança da seção transversal quando sujeita à combinação de esforços normais ( $P/P_y$ ) e de flexão ( $M/M_p$ ), são fornecidas pela AISC-LRFD (1986) equações (2.50a-b) que delimitam uma região dentro da qual, para qualquer conjunto de valores M-P, a seção transversal resistirá às solicitações de flexo-compressão. Essa região é conhecida como superfície de interação, conforme ilustra a figura (2.11). Quando a trajetória de equilíbrio, descrita no diagrama da figura (2.11), excede a superfície de interação, a capacidade resistente da seção transversal é violada e essa seção não é mais capaz de absorver os esforços solicitantes. Portanto, esses esforços deverão ser reduzidos aos limites da superfície. A superfície de interação é definida pelas expressões:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{8}{9} \frac{M}{M_p} = 1,0; \quad \text{quando } \frac{P}{P_y} \geq 0,2 \quad (2.50a)$$

$$\frac{P}{2P_y} + \frac{8}{9} \frac{M}{M_p} = 1,0; \quad \text{quando } \frac{P}{P_y} < 0,2 \quad (2.50b)$$

onde P e M são, respectivamente, a carga axial e o momento fletor aplicados,  $P_y$  é a carga axial de escoamento total da seção comprimida (chamada também de carga de esmagamento) e  $M_p$  representa o momento de plastificação da seção.

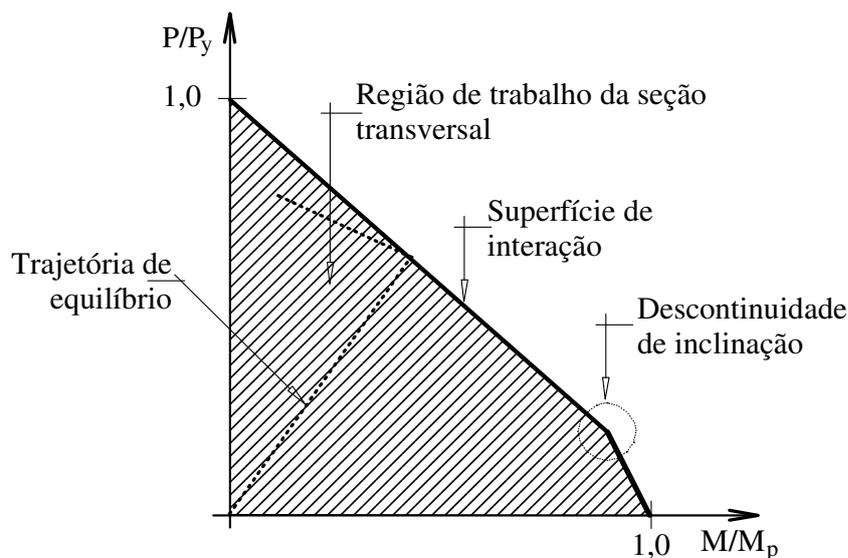


Figura 2.11 – Exemplo de superfície de interação, AISC-LRFD (1986).

Embora as equações apresentadas anteriormente sejam muito utilizadas por decorrerem de uma norma de projeto muito difundida, cabe destacar aqui algumas restrições pertinentes à superfície de interação proposta pela AISC-LRFD (1986). A primeira restrição reporta-se, segundo Machado (2005), ao fato dessa superfície ser conservativa em relação ao comportamento da maioria dos perfis utilizados, uma vez que não considera as características geométricas de cada tipo de seção, podendo conduzir a soluções pouco econômicas. Outra restrição é proveniente da descontinuidade de inclinação existente na superfície de interação, como mostra a figura (2.11). Tal descontinuidade pode representar inconsistências entre cargas axiais com baixo valor e momentos de valor elevado, o que poderá dar origem a problemas de convergência nos processos numéricos (Machado, 2005).

Na tentativa de contornar as restrições computacionais citadas, Chan e Chui (1997, 2000) desenvolveram o conceito da “seção montada”, que visa substituir a superfície de interação proposta pela AISC-LRFD (1986) por outra superfície de interação menos genérica e mais próxima da superfície real de cada perfil por basear-se nas características geométricas dos componentes da seção transversal.

Como ilustrado na figura (2.12), para o uso de um perfil I, assume-se que o núcleo da alma do perfil suportará predominantemente a carga axial. Assim, caberá às outras partes da seção transversal (incluindo abas e eventualmente, o restante da alma) suportar os esforços de flexão.

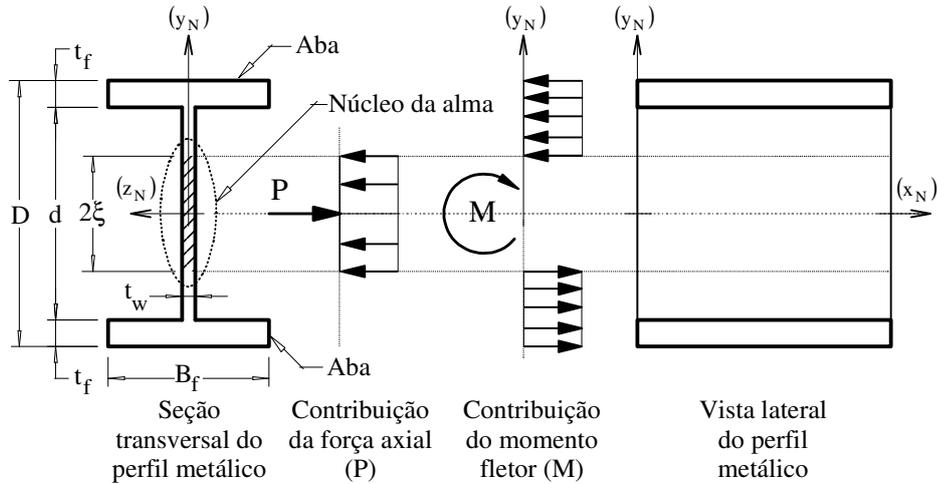


Figura 2.12 – Perfil estudado e a distribuição de tensões proposta no conceito da “seção montada”, AISC-LRFD (1986), Machado (2005).

A seção é idealizada como o resultado da montagem de três faixas (duas abas e alma) retangulares que formam a seção do perfil. Para o cálculo da distribuição dos esforços, inicialmente, deve-se definir o quanto da alma é responsável por resistir à carga axial, isto é:

$$\xi = \frac{P}{2\sigma_y t_w}; \quad \text{quando } \xi \leq \frac{d}{2} \quad (2.51a)$$

$$\xi = \frac{(P - \sigma_y t_w d)}{2B_f \sigma_y}; \quad \text{quando } \frac{d}{2} < \xi \leq \frac{d}{2} + t_f \quad (2.51b)$$

onde  $P$ , como definido anteriormente, é a carga axial,  $\sigma_y$  é tensão de escoamento,  $t_w$  é a espessura da alma,  $t_f$  é a espessura da aba (mesa),  $B_f$  é a largura da mesa,  $d$  é a altura da alma e  $\xi$  é a metade da parcela da alma que suporta a carga axial. A partir desse valor, chega-se à expressão para cálculo do momento de plastificação reduzido  $M_{pr}$ , como segue:

$$M_{pr} = \left[ B_f t_f (D - t_f) + \left( \left( \frac{d}{2} \right)^2 - \xi^2 \right) t_w \right] \sigma_y; \quad \text{quando } \xi \leq \frac{d}{2} \quad (2.52a)$$

$$M_{pr} = \left[ \left( \frac{d}{2} \right)^2 - \xi^2 \right] B_f \sigma_y; \text{ quando } \frac{d}{2} < \xi \leq \frac{d}{2} + t_f \quad (2.52b)$$

nas quais D expressa a altura total da seção do perfil.

A figura (2.13) representa graficamente o momento plástico reduzido para um perfil do tipo HEB 220 utilizando o procedimento acima.

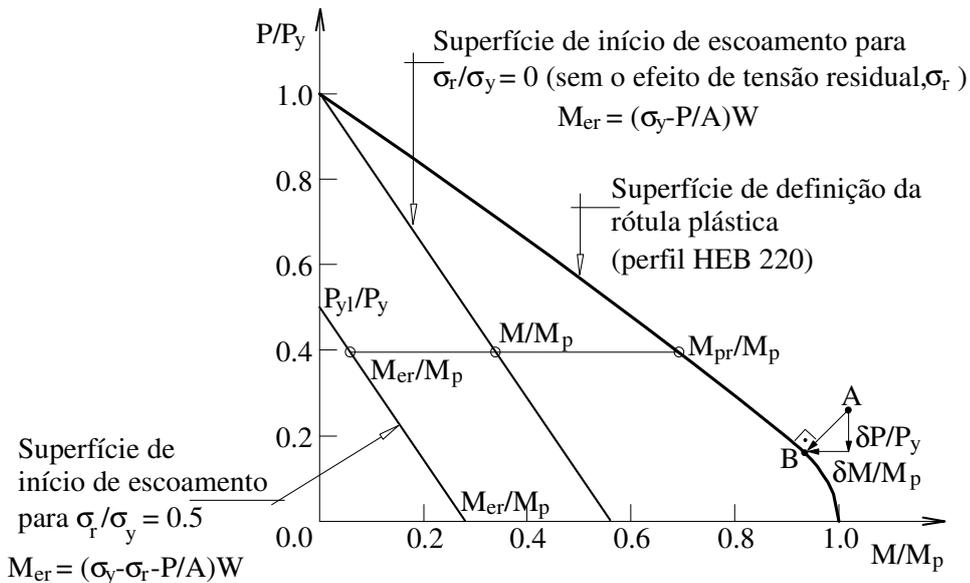


Figura 2.13 – Superfície de interação do perfil HEB 220 obtida pelo conceito da “seção montada”, Machado (2005).

Observa-se na figura (2.13) a superfície de início de escoamento da seção considerando ou não as tensões residuais. Essa superfície separa duas regiões distintas, a primeira (inferior) informa que qualquer combinação de M-P ali situada representará a seção se comportando em regime elástico e nenhuma modificação na rigidez dessa seção será necessária. Caso a combinação M-P se posicione na segunda região (superior) deverá ocorrer uma perda de resistência da seção, visto que parte da mesma já atingiu a tensão de escoamento. Não existe possibilidade de uma seção assumir valores M-P posicionados fora da curva de interação, devendo haver uma compensação dessas componentes de força a fim de transferi-las, no máximo, para a curva que delimita a superfície de interação. Nesse caso, é assumido que se formou uma rótula plástica e a rigidez da seção  $S_s$  fica reduzida a zero. A superfície de início de escoamento depende

da força axial  $P$  e da existência da tensão residual  $\sigma_r$ , que juntas definem o momento de início de escoamento  $M_{er}$  de acordo com (Chan e Chui, 2000; Machado, 2005):

$$M_{er} = \left( \sigma_y - \sigma_r - \frac{P}{A} \right) W \quad (2.53)$$

sendo  $W$  o módulo de resistência elástico da seção.

Finalmente, o parâmetro que simula a degradação da resistência causada pela plastificação da seção  $S_s$ , pode ser definido de acordo com a expressão seguinte (Chan e Chui, 2000; Sekulovic e Nefovska, 2004; Machado, 2005):

$$S_s = \frac{6EI}{L} \frac{|M_{pr} - M|}{|M - M_{er}|}, \text{ quando } M_{er} < M < M_{pr} \quad (2.54)$$

na qual  $EI$  é a rigidez flexional da seção,  $L$  é o comprimento do elemento finito,  $M_{pr}$  é o momento de plastificação reduzido (equação 2.52) e  $M_{er}$ , como mencionado anteriormente, é o momento de início de escoamento.

Percebe-se pela equação anterior que  $S_s$  pode assumir valores que variam de zero até infinito, porém, para aplicação nas ferramentas computacionais, deve-se restringir esses valores aos limites  $10^{-10}$  e  $10^{10}$ , que correspondem aos valores máximos de  $S_s$  para os momentos plástico e elástico, respectivamente.

Cabe destacar novamente que essa limitação do parâmetro  $S_s$  é necessária apenas para análise do tipo plástico-refinada, na qual se acompanha a degradação da resistência da seção. Na análise elasto-plástica esse acompanhamento não é necessário, uma vez que o material permanece com comportamento elástico até o instante em que a tensão de escoamento é igualada em algum ponto da seção transversal (as componentes M-P atingem a superfície limite de interação). A partir daí, o parâmetro  $S_s$  assume o valor zero.

# 3

## PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS

### 3.1 – INTRODUÇÃO

Após a apresentação, no capítulo anterior, dos conceitos e formulações numéricas pertinentes ao elemento finito híbrido não linear de pórtico plano, faz-se necessário uma explanação geral sobre os processos computacionais adotados para obtenção da solução não-linear dos sistemas estruturais tratados no escopo desta dissertação.

Em vista disto, na seção (3.2), são apresentadas, na forma de fluxogramas, algumas das características principais do programa computacional. Nessa seção, são apontadas também as contribuições do presente trabalho, referentes à alterações nos arquivos de saída de dados do sistema computacional existente. Isso possibilitou a obtenção dos resultados apresentados nos capítulos posteriores.

A seção (3.3) traz a metodologia empregada na solução não-linear de sistemas estruturais metálicos planos. Nessa parte apresenta-se a estrutura do sistema computacional empregado na realização das análises do presente trabalho. Assim, são mostradas em um primeiro instante, a disposição básica dos dados de entrada requeridos (bloco-1) e, em seguida, ênfase é dada ao processo de solução não-linear do problema (bloco-2). Por fim, os arquivos de saída gerados pelo programa computacional (bloco-3) são detalhados. É fornecida ainda uma explanação geral a cerca da utilização do programa de pós-processamento (Mota, 2006) que é responsável pela visualização gráfica dos resultados extraídos das análises.

### 3.2 – VISÃO GERAL DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

Inicialmente, faz-se necessário detalhar o processo de desenvolvimento do sistema computacional empregado no presente trabalho e citar os pesquisadores que contribuíram para a implementação de cada um dos seus módulos. Este sistema, desenvolvido em linguagem Fortran versão *Power Station 4.0* (Microsoft Developer Studio, 1994), foi concebido por Silveira (1995), para estudo da resposta de sistemas estruturais esbeltos com restrições de contato, em seu trabalho de doutorado. A base computacional foi expandida posteriormente por Galvão (2000), que programou várias formulações numéricas não-lineares para utilização de elementos finitos reticulados de pórtico plano. Rocha (2000) estudou diversas estratégias de solução não-linear a fim de permitir o traçado completo da trajetória de equilíbrio da estrutura. Galvão (2001) adicionou ao sistema computacional a possibilidade de se realizar a análise de vibração em treliças planas, pórticos planos e pórticos espaciais. Pinheiro (2003) foi responsável pela implementação de formulações não-lineares para análise de treliças planas e espaciais incluindo, ainda, a possibilidade do modelamento de pórticos planos com ligações semi-rígidas. Machado (2005) estudou e implementou algumas formulações não-lineares que consideram o efeito da inelasticidade do aço no comportamento do sistema estrutural, propiciando a análise inelástica de segunda ordem de pórticos planos rígidos ou rotulados. Recentemente, Rocha (2006), através da implementação do elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano, conseguiu combinar os efeitos da semi-rigidez das ligações àqueles provenientes da inelasticidade do aço tornando possível a análise de segunda ordem inelástica de pórticos planos com ligações semi-rígidas, que é adotada também neste trabalho.

A figura (3.1) fornece um esquema geral do programa computacional supracitado. Nessa figura, cada caixa traz um texto descritivo da operação realizada, sendo coloridos em cinza e em negrito os módulos empregados neste trabalho.

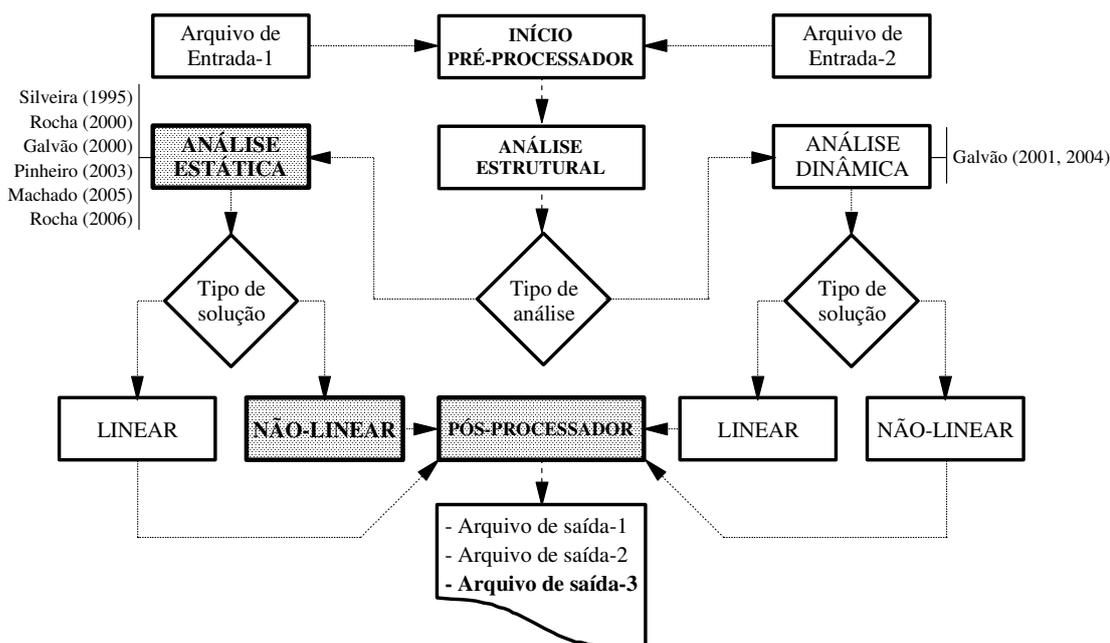


Figura 3.1 – Esquema geral do programa computacional.

O sistema computacional é dividido em dois grandes módulos de análise (figura 3.1), a saber:

**a. Análise estática:** na qual a estrutura é avaliada desconsiderando-se os efeitos decorrentes da aceleração da massa do sistema provocada, geralmente, por ações externas, quando tais efeitos não amplificam significativamente a resposta estrutural. Neste caso desconsidera-se a variação temporal da intensidade das cargas e da amplitude dos deslocamentos;

**b. Análise dinâmica:** onde os efeitos produzidos pela aceleração da massa da estrutura não podem ser desconsiderados, uma vez que estes efeitos irão influenciar a resposta (deslocamentos e esforços) do sistema estrutural. Desta forma, pode-se considerar a variação temporal da intensidade das forças e da amplitude dos deslocamentos.

Cada um desses módulos de análise pode empregar um tipo de solução, ou seja:

**a. Solução linear:** provém da adoção de relações tensão-deformação e força-deslocamento lineares. Desta forma, esse método de solução é indicado para sistemas estruturas nos quais se esperam pequenas deformações e pequenos deslocamentos pois, do contrário, as aproximações decorrente da linearização da equações podem conduzir a respostas que não retratam o comportamento real da estrutura;

**b. Solução não-linear:** neste método, a configuração geométrica inicial da estrutura é atualizada a cada passo de carga incremental. Entretanto, dois tipos de análises distintas, baseadas em relações força-deslocamento não-lineares, podem ser consideradas, a saber: A análise não-linear geométrica, utilizada para problemas onde se espera grandes deslocamentos e pequenas deformações, uma vez que adota-se leis constitutivas lineares para os materiais, e a análise não-linear física, onde problemas com grandes deslocamentos e grandes deformações podem ser tratados, visto que considera-se leis constitutivas não-lineares para os materiais.

A figura (3.2) traz os tipos de estrutura que podem ser analisadas com o sistema computacional existente, juntamente com os pesquisadores que contribuíram para o desenvolvimento de cada um dos módulos de análise do programa. Nessa figura, as caixas com destaque em cinza representam os sistemas estruturais analisados no presente trabalho empregando-se as formulações existentes.

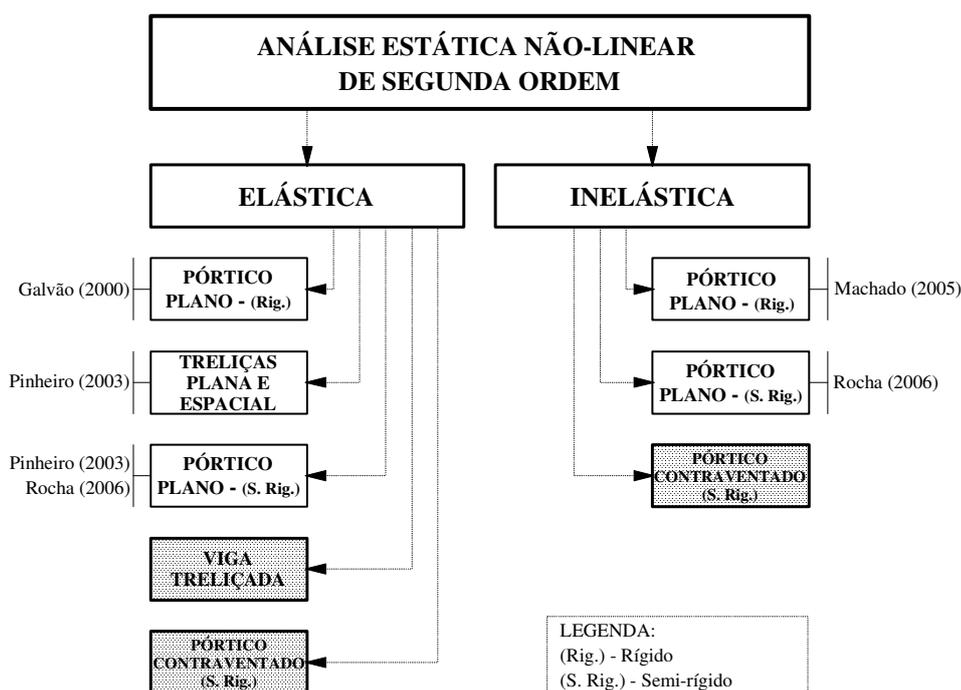


Figura 3.2 – Esquema geral dos tipos de estrutura analisados no programa computacional.

Já a figura (3.3) apresenta as classes de sistemas estruturais passíveis de serem estudados utilizando-se o elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano (Chan e

Chui, 2000) que foi implementado por Rocha (2006). São apresentados, nesta mesma figura, os valores adotados em cada tipo de análise para o parâmetro  $S_s$ , responsável por acompanhar a degradação da rigidez da seção e  $S_c$ , que avalia a rigidez da ligação. Nota-se que a análise elástica será possível com a adoção de um valor elevado para a tensão de escoamento do aço  $\sigma_y$ . A escolha adequada desses parâmetros favorecerá a simulação conjunta ou individual dos efeitos não-lineares desejados, sejam eles de origem física e/ou geométrica.

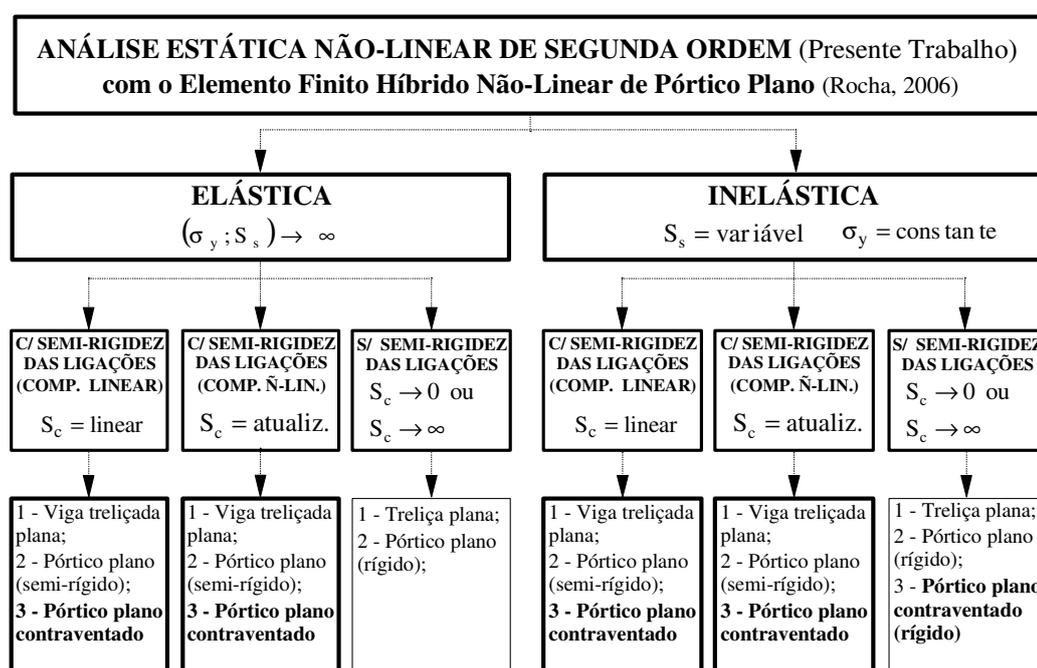


Figura 3.3 – Esquema geral dos parâmetros para cada tipo de estrutura.

### 3.3 – ETAPAS BÁSICAS PARA SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

A figura (3.4) apresenta o fluxograma do processo de solução não-linear do programa computacional. Este fluxograma pode ser subdividido em três blocos distintos. O primeiro bloco (bloco-1) é responsável pela leitura do arquivo de entrada-1, que armazena as características físicas, geométricas e as informações pertinentes ao carregamento externo aplicado, para o sistema estrutural analisado. Já o segundo bloco (bloco-2) caracteriza-se por realizar a solução numérica do problema estrutural

empregando os dados lidos nos arquivos de entrada-1. Por fim, o terceiro bloco (bloco-3) trata da geração de arquivos de saída contendo os resultados da análise numérica.

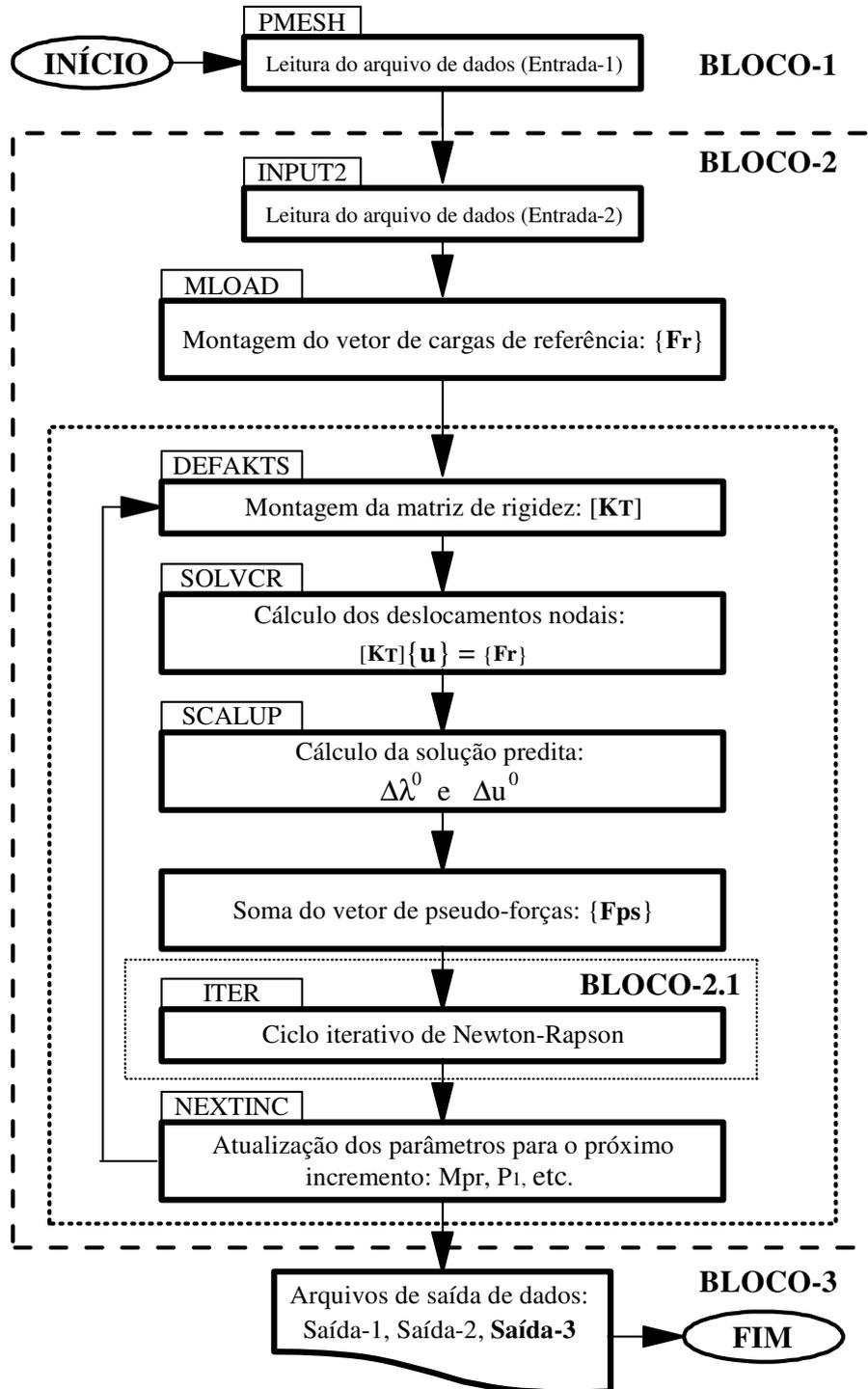


Figura 3.4 – Fluxograma geral do programa computacional.

Nas próximas seções são apresentadas as características principais de cada um dos três blocos supracitados.

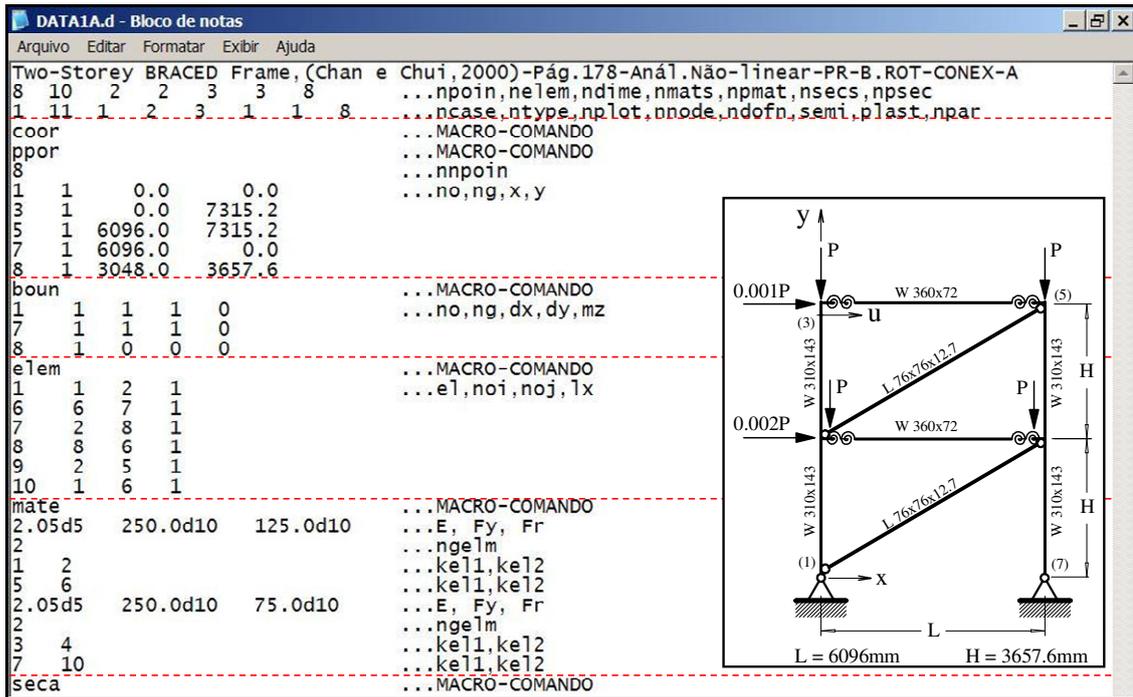
### **3.3.1 – Arquivos de Entrada de Dados (bloco-1)**

A figura (3.5) ilustra o arquivo de entrada de dados (entrada-1) utilizado na análise não-linear de um pórtico contraventado de dois pavimentos, com ligações semi-rígidas lineares (Chan e Chui, 2000). Esse arquivo, cujas informações são lidas e armazenadas através da sub-rotina PMESH, fornece as características geométricas, as propriedades físicas dos materiais empregados e os dados do carregamento externo aplicado, para cada elemento finito componente da malha utilizada na discretização da estrutura.

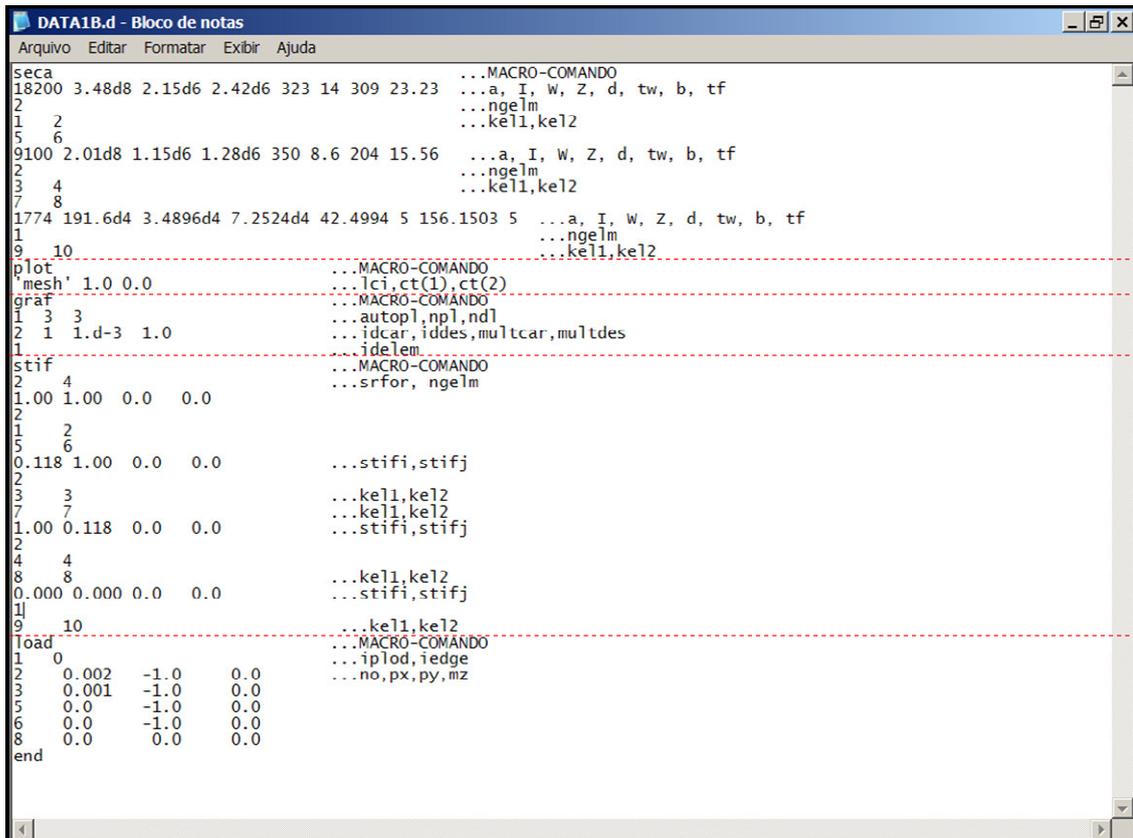
Como mencionado anteriormente, o programa computacional foi desenvolvido em linguagem Fortran versão *Power Station 4.0* (Microsoft Developer Studio, 1994) que realiza uma emulação do MS-DOS em uma janela pertencente ao sistema operacional Windows. Assim, sua interface com o usuário requer uma entrada de dados feita exclusivamente através de arquivos de texto. Os nomes dos arquivos de entrada são definidos pelo usuário do programa, tendo necessariamente que possuir 5 caracteres e a extensão “\*.d”.

Deve ser observado também, na figura (3.5), que existe uma seqüência para listagem das informações contidas no arquivo de entrada-1. Se essa seqüência não for seguida, ocorrerá um erro interno de leitura de variáveis e, em consequência disso, o processo de leitura será interrompido imediatamente.

O arquivo de entrada-1 está configurado na forma de blocos de informações do sistema estrutural, denominados macro-comandos. As informações contidas em cada macro-comando são lidas e processadas sequencialmente no programa computacional. Assim, o primeiro passo é a leitura, no arquivo de entrada-1, de um conjunto preliminar de variáveis de caráter global (ex.: número de nós, número de elementos, etc.). As informações expressas por cada uma dessas variáveis irão delinear a seqüência na qual os macro-comandos serão lidos naquele arquivo. A função de cada uma dessas variáveis está descrita na tabela (3.1).



(a) Parte A



(b) Parte B

Figura 3.5 – Modelo do arquivo de entrada de dados (entrada-1).

Tabela 3.1 – Parâmetros gerais do arquivo de entrada-1.

Nome da variável	Função da variável
npoin	Número de nós da malha de elementos finitos
nelem	Número de elementos finitos da malha
ndime	Número de dimensões do problema (2: plano ou 3: espacial)
nmats	Número de grupos de materiais com propriedades diferentes
npmat	Números de parâmetros para cada grupo de material
nsecs	Número de grupos de seções com propriedades diferentes
npsec	Número de parâmetros para cada grupo de seção
ncase	Número de casos de carga
ntype	Tipo de sistema estrutural analisado (ver Machado, 2005)
nplot	Indicador de plotagem
nnode	Número de nós por elemento
ndofn	Número de graus de liberdade por nó
semi	Tipo de formulação a ser considerada para avaliação do comportamento semi-rígido das ligações (ver Machado, 2005)
plast	Tipo de formulação inelástica a ser considerada para formação da rótula plástica (ver Machado, 2005)
npar	Número de parâmetros da seção transversal (seção I)

Após a leitura dos parâmetros da tabela (3.1), inicia-se a leitura dos macro-comandos, cujas funções básicas são definidas a seguir:

**a. COOR:** esse macro-comando informa a leitura das coordenadas de cada nó do modelo. Deve se informar, inicialmente, o número total de nós, através da variável NNPOIN. Em seguida, o número de identificação de cada nó e suas respectivas coordenadas, relativas ao sistema de eixos globais da estrutura ( $X_G$  e  $Y_G$ ). Cabe destacar aqui, que não é necessário listar todos os nós, pois o programa possui um gerador de coordenadas que facilita esse processo, bastando atribuir valor 1 à variável NG. Desta forma, em caso de nós consecutivos, especifica-se apenas o primeiro e o último nó da seqüência, sendo geradas automaticamente as coordenadas dos nós. A lista dos nós sempre é encerrada com o último ponto nodal da malha;

**b. BOUN:** esse macro-comando determina a leitura das condições de contorno do problema, isto é, indica quais serão as deslocabilidades possíveis para cada nó da malha de elementos finitos. Inicialmente, a estrutura é gerada considerando que a

ligação entre os elementos finitos é perfeitamente rígida, ou seja, as rotações relativas são impedidas nas regiões próximas aos nós. Por conseguinte, informa-se apenas as condições de vinculação dos nós dos apoios externos, e também as dos nós com deslocabilidades diferentes daquelas já estabelecidas para toda a malha. Para o caso bidimensional, considerado neste trabalho, cada ponto nodal possui três deslocabilidades possíveis, duas translações  $u$  e  $w$  (nas direções  $X_G$  e  $Y_G$ ) e uma rotação  $\theta$  (em torno do eixo global  $Z_G$ ). Essas deslocabilidades são expressas no macro comando, respectivamente, através das variáveis  $DX$ ,  $DY$  e  $MZ$  que assumirão valor unitário em caso de restrição ao deslocamento considerado, e valor nulo na situação de deslocamento liberado;

**c. ELEM:** após a definição das coordenadas dos nós e das condições de contorno do problema, é necessário informar a posição de cada elemento finito na malha adotada para a discretização da estrutura. O macro-comando ELEM lista o número de cada elemento finito EL e a numeração dos nós inicial NOI e final NOJ desse elemento. Não é necessário listar todos os elementos, visto que, para cada seqüência de elementos finitos, a geração da malha pode ser automática, bastando informar o primeiro e o último elemento dessa seqüência e atribuir valor 1 à variável LX que indica essa geração automática. O último dado da lista será o que contém as informações relativas ao elemento finito de maior numeração dentro da malha;

**d. MATE:** no qual são fornecidas as propriedades físicas dos materiais constituintes dos elementos finitos, que podem ser organizadas em grupos. Para cada grupo é informado: o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento e a tensão residual máxima do material. Essas propriedades são representadas, no referido macro-comando, pelas variáveis  $E$ ,  $FY$  e  $FR$ , respectivamente. É necessário que sejam informados também, o número de linhas NGELM que o programa irá considerar antes de processar o grupo seguinte, e depois, o elemento inicial KEL1 e o elemento final KEL2 de cada seqüência de elementos finitos. Se os elementos não estiverem em forma seqüencial, deverão ser informados individualmente, isto é,  $KEL1 = KEL2$ ;

**e. SECA:** onde são informadas as características geométricas pertinentes à seção transversal de cada elemento. Semelhantemente ao macro-comando MATE, são criados aqui grupos de elementos que possuem a mesma seção transversal. Assim, para cada grupo é indicado: a área da seção transversal  $A$ , o momento de inércia  $I$ , o módulo de

resistência elástica  $W$ , o módulo de resistência plástico  $Z$ , a altura da alma  $d$ , a espessura da alma  $t_w$ , a largura da aba  $B_f$  e a espessura da mesa  $t_f$ . Em seguida, indica-se o número de linhas NGELM que deverão ser lidas pelo programa, e posteriormente, as seqüências de elementos pertencentes ao grupo (KEL1 e KEL2). Um aspecto importante a ser observado para o emprego do elemento finito híbrido (Machado, 2005; Rocha, 2006), é a necessidade de adoção de seções transversais do tipo I. Isso decorre da utilização do “*Método da seção montada*” na avaliação da evolução da plastificação na seção transversal, como foi apresentado no Capítulo 2 do presente trabalho. Posto isto, caso a seção transversal possua outras formas geométricas, deverão ser calculadas propriedades equivalentes, que resultam da transformação de uma seção real qualquer em uma seção tipo I equivalente. As propriedades equivalentes devem ser obtidas mantendo-se a rigidez à flexão  $EI$  e a rigidez axial  $EA$ , da seção equivalente, iguais às da seção real;

**f. GRAF:** esse macro-comando trata da definição dos parâmetros para saída da trajetória de equilíbrio da estrutura;

**g. STIF:** esse macro-comando merece atenção especial, pois traz informações pertinentes ao comportamento semi-rígido das ligações. A leitura do macro-comando STIF é definida através da variável SEMI, informada no início do arquivo de entrada-1. Se  $SEMI = 0$ , o macro-comando STIF não é procurado e a solução requerida, seja ela linear ou não-linear, restringir-se-á àquela com ligações rígidas. A variável SEMI pode assumir, ainda, os valores 1 ou 2. Se  $SEMI = 1$ , a rigidez das ligações é mantida constante ao longo da análise, o que ocorre para análises do tipo linear. Para análises não-lineares,  $SEMI = 2$ . Neste caso, as ligações comportam-se de forma não-linear, pois têm sua rigidez atualizada a cada passo da análise estrutural. Maiores detalhes a respeito da modelagem de ligações semi-rígidas podem ser encontrados em Pinheiro (2003);

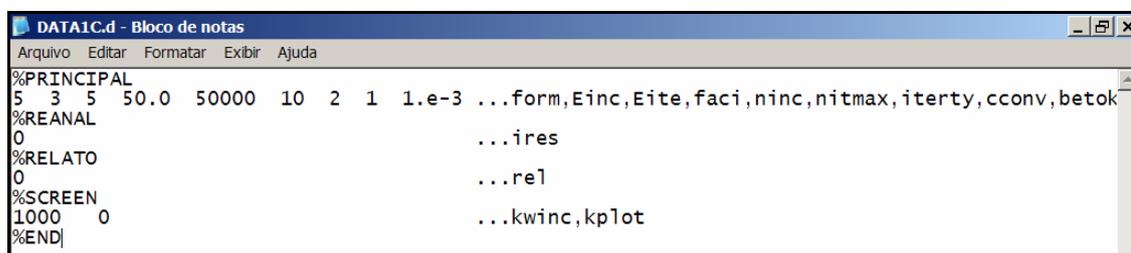
**h. LOAD:** esse macro-comando indica a lista das cargas externas que são aplicadas de forma incremental aos nós da estrutura. Podem ser informados apenas os nós submetidos a essas cargas, com exceção, do nó de maior numeração da malha, que deve ser mostrado na última linha do macro-comando, mesmo que não exista cargas aplicadas a ele;

**i. END:** esse macro comando indica o término do arquivo de entrada-1 e deverá ser a última linha desse arquivo. Após o término do macro-comando LOAD, o

programa irá processar a linha seguinte. Se encontrar a informação END, ele irá encerrar o processo de leitura do arquivo de entrada-1 e iniciar a leitura do arquivo de entrada-2, senão, processará outros tipos de carregamento externo (ex.: cargas de intensidade constante ao longo do carregamento “dead load”).

Detalhes relativos às variáveis contidas nos macro-comandos listados acima, podem ser obtidos em Machado (2005).

Após a leitura do arquivo de entrada-1, que encerra o bloco-1 é feita a leitura do arquivo de entrada-2, iniciando, através da sub-rotina INPUT2, o bloco-2 do programa computacional. Esse arquivo, ilustrado na figura (3.6), armazena os parâmetros que definem a estratégia de solução não-linear do problema estrutural. Assim, são definidos neste arquivo: a formulação adotada FORM, a estratégia para incremento de carga EINC, a estratégia de iteração EITE, o valor do incremento inicial do parâmetro de carga FACI, o número máximo de incrementos NINC e de iterações NITMAX, o critério de aplicação do método de Newton-Raphson ITERTY, o critério adotado para verificação da convergência no ciclo iterativo CCONV e a tolerância BETOK, dentre outros, detalhados em Machado (2005).



```
DATA1C.d - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
%PRINCIPAL
5 3 5 50.0 50000 10 2 1 1.e-3 ...form,Einc,Eite,faci,ninc,nitmax,iterty,ccconv,betok
%REANAL
0 ...ires
%RELATO
0 ...rel
%SCREEN
1000 0 ...kwinc,kplot
%END
```

Figura 3.6 – Arquivo de entrada de dados para solução não-linear (entrada-2).

### 3.3.2 – Solução do Problema Não-Linear (bloco-2)

Após a leitura dos arquivos de entrada de dados mostrados na seção anterior inicia-se a análise não-linear do problema estrutural cujos procedimentos básicos são mostrados a seguir.

A análise não-linear adotada incorpora procedimentos iterativos em cada passo incremental para obtenção do equilíbrio do sistema estrutural, sendo composta de duas fases. A primeira, denominada *solução predita*, envolve a obtenção dos deslocamentos

incrementais, ao se resolver as equações de equilíbrio da estrutura na última configuração geométrica disponível, a partir de um determinado acréscimo de carregamento. A segunda fase, denominada de *solução corretiva*, tem como objetivo a correção das forças internas incrementais, determinadas pelos acréscimos de deslocamentos, empregando um processo iterativo como, por exemplo, a técnica de Newton-Raphson. Maiores detalhes dessas duas fases podem ser encontrados em Crisfield (1991), Yang e Kuo (1994), Rocha (2000) e Galvão (2000). Tais forças internas são comparadas com o carregamento externo, obtendo-se daí uma medida do desequilíbrio existente entre as forças atuantes no sistema estrutural. O processo é feito até que seja atendido um determinado critério de convergência, onde se supõe que a estrutura alcançou o equilíbrio, ou seja, até que se encontre:

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{F}_e, \text{ ou ainda, } \mathbf{F}_i(\mathbf{u}) = (\lambda\mathbf{F}_r + \mathbf{F}_{ps}) \quad (3.1)$$

onde o vetor de forças internas  $\mathbf{F}_i$  é função não-linear dos deslocamentos  $\mathbf{u}$  nos pontos nodais da estrutura,  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas e  $\lambda$  é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de  $\mathbf{F}_r$ , que é um vetor de forças nodais de referência cuja magnitude é arbitrária, isto é, apenas a sua direção é importante e,  $\mathbf{F}_{ps}$  é o vetor de pseudo-forças que tem origem após o início da formação de rótula plástica em alguma extremidade do elemento finito e visa limitar o valor da força axial  $P$  e do momento fletor  $M$  que atuam no elemento finito, ao longo da superfície de resistência da seção transversal desse elemento (Machado, 2005).

Metodologias eficientes, para solução não-linear de sistemas estruturais, devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio (primário e secundário) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos (pontos limites de carga, de deslocamento e/ou pontos de bifurcação) que possam existir (Crisfield, 1991).

Antes de apresentar alguns passos importantes da metodologia de análise não-linear é necessário fazer algumas observações relacionadas à notação que será empregada:

a. O referencial *Lagrangeano atualizado* (Galvão, 2000; Pinheiro, 2003) é utilizado para descrever o movimento dos nós da estrutura ao longo do processo de carregamento; assim a última configuração de equilíbrio, no instante  $t$ , é selecionada como estado de referência;

b. considere que são conhecidos o campo de deslocamentos e o estado de tensões da estrutura para o passo de carga no instante  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga seguinte  $t + \Delta t$ ;

c.  $k$  é referido como um contador do número de iterações;

d. para  $k = 0$ , tem-se a solução incremental predita;

e. para  $k = 1, 2, 3, \dots$ , tem-se o ciclo iterativo de Newton-Raphson;

f.  $\lambda$  e  $\mathbf{u}$  definem, respectivamente, o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;

g.  $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{u}$  caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e os incrementos de deslocamento obtidos a partir da última configuração de equilíbrio;

h.  $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{u}$  são as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, obtidos durante o processo iterativo.

A seguir, serão apresentadas, de forma mais detalhada, as duas fases mais importantes do processo de solução não-linear adotado neste trabalho para um dado passo de carga.

### 3.3.2.1 – Solução incremental predita

O primeiro passo para a obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente ( $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{u}^0$ ), consiste na montagem da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$ . A partir daí, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais incrementais através da expressão

$$\Delta\mathbf{u}_t = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_t \quad (3.2)$$

As estratégias de incremento de carga, amplamente discutidas no trabalho de Rocha(2000), permitem que se faça uma seleção automática do incremento inicial do

parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . Dois procedimentos para avaliar esse parâmetro são fornecidos em Pinheiro (2003). O primeiro, como é mostrado na figura (3.7), impõe uma equação de restrição adicional ao problema, onde é utilizado o comprimento de arco (Crisfield, 1991), e o segundo, amplamente utilizado no presente trabalho, é baseado no parâmetro de rigidez generalizado GSP, *Generalized Stiffness Parameter*; (Yang e Kuo, 1994). Já as opções existentes no sistema computacional para escolha de estratégias de incremento do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$ , são apresentadas em Rocha (2000) e também em Machado (2005).

Tendo-se definido o incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$ , calculam-se os deslocamentos nodais incrementais escalonando-se  $\Delta\mathbf{u}_t$ , ou seja,

$$\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0 \Delta\mathbf{u}_t \quad (3.3)$$

Nesse estágio, o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais são atualizados através do seguinte procedimento:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.4)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^0 \quad (3.5)$$

onde  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{u}$  caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último incremento de carga.

As soluções fornecidas nas equações (3.4) e (3.5) raramente satisfazem à condição de equilíbrio do sistema, de forma que iterações subseqüentes são requeridas para restaurar o equilíbrio. Os procedimentos numéricos envolvendo estratégias de iteração, incluindo a variações do parâmetro de carga, são encontrados em Rocha (2000).

### 3.3.2.2 – Ciclo de iterações

No processo tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante durante o ciclo iterativo, enquanto a matriz de rigidez é atualizada. No entanto, caso se pretenda acompanhar todo o traçado da trajetória de equilíbrio, com

possíveis passagens por pontos limites e/ou pontos de bifurcação, é necessário que seja permitida a variação desse parâmetro a cada iteração.

Assim, seguindo a técnica de solução, inicialmente proposta por Batoz e Dhett (1979), na qual se ajusta o parâmetro de carga, pode ser escrito que a correção nos deslocamentos nodais é governada pela equação de equilíbrio seguinte:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{u}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}, \lambda^k), \quad k \geq 1 \quad (3.6)$$

na qual  $\mathbf{g}$  representa o vetor gradiente que se deseja anular ao longo do ciclo iterativo, indicando assim que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido. Na equação (3.6), nota-se que  $\mathbf{g}$  é função dos deslocamentos nodais totais  $\mathbf{u}^{(k-1)}$ , calculados na última iteração, e do valor corrente do parâmetro de carga total  $\lambda^k$ , que agora também é uma incógnita e pode ser escrito como sendo

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.7)$$

em que  $\delta\lambda^k$  é a correção do parâmetro de carga. Substituindo a equação (3.7) em (3.6), chega-se a:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{u}^k = -\left[\mathbf{F}_i^{(k-1)} + (\lambda^{(k-1)} - \delta\lambda^k)\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{ps}^{(k-1)}\right] \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{F}_i^{(k-1)}$  representa o vetor das forças internas. Na equação anterior, o produto  $\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r$  caracteriza o vetor de forças externas total atuante na última iteração. A equação (3.8) pode ainda ser reescrita como sendo,

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{u}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k\mathbf{F}_r \quad (3.9)$$

que é a equação empregada durante o ciclo iterativo. Dessa equação, tem-se que os deslocamentos nodais iterativos podem ser decompostos em duas parcelas:

$$\delta \mathbf{u}^k = \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \quad (3.10)$$

sendo

$$\delta \mathbf{u}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.11)$$

e

$$\delta \mathbf{u}_r^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (3.12)$$

Aqui,  $\delta \mathbf{u}_g^k$  é a correção que seria obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia convencional de incremento do parâmetro de carga constante e  $\delta \mathbf{u}_r^k$  é o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de  $\mathbf{F}_r$ . Caso seja aplicado o método de Newton-Raphson modificado,  $\delta \mathbf{u}_r^k$  será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais  $\delta \mathbf{u}_t$  calculado na seção anterior através da equação (3.2) visto que  $\mathbf{K}$  permanece inalterada. Já a correção do parâmetro de carga,  $\delta \lambda^k$  que é a única incógnita da equação (3.10), é determinada seguindo uma das estratégias de iteração apresentadas em Rocha (2000). Com a determinação de  $\delta \lambda^k$ , retorna-se à equação (3.10) para obtenção da correção dos deslocamentos.

Com a obtenção da solução iterativa  $\delta \lambda^k$  e  $\delta \mathbf{u}_k$ , faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema através das expressões:

$$\Delta \lambda^k = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad (3.13)$$

e

$$\Delta \mathbf{u}^k = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_r^k \quad (3.14)$$

Finalmente, para o parâmetro de carga, escreve-se:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (3.15)$$

e para os deslocamentos nodais totais,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^k \quad (3.16)$$

A figura (3.7) sintetiza o processo de solução não-linear, apresentando para uma trajetória de equilíbrio genérica, alguns dos principais parâmetros descritos nas equações anteriores.

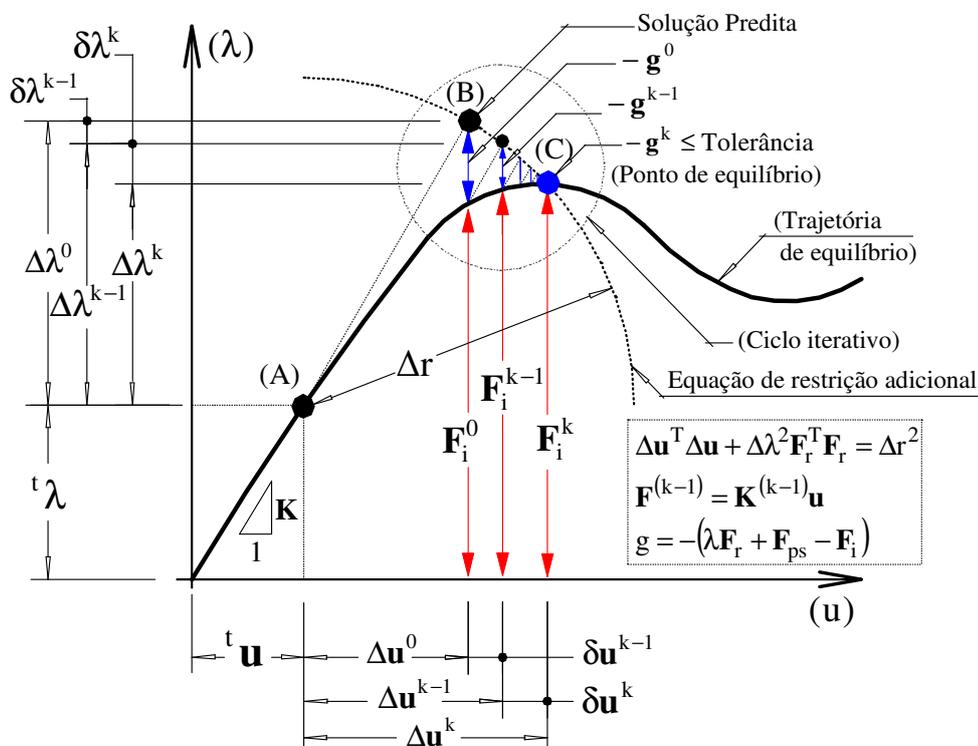


Figura 3.7 – Estratégia de solução não-linear adotada (Crisfield, 1991; Rocha, 2006).

Os procedimentos descritos nessa seção são repetidos até que um dado critério de convergência seja atendido, como é ilustrado na figura (3.8), na qual se observa o fluxograma da sub-rotina ITER, que é responsável pelo ciclo iterativo descrito anteriormente na seção (3.3.2.2).

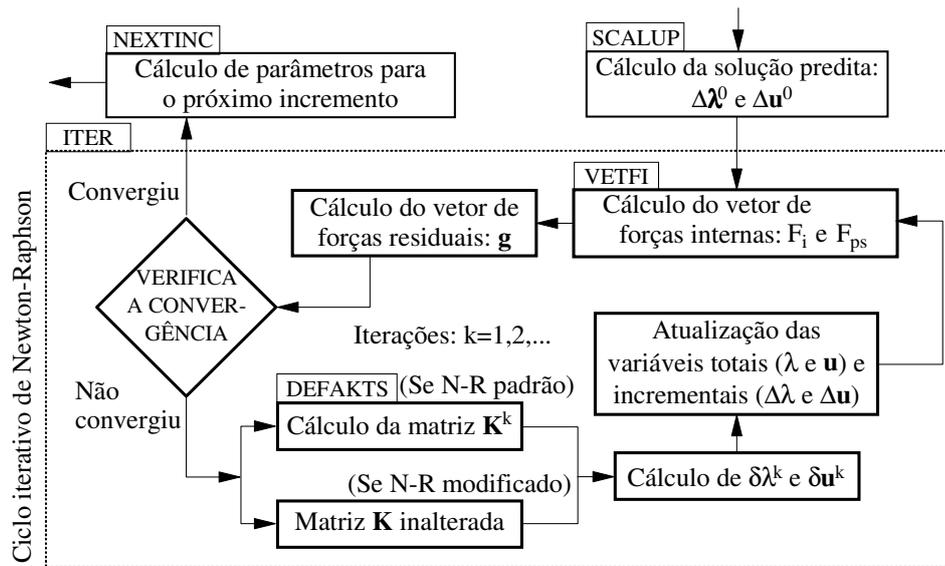


Figura 3.8 – Ciclo iterativo de Newton-Raphson N-R (Machado, 2005).

Maiores detalhes a respeito da função de cada uma das sub-rotinas da figura (3.8), que foram empregadas no presente trabalho, podem ser encontrados em Rocha (2006).

### 3.3.3 – Arquivos de Saída de Dados (bloco-3)

Após concluir a análise numérica não-linear do sistema estrutural, conforme mencionado na seção anterior, são gerados os arquivos de saída com os resultados provenientes dessa análise. Na versão atual existem três categorias distintas de arquivos de saída de dados (saída-1, saída-2 e saída-3), nos quais se obtém uma série de informações pertinentes à análise solicitada pelo usuário. As principais características desses arquivos de saída são listadas nas seções subseqüentes.

#### 3.3.3.1 – Arquivo de saída-1

É o arquivo que armazena relatórios de saída compostos por três grupos de resumos com as informações da análise estrutural. O primeiro resumo reproduz os dados da estrutura, para simples conferência, similar ao arquivo de entrada-1, porém, mais organizado. O segundo, informa o progresso da análise não-linear que o programa

está executando, através da impressão de vetores e matrizes que contém, basicamente, as forças e os deslocamentos calculados a cada incremento. O último resumo traz um relatório onde são discriminados detalhes mais minuciosos decorrentes da análise como: os passos de carga onde houve formação de rótulas plásticas e reduções prescritas do passo de carga. Esse arquivo possui a extensão “\*.s” (“\*” é o nome que é escolhido para o arquivo de entrada-1). A figura (3.9) exhibe alguns trechos dos relatórios supracitados, visto que o arquivo de saída-1 é muito extenso.

```

data1.s - Bloco de notas
Arquivo  Editar  Formatar  Exibir  Ajuda

=====
EXAMPLE TITLE :
Two-Storey BRACED Frame, (Chan e Chui, 2000)-Pág.178-Anál. Não-linear-PR-B.ROT-CON
NUMBER OF NODES      :      8
NUMBER OF ELEMENTS   :     10
DIMENSION OF PROBLEM :      2
NUMBER OF MATERIALS  :      2
NUMBER OF MAT. /PROP.:      3
NUMBER OF CROSS SECTIONS :      3
NUMBER OF SEC. /PROP.:      8
NUMBER OF LOADING CASES :      1
TYPE OF SOLUTION     :     11
DIRECTIVE OF PLOTTING :      1
NUMBER OF NODES PER ELEMENT :      2
NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM PER NODE :      3
TYPE OF SEMI-RIGID JOINTS :      1
TYPE OF PLASTIC HINGE FORMULATION :      1

=====
NODAL COORDINATES:
=====
NODE      X      Y
1      0.00000      0.00000
2      0.00000      3657.60
3      0.00000      7315.20
4      3048.00      7315.20
5      6096.00      7315.20
6      6096.00      3657.60
7      6096.00      0.00000
8      3048.00      3657.60

=====
SEMI-RIGID INFORMATION:
=====
2
4
IGELM  KELL  4  KELL2  gama1  gama2  e1  e2
1      1      2  1.000  1.000  0.000  0.000
IGELM  KELL  4  KELL2  gama1  gama2  e1  e2
1      5      6  1.000  1.000  0.000  0.000
IGELM  KELL  4  KELL2  gama1  gama2  e1  e2
2      3      3  0.118  1.000  0.000  0.000
IGELM  KELL  4  KELL2  gama1  gama2  e1  e2
2      7      7  0.118  1.000  0.000  0.000
IGELM  KELL  4  KELL2  gama1  gama2  e1  e2
3      4      4  1.000  0.118  0.000  0.000
IGELM  KELL  4  KELL2  gama1  gama2  e1  e2
3      8      8  1.000  0.118  0.000  0.000
IGELM  KELL  4  KELL2  gama1  gama2  e1  e2
4      9      10  0.000  0.000  0.000  0.000
Semi-Rigid Analysis Type = 2
Formulation To Be Utilized: S. L. Chan e P. T. Chui
elem  NCTYPE  NGELEM  STIF1  STIF2
1      1      1  0.5856E+24  0.5856E+24
2      1      1  0.5856E+24  0.5856E+24
3      2      1  0.5426E+10  0.4059E+24
4      3      1  0.4059E+24  0.5426E+10
5      1      2  0.5856E+24  0.5856E+24
6      1      2  0.5856E+24  0.5856E+24
7      2      2  0.5426E+10  0.4059E+24
8      3      2  0.4059E+24  0.5426E+10
9      4      1  0.1658E-11  0.1658E-11
10     4      1  0.3319E-11  0.3319E-11

=====
TEMPO DE EXECUÇÃO DO PROBLEMA:  1.5300  SEGUNDOS

Soma dos incr. de carga = 500.00000000
Número de incrementos = 1000
Valor medio do incr. de carga = 0.5000000000000000

```

Figura 3.9 – Modelo do arquivo de saída-1 (extensão “\*.s”).

### 3.3.3.2 – Arquivos de saída-2

Esses arquivos contém, basicamente, informações para o traçado da trajetória de equilíbrio da estrutura e para verificação da superfície de interação para as seções

transversais. Na versão atual do programa computacional, dois arquivos de trajetória de equilíbrio são produzidos, conforme ilustra a figura (3.10).

O primeiro arquivo de trajetória, já presente em versões anteriores (Machado, 2005; Rocha, 2006), consiste em uma lista que mostra, passo a passo, os acréscimos de carregamento para um determinado nó da estrutura, bem como o deslocamento desse nó em uma direção que é pré-definida no arquivo de entrada-1. Esse arquivo, como é mostrado na figura (3.10a), pode ser identificado através da extensão “\*.dat”.

O segundo arquivo de trajetória, ilustrado na figura (3.10b), é uma contribuição do presente trabalho, e complementa as informações supracitadas com a introdução do parâmetro de rigidez generalizada GSP. Esse parâmetro representa a rigidez da estrutura em cada passo de carga.

A justificativa para criação do segundo arquivo está na dificuldade para obtenção do valor da carga crítica dos sistemas estruturais. Através do parâmetro GSP, é possível identificar os pontos críticos (pontos limites de carga) na trajetória de equilíbrio da estrutura, visto que os valores nulos desse parâmetro representam um ponto limite de carga nessa trajetória (Yang e Kuo, 1994; Galvão, 2000). Esse arquivo é caracterizado pela extensão “-PCR.dat”.

data22.dat - Bloco de notas					data22-PCR.dat - Bloco de notas									
Arquivo	Editar	Formatar	Exibir	Ajuda	Arquivo	Editar	Formatar	Exibir	Ajuda					
inc	carg	def	fact		inc	carg	def	fact	GSP					
1	500.00	0.0009315141	0.500000		1	500.00	0.0009315141	0.500000	1.000000					
2	1000.00	0.0018630521	1.000000		2	1000.00	0.0018630521	1.000000	0.999993					
3	1500.00	0.0027946141	1.500000		3	1500.00	0.0027946141	1.500000	0.999978					
4	2000.00	0.0037262000	2.000000		4	2000.00	0.0037262000	2.000000	0.999963					
5	2500.00	0.0046578098	2.500000		5	2500.00	0.0046578098	2.500000	0.999948					
6	3000.00	0.0055894437	3.000000		6	3000.00	0.0055894437	3.000000	0.999933					
7	3500.00	0.0065211014	3.500000		7	3500.00	0.0065211014	3.500000	0.999918					
8	4000.00	0.0074527831	4.000000		8	4000.00	0.0074527831	4.000000	0.999903					
9	4500.00	0.0083844888	4.500000		9	4500.00	0.0083844888	4.500000	0.999889					
10	5000.00	0.0093162184	5.000000		10	5000.00	0.0093162184	5.000000	0.999874					
.	.	.	.		.	.	.	.	.					
.	.	.	.		.	.	.	.	.					
.	.	.	.		.	.	.	.	.					
997	498500.00	0.9407742750	498.500000		997	498500.00	0.9407742750	498.500000	0.984909					
998	499000.00	0.9417301644	499.000000		998	499000.00	0.9417301644	499.000000	0.984893					
999	499500.00	0.9426860787	499.500000		999	499500.00	0.9426860787	499.500000	0.984878					
1000	500000.00	0.9436420180	500.000000		1000	500000.00	0.9436420180	500.000000	0.984862					

(a) Trajetória de equilíbrio “\*.dat”.

(b) Carga crítica “\*-PCR.dat”.

Figura 3.10 – Modelo dos arquivos de saída-2.

Nota-se claramente, através dessa figura que os referidos arquivos apresentam grande semelhança e poderiam ser facilmente condensados em apenas um arquivo. Optou-se aqui por não efetuar essa condensação, uma vez que isso alteraria a estrutura existente dos arquivos de saída do programa.

O terceiro arquivo de saída, cuja extensão é “\*.e.dat”, presta-se à obtenção da superfície de interação das seções. Esse arquivo mostra passo-a-passo, a variação das forças internas normalizadas no elemento finito. Dessa forma indica-se, respectivamente, na primeira, segunda, terceira e quarta coluna desse arquivo o passo de carga, a carga axial normalizada  $P/P_y$ , o momento fletor normalizado  $M_1/M_p$  na extremidade A do elemento finito, o momento fletor normalizado  $M_2/M_p$  na extremidade B do elemento finito e a superfície de interação utilizada pela análise  $M_{pr}/M_p$  (Machado, 2005).

inc	P/Py	M1/Mp	M2/Mp	Mpr/Mp
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
3	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
4	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
7	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
8	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
9	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
10	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
997	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
998	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
999	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646
1000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.9997646

Figura 3.11 – Modelo do arquivo de saída com a superfície de interação “\*.e.dat”.

### 3.3.3.3 – Arquivos de saída-3

Esses arquivos, também chamados de arquivos neutros, foram criados no presente trabalho e armazenam os dados de entrada requeridos por um programa computacional gráfico (pós-processador gráfico) desenvolvido no trabalho de iniciação científica de Mota (2006).

São gerados dois tipos de arquivos neutros para o pós-processador gráfico, o primeiro possui a extensão “\*.MSH” e guarda, a cada passo de carga, as informações necessárias à construção do desenho do sistema estrutural analisado. O segundo contém os dados para a construção da trajetória de equilíbrio da estrutura e pode ser identificado através da extensão “\*.TRJ”. A figura (3.12) traz o modelo da estrutura dos arquivos supracitados.

```

DAT20.MSH - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

%HEADER
TWO STOREY FRAME(SEKULOVIC & SALATIC,2001)-Análise de 2ºORDEM+CONEX
%NODE
6
%NODE.COORD
2
1 0.00000 0.00000
2 0.00000 4.00000
3 6.00000 4.00000
4 6.00000 0.00000
5 0.00000 8.00000
6 6.00000 8.00000
%NODE.BOUND
1 1 1 1
2 0 0 0
3 0 0 0
4 1 1 1
5 0 0 0
6 0 0 0
%MATERIAL
3
1
1 0.210000E+09 0.100000E+13 0.500000E+12
%SECTION
8
2
1 0.334000E-02 0.151000E-04 0.173960E-03 0.345100E-03 0.153600 0.100000E-01 0.902000E-01 0.100E-01
2 0.430000E-02 0.277000E-04 0.275480E-03 0.545140E-03 0.181100 0.100000E-01 0.124400 0.100E-01
%ELEMENT
6
%ELEMENT.BEAM
6
1 1 2 1 1 0 0
2 2 3 2 1 1 1
3 3 4 1 1 0 0
4 2 5 1 1 0 0
5 5 6 2 1 1 1
6 3 6 1 1 0 0
%LOAD.NODAL
1
1 0.00000 0.00000 0.00000
2 0.50000 0.00000 0.00000
3 0.00000 0.00000 0.00000
4 0.00000 0.00000 0.00000
5 0.50000 -100.00000 0.00000
6 0.00000 -100.00000 0.00000
%END

```

(a) Arquivo neutro para saída da geometria da estrutura “\*.MSH”.

```

DAT20.TRJ - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

%HEADER
TWO STOREY FRAME(SEKULOVIC & SALATIC,2001)-Análise de 2ºORDEM+CONEX
%NODE.P
5
%NODE.D
5
%DATA
1 20.00 0.0005573893 0.000227 0.000000
2 39.67 0.0011279976 0.000451 0.000000
3 58.67 0.0017022459 0.000667 0.000000
4 77.04 0.0022797450 0.000875 0.000000
5 94.79 0.0028603886 0.001077 0.000000
6 111.95 0.0034439010 0.001272 0.000000
7 128.53 0.0040300992 0.001460 0.000000
8 144.56 0.0046187937 0.001642 0.000000
9 160.06 0.0052098240 0.001818 0.000000
10 175.05 0.0058030708 0.001989 0.000000
11 189.56 0.0063983970 0.002154 0.000000
12 203.59 0.0069956556 0.002313 0.000000
13 214.12 0.0076073844 0.002433 0.000000
14 227.29 0.0082069866 0.002582 0.000000
15 240.07 0.0088091640 0.002728 0.000000
16 252.45 0.0094128925 0.002868 0.000000
17 264.45 0.0100180344 0.003005 0.000000
18 276.07 0.0106244844 0.003137 0.000000
19 287.35 0.0112322012 0.003265 0.000000
20 298.28 0.0118411336 0.003390 0.000000
. . . . .
. . . . .
. . . . .
49997 1563.71 1.4669063868 4.436724 0.000000
49998 1563.73 1.4665255134 4.437016 0.000000
49999 1563.73 1.4661058550 4.437304 0.000000
50000 1563.71 1.4656541718 4.437579 0.000000
%END

```

(b) Arquivo neutro para saída da trajetória de equilíbrio “\*.TRJ”.

Figura 3.12 – Arquivos neutros utilizado pelo pós-processador gráfico.

Maiores detalhes a respeito desse programa de pós-processamento gráfico são apresentados na seção (3.3.3.4).

A figura (3.12) mostra que os dois arquivos neutros são subdivididos em macro-comandos, sendo semelhante ao arquivo de entrada-1. O caractere % antecede o nome de cada macro comando cuja identificação segue o formato “%NOME\_DO\_MACRO-COMANDO”. Desta forma, os macro-comandos poderão ser fornecidos em qualquer ordem, o que não ocorre nos arquivos entrada-1 e entrada-2, que exigem uma seqüência de dados pré-definida.

São apresentadas agora as funções básicas dos macro-comandos contidos nos arquivos neutros, iniciando pelo arquivo de impressão da geometria da estrutura:

a. **%HEADER:** descreve o título de identificação da estrutura analisada, sendo uma seqüência qualquer de caracteres, exceto o caractere “%”, pois isso indicará a presença de um novo macro-comando;

b. **%NODE:** especifica o número total de nós da estrutura;

c. **%NODE.COORD:** identifica as coordenadas de cada nó do sistema estrutural. É informado, na primeira linha, o número de coordenadas que serão lidas para cada ponto nodal, ou seja, para os problemas bidimensionais esse número é igual a 2. Nas linhas inferiores, são listadas em colunas consecutivas, as coordenadas de cada nó, relativas ao sistema global de eixos da estrutura ( $X_G$  e  $Y_G$ );

d. **%NODE.BOUND:** descreve as condições de vinculação dos nós da malha de elementos finitos. Essas informações são listadas nesse macro-comando na mesma seqüência em que foram descritas anteriormente na sub-rotina BOUN, do arquivo de entrada-1;

e. **%MATERIAL:** indica os materiais que compõe o sistema estrutural. Na primeira linha, o número de propriedades físicas consideradas para cada tipo de material é informado, na segunda, a quantidade de grupos de materiais, e posteriormente, nas linhas seguintes é fornecido, em colunas adjacentes, o número que identifica o grupo de materiais e as propriedades físicas deste grupo;

f. **%SECTION:** caracteriza as propriedades das seções transversais dos elementos finitos da malha. A primeira linha contém o número de propriedades geométricas e/ou físicas para cada tipo de seção; na linha subsequente, a quantidade de grupos de seções, e, em seguida, nas linhas posteriores se informa, em colunas

adjacentes, o número que especifica o grupo de seções e as propriedades geométricas pertinentes a este grupo;

**g. %ELEMENT:** especifica o número total de elementos finitos que constituem a malha do sistema estrutural estudado;

**h. %ELEMENT.BEAM:** fornece a posição de cada elemento finito dentro da malha além de caracterizar o material e a seção transversal que formam o elemento. Na primeira linha, indica-se o número de elementos finitos da malha, e nas linhas subsequentes, identifica-se individualmente cada elemento finito. Dessa forma, as informações pertinentes a cada elemento são dispostas em sete colunas adjacentes. A primeira coluna traz o número do elemento finito, a segunda e a terceira mostram, respectivamente, o número dos nós inicial (extremidade A) e final (extremidade B); a quarta e a quinta indicam, respectivamente o tipo da seção e do material, e por fim, a sexta e sétima colunas trazem, respectivamente, o tipo de ligação existente nas extremidades A e B do elemento finito. Nessas colunas se indica os nós com ligação semi-rígida através do valor “1” e os nós rígidos com número “0”.

**i. %LOAD:** apresenta as informações relativas ao carregamento externo aplicado ao sistema estrutural. A seqüência de informações é idêntica àquela do macro-comando LOAD do arquivo de entrada-1. A única diferença é que aqui são indicados todos os nós do sistema estrutural, mesmo aqueles que estão descarregados;

**j. %END:** indica o término do arquivo neutro.

Agora, para o arquivo neutro com a trajetória de equilíbrio, tem-se:

**a. %HEADER:** possui as mesmas funções que já foram descritas anteriormente;

**b. %NODE.P:** indica, na linha seguinte, o nó cuja variação da carga externa será empregada na trajetória de equilíbrio;

**c. %NODE.D:** nó que terá os deslocamentos monitorados impresso na trajetória de equilíbrio;

**d. %DATA:** apresenta os resultados solicitados da trajetória de equilíbrio da estrutura. Assim, a cada incremento de carga, indica-se respectivamente nas cinco colunas adjacentes: o número do incremento de carga, o valor da carga externa aplicada ao nó (definido pelo macro-comando %NODE.P), os deslocamentos globais  $u$  e  $w$  e a rotação  $\theta$  desse nó (indicado no macro comando %NODE.D);

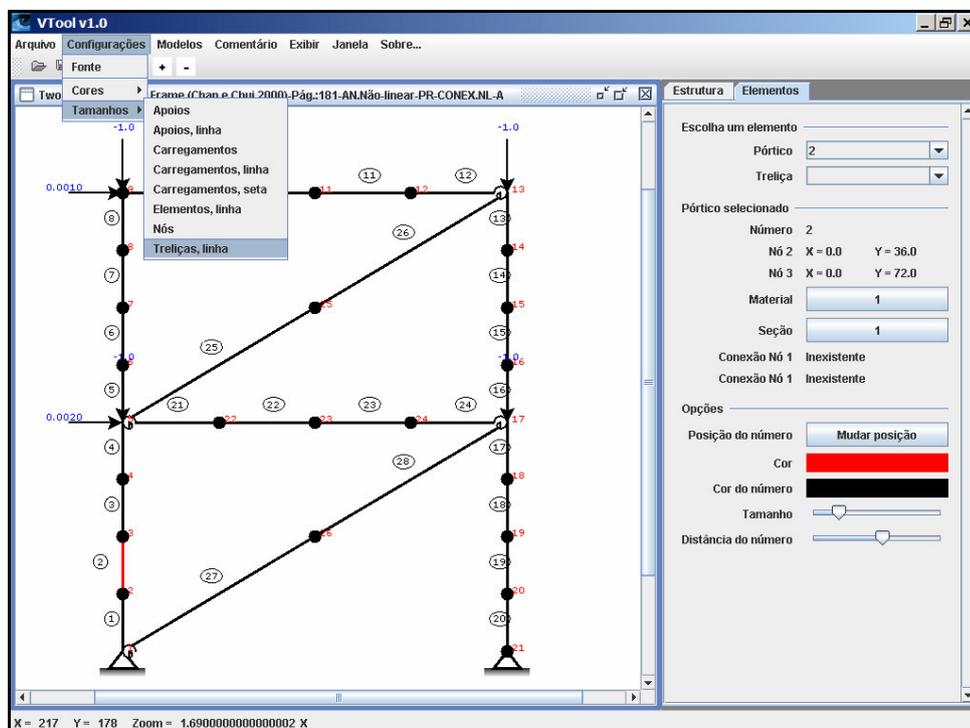
**e. %END:** indica o término do arquivo neutro.

### 3.3.3.4 – Pós-processador gráfico (VTOOL-V1.0)

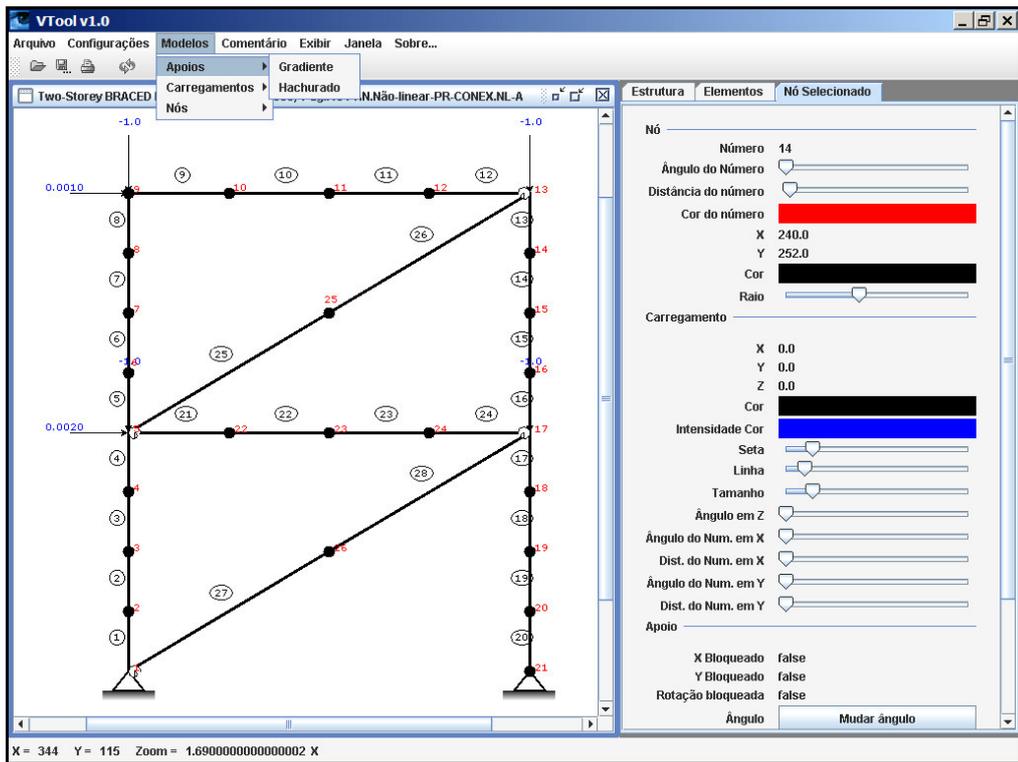
Em face á grande quantidade de informações contidas tanto no arquivo de entrada quanto nos arquivos de saída de resultados, foi desenvolvido um programa computacional complementar que possibilita a visualização rápida da trajetória de equilíbrio e da geometria da estrutura. Este programa, denominado aqui de pós-processador gráfico, foi desenvolvido em linguagem *JAVA* (Java, 2005) por Mota (2006) em seu trabalho de iniciação científica.

Esse programa recebe as informações contidas nos arquivos neutros, citados na seção anterior, e gera, de forma rápida e precisa, uma saída para vídeo do modelo geométrico da estrutura analisada, e também, as trajetórias de equilíbrio de um nó selecionado.

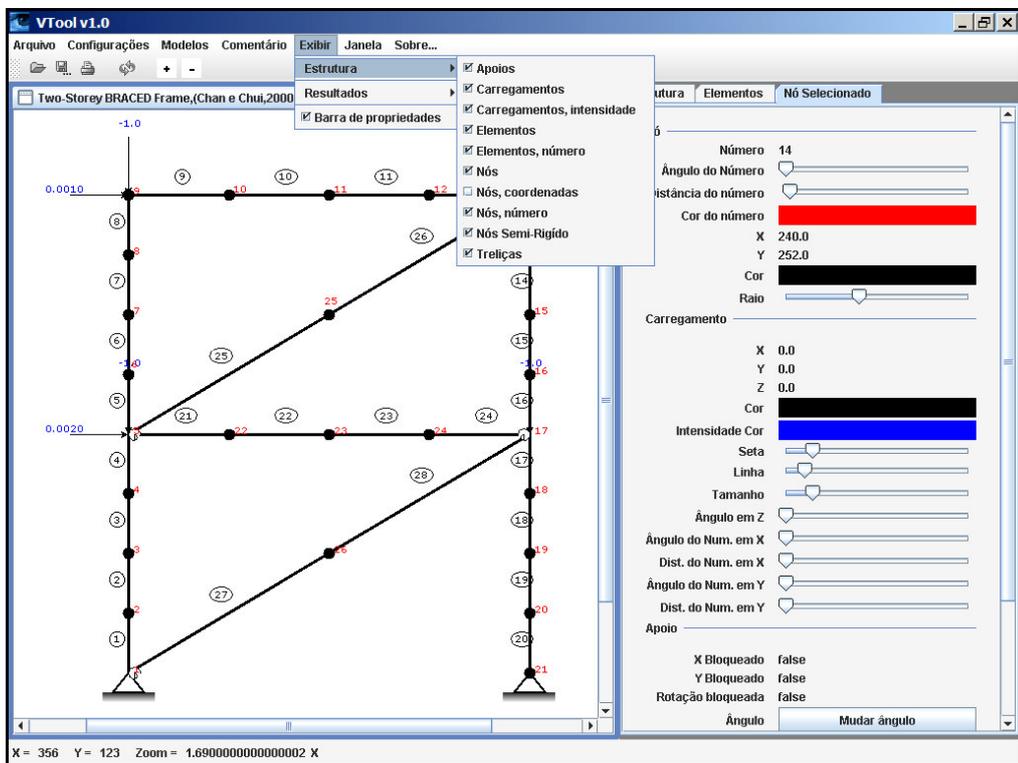
Na figura (3.13), são ilustradas algumas das telas geradas através do pós-processador gráfico, adotando-se, como exemplo, um pórtico semi-rígido de quadro simples contraventado com dois pavimentos (Sekulovic e Salatic, 2001). Nestas figuras são apresentadas algumas das opções de edição contidas nos menus suspensos do programa.



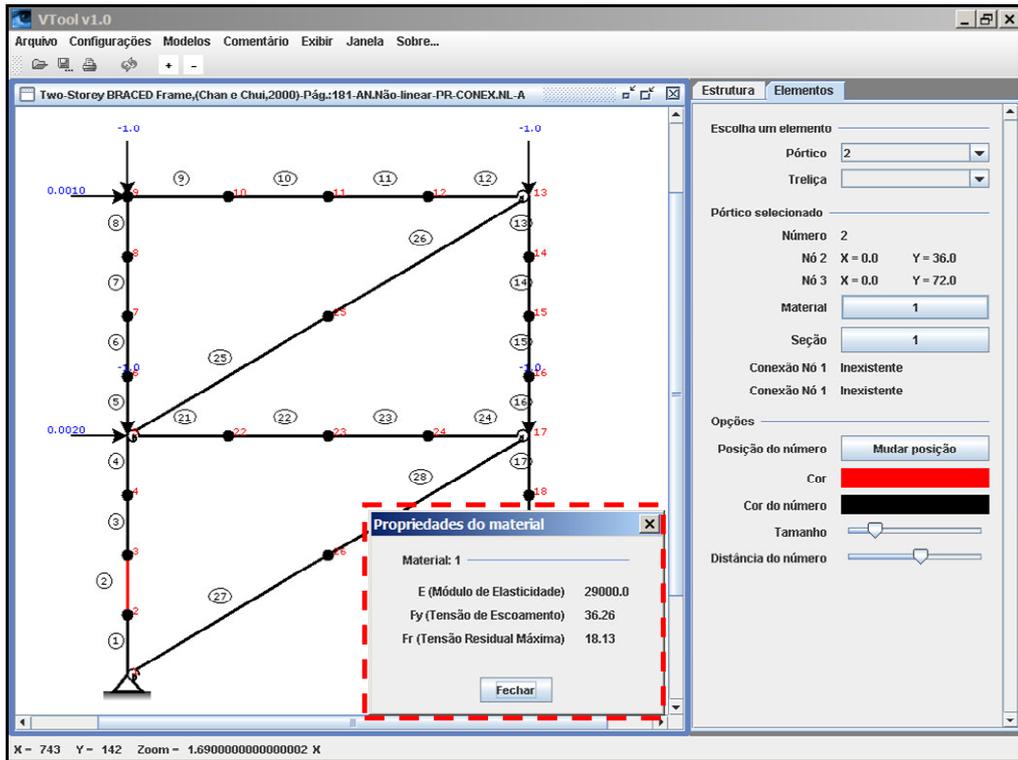
(a) Menu suspenso “CONFIGURAÇÕES”.



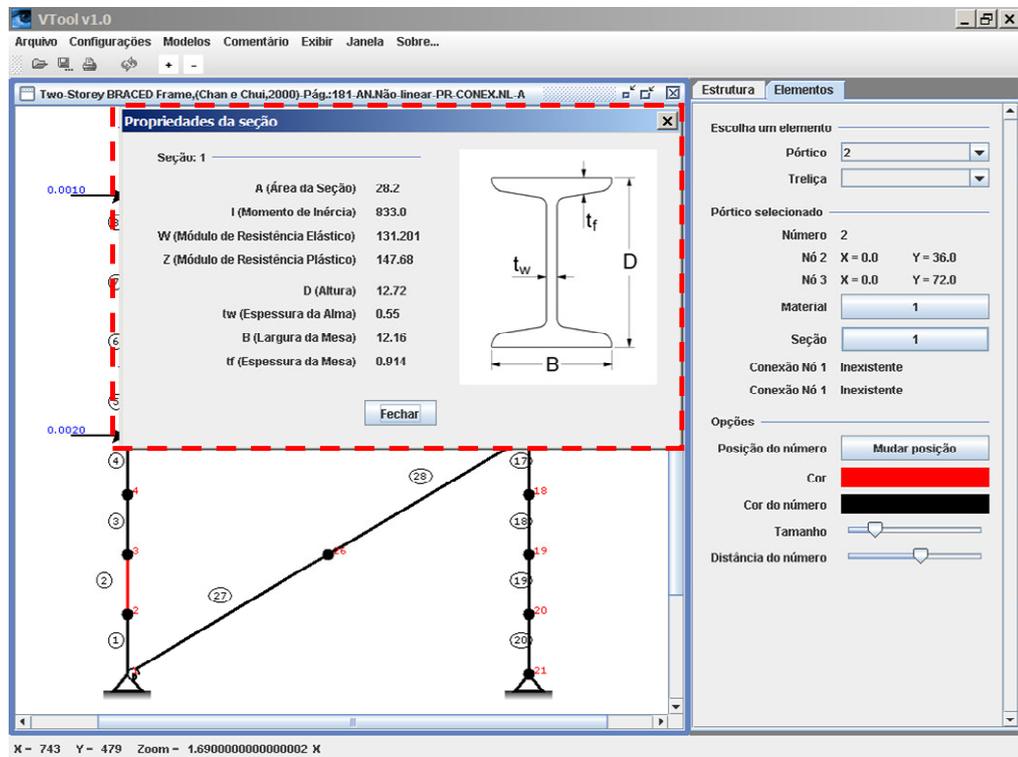
(b) Menu suspenso “MODELOS”.



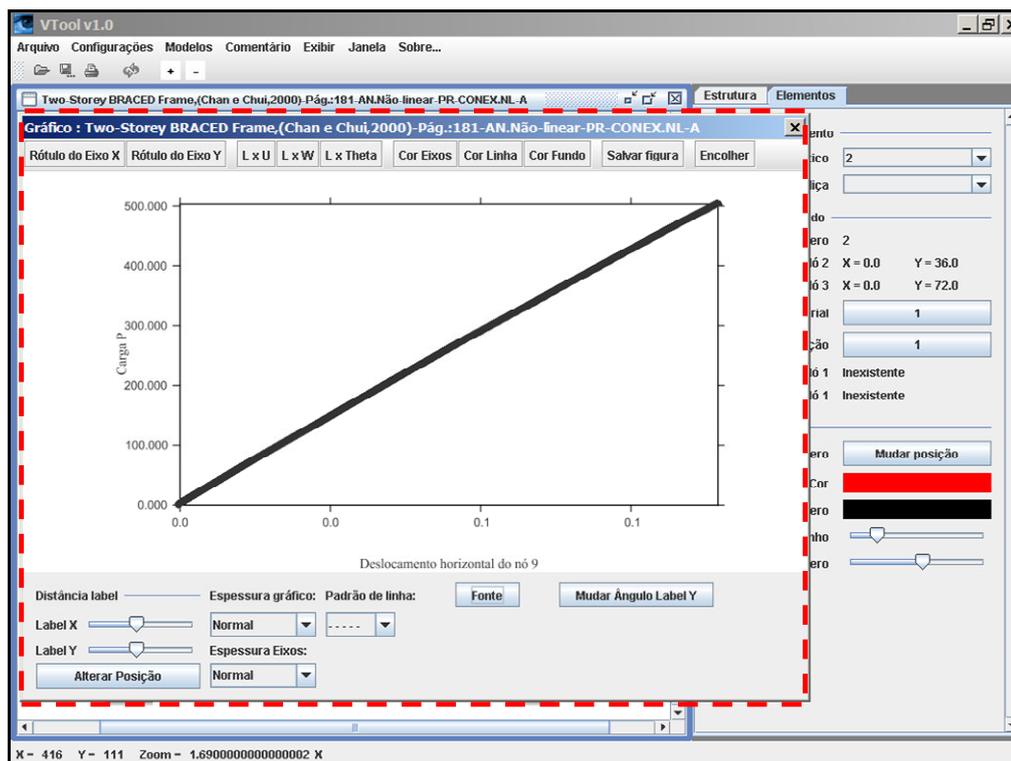
(c) Opções do menu suspenso “EXIBIR”.



(d) Propriedades físicas de um elemento finito previamente selecionado.



(e) Propriedades da seção transversal de um elemento finito previamente selecionado.



(f) Tela que exibe a trajetória de equilíbrio da estrutura.

Figura 3.13 – Algumas telas do pós-processador gráfico.

O pós-processador gráfico traz ainda a opção de geração de arquivos em formato “\*.jpeg”, fazendo uma figura de uma janela da tela selecionada. Assim, o gráfico da trajetória de equilíbrio também pode ser convertido no mesmo formato, possibilitando que os resultados possam ser empregados posteriormente para outras finalidades, como figuras em publicações científicas, por exemplo.

Cabe destacar ainda que o pós-processador gráfico foi utilizado no presente trabalho, exclusivamente, para verificação da precisão da geometria das estruturas analisadas, uma vez que pequenos ajustes gráficos neste programa computacional são necessários para melhorar a qualidade das informações fornecidas.

Maiores detalhes a respeito da programação e utilização do programa de pós-processamento gráfico “VTOOL.V1.0” podem ser encontrados em Mota (2006).

# 4

# EXEMPLOS NUMÉRICOS: EFEITO DE SEGUNDA ORDEM

## 4.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo principal verificar, apoiado em resultados já consagrados da literatura, tanto a eficiência quanto o desempenho computacional do elemento finito híbrido (Chan e Chui, 2000; Rocha, 2006) para simular problemas de equilíbrio e estabilidade em sistemas estruturais esbeltos, isto é, aqueles em que os efeitos de segunda ordem irão delinear o comportamento da estrutura. Pretende-se ainda, através das análises realizadas, quantificar a influência das imperfeições de carregamento na resposta não-linear do sistema estrutural e, também, acompanhar a velocidade de convergência da resposta numérica decorrente do refinamento da malha de elementos finitos escolhida.

Em vista disto, na seção (4.1), são apresentadas as respostas extraídas da análise de uma viga em balanço, conforme é mostrado na figura (4.1a), e cujos resultados analíticos são fornecidos por Timoshenko e Gere (1982), e as respostas numéricas obtidas por (Galvão, 2000). Esse exemplo objetiva comparar os resultados do presente trabalho com os fornecidos na literatura, verificando a capacidade do elemento finito híbrido em simular estruturas submetidas a grandes deslocamentos e rotações.

A seção (4.2) traz as respostas provenientes do estudo de uma coluna com uma das extremidades engastada e a outra livre, como ilustrado na figura (4.1b). A solução analítica desse problema é apresentada em Southwell (1941), e a solução numérica fornecida por Galvão (2000).

Por fim, nas seções (4.3) e (4.4) são apresentados os resultados extraídos da análise do arco abatido simplesmente apoiado e do pórtico de Lee, respectivamente, como ilustrados nas figuras (4.1c) e (4.1d). Destaca-se nestes exemplos o

comportamento fortemente não-linear, sendo feito um estudo para avaliar o efeito das imperfeições de carregamento. Os resultados são comparados, posteriormente, àqueles obtidos por Galvão (2000), que utilizou uma formulação de segunda ordem mais refinada.

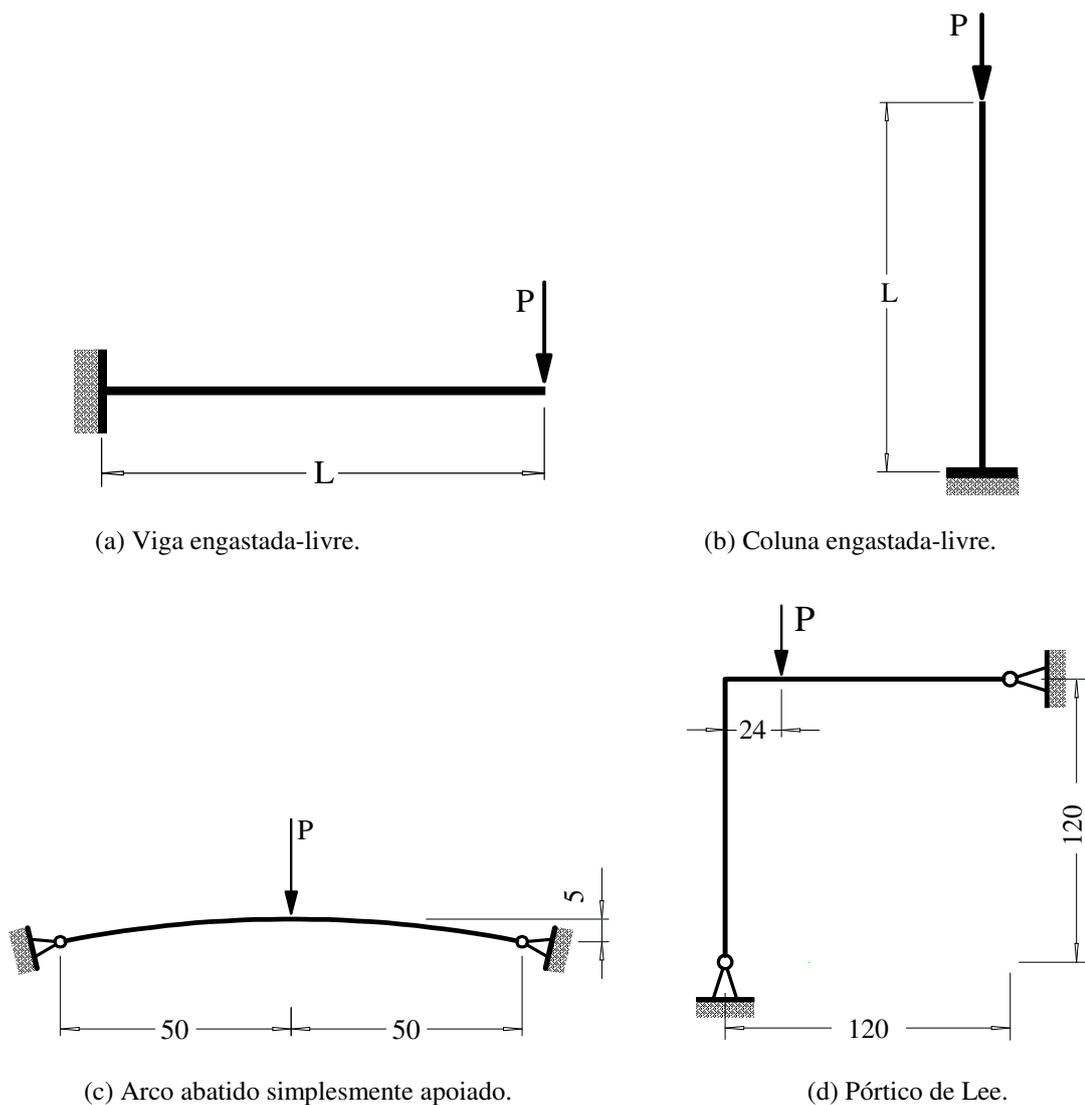


Figura 4.1 – Problemas estruturais submetidos à análise não-linear de segunda ordem.

Antes de apresentar as análises supracitadas alguns comentários sobre os modelos numéricos adotados são necessários:

a. apenas o elemento finito híbrido não-linear apresentado no Capítulo 2 é empregado na discretização desses sistemas;

**b.** utiliza-se uma formulação de segunda ordem simplificada para obtenção dos coeficientes  $K_{ij}$ , através das equações (2.4a) e (2.4b);

**c.** durante todo o processo de carregamento, em função da esbelteza das estruturas, espera-se que o material se comporte no regime elástico. Para isso, considera-se um valor elevado para a tensão de escoamento  $\sigma_y$ , ou seja,  $S_S \rightarrow \infty$ ; assim, o momento incipiente  $M_y$  da seção não é atingido nesses exemplos;

**d.** apenas a situação de ligação rígida entre os elementos é considerada; assume-se então um valor também bastante elevado para  $S_c$  (de  $10^{10}$  a  $10^{15}$ );

**e.** como o sistema computacional utilizado considera a seção transversal tipo I, foram determinados nas análises parâmetros físicos e geométricos equivalentes visando manter os valores das rigidezes flexional  $EI$  e axial  $EA$  da seção equivalente iguais àqueles fornecidos na literatura;

**f.** adotou-se em todas as análises o método de Newton-Raphson modificado e uma tolerância  $\tau = 10^{-3}$  (tanto para forças quanto para deslocamentos) no processo de convergência da solução não-linear; maiores detalhes sobre as estratégias de incremento de carga e de iteração citadas no presente trabalho podem ser encontrados em Rocha (2000), e também em Galvão (2000);

**g.** para análise dos problemas estruturais apresentados neste capítulo, utilizou-se micro computador com processador *Intel Pentium IV* com frequência de 3.0 GHz, e memória RAM de 1.0 GB.

Note, através da figura (4.2), que o valor do desvio ou diferença  $D_{a/b}$ , apresentado nas tabelas das seções seguintes, foi calculado com a equação (4.1) que fornece a média aritmética entre as coordenadas de dois pontos A ( $P_a, u_a$ ) e B ( $P_b, u_b$ ), pertencentes a trajetórias de equilíbrio distintas, pela fórmula:

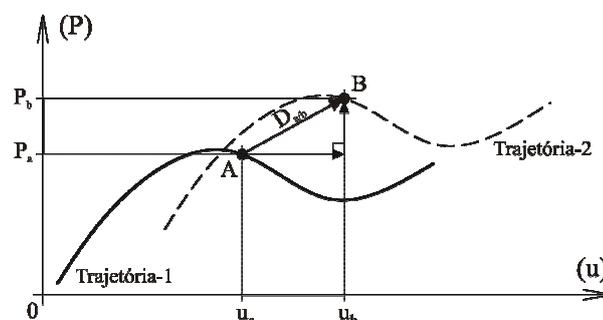


Figura 4.2 – Cálculo do desvio ( $D_{a/b}$ ).

$$D_{a/b}[\%] = 100 \left( \sqrt{\left( \frac{P_b - P_a}{P_a} \right)^2 + \left( \frac{u_b - u_a}{u_a} \right)^2} \right) \quad (4.1)$$

## 4.2 – VIGA ENGASTADA-LIVRE

O primeiro exemplo a ser abordado é uma viga com uma das extremidades engastada e a outra livre submetida à ação de uma carga concentrada  $P$ , conforme ilustrado na figura (4.3).

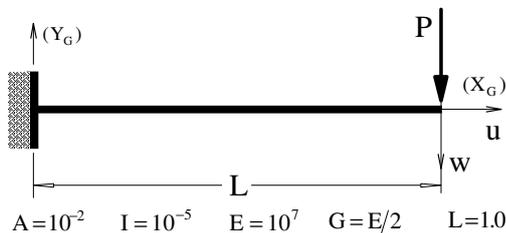


Figura 4.3 – Viga engastada-livre.

Os dados deste problema também são mostrados na figura (4.3), e a tabela (4.1) traz as propriedades geométricas, ajustadas para uma seção transversal tipo I equivalente, para o sistema estrutural.

Tabela 4.1 – Propriedades geométricas da seção I da viga engastada-livre.

Área ( $A' = A$ )	Inércia ( $I' = I$ )	Módulo Elástico ( $W'$ )	Módulo Plástico ( $Z'$ )	( $d'$ )	( $t_w'$ )	( $B_f'$ )	( $t_f'$ )
$10^{-2}$	$10^{-5}$	$1.408 \times 10^{-8}$	$1.152 \times 10^{-3}$	0.122	0.01	0.439	0.01

Para validar os resultados numéricos são empregados os valores analíticos de Timoshenko e Gere (1982). Para confronto de formulações numéricas adotam-se os resultados de Galvão (2000), que utilizou formulações de segunda ordem mais refinadas (Alves, 1993a; Yang e Kuo, 1994). Desta forma se faz a verificação da capacidade do elemento finito híbrido para simular sistemas estruturais esbeltos submetidos a grandes deslocamentos e rotações.

Na modelagem numérica desse exemplo foram adotadas as malhas de 1 a 5 elementos híbridos. O processo incremental empregou a técnica de comprimento de

arco com parâmetro de carga inicial  $\Delta\lambda_1^0 = 0.025$ , juntamente com a estratégia de iteração baseada na norma mínima dos deslocamentos.

As trajetórias de equilíbrio obtidas com as malhas supracitadas são apresentadas na figura (4.4). Já as tabelas (4.2) e (4.3) trazem a convergência dos resultados alcançados com as malhas de 1, 3 e 5 elementos finitos, que são comparados às respostas analíticas (Timoshenko e Gere, 1982), isso considerando dois valores distintos do parâmetro adimensional de carga  $P$  ( $PL^2/EI$ ).

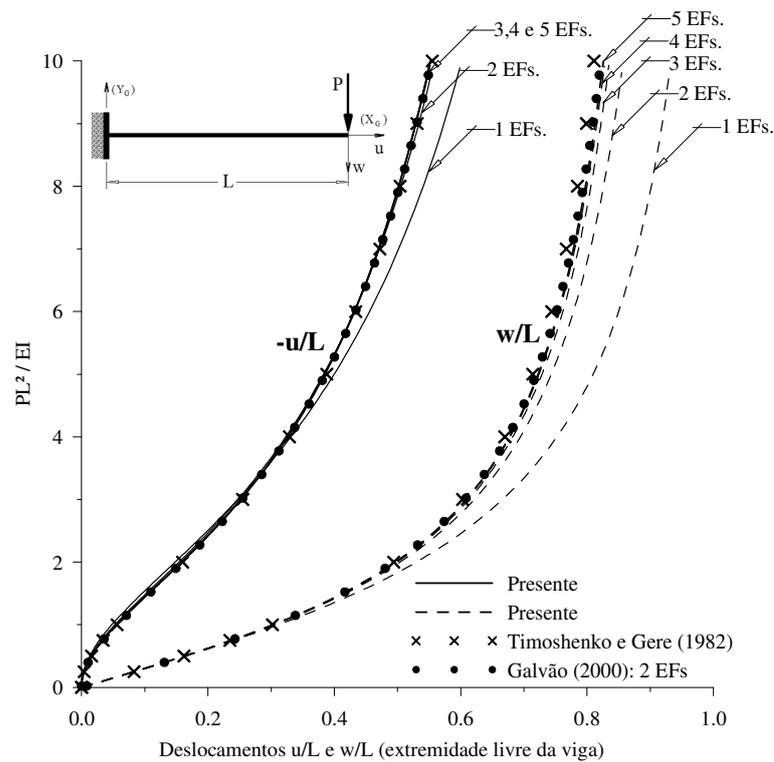


Figura 4.4 – Trajetórias de equilíbrio da viga engastada-livre.

Tabela 4.2 – Análise de convergência para a viga engastada-livre ( $u/L$ ).

Timoshenko e Gere (1982)		Presente Trabalho					
$PL^2/EI$	$u/L$	1 EF		3 EFs		5 EFs	
		$u/L$	desv.	$u/L$	desv.	$u/L$	desv.
2.0	0.160	0.1500	6.7	0.1576	1.5	0.1592	0.5
9.0	0.531	0.5744	7.6	0.5325	0.3	0.5295	0.2

Nota: desv. = desvio (%); EF = Elemento finito; EFs = Elementos finitos.

Tabela 4.3 – Análise de convergência para a viga engastada-livre (w/L).

Timoshenko e Gere (1982)		Presente Trabalho					
PL <sup>2</sup> /EI	w/L	1 EF		3 EFs		5 EFs	
		w/L	desv.	w/L	desv.	w/L	desv.
2.0	0.494	0.5332	7.3	0.5027	1.7	0.4941	0.0
9.0	0.799	0.9193	13.1	0.8258	3.2	0.8131	1.7

Nota: desv. = desvio (%); EF = Elemento finito; EFs = Elementos finitos.

Através das trajetórias de equilíbrio mostradas na figura (4.4) e das tabelas (4.2) e (4.3), observa-se a proximidade entre as respostas fornecidas pela literatura (Timoshenko e Gere, 1982; Galvão, 2000) e aquelas extraídas das análises do presente trabalho, uma vez que pequenos refinamentos da malha aproximam sensivelmente as soluções analítica e numérica, o que conduz a trajetórias de equilíbrio muito semelhantes.

Por fim, como esperado, as curvas obtidas por Galvão (2000), para a malha com 2 elementos híbridos, encontram-se mais próximas dos resultados analíticos (Timoshenko e Gere, 1982), isso se comparadas às mesmas curvas mostradas no presente trabalho, visto que a formulação utilizada por aquele autor é mais refinada.

### 4.3 – COLUNA ENGASTADA-LIVRE

Nesta seção, utiliza-se o elemento finito híbrido na modelagem de uma coluna com a base engastada e a extremidade livre submetida a uma carga vertical P, que é aplicada no seu topo. Os dados e ilustração dessa estrutura estão na figura (4.5). Com o objetivo de evitar dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação foi introduzida, no topo da coluna, uma carga de distúrbio do tipo momento fletor.

Já a tabela (4.4) traz os valores adotados para as propriedades geométricas da seção I equivalente.

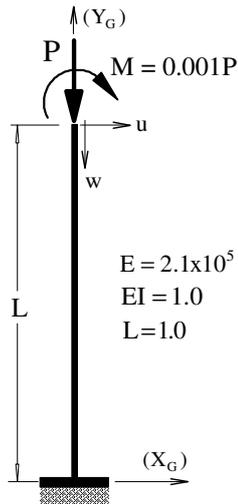


Figura 4.5 – Coluna engastada-livre.

Tabela 4.4 – Propriedades geométricas da seção I da coluna engastada-livre.

Área ( $A' = A$ )	Inércia ( $I' = I$ )	Módulo Elástico ( $W'$ )	Módulo Plástico ( $Z'$ )	( $d'$ )	( $t_w'$ )	( $B_f'$ )	( $t_f'$ )
$10^{-2}$	$4.762 \times 10^{-6}$	$1.709 \times 10^{-5}$	$3.231 \times 10^{-3}$	0.537	0.01	0.231	0.01

Esse problema desperta um interesse particular, pois além de envolver grandes rotações, apresenta na sua trajetória de equilíbrio uma região de grandes deslocamentos com carga praticamente constante, seguida por um ponto limite de deslocamento.

No intuito de avaliar a qualidade dos resultados aqui obtidos, serão utilizadas as soluções analítica de Southwell (1941) e numérica de Galvão (2000). Esses resultados são apresentados na figura (4.6), na qual se representa a variação da carga crítica  $P$  com o deslocamento transversal  $u$  do topo da coluna.

O sistema estrutural foi modelado através das malhas de 2, 3, 5, 7 e 9 elementos finitos. Na obtenção do caminho de equilíbrio não-linear da estrutura foi empregado o método do comprimento de arco ( $\Delta\lambda_1^0 = 0.001$ ) aliado à estratégia de iteração em rigidez generalizada GSP e, como critério de convergência, escolheu-se o controle do deslocamento.

A tabela (4.5) apresenta a convergência dos deslocamentos axiais do topo da coluna obtidos no presente trabalho a partir das malhas formadas por 2, 5 e 9 elementos híbridos, para dois valores do parâmetro adimensional de carga  $P$ . Esses valores foram escolhidos propositalmente na região próxima ao ponto limite de deslocamento ( $PL^2/EI = 4$ ) e na faixa final da trajetória de equilíbrio ( $PL^2/EI = 6$ ). Nessa tabela, os resultados

aqui obtidos são confrontados com a resposta numérica, para 5 elementos finitos, fornecida por Galvão (2000).

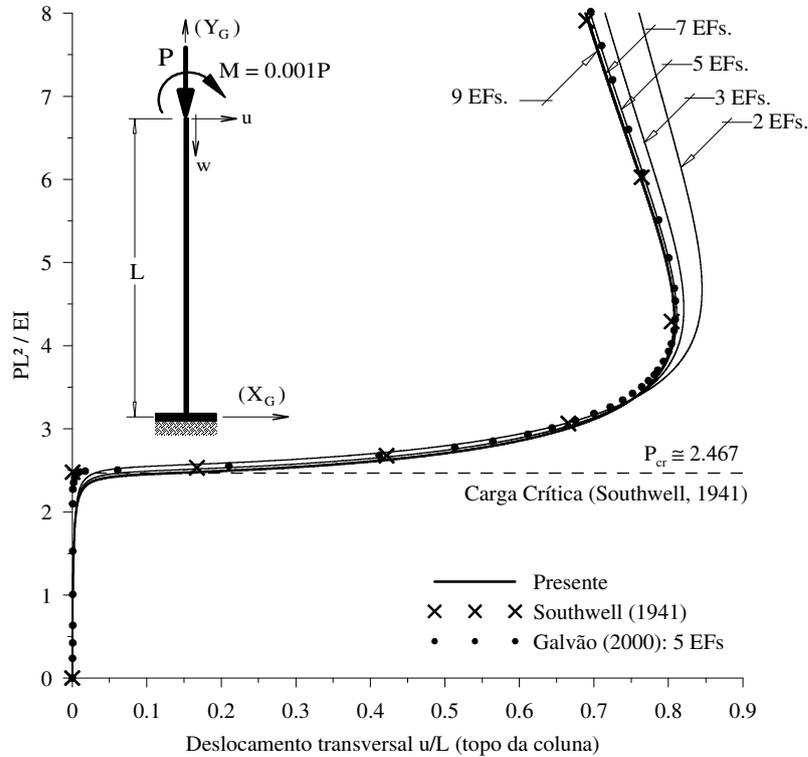


Figura 4.6 – Trajetória de equilíbrio da coluna engastada-livre.

Tabela 4.5 – Análise de convergência para a coluna engastada-livre.

Galvão (2000)		Presente Trabalho					
PL <sup>2</sup> /EI	u/L	3 EFs		5 EFs		9 EFs	
		u/L	desv.	u/L	desv.	u/L	desv.
4.0	0.80393	0.81314	1.1	0.80613	0.3	0.80354	0.0
6.0	0.76576	0.78360	2.3	0.76831	0.3	0.76288	0.4

Nota: desv. = desvio (%); EF = Elemento finito; EFs = Elementos finitos.

Observa-se, através da figura (4.6), que os resultados do presente trabalho, para as malhas compostas por 7 e 9 elementos híbridos, são coincidentes com aqueles da literatura ao longo de quase todo o caminho não-linear.

Já as malhas modeladas com 2, 3 e 5 elementos, embora estejam bem próximas da solução analítica (Southwell, 1941), mostram ligeira discrepância quando comparadas aos modelos discretos com 7 e 9 elementos. Esse fato pode ser confirmado com os

dados apresentados na tabela (4.5), até mesmo para o trecho final da trajetória de equilíbrio ( $PL^2/EI = 6$ ), que apresenta valores mais dispersos.

#### 4.4 – ARCO CIRCULAR ABATIDO SIMPLEMENTE APOIADO

O arco circular abatido simplesmente apoiado, ilustrado na figura (4.7), é analisado para duas situações de carregamento: carga pontual centrada e carga excêntrica. Com o objetivo de facilitar a modelagem da estrutura, a carga excêntrica será representada por uma carga vertical  $P$  aplicada no eixo de simetria do arco, associada a uma carga momento  $M$ . Nesta mesma figura estão apresentados todos os dados da estrutura a serem considerados na análise.

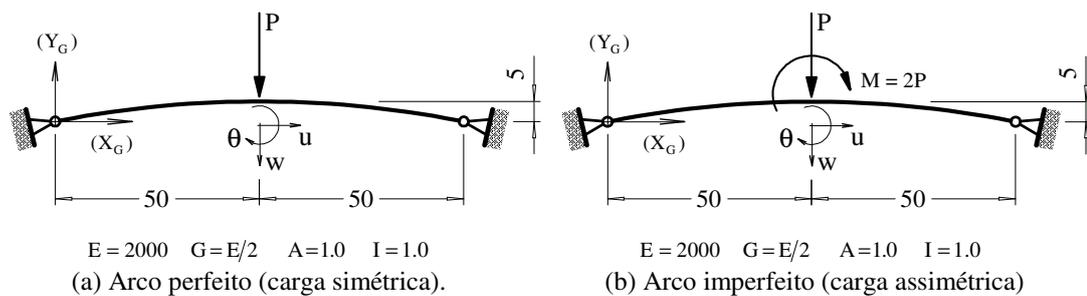


Figura 4.7 – Arco circular abatido simplesmente apoiado.

Na tabela (4.6) são mostrados os valores adotados para a seção transversal I equivalente.

Tabela 4.6 – Propriedades geométricas da seção I do arco abatido.

Área ( $A' = A$ )	Inércia ( $I' = I$ )	Módulo Elástico ( $W'$ )	Módulo Plástico ( $Z'$ )	( $d'$ )	( $t_w'$ )	( $B_f'$ )	( $t_f'$ )
1	1	0.8848	1.7816	2.0603	0.1	3.9699	0.1

Com esse exemplo pretende-se averiguar a capacidade do elemento finito híbrido de simular o comportamento de sistemas estruturais que apresentam, adicionalmente aos grandes deslocamentos e rotações, comportamento pós-crítico fortemente não-linear. Assim, no caso da estrutura com carga centrada, como mostra a figura (4.7a), foram

empregadas malhas com 4, 6, 10 e 20 elementos híbridos e, no caso da carga excêntrica da figura (4.7b), a malha foi mais refinada adotando-se 8, 12, 20 e 40 elementos.

A estratégia de incremento adotada foi o comprimento de arco ( $\Delta\lambda_1^0 = 0.01$ ), associada à estratégia de iteração em rigidez generalizada GSP.

A figura (4.8) exibe a trajetória de equilíbrio para o caso de carregamento centrado ( $M = 0$ ). Na tabela (4.7) são mostrados os valores obtidos para a carga  $P$  e o deslocamento vertical  $w$  do centro do arco nos pontos da trajetória que caracterizam os limites de carga, para os modelos discretizados por 4, 10 e 20 elementos híbridos. Esses valores são novamente comparados àqueles fornecidos por Galvão (2000).

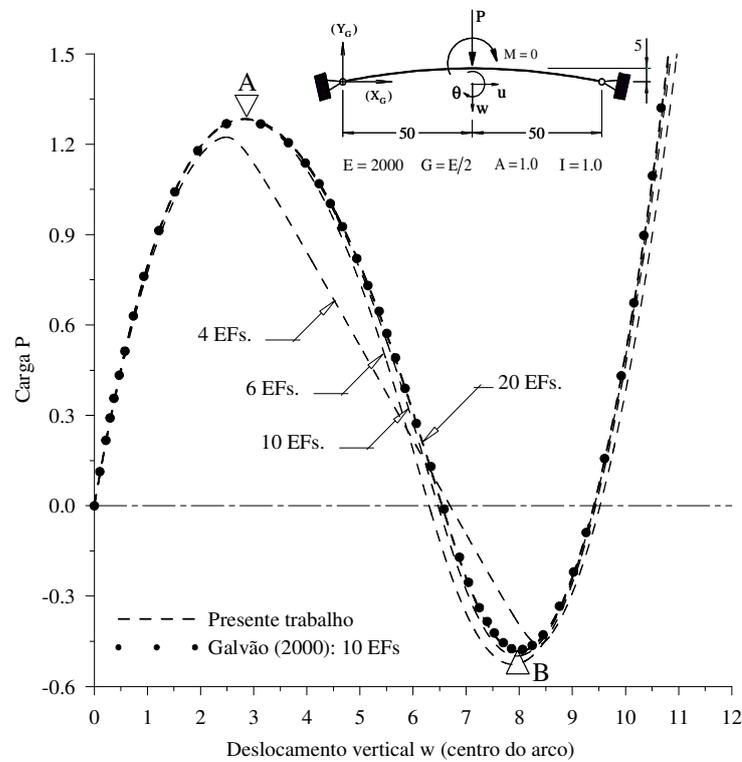


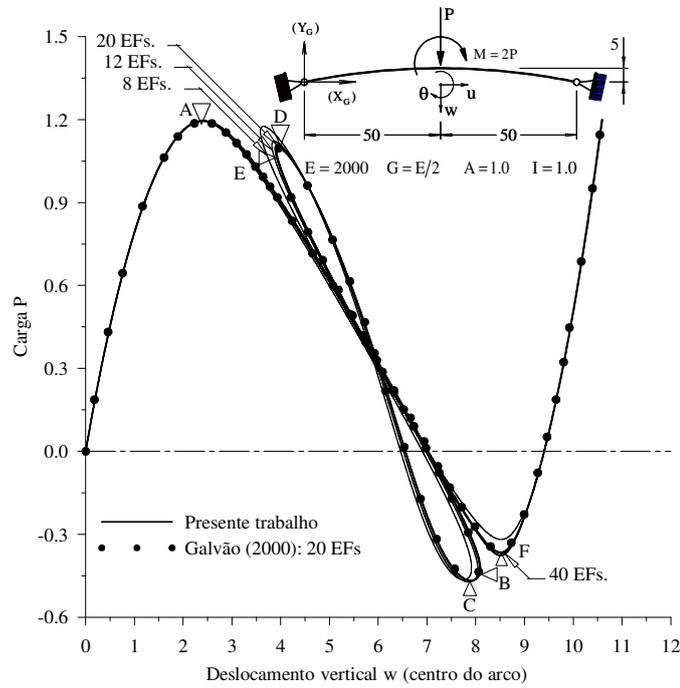
Figura 4.8 – Trajetórias de equilíbrio do arco perfeito ( $M = 0$ ).

Tabela 4.7 – Convergência para o arco abatido perfeito ( $M = 0$ ).

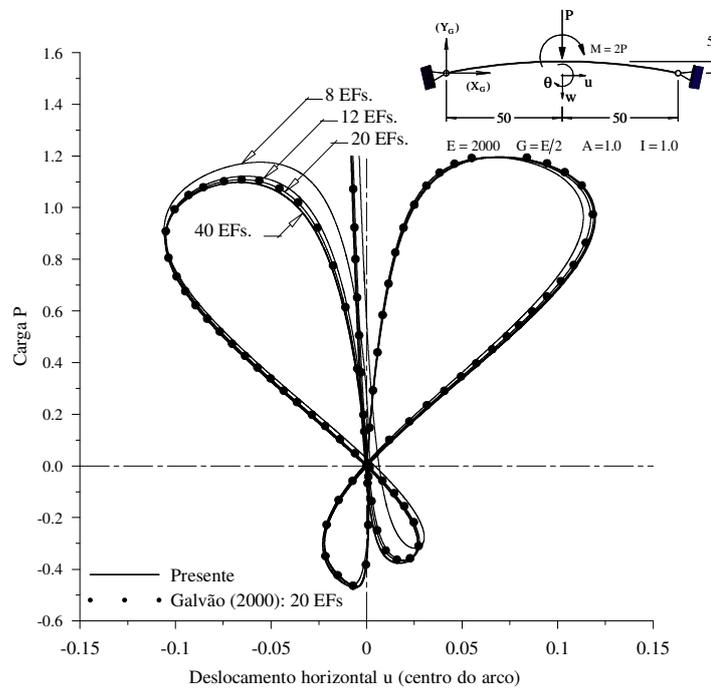
Galvão (2000)		Presente Trabalho								
10 EFs		4 EFs			10 EFs			20 EFs		
P	w	P	w	desv.	P	w	desv.	P	w	desv.
(A): 1.278	2.77	1.22	2.481	11.3	1.285	2.835	2.3	1.283	2.837	2.4
(B): -0.486	8.04	-0.46	8.369	6.7	-0.498	7.956	2.8	-0.483	7.995	0.8

Nota: desv. = desvio (%); EFs = Elementos finitos; Pontos limite de carga: A(1.278; 2.772) e B(-0.486; 8.040).

A figura (4.9) representa as trajetórias de equilíbrio obtidas para o arco circular abatido imperfeito ( $M \neq 0$ ).



(a) Deslocamento vertical  $w$  para o arco imperfeito.



(b) Deslocamento horizontal  $u$  para o arco imperfeito.

Figura 4.9 – Trajetórias de equilíbrio do arco imperfeito ( $M \neq 0$ ).

Na tabela (4.8) estão os valores obtidos para a carga P e o deslocamento vertical w do centro do arco imperfeito para alguns modelos adotados na discretização do sistema estrutural. Esses valores são comparados àqueles fornecidos por Galvão (2000) para uma malha de 100 elementos finitos.

Tabela 4.8 – Convergência para o arco abatido imperfeito ( $M \neq 0$ ).

Galvão (2000)		Presente Trabalho								
100 EFs		8 EFs			20 EFs			40 EFs		
P	w	P	w	desv.	P	w	desv.	P	w	desv.
(A): 1.193	2.41	1.195	2.382	1.2	1.196	2.408	0.3	1.196	2.414	0.3
(B): -0.418	8.09	-0.465	7.753	11.9	-0.425	8.075	1.6	-0.424	8.094	1.6
(C): -0.416	7.90	-0.465	7.753	2.0	-0.468	7.886	1.5	-0.468	7.900	1.4
(D): 1.093	3.97	1.176	3.645	11.2	1.108	3.923	1.9	1.098	3.961	0.5
(E): 1.080	3.92	1.158	3.583	11.4	1.094	3.883	1.7	1.084	3.919	0.5
(F): -0.368	8.50	-0.319	8.522	13.3	-0.368	8.514	0.1	-0.376	8.511	2.4

Nota: desv. = desvio (%); EFs = Elementos finitos; Pontos limite de carga: A (1.193; 2.411); C (-0.461; 7.898); D (1.093; 3.973); F (-0.368; 8.509); Pontos limite de deslocamento: B (-0.418; 8.088); E (1.080; 3.927).

Observa-se através da figura (4.9) que o comportamento pós-crítico do arco circular abatido perfeito ( $M = 0$ ) não é reproduzido com o emprego de apenas 4 elementos híbridos e a carga crítica é inferior à obtida por Galvão (2000). Para a malha constituída por 10 elementos é possível determinar, com precisão, os dois pontos limites de carga (A e B).

Já o arco imperfeito ( $M \neq 0$ ) exibe um comportamento altamente não-linear, apresentando quatro pontos limites de carga (A, C, D e F) e dois pontos limites para o deslocamento w (B e E) e quatro pontos limites para o deslocamento u, como os gráficos apresentados nas figuras (4.9a) e (4.9b) comprovam. Através destas figuras nota-se também que, até se atingir o terceiro ponto limite de carga (ponto D) ou o segundo ponto limite de deslocamento w (ponto E), os resultados com 8 elementos híbridos estão próximos aos de Galvão (2000). Note que o caminho não-linear de equilíbrio é obtido, de forma bastante precisa, empregando modelos com 12 e 20 elementos híbridos.

## 4.5 – PÓRTICO DE LEE

O último sistema estrutural a ser analisado neste capítulo é ilustrado na figura (4.10), juntamente com os modelos discretos do sistema estrutural e as suas propriedades geométricas. Trata-se do chamado pórtico de Lee que, em função do seu comportamento fortemente não-linear, é frequentemente adotado por pesquisadores (Schweizerhof e Wriggers, 1986; Galvão, 2000) para validar suas formulações e estratégias de solução não-linear.

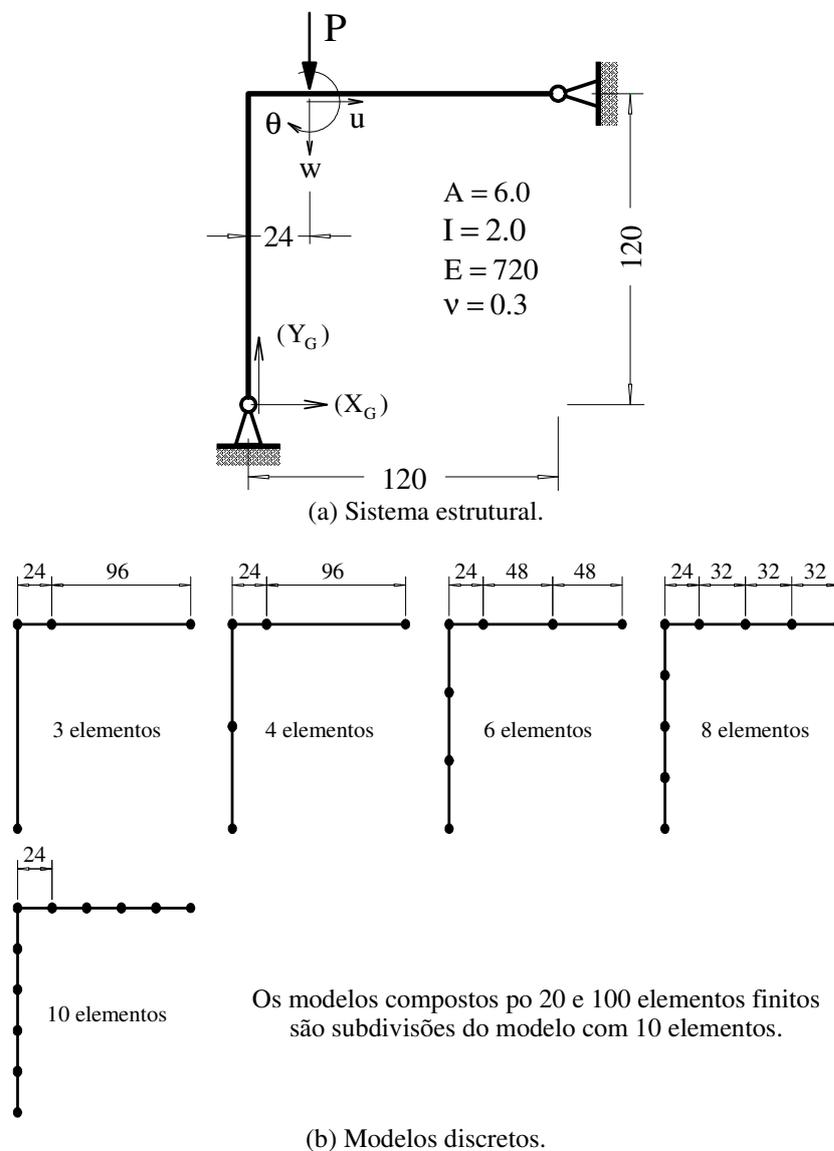


Figura 4.10 – Pórtico de Lee.

A tabela (4.9) indica as propriedades geométricas da seção transversal I equivalente.

Tabela 4.9 – Propriedades geométricas da seção I do pórtico de Lee.

Área ( $A' = A$ )	Inércia ( $I' = I$ )	Módulo Elástico ( $W'$ )	Módulo Plástico ( $Z'$ )	( $d'$ )	( $t_w'$ )	( $B_f'$ )	( $t_f'$ )
6	2	2.6996	5.8171	0.8676	0.41	9.1076	0.31

Na tentativa de obter a trajetória de equilíbrio completa do problema, devido ao seu caráter fortemente não-linear, foram empregadas diversas estratégias para incremento de carga (incremento de comprimento de arco, incremento de trabalho externo, etc.) e de iteração (incremento de comprimento de arco cilíndrico, norma mínima dos deslocamentos, etc.). No entanto, o traçado correto do caminho de equilíbrio foi obtido após a utilização de incrementos de carga em rigidez generalizada GSP ( $\Delta\lambda_1^0 = 0.01$ ), aliado à estratégia de iteração que leva o mesmo nome. Neste caso foi necessário empregar o método de Newton-Raphson parcialmente atualizado (Galvão, 2000), pois esse possibilita a atualização da matriz de rigidez do sistema a cada iteração efetuada. Os critérios para controle da convergência escolhidos foram carga e deslocamento combinados tendo a tolerância  $\tau = 10^{-3}$ .

Neste exemplo, o fenômeno de instabilidade só ocorre após o aparecimento de grandes deslocamentos do pórtico. As trajetórias de equilíbrio mostradas nas figuras (4.11) e (4.12), obtidas com as malhas de 3, 4, 6, 8, 10 e 20 elementos híbridos, mostram a presença de pontos limites de carga e também de pontos limites de deslocamento. Os modelos com 3 (2 elementos para a viga e 1 elemento para a coluna) e 4 elementos (2 elementos para a viga e a coluna) não fornecem resultados adequados. Com 6 elementos é possível obter a trajetória de forma completa, mas os resultados deixam de ser satisfatórios na região próxima ao segundo ponto limite de carga. Os modelos com 10 e 20 elementos finitos fornecem uma trajetória de equilíbrio bem próxima daquela fornecida por Galvão (2000) utilizando 20 elementos e uma teoria de segunda ordem refinada.

A tabela (4.10) traz um estudo da convergência dos resultados obtidos, nos pontos limites de carga e deslocamento, para os modelos com 6, 10 e 100 elementos híbridos.

Tabela 4.10 – Convergência dos modelos adotados para o pórtico de Lee.

Galvão (2000)		Presente Trabalho								
100 EFs		6 EFs			10 EFs			100 EFs		
P	w	P	w	dif.	P	w	dif.	P	w	dif.
(A):1.856	48.791	1.947	52.736	10.3	1.886	49.721	2.5	1.856	48.769	0.0
(B):1.192	61.006	1.291	65.409	11.0	1.226	61.926	3.2	1.194	61.018	0.2
(C):-0.438	50.749	-0.485	49.169	11.1	-0.525	50.840	19.9	-0.440	50.746	0.5
(D):-0.942	58.188	-1.240	60.469	31.9	-1.040	58.573	10.5	-0.943	58.224	0.1

Nota: dif. = diferença (%); EFs = Elementos finitos; Pontos limite de carga: A (1.856; 48.791); D (-0.942; 58.188); Pontos limite de deslocamento: B(1.192; 61.006); C (-0.438; 50.749).

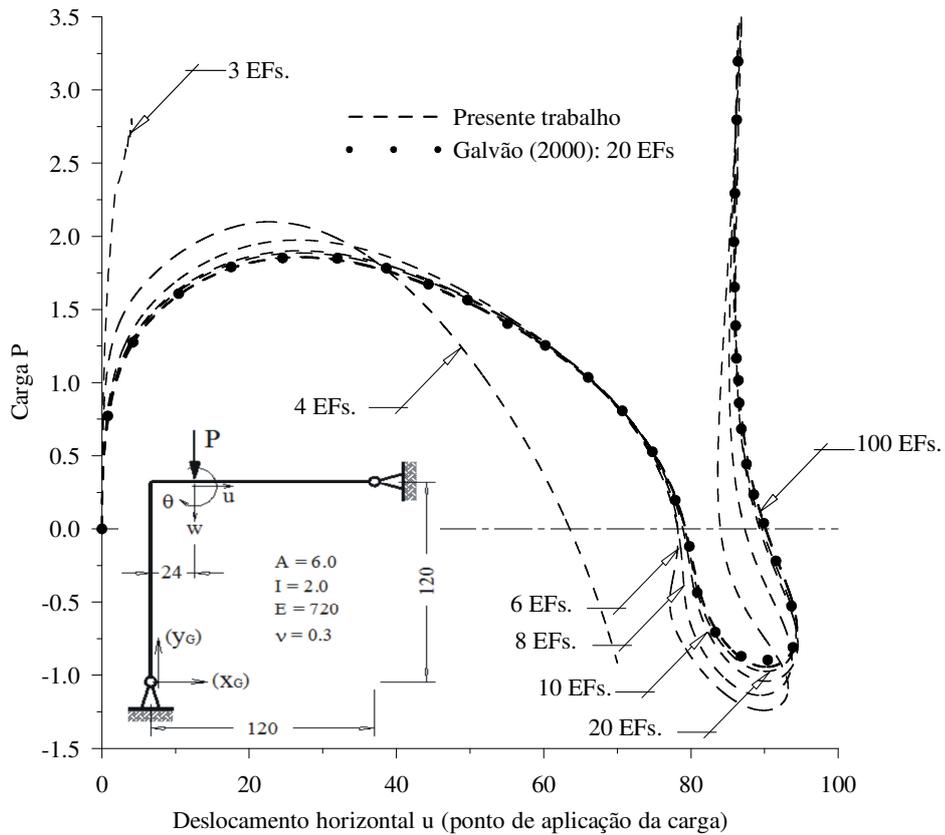


Figura 4.11 – Trajetória de equilíbrio do Pórtico de Lee (deslocamento vertical w).

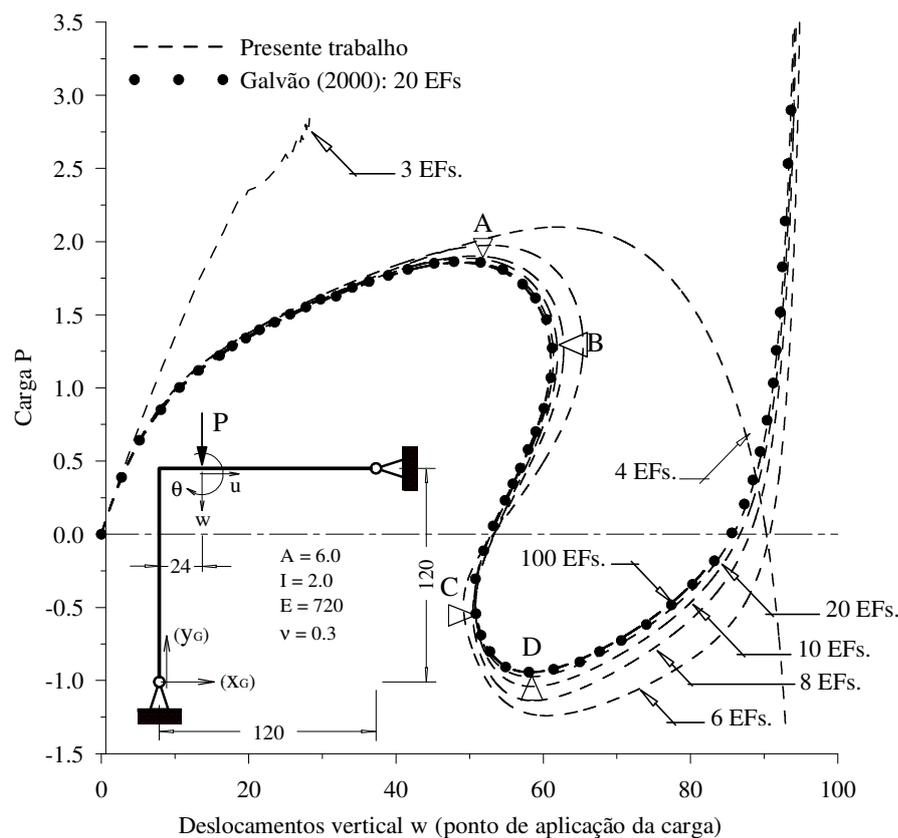


Figura 4.12 – Trajetória de equilíbrio do Pórtico de Lee (deslocamento horizontal  $u$ ).

#### 4.6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos exemplos apresentados neste capítulo, pode-se concluir que o elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano, utilizado pelo presente trabalho, é capaz de simular, com boa precisão e eficiência, estruturas esbeltas com comportamento altamente não-linear, uma vez que foi possível reproduzir, de forma satisfatória, o caminho de equilíbrio de problemas estruturais de estabilidade consagrados na literatura e empregados amplamente para validação de formulações não-lineares.

Outro aspecto importante se refere à boa precisão mostrada pela formulação do elemento finito híbrido, visto que alguns refinamentos efetuados nas malhas aproximaram, sensivelmente, os resultados do presente trabalho às respostas provenientes da utilização de formulações não-lineares mais refinadas e, até mesmo, de respostas consideradas exatas.

# 5

# EXEMPLOS NUMÉRICOS: EFEITO DA RIGIDEZ DAS LIGAÇÕES

## 5.1 – INTRODUÇÃO

Esse capítulo tem o objetivo de avaliar a eficiência e o desempenho computacional do elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano para simular os efeitos da não-linearidade física provenientes apenas da semi-rigidez das ligações. Atenção especial será dada aqui aos problemas estruturais onde a rigidez das ligações irá determinar o comportamento do sistema estrutural. Adicionalmente, são considerados novamente os efeitos de segunda-ordem, isto é, a influência da não-linearidade geométrica que será avaliada na resposta do sistema estrutural através da introdução de imperfeições geométricas em alguns dos exemplos estudados. Os resultados aqui obtidos serão confrontados àqueles fornecidos na literatura (Chan e Chui, 2000; Sekulovic e Salatic, 2001; Galvão, 2004).

Por conseguinte, na seção (5.2), se realiza o estudo de uma coluna com ligações semi-rígidas nos apoios, conforme ilustra a figura (5.1a). Com esse exemplo pretende-se, em um primeiro instante, averiguar a influência das imperfeições geométricas no valor da carga crítica de colapso da coluna. Posteriormente, objetiva-se investigar o efeito da variação do comprimento de flambagem elástica da barra na carga crítica da coluna, uma vez que esse comprimento depende fundamentalmente das condições de vinculação dos nós extremos, isto é, da rigidez das ligações.

Na seção (5.3), o comportamento do arco treliçado semi-rígido da figura (5.1b) será avaliado para duas situações de carregamento (carga centrada e carga excêntrica), e ainda, para três hipóteses de ligação entre as barras (rígido, semi-rígido e rotulado). Os resultados obtidos serão comparados aos fornecidos por Chan e Chui (2000).

Por fim, pórticos planos semi-rígidos de quadro simples com bases engastadas e variação de altura são analisados na seção (5.4). Essas estruturas, ilustradas nas figuras (5.3c) e (5.3d), são avaliadas considerando além do caso de ligações ideais (rótula e engaste) entre viga e coluna, o caso semi-rígido onde dois tipos de ligações são estudados: dupla cantoneira de alma (DWA) e cantoneiras de topo e assento com dupla cantoneira de alma (TSDWA). Esse estudo busca avaliar a influência da variação da rigidez das ligações no comportamento global desses sistemas estruturais semi-rígidos.

A figura (5.1) traz um resumo das estruturas que são abordadas nesse capítulo.

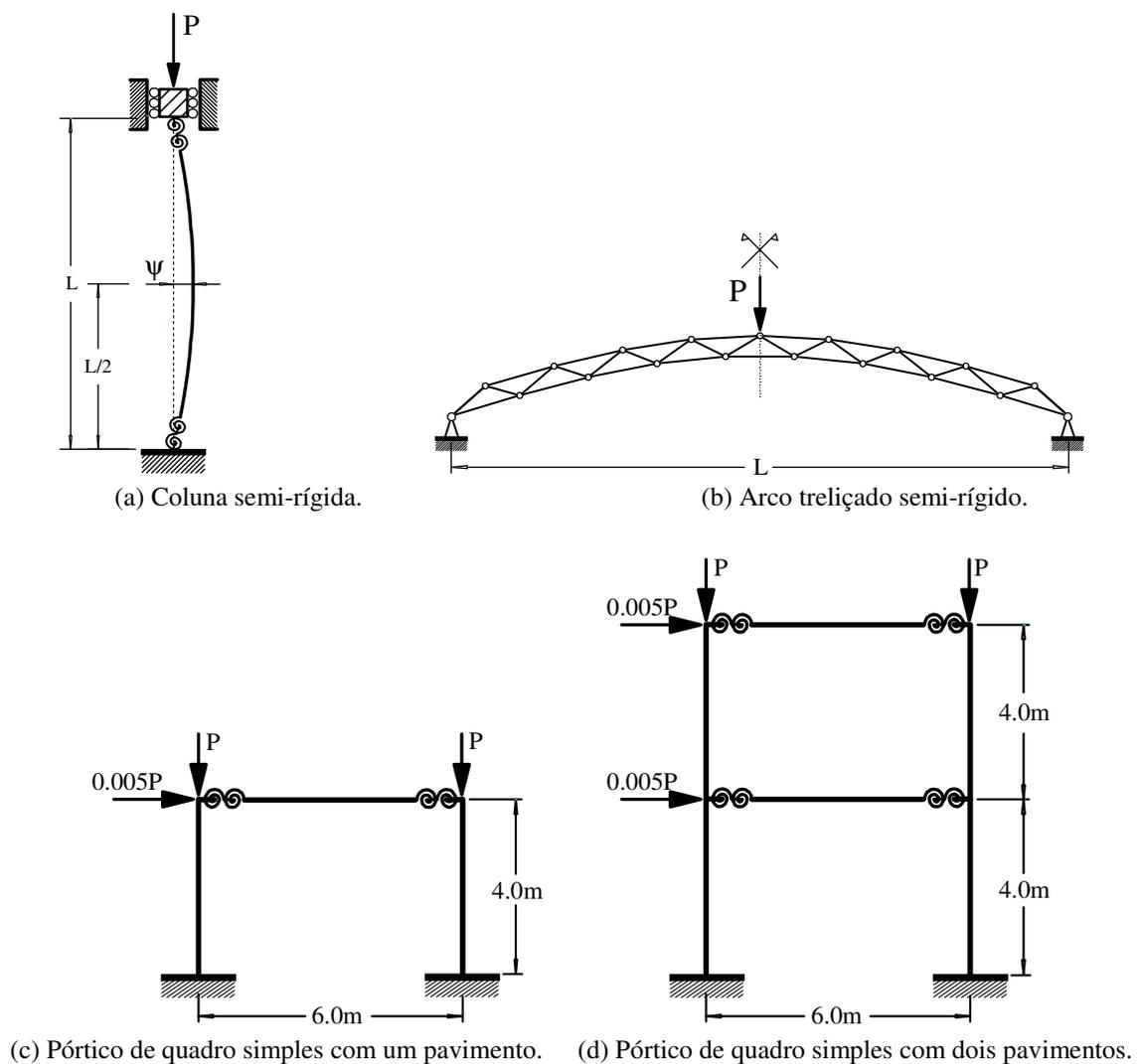


Figura 5.1 – Sistemas estruturais semi-rígidos.

Faz-se necessário ainda, alguns esclarecimentos preliminares relativos aos critérios estabelecidos nas análises numéricas que são apresentadas neste capítulo:

**a.** apenas o elemento finito híbrido não-linear apresentado no Capítulo 2 é empregado na discretização desses sistemas;

**b.** utiliza-se uma formulação de segunda ordem simplificada para obtenção dos coeficientes  $K_{ij}$ , como foi exposto no Capítulo 2, através das equações (2.4a) e (2.4b);

**c.** durante todo o processo de carregamento espera-se que o material se comporte no regime elástico. Para isso, considera-se um valor elevado para a tensão de escoamento  $\sigma_y$ , ou seja,  $S_s \rightarrow \infty$ ; assim, o momento incipiente  $M_y$  da seção não é atingido nesses exemplos o que impede a formação de rótulas plásticas;

**d.** adotou-se a seção transversal tipo I equivalente nas análises efetuadas visando manter os valores da rigidez à flexão  $EI$  e axial  $EA$  da seção equivalente iguais àqueles fornecidos na literatura;

**e.** adotou-se em todas as análises o método de Newton-Raphson modificado com uma tolerância  $\tau = 10^{-3}$  no processo de convergência da solução não-linear.

**f.** para análise dos problemas estruturais apresentados neste capítulo, utilizou-se um micro computador com processador *Intel Pentium IV* com frequência de 3.0 GHz, e memória RAM de 1.0 GB.

Vale salientar ainda que, exceto quando indicado, o valor do desvio ou diferença  $D_{a/b}$ , apresentado nas tabelas das seções posteriores, foi obtido através da equação (5.1), que fornece o desvio, em porcentagem, entre um valor de referência  $V_{ref.}$  e o valor calculado  $V_{cal.}$ , conforme:

$$D_{a/b}[\%] = 100 \left( \frac{V_{ref.} - V_{cal.}}{V_{cal.}} \right) \quad (5.1)$$

## 5.2 – COLUNA SEMI-RÍGIDA

O primeiro exemplo analisado é a coluna com ligações semi-rígidas na região de contato com os apoios, submetida a uma carga axial  $P$ , como ilustra a figura (5.2), onde são mostradas também as propriedades físicas e geométricas do problema.

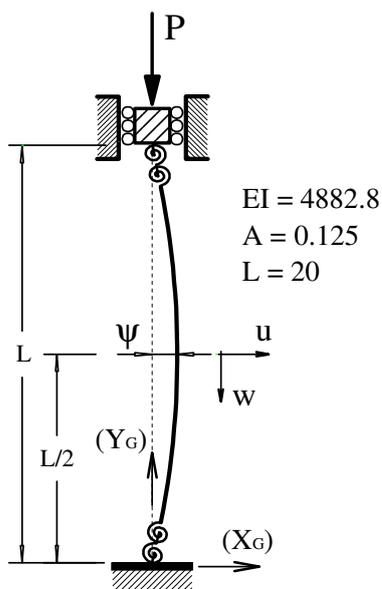


Figura 5.2 – Coluna semi-rígida.

A tabela (5.1) apresenta as propriedades geométricas da seção I equivalente empregada no problema.

Tabela 5.1 – Propriedades geométricas equivalentes para a coluna semi-rígida.

Área ( $A' = A$ )	Inércia ( $I' = I$ )	Módulo Elástico ( $W'$ )	Módulo Plástico ( $Z'$ )	( $d'$ )	( $t_w'$ )	( $B_f'$ )	( $t_f'$ )
0.125	$2.325 \times 10^{-2}$	0.0521	0.104	0.8734	0.01	5.8133	0.01

As respostas aqui obtidas são comparadas àquelas fornecidas por Chan e Chui (2000) e também por Galvão (2004).

Na tentativa de avaliar a influência das imperfeições geométricas no comportamento global do sistema estrutural, introduziu-se às coordenadas dos nós uma imperfeição geométrica com variação senoidal ao longo do eixo  $Y_G$ , com amplitude  $\psi$ , como pode ser observado na figura (5.1). Dessa forma, três valores distintos para

amplitude  $\psi$  foram escolhidos ( $L/10000$ ,  $L/5000$ ,  $L/1000$ ). Por conseguinte, para cada valor de  $\psi$ , efetuou-se uma série de análises nas quais as rigidezes iniciais das ligações  $S_c$  assumiram valores que variaram de  $S_c = 0$  (rótula) a  $S_c \rightarrow \infty$  (engaste).

O sistema estrutural foi discretizado por 10 elementos finitos híbridos de pórtico plano. Na solução numérica não-linear empregou-se a técnica de incremento em rigidez generalizada GSP ( $\Delta\lambda_1^0 = 0.01$ ). Como estratégia de iteração escolheu-se a norma mínima dos deslocamentos, adotando-se o critério de forças para verificação da convergência no ciclo iterativo.

A figura (5.3) exhibe as trajetórias de equilíbrio produzidas com as análises supracitadas. Nessa figura apresenta-se a variação do deslocamento horizontal  $u/L$ , no meio da coluna, com a carga axial normalizada ( $P/P_e$ ), onde  $P_e$  é o valor da carga crítica de flambagem elástica de Euler para a coluna bi-rotulada ( $P_e = \pi^2 EI/L^2$ ).

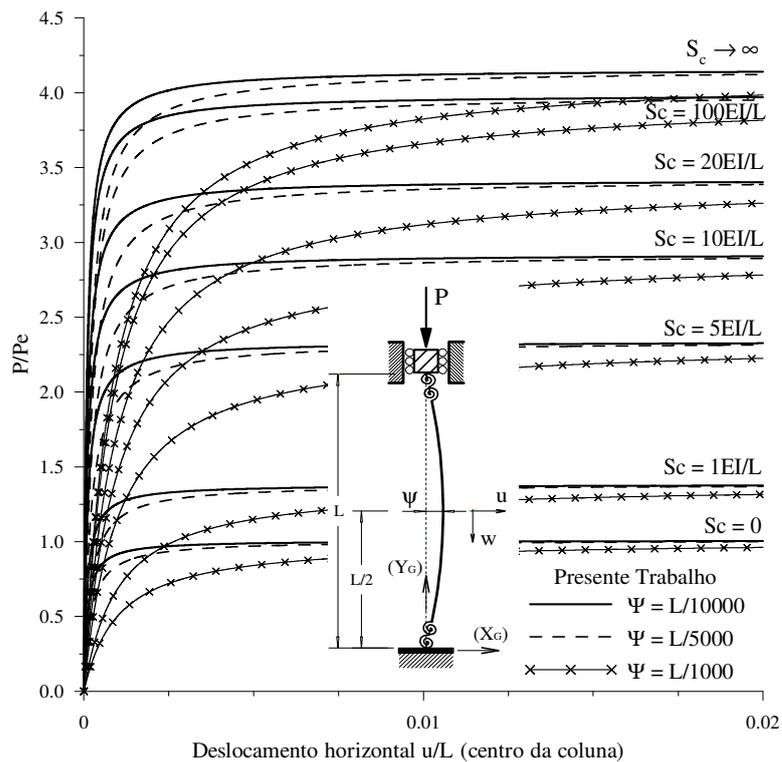
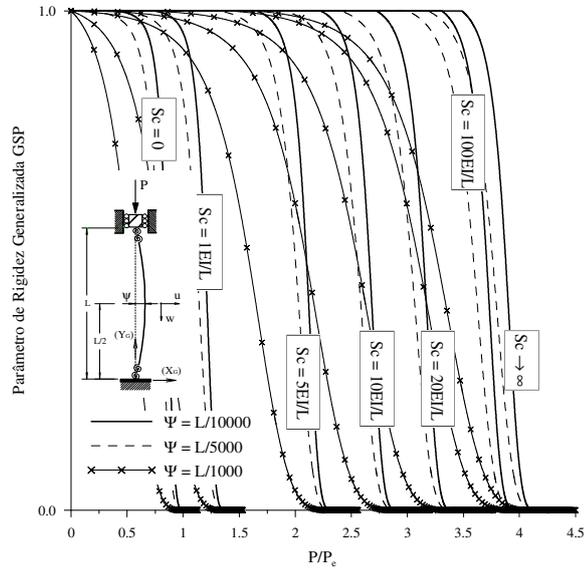


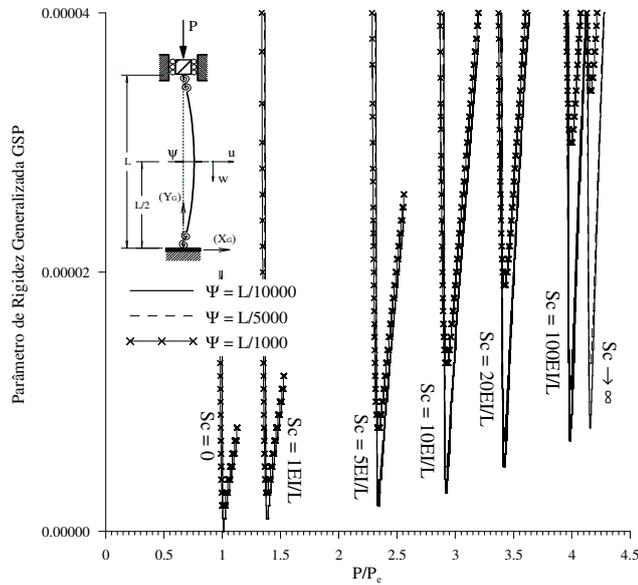
Figura 5.3 – Trajetória de equilíbrio da coluna semi-rígida.

Destacam-se os gráficos ilustrados pela figura (5.4), pois se prestam à determinação da carga crítica  $P_{cr}$  da coluna que é obtida com os valores nulos do parâmetro de rigidez generalizada GSP. Na figura (5.4a) apresenta-se a variação do

parâmetro GSP com a carga axial  $P$  normalizada ( $P/P_e$ ). O gráfico da figura (5.4b), que é uma ampliação do trecho inferior da figura (5.4a), serviu para facilitar a identificação do valor da carga crítica  $P_{cr}$  da coluna.



(a) Visão geral do gráfico.



(b) Gráfico ampliado.

Figura 5.4 – Variação do parâmetro GSP com a carga axial normalizada ( $P/P_e$ ).

A tabela (5.2) mostra os valores da carga crítica normalizada ( $P_{cr}/P_e$ ) obtidos no presente trabalho, para cada uma das configurações deformadas iniciais  $\psi$  da coluna semi-rígida. Na tabela (5.3) são comparadas as cargas críticas obtidas com as condições

extremas de imperfeição geométrica ( $\psi = L/1000$  e  $\psi = L/10000$ ), na tentativa de verificar o reflexo do aumento da amplitude da imperfeição no comportamento global da coluna.

Tabela 5.2 – Valores da carga crítica normalizada para a coluna semi-rígida.

$S_c$ (xEI/L)	$P_{cr}/P_e$		
	( $\Psi = L/10000$ )	( $\Psi = L/5000$ )	( $\Psi = L/1000$ )
0	1.000	1.000	1.000
1	1.370	1.375	1.375
2	1.680	1.700	1.680
5	2.324	2.355	2.325
7	2.614	2.625	2.620
10	2.913	2.925	2.900
15	3.229	3.225	3.210
20	3.423	3.425	3.415
100	3.984	4.000	3.980
Rígido	4.150	4.150	4.150

Tabela 5.3 – Análise paramétrica da carga crítica normalizada para imperfeições geométricas de amplitudes diferentes.

$S_c$ (xEI/L)	$P_{cr}/P_e$		desv.
	( $\Psi = L/10000$ )	( $\Psi = L/1000$ )	
0	1.000	1.000	0.000
1	1.370	1.375	0.004
2	1.680	1.680	0.000
5	2.324	2.325	0.000
7	2.614	2.620	0.002
10	2.913	2.900	0.005
15	3.229	3.210	0.006
20	3.423	3.415	0.003
100	3.984	3.980	0.001
Rígido	4.150	4.150	0.000

Nota: desv. = desvio (%);

A precisão dos resultados extraídos das análises da coluna semi-rígida é avaliada na tabela (5.4), ao se comparar os valores da carga crítica normalizada com aqueles fornecidos por Chan e Chui (2000) e também por Galvão (2004). Esses valores são impressos, posteriormente, no gráfico da figura (5.5), onde se observa a variação da carga crítica de flambagem elástica da coluna semi-rígida ( $P_{cr}/P_e$ ) para diferentes valores de rigidez  $S_c$  das ligações.

Tabela 5.4 – Análise comparativa para a carga crítica de flambagem da coluna semi-rígida.

$S_c$ (xEI/L)	$P_{cr}/P_e$		desv.	$P_{cr}/P_e$	
	Presente ( $\Psi = L/1000$ )	Chan e Chui (2000)		Galvão (2004)	desv.
0	1.000	1.000	0.0	1.000	0.0
1	1.375	1.390	1.1	1.368	0.5
2	1.680	1.690	0.6	1.669	0.6
5	2.325	2.301	1.0	2.298	1.2
7	2.620	2.570	1.9	2.570	1.9
10	2.900	2.855	1.6	2.855	1.6

Nota: desv. = desvio (%);

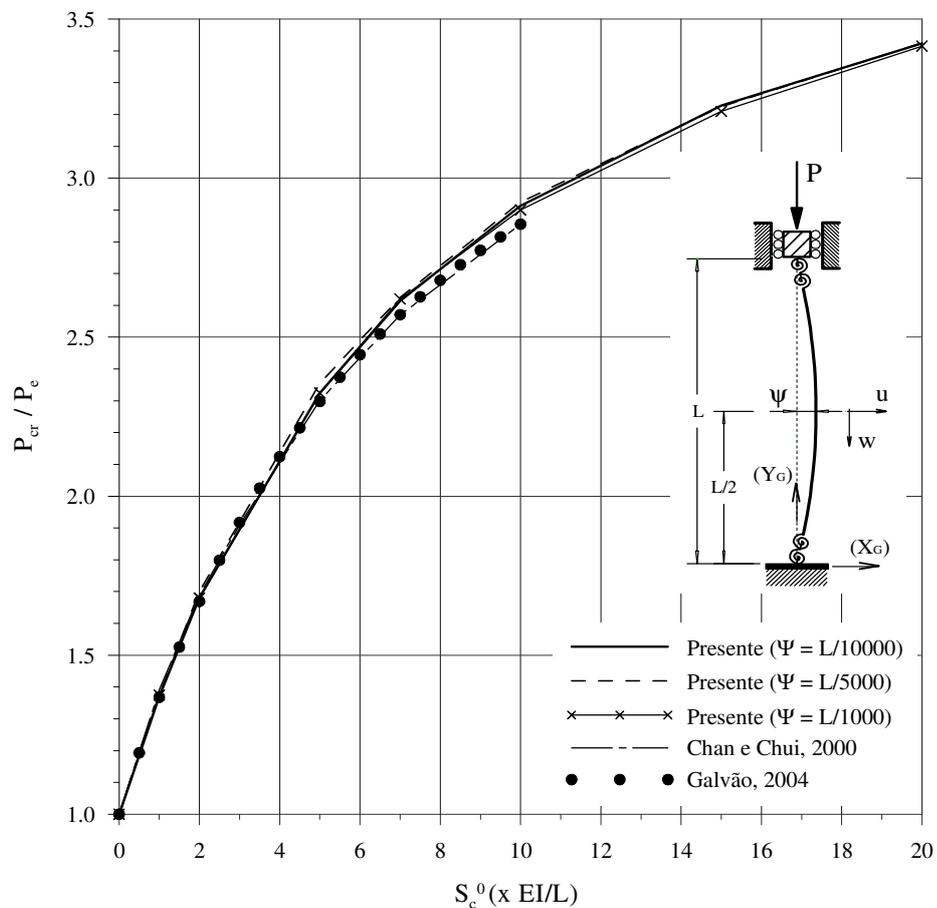


Figura 5.5 – Variação da carga de flambagem elástica da coluna semi-rígida com a rigidez da ligação  $S_c$ .

A partir das trajetórias de equilíbrio mostradas na figura (5.3) observa-se que o aumento na amplitude da imperfeição geométrica  $\psi$  exerce alguma influencia no processo de deformação da coluna, principalmente na forma da curvatura do trecho inicial dessas trajetórias (região submetida a pequenos deslocamentos). Contudo, as

curvas obtidas para os três valores de amplitude, considerando um valor fixo para a rigidez da ligação  $S_c$ , convergem assintoticamente para a mesma carga crítica, isto é, os três valores da imperfeição geométrica adotados aqui exerceram pouca influência na carga de colapso da coluna. Isso pode ser decorrente do pequeno valor escolhido para estas imperfeições.

Nas curvas da figura (5.4b), observa-se, fixando  $S_c$ , que as estruturas mais imperfeitas atingem o colapso antes daquelas com baixa amplitude de imperfeição geométrica ( $\psi$ ) e, na figura (5.5), fica claro que a rigidez das ligações influencia, como esperado, a carga crítica da coluna.

Destaca-se ainda que o elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano mostrou-se eficaz na simulação do comportamento da coluna semi-rígida, pois os resultados aqui obtidos se mostraram bem próximos daqueles fornecidos na literatura (Chan e Chui, 2000; Galvão, 2000). Esse fato se confirma após observação dos dados mostrados na tabela (5.4), e adicionalmente, através das curvas apresentadas na figura (5.5).

### 5.3 – ARCO TRELIÇADO SEMI-RÍGIDO

O exemplo a ser analisado agora é o arco treliçado semi-rígido simplesmente apoiado da figura (5.6), que contém também os dados concernentes a essa estrutura.

Objetiva-se, com este exemplo, estudar um problema de bifurcação e também a influência da rigidez das ligações no valor da carga crítica. Para estimular o módulo assimétrico de flambagem, impôs-se uma pequena imperfeição geométrica inicial ( $e = L/1000$ ) à estrutura, como também é ilustrado na figura (5.6).

Este problema foi analisado com três hipóteses de vinculação entre as barras, isto é, foram considerados os casos de ligações idealmente rotuladas  $L_f = L_b$  ( $S_c \rightarrow 0$ ), semi-rígidas  $L_f = 0.8L_b$  ( $S_c = 1.56EI/L_b$ ) e rígidas  $L_f = 0.5L_b$  ( $S_c \rightarrow \infty$ ), onde  $L_b$  e  $L_f$  representam, respectivamente, o comprimento real da barra da treliça e o comprimento de flambagem elástica do elemento finito híbrido.

As respostas deste exemplo são comparadas posteriormente aos resultados fornecidos por Chan e Chui (2000).

$$E = 7.05 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 = 68.96 \text{ GPa}$$

$$L = 6858 \text{ cm} = 68.58 \text{ m}$$

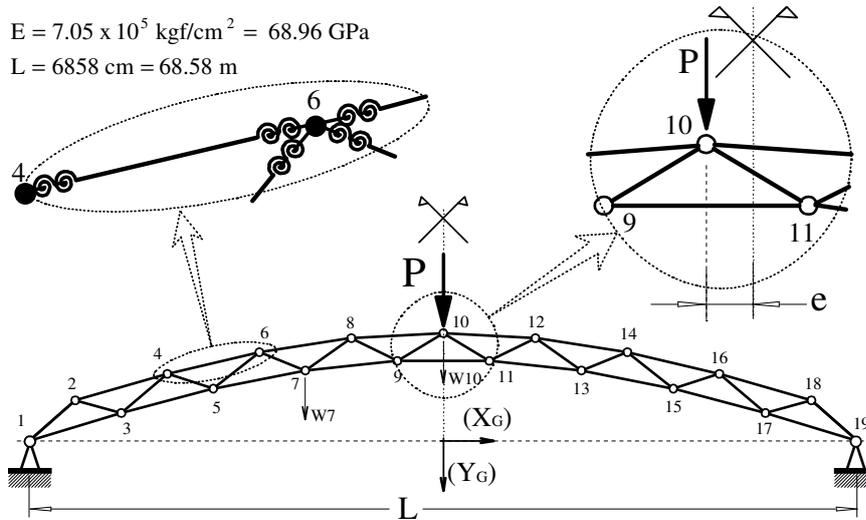


Figura 5.6 – Arco treliçado semi-rígido.

Adicionalmente às informações contidas na figura (5.6), apresentam-se nas tabelas (5.5), (5.6) e (5.7), respectivamente, as coordenadas nodais, a conectividade e a área da seção transversal para as barras do arco treliçado.

Tabela 5.5 – Coordenadas nodais do arco treliçado semi-rígido.

Nó	Coordenada $X_G$ [cm]	Coordenada $Y_G$ [cm]	Nó	Coordenada $X_G$ [cm]	Coordenada $Y_G$ [cm]
19; 1	± 3429	0.00	6; 14	± 1524	110.85
18; 2	± 3048	50.65	7; 13	± 1143	87.99
17; 3	± 2667	34.75	8; 12	± 762	128.50
16; 4	± 2286	83.82	9; 11	± 381	100.05
15; 5	± 1905	65.30	10	± 0	134.60

Tabela 5.6 – Conectividade entre as barras do arco treliçado semi-rígido.

EF.	Nó A	Nó B									
1	1	2	10	11	12	19	7	8	28	13	15
2	18	19	11	2	3	20	12	13	29	1	3
3	2	4	12	17	18	21	9	10	30	17	18
4	16	18	13	3	4	22	10	11	31	3	5
5	4	5	14	16	17	23	7	9	32	15	17
6	15	16	15	5	6	24	11	13	33	8	10
7	6	7	16	14	15	25	6	8	34	10	12
8	13	14	17	4	6	26	12	14	35	9	11
9	8	9	18	14	16	27	5	7	-	-	-

Nota: EF. = Elemento finito; Nó-A = nó inicial do elemento; Nó-B = nó final do elemento.

Tabela 5.7 – Área da seção transversal das barras do arco treliçado semi-rígido.

Grupo	EFs.	Área da seção transversal [cm <sup>2</sup> ]	Grupo	EFs.	Área da seção transversal [cm <sup>2</sup> ]
G-1	1 a 10; 35	51.61	G-6	23; 24	161.29
G-2	11; 12	64.52	G-7	25; 26	193.55
G-3	13 a 16	83.87	G-8	27; 28	258.06
G-4	17; 18	96.77	G-9	29 a 32	290.32
G-5	19 a 22	103.23	G-10	33; 34	309.68

Nota: EFs. = elementos finitos; G-1, 2, 3, ... = Grupo de elementos com área da seção transversal idêntica.

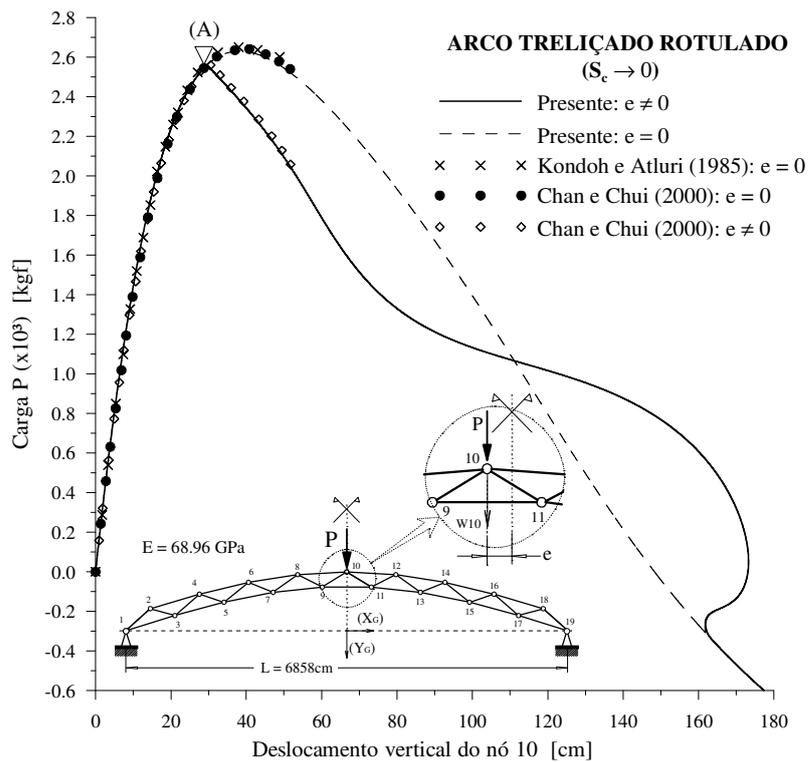
Na simulação numérica do problema estrutural empregou-se apenas um elemento híbrido para cada barra do arco treliçado. As propriedades geométricas da seção I equivalente são mostradas na tabela (5.8).

Tabela 5.8 – Propriedades geométricas da seção I parao arco treliçado semi-rígido.

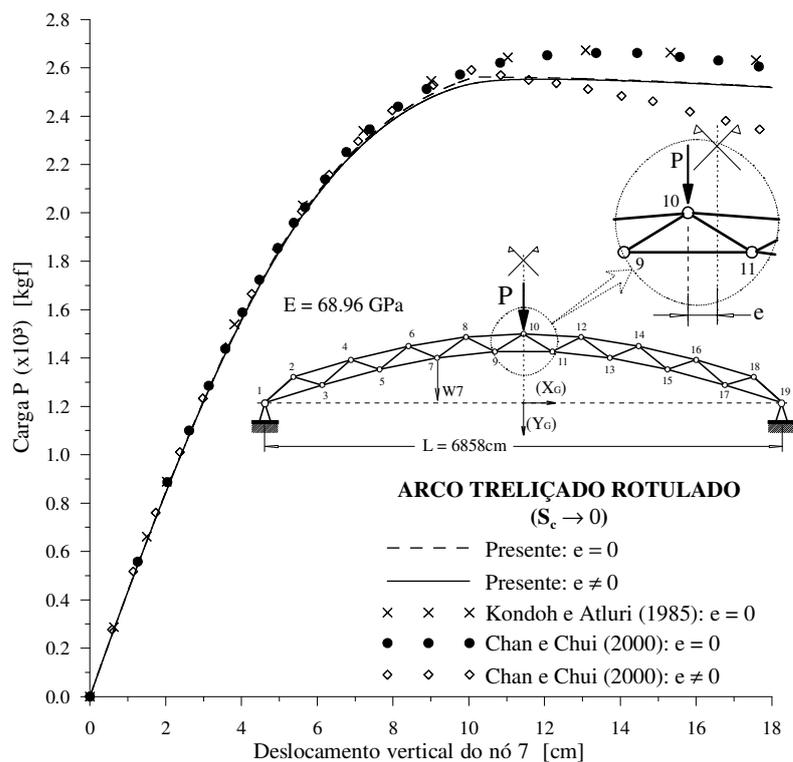
Grupo	Área (A' = A) [cm <sup>2</sup> ]	Inércia (I' = I) [cm <sup>4</sup> ]	Módulo Elástico (W') [cm <sup>3</sup> ]	Módulo Plástico (Z') [cm <sup>3</sup> ]	(d') [cm]	(t <sub>w</sub> ') [cm]	(B <sub>f</sub> ') [cm]	(t <sub>f</sub> ') [cm]
G-1	51.61	211.96	82.86	177.79	3.11	1.0	24.24	1.0
G-2	64.52	331.27	118.30	253.03	3.60	1.0	30.46	1.0
G-3	83.87	559.76	179.39	380.00	4.24	1.0	39.81	1.0
G-4	96.77	745.198	224.91	477.72	4.62	1.0	46.07	1.0
G-5	103.23	848.012	249.05	528.38	4.81	1.0	49.21	1.0
G-6	161.29	2070.16	501.90	1056.20	6.25	1.0	77.52	1.0
G-7	193.55	2982.00	667.26	1399.60	6.93	1.0	93.30	1.0
G-8	258.06	5299.45	1044.00	2178.90	8.15	1.0	124.95	1.0
G-9	290.32	6707.24	1253.30	2610.70	8.70	1.0	140.80	1.0
G-10	309.68	7631.61	1385.10	2882.40	9.02	1.0	150.33	1.0

Para obtenção do caminho de equilíbrio não-linear, a estratégia de incremento de carga que se mostrou mais adequada foi o comprimento de arco ( $\Delta\lambda^0_1 = 0.01$ ), associada ao critério de convergência da norma mínima dos deslocamentos com a tolerância  $\tau = 10^{-3}$ .

A figura (5.7) exibe as trajetórias de equilíbrio obtidas para este problema. Na tabela (5.8) é apresentada a diferença de posição entre o ponto de bifurcação (ponto A) obtido neste trabalho e aquele proveniente da análise de Chan e Chui (2000).



(a) Deslocamento vertical do nó 10, para o arco treliçado simétrico ( $e = 0$ ) e assimétrico ( $e \neq 0$ ).



(b) Deslocamento vertical do nó 7, para o arco treliçado simétrico ( $e = 0$ ) e assimétrico ( $e \neq 0$ ).

Figura 5.7 – Trajetórias de equilíbrio do arco treliçado semi-rígido.

Tabela 5.9 – Análise comparativa para a posição do ponto de bifurcação do arco treliçado semi-rígido.

Ponto	Chan e Chui (2000)		Presente Trabalho		desv.
	w (nó 10)	$P_{cr}$ ( $\times 10^{-3}$ )	w (nó 10)	$P_{cr}$ ( $\times 10^{-3}$ )	
(A)	30.04	2.5682	29.5006	2.5526	1.92

Nota: desv. = desvio (%), calculado conforme a equação (4.1);

Visando averiguar os efeitos induzidos pela variação do comprimento de flambagem elástica  $L_f$  das barras do arco treliçado assimétrico no valor da carga crítica, são mostradas na figura (5.8), as trajetórias de equilíbrio obtidas para as três hipóteses de ligação (rotulada, semi-rígida e rígida). Apresentam-se, na mesma figura, as coordenadas dos pontos de bifurcação dessas estruturas.

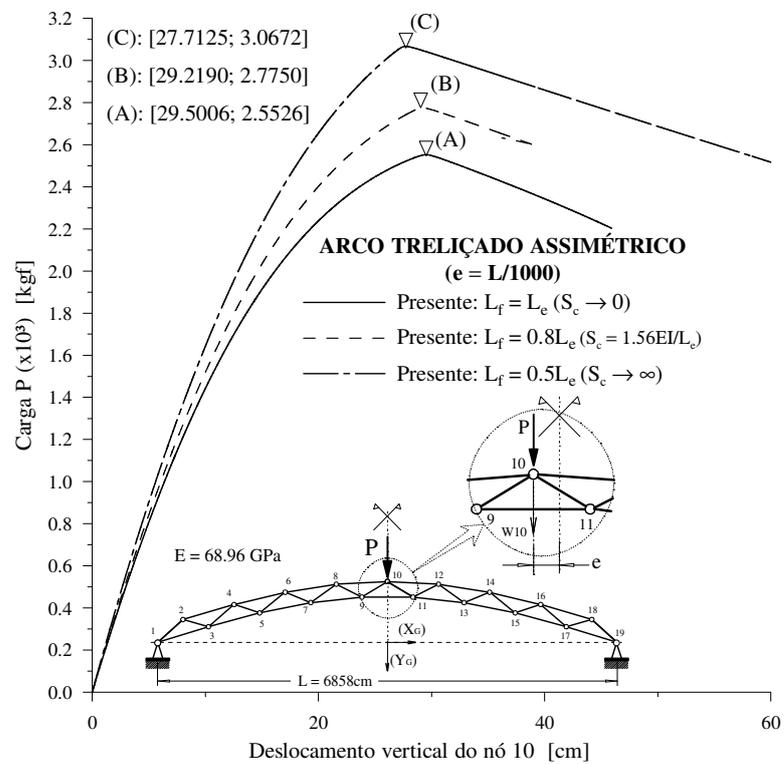


Figura 5.8 – Influência do comprimento efetivo de flambagem da barra, na carga crítica do arco treliçado semi-rígido.

A figura (5.7a) permite concluir que a pequena perturbação ( $e = L/1000$ ) introduzida na geometria do arco treliçado semi-rígido é suficiente para induzir o comportamento assimétrico da estrutura fornecendo assim o ponto que caracteriza uma

bifurcação assimétrica instável, uma vez que a estrutura perde rigidez para acréscimos de carga além desse ponto.

As trajetórias de equilíbrio obtidas para o deslocamento vertical do nó 7 mostraram-se bem próximas dos resultados da literatura, porém apresentam pequena divergência daqueles resultados ao ultrapassarem o ponto de bifurcação. Esse fato não é verificado para o nó 10, cujas trajetórias mostraram-se condizentes às da literatura ao longo de todo o caminho não-linear de equilíbrio, mantendo essa característica, inclusive, ao passar pelo ponto de bifurcação (ponto A). A tabela (5.9), ao mostrar a proximidade entre o ponto de bifurcação aqui obtido e aquele fornecido por Chan e Chui (2000), reforça as observações anteriores.

Deve-se destacar também a eficiência computacional da estratégia de solução não-linear escolhida, visto que foi possível ultrapassar, com boa precisão, o caminho de equilíbrio não-linear fornecido pela literatura.

Por fim, como esperado, o enrijecimento das ligações entre as barras que formam o arco treliçado promove uma redução no comprimento de flambagem dos elementos. O reflexo imediato desse processo é o aumento da capacidade de suporte da estrutura.

#### **5.4 – PÓRTICOS DE QUADROS SIMPLES COM VARIAÇÃO DE ALTURA**

Para concluir esse grupo de análises, nas quais se considera apenas o efeito da semi-rigidez das ligações, serão estudados agora pórticos de quadros simples com diferentes números de pavimentos. A figura (5.9) ilustra os exemplos destes pórticos que possuem, respectivamente, um e dois pavimentos, e também as propriedades físicas e geométricas dos elementos (viga e colunas), fornecidas na literatura. A tabela (5.10) traz as propriedades da seção transversal equivalente, obtidas no presente trabalho.

Estes exemplos são analisados para dois casos típicos de ligação entre a viga e a coluna, isto é, ligações ideais (rígidas e rotuladas) e semi-rígidas. Para este último caso, dois tipos de ligações semi-rígidas foram considerados, a saber, dupla cantoneira de alma (DWA) e cantoneiras de topo e assento com dupla cantoneira de alma (TSDWA). Informações mais detalhadas a respeito desses dois tipos de ligação podem ser encontradas em (Chen e Kishi, 1989; Sekulovic e Salatic, 2001; Pinheiro, 2003).

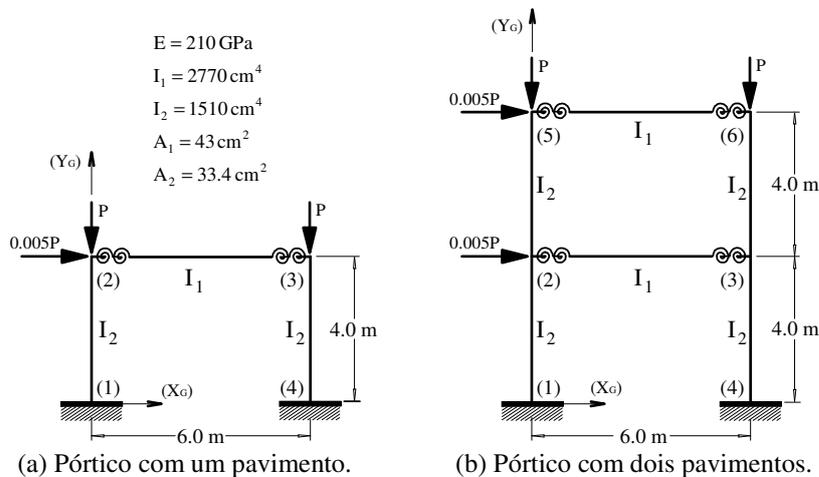


Figura 5.9 – Pórticos de quadros simples com variação de altura (Sekulovic e Salatic, 2001).

Tabela 5.10 – Propriedades geométricas da seção I equivalente para os pórticos de quadros simples com variação de altura.

EF.	Área ( $A' = A$ ) [cm <sup>2</sup> ]	Inércia ( $I' = I$ ) [cm <sup>4</sup> ]	Módulo Elástico ( $W'$ ) [cm <sup>3</sup> ]	Módulo Plástico ( $Z'$ ) [cm <sup>3</sup> ]	( $d'$ ) [cm]	( $t_w'$ ) [cm]	( $B_f'$ ) [cm]	( $t_f'$ ) [cm]
Colunas	33.4	1510	173.96	345.10	15.36	1.0	9.02	1.0
Viga	43.0	2770	275.48	545.14	18.11	1.0	12.44	1.0

Nota: EF. = Elemento finito;

A solução não-linear de equilíbrio foi alcançada empregando-se, como estratégia de incrementos o comprimento de arco ( $\Delta\lambda_1^0 = 0.01$ ) e, para estratégia de iteração, a norma mínima dos deslocamentos.

Os resultados extraídos com estes exemplos, que foram discretizados com um elemento finito híbrido por barra (viga ou coluna), são comparados às respostas de Sekulovic e Salatic (2001) bem como Pinheiro (2003).

A tabela (5.11) apresenta os valores da carga crítica extraídos da análise do pórtico com um pavimento, para os quatro tipos de ligações estudados.

Tabela 5.11 – Carga crítica do pórtico de um pavimento ( $P = 450\text{kN}$ ,  $H = 0.005P$ ).

Tipo de ligação	Carga Crítica [kN]					
	Sekulovic e Salatic (2001)	Presente trabalho	desv.	Pinheiro (2003)	Presente trabalho	desv.
Rígida	1530	1527.05	0.19	1533	1527.05	0.39
TSDWA	1395	1378.10	1.21	1385	1378.10	0.50
DWA	1289	1276.44	0.97	1283	1276.44	0.51
Rotulada	489	485.41	0.73	489	485.41	0.73

Nota: desv. = desvio (%);

As figuras (5.10) e (5.11) exibem as trajetórias de equilíbrio para os pórticos semi-rígidos com um e dois pavimentos, respectivamente. Já a figura (5.12) mostra a carga crítica para esses pórticos em função da rigidez das ligações, que é expressa através do fator de rigidez  $\gamma$  definido anteriormente no capítulo 2. O valor dessa carga é normalizado através da sua divisão pelo valor da carga de colapso obtida para os pórticos com ligações rígidas entre a viga e a coluna.

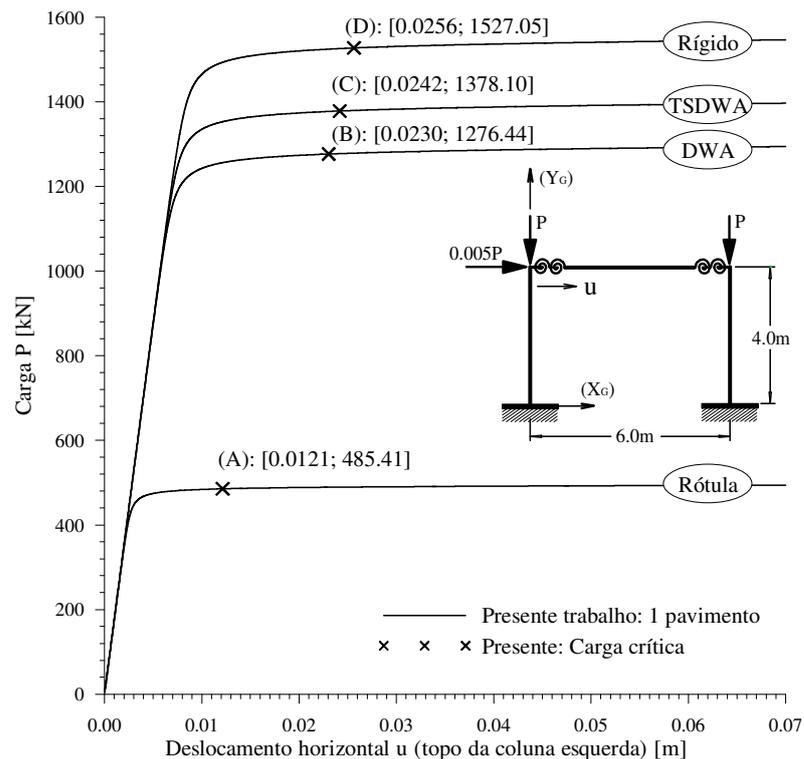


Figura 5.10 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de quadro simples com um pavimento.

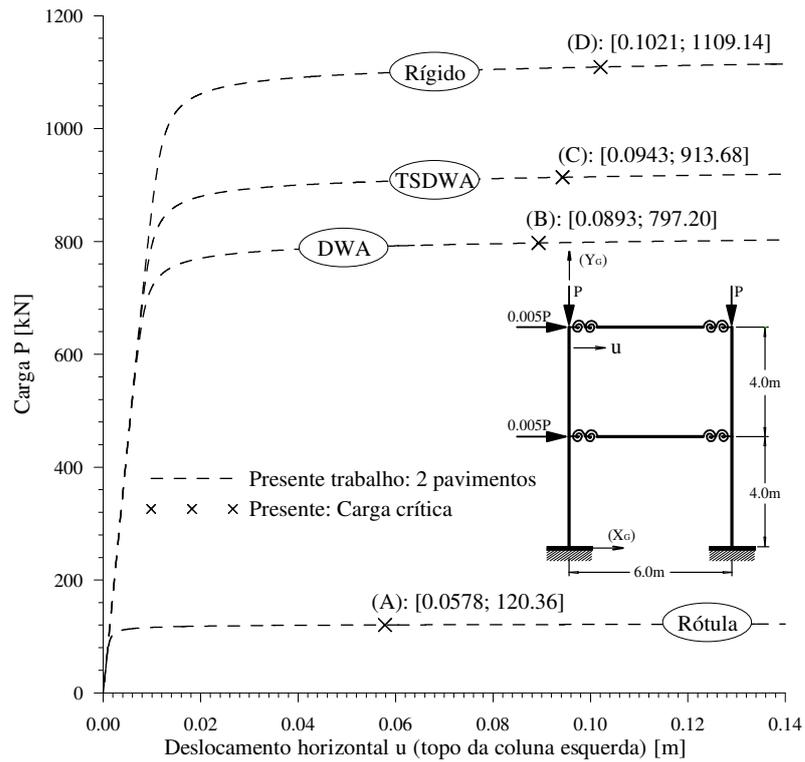


Figura 5.11 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico de quadro simples com dois pavimentos.

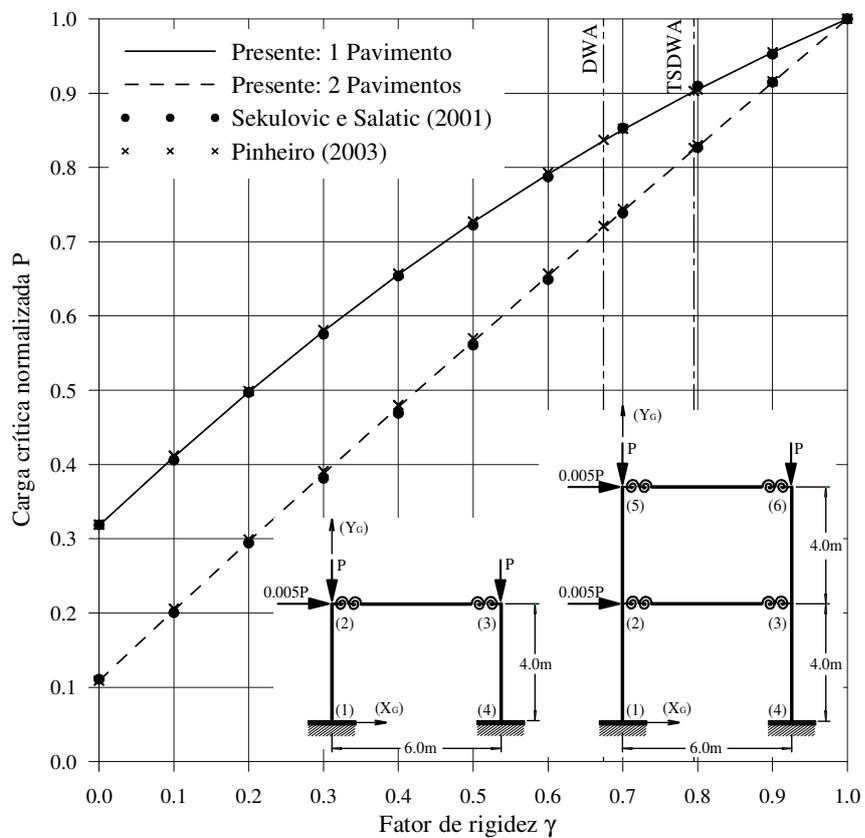


Figura 5.12 – Influência da rigidez da ligação no valor da carga crítica.

Através das figuras (5.10) e (5.11) pode-se concluir, como esperado, que a carga crítica aumenta com o crescimento da rigidez das ligações, isto é, as estruturas mais rígidas tendem a suportar níveis maiores de solicitação. Estes fatos tornam-se mais evidentes após verificação dos gráficos da figura (5.12).

Observa-se ainda, na figura (5.12) que para os exemplos estudados, a carga crítica varia quase que linearmente com a rigidez das ligações, principalmente para o pórtico com dois pavimentos.

## **5.5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Mais uma vez, o elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano mostrou-se computacionalmente eficaz, pois conseguiu reproduzir, com boa precisão, o comportamento não-linear dos sistemas estruturais semi-rígidos estudados neste capítulo.

Baseado nos resultados das análises aqui apresentadas observa-se que a escolha de modelos que não refletem, com boa precisão, o comportamento real das ligações semi-rígidas de um sistema estrutural pode conduzir a erros na avaliação da capacidade de suporte da estruturas.

Adicionalmente, devem-se contabilizar as imperfeições geométricas na modelagem do problema, pois, como visto nas seções anteriores, a desconsideração destas imperfeições pode conduzir a valores de carga crítica superiores àqueles que a estrutura é realmente capaz de suportar.

# **6** EXEMPLOS NUMÉRICOS: EFEITO INELÁSTICO E EFEITOS COMBINADOS

## **6.1 – INTRODUÇÃO**

Objetiva-se com este capítulo, em um primeiro instante, avaliar o desempenho do elemento finito híbrido na simulação de problemas estruturais onde o comportamento da estrutura é preponderante inelástico e, posteriormente, averiguar o desempenho desse elemento em problemas que associam todos os efeitos não-lineares físicos e/ou geométricos abordados no escopo do presente trabalho.

Com isso, nas seções (6.2) e (6.3) são apresentadas respostas extraídas da análise numérica de problemas estruturais já consagrados na literatura, levando-se em conta apenas os efeitos decorrentes da inelasticidade do aço. A Seção (6.2) mostra os resultados da análise de pórticos travados lateralmente com diferentes condições de apoio e, a seção (6.3) trata do pórtico tipo galpão que é comumente adotado pelo ECCS (1983) para calibração de programas computacionais que realizam análises inelásticas.

Por fim, na seção (6.4) avalia-se o comportamento de pórticos semi-rígidos de dois pavimentos com quadros simples contraventados. Através destes exemplos objetiva-se averiguar a influência do contraventamento na carga limite destas estruturas. A análise desses sistemas estruturais merece atenção especial, pois associa todos os efeitos não-lineares discutidos no escopo desta dissertação.

A figura (6.1) apresenta um resumo das estruturas estudadas neste capítulo.

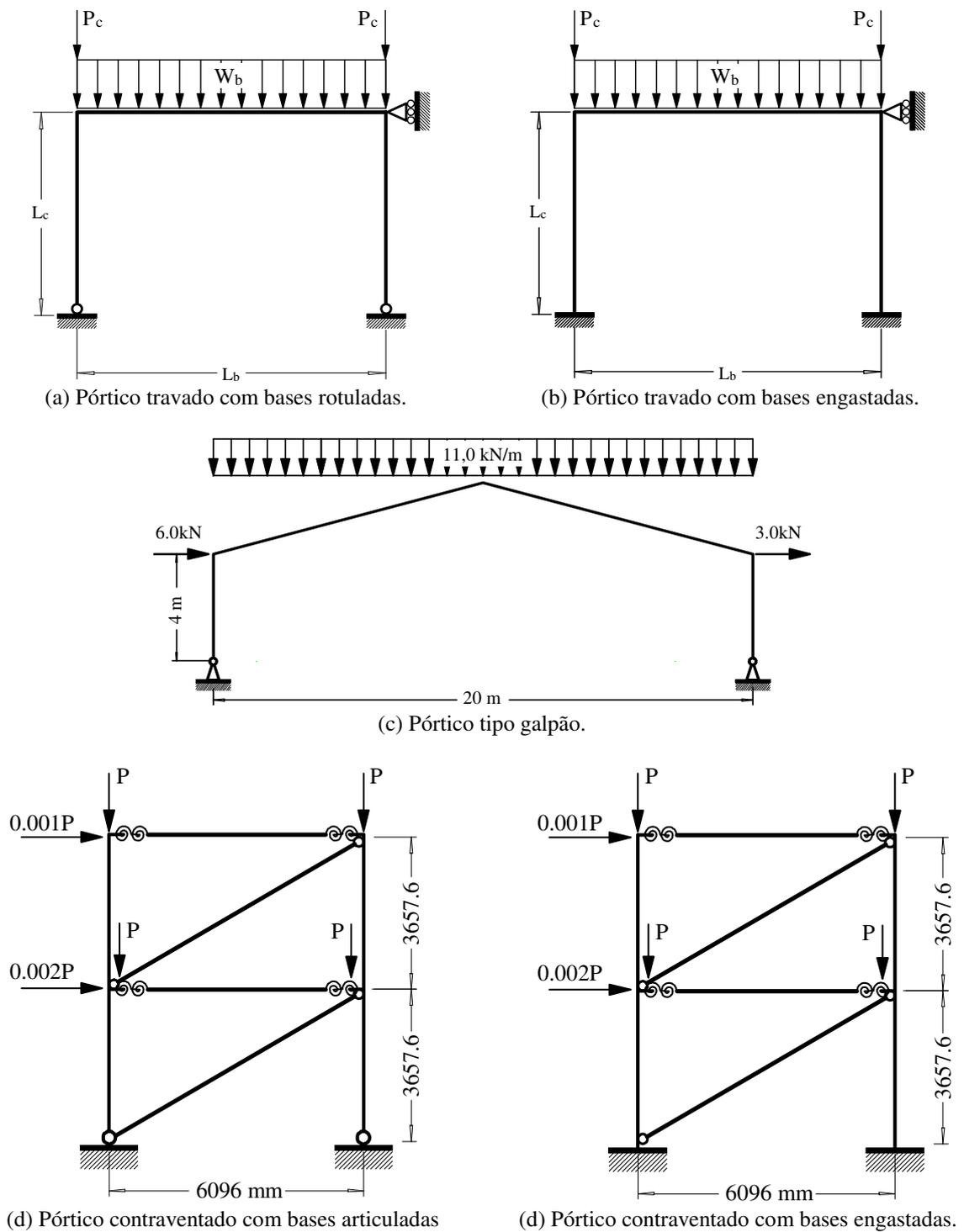


Figura 6.1 – Resumo dos sistemas estruturais estudados.

Faz-se necessário ainda, alguns esclarecimentos preliminares relativos aos critérios estabelecidos nas análises numéricas que são apresentadas neste capítulo:

a. apenas o elemento finito híbrido não-linear, apresentado no Capítulo 2, é empregado na discretização desses sistemas;

b. adotou-se em todas as análises o método de Newton-Raphson modificado com uma tolerância  $\tau = 10^{-3}$  no processo de convergência da solução não-linear.

c. para análise dos problemas estruturais apresentados neste capítulo, utilizou-se um micro computador com processador *Intel Pentium IV* com frequência de 3.0 GHz, e memória RAM de 1.0 GB;

d. o valor do desvio ou diferença  $D_{a/b}$ , apresentado nas tabelas das seções posteriores, foi obtido através da equação (5.1);

e. durante todo o processo de carregamento considera-se que o material se comporte no regime inelástico ( $S_s \rightarrow$  variável). Nos exemplos das seções (6.2) e (6.3), adotou-se ligações rígidas ( $S_c \rightarrow \infty$ ) ou ligações flexíveis ( $S_c \rightarrow 0$ ) entre os elementos. Já nas análises da seção (6.4) são consideradas apenas ligações semi-rígidas ( $S_c \rightarrow$  variável).

f. para melhorar a apresentação dos resultados, adota-se por utilizar uma nomenclatura simplificada para as formulações do “*método da rótula plástica*”, conforme é mostrado na tabela (6.1).

Tabela 6.1 – Resumo das formulações empregadas.

Sigla	Descrição
EP-L	Formulação inelástica baseada na norma AISC-LRFD: análise elasto-plástica (Liew et al., 1993a; Machado, 2005)
PR-L	Formulação inelástica baseada na norma AISC-LRFD: análise plástica-refinada (Liew et al., 1993a; Machado, 2005)
EP-C	Formulação inelástica baseada no conceito da “seção montada”: análise elasto-plástica (Chan e Chui, 2000; Machado, 2005)
PR-C	Formulação inelástica baseada no conceito da “seção montada”: análise plástica-refinada (Chan e Chui, 2000; Machado, 2005)

## 6.2 – PÓRTICO TRAVADO LATERALMENTE

Aqui são estudados dois portais idênticos, exceto pelas condições de contorno dos apoios inferiores, conforme ilustra a figura (6.2), que contém ainda os dados destes exemplos. Com a finalidade de simular um contraventamento independente ou por um vínculo rígido externo, indica-se, nesta mesma figura, a presença de uma restrição ao deslocamento lateral do topo da coluna direita em cada uma das estruturas. Na figura (6.2c) é apresentado o modelo discreto adotado para simular a geometria destes pórticos. Nesse modelo foi introduzida uma imperfeição geométrica de amplitude  $\psi$  ( $\psi = L/1000$ ) com variação senoidal.

A tabela (6.2) traz as propriedades geométricas dos perfis metálicos empregados nas colunas e na viga. Nesta tabela, são mostrados os valores da espessura equivalente das mesas  $t_{fe}$ , calculados para suprir as diferenças de dimensão entre perfis soldados e laminados (Machado, 2005).

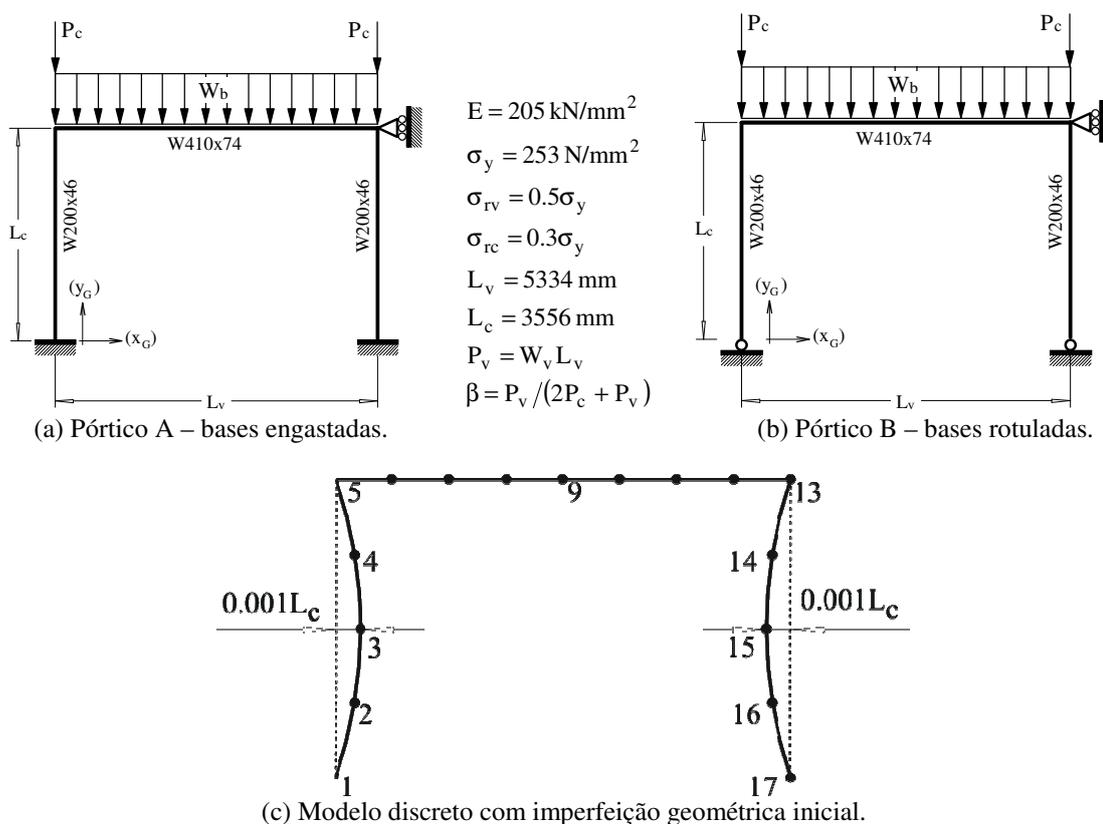


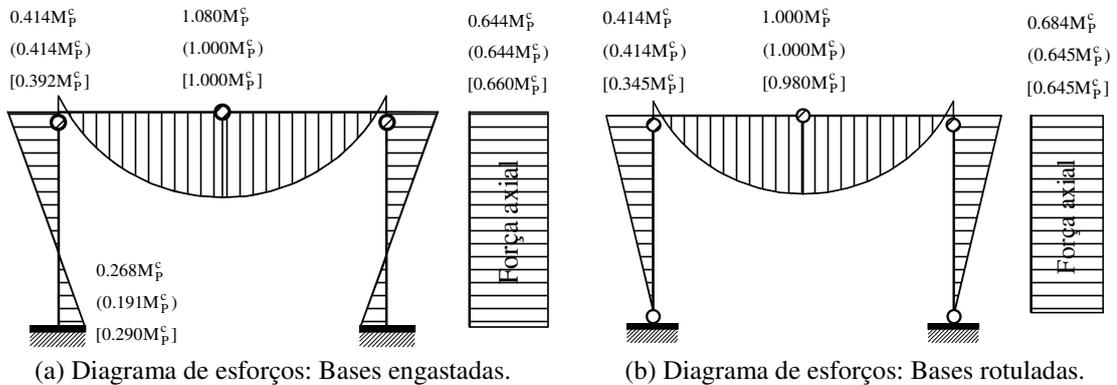
Figura 6.2 – Pórticos com restrição ao movimento lateral (Chan e Chui, 2000).

Tabela 6.2 – Propriedades geométricas das seções transversais.

Perfil	Área (A) [mm <sup>2</sup> ]	Inércia (I) [mm <sup>4</sup> ]	Módulo Elástico (W) [mm <sup>3</sup> ]	Módulo Plástico (Z) [mm <sup>3</sup> ]	(d) [mm]	(t <sub>w</sub> ) [mm]	(B <sub>f</sub> ) [mm]	(t <sub>f</sub> ) [mm]
W200X46	5890	45.8x10 <sup>6</sup>	451x10 <sup>3</sup>	498x10 <sup>3</sup>	203	7.24	203	11.28
W410x74	9550	27.5x10 <sup>6</sup>	1330x10 <sup>3</sup>	1510x10 <sup>3</sup>	413	9.7	180	16.23

Na obtenção da trajetória de equilíbrio não-linear aliou-se a técnica do comprimento de arco ( $\Delta\lambda^0_1 = 0.2$ ) à norma mínima dos deslocamentos, que foi escolhida para estratégia de iteração. Adotou-se ainda, os valores 0.5 e 0.3 para a relação  $\sigma_r/\sigma_y$  nas colunas e na viga, respectivamente, seguindo a prescrição da ECCS (1983).

A figura (6.3) exhibe os resultados obtidos no presente trabalho para um fator de carregamento  $\beta = 0.34$ . Esses resultados são comparados, posteriormente, nas tabelas (6.3) e (6.4), às respostas numéricas fornecidas por Liew *et al.* (1993b), Chan e Chui (2000) e Machado (2005), e também, aos resultados de Chen *et al.* (1996), que utilizaram o método da zona plástica. Essas tabelas exibem, para alguns nós das estruturas, valores de esforços internos obtidos no instante em que estes sistemas estruturais atingem o colapso.



Valores:

Presente: EP

Presente: (PR)

Chen *et al.*, (1990): [ZP]

Símbolos:

⊗ Locais de formação de rótula plástica

Figura 6.3 – Diagrama de momento fletor e carga axial dos pórticos.

Tabela 6.3 – Forças internas normalizadas nos elementos: bases engastadas.

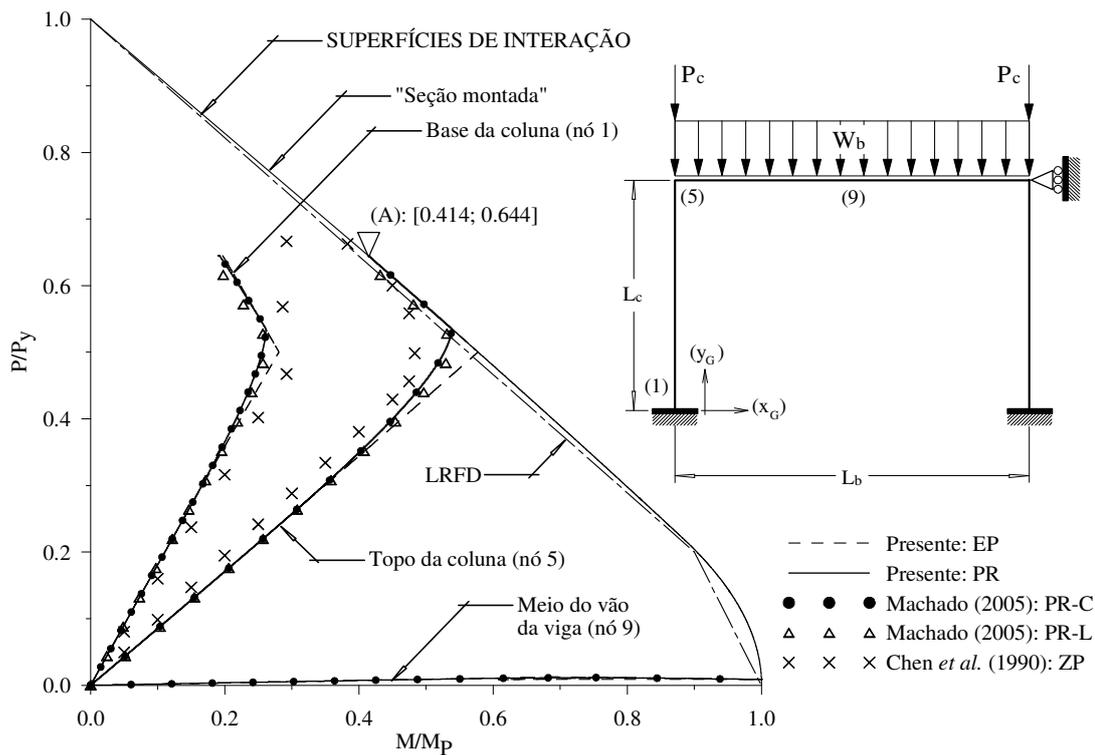
Referência	Momento na base da coluna	Momento no topo da coluna	Momento no meio do vão da viga	Carga axial na coluna direita
Presente: EP	0.268	0.414	1.080	0.644
Presente: PR	0.191	0.414	1.000	0.644
Machado (2005): PR-L	0.180	0.405	0.995	0.640
Machado (2005): PR-C	0.189	0.414	1.000	0.645
Liew <i>et al.</i> (19963b)	0.234	0.408	0.994	0.637
Chan e Chui (2000)	0.207	0.417	0.997	0.643
Chen <i>et al.</i> (1990): ZP	0.290	0.392	1.000	0.660

Tabela 6.4 – Forças internas normalizadas nos elementos: bases rotuladas.

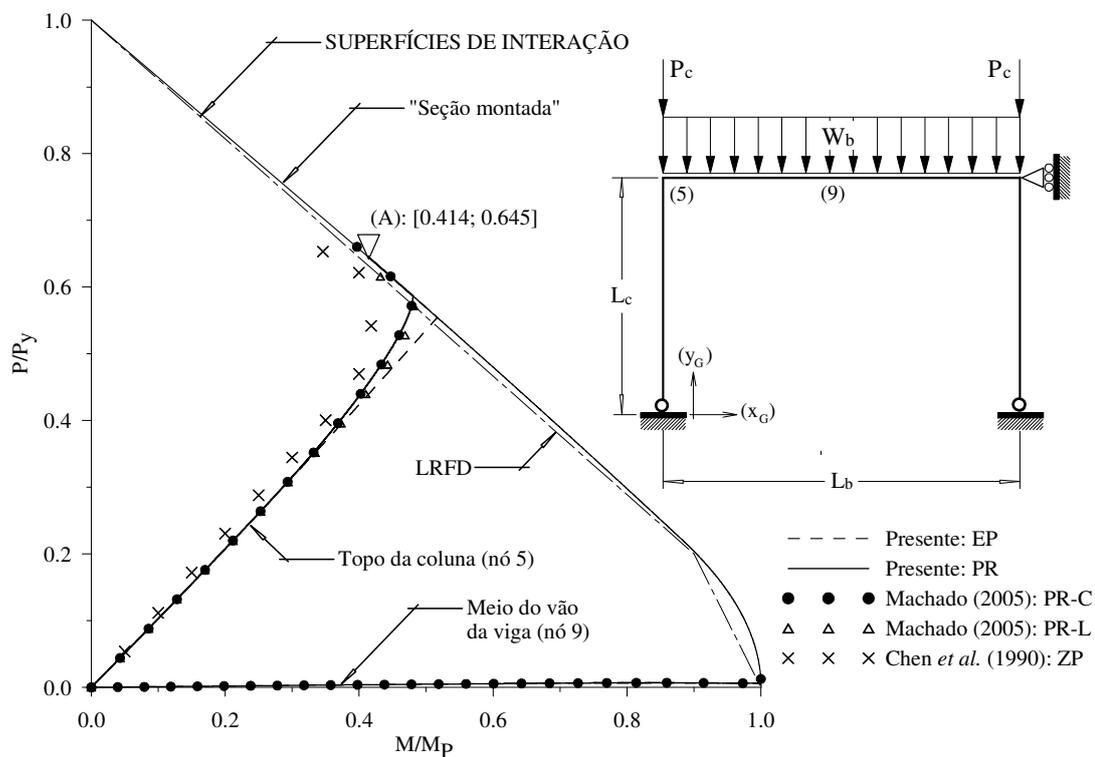
Referência	Momento no topo da coluna	Momento no meio do vão da viga	Carga axial na coluna direita
Presente: EP	0.363	1.000	0.684
Presente: PR	0.414	1.000	0.645
Machado (2005): PR-L	0.404	0.996	0.641
Machado (2005): PR-C	0.414	1.000	0.645
Liew <i>et al.</i> (19963b)	0.408	0.995	0.637
Chan e Chui (2000)	0.417	0.996	0.643
Chen <i>et al.</i> (1990): ZP	0.345	0.980	0.645

A partir das análises expostas nesta seção, conclui-se que as respostas do presente trabalho podem ser consideradas confiáveis, uma vez que se mostraram muito próximas àquelas fornecidas na literatura, tanto para a análise elasto-plástica (EP) quanto na análise plástica-refinada (PR). Esse fato é comprovado pelas tabelas (6.3) e (6.4), e, adicionalmente, através da figura (6.4) que fornece a variação das forças internas normalizadas nos elementos.

Por fim, na figura (6.5), são fornecidas as curvas carga-deslocamento dos pórticos em análise. Através destas curvas pretende-se evidenciar a boa precisão obtida para os esforços internos, com a reprodução da trajetória de equilíbrio dos exemplos analisados.

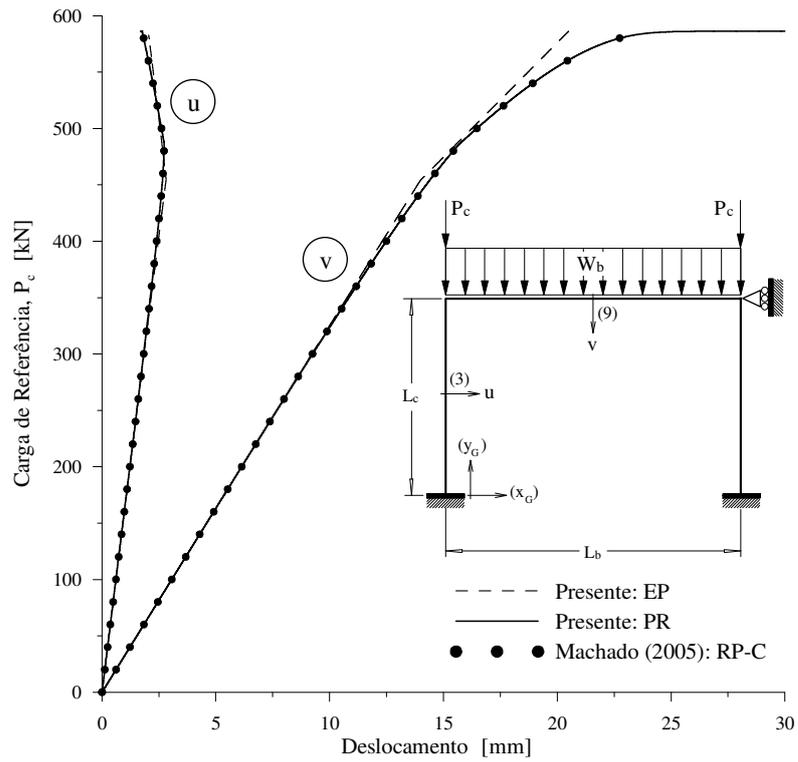


(a) Pórtico com bases engastadas.

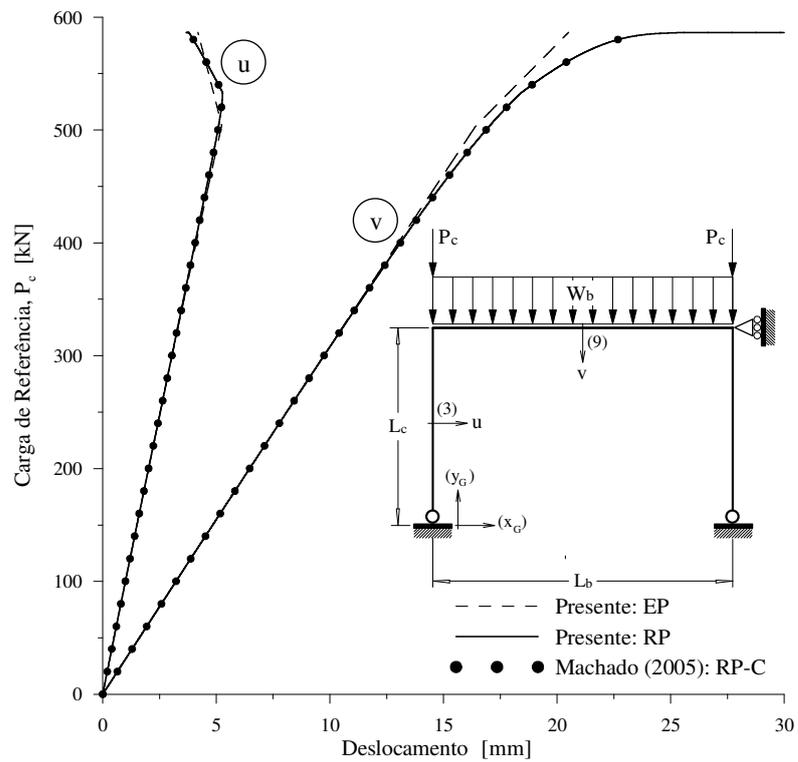


(b) Pórtico com bases rotuladas.

Figura 6.4 – Variação das forças internas nas colunas e na viga.



(a) Pórtico com bases engastadas.



(b) Pórtico com bases rotuladas.

Figura 6.5 – Trajetórias de equilíbrio para os pórticos com restrição lateral.

### 6.3 – PÓRTICO TIPO GALPÃO

Nesta seção é estudado o pórtico tipo galpão da figura (6.6), que é um dos portais de calibração usados pela ECCS (1983) para verificar a precisão e a confiabilidade dos programas computacionais para análise inelástica (Vogel, 1985; Ziemian, 1993). Esta figura apresenta ainda as características geométricas, as propriedades físicas e o carregamento considerado nas análises. São aplicadas, inicialmente, à estrutura imperfeições geométricas de valor  $1/200$ , no prumo das colunas, e  $1/288$  na inclinação das vigas. Este pórtico desperta interesse particular por se tratar de um sistema estrutural esbelto, e também, por ser susceptível aos efeitos da flexo-compressão (inelasticidade do aço). Adicionalmente, na figura (6.6b), apresenta-se a discretização adotada para o problema. Empregou-se, para modelar cada coluna e viga de cobertura, respectivamente, 4 e 20 elementos finitos híbridos.

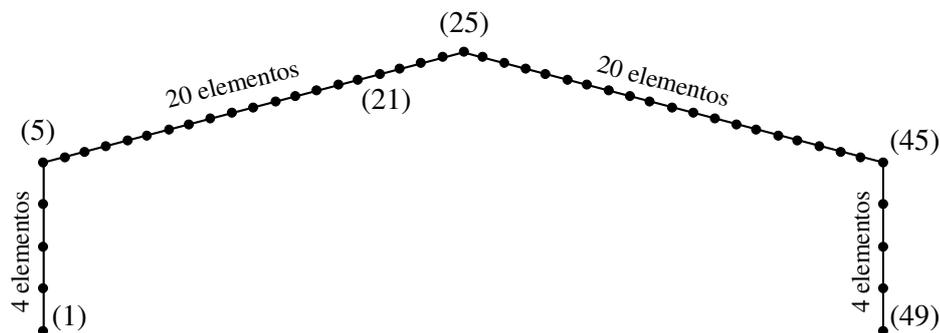
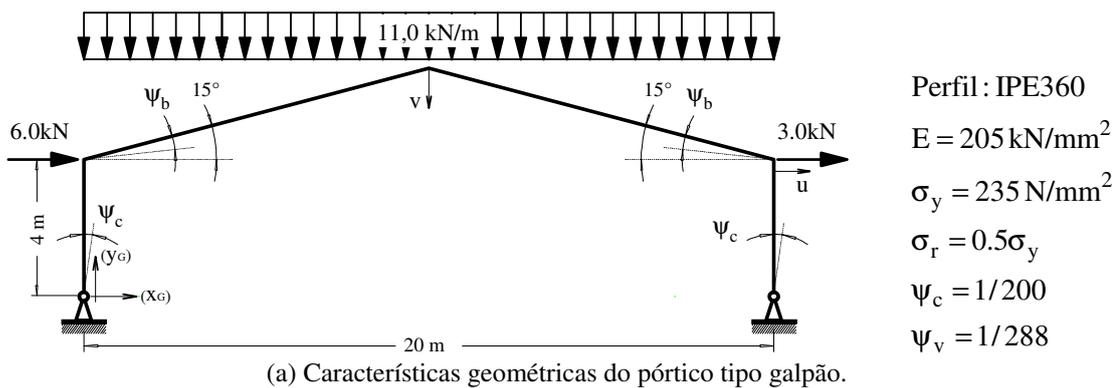


Figura 6.6 – Pórtico tipo galpão (Chan e Chui, 2000; Machado, 2005).

A tabela (6.5) mostra as propriedades geométricas do perfil metálico IPE360, utilizado na estrutura. Pelo mesmo motivo enunciado na seção (6.2), é fornecida nesta tabela a espessura equivalente da mesa ( $t_{fe}$ ).

Tabela 6.5 – Propriedades geométricas das seções transversais.

Perfil	Área (A) [mm <sup>2</sup> ]	Inércia (I) [mm <sup>4</sup> ]	Módulo Elástico (W) [mm <sup>3</sup> ]	Módulo Plástico (Z) [mm <sup>3</sup> ]	(d) [mm]	(t <sub>w</sub> ) [mm]	(B <sub>f</sub> ) [mm]	(t <sub>fe</sub> ) [mm]
IPE360	7273	162.7x10 <sup>6</sup>	903x10 <sup>3</sup>	1019x10 <sup>3</sup>	360	8.0	170	13.54

Semelhantemente ao exemplo anterior, foi empregada aqui, para traçado do caminho não-linear de equilíbrio da estrutura, a técnica do comprimento de arco ( $\Delta\lambda^0_1 = 0.005$ ), juntamente com a norma mínima dos deslocamentos, escolhida para estratégia de iteração. As trajetórias de equilíbrio ilustradas através das figuras (6.7) a (6.10) foram obtidas utilizando-se, como parâmetro de controle, os deslocamentos dos nós 25 e 45 e o fator de carga  $\lambda$ .

Nas tabelas (6.6) e (6.7) encontra-se a comparação entre os fatores de carga limite extraídos das análises do presente trabalho e aqueles fornecidos na literatura (Vogel, 1985; Chen *et al.*, 1996; Chan e Chui, 2000; Machado, 2005).

Tabela 6.6 – Comparação entre os fatores de carga limite  $\lambda$  (análise elasto-plástica).

Pres.	Vogel (1985) ZP		Machado (2005) EP-L		Machado (2005) EP-C	
	$\lambda$	desv.	$\lambda$	desv.	$\lambda$	desv.
0.97	0.96	1.0	1.04	6.7	1.05	7.6

desv. = desvio [%]; Pres. = Presente trabalho.

Tabela 6.7 – Comparação entre os fatores de carga limite  $\lambda$  (análise plástica-refinada).

Pres.	Vogel (1985) ZP		Vogel (1985) PR		Chen <i>et al.</i> (1996)		Chan e Chui (2000)		Machado (2005) PR-L		Machado (2005) PR-C	
	$\lambda$	desv.	$\lambda$	desv.	$\lambda$	desv.	$\lambda$	desv.	$\lambda$	desv.	$\lambda$	desv.
0.95	1.07	11.2	0.96	1.0	0.95	0.0	0.97	2.0	0.94	1.0	0.95	0.0

desv. = desvio [%]; Pres. = Presente trabalho.

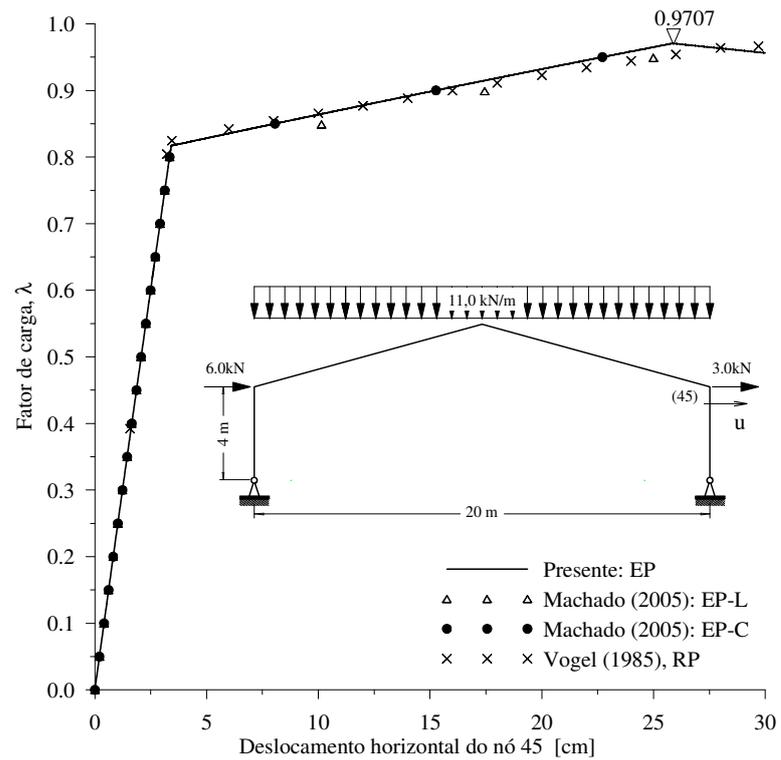


Figura 6.7 – Trajetória de equilíbrio: análise elasto-plástica.

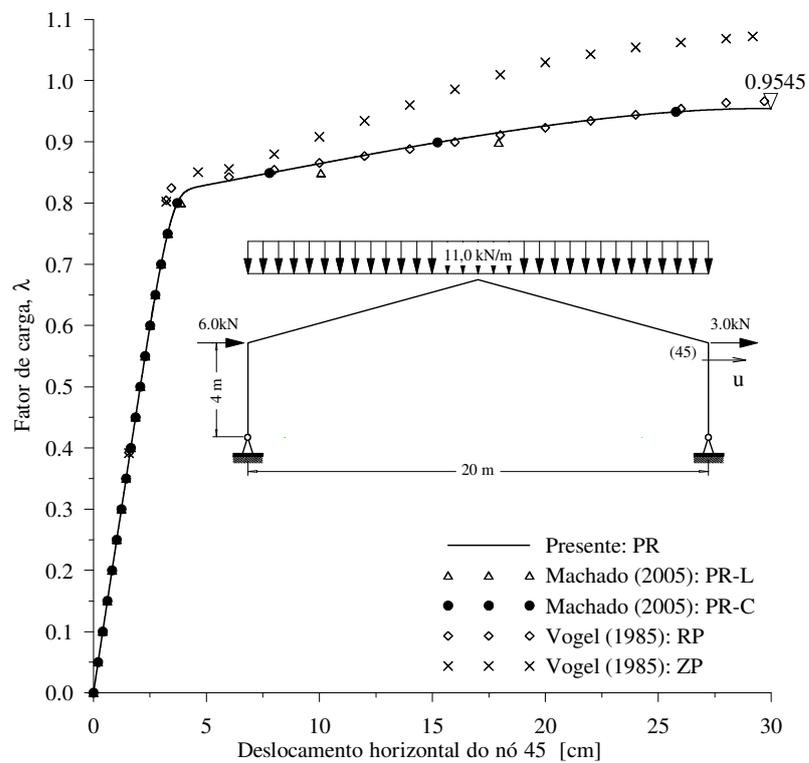


Figura 6.8 – Trajetória de equilíbrio: análise plástica-refinada.

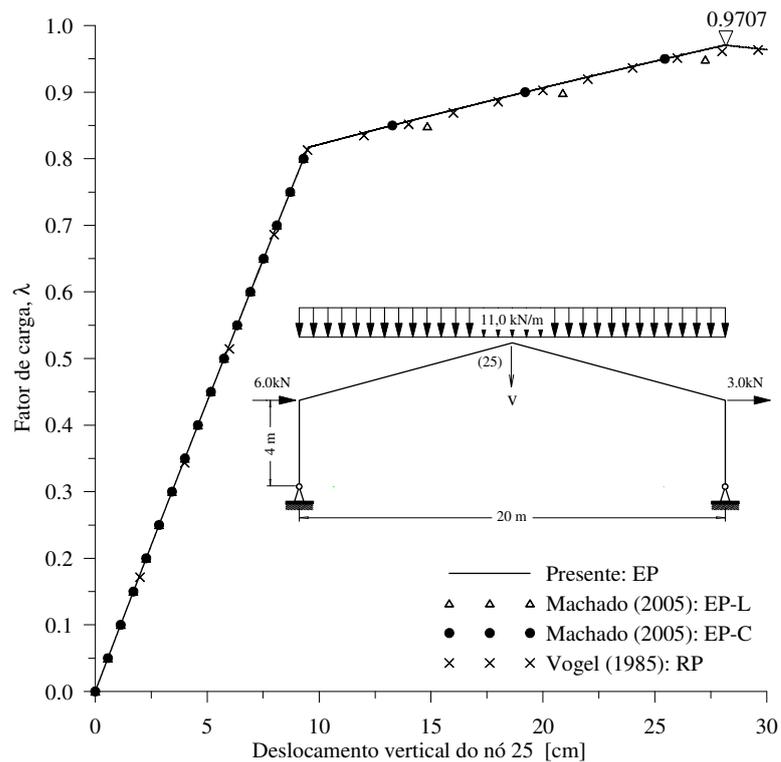


Figura 6.9 – Trajetória de equilíbrio: análise elasto-plástica.

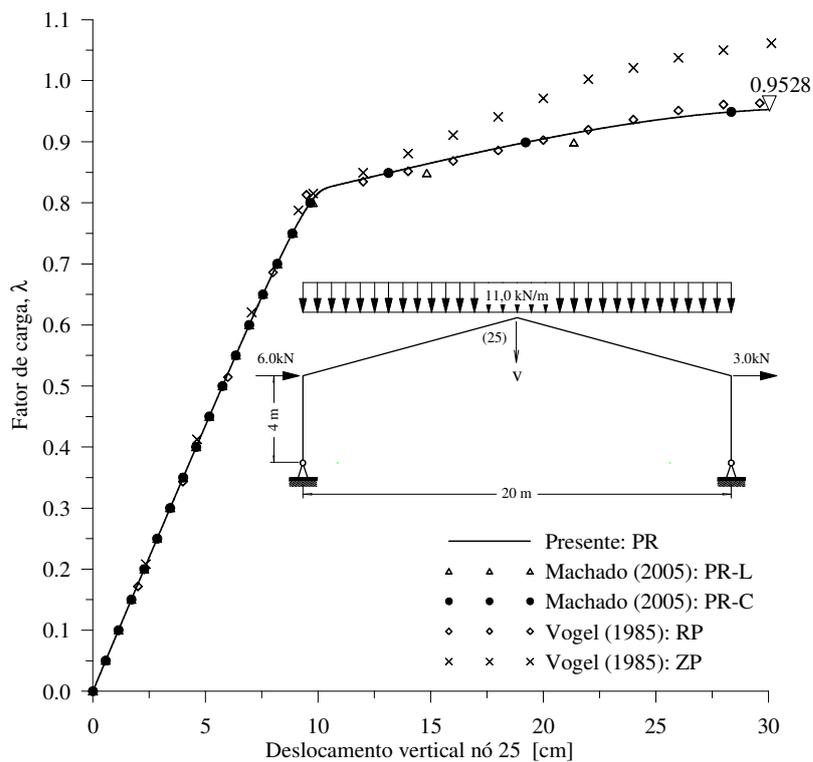
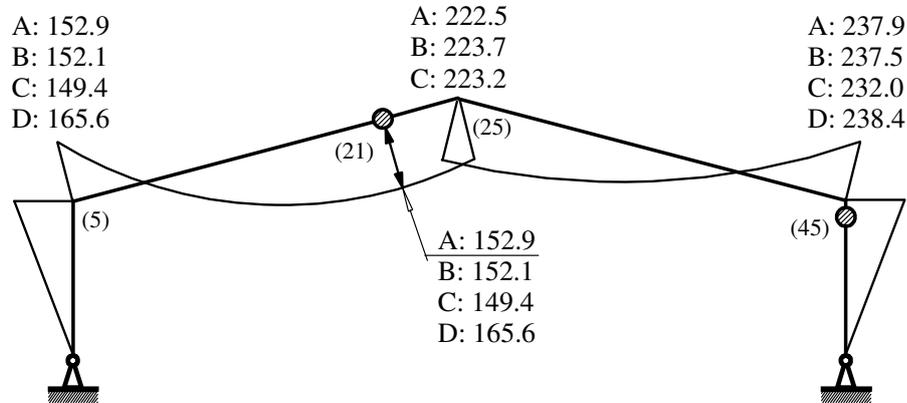
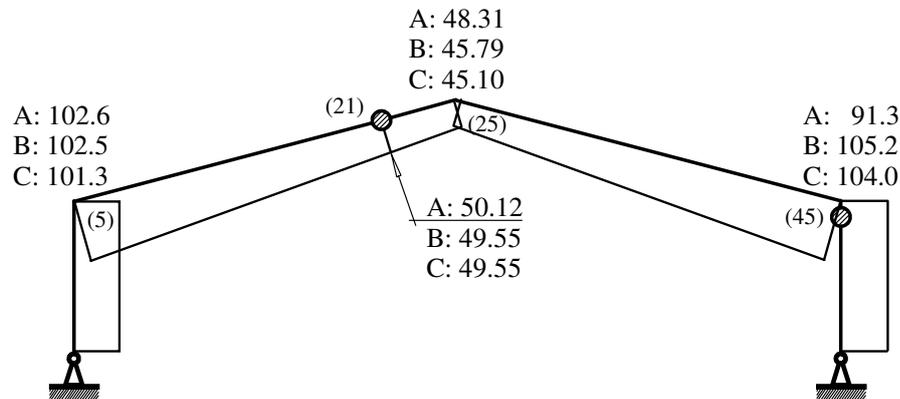


Figura 6.10 – Trajetória de equilíbrio: análise plástica-refinada.

Adicionalmente, na figura (6.11) podem ser comparados os momentos fletores e as cargas axiais no instante em que o sistema estrutural atinge o colapso.



(a) Diagrama de momento fletor [kN.m].



(b) Diagrama de força axial [kN].

Valores:

- A: Presente: PR ( $\lambda = 0.9545$ )
- B: Machado (2005): PR-C ( $\lambda = 0.9545$ )
- C: Machado (2005): PR-L ( $\lambda = 0.9436$ )
- D: Vogel (1985): ZP ( $\lambda = 0.96$ )

Símbolos:

- ⊗ - Rótula plástica

Figura 6.11 – Diagramas de esforços no instante do colapso da estrutura.

Novamente, observa-se aqui a boa concordância entre os resultados obtidos com o presente trabalho e as respostas da literatura. Os dados das tabelas (6.6) e (6.7) comprovam essa observação.

Nota-se, a partir dos valores mostrados na tabela (6.6), que a carga crítica limite extraída da análise elasto-plástica (presente trabalho) mostrou-se próxima ao resultado obtido por Vogel (1985), que utilizou o método da zona plástica. Entretanto, ao se

comparar a mesma carga crítica às respostas de Machado (2005), observa-se um ligeiro desvio nos resultados. Já na análise plástica-refinada, conforme dados da tabela (6.7), a carga crítica limite obtida no presente trabalho mostrou maior divergência com as respostas de Vogel (1985) para a formulação PR, no entanto, acompanhou os resultados dos demais pesquisadores.

As observações supracitadas podem ser decorrentes de inconsistências numéricas provenientes das aproximações adotadas para simular as condições de vinculação entre as colunas e os apoios (condições de contorno), visto que o sistema estrutural estudado possui esbelteza elevada. Por outro lado, também em decorrência da elevada esbelteza da estrutura, os efeitos não-lineares geométricos podem ter sido amplificados, mascarando, dessa forma, os efeitos inelásticos. Isso pode explicar o fato do resultado obtido com a análise elasto-plástica, no presente trabalho, ser tão próximo da resposta plástica-refinada.

Para os demais resultados da literatura (Voguel, 1985; Chen *et al.*, 1996; Chan e Chui, 2000; Machado, 2005), provenientes da análise plástica-refinada, observa-se boa aproximação entre os valores comparados, uma vez que o desvio máximo calculado foi 2%.

#### **6.4 – PÓRTICOS SEMI-RÍGIDOS CONTRAVENTADOS**

Para encerrar o conjunto de análises realizadas nesta dissertação, são estudados aqui dois pórticos semi-rígidos de quadros simples contraventados, com dois pavimentos e diferentes condições de apoio, como ilustra a figura (6.12), que contém, ainda, as características geométricas e de carregamento destes sistemas estruturais.

Já a figura (6.13) mostra o modelo discreto empregado na simulação numérica da estrutura sendo, as propriedades geométricas reais da seção transversal das vigas e das colunas assim como das diagonais (contraventamentos), apresentadas na tabela (6.8).

Através destes exemplos, pretende-se avaliar o comportamento do elemento finito híbrido na simulação de sistemas estruturais que associam todos os efeitos não-lineares (segunda ordem, semi-rigidez e inelasticidade) discutidos no escopo desta dissertação. Adicionalmente, objetiva-se averiguar as variações induzidas no valor da carga limite,

decorrentes do tipo escolhido para a curva momento rotação da ligação semi-rígida, e também, da variação nas condições de apoio das colunas.

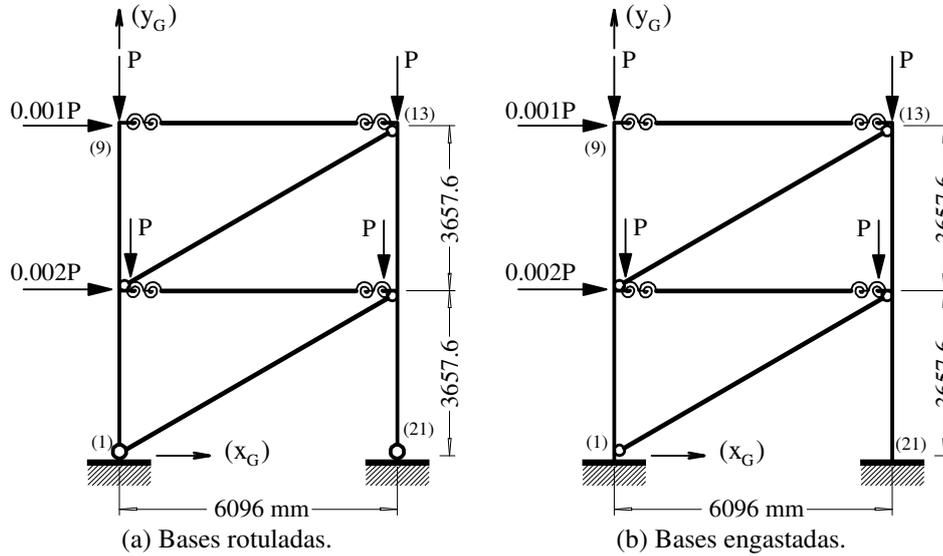
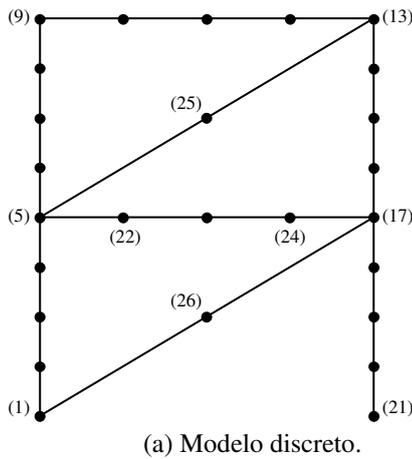


Figura 6.12 – Pórticos semi-rígidos contraventados (Chan e Chui, 2000).



(a) Modelo discreto.

<p>COLUNAS :</p> <p>Perfil : W310x143</p> <p><math>E = 2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2</math></p> <p><math>\sigma_y = 250 \text{ N/mm}^2</math></p> <p><math>\sigma_r = 0.5\sigma_y</math></p>	<p>DIAGONAIS:</p> <p>Perfil: L(76x76x127) mm</p> <p><math>E = 2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2</math></p> <p><math>\sigma_y = 250 \text{ N/mm}^2</math></p> <p><math>\sigma_r = 0.3\sigma_y</math></p>
<p>VIGAS :</p> <p>Perfil : W360x72</p> <p><math>E = 2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2</math></p> <p><math>\sigma_y = 250 \text{ N/mm}^2</math></p> <p><math>\sigma_r = 0.3\sigma_y</math></p>	

(b) Propriedades físicas.

Figura 6.13 – Modelo discreto dos pórticos semi-rígidos contraventados.

Tabela 6.8 – Propriedades geométricas das seções transversais.

Barra	Área (A) [cm <sup>2</sup> ]	Inércia (I) [cm <sup>4</sup> ]	Módulo Elástico (W) [cm <sup>3</sup> ]	Módulo Plástico (Z) [cm <sup>3</sup> ]	(d) [cm]	(t <sub>w</sub> ) [cm]	(B <sub>f</sub> ) [cm]	(t <sub>e</sub> ) [cm]
Colunas	181.935	34672.078	2149.999	2420.041	32.31	1.39	30.89	2.32
Vigas	90.968	20187.224	1150.044	1279.993	35.00	0.86	20.39	1.55
Diagonais	11.740	191.600	34.896	72.524	4.25	0.50	15.61	0.50

Quatro tipos de ligações semi-rígidas, entre a viga e a coluna foram considerados nas análises, a saber; tipo A (ligação com cantoneira de alma simples), tipo B (ligação com cantoneiras de topo e assento), tipo C (ligação com chapa de topo) e tipo D (ligação com chapa de topo estendida), sendo as duas primeiras mais flexíveis que as duas últimas. Estas ligações foram ilustradas na figura (2.7) e os parâmetros de ajuste, obtidos experimentalmente para a curva momento-rotação ( $M-\phi_c$ ), encontram-se na tabela (2.1).

Considerou-se ainda, em cada tipo de ligação, duas hipóteses para representação da curva  $M-\phi_c$ , ou seja, adotou-se o modelo linear, no qual os incrementos de momento são sempre proporcionais ao incrementos de rotação e, o modelo exponencial de Chen-Lui (Lui e Chen, 1988).

No traçado do caminho de equilíbrio não-linear empregou-se a técnica do comprimento de arco ( $\Delta\lambda_1^0 = 0.1$ ) aliada à norma mínima dos deslocamentos residuais, escolhida como estratégia de iteração.

Adotou-se também, em todos os casos, a análise plástica refinada (PR) para acompanhamento da degradação da rigidez das seções transversais.

Na tabela (6.9), na qual se equiparam os valores de carga limite obtidos com o presente trabalho e aqueles fornecidos por Chan e Chui (2000), pode-se avaliar a precisão dos resultados alcançados. Adicionalmente, para reforçar os dados dessa tabela, são mostradas nas figuras (6.14) a (6.17) e nas figuras (6.18) a (6.21) as trajetórias de equilíbrio obtidas para o pórtico contraventado sobre apoios rotulados e sobre bases engastadas, respectivamente.

Tabela 6.9 – Comparação entre os valores de carga crítica [kN] para os pórticos contraventados.

Ligação ( $S_c$ não-linear)	Bases rotuladas			Bases engastadas		
	Chan e Chui (2000)	Presente	desv.	Chan e Chui (2000)	Presente	desv.
Tipo A	2130.698	2234.0986	4.6	2135.146	2242.0577	4.8
Tipo B	2130.698	2232.8317	4.5	2135.146	2243.1079	4.8
Tipo C	2130.698	2232.1386	4.5	2135.146	2243.0220	4.8
Tipo D	2130.698	2227.8243	4.3	2135.146	2241.4403	4.7

desv. = desvio [%].

A influência do contraventamento no valor da carga limite dos sistemas estruturais estudados pode ser averiguada através da tabela (6.10) que compara, em ambas condições de apoio consideradas, a carga limite dos pórticos contraventados ou não, do presente trabalho, com os de Chan e Chui (2000). A partir dos dados desta tabela observa-se um aumento na capacidade de suporte de carga axial das estruturas promovido pela introdução das barras diagonais de contraventamento. Essa melhoria é mais pronunciada para o caso de pórticos com apoios articulados e, em particular, no caso das ligações mais flexíveis, como é o caso da ligação tipo A.

Tabela 6.10 – Comparação entre os valores de carga limite [kN] para os pórticos sem contraventamento e contraventados.

Ligação ( $S_c$ não-linear)	Bases rotuladas			Bases engastadas		
	Chan e Chui (2000) sem contr.	Presente com contr.	$P_{cr1}/P_{cr2}$	Chan e Chui (2000) sem contr.	Presente com contr.	$P_{cr1}/P_{cr2}$
Tipo A	395.891	2234.0986	5.64	2135.146	2242.0577	1.05
Tipo B	907.437	2232.8317	2.46	2135.146	2243.1079	1.05
Tipo C	1098.711	2232.1386	2.03	2135.146	2243.0220	1.05
Tipo D	1699.221	2227.8243	1.31	2135.146	2241.4403	1.05

Contr. = contraventamento;  $P_{cr1}$  = carga crítica para o pórtico contraventado;  $P_{cr2}$  = carga crítica para o pórtico sem contraventamento.

Nota-se ainda que, ao se contraventar os pórticos semi-rígidos, a inelasticidade do aço passa a direcionar o comportamento do sistema estrutural, posto que a carga limite quase não se altera à medida que a rigidez das ligações aumenta, principalmente para o pórtico sobre bases engastadas.

Por fim, a tabela (6.11), exhibe os valores de carga limite obtidos para ligações com modelo linear e exponencial (não-linear).

Tabela 6.11 – Comparação entre os valores de carga limite [kN] para os modelos de ligação linear e não-linear.

Ligação	Presente Trabalho - bases rotuladas			Presente Trabalho - bases engastadas		
	$S_c$ Linear	$S_c$ Exponencial	$P_{crL}/P_{crNL}$	$S_c$ Linear	$S_c$ Exponencial	$P_{crL}/P_{crNL}$
Tipo A	2272.9224	2234.0986	1.01	2274.0387	2242.0577	1.01
Tipo B	2272.9384	2232.8317	1.01	2274.0540	2243.1079	1.01
Tipo C	2272.9612	2232.1386	1.01	2274.0937	2243.0220	1.01
Tipo D	2272.9920	2227.8243	1.02	2273.8199	2241.4403	1.01

$P_{crL}$  = carga crítica para os modelos lineares de ligação;  $P_{crNL}$  = carga crítica para os modelos não-lineares de ligação.

Ao se comparar os valores mostrados na tabela (6.11), observa-se, como esperado, que a adoção de um modelo menos refinado (modelo linear), para simular o comportamento semi-rígido da ligação, pode conduzir a valores de carga crítica superiores àqueles fornecidos por modelos de ligação mais realistas (modelos não-lineares). Entretanto, a introdução das barras diagonais de contraventamento, como mencionado anteriormente, torna o efeito das ligações semi-rígidas quase imperceptível, conduzindo assim, a valores muito próximos de carga limite para cada um dos tipos de ligação considerados (A, B, C e D).

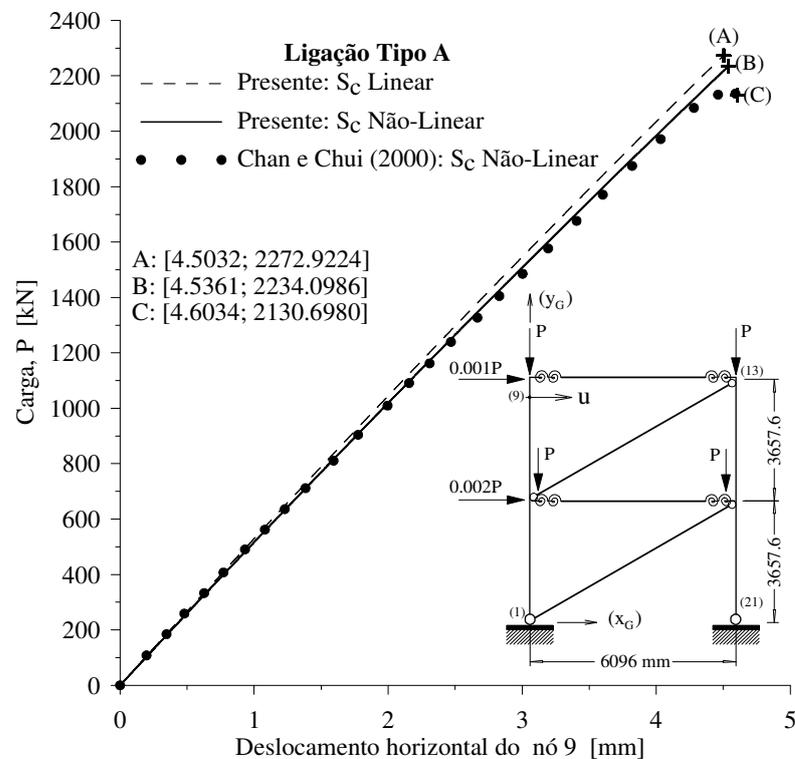


Figura 6.14 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases rotuladas (Ligação tipo A).

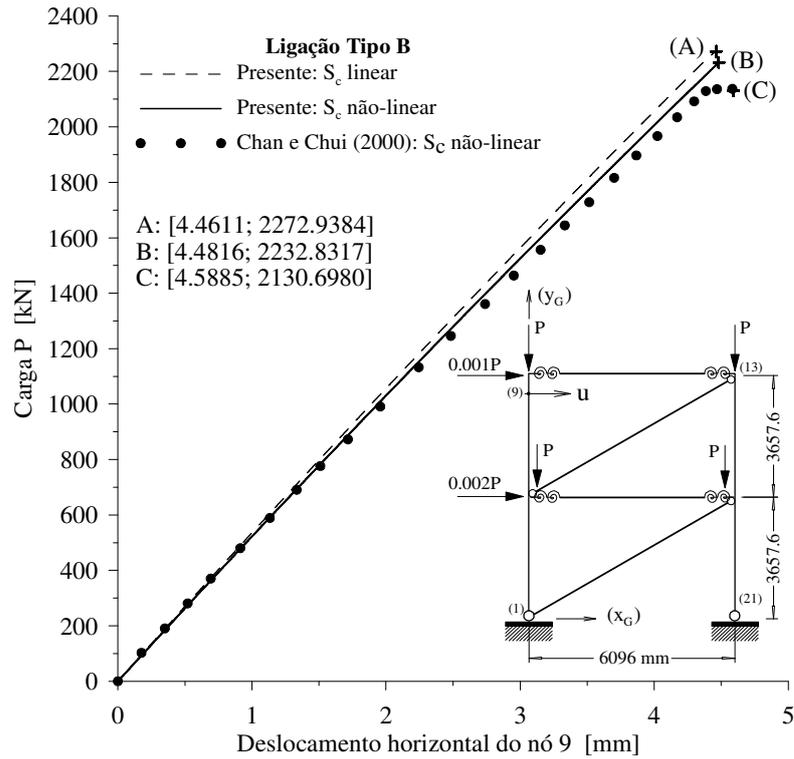


Figura 6.15 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases rotuladas (Ligação tipo B).

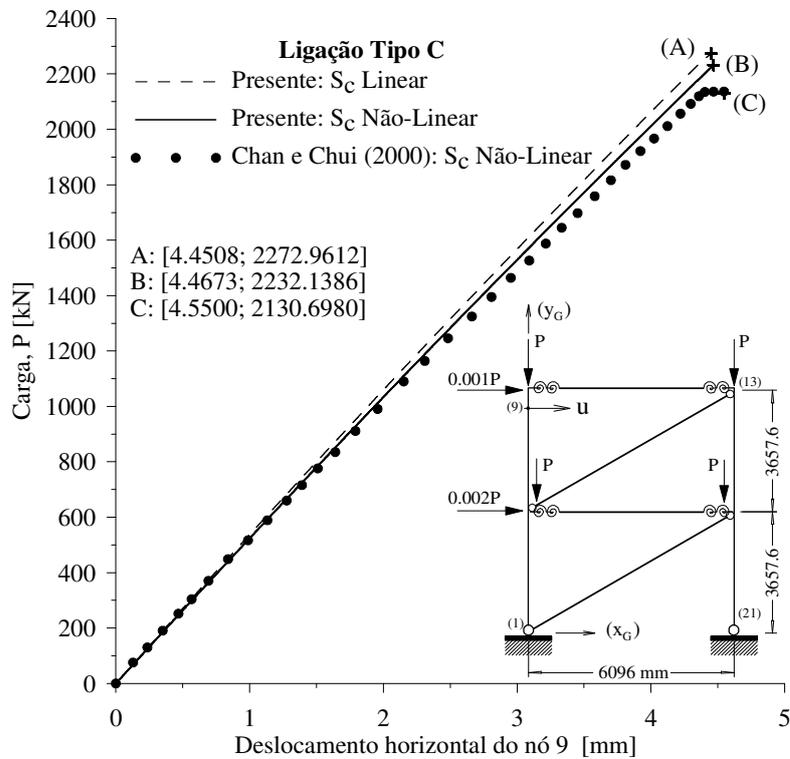


Figura 6.16 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases rotuladas (Ligação tipo C).

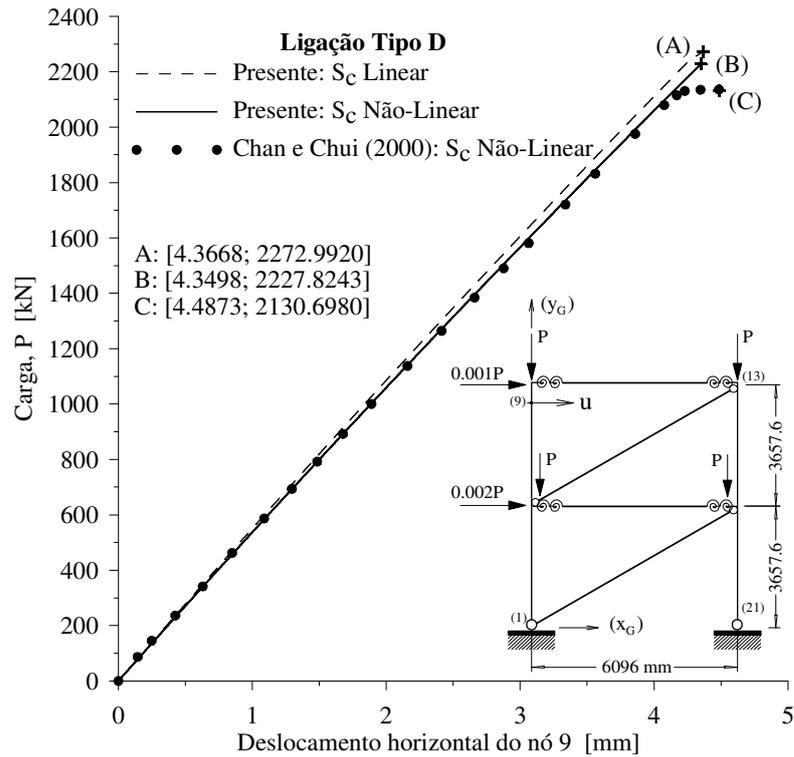


Figura 6.17 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases rotuladas (Ligação tipo D).

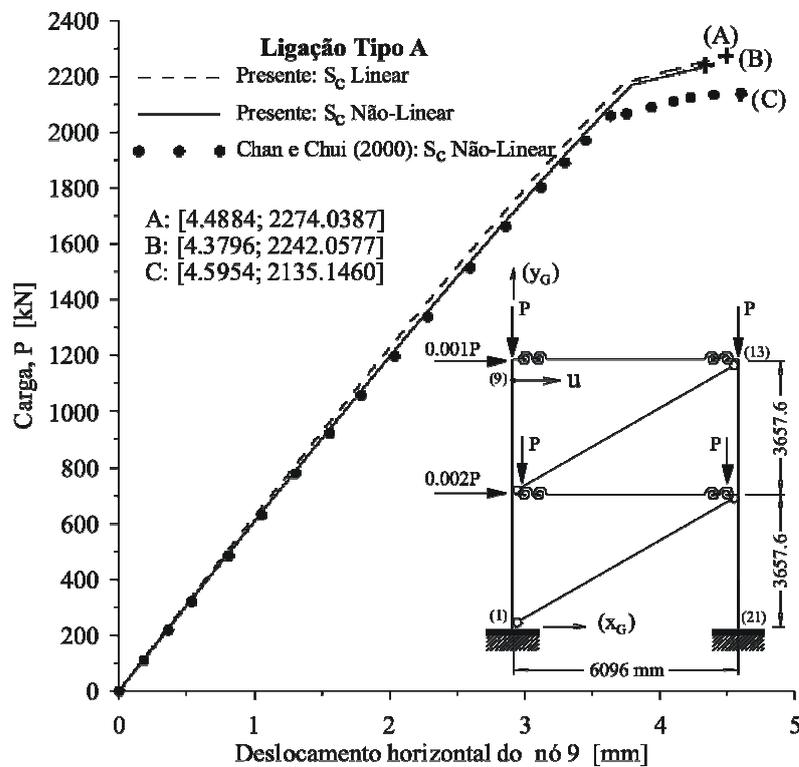


Figura 6.18 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases engastadas (Ligação tipo A).

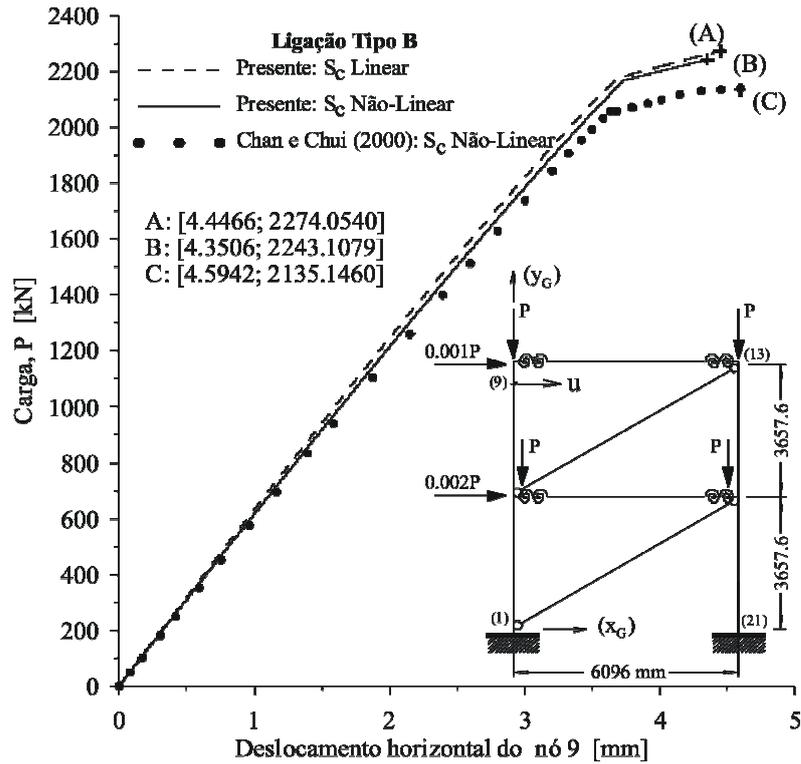


Figura 6.19 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases engastadas (Ligação tipo B).

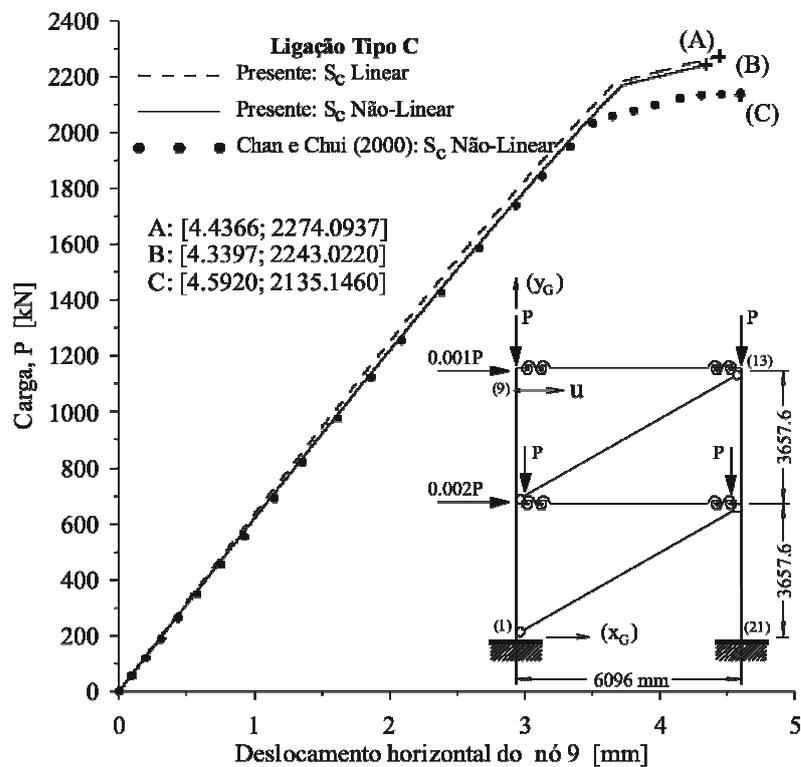


Figura 6.20 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases engastadas (Ligação tipo C).

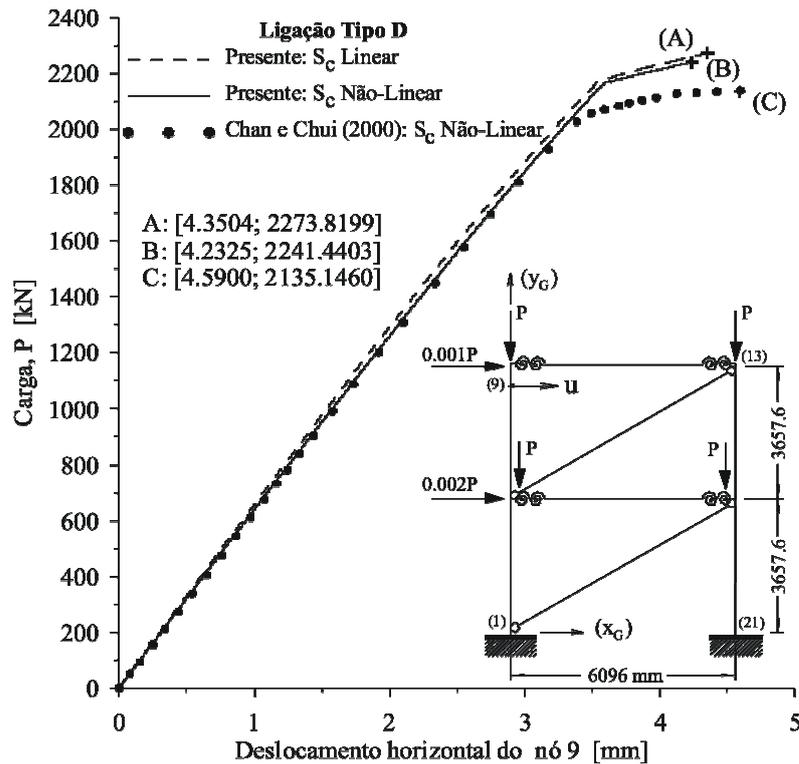


Figura 6.21 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico contraventado com bases engastadas (Ligação tipo D).

## 6.5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista a precisão dos resultados alcançados com o presente trabalho, mostrados neste capítulo, pode ser observado, novamente, o bom desempenho computacional do elemento finito híbrido de pórtico plano, tanto na simulação dos efeitos inelásticos isolados quanto na associação de todos os efeitos não-lineares abordados nesta dissertação.

As análises dos exemplos das seções (6.2) e (6.3) mostram a importância em se adotar, quando possível, formulações inelásticas mais refinadas, capazes de acompanhar a redução gradativa da rigidez da seção transversal. Assim, resultados mais realistas, e, possivelmente, mais econômicos podem ser alcançados, uma vez que, nas formulações elasto-plásticas, a reserva de resistência da seção transversal não é contabilizada, pois, ao se atingir a tensão de escoamento, uma rótula plástica é formada.

A partir dos resultados mostrados na seção (6.4), conclui-se que a introdução de barras diagonais de contraventamento apresenta maior eficiência para as estruturas

flexíveis, pois, além de reduzirem a amplitude dos deslocamentos laterais, são capazes de aumentar, consideravelmente, a capacidade de suporte às cargas verticais do sistema estrutural.

Adicionalmente, tendo em vista a pequena variação no valor da carga limite obtida para os quatro tipos de ligações estudadas (A, B, C e D) e para as duas condições de apoio (rotula e engaste), observa-se que as ligações mais flexíveis podem representar a solução mais econômica para as estruturas contraventadas, visto que as ligações rígidas têm maior custo e não influenciam o valor da carga limite para esses pórticos.

# 7

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

## 7.1 – INTRODUÇÃO

Após as análises realizadas nos capítulos 4, 5 e 6, para sistemas estruturais reticulados planos (rotulados, semi-rígidos e rígidos), são apresentadas na seção (7.1) algumas conclusões gerais a respeito dos resultados obtidos.

Esta dissertação é encerrada na seção (7.2), onde são fornecidas algumas sugestões para pesquisas futuras.

## 7.2 – CONCLUSÕES

Com a finalidade de avaliar a eficiência computacional do elemento finito híbrido não-linear de pórtico plano, tanto na simulação isolada dos efeitos não-lineares como na combinação de todos esses efeitos e, adicionalmente, com o objetivo de complementar as análises numéricas realizadas por Rocha (2006), vários exemplos de problemas estruturais foram apresentados nos capítulos 4, 5 e 6. Diante dos resultados obtidos com essas análises, algumas conclusões e comentários são necessários.

Com as respostas extraídas dos problemas clássicos de equilíbrio e estabilidade, apresentados no capítulo 4 e, reforçando as considerações mostradas na seção (4.5), conclui-se que o elemento finito híbrido mostrou-se eficiente para simular o comportamento altamente não-linear dos problemas estruturais estudados. Nota-se que as respostas fornecidas pelas malhas menos refinadas (em geral, 1 e 2 elementos híbridos) não foram capazes de reproduzir, satisfatoriamente, os resultados da literatura. Esse fato pode ter sido decorrente do emprego de uma formulação não-linear simplificada. No entanto, esse problema foi facilmente contornado com o refinamento de alguns modelos discretos, o que também é observado no capítulo 4.

Para simulação do comportamento dos sistemas estruturais semi-rígidos mostrados no capítulo 5, observa-se novamente, em adição às considerações da seção (5.5), que o elemento finito híbrido apresentou um desempenho satisfatório. Cabe destacar ainda que a rigidez das ligações, assim como as imperfeições geométricas, sempre que possível, devem ser consideradas no modelo discreto da estrutura, pois estes fatores possuem grande relevância e são capazes de influenciar o valor da carga crítica, e até mesmo, o mecanismo de colapso do sistema estrutural, podendo conduzir a rupturas bruscas para algumas situações de carregamento. Sugere-se também, para o caso da coluna semi-rígida da seção (5.2), análises adicionais com valores mais elevados para a amplitude da imperfeição geométrica  $\psi$ , uma vez que os resultados de carga crítica obtidos com as três amplitudes consideradas neste trabalho formam muito próximos, o que dificultou uma avaliação mais precisa do efeito destas imperfeições no comportamento global da coluna. Adicionalmente, uma análise de convergência pode ser realizada em trabalhos futuros, com o objetivo de melhorar a qualidade das respostas obtidas.

Alguns comentários ainda podem ser feitos baseados nos resultados obtidos das análises dos capítulos anteriores, a saber:

**i.** como foi comprovado por Rocha (2006), e agora, no presente trabalho, pode-se afirmar que a “*Análise Avançada*”, aliada à estratégias de solução não-linear adequadas, é uma ferramenta capaz de capturar o limite de resistência e de estabilidade de sistemas estruturais, sejam eles rígidos, semi-rígidos ou rotulados;

**ii.** a “*Análise Avançada*” pode ser justificada, hoje, pela existência de computadores pessoais de alto desempenho (velocidade de processamento e alta capacidade para armazenamento de dados);

**iii.** problemas com comportamento fortemente não-linear exigem que sejam empregadas estratégias de solução mais apuradas, como por exemplo, o método de Newton-Raphson padrão aliado à técnicas como a norma mínima dos deslocamentos residuais, o comprimento de arco cilíndrico ou o incremento de rigidez generalizada GSP (Rocha, 2000; Galvão, 2000);

**iv.** uma discretização refinada do sistema estrutural pode compensar eventuais simplificações na formulação.

### 7.3 – SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Diante da variedade de problemas estruturais que necessitam de melhor compreensão, são apresentadas a seguir sugestões para futuros trabalhos que podem usufruir da base computacional existente, dando continuidade assim ao projeto de expandi-la. Dessa maneira, sugerem-se os seguintes temas:

- i. a consideração de outros efeitos não-lineares como por exemplo o *empenamento e a torção* dos membros, na “*Análise Avançada*” de estruturas;
- ii. a implementação computacional de outras *formulações para análise inelásticas* e para o tratamento das *ligações semi-rígidas*;
- iii. a realização de *análises paramétricas* usando a base computacional existente;
- iv. a *análise dinâmica* não-linear de pórticos metálicos incluindo os efeitos de segunda ordem, da inelasticidade e das ligações semi-rígidas;
- v. a “Análise Avançada” de estruturas em aço sob **condições de incêndio**;
- vi. a “Análise Avançada” de **estruturas mistas**.
- vii. o desenvolvimento de um *pré-processador gráfico* para auxiliar a modelagem dos sistemas estruturais e a *expansão do pós-processador gráfico* para que os recursos de edição das imagens sejam aprimorados.



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AISC (1986), *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*, 1<sup>st</sup> edn., American Institute of Steel Construction, AISC, Chicago, IL.
- AISC (2005), *Steel Construction Manual*, American Institute of Steel Construction, 13th edn, Chicago, IL.
- Al-Bermani, F. G. A. et al. (1994), Cyclic and Seismic Response of Flexibly Jointed Frames, *Eng. Struct.*, v. 16(4), p. 249-255.
- Alvarenga, A.R. e Silveira, R.A.M. (2005), Aspectos importantes na análise avançada de colunas de aço, *Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congresso in Computational Methods in Engineering (XXVI CILAMCE)*, Guarapari/ES, Brasil (CD-ROM).
- Alvarenga, A.R. e Silveira, R.A.M. (2006), A configuração geométrica inicial na análise avançada de portais planos de aço, *Revista Escola de Minas (REM)*, v.59, n. 2, p. 185-197.
- Alves, R.V. (1993a), Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Total. 1º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- Alves, R.V. (1993b), Formulação para Análise Não-Linear Geométrica em Referencial Lagrangiano Atualizado. 3º Seminário de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- Alves, R.V. (1995), *Instabilidade Não-Linear Elástica de Pórticos Espaciais*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- Ang, K.M. e Morris, G.A. (1984), Analysis of Three-dimensional Frames with Flexible Beam - column Connections. *Can. J. Civil Eng.*, v. 11, p. 245-254.
- AS 4100 (1990), *Steel Structures*, Standards Australia, Sydney, Australia.
- Assaid, L.M.B. (2001), *Método Plástico Aplicado às Estruturas Aporticadas de Aço*, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Azizinamini, A., Bradburn, J. H. e Radziminski, J. B. (1985), Static and Cyclic Behavior of Semi-rigid Steel Beam-Column Connections, Technical Report, Dept. of Civil Engineering, Univ. of South Carolina, Columbia, SC.
- Batoz, J.L. e Dhatt, G. (1979), Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 14, p. 1262-1267.
- BS 5950 (1990), *Structural Use of Steelwork in Buildings*. Part 1, British Standards Institution, London, England.
- Carneiro, D.S. (2000), *Análise Plástica Aplicada a Estruturas Aporticadas em Aço*, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Chajes, A. e Churchill, J.E. (1987), Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, No. 6, p. 1221-1235.
- Chan, S.L. (1994), Vibration and Modal Analysis of Steel Frames with Semi-rigid Connections, *Eng. Struct.*, v. 16(1), p. 25-31.
- Chan, S.L. e Chui, P.P.T. (1997), A Generalised Design-based Elasto-plastic Analysis of Steel Frames by Sections Assemblage Concept, *Journal of Engineering Structures*, v. 19(8), p. 628-636.
- Chan, S.L. e Chui, P.P.T. (2000), *Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-rigid Connections*, Elsevier, Oxford.
- Chan, S.L. e Zhou, Z.H. (2004), Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member. II: Three hinges along member, *Journal of Structural Engineering*, v. 130(4), p. 545-553.

- Chen, W.F. and Lui, E.M. (1991), *Stability Design of Steel Frames* CRC, Press, Inc., Boca Raton, Fla.
- Chen, W.F. e Kim, S-E. (1997), *LRFD Steel Design using Advanced Analysis*. CRC Press, Inc., Flórida, USA.
- Chen, W.F. e Sohal, I. (1995), *Plastic Design and Second-order Analysis of Steel Frames*, Springer-Verlag, New York.
- Chen, W.F. e Toma, S. (1994), *Advanced Analysis of Steel Frames: Theory, Software and Applications*. CRC Press, INC., Flórida, USA.
- Chen, W.F., Goto, Y. e Liew, J.Y.R. (1996), *Stability Design of Semi-Rigid Frames*, John Wiley & Sons Inc., USA.
- Choi, J.K. e Lim, J.K.(1995), General Curved Beam Elements Based on The Assumed Strain Fields. *Computers & Structures*, Vol 55, No 3, p. 379-386.
- Colson, A. e Louveau, J. M. (1983), Connections Incidence on the Inelastic Behavior os Steel Structural, *Eng. Struct.*, v. 16(1), p. 25-31.
- Crisfield, M.A. (1991), *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol 1, John Wiley & Sons.
- Crisfield, M.A. (1997), *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol 2, John Wiley & Sons.
- CSA (1994), *Limit States Design of Steel Structures*, Canadian Standards Association, CAN/CSA-S16.1-M94.
- ECCS (1983), *Ultimate Limit State Calculation of Sway Frames With Rigid joints*. Pub. No. 33, European Convention for Constructional Steelwork.
- Eurocode 3 (1990), *Design of Steel Structures*, Vol. 1, Eurocode edited draft.
- Frye, M.J. e Morris, G.A. (1975), Analysis of Flexibly Connected Steel Frames, *Can. J. Civil Eng.*, v. 2(3), p. 280-291.
- Foley, C.M. (2001), Advanced analysis of steel frames using parallel processing and vectorization, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Eng.*, 16, 305–325.

- Foley, C. M. e Vinnakota, S. (1999a), Inelastic behavior of multistory partially restrained steel frames. Part I. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 125(8), 854–861.
- Foley, C. M. e Vinnakota, S. (1999b), Inelastic behavior of multistory partially restrained steel frames. Part II. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 125(8), 862–869.
- Foley, C.M. and Schinler, D. (2003), Automated design steel frames using advanced analysis and object-oriented evolutionary computation, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 129(5), 648–660.
- Galvão, A.S. (2000), *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Galvão, A. S., (2001), Análise Linear de Estruturas Reticuladas Planas e Espaciais, trabalho da disciplina Estudo Orientado do programa de pós-graduação da PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ.
- Galvão, A.S. (2004), *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Galvão, A.S., Gonçalves, P.B. e Silveira, R.A.M. (2005), Post-buckling behavior and imperfection sensitivity of L-frames, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 5, n. 1, p. 19-38.
- Gere, J. M. e Wever, W. JR. (1981). Análise de Estruturas Reticuladas. Rio de Janeiro: Guanabara dois, 1981. 443p.
- Gerstle, K.H. (1988), Effect of Connections on Frames, *J. Construct. Steel Res.*, v. 10, p. 241-267.
- Gizejowski, M.A., Barszcz, A.M., Branicki, C.J. e Uzoegbo, H.C. (2006), Review of analysis methods for inelastic design of steel semi-continuous frames, *Journal of Constructional Steel Research*, 62, p. 81-92.
- Gu, J.X. e Chan, S.L. (2005), Second-order analysis and design of steel structures allowing for member and frame imperfections, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 62, p. 601–615.

- Java (2005), <www.java.sun.com> acessado em 18/07/2004.
- Johnson, N. D. e Walpole, W. R. (1981), Bolted End-plate Beam-to-column Connections Under Earthquake Type Loading, Research Report 81-7, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Canterbury, Christchurch, New Zealand.
- Jones, S.W., Kirby, P.A. e Nethercot, D.A. (1980), Effect of Semi-rigid Connections on Steel Column Strength, J. Construct. Steel Res., v. 1, p. 38-46.
- King, W.S. e Chen, W.F. (1993), A LRFD-Based Analysis Method for Semi-rigid Frame Design, Structural Engineering Report No. CE-STR-93-15, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.
- Kishi, N. e Chen, W.F. (1986a), Data Base of Steel Beam-to-column Connections, Structural Engineering Report No. CE-STR-93-15, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.
- Kishi, N. e Chen, W. F. (1986b), Steel Connection data Bank Program, Structural Engineering Report No. CE-STR-86-18, School of Civil Engineering, Purdue Univ., West Lafayette, IN.
- Landesmann, A. (1999), *Análise e Implementação de Modelo Plástico para Estruturas Metálicas Apertadas*, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Landesmann, A. (2003), *Modelo Não-linear Inelástico para Análise de Estruturas Metálicas Apertadas em Condições de Incêndio*, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Lavall, A.C.C. (1996), *A consistent theory formulation for non-linear analysis by finite element method considering initial imperfections and residual stress in cross section*, Ph.D. thesis, EESC/USP, São Carlos, SP, Brazil (in Portuguese).
- Lazanha, E.C. (2003), *Análise Dinâmica Elasto-plástica de Estruturas Metálicas sob Excitação Aleatória do Vento*, Dissertação de Mestrado, EP-USP, São Paulo, Brasil.

- Li, M. (1998), The Finite Deformation Theory for Beam, Plate and Shell Part III, The Three-dimensional Beam Theory and the FE formulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* No 162, p. 287-300.
- Li, Y. e Lui, E.M. (1995), A simplified plastic zone method for frame analysis, *Microcomput. Civil Eng.*, v. 10, p. 51-62.
- Liew, J.Y.R., Chen, W. F. e Chen, H. (2000a): Advanced inelastic analysis of frame structures. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 55, pp. 245-265, Elsevier, Oxford.
- Liew, J.Y.R., Chen, H., Shanmugam, N. E. e Chen, W.F. (2000b): Improved nonlinear plastic hinge ana analysis of space frame structures. *Engineering Structures*, vol. 22, pp. 1324-1338, Elsevier, Oxford.
- Liew, J.Y.R. (1992), *Advanced Analysis for Frame Design*. Ph.D. Thesis, Purdue University, West Lafayette, IN.
- Liew, J.Y.R., White, D.W. e Chen, W.F. (1993a), Second-order Refined Plastic Hinge Analysis for Frame Design: Part I, *Journal of Structural Engineering ASCE*, v. 119(11), p. 3196-3216.
- Liew, J.Y.R., White, D.W. e Chen, W.F. (1993b), Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: Part II. *Journal of Structural Engineering ASCE*, v. 119(11), p. 3217-3237.
- Lui, E.M. e Chen, W.F. (1986), Analysis and Behavior of Flexible-Jointed Frames, *Eng. Struct.*, v. 8, p. 1007-118.
- Lui, E.M. e Chen, W.F. (1988), Behavior of Braced and Unbraced Semi-rigid Frames, *Int. J. Solids Structures*, v. 24(9), p. 893-913.
- Machado, F.C.S., Santos, M.N. e Silveira, R.A.M. (2004), Análise inelástica de sistemas estruturais metálicos, *Proceedings of XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Recife/PE, Brasil.
- Machado, F.C.S. (2005), *Análise Inelástica de Segunda ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.

- Martins, G.V. (1999), *Síntese Plástica e Análise Modal de Pórticos Metálicos Submetidos a Cargas não Proporcionais*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Matsununga, H. (1996), Buckling Instabilities of Thick Elastic Beams Subjected to Axial Stresses. *Computers & Structures*, Vol. 59, No 5, p. 859-868.
- Meek, J.L. e Loganathan, S. (1990), Geometric and material nonlinear behaviour of beam-columns, *Comput. Struc.*, v. 34 (1), p. 87-100.
- Monforton, A.R. e Wu, T.S. (1963), Matrix Analysis of Semi-rigid Connected Frames, *J. Struct. Div. ASCE*, v. 89(ST6), p. 13-42.
- Microsoft FORTRAN POWER STATION, Version 4.0. Professional Edition, 1995.
- Mota, V. F. S. e silveira, R. A. M. (2006). Análise avançada de estruturas metálicas através de pós-processador gráfico, 2006. Relatório Final de Pesquisa, PIBIC/CNPq/UFOP.
- NBR 8800 (1986), *Projeto e Execução de Estruturas em Aço de Edifícios*, ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.
- NBR 8800 (2003), *Projeto e Execução de Estruturas em Aço e Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios*, Projeto de Revisão, ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.
- Neuenhofer, A. e Filippou, F.C. (1998), Geometrically Nonlinear Flexibility-Based Frame Finite Element. *Journal of the Structural Engineering*, Vol. 124, No. 6, p. 704-711.
- Oliveira, E. C., (2005). *Funções Especiais com Aplicações*. Editora Livraria da Física, 1º Ed. 2005.
- Ostrander, J. R. (1970), *An Experimental Investigation of End-Plate Connections*, Master's Thesis, Univ. of Saskatchewan, Saskatoon, SK, Canadá.
- Pacoste, C. e Eriksson, A. (1995), Element Behavior in Post-critical Plane Frames Analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, No 125, p. 319-343.
- Pacoste, C. e Eriksson, A. (1997), Beam Elements in Instability Problems. *Comput Methods Appl. Mech. Engrg.*, No 144, p. 163-197.

- Petrolito, J. (1995), Stiffness Analysis of Beam Using a Higher-Order Theory, *Computers & Structures*, Vol. 55, No 1, p. 33-39.
- Pinheiro, L. (2003), *Análises Não-lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-rígidos*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Pinheiro, L., Santos, M.N. e Silveira, R.A.M. (2006), Análise geometricamente não-linear de treliças 2D e 3D através do MEF, *Proceedings of the XXVI Ibero-Latin American Congress of Computational Methods in Engineering (XXVI CILAMCE)*, Belém/PA/Brazil, v. 1 (CD-ROM).
- Ramberg, W. e Osgood, W.R. (1943), Description of Stress-Strain Curves by Three parameters, Technical Report N°. 902, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, DC.
- Richard, R.M. e Abbott, B.J. (1975), Versatile Elastic-plastic Stress-strain Formula, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, v. 101(4), p. 511-515.
- Richard, R. M. et al. (1982), Design of Single Plate Framing Connections with A307 Bolts, *Eng. J. AISC*, v. 19(4), p. 209-213.
- Rocha, G. (2000), *Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração para Análise Não-linear de Estruturas*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Rocha, P.A.S. (2006), *Análise inelástica de segunda ordem de estruturas metálicas com ligações semi-rígidas*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Romstad, K.M. e Subramanian, C.V. (1970), Analysis of Frames with Partial Connection Rigidity, *J. Struct. Div. ASCE*, v. 96(ST11), p. 2283-2300.
- Santos, M.N. e Silveira, R.A.M. (2003), *Estudo das ligações nas estruturas metálicas*, Relatório Final de Pesquisa PIBIC/CNPq/UFOP, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil, 159 p.

- Santos, M.N., Silveira, R.A.M. e Pinheiro, L. (2006). Instabilidade elástica de sistemas estruturais treliçados planos. *In: VII SIMPÓSIO MINEIRO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL (VII SIMMEC), 2006*, Araxá, MG. v. 1, p. 1-15.
- Santos, M.N., Rocha, P. S. e Silveira, R.A.M (2007). Análise Numérica de Problemas Clássicos de Estabilidade através do Elemento Finito Híbrido, *Proceedings of the XXVII Iberian Latin-American Congresso in Computational Methods in Engineering (XXVII CILAMCE)*, Porto, Portugal (em fase de submissão).
- Schweizerhof, K. H. e Wriggers, P. (1986), Consistent Linearization for path Following Methods in Nonlinear FE Analysis. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 59, p. 269-279.
- Sekulovic, M. e Nefovska-Danilovic, M. (2004), Static Inelastic Analysis of Steel Frames with Flexible Connections, *Theoret. Appl. Mech.*, vol. 31, No. 2, p. 101-134.
- Sekulovic, M. e Salatic, R. (2001), Nonlinear Analysis of Frames with Flexible Connections, *Computers & Structures*, v. 79(11), p. 1097-1107.
- Shi, G. e Atluri, S.N. (1989), Static and Dynamic Analysis of Space Frames with Nonlinear Flexible Connections, *Int. J. Num. Methods Eng.*, v. 28, p. 2635-2650.
- Shi, J., Chan, S. L. e Wong, Y. L. (1996), Modeling for Moment-rotation Characteristics for End-plate Connections, *J. Struct. Eng. ASCE*, v. 112(11), p. 1300-1306.
- Silveira, R.A.M. (1995), *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Silveira, R.A.M. (2003), *Análise Não-linear Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*, CNPq, Produtividade em Pesquisa, Processo: 300363 / 00 - 1 (projeto em andamento).
- Simões, L. M. C. (1996), Optimization of Frames with Semi-rigid Connections, *Comp. Struct.*, v. 60(4), p. 531-539.

- Soares Filho, M. (2002), *Análise Dinâmica de Pórticos Elasto-plásticos com Conexões Semi-rígidas Utilizando Programação Matemática*, Projeto de Tese de Doutorado em Estruturas, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Southwell, R. V. (1941). *An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*, 2º edn., Oxford University Press, Oxford, England.
- Timoshenko, S. P. e Gere, J. E. (1982). *Mecânica dos sólidos. Livros Técnicos e Científicos*, Vol 1.
- Torkamani, M.A.M., Sonmez, M. e Cao, J. (1997), Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method. *Journal of Structural Engineering*, Vol 12, No 9, p. 1225-1235.
- Torkamani, M.A.M., e Sonmez, M. (2001), Inelastic Large Deflections Modeling of Beam-columns. *ASCE J. Struct. Engineer.* Vol. 123 (9) 1997, pp. 1225 a 1235.
- Vellasco, P.C.G.S. (1987), *Estudo da Não-linearidade do Material em Micro-idealização de Estruturas de Aço*, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Vieira, F.C.P. (1997), *Análise de Estruturas Metálicas Espaciais Aporticadas com Diferentes Funções de Plastificação*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Vogel, U. (1985), Calibrating Frames, *Stahlbau*, v. 54 (outubro), p. 295-311.
- Xu, Z. e Mirmiran, A. (1997), Looping Behavior of Arches Using Corotational Finite Element. *Computers & Structures*, Vol. 62, No 6, p. 1059-1071.
- Yang, Y.B. e Kuo, S.R. (1994), *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*, Prentice Hall.
- Youssef-Agha, W. e Aktan, H.M. (1989), Seismic Response of Low-rise Steel Frames, *Struct. Div. ASCE*, v. 115(3), p. 594-607.
- Yu, C.H., Shanmugan, N.E. (1986), Stability of Frames with Semi-rigid Joints, *Comp. Struct.*, v. 23(5), p. 639-648.

- Yu, Y.M. e Kim, B.H. (2005), Optimum design of plane steel frame structures using second-order inelastic analysis and a genetic algorithm, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 131 (12), p. 1820-1831.
- Zhou, Z.H. e Chan, S.L. (2004), Elastoplastic and large deflection analysis of steel frames by one element per member. I: One hinge along member, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 130(4), p. 538-544.
- Zhu, K. et al. (1995), Dynamic Response of Flexibility Jointed Frames, *J. Struct. Div.* ASCE, v. 17(8), p. 575-580.
- Ziemian, R.D. (1993), Examples of Frame Studies Used to Verify Advanced Methods of Inelastic Analysis. In: *Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames*, Structural Stability Research Council, SSRC, Lehigh Univ., Bethlehem, PA.